高等学校教学参考书

数学物理方法

第二版

郭敦仁 编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是在第一版的基础上修改、补充而成的。全书内容分两部分：第一部分是复变函数论及其应用，侧重于应用方面；第二部分是数理方程，着重介绍了几种常用的解法。积分方程简介一章是新加的内容。书中各章配有相应的练习题。

本书可作为高等学校物理类专业数学物理方法课程的教学用书，亦可供其它有关专业的师生及科研人员参考。

(京)112号

高等学校教学参考书

数学物理方法

第 二 版

郭敦仁 编

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 17 字数 420 000

1965年12月第1版 1991年5月第2版 1993年4月第2次印刷

印数1 621—6 153

ISBN7-04-002697-X/O·1022

定价 7.30 元

目　录

第二版序
原序

第一部分　复变函数论及其应用

第一章　复数的基本概念 …… (1)
1.1 复数及其运算规则 …… (1)
1.2 复数的几何表示 …… (2)
1.3 复数序列·极限的概念 …… (5)
1.4 无穷远点 …… (6)
第二章　解析函数 …… (8)
2.1 复变函数·区域的概念·极限·连续和一致连续 …… (8)
2.2 导数 …… (10)
2.3 解析函数·科希-里曼 (Cauchy-Riemann)条件 …… (12)
2.4 解析函数与调和函数的关系 …… (14)
第三章　初等函数 …… (17)
3.1 幂函数 …… (17)
3.2 指数函数 …… (17)
3.3 三角函数和双曲线函数 …… (18)
3.4 多值函数·根式$\sqrt{z-a}$ …… (19)
3.5 对数函数 …… (26)
3.6* 多值函数$w=\arcsin z$ …… (28)
3.7 函数z^s(s为任意复数) …… (30)
第四章　复数积分·科希定理和科希积分公式 …… (32)
4.1 复数积分 …… (32)
4.2 复数积分的几个重要性质 …… (33)
4.3 科希(Cauchy)定理 …… (34)
4.4 不定积分·原函数 …… (39)

4.5 科希积分公式 …… (41)
4.6 科希积分公式的几个重要推论 …… (44)
4.7* 解析函数的实部和虚部的关系 …… (47)
4.8 科希型积分 …… (50)
第五章 无穷级数 …… (51)
5.1 复数级数 …… (51)
5.2 函数级数·外氏(Weierstrass)定理 …… (55)
5.3 幂级数·阿贝耳(Abel)第一定理 …… (59)
5.4 幂级数所代表的函数的解析性 …… (64)
5.5* 阿贝耳第二定理 …… (66)
第六章 泰勒展开和洛浪展开 …… (69)
6.1 解析函数的泰勒(Taylor)展开 …… (69)
6.2 多值函数的泰勒展开 …… (75)
6.3 在无穷远点邻域内的泰勒展开 …… (76)
6.4 洛浪(Laurent)展开 …… (77)
6.5 洛浪展开的例子 …… (82)
6.6* 伯努利(Bernoulli)数和欧勒(Euler)数 …… (84)
第七章 单值函数的孤立奇点 …… (88)
7.1 孤立奇点的分类 …… (88)
7.2 可去奇点 …… (89)
7.3 极点 …… (90)
7.4 本性奇点 …… (92)
7.5 无穷远点 …… (93)
第八章 残数理论及其应用 …… (94)
8.1 残数定理 …… (95)
8.2 计算残数的公式 …… (97)
8.3 应用残数理论计算定积分 …… (99)
8.4 无穷积分 …… (101)
8.5 含三角函数的无穷积分·约当(Jordan)引理 …… (104)
8.6 积分路线上有奇点的情形·积分主值 …… (107)
8.7* 多值函数的积分 …… (110)
8.8* 其他例子 …… (112)

8.9* 应用残数定理计算无穷级数的和 …… (119)
8.10* 关于零点和极点的个数的定理 …… (124)
第九章 含参数的积分·Γ函数和B函数 …… (126)
9.1 解析延拓的一个例子 …… (126)
9.2 解析延拓 …… (127)
9.3 含参数的定积分所表示的函数的解析性 …… (128)
9.4 Γ函数(第二类欧勒积分) …… (131)
9.5* Γ函数的围道积分表示 …… (138)
9.6* Γ函数的渐近表示·斯特令(Stirling)公式 …… (140)
9.7* B函数(第一类欧勒积分) …… (143)
第十章 拉普拉斯变换 …… (146)
10.1 拉氏(Laplace)变换 …… (146)
10.2 拉氏变换的基本性质 …… (148)
10.3 拉氏换式的运算性质及其在解线性常微分方程初值问题中的应用 …… (149)
10.4* 像函数的导数和积分的反演 …… (153)
10.5 折积定理 …… (156)
10.6* 傅里叶(Fourier)积分 …… (158)
10.7* 拉氏变换的普遍反演公式 …… (160)
10.8* 应用残数理论求反演 …… (161)
10.9* δ函数 …… (165)
10.10* δ函数的傅氏换式和拉氏换式 …… (169)
第十一章 线性常微分方程的级数解法和积分解法 …… (171)
11.1 二阶线性常微分方程的奇点 …… (171)
11.2 方程常点邻域内的解 …… (171)
11.3 方程奇点邻域内的解·正则解和正则奇点 …… (174)
11.4 求正则解的例子·贝塞耳(Bessel)方程 …… (181)
11.5* 非正则奇点邻域内的正则解 …… (189)
11.6* 常规解和次常规解 …… (191)
11.7* 积分解法·拉普拉斯(Laplace)型方程 …… (196)
11.8* 勒让德方程的积分解·欧勒变换 …… (200)

第二部分　数学物理方程

第十二章　方程的导出和定解问题 …… (203)

12.1　方程的来源 …… (203)

12.2　杆的纵振动和弦的横振动 …… (204)

12.3　热传导方程 …… (208)

12.4*　电报方程(传输线方程) …… (211)

12.5　边界条件和初值条件 …… (212)

12.6　定解问题 …… (217)

第十三章　分离变数法 …… (220)

13.1　弦的自由振动 …… (220)

13.2　解的诠释 …… (226)

13.3　两端固定的弦的强迫振动 …… (228)

13.4*　非齐次边界条件·第一边值问题 …… (230)

13.5　关于不含时间的问题的补充讨论 …… (233)

第十四章　正交曲面坐标系中方程的变数分离 …… (237)

14.1　坐标系的选择 …… (237)

14.2*　正交曲面坐标系中的梯度、散度、旋度和拉氏算符 …… (237)

14.3　球坐标系和柱坐标系中方程 $\nabla^2 u+\lambda u=0$ 的变数分离 …… (243)

14.4　圆内的狄里希累(Dirichlet)问题 …… (246)

第十五章　常微分方程的本征值问题 …… (251)

15.1　二阶线性常微分方程的本征值问题 …… (251)

15.2　斯特姆-刘维(Sturm-Liouville)型方程的本征值问题 …… (257)

15.3*　用正交函数组展开 …… (260)

第十六章　特殊函数及其应用(一)·勒让德函数 …… (264)

16.1　勒让德方程的本征值问题·有界条件·勒让德多项式 …… (264)

16.2　勒让德多项式的微分表示——罗巨格(Rodrigues)公式 …… (268)

16.3　$P_l(x)$ 的正交性和归一因子 …… (270)

16.4*　$P_l(x)$的完备性 …… (273)

16.5*　应用举例——均匀电场中的导体球 …… (274)

16.6　$P_l(x)$的生成函数 …… (278)

16.7*　应用举例 …… (280)

16.8 $P_l(x)$的递推关系 …… (286)
16.9 连带勒让德函数 …… (288)
16.10 $P_l^m(x)$的正交归一关系 …… (290)
16.11* $P_l^{-m}(x)(m>0)$ …… (292)
16.12* $P_l^m(x)$的递推关系 …… (293)
16.13* 加法公式 …… (294)
16.14 公式表 …… (296)
第十七章 特殊函数及其应用(二)·贝塞耳函数 …… (300)
17.1 贝塞耳(Bessel)函数 $J_n(x)$ …… (300)
17.2 $J_n(x)$的振荡特性·$J_n(x)$的零点 …… (301)
17.3 贝塞耳函数的递推关系 …… (304)
17.4 $J_n(x)$的生成函数和积分表达式 …… (305)
17.5* 加法公式 …… (307)
17.6 贝塞耳方程的本征值问题 …… (308)
17.7 应用举例——圆柱体的冷却 …… (312)
17.8* 第二类贝塞耳函数 $Y_\nu(x)$ …… (314)
17.9* 应用举例——空心圆柱体的径向振动 …… (318)
17.10* 最陡下降法 …… (320)
17.11* 贝塞耳函数的渐近表达式 …… (323)
17.12* 第三类贝塞耳函数 $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$·柱函数 …… (325)
17.13* 应用举例——电磁波在金属圆柱表面上的散射 …… (326)
17.14 半奇数阶贝塞耳函数 …… (329)
17.15* 球贝塞耳函数 $j_l(x), n_l(x), h_l^{(1)}(x), h_l^{(2)}(x)$ …… (330)
17.16* $e^{ikr\cos\theta}$ 用勒让德多项式展开 …… (331)
17.17* 变型(或虚宗量)贝塞耳函数 …… (333)
17.18* 应用举例——有限长圆柱体内的稳定温度场 …… (336)
17.19 可化为贝塞耳方程的微分方程 …… (339)
17.20 含贝塞耳函数的积分 …… (339)
17.21 公式表 …… (341)
第十八章 格临函数 …… (348)
18.1 引言 …… (348)
18.2 拉氏算符的格临函数 …… (348)
18.3 格临函数的对称性 …… (354)

18.4* 广义格临函数 …… (355)
18.5 无界区域的格临函数·基本解 …… (358)
18.6* 用正交函数组展开求格临函数 …… (362)
18.7* 用电像法求格临函数 …… (367)
18.8* 初值问题的格临函数·波动方程的推迟解·无初值问题 …… (370)
第十九章 积分变换的应用 …… (378)
19.1 应用拉氏变换于热传导问题 …… (378)
19.2* 应用积分变换解边值(初值)问题的普遍原理 …… (383)
19.3* 汉克耳(Hankel)变换 …… (385)
第二十章 保角变换原理及其应用 …… (389)
20.1 拉氏算符的变换 …… (389)
20.2 解析函数的几何性质 …… (392)
20.3 几种最简单的保角变换·线性变换 …… (394)
20.4 分式线性变换 …… (396)
20.5 分式线性变换下圆的特性·反演点对 …… (397)
20.6 应用举例 …… (400)
20.7 变换 $\zeta=z^n$ …… (403)
20.8 变换 $\zeta=\ln z$ …… (405)
20.9* 多边形的变换(席伐尔兹(Schwartz)变换) …… (406)
20.10* 特殊情形下求 A 和 ζ_i 的公式 …… (410)
20.11* 应用举例——平行板边缘的电场 …… (413)
20.12* 把多边形外部变为上半平面的变换 …… (416)
20.13* 应用举例——儒可夫斯基 (Жуковский) 变换 …… (418)
第二十一章 二阶线性偏微分方程分类 …… (420)
21.1 二阶线性偏微分方程分类·两个自变数的情形 …… (420)
21.2* 多个自变数的情形 …… (424)
21.3 定解问题·一维波动方程的达朗伯(D'Alembert)解 …… (426)
21.4* 热传导方程和泊松(Poisson)方程的解的唯一性 …… (430)
第二十二章 波动方程的几个特殊解法 …… (433)
22.1 平均值方法·泊松公式 …… (433)
22.2 柱面波·降维法 …… (436)
22.3* 里曼方法 …… (438)

22.4* 例 …… (443)
第二十三章 变分法及其应用 …… (445)
23.1 泛函和泛函的极值问题 …… (445)
23.2 泛函极值的必要条件·欧勒方程 …… (447)
23.3 几个自变数的情形·重积分所表示的泛函的极值问题 …… (450)
23.4 泛函的条件极值问题 …… (452)
23.5* 测地线问题 …… (455)
23.6 泛函的变分·泛函的导数 …… (457)
23.7* 变端点问题·自然边界条件 …… (459)
23.8 应用于本征值问题 …… (460)
23.9* 高阶本征值和本征函数 …… (462)
23.10* 应用于边值问题 …… (465)
23.11 里兹(Ritz)方法 …… (467)
23.12 应用举例——圆形薄膜横振动的本征频率 …… (469)
第二十四章 积分方程简介 …… (473)
24.1 导致积分方程的问题举例 …… (473)
24.2 积分方程的特点·与微分方程的比较 …… (477)
24.3 线性积分方程的分类 …… (477)
24.4 第二类F-型积分方程的逐次逼近解法 …… (479)
24.5 预解式的概念 …… (483)
24.6* 应用逐次逼近法于第二类V-型方程 …… (487)
24.7 退化核积分方程 …… (489)
24.8 退化核逼近 …… (494)
24.9* 弗雷德霍姆(Fredholm)关于预解式的理论和公式 …… (497)
24.10 逼近问题·正交函数组的应用·核的本征值问题 …… (504)
24.11 傅氏级数逼近·希伯特(Hilbert)变换 …… (507)
24.12* 双正交函数组的应用 …… (509)
24.13 积分变换的应用 …… (512)
24.14* 阿贝耳(Abel)方程·欧勒变换的应用 …… (516)
24.15 席洛米许(Schlömilch)积分方程 …… (518)
索引 …… (520)
外国人名对照索引 …… (526)
符号索引 …… (527)

第一部分　复变函数论及其应用

第一章　复数的基本概念

复变函数的理论在物理学中有广泛的应用. 本书的第一部分将讨论复变函数的基本概念和理论，以及一些应用，如计算定积分，解常微分方程等；在第二部分还要用它来讨论一些特殊函数的性质和解某一类边值问题.

1.1　复数及其运算规则

复数是遵从一定运算规则(见下)的一对**有序**实数，通常用(a, b)或者$a+bi$表示，其中a和b是实数，$i^2=-1$；i称为虚单位.

实部和虚部　a称为复数$\alpha=a+bi$的实部，常用符号$\mathrm{Re}(\alpha)$[或$\mathrm{R}(\alpha)$]表示；b称为α的虚部，用$\mathrm{Im}(\alpha)$[或$\mathrm{I}(\alpha)$]表示.

共轭复数　复数$a-bi$称为$\alpha=a+bi$的共轭复数，通常用$\bar{\alpha}$(或α^*)表示. 显然，$\bar{\bar{\alpha}}=\alpha$.

两个复数，当而且只有当它们的实部和虚部分别相等时，才是相等的. 如果一个复数的实部和虚部同时为零，则称这复数等于零.

复数的基本运算规则如下：

加法和减法：两个复数$\alpha_1=a_1+b_1i$，$\alpha_2=a_2+b_2i$之和与差是

$$\alpha_1\pm\alpha_2=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)i. \tag{1}$$

乘法：α_1和α_2的乘积是

$$\alpha_1\cdot\alpha_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i. \tag{2}$$

除法：α_1被$\alpha_2\neq 0$除的商是

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\alpha_1\cdot\bar{\alpha}_2}{\alpha_2\cdot\bar{\alpha}_2}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}$$

$$=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(b_1a_2-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}. \tag{3}$$

从上面的运算规则看到，复数满足下列规律：设α,β,γ是复数，则

$$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha \quad \text{（交换律）}, \tag{4}$$

$$(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma) \quad \text{（结合律）}, \tag{5}$$

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma \quad \text{（分配律）}. \tag{6}$$

1.2 复数的几何表示

复数的几何表示对于了解复变函数理论中的一些概念，例如多值函数，解析延拓等，很有帮助，而在复变函数论的一个重要应用方面——保角映像，复数的几何表示更是必需的.

一个复数$\alpha=a+bi$可以用平面上的一点表示(参看图1).

在平面上作一直角坐标系，原点为O，并取横轴Ox为实轴，纵轴Oy为虚轴，则复数α就可以用横坐标等于a、纵坐标等于b的点表示. 显然，对于每一复数，平面上有唯一的一个点与之相应；反过来，对于平面上的每一点有唯一的一个复数与之相应. 这也就是说，复数的全体与平面上的点有一一对应的关系. 这样的平面称为**复数平面**.

模与辐角 除了直角坐标，一个复数α还可以用极坐标(r,θ)表示[参看图1]：

$$a=r\cos\theta, \qquad b=r\sin\theta, \tag{1}$$

其中$r=\sqrt{a^2+b^2}(\geq 0)$称为α的模，θ称为α的辐角；前者又常用$|\alpha|$表示，后者常用$\arg\alpha$表示，即

$$r=|\alpha|, \qquad \theta=\arg\alpha. \tag{2}$$

θ以逆时针方向为正向，即θ增加的方向.

与直角坐标表示不同，用极坐标表示一个复数时，辐角argα之值不是唯一的，可以加上2π的任意整数倍①. 通常称满足

$$-\pi<\arg\alpha\leqslant\pi \tag{3}$$

的argα之值为辐角的主值.

根据(1)式，可以写

$$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta). \tag{4}$$

这是复数α的三角函数表示.

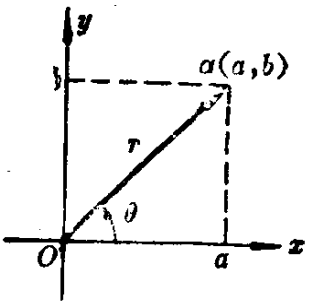


图 1

引进纯虚数指数函数②

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \tag{5}$$

后，复数α又可表示为

$$\alpha=re^{i\theta}. \tag{6}$$

由(5)式可以证明指数函数的下列性质：

$$e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \tag{7}$$

证明如下：

$$\begin{aligned}e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2}&=(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\\&\quad+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\\&=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)=e^{i(\theta_1+\theta_2)}.\end{aligned}$$

在复数的乘、除、开方等运算中用(6)式的表示最方便. 例如两复数$\alpha_1=r_1e^{i\theta_1}$，$\alpha_2=r_2e^{i\theta_2}$的乘积是

$$\alpha_1\cdot\alpha_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \tag{8}$$

即两复数的乘积之模等于两者的模的乘积，乘积的辐角则等于两者的辐角之和. 类似地，有

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}\quad(r_2\neq0). \tag{9}$$

---

① 复数0(即原点)的极坐标表示较为特殊，其模为零，辐角不确定.

② 关于复数指数函数的普遍定义见3.2节和5.4节.

练习题　若$z_1=z_2$，证明$|z_1|=|z_2|$，但$\arg z_1$和$\arg z_2$不一定相等.

加法的几何表示　从1.1节(1)式可以看出，复数的加法与平面矢量的加法一样. 复数的实部和虚部分别与矢量在直角坐标系中的两个分量相应. 因此，常用平面上的矢量$\overrightarrow{Oa}$(图2)表示复数a. 当然，用矢量表示一个复数a时，矢量的起点不必一定在原点O，终点也不必一定在a点，只要矢量在实轴Ox和虚轴Oy方向上的分量分别等于a的实部和虚部即可，例如图2中的矢量$\overrightarrow{Oa}$和$\overrightarrow{O'a'}$都代表同一复数a.

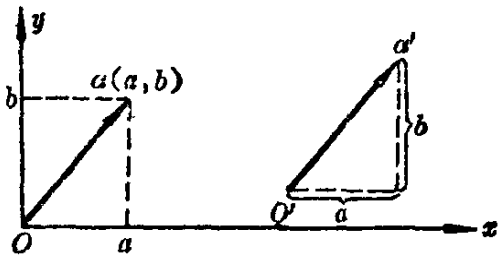


图 2

因此，复数的加法可用平行四边形作图法表示如图3(a)，也可以用三角形作图法表示如图3(b). 在图3(b)中$\overrightarrow{a_1a_2'}=\overrightarrow{Oa_2}$.

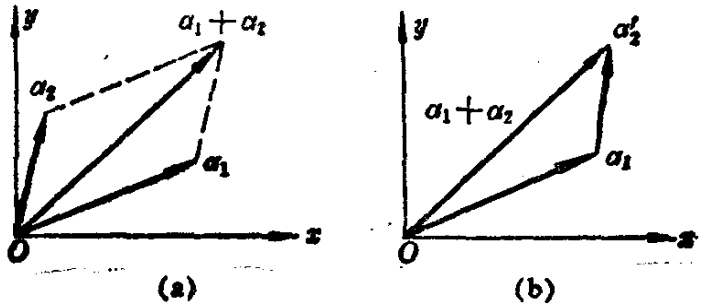


图 3

应当指出，复数的加法虽然与平面矢量的加法一样，复数的乘法与平面矢量的乘法(无论是标积或矢积)却是完全不同的.

由几何作图法易证下列重要不等式：

$$|\alpha_1+\alpha_2|\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|, \tag{10}$$

$$|\alpha_1-\alpha_2|\geqslant\Big||\alpha_1|-|\alpha_2|\Big|. \tag{11}$$

1.3 复数序列·极限的概念

复数$z_n=x_n+iy_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$的全体称为**一复数序列**，用$\{z_n\}$表示.

聚点(或极限点) 给定序列$\{z_n\}$，如果存在复数z，对于任意的$\varepsilon>0$，恒有 无穷个z_n满足$|z_n-z|<\varepsilon$，则z称为$\{z_n\}$的一个**聚点**(或**极限点**).

一个序列可以有不止一个聚点，例如序列1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{4}{5}$，$\cdots$，$\frac{1}{n}$，$\frac{n-1}{n}$，$\cdots$就有两个聚点，即0和1.

极限 给定序列$\{z_n\}$，如果存在复数z，对于任意的$\varepsilon>0$，总能找到$N(\varepsilon)>0$，使当$n>N$时有$|z_n-z|<\varepsilon$，则z称为序列$\{z_n\}$的极限，或者说序列$\{z_n\}$收敛于z，而写成

$$\lim_{n\to\infty}z_n=z.$$

一个序列的极限必定是这序列的聚点，而且是唯一的聚点.

有界序列和无界序列 给定序列$\{z_n\}$，如果存在一个正数M，使对于所有的n都有$|z_n|<M$，则序列称为有界的；如果对于任何正数M，总有一个n使$|z_n|>M$，则$\{z_n\}$称为无界的.

玻-外(Bolzano-Weierstrass)定理 一个有 界的(无穷)序列至少有一个聚点.

这定理的证明与实数情形类似，也是用区间套的方法，这里从略.

序列收敛的判据——科希(Cauchy)充要条件 一个序列$\{z_n\}$收敛的充要条件是：任意给定$\varepsilon>0$，存在正整数$N(\varepsilon)$，使对于任

意正整数p有

$$|z_{N+p}-z_N|<e.$$

证明如下：条件是必要的，因为若$\lim_{n\to\infty}z_n=z$，则对于任意的$e>0$，必存在$N(e)$，使$|z_N-z|<\frac{e}{2}$，$|z_{N+p}-z|<\frac{e}{2}$，因此有

$$|z_{N+p}-z_N|=|z_{N+p}-z+z-z_N|\leqslant|z_{N+p}-z|+|z_N-z|<e,$$

其中p是任意正整数.

要证明条件是充分的，以z_N为圆心，e为半径，作一圆. 既然不论p是什么正整数都有$|z_{N+p}-z_N|<e$，故在所作的圆内有$\{z_n\}$的无穷个点，而在圆外只能有$\{z_n\}$的有限个点. 因此，$\{z_n\}$是有界序列. 按玻-外定理，$\{z_n\}$至少有一个聚点，且位于圆内. 现在证明，在这种情形下，$\{z_n\}$只能有一个聚点，因而是收敛的. 设$\{z_n\}$有两个聚点A和B，则因A和B都在所说圆内，故$\overline{AB}<2e$，或者$e>\frac{1}{2}\overline{AB}$，而这是与$e$为任意正数相矛盾的.

练习题1. 证明：如果$z_n=x_n+iy_n$而$\{z_n\}$收敛于$z=x+iy$，则$\lim_{n\to\infty}x_n=x$，$\lim_{n\to\infty}y_n=y$；反之亦然(由此可见一个复数序列的收敛问题与两个实数序列的收敛问题等价).

练习题2. 证明下列定理：若$\{z_n\}$和$\{z'_n\}$都收敛，则

(i) $\lim_{n\to\infty}(z_n\pm z'_n)=\lim_{n\to\infty}z_n\pm\lim_{n\to\infty}z'_n$,

(ii) $\lim_{n\to\infty}z_n\cdot z'_n=\lim_{n\to\infty}z_n\cdot\lim_{n\to\infty}z'_n$,

(iii) $\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{z'_n}=\lim_{n\to\infty}z_n/\lim_{n\to\infty}z'_n$ (设$\lim_{n\to\infty}z'_n\neq0$).

1.4 无穷远点

根据上节科希充要条件知道，一个无界序列不可能是收敛的. 因为如果$\lim_{n\to\infty}z_n=z$(有限)，则对于任意给定的$e>0$，总存在正数

N，使当$n>N$时$|z_n-z|<\varepsilon$，故一定能找到一个正数M，例如M等于$|z_1|,|z_2|,\cdots,|z_N|$和$|z|+\varepsilon$中的最大者，使对于所有的$n=1,2,\cdots$都有$|z_n|<M$，而这与序列是无界的相矛盾.

一个无界序列，如果在有限处没有聚点，则说这序列的极限为无穷，而写成

$$\lim_{n\to\infty} z_n=\infty\ .$$

也就是说，对于任意给的正数M，总可以找到$N>0$，使当$n>N$时$|z_n|>M$.

在复变函数理论中常把无穷也了解为复数平面上的一个"点"，其模大于任何正数，辐角不定. 包括无穷远点在内的复数平面称为**扩充了的复数平面**.

在平面上用一个点来代表无穷是比较难于直观地理解的. 因此对于包括无穷在内的几何图象，也用复数球面的表示法：在复数平面上作一任意半径的球面与平面上的坐标原点O相切(图4). 从O引垂直于平面的直线，与球面交于Q点. 对于复数平面上的每一点P(代表一复数z)作直线PQ交球面于P'点(测地投影). 于是，对于每一复数z都有球面上的一点P'与之相应. 因此，这球面也可用来表示复数的全体. 现在如果让P点以任何方式无限地远离原点O，则相应的P'点将无限地趋近球面的顶点Q. 这样，Q就可以看作无穷远的代表点，而整个球面就把无穷远点包括在内. 这样的球面称为**复数球面**或者**里曼**(Riemann)**球面**.

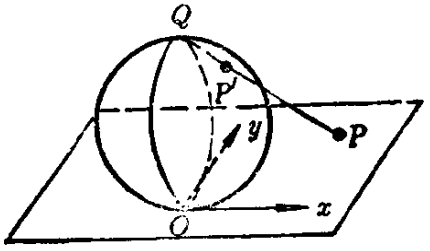


图 4

第二章　解析函数

2.1　复变函数·区域的概念·极限·连续和一致连续

设有复数平面(或者球面，下同)上的一个点集E(复数的集合)，复变数$z=x+iy$可以取E中每一点的复数值．如果对于E中的每一个z值，都有一个或多个复数值$w=u+iv$(u和v为实数)与之相应，则w称为z的函数——复变函数，定义域为E，用符号

$$w=f(z),z\in E$$

表示．因$z=x+iy$，故u和v都是x和y的实函数，即

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y). \qquad (1)$$

这表明，一个复变函数无非是两个二元实变函数的有序组合．

但在复变函数论中要研究的不是这么普遍的复变函数，而是研究一类具有特殊性质的复变函数——解析函数[见2.3节]．

区域的概念　在解析函数论中，函数的定义域不是一般的点集，而是满足一定条件的特殊点集，称为区域，常用G来表示．

为了说明区域的概念，先解释什么叫做点集的内点．**点集的内点**是这样的点，以它为圆心作一圆，只要半径足够小，则圆内所有的点均属于该点集．

区域是满足下列两个条件的点集：

a) 全由内点组成；

b) 具有连通性，即是点集中的任何两个点都可以用一条折

线连接起来，折线上的点全属于这点集.

区域常用不等式表示. 例如$|z|<r$表示圆心在原点、半径为r的圆内区域；$a<|z-c|<b$表示一环形区域，环形的内外圆心均在c点，半径分别为a和b.

边界点 区域的边界点是这样的点，它本身不属于区域，但以它为圆心作圆，不论半径如何小，圆内总含有属于区域的点. 边界点的全体称为区域的边界①.

边界的正向 如果沿边界走，区域在左方，则走向称为边界的正向. 例如图5中的C是区域G的边界，箭头的走向是边界的正向.

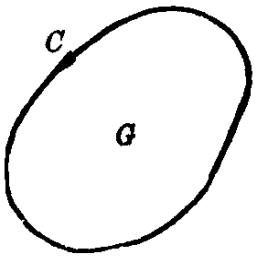


图 5

闭区域 区域G及其边界C所组成的点集称为闭区域，用$\overline{G}$表示：$\overline{G}=G+C$.

函数的极限 设函数$f(z)$在z_0点的邻域内有定义，如果存在复数A，对于任意的$\varepsilon>0$，总能找到一个$\delta(\varepsilon)$，使当$|z-z_0|<\delta$时，恒有$|f(z)-A|<\varepsilon$，则称$z\to z_0$时$f(z)$的极限$(=A)$存在，常表示为

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A.$$

连续和一致连续 如果函数在z_0点及其邻域内有定义，而且$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，即对于任意的$\varepsilon>0$，其邻域内使当$|z-z_0|<\delta$时$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$，则说函数$f(z)$在$z_0$点连续.

在区域G内的每一点都连续的函数称为在G内连续.

在闭区域$\overline{G}$中连续的函数$f(z)$有下列两个重要性质：

a) $|f(z)|$在$\overline{G}$中有界并达到它的上下界；

b) $f(z)$在$\overline{G}$中一致连续，即对于任意的$\varepsilon>0$，存在与z无关的$\delta(\varepsilon)>0$，使$\overline{G}$中的任何两个点z_1和z_2，只要满足$|z_1-$

① 除去扩充了的复数平面(1.4节)之外，一般的区域总有边界.

$z_2|<\delta$,就有$|f(z_1)-f(z_2)|<e$.

因$f(z)$在$\overline{G}$中连续，故$f(z)$的实部$u(x,y)$和虚部$v(x,y)$都是$\overline{G}$中的连续函数，因此$|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}$也是$\overline{G}$中的连续函数．于是，根据实变函数中有关的定理就有结论a)．

b)的证明与实变函数的情形类似，用覆盖定理，这里从略．

此外，与实变函数的情形一样，连续函数的和、差、积仍是连续函数；连续函数的商在分母不为零的点也是连续的．

2.2 导　数

在前节中指出过，在复变函数论中要研究的是一类具有特殊性质的复变函数．现在开始来讨论这种性质．

首先说明函数的导数的概念．设$w=f(z)$是在区域G中定义的**单值**函数，即对于G中的每一个z值，有而且只有一个w值与之相应．如果在G内的某点z，极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \qquad (1)$$

存在(此值应是与$\Delta z\to 0$的方式无关的有限值)，则称函数$w=f(z)$在z点**可导**(或**单演**)，而以$f'(z)$表示这极限值，称为$f(z)$在z点的**导数**．

在z点可导的函数必在z点连续．因为按可导的定义，对于任意的$e>0$，存在$\delta>0$，当$|\Delta z|<\delta$时

$$\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f'(z)\right|<e,$$

故有

$$|f(z+\Delta z)-f(z)|<(|f'(z)|+e)\cdot|\Delta z|. \qquad (2)$$

这证明$f(z)$在z点是连续的．

反过来，在一点连续，甚至在一个区域中连续的函数却不一定是可导的．一个简单的例子是函数$\mathrm{Re}(z)(=x)$．这函数在全平

面上是连续的，但却是处处不可导的．因为

$$\frac{\mathrm{Re}(z+\Delta z)-\mathrm{Re}(z)}{\Delta z}=\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{1}{1+i\dfrac{\Delta y}{\Delta x}},$$

当 $\Delta z\to 0$（因之 Δx 和 Δy 都趋于 0）时，这极限值与比值 $\Delta y/\Delta x$ 有关，也就是与 $\Delta z\to 0$ 的方式有关，因而是不确定的．

从导数的定义看出，复变函数的导数的求法形式上与实变函数的导数的求法相同．例如函数 $f(z)=z^n$（n 为正整数），其导数为

$$\begin{aligned} f'(z)&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}\\ &=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z^n+nz^{n-1}\cdot\Delta z-O\{(\Delta z)^2\}-z^n}{\Delta z}\\ &=nz^{n-1} \end{aligned}\qquad (3)$$

在演算中用了数量级的符号 O，它的意义如下：当我们写 $\varphi(z)=O\{\psi(z)\}$ 时，意思是说，对于 z 的一定区域，存在常数 $A>0$，使 $|\varphi|\leqslant A|\psi|$．

练习题1．证明下列求导数的公式：

$$\frac{d}{dz}[f_1(z)+f_2(z)]=f'_1(z)+f'_2(z),$$

$$\frac{d}{dz}[cf(z)]=cf'(z)(c\text{为常数}),$$

$$\frac{d}{dz}[f(z)\cdot g(z)]=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$$

$$\frac{d}{dz}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}\qquad [g(z)\neq 0].$$

练习题2．设函数 $w=f(z)$ 的导数 $f'(z)$ 在区域 G 中处处存在，而且不等于零，证明其反函数 $z=\varphi(w)$ 的导数为

$$\varphi'(z)=\frac{1}{f'(z)}.\qquad (4)$$

2.3 解析函数·科希-里曼(Cauchy-Riemann)条件

在区域G内每一点都是可导的函数称为G内的**解析函数**，例如前节例子中的函数z^n是全平面上的解析函数.我们也常说函数在某点解析,这应了解为函数在该点**及其邻域内是**可导的.

如果一个函数在某点z_0不是解析的（包括函数在该点无定义、或不连续、或不可导、或可导而不解析等情况），则z_0称为函数的**奇点**,例如函数$\frac{1}{z}$在$z=0$点不可导，故$z=0$是这函数的奇点．在第七章中将详细讨论函数的奇点.

由上面关于解析函数的定义，可见解析函数是从普遍的复变函数中加上很强的条件后选出来的一类特殊的复变函数．这条件不仅要求函数在严格的意义下可导[指要求上节(1)式的极限值与$\Delta z\to 0$的方式无关]，而且还要求它在某个区域中处处可导．下面讨论函数解析的充要条件.

科希-里曼条件　如果函数$w=f(z)$在区域G中解析,则其实部$u(x,y)$和虚部$v(x,y)$的偏导数在G中必满足下列条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

(1) 式称为科希-里曼条件,或简写为CR条件.

这个条件是根据解析函数在某一点的导数之值可以通过令Δz以不同方式趋于零而求得这一事实证明的．现在令Δz以两种不同的方式趋于零：

a) $\Delta y=0$,$\Delta x\to 0$．于是$\Delta z=\Delta x$,而有

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2}$$

b) $\Delta x=0$,$\Delta y\to 0$．于是$\Delta z=i\Delta y$,而有

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{i\Delta y}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} \tag{3}$$

[因 $f'(z)$存在，故两式右方的一阶偏导数都存在]. 按解析的定义，这两种算法的结果应相等，故有

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}.$$

比较两边的实部和虚部，即得(1).

CR 条件不是一个函数解析的充分条件. 例如函数

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4}, & \text{当}z\neq 0,\\ 0, & \text{当 } z=0,\end{cases}$$

其实部 u 和虚部 v 在实轴($y=0$)和虚轴($x=0$)上之值均为零，故在 $z=0$ 点满足 CR 条件，即

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}(=0),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}(=0),$$

而且当 z 沿实轴或者虚轴趋于零时

$$\frac{f(z)-f(0)}{z}\to 0.$$

但如果令 z 沿曲线 $x=y^2$ 趋于零，则

$$\frac{f(z)-f(0)}{z}=\frac{y^4}{y^4+y^4}\to\frac{1}{2}.$$

可见这函数在 $z=0$ 点是不可导的，因此也就不是解析的. 还存在这样的函数①，在全平面上处处满足 CR 条件，却不是全平面上的解析函数.

但是，如果函数 $f(z)$的偏导数在区域 G 中都是连续的而且满足 CR 条件，则 $f(z)$在 G 中解析. 证明如下：

由于偏导数是连续的，$f(z)$的实部和虚部的增量可分别写为

$$\Delta u=u_x\Delta x+u_y\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y,$$

$$\Delta v=v_x\Delta x+v_y\Delta y+\varepsilon_3\Delta x+\varepsilon_4\Delta y,$$

① 见И.И.普里瓦洛夫，复变函数引论，第二章§4.4 (1954).

其中 $u_x=\frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y=\frac{\partial u}{\partial y}$, $\cdots$,各个 ε 值随 $\Delta z\to 0$ (即 $\Delta x,\Delta y$ 分别趋于零)而趋于零. 于是有

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{u_x\Delta x+u_y\Delta y+i(v_x\Delta x+v_y\Delta y)}{\Delta z},$$

因为 $\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right|$ 和 $\left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right|$ 之值不大于 1 ,那些含 ε 的项都随 $\Delta z\to 0$ 而趋于零了. 由 CR 条件,$v_y=u_x$,$u_y=-v_x$,故上面的极限值为

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{u_x(\Delta x+i\Delta y)+iv_x(\Delta x+i\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}=u_x+iv_x.$$

这极限值是有限的,而且显然与 $\Delta z\to 0$ 的方式无关(注意分式中分子和分母的 $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ 消去),故函数在 G 中解析.

练习题1. 证明,在极坐标表示中 CR 条件为

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta},\quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}=-\frac{\partial v}{\partial r}. \tag{4}$$

练习题2. 举例说明中值定理对于解析函数并不成立:若 f 是 G 中的解析函数,z_1 和 z_2 及连结该两点的线段均在 G 中,在此线段上不一定存在一点 z_0,使得

$$f'(z_0)=\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}.$$

练习题3. 证明,若 $f'(z)=0$,则 $f(z)\equiv C$(常数).

2.4 解析函数与调和函数的关系

在区域 G 中连续并有连续的一、二阶偏导数的实变函数 $u(x,y)$,如果满足拉普拉斯(Laplace)方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

则称为(二维)**调和函数**. 在物理学中,许多平面场,如稳定温度场,静电场,稳定电流场等,都满足这个方程. 现在证明解析函数

$f(z)$的实部$u(x,y)$和虚部$v(x,y)$都是调和函数.

设$u(x,y)$和$v(x,y)$都有直到二阶的偏导数（这一点将在4.6节证明），由CR条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2}$$

得
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=0.$$

这证明$u(x,y)$是调和函数. 同样可证明$v(x,y)$也是调和函数.

由于解析函数的这一性质，解析函数的理论在平面场问题中有重要应用(参看第二十章).

从任意一个调和函数可以造出一个解析函数，使前者成为后者的实部或者虚部. 设$u(x,y)$为调和函数，由(1)式知

$$-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy$$

是一个全微分，因此线积分

$$v(x,y)=\int^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy \tag{3}$$

之值与积分路线无关而确定一个函数$v(x,y)$(可差一常数加项).

由(3)式得

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x},$$

即u和v满足CR条件. 又按所设u为调和函数，故这些偏导数都是连续函数. 因此，

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

是一个解析函数.

由(3)式确定的函数$v(x,y)$称为$u(x,y)$**的共轭调和函数**. 同时，u也称为v的共轭调和函数，因为u(作为一个解析函数的实部)也可以反过来由给定的调和函数v(作为该解析函数的

虚部)通过类似于上面求积分的方法来确定.

例. $u(x,y)=xy$ 是一个调和函数,它的共轭调和函数是

$$v(x,y)=\int_{(x,y)}^{(x,y)} -x\,dx+y\,dy=\frac{1}{2}(y^2-x^2)+C,$$

C 为任意常数. $u(x,y)$和 $v(x,y)$组成的解析函数是

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

$$=xy+i\left[\frac{1}{2}(y^2-x^2)+C\right]=-\frac{i}{2}z^2+C',$$

C'是任意常数.

练习题1. 已知解析函数$f(z)$的实部 $u(x,y)$或虚部 $v(x,y)$,求 $f'(z)$.

练习题2. 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是区域 G 中的解析函数, 且 $f'(z)\neq 0$. 证明

$$u(x,y)=C,\ v(x,y)=C'$$

(C 和 C' 是任意常数)代表两族互相正交的曲线. 又画出上面例子中两族这种曲线在第一象限中的图形.

第三章　初等函数

在本章里将介绍一些简单的解析函数，如幂函数z^n，指数函数e^z，三角函数$\sin z$，$\cos z$和双曲线函数$\mathrm{sh}z$，$\mathrm{ch}z$，还要介绍多值函数$\sqrt{z-a}$，$\ln z$，z^s（$s\neq$整数），以及有关多值函数的基本概念，如枝点，单值分枝，割线，里曼(Riemann)面等．本章将简要介绍这些初等函数的定义及其主要性质，特别是和相应的实变函数不同的特殊性质．至于这些函数（单值函数或多值函数的单值分枝）的导数公式，由于和相应的实变函数的形式相同，就不再一一列出．

3.1　幂　函　数

由2.2节(3)式知道，当$n=1,2,3,\cdots$时，幂函数z^n的导数nz^{n-1}在全平面上都有确定值．因此，当n是正整数或零（$z^0=1$）时，z^n是全平面上的解析函数．当$n=-1,-2,-3,\cdots$时，除了$z=0$这一点以外，导数nz^{n-1}也都处处存在并有确定值，故在n是负整数的情形下，幂函数z^n是除了$z=0$点以外的全平面上的解析函数．$z=0$是这函数的奇点(2.3节)．

3.2　指　数　函　数

可以用实数的指数函数和三角函数的组合作为复数指数函数e^z的定义：

$$e^z=e^{x+iy}=e^x\cos y+ie^x\sin y. \tag{1}$$

以后在5.4节中还要给出用幂级数的定义．指数函数有时也用$\exp z$表示．

注意对于实数x_1和x_2有$e^{x_1}\cdot e^{x_2}=e^{x_1+x_2}$．由(1)式可以证明

指数函数的下列性质：

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}. \tag{2}$$

显然，1.2 节(7)式所定义的纯虚数指数函数是本节 e^z 的特例 $(x=0)$.

很容易证明 e^z 的实部 $e^x\cos y$ 和虚部 $e^x\sin y$ 在全平面上满足 CR 条件，而且偏导数是连续的，因此 e^z 是全平面上解析的函数.

复数指数函数 e^z 与实数指数函数 e^x 的主要不同之点是 e^z 具有周期性，周期是虚数 $2\pi i$：

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i}&=e^z[\cos(y+2\pi)+i\sin(y+2\pi)]\\ &=e^x(\cos y+i\sin y)=e^z. \end{aligned} \tag{3}$$

这种性质是 e^x 所没有的，如果 x 限于实变数的话.

3.3 三角函数和双曲线函数

复数三角函数 $\sin z$ 和 $\cos z$ 的定义分别是

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\ \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}. \tag{1}$$

由于 e^{iz} 和 e^{-iz} 都是全平面上解析的函数，故 $\sin z$ 和 $\cos z$ 也如此.

与实数的情形相同，$\sin z$ 和 $\cos z$ 都是以实数 2π 为周期的函数. 但与实数情形不同的是，$\sin z$ 和 $\cos z$ 的模可以大于1，例如，当 $z=i$ 时

$$\cos i=\frac{e^{-1}+e^{1}}{2}=\frac{0.368+2.718}{2}=1.543>1.$$

事实上只要 z 的虚部 y 足够大，$\sin z$ 和 $\cos z$ 的模可以大于任何正数；也就是说，当 $y\to\infty$ 时，$|\sin z|$ 和 $|\cos z|$ 趋于无穷大.

练习题 1. 证明

$$\sin(z_1\pm z_2)=\sin z_1\cos z_2\pm\cos z_1\sin z_2,$$

$$\cos(z_1\pm z_2)=\cos z_1\cos z_2\mp\sin z_1\sin z_2.$$

练习题 2. 求$|\sin z|$和$|\cos z|$.

其他三角函数如$\tan z, \cot z, \sec z, \csc z$等,都与实数情形一样用$\sin z$和$\cos z$表出:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}, \tag{2}$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{\tan z} = i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}, \tag{3}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}. \tag{4}$$

练习题 3. 讨论函数$\tan z$和$\cot z$的解析性和周期.

双曲线函数 $\operatorname{sh} z$和$\operatorname{ch} z$的定义分别是

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}. \tag{5}$$

其他双曲线函数是

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}}, \tag{6}$$

$$\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^{z}+e^{-z}}{e^{z}-e^{-z}}, \tag{7}$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\operatorname{sh} z}. \tag{8}$$

练习题 4. 证明

$$\sin(iz) = i\operatorname{sh} z, \quad \cos(iz) = \operatorname{ch} z. \tag{9}$$

练习题 5. 证明

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1. \tag{10}$$

练习题 6. 讨论各个双曲线函数的解析性和周期.

3.4 多值函数·根式$\sqrt{z-a}$

在初等函数中除了上面讲过的单值函数以外,还有根式、对数函数、反三角函数等多值函数. 其中最重要的是根式和对数函数,因为别的许多初等多值函数都可以用这两个函数表达. 因此我们

将着重讨论这两个函数，并借此阐明有关多值函数的一些基本概念.

多值函数$w=f(z)$是这样的函数，对于自变数z的每一个值，一般有两个或者两个以上的函数值w与之相应. 例如根式$w=\sqrt{z-a}$（a为任意复数），除了$z=a$和$z=\infty$以外，对于每一个z值都有两个相应的w值（见下）. 处理多值函数时，首先要解决的问题是自变数z与因变数（即函数值）w的对应关系，特别是当z连续变化时这种对应关系的可能变化. 例如，当一个多值函数$f(z)$出现在一个积分$\int f(z)dz$中时（这是常见的情形，关于复数积分见下章），必须确定z与$f(z)$之间的对应关系和这种关系的变化，否则这积分将是无意义的，至少是不确定的. 下面就根式$w=\sqrt{z-a}$这个函数来说明z和w的对应关系以及这种关系的变化.

根式$w=\sqrt{z-a}$的定义是

$$w^2=z-a. \tag{1}$$

用极坐标表示，令

$$w=\rho e^{i\varphi},\quad z-a=re^{i\theta}(r,\rho\geqslant 0). \tag{2}$$

代入(1)式，得

$$\rho^2e^{2i\varphi}=re^{i\theta}.$$

于是

$$\rho^2=r,e^{2i\varphi}=e^{i\theta}, \tag{3}$$

故有

$$\left.\begin{aligned}&\rho=\sqrt{r}\ (\geqslant 0),\\&2\varphi=\theta+2n\pi(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots),\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

从这里可以看到，w的模ρ与$z-a$的模r的对应关系是唯一地确定的；而w的辐角φ与$z-a$的辐角θ的对应关系则不然，即使限制在主值范围内，对应于每一个θ值，也有两个不同的φ值，例如

$$\varphi_1=\frac{\theta}{2},\qquad \varphi_2=\frac{\theta}{2}+\pi \tag{5}$$

[相应于(4)式中 $n=0,1$]. 这两个不同的 φ 值给出两个不同的 w 值：

$$w_1=\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}},\ w_2=\sqrt{r}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}=-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}. \tag{6}$$

其他 n 值给出的只是这两个 w 值的重复.

由此可见，根式 $w=\sqrt{z-a}$ 的多值性表现在 w 的辐角与 $z-a$ 的辐角(注意：不是 z 的辐角!)的对应关系上.

要使 z 和 w 之间的对应关系确定，可以在(6)式的两个关系中选定一个. 但仅仅这样规定还是不完全的. 例如，当 z 沿图 6 中的闭合曲线 C 连续变化，绕 a 点一圈回到原处时，$\arg(z-a)$ 之值由原来的 θ 增为 $\theta+2\pi$. 若规定在开始时 z 与 w 的对应关系是(6)式的第一式 $w_1=\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$，则经过 z 绕 a 点转一圈之后，对应的 w 值变为 $w_2=\sqrt{r}e^{i\frac{\theta+2\pi}{2}}$. 但如果 z 是沿图6中的闭合曲线 C' 变化，则因 a 点在 C' 的外面，当 z 回到原处时，$\arg(z-a)$ 之值仍还原为 θ. 若如前规定开始时 z 与 w 的对应关系为(6)式的第一式，经过这样一圈的变化后，对应的函数值不变，仍为 $w_1=\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$. 可见即使开始时规定了 z 与 w 的对应关系，这种关系也还是会由于 z 的变化路线不同而作不同的变化的. 因此，**为了完全确定一个多值函数 $w=f(z)$ 的函数值 w 与自变数 z 之间的对应关系，除了要在某一点 z 规定函数的对应值(多重相应值中的一个)之外，还须说明 z 的变化路线.**

枝点 从上面的分析看到，对于函数 $w=\sqrt{z-a}$ 来说，a 点具有这样的特性：当 z 绕 a 点转一圈回到原处时，对应的函数值不还原(改变了正负号)，而当 z 不绕 a 点转一圈回到原处时，函数

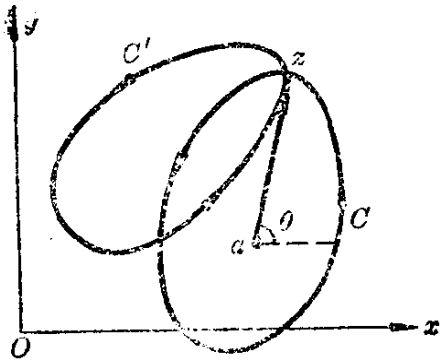


图 6

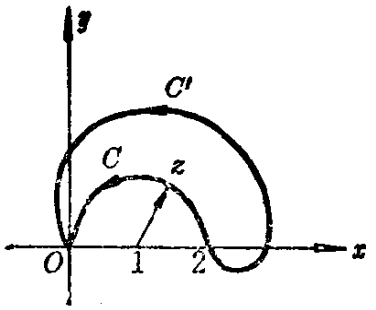


图 7

值还原. a 点称为这个多值函数的枝点.

又∞也是函数$\sqrt{z-a}$的枝点,因为如果令$z=\frac{1}{t}$, 则有 $w=\frac{\sqrt{1-at}}{\sqrt{t}}$. 当 t 绕 $t=0\left(\text{但不绕 } t=\frac{1}{a}\right)$转一圈回到原处时, w 之值不还原.

例. 若规定函数 $w(z)=z+\sqrt{z-1}$在实轴上 $z=2$ 这点之值为 3,问当 z 沿着位于上半平面的曲线由 $z=2$ 连续变到 $z=0$ 时 $w(0)$之值为何?

$w(z)=z+\sqrt{z-1}$ 这函数是由两项相加而成的,第一项 z 是单值的, 第二项$\sqrt{z-1}$是多值的, 故主要是确定$\sqrt{z-1}$在$z=0$这点之值究竟是$+i$还是$-i$. 从前面关于函数$\sqrt{z-a}$的分析看到, 这函数的多值性表现在函数值的辐角上, 故现在的问题是根据题中的规定,求出在 $z=0$ 这一点$\sqrt{z-1}$的辐角.

按规定,当 $z=2$ 时,$\sqrt{z-1}=1$, 故 $\arg\sqrt{z-1}=0$(或者$2n\pi$, n 是任意整数),而 $\arg(z-1)$等于零(或者 $4n\pi$). 当 z 沿位于上半平面的曲线,例如图 7 中的 C,由 $z=2$ 变到 $z=0$ 时,$\arg(z-1)$增加了 π,即由 0(或者 $4n\pi$)变为π(或者 $4n\pi+\pi$),而$\arg\sqrt{z-1}$

变为$\frac{\pi}{2}\left(\text{或者 } 2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$，故在 $z=0$ 点

$$\sqrt{z-1}=|\sqrt{-1}|e^{i\frac{\pi}{2}}=i,$$

而 $w(0)=0+i=i$.

练习题 1. 在上面的例题中，如果 z 是沿位于下半平面的曲线由 $z=2$ 变到 $z=0$，问 $w(0)$ 之值为何？又如果 z 是沿图 7 中的曲线 C' 由 $z=2$ 变到 $z=0$，$w(0)$ 之值为何？

练习题 2. 讨论 $\sqrt{1-z^2}$ 的多值性及其枝点.

单值分枝 一个多值函数可以划分为若干个分枝，每一分枝是一个单值函数，称为多值函数的单值分枝. 例如，规定 $-\pi<\theta\leqslant\pi$，则按(6)式，多值函数 $w(z)=\sqrt{z-a}$ 可以划分为下列两个单值分枝：

$$w_1(z)=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}},\ w_2(z)=\sqrt{r}\,e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)},$$

其中 $r=|z-a|$. 对于 $w_1(z)$，$\arg(z-a)=\theta$，而对于 $w_2(z)$，$\arg(z-a)=\theta+2\pi$，因此，对于每一 z 值，$w_1(z)$ 和 $w_2(z)$ 都分别有唯一的一个确定值与之相应，而 $w_1(z)$ 和 $w_2(z)$ 是 $w(z)$ 的两个单值分枝.

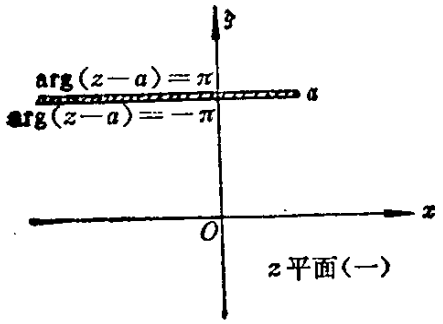
上面的划分相当于对自变数 z 的变化范围作了下列规定：

对于单值分枝 $w_1(z)$，$-\pi<\arg(z-a)\leqslant\pi$；

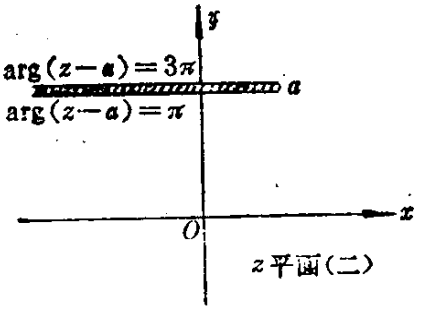
对于单值分枝 $w_2(z)$，$\pi<\arg(z-a)\leqslant 3\pi$.

这种划分和规定可以用几何图形表示：图 8(a) 表示从 a 点沿平行于实轴负方向到无穷远点的直线割开的 z 平面(一)，并规定在割线的下缘(岸)$\arg(z-a)=-\pi$，在上缘(岸) $\arg(z-a)=\pi$. 与这平面上的 z 值对应的函数值 $w_1(z)$ 位于图 8 (c) 所表示的 w 平面的右半：$-\frac{\pi}{2}<\arg w\leqslant\frac{\pi}{2}$. 与割线下缘对应的是负虚轴，与上缘对应的是正虚轴.

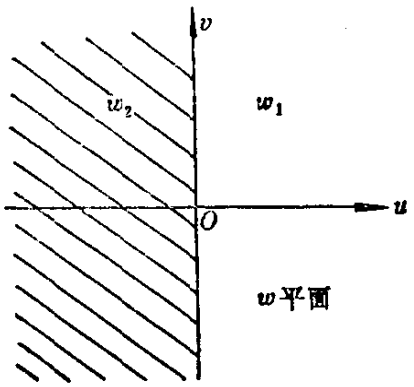
图 8 (b) 表示的也是类似于图 8 (a) 割开的 z 平面(二)，但规定在割线下缘 $\arg(z-a)=\pi$，在上缘 $\arg(z-a)=3\pi$. 因此，与



(a)

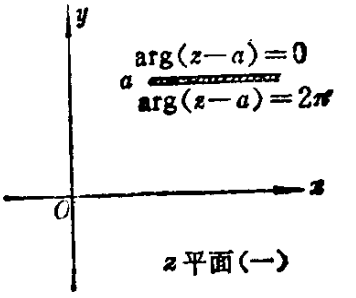


(b)

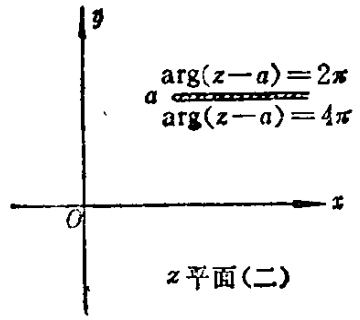


(c)

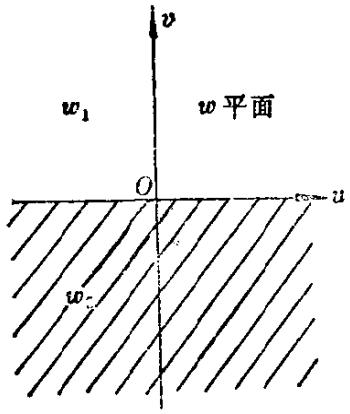
图 8



(a)



(b)



(c)

图 9

这平面上的 z 值对应的函数值 $w_2(z)$位于图 8(c) 的 左 半平面：$\frac{\pi}{2}<\arg w\leqslant\frac{3\pi}{2}$. 与割线下缘对应的是正虚轴，与上缘对应的是负虚轴. 这样便把多值函数 $w(z)=\sqrt{z-a}$ 的 两 个单值分枝，$w_1(z)$和 $w_2(z)$，分开表示出来.

z 平面上的割线起这样的作用：当 z 连续变化时，不得跨越割线．由于割线连结了多值函数 $\sqrt{z-a}$ 的两个枝点，a 和 ∞，使得在割开的 z 平面上的任何闭合曲线都不含枝点 a 或 ∞ 于内，因此，相应的函数值也只能在 w 平面上的一个单值分枝［或者是 $w_1(z)$，或者是 $w_2(z)$］内变化，而不会从一个单值分枝跨越到另一个单值分枝中去．这样，两个单值分枝就完全分开了．

应当注意，把一个多值函数划分为单值分枝是有一定任意性的．例如，若规定 $0<\theta\leqslant 2\pi$，则 $w(z)=\sqrt{z-a}$ 的两个单值分枝 $w_1(z)$ 和 $w_2(z)$［仍由(6)式表达］将分别位于 w 平面的上半平面和下半平面，即

$$w_1(z):0<\arg(z-a)\leqslant 2\pi,\ 0<\arg w_1(z)\leqslant\pi,$$

$$w_2(z):2\pi<\arg(z-a)\leqslant 4\pi,\ \pi<\arg w_2(z)\leqslant 2\pi.$$

这对应关系可以如前用几何图形表示［图 9 (a)，(b)，(c)］．

还有，割线并不必须是直线，只要能够起到把单值分枝分开的作用，任何曲线都可以．

多值函数的解析性 一般说来，一个多值函数的导数是不存在的，因为极限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

之值与 z 趋近于 z_0 的方式(例如绕过枝点或者不绕过枝点)有关．但如果在某一区域内能够把多值函数的各个单值分枝划分开（例如在上述割开的 z 平面上任意一个不含割线于内的区域内），则对于每一单值分枝可以如前讨论其解析性．

一个多值函数的枝点一定是函数的奇点，因为在枝点的邻域内不能把各个单值分枝划分开，导数也就不存在．

里曼面 在上面的图 8 和图 9 中，我们把根式 $w=\sqrt{z-a}$ 的两个单值分枝 $w_1(z)$ 和 $w_2(z)$ 的函数值与自变数 z 的对应关系

分开表示出来．这种对应关系也可以合并在一起表示如下：例如，将图 9 中 z 平面(一)中割线的上缘与 z 平面(二)中割线的下缘连起来，并设想 z 平面(二)中割线的上缘与 z 平面(一)中割线的下缘也能连起来，构成如图 10 所示的那样一个两叶的面，称为函数 $w=\sqrt{z-a}$ 的里曼面．当 z 从平面(一)上的一点 $z_0^{(1)}$ 出发，连续变化，绕 a 一圈后，它的轨迹 C 将跨过连起来的割线 $\arg(z-a)=2\pi$ 而到达平面(二)上与 $z_0^{(1)}$ 的(复数)值相同的 $z_0^{(2)}$ 点．因此，在里曼面上看，当 z 从 $z_0^{(1)}$ 出发绕 a 变化一圈到达 $z_0^{(2)}$ 时，所走的路线不是封闭的．相应的函数值从图 11 中的 $w_0^{(1)}$ 沿与 C 相应的路线 Γ 到达 $w_0^{(2)}$，$\arg w_0^{(2)}=\arg w_0^{(1)}+\pi$．

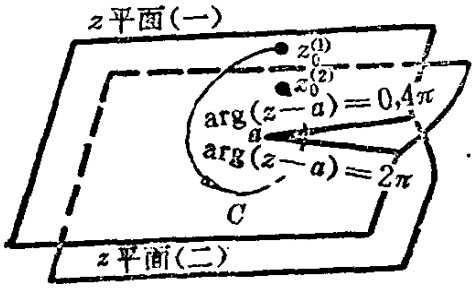


图 10

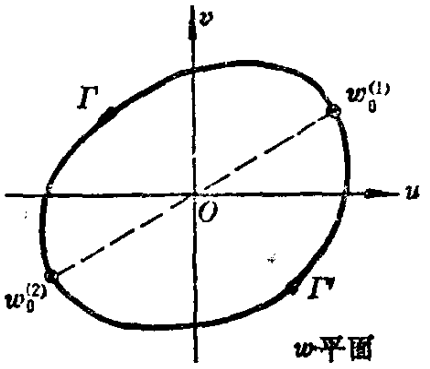


图 11

如果 z 点继续再绕 a 点转一圈，它的轨迹 C'(未画出)将跨越连起来的割线 $\arg(z-a)=0$ 和 $\arg(z-a)=4\pi$，而回到平面(一)上的 $z_0^{(1)}$．相应的 w 值也从 $w_0^{(2)}$ 沿与 C' 相应的路线 Γ' 从 $w_0^{(2)}$ 回到 $w_0^{(1)}$．曲线 C 加上 C' 构成里曼面上的一个闭合围道，相应的曲线 $\Gamma+\Gamma'$ 是 w 平面上的闭合围道．

我们看到，在里曼面上的 z 点与 w 平面上的点是一一对应的．

3.5 对数函数

对数函数 $w=\ln z$ 的定义是

$$e^w=z. \tag{1}$$

令 $w=u+iv, z=re^{i\theta}$，其中 u 和 v 是实数，代入(1)式，得

$$e^u\cdot e^{iv}=re^{i\theta}.$$

比较两边的模和辐角，得

$$e^u=r, \text{即 } u=\ln r=\ln|z| \tag{2}$$

和

$$v=\arg z=\theta+2n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots). \tag{3}$$

可见对数函数 $w=\ln z$ 是多值的，其多值性表现于函数值 w 的虚部 v 上：对应于每一 z 值，有无穷多个 w 值，这些不同的 w 值只是虚部不同，相差为 2π 的整数倍.

因此，对数函数 $w=\ln z$ 有无穷多个单值分枝. 这些单值分枝可写为

$$w_n(z)=\ln|z|+i(\theta+2n\pi), n=0,\pm1,\pm2,\cdots, \tag{4}$$

其中

$$-\pi<\theta\leqslant\pi \tag{5}$$

(或者用其他范围为 2π 的规定，例如 $0\leqslant\theta<2\pi$).

多值函数 $w=\ln z$ 的枝点是 $z=0$ 和∞，因为当 z 沿着绕 $z=0$ 点(也就是绕 $z=\infty$点)一周的曲线变化，最后回到原出发点时，$\arg z$ 改变 2π，相应的函数值 w 的虚部也改变 2π，而与出发点的对应 w值不同.

函数 $w=\ln z$ 的里曼面由无穷多个 z 平面叠合而成. 与每一个 z 平面对应的 w 值在 w 平面上构成一个与实轴平行的无穷长带形区域，宽度为 2π. 如果 θ 之值按(5)式规定(主值)，则第 n 个带形区是

$$-\infty<u<\infty,\ (2n-1)\pi<v\leqslant(2n+1)\pi. \tag{6}$$

练习题 1. 比较根式和对数函数，说明两者的多值性不同之处.

练习题 2. 问为了划分对数函数 $w=\ln z$ 的单值分枝，使它们分开，应如何在 z 平面上作割线？

练习题 3. 证明 $\ln z$的导数是$\frac{1}{z}$.(一个单值函数!)

练习题 4. 证明，如果在区域 G 中解析的函数 $f(z)$ 的模是一个常数，则 $f(z)$ 本身必是一个常数.

提示：考虑函数 $F(z)=\ln f(z)$.

3.6* 多值函数 $w=\arcsin z$

许多初等多值函数可以用根式和对数函数表示，例如反三角函数 $w=\arcsin z$. 这个函数是 $z=\sin w$ 的反函数. 用指数函数表示[3.3节(1)式]，有

$$z=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i},$$

故
$$e^{2iw}-2ize^{iw}-1=0.$$

由此解得

$$e^{iw}=iz\pm\sqrt{1-z^2}.$$

取对数，得

$$w=\frac{1}{i}\ln(iz\pm\sqrt{1-z^2}).$$

根式前面的正负号只不过是表示多值函数 $\sqrt{1-z^2}$ 的两个不同的分枝，故可任取其一而写

$$w=\arcsin z=\frac{1}{i}\ln(iz+\sqrt{1-z^2}), \tag{1}$$

或者
$$w=\arcsin z=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{i}\ln(z+\sqrt{z^2-1}). \tag{2}$$

这样，便把讨论函数 $w=\arcsin z$ 的问题化为讨论多值函数 $\ln(z+\sqrt{z^2-1})$ 的问题.

练习题 1. 证明 $\arccos z=\frac{1}{i}\ln(z+\sqrt{z^2-1})$.

函数 $t=\ln(z+\sqrt{z^2-1})$ 虽然是一个稍为复杂一些的多值函数，但不过是根式与对数函数的组合. 我们可以这样来讨论它. 令 $\zeta=z+\sqrt{z^2-1}$，则 $t=\ln\zeta$，而问题化为讨论两个简单的多值函

数.

先讨论$\zeta=z+\sqrt{z^2-1}$. 这个函数的多值性是由于根式$\sqrt{z^2-1}$这一项. $z=\pm1$是这根式的两个枝点,因为不论z绕其中的哪一个转一圈(另一个在圈外),$\sqrt{z^2-1}$之值都不还原,而是改变了正负号. 因此,为了划分函数的单值分枝,可以在z平面上作这样的割线(图12):由$z=+1$沿正实轴到∞和由$z=-1$沿负实轴到$-\infty$. 在这样割开的z平面上,因为已经规定不能跨越割线,所以任何一条闭合曲线都不会把枝点$z=\pm1$中的任何一个围在里面.

现在假若规定在正实轴的割线上缘$\arg(z^2-1)=0$,则当z沿着割线的上缘从∞变到$z=1$时,由于根式$\sqrt{z^2-1}$取正值,相应的ζ值将从∞沿正实轴变到1. 在这割线的下缘,由于$\arg(z-1)$增加了2π,故$\arg(z^2-1)=2\pi$. 因此,当z沿着割线的下缘从$z=1$变到∞时,由于根式$\sqrt{z^2-1}$取负值,相应的ζ值将从1沿实轴变到0. 可见在z平面上通过$z=1$点的这条割线的上下缘与ζ平面上的整个正实轴对应.

在通过$z=-1$的割线的下缘,按照前面的规定,$\arg(z-1)$增加了π,而$\arg(z+1)$减少了π,故$\arg(z^2-1)=0$,而根式$\sqrt{z^2-1}$取正值. 但在$z<-1$时$|z|>|\sqrt{z^2-1}|$,故当z沿这割线的下缘从$-\infty$变到$z=-1$时,相应的ζ值将从0沿负实轴变到-1. 在这割线的上缘,$\arg(z^2-1)=2\pi$,根式$\sqrt{z^2-1}$取负值,故当z沿这割线的上缘从$z=-1$变到$-\infty$时,相应的ζ值由-1沿负实轴变到$-\infty$. 可见在z平面上通过$z=-1$的割线的上下缘与ζ平面上的整个负实轴对应.

现在来讨论$t=\ln\zeta=\ln(z+\sqrt{z^2-1})$. 根据上面所得结果,可知如果规定沿正实轴的割线上缘$\arg(z^2-1)=0$,则图12中割开的z平面在ζ平面上的对应区域是上半平面,因为与$z=0$相

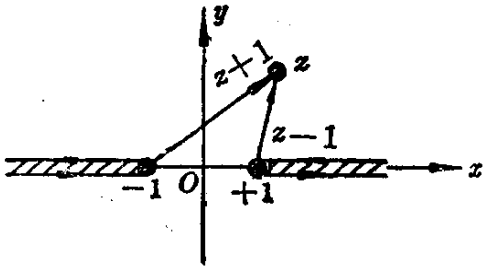


图 12

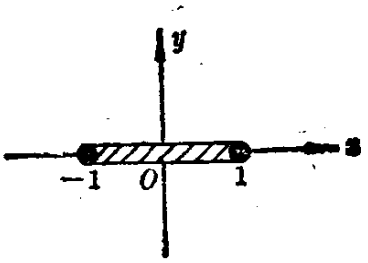


图 13

应的 ζ 值为 i[这是由于在 $z=0$ 这点 $\arg(z^2-1)=\pi$ 的缘故],位于上半平面. 只要 z 不跨越割线,相应的 ζ 值不会变到下半平面去,更不会绕 $\zeta=0$(或∞)转圈. 因此,相应的 $t=\ln\zeta$ 之值也就被限制在一个单值分枝内变化. 至于相应的 $t=\ln\zeta$ 究竟是哪一个单值分枝,上面对于 $\arg(z^2-1)$ 所作的规定不足以确定这一点,而还需要直接规定 t 和 z 的对应值,例如规定当 $z=0$ 时 $t=\frac{\pi i}{2}$.

练习题 2. 如果规定当 $z=0$ 时 $t=\ln(z+\sqrt{z^2-1})$ 之值为 $-\frac{\pi i}{2}$,而且 z 平面是按图 12 的方式割开的,问当 z 在正实轴的割线上缘变化时,相应 t 值的变化如何?

练习题 3. 如果 z 平面沿实轴从 $z=-1$ 到 $z=1$ 割开(图 13),$\sqrt{z^2-1}$ 的单值分枝能否划分开?与这样割开的 z 平面对应的 $\zeta=z+\sqrt{z^2-1}$ 是 ζ 平面上的什么区域?如果规定当 $z>1$ 时 $t=\ln(z+\sqrt{z^2-1})$ 是实数(虚部等于零),求 $z=-2$ 时 t 之值和 $z=0$ 时 t 之值.

3.7 函数 z^s (s 为任意复数)

当 s 为任意复数时,函数 z^s 的定义是

$$z^s=e^{s\ln z}. \tag{1}$$

这定义包括通常 s 为整数或者有理数的情形作为特例. 原因是,如果 s 是整数 n,则当 z 绕 $z=0$ 变化一圈回到原处时,虽然 $\ln z$ 之值增加了 $2\pi i$,但 $e^{n(\ln z+2\pi i)}=e^{n\ln z}$,故函数值还原. 如果 s 是

有理数$\frac{p}{q}$，p 和 q 是无公约数并且不等于零的整数，$q\geqslant 2$，则当 z 绕 $z=0$ 变化一圈回到原处时，函数 z^s 之值变为

$$e^{\frac{p}{q}(\ln z+2\pi i)}=e^{\frac{p}{q}\ln z}\cdot e^{\frac{2p\pi i}{q}},$$

即增为 $e^{\frac{2p\pi i}{q}}$ 倍；而当 z 绕 $z=0$ 点转过 q 圈回到原处时，函数值还原.

在规定单值分枝后，z^s 是 z 的一个解析函数（例如规定 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$）. 导数为

$$\frac{d}{dz}z^s=\frac{d}{dz}e^{s\ln z}=e^{s\ln z}\cdot s\cdot\frac{1}{z}=sz^{s-1}. \tag{2}$$

第四章　复数积分·科希定理和科希积分公式

4.1 复 数 积 分

复数积分是复数平面上的线积分. 设C是复数平面上的一条曲线,由A点到B点，在曲线上复变函数$f(z)$有定义. 把曲线C任意分为n段,分点为

$$z_0=A, z_1, z_2, \cdots, z_n=B;$$

ζ_k是$[z_{k-1}, z_k]$段上的任意一点(图14). 作和数

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1})=\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k,$$

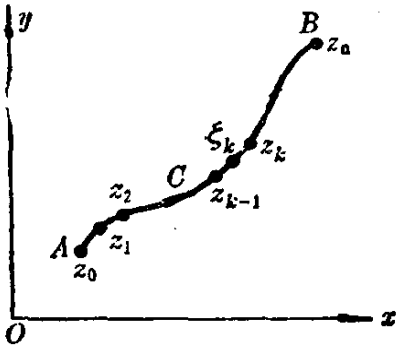


图 14

其中　　$\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$。

当n无限地增大，使每一Δz_k都趋于零时，如果这和数的极限存在,而且其值与各个ζ_k点的选取无关，则这极限值称为函数$f(z)$沿曲线C由A到B的积分：

$$\int_C f(z)dz=\lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k.$$

一个复数积分实际上是两个实数积分的组合. 因为如果令 $\zeta_k=\xi_k+i\eta_k$, ξ_k 和 η_k 是实数, 则 $f(\zeta_k)=u(\xi_k,\eta_k)+iv(\xi_k,\eta_k)=u_k+iv_k$, $u_k=u(\xi_k,\eta_k)$和 $v_k=v(\xi_k,\eta_k)$是实数,而有

$$\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k=\sum_{k=1}^{n}(u_k+iv_k)(\Delta x_k+i\Delta y_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(u_k\Delta x_k-v_k\Delta y_k)+i\sum_{k=1}^{n}(v_k\Delta x_k+u_k\Delta y_k).$$

如果最后两个和数的极限分别存在,它们就是两个实数线积分

$$\int_C udx-vdy,\quad \int_C vdx+udy.$$

于是和数 $\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k$ 的极限存在,而有

$$\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C vdx+udy. \tag{1}$$

如果积分路线 C 是分段光滑的曲线①, 而被积函数 $f(z)$是积分曲线上的连续函数,则复数积分存在,因为在这两个条件下,(1)式右方的两个实数线积分存在(关于非正常积分,见第九章)。

4.2 复数积分的几个重要性质

1. 积分不等式

(a) $$\left|\int_C f(z)dz\right|\leqslant\int_C|f(z)|ds, \tag{1}$$

其中 $ds=|dz|=\sqrt{dx^2+dy^2}$ 是曲线 C 的弧元.

证: 由不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(\zeta_k)||\Delta z_k|,$$

① 曲线 $y=y(x)$称为分段光滑的, 如果 $y(x)$是连续函数而 $y'(x)$是分段连续的函数.

两边取极限，即得(1)式.

(b) $$\left|\int_C f(z)dz\right|\leqslant Ml, \tag{2}$$

其中M为$|f(z)|$在C上之值的上界，l是C的全长.

证：由不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(\xi_k)||\Delta z_k|\leqslant M\sum_{k=1}^{n}|\Delta z_k|$$

两边取极限，即得(2)式.

上面两个不等式以后将常用到.

2. 其他性质

(a) $$\int_C f(z)dz=-\int_{C^-} f(z)dz, \tag{3}$$

C^-表示与C相同但走向相反的积分路线.

(b) $$\int_C af(z)dz=a\int_C f(z)dz, \tag{4}$$

其中a是任意常数.

(c) 若把积分路线C分段为$C_1,C_2,\cdots,C_n$，则

$$\int_C f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2} f(z)dz+\cdots+\int_{C_n} f(z)dz. \tag{5}$$

(d) $$\int_C\{f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)\}dz$$

$$=\int_C f_1(z)dz+\int_C f_2(z)dz+\cdots+\int_C f_n(z)dz, \tag{6}$$

如果右端的每个积分都存在.

这些性质都很容易根据积分的定义予以证明，这里不详述.

4.3 科希(Cauchy)定理

一般说来，复数积分之值不仅依赖于起点和终点，而且还与积

分路线有关. 例如函数 $\mathrm{Re}(z)(=x)$由 $z=0$ 到 $z=1+i$ 的积分，如果积分路线是先沿实轴从 $z=0$ 到 $z=1$ 然后沿平行于虚轴的直线到 $z=1+i$ 的折线(图 15 中的 L_1)，则积分值为

$$\int_{L_1}\mathrm{Re}(z)dz=\int_0^1 xdx+\int_0^1 idy=\frac{1}{2}+i.$$

如果积分路线是先沿虚轴从 $z=0$到 $z=i$ 然后沿平行于实轴的直线到 $z=1+i$的折线(图 15 中的 L_2)，则

$$\int_{L_2}\mathrm{Re}(z)dz=\int_0^1 0\cdot idy+\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}.$$

两个积分值不相等.

在科希定理中所讨论的是复数积分值与积分路线之间的关系的问题. 下面区分两种情形来说明这定理.

1. 单连通区域的科希定理

单连通区域是这样的区域，在其中作任何简单的闭合围道(即自身不相交的闭合曲线)，围道内的点都是属于区域的点.

科希定理 1 如果函数 $f(z)$在单连通区域 $\overline{G}$ 中解析，则沿 $\overline{G}$ 中任何一个分段光滑的闭合围道 C(可以是 $\overline{G}$ 的边界)有

$$\oint_C f(z)dz=0, \tag{1}$$

符号$\oint$表示积分路线是一个闭合曲线.

证：按 4.1 节(1)式

$$\oint_C f(z)dz=\oint_C udx-vdy+i\oint_C vdx+udy.$$

设$\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$是连续的，右方两个线积分可以用格临(Green)公式

$$\oint_C(Pdx+Qdy)=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \tag{2}$$

化为围道 C 所包围的面积 S 上的面积分，而有

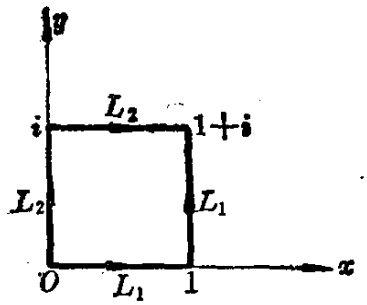


图 15

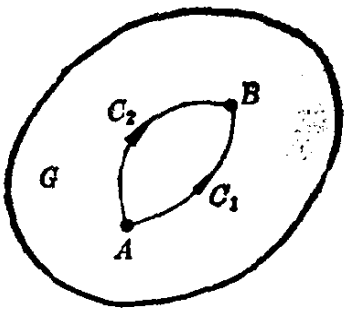


图 16

$$\oint_C f(z)dz=-\iint_S\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy+i\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy.$$

按所设，$f(z)$是 $\overline{G}$ 中的解析函数，其实部 u 和虚部 v 在 $\overline{G}$ 中须满足 CR 条件，因此右方两个面积分之值都等于零．这就证明了科希定理．

在上面的证明中，我们附加了各个偏导数连续的条件，这相当于要求 $f'(z)$连续．这只是由于应用格临公式的原故．关于不用格临公式的证明，读者可参考，例如，普里瓦洛夫，复变函数引论，第四章§2，或 Whittaker and Watson, Modern Analysis，§5.2，p.85.

推论 在单连通区域中解析的函数 $f(z)$的积分值只依赖于起点与终点而与积分路线无关．

证：设 C_1 和 C_2 是单连通区域 G 内从 A 点到 B 点的任意两条曲线(图 16)．按科希定理，

$$\int_{C_1+C_2^-} f(z)dz=0,$$

其中 C_2^-表示与 C_2 相同但走向相反的曲线．于是，由 4.2 节(5)式和(3)式，得

$$\int_{C_1} f(z)dz=-\int_{C_2^-} f(z)dz=\int_{C_2} f(z)dz. \qquad (3)$$

这就证明了推论.

这个推论对于计算积分值显然是很有用的，因为根据这一结果，我们可以在一定范围内改变积分路线，使积分容易计算. 当然，科希定理及其推论的重要意义远不止此.

练习题1. 如果 C_1 和 C_2 除了在 A 和 B 两点相交外还有其他交点，上述推论是否成立?

2. 复连通区域的科希定理

先说明什么是复连通区域以及为什么要考虑这种区域.

在区域 G 内只要有一个简单闭合围道，其内有不属于 G 的点，G 就是复连通区域. 例如图 17 中的区域 G，由围道 C_0 和去掉 α 点、β 线以及阴影部分 γ 的点集所构成，就是一个复连通区域，因为图中 C_1，C_2 和 C_3 等围道内都有不属于 G 的点.

为什么有时要考虑复连通区域呢? 原因是问题中的函数不一定处处都是解析的，可以有奇点[见 2.3 节]. 例如，在图17 的 α 点上函数不可导，或者在 β 线上函数不连续，或者在 γ 中函数没有定义，等等. 如果需要把这些奇点排除在区域之外，就要作一些适当的围道，如图 17 中的 C_1，C_2，C_3 等，把这些奇异部分隔开来，而只考虑以 C_0，C_1，C_2，C_3 等为边界的复连通区域.

科希定理 2 如果 $f(z)$ 是复连通区域 $\overline{G}$ 中的单值解析函数，则

$$\oint_{C_0} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)dz, \tag{4}$$

其中 C_0，C_1，C_2，$\cdots$，C_n 是构成 $\overline{G}$ 的边界的诸分段光滑的闭合曲线，C_1，C_2，$\cdots$，C_n 都在 C_0 的内部. 注意所有积分路线的走向都是逆时针的(或者全是顺时针的).

证：作适当的割线，把原来以 C_0，C_1，$\cdots$，C_n 为边界的复

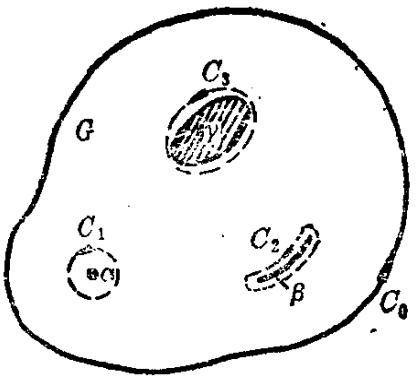


图 17

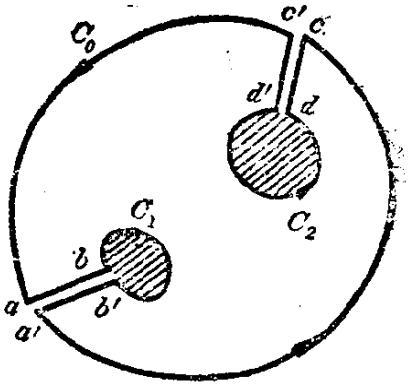


图 18

连通区域化为除了这些曲线之外还加上诸割线的两边缘(图 18 中的 ab, $a'b'$, cd, $c'd'$ 等)为边界的单连通区域. 于是按单连通区域的科希定理[(1)式], 有

$$\oint_{C_0} f(z)\,dz+\int_a^b f(z)\,dz$$
$$+\oint_{C_1^-} f(z)\,dz+\int_{b'}^{a'} f(z)dz$$
$$+\int_c^d f(z)\,dz+\oint_{C_2^-} f(z)\,dz+\int_{d'}^{c'} f(z)dz$$
$$+\cdots=0.$$

由于 $f(z)$ 是单值的, 这里的诸围道积分 $\oint_{C_0}$, $\oint_{C_1^-}$, $\cdots$ 与没有割线时的相应积分值是相等的, 而且, 沿同一割线的两条边缘上的积分值, 例如 $\int_a^b$ 和 $\int_{b'}^{a'}$, 互相抵消[4.2 节(3)式], 于是

$$\oint_{C_0}-\oint_{C_1}-\oint_{C_2}-\cdots=0,$$

故得(4)式.

练习题 2. 在复连通区域的科希定理中能否容许在 C_1, C_2, …等围道内有被积函数的枝点?

练习题 3. 在复连通区域中是单值解析的函数 $f(z)$，其积分值与路线有无关系？

4.4 不定积分·原函数

根据科希定理，在单连通区域 G 内解析的函数 $f(z)$ 沿区域内任一分段光滑曲线的积分值只与起点和终点有关，因此，如果固定起点 z_0，而令终点 z 为变点，则**不定积分**

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz = F(z) \tag{1}$$

是 G 内的一个单值函数. 现在证明 $F(z)$ 在 G 内是解析的，而且

$$F'(z) = f(z). \tag{2}$$

证：设 $z+h$ 是 z 点的任意邻点，则

$$F(z+h)-F(z)=\int_{z_0}^{z+h} f(\xi)\,d\xi-\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi.$$

由于积分值与路线无关，右方两积分之差等于

$$\int_{z}^{z+h} f(\xi)d\xi,$$

而且可以取从 z 点到 $z+h$ 点的直线段为积分路线. 于是

$$\frac{\Delta F}{\Delta z}=\frac{F(z+h)-F(z)}{h}$$

$$=\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(\xi)d\xi,$$

而

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z}-f(z)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(\xi)d\xi-f(z)\right|.$$

把右方的 $f(z)$ 写作 $\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(z)d\xi$，用 4.2 节(1)式，得

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z}-f(z)\right|=\frac{1}{|h|}\left|\int_{z}^{z+h}[f(\xi)-f(z)]d\xi\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{|h|}\int_z^{z+h}|f(\zeta)-f(z)||d\zeta|.$$

今 $f(z)$是连续函数[见 2.2 节(2)式]，故对于任意给定的 $\varepsilon>0$，可以找到 $\delta>0$，使当 $|\zeta-z|<\delta$ 时 $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$，而有

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z}-f(z)\right|<\frac{1}{|h|}\cdot\varepsilon\cdot|h|=\varepsilon.$$

这证明 $F(z)$的导数存在并等于 $f(z)$.

原函数 如果函数 $\Phi(z)$的导数 $\Phi'(z)=f(z)$，则 $\Phi(z)$称为 $f(z)$的原函数. 因此，由不定积分 (1) 定义的函数是被积函数 $f(z)$的一个原函数. $f(z)$的原函数不是唯一的，例如取不定积分的下限不同，就得到不同的原函数. 但是可以证明，任意两个原函数之差只能是一个常数. 设 $\Phi_1(z)$和 $\Phi_2(z)$是 $f(z)$的两个原函数，则因

$$\Phi'_1(z)=\Phi'_2(z)=f(z),$$

故
$$[\Phi_1(z)-\Phi_2(z)]'=0,$$

而有
$$\Phi_1(z)-\Phi_2(z)=C(\text{常数})$$

(参看 2.3 节练习题 2).

与实数的情形一样，知道了一个函数 $f(z)$的原函数，对于计算这函数的积分很方便. 设 $\Phi(z)$为 $f(z)$的原函数，则按方才得到的结论和(1)式，有

$$\Phi(z)=F(z)+C=\int_{z_0}^{z}f(z)dz+C.$$

令 $z=z_0$，可定出 $C=\Phi(z_0)$，故

$$\int_{z_0}^{z}f(z)dz=\Phi(z)-\Phi(z_0). \tag{3}$$

例. 计算积分$\int_a^b z^n dz$之值，n 为整数.

当 $n\neq -1$ 时，$\frac{z^{n+1}}{(n+1)}$ 是 z^n 的原函数，故

$$\int_a^b z^n dz=\frac{1}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1}),\quad n\neq -1.$$

当 $n=-1$ 时，$\ln z$ 是 z^{-1} 的原函数（参看 3.5 节练习题 3），故

$$\int_a^b \frac{dz}{z}=\ln b-\ln a=\ln\left|\frac{b}{a}\right|+i(\arg b-\arg a).$$

这个积分值与积分路线有关，因为右方的虚部（b 和 a 两点辐角之差）是与由 a 到 b 的路线有关的，如果两条不同路线之间含有 $\ln z$ 的枝点 $z=0$ 的话.

普遍说来，如果函数 $f(z)$ 没有奇点，则不定积分 $\int_{z_0}^{z} f(z)dz=F(z)$ 是单值的，因为积分值与积分路线无关. 但若被积函数有奇点，则由不定积分给出的函数可能是多值的. 被积函数的奇点可能是这函数的枝点. 例如上面例子中 $n=-1$ 的情形，被积函数 z^{-1} 的奇点 $z=0$ 是它的原函数 $\ln z$ 的枝点.

4.5 科希积分公式

我们说过，解析函数是一类具有特殊性质的复变函数. 这种特殊性质的突出表现之一是，在函数解析的区域中，各处的函数值不是互相独立的，而是密切关联着的. 这种关联的表现形式之一就是本节要讨论的科希积分公式.

设 $f(z)$ 是区域（可以是复连通的）$\overline{G}$ 中的单值解析函数，$\overline{G}$ 的边界 C 是分段光滑曲线，a 为 G 内任意一点，则

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz, \tag{1}$$

其中积分路线是沿边界 C 的正向（正向是指当沿着这方向走动时，所考虑的区域始终保持在左方，参看 2.1 节）. 例如图 19 中，

$C=C_0+C_1+C_2$，其中 C_0 的走向是逆时针的，而 C_1，C_2 的走向是顺时针的，区域 G 总是在边界走向之左．公式(1)称为科希积分公式，它表示出在 G 内任意一点 a 的函数值 $f(a)$ 与在 $\overline{G}$ 的边界上的函数值之间的关系．这公式的证明如下：

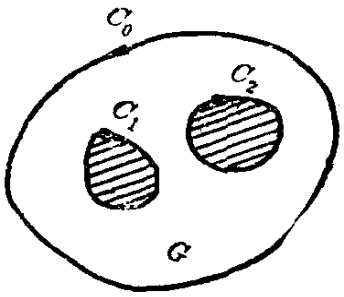


图 19

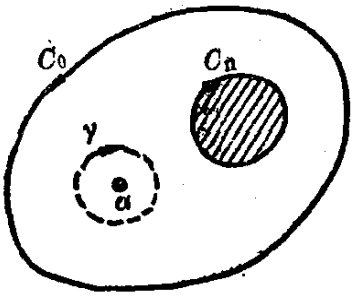


图 20

设 $C=C_0+\sum_n C_n$，在图 20 中只画出 C_0 和 C_n 中的一个作为代表．由于 a 一般是函数 $\frac{f(z)}{(z-a)}$ 的奇点，故须排除在外．为此，以 a 为圆心作一小圆 γ，其半径以后确定．于是，在以 C 和 γ 为边界的区域中，函数 $\frac{f(z)}{(z-a)}$ 是单值解析的，可以应用复连通区域的科希定理[4.3 节(4)式]，而得

$$\oint_{C_0}\frac{f(z)}{z-a}dz=\sum_n\oint_{C_n^-}\frac{f(z)}{z-a}dz+\oint_{\gamma^-}\frac{f(z)}{z-a}dz,$$

其中 C_n^-，γ^- 分别表示与 C_n 和 γ 相同但走向相反的围道．移项并注意 $C=C_0+\sum_n C_n$，得

$$\oint_C\frac{f(z)}{z-a}dz=\oint_{\gamma^-}\frac{f(z)}{z-a}dz$$

$$=\oint_{\gamma^-}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz+f(a)\oint_{\gamma^-}\frac{dz}{z-a}. \qquad (2)$$

最后一个积分的被积函数的原函数是 $\ln(z-a)$，故

$$\oint_{\gamma^-}\frac{dz}{z-a}=[\ln(z-a)]_{\gamma^-}=2\pi i. \tag{3}$$

这是因为当 z 点绕 a 点转一圈(逆时针方向)回到原处时，$z-a$ 的模不变，而 $\arg(z-a)$ 增加了 2π(参看 3.5 节). (3) 式也可以证明如下：令 $z-a=re^{i\varphi}$，r 为小圆 γ 的半径，则在 γ 上 $dz=re^{i\varphi}\cdot id\varphi$，而有

$$\oint_{\gamma^-}\frac{dz}{z-a}=i\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi i.$$

把这结果代入(2)式，移项，并取绝对值，得

$$\left|\int_C\frac{f(z)}{z-a}dz-2\pi i f(a)\right|=\left|\oint_{\gamma^-}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz\right|$$
$$\leqslant\oint_{\gamma^-}\frac{|f(z)-f(a)|}{|z-a|}|dz|. \tag{4}$$

今 $f(z)$在 a 点是连续的，故任意给定 $\varepsilon>0$，必有 $\delta>0$，使当 $|z-a|<\delta$ 时 $|f(z)-f(a)|<\varepsilon$. 取 γ 的半径 $r<\delta$，则

$$\oint_{\gamma^-}\frac{|f(z)-f(a)|}{|z-a|}|dz|<\frac{\varepsilon}{r}\cdot 2\pi r=2\pi\varepsilon.$$

代入(4)式，得

$$\left|\int_C\frac{f(z)dz}{z-a}-2\pi i f(a)\right|<2\pi\varepsilon.$$

但 ε 是任意小的正数，而左方之值与 ε 的选取无关，故必有

$$\int_C\frac{f(z)}{z-a}dz-2\pi i f(a)=0.$$

这证明了公式(1).

练习题. 设 $f(z)$在 $\bar{G}$ 中单值解析，a 是 $\bar{G}$ 外的一点，证明

$$\int_C\frac{f(z)}{z-a}dz=0,$$

C 是 $\bar{G}$ 的边界.

无界区域的科希积分公式 如果 $f(z)$在简单闭合围道 C 上及 C 外单值解析，而且当 z 趋于无穷时 $f(z)$一致趋于零，即任意

给定 $\varepsilon>0$，存在 $R_1>0$，使当 $|z|>R_1$ 时，$|f(z)|<\varepsilon$，则科希积分公式成立，即

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz, \qquad (5)$$

其中 a 是 C 外任意一点，积分路线 C 的走向是顺时针的，即沿边界 C 的正向.

证：以 $z=0$ 为圆心，R 为半径作一足够大的圆 C_R 把围道 C 和 a 点都包含于内，而且在 C_R 上 $|f(z)|<\varepsilon$（只要取 $R>R_1$ 即可）. 于是，应用科希积分公式 (1) 于 C_R 和 C 之间的区域，得

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(z)}{z-a}dz+\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}dz,$$

其中 C_R 的走向是逆时针的. 今

$$\left|\oint_{C_R}\frac{f(z)}{z-a}dz\right|\leqslant\oint_{C_R}\frac{|f(z)|}{|z-a|}|dz|<\frac{\varepsilon}{R-|a|}\cdot 2\pi R,$$

故

$$\left|f(a)-\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}dz\right|<\frac{\varepsilon}{R-|a|}\cdot 2\pi R.$$

当 $R\to\infty$ 时，$\frac{R}{(R-|a|)}\to 1$. 但 ε 可以任意小，而上式的左方之值与 R 和 ε 的选取无关，故必等于零而得 (5) 式.

显然，上面的结果不限于 C 是简单围道的情形，而是适用于任何无界区域.

4.6 科希积分公式的几个重要推论

1. 解析函数的高阶导数 如果 $f(z)$ 在 $\overline{G}$ 中解析，则在 G 内 $f(z)$ 的任何阶导数 $f^{(n)}(z)$ 均存在，并且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta, \qquad (1)$$

其中 C 是 $\overline{G}$ 的正向边界，ζ 是 C 上的变点.

证：由科希积分公式有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{2}$$

很容易看出,(1)式是(2)式在积分号下对 z 求 n 次导数的结果. 因此,只需要证明在积分号下对 z 求导数是合法的.

由(2)式有

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{h}\int_C\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta-z-h}-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right]d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}d\zeta.$$

今

$$\left|\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}-\int_C\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^2}\right|$$

$$=\left|\int_C\frac{hf(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)^2}\right|<|h|Ml,$$

其中 l 是 C 的周长, M 是函数 $\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)^2}\right|$ 的上界[由于 $f(\zeta)$ 是连续函数,故只要 $|h|$ 足够小,例如小于 $\frac{|\zeta-z|}{2}$ 的下界, $\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)^2}\right|$ 便是有界的]. 因此,

$$f'(z)=\lim_{h\to0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta. \tag{3}$$

由此,用数学归纳法,即可证明(1)式.

从这结果看到复变函数与实变函数的一个重要差异. 一个复变函数在一区域中只要有一阶导数,则它的任何阶导数都存在,并因此都是这区域内的解析函数;而我们知道实变函数并非如此.

2. 科希不等式 设函数 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{G}$ 中解析,则由于 $|f(z)|$ 在 $\overline{G}$ 的边界上是连续的, $|f(z)|$ 必有上界 M,而且达到此上界. 于是,由(1)式和 4.2 节(2)式得

$$\left|f^{(n)}(z)\right|=\frac{n!}{2\pi}\left|\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\right|\leqslant\frac{n!}{2\pi}\frac{Ml}{d^{n+1}},\qquad(4)$$

其中 l 是边界 C 的全长，d 是由 z 到边界点的最短距离.

在边界是半径为 R 的圆的特殊情形下，对于圆心 z_0 有

$$|f^{(n)}(z_0)|\leqslant\frac{n!M}{R^n},\qquad(5)$$

这是科希不等式.

3. 均值定理 由科希积分公式还可以得到一个重要的结果：解析函数 $f(z)$ 在其解析区域 G 内任意一点 a 的函数值 $f(a)$，等于在以 a 为圆心、完全位于 G 内的任意一个圆上的函数值的平均，即

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+Re^{i\theta})d\theta.\qquad(6)$$

证：设 C 是以 a 为圆心、以 R（任意）为半径的一个圆，由科希积分公式有

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-a}dz.$$

令 $z-a=Re^{i\theta}$，则 $dz=Re^{i\theta}\cdot id\theta$，代入上式即得(6).

4. 最大模定理 若 $f(z)$ 是闭区域 $\overline{G}$ 中的解析函数，则模 $|f(z)|$ 的最大值在 $\overline{G}$ 的边界上.

证：以 M 表示 $|f(z)|$ 在 $\overline{G}$ 的边界 C 上的上界，应用(4)式 $(n=0)$ 于解析函数 $[f(z)]^m$（m 是正整数），得

$$|f(z)|^m\leqslant\frac{M^ml}{2\pi d},$$

故

$$|f(z)|\leqslant M\left(\frac{l}{2\pi d}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

令 $m\to\infty$，即得 $|f(z)|\leqslant M$.

用更精确的方法①可以证明在 G 内 $|f(z)|<M$，除非 $|f(z)|$

① 参看：例如，И. И. 普里瓦洛夫，复变函数引论，第五章 § 2.5.

$\equiv M$，这时 $f(z)$ 是一个常数(关于最后一点见 3.5 节练习题 4)。

5. 刘维(Liouville)定理 如果 $f(z)$ 在全平面上解析(无穷远点可能除外)，而且当 $z\to\infty$ 时 $|f(z)|$ 有界，则 $f(z)$ 是一个常数。

证：以任意有限点 z 为圆心、R 为半径作一圆 C_R，则根据科希不等式(5)有

$$|f'(z)|\leqslant\frac{M_R}{R},$$

M_R 是 $|f(z)|$ 在圆周上的上界，故当 $R\to\infty$ 时，右方趋于零。但左方 $|f'(z)|$ 之值与 R 的选取无关，故 $f'(z)$ 必等于零，而 $f(z)\equiv$常数(见 2.3 节练习题 2)。

4.7* 解析函数的实部和虚部的关系

在 2.4 节中证明过，只要知道了一个解析函数的实部(或者虚部)在一个区域中的值，就可以根据 CR 条件求出其虚部(或者实部)在同一区域中的值，从而确定解析函数本身(可差一常数加项)。现在将根据科希积分公式进一步证明，一个在上半平面解析的函数 $f(z)$，如果当 z 在上半平面趋于∞时 $|f(z)|$ 一致趋于零，那末只要知道 $f(z)$ 的实部或者虚部在实轴上之值，就可以确定 $f(z)$ 本身。

考虑如图 21 中的围道 C：沿实轴从 $-R$ 到 R 加上半圆 C_R (C_R 的圆心在原点 O，半径为 R)。z 是上半平面中的任意一点。

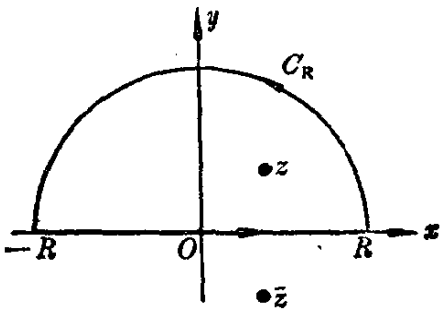


图 21

只要 R 足够大，z 就在 C 内，而有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta, \qquad (1)$$

$\zeta=\xi+i\eta$ 表示 C 上的变点. 以 $\bar{z}$ 表示 z 的共轭复数，$\bar{z}=x-iy$，则 $\bar{z}$ 在 C 外，而有

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-\bar{z}}d\zeta \qquad (2)$$

(参看 4.5 节练习题).

把(1),(2)两式相减，得

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}-\frac{f(\zeta)}{\zeta-\bar{z}}\right]d\zeta\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{2iyf(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-\bar{z})}d\zeta\\&=\frac{y}{\pi}\left\{\int_{-R}^{R}\left[\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-\bar{z})}\right]_{\eta=0}d\xi\right.\\&\left.+\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-\bar{z})}d\zeta\right\}.\end{aligned}$$

很容易看出在 C_R 上 $|\zeta-z|\geqslant R-|z|$，$|\zeta-\bar{z}|\geqslant R-|\bar{z}|$，故[用 4.2 节(2)式]

$$\left|\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-\bar{z})}d\zeta\right|\leqslant\frac{M\cdot\pi R}{(R-|z|)^2},$$

M 是 $|f(z)|$ 在 C_R 上的上界. 可见当 $R\to\infty$ 时，C_R 上的积分值趋于零，而有

$$f(z)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)|_{\eta=0}}{(\xi-x)^2+y^2}d\xi.$$

以 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 分别表示 $f(z)$ 的实部和虚部，由上式得

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}d\xi, \qquad (3)$$

$$v(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}d\xi. \qquad (4)$$

由这两个公式只能分别从实部在实轴上之值确定实部，从虚部在实轴上之值确定虚部，仅知其一还不能确定解析函数. 要解决这问题，可将(1)和(2)相加，得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\xi)\left[\frac{1}{\xi-z}+\frac{1}{\xi-\bar{z}}\right]d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\xi)(2\xi-2x)}{(\xi-z)(\xi-\bar{z})}d\xi.$$

根据假设，当 z 在上半平面趋于∞时$|f(z)|$一致趋于零，故对于任意的$\varepsilon>0$，存在 R，使在 C_R 上$|f(\xi)|<\varepsilon$，而有

$$\left|\int_{C_R}\frac{f(\xi)(2\xi-2x)d\xi}{(\xi-z)(\xi-\bar{z})}\right|<\frac{\varepsilon\cdot 2R\cdot\pi R}{(R-|z|)^2}.$$

可见当 $R\to\infty$时，C_R 上的积分值趋于零，而

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{f(\xi)(2\xi-2x)}{(\xi-z)(\xi-\bar{z})}\right]_{\eta=0}d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[u(\xi,0)+iv(\xi,0)](\xi-x)}{(\xi-x)^2+y^2}d\xi.$$

比较两边的实部和虚部，得

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(\xi,0)\cdot(\xi-x)}{(\xi-x)^2+y^2}d\xi, \qquad (5)$$

$$v(x,y)=\frac{-1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi,0)\cdot(\xi-x)}{(\xi-x)^2+y^2}d\xi. \qquad (6)$$

利用(3)和(6)[或者(4)和(5)]，可以从 $f(z)$ 的实部(或者虚部)在实轴上之值求出 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. 这些公式在许多物理问题中有重要应用.

练习题1. 如果$f(z)$是上半平面中的解析函数，而且当 z 在上半平面趋于∞时一致趋于零，证明：

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\zeta,0)}{\zeta-(x+iy)}d\zeta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(\xi,0)}{\xi-(x+iy)}d\xi$$

练习题2. 如果 $f(z)$是下半平面中的解 析函数，而且当 z 在下半平面趋于∞时 $f(z)$一致趋于零，上面的公式(3)～(6)应如 何修改？

4.8 科希型积分

分析一下 4.6 节中关于解析函数的各阶导数均存在的证明，就会发现在证明中只用到函数在曲线 C 上的连续性，而且也不需要 C 是闭合的. 因此可以推断，在一条 分段光 滑的(闭合或者不闭合)曲线 C 上连续的函数 $\varphi(\xi)$所构成的积分

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi-z} \qquad (1)$$

是不在曲线上的点 z 的一个解析函数. 这样的积分称为科希型积分. $f(z)$的导数可以通过在积分号下对 z 求导数得到：

$$f^{(p)}(z)=\frac{p!}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{p+1}}. \qquad (2)$$

对于积分曲线上的 z 点，积分(1)在通常意义下不存在，因为积分变数 ξ 要通过 z 点. 关于 这一问 题的详细讨论，读者可参考 И.И.普里瓦洛夫，复变函数引论，第四章 § 3.7，或者 M.A.拉甫伦捷夫，Б.A.沙巴特，复变函数论方法，第三章§3.

第五章 无穷级数

无穷级数，特别是幂级数，是解析函数的最重要的表达形式之一．除了代数函数，许多初等函数和特殊函数都是以幂级数作为定义的．

本章的主要内容是关于复数级数的基本概念，解析函数级数的外氏(Weierstrass)定理，以及关于幂级数的阿贝耳(Abel)定理．复数级数的基本概念有很多与实数级数是相同的，我们将只对于其中一些主要的概念作简单说明．

5.1 复数级数

1．收敛及其判据 一个复数级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_k+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}u_k, \tag{1}$$

如果它的部分和

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n(n=1,2,3,\cdots) \tag{2}$$

所构成的序列$\{S_n\}$收敛，则级数称为收敛的，而序列的极限$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$称为级数(1)的和；否则级数称为发散的．

根据1.3节关于序列收敛的判据——科希充要条件，得**级数(1)的收敛判据**：任意给定$\varepsilon>0$，存在n，使对于任意正整数p有

$$|S_{n+p}-S_n|=|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon. \tag{3}$$

由(3)式，令$p=1$，得级数(1)收敛的一个必要条件：

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0. \tag{4}$$

因此，如果一个级数的普遍项u_n当$n\to\infty$时不趋于零，这个级数必是发散的．

令α_k和β_k分别表示u_k的实部和虚部，则

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k .$$

如果 $\sum u_k$ 收敛，则 $\sum \alpha_k$ 和 $\sum \beta_k$ 必分别收敛. 反过来，如果 $\sum \alpha_k$ 和 $\sum \beta_k$ 都收敛，则 $\sum u_k$ 收敛. 只要 $\sum \alpha_k$ 和 $\sum \beta_k$ 两级数之一发散，$\sum u_k$ 必是发散的. 由于这个缘故，对于一个复数级数 $\sum u_k$，可以应用关于实数级数的各种收敛检验法于其实部 $\sum \alpha_k$ 和虚部 $\sum \beta_k$，以判别 $\sum u_k$ 是否收敛.

2. 绝对收敛 如果 $\sum |u_k|$ 收敛，则 $\sum u_k$ 称为绝对收敛的. 绝对收敛的级数必定是收敛的，因为

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \leqslant |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+p}| .$$

但是一个收敛的级数则不一定是绝对收敛的.

一个绝对收敛的级数，它的各项的次序可以任意改换而不影响级数的和.

绝对收敛的比值检验法 由于要检验其收敛性的级数 $\sum |u_k|$ 是一个正项级数，故对于正项级数的任何合适的收敛检验法都可应用. 但几乎所有重要级数的绝对收敛性都可以用比值法来检验，因此下面特别说明这种检验法.

如果只要 n 大于某固定正整数 r，级数 $\sum u_n$ 的相邻项的模之比 $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ 总小于一个与 n 无关的正数 ρ，而且 $\rho<1$，则级数 $\sum u_n$ 绝对收敛.

证：按所设，有

$$|u_{r+1}| + |u_{r+2}| + \cdots < |u_{r+1}|(1 + \rho + \rho^2 + \cdots) .$$

但右方的几何级数当 $\rho<1$ 时是收敛的，故 $\sum_{n=r+1}^{\infty} |u_n|$ 收敛.

这定理的一个特殊情形是，如果

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l < 1, \tag{5}$$

则级数 $\sum u_n$ 绝对收敛.

$$\text{如果}\qquad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1, \tag{6}$$

则级数 $\sum u_n$ 发散,因为在这种情况下,级数的普遍项 u_n 当 $n\to\infty$ 时不趋于零[参看(4)式].

$$\text{当}\qquad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1 \tag{7}$$

时,$\sum u_n$ 的绝对收敛性需要进一步检验.设

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=1+\frac{\mu}{n}+O(n^{-\lambda})\text{①}, \tag{8}$$

其中 $\mu=\alpha+i\beta$,$\lambda>1$.可以证明,如果 $\alpha>1$[即 $\mathrm{Re}(\mu)>1$],则 $\sum u_n$ 绝对收敛;如果 $\alpha\leqslant 1$,则级数不可能绝对收敛.证明如下:

$$\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|}=\left\{\left[1+\frac{\mu}{n}+O(n^{-\lambda})\right]\left[1+\frac{\bar{\mu}}{n}+O(n^{-\lambda})\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{1+\frac{2\alpha}{n}+O(n^{-k})\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=1+\frac{\alpha}{n}+O(n^{-k})[\kappa=\min(\lambda,2)>1].$$

故由实数级数的相应判据得知,当 $\alpha>1$ 时 $\sum|u_n|$ 收敛,当 $\alpha\leqslant 1$ 时 $\sum|u_n|$ 发散.

还可进一步证明,当一个级数的邻项的比值可以写成(8)式时,级数要就绝对收敛,要就发散,不可能是收敛而不绝对收敛(参看 Bromwich, Infinite Series, § 79, p.240, 1925).

绝对收敛级数的相乘 设

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k=A,\quad \sum_{l=0}^{\infty}b_l=B$$

是两个绝对收敛的级数,则其乘积

① 关于符号 O 参看 2.2 节(3)式后面的说明.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_k b_l \tag{9}$$

也是绝对收敛的，其和等于 AB（在右方的二重级数中，下标 k 和 l 互相独立地取由 0 到∞的整数值）．这结果的证明与实数情形相同．

通常把(9)式右方级数中的项按照 $k+l=n(n=0,1,2,\cdots)$ 的次序排列，即

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \\ &c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{l=0}^{n} a_{n-l} b_l. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

对于按照(10)式乘起来的级数有下列结果：

定理 1 只要两个收敛级数 $\sum a_k, \sum b_l$ 之一绝对收敛，$\sum c_n$ 就是收敛的，而且 $\sum c_n = A \cdot B$．

定理 2 如果 $\sum a_k, \sum b_l, \sum c_n$ 三个级数都收敛，其和分别为 A, B, C，则 $C = A \cdot B$．

关于这两个定理的证明可参考 Knopp, Theory of Infinite Series, § 45.

例：指数函数 e^z 可以用幂级数 $1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots=\sum_{0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ 作为定义（参看 5.4 节）．现在证明 $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$，a 和 b 是两个任意的复数．

用比值检验法很容易证明 e^a 的级数是绝对收敛的，因为当 $n \to \infty$ 时

$$\left|\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}}\right| = \frac{|a|}{n+1} \to 0$$

对于 e^b 也有同样的结果. 因此

$$e^a\cdot e^b=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\frac{b^l}{l!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\frac{b^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a^kb^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+b)^n}{n!}=e^{a+b}. \quad (11)$$

5.2 函数级数 · 外氏(Weierstrass)定理

设 $u_k(z)(k=1,2,3,\cdots)$是某区域 G 中的单值解析函数. 如果级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$在 G 内的**每一点**都收敛,则说级数在 G 内收敛;其和 $S(z)$是 G 内的一个单值函数.

一致收敛 方才所说的收敛是对 G 内的点逐一考虑的,即对于 G 内一点 z,任意给定 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使当 $n>N$ 时

$$|S(z)-S_n(z)|<\varepsilon\left[\ S_n(z)=\sum_{k=1}^{n}u_k(z)\right]. \quad (12)$$

但 N 一般随 z(和 ε)不同而不同. **如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在一个与 z 无关的$N(\varepsilon)$,使当$n>N(\varepsilon)$时(12)式成立**,也就是说,在 G 内的不论哪一点,以 $S_n(z)$代 $S(z)$时,误差的绝对值恒小于 ε,**则称级数**$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$**在$G$内一致收敛.**

级数一致收敛的M检验法 若在区域G内$|u_k(z)|<a_k$,a_k是与 z 无关的正数,而 $\sum a_k$ 收敛,则 $\sum u_k(z)$在G内绝对而且一致收敛.

证:因

$$|u_{n+1}(z)|+|u_{n+2}(z)|+\cdots+|u_{n+p}(z)|<a_{n+1}+$$
$$+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p},$$

而对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 n(与 z 无关),使对于任意的 p 有 $a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}<\varepsilon$.

一致收敛的函数级数$\sum u_k(z)$有下列重要特性：

1．如果级数的每一项$u_k(z)$都是G内的连续函数，则其一致收敛的和$S(z)$也是G内的连续函数．证明如下．设z_0是G内任意一点，z是z_0邻域内的点，则由1.2节(12)有

$$\begin{aligned}|S(z)-S(z_0)| &= |S(z)-S_n(z)+S_n(z)-S_n(z_0)+\\ &+S_n(z_0)-S(z_0)| \leqslant |S(z)-S_n(z)|+|S_n(z)-\\ &-S_n(z_0)|+|S(z_0)-S_n(z_0)|.\end{aligned}$$

任意给定$\varepsilon>0$，只要选$n>N\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$，就有

$$|S(z)-S_n(z)|<\frac{\varepsilon}{3},\ |S(z_0)-S_n(z_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

又因$S_n(z)=\sum_{k=1}^{n}u_k(z)$是连续函数，故存在$\delta$使当$|z-z_0|<\delta$时$|S_n(z)-S_n(z_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$．总起来，只要$|z-z_0|<\delta$，就有$|S(z)-S(z_0)|<\varepsilon$，即$S(z)$在$z_0$点连续．但$z_0$是$G$内的任意点，故$S(z)$是$G$内的连续函数．

2．逐项求积分　设C是区域G内的一条分段光滑曲线，如果$u_k(z)(k=1,2,\cdots)$是C上的连续函数，则对在C上一致收敛的级数$\sum u_k$可以逐项求积分：

$$\int_C\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)dz=\sum_{k=1}^{\infty}\int_C u_k(z)dz. \tag{13}$$

证：由上面的结果知道$\sum u_k(z)$是C上的连续函数，故左方积分存在，而有

$$\begin{aligned}\int_C\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)dz &= \int_C\sum_{k=1}^{n}u_k(z)dz+\int_C R_n(z)dz\\ &=\sum_{k=1}^{n}\int_C u_k(z)dz+\int_C R_n(z)dz,\end{aligned}$$

其中 $R_n(z)=S(z)-S_n(z)$. 因级数是一致收敛的，故对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在与 z 无关的 $N(\varepsilon)$，只要 $n>N(\varepsilon)$ 就有 $|R_n(z)|<\varepsilon$，而

$$\left|\int_C R_n(z)\,dz\right|<\varepsilon l,$$

l 是 C 的全长[4.2 节(2)]. 因此，

$$\int_C\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)dz=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_C u_k(z)dz=\sum_{k=1}^{\infty}\int_C u_k(z)dz.$$

3. 逐项求导数——外氏定理 一个实变函数级数 $\sum u_k(x)$ 能够逐项求导数的条件是在 x 的一定区间内级数本身收敛，$\sum u_k'(x)$ 一致收敛（设每一项的导数存在）. 对于复变函数级数 $\sum u_k(z)$，只要在一定区域内这级数一致收敛，而且每一项的导数存在(即每一项都是 z 的解析函数)，则逐项求导数就是合法的. 这一结果包含在下面的外氏定理中.

外氏定理 设 $u_k(z)(k=1,2,\cdots)$ 是 $\overline{G}$ 中的单值解析函数，级数 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ 在 $\overline{G}$ 中一致收敛，则这级数之和 $f(z)$ 是 G 内的解析函数，$f(z)$ 的各阶导数可以由 $\sum u_k(z)$ 逐项求导数得到，即

$$f^{(p)}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k^{(p)}(z),\tag{14}$$

而且最后的级数在 G 内的任意一个闭区域中一致收敛.

证：这个定理证明的关键在于利用科希积分公式，把求导数的问题化为求积分的问题来讨论.

根据科希积分公式，有

$$u_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{u_k(\xi)\,d\xi}{\xi-z},$$

其中 z 是 G 内任意一点，ξ 是 G 的边界 C 上的变点. 因此，

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}\int_C\frac{u_k(\xi)d\xi}{\xi-z}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\sum_{k=1}^{\infty}u_k(\xi)\,d\xi}{\xi-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z},$$

其中求积分与求和的换序是合法的，因为级数一致收敛. $f(z)$既然已经表达为科希型积分(4.8节)，其中 $f(\xi)=\sum u_k(\xi)$ 是 C 上的连续函数，故 $f(z)$是 G 内的解析函数.

现在证明(14)式. 设 $\overline{G}_1$ 是 G 内任意一个闭区域，边界为分段光滑曲线 C_1，则 $f(z)$在 $\overline{G}_1$ 中解析. 根据 4.6 节(1)式，即得

$$f^{(p)}(z)=\frac{p!}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{p+1}}=\frac{p!}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{\sum_{k=1}^{\infty}u_k(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{p+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p!}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{u_k(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{p+1}}=\sum_{k=1}^{\infty}u_k^{(p)}(z).$$

在证明中再次利用了级数的一致收敛性.

再证明(14)中的级数在 $\overline{G}_1$ 中一致收敛. 因为 $\sum u_k(\xi)$ 在 C_1 上一致收敛，故只要 n 取得足够大，$\left|\sum_{k=n+1}^{n+q}u_k(\xi)\right|$ 可以小于任何正数 ε，而有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+q}u_k^{(p)}(z)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+q}\frac{p!}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{u_k(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{p+1}}\right|$$

$$\leqslant\frac{p!}{2\pi}\int_{C_1}\frac{\left|\sum_{k=n+1}^{n+q}u_k(\xi)\right|}{|\xi-z|^{p+1}}|d\xi|$$

$$\left(\because\oint_C=\oint_{C_1}\right)$$

$$<\frac{p!el_1}{2\pi\delta^{p+1}},$$

其中 l_1 是 C_1 的全长，δ 是 C_1 与 C 两个边界相互间距离的下界。于是，根据级数一致收敛的定义，注意现在 n 的选取与 z 无关，即知(14)中的级数在 $\overline{G}_1$ 中一致收敛。

练习题. 利用 4.6 节的最大模定理，证明，如果级数 $\sum u_k(z)$ 在 G 的边界 C 上一致收敛，则这级数在 $\overline{G}=G+C$ 中一致收敛。因此，外氏定理中关于 $\sum u_k(z)$ 在闭区域 $\overline{G}$ 中一致收敛的条件可以放宽为只要求级数在 G 的边界 C 上一致收敛。

外氏定理可应用于由解析函数构成的一致收敛的序列。序列 $\{f_n(z)\}$称为一致收敛的，如果对于任何 $s>0$，存在与 z 无关的 n，使对于任意正整数 p 有 $|f_{n+p}(z)-f_n(z)|<s$.

设$\{f_n(z)\}$是一个在区域 $\overline{G}$ 中一致收敛的解析函数序列，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z)=f(z),$$

则 $f(z)$是 G 内的解析函数，而且

$$f^{(p)}(z)=\lim_{n\to\infty}f_n^{(p)}(z). \tag{15}$$

证：$f_n(z)$可写为

$$\begin{aligned}f_n(z)&=f_1(z)+[f_2(z)-f_1(z)]+\cdots+[f_n(z)-f_{n-1}(z)]\\&=u_1(z)+u_2(z)+\cdots+u_n(z),\end{aligned}$$

其中 $u_1(z)=f_1(z)$，$u_k(z)=f_k(z)-f_{k-1}(z)(k\geqslant 2)$是 $\overline{G}$ 中的解析函数。于是，$f_n(z)$代表级数 $\sum u_k(z)$的部分和。$\{f_n(z)\}$ 既是一致收敛的，级数 $\sum u_k(z)$也就一致收敛。因此级数的和数 $f(z)$是G 内的解析函数。

5.3 幂级数 · 阿贝耳(Abel)第一定理

幂级数通常是指正整数幂$(z-a)^n$ 的级数

$$c_0+c_1(z-a)+\cdots+c_n(z-a)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n. \quad (1)$$

这级数的每一项都是解析函数[2.2 节(3)式].

阿贝耳第一定理讨论级数(1)的收敛性.

定理 如果级数(1)在某点 z_0 收敛,则它在以 a 为圆心、半径等于 $|z_0-a|$ 的圆内绝对收敛,而且在略小于这个圆的圆 $|z-a|\leqslant r(<|z_0-a|)$ 中一致收敛.

证: 由于级数(1)在 $z=z_0$ 收敛,故

$$\lim_{n\to\infty}c_n(z_0-a)^n=0$$

[5.1 节(4)式],而存在正数 g 使

$$|c_n(z_0-a)^n|<g \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

今 $$|c_n(z-a)^n|=|c_n(z_0-a)^n|\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n<g\frac{r^n}{|z_0-a|^n},$$

而 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{|z_0-a|^n}$ 是一个收敛的几何级数,故按 5.2 节的 M 检验法,级数(1)在 $|z-a|\leqslant r(<|z_0-a|)$ 中绝对而且一致收敛.

练习题 1. 对于负整数幂的级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^{-n}$ 进行类似讨论.

推论 若级数(1)在某点 z_1 发散,则这级数在圆 $K_1:|z-a|=|z_1-a|$ 的外面处处发散. 因为如果在 K_1 外的一点 z_2 级数收敛,则按阿贝耳定理,级数将在圆 $K_2:|z-a|=|z_2-a|$ 内收敛,而这是与级数在 z_1 点发散矛盾的(因 z_1 在 K_2 内).

收敛圆 考虑从 a 点到无穷远的一条射线. 关于级数(1)的收敛性有三种可能情形.

1) 除了在 $z=a$ 点级数成为常数 c_0 外,在射线上所有其他点级数都是发散的. 根据上面的推论,这级数在全平面上,除 a 点外,是发散的[参看下面例 7].

2) 在射线上所有有限点级数都收敛,则根据阿贝耳定理可知

在全平面上，除∞点外，级数是收敛的(参看下面例 3).

3) 在射线上的有些点级数是收敛的，在另一些点级数是发散的. 根据阿贝耳定理及其推论，这些收敛点和发散点是不会相间的. 因此可以想到在这种情形下，存在一点 A(图 22)，把射线分为两部分，在从 a 到 A 的一段上级数处处收敛，在从 A 到∞的一段上级数处处发散，在 A 点，级数可能是收敛的，也可能是发散的. 事实上可以严格证明，这样的 A 点的确存在(参看，例如，И. И. 普里瓦洛夫，复变函数引论，第二章 §.3.3). 于是，按阿贝耳定理，在以 a 为圆心及 $\overline{aA}$ 为半径的圆内级数(1)收敛，在这圆外级数发散，在圆上级数可能在某些点收敛，而在另外一些点发散. 这圆称为**收敛圆**，它的半径称为级数(1)的收敛半径.

总括上面三种情形，可以说，对于级数(1)，总存在一个收敛圆，圆的半径 R 是由 0 到∞之中的某一数值.

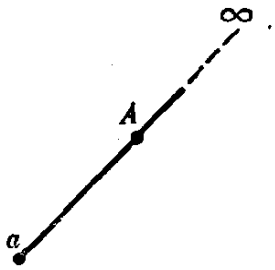


图 22

求收敛半径的公式 为了书写简单起见，设 $a=0$，而考虑级数 $\sum c_n z^n$. 下面证明，这级数的收敛半径由系数 c_n 决定，同时给出求收敛半径的两个公式.

1. 考虑序列 $|c_n z^n|^{\frac{1}{n}}(n=1,2,\cdots)$ 的最大极限（参看 1.3 节①)

$$G=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|c_n z^n|^{\frac{1}{n}}.$$

我们将证明，如果 $G<1$，则级数 $\sum c_n z^n$ 绝对收敛，如果 $G>1$，则级数发散.

设 $G<\rho<1$，则因序列中只可能有有限个大于 ρ，故存在 m，使当 $n>m$ 时有

$$|c_n z^n|^{\frac{1}{n}}<\rho<1.$$

① 关于最大极限的概念的详细说明，可参看 Г. М. 菲赫金哥尔茨，微积分学教程，第一卷，第一章 § 4[42](1958)，或 И.И 普里瓦洛夫，复变函数引论，第二章 § 3.4.

于是 $$|c_n||z|^n<\rho^n.$$

但 $\sum\rho^n(\rho<1)$是一个收敛的几何级数，故$\sum c_nz^n$ 绝对收敛.

设 $G>1$，则有无穷多个 $n;n_1,n_2,\cdots,n_p,\cdots$，使

$$|c_nz^n|^{\frac{1}{n}}>1 \quad (n=n_p),$$

或 $$|c_nz^n|>1 \quad (n=n_p),$$

而不能有

$$\lim_{n\to\infty} c_nz^n=0,$$

故级数发散[参看 5.1 节(4)式].

综合上面的结果，即见当

$$|z|<\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}|c_n|^{\frac{1}{n}}}$$

时级数收敛，当

$$|z|>\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}|c_n|^{\frac{1}{n}}}$$

时级数发散. 因此，级数 $\sum c_nz^n$ 的收敛半径为

$$R=\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}|c_n|^{\frac{1}{n}}}. \tag{2}$$

2. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=l,$$

l 可以是有限值(包括 0)，也可以是无穷大，则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_nz^n}\right|=l|z|.$$

因此，根据比值检验法[5.1 节]，当 $l|z|<1$ 时级数收敛，当 $l|z|>1$ 时级数发散. 故得级数$\sum c_nz^n$ 的收敛半径为

$$R=\frac{1}{l}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|. \tag{3}$$

例 1. 级数 $1+z^2+z^4+\cdots+z^{2k}+\cdots$ 的 $|c_n|^{\frac{1}{n}}$ 有两个极限点(1.3节)——1 和 0,故收敛半径 $R=1$.

例 2. 级数 $1+z+\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{5}z^5+\cdots+\frac{1}{2k+1}z^{2k+1}+\cdots$ 的 $|c_n|^{\frac{1}{n}}$ 的一个极限点是 0(z的偶数幂的系数),另一个极限点为

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{2k+1}\right|^{\frac{1}{2k+1}}=\lim_{k\to\infty}e^{\frac{1}{2k+1}\ln\frac{1}{2k+1}}$$

$$=\lim_{k\to\infty}e^{-\frac{\ln(2k+1)}{2k+1}}=1,$$

故 $\overline{\lim}|c_n|^{\frac{1}{n}}=1$,而 $R=1$.

练习题 2. 能否应用公式(3) 去求例 1 和例 2 中级数的收敛半径?

例 3. 对于级数 $1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$,应用公式(3),即得

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\infty,$$

因此,这级数对于任何有限的z值都是收敛的.

对上面的级数应用公式(2) 时演算稍为复杂一些. 注意 $(n!)^2=(n\cdot1)[(n-1)\cdot2]\cdots(1\cdot n)$,而

$$(n-p+1)p-n=(p-1)(n-p)\geqslant0\ (p=1,2,\cdots,n),$$

故 $(n!)^2>n^n$, $n!>(\sqrt{n})^n$, $(n!)^{\frac{1}{n}}>\sqrt{n}$. 因此

$$\left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}},\qquad\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}=0,$$

即得 $R=\infty$.

例 4. 级数 $1+1!\cdot z+2!\cdot z^2+\cdots+n!\cdot z^n+\cdots$ 的收敛半径为 0[用公式(3)即得],也就是说,这级数对于除$z=0$ 以外的任何z

值都是发散的.

幂级数在收敛圆内一定收敛，至于在收敛圆上则存在各种可能：可能在收敛圆上处处收敛，也可能在收敛圆上处处发散，也可能在收敛圆上一部分点收敛，而在另一部分点上发散.

例 5. 几何级数 $1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$ 的收敛半径很容易证明为 1. 但在收敛圆上 $|z|=1$，级数的普遍项不趋于零，故级数在收敛圆的每一点上都是发散的.

例 6. 级数 $1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^n}{n}+\cdots$ 的收敛半径也是1[用公式(3) 即得]. 在收敛圆 $z=1$ 这一点，级数是调和级数 $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$，所以是发散的. 在收敛圆上的 $z=-1$ 这一点，级数成为 $1-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots$，是收敛的. 实际上，这级数在收敛圆上除 $z=1$ 外是处处收敛的.

例 7. 级数 $1+\frac{z}{1^2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{n^2}+\cdots$ 的收敛半径也是 1 [用公式(3)即得]. 在收敛圆上的每一点($|z|=1$) 都是绝对收敛的，因此也是收敛的.

5.4 幂级数所代表的函数的解析性

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的每一项都是 z 的解析函数，而且在其收敛圆内的任何一个闭区域中一致收敛，因此，根据 5.2 节外氏定理，这级数的和 $f(z)$ 是收敛圆内的一个解析函数.

例. 级数 $1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$ 在全平面上收敛(见上节例 3)，因此代表一个在全平面上解析的函数. 以 e^z 或者 $\exp z$ 表示这级数的和，作为**指数函数**的定义. 这个定义与 3.2 节的定

义是一致的. 首先

$$e^{iy}=1+iy-\frac{y^2}{2!}-i\frac{y^3}{3!}+\cdots+i^n\frac{y^n}{n!}+\cdots$$

$$=1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\cdots+(-)^k\frac{y^{2k}}{(2k)!}+\cdots+$$

$$+i\left(y-\frac{y^3}{3!}+\cdots+(-)^k\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots\right)$$

$$=\cos y+i\sin y,$$

其中y是实数. 于是,由 5.1 节的例子有 $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$,而得

$$e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y).$$

又,根据 5.2 节,幂级数$\sum c_n(z-a)^n$ 在它的收敛圆内可以逐项求积分或逐项求导数,逐项求积分(例如由收敛圆的中心a 到圆内任何一点 z 的不定积分) 所得到的幂级数

$$S_{积}=\sum_0^\infty(n+1)^{-1}c_n(z-a)^{n+1}$$

的收敛半径$R_{积}$,显然不会小于原来级数的收敛半径 R. 同样,逐项求导数后所得到的级数 $S_{微}=\sum_{n=1}^\infty nc_n(z-a)^{n-1}$ 的收敛半径 $R_{微}$,根据外氏定理,也不会小于R. 可以证明 $R_{积}=R_{微}=R$. 原因是已知$R_{积}$和$R_{微}$不小于R,而$S=(S_{积})_{微}=(S_{微})_{积}$①,故$R$不小于$R_{积}$和$R_{微}$,而有$R_{积}=R_{微}=R$.

练习题 1. 如果逐项求积分的下限不是收敛圆的中心 a,而是收敛圆中任意一点, 上述结果有无改变?

练习题 2. 试用上节公式(2) 直接证明$R_{积}=R_{微}=R$.

但是,应当注意,经过逐项求积分或者逐项求导数得到的幂级数在收敛圆上的收敛性可能改变. 例如, 收敛半径为 1 的幂级数

$$S=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^n}{n}+\cdots,$$

① 可差一常数加项.

在收敛圆上$z=-1$这一点是收敛的，在$z=1$这点是发散的[见上节例5]．逐项求导数所得到的幂级数

$$S_{\text{微}}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$$

则在整个收敛圆$|z|=1$上都是发散的(见上节例4)．逐项由0到z求积分得到的幂级数

$$S_{\text{积}}=z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{z^{n+1}}{n(n+1)}+\cdots,$$

则在$z=1$是收敛的．证明如下：

$$\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots\\
=&\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right\}\\
=&\lim_{n\to\infty}\left\{1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}\right)\right\}\\
=&\lim_{n\to\infty}\left\{2-\frac{1}{(n+1)}\right\}\\
=&2,
\end{aligned}$$

因此是收敛的．

5.5* 阿贝耳第二定理

在上节中看到，幂级数$\sum c_n(z-a)^n$的和$f(z)$在收敛圆内代表一个解析函数．现在要问，当z点趋近于收敛圆上的点时，$f(z)$的极限值如何？**阿贝耳第二定理**说明：

如果级数$\sum c_n(z-a)^n$在它的收敛圆上的一点z_0收敛，其和为$S(z_0)$，则当z由圆内趋近于z_0时，只要z保持在以z_0为顶点、张角为2φ(图23)的范围内，$f(z)$就趋于$S(z_0)$，其中φ是通过z_0点的弦与半径$\overline{az_0}$之间的夹角，$\varphi<\frac{\pi}{2}$.

证：作变换$z-a=(z_0-a)\zeta$，级数变为$\sum c_n'\zeta^n$，其中$c_n'=c_n(z_0$

$-a)^n$，而$z=z_0$变为$\zeta=1$．于是问题化为证明当ζ在单位圆$|\zeta|=1$内趋于圆上的$\zeta=1$点时（ζ保持在以$\zeta=1$为顶点、张角为2φ的范围内），

$$f(\zeta)=\sum_0^\infty c_n'\zeta^n\to\sum_0^\infty c_n'. \tag{1}$$

按所设，$\sum c_n'$是收敛的，故任意给定$\varepsilon>0$，存在$N(\varepsilon)$，使对于任意正整数p有$\left|\sum_{N+1}^{N+p}c_n'\right|<\varepsilon$．令$S_{n,p}=c_{n+1}'+\cdots+c_{n+p}'$，则$|S_{N,p}|<\varepsilon$，而有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{N+1}^{N+p}c_n'\zeta^n\right|&=|S_{N1},\zeta^{N+1}+(S_{N,2}-S_{N,1})\zeta^{N+2}+\cdots+\\&\quad+(S_{N,p}-S_{N,p-1})\zeta^{N+p}|\\&=\left|\sum_{k=1}^{p-1}S_{N,k}(\zeta^{N+k}-\zeta^{N+k+1})+S_{N,p}\zeta^{N+p}\right|\\&\leqslant\sum_{k=1}^{p-1}|S_{N,k}|\cdot|\zeta|^{N+k}\cdot|1-\zeta|+|S_{N,p}||\zeta|^{N+p}\\&<\varepsilon|1-\zeta|\sum_{k=1}^{p-1}|\zeta|^{N+k}+\varepsilon<\varepsilon\frac{|1-\zeta|}{1-|\zeta|}+\varepsilon.\end{aligned}$$

于是，

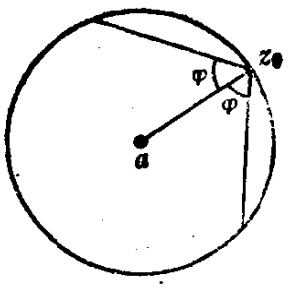


图 23

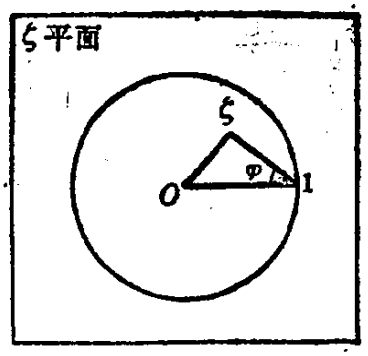


图 24

$$\left|\sum_{N+1}^{N+p}c_n'\zeta^n-\sum_{N+1}^{N+p}c_n'\right|\leqslant\left|\sum_{N+1}^{N+p}c_n'\zeta^n\right|+\left|\sum_{N+1}^{N+p}c_n'\right|<\varepsilon\frac{|1-\zeta|}{1-|\zeta|}+2\varepsilon.$$

由图24易见

$$|1-\zeta|^2+1-2|1-\zeta|\cos\varphi=|\zeta|^2,$$

或

$$(2\cos\varphi-|1-\zeta|)|1-\zeta|=1-|\zeta|^2,$$

故

$$\frac{|1-\zeta|}{1-|\zeta|}=\frac{1+|\zeta|}{2\cos\varphi-|1-\zeta|}\leqslant\frac{2}{2\cos\varphi-|1-\zeta|},$$

而

$$\left|\sum_{N+1}^{N+p}c_n'\zeta^n-\sum_{N+1}^{N+p}c_n'\right|<\frac{2\varepsilon}{2\cos\varphi-|1-\zeta|}+2\varepsilon.$$

因此，只要 $\varphi<\frac{\pi}{2}$，则当$\zeta\to1$时上式右方为$O(\varepsilon)$．由此得

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}c_n'\zeta^n-\sum_{n=0}^{\infty}c_n'\right|\leqslant\left|\sum_{0}^{N}c_n'\zeta^n-\sum_{0}^{N}c_n'\right|+$$

$$+\left|\sum_{N+1}^{\infty}c_n'\zeta^n-\sum_{N+1}^{\infty}c_n'\right|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,$$

只要$|\zeta-1|$足够小而且 $\varphi<\frac{\pi}{2}$．这就证明了(1) 式．

例． $\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots(|z|<1)$(参看 6.2 节练习题 3)．当$z=1$时，右方级数是收敛的交错级数$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots$，故$\lim\limits_{z\to1-0}\ln(1+z)=\ln2=\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$．

第六章　泰勒展开和洛浪展开

6.1　解析函数的泰勒(Taylor)展开

在5.4节中看到，一个幂级数在它的收敛圆内代表一个解析函数．现在来讨论一个解析函数的幂级数展开．

定理　设$f(z)$在以a为圆心的圆C内和C上解析，则对于圆内的任何z点，$f(z)$可以用幂级数展开为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n, \tag{1}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \tag{2}$$

C取逆时针方向．

证：根据科希积分公式，对于圆内任意一点z，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi, \tag{3}$$

ξ是圆C上的变点．

利用恒等式

$$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+\cdots+t^n+\frac{t^{n+1}}{1-t}, \tag{4}$$

可写

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-a)-(z-a)}=\frac{1}{\xi-a}\,\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\xi-a}}$$

$$=\frac{1}{\xi-a}\left[1+\frac{z-a}{\xi-a}+\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^{n+1}}{1-\frac{z-a}{\xi-a}}\right]$$

$$=\frac{1}{\xi-a}+\frac{z-a}{(\xi-a)^2}+\cdots+\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}$$

$$+\frac{\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^{n+1}}{\xi-z}.$$

代入 (3) 式,得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\xi)}{\xi-a}d\xi+\frac{z-a}{2\pi i}\int_c\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^2}d\xi$$

$$+\cdots+\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\int_c\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi+R_n,$$

其中

$$R_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\xi)}{\xi-z}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^{n+1}d\xi.$$

令 $r=|z-a|$, $R=|\xi-a|$ (R 是圆 C 的半径), M 为 $f(\xi)$在 C 上的上界,则因 $|\xi-z|\geqslant R-r>0$,而有

$$|R_n|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_c\frac{|f(\xi)|}{|\xi-z|}\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right|^{n+1}|d\xi|$$

$$\leqslant\frac{MR}{R-r}\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1}.$$

因此,只要 n 足够大, R_n 可小于任何 $\varepsilon>0$, 而得收敛的级数展开式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n,$$

其中

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

在最后一步中用了 4.6 节(1) 式. 这证明了上述展开定理——**科希-泰勒定理**,或简称为**泰勒定理**. 公式(1) 称为解析函数 $f(z)$的**泰勒展开**, 其中的级数称为**泰勒级数**.

上面定理中所要求的 $f(z)$在圆 C 上解析这一条件可以取消, 因为对于 C 内的任何 z 点,总可以在 C 内作一同心圆 C' 把 z 点包含在内, 而 $f(z)$ 在 C' 内和 C' 上解析. 于是可以得到与前相同的结果.

收敛范围 设 b 是 $f(z)$的离 a 点最近的奇点(2.3 节), 则在圆 $|z-a|<|b-a|$内 $f(z)$处处解析. 因此, $f(z)$的泰勒级数 (1) 的收敛半径不小于 $|b-a|$; 一般, 这收敛半径等于 $|b-a|$.

唯一性 给定一个在圆 C 内解析的函数, 则它的泰勒展开是唯一的,即(1)式中的系数 a_n 是完全确定的. 为了证明这一点,设有两个泰勒级数代表同一解析函数:

$$\begin{aligned}f(z)&=a_0+a_1(z-a)+\cdots+a_n(z-a)^n+\cdots\\&=a_0'+a_1'(z-a)+\cdots+a_n'(z-a)^n+\cdots.\end{aligned}$$

令 $z=a$,得 $a_0=a_0'$. 对上式求导数, 有

$$\begin{aligned}f'(z)&=a_1+2a_2(z-a)+\cdots+na_n(z-a)^{n-1}+\cdots\\&=a_1'+2a_2'(z-a)+\cdots+na_n'(z-a)^{n-1}+\cdots.\end{aligned}$$

令 $z=a$,得 $a_1=a_1'$. 仿此做下去,即证明普遍有 $a_n=a_n'$, 因此展开是唯一的.

根据这个定理就可以用任何方便的办法来求一个函数的泰勒展开,而不一定要用公式(2)去定系数(见下面例3,4,5).

推论 如果级数 $\sum_0^{\infty}a_n(z-a)^n$ 在 a 点的邻域内处处等于零, 则这级数恒等于零,即 $a_n=0,n=0,1,2,\cdots$.

例 1. 指数函数 e^z 是全平面上的解析函数. 它的导数$(e^z)'=e^z,(e^z)^{(n)}=e^z$,这些导数在 $z=0$ 点的值是 1,故有展开式

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots. \tag{5}$$

又指数函数在有限处无奇点,故级数的收敛半径为无穷大,这与直接由级数求收敛半径的结果是一致的(见 5.3 节例 3).

练习题 1. 试求 e^z 在以 $z=1$ 为圆心的任意圆内的泰勒展开.

练习题 2. 证明 $\sin z$ 和 $\cos z$ 在以 $z=0$ 为圆心的任意圆 内的 泰勒展开分别是

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots+(-)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots, \tag{6}$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots+(-)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots. \tag{7}$$

例 2. 函数$(1-z)^{-1}$ 在 $z=0$ 的邻域内是解析的,易算出它的 n 阶导数在 $z=0$ 点的值为 $n!$,故

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots \quad (|z|<1). \tag{8}$$

函数$(1-z)^{-1}$ 的唯一奇点 $z=1$ 与 $z=0$ 的距离等于 1, 而(8)式右方级数的收敛半径正是 1 .

求泰勒展开的方法不限于直接用公式(2)来求展开系数;还可以利用已知的级数展开式,其中最常用的是(5)和(8)式.

例 3. 求$(1-z^2)^{-1}$ 在 $z=0$ 的邻域内的泰勒展开.

对于这函数直接用公式(2)求展开系数,计算较繁. 可用下法求展开式: 令 $t=z^2$,立刻由(8)式得

$$\frac{1}{1-z^2}=\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+\cdots=1+z^2+z^4+\cdots(|z|<1).$$

又,用部分分式,可写

$$\frac{1}{1-z^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}\right).$$

于是,对于右方每一项应用(8)式,得

$$\frac{1}{1-z^2}=\frac{1}{2}(1+z+z^2+z^3+z^4+\cdots)$$

$$+\frac{1}{2}(1-z+z^2-z^3+z^4-\cdots)$$

$$=1+z^2+z^4+\cdots,$$

同前.

例 4. 求$(1-z)^{-2}$在$z=0$的邻域内的泰勒展开.

对于这函数不能用例 3 中部分分式的方法. 除了用公式 (2) 直接求展开系数之外,还可以用(8)式和级数的乘法, 因为在$|z|<1$中级数是绝对收敛的 (5.1节):

$$\frac{1}{(1-z)^2}=(1+z+z^2+\cdots)^2=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\cdot\sum_{l=0}^{\infty}z^l$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}z^k\cdot z^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\quad(|z|<1).$$

还可以用下面的方法:

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\frac{d}{dz}\frac{1}{1-z}=\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n,$$

因为在收敛圆$|z|=1$内,(8)式的级数可以逐项求导数.

练习题 3. 试由$(1-z)^{-1}$和$(1+z)^{-1}$在$z=0$的邻域内的泰勒级数相乘,求出$(1-z^2)^{-1}$在这区域内的泰勒展开.

例 5. 用待定系数法求$\tan z$在$z=0$的邻域内的泰勒展开.

设

$$\tan z=\sum_{l=0}^{\infty}b_lz^{2l+1},$$

其中b_l是待定系数(因$\tan z$是奇函数, 故级数中不出现z的偶次

幂). 今 $\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}$, 故有

$$\sin z=\cos z\cdot\sum_{l=0}^{\infty}b_l z^{2l+1}.$$

利用(6)和(7), 得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k z^{2k}}{(2k)!}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}b_l z^{2l+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}z^{2n+1}\sum_{l=0}^{n}\frac{(-)^{n-l}b_l}{(2n-2l)!}.$$

根据展开的唯一性(这里是 $\sin z$ 的展开),两边级数中 z^{2n+1}($n=0,1,2,\cdots$)的系数应相等, 故

$$\sum_{l=0}^{n}\frac{(-)^l b_l}{(2n-2l)!}=\frac{1}{(2n+1)!}.$$

这是系数 b_l 之间的递推关系, 可以用来依次求出这些系数. 例如:

$n=0$ 时, $b_0=1$;

$n=1$时, $\frac{1}{2}b_0-b_1=\frac{1}{3!}$, $b_1=\frac{1}{3}$;

$n=2$时, $\frac{1}{4!}b_0-\frac{1}{2!}b_1+b_2=\frac{1}{5!}$, $b_2=\frac{2}{15}$;

$n=3$时, $\frac{1}{6!}b_0-\frac{1}{4!}b_1+\frac{1}{2!}b_2-b_3=\frac{1}{7!}$, $b_3=\frac{17}{315}$.

由此得 $\tan z$ 在 $z=0$ 的邻域内展开的前四项:

$$\tan z=z+\frac{1}{3}z^3+\frac{2}{15}z^5+\frac{17}{315}z^7+\cdots\quad\left(|z|<\frac{\pi}{2}\right).\tag{9}$$

级数的收敛范围 $|z|<\frac{\pi}{2}$ 是根据函数 $\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}$ 离 $z=0$ 最近的

奇点为 $z=\frac{\pi}{2}$ 得到的.

这个级数后面还要讨论[6.6节(6)式].

从上面所举的几个例子可以概见常用的几种求泰勒展开的方法.

6.2 多值函数的泰勒展开

一个多值函数在确定单值分枝后可以像一个单值函数那样作泰勒展开. 例如,函数 $(1+z)^\alpha$ 在 α 不等于整数时是多值的,枝点为 $z=-1$ 和 $z=\infty$. 如果规定当 $z=0$ 时函数值为 1, 则在 $z=0$ 点的导数为

$$\frac{d}{dz}(1+z)^\alpha|_{z=0}=\alpha(1+z)^{\alpha-1}|_{z=0}=\alpha,$$

因为根据规定 $\arg(1+z)|_{z=0}=0$. 类似地有

$$\frac{d^n}{dz^n}(1+z)^\alpha|_{z=0}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+z)^{\alpha-n}|_{z=0}$$

$$=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1).$$

因此, 在 $z=0$ 的邻域内,

$$(1+z)^\alpha=1+\alpha z+\cdots+\binom{\alpha}{n}z^n+\cdots, \tag{1}$$

其中

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \tag{2}$$

是普遍的(α 为任意复数)二项式展开系数.

(1) 式中级数的收敛半径等于 1, 因为用 5.3 节公式 (3),

$$\lim_{n\to\infty}\left|\binom{\alpha}{n}\Big/\binom{\alpha}{n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right|=1.$$

这正好等于从 $z=0$ 到枝点 $z=-1$(函数的奇点)的距离.

练习题 1. 规定 $z=0$ 时 $(1+z)^\alpha=1$,求函数 $(1+z)^\alpha$($\alpha\neq$整数) 在 $z=2$

点的邻域内的泰勒展开，并讨论所得级数的收敛半径.

练习题 2. 仍规定 $z=0$ 时 $(1+z)^{\alpha}=1$，问函数 $(1+z)^{\alpha}$（$\alpha\neq$整数）是否能够在 $z=-2$ 点作泰勒展开？

练习题 3. 规定 $z=0$ 时 $\ln(1+z)=0$，证明 $\ln(1+z)$ 在 $z=0$ 点的邻域内的泰勒展开为

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots+(-)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\cdots, \tag{3}$$

并讨论级数的收敛半径.

6.3 在无穷远点邻域内的泰勒展开

一个函数 $f(z)$ 称为在无穷远点的邻域内解析，如果存在正数 R 使 $f(z)$ 在以 $z=0$ 为圆心、半径等于 R 的圆外的每一点（包括 $z=\infty$）都是可导的.

为了考查一个函数 $f(z)$ 在无穷远点邻域内的性质，可作变换 $z=\frac{1}{t}$，把 $z=\infty$ 变为 $t=0$，然后研究函数 $f\left(\frac{1}{t}\right)=\varphi(t)$ 在 $t=0$ 的邻域内的性质. 如果在 $t=0$ 的邻域 $|t|<\delta$ 内函数 $\varphi(t)$ 解析，则 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的邻域 $|z|=\left|\frac{1}{t}\right|>\frac{1}{\delta}$ 内解析.

设 $\varphi(t)$ 在 $t=0$ 的邻域内的泰勒展开是

$$\varphi(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n+\cdots, \tag{1}$$

则 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的邻域内的泰勒展开为

$$f(z)=a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}+\cdots. \tag{2}$$

如果级数(1)的收敛半径是 r，则级数(2)在 $|z|>R=\frac{1}{r}$ 的圆外区域中(绝对)收敛.

例. 求函数 $f(z)=(1-z)^{-1}$ 在 $z=\infty$ 的邻域内的泰勒展开.

作变换 $z=\frac{1}{t}$，$f(z)$ 变为 $\varphi(t)=\frac{t}{(t-1)}$，$\varphi(t)$ 在以 $t=0$ 为圆

心、半径等于1的圆内是解析的，因此 $f(z)$ 在 $|z|>1$ 的区域中是解析的；也就是，$f(z)$ 在无穷远点的邻域内解析．它的泰勒展开可利用 6.1 节(8)式求出如下：

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

$$=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\cdots-\frac{1}{z^n}-\cdots$$

6.4 洛浪(Laurent)展开

有时需要讨论一个函数在它的奇点附近的性质而把函数展成幂级数．在这种情形下，显然不能作泰勒展开，因为在所讨论的区域内现在有了奇点．本节要讨论的洛浪展开将解决这一问题．

定理 设 $f(z)$ 在环状区域 $R_1\leqslant|z-b|\leqslant R_2$ 中单值解析，则对于这环域内的任何 z 点，$f(z)$ 可以用幂级数表为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n(z-b)^n,\ R_1<|z-b|<R_2,\qquad(1)$$

其中

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}}d\zeta,\qquad(2)$$

C 是位于环域内以逆时针方向绕内圆一周的任意一条闭合曲线(图25)．

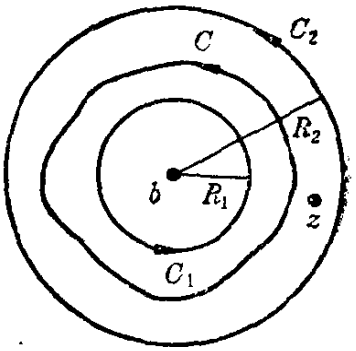


图 25

证：由复连通区域的科希积分公式(4.5 节)有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z},\qquad(3)$$

其中 C_1 和 C_2 分别表示环域的内圆周和外圆周，走向都是逆时针的．

对于 C_2 上的变点 ζ，$|z-b|<|\zeta-b|$，故仿泰勒定理中的证

明方法(6.1 节)即得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-b)^{n+1}}\cdot(z-b)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-b)^n, \tag{4}$$

其中

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-b)^{n+1}},\quad n=0,1,2,\cdots. \tag{5}$$

对于 C_1 上的变点 ξ, $|z-b|>|\xi-b|$, 有

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-b-(z-b)}=-\frac{1}{z-b}\frac{1}{1-\dfrac{\xi-b}{z-b}}$$

$$=-\frac{1}{z-b}\left[1+\frac{\xi-b}{z-b}+\cdots+\left(\frac{\xi-b}{z-b}\right)^{k-1}\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\dfrac{\xi-b}{z-b}\right)^{k}}{1-\dfrac{\xi-b}{z-b}}\right]$$

[参看 6.1 节(4)式]. 代入(3)式右方第二个积分中, 得

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}=\frac{1}{z-b}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}f(\xi)d\xi$$

$$+\frac{1}{(z-b)^2}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}f(\xi)(\xi-b)d\xi+\cdots$$

$$+\frac{1}{(z-b)^k}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}f(\xi)(\xi-b)^{k-1}d\xi$$

$$+R_k,$$

其中

$$R_k=-\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\left(\frac{\xi-b}{z-b}\right)^k d\xi.$$

令

$$|R_k|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{C_1}\frac{|f(\xi)|}{|\xi-z|}\left|\frac{\xi-b}{z-b}\right|^k|d\xi|$$
$$\leqslant\frac{MR_1}{r-R_1}\left(\frac{R_1}{r}\right)^k,$$

其中 M 是 $|f(\xi)|$ 在 C_1 上的上界，$r=|z-b|$. 因 $R_1<r$，故当 $k\to\infty$ 时 $|R_k|\to 0$，而有

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}$$
$$=\frac{b_{-1}}{z-b}+\frac{b_{-2}}{(z-b)^2}+\cdots+\frac{b_{-k}}{(z-b)^k}+\cdots, \tag{6}$$

其中

$$b_{-k}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}f(\xi)(\xi-b)^{k-1}d\xi,\quad k=1,2,\cdots. \tag{7}$$

把 k 换为 $-n$，(7)式可写为

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{n+1}}d\xi\quad(n=-1,-2,\cdots), \tag{8}$$

与(5)式中的 $b_n(n=0,1,2,\cdots)$ 形式相同，只是积分路线不同. 根据复连通区域的科希定理[4.3 节(4)式]，(5)和(8)可以统一地写为

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-b)^{n+1}},\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots, \tag{9}$$

其中 C 是环域内沿逆时针方向绕内圆一圈的任意一个闭合围道. 把(4)和(6)代入(3)，并用(9)式，即证明了上面的展开定理.

(1)式称为 $f(z)$ **的洛浪展开**，相应的级数称为洛浪级数. 这级数与泰勒级数不同的地方是其中一般含有 $(z-b)$ 的负幂项，这与 $f(z)$ 在内圆里面的奇异性有关.

与泰勒展开的情形类似，上面定理中要求 $f(z)$ 在环域的边界(圆 C_1 和 C_2)上解析这一限制可以取消，而只要 $f(z)$ 在环域 $R_1<|z-b|<R_2$ 内单值解析即可. 因为环域内的任何一点 z 总可以包含在稍小的环域 $R_1<r_1\leqslant|z-b|\leqslant r_2<R_2$ 之内，而 $f(z)$ 在

其中是单值解析的，可以应用展开公式(1)和(2)。

关于洛浪展开还有几个要注意的地方。

1．尽管(1)式的级数中含有$(z-b)$的负幂项，而这些项在$z=b$时都是奇异的，但b点可以是也可以不是函数的奇点(参看下节的例1和例2)。

2．尽管求展开系数b_n的公式(2)与泰勒展开中求系数a_n的积分公式形式相同，但$b_n\neq\frac{f^{(n)}(b)}{n!}$，不论$b$是否$f(z)$的奇点。如果$b$是$f(z)$的奇点，则$f^{(n)}(b)$根本不存在。如果$b$不是奇点，因而$f^{(n)}(b)$存在，$b_n$也不会等于$\frac{f^{(n)}(b)}{n!}$。因为4.6节(1)式成立的条件是在以$C$为边界的区域内$f(z)$解析，而在本节公式(2)中以$C$为边界的区域内有$f(z)$的奇点(除非内圆里面无奇点，但那就不需要考虑洛浪展开)。

3．如果只有环心b是$f(z)$的奇点，则内圆的半径可以任意小，同时z点可以无限地接近b点；这时常称(1)式为函数$f(z)$**在它的孤立奇点b的邻域内的洛浪展开**。这种情形特别重要，将在下一章中详细加以讨论。

练习题．如果$f(z)$是多值函数，而在内圆中有$f(z)$的枝点，洛浪展开是否成立？

提示：考虑函数$f(z)=\sqrt{z^2-1}$，分别讨论内圆中含一个枝点和两个枝点的情形。

收敛范围，主部和正则部　洛浪展开(1)可以分为两个部分：

1．正幂部分$\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-b)^n$，称为洛浪展开的正则部，在圆$C_2$内绝对收敛。

2．负幂部分$\sum_{n=-1}^{-\infty}b_n(z-b)^n$，称为洛浪展开的主部。从(6)式的证明看到，主部在圆C_1的外面(直到无穷远处)绝对收敛。当

$f(z)$在圆 C_1 之内只有唯一奇点 b 时，z 可以无限接近 b，而主部反映出 $f(z)$在 $z=b$ 点的奇异性.

唯一性 6.1 节中证明泰勒展开的唯一性时所用的方法在这里不适用，因为现在 z 一般不能无限趋近 b. 下面用求积分的方法来证明洛浪展开的唯一性. 这种证法也适用于泰勒展开.

$$\text{设} \quad f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-b)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b'_n(z-b)^n.$$

这两个级数在 $R_1<r_1\leqslant|z-b|\leqslant r_2<R_2$ 中是一致收敛的 [阿贝耳第一定理，5.3 节]. 以 $(z-b)^k$ 乘两边的级数，其中 k 是任意固定整数，然后沿环域中任何一个以逆时针方向绕 b 点一周的围道 C 求积分，得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n\int_C(z-b)^{n+k}dz=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b'_n\int_C(z-b)^{n+k}dz. \qquad (10)$$

当 $n+k\neq-1$ 时，$(z-b)^{n+k}$的原函数$\dfrac{(z-b)^{n+k+1}}{(n+k+1)}$是单值函数，故

$$\int_C(z-b)^{n+k}dz=0, \quad n+k\neq-1;$$

而当 $n+k=-1$ 时，

$$\int_C(z-b)^{-1}dz=[\ln(z-b)]_C=2\pi i,$$

因为在 z 绕 b 点一周后，$\arg(z-b)$增加 2π，而$\ln(z-b)$ 之值增加 $2\pi i$(3.5 节). 于是，由(10)式得

$$2\pi i\cdot b_{-k-1}=2\pi i\cdot b'_{-k-1},$$

或

$$b_{-k-1}=b'_{-k-1}.$$

但 k 是任意整数，故有 $b_n=b'_n$，$n=0, \pm1, \pm2, \cdots$. 这证明洛浪展开是唯一的.

6.5 洛浪展开的例子

求洛浪展开系数的公式只有一个积分公式[6.4节(2)式]，而不是像求泰勒展开系数那样，还有导数公式[见6.1节(2)式]. 但6.1节各个例子中所用的其他一些方法，稍加改变，都可以用来求洛浪展开. 下面举几个例子.

例 1. 分别求函数$\frac{1}{z(z-1)}$在$0<|z|<1$和$1<|z|<\infty$中的洛浪展开.

先看在$0<|z|<1$中的展开. 在内圆(半径可以任意小)中只有函数的一个奇点$z=0$，另外一个奇点$z=1$在外圆上.

因$|z|<1$，利用6.1节(8)式，得

$$\frac{1}{z(z-1)}=-\frac{1}{z}(1+z+z^2+\cdots)=-\frac{1}{z}-1-z-\cdots.$$

这是在奇点$z=0$的邻域中的展开，主部只有一项，即$-\frac{1}{z}$，这一项表示出函数$\frac{1}{z(z-1)}$在$z=0$这点的奇异性.

再看在$1<|z|<\infty$中的展开. 在内圆中现在有了函数的两个奇点，即0和1. 由于$|z|>1$，在利用6.1节(8)式时，需要略加改变：

$$\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{z^2(1-z^{-1})}=\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\cdots.$$

现在在主部中有无穷多个（负幂）项，但z不能无限接近于奇点$z=0$，故不能认为这些项反映了函数在$z=0$点的奇异性.

例 2. 求函数$(z^2-1)^{-1}$在$1<|z|<\infty$中的洛浪展开.

$$\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-z^{-2}}=\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^6}+\cdots.$$

这里，主部中虽然有 z 的无穷多个负幂项，$z=0$ 本身却不是函数的奇点；奇点是 $z=\pm 1$.

例 3. 求函数 $\cot z$ 在 $0<|z|<\pi$ 中的洛浪展开.

在半径可以任意小的内圆中只有函数的一个奇点 $z=0$，这可以从 $\cot z=\frac{\cos z}{\sin z}$ 看出. 函数离 $z=0$ 最近的奇点是 $z=\pi$，位于外圆上.

这函数在 $z=0$ 的邻域($0<|z|<\pi$)内的洛浪展开可以用类似于 6.1 节例 5 中的方法(级数除法)来求，也可以利用该例中的结果求出头几项[只要 $|z|$ 足够小，可以利用 6.1 节(8)式]：

$$\begin{aligned}\cot z=\frac{1}{\tan z}&=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{3}z^2+\frac{2}{15}z^4+\frac{17}{315}z^6+\cdots\right)^{-1}\\&=\frac{1}{z}\left\{1-\left(\frac{1}{3}z^2+\frac{2}{15}z^4+\frac{17}{315}z^6+\cdots\right)\right.\\&\quad\left.+\left(\frac{1}{3}z^2+\frac{2}{15}z^4+\cdots\right)^2-\left(\frac{1}{3}z^2+\cdots\right)^3+\cdots\right\}\\&=\frac{1}{z}-\frac{1}{3}z-\frac{1}{45}z^3-\frac{2}{945}z^5-\cdots.\end{aligned}$$

下一节还要继续讨论这个级数[6.6 节(5)式].

练习题. 用 6.1 节例 5 中的方法求出 $\cot z$ 在 $z=0$ 的邻域内洛浪展开系数的递推公式.

例 4. 求函数 $\exp\left\{\frac{z}{2}(t-t^{-1})\right\}$[指数函数，见 5.4 节例]在 $0<|t|<\infty$ 中的洛浪展开.

利用指数函数的幂级数展开[6.1 节(5)式]，有

$$e^{\frac{z}{2}t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z/2)^k}{k!}t^k,\quad e^{-\frac{z}{2}t^{-1}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(z/2)^l}{l!}(-t)^{-l},$$

因此，

$$\exp\left\{\frac{z}{2}(t-t^{-1})\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z/2)^k}{k!}t^k\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(z/2)^l}{l!}(-t)^{-l}.$$

对于固定的 z 值，右方两个级数在 $0<|t|<\infty$ 中都是绝对收敛的，可以乘起来，并用任意方式并项. 令 $k-l=n$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$，得

$$\begin{aligned}\exp\left\{\frac{z}{2}(t-t^{-1})\right\}&=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\sum_{l=0}^{\infty}(-)^l\frac{(z/2)^{n+l}}{(n+l)!}\frac{(z/2)^l}{l!}\\&\quad+\sum_{n=-1}^{-\infty}t^n\sum_{l=-n}^{\infty}(-)^l\frac{(z/2)^{n+l}}{(n+l)!}\frac{(z/2)^l}{l!}\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)t^n,\end{aligned}\tag{1}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}J_n(z)&=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!}\frac{1}{(n+l)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2l},\\J_{-n}(z)&=\sum_{l=n}^{\infty}(-)^l\frac{(z/2)^{-n+l}}{(-n+l)!}\frac{(z/2)^l}{l!}\\&=\sum_{l=0}^{\infty}(-)^{l+n}\frac{(z/2)^l}{l!}\frac{(z/2)^{n+l}}{(n+l)!}=(-)^nJ_n(z)\\&(n=0,1,2,\cdots),\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

$J_n(z)$称为n阶贝塞耳(Bessel)函数(参看 17.1 节).

值得注意的是，(1)式也可看成是函数$\exp\left\{\frac{z}{2}(t-t^{-1})\right\}$在$t=\infty$的邻域内的洛浪展开.

6.6* 伯努利(Bernoulli)数和欧勒(Euler)数

在这一节中我们介绍几个重要的展开式.

先讨论函数 $f(z)=z/(e^z-1)$ 在 $0<|z|<2\pi$ 中的洛浪展开.

在函数 $f(z)$中，分母的零点为 $2n\pi i$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$，故可在环域 $0<|z|<2\pi$ 中作洛浪展开．但是由于

$$\frac{z}{e^z-1}=\frac{z}{\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)-1}$$

$$=\frac{z}{z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots}$$

$$=1-\frac{z}{2}+\cdots+c_nz^n+\cdots, \tag{1}$$

因此，$f(z)$在 $0<|z|<2\pi$ 的展开式中，实际上并没有负幂项，级数实际上在整个圆域 $|z|<2\pi$ 中都是收敛的．（$z=0$为可去奇点，见下一章．）

下面来求出展开系数 c_n．我们要证明，在展开式(1)中，z 的奇次幂项只有一项不为零．这是因为，

$$\frac{z}{e^z-1}=\frac{z}{2}\left(\frac{e^z+1}{e^z-1}-1\right)$$

$$=\frac{z}{2}\,\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}}-\frac{z}{2},$$

而第一项为 z 的偶函数，展开时只有 z 的偶次幂．于是，通常把展开式(1) 写成

$$\frac{z}{e^z-1}=1-\frac{z}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}B_n}{(2n)!}z^{2n}. \tag{2}$$

B_n称为伯努利数，用待定系数法可以求出它们．为此，将(2) 式改写成

$$1=\frac{e^z-1}{z}\left[1-\frac{z}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-)^{k-1}B_k}{(2k)!}z^{2k}\right]$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{(l+1)!}\left[1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-)^{k-1}B_k}{(2k)!} z^{2k}\right]$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left[-\frac{n-1}{2(n+1)!}\right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-)^{k-1}B_k}{(2k)!(n-2k+1)!}\right] z^n .$$

所以，

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-)^k (n+1)!}{(2k)!(n-2k+1)!} B_k + \frac{n-1}{2} = 0. \qquad (3)$$

这就是伯努利数的递推关系. 由此可以求出

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42},$$

$$B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66}, \quad B_6 = \frac{691}{2730}, \qquad (4)$$

$$B_7 = \frac{7}{6}, \quad B_8 = \frac{3617}{510}, \quad \cdots\cdots .$$

应用(2) 式可以得到许多有用的结果，例如，

$$\frac{z}{2}\cot\frac{z}{2} = \frac{iz}{2}\frac{e^{iz/2} + e^{-iz/2}}{e^{iz/2} - e^{-iz/2}}$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(2n)!} z^{2n}, \quad |z| < 2\pi . \qquad (5)$$

$$\frac{z}{2}\tan\frac{z}{2} = \frac{z}{2}\cot\frac{z}{2} - z\cot z$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!} z^{2n}, \quad |z| < \pi . \qquad (6)$$

$$z\csc z = \frac{z}{2}\cot\frac{z}{2} + \frac{z}{2}\tan\frac{z}{2}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2^{2n-1}-1)B_n}{(2n)!}z^{2n},\ |z|<\pi.$$

(7)

用同样的办法还可以得到，

$$\frac{2e^{z/2}}{e^z+1}=\operatorname{sech}\frac{z}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^nE_n}{(2n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n},\quad |z|<\pi. \tag{8}$$

其中，E_n 称为欧勒数，

$$E_0=1,\quad E_1=1,$$
$$E_2=5,\quad E_3=61,$$
$$\cdots\cdots.$$

它们满足递推关系

$$\sum_{l=0}^{k}(-)^l\frac{(2k)!}{(2l)!(2k-2l)!}E_l=0\quad (k\geqslant 1). \tag{9}$$

练习题．证明：

$$\sec z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{(2n)!}z^{2n},\quad |z|<\pi/2. \tag{10}$$

第七章　单值函数的孤立奇点

函数的奇点以及关于函数在其孤立奇点邻域内的性质的讨论在许多问题中有关键性意义，例如在残数理论及其应用中（第八章），在线性常微分方程的解析理论中（参看第十一章），等等．我们将主要讨论单值函数（或者多值函数的单值分枝）的孤立奇点．

7.1　孤立奇点的分类

在6.4节中曾经提到过一个函数的孤立奇点．现在进一步阐明这一概念．

设单值函数$f(z)$在某点b不可导．如果在b的足够小的邻域内，除了b点外，$f(z)$处处可导，则称b为$f(z)$的孤立奇点．如果在b点的无论多么小的邻域内，总可以找到除b以外的不可导的点，则b是$f(z)$的非孤立奇点．举例说，$z=0$是函数$\frac{1}{z(1-z)}$的孤立奇点，因为在以$z=0$为圆心、半径$r<1$的圆内，除$z=0$外，别无其他不可导的点．$z=0$是函数$\left(\sin\frac{1}{z}\right)^{-1}$的非孤立奇点，因为这函数的奇点是$\frac{1}{z}=n\pi$或者$z=\frac{1}{n\pi}$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$，只要$|n|$足够大．$\frac{1}{n\pi}$可以任意接近于$z=0$，即在$z=0$的无论多么小的邻域内，总可以找到函数的另外的奇点．

单值函数的孤立奇点分为三类，在不同类型奇点的附近，函数具有不同的性质．

设b是单值函数$f(z)$的孤立奇点，则在以b为心的一个环状

邻域 $0<|z-b|<\delta$ 内，$f(z)$可以展成洛浪级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-b)^n. \tag{1}$$

三种类型的奇点是这样区分的：

1．如果在展开式(1)中没有负幂项(见 7.2 节)，则 b 点称为 $f(z)$的可去奇点；

2．如果(1)中只有有限个负幂项，则称 b 为 $f(z)$的极点；

3．如果(1)中有无穷多个负幂项，则称 b 为 $f(z)$的本性奇点.

下面来看在不同类型奇点的附近，函数性质的差异．这差异表现在 $z\to b$ 时 $f(z)$的极限值上.

7.2 可去奇点

先举一个例子说明可去奇点．函数$f(z)=\frac{\sin z}{z}$在 $z=0$ 这点没有确定值，故 $z=0$ 是 $f(z)$的奇点．但

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots$$

[见 6.1 节(6)式]，故$f(z)$在环域 $0<|z|<\infty$中的洛浪展开是不含负幂项的级数：

$$\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots. \tag{1}$$

当 $z\to 0$ 时，右方级数的极限值为 1．如果规定$\frac{\sin z}{z}$在 $z=0$ 点之值为 1，则函数在$z=0$ 点的奇异性去掉，而(1)式右方的级数在 $|z|\geqslant 0$ 中代表这去掉奇异性之后的函数.

普遍地说，在$f(z)$的可去奇点 b 的邻域内$|f(z)|$是有界的．因为按照定义，在这种情形下 $f(z)$的洛浪展开只有正则部(6.4 节)：

$$f(z)=b_0+b_1(z-b)+b_2(z-b)^2+\cdots\quad(0<|z-b|<\delta).\tag{2}$$

这级数在 b 点是收敛的，当 $z\to b$ 时其极限值为 b_0，是有限值．因此，如果规定 $f(b)=\lim\limits_{z\to b}f(z)=b_0$，则 $f(z)$ 在 $z=b$ 点的奇异性去掉，而成为在 b 点及其邻域内处处可导的一个单值解析函数（在 b 点的导数之值为 b_1）；(2) 式是这函数的泰勒展开．

反过来，如果 b 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，而且在 b 的邻域内 $|f(z)|$ 有界，则 b 是 $f(z)$ 的可去奇点．证明如下：

$$\text{设}\qquad f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n(z-b)^n,\quad 0<|z-b|\leqslant\rho.\tag{3}$$

令 M 为 $|f(z)|$ 在圆 C：$|z-b|=\rho$ 上的上界，$|f(z)|<M$．利用 6.4节(2)式，得

$$|b_n|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}}dz\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_C\frac{|f(z)|}{|z-b|^{n+1}}|dz|<M\rho^{-n}.$$

当 $n<0$ 时，只要取 ρ 足够小，右方可以小于任何正数．但 b_n 之值与 ρ 的取值无关，故必是 $b_n=0(n<0)$．这表示(3)式的洛浪展开中不含负幂项，而 b 是可去奇点．

7.3 极　　点

在 $f(z)$ 的极点 b 的邻域内 $|f(z)|$ 是无界的，即当 $z\to b$ 时，$f(z)\to\infty$．证明如下：

在极点 b 的邻域内，

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{b_{-m}}{(z-b)^m}+\frac{b_{-m+1}}{(z-b)^{m-1}}+\cdots+\frac{b_{-1}}{z-b}+b_0+b_1(z-b)+\cdots\\&=\frac{1}{(z-b)^m}[b_{-m}+b_{-m+1}(z-b)+\cdots+b_0(z-b)^m+\cdots]\\&=\frac{\varphi(z)}{(z-b)^m},\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $b_{-m}\neq0$，$\varphi(z)=b_{-m}+b_{-m+1}(z-b)+\cdots$．$\varphi(z)$ 在 b 点及其邻

域内代表一个解析函数，因为这级数在 b 点及其邻域内是收敛的. 当 $z\to b$ 时，$\varphi(z)\to b_{-m}\neq 0$. 在这种情形下，$b$ 称为 $f(z)$ 的 m 阶极点. 由(1)式立刻看出，只要 $|z-b|$ 足够小，$|f(z)|$ 可以大于任何正数，即 $\lim\limits_{z\to b}|f(z)|=\infty$.

反过来可以证明，如果当 $z\to b$ 时 $f(z)\to\infty$，则 b 是 $f(z)$ 的极点. 令 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$，$0<|z-b|<\delta$，则当 $z\to b$ 时 $g(z)\to 0$，而 $z=b$ 是 $g(z)$ 的可去奇点(见上节). 因此

$$\begin{aligned} g(z)&=a_m(z-b)^m+a_{m+1}(z-b)^{m+1}+\cdots\\ &=(z-b)^m\psi(z), \end{aligned}\tag{2}$$

其中 $a_m\neq 0$，$m\geqslant 1$，$\psi(z)=a_m+a_{m+1}(z-b)+\cdots$ 是 b 点及其邻域中的解析函数，而且 $\psi(b)=a_m\neq 0$. 由此得

$$f(z)=\frac{1}{g(z)}=\frac{\varphi(z)}{(z-b)^m},$$

其中 $\varphi(z)=\dfrac{1}{\psi(z)}$ 在 b 点及其邻域中是解析的，可以展成泰勒级数，$\varphi(z)=b_m+b_{m+1}(z-b)+\cdots(b_m\neq 0)$. 可见 b 是 $f(z)$ 的(m 阶)极点.

从上面的证明中还看到，如果 b 是解析函数 $g(z)$ 的 m 阶零点，即 $g(b)=0$，$g'(b)=0$，$\cdots$，$g^{(m-1)}(b)=0$，而 $g^{(m)}(b)\neq 0$，则 b 点是 $f(z)=\dfrac{1}{g(z)}$ 的 m 阶极点. 反之亦然.

例 1. 求函数 $(\sin z)^{-1}$ 的奇点. $\sin z$ 的零点是 $n\pi$，$n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$. 这些零点都是一阶的，因为一阶导数 $(\sin z)'=\cos z$ 当 $z=n\pi$ 时不等于零. 因此，$z=n\pi$ ($n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$)是函数 $(\sin z)^{-1}$ 的一阶极点. 此外，在有限区域中这函数再无其他奇点.

例 2. 求函数 $\dfrac{1}{\sin z}-\dfrac{1}{z}$ 的奇点. 由例 1 知 $z=n\pi$ ($n=\pm 1$，

$\pm 2, \cdots$)是这函数的一阶极点，因为$\frac{1}{z}$在这些点是解析的.在$z=0$点，这函数之值不定.但利用6.1节(6)式，有

$$\lim_{z\to 0}\left\{\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}\right\}=\lim_{z\to 0}\frac{z-\sin z}{z\sin z}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\cdots}{z\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)}=0,$$

故$z=0$是函数的可去奇点(见上节).

7.4 本性奇点

从上两节的结果可以看到，**如果b是函数$f(z)$的本性奇点，则当$z\to b$时$f(z)$没有极限**，或者说，当$z\to b$的方式不同时，$f(z)$趋于不同的数值. 最简单而明显的例子是函数$e^{\frac{1}{z}}$. 在$0<|z|<\infty$中这函数的洛浪展开是

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\cdots,$$

它有无穷多个z的负幂项，故$z=0$是这函数的本性奇点. 当z沿正实轴趋于零时，$e^{\frac{1}{z}}$之值趋于无穷大，而当z沿负实轴趋于零时，$e^{\frac{1}{z}}$之值趋于零.

还可以证明，对于任何复数A，总可以找到一个趋于零的数列$\{z_n\}$(即$\lim_{n\to\infty}z_n=0$)，使$\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{z_n}}=A$. 例如，可选

$$z_n=\frac{1}{\ln|A|+(\arg A+2n\pi)i},$$

这时$e^{\frac{1}{z_n}}=A$，而当$n\to\infty$时

$$|z_n|=\frac{1}{\sqrt{(\ln|A|)^2+(\arg A+2n\pi)^2}}\to 0.$$

本性奇点的这一特性不限于函数$e^{\frac{1}{z}}$，而是普遍的．下面来证明它．

首先，如果b是函数$f(z)$的本性奇点，则必存在趋于b的数列$\{z_n\}$（即$\lim\limits_{n\to\infty} z_n=b$）使$\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=\infty$．否则$f(z)$在$b$的邻域内将是有界的，因而$b$为$f(z)$的可去奇点(7.2节)，这与所设不合．

其次看函数$g(z)=\dfrac{1}{[f(z)-A]}$，A是任意复数．只要证明存在趋于b的数列$\{z_n\}$使$\lim\limits_{n\to\infty} g(z_n)=\infty$，即得$\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=A$．我们用反证法．假若这样的数列不存在，则$z=b$是$g(z)$的可去奇点（见上），而有$\lim\limits_{z\to b} g(z)=G$，$|G|$为有限值．如果$G\neq 0$，则有$\lim\limits_{z\to b} f(z)=A+\dfrac{1}{G}$；如果$G=0$，则$\lim\limits_{z\to b} f(z)=\infty$．在前一情形下$b$将是$f(z)$的可去奇点，在后一情形下$b$将是$f(z)$的极点(7.3节)，都与$b$是$f(z)$的本性奇点不符．因此，必存在趋于$b$的数列$\{z_n\}$，使$\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=A$．

7.5 无穷远点

设无穷远点是函数$f(z)$的奇点．以$z=0$为圆心、R为半径作一圆C_R．只要R足够大而在圆外除无穷远点外$f(z)$别无奇点，则无穷远点为$f(z)$的一个孤立奇点．此时$f(z)$在无穷远点邻域内的洛浪展开也就是在$R<|z|<\infty$中的洛浪展开[如果$f(z)$在有限区域中没有奇点，则这展开就等于在$|z|<\infty$中的泰勒展开]．

1．如果在无穷远点的邻域内$f(z)$的洛浪展开不含正幂项，即

$$f(z)=b_0+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\cdots,\quad R<|z|<\infty, \tag{1}$$

则$z=\infty$为$f(z)$的可去奇点，$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=b_0$．

2．如果洛浪展开包含有限个正幂项，即

$$f(z)=b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1z+b_0+\frac{b_{-1}}{z}+\frac{b_{-2}}{z^2}+\cdots$$

$$(b_m\neq 0), \tag{2}$$

则 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的 m 阶极点，$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\infty$。

3．如果洛浪展开包含无穷个正幂项，即

$$f(z)=\cdots+b_mz^m+\cdots+b_1z+b_0+\frac{b_{-1}}{z}+\frac{b_{-2}}{z^2}+\cdots, \tag{3}$$

则 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点，当 $z\to\infty$ 时，$f(z)$ 之值不定，而且对于任意复数 A，存在趋于 ∞ 的数列 $\{z_n\}$（即 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\infty$）使 $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=A$。

例1．$z=\infty$ 是多项式 $p_nz^n+p_{n-1}z^{n-1}+\cdots+p_1z+p_0(p_n\neq 0)$ 的 n 阶极点。

例 2．$z=\infty$ 是函数 $e^z,\sin z,\cos z$ 的本性奇点，因为这些函数在无穷远点的邻域中的洛浪展开（也就是在 $|z|<\infty$ 中的泰勒展开）分别为

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots,$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots,$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots,$$

都含有无穷多个正幂项。

第八章　残数理论及其应用

8.1 残 数 定 理

我们曾经一再提到过，一个解析函数在它解析的区域内各处的函数值是紧密地关联着的，这突出地表现在科希积分公式上(4.5节)，特别是这公式的一个推广——均值定理上(4.6节)．在本节中我们将看到这种关系的另一种表现形式：解析函数的积分值与函数的奇点的关系．

定理　设C为一分段光滑的简单闭合曲线．设函数$f(z)$在C内除去有限个孤立奇点(极点或本性奇点)外是单值解析的，在C上没有$f(z)$的奇点，则

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{m}a_{-1}^{(k)}, \qquad (1)$$

其中C的走向是逆时针的，$a_{-1}^{(k)}$是$f(z)$在它的第k个孤立奇点b_k的邻域内洛浪展开中$(z-b_k)^{-1}$的系数，m是$f(z)$在C内的孤立奇点的总数．这个定理称为残数定理．

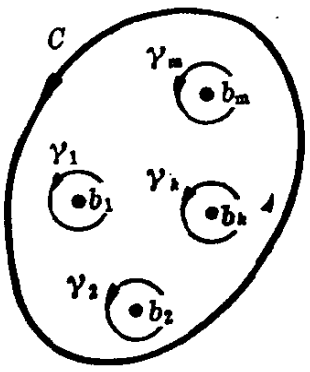


图 26

证：以奇点$b_k(k=1,2,\cdots,m)$为圆心，分别作小圆γ_k，每个小圆内只含一个奇点(圆心b_k)．根据复连通区域的科希定理[4.3节]有

$$\oint_C f(z)\,dz=\sum_{k=1}^{m}\oint_{\gamma_k}f(z)dz, \qquad (2)$$

其中γ_k的走向都是逆时针的．

在b_k的邻域内展开$f(z)$为洛浪级数：

$$f(z)=\cdots+\frac{a_{-2}^{(k)}}{(z-b_k)^2}+\frac{a_{-1}^{(k)}}{z-b_k}+a_0^{(k)}+a_1^{(k)}(z-b_k)+\cdots,$$

代入(2)式右端,注意

$$\oint_{\gamma_k}(z-b_k)^n dz=\begin{cases}0, & \text{当}n\neq-1,\\ 2\pi i, & \text{当}n=-1,\end{cases}$$

即得(1)式.

$a_{-1}^{(k)}$称为$f(z)$在它的孤立奇点b_k处的**残数**,常写作$\mathrm{res}f(b_k)$. 上面的残数定理无论在理论上和应用上都是极为重要的.

无穷远点的残数 在上面的讨论中,所有残数都是对位于有限区域内的孤立奇点说的. 有时需要考虑无穷远点的残数,这与函数在有限区域中的残数稍有不同. 从上面看到,在b点,残数的定义是

$$\mathrm{res}f(b)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz, \tag{3}$$

其中C是沿逆时针方向(即边界的正向)绕b点一周的围道,在C内除b点外别无$f(z)$的奇点. 如果把这个定义推广到无穷远点,则有

$$\mathrm{res}f(\infty)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} f(z)dz, \tag{4}$$

其中C'是沿顺时针方向绕$z=0$一周的围道,在围道外,除了$z=\infty$可能是奇点之外别无$f(z)$的奇点. 这里C'的走向对于含$z=\infty$的区域说是正向[参看 4.5 节(1)式后面].

现在把函数$f(z)$在$z=\infty$作洛浪展开:

$$f(z)=\cdots+a_1z+a_0+\frac{a_{-1}}{z}+\frac{a_{-2}}{z^2}+\cdots. \tag{5}$$

代入(4)式,并注意

$$\oint_{C'} z^n dz=\begin{cases}0, & \text{当}\quad n\neq-1,\\ -2\pi i, & \text{当}\quad n=-1,\end{cases}$$

得
$$\operatorname{res} f(\infty)=-a_{-1}. \tag{6}$$
这结果与 $f(z)$ 在有限区域中的残数有两点不同. 很明显的一点是差一负号. 第二点不同在于，如果有限处的点 b 不是奇点，则 $\operatorname{res} f(b)=0$，而对于 $z=\infty$ 说，即使它不是奇点，只要展开式(5)中的 $a_{-1}\neq 0$，残数就不等于零.

练习题 1. 设C为一分段光滑的简单闭合曲线. 若函数$f(z)$在C外除去有限个孤立奇点外是单值解析的，在C上没有 $f(z)$的奇点，试计算积分
$$\oint_C f(z)dz$$
其中C为顺时针方向的围道.

练习题 2. 证明，若单值函数 $f(z)$在全平面上(包括$z=\infty$)只有孤立奇点，则 $f(z)$ 的残数之和为零.

8.2 计算残数的公式

一般说来，计算残数就是求洛浪展开中负一次幂的系数a_{-1}. 但在洛浪展开的普遍理论中，求展开系数 a_{-1} 的公式[6.4 节(2)式]就是上节(3)式——残数的定义. 由于残数理论应用的一个重要方面是计算积分，故需要有不依赖于计算积分而求出残数的方法或者公式. 这种公式在奇点是极点时是有的.

1. 一阶极点的情形 设 b 是$f(z)$的一阶极点，则在b 点的邻域内，
$$f(z)=\frac{a_{-1}}{z-b}+a_0+a_1(z-b)+\cdots,\quad a_{-1}\neq 0.$$
以$(z-b)$乘两边，然后令 $z\to b$， 得
$$\operatorname{res} f(b)=a_{-1}=\lim_{z\to b}(z-b)f(z). \tag{1}$$
这是求函数在一阶极点的残数的基本公式.

如果f (z) 可以表示为$\frac{P(z)}{Q(z)}$的特殊形式，其中$P(z)$和$Q(z)$都是在b点及其邻域内解析的函数，b是$Q(z)$的一阶零点(7.3 节)，

$P(b)\neq 0$,则 b 是 $f(z)$ 的一阶极点,而有

$$\operatorname{res} f(b)=\lim_{z\to b}(z-b)f(z)$$

$$=\lim_{z\to b}(z-b)\frac{P(z)}{(z-b)Q'(b)+\frac{1}{2}(z-b)^2Q''(b)+\cdots}$$

$$=\frac{P(b)}{Q'(b)}\qquad [Q'(b)\neq 0]. \tag{2}$$

例 1. $z=0$ 是函数 $(\sin z)^{-1}$ 的一阶极点(见 7.3 节例 1),故在 $z=0$ 点的残数是

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}=1;$$

或者,用公式(2),也得到残数等于 $\left.\frac{1}{(\sin z)'}\right|_{z=0}=\left.\frac{1}{\cos z}\right|_{z=0}=1$.

例 2. 求 $f(z)=\cot z$ 在 $z=n\pi$ $(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots)$ 处的残数.

因 $\cot z=\frac{\cos z}{\sin z}$,故 $z=n\pi(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 都是 $\cot z$ 的一阶极点,相应残数等于

$$\left.\frac{\cos z}{(\sin z)'}\right|_{z=n\pi}=\left.\frac{\cos z}{\cos z}\right|_{z=n\pi}=1.$$

应当注意在应用公式(1)或者(2)时,必须先判明所讨论的奇点确是函数的一阶极点.

2. $m(\geqslant 2)$**阶极点的情形** 这时,在极点 b 的邻域内有

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-b)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-b)^{m-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-b}$$
$$+a_0+a_1(z-b)+\cdots,$$

其中 $a_{-m}\neq 0$.

在这种情形下,不能简单地仿照一阶极点的做法,两边乘上 $(z-b)^m$,然后令 $z\to b$,因为这样求出来的将是 a_{-m},而不是残数

a_{-1}. 但如果在两边乘上$(z-b)^m$，得到

$$(z-b)^m f(z)=a_{-m}+a_{-m+1}(z-b)+\cdots$$
$$+a_{-1}(z-b)^{m-1}+a_0(z-b)^m+\cdots \qquad (3)$$

之后，求导数 $m-1$ 次，

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-b)^m f(z)\}=(m-1)!a_{-1}+m!a_0(z-b)+\cdots,$$

再令 $z\to b$，即得

$$a_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-b)^m f(z)\}\Big|_{z=b}. \qquad (4)$$

这是当b为$f(z)$的 $m(\geqslant 2)$阶极点时求残数的普遍公式. 这公式表明，在这种情形下，残数a_{-1}等于函数$(z-b)^m f(z)$在 b 的邻域内泰勒展开中$(z-b)^{m-1}$的系数[这一点也可以由(3)式看出].

例 3. 求$f(z)=(z^2+1)^{-3}$在 $z=i$点的残数.

因 $z=i$ 是$(z^2+1)^3=(z+i)^3(z-i)^3$的三阶零点，故 $z=i$是 $f(z)$的三阶极点(7.3 节). 于是，利用公式(4)，得

$$\operatorname{res} f(i)=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left\{(z-i)^3\frac{1}{(z^2+1)^3}\right\}\Big|_{z=i}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}(z+i)^{-3}\Big|_{z=i}=6(2i)^{-5}=-\frac{3}{16}i.$$

练习题. 若 b 点是 $P(z)$的 $m-1$ 阶零点，是 $Q(z)$的m阶零点，即

$$P(b)=P'(b)+\cdots=P^{(m-2)}(b),\quad P^{(m-1)}(b)\neq 0;$$
$$Q(b)=Q'(b)=\cdots=Q^{(m-1)}(b),\quad Q^{(m)}(b)\neq 0,$$

求 $f(z)=P(z)/Q(z)$在 b 点的残数 $\operatorname{res} f(b)$.

8.3 应用残数理论计算定积分

残数理论的最重要应用之一是计算定积分，其原理是把要计算的积分(实变的或复变的)与一个复变围道（在今后几节中专指简单闭合曲线)积分相联系，然后用残数理论计算后者之值. 下面举几个重要的典型例子来说明这一方法.

先看下列形式的积分：

$$I=\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta, \tag{1}$$

其中 $R(\sin\theta,\cos\theta)$ 是 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的有理函数，而且在积分区间中是连续的. 显然，如果令 $z=e^{i\theta}$，则在 z 平面上与 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 相应的是一个以原点为圆心的单位圆 C，而积分(1)成为一个围道积分：

$$I=\int_C R\left(\frac{z-z^{-1}}{2i},\ \frac{z+z^{-1}}{2}\right)\frac{dz}{iz}, \tag{2}$$

C 的走向是逆时针的. 这里用了 3.3 节(1)式. 积分(2)中的被积函数现在是 z 的有理函数，而且在积分路线 C 上是解析的. 因此，根据 8.1 节的残数定理，有

$$I=\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta=2\pi i\sum_C \text{res}, \tag{3}$$

其中 $\sum_C$ res 代表函数

$$f(z)=\frac{1}{iz}R\left(\frac{z-z^{-1}}{2i},\ \frac{z+z^{-1}}{2}\right) \tag{4}$$

在 C 内的残数之和.

例. 计算积分 $I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\epsilon\cos\theta}d\theta$ 之值，$|\epsilon|<1$.

令 $z=e^{i\theta}$，得

$$I=\int_C \frac{1}{1+\epsilon\frac{z+z^{-1}}{2}}\frac{dz}{iz}=\frac{2}{i\epsilon}\int_C\frac{1}{z^2+\frac{2}{\epsilon}z+1}dz$$

$$=\frac{2}{i\epsilon}\cdot 2\pi i\sum \text{res},$$

其中 $\sum$ res 是函数 $\left(z^2+\frac{2}{\epsilon}z+1\right)^{-1}$ 在单位圆 C 内的残数和，

函数 $z^2+\frac{2}{\epsilon}z+1$ 有两个一阶零点 z_1,z_2：

$$z_1=-\frac{1}{\epsilon}+\frac{1}{\epsilon}\sqrt{1-\epsilon^2},\quad z_2=-\frac{1}{\epsilon}-\frac{1}{\epsilon}\sqrt{1-\epsilon^2}.$$

今 $|\epsilon|<1$，故 $|z_2|>1$，但 $z_2z_1=1$，故 $|z_1|<1$，即 z_2 在圆外而 z_1 在圆内. 因此，利用 8.2 节(1)式，得

$$I=\frac{4\pi}{\epsilon}\lim_{z\to z_1}\frac{1}{z-z_2}=\frac{4\pi}{\epsilon}\frac{1}{z_1-z_2}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\epsilon^2}}.$$

8.4 无穷积分

第二类可以用残数理论来计算的积分是实变数的无穷积分

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx. \tag{1}$$

这里的无穷积分通常了解为下列极限[参看下面(7)式和积分主值的概念]：

$$I=\lim_{\substack{R_1\to\infty\\R_2\to\infty}}\int_{-R_1}^{R_2}f(x)dx, \tag{2}$$

如果极限存在的话.

积分(1)不能像上节中的积分那样直接与一个围道积分联系起来，而需要通过一些中间步骤. 把实变数 x 换成复变数 z，则积分(1)是 z 平面上沿实轴从 $-R_1$ 到 R_2 的积分的极限值. 假设

1) $f(z)$ 在上半平面除了有限个孤立奇点外是处处解析的，在实轴上没有奇点；

2) 在 $0\leqslant\arg z\leqslant\pi$ 中(即包括实轴在内的上半平面)，当 $|z|\to\infty$ 时，$zf(z)$ 一致趋于零，即对任意给定的 $e>0$，存在 $R>0$，使当 $|z|\geqslant R$，$0\leqslant\arg z\leqslant\pi$ 时

$$|zf(z)|<e. \tag{3}$$

现在考虑围道积分

$$\int_C f(z)dz.$$

围道 C 由两部分构成：沿实轴从 $-R$ 到 R 的直线和以 $z=0$ 为中

心、半径等于 R 的半圆 C_R(图 27). 取 R 足够大,使得一方面(3)式满足,另一方面把 $f(z)$在上半平面所有的奇点(只有有限个)都包围在C内. 于是根据残数定理,有

$$\int_C f(z)\,dz=\int_{-R}^{R} f(x)dx+\int_{C_R} f(z)dz$$
$$=2\pi i\sum \mathrm{res} f(z),$$

其中$\sum \mathrm{res} f(z)$是$f(z)$在上半平面的残数和.

在 C_R 上,$z=Re^{i\theta}$,于是,根据条件(3),有

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right|\leqslant\int_{C_R}|f(z)|\,|dz|$$
$$=\int_0^{\pi} R|f(Re^{i\theta})|d\theta<\varepsilon\pi.$$

因此

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz=0, \tag{4}$$

而得公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=2\pi i\sum \mathrm{res} f(z), \tag{5}$$

其中$\sum \mathrm{res} f(z)$是 $f(z)$在上半平面的残数和.

上面做法的基本精神是加一段积分路线(半圆 C_R) 使与原来问题中的积分路线(由$-R$到R的直线)一起构成复数平面上的一个围道,然后应用残数定理计算这围道积分之值. 显然,要这样的做法有实际用处,在所加的一段路线上的积分值必须是比较便于计算的,或者是像上面(4)式所表示的那样,其值趋于零[条件(3)是(4)式成立的一个充分条件].

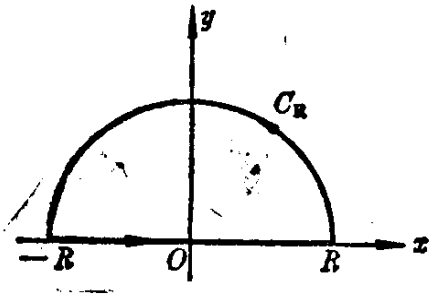


图 27

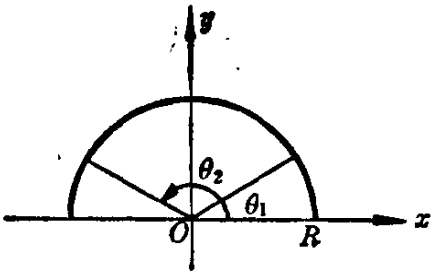


图 28

练习题. 设$f(z)$在∞点的邻域内解析，当$\theta_1 \leqslant \arg z \leqslant \theta_2$而$z \to \infty$时，$f(z)$一致地趋近于$K$，试证：

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = iK(\theta_2-\theta_1),$$

其中C_R是以原点为心，以R为半径的圆弧(逆时针方向)，并且$\theta_1 \leqslant \arg z \leqslant \theta_2$[见图 28].

还有，$f(z)$在上半平面中只有有限个奇点这一条件并非必要的. 设$f(z)$在上半平面中有无穷个孤立奇点$b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$. 如果存在曲线序列$\{C_m\}$，每一$C_m$都与实轴上从$-R_m$到$R_m$的直线段构成一个围道，在围道上没有$f(z)$的奇点，又当$m \to \infty$时，$C_m$上的点$z$的模$|z|$和$R_m$都趋于$\infty$，并且使得$\lim_{m\to\infty}\int_{C_m} f(z)dz = 0$，则(5)式仍成立，不过其中右方的残数和现在是一个无穷级数：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{res} f(b_n). \tag{6}$$

又，$f(z)$在实轴上没有奇点这一限制在一定条件下也是可以放宽的. 这将在 8.6 节中讨论.

最后讲一下积分主值的概念. 上面的(2)式表示当上下限分别趋于∞时，积分的极限值存在. 但有时这样的极限不存在，而是当$R_1 = R_2 \to \infty$时极限存在. 这后一极限值就称为**积分主值**，用

$$v.p.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx \tag{7}$$

表示.

当然，如果(2)式的极限值存在，则(7)式的极限值也必定存在，而积分主值与通常意义下的无穷积分值一致；反过来则不一定. 从上面(5)式的推导过程看出，除了一些别的条件外，只要积分主值存在，(5)式就成立.

例. 计算 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}$之值.

函数 $f(z)=(z^2+1)^{-3}$在上半平面中只有一个三阶极点$z=i$；在实轴上没有奇点；当$|z|\to\infty$时 $zf(z)=O(z^{-5})\to 0$. 用(5)式和8.2节例3中计算残数的结果，得

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}=2\pi i\left(-\frac{3i}{16}\right)=\frac{3\pi}{8}.$$

练习题. 试用下半平面中的残数计算上例中的积分值.

8.5 含三角函数的无穷积分·约当(Jordan)引理

另一种可以用残数理论来计算的积分是含三角函数的无穷积分

$$I_c=\int_0^{\infty}f(x)\cos px\,dx,\ I_s=\int_0^{\infty}f(x)\sin px\,dx,\qquad(1)$$

其中p是实数. 这一类积分最常见于傅里叶 (Fourier) 变换中.

为了计算(1)式的积分和以后的应用，下面先讲一个重要的引理——**约当引理**：设当$|z|\to\infty$时，函数 $Q(z)$在 $0\leqslant\arg z\leqslant\pi$ 中一致趋于零，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}Q(z)e^{ipz}dz=0,\qquad(2)$$

其中$p>0$，C_R 是以 $z=0$ 为圆心、半径等于R的半圆，位于上半平面(见图 27).

证：在 C_R 上，$z=Re^{i\theta}$，故

$$\left|\int_{C_R}Q(z)e^{ipz}dz\right|\leqslant\int_0^{\pi}|Q(Re^{i\theta})||e^{ipR\cos\theta-pR\sin\theta}||Re^{i\theta}id\theta|$$

$$=\int_0^{\pi}|Q(Re^{i\theta})|e^{-pR\sin\theta}Rd\theta.$$

取R足够大，使$|Q(Re^{i\theta})|<\varepsilon$，$\varepsilon$ 为任意给定的正数，则

$$\left|\int_{C_R} Q(z)e^{ipz}dz\right| < \varepsilon R\int_0^{\pi} e^{-pR\sin\theta}d\theta$$

$$= \varepsilon R\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-pR\sin\theta}d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-pR\sin\theta}d\theta\right\}.$$

在最后的积分中把 θ 换成 $\pi-\theta$,即见这积分与前面的积分相同,而有

$$\left|\int_{C_R} Q(z)e^{ipz}dz\right| < 2\varepsilon R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-pR\sin\theta}d\theta.$$

当 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$时, $\sin\theta\geqslant\frac{2\theta}{\pi}$①, 因此

$$\left|\int_{C_R} Q(z)e^{ipz}dz\right| < 2\varepsilon R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2pR}{\pi}\theta}d\theta$$

$$= 2\varepsilon R\cdot\frac{\pi}{2pR}(1-e^{-pR})$$

$$= \frac{\varepsilon\pi}{p}(1-e^{-pR}).$$

由于 ε 可以任意小,故有(2)式.

现在看如何利用残数定理和约当引理来计算(1)式中的积分 I_c 和 I_s. 首先要设法使它们与一围道积分相联. 注意现在的积分限是从 0 到∞,因此不能像上节中的做法那样直接加上 C_R 使变成围道积分.

但是,如果 $f(x)$是 x 的偶函数,即 $f(x)=f(-x)$,则

$$I_c=\int_0^{\infty} f(x)\cos px\,dx=\int_0^{\infty} f(x)\frac{e^{ipx}+e^{-ipx}}{2}dx$$

① 这个不等式可以用作图法,比较 $y=\sin\theta$ 和 $y=\frac{2\theta}{\pi}$两函数之值而得到;也可以通过证明$\frac{\sin\theta}{\theta}$之值随 θ 由 0 变到$\frac{\pi}{2}$而减少这一结果而得到.

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^{\infty}f(x)e^{ipx}dx+\int_0^{\infty}f(x)e^{-ipx}dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^{\infty}f(x)e^{ipx}dx+\int_{-\infty}^{0}f(-x)e^{ipx}dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{ipx}dx. \tag{3}$$

于是就可以仿照上节的做法把 I_c 与一围道积分相联：

$$\int_C f(z)e^{ipz}dz=\int_{-R}^{R}f(x)e^{ipx}dx+\int_{C_R}f(z)e^{ipz}dz. \tag{4}$$

如果 $f(z)$在上半平面中除了有限个孤立奇点外，处处是解析的，在实轴上也没有奇点，而且当$|z|\to\infty$时 $f(z)$ 在 $0\leqslant\arg z\leqslant\pi$ 中一致趋于零，则由约当引理(设$p>0$，这不影响 I_c 之值)有 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)e^{ipz}dz=0$，而从(4)式得

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{ipx}dx=\lim_{R\to\infty}\int_C f(z)e^{ipz}dz$$

$$=2\pi i\sum\operatorname{res}\{f(z)e^{ipz}\}.$$

代入(3)式，得公式

$$I_c=\int_0^{\infty}f(x)\cos px\,dx=\pi i\sum\operatorname{res}\{f(z)e^{ipz}\}, \tag{5}$$

其中$\sum\operatorname{res}\{f(z)e^{ipz}\}$是函数 $f(z)e^{ipz}$在上半平面的残数和.

对于 I_s 也有类似的结果：设 $f(x)$ 是奇函数，$f(-x)=-f(x)$，$f(z)$在上半平面除了有限个孤立奇点外，处处是解析的，在实轴上也没有奇点，而且 $f(z)$满足约当引理的条件，则当$p>0$时

$$I_s=\int_0^{\infty}f(x)\sin px\,dx=\pi\sum\operatorname{res}\{f(z)e^{ipz}\}, \tag{6}$$

其中$\sum\operatorname{res}\{f(z)e^{ipz}\}$是 $f(z)e^{ipz}$ 在上半平面的残数和. 读者试自己证明这一公式.

练习题 1. 讨论 $p<0$ 时用残数计算I_c的公式.

练习题 2. 如果$f(z)$在下半平面($-\pi\leqslant\arg z\leqslant 0$)中满足上面公式中的各个条件，结果如何？

练习题 3. 计算 I_c 或者 I_s 时，是否可以分别直接考虑下列围道积分：

$$\int_c f(z)\cos pz\,dz,\ \int_c f(z)\sin pz\,dz?$$

练习题 4. 如果$f(z)$在上半平面中除了有限个孤立奇点外，处处是解析的，在实轴上也没有奇点，而且当$|z|\to\infty$时$f(z)$在 $0\leqslant\arg z\leqslant\pi$ 中一致趋于零，如何计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos px\,dx\text{和}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin px\,dx?$$

其中$f(x)$既非奇函数，也非偶函数.

例. 求积分 $I=\int_0^{\infty}\frac{\cos px}{x^2+a^2}dx$之值，$p>0$.

$f(x)=(x^2+a^2)^{-1}$是偶函数，$f(z)=(z^2+a^2)^{-1}$在上半平面中(包括实轴)只有一个一阶极点 $z=ia$，且当$|z|\to\infty$时一致趋于零($|\arg z|\leqslant\pi$)，故可用公式(5)而得

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos px}{x^2+a^2}dx=\pi i\left\{\operatorname{res}\frac{e^{ipz}}{z^2+a^2}\right\}_{z=ia}$$

$$=\pi i\frac{e^{ip(ia)}}{2(ia)}=\frac{\pi}{2a}e^{-pa}.$$

在计算残数时用了 8.2 节公式(2).

约当引理还可以进一步推广. 这在第十章求拉氏换式的反演时[10.8节]要用到. 请读者参考那里的讨论.

8.6 积分路线上有奇点的情形·积分主值

看一个例子：积分$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$是存在的，因为当$x\to0$时，$\frac{\sin x}{x}$的极限值为 1，当 $x\to\infty$时，$\frac{1}{x}$单调趋于零而$\left|\int_0^x\sin x\,dx\right|$有界①. 如果仿照上节的方法用残数来计算这积分，则应考虑围道积分$\int_c\frac{e^{iz}}{z}dz$. 但这时 $z=0$ 是被积函数的奇点，如果积分路线

① 参看，例如，Г. М. 菲赫金哥尔茨，微积分学教程，第二卷[441]，1951.

C 通过 $z=0$，则积分在通常意义下是不收敛的. 为此，我们考虑图 29 的围道 C：沿负实轴从 $-R$ 到 $-\delta(\delta>0)$，再沿圆心在 $z=0$、半径为 δ、位于上半平面的半圆绕过 $z=0$ 这点，然后沿正实轴从 δ 到 R，最后沿半径为 R、中心在 $z=0$ 的上半圆 C_R 回到实轴上的 $-R$ 点. 在围道 C 内被积函数 $\frac{e^{iz}}{z}$ 没有奇点，故

$$\int_C=\int_{-R}^{-\delta}+\int_{C_\delta}+\int_{\delta}^{R}+\int_{C_R}=0. \tag{1}$$

应用约当引理(8.5节)，得 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}=0$.

在 C_δ 上把 $\frac{e^{iz}}{z}$ 展开为 $z=0$ 点邻域内的洛浪级数，得

$$\int_{C_\delta}\frac{e^{iz}}{z}\,dz=\int_{C_\delta}\frac{1+iz+O(z^2)}{z}dz=[\ln z+O(z)]_{C_\delta}.$$

当 z 沿 C_δ 从负实轴上转到正实轴上后 $|z|$ 不变 $(=\delta)$，而 $\arg z$ 减少了 π，故 $[\ln z]_{C_\delta}=-\pi i$. 又当 $\delta\to0$ 时 $O(z)=O(\delta)\to0$，故

$$\lim_{\delta\to0}\int_{C_\delta}\frac{e^{iz}}{z}dz=-\pi i.$$

(1)式的另外两个积分是

$$\int_{-R}^{-\delta}\frac{e^{ix}}{x}\,dx+\int_{\delta}^{R}\frac{e^{ix}}{x}\,dx=\int_{R}^{\delta}\frac{e^{-ix}}{x}\,dx+\int_{\delta}^{R}\frac{e^{ix}}{x}dx$$

$$=\int_{\delta}^{R}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}\,dx=2i\int_{\delta}^{R}\frac{\sin x}{x}dx.$$

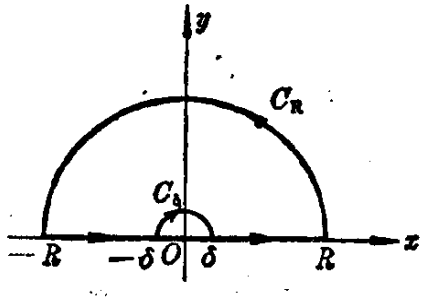


图 29

把以上所得结果代入 (1) 式，令 $\delta\to0$，$R\to\infty$，即得

$$2i\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx-\pi i=0,$$

故

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

从上面的计算看到，在 C_δ 一段上积分值的计算与求残数的计

算相似；只有洛浪展开中 z^{-1} 的项对积分值有贡献. 但应注意有以下的不同之点：

1. C_δ 不是闭合路线，z 的正幂项对积分值的贡献只是由于 $\delta\to 0$ 才趋于零的.

2. 奇点(实轴上的)不能是二阶或者二阶以上的极点，更不能是本性奇点，否则当 $\delta\to 0$ 时，$\int_{C_\delta}$ 之值将趋于∞(极点情形)，或者不定(本性奇点情形，见 7.4 节).

另外需要注意的是，绕过奇点的曲线 C_δ 不必为圆弧，但 C_δ 与实轴相接的两点到奇点的距离必须是相等的，否则

$$[\ln z]_{C_\delta}=\ln z\Big|_{\substack{z=\delta_2 e^{0\cdot i}\\ z=\delta_1 e^{\pi i}}}=\ln\delta_2-\ln\delta_1-\pi i,$$

当 δ_1 和 δ_2 分别趋于零时，极限不存在. 按 $\delta_1=\delta_2\to 0$ 计算的极限值称为**积分主值**(试与 3.4 节的积分主值比较). 当积分路线上有被积函数的奇点时，用上面的方法计算出来的积分值是积分主值. 当然，如果原来的积分$\left(\text{例如上面例子中的}\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx\right)$在通常意义下存在，则其值与积分主值是一致的.

练习题 1. 如果在上面的例子中，令 C_δ 在下半平面绕过 $z=0$ 点(图30)，结果有无改变？

练习题 2. 如果 8.3 节(1)式中的被积函数 $R(\sin\theta,\cos\theta)$ 在 $[0,2\pi]$ 中有奇点，因而 8.3 节(4)式中相应的函数 $f(z)$ 在单位圆上有奇点，假定是一阶极点，问该节公式(3)应如何修改？

练习题 3. 设 $f(z)$ 在 a 点的邻域内解析，当 $\theta_1\leqslant\arg(z-a)\leqslant\theta_2$，而 $z\to 0$

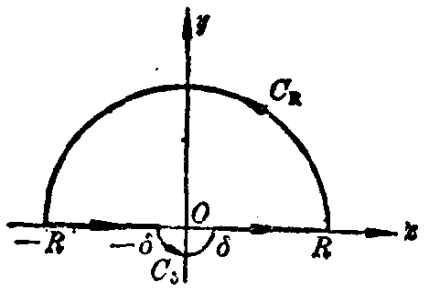


图 30

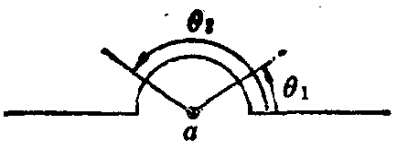


图 31

时，$(z-a)f(z)$一致地趋近于k，试证：

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)dz=ik(\theta_2-\theta_1),$$

其中C_δ是以a为心、以δ为半径的圆弧(逆时针方向)，并且$\theta_1\leqslant\arg(z-a)\leqslant\theta_2$(见图 31)。

8.7* 多值函数的积分

一种常见的多值函数积分是

$$I=\int_0^\infty x^{s-1}Q(x)dx, \tag{1}$$

其中s是非整数实数，$\arg x=0$，$Q(x)$是单值函数，在$(0,\infty)$中无奇点，当$x\to 0$和$x\to\infty$时，$x^sQ(x)$都趋于零(这保证积分分别在下限和上限收敛)。设

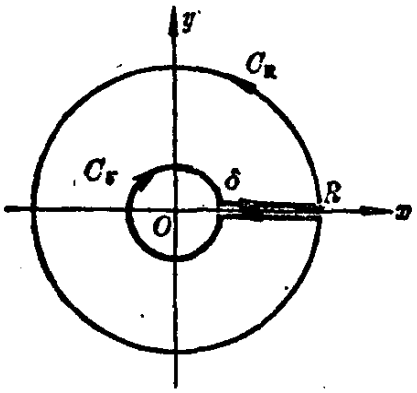


图 32

1) $Q(z)$在全平面上除有限个孤立奇点外处处是解析的(而且在正实轴上无奇点)；

2) 当$|z|\to 0$和$|z|\to\infty$时，$|z^sQ(z)|$一致趋于零，$0\leqslant\arg z\leqslant 2\pi$。

考虑围道积分

$$\int_C z^{s-1}Q(z)dz, \tag{2}$$

其中C是图 32 中的围道：从正实轴上$x=\delta(\delta>0)$处出发，沿实轴正向到R，再沿圆心在$z=0$点、半径为R的圆周C_R走一圈，回到实轴上R点，然后沿实轴负向到$x=\delta$点，最后沿半径为δ的小圆C_δ绕$z=0$点一周回到出发点。

现规定在正实轴的上缘$\arg z=0$，则在实轴的下缘$\arg z=2\pi$，这确定了被积函数在C内的单值分枝，而有

$$\int_C z^{s-1}Q(z)dz=\int_\delta^R x^{s-1}Q(x)dx+\int_{C_R} z^{s-1}Q(z)dz$$

$$+\int_R^\delta (xe^{2\pi i})^{s-1}Q(x)\,dx+\int_{C_\delta} z^{s-1}Q(z)dz$$

$$=(1-e^{2s\pi i})\int_\delta^R x^{s-1}Q(x)dx+\int_{C_R} z^{s-1}Q(z)dz$$

$$+\int_{C_\delta} z^{s-1}Q(z)dz=2\pi i\sum\mathrm{res}\{z^{s-1}Q(z)\}. \quad (3)$$

在 C_R 上令 $z=Re^{i\theta}$，并取 R 足够大，使 $|z^sQ(z)|<\varepsilon$，ε 为任意给定正数，得

$$\left|\int_{C_R} z^{s-1}Q(z)dz\right|\leqslant\int_0^{2\pi} R^{s-1}|Q(Re^{i\theta})|Rd\vartheta<2\pi\varepsilon.$$

同样，在 C_δ 上令 $z=\delta e^{i\theta}$，并取 δ 足够小，使 $|z^sQ(z)|<\varepsilon$，得

$$\left|\int_{C_\delta} z^{s-1}Q(z)dz\right|\leqslant\int_0^{2\pi}\delta^{s-1}|Q(\delta e^{i\theta})|\delta d\vartheta<2\pi\varepsilon.$$

因此，由(3)式，令 $\delta\to 0$，$R\to\infty$，得

$$\int_0^\infty x^{s-1}Q(x)dx=\frac{2\pi i}{1-e^{2s\pi i}}\sum\mathrm{res}\{z^{s-1}Q(z)\},$$

$$0<\arg z<2\pi, \quad (4)$$

其中 $\sum\mathrm{res}\{z^{s-1}Q(z)\}$ 代表函数 $z^{s-1}Q(z)$ 在 $Q(z)$ 的奇点的残数和. 这是用残数计算积分(1)的公式.

(4)式右方可以改写如下：

$$\frac{2\pi i}{1-e^{2s\pi i}}\sum\mathrm{res}\{z^{s-1}Q(z)\}$$

$$=\frac{2\pi ie^{-(s-1)\pi i}}{e^{s\pi i}-e^{-s\pi i}}\sum\mathrm{res}\{z^{s-1}Q(z)\}$$

$$=\frac{\pi}{\sin s\pi}\sum\mathrm{res}\{(ze^{-\pi i})^{s-1}Q(z)\}.$$

于是有公式

$$\int_0^\infty x^{s-1}Q(x)dx=\frac{\pi}{\sin s\pi}\sum\mathrm{res}\{(-z)^{s-1}Q(z)\},$$

$$-\pi<\arg(-z)<\pi. \quad (5)$$

公式(5)的优点是残数和 $\sum\mathrm{res}$ 前面的系数是实数.

例. 计算积分$\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx$, $0<\alpha<1$.

很容易证明这里的被积函数满足公式(4)或(5)成立的条件，因为当$|z|\to\infty$时$|z^{\alpha}(z+1)^{-1}|=O(|z|^{\alpha-1})\to 0$ (因$\alpha<1$)，而当$|z|\to 0$时$|z^{\alpha}(z+1)^{-1}|=O(|z|^{\alpha})\to 0$(因$\alpha>0$). $(z+1)^{-1}$只有一个一阶极点$z=-1$. 用(4)式，注意，因$0<\arg z<2\pi$，有$z=-1=e^{\pi i}$，故得

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx=\frac{2\pi i}{1-e^{2\alpha\pi i}}\operatorname{res}\left\{\frac{z^{\alpha-1}}{z+1}\right\}_{z=e^{\pi i}}=\frac{2\pi i e^{(\alpha-1)\pi i}}{1-e^{2\alpha\pi i}}$$

$$=\frac{-2\pi i}{e^{-\alpha\pi i}-e^{\alpha\pi i}}=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}.$$

如果用公式(5)，须注意，因$-\pi<\arg(-z)<\pi$，故在$z=-1$处$\arg(-z)=\arg(1)=0$，而有

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\operatorname{res}\left\{\frac{(-z)^{\alpha-1}}{z+1}\right\}_{-z=e^{0\cdot i}}=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}.$$

练习题. 若规定在正实轴的上缘$\arg z=2\pi$，公式(4)应如何修改？试用所得公式计算例中的积分，看结果有无改变，原因何在？

8.8* 其他例子

上面讲了几种可以用残数理论来计算的积分. 读者在掌握了相应公式的运用之后，不妨把处理这几种积分的方法比较和总结一下，体会这些方法的共同原理，然后试算几个不属于这些类型的积分，以训练自己灵活运用这些原理的能力. 此外还可以看一些其他书①上有关的例题，以便多学会一些计算的技巧. 下面再举几个例子.

例 1 计算菲涅耳(Fresnel)积分：$\int_0^{\infty}\sin x^2dx$, $\int_0^{\infty}\cos x^2dx$.

① 例如，T. M. MacRobert, Functions of a Complex Variable, §30, p. 59 (1954)，或 M.A.拉甫伦捷夫，Б.А.沙巴特，复变函数论方法，§§ 73, 74.

根据 8.5 节中处理含三角函数的无穷积分的经验，自然会想到去考虑围道积分

$$\int_C e^{iz^2}dz.$$

但很快就会发现该节中的围道不适用，因为在半圆C_R上，$z=Re^{i\theta}$，故

$$\int_{C_R} e^{iz^2}dz = \int_0^{\pi} e^{iR^2e^{i2\theta}}Re^{i\theta}id\theta$$

$$= \int_0^{\pi} e^{iR^2\cos 2\theta - R^2\sin 2\theta}Re^{i\theta}id\theta.$$

当$R\to\infty$时，从 $\pi/2$ 到 π 这一部分的被积函数是无界的，因为这时 $\sin 2\theta<0$. 那末，把 θ 的变化范围限制在 0 到 $\pi/2$ 之间，而取图 33 中的围道，是否可行呢？结果还是没有解决问题. 因为这时固然可以证明

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{iz^2}dz=0, \tag{1}$$

但由此只能得到

$$\int_0^{\infty}\sin x^2dx=\int_0^{\infty}\cos x^2dx,$$

而不能算出积分值.

如果把 θ 的变化范围再缩小为由 0 到 $\pi/4$，即取图 34 的围

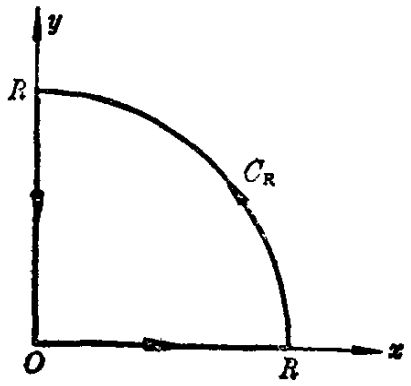


图 33

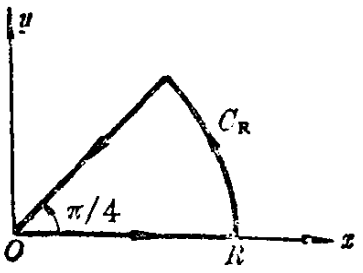


图 34

道，则(1)式仍有效，而沿辐角为 $\pi/4$ 的直线上的积分是

$$\int_R^0 e^{i(re^{i\frac{\pi}{4}})^2} e^{i\frac{\pi}{4}} dr = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_R^0 e^{-r^2} dr.$$

于是，由于 e^{iz^2} 在这个围道内没有奇点，有

$$\int_C e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{ix^2} dx + \int_{C_R} e^{iz^2} dz + e^{i\frac{\pi}{4}} \int_R^0 e^{-r^2} dr = 0.$$

令 $R \to \infty$，因(1)式，得

$$\int_0^\infty e^{ix^2} dx = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^\infty e^{-r^2} dr = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

或

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx + i \int_0^\infty \sin x^2 dx = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

比较两边的实部和虚部，得

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}. \tag{2}$$

例 2. 计算积分 $\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx \, dx$，$a>0$，$b$ 是任意实数.

这个积分不完全属于 8.5 节中所讨论过的类型，因为在半径为 R 的半圆 C_R 上(无论 C_R 是在上半平面还是在下半平面) e^{-az^2} 不一致趋于零. 例如，当 z 沿虚轴 $z=iy$ 趋于∞时，$e^{-az^2}=e^{ay^2}\to\infty$. 但是我们仍然能够仿照该节的方法，从头做起，只是在积分围道的选取上加以修改.

要计算的积分可以变换如下：

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx \, dx = \int_0^\infty e^{-ax^2} \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2 - ibx} dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^\infty e^{-a\left(x + \frac{ib}{2a}\right)^2} dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{-\frac{b^2}{4a}}\int_{C_1}e^{-az^2}dz, \tag{3}$$

积分路线 C_1 是与实轴平行、相距为 $b/2a$ 的直线，由 $\mathrm{Re}(z)=x$ $=-\infty$到 $x=+\infty$(见图 35)。

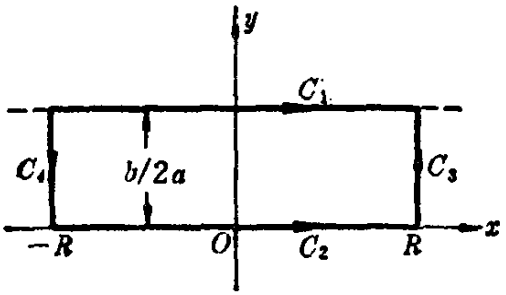


图 35

在(3)式最后的积分中，如果 z 是实数，则积分路线是图 35 中沿实轴的 C_2，$R\to\infty$时，其积分值是已知的(见例 1)：

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}e^{-ax^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\frac{\pi}{a}}. \tag{4}$$

因此，如果能够把$\int_{C_1}$和$\int_{C_2}$联起来，就有可能算出$\int_{C_1}$. 于此，很自然地会考虑如下的围道积分：

$$\int_C e^{-az^2}dz$$

$$=\int_{-R}^{R}e^{-ax^2}dx+\left\{\int_{C_3}-\int_{C_1'}+\int_{C_4}\right\}e^{-az^2}dz=0, \tag{5}$$

其中 C_1' 是 C_1的一段，在这一段上 $\mathrm{Re}(z)=x$ 由 $-R$ 变到 R；积分值$\int_C=0$ 是由于 e^{-az^2} 在围道 C 内没有奇点的缘故. 现在来估计$\int_{C_3}$和$\int_{C_4}$之值：

$$\left|\int_{C_3} e^{-az^2}dz\right| = \left|\int_0^{\frac{b}{2a}} e^{-a(R+iy)^2} i\,dy\right|$$

$$\leqslant e^{-aR^2}\int_0^{\frac{b}{2a}} e^{ay^2}dy,$$

最后的积分值是有界的，而当 $R\to\infty$ 时 $e^{-aR^2}\to 0$，故 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_2}=0$.

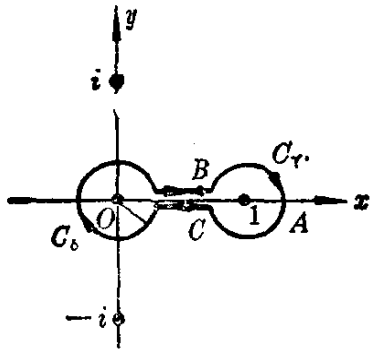


图 36

同样，$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_4}=0$. 因此，由(5)和(4)得

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_1'} e^{-az^2}dz = \int_{C_1} e^{-az^2}dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

代入(3)，得

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{-\frac{b^2}{4a}}}{\sqrt{a}} \quad (a>0). \tag{6}$$

例 3. 求积分 $\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{x^2+1}dx$ 之值，其中 $-1<p<2$（积分收敛的条件）.

从 8.7 节处理多值函数积分的方法，容易想到用图 36 中的围道 C 来计算现在的积分，因在这围道的外面，函数 $z^{1-p}(1-z)^p/(z^2+1)$ 是单值的，而且这函数沿实轴上缘从 0 到 1 和沿实轴下缘从 1 到 0 的积分与现在要计算的积分最多差一常数因子(见下). 这样就把要计算的积分和一个复变积分联系起来了.

和前面几个例子不同的是，现在应当考虑围道 C 的外部区域. 在这个区域中，函数 $f(z)=z^{1-p}(1-z)^p/(z^2+1)$ 有两个奇点 $z=\pm i$，都是一阶极点. 因此，根据残数定理，就有

$$\int_C \frac{z^{1-p}(1-z)^p}{z^2+1}dz = 2\pi i\{\mathrm{res}f(i)+\mathrm{res}f(-i)$$

$$+\mathrm{res}f(\infty)\}. \tag{7}$$

这里需要注意，围道C为顺时针方向，对于外部区域来说，这恰恰是正向. 由于围道C包含了∞点于其中，故在应用残数定理时应计及$f(z)$在∞点的残数，也不论∞点是否为奇点（参见第8.1节）.

下面分别计算(7)式中的各项.

首先，计算(7)式左边的积分. 假定在实轴从0到1这一段的上缘$\arg z=\arg(1-z)=0$，则

$$\int_C \frac{z^{1-p}(1-z)^p}{z^2+1}\,dz=\int_\delta^{1-\gamma}\frac{x^{1-p}(1-x)^p}{x^2+1}dx$$
$$+\int_{C_\gamma}\frac{z^{1-p}(1-z)^p}{z^2+1}\,dz+\int_{1-\gamma}^{\delta}\frac{x^{1-p}(1-x)^p\cdot e^{-2p\pi i}}{x^2+1}dx$$
$$+\int_{C_\delta}\frac{z^{1-p}(1-z)^p}{z^2+1}dz,$$

其中C_δ和C_γ分别是绕$z=0$和$z=1$这两个枝点的小圆，半径分别为δ和γ. 在C_δ上$|(1-z)^p/(z^2+1)|$是有界的，令M为其上界，则有

$$\left|\int_{C_\delta}\frac{z^{1-p}(1-z)^p}{z^2+1}dz\right|\leqslant M\int_{2\pi}^{0}|\delta e^{i\theta}|^{1-p}\cdot|\delta e^{i\theta}i\,d\theta|$$
$$=2\pi M\delta^{2-p}.$$

当$\delta\to0$时，由于$p<2$，故右方趋于零，而得$\lim\limits_{\delta\to0}\int_{C_\delta}=0$. 同样可证$\lim\limits_{\gamma\to0}\int_{C_\gamma}=0$. 因此

$$\lim_{\substack{\delta\to0\\\gamma\to0}}\int_C\frac{z^{1-p}(1-z)^p}{z^2+1}\,dz=(1-e^{-2p\pi i})\int_0^1\frac{x^{1-p}(1-x)^p}{x^2+1}dx.\tag{8}$$

其次，计算$f(z)$在$z=\pm i$点的残数. 在$z=i$点，$\arg z=\pi/2$，$\arg(1-z)=-\pi/4$①，故残数为

① 在确定各个辐角时，可从例如，C的上缘的B点［$\arg z=\arg(1-z)=0$］出发，保持变化路线不跨越0到1这一段实轴即可；被积函数在C外是单值的.

$$\frac{(e^{i\frac{\pi}{2}})^{1-p}(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^{p}}{2i}=2^{\frac{p}{2}-1}e^{-\frac{3p\pi}{4}i}. \tag{9}$$

在 $z=-i$ 点，$\arg z=3\pi/2$，$\arg(1-z)=\pi/4$，故残数为

$$\frac{(e^{i\frac{3\pi}{2}})^{1-p}(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{p}}{-2i}=2^{\frac{p}{2}-1}e^{-\frac{5p\pi}{4}i}. \tag{10}$$

最后，计算 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 点的残数. 这时，可把 $f(z)$ 写成

$$\frac{z^{1-p}(1-z)^{p}}{z^{2}+1}=\frac{z^{1-p}(-z)^{p}(1-z^{-1})^{p}}{z^{2}+1}.$$

若规定当 $|z|\to\infty$ 时 $(1-z^{-1})^{p}\to 1$，则 $\arg(-z)=\arg z-\pi$. 这可以从 C_R 与实轴上缘的交点 A 上看出. 当 z 由围道 C 的上缘的 B 点变到 A 点时，$\arg z$ 不变，仍为 0，而 $\arg(1-z)$ 变为 $-\pi$. 今 $\arg(1-z)=\arg(-z)+\arg(1-z^{-1})$. 既设 $|z|\to\infty$ 时 $(1-z^{-1})^{p}\to 1$，故在 A 点 $\arg(1-z^{-1})=0$ 而 $\arg(-z)=\arg(1-z)=-\pi$. 这证明 $\arg(-z)=\arg z-\pi$. 因此

$$\frac{z^{1-p}(1-z)^{p}}{z^{2}+1}=\frac{e^{-p\pi i}\cdot z}{z^{2}}\frac{(1-z^{-1})^{p}}{1+z^{-2}}=\frac{e^{-p\pi i}}{z}[1+O(z^{-1})],$$

所以，

$$\operatorname{res} f(\infty)=-e^{-p\pi i}. \tag{11}$$

把上面所得结果(8)，(9)，(10)和(11)代入(7)式中，得

$$\begin{aligned}&\int_{0}^{1}\frac{x^{1-p}(1-x)^{p}}{x^{2}+1}dx\\&=\frac{2\pi i}{1-e^{-2p\pi i}}\left[2^{\frac{p}{2}-1}\left(e^{-\frac{3p\pi}{4}i}+e^{-\frac{5p\pi}{4}i}\right)-e^{-p\pi i}\right]\\&=\frac{\pi}{\sin p\pi}\left[2^{\frac{p}{2}}\cos\frac{p\pi}{4}-1\right].\end{aligned} \tag{12}$$

练习题. 证明

$$\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x^{2}+a^{2})(\ln^{2}x+\pi^{2})}=\frac{\pi}{2a}\frac{1}{\ln^{2}a+\frac{\pi^{2}}{4}}-\frac{1}{1+a^{2}},\ a>0.$$

提示：注意

$$\frac{1}{\ln^2 x+\pi^2}=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\ln x-\pi i}-\frac{1}{\ln x+\pi i}\right)=\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{\ln(xe^{-\pi i})}-\frac{1}{\ln(xe^{\pi i})}\right].$$

8.9* 应用残数定理计算无穷级数的和

在这一节里，我们讨论残数定理的另一个应用，即用于计算某些无穷级数的和. 设有无穷级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$，其中 f 是已知函数，除了有限个非整数的极点外，它在全平面解析. 若存在另一个函数 $G(z)$，$z=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 是它的一阶极点，且在这些极点处的残数均为 1，除了这些极点外，$G(z)$ 也是在全平面解析的. 作一闭合围道 C_N，将 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm N$ 包围在内，于是，根据残数定理，有

$$\oint_{C_N} G(z)f(z)dz = 2\pi i\times\left\{\sum_{n=-N}^{N} f(n)+\sum{}'\mathrm{res}G(z)f(z)\right\}, \tag{1}$$

其中 $\sum'$ 项表示 $G(z)f(z)$ 在 $f(z)$ 的诸极点处残数之和. 如果当 $N\to\infty$ 时，能求出 $\oint_{C_N} G(z)f(z)dz$ 的极限值（例如，在一定条件下为零），则我们可以算出 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$.

这里有两个问题需要解决. 一是找到这样的函数 $G(z)$，一是如何求出 $\oint_{C_N} G(z)f(z)dz$ 的极限值. 对于前一个问题，回答是 $G(z)$ 可取为 $\pi\cot\pi z$. 对于后一个问题，我们通常用下面的定理解决.

定理 设 $f(z)$ 除了有限个孤立奇点外处处解析，若存在常数 R 和 $M>0$，使 $|z|>R$ 时 $|zf(z)|\leqslant M$. 则当 $N\to\infty$ 时，

$$\oint_{C_N} \pi\cot\pi z f(z)\,dz \to 0,$$

其中 C_N为正方形围道(如图 37 所示),顶点为$\left(N+\frac{1}{2}\right)(1\pm i)$ 和 $-\left(N+\frac{1}{2}\right)(1\pm i)$.

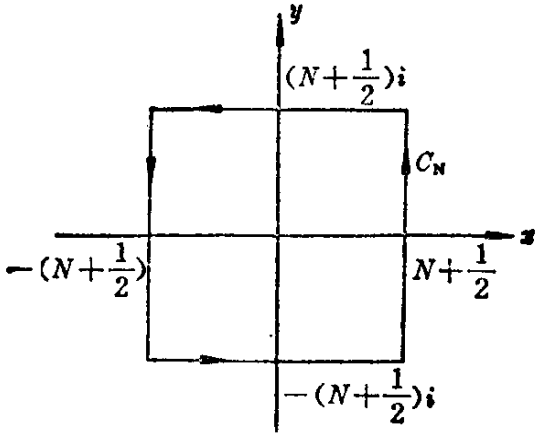


图 37

证：因为$|zf(z)|$ 有 界，$f(z)$在$|z|>R$ 之外不可能有奇点，即全部奇点均在$|z|\leqslant R$ 内，而且 $zf(z)$在 $z=\infty$点解析，所以，

$$zf(z)=a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots,\quad |z|>R$$

或

$$f(z)=\frac{a_0}{z}+\frac{a_1}{z^2}+\frac{a_2}{z^3}+\cdots,\quad |z|>R.$$

考虑积分

$$\oint_{C_N} \frac{\pi\cot\pi z}{z}dz.$$

由残数定理，

$$\oint_{C_N} \frac{\pi\cot\pi z}{z}dz = 2\pi i\left\{\operatorname{res}\frac{\pi\cot\pi z}{z}\right\}_{z=0} + 2\pi i\sum_{n=1}^{N}\left\{\operatorname{res}\frac{\pi\cot\pi z}{z}\right\}_{z=\pm n}$$

但$\frac{\pi\cot\pi z}{z}$为偶函数，故在$z=0$点的残数必为零．而在$z=n$处，

$$\left\{\operatorname{res}\frac{\pi\cot\pi z}{z}\right\}_{z=n}=\left\{\operatorname{res}\frac{\pi\cos\pi z}{z\sin z}\right\}_{z=n}$$

$$=\left.\frac{\pi\cos\pi z}{z(\sin\pi z)'}\right|_{z=n}=\frac{1}{n}$$

故$\pi\cot\pi z/z$在$z=\pm n$处的残数互相抵消．因此，

$$\oint_{C_N}\frac{\pi\cot\pi z}{z}dz=0.$$

$$\oint_{C_N}\pi\cot\pi z f(z)dz=\oint_{C_N}\pi\cot\pi z\left[f(z)-\frac{a_0}{z}\right]dz.$$

因为

$$f(z)-\frac{a_0}{z}=\frac{a_1}{z^2}+\frac{a_2}{z^3}+\cdots,\quad |z|>R,$$

而$a_1+a_2z+a_3z^2+\cdots$在$|z|<1/R$内代表一个解析函数，故在闭区域$|z|\leqslant 1/R'$，$R'>R$中，$|a_1+a_2z+a_3z^2+\cdots|\leqslant M'$，即

$$\left|f(z)-\frac{a_0}{z}\right|\leqslant\frac{M'}{|z|^2},\quad |z|\geqslant R'.$$

当N足够大，使C_N上的所有点均满足$|z|\geqslant R'$，则

$$\left|\oint_{C_N}\pi\cot\pi z\left[f(z)-\frac{a_0}{z}\right]dz\right|$$

$$\leqslant\frac{\pi M'\cdot\left(N+\frac{1}{2}\right)}{\left(N+\frac{1}{2}\right)^2}\times\cot\pi z\text{在}C_N\text{上的上界}.$$

但当z处于C_N的两条垂边上时，$x=\pm\left(N+\frac{1}{2}\right)$，$|\cot\pi z|\leqslant 1$；当$z$处于$C_N$的上下两条边上时，$y=\pm\left(N+\frac{1}{2}\right)$，$|\cot\pi z|$在$x=0$取极大．故

$$\cot\pi z \text{ 在 } C_N \text{ 上的上界}=\frac{e^{2\pi}\left(N+\frac{1}{2}\right)+1}{e^{2\pi}\left(N+\frac{1}{2}\right)-1}\leqslant 2.$$

因此，当$N\to\infty$时，

$$\oint_{C_N}\pi\cot\pi z\left[f(z)-\frac{a_0}{z}\right]dz\to 0,$$

$$\oint_{C_N}\pi\cot\pi z f(z)dz\to 0.$$

定理得证.

根据这个定理，我们立即可以得到：如果函数$f(z)$除了有限个非整数的极点外，在全平面上解析，并且存在常数R和$M>0$，使当$|z|>R$时，$|zf(z)|\leqslant M$，则

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}f(n)\equiv\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)$$

$$=-(\pi\cot\pi z f(z)\text{在 }f(z)\text{的极点处残数之和}). \quad (2)$$

证明. 取上述定理中的方形围道C_N，考虑积分

$$\oint_{C_N}\pi\cot\pi z f(z)dz.$$

只要N足够大，则C_N一定包围了$f(z)$的全部极点于其内. 这样，在C_N中，除了有$f(z)$的全部极点外，还有$\pi\cot\pi z$的奇点(一阶极点)$z=n, n=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm N$. 在后面这些奇点处，残数为

$$\frac{\pi\cos\pi z}{(\sin\pi z)'}\cdot f(z)\Big|_{z=n}=f(n).$$

于是，根据残数定理，有

$$\oint_{C_N}\pi\cot\pi z f(z)dz$$

$$=2\pi i\times\left\{\sum_{n=-N}^{N}f(n)+\sum{}'\text{res}[\pi\cot\pi z f(z)]\right\}.$$

其中$\sum'$项代表$\pi\cot\pi z f(z)$在$f(z)$的诸极点处残数之和. 两边

取极限，即得(2)式.

例. 计算 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

按照上面的讨论，我们可取 $f(z)=\frac{1}{z^2}$. 显然它满足上述定理的条件. 但是，$f(z)$的极点 $z=0$ 为整数，不能直接引用(2)式的结果，而应该仿照前面的做法，从残数定理出发，得到

$$\oint_{C_N}\frac{\pi\cot\pi z}{z^2}dz$$

$$=2\pi i\times\sum_{n=-N}^{N}\left\{\operatorname{res}\frac{\pi\cot\pi z}{z^2}\right\}_{z=n}$$

在 $z=0$ 点，

$$\left\{\operatorname{res}\frac{\pi\cot\pi z}{z^2}\right\}_{z=0}$$

$$=\frac{\pi\cot\pi z}{z^2}\text{在 }z=0\text{ 点邻域内展开式中 }z^{-1}\text{的系数}$$

$$=\pi\cot\pi z\text{ 在 }z=0\text{ 点邻域内展开式中 }z^1\text{的系数}$$

$$=-\frac{\pi^2}{3}.$$

这里用到了 6.5 和 6.6 节的结果. 在 $z=n\neq0$ 点，

$$\left\{\operatorname{res}\frac{\pi\cot\pi z}{z^2}\right\}_{z=n}=\frac{1}{n^2}.$$

所以，

$$\oint_{C_N}\frac{\pi\cot\pi z}{z^2}dz=2\pi i\left\{-\frac{\pi^2}{3}+2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\right\}.$$

令 $N\to\infty$，左边为零，故得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}. \tag{3}$$

练习题1. 计算$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

练习题2. 计算$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$, $k\geqslant 1$.

练习题3. 计算$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}}{n^2}$.

提示：考虑积分$\oint_{C_N}\frac{\pi}{z^2\sin\pi z}dz$.

8.10* 关于零点和极点的个数的定理

设$\varphi(z)$是围道C上及C内的解析函数，$f(z)$在C上解析而且不等于零，在C内除去有限个极点外，处处是解析的，则

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_k n_k\varphi(a_k)-\sum_l p_l\varphi(b_l), \qquad (1)$$

其中C的走向是逆时针的，a_k是$f(z)$在C内的n_k阶零点，b_l是$f(z)$在C内的p_l阶极点.

证：设a是$f(z)$的μ阶零点或者$-\mu$阶极点，则在a点的邻域内可写

$$f(z)=(z-a)^{\mu}\psi(z), \qquad (2)$$

其中$\psi(z)$是a点邻域中的解析函数，且$\psi(a)\neq 0$. 如果a是零点，则μ是正整数；如果a是极点，则μ是负整数. 取对数导数，有

$$\frac{d}{dz}\ln f(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\mu}{z-a}+\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}.$$

可见不论a是$f(z)$的零点还是极点，它都是$f'(z)/f(z)$的一阶极点，残数为μ. 因此，根据残数定理，有

$$\oint_C\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=2\pi i\sum\mu\varphi(a).$$

这就证明了(1)式.

在(1)式中令 $\varphi(z)\equiv 1$,得

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_k n_k-\sum_l p_l=N-P, \tag{3}$$

N 代表 $f(z)$在 C 内的零点的总数(一个 n 阶零点算 n 个),P 代表 $f(z)$在 C 内的极点的总数(一个 p 阶极点算 p 个).

如果 $f(z)$在 C 内处处是解析的,则 $P=0$ 而有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz=N. \tag{4}$$

因 $\int\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\ln f(z)=\ln|f(z)|+i\arg f(z)$,而 $f(z)$是 z 的单值函数,故(3)式又可写作

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg f(z)=N-P. \tag{5}$$

$\Delta_C\arg f(z)$表示当 z 沿围道 C 的正向变化一周后,$f(z)$的辐角的改变;当然,$\Delta_C\arg f(z)$是 2π 的整数倍.

第九章　含参数的积分·Γ函数和B函数

本章的主要内容是讨论含参数的定积分所表示的函数，特别着重讨论Γ函数和B函数的一些基本性质．由于解析延拓是解析函数理论中的一个重要概念，在本章中和以后多处都要用到，故先予以简单介绍．

9.1　解析延拓的一个例子

我们知道，幂级数$1+z+z^2+\cdots$在以$z=0$为心的单位圆内代表一个解析函数(5.4节)，令为$f_1(z)$；在圆外，级数是发散的．利用这级数可以算出$f_1(z)$在单位圆内任何一点的函数值和函数的各阶导数之值．例如，在$z=i/2$这一点，

$$f_1\left(\frac{i}{2}\right)=1+\frac{i}{2}+\left(\frac{i}{2}\right)^2+\cdots=\frac{1}{1-\frac{i}{2}},$$

$$f_1'\left(\frac{i}{2}\right)=1+2\cdot\frac{i}{2}+3\left(\frac{i}{2}\right)^2+\cdots=\frac{1}{\left(1-\frac{i}{2}\right)^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_1^{(n)}\left(\frac{i}{2}\right)=\frac{n!}{\left(1-\frac{i}{2}\right)^{n+1}}.$$

由此得到$f_1(z)$在$z=i/2$这点的泰勒展开：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{i}{2}\right)^{n+1}}\left(z-\frac{i}{2}\right)^n. \tag{1}$$

但这级数的收敛半径是$\left|1-\frac{i}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}$，故相应的收敛圆$K_2$跨出

原来的收敛圆 K_1之外(图38),而级数(1) 在收敛圆 K_2 内代表一个解析函数,令为 $f_2(z)$, $f_2(z)$ 称为 $f_1(z)$ 在 K_2内的解析延拓.

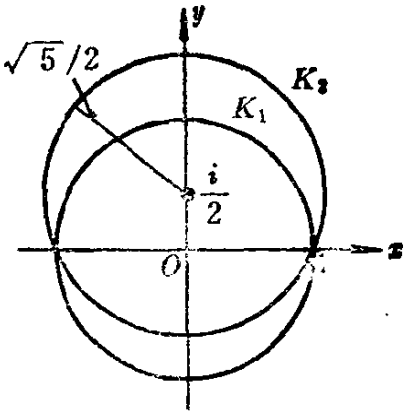


图 38

事实上

$$f_1(z)=1+z+z^2+\cdots=\frac{1}{1-z};$$

级数(1) 之和也是$1/(1-z)$ (读者试自己证明). 不过前一个级数在 K_1 ($|z|<1$) 中代表 $1/(1-z)$, 而后一个级数在 $K_2(|z-i/2|<\sqrt{5}/2)$中代表$1/(1-z)$. 可见 $f_1(z)$和 $f_2(z)$这两个解析函数只是同一个解析函数$1/(1-z)$在不同区域内的不同表达式而已. 两个表达式各有自己的有效范围,同时也有公共的有效范围(两圆重叠部分).

在这个例子中,由于级数和能够表成有限形式$1/(1-z)$,我们得到一个在不同区域中都有效的表达式. 但在一般情形下,每每不能得到这样一个在函数的全部解析区域内都有效的统一表达式,而是需要用解析延拓的方法推出分别在不同区域中有效的不同表达式.

在上面的例子中,我们用函数的幂级数表达式作解析延拓. 照那样做下去,将有可能得到有不同收敛圆的许多幂级数,这些幂级数的全体代表一个解析函数 $F(z)$. 每一个幂级数——常称为 $F(z)$的一个元素——在它自己的收敛圆内代表 $F(z)$,是 $F(z)$的泰勒展开.

9.2 解析延拓

在上一节中我们看到一个用幂级数作解析延拓的例子. 现在来给出解析延拓的普遍定义, 并说明解析延拓通常用来解决什么

问题.

设已知一个函数 $f_1(z)$在区域 G_1 中解析. 如果在与 G_1 有重叠部分 g(可以是一条线)的另一区域 G_2 内存在一个解析函数 $f_2(z)$,在 g 中 $f_2(z)\equiv f_1(z)$,则 $f_2(z)$称为 $f_1(z)$在 G_2 中的解析开拓;反过来,$f_1(z)$也是 $f_2(z)$在 G_1 中的解析延拓.

通常在两类问题中用到解析延拓. 一类问题是,已知在某区域中有定义的解析函数,例如用级数、积分或者其他表达式来表达的函数,用解析延拓的方法扩大其定义域和解析范围. 举例说,在本章中将要讨论的 Γ 函数,它的一种定义是 $\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$,这积分只在 $\mathrm{Re}(z)>0$,即右半平面中存在并代表 z 的一个解析函数. 通过解析延拓,可以把这函数的定义域和解析范围推广到全平面上(除去个别奇点). 另一类问题是,已知数学问题的解是某区域 G 内(除了个别奇点外)的解析函数,例如,根据常微分方程的普遍理论,毋需实际求出解式,就可以知道,在一定条件下,方程 $w''(z)+p(z)w'(z)+q(z)w(z)=0$ 的解 $w(z)$是一定区域 G 内的解析函数(见第十一章),但求解的方法只能给出在 G 的某一子区域 S 内才有效的函数表达式,利用解析延拓的方法,可以从这个表达式推算出解在 G 的其他子区域中的表达式.

练习题. 证明,如果 $f(z)$在区域 G 中解析,在 G 的一个子区域中等于零,则 $f(z)$在整个 G 中等于零.

9.3 含参数的定积分所表示的函数的解析性

含参数的定积分是解析函数的一种重要表达形式,这种表达形式特别适于求函数的渐近表示(9.6节)或作解析延拓. 下面是关于这种积分所表示的函数的解析性的两个定理.

定理 1 设(i) $f(t,z)$是 t 和 z 的连续函数,$a\leqslant t\leqslant b$,z 在闭区域 $\overline{G}$ 中,(ii) 对于在$[a,b]$中的任何 t 值,$f(t,z)$ 是 $\overline{G}$ 中的

单值解析函数，则

$$F(z)=\int_a^b f(t,z)dt \tag{1}$$

是G内的解析函数，而且

$$F'(z)=\int_a^b \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}dt. \tag{2}$$

证：因$f(t,z)$是$\overline{G}$中的单值解析函数，故可用科希积分表示它在G内任意一点z之值：

$$f(t,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t,\xi)}{\xi-z}d\xi,$$

C是G的正向边界．代入(1)式并交换求积分的次序(因被积函数连续，这样做是允许的)，得

$$F(z)=\int_a^b \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t,\xi)d\xi}{\xi-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\int_a^b f(t,\xi)dt}{\xi-z}d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\xi)}{\xi-z}d\xi.$$

这是一个科希型积分(4.8节)，$\varphi(\xi)$是C上的连续函数，故$F(z)$是G内的解析函数，而且

$$F'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\int_a^b f(t,\xi)dt}{(\xi-z)^2}d\xi$$

$$=\int_a^b \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t,\xi)d\xi}{(\xi-z)^2}dt=\int_a^b \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}dt.$$

这证明了定理1．

定理1显然也适用于复变数t的积分$F(z)=\int_C f(t,z)dt$，其中C是t平面上的分段光滑曲线(闭合的或者不闭合的)．此外，这定理亦适用于$f(t,z)$在$a\leqslant t\leqslant b$中有第一类间断点的情形，因为在这种情形下，上面科希型积分中的$\varphi(\xi)$仍是连续函数．

定理 2 （无穷积分） 设(i)$f(t,z)$是t和z的连续函数，$t\geqslant a$，z在$\overline{G}$中，(ii)对于任何$t\geqslant a$，$f(t,z)$是$\overline{G}$中的单值解析函数，(iii) 积分$\int_a^\infty f(t,z)dt$在$\overline{G}$中一致收敛，即对于任意给定的$e>0$，存在与z无关的正数$T(e)$，使$\left|\int_{T'}^{T''} f(t,z)dt\right|<e$，只要$T''>T'>T(e)$，则函数

$$F(z)=\int_a^\infty f(t,z)dt \tag{3}$$

在G内解析，而且

$$F'(z)=\int_a^\infty \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}dt. \tag{4}$$

证：很容易看出，这定理与关于解析函数序列的外氏定理(5.2节最后一段)相似. 实际上，这定理可以利用外氏定理证明.

令

$$F_n(z)=\int_a^{a_n} f(t,z)dt,$$

其中$a_n(n=1,2,\cdots)$是大于a并趋于∞的任意数列. 按定理1知$F_n(z)$在G内解析，而且

$$F'_n(z)=\int_a^{a_n} \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}dt.$$

因此，$F_n(z)(n=1,2,\cdots)$是一个解析函数序列. 又按所设积分(3)一致收敛，故$F_n(z)$一致收敛于$F(z)$. 于是，根据外氏定理知$F(z)$在G内解析，而且

$$\begin{aligned}F'(z)&=\lim_{n\to\infty}F'_n(z)=\lim_{n\to\infty}\int_a^{a_n}\frac{\partial f(t,z)}{\partial z}dt\\&=\int_a^\infty\frac{\partial f(t,z)}{\partial z}dt.\end{aligned}$$

这证明了定理2.

与前相同，这定理也适用于复变数t的无穷积分，以及积分路

线上有被积函数的第一类间断点的情形.

对于在积分区间(或者积分曲线)的某些点上被积函数趋于无穷大的积分,上面的定理亦适用,只要积分(或其主值)一致收敛.

含参数的无穷积分一致收敛的一个充分条件 如果存在函数 $\varphi(t)$(t 为实数)使 $|f(t,z)|<\varphi(t)$,而且 $\int_a^b \varphi(t)dt$ 收敛,则积分 $\int_a^b f(t,z)dt$ 在 $\overline{G}$ 中绝对而且一致收敛.

下面应用这些结果讨论两个重要特殊函数——Γ 函数和 B 函数. 这两个函数都是可以用含参数的积分的形式来表达的,分别称为第二类和第一类欧勒(Euler)积分.

9.4 Γ 函数(第二类欧勒积分)

Γ 函数是应用最广的特殊函数之一,它通常的定义是

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt,\ \mathrm{Re}(z)>0. \tag{1}$$

$\mathrm{Re}(z)>0$ 是这积分收敛的条件. 由于被积函数中因子 t^{z-1} 一般是多值的(当 z 不是整数时),故须明确规定其单值分枝. 通常规定 $\arg t=0$(t 在正实轴上),即当 $t>0$ 时,$t^{z-1}=e^{(z-1)\ln t}$ 中的对数 $\ln t$ 取实数值. (1)式中的积分称为第二类欧勒积分.

(1) 式的积分在右半平面[$\mathrm{Re}(z)>0$]中代表一个解析函数. 证明如下:把积分写成两部分,

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt=\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt+\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt. \tag{2}$$

当 $t\geqslant 1$ 时,$e^{-t}t^{z-1}$ 是 t 和 z 的连续函数,又是 z 在全平面上的解析函数. 设 $\overline{G}$ 是 z 平面上的任意一个闭区域,x_0 是这区域的点的实部的最大值,则由于当 $t\geqslant 1$ 时 $\ln t\geqslant 0$,故有

$$|e^{-t}t^{z-1}|=e^{-t}|e^{(z-1)\ln t}|=e^{-t}|e^{(x-1+iy)\ln t}|$$

$$=e^{-t}e^{(x-1)\ln t}\leqslant e^{-t}e^{(x_0-1)\ln t}=e^{-t}t^{x_0-1}.$$

当 $t\geqslant 1$ 时

$$e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}>\frac{t^N}{N!},\quad N\text{为任意正数},$$

故

$$e^{-t}<\frac{N!}{t^N}.$$

取 $N>x_0$，则

$$\int_1^{\infty}e^{-t}t^{x_0-1}dt<\int_1^{\infty}N!\,t^{-N+x_0-1}dt$$

$$=\frac{N!}{x_0-N}t^{-N+x_0}\Big|_1^{\infty}=\frac{N!}{N-x_0},$$

即积分是收敛的. 因此$\int_1^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt$ 在 $\overline{G}$ 中绝对且一致收敛，而代表 G 内的一个解析函数 (9.3 节定理 2). 但 $\overline{G}$ 是 z 平面上的任意一个区域，故这部分积分代表一个在全平面上解析的函数.

其次看积分$\int_0^1e^{-t}t^{z-1}dt$，这积分在 $\mathrm{Re}(z)\leqslant 0$ 时是发散的. 当 $\mathrm{Re}(z)=x\geqslant\delta>0$ 时，因 $0\leqslant t\leqslant 1$，故 $\ln t\leqslant 0$ 而有

$$|e^{-t}t^{z-1}|=e^{-t}|e^{(x-1)\ln t}|\leqslant e^{-t}e^{(\delta-1)\ln t}=e^{-t}t^{\delta-1}.$$

但$\int_0^1e^{-t}t^{\delta-1}dt\leqslant\int_0^1t^{\delta-1}dt=\frac{1}{\delta}$，故积分$\int_0^1e^{-t}t^{z-1}dt$在 $\mathrm{Re}(z)\geqslant\delta>0$ 时绝对且一致收敛，而在右半平面中代表一个解析函数(9.3 节定理 2).

因此，总起来说，(1)式的积分在右半平面中代表一个解析函数，在左半平面中积分不存在.

现在证明 Γ 函数的下列几个重要性质：

1. $\Gamma(1)=1.$ (3)

2. **递推关系** $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z).$ (4)

由此得

$$\Gamma(n+1)=n!\quad(n\text{ 为 }0\text{ 或正整数}). \tag{5}$$

3.

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}. \tag{6}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}. \tag{7}$$

4. 倍乘公式

$$\Gamma(2z)=2^{2z-1}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right). \tag{8}$$

由(1) 式立即得(3)式：

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=1.$$

由(1) 式，把 z 换成 $z+1$，然后换部求积分，得

$$\Gamma(z+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^z dt=-e^{-t}t^z\Big|_0^\infty+z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$
$$=z\Gamma(z).$$

这证明了(4) 式.

利用(4) 式，可以把 $\Gamma(z)$ 延拓到全平面上去. (4)式两方当 $\mathrm{Re}(z)>0$ 时都是 z 的解析函数，但 $\Gamma(z+1)$ 在更大一些的区域 $\mathrm{Re}(z)>-1$ 中解析，故 $\Gamma(z+1)$ 是 $z\Gamma(z)$ 在区域 $\mathrm{Re}(z)>-1$ 中的解析延拓 [9.2 节]. 这样就把 $\Gamma(z)=\dfrac{\Gamma(z+1)}{z}$ 的定义域推广到 $\mathrm{Re}(z)>-1$ 中，在这区域中除了 $z=0$ 是 $\Gamma(z)$ 的一阶极点之外，$\Gamma(z)$ 处处是解析的，在 $z=0$ 点的残数为 $\Gamma(1)=1$[(3)式].

现在 $\Gamma(z)$ 已是区域 $\mathrm{Re}(z)>-1$ 中有定义的函数，故 $\Gamma(z+1)$ 在区域 $\mathrm{Re}(z)>-2$ 中有定义，而且除了 $z=-1$ 这点以外处处是解析的，因此是 $z\Gamma(z)$ 在区域 $\mathrm{Re}(z)>-2$ 中的解析延拓. 在区域 $\mathrm{Re}(z)>-2$ 中，$\Gamma(z)=\dfrac{\Gamma(z+1)}{z}$ 有两个一阶极点，$z=0$ 和 $z=-1$，在 $z=-1$ 的残数是

$$\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{\Gamma(z+1)}{z}=\lim_{z\to -1}\frac{\Gamma(z+2)}{z}=-1.$$

由此类推，可以利用函数关系(4) 把 $\Gamma(z)$ 延拓到全平面. 在全平面上，除了 $z=0,-1,-2,\cdots,-n,\cdots$ 是一阶极点之外，函数 $\Gamma(z)$ 处处是解析的. 在 $z=-n$ 点的残数是

$$\begin{aligned}\lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z)&=\lim_{z\to -n}(z+n)\frac{\Gamma(z+1)}{z}\\&=\lim_{z\to -n}\frac{(z+n)(z+n-1)\cdots(z+1)\Gamma(z+1)}{(z+n-1)\cdots(z+1)z}\\&=\lim_{z\to -n}\frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n-1)\cdots(z+1)z}=(-)^n\frac{1}{n!}.\end{aligned}\tag{9}$$

在有限区域中除极点外别无其他奇点的函数称为半纯函数；故 $\Gamma(z)$ 是一个半纯函数.

图 39 给出了 z 为实数时 $\Gamma(z)$ 的图形.

练习题 1. 用 (2) 式把 $\Gamma(z)$ 延拓到全平面，并证明 $z=-n(n=0,1,2,\cdots)$ 是一阶极点，相应残数为 $(-)^n 1/n!$.

提示：在(2) 式的第一个积分中把 e^{-t} 展开为 t 的幂级数.

现在来证明(6)式. 由(1)式有

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt,\ \mathrm{Re}(z)>0,$$

$$\Gamma(1-z)=\int_0^\infty e^{-s}s^{-z}ds,\ \mathrm{Re}(z)<1.$$

在区域 $1>\mathrm{Re}(z)>0$ 中，两个积分都绝对收敛，故可并成一个二重积分：

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(1-z)&=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt\cdot\int_0^\infty e^{-s}s^{-z}ds\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(t+s)}\left(\frac{t}{s}\right)^z t^{-1}dtds.\end{aligned}$$

作变换

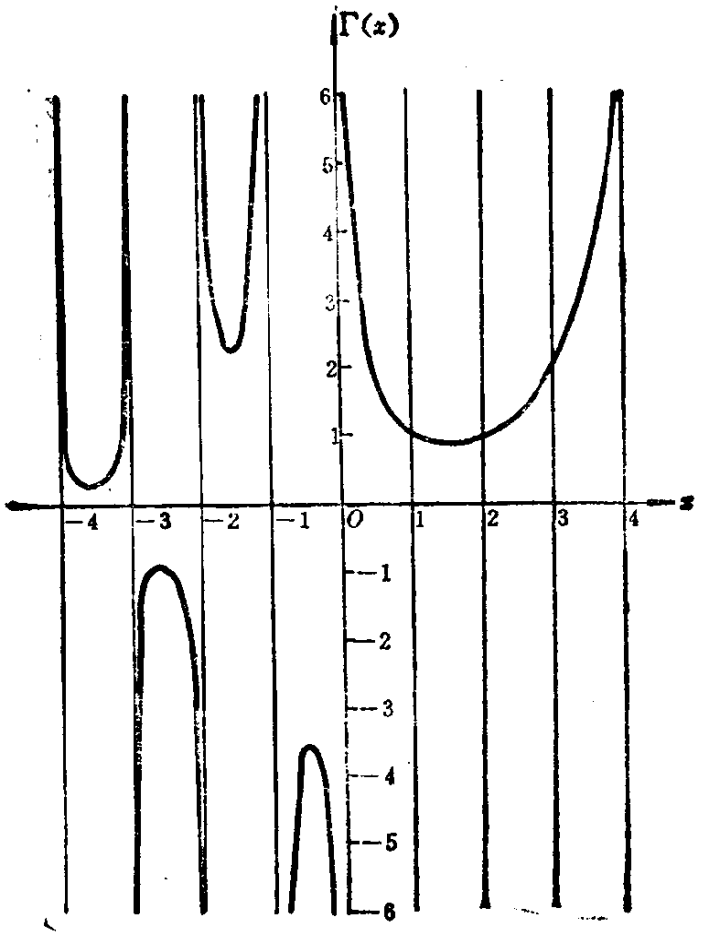


图 39

$$\xi=t+s,\eta=\frac{t}{s},$$

ξ 和 η 都由 0 到∞，相应雅可毕(Jacobi)行列式为

$$\left|\frac{\partial(t.s)}{\partial(\xi.\eta)}\right|=\left|\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(t,s)}\right|^{-1}=\frac{\xi}{(1+\eta)^2},$$

得
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\xi}\eta^z\frac{1+\eta}{\xi\eta}\frac{\xi}{(1+\eta)^2}d\xi d\eta$$

$$=\int_0^\infty e^{-\xi}d\xi\int_0^\infty\frac{\eta^{z-1}}{1+\eta}d\eta=\int_0^\infty\frac{\eta^{z-1}}{1+\eta}d\eta$$

$$=\frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

在最后一步中用了 8.7节例的结果.这就在 $1>\mathrm{Re}(z)>0$中证明了(6)式. 但(6)式左右两边都是除了 $z=n(n=0,\ \pm1,\pm2,\cdots)$之外全平面上的解析函数. 既然在区域 $1>\mathrm{Re}(z)>0$ 中 $\Gamma(z)\ \Gamma(1-z)-\frac{\pi}{\sin\pi z}=0$,则根据 9.2 节练习题中的结果，这等式在全平面上除了 $z=n(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 之外成立. 又，$z=n$这些点同时是 $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ 和 $\frac{\pi}{\sin\pi z}$的一阶极点，残数都等于$(-1)^n$(读者试自行证明)，故(6)式在全平面上成立.

公式(6)的一个重要特例是，当$z=\frac{1}{2}$时$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\pi$，再开方，并注意由定义(1)知 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)>0$,得 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$，这便是(7)式.

最后证明 (8) 式. 仍由 (1) 有

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt\cdot\int_0^\infty e^{-s}s^{z-\frac{1}{2}}ds$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(t+s)}(ts)^{z-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}dtds$$

$$[\mathrm{Re}(z)>0].$$

令 $$t=u^2,s=v^2\quad(0<u<\infty,0<v<\infty),$$

得 $$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}(uv)^{2z-1}vdudv.$$

交换 u 和 v，

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}(uv)^{2z-1}ududv.$$

把上两式相加再除以 2，得

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

$$=2\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}(uv)^{2z-1}(u+v)dudv.$$

最后这个在 uv 平面的第一象限中的面积分等于由直线 $u=v$ 所平分的面积积分的两倍[参看图 40],即

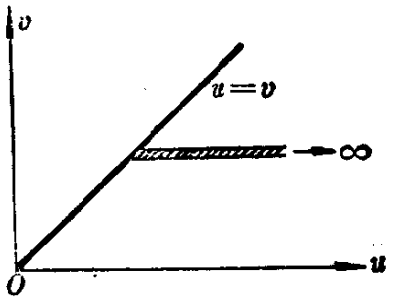


图 40

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=4\int_0^\infty\int_v^\infty e^{-(u^2+v^2)}(uv)^{2z-1}(u+v)\,du\,dv.$$

作变换

$$\alpha=u^2+v^2,\quad \beta=2uv,$$

注意 $0<\beta<\alpha<\infty$,得

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)&=\int_0^\infty\int_\beta^\infty e^{-\alpha}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{2z-1}\sqrt{\alpha+\beta}\\&\quad\times\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}d\alpha\,d\beta\\&=\int_0^\infty\left(\frac{\beta}{2}\right)^{2z-1}d\beta\int_\beta^\infty\frac{e^{-\alpha}}{\sqrt{\alpha-\beta}}d\alpha\\&=\int_0^\infty e^{-\beta}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{2z-1}d\beta\cdot\int_0^\infty\frac{e^{-r}}{\sqrt{r}}dr\\&=2^{-(2z-1)}\Gamma(2z)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

注意(7)式,即得(8). 这公式虽然是在 $\mathrm{Re}(z)>0$ 的条件下证明的,但因公式的两边在全平面上都有定义,故根据解析延拓原理,这公式在全平面上成立.

在上面几个公式的证明中,都用了解析延拓原理. 通过这些

具体的应用，读者对解析延拓的概念可以获得进一步的理解。

练习题 2. 将等式

$$(2n-1)!!=(2n-1)!!(2n-2)!!$$

的两边分别用 Γ 函数表示出来，证明：

$$\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=2^{-(2n-1)}\Gamma(2n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \tag{10}$$

其中 $(2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)$，$(2n-2)!!=2\cdot4\cdot6\cdots(2n)$。显然，(8)式是(10)式的解析延拓。

还有 Γ 函数的另一个性质在此提一下，就是 $\Gamma(z)$ 在全平面上无零点。这可以从(6)式看出。因为(6)式的右方除了在 $z=0$，$\pm1,\pm2,\cdots$ 诸点为无穷大之外，在有限区域内都是不等于零的有限值，而当 $z=n(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，$\Gamma(z)$ 和 $\Gamma(1-z)$ 两者一个是有限值，另一个是无穷大，故 $\Gamma(z)$ 不可能等于零。

练习题 3. 证明

$$\int_0^\infty e^{-r^2}r^p dr=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right). \tag{11}$$

练习题 4. 令 $\psi(z)=d\ln\Gamma(z)/dz$（Γ 函数的对数导数），试分别由公式(4)和(6)证明

$$\psi(z+1)=\frac{1}{z}+\psi(z), \tag{12}$$

$$\psi(1-z)=\psi(z)+\pi\cot\pi z. \tag{13}$$

9.5* Γ 函数的围道积分表示

上节(1)式中的积分只在 $\mathrm{Re}(z)>0$ 时代表 $\Gamma(z)$。要得到在全平面上都有效的一种积分表达式，考虑 t 平面上的围道积分

$$\int_C e^{-t}t^{z-1}dt, \tag{1}$$

其中 C 是图 41 中的围道：从正实轴上缘 $t=\infty$ 处出发，正向绕 $t=0$ 一周后回到正实轴下缘无穷远处。由于这个积分不通过被积函数的奇点 $t=0$，而它的两个端点的实部是正无穷大，故可仿照关

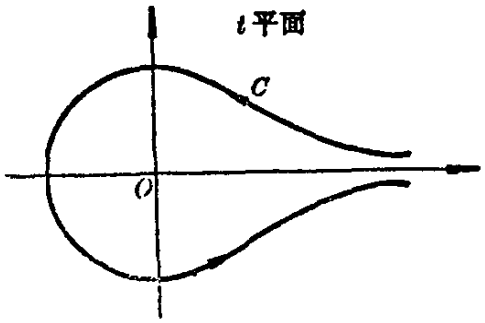


图 41

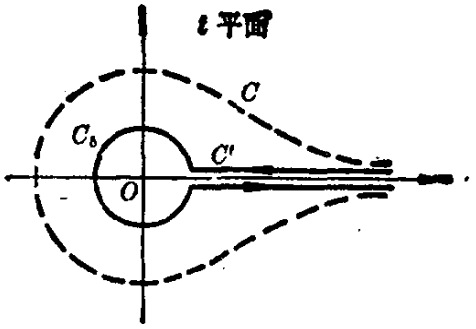


图 42

于上节(2)式右方第二个积分的收敛性的讨论，证明积分(1) 在全 z 平面上收敛并代表一个解析函数.

再看积分(1)当 $\mathrm{Re}(z)>0$ 时与上节 (1) 式 $\Gamma(z)$ 的积分表达式的关系. 为此，把图 37 中的围道C变形为图 42 中的围道C'：从正实轴上缘∞点出发，沿正实轴上缘到$t=\delta(\delta>0)$点，然后沿半径为 δ 的圆C_δ正向绕 $t=0$ 点一周到正实轴下缘 $t=\delta$ 处，最后沿正实轴下缘回到无穷远处. 在 C 和 C' 之间没有被积函数 $e^{-t}t^{z-1}$ 的奇点，故$\int_C=\int_{C'}$. 在 C_δ 上令 $t=\delta e^{i\theta}$，则

$$\left|\int_{C_\delta} e^{-t}t^{z-1}dt\right|\leqslant\int_0^{2\pi}\left|e^{-\delta e^{i\theta}}(\delta e^{i\theta})^{z-1}\delta e^{i\theta}i\,d\theta\right|$$

$$=\int_0^{2\pi} e^{-\delta\cos\theta}\delta^x e^{-\theta y}d\theta.$$

在$\mathrm{Re}(z)=x>0$ 的条件下，当 $\delta\to 0$ 时，右方趋于零，故

$$\int_C e^{-t}t^{z-1}dt=\int_\infty^0 e^{-t}t^{z-1}dt+\int_0^\infty e^{-t}(te^{2\pi i})^{z-1}dt.$$

这里规定了在正实轴的上缘 $\arg t=0$，因而在正实轴的下缘 $\arg t=2\pi$. 因此，

$$\int_C e^{-t}t^{z-1}dt=(e^{2\pi zi}-1)\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$

$$=(e^{2\pi zi}-1)\Gamma(z).$$

由此

$$\Gamma(z)=\frac{1}{e^{2\pi zi}-1}\int_c e^{-t}t^{z-1}dt \quad (0\leqslant \arg t\leqslant 2\pi), \tag{2}$$

或

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\,i\sin\pi z}\int_c e^{-t}(-t)^{z-1}dt$$

$$[-\pi\leqslant\arg(-t)\leqslant\pi]. \tag{3}$$

把(3)式中的 z 换成 $1-z$,利用上节(6)式,得

$$\Gamma(1-z)\sin\pi z=\frac{\pi}{\Gamma(z)}=-\frac{1}{2\,i}\int_c e^{-t}(-t)^{-z}dt,$$

或

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=-\frac{1}{2\,\pi i}\int_c e^{-t}(-t)^{-z}dt \quad [|\arg(-t)|\leqslant\pi]. \tag{4}$$

(4)式是在 $\mathrm{Re}(z)>0$ 的条件下导出的. 但因这式的两边都在全平面上有意义,故根据解析延拓原理,(4) 式在全平面上成立. (2)、(3)两式则在 $z\neq$整数时方可应用;当 z 为 0 或负整数时, 右方积分前的系数反映了 $\Gamma(z)$在它的极点 $z=-n(n=0,1,2,\cdots)$ 处的奇异性;当 z 为正整数时,右方是不定式.

9.6* Γ 函数的渐近表示·斯特令(Stirling)公式

Γ 函数的渐近表示是指当 $|z|$ 很大时 $\Gamma(z)$ 的近似表达式. 求这种表达式的方法有多种①. 下面为了简单起见, 假定 z 是正实数 x,而用拉普拉斯(Laplace)方法②.

由 9.4 节(1)和(4)有

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^x dt=\int_0^\infty e^{-t+x\ln t}dt.$$

把 t 换成 xt,得

① 参看,例如,王竹溪等:特殊函数概论,3.12,3.13,3.21 节(科学出版社).

② 参看,例如,A. Erdélyi,Asymptotic Expansions,§2.4,p. 36(1956).

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-xt+x\ln xt}dt=x^x\int_0^\infty e^{x(\ln t-t)}dt. \tag{1}$$

最后的积分具有适于应用拉氏方法的形式：

$$f(x)=\int_a^b g(t)e^{xh(t)}dt. \tag{2}$$

下面说明这种方法.

很容易看到，如果函数 $h(t)$ 在积分的区间$[a,b]$中 的某点 t_0 有一极大值，则当 x 很大时，函数 $e^{xh(t)}$在 t_0 点将有 一个很 陡峭的极大值. 在这种情形下，只要 $g(t)$ 的变化不能与 $e^{xh(t)}$的 变化相匹，则(2)式的积分值很可能主要是由于在$t=t_0$点附近一段积分的贡献，因而可以取这一段的积分值作为 $f(x)$在 x 很大时的近似. 当然，严格的计算必须对这一近似的误差作出估计.

现在回到(1) 式的积分. 函 数 $h(t)=\ln t-t$ 的一阶 导数是 $t^{-1}-1$，二阶导数是$-t^{-2}$，故在 $t=1$ 这点，$h(t)$ 有一极大值. 取 $t=1$ 附近一段$[1-\delta,1+\delta]$($\delta>0$) 的积分值作为近似，并把 $h(t)$ 在 $t=1$ 的附近展开为

$$h(t)=\ln t-t=-1-\frac{1}{2}(t-1)^2+O[(t-1)^3],$$

得

$$\int_0^\infty e^{x(\ln t-t)}dt\sim\int_{1-\delta}^{1+\delta}e^{-x\left\{1+\frac{1}{2}(t-1)^2+O[(t-1)^3]\right\}}dt$$

$$=e^{-x}\int_{\delta}^{\delta}e^{-\frac{x}{2}[u^2+O(u^3)]}\,du \tag{3}$$

$$\sim e^{-x}\int_{-\delta}^{\delta}e^{-\frac{x}{2}u^2}\,du \tag{4}$$

$$=2e^{-x}\int_0^{\delta}e^{-\frac{x}{2}u^2}\,du$$

$$=2e^{-x}\left[\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}u^2}\,du-\int_{\delta}^\infty e^{-\frac{x}{2}u^2}\,du\right].$$

令

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}u^2}du=\sqrt{\frac{2}{x}}\int_0^\infty e^{-s^2}ds=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{x}},$$

而

$$\int_\delta^\infty e^{-\lambda u^2}du=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_{\lambda\delta^2}^\infty e^{-v}v^{-\frac{1}{2}}dv$$

$$\leqslant\frac{1}{2\lambda\delta}\int_{\lambda\delta^2}^\infty e^{-v}dv=\frac{e^{-\lambda\delta^2}}{2\lambda\delta},\ \lambda=\frac{x}{2}.$$

当 $x\to\infty$时，这最后的积分值很快地趋于零（比 x 的任何负幂要快，只要 δ 足够大）. 因此有

$$\int_0^\infty e^{x(\ln t-t)}\sim\sqrt{\frac{2\pi}{x}}e^{-x}. \tag{5}$$

把(5)代入(1)，得

$$\Gamma(x)\sim x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\sqrt{2\pi}; \tag{6}$$

或者，取对数，有

$$\ln\Gamma(x)\sim\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x-x+\frac{1}{2}\ln(2\pi). \tag{7}$$

这个公式常称为斯特令公式. 可以证明这公式对于复数 x 也成立，只要$|\arg x|\leqslant\pi-e, e>0$［见 140 页足注①］.

为了确证(6)或(7)分别是当 $x\to\infty$ 时 $\Gamma(z)$或 $\ln\Gamma(z)$ 的渐近表达式，应当对误差作估计. 我们将不讨论这种估计，而只指出，从上面的推导看，误差来自下列两点：(i) 略去了(1)式积分中 0到 $1-\delta$ 和 $1+\delta$ 到∞的两部分；(ii) 从(3)式到(4) 式时略去了指数上$O(u^3)$项的贡献.

关于渐进表示的概念还需作一点说明. 这里求得的是 $\Gamma(z)$ 的渐进表示，即$|z|$很大时 $\Gamma(z)$ 的近似表达式. 这种近似表达式的特点是$|z|$越大，近似程度越好. 从图 43 中可以清楚地看出这一点. 对于确定的 z 来说，为了提高近似的精度，当然可以试图在渐进表示中引进更多的项，例如，

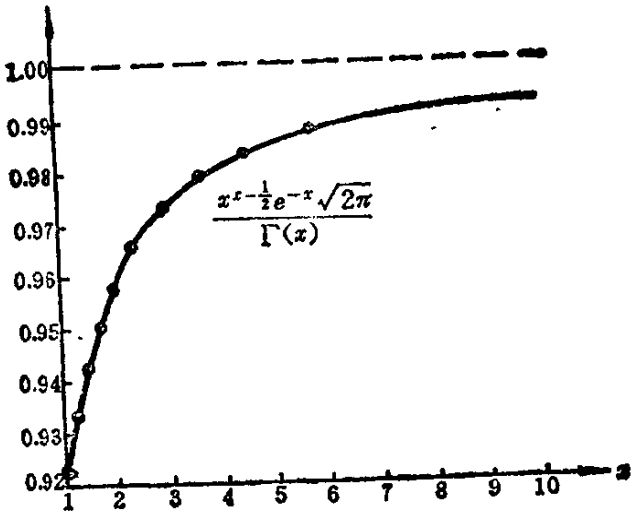


图 43

$$\Gamma(x)\sim x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\sqrt{2\pi}\left(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}+\cdots\right). \tag{8}$$

但是，这个级数并不收敛，因此并不是项数越多精度越高．这和泰勒展开截然不同．这一点在使用任何渐进表示时都需要特别注意．

9.7* B 函数(第一类欧勒积分)

B函数常用第一类欧勒积分作为定义：

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \tag{1}$$

其中令 $\mathrm{Re}(p)>0,\mathrm{Re}(q)>0$ 以分别保证积分在下限和上限收敛，积分中的多值函数规定为 $\arg x=\arg(1-x)=0$．

在(1)式中令 $x=1-t$，得

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 (1-t)^{p-1}t^{q-1}dt=\mathrm{B}(q,p), \tag{2}$$

称为B函数的对称关系．

B函数可以用Γ函数表示：

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{3}$$

这样，B函数便延拓到整个 p 平面和整个 q 平面上而不受 $\mathrm{Re}(p)>0$ 和 $\mathrm{Re}(q)>0$ 的限制.

现在来证明(3)式. 先假定 $\mathrm{Re}(p)>0,\mathrm{Re}(q)>0$，则

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q)&=\int_0^\infty e^{-s}s^{p-1}ds\cdot\int_0^\infty e^{-t}t^{q-1}dt\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(s+t)}s^{p-1}t^{q-1}dsdt.\end{aligned} \tag{4}$$

令

$$\xi=s+t,\eta=\frac{s}{s+t},$$

则 $0\leqslant\xi<\infty,0\leqslant\eta\leqslant1$，而

$$s=\xi\eta,t=\xi(1-\eta).$$

代入(4)式，得

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q)&=\int_0^\infty\int_0^1 e^{-\xi}(\xi\eta)^{p-1}[\xi(1-\eta)]^{q-1}\xi d\eta d\xi\\&=\int_0^\infty e^{-\xi}\xi^{p+q-1}d\xi\cdot\int_0^1\eta^{p-1}(1-\eta)^{q-1}d\eta\\&=\Gamma(p+q)\cdot B(p,q).\end{aligned}$$

这就在 $\mathrm{Re}(p)>0$ 和 $\mathrm{Re}(q)>0$ 的条件下证明了(3)式.但已知(3)式右方的Γ函数在整个 p 平面和整个 q 平面上有意义，故可用它来作为 $B(p,q)$ 的解析延拓.

例. 计算积分 $I=\int_{-1}^{1}\frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 之值，n 是正整数.

因被积函数是 x 的偶函数，故

$$I=2\int_0^1(x^2)^n(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx.$$

令 $t=x^2$，得

$$I=\int_0^1 t^{n-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt=\mathrm{B}\left(n+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}.$$

再利用 9.4 节(5),(7),(8)式,得

$$I=\frac{\Gamma(2n+1)2^{-2n}\pi}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}$$
$$=\frac{(2n)!\pi}{2^{2n}(n!)^2}.$$

练习题. 证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^p(\sin\theta)^q d\theta=\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)}. \tag{5}$$

$$[\mathrm{Re}(p)>-1,\quad \mathrm{Re}(q)>-1]$$

第十章　拉普拉斯变换

拉普拉斯 (Laplace) 变换，简称为拉氏变换，是发展较晚但应用日益广泛的一种数学工具，通常又称为运算微积．在本章中将说明拉氏变换的基本原理和它的一些重要应用，特别是在解常微分方程初值问题方面的应用．在本书的第二部分中还要讲这种变换在偏微分方程中的应用(第十九章)．

10.1　拉氏(Laplace)变换

由拉普拉斯积分

$$F(p)=\int_0^{\infty}e^{-pt}f(t)dt \tag{1}$$

给出的函数 $F(p)$称为函数 $f(t)$的**拉氏换式**，其中 $f(t)$是实变数t的实变函数或者复变函数，在 $0\leqslant t<\infty$中有定义(通常规定 $f(t)=0$，当 $t<0$；$p=s+t\sigma$ 是复数，s 和 σ 分别为其实部和虚部．

(1)式代表着从 $f(t)$到 $F(p)$的一种积分变换关系，称为**拉氏变换**．e^{-pt} 称为拉氏变换的核．

(1)式又常用简单的符号写为

$$F(p)=\mathscr{L}\{f(t)\}, \tag{2}$$

或

$$F(p)\doteqdot f(t), \tag{3}$$

而称 $f(t)$为拉氏**变换的原函数**，$F(p)$为**像函数**．有时又把 $f(t)$称为**上函数**，$F(p)$为**下函数**[注意(3)式中等号上下两个点的位置与此相应]．在本书中将只用原函数和像函数的名称．(1)，(2)，(3)三种符号都将采用来表示拉氏变换，(1)式多半用在具体计算中．

拉氏换式存在的条件　(1)式的积分在下列条件下存在：

1．$f(t)$在区间$0\leqslant t<\infty$中除了第一类间断点外是连续的，而且有连续导数；在任何有限区间中这种间断点的数目是有限的．

2．存在常数$M>0$和$s_0'\geqslant 0$，使对于任何 t 值$(0\leqslant t<\infty)$

$$|f(t)|<Me^{s_0't} \tag{4}$$

s_0'的下界称为收敛横标，用s_0表示．

当然，上述条件只是积分(1)存在的充分条件，但在通常应用中，大多数原函数 $f(t)$ 都满足这两个条件．对于不满足这两个条件的函数的拉氏换式将在以后出现这种情形时单独讨论．

例 1．$f(t)\equiv 1$．设 $\mathrm{Re}(p)>0$，则

$$\int_0^\infty e^{-pt}\cdot 1\,dt=-\frac{e^{-pt}}{p}\Big|_{t=0}^{t=\infty}=\frac{1}{p},$$

故

$$1\fallingdotseq\frac{1}{p},\quad \mathrm{Re}(p)>0. \tag{5}$$

例 2．$f(t)=e^{at}$．设 $\mathrm{Re}(p)>\mathrm{Re}(a)$，则

$$\int_0^\infty e^{-pt}\cdot e^{at}dt=\int_0^\infty e^{-(p-a)t}dt=\frac{1}{p-a},$$

故

$$e^{at}\fallingdotseq\frac{1}{p-a},\quad \mathrm{Re}(p)>\mathrm{Re}(a). \tag{6}$$

练习题 1． 设$f(t)$当 $t<0$ 时等于零，证明

$$f(t-\tau)\fallingdotseq e^{\tau p}F(p)\quad(\tau>0), \tag{7}$$

其中 $F(p)$是$f(t)$的拉氏换式．

练习题 2． 证明

$$f(at)\fallingdotseq\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right), \tag{8}$$

$$e^{p_0t}f(t)\fallingdotseq F(p-p_0), \tag{9}$$

其中 a 和 p_0 是任意复数．

10.2 拉氏变换的基本性质

拉氏变换是一种线性变换，也就是说，若

$$f_1(t)\doteqdot F_1(p),\quad f_2(t)\doteqdot F_2(p),$$

则
$$\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)\doteqdot \alpha_1 F_1(p)+\alpha_2 F_2(p), \tag{1}$$

其中 α_1 和 α_2 是任意两个复数. 这可以直接由上节(1)式得到.

例 1. $\sin\omega t=\frac{1}{2i}(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t})$，故由(1)式及上节(6)式得

$$\sin\omega t\doteqdot\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2},\quad \mathrm{Re}(p)>0. \tag{2}$$

例 2. $$\cos\omega t\doteqdot\frac{p}{p^2+\omega^2},\quad \mathrm{Re}(p)>0. \tag{3}$$

练习题. 试由拉氏换式的定义[上节(1)式]直接证明(2)，(3)两式.

拉氏换式的解析性 从上节和本节的一些具体拉氏换式看出，$F(p)$ 是 p 平面上一定区域(半平面)内的解析函数。现在对普遍情形予以证明.

在 10.1 节(4)式的条件下有

$$|e^{-pt}f(t)|<Me^{-(s-s_0)t},\quad s=\mathrm{Re}(p). \tag{4}$$

设 $s-s_0\geqslant\delta$，δ 为任意正数，则

$$|e^{-pt}f(t)|<Me^{-\delta t}.$$

但积分
$$\int_0^\infty Me^{-\delta t}dt=\frac{M}{\delta}$$

是收敛的，故 $\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$ 在区域 $\mathrm{Re}(p)\geqslant s_0+\delta$ 中一致收敛[参看 9.3 节最后一段]，而在 $\mathrm{Re}(p)>s_0$ 的半平面中代表一个解析函数 $F(p)$(9.3 节定理 2).

又由(4)式可以证明，当 $|p|\to\infty$ 而 $|\arg p|\leqslant\frac{\pi}{2}-e(e>0)$ 时，

$$\lim_{p\to\infty}F(p)=0. \tag{5}$$

像函数 $F(p)$ 常常可以解析延拓到全平面上去（除了某些奇点）. 例如 $f(t)\equiv 1$ 的换式 $\frac{1}{p}$[上节(5)式]是全 p 平面上除了 $p=0$ 以外的解析函数；$e^{\alpha t}$ 的换式 $(p-\alpha)^{-1}$[上节(6)式]是除了 $p=\alpha$ 以外的全 p 平面上的解析函数；$\sin\omega t$ 和 $\cos\omega t$ 的换式[本节(2)式和(3)式]是除了 $p=\pm i\omega$ 两点以外全 p 平面上的解析函数.

像函数的解析性在拉氏变换的理论中有重要意义，我们将在10.8节求拉氏变换的反演问题时看到这一点.

10.3 拉氏换式的运算性质及其在解线性常微分方程初值问题中的应用

拉氏变换的重要应用之一是解线性常微分方程的初值问题，这是由于通过拉氏变换，原函数的微积运算对应于其拉氏换氏的代数运算.

设 $f(t)$及其导数 $f'(t)$都满足 10.1 节拉氏换式存在的条件，$f(t)$的拉氏换式是 $F(p)$，则 $f'(t)$的拉氏换式是

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f'(t)\}&=\int_0^\infty e^{-pt}f'(t)dt\\&=e^{-pt}f(t)\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt.\end{aligned}$$

只要 $\mathrm{Re}(p)>s_0$，则当 $t\to\infty$时 $e^{-pt}f(t)\to 0$，而有

$$\mathscr{L}\{f'(t)\}=pF(p)-f(0). \tag{1}$$

可见对 $f(t)$求导数的运算经过拉氏变换之后变为以 p 乘 $F(p)$的代数运算，同时，$f(t)$的初值 $f(0)$也进入运算公式中.

类似地，设问题中出现的各阶导数 $f'(t),f''(t),\cdots,f^{(n)}(t)$都和$f(t)$一样满足 10.1 节拉氏换式存在的条件，则只要 $\mathrm{Re}(p)>s_0$，$f^{(k)}(t)(k=1,2,\cdots,n)$的拉氏换式就是

$$\mathscr{L}\{f^{(k)}(t)\}=\int_0^\infty e^{-pt}f^{(k)}(t)dt$$

$$=e^{-pt}f^{(k-1)}(t)\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty e^{-pt}f^{(k-1)}(t)dt$$

$$=-f^{(k-1)}(0)+p\left\{e^{-pt}f^{(k-2)}(t)\Big|_0^\infty\right.$$

$$\left.+p\int_0^\infty e^{-pt}f^{(k-2)}(t)dt\right\}$$

$$=-f^{(k-1)}(0)-pf^{(k-2)}(0)+p^2\int_0^\infty e^{-pt}f^{(k-2)}(t)dt$$

$$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=-f^{(k-1)}(0)-pf^{(k-2)}(0)-\cdots-p^{k-1}f(0)$$

$$+p^k\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt,$$

即
$$f^{(k)}(t)\fallingdotseq p^kF(p)-p^{k-1}f(0)-\cdots-f^{(k-1)}(0). \qquad (2)$$

下面看一个应用的实例.

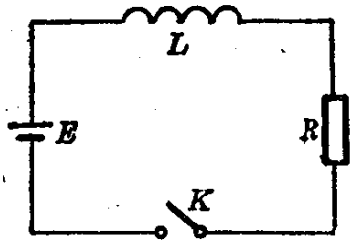


图 44

例. 求图 44 所示 L-R 串联电路在电键 K 关闭后的电流. 设关闭前电路中没有电流.

电流 i 所满足的微分方程是

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E, \qquad (3)$$

其中 E 是直流电源的电动势,假定是常数,初值 $i(0)=0$.

令 $I(p)$ 为 $i(t)$ 的拉氏换式,则根据 10.2 节(1)式、10.1 节(5)式和本节(1)式, 方程(3)的拉氏换式是

$$L\{pI(p)-i(0)\}+RI(p)=\frac{E}{p}.$$

由此得
$$(Lp+R)I(p)=\frac{E}{p},$$

或
$$I(p)=\frac{E}{p(Lp+R)}.$$

剩下的问题是从 $I(p)$ 求 $i(t)$,这称为拉氏换式的**反演**. 由于 $I(p)$ 是 p 的有理函数, 这问题可用部分分式解决:

$$I(p)=\frac{E}{R}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+\frac{R}{L}}\right),$$

已知 $\frac{1}{p}\doteqdot 1,\ \frac{1}{p+\frac{R}{L}}\doteqdot e^{-\frac{R}{L}t}$ [10.2节(5),(6)式],

故 $I(p)$的原函数为

$$i(t)=\frac{E}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t}),$$

这就是问题的解.

从这个例子看到，与通常线性常微分方程初值问题的求解步骤比较，用拉氏变换的方法要简捷得多. 因为在作拉氏变换的过程中,不仅把求导数的运算化为较简单的代数运算,因而把微分方程化为代数方程,而且还把初值包括了进去,这就省掉了由初值定解的一步. 又,在作变换时,(3)式中的非齐次项也一并在内,因此也就毋需分别求相应齐次方程的通解和非齐次方程的特解.

用拉氏变换的一个关键问题是求反演. 在上面的例子中这问题比较容易地解决了. 我们是先把求到的拉氏换式用部分分式表示为一些简单的拉氏换式之和，然后利用已知的换式关系逐项得到反演. 显然,这方法只适用于像函数是有理函数的情形;对于一般情形,则要把像函数作适当的级数展开,或者应用普遍反演公式(10.7节)来计算.

原函数积分的换式 设 $f(t)$ 满足 10.1 节拉氏换式存在的条件,则 $g(t)=\int_0^t f(t)dt$的拉氏换式也存在. 因为 $g(t)$在 $t\geqslant 0$ 时是连续函数,而且存在正数M'和 s_1 使

$$|g(t)|\leqslant\int_0^t|f(t)|dt\leqslant M\int_0^t e^{s_0t}dt$$

$$=\frac{M}{s_0}(e^{s_0 t}-1)<M'e^{s_1 t}.$$

令 $F(p)$为 $f(t)$的像函数，$G(p)$为 $g(t)$的像函数. 因 $g'(t)=f(t)$，按(1)式[应用于 $g'(t)$]有

$$pG(p)-g(0)=F(p).$$

但 $g(0)=0$，故 $G(p)=\frac{F(p)}{p}$，而有变换公式

$$g(t)=\int_0^t f(t)dt \doteqdot \frac{F(p)}{p}. \tag{4}$$

即对原函数求积分的运算，经过拉氏变换，也变为对相应像函数的代数运算——以 p 除像函数(正好是乘法的逆运算).

例. 求图 45 中 L-C 串联电路当电容器 C 放电时的电流，电容器上的初始电荷为 $\pm q_0$.

这个电路的方程是

$$\frac{q}{C}=L\frac{di}{dt},$$

其中 q 是在 t 时刻 C 上的电荷：

$$q=-\int_0^t i(t)dt+q_0.$$

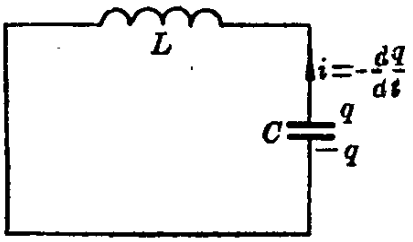


图 45

因此，电流 $i(t)$所满足的方程是

$$L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t idt=\frac{q_0}{C}.$$

应用拉氏变换，令 $I(p)\doteqdot i(t)$，得 $I(p)$的方程：

$$L[pI(p)-i(0)]+\frac{1}{C}\frac{I(p)}{p}=\frac{q_0}{Cp}.$$

因 $i(0)=0$，故得

$$I(p)=\frac{q_0}{LC}\frac{1}{p^2+\frac{1}{LC}}.$$

根据 10.2 节(2)式，这个像函数 $I(p)$的原函数是

$$i(t)=\frac{q_0}{\sqrt{LC}}\sin\frac{1}{\sqrt{LC}}t.$$

它代表一个圆频率为$\frac{1}{\sqrt{LC}}$的简谐振荡.

以上所讨论的都是拉氏变换在解常系数微分方程上的应用. 关于拉氏变换在变系数微分方程方面的应用可参看 11 7 节.

10.4* 像函数的导数和积分的反演

设 $f(t)$满足 10.1 节中拉氏换式存在的条件,$F(p)$是 $f(t)$的换式, 则 $F(p)$在区域 $\mathrm{Re}(p)\geqslant s_1>s_0$ 中解析(10.2 节),它的n阶导数是

$$F^{(n)}(p)=\frac{d^n}{dp^n}\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-pt}(-)^n t^n f(t)dt,$$

因为在所说的区域内积分一致收敛,可以在积分号下求导数(9.3 节). 由此得反演公式

$$F^{(n)}(p)\doteq(-)^n t^n f(t), \tag{1}$$

即对像函数求导数的运算相应于以$-t$乘原函数.

例 1. 求 $\frac{1}{p^3(p+\alpha)}$的反演.

用部分分式,

$$\frac{1}{p^3(p+\alpha)}=\frac{A}{p^3}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p}+\frac{D}{p+\alpha},$$

以 p^3 乘两边,令 $p\to0$,得 $A=\frac{1}{\alpha}$. 又,两边乘上 p^3 之后,先对 p 求一次导数,再令 $p\to0$,得 $B=-\frac{1}{\alpha^2}$. 类似地,先对 p 求两次导数,再令 $p\to0$,得 $C=\frac{1}{\alpha^3}$(在 $p=0$ 点的残数). D 是在 $p=-\alpha$ 点的残数,故 $D=-\frac{1}{\alpha^3}$. 于是,

$$\frac{1}{p^3(p+\alpha)}=\frac{1}{\alpha}\frac{1}{p^3}-\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{p^2}+\frac{1}{\alpha^3}\frac{1}{p}-\frac{1}{\alpha^3}\frac{1}{p+\alpha}.$$

今$\frac{1}{p}\doteqdot 1$，因而$\frac{1}{p^2}=-\frac{d}{dp}\frac{1}{p}$，$\frac{1}{p^3}=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dp^2}\frac{1}{p}$，故由(1)式得

$$\frac{1}{p^3(p+\alpha)}\doteqdot\frac{1}{2\alpha}t^2-\frac{1}{\alpha^2}t+\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\alpha^3}e^{-\alpha t}.$$

再看像函数的积分$\int_p^\infty F(p)dp$，积分路线在$\mathrm{Re}(p)>s_0$中，s_0是$f(t)$的收敛横标[10.1节(4)式]. 设这个积分收敛，而且当$t\to 0$时$\left|\frac{f(t)}{t}\right|$有界，则有反演公式：

$$\int_p^\infty F(p)dp\doteqdot\frac{f(t)}{t}. \tag{2}$$

证明如下：因$F(p)$是$f(t)$的拉氏换式，故

$$\begin{aligned}\int_p^\infty F(q)dq&=\int_p^\infty dq\int_0^\infty e^{qt}f(t)dt\\&=\lim_{p_1\to\infty}\int_p^{p_1}dq\int_0^\infty e^{qt}f(t)dt\\&\qquad[\mathrm{Re}(p_1)=s_1>0].\end{aligned}$$

设$\mathrm{Re}(p)\geqslant s>s_0$，则最后的无穷积分一致收敛. 于是两个积分可以换序，而有

$$\begin{aligned}\int_p^\infty F(q)dq&=\lim_{p_1\to\infty}\int_0^\infty f(t)dt\int_p^{p_1}e^{-qt}dq\\&=\lim_{p_1\to\infty}\int_0^\infty\frac{f(t)}{t}(e^{-pt}-e^{-p_1t})dt\\&=\int_0^\infty\frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt-\lim_{p_1\to\infty}\int_0^\infty\frac{f(t)}{t}e^{-p_1t}dt.\end{aligned}$$

因当$t\to 0$时$\left|\frac{f(t)}{t}\right|$有界，故存在$A(\alpha)$使$0<t<\alpha$时$\left|\frac{f(t)}{t}\right|\leqslant A$，而有

$$\left|\int_0^a \frac{f(t)}{t}e^{-p_1 t}dt\right| \leqslant A\int_0^a e^{-s_1 t}dt = \frac{A}{s_1}(1-e^{-s_1 a}).$$

又当 $\mathrm{Re}(p_1)=s_1>s_0$时，

$$\left|\int_a^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-p_1 t}dt\right| \leqslant \frac{1}{a}\int_a^\infty |f(t)e^{-p_1 t}|dt \leqslant \frac{M}{a}\int_a^\infty e^{-(s_1-s_0)t}dt$$

$$= \frac{M}{a(s_1-s_0)},$$

故当 $p_1\to\infty$时

$$\left|\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-p_1 t}dt\right| \leqslant \left|\int_0^a \frac{f(t)}{t}e^{-p_1 t}dt\right| + \left|\int_a^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-p_1 t}dt\right| \to 0,$$

而得

$$\int_p^\infty F(p)dp = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt.$$

这证明了(2)式.

如果积分$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt$存在，则有

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty F(p)dp. \tag{3}$$

这公式常用来计算一些积分(见下面的例 2 和例 3).

例 2. 用公式(3)求积分 $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$.

由 10.2 节(2)式和本节(3)式得

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \int_0^\infty \frac{1}{p^2+1}dp = \arctan p\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

这里，像函数的积分比原来的积分要简单得多.

例 3. 求积分 $\int_0^\infty \frac{\cos at-\cos bt}{t}dt$ 之值，$b>a>0$.

这个积分不能用 8.5 节和 8.6 节的方法计算(何故?)，但可应用公式(3). 由 10.2 节(3)式得

$$\int_0^\infty \frac{\cos at-\cos bt}{t}dt=\int_0^\infty\left(\frac{p}{p^2+a^2}-\frac{p}{p^2+b^2}\right)dp$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{p^2+a^2}{p^2+b^2}\Big|_0^\infty=\ln\frac{b}{a}.$$

10.5 折积定理

这个定理处理两个像函数的乘积的反演问题. 设 $F_1(p)$和 $F_2(p)$分别为 $f_1(t)$和 $f_2(t)$的拉氏换式,则

$$F_1(p)F_2(p)=\int_0^\infty e^{-p\tau}f_1(\tau)d\tau\cdot\int_0^\infty e^{-pv}f_2(v)dv$$
$$=\int_0^\infty f_1(\tau)d\tau\int_0^\infty e^{-p(\tau+v)}f_2(v)dv$$
$$=\int_0^\infty f_1(\tau)d\tau\int_\tau^\infty e^{-pt}f_2(t-\tau)dt$$
$$=\int_0^\infty e^{-pt}dt\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

(见下面的说明),

即
$$F_1(p)F_2(p)\doteq\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau. \tag{1}$$

或者,把 τ 换成 $t-\tau$,有

$$F_1(p)F_2(p)\doteq\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau. \tag{2}$$

在上面的证明中,最后一步的积分换序可以从图 46 看出来. 因为前后两个二重积分都是在直线 $t=\tau$ 和 t 轴之间的面积积分,前者是先从 $t=\tau$ 积到 $t=\infty$(图中横条),然后再从 $\tau=0$ 积到 $\tau=\infty$,而后者是先从 $\tau=0$ 积到 $\tau=t$(图中直条),然后从 $t=0$ 积到 $t=\infty$.

例. 在 L-R 串联电路中加上交变电压 $E_0\sin\omega t$ (图47),求电路中的电流 $i(t)$. 设 $i(0)=0$.

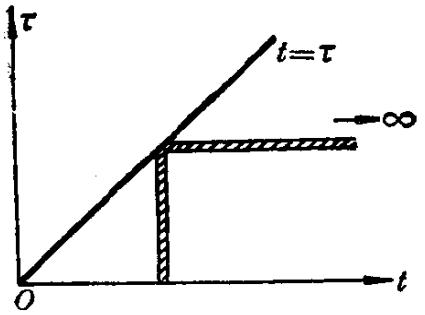


图 46

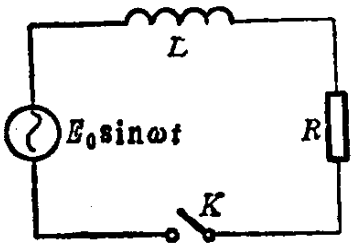


图 47

电流的方程是

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E_0\sin\omega t.$$

作拉氏变换. 令 $I(p)$为 $i(t)$的像函数,得

$$LpI(p)+RI(p)=F_1(p),$$

其中 $F_1(p)$代表 $E_0\sin\omega t$ 的拉氏换式. 于是解出

$$I(p)=F_1(p)\cdot\frac{1}{Lp+R}.$$

利用折积定理的公式(1),得 $I(p)$的反演:

$$\begin{aligned}i(t)&=\int_0^t E_0\sin\omega\tau\cdot\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)}\,d\tau\\&=\frac{E_0}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\int_0^t e^{\frac{R}{L}\tau}\sin\omega\tau d\tau\\&=\frac{E_0}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\cdot\frac{1}{2i}\left[\frac{e^{(\frac{R}{L}+i\omega)\tau}}{\frac{R}{L}+i\omega}-\frac{e^{(\frac{R}{L}-i\omega)\tau}}{\frac{R}{L}-i\omega}\right]_0^t\\&=\frac{E_0}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{L^2\omega}{R^2+L^2\omega^2}-\frac{Le^{\frac{R}{L}t}}{R^2+L^2\omega^2}\right.\\&\qquad\left.(L\omega\cos\omega t-R\sin\omega t)\right]\\&=\frac{E_0L\omega}{R^2+L^2\omega^2}e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E_0}{R^2+L^2\omega^2}\end{aligned}$$

$$(R\sin\omega t-L\omega\cos\omega t).$$

式中第一项是瞬变电流，第二项是强迫振荡的电流.

练习题. 利用(2)式证明杜阿美(Duhamel)公式：

$$pF(p)G(p)\doteqdot f(0)g(t)+\int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau, \tag{3}$$

其中 $F(p)$和$G(p)$分别是 $f(t)$和 $g(t)$的拉氏换式.

10.6* 傅里叶(Fourier)积分

为了导出拉氏变换的普遍反演公式(见下节)和以后数理方程中的应用，我们简单地介绍一下傅氏积分的理论.

根据傅氏级数理论，一个以 $2l$ 为周期的(或者是在$-l<x<l$中有定义并作了周期开拓的)分段光滑函数①$f(x)$可以展开为三角级数

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right\}, \tag{1}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi}{l}tdt,\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{n\pi}{l}tdt,$$

$$n=0,1,2,\cdots.$$

若规定在间断点上函数之值为其左右极限的算术平均，则有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right\}. \tag{1'}$$

这个展开式又可用指数函数的形式表示为

① 这只是一个充分条件.

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{l}x}, \\ c_n&=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{-i\frac{n\pi}{l}t}\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

对于一个在区间$(-\infty,\infty)$中有定义的非周期函数，自然不能用上述傅氏级数表示，但可以设想这函数的周期为无穷，即$l\to\infty$，然后来看(2)式中级数的极限表达式.

设$f(x)$是在任何有限区间内分段光滑的函数，并且积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx \tag{3}$$

存在，即$f(x)$绝对可积分. 由(2)式，把c_n代入级数中，令$\frac{n\pi}{l}=k$，$\frac{\pi}{l}=\Delta k$，得

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Delta k\int_{-l}^{l} f(t)e^{ik(x-t)}dt.$$

令$l\to\infty$，则$\Delta k\to 0$，k为连续变数，而形式地得到

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ik(x-t)}dt \tag{4}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} c(k)e^{ikx}dk, \tag{5}$$

其中

$$c(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx. \tag{6}$$

(4)式称为傅里叶积分公式. 关于这式的严格证明，可参考有关傅里叶积分理论的书①.

① 最简单的，例如，R.柯朗，D.希伯尔特，数学物理方法，卷I，第二章§6(中译本61页).

(6)式所表示的 $c(k)$ 常称为函数 $f(x)$ 的傅氏换式，(5)式是它的反演．两者的形式相当对称．

重复应用(5)式，可以把傅氏积分推广到多个变数的情形：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}c(k_1,k_2,\cdots,k_n)$$
$$\times e^{i(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n)}dk_1dk_2\cdots dk_n, \tag{7}$$

其中
$$c(k_1,k_2,\cdots,k_n)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$\times e^{-i(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n)}dx_1dx_2\cdots dx_n. \tag{8}$$

10.7* 拉氏变换的普遍反演公式

设 $f(t)$ 满足 10.1 节拉氏换式存在的条件，s_0 为其收敛横标，则函数

$$g(t)=\begin{cases}2\pi f(t)e^{-st}, & \text{当 } t>0, s>s_0,\\ 0, & \text{当 } t<0\end{cases}$$

满足上节(6)式傅氏换式存在的条件，而 $f(t)$ 的拉氏换式可写为 $g(t)$ 的傅氏换式($p=s+i\sigma$)，即

$$F(p)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-pt}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-i\sigma t}dt.$$

于是，按傅氏换式的反演公式[上节(5)式]有

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(s+i\sigma)e^{i\sigma t}d\sigma.$$

因此，
$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(s+i\sigma)e^{(s+i\sigma)t}d\sigma$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-\infty i}^{s+\infty i}F(p)e^{pt}dp,\quad t>0, \tag{1}$$

其中 s 是大于 s_0 的任意正数，积分路线是一条平行于 p 平面的虚轴的直线，像函数 $F(p)$ 在这条直线的右半平面中没有奇点（参看10.2节）．(1)式是拉氏换式的普遍反演公式．

比较拉氏变换和傅氏变换，可以看出两者的差异．傅氏换式和它的反演公式比较对称，但对于函数的限制较严．例如一个常数 A 的傅氏换式就不存在，因为积分 $\int_{-\infty}^{\infty}Ae^{-ikt}dt=A\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikt}dt$ 在通常意义下是不存在的[但参看10.10节]．拉氏换式对于函数的要求则较宽，这是由于拉氏变换的核 e^{-pt} 较之傅氏变换的核 e^{-ikt} 多了因子 e^{-st} 的缘故，这因子使得拉氏积分对于更广的一类函数收敛．拉氏换式的反演公式是一个复变积分，形式上显得与拉氏换式不那么对称．但由于像函数 $F(p)$ 是 p 的解析函数，可以用解析函数理论中的一些方法，例如残数，来计算(1)式的积分（见下节）．

练习题．利用普遍反演公式(1)证明 10.1 节(7)式和 10.5 节(1)式．

10.8* 应用残数理论求反演

上节拉氏换式的普遍反演公式可写为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}F(p)e^{pt}dp\quad(t>0), \tag{1}$$

其中 L 是 p 平面上与虚轴平行的任意一条直线，在这直线之右，像函数 $F(p)$ 无奇点．在很多情形中可以用残数来计算这式中的积分．

先设 $F(p)$ 是单值函数，在 L 之左只有有限个奇点．在 L 的左方加上一个圆弧 C_R（图 48），圆心在 $p=0$ 点，半径为 R．C_R 与 L

的一部分($\alpha-iR\cos\alpha$ 到 $\alpha+iR\cos\alpha$)构成一个围道，当 $R\to\infty$ 时，围道的直线部分趋于 L. 下面来证明，如果当 $|p|\to\infty$ 时 $F(p)$ 在 $\frac{3\pi}{2}+\delta\geqslant\arg p\geqslant\frac{\pi}{2}-\delta$ 中一致趋于零，δ 是小于 $\frac{\pi}{2}$ 的任意正数，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}F(p)e^{pt}dp=0,\ t>0. \quad (2)$$

这个结果是 8.5 节约当引理的推广.

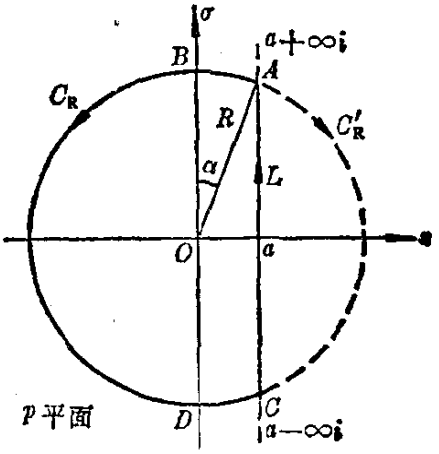


图 48

把 p 换成 iz，根据约当引理，即见当 $R\to\infty$ 时，在 σ 轴之左的半圆部分上，积分值趋于零. 现在来估计 AB 弧上的积分值. 给定 $\varepsilon>0$，取 R 足够大，使 $|F(p)|<\varepsilon$，则

$$\left|\int_A^B F(p)e^{pt}dp\right|\leqslant\int_A^B|F(p)||e^{tR(\cos\theta+i\sin\theta)}||Re^{i\theta}id\theta|$$

$$=\int_A^B|F(p)|e^{tR\cos\theta}Rd\theta<\varepsilon e^{at}R\alpha,$$

其中 a 是直线 L 的横标，为一常数，在 $\overset{\frown}{AB}$ 上 $R\cos\theta\leqslant a$. 当 $R\to\infty$ 时，$\alpha\to0$，但 $R\alpha\sim R\sin\alpha=a$. 因此上式右方可以任意小，而有

$$\lim_{R\to\infty}\int_A^B F(p)e^{pt}dp=0.$$

同样可以证明在 CD 弧上的积分值在 $R\to\infty$ 时也趋于零. 这就证明了(2)式——推广的约当引理.

根据(2)式和残数定理，立刻由(1)式得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L F(p)e^{pt}dp=\sum\mathrm{res}\{F(p)e^{pt}\}, \quad (3)$$

其中 $\sum$res 是 $F(p)e^{pt}$ 在 $F(p)$的奇点的残数之和.

(3)式也适用于 $F(p)$有无穷多个奇点的情形. 但在证明时 C_R 的半径不能连续地趋于 ∞,而是选一趋于∞的数列$\{R_n\}$(相应地有一个圆弧序列$\{C_{R_n}\}$),使 C_{R_n} 不通过 $F(p)$的奇点[参看 8.4 节(6)式前面的一段].

当 $t<0$ 时,根据 10.2 节(5)式,利用约当引理,有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C'_R}F(p)e^{pt}dp=0, \tag{4}$$

其中 C'_R 是 L之右的圆弧, 圆心在 $p=0$ 点,半径为 R. 但$F(p)$在 L之右无奇点,故

$$\int_L F(p)e^{pt}dp+\lim_{R\to\infty}\int_{C'_R}F(p)e^{pt}dp=0,$$

而有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L F(p)e^{pt}dp=0,\quad t<0. \tag{5}$$

这结果与上节从傅氏换式导出拉氏换式的反演一致; 在那里,当 $t<0$ 时 $g(t)=0$,因此 $f(t)=0$.

上节(1)式与本节(5)式可以合起来写为

$$f(t)\eta(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L F(p)e^{pt}dp, \tag{6}$$

其中

$$\eta(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t>0.\end{cases} \tag{7}$$

练习题. 用公式(3)求下列像函数的反演:

$$\frac{1}{p},\ \frac{1}{p-\alpha},\ \frac{\omega}{p^2+\omega^2},\ \frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

当$F(p)$是多值函数时, 不能像图 48 中那样简单地加上圆弧 C_R,因为在函数是多值的区域中不能应用残数定理. 例如$F(p)=e^{-\alpha\sqrt{p}}/\sqrt{p}\,(\alpha>0)$, $p=0$ 是这函数的枝点. 这时应考虑图 49 中的围道: 除了 L的一段和大圆弧 C_R 之外, 还有 C_1,C_2 和 C_δ.

C_1是沿负实轴从$-\infty$到$-\delta(\delta>0)$的直线，C_δ是绕$p=0$的圆，半径等于δ，C_2是沿负实轴从$-\delta$到$-\infty$的直线．由于在这个围道中没有$F(p)=e^{-a\sqrt{p}}/\sqrt{p}$的奇点，而$F(p)e^{pt}$在$C_R$和$C_\delta$上的积分值当$R\to\infty$和$\delta\to 0$时分别趋于零（可分别用推广的约当引理及8.6节练习题3中的公式证实），故

$$\int_L \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}e^{pt}dp=\int_{C_1}\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}e^{pt}dp+\int_{C_2}\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}e^{pt}dp.$$

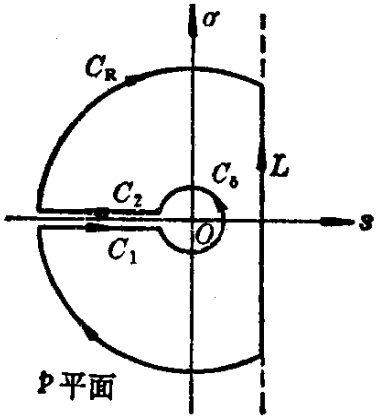


图 49

规定$|\arg p|<\pi$，则($\lambda=|p|$)

$$\int_{C_1}\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}e^{pt}dp\to\int_{\infty}^{0}\frac{e^{-a(-i\sqrt{\lambda})}}{-i\sqrt{\lambda}}e^{-\lambda t}(-d\lambda)$$

$$=i\int_0^{\infty}\frac{e^{ia\sqrt{\lambda}}}{\sqrt{\lambda}}e^{-\lambda t}d\lambda,$$

$$\int_{C_2}\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}e^{pt}dp\to\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-a(i\sqrt{\lambda})}}{i\sqrt{\lambda}}e^{-\lambda t}(-d\lambda)$$

$$=i\int_0^{\infty}\frac{e^{-ia\sqrt{\lambda}}}{\sqrt{\lambda}}e^{-\lambda t}d\lambda,$$

而有$$\int_L\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}e^{pt}dp=2i\int_0^{\infty}\frac{\cos a\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}e^{-\lambda t}d\lambda$$

$$= 2i\int_0^\infty \frac{\cos as}{s} e^{-s^2t} \cdot 2s\,ds \quad (s^2=\lambda)$$

$$= 4i\int_0^\infty e^{-s^2t}\cos as\,ds = 2\sqrt{\pi}\; i\,\frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{t}}$$

[在最后一步中用了8.8节(6)式]. 因此,

$$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} \doteqdot \frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} \quad (t>0, a>0). \tag{8}$$

在实际应用拉氏变换时,反演的问题常常可以由查表解决. 这方面现时内容比较丰富的表有 A. Erdélyi 等编的 Tables of Integral Transforms(其中不仅讨论拉氏变换)和 B. A. Диткин и П. И. Кузнецов, Справочник по операционному исчислению (中译本:运算微积手册,张燮译,科学出版社,1958年)两书. 不过在查表时要注意表中所用的符号. 例如在后面一本书中,拉氏换式的定义是

$$F(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt,$$

比我们所用的定义多一因子 p. 这时,1的像函数是1而不是$\frac{1}{p}$.

10.9* δ 函 数

δ函数在物理学和电工学中常用来表示点源和脉冲. 严格说,δ函数不是通常意义下的函数,因为它没有通常意义下的"函数值",而只有在积分号下经过求积分的运算后才给出数值. 下面来说明这种运算.

考虑下列函数[参看图50]

$$\delta_h(t)=\begin{cases}0,\text{当 } t<0,\\ \dfrac{1}{h},\text{当}0<t<h,\\ 0,\text{当}t>h.\end{cases}\qquad(1)$$

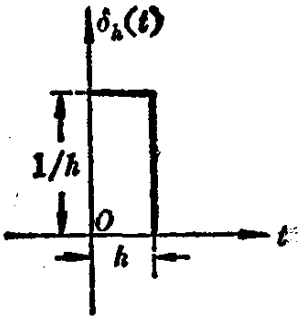


图 50

这函数的积分在$h\to 0$时之值为

$$\lim_{h\to 0}\int_0^h\frac{1}{h}dt=1.\qquad(2)$$

如果不经过求积分的运算就取极限，则

$$\lim_{h\to 0}\delta_h(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \infty, & t=0,\\ 0, & t>0.\end{cases}\qquad(3)$$

这样的极限当然是没有意义的.

现在引进算符 $\delta(t)$，称为 δ 函数，它的运算性质是：对于任意一个在 $t=0$点连续的函数 $f(t)$有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)dt=f(0).\qquad(4)$$

严格说，(4)式所代表的是一种极限过程，例如，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)dt&=\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_h(t)f(t)dt\\ &=\lim_{h\to 0}\int_0^h\frac{1}{h}f(t)\,dt=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h}f(\theta h)\cdot h\right\}\quad(|\theta|<1)\\ &=f(0).\end{aligned}$$

在最后的前一步中用了中值定理.

用 (1) 式所规定的函数 $\delta_h(t)$来明显地表示出 $\delta(t)$ 的运算性质只是许多可能的表示之一. 事实上，任何函数序列$\{\delta_n(t)\}$，$n=1,2,\cdots$，只要具有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n(t)f(t)dt=f(0)$$

的性质，都可以用来表示 $\delta(t)$. 例如，对于任意一个在 $-\infty\leqslant t\leqslant$

∞中连续并有连续导数的函数 $f(t)$，取 $\delta_n(t)=e^{-nt^2}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ $(n=1,2,\cdots)$，因 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-nt^2}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}dt=1$，有

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-nt^2}f(t)dt-f(0)\right|$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-nt^2}\{f(t)-f(0)\}dt\right|$$

$$\leqslant\max|f'(t)|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-nt^2}|t|dt$$

$$=(n\pi)^{-\frac{1}{2}}\max|f'(t)|\to 0\ (\text{当}\ n\to\infty),$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-nt^2}f(t)dt=f(0).$$

又，由10.6节(7)式可以看出$\delta_n(t)=\sin nt/\pi t(n=1,2,\cdots)$也可以用来表示 $\delta(t)$. 还可以造出许多其他这样的函数序列[参看图51]. 但在实际计算中一般并不需要这些具体的函数序列，而只要应用(4)式即可.

练习题 1. 证明下列公式：

$$x\delta(x)=0, \tag{5}$$

$$\delta(ax)=\frac{1}{a}\delta(x), \tag{6}$$

$$f(x)\delta(x-a)=f(a)\delta(x-a). \tag{7}$$

练习题 2. 证明

$$\delta(-x)=\delta(x), \tag{8}$$

$$\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2|a|}\{\delta(x-a)+\delta(x+a)\}. \tag{9}$$

δ函数的导数 δ函数的导数 $\delta'(t)$的定义是：对于任何在 $t=$

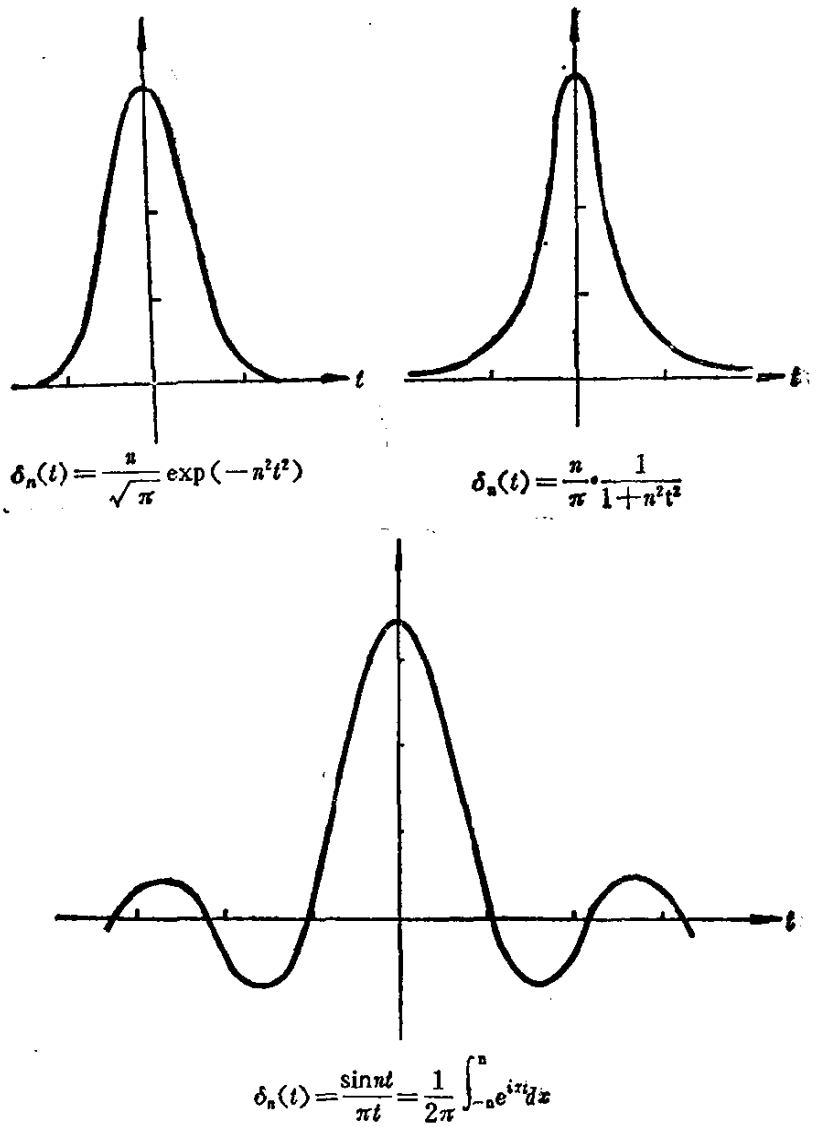


图 51

0点连续并有连续导数的函数 $f(t)$，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)f(t)dt=-f'(0). \tag{10}$$

这个定义和把 δ 函数看作普通函数来运算的结果相同，因为用换部积分法，注意当 $t\neq0$ 时 $\delta(t)=0$（指运算“值”），有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)f(t)dt$$

$$=\delta(t)f(t)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f'(t)dt=-f'(0).$$

仿此，δ 函数的 n 阶导数 $\delta^{(n)}(t)$ 的定义是：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(t)f(t)dt=(-)^n f^{(n)}(0), \tag{11}$$

其中 $f(t)$ 是任意一个在 $t=0$ 点有 n 阶连续导数的函数.

练习题 3. 证明

$$\delta'(-t)=-\delta'(t), \tag{12}$$

$$t\delta'(t)=-\delta(t). \tag{13}$$

练习题 4. 证明

$$\delta(t)=\frac{d\eta(t)}{dt}, \tag{14}$$

其中 $\eta(t)$ 的定义见上节(7)式.

10.10* δ函数的傅氏换式和拉氏换式

按傅氏换式的定义[10.6节(6)式]，$\delta(t)$ 的傅氏换式是

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-ikt}dt=\frac{1}{2\pi},$$

故 $\delta(t)$ 的傅里叶积分表示[10.6节(5)式]是

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikt}\,dk=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikt}dk. \tag{1}$$

δ 函数的这种表达式在应用中很重要. 当然，在通常意义下，(1)式中的积分是没有意义的. 和 δ 函数一样，这个积分应当在运算的意义下来理解才正确. (1)式实际是在通常意义下不合法地取下列极限的结果：

$$\delta(t)=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-K}^{K}e^{ikt}dk, \tag{2}$$

正确意义是下列极限过程：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)\,dt=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt\int_{-K}^{K}e^{ikt}dk$$

$$= \lim_{K\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin Kt}{t}dt = f(0)$$

[参看10.6节(7)式]，即应当先对 t 求积分，然后再对 K 取极限[试与10.9节 $\lim_{h\to 0}\delta_h(t)$ 的意义比较].

δ 函数的拉氏换式 由于拉氏换式的积分区间是0到∞而不是$-\infty$到∞，上节(1)式 $\delta_h(t)$ 的拉氏换式的极限值与函数 $e^{-nt^2}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ 或 $\frac{\sin nt}{\pi t}$ 的拉氏换式的极限值不同，前者是1，后者是 $\frac{1}{2}$. 因此，在拉氏变换中，δ 函数的运算值要作明确规定. 现今比较通用的是规定

$$\int_0^{\infty}\delta(t)f(t)dt = f(0), \tag{3}$$

其中 $f(t)$ 是任意一个在 $t=0$ 点**右连续**的函数. 根据这个规定，δ 函数的拉氏换式是1：

$$\int_0^{\infty}\delta(t)e^{-pt}dt = e^{-pt}|_{t=0} = 1,$$

即

$$\delta(t) \fallingdotseq 1. \tag{4}$$

这种规定相当于取 $\delta(t) = \lim_{h\to 0}\delta_h(t)$，$\delta_h(t)$ 是上节(1)式的函数；当然，极限应在求积分之后取.

第十一章　线性常微分方程的级数解法和积分解法

在本书的数理方程部分中常常要遇到二阶线性常微分方程的求解问题．用解析函数论的方法来讨论这种问题称为微分方程的解析理论．由于本书的性质，我们只简单地介绍一下其中的级数解法和积分解法．

11.1　二阶线性常微分方程的奇点

二阶线性常微分方程的标准形式是

$$\frac{d^2w}{dz^2}+p(z)\frac{dw}{dz}+q(z)w(z)=0, \tag{1}$$

其中 $w(z)$是未知函数，$p(z)$和 $q(z)$都是已知的复变函数，称为**方程的系数**．问题是在一定的条件下，例如初值条件 $w(z_0)=c_0$，$w'(z_0)=c_1$，求在一定区域内满足方程(1)的 $w(z)$．

方程(1)的性质完全由其系数 $p(z)$和 $q(z)$ 的性质确定，特别是，方程(1)的解的形式就完全由 $p(z)$和 $q(z)$的解析性确定．设 $p(z)$和 $q(z)$在一定的区域中，除若干个孤立奇点外，是 z 的单值解析函数．区域中的点可分为两类：

方程的常点　如果方程(1)的系数 $p(z)$和 $q(z)$**都在**某点z_0及其邻域内解析，则 z_0 称为方程的常点．

方程的奇点　只要两系数 $p(z)$和 $q(z)$之一在某点 z_0 不是解析的，z_0 就称为方程的奇点．

11.2　方程常点邻域内的解

下面是微分方程解析理论的**基本定理**：

如果 $p(z)$和 $q(z)$在圆$|z-z_0|<R$ 内是单值解析的，则方程

$$w''+pw'+qw=0 \tag{1}$$

在这圆内有唯一的一个解 $w(z)$满足初值条件

$$w(z_0)=c_0,\quad w'(z_0)=c_1, \tag{2}$$

c_0 和 c_1 是任意常数，并且 $w(z)$在这圆内是单值解析的.

关于这定理的证明可参看 B. И. 斯米尔诺夫，高等数学教程，第三卷第三分册 § 95，或王竹溪等，特殊函数概论，2.2 节.

根据这个定理，可以把方程(1)的解在它的常点 z_0的邻域$|z-z_0|<R$ 中表成泰勒级数的形式：

$$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k. \tag{3}$$

将这个解式代入方程(1)中可以确定级数的系数 c_k(用 c_0 和 c_1 表示，见下). 这样就得到方程(1)的解在它的常点 z_0 的邻域内的幂级数表达式. 这种求解的方法称为**级数解法**. 下面先举一个例子来说明，然后讨论在普遍情形下求级数解的步骤.

例. 求方程

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\mu y=0 \tag{4}$$

在 $x=0$ 点邻域中的级数解，其中 μ 是一个参数. 这个方程在应用中是常见的，称为**勒让德**(Legendre)**方程**(见本书第十六章).

把(4)化为标准形式(1)，即看出 $x=0$ 是方程的常点. 因此，在 $x=0$ 的邻域内，这方程的解可以表达成下列形式：

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k. \tag{5}$$

代入(4)中，有

$$(1-x^2)\sum_{k=0}^{\infty}c_kk(k-1)x^{k-2}-2x\sum_{k=0}^{\infty}c_kkx^{k-1}+\mu\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0,$$

并项之后得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\{(k+2)(k+1)c_{k+2}-[k(k+1)-\mu]c_k\}x^k=0.$$

可见，如果系数 $c_0,c_1,c_2,\cdots$ 满足递推关系

$$(k+2)(k+1)c_{k+2}-[k(k+1)-\mu]c_k=0,$$

或

$$c_{k+2}=\frac{k(k+1)-\mu}{(k+2)(k+1)}c_k,\quad k=0,1,2,\cdots, \tag{6}$$

则级数(5)是方程(4)的解.

根据(6)式可以把所有下标为偶数的系数 c_{2k} 用 c_0 表示出来，而把所有下标为奇数的系数用 c_1 表示出来. 因此，方程(4)的通解是

$$y(x)=c_0y_1(x)+c_1y_2(x). \tag{7}$$

其中 $y_1(x)$ 只含 x 的偶次幂，$y_2(x)$ 只含 x 的奇次幂，c_0 和 c_1 是两个任意常数.

当然，由于方程(4)中含有参数 μ，解式(7)中的 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 也必依赖于这参数，这参数出现在 x 的各次幂的系数中.

现在回到普遍的方程(1)和它在常点 z_0 的级数解(3). 可以用上面例子中的同样步骤来确定系数 c_k. 因 $p(z)$ 和 $q(z)$ 都在 z_0 点解析，故有泰勒展开

$$p(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(z-z_0)^m,\quad q(z)=\sum_{m=0}^{\infty}b_m(z-z_0)^m, \tag{8}$$

其中 $a_m=p^{(m)}(z_0)/m!$，$b_m=q^{(m)}(z_0)/m!$ 是已知的[参看 6.1 节(2)式]. 把(3)和(8)代入(1)式，有

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_kk(k-1)(z-z_0)^{k-2}$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}a_m(z-z_0)^m\cdot\sum_{k=0}^{\infty}c_kk(z-z_0)^{k-1}$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}b_m(z-z_0)^m\cdot\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k=0.$$

并项之后得[参看 5.1 节(10)式]

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(k+2)(k+1)c_{k+2}+\sum_{m=0}^{k}a_m(k+1-m)c_{k+1-m}\right.$$
$$\left.+\sum_{m=0}^{k}b_mc_{k-m}\right\}(z-z_0)^k=0.$$

因此,如果系数 c_k 满足递推关系

$$(k+2)(k+1)c_{k+2}+\sum_{m=0}^{k}a_m(k+1-m)c_{k+1-m}$$
$$+\sum_{m=0}^{k}b_mc_{k-m}=0,\quad k=0,1,2,\cdots,\tag{9}$$

则解式(3)满足方程(1).

利用(9)式可以从c_2开始逐一把所有的系数都用c_0和c_1表示出来,而 c_0 和 c_1 任意,因此方程(1)的通解也具有(7)的形式,不过其中的 $y_1(x)$和 $y_2(x)$一般并不分别只含 x 的偶次幂和奇次幂.

11.3 方程奇点邻域内的解·正则解和正则奇点

根据上节定理知道,方程的常点必是解的正规点,即解在该点及其邻域内单值解析. 但是,方程的奇点则可能同时也是解的奇点. 因此,如果仍然试图得到解的幂级数表达式,应考虑洛浪展开. 不过还必须先判明这奇点是否解的枝点. 事实上,在一般情形下方程的奇点常常是解的枝点. 我们把有关定理叙述于下:

定理 1 如果 z_0 是方程 $w''+pw'+qw=0$的奇点,则在 $p(z)$和 $q(z)$都解析的环状区域 $0<|z-z_0|<R$ 内,这方程的两个线性无关解是

$$w_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-z_0)^k, \tag{1}$$

$$w_2(z)=(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_k(z-z_0)^k, \tag{2}$$

或 $$w_2(z)=gw_1(z)\ln(z-z_0)+(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_k(z-z_0)^k, \tag{3}$$

其中 $\rho_1,\rho_2,g,c_k,d_k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$是常数.

关于这定理的证明可参看上节(2)式后面所引B. И. 斯米尔诺夫的书 §§ 96～97,或王竹溪等的书 2.3 节.

我们看到,在 z_0 是方程的奇点的情形下，如果 ρ_1 或者 ρ_2 不是整数,或者 $g\neq0$,方程都有多值函数解,z_0 是枝点.

当我们仿照上节的做法,把解式(1),(2)或(3) 代入方程中去确定常数 ρ_1,ρ_2,g 和系数 c_k,d_k 时，就会发现所得到的是一组无穷多个未知数的联立方程. 因此，在如此普遍的情形下用这种方法求解是不便的.

在一定条件下,会出现(1)，(2)或(3)式中的级数没有负幂项的情形. 这样的解称为**正则解**. 这时，如果用上节的方法来求系数，得到的将是关于系数之间的一系列递推关系. 下面的定理说明出现这种情形的条件.

定理 2 方程 $w''+pw'+qw=0$ 在它的奇点 z_0 的邻域 $0<|z-z_0|<R$ 内有**两个**正则解

$$w_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k, \tag{4}$$

$$w_2(z)=(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}d_k(z-z_0)^k \tag{5}$$

或 $$w_2(z)=gw_1(z)\ln(z-z_0)+(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}d_k(z-z_0)^k \tag{6}$$

的充要条件是

$(z-z_0)p(z)$和$(z-z_0)^2q(z)$在$0\leqslant|z-z_0|<R$中解析，(7)即z_0最多是$p(z)$的一阶极点，同时最多是$q(z)$的二阶极点．满足条件(7)的奇点称为方程的**正则奇点**，否则为**非正则奇点**．

定理的证明可参看上面所引的第一本书的§ 98，或第二本书的2.4节．

现在来说明求正则解的步骤．为了书写方便，设正则奇点$z_0=0$(对于一般的z_0点，只要把下面各式中的z换成$z-z_0$即可)．

以z^2乘方程

$$w''+p(z)w'+q(z)w=0, \tag{8}$$

得

$$z^2w''+zp_1(z)w'+q_1(z)w=0, \tag{9}$$

其中$p_1(z)=zp(z)$，$q_1(z)=z^2q(z)$．按所设$z=0$是正则奇点，故由条件(4)知$p_1(z)$和$q_1(z)$在$z=0$点及其邻域内是解析的，可作泰勒展开：

$$p_1(z)=\sum_{s=0}^{\infty}a_sz^s,\quad q_1(z)=\sum_{s=0}^{\infty}b_sz^s. \tag{10}$$

设方程(9)的解(正则解)为

$$w(z)=z^\rho\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^{\rho+k},\quad c_0\neq0. \tag{11}$$

把(10)，(11)代入(9)式中，得

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\rho+k)(\rho+k-1)z^{\rho+k}+\sum_{s=0}^{\infty}a_sz^s\cdot\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\rho+k)z^{\rho+k}$$

$$+\sum_{s=0}^{\infty}b_sz^s\cdot\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^{\rho+k}=0.$$

消去因子z^ρ，得

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\rho+k)(\rho+k-1)z^k+\sum_{s=0}^{\infty}a_sz^s\cdot\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\rho+k)z^k$$

$$+\sum_{s=0}^{\infty}b_s z^s\cdot\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k=0. \tag{12}$$

要这个式子在$|z|<R$的区域内成立，左方z的各次幂的系数都必须等于零(参看6.1节推论)．由z的最低次幂的系数为零得

$$c_0[\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0]=0.$$

但$c_0\neq 0$，故应有

$$\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0=0. \tag{13}$$

这是ρ的二次方程，称为指标方程，因为这方程的两个根ρ_1和ρ_2给出解式(11)的指标．为了后面讨论时方便，设$\mathrm{Re}(\rho_1)\geqslant\mathrm{Re}(\rho_2)$，并分别称与$\rho_1$和$\rho_2$相应的解为第一解和第二解．

再由(12)式中z^n的系数为零得

$$c_n(\rho+n)(\rho+n-1)+\sum_{s=0}^{n}a_s(\rho+n-s)c_{n-s}$$

$$+\sum_{s=0}^{n}b_s c_{n-s}=0 \qquad (n=1,2,\ldots). \tag{14}$$

利用这个递推关系，可以逐一把(11)式中的$c_k(k>0)$用c_0和ρ以及已知的a_s和b_s表示出来(注意这里与在常点邻域内求解的不同之处)．

由于指标方程(13)有两个根ρ_1和ρ_2，故用(12)或(14)一般可以分别得到两组递推关系，从而得到两组系数c_k和d_k．但需要区别两种情形来讨论(下面立刻可以看到理由)：

1．$\rho_1-\rho_2\neq$整数(包括零)；

2．$\rho_1-\rho_2=$整数[零或正整数，因已设$\mathrm{Re}(\rho_1)\geqslant\mathrm{Re}(\rho_2)$]．

当$\rho_1-\rho_2\neq$整数时，分别以$\rho=\rho_1,\rho=\rho_2$代入(14)，得到两组系数c_k,d_k，从而得到方程(8)的两个解：

$$w_1(z)=z^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k, \tag{15}$$

$$w_2(z)=z^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}d_kz^k, \tag{16}$$

其中 c_0 和 d_0 是两个不等于零的任意常数. 这两个解是线性无关的，因为当 $z\to 0$ 时，$w_1(z)\sim c_0z^{\rho_1}$，$w_2(z)\sim d_0z^{\rho_2}$，而 $\rho_1\neq\rho_2$，故 $\frac{w_1(z)}{w_2(z)}$ 不能等于常数.

当 $\rho_1-\rho_2=$整数时，对于 ρ_1 [设 $\mathrm{Re}(\rho_1)\geqslant\mathrm{Re}(\rho_2)$] 仍可如上利用(14)式，令 $\rho=\rho_1$，求得一组系数 $c_k(k=1,2,\ldots)$，从而得到解式(15). 但在用同样的方法令(14)式中的 $\rho=\rho_2$ 来求系数 d_k 时发生了下面的问题：

(i) 如果 $\rho_1-\rho_2=0$，即 $\rho_1=\rho_2$，从 $\rho=\rho_2$ 得到的将是与前相同的解 $w_1(z)$(最多因 c_0 和 d_0 的选择不同而差一常数因子).

(ii) 如果 $\rho_1-\rho_2=m$(正整数)，则 $d_1,d_2,\ldots,d_{m-1}$ 仍可如前求出. 但确定 d_m 的方程为[令(14)式中的 $n=m$]

$$[(\rho_2+m)(\rho_2+m-1)+a_0(\rho_2+m)+b_0]d_m$$
$$+\sum_{s=1}^{m}[a_s(\rho_2+m-s)+b_s]d_{m-s}=0, \tag{17}$$

其中 d_m 的系数 $(\rho_2+m)(\rho_2+m-1)+a_0(\rho_2+m)+b_0=\rho_1(\rho_1-1)+a_0\rho_1+b_0=0$，因为 ρ_1 是指标方程(13)的根. 因此 $d_m=\infty$，除非(14)式中第二项的和数为零：

$$\sum_{s=1}^{m}[a_s(\rho_2+m-s)+b_s]d_{m-s}=0. \tag{18}$$

当(18)式成立时，d_m 可以是任意常数，以后的 $d_n(n>m)$ 则可继续用递推关系(14)来求，并用 d_0 和 d_m 表示出来而得

$$w_2(z)=d_0u(z)+d_mv(z). \tag{19}$$

但不难看出，(19)式右方的 $v(z)$ 与第一解 $w_1(z)$ 最多差一常数因子，因为两者的级数的系数之间的递推关系是完全相同的(注意

$\rho_2+m=\rho_1$). 因此，在这种情形下可令 $d_m=0$ 而取第二解为 $d_0u(z)$.

当(18)式不成立时，$d_m=\infty$，当然没有意义. 这说明方程的第二解不可能是(5)式的形式，而应当用(6)式代入方程重新求出第二解.

现在把在方程正则奇点处求解的步骤再简单总结一下. 首先用(11)或(4)式代入方程，得出指标方程(13)和递推关系(14). 从指标方程求出指标 ρ_1 和 ρ_2，并规定 $\mathrm{Re}\rho_1\geqslant\mathrm{Re}\rho_2$. 然后将 ρ_1 代入递推关系即可求出第一解中各项的系数(首项系数除外，因为微分方程是齐次的). 至于第二解，则需区别下列几种情形：

1. $\rho_1-\rho_2\neq$整数，第二解为(5)式的形式. 这时直接用 ρ_2 代入递推关系，即可求出第二解.

2. $\rho_1-\rho_2=0$，第二解一定为(6)式的形式. 这时应该用(6)式代入方程求第二解.

3. $\rho_1-\rho_2=$整数 m，第二解可能为(5)式的形式(无对数项)，也可能为(6)式的形式(有对数项)，需视(18)式是否成立而定.

实际上，不论哪种情形，我们总是先用(11)或(4)式代入微分方程. 如果能一举求出两个线性无关解，当然问题就解决了. 如果这样只能求得第一解(这总是可以做到的)，则应再用(6)式去求第二解.

从常微分方程理论来看，不论哪种情形，总可以在求得第一解 $w_1(z)$ 之后，用下列公式求第二解①：

$$w_2(z)=Aw_1(z)\int^z\frac{\exp\int^z-p(\zeta)d\zeta}{[w_1(z)]^2}dz \tag{20}$$

这是二阶线性常微分方程理论中熟知的公式，其推导如下：分别以

① 另外还有一种求第二解的方法，称为夫罗比尼斯(Frobenius)方法，参看王竹溪等，特殊函数概论，2.5节.

w_2 和 w_1 乘方程

$$w_1'' + pw_1' + qw_1 = 0 ,$$
$$w_2'' + pw_2' + qw_2 = 0 ,$$

相减，得

$$w_1w_2'' - w_2w_1'' + p(w_1w_2' - w_2w_1') = 0,$$
$$\frac{w_1w_2'' - w_2w_1''}{w_1w_2' - w_2w_1'} = -p,$$
$$\ln(w_1w_2' - w_2w_1') = \int^z -p(\xi)d\xi + C,$$
$$w_1w_2' - w_2w_1' = A\exp\int^z -p(\xi)d\xi,$$
$$\frac{w_1w_2' - w_2w_1'}{w_1^2} = \frac{A}{w_1^2}\exp\int^z -p(\xi)d\xi,$$
$$\frac{d}{dz}\left(\frac{w_2}{w_1}\right) = \frac{A}{w_1^2}\exp\int^z -p(\xi)d\xi.$$

再求积分一次，即得(20)．代入 $w_1(z)$ 即可得到(5)式或(6)式①．

练习题．讨论勒让德方程

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + l(l+1)y = 0$$

的奇点，并求出在各正则奇点处的指标．

又，本节的奇点 z_0 和上节的常点 z_0 都假定是在有限区域内的．如果所讨论的是无穷远点，则须作变换 $z = \frac{1}{t}$，然后讨论由此导出的方程

$$\frac{d^2w}{dt^2} + \left\{\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}p\left(\frac{1}{t}\right)\right\}\frac{dw}{dt} + \frac{1}{t^4}q\left(\frac{1}{t}\right)w = 0 \qquad (21)$$

在 $t = 0$ 处的性质(是常点还是奇点)和解式．不难看出：

1．$t=0$ $(z=\infty)$ 为常点的条件是：

① 参看，例如，前面所引 В.И.斯米尔诺夫的书，§98．

$$p\left(\frac{1}{t}\right)=2t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots,$$

$$q\left(\frac{1}{t}\right)=b_4t^4+b_5t^5+\cdots,$$

即
$$p(z)=\frac{2}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\frac{a_3}{z^3}+\cdots, \tag{22}$$

$$q(z)=\frac{b_4}{z^4}+\frac{b_5}{z^5}+\cdots. \tag{23}$$

2. $t=0$ ($z=\infty$)为正则奇点的条件是：

$$\frac{1}{t}p\left(\frac{1}{t}\right)\text{在 } t=0 \text{ [即 } zp(z)\text{在 } z=\infty\text{]解析}, \tag{24}$$

$$\frac{1}{t^2}q\left(\frac{1}{t}\right)\text{在 } t=0 \text{ [即 } z^2q(z)\text{在 } z=\infty\text{]解析}. \tag{25}$$

读者可以自己证明.

11.4 求正则解的例子 · 贝塞耳(Bessel)方程

贝塞耳方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0 \tag{1}$$

是应用中常见的常微分方程，其中 ν 是任意常数. 根据上节(7)式的条件和对于该节(21)式的讨论知道，方程(1)有两个奇点. $x=0$ 和 $x=\infty$，$x=0$ 是正则奇点. $x=\infty$ 是非正则奇点. 下面来求这方程在它的正则奇点 $x=0$ 的邻域 $|x|>0$ 内的两个正则解.

以 x^2 乘(1)式，得

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0. \tag{2}$$

设
$$y(x)=x^\rho\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{\rho+k},\quad c_0\neq0. \tag{3}$$

代入(2)式，得[参看上节(12)式]

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\rho+k)(\rho+k-1)x^k+\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\rho+k)x^k$$

$$-\nu^2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k+\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2}=0\,. \tag{4}$$

(4)式左方 x 的最低次幂是 x^0，由其系数为零得指标方程[上节(13)式]

$$\rho^2-\nu^2=0, \tag{5}$$

它的两个根是 $\rho=\pm\nu$. 不妨设 $\mathrm{Re}(\nu)\geqslant 0$，则 $\rho_1=\nu,\rho_2=-\nu$. 下面分两种情形来讨论.

1. $\rho_1-\rho_2=2\nu\neq$整数(包括零). 在这种情形下，根据上节的理论知道，方程(1)的两个线性无关解是

$$y_1(x)=x^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, c_0\neq 0, \tag{6}$$

$$y_2(x)=x^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k, d_0\neq 0, \tag{7}$$

其中 $c_k,d_k(k\geqslant 1)$ 是待定系数. c_k,d_k 的求法如下：

先看 $y_1(x)$，即 $\rho=\rho_1=\nu$ 的情形. 由(4)式中 x^1 的系数为零得

$$c_1[(\rho+1)\rho+(\rho+1)-\nu^2]=c_1[(\rho+1)^2-\nu^2]=0.$$

以 $\rho=\rho_1$ 代入，得 $c_1(2\nu+1)=0$，但因 $\mathrm{Re}\nu\geqslant 0$，$2\nu+1\neq 0$，故 $c_1=0$.

又由(4)式中 $x^n(n\geqslant 2)$ 的系数为零得递推关系

$$c_n[(\rho+n)(\rho+n-1)+(\rho+n)-\nu^2]+c_{n-2}=0,$$

或

$$c_n=-\frac{c_{n-2}}{(\rho+n)^2-\nu^2}$$

$$=-\frac{c_{n-2}}{n(n+2\rho)}\qquad(n\geqslant 2). \tag{8}$$

令 $\rho=\rho_1=\nu$，得

$$c_n=-\frac{1}{n(n+2\nu)}c_{n-2}\quad(n\geqslant 2).\tag{9}$$

因 $c_1=0$，故由(9)式知

$$c_{2k+1}=0,k=0,1,2,\cdots,\tag{10}$$

而

$$\begin{aligned}c_{2k}&=-\frac{1}{2^2k(k+\nu)}c_{2k-2}\\&=(-)^k\frac{1}{2^{2k}\cdot k!(k+\nu)(k+\nu-1)\cdots(1+\nu)}c_0\\&=(-)^k\frac{c_0\Gamma(1+\nu)}{2^{2k}k!\Gamma(k+1+\nu)}\end{aligned}\tag{11}$$

在最后一步中用了 9.4 节公式(4)，$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$. 因此，

$$y_1(x)=x^\nu\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!}\frac{\Gamma(1+\nu)c_0}{\Gamma(k+1+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.\tag{12}$$

同样可得

$$y_2(x)=x^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!}\frac{\Gamma(1-\nu)d_0}{\Gamma(k+1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.\tag{13}$$

通常取 $c_0=1/\Gamma(1+\nu)2^\nu$，$d_0=1/\Gamma(1-\nu)2^{-\nu}$，而称下列两个线性无关解为 $\pm\nu$ 阶贝塞耳函数：

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!}\frac{1}{\Gamma(k+1+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu},\tag{14}$$

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!}\frac{1}{\Gamma(k+1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu},\tag{15}$$

其中规定 $|\arg x|<\pi$. 当 $\mathrm{Re}(\nu)>0$ 时，在方程的奇点 $x=0$ 处，$J_\nu(0)=0$，而 $J_{-\nu}(0)=\infty$. 由于贝塞耳方程的另一个奇点是 $x=\infty$，故级数(14)的收敛范围是 $0\leqslant|x|<\infty$，级数(15)的收敛范围是 $0<|x|<\infty$. $x=0$ 和 $x=\infty$ 都是 $J_{\pm\nu}(x)$ 的枝点，在沿负实轴割开的 x 平面上，$J_{\pm\nu}(x)$ 都是 x 的单值解析函数.

2. $\rho_1-\rho_2=2\nu=$(非负)整数. 根据前节的理论，第一解仍

为(12)式的$y_1(x)$[或者(14)式的$J_\nu(x)$,$\mathrm{Re}(\nu)\geqslant 0$],第二解则一般应为[参看上节(6)式]

$$y_2(x)=g\,y_1(x)\ln x-x^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}d_k x^k, \tag{16}$$

其中g和$d_k(k\geqslant 1)$都是待定的常数.

把(16)式代入方程(2),得

$$g\ln x[x^2y_1''+xy_1'+(x^2-\nu^2)y_1]+2gxy_1'$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}d_k[(k-\nu)^2-\nu^2]x^{k-\nu}+\sum_{k=0}^{\infty}d_k x^{k-\nu+2}=0.$$

因$y_1(x)$是方程(2)的解,故$\ln x$后面方括号中的表达式等于零,而有

$$2gx\cdot\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k}(2k+\nu)x^{2k+\nu-1}$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}d_k[(k-\nu)^2-\nu^2]x^{k-\nu}+\sum_{k=0}^{\infty}d_k x^{k-\nu+2}=0,$$

或者,乘以x^ν,得

$$2g\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k}(2k+\nu)x^{2k+2\nu}+\sum_{k=0}^{\infty}d_k[(k-\nu)^2-\nu^2]x^k$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}d_k x^{k+2}=0, \tag{17}$$

其中c_{2k}是已知的第一解中幂级数的系数.现在的问题是定g和d_k.下面分三种情形来讨论.

(i) $\rho_1-\rho_2=2\nu=0$,即$\rho_1=\rho_2=0$.

在这种情形下,g一定不为零.因方程(1)是齐次的,可令$g=1$.于是(17)式成为

$$2\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k}\cdot 2kx^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}d_k k^2x^k+\sum_{k=0}^{\infty}d_k x^{k+2}=0. \tag{18}$$

由(18)式中 x 的最低次幂的系数为零得

$$c_0\cdot 0+d_0\cdot 0=0,$$

故和 c_0 一样，d_0也是一个任意常数.

由 x^1 的系数为零得 $d_1\cdot 1=0$，故 $d_1=0$.

由 x^{2n+1}的系数为零得

$$d_{2n+1}(2n+1)^2+d_{2n-1}=0,$$

或

$$d_{2n+1}=-\frac{d_{2n-1}}{(2n+1)^2}.$$

但 $d_1=0$，故

$$d_{2n+1}=0,\quad n=0,1,2,\cdots. \tag{19}$$

又由 x^{2n} 的系数为零得

$$4nc_{2n}+4n^2d_{2n}+d_{2n-2}=0,$$

或

$$\begin{aligned} d_{2n}&=-\frac{d_{2n-2}}{4n^2}-\frac{1}{n}c_{2n}\\ &=-\frac{d_{2n-2}}{4n^2}-\frac{1}{n}\frac{(-)^nc_0}{2^{2n}(n!)^2}, \end{aligned} \tag{20}$$

在最后一步中用了(11)式($\nu=0$).

把(20)式中的 n 换成 $n-1$，将结果再代入(20)中，得

$$\begin{aligned} d_{2n}&=-\frac{1}{4n^2}\left[-\frac{d_{2n-4}}{4(n-1)^2}-(-)^{n-1}\frac{1}{n-1}\frac{c_0}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}\right]\\ &\quad-(-)^n\frac{1}{n}\frac{c_0}{2^{2n}(n!)^2}\\ &=(-)^2\frac{d_{2n-4}}{2^4[n(n-1)]^2}-\frac{(-)^nc_0}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right). \end{aligned}$$

重复这样利用(20)，最后得

$$\begin{aligned} d_{2n}=(-)^n\frac{d_0}{2^{2n}(n!)^2}-\frac{(-)^nc_0}{2^{2n}(n!)^2}&\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots\right.\\ &\left.+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)\quad(n\geqslant 1). \end{aligned} \tag{21}$$

我们看到，d_0前面的系数和 c_{2n} 与 c_0 的比值完全相同.

把上面关于 g, d_{2n+1}, d_{2n} 的计算结果代入(16),得到第二解为

$$y_2(x)=y_1(x)\ln x-c_0\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n\frac{1}{(n!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+Ay_1(x), \tag{22}$$

其中 $A=\frac{d_0}{c_0}$ 是一个任意常数.

$y_2(x)$ 在 $x=0$ 点的奇异性表现在含 $\ln x$ 的第一项上,因为 $y_1(x)$ 在 $x=0$ 是解析的而且 $y_1(0)\neq 0$.

(ii) $\rho_1-\rho_2=2m(m=1,2,\cdots)$,即 $\rho_1=m, \rho_2=-m$.

这时(17)式为

$$2g\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k}(2k+m)x^{2k+2m}+\sum_{k=0}^{\infty}d_k\cdot k(k-2m)x^k+\sum_{k=0}^{\infty}d_kx^{k+2}=0. \tag{23}$$

由 x^0 的系数为零得 $d_0\cdot 0=0$,故 d_0 可以是任意常数.

由 x^1 的系数为零得

$$d_1(1-2m)=0.$$

但 $1-2m\neq 0$,故 $d_1=0$. 由此再利用 d_{2k+1} 与 d_{2k-1} 的关系,即见 $d_{2n+1}=0, n=0,1,2,\cdots$.

由 x^{2n} 的系数为零得

$$d_{2n}\cdot 2n(2n-2m)+d_{2n-2}=0 \quad (n<m). \tag{24}$$

[因为当 $n<m$ 时,(23)式的第一项对 x^{2n} 无贡献]和

$$2gc_{2n-2m}(2n-m)+d_{2n}\cdot 2n(2n-2m)+d_{2n-2}=0 \quad (n\geqslant m). \tag{25}$$

由(24)得

$$d_{2n}=\frac{d_{2n-2}}{2^2n(m-n)}$$

$$=\frac{d_{2n-4}}{2^4n(n-1)(m-n)(m-n+1)}$$

$$=\frac{d_0(m-n-1)!}{2^{2n}n!(m-1)!}\quad(n<m).\tag{26}$$

当 $n=m$ 时，由(25)得

$$2gc_0m+d_{2m}\cdot 0+d_{2m-2}=0,$$

由此可知 d_{2m} 可以是任何常数，而

$$g=-\frac{d_{2m-2}}{2c_0m}=-\frac{d_0}{2^{2m-1}m!(m-1)!c_0}.\tag{27}$$

当 $n>m$ 时，由(25)有

$$2gc_{2n-2m}(2n-m)+d_{2n}\cdot 2n(2n-2m)+d_{2n-2}=0,$$

故

$$d_{2n}=-\frac{d_{2n-2}}{2^2n(n-m)}-\frac{2gc_{2n-2m}(2n-m)}{\cdot\ 2^2n(n-m)}$$

$$=-\frac{d_{2n-2}}{2^2n(n-m)}-\frac{2g(-)^{n-m}c_0m!}{2^22^{2n-2m}n!(n-m)!}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-m}\right)$$

$$=-\frac{d_{2n-2}}{2^2n(n-m)}+\frac{(-)^{n-m}d_0}{2^{2n}n!(m-1)!(n-m)!}$$

$$\times\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-m}\right),\tag{28}$$

其中用了(11)式($\nu=m$)和(27)式.

把(28)式中的 n 换成 $n-1$，将结果代入(28)，得

$$d_{2n}=-\frac{1}{2^2n(n-m)}\left[-\frac{d_{2n-4}}{2^2(n-1)(n-m-1)}\right.$$

$$+\frac{(-)^{n-m-1}d_0}{2^{2n-2}(n-1)!(m-1)!(n-m-1)!}$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-m-1}\right)\right]+\frac{(-)^{n-m}d_0}{2^{2n}n!(m-1)!(n-m)!}$$

$$\times\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-m}\right)$$

$$=(-)^2\frac{d_{2n-4}}{2^4n(n-1)(n-m)(n-m-1)}$$

$$+\frac{(-)^{n-m}d_0}{2^{2n}n!(m-1)!(n-m)!}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n-m-1}\right).$$

反复这样利用(28)式 $n-m$ 次,得

$$d_{2n}=(-)^{n-m}\frac{m!d_{2m}}{2^{2n-2m}n!(n-m)!}+\frac{(-)^{n-m}d_0}{2^{2n}n!(m-1)!(n-m)!}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n-m-1}+\cdots+1\right]\quad(n>m).\tag{29}$$

把上面确定的 g 和系数 $d_{2n+1}(=0)$, d_{2n} 代入(16),得

$$y_2(x)=gy_1(x)\ln x+x^{-m}\sum_{n=0}^{\infty}d_{2n}x^{2n}$$

$$=-\frac{d_0}{2^{2m-1}m!(m-1)!c_0}y_1(x)\ln x+x^{-m}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{d_0(m-n-1)!}{2^{2n}n!(m-1)!}x^{2n}\quad[\text{用(26)式}]$$

$$+x^{-m}\sum_{n=m}^{\infty}(-)^{n-m}\frac{d_{2m}m!}{2^{2n-2m}n!(n-m)!}x^{2n}+x^{-m}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(-)^{n-m}d_0}{2^{2n}n!(m-1)!(n-m)!}$$

$$\times\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n-m-1}+\cdots+1\right]x^{2n}.$$

在最后的两个和数中令 $n=m+k$,得

$$y_2(x)=-\frac{d_0}{2^{2m-1}m!(m-1)!c_0}y_1(x)\ln x$$

$$+\frac{d_0}{2^m(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}$$

$$+2^m m!\,d_{2m}\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!}\frac{1}{(k+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

$$+\frac{d_0}{2^m(m-1)!}\sum_{k=1}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!}\frac{1}{(k+m)!}$$

$$\times\left[\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{m+k}+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}, \tag{30}$$

其中 c_0, d_0 和 d_{2m} 是任意常数. $y_2(x)$中含 d_{2m}的项显然是第一解 $y_1(x)$[参看(14)式]乘上一个常数.

从(30)看到 $y_2(x)$ 在 $x=0$ 点的奇异性表现在含 $\ln x$ 的第一项和含 x 的负幂的第二项和数中. 含 $\ln x$ 的项在 $x\to 0$ 时趋于零,因为$y_1(x)=O(x^m)$而$m\geqslant 1$.第二项和数在$x\to 0$ 时为$O(x^{-m})$,是无界的.

(iii) $\rho_1-\rho_2=2\nu=2m+1(m=0,1,2,\cdots)$,即$\nu=\frac{2m+1}{2}$为半奇数.

在这种情形下,仿照(ii)的计算得 $g=0$. 因此 d_k 之间的递推关系与 c_k之间的递推关系完全一样, 而第二解为(13)[或者 (15)式]. 这相当于上节(18)式成立的情形,读者不妨自己从(17)式出发验证一下.

11.5* 非正则奇点邻域内的正则解

由于 11.3 节(7)式是两个线性无关解都是正则解的充要条件, 故一个二阶线性常微分方程在非正则奇点的邻域内最多只能有一个正则解. 关于这一正则解存在的条件的问题, 只在奇点是

系数 $p(z)$和 $q(z)$的极点时得到了解决. 我们只讨论存在正则解的必要条件，并说明当这条件不满足时如何处理求解问题.

设 $z=\infty$是所讨论的非正则奇点(在实际情况中多半如此，例如上节的贝塞耳方程). 这样的假设无损于结果的普遍性，因为任何一个点 $z=a$ 总可以通过变换 $z-a=\frac{1}{t}$变为 $t=\infty$.

设 $z=\infty$是方程

$$L[w]\equiv\frac{d^2w}{dz^2}+p(z)\frac{dw}{dz}+q(z)w=0 \tag{1}$$

的非正则奇点. 我们只讨论它是$p(z)$或(和)$q(z)$ 的极点的情形. 这时，可写

$$p(z)=z^{n_1}\left(a_0+\frac{a_1}{z}+\cdots\right)=\sum_{l=0}^{\infty}a_lz^{n_1-l}, \tag{2}$$

$$q(z)=z^{n_2}\left(b_0+\frac{b_1}{z}+\cdots\right)=\sum_{s=0}^{\infty}b_sz^{n_2-s}, \tag{3}$$

其中 n_1和 n_2是整数，依次称为 $p(z)$和 $q(z)$的阶. 设 $a_0\neq0,b_0\neq0$ [除非 $p(z)$或 $q(z)$恒等于零]，则按 11.3 节(24)、(25) 式的条件，下列两种情形至少必有一成立：

$$n_1>-1, \qquad n_2>-2. \tag{4}$$

否则 $z=\infty$就是正则奇点或者常点了.

现在来看方程(1)在非正则奇点 $z=\infty$处有正则解的必要条件. 为此，设

$$w(z)=z^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^{-k}, \quad c_0\neq0. \tag{5}$$

级数是在 $z=\infty$的邻域中的泰勒展开. 把(5)式代入(1)式左方的微分式中，得

$$L[w]\equiv z^{\rho}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\rho-k)(\rho-k-1)z^{-k-2}\right.$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty}a_l z^{n_1-l}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\rho-k)z^{-k-1}+\sum_{s=0}^{\infty}b_s z^{n_2-s}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{-k}\Bigg\}. \quad (6)$$

从这式看到，如果 $n_2\geqslant n_1$，则右方括弧中 z 的最高次幂 (z^{n_2}) 的系数是 b_0c_0. 但 b_0和 c_0都假设不等于零①，故在此情形下方程不可能有正则解. 如果 $n_1>n_2$，则(6)式括弧中 z 的最高次幂的系数

当 $n_1>n_2+1$ 时是 $a_0c_0\rho$, (7)

当 $n_1=n_2+1$ 时是 $c_0(a_0\rho+b_0)$. (8)

因此，决定指标 ρ 的方程是

$$\rho=0,\quad n_1>n_2+1, \quad (9)$$

$$\rho=-\frac{b_0}{a_0},\quad n_1=n_2+1, \quad (10)$$

都是一次的. 这里假设了 $a_0\neq0$，除非 $p(z)\equiv0$. 当 $p(z)\equiv0$ 时，(6)式括弧中 z 的最高次幂的系数又是 b_0c_0，方程无正则解（见前）. 由此得下面的定理.

定理 在极点性非正则奇点的邻域内存在一个正则解的必要条件是 $n_1>n_2$，即 $p(z)$的阶必须大于 $q(z)$的阶［设 $p(z)$ 和 $q(z)$ 都不恒等于零］.

不同于正则奇点的情形，在非正则奇点处的正则解，其级数不总是收敛的. 但即使级数是发散的，这样的解仍有意义；它实际上是解在 $z\to\infty$时的渐近展开. 关于渐近展开的概念将在下面具体问题中阐明.

11.6* 常规解和次常规解

如果方程

$$w''+pw'+qw=0 \quad (1)$$

在它的非正则奇点 $z=\infty$处没有正则解，则根据 11.3 节的理论，

① 除非 $q(z)\equiv0$，但这时方程(1)可化为一阶方程，容易求解，我们不讨论这种情形.

$z=\infty$必是解的本性奇点（还可能同时是解的枝点），即相应的洛朗展开中有无穷多个正幂项(参看7.1节和7.4节). 在这种情形下，比较实用的求解方法是找所谓**常规解**，它的形式是

$$w(z)=e^{Q(z)}z^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^{-k}, \tag{2}$$

其中$Q(z)$是z的多项式. 因子$\exp\{Q(z)\}$反映了$z=\infty$是解的本性奇点这一特性，它后面的因子则具有正则解的形式.

常规解的形式是在研究一阶方程的类似问题时得到的. 设方程

$$w'+R(z)w=0 \tag{3}$$

在$z=\infty$有正则解$w=z^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^{-k}$, $c_0\neq0$, 则必须

$$\begin{aligned}R(z)&=-\frac{w'}{w}=-\frac{d}{dz}\ln w=-\frac{\rho}{z}+\frac{c_1z^{-2}+O(z^{-3})}{c_0+c_1z^{-1}+O(z^{-2})}\\&=-\frac{\rho}{z}+\frac{a_2}{z^2}+O(z^{-3}),\end{aligned} \tag{4}$$

即$R(z)$在$z\to\infty$时趋于零. 因此，如果$R(z)$在$z=\infty$处的展开式是(极点型奇异性)

$$R(z)=A_sz^s+A_{s-1}z^{s-1}+\cdots+A_1z+A_0+\sum_{l=1}^{\infty}a_lz^{-l},$$

$$s\geqslant0,\qquad A_s\neq0, \tag{5}$$

则方程(3)在$z=\infty$处就一定没有正则解；方程(3)的解这时是

$$\begin{aligned}w(z)&=C\exp\left\{-\int R(z)dz\right\}\\&=C\exp\left\{-\left(\frac{A_s}{s+1}z^{s+1}+\cdots+A_0z\right)\right\}\cdot z^{-a_1}\exp\left\{a_2z^{-1}\right.\\&\quad\left.+\frac{a_3}{2}z^{-2}+\cdots\right\}=Ce^{Q(z)}z^{\rho}\psi(z),\end{aligned} \tag{6}$$

其中 $Q(z)$代表多项式$-\left(\frac{A_s}{s+1}z^{s+1}+\cdots+A_0z\right)$，　$\rho=-a_1$，

$\psi(z)=\exp\left\{a_2z^{-1}+\frac{a_3}{2}z^{-2}+\cdots\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^{-k}$，$c_0=1$. (6) 式正是所说的常规解.

现在来看在什么情形下二阶方程(1)有常规解. 设

$$w(z)=e^{Q(z)}v(z). \tag{7}$$

代入(1)，得 $v(z)$的方程

$$v''+p^*(z)v'+q^*(z)v=0, \tag{8}$$

其中

$$p^*(z)=p(z)+2Q'(z), \tag{9}$$

$$q^*(z)=q(z)+p(z)Q'(z)+Q''(z)+[Q'(z)]^2. \tag{10}$$

如果(7)式是常规解，则方程(8)在 $z=\infty$至少应有一个正则解，其条件，按上节的定理，是 $p^*(z)$的阶大于 $q^*(z)$的阶. 这提供了一个确定多项式 $Q(z)$的条件. 下面举例来说明.

例：求方程

$$\psi''+(\lambda-\alpha^2x^2)\psi=0 \tag{11}$$

在 $x=\infty$附近的解，λ 和 $\alpha(>0)$是常数.

这方程的唯一奇点是 $x=\infty$，是非正则奇点. 由于系数 $p(z)\equiv0$，这方程没有正则解[见上节(10)式后面]. 现在看它是否有常规解. 为此，设

$$\psi(x)=e^{Q(x)}v(x). \tag{12}$$

代入(11)，得

$$v''+p^*v'+q^*v=0, \tag{13}$$

其中[用(9)和(10)式]

$$p^*(x)=2Q'(x),\ q^*(x)=\lambda-\alpha^2x^2+Q''(x)+[Q'(x)]^2. \tag{14}$$

按照方程(13)有正则解的条件——p^*的阶大于 q^*的阶，立刻看出 $Q'(x)$的方次不能超过 1，因为 q^*中含$[Q'(x)]^2$，并且没有别的项

能消去它. 设

$$Q(x)=a_1x+a_2x^2, \tag{15}$$

则

$$p^*(x)=2(a_1+2a_2x),$$

$$\begin{aligned} q^*(x)&=\lambda-\alpha^2x^2+2a_2+(a_1+2a_2x)^2\\ &=\lambda+2a_2+a_1^2+4a_1a_2x-\alpha^2x^2+4a_2^2x^2. \end{aligned}$$

可见只有当$4a_2^2=\alpha^2$,即$a_2=\pm\frac{\alpha}{2}$,而且$a_1=0$时,q^*的阶才小于p^*的阶. 因此

$$Q(x)=\pm\frac{1}{2}\alpha x^2,\ \psi(x)=e^{\pm\frac{\alpha x^2}{2}}v(x),$$

而$v(x)$满足方程

$$v''\pm2\alpha xv'+(\lambda\pm\alpha)v=0. \tag{16}$$

这方程称为厄密(Hermite)方程. 取其中负号的情形来讨论$\left[Q(x)=-\frac{\alpha x^2}{2}\right]$. 设

$$v(x)=x^\rho\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{-k},\ c_0\neq0. \tag{17}$$

代入(16),按求正则解的步骤做去,得

$$\rho=\frac{\lambda-\alpha}{2\alpha}, \tag{18}$$

$$c_{2k+1}=0,\quad k=0,1,2,\cdots, \tag{19}$$

和递推关系

$$\begin{aligned} c_{2k+2}&=\frac{(\rho-2k)(\rho-2k-1)}{2\alpha(\rho-2k-2)-(\lambda-\alpha)}c_{2k}\\ &=-\frac{(\rho-2k)(\rho-2k-1)}{4\alpha(k+1)}c_{2k}, \end{aligned} \tag{20}$$

在最后一步中对分母应用了(18).

从递推关系(20)看到,当$k\to\infty$时$\left|\frac{c_{2k+2}}{c_{2k}}\right|\to\infty$,故级数$\sum c_{2k}x^{-2k}$

对于任何有限的 x 值都是发散的. 在下一节中将阐明这种级数解的意义.

在实际应用中，一个重要的特殊情形是

$$\rho=\frac{\lambda-\alpha}{2\alpha}=n,\quad n=0,1,2,\cdots. \tag{21}$$

这时，级数中断成为一个 n 次多项式. 例如 n 为偶数 $2m$ 的情形，由(20)有

$$c_{2k+2}=-\frac{(2m-2k)(2m-2k-1)}{4\alpha(k+1)}c_{2k}. \tag{22}$$

当 $k=m$ 时，$c_{2m+2}=0$，因此所有 $k\geqslant m$ 的系数 $c_{2k+2}=0$，而级数成为一个 $2m=n$ 次多项式. n 为奇数的情形也是如此. 通常把这多项式表达为 $H_n(z)$，$z=\sqrt{\alpha}\,x$，而规定其最高次方 z^n 的系数为 2^n，称为**厄密多项式**：

$$\begin{aligned}H_n(z)=(2z)^n&-\frac{n(n-1)}{1!}(2z)^{n-2}\\&+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2z)^{n-4}+\cdots\\&+(-)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{n!}{\left[\frac{n}{2}\right]!}(2z)^{n-2\left[\frac{n}{2}\right]},\end{aligned} \tag{23}$$

其中 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 表示不大于 $\frac{n}{2}$ 的最大整数.

次常规解 如果找常规解的尝试失败，有时可借助自变数的变换 $\zeta=z^{\frac{1}{s}}$，s 为正整数，把方程化为有常规解的方程. 例如方程

$$w''+q(z)w=0, \tag{24}$$

当 $q(z)$ 在 $z=\infty$ 的展开式为

$$q(z)=\sum_{l=1}^{\infty}b_l z^{-l},\ b_1\neq 0 \tag{25}$$

时，它没有常规解. 通过变换 $\zeta=z^{\frac{1}{2}}$，方程化为

$$\frac{d^2w}{d\zeta^2}-\frac{1}{\zeta}\frac{dw}{d\zeta}+4\zeta^2q(\zeta^2)w=0, \tag{26}$$

有常规解

$$w(\zeta)=e^{\pm\sqrt{-b_1}\zeta}\zeta^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}c_k\zeta^{-k},$$

因此

$$w(z)=e^{\pm\sqrt{-b_1}z^{\frac{1}{2}}}z^{\frac{1}{4}}\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^{-\frac{k}{2}}. \tag{27}$$

这种解称为方程(24)的次常规解.

11.7* 积分解法·拉普拉斯(Laplace)型方程

另一种重要的解微分方程的方法是积分解法. 这种解法的实质是应用积分变换的方法[参看 10.1 节]. 我们不准备讨论积分解法的普遍理论①, 而只是在本节和下节中通过两个具体例子说明求解的要点.

第一个例子是上节处理过的厄密方程:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\alpha x\frac{dy}{dx}+(\lambda-\alpha)y=0 \quad (\alpha>0). \tag{1}$$

这个方程属于拉普拉斯型方程, 其普遍形式为

$$(a_0z+b_0)\frac{d^2u}{dz^2}+(a_1z+b_1)\frac{du}{dz}+(a_2z+b_2)u=0. \tag{2}$$

所有系数都是自变数 z 的一次函数. 这一类型的方程宜于用拉氏变换来解, 因为 $z=\infty$ 是方程的非正则奇点, 故一般是解的本性奇点(见上节), 而 $z=\infty$ 也是拉氏变换的核 e^{zt} 的本性奇点. 下面说明如何用拉氏变换解方程(1).

设

$$y(x)=\int_C e^{xt}v(t)dt, \tag{3}$$

其中 $v(t)$ 是未知函数, C 是待定的积分路线. [后面这一点是与

① 参看, 例如, 王竹溪等, 特殊函数概论, 2.12 节.

第十章的拉氏变换不同的，在那里，积分路线基本上是固定的. 见10.7节(1)式的普遍反演公式].把(3)代入(1)式左方，令为$L[y]$，得

$$L[y]\equiv\int_C v(t)\{t^2-2\alpha xt+(\lambda-\alpha)\}e^{xt}dt$$

$$=\int_C v(t)\left\{t^2-2\alpha t\frac{d}{dt}+(\lambda-\alpha)\right\}e^{xt}dt.$$

对其中第二项换部求积分，得

$$L(y)\equiv[e^{xt}(-2\alpha t)v(t)]_C$$

$$+\int_C e^{xt}\left\{2\alpha\frac{d}{dt}(tv)+[t^2+(\lambda-\alpha)]v\right\}dt.$$

因此，如果取$v(t)$满足方程

$$2\alpha\frac{d}{dt}(tv)+[t^2+(\lambda-\alpha)]v=0, \tag{4}$$

并取C使

$$[e^{xt}\cdot tv(t)]_C=0, \tag{5}$$

即在积分路线C上函数$e^{xt}\cdot tv(t)$的总变化为零(例如，使这函数在C的起点和终点之值为零，或者在起点和终点之值相等)，则$L[y]=0$而(3)式代表方程(1)的解.

由(4)式得

$$2\alpha t\frac{dv}{dt}+[t^2+(\lambda+\alpha)]v=0,$$

它的解是

$$v(t)=Ae^{-\frac{1}{4\alpha}t^2}\cdot t^{-\lambda_1},\quad \lambda_1=\frac{\lambda+\alpha}{2\alpha}, \tag{6}$$

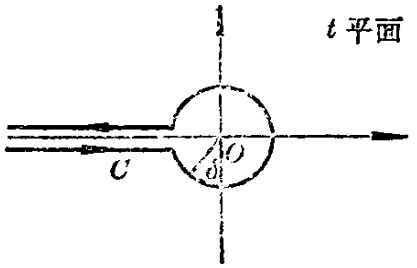


图 52

A是任意常数. 把这式代入(5)式左方，并取C为图52中的围道：沿负实轴由$t=-\infty$到$-\delta(\delta>0)$，正向绕$t=0$一周，然后沿负实轴回到$t=-\infty$. 由于因子$e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$的缘故，(5)式满足，因为当$t\to-\infty$时(5)式方括弧中的表达式趋于零. 由此得厄密方程(1)的一个积

分解

$$y(x)=A\int_{-\infty}^{(0+)} e^{-\frac{t^2}{4a}+xt}\ t^{-\frac{(\lambda+a)}{2a}}dt, \tag{7}$$

A是任意常数.

从上面的求解过程看到，这一解法的要点是通过积分变换把求$y(x)$的问题化为求$v(t)$的问题，而$v(t)$的微分方程是一次的，这是由于拉氏型方程的系数都是一次的缘故.

现在来看积分解(7)与上节(16)式同一方程的级数解(17)的关系. 为了比较起来方便，用上节(18)式的符号ρ，又设x为实数，并令$xt=-z$，(7)式成为

$$y(x)=-Ax^{\rho}\int_{\infty}^{(0+)} e^{-z}e^{-\frac{z^2}{4ax^2}}(-z)^{-\rho-1}dz. \tag{8}$$

把$e^{-\frac{z^2}{4ax^2}}$展开为z的幂级数，代入积分中逐项求积分，并利用9.5节(4)式，有

$$y(x)=-Ax^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!}(4ax^2)^{-k}\int_{\infty}^{(0+)}e^{-z}(-z)^{2k-\rho-1}dz$$

$$=Ax^{\rho}\cdot 2\pi i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k x^{-2k}}{k!(4a)^k\Gamma(-2k+\rho+1)}. \tag{9}$$

这级数的相邻两项系数之比是

$$-\frac{1}{4a(k+1)}\frac{\Gamma(-2k+\rho+1)}{\Gamma(-2k+\rho-1)}$$

$$=-\frac{(\rho-2k)(\rho-2k-1)}{4a(k+1)},$$

与上节(20)式的比值完全一样，可见积分解(7)与上节的级数解最多差一常数因子.

在上节中已经指出，级数(9)对于任何有限的x值都是发散的. 检查一下由(8)式导出(9)式的过程，就会发现把$e^{-\frac{z^2}{4ax^2}}$的幂级数展开代入(8)式并逐项求积分是不合法的，因为积分限为∞.

而代入的级数当$z=\infty$时是不收敛的. 因此,级数解(9)是对(8)式正确地表出的解作不合法展开的结果.

那末级数(9)究竟有没有意义呢? 它的意义是这样的: 如果用 $e^{-\frac{z^2}{4\alpha x^2}}$ 的有限展开表示

$$e^{-\frac{z^2}{4\alpha x^2}}=\sum_{k=0}^{N}(-)^k\frac{1}{k!(4\alpha x^2)^k}(-z)^{2k}+R_N(z)$$

代入(8)式中求积分,可以证明余部 $R_N(z)$ 的贡献是 $O(x^{-2N-2})$. 因此有

$$y(x)=-2i\pi Ax^{\rho}\left\{\sum_{k=0}^{N}\frac{(-)^k x^{-2k}}{k!(4\alpha)^k\Gamma(-2k+\rho+1)}+O(x^{-2N-2})\right\}. \tag{10}$$

也就是说,用级数的前N项之和作为解 $y(x)$ 的近似表示时,误差是 $O(x^{\rho-2N-2})$,x 之值愈大,误差愈小. 这样的展开称为**渐近展开**.

渐近展开的普遍定义如下: 设有无穷级数(不必是收敛的)

$$S(z)=A_0+\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z^2}+\cdots+\frac{A_n}{z^n}+\cdots,$$

其部分和 $S_n(z)$ 与函数 $f(z)$ 之差满足下列关系:

$$\lim_{z\to\infty}|z^n\{f(z)-S_n(z)\}|=0(n\text{固定}), \tag{11}$$

即

$$f(z)-S_n(z)=o(z^{-n}), \tag{12}$$

则 $S(z)$ 称为 $f(z)$ 在 $z\to\infty$ 时的渐近展开,常写为

$$f(z)\sim A_0+\frac{A_1}{z}+\cdots+\frac{A_n}{z^n}+\cdots. \tag{13}$$

在(12)式中用了数量级符号 o,它的定义是:当我们写 $\varphi(z)=o\{\psi(z)\}(z\to z_0)$ 时,意思是说,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 z_0 的一个邻域,在这邻域中 $|\varphi|\leqslant\varepsilon|\psi|$.

当级数是发散级数时，应当注意渐近展开与通常的收敛级数展开的不同之点．用收敛级数的部分和作为一个函数的近似表示时，对于一定的 z，项数取得愈多，近似程度愈佳；而用发散级数的部分和作为近似时，项数取得太多有时反而使误差增大．

关于渐近展开的理论读者可参看 A. Erdélyi, Asymptotic Expansions(1956)这本小书．至于有关这方面的一些基本概念则可参考，例如，王竹溪等，特殊函概论，1.8 节．

11.8* 勒让德方程的积分解·欧勒变换

勒让德方程［11.2 节(4)式］

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\nu(\nu+1)y=0 \tag{1}$$

［为了以后的方便，这里把方程中的参数写作 $\nu(\nu+1)$］属于欧勒型方程

$$p_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+p_1(x)\frac{dy}{dx}+p_2(x)y=0, \tag{2}$$

其中

$$p_0(x)=a_0x^2+b_0x+c_0,\quad p_1(x)=b_1x+c_1,\quad p_2(x)=c_2. \tag{3}$$

如果 $a_0\neq0$，而且 $p_0\left(\frac{-c_1}{b_1}\right)\neq0$，即 $p_0(x)$ 和 $p_1(x)$ 无相同的零点，则在有限区域内方程(2)有两个奇点，它们是 $p_0(x)=0$ 的根（设 $b_0^2-4a_0c_0\neq0$）；另外一个奇点是 ∞．三个奇点都是正则的．这类方程适宜于用欧勒变换

$$y(x)=\int_C(x-t)^\mu v(t)\,dt \tag{4}$$

来求积分解，其中 $v(t)$ 是未知函数，μ 是待定参数，C 是待定的积分路线．下面就用变换(4)来求勒让德方程(1)的积分解．

把(4)代入(1)的左方，令为 $L[y]$，得

$$L[y]\equiv\int_c[(1-x^2)\mu(\mu-1)(x-t)^{\mu-2}-2x\mu(x-t)^{\mu-1}$$
$$+\nu(\nu+1)(x-t)^{\mu}]v(t)dt.$$

把 $1-x^2$ 和 x 分别在 $x=t$ 点展开：

$$1-x^2\equiv-(x-t)^2-2t(x-t)+(1-t^2),$$
$$x\equiv(x-t)+t.$$

代入前式，并项，得

$$L[y]\equiv\int_c[\{-\mu(\mu+1)+\nu(\nu+1)\}(x-t)^{\mu}-2\mu^2t(x-t)^{\mu-1}$$
$$+\mu(\mu-1)(1-t^2)(x-t)^{\mu-2}]v(t)dt.$$

取 $\mu=-\nu-1$（另一取法是 $\mu=\nu$），则被积函数中的第一项为零，而有

$$L[y]\equiv\int_c v(t)[-2\mu^2t(x-t)^{\mu-1}$$
$$+\mu(\mu-1)(1-t^2)(x-t)^{\mu-2}]dt$$
$$=\int_c v(t)\left[2\mu t\frac{d}{dt}+(1-t^2)\frac{d^2}{dt^2}\right](x-t)^{\mu}dt,$$

其中 $\mu=-\nu-1$. 换部求积分，得

$$L[y]\equiv\Big[2\mu tv(x-t)^{\mu}+(1-t^2)v\frac{d}{dt}(x-t)^{\mu}$$
$$-(x-t)^{\mu}\frac{d}{dt}\{(1-t^2)v\}\Big]_c$$
$$+\int_c(x-t)^{\mu}\left[\frac{d^2}{dt^2}\{(1-t^2)v\}-2\mu\frac{d}{dt}(tv)\right]dt.$$

取 $v(t)$ 满足方程

$$\frac{d}{dt}\{(1-t^2)v\}-2\mu tv=0, \tag{5}$$

则

$$L[y]\equiv\Big[(1-t^2)v\frac{d}{dt}(x-t)^{\mu}\Big]_c. \tag{6}$$

把 $\mu=-\nu-1$ 代入(5)式，得

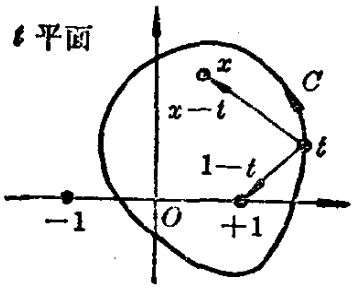


图 53

$$\frac{dv}{dt}+\frac{2\nu t}{1-t^2}v=0.$$

这个方程的解是

$$v(t)=A(1-t^2)^{\nu},$$

A是任意常数. 把这个解代入(6)式,得

$$L[y]\equiv[A(\nu+1)(x-t)^{-\nu-2}(1-t^2)^{\nu+1}]_C. \tag{7}$$

取C为图 53 中的围道：$t=1$和$t=x$在C内,$t=-1$在C外,则当t沿C走一圈时,$(1-t^2)^{\nu+1}$的辐角的改变($=2\nu\pi$)与$(x-t)^{-\nu-2}$的辐角的改变($=-2\nu\pi$)抵消,故(7)式右方为零. 因此,勒让德方程(1)的一个积分解是

$$y(x)=A\int_C\frac{(t^2-1)^{\nu}}{(t-x)^{\nu+1}}dt, \tag{8}$$

其中A是任意常数,C是图 53 中的围道.

练习题. 试改用拉氏变换解勒让德方程而用欧勒变换解上节的厄密方程，看会遇到什么问题.

第二部分　数学物理方程

第十二章　方程的导出和定解问题

数学物理方程(简称数理方程)通常是指从物理问题中导出的函数方程，特别是偏微分方程和积分方程．在本书的第二部分(从本章起到第二十四章)里将着重讨论二阶线性偏微分方程，并简单地介绍一下积分方程．

12.1　方程的来源

许多物理规律、过程和状态都可以用微分方程来表述．有些是常微分方程，例如牛顿力学中关于质点或质点组的运动方程，集中元件的交变电路方程，等等；更多的是偏微分方程，例如关于连续体或者场的运动方程，因为对于连续体(或者场)，必须用连续变数，如空间坐标x,y,z来标志它的各个点，而不能像质点的情形那样用1,2,3,…来识别不同的质点．

数理方程一般可以按照所代表的物理过程(或状态)分为三类：

1．振动与波(机械的，电磁的)——波动方程．例如，在各向同性的固体中传播的横波、或者纵波的方程①

$$\nabla^2 u-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,$$

其中$u=u(x,y,z,t)$代表平衡时坐标为x,y,z的点在t时刻的横向

① 参看，例如，Л.Д.朗道，E.M.栗弗席兹，连续介质力学，第三册，§ 22．

或者纵向位移，a是波的传播速度，∇^2是拉普拉斯算符，

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

2．输运过程——扩散方程、热传导方程[见 12.3 节]等.

3．稳定(或者静止、平衡)过程(或者状态)——拉氏方程

$$\nabla^2 u = 0.$$

此外还有量子力学中的波动方程．这种方程所描写的物理过程(或者状态)既有波动的特征，又包含统计规律性.

以后在第二十一章中还要讲到数学上对于数理方程的分类.

下面举几个例子说明如何从一个物理问题导出偏微分方程.

12.2 杆的纵振动和弦的横振动

一个最简单的数理方程的例子是杆的纵振动方程．考虑一均匀细杆在沿杆长的方向 x 作小振动．令 $u(x,t)$表示在平衡时坐标为 x 的点(实际是一截面)在 t 时刻的位移(沿x方向)．取不包含端点的一小段$(x, x+\Delta x)$(图 54)来研究它在t时刻的运动．以$\bar{u}(x,t)$表示这一小段的质心的位移，则有运动方程

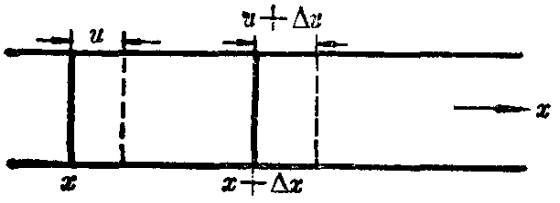


图 54

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = [P(x+\Delta x, t) - P(x,t)]S,$$

其中ρ是杆的密度(单位体积的质量)，S是截面积，$P(x,t)$是在x点的截面上的应力(沿x方向)．令$\Delta x \to 0$，则$\bar{u} \to u$，

$$\frac{[P(x+\Delta x,t)-P(x,t)]}{\Delta x}\to\frac{\partial P}{\partial x},$$

而上式成为

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial P}{\partial x}.$$

根据胡克(Hooke)定律,如果略去垂直于杆长方向的形变①,则应力P与相对伸长$\frac{\partial u}{\partial x}$成正比:

$$P=E\frac{\partial u}{\partial x},$$

E是杨氏模量. 故有

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(E\frac{\partial u}{\partial x}\right)=E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \tag{1}$$

其中$a=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$是一个常数. (1)式是**杆的纵振动方程.**

在上面的推导中,我们作了一些简化假定. 一是假定杆在作小振动,这样方能应用胡克定律,并略去由于杆的伸缩所引起的密度ρ的变化,而得到一个一次的(线性)方程. 二是假定杆很细,因此在任何时刻每一横截面上的各点位移相同,而可以用一个变数x来标志同一横截面上的各个点,否则u将不只是x(和t)的函数(参看上节关于固体中弹性波的普遍方程).

练习题. 如果杆的密度ρ和杨氏模量E都不是均匀的,而是x的(连续)函数,杆的纵振动方程有何改变?

第二个例子是一根弦的横振动. 假设弦是均匀的,并且是完全柔软的②,平衡时沿着一条直线绷紧. 取这条直线为x轴,而以坐

① 对于很细的杆,略去这种形变是合理的.

② 即无抗弯性.

标x标志弦的各点. 设弦在一个平面上振动,以$u(x,t)$表示弦的x点在t时刻沿垂直于x方向的位移. 看弦的一小段$(x,x+\Delta x)$的运动. 设ρ为弦的单位长质量,则运动方程为

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_2\sin\theta_2-T_1\sin\theta_1,$$

$$0=T_2\cos\theta_2-T_1\cos\theta_1,$$

其中T_1和T_2分别表示在x点和$x+\Delta x$点的张力,θ_1和θ_2为相应倾角(均见图 55). 由于假定了弦是完全柔软的,故张力沿弦的切线方向. 上面第二个方程表示在x方向弦是平衡的,因为假定弦只作横振动.

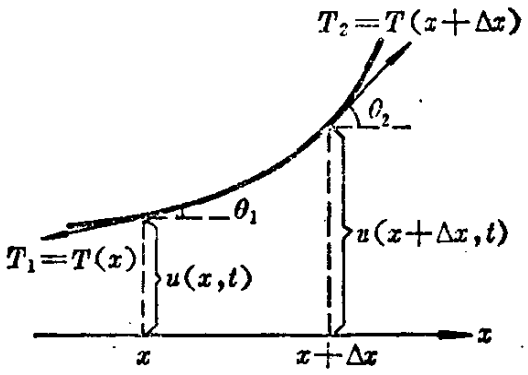


图 55

对于小振动,可设θ角很小,在略去θ^2项(即略去$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2$项,因为$\tan\theta=\frac{\partial u}{\partial x}$)的条件下,有$\cos\theta_1\approx\cos\theta_2=1$,$\sin\theta_1=\tan\theta_1$,$\sin\theta_2\approx\tan\theta_2$. 于是由第二个方程得$T_1=T_2=T$,即在沿$x$方向没有外力时弦中各点的张力是相同的. 第一个方程成为

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T(\sin\theta_2-\sin\theta_1)\approx T(\tan\theta_2-\tan\theta_1)$$

$$=T\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right]=T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\Delta x.$$

消去两边的Δx，然后令$\Delta x \to 0$，则$\bar{u} \to u$而有

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2}$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{3}$$

其中 $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$. 这是弦的横振动方程，形式与杆的纵振动方程完全一样.

又，由于假定θ角很小，$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1$，若略去$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$，则弦的伸长可略去. 令$\Delta s$表示$(x, x+\Delta x)$这一段的伸长，有

$$\Delta s = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{dx^2 + du^2} - \Delta x = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx - \Delta x$$

$$\approx \int_x^{x+\Delta x} dx - \Delta x = 0.$$

因此，弦中张力在任何时刻都是一样的，而 a 为一常数.

注意在上面的推导中我们作了一系列的假定. 例如，设弦是完全柔软的；只有在这个假定下，张力 T 才总是沿着弦的切线方向①. 又如假定了振动很小，因而θ(或$\sin\theta$)可用$\tan\theta$ 代替，而且伸长可以忽略不计；否则张力T 将由于各点的伸长不同而依赖于 u，得到的方程将不是一次的(即非线性的).

若弦还受到外力(例如重力)的作用，单位长度所受的力为 $F(x,t)$，方向总是垂直于弦平衡时的方向x，则(2)式和(3)式应分别改为

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t) \tag{4}$$

① 否则得到的将是一个比较复杂的方程，杆的横振动方程.

和
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), \tag{5}$$

其中 $f(x,t)=\dfrac{F(x,t)}{\rho}$ 代表单位质量所受的力.

12.3 热传导方程

在前一节的两个例子中我们说明了在弹性固体的振动问题中如何根据牛顿运动定律和弹性定律（胡克定律）导出描述这种振动的偏微分方程. 前一个定律给出位移与应力的动力学关系，后一定律又把应力与位移（应变）联系起来，最后得到关于位移的方程.

在固体的热传导问题中也有两个基本定律. 一个是能量守恒定律,另一个是关于热传导的**傅里叶(Fourier)定律**，下面来说明后一定律.

考虑一根均匀细杆；沿着杆长方向 x 维持一定的温度差(图56). 实验的结果表明,在杆中有热量传导，热量由温度高处"流"向温度低处，单位时间内通过单位面积的热量 q 与温度 u 的下降率成正比：

$$q=k\frac{u-(u+\Delta u)}{\Delta x}=-k\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

取极限得

$$q=-k\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1}$$

q 称为**热流密度**,系数 k 称为**导热率**. 导热率与杆的质料有关,而且严格说来也与温度有关. 但如果温度的改变范围不太大，k 可以近似地看作常数. (1)式就是傅里叶定律的数学表示.

如果不是一维的热传导,而是空间的热传导,则热流密度应当用矢量 q 表示，它与温度的下降率的关系在各向同性的物体中是

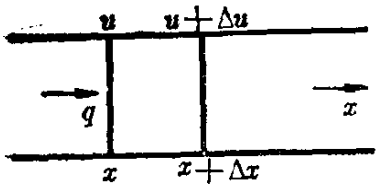


图 56

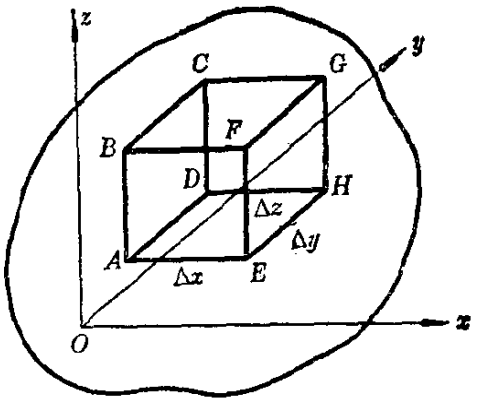


图 57

$$q_x=-k\frac{\partial u}{\partial x},q_y=-k\frac{\partial u}{\partial y},q_z=-k\frac{\partial u}{\partial z},$$

或
$$\boldsymbol{q}=-k\nabla u. \tag{1}$$

现在根据傅里叶定律和能量守恒定律推出普遍的（各向同性固体的）热传导方程. 考虑物体内部任意一个小矩形六面体 $ABCDEFGH$（图 57）. 取坐标系 $Oxyz$，使坐标面与这六面体的面平行.

根据傅里叶定律，在 Δt 时间内沿 x 方向通过与 yz 平面平行的 $ABCD$ 面进入六面体的热量是 $(q_x)_x\Delta y\Delta z\Delta t$，而通过 $EFGH$ 面从六面体出去的热量是 $(q_x)_{x+\Delta x}\Delta y\Delta z\Delta t$，因此净入热量是

$$\begin{aligned}&(q_x)_x\Delta y\Delta z\Delta t-(q_x)_{x+\Delta x}\Delta y\Delta z\Delta t\\&=-\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta V\Delta t,\end{aligned}$$

ΔV 是六面体的体积 $\Delta x\Delta y\Delta z$. 同样，在 Δt 时间内沿 y 和 z 方向进入六面体的热量分别是

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta V\Delta t$$

和 $$\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Delta V\Delta t.$$

进入六面体的热量使它的温度升高. 设 ρ 为物体的密度（单位体积的质量），c 为比热，则按能量守恒定律有

$$\rho c\Delta V\Delta u=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\Delta V\Delta t.$$

消去 ΔV，并令 $\Delta t\to 0$，得

$$\rho c\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

如果物体是均匀的，则 k 与坐标无关，这方程简化为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\nabla^2 u=0. \tag{2}$$

这是各向同性均匀物体的热传导方程，其中 $\kappa=\frac{k}{\rho c}$ 称为扩散率或温度传导率.

如果在物体中有热产生，例如物体中通有电流，或者是有放射性物质，或者是有化学反应，在单位时间内单位体积中产生的热量为 $F(x,y,z,t)$，则(2)式应改为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\nabla^2 u=f(x,y,z,t), \tag{3}$$

其中 $f(x,y,z,t)=\frac{F(x,y,z,t)}{\rho c}$.

(3)式是各向同性固体的普遍热传导方程，其中的系数 κ 一般与温度 u 有关，因为密度 ρ、比热 c 和导热率 k 都是与温度有关的. 但如果温度变化的范围不太大，则 κ 可近似地认为与温度无关而是一个常数(否则方程将是非线性的).

分子扩散的方程完全与(2)或(3)相同，只是 u 代表浓度，系数 κ 应为扩散率 D，而 f 代表扩散物质的出产率.

(3)式还可以写成

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho c}\nabla\cdot q=f(x,y,z,t),\quad q=-k\nabla u \tag{4}$$

这就是物理中常见的连续性方程.

在一定条件下,当物体的温度分布达到稳定状态时,$\frac{\partial u}{\partial t}=0$,方程(3)成为稳定温度场的方程:

$$\nabla^2 u=-\frac{f}{\kappa}. \tag{4}$$

方程(4)一般称为泊松(Poisson)方程. 如果 $f\equiv 0$,则方程(4)为拉普拉斯方程.

练习题. 比较热传导方程的推导和上节杆的纵振动方程的推导,说明其异同.

12.4* 电报方程(传输线方程)

当频率很高时,电路中的元素 L, C, R 等不再能看作集中的元件,而必须考虑为连续分布的;电路中的电流和电压也不仅是时间 t 的函数,而且还随地点的不同而改变.

考虑两条平行的传输线(沿 x 方向),单位长的电感、电阻、电容和电导(由于绝缘不完全而漏电)分别为 L, R, C, G(参考示意图 58). 考虑不在端点的一小段 $(x,x+\Delta x)$. 设在 x 点的电压为 $v(x,t)$,电流为 $i(x,t)$;在 $x+\Delta x$ 点的电压为 $v(x+\Delta x,\ t)=v(x,t)+\Delta v$,电流为 $i(x+\Delta x,t)=i(x,t)+\Delta i$. 应用电路的定理,

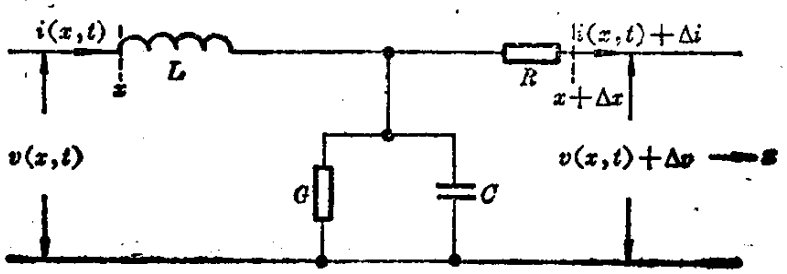


图 58

有

$$-\Delta v = R\,\Delta x \cdot i + L\Delta x \frac{\partial i}{\partial t},$$

$$-\Delta i = G\Delta x \cdot v + C\Delta x \frac{\partial v}{\partial t},$$

或

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial x} &= Ri + L\frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= Gv + C\frac{\partial v}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

这是传输线的基本方程——关于电压和电流的联立一阶线性偏微分方程.

从(1)式中消去 i ,得到电压的方程

$$v_{xx} - LCv_{tt} - (LG + RC)v_t - RGv = 0, \tag{2}$$

其中 $v_{xx} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $v_t = \frac{\partial v}{\partial t}$, $v_{tt} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$. 如果消去 v ,则得完全相同的方程

$$i_{xx} - LCi_{tt} - (LG + RC)i_t - RGi = 0, \tag{3}$$

(2)和(3)通常称为电报方程.

12.5 边界条件和初值条件

在上面三节中我们举了几个例子，说明如何从一个物理问题和相应的物理定律导出这个问题的偏微分方程. 除了这些例子之外,在物理学和力学中还有各种各样的其他偏微分方程,其中重要的如流体力学的运动方程,电磁场的麦克斯韦方程,量子力学中的薛定谔方程,等等. 这些方程都要分别在相应的课程中推导(或建立),不在此重复.

可以注意一下,在前面几个例子中,我们总是选取物体内部不包含端点或者边界的一典型小部分来讨论其运动情况，从而推导

出相应方程．因此，所得到的方程只反映物体内各部分的运动相互之间的联系．

仅有方程还不足以确定物体的运动，因为物体的运动还与起始状态以及通过边界所受到的外界作用有关．后面这一点是连续体(或者场)运动的特点，即外界的作用常常是通过物体的边界"传"到物体内部去的．

从数学的角度看，一个微分方程有无穷多的解，表现在其通解中含有若干个任意常数或者任意函数，而起始状态和边界情况则是确定这些常数的数值或者函数的形式的初值条件和边界条件．求一个微分方程的解满足一定初值条件和边界条件的问题称为**定解问题**．下面先举一些例子说明初值条件和边界条件的表达形式，然后在下一节中讨论定解问题．

考虑长为 l 、两端固定的弦的振动问题．边界条件很简单，就是

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\quad t\geqslant 0. \tag{1}$$

初值条件是

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{2}$$

$\varphi(x)$和 $\psi(x)$为已知函数，分别代表在初始时刻($t=0$)弦的各点的位移和速度．

以后将证明，给定边界条件(1)和初值条件(2)，弦的横振动方程[12.2 节(5)式]的解是唯一的．

再来看杆的纵振动问题的边界条件(初值条件与(2) 同)．设杆的一端 $x=0$ 是固定的，另一端 $x=l$ 受一个沿 x 方向的已知外力的作用，单位面积的力是 $F(t)$(图 59)．

取**包含端点** $x=l$ 的一小段 ($x=l-\varepsilon$ 到 $x=l$) 来分析．在 $x=l-\varepsilon$ 处的应力是 $P(l-\varepsilon,t)$，因此有[参看 12.2 节的推导]

$$\rho\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=F(t)-P(l-\varepsilon,t).$$

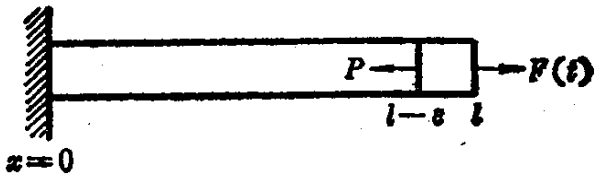


图 59

令 $\varepsilon\to 0$，得

$$P(l,t)=F(t).$$

但由胡克定律 $P(l,t)=E\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}$，故在 $x=l$ 点的边界条件为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=\frac{1}{E}F(t). \tag{3}$$

如果外力为零，即端点是自由的，则边界条件为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0. \tag{4}$$

我们看到，当 $F(t)$是已知函数时，(3)式给出的不是位移 u 在边界上的值，而是 u 的导数(对 x) 在边界上的值.

如果 $F(t)$不是已知的，而是象图 60 所示那样，由一个一端 A

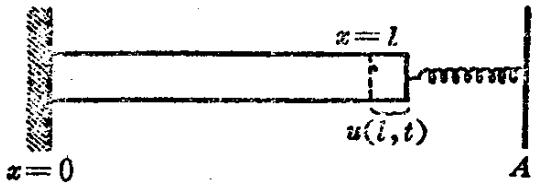


图 60

固定的弹簧施加的力，在杆的平衡位置弹簧的伸长(或压缩)为零，则 $F(t)=-ku(l,t)$，k 是弹簧的力常数，而在 $x=l$ 端的边界条件[参看(3)式]应为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}+hu(l,t)=0, \tag{5}$$

其中 $h=\frac{k}{E}(>0)$. 这种边界条件给出的既不是 u 也不是 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 在边界上的值，而是两者之间的一个线性关系.

如果弹簧的 A 端不是固定的，而是按给定的规律 $u_0(t)$ 运动着，则弹簧的实际压缩是 $u(l,t)-u_0(t)$. 相应地，(5)式应改为

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}+hu\right]_{x=l}=hu_0(t), \tag{6}$$

右方是一个已知函数.

现在来看一看热传导问题[12.3节]的边界条件. 最简单的情况当然是边界上的温度已知：

$$u|_{\Sigma}=\varphi(M,t), \tag{7}$$

其中 M 代表区域的边界 Σ 上的变点，φ 是已知函数.

其次一种边界条件是在边界上流入的热流密度为已知：

$$-q_n|_{\Sigma}=\psi(M,t),$$

其中 q_n 代表热流密度在边界面的外法线方向的分量，ψ 为已知函数. 按傅里叶定律，$q=-k\nabla u$，故 $q_n=-k\frac{\partial u}{\partial n}$，因而有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma}=\frac{1}{k}\psi(M,t). \tag{8}$$

如果**边界是绝热的**，则 $\psi=0$.

(8)式所表示的条件与上面杆的纵振动问题的边界条件(3)类似，只不过一个是三维问题，而另一个是一维问题.

另一个在热传导问题中常见的边界条件是

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right]_{\Sigma}=hu_0, \tag{9}$$

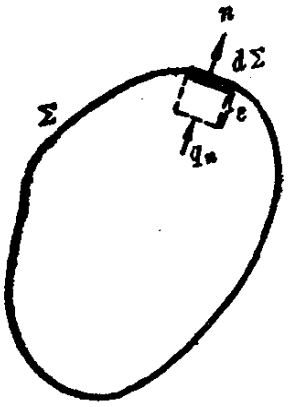


图 61

其中 u_0 代表外界温度，h 是一个正的常数. (9)式代表这样一种边界情况：物体的表面与外界通过辐射或者对流等过程交换热量，

单位时间内单位表面面积失去的热量与表面和外界的温度差成正比①. 考虑物体内以边界面上的面积元 $d\Sigma$ 为底、高为 ε 的一个小柱体(图 61). 在时间 dt 内由物体内部沿 $d\Sigma$ 的外法线方向进入小柱体内的热量是 $q_n d\Sigma dt$, 而由于与外界交换热量而失去的热量是 $H(u|_\Sigma - u_0)d\Sigma dt$, H 是常数. 从小柱体的侧面进出的热量以及在小柱体内由于温度升降的内能改变($=\rho c d\Sigma \cdot \varepsilon \Delta u$)都与 ε 成比例, 当 $\varepsilon \to 0$ 时, 这两项都趋于零. 因此有

$$q_n|_\Sigma = H(u|_\Sigma - u_0).$$

再根据傅里叶定律, 得

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Sigma = Hu|_\Sigma - Hu_0,$$

除以 k, 移项, 令 $h=\frac{H}{k}$, 即得(9).

比较(9)式和(6)式, 即见两者形式相同, 不过前者是三维的, 而后者是一维的.

(7),(8),(9)三种形式的边界条件是很普遍的边界条件, 不限于热传导问题或者杆的纵振动问题. 因此, 在数学物理中常把它们分别称为**第一、二、三类边界条件**. 第一类边界条件[(7)式]给出未知函数在边界上的值; 第二类边界条件[(8)式]给出未知函数在边界面的法线方向的导数之值; 第三类边界条件[(9)式]给出的则是未知函数和它的法线方向导数之间的一个线性关系.

可能出现这种情形: 在边界的不同部分上边界条件的类型不同.

练习题*. 在下列情况下导出关于电压 v 和电流 i 的电报方程[12.4 节(2),(3)式]的边界条件:

1. $x=l$ 端是开路;

2. $x=l$ 端有一电阻负载, 电阻为 R_1;

① 关于这种边界条件在实际问题中的分析, 可参看 Carslaw and Jaeger, Conduction of Heat in Solids, §1.9, D, p.18(第二版, 1959).

3. $x=l$ 端短路.

答案：1. $i(l,t)=0, \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=l}=0$；2. $\left(\frac{\partial i}{\partial x}+GR_1 i+CR_1\frac{\partial i}{\partial t}\right)_{x=l}=0$，$\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{R}{R_1}v+\frac{L}{R_1}\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{x=l}=0$，若电压和电流是简谐的，这两个条件就是第三类边界条件；3. $v(l,t)=0$，$\left.\frac{\partial i}{\partial x}\right|_{x=l}=0$.

除了上面列举的三种边界条件之外，还有各式各样的边界条件. 例如，在热传导问题中有**辐射条件**：

$$-\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma}=c(u^4|_{\Sigma}-u_0^4), \tag{10}$$

其中 c 是一个常数，u_0 是外界的温度，u 和 u_0 都要用绝对温标. 这个边界条件右方含 u 的四次方，故非线性的. 但如果 u 和 u_0 相差不大，则 $u^4-u_0^4\approx 4u_0^3(u-u_0)$，(10)式化为(9)式.

连接条件 在两种不同媒质的分界面上有连接条件. 例如，由两根不同质料的杆接成的一根杆，当杆作纵振动时，在连接点 c 应满足下列条件：

$$u_1|_{x=c}=u_2|_{x=c},\quad E_1\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=c}=E_2\left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=c}, \tag{11}$$

其中 $u_1=u_1(x,t)$，$u_2=u_2(x,t)$分别代表杆的两部分的位移(相对于平衡位置)，E_1 和 E_2 分别为两部分的杨氏模量. (11)式的第一个条件是显然的，因为在连接点 $x=c$，位移必相等，否则杆的两部分便会分开. 第二个条件表示连接面两侧的应力相等，也可以仿照前面关于杆的边界条件那样导出，读者试自己证明，并写出 u_1 和 u_2 所满足的方程.

12.6 定解问题

在上节中我们说到数理方程的求解问题是找一个既满足方程又满足定解条件的函数. 在讨论各种求解方法之前，先简单地提一下数理方程理论的三个主要问题. 这三个问题是：(1) 解的存

在问题，(2)解的唯一性问题，(3)解的稳定性问题.

存在(唯一)性问题是研究在什么条件下，对于哪一函数类，方程的解是存在(唯一)的. 通过存在性和唯一性问题的研究，可以明确，对于一定的方程，需要多少个以及哪一些定解条件才能唯一地确定一个解. 例如，对于拉氏方程$\nabla^2 u=0$，只要在边界上给定上节第一、二、三类边界条件中的一种(在边界的不同部分上条件的类型可以不同)，并对函数的类型(例如有界，连续或连续可微等)作一定要求，解就完全确定[参看21.4节].

此外，用不同方法解同一问题时，得到的解式可能不一样. 如果在理论上能证明解是唯一的，则这两个形式不同的解必相等，而用直接计算来证明这一点，有时很困难.

稳定性问题是讨论当定解条件略微改变时，解的变化如何. 这个问题之所以重要是由于在把一个物理问题表成数学问题时，一般总作了一些简化或者理想化的假定，与真实情况有出入. 研究了稳定性问题，就可以对于解的近似程度作出估计(关于稳定性问题的严格数学提法，可参看，例如，吴新谋，数学物理方程讲义，第一章§5).

在本书中主要是介绍一些求解的方法，对于解的唯一性和稳定性问题只在适当的地方稍作讨论，至于解的存在问题则从略.

在本书中我们将只限于讨论线性偏微分方程和线性定解条件(边界条件和初值条件)构成的定解问题. 在具体介绍各种解法之前，先简述一下这类线性定解问题的几个基本性质. 为了叙述简捷起见，我们引进线性算符L. 这样，齐次和非齐次方程(或定解条件)就可以分别写成

$$L[u]=0 \tag{1}$$

和

$$L[u]=f. \tag{2}$$

性质 1. 若u_1和u_2分别是齐次方程(1)的解，

$$L[u_1]=0,\quad L[u_2]=0,$$

则它们的线性组合 $c_1u_1+c_2u_2$ 仍然是齐次方程(1)的解，

$$L[c_1u_1+c_2u_2]=0,$$

其中 c_1 和 c_2 是任意常数.

性质 2. 若 u_1 和 u_2 都是非齐次方程(2)的解，

$$L[u_1]=f,\quad L[u_2]=f,$$

则它们的差 u_1-u_2 一定是相应的齐次方程(1)的解，

$$L[u_1-u_2]=0.$$

换言之，非齐次方程(2)的一个特解及相应齐次方程(1)的解之和仍是非齐次方程(2)的解.

性质 3. 若

$$L[u_1]=f_1,\quad L[u_2]=f_2,$$

则

$$L[c_1u_1+c_2u_2]=c_1f_1+c_2f_2.$$

第十三章　分离变数法

分离变数法是解数理方程的重要方法之一．其他重要方法有积分变换、变分法、复变函数论的应用等．每种方法有其特点，适用于不同的问题．在本章和接连着的下面四章中将讨论分离变数法以及与这种解法密切相关的本征值问题和特殊函数．

13.1　弦的自由振动

在常微分方程的求解问题中，除了用拉氏变换，通常多是先求出方程的通解，其中含若干个参数，然后根据初值条件确定这些参数之值．这样的解法应用到偏微分方程的定解问题有较大的困难．首先，除少数特殊情形外①，通解一般难以求出．其次，即使求得通解，要根据定解条件来定解也是比较困难的，因为偏微分方程的通解一般含有任意函数．因此，在解偏微分方程时，常常是直接求满足定解条件的特解．

分离变数法的主要精神是把解偏微分方程的问题化为解常微分方程的问题．下面以弦的自由振动问题为例来介绍这种方法．

弦的振动虽然是一个特殊的问题，但它能比较直观地显示出波动问题的一般特征，并形象地说明相关的一些基本概念，如驻波、节点、本征频率、波的叠加等，这些概念特别清楚地反映在用分离变数法得到的解式中．

考虑一根长为 l、两端固定的弦的自由横振动．在 12.2 节中已经推得弦的自由振动（即无外力作用于弦身的情形）的方程[该

① 参看，例如，R.柯朗，D.希尔伯特，数学物理方法，卷II，第一章§1（中译本 1977 年）．

节(3)式]：

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \quad (0<x<l, t>0). \tag{1}$$

边界条件(两端固定)是

$$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0 \quad (t\geqslant 0); \tag{2}$$

初值条件假定是

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x) \quad (0\leqslant x\leqslant l), \tag{3}$$

其中$\varphi(x)$和$\psi(x)$是已知函数，分别代表弦的各点的初位移和初速度.

考虑方程(1)的下列形式的特解：

$$u(x,t)=X(x)T(t), \tag{4}$$

其中$X(x)$只是变数x的函数，而$T(t)$只是变数t的函数. 把(4)代入(1)中，得

$$XT''-a^2X''T=0$$

或

$$\frac{X''}{X}=\frac{T''}{a^2T}.$$

这式的左边是x的函数，右边是t的函数，而x和t是两个独立变数，只有两边都是常数时，等式才能成立. 令这常数为$-\lambda$，有

$$\frac{X''}{X}=\frac{T''}{a^2T}=-\lambda.$$

由此得两个常微分方程

$$X''+\lambda X=0, \tag{5}$$

$$T''+\lambda a^2T=0. \tag{6}$$

因此，如果方程(1)具有变数分离的特解(4)，则其中的$X(x)$和$T(t)$必须各自满足(5)和(6)这两个常微分方程. 反过来，如果X和T分别是方程(5)和(6)对于同一λ值的解，则$u=XT$必满足方程(1).

方程(5)和(6)总是有解的，问题是如何找到满足定解条件(2)

和(3)的解. 为此,把(4)式代入(2)和(3)式中,分别得

$$X(0)T(t)=0,\quad X(l)T(t)=0\quad (t\geqslant 0) \tag{7}$$

和

$$X(x)T(0)=\varphi(x),\quad X(x)T'(0)=\psi(x)\quad (0\leqslant x\leqslant l). \tag{8}$$

(8)式显然不能成立,因为$\varphi(x)$和$\psi(x)$是任意的初值函数,一般不满足$X(x)$的方程(5).

由(7)式则得

$$X(0)=0,\quad X(l)=0. \tag{9}$$

这给方程(5)提出了定解条件. 这是一种边界条件,不同于通常微分方程定解的初值条件. 初值条件是对于自变数x的同一值给定$X(x)$和$X'(x)$之值,而条件(9)则是对于自变数x的两个不同值给定X之值. 对于任意的初值,方程(5)总是有解的;对于边界条件(9)则不然. 下面立刻看到,除非参数λ取某些特定值,否则方程(5)将没有满足条件(9)的非零解(零解当然没有意义). 这些特定的λ值称为方程(5)在条件(9)之下的本征值,相应的非零解称为本征函数. 求本征值λ和相应本征函数的问题称为本征值问题.

现在来解方程(5)在边界条件(9)之下的本征值问题. 方程(5)的通解是

$$X(x)=A+Bx\quad (\lambda=0),$$

$$X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}\,x+B\sin\sqrt{\lambda}\,x\quad (\lambda\neq 0),$$

其中A,B是任意常数. 由条件(9)的第一式$X(0)=0$,得$A=0$,故

$$X(x)=Bx\quad (\lambda=0),\quad X(x)=B\sin\sqrt{\lambda}\,x\quad (\lambda\neq 0).$$

再由条件(9)的第二式$X(l)=0$,得

$$Bl=0(\lambda=0),\quad B\sin\sqrt{\lambda}\,l=0\quad (\lambda\neq 0).$$

第一式不能成立,除非$B=0$,但这样$X(x)$就恒等于零了,因此$\lambda=0$不是本征值. 第二式有两种可能:一是$B=0$,而$X(x)\equiv 0$,这仍

然不是所要的解；另一种可能是

$$\sin\sqrt{\lambda}\,l=0,$$

这要求

$$\sqrt{\lambda}\,l=\pm n\pi,\quad n=1,2,\cdots.$$

但$\pm n$给出的两个解只差一正负号，故满足方程(5)和边界条件(9)的线性无关(非零)解是

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad n=1,2,\cdots. \tag{10}$$

这是上述本征值问题的本征函数，常数B不妨取为1；相应本征值为

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad n=1,2,\cdots. \tag{11}$$

练习题1. 如果在分离变数时把引进的常数写为λ(而不是$-\lambda$)，则方程(5)为$X''-\lambda X=0$. 问上面的结果有些什么改变？

练习题2. 若把方程(5)的通解写为$Ae^{i\sqrt{\lambda}x}+Be^{-i\sqrt{\lambda}x}$($\lambda\neq0$)，上面的结果有些什么改变？

对于(11)式的每一本征值λ_n，方程(6)的通解是

$$T_n=C_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+D_n\sin\frac{n\pi a}{l}t, \tag{12}$$

其中C_n和D_n是两个任意常数. 因此，方程(1)满足边界条件(2)的特解是

$$\begin{aligned}u_n(x,t)&=X_n(x)T_n(t)\\&=\left(C_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+D_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\\&\qquad(n=1,2,\cdots)\end{aligned} \tag{13}$$

这样的特解有无穷多个.

一般说来，(13)式特解中的任何一个不一定满足初值条件，因为当$t=0$时，

$$u_n(x,0)=C_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$\left.\frac{\partial u_n}{\partial t}\right|_{t=0}=D_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

而初值$\varphi(x)$和$\psi(x)$是任意给定的. 因此,这些特解$u_n(x,t)(n=1,2,\cdots)$一般还不是问题的解.

要得到满足初值条件的解,可注意方程(1)是线性齐次的,如果u_1和u_2是解,则$a_1u_1+a_2u_2$也是解,其中a_1和a_2是任意常数. 因此,可以把(13)式的解叠加起来,得到

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+D_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{14}$$

然后根据初值条件(3)来确定其中的系数C_n和D_n.

由(14)式,令$t=0$,得

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

可见,如果初值$\varphi(x)$和$\psi(x)$能在$[0,l]$中作傅里叶正弦展开,

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x,\\ \psi(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x,\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

(14)式就是问题的形式解,其中

$$\left.\begin{aligned}C_n&=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi,\\ D_n&=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

余下的问题是由这样的系数构成的级数(14)是否收敛.

按傅氏级数理论,如果在区间$[0,l]$中$\varphi(x)$有连续的一、二阶导数和分段连续的三阶导数,$\psi(x)$有连续的一阶导数和分段连续的二阶导数,则由(16)式确定的系数C_n和D_n的数量级是①

$$C_n\sim\frac{1}{n^4},\quad D_n\sim\frac{1}{n^4}. \tag{17}$$

在这种情形下,(14)式的级数在$[0,l]$中绝对而且一致收敛,并且可以在求和号下对x或t求偏导数二次,得到的级数仍是绝对和一致收敛的,故级数解$u(x,t)$满足方程(1)和边界条件(2),而且当$t\to 0$时$u(x,t)$和$u_t(x,t)$分别连续地趋于$\varphi(x)$和$\psi(x)$,即$u(x,t)$还满足初值条件.

当然,上面对于$\varphi(x)$和$\psi(x)$以及它们的导数的连续性的要求只是充分条件.如果$\varphi'(x)$,$\psi(x)$或者它们的导数有间断点,则级数解(14)也有相应的不连续性.这些问题就不详细讨论了.

最后,还需要指出,在本节的求解过程中,边界条件和初值条件起着不同的作用.边界条件是齐次的,可以分离变数而得到(9)式,它和齐次方程(1)分离变数而得到的常微分方程(5)结合起来,构成本征值问题.因此,如果撇开齐次方程的作用不谈,我们可以说,(齐次)边界条件是用来定本征值和本征函数的.至于初值条件,它是非齐次的,不能分离变数,故在求解中用于定叠加系数.表面上看来,边界条件和初值条件所起的作用不同,似乎是由它们是否齐次而决定的.其实不然.这里最根本的原因是空间变数x和时间变数t的差异.对于空间变数x,我们给出的是边界条件,即$u(x,t)$在空间不同点($x=0$与$x=l$)处的函数(或导数)值.但对于时间变数t,我们给出的是初值条件,即$u(x,t)$在同一时刻的数值与导数值.由于这一差异,即使初值条件为齐次的可以分离变

① 参看,例如,B.И.斯米尔诺夫,高等数学教程,第二卷,[157];或者,由(16)式换部求积分,也可以得到(17)式,但这不是严格证明.

数而得到

$$T(0)=0,\quad T'(0)=0 \tag{18}$$

它和方程(6)结合起来也不能定出参数λ及相应的非零解$T(t)$.

练习题. 求解下列初值问题

$$\begin{cases} T''(t)+\lambda a^2 T=0, \\ T(0)=0, \\ T'(0)=0; \end{cases}$$

是否存在某些参数λ值，可给出非零解$T(t)$?

13.2 解的诠释

把上节(13)式改写为

$$u_n(x,t)=A_n\cos(\omega_n t-\delta_n)\sin k_n x \quad (n=1,2,\cdots), \tag{1}$$

其中

$$A_n=\sqrt{C_n^2+D_n^2},\ \delta_n=\arctan\frac{D_n}{C_n},$$

$$\omega_n=k_n a=\frac{n\pi a}{l}, \tag{2}$$

即见$u_n(x,t)$代表一个驻波，$A_n\sin k_n x$表出弦上各点的振幅分布，$\cos(\omega_n t-\delta_n)$是位相因子，$\omega_n$是振动的圆频率，称为弦的**固有圆频率**或**本征圆频率**，δ_n是初位相. 弦的各点都以同一频率振动，位相相同. 在$x_m=\frac{ml}{n}(m=0,1,2,\cdots,n)$的那些点上，$k_n x_m=\frac{n\pi}{l}\cdot\frac{ml}{n}=m\pi$，$\sin k_n x_m=0$，故这些点永远保持不动，称为**节点**. 第$n$个驻波，连同固定的端点算在内，共有$n+1$个节点；不算固定的两端，则有$n-1$个节点.

满足边界条件和初值条件的解[上节(14)式]

$$u(x,t)=\sum_n u_n(x,t)$$

是各种频率不同(**成倍增加**)、位相不同、振幅不同的驻波的叠加，各驻波振幅的大小和位相的差异由初值决定，**频率则与初值无关**

(故称本征频率或固有频率).

关于驻波的形成和叠加,可以这样来理解,当弦受到一个初始扰动,离开平衡位置时,这扰动以波的形式沿着弦传播开. 当波到达端点时,由于端点受到外界的制约,保持固定不动,波就被反射回来(象光遇到镜面一样)而与原来的波形成各种驻波. 这一定性的图象可以由$u(x,t)$与初始扰动$\varphi(x)$和$\psi(x)$的关系明显地表示出来. 这关系的推导如下:

由上节(14)有

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos\omega_n t+D_n\sin\omega_n t)\sin k_n x$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{C_n}{2}[\sin(k_n x-\omega_n t)+\sin(k_n x+\omega_n t)]\right.$$

$$\left.+\frac{D_n}{2}[\cos(k_n x-\omega_n t)-\cos(k_n x+\omega_n t)]\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{C_n}{2}[\sin k_n(x-at)+\sin k_n(x+at)]\right.$$

$$\left.+\frac{D_n}{2}[\cos k_n(x-at)-\cos k_n(x+at)]\right\}$$

[用了(2)式]

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[C_n\sin k_n(x-at)+C_n\sin k_n(x+at)]$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}D_n k_n\int_{x-at}^{x+at}\sin k_n\xi\,d\xi.$$

与前节(15)式初值的傅里叶展开

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin k_n x,\\ \psi(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}D_n k_n a\sin k_n x\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

比较,即见

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi. \tag{4}$$

这个解式称为达朗伯(d'Alembert)解,在21.3节中将用另一方法得到.(4)式中$\varphi(x-at)$代表初位移所引起的波动,以速度a沿着x的正向传播;$\varphi(x+at)$代表沿着x的负向传播的同样的波.(4)式中积分所代表的也是类似的沿着x的正负方向传播的波,不过是由初速度$\psi(x)$引起的.这种沿正负方向传播的波可以分析为各种倍频的驻波的叠加,弦的任何一点的位移$u(x,t)$则等于这两种波所引起的位移的平均值.

应当注意的是,初值$\varphi(x)$和$\psi(x)$都是只在区间$0\leqslant x\leqslant l$中确定的函数.经过相当长的时间后,宗量$x-at$和$x+at$之值都会超出这区间.因此,在应用(4)式计算$u(x,t)$时,必须注意到,当我们作(3)式的傅里叶正弦级数展开时,$\varphi(x)$和$\psi(x)$是经过开拓的以$2l$为周期的奇函数。

13.3 两端固定的弦的强迫振动

在前面的讨论中,我们假设除了在端点以外弦不受外力的作用,振动纯粹是由初位移和(或)初速度引起的.现在来看有外力作用的情形.为了把外力作用所引起的振动与初值所引起的振动区别开,我们考虑纯强迫振动,即初值为零的情形.这问题的数学表述是[参看12.2节(5)式]

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t), \tag{1}$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0, \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_t(x,0)=0. \tag{3}$$

对于非齐次方程(1),如果仍照13.1节直接用分离变数的方

法，设特解为 $u(x,t)=X(x)T(t)$，会发现行不通．也就是说，不能把方程(1) 化为两个常微分方程(读者不妨自己试一下)．但可用下列傅里叶展开的方法分离变数．

设方程(1) 的解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{4}$$

其中$T_n(t)$为待定函数．这个解满足边界条件(2) 是显然的，因为对于任何 n，因子 $\sin\frac{n\pi}{l}x$ 在 $x=0$ 和 l 两点都等于零．又把(1)式中的自由项 $f(x,t)$也作傅氏展开(变数 t 作为参数)：

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{5}$$

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi. \tag{6}$$

将(4)和(5)代入(1)式，得$\left(k_n=\frac{n\pi}{l}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n''(t)\sin k_nx+\sum_{n=1}^{\infty}k_n^2a^2T_n(t)\sin k_nx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin k_nx.$$

两边级数中 $\sin k_nx$ 的系数必须相等(傅氏级数展开的唯一性)，故有

$$T_n''(t)+k_n^2a^2T_n(t)=f_n(t),\quad k_n=\frac{n\pi}{l}. \tag{7}$$

这是一个常微分方程．

又由(3)和(4)可得初值条件

$$T_n(0)=0,\quad T_n'(0)=0. \tag{8}$$

因此，求 $u(x,t)$的问题现在变成在初值条件(8) 之下解非齐次方

程(7)的问题．解这种问题的方法很多．用拉氏变换和折积定理[10.5节]得到的解式是

$$T_n(t)=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\left[\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\right]d\tau. \tag{9}$$

把这结果代入(4)式，即得两端固定的弦的纯强迫振动问题的解

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\left[\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\right]d\tau\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

再把(6)式代入，最后得

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{l}x}{n}\int_0^t\int_0^l f(\xi,\tau)\sin\frac{n\pi}{l}\xi \times\sin\left[\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\right]d\xi d\tau. \tag{10}$$

练习题． 如果初值 $u(x,0)$ 和 $u_t(x,0)$ 不为零，而是分别等于 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$，上面的解法能否应用？如能应用，结果为何？

本节所用的解法称为依本征函数展开的方法．从上面的讨论可以看出，所选用的本征函数与(1)式所对应的齐次偏微分方程相关，并满足齐次的边界条件(2)．这种解法比较普遍，也可以用来解齐次方程，得到的结果和13.1节的相同．在这里所讨论的问题中，由于本征函数是正弦函数 $\sin\frac{n\pi}{l}x$，故只需引用傅里叶展开的理论．普遍依本征函数展开的问题将在第十五章中讨论．

13.4* 非齐次边界条件·第一边值问题

如果弦的端点不固定，而是按照一定的规律作横向运动(例如一端与一振动的音叉相连)，则以前的方法都不能直接应用，因为这时边界条件是非齐次的：

$$u(0,t)=\mu(t),u(l,t)=\nu(t), \tag{1}$$

$\mu(t)$和$\nu(t)$是已知函数. 不能从(1)得到关于$X(x)$的边界条件.

下面讨论怎样解决这一类问题.

首先是要把非齐次边界条件齐次化. 为此, 设

$$u(x,t)=v(x,t)+P(x,t),$$

$P(x,t)$满足条件(1), 即

$$P(0,t)=\mu(t),\quad P(l,t)=\nu(t). \tag{2}$$

于是,$v(x,t)$满足齐次边界条件:

$$v(0,t)=0,\quad v(l,t)=0. \tag{3}$$

如果原来关于u的定解问题是下列波动方程的**普遍第一边值问题**:

$$\left.\begin{aligned} &u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),\\ &u(0,t)=\mu(t),\quad u(l,t)=\nu(t),\\ &u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

则v的定解问题是

$$\left.\begin{aligned} &v_{tt}-a^2v_{xx}=f(x,t)-P_{tt}+a^2P_{xx},\\ &v(0,t)=v(l,t)=0,\\ &v(x,0)=\varphi(x)-P(x,0),\\ &v_t(x,0)=\psi(x)-P_t(x,0). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

由于v的边界条件是齐次的, 可以用前节依本征函数展开的方法求解. 当然,求解前要先根据条件(2)求出$P(x,t)$.

显然, 满足条件(2) 的函数$P(x,t)$ 是很多的. 最简单是设$P(x,t)$为x的线性函数:

$$P(x,t)=A(t)x+B(t).$$

由(2)有

$$B(t)=\mu(t),\quad A(t)\cdot l+B(t)=\nu(t),$$

故

$$P(x,t)=\mu(t)+\frac{x}{l}[\nu(t)-\mu(t)]. \tag{6}$$

练习题 1. 设$P(x,t)$是x的二次函数，结果如何？

练习题 2. 试把第二类边界条件[参看 12.5 节(3)式]

$$u_x(0,t)=\mu(t),\quad u_x(l,t)=\nu(t)$$

齐次化.

练习题 3. 试把第三类边界条件[参看 12.5 节(6)式]

$$u_x(0,t)-hu(0,t)=\mu(t),\quad u_x(l,t)+hu(l,t)=\nu(t)$$

齐次化.

由于$P(x,t)$的选取有一定任意性，故用上法得到的解式将随$P(x,t)$的不同而不同. 但可以证明第一边值问题(4)的解是唯一的. 证明如下.

设问题(4)有两个解 u_1 和 u_2，则 $w\equiv u_1-u_2$ 满足方程

$$w_{tt}-a^2w_{xx}=0 \tag{7}$$

和定解条件

$$w(0,t)=w(l,t)=0, \tag{8}$$

$$w(x,0)=w_t(x,0)=0. \tag{9}$$

从物理上看，w 是这样一个一维振动问题的解，除了在边界点之外，没有外力作用[方程(7)是齐次的]，边界点保持不动，初位移和初速度都是零. 这必然是静止状态，即 $w\equiv u_1-u_2\equiv 0$，因而(4)的解是唯一的.

唯一性的数学证明如下：考虑函数

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^l(w_t^2+a^2w_x^2)\,dx①.$$

求导数，有

$$\frac{dE}{dt}=\int_0^l(w_tw_{tt}+a^2w_xw_{xt})\,dx.$$

对于第二项换部求积分，得

$$\frac{dE}{dt}=\int_0^l(w_{tt}-a^2w_{xx})w_t\,dx+a^2w_xw_t\Big|_{x=0}^{x=l}.$$

① 不难看出$E(t)$与弦或者杆振动的总能量(动能加势能)成比例.

因 $w\equiv u_1-u_2$ 满足方程(7)，故右方积分等于零．又在 $x=0$ 和 $x=l$ 处 w 总是零，故 w_t 在 $x=0$ 和 $x=l$ 之值恒为零．因此 $\frac{dE}{dt}=0$，而 E 是与 t 无关的常数．于是有

$$E(t)=E(0)=\frac{1}{2}\int_0^l (w_t^2+a^2w_x^2)|_{t=0}dx.$$

由 w 的初值条件(9)，$w_t|_{t=0}=0$．又当 $t=0$ 时，任何点的 $w=0$，故 $w_x|_{t=0}=0$．因此上式右方的积分值为零，而有

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^l (w_t^2+a^2w_x^2)dx\equiv 0.$$

这要求 $w_x\equiv 0, w_t\equiv 0$，即 w 是一个常数．但已知当 $t=0$ 时 $w=0$，故 $w\equiv 0$，而 $u_1\equiv u_2$.

练习题 4. 证明第二和第三边值问题的解是唯一的.

13.5 关于不含时间的问题的补充讨论

以上几节我们讨论了波动方程的定解问题．对于热传导方程可以类似地处理．关于不含时间的问题构成的定解问题，原则上也可以同样处理．只是由于现在不含时间变量 t，定解条件只有边界条件，因而在求解时就出现了一些新的特点．下面以矩形区域内的稳定问题为例加以说明.

例 1. 首先先看定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

$$u|_{x=0}=0, \qquad u|_{x=a}=0, \tag{2}$$

$$u|_{y=0}=\varphi(x), \quad u|_{y=b}=\psi(x). \tag{3}$$

这时关于 x 的一对边界条件(2)是齐次的，可以用来构成本征值问题．重复分离变数的标准步骤，可得到满足齐次方程(1)及齐次边界条件(2) 的特解为

$$u_n(x,y)=\left(A_n\mathrm{sh}\frac{n\pi}{a}y+B_n\mathrm{ch}\frac{n\pi}{a}y\right)\sin\frac{n\pi}{a}x, \tag{4}$$

$$n=1,2,3,\cdots.$$

把全部特解叠加起来构成一般解，然后即可利用非齐次的边界条件(3)定出叠加系数.

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{a}x=\varphi(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi}{a}b+B_n\,\mathrm{ch}\frac{n\pi}{a}b\right)\sin\frac{n\pi}{a}x=\psi(x).$$

所以，

$$B_n=\frac{2}{a}\int_0^a\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx,$$

$$A_n\mathrm{sh}\frac{n\pi}{a}b+B_n\mathrm{ch}\,\frac{n\pi}{a}b=\frac{2}{a}\int_0^a\psi(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx,$$

或

$$A_n=\frac{2}{a\,\mathrm{sh}\,\dfrac{n\pi}{a}b}\int_0^a\left[\psi(x)-\varphi(x)\,\mathrm{ch}\,\frac{n\pi}{a}b\right]\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx.$$

练习题 1. 满足齐次方程(1)及齐次边界条件(2)的特解形式不是唯一的，适当选择特解的形式可使解式更加简单. 试取特解为

$$u_n(x,y)=\left[C_n\mathrm{sh}\,\frac{n\pi}{a}y+D_n\,\mathrm{sh}\frac{n\pi}{a}(b-y)\right]\sin\frac{n\pi}{a}x,$$

重新解上述定解问题.

如果方程是非齐次的，即

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=f(x,y), \tag{5}$$

而边界条件不变，这时从原则上说，应当采用按相应齐次问题（即将方程(4)中的自由项 $f(x,y)$改为 0)的本征函数(即 $\sin\frac{n\pi}{a}x$, $n=1,2,\cdots$) 展开的办法求解. 这种方法在 13.3 节中已有详细叙

述，这里不再重复.

但是，如果 $f(x,y)$的形式比较简单，我们还有可能采用另一种解法，即先求出满足非齐次方程(4)及齐次边界条件(2)的一个特解来使问题得到简化.

例 2. 解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=xy, \tag{6}$$

$$u|_{x=0}=0, \qquad u|_{x=a}=0, \tag{7}$$

$$u|_{y=0}=\varphi(x), \ u|_{y=b}=\psi(x). \tag{8}$$

我们很容易找出非齐次方程(6)的一个解(例如，$\frac{1}{6}x^3y$)和相应齐次方程的一个解(例如，cxy，c 为常数)，再考虑到边界条件(7)的要求，可取满足方程(6)及边界条件(7)的特解为

$$u_0(x,y)=\frac{1}{6}(x^2-a^2)xy,$$

而后令 $u(x,y)=u_0(x,y)+v(x,y)$，得到

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,$$

$$v|_{x=0}=0, \quad v|_{x=a}=0,$$

$$v|_{y=0}=\varphi(x),$$

$$v|_{y=b}=\psi(x)-\frac{b}{6}(x^2-a^2)x.$$

这个定解问题的形式和例 1 相同，很容易求解.

在这种解法中，满足方程(6)和边界条件(7)的特解不是唯一的. 选取不同的特解 $u_0(x,y)$，得到的解 $u(x,y)$ 的形式也会不同. 但由于有整个定解问题解的唯一性保证，用不同方法得到的解实际上是相同的.

如果边界条件也全是非齐次的，即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y), \tag{9}$$

$$u|_{x=0}=\xi(y),\ u|_{x=a}=\eta(y), \tag{10}$$

$$u|_{y=0}=\varphi(x),\ u|_{y=b}=\psi(x). \tag{11}$$

我们仍然可以仿照例 2 中的方法求解，即先找出一个既满足非齐次方程(9)、又满足非齐次边界条件(10)或(11)的特解来使方程及一组边界条件齐次化. 也还可以令 $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$，而 $u_1(x,y)$和 $u_2(x,y)$分别由下列定解问题求出：

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=f(x,y),$$

$$u_1|_{x=0}=0,\qquad u_1|_{x=a}=0,$$

$$u_1|_{y=0}=\varphi(x),\ u_1|_{y=b}=\psi(x)$$

和

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0,$$

$$u_2|_{x=0}=\xi(y),\ u_2|_{x=a}=\eta(y),$$

$$u_2|_{y=0}=0,\qquad u_2|_{y=b}=0.$$

第十四章　正交曲面坐标系中方程的变数分离

14.1　坐标系的选择

在前一章中，通过弦的振动问题，说明了分离变数法的基本步骤．应当注意到，不仅对于方程本身，而且对于边界条件，都要进行变数的分离．一般说来，能否应用分离变数法，除了与方程的形式有关之外，还与采用什么坐标系有关，而坐标系的选择则是根据边界的形状或者对称性来决定的．例如，对于球形区域需要采用球坐标；用直角坐标就不能将边界条件中的变数分离．原则上，应当选坐标系使问题的边界与一个坐标面或者几个坐标面的部分重合．例如，边界面是半径为 a 的球，就选用球坐标 (r,θ,φ)，使边界面与坐标面 $r=a$ 重合．边界面为生成角等于 θ_1 的圆锥面，也可选球坐标，使锥面与坐标面 $\theta=\theta_1$ 重合．如果边界面为半径等于 a、高为 h 的圆柱，则应选用柱坐标 (r,φ,z)，使边界面与坐标面 $r=a,z=0,z=h$ 的部分重合．又如问题具有旋转对称性，则可选用球坐标并取对称轴为坐标系的极轴，等等．

几乎各种类型的数理方程都含有拉普拉斯算符 ∇^2．因此，对于一个方程说，首先是拉氏算符的变数分离问题．下面先说明一下在普遍正交曲面坐标系中拉氏算符的表达式，然后讨论在球坐标和柱坐标中亥姆霍兹(Helmholtz)方程 $\nabla^2u+\lambda u=0$ 的变数分离．

14.2*　正交曲面坐标系中的梯度、散度、旋度和拉氏算符

原则上可以根据正交曲面坐标与直角坐标的关系，通过直接

计算，得到拉氏算符在正交曲面坐标系中的表达式．但这样做计算较繁，特别是对于作用于矢量函数(见下)的拉氏算符．因此，常常是用矢量分析的方法来解决这个问题．

拉氏算符作用于标量场 u，$\nabla^2 u=\nabla\cdot(\nabla u)$，是一个矢量的散度．拉氏算符作用于矢量场 $\boldsymbol{A}$ 所得的$\nabla^2\boldsymbol{A}$，由下面的公式给出：

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}-\nabla^2\boldsymbol{A},$$

或

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}-\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}. \tag{1}$$

可见只要分别求出在正交曲面坐标系中一个标量的梯度和一个矢量的散度以及旋度的各个表达式，就可以得到拉氏算符的表达式．

设正交曲面坐标为 ξ_1,ξ_2,ξ_3．垂直于坐标面 $\xi_i=$常数的弧元为

$$ds_i=H_i d\xi_i,\quad i=1,2,3, \tag{2}$$

其中 H_i一般是 ξ_1,ξ_2,ξ_3的函数．例如在球坐标系中：

$$\left.\begin{aligned}&\xi_1=r,\quad \xi_2=\theta,\quad \xi_3=\varphi,\\&H_1=1,H_2=r,H_3=r\sin\theta;\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

在柱坐标系中：

$$\left.\begin{aligned}&\xi_1=r,\quad \xi_2=\varphi,\quad \xi_3=z,\\&H_1=1,\quad H_2=r,\quad H_3=1.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

根据一个标量 u 的梯度∇u 的定义——u的空间变化率，立刻可以写出它的分量表达式：

$$\nabla u\equiv\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial\xi_1},\ \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial\xi_2},\ \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial\xi_3}\right)$$

或

$$(\nabla u)_i=\frac{\partial u}{\partial s_i}=\frac{1}{H_i}\frac{\partial u}{\partial\xi_i},\quad i=1,2,3. \tag{5}$$

一个矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度，按定义是一点附近单位体积的通量

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oiint_{\Sigma}A_n d\Sigma, \tag{6}$$

其中Σ代表体积V的边界面，A_n是$\boldsymbol{A}$在Σ的外法线方向上的分

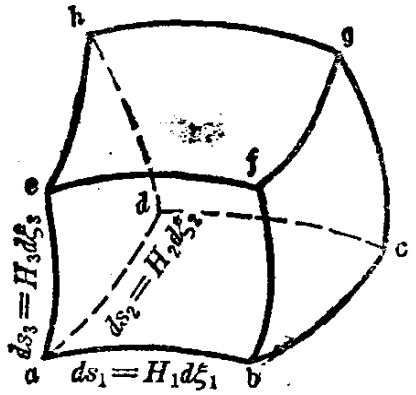


图 62

量. 应用(6)式于图 62 中的正交六面体，有

$$V=ds_1ds_2ds_3=H_1H_2H_3d\xi_1d\xi_2d\xi_3;$$

边界面 $adhe$ 和 $bcgf$ 对面积分的贡献是(在 $bcgf$ 面上的积分值用′表示)

$$\begin{aligned}
&-A_1ds_2ds_3+(A_1ds_2ds_3)'\\
&\quad=-A_1H_2H_3d\xi_2d\xi_3+(A_1H_2H_3)'d\xi_2d\xi_3\\
&\quad=-A_1H_2H_3d\xi_2d\xi_3\\
&\qquad+\left[A_1H_2H_3+\frac{\partial}{\partial\xi_1}(A_1H_2H_3)\cdot d\xi_1\right]d\xi_2d\xi_3\\
&\quad=\frac{\partial}{\partial\xi_1}(A_1H_2H_3)\cdot d\xi_1d\xi_2d\xi_3.
\end{aligned}$$

类似地，其他两对表面对面积分的贡献为

$$\frac{\partial}{\partial\xi_2}(A_2H_3H_1)\cdot d\xi_1d\xi_2d\xi_3,$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi_3}(A_3H_1H_2)\cdot d\xi_1d\xi_2d\xi_3.$$

因此，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}\equiv\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_1}(A_1H_2H_3)\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial\xi_2}(A_2H_3H_1)+\frac{\partial}{\partial\xi_3}(A_3H_1H_2)\Big]$$

$$=\frac{1}{H_1H_2H_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_i}A_i\right). \tag{7}$$

如果 $\boldsymbol{A}=\nabla u$，则由(5)式 $A_i=\frac{1}{H_i}\frac{\partial u}{\partial\xi_i}$，得拉氏算符作用于标量函数的表达式：

$$\nabla^2u\equiv\frac{1}{H_1H_2H_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_i^2}\frac{\partial u}{\partial\xi_i}\right). \tag{8}$$

例. 求球坐标和柱坐标系中标量函数的拉氏算符.

1. 球坐标 由(3)式和(8)式得

$$\nabla^2u\equiv\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}. \tag{9}$$

2. 柱坐标 由(4)式和(8)式得

$$\nabla^2u\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}. \tag{10}$$

其次看矢量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 的表达式. 按定义，

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_i=\lim_{\Sigma_i\to0}\frac{1}{\Sigma_i}\oint A_s\,ds,\quad i=1,2,3. \tag{11}$$

其中 $\Sigma_1=ds_2ds_3=H_2H_3d\xi_2d\xi_3$，等等；$s$ 是 Σ_i 的周界；A_s 是 $\boldsymbol{A}$ 沿周界线的切向分量，周界线的正方向与 Σ_i 的法线方向(沿 ds_i)成右手螺旋.

应用(11)式于图 62 中的面元 $adhe$，线积分之值为(沿 dh 和 he 的积分值用′表示)

$$\oint A_s\,ds=A_2ds_2+(A_3ds_3)'-(A_2ds_2)'-A_3ds_3$$

$$=(A_3H_3)'d\xi_3-A_3H_3d\xi_3+A_2H_2d\xi_2-(A_2H_2)'d\xi_2$$

$$=\frac{\partial}{\partial\xi_2}(A_3H_3)d\xi_2d\xi_3-\frac{\partial}{\partial\xi_3}(A_2H_2)d\xi_2d\xi_3.$$

因此，

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_1=\frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial(H_3A_3)}{\partial\xi_2}-\frac{\partial(H_2A_2)}{\partial\xi_3}\right]. \tag{12}$$

其他分量可以类似地求得，或者从(12)式对 1,2,3 作置换而求得.

利用(5),(7),(12)，即可由(1)式得到拉氏算符作用于矢量函数的表达式. 下面给出球坐标和柱坐标中$\nabla^2\boldsymbol{A}$的表达式.

1. 球坐标

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}; \tag{13}$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_r=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right], \tag{14}$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_\theta=\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right], \tag{15}$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_\varphi=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]; \tag{16}$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{A})_r=\nabla^2A_r-\frac{2}{r^2}A_r-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}, \tag{17}$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{A})_\theta=\nabla^2A_\theta-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}A_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}, \tag{18}$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{A})_\varphi=\nabla^2A_\varphi-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}A_\varphi+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}. \tag{19}$$

2. 柱坐标

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}; \tag{20}$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_r=\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \tag{21}$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_\varphi=\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r},\tag{22}$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_z=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)-\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right];\tag{23}$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{A})_r=\nabla^2A_r-\frac{1}{r^2}A_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi},\tag{24}$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{A})_\varphi=\nabla^2A_\varphi-\frac{1}{r^2}A_\varphi+\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi},\tag{25}$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{A})_z=\nabla^2A_z.\tag{26}$$

对于一般的正交曲面坐标系，在应用(5)(梯度)，(7)(散度)，(8)(标量函数的拉氏算符)，(12)(旋度) 等公式时，首先要求出 $H_i(i=1,2,3)$. 在较简单的情形中，例如上面的球坐标和柱坐标，从弧元的几何关系，立刻可以看出 H_i是什么样的函数. 对于较复杂的情形，须从坐标变换的关系式算出 H_i；结果是

$$H_i^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\xi_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\xi_i}\right)^2,\quad i=1,2,3.\tag{27}$$

这公式的推导如下：由 H_i的定义有

$$ds^2=ds_1^2+ds_2^2+ds_3^2=\sum H_i^2d\xi_i^2=dx^2+dy^2+dz^2.\tag{28}$$

设坐标变换的关系式是

$$x=x(\xi_1,\xi_2,\xi_3),\quad y=y(\xi_1,\xi_2,\xi_3),\quad z=z(\xi_1,\xi_2,\xi_3),\tag{29}$$

则

$$dx=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi_i}\right)d\xi_i,$$

$$dx^2=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi_i}\right)^2d\xi_i^2+\sum_{i\neq j}\frac{\partial x}{\partial\xi_i}\frac{\partial x}{\partial\xi_j}d\xi_id\xi_j.$$

把关于 dy^2和 dz^2的类似结果加起来，得

$$ds^2=\sum_{i=1}^{3}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\xi_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\xi_i}\right)^2\right\}d\xi_i^2$$
$$+\sum_{i\neq j}\left\{\frac{\partial x}{\partial\xi_i}\frac{\partial x}{\partial\xi_j}+\frac{\partial y}{\partial\xi_i}\frac{\partial y}{\partial\xi_j}+\frac{\partial z}{\partial\xi_i}\frac{\partial z}{\partial\xi_j}\right\}d\xi_id\xi_j.\tag{30}$$

但$\frac{\partial x}{\partial \xi_i}$, $\frac{\partial y}{\partial \xi_i}$, $\frac{\partial z}{\partial \xi_i}$是坐标曲面 $\xi_i=$常数的法线在直角坐标中的方向数，故

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_i}\frac{\partial x}{\partial \xi_j}+\frac{\partial y}{\partial \xi_i}\frac{\partial y}{\partial \xi_j}+\frac{\partial z}{\partial \xi_i}\frac{\partial z}{\partial \xi_j}=0 \quad (i\neq j), \tag{31}$$

这是因为左方的表达式与 $\xi_i=$常数和 $\xi_j=$常数两个正交曲面的法线之间的夹角的余弦成正比．于是有

$$ds^2=\sum_{i=1}^{3}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \xi_i}\right)^2\right\}d\xi_i^2. \tag{32}$$

与(28)式比较即得(27)．

14.3 球坐标系和柱坐标系中方程 $\nabla^2u+\lambda u=0$ 的变数分离

方程

$$\nabla^2u+\lambda u=0, \tag{1}$$

称为**亥姆霍兹方程**，其中 λ 是常数．从波动方程 $v_{tt}-a^2\nabla^2v=0$ 或者热传导方程 $v_t-\kappa\nabla^2v=0$ 出发，设 $v(x,y,z,t)=u(x,y,z)T(t)$，把时间变数 t 分离出来，都导致方程(1)．拉普拉斯方程 $\nabla^2u=0$ 是方程(1)的一个特例($\lambda=0$)．

我们不来一般地讨论方程(1)在正交曲面坐标中分离变数的可能性问题①，而是具体地就最常用的球坐标和柱坐标的情形，说明分离变数的步骤和结果．

1．柱坐标 由上节(10)式有

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}+\lambda u=0. \tag{2}$$

设

$$u(r,\varphi,z)=R(r)\Phi(\varphi)Z(z), \tag{3}$$

① 关于这个问题可参看 P.M.Morse and H.Feshbach, Methods of Theoretical Physics, vol.I, p.508

代入(2),得

$$\frac{\Phi Z}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\frac{RZ}{r^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+R\Phi\frac{d^2Z}{dz^2}+\lambda R\Phi Z=0.$$

以 $u=R\Phi Z$ 除这式,得

$$\frac{1}{rR}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{r^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}+\lambda=0.$$

这式的头两项是 r 和 φ 的函数,第三项只是 z 的函数,但 r,φ,z 是独立变数,故要这式成立必须

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-\mu,$$

或

$$Z''+\mu Z=0, \tag{4}$$

其中 μ 是一个常数. 于是有

$$\frac{1}{rR}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{r^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+\lambda-\mu=0.$$

以 r^2 乘这式,即见第二项只是 φ 的函数,而剩下的项只与 r 有关,因此必须

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-m^2,$$

或

$$\Phi''+m^2\Phi=0, \tag{5}$$

其中 m^2 是常数. 余下关于 R 的方程是

$$\frac{1}{rR}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)-\frac{m^2}{r^2}+(\lambda-\mu)=0,$$

或

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)R=0, \tag{6}$$

其中 $k^2=\lambda-\mu$.

这样,就把解偏微分方程(1)的问题化为解三个常微分方程(4),(5),(6)的问题,三个常微分方程中都含有未定参数(分别为 μ,m^2,k^2),这些参数是在分离变数的过程中引进的. 与弦的振动问题一样,这些参数的取值(本征值)都由边界条件决定. 但需要

明确，我们把(分离变数时引进的)参数写成 m^2 和 k^2，并不能先验地认定这些参数为正数.

(4)和(5)都是简单的常系数微分方程，(6)则是变系数的. 若 $k\neq 0$，在(6)式中令 $kr=x$，即见这个方程就是 11.4 节(1)式的贝塞耳方程. 以后还要专门讨论这个方程的解——贝塞耳函数.

2. 球坐标 由上节(9)式有

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\lambda u=0. \tag{7}$$

设 $$u(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi).$$

代入(7)，仿照上面柱坐标的情形去讨论，得三个常微分方程：

$$\Phi''+m^2\Phi=0, \tag{8}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left(\mu-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0, \tag{9}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left(k^2-\frac{\mu}{r^2}\right)R=0, \tag{10}$$

其中 $k^2=\lambda$. 与前一样，这些方程中所含的参数 m^2，μ 等，是在分离变数过程中引进的，都要由边界条件来决定其取值. 我们不应当认定 m^2 和 μ 一定是正数.

方程(9)和(10)都是变系数的. 在方程(9)中令 $\cos\theta=x$，并令 $\Theta(\theta)=y(x)$，得

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\left(\mu-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0, \tag{11}$$

其中的系数现在都是代数函数，便于应用第十一章中介绍的求解方法. 方程(11)称为**连带勒让德方程**；以前讨论过的勒让德方程[11.2 节(4)式]是(11)的特例($m=0$). 以后还要专门讨论这个方程的解(第十六章).

方程(10)是贝塞耳方程的变型. 把 μ 写为 $l(l+1)$，令 $kr=$

x(若 $k\neq 0$)，并作变换 $R(r)=x^{-\frac{1}{2}}y(x)$，即见 $y(x)$满足贝塞耳方程[11.4 节(1)式]

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left[1-\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{x^2}\right]y=0. \tag{12}$$

故方程(10)常称为**球贝塞耳方程**，它的解称为**球贝塞耳函数**(参看 17.15 节).

14.4 圆内的狄里希累(Dirichlet)问题

作为在正交曲面坐标系中解边值问题的例子，我们讨论二维拉氏方程在圆形区域内的狄里希累问题，即第一边值问题：

$$\nabla^2 u=0, 0\leqslant r<a, \tag{1}$$

$$u|_{r=a}=f(s), \tag{2}$$

其中 s 表示圆周 $r=a$ 上的变点，$f(s)$是圆周上给定的函数. 问题是求在圆内连续的解 u，并要求 u 在边界上除了 $f(s)$的间断点之外连续地趋于 $f(s)$.

考虑到边界的形状，我们采用平面极坐标系(r,φ)，并将坐标原点置于圆心. 用上节(2)式($\lambda=0$，u 与 z 无关)，方程(1)成为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0, \tag{3}$$

边界条件(2)中的变数 s 可取为 φ.

设

$$u(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi), \tag{4}$$

代入(3)，照上节的标准步骤分离变数，得到两个常微分方程：

$$\Phi''+m^2\Phi=0, \quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi; \tag{5}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)-\frac{m^2}{r^2}R=0, \quad 0\leqslant r<a. \tag{6}$$

至于边界条件，由于是非齐次的，变数不能分离. 那末，根据什么来确定分离变数时引进的参数 m^2呢？

在一般的物理问题中，函数 $u(r,\varphi)$ 是单值的，因此应有

$$u(r,\varphi+2\pi)=u(r,\varphi),$$

而对于特解(4)有

$$R(r)\Phi(\varphi+2\pi)=R(r)\Phi(\varphi),$$

即

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi). \tag{7}$$

这就给方程(5)提出了定解条件．(7)式常称为周期条件，也是一种边界条件．

当 $m\neq0$ 时，方程(5)的两个线性无关解是 $\sin m\varphi$ 和 $\cos m\varphi$①．要满足条件(7)，即要求 Φ 是以 2π 为周期的函数，m 必须是整数：$m=\pm1,\pm2,\cdots$．当 $m=0$ 时，方程(5)的通解是 $A\varphi+B$，A 和 B 是任意常数．由条件(7)立刻得 $A=0$．因此，总起来说，满足方程(5)和周期条件(7)的解为

$$\Phi_m(\varphi)=C_m\cos m\varphi+D_m\sin m\varphi,\quad m=0,1,2,\cdots. \tag{8}$$

$m^2=0,1,4,\cdots$（或 $m=0,1,2,\cdots$）是这问题的本征值．常数 1 是与 $m=0$ 相应的本征函数；$\cos m\varphi$ 和 $\sin m\varphi$ 是与本征值 $m(\geqslant1)$ 相应的本征函数．故在 $m\neq0$ 的情形下，对应于一个本征值有两个线性无关的本征函数，这两个本征函数也常用 $e^{\pm im\varphi}$ 来表示．

m^2 之值确定后，就可以求方程(6)的解．方程(6)展开之后成为

$$R''+\frac{1}{r}R'-\frac{m^2}{r^2}R=0$$

或

$$r^2R''+rR'-m^2R=0. \tag{9}$$

这是一个欧勒型方程[$R^{(n)}$的系数是 r 的 n 次方，参看 11.8 节(2)式]，可以通过简单的自变数变换 $t=\ln r$ 化为常系数微分方程：

$$\frac{dR}{dr}=\frac{dR}{dt}\frac{dt}{dr}=\frac{1}{r}\frac{dR}{dt},\quad \frac{d^2R}{dr^2}=\frac{1}{r^2}\frac{d^2R}{dt^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dR}{dt},$$

代入(9)，得

① 也可以用通解来讨论．

$$\frac{d^2R}{dt^2}-m^2R=0.$$

当m是整数时，这个方程的解是

$$R_0=A_0+B_0t=A_0+B_0\ln r \quad (m=0),$$
$$R_m=A_me^{mt}+B_me^{-mt}=A_mr^m+B_mr^{-m} \quad (m\geqslant 1).$$

在$r=0$处，$\ln r$和$r^{-m}(m\geqslant 1)$都是无穷大，不符合解在圆内连续的要求，故只能取有界解

$$R_m(r)=A_mr^m \quad (m=0,1,2,\cdots). \tag{10}$$

限于取有界解的条件称为**有界条件**；对方程(6)[或(9)]来说，这也是一种边界条件(在$r=0$的一端).

要使得解满足在$r=a$处的边界条件(2)，一般需要把既满足周期条件(即单值条件)又满足有界条件的全部特解叠加起来：

$$u(r,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}R_m\Phi_m=\frac{C_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}r^m(C_m\cos m\varphi+D_m\sin m\varphi). \tag{11}$$

这里，我们把(10)式中的系数A_m并到C_m和D_m中去了，并且，为了下面的方便，把C_0改为$\frac{C_0}{2}$.

根据条件(2)应有

$$u(a,\varphi)=f(\varphi)=\frac{C_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a^m(C_m\cos m\varphi+D_m\sin m\varphi).$$

如果$f(\varphi)$能够展成傅氏级数：

$$f(\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_m\cos m\varphi+\beta_m\sin m\varphi), \tag{12}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\alpha_m&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi)\cos m\xi d\xi,\\ \beta_m&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi)\sin m\xi d\xi,\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

则应有 $$C_m a^m=\alpha_m,\ D_m a^m=\beta_m.$$

代入(11),得

$$u(r,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^m(\alpha_m\cos m\varphi+\beta_m\sin m\varphi).\tag{14}$$

现在来看,在什么条件下,这样得到的形式解确实满足方程(1)和边界条件(2). 首先我们证明,如果$|f(\varphi)|$有界,则当$\frac{r}{a}<1$时(即在圆内),(14)的级数可以逐项求偏导数任意多次. 对φ求偏导数k次的结果是

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^m m^k\left[\alpha_m\cos\left(m\varphi+\frac{k\pi}{2}\right)+\beta_m\sin\left(m\varphi+\frac{k\pi}{2}\right)\right].\tag{15}$$

如果$|f(\varphi)|$有界,上界为M,由(13)得

$$|\alpha_m|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(\xi)|d\xi\leqslant 2M.$$

同样,$|\beta_m|\leqslant 2M$. 级数(15)中的普遍项$u_m(r,\varphi)$满足不等式

$$|u_m|\leqslant t^m m^k(|\alpha_m|+|\beta_m|)\leqslant 4Mt^m m^k,\quad t=r/a.$$

当$t<1$时,级数$\sum_{m=1}^{\infty}t^m m^k$是收敛的,这可以用比值检验法[5.1节]证明. 因此,级数(15)在$t=\frac{r}{a}\leqslant\rho<1$时一致收敛,而对$\varphi$逐项求导数是合法的.

类似地可以证明逐项对r求任何次导数也是合法的. 已知

$u_m(r,\varphi)$满足方程(1)，故(14)式表示的$u(r,\varphi)$确满足方程(1)．

其次，如果$f(\varphi)$连续，并有分段连续的一阶导数，则$\alpha_m\sim\frac{1}{m^2}$，$\beta_m\sim\frac{1}{m^2}$[参看13.1节与(17)式有关的足注]，而$\sum(|\alpha_m|+|\beta_m|)$是收敛的．因此，在这条件下，(14)式的级数在闭圆$r\leqslant a$中一致收敛，而代表一个连续函数；当$r\to a$时，$u(r,\varphi)$连续地趋于$f(\varphi)$．

关于$f(\varphi)$不连续的情形，读者可参看，例如，吉洪诺夫，数学物理方程，第四章§3.2，§3.3．在讨论中需要求出(14)式右方的级数和，并表成积分的形式(见下面的练习题)．

练习题．把(13)式代入(14)式右方，证明当$r<a$时，

$$u(r,\varphi)=\frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\xi)d\xi}{r^2+a^2-2a\cos(\xi-\varphi)}\,. \tag{16}$$

(这个公式称为**泊松积分公式**，它把拉氏方程在圆内第一边值问题的解表为边值$f(\varphi)$的积分．在解析函数论中曾经看到，一个解析函数也可以类似地表示[4.5节，科希积分公式]．事实上，由于解析函数与二维调和函数[2.4节]之间的关系，公式(16)也可以从科希公式导出．)

第十五章　常微分方程的本征值问题

15.1　二阶线性常微分方程的本征值问题

从前面看到，用分离变数法解边值问题时，必然导致本征值问题，即在一定的齐次边界条件下，求一个含参数的齐次常微分方程的非零解的问题.

我们不准备全面地论述这问题，而是只对于其中的一些基本概念和定理作简单的介绍①.

考虑下列二阶线性常微分方程：

$$L[y]\equiv p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=ly, \tag{1}$$

其中 $p_0(x)$，$p_1(x)$和 $p_2(x)$是在区间$[a,b]$中给定的实函数，l 是参数.

方程(1)的本征值问题是，在一定的齐次边界条件下，求这方程的非零解(本征函数)及相应的 l 值(本征值). 为此，需要区别两种情形.

1. 非奇异情形：(i)区间$[a,b]$是有界的，即$-\infty<a<b<\infty$；(ii)系数 $p_0(x)$，$p_1(x)$，$p_2(x)$ 在 $[a,b]$中连续，而且 $p_0(x)\neq 0$ [$p_0(x)$的零点一般是方程(1)的奇点，见 11.1 节].

2. 奇异情形：区间是无界的(a和b，或其中之一，为无穷大)，或者 $p_0(x)$在$[a,b]$中有零点($p_1(x)$和 $p_2(x)$仍假设是连续的). 这种情形的主要特点之一是方程的解一般具有奇异性[见 11.3 节].

在本章中只讨论非奇异的情形；奇异情形将在以后遇到的具

① 读者如果需要在这问题上进一步钻研，可参考 E. A. Coddington and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, ch. 7～9.

体问题中去处理[参看 16.3 节和 16.4 节].

在非奇异情形中,常见的边界条件是 $y(x)$和 $y'(x)$的边值(即在端点 a,b 两处之值)的线性齐次关系. 例如,前面 12.6 节中的第一、二、三类齐次边界条件可以统一地写成下列线性齐次关系:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 y'(a)+\alpha_2 y(a)=0,\\ \beta_1 y'(b)+\beta_2 y(b)=0,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 是实数,α_1 和 α_2 不同时为零,β_1 和 β_2 不同时为零(这常表示为 $\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0,\beta_1^2+\beta_2^2\neq 0$).

又例如 14.4 节中的周期条件也是一种线性齐次关系:

$$y(b)=y(a),\quad y'(b)=y'(a) \tag{3}$$

在叙述有关本征值问题的几个重要定理之前,有必要先引进"自伴本征值问题"的概念.

如果方程(1)中的算符 L 具有这样的性质:对于任意两个在区间$[a,b]$中有连续二阶导数并满足一定边界条件的函数 $u(x)$和 $v(x)$,有

$$\int_a^b \bar{u}L[v]dx=\int_a^b v\overline{L[u]}dx \tag{4}$$

(其中上面一横表示复数共轭),则相应的本征值问题称为自伴的.

应当注意,自伴性不仅与算符有关,而且还依赖于边界条件. 例如算符$\frac{d^2}{dx^2}$在条件(3)之下的本征值问题是自伴的,因为

$$\begin{aligned}\int_a^b \bar{u}\frac{d^2v}{dx^2}dx&=\left(\bar{u}\frac{dv}{dx}-v\frac{d\bar{u}}{dx}\right)\Big|_{x=a}^{x=b}+\int_a^b v\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}dx\\&=\int_a^b v\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}dx.\end{aligned}$$

但如果边界条件改为$y(a)=y(b),y'(a)=2y'(b)$,则相应本征值问题就不是自伴的了,因为这时$(\bar{u}v'-v\bar{u}')\Big|_{x=a}^{x=b}\neq 0$.

现在来阐述有关非奇异自伴本征值问题的基本定理.

定理 1 自伴问题的本征值必是实数,其全体构成一**可数集**,即本征值是分立的(**分立谱**).

定理 2 对应于不同本征值的本征函数两两正交.

说两个函数 $f(x)$和 $g(x)$正交,意思是

$$\int_a^b \overline{f(x)}\ g(x)dx=0. \tag{5}$$

定理 3 任何一个在区间$[a,b]$中有连续二阶导数,并满足本征值问题的边界条件的函数 $f(x)$,可以依全体本征函数 $\varphi_n(x)$展开为一个绝对而且一致收敛的级数——**广义傅氏级数**:

$$f(x)=\sum_n c_n\varphi_n(x), \tag{6}$$

其中

$$c_n=\frac{\int_a^b \overline{\varphi_n(x)}\ f(x)dx}{\int_a^b |\varphi_n(x)|^2dx}, \tag{7}$$

称为**广义傅氏系数**.

事实上只要 $f(x)$在$[a,b]$ 中平方可积,就能按公式(6)展开,不过其中的级数一般只是平均收敛于 $f(x)$[参看 15.3 节].

这里我们没有考虑本征值和本征函数的存在问题. 可以证明自伴问题的本征值和本征函数必存在(参看前面所引 E. A. Coddington 等的书).

定理 1 的证明如下:

(i) 本征值是实数. 设 λ 为本征值, $\varphi(x)$为相应本征函数,即 φ 满足方程 $L[\varphi]=\lambda\varphi$ 和边界条件. 令 $\bar{\lambda}$ 和 $\overline{\varphi(x)}$ 分别表示 λ 和 $\varphi(x)$的复数共轭,则有 $\overline{L[\varphi]}=\bar{\lambda}\bar{\varphi}$. 于是,按自伴关系(4)得①

① 对于第一、二、三类边界条件和周期条件, $\bar{\varphi}$ 显然也满足边界条件.

$$\int_a^b \bar{\varphi} L[\varphi]dx - \int_a^b \varphi\overline{L[\varphi]}dx$$
$$= (\lambda - \bar{\lambda})\int_a^b |\varphi|^2 dx = 0,$$

但 $\int_a^b |\varphi|^2 dx \neq 0$(除非 $\varphi \equiv 0$)，故 $\lambda - \bar{\lambda} = 0$，即 $\lambda = \bar{\lambda}$，而 λ 为实数.

从上面的证明可以看出，当 L 是实算符时，φ 和 $\bar{\varphi}$ 都是本征函数，并且对应于同一个本征值 λ. 这可能出现两种情形. 一是 φ 和 $\bar{\varphi}$ 线性无关，这样对应于同一个本征值，就存在两个本征函数. 对于这种情形，后面还要讨论. 另一种可能是 φ 和 $\bar{\varphi}$ 线性相关，这说明除了一个可能的复数因子外，φ 和 $\bar{\varphi}$ 实际上是同一个实函数. 在这种情况下，我们不妨就把本征函数取为实函数.

(ii) 本征值是分立的. 设 $y_1(x,l)$ 和 $y_2(x,l)$ 是方程(1)($L[y]=ly$)的任意两个线性无关解，则这方程的通解是

$$y(x,l) = c_1 y_1(x,l) + c_2 y_2(x,l). \tag{8}$$

当 l 为本征值 λ 时，$y(x,\lambda)$ 应满足边界条件，例如(2). 于是有决定系数 c_1 和 c_2 的联立方程

$$\left.\begin{aligned} &[\alpha_1 y_1'(a,\lambda) + \alpha_2 y_1(a,\lambda)]c_1 \\ &+[\alpha_1 y_2'(a,\lambda) + \alpha_2 y_2(a,\lambda)]c_2 = 0, \\ &[\beta_1 y_1'(b,\lambda) + \beta_2 y_1(b,\lambda)]c_1 \\ &+[\beta_1 y_2'(b,\lambda) + \beta_2 y_2(b,\lambda)]c_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中 $'$ 代表对 x 求导数. c_1 和 c_2 不能同时为零，否则将有 $y(x,\ \lambda)\equiv 0$，因此必须

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1 y_1'(a,\lambda) + \alpha_2 y_1(a,\lambda) & \alpha_1 y_2'(a,\lambda) + \alpha_2 y_2(a,\lambda) \\ \beta_1 y_1'(b,\lambda) + \beta_2 y_1(b,\lambda) & \beta_1 y_2'(b,\lambda) + \beta_2 y_2(b,\lambda) \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

这是确定本征值 λ 的方程；换言之，本征值 λ 是函数 $\Delta(l)$ 的零点. 因此问题是这些零点如何分布.

按微分方程的理论，对于固定的 x 值，$y_1(x,l)$和 $y_2(x,l)$都是 l 的整函数，即在全 l 平面上解析的函数. 因此 $\Delta(l)$ 是 l 的整函数. 已经证明 $\Delta(l)$的零点都是实数，故 $\Delta(l)$只有在实轴上才可能等于零. 因此 $\Delta(l)\not\equiv 0$，而在有限处 $\Delta(l)$只能有有限个零点(否则 $\Delta(l)\equiv 0$)，即本征值是分立的.

注意，在上面(ii)的证明中同时在原则上给出了求本征值和本征函数的普遍方法：从方程 $L[y]=ly$ 的任意两个线性无关解出发，把它们的线性组合(8)代入(齐次的)边界条件中，得到关于组合系数 c_1 和 c_2的联立方程(齐次的)，例如(9). 从这方程组有非零解(c_1,c_2)的条件为相应行列式为零，得到确定本征值的函数方程，例如(10). 求出本征值后，即可解出c_1,c_2 之值(实际上得到的是两者的比值)，从而得到本征函数，其中含一任意常数因子.

练习题. 试根据上述步骤，求在 $x=\pm l$ 两端固定的弦的横振动问题的本征值和本征函数.

定理 2 的证明如下：设 $\varphi_m(x)$和 $\varphi_n(x)$是分别对应于两个不同本征值 λ_m 和 λ_n 的本征函数. 由自伴关系(4)，注意本征值是实数，有

$$\int_a^b \overline{\varphi}_m L[\varphi_n]dx-\int_a^b \varphi_n\overline{L[\varphi_m]}dx$$

$$=(\lambda_n-\lambda_m)\int_a^b \overline{\varphi}_m\varphi_n dx=0.$$

既然 $\lambda_m\neq\lambda_n$，则必有

$$\int_a^b \overline{\varphi}_m\varphi_n d\dot{x}=0,$$

即 $\varphi_m(x)$和 $\varphi_n(x)$是正交的[见(5)式].

定理 3 的证明从略.

简并问题* 最后，我们来讨论一下简并的问题，即对应于同一本征值是否能够有两个线性无关的本征函数的问题.

比较弦的振动问题[13.1节]和圆内狄氏问题[14.4节]，就会

发现，同是方程 $X''+\lambda X=0$，在第一边界条件下，对应于一个本征值只有一个本征函数，而在周期条件下，对应于一个本征值却有两个线性无关的本征函数．事实上可以普遍证明，对于第一、二、三类边界条件的常微分方程本征值问题，对应于一个本征值只能有一个本征函数(容许差一常数因子)．证明如下．

如果对应于一个本征值有两个线性无关的本征函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$，可取为方程的基本解．于是，满足任意初值条件[例如 $y(a)=A, y'(a)=B$]的解 $y(x)$ 可以表为

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x).$$

$y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 既然满足同样的线性齐次边界条件

$$\alpha_1y_i'(a)+\alpha_2y_i(a)=0,\quad i=1,2,$$

则 $y(x)$ 也应满足这条件．但这表示 $y(a)$ 与 $y'(a)$ 之间存在一个线性关系，而与所设 $y(a)$ 和 $y'(a)$ 可取任意初值矛盾．

对于周期条件，上述矛盾不会发生，因为由周期条件关联的不是在同一点的函数值．

对应于一个本征值有不止一个线性无关的本征函数的情形称为**简并情形**．在二阶常微分方程的情形下，对应于一个本征值自然最多只能有两个线性无关的本征函数．但对于偏微分方程，即使是二阶的，也可以有较高的简并度，即对应于一个本征值可以有两个以上线性无关的本征函数[参看 16.13 节(6)式以后]．

根据定理 2 知道属于不同本征值的本征函数是正交的．在简并情形下，对应于同一本征值的两线性无关的本征函数是否也正交呢？在 14.4 节的例子中，对应于同一本征值 $\lambda=m^2$ 的两线性无关本征函数 $\cos mx$ 和 $\sin mx$ 在区间 $[0,2\pi]$ 中确是正交的．但 $\cos mx$ 和 e^{imx} 也是这个本征值的两个线性无关本征函数，它们就不正交．可见一般说来，属于同一本征值的两个本征函数，即使是互相线性无关的，也不一定正交．不过，总可以取这两个函数的线性组合(仍为属于同一本征值的本征函数)，使其正交．例如 $y_1(x)$

和 $y_2(x)$是对应于同一本征值的两个线性无关的本征函数，相互不正交．取

$$y_2^*(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x),$$

则 $\int_a^b\overline{y_1(x)}\,y_2^*(x)dx=\int_a^b\overline{y_1(x)}[c_1y_1(x)+c_2y_2(x)]dx$

$$=c_1\int_a^b|y_1(x)|^2dx+c_2\int_a^b\overline{y_1(x)}y_2(x)dx.$$

可见只要选取 c_1 和 c_2 使

$$\frac{c_1}{c_2}=-\frac{\int_a^b\bar{y}_1y_2dx}{\int_a^b|y_1|^2dx},$$

$y_2^*(x)$和 $y_1(x)$就是正交的，而且属于同一本征值．

15.2 斯特姆-刘维(Sturm-Liouville)型方程的本征值问题

在正交曲面坐标系中分离变数得到的方程[见上一章]可以概括地写成下列形式：

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+[\lambda\rho(x)-q(x)]y=0, \tag{1}$$

其中 λ 是一个参数．这种方程称为**斯特姆-刘维型方程**，以后简称斯-刘型方程．

例如，14.3节(6)式贝塞耳方程

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\left(k^2r-\frac{m^2}{r}\right)R=0, \tag{2}$$

$p=r,\lambda=k^2,\rho=r,q=\frac{m^2}{r}$；14.3节(10)式球贝塞耳方程

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+(k^2r^2-\mu)R=0, \tag{3}$$

$p=r^2,\lambda=k^2,\rho=r^2,q=\mu$；14.3节(9)式连带勒让德方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left(\mu-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0, \tag{4}$$

$p=\sin\theta,\rho=\sin\theta,q=\dfrac{m^2}{\sin\theta}$.

方程(4)可以通过自变数的变换 $\cos\theta=x$ 化为

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\left(\mu-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0, \tag{5}$$

$p=1-x^2,\rho=1,q=\dfrac{m^2}{(1-x^2)}$.

练习题. 证明,任何一个二阶线性常微分方程 $p_0y''+p_1y'+p_2y=ly$ 总可以化为斯-刘型方程.

提示: 以 $\xi(x)$乘方程两边,然后与(1)式$-(py''+p'y'-qy)=\lambda\rho y$ 比较.

把(1)式中的 λ 换为 l,有

$$L[y]\equiv-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)y=l\rho(x)y. \tag{6}$$

这个方程与上节普遍方程(1)只在右方差一因子 $\rho(x)$. 但这一差别并不引起多大问题,因为如果令 $u(x)=\sqrt{\rho(x)}\,y(x)$, 即得

$$-\frac{d}{dx}\left[p^*(x)\frac{du}{dx}\right]+q^*(x)u=lu, \tag{7}$$

其中

$$p^*(x)=\frac{p(x)}{\rho(x)},$$

$$q^*(x)=-\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right]+\frac{q(x)}{\rho(x)}. \tag{8}$$

因此,上节的结果,只要稍加修改,就可以应用于斯-刘型方程的本征值问题. 为此,先证明斯-刘型方程在齐次的第一、二、三类边界条件或者周期条件下的本征值问题是自伴的.

仍考虑非奇异情形. 设 $p(x),p'(x),q(x)$和 $\rho(x)$ 是有界区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 中的实连续函数,而且 $p(x)$和 $\rho(x)$都不等于零. 先看第一、二、三类边界条件

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1y'(a)+\alpha_2y(a)&=0,\\ \beta_1y'(b)+\beta_2y(b)&=0,\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 都是实数,$\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq0,\beta_1^2+\beta_2^2\neq0$.

设 $u(x)$和 $v(x)$是任意两个满足条件(9)的函数,则

$$\begin{aligned}&\int_a^b\bar{u}L[v]dx-\int_a^b v\ \overline{L[u]}\,dx\\ &=\int_a^b\bar{u}\left[-\frac{d}{dx}(pv')+qv\right]dx-\int_a^b v\left[-\frac{d}{dx}(p\bar{u}')+q\bar{u}\right]dx\\ &=\int_a^b\left[v\frac{d}{dx}(p\bar{u}')-\bar{u}\frac{d}{dx}(pv')\right]dx\\ &=[p(x)(\bar{u}'v-\bar{u}v')]_{x=a}^{x=b}.\end{aligned}\tag{10}$$

因 u 和 v 都满足条件(9),故由其中的第一个条件得

$$\alpha_1\bar{u}'(a)+\alpha_2\bar{u}(a)=0,$$
$$\alpha_1v'(a)+\alpha_2v(a)=0.$$

按所设,α_1 和 α_2 不同时为零,故必有

$$(\bar{u}'v-\bar{u}v')|_{x=a}=0.$$

同样有

$$(\bar{u}'v-\bar{u}v')|_{x=b}=0.$$

代入(10),得

$$\int_a^b\bar{u}L[v]dx=\int_a^b v\ \overline{L[u]}\,dx.$$

这证明问题是自伴的.

对于周期条件

$$y(a)=y(b),\quad y'(a)=y'(b),$$

只要 $p(a)=p(b)$，也很容易从(10)式证明问题是自伴的.

于是，对于斯-刘型方程在第一、二、三类边界条件或者周期条件下的本征值问题，可以应用上节的定理，只要修改正交性的定义和求展开系数的公式.

设 $\varphi_m(x)$和 $\varphi_n(x)$是分属于不同本征值 λ_m 和 λ_n 的本征函数则由自伴关系得

$$\int_a^b \bar{\varphi}_m L[\varphi_n]dx - \int_a^b \varphi_n \overline{L[\varphi_m]}dx$$
$$=(\lambda_n-\lambda_m)\int_a^b \bar{\varphi}_m\varphi_n\rho(x)dx=0.$$

因 $\lambda_m\neq\lambda_n$，故

$$\int_a^b \bar{\varphi}_m(x)\varphi_n(x)\rho(x)dx=0 \quad (m\neq n). \tag{11}$$

这是斯-刘型方程的本征函数的正交关系，其中出现的函数 $\rho(x)$ 称为**权因子**.

相应地，上节定理 3 的展开系数也要改变. 设 $f(x)$ 是在[a, b]中有连续二阶导数的函数，则有

$$f(x)=\sum_n c_n\varphi_n(x), \tag{12}$$

其中的级数在[a,b]中一致收敛. 两边乘上 $\bar{\varphi}_m(x)\rho(x)$，求积分，应用(11)式，得

$$c_m=\frac{\int_a^b \bar{\varphi}_m(x)f(x)\rho(x)dx}{\int_a^b|\varphi_m(x)|^2\rho(x)dx}. \tag{13}$$

15.3* 用正交函数组展开

设有一组在区间[a,b]中连续的函数$\{\varphi_n(x)\}$，$n=1,2,\cdots$. 若 $\varphi_n(x)$满足

$$(\varphi_m,\varphi_n)=\int_a^b \bar{\varphi}_m\varphi_n\rho(x)\,dx=\delta_{mn}=\begin{cases}0, m\neq n,\\ 1, m=n,\end{cases} \quad (1)$$

其中 $\bar{\varphi}$ 是 φ 的复数共轭，$\rho(x)>0$，则函数组 $\{\varphi_n(x)\}$ 称为是正交归一的. $\rho(x)$ 称为**权**；(φ_m,φ_n) 称为两函数的**内积**，内积为零的两函数称为互相正交.

正交归一函数组的一个重要例子是 $\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots,0\leqslant x\leqslant 2\pi$：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-imx}e^{inx}dx=\delta_{mn}. \quad (2)$$

这里 $\rho(x)=1$.

以某一正交归一函数组为基，把一个给定的函数表示为这些函数的线性组合，称为用正交函数组展开或广义傅氏展开. 通常的傅氏展开是这种展开的一个特例，基函数是 $\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$，或者是

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ n=1,2,\cdots.$$

设 $f(x)$ 为在区间 $[a,b]$ 中给定的连续函数. 以正交归一函数组的线性组合

$$f_k(x)=\sum_{n=1}^{k} c_n\varphi_n(x) \quad (3)$$

作为 $f(x)$ 的近似时，令

$$d_k(x)=f(x)-f_k(x) \quad (4)$$

表示其误差，则平均平方误差为

$$(d_k,d_k)=\int_a^b |d_k|^2\rho(x)dx. \quad (5)$$

现在证明，要平均平方误差最小，必须选择(3)式中的系数 c_n 为

$$c_n=(\varphi_n,f). \tag{6}$$

证法如下：

$$\begin{aligned}(d_k,d_k)&=(f-f_k,f-f_k)\\&=(f,f)+(f_k,f_k)-(f,f_k)-(f_k,f)\\&=(f,f)+\sum_{n=1}^{k}|c_n|^2-\sum_{n=1}^{k}(f,\varphi_n)c_n\\&\quad-\sum_{n=1}^{k}(\varphi_n,f)\bar{c}_n\\&=(f,f)-\sum_{n=1}^{k}|(\varphi_n,f)|^2+\sum_{n=1}^{k}|c_n-(\varphi_n,f)|^2. \end{aligned}\tag{7}$$

当 c_n 改变时，只有最后一个和数中的各项会改变，但这些项永远不会小于零，故使这和数为最小的 c_n 必须是使得其中的每一项都等于零，而这就是(6)式.

由(6)式规定的 c_n 称为 $f(x)$ 对函数组 $\{\varphi_n(x)\}$ 的**广义傅氏系数**. 把(6)式代入(7)式，注意 $(d_k,d_k)\geqslant 0$，得

$$\sum_{n=1}^{k}|c_n|^2\leqslant(f,f)\quad(k\text{ 任意}). \tag{8}$$

这关系称为**贝塞耳(Bessel)不等式**. 从这不等式可以看到，由 $f(x)$ 的广义傅氏系数构成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$ 是收敛的，因为 (f,f) 是有限值.

如果当 $k\to\infty$ 时，$(d_k,d_k)\to 0$，即

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b\left|f-\sum_{n=1}^{k}c_n\varphi_n(x)\right|^2\rho(x)dx=0, \tag{9}$$

其中 $c_n=(\varphi_n,f)$，则说 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n$ **平均收敛**于 $f(x)$. 在这种情形下，由(7)得

$$\sum_n |c_n|^2=(f,f),\quad c_n=(\varphi_n,f). \tag{10}$$

这式称为**帕色伐**(Parseval)**等式**,**或完备关系**.

如果对于任何连续函数 $f(x)$,$a\leqslant x\leqslant b$,(10) 式所表示的关系都满足,则称$\{\varphi_n(x)\}$为连续函数空间中的完备函数组. 例如,按照傅氏级数理论,前面提到的$\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 就是一个完备函数组.

注意,级数$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n(x)$平均收敛于 $f(x)$并不意味这级数和存在而且等于 $f(x)$. 但是,如果这级数在 $a\leqslant x\leqslant b$ 中一致收敛,则(9)式中的极限可以取在积分号下,而有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n(x),\quad c_n=(\varphi_n,f). \tag{11}$$

第十六章　特殊函数及其应用(一)·勒让德函数

勒让德(Legendre)函数是勒让德方程

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\mu y=0 \qquad (1)$$

的解，它是在数学物理中应用最广的特殊函数之一．在14.3节中我们是从在球坐标系中用分离变数法解方程$\nabla^2u+\lambda u=0$而得到方程(1)的[14.3节(11)，$m=0$]．

在本书里将着重讨论(1)式中的参数$\mu=l(l+1)$的情形，其中$l=0,1,2,\cdots$．关于普遍情形，可参看，例如，王竹溪等，特殊函数概论，第五章．

16.1　勒让德方程的本征值问题·有界条件·勒让德多项式

勒让德方程是斯-刘型方程[15.2节]：

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\mu y=0, \qquad (1)$$

μ是参数．在很多边值问题中$x=\cos\theta$，而$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，故常在区间$-1\leqslant x\leqslant1$中讨论方程(1)的解．在$x=\pm1$这两点，方程(1)是奇异的[11.1节和15.1节]，它的解在这两点一般也具有奇异性(见下)．但根据问题的物理性质，常常需要方程(1)在整个闭区间$-1\leqslant x\leqslant1$中具有有界的解，这就构成了一个(奇异的)．本征值问题下面将证明，当而且只有当参数$\mu=l(l+1)$(本征值)，$l=0,1,2,\cdots$时，方程(1)才有在$-1\leqslant x\leqslant1$中有界的解(本征函数)．这些本征函数的全体是区间$-1\leqslant x\leqslant1$中的一个正交完备函数组．

在11.2节的例子中，我们曾经用级数解法求得方程(1)的解为

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k, \tag{2}$$

其中 c_k 满足递推关系

$$c_{k+2}=\frac{k(k+1)-\mu}{(k+2)(k+1)}c_k, \tag{3}$$

c_0 和 c_1 是任意常数. 因此，方程(1)的通解可写为

$$y(x)=y_1(x)+y_2(x),$$

其中

$$y_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k}x^{2k}, \tag{4}$$

$$y_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k+1}x^{2k+1}. \tag{5}$$

利用关系(3)和 5.3 节公式(3)立刻得知(4)，(5)两式中的级数的收敛半径都等于1. 下面来研究这两个级数在 $x\to\pm1$ 时的收敛性.

由(3)式有

$$\begin{aligned}
c_\nu &=\frac{(\nu-2)(\nu-1)-\mu}{\nu(\nu-1)}c_{\nu-2}\\
&=\frac{1}{\nu}\left[1-\frac{\mu}{(\nu-1)(\nu-2)}\right](\nu-2)c_{\nu-2}\\
&=\frac{1}{\nu}\left[1-\frac{\mu}{(\nu-1)(\nu-2)}\right]\left[1-\frac{\mu}{(\nu-3)(\nu-4)}\right](\nu-4)c_{\nu-4}\\
&=\cdots\cdots\\
&=\frac{1}{\nu}\left[1-\frac{\mu}{(\nu-1)(\nu-2)}\right]\cdots\left[1-\frac{\mu}{(N+1)N}\right]Nc_N.
\end{aligned}$$

对于一定的 μ 值，当 N 足够大时，方括弧中的数值都是正的而且小于 1. 因此，对于所有 $\nu>N$ 的 c_ν 有

$$c_\nu \sim \frac{M}{\nu},$$

其中M是某正数. 由此得(4), (5)两式中级数的余部的估计值分别为

$$y_1(x): \quad \sum_{2m>N} \frac{M}{2m} x^{2m},$$

$$y_2(x): \quad \sum_{2m+1>N} \frac{M}{2m+1} x^{2m+1}.$$

但这两个余部分别与$-\frac{M}{2}[\ln(1+x)+\ln(1-x)]$和$\frac{M}{2}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]$的幂级数展开的余部相同. 可见(4), (5)两级数在$x \to \pm 1$时都是发散的. 也就是说, $x=\pm 1$这两点一般是勒让德方程的解的奇点.

但是, 如果参数μ取特殊值$l(l+1), l=0,1,2,\cdots$,情形就不同了. 这时,

$$c_{k+2} = \frac{k(k+1)-l(l+1)}{(k+2)(k+1)} c_k, \tag{6}$$

因此, $c_{l+2}=0$. 接着由递推关系有$c_{l+4}=0, c_{l+6}=0, \cdots$,而(4), (5)两个无穷级数中有一个成为多项式. 当l为偶数时, $y_1(x)$是一个l次多项式, $y_2(x)$仍为无穷级数; 当l为奇数时, $y_2(x)$是一个l次多项式, $y_1(x)$仍为无穷级数. 两个无穷级数在$x=\pm 1$两点都是发散的.

总结上面的结果, 可知勒让德方程(1)只有当其中的参数$\mu=l(l+1), l=0,1,2,\cdots$的时候, 才有在闭区间$-1 \leqslant x \leqslant 1$中有界的解. $\mu=l(l+1)$是方程(1)在有界条件下的本征值, 相应的多项式解是本征函数. 对应于一个l值有唯一的一个多项式.

练习题1. 单独的$y_1(x)$或$y_2(x)$在$x=\pm 1$均发散, 但是否可以作线性组合$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$, 并适当选择系数c_1和c_2, 使$y(x)$在$x=\pm 1$均有界?

练习题2. 解本征值问题

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dy}{dx}+\lambda y=0,$$

$$y(0)=0, \qquad y(1)\text{有界}.$$

练习题3. 解本征值问题

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dy}{dx}+\lambda y=0,$$

$$y(0)=0, \qquad y'(1)\text{有界}.$$

通常把这种多项式的最高次方 x^l 的系数规定为

$$c_l=\frac{(2l)!}{2^l\cdot(l!)^2}, \tag{7}$$

称为**勒让德多项式**，并用$P_l(x)$表示. $P_l(x)$的显明表达式可以导出如下：由(6)式，令 $k=l-2$，得

$$c_{l-2}=\frac{l(l-1)}{(l-2)(l-1)-l(l+1)}c_l=-\frac{l(l-1)\ (2l)!}{2(2l-1)2^l(l!)^3}$$

$$=\frac{(2l-2)!}{2^l\cdot(l-1)!(l-2)!}$$

又在(6)式中令 $k=l-4$，得

$$c_{l-4}=\frac{(l-2)(l-3)}{(l-4)(l-3)-l(l+1)}c_{l-2}$$

$$=(-)^2\frac{(l-2)(l-3)}{4(2l-3)}\ \frac{(2l-2)!}{2^l\cdot(l-1)!(l-2)!}$$

$$=(-)^2\frac{(2l-4)!}{2^l\cdot2\cdot(l-2)!(l-4)!}$$

同样得

$$c_{l-6}=\frac{(l-4)(l-5)}{(l-6)(l-5)-l(l+1)}c_{l-4}$$

$$=(-)^3\frac{(l-4)(l-5)}{6(2l-5)}\ \frac{(2l-4)!}{2^l\cdot2\cdot(l-2)!(l-4)!}$$

$$=(-)^3\frac{(2l-6)!}{2^l\cdot3!(l-3)!(l-6)!}.$$

照这样做下去，用归纳法，得

$$c_{l-2r}=(-)^r\frac{(2l-2r)!}{2^l\cdot r!(l-r)!(l-2r)!},\quad r=0,1,2,\cdots,\left[\frac{l}{2}\right],$$

其中$\left[\frac{l}{2}\right]$代表不大于$\frac{l}{2}$的最大整数．于是得

$$P_l(x)=\sum_{r=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}(-)^r\frac{(2l-2r)!}{2^l\cdot r!(l-r)!(l-2r)!}x^{l-2r}. \tag{8}$$

(7)式的规定是由于历史上的原因，这将在16.6节中说明[参看该节最后一段]．

下面给出前八个勒让德多项式：

$$\left.\begin{aligned}
&P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\\
&P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),\ P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),\\
&P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x),\\
&P_6(x)=\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5),\\
&P_7(x)=\frac{1}{16}(429x^7-693x^5+315x^3-35x).
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

由(8)式立刻可以看到，

$$P_l(-x)=(-)^lP_l(x). \tag{10}$$

图63是勒让德多项式的图形($x=\cos\theta$)．

练习题：证明

$$P_{2n+1}(0)=0,\ P_{2n}(0)=(-)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot(n!)^2}. \tag{11}$$

16.2 勒让德多项式的微分表示——罗巨格(Rodrigues)公式

在讨论勒让德多项式的一些性质或在有关它的一些计算中，

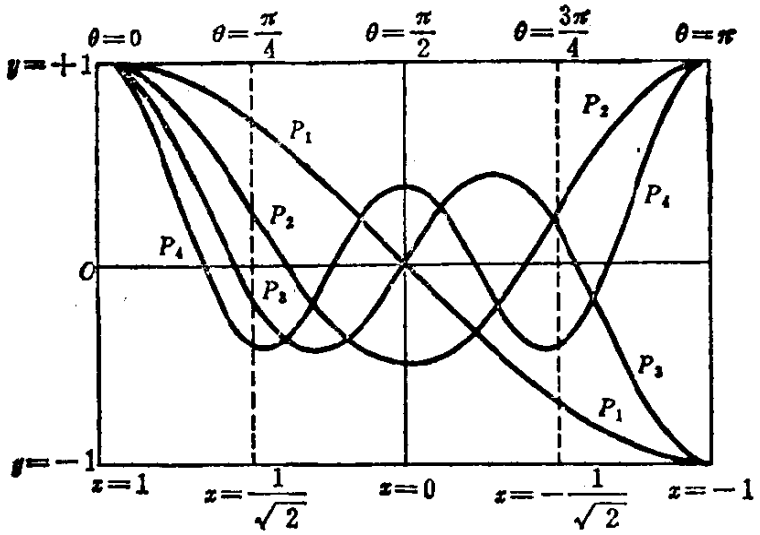


图 63

还用到这多项式的别种表达式，其中最重要之一是微分公式

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l\cdot l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l, \tag{1}$$

称为**罗巨格公式**. 下面是这公式的直接证明.

按二项式展开有

$$(x^2-1)^l=\sum_{r=0}^{l}\frac{(-)^r l!}{r!(l-r)!}x^{2l-2r}.$$

因此，
$$\frac{1}{2^l\cdot l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l=\frac{1}{2^l\cdot l!}\sum_{r=0}^{l}\frac{(-)^r l!}{r!(l-r)!}\frac{d^l}{dx^l}x^{2l-2r}$$

$$=\frac{1}{2^l\cdot l!}\sum_{r=0}^{[\frac{l}{2}]}\frac{(-)^r l!}{r!(l-r)!}(2l-2r)(2l-2r-1)\cdots(l-2r+1)\,x^{l-2r}$$

$$=\frac{1}{2^l}\sum_{r=0}^{[\frac{l}{2}]}(-)^r\frac{(2l-2r)!}{r!(l-r)!(l-2r)!}x^{l-2r}=P_l(x).$$

16.3 $P_l(x)$的正交性和归一因子

在16.1节中，勒让德多项式 $P_l(x)$是作为勒让德方程

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\mu y=0 \tag{1}$$

在有界条件下的本征函数引进的. 这个方程在 $x=\pm1$ 两点有奇异性，故相应的本征值问题属于奇异情形[15.1节]. 现在证明属于不同本征值 $\mu_k=k(k+1)$和$\mu_l=l(l+1)(k\neq l)$ 的两个本征值的本征函数 $P_k(x)$和$P_l(x)$在区间[−1,1]中正交：

$$\int_{-1}^{1}P_k(x)P_l(x)dx=0,k\neq l; \tag{2}$$

或者，令 $x=\cos\theta$,有

$$\int_0^{\pi}P_k(\cos\theta)P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta=0,k\neq l. \tag{2'}$$

P_k,P_l 分别满足方程

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_k}{dx}\right]+\mu_kP_k=0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_l}{dx}\right]+\mu_lP_l=0.$$

以 P_l 乘前者，P_k 乘后者，把结果相减，然后求积分，得

$$\int_{-1}^{1}\left\{P_l\frac{d}{dx}[(1-x^2)P'_k]-P_k\frac{d}{dx}[(1-x^2)P'_l]\right\}dx$$

$$+(\mu_k-\mu_l)\int_{-1}^{1}P_kP_ldx=0.$$

第一个积分等于

$$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\{(1-x^2)[P_lP'_k-P_kP'_l]\}dx$$

$$=(1-x^2)[P_lP'_k-P_kP'_l]\Big|_{x=-1}^{x=1}=0,$$

因为 $P_k(x)$和 $P_l(x)$以及它们的导数都是多项式，在$x=\pm1$是有界的，而因子$(1-x^2)$在这两点之值为零. 因此有

$$(\mu_k-\mu_l)\int_{-1}^{1}P_k(x)P_l(x)dx=0.$$

但 $\mu_k\neq\mu_l$，故有(2)式.

(2)式也可以用上节的罗巨格公式来证明. 这种证法还便于用来计算当 $k=l$ 时(2)式中积分之值.

设 $f(x)$是一个 k 次多项式，可以证明，如果$k<l$，则$f(x)$与 $P_l(x)$正交：

$$\int_{-1}^{1}f(x)P_l(x)dx=0. \tag{3}$$

把上节(1)式代入(3)式左方，然后换部求积分，得

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}f(x)P_l(x)dx&=\frac{1}{2^l\cdot l!}\int_{-1}^{1}f(x)\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l dx\\&=\frac{1}{2^l\cdot l!}\Big[f(x)\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}(x^2-1)^l\Big|_{x=-1}^{x=1}\\&\quad-\int_{-1}^{1}f'(x)\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}(x^2-1)^l dx\Big],\end{aligned}$$

但当$x=\pm1$时，$\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}(x^2-1)^l=0$，故

$$\int_{-1}^{1}f(x)P_l(x)dx=-\frac{1}{2^l\cdot l!}\int_{-1}^{1}f'(x)\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}(x^2-1)^l dx.$$

继续换部求积分，注意 $f(x)$是一个k次多项式，因之 $f^{(k)}(x)$ 等于一个常数，得

$$\int_{-1}^{1}f(x)P_l(x)dx=\frac{(-)^k}{2^l\cdot l!}f^{(k)}(x)\int_{-1}^{1}\frac{d^{l-k}}{dx^{l-k}}(x^2-1)^l dx. \tag{4}$$

既设 $l>k$，故

$$\int_{-1}^{1}\frac{d^{l-k}}{dx^{l-k}}(x^2-1)^l dx=\frac{d^{l-k-1}}{dx^{l-k-1}}(x^2-1)^l\Big|_{x=-1}^{x=1}=0.$$

把这结果代入(4)式，就证明了(3).

由(3)式立刻可以证明正交关系(2)，只要在(3)式中令 $f(x)=P_k(x)$即可.

现在来计算 $k=l$ 时的积分值

$$N_l=\int_{-1}^{1}[P_l(x)]^2dx.$$

由(4)式,令 $f(x)=P_l(x)$, $k=l$,有

$$N_l=\frac{(-)^l}{2^l\cdot l!}\frac{d^lP_l(x)}{dx^l}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^ldx. \qquad (5)$$

由16.1节(7)式,知$P_l(x)$的最高次方x^l的系数等于$\frac{(2l)!}{2^l\cdot(l!)^2}$,故

$$\frac{d^lP_l(x)}{dx^l}=\frac{d^l}{dx^l}\left[\frac{(2l)!}{2^l\cdot(l!)^2}x^l-\cdots\right]=\frac{(2l)!}{2^l\cdot l!}. \qquad (6)$$

令 $t=\frac{1+x}{2}$,得

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^2dx&=(-)^2\int_{-1}^{1}(1+x)^2(1-x)^2dx\\&=(-)^l\int_0^1 2^{2l}+t^l(1-t)^ldt\\&=(-)^l\,2^{2l+1}B(l+1,l+1)\\&=(-)^2\frac{2^{2l+1}(l!)^2}{(2l+1)!}.\end{aligned} \qquad (7)$$

把(6)和(7)代入(5)式,得

$$N_l=\int_{-1}^{1}[P_l(x)]^2dx=\frac{2}{2l+1}. \qquad (8)$$

N_l称为$P_l(x)$的模方. $\frac{1}{\sqrt{N_l}}$称为$P_l(x)$的归一因子,因为函数$\frac{P_l(x)}{\sqrt{N_l}}$满足归一关系:

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{P_l(x)}{\sqrt{N_l}}\right]^2dx=1. \qquad (9)$$

(2)式和(8)式可以合并起来写为

$$\int_{-1}^{1}P_k(x)P_l(x)dx=\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}, \qquad (10)$$

其中 $\delta_{ll}=1,\delta_{kl}=0\ (k\neq l)$.

练习题. 计算积分 $\int_{-1}^{1}x^{l}P_{l}(x)dx$ 和 $\int_{-1}^{1}x^{k}P_{2}(x)dx\quad(k>l)$

16.4* $P_l(x)$的完备性

在上一节中已经证明 $P_l(x)(l=0,1,2,\cdots)$是一个正交函数组. 现在来证明这组函数是区间 [－1，1] 中的完备组 [15.3节].为此，只要证明任何在[－1,1]中连续的函数 $f(x)$ 都可以用勒让德多项式平均逼近.

根据外氏(Weierstrass)的多项式逼近定理①，在区间[－1,1]中连续的任意一个函数 $f(x)$可以用一个多项式序列$\{f_n(x)\}$一致地逼近,其中 $f_n(x)$是一个 n 次多项式. 即对于任意的 $\varepsilon>0$，存在与 x 无关的$N(\varepsilon)>0$，使

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon,\ n>N. \tag{1}$$

多项式 $f_n(x)$总可以用勒让德多项式的线性组合来表示：

$$f_n(x)=a_nP_n(x)+a_{n-1}P_{n-1}(x)+\cdots+a_0P_0(x). \tag{2}$$

原因是，$f_n(x)$显然可以表为 $P_n(x)$和$x^{n-1},x^{n-2},\cdots$的线性组合,而 x^{n-1} 又可用 $P_{n-1}(x),x^{n-2},\cdots$的线性组合来表示，等等. 因此,函数 $f(x)$可以用(2)式这种特殊序列一致逼近,而且由(1)式有

$$\int_{-1}^{1}|f(x)-f_n(x)|^2dx<2\varepsilon^2. \tag{3}$$

现在取多项式

$$g_n(x)=c_nP_n(x)+c_{n-1}P_{n-1}(x)+\cdots+c_0P_0(x) \tag{4}$$

作为 $f(x)$的近似,其中

$$c_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_l(x)dx(l=0,1,\cdots,n) \tag{5}$$

---

① 参看，例如，R. 柯朗，D. 希伯尔特，数学物理方法，卷I，第二章§4(中译本51页).

是 $f(x)$对正交函数组 $P_l(x)$的广义傅氏系数[15.1节(7)式，15.3节(6)式]. 根据15.3节的结果，有

$$\int_{-1}^{1}|f(x)-g_n(x)|^2dx\leqslant\int_{-1}^{1}|f(x)-f_n(x)|^2dx<2e^2. \tag{6}$$

以 e_n表示第一个积分值，则由 $P_l(x)$的正交性得

$$e_n=\int_{-1}^{1}|f(x)-g_n(x)|^2dx=(f,f)-\sum_{l=0}^{n}\frac{2}{2l+1}c_l^2>0$$

[参看15.3节(8)式的贝塞耳不等式，由于这里的 $P_l(x)$没有归一化，故多了$\frac{2}{(2l+1)}$这个因子]. 由此可知 e_n当 $n\to\infty$时是一个单调减数列. 因此，存在极限值$\lim_{n\to\infty}e_n=e_\infty$，而且 $e_\infty<2e^2$. 但 e 可以是任意小的正数，故 e_∞必等于零，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}|f(x)-g_n(x)|^2dx=0. \tag{7}$$

这证明 $P_l(x)(l=0,1,2\cdots)$是一个正交完备函数组. 任意一个在区间[−1,1]中连续的函数 $f(x)$可以展开为下列级数(平均收敛意义下)，

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}c_lP_l(x), \tag{8}$$

其中

$$c_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_l(x)dx. \tag{9}$$

从上一节和这一节的结果，可知15.1节和15.2节关于非奇异本征值问题的定理完全适用于勒让德方程在有界条件下的奇异性本征值问题.

16.5* 应用举例——均匀电场中的导体球

问题：在均匀电场 E_0中放一接地的导体球，球的半径等于

a，求球外电场.

在球外，由于没有电荷存在，电位V满足拉氏方程

$$\nabla^2 V = 0. \tag{1}$$

问题中的唯一边界是导体的球面，故选用球坐标，坐标原点在球心. 于是，按14.2节(9)式，方程(1)成为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=0. \tag{2}$$

如果取球坐标的极轴z沿原来均匀电场的方向，则由对称性易见V与φ无关(φ是绕z轴的角度)而只是r和θ的函数$V(r,\theta)$. 相应地，方程(2)简化为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)=0, \tag{3}$$

其中$r>a$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

按所设，导体球是接地的，电位为零，故在球面上的边界条件为

$$V|_{r=a}=0. \tag{4}$$

此外，由于问题中的区域是球外，延伸至无穷远外，故还须考虑在无穷远处电位应满足的条件. 球面上的感应电荷在∞处产生的场强趋于零$\left(\frac{1}{r^2}\to 0\right)$，故在$\infty$处只有原来的均匀电场，即

$$E_{r\to\infty}\to E_0, \tag{5}$$

其方向沿z轴. 用电位表示$\left(E=-\frac{\partial V}{\partial z}\right)$，有

$$\frac{\partial V}{\partial z}\Big|_{r\to\infty}\to -E_0,$$

故
$$V|_{r\to\infty}\to -E_0 z+C=-E_0 r\cos\theta+C, \tag{6}$$

C是未定常数[参看下面(18)式后的讨论].

现在的问题是求满足方程(3)、边界条件(4)和无穷远条件

(6)的解 $V(r,\theta)$.

用分离变数法. 设 $V(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$,代入方程(3),然后除以 $V=R\Theta$,得

$$\frac{1}{r^2R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{1}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)=0. \qquad (7)$$

要这方程成立,必须

$$\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)=\text{常数}.$$

以 $-\mu$ 表示这个常数,并令 $x=\cos\theta$,这个方程即化为勒让德方程 $[y(x)=\Theta(\theta)]$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\mu y=0, \quad -1\leqslant x\leqslant 1, \qquad (8)$$

而(7)式成为

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-\mu R=0, r>a. \qquad (9)$$

根据16.1节的结果知道,除非 $\mu=l(l+1)$, $l=0,1,\cdots$,方程(8)的解在 $x=\pm1$(即$\theta=0$和π)的地方趋于无穷大,这与问题的物理情况不合,因为在有限区域内的电位应当处处是有限的. 因此,必须 $\mu=l(l+1)$,$l=0,1,\cdots$,而相应的解为

$$y(x)=P_l(x), \quad l=0,1,2,\cdots,$$

或者

$$\Theta(\theta)=P_l(\cos\theta), \qquad (10)$$

$P_l(x)$是勒让德多项式.

这时(9)式成为

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-l(l+1)R=0,$$

或者

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}-l(l+1)R=0. \qquad (11)$$

(11) 式是一个欧勒型方程,可以用14.4节中方程(9)的解法

求得其通解：

$$R(r)=Ar^{l}+Br^{-l-1}, \tag{12}$$

A和B是任意常数.

因此,方程(3)在有限区域($r>a$)中有界的特解为

$$V_l(r,\theta)=(Ar^{l}+Br^{-l-1})P_l(\cos\theta),\quad l=0,1,2,\cdots. \tag{13}$$

要得到满足边界条件(4)和无穷远条件(6)的解，需要把全部特解叠加起来：

$$V(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}(A_lr^{l}+B_lr^{-l-1})P_l(\cos\theta), \tag{14}$$

其中A_l和B_l是待定常数. 当$r\to\infty$时，

$$V(r,\theta)\to\sum_{l=0}^{\infty}A_lr^{l}P_l(\cos\theta).$$

与(6)式比较,注意$P_0(\cos\theta)=1$，$P_1(\cos\theta)=\cos\theta$[16.1节(9)式],即见

$$A_0=C,\quad A_1=-E_0,\quad A_2=A_3=\cdots=0, \tag{15}$$

而

$$V(r,\theta)=C-E_0rP_1(\cos\theta)+\sum_{l=0}^{\infty}B_lr^{-l-1}P_l(\cos\theta). \tag{16}$$

再用条件(4)，得

$$V(a,\theta)=C-E_0aP_1(\cos\theta)+\sum_{l=0}^{\infty}B_la^{-l-1}P_{ll}(\cos\theta)=0,$$

或者

$$(B_0a^{-1}+C)P_0(\cos\theta)+(B_1a^{-2}-E_0a)P_1(\cos\theta)$$
$$+\sum_{l=2}^{\infty}B_la^{-l-1}P_l(\cos\theta)=0.$$

利用16.3节(2)式(P_l的正交关系)或者直接用16.4节公式(9)，得

$$B_0a^{-1}+C=0,\quad B_1a^{-2}-E_0a=0,\quad B_l=0(l\geqslant 2),$$

故 $$B_0=-Ca,\quad B_1=E_0a^3,\quad Bl=0(l\geqslant 2).\tag{17}$$

把以上所得结果(15)和(17)代入(16)式,得

$$V(r,\theta)=C-E_0r\cos\theta-C\frac{a}{r}+E_0a^3\frac{\cos\theta}{r^2}\quad(r\geqslant a).\tag{18}$$

(18)式中的常数C要由导体球未放入前在$r=0$点的电位之值来确定. 如果原来在$r=0$点的电位等于V_0, 则$C=V_0$,而

$$V(r,\theta)=V_0-E_0r\cos\theta-\frac{V_0a}{r}+E_0a^3\frac{\cos\theta}{r^2}\quad(r\geqslant a).\tag{19}$$

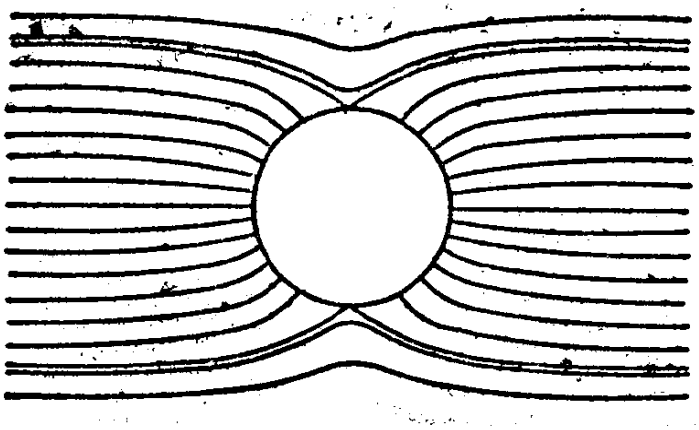


图 64

(19)式中$V_0-E_0r\cos\theta$是原来均匀场的电位;第三项$-\frac{V_0a}{r}$是由于导体球接地而使球面上带有电荷$-V_0a$所产生的电位; 最后一项$\frac{E_0a^3\cos\theta}{r^2}$则是导体球由于受到电场的作用而极化, 成为一个偶极矩为E_0a^3的偶极子所产生的电位(偶极矩的大小与a^3成正比,也就是,与球的体积成正比).

电力线的分布见图64.

16.6 $P_l(x)$的生成函数

勒让德多项式早先是由勒让德在势论中引进的, 与距离的倒数$1/R$(牛顿势或库仑势)的展开有关. R是P和P'两点之间的距离(图65):

$$R=|r-r'|=(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta)^{\frac{1}{2}},$$

θ 是 $r(=\overrightarrow{OP})$ 与 $r'(=\overrightarrow{OP'})$ 之间的夹角.

若 $r'<r$，可令 $t=r'/r$，$x=\cos\theta$，则

$$R^{-1}=r^{-1}(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

其中规定当 $t=0$ 时根式之值为 1.

把 $$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

写为 $$(t-x-\sqrt{x^2-1})^{-\frac{1}{2}}(t-x+\sqrt{x^2-1})^{-\frac{1}{2}},$$

即知这根式作为 t 的函数在有限远处的奇点(枝点)为

$$x\pm\sqrt{x^2-1}.$$

因此，只要 $t<\min|x\pm\sqrt{x^2-1}|$，就可以作泰勒展开：

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{l=0}^{\infty}a_l t^l. \tag{2}$$

下面来证明，展开系数 $a_l(x)$ 就是勒让德多项式.

根据泰勒展开系数的积分表示式[6.1节(2)式]，

$$a_l(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}}{t^{l+1}}dt, \tag{3}$$

其中 C 是沿正向绕 $t=0$ 一周的围道，围道内没有根式的奇点(即前述两枝点). 令

$$(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}=1-ut,$$

得

$$t=\frac{2(u-x)}{u^2-1},$$

$$dt=-2\frac{1-2xu+u^2}{(u^2-1)^2}du.$$

代入(3)式，得

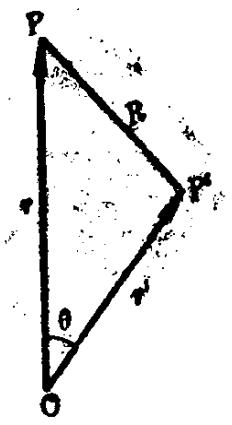


图 65

$$a_l(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{\left[1-\frac{2u(u-x)}{u^2-1}\right]^{-1}}{\left[\frac{2(u-x)}{u^2-1}\right]^{l+1}}\cdot\frac{-2(1-2xu+u^2)}{(u^2-1)^2}du$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{(u^2-1)^l}{2^l(u-x)^{l+1}}du, \tag{4}$$

其中 C' 是 u 平面上与 C 相应的、正向绕 $u=x$ 一周的围道. 但根据科希公式[4.6节(1)式],(4)式的右方等于

$$\frac{1}{2^l\cdot l!}\frac{d^l}{du^l}(u^2-1)^l\Big|_{u=x}=\frac{1}{2^l\cdot l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l.$$

与 16.2 节(1)式比较,即见 $a_l(x)=P_l(x)$,而有

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l. \tag{5}$$

左方的函数称为勒让德多项式 $P_l(x)$ 的**生成函数**. 关系式(5)在数学物理中有很多重要应用.

由(5)式立刻得到 $P_l(x)$ 在 $x=\pm1$ 之值. 因

$$(1\mp2t+t^2)^{-\frac{1}{2}}=(1\mp t)^{-1}=\sum_{l=0}^{\infty}(\pm t)^l,$$

故
$$P_l(1)=1,\quad P_l(-1)=(-1)^l. \tag{6}$$

这里顺带说一下. 在 16.1 节中把勒让德方程的多项式解的最高次方的系数 c_l 取为 $\frac{(2l)!}{2^l\cdot(l!)^2}$[该节(7)式]就是为了使得这个多项式 $P_l(x)$ 与(5)式中的展开系数一致.

练习题. 求 $P_l'(1)$ 和 $P_l''(1)$.

16.7* 应用举例

一、在点电荷的影响下一个介质球的电场.

设有一个半径为 a 的均匀介质球,介电常数为 ε. 在与球心距离为 $b(b>a)$ 的地方放一点电荷 q(图 66),求介质球内外的电

位.

除了在介质球的表面(有极化电荷)和点电荷 q 所在的点之外，在球内外其他各处的电位 V 都满足拉氏方程

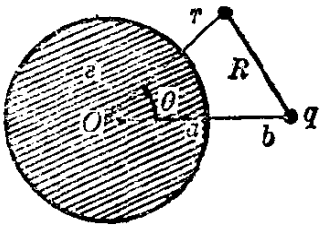


图 66

$$\nabla^2 V=0. \tag{1}$$

球内外的电位在球面上应当是连续的（没有偶极层），故有

$$V_{内}|_{r=a}=V_{外}|_{r=a}. \tag{2}$$

此外，在球面上电位移 $\boldsymbol{D}$ 的法线方向分量应当是连续的(假定面上没有自由电荷)，故有 $D_{内n}|_{r=a}=D_{外n}|_{r=a}$(下标 n 表示法线方向分量)，或者 $\varepsilon E_{内n}|_{r=a}=E_{外n}|_{r=a}$. 用电位表示，这个条件可写为

$$\varepsilon\frac{\partial V_{内}}{\partial r}\bigg|_{r=a}=\frac{\partial V_{外}}{\partial r}\bigg|_{r=a}, \tag{3}$$

因为对于球面来说，法线方向就是半径 r 的方向. (2)和(3)称为连接条件[参看 12.5 节(11)式].

取球坐标，以介质球的中心为原点，从中心到点电荷 q 的直线为 z 轴，则由对称性知电位与绕 z 轴的 φ 角无关，故电位 V 在球内满足拉氏方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)=0. \tag{4}$$

按照 16.5 节(14)式，这个方程在 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 中的有界解是

$$V(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}(A_l r^l+B_l r^{-l-1})P_l(\cos\theta).$$

但在球内当 $r\to 0$ 时 $r^{-l-1}\to\infty$，故必须所有的系数 B_l 都等于零，而得

$$V_{内}(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(\cos\theta). \tag{5}$$

这是方程(4)在球内的有界解.

在球外，由于有点电荷 q 存在，电位并不处处满足拉氏方程．这问题可以这样来解决：q 的电位是已知的，用 V_q 表示，

$$V_q=\frac{q}{R}=\frac{q}{(r^2+b^2-2rb\cos\theta)^{\frac{1}{2}}},\tag{6}$$

R 是由 q 到空间(r,θ)点的距离．于是球外的电位可写为

$$V_{外}=V_1+V_q,\tag{7}$$

V_1是介质球极化后产生的电位．V_1在球外处处满足拉氏方程(4)，故有

$$V_1(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}(C_lr^l+D_lr^{-l-1})P_l(\cos\theta).\tag{8}$$

但极化电荷在无穷远处的电位应趋于零（取无穷远处的电位为零），故所有的系数 C_l 都应为零，而得

$$V_1(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}D_lr^{-l-1}P_l(\cos\theta).\tag{9}$$

因此 $$V_{外}(r,\theta)=\frac{q}{(r^2+b^2-2br\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}+\sum_{l=0}^{\infty}D_lr^{-l-1}P_l(\cos\theta).\tag{10}$$

剩下的问题是用连接条件(2)，(3)来确定(5)式和(10)式中的未定系数 A_l 和 D_l．由(2)得

$$\sum_{l=0}^{\infty}A_la^lP_l(\cos\theta)=q(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}+\sum_{l=0}^{\infty}D_la^{-l-1}P_l(\cos\theta).$$

为了比较两边，把右方第一项用上节(5)式展开，注意 $b>a$，得

$$\sum_{l=0}^{\infty}A_la^lP_l(\cos\theta)=\frac{q}{b}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^lP_l(\cos\theta)$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty} D_l a^{-l-1} P_l(\cos\theta). \qquad (11)$$

由(3),类似地利用上节(5)式于(10)式右方的第一项,得

$$e\sum_{l=0}^{\infty} A_l l a^{l-1} P_l(\cos\theta) = \frac{q}{b}\sum_{l=0}^{\infty} l b^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{l-1} P_l(\cos\theta)$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty} D_l(-l-1)a^{-l-2}P_l(\cos\theta). \qquad (12)$$

分别比较(11)和(12)两边 $P_l(\cos\theta)$ 的系数[或者用16.3节(2)式],得

$$a^l A_l = \frac{q}{b}\left(\frac{a}{b}\right)^l + a^{-l-1}D_l,$$

$$el a^{l-1}A_l = \frac{q}{b^2} l\left(\frac{a}{b}\right)^{l-1} - (l+1)a^{-l-2}D_l.$$

由此可解出

$$A_l = q\frac{2l+1}{[(e+1)l+1]b^{l+1}},$$

$$D_l = -q(e-1)\frac{l a^{2l+1}}{[(e+1)l+1]b^{l+1}}.$$

因此,

$$V_{内}(r,\theta) = \frac{q}{b}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{(e+1)l+1}\left(\frac{r}{b}\right)^l P_l(\cos\theta) \quad (r<a), \qquad (13)$$

$$V_{外}(r,\theta) = \frac{q}{R} - \frac{q(e-1)}{a}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{l}{(e+1)l+1}\left(\frac{a^2}{br}\right)^{l+1} P_l(\cos\theta).$$

$$(r>a, R=(r^2+b^2-2br\cos\theta)^{\frac{1}{2}}) \qquad (14)$$

又,利用上节(5)式,(13)式可以写为

$$V_{内}(r,\theta)=\frac{q}{R}-\frac{q(\varepsilon-1)}{b}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{l}{(\varepsilon+1)l+1}\left(\frac{r}{b}\right)^{l}P_l(\cos\theta)$$

$$(r<a). \qquad (15)$$

(14)和(15)两式中的级数分别代表极化电荷(多极子)在球外和球内产生的电位.

二、均匀细圆环的引力势.

万有引力遵从反平方定律，因此引力场的势V①也满足泊松(Poisson)方程

$$\nabla^2V=-4\pi\rho, \qquad (16)$$

ρ 是质量密度.

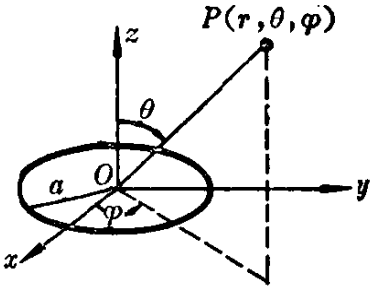


图 67

设有一个均匀的细圆环，环的半径等于 a,质量为 m,求它的引力势.

对于不在环上的点 P，引力势满足拉氏方程

$$\nabla^2V=0. \qquad (17)$$

取环心 O 为球坐标的原点,与环面垂直的方向为 z 轴(图67)，则由对称性知在 P 点的势 V 只与 r,θ 有关,因此 V 满足方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)=0. \qquad (18)$$

分别考虑 $r<a$ 和 $r>a$ 的情形(当 $r=a$ 而$\theta=\pi/2$ 时，P点在环上,引力势不满足拉氏方程). 由前一个例子的结果，立刻知道在这两种情形下的有界解分别为

$$V_{r<a}(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l\left(\frac{r}{a}\right)^{l}P_l(\cos\theta), \qquad (19)$$

$$V_{r>a}(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\beta_l\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}P_l(\cos\theta), \qquad (20)$$

① 质量为 m 的质点的引力势为$-k\frac{m}{r}$,r是由质点到场点的距离,k是引力常数.在下面的计算中我们略去因子$-k$.

$r>a$ 的解满足在无穷远处趋于零的条件.

现在的问题是如何确定系数 α_l 和 β_l. 这里没有像前一例子中那样的边界条件(分界面上的连接条件). 但是，我们可以根据计算线源引力势的公式

$$V=\int\frac{\lambda ds}{R} \tag{21}$$

(λ=单位长度的质量) 直接计算出在 z 轴上的势，然后拿来与(19),(20)比较(令其中 $\theta=0$ 或 π),从而定出这些系数.*

应用公式(21)求圆环在 z 轴上的势，只要注意 λ 和 R 都是常数，$R=\sqrt{z^2+a^2}$，立即得

$$V_{\text{轴}}=\frac{m}{\sqrt{z^2+a^2}}. \tag{22}$$

当 $r<a$ 时,因 $z<a$,可以把(22)式展开为

$$V_{\text{轴}(z<a)}=\frac{m}{a}\left[1+\left(\frac{z}{a}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=\frac{m}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}\left(\frac{z}{a}\right)^{2k},$$

其中 $\binom{p}{k}=\frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}$ 是二项式展开的系数. 这结果应当和在(19)式中令 $\theta=0(r=z)$ 的结果相同,故有

$$V_{r<a}(z,0)=\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l\left(\frac{z}{a}\right)^l P_l(1)=\frac{m}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}\left(\frac{z}{a}\right)^{2k}.$$

比较两边 z 的幂的系数,并利用上节(6)式，得

$$\alpha_{2k}=\frac{m}{a}\binom{-1/2}{k},\quad \alpha_{2k+1}=0,\quad k=0,1,2,\cdots.$$

因此,

$$V_{r<a}(r,\theta)=\frac{m}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}\left(\frac{r}{a}\right)^{2k}P_{2k}(\cos\theta). \tag{23}$$

---

* 这种解边值问题的方法虽然有点特殊，但由于有普遍的唯一性定理保证，故知所得解是正确的.

当 $r>a$ 时，因 $z>a$，可以把(22)式展为

$$V_{球(z>a)}=\frac{m}{z}\left[1+\left(\frac{a}{z}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=\frac{m}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}\left(\frac{a}{z}\right)^{2k}.$$

与(20)比较(令其中的$\theta=0, r=z$)，应有

$$\sum_{l=0}^{\infty}\beta_l\left(\frac{a}{z}\right)^{l+1}P_l(1)=\frac{m}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}\left(\frac{a}{z}\right)^{2k+1}$$

由此得

$$\beta_{2k}=\frac{m}{a}\binom{-1/2}{k},\quad \beta_{2k+1}=0,\quad k=0,1,2,\cdots.$$

因此，

$$V_{r>a}(r,\theta)=\frac{m}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}\left(\frac{a}{r}\right)^{2k+1}P_{2k}(\cos\theta). \tag{24}$$

16.8 $P_l(x)$的递推关系

相邻的勒让德多项式以及它们的导数之间存在着一定的关系，称为递推关系.

由 16.6 节(5)式

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l. \tag{1}$$

两边对 t 求导数，得

$$(x-t)(1-2xt+t^2)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{l=0}^{\infty}lP_l(x)t^{l-1}.$$

以$(1-2xt+t^2)$乘两边，对左方再用(1)式，得

$$(x-t)\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l=(1-2xt+t^2)\sum_{l=0}^{\infty}lP_l(x)t^{l-1}.$$

比较两边 t^l 的系数，得递推关系

$$(l+1)P_{l+1}(x)-(2l+1)xP_l(x)+lP_{l-1}(x)=0 \quad (l\geqslant 1). \tag{2}$$

又由(1)式两边对x 求导数,得

$$t(1-2xt+t^2)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l'(x)t^l.$$

两边乘$(1-2xt+t^2)$,再用(1)式,得

$$t\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l=(1-2xt+t^2)\sum_{l=0}^{\infty}P_l'(x)t^l.$$

比较两边 t^{l+1} 的系数,得

$$P_l(x)=P'_{l+1}(x)-2xP_l'(x)+P'_{l-1}(x) \quad (l\geqslant 1). \tag{3}$$

对(2)式求导数,用(3)式消去$P'_{l-1}(x)$,得相邻导数之间的递推关系

$$P'_{l+1}(x)=xP'_l(x)+(l+1)P_l(x). \tag{4}$$

又,从(3)和(4)中消去$P'_{l+1}(x)$,得另一递推关系

$$xP_l'(x)-P'_{l-1}(x)=lP_l(x). \tag{5}$$

再从(4),(5)两式中消去$P_l'(x)$,得

$$P'_{l+1}(x)-P'_{l-1}(x)=(2l+1)P_l(x). \tag{6}$$

又,把(4)式中的 l 换成 $l-1$,然后用(5)式消 去 $P'_{l-1}(x)$,得

$$(x^2-1)P_l'(x)=lxP_l(x)-lP_{l-1}(x). \tag{7}$$

(2),(4),(5),(6),(7) 都是常用的递推公式,主要是用来计算含勒让德多项式的积分,例如在求一个函 数 对 $P_l(x)$的广义傅氏系数时遇到的积分[16.4节(9)式].

例. 求积分 $\int_{-1}^{1}xP_m(x)P_n(x)dx$之值.

由(2)式有

$$xP_m(x)=\frac{1}{2m+1}[(m+1)P_{m+1}(x)+mP_{m-1}(x)].$$

因此

$$\int_{-1}^{1} xP_m(x)P_n(x)dx=\frac{m+1}{2m+1}\int_{-1}^{1}P_{m+1}(x)P_n(x)dx$$

$$+\frac{m}{2m+1}\int_{-1}^{1}P_{m-1}(x)P_n(x)dx.$$

再利用 16.3 节(10)式(正交归一关系),得

$$\int_{-1}^{1} xP_m(x)P_n(x)\,dx=\begin{cases}\dfrac{2n}{4n^2-1}, & m=n-1,\\ \dfrac{2(n+1)}{(2n+3)(2n+1)}, & m=n+1,\\ 0, & m-n\neq\pm1.\end{cases}$$

16.9 连带勒让德函数

在前面所举的应用例中，由于有旋转对称性，在采用球坐标时，如果取对称轴为极轴，则拉氏方程的解 V 便只与 r,θ 有关，而与绕极轴的转角 φ 无关.在一般情形下，V 是 r,θ,φ 的函数，用分离变数法解拉氏方程[14.2节(9)式]

$$\nabla^2V\equiv\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2V}{\partial\varphi^2}=0, \tag{1}$$

所得关于 θ 和 φ 的方程是[14.3 节(8),(9)式]

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+m^2\Phi=0\quad(0\leqslant\varphi\leqslant2\pi), \tag{2}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left(\mu-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi); \tag{3}$$

或者，在(3)式中令 $\cos\theta=x$，$\Theta(\theta)=y(x)$，得

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\left(\mu-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0. \tag{4}$$

由周期条件[14.4 节]知(2)式中的m只能等于 0,1,2,···;相应的解为 $\cos m\varphi$和 $\sin m\varphi$.

方程(4)称为连带勒让德方程. 勒让德方程是它的特殊情形($m=0$). 下面只讨论 $\mu=l(l+1)$,$l=0,1,2,\cdots$的情形①,并求出它在$-1\leqslant x\leqslant 1$ 中的有界解.

方程(4)与勒让德方程有相同的奇点:$x=\pm 1,\infty$都是正则奇点.在$x=\pm 1$ 两点,方程(4)的正则解[11.3 节]的指标都是$\pm m/2$. 作变换$y(x)=(1-x^2)^{m/2}v(x)$,使 $v(x)$在$x=\pm 1$ 的指标为零(和$-m$),得 $v(x)$的方程

$$(1-x^2)v''-2(m+1)xv'+[\mu-m(m+1)]v=0. \tag{5}$$

对x 求导数,得

$$(1-x^2)(v')''-2(m+2)x(v')'+[\mu-(m+1)(m+2)](v')=0.$$

与(5)式比较,只是m变成$m+1$,v变成v'. 另一方面,当 $m=0$ 时,(5)式就是勒让德方程,可见方程(5)可以从勒让德方程通过求导数m次得到. 因此方程(5) 的解就是勒让德方程的解的m阶导数. 由于$\mu=l(l+1)$,故其中的一个解是

$$v(x)=\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)\quad(0\leqslant m\leqslant l).$$

于是得方程(4)的一个解:

$$P_l^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)\quad(0\leqslant m\leqslant l). \tag{6}$$

$P_l^m(x)$称为 m 阶 l 次连带勒让德函数(第一类). 显然,这个解在$-1\leqslant x\leqslant 1$ 中是有界的,因为$m\geqslant 0$,而 $P_l(x)$ 是一个 l 次多项式. 另外一个解在 $x=\pm 1$ 是无界的,因为由 16.1 节的讨论知

① 关于普遍情形,参看,例如,王竹溪等,特殊函数概论,5.16节.

道，与$P_l(x)$线性无关的解在$x=\pm1$这两点的奇异性与$\ln(1\pm x)$相同，所以它的m阶导数的奇异性是$(1\pm x)^{-m}$. 根据同样的理由，也可以看出，当$\mu=l(l+1)$但l不为整数时，方程(4)的两个特解在$x=\pm1$都是无界的.

以上我们实际上是讨论了方程(4)在有界条件

$$y(\pm1)\text{有界}$$

下的本征值问题，其本征值为

$$\mu=l(l+1),l=m,m+1,\cdots,$$

本征函数即为$P_l^m(x)$.

(6)式是费瑞尔(Ferrer)关于$P_l^m(x)$的定义. 另一种是霍布森(Hobson)的定义，右方多一个因子$(-)^m$. 两种定义都只用于$-1\leqslant x\leqslant1$这个区间上.

16.10 $P_l^m(x)$的正交归一关系

现在证明下列正交归一关系：

$$\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_k^m(x)dx=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{lk}. \tag{1}$$

从上节方程(4)出发，很容易证明(1)式中的积分值在$k\neq l$时为零[参看 16.3 节(2)式的证法]. 下面计算$l=k$时的积分值.

由上节(6)式和罗巨格公式[16.2 节(1)式]有

$$\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_l^m(x)dx$$
$$=\frac{1}{2^{2l}\cdot(l!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^m\left[\frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}}(x^2-1)^l\right]^2dx.$$

令

$$G(x)=(1-x^2)^m\frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}}(x^2-1)^l,$$

这是一个$l+m$次的多项式，有

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_l^m(x)dx=\frac{1}{2^{2l}\cdot(l!)^2}\int_{-1}^{1} G(x)\frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}}(x^2-1)^l dx.$$

换部求积分m次，注意由于$G(x)$含有因子$(1-x^2)^m$，故$G^{(k)}(\pm1)=0(k=0,1,2,\cdots,m-1)$，得

$$\int_{-1}^{1}[P_l^m(x)]^2dx=\frac{(-)^m}{2^{2l}\cdot(l!)^2}\int_{-1}^{1}G^{(m)}(x)\ \frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l dx.$$

再换部求积分l次，注意$\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^l\Big|_{x=\pm1}=0(k=0,1,\cdots,l-1)$以及$G^{(m+l)}(x)=$常数，得

$$\int_{-1}^{1}[P_l^m(x)]^2dx=\frac{(-)^{m+l}}{2^{2l}\cdot(l!)^2}G^{(m+l)}(x)\int_{-1}^{1}(x^2-1)^l dx. \tag{2}$$

多项式$G(x)$的最高次方是$(-)^m x^{2m}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}x^{2l}$，故

$$G^{(l+m)}(x)=$$

$$\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}[(-)^m x^{2m}\cdot 2l(2l-1)\cdots(2l-l-m+1)x^{l-m}]$$

$$=(-)^m\frac{(2l)!}{(l-m)!}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}x^{l+m}$$

$$=(-)^m\frac{(2l)!(l+m)!}{(l-m)!},$$

而由 16.3 节(7)式有

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^l dx=(-)^l\frac{2^{2l+1}(l!)^2}{(2l)!(2l+1)}.$$

把这些结果代入(2)式右方，得

$$\int_{-1}^{1}[P_l^m(x)]^2dx=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}. \tag{3}$$

这就证明了(1)式.

16.11* $P_l^{-m}(x)$ $(m>0)$

利用罗巨格公式,16.9节(6)式可写为

$$P_l^m(x)=\frac{1}{2^l\cdot l!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l \quad (m\geqslant 0). \tag{1}$$

连带勒让德方程[16.9节(4)式]在 m 换成 $-m$ 时不变,故可推想如果把(1)式中的 m 换成 $-m$,所得函数

$$P_l^{-m}(x)=\frac{1}{2^l\cdot l!}(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(x^2-1)^l \tag{2}$$

可能也是方程的解. 事实上,$P_l^{-m}(x)$和 $P_l^m(x)$只差一常数因子. 证明如下:

$$\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l=\sum_{r=0}^{l+m}\binom{l+m}{r}\frac{d^r}{dx^r}(x-1)^l\frac{d^{l+m-r}}{dx^{l+m-r}}(x+1)^l$$

$$=\sum_{r=m}^{l}\binom{l+m}{r}\frac{l!}{(l-r)!}(x-1)^{l-r}\frac{l!}{(r-m)!}(x+1)^{r-m}$$

$$=\sum_{s=0}^{l-m}\binom{l+m}{s+m}\frac{l!}{(l-m-s)!}(x-1)^{l-m-s}\frac{l!}{s!}(x+1)^s$$

$$=\sum_{s=0}^{l-m}\frac{(l+m)!}{(s+m)!(l-s)!}\frac{l!}{(l-m-s)!}(x-1)^{l-m-s}\frac{l!}{s!}(x+1)^s$$

$$=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}(x^2-1)^{-m}$$

$$\times\sum_{s=0}^{l-m}\binom{l-m}{s}\frac{l!}{(l-s)!}(x-1)^{l-s}\frac{l!}{(s+m)!}(x+1)^{s+m}$$

$$=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}(-)^m(1-x^2)^{-m}$$

$$\times\sum_{s=0}^{l-m}\binom{l-m}{s}\frac{d^s}{dx^s}(x-1)^l\frac{d^{l-m-s}}{dx^{l-m-s}}(x+1)^l$$

$$=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}(-)^m(1-x^2)^{-m}\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(x^2-1)^l,$$

因此

$$P_l^{-m}(x)=(-)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x). \tag{3}$$

16.12* $P_l^m(x)$的递推关系

下面是四个基本递推关系：

$$(2l+1)xP_l^m=(l+m)P_{l-1}^m+(l-m+1)P_{l+1}^m, \tag{1}$$

$$(2l+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P_l^m=P_{l+1}^{m+1}-P_{l-1}^{m+1}, \tag{2}$$

$$(2l+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P_l^m=(l+m)(l+m-1)P_{l-1}^{m-1}$$
$$-(l-m+2)(l-m+1)P_{l+1}^{m-1}, \tag{3}$$

$$(2l+1)(1-x^2)\frac{dP_l^m}{dx}(l+1)(l+m)P^m{}_{l-1}$$
$$-l(l-m+1)P^m{}_{l+1}. \tag{4}$$

其他许多递推关系都可以从这四个关系导出.

注意本书所用的$P_l^m(x)$是费瑞尔的定义[16.9 节(6)式]. 如果用霍布森的定义[见 16.9 节最后一段],上面的公式(2)和(3)右方两项的位置应当对调.

公式(1)和(4)都可以根据 $P_l^m(x)$的定义从 16.8 节 $P_l(x)$的递推关系导出. 例如,由 16.8 节(2)式有

$$(2l+1)xP_l=(l+1)P_{l+1}+lP_{l-1}.$$

两边求导数m次，得

$$(2l+1)xP^{(m)}_l+m(2l+1)P^{(m-1)}_l=(l+1)P^{(m)}_{l+1}+lP^{(m)}_{l-1}.$$

应用 16.8 节(6)式于左边第二项，然后以$(1-x^2)^{m/2}$乘所得结果，即得(1).

读者不难仿照这种方法证明其他三个公式.

16.13* 加法公式

在改变球坐标极轴的方向时，有下列加法公式：

$$P_l(\cos\gamma)=\sum_{m=-l}^{l}(-)^m P_l^m(\cos\theta)P_l^{-m}(\cos\theta')e^{im(\varphi-\varphi')} \tag{1}$$

$$=\sum_{m=-l}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta)P_l^m(\cos\theta')e^{im(\varphi-\varphi')} \tag{2}$$

$$=P_l(\cos\theta)P_l(\cos\theta')+2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}$$

$$\times P_l^m(\cos\theta)P_l^m(\cos\theta')\cos m(\varphi-\varphi'), \tag{3}$$

其中

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi'), \tag{4}$$

即 γ 是 OP(方向为 θ,φ) 与 OP' (方向为 θ',φ') 间的夹角(图 68).

这个加法公式的证法很多．下面从微分方程的解的关系着手，予以证明.

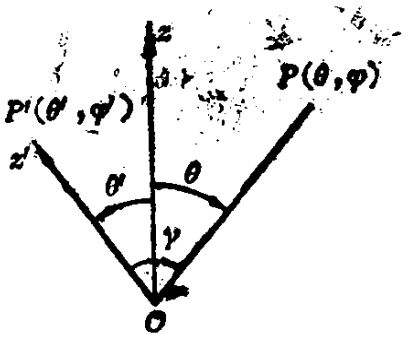


图 68

在球坐标系中用分离变数法解拉氏方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=0, \tag{5}$$

令 $V(r,\theta,\varphi)=R(r)S(\theta,\varphi)$，得 $S(\theta,\varphi)$ 的方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S}{\partial\varphi^2}+\mu S=0, \tag{6}$$

其中 μ 是分离变数时引进的参数.

由 16.9 节的结果知道，只有在 $\mu=l(l+1),l=0,1,2,\cdots$ 时，方程(6)才有在 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 和 $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$ 中有界的周期解：

$$S_l(\theta,\varphi)=P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}, \tag{7}$$

$m=0,\pm1,\cdots,\pm l$. $S_l(\theta,\varphi)$称为**球面谐函数**.

现在改变球坐标的极轴,从Oz换到Oz'. 这相当于从球坐标(r,θ,φ)变换到球坐标(r,γ,δ),其中γ由(4)式给出,δ是新的方位角. 显然,在这样的变换下方程(6)的形式不变,只是它的解由$S_l(\theta,\varphi)$变成

$$S_l(\gamma,\delta)=P_l^m(\cos\gamma)e^{im\delta}. \tag{8}$$

$P_l(\cos\gamma)$是其中之一($m=0$). 因此,用原来的变数θ,φ来表示γ[(4)式],$P_l(\cos\gamma)$应为$S_l(\theta,\varphi)$的线性组合:

$$P_l(\cos\gamma)=\sum_{m=-l}^{l}A_mP_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}. \tag{9}$$

利用15.3节(2)式$e^{im\varphi}$的正交归一关系,16.10节(1)式$P_l^m(\cos\theta)$的正交归一关系($x=\cos\theta$),以及16.11节(3)式,得

$$A_m=(-)^m\frac{2l+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}P_l(\cos\gamma)P_l^{-m}(\cos\theta)e^{-im\varphi}d\omega, \tag{10}$$

其中$d\omega=\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$是立体角元.

但反过来,由于$P_l^{-m}(\cos\theta)e^{-im\varphi}$是方程(6)的解,可以用$S_l(\gamma,\delta)=P_l^m(\cos\gamma)e^{im\delta}$的线性组合表示为

$$P_l^{-m}(\cos\theta)e^{-im\varphi}=\sum_{m'=-l}^{l}B_{m'}P_l^{m'}(\cos\gamma)e^{im'\delta} \tag{11}$$

代入(10),注意立体角元的大小不因极轴的变换而改变,即

$$d\omega=\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=\sin\gamma\,d\gamma d\delta=d\Omega,$$

得 $$A_m=(-)^m\frac{2l+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}P_l(\cos\gamma)\sum_{m'=-l}^{l}B_{m'}P_l^{m'}(\cos\gamma)\,e^{im'\delta}$$

$$=(-)^m\frac{2l+1}{4\pi}\cdot2\pi\cdot\frac{2}{2l+1}B_0=(-)^mB_0. \tag{12}$$

B_0可以从(11)算出如下:当$\gamma=0$时,$\theta=\theta'$,$\varphi=\varphi'$,$P_l^{m'}(\cos\gamma)=P_l^{m'}(1)$. 但根据16.9节(6)式,当$m'\neq0$时,$P_l^{m'}(1)=0$,而

$P_l(1)=1$[16.6 节(6)式]. 故由(11)得

$$B_0=P^{-m}_l(\cos\theta')e^{-im\varphi'}.$$

把这结果代入(12)式，得

$$A_m=(-)^mP^{-m}_l(\cos\theta')e^{-im\varphi'},$$

再代入(9)，即得(1).

16.14 公 式 表

本章公式较多. 为了读者查用的方便，把它们整理列下：

1. 勒让德多项式的表达式：

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l}\sum_{r=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}\frac{(-)^r(2l-2r)!}{r!(l-r)!(l-2r)!}x^{l-2r} \qquad [16.1(8)]$$

$$=\frac{1}{2^l\cdot l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l. \qquad [16.2(1)]$$

2. 生成函数：

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)t^l; \qquad [16.6(5)]$$

规定当$t=0$时在方根式等于 1.

3. 对称性：

$$P_l(-x)=(-)^lP_l(x). \qquad [16.1(10)]$$

4. 特殊值：

$$P_{2n+1}(0)=0,\ P_{2n}(0)=(-)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot(n!)^2}, \qquad [16.1(11)]$$

$$P_l(1)=1,\ P_l(-1)=(-1)^l. \qquad [16.6(6)]$$

5. 连带勒让德函数(第一类)：

$$P^m_l(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)\quad(0\leqslant m\leqslant 1) \qquad [16.9(6)]$$

$$=\frac{1}{2^l\cdot l!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l(\,|m|\leqslant l) \qquad [16.11(1)]$$

[这是费瑞尔的定义；霍布森的定义多一因子$(-)^m$].

$$P_l^{-m}(x)=(-)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x). \qquad [16.11(3)]$$

6．正交归一关系：

$$\int_{-1}^{1}P_l(x)P_k(x)dx=\frac{2}{2l+1}\delta_{lk}, \qquad [16.3(10)]$$

$$\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_k^m(x)dx=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{lk}. \qquad [16.10(1)]$$

7．展开公式：

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}c_lP_l(x), \qquad [16.4(8)]$$

其中

$$c_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_l(x)dx. \qquad [16.4(9)]$$

8．递推关系：

$$(l+1)P_{l+1}-(2l+1)xP_l+lP_{l-1}=0, \qquad [16.8(2)]$$

$$P'_{l+1}=xP'_l+(l+1)P_l, \qquad [16.8(4)]$$

$$P'_{l-1}=xP'_l-lP_l, \qquad [16.8(5)]$$

$$P'_{l+1}-P'_{l-1}=(2l+1)P_l \qquad [16.8(6)]$$

$$(1-x^2)P'_l=lP_{l-1}-lxP_l; \qquad [16.8(7)]$$

$$(2l+1)xP_l^m=(l+m)P_{l-1}^m+(l-m+1)P_{l+1}^m, \qquad [16.12(1)]$$

$$(2l+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P_l^m=P_{l+1}^{m+1}-P_{l-1}^{m+1}, \qquad [16.12(2)]$$

$$(2l+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P_l^m=(l+m)(l+m-1)P_{l-1}^{m-1}-(l-m+2)(l-m+1)P_{l+1}^{m-1}, \qquad [16.12(3)]$$

$$(2l+1)(1-x^2)\frac{dP_l^m}{dx}=(l+1)(l+m)P_{l-1}^m-l(l-m+1)P_{l+1}^m. \qquad [16.12(4)]$$

如果用霍布森定义，16.12(2)和16.12(3)两个公式右边两项的位

置须对调.

9．球面谐函数：

$$S_l(\theta,\varphi)=P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi},\quad |m|\leqslant l. \qquad [16.13(7)]$$

还有一种归一化的球面谐函数$Y_{lm}(\theta,\varphi)$，在许多有关书籍和文献中都用到，介绍于下：

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=(-)^m\sqrt{\frac{(l-m)!\ 2l+1}{(l+m)!\quad 4\pi}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi},\ |m|\leqslant l;$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}Y_{lm}^*\,Y_{l'm'}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=\delta_{ll'}\delta_{mm'},$$

其中Y_{lm}^*是Y_{lm}的共轭复数，而且

$$Y_{lm}^*=(-)^mY_{l,-m}.$$

10．加法公式：

$$P_l(\cos\gamma)=\sum_{m=-l}^{l}(-)^mP_l^m(\cos\theta)P_l^{-m}(\cos\theta')e^{im(\varphi-\varphi')}$$

[16.13(1)]

$$=\sum_{m=-l}^{l}\frac{(1-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta)P_l^m(\cos\theta')\,e^{im(\varphi-\varphi')}$$

[16.13(2)]

$$=P_l(\cos\theta)P_l(\cos\theta')+2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}$$

$$\times P_l^m(\cos\theta)P_l^m(\cos\theta')\cos m(\varphi-\varphi'),$$

[16.13(3)]

其中 $\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$.

这个公式用Y_{lm}表示就是

$$Y_{l0}(\gamma)=\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\sum_{m=-l}^{l}(-)^mY_{lm}(\theta,\varphi)Y_{l,-m}(\theta',\varphi')$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\varphi) Y^{*}_{lm}(\theta',\varphi'),$$

其中$Y_{l0}(\gamma) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\gamma)$。

第十七章　特殊函数及其应用(二)·贝塞耳函数

17.1　贝塞耳(Bessel)函数$J_n(x)$

在 11.4 节中已经看到，$J_\nu(x)$是 ν 阶贝塞耳方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0 \tag{1}$$

的解. $J_\nu(x)$称为 ν 阶贝塞耳函数(第一类)，其中 ν 和 x 都可以是任何复数. $J_\nu(x)$的幂级数表达式[11.4 节(14)式]是

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!}\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu},$$

$$|\arg x|<\pi. \tag{2}$$

在 11.4 节中还证明过，当 ν 不是整数时，$J_\nu(x)$和 $J_{-\nu}(x)$ 是方程(1)的两个线性无关解.

当 $\nu=n(n=0,1,2,\cdots)$时，

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!}\frac{1}{(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \tag{3}$$

这时，$J_{-n}(x)$不再是与 $J_n(x)$线性无关的解，因为

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!}\frac{1}{\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n},$$

当 $k<n$ 时，$\Gamma(-n+k+1)=\infty$[见 9.4 节]，故

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=n}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!}\frac{1}{\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n},$$

令 $-n+k=l$，得

$$J_{-n}(x)=\sum_{l=0}^{\infty}(-)^{n+l}\frac{1}{(n+l)!}\frac{1}{l!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l+n}=(-)^nJ_n(x),\tag{4}$$

可见 $J_{-n}(x)$和 $J_n(x)$只相差一常数因子$(-)^n$. 因此，在 $\nu=n$的情形下，需要另求方程(1)的第二解. 这个问题已经在 11.4 节中完全解决了，但在 17.8 节中还要从另外的角度来讨论.

从(3)式立刻看出

$$J_n(-x)=(-)^nJ_n(x).\tag{5}$$

17.2 $J_n(x)$的振荡特性 · $J_n(x)$的零点

当 x 为实变数时，$J_n(x)$是一个衰减振荡函数. 在图 69 中画出了 $J_0(x)$和 $J_1(x)$在 $x>0$ 时的图形；$x<0$ 时的图形可以分别根据 $J_0(x)$和$J_1(x)$的对称性得到，$J_0(x)$ 是偶函数，$J_1(x)$是奇函数[见上节(5)式].

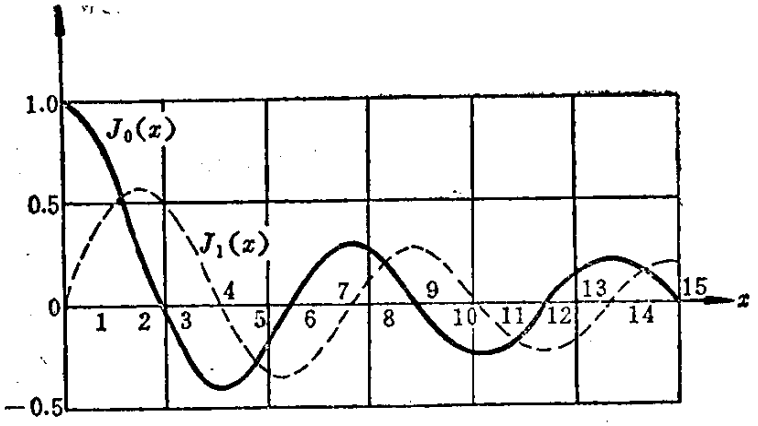


图 69

从图中可以看到，$J_0(x)$和 $J_1(x)$都有无穷多个实数零点，两者的零点互相间插.可以普遍证明①，**$J_n(x)$有无穷多个实数零点，而且只有实数零点.** 当 $n\geqslant 1$ 时，除 $x=0$ 是 $J_n(x)$的 n 阶零点外，其他零点都是一阶的；$J_0(x)$的零点$(\neq 0)$则都是一阶的. 因

① 参看，例如，王竹溪等，特殊函数概论，7.18节，或 G.N. Watson, Theory of Bessel Functions, ch.15.

为由上节(3)式有

$$J_0(0)=1,\quad J_n(0)=0\quad (n\geqslant 1). \tag{1}$$

除 $x=0$ 外其他零点都是一阶的这一结论可以根据微分方程的普遍理论来证明. 贝塞耳方程是一个二阶微分方程，在有限区域内只有一个奇点 $x=0$. 如果 $x=\mu\neq 0$ 是 $J_n(x)$的二阶或者高阶零点，则有 $J_n(\mu)=0, J_n'(\mu)=0$，因而 $J_n(x)\equiv 0$.

贝塞耳函数 $J_n(x)$的振荡特性以及它的零点的数值在许多边值问题和本征值问题中有重要应用. 下面以计算圆柱形金属空腔内电磁振荡的本征（谐振)频率为例来说明.

在圆柱形空腔内，电磁场的电场强度沿柱轴方向的分量 u 满足波动方程

$$\nabla^2 u-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0, \tag{2}$$

其中 c 是真空中的光速. 设空腔内壁是理想金属，则电场强度沿腔壁的分量等于零，故有边界条件

$$u\big|_{r=a}=0, \tag{3}$$

其中 a 是圆截面的半径. 此外，在圆柱的两端还有边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0,l}=0, \tag{4}$$

其中 z 是圆柱的轴向，l 是圆柱的长度. 条件(4)是这样得到的：由于空腔内没有电荷，故

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0\quad (u=E_z).$$

但在两端$(z=0, z=l)$ E_x 和 E_y 是与端面平行的分量$(x, y$ 是在端面上的变数)，故 E_x 和 E_y 在端面上处处等于零，而有$\frac{\partial E_x}{\partial x}=0$，$\frac{\partial E_y}{\partial y}=0$. 因此$\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

现在来求这空腔内电磁振荡的本征频率. 为此，令 $u=ve^{-i\omega t}$，

其中 ω 是待定的圆频率. 代入方程(2)和边界条件(3),(4),得

$$\nabla^2 v + k^2 v = 0,\ k = \frac{\omega}{c}, \tag{5}$$

$$v|_{r=a} = 0,\ \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=0,l} = 0. \tag{6}$$

选用柱坐标，坐标原点在柱体下底的中心，z 轴沿柱轴. 这时,方程(5)成为[参看 14.2 节(10)式]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + k^2 v = 0. \tag{7}$$

用分离变数法,令 $v(r,\varphi,z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$,由 14.3 节的结果得 Z,Φ,R 所满足的常微分方程

$$Z'' + \alpha^2 Z = 0 \qquad (0<z<l), \tag{8}$$

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0 \qquad (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi), \tag{9}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \left(\beta^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R = 0 \quad (0\leqslant r<a), \tag{10}$$

其中

$$\beta^2 = k^2 - \alpha^2. \tag{11}$$

边界条件(6)导致

$$\left.\frac{dZ}{dz}\right|_{z=0,l} = 0 \tag{12}$$

和

$$R(a) = 0. \tag{13}$$

方程(8)在边界条件(12)之下的本征值和本征函数分别是

$$\alpha^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\ Z_n(z) = \cos\frac{n\pi}{l}z \quad (n = 0,1,2,\cdots). \tag{14}$$

方程(9)在周期条件下的解[14.4] 节是

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases}\cos m\varphi, & m = 0,1,2,\cdots,\\ \sin m\varphi, & m = 1,2,\cdots.\end{cases} \tag{15}$$

当 $\beta\neq 0$ 时,对于方程(10),作变换 $x=\beta r$,即得 m 阶贝塞耳方程. 因此,方程(10)的一个解是

$$R(r) = J_m(\beta r), m = 0,1,2,\cdots. \tag{16}$$

另外一个解在 $r=0$ 是奇异的，趋于无穷大[参看 11.4 节 (30)，或者 17.8 节]，不符合空腔内电场强度为有限值的物理条件，故弃去.

由边界条件(13)有

$$R(a)=J_m(\beta a)=0, \tag{17}$$

故 βa 必须等于 $J_m(x)$的正零点 μ_{mi}，即本征值为

$$\beta_{mi}=\frac{\mu_{mi}}{a}, \tag{18}$$

其中 $m=0,1,2,\cdots,i=1,2,\cdots$；相应本征函数是

$$R_{mi}(r)=J_m\left(\mu_{mi}\frac{r}{a}\right), \tag{19}$$

其中

$$0<\mu_{m1}<\mu_{m2}<\cdots \tag{20}$$

$\mu_{m0}=0$ 虽然是 $J_m(x)(m\geqslant 1)$的零点，但因 相应的

$$R(r)=J_m\left(0\cdot\frac{r}{a}\right)\equiv 0,$$

故 $\beta=0$ 不是本征值.

最后，由(11)和(14)即可求得在空腔内的本征振荡频率 ω：

$$k^2=\beta^2+\alpha^2=\left(\frac{\mu_{mi}}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,$$

因此，

$$\omega_{nmi}=ck=c\sqrt{\left(\frac{\mu_{mi}}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}. \tag{21}$$

练习题 试论证 $\beta=0$时方程(10)在边界条件(13)及有界条件($R(0)$有界)下只有零解.

17.3 贝塞耳函数的递推关系

由 $J_\nu(x)$的幂级数表达式[11.4 节(14)式]

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!}\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu},\ |\arg x|<\pi$$

两边乘上 x^ν，对 x 求导数，得

$$\frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu)=\frac{d}{dx}\left[2^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!}\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+\nu)}\right]$$

$$=2^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!}\frac{k+\nu}{\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+\nu)-1}$$

$$=x^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!}\frac{1}{\Gamma(k+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1},$$

即
$$\frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu)=x^\nu J_{\nu-1}. \tag{1}$$

类似地可证

$$\frac{d}{dx}(x^{-\nu}J_\nu)=-x^{-\nu}J_{\nu+1}. \tag{2}$$

把(1)和(2)两式左方的导数写出,得

$$\nu J_\nu+xJ'_\nu=xJ_{\nu-1}, \tag{3}$$

$$-\nu J_\nu+xJ'_\nu=-xJ_{\nu+1}. \tag{4}$$

消去 J'_ν,得

$$J_{\nu-1}+J_{\nu+1}=\frac{2\nu}{x}J_\nu; \tag{5}$$

消去 J_ν,得

$$J_{\nu-1}-J_{\nu+1}=2J'_\nu. \tag{6}$$

由(2)式,令 $\nu=0$,得

$$J'_0=-J_1. \tag{7}$$

(5)和(6)是贝塞耳函数的两个基本递推关系. (7) 式也可以从(6)式得到,只要注意 $J_{-1}(x)=-J_1(x)$[17.1 节(4)式].

17.4 $J_n(x)$的生成函数和积分表达式

在 6.5 节的例 4 中,曾证明过下列洛浪展开式:

$$e^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n\quad(0<|t|<\infty). \tag{1}$$

左方的函数称为 $J_n(x)$的生成函数.

由(1) 式可以导出一个在数学物理中有重要应用的公式 [参

看 17.13 节]. 令 $t=ie^{i\varphi}, x=kr$, 代入(1)式, 得

$$e^{ikr\cos\varphi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(kr)i^ne^{in\varphi}$$

$$=J_0(kr)+\sum_{n=1}^{\infty}[J_n(kr)i^ne^{in\varphi}+J_{-n}(kr)i^{-n}e^{-in\varphi}]$$

$$=J_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}i^nJ_n(kr)\cos n\varphi. \tag{2}$$

在最后一步中用了 17.1 节(4)式 $J_{-n}(x)=(-)^nJ_n(x)$.

公式(2)是左方函数的傅里叶(余弦) 展开. 这公式又常代表平面波用柱面波展开, 因为左方是平面波的复数振幅因子, 右方级数中的每一贝塞耳函数在 r 很大时代表一个振幅与 $\sqrt{r}$ 成反比的波的振幅因子[参看 17.11 节].

练习题. 利用公式(1) 证明下列加法公式

$$J_n(x+y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(x)J_{n-k}(y). \tag{3}$$

由(1) 式和求洛浪展开系数的积分公式[6.4 节 (9)式], 得 $J_n(x)$的积分表达式:

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int^{(0+)}\frac{e^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})}}{t^{n+1}}dt,$$

$$n=0,\pm1,\pm2,\cdots, \tag{4}$$

积分号上面的符号表示积分路线是任意一个沿正向绕 $t=0$ 一周的围道. 如果取这围道为单位圆, 则在围道上 $t=e^{i\theta}$, 而有

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ix\sin\theta}(e^{i\theta})^{-n-1}ie^{i\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(x\sin\theta-n\theta)}d\theta \tag{5}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x\sin\theta-n\theta)d\theta, \qquad (6)$$

因为 $\sin(x\sin\theta-n\theta)$ 是 θ 的奇函数，对积分的贡献为零.

需要注意，这里的积分表示(4)，(5)或(6) 只适用于整数阶的贝塞耳函数 $J_n(x)$.

还有其他积分表达式，可参看，例如，王竹溪等，特殊函数概论，7.4节.

17.5* 加 法 公 式

在上节的练习题中我们介绍了一个关于贝塞耳函数的加法公式. 另一个重要的加法公式是

$$J_0(R)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(r_1)J_m(r_2)e^{im\theta}$$

$$=J_0(r_1)J_0(r_2)+2\sum_{m=1}^{\infty}J_m(r_1)J_m(r_2)\cos m\theta, \qquad (1)$$

其中 $R=(r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta)^{1/2}$ 是平面上任意两点 P_1 和 P_2 之间的距离(图70).

这个公式可以证明如下. 由上节(4)式有

$$J_0(R)=\frac{1}{2\pi i}\int^{(0+)} e^{\frac{R}{2}(t-t^{-1})}t^{-1}dt. \qquad (2)$$

令
$$r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta=(r_1e^{i\theta}-r_2)(r_1e^{-i\theta}-r_2),$$

故

$$\frac{R}{2}(t-t^{-1})=\frac{1}{2}\sqrt{(r_1e^{i\theta}-r_2)(r_1e^{-i\theta}-r_2)}(t-t^{-1})$$

$$=\frac{1}{2}(r_1e^{i\theta}-r_2)\sqrt{\frac{r_1e^{-i\theta}-r_2}{r_1e^{i\theta}-r_2}}(t-t^{-1}).$$

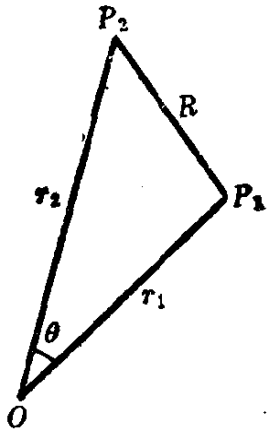


图 70

令
$$u=\sqrt{\frac{r_1e^{-i\theta}-r_2}{r_1e^{i\theta}-r_2}}t,$$

代入上式，略作演算，得

$$\frac{R}{2}(t-t^{-1})=\frac{r_1}{2}(ue^{i\theta}-u^{-1}e^{-i\theta})-\frac{r_2}{2}(u-u^{-1}).$$

因此，(2)式成为

$$J_0(R)=\frac{1}{2\pi i}\int^{(0+)} e^{\frac{r_1}{2}(ue^{i\theta}-u^{-1}e^{-i\theta})}\cdot e^{-\frac{r_2}{2}(u-u^{-1})}u^{-1}du.$$

应用上节(1)式于积分号下的第一个指数函数，得

$$J_0(R)=\frac{1}{2\pi i}\int^{(0+)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(r_1)(ue^{i\theta})^m\cdot e^{-\frac{r_2}{2}(u-u^{-1})}u^{-1}du$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(r_1)e^{im\theta}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int^{(0+)}e^{-\frac{r_2}{2}(u-u^{-1})}u^{m-1}du.$$

利用上节(4)式，得

$$J_0(R)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(r_1)J_{-m}(-r_2)e^{im\theta}.$$

再用 17.1 节(4)和(5)，即得(1)式.

公式(1)可用来计算含 $J_0(R)$的积分，例如

$$\iint J_0(R)f(r_2)r_2dr_2d\theta.$$

其中 $r_2dr_2d\theta$是平面上极坐标的面积元.

17.6 贝塞耳方程的本征值问题

在 17.2 节的应用例中，我们遇到过在第一类边界条件下贝塞

耳方程的本征值问题：要求方程的解在 $r=a$ 点为零，而在区间的另一端点 $r=0$ 有界．现在我们来较系统地讨论在第一、二、三类边界条件下贝塞耳方程的本征值问题：

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)R=0, \tag{1}$$

$$R(r)|_{r=0}\text{有界}, \tag{2}$$

$$\left[\alpha\frac{dR}{dr}+\beta R\right]_{r=a}=0, \tag{3}$$

其中 k 是待定参数，m 是固定的非负整数，α 和 β 是不同时为零的非负实数．

由方程(1)和有界条件(2)立即得

$$R(r)=J_m(kr), \tag{4}$$

其中的 k 则由边界条件(3)来确定，即 k 是超越方程

$$\alpha kJ'_m(ka)+\beta J_m(ka)=0 \tag{5}$$

的根．这样的根可以证明有无穷多个，都是单根．用 k_i $(i=1,2,\cdots)$ 表示非负数根，由小至大排列：

$$0\leqslant k_1<k_2<\cdots. \tag{6}$$

这些 k_i 值的平方就是问题的本征值，相应的本征函数为

$$R_i(r)=J_m(k_ir). \tag{7}$$

负数根的本征函数与相应正数根的本征函数最多只差一正负号[17.1节(5)式]，故不必考虑；$k_1=0$ 则只出现于第二边值问题中 $m=0$ 时．

下面来证明，本征函数 $R_i(r)$ 在区间 $0\leqslant r\leqslant a$ 中正交，权为 r [15.2节(11)式]：

$$\int_0^a R_i(r)R_j(r)rdr=\int_0^a J_m(k_ir)J_m(k_jr)rdr$$
$$=0, \quad i\neq j. \tag{8}$$

分别以 rR_j 和 rR_i 乘 R_i 和 R_j 所满足的方程(1)，有

$$R_j\frac{d}{dr}(rR_i')+\left(k_i^2-\frac{m^2}{r^2}\right)rR_jR_i=0,$$

$$R_i\frac{d}{dr}(rR_j')+\left(k_j^2-\frac{m^2}{r^2}\right)rR_iR_j=0.$$

相减，然后求积分，得

$$(k_i^2-k_j^2)\int_0^a R_iR_jrdr=\int_0^a\left[R_i\frac{d}{dr}(rR_j')-R_j\frac{d}{dr}(rR_i')\right]dr$$

$$=r(R_iR_j'-R_jR_i')\Big|_{r=0}^{r=a} \qquad (9)$$

在 $r=0$ 点，本征函数(4)及其导数都是有界的，故(9)式右方的表达式在下限之值为零.

又因 $R_i(r)$和 $R_j(r)$都满足边界条件(3)，故有

$$\alpha R_i'(a)+\beta R_i(a)=0.$$
$$\alpha R_j'(a)+\beta R_j(a)=0.$$

按所设，α 和 β 不同时为零，故必有

$$\begin{vmatrix} R_i'(a) & R_i(a) \\ R_j'(a) & R_j(a) \end{vmatrix}=R_j(a)R_i'(a)-R_i(a)\ R_j'(a)=0.$$

因此(9)式右方表达式在上限之值也是零，而有

$$(k_i^2-k_j^2)\int_0^a R_iR_jrdr=0.$$

但 $i\neq j$ 时 $k_i\neq k_j$[(6)式]，故有(8)式.

其次来计算积分

$$N_i=\int_0^a R_i^2rdr.$$

为此，以 r^2R_i' 乘 R_i 所满足的方程 (1)(使第一项成为全微分)，有

$$rR_i'\frac{d}{dr}(rR_i')+(k_i^2r^2-m^2)R_iR_i'=0.$$

求积分，得

$$\frac{1}{2}r^2R_i'^2\Big|_{r=0}^{r=a}+\int_0^a(k_i^2r^2-m^2)R_iR_i'dr=0$$

再换部求积分，得

$$\frac{1}{2}a^2[R_i'(a)]^2+\frac{1}{2}(k_i^2r^2-m^2)R_i^2\Big|_{r=0}^{r=a}-$$

$$\int_0^a k_i^2R_i^2rdr=0.$$

如果 $m\neq0$，则 $R_i(0)=J_m(0)=0$，故第二项在下限之值不论 m 是否为零都等于零；最后的积分等于 $k_i^2N_i$. 因此，

$$\begin{aligned}N_i&=\int_0^a R_i^2rdr=\int_0^a J_m^2(k_ir)rdr\\&=\frac{1}{2k_i^2}\{a^2[R_i'(a)]^2+(k_i^2a^2-m^2)[R_i(a)]^2\}\\&=\frac{a^2}{2}\left\{[J'_m(k_ia)]^2+\left(1-\frac{m^2}{k_i^2a^2}\right)J_m^2(k_ia)\right\}.\end{aligned}\tag{10}$$

(8)和(10)可以合写为正交归一关系

$$\int_0^a J_m(k_ir)J_m(k_jr)rdr=N_i\delta_{ij},\tag{11}$$

其中 N_i 由(10)式给出，k_i 是方程(5)的非负数根. 不过，$k_1=0$ 只出现于第二边值问题中 $m=0$ 的情形，这时

$$N_1=\int_0^a R_1^2rdr=\int_0^a J_0^2(0)rdr=\frac{a^2}{2}.\tag{12}$$

可以证明①，如果函数 $f(x)$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant a$ 中是连续的而且

① 参看，例如，G. N. Watson, Theory of Bessel Functions, §18.33 p. 600 (1944).

只有有限个极大和极小值，则有下列展开式：

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}b_iJ_m(k_ix),\tag{13}$$

其中

$$b_i=\frac{1}{N_i}\int_0^a f(x)J_m(k_ix)x\,dx,\tag{14}$$

级数在区间 $\delta\leqslant x\leqslant a-\delta$ 中是一致收敛的，δ 为任意正数.

17.7 应用举例——圆柱体的冷却

设一无穷长的圆柱体，半径为 a，初温为常数 u_0，表面温度维持为零，求柱体内温度的变化.

以 u 表示柱体内的温度，由 12.3 节(2)式，u 满足方程

$$u_t-\kappa\nabla^2u=0.\tag{1}$$

初值条件和边界条件分别为

$$u|_{t=0}=u_0,\tag{2}$$

$$u|_{r=a}=0.\tag{3}$$

采用圆柱坐标，柱轴方向为 z，则温度 u 与 z 和绕 z 的转角无关(因初值 u_0 是一个常数，而且圆柱假设是无穷长的)，而只是 r 和 t 的函数 $u(r,t)$. 因此，方程(1)简化为

$$u_t-\kappa\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0.\tag{4}$$

设 $u(r,t)=R(r)T(t)$，得

$$RT'-\kappa\frac{T}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)=0,$$

或

$$\frac{T'}{\kappa T}=\frac{1}{rR}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)=-k^2,$$

k^2 是常数，故 T 和 R 分别满足方程

$$T'+\kappa k^2T=0\qquad(t>0),\tag{5}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+k^2R=0\quad(0\leqslant r<a).\tag{6}$$

方程(6)是零阶贝塞耳方程，在 $r=0$ 的有界解是

$$R(r)=J_0(kr). \tag{7}$$

要这个解满足边界条件(3)，必须

$$R(a)=J_0(ka)=0, \tag{8}$$

即

$$k=\frac{\mu_i}{a} \tag{9}$$

μ_i 是 $J_0(x)$的正零点，$i=1,2,\cdots,0<\mu_1<\mu_2<\cdots$. 因此，

$$R_i(r)=J_0\left(\mu_i\frac{r}{a}\right). \tag{10}$$

把 k 的数值代入(5)式，对于每一 i 值有

$$T_i(t)=e^{-\kappa k_i^2 t}. \tag{11}$$

于是得到满足方程(1)和边界条件(3)的特解

$$u_i(r,\ t)=e^{-\kappa k_i^2 t}J_0(k_i r),\ i=1,\ 2,\ \cdots. \tag{12}$$

要得到满足初值条件(2)的解，把(12)式的特解叠加起来：

$$u(r,t)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i e^{-\kappa k_i^2 t}J_0(k_i r). \tag{13}$$

由(2) 有

$$u(r,0)=u_0=\sum_{i=1}^{\infty}c_i J_0(k_i r). \tag{14}$$

利用上节(14)式和(10)式，注意 $J_0(k_i a)=0$，得

$$c_i=\frac{u_0\int_0^a J_0(k_i r)r\,dr}{\frac{a^2}{2}[J_0'(k_i a)]^2}. \tag{15}$$

为了计算(15)式分子中的积分，令 $k_i r=x$，有

$$\int_0^a J_0(k_i r)r\,dr=k_i^{-2}\int_0^{k_i a}J_0(x)x\,dx$$

$$=k_i^{-2}\int_0^{k_i a}\frac{d}{dx}[xJ_1(x)]dx\text{[利用 17.3 节(1)式]}$$

$$=k_i^{-2}\cdot xJ_1(x)\Big|_{x=0}^{x=k_ia}=\frac{a}{k_i}J_1(k_ia).$$

代入(15),并用 17.3 节(7)式,得

$$c_i=\frac{2u_0}{k_iaJ_1(k_ia)}=\frac{2u_0}{\mu_iJ_1(\mu_i)}.$$

因此，问题的解为

$$u(r,t)=2u_0\sum_{i=1}^{\infty}e^{-\kappa\frac{\mu_i^2}{a^2}t}\cdot\frac{J_0\left(\mu_i\frac{r}{a}\right)}{\mu_iJ_1(\mu_i)},\qquad(16)$$

其中 μ_i 是 $J_0(x)$ 的零点，其数值可以查表[例如，E. Jahnke, F. Emde, F. Lösch, Tables of Higher Functions(1960), p.192; M. Abramowitz and I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Table 9.5, p. 409 (NBS, 1964)]. 表中一般还给出相应的 $J_1(\mu_i)$之值.

由于级数(16)中含指数衰减因子 $\exp\left\{-\kappa\frac{\mu_i^2}{a^2}t\right\}$,只要时间 t 不太小，级数收敛很快.

17.8* 第二类贝塞耳函数 $Y_n(x)$

在前面几节中只着重地讨论了 n 阶贝塞耳方程的一个解 $J_n(x)$. 这是由于我们所处理的边值问题的区间包含 $x=0$ 的缘故. 在 $x=0$ 这点， n 阶贝塞耳方程的第二解趋于无穷大 [参看 11.4 节(30)式],不符合有界条件.

如果问题的区间不包含 $x=0$ 这点,例如同心圆柱间的区域，或者问题的物理情况需要具有一定奇异性的解,例如有线热源、线电源等的情形，那就必须考虑第二解.

在 11.4 节中曾经得出了 n 阶贝塞耳方程的第二解 [11.4 节(30)式]. 在应用上常采用函数

$$Y_\nu(x)=\frac{\cos\nu\pi\cdot J_\nu(x)-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \tag{1}$$

为 ν 阶贝塞耳方程的第二解，并称之为**第二类贝塞耳函数**，或者，**诺埃曼**(Neumann)**函数**(以 $N_\nu(x)$表示).

当 ν 不是整数时，解 $Y_\nu(x)$与 $J_\nu(x)$ 线性无关这一点是显然的，因为 $Y_\nu(x)$是两个线性无关的解 $J_\nu(x)$ 和 $J_{-\nu}(x)$ 的线性组合. 不仅如此，当 $\nu=n$ (整数)时，(1)式右方是一个不定式[参看17.1 节(5)式]，其极限存在，而且是贝塞耳方程的解，与 $J_n(x)$ 线性无关. 下面来证明，并给出 $Y_n(x)$的具体表达式.

$$\lim_{\nu\to n}Y_\nu(x)=\frac{\dfrac{\partial}{\partial\nu}[\cos\nu\pi J_\nu(x)-J_{-\nu}(x)]_{\nu\to n}}{\left[\dfrac{\partial}{\partial\nu}\sin\nu\pi\right]_{\nu\to n}}$$

$$=\frac{\cos n\pi\left(\dfrac{\partial J_\nu}{\partial\nu}\right)_{\nu=n}-\left(\dfrac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right)_{\nu=n}}{\pi\cos n\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}\right)_{\nu=n}-(-)^n\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right)_{\nu=n}\right]. \tag{2}$$

把 $J_{\pm\nu}(x)$的级数表达式[17.1 节(2)式]代入(2) 式右方，有

$$\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}=\frac{\partial}{\partial\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!}\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)}e^{(2k+\nu)\ln\frac{x}{2}}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!}\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)}e^{(2k+\nu)\ln\frac{x}{2}}\cdot\ln\frac{x}{2}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!}\frac{-\dfrac{d}{d\nu}\Gamma(\nu+k+1)}{[\Gamma(\nu+k+1)]^2}e^{(2k+\nu)\ln\frac{x}{2}}$$

$$=J_\nu(x)\ln\frac{x}{2}-\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!}\frac{\psi(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu},$$

其中 $\psi(z)=\dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$[见9.4节练习题3]，$\psi(1)=-\gamma=-0.57721_{6}$.

γ 称为欧勒常数①. 用同样的计算有

$$\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}=-J_{-\nu}(x)\ln\frac{x}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!}\cdot\frac{\psi(-\nu+k+1)}{\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}.$$

令 $\nu\to n$，得

$$\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)_{\nu\to n}=J_n(x)\ln\frac{x}{2}-\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!\,(n+k)!}\psi(n+k+1)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n},\tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu\to n}=-J_{-n}(x)\ln\frac{x}{2}+\sum_{k=0}^{n-1}(-)^k\frac{1}{k!}\left[\frac{\psi(-\nu+k+1)}{\Gamma(-\nu+k+1)}\right]_{\nu\to n}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}+\sum_{k=n}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!}\frac{\psi(-n+k+1)}{\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}.\tag{4}$$

利用 9.4 节(6)式 $\Gamma(1-z)\,\Gamma(z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$，和该节(13)式 $\psi(1-z)=\psi(z)+\pi\cot\pi z$，令 $z=\nu-k$，得

$$\lim_{\nu\to n}\frac{\psi(-\nu+k+1)}{\Gamma(-\nu+k+1)}=\lim_{\nu\to n}\frac{\psi(\nu-k)+\pi\cot\pi(\nu-k)}{\pi\{\Gamma(\nu-k)\cdot\sin\pi(\nu-k)\}^{-1}}$$
$$=\Gamma(n-k)\cdot\cos\pi(n-k)=(-)^{n-k}(n-k-1)!\,(k\leqslant n-1).$$

又，

$$\sum_{k=n}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!}\frac{\psi(-n+k+1)}{\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

① 参看，例如，王竹溪等，特殊函数概论，3.4 节(1)，(2)式.

$$=(-)^n\sum_{l=0}^{\infty}(-)^l\frac{1}{(l+n)!}\frac{\psi(l+1)}{\Gamma(l+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l+n}$$

$$=(-)^n\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!(n+k)!}\psi(k+1)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

把上面计算的结果代入(4),并用 17.1 节(4)式,得

$$\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right)_{\nu\to n}=(-)^{n+1}J_n(x)\ln\frac{x}{2}$$

$$+(-)^n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

$$+(-)^n\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!(n+k)!}\psi(k+1)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}\qquad(5)$$

把(3)和(5)代入(2),最后得

$$Y_n(x)=\lim_{\nu\to n}Y_\nu(x)$$

$$=\frac{2}{\pi}J_n(x)\ln\frac{x}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!\,(n+k)!}[\psi(n+k+1)$$

$$+\psi(k+1)]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

$$(n=0,1,2,\cdots,|\arg x|<\pi).\qquad(6)$$

当 $n=0$ 时，须去掉右方第二项有限和.

可以看出,$Y_n(x)$与 11.4 节(30) 给出的 n 阶贝塞耳方程的第二解 $y_2(x)$是一致的. 只要在该式中 令 $y_1(x)=J_n(x)$ [于 是有 $2^n n!c_0=1$,见该节(13)式后面],把m换成n，再 取$\frac{d_0}{2^n(n-1)!}=$

$-\frac{1}{\pi}$，$2^n\cdot n!\,d_{2n}=-\frac{1}{\pi}[2\ln 2+\psi(n+1)+\psi(1)]$，然后利用 9.4 节(11)，$\psi(z+1)=\psi(z)+\frac{1}{z}$，即见 $y_2(x)=Y_n(x)$.

由 $Y_n(x)$ 的级数表达式(6) 可以看出这函数在 $x=0$ 点的奇异性：

$$Y_0(x)\sim\frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2}\qquad[\text{因 } J_0(0)=1],\tag{7}$$

$$Y_n(x)\sim-\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\quad[\text{因}J_n(0)=0,\ n\geqslant 1].\tag{8}$$

由定义(1)可以证明 $Y_\nu(x)$ 也满足 $J_\nu(x)$ 的递推关系[17.3节(1),(2),(5),(6),(7)式].

练习题. 证明

$$Y_{-n}(x)=(-)^nY_n(x)\tag{9}$$

[$Y_0(x)$,$Y_1(x)$的图形见图 71].

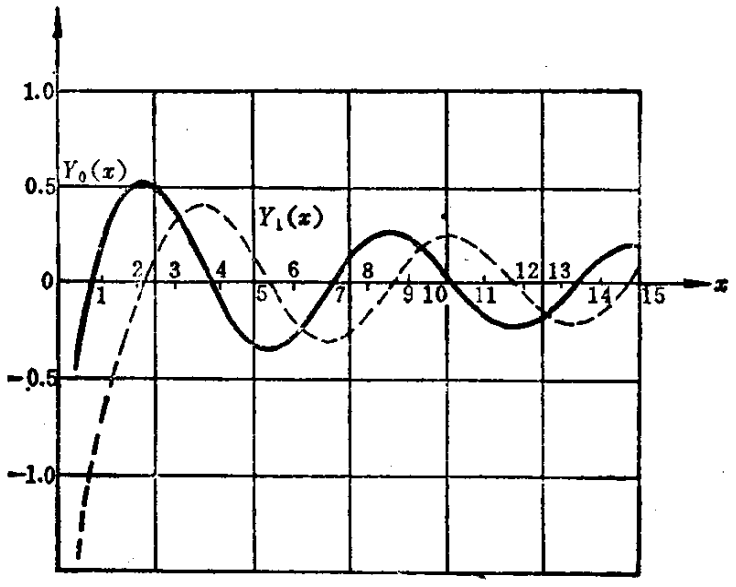


图 71

17.9* 应用举例——空心圆柱体的径向振动

设有一环状截面的圆柱体，内半径和外半径分别为 a 和 b (图

72)，内表面固定，外表面自由，求柱体作径向振动的本征频率.

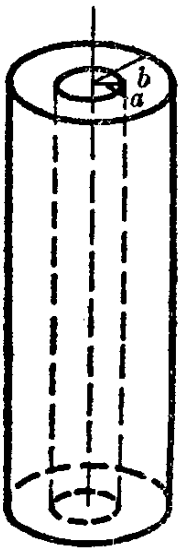


图 72

取圆柱坐标，则柱体的径向振动方程为[参看 14.2 节(24)式和(10)式]

$$u_{tt}-c^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+c^2\frac{u}{r^2}=0, \tag{1}$$

c 是柱体中纵波传播的速度. 边界条件为

$$u|_{r=a}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b}=0 \tag{2}$$

[参看 12.1 节弹性波的方程和 12.5 节(4)式自由端的边界条件].

设

$$u(r,t)=R(r)e^{-i\omega t}, \tag{3}$$

ω 是待定的本征振动圆频率. 由(1)得

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+k^2R-\frac{R}{r^2}=0,\ k=\frac{\omega}{c}\quad (a<r<b). \tag{4}$$

这是一个一阶贝塞耳方程，通解为

$$R(r)=AJ_1(kr)+BY_1(kr). \tag{5}$$

由边界条件(2) 有

$$\left.\begin{aligned} &AJ_1(ka)+BY_1(ka)=0,\\ &AkJ_1'(kb)+BkY_1'(kb)=0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

因 A 和 B 不能同时为零，不然 $R(r)$ 将恒等于零，故必须有

$$\begin{vmatrix} J_1(ka) & Y_1(ka)\\ J_1'(kb) & Y_1'(kb)\end{vmatrix}=J_1(ka)Y_1'(kb)-Y_1(ka)J_1'(kb)=0. \tag{7}$$

方程(7)的根 k_i(的平方)就是问题的本征值，而本征频率 $\omega_i=ck_i$.

关于方程 (7) 的根，可参看 M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, p. 415, Table

9.7(1964).

17.10* 最陡下降法

为了求贝塞耳函数在变数 x 之值很大时的近似表示——渐近表示[参看 11.7 节(10) 式以后]，我们扼要地介绍一下最陡下降法. 这是求渐近展开的一种重要方法.

要展开的函数具有下列积分表达式：

$$f(z)=\int_a^b g(t)e^{zh(t)}dt, \tag{1}$$

其中 $g(t)$和 $h(t)$是在一定区域中复数 t 的解析函数.

当 $z,t,g(t)$, $h(t)$都是实数时，如果 $h(t)$在积分区间中的某一点 t_0 有一极大值，则在 z(设>0) 充分大时，经过指数函数 $\exp\{zh(t)\}$的“放大”，这极大值和附近的值比起来显得异常陡峭(图73). 在这种情形下，可以用 9.6 节的拉氏方法求 $f(z)$ 在 $z\to+\infty$时的渐近表示.

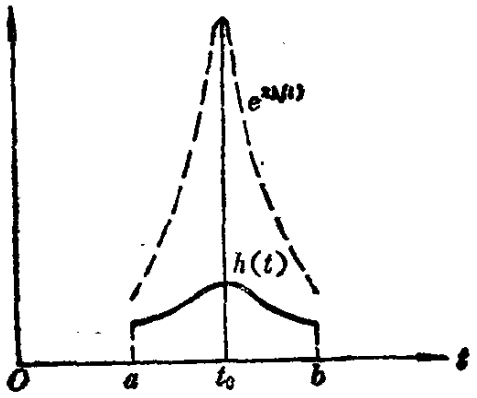


图 73

当 $h(t)$是复变解析函数时，情形要复杂得多. 首先一个问题是，决定 $\exp\{zh(t)\}$的模的大小的函数 $\mathrm{Re}\{zh(t)\}$是一个解析函数的实部，没有极大值. 这可以从一个解析函数的实部必满足拉

氏方程(2.4节)看出. 因为实部既然满足拉氏方程，则其二阶导数不可能都是负的. 其次一个问题是，$\exp\{i\mathrm{Im}[zh(t)]\}$当$|z|$很大时是一个振动极快的函数，因此，一般很难像9.6节实数情形那样求积分的近似. 下面来讨论解决这两个问题的方法. 在讨论中将假定z是正数. 因为如果z是复数$|z|e^{i\varphi}$，$\varphi=\arg z$，可以把$e^{i\varphi}$并到$h(t)$中去.

根据科希定理，可以改变(1)式中的积分路线，使它通过$h'(t)$的零点t_0，并使在路线上

$$\mathrm{Im}[h(t)]=\mathrm{Im}[h(t_0)], \tag{2}$$

即沿积分路线$h(t)$的虚部保持不变；至少，在通过t_0点的附近一小段上是如此.

方程(2)所表示的曲线具有下列两个重要性质：(i)沿着这曲线，$\mathrm{Im}[h(t)]=$常数，故$\exp\{i\mathrm{Im}[zh(t)]\}$不再是一个振动的函数. (ii)由于$h(t)$是一个解析函数，$|h'(t)|=\sqrt{u_s^2+v_s^2}$在这曲线上的每一点都有确定值，其中$u_s$和$v_s$分别代表$h(t)$的实部和虚部沿任意方向$s$的方向导数. 既然当$t$沿着曲线(2)变化时$\mathrm{Im}[h(t)]$之值不变，故$v_s=0$，而$u_s$最大，即$\mathrm{Re}[h(t)]$之值沿着曲线(2)的变化与在同一点其他方向上的变化相比是最快的. 因此曲线(2)称为**最陡路径**.

一般，通过$h'(t)$的零点t_0并满足条件(2)的曲线(即最陡路径)不止一条，而至少有两条(见下). 作为积分路线，须选其中这样的一条：$\mathrm{Re}[h(t)]$之值在t_0的两边都是下降的；这样的路线称为**最陡下降路径**. 于是，当t沿着最陡下降路径变化时，若$z\to+\infty$，则$\exp\{\mathrm{Re}[zh(t)]\}$在$t_0$点有一个很陡峭的极大值，而可以按照9.6节实数情形那样求得(1)式积分在z很大时的近似.

以C表示最陡下降路径. 如果C的端点是a和b，而且在C与(1)式中原来的积分路线之间没有被积函数的奇点，则

$$f(z)=\int_C g(t)e^{zh(t)}dt. \tag{3}$$

把 $h(t)$在 $h'(t)$的零点 t_0 附近展开：

$$h(t)=h(t_0)+\frac{h''(t_0)}{2}(t-t_0)^2+\cdots. \tag{4}$$

令 $h''(t_0)=ae^{i\theta_0}$，$\theta_0=\arg[h''(t_0)]$，并设 $a=|h''(t_0)|\neq 0$，则按(2)式，在 t_0 附近的最陡路径上，

$$\mathrm{Im}\left[\frac{h''(t_0)}{2}(t-t_0)^2+\cdots\right]=0. \tag{5}$$

令 $t-t_0=\rho e^{i\theta}$，$\theta=\arg(t-t_0)$，(5)式成为

$$\mathrm{Im}\left[\frac{a}{2}\rho^2 e^{i(2\theta+\theta_0)}+\cdots\right]=\frac{a}{2}\rho^2\sin(2\theta+\theta_0)+O(\rho^3)=0.$$

故最陡路径在通过 t_0 点时的方向 θ 满足方程

$$\sin(2\theta+\theta_0)=0, \tag{6}$$

即

$$2\theta+\theta_0=n\pi,\quad n=0,1,2,3. \tag{7}$$

可见在$h''(t_0)\neq 0$的情形下有两条最陡路径：一条与$n=0$(和$n=2$)相应，另一条与 $n=1$(和 $n=3$)相应.

在最陡路径上

$$h(t)-h(t_0)=\mathrm{Re}[h(t)-h(t_0)]$$

$$=\frac{a}{2}\rho^2\cos(2\theta+\theta_0)+O(\rho^3), \tag{8}$$

故最陡下降路径C是 $n=1$ (和 $n=3$)的那一条.在C上

$$\cos(2\theta+\theta_0)=-1,$$

$$h(t)-h(t_0)=\mathrm{Re}[h(t)-h(t_0)]=-\frac{a}{2}\rho^2+O(\rho^3). \tag{9}$$

把这结果代入(3)式，取 t_0 点附近一小段 $C_\varepsilon(t_0)$ 的积分值作为近似，得

$$f(z)\sim\int_{C_\varepsilon(t_0)} g(t)e^{z[h(t_0)-\frac{a}{2}\rho^2+O(\rho^3)]}d(\rho e^{i\theta})$$

$$\sim g(t_0)e^{zh(t_0)}\left\{e^{i(\pi-\theta_0)/2}\int_0^\varepsilon e^{-\frac{za}{2}\rho^2}\,d\rho\right.$$

$$+e^{i(3\pi-\theta_0)/2}\int_{\varepsilon}^{0} e^{-\frac{za}{2}\rho^2}\,d\rho\Big\}$$

$$=g(t_0)e^{zh(t_0)-i\frac{\theta_0}{2}}\cdot 2i\int_0^{\varepsilon} e^{-\frac{za}{2}\rho^2}\,d\rho$$

$$\sim i\sqrt{\frac{2\pi}{az}}g(t_0)e^{zh(t_0)-i\frac{\theta_0}{2}}. \tag{10}$$

在最后一步中用了 9.6 节(4)式以后的结果.

公式(10)的推导是比较粗略的，因为在计算中忽略了最陡下降路径C的其他部分对积分(3)的贡献. 此外，被积函数也取了近似值，在指数函数上略去了$O(\rho^3)$的项，而对于$g(t)$只取了它在t_0点附近展开式的头一项$g(t_0)$(假定不等于零). 关于求更精确近似的步骤，读者可参看，例如，王竹溪等，特殊函数概论，7.11 节和 7.12 节. 在下节中将利用公式(10)求出$J_n(x)$在$x\to+\infty$时的渐近表达式.

17.11* 贝塞耳函数的渐近表达式

由 17.4 节(4)有

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int^{(0+)} e^{\frac{x}{2}\cdot(t-t^{-1})}t^{-n-1}dt. \tag{1}$$

与上节(1)式比较，即见$g(t)=t^{-n-1}$，$h(t)=\frac{1}{2}(t-t^{-1})$. $h'(t)=\frac{1}{2}(1+t^{-2})$的零点是$t=\pm i$. $h''(\pm i)=\mp i=e^{\mp i\pi/2}$. 因此，$g(t_0)=g(\pm i)=(\pm i)^{-n-1}$，$a=1, h(t_0)=h(\pm i)=\pm i, \theta_0=\mp\frac{\pi}{2}$. 由此，利用上节公式(10)，把在$t=\pm i$两点附近的积分值加起来，得

$$J_n(x)\sim\frac{1}{2\pi i}\Big\{i\sqrt{\frac{2\pi}{x}}(i)^{-n-1}e^{ix+i\frac{\pi}{4}}$$

$$+i\sqrt{\frac{2\pi}{x}}(-i)^{-n-1}e^{-ix-i\frac{\pi}{4}}\Big\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\Big\{e^{ix-i(n+1)\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{4}}+e^{-ix+i(n+1)\frac{\pi}{2}-i\frac{\pi}{4}}\Big\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\Big\{e^{i\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-i\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\Big\}.$$

故
$$J_n(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),\quad x\to\infty.\ (2)$$

可以证明①，(2)式的右方确是$J_n(x)$的渐近展开式的头一项，误差的数量级是$O(x^{-\frac{3}{2}})$，而且这结果对于任何ν阶贝塞耳函数$J_\nu(x)$成立：

$$J_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(x^{-\frac{3}{2}})$$

$$(|\arg x|<\pi,\ |x|\to\infty).\qquad(3)$$

由(3)式，根据17.8节(1)式$Y_\nu(x)$的定义，得

$$Y_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(x^{-\frac{3}{2}})$$

$$(|\arg x|<\pi,\ |x|\to\infty).\qquad(4)$$

由(3)和(4)看到，当x为实数时$J_\nu(x)$和$Y_\nu(x)$有如下的振荡特性：振幅与$\sqrt{x}$成反比.

---

① 参看，例如，王竹溪等，特殊函数概论，7.10节.

17.12* 第三类贝塞耳函数$H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$·柱函数

第三类贝塞耳函数$H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$又称为**汉克耳**(Hankel)**函数**,它们的定义是

$$H_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)+iY_\nu(x), \tag{1}$$

$$H_\nu^{(2)}(x)=J_\nu(x)-iY_\nu(x) \tag{2}$$

(x为实数). 这类函数常用于波的散射问题, 因为根据上节(3)和(4),它们在$|x|\to\infty$时的渐近表达式是

$$H_\nu^{(1)}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ e^{i\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right), \tag{3}$$

$$H_\nu^{(2)}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ e^{-i\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right), \tag{4}$$

$$|\arg x|<\pi.$$

乘上时间因子$e^{-i\omega t}$, 即见当x很大时$H_\nu^{(1)}(x)e^{-i\omega t}$代表一个沿$x$的正向传播的波, $H_\nu^{(2)}(x)e^{-i\omega t}$代表一个沿$x$的负向传播的波.

由于对于任何ν(包括ν等于整数n),$J_\nu(x)$和$Y_\nu(x)$都是ν阶贝塞耳方程的线性无关解, 故$H_\nu^{(1)}(x)$和$H_\nu^{(2)}(x)$也是这个方程的线性无关解, 而且$J_\nu(x)$,$Y_\nu(x)$,$H_\nu^{(1)}(x)$,$H_\nu^{(2)}(x)$中的任意两个总是线性无关的.

当$\nu=n$(整数)时, 在$x=0$点$H_\nu^{(1)}(x)$和$H_\nu^{(2)}(x)$的奇异性与$Y_\nu(x)$的奇异性相同, 故有

$$H_0^{(1)}(x)\sim i\frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2},\quad H_n^{(1)}(x)\sim -i\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}$$

$$(n\geqslant 1), \tag{5}$$

$$H_0^{(2)}(x)\sim -i\frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2},\quad H_n^{(2)}(x)\sim i\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\quad (n\geqslant 1). \tag{6}$$

又, $J_\nu(x)$和$Y_\nu(x)$都满足17.3节(1),(2), (5),(6)等递推

关系，故$H_\nu^{(1)}(x)$,$H_\nu^{(2)}(x)$也满足同样的递推关系．通常把任意一个满足这些递推关系的函数称为**柱函数**，而以$Z_\nu(x)$来表示：

$$\frac{d}{dx}[x^\nu Z_\nu(x)]=x^\nu Z_{\nu-1}(x), \tag{7}$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu} Z_\nu(x)]=-x^{-\nu} Z_{\nu+1}(x), \tag{8}$$

$$Z_{\nu-1}(x)+Z_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x} Z_\nu(x), \tag{9}$$

$$Z_{\nu-1}(x)-Z_{\nu+1}(x)=2Z'_\nu(x), \tag{10}$$

其中(7)和(8)与(9)和(10)是等价的．

可以证明柱函数必满足贝塞耳方程．事实上，由(9),(10)两式依次消去$Z_{\nu-1}$和$Z_{\nu+1}$,得

$$Z_{\nu+1}=\frac{\nu}{x}Z_\nu-Z'_\nu, \tag{11}$$

$$Z_{\nu-1}=\frac{\nu}{x}z_\nu+Z'_\nu. \tag{12}$$

把(12)式中的ν换成$\nu+1$,得

$$Z_\nu=\frac{\nu+1}{x}Z_{\nu+1}+Z'_{\nu+1}. \tag{13}$$

把(11)式代入(13)式中,即见Z_ν满足ν阶贝塞耳方程．

但反过来，贝塞耳方程的解不一定满足递推关系(7)和(8)或(9)和(10),因此也不一定是柱函数,例如函数$J_\nu+\nu Y_\nu$.

17.13* 应用举例——电磁波在金属圆柱表面上的散射

设有平面电磁波垂直地射到一个无穷长的金属圆柱表面上，平面波的电矢量的偏振方向与柱轴平行,求被柱体散射的电磁波．

由于入射波的电矢量与柱轴平行，故在导体表面上感生的电流是轴向的,由此可以证明散射波的电矢量也是轴向的.取柱轴向

为 z 轴，则电矢量的唯一分量 $u=E_z$ 满足波动方程

$$\nabla^2 u-\frac{1}{c^2}u_{tt}=0. \tag{1}$$

考虑单色波 $u=ve^{-i\omega t}$，则 v 满足方程

$$\nabla^2 v+k^2 v=0,\ k=\frac{\omega}{c}. \tag{2}$$

设柱体表面是理想金属，则电场强度在表面上的切线分量 $u=E_z$ 应等于零，即 $u|_{r=a}=0$，因而

$$v|_{r=a}=0, \tag{3}$$

其中 a 是圆柱的半径.

把 v 分为两部分：入射波 $v^i=E_0e^{ikx}=E_0e^{ikr\cos\varphi}$ 和散射波 v^s，$v=v^i+v^s$. 因入射波 v^i 满足方程(2)，故 v^s 也满足同样的方程：

$$\nabla^2 v^s+k^2 v^s=0. \tag{4}$$

v^s 的边界条件可以由(3)式推出为

$$v^s|_{r=a}=-v^i|_{r=a}=-E_0e^{ika\cos\varphi}. \tag{5}$$

于是，问题化为在条件(5)之下求方程(4)的散射波解(时间因子为 $e^{-i\omega t}$).

采用柱坐标，则由于假定柱体是无穷长的①，v^s 与 z 无关. 可令 $v^s=R(r)\Phi(\varphi)$，代入(4)式

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v^s}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v^s}{\partial\varphi^2}+k^2v^s=0,$$

得

$$\Phi''+n^2\Phi=0\ \ (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi), \tag{6}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\left(k^2-\frac{n^2}{r^2}\right)R=0\ \ (a<r<\infty). \tag{7}$$

方程(6)的周期解是熟知的：

$$\Phi(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi,\ n=0,1,2,\cdots. \tag{8}$$

(7)式是 n 阶贝塞耳方程，它的散射波解[即由柱体向无穷远传播的波，参看上节(4)式后面]是

$$R(r)=H_n^{(1)}(kr). \tag{9}$$

① 单色波也自然是延伸至无穷的。

于是有

$$v^s=\sum_{n=0}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)H_n^{(1)}(kr). \tag{10}$$

由边界条件(5),利用17.4节(2)的展开公式,得

$$v^s|_{r=a}=-E_0e^{ika\cos\varphi}=-E_0J_0(ka)-2E_0\sum_{n=1}^{\infty}i^nJ_n(ka)\cos n\varphi$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)H_n^{(1)}(ka).$$

比较后一等式两边傅氏展开中 $\cos n\varphi$ 和 $\sin n\varphi$ 的系数,即见所有的 $B_n=0$,而

$$A_0=-\frac{E_0J_0(ka)}{H_0^{(1)}(ka)},\quad A_n=-\frac{2E_0i^nJ_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}\quad(n\geqslant1).$$

因此,

$$v^s(r,\varphi)=-\left[\frac{E_0J_0(ka)}{H_0^{(1)}(ka)}H_0^{(1)}(kr)\right.$$

$$\left.+2E_0\sum_{n=1}^{\infty}i^n\frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}H_n^{(1)}(kr)\cos n\varphi\right]. \tag{11}$$

总电场强度是

$$u=E_z=(E_0e^{ikr\cos\varphi}+v^s)e^{-i\omega t}.$$

对于括号中的第一项再用17.4节(2)的展开公式,并把(11)式代入,得

$$u=E_z$$

$$=E_0\left[\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_ni^n\frac{H_n^{(1)}(ka)J_n(kr)-J_n(ka)H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(ka)}\cos n\varphi\right]$$

$$\cdot e^{-i\omega t}, \tag{12}$$

其中 $\varepsilon_0=1,\varepsilon_n=2(n\geqslant1)$.

当波长 $\lambda\gg a$ 时,$ka=\frac{2\pi a}{\lambda}\ll1$,(12)式中级数的收敛性较

好，可用来近似地计算 E_s。对于短波，级数收敛便很慢，不适于作数值计算．在这种情形下，用变分方法可以得到较好的结果．

17.14 半奇数阶贝塞耳函数

半奇数阶贝塞耳函数的一个重要特点是可以用初等函数表达．例如，

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!}\frac{1}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}.$$

由 9.4节(8)式有$\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)=\Gamma(2k+2)2^{-2k-1}\sqrt{\pi}/\Gamma(k+1)$，故

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\,. \tag{1}$$

类似地可以证明

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\,. \tag{2}$$

普遍的 $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$可以由(1)式求出如下：由 17.3 节(1)和(2)有

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^n\{x^\nu J_\nu\}=x^{\nu-n}J_{\nu-n}, \tag{3}$$

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^n\{x^{-\nu}J_\nu\}=(-)^n x^{-\nu-n}J_{\nu+n}. \tag{4}$$

利用(4)式，令$\nu=\frac{1}{2}$，得

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=(-)^n x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{xdx}\right)^n\{x^{-\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2}}(x)\}$$

$$=(-)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{xdx}\right)^n\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}. \tag{5}$$

同样，用(3)式，令$\nu=-\frac{1}{2}$，得

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{xdx}\right)^n\left\{\frac{\cos x}{x}\right\}. \tag{6}$$

练习题. 证明

$$Y_{n+\frac{1}{2}}(x)=(-)^{n+1}J_{-n-\frac{1}{2}}(x). \tag{7}$$

17.15* 球贝塞耳函数$j_l(x)$，$n_l(x)$，$h_l^{(1)}(x)$，$h_l^{(2)}(x)$

球贝塞耳函数是方程[14.3节(10)式]

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+\left[1-\frac{l(l+1)}{x^2}\right]y=0 \tag{1}$$

的解，其中l通常等于0,1,2,···(但下面的结果不受此限制).

在14.3节中已经看到，若令$y(x)=x^{-\frac{1}{2}}v(x)$，则$v(x)$满足$l+\frac{1}{2}$阶贝塞耳方程[14.3节(12)式]：

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dv}{dx}+\left[1-\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{x^2}\right]v=0. \tag{2}$$

因此，方程(1)的解可用$l+\frac{1}{2}$阶贝塞耳函数来表示. 在物理学中现今常用的一种定义和符号是[小写字母表示方程(1)的解]：

$$j_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+\frac{1}{2}}(x), \tag{3}$$

$$n_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}Y_{l+\frac{1}{2}}(x), \tag{4}$$

$$h_l^{(1)}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}H^{(1)}_{l+\frac{1}{2}}(x), \tag{5}$$

$$h_l^{(2)}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}H^{(2)}_{l+\frac{1}{2}}(x). \tag{6}$$

若以 ψ_l 表示 $j_l, n_l, h_l^{(1)}, h_l^{(2)}$ 中的任何一个，则从贝塞耳函数的递推关系[17.3 节(5),(6)式]，可推出下列递推关系：

$$\psi_{l-1}+\psi_{l+1}=\frac{2l+1}{x}\psi_l, \tag{7}$$

$$l\psi_{l-1}-(l+1)\psi_{l+1}=(2l+1)\psi_l'. \tag{8}$$

当 l 为整数时，球贝塞耳函数可以用初等函数来表示(参看上节)：

$$j_0(x)=\frac{\sin x}{x}, j_{-1}(x)=\frac{\cos x}{x}, \tag{9}$$

$$j_l(x)=x^l\left(-\frac{d}{xdx}\right)^l\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}. \tag{10}$$

又，由 17.8 节(1)式可推出

$$n_l(x)=(-)^{l+1}j_{-l-1}(x). \tag{11}$$

由 $H_\nu^{(1,2)}(x)$ 和 $J_\nu(x), Y_\nu(x)$ 的关系[17.12 节(1),(2)式]可知

$$h_l^{(1)}(x)=j_l(x)+in_l(x), \tag{12}$$

$$h_l^{(2)}(x)=j_l(x)-in_l(x). \tag{13}$$

(这两式在 l 不是整数时也成立).由(12)和(13)，利用(9)和(10)，得

$$h_0^{(1)}(x)=\frac{e^{i\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}}{x}, \tag{14}$$

$$h_0^{(2)}(x)=\frac{e^{-i\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}}{x}. \tag{15}$$

17.16* $e^{ikr\cos\theta}$ 用勒让德多项式展开

根据勒让德多项式 $P_l(x)$ 的完备性[16.4 节(8),(9)式]，可以把 $e^{ikr\cos\theta}$ 展开成

$$e^{ikr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}c_l(kr)P_l(\cos\theta), \tag{1}$$

其中　　$c_l(kr)=\dfrac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}e^{ikrx}P_l(x)dx \quad (x=\cos\theta).$　　(2)

利用 16.2 节(1),有

$$c_l(kr)=\frac{2l+1}{2}\cdot\frac{1}{2^l\cdot l!}\int_{-1}^{1}e^{ikrx}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l dx.$$

换部求积分 l 次，得

$$\begin{aligned}c_l(kr)&=\frac{2l+1}{2^{l+1}\cdot l!}\cdot(-)^l\int_{-1}^{1}(ikr)^l e^{ikrx}(x^2-1)^l dx\\&=\frac{2l+1}{2^{l+1}\cdot l!}(-)^l(ikr)^l\int_{-1}^{1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(ikr)^m}{m!}x^m(x^2-1)^l dx\\&=\frac{2l+1}{2^{l+1}\cdot l!}(-)^l(ikr)^l\cdot 2\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(ikr)^{2s}}{(2s)!}\int_{0}^{1}x^{2s}(x^2-1)^l dx,\end{aligned}$$

因为当 m 是奇数时,被积函数是奇函数,积分值为零，而当 m 是偶数时,被积函数是偶函数.

令 $u=x^2$,利用 9.7 节(1)和(3)式,得

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{2s}(x^2-1)^l\,dx&=(-)^l\frac{1}{2}\int_0^1 u^{s-\frac{1}{2}}(1-u)^l du\\&=(-)^l\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\Gamma(l+1)}{\Gamma\left(l+s+\frac{3}{2}\right)}\end{aligned}$$

再用 9.4 节(8)式,有 $\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)=\Gamma(2s+1)2^{-2s}\sqrt{\pi}/\Gamma(s+1)$

$=(2s)!2^{-2s}\sqrt{\pi}/s!$,得

$$\int_0^1 x^{2s}(x^2-1)^l dx=\frac{(-)^l l!(2s)!\sqrt{\pi}}{2^{2s+1}\cdot s!\,\Gamma\left(l+s+\frac{3}{2}\right)}.$$

因此,

$$c_l(kr)=\frac{2l+1}{2}\left(\frac{ikr}{2}\right)^l\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(ikr)^{2s}}{2^{2s}\cdot s!}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(l+s+\frac{3}{2}\right)}$$

$$=(2l+1)i^l\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\sum_{s=0}^{\infty}(-)^s\frac{1}{s!}\frac{1}{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}+s+1\right)}$$

$$\cdot\left(\frac{kr}{2}\right)^{2s+l+\frac{1}{2}}$$

$$=(2l+1)i^l\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}J_{l+\frac{1}{2}}(kr)=(2l+1)i^l j_l(kr).$$

在最后一步中用了 17.15 节(3)式. 代入(1),最后得

$$e^{ikr\cos\theta}=\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l J_{l+\frac{1}{2}}(kr)P_l(\cos\theta)$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l(kr)P_l(\cos\theta). \qquad (3)$$

17.17* 变型(或虚宗量)贝塞耳函数

常常在一些边值问题中出现下列微分方程(参看下节的例子):

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-\left(1+\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0, \qquad (1)$$

其中 x 是实数. 很容易看出,如果令 $z=ix$, 方程(1)即化成自变数为 z 的贝塞耳方程. 因此,当 ν 不是整数时, 方程(1) 的两个线性无关解是 $J_{\pm\nu}(ix)$. 由于这个缘故,方程(1)常称为**变型(或虚宗量)贝塞耳方程**,它的解称为**变型(或虚宗量)贝塞耳函数**.

为了使在 $\nu=n$(整数)时方程(1)的解在 x 为实数时是实数,引进一个新的函数 $I_\nu(x)$:

$$\left.\begin{aligned} I_\nu(x)&=e^{-\nu\pi i/2}J_\nu(xe^{\pi i/2}) \quad \left(-\pi<\arg x\leqslant\frac{\pi}{2}\right),\\ I_\nu(x)&=e^{3\nu\pi i/2}J_\nu(xe^{-3\pi i/2}) \quad \left(\frac{\pi}{2}\leqslant\arg x<\pi\right), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其级数表达式为

$$I_\nu(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k},\ |\arg x|<\pi. \tag{3}$$

(2)式中辐角的规定法是使 J_ν 的宗量的辐角的绝对值小于 π [参看17.1节(2)式中辐角的规定]. $I_\nu(x)$称为**第一类变型(或虚宗量)贝塞耳函数.**

如果 ν 不是整数，则 $I_{\pm\nu}(x)$是方程(1)的两个线性无关解. 当 $\nu=n$(整数)时，由 17.1 节(4)，$J_{-n}(x)=(-)^nJ_n(x)$，和定义(2)，可见

$$I_{-n}(x)=I_n(x). \tag{4}$$

这时，须另求方程(1)的第二解. 引进函数

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}[I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)], \tag{5}$$

则当 $\nu\neq n$ 时，$K_\nu(x)$显然是与 $I_\nu(x)$线性无关的第二解. $K_\nu(x)$称为**第二类变型贝塞耳函数.**

$K_\nu(x)$可以用汉克耳函数表达. 把(2)式的第一式代入(5)中，得

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}[e^{\nu\pi i/2}J_{-\nu}(xe^{\pi i/2})-e^{-\nu\pi i/2}J_\nu(xe^{\pi i/2})].$$

用 17.8 节(1)式，有

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}[e^{\nu\pi i/2}\{\cos\nu\pi J_\nu(xe^{\pi i/2})-\sin\nu\pi Y_\nu(xe^{\pi i/2})\}-e^{-\nu\pi i/2}J_\nu(xe^{\pi i/2})]$$

$$=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}e^{\nu\pi i/2}(\cos\nu\pi-e^{-\nu\pi i})J_\nu(xe^{\pi i/2})$$

$$-\frac{\pi}{2}e^{\nu\pi i/2}Y_\nu(xe^{\pi i/2})$$

$$=\frac{\pi i}{2}e^{\nu\pi i/2}[J_\nu(xe^{\pi i/2})+iY_\nu(xe^{\pi i/2})]. \tag{6}$$

再用 17.12 节(1)式,即得

$$K_\nu(x)=\frac{\pi i}{2}e^{\nu\pi i/2}H_\nu^{(1)}(xe^{\pi i/2})$$

$$\left(-\pi<\arg x\leqslant\frac{\pi}{2}\right). \tag{7}$$

由于 $H_\nu^{(1)}(xe^{\pi i/2})$与 $J_\nu(xe^{\pi i/2})$线性无关,故对于 ν 的任何值,包括 $\nu=n$ 在内,$K_\nu(x)$总是与 $I_\nu(x)$线性无关的解.

练习题1. 证明

$$K_\nu(x)=-\frac{\pi i}{2}e^{\frac{-\nu\pi i}{2}}H_\nu^{(2)}(xe^{\frac{-\pi i}{2}})\left(-\frac{\pi}{2}<\arg x\leqslant\pi\right). \tag{8}$$

由(6) 式和 17.8 节(6)式可以得到 $K_n(x)$的级数表 达式:

$$K_n(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-)^k\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

$$+(-)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,(n+k)!}$$

$$\left[\ln\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\psi(n+k+1)-\frac{1}{2}\psi(k+1)\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

$$(n=0,1,2,\cdots); \tag{9}$$

当 $n=0$ 时,去掉第一项. 由此看出 $x=0$ 是 $K_n(x)$的奇点:

$$K_0(x)\sim-\ln\frac{x}{2},\quad K_n(x)\sim\frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\quad(n\geqslant1). \tag{10}$$

另一方面,由(3)式有

$$I_0(0)=1,\quad I_n(0)=0\quad(n\geqslant1), \tag{11}$$

故 $I_n(x)$在 $x=0$ 点是有界的.

又由 $J_\nu(z)$和 $H_\nu^{(1)}(z)$在$|z|\to\infty$时的渐近表达式[17.11 节(3)式和 17.12 节(3)式]可以得到 $I_\nu(x)$和 $K_\nu(x)$在 $x\to+\infty$时的渐近表达式:

$$I_\nu(x)=\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}[1+O(x^{-1})], \tag{12}$$

$$K_\nu(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}[1+O(x^{-1})]. \tag{13}$$

所以当 $x\to+\infty$时,$K_\nu(x)$是有界的,而 $I_\nu(x)$则是按指数律趋于无穷大.

$I_\nu(x)$和$K_\nu(x)$在 $x\to 0$ 和 $x\to+\infty$时的性质对于在相应的边值问题中如何选取适当的解的问题是很重要的(见下节). 在图 74 和图 75 中分别画出了 $I_0(x)$,$I_1(x)$,$K_0(x)$和 $K_1(x)$的图形.

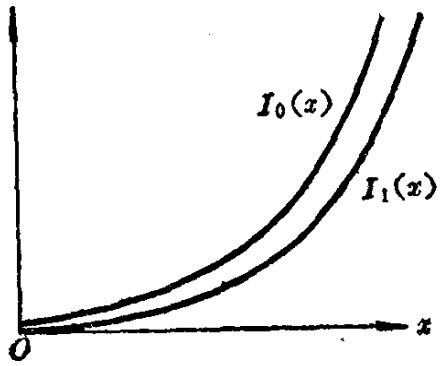


图 74

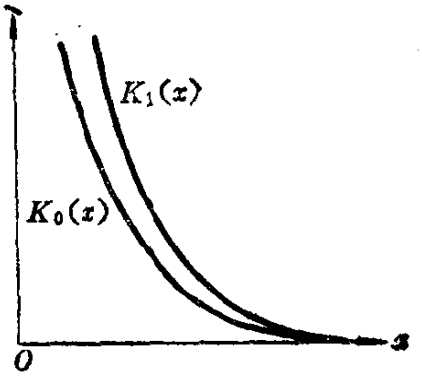


图 75

17.18* 应用举例——有限长圆柱体内的稳定温度场

设有一高为 h、半径为 a 的圆柱体,其上下底面的温度保持为零,侧面温度为 u_0(常数),求稳定时柱内温度分布.

稳定时柱内温度 u 满足拉氏方程[见 12.3 节最后一段]

$$\nabla^2 u=0. \tag{1}$$

取柱坐标,以柱轴的方向为 z (图 76),则 u 与 φ 角无关,而有

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0; \tag{2}$$

边界条件为

$$u|_{z=0}=0,\quad u|_{z=h}=0, \tag{3}$$

$$u|_{r=a}=u_0. \tag{4}$$

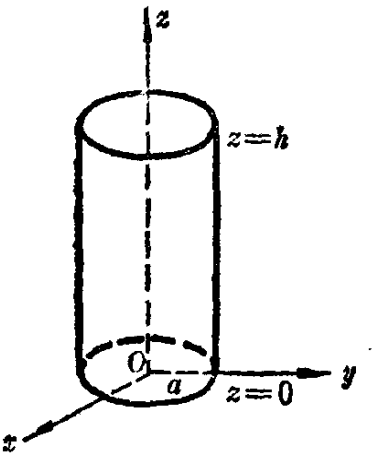


图 76

用分离变数法,令 $u(r,z)=R(r)Z(z)$,代入(2)式和齐次边界条件(3),得

$$Z''+\lambda Z=0,\quad 0<z<h, \tag{5}$$

$$Z(0)=Z(h)=0, \tag{6}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)-\lambda R=0,\quad 0\leqslant r<a. \tag{7}$$

在条件(6)之下,方程(5)的解是熟知的:

$$\lambda=\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2,\quad Z(z)=\sin\frac{n\pi}{h}z,\quad n=1,2,\cdots. \tag{8}$$

令 $k_n=n\pi/h$,则方程(7)成为

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-k^2{}_nR=0. \tag{9}$$

再令 $x=k_nr$,即见这方程是零阶变型贝塞耳方程[上节(1)式,$\nu=0$]. 因此,这方程的两个线性无关解是 $I_0(k_nr)$ 和 $K_0(k_nr)$. 由上节(10)和(11)知,当 $r\to 0$ 时 $K_0(k_nr)\to\infty$,而 $I_0(k_nr)$ 则是有界的,故应取

$$R_n(r)=I_0(k_nr),\quad n=1,2,\cdots. \tag{10}$$

要得到满足非齐次边界条件(4)的解,设

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nI_0\left(\frac{n\pi}{h}r\right)\cdot\sin\frac{n\pi}{h}z. \tag{11}$$

代入(4),得

$$u(a,z)=u_0=\sum_{n=1}^{\infty}A_nI_0\left(\frac{n\pi}{h}a\right)\sin\frac{n\pi}{h}z, \tag{12}$$

即 $A_nI_0\left(\frac{n\pi}{h}a\right)$是 u_0 的傅氏正弦展开的系数:

$$A_nI_0\left(\frac{n\pi}{h}a\right)=\frac{2}{h}\int_0^h u_0\sin\frac{n\pi}{h}z\cdot dz$$

$$=\frac{2u_0}{n\pi}\left(-\cos\frac{n\pi}{h}z\right)\Big|_0^h=\frac{2u_0}{n\pi}[1-(-)^n].$$

故

$$A_{2k}=0,$$

$$A_{2k+1}=\frac{4u_0}{(2k+1)\pi\cdot I_0\left(\frac{2k+1}{h}\pi a\right)}.$$

因此,

$$u(r,z)=\frac{4u_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi}{h}z}{2k+1}\frac{I_0\left(\frac{(2k+1)\pi}{h}r\right)}{I_0\left(\frac{(2k+1)\pi}{h}a\right)}. \tag{13}$$

当 k 很大时,由上节(12) 式有

$$\frac{I_0\left(\frac{(2k+1)\pi}{h}r\right)}{I_0\left(\frac{(2k+1)\pi}{h}a\right)}\sim\sqrt{\frac{a}{r}}e^{-\frac{(2k+1)\pi}{h}(a-r)},\ r\neq0$$

故当 $r\neq0$,a 时,(13)式中的级数收敛很快. 当$r=0$ 时,因 $I_0(0)=1$, $I_0\left(\frac{(2k+1)\pi}{h}a\right)\sim\exp\left\{\frac{(2k+1)\pi}{h}a\right\}$,故级数也收敛得很快.

17.19 可化为贝塞耳方程的微分方程

在数学物理中，有许多微分方程可以化为贝塞耳方程，例如17.15节中的方程(1)和17.17节中的方程(1)．我们可以反过来从贝塞耳方程出发，通过自变数和因变数的变换，得到各种可化为贝塞耳方程的微分方程．例如，由 ν 阶贝塞耳方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-\nu^2)y=0, \tag{1}$$

作自变数的变换

$$x=\lambda z^\beta, \tag{2}$$

得

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+[\lambda^2\beta^2z^{2\beta}-\nu^2\beta^2]y=0.$$

再作因变数的变换

$$y(z)=z^{-\alpha}u(z), \tag{3}$$

得

$$z^2\frac{d^2u}{dz^2}+(1-2\alpha)z\frac{du}{dz}+[\lambda^2\beta^2z^{2\beta}+(\alpha^2-\nu^2\beta^2)]u=0. \tag{4}$$

因此，方程(4)的解是

$$u(z)=z^\alpha Z_\nu(\lambda z^\beta), \tag{5}$$

其中 $Z_\nu(x)$ 是贝塞耳方程(1)的解．

17.20 含贝塞耳函数的积分

在许多问题中常出现含贝塞耳函数的积分．除了一些特殊情形，可以用递推关系求出不定积分来计算这种积分值之外[参看17.7节(15)式的计算]，一般都是把贝塞耳函数的积分表示或者级数表示代入问题的积分中，交换求积分的次序或者求积分与求

和的次序来计算. 下面举一个重要的例子来说明.

例. 求积分

$$I=\int_0^\infty e^{-ax}J_0(bx)\,dx,$$

其中 a 和 b 是实数, $a>0$[在这条件下,积分是收敛的,因为当 $x\to\infty$时, $J_0(bx)=O(x^{-1/2})$. 参看 17.11 节(2)式].

把 $J_0(bx)$的积分表达式[17.4 节(5)式]代入积分中,交换求积分的次序, 得

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-ax}\,dx\int_{-\pi}^{\pi}e^{ibx\sin\theta}d\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\theta\int_0^\infty e^{(-a+ib\sin\theta)x}dx,\end{aligned}$$

其中的无穷积分绝对收敛,而且对于 θ 是一致收敛的,故换序合法. 于是

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{a-ib\sin\theta}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(a+ib\sin\theta)\,d\theta}{a^2+b^2\sin^2\theta}\\&=\frac{a}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{a^2+b^2\sin^2\theta}\end{aligned}$$

最后一个等式是由于 $\sin\theta/(a^2+b^2\sin^2\theta)$是奇函数,其积分值为零. 最后的积分可用,例如, 残数来计算[参看 8.3 节], 结果为 $2\pi/a(a^2+b^2)^{1/2}$. 故

$$I=\int_0^\infty e^{-ax}J_0(bx)\,dx=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.\qquad(1)$$

另一计算方法是用 $J_0(bx)$的级数表示[17.1 节(3)式],先设 $b<a$,有

$$I=\int_0^\infty e^{-ax}\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{bx}{2}\right)^{2k}dx$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(k!)^2}\left(\frac{b}{2}\right)^{2k}\int_0^{\infty}e^{-ax}x^{2k}dx①$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{b}{2}\right)^{2k}a^{-2k-1}\cdot(2k)!$$

$$=\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{(k!)^2}\frac{(2k)!}{2^{2k}}\left(\frac{b}{a}\right)^{2k}$$

$$=\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}\left(\frac{b}{a}\right)^{2k}$$

$$=\frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

根据解析延拓原理[9.2节]，条件 $b<a$ 可取消，因为只要积分 I 存在，等式两方都不受这条件的限制.

17.21 公 式 表

为了读者查用的方便，我们把本章的公式整理列下：

1．各种贝塞耳函数：

第一类贝塞耳函数：

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{1}{k!}\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu},$$

$$|\arg x|<\pi; \qquad [17.1(2)]$$

$$J_{-n}(x)=(-)^nJ_n(x),\quad n=0,1,2,\cdots, \qquad [17.1(4)]$$

$$J_n(-x)=(-)^nJ_n(x),\quad n=0,1,2,\cdots. \qquad [17.1(5)]$$

第二类贝塞耳函数：

$$Y_\nu(x)=\frac{\cos\nu\pi\cdot J_\nu(x)-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}; \qquad [17.2(1)]$$

① 关于这里换序的合法性，参看 G. N. Watson, Theory of Bessel Functions, p 284.

$$Y_n(x)=\frac{2}{\pi}J_n(x)\ln\frac{x}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!(n+k)!}[\psi(n+k+1)+\psi(k+1)]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

$$(n=0,1,2,\cdots,|\arg x|<\pi), \qquad [17.8(6)]$$

当 $n=0$ 时，去掉第二项有限和；

$$Y_{-n}(x)=(-)^nY_n(x). \qquad [17.8(9)]$$

第三类贝塞耳函数：

$$H_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)+iY_\nu(x), \qquad [17.12(1)]$$

$$H_\nu^{(2)}(x)=J_\nu(x)-iY_\nu(x). \qquad [17.12(2)]$$

变型(虚宗量)贝塞耳函数：

$$\left.\begin{aligned}I_\nu(x)&=e^{-\nu\pi i/2}J_\nu(xe^{\pi i/2})\quad\left(-\pi<\arg x\leqslant\frac{\pi}{2}\right),\\ I_\nu(x)&=e^{3\nu\pi i/2}J_\nu(xe^{-3\pi i/2})\quad\left(\frac{\pi}{2}\leqslant\arg x<\pi\right);\end{aligned}\right\}$$

[17.17(2)]

$$I_{-n}(x)=I_n(x); \qquad [17.17(4)]$$

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}[I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)] \qquad [17.17(5)]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi i}{2}e^{\nu\pi i/2}H_\nu^{(1)}(xe^{\pi i/2})\quad\left(-\pi<\arg x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \qquad\qquad [17.17(7)]\\ -\dfrac{\pi i}{2}e^{-\nu\pi i/2}H_\nu^{(2)}(xe^{-\pi i/2})\quad\left(-\dfrac{\pi}{2}<\arg x<\pi\right);\end{cases}$$

[17.17(8)]

$$K_n(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-)^k\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

$$+(-)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(n+k)!}\left[\ln\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\psi(n+k+1)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\psi(k+1)\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

[17.17(9)]

当 $n=0$ 时，去掉第一项有限和.

半奇数阶贝塞耳函数：

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,\qquad[17.14(1)]$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x,\qquad[17.14(2)]$$

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=(-)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n\left\{\frac{\sin x}{x}\right\},$$

[17.14(5)]

$$Y_{n+\frac{1}{2}}(x)=(-)^{n+1}J_{-n-\frac{1}{2}}(x)$$

$$=(-)^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n\left\{\frac{\cos x}{x}\right\}.$$

[17.14(6),(7)]

球贝塞耳函数：

$$j_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+\frac{1}{2}}(x),\qquad[17.15(3)]$$

$$n_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}Y_{l+\frac{1}{2}}(x),\qquad[17.15(4)]$$

$$h_l^{(1)}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}H^{(1)}_{l+\frac{1}{2}}(x),\qquad[17.15(5)]$$

$$h_l^{(2)}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}H^{(2)}_{l+\frac{1}{2}}(x),\qquad[17.15(6)]$$

$$j_0(x)=\frac{\sin x}{x},\quad j_{-1}(x)=\frac{\cos x}{x},\qquad [17.15(9)]$$

$$j_l(x)=x^l\left(-\frac{d}{x\,dx}\right)^l\left\{\frac{\sin x}{x}\right\},\qquad [17.15(10)]$$

$$n_l(x)=(-)^{l+1}j_{-l-1}(x),\qquad [17.15(11)]$$

$$h_l^{(1)}(x)=j_l(x)+in_l(x),\qquad [17.15(12)]$$

$$h_l^{(2)}(x)=j_l(x)-in_l(x),\qquad [17.15(13)]$$

$$h_0^{(1)}(x)=\frac{e^{i\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}}{x},\qquad [17.15(14)]$$

$$h_0^{(2)}(x)=\frac{e^{-i\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}}{x}.\qquad [17.15(15)]$$

2．递推公式：

柱函数 $Z_\nu(x)$（包括 $J_\nu, Y_\nu, H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}$）：

$$\frac{d}{dx}[x^\nu Z_\nu(x)]=x^\nu Z_{\nu-1}(x),\qquad [17.12(7)]$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu}Z_\nu(x)]=-x^{-\nu}Z_{\nu+1}(x),\qquad [17.12(8)]$$

$$Z_{\nu-1}(x)+Z_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}Z_\nu(x),\qquad [17.12(9)]$$

$$Z_{\nu-1}(x)-Z_{\nu+1}(x)=2\,Z'_\nu(x).\qquad [17.12(10)]$$

球贝塞耳函数 ψ_l：

$$\psi_{l-1}+\psi_{l+1}=\frac{2l+1}{x}\psi_l,\qquad [17.15(7)]$$

$$l\psi_{l-1}-(l+1)\psi_{l+1}=(2l+1)\psi'_l.\qquad [17.15(8)]$$

3．展开公式（生成函数）：

$$e^{\frac{x}{2}(t-t^{-1})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n\quad(0<|t|<\infty);\qquad [17.4(1)]$$

$$e^{ikr\cos\varphi}=J_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}i^nJ_n(kr)\cos n\varphi,\qquad [17.4(2)]$$

$$e^{ikr\cos\theta}=\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,i^l J_{l+\frac{1}{2}}(kr)P_l(\cos\theta)$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l(kr)P_l(\cos\theta).\quad [17.16(3)]$$

4．奇异性和渐近展开：

$x\to 0$ 时

$J_0(0)=1,\quad J_n(0)=0\quad (n\geqslant 1)$ （非奇异的）；

[17.2(1)]

$$Y_0(x)\sim\frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2},\ Y_n(x)\sim-\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\quad (n\geqslant 1),$$

[17.8(7),(8)]

$$H_0^{(1)}(x)\sim i\frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2},\quad H_n^{(1)}(x)\sim -i\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}$$

$(n\geqslant 1)$, [17.12(5)]

$$H_0^{(2)}(x)\sim -i\frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2},\quad H_n^{(2)}(x)\sim i\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}$$

$(n\geqslant 1)$, [17.12(6)]

$I_0(0)=1,\quad I_n(0)=0\quad (n\geqslant 1)$ （非奇异的），

[17.17(11)]

$$K_0(x)\sim-\ln\frac{x}{2},\ K_n(x)\sim\frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\quad (n\geqslant 1).$$

[17.17(10)]

$x\to+\infty$ 时

$$J_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(x^{-3/2}),$$

[17.11(3)]

$$Y_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(x^{-3/2}),$$

[17.11(4)]

$$H_\nu^{(1)}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+O(x^{-3/2}),$$

[17.12(3)]

$$H_\nu^{(2)}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-i\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+O(x^{-3/2}),$$

[17.12(4)]

$$I_\nu(x)=\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}[1+O(x^{-1})],\qquad [17.17(12)]$$

$$K_\nu(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}[1+O(x^{-1})].\qquad [17.17(13)]$$

5．积分表达式：

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int^{(0+)}e^{\frac{x}{2}\left(t-t^{-1}\right)}t^{-n-1}dt$$

[17.4(4)]

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(x\sin\theta-n\theta)}\,d\theta\qquad [17.4(5)]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x\sin\theta-n\theta)d\theta$$

$$(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).\qquad [17.4(6)]$$

6．加法公式：

$$J_n(x+y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(x)J_{n-k}(y),\qquad [17.4(3)]$$

$$J_0(\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta})=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(r_1)J_m(r_2)e^{im\theta}$$

$$=J_0(r_1)J_0(r_2)+2\sum_{m=1}^{\infty}J_m(r_1)J_m(r_2)\cos m\theta.$$

[17.5(1)]

7．可化为贝塞耳方程的微分方程(例)：

$$z^2\frac{d^2u}{dz^2}+(1-2\ \alpha)z\frac{du}{dz}+[\lambda^2\beta^2z^{2\beta}+(\alpha^2-\nu^2\beta^2)]u=0.$$

[17.19(4)]

它的解是

$$u(z)=z^{\alpha}Z_{\nu}(\lambda z^{\beta}),\qquad [17.19(5)]$$

$Z_{\nu}(x)$是 ν 阶贝塞耳方程的解.

8. 含贝塞耳函数的积分：

$$\int_0^{\infty}e^{-ax}J_0(bx)\,dx=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad (a,b\text{ 实数},a>0).$$

[17.20(1)]

第十八章　格临函数

18.1 引　言

格临(Green)函数，有时又称为**源函数**或者**影响函数**，是数学物理中的一个重要概念．这概念之所以重要是由于以下的原因：从物理上看，一个数理方程表示一种特定的场和产生这种场的源之间的关系(例如热传导方程表示温度场和热源的关系，泊松方程表示静电场和电荷分布的关系，等等)，而格临函数则代表一个点源所产生的场．知道了一个点源的场，就可以用叠加的方法算出任意源的场．

举例说，静电场的电势 V 满足泊松方程

$$\nabla^2 V=-4\pi\rho, \tag{1}$$

ρ 是电荷密度．根据库仑定律，位于 r' 点的一个正的点电荷在无界空间中的 r 点产生的电势是

$$G(r,r')=\frac{1}{|r-r'|}. \tag{2}$$

由此可求得任意电荷分布 ρ 所产生的电势：

$$V(r)=\int\frac{\rho(r')}{|r-r'|}dr'=\int G(r,r')\rho(r')dr', \tag{3}$$

其中 dr' 是空间体积元 $dx'dy'dz'$ 的简写(注意它不代表 r 的微分)，本章中将常用这个符号．

(2) 式的 $G(r,r')$ 称为方程(1)左方拉氏算符 ∇^2 在无界空间中的格临函数，用它可以求出方程(1)在无界空间中的解式(3)．

18.2 拉氏算符的格临函数

在一般的数理方程问题中，要求的是满足一定边界条件和

(或)初值条件的解，相应的格临函数也就比上节举以为例的格临函数要复杂一些，因为在这种情形下，一个点源所产生的场还受到边界条件和(或)初值条件的影响，而这些影响的本身也是待定的.

例如，在一个接地的导体空腔内的 P' 点放一正的单位点电荷(图 77)，则在 P 点的电势不仅是点电荷本身所产生的场 $1/|r-r'|$，并且还要加上这个点电荷在导体内壁上感生的电荷所产生的场，而感生电荷的分布尚是未知的（知道的只是在边界上电势为零).

因此，普遍地说，格临函数是一个点源在一定的边界条件和(或)初值条件下所产生的场. 利用格临函数可求出任意分布的源所产生的场. 下面就泊松方程的第一、二、三类边值问题为例来进一步阐明格临函数的概念.

泊松方程是

$$\nabla^2 u=-4\pi\rho, \tag{1}$$

第一、二、三类边界条件可以统一地写为

$$\left[\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\right]_{\Sigma}=f, \tag{2}$$

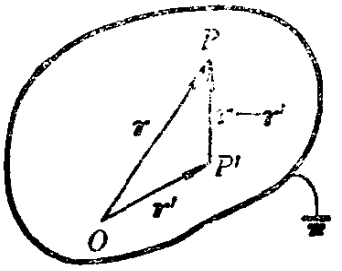


图 77

其中 α 和 β 是不同时为零的实数，f 是区域 V 的边界 Σ 上的给定函数. $\alpha=0,\beta\neq0$ 是第一类边界条件；$\alpha\neq0,\beta=0$ 是第二类边界条件；α 和 β 都不等于零是第三类边界条件[参看 125 节].

在引进格临函数之前，先要找一个能够表示点源的密度分布的函数. 点源的密度分布具有这样的特点：设点源所在的位置为 r'，则当 $r\neq r'$ 时，在 r 点的密度为零，而当 $r=r'$ 时，密度为无穷大(因点源的强度是有限值而体积为零)，但密度函数的体积分则是有限值。显然，在通常的意义下，不存在能够代表这种分布的函数. 但 10.9 节引进的 δ“函数”却正好具有这种性质. 因此可以用下列 δ 函数来表示点源：

$$\delta(r-r')=\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z'); \tag{3}$$

$$\delta(r-r')=\begin{cases}0, \text{当 } r\neq r',\\ \infty, \text{当 } r=r';\end{cases} \tag{4}$$

$$\int\delta(r-r')dr=1,\ \int f(r)\delta(r-r')dr=f(r'), \tag{5}$$

积分区域只要包含 r' 点于内即可.

以 $G(r,r')$表示位于 r' 点的单位强度的正点源在待定的（见下)边界条件下产生的场,则 $G(r,r')$作为 r 的函数应满足方程

$$\nabla^2G=-4\pi\delta(r-r'). \tag{6}$$

以 $G(r,r')$乘(1)式,$u(r)$乘(6)式,相减,然后在区域 V 中求积分，得

$$\int_V[G\nabla^2u(r)-u(r)\nabla^2G]dr$$

$$=-4\pi\int_V G\rho dr+4\pi\int_V u(r)\delta(r-r')dr.$$

对于左方的积分应用格临公式,把它化为面积分，并应用公式(5)于右方的第二个积分,移项,得

$$u(r')=\int_V G(r,r')\rho(r)dr$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma\left(G(r,r')\frac{\partial u(r)}{\partial n}-u(r)\frac{\partial G(r,r')}{\partial n}\right)d\Sigma, \tag{7}$$

其中$\frac{\partial}{\partial n}$代表沿 V 的边界 Σ 的外向法线的方向求导数.

(7)式把所要求的函数 u 用已知的密度分布函数 ρ 的积分[第一项,相当于 18.1 节中(3)式的右方]以及 u 和 $\frac{\partial u}{\partial n}$在边界 Σ 的积分表示了出来. 但是问题并没有完全解决. 因为,首先,积分中出现的格临函数 $G(r,r')$还是未知的(只知道它满足方程 (6));

此外，边界条件(2)所给的是 u(第一边值条件)或者 $\frac{\partial u}{\partial n}$(第二边值条件)在 Σ 上之值，或者是两者之间的一个线性关系（第三边值条件)，而并没有同时分别给出 u 和 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在 Σ 上之值．因此，即使是 G 已知，也还不能利用(7)式求得 u．

事实上，这两个问题是同时解决的．以第一边值问题为例，在 Σ 上的 u 值是已知的 f，如果要求 G 满足齐次的第一类边界条件 $G|_{\Sigma}=0$，则(7)式中含 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 的一项就等于零，同时 G 也完全确定，而(7)式给出

$$u(\boldsymbol{r}')=\int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}-\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} f\frac{\partial G}{\partial n}d\Sigma, \tag{8}$$

其中 G 是第一边值问题

$$\nabla^2 G=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\quad G|_{\Sigma}=0 \tag{9}$$

的解．

对于第三边值问题也有类似的结果．令 G 为第三边值问题

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2 G=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\\&\left[\alpha\frac{\partial G}{\partial n}+\beta G\right]_{\Sigma}=0\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

的解，其中 α 和 β 都不等于零．以 G 乘(2)式两边，得

$$\left[\alpha G\frac{\partial u}{\partial n}+\beta G u\right]_{\Sigma}=Gf.$$

又以 u 乘(10)的第二式，得

$$\left[\alpha u\frac{\partial G}{\partial n}+\beta G u\right]_{\Sigma}=0.$$

把这两式相减，得

$$\alpha\left[G\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G}{\partial n}\right]_{\Sigma}=Gf.$$

代入(7)式，得

$$u(r')=\int_V G(r,r')\rho(r)dr$$
$$+\frac{1}{4\pi\alpha}\int_\Sigma G(r,r')f(r)d\Sigma. \tag{11}$$

对于第二边值问题，也可以形式地用相同的方法来解决，即令 G 为第二边值问题

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2 G=-4\pi\delta(r-r'),\\&\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_\Sigma=0\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

的解，而由(7)式得

$$u(r')=\int_V G(r,r')\rho(r)dr+\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma Gfd\Sigma, \tag{13}$$

其中 $f=\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Sigma$. 但是，我们将看到，(12)的解是不存在的. 因此，在这种情形下，格临函数的概念需要修改[参看 18.4 节].

这里有一个问题需要提出来讨论，那就是(7)式[以及相应的(8)式、(11)式等]的物理诠释问题. 原来，格临函数 $G(r,r')$ 所代表的是位于 r' 点的点源在 r 点产生的场，而现在(7)式右方的第一个积分中 $\rho(r)$ 代表的是在 r 点的源，这使得解释这个积分的意义时发生困难. 但在下节中将证明 $G(r,r')=G(r',r)$ [18.1 节(2)式的 G 是一个具体例子]，因此，(7)式可写为

$$u(r')=\int_V G(r',r)\rho(r)dr$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma\left[G(r',r)\frac{\partial u(r)}{\partial n}\right.$$
$$\left.-u(r)\frac{\partial G(r',r)}{\partial n}\right]d\Sigma.$$

再把 r 和 r' 对调，得

$$u(r)=\int_V G(r,r')\rho(r')dr'+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\left[G(r,r')\frac{\partial u(r')}{\partial n}-u(r')\frac{\partial G(r,r')}{\partial n}\right]d\Sigma'. \qquad (14)$$

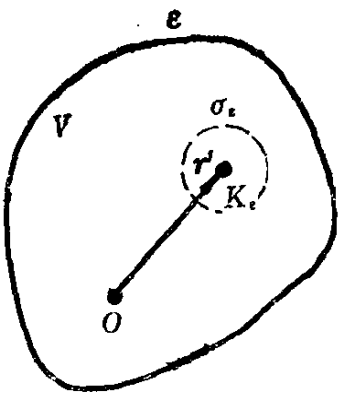


图 78

这个式子的物理诠释就很清楚了：右方第一个积分代表在区域 V 中体分布源 $\rho(r')$ 在 r 点产生的场的总和，第二个积分则是在边界上的源所产生的场. 这两种影响都是由同一格临函数（或其导数）给出的.

应当说明，在得到(7)式时，我们用了格临公式把体积分化成面积分，这在通常情形下要求 ∇^2G(和 ∇^2u) 是积分区域内的连续函数. 但由(6)式立刻看到这个条件是不满足的，因为在区域 V 内的 $r=r'$ 点，∇^2G 具有 δ 函数的奇异性.

严格的算法是这样的，先从区域 V 中挖去包含 $r=r'$ 点于内的一个小部分 K_ε，K_ε 的边界面为 σ_ε (图 78)，则在 $V-K_\varepsilon$ 的区域中 ∇^2G 是连续的 ($=0$). 因此，可应用格临公式，得

$$\int_{V-K_\varepsilon}(G\nabla^2u-u\nabla^2G)dr=\int_{\Sigma}\left(G\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\Sigma+\int_{\sigma_\varepsilon}\left(G\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma,$$

其中 n 表示区域 $V-K_\varepsilon$ 的外向法线.

如果形式地令

$$\int_{\sigma_\varepsilon}\left(G\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma=-\int_{\Sigma_\varepsilon}(G\nabla^2u-u\nabla^2G)dr \qquad (15)$$

(其中的负号是由于对 K_ε 来说 n 为内向法线)，并把它移到前式左方，与原来的体积分 $\int_{V-K_\varepsilon}$ 合并，即得与通常无异的格临公式：

$$\int_{V}(G\nabla^2u-u\nabla^2G)dr=\int_{\Sigma}\left(G\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\Sigma.$$

因此应当注意，在具体计算包含 ∇^2G 的奇点于内的体积分时，奇点附近那部分的体积分必须用包围这奇点的一个相应面积分来代替[即用(15)式].

18.3 格临函数的对称性

鉴于亥姆霍兹(Helmholtz)方程

$$\nabla^2 u+\lambda u=-f \tag{1}$$

在应用中的重要性，同时泊松方程又是它的一个特例($\lambda=0$)，下面我们证明这个方程，或者更确切一些，算符 $\nabla^2+\lambda$ 的格临函数的对称性：

$$G(r,r')=G(r',r). \tag{2}$$

算符 $\nabla^2+\lambda$ 的格临函数 $G(r,r')$，作为 r 的函数，满足方程

$$\nabla^2 G+\lambda G=-\delta(r-r'). \tag{3}$$

仍设边界条件为

$$\left[\alpha\frac{\partial G}{\partial n}+\beta G\right]_\Sigma=0 \tag{4}$$

α 和 β 不同时为零.

由(3)有

$$\nabla^2 G(r,r')+\lambda G(r,r')=-\delta(r-r'),$$
$$\nabla^2 G(r,r'')+\lambda G(r,r'')=-\delta(r-r''),$$

其中 $G(r,r')$和 $G(r,r'')$，作为 r 的函数，都满足边界条件(4). 以 $G(r,r'')$乘第一式，$G(r,r')$乘第二式，把结果相减，然后求积分，得

$$\begin{aligned}&\int_V[G(r,r'')\nabla^2 G(r,r')-G(r,r')\nabla^2 G(r,r'')]dr\\&=-\int_V[G(r,r'')\delta(r-r')-G(r,r')\delta(r-r'')]dr\\&=-[G(r',r'')-G(r'',r')].\end{aligned}$$

在最后一步中用了 18.2 节(5)式. 把左方的体积分变为面积分，得

$$G(r'',r')-G(r',r'')$$

$$=\int_{\Sigma}\left[G(r,r'')\frac{\partial G(r,r')}{\partial n}-G(r,r')\frac{\partial G(r,r'')}{\partial n}\right]_{\Sigma}d\Sigma \qquad (5)$$

Σ是V的边界面. 根据(4)式,在Σ上有

$$\alpha\frac{\partial G(r,r')}{\partial n}+\beta G(r,r')=0,$$

$$\alpha\frac{\partial G(r,r'')}{\partial n}+\beta G(r,r'')=0.$$

但α和β不同时为零,故必须

$$\left[G(r,r'')\frac{\partial G(r,r')}{\partial n}-G(r,r')\frac{\partial G(r,r'')}{\partial n}\right]_{\Sigma}=0.$$

代入(5)式,得右方为零. 这就证明了(2)式.

格临函数的对称性有很重要的物理意义, 即位于P'点的点源,在一定的边界情况下在P点产生的场,等于位于P点的同样强度的点源, 在相同的边界情况下在P'点产生的场(图79). 这种性质在物理学中又常称为**倒易性**

这样的对称性并非所有格临函数都具有[参看18.8节],而是与边值问题是否自伴[15.1节]有关.

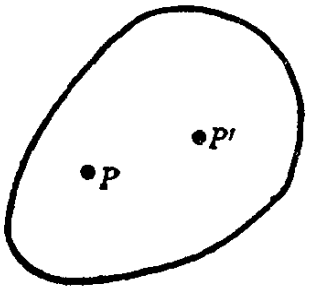


图 79

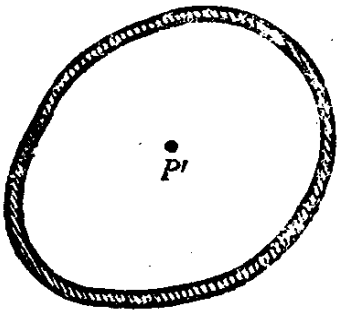


图 80

18.4* 广义格临函数

在18.2节中曾经指出过,边值问题

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2G=-\delta(r-r'),\\&\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Sigma}=0\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

的解是不存在的. 这一结论很容易从这个方程和边界条件在热传导问题中的物理意义看出. 如图 80 所示，(1)式中的方程代表一个稳定的温度场，场中 P' 点(r')有一个点热源[参看 12.3 节(4)式]，而(1)式中的边界条件则表示边界是绝热的[参看 12.5 节(8)式].但这样的温度场不可能是稳定的,因为从点源出来的热量既然不能通过(绝热的)边界散走，势必会使物体内部的温度不断升高. 对于第一和第三类边界条件,这种情况不会发生,因为在这两类边界条件下,物体与外界都有热量的交换,是可以达到稳定状态的.

下面从更为普遍的角度来讨论格临函数存在的必要条件. 仍考虑亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 u+\lambda u=-f \tag{2}$$

在齐次的第一、二、三类边界条件

$$\left[\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\right]_{\Sigma}=0 \tag{3}$$

之下的问题. 我们将看到,在条件(3)之下,非齐次方程(2)是否有解与相应齐次方程

$$\nabla^2 u+\lambda u=0 \tag{4}$$

在同样边界条件下有无非零解有关. 如果齐次方程(4)在条件(3)之下有非零解，即 λ 是算符 $-\nabla^2$ 的本征值,则非齐次方程(2)就不是对于任何函数 f 都有满足条件(3)的解.

以 u_0 表示齐次方程(4)在条件(3)之下的非零解，即 u_0 是本征函数,满足

$$\nabla^2 u_0+\lambda u_0=0, \tag{5}$$

$$\left[\alpha\frac{\partial u_0}{\partial n}+\beta u_0\right]_{\Sigma}=0. \tag{6}$$

以 u_0 乘(2)式，u 乘(5)式,相减,然后求积分,得

$$\int_V [u_0\nabla^2 u - u\nabla^2 u_0]d\boldsymbol{r} = \int_\Sigma \left[u_0\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial u_0}{\partial n}\right]d\boldsymbol{\Sigma}$$
$$= -\int_V f u_0 d\boldsymbol{r}.$$

由边界条件(3)和(6)有(因 α 和 β 不同时为零)

$$\left[u_0\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial u_0}{\partial n}\right]_\Sigma = 0.$$

因此得

$$\int_V f u_0 d\boldsymbol{r} = 0. \tag{7}$$

这就是在 λ 为本征值时,非齐次方程(2)有解的必要条件:**非齐次项 f 必须与本征函数 u_0 正交**(读者不妨把这结果与线性代数中的类似情形比较一下).

现在回过来讨论格临函数的问题. 方程和边界条件是

$$\nabla^2 G + \lambda G = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \tag{8}$$

$$\left[\alpha\frac{\partial G}{\partial n} + \beta G\right]_\Sigma = 0. \tag{9}$$

由上面所得结果知道,如果 λ 是本征值,相应本征函数是 $u_0(\boldsymbol{r})$,则必须

$$\int_V u_0(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r} = u_0(\boldsymbol{r}') = 0, \tag{10}$$

但这是与 $u_0(\boldsymbol{r})$ 为本征函数(非零解)矛盾的. 因此,在这种情形下,格临函数不存在.

练习题 1 试应用上面的结果说明(1)式的格临函数不存在.

提示:$u \equiv C \neq 0$ 是拉氏方程 $\nabla^2 u = 0$ 在边界条件 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Sigma = 0$ 之下的解.

在 λ 是本征值的情形下,仍可引进格临函数,只要把方程(8)的右方改变一下,使右方的函数与本征函数 u_0(假定是唯一的)正交. 例如,令 G 满足方程

$$\nabla^2 G + \lambda G = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + c u_0(\boldsymbol{r}) \tag{11}$$

和边界条件(9),其中 u_0 是与 λ 相应的本征函数,并取 c 使

$$\int_V u_0(r)[-\delta(r-r')+cu_0(r)]dr=0,$$

即
$$c=\frac{\int_V u_0(r)\delta(r-r')dr}{\int_V[u_0(r)]^2dr}=\frac{u_0(r')}{\int_V[u_0(r)]^2dr}. \tag{12}$$

如果 $u_0(r)$是归一的, $\int_V[u_0(r)]^2dr=1$,则 $c=u_0(r')$,而G所满足的方程为

$$\nabla^2G+\lambda G=-\delta(r-r')+u_0(r')u_0(r). \tag{13}$$

但是,满足方程(13)和边界条件(9)的解不是唯一的,可以任意加上相应齐次方程的解$A(r')u_0(r)$而仍然满足方程(13)和(9).因此,通常还要求G与$u_0(r)$正交:

$$\int_V G(r,r')u_0(r)dr=0. \tag{14}$$

这样,G就是唯一的了.

由(13),(9)和(14)确定的函数G称为**广义格临函数**.利用广义格临函数,可以如前得到普遍边值问题

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2u+\lambda u=-f,\\&\left[\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\right]_\Sigma=g\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

的解,其中 λ 是本征值.

练习题 2. 利用广义格临函数求问题(15)的解.

练习题 3. 如果对应于一个本征值λ,有 p 个本征函数$u_1(r),u_2(r),\cdots u_p(r)$,广义格临函数如何确定?

18.5 无界区域的格临函数·基本解

从 18.2 节的讨论看到,对于一个普遍的边值问题,只要求出相应的格临函数,问题的解即可用积分的形式表示出来.求格临

函数的问题虽然本身也是一个边值问题，但比较特殊，边界条件总是齐次的，方程右方是 δ 函数(除非需要用广义格临函数，见上节)，这比普遍问题要简单，特别是关于无界区域的情形，得到的解一般是有限形式[参看 18.1 节(2)式]. 下面以二维波的散射问题为例来说明.

二维的波动方程是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0.$$

考虑单色波，设 $u(x,y,t)=v(x,y)e^{-i\omega t}$，得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+k^2 v=0,\quad k=\frac{\omega}{c}. \tag{1}$$

方程(1)的相应格临函数 G 满足方程

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}+k^2 G=-\delta(x-x')\delta(y-y'), \tag{2}$$

(x',y')是点源(更准确一些说，是无穷长的线源)所在的位置.

如果选点源所在的点为坐标系的原点，则由于区域是无界的，点源所产生的场应当与方向无关，而只是距离 r 的函数. 因此，如果取极坐标(r,φ)，则 G 只是 r 的函数，而 G 的方程变成一个常微分方程. 这是求无界区域的格临函数问题特别简单的原因.

当 $r\neq 0$ 时，G 满足齐次方程

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dG}{dr}\right)+k^2 G=0\quad (r\neq 0). \tag{3}$$

这是一个零阶贝塞耳方程，它的两个线性无关解在我们所讨论的散射问题中可取为 $H_0^{(1)}(kr)$和 $H_0^{(2)}(kr)$ [参看 17.12 节 (4) 式下面]，其中 $H_0^{(1)}(kr)$与因子 $e^{-i\omega t}$ 合起来在 r 很大时代表一个由原点向无穷远处散射的柱面波. 因此，

$$G(r)=AH_0^{(1)}(kr)\quad (r\neq 0), \tag{4}$$

其中 A 是常数，需要由方程(2)所表示的 G 的奇异性来确定.

以 $dxdy$ 乘(2)式两边，求积分，积分区域包含(x',y')点，例

如是以(x',y')点为圆心、半径等于ε的圆K_ε(随后$\varepsilon\to 0$)，则由δ函数的积分性质[18.2节(5)式]，有

$$\iint_{K_\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}+k^2 G\right)dxdy=-1. \tag{5}$$

由于积分区域包含被积函数的奇点$x=x',y=y'$，即$r=0$，故按18.2节(15)式(令其中的$u\equiv 1$)，应写

$$\iint_{K_\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right)dxdy=\oint\frac{\partial G}{\partial n}ds=\int_0^{2\pi}\left[r\frac{dG}{dr}\right]_{r=\varepsilon}d\varphi$$

$$=2\pi\varepsilon A\frac{dH_0^{(1)}(kr)}{dr}\bigg|_{r=\varepsilon}\sim 2\pi\varepsilon A\cdot i\frac{2}{\pi\varepsilon}\to 4Ai.\ \text{当}\ \varepsilon\to 0,$$

其中用了17.12节(5)式.

再用17.12节(5)式，得

$$\iint_{K_\varepsilon}G dxdy\sim\int_0^{\varepsilon}\int_0^{2\pi} i\frac{2}{\pi}\ln\frac{kr}{2}\cdot r\,dr\,d\varphi$$

$$=4i\int_0^{\varepsilon}\ln\frac{kr}{2}\cdot r\,dr\to 0,\ \text{当}\ \varepsilon\to 0.$$

因此，由(5)式得

$$4Ai=-1,\text{即}\ A=\frac{i}{4},$$

而

$$G(r)=\frac{i}{4}H_0^{(1)}(kr)\quad(r\neq 0). \tag{6}$$

如果原点不取在r'点而是任意的O点(图81)，则

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$$

$$=\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\varphi}), \tag{7}$$

其中φ是矢量$\boldsymbol{r}$与$\boldsymbol{r}'$之间的夹角.

练习题 1. 证明一维和三维亥姆霍兹方程散射问题的格临函数分别为

$$G(x,x')=\frac{i}{2k}e^{ik|x-x'|} \tag{8}$$

和

$$G(r,r')=\frac{e^{ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|}, \tag{9}$$

时间因子均设为 $e^{-i\omega t}$.

基本解 无界区域的格临函数常称为相应方程的基本解.

练习题 2. 证明二维拉氏方程的基本解是

$$G(r)=2\ln\frac{1}{r}+C, \tag{10}$$

即 G 满足方程 $\nabla^2G=-4\pi\delta(x-x')\delta(y-y')$,其中 C 是任意常数.

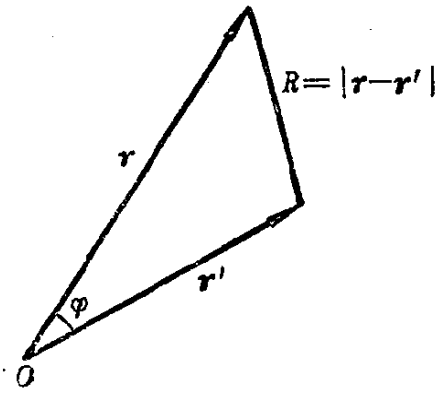


图 81

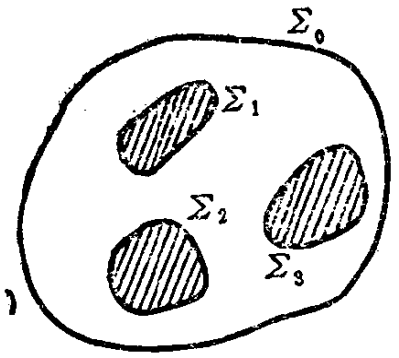


图 82

一个普遍边值问题的格临函数 G 可以分为两部分:

$$G=G_0+G_1, \tag{11}$$

其中 G_0 是基本解,具有奇异性,满足含 δ 函数的非齐次方程,G_1 则满足相应的齐次方程和一定的边界条件(见下),在整个区域内是正规的,无奇异性. 例如,亥姆霍兹方程第一边值问题的格临函数 G 满足

$$\nabla^2G+k^2G=-\delta(r-r'), \tag{12}$$

$$G|_\Sigma=0, \tag{13}$$

其中 $\Sigma=\Sigma_0+\Sigma_1+\cdots$ 是区域的边界(图 82).

令 G_0 表示基本解,则 G_1 满足齐次方程

$$\nabla^2 G_1 + k^2 G_1 = 0 \tag{14}$$

和边界条件

$$G_1|_\Sigma = (G - G_0)|_\Sigma = -G_0|_\Sigma. \tag{15}$$

如果基本解已求出，则上式的 $G_0|_\Sigma$ 便是已知函数.

把 G 分成两部分的好处是，其中的奇异部分 G_0 一般可以用有限形式表达，而正规部分 G_1 如果用级数来表示，其收敛性一般比 G 本身的级数表示的收敛性要好，这是由于 G 所含的奇异部分 G_0 已被分了出去的缘故.

18.6* 用正交函数组展开求格临函数

用正交函数组展开是求有界区域格临函数的一个重要方法. 下面举一个例子来说明这种方法. 我们的问题是求矩形区域 $0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b$ 内拉氏方程第一边值问题的格临函数. 这个格临函数满足下列方程和边界条件[见 18.2 节]：

$$\nabla^2 G \equiv \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = -\delta(x - x')\delta(y - y')$$

$$(0 < x < a, 0 < y < b), \tag{1}$$

$$G\Big|_{\substack{x=0,\,x=a \\ y=0,\,y=b}} = 0 \tag{2}$$

(注意这里方程的右方没有 4π 这个因子).

函数

$$\Phi_{mn}(x, y) = \sin\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y \quad (m, n = 1, 2, \cdots) \tag{3}$$

是满足边界条件(2)的一组正交函数；正交归一关系为

$$\int_0^b \int_0^a \Phi_{mn}(x, y)\Phi_{m'n'}(x, y)\,dx\,dy = \frac{ab}{4}\delta_{mm'}\delta_{nn'}. \tag{4}$$

把要求的格临函数用这组正交函数展开：

$$G(x,y;x',y')=\sum_{m,n}g_{mn}(x',y')\Phi_{mn}(x,y). \tag{5}$$

代入方程(1),得

$$\begin{aligned}\nabla^2G&=\sum_{m,n}g_{mn}(x',y')\nabla^2\Phi_{mn}(x,y)\\&=-\sum_{m,n}g_{mn}(x',y')\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]\Phi_{mn}(x,y)\\&=-\delta(x-x')\delta(y-y').\end{aligned} \tag{6}$$

以 $\Phi_{m'n'}$ 乘上式两边，求积分,应用关系(4) 和 δ 函数的积分性质[18.2节(5)式],有

$$\begin{aligned}&g_{mn}(x',y')\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]\frac{ab}{4}\\&=\int_0^b\int_0^a\Phi_{mn}(x,y)\delta(x-x')\delta(y-y')dxdy\\&=\Phi_{mn}(x',y'),\end{aligned}$$

并由此得

$$g_{mn}(x',y')=\frac{4}{\pi^2ab}\frac{1}{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}\Phi_{mn}(x',y'),$$

而

$$\begin{aligned}&G(x,y;x',y')\\&=\frac{4}{\pi^2ab}\sum_{m,n}\frac{\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\sin\frac{m\pi}{a}x'\sin\frac{n\pi}{b}y'}{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}.\end{aligned} \tag{7}$$

从上面的做法中我们看到,正交函数组$\{\Phi_{mn}\}$不能随意选取.

Φ_{mn}除了要满足边界条件之外，还须满足下列方程：

$$\nabla^2\Phi_{mn}=-\lambda_{mn}\Phi_{mn}, \tag{8}$$

其中 λ_{mn} 是一个常数. 因为只有在这条件下 (6) 式才成立而可以应用正交关系把系数 g_{mn} 分开求出.

上面得到的二重级数(7)是收敛的①，但它收敛得很慢，不宜用于求普遍问题的解式中[18.2节(8)式].

另外一种展开方法是用一个变数的正交函数组 [参看 13.3 节]

$$\varphi_m(x)=\sin\frac{m\pi}{a}x,\quad m=1,2,\cdots; \tag{9}$$

正交归一关系为

$$\int_0^a \varphi_m\varphi_{m'}dx=\frac{a}{2}\delta_{mm'}. \tag{10}$$

这组函数满足边界条件 $\varphi_m(0)=\varphi_m(a)=0$，而且也符合(8)式的要求：$\nabla^2\varphi_m=-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\varphi_m$.

设格临函数的展开式为

$$G(x,y;x',y')=\sum_m g_m(y;x',y')\varphi_m(x). \tag{11}$$

代入(1)，得

$$\sum_m(g_m''-k_m^2g_m)\varphi_m(x)=-\delta(x-x')\delta(y-y'), \tag{12}$$

其中 g_m'' 是对变数 y 的二阶导数，$k_m=\frac{m\pi}{a}$.

以 $\varphi_{m'}(x)$ 乘(12)式两边，求积分，利用正交关系(10) 和 δ 函数的积分性质，得

① 参看R. 柯朗，D. 希伯尔特，数学物理方法，卷 I，中译本第 296 页.

$$g''_m - k_m^2 g_m = -\frac{2}{a}\sin k_m x' \cdot \delta(y-y'). \tag{13}$$

相应边界条件为

$$g_m(0)=0,\quad g_m(b)=0, \tag{14}$$

这可以从(11)式代入 (2)式求得.

去掉下标m，现在来求下列边值问题的解：

$$g''-k^2 g = C\delta(y-y'), \tag{15}$$

$$g(0)=g(b)=0. \tag{16}$$

这个问题的解可以用变动参数法来求. 下面介绍另一种求法，这种方法有典型性(可与上节无界区域格临函数的求法比较)，计算也比变动参数法简单.

当 $y\neq y'$ 时，方程(15)变为齐次的，通解为

$$g(y)=A\,\mathrm{sh}ky + B\,\mathrm{ch}ky.$$

要满足边界条件 $g(0)=0$，必须 $B=0$，即 $g(y)=A\mathrm{sh}ky$. 但是这个解不能满足另一端的条件 $g(b)=0$. 这个条件要求

$$A\,\mathrm{sh}kb + B\,\mathrm{ch}kb = 0,$$

即

$$A = -B\frac{\mathrm{ch}kb}{\mathrm{sh}kb},$$

而有

$$g(y)=B\left(\mathrm{ch}ky - \frac{\mathrm{ch}kb}{\mathrm{sh}kb}\mathrm{sh}ky\right)$$

$$=B'\mathrm{sh}k(b-y).$$

因此，方程(15)在边界条件(16) 之下的解可表为

$$g(y)=\begin{cases} A\,\mathrm{sh}ky & (y<y'),\\ B\,\mathrm{sh}k(b-y) & (y>y'),\end{cases}$$

其中 A 和 B 待定.

函数 $g(y)$ 在 $y=y'$ 点应当是连续的，否则 $g'(y)$ 在该点为无穷大，这与方程(15)的奇异性不符(δ函数的积分值是有限的). 故有

$$A\,\mathrm{sh}ky'=B\,\mathrm{sh}k(b-y'),$$

而
$$g(y)=\begin{cases}A\mathrm{sh}ky & (y<y'),\\ A\dfrac{\mathrm{sh}ky'}{\mathrm{sh}k(b-y')}\mathrm{sh}k(b-y) & (y>y').\end{cases}\tag{17}$$

要确定 A，把(15)式两边乘上 dy，在 y' 点附近求积分，有

$$\int_{y'-\varepsilon}^{y'+\varepsilon}g''dy-k^2\int_{y'-\varepsilon}^{y'+\varepsilon}g\,dy=C.$$

令 $\varepsilon\to0$，则因 g 连续，左方第二个积分趋于零，而得

$$g'|_{y=y'+0}-g'|_{y=y'-0}=C.\tag{18}$$

这表示 $g(y)$的一阶导数在 $y=y'$ 点有一有限跳跃［参看 10.9 节练习题4］.

由(18)即可定出(17)式中的 A：

$$-Ak\frac{\mathrm{sh}ky'}{\mathrm{sh}k(b-y')}\mathrm{ch}k(b-y')-Ak\mathrm{ch}ky'=C,$$

$$A=-\frac{C}{k\,\mathrm{sh}ky'\mathrm{ch}k(b-y')+\mathrm{sh}k(b-y')\mathrm{ch}ky'}$$

$$=-\frac{C}{k}\,\frac{\mathrm{sh}k(b-y')}{\mathrm{sh}kb}.$$

故
$$g(y)=\begin{cases}-\dfrac{C}{k\mathrm{sh}kb}\mathrm{sh}k(b-y')\mathrm{sh}ky & (y<y'),\\ -\dfrac{C}{k\mathrm{sh}kb}\mathrm{sh}ky'\mathrm{sh}k(b-y) & (y>y'),\end{cases}\tag{19}$$

而方程(13)在边界条件(14)之下的解是

$$g_m(y)=\frac{2\sin k_mx'}{k_ma\,\mathrm{sh}k_mb}\cdot\begin{cases}\mathrm{sh}k_m(b-y')\mathrm{sh}k_my & (y<y'),\\ \mathrm{sh}k_my'\mathrm{sh}k_m(b-y) & (y>y').\end{cases}\tag{20}$$

代入(11)，得

$$G(x,y;x',y')=\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{a}x'}{m\,\mathrm{sh}\frac{m\pi}{a}b}\times$$

$$\times\begin{cases}\mathrm{sh}\frac{m\pi}{a}(b-y')\mathrm{sh}\frac{m\pi}{a}y & (y<y'),\\ \mathrm{sh}\frac{m\pi}{a}y'\mathrm{sh}\frac{m\pi}{a}(b-y) & (y>y').\end{cases}\tag{21}$$

(21)中的级数收敛较快,因为只要 $y\neq y'$,则当 m 很大时,级数的通项$\sim e^{-ma}(a>0)$.

可以证明(7)式右方的二重级数是(21)式的傅氏展开(对变数 y).

18.7* 用电像法求格临函数

在区域是有界的情形下,格临函数多半不能表达为有限形式.但也有例外,例如圆形或者球形区域内拉氏方程第一边值问题的格临函数.下面讨论如何用电像法直接求出这种有限表达式.

圆形区域第一边值问题的格临函数G满足方程

$$\nabla^2G=-4\pi\delta(x-x')\delta(y-y')\tag{1}$$

和边界条件

$$G|_{r=a}=0,\tag{2}$$

其中 a 是圆的半径.(1)式中的$\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$,右方的 δ 函数代表位于 $r'(x',y')$点(沿 z 方向)的一无穷长线源.边界条件(2)在电学中相当于导体(无穷长圆柱)接地.

线源在圆内直接产生的场就是基本解[参看 18.5 节(10)式]

$$G_0=-2\ln R+C_0,\tag{3}$$

其中 $R^2=r^2+r'^2-2rr'\cos\varphi$,$\varphi$ 是 r 和 r' 之间的夹角 [图 83].

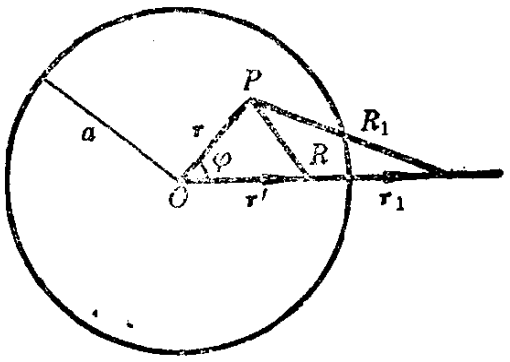


图 83

在静电场问题中，(3)式的物理意义很简单，就是 G_0 代表一根无穷长的均匀带电导线(单位长的电荷为1)在无界空间中产生的电位，R 是电场中任意一点 P 到导线的垂直距离.

格临函数 G 所代表的场是线源直接产生的场 G_0 和在边界面 $r=a$ 上感生的电荷所产生的场 G_1 之和. 电像法的基本精神是用一等效线源来代替所有感生的电荷，于是可用类似于(3)式右方的表达式来表示 G_1，从而得到有限形式的 G.

这样一个等效的线源显然不能位于圆内，因为感生电荷在圆内产生的场 G_1 处处满足拉氏方程 $\nabla^2 G_1=0$，即在圆内是无源的. 又从对称性看出，这个等效线源必在通过 r' 点的半径的延线上，设其位置为 r_1(图83). 令 e_1 代表这个等效线源的强度(单位长度的电荷)，则它在圆内 P 点产生的电位是

$$G_1=-2\,e_1\ln R_1+C_1, \tag{4}$$

其中 $R_1^2=r^2+r_1^2-2\,rr_1\cos\varphi$.

两个线源合起来产生的电位就是所求的格临函数：

$$G=-2\ln R-2\,e_1\ln R_1+C, \tag{5}$$

其中的未知量是 e_1, r_1(含于 R_1 中)和 C. 这些未知量可由边界条件(2)求出. 根据这条件有

$$G|_{r=a}=G_0|_{r=a}+G_1|_{r=a}$$

$$=-2\ln(a^2+r'^2-2\,ar'\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}-$$

$$-2e_1\ln(a^2+r_1^2-2ar_1\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}+C=0. \tag{6}$$

这个条件应当与 φ 无关，即在圆周上处处成立，因此应有

$$\frac{\partial G}{\partial \varphi}\Big|_{r=a}=0,$$

即

$$\frac{2ar'\sin\varphi}{a^2+r'^2-2ar'\cos\varphi}+\frac{e_1\cdot 2ar_1\sin\varphi}{a^2+r_1^2-2ar_1\cos\varphi}=0,$$

或

$$r'(a^2+r_1^2-2ar_1\cos\varphi)+e_1r_1(a^2+r'^2-2ar'\cos\varphi)=0. \tag{7}$$

要这式对于任何 φ 成立，必须

$$r'(a^2+r_1^2)+e_1r_1(a^2+r'^2)=0, \tag{8}$$

$$-2ar'r_1-2ae_1r'r_1=0. \tag{9}$$

由(9)立即得

$$e_1=-1. \tag{10}$$

代入(8)可解出

$$r_1=\frac{a^2}{r'}; \tag{11}$$

另外一个解是 $r_1=r'$，显然不适用.

把(10)和(11)代入(6)式中，求得

$$C=\ln(a^2+r'^2-2ar'\cos\varphi)-\ln\left(a^2+\frac{a^4}{r'^2}-2\frac{a^3}{r'}\cos\varphi\right)$$

$$=-2\ln\frac{a}{r'}.$$

因此，

$$G=-2\ln R+2\ln R_1-2\ln\frac{a}{r'}. \tag{12}$$

练习题 1. 利用(12)式的格临函数，证明圆内拉氏方程第一边值问题

$$\nabla^2u=0,\quad u|_{r=a}=f(\varphi)$$

的解可表为

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(a^2-r^2)f(\varphi')d\varphi'}{a^2+r^2-2a\cos(\varphi-\varphi')} \tag{13}$$

[这就是 14.4 节(16)式].

练习题 2. 用电像法求出球内拉氏方程第一边值问题的格临函数. 并证明球内拉氏方程第一边值问题

$$\nabla^2 u=0,\ u|_{r=a}=f(\theta,\varphi)$$

的解是

$$u(r,\theta,\varphi)=\frac{a}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(a^2-r^2)f(\theta',\varphi')\sin\theta' d\varphi' d\theta'}{(a^2+r^2-2a\cos\psi)^{3/2}}, \tag{14}$$

其中 ψ 是 r 与 r' 之间的夹角,

$$\cos\psi=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$$

[可参看 A. H. 吉洪诺夫等, 数学物理方程, 第四章§ 4.2(9) 式以后的计算].

18.8* 初值问题的格临函数·波动方程的推迟解·无初值问题

初值问题的格临函数就是含时间的格临函数, 相关的基本概念和应用原理都与前面所讨论的不含时间的格临函数无异. 所不同的是, 初值问题的格临函数中两个时间变数 t 和 t' 不能简单地像坐标变数那样对调[18.3 节], 因此, 在应用时须略加改变. 下面就三维波动方程的初值问题来说明.

三维(无界空间)波动方程的格临函数 $G(r,t;r',t')$, 作为 r 和 t 的函数, 满足下列方程和初值条件:

$$\nabla^2 G-\frac{1}{c^2}G_{tt}=-\delta(r-r')\delta(t-t'), \tag{1}$$

$$G|_{t=0}=0,\ \left.\frac{\partial G}{\partial t}\right|_{t=0}=0. \tag{2}$$

(1)式右方的 δ 函数表示在 t' 时刻于 r' 点放置一个正的点源.

我们应用拉氏变换*[参看第十章和下一章]来解决求 G 的问

* 也可以用傅氏变换.

题. 令 $\overline{G}$ 表示 G 的拉氏换式：

$$\overline{G}=\int_0^\infty Ge^{-pt}dt,\ \mathrm{Re}(p)>0. \tag{3}$$

在变换中，除了变数 t 以外，G 的其他变数都作为参数看待. 于是，根据 10.3 节公式(2)，方程(1)，连同初值条件(2)考虑在内，化为

$$\nabla^2\overline{G}-\frac{p^2}{c^2}\overline{G}=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')e^{-pt'}, \tag{4}$$

其中 $e^{-pt'}$ 是 $\delta(t-t')$ 的拉氏换式[10.1 节(7) 式和 10.10 节(4)式].

取 $\boldsymbol{r}'$ 为球坐标 (R,θ,φ) 的原点，则 $\overline{G}$ 只是 $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 的函数，而有[14.2节(9)式]

$$\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{d\overline{G}}{dR}\right)-\frac{p^2}{c^2}\overline{G}=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')e^{-pt'}. \tag{5}$$

当 $R\neq 0$ 时，$\overline{G}$ 满足齐次方程

$$\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{d\overline{G}}{dR}\right)-\frac{p^2}{c^2}\overline{G}=0\quad(R\neq 0) \tag{6}$$

或[①]

$$\frac{d^2}{dR^2}(R\overline{G})-\frac{p^2}{c^2}(R\overline{G})=0. \tag{6'}$$

由此得

$$R\overline{G}=Ae^{\pm pR/c}. \tag{7}$$

因设 $\mathrm{Re}(p)>0$，故在 $R\to\infty$ 时，有界的解是

$$\overline{G}=A\frac{e^{-\frac{p}{c}R}}{R},$$

其中 A 是与 R 无关的参数，由方程(5)确定为 $\frac{e^{-pt'}}{4\pi}$[参看 18.5 节的算法和该节(9)式]. 因此

① 由(6)到(6')是常用的公式，建议读者自己证明一下.

$$\overline{G}=\frac{e^{-\left(t'-\frac{R}{c}\right)p}}{4\pi R} \tag{8}$$

应用拉氏变换的反演公式[10.7节(1)式],得

$$G=\frac{1}{2\pi i}\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty}\overline{G}e^{pt}\,dp=\frac{1}{2\pi i}\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty}\frac{1}{4\pi R}e^{\left(t-t'-\frac{R}{c}\right)p}dp$$

$$=\frac{1}{4\pi R}\cdot e^{p_0\left(t-t'-\frac{R}{c}\right)}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\left(t-t'-\frac{R}{c}\right)k}dk$$

$$=\frac{1}{4\pi R}\cdot e^{p_0\left(t-t'-\frac{R}{c}\right)}\cdot\delta\left(t-t'-\frac{R}{c}\right)\quad[\text{用了 10.10 节(1)式}]$$

$$=\frac{\delta\left(t-t'-\frac{R}{c}\right)}{4\pi R}\qquad[\text{用了 10.9 节(7)式}].$$

因此,

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=\frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \tag{9}$$

由此立刻看到G对于坐标变数$\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'$是对称的(可倒易的);对于时间变数则不然,$t$和$t'$不能简单地对调①,但有

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=G(\boldsymbol{r}',-t';\boldsymbol{r},-t). \tag{10}$$

附带说一下,如果取(7)式的另一解$\overline{G}=Ae^{pR/c}/R$,则得

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=\frac{\delta\left(t-t'+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \tag{11}$$

(9)式是**推迟格临函数**,(11)是**超前格临函数**,原因是,(9)式表示在t'时刻放置在$\boldsymbol{r}'$点的源的作用只有在经过时间$t-t'$之后才出现在$\boldsymbol{r}$点(因其中的δ函数只有在$t-t'=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c$时不为零),而(11)式则表示源的作用在时间$|t-t'|$之前就已经出现在$\boldsymbol{r}$点(因其中的$\delta$函数在$t-t'=-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c$时不为零).

① 这与因果性有关,因为t'是放置场源的时刻,而t是观察时刻.

现在应用推迟格临函数(9)来求无界空间波动方程初值问题的解. 方程和初值条件是

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r},t)-\frac{1}{c^2}u_{tt}(\boldsymbol{r},t)=-f(\boldsymbol{r},t)\quad (t>0), \tag{12}$$

$$u(\boldsymbol{r},0)=\varphi(\boldsymbol{r}),\quad u_t(\boldsymbol{r},0)=\psi(\boldsymbol{r}), \tag{13}$$

其中$f(\boldsymbol{r},t)$是给定的源,$\varphi(\boldsymbol{r})$和$\psi(\boldsymbol{r})$是给定的初值.

应用格临函数(9)时须注意其中的t'是放置场源的时刻,t是观察时刻,不能简单地对调,而(12)式右方场源$f(\boldsymbol{r},t)$中的时间变数是t,故应把(12)式换写为

$$\nabla'^2 u(\boldsymbol{r}',t')-\frac{1}{c^2}u_{t't'}(\boldsymbol{r}',t')=-f(\boldsymbol{r}',t'); \tag{12'}$$

相应地,初值条件(13)换写为

$$u(\boldsymbol{r}',t')|_{t'=0}=\varphi(\boldsymbol{r}'),\ u_{t'}(\boldsymbol{r}',t')|_{t'=0}=\psi(\boldsymbol{r}'). \tag{13'}$$

同样,根据(1)式和(10)式,有

$$\nabla'^2 G-\frac{1}{c^2}G_{t't'}=-\delta(t-t')\delta(x-x') \tag{1'}$$

以$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$乘(12'),以$u(\boldsymbol{r}',t')$乘(1'),相减,求积分,得

$$\iint_0^{t+\varepsilon}(G\nabla'^2 u-u\nabla'^2 G)\,dt'd\boldsymbol{r}'-\frac{1}{c^2}\int\int_0^{t+\varepsilon}(Gu_{t't'}-uG_{t't'})\,dt'd\boldsymbol{r}'$$

$$=-\iint_0^{t+\varepsilon}G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')f(\boldsymbol{r}',t')\,dt'd\boldsymbol{r}'$$

$$+\int\int_0^{t+\varepsilon}u\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t')\,dt'd\boldsymbol{r}',$$

其中$\varepsilon>0$(随后$\varepsilon\to 0$). 引进ε是为了使最后一个含$\delta(t-t')$的积分值确定(积分区间包含$t'=t$点于内). 于是,由δ函数的性质有

$$u(\boldsymbol{r},t)=\iint_0^{t+\varepsilon}G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')f(\boldsymbol{r}',t')\,dt'\,d\boldsymbol{r}'$$

$$-\frac{1}{c^2}\iint_0^{t+\varepsilon}(Gu_{t't'}-uG_{t't'})\,dt'\,d\boldsymbol{r}'$$

$$+\int\int_0^{t+\varepsilon}(G\nabla'^2 u-u\nabla'^2 G)\,dt'd\boldsymbol{r}'. \tag{14}$$

最后一个积分中的空间积分可用格临公式化为无穷远处的面积分. 如果场源和初值都在有限区域中,则在无穷远处, $u(r',t')\sim\frac{1}{r'}, r'=|r'|$, 在无穷远处$G$的数量级也是$\frac{1}{r'}$, 故这个面积分之值为零.

(14)式右方第二个积分中的被积函数是

$$Gu_{t't'}-uG_{t't'}=\frac{\partial}{\partial t'}(Gu_{t'}-uG_{t'}),$$

故
$$\int_0^{t+\varepsilon}(G\,u_{t't'}-uG_{t't'})\,dt'=[Gu_{t'}-uG_{t'}]_{t'=0}^{t'=t+\varepsilon}. \qquad (15)$$

由(9)式看出($R=|r-r'|$)

$$G|_{t'=t+\varepsilon}=\frac{\delta\left(-\varepsilon-\frac{R}{c}\right)}{4\pi R}=0,\frac{\partial G}{\partial t'}\Big|_{t'=t+\varepsilon}$$

$$=-\frac{\delta'\left(-\varepsilon-\frac{R}{c}\right)}{4\pi R}=0,$$

故(15)式右方的表达式在积分上限处之值等于零,而有[把(9)和(13′)代入]

$$-\frac{1}{c^2}\int\int_0^{t+\varepsilon}(Gu_{t't'}-uG_{t't'})\,dt'dr'$$

$$=\frac{1}{c^2}\int\frac{\delta\left(t-\frac{R}{c}\right)}{4\pi R}\psi(r')\,dr' \qquad (16)$$

$$+\frac{1}{c^2}\int\frac{\delta'\left(t-\frac{R}{c}\right)}{4\pi R}\varphi(r')\,dr'.$$

如果取r点为球坐标的原点,令$r'=r+R$, 则

$$\int\frac{\delta\left(t-\frac{R}{c}\right)}{R}\psi(\boldsymbol{r}')\,d\boldsymbol{r}'=\int\frac{\delta\left(t-\frac{R}{c}\right)}{R}\psi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})\,R^2dR\,d\Omega$$

($d\Omega$=立体角元)

$$=\int c\delta(ct-R)\psi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})\,R\,dR\,d\Omega$$

[用了 10.9 节(6)式]

$$=c^2t\int_{R=ct}\psi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})\,d\Omega$$

$$=c\int_{\Sigma}\frac{\psi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})}{R}d\Sigma,\qquad(17)$$

Σ 是以 $\boldsymbol{r}$ 点为球心、半径等于 ct 的球面.

同样,

$$\int\frac{\delta'\left(t-\frac{R}{c}\right)}{R}\varphi(\boldsymbol{r}')\,d\boldsymbol{r}'=\int\frac{\delta'\left(t-\frac{R}{c}\right)}{R}\varphi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})\,R^2dR\,d\Omega$$

$$=-c^2\int\delta(ct-R)\frac{d}{dR}\{R\varphi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})\}\,dR\,d\Omega$$

[用了 10.9 节(12),(13)和(6)式]

$$=-c^2\int_{R=ct}\frac{d}{dR}\{R\varphi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})\}\,d\Omega$$

$$=-c^2\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma}\frac{\varphi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})}{R}d\Sigma.\qquad(18)$$

把(17)和(18)代入(16),得

$$-\frac{1}{c^2}\int\int_0^{t+\varepsilon}(Gu_{t't'}-uG_{t't'})\,dt'd\boldsymbol{r}'$$

$$=\frac{1}{4\pi c}\left\{\int_{\Sigma}\frac{\psi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})}{R}d\Sigma+\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma}\frac{\varphi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})}{R}d\Sigma\right\}.\qquad(19)$$

最后,(14)式右方的第一个积分

$$\iint_0^{t+\varepsilon} G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')f(\boldsymbol{r}',t')dt'd\boldsymbol{r}'$$

$$=\iint_0^{t+\varepsilon}\frac{\delta\left(t-t'-\frac{R}{c}\right)}{4\pi R}f(\boldsymbol{r}',t')dt'd\boldsymbol{r}'$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\frac{f\left(\boldsymbol{r}',\ t-\frac{R}{c}\right)}{R}d\boldsymbol{r}', & \dfrac{R}{c}<t,\\ 0, & \dfrac{R}{c}>t.\end{cases}\tag{20}$$

把以上所得结果代入(14)，即得

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi}\int_{R<ct}\frac{f\left(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R},t-\frac{R}{c}\right)}{R}d\boldsymbol{R}$$

$$+\frac{1}{4\pi c}\left\{\int_{\Sigma}\frac{\psi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})}{R}d\Sigma+\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma}\frac{\varphi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})}{R}d\Sigma\right\},\tag{21}$$

其中Σ是以$\boldsymbol{r}$点为球心、半径等于ct'的球面．第一个积分是在这个球面内的体积分．

如果场源$f(\boldsymbol{r},t)$在$t=-\infty$时已存在(例如，在电动力学中考虑一个运动电荷所产生的推迟势)，则格临函数应满足下列条件：

$$G|_{t=-\infty}=0,\quad \left.\frac{\partial G}{\partial t}\right|_{t=-\infty}=0.\tag{22}$$

这与前面的初值条件不同，而相应的格临函数也就不同．在这种情形下，初值问题与非齐次方程的求解问题应当分开来考虑．在初值问题中只考虑齐次方程($f=0$)，得到的是(21)式中的面积分．

满足条件(22)的格临函数不能立刻像以前那样用拉氏变换来求，因为所给的不是G在$t=0$时刻的值．为了克服这一困难，先

设格临函数满足方程

$$\nabla^2 G-\frac{1}{c^2}G_{tt}=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t')$$

和条件 $\quad G|_{t=t_0}=0,\quad \left.\frac{\partial G}{\partial t}\right|_{t=t_0}=0,$

然后换变数，令$\tau=t-t_0$，得

$$\nabla^2 G-\frac{1}{c^2}G_{\tau\tau}=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(\tau+t_0-t'),$$

$$G|_{\tau=0}=0,\quad \left.\frac{\partial G}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}=0.$$

于是，可以利用以前的结果得

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=\frac{\delta\left(\tau-(t'-t_0)-\frac{R}{c}\right)}{4\pi R}$$

$$=\frac{\delta\left(t-t'-\frac{R}{c}\right)}{4\pi R},$$

同前面一样(这是自然的，因为这样的做法无非是把时间的起点从$t=0$移到$t=t_0$，不会影响$t-t'$之值)。

把这个结果用到“无初值问题”

$$\nabla^2 u-\frac{1}{c^2}u_{tt}=-f(\boldsymbol{r},t),\quad t>t_0,$$

并注意对时间的积分限是从 t_0 到 $t+\varepsilon$，而且t_0最后要趋于$-\infty$，即得

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi}\int_{R<\infty}\frac{f\left(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R},t-\frac{R}{c}\right)}{R}d\boldsymbol{R},\qquad(23)$$

右方是对全空间的积分，$\boldsymbol{R}$ 的起点在观察点 $\boldsymbol{r}$ 处。

如果在 $t=0$ 时刻还有初值(13)，则只要在(23)式右方加上(21)式右方的两个面积分即可。

第十九章　积分变换的应用

积分变换在数理方程(包括积分方程、差分方程等) 中的应用日益广泛. 其原因之一是,经过变换后,函数关系变得简单了. 例如常微分方程变为代数方程, 而且在原来方程中出现的一些奇异函数,如阶跃函数、δ 函数、格临函数等,都变为比较规 则的函数. 这些, 大都已经在第十章中讲到过. 在前章最末一节中还用了拉氏变换来解偏微分方程. 在本章中我们将扼要地说明用积分变换解偏微分方程边值问题和初值问题的普遍原理[19.2节], 并介绍拉氏变换和傅氏变换以外的其他一些变换.

19.1　应用拉氏变换于热传导问题

在讨论应用积分变换于边值和初值问题的普遍原理之前, 我们先讲一个例子. 讲这个例子的目的,除了为演示解题步骤之外,更重要的是说明用积分变换的方法有时会得到适合于问题性质的解,而这种形式的解是用其他方法,例如分离变数法, 所得不 到或者不能直接得到的.

考虑这样一个问题: 一根长为 l 的均匀细杆,初温为零,一端维持常温 u_0,另一端绝热,求杆中温度的变化. 这个问 题 的数学表述是[参看 12.3 节(2)式,12.5节(8)式]

$$u_{xx}-\frac{1}{\kappa}u_t=0 \quad (0<x<l,t>0), \tag{1}$$

$$u(x,0)=0 \quad (0<x<l), \tag{2}$$

$$u(0,t)=u_0(\text{常数}) \quad (t\geqslant 0), \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0 \qquad (t\geqslant 0). \tag{4}$$

应用拉氏变换

$$\bar{u}(x,p)=\int_0^\infty e^{-pt}u(x,t)dt \tag{5}$$

(在变换中变数 x 是参数),方程(1)连同初值条件化为[见 10.3 节(2)式]

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}-\frac{1}{\kappa}p\bar{u}=0; \tag{6}$$

边界条件[用 10.2 节(5)式]化为

$$\bar{u}(0,p)=\frac{u_0}{p}, \tag{7}$$

$$\left.\frac{d\bar{u}}{dx}\right|_{x=l}=0. \tag{8}$$

令

$$q^2=\frac{p}{\kappa},$$

并取

$$q=\sqrt{\frac{p}{\kappa}},\quad \mathrm{Re}(q)\geqslant 0, \tag{9}$$

得方程(6)的通解

$$\bar{u}(x,p)=Ae^{qx}+Be^{-qx}, \tag{10}$$

其中 A 和 B 与 x 无关,但可以是 p 的函数. 由边界条件 (7)和(8)得

$$A+B=\frac{u_0}{p},$$

$$Aqe^{ql}-Bqe^{-ql}=0.$$

解这两个方程,得

$$A=\frac{u_0}{p}\frac{e^{-ql}}{e^{ql}+e^{-ql}}=\frac{u_0e^{-ql}}{2p\,\mathrm{ch}ql},$$

$$B=\frac{u_0e^{ql}}{2p\,\mathrm{ch}ql}.$$

代入(10)式,得

$$\bar{u}(x,p)=\frac{u_0}{p}\frac{1}{2\mathrm{ch}ql}[e^{q(l-x)}+e^{-q(l-x)}]$$

$$=\frac{u_0\mathrm{ch}(l-x)q}{p\,\mathrm{ch}lq}. \tag{11}$$

剩下的问题是求(11)式 $\bar{u}$ 的反演. 下面用两种不同的方法求反演,得到不同的解式,各有其适用范围.

1. 直接把(11)式代入 10.8 节(3)式用残数求反演的公式中,得

$$u(x,t)=\sum \mathrm{res}\left\{\frac{u_0}{p}\frac{\mathrm{ch}(l-x)q}{\mathrm{ch}lq}e^{pt}\right\}$$

$$\left(q=\sqrt{\frac{p}{\kappa}}\right)$$

(注意,花括号中的函数虽然含有 p 的根式,但因双曲余弦函数是q的偶函数,故是 p 的单值函数). 右方函数的奇点都是一阶极点:

(i) $p=0$,残数为 u_0;

(ii) $\mathrm{ch}lq=0$ 的根是 $q_n=\dfrac{(2n+1)\pi i}{2l}$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$,

故极点为

$$p_n=\kappa q_n^2=-\kappa\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2},\quad n=0,1,2\cdots.$$

相应残数为

$$\frac{u_0}{p_n}\frac{\mathrm{ch}(l-x)q_n}{(\mathrm{ch}lq)'_{q=q_n}}e^{p_nt}=\frac{2u_0}{lq_n}\frac{\mathrm{ch}(l-x)q_n}{\mathrm{sh}lq_n}e^{p_nt},$$

其中上角的 $'$ 表示对 p 求导数[8.2 节(2)式]. 由此得

$$u(x,t)=u_0-\frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{2n+1}{2l}\pi x}{2n+1}e^{-\kappa\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}t}. \tag{12}$$

这个结果与用分离数法得到的相同,但是在现在的解法中毋需先把边界条件(3)齐次化[参看 13.4 节],而且也不必用初值条件去定解.

(12)式中的级数，由于含指数因子$\exp\left\{-\kappa\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}t\right\}$，当 t 大的时候，收敛很快，用不多几项(与 κ, l 之值有关) 就可以得到很好的近似值. 但在 t 很小时，收敛就不那么快，而需要多计算一些项. 下面用另外一种方法求拉氏换式(11)的反演，得到适合于 t 很小的时候用的表达式.

2. 先把(11)式的右方用级数展开：

$$\bar{u}(x,p)=\frac{u_0}{p}\frac{\mathrm{ch}(l-x)q}{\mathrm{ch}lq}=\frac{u_0}{p}\frac{e^{(l-x)q}+e^{-(l-x)q}}{e^{lq}+e^{-lq}}$$

$$=\frac{u_0}{p}(e^{-xq}+e^{-2lq+xq})(1+e^{-2lq})^{-1}$$

$$=\frac{u_0}{p}(e^{-xq}+e^{-2lq+xq})\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n e^{-2nlq}$$

[因 $\mathrm{Re}(q)>0$]

$$=\frac{u_0}{p}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n e^{-(2nl+x)q}+\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n e^{-[2(n+1)l-x]q}\right]$$

$$=\frac{u_0}{p}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n e^{-(2nl+x)q}-\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n e^{-(2nl-x)q}\right].$$

用拉氏换式①

$$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p}\doteqdot\mathrm{erfc}\frac{a}{2\sqrt{t}},\tag{13}$$

其中

$$\mathrm{erfc}\,x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}e^{-u^2}du$$

① 查阅拉氏换式表，例如，A.Erdélyi, Tables of Integral Transforms, I, p. 245；或者利用本书 10.8 节(8)式两边对参数 α 由 α 到∞求积分即得.

$$=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}du=1-\operatorname{erf}x, \tag{14}$$

$\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}du$ 称为误差函数(其数值可查表),$\operatorname{erfc}x$ 称为余误差函数，得

$$u(x,t)=u_0\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\operatorname{erfc}\frac{2nl+x}{2\sqrt{\kappa t}}-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n\operatorname{erfc}\frac{2nl-x}{2\sqrt{\kappa t}}\right]. \tag{15}$$

$\operatorname{erfc}x$ 之值随 x 的增大而很快地减小，所以(15)式适用于 t 很小的情形. 例如，在绝热端 $x=l$，

$$u(l,t)=u_0\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\operatorname{erfc}\frac{(2n+1)l}{2\sqrt{\kappa t}}-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n\operatorname{erfc}\frac{(2n-1)l}{2\sqrt{\kappa t}}\right]$$

$$=2u_0\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\operatorname{erfc}\frac{(2n+1)l}{2\sqrt{\kappa t}}.$$

设 $\frac{\kappa t}{l^2}=1$，则在 t 时刻，绝热端的温度与 $x=0$ 这一端的温度之比为

$$\frac{u(l,t)}{u_0}=2\left[\operatorname{erfc}\frac{1}{2}-\operatorname{erfc}\frac{3}{2}+\operatorname{erfc}\frac{5}{2}-\cdots\right]$$

$$=2[0.4795-0.0339+0.0004-\cdots]$$

$$=0.8920.$$

可见取头两项作为近似时，误差不超过千分之一.

(15)式也可以从(12)式应用忒塔函数的变换公式① 直接得

① 参看，例如，王竹溪等，特殊函数概论，9.2 节(2)，(4)式和 9.9 节(5)式.

到.

19.2* 应用积分变换解边值(初值)问题的普遍原理

把要考虑的方程简写为

$$L[u(x_1,x_2,\cdots,x_n)]=f(x_1,x_2,\cdots,x_n), \tag{1}$$

其中 f 是已知函数，u 是未知函数，L 是作用于 u 的线性算符. 我们只讨论 L 是二阶微分算符的情形.

设 L 可以分成两部分：

$$L=L_1+L', \tag{2}$$

其中

$$L_1=a(x_1)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+b(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+c(x_1), \tag{3}$$

$$L'\text{不含 } x_1. \tag{4}$$

在这种情形下应用积分变换的原理是对 u 作变换：

$$\bar{u}(\xi,x_2,\cdots,x_n)=\int_\alpha^\beta K(\xi,x_1)u(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1 \tag{5}$$

其中$[\alpha,\beta]$是 x_1的变化区间. 这样，把关于 u 的方程(1)化为关于 $\bar{u}$ 的、只含 $n-1$ 个自变数 $x_2,\cdots,x_n$的方程，ξ 是参数. 于是，方程就简化了一步.

现在来看，经过变换(5)，方程(1) 化成什么形式，同时考查应当如何选取积分变换的核 $K(\xi,x_1)$.

以 $K(\xi,x_1)$乘(1)，对 x_1求积分，利用(2)，有

$$\int_\alpha^\beta KL[u]dx_1=\int_\alpha^\beta KL_1[u]dx_1+\int_\alpha^\beta KL'[u]dx_1$$

$$=\int_\alpha^\beta Kf\,dx_1.$$

因 L'不含 x_1，故可提到积分号外而得

$$\int_\alpha^\beta KL_1[u]dx_1+L'\Big[\int_\alpha^\beta Kudx_1\Big]=\int_\alpha^\beta Kf\,dx_1,$$

或者[用(5)式]

$$\int_\alpha^\beta K L_1[u]dx_1 + L'[\bar{u}] = \bar{f}, \tag{6}$$

其中 $\bar{f} = \int_\alpha^\beta K f dx_1$ 是 f 的积分换式.

把(3)式代入(6)式的积分中. 换部求积分,得

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta K L_1[u]dx_1 &= \int_\alpha^\beta \left[Ka\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + Kb\frac{\partial u}{\partial x_1} + Kcu \right] dx_1 \\ &= Kau_{x_1}\Big|_\alpha^\beta + \left[Kb - \frac{\partial(Ka)}{\partial x_1} \right] u \Big|_\alpha^\beta \\ &\quad + \int_\alpha^\beta u \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(Ka) - \frac{\partial}{\partial x_1}(Kb) + Kc \right] dx_1.\end{aligned} \tag{7}$$

如果选 K 使最后积分中的微分式等于零,或者更普遍一些,选 K 满足方程

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(Ka) - \frac{\partial}{\partial x_1}(Kb) + Kc = \lambda K, \tag{8}$$

λ 是与 x_1 无关的任意函数,则(7)式成为

$$\int_\alpha^\beta K L_1[u]dx_1 = Kau_{x1}\Big|_\alpha^\beta + \left[Kb - \frac{\partial(Ka)}{\partial x_1} \right] u \Big|_\alpha^\beta + \lambda\bar{u}. \tag{9}$$

把这结果代入(6)式,得

$$(L' + \lambda)[\bar{u}] = \bar{f} + g(\xi, x_2, \cdots, x_n), \tag{10}$$

其中

$$g(\xi, x_2, \cdots, x_n) = \left[\frac{\partial(Ka)}{\partial x_1} - Kb \right] u \Big|_\alpha^\beta - Kau_{x1}\Big|_\alpha^\beta. \tag{11}$$

在 (10)式中还有一些未定的因素. 首先,g 的值与 u, u_{x1} 以及 K 在 $x_1 = \alpha, \beta$ 两点的值有关; 此外, λ 还未定. 通常选 λ 使(10)式左方最简单. 至于 g 的问题则要复杂一些. 举例说,如果

x_1 是时间变数 t，则 u 和 $u_{x_1}=u_t$ 在 $t=0$ 的值是给定的初值，在其他时间的值则未知. 在此情形下显然应取 $\alpha=0$，并选 K 使 K 及其导数在 $x_1=t=\beta$ 之值为零. 如果能够根据这些条件由方程(8)求出 K，则(11)式的 g 就完全确定了. 拉氏变换的核 $K(\xi,t)=e^{-\xi t}$ 在 $t=\beta=\infty$ 时趋于零，所以拉氏变换最适于解初值问题.

如果 x_1 是空间变数，则 u 和 u_{x_1} 之值不会同时在同一点给出. 假定已知 $u|_{x_1=\alpha}$(第一边值)和 $u_{x_1}|_{x_1=\beta}$(第二边值)，则须选 K 满足边界条件 $Ka|_{x_1=\alpha}=0$ 和 $\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(Ka)-Kb\right]_{x_1=\beta}=0$，使(11)式右方不出现未知的 $u|_{x_1=\beta}$ 和 $u_{x_1}|_{x_1=\alpha}$(试与 18.2 节中关于格临函数的边值的选取作比较). 如果能够根据这些条件由(8)式求出 K，则 g 也就确定了.

解决了以上这些问题之后，如果能够从(10)式以及关于 $\bar{u}$ 的附加条件[参看例如上节(7)，(8) 式]解出 $\bar{u}$，则积分换式(5)就是一个积分方程：已知 $\bar{u}$，求 u. 对于一些常用的积分变换如傅氏变换、拉氏变换等，都有固定的反演公式[见本章末的附表]：

$$u(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_\nu^\delta H(x_1,\xi)\bar{u}(\xi,x_2,\cdots,x_n)d\xi, \tag{12}$$

$H(x_1,\xi)$ 称为 $K(\xi,x_1)$ **的反演核**. 对于普遍情形则须解积分方程(5).

在下一节中将举一个例子来具体说明应用普遍原理的步骤.

19.3* 汉克耳(Hankel)变换

设问题是在半无界区域 $r\geqslant 0, z\geqslant 0$ 中求拉氏方程（轴对称情形）

$$\nabla^2 u\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{1}$$

的解 $u(r,z)$，边界条件为

(i) $u|_{z=0}=h(r)$, $h(r)$是给定的函数, (2)

(ii) 当 $z\to\infty, r\to\infty$时 $u\to 0$. (3)

把方程(1)写开为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{1'}$$

对变数 r 作变换

$$\bar{u}(\xi,z)=\int_0^\infty K(\xi,r)u(r,z)dr, \tag{4}$$

则$K(\xi,r)$作为 r 的函数应满足上节方程(8),即

$$\frac{d^2K}{dr^2}-\frac{d}{dr}\left(\frac{K}{r}\right)=\lambda K \quad (\lambda \text{ 与 } r \text{ 无关})$$

或

$$\frac{d^2K}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{dK}{dr}+\left(-\lambda+\frac{1}{r^2}\right)K=0. \tag{5}$$

这个方程很像贝塞耳方程,有两个奇点,即 $r=0$和 $r=\infty$, 前者是正则奇点,后者是非正则奇点. 事实上,利用 17.19 节的结果,把(5)式和该节(4) 式比较一下,即见(5)式的一个解是

$$K(\xi,r)=rJ_0(\xi r), \tag{6}$$

其中 $\xi^2=-\lambda$. 我们设 $\xi>0$. 这个解是唯一在 $r=0$ 点有界的解. 以(6) 式为核的积分变换称为**零阶汉克耳变换**,常用于柱坐标的拉氏算符. 下面先简单地考查一下这种变换存在的条件.

首先是关于$u(r,z)$的换式

$$\bar{u}(\xi,z)=\int_0^\infty rJ_0(\xi r)u(r,z)dr. \tag{7}$$

由于通常要求 $u(r,z)$在 $r=0$ 处有界,故在积分的下限处没有什么问题 (事实上只要当 $r\to 0$ 时 $ru(r,z)\sim r^{-\alpha}$, $\alpha<1$ 即可, 因为 $J_0(\xi r)_{r\to 0}=1$). 在积分的上限处,

$$J_0(\xi r)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos\left(\xi r-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\xi r}}\text{[17.11(2)式]}, \tag{8}$$

故积分存在的一个充分条件是

$$r^{\frac{1}{2}}u\big|_{r\to\infty}\to 0. \tag{9}$$

我们假定 u 及其导数在 $r=0$ 有界而且

$$u_{r\to\infty}\sim r^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}\qquad(\varepsilon>0), \tag{10}$$

则 u 及其导数的汉克耳换式都存在（自然，这些条 件是否满足要到求出 u 之后再来检验）.

根据以上的条件，上节普遍公式（10）右方的函数

$$g(\xi,z)=\left\{\frac{\partial}{\partial r}[rJ_0(\xi r)]-J_0(\xi r)\right\}u\Big|_{r=0}^{r=\infty}-rJ_0(\xi r)\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=0}^{r=\infty}$$

$$=\xi rJ_0'(\xi r)u\Big|_{r=0}^{r=\infty}-rJ_0(\xi r)\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=0}^{r=\infty}=0, \tag{11}$$

而换式 $\bar{u}$ 的方程为（$\lambda=-\xi^2$）

$$\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}-\xi^2\bar{u}=0, \tag{12}$$

边界条件是（2)式的汉克耳换式

$$\bar{u}\Big|_{z=0}=\int_0^\infty rJ_0(\xi r)h(r)dr=\bar{h}(\xi) \tag{13}$$

以及与(3)式相应的条件

$$\bar{u}\big|_{z\to\infty}=0. \tag{14}$$

方程（12）的两个线性无关解是 $Ae^{\xi z}$ 和 $Be^{-\xi z}$. 因假设 $\xi>0$［见(6) 式后面］,第一解不满足条件(14),故

$$\bar{u}(\xi,z)=Be^{-\xi z}.$$

再由条件(13)定出 $B=\bar{h}(\xi)$而得

$$\bar{u}(\xi,z)=\bar{h}(\xi)e^{-\xi z}. \tag{15}$$

最后是求(15)式的反演，根据汉克耳变换的反演公式［见本章末附表］有

$$u(r,z)=\int_0^\infty \xi J_0(\xi r)\bar{u}(\xi,z)d\xi \tag{16}$$

$$=\int_0^\infty \xi J_0(\xi r)\bar{h}(\xi)e^{-\xi z}d\xi. \qquad (17)$$

由此得到 $u(r,z)$之后一般应当回过去检验一下它是否满足汉克耳换式存在的条件，例如条件(10). 不过应当注意，即使换式 $\bar{u}$ 本身不存在，只要它使反演公式 (16)中的积分有意义，则积分变换的方法仍是可用的.

关于积分变换在数理方程中的应用，读者可参看，例如，I.N. 史奈登，傅里叶变换，或 C.J.特兰台尔，数学物理中的积分变换.

下面我们给出几种常用的积分换式，其中$K(\xi,x)$是换式的核，$[\alpha,\beta]$是 x 的积分区间，$H(x,\xi)$是反演核[见上节(12)式]，$[\gamma,\delta]$是 ξ 的积分区间.

变换名称	$[\alpha,\beta]$	$K(\xi,x)$	$[\gamma,\delta]$	$H(x,\xi)$
傅里叶 (Fourier)	$(-\infty,\infty)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ix\xi}$	$[-\infty,\infty]$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ix\xi}$
傅里叶正弦	$[0,\infty)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\xi x$	$[0,\infty]$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\xi x$
傅里叶余弦	$[0,\infty)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\xi x$	$[0,\infty]$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\xi x$
拉普拉斯 (Laplace)	$[0,\infty)$	$e^{-\xi x}$ $[\mathrm{Re}(\xi)>c]$①	$(b-i\infty,b+i\infty)$ $(b>c)$	$\frac{1}{2\pi i}e^{\xi x}$
汉克耳 (Hankel)	$[0,\infty)$	$xJ_\nu(\xi x)$ $\left(\nu\geqslant-\frac{1}{2}\right)$	$[0,\infty)$	$\xi J_\nu(\xi x)$
梅林 (Mellin)	$[0,\infty)$	$x^{\xi-1}$ $[\mathrm{Re}(\xi)>c]$①	$(b-i\infty,b+i\infty)$ $(b>c)$	$\frac{1}{2\pi i}x^{-\xi}$

① c是某正数，使在 $\mathrm{Re}(\xi)>c$ 的条件下换式存在.

第二十章　保角变换原理及其应用

在2.4节中我们提到过解析函数与二维拉氏方程的解的关系．这种关系使得解析函数理论在平面场问题中有重要应用．应用的方式有二：一是复势的理论，其基本原理是直接利用解析函数的特性——实部和虚部分别满足二维拉氏方程，因此必代表一定的平面场．我们不准备讨论这方面的应用①．二是保角变换，其基本原理是利用解析函数所代表的变换的一些几何性质，把边值问题中区域的边界变简单，使易于求解．我们将着重讨论这方面的应用．

20.1　拉氏算符的变换

一个解析函数

$$\zeta=\xi+i\eta=f(z)\quad(z=x+iy),\tag{1}$$

可以看作一种坐标变换——由(x,y)到(ξ,η)．现在来看二维拉氏算符$\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$在这种变换下变成什么．我们有

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial\xi}+\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial\eta}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+2\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}.$$

同样，

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial\xi}+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial\eta}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+$$

① 可参考，例如，Б.А.福克斯，Б.В.沙巴特，复变函数及其应用．

$$+2\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}.$$

因此，

$$\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$
$$+\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right)\frac{\partial}{\partial\xi}+\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\right)\frac{\partial}{\partial\eta}$$
$$+2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}.$$

但由 CR 条件[2.3 节(1)式]有

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial y},\qquad\frac{\partial\xi}{\partial y}=-\frac{\partial\eta}{\partial x}.$$

因此，利用 2.3 节(2)式，得

$$\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)$$
$$=|f'(z)|^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right).\qquad(2)$$

由(2)式可见，如果在问题的区域中 $f'(z)\neq0$，则拉氏方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$$

在新坐标(ξ,η)下仍变为拉氏方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}=0;$$

泊松方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=-4\pi\rho(x,y)$$

也变为泊松方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}=-4\pi\rho^*(\xi,\eta),\qquad(3)$$

其中

$$\rho^*(\xi,\eta)=|f'(z)|^{-2}\rho(x,y).$$

$\rho^*(\xi,\eta)$是在新坐标系中场源的密度. 总的源强度不变，因为

$$\iint \rho^*(\xi,\eta)\,d\xi d\eta = \iint |f'(z)|^{-2}\rho(x,y)\left|\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right| dxdy,$$

而
$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x} = \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2,$$

故
$$\iint \rho^*(\xi,\eta)\,d\xi d\eta = \iint \rho(x,y)\,dxdy. \tag{4}$$

上述变换(1)也可以用于二维亥姆霍兹方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0.$$

这时，方程化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + k^2 |f'(z)|^{-2} u = 0. \tag{5}$$

一般说，这个方程比原来的方程要复杂，因为现在方程中 u 的系数不再是常数.

已经说过，应用上述变换的主要目的是想把边界的形状变简单，使问题易于求解. 因此，这个方法的关键在于找到把给定的边界变成简单边界(例如圆)的变换，而且这种变换能用解析函数表示.

尽管根据里曼的理论①，对于任何一个单连通区域[4.3节1]，存在着一个解析函数把这区域变为单位圆(即以原点为心、半径等于1的圆)，但是并没有普遍适用的定则可以用来具体找到这个解析函数. 因此，在实际应用中多半是研究一些基本区域，例如圆或者半平面，在各种解析函数所代表的变换下变成什么，然后加以利用. 但对于多边形区域则有一定的变换公式把它变为半平面或圆[20.9节]. 下面我们先讲解析函数的基本几何特性，然后讨论一些初等函数所代表的变换的性质及其应用. 最后讨论多边形的变换.

---

① 参看，例如，И.И.普里瓦洛夫，复变函数引论，第十二章§6.

20.2 解析函数的几何性质

首先看解析函数 $w=f(z)$ 的导数 $f'(z)$ 的模和辐角的几何意义.

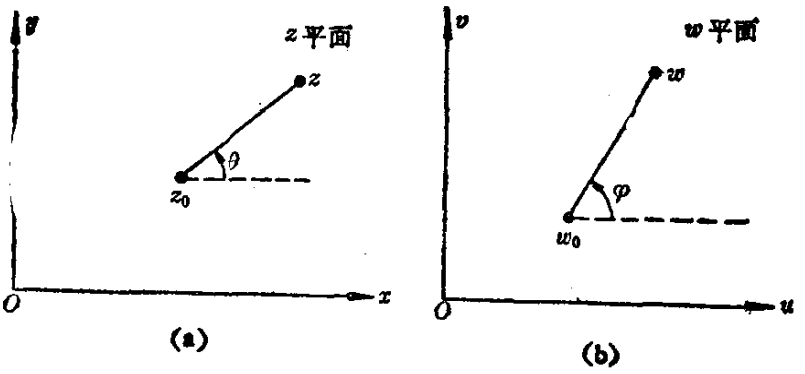


图 84

在图 84(a),(b)中,w_0 是 z_0 的对应点,z 是 z_0 的邻近点,z 的对应点是 w. 因解析函数是连续的,故 w 也是 w_0 的邻近点. 令

$$\theta=\arg(z-z_0),\quad \varphi=\arg(w-w_0),$$

$$f'(z_0)=re^{i\alpha},$$

若 $f'(z_0)\neq 0$, 则因

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{w-w_0}{z-z_0},$$

而有

$$\begin{aligned}\alpha&=\arg f'(z_0)=\arg\lim_{z\to z_0}\frac{w-w_0}{z-z_0}\\&=\lim_{z\to z_0}[\arg(w-w_0)-\arg(z-z_0)]\\&=\lim_{z\to z_0}(\varphi-\theta).\end{aligned}$$

由此可见, 导数 $f'(z_0)$ 的辐角 α 具有这样的几何意义: 当通过 z_0 点的无穷小线段 $dz[=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)]$ 经过映射, 即经过变换 $(x,y)\to(u,v)$, 成为 w 平面上通过 w_0 的无穷小线段 $dw[=\lim_{w\to w_0}(w-w_0)]$ 时, 小线段与实轴之间的夹角转了一个 α 角. 应当注意的是

由于 $f'(z_0)$(设$\neq 0$)之值与 $z\to z_0$ 的方式无关，故转角 α 之值与 θ 无关.当 θ 改变时，虽然相应的 φ 也改变，但两者之差 $\varphi-\theta(=\alpha)$ 却是保持不变的.

又，导数的模

$$r=|f'(z_0)|=\lim_{z\to z_0}\left|\frac{w-w_0}{z-z_0}\right|=\lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|,$$

故导数的模$|f'(z_0)|$代表通过 z_0 点的无穷小线元 dz 映射到 w 平面上成为无穷小线元 dw 时长度的伸缩比.

其次证明，如果在 z_0 点解析函数 $w=f(z)$的导数 $f'(z_0)\neq 0$，则通过 z_0 点的任意两条曲线 C_1 和 C_2 经过变换 $w=f(z)$映射成 w 平面上通过 w_0 点(z_0 的对应点)的两条曲线 C_1^*和 C_2^*之后，曲线之间的夹角大小和转向不变.

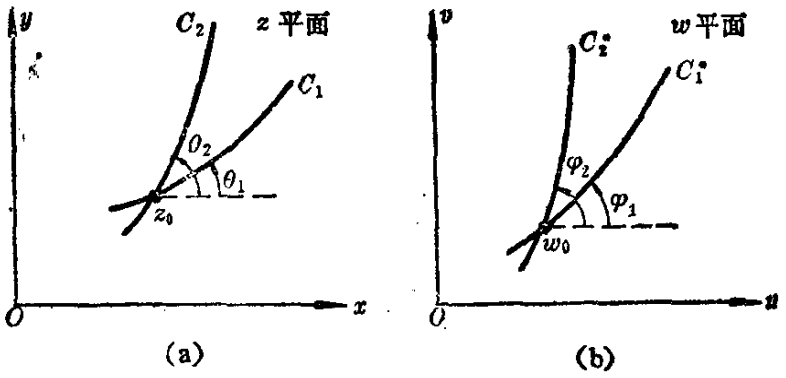


图 85

根据上面的结果，曲线 C_1 在 z_0 点的切线经映射后转了一个角度 $\alpha=\arg f'(z_0)$，即 $\varphi_1=\theta_1+\alpha$；同样，$C_2$ 在 z_0 点的切线经过映射后也转了一个相同的角度，即 $\varphi_2=\theta_2+\alpha$[参看图 85(a)，(b)]. 因此 $\varphi_2-\varphi_1=\theta_2-\theta_1$. 这证明两条曲线之间的夹角经映射后保持其大小和转向不变(图 79 中所示的是 $\alpha>0$ 的情形，转向是逆时针的).

由于有这种保角性，故解析函数所代表的变换常称为保角变

换或者保角映像. 但应当注意保角性的条件是 $f'(z_0)\neq 0$；如果 $f'(z_0)=0$，则在 z_0 点 $\arg f'(z_0)$ 之值不确定，保角性也就不成立. 例如函数 $w=z^2$ 在 $z=0$ 这一点的导数等于零，所代表的变换在 $z=0$ 点是不保角的[见 20.7 节].

有时需要讨论两条曲线在 $z=\infty$ 处的交角的保角性. 在这种情形下，应当先作变换 $z=\frac{1}{t}$，然后讨论经过这变换后的相应两条曲线在 $t=0$ 点 ($z=\infty$ 的相应点)的交角的保角性.

练习题. 证明在 xy 平面上的面积元素 $dxdy$ 与映射后的面积元素之间的关系是

$$dudv=|f'(z)|^2dxdy. \tag{1}$$

20.3 几种最简单的保角变换 · 线性变换

1. 函数 $w=z+b$ 这个变换代表图形的平移(假定 z 平面与 w 平面重合，下同)，即图形的每一点 z 都经受一个相同的位移 b[图 86].

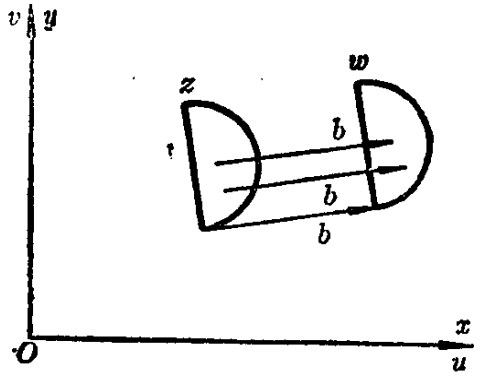


图 86

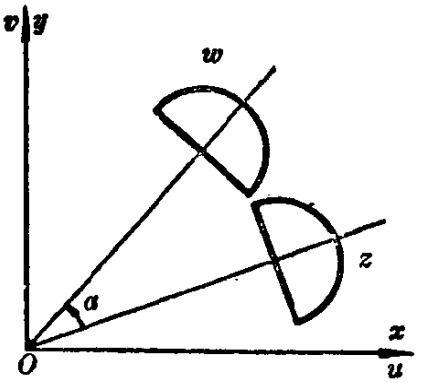


图 87

2. 函数 $w=e^{i\alpha}z$，α 是实数 这个变换代表图形绕坐标系的原点的转动，转角为 α(图 87).

上面两种特殊变换使我们联想起刚体的平面运动. 事实上，

的确可以用这两种复数变换来描述刚体的平面运动.

3. 函数 $w=rz(r>0)$ 这种变换代表图形的线性放大(或者缩小).

上面三种变换联合起来就成一种重要的变换——**线性变换**:

$$w=az+b,\quad a=re^{i\alpha}. \tag{1}$$

线性变换的保角性是显然的.

4. 函数 $w=\frac{1}{z}$ 这个变换把单位圆内的点全部变到单位圆外,同时也把单位圆外的点全部变到圆内[图88].

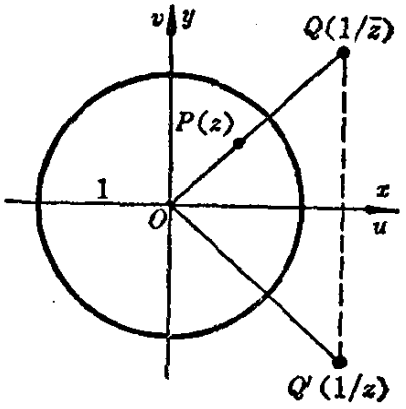


图 88

P 是圆内一点,坐标为 $z(x,y)$;Q 是与 P 在同一矢径上、距离原点 O 为 $\frac{1}{|z|}$ 的点,称为 P 的**反演点**,Q 的坐标是 $\frac{1}{\bar{z}}$,$\bar{z}$ 是 z 的复数共轭. Q' 是 Q 相对于实轴的对称点,坐标为 $\frac{1}{z}$. 因此 Q' 点就是 P 点的映像.

变换 $w=\frac{1}{z}$ 在全平面,包括无穷远点在内,都是保角的. 原因如下:

$$\frac{dw}{dz}=-\frac{1}{z^2},$$

这个导数在 $z\neq 0$ 和 $z\neq\infty$ 的点都存在而且不等于零. 对于 $z=\infty$, 作变换 $z=\frac{1}{t}$, 得 $w=t$, $\frac{dw}{dt}=1\neq 0$, 故在 $t=0$ 点相交的两条曲线(即在 $z=\infty$ 相交的两条曲线)的夹角经过变换后保持不变, 而变换在 $z=\infty$ 点是保角的. 在 $z=0$ 点 $w=\infty$, 作变换 $w=\frac{1}{t}$, 得 $t=z$, $\frac{dt}{dz}=1\neq 0$, 故由 z 到 t 的变换在 $z=0$ 这点也是保角的. 这就证明变换

$$w=\frac{1}{z} \tag{2}$$

在全平面上(包括 $z=0$ 和 $z=\infty$ 在内)都是保角的.

20.4 分式线性变换

分式线性变换是

$$w=\frac{az+b}{cz+d}, \tag{1}$$

其中

$$ad-bc\neq 0 \tag{2}$$

(如果 $ad-bc=0$, 则 $w=$常数, 没有变换的意义). 这个变换虽然很简单, 但在应用上很重要.

分式线性变换可以看作前节中线性变换和倒数变换 $w=\frac{1}{z}$ 的组合. 因为(1)式可以分解为

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{\frac{a}{c}(cz+d)+b-\frac{ad}{c}}{cz+d}$$

$$=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cz+d},$$

所以由 z 到 w 实际上是经过了下列相继的三个变换: $z_1=cz+d$,

$$z_2=\frac{1}{z_1},\ w=\frac{a}{c}+\left(b-\frac{ad}{c}\right)z_2.$$

在上节中已经证明了线性变换和倒数变换在全平面上（包括无穷远点在内）是保角的，所以分式线性变换也是包括∞在内的全平面上保角的变换.

20.5 分式线性变换下圆的特性·反演点对

一个圆形区域在分式线性变换下的一些特性在实际应用中很重要. 这里所指的圆包括直线在内（直线可看作圆心在无穷远处而半径为无穷大的圆）.

1. 在分式线性变换下，圆仍变为圆

对于平移和转动，圆仍变为圆是显然的. 因此只要证明在放大（或缩小）和倒数变换下圆仍保持为圆即可. 这两种变换可合写为 $w=\frac{r}{z}, r>0$.

z 平面上的一个圆

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0, \tag{1}$$

其中 A,B,C,D 都是实数，可以写成复数形式

$$Az\bar{z}+\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z+D=0, \tag{2}$$

其中 $\alpha=\frac{(B+iC)}{2}$. 经过变换 $w=\frac{r}{z}$，方程(2)变为

$$A\frac{r}{w}\frac{r}{\bar{w}}+\alpha\frac{r}{\bar{w}}+\bar{\alpha}\frac{r}{w}+D=0,$$

或

$$Dw\bar{w}+\alpha rw+\bar{\alpha}r\bar{w}+Ar^2=0, \tag{3}$$

而这是 w 平面上的一个圆[与(2)式比较即可看出].

从(3)式看到，如果原来的圆(2)通过原点 $z=0$，则 $D=0$，而(3)为一直线. 反过来，如果原来是一条直线，$A=0$，则其映像是通过原点 $w=0$ 的一个圆. 又如果原来是通过原点 $z=0$ 的一条直线，$A=D=0$，则其映像也是通过原点 $w=0$ 的一条直线. 不过

要注意，这些结论只是对于倒数变换说的，对于一般的分式线性变换不一定成立.

上面讨论了区域边界的对应关系，要确定区域本身的对应(例如圆内(或者圆外)究竟变为圆内还是圆外)，只要看原来区域内任意一个特定的点变到何处即可. 因为可以证明①，经过解析函数的变换，区域仍变为区域，故原来与这个特定的点相连通的点[2.1节]经过映射后仍是连通的.

2. 圆的反演点对·在分式线性变换下反演点对的不变性

一个圆的反演点对P和Q是这样两个点，它们位于通过圆心O的同一矢径上，并满足下列关系：

$$\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=R^2, \tag{4}$$

R是圆的半径(参看20.3节4). 显然，P和Q分别位于圆内外(图89).

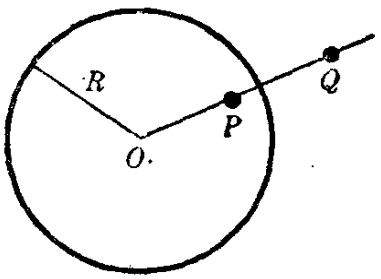


图 89

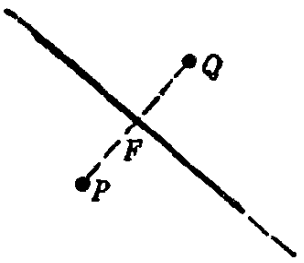


图 90

对于一条直线(圆的特殊情形，见上)，反演点对是直线两边的对称点(图90)，即

$$\overline{PF}=\overline{FQ}, \tag{5}$$

而且PQ垂直于直线. 证明如下：一条直线的"圆心"O在无穷远处，"半径"等于∞. 由(4)式有

① 参看，例如，И. И. 普里瓦洛夫，复变函数引论，第二章§4.8.

$$(R-\overline{PF})(R+\overline{FQ})=R^2,$$

$$(\overline{FQ}-\overline{PF})R-\overline{PF}\cdot\overline{FQ}=0,$$

$$\overline{FQ}-\overline{PF}=\overline{PF}\cdot\overline{FQ}/R.$$

令 $R\to\infty$，即得(5)式.

在分式线性变换下，不仅圆变为圆，而且反演点对也变为反演点对. 为了证明这一点，首先要注意反演点对的下列特性：通过P而且与圆O正交的圆族都必通过P的反演点Q；反过来，通过反演点对P和Q的圆族必与圆O正交.

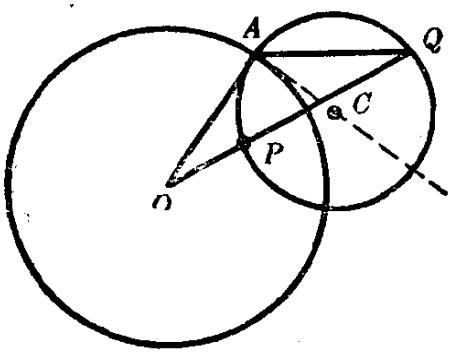


图 91

证：令圆C为通过P点并与圆O正交于A点的圆[图91]，则$\overline{OA}$与圆C相切. 设圆C交$\overline{OP}$的延线于Q，则因

$$\angle OAP=\angle OQA$$

故 $$\triangle OPA\sim\triangle OAQ,$$

而有 $$\overline{OP}/\overline{OA}=\overline{OA}/\overline{OQ},$$

即 $$\overline{OP}\ \overline{OQ}=\overline{OA^2}=R^2.$$

这说明P和Q是圆O的反演点对.

把上述论证的次序反过来，即可证明通过反演点对P和Q的圆C必与圆O正交.

其次我们注意到，经过分式线性变换，圆O变为圆O^*. （注

意，圆O的心一般不一定变成圆O^*的心)，而原来分别在圆O的内外的P和Q两点也分别变为圆O^*的内外两点P^*和Q^*，因为不相连通的两点经过变换后仍然是不相连通的（参看前面1的最后一段）. 为具体起见，设P^*在圆O^*之内，Q^*在其外. 又，圆C变为圆C^*，C^*通过P^*和Q^*两点而且与圆O^*正交(由于保角性). 但这并未证明P^*和Q^*是圆O^*的反演点对，还必须看P^*和Q^*是否在通过O^*的圆心的同一矢径上.

令Q'为P^*的反演点，则根据反演点对的性质，圆C^*也必然通过Q'点，因此圆C^*同时通过P^*，Q^*和Q'三点. 这样的圆应当只有一个，但事实上C^*有无穷多个(它们是通过P和Q两点的圆族的映像)，每一个都要同时通过P^*，Q^*和Q'三点，这是不可能的，除非Q^*与Q'重合. 这就证明Q^*是P^*的反演点.

在下一节中我们将举例说明，如何利用在分式线性变换下圆的这样一些特性来解某些平面场的边值问题.

20.6 应用举例

一根与地面平行的无穷长均匀带电导线，单位长的电荷为e，求电场.

由对称性知道，所有与导线垂直的各个平面上的电场分布都是一样的，因此只需要研究任意一个这种平面上的电场——平面场. 图92(a)中的P点代表导线(与垂直平面的交点)，设P到地面的距离$\overline{PO}$为h.

这问题的电势u满足下列方程和边界条件：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-4\pi e\delta(x)\delta(y-h), \tag{1}$$

$$u|_{y=0}=0, \tag{2}$$

其中设P点的坐标是$(0,h)$. 用级数展开的方法[参看13.3节和18.6节]解这个问题比较复杂，而且，要得到有限形式的解，还

须求级数之和. 用保角变换的方法可以直接得到有限的解式，其原理如下.

首先，根据上节的结果，利用分式线性变换以及在这种变换下圆的反演点对的不变性，可以把 z 平面的上半平面变成 ζ 平面中的一个圆，同时把 P 点变为圆心 P^*[图 92(b)]. 设这个变换式为

$$\zeta=\lambda\frac{z-\alpha}{z-\beta},\quad \zeta=\xi+i\eta \tag{3}$$

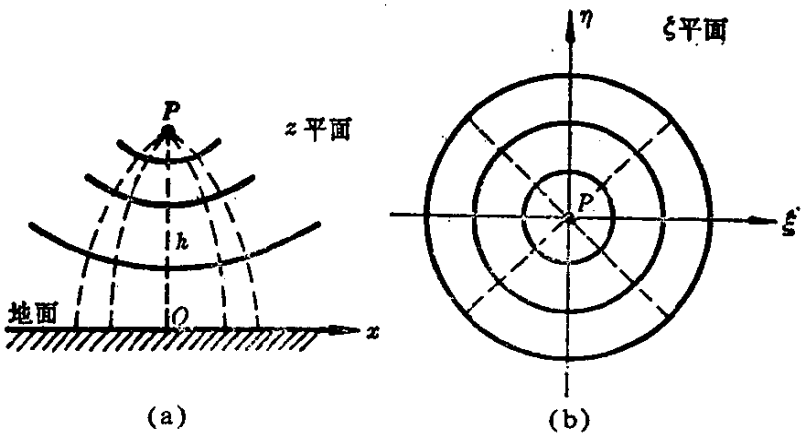


图 92

[20.4节(1)式总可以写成这种形式]，其中 λ,α 和 β 是三个独立参数. 在我们的问题中这三个参数可由下列要求确定：

(i) P 点的映像为圆心，而且圆心在 $\zeta=0$ 点；

(ii) 圆的半径等于 1 ①——单位圆.

P 点的坐标是 $(0,h)$，即 $z=ih$，故由(i) 立即得 $\alpha=ih$.

对于直线 $y=0$[图92(a)中的地面]说，ih 和 $-ih$ 两点是反演点对[上节(5)式]，$z=ih$ 点既然变为 $\zeta=0$ (圆心)，则 $z=-ih$ 点必变为 $\zeta=\infty$，因为根据上节(4)式，$\zeta=0$ 的反演点是 $\zeta=\infty$，而反演点对经过变换后仍保持为反演点对. 这样就确定了(3)式中的 $\beta=-ih$，而有

① 这个条件并非必要的，圆的半径可以任意而不影响最后的结果.

$$\zeta=\lambda\frac{z-ih}{z+ih}. \tag{4}$$

再由条件(ii)，当 $y=0$ 时 $|\zeta|=1$，得

$$|\lambda|\left|\frac{x-ih}{x+ih}\right|=1,$$

即
$$|\lambda|=1,\quad \lambda=e^{i\delta},$$

δ 为任意实数. 取 $\delta=0$，则 $\lambda=1$，而所求的变换为

$$\zeta=\frac{z-ih}{z+ih},\quad \zeta=\xi+i\eta. \tag{5}$$

根据 20.1 节(3)式(源的总强度不变)，在 (ξ,η) 坐标下方程(1)化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=-4\pi e\delta(\xi)\delta(\eta), \tag{6}$$

因为与 $x=0$，$y=h$ 对应的点是 $\xi=0,\eta=0$——**点源仍变为点源，而且强度不变**(这一结论对于任何解析函数的变换都成立，不限于分式线性变换).

边界条件(2)化为

$$u|_{|\zeta|=1}=0. \tag{7}$$

方程(6)和边界条件(7)代表这样一个物理问题：在半径等于 1 的接地圆柱导体面的轴线上有一均匀带电的导线，单位长度的电荷为 e，求柱面内的静电势. 这个问题的解是熟知的[参看，例如，18.5 节(10)式]，用极坐标表示就是

$$u=2e\ln\frac{1}{r},\quad r=|\zeta|. \tag{8}$$

回到 z 平面，有

$$u(x,y)=2e\ln\frac{1}{|\zeta|}=2e\ln\left|\frac{z+ih}{z-ih}\right|$$

$$=e\ln\frac{x^2+(y+h)^2}{x^2+(y-h)^2}. \tag{9}$$

由(9)式看出，等势面是圆柱面，其截面的方程为圆

$$\frac{x^2+(y+h)^2}{x^2+(y-h)^2}=c$$

或
$$x^2+\left(y-\frac{c+1}{c-1}h\right)^2=\frac{4c}{(c-1)^2}h^2, \tag{10}$$

其中 c 是参数，而且 $c>1$（因为 $y>0$）. 在图 91(a) 中用实线画出的就是这些等势线，它们的映像是图 91(b) 中的圆 $|\zeta|=\frac{1}{\sqrt{c}}$. 两图中的虚线都代表电力线；在 ζ 平面，电力线的方程是 $\theta=b$（常数），$\theta=\arg\zeta=\arctan\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$. 回到 z 平面[用(5)式]，电力线的方程是

$$\arctan\left(\frac{\eta}{\xi}\right)=\arctan\frac{2hx}{h^2-x^2-y^2}=b$$

或
$$(x+h\cot b)^2+y^2=h^2\csc^2 b \tag{11}$$

这是一族通过 P 点（$x=0, y=h$）的圆（也通过 P 点的反演点 $x=0$，$y=-h$），与(10)式所表示的圆是正交的（保角性）.

练习题. 求一变换把单位圆仍变为单位圆，并把原来距离圆心为 δ 的一点变为圆心. 试说明这种图形的变换可以用来解决什么样的平面场问题.

注意，在边界条件(2)之下，方程(1)的解(9)实际上就是半平面区域中拉氏算符第一边值问题的格临函数（$e=1$），故(9)式可用来解决在这种区域中的普遍第一边值问题.

(9)式也可以用 18.7 节中所介绍的电像法很容易地求得.

20.7 变 换 $\zeta=z^n$

函数 $\zeta=z^n$ 把 z 平面上与正实轴夹角为 $\frac{\pi}{n}$ 的角形区域变为 ζ 的上半平面[图 93，图中设 z 平面与 ζ 平面重合]. 证明如下：令 $z=re^{i\theta}$，$\zeta=\rho e^{i\varphi}$，有

$$\rho=r^n,\quad \varphi=n\theta,$$

故边界 $0<r<\infty,\theta=0$（正实轴）变为 $0<\rho<\infty,\varphi=0$（仍是正实轴），而边界 OA，即 $0<r<\infty,\theta=\frac{\pi}{n}$，则变为 $0<\rho<\infty$，$\varphi=\pi$（负实轴）．注意这种变换在 $z=0$ 点是不保角的．

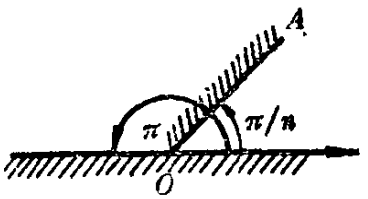


图 93

练习题． $\zeta=z^n$ 把 z 平面上与实轴夹角为 $2\pi/n$ 的角形区域变成 ζ 平面上的什么区域？

例．求直角形区域中等势面和电力线的分布，假定在直角的两边上电势为 V_0．

用变换 $\zeta=z^2$ 把直角形区域变为 ζ 平面的上半平面，直角形的两边变为 ζ 平面的实轴．在这实轴上电势 u 是常数，等于 V_0．这种情况下的电场是熟知的：等势线是与实轴平行的直线 $\eta=$常数［图 94(b)中的实线］，电力线则是与虚轴平行的直线 $\xi=$常数［图 94(b)中的虚线］．在 (ξ,η) 坐标系中，由对称性知拉氏方程的解与 ξ 无关，因此

$$\frac{d^2u}{d\eta^2}=0,$$

而有

$$u=A\eta+V_0. \tag{1}$$

这个解还满足边界条件 $u|_{\eta=0}=V_0$，A 则是任意常数．

回到 z 平面，由 $\zeta=\xi+i\eta=(x+iy)^2$ 有

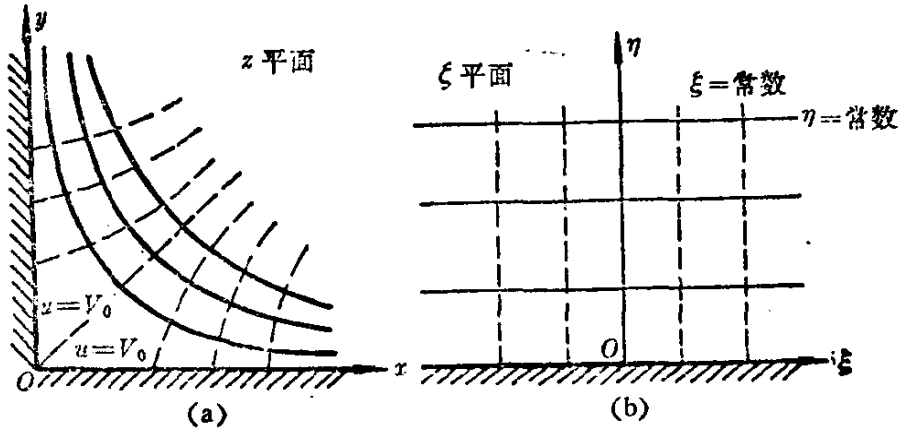


图 94

$$\xi = x^2 - y^2, \quad \eta = 2xy, \tag{2}$$

故等势线的方程是

$$\eta = 2xy = 常数; \tag{3}$$

电力线的方程是

$$\xi = x^2 - y^2 = 常数. \tag{4}$$

(2)和(3)都代表双曲线族，分别用实线和虚线在图 94(a)中画出.

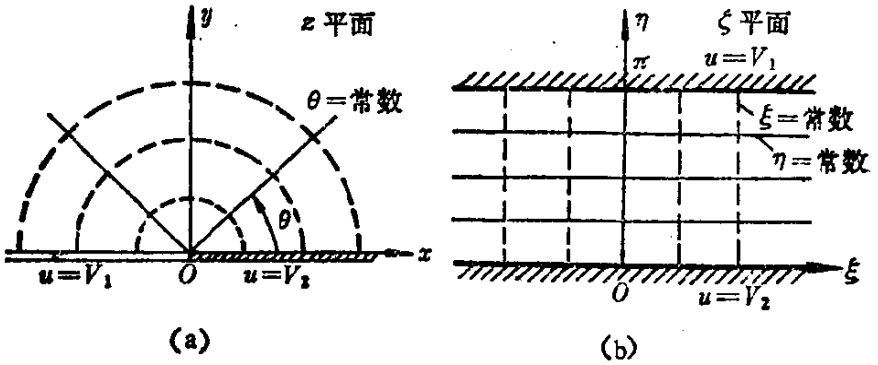
(1)式中的常数 A 可根据在某一等势线 η = 常数上电势 u 之值确定.

20.8 变 换 $\zeta = \ln z$

变换 $\zeta = \ln z$ 把 z 平面的上半平面变成 ζ 平面上平行于实轴、宽为 π 的一个带形区域[参看 3.5 节(6)式]，证明如下：z 平面的正实轴是 $0 < r < \infty, \theta = 0 (z = re^{i\theta})$，相应的 ζ 是 $-\infty < \mathrm{Re}(\zeta) < \infty$，$\mathrm{Im}(\zeta) = 0$(因 $\zeta = \ln|z| + i \arg z$)，而 z 平面上的负实轴是 $0 < r < \infty, \theta = \pi$，相应的 ζ 是 $-\infty < \mathrm{Re}(\zeta) < \infty, \mathrm{Im}(\zeta) = \pi$.

例. 两块半无穷大的金属板连成一块无穷大的板，连结处[图 95(a)的 O]绝缘. 设两部分的电势分别为 V_1 和 V_2，求板外的电势.

在 ζ 平面上，问题变为求平行板之间的电势，两板的电势分别



(a) (b)

图 95

为V_1和V_2，距离为π[图 95(b)]. 设电势为$u=A\eta+B$[参看上节(1)式]. 由边界条件

$$\eta=0,\ u=V_2,$$

$$\eta=\pi,\ u=V_1,$$

得
$$B=V_2,\ A=\frac{(V_1-V_2)}{\pi},$$

而
$$u=\frac{V_1-V_2}{\pi}\eta+V_2. \tag{1}$$

回到z平面，得($\xi=\ln|z|$, $\eta=\arg z$)

$$u=\frac{V_1-V_2}{\pi}\arg z+V_2=\frac{V_1-V_2}{\pi}\theta+V_2. \tag{2}$$

因此，等势线是由O点出发的矢径：$\theta=$常数，$0<r<\infty$[图 95(a)中的实线]. 电力线是与$\xi=$常数相应的曲线

$$\ln|z|=\text{常数},$$

即
$$r=\text{常数}\ (0<\theta<\pi), \tag{3}$$

它们是一些半圆[图 95(a)中的虚线].

20.9* 多边形的变换(席伐尔兹(Schwartz)变换)

在前几节中我们讨论了圆和半平面在一些初等函数所代表的变换下变成什么形状的区域，并说明如何应用所得结果来解决某一类边值问题。在很多实际问题中，区域是一个多边形[广义的，见下面图 98,99,101,102 等]，可以找到一个变换把这区域变为半平面[从而也就能变为圆，见 20.6 节]. 这样的变换称为席伐尔兹(Schwartz)变换[见下面的(1)和(4)式].

图 96 是z平面上一个闭合的多边形，顶点为$z_1,z_2,\cdots,z_8$；$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_8$是在相应顶点处的外角($|\alpha_i|<\pi$)，逆时针方向的算作正，如$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_7,\alpha_8$，顺时针方向的算作负，如$\alpha_3,\alpha_6$.

假定变换$z=f(\zeta)$把这个多边形内的区域变成上半平面[图 97]，实轴上的点$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_8$依次与顶点$z_1,z_2,\cdots,z_8$对

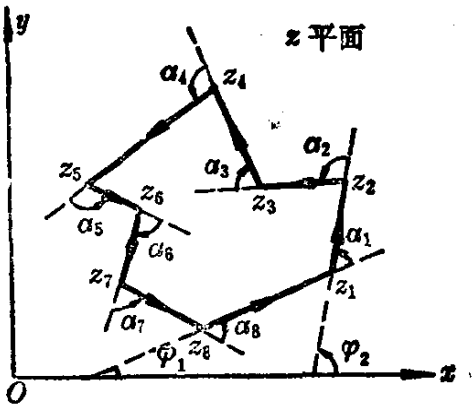


图 96

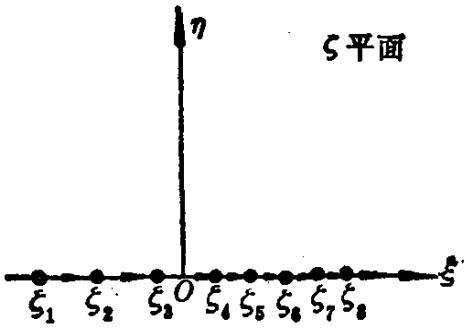


图 97

应，整个实轴与多边形的周界对应。现在来看这样的变换应满足什么条件。

首先，在多边形的顶点上，变换是不保角的(由$\pi-\alpha_i$变为π)，因此，在ξ_i点$\frac{dz}{d\xi}$之值必为零或者无穷大[20.2节]。于是，在ξ_i点的附近应有①

$$\frac{dz}{d\xi}\sim(\xi-\xi_i)^{\beta_i}.$$

要确定常数β_i，取这式两边的辐角，得

$$\arg dz\sim\arg d\xi+\beta_i\arg(\xi-\xi_i).$$

为了说明起来方便，设$i=1$。当ζ在实轴上ξ_1点的左边时，相应的z在从z_8到z_1的直线上，$\arg dz=\varphi_1$；当ζ取道上半平面变到ξ_1点之右时，相应的z变到z_1到z_2的直线段上，$\arg dz=\varphi_2$。在ξ_1的两边$\arg d\xi$之值没有变，因此

$$\begin{aligned}&(\arg dz)_{\zeta=\xi_1+0}-(\arg dz)_{\zeta=\xi_1-0}\\&=\beta_1[\arg(\xi-\xi_1)_{\zeta=\xi_1+0}-\arg(\xi-\xi_1)_{\zeta=\xi_1-0}]\\&=\varphi_2-\varphi_1=\alpha_1,\end{aligned}$$

① 关于下面(1)式的推导，参照了梁昆淼，数学物理方法，§60，第379页。

但$\arg(\zeta-\zeta_1)_{\zeta=\zeta_1+0}-\arg(\zeta-\zeta_1)_{\zeta=\zeta_1-0}=-\pi$，故$\beta_1=-\frac{\alpha_1}{\pi}$.这结果对于任何$\zeta_i$点都成立，故在$\zeta_i$点的附近，

$$\frac{dz}{d\zeta}\sim(\zeta-\zeta_i)^{-\frac{\alpha_i}{\pi}}.$$

由此可以推想，把一个多边形变为上半平面的变换$z=f(\zeta)$应满足下列微分方程：

$$\frac{dz}{d\zeta}=A(\zeta-\zeta_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}}(\zeta-\zeta_2)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}}\cdots(\zeta-\zeta_n)^{-\frac{\alpha_n}{\pi}}$$

$$=A\prod_{i=1}^{n}(\zeta-\zeta_i)^{-\frac{\alpha_i}{\pi}},\tag{1}$$

其中n是多边形的顶点(或者边)的数目，α_i满足关系式①

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=2\pi.\tag{2}$$

要证明(1)式所给出的变换确实能够把多边形变为上半平面，可取这式两边的辐角：

$$\arg\ dz=\arg d\zeta+\arg A-\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{\pi}\arg(\zeta-\zeta_i).\tag{3}$$

由此看出，当ζ点在实轴上任意两个相邻的点ζ_i和ζ_{i+1}之间变动时$\arg\ dz$不变，因此相应的z点是在一条直线段上；而当ζ取道上半平面由ζ_i之左绕到ζ_i之右时，$\arg\ dz$跃变了一个α_i角，相应的z点也转到另一条直线段上，两直线段的交角为α_i. 当ζ点由$\zeta=-\infty$起沿实轴这样变动到$\zeta=+\infty$时，$\arg\ dz$总共改变了$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=2\pi$，相应的$z$也回到出发点. 此外，从对应边界的走向(区域在

① 对于一个闭合多边形，(2)式是显然的，因为当z点沿多边形的周界走一圈回到原处时，相应的位移矢量dz在空间转了2π角度，而这也正是多边形的外角之和. 当然，这个结果也可以用几何方法证明.

左)即见多边形的内部与上半平面对应. 这就证明(1)式给出的积分

$$z=A\int(\zeta-\zeta_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}}(\zeta-\zeta_2)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}}\cdots(\zeta-\zeta_n)^{-\frac{\alpha_n}{\pi}}d\zeta+B \qquad (4)$$

确是所求的变换，其中A和B是任意常数，B显然只与z平面上坐标系的原点的选择有关，而A的辐角则与坐标轴的方向有关.

(1)或(4)所代表的变换就是席伐尔兹变换. 在实际应用这变换时，主要的问题在于计算(4)式的积分以及确定常数A，ζ_i等. 关于ζ_i可以利用下列原理来确定其中的三点.

很容易证明，席伐尔兹变换再经过一次分式线性变换之后，其形式不变. 在一个分式线性变换中有三个独立的参数[见20.6节(3)式]，可以加以利用. 例如，任意从顶点z_1，z_2，…，z_n之中选出三点，要求它们变为ζ平面的实轴上任意指定的三点，于是ζ_i点之中的三个就是确定的了. 其他的ζ_i点和A的模$|A|$则要另行求出，而不能再随意指定. 在特殊情况下可以得到确定这些常数的公式[见下节(2),(3)式]. 在(下节)讲这些公式之前，先讨论一下不闭合"多边形"的情形.

不闭合的多边形是指，例如，图98中所示的图形：顶点z_3在

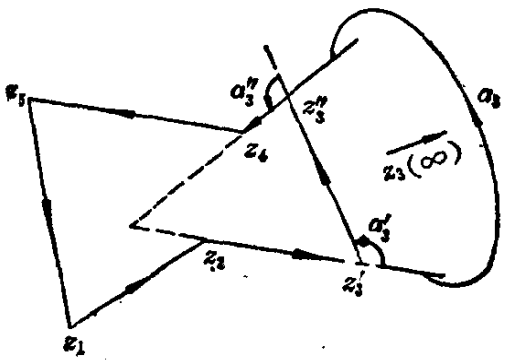


图 98

∞，$\alpha_3\geqslant\pi$. 可以证明，在这种情形下，公式(1)或者(4)仍然完

全适用．为此，在多边形的开口处加上一条边 $\overline{z_3'z_3''}$ ．于是，对于多边形 $z_1z_2z_3'z_3''z_4z_5$ 可以应用(4)式，得

$$z=A\int(\zeta-\zeta_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}}\cdots(\zeta-\zeta_3')^{-\frac{\alpha_3'}{\pi}}(\zeta-\zeta_3'')^{-\frac{\alpha_3''}{\pi}}\cdots d\zeta+B,$$

其中 $\alpha_3'+\alpha_3''=\alpha_3$．令 z_3' 和 $z_3''\to z_3(\infty)$，则 ζ_3' 和 $\zeta_3''\to\zeta_3$，而有

$$(\zeta-\zeta_3')^{-\frac{\alpha_3'}{\pi}}(\zeta-\zeta_3'')^{-\frac{\alpha_3''}{\pi}}\to(\zeta-\zeta_3)^{-\frac{\alpha_3}{\pi}},$$

故(4)式不变(注意在这种情形下 $|\alpha_3|\geqslant\pi$)．

又，为了尽量使(4)式的积分简化，常常规定顶点之一，例如 z_n，在 ζ 平面实轴上的对应点 ζ_n 为 ∞．这样，(4)式的被积函数中就会少掉 $(\zeta-\zeta_n)^{-\frac{\alpha_n}{\pi}}$ 这个因子．原因如下：若先假定 $\zeta_n\neq0$，(4)式可写为

$$z=A\zeta_n^{-\frac{\alpha_n}{\pi}}\int(\zeta-\zeta_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}}\cdots(\zeta-\zeta_{n-1})^{-\frac{\alpha_{n-1}}{\pi}}\left(\frac{\zeta}{\zeta_n}-1\right)^{-\frac{\alpha_n}{\pi}}d\zeta+B$$

把任意常数 $A\zeta_n^{-\frac{\alpha_n}{\pi}}$ 写作 A'，再令 $\zeta_n\to\infty$，即得

$$z=A''\int(\zeta-\zeta_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}}\cdots(\zeta-\zeta_{n-1})^{-\frac{\alpha_{n-1}}{\pi}}d\zeta+B. \qquad (5)$$

但要注意，α_n 仍须算在 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=2\pi$ 的关系之内；A'' 和 B 是任意常数．

20.10* 特殊情形下求 A 和 ζ_i 的公式

如果原来的多边形有一个顶点，例如图 99 中的 z_3，在 ∞ 处，而且 $\alpha_3=\pi$，则可利用两个平行边之间的距离 D 来求上节(4)式中的常数 A．其原理如下．

设与 z_3 相应的 ζ_3 在有限处(实轴上)．当 ζ 取道上半平面，沿

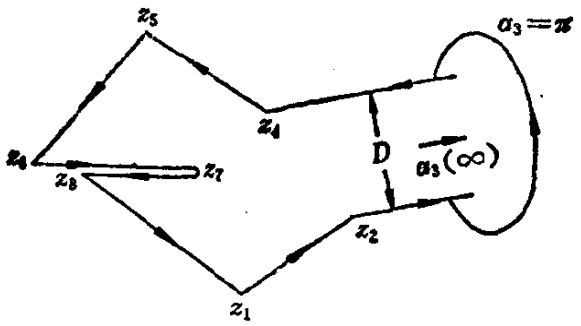


图 99

半径为 δ 的半圆C_δ从ξ_3之左绕到ξ_3之右时，相应的 z 的改变为

$$\Delta z=A\int_{C_\delta}(\xi-\xi_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}}(\xi-\xi_2)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}}(\delta e^{i\theta})^{-1}\cdots d(\delta e^{i\theta})$$

$$\to A(\xi_3-\xi_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}}(\xi_3-\xi_2)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}}(\xi_3-\xi_4)^{-\frac{\alpha_4}{\pi}}\cdots\int_{\pi}^{0} id\theta$$

$$(\delta\to 0)$$

$$=-i\pi A\prod_{i\neq 3}(\xi_3-\xi_i)^{\frac{\alpha_i}{\pi}}, \tag{1}$$

其中各个多值因子$(\xi_3-\xi_i)^{-\frac{\alpha_i}{\pi}}$的值可以这样规定：若$\xi_i$在$\xi_3$之右，则$\arg(\xi_3-\xi_i)=\pi$；若$\xi_i$在$\xi_3$之左，则$\arg(\xi_3-\xi_i)=0$(这种规定并不影响结果的普遍性，因为$A$还未定)．

可以证明(1)式中的$\Delta z(\delta\to 0)$正是原多边形中以 z_3为顶点的两个平行边之间的距离D[图 99]．证明如下：

C_δ的两端是垂直于实轴的，故由于保角性，在 z 平面上的相应曲线的两端也应当分别垂直于$\overline{z_2z_3}$和$\overline{z_3z_4}$两条平行线．于是，只要证明与C_δ相应的这条曲线是直线即可．

由上节(1)式有

$$\frac{dz}{d\zeta}=A\prod_{i\neq 3}(\zeta-\xi_i)^{-\frac{\alpha_i}{\pi}}\cdot(\zeta-\xi_3)^{-1}\quad(\text{因}\alpha_3=\pi),$$

$$\arg dz=\arg d\xi+\arg A+$$
$$\sum_{i\neq 3}\left(-\frac{\alpha_i}{\pi}\right)\arg(\xi-\xi_i)-\arg(\xi-\xi_3).$$

当$\delta\to 0$时，在C_δ上，如果$i\neq 3$，$\arg(\xi-\xi_i)$的改变$\to 0$，$d\xi$则总是与$\xi-\xi_3$垂直的［图100］，故$\arg d\xi-\arg(\xi-\xi_3)$是一个常数$\left(=-\frac{\pi}{2}\right)$，而有$\arg\ dz=$常数．这表示在$z$平面上与$C_\delta$相应的确是一条直线．因此$|\Delta z|_{\delta\to 0}=D$，而由(1)式得

$$D=\pi|A|\left|\prod_{i\neq 3}(\xi_3-\xi_i)^{-\frac{\alpha_i}{\pi}}\right|,$$

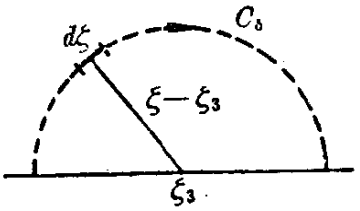


图 100

或者普遍地写作

$$D_k=\pi|A|\left|\prod_{i\neq k}(\xi_k-\xi_i)^{-\frac{\alpha_i}{\pi}}\right|,\qquad(2)$$

其中ξ_k是与$z_k(=\infty)$相应的点，$\alpha_k\doteq\pi$，D_k是以z_k为顶点的两个平行边之间的距离．

如果指定$z_k(=\infty)$变为$\xi_k=\infty$，则由ξ_k之"左"变到ξ_k之"右"应当是沿半径$R\to\infty$的半圆C_R．于是，由上节(5)式得

$$\Delta z=A\int_{C_R}(\xi-\xi_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}}\cdots(\xi-\xi_{k-1})^{-\frac{\alpha_{k-1}}{\pi}}(\xi-\xi_{k+1})^{-\frac{\alpha_{k+1}}{\pi}}\cdots d\xi$$
$$\to A\int_{C_R}\xi^{-\frac{1}{\pi}\sum_{i\neq k}\alpha_i}d\xi\quad(R\to\infty)$$
$$=A\int_{C_R}\xi^{-1}d\xi=i\pi A,$$

因为$\sum_{i\neq k}\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-\alpha_k=2\pi-\pi=\pi$．由此得

$$D_k=\pi|A|.\qquad(3)$$

如果多边形有几个像图 99 中z_3那样的顶点($z_3=\infty$, $\alpha_3=\pi$), 可令其中之一的对应点为 $\zeta=\infty$, 而用(3)式 求出$|A|$, 然后代入(2)式,再来确定其他的ζ_i. 例如图 101 的情形,令$\zeta_1=\infty$,由(3)式得$\pi|A|=D_1$,代入(2)式(注意$\zeta_1=\infty$, 因此 右方 没有含 ζ_1 的因子),得

$$D_3=D_1\left|(\zeta_3-\zeta_2)^{\frac{1}{2}}(\zeta_3-\zeta_4)^{\frac{1}{2}}(\zeta_3-\zeta_5)^{-1}\right|,$$

$$D_5=D_1\left|(\zeta_5-\zeta_2)^{\frac{1}{2}}(\zeta_5-\zeta_3)^{-1}(\zeta_5-\zeta_4)^{\frac{1}{2}}\right|.$$

此外,再指定$\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4,\zeta_5$中的任意两个点的位置(实数),就可以确定相应变换式中所有的常数.

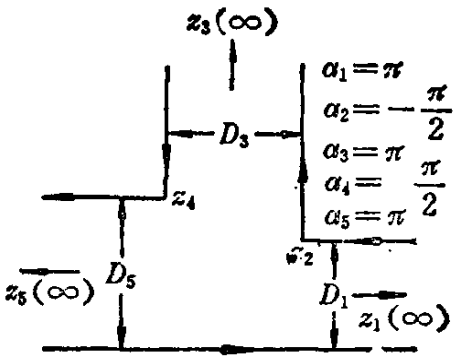


图 101

20.11* 应用举例——平行板边缘的电场

图 102 中两平行板的电势u分别为V_0和$-V_0$. 由对称性知与两板等距离$\left(=\frac{d}{2}\right)$的线$C'A'$上的电势为零,因此只 要考 虑"多边形"$ABCC'A'$所"围成"的 区 域[不闭 合的 多边形, 见 20.9 节图 98],其中A,C,C',A'都延伸至∞. 暂时不 确定 z 平面上 的坐标系,先求把这个多边形化为上半平面的变换.

设B点为z_1,C和C'点为$z_2(=\infty)$,A和A'点为$z_3(=\infty)$,则相

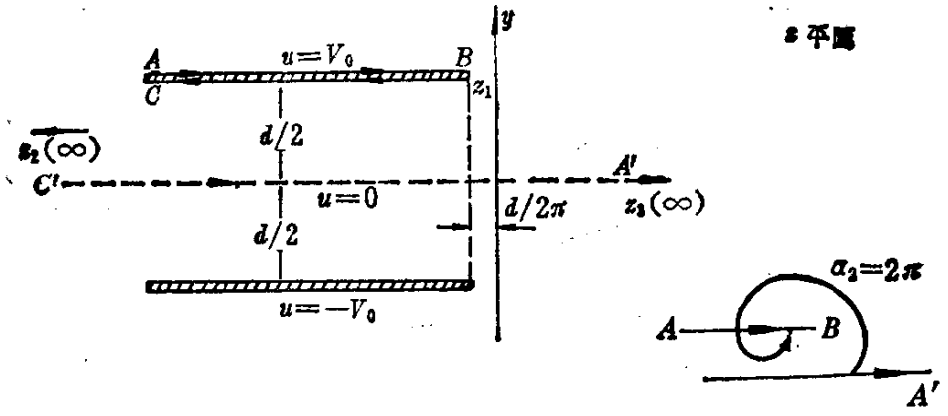


图 102

应的外角为

$$\alpha_1=-\pi,\quad \alpha_2=\pi,\quad \alpha_3=2\pi \tag{1}$$

[关于$\alpha_3=2\pi$,见图 102 右下方的附图].

规定z_1变为$\zeta_1=-1$,z_2 变为$\zeta_2=0$, z_3变为$\zeta_3=\infty$[图 103],由20.9节(5)式得

$$z=A\int(\zeta+1)\zeta^{-1}d\zeta+B$$

$$=A(\zeta+\ln\zeta)+B. \tag{2}$$

利用上节(2)式,令$k=2$,注意$\zeta_3=\infty$,因此ζ_3不出现在该式的右方,得

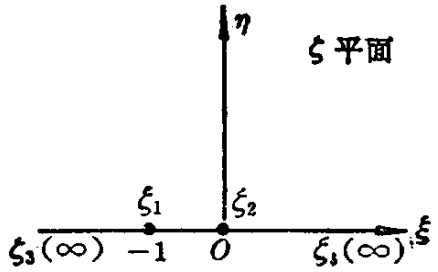


图 103

$$\frac{d}{2}=\pi|A||\zeta_2-\zeta_1|=\pi|A|.$$

设$\arg A=0$,则$A=\dfrac{d}{2\pi}$,又由(2)有

$$z_1=A[-1+\ln(-1)]+B$$

$$=\frac{d}{2\pi}(-1+i\pi)+B$$

$$=-\frac{d}{2\pi}+i\frac{d}{2}+B.$$

选z_1的坐标为$-\dfrac{d}{2\pi}+i\dfrac{d}{2}$,则$B=0$,而(2)式完全确定,

$$z=\frac{d}{2\pi}(\zeta+\ln\zeta). \tag{3}$$

z平面上的坐标系也完全确定：$C'A'$是实轴，虚轴在z_1点之右，与z_1相距为$\frac{d}{2\pi}$[见图 102].

变换(3)把多边形 $ABCC'A'$ 变为ζ平面的上半平面，因为与上半平面的点$\zeta=i$ 相应的点 $z=\frac{d}{2\pi}(i+\ln i)=\frac{d}{2\pi}\left(i+i\frac{\pi}{2}\right)$在多边形内. ζ平面的实轴上由$\zeta=-\infty$到$\zeta=-1$ 的一段与AB 边相应，由-1 到 0 的一段与BC边相应，由 0 到∞的一段与$C'A'$相应. 因此，在ζ平面的负实轴上$u=V_0$，在正实轴上$u=0$. 这种 情况下的电场已在 20.8 节中讨论过，得到的等势线方程是

$$\arg\zeta=\theta=\text{常数}，\ 0<r<\infty;$$

电力线的方程是

$$|\zeta|=r=\text{常数}，\ 0<\theta<\pi.$$

代入(3)式，得($\zeta=re^{i\theta}$)

$$z=x+iy=\frac{d}{2\pi}[r\cos\theta+\ln r+i(r\sin\theta+\theta)],$$

故

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{d}{2\pi}(r\cos\theta+\ln r),\\ y&=\frac{d}{2\pi}(r\sin\theta+\theta),\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

固定(4)式中的r，以θ为参数，$0<\theta<\pi$，则(4)式给出平行板之间等势线的参数方程；如果固定其中的θ，以r为参数，$0<r<\infty$，得到的是平行板之间电力线的参数方程.

由 20.8 节(2)式得电势 u 的表达式：

$$u=\frac{V_0}{\pi}\theta=\frac{V_0}{\pi}\arctan\frac{\eta}{\xi}(\zeta=\xi+i\eta). \tag{5}$$

要得到u在xy坐标系中的表达式，可由(4)式消去r，把θ表为x 和y

的函数，代入(5)式．但这需要解一个联立的超越方程，得不到有限表达式．

图 104 是根据(4)式画出的等势线(实线)和电力线(虚线)．

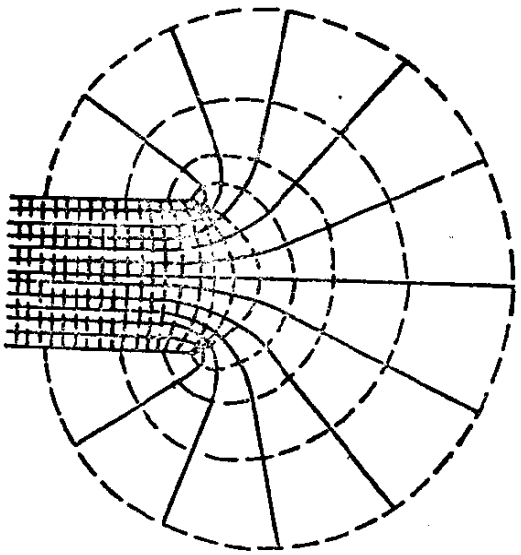


图 104

20.12* 把多边形外部变为上半平面的变换

在有些问题中需要把一个(闭合的)多边形的外部变为上半平面①．这种变换的特征是，z平面上多边形外的无穷远点 $z=\infty$ 变为ζ平面的上半平面中的一点$\zeta=p+iq$，p为实数，$q>0$．因此，在$\zeta=p+iq$点的附近应有

$$z\sim\frac{1}{\zeta-(p+iq)},$$

这里面没有$[\zeta-(p+iq)]^{-1}$的高次幂，否则区域内的点z和 ζ 的对应就不是唯一的．于是有

$$\frac{dz}{d\zeta}\sim\frac{1}{[\zeta-(p+iq)]^2}.$$

① 读者可注意，当多边形的内部变为上半平面时，其外部并不相当于全部下半平面！

因此，把多边形的外部变成上半平面的变换应当满足下面的微分方程：

$$\frac{dz}{d\zeta}=A\prod_{i=1}^{n}(\zeta-\zeta_i)^{-\frac{\alpha_i}{\pi}}\cdot\frac{1}{[(\zeta-p)^2+q^2]^2}. \tag{1}$$

其中ζ_i是与多边形的顶点z_i对应的点，α_i是在z_i点的外角，但边界的走向现在是顺时针的(使问题中的区域在边界走向的左方)。图105中α_1，α_2等顺时针方向的外角仍是负值，α_5则是正的。

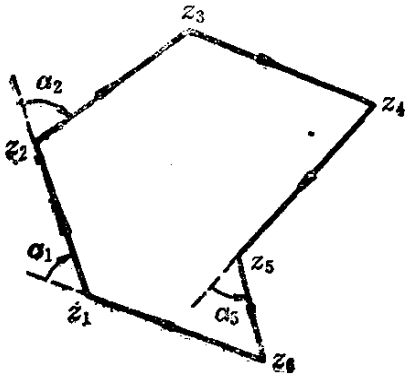


图 105

在(1)式中还引进了因子$[\zeta-(p-iq)]^{-2}$，因为只有这样才能使多边形的边界与ζ平面的实轴对应。理由如下：由(1)有

$$\arg\,dz=\arg\,d\zeta+\arg\left\{A\prod_{i=1}^{n}(\zeta-\zeta_i)^{-\frac{\alpha_i}{\pi}}\right\}$$
$$-2\{\arg[\zeta-(p+iq)]+\arg[\zeta-(p-iq)]\},$$

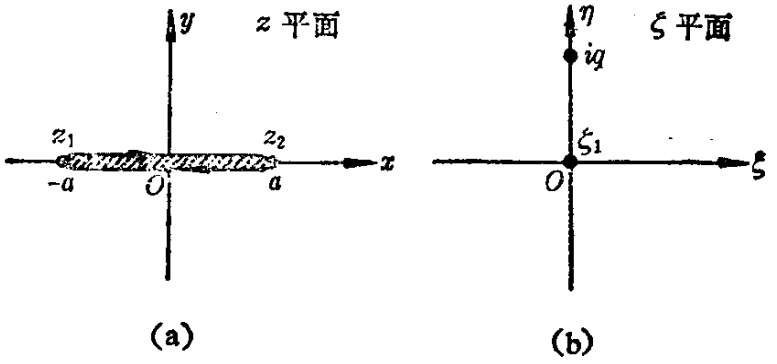
当ζ是实轴上的变点时，$\zeta-(p+iq)$和$\zeta-(p-iq)$是共轭复数，两者的辐角大小相等、方向相反，使上式中后面两项之和为零，而z和ζ在变化时的对应关系完全与20.9节(3)式一样，多边形的边界也就正好与ζ平面上的实轴对应。

对(1)式求积分，得

$$z=A\int\prod_{i=1}^{n}(\zeta-\zeta_i)^{-\frac{\alpha_i}{\pi}}[(\zeta-p)^2+q^2]^{-2}d\zeta+B. \tag{2}$$

20.13* 应用举例——儒可夫斯基（ЖУКОВСКИЙ）变换

先求一变换，把沿实轴从$z=-a$到$z=a(>0)$割开的z平面[图 106(a)]变成上半平面[图 106(b)].



(a) (b)

图 106

z平面上的割缝可以看作一个两边形，顶点为$z_1=-a, z_2=a$，外角$\alpha_1=-\pi, \alpha_2=-\pi$. 现在规定把$z_1$点变为$\zeta_1=0$，$z_2$点变为$\zeta_2=\infty$，$z=\infty$变为$\zeta=iq$. 由上节(2)式，注意由于$\zeta_2=\infty$，被积函数中不含$\zeta_2$[参看 20.9 节(5)式]，得

$$z=A\int\zeta(\zeta^2+q^2)^{-2}d\zeta+B$$

$$=-\frac{A}{2}\frac{1}{\zeta^2+q^2}+B.$$

因$z_1=-a$与$\zeta_1=0$对应，$z_2=a$与$\zeta_2=\infty$对应，故

$$-a=-\frac{A}{2}\frac{1}{q^2}+B,\quad a=B.$$

由此得$A=4q^2a$，而

$$z=-2a\frac{q^2}{\zeta^2+q^2}+a. \tag{1}$$

这就是所求的变换.

再用分式线性变换

$$w=\frac{\zeta+iq}{\zeta-iq}$$

把上半平面变为单位圆，$\zeta=-iq$点变为圆心$w=0$，$\zeta=iq$变为$w=\infty$[参看20.6节(5)式]，有

$$\frac{w+1}{w-1}=\frac{2\zeta}{2iq}=\frac{\zeta}{iq}.$$

代入(1)，得

$$z=-2a\frac{q^2}{-q^2\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2+q^2}+a$$

$$=a\left[\frac{2(w-1)^2}{(w+1)^2-(w-1)^2}+1\right]$$

$$=a\frac{2(w-1)^2+4w}{4w}$$

$$=\frac{a}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)$$

变换

$$z=\frac{a}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right) \tag{3}$$

称为儒可夫斯基变换．这个变换把图106（a）中的区域变为单位圆外，而且无穷远点仍变为无穷远点．

练习题． 证明变换(3)把z平面上以$z=\pm a$为焦点的共焦椭圆变为w平面上的同心圆．

第二十一章　二阶线性偏微分方程分类

前面我们讨论了下列三种典型的二阶线性偏微分方程：

波动方程—— $\nabla^2 u-\frac{1}{c^2}u_{tt}=-f$；

热传导或扩散方程——$u_t-\kappa\nabla^2 u=f$；

泊松方程——$\nabla^2 u=-f$.

这些方程各代表不同性质的物理过程[12.1节]，因此它们的解也各有不同的特性. 以前我们着重讨论解这些方程的共同方法，如分离变数法、积分变换、格临函数等. 在本章中我们将从普遍的二阶线性方程分类的角度来说明这些方程的差异.

21.1　二阶线性偏微分方程分类·两个自变数的情形

两个自变数的二阶偏微分方程的最普遍形式是

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})=0, \tag{1}$$

F 是一个给定的函数，x 和 y 是自变数(实数)，$u(x,y)$是未知函数，$u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy}$ 表示 u 的一阶和二阶偏导数.

如果(1)式中 u 的二阶偏导数都是一次的，即(1)具有

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+g=0 \tag{2}$$

的特殊形式，其中 a,b,c,g 都是 x,y,u,u_x,u_y 的函数，则方程称为**准线性的**.

如果方程具有

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+du_x+eu_y+fu+g=0 \tag{3}$$

的形式，其中 a,b,c,d,e,f,g 都只是自变数 x 和 y 的函数，则方程称为**线性的**. 以前讨论过的方程都属于这一类. 下面设 a,b,c

是 xy 平面上一定区域中的连续可微函数，我们来讨论线性方程(3)的简化和分类，并给出各类方程的典则式.

为了简化方程(3)，引进新的变数 ξ 和 η(实数)

$$\xi=\varphi(x,y),\quad \eta=\psi(x,y), \tag{4}$$

并设在问题的区域中

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}\neq 0, \tag{5}$$

以保证 ξ 和 η 是独立变数. 于是有

$$\left.\begin{aligned}
&u_x=u_\xi\varphi_x+u_\eta\psi_x,\ u_y=u_\xi\varphi_y+u_\eta\psi_y,\\
&u_{xx}=u_{\xi\xi}\varphi_x^2+2\,u_{\xi\eta}\varphi_x\psi_x+u_{\eta\eta}\psi_x^2+u_\xi\varphi_{xx}+u_\eta\psi_{xx},\\
&u_{xy}=u_{\xi\xi}\varphi_x\varphi_y+u_{\xi\eta}(\varphi_x\psi_y+\varphi_y\psi_x)+u_{\eta\eta}\psi_x\psi_y\\
&\qquad+u_\xi\varphi_{xy}+u_\eta\psi_{xy},\\
&u_{yy}=u_{\xi\xi}\varphi_y^2+2\,u_{\xi\eta}\varphi_y\psi_y+u_{\eta\eta}\psi_y^2+u_\xi\varphi_{yy}+u_\eta\psi_{yy}.
\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

代入(3)式，得

$$\alpha u_{\xi\xi}+2\,\beta u_{\xi\eta}+\gamma u_{\eta\eta}+\Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)=0, \tag{7}$$

其中

$$\alpha=a\varphi_x^2+2\,b\varphi_x\varphi_y+c\varphi_y^2, \tag{8}$$

$$\beta=a\varphi_x\psi_x+b(\varphi_x\psi_y+\psi_x\varphi_y)+c\varphi_y\psi_y, \tag{9}$$

$$\gamma=a\psi_x^2+2\,b\psi_x\psi_y+c\psi_y^2, \tag{10}$$

Φ 是 u,u_ξ 和 u_η 的线性函数.

从(8)和(10)式看到，适当地选择函数 φ 和 ψ，可以使方程(7)化简. 例如，如果能选 φ 和 ψ 为一阶偏微分方程

$$az_x^2+2\,bz_xz_y+cz_y^2=0 \tag{11}$$

(z 是 x 和 y 的函数)的两个互相独立的解，则(7)式中的 α 和 γ 等于零. 因此，简化(3)式的关键在于求方程(11)的特解.

现在证明，求方程(11)的特解的问题和一个常微分方程的求通解问题等价. 在证明中假定 $a\neq 0$(因为 a 和 c 两者至少有一不为零，否则(3)已是简化了的形式).

设 $z(x,y)$ 是方程(11)的一个特解，则 $z(x,y)=C$(常数)必

满足下面常微分方程：

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2b\frac{dy}{dx}+c=0. \tag{12}$$

证明如下：由(11)，因 $a\neq 0$，可知 $z_y\neq 0$(如果 $z_y=0$，则 z_x 也为零，而 $z\equiv$常数)．于是，沿曲线 $z(x,y)=C$ 有 $\frac{dy}{dx}=-\frac{z_x}{z_y}$．代入(11)即得(12)．

反过来，如果 $\varphi(x,y)=C$ 是方程(12)的一个通解，则 $z=\varphi(x,y)$必满足(11)．取问题的区域中任意一点(x_0,y_0)来看．沿着通过这一点的曲线 $\varphi(x,y)=\varphi(x_0,y_0)$，$\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$．代入(12)，即见 $z=\varphi(x,y)$在(x_0,y_0)点满足(11)．但(x_0,y_0)点是任意的，故 $\varphi(x,y)$是方程(11)的一个特解．

方程(12)可以分解为两个一次方程：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a}. \tag{13}$$

分别求出这两个方程的通解，即可根据上面的结果解决方程(3)的简化问题．方程(13)称为**特征线方程**，它的解称为**特征线**．

下面讨论线性方程(3)的分类，并给出各类方程的典则式．这与方程(13)的解有关．

关于(13)的解，存在下列三种情形：

1．$b^2-ac>0$　这时，(13)式的两个方程各有一个实数通解．分别令这两个解为 $\varphi(x,y)=C_1$，$\psi(x,y)=C_2$，C_1和C_2表示任意常数．φ 和 ψ 是独立的，因为由(13)有

$$\begin{aligned}\varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x&=\varphi_y\psi_y\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}-\frac{\psi_x}{\psi_y}\right)\\&=-2\varphi_y\psi_y\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a}\neq 0.\end{aligned}$$

按(4)式引进新的自变数 ξ,η，并注意由(9)式有

$$\beta=\varphi_y\psi_y\left[a\frac{\varphi_x\psi_x}{\varphi_y\psi_y}+b\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}+\frac{\psi_x}{\psi_y}\right)+c\right]=\varphi_y\psi_y\left[2c-\frac{2b^2}{a}\right],\tag{14}$$

故 $\beta\neq0$，而(7)式化为

$$u_{\xi\eta}+\Phi_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)=0,\tag{15}$$

其中 $\Phi_1=\frac{\Phi}{2\beta}$. **这类方程称为双曲型方程.**

双曲型方程的另一种典则式是

$$u_{\rho\rho}-u_{\sigma\sigma}+\Phi_2(\rho,\sigma,u,u_\rho,u_\sigma)=0,\tag{16}$$

可以由(15)式通过变换

$$\rho=\frac{\xi+\eta}{2},\quad \sigma=\frac{\xi-\eta}{2}\tag{17}$$

得出. 波动方程属于双曲型.

2. $b^2-ac<0$ 在这种情形下，(13)中两方程的右方是共轭复数，故这两个方程没有实数解. 但是，如果先把 x 和 y 也看作复数，并设 a,b 和 c 是 x 和 y 的解析函数(即在一定区域内可展成泰勒级数)，可求出两方程的复数解 $\varphi(x,y)=C_1,\psi(x,y)=C_2$. 当 x 和 y 只取实数值时，φ 和 ψ 是共轭复数.

如前引进新的自变数 $\xi=\varphi(x,y)$，$\eta=\psi(x,y)=\bar{\varphi}(x,y)$，$\bar{\varphi}$ 是 φ 的复数共轭，则(7)式仍成为(15)式，不过其中的自变数 ξ 和 η 是共轭复数，$\bar{\xi}=\eta$. **这类方程称为椭圆型方程.**

再引进实变数

$$\rho=\frac{\xi+\eta}{2},\quad \sigma=\frac{\xi-\eta}{2i},\tag{18}$$

得椭圆型方程的另一典则式：

$$u_{\rho\rho}+u_{\sigma\sigma}+\Phi_3(\rho,\sigma,u,u_\rho,u_\sigma)=0.\tag{19}$$

泊松方程和拉氏方程属于这一类.

3. $b^2-ac=0$ (13)式的两个方程相同，故只能得到一个通解 $\varphi(x,y)=C$. 令 $\xi=\varphi(x,y)$，并取 $\eta=\psi(x,y)$，$\psi(x,y)$ 是与 $\varphi(x,y)$ 无关的任意函数，则(7)式中的 $\alpha=0$，$\beta=0$[参看(14)

式]而 $\gamma\neq0$(否则 $\psi(x,y)$将是(11)式的解). 因此,在这种情形下方程(3)简化为

$$u_{\eta\eta}+\Phi_4(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)=0. \tag{20}$$

这类方程称为抛物型方程. 扩散方程或热传导方程属于这一类.

要上面的分类有意义,b^2-ac为正、为负、为零,必须与自变数的选取无关.事实上确是如此,因为由(8)—(10),通过直接计算得

$$\beta^2-\alpha\gamma=(b^2-ac)(\varphi_x\psi_y-\psi_x\varphi_y)^2, \tag{21}$$

而这表示 $\beta^2-\alpha\gamma$ 与 b^2-ac 有相同的正负号,或者同时等于零[$\varphi_x\psi_y-\psi_x\varphi_y\neq0$].

一个普遍的线性方程(3)在不同的区域内可以属于不同类型,因为 b^2-ac 一般是 x 和 y 的函数,例如屈科米(Tricomi)方程

$$u_{xx}+xu_{yy}=0, \tag{22}$$

当 $x>0$ 时,这方程是椭圆型的,而当 $x<0$ 时则是双曲型的. 当然,如果方程是常系数的,则类型固定,例如前面列举的波动方程、泊松方程、热传导方程等.

为了便于比较,下面把三种类型方程的典则式一并列出(自变数都是实数 x,y):

$$\left.\begin{aligned}&u_{xy}+\Phi(x,y,u,u_x,u_y)=0\\ \text{或}\quad&u_{xx}-u_{yy}+\Phi(x,y,u,u_x,u_y)=0\end{aligned}\right\}\quad\text{(双曲型)};$$

$$u_{xx}+u_{yy}+\Phi(x,y,u,u_x,u_y)=0\quad\text{(椭圆型)};$$

$$u_{yy}+\Phi(x,y,u,u_x,u_y)=0\quad\text{(抛物型)}.$$

21.2* 多个自变数的情形

n 个自变数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二阶线性方程可写为

$$\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}u_{x_ix_k}+\cdots=0, \tag{1}$$

其中 $a_{ik}=a_{ki}$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数,"…"代表不含 u 的二阶导数的项(下同).

如前，先看自变数的变换：

$$\xi_i=\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

以φ_{li}表示$\frac{\partial\varphi_l}{\partial x_i}$，则

$$u_{x_i}=\sum_{l=1}^{n}\varphi_{li}u_{\xi_l},$$

$$u_{x_ix_k}=\sum_{l,s=1}^{n}\varphi_{li}\varphi_{sk}u_{\xi_l\xi_s}+\cdots. \tag{3}$$

代入(1)，得

$$\sum_{l,s=1}^{n}\alpha_{ls}u_{\xi_l\xi_s}+\cdots=0, \tag{4}$$

其中

$$\alpha_{ls}=\sum_{i,k=1}^{n}\varphi_{li}\varphi_{sk}a_{ik}\quad(\alpha_{ls}=\alpha_{sl}) \tag{5}$$

因此在问题的区域内一定的点，系数a_{ik}的变换与二次齐式

$$Q=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}y_iy_k\quad(a_{ik}=a_{ki}) \tag{6}$$

在线性变换

$$y_i=\sum_{l=1}^{n}\varphi_{li}\eta_l \tag{7}$$

之下系数a_{ik}的变换相同．我们知道，对于这样一个二次齐式，总存在一个线性变换把它变为正则形式

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\kappa_i\eta_i^2, \tag{8}$$

其中$\kappa_i=\pm1$或者0．

如果(8)式中的κ_i都是1或都是-1，则方程(1)为**椭圆型**；如果κ_i都不为零，其中有一个与其他异号，则方程(1)为**双曲型**；如果有多个与其他异号，则为**超双曲型**；如果κ_i中有一个或者几个等于零，则方程(1)为**抛物型**．当然，由于a_{ik}是$x_1,x_2,\cdots,x_n$的函数，方程的类型一般依赖于自变数之值．但如果方程是常系数

的，则通过适当的线性变换，方程(1)可化为典则形式①

$$\sum_{i=1}^{n}\kappa_i u_{\xi_i\xi_i}+\sum_{i=1}^{n}b_i u_{\xi_i}+cu+d=0, \qquad (9)$$

其中 $\kappa_i=\pm1$ 或者 0，b_i 和 c 都是常数，d 则是 ξ_i 的函数.

(9)式还可以进一步简化，除了抛物型方程之外，可以化为不含一阶导数的方程. 为此，作因变数的变换

$$u=ve^{\beta_1\xi_1+\beta_2\xi_2+\cdots+\beta_n\xi_n}=v\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\beta_i\xi_i\right\}, \qquad (10)$$

其中 β_i 是待定常数. 代入(9)式，得

$$\sum_{i=1}^{n}\kappa_i v_{\xi_i\xi_i}+\sum_{i=1}^{n}(2\kappa_i\beta_i+b_i)v_{\xi_i}+c'v+d'=0.$$

其中 c' 是常数，d' 是 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的函数. 可见，对于 κ_i 不为零的项，只要取 $\beta_i=-\dfrac{b_i}{2\kappa_i}$，$v_{\xi_i}$ 的项就不出现. 因此，非抛物型的线性常系数方程($\kappa_i\neq0, i=1,2,\cdots,n$)总可以通过变换(10)化为下列形式：

$$\sum_{i=1}^{n}\kappa_i v_{\xi_i\xi_i}+c'v+d'=0. \qquad (11)$$

21.3 定解问题·一维波动方程的达朗伯(D'Alembert)解

不同类型的方程，其定解问题一般是不一样的. 我们不准备普遍地讨论这个问题②. 下面只就一维波动方程的具体情形简单地说明双曲型方程与椭圆型方程定解问题的不同之处.

利用 21.1 节关于双曲型方程简化的结果，可以求出一维波

① 对于不是常系数的方程，一般说，不能在一个区域中找到把方程(1)化为(9)式的变换，除非 $n=2$(上节的情形). 参看，例如，A.H.吉洪诺夫等，数学物理方程，第一章§1.2.

② 读者可参看吴新谋，数学物理方程讲义，第五章.

动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad -\infty<x<\infty \tag{1}$$

的通解.

方程(1)的特征线方程[21.1 节(13)式]是

$$\frac{dx}{dt}=\pm c.$$

由此得两族实的特征线:

$$x\pm ct=K, \tag{2}$$

K 是任意常数. 引进新变数

$$\xi=x-ct,\quad \eta=x+ct,$$

方程(1)化为

$$u_{\xi\eta}=0.$$

求积分一次,得

$$u_\xi=f(\xi),$$

$f(\xi)$是 ξ 的任意函数. 再求积分一次,得

$$u=\int f(\xi)d\xi+G(\eta)=F(\xi)+G(\eta),$$

其中 F 和 G 都是任意函数.

回到变数 x 和 t,得方程(1)的通解

$$u(x,t)=F(x-ct)+G(x+ct). \tag{3}$$

这个解式右方的 $F(x-ct)$和 $G(x+ct)$分别代表沿 x 正向和负向以速度 c 传播的两个平面波,波阵面是垂直于 x 方向的平面. 因为于 t_0 时刻出现在 x_0 点的扰动 $F(x_0-ct_0)$,经过时间 $t-t_0$ 之后,于时刻 t 出现在 $x=x_0+c(t-t_0)$点:

$$F(x-ct)=F[x_0+c(t-t_0)-ct]=F(x_0-ct_0).$$

函数$G(x+ct)$也有类似的意义,只是 c 换成 $-c$.

我们看到，与常微分方程的情形不同，通解(3)式中所含的不是任意常数，而是两个任意函数．这使得在一般情形下的定解问题比较困难．但对于方程(1)的初值问题，可以简单地得到满足初值条件的解．

设给定的初值为

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x). \tag{4}$$

由(3)式有

$$\varphi(x)=F(x)+G(x), \tag{5}$$

$$\psi(x)=-cF'(x)+cG'(x). \tag{6}$$

对(6)式求积分，得

$$\int_0^x \psi(\lambda)d\lambda+K=-cF(x)+cG(x), \tag{7}$$

K 为积分常数．由(5)和(7)求得

$$F(x)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x)-\frac{1}{c}\int_0^x\psi(\lambda)d\lambda-\frac{K}{c}\right],$$

$$G(x)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x)+\frac{1}{c}\int_0^x\psi(\lambda)d\lambda+\frac{K}{c}\right].$$

因此，

$$F(x-ct)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-ct)-\frac{1}{c}\int_0^{x-ct}\psi(\lambda)d\lambda-\frac{K}{c}\right],$$

$$G(x+ct)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+ct)+\frac{1}{c}\int_0^{x+ct}\psi(\lambda)d\lambda+\frac{K}{c}\right],$$

而

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\lambda)d\lambda. \tag{8}$$

(8)式是一维波动方程(1)在初值条件(4)之下的解，称为达朗伯(d'Alembert)解．这个解式曾在有界弦的振动问题中得到过[13.2 节(4)式]，并解释过它的物理意义；只是现在自变数的区间

是无界的，$-\infty<x<\infty$，不发生初值 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的开拓问题[参看 13.2 节最后一段].

由于我们是根据初值条件(4)从方程(1)的通解(3)求得(8)式的，故这个解是唯一的，只要初值 $\varphi(x)$ 有二阶导数，$\psi(x)$ 有一阶导数.

(8)式的解也是稳定的[12.6 节]，即下面要证明的，对于任意给定的 $e>0$，存在与 x 无关的 η，当下面的(9)式满足时即有(10)式. 设初值 $\varphi(x)$ 改变为 $\varphi^*(x)$，$\psi(x)$ 改变为 $\psi^*(x)$ 时，相应的解变为 $u^*(x,t)$. 由(8)式得

$$\begin{aligned}
&|u^*(x,t)-u(x,t)| \\
=&\left|\frac{\varphi^*(x-ct)-\varphi(x-ct)+\varphi^*(x+ct)-\varphi(x+ct)}{2}\right. \\
&\left.+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}[\psi^*(\lambda)-\psi(\lambda)]d\lambda\right| \\
\leqslant&\frac{|\varphi^*(x-ct)-\varphi(x-ct)|+|\varphi^*(x+ct)-\varphi(x+ct)|}{2} \\
&+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}|\psi^*(\lambda)-\psi(\lambda)|d\lambda.
\end{aligned}$$

设

$$|\varphi^*(x)-\varphi(x)|<\eta,\quad |\psi^*(x)-\psi(x)|<\eta, \tag{9}$$

η 之值待定，又 $t\leqslant T$，T 为任意但固定的常数，则

$$\begin{aligned}
&|u^*(x,t)-u(x,t)| \\
&<\eta+\frac{1}{2c}\int_{x-cT}^{x+cT}|\psi^*(\lambda)-\psi(\lambda)|d\lambda \\
&<\eta+\eta T.
\end{aligned}$$

于是，对于任意给定的正数 e，只要取 η 使 $\eta(1+T)<e$，就有

$$|u^*(x,t)-u(x,t)|<e. \tag{10}$$

这就证明 $u(x,t)$ 是稳定解.

对于椭圆型方程，定解问题的提法与双曲型方程不同. 一般

地说，椭圆型方程初值问题的解是不稳定的．例如下列初值问题：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

$$u(0,y)=0,$$

$$u_x(0,y)=A_n\sin ny,$$

其中 A_n 当 n 很大时变为很小，例如 $A_n=\frac{1}{n^p}(p>0)$．这个问题的解是

$$u=\frac{A_n}{n}\sin ny\ \mathrm{sh}\ nx.$$

当 n 足够大时，初值 $u_x(0,y)$ 可以小于任何正数，可是只要 $x\neq 0$，u 却随 n 增大，可见解是不稳定的．

21.4* 热传导方程和泊松(Poisson)方程的解的唯一性

热传导方程[12.3 节(3)式]和初值条件分别是

$$u_t-\kappa\nabla^2 u=f \tag{1}$$

和

$$u|_{t=0}=\varphi; \tag{2}$$

三类边界条件可合写为

$$\left[\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\right]_\Sigma=\psi, \tag{3}$$

其中 α 和 β 都是大于或者等于零的实数，而且 α 和 β 不同时为零，Σ 代表问题中区域 G 的边界，n 代表 Σ 的外向法线方向．

设这问题有两个解 u_1 和 u_2．令 $\omega\equiv u_1-u_2$，则

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial w}{\partial t}-\kappa\nabla^2 w=0,\\&w|_{t=0}=0,\\&\left[\alpha\frac{\partial w}{\partial n}+\beta w\right]_\Sigma=0.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

考虑函数

$$\int_G w^2 d\tau,\quad d\tau = dxdydz.$$

求导数，有

$$\frac{d}{dt}\int_G w^2 d\tau = 2\int_G w w_t d\tau = 2\kappa\int_G w\nabla^2 w d\tau$$

$$= -2\kappa\int_G (\nabla w)^2 d\tau + 2\kappa\int_\Sigma w\frac{\partial w}{\partial n} d\Sigma,$$

在最后一步中用了格临公式. 把(4)式中的边界条件代入后面的面积分中，得

$$2\kappa\int_\Sigma w\frac{\partial w}{\partial n} d\Sigma = \begin{cases} -\dfrac{2\kappa\beta}{\alpha}\displaystyle\int_\Sigma w^2 d\Sigma, & \alpha\neq 0, \\ -\dfrac{2\kappa\alpha}{\beta}\displaystyle\int_\Sigma \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)^2 d\Sigma, & \beta\neq 0, \end{cases}$$

故*

$$\frac{d}{dt}\int_G w^2 d\tau \leqslant 0, \tag{5}$$

其中的等式只在 $w\equiv 0$ 时成立. 但 w 在 $t=0$ 时是等于零的[见(4)式]，故当 t 增加时 $\int_G w^2 d\tau$ 之值不可能变小，否则将为负值①. 因此，当 $t>0$ 时，(5)式的左方必 $\geqslant 0$. 这与(5)式矛盾，除非 $w\equiv 0$ (这时等式成立)，即 $u_1\equiv u_2$.

现在讨论泊松方程的边值问题

$$\nabla^2 u = -f, \tag{6}$$

$$\left[\alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right]_\Sigma = g \tag{7}$$

的解的唯一性，其中 α 和 β 是不同时为零的正数，n 代表边界 Σ

* 注意所设 $\alpha\geqslant 0, \beta\geqslant 0$.

① 这里假定了当 $t\to 0$ 时不仅 $w\to 0$，而且 $\int w^2 d\tau$ 也趋于零，否则证明不成立. 参看 Garslaw and Jaeger, Conduction of Heat in Solids, p.37(1959).

的外向法线方向，在边界Σ的不同部分上边界条件的类型可以不一样.

设有两个不同的解 u_1 和 u_2. 令 $w\equiv u_1-u_2$，则 w 满足拉氏方程 $\nabla^2 w=0$ 和边界条件 $\left[\alpha\frac{\partial w}{\partial n}+\beta w\right]_\Sigma=0$. 利用格临公式，有

$$0=\int_G w\,\nabla^2 w d\tau=-\int_G(\nabla w)^2 d\tau+\int_\Sigma w\frac{\partial w}{\partial n}d\Sigma. \quad (8)$$

对于第一类边界条件($\alpha=0$)和第二类边界条件 ($\beta=0$)，(8)式最后的面积分之值为零，而有

$$\int_G(\nabla w)^2 d\tau=0.$$

这意味着

$$(\nabla w)^2=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2=0,$$

即

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

而 w 是一个常数. 如果边界条件是第一类的，或者在边界的某一部分上如此，则这常数为零，而有 $u_1\equiv u_2$. 如果边界条件是第二类的，则 $u_1-u_2\equiv$常数，两解可以相差一常数加项.

对于第三类边界条件(α 和 β 都不为零)，(8)式可写为

$$-\int(\nabla w)^2 d\tau-\int h w^2 d\tau=0,$$

其中 $h=\frac{\beta}{\alpha}>0$，因此有

$$(\nabla w)^2\equiv 0,\quad w^2|_\Sigma\equiv 0.$$

与前面一样，由第一式得 $w\equiv$常数，而由第二式得 $w|_\Sigma=0$，故这个常数为零而有 $u_1\equiv u_2$.

第二十二章　波动方程的几个特殊解法

22.1　平均值方法·泊松公式

考虑三维空间中波动方程的初值问题：

$$\nabla^2 u-\frac{1}{a^2}u_{tt}=0, \tag{1}$$

$$u(M,0)=\varphi(M), \tag{2}$$

$$u_t(M,0)=\psi(M), \tag{3}$$

其中M代表空间任意一点，$u(M,t)$ 是一个四元函数．在 18.8 节中我们曾经用格临函数的方法求得这个问题的解[该节(21)式，$f=0$]．下面介绍另一个解法，称为平均值法．这个方法的精神是通过求平均值把问题变为只有两个自变数的波动方程，然后利用 21.3 节的结果．

设M_0为空间任意一点，t_0为任意时刻．代替直接求 $u(M_0,t_0)$，先计算在 t_0 时刻以M_0 为心、半径等于 r 的球面上 u 的平均值$\bar{u}$．求出 $\bar{u}$ 之后，令 $r\to 0$，即得 $u(M_0,t_0)$．以$S_r^{M_0}$ 表示上述球面，则 u 在球面上的平均值为

$$\bar{u}(M_0,r,t)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{S_r^{M_0}}u(M_0,r,\theta,\varphi,t)\,dS$$

$$=\frac{1}{4\pi}\iint u(M_0,r,\theta,\varphi,t)\,d\Omega, \tag{4}$$

$$d\Omega=\sin\theta\,d\theta\,d\varphi.$$

现在M_0是一个参数，故 $\bar{u}$ 只是两个变数 r 和 t 的函数．下面来导出 $\bar{u}$ 所满足的方程．

由方程(1)，在$S_r^{M_0}$ 所包围的球体积 $T_r^{M_0}$ 中求积分，有

$$\iiint_{T_\tau^{M_0}} \nabla^2 u \, d\tau = \frac{1}{a^2} \iiint_{T_\tau^{M_0}} u_{tt} \, d\tau. \tag{5}$$

利用高斯公式，(5)式左方化为

$$\iiint_{T_\tau^{M_0}} \nabla^2 u \, d\tau = \iint_{S_\tau^{M_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \, dS = \iint \frac{\partial u}{\partial r} r^2 \, d\Omega$$

$$= r^2 \frac{\partial}{\partial r} \iint u \, d\Omega = 4\pi r^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r},$$

在最后一步中用了(4)式. (5)式右方则可写为

$$\frac{1}{a^2} \iiint_{T_\tau^{M_0}} u_{tt} \, d\tau = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint u r_1^2 \, dr_1 \, d\Omega$$

$$= \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^r r_1^2 \, dr_1 \iint u \, d\Omega$$

$$= \frac{4\pi}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^r \bar{u} r_1^2 \, dr_1,$$

因此有

$$r^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int^r \bar{u} r_1^2 \, dr_1.$$

两边对 r 求导数，得

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r^2 \bar{u}) = \frac{r^2}{a^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2},$$

故 $\bar{u}$ 满足方程

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right) - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = 0, \tag{6}$$

或

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\bar{u}) - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = 0. \tag{7}$$

再令 $v = r\bar{u}$，得一维波动方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$

其通解[21.3 节(3)式]可写为

$$v(r,t)=f_1\left(t-\frac{r}{a}\right)+f_2\left(t+\frac{r}{a}\right).$$

今 $\bar{u}=\frac{v}{r}$，故要 $\bar{u}$ 在 $r=0$ 这一点有界，必须 $v|_{r=0}=0$，即

$$0=f_1(t)+f_2(t),$$

或者
$$f_2(t)=-f_1(t)=f(t).$$

因此，

$$\bar{u}=\frac{f\left(t+\frac{r}{a}\right)-f\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r}. \tag{8}$$

令 $r\to 0, t=t_0$，得

$$u(M_0,t_0)=\bar{u}(M,r,t)|_{r\to 0,t=t_0}$$

$$=\left.\frac{\frac{\partial}{\partial r}\left[f\left(t+\frac{r}{a}\right)-f\left(t-\frac{r}{a}\right)\right]}{\frac{dr}{dr}}\right|_{r\to 0,t=t_0}$$

$$=\frac{1}{a}[f'(t_0)+f'(t_0)]=\frac{2f'(t_0)}{a}. \tag{9}$$

现在用初值条件(2),(3)来确定 $f'(t_0)$. 为此，需要求出函数 f 和初值的两个关系. 由(8)式，分别对 r 和 t 求导数，得

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u})=\frac{1}{a}f'\left(t+\frac{r}{a}\right)+\frac{1}{a}f'\left(t-\frac{r}{a}\right),$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}(r\bar{u})=\frac{1}{a}f'\left(t+\frac{r}{a}\right)-\frac{1}{a}f'\left(t-\frac{r}{a}\right).$$

由此解出

$$\frac{2}{a}f'\left(t+\frac{r}{a}\right)=\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u})+\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}(r\bar{u}).$$

这一关系对于任何 r 和 t 都成立. 我们要求左方为 $f'(t_0)$而右方由初值来表示. 这只要令 $t=0, r=at_0$ 即可. 于是有

$$\frac{2f'(t_0)}{a}=\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u})+\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}(r\bar{u})\right]_{t=0,r=at_0}$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{4\pi}\iint u d\Omega+\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}\frac{r}{4\pi}\iint u d\Omega\right]_{t=0,r=at_0}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\iint\limits_{S_r^{M_0}}\frac{u}{r}dS+\frac{1}{a}\iint\limits_{S_r^{M_0}}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}dS\right]_{t=0,r=at_0}$$

$$=\frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t_0}\iint\limits_{S_{at_0}^{M_0}}\frac{\varphi}{r}dS+\iint\limits_{S_{at_0}^{M_0}}\frac{\psi}{r}dS\right].$$

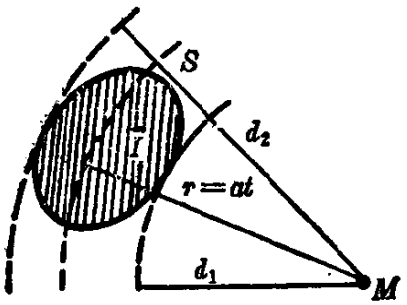


图 107

把这结果代入(9)式,并把M_0换为M,t_0换为t,最后得

$$u(M,t)=\frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}^{M}}\frac{\varphi}{r}dS+\iint\limits_{S_{at}^{M}}\frac{\psi}{r}dS\right],\qquad(10)$$

其中S_{at}^{M}表示以M点为心、半径等于at的球面.

(10)式称为**泊松公式**,有很清楚的物理意义:在t时刻,M点的波动$u(M,t)$由球面S_{at}^{M}上的初值确定;显然,这是由于初值的影响是以速度a在时间t内从球面S_{at}^{M}上传播到M点的缘故.令d_1为M点到初值区域I[图 107]的最近距离,d_2为最远距离.当$t<\frac{d_1}{a}$时,在S_{at}^{M}面上φ和ψ之值为零,故$u=0$,表示波尚未到达M点.当$\frac{d_1}{a}<t<\frac{d_2}{a}$时,$u\neq0$,表示波正通过$M$点.当$t>\frac{d_2}{a}$时,$u=0$,表示波已过了$M$点.

22.2 柱面波·降维法

利用上节泊松公式,可以推得二维波动方程初值问题的解

——柱面波. 这样的方法称为降维法.

二维波动方程的初值问题是

$$u_{xx}+u_{yy}-\frac{1}{a^2}u_{tt}=0,$$

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y),$$

$$u_t(x,y,0)=\psi(x,y),$$

即初时刻的扰动 φ 和 ψ 是与 z 无关的函数,因此,虽然波仍是在三维空间中传播,但在与 z 轴垂直的各个平面上的波动情况是一样的,而只需要考查其中任意一个平面上的波动.

现在利用上节(10)式来求这个问题的解. 由于 φ 和 ψ 与 z 无关,初值区域为一无穷长柱体,各截面上的初值相同,故泊松公式中的球面积分可以化为一个平面上的积分.

如图 108,球面 S_{at}^{M} 上 (ξ,η,ζ) 点的面积元 dS 在通过 M 点并与 z 轴垂直的平面上的投影 $d\sigma=dS\cos\gamma$,γ 是 dS 的外法线方向与 z 轴之间的夹角.

$$\cos\gamma=\frac{\zeta-z}{at}=\frac{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}{at}$$

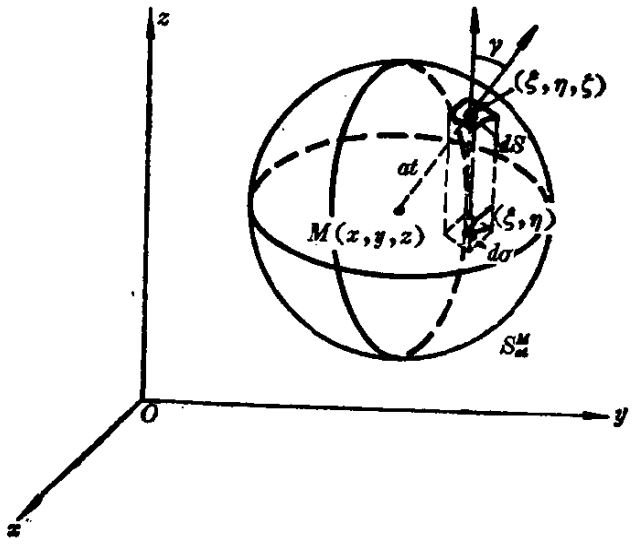


图 108

(x,y,z 是M点(球心)的坐标)，故

$$dS=\frac{at}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\sigma,\quad d\sigma=d\xi d\eta.$$

由上节(10)式，注意球面的上半与下半对积分的贡献相同(因初值与 z 无关)，得

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\Sigma_{at}^{M}}\frac{\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\right.$$

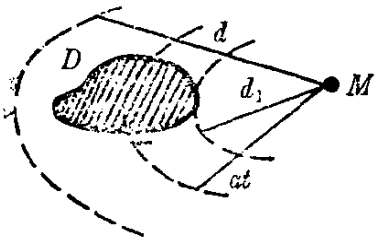


图 109

$$\left.+\iint\limits_{\Sigma_{at}^{M}}\frac{\psi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\right],\quad (1)$$

其中 Σ_{at}^{M} 是半球面在通过M点并与 z 轴垂直的平面上的投影圆.

应当注意的是，二维波的传播情况与三维波有所不同. 仍以 d_1 表示由M点到初值区域(以图 109 的D为截面的柱体)的最近距离. 当 $t<\frac{d_1}{a}$ 时，积分值为零，表示波尚未到达M点. 当 $t>\frac{d_1}{a}$ 时，D永远包含在积分区域 Σ_{at}^{M} 内，积分值一般不等于零，故在M点总有扰动. 只有当时间很长($t\to\infty$)时，u 才趋于零 [at 出现在(1)式的分母中]. 这一情况很容易理解，因为初值区域现在实际上是一个以D为截面的无穷长柱体，只要 $t>\frac{d_1}{a}$，球面 S_{at}^{M} 总是要和这个柱体相截的.

练习题. 利用上节(10)式，推出平面波的达朗伯解[21.3 节(8)式].

22.3* 里曼方法

普遍的双曲型方程科希问题 这个问题是前面讨论过的波动方程初值问题的推广. 问题的提法如下：

在 xy 平面的单调曲线K上给定函数 $u(x,y)$及其导数 u_x(或 u_y)之值——初值，求 u 满足双曲型方程[21.1 节(15)式]

$$L[u]\equiv u_{xy}+au_x+bu_y+cu=f \tag{1}$$

并在K上取给定的初值，其中 a,b,c,f 是 x 和 y 的已知函数. 注意，由于在曲线K上 u 是给定的，故沿K的切向导数 u_t 已知，因此在K上给定 u_x(或 u_y)之值与给定$\dfrac{\partial u}{\partial n}$之值是等价的，$\dfrac{\partial}{\partial n}$表示沿$K$的法线方向求导数. 在 21.3 节中讨论过的一维波动方程的初值问题显然是现在所提出的普遍问题的一个特例，那儿的K是直线 $t=0$(xt 平面上).

双曲型方程的一个重要特性是：在任意一点$P(x,y)$处的 u 值只依赖于曲线K的一段上的初值. 这是完全不同于椭圆型方程的[参看，例如，18.2 节(7)式，其中 u 依赖于全部边值]. 我们不准备普遍地证明这一结论①，而是只就一维波动方程的达朗伯解[21.3 节(8)式]来予以说明.

如图 110，$P(x_0,t_0)$是 xt 平面上的任意一点. 通过P点分别作特征线 $x\pm at=x_0\pm at_0$，其中 a 是波传播的速度[参看 21.3 节(2)式，以及(3) 式后面的解释]. 令这两条特征线与 $t=0$ 的交点分别为A和B. A的横坐标$x_A=x_0-at_0$，B的横坐标 $x_B=x_0+at_0$. 由 21.3 节(8)式，把其中的 x 和 t 分别用 x_0 和 t_0 代替，并令 $c=a$，即见 $u(x_0,t_0)$只与端点A和B的初值 $\varphi(x_0\pm at_0)$ 以及AB这一段($x_A\leqslant x\leqslant x_B$)上的初值 $\psi(x)$有关.

里曼(Riemann)**方法** 对于普遍双曲型方程(1)的科希问题，设$P(x_0,y_0)$是 xy 平面上的任意一点，则通过这一点的特征线是 $y=y_0$ 和 $x=x_0$(因为方程(1) 的特征线是与坐标轴平行的线). 令A,B分别代表这两条特征线与初值曲线 K的交点. 由于假定K

① 可参看，例如，R. 柯朗，D. 希尔伯特，数学物理方法，卷 II 第五章 §4 (中译本 1977 年).

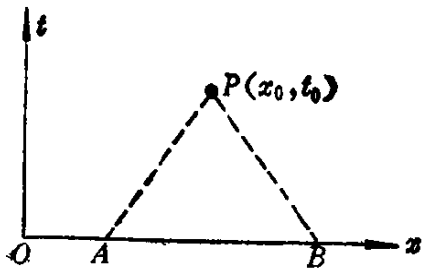


图 110

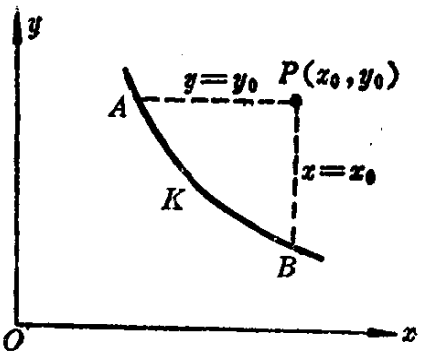


图 111

单调，所以K不是特征线，而且与任何特征线只相交一次.

里曼方法的要点是应用格临公式于曲线K和PA，PB两特征线之间的区域G(图 111)，从而把方程(1)的解$u(x,y)$在P点之值用曲线K上由A到B这一段上的初值表示出来，做法与第十八章格临函数的方法相似.

以$v(x,y)$乘方程(1)两边，在区域G中求积分，得

$$\iint_G vL[u]dxdy=\iint_G vf\,dxdy. \tag{2}$$

通过直接计算可以证明

$$vL[u]=v(u_{xy}+au_x+bu_y+cu)$$

$$=uM[v]+\frac{\partial}{\partial y}(vu_x+buv)-\frac{\partial}{\partial x}(uv_y-auv),$$

其中

$$M[v]\equiv v_{xy}-(av)_x-(bv)_y+cv \tag{3}$$

称为$L[u]$的伴式. 把这结果代入(2)式左方，并应用平面格临公式，得

$$\iint_G uM[v]dxdy-\iint_G\Big[\frac{\partial}{\partial x}(uv_y-auv)$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}(vu_x+buv)\Big]dxdy$$

$$=\iint_G uM[v]dxdy$$

$$-\int_{\overset{\frown}{AB}+BP+PA}[v(u_x+bu)dx+u(v_y-av)dy]$$

$$=\iint_G vf\,dxdy. \tag{4}$$

沿特征线PA，$y=y_0$，$dy=0$，故(4)式中线积分沿PA的部分等于(换部求积分法)

$$\int_{PA}v(u_x+bu)dx=u(A)v(A)-u(P)v(P)$$

$$-\int_{PA}u(v_x-bv)dx.$$

代入(4)式，并注意沿BP有$x=x_0$，$dx=0$，得

$$u(P)v(P)=u(A)v(A)+\int_{AP}u(v_x-bv)dx$$

$$+\int_{BP}u(v_y-av)dy$$

$$+\int_{\overset{\frown}{AB}}[v(u_x+bu)dx+u(v_y-av)dy]$$

$$+\iint_G(vf-uM[v])dxdy. \tag{5}$$

选v为函数$R(x,y;x_0,y_0)$，R满足方程

$$M[R]\equiv R_{xy}-(aR)_x-(bR)_y+cR=0, \tag{6}$$

并且在特征线AP和BP上分别满足常微分方程

$$R_x-bR=0,\quad y=y_0, \tag{7}$$

$$R_y-aR=0,\quad x=x_0, \tag{8}$$

又

$$R(x_0,y_0;x_0,y_0)=1. \tag{9}$$

代入(5)，得所求公式（在P点的u值用曲线段$\overset{\frown}{AB}$上的初值表达)：

$$u(P)=u(A)R(A;x_0,y_0)$$
$$+\int_{\overset{\frown}{AB}}[R(u_x+bu)dx+u(R_y-aR)dy]$$
$$+\iint_G Rf\,dx\,dy. \tag{10}$$

函数 $R(x,y;x_0,y_0)$ 称为**里曼函数**. 由方程(7),(8) 和条件(9),可求得 R 在特征线 AP 和 BP 上之值分别为

$$R(x,y_0;x_0,y_0)=\exp\int_{x_0}^{x} b(\lambda,y_0)d\lambda, \tag{11}$$

$$R(x_0,y;x_0,y_0)=\exp\int_{y_0}^{y} a(x_0,\lambda)d\lambda. \tag{12}$$

我们看到，求里曼函数 R 的问题本身也是一个双曲型方程[(6)式]的定解问题，定解条件是要求在相交于 $P(x_0,y_0)$ 点的两条特征线上方程(6)的解分别取已知值(11)和(12). 这种问题称为**在特征线上给已知值的问题**. 这与普通在非特征线上的初值问题不同，因为在初值曲线(由相交于 P 的两条特征线构成)上现在只给定了函数值，函数的一阶导数之值不能随意指定，而是由方程(6)确定的. 例如，在特征线 $y=y_0$ 上，因 R 给定，故 R_x 之值确定，而方程(6)成为一个关于 $q=R_y$ 的常微分方程

$$\frac{dq}{dx}-bq-(aR)_x-b_yR+cR=0.$$

必须由此解出 $q=R_y$，在解式中出现的一个积分常数则由在 (x_0,y_0) 点的 R_y 值确定，这个 R_y 值是从特征线 $x=x_0$ 上 R 的已知值算出的. 同样，在特征线 $x=x_0$ 上，R 和 R_y 已知，R_x 必须由(6)式(关于 $p=R_x$ 的常微分方程)求出.

可以证明在条件(11)和(12)之下方程(6)的解是唯一的①. 在下一节中我们将举一个特例来说明里曼函数的求法.

① 参看 R. 柯朗，D. 希尔伯特，数学物理方法，卷 II，第五章§6(中译本 1977 年).

练习题 1 证明方程(1)的解可以利用里曼函数写成下列较为对称的形式：

$$u(P)=\frac{1}{2}[u(A)R(A)+u(B)R(B)]+\int_{\overset{\frown}{AB}}\left\{\left[\frac{1}{2}Ru_x+\left(bR-\frac{1}{2}R_x\right)u\right]dx-\left[\frac{1}{2}Ru_y+\left(aR-\frac{1}{2}R_y\right)u\right]dy\right\}+\iint_G Rf\,dx\,dy. \tag{13}$$

提示：利用恒等式

$$\frac{1}{2}[u(B)R(B)-u(A)R(A)]=\int_{\overset{\frown}{AB}}\left\{\frac{1}{2}(u_xR+uR_x)dx+\frac{1}{2}(u_yR+uR_y)dy\right\}.$$

练习题 2. 证明里曼函数的对称性：

$$R(x,y;x_0,y_0)=R^*(x_0,y_0;x,y), \tag{14}$$

其中 R 是 $L[u]$ 的里曼函数，R^* 是 $L[u]$ 的伴式 $M[u]$ 的里曼函数，即 $L[R^*]=0$（$L[u]$ 反过来也是 $M[u]$ 的伴式）.

提示：应用上题(13)式于 $ADBP$ 矩形区域，这个区域是由四条特征线围成的.

22.4* 例

一般说来，求里曼函数的问题并不比求普遍初值问题的解容易. 但是在有些情形下可以得到里曼函数的明显解析表示. 例如方程

$$L[u]\equiv u_{xy}+cu=g(x,y), \tag{1}$$

其中 c 是常数. 这是弦的振动方程的推广，可以从 12.4 节(2)式（传输线方程）通过 21.1 节的简化手续得到.

方程(1)的微分算符 $L[u]$ 的伴式 $M[u]$ 就是 $L[u]$，故里曼函数满足方程

$$R_{xy}+cR=0. \tag{2}$$

在特征线$x=x_0$和$y=y_0$上$R=1$［上节(11)和(12)式］.由于方程是常系数的，在把x,y分别换为$x-x_0$，$y-y_0$时方程不变，故$R(P,Q)$只与P和Q两点的相对位置有关，即$R(x,y;x_0,y_0)$是$x-x_0$和$y-y_0$的函数．又因在$x=x_0$和$y=y_0$上R都是常数，$(R_x)_{y=y_0}=(R_y)_{x=\xi_0}=0$,而且对于$x$和$y$显然是对称的,故$R$应当是$(x-x_0)(y-y_0)$的函数．令

$$\xi=(x-x_0)(y-y_0), \tag{3}$$

方程(2)化为常微分方程

$$\xi\frac{d^2R}{d\xi^2}+\frac{dR}{d\xi}+cR=0, \tag{4}$$

并且有

$$R|_{\xi=0}=1. \tag{5}$$

利用17.19节的结果(令该节(4)式中的$\alpha=0$，$\beta=\frac{1}{2}$,$\nu=0$，$\lambda=2\sqrt{c}$),可以求得在条件(5)之下方程(4)的解为：

$$R(\xi)=J_0(2\sqrt{c\xi}),$$

其中$J_0(z)$是零阶贝塞耳函数．因此所求的里曼函数为

$$R(x,y;x_0,y_0)=J_0(2\sqrt{c(x-x_0)(y-y_0)}). \tag{6}$$

第二十三章　变分法及其应用

在数学物理中能够精确求解的边值问题或本征值问题并不多．因此，在实际问题中常常采用各种近似方法，变分法是其中最有力的方法之一．

在物理学中变分原理最初比较多是用来作为一些基本规律的表达形式，例如力学中的哈密顿(Hamilton)原理、莫培都(Maupertuis)原理，光学中的费马(Fermat)原理等．以后，变分法发展成为一种求振动系统的本征频率和讨论本征值问题的方法．晚近更进一步用变分法来解决各种散射问题，而成为数学物理中的一种重要方法．

我们将从变分法在数学物理中的应用的角度来阐述有关的基本概念和原理．

23.1　泛函和泛函的极值问题

在阐明变分法时，引进泛函的概念比较方便．**泛函是指一个量，它的值依赖于一个或者几个函数**．举例说，在 $x=x_0$ 和 $x=x_1$ 两值之间，曲线 $y=y(x)$ 的弧长为

$$L=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}dx, \tag{1}$$

L 之值依赖于整个“变量函数”$y(x)$，因此是 $y(x)$ 的泛函．

又例如在各向异性的不均匀媒质中，从一点 A 到另一点 B 的光程为

$$L=\int_A^B n(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})ds, \tag{2}$$

其中 n 是折射率，$\dot{x}=\frac{dx}{ds}$，$\dot{y}=\frac{dy}{ds}$，$\dot{z}=\frac{dz}{ds}$ 代表光线的路径 C 的方向数. L 之值依赖于曲线 C：

$$x=f(s),\quad y=\varphi(s),z=\psi(s). \tag{3}$$

因此，L 是三个变量函数 $f(s),\varphi(s)$ 和 $\psi(s)$ 的泛函.

应当注意泛函和函数两概念的不同之处. 函数所表示的是因变数的数值与自变数的数值的对应关系，而泛函所表示的则是因变数与某个或者某几个函数的对应关系. 换句话说，泛函的定义域是函数组成的一个集合或者“空间”，而不是坐标空间中的一个区域.

练习题. 试从你所熟悉的各种物理或者数学物理问题中举出一些泛函的例子. 又，积分换式是泛函吗？

泛函的极值问题 变分法的基本问题是关于泛函的极值问题. 例如力学中的捷线问题：给定高度不同的两点 A 和 B，要求找出这样的曲线，当一质点在重力作用下沿着这条曲线(假定是光滑的)从 A 运动到 B 时需要的时间最少(与沿其他曲线比较). 这个时间可表为

$$t=\int_A^B\frac{ds}{v}=\int_{x_A}^{x_B}\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{\sqrt{v_0^2+2gz}}dx, \tag{4}$$

其中 v 代表质点的速度，v_0 是在 A 点的初速，g 是重力加速度，z 是质点与 A 点之间的铅垂距离，x 是水平方向的坐标. 因此 t 是曲线 $y=y(x),z=z(x)$ 的泛函，而捷线问题就是泛函(4)的极小值问题.

最简单的典型变分问题是泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx \tag{5}$$

的极值问题，其中 $x_0,x_1,y(x_0)=y_0,y(x_1)=y_1$ 之值是给定的，即要求曲线通过固定点 $P_0(x_0,y_0)$ 和 $P_1(x_1,y_1)$. 此外，还对函数

$y(x)$的连续性作一定的要求，例如要求$y(x)$有连续二阶导数(这样的函数称为C_2类函数).

在数学物理中应用变分法时,多是只需要知道变量函数[例如(5)式中的$y(x)$] 使泛函取极值的必要条件. 我们只讨论这种条件.

23.2 泛函极值的必要条件 · 欧勒方程

先看

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx, \quad y=y(x) \tag{1}$$

这种最简单的情形,其中F是x,y,y'的已知函数，在xy平面的某区域G中连续，而且有连续的二阶偏导数. 我们的问题是寻找通过$P_0(x_0,y_0)$和$P_1(x_1,y_1)$两点的C_2类曲线$y(x)$使泛函$J[y]$取相对极值的必要条件. 所说相对极值是指$J[y]$之值不小于(或者不大于)其他泛函值$J[y^*]$,$y^*(x)$是通过P_0和P_1两点并与$y(x)$相邻的任意C_2类曲线.

由于所求的是必要条件，我们可以选取特殊形式的函数$y^*(x)$来比较$J[y]$和$J[y^*]$. 例如,选

$$y^*(x)=y(x)+\alpha\eta(x), \tag{2}$$

其中$y(x)$是所设使泛函取极值的函数,α是小参数,$\eta(x)$是任意但固定的C_2类函数，满足下列条件:

$$\eta(x_0)=0, \quad \eta(x_1)=0. \tag{3}$$

条件(3)保证$y^*(x)$必通过P_0和P_1两点. 又由于α是小参数,$y^*(x)$是与$y(x)$相邻的C_2类函数.

对于函数$y^*(x)$，泛函值

$$\begin{aligned}J[y^*]&=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y^*,y^{*\prime})dx\\&=\int_{x_0}^{x_1}F[x,y(x)+\alpha\eta(x),y'(x)+\alpha\eta'(x)]dx\end{aligned}$$

$$=\Phi(\alpha) \tag{4}$$

是参数 α 的函数(因 $y(x)$现在是固定的). 这样,原来的泛函的极值问题就化为一个求普通函数 $\Phi(\alpha)$的极值问题,而可以用熟知的方法来讨论.

因设 $y(x)$使 $J[y]$取相对极值,故函数 $\Phi(\alpha)$应在$\alpha=0$ 点[这时 $y^*(x)=y(x)$]取相对极值,其必要条件是

$$\left.\frac{d\Phi(\partial)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=0. \tag{5}$$

由此得 $\Phi'(0)=\left.\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}F(x,y+\alpha\eta,y'+\alpha\eta')dx\right|_{\alpha=0}$

$$=\int_{x_0}^{x_1}(F_y\eta+F_{y'}\eta')dx=0,$$

其中 $F_y=\frac{\partial F}{\partial y}$, $F_{y'}=\frac{\partial F}{\partial y'}$. 对被积函数中的第二项换部求积分,得

$$\Phi'(0)=F_{y'}\eta(x)\Big|_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\eta(x)dx=0.$$

按条件(3), 右方第一项之值为零,因此有

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\eta(x)dx=0. \tag{6}$$

现在证明以下的变分法基本引理: 设 $\varphi(x)$ 是 x 的连续函数. 若关系式$\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x)\eta(x)dx=0$ 对于所有在 $x=x_0,x_1$两点为零的 C_2 类函数 $\eta(x)$都成立,则 $\varphi(x)\equiv0$.

设 $\varphi(x)$不恒等于零, 不妨设 φ 在某点 $x=\xi$ 的值为正. 因 $\varphi(x)$是连续函数, 必存在 ξ 的一个邻域 G: $\xi_0<x<\xi_1$, 在 G 中 $\varphi(x)>0$. 取

$$\eta(x)=\begin{cases}(x-\xi_0)^4(x-\xi_1)^4 & (x\text{ 在 }G\text{ 中}),\\ 0 & (x\text{ 在 }G\text{ 外}),\end{cases}$$

这是一个在$[x_0,x_1]$中非负的 C_2 类函数,则有

$$\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x)\eta(x)dx>0$$

而与所设矛盾. 因此,必须 $\varphi(x)\equiv 0$. 顺便说一下,对于重积分也有类似的引理,不一一证明.

把上述引理应用于(6)式,即得 $y(x)$ 使泛函 $J[y]$ 取相对极值的必要条件:

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0, \tag{7}$$

这是一个关于函数 $y(x)$ 的二阶常微分方程,称为泛函 $J[y]$ [(1)式]的极值问题的欧勒(Euler)方程.

分析力学中的哈密顿原理是一个泛函取极值的特例.取(1)式中的自变数为 t,并令 F 代表拉格朗日(Lagrange)函数 $L(q,\dot{q},t)$,则方程(7)就是拉格朗日运动方程.

练习题 1. 设泛函 $J[y]$ 中 $F=F(x,y')$,即不显含 y,证明使泛函 $J[y]$ 取极值的必要条件(7)可化为

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=C,$$

C 为积分常数.

练习题 2. 设泛函 $J[y]$ 中 $F=F(y,y')$,即不显含 x,证明使泛函 $J[y]$ 取极值的必要条件(7)可化为

$$y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F=C,$$

C 为积分常数.

上面的结果很容易推广到多个"变量函数"的泛函

$$J[y_1,y_2,\cdots,y_n]=\int_{x_0}^{x_1}F(x;y_1,y_2,\cdots,y_n;\ y_1',y_2',\cdots,y_n')dx, \tag{8}$$

相应的欧勒方程是下列常微分方程组:

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}=0,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{9}$$

练习题 3. 试对 $n=2$ 的情形证明，(9)式是 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 使(8)式的泛函取极值的必要条件.

如果 F 中含“变量函数”的高阶导数，例如

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})dx, \tag{10}$$

则相应的欧勒方程为

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}-\cdots+(-)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0, \tag{11}$$

其中 $F_y=\frac{\partial F}{\partial y}$, $F_{y^{(k)}}=\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}$, $k=1,2,\cdots,n$. 读者不难自己证明这个结果，只要注意令比较函数 $y^*(x)=y(x)+\alpha\eta(x)$ 中的函数 $\eta(x)$ 满足下列条件：

$$\eta(x_0)=\eta'(x_0)=\cdots=\eta^{(n-1)}(x_0)=0,$$
$$\eta(x_1)=\eta'(x_1)=\cdots=\eta^{(n-1)}(x_1)=0.$$

23.3 几个自变数的情形·重积分所表示的泛函的极值问题

以二元函数 $u(x,y)$ 的泛函

$$J[u]=\iint_G F(x, y, u, u_x, u_y)dxdy \tag{1}$$

为例来讨论重积分所表示泛函的极值问题.式中 $F(x,y,u,u_x,u_y)$ 是给定的函数，这函数在一定区域中对于其宗量 x, y, u, x_x, u_y 是连续的，并有连续二阶偏导数；$u(x,y)$ 是积分区域 G 中的 C_2 类函数，在 G 的边界 Γ 上取给定值：

$$u(x,y)|_\Gamma=u_0(x,y). \tag{2}$$

我们的问题是求 $u(x,y)$ 使泛函 $J[u]$ 取极值的必要条件. 如前，取比较函数为

$$u^*(x,y)=u(x,y)+\alpha\eta(x,y), \tag{3}$$

其中 $u(x,y)$是所设使 $J[u]$取极值的函数,α 是小参数, $\eta(x,y)$ 是区域G中任意但固定的 C_2 类函数,在边界上

$$\eta(x,y)|_\Gamma=0. \tag{4}$$

这样选取的比较函数 $u^*(x,y)$显然是与 $u(x,y)$ 相邻的 C_2 类函数,而且在边界 Γ 上与 $u(x,y)$相等.

对于比较函数 u^*,

$$\begin{aligned} J[u^*]&=\iint_G F(x,y,u^*,u_x^*,u_y^*)dxdy \\ &=\iint_G F(x,y,u+\alpha\eta,u_x+\alpha\eta_x,u_y+\alpha\eta_y)dxdy \\ &=\Phi(\alpha). \end{aligned} \tag{5}$$

于是,与前相同,$u(x,y)$使 $J[u]$取极值的必要条件是 $\Phi'(0)=0$. 由此得

$$\begin{aligned} \Phi'(0)&=\iint_G (F_u\eta+F_{u_x}\eta_x+F_{u_y}\eta_y)dxdy \\ &=\iint_G\left(F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\eta(x,y)dxdy \\ &\quad+\iint_G\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\eta)+\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\eta)\right]dxdy=0. \end{aligned}$$

利用平面格临公式,把最后一个面积分化为线积分:

$$\begin{aligned} &\iint_G\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\eta)+\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\eta)\right]dxdy \\ &=\int_\Gamma -F_{u_y}\eta dx+F_{u_x}\eta dy. \end{aligned}$$

注意条件(4),即见这个积分之值为零,而得

$$\iint_G\left(F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\eta(x,y)dxdy=0.$$

再利用类似于上节中所证明的引理,得

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0. \qquad (6)$$

方程(6)就是 $u(x,y)$使(1)式的泛函 $J[u]$取极值的必要条件.这是一个关于 $u(x,y)$的二阶偏微分方程,也称为泛函(1)的欧勒方程.

练习题. 试根据静电平衡时电场能量为极小值,即

$$\iiint_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz$$

为极小,导出静电势 u 所应满足的方程.

23.4 泛函的条件极值问题

在许多泛函的极值问题中,变量函数还受到一些附加条件的限制,其中最重要的一种是以积分形式表示的限制. 这种问题称为**等周问题**,因为在历史上这种问题始原于求一条通过 P_0 和 P_1 两点、长度固定为 l 的曲线 $y=y(x)$, 使面积 $S=\int_{x_0}^{x_1}y(x)\,dx$ 取极大值.

普遍的等周问题是:求 $y(x)$通过 P_0 和 P_1 两点,满足广义的等周条件

$$J_1[y]=\int_{x_0}^{x_1}G(x,y,y')dx=l(\text{常数}), \qquad (1)$$

并使泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx \qquad (2)$$

取极值的必要条件,其中 F 和 G 都假定是宗量 x, y, y' 的 C_2 类函数.

由于所求的是必要条件,仍可如前把泛函的条件极值问题化为普通函数的条件极值问题. 为此,设比较函数

$$y^*(x)=y(x)+\alpha\eta_1(x)+\beta\eta_2(x), \qquad (3)$$

其中 α 和 β 都是小参数,$\eta_1(x)$和 $\eta_2(x)$是任意固定的 C_2 类函数,满足 $\eta_1(x_0)=\eta_2(x_0)=\eta_1(x_1)=\eta_2(x_1)=0$. 这里与前不同的地方

是多引进了一个参数，这是由于下列原因：在讨论函数的条件极值问题时，函数至少必须是二元的，才有可能同时满足极值条件和附加条件.

把(3)代入(2)和(1)，分别得到

$$\Phi(\alpha,\beta)=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y+\alpha\eta_1+\beta\eta_2,y'+\alpha\eta_1'+\beta\eta_2')\,dx \quad (4)$$

和

$$\Phi_1(\alpha,\beta)=\int_{x_0}^{x_1} G(x,y+\alpha\eta_1+\beta\eta_2,y'+\alpha\eta_1'+\beta\eta_2')dx=l. \quad (5)$$

若 $y(x)$是在条件(1)之下使泛函$J[y]$取极值的函数，则因当$\alpha=\beta=0$时$y^*=y$，故按普通函数的条件极值问题的定理(拉格朗日乘子法)，有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}+\lambda\frac{\partial\Phi_1}{\partial\alpha}=0,\\ \frac{\partial\Phi}{\partial\beta}+\lambda\frac{\partial\Phi_1}{\partial\beta}=0,\end{aligned}\right\}\ (\alpha,\beta=0) \quad (6)$$

其中 λ 是待定常数(拉格朗日乘子). 把(4)和(5)代入这两个方程中，得

$$\left.\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1}[(F_y+\lambda G_y)\eta_1+(F_{y'}+\lambda G_{y'})\eta_1']dx=0,\\ \int_{x_0}^{x_1}[(F_y+\lambda G_y)\eta_2+(F_{y'}+\lambda G_{y'})\eta_2']dx=0.\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

对于两个积分中的第二项分别换部求积分，并注意 $\eta_1(x)$和$\eta_2(x)$在端点 x_0 和 x_1 之值为零，得

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[(F_y+\lambda G_y)-\frac{d}{dx}(F_{y'}+\lambda G_{y'})\right]\eta_1 dx=0, \quad (8)$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[(F_y+\lambda G_y)-\frac{d}{dx}(F_{y'}+\lambda G_{y'})\right]\eta_2 dx=0. \quad (9)$$

设 $y(x)$不满足方程 $G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}=0$，可选 $\eta_2(x)$使

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\right)\eta_2 dx\neq 0\text{①},$$

而由(9)式得

$$\lambda=\frac{\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\eta_2 dx}{\int_{x_0}^{x_1}\left(G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\right)\eta_2 dx}.$$

因 η_2 与 η_1 是相互独立的，故 λ 是与 η_1 无关的常数. 于是，应用基本引理(23.2 节)于(8)式，得

$$F_y+\lambda G_y-\frac{d}{dx}(F_{y'}+\lambda G_{y'})=0. \tag{10}$$

这是通过 P_0 和 P_1 两点的 $y(x)$在等周条件(1)之下使泛函(2)取极值的必要条件.

(10)式是一个关于 $y(x)$的二阶常微分方程，含参数 λ. 这个方程的通解中共含三个参数，除 λ 以外还有两个积分常数. 这三个参数可以用条件 $y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$ 以及等周条件(1) 来确定.

(10)式是**等周问题的欧勒方程**，与泛函

$$J_2[y]=\int_{x_0}^{x_1}(F+\lambda G)dx \tag{11}$$

在没有附加条件下的欧勒方程相同，只要$y(x)$不满足$G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}=0$. 这个结果立刻可以推广到用重积分表示的泛函的条件极值问题.

练习题. 证明在

$$\iint_Q\int u^2 dxdydz=1 \tag{12}$$

的条件下，使泛函

① 这样的 $\eta_2(x)$总是存在的，否则根据基本引理将有 $G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}=0$.

$$J[u]=\iiint_{\Omega} F(x,y,z,u,u_x,u_y,u_z)dxdydz \tag{13}$$

取极值的函数 $u(x,y,z)$ 满足方程

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}-\frac{\partial}{\partial z}F_{u_z}-\lambda_u=0. \tag{14}$$

本节的结果在数理方程的本征值问题中有重要应用[23.8节].

23.5* 测地线问题

另一种有附加条件的变分问题是测地线问题. 例如，求位于曲面

$$G(x,y,z)=0 \tag{1}$$

上通过两固定点 (x_0,y_0,z_0)，(x_1,y_1,z_1) 的曲线 $z=z(x)$，$y=y(x)$，使泛函

$$J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y',z,z')dx \tag{2}$$

取极值.

这里的附加条件(1)是用函数方程的形式表示的，而不是像等周问题中那样用积分表示. 这种问题在力学中是熟知的约束运动问题(拉格朗日形式). 下面将就两个变量函数的情形来讨论，其结果不难推广到多个变量函数的情形.

在条件(1)之下，泛函(2)的极值问题与 23.2 节所讨论过的类似问题 [参看该节(8)式] 不同之处是泛函中的变量函数 $y(x)$ 和 $z(x)$ 现在不独立，而是由(1)式关联着的. 因此，只要利用(1)式消去(2)式中的一个变量函数，就可以应用 23.2 节中的结果.

设 $G_z=\frac{\partial G}{\partial z}\neq 0$，则按隐函数定理，可以由(1)式解出

$$z=\varphi(x,y). \tag{3}$$

代入(2)，得

$$J_1[y]=\int_{x_0}^{x_1} F\left(x,y,y',\varphi(x,y),\frac{d\varphi(x,y)}{dx}\right)dx$$
$$=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y',\varphi,\varphi_x+\varphi_y y')dx$$
$$=\int_{x_0}^{x_1} F^*(x,y,y')dx, \tag{4}$$

其中的变量函数 $y(x)$除了要通过 $P_0(x_0,y_0)$, $P_1(x_1,y_1)$ 两固定点之外，不再受到其他限制. 因此，与(4)式泛函相应的欧勒方程是

$$F_y^*-\frac{d}{dx}F_{y'}^*=0. \tag{5}$$

但 $$F^*(x,y,y')=F(x,y,y',\varphi,\varphi_x+\varphi_y y'),$$

故 $$F_y^*=F_y+F_z\varphi_y+F_{z'}(\varphi_{xy}+\varphi_{yy}y'),$$
$$F_{y'}^*=F_{y'}+F_{z'}\varphi_y.$$

代入(5)，得

$$F_y+F_z\varphi_y+F_{z'}(\varphi_{xy}+\varphi_{yy}y')-\frac{d}{dx}(F_{y'}+F_{z'}\varphi_y)$$
$$=F_y+F_z\varphi_y+F_{z'}(\varphi_{xy}+\varphi_{yy}y')$$
$$-\frac{d}{dx}F_{y'}-\varphi_y\frac{d}{dx}F_{z'}-F_{z'}(\varphi_{xy}+\varphi_{yy}y')$$
$$=F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\varphi_y\left(F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}\right)=0. \tag{6}$$

回到函数 G，

$$\varphi_y=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{G_y}{G_z},$$

(6)式成为

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}-\frac{G_y}{G_z}\left(F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}\right)=0,$$

或者

$$\frac{F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}}{G_y}=\frac{F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}}{G_z}=-\lambda(x),$$

其中 $F_y,F_z,F_{y'},F_{z'},G_y$ 和 G_z 都应当看作 x 的函数，$\lambda(x)$是待定函数. 因此，在条件(1)之下，泛函(2)的欧勒方程是下列联立的二阶常微分方程：

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dx}F_{y'}-[F_y+\lambda(x)G_y]=0,\\ \frac{d}{dx}F_{z'}-[F_z+\lambda(x)G_z]=0.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

推广到 n 个变量函数的泛函

$$J[y_1,y_2,\cdots,y_n]=\int_{x_0}^{x_1}F(x;y_1,y_2,\cdots,y_n;y_1',y_2',\cdots,y_n')dx \tag{8}$$

在附加条件

$$G_s(x;y_1,y_2,\cdots,y_n)=0,\ s=1,2,\cdots,p\ (p<n) \tag{9}$$

之下的极值问题，得下列欧勒方程组：

$$\frac{d}{dx}F_{y_i'}-\left[F_{y_i}+\sum_{s=1}^{p}\lambda_s(x)\frac{\partial G_s}{\partial y_i}\right]=0,\ i=1,2,\cdots,n, \tag{10}$$

23.6 泛函的变分 · 泛函的导数

泛函的变分 泛函的极值问题常用泛函的变分形式来表达. 差数

$$\delta J=J[y^*]-J[y]\ (y^*=y+\delta y) \tag{1}$$

称为泛函 $J[y]$的一级变分. δy 是变量函数的改变.

现在证明 $y(x)$使泛函(其中的积分限固定)

$$J[y]=\int_{x0}^{x1}F(x,y,y')dx \tag{2}$$

取极值的必要条件是

$$\delta J=0. \tag{3}$$

由 $\delta J=J[y^*]-J[y]$

$$=\int_{x_0}^{x_1}F[x,y+\delta y,y'+(\delta y)']dx-\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx,$$

其中 $(\delta y)'=\dfrac{d(\delta y)}{dx}$，略去 δy 和 $(\delta y)'$ 的二次方以及高次方，有

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}[F_y\delta y+F_{y'}(\delta y)']dx$$

$$=F_{y'}\delta y\Big|_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\,dx. \tag{4}$$

如果 y 使 $J[y]$ 取极小值，则 $\delta J\geqslant 0$. 但 $\delta J>0$ 不能成立，因为如果成立，则在(4)式中把 δy 换成 $-\delta y$ 将得 $\delta J<0$，而这是与 $J[y]$ 为极小值矛盾的 因此有(3)式.

泛函的导数 设 δy 只在某一点 x_p 的一个邻域 $|x-x_p|<e$ 内不为零(图 112)，则由(4)式得

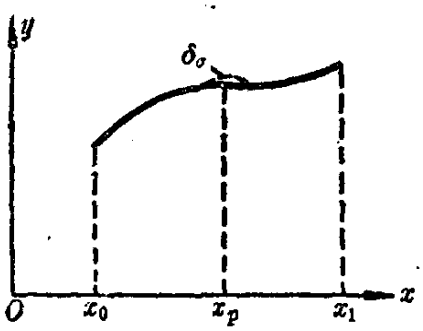


图 112

$$\delta J=\int_{x_p-e}^{x_p+e}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\,dx,$$

令

$$\delta\sigma=\int_{x_p-e}^{x_p+e}\delta y\,dx.$$

用中值公式，然后取极限，令 $e\to 0$，得

$$\lim_{\delta\sigma\to 0}\frac{\delta J}{\delta\sigma}=\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)_{x=x_p}.$$

这个极限值称为泛函 $J[y]$ 在 x_p 点的导数. 去掉下标 x_p，可写为

$$\lim_{\delta\sigma\to 0}\frac{\delta J}{\delta\sigma}=[F]_y=F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}. \tag{5}$$

由此可见欧勒方程的解 $y=y(x)$ 是这样一条曲线，在曲线上泛函的导数处处为零.

23.7* 变端点问题·自然边界条件

在以上各节所讨论的泛函极值问题中，边界(即积分限)和变量函数在边界上的值都是固定的，相应的欧勒方程是在这一条件下导出的.

当边界和(或)变量函数在边界上的值容许改变时，欧勒方程也同样成立. 原因是,在这种情形下,变量函数类包括了边界和函数的边界值都不变的变量函数于内. 以最简单的泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx \tag{1}$$

为例来说明,其中x_0,x_1以及$y(x_0)$,$y(x_1)$之值都是可变的——即曲线$y=y(x)$的端点可变.如果在所有端点可变的曲线中,$y=y(x)$是使泛函$J[y]$取极值的一条曲线，则与端点固定的(因而是较为狭窄的)一类曲线相比，$y=y(x)$必然仍是使$J[y]$取极值的曲线而满足欧勒方程

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0. \tag{2}$$

下面来讨论,当(1)式中的积分限x_0和x_1不变,而$y(x_0)$和$y(x_1)$之值可变时,使泛函$J[y]$取极值的函数$y(x)$，除了必须是欧勒方程(2)的解之外,还要满足什么条件.

由上节(4)式,注意y满足欧勒方程(2),得

$$\delta J=F_{y'}\delta y\Big|_{x_0}^{x_1}=(F_{y'}\delta y)_{x_1}-(F_{y'}\delta y)_{x_0}.$$

由上节(3)式有$\delta J=0$,而函数在端点的改变$(\delta y)_{x_1}$和$(\delta y)_{x_0}$是独立的,故必须

$$F_{y'}|_{x=x_0}=0,\quad F_{y'}|_{x=x_1}=0. \tag{3}$$

这是$y(x)$在端点$x=x_0$和$x=x_1$所应当满足的条件,称为**自然边界条件**.

对于x_0和x_1可变的情形,也有类似的边界条件,读者可参看

В.И. 斯米尔诺夫，高等数学教程，第四卷，76，77[俄文本(1953)，第 249～255 页]。

练习题. 求函数 $u(x,y)$ 使泛函

$$J[u]=\iint_G(u_x^2+u_y^2)dxdy+\int_\Gamma \sigma u^2 ds$$

取极值的自然边界条件，其中 Γ 是区域 G 的固定边界，σ 是边界上的点的函数.

23.8 应用于本征值问题

变分法在数理方程问题中应用的原理是：

1. 把一个微分方程的本征值问题或者边值问题和一个泛函的极值问题联系起来，使原来的方程是这个泛函的欧勒方程.

2. 求出使泛函取极值的函数. 由于这函数必满足欧勒方程，它也就是原方程的解.

在本节中我们将说明如何把一个微分方程的本征值问题化为一个泛函的极值问题. 至于怎样求泛函的极值，将在 23.11 节中讨论.

一个(线性)微分方程的本征值问题和泛函极值问题的关系与线性代数中的本征值问题和二次齐式的关系相似. 下面以常见的方程

$$L[u]\equiv -\nabla^2 u=\lambda u \tag{1}$$

在第一类边界条件

$$u|_\Sigma=0 \tag{2}$$

下的本征值问题来说明，其中设 u 是问题的区域 G 中的 C_2 类函数，λ 是参数，Σ 是 G 的边界.

考虑表达式

$$(L-\lambda)[u]\equiv -(\nabla^2 u+\lambda u). \tag{3}$$

乘以 u，然后在 G 上求积分，得到一个泛函

$$J[u]=-\int_{\sigma}(u\nabla^2u+\lambda u^2)d\tau. \tag{3}$$

我们来求这泛函的欧勒方程. 为了能够直接应用 23.3 节的结果，先利用边界条件(2)把泛函(3)化为只含 u 的一阶导数的积分. 由高斯定理有

$$J[u]=-\int_{\sigma}(u\nabla^2u+\lambda u^2)d\tau=-\int_{\Sigma}u\frac{\partial u}{\partial n}d\Sigma$$

$$+\int_{\sigma}[(\nabla u)^2-\lambda u^2]d\tau. \tag{4}$$

利用(2)，得$\int_{\Sigma}=0$，而

$$J[u]=\int_{\sigma}[(\nabla u)^2-\lambda u^2]d\tau. \tag{5}$$

根据 23.3 节的结果，即得这个泛函的欧勒方程

$$\nabla^2u+\lambda u=0.$$

这正是原本征值问题的方程(1).

又，由 23.4 节的结果知道泛函(5)的欧勒方程和泛函

$$J_1[u]=\int_{\sigma}(\nabla u)^2d\tau \tag{6}$$

在附加条件

$$\int_{\sigma}u^2d\tau=1 \tag{7}$$

之下的欧勒方程相同，因此原来的微分方程本征值问题又化为在归一条件(7)和边界条件(2)之下求泛函(6)的极值问题.

现在证明一个重要的结论：在条件(2)和(7)之下，泛函(6)的最小值 λ_0 就是方程(1)的最小本征值，而使泛函(6)取这最小值的归一化函数 u_0 是相应的本征函数，即 $\nabla^2u_0+\lambda_0u_0=0$.

首先，u_0 必满足方程(1)，即

$$\nabla^2u_0+\lambda u_0=0, \tag{8}$$

因为方程(1)是在条件(7)之下泛函(6)的欧勒方程. 因此，问题是

证明 $\lambda=\lambda_0$. 为此,把 u_0 代入(6)式中,得

$$J_1[u_0]=\lambda_0=\int_\sigma(\nabla u_0)^2d\tau$$

$$=\int_\sigma\nabla\cdot(u_0\nabla u_0)\,d\tau-\int_\sigma u_0\nabla^2u_0d\tau$$

$$=\int_\Sigma u_0\frac{\partial u_0}{\partial n}d\,\Sigma+\lambda\int_\sigma u_0^2d\tau=\lambda, \tag{9}$$

在最后一步中用了条件(2)和(7). 这就证明了 $\lambda=\lambda_0$.

最后证明 λ_0 是最小的本征值. 设 λ_1 是小于 λ_0 的本征值,相应本征函数是 u_1,则重复(9)式的推导,得

$$J_1[u_1]=\int_\sigma(\nabla u_1)^2d\tau=\lambda_1<\lambda_0=J_1[u_0],$$

而这是与 $J_1[u_0]$为泛函 $J_1[u]$的最小值矛盾的.

上面所得结果显然也适用于方程(1)在第二类边界条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Sigma=0 \tag{10}$$

下的本征值问题.

练习题. 试把方程(1)在第三类边界条件

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right]_\Sigma=0\ (h>0) \tag{11}$$

下的本征值问题化为泛函的极值问题.

提示:考虑泛函

$$J[u]=\int_\sigma(\nabla u)^2d\tau+\int_\Sigma hu^2d\Sigma \tag{12}$$

[参看 23.10 节(10)式].

23.9* 高阶本征值和本征函数

仍以方程

$$\nabla^2u+\lambda u=0 \tag{1}$$

在第一类边界条件

$$u|_\Sigma=0 \tag{2}$$

下的本征值问题为例来说明．在上节中已经看到，这个问题的最小本征值 λ_0 等于在条件(2)和归一条件

$$\int_G u^2 d\tau = 1 \tag{3}$$

之下泛函

$$J[u] = \int_G (\nabla u)^2 d\tau \tag{4}$$

的最小值，相应本征函数 u_0 使 $J[u_0] = \lambda_0$．现在证明，再加上条件

$$\int_G u u_0 d\tau = 0, \tag{5}$$

即 u 和本征函数 u_0 正交，则泛函(4)的极小值 λ_1 是次于 λ_0 的本征值(即 $\lambda_1 \geqslant \lambda_0$，但 λ_1 不大于其他本征值)，而使 $J[u_1] = \lambda_1$ 的归一化函数 u_1 是相应的本征函数．

取比较函数

$$u = u_1 + \alpha\xi, \tag{6}$$

其中 $\xi = \eta + ku_0$，α 是小参数，η 是满足边界条件(2)的任意函数，k 是使 ξ 满足(5)式的常数，即

$$\int_G (\eta + ku_0) u_0 d\tau = 0,$$

而

$$k = -\int_G \eta u_0 d\tau$$

(因假定 u_0 是归一的)．由于 u_1，η 和 u_0 都满足边界条件(2)，故 ξ 和 u 也满足这个条件．

令

$$c = \int_G u^2 d\tau,$$

则 $\dfrac{u}{\sqrt{c}}$ 是满足条件(2)，(3)，(5)的函数．于是，按所设，有

$$J\left[\frac{u}{\sqrt{c}}\right] \geqslant \lambda_1, \tag{7}$$

即 $$J[u]\geqslant c\lambda_1=\lambda_1\int_G u^2d\tau,$$

或 $$\int_G[(\nabla u)^2-\lambda_1u^2]d\tau\geqslant 0. \tag{8}$$

当 $\alpha=0$ 时，$u=u_1$，(8)式中的等号成立；当 $\alpha\neq 0$ 时，(8) 式左方之值$\geqslant 0$，因此，(8)式左方，作为 α 的函数 $\Phi(\alpha)$，在 $\alpha=0$ 处取极小值，而有 $\Phi'(0)=0$. 把(6)式代入，得

$$\begin{aligned}\Phi'(0)&=\frac{d}{d\alpha}\int_G\{[\nabla(u_1+\alpha\xi)]^2-\lambda_1(u_1+\alpha\xi)^2\}d\tau\Big|_{\alpha=0}\\&=2\int_G(\nabla u_1\cdot\nabla\xi-\lambda_1u_1\xi)d\tau\\&=2\int_G\nabla\cdot(\xi\nabla u_1)d\tau-2\int_G(\nabla^2u_1+\lambda_1u_1)\xi d\tau=0.\end{aligned}\tag{9}$$

利用高斯定理，注意 $\xi|_\Sigma=0$，得

$$\int_G\nabla\cdot(\xi\nabla u_1)\,d\tau=\int_\Sigma\xi\frac{\partial u_1}{\partial n}d\Sigma=0.$$

因此(9)式成为

$$\begin{aligned}&\int_G(\nabla^2u_1+\lambda_1u_1)\xi d\tau\\&=\int_G(\nabla^2u_1+\lambda_1u_1)\eta d\tau+k\int_G u_0(\nabla^2u_1+\lambda_1u_1)d\tau=0.\end{aligned}\tag{10}$$

用格临公式，注意 u_0 和 u_1 都满足(2)式，有

$$\int_G(u_0\nabla^2u_1-u_1\nabla^2u_0)d\tau=\int_\Sigma\left(u_0\frac{\partial u_1}{\partial n}-u_1\frac{\partial u_0}{\partial n}\right)d\Sigma=0.$$

因此，

$$\int_G u_0\nabla^2u_1d\tau=\int_G u_1\nabla^2u_0d\tau=-\lambda_0\int_G u_1u_0d\tau.$$

代入(10)式，注意正交关系(5)，得

$$\int_G(\nabla^2u_1+\lambda_1u_1)\eta d\tau=0.$$

但 η 是任意函数，故必须

$$\nabla^2 u_1 + \lambda_1 u_1 = 0.$$

这证明 λ_1 是本征值而 u_1 是相应的本征函数.

$\lambda_1 \geqslant \lambda_0$是显然的,因为$\lambda_0$是泛函(4)在条件(3)之下的最小值,而$u_1$除了也满足条件(3)之外,还受到条件(5)的限制,故 $J[u_1] \geqslant J[u_0]$. 至于λ_1不大于其他本征值这一点可以仿照上节的方法证明.

对于更高阶的本征值和本征函数,也可以照此类推. 在求第 i 个本征值 λ_i 和相应的本征函数 u_i 时,除了要求 u_i 满足条件(2)和(3)之外,还要求 u_i 与本征函数$u_0, u_1, u_2, \cdots, u_{i-1}$分别正交,即

$$\int_G u_i u_k d\tau = 0, \qquad k = 0, 1, \cdots, i-1, \tag{11}$$

其中的 u_k 是按相应本征值的大小顺序排列的; 即 $\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{i-1}$.

23.10* 应用于边值问题

我们以泊松方程

$$\nabla^2 u = -f \tag{1}$$

的边值问题为例来说明如何把微分方程的边值问题化为泛函的极值问题.

先看第一类齐次边界条件

$$u|_\Sigma = 0 \tag{2}$$

的情形,其中 Σ 是问题的区域 G 的边界. 仿上节本征值问题的做法,考虑表达式

$$-(\nabla^2 u + f).$$

乘以 u,在 G 上求积分,得泛函

$$J_1[u] = -\int_G (u\nabla^2 u + fu) d\tau$$

$$= -\int_\Sigma u \frac{\partial u}{\partial n} d\Sigma + \int_G [(\nabla u)^2 - fu] d\tau$$

$$=\int_G[(\nabla u)^2-fu]d\tau, \tag{3}$$

因为按照条件(2),第二个等式中沿边界的积分等于零.

在边界条件(2)之下,由于 $\delta u|_\Sigma=0$,泛函(3)的变分[23.6节]是

$$\begin{aligned}\delta J_1[u]&=2\int_G \nabla u\cdot\nabla\delta u d\tau-\int_G f\delta u d\tau\\&=2\int_\Sigma\frac{\partial u}{\partial n}\delta u d\Sigma-\int_G(2\nabla^2u+f)\delta u d\tau\\&=-\int_G(2\nabla^2u+f)\delta u d\tau.\end{aligned} \tag{4}$$

由泛函取极值的条件$\delta J_1[u]=0$,得相应欧勒方程为$2\nabla^2u+f=0$这不是方程(1),故(3)还不是所要的泛函. 但(4)式可写为

$$\delta J_1[u]=-2\int_G(\nabla^2u+f)\delta u d\tau+\int_G f\delta u d\tau,$$

故有 $$\delta\{J_1[u]-\int_G fu d\tau\}=-2\int_G(\nabla^2u+f)\delta u d\tau.$$

可见如果考虑泛函

$$J[u]=J_1[u]-\int_G fu d\tau=\int_G[(\nabla u)^2-2fu]d\tau, \tag{5}$$

则在条件(2)之下,相应的欧勒方程正是原边值问题的方程(1).

对于非齐次边界条件

$$u|_\Sigma=g, \tag{6}$$

其中 g 是Σ上的给定函数,由于在边界上仍有$\delta u=0$,从$\delta J[u]=0$仍导至方程(1),故(5)式是和泊松方程(1)的第一边值问题相应的泛函,边界条件是(6)式[包括(2)式].

对于第二、三类边值问题,求相应泛函的步骤大致同上,但这时(4)式的第二个等式中的边界积分一般不为零,相应泛函的形式也就比较复杂,包含有边界上的积分.

设边界条件为

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right]_{\Sigma}=g, \tag{7}$$

$h=0$ 时是第二类边界条件，$h\neq 0$时是第三类边界条件．考虑(5)式的泛函，令为 $J_2[u]$：

$$J_2[u]=\int_G[(\nabla u)^2-2fu]d\tau. \tag{8}$$

在条件(7)之下，

$$\begin{aligned}\delta J_2[u]&=2\int_G[\nabla u\cdot\nabla\delta u-2f\delta u]d\tau\\&=2\int_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial n}\delta u d\Sigma-2\int_G(\nabla^2u+f)\delta u d\tau\\&=2\int_{\Sigma}(g-hu)\delta u d\Sigma-2\int_G(\nabla^2u+f)\delta u d\tau,\end{aligned}$$

故

$$\delta\left\{J_2[u]-2\int_{\Sigma}gud\Sigma+\int_{\Sigma}hu^2d\Sigma\right\}=-2\int_G(\nabla^2u+f)\delta u d\tau.$$

可见在条件(7)之下，与方程(1)相应的泛函是

$$\begin{aligned}J[u]&=J_2[u]-2\int_{\Sigma}gud\Sigma+\int_{\Sigma}hu^2d\Sigma,\\&=\int_G[(\nabla u)^2-2fu]d\tau-2\int_{\Sigma}gud\Sigma+\int_{\Sigma}hu^2d\Sigma,\end{aligned} \tag{9}$$

或者，利用(7)，

$$J[u]=-\int_G[u\nabla^2u+2fu]d\tau-\int_{\Sigma}gud\Sigma. \tag{10}$$

23.11 里兹(Ritz)方法

在前几节中我们说明了如何把微分方程的本征值问题或者边值问题化成求泛函极值的问题．现在介绍关于求泛函极值的主要近似方法——里兹方法．其他近似方法可参看康脱洛维奇、克雷洛

夫 (Л.В.Канторович и А.Н. Крылов),高等分析中的近似方法,第四章 §2 (1952).

首先说明里兹方法的基本思想. 为了具体起见,考虑二重积分所表示的泛函

$$J[u]=\int_G F(x,y,u,u_x,u_y)dxdy \tag{1}$$

在边界条件

$$u|_\Gamma=\varphi(s) \tag{2}$$

下的极小值问题,其中 Γ 是区域 G 的边界,$\varphi(s)$ 是 Γ 上变点 s 的函数,F 是 x,y,u,u_x,u_y 等五个宗量的连续函数.

设 $u^*(x,y)$ 是这问题的精确解,$J[u^*]=m$ 是极小值. 如果能够找到一个满足条件(2)的函数 $\bar{u}(x,y)$,使 $J[\bar{u}]$ 之值极为接近 m,则可以指望 $\bar{u}(x,y)$ 是精确解的很好的近似. 但是,泛函的极小值 m 即使存在,也是一个待求的数值,例如23.8节和 23.9 节的本征值. 因此,为了求 $\bar{u}(x,y)$,里兹提出了下面的方法.

考虑依赖于若干个参数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 并满足条件(2)的函数族

$$u=\Phi(x,y,a_1,a_2,\cdots,a_n). \tag{3}$$

把比较函数限于这个函数族内,要求从中找出使 $J[u]$ 取极小值的函数. 这样的问题显然要比原来的问题容易得多. 事实上,把(3)代入(1),求积分,就得到一个含 n 个变数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的函数 $I(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 使这函数取极小值的 a_i 值 $(i=1,2,\cdots,n)$ 应满足下列方程组:

$$\frac{\partial I}{\partial a_k}=0,\quad k=1,2,\cdots,n. \tag{4}$$

如果从这个方程组解出一组值 $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\cdots,\bar{a}_n$,使 $I(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\cdots,\bar{a}_n)$ 为函数 $I(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的绝对极小值,则

$$\bar{u}(x,y)=\Phi(x,y,\bar{a}_1,\bar{a}_2,\cdots,\bar{a}_n)$$

就是所求的近似解.

在许多重要的实际问题中，(1)式中的被积函数是u, u_x, u_y的二次多项式[参看23.8节和23.9节的一些具体泛函和下节的例子]. 如果取函数族(3)为参数$a_1, a_2, \cdots, a_n$的线性函数，则(4)就是一次的代数方程组. 通常只要 $n=2,3,4,5$，有时甚至取$n=2$，即能得到相当好的近似[见下节].

当然，在理论上还应当讨论这样求得的近似解和泛函的近似极小值的精确程度，以及函数族$\Phi(x, y, a_1, a_2, \cdots, a_n)$所应满足的条件. 关于这些问题，读者可参看本节开始时介绍的专著的第四章§2和§4.

23.12 应用举例——圆形薄膜横振动的本征频率

为了便于比较，我们举一个能够精确求解的例子——圆形薄膜的横振动. 方程是

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,$$

其中 $c=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$，T是膜上的张力，ρ是膜的密度(单位面积的质量).

令
$$u=v(r,\theta)e^{i\omega t},$$

ω是所求本征(圆)频率，得

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}+\lambda v=0, \tag{1}$$

其中
$$\lambda=\frac{\omega^2}{c^2}. \tag{2}$$

设边界条件为$u|_{r=a}=0$，即膜的边缘固定，a是膜的半径，有

$$v|_{r=a}=0 \tag{3}$$

考虑u与θ无关的最简单情形. 这时方程(1)是一个常微分方程：

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\lambda R=\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\lambda R=0, \tag{4}$$

其中$0\leqslant r<a$. 边界条件为

$$R(a)=0. \tag{5}$$

这个边值问题的解是熟知的[参看 17.7 节]. 方程(4)的有界解是零阶贝塞耳函数 $J_0(\sqrt{\lambda}r)$. 要满足边界条件(5),$\sqrt{\lambda}a$ 必须等于 $J_0(x)$的零点 μ_1, 即 $\lambda=(\mu_1/a)^2$. $J_0(x)$的最小的零点是 $\mu_1=2.4048$,故最小的 λ 值是

$$\lambda_1=\left(\frac{\mu_1}{a}\right)^2=\frac{5.7831}{a^2}. \tag{6}$$

相应的归一化本征函数是

$$R(r)=\frac{\sqrt{2}}{aJ_1(\mu_1)}J_0\left(\mu_1\frac{r}{a}\right)=\frac{2.724}{a}J_0\left(2.4048\frac{r}{a}\right), \tag{7}$$

因为其中$J_1(x)$是一阶贝塞耳函数,$J_1(\mu_1)=0.5191$[参看17.7 节(16)式后面的引文].

现在应用上节的里兹方法来求近似解. 引进无量纲的变数 $x=\frac{r}{a}$(在应用变分法时常常如此),并把λa^2 写作 k,方程(4) 和边界条件(5)分别化为

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+ky=0 \tag{8}$$

和

$$y(1)=0. \tag{9}$$

与此相应的变分问题是在条件(9)和归一条件

$$\int_0^a R^2r\,dr=a^2\int_0^1 y^2x\,dx=1 \tag{10}$$

之下求泛函

$$J[y]=\int_0^a\left(\frac{dR}{dr}\right)^2r\,dr=\int_0^1\left(\frac{dy}{dx}\right)^2x\,dx \tag{11}$$

的极小值的问题[23.8节].

作为逼近函数,最常用的是多项式和三角函数. 我们取

$$y(x)=a_1(1-x^2)+a_2(1-x^2)^2. \tag{12}$$

这函数显然满足边界条件(9). 其中不用$1-x$ 的幂而用 $1-x^2$ 的

幂是为了使近似解 $y(x)$ 在圆膜的中心($x=0$)没有尖点，即，使 $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}=0$.

把(12)代入(10)和(11)，分别得

$$I_1(a_1,a_2)=a^2\int_0^1 y^2x\,dx=a^2\left(\frac{1}{6}a_1^2+\frac{1}{4}a_1a_2+\frac{1}{10}a_2^2\right)=1, \tag{13}$$

$$I(a_1,a_2)=\int_0^1\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 x\,dx=a_1^2+\frac{4}{3}a_1a_2+\frac{2}{3}a_2^2. \tag{14}$$

二次齐式$I(a_1,a_2)$在条件$I_1(a_1,a_2)=1$ 之下取极值的条件是

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial a_1}-\lambda\frac{\partial I_1}{\partial a_1}&=2a_1+\frac{4}{3}a_2-\frac{k}{3}a_1-\frac{k}{4}a_2=0,\\ \frac{\partial I}{\partial a_2}-\lambda\frac{\partial I_1}{\partial a_2}&=\frac{4}{3}a_1+\frac{4}{3}a_2-\frac{k}{4}a_1-\frac{k}{5}a_2=0.\end{aligned}\right\}\ (k=\lambda a^2) \tag{15}$$

由此得确定 k 值的方程

$$\begin{vmatrix}2-\frac{k}{3} & \frac{4}{3}-\frac{k}{4}\\ \frac{4}{3}-\frac{k}{4} & \frac{4}{3}-\frac{k}{5}\end{vmatrix}=0. \tag{16}$$

这方程的两个根是 $k=5.7841$ 和 36.883. 因此，最小本征值 $\lambda_1=\frac{5.7841}{a^2}$. 与精确值(6)比较，相对误差不到万分之二.

与λ_1相应的函数$y(x)$中的系数 a_1 和 a_2 可以从 (15) 式利用归一条件解出：

$$a_1=\frac{1.650}{a},\quad a_2=\frac{1.054}{a}. \tag{17}$$

因此，归一化的近似解是

$$y_1(x)=\frac{1.650}{a}(1-x^2)+\frac{1.054}{a}(1-x^2)^2. \tag{18}$$

下面列出这个近似解与(7)式精确解的比较.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$ay_1(x)$	2.704	2.666	2.554	2.374	2.130	1.830	1.488	1.115	0.731	0.352
$2.724\times$ $\times J_0(2.405x)$	2.724	2.685	2.569	2.380	2.130	1.824	1.480	1.108	0.730	0.353

从表中可以看出，近似解的相对误差在百分之一以内. 近似本征函数的精确程度低于相应近似本征值的精确程度，是用变分法解本征值问题的一个普遍特性. 这是可以理解的，因为从泛函的变分知道，当近似函数与精确解相差δy时，相应泛函值的差是$\mathcal{O}[(\delta y)^2]$.

第二十四章　积分方程简介

积分方程是数学分析中发展比较晚，但却很重要的一个分支．数学分析中有些看来是相互无关的问题常可通过积分方程统一起来．

很多力学和物理问题，特别是关于场的问题，从定量的数学关系上看，都可以或必须，用积分方程来表述；所谓积分方程，就是问题中的未知(待求)函数出现在积分号下的函数方程。

24.1　导致积分方程的问题举例

1．最简单的，例如 R-C 充(放)电电路方程：

$$Ri+\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt=E \quad (\text{充电}); \tag{1}$$

未知电流 $i(t)$ 出现在积分号下．当然，对于这种问题，积分方程形式并非必要；通过对 t 求微商，(1)式即化为一简单的微分方程。

2．常微分方程的初值问题：

$$y'=\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0,$$

求积分，即化为积分方程：

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} f(x,y(t))\,dt+y_0.$$

注意初值 y_0 直接出现在方程中．

又，二阶方程的初值问题：

$$y''=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y'_0,$$

也可以化为积分方程

$$y(x)=\int_{x_0}^{x}(x-t)f(x,y(t))\,dt+y_0+y'_0(x-x_0)$$

因为，由 $y''=f(x,y)$，求积分两次，把初值代入，得

$$y(x)=\int_{x_0}^{x}ds\int_{x_0}^{s}f(t,y(t))dt+y_0+y_0'(x-x_0)$$

交换两积分的次序，即得

$$\begin{aligned}y(x)&=\int_{x_0}^{x}dt\int_{t}^{x}f(t,y(t))ds+y_0+y_0'(x-x_0)\\&=\int_{x_0}^{x}(x-t)f(t,y(t))dt+y_0+y_0'(x-x_0).\end{aligned}$$

注意它同一阶常微分方程初值问题的相应积分方程的形式无甚异处.

3．常微分方程的边值问题：

$$y''=f(x,y),\quad y(0)=a,y(l)=b$$

可通过相应的格临函数[见第十八章，特别是 18.6 节(15)，(16)式之后的做法]，化为下列积分方程：

$$y(x)=\int_0^l K(x,t)f(t,y(t))dt+a+\frac{b-a}{l}x,\qquad(2)$$

其中

$$K(x,t)=\begin{cases}t(x-l)/l & (t\leqslant x),\\ x(t-l)/l & (t\geqslant x)\end{cases}$$

是满足方程

$$\frac{d^2K(x,t)}{dx^2}=\delta(x-t)$$

和齐次边界条件 $K(0,t)=0,K(l,t)=0$ 的格临函数．(2)式中的 $K(x,t)$称为这积分方程的核.

4．斯-刘(Sturm-Liouville)型方程的本征值问题[参看 15.2 节]：

斯-刘型方程

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+[\lambda\rho(x)-q(x)]y=0$$

在边界条件

$$\alpha_0 y(a)+\beta_0 y'(a)=0,$$
$$\alpha_1 y(b)+\beta_1 y'(b)=0$$

之下的本征值问题可化为下列积分方程

$$y(x)+\lambda\int_a^b G(x,t)\rho(t)y(t)dt=0 \tag{3}$$

的本征值问题，其中 $G(x,t)$ 是满足方程

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dG}{dx}\right]-q(x)G=\delta(x-t)$$

和相应边值条件

$$\alpha_0 G(a,t)+\beta_0 G_x(a,t)=0,$$
$$\alpha_1 G(b,t)+\beta_1 G_x(b,t)=0$$

的格临函数；称为积分方程(3)的核.

5．反演问题：

有些物理问题必须用积分方程来表述．例如，热传导问题中的温度分布函数满足一偏微分方程[见 12.3 节]和一定的边界条件和初值条件．如果问题是要从测得的温度随地点和时间的变化反求初温，则是一个解积分方程(以一维情形为例)

$$u(x,t)=\int_0^l G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi$$

的问题，其中 $u(x,t)$ 是 t 时刻在 x 点的温度(已知)，$\varphi(\xi)$ 则是待求的初温分布，$G(x,\xi,t)$ 为问题的相应格临函数，也是积分方程的核.

与此相似，从像的亮度分布求光源的(相对)强度分布的问题(信息分析)也是一个积分方程问题.

设在 ξ 点单位强度的点光源所成的衍射像的亮度分布为 $K(x,\xi)$，则连续分布的光源 $\varphi(\xi)$ 所产生的像的强度分布为

$$\psi(x)=\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi, \tag{4}$$

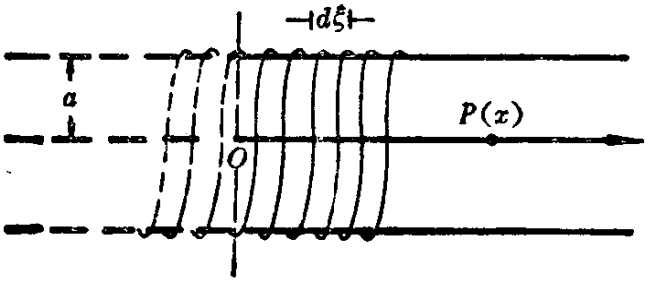
由测得的 $\psi(x)$ 求 $\varphi(\xi)$ 是一个解积分方程(4)的问题；$K(x,\xi)$ 是

积分方程(4)的核.

又例如，求一螺管上的线圈分布使在管内产生的磁场符合一定的要求，也是必须用积分方程来表述的问题.

设 $n(\xi)$代表所求单位长度上线圈的匝数，则电流元为 $di=In(\xi)d\xi$； I 为线圈中的电流强度. 它产生的磁场强度

$$dH=di\,\frac{2\pi a}{r^2}\cdot\frac{a}{r}=2\pi a^2 I\,\frac{n(\xi)d\xi}{[a^2+(x-\xi)^2]^{3/2}},$$



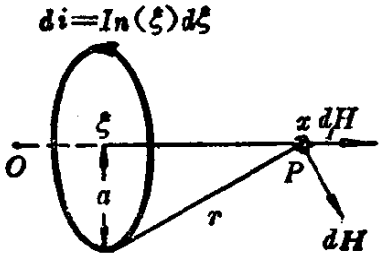


图 113

其中 a 是螺管截面的半径. 总的磁场强度

$$H(x)=2\pi a^2 I\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n(\xi)d\xi}{[a^2+(x-\xi)^2]^{3/2}},\qquad(5)$$

问题是由规定的磁场分布 $H(x)$ 求出线圈的匝数分布 $n(\xi)$.

以上所举的三个例子，其中的未知函数都不能用微分方程来求。以例 2 来说，这是因为，即使像的强度分布与光源强度之间存在着可用微分方程来表示的关系，光源所在处的“像”的强度 $\psi(x)$ 也并非已知的数据.

此外，用积分方程表述电磁波或原子、原子核、基本粒子等的散射，并与变分法相结合，可解决一些用微分方程表述所不易或难以解决的问题.

还有一种所谓微分-积分方程，例如输运过程的方程和多电子系用哈曲(Hartree)自洽场方法所导致的方程，在方程中既含所求函数的积分，也出现其微商，就不一一列举了(读者不妨列出$L-C-R$电路的方程，从而看到最简单的这类方程的例子).

24.2 积分方程的特点·与微分方程的比较

首先，积分方程所反映的是所求函数(场)的整体性质，而不像微分方程那样，所反映的只是局部关系. 因之，积分方程问题中就没有像初值条件、边界条件那样一些附加的定解条件；它们都已包含在方程中. 物理学中一个典型例子就是电磁场的基本方程，其积分(方程)表述不仅适用于电磁场变化连续的空间，而且也适用于其变化断续(例如两介质的分界面)之处.

其次，有些从微分方程表述来看是不同的问题，例如阶数不同(每高一阶就多一附加条件)，或自变数的数目不同(常微分方程和偏微分方程)，用积分方程来表述，就没有多大差异[见上节]，因而便于统一地作分析。

又，从上节所举的例子可以看到，积分方程的核(式中的$K(x,\xi)$等)常与(场的)格临函数密切相连.

24.3 线性积分方程的分类

许多重要物理问题所导致的积分方程大都是线性的，线性积分方程的理论和解法可以充分利用线性代数方程中的相应结果；我们将只讨论这种方程.

线性积分方程主要分为两大类. 这两类方程的性质差别较大，因之求解的方法也就有所不同.

第一类方程是未知函数只出现在积分号下的情形，例如上节所举的反演问题(可以说是包括一切积分变换的反演问题)；其普遍形式是

$$f(s)=\lambda\int_a^b K(s,t)y(t)dt, \tag{1}$$

其中 $y(t)$是未知函数，$f(s)$则是已知的；λ或是给定常数，或是待定的参数(例如本征值问题)。这类方程的求解问题比较困难．但由于它与各种积分变换相关联，近代在这方面也有了很大发展．

第二类方程是未知函数不仅出现在积分号下的情形，其普遍形式是

$$y(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)y(t)dt, \tag{2}$$

若 $f(s)\equiv 0$，则方程为齐次的，否则是非齐次的．

(1)和(2)式中的 s 和 t 不一定是单自变量，也可以代表多自变量的情形：

$$t:\ (t_1,\ t_2,\cdots,t_m),$$
$$s:\ (s_1,s_2,\cdots,s_n).$$

对于第一类方程，m和n可以不相等，而对于第二类方程则m必须同于n，因为函数 y 同时出现在积分号下和号外．

还有第三类方程：

$$a(s)y(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)y(t)dt, \tag{3}$$

其中 $a(s)$是已知函数．显然，当 $a(s)\neq 0$ 时，(3)可化为第二类方程；而当 $a(s)\equiv 0$ 时，它就是第一类的了．这第三类方程比较特殊，需个别处理，我们不准备讨论①．

对于第一、二类方程，还须进一步划分．像(1)和(2)式那样，积分限都是常数的方程称为弗雷德霍姆(Fredholm)型(下简称F-

① 读者如有需要，可参看 W. Schmeidler, Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik and Technik (Leipzig,1955).

型)方程;上下积分限之一是变数的方程称为**伏迭拉**(Volterra)型(下简称V-型)方程.

第一类V-型方程:

$$f(s)=\lambda\int_a^s K(s,t)y(t)dt. \tag{4}$$

第二类V-型方程:

$$y(s)=f(s)+\int_a^s K(s,t)y(t)dt. \tag{5}$$

V-型方程形式上可看作F-型方程的特殊情形,即其核具有下述性质的情形:

$$K(s,t)\equiv 0 \quad 当\ t>s,$$

例如,从推迟势的格临函数(见18.8节)所构成的积分方程.但V-型方程与F-型方程有着不同的性质,需要加以区别,这将在下面讨论求解问题时予以说明.

24.4 第二类F-型积分方程的逐次逼近解法

逐次逼近是解第二类积分方程的重要方法.我们先讨论F-型方程的情形;

$$y(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)y(t)dt, \tag{1}$$

其中 s, t 是基本区域 G: $a\leqslant s\leqslant b$, $a\leqslant t\leqslant b$ 中的实变数; $f(s)$, $K(s,t)$和 λ,因而 $y(s)$,则可以是复数.

方程(1)可用逐次逼近法求解的(充足)条件是:

① $K(s,t)$在G中平方可积:

$$\|K\|^2=\int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^2dsdt<N^2, \tag{2}$$

N为某常数.

② 函数

$$\left.\begin{aligned} A(s)&=\left[\int_a^b |K(s,t)|^2 dt\right]^{1/2}(>0),\\ \text{和}\quad B(t)&=\left[\int_a^b |K(s,t)|^2 ds\right]^{1/2}(>0),\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

在$[a,b]$中除个别点外处处存在，而且都是平方可积的：

$$\begin{aligned}\|K\|^2&=\int_a^b A^2(s)ds=\|A\|^2\\&=\int_a^b B^2(t)dt=\|B\|^2,\end{aligned}$$

这表示(2)式中的重积分可化为叠积分，且与积分次序无关.

③ $$|\lambda|<\frac{1}{\|K\|}. \tag{4}$$

求逐次逼近解的步骤很简单.

作为方程(1) 的解的零级近似，取

$$y_0(s)=f(s)$$

(即完全略去(1)式中的积分值)，这当然不满足方程(1). 把这零级近似代入(1)式右方的积分中，得一级近似：

$$y_1(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)y_0(t)dt,$$

其中 $y_0(t)=f(t)$. 把这一级近似再代入(1)式右方的积分中，得二级近似：

$$y_2(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)y_1(t)dt.$$

仿此下去，得解的 n 级近似：

$$y_n(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)y_{n-1}(t)dt. \tag{5}$$

如果这样构成的序列$\{y_n(s)\}$在区间 $a\leqslant s\leqslant b$ 中一致收敛：

$$\lim_{n\to\infty}y_n(s)=y(s), \tag{6}$$

则这极限函数 $y(s)$就是方程(1) 的精确解了(在积分号下求极限合法).

为了说明在前面所述的(充足)条件下这样构成的逼近序列确实一致收敛，我们注意

$$\begin{aligned} y_n(s)&=(y_n-y_{n-1})+(y_{n-1}-y_{n-2})+\cdots+(y_2-y_1)\\ &\quad+(y_1-y_0)+y_0\\ &=\varphi_0(s)+\lambda\varphi_1(s)+\lambda^2\varphi_2(s)+\cdots+\lambda^n\varphi_n(s)\\ &=\sum_{k=0}^{n}\lambda^k\varphi_k(s), \end{aligned} \tag{7}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0(s)&=y_0(s)=f(s),\\ \varphi_k(s)&=\int_a^b K(s,t)\varphi_{k-1}(t)dt,(k=1,2,\cdots,\ n) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

是不含参数 λ 的函数，可根据(8) 式的递推关系逐一算出. 从(7)式看到，逼近序列中的 $y_n(s)$实际是精确解按参数 λ 升幂展开的级数的部分和，因此序列的收敛问题也就是所说级数的收敛问题. 下面来讨论它.

由(8) 有

$$\begin{aligned} |\varphi_1(s)|^2&=\left|\int_a^b K(s,t)\varphi_0(t)dt\right|^2\\ &=\left|\int_a^b K(s,t)f(t)dt\right|^2\\ &\leqslant\int_a^b|K(s,t)|^2dt\int_a^b|f(t)|^2dt\\ &=A^2(s)\cdot F^2, \end{aligned} \tag{9}$$

其中 $A(s)$见(3)式，$F^2=\int_a^b|f(t)|^2dt=\|f\|^2$. 这里我们用了席伐尔兹(Schwartz)不等式：

$$\left|\int_a^b \bar{f}g\,dt\right|^2\leqslant\int_a^b|f|^2dt\cdot\int_a^b|g|^2dt. \tag{10}$$

将(9)式对 s 求积分，得

$$\int_a^b|\varphi_1(s)|^2ds\leqslant\int_a^b A^2(s)ds\cdot F^2\leqslant F^2N^2$$

[N^2见(2)式].

类似地，由

$$\varphi_2(s)=\int_a^b K(s,t)\varphi_1(t)dt$$

可得

$$\int_a^b|\varphi_2(s)|^2ds\leqslant F^2N^4.$$

依此类推，得

$$\begin{aligned}|\varphi_n(s)|^2&=\left|\int_a^b K(s,t)\varphi_{n-1}(t)dt\right|^2\\&\leqslant\int_a^b|K(s,t)|^2dt\cdot\int_a^b|\varphi_{n-1}(t)|^2dt\\&=A^2(s)F^2N^{2(n-1)},\\|\varphi_n(s)|&\leqslant A(s)FN^{n-1},\end{aligned}$$

因此，级数(7)中普遍项的绝对值为

$$|\lambda^k\varphi_k(s)|\leqslant|\lambda|^kA(s)FN^{k-1},$$

但 $A(s)$有界，因此只要$|\lambda|N<1$，即

$$|\lambda|<\frac{1}{\sqrt{\int_a^b\int_a^b|K(s,t)|^2dsdt}}\left(=\frac{1}{\|K\|}\right),\qquad(4)$$

所说级数$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\varphi_k(s)$就是绝对而且一致收敛的，其和为积分方程(1)的精确解(按 λ 的展开).

应当注意，(4)式所给出的只是方程(1)有(级数) 解的**充足条件**. 超出 λ 的这一范围，我们还有可能根据解析延拓(在复 λ平面上)原理获得方程(1)的解.

练习题 解方程 $\varphi(x)=x+\lambda\int_0^1 xy\varphi(y)dy$，并讨论解的存在范围.

解的唯一性·齐次方程的解

设方程(1)有两个解，$y(s)$和$y^*(s)$.令$w(s)=y(s)-y^*(s)$，则$w(s)$满足(1)的相应齐次方程

$$w(s)=\lambda\int_a^b K(s,t)w(t)dt \tag{11}$$

用席伐尔兹不等式(10)，有

$$|w(s)|^2\leqslant|\lambda|^2\int_a^b|K(s,t)|^2dt\cdot\int_a^b|w(t)|^2dt,$$

求积分，得

$$\int_a^b|w(s)|^2ds\leqslant|\lambda|^2\|K\|^2\int_a^b|w(t)|^2dt.$$

可见除非两边的积分值为零，否则将有$|\lambda|\|K\|\geqslant1$而与所设条件③不合．因此必须是积分值为零，但这意味$|w(s)|\equiv0$，即$y(s)\equiv y^*(s)$，而解是唯一的.

从以上的证明中还可以看到，(1)的相应齐次方程有非零解的必要条件是$|\lambda|>1/\|K\|$.

24.5 预解式的概念

前节得到的第二类F-型方程的解可写成另一形式．这种形式对讨论解的存在范围(即是否能超出收敛圆$|\lambda|<1/\|K\|$)及其一般性质，特别是解析性，有重要意义.

我们在条件

$$|\lambda|<1/\|K\| \tag{1}$$

下得到方程

$$y(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)y(t)dt \tag{2}$$

的解

$$y(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\varphi_n(s), \tag{3}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_0(s)=f(s),\\&\varphi_n(s)=\int_a^b K(s,t)\varphi_{n-1}(t)dt\\&\qquad(n=1,2,\cdots).\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

现在,把所有的 $\varphi_n(s)$都用方程的核 $K(s,t)$和非齐次项$f(s)$明显地表示出来:

$$\begin{aligned}\varphi_1(s)&=\int_a^b K(s,t)f(t)dt,\\\varphi_2(s)&=\int_a^b K(s,t)\varphi_1(t)dt\\&=\int_a^b K(s,t)\int_a^b K(t,t_1)f(t_1)dt_1\\&=\int_a^b K_2(s,t)f(t)dt,\end{aligned}$$

其中

$$K_2(s,t)=\int_a^b K(s,t_1)K(t_1,t)dt_1$$

称为**二阶叠核**.

如此类推,可得普遍公式:

$$\varphi_n(s)=\int_a^b K_n(s,t)f(t)dt\quad(n=1,2,\cdots), \tag{5}$$

其中

$$K_1(s,t)=K(s,t), \tag{6}$$

$$\begin{aligned}K_n(s,t)=\int_a^b\cdots\int_a^b K(s,t_1)K(t_1,t_2)\cdots K(t_{n-2},t_{n-1})\\\cdot K(t_{n-1},t)dt_1dt_2\cdots dt_{n-1}\\(n=2,3,\cdots)\end{aligned} \tag{7}$$

称为 n 阶叠核.

用叠核可以把方程的解(3)式,写为

$$y(s)=f(s)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\varphi_n(s)$$

$$=f(s)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\int_a^b K_n(s,t)f(t)dt$$

$$=f(s)+\lambda\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(s,t)f(t)dt.$$

令

$$R(s,t;\lambda)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(s,t), \tag{8}$$

则方程(2)的解可写成很简单的形式:

$$y(s)=f(s)+\lambda\int_a^b R(s,t;\lambda)f(t)dt \tag{9}$$

用积分算符符号可以把上述方程和它的解分别简写成

$$y=f+\lambda\hat{K}y \qquad \text{(方程)} \tag{10}$$

和

$$y=f+\lambda\hat{R}f \qquad \text{(解)}, \tag{11}$$

其中 $\hat{K}$ 和 $\hat{R}$ 分别为**积分算符**:

$$\hat{K}\equiv\int_a^b K(s,t)\cdots dt, \tag{12}$$

$$\hat{R}\equiv\int_a^b R(s,t;\lambda)\cdots dt. \tag{13}$$

由(10)得(方程)

$$(1-\lambda\hat{K})y=f,$$

它的解可形式地写作

$$y=(1-\lambda\hat{K})^{-1}f, \tag{14}$$

$(1-\lambda\hat{K})^{-1}$是$(1-\lambda\hat{K})$的**逆算符**. 与(11)比较,有

$$1+\lambda\hat{R}=(1-\lambda\hat{K})^{-1}, \tag{15}$$

即 $1+\lambda\hat{R}$是$(1-\lambda\hat{K})$的逆算符.

(8) 式所定义的函数 $R(s,t;\lambda)$称为方程(2)的或与核 $K(s,t)$ 相应的预解式；只要从给定的核 $K(s,t)$ 按(6)式算出叠核 $K_n(s,t)$，从而得到(8)式的预解式 $R(s,t;\lambda)$，便可用公式(9)得到方程(2)对任何非齐次项 $f(s)$的解. 因此，研究预解式的性质对于解积分方程和讨论解的特性有关键性意义.

下面是预解式 $R(s,t;\lambda)$的两个重要特性.

1. 它是 λ 的解析函数；解析范围不小于 λ 平面上半径为 $1/\|K\|$的圆(圆心在$\lambda=0$处).

2. 它本身满足积分方程

$$R(s,t;\lambda)=K(s,t)+\lambda\int_a^b K(s,u)R(u,t;\lambda)du \tag{16}$$

和

$$R(s,t;\lambda)=K(s,t)+\lambda\int_a^b K(u,t)R(s,u;\lambda)du \tag{17}$$

或

$$R(s,t;\lambda)=K(s,t)+\lambda\int_a^b R(s,u;\lambda)K(u,t)du. \tag{18}$$

这两个特性之所以重要是因为我们可以用解析延拓的方法把 $R(s,t;\lambda)$的存在范围拓广，从而用延拓后的解式(9)求得方程(2)在更大范围内的解.

不过应当注意，延拓后的解不能用(3)式来表示，而要用(9)式或相应的其它(λ 的)幂级数((3)的解析延拓)来表示.

以后我们将证明，$R(s,t;\lambda)$在 λ 的有限区域中只有极点(即 R 是 λ 的半纯函数)，因而所说的延拓原则上总是可行的.

练习题 1. 证明方程 $f(x)=1+\lambda\int_0^1 xy^2f(y)dy$ 的预解式为 $R(x,y;\lambda)=xy^2/(1-\lambda/4)$.

练习题 2. 证明(16)～(18).

24.6* 应用逐次逼近法于第二类V-型方程

显然,逐次逼近法也可用于解第二类 V-型方程

$$y(s)=f(s)+\lambda\int_a^s K(s,t)y(t)dt, \tag{1}$$

因为它可以看作第二类 F -型方程的特殊情形:

$$K(s,t)\equiv 0 \quad \text{当 } t>s. \tag{2}$$

但我们将看到,对于第二类 V -型方程,其逼近序列[24.4节(7)式]

$$y_n(s)=\sum_{k=0}^{n}\lambda^k\varphi_k(s). \tag{3}$$

是全 λ-平面上的解析函数(整函数),收敛性不受 $|\lambda|<1/\|K\|$ 这一限制。

由 $\varphi_k(s)$的递推关系

$$\varphi_0(s)=f(s),$$

$$\varphi_k(s)=\int_a^s K(s,t)\varphi_{k-1}(t)dt \qquad (k=2,3,\cdots,n), \tag{4}$$

用席伐尔兹不等式[24.4 节 (10)],有

$$|\varphi_k(s)|^2\leqslant\int_a^s|K(s,t)|^2dt\cdot\int_a^s|\varphi_{k-1}(t)|^2dt$$

$$=A^2(s)\int_a^s|\varphi_{k-1}(t)|^2dt, \tag{5}$$

其中

$$A^2(s)=\int_a^s|K(s,t)|^2dt$$

是 s 的恒增函数. 把(5)式两边的 s 换成 u, 对 u 从 a 到 s 求积分,得

$$\int_a^s|\varphi_k(u)|^2du\leqslant\int_a^s A^2(u)\int_a^u|\varphi_{k-1}(t)|^2dtdu$$

$$\leqslant A^2(s)\int_a^s\int_a^u|\varphi_{k-1}(t)|^2dtdu$$

$$=A^2(s)\int_a^s|\varphi_{k-1}(t)|^2dt\int_t^s du$$

$$=A^2(s)\int_a^s|\varphi_{k-1}(t)|^2(s-t)dt, \qquad (6)$$

将 k 换成 $k-1$，并把两边的积分变量 u 和 t 对调，代入(5)，得

$$|\varphi_k(s)|^2\leqslant A^4(s)\int_a^s|\varphi_{k-2}(u)|^2(s-u)du,$$

再应用(5)式于右方积分中的$|\varphi_{k-1}(u)|^2$(k 换成 $k-2$)，有

$$|\varphi_k(s)|^2\leqslant A^4(s)\int_a^s A^2(u)\int_a^u|\varphi_{k-3}(t)|^2dt(s-u)du$$

$$\leqslant A^6(s)\int_a^s\int_a^u|\varphi_{k-3}(t)|^2dt(s-u)\,du$$

$$=A^6(s)\int_a^s|\varphi_{k-3}(t)|^2dt\int_t^s(s-u)du$$

$$=A^6(s)\int_a^s|\varphi_{k-3}(t)|^2\frac{(s-t)^2}{2}dt$$

照此做下去，可得

$$|\varphi_k(s)|^2\leqslant\frac{A^{2k}(s)}{(k-1)!}\int_a^s|\varphi_0(t)|^2(s-t)^{k-1}dt$$

$$\leqslant\frac{A^{2k}(s)}{(k-1)!}(s-a)^{k-1}\int_a^s|f(t)|^2dt$$

$$=\frac{A^{2k}(s)(s-a)^{k-1}}{(k-1)!}F^2(s),$$

其中 $F^2(s)=\int_a^s|f(t)|^2dt$ 也是 s 的恒增函数. 因此，对于区间 $a\leqslant s\leqslant b$(b 任意)，有

$$|\varphi_k(s)|^2 \leqslant F^2(b)\frac{A^{2k}(b)(b-a)^{k-1}}{(k-1)!},$$

而

$$|\lambda^k\varphi_k(s)| \leqslant \frac{F(b)}{\sqrt{b-a}}\ \frac{[|\lambda|A(b)\sqrt{b-a}]^k}{\sqrt{(k-1)!}}$$

因级数$\sum z^n/\sqrt{(n-1)!}$是收敛的，收敛半径为∞，故对于λ的任何有限区域，序列$y_n(s)=\sum_{k=0}^{n}\lambda^k\varphi_k(s)$绝对且一致收敛. 这是不同于F-型方程的.

解的唯一性和相应齐次方程($f(s)=0$)的解

V-型方程的逐次逼近解的唯一性，其证明与F-型问题类似，从略. 不过，由于非齐次方程($f(s)\neq 0$)对于任何有限λ值均有唯一解，故相应齐次方程无非零解(即相应本征值问题，$\hat{K}y=\frac{1}{\lambda}y$无解).

以后我们只讨论F-型方程. 关于V-型方程，读者可参考积分方程方面的专著，例如，F. G. Tricomi, Integral Equations (1957)和9页脚注所引的书.

24.7 退化核积分方程

前面我们介绍了一种解积分方程的重要方法——逐次逼近法. 但它对参数λ有一定限制，即$|\lambda|<1/\|K\|$. 引进预解式的概念之后，我们看到有可能把用此法得到的解作延拓(对λ言). 但由于对预解式的解析性究竟如何不清楚，所以还不能对这种延拓的实现性作出结论. 这一问题在积分方程理论中是已解决了的；有两种不同的解决法. 一种是所谓**退化核逼近**；另一种是弗雷德霍姆早先的理论. 两者各有其优缺点. 大抵退化核逼近利于求解(近似)，而弗雷德霍姆的理论则给出一个便于讨论预解式的解析

性的形式，但却不适于具体求解．所以这两种解决问题的方式在一定程度上是相辅相成的，虽然在结论上有很多重复之处。

在本节和下一节中，我们将先介绍退化核逼近法，然后在24.9节中简单地说明一下弗雷德霍姆的理论．

先看一个退化核的特殊情形，即积分方程的核具有下列形式：

$$K(s,t)=\alpha(s)\beta(t) \tag{1}$$

它是两个分别为 s 和 t 的函数的乘积．在这种情形下，方程

$$y(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)y(t)dt \tag{2}$$

化为

$$\begin{aligned} y(s)&=f(s)+\lambda\int_a^b \alpha(s)\beta(t)y(t)dt \\ &=f(s)+\lambda A\alpha(s) \end{aligned} \tag{3}$$

其中

$$A=\int_a^b \beta(t)y(t)dt.$$

把(3)式的 $y(s)$ 代入，得

$$\begin{aligned} A&=\int_a^b \beta(t)[f(t)+\lambda A\alpha(t)]dt \\ &=\int_a^b \beta(t)f(t)dt+\lambda A\int_a^b \alpha(t)\beta(t)dt. \end{aligned} \tag{4}$$

因此，

$$A=\frac{\int_a^b \beta(t)f(t)dt}{1-\lambda\int_a^b \alpha(t)\beta(t)dt} \tag{5}$$

(假定分母不为零)，而得方程(2)的解：

$$y(s)=f(s)+\lambda A\alpha(s), \tag{3'}$$

其中的 A 现在是已知的常数(由(5)式给出).

如果$\int_a^b \alpha(t)\beta(t)dt=1/\lambda$,则由(4)式知必须$\int_a^b \beta f dt=0$ 而A为任意常数;(3′)仍为方程的解.

现在来看普遍的退化核情形:

$$K(s,t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(s)\beta_i(t), \tag{6}$$

其中 $\alpha_i(s),\beta_i(t)(i=1,\cdots,n)$是两组线性无关的函数. 我们将看到,具有这种形式的核的积分方程完全与线性代数方程组等价,因而可以把积分方程的求解问题化为线性代数问题.

按(6),积分方程为

$$\begin{aligned} y(s)&=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)y(t)dt \\ &=f(s)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(s)\int_a^b \beta_i(t)y(t)dt. \end{aligned} \tag{7}$$

令

$$c_i=\int_a^b \beta_i(t)y(t)dt=(\text{未知})\text{常数} \tag{8}$$
$$(i=1,2,\cdots,n),$$

(7)化为

$$y(s)=f(s)+\lambda\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i(s) \tag{9}$$

以 $\beta_j(s)$乘两边,对 s 求积分,得

$$c_j=f_j+\lambda\sum_{i=1}^{n}c_iK_{ji},\quad j=1,2,\cdots,n \tag{10}$$

或

$$\sum_{i=1}^{n}(\delta_{ji}-\lambda K_{ji})c_i=f_j, \tag{10'}$$

其中

$$f_j=\int_a^b \beta_j(s)f(s)ds, \tag{11}$$

$$K_{ji}=\int_a^b \alpha_i(s)\beta_j(s)ds, \tag{12}$$

都是已知的. 因此,(10)就是一组关于待定常数 $c_i(i=1,\cdots,n)$ 的代数方程，其求解理论是熟知的.

方程组(10′)是否有解主要决定于行列式

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda K_{11} & -\lambda K_{12} & \cdots & -\lambda K_{1n} \\ -\lambda K_{21} & 1-\lambda K_{22} & \cdots & -\lambda K_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -\lambda K_{n1} & -\lambda K_{n2} & \cdots & 1-\lambda K_{nn} \end{vmatrix} \tag{13}$$

的性质;除此以外,其中的非齐次项 f_j 的性质也是重要的(λ 为本征值时,见下).

按线性代数方程组的理论,有下列结论:

1. $D(\lambda)\neq 0$——在这种情形下,非齐次方程(10)对于任何f_j之值均有唯一的解:

$$c_i=\frac{1}{D(\lambda)}\sum_{j=1}^{n} f_j D_{ji}(\lambda), \tag{14}$$

其中 $D_{ji}(\lambda)$ 是行列式 $D(\lambda)$ 中第 j 行第 i 列元素的余因子. 这时，相应的齐次方程

$$c_j-\lambda\sum_i K_{ji}c_i=0 \tag{15}$$

只有零解(即相应本征值问题无解).

2. $D(\lambda)=0$——在这种情形下,齐次方程(15)必有非零解,而非齐次方程(10)则并非对于任何 f_j 之值都有解;只有对于满足

一定条件的 f_i——使(14)式中的分子为零——才有解，而且解不唯一.

使 $D(\lambda)=0$ 的 λ 值(或其倒数)称为本征值，共有 n 个，且不为零，因为 $D(\lambda)$ 是 λ 的 n 次多项式，其常数项等于 1，异于零. 相应齐次方程(15)的解 $c_j(j=1,2,\cdots,n)$所组成的 (n 维) 矢量称为本征矢。对应于每一本征值 λ，线性无关的本征矢的数目决定于与 $D(\lambda)$相应的矩阵之秩. 秩为 r_λ 的矩阵，其相应线性无关的本征矢有 $p_\lambda=n-r_\lambda$ 个；这样的 λ 值是 $D(\lambda)=0$ 的 p_λ 重根.

非齐次方程有解的充要条件是以 f_i 为分量所构成的矢量 $\boldsymbol{f}$ 与相应转置齐次方程

$$\tilde{c}_i-\lambda\sum_i K_{ij}\tilde{c}_i=0 \tag{16}$$

所有本征矢量 $\tilde{\boldsymbol{c}}^{(m)}$ 正交：

$$\boldsymbol{f}\cdot\tilde{\boldsymbol{c}}^{(m)}=0, \tag{17}$$

这样的线性无关的 $\tilde{\boldsymbol{c}}^{(m)}$ 也恰有 p_λ 个，因为方程(16)中转置矩阵(元素为 K_{ij})的秩与原矩阵(元素为 K_{ji})的秩相同.

所有上述关于代数方程组的结论完全适用于原来的积分方程，因为按(8)和(9)，代数方程组(10)的解同原积分方程(7)的解是一一对应的；不过正交性应理解为相应两个函数之积的积分(内积)为零，即齐次方程的本征函数 $y^{(m)}(s)$ 和 $y^{(n)}(s)$ 正交

$$\int_a^b y^{(m)}(s)y^{(n)}(s)ds=0\ \ (\lambda_m\neq\lambda_n); \tag{18}$$

转置齐次方程

$$\begin{aligned}\tilde{y}(s)&=\lambda\int_a^b K(t,s)\tilde{y}(t)dt\\&=\lambda\int_a^b\sum_{i=1}^n\alpha_i(t)\beta_i(s)\tilde{y}(t)dt\end{aligned} \tag{19}$$

的解 $\tilde{y}^{(m)}$和 $\tilde{y}^{(n)}$正交

$$\int_a^b \tilde{y}^{(m)}(s)\tilde{y}^{(n)}(s)ds=0 \quad (\lambda_m\neq\lambda_n), \tag{20}$$

而非齐次方程(7)有解的充要条件是

$$\int_a^b f(s)\tilde{y}^{(m)}(s)ds=0 \quad (m=1,2,\cdots,p_\lambda) \tag{21}$$

等等.

如果考虑的是复数函数的情形(实变量),则两函数 f 和 g 的正交关系应理解为

$$(f,g)=\int_a^b \bar{f}(s)g(s)ds=0,$$

其中 $\bar{f}(s)$是 $f(s)$的复数共轭.

练习题. 试解下列方程的本征值问题:

$$f(x)=\lambda\int_0^\pi \cos(x-y)f(y)dy$$

24.8 退化核逼近

对于一般的平方可积核,当参数 λ 不满足条件 $|\lambda|<1/\|K\|$ 时,我们可用退化核逼近的方法来求解. 这方法的精神是:方程

$$y(s)=f(s)+\lambda\int K(s,t)y(t)dt \tag{1}$$

的平方可积核 $K(s,t)$可用退化形式的核

$$A(s,t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(s)\beta_i(t) \tag{2}$$

作为近似;例如用多项式或一般的完备正交函数组近似. 令

$$K'(s,t)=K(s,t)-A(s,t) \tag{3}$$

表示用 A 作为 K 的近似时的误差,则对于均值逼近有

$$\iint|K'(s,t)|^2dsdt=\iint|K(s,t)-A(s,t)|^2dsdt$$

$$=\iint\left|K(s,t)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(s)\beta_i(t)\right|^2 dsdt$$

$$\to 0,\ \text{当}\ n\to\infty, \tag{4}$$

也就是说，可使$\|K'\|$任意小. 于是，对于一般不满足条件$|\lambda|<1/\|K\|$的λ值，我们可以通过退化核逼近把方程(1)分为两部分：具有退化核$A(s,t)$的方程和$\|K'\|$足够小使$|\lambda|<1/\|K'\|$的方程；对第一部分应用关于退化核的方法处理，而对第二部分则应用逐次逼近法。其具体做法如下：

用(3)，方程(1)化为

$$y(s)=f(s)+\lambda\int A(s,t)y(t)dt+\lambda\int K'(s,t)y(t)dt, \tag{5}$$

令

$$\varphi(s)=y(s)-\lambda\int K'(s,t)y(t)dt \tag{6}$$

或

$$y(s)=\varphi(s)+\lambda\int K'(s,t)y(t)dt, \tag{6'}$$

视$\varphi(s)$为非齐次项，则(6′)正是可用逐次逼近法求解的方程，只要A足够逼近K使$\|K'\|<1/|\lambda|$. 这样，利用与$K'(s,t)$相应的预解式$R'(s,t;\lambda)$(注意它完全由核$K'(s,t)$和λ决定，与非齐次项无关)，我们得到(6′)的解

$$y(s)=\varphi(s)+\lambda\int R'(s,t;\lambda)\varphi(t)dt, \tag{7}$$

不过迄今其中的$\varphi(s)$还是未知的，因此它还不是所求的、原积分方程(1)的最终解式.

为了求出$\varphi(s)$，可用(6)和(7)消去(5)式中的$y(s)$，得

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int A(s,t)y(t)dt$$

$$=f(s)+\lambda\int A(s,t)\left[\varphi(t)+\right.$$

$$+\lambda\int R'(t,u;\lambda)\ \varphi(u)du\Big]dt$$

$$=f(s)+\lambda\Big[\int A(s,t)\ \varphi(t)dt+$$

$$+\lambda\iint A(s,u)R'(u,t;\lambda)\ \varphi(t)dtdu\Big]$$

$$=f(s)+\lambda\int B(s,t;\lambda)\varphi(t)dt, \tag{8}$$

其中

$$B(s,t;\lambda)=A(s,t)+\lambda\int A(s,u)R'(u,t;\lambda)du \tag{9}$$

是一个退化核，因为

$$\int A(s,u)R'(u,t;\lambda)du$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(s)\beta_i(u)R'(u,t;\lambda)du$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(s)\int\beta_i(u)R'(u,t;\lambda)du$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(s)\gamma_i(t;\lambda) \tag{10}$$

其中

$$\gamma_i(t;\lambda)=\int\beta_i(u)R'(u,t;\lambda)du. \tag{11}$$

因此，由(8)，用处理退化核的步骤求出 $\varphi(s)$，然后代入(7)，即得原方程(1)的解.

应当注意，这里的退化核 $B(s,t;\lambda)$ 有异于前此的退化核；后者是不含 λ 的，相应的行列式 $D(\lambda)$[上节(13)]是一个关于 λ 的多项式. 现在的退化核 B 中则含有 λ，特别是通过预解式 $R'(u,t;\lambda)$[见上(9)式]，而 $R'(u,t;\lambda)$ 一般不是 λ 的多项式(是一个关于 λ 的无穷级数)，因此，对应于 $B(s,t;\lambda)$ 的行列式

$$D(\lambda)\equiv\begin{vmatrix} 1-\lambda B_{11} & -\lambda B_{12}\cdots & -\lambda B_{1n} \\ -\lambda B_{21} & 1-\lambda B_{22}\cdots & -\lambda B_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -\lambda B_{n1} & -\lambda B_{n2}\cdots & 1-\lambda B_{nn} \end{vmatrix}$$

一般也不再是 λ 的多项式.

24.9* 弗雷德霍姆(Fredholm)关于预解式的理论和公式

弗雷德霍姆理论的主要点是把积分方程

$$y(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)y(t)dt \tag{1}$$

中的积分用和数 $\sum_{i=1}^{n}K(s,t_i)y(t_i)\Delta t_i$ 代替,使(1) 变为一 代数方程组,求出其解式,再取极限(使和数变成积分)而得(1)的形式解,然后讨论其中出现的预解式的解析性.

1. 积分方程(1)的代数方程组近似

把积分区间$[a,b]$用点 $t_1,t_2,\cdots,t_{n-1},t_n(=b)$ 分 为 n 等分,每一等分的长度为 $\delta=(b-a)/n(=\Delta t=t_{i+1}-t_i)$;于是得(1)的近似代数方程组:

$$y(s_i)=f(s_i)+\lambda\sum_{i=1}^{n}K(s_i,t_i)y(t_i)\delta \tag{2}$$

$$s_i=t_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

或写为

$$y_i=f_i+\lambda\sum_{j=1}^{n}K_{ij}y_j\delta,\ i=1,2,\cdots,n, \tag{3}$$

其中

$$K_{ij}=K(s_i,t_j) \tag{4}$$

令

$$D_n(\lambda)\equiv\begin{vmatrix} 1-\lambda K_{11}\delta & -\lambda K_{12}\delta\cdots & -\lambda K_{1n}\delta \\ -\lambda K_{21}\delta & 1-\lambda K_{22}\delta\cdots & -\lambda K_{2n}\delta \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -\lambda K_{n1}\delta & -\lambda K_{n2}\delta\cdots & 1-\lambda N_{nn}\delta \end{vmatrix}, \tag{5}$$

则(3)的解为

$$y_i=\sum_{i=1}^{n} f_i A_{ij}/D_n(\lambda), \tag{6}$$

其中 A_{ij} 是 $D_n(\lambda)$中(i,j)元素的余因子，可用下述公式表出：

$$A_{ij}=\frac{\partial D_n(\lambda)}{\partial(\lambda K_{ij}\delta)}=-\frac{1}{\lambda\delta}\frac{\partial D_n(\lambda)}{\partial K_{ij}} \tag{7}$$

2. 取(6)式的极限($n\to\infty,\delta\to 0$)，求得(1)的形式解

先看 $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \delta\to 0}} D_n(\lambda)$.

$D_n(\lambda)$按 λ 的幂展开为

$$D_n(\lambda)=1-\lambda\delta S_1+\lambda^2\delta^2 S_2+\cdots+(-)^n\lambda^n\delta^n S_n, \tag{8}$$

其中

$$S_1=K_{11}+K_{22}+\cdots+K_{nn}=\sum_{i_1=1}^{n} K_{i_1 i_1},$$

$$S_2=\begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{33} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} K_{11} & K_{1n} \\ K_{n1} & K_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} K_{22} & K_{2n} \\ K_{n2} & K_{nn} \end{vmatrix}+\cdots$$

$$=\sum_{i_1<i_2}\sum\begin{vmatrix} K_{i_1 i_1} & K_{i_1 i_2} \\ K_{i_2 i_1} & K_{i_2 i_2} \end{vmatrix}=\frac{1}{2!}\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\begin{vmatrix} K_{i_1 i_1} & K_{i_1 i_2} \\ K_{i_2 i_1} & K_{i_2 i_2} \end{vmatrix},$$

$$S_3=\sum_{i_1<i_2<i_3}\sum\sum\begin{vmatrix}K_{i_1i_1}&K_{i_1i_2}&K_{i_1i_3}\\K_{i_2i_1}&K_{i_2i_2}&K_{i_2i_3}\\K_{i_3i_1}&K_{i_3i_2}&K_{i_3i_3}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{3!}\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\sum_{i_3=1}^{n}\begin{vmatrix}K_{i_1i_1}&K_{i_1i_2}&K_{i_1i_3}\\K_{i_2i_1}&K_{i_2i_2}&K_{i_2i_3}\\K_{i_3i_1}&K_{i_3i_2}&K_{i_3i_3}\end{vmatrix},$$

$\cdots$

$$S_n=\frac{1}{n!}\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n}\begin{vmatrix}K_{i_1i_1}&K_{i_1i_2}\cdots K_{i_1i_n}\\K_{i_2i_1}&K_{i_2i_2}\cdots K_{i_2i_n}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\K_{i_ni_1}&K_{i_ni_2}\cdots K_{i_ni_n}\end{vmatrix}. \tag{9}$$

因此

$$D(\lambda)=\lim_{n\to\infty}D_n(\lambda)$$

$$=1-\lambda\int_a^b K(t,t_1)dt_1$$

$$+\frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b\int_a^b\begin{vmatrix}K(t_1,t_1)&K(t_1,t_2)\\K(t_2,t_1)&K(t_2,t_2)\end{vmatrix}dt_1dt_2$$

$$-\frac{\lambda^3}{3!}\int_a^b\int_a^b\int_a^b\begin{vmatrix}K(t_1,t_1)&K(t_1,t_2)&K(t_1,t_3)\\K(t_2,t_1)&K(t_2,t_2)&K(t_2,t_3)\\K(t_3,t_1)&K(t_3,t_2)&K(t_3,t_3)\end{vmatrix}dt_1dt_2dt_3$$

$$+(-)^n\frac{\lambda^n}{n!}\int_a^b\cdots\int_a^b\begin{vmatrix}K(t_1,t_1)\cdots K(t_1,t_n)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\K(t_n,t_1)\cdots K(t_n,t_n)\end{vmatrix}dt_1\cdots dt_n$$

$$+\cdots. \tag{10}$$

注意(10)式中的 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 不再表示前此$[a,b]$ 区间 中的分点，而是 n 个独立的积分变数，积分区间均为$[a,b]$.

再看 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f_i A_{ij}$. 当 $i=j$ 时,由(7)有

$$A_{jj}=-\frac{1}{\lambda\delta}\frac{\partial D_n(\lambda)}{\partial K_{jj}},$$

它等于在 $D_n(\lambda)$ 中把含 $1-\lambda K_{jj}\delta$ 的行和列划去而成的子行列式. 显然,

$$\lim_{n\to\infty}A_{jj}=\lim_{n\to\infty}D_{n-1}(\lambda)=D(\lambda).$$

当 $i\neq j$ 时,

$$A_{ij}=-\frac{1}{\lambda\delta}\Big[-\lambda\delta\frac{\partial S_1}{\partial K_{ij}}+\lambda^2\delta^2\frac{\partial S_2}{\partial K_{ij}}$$
$$-\lambda^3\delta^3\frac{\partial S_3}{\partial K_{ij}}+\cdots+(-)^n\lambda^n\delta^n\frac{\partial S_n}{\partial K_{ij}}\Big].$$

由(9)知

$$\frac{\partial S_1}{\partial K_{ij}}=0\quad(i\neq j),$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial K_{ij}}=\frac{1}{2!}\frac{\partial}{\partial K_{ij}}\left[\begin{vmatrix}K_{ii}&K_{ij}\\K_{ji}&K_{jj}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}K_{jj}&K_{ji}\\K_{ij}&K_{ii}\end{vmatrix}\right]=-K_{ij},$$

$$\frac{\partial S_3}{\partial K_{ij}}=\frac{1}{3!}\frac{\partial}{\partial K_{ij}}\sum_{i_1,i_2,i_3}\begin{vmatrix}K_{i_1i_1}&K_{i_1i_2}&K_{i_1i_3}\\K_{i_2i_1}&K_{i_2i_2}&K_{i_2i_3}\\K_{i_3i_1}&K_{i_3i_2}&K_{i_3i_3}\end{vmatrix}$$
$$=\frac{1}{3!}\frac{\partial}{\partial K_{ij}}\Bigg[\sum_{i_3}\begin{vmatrix}K_{ii}&K_{ij}&K_{ii_3}\\K_{ji}&K_{jj}&K_{ji_3}\\K_{i_3i}&K_{i_3j}&K_{i_3i_3}\end{vmatrix}$$
$$+\sum_{i_2}\begin{vmatrix}K_{ii}&K_{ii_2}&K_{ij}\\K_{i_2i}&K_{i_2i_2}&K_{i_2j}\\K_{ji}&K_{ji_2}&K_{jj}\end{vmatrix}+\cdots\Bigg]$$
$$=\frac{1}{3!}\Bigg[-\sum_{i_3}\begin{vmatrix}K_{ji}&K_{ji_3}\\K_{i_3i}&K_{i_3i_3}\end{vmatrix}$$

$$+\sum_{i_2}\begin{vmatrix} K_{i_2 i} & K_{i_2 i_2} \\ K_{ji} & K_{ji_2} \end{vmatrix}+\cdots\Big]$$

$$=-\sum_{i_3}\begin{vmatrix} K_{ji} & K_{ji_3} \\ K_{i_3 i} & K_{i i_3} \end{vmatrix},$$

$$\cdots\qquad\qquad,$$

$$\frac{\partial S_n}{\partial K_{ij}}=\frac{1}{n!}\frac{\partial}{\partial K_{ij}}\sum_{i_1\cdots i_n}\begin{vmatrix} K_{i_1 i_1} & K_{i_1 i_2}\cdots K_{i_1 i_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_{i_n i_1} & K_{i_n i_2}\cdots K_{i_n i_n} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{n!}\frac{\partial}{\partial K_{ij}}\Bigg[\sum_{i_3 i_4\cdots i_n}\begin{vmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{ii_3}\cdots K_{ii_n} \\ K_{ji} & K_{jj} & K_{ji_3}\cdots K_{ji_n} \\ K_{i_3 i} & K_{i_3 j} & K_{i_3 i_3}\cdots K_{i_3 i_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_{i_n i} & K_{i_n j} & K_{i_n i_3}\cdots K_{i_n i_n} \end{vmatrix}+\cdots\Bigg]$$

（其中最后的$\cdots$代表$i_3,i_4,\cdots,i_n$之中任何两个为i,j的项；括号中一共有$n(n-1)$个和数，因为有n个i_k可以是i，剩下的$n-1$个$i_l(l\neq k)$可以是j，配起来给出一个和数）

$$=-\frac{1}{(n-2)!}\sum_{i_3 i_4\cdots i_n}\begin{vmatrix} K_{ji} & K_{ji_3}\cdots K_{ji_n} \\ K_{i_3 i} & K_{i_3 i_3}\cdots K_{i_3 i_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_{i_n i} & K_{i_n i_3}\cdots K_{i_n i_n} \end{vmatrix},$$

因此

$$A_{ij}=\lambda\delta K_{ji}-\lambda^2\delta^2\sum_{i_3}\begin{vmatrix} K_{ji} & K_{ji_3} \\ K_{i_3 i} & K_{i_3 i_3} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-)^n\frac{\lambda^{n-1}\delta^{n-1}}{(n-2)!}\sum_{i_3\cdots i_n}\begin{vmatrix} K_{ji} & K_{ji_3}\cdots K_{ji_n} \\ K_{i_3 i} & K_{i_3 i_3}\cdots K_{i_3 i_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_{i_n i} & K_{i_n i_3}\cdots K_{i_n i_n} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots\qquad\qquad(i\neq j)\qquad\qquad,$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f_i A_{ij} = f_j D(\lambda) + \lambda\int_a^b K(s,t)f(t)dt$$

$$-\lambda^2\int_a^b\int_a^b \begin{vmatrix} K(s,t) & K(s,t_1) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) \end{vmatrix} f(t)dtdt_1$$

$$+\cdots+(-)^n\frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!}$$

$$\int_a^b\cdots\int_a^b \begin{vmatrix} K(s,t) & K(s,t_1)\cdots & K(s,t_{n-2}) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1)\cdots & K(t_1,t_{n-2}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ K(t_{n-2},t) & \cdots\cdots & K(t_{n-2},t_{n-2}) \end{vmatrix}$$

$$\times f(t)dtdt_1\cdots dt_{n-2}$$

$$+\cdots.$$

把所得结果代入(6)式的极限($n\to\infty$),即得方程(1)的形式解:

$$y(s)=f(s)+\frac{\lambda}{D(\lambda)}\int_a^b D(s,t;\lambda)f(t)dt \tag{11}$$

其中

$$D(s,t;\lambda)=K(s,t)-\lambda\int_a^b \begin{vmatrix} K(s,t) & K(s,t_1) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) \end{vmatrix} dt_1+\cdots$$

$$+(-)^n\frac{\lambda^n}{n!}\int_a^b\cdots\int_a^b \begin{vmatrix} K(s,t) & K(s,t_1)\cdots K(s,t_n) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1)\cdots K(t_1,t_n) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ K(t_n,t) & K(t_n,t_1)\cdots K(t_n,t_n) \end{vmatrix}$$

$$\times dt_1\cdots dt_n$$

$$+\cdots \quad . \tag{12}$$

练习题. 设 $K(s,t)=st^2$,求 $D(\lambda)$和 $D(s,t;\lambda)$.

为了确定(11)式是否为方程(11)的解,需要解决两个问题:

1. 分别代表 $D(\lambda)$和 $D(s,t;\lambda)$的级数(10)和(12)是否收敛(这与积分号下求和的问题有关).

2．(11)式是否满足方程(1)．

可以证明①，级数(10)和(12)对于平方可积核是绝对且一致收敛的，因而是 λ 的整函数。这不但解决了第一个问题，而且也是讨论预解式的解析性的基础．

关于第二个问题，我们可以先证明(作为习题) $D(s,t;\lambda)$ 满足积分方程

$$D(s,t;\lambda)=D(\lambda)K(s,t)+\lambda\int_a^b D(s,u;\lambda)K(u,t)du \quad (13)$$

和

$$D(s,t;\lambda)=D(\lambda)K(s,t)+\lambda\int_a^b K(s,u)D(u,t;\lambda)du, \quad (14)$$

利用它们即可证明，方程(1)的解，如果存在，必满足(11)式；反过来，(11)式所给出的 $y(s)$ 满足方程(1)．

于是，我们得到了积分方程(1)对于任何 λ 值的预解式

$$R(s,t;\lambda)=\frac{D(s,t;\lambda)}{D(\lambda)}, \quad (15)$$

当然，这里假设 $D(\lambda)\neq 0$．

由于预解式 $R(s,t;\lambda)$ 是两个关于 λ 的整函数之商，所以 $R(s,t;\lambda)$ 本身是 λ 的半(逊)纯函数[见 134 页]；只有 $D(\lambda)$ 的零点才可能是它的奇点．下面我们来证明，$D(\lambda)$ 的零点一定是预解式 $R(s,t;\lambda)$ 的极点，换言之，如果 $D(\lambda)$ 的零点也是 $D(s,t;\lambda)$ 的零点，则后者的阶数一定较低．

从(10)和(12)很容易看到

$$\int_a^b D(s,s;\lambda)ds=-\frac{dD(\lambda)}{d\lambda} \quad (16)$$

设 λ_0 是 $D(\lambda)$ 的 n 阶零点，而且是 $D(s,t;\lambda)$ 的 k 阶零点：

① 对于连续核或有界(可积)核，可参考，例如，Whittaker & Watson, Modern Analysis, pp. 215～216; F. G. Tricomi, Integral Equations(1957), pp. 68～69. 对于平方可积核，参看 S. Mihlin, Doklady Akad. Nauk, USSR, 42(1944), pp. 373～376.

$$D(s,t;\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^k D_0(s,t;\lambda)$$

$D_0(s,t;\lambda)\neq 0$，则(16)可写作

$$\frac{dD(\lambda)}{d\lambda}=-(\lambda-\lambda_0)^k\int_a^b D_0(s,s;\lambda)ds,$$

注意到 λ_0是左方的 $n-1$ 阶零点，而又至少是右方的 k 阶零点，故此必须是 $k\leqslant n-1<n$. 这就证明了 λ_0必是 $R(s,t;\lambda)$的极点.

24.10 逼近问题·正交函数组的应用·核的本征值问题

现在我们回到求解问题. 在 24.8 节中我们提到过，对于一般的平方可积核，可用适当的退化核作平均逼近来求近似解. 通常或用多项式，或用完备正交函数组来作这种逼近；例如用傅氏级数(三角函数或指数函数)，傅立叶-贝塞耳展开，按各种正交多项式(勒让德，厄密，拉盖，切比谢夫等)的展开. 这种正交函数组的应用，不但在解第二类方程中重要，而且也是解第一类方程的主要方法之一.(另一重要方法是积分变换，与此也有密切联系.)下面我们来讨论它.

设$\{\varphi_i(s)\}$，$i=1,2,\cdots$，是区间$[a,b]$中一完备正交归一函数组，

$$(\varphi_i,\varphi_j)=\int_a^b\overline{\varphi_i(s)}\varphi_j(s)ds=\delta_{ij}\qquad(1)$$

(此处设正交权 $\rho(s)=1$)，$\overline{\varphi_i(s)}$是 $\varphi_i(s)$的复数共轭. 用正交函数组解积分方程是这样的：对第二类方程

$$y(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)y(t)dt,\qquad(2)$$

其中，$f(s)$，$K(s,t)$都是平方可积函数(对 $K(s,t)$的要求还可放宽)，我们把未知函数 $y(s)$(假定也是平方可积的)按这组函数展开：

$$y(s)=\sum_i y_i\varphi_i(s), \tag{3}$$

其中的(广义傅氏系数)y_i为

$$y_i=\int_a^b \overline{\varphi_i(s)}y(s)ds=(\varphi_i,y), \tag{4}$$

只要求出 y_i，也就得到方程(2)的解．为此，把(3)代入(2)，有

$$\sum_i y_i\varphi_i(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)\sum_i y_i\varphi_i(t)dt,$$

以$\overline{\varphi_j(s)}$乘这式两边，求积分，利用正交归一关系(1)，得

$$y_j=f_j+\lambda\sum_i y_i\int_a^b\int_a^b \overline{\varphi_j(s)}K(s,t)\varphi_i(t)dsdt \tag{5}$$

(此处设积分与求和可以换序)，其中 $f_j=(\varphi_j,f)$．

令

$$K_{ji}=\int_a^b\int_a^b \overline{\varphi_j(s)}K(s,t)\varphi_i(t)dsdt \tag{6}$$

(5)式可简写为

$$y_j=f_j+\lambda\sum_i K_{ji}y_i,\quad j=1,2,\cdots \tag{7}$$

这是一组无穷个关于所要求的系数 y_i的方程；要从它解出 y_i一般是相当困难的．但如果正交函数组的诸函数是核 $K(s,t)$ 的本征函数，即

$$\varphi_i(s)=\lambda_i\int_a^b K(s,t)\varphi_i(t)dt, \tag{8}$$
$$i=1,2,\cdots$$

(λ_i显然不为零)，情形就变得简单，而可以立刻求得各系数 y_i之值了．因为这时(6)式成为

$$K_{ji}=\int_a^b \overline{\varphi_j(s)}ds\int_a^b K(s,t)\varphi_i(t)dt$$
$$=\frac{1}{\lambda_i}\int_a^b \overline{\varphi_j(s)}\varphi_i(s)ds=\frac{1}{\lambda_i}\delta_{ji},$$

而方程组(7)简化为

$$y_j=f_j+\lambda\sum_i\frac{1}{\lambda_i}\delta_{ji}y_i=f_j+\frac{\lambda}{\lambda_j}y_j \tag{9}$$

$$(j=1,2,\cdots).$$

如果 λ 不是本征值，立得

$$y_j=\frac{\lambda_j f_j}{\lambda_j-\lambda}(j=1,2,\cdots), \tag{10}$$

而积分方程(2)的解为

$$y(s)=\sum_j\frac{\lambda_j f_j}{\lambda_j-\lambda}\varphi_j(s)=f(s)+\lambda\sum_j\frac{f_j}{\lambda_j-\lambda}\varphi_j(s). \tag{11}$$

如果 λ 是本征值，例如 $\lambda=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3\neq\lambda_4,\cdots$，则对于 $j=1,2,3$，不能从(9)式求出 y_1,y_2,y_3，因为这式成为

$$f_j=0,\quad j=1,2,3, \tag{12}$$

也就是说 $f(s)$ 与 $\varphi_1(s),\varphi_2(s),\varphi_3(s)$ 正交；这是非齐次方程(2)有解的充要条件. 当这条件满足时，(9)式中的 y_1,y_2,y_3 可为任何值；其他的 y_j 则仍由公式(10)得出. 因此，非齐次方程的解为

$$\begin{aligned}y(s)&=c_1\varphi_1(s)+c_2\varphi_2(s)+c_3\varphi_3(s)+\sum_{j=4}^{\infty}\frac{\lambda_j f_j}{\lambda_j-\lambda}\varphi_j(s)\\&=f(s)+\lambda\sum_{j=4}^{\infty}\frac{f_j}{\lambda_j-\lambda}\varphi_j(s)+\sum_{j=1}^{3}c_j\varphi_j(s),\end{aligned} \tag{13}$$

其中的 c_1,c_2,c_3 为任意常数.

在上面的推导中，我们假设了积分和求和可以换序. 对于平均收敛的展开，推导需要修改，但结果仍成立（只是在平均收敛意义下将解按本征函数展开）.

又，上面的方法同样可用于第一类积分方程

$$f(s)=\lambda\int_a^b K(s,t)y(t)dt; \tag{14}$$

将(3)式的展开代入，得

$$y_i=\frac{\lambda_i}{\lambda}f_i, \tag{15}$$

这公式在 λ 为某一本征值时同样适用.

24.11 傅氏级数逼近·希伯特(Hilbert)变换

如果积分方程的核 $K(s,t)$ 具有以下特性:

$$\left.\begin{array}{l}1.\ K(s,t)=K(s-t)=K(u),u=s-t;\\ 2.\ K(u+b-a)=K(u),\text{即 } K(u)\text{是以}\\ \qquad b-a\text{ 为周期的函数},\end{array}\right\} \tag{1}$$

易见这核的本征函数(归一化的)为

$$\varphi_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i2n\pi t/(b-a)},n=0,\pm1,\pm2,\cdots, \tag{2}$$

因为

$$\int_a^b K(s-t)\varphi_n(t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b K(s-t)e^{i2n\pi t/(b-a)}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i2n\pi s/(b-a)}\int_{s-b}^{s-a}K(u)e^{-i2n\pi u/(b-a)}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i2n\pi s/(b-a)}\int_a^b K(-u)\,e^{i2n\pi u/(b-a)}du$$

(用了$K(u)$的周期性)

$$=\frac{1}{\lambda_n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{i2n\pi s/(b-a)}=\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(s),$$

其中

$$\frac{1}{\lambda_n}=\int_a^b K(-u)e^{i2n\pi u/(b-a)}\,du. \tag{3}$$

因此,核 $K(s-t)$ 可用完备的正交归一函数组(2)作逼近而应用上节所得结果.

例:希伯特核

$$K(s,t)=1+\operatorname{ctg}\frac{s-t}{2}, \tag{4}$$

它具有$K(s-t)$的形式，周期为2π，因此，(2)式的$\varphi_n(t)$是它的本征函数，本征值为

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_n}&=\fint_{-\pi}^{\pi}\left(1-\operatorname{ctg}\frac{u}{2}\right)e^{inu}du\quad\left(\fint_{-\pi}^{\pi}\text{表示积分主值}\right)\\&=2\pi\delta_{no}-\fint_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(u/2)}{\sin(u/2)}e^{inu}du\\&=2\pi\delta_{no}-i\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(u/2)\sin nu}{\sin(u/2)}du\\&=2\pi\delta_{no}-2i\int_{0}^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)u+\sin(2n-1)u}{\sin u}du,\end{aligned}$$

当$n=0$时，最后一积分之值为零；$n\neq 0$时，用递推法($2n+1\to 2n-1$)或用指数函数表示的展开，可算出其值为$\pi(n>0)$和$-\pi(n<0)$. 因此

$$\frac{1}{\lambda_n}=\begin{cases}2\pi, & n=0,\\ \mp 2\pi i, & n\gtrless 0\end{cases} \tag{5}$$

把所得结果应用于下列第一类积分方程：

$$\frac{1}{2\pi}\fint_{-\pi}^{\pi}\left(1+\operatorname{ctg}\frac{s-t}{2}\right)y(t)dt=f(s), \tag{6}$$

已知$f(s)$，求$y(t)$，得$y(s)$的(复数)傅氏展开的系数(因此处的$\lambda=1/2\pi$)

$$y_n=\frac{\lambda_n}{\lambda}f_n=\begin{cases}f_0, & n=0\\ if_n, & n>0\\ -if_n, & n<0\end{cases} \tag{7}$$

鉴于y_n和f_n的这一倒易关系，我们得到有限希伯特变换(6)的反演公式：

$$y(s)=\frac{1}{2\pi}\fint_{-\pi}^{\pi}\left(1-\operatorname{ctg}\frac{s-t}{2}\right)f(t)dt. \tag{9}$$

24.12* 双正交函数组的应用

在上节中，应用正交函数组解积分方程时，要求所选的函数组是核 $K(s,t)$ 的本征函数. 这一完备正交函数组在核 $K(s,t)$ 是自伴的，即

$$\overline{K(s,\ t)}=K(t,s)$$

($\overline{K}$ 代表 K 的复数共轭)时存在. 对于非自伴核，有时可用所谓双正交函数组来解第一类积分方程. 其理由如下.

设$\{\varphi_i(s)\}$和$\{\psi_i(t)\}$是同一区间$[a,b]$(区间不同亦可，无原则性区别)中的两完备正交归一函数组；它们之间有下列关系：

$$\int_a^b K(s,t)\varphi_i(t)dt=\alpha_i\psi_i(s) \tag{1}$$

我们就可以用这两组函数来解第一类方程：

$$\int_a^b K(s,t)y(t)dt=f(s). \tag{2}$$

为此，我们分别按$\{\varphi_i(t)\}$和$\{\psi_i(s)\}$展开所要求的解 $y(t)$和已知函数 $f(s)$($f(s)$须满足一定条件，见下)：

$$y(t)=\sum_i y_i\varphi_i(t),\quad y_i=(\varphi_i,y) \tag{3}$$

$$f(s)=\sum_i f_i\psi_i(s),\quad f_i=(\psi_i,f) \tag{4}$$

代入(2)，得

$$\int_a^b K(s,t)\sum_i y_i\varphi_i(t)dt=\sum_i f_i\psi_i(s) \tag{5}$$

或(设积分与求和可以换序)

$$\sum_i y_i\int_a^b K(s,t)\varphi_i(t)dt=\sum_i f_i\psi_i(s). \tag{6}$$

于是，根据(2)式的关系，有

$$\sum_i \alpha_i y_i \psi_i(s) = \sum_i f_i \psi_i(s), \tag{7}$$

用 $\psi_i(s)$的正交归一关系即见

$$\alpha_i y_i = f_i \tag{8}$$

因而

$$y_i = f_i/\alpha_i \qquad (\alpha_i \neq 0) \tag{9}$$

如果 $\alpha_i = 0$,则按(8)式,函数 $f(s)$须满足

$$f_i = (\psi_i, f) = \int_a^b \overline{\psi_i(s)} f(s)\,ds = 0, \tag{10}$$

而 y_i 为任意值. 这样就简单地求出方程(2)的解:

$$y(t) = \sum_i \frac{f_i}{\alpha_i}\varphi_i(t) \quad (\alpha_i \neq 0), \tag{11}$$

若 $\alpha_i = 0$,则这解式右方还有 $c_i\varphi_i(t)$的项;c_i 为任意常数.

例:解方程

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin t}{\cos t - \cos s} y(t)\,dt = f(s) \tag{12}$$

设 $y(t)$经奇开拓后满足傅氏正弦展开的条件而有

$$y(t) = \sum_n y_n \varphi_n(t) \tag{13}$$

(平均收敛意义下),其中

$$\varphi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nt \quad (n = 1, 2, \cdots), \tag{14}$$

$$y_n = (\varphi_n, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi y(t)\sin nt\,dt. \tag{15}$$

对于方程(12)的核

$$K(s,t) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin t}{\cos t - \cos s}, \tag{16}$$

$$\int_0^\pi K(s,t)\varphi_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\cdot\int_0^\pi \frac{\sin t\sin nt}{\cos t-\cos s}dt$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\cos(n-1)t-\cos(n+1)t}{\cos t-\cos s}dt.$$

用公式(证明见后)

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos nt}{\cos t-\cos s}dt=\frac{\sin ns}{\sin s}(n=0,1,2,\cdots), \tag{17}$$

前式化为

$$\int_0^\pi K(s,t)\varphi_n(t)\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2}\frac{\sin(n-1)s-\sin(n+1)s}{\sin s}$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos ns=-\psi_n(s) \tag{18}$$

$$(n=1,2,\cdots),$$

连同

$$\psi_0(s)=\sqrt{\frac{1}{\pi}}, \tag{19}$$

$\{\psi_n(s)\}(n=0,1,2,\cdots)$是区间$(0,\pi)$中完备的正交归一函数组. 因此,如果将方程(2)右方的$f(s)$经偶开拓后按$\psi_n(s)(n=0,1,2,\cdots)$展开·,注意相应的(7)式左方不出现$\psi_0(s)$(可认为$a_0=0$),因而$f(s)$须满足条件(10):$f_0=\int_0^\pi f(s)ds=0$,即得方程(2)的解($a_n=-1,n=1,2,\cdots$):

$$y(t)=-\sum_{n=1}^{\infty} f_n\sin nt. \tag{20}$$

公式(17)的证明. 设$n\geqslant 0$,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos nt}{\cos t-\cos s}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nt}{\cos t-\cos s}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nt+i\sin nt}{\cos t-\cos s}dt \quad (\because \sin nt \text{ 为奇函数})$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{int}}{\cos t-\cos s}dt$$

$$=\frac{1}{\pi i}\oint_{c}\frac{z^n}{(z-z_1)(z-z_1^{-1})}dz \quad (z=e^{it},z_1=e^{is}),$$

其中 C 是 $z(=e^{it})$平面上绕过奇点 $z=z_1(=e^{is})$和 z_1^{-1}(相应于 $t=s$ 和 $t=-s$ 两点)的单位圆;积分均为主值. 用残数计算,上述积分的主值为

$$\pi i\left[\frac{z_1^n}{z_1-z_1^{-1}}+\frac{z_1^{-n}}{z_1^{-1}-z_1}\right]$$

$$=\pi i\frac{z_1^n-z_1^{-n}}{z_1-z_1^{-1}}=\pi i\frac{\sin ns}{\sin s}$$

$$(n=0,1,2,\cdots),$$

因此有(17).

24.13 积分变换的应用

积分变换是解积分方程的一种重要方法. 我们不讨论其普遍原理, 而只就几种常用的变换来说明. 在这一节先讨论傅氏变换——应用于非齐次方程

$$y(s)=f(s)+\lambda\int_{-\infty}^{\infty}K(s,t)y(t)dt. \tag{1}$$

为了方便,我们将 10.6 节的傅氏变换公式用较为对称的形式重写于下.

傅氏换式:

$$\tilde{f}[\varphi]=\bar{\varphi}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)e^{iks}ds \tag{2}$$

反演:

$$\varphi(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\varphi}(k)e^{-iks}dk, \tag{3}$$

应用于(1)式两边，有

$$\bar{y}(k)=\bar{f}(k)+\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iks}ds\int_{-\infty}^{\infty}K(s,t)dt$$

$$\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{y}(k')e^{-ik't}dk'$$

$$=\bar{f}(k)+\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\bar{K}(k,k')\bar{y}(k')dk', \tag{4}$$

其中(假设积分换序合法)

$$\bar{K}(k,k')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iks}K(s,t)e^{-ik't}dsdt \tag{5}$$

是核$K(s,t)$的二重傅氏换式[见 10.6 节末]；其反演(用 δ 函数易证)为

$$K(s,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iks}\bar{K}(k,k')e^{ik't}dkdk'. \tag{6}$$

一个重要的特殊情形是

$$\bar{K}(k,k')=V(k)\delta(k-k'), \tag{7}$$

其中$\delta(k-k')$是δ-函数. 这时，(4)式成为

$$\bar{y}(k)=\bar{f}(k)+\lambda V(k)\bar{y}(k), \tag{8}$$

而立得积分方程(1)的解的傅氏换式

$$\bar{y}(k)=\frac{\bar{f}(k)}{1-\lambda V(k)}. \tag{9}$$

于是，利用反演公式(3)即可求出方程(1)的解：

$$y(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{f}(k)}{1-\lambda V(k)}e^{-iks}dk. \tag{10}$$

显然,这一解法不能用于(1)的相应齐次方程,即 $f(s)\equiv 0$ 的情形.

$K(s,t)$的傅氏换式具有(7)的形式的条件

由反演公式(6),有

$$K(s,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iks}V(k)\delta(k-k')e^{ik't}dkdk'$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}V(k)e^{-ik(s-t)}dk$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}v(s-t) \tag{11}$$

其中 $v(s-t)=\sqrt{2\pi}\,K(s,t)$是 $V(k)$的傅氏换式反演[见(3)式]:

$$v(s-t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}V(k)e^{-ik(s-t)}dk. \tag{12}$$

因此核 $K(s,t)$的傅氏换式具有 $V(k)\delta(k-k')$形式的充要条件是

$$K(s,t)=K(s-t),$$

相应的$V(k)$由下式给出:

$$V(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}v(u)e^{iku}du \quad (u=s-t)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}K(u)e^{iku}du \tag{13}$$

应用例：

现在把所得结果应用于本章第一节中所举的、由规定的长螺线管内轴线上的磁场 $H(x)$反求线圈匝数分布 $n(\xi)$的问题.

电流元

$$di=In(\xi)d\xi$$

所产生的磁场为

$$dH=di\frac{2\pi a}{r^2}\frac{a}{r}$$

$$=2\pi a^2 I\frac{n(\xi)d\xi}{[a^2+(x-\xi)^2]^{3/2}},$$

$$H(x)=2\pi a^2 I\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n(\xi)d\xi}{[a^2+(x-\xi)^2]^{3/2}},$$

其中a是管的半径，I为电流强度；已知$H(x)$，求$n(\xi)$.

这是一个第一类积分方程，令$x/a=s$，$\xi/a=t$，方程化为

$$H(x)=2\pi I\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n(t)dt}{[1+(s-t)^2]^{3/2}},\qquad(14)$$

这方程的核$[1+(s-t)^2]^{3/2}$恰具有$K(s-t)$的形式，故其傅氏换式为$V(k)\delta(k-k')$，其中[见(13)式]

$$V(k)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iku}}{(1+u^2)^{3/2}}du.$$

这积分可用一阶变型贝塞耳函数[见 333 页]表示为①

$$V(k)=2|k|K_1(|k|).$$

因此，(14)的傅氏换式[参看(8)式]为

$$\bar{H}(k)=2\pi I\cdot 2|k|K_1(|k|)\bar{n}(k),$$

其中$\bar{n}(k)$是$n(t)$的傅氏换式. 由此可求出

$$n(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{n}(k)e^{-ikt}dk$$

① 参看王竹溪等《特殊函数概论》，482 页习题 38；K_ν为变型贝塞耳函数.

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{4\pi I}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{H}(k)}{|k|K_1(|k|)}e^{-ikt}dk$$

其中$\bar{H}(k)$是磁场的傅氏换式，$K_1(k)$是一阶变型贝塞耳函数.

24.14* 阿贝耳(Abel)方程·欧勒变换的应用

另一可用积分变换求解的积分方程是下列阿贝耳方程：

$$f(s)=\int_a^s\frac{u(t)dt}{(s-t)^\alpha},\ 0<\alpha<1, \tag{1}$$

这是一个第一类伏迭拉(V)型方程：给定$f(s)$，求$u(t)$. 举例说，力学中的所谓等时降落轨迹问题所导致的就是这类方程. 这问题是：从离地面高为h处，一质点在重力作用下，沿一光滑曲线降落，规定降落时间$t(h)$，求此曲线. 易见其数学表述为

$$t(h)=\int\frac{ds}{v}=\int_0^h\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{2g(h-y)}}$$

$$=\int_0^h\frac{\sqrt{1+(dx/dy)^2}}{\sqrt{2g(h-y)}}dy$$

$$=\int_0^h\frac{u(y)dy}{\sqrt{2g(h-y)}},$$

其中$u(y)$是表示曲线的未知函数，$u(y)=\sqrt{1+(dx/dy)^2}$

应用欧勒变换[11.8节(4)式]于方程(1)的两边，有

$$\int_a^z(z-s)^\mu f(s)ds$$

$$=\int_a^z(z-s)^\mu ds\int_a^s\frac{u(t)dt}{(s-t)^\alpha}$$

$$=\int_a^z u(t)dt\int_t^z(z-s)^\mu(s-t)^{-\alpha}ds, \tag{2}$$

其中的μ待定.

用分式线性变换(20.4节)，把s变为ξ，使

$$s=t \text{ 时 } \xi=0, \quad s=z\text{时},\xi=1,$$

即

$$\xi=\frac{s-t}{z-t}, \qquad 1-\xi=\frac{z-s}{z-t},$$

则$ds=(z-t)d\xi$,而(2)式后面的积分化为

$$\begin{aligned}&\int_t^z(z-s)^{\mu}(s-t)^{-\alpha}ds\\&=\int_0^1(z-t)^{\mu}(1-\xi)^{\mu}(z-t)^{-\alpha}\xi^{-\alpha}(z-t)d\xi\\&=(z-t)^{\mu+1-\alpha}\int_0^1\xi^{-\alpha}(1-\xi)^{\mu}d\xi,\end{aligned}$$

取$\mu=\alpha-1$,使最后的积分等于

$$\begin{aligned}&\int_0^1\xi^{-\alpha}(1-\xi)^{\alpha-1}d\xi\\&=\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1)}=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\end{aligned}$$

[参看 9.7 节(1)和(3); 9.4 节(6)],(2)式成为

$$\int_a^z u(t)dt=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_a^z(z-s)^{\alpha-1}f(s)ds,$$

两边对 z 求微商,然后将z换为t,即得阿贝耳方程(1)的解式:

$$\begin{aligned}u(t)&=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{d}{dt}\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}f(s)ds\\&=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{d}{dt}\left\{-\frac{(t-s)^{\alpha}f(s)}{\alpha}\Big|_{s=a}^{t}\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{\alpha}\int_a^t(t-s)^{\alpha}f'(s)ds\right\}\\&=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left\{f(a)(t-a)^{\alpha-1}+\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}f'(s)ds\right\}.\end{aligned}\tag{3}$$

24.15* 席洛米许(Schlömilch)积分方程

最后,我们介绍一个解积分方程

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\phi(x\ \sin\theta)d\theta \tag{1}$$

的公式

$$\varphi(x)=f(0)+x\int_0^{\pi/2}f'(x\ \sin\theta)d\theta, \tag{2}$$

其中$f'(x)=df/dx$. 方程(1)称为席洛米许(Schlömilch)积分方程.

(2)式的证明如下。将(1)式对x求微商,有

$$f'(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\ \varphi'(x\ \sin\theta)d\theta, \tag{3}$$

其中$\varphi'(x)=d\varphi/dx$. 由(1)和(3)知

$$\phi(0)=f(0),\ \varphi'(0)=\frac{\pi}{2}f'(0). \tag{4}$$

在(3)式中把x换为$x\sin\psi$,乘上$xd\psi$,求积分,有

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi/2}xf'(x\sin\psi)d\psi\\&=\frac{2x}{\pi}\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\pi/2}\sin\theta\varphi'(x\sin\theta\sin\psi)d\psi,\end{aligned} \tag{5}$$

引进新变数λ:

$$\sin\lambda=\sin\theta\sin\psi$$

($\psi=0$ 时$\lambda=0$;$\psi=\pi/2$ 时$\lambda=\theta$),得

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi/2}\sin\theta\ \varphi'(x\ \sin\theta\ \sin\psi)d\psi\\&=\int_0^{\theta}\sin\theta\ \varphi'(x\sin\lambda)\frac{\cos\lambda d\lambda}{\sin\theta\cos\psi}\\&=\int_0^{\theta}\frac{\varphi'(x\sin\lambda)\cos\lambda d\lambda}{\sqrt{1-\sin^2\lambda/\sin^2\theta}}\end{aligned}$$

$$=\int_0^{\theta}\frac{\varphi'(x\sin\lambda)\cos\lambda d\lambda}{\sqrt{\sin^2\theta-\sin^2\lambda}}\sin\theta,$$

代入(5)式右方,对θ求积分,得

$$\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\theta}\frac{\varphi'(x\sin\lambda)\cos\lambda d\lambda}{\sqrt{\sin^2\theta-\sin^2\lambda}}\sin\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}d\lambda\ \varphi'(x\sin\lambda)\cos\lambda\int_{\lambda}^{\pi/2}\frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{\sin^2\theta-\sin^2\lambda}}$$

$$=\int_0^{\pi/2}d\lambda\varphi'(x\sin\lambda)\cos\lambda\cdot(-)\arcsin\frac{\cos\theta}{\cos\lambda}\Big|_{\theta=\lambda}^{\pi/2}$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\varphi'(x\sin\lambda)\cos\lambda d\lambda$$

$$=\frac{\pi}{2}\ \frac{1}{x}\varphi(x\ \sin\lambda)\Big|_{\lambda=0}^{\pi/2}$$

$$=\frac{\pi}{2x}[\varphi(x)-\varphi(0)].$$

因此,(5)式成为

$$\int_0^{\pi/2}xf'(x\ \sin\psi)d\psi=\varphi(x)-\varphi(0).$$

注意(4),即得解式(2)

索　引

B函数　143
Γ函数　131
　～的渐近表示　140
　～的解析性　132,133
δ函数　165
*M*检验法　55

一　画

一致收敛　55
　函数序列的～　59
一致连续　9

二　画

二项式展开的系数$\binom{\alpha}{n}$　75

三　画

广义傅氏级数　253
广义傅氏展开　253,262
三角函数　18

四　画

无穷远点　6,93
无初值问题　376
区域　8
　～的边界　9
　～边界的正向　9
　闭～　9
　单连通～　35
　复连通～　37
不定积分　39
厄密(Hermite)方程　194
厄密多项式　195
比值检验法　52
内点　8
内积　261
贝塞耳(Bessel)方程　181,245,257
　变型(或虚宗量)～　333
　球～　246,257
贝塞耳不等式　262
贝塞耳函数　84,183,300
　～生成函数　305
　～的加法公式　307
　～的递推关系　305
　～的渐近表示　323
　半奇数阶～　329
　变型(或虚宗量)～　333
　第二类～　314
　第三类～　325
　球～　330
反三角函数　28
反演点　395
　～对　398
分立谱　253
分式线性变换　396
分段光滑　33

双曲线函数 19
双曲型方程 423,425
超～ 425

五 画

汉克耳(Hankel)函数 325
汉克耳变换 385
零阶～ 386
半纯函数 134,486,503
平均收敛 262
正交归一函数组 261
正交曲面坐标系 237
正则解 175
节点 226
本征值 222
～问题 222,251
本征函数 222,251
本征频率 226,319
可导(单演) 10
电报方程 211
外氏(Weierstrass)定理 57
对数函数 26
弗雷德霍姆(Fredholm)型 (F-型)方程 478
边界点 9

六 画

刘维(Liouville)定理 47
亥姆霍兹(Helmholtz)方程 237,243,356,391
闭合围道 26
简单～ 35
权因子 260
有界条件 248,266
达朗伯(d'Alembert)解 228,428
扩散率 210
收敛半径 61
收敛圆 61
收敛横标 147
传输线方程 211,443
伏迭拉(Volterra)型(V-型)方程 479
自伴本征值问题 252
自然边界条件 459
多边形外部的变换 416
多边形的变换 406
多值函数 19
～的解析性 25
导热率 208
导数 10
高阶～ 44
约当(Jordan)引理 104
推广的～ 162
级数相乘 53

七 画

泛函 445
～的导数 458
～的变分 457
完备关系 263
完备函数组 263
序列 5
有界～ 5
无界～ 5

均值定理 46
杜阿美(Duhamel)公式 158
极限 5,19
～序列的～ 5
～函数的～ 9
极限点 5
极点 89,90
m阶～ 91
折积定理 156
抛物型方程 424,425
连接条件 217,281
连续函数 9
里兹(Ritz)方法 467
里曼(Riemann)方法 439
里曼函数 442
里曼面 25
里曼球面 7
希伯特(Hilbert)变换 507
希伯特核 507
伴式 440
伯努利(Bernoulli)数 85
含参数的定积分 128
～所表示的函数的解析性 128
余误差函数 382
阿贝耳(Abel)方程 516
阿贝耳第一定理 60
阿贝耳第二定理 66

八 画

泊松(Poisson)方程 211, 390,431
泊松公式 436
泊松积分公式 250
定解问题 217
单值分枝 23
单值函数 10
枝点 21
拉氏(Laplace)变换 146
～的原函数 146
～的像函数 146
拉氏换式 146
～存在的充分条件 146
～的解析性 148
～的普遍反演公式 161
拉氏算符 204,237,238,240, 389
拉普拉斯方法(求渐近展开) 140
拉普拉斯方程 14,204,211
拉普拉斯型方程 196
奇点 12
正则～ 176
可去～ 89
本性～ 89,92
非正则～ 176
孤立～ 80,88
微分方程的～ 171
欧勒(Euler)方程 449,452,454
欧勒变换 200,518
欧勒型方程 200,247
欧勒常数 316
欧勒数 87
周期条件 247
罗巨格(Rodrigues)公式 269
典则式(偏微分方程) 421
固有频率 226
帕色伐(Parseval)等式 263

佰科米(Tricomi)方程 424
线性方程 420
  准～ 420
线性积分方程 477
线性常微分方程 171
  ～的级数解法 172,174,189
  ～的积分解法 196,200
线性偏微分方程 218
  二阶～的分类 420

九 画

测地线问题 455
洛浪(Laurent)级数 79
洛浪展开 79
  ～的主部 80
  ～的正则部 80
误差函数 382
逆算符 485
玻-外(Bolzano-Weierstrass)定理 5
胡克(Hoke)定律 205
柱函数 326
指标方程 177
指数函数 3,17,65
残数 96
  ～定理 95
复变函数 8
复数 1
  ～平面 2
  ～的实部 1
  ～的虚部 1
  ～的辐角 2
  ～的模 2
  ～级数 51
  ～积分 32
  ～球面 7
  ～辐角的主部 3
  共轭～ 1
科希(Cauchy)不等式 45
科希定理 35,37
科希积分公式 42
  无界区域的～ 43
科希型积分 50
科希判据 5
科希-里曼(CR)条件 12
保角变换 389,393
退化核 489
退化核逼近 489,494
绝对收敛 52

十 画

席伐尔兹(Schwartz)不等式 481
席伐尔兹变换 406
席洛米许(Schlömilch)方程 518
诺埃曼(Neumann)函数 315
调和函数 14
  共轭～ 15
泰勒(Taylor)定理 71
泰勒级数 71
泰勒展开 71
热传导方程 208,430
热流密度 203
格临(Green)函数 348
  广义～ 358

无界区域的～ 358
推迟～ 372
超前～ 372
根式 19
原函数 40
逐项求导数 57
逐项求积分 26
逐次逼近解法 479
积分方程的核 474
积分不等式 33
积分主值 103,109
积分变换 378
～的核 383
积分算符 485
特征线 422
～方程 422
倒易性 355
预解式 486

十 一 画

渐近展开 199
球面谐函数 295
基本解 361
勒让德(Legendre)方程 172,200,264
连带～ 245,257,289
勒让德多项式 267,331
～的微分表示(罗巨格公式) 268
～的正交性 270
～的归一因子 272
～的生成函数 278
～的递推关系 286
勒让德函数 264
连带～ 288
菲涅耳(Fresnel)积分 112
常规解 192
次～ 195
第一边值问题 231
第一类欧勒积分 143
第二类欧勒积分 131

十 二 画

温度传导率 210
割线 23
斯特令(Stirling)公式 142
斯特姆-刘维(Sturm-Liouville) 型方程 257
椭圆型方程 423,425
最大极限 61
最大模定理 46
最陡下降路径 321
最陡路径 321
等周问题 452
傅氏(Fourier)变换 388,512
傅氏(Fourier)换式 160,512
傅里叶定律 208
傅里叶积分 158
～公式 159

十 三 画

源函数 348
零点 91
m阶～ 91

并问题 255
微分-积分方程 477
解析延拓 126,127
解析函数 12
叠核 484
二阶叠核 484
n阶叠核 485

十 四 画

幂级数 59
聚点 5
稳定温度场方程 211

十 五 画

整函数 487
影响函数 348

十 六 画

儒可夫斯基(Жуковский)变换 418

外国人名对照索引

Abel 阿贝耳 51,59,66,516
Bessel 贝塞耳 84,181,183,245,246,257,262,300,444
Bernoulli 伯努利 84
Cauchy 科希 5,12,34,41 45,50,438
d'Alembert 达朗伯 228,428
Dirichlet 狄里希累 246
Duhamel 杜阿美 158
Euler 欧勒 84,87,200,247,316,449,516
Ferrer 费瑞尔 290,293
Fourier 傅里叶 104,158,208,388,512
Fredholm 弗雷德霍姆 478
Fresnel 菲涅耳 112
Green 格临 35,348
Hankel 汉克耳 325,385,386
Helmholtz 亥姆霍兹 237,243,354,391
Hermite 厄密 194,195
Hilbert 希伯特 507
Hobson 霍布森 290
Hooke 胡克 205
Jordan 约当 104,162
Lagrange 拉格朗日 449
Laplace 拉普拉斯(拉氏) 14,140,146,204,212,378
Laurent 洛浪 79
Legendre 勒让德 172,200,245,264,288,331
Liouville 刘维 47
Mellin 梅林 388
Neumann 诺埃曼 315
Parseval 帕色伐 263
Poisson 泊松 211,284,390,430,436
Riemann 里曼 7,12,17,25,439
Ritz 里兹 467
Rodrigues 罗巨格 269
Schlömilch 席洛米许 518
Schwartz 席伐尔兹 406,481
Stirling 斯特令 142
Sturm-Liouville 斯特姆-刘维 257
Taylor 泰勒 71
Tricomi 屈科米 424
Volterra 伏迭拉 479
Жуковский 儒可夫斯基 418

符号索引

Bn 85

En 87

$\mathrm{erf}x$ 382

$\mathrm{erfc}x$ 381

$\exp z$ 64

$H_\nu^{(1)}(x), H_\nu^{(2)}(x)$ 325

$h_l^{(1)}(x), h_l^{(2)}(x)$ 330

$I_\nu(x)$ 334

$J_\nu(x)$ 183,300

$j_l(x)$ 330

$\| K \|$ 479

$K_\nu(x)$ 334

$\binom{\alpha}{n}$ 75

$\mathrm{N}_\nu(x)$ 315

$n_l(x)$ 330

$\left[\frac{l}{2}\right]$ 268

$O\{\psi(z)\}$ 11

$o\{\psi(z)\}$ 199

$P_l(x)$ 267

$P_l^m(x)$ 289

$S_l(\theta,\varphi)$ 294

$Y_{lm}(\theta,\varphi)$ 298

$Y_\nu(x)$ 314

$Z_\nu(x)$ 326

$B(p,q)$ 143

$\Gamma(z)$ 131

γ 315

δ_{mn} 261

$\delta(t)$ 165

$\psi(z)$ 138,315