中国科学院考研指定参考书

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

中国科学技术大学数学教学丛书

数学物理方程

（第二版）

季孝达 薛兴恒 陆 英 宋立功 编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

中国科学技术大学数学教学丛书

数学物理方程

(第二版)

季孝达　薛兴恒
陆　英　宋立功　编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书根据编者在中国科学技术大学多年的教学经验编写而成. 通过对三类典型方程的讨论, 介绍求解偏微分方程定解问题的通解法、分离变量法、积分变换法、基本解方法和变分方法, 以及相关的固有值问题、特殊函数和广义函数简介. 本书还讨论了一阶线性和拟线性偏微分方程的特征线概念和求解方法. 对涉及的数学理论, 本书重在理解和应用. 全书材料丰富、结构清晰、层次分明, 便于不同需求的读者使用.

本书适合于高等院校理工科非数学系本科生、研究生, 及有关科研、工程技术人员作为教材或参考材料使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程/季孝达等编. —2 版. —北京: 科学出版社, 2009

(普通高等教育“十一五”国家级规划教材 • 中国科学技术大学数学教学丛书)

ISBN 978-7-03-025823-6

Ⅰ. 数… Ⅱ. 季… Ⅲ. 数学物理方程-高等学校-教材 Ⅳ. O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009) 第 188984 号

责任编辑: 赵 靖 杨 然 / 责任校对: 郑金红

责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005 年 7 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2009 年 10 月第 二 版 印张: 18 1/4

2009 年 10 月第四次印刷 字数: 353 000

印数: 8 001—12 000

定价: 29.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《中国科学技术大学数学教学丛书》编委会

主　编　程　艺

顾　问　(按汉语拼音排序)

陈希孺　方兆本　冯克勤　龚　昇　李翊神

石钟慈　史济怀

编　委　陈发来　陈　卿　陈祖墀　侯定丕　胡　森

蒋继发　李尚志　林　鹏　刘儒勋　刘太顺

缪柏其　苏　淳　吴耀华　徐俊明　叶向东

章　璞　赵林城

第二版前言

本教材的第二版列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材.

本教材 2005 年出版后, 在中国科学技术大学连续使用了 4 届. 根据使用情况, 本次修订, 在保持基本内容、基本结构不变的前提下, 做了较多的改动, 主要有以下几个方面：

(1) 交换了第 1 章中二阶线性方程的分类和一阶线性 (拟线性) 方程通解法两节的次序. 虽然有点切断了物理上三个典型方程的导出到数学上二阶线性方程的分类间的联系, 但从一阶到二阶更符合认识规律和便于教学. 重写了一阶线性 (拟线性) 方程通解法, 使之便于理解、掌握并突出了几何观点. 由于行波解在波动问题里的重要性, 单列为一节.

(2) 改写了 2.2 节固有值问题及 4.3 节一般积分变换简介的相应部分. 将无穷维函数空间中自共轭的固有值问题与有限维内积空间中自共轭算子的固有值问题作比较, 以便读者理解、掌握. 出于同一目的, 把正则奇点的 S–L 定理移到第 3 章奇点情况出现时再讲.

(3) 修改 5.1 节 δ 函数部分. 较严格又尽可能浅显地引进了广义函数, 使有关 δ 函数的性质和运算既满足读者的一般应用需要又有数学上的理论根据.

(4) 在第 6 章中增加泛函的条件极值一节, 使变分方法这一章相对完整, 同时使得变分问题和自共轭线性算子的固有值问题联系起来.

(5) 订正了第一版中已发现的错误.

(6) 增删调整了部分习题.

比较非数学系用的一些同类教材, 本教材的内容在数学上略深和广一些, 以使不同需求的教师、学生和其他读者有选择余地. 为方便读者阅读, 对理论部分, 我们尽量用较通俗的语言阐述. 本教材 5.5 节和第 6 章, 相对独立, 简洁而不失一般性地介绍了广义函数和变分法的基本内容, 推荐给有兴趣的读者阅读.

本次的修订, 得到使用本教材的老师、同学的支持和帮助, 在此一并致谢.

编　者

2009 年 6 月

第一版前言

“数学物理方程”是以物理学和工程技术中提出的偏微分方程为主要研究对象, 介绍求线性偏微分方程精确解方法的基础数学课程. 中国科学技术大学历来重视学生的数理基础，建校以来一直把“数学物理方程”作为物理、力学、电子类专业学生的必修课，且主要由数学系负责开设. 最初的讲义由已故的曾肯成先生亲自执笔, 确定了课程的主要内容和结构. 改革开放以来, 陆续有严镇军、张鄂堂、薛兴恒等教授编写的校内讲义和正式出版的教材问世. 这些教材都比较重视数学思想、数学理论的介绍和扎实的基本功训练. 特别是严镇军教授编写的教材, 已在中国科学技术大学沿用二十多年, 除了经典的分离变量、积分变换方法外, 在同类教材中较早地引入了广义函数概念和基本解方法. 多年来的实践证明, 这样的教学要求使学生有较强的后劲, 特别是从事研究工作的毕业生更感到受益终身.

但是, 一方面, 相对于信息时代科学技术的迅猛发展, 我们 20 多年基本未变的教学内容、手段亟待重新审视和改进; 另一方面, 学制的缩短, 招生人数的增加, 毕业生就业渠道的多样化, 也需要我们的教学作相应的变化. 中国科学技术大学的校、院、系三级领导都对此事非常重视, 近几年来多次召开公共数学教学的研讨会, 并提出了重新编写教材的要求. 我们受系领导委托, 分工进行“数学物理方程”的编写. 三年来, 在我们多年教授该课程的基础上, 经过调研讨论和教学实践的探索, 逐渐形成了这本教材.

本教材的编写, 基于公共基础数学课程的定位, 确定了“以经典方法为基础, 适当融入现代内容; 继承科大理论坚实的传统, 适当加强应用”的原则. 具体处理如下：

(1) 基本保持中国科学技术大学原有教材的内容和结构. 由于变分方法在建立数学模型和求解定解问题两个方面的重要作用, 我们将它列入正文. 又由于前期数学课程的压缩, 在本教材中增添了一阶线性 (拟线性) 偏微分方程的求解, 加强了常微分方程的有关内容.

(2) 将教材分出层次, 以适应不同系别、不同学生的要求. 排列在各章前面的内容是课程的基本要求, 以介绍各种具体解法及解法的思想为主. 带 $*$ 号的节、小节为选讲内容, 一般是进一步的数学理论和物理应用. 穿插在各章节中的楷体小字为阅读材料, 大多是基本内容的延伸及从经典问题向近代问题过渡的窗口, 受篇幅限制, 仅点到为止, 希望引起部分学生的兴趣、关注和思考.

(3) 适当加强了课程与物理的联系, 包括典型例子的物理背景, 重要公式的物

理解释, 以及数学用语与物理用语的联系等.

希望这样的处理能使教师有较大的发挥空间, 学生有较大的选择余地.

由于编者才疏学浅，编写过程中颇有力不从心之感. 虽谨慎从事，不妥仍在所难免, 恳请各位读者指教指正, 以期改进.

严镇军教授编写的同名教材是本教材的重要参考, 本教材的编写得到严教授的大力支持和帮助. 李翊神教授在百忙中审阅了全稿, 提出宝贵意见. 成稿过程中还得到张扬、贺劲松等多位物理、数学教授的热情帮助和数学系、教务处领导的全力支持, 在此一并致谢.

编　者

2005 年 1 月

目　　录

第二版前言
第一版前言
第 1 章　偏微分方程定解问题 ····· 1
1.1　三个典型方程的导出 ····· 1
1.1.1　弦的横振动 ····· 1
1.1.2　热传导问题 ····· 4
1.1.3　静电场 ····· 5
1.2　定解问题及其适定性 ····· 7
1.2.1　通解和特解 ····· 8
1.2.2　定解条件 ····· 8
1.2.3　定解问题及其适定性 ····· 12
1.3　一阶线性 (拟线性) 偏微分方程的通解法和特征线法 ····· 13
1.3.1　两个自变量的一阶线性偏微分方程 ····· 13
1.3.2　n 个自变量的一阶线性偏微分方程 ($n \geqslant 2$) ····· 16
*1.3.3　一阶拟线性偏微分方程 ····· 20
1.4　波动方程的行波解 ····· 26
1.4.1　一维波动方程的通解和初值问题的达朗贝尔 (d'Alembert) 公式 ····· 26
1.4.2　半直线上的问题 —— 延拓法 ····· 29
1.4.3　中心对称的球面波 ····· 31
1.5　二阶线性偏微分方程的分类和标准式 ····· 32
1.5.1　特征方程和特征线 ····· 33
1.5.2　方程的分类、化简和标准形 ····· 34
1.6　叠加原理和齐次化原理 ····· 40
1.6.1　线性叠加原理 ····· 40
1.6.2　齐次化原理 (冲量原理) ····· 42
习题 1 ····· 44
第 2 章　分离变量法 ····· 47
2.1　两个典型例子 ····· 47
2.1.1　两端固定弦的自由振动 ····· 47
2.1.2　圆柱体稳态温度分布 ····· 51

2.2　一般格式, 固有值问题 ····· 55
2.2.1　一般格式 ····· 55
2.2.2　固有值问题的施图姆–刘维尔 (Sturm–Liouville) 定理 ····· 57
2.2.3　例题 ····· 63
2.3　非齐次问题 ····· 69
2.3.1　齐次边界条件下非齐次发展方程的混合问题 ····· 69
2.3.2　一般的非齐次混合问题 ····· 75
2.3.3　非齐次稳定方程的边值问题 ····· 77
习题 2 ····· 80
第 3 章　特殊函数及其应用 ····· 82
3.1　正交曲线坐标系下的变量分离 ····· 82
3.1.1　Helmholtz 方程在直角坐标系下的变量分离及高维 Fourier 展开 ····· 82
3.1.2　Helmholtz 方程在柱坐标系下的变量分离及 Bessel 方程的导出 ····· 84
3.1.3　Helmholtz 方程在球坐标系下的变量分离及 Legendre 方程的导出 ····· 85
3.2　常微分方程的幂级数解 ····· 86
3.2.1　二阶线性常微分方程的解析理论 ····· 86
3.2.2　Legendre 方程的幂级数解及 Legendre 函数 ····· 87
3.2.3　Bessel 方程的广义幂级数解及 Bessel 函数 ····· 89
3.3　Legendre 函数 ····· 93
3.3.1　Legendre 多项式的表示和性质 ····· 93
3.3.2　Legendre 方程的固有值问题及正则奇点情况下的 S–L 定理 ····· 97
3.3.3　轴对称 Laplace 方程球面边值问题 ····· 99
3.3.4　伴随 Legendre 方程和伴随 Legendre 函数 ····· 104
3.3.5　一般情形下 Laplace 方程球面边值问题及球函数 ····· 107
3.4　Bessel 函数 ····· 111
3.4.1　Bessel 函数的表示和性质 ····· 111
3.4.2　Bessel 方程的固有值问题 ····· 117
3.4.3　圆柱形区域上的混合问题和边值问题, 虚变量 Bessel 函数 ····· 119
3.4.4　球 Bessel 函数及其应用 ····· 127
*3.4.5　可以化为 Bessel 方程的方程 ····· 130
习题 3 ····· 132
第 4 章　积分变换法 ····· 135
4.1　Fourier 变换法 ····· 135
4.1.1　Fourier 变换 ····· 135

4.1.2　用 Fourier 变换求解无界区间上的定解问题 · · ·

5.5.7 广义函数的 FT 和 $\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}$ ····· 223
5.5.8 广义函数的卷积 ····· 225
习题 5 ····· 226
第 6 章 微分方程的变分方法 ····· 229
6.1 泛函和泛函极值 ····· 229
6.1.1 泛函和泛函极值 ····· 229
6.1.2 几个例子 ····· 230
6.2 泛函的变分, Euler 方程和边界条件 ····· 233
6.2.1 变分法基本引理 ····· 233
6.2.2 一元函数泛函的变分、Euler 方程和边界条件 ····· 233
6.2.3 二元函数泛函和多元函数泛函的情况 ····· 238
6.2.4 混合积分型泛函的情况 ····· 242
6.2.5 两个一元函数 $(y(x), z(x))$ 的泛函的情况 ····· 243
6.2.6 泛函中包含二阶导数的情况 ····· 245
6.2.7 两个二元函数泛函的情况 ····· 246
6.2.8 Hamilton 原理和例子 ····· 247
6.2.9 活动区间问题和横截条件 ····· 249
6.3 变分问题的直接法及微分方程的变分方法 ····· 251
6.3.1 变分问题的直接法 ····· 251
6.3.2 微分方程的变分方法 ····· 254
6.3.3 微分方程的广义解 ····· 256
6.4 泛函的条件极值 ····· 256
6.4.1 条件极值 ····· 257
6.4.2 等周问题 ····· 259
6.4.3 等周问题和自共轭微分方程的固有值问题 ····· 261
习题 6 ····· 265
习题参考答案 ····· 267
参考文献 ····· 280

第 1 章　偏微分方程定解问题

偏微分方程　是指含有多元未知函数 $u = u(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 及其若干阶偏导数的关系式

$$F\left(\boldsymbol{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \cdots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \cdots \partial x_n^{m_n}}\right) = 0, \tag{1.0.1}$$

其中, 最高阶导数的阶数 $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 为**方程的阶**. 偏微分方程反映了变量 u 及多个自变量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 间的相互制约关系, 物理学、力学、工程技术等自然科学, 经济学、人口学等社会科学中很多重要变量关于时间、空间及其他因素的变化规律常常通过偏微分方程来描述. 我们把这些从具体问题, 主要是物理问题中导出的偏微分方程称为数学物理中的偏微分方程, 简称为**数学物理方程**. 当然数学物理方程有时还包括**常微分方程**和**积分方程**.

如果偏微分方程 (1.0.1) 中与未知函数有关的部分是 u 及 u 的偏导数的线性组合, 则称方程 (1.0.1) 是**线性偏微分方程**. 线性偏微分方程是最简单最基本的偏微分方程, 它可以描述很多重要的物理过程, 同时对于更精确反映物理过程的非线性方程的研究也能提供有益的启示. 数学物理中重要的线性偏微分方程是本课程研究的重点.

本章作为开篇, 首先建立物理问题的数学模型, 导出三类典型方程的定解问题; 继而介绍求一阶线性 (拟线性) 偏微分方程和某些二阶线性偏微分方程通解的方法, 并从数学上对二阶线性偏微分方程分类化简, 进一步认识三类典型方程; 最后将给出处理一般线性问题的基本原理.

1.1　三个典型方程的导出

数学物理研究问题的第一步是将物理问题转化为数学问题, 即建立数学模型. 我们将从几个具体问题出发, 导出三个典型方程, 从中了解建立数学模型的一般步骤, 认识三个典型方程的广泛物理背景.

1.1.1　弦的横振动

一根弦在内部张力作用下处于平衡位置, 某个微小扰动引起部分质点的位移, 内部张力又使邻近的部分随之产生位移, 形成波的运动. 要将这样一个物理过程用

数学式子描述, 首先要“去粗存精”, 对弦及其运动作“理想化”假设, 即建立物理模型.

假设弦均匀细长, 从而其横截面可忽略而视作线, 线密度为常数. 又设弦柔软弹性, 可任意弯曲, 张力满足胡克定律. 弦的运动在同一平面内进行, 每个质点的位移都是横向的, 即垂直于弦的平衡位置, 且绝对位移和相对位移都很小. 这些假设是在推导方程过程中自然提出的, 在物理问题中也是合理的.

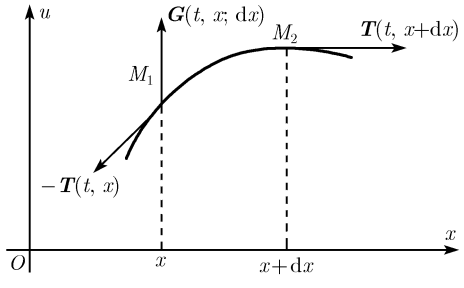


图 1.1.1

取弦在自身张力作用下的平衡位置所在直线为 x 轴, 横向位移方向为 u 轴 (图 1.1.1), 设 t 时刻弦上 x 处的质点相对于平衡位置的横向位移 $u = u(t,x)$ 为未知函数.

采用**微元分析法**. 在弦上任取微元 $[x, x+\mathrm{d}x]$, 微分记号 $\mathrm{d}x$ 表示一个无穷小改变量. 此微元可视作质量为 $\rho\mathrm{d}x$ 的质点, 在 t 时刻的运动遵循**牛顿第二定律**

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}.$$

如图 1.1.1 所示, 微元所受的外力有左端点的张力 $-\boldsymbol{T}(t,x)$, 右端点的张力 $\boldsymbol{T}(t,x+\mathrm{d}x)$, 以及加在微元上的垂直于 x 轴的外力 $\boldsymbol{G}(t,x;\mathrm{d}x)$. 如果线密度 ρ 为常数, t 时刻作用于 x 处的单位长度上的外力, 即外力密度 $g(t,x)$ 已知, 张力 $\boldsymbol{T}(t,x)$ 关于 x 可微, 则微元服从的牛顿第二定律可具体表示为

$$\begin{aligned}\rho\mathrm{d}x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\boldsymbol{u}^\circ &= -\boldsymbol{T}(t,x) + \boldsymbol{T}(t,x+\mathrm{d}x) + \boldsymbol{G}(t,x;\mathrm{d}x)\\ &\approx \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x}\,\mathrm{d}x + g(t,x)\mathrm{d}x\boldsymbol{u}^\circ,\end{aligned}$$

其中, 第二个等号忽略了 $\mathrm{d}x$ 的高阶无穷小. 其分量形式为

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = 0, \tag{1.1.1a}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial T_2}{\partial x} + g(t,x), \tag{1.1.1b}$$

其中, T_1, T_2 分别是张力 $\boldsymbol{T}$ 在 $\boldsymbol{x}^\circ$ 和 $\boldsymbol{u}^\circ$ 方向的分量. 这就是弦振动满足的基本偏微分方程组.

由于张力沿弦的切向作用, 我们有第三个方程

$$T_2 = T_1\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{1.1.1c}$$

代入 (1.1.1a) 式、(1.1.1b) 式, 便可化简得

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_1(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(t,x). \tag{1.1.2}$$

在微小横振动的假设下, $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|\ll 1$, 张力大小

$$T=\sqrt{T_1^2+T_2^2}=T_1\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\approx T_1,$$

微元弧长

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}u^2}=\mathrm{d}x\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\approx \mathrm{d}x.$$

在运动过程中, 微元弧长保持不变, 由胡克定律知, 张力大小 $T\approx T_1$ 也不随时间变化, 从而 $T\approx T_1$ 为常数. (1.1.2) 式改写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(t,x),\quad a=\sqrt{\frac{T}{\rho}},\quad f(t,x)=\frac{g(t,x)}{\rho}, \tag{1.1.3}$$

称之为**弦的横振动方程**. 其中, 系数 a 反映波的传播速度, 由弦本身性质决定; $f(t,x)$ 则是作用在弦身单位质量上的外力, 当弦自由振动时,$f(t,x)\equiv 0$.

以上推导方程的过程, 实际上就是将微元运动满足的物理定律翻译成用已知函数、未知函数及其偏导数表示的数学式子. 在弦振动问题中的基本物理定律是牛顿第二定律和胡克定律. 由此可见, 凡是弹性介质中微小扰动的传播问题, 如弹性杆的纵振动、弹性膜的横振动、声波在空气中的传播等, 都可用类似方法导出同一类型的方程, 一般表示为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u+f(t,\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad n=1,2,3, \tag{1.1.4}$$

其中, $\Delta=\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ 为**拉普拉斯 (Laplace) 算子**. 此类方程称为**波动方程**, 弦振动方程 (1.1.3) 也因此称为一维波动方程. 对于经典运动问题, 可以建立更一般的固体弹性波方程、流体波方程、电磁波方程等. 在一些重要的特殊情况下, 这些方程都可约化为波动方程 (1.1.4).

需要指出的是, 弦振动方程 (1.1.3) 是在一定的理想化假设下导出的. 如果存在其他不能忽略的因素, 比如弦在黏稠液体中振动, 阻尼必须考虑, 推出的方程中就会增加 $\alpha\dfrac{\partial u}{\partial t}$ 项. 故任何数学模型都是相对的, 超出一定范围, 则需建立新的模型.

弦振动方程也可利用力学中的哈密顿 (Hamilton) 原理推导, 我们将在第 6 章变分方法中介绍.

1.1.2　热传导问题

热运动是另一类物理过程. 空间某个物体或静止流体内温度分布不均匀, 引起热量流动及温度的变化.

作理想化假设：设物体由同一介质构成, 且介质均匀分布、各向同性, 从而介质的密度、比热和热传导系数均为常数.

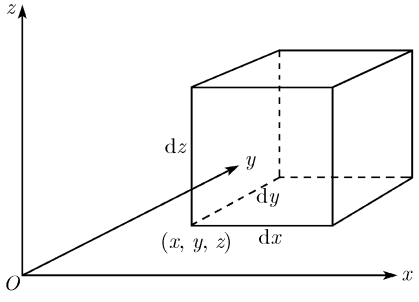


图 1.1.2

在空间取定直角坐标系, 取各点在 t 时刻的温度 $u = u(t,x,y,z)$ 为热运动的表征量. 在介质内任取微元 $\mathrm{d}V = [x, x+\mathrm{d}x] \times [y, y+\mathrm{d}y] \times [z, z+\mathrm{d}z]$, 考察微元 $\mathrm{d}V$ 在时间间隔 $[t, t+\mathrm{d}t]$ 内的温度变化 (图 1.1.2).

根据**能量守恒定律**, 物体温度升高所需热量等于外部流入热量和内部热源产生热量之和. 热量的流动遵循**傅里叶 (Fourier) 热传导定律**：热量从温度高处流向低处, 沿某方向流动热量的多少与温度在该方向的减少率成比例, 其数学表示式为

$$\boldsymbol{Q}_n = -k(x,y,z;n)\frac{\partial u}{\partial n}\boldsymbol{n},$$

其中, $\boldsymbol{Q}_n$ 为 $\boldsymbol{n}$ 方向的热流密度矢量, 即单位时间沿 $\boldsymbol{n}$ 方向通过单位面积的热量; $k(x,y,z;n)$ 为介质的热传导系数, 在介质均匀, 各向同性假设下是常数, 记为 k. 如图 1.1.2 所示, 在 $[t, t+\mathrm{d}t]$ 时间间隔内通过微元的左右面传入的热量为

$$\begin{aligned} &-k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(t,x,y,z)} \mathrm{d}t\mathrm{d}y\mathrm{d}z + k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(t,x+\mathrm{d}x,y,z)} \mathrm{d}t\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ \approx\ & k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{(t,x,y,z)} \mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \end{aligned}$$

同样可以求出通过前后和上下面流入的热量分别为

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{和} \ k\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

如果介质内部有热源, 其热源密度, 即单位时间单位体积热源流出的热量为 $g(t,x,y,z)$, 则在 $[t, t+\mathrm{d}t]$ 时间间隔内, 微元内部热源流出热量为

$$g(t,x,y,z)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

而微元温度升高所需的热量为

$$c\rho[u(t+\mathrm{d}t,x,y,z) - u(t,x,y,z)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \approx c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

这些等式中都忽略了高阶无穷小量.

将这些量代入能量守恒定律, 便得方程

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+g(t,x,y,z),$$

即**热传导方程**

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f(t,x,y,z), \tag{1.1.5}$$

其中, $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为三维 Laplace 算子, $a=\sqrt{\dfrac{k}{c\rho}}$, $f(t,x,y,z)=\dfrac{g(t,x,y,z)}{c\rho}$.

如果考虑侧面绝热杆的温度, 或柱上与高度无关的温度变化, 同样可导出方程 (1.1.5), 只是 Laplace 算子相应地取为一维或二维.

热传导方程的建立基于能量守恒和热传导两条基本物理定律. 像气体扩散、杂质在固体或液体中扩散这些物理过程, 其机理与热传导相似, 都是由浓度的不均匀引起不同物质分子的位置交换, 交换过程中每种物质的总量保持不变. 选取适当的未知函数, 导出的方程与热传导方程有相同形式, 因此也称热传导方程为**扩散方程**.

波动方程和热传导方程分别描述了双向传播和单向扩散两种完全不同的物理过程. 它们都与时间 t 有关, 称为**发展方程**. 如果考虑热传导方程的稳恒状态, 即 $\dfrac{\partial u}{\partial t}\equiv 0$, 它就成为**泊松 (Poisson) 方程**

$$\Delta u=-\frac{1}{a^2}f(x,y,z), \tag{1.1.6}$$

当 $f(x,y,z)\equiv 0$ 时, 就是**Laplace 方程**(也称**调和方程**)

$$\Delta u=0. \tag{1.1.7}$$

1.1.3 静电场

真空中有电荷分布, 密度为 $\rho(x,y,z)$, 引起的稳恒电场为 $\boldsymbol{E}(x,y,z)$.

在空间任取区域 V, 其边界面记为 ∂V. 由静电场的**高斯定律**: 通过任意封闭曲面的电通量等于该曲面包围体积内的电荷总量除以介电常数 ε_0, 有

$$\int_{\partial V}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V\rho(x,y,z)\mathrm{d}V.$$

根据**高斯 (Gauss) 公式**

$$\int_{\partial V}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V,$$

以及 V 的任意性, 得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0}. \tag{1.1.8}$$

又在空间任取曲面 S, 其边界线为 L, 由**法拉第定律**: 静电场绕任意闭路的电动势为 0, 有

$$\int_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0.$$

根据**斯托克斯 (Stocks) 公式**

$$\int_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \nabla \times \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s},$$

以及 S 的任意性, 得

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{\theta},$$

即静电场 $\boldsymbol{E}$ 无旋. 从而存在位函数 $\varphi(x,y,z)$, 使

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi.$$

代入 (1.1.8) 式, 即得 Poisson 方程

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0}, \tag{1.1.6}'$$

故也称 Poisson 方程(1.1.6)′为**场位方程**. 特别注意, 当空间无电荷分布, 即$\rho(x,y,z)\equiv 0$ 时, 静电场的电位 $\varphi(x,y,z)$ 满足 Laplace 方程 (1.1.7). 当电荷分布与 z 无关, 即 $\rho = \rho(x,y)$ 时, 方程 (1.1.6)′ 成为二维场位方程.

这里, 我们根据物理定律先建立积分方程, 再利用场论公式得到微分方程. 当然, 也可用微元分析法直接导出 Poisson 方程 (1.1.6)′, 或者对弦振动、热传导问题先建立积分方程, 再得微分方程.

从以上推导可见, 三个二阶线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u + f(t,\boldsymbol{x}) \qquad \text{(波动方程)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + f(t,\boldsymbol{x}) \qquad \text{(热传导方程)},$$

$$\Delta u = -f(\boldsymbol{x}) \qquad \text{(场位方程)}, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad n = 1,2,3$$

是物理学中最常遇到的偏微分方程, 其中每一个都描写了多种具体的物理过程, 尽管这些过程的物理背景各不相同, 但其数学表现形式完全一致. 这三个方程是历史上最早系统研究的方程, 也将是本课程重点讨论的对象.

偏微分方程不仅出现在经典物理中, 比如量子力学中的**薛定谔 (Schrödinger) 波动方程**

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m}\Delta\psi + u\psi, \tag{1.1.9}$$

其中, $\psi=\psi(\boldsymbol{r},t)$ 为**波函数**, $u=u(\boldsymbol{r},t)$ 为**势函数**, m 为粒子质量, $\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$, h 为普朗克 (Planck) 常量. 它给出微观粒子的运动变化规律, 是非相对论性量子力学的基本运动方程. 从数学上讲, 薛定谔方程是一个复二阶线性偏微分方程, 当势函数 u 不是常数时, 是变系数线性方程.

线性偏微分方程通常用来对物理问题作基本的近似描述, 对问题的深入精确描述便要引入非线性项. 如在一阶波动方程 $\dfrac{\partial u}{\partial t}+a\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ 上增加色散项 $\alpha\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ 和非线性影响 $\beta u\dfrac{\partial u}{\partial x}$, 成为三阶非线性方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\beta u\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

作变换 $\tau=\alpha t$, $\xi=x-at$, $\eta=\dfrac{\beta}{\alpha}u$, 得到著名的**KdV (Korteweg–de Vries) 方程**

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau}+\frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3}+\eta\frac{\partial \eta}{\partial \xi}=0.$$

通过重新尺度 $\overline{\tau}=c_1\tau$, $\overline{\xi}=c_2\xi$, $\overline{\eta}=c_3\eta$, 可改变 KdV 方程各项的系数, 常用的形式为

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau}+\frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3}+6\eta\frac{\partial \eta}{\partial \xi}=0. \tag{1.1.10}$$

KdV 方程最早 (1895 年) 作为浅水中长波的传播模型提出, 20 世纪 60 年代以后又陆续在流体波的碰撞、等离子体物理、格点动力学等问题的研究中出现, 成为非线性问题的一个典型方程.

有意思的是, KdV 方程中的 η 可作为一维定态薛定谔方程

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\eta\psi=\lambda\psi \tag{1.1.11}$$

中的势函数出现. 正是基于这个发现, 自 20 世纪 70 年代以来出现了求解非线性方程的反散射方法, 以及由此而蓬勃发展的非线性科学.

1.2 定解问题及其适定性

反映某类物理过程的微分方程并不能完全确定一个物理过程. 本节将讨论与此相关的通解和特解, 泛定方程和定解条件, 定解问题及其适定性等问题, 并给出常见的定解条件.

1.2.1　通解和特解

如果多元函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在空间区域 $V \subset \mathbf{R}^n$ 内具有方程中出现的各阶连续偏导数, 并使方程

$$F\left(x_1, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \cdots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \cdots \partial x_n^{m_n}}\right) = 0,$$
$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n \tag{1.2.1}$$

成为恒等式, 则称此函数为方程 (1.2.1) 在区域 V 内的**解**. 这里对解的要求很高, 也称为**古典解**.

例 1.2.1　求解一阶偏微分方程 $\dfrac{\partial u}{\partial \xi} = 0,\ u = u(\xi, \eta)$.

解　方程两边对 ξ 积分, 得

$$u = f(\eta).$$

对于任意 $C(\mathbf{R})$ 函数 f, u 都是方程在全平面的解.

例 1.2.2　求解二阶偏微分方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0,\ u = u(\xi, \eta)$.

解　两边依次对 ξ, η 积分, 得

$$u = f(\xi) + g(\eta).$$

对于任意 $C^1(\mathbf{R})$ 函数 f, g, u 都是方程在全平面的解.

可见偏微分方程的解族很大, 可以包含任意函数. 称 m 阶偏微分方程的含有 m 个任意函数的解为方程的**通解**, 不含任意函数或任意常数的解为方程的一个**特解**. 通解中的任意函数一旦确定, 通解就成为特解.

对于一般的偏微分方程, 找出通解非常困难. 根据方程的物理背景或数学特点, 找出某些特定形式的特解常常是有用的. 例如, 根据解析函数的实、虚部是调和函数, 即得二维 Laplace 方程 $\Delta_2 u = 0$ 的中心对称解 $u = \ln \dfrac{1}{r} (r \neq 0)$, 周期解 $u = \mathrm{e}^x \sin y$, 多项式解 $u = x^2 - y^2$ 等.

1.2.2　定解条件

方程的解中可出现任意函数, 不能确定一个真实的运动, 这是因为在建立方程的过程中, 仅考虑了系统内部各部分间的相互作用, 以及外界对系统内部的作用. 而一个确定的物理过程还要受到历史情况的影响和周围环境通过边界对运动的制约. 通常把反映系统内部作用导出的偏微分方程称为**泛定方程**, 把确定运动的制约条件称为**定解条件**, 泛定方程配以适当的定解条件构成一个偏微分方程的**定解问题**. 定解条件也需从具体的物理问题中导出, 常见的定解条件有以下几类.

1. *初始条件*

对于随着时间发展变化的物理过程, 某一时刻的状态将影响该时刻以后的过程, 该时刻的状态便是初始条件. 如弦振动问题中, 影响弦今后运动的条件有两个

$$\text{初位移} \qquad u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{1.2.2a}$$

$$\text{初速度} \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x). \tag{1.2.2b}$$

在热传导问题中, 影响今后温度变化的则是初始时刻的温度分布

$$u|_{t=0} = \varphi(x). \tag{1.2.3}$$

从数学上讲, 初始条件是给出未知函数 u 及其关于某个自变量 t 的若干阶偏导函数在同一时刻 $t = t_0$ 的值. 如果方程中关于 t 的最高阶导数是 m 阶的, 则应给出 $u, \dfrac{\partial u}{\partial t}, \cdots, \dfrac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}$ 在 $t = t_0$ 的值.

2. *边界条件*

在弦振动问题中, 对一条有限长的弦 ($x_1 \leqslant x \leqslant x_2$), 端点 $x = x_1$, $x = x_2$ 的运动状况对整根弦的运动有制约. 以左端点 $x = x_1$ 为例, 最简单的情况是端点运动已知, 即

$$u|_{x=x_1} = \mu_1(t), \tag{1.2.4}$$

称为**第 I 类边界条件**. 当端点固定在平衡位置时, $\mu_1(t) \equiv 0$, 称为**第 I 类齐次边界条件**.

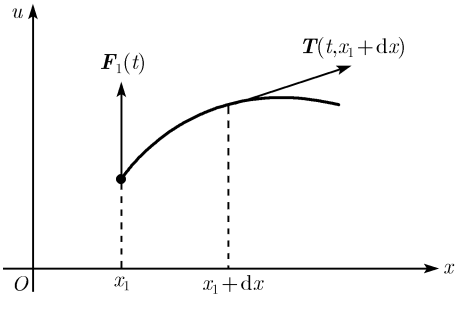


图 1.2.1

如果端点负荷已知, $x = x_1$ 点受横向外力 $\boldsymbol{F}_1(t) = F_1(t)\boldsymbol{u}^\circ$. 如图 1.2.1 所示, 在左端点取微元 $[x_1, x_1 + \mathrm{d}x]$, 在 $\boldsymbol{u}^\circ$ 方向该微元满足牛顿第二定律

$$\begin{aligned}
\rho \mathrm{d}x \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=x_1} &= F_1(t) + g(t, x_1)\mathrm{d}x + T_2(t, x_1 + \mathrm{d}x) \\
&= F_1(t) + g(t, x_1)\mathrm{d}x + T_2(t, x_1) + T_2(t, x_1 + \mathrm{d}x) - T_2(t, x_1) \\
&= F_1(t) + g(t, x_1)\mathrm{d}x + T_1 \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1} + T_1 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_1} \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

以上等式利用了 $T_2 = T_1 \dfrac{\partial u}{\partial x}$(1.1.1c) 式. 忽略一阶无穷小量, 得边界条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1} = -\frac{F_1(t)}{T_1}. \tag{1.2.5}$$

这里给出的是 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 在端点的值, 称为**第 II 类边界条件**. 当端点自由运动, 即 $F_1(t)\equiv 0$ 时, 称为**第 II 类齐次边界条件**.

如果端点弹性支承, 即端点除负荷 $\boldsymbol{F}_1(t)=F_1(t)\boldsymbol{u}^\circ$ 外, 还有弹性力 $-ku(t,x_1)\boldsymbol{u}^\circ$, 则端点的运动需满足

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1}=-\frac{F_1(t)-ku(t,x_1)}{T_1},$$

即

$$\left[ku-T_1\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=x_1}=F_1(t). \tag{1.2.6}$$

此时, 边界条件以 u 和 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 的线性组合给出, 称为**第 III 类边界条件**. 如果非弹性负荷 $F_1(t)\equiv 0$, 则为**第 III 类齐次边界条件**.

对于右端点 $x=x_2$, 可同样导出这三类边界条件, 与左端点不同的是在 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 项前添负号. 如果用 $\boldsymbol{n}$ 表示端点的外法向, 则左右两端的三类边界条件可统一表示为 u 和 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 的线性组合

$$\left[\alpha_i u+\beta_i\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{x=x_i}=F_i(t),\quad i=1,2. \tag{1.2.7}$$

这三类边界条件也会在热传导问题中出现. 以三维热传导问题为例, 当物体边界温度已知时, 导出第 I 类边界条件,

$$u(t,x,y,z)\Big|_{\partial V}=\mu(t,x,y,z)\Big|_{\partial V}.$$

特别地, 当边界温度保持零度时得第 I 类齐次边界条件.

当边界上沿外法向 $\boldsymbol{n}$ 的热流密度 $q(t,x,y,z)$ 已知时, 由热传导定律导出第 II 类边界条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial V}=-\left.\frac{q(t,x,y,z)}{k}\right|_{\partial V},$$

其中, k 为热传导系数. 常见的边界绝热情况, 相应于第 II 类齐次边界条件.

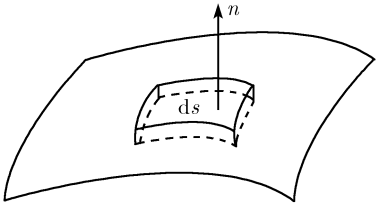


图 1.2.2

如果物体通过边界与外界自由热交换, 如图 1.2.2 所示, 在边界面上 (x,y,z) 处取小面元 $\mathrm{d}s$, 在时间段 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内从物体内部流入面元 $\mathrm{d}s$ 的热量为

$$-k\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{(t,x,y,z)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

根据**牛顿冷却定律**, 从外部流入面元的热量为

$$h(\theta-u)\Big|_{(t,x,y,z)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

其中, h 为两种物质间的热交换系数, $\theta=\theta(t,x,y,z)$ 为外界的温度. 能量守恒定律决定了热量不能在面元上积聚, 从而有

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial V}+h(\theta-u)\Big|_{\partial V}=0,$$

即为第 III 类边界条件

$$\left[hu+k\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{\partial V}=h\theta\Big|_{\partial V}.$$

当外界温度为 0° 时, 为第 III 类齐次边界条件.

在静电场问题中, 最常见的是边界接地的情况, 此时电位满足第 I 类齐次边界条件 $u\big|_{\partial V}=0$.

通过以上例子可见, 由 u 和 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 的线性组合构成的三类边界条件有广泛物理背景, 是我们今后讨论的重点. 但是在具体物理过程中也存在其他形式的线性边界条件, 甚至是非线性的边界条件.

*3. 衔接条件

有时在研究的物理系统中由于某种原因在某些部分产生了突变, 在产生突变的部分需添加衔接条件.

例如, 一根杆由两段不同材料的杆连接而成, 则连接点两边杆的纵振动需满足不同的方程

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=a_1^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2},\quad 0<x<x_0,$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=a_2^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2},\quad x_0<x<l,$$

$$a_1\neq a_2.$$

对于一个确定的运动, 除了杆的两端 $x=0,x=l$ 需满足一定的边界条件外, 在连接点 $x=x_0$, u_1 和 u_2 之间应有一定的联系. 如位移连续和纵向应力连续, 则在连接点应有条件

$$u_1\Big|_{x=x_0^-}=u_2\Big|_{x=x_0^+},$$

$$E_1\frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=x_0^-}=E_2\frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=x_0^+},$$

称之为**衔接条件**, 其中, E_1, E_2 为连接点两侧的杨氏模量.

在静电场问题中常常出现衔接条件. 在两种电介质的交界面 S 上, 电位应当连续, 即

$$u_1\Big|_s = u_2\Big|_s,$$

其中, u_1, u_2 分别为交界面两边的电位. 当交界面上不带自由电荷时, 电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的法向分量也应连续. 由 $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} = -\varepsilon \nabla u$, 此条件即为

$$\varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial n}\Big|_s = \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}\Big|_s,$$

其中, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 为交界面两边的介电常数. 也还有其他形式的衔接条件.

1.2.3 定解问题及其适定性

泛定方程与适当的定解条件构成的定解问题才是描述物理过程的完整的数学模型. 对一个泛定方程, 加什么样的定解条件, 加多少定解条件在物理上需由具体的问题确定. 如对于无界弦 $(-\infty < x < +\infty)$, 需将弦振动方程 (1.1.3) 配以初位移、初速度这样的初始条件 (1.2.2) 式, 构成**初值问题**; 如若弦有界 $(x_1 \leqslant x \leqslant x_2)$, 则除初始条件外还需增加两端的边界条件 (1.2.7) 式, 构成**混合问题**; 对于场位方程 (1.1.6) 这样的稳定方程, 只需考虑边界条件, 构成**边值问题**. 三个典型方程的这三类定解问题是本书讨论的重点.

从数学上说, 若泛定方程在区域 V 内的解, 以及其在定解条件中出现的偏导数, 都连续到 V 的边界, 且在边界上满足定解条件, 则称此解为**定解问题的解**(**古典解**). 如果一个定解问题的解**存在**、**唯一**和**稳定**, 则称此定解问题是**适定的**. 解的存在唯一对一个确定的物理过程当然是必需的. 这里的“稳定”性, 是指当定解条件的偏差在一定的小范围时, 相应的定解问题解的偏差可以控制在任意事先给定的小范围内. 因为定解条件通常由测量得到, 误差不可避免, 稳定性的重要不言自明. 定解问题的适定性是偏微分方程理论研究的重要内容, 本教材讨论的多数问题都是适定的, 将在一定场合说明.

不适定的问题是存在的.1917 年阿达玛 (Hadamard) 曾给出著名例子：定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < \pi,\ y > 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \\ u|_{y=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \dfrac{1}{n}\sin nx, \quad n \text{ 为整数} \end{cases}$$

有唯一解

$$u(x, y) = \frac{1}{n^2}\sin nx \mathrm{sh}\, ny.$$

当 $n \to +\infty$ 时, 初始条件一致趋于 0, 但对任意固定的 y, 当 $n \to +\infty$ 时, 解 $u(x,y)$ 无界, 因而解不稳定. 这说明调和方程的混合问题是不适定的.

定解问题的适定性对于确定性的物理过程是重要的, 但是随着科学技术的发展, 不适定的问题也有其用武之地, 比如在利用静电场作物理探矿中就会遇到不适定的场位方程的初值问题.

1.3 一阶线性 (拟线性) 偏微分方程的通解法和特征线法

先求通解再确定特解, 是我们求解常微分方程定解问题时采用过的方法. 对某些偏微分方程, 也能通过积分求出通解, 进而确定出满足定解条件的特解.

1.3.1 两个自变量的一阶线性偏微分方程

今有两个自变量的一阶线性偏微分方程

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y), \tag{1.3.1}$$

其中, 系数 $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ 是平面区域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上的连续函数, 且 $a(x,y)$, $b(x,y)$ 不同时为零. $f(x,y)$ 在 D 上连续, 称为方程的非齐次项. 若 $f(x,y) \equiv 0$, 方程为齐次的.

如果在 D 上, $a(x,y) \equiv 0$, $b(x,y) \neq 0$, 方程 (1.3.1) 改写为

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{c(x,y)}{b(x,y)}u = \frac{f(x,y)}{b(x,y)}. \tag{1.3.2}$$

利用一阶线性常微分方程的求解方法得其通解

$$u(x,y) = \exp\left(-\int \frac{c(x,y)}{b(x,y)}\mathrm{d}y\right) \cdot \left[\int \exp\left(\int \frac{c(x,y)}{b(x,y)}\mathrm{d}y\right)\frac{f(x,y)}{b(x,y)}\mathrm{d}y + g(x)\right], \tag{1.3.3}$$

其中, $g(x)$ 为任意 C^1 函数.

如果在 D 上, $a(x,y)b(x,y) \neq 0$, 方程 (1.3.1) 不能直接积分求解. 试作待定的自变量代换

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x,y), \\ \eta = \psi(x,y), \end{cases} \tag{1.3.4a}$$

要求其雅可比 (Jacobi) 行列式

$$J(\varphi,\psi) = \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1.3.4b}$$

以保证新变量 ξ,η 的相互独立性. 利用链式法则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \eta},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$u=u(x,y)$ 的方程 (1.3.1) 变为 $u=u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))=u(\xi,\eta)$ 的新方程

$$\left(a\frac{\partial \varphi}{\partial x}+b\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial \xi}+\left(a\frac{\partial \psi}{\partial x}+b\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial \eta}+cu=f. \tag{1.3.5}$$

若取 $\xi=\varphi(x,y)$ 是齐次一阶线性偏微分方程

$$a(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0 \tag{1.3.6}$$

的解, 则新方程 (1.3.5) 成为 (1.3.2) 型的方程

$$\left(a\frac{\partial \psi}{\partial x}+b\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial \eta}+cu=f, \tag{1.3.7}$$

对 η 积分便可求出通解.

以下求解一阶线性偏微分方程 (1.3.6). 它的解与相应的常微分方程

$$a(x,y)\mathrm{d}y-b(x,y)\mathrm{d}x=0, \tag{1.3.8a}$$

亦即

$$\frac{\mathrm{d}x}{a(x,y)}=\frac{\mathrm{d}y}{b(x,y)} \tag{1.3.8b}$$

的解之间存在确定的关系.

定理 1.3.1 若 $\varphi(x,y)=h$(常数) 是一阶常微分方程 (1.3.8a) 在区域 D 内的隐式通解 (积分曲线族), 则 $\xi=\varphi(x,y)$ 是一阶线性偏微分方程 (1.3.6) 在区域 D 上的一个解.

证 设 $\varphi(x,y)=h$ 是方程 (1.3.8a) 在 D 内的隐式通解, 则过 D 内一点 (x_0,y_0) 有一条积分曲线 $\Gamma_0:\ \varphi(x,y)=\varphi(x_0,y_0)=h_0$, 此隐式解满足方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{a(x,y)}=\frac{\mathrm{d}y}{b(x,y)}.$$

又沿此积分曲线 Γ_0, 有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathrm{d}y=0,$$

故在 Γ_0 上, 有

$$a(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0.$$

由于 (x_0, y_0) 是 D 内任意一点, 故 $\xi = \varphi(x, y)$ 是一阶线性偏微分方程 (1.3.6) 在 D 上的解.

定理的逆命题也成立.

由常微分方程理论, 一阶常微分方程 (1.3.8a) 在区域 D 内存在且仅存在一族独立的积分曲线. 如果求出了方程 (1.3.8a) 的积分曲线族 $\varphi(x, y) = h$, 再任取函数 $\psi(x, y)$, 使在 D 上 $J(\varphi, \psi) \neq 0$, 以此 φ 和 ψ 作变量代换 (1.3.4a) 式, 一阶线性偏微分方程 (1.3.1) 便可化为可积分求通解的方程 (1.3.7).

特别地, 当 $c(x, y) = f(x, y) \equiv 0$ 时, 方程 (1.3.1) 即为方程 (1.3.6), 相应的新方程 (1.3.7) 为 $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0$, 其通解为 $u = g(\xi)$, $g(\xi)$ 为任意 C 函数. 代回原自变量, 得方程

$$a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

的通解 $u = g(\varphi(x, y))$. 这里,$\varphi(x, y) = h$ 是常微分方程 (1.3.8a) 的隐式通解, $g(\xi)$ 是任意 C^1 函数.

如果给定 u 在某一曲线 $\Gamma:\ \gamma(x, y) = d$ 上的值, 则需求解定解问题

$$\begin{cases} a(x, y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u\big|_{\gamma(x,y)=d} = \theta(y), \end{cases}$$

用定解条件定出通解中的任意函数 $g(\xi)$ 即可.

这种求解定解问题的方法称之为**通解法**. 常微分方程 (1.3.8a) 或等价的 (1.3.8b) 称为一阶线性偏微分方程 (1.3.1) 的**特征方程**, 其积分曲线称之为**特征曲线**.

例 1.3.1 求解右行单波方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t > 0,\ -\infty < x < +\infty, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases}$$

其中, $a > 0$ 为常数.

解 特征方程为 $\mathrm{d}x - a\mathrm{d}t = 0$, 特征线族为 $x - at = h$. 令 $\xi = x - at$, $\eta = x$, 则方程化为

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

对 η 积分得通解 $u = g(\xi) = g(x - at)$, 其中, $g(\xi)$ 是任意 C^1 函数. 由初始条件

$$u\big|_{t=0} = g(x) = \varphi(x)$$

得该初值问题的解 $u(t, x) = \varphi(x - at)$.

在 (x,u) 平面上看 (图 1.3.1), $t=0$ 时 $u=\varphi(x)$, 对每个固定时刻 $t>0$, $u=\varphi(x-at)$, 其图形相当于曲线 $u=\varphi(x)$ 向右移动了 at, 波形的传播速度为 a. 称这样的解为**右行波解**.

在 (x,t,u) 空间看 (图 1.3.2), 波形沿特征线传播. 在特征线 $x-at=h$ 上, $u=\varphi(x-at)=\varphi(h)$, 故当观察者沿某条特征线前行时, 看到的波形始终不变. 如果初始扰动 $\varphi(x)$ 只发生在区间 $h_1\leqslant x\leqslant h_2$ 内, 则这个扰动将沿着 (x,t) 平面上的特征条形域 $h_1\leqslant x-at\leqslant h_2$ 传播.

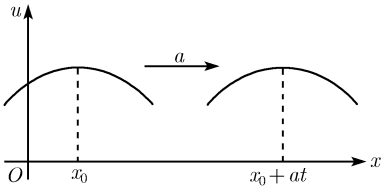


图 1.3.1

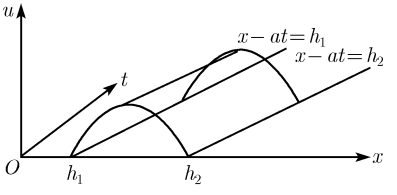


图 1.3.2

本例中初始条件给在非特征线的直线 $t=0$ 上, 从通解可唯一确定特解. 如果初始条件给在一条特征线 $x-at=h_0$ 上, 初始条件 $u\big|_{x-at=h_0}=g(x-at)\big|_{x-at=h_0}=g(h_0)=\varphi(x)$, 当 $\varphi(x)$ 为非常值函数时无解, 当 $\varphi(x)$ 为常数 φ_0 时有无穷多个解 $g(\xi)$, 只要 $g(h_0)=\varphi_0$.

对于左行单波方程 $\dfrac{\partial u}{\partial t}-a\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$, 同样可求得其通解为**左行波** $u=g(x+at)$, g 为任意 C^1 函数.

1.3.2　n 个自变量的一阶线性偏微分方程 $(n\geqslant 2)$

n 个自变量的一阶线性偏微分方程的一般形式为

$$\sum_{j=1}^{n}b_j\frac{\partial u}{\partial x_j}+cu=f, \tag{1.3.9}$$

其中, $b_j=b_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $j=1,2,\cdots,n$, $c=c(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $f=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是已知的区域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上的连续函数.

与 $n=2$ 时一样, 先来求解相应的齐次方程

$$\sum_{j=1}^{n}b_j\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}=0. \tag{1.3.10}$$

为此, 引入**特征方程组**

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{b_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{b_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{b_n}. \tag{1.3.11}$$

如选定变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的某一个 (如 x_n) 作为自变量, 特征方程 (1.3.11)

是 $n-1$ 个一阶常微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}x_n}=\dfrac{b_j}{b_n}$ $(j=1,2,\cdots,n-1)$ 组成的方程组, 等价于一个 $n-1$ 阶的常微分方程. 它的解是 n 维空间中的曲线, 称此积分曲线为一阶线性偏微分方程 (1.3.9) 的**特征曲线**.

如果引入参数 t, 特征方程组 (1.3.11) 可改写成

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}=b_j(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad j=1,2,\cdots,n,$$

积分曲线可表示为 $\Gamma:\ \{x_j=x_j(t),\ j=1,2,\cdots,n\}$. 如果能将方程组 (1.3.11) 中的某些方程凑成一个全微分形式的方程 $\mathrm{d}\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$, 则积分得到的关系式 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=h$ (常数) 称为常微分方程组 (1.3.11) 的一个**首次积分**. 由常微分方程理论, 一个 $n-1$ 阶常微分方程存在且最多存在 $n-1$ 个相互独立的首次积分. 这 $n-1$ 个独立的首次积分 $\varphi_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)=h_j$ $(j=1,2,\cdots,n-1)$ 的联立即以隐函数的形式给出了 (1.3.11) 式的隐式通解 (积分曲线族). 当 $n=2$ 时, 特征方程 (1.3.11) 只有一个独立的首次积分, 即为积分曲线族. 类似于 $n=2$ 的情形, 偏微分方程 (1.3.10) 的解与特征方程组 (1.3.11) 的首次积分之间有确定的关系.

定理 1.3.1′ 若 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=h$ 是特征方程组 (1.3.11) 在 $D\subset\mathbf{R}^n$ 内的一个首次积分, 则 $\xi=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一阶线性偏微分方程 (1.3.10) 在 D 上的一个解.

证 设 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=h$ 是特征方程组 (1.3.11) 的一个首次积分, 则沿着 (1.3.11) 式的任一条积分曲线 $\Gamma:\ \{x_j=x_j(t),\ j=1,2,\cdots,n\}$ 有

$$\mathrm{d}\varphi(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))=0,$$

即有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}\\=\ &b_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+b_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\cdots+b_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}=0.\end{aligned}$$

由于过 D 内任一点有且仅有一条积分曲线, 上式对于 D 内任一点成立, 故 $\xi=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是偏微分方程 (1.3.10) 在 D 上的解.

现在, 求解一阶线性偏微分方程 (1.3.9).

由定理 1.3.1′ 知, 如果找到特征方程组 (1.3.11) 的 $n-1$ 个独立的首次积分 $\varphi_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)=h_j$ $(j=1,2,\cdots,n-1)$, 作自变量的变量代换

$$\begin{cases}\xi_j=\varphi_j(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad j=1,2,\cdots,n-1,\\ \xi_n=\varphi_n(x_1,x_2,\cdots,x_n),\end{cases}\tag{1.3.12a}$$

其中, $\varphi_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 任取, 使在 D 上

$$J(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n) = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.3.12b}$$

代入方程 (1.3.9), 由链式法则得

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} b_j \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi_k}.$$

由定理 1.3.1′ 知, 当 $k = 1, 2, \cdots, n-1$ 时, 有 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} = 0$, $u = u(x_1, \cdots, x_n)$ 的方程 (1.3.9) 变成 $u = u(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 的方程

$$\left(\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi_n} + cu = f. \tag{1.3.13}$$

对 ξ_n 积分, 可得 (1.3.13) 式的通解. 再代回原来的自变量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 便得原方程 (1.3.9) 的通解.

特别地, 当 $c(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv 0$ 时, 方程 (1.3.9) 即为方程 (1.3.10), 变量代换 (1.3.12a) 式后的新方程为

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_n} = 0,$$

积分得通解

$$\begin{aligned} u &= g(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1}) \\ &= g(\varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ \varphi_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_n)), \end{aligned} \tag{1.3.14}$$

其中, $g(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1})$ 为任意 $n-1$ 元 C^1 函数.

如果再给出未知函数在 n 维空间的一条曲线 (非特征线) 上的值, 定出函数 g, 可得到特解. 遗憾的是, 一般而言, 实际找出常微分方程的首次积分和确定函数关系 g 并非易事.

例 1.3.2　求解初值问题

$$\begin{cases} \sqrt{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0, \\ u\big|_{z=1}=xy. \end{cases}$$

解 特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}}=\frac{\mathrm{d}z}{z},$$

有两个独立的首次积分 $\sqrt{x}-\sqrt{y}=c_1$ 和 $2\sqrt{y}-\ln z=c_2$, 故齐次方程的通解为

$$u=g(\sqrt{x}-\sqrt{y},\ 2\sqrt{y}-\ln z).$$

代入初始条件

$$u\big|_{z=1}=g(\sqrt{x}-\sqrt{y},2\sqrt{y})=xy,$$

为了确定函数 g, 不妨令 $p=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 和 $q=2\sqrt{y}$, 解得

$$y=\frac{1}{4}q^2,\quad x=\left(p+\frac{1}{2}q\right)^2,$$

故

$$g(p,q)=\frac{1}{4}q^2\left(p+\frac{1}{2}q\right)^2.$$

上述定解问题的解为

$$u=\left(\sqrt{y}-\frac{1}{2}\ln z\right)^2\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\ln z\right)^2.$$

例 1.3.3 求解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+u+xy, \\ u\big|_{t=0}=\varphi(x,y). \end{cases}$$

解 特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}t}{1}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\frac{\mathrm{d}y}{y},$$

积分得首次积分 $x\mathrm{e}^t=c_1, y\mathrm{e}^t=c_2$. 作变量代换

$$\xi=x\mathrm{e}^t,\quad \eta=y\mathrm{e}^t,\quad \tau=t,$$

方程变为一阶常微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=u(\xi,\eta,\tau)+\xi\eta\mathrm{e}^{-2\tau},$$

积分得通解

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{e}^{\tau}\left[\int \xi\eta \mathrm{e}^{-2\tau}\cdot \mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{d}\tau + g(\xi,\eta)\right] \\ &= -\frac{1}{3}\xi\eta \mathrm{e}^{-2\tau} + g(\xi,\eta)\mathrm{e}^{\tau} = -\frac{1}{3}xy + g(x\mathrm{e}^{t}, y\mathrm{e}^{t})\mathrm{e}^{t}. \end{aligned}$$

代入初始条件

$$\begin{aligned} u\big|_{t=0} &= -\frac{1}{3}xy + g(x,y) = \varphi(x,y), \\ g(x,y) &= \frac{1}{3}xy + \varphi(x,y), \end{aligned}$$

得该定解问题的解

$$u = -\frac{1}{3}xy + \mathrm{e}^{t}\left[\frac{1}{3}xy\mathrm{e}^{2t} + \varphi(x\mathrm{e}^{t}, y\mathrm{e}^{t})\right].$$

*1.3.3　一阶拟线性偏微分方程

若一个 m 阶偏微分方程关于未知函数的最高阶导数是线性的, 则称为**m 阶拟线性 (quasi-linear) 偏微分方程**. n 个自变量的一阶拟线性偏微分方程的一般形式为

$$\sum_{j=1}^{n} b_j(x_1, x_2, \cdots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_j} = c(x_1, x_2, \cdots, x_n, u), \tag{1.3.15}$$

它的求解可归结为 $n+1$ 维空间上一阶线性偏微分方程

$$\sum_{j=1}^{n} b_j(x_1, x_2, \cdots, x_n, u)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + c(x_1, x_2, \cdots, x_n, u)\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0 \tag{1.3.16}$$

的求解.

以两个自变量情形为例. 两个自变量的一阶拟线性偏微分方程为

$$a(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x,y,u), \tag{1.3.17}$$

系数 $a(x,y,u)$ 和 $b(x,y,u)$ 不同时为 0, 相应的三个自变量的一阶线性偏微分方程为

$$a(x,y,u)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + b(x,y,u)\frac{\partial \varphi}{\partial y} + c(x,y,u)\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0. \tag{1.3.18}$$

定理 1.3.2　若 $w = \varphi(x,y,u)$ 是一阶线性偏微分方程 (1.3.18) 的解, 则 $\varphi(x,y,u) = 0$ 是一阶拟线性偏微分方程 (1.3.17) 的隐式解.

证　设 $w = \varphi(x,y,u)$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \neq 0$ 是一阶线性偏微分方程 (1.3.18) 的解. 等值面

$\varphi(x,y,u)=0$ 给出了隐函数 $\varphi(x,y,u(x,y))=0$, 分别对 x,y 求导, 得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad 和 \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{1.3.19}$$

从中解出 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}$, 代入 (1.3.18), 消去 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}$, 得 (1.3.17). 说明在等值面 $\varphi(x,y,u)=0$ 上等式 (1.3.17) 成立, 即 $\varphi(x,y,u)=0$ 是一阶拟线性偏微分方程 (1.3.17) 的一个隐式解.

定理的逆命题也成立.

由定理 1.3.1′, 三个自变量的一阶线性偏微分方程 (1.3.18) 的通解可由常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{a(x,y,u)}=\frac{\mathrm{d}y}{b(x,y,u)}=\frac{\mathrm{d}u}{c(x,y,u)} \tag{1.3.20}$$

的首次积分确定. 从而有

推论 1.3.1 若 $\varphi_1(x,y,u)=h_1$, $\varphi_2(x,y,u)=h_2$ 是 (1.3.20) 的两个独立的首次积分, 则

$$g(\varphi_1(x,y,u),\ \varphi_2(x,y,u))=0 \tag{1.3.21}$$

是一阶拟线性方程 (1.3.17) 的隐式通解, g 是两个自变量的任意 C^1 函数.

对于拟线性方程 (1.3.17), 称常微分方程组 (1.3.20) 为它的**完全特征方程组**, (1.3.20) 的积分曲线为它的**完全特征曲线**.

一阶线性偏微分方程 (1.3.1)

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y)$$

也可看作一阶拟线性方程来求解, 它的完全特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{a(x,y)}=\frac{\mathrm{d}y}{b(x,y)}=\frac{\mathrm{d}u}{f(x,y)-c(x,y)u}. \tag{1.3.20$'$}$$

找出 (1.3.20)′ 式的两个独立的首次积分, 便可得到 (1.3.1) 式的通解.

例 1.3.4 求解初值问题

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial y}-y\dfrac{\partial u}{\partial x}=u, \\ u\big|_{y=0}=\theta(x). \end{cases}$$

解 完全特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{x}=\frac{\mathrm{d}x}{-y}=\frac{\mathrm{d}u}{u},$$

取第一个方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y},$$

积分得首次积分

$$\varphi(x,y,u)=x^2+y^2=c_1.$$

取第二个方程为

$$\frac{\mathrm{d}u}{u}=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{y}{x}\right)}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2},$$

积分得首次积分

$$\psi(x,y,u)=u\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}=c_2.$$

其雅可比行列式为

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,u)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y} & \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\end{vmatrix}=2y\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}\neq 0,\quad y\neq 0,$$

故这是两个独立的首次积分, 由推论 1.3.3 知, 方程有隐式通解

$$g(x^2+y^2,u\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}})=0,$$

也可解出显式通解

$$u=\mathrm{e}^{\arctan\frac{y}{x}}g_1(x^2+y^2),$$

其中, g,g_1 分别为任意 C^1 二元、一元函数. 代入初始条件

$$u\big|_{y=0}=g_1(x^2)=\theta(x),$$

令 $s=x^2$, 确定

$$g_1(s)=\begin{cases}\theta(\sqrt{s}), & x\geqslant 0,\\ \theta(-\sqrt{s}), & x<0,\end{cases}$$

从而得该初值问题的解

$$u=\theta\left(\operatorname{sgn}x\cdot\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{e}^{\arctan\frac{y}{x}}.$$

对于一阶拟线性方程的初值问题

$$\begin{cases}a(x,y,u)\dfrac{\partial u}{\partial x}+b(x,y,u)\dfrac{\partial u}{\partial y}=c(x,y,u), & (1.3.17)\\ u\big|_{x=x(s),\ y=y(s)}=\theta(s),\quad s\text{ 为参数}, & (1.3.17a)\end{cases}$$

除通解法外, 也可通过方程的完全特征线来构造解 (积分曲面).

如果在完全特征方程 (1.3.20) 中引入参数 t, 过 (x_0, y_0, u_0) 点的完全特征曲线由初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(x,y,u), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = b(x,y,u), \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = c(x,y,u), \end{cases} \tag{1.3.22}$$

$$(x,y,u)\big|_{t=0} = (x_0, y_0, u_0) \tag{1.3.22a}$$

确定. 如果初始曲线 Γ : $(x(s), y(s), \theta(s))$ 不是完全特征曲线, 则过 Γ 的特征曲线族由初值问题

$$\begin{cases} \text{方程 (1.3.22)}, \\ (x,y,u)\big|_{t=0} = (x(s), y(s), \theta(s)) \end{cases} \tag{1.3.22b}$$

确定. 可以验证其解 $x = x(t,s)$, $y = y(t,s)$, $u = u(t,s)$ 是拟线性方程初值问题 (1.3.17, 1.3.17a) 的参数解, 消去参数 t, s, 得到 x, y, u 的关系式 $f(x,y,u) = 0$, 是该初值问题的隐式解.

如果已求出完全特征方程的两个首次积分 $\varphi(x,y,u) = h_1$, $\psi(x,y,u) = h_2$, 则过 (x_0, y_0, u_0) 点的完全特征线为曲面 $\varphi(x,y,u) = \varphi(x_0,y_0,u_0)$ 和 $\psi(x,y,u) = \psi(x_0,y_0,u_0)$ 的交线. 过初始曲线 Γ 的特征线族为

$$\begin{cases} \varphi(x,y,u) = \varphi(x(s), y(s), \theta(s)), \\ \psi(x,y,u) = \psi(x(s), y(s), \theta(s)), \end{cases} \tag{1.3.23}$$

从中消去参数 s, 得到 x, y, u 的关系式 $f(x,y,u) = 0$, 是初值问题 (1.3.17, 1.3.17a) 的隐式解.

在例 1.3.4 中, 初始曲线 Γ : $x = s, y = 0, u = \theta(s)$, 由首次积分得过 Γ 的特征曲线族为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = s^2, \\ u\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}} = \theta(s), \end{cases}$$

消去 s 即得解

$$u = \theta\left(\operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{e}^{\arctan\frac{y}{x}}.$$

这种方法称为拟线性 (线性) 方程初值问题的**特征线方法**. 其几何意义是过初始曲线的完全特征线织成初值问题的积分曲面. 实际上, 在 (x,y,u) 空间的某一区域中给出了一个方向场 (a,b,c), 它是完全特征曲线的切向, 而方程 (1.3.17) 表明积

分曲面 $u=u(x,y)$ 的法向 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x},\ \dfrac{\partial u}{\partial y},\ -1\right)$ 与此切向垂直, 所以任意由完全特征曲线织成的光滑曲面均是方程 (1.3.17) 的解.

例 1.3.5(交通流) 设**交通密度** $\rho=\rho(t,x)$ 是高速公路 x 处 t 时刻每公里内的汽车数, **交通流** $q=q(t,x)$ 是 x 处 t 时刻单位时间通过的汽车数. 任取公路上一段 $[a,b]$, 并设该段公路上没有入口和出口, 显然成立积分形式的守恒定律

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b \rho(t,x)\mathrm{d}x = q(t,a)-q(t,b) = -\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}q(t,x)\mathrm{d}x,$$

由区间 $[a,b]$ 的任意性, 可得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0.$$

又设 **车流速度**为 $v=v(t,x)$, 显然 v 与交通密度 ρ 有关, $v=v(\rho)$, 且 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho}\leqslant 0$, 则交通流 $q=v(\rho)\rho(t,x)=q(\rho)$, 代入上述方程便得交通密度 $\rho(t,x)$ 满足的一阶拟线性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+b(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x}=0,\quad b(\rho)=q'(\rho).$$

如果已知初始时刻的交通密度

$$\rho\big|_{t=0}=\theta(x),$$

则构成初值问题.

完全特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}t}{1}=\frac{\mathrm{d}x}{b(\rho)}=\frac{\mathrm{d}\rho}{0},$$

有独立的首次积分

$$\rho=c_1,\quad x-b(\rho)t=c_2.$$

初始曲线 $\Gamma:\ t=0,x=s,\rho=\theta(s)$, 过 Γ 的完全特征线族

$$\begin{cases}\rho=\theta(s),\\ x-b(\rho)t=s,\end{cases}$$

消去 s, 得过 Γ 的积分曲面, 即满足初始条件的隐式解 $\rho=\theta(x-b(\rho)t)$. 若能解出 $\rho=\rho(t,x)$, 则得该初值问题的显式解.

我们看一特例, 求解交通流初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \rho}{\partial t}+2\rho\dfrac{\partial \rho}{\partial x}=0,\quad t>0,\ -\infty<x<+\infty,\\ \rho\big|_{t=0}=\theta(x)=\begin{cases}3, & x<0,\\ 4, & x\geqslant 0.\end{cases}\end{cases}$$

此时, 可得交通密度

$$\rho=\theta(x-2\rho t)=\begin{cases}3, & x<2\rho t,\\ 4, & x\geqslant 2\rho t.\end{cases}$$

易得 (图 1.3.3(a))

$$\rho=\begin{cases}3, & x<6t,\\ 4, & x\geqslant 8t.\end{cases}$$

而在区间 $6t\leqslant x<8t$ 中 ρ 的取值由初始时刻 $x=0$ 处 $\rho(0)$ 的跳跃引起, 过 $x=s=0$ 的完全特征线为

$$\begin{cases}\rho=\theta(0),\\ x-2\rho t=0,\end{cases}$$

即有 $x=2\rho t$ $(3<\rho<4)$, 从而得 (图 1.3.3(b))

$$\rho=\frac{x}{2t},\quad 6t<x<8t.$$

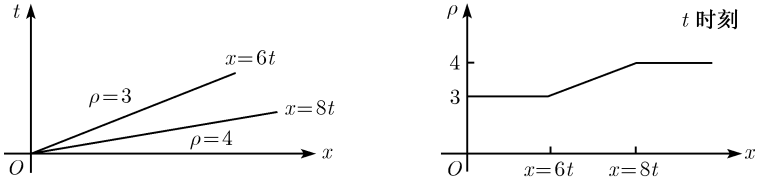


图 1.3.3

在应用问题中出现定解条件不连续的情况, 此时需分段求解, 作图常有助于对问题的理解.

以上对两个自变量一阶拟线性偏微分方程的求解方法可推广到任意 n 个 $(n\geqslant 2)$ 自变量的一阶拟线性偏微分方程.

定理 1.3.2′ 若 $w=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)$ 是 $n+1$ 个自变量的一阶线性偏微分方程 (1.3.16) 的解, 则 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)=0$ 是 n 个自变量的一阶拟线性偏微分方程 (1.3.15) 的隐式解.

称常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{b_1(\boldsymbol{x},u)}=\frac{\mathrm{d}x_2}{b_2(\boldsymbol{x},u)}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{b_n(\boldsymbol{x},u)}=\frac{\mathrm{d}u}{c(\boldsymbol{x},u)},\quad \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\tag{1.3.24}$$

为拟线性方程 (1.3.15) 的**完全特征方程**, 其解 (积分曲线) 为 (1.3.15) 式的**完全特征曲线**.

推论 1.3.1′　若 $\{\varphi_j(\boldsymbol{x},u)=h_j,\ j=1,2,\cdots,n\}$ 是完全特征方程 (1.3.24) 的 n 个独立的首次积分, 则 $g(\varphi_1(\boldsymbol{x},u),\ \varphi_2(\boldsymbol{x},u),\ \cdots,\varphi_n(\boldsymbol{x},u))=0$ 是拟线性方程 (1.3.15) 的通解, 其中, g 是任意 n 元的 C^1 函数.

当初始曲线 $\Gamma:\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{s}),\ u=\theta(\boldsymbol{s})$ 不是完全特征曲线时, 初值问题

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}b_j(\boldsymbol{x},u)\frac{\partial u}{\partial x_j}=c(\boldsymbol{x},u), & (1.3.15)\\ u\big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{s})}=\theta(\boldsymbol{s}),\quad \boldsymbol{s}=(s_1,s_2,\cdots,s_{n-1}) & (1.3.15a)\end{cases}$$

的解可通过首次积分 $\varphi_j(\boldsymbol{x},u)=\varphi_j(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{s}),\theta(\boldsymbol{s}))\ (j=1,2,\cdots,n)$ 的联立给出, 也可通过完全特征方程组的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}=b_j(\boldsymbol{x},u),\quad j=1,2,\cdots,n,\\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=c(\boldsymbol{x},u),\\ (\boldsymbol{x},u)\big|_{t=0}=(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{s}),\theta(\boldsymbol{s}))\end{cases}$$

的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{s}),\ u=u(t,\boldsymbol{s})$ 给出.

1.4　波动方程的行波解

某些二阶线性偏微分方程, 可分解为两个一阶线性偏微分方程, 有可能积分求出通解. 例如, 二阶方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

等价于两个一阶线性偏微分方程

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0\quad 和\ \frac{\partial u}{\partial y}+u=v.$$

第一个方程对 x 积分, 得 $v(x,y)=f(y),\ f(y)$ 为任意 C 函数. 第二个方程对 y 积分, 解得 $u(x,y)=\mathrm{e}^{-y}g(y)+h(y),\ g(y)$ 是任意 C^1 函数, $h(y)=\mathrm{e}^{-y}\displaystyle\int f(y)\mathrm{e}^{y}\mathrm{d}y$ 也是任意 C^1 函数.

本节将用此分解降阶的方法求出一维波动方程的通解 (行波解), 并通过若干例子介绍由通解确定特解的方法, 并从物理上对解的行波特点作简要分析.

1.4.1　一维波动方程的通解和初值问题的达朗贝尔 (d'Alembert) 公式

一维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\tag{1.4.1}$$

在 $a>0$ 为常数时可分解为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0,$$

等价于两个一阶线性偏微分方程的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}+a\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t}-a\dfrac{\partial u}{\partial x}=v.\end{cases}$$

由 1.3 节知, 这两个方程各有一族独立的特征线, 分别是

$$x-at=c_1,\quad x+at=c_2.$$

引入新的自变量

$$\xi=x-at,\quad \eta=x+at. \tag{1.4.2}$$

利用链式法则,$u=u(t,x)$ 的方程 (1.4.1) 变为 $u=u(\xi,\eta)$ 的新方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}=0. \tag{1.4.3}$$

相继对 η,ξ 积分, 代回原自变量, 得一维波动方程 (1.4.1) 的通解

$$u=f(\xi)+g(\eta)=f(x-at)+g(x+at), \tag{1.4.4}$$

其中, f,g 是任意一元 C^2 函数.

可见, 一维波动方程的解是由速度同为 a 的两列反向行进的波组成, 称为**行波解**. 其中, $f(x-at)$ 为右行波, $g(x+at)$ 为左行波, 波形 $f(\xi)$, $g(\eta)$ 则需由定解条件确定.

例 1.4.1 无限长弦的自由振动.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad t>0,-\infty<x<+\infty,\\[2ex] u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x).\end{cases} \tag{1.4.5}$$

解 将初始条件代入通解 (1.4.4),

$$\begin{aligned}&u\big|_{t=0}=f(x)+g(x)=\varphi(x),\\ &\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=-af'(x)+ag'(x)=\psi(x).\end{aligned}$$

积分第二式, 得

$$-f(x)+g(x)=\frac{1}{a}\int_0^x\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+c,$$

解 $f(x), g(x)$ 的联立方程组, 得

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x)-\frac{1}{a}\int_0^x\psi(\xi)\mathrm{d}\xi-c\right],$$
$$g(x)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x)+\frac{1}{a}\int_0^x\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+c\right].$$

从而, 初值问题 (1.4.5) 式的解必有形式

$$u(t,x)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{1.4.6}$$

称为**达朗贝尔 (d'Alembert) 公式**.

不难直接验证, 当初始条件 $\varphi(x)\in C^2(\mathbf{R})$, $\psi(x)\in C^1(\mathbf{R})$ 时达朗贝尔公式给出的 u 确是初值问题 (1.4.5) 式的古典解. 因此, 达朗贝尔公式是初值问题 (1.4.5) 式的唯一解.

又设 (1.4.5) 式中的初始条件有微小变化, $u\big|_{t=0}=\varphi(x)+h_1(x)$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)+h_2(x)$, 其中, $|h_j(x)|\leqslant\delta$ $(j=1,2)$. 记在此初始条件下得到的达朗贝尔解为 $\widetilde{u}(t,x)$, 则

$$\begin{aligned}|\widetilde{u}(t,x)-u(t,x)|&=\left|\frac{1}{2}(h_1(x-at)+h_1(x+at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}h_2(\xi)\mathrm{d}\xi\right|\\&\leqslant(1+t)\delta.\end{aligned}$$

故在任意有限时间范围内, 只要初始条件的误差 δ 足够小, 解的误差可控制在一定范围, 达朗贝尔公式给出的是稳定解. 由此可见, 一维波动方程的初值问题是**适定的**.

达朗贝尔公式清楚反映了初始扰动在弦上的传播过程. 初位移 $\varphi(x)$ 以 $\dfrac{1}{2}\varphi(x)$ 的波形, 以速度 a 向弦的两边传播 (图 1.4.1), 而且 x 点在 t 时刻由初位移引起的位移 $\dfrac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]$ 仅取决于 x 轴上 $x-at$ 和 $x+at$ 两点的初位移. 而初速度的影响稍见复杂, 是关于 x 轴对称的两个波形 $\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$ 和 $\dfrac{-1}{2a}\displaystyle\int_0^x\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$ 分别以速度 a 向左、右传播, x 点 t 时刻由初速度引起的位移 $\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$ 是一种累积效应, 取决于初速度在 $[x-at,x+at]$ 整个区间内的值. 称 x 轴上区间 $[x-at,x+at]$ 为点 (x,t) 的**依赖区间**, 可由过 (x,t) 的两条特征线确定. 反过来看, 初始时刻 $t=0$, x_0 点的初位移 $\varphi(x_0)$ 经过时间 t, 仅沿过 x_0 点的两条特征线传播到 x_0-at 和 x_0+at 两点, 而 x_0 点的初速度 $\psi(x_0)$ 则影响到区间 $[x_0-at,x_0+at]$ 中的所有点, 是一种“弥漫作用”. 若初始扰动发生在区间 $[h_1,h_2]$ 上, 则可唯一确

定过左、右端点的右、左行特征线所围的特征三角形区域上的 $u(t,x)$, 称此三角形为 $[h_1,h_2]$ 上初始扰动的**确定区域**. 而过左、右两端的左、右行特征线所围的无界特征梯形内各点的 $u(t,x)$ 都受到 $[h_1,h_2]$ 上初始扰动的影响, 称此梯形为初始扰动的**影响区域** (图 1.4.2).

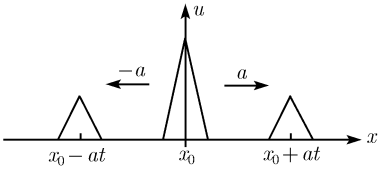


图 1.4.1

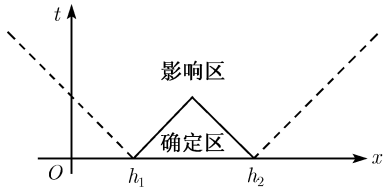


图 1.4.2

例 1.4.2 特征边值问题 (Goursat 问题)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u\big|_{x-at=0}=\varphi(x), \quad u\big|_{x+at=0}=\psi(x), \quad \varphi(0)=\psi(0). \end{cases} \tag{1.4.7}$$

解 将定解条件代入通解 $u=f(x-at)+g(x+at)$, 由

$$u|_{x-at=0}=f(0)+g(2x)=\varphi(x),$$
$$u|_{x+at=0}=f(2x)+g(0)=\psi(x),$$

解得

$$f(\xi)=\psi\left(\frac{\xi}{2}\right)-g(0),$$
$$g(\xi)=\varphi\left(\frac{\xi}{2}\right)-f(0).$$

有

$$f(0)+g(0)=\frac{1}{2}[\varphi(0)+\psi(0)],$$

故

$$u=\varphi\left(\frac{x+at}{2}\right)+\psi\left(\frac{x-at}{2}\right)-\varphi(0). \tag{1.4.8}$$

在例 1.3.1 中, 定解条件给在特征线上, 解不一定存在, 若存在则不唯一. 在本例中, 两条不同族的特征线上给出边界条件, 对任意 $\varphi(x),\psi(x)$, 只要 $\varphi(0)=\psi(0)$, 解都存在、唯一.

1.4.2 半直线上的问题 —— 延拓法

半直线上的弦振动问题, 有时可以先将初始条件延拓至整根直线, 再用达朗贝尔公式求解, 通过下例说明.

例 1.4.3　一端固定半无界弦的自由振动

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad t > 0, x > 0, \\ u(t,0) = 0, \\ u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x). \end{cases} \tag{1.4.9}$$

分析　这里的初始条件 $\varphi(x), \psi(x)$ 仅在 $x > 0$ 有定义, 故不能直接应用达朗贝尔公式. 但由达朗贝尔公式 (1.4.6) 可知, 如果定义在整个实轴上的 $\varphi(x), \psi(x)$ 为奇函数, 则

$$u(t,0) = \frac{1}{2}[\varphi(-at) + \varphi(at)] + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi = 0.$$

如果 $\varphi(x), \psi(x)$ 是偶函数, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{1}{2}[\varphi'(-at) + \varphi'(at)] + \frac{1}{2a}[\psi(at) - \psi(-at)] = 0.$$

因此, 可用**延拓法**将 (1.4.9) 式中的 $\varphi(x), \psi(x)$ 从 $x > 0$ 奇延拓到 $x < 0$, 再利用达朗贝尔公式, 求出的解必满足边界条件 $u(t,0) = 0$.

解　作辅助函数

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geqslant 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases} \qquad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geqslant 0, \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

由达朗贝尔公式得 (1.4.9) 式的解

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{2}[\Phi(x+at) + \Phi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi, & t \leqslant \dfrac{x}{a}, \\ \dfrac{1}{2}[\varphi(x+at) - \varphi(at-x)] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi, & t > \dfrac{x}{a}. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.4.10}$$

为理解此解的物理意义, 不妨设初速度 $\psi(\xi) = 0$. 当 $t \leqslant \dfrac{x}{a}$ 时, 端点的影响尚未传到 x 点,x 点的运动仍由初位移引起的左右行波 $\dfrac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)]$ 决定. 当 $t \geqslant \dfrac{x}{a}$ 时, 端点的影响已传到 x 点,x 点的运动由左行波 (**入射波**)$\dfrac{1}{2}\varphi(x+at)$ 和右行波 (**反射波**)$-\dfrac{1}{2}\varphi(at-x)$ 决定. 在端点 $x = 0$ 处, 入射波与反射波分别为 $\dfrac{1}{2}\varphi(at)$ 和 $-\dfrac{1}{2}\varphi(at)$, 故 $u(t,0) \equiv 0$.

类似地, 也可通过将 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 作偶延拓求解端点自由的半无界弦的自由振动.

1.4.3 中心对称的球面波

一般的高维波动方程定解问题的求解将在后面章节讨论. 对于中心对称的特殊情况, 可以通过未知函数的变量代换, 将方程约化为一维波动方程, 用达朗贝尔公式解之.

例 1.4.4 三维波动方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_3 u, \quad t > 0,\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} > 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(r), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(r). \end{cases} \tag{1.4.11}$$

解 由初始条件的球对称性, 可设未知函数 $u = u(t,r)$. 采用球坐标, 方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

作未知函数的代换

$$u(t,r) = \mathrm{e}^{\alpha(r)} v(t,r),$$

其中, $\alpha(r)$ 待定, 目的是消去一阶导数项. 代入 u 的方程, 得 v 的方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \left[2\alpha'(r) + \frac{2}{r} \right] \frac{\partial v}{\partial r} + \left[\alpha''(r) + \alpha'(r)^2 + \frac{2}{r}\alpha'(r) \right] v \right\},$$

当 $\alpha(r) = -\ln r$, 即 $v = ru$ 时, 则为一维波动方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}.$$

由一维波动方程的通解得三维波动方程的球面对称解

$$u(t,r) = \frac{1}{r}[f(r-at) + g(r+at)],$$

其中, $f(r-at)$ 为**发散波**, $g(r+at)$ 为**会聚波**, $\dfrac{1}{r}$ 为波形的衰减 $(r>1)$ 或扩张 $(r<1)$ 因子. 利用公式 (1.4.10) 可写出初值问题 (1.4.11) 式的解

$$u(t,r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2r}[(r+at)\varphi(r+at) + (r-at)\varphi(r-at)] + \dfrac{1}{2ar}\displaystyle\int_{r-at}^{r+at} \xi\psi(\xi)\mathrm{d}\xi, & t \leqslant \dfrac{r}{a}, \\ \dfrac{1}{2r}[(r+at)\varphi(r+at) - (at-r)\varphi(at-r)] + \dfrac{1}{2ar}\displaystyle\int_{at-r}^{r+at} \xi\psi(\xi)\mathrm{d}\xi, & t > \dfrac{r}{a}. \end{cases} \tag{1.4.12}$$

行波解对研究波动问题很重要, 对较复杂的方程, 寻找其行波特解常常是研究问题的第一步. 例如, 设 KdV 方程 (1.1.10)

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0$$

有行波解 $u = f(x - vt)$, v 为常数, 代入方程便可得常微分方程

$$f''' + 6f'f - vf' = 0, \quad f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}, \quad \xi = x - vt.$$

对 ξ 积分一次, 得

$$f'' + 3f^2 - vf = \frac{A}{2}, \quad A \text{ 为积分常数.}$$

两边乘以 f', 再对 ξ 积分, 便得一阶方程

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(f')^2 &= -f^3 + \frac{v}{2}f^2 + \frac{A}{2}f + \frac{B}{2}\\ &= -(f-a)(f-b)(f-c), \quad B \text{ 为积分常数,}\end{aligned}$$

其中, a, b, c 为 f 的三次方程的根. 则

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi} = \pm\sqrt{-(f-a)(f-b)(f-c)}.$$

利用椭圆积分, 对于 a, b, c 的不同情况可求得有理解、周期解等. 特别地, 当 $a = b \neq c$ 时, 可得**孤波解**(solitary wave solution)

$$u(t,x) = u_0 + 2k^2\mathrm{sech}^2\{k[x - (4k^2 + 6u_0)t + x_0]\}, \tag{1.4.13}$$

其中, $u_0 = a$, $k^2 = \frac{1}{2}(c-a)$, x_0 为积分常数. 这个孤波以速度 $4k^2 + 6u_0$ 向右传播, 波越高, 宽度越窄, 而行进速度越快.

用其他方法还可求出 KdV 方程的含有两个以上孤波的解, 并可分析得两个不同速度同向行进的孤波经相互作用后不改变其形状和速度, 继续行进, 具有粒子性质, 故称之为**孤子解**(soliton solution).

1.5　二阶线性偏微分方程的分类和标准式

在 1.1 节中导出的波动方程、热传导方程和场位方程都属二阶线性偏微分方程. 一般地 ,n 个自变量的二阶线性偏微分方程可表示为

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x_1,\cdots,x_n)u = f(x_1,\cdots,x_n). \tag{1.5.1}$$

当系数 a_{ij}, b_j, c 均为常数时, 称为**常系数线性偏微分方程**, 否则为变系数的, 且总可假定 $a_{ij} = a_{ji}$. 方程中不含未知函数的项 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 称为**非齐次项**, 当 $f \equiv 0$ 时方程为**二阶齐次线性偏微分方程**, 否则为非齐次的.

作为 (1.5.1) 式的特殊情况, 一维波动方程 (1.4.1) 能分解为两个一阶线性偏微分方程, 从而利用特征线求出其通解. 对于一般的二阶线性偏微分方程 (1.5.1), 本节将通过自变量的变量代换化简方程中的二阶偏导数部分, 并用方程在变量代换下的不变性对方程进行分类. 这里我们只讨论两个自变量的情形.

1.5.1 特征方程和特征线

两个自变量的二阶齐次线性偏微分方程为

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}+cu=0, \tag{1.5.2}$$

其中, a_{11},a_{12},a_{22} 不同时为 0, 这里略写了已知函数 a_{ij},b_j $(i,j=1,2)$ 和 c 的自变量.

设有自变量的变量代换

$$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y),\\ \eta=\psi(x,y),\end{cases} \tag{1.5.3}$$

其中, 函数 φ,ψ 有二阶连续偏导, 雅可比 (Jacobi) 行列式

$$J=\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0, \tag{1.5.4}$$

以保证函数 φ,ψ 相互独立, 有反函数存在. 未知函数 u 作为新的自变量 ξ,η 的函数仍记为 $u(\xi,\eta)$, 利用复合函数求导的链式法则, 可将方程 (1.5.2) 变成一个新的二阶线性偏微分方程

$$A_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2A_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+A_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+B_1\frac{\partial u}{\partial\xi}+B_2\frac{\partial u}{\partial\eta}+Cu=0, \tag{1.5.5}$$

其中, 二阶偏导数项的系数

$$\begin{aligned}A_{11}&=a_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2,\\ A_{12}&=a_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+a_{12}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+a_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y},\\ A_{22}&=a_{11}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2,\end{aligned} \tag{1.5.6}$$

其他系数

$$B_1=a_{11}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+b_2\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$B_2 = a_{11}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial\psi}{\partial x} + b_2\frac{\partial\psi}{\partial y}, \tag{1.5.7}$$
$$C = c(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)).$$

为化简方程中的二阶偏导数部分, 由 (1.5.6) 式可见, 若选取 $\varphi(x,y)$ 或 $\psi(x,y)$ 是一阶非线性偏微分方程

$$a_{11}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0 \tag{1.5.8}$$

的解, 则新方程中 A_{11} 与 A_{22} 至少有一个为 0, 方程化简.

类似于 1.3 节中对一阶线性偏微分方程的讨论, 一阶偏微分方程 (1.5.8) 的求解归结为一阶常微分方程

$$a_{11}(\mathrm{d}y)^2 - 2a_{12}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + a_{22}(\mathrm{d}x)^2 = 0 \tag{1.5.9}$$

的求解. 相应地, 有

定理 1.5.1 若 $\varphi(x,y) = h$ (h 为常数) 是常微分方程 (1.5.9) 的隐式通解 (积分曲线族), 则 $z = \varphi(x,y)$ 是偏微分方程 (1.5.8) 的解. 定理的逆命题也成立.

证明同于定理 1.3.1 的证明, 这里从略.

定理 1.5.1 揭示了常微分方程 (1.5.9) 与二阶线性偏微分方程 (1.5.2) 之间的关系, 提供了化简二阶线性偏微分方程的具体方法. 称一阶常微分方程 (1.5.9) 为二阶线性偏微分方程 (1.5.2) 的**特征方程**, 称特征方程的积分曲线为方程 (1.5.2) 的**特征曲线**.

1.5.2 方程的分类、化简和标准形

特征方程 (1.5.9) 的解取决于它的**判别式**

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}. \tag{1.5.10}$$

由 (1.5.6) 式可推出, 二阶线性偏微分方程 (1.5.2) 经过变量代换 (1.5.3) 后得到的新方程 (1.5.5) 式的判别式

$$A_{12}^2 - A_{11}A_{22} = J^2\Delta.$$

当 Jacobi 行列式 $J \neq 0$ 时, 在自变量的变量代换下, 判别式 Δ 的符号保持不变, 反映了方程的本性, 据此可将方程分类.

在 (x_0, y_0) 点, 若 $\Delta > 0$, 则称二阶线性偏微分方程 (1.5.2) 式在 (x_0, y_0) 点为**双曲型**的; 若 $\Delta = 0$, 则称 (1.5.2) 式在 (x_0, y_0) 为**抛物型**的; 若 $\Delta < 0$, 则称 (1.5.2) 式在 (x_0, y_0) 为**椭圆型**的. 若在平面区域 D 内有 $\Delta > 0$ 或 $\Delta = 0$, 或 $\Delta < 0$, 则相应地称方程 (1.5.2) 在区域 D 内为**双曲型、抛物型**或**椭圆型方程**. 若方程在区域 D

的一部分是双曲型的, 另一部分是椭圆型的, 而在交界线上是抛物型的, 则称该方程在 D 内是**混合型方程**.

易见, 弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

的 $\Delta \equiv a^2 > 0$, 一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

的 $\Delta \equiv 0$, 二维 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

的 $\Delta = -1 < 0$, 它们在全平面上依次为双曲型方程、抛物型方程和椭圆型方程.

对于三种类型的二阶线性偏微分方程, 可按以下步骤化简.

当 $\Delta > 0$ 时, 特征方程 (1.5.9) 可分解为两个一阶常微分方程. 不妨设 $a_{11} \neq 0$, 此时, 有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_{12} + \sqrt{\Delta}}{a_{11}} \quad \text{和} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_{12} - \sqrt{\Delta}}{a_{11}},$$

解得两族特征线

$$\varphi(x, y) = h_1 \quad \text{和} \quad \psi(x, y) = h_2.$$

令 $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, 由定理 1.5.1 和公式 (1.5.6) 知 $A_{11} = A_{22} = 0$, 新方程 (1.5.5) 有简单形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2A_{12}}(B_1 u_\xi + B_2 u_\eta + Cu) = 0. \tag{1.5.11}$$

因为沿两族特征线分别有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathrm{d}y = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \psi}{\partial y}\mathrm{d}y = 0,$$

从而

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big/ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{a_{12} + \sqrt{\Delta}}{a_{11}}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big/ \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{a_{12} - \sqrt{\Delta}}{a_{11}}.$$

由 $a_{11} \neq 0$ 可知 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\dfrac{\partial \psi}{\partial y} \neq 0$. 从 (1.5.4) 式算得

$$J = -\frac{2\sqrt{\Delta}}{a_{11}} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \neq 0,$$

故 ξ,η 是两个独立的变量. 同理, 由 (1.5.6) 可算得

$$A_{12}=-\frac{2\Delta}{a_{11}}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\neq 0.$$

而 B_1,B_2,C 可由公式 (1.5.7) 算出.

若对方程 (1.5.11) 再作变量代换

$$s=\frac{1}{2}(\xi+\eta),\quad t=\frac{1}{2}(\xi-\eta),$$

可得方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{1}{\widetilde{A}_{11}}(\widetilde{B}_1u_t+\widetilde{B}_2u_s+\widetilde{C}u)=0. \tag{1.5.12}$$

方程 (1.5.11) 和 (1.5.12) 都称为**双曲型方程的标准形**.

当 $\boldsymbol{\Delta=0}$ 时, 由特征方程 (1.5.9) 只能得一个一阶线性常微分方程. 不妨设 $a_{11}\neq 0$, 该方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_{12}}{a_{11}},$$

解得一族特征曲线 $\varphi(x,y)=h$. 任取二元函数 $\psi(x,y)$, 使 $J=\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}\neq 0$. 作变量代换

$$\xi=\varphi(x,y),\quad \eta=\psi(x,y),$$

可得 $A_{11}=0,\ A_{22}\neq 0$. 因 $a_{12}^2=a_{11}a_{22},\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\Big/\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=-\dfrac{a_{22}}{a_{11}}$, 从 (1.5.6) 可得

$$A_{12}=\frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\left(a_{11}\frac{\partial\psi}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=0,$$

新方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{1}{A_{22}}\left(B_1\frac{\partial u}{\partial\xi}+B_2\frac{\partial u}{\partial\eta}+Cu\right)=0, \tag{1.5.13}$$

称方程 (1.5.13) 为**抛物型方程的标准形**.

当 $\boldsymbol{\Delta<0}$ 时, 特征方程 (1.5.9) 只能在复数域内分解成两个一阶方程. 不妨设 $a_{11}\neq 0$, 相应的一阶方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_{12}+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{a_{11}}\quad 和\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_{12}-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{a_{11}},$$

此时, 不存在实特征线, 特征方程 (1.5.9) 的隐式通解为

$$\varphi(x,y)\pm\mathrm{i}\psi(x,y)=h.$$

为避免引入复变量, 作变换

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x,y), \\ \eta = \psi(x,y), \end{cases}$$

由定理 1.5.1 将 $z = \varphi(x,y) \pm \mathrm{i}\psi(x,y)$ 代入方程 (1.5.8), 分别取其实、虚部, 可得 $A_{11} = A_{22},\ A_{12} = 0$, 则有新方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{A_{11}}\left(B_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + Cu\right) = 0. \tag{1.5.14}$$

称方程 (1.5.14) 为**椭圆型方程的标准形**.

一维波动方程、热传导方程和二维调和方程正是三类方程的最简单的标准形.

例 1.5.1 求方程

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

的通解.

解 $\Delta = (xy)^2 - x^2 y^2 = 0$, 方程为抛物型, 特征方程

$$x^2(\mathrm{d}y)^2 + 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + y^2(\mathrm{d}x)^2 = (x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x)^2 = 0,$$

即

$$y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0.$$

积分得一族特征线

$$xy = c.$$

作变量代换

$$\xi = xy, \quad \eta = y,$$

可把方程变为

$$\eta u_{\eta\eta} + u_\eta = 0.$$

令 $v = u_\eta$, 得

$$\eta v_\eta + v = 0,$$

解之得

$$u_\eta = v = \varphi(\xi)\eta^{-1}.$$

所以

$$u = \varphi(\xi)\ln|\eta| + \psi(\xi) = \varphi(xy)\ln|y| + \psi(xy), \quad y \neq 0,$$

其中, φ, ψ 是任意二次可微函数.

例 1.5.2 空气动力学中的特里科米 (Tricomi) 方程

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0,$$

求其标准形.

解 判别式 $\Delta = -y$, 特征方程为

$$y(\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}x)^2 = 0.$$

当 $y < 0$ 时, 方程为双曲型. 特征方程分解为

$$(\mathrm{d}x + \sqrt{-y}\mathrm{d}y)(\mathrm{d}x - \sqrt{-y}\mathrm{d}y) = 0,$$

解得两族特征曲线

$$x \mp \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = c.$$

作变量代换

$$\begin{cases} \xi = x - \dfrac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}, \\ \eta = x + \dfrac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}, \end{cases}$$

可得方程的标准形

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{6(\xi - \eta)}(u_\eta - u_\xi) = 0.$$

当 $y > 0$ 时, 方程为椭圆型. 特征方程分解为

$$(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\sqrt{y}\mathrm{d}y)(\mathrm{d}x - \mathrm{i}\sqrt{y}\mathrm{d}y) = 0,$$

解得两族复特征曲线

$$x \pm \mathrm{i}\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = c.$$

令 $\xi = x$, $\eta = \dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$, 代入原方程, 得方程的标准形

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}u_\eta = 0.$$

当 $y = 0$ 时, 方程为抛物型. 在全平面上 Tricomi 方程是混合型方程.

本例中, 方程化简为标准形, 但仍无法积分求出通解.

以上对两个自变量的二阶线性偏微分方程 (1.5.2) 的分类化简类似于对其二阶导数部分相应的二次型

$$q(\lambda_1, \lambda_2) = a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2$$

的分类化简. 推广到 n 个自变量的方程 (1.5.1), 在 $\boldsymbol{x}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 的二阶导数部分

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}^0)\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right|_{\boldsymbol{x}^0} \tag{1.5.15}$$

相应的二次型为

$$q(\boldsymbol{\lambda})=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}^0)\lambda_i\lambda_j.$$

由线性代数中的二次型理论, 存在线性变换

$$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)^{\mathrm{T}}=(d_{ij}(\boldsymbol{x}^0))_{n\times n}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)^{\mathrm{T}},$$

其中, 变换矩阵 $(d_{ij}(\boldsymbol{x}^0))_{n\times n}$ 非退化,T 表示矩阵转置, 使 $q(\boldsymbol{\lambda})$ 化为标准形

$$q(\boldsymbol{\lambda})=Q(\boldsymbol{\mu})=\sum_{j=1}^{k}\mu_j^2-\sum_{j=k+1}^{k+l}\mu_j^2,\quad k+l\leqslant n.$$

虽然变换矩阵 $(d_{ij}(\boldsymbol{x}^0))_{n\times n}$ 并非唯一, 但正负惯性指数 k, l 是唯一确定的. 如果在 $\boldsymbol{x}^0$ 点附近作相应的自变量代换

$$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}=(d_{ij}(\boldsymbol{x}^0))_{n\times n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},$$

在 $\boldsymbol{x}^0$ 点 (1.5.1) 的二阶导数部分 (1.5.15) 化简为

$$\sum_{j=1}^{k}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_j^2}\right|_{\boldsymbol{\xi}^0}-\sum_{j=k+1}^{k+l}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_j^2}\right|_{\boldsymbol{\xi}^0},\quad k+l\leqslant n. \tag{1.5.16}$$

当 $k+l=n$, $kl>0$ 时称方程 (1.5.1) 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点为**双曲型方程**, 特别地, 当 $k=n-1$ (或 $l=n-1$) 时称方程 (1.5.1) 为**狭义双曲型方程**; 当 $k+l=n$, $kl=0$ 时称方程 (1.5.1) 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点为**椭圆型方程**; 当 $k+l<n$ 时称方程 (1.5.1) 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点为**抛物型方程**, 特别地, 当 $k=n-1$ (或 $l=n-1$) 时称方程 (1.5.1) 为**狭义抛物型方程**.

如果方程 (1.5.1) 为常系数的, 则在 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中为同一类型, $d_{ij}(\boldsymbol{x})=d_{ij}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 无关, 作自变量代换

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}=D\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\quad D=(d_{ij}),\quad \boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),\quad \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

常系数二阶线性方程 (1.5.1) 化为标准形

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_j^2}-\sum_{j=k+1}^{k+l}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_j^2}+\sum_{j=1}^{n}B_j\frac{\partial u}{\partial\xi_j^2}+Cu=0.$$

1.6　叠加原理和齐次化原理

从通解求特解的方法对多数偏微分方程定解问题不适用. 求解线性偏微分方程定解问题较多采用以下做法：先求方程的一族特殊解, 再将这族特殊解作适当线性叠加求得定解问题的特解. 本节将介绍这种做法的理论根据 —— 线性叠加原理, 以及由叠加原理导出的处理非齐次方程初值问题的齐次化原理.

1.6.1　线性叠加原理

n 个自变量的二阶线性偏微分方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{j=1}^{n} b_j\frac{\partial u}{\partial x_j}+cu=f,$$

引入偏微分算子

$$L=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{j=1}^{n} b_j\frac{\partial}{\partial x_j}+c, \tag{1.6.1}$$

则可简单表示为

$$Lu(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

一般地, 称从一个函数类 (定义域) 到另一个函数类 (值域) 的映射 T 为一个**算子**. 如果定义域与值域都是数域 Λ 上的线性空间, 对定义域中任意两个函数 u_1,u_2 和 Λ 中任意两个数 λ_1,λ_2 有 $T(\lambda_1u_1+\lambda_2u_2)=\lambda_1Tu_1+\lambda_2Tu_2$, 则称 T 是**线性算子**.

显然, 上述二阶偏微分算子 (1.6.1) 式是函数空间 C^2 到 C 的线性算子, Laplace 算子 $\Delta_3=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ 是其特殊情况. Fourier 变换 $F[f(x)]=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x$, Laplace 变换 $L[f(t)]=\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$ 都是线性积分算子. 若记 $L_1=\lim\limits_{t\to 0}$, $L_2=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\partial}{\partial t}$, $L_3=\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\left(\alpha+\beta\dfrac{\partial}{\partial n}\right)$, 则初始条件、边界条件均可表示为线性算子形式

$$L_ju(\boldsymbol{x})=\varphi(\boldsymbol{x}).$$

由线性算子的定义, 我们有

定理 1.6.1(叠加原理)　设 L 是关于 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的任意阶线性微分算子 (常或偏), 则有

(1) **有限叠加原理**　若 $u_j(\boldsymbol{x})$ 满足 $Lu_j(\boldsymbol{x})=f_j(\boldsymbol{x})$ $(j=1,2,\cdots,m)$, 则当

$u(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j u_j(\boldsymbol{x})$ 时, 有 $Lu(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j f_j(\boldsymbol{x}),\ \lambda_j\in\Lambda,\ j=1,2,\cdots,m.$

(2) **级数叠加原理** 若 $u_j(\boldsymbol{x})$ 满足 $Lu_j(\boldsymbol{x})=f_j(\boldsymbol{x})$ $(j=1,2,\cdots)$, 则当 $u(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\lambda_j u_j(\boldsymbol{x})$ 时, 有 $Lu(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\lambda_j f_j(\boldsymbol{x}),\ \lambda_j\in\Lambda,\ j=1,2,\cdots.$

(3) **积分叠加原理** 若 $u(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})$ 满足 $Lu(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})=f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi}),\ \boldsymbol{\xi}\in V$, 则当 $U(\boldsymbol{x})=\int_V\lambda(\boldsymbol{\xi})u(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$ 时, 有 $LU(\boldsymbol{x})=\int_V\lambda(\boldsymbol{\xi})f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi},\ \lambda(\boldsymbol{\xi})\in\Lambda,\ \boldsymbol{\xi}\in V.$

有限叠加原理是线性算子定义的直接推广. 而级数叠加原理及积分叠加原理分别要求有关函数项级数、含参量积分收敛, 算子 L 与求和号、积分号可交换次序. 在经典意义下这些条件要求很高, 实际问题不一定能满足, 但是在推广意义下 (5.5 节), 这种交换总可进行. 今后我们将不受限制地使用这些叠加原理.

在物理问题中, 方程或定解条件中的非齐次项通常反映引起物理过程的源, 线性叠加原理则说明多个源共同作用的结果等于各个源单独作用的总和, 这在物理上称为**独立作用原理**, 这是线性问题的基本特征. 利用叠加原理我们总可以把一个较复杂的线性问题分解成若干简单线性问题来求解.

例 1.6.1 求解狄利克雷 (Dirichlet) 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=1, & x^2+y^2<1,\\ u\big|_{x^2+y^2=1}=x^2.\end{cases}$$

解 易见 $u_0=\dfrac{1}{4}(x^2+y^2)$ 是非齐次泛定方程的一个特解. 令 $v=u-u_0$, 由叠加原理知, v 满足边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,\\ v\big|_{x^2+y^2=1}=x^2-\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

解析函数 $z^n(z=x+\mathrm{i}y)$ 的实、虚部均为调和函数, 故 $1,x,y,x^2-y^2,xy$ 为次数不超过 2 的调和多项式, 故可设

$$v=a_0+a_1x+a_2y+a_3(x^2-y^2)+a_4xy,$$

由叠加原理知, 对任意一组 $\{a_j,\ j=0,1,\cdots,4\}$, v 都是拉普拉斯方程的解. 代入边界条件

$$\begin{aligned}v\big|_{x^2+y^2=1}&=a_0+a_1x+a_2\sqrt{1-x^2}+a_3(2x^2-1)+a_4x\sqrt{1-x^2}\\&=x^2-\frac{1}{4},\end{aligned}$$

比较系数, 可得

$$v = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(x^2 - y^2),$$

从而

$$u = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{4}.$$

对于非线性方程, 自然不存在线性叠加原理, 因此求解要困难得多. 对某些特殊的非线性方程, 如果能发现某种形式的叠加原理, 则对此非线性问题的研究有重大意义.

KdV 方程就有一种非线性叠加公式. 当 $w(t,x)$ 是方程

$$w_t + 3w_x^2 + w_{xxx} = 0 \tag{1.1.10}'$$

的解时, $u = w_x$ 是 KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.1.10}$$

的解. 可以验证 $w(t,x;k) = 2k\operatorname{th} k(x - 4k^2t)$ 是 (1.1.10)′ 的解, 对应的 $u(t,x;k) = w_x = 2k^2\operatorname{sech}^2 k(x-4k^2t)$ 是 KdV 的单孤子解 (1.4.13). 若记 $w_m = w(t,x;k_m)\,(m = 0,1,2,)$, 可以证明

$$w_{12} \overset{d}{=} w_0 + \frac{4(k_2^2 - k_1^2)}{w_2 - w_1}$$

仍是 (1.1.10)′ 的解. 例如, 取 $w_0 = 0$, 可得 KdV(1.1.10) 的双孤子解

$$u(x,t) = \frac{4(k_2^2 - k_1^2)[(k_2^2 - k_1^2) + k_1^2\operatorname{ch} 2\xi_2 + k_2^2\operatorname{ch}2\xi_1]}{[(k_2 - k_1)\operatorname{ch}(\xi_1 + \xi_2) + (k_2 + k_1)\operatorname{ch}(\xi_2 - \xi_1)]^2},$$

其中, $\xi_j = k_j(x - 4k_j^2t)$, $j = 1,2$. 同样可得 w_{13}, 再由

$$w_{123} \overset{d}{=} w_1 + \frac{4(k_3^2 - k_2^2)}{w_{13} - w_{12}},$$

可得 KdV 的三孤子解.

1.6.2 齐次化原理 (冲量原理)

例 1.6.1 中通过求非齐次方程的一个特解将方程齐次化. 齐次化原理将解决一般非齐次发展方程齐次化的问题.

仍以理想弦的横振动为例, 考虑在外力作用下弦的纯受迫振动

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), \quad t > 0,\ -\infty < x < +\infty, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{1.6.2}$$

这里, $f(t,x)$ 是作用在弦身单位质量上的外力,$u(t,x)$ 是由此外力从初始时刻 $t = 0$ 持续到 t 时刻作用引起的位移. 由独立作用原理,$u(t,x)$ 可看成前后相继的瞬间外

力作用冲量 $f(\tau,x)\mathrm{d}\tau$ $(0\leqslant\tau\leqslant t)$ 在 t 时刻引起的位移 $w(t,x;\tau)\mathrm{d}\tau$ 关于 $\mathrm{d}\tau$ 的叠加, 即 $u(t,x)=\displaystyle\int_0^t w(t,x;\tau)\mathrm{d}\tau$. 显然, 当 $t<\tau$ 时 $w(t,x;\tau)\equiv 0$, 当 $t>\tau$ 时 τ 时刻瞬间冲量的作用已转化为从 $t=\tau-0$ 到 $t=\tau+0$ 动量的增加, 故 $w(t,x;\tau)$ 应满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad t>\tau,\ -\infty<x<+\infty,\\ w\big|_{t=\tau}=0, \quad \left.\dfrac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=\tau}=f(\tau,x),\end{cases}\tag{1.6.3}$$

而 (1.6.2) 的解则为

$$u(t,x)=\int_0^t w(t,x;\tau)\mathrm{d}\tau.\tag{1.6.4}$$

实际上, 当 $w(t,x;\tau)$ 是问题 (1.6.3) 的解时, 由 (1.6.4) 可验证

$$\begin{aligned}&u\big|_{t=0}=0,\\ &\frac{\partial u}{\partial t}=w(t,x;\tau)\Big|_{\tau=t}+\int_0^t\frac{\partial w(t,x;\tau)}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau=\int_0^t\frac{\partial w(t,x;\tau)}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau,\\ &\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\\ &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\left.\frac{\partial w(t,x;\tau)}{\partial t}\right|_{\tau=t}+\int_0^t\frac{\partial^2 w(t,x;\tau)}{\partial t^2}\,\mathrm{d}\tau\\ &\qquad=f(t,x)+a^2\int_0^t\frac{\partial^2 w(t,x;\tau)}{\partial x^2}\,\mathrm{d}\tau=f(t,x)+a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.\end{aligned}$$

故公式 (1.6.4) 给出了纯受迫振动 (1.6.2) 的解. 在 (1.6.3) 中令 $t'=t-\tau$, $w(t,x;\tau)$ 可由达朗贝尔公式得到, 故纯受迫振动

$$u(t,x)=\frac{1}{2a}\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\tau,\xi)\mathrm{d}\xi.\tag{1.6.5a}$$

若作变量代换 $r=a(t-\tau)$, 则

$$u(t,x)=\frac{1}{2a^2}\int_0^{at}\mathrm{d}r\int_{x-r}^{x+r}f\left(t-\frac{r}{a},\xi\right)\mathrm{d}\xi.\tag{1.6.5b}$$

由此可见纯外力引起的 x 点 t 时刻的位移受 $[x-at,x+at]$ 内各点所受外力的影响, 而在 $[x-r,x+r]\,(0\leqslant r<at)$ 上的外力是 $t-\frac{r}{a}$ 时刻的.

由叠加原理可写出一般弦振动方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(t,x), \quad t>0,\ -\infty<x<+\infty,\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$$

的解

$$u(t,x)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$
$$+\frac{1}{2a}\int_0^t \mathrm{d}\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\mathrm{d}\xi.$$

将此齐次化方法推广到一般发展方程的初值问题, 有如下原理.

定理 1.6.2(齐次化原理)　设 L 是关于 t 与 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中各分量的线性偏微分算子,其中关于 t 的最高阶导数不超过 $m-1$ 阶. 若 $w(t,\boldsymbol{x};\tau)$ 满足齐次方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^m w}{\partial t^m}=Lw,\quad t>\tau>0,\ \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,\\ w\big|_{t=\tau}=\left.\dfrac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=\tau}=\cdots=\left.\dfrac{\partial^{m-2}w}{\partial t^{m-2}}\right|_{t=\tau}=0,\\ \left.\dfrac{\partial^{m-1}w}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=\tau}=f(\tau,\boldsymbol{x}),\end{cases}\tag{1.6.6}$$

则

$$u(t,\boldsymbol{x})=\int_0^t w(t,\boldsymbol{x};\tau)\mathrm{d}\tau\tag{1.6.7}$$

是非齐次方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^m u}{\partial t^m}=Lu+f(t,\boldsymbol{x}),\quad t>0,\ \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,\\ u\big|_{t=0}=\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\cdots=\left.\dfrac{\partial^{m-1}u}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0}=0\end{cases}\tag{1.6.8}$$

的解.

定理不难直接验证. 因为初值问题是适定的,(1.6.7) 给出了初值问题 (1.6.8) 的唯一解. 当 $\boldsymbol{x}\in V\subset\mathbf{R}^n$, 齐次化原理仍然成立, 只需在 (1.6.6) 和 (1.6.8) 中分别增加**齐次边界条件** $L_1w|_{\partial V}=0$ 和 $L_1u|_{\partial V}=0$, L_1 是关于 $\boldsymbol{x}$ 的线性偏微分算子. 这就是**混合问题的齐次化原理**. 由齐次化原理知, 今后对线性发展方程定解问题的讨论主要集中于齐次方程.

习　题　1

1. (1) 设 f 是一次连续可微的任意函数，证明：$u=f(xy)$ 满足方程 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

(2) 设 $F(\xi),G(\xi)$ 是二次连续可微的任意函数, λ_1,λ_2 为常数, 且 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 证明：$u=F(x+\lambda_1y)+G(x+\lambda_2y)$ 满足方程 $\lambda_1\lambda_2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}-(\lambda_1+\lambda_2)\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$.

(3) 证明：$u=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$ $(t>0)$ 满足方程 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$, 而且有 $\lim\limits_{t\to0}u(t,x)=0\,(x\neq0)$.

2. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $r\neq 0$,

(1) $\Delta_2 u=0$, 求特解 $u=u(r)$.

(2) $\Delta_2 u+k^2u=0$, k 为常数, 求 $u=u(r)$ 所满足的常微分方程.

3. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $r\neq 0$,

(1) $\Delta_3 u=0$, 求特解 $u=u(r)$.

(2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\Delta_3 u=0$, 设 $u=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}R(r)$, 求 $R(r)$ 所满足的方程.

4. 求下列方程的通解:

(1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{2}{y}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x$, $u=u(x,y)$.

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial y}+p(x,y)u=q(x,y)$, $u=u(x,y)$.

(3) $\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$, $u=u(x,y,z)$.

5. 长为 l 的均匀柔软细线, 上端 $x=0$ 固定, 在其自身重力作用下处于垂直平衡位置, 试推导此悬线受扰动后相对于平衡位置的微小横振动方程.

6. 有一均匀弹性细杆, 只要杆中任一段有纵向位移或速度, 必导致邻段的压缩或伸长, 这种伸缩传开去, 就有纵波沿着杆传播, 试推导杆的微小纵振动方程.

7. 一根长为 l, 两端固定的琴弦, 把弦的中点朝横向拨开距离 h 后放开, 任其自由振动, 试写出此琴弦振动的定解问题.

*8. 设有一根长为 l 的均匀导热细杆, 杆的体密度为 ρ, 截面面积为 1, 热传导系数为 k, 比热为 c, 热交换系数为 h. 原来杆上各点的温度分布为 $\varphi(x)$. 沿杆有热源分布, 其强度为 $g(t,x)$. 杆侧及两端与常温为 u_0 的介质有热交换, 试写出此杆的热传导过程的定解问题.

9. 有一个半径为 R 的均匀球, 初始温度分布为 $\varphi(r)$(r 为球内点到球心的距离). 现把此球置于温度为 $f(t)$ 的环境中, 球的体密度为 ρ, 比热为 c, 热传导系数为 k, 球面与环境介质的热交换系数为 h, 试列出此球体的温度分布 $u(t,r)$ 所满足的定解问题.

10. 有一个长、宽、高分别为 a,b,c 的长方形金属槽, 槽内无自由电荷分布, 底面及四侧接地, 顶盖为非金属板且与四侧壁绝缘, 其电位分布为已知 $\varphi(x,y)$, 求此金属槽内电位分布所满足的定解问题. 若此槽改为无限长 (设$-\infty<y<+\infty$), 两侧及底面接地, 顶盖电位为常数 u_0, 写出槽内电位分布所满足的定解问题.

11. 把下列方程化为标准形:

(1) $x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0$, $xy\neq 0$.

(2) $y^2u_{xx}+x^2u_{yy}=0$, $xy\neq 0$.

12. 求下列方程的通解:

(1) $(y+z)u_x+(z+x)u_y+(x+y)u_z=0$.

(2) $yu_x-xu_y=x^2-y^2$.

(3) $(x-y)u_{xy}-u_x+u_y=0$.

13. 解下列定解问题:

(1) $\begin{cases} \sqrt{x}u_x+\sqrt{y}u_y+\sqrt{z}u_z=0, \quad x>0,\ y>0,\ z>0, \\ u|_{x=1}=y-z. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}=0, \\ u(x,0)=3x^2, \quad u_y(x,0)=0. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} u_{xx}+2\cos x u_{xy}-\sin^2 x u_{yy}-\sin x u_y=0, \\ u|_{y=\sin x}=\varphi(x), \quad u_y|_{y=\sin x}=\psi(x). \end{cases}$

14. 解下列定解问题：

(1) $\begin{cases} u_t=x^2, \quad t>0,\ -\infty<x<+\infty, \\ u(0,x)=x^2. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} u_t=au_x, \quad t>0,\ -\infty<x<+\infty, \\ u(0,x)=x^2. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad t>0,\ x-at<0,\ x>0, \\ u|_{x-at=0}=\varphi(x), \\ u|_{x=0}=f(t). \end{cases}$

若 $x=0$ 上的条件改为 $u_x|_{x=0}=f(t)$, 解有何变化?

(4) $\begin{cases} u_{xx}-u_{yy}+\cos x=0, \quad y>0,\ -\infty<x<+\infty, \\ u(x,0)=0, \quad u_y(x,0)=4x. \end{cases}$

[提示: 先求 $v(x)$, 使 $v_{xx}+\cos x=0$, 再令 $u=w+v(x)$, 求解 w.]

(5) $\begin{cases} \Delta_3 u=0, \quad x^2+y^2+z^2<1, \\ u|_{x^2+y^2+z^2=1}=(5+4y)^{-\frac{1}{2}}. \end{cases}$

[提示: 当 $x_0^2+y_0^2+z_0^2>1$ 时, $u=[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{-\frac{1}{2}}$ 满足方程.]

(6) $\begin{cases} u_{xy}=x^2y, \quad x>1,\ y>0, \\ u(1,y)=\cos y, \quad u(x,0)=x^2. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+2xt, \quad t>0,\ -\infty<x<+\infty, \\ u|_{t=0}=x^2, \quad u_t|_{t=0}=\sin 2x. \end{cases}$

15. 一端固定的半无界弦定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad t>0,\ x>0, \\ u(t,0)=0, \\ u(0,x)=\sin x, \quad u_t(0,x)=kx. \end{cases}$$

若改 $u(0,x)=\cos x$, 则 $u=$?

第 2 章　分离变量法

分离变量法是一种可用来求某些典型区域上定解问题精确解的经典方法. 本章将通过典型例子, 介绍分离变量法的基本思想和具体步骤, 并提出方法的理论核心 —— 固有值问题, 进而从 Fourier 展开角度来认识和应用分离变量法.

2.1　两个典型例子

2.1.1　两端固定弦的自由振动

作为乐器上弦的发声模型, 讨论两端固定的弦在初始扰动影响下产生的运动. 选弦在张力作用下的平衡位置为 x 轴, 弦上各质点的横向位移 $u(t,x)$ 满足弦振动方程的混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t>0,\ 0<x<l, & \text{(2.1.1a)} \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, & \text{(2.1.1b)} \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x). & \text{(2.1.1c)} \end{cases}$$

自然的想法是从通解求特解. 将初始条件奇开拓至 $[-l,0)$, 再以 $2l$ 为周期, 周期开拓至 $-\infty<x<+\infty$, 便可利用 d'Alembert 公式求解.

是否还有其他方法可行? 从简单情况考虑起, 这是最通常、最有效的思想方法. 物理中最简单的波是简谐波, 简谐波前行遇到固定端点反射回来成为同频率的反向波, 与原来的波叠加成为驻波, 即波形没有传播的波. 在驻波中, 不同点的振动同步, 有相同的规律, 不同的仅是振幅, 因此驻波可表示为 $u(t,x)=T(t)X(x)$, 这是一种变量分离形状的解. 我们首先来求满足齐次方程 (2.1.1a) 和齐次边界条件 (2.1.1b) 式的变量分离形状的特解 (**驻波解**).

设 $u(t,x)=T(t)X(x)$, 代入泛定方程 (2.1.1a), 两边同除以 a^2u, 得

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

该等式的左边与 x 无关, 右边与 t 无关, 故左右两边只能是个常数, 记为 $-\lambda$, 分别得到 $T(t)$ 和 $X(x)$ 满足的常微分方程

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \tag{2.1.2a}$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0. \tag{2.1.3}$$

再将 $u(t,x) = T(t)X(x)$ 代入边界条件 (2.1.1b), 有

$$T(t)X(0) = T(t)X(l) = 0,$$

显然 $T(t) \not\equiv 0$, 故必有

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{2.1.2b}$$

这样, 我们通过寻求变量分离形状的特解, 把偏微分方程的定解问题划归为常微分方程的定解问题, 这就是分离变量法的实质.

现在, 求解常微分方程边值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, & \text{(2.1.2a)} \\ X(0) = X(l) = 0. & \text{(2.1.2b)} \end{cases}$$

二阶线性常微分方程初值问题的解是存在唯一的, 边值问题则不然, 我们对参数 λ 的不同取值分别讨论.

当 $\lambda = -\omega^2 < 0$ ($\omega > 0$) 时, 方程 (2.1.2a) 有通解

$$X(x) = A\mathrm{e}^{\omega x} + B\mathrm{e}^{-\omega x},$$

由边界条件

$$X(0) = A + B = 0,$$
$$X(l) = A\mathrm{e}^{\omega l} + B\mathrm{e}^{-\omega l} = 0$$

知 $A = B = 0$, 故边值问题 (2.1.2) 式无非零解.

当 $\lambda = 0$ 时, 方程的通解为

$$X(x) = Ax + B,$$

由 $X(0) = B = 0$, $X(l) = Al = 0$ 知, 边值问题 (2.1.2) 式仍无非零解.

当 $\lambda = \omega^2 > 0$ ($\omega > 0$) 时, 方程有通解

$$X(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x,$$

代入边界条件

$$X(0) = A = 0,$$
$$X(l) = B\sin\omega l = 0,$$

当且仅当 $\omega = \dfrac{n\pi}{l} (n = 1, 2, \cdots)$ 时, 边值问题 (2.1.2) 式有非零解 $X_n(x) = B\sin\dfrac{n\pi}{l}x$.

这里出现的情况很像矩阵的固有值问题 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$. 当且仅当 λ 为某些特殊值时, 该线性方程组有非零解, 其中, $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{x}$ 为 n 维向量, λ 为参数. 类似地, 我们也把 $X(x)$ 的边值问题 (2.1.2) 式称为**固有值** (eigenvalue) **问题**, 使固有值问题 (2.1.2) 式有非零解的 λ 的取值为**固有值**, 相应的非零解为**固有函数**.

这样, 我们求出了固有值问题 (2.1.2) 式的固有值

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad n=1,2,\cdots, \tag{2.1.4a}$$

相应的固有函数

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{2.1.4b}$$

因为 B 取不同值时的解相互线性相关, 不妨设 $B=1$.

对于每一个固有值 λ_n, 求解相应的 $T_n(t)$ 的方程 (2.1.3), 得通解

$$T_n(t)=C_n\cos\frac{an\pi}{l}t+D_n\sin\frac{an\pi}{l}t,$$

从而得到一族变量分离形状的特解

$$\begin{aligned}u_n(t,x)&=\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t+D_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\\&=\alpha_n\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\left(\frac{an\pi}{l}t+\theta_n\right),\quad n=1,2,\cdots,\\\alpha_n&=\sqrt{C_n^2+D_n^2},\quad \theta_n=\arcsin\frac{C_n}{\alpha_n}.\end{aligned}$$

每个变量分离解 $u_n(t,x)$ 虽然满足齐次方程 (2.1.1a) 和齐次边界条件 (2.1.1b) 式, 但不一定能满足初始条件 (2.1.1c) 式. 根据叠加原理, 将所有的 $u_n(t,x)$ 线性叠加起来仍满足齐次方程 (2.1.1a) 和齐次边界条件 (2.1.1b) 式, 通过系数的选取, 则有可能使叠加后的解同时满足初始条件 (2.1.1c) 式.

设

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t+D_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

代入初始条件 (2.1.1c) 式, 有

$$\begin{aligned}u|_{t=0}&=\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\varphi(x),\\\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{an\pi}{l}D_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\psi(x).\end{aligned}$$

这两式正好是已知函数 $\varphi(x),\psi(x)$ 在区间 $[0,l]$ 的 Fourier 正弦展开, 由正弦展开的系数公式, 可定出

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,$$

$$D_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x.$$

这样, 便得混合问题 (2.1.1) 式的形式解

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\,\cos\frac{an\pi}{l}t + \frac{2}{an\pi}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{2.1.5}$$

从数学上可以证明, 当 $\varphi(x),\psi(x)$ 为 $[0,l]$ 上足够光滑的函数 (如 $\varphi\in C^3[0,l]$, $\psi\in C^2[0,l]$), 且 φ,φ'' 和 ψ 在端点为 0 时, (2.1.5) 式右端级数收敛, 且可逐项求导两次, 从而保证了 (2.1.5) 式确是混合问题 (2.1.1) 式的**古典解**. 还可利用能量积分证明 (2.1.1) 式的解是唯一的、稳定的.

利用三角公式及 $\varphi(x),\psi(x)$ 的正弦展开式, 可以将 $u(t,x)$ 的级数表示式 (2.1.5) 改写为达朗贝尔公式 (1.4.6), 当然先要将 $\varphi(x),\psi(x)$ 奇开拓到 $[-l,l]$, 再周期开拓到 $\mathbf{R}$.

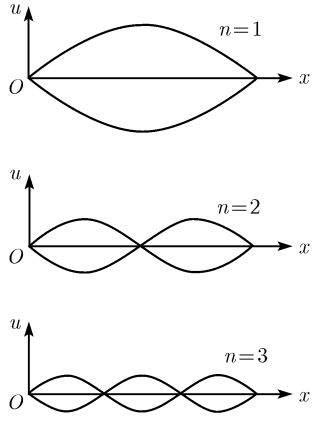


图 2.1.1

从物理上看, 每个 $u_n(t,x)$ 都保持弦的两个端点 $x=0$, $x=l$ 不动, 弦上其余各点则在平衡位置附近做简谐振动, 振幅因点而异, 为正弦曲线 $\alpha_n\left|\sin\frac{n\pi}{l}x\right|$. 而各点的振动频率相同, 均为 $\frac{an\pi}{l}$, 各点振动的位相 θ_n 也相同, 由系数 C_n 与 D_n 决定. 称 $u_n(t,x)$ 表示的这样一种运动为两端固定弦的**固有振动**(驻波), 其振动频率 $\frac{an\pi}{l}$ 为**固有频率**. 弦的固有频率由弦长, 弦的材料等弦本身固有特性确定, 形成一个离散谱

$$\frac{a\pi}{l},\quad \frac{2a\pi}{l},\quad \cdots,\quad \frac{na\pi}{l},\quad \cdots,$$

其中, 最低的频率 $\frac{a\pi}{l}$ 为这条弦的基频, 其余的固有频率都是基频的整数倍, 称之为倍频. 固有频率确定了弦的固有振动, 即这根弦发出声音的基本构成部分. 每一个固有振动在任何时刻, 弦的形状都是一条正弦曲线, 且在 $x=0,\frac{l}{n},\frac{2l}{n},\cdots,\frac{(n-1)l}{n},l$ 点上保持不动 (图 2.1.1).

解 (2.1.5) 式清楚地反映了两端固定弦的运动由一系列驻波叠加而成, 每个驻波参与的成分取决于初始扰动, 由于 $C_n,D_n\to 0$, 起主要作用的是低频部分. 回顾整个解题过程, 我们所做的就是把弦的复杂运动分解成一系列简单固有振动的叠加.

如果 $\varphi(x),\psi(x)$ 的光滑性不够, 比如仅是连续函数, 或者不满足边界条件, 则不能保证 (2.1.5) 式是古典解, 但在物理上解有可能存在. 如何解决这个矛盾? 注意到 (2.1.5) 式实际上是 $u(t,x)$ 的 Fourier 正弦展开式, 由 Fourier 级数理论, 若记展式的部分和

$$u_{_N}(t,x)=\sum_{n=1}^{N}\Big(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t+D_n\sin\frac{an\pi}{l}t\Big)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$
$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi,\quad D_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi,$$

则 $u(t,x)$ 是 $u_{_N}(t,x)$ 在均方收敛意义下的极限, 即

$$\|u(t,x)-u_{_N}(t,x)\|=\left(\int_0^l|u(t,x)-u_{_N}(t,x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\longrightarrow 0.$$

$u_{_N}(t,x)$ 是定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2},\quad t>0,\ 0<x<l,\\ u|_{x=0}=u|_{x=l}=0,\\ u|_{t=0}=\varphi_{_N}(x),\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_{_N}(x)\end{cases}\tag{2.1.6}$$

的古典解, 这里 $\varphi_{_N}(x)=\sum\limits_{n=1}^{N}C_n\sin\dfrac{n\pi}{l}x$, $\psi_{_N}(x)=\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{an\pi}{l}D_n\sin\dfrac{n\pi}{l}x$ 有任意阶导数, 且满足边界条件. 当 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 为连续函数时, $\varphi_{_N}(x)$, $\psi_{_N}(x)$ 均方收敛于 $\varphi(x),\psi(x)$. 故 (2.1.6) 式的解 $u_{_N}(t,x)$ 可视作 (2.1.1) 式的一族近似古典解, 其均方收敛极限 $u(t,x)$ 则视为 (2.1.1) 式的**广义解**.

可以根据问题的物理意义和数学上的规定来定义不同意义下的各种广义解. 当然广义解作为古典解的推广必须满足: ① 古典解必为广义解; ② 当广义解具有古典解所要求的光滑性时, 它也是古典解. 不同定义的广义解, 其实质可以理解为古典解序列在某种意义下的极限. 在本例中, 广义解 u 是古典解序列 u_N 在均方收敛意义下的极限. 一般地, 广义解不必具有古典解那样的光滑性, 可以在更大的函数类中选择解. 通过广义解来研究古典解是近代偏微分方程研究的一般方法.

2.1.2 圆柱体稳态温度分布

今有无限长圆柱体 $(x^2+y^2<a^2,\ -\infty<z<+\infty)$, 内部无热源, 边界柱面温度保持为 $F(x,y)$, 求柱内稳态温度分布.

注意到圆柱的对称性及柱面温度分布与 z 无关, 可设柱内温度为 $u(x,y)$, 与 z

无关. u 满足二维 Laplace 方程圆内第一边值问题, 也称 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad x^2+y^2<a^2, \\ u|_{x^2+y^2=a^2}=F(x,y). \end{cases} \tag{2.1.7}$$

在第 1 章中曾就 $F(x,y)$ 为多项式时利用调和多项式求解, 对任意给定的 $F(x,y)$ 也可利用“复变函数”中给出的 Poisson 积分公式求解, 这里我们试用分离变量法求解.

由于求解区域为平面圆域, 应采用极坐标 (r,θ) : $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$. 记柱内温度分布为 $u(r,\theta)$, 极坐标下边值问题 (2.1.7) 式为

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0, \quad r<a, & \text{(2.1.8a)} \\ u|_{r=a}=F(a\cos\theta,a\sin\theta)\overset{d}{=}f(\theta). & \text{(2.1.8b)} \end{cases}$$

这是 (r,θ) 平面的矩形域 $(0\leqslant r<a,\ -\infty<\theta<+\infty)$ 上的问题, 可进行分离变量.

令 $u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$, 代入方程, 同除以 u, 有

$$\frac{\dfrac{1}{r}(rR'(r))'}{R(r)}+\frac{\Theta''(\theta)}{r^2\Theta(\theta)}=0,$$

分离出两个常微分方程

$$\Theta''(\theta)+\lambda\Theta(\theta)=0, \tag{2.1.9a}$$

$$\frac{1}{r}(rR'(r))'-\frac{\lambda}{r^2}R(r)=0. \tag{2.1.10a}$$

$\Theta(\theta)$ 蕴含周期条件

$$\Theta(\theta+2\pi)=\Theta(\theta), \tag{2.1.9b}$$

与 $\Theta(\theta)$ 的方程构成固有值问题

$$\begin{cases} \Theta''(\theta)+\lambda\Theta(\theta)=0, \\ \Theta(\theta+2\pi)=\Theta(\theta). \end{cases} \tag{2.1.9}$$

类似上例讨论可知

当 $\lambda=-\omega^2<0$ 时, (2.1.9a) 式的通解为 $\Theta(\theta)=A\mathrm{e}^{\omega\theta}+B\mathrm{e}^{-\omega\theta}$, 无非零周期解;

当 $\lambda=0$ 时, 通解为 $\Theta(\theta)=A+B\theta$, 有周期解 $\Theta_0(\theta)\equiv 1$;

当 $\lambda=\omega^2>0$ 时, (2.1.9a) 式的通解为

$$\Theta(\theta)=A\cos\omega\theta+B\sin\omega\theta,$$

当且仅当 $\omega = n(n = 1, 2, \cdots)$ 时, 该通解以 2π 为周期.

综上所述, 以 2π 为周期的周期条件下的固有值问题 (2.1.9) 式的固有值是

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{2.1.11a}$$

相应的固有函数为

$$\Theta_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta, \tag{2.1.11b}$$

或记为

$$\Theta_n(\theta) = \left\{ \begin{matrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{matrix} \right\}.$$

注意, 这里对 $n \neq 0$, 一个固有值对应于两个线性无关的固有函数, 物理上称为**简并现象**.

当固有值 $\lambda_n = n^2$, 相应的 $R(r)$ 的方程 (2.1.10a) 是欧拉 (Euler) 方程

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0.$$

在自变量代换 $r = \mathrm{e}^t$ 下, 变为常系数方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}t^2} - n^2 R = 0,$$

其通解为

$$\begin{aligned} R_0 &= C_0 + D_0 t = C_0 + D_0 \ln r, \\ R_n &= C_n \mathrm{e}^{nt} + D_n \mathrm{e}^{-nt} = C_n r^n + D_n r^{-n}, \quad n = 1, 2, \cdots. \end{aligned}$$

由问题的物理意义, 显然在中心 $r = 0$ 需有**自然边界条件**

$$|R(0)| < +\infty, \tag{2.1.10b}$$

故

$$\begin{aligned} &D_0 = D_n = 0, \\ &R_0(r) = 1, \quad R_n(r) = r^n, \end{aligned}$$

得圆内二维 Laplace 方程变量分离形状的周期解

$$\begin{aligned} &u_0(r, \theta) = 1, \\ &u_n(r, \theta) = \left\{ \begin{matrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{matrix} \right\} r^n, \quad n = 1, 2, \cdots. \end{aligned}$$

由叠加原理, 设

$$u(r,\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta),\tag{2.1.12a}$$

代入边界条件 (2.1.8b) 式得

$$u(a,\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)=f(\theta).$$

这是 $f(\theta)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的 Fourier 展开式, 故对 $n=0,1,2,\cdots$ 都有

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi\mathrm{d}\varphi,\tag{2.1.12b}$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi\mathrm{d}\varphi.\tag{2.1.12c}$$

将此 A_n,B_n 代入 (2.1.12a) 式, 便可得二维 Laplace 方程圆内第一边值问题 (2.1.8) 式的形式解.

当 $f(\theta)$ 是圆周上的连续函数时, 可直接验证 (2.1.12a) 式、(2.1.12b) 式、(2.1.12c) 式给出了 (2.1.8) 式的古典解. 利用调和函数的极值原理, 还可证明 Dirichlet 问题 (2.1.8) 式的解唯一、稳定.

这里的级数解

$$\begin{aligned}u(r,\theta)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\mathrm{d}\varphi+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\int_0^{2\pi}f(\varphi)[\cos n\varphi\cos n\theta+\sin n\varphi\sin n\theta]\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\left[1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos n(\varphi-\theta)\right]\mathrm{d}\varphi,\end{aligned}$$

若令 $z=\dfrac{r}{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\theta)}$, 则 $\left(\dfrac{r}{a}\right)^n\cos n(\varphi-\theta)=\mathrm{Re}z^n$. 利用公式 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}z^n=\frac{1}{1-z}(|z|<1)$, 不难求出上式中

$$1+2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos n(\varphi-\theta)=\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\varphi-\theta)+r^2},$$

从而

$$u(r,\theta)=\frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\varphi)}{a^2-2ar\cos(\varphi-\theta)+r^2}\,\mathrm{d}\varphi,\tag{2.1.13}$$

即为**Poisson 积分公式**.

公式(2.1.12a)可作为圆内Laplace方程解的一般形式. 从以上推导公式 (2.1.12a) 过程可见, 圆外 $(r > a)$Laplace 方程有界解的一般形式为

$$u(r,\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \quad r > a, \tag{2.1.14}$$

而环域 $a_1 < r < a_2$ 内 Laplace 方程解的一般形式则为

$$u(r,\theta) = \frac{C_0}{2} + \frac{D_0}{2} \ln r + \sum_{n=1}^{+\infty} (C_n r^n + D_n r^{-n})(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \quad a_1 < r < a_2, \tag{2.1.15}$$

其中, 系数 A_n, B_n, C_n, D_n 都可根据边界条件, 利用 Fourier 展开的系数公式定出.

周期条件的固有值问题 (2.1.9) 式等价于

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0, \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi), \quad \Theta'(0) = \Theta'(2\pi). \end{cases} \tag{2.1.9}'$$

若 $\Theta(\theta)$ 是 (2.1.9) 式的解, 显然也是 (2.1.9)′ 式的解. 反之, 若 $\Theta(\theta)$ 是 (2.1.9)′ 式的解, 令 $\widetilde{\Theta}(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$, 则 $\widetilde{\Theta}(\theta)$ 满足初值问题

$$\begin{cases} \widetilde{\Theta}''(\theta) + \lambda\widetilde{\Theta}(\theta) = 0, \\ \widetilde{\Theta}(0) = \Theta(0), \quad \widetilde{\Theta}'(0) = \Theta'(0). \end{cases}$$

由常微分方程初值问题解的唯一性, 知 $\widetilde{\Theta}(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$, 故 $\Theta(\theta)$ 也是 (2.1.9) 式的解. 固有值问题 (2.1.9) 式与 (2.1.9)′ 式可相互替代使用.

2.2 一般格式, 固有值问题

能否将分离变量法应用于其他有限区间上的混合问题或边值问题, 关键是固有值问题. 本节将从理论上对固有值问题加以说明, 并以此为指导, 用分离变量法求解更多的定解问题.

2.2.1 一般格式

将分离变量法用于更一般的定解问题

$$\begin{cases} L_t u + L_x u = 0, \quad t \in I,\ a < x < b, & \text{(2.2.1a)} \\ \left(\alpha_1 u - \beta_1 \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=a} = 0, \quad \left(\alpha_2 u + \beta_2 \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=b} = 0, & \text{(2.2.1b)} \\ \text{关于 } t \text{ 的定解条件.} & \text{(2.2.1c)} \end{cases}$$

方程 (2.2.1a) 中的 L_t, L_x 分别为关于 t 和 x 的线性偏微分算子, 比如

$$L_t = a_0(t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} + a_1(t)\frac{\partial}{\partial t} + a_2(t),$$
$$L_x = b_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b_1(x)\frac{\partial}{\partial x} + b_2(x),$$

其中, $a_j(t)(j = 0, 1, 2)$ 是有限或半无限区间 I 上的连续函数; $b_j(x)(j = 0, 1, 2)$ 是 $a < x < b$ 上的连续函数. 边界条件 (2.2.1b) 式中常数 α_j, β_j 非负, 且 $\alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0 (j = 1, 2)$. (2.2.1c) 式中的关于 t 的定解条件可以是初始条件, 也可以是边界条件.

第一步　分离变量.

设 $u(t, x) = T(t)X(x)$, 代入**齐次方程**(2.2.1a) 和**齐次边界条件**(2.2.1b) 式, 分离得固有值问题

$$\begin{cases} L_x X(x) + \lambda X(x) = 0, \quad a < x < b, & \text{(2.2.2a)} \\ \alpha_1 X(a) - \beta_1 X'(a) = 0, \quad \alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0 & \text{(2.2.2b)} \end{cases}$$

和常微分方程

$$L_t T(t) - \lambda T(t) = 0. \tag{2.2.3}$$

可见 (2.2.1a) 形式的方程, 即使 L_t, L_x 为更高阶的微分算子, 总可以分离变量得常微分方程 (2.2.2a) 和 (2.2.3) 式, 而第 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ类齐次边界条件 (2.2.1b) 式也总可分离出常微分方程的边界条件 (2.2.2b) 式. 称这类问题 (2.2.1) 式为可分离变量的问题.

第二步　解固有值问题, 得变量分离形状特解.

就 λ 的不同情况, 求方程 (2.2.2a) 的通解, 并由边界条件 (2.2.2b) 式求出固有值 $\{\lambda_n\}$ 及相应的固有函数 $\{X_n(x)\}$, $n = 1, 2, \cdots$. 再将固有值 λ_n 代入方程 (2.2.3), 求出相应的通解 $T_n(t)$, 从而得到一族变量分离形状的解 $\{u_n(t, x) = T_n(t)X_n(x)\}$.

第三步　叠加定系数.

令

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n T_n(t) X_n(x),$$

代入关于 t 的初始条件或边界条件, 定出系数 C_n, 从而得到定解问题 (2.2.1) 式的形式解.

以上三个步骤中, 分离变量是基础, 固有值问题是核心. 在上节的两例中, 固有函数不仅构成了满足齐次方程、齐次边界条件的变量分离形状的解族, 更重要的是固有函数的全体正好成为函数的 Fourier 正弦展开或 Fourier 展开的完备正交函数系 (正交基), 从而可通过这些变量分离形状的解作适当的叠加而得到同时满足初始条件或其他边界条件的定解问题的解. 现在的问题是, 对于一般的固有值问题

(2.2.2) 式, **第一, 是否存在一串固有值和相应的固有函数? 第二, 这一串固有函数是否成为函数空间里的完备正交函数系 (正交基)**? 这个问题不解决, 是无法进行第三步的, 因此是本节重点讨论的问题.

2.2.2 固有值问题的施图姆–刘维尔 (Sturm–Liouville) 定理

我们先来回顾函数的广义 Fourier 展开.

在线性代数中, n 维实线性空间 V 中定义了内积

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \overset{d}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j y_j, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n),$$

成为内积空间 (欧几里得空间). 内积空间的向量有了长度 (模)

$$\|\boldsymbol{x}\| \overset{d}{=} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j^2| \right)^{\frac{1}{2}},$$

向量间有了夹角. 特别地, 如果

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = 0,$$

则称向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$**正交**. 如果 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是该内积空间 V 的一组标准正交基 ($\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = \delta_{ij}$), $\forall \boldsymbol{x} \in V$, 有 $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} c_j \boldsymbol{e}_j$, 其中, $c_j = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_j \rangle$. 对于复线性空间, 只需定义内积 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \overset{d}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y}_j$, 也成为内积空间 (酉空间).

推广到函数空间, 令 $L^2[a,b] = \{f(x) \big| \int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x < +\infty\}$, 按照函数的加法和数乘, 成为无穷维的线性空间. 在实函数时, 定义内积

$$\langle f(x), g(x) \rangle \overset{d}{=} \int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x, \tag{2.2.4}$$

$L^2[a,b]$ 成为无穷维内积空间 (Hilbert 空间), 函数有了长度 (模)

$$\|f(x)\| \overset{d}{=} \langle f(x), f(x) \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}},$$

函数间有了夹角. 特别地, 如果

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x = 0,$$

则称函数 $f(x)$ 与 $g(x)$**正交**. 如果 $L^2[a,b]$ 中有一串正交函数 $\{X_j(x),\ j=1,2,\cdots\}$, $(\langle X_i(x),X_j(x)\rangle=\|X_j(x)\|^2\delta_{ij})$, 使 $\forall f(x)\in L^2[a,b]$ 有

$$f(x)=\sum_{j=1}^{+\infty}c_jX_j(x), \tag{2.2.5a}$$

则称 $\{X_j(x),\ j=1,2,\cdots\}$ 为 $L^2[a,b]$ 中的一串**完备正交函数系 (正交基)**. (2.2.5a) 式称为 $f(x)$ 关于正交基 $\{X_j(x),\ j=1,2,\cdots\}$ 的**广义 Fourier 展开**. 可以证明, 展开式中系数

$$c_j=\frac{\langle f(x),X_j(x)\rangle}{\|X_j(x)\|^2}=\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)X_j(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b|X_j(x)|^2\mathrm{d}x} \tag{2.2.5b}$$

称为**广义 Fourier 系数**, 函数 $f(x)$ 由它的广义 Fourier 系数完全确定. 展开式中级数的收敛是指

$$\lim_{N\to+\infty}\|f(x)-\sum_{j=1}^{N}c_jX_j(x)\|=\lim_{N\to+\infty}\left(\int_a^b\left|f(x)-\sum_{j=1}^{N}c_jX_j(x)\right|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}=0,$$

称为均方收敛. 对于复函数空间, 只需修改内积定义为

$$\langle f(x),g(x)\rangle\overset{d}{=}\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x.$$

n 维内积空间 V 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$(矩阵) 称为自共轭的, 如果 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$, 有 $\langle\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{y}\rangle=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ay}\rangle$. 自共轭变换的固有值都是实数, 不同固有值对应的固有向量相互正交. 因此, 自共轭变换所有固有值对应的 n 个相互正交的固有向量构成 n 维内积空间的正交基.

在函数空间 $L^2[a,b]$(或其子空间) 上, 如果存在线性变换 L(算子), 使对该空间中任意 $f(x),g(x)$, 有 $\langle Lf(x),g(x)\rangle=\langle f(x),Lg(x)\rangle$, 则称算子 L 在此空间上自共轭. 函数空间上的自共轭算子的固有值, 固有函数也有 n 维内积空间上自共轭变换的固有值, 固有向量的类似性质.

称二阶线性常微分方程

$$[k(x)X'(x)]'-q(x)X(x)+\lambda\rho(x)X(x)=0 \tag{2.2.6a}$$

为**Sturm-Liouville(S-L) 型方程**. 在 2.1 节中分离变量得到的方程 $X''(x)+\lambda X(x)=0$ 就是一个最简单的 S-L 型方程. 对于一般的二阶线性常微分方程

$$b_0(x)X''(x)+b_1(x)X'(x)+b_2(x)X(x)+\lambda X(x)=0,$$

当 $b_0(x)\neq 0$ 时, 两边同乘以

$$\frac{1}{b_0(x)}\exp\left(\int\frac{b_1(x)}{b_0(x)}\mathrm{d}x\right),$$

即可化为 S-L 型方程 (2.2.6a), 其中

$$k(x)=\exp\left(\int\frac{b_1(x)}{b_0(x)}\mathrm{d}x\right),\quad q(x)=-\frac{b_2(x)}{b_0(x)}k(x),\quad \rho(x)=\frac{1}{b_0(x)}k(x).$$

考察**S-L型方程的固有值问题**

$$\begin{cases}[k(x)X'(x)]'-q(x)X(x)+\lambda\rho(x)X(x)=0,\quad a<x<b, & (2.2.6a)\\ \alpha_1X(a)-\beta_1X'(a)=0,\quad \alpha_2X(b)+\beta_2X'(b)=0, & (2.2.6b)\end{cases}$$

$$\alpha_j,\beta_j\geqslant 0,\quad \alpha_j^2+\beta_j^2\neq 0,\quad j=1,2,$$

其中, 方程的系数满足条件**:**

(1) $k(x)\in C^1[a,b],\ q(x),\ \rho(x)\in C[a,b];$ (2.2.6c)

(2) 在 $[a,b]$ 上, $k(x)>0,\ \rho(x)>0,\ q(x)\geqslant 0.$ (2.2.6d)

首先, 我们来说明这样的固有值问题是一个自共轭算子的固有值问题. 由$\rho(x)>0$, 固有值问题 (2.2.6) 式可改写成函数空间上算子的固有值问题

$$\begin{cases}LX(x)=\lambda X(x), & (2.2.7a)\\ L=-\dfrac{1}{\rho(x)}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)+\dfrac{q(x)}{\rho(x)}, & (2.2.7b)\\ X(x)\text{ 满足边界条件 (2.2.6b).}\end{cases}$$

在实函数空间 $L_\rho^2[a,b]=\{f(x)|\ \displaystyle\int_a^b|f(x)|^2\rho(x)\mathrm{d}x<+\infty\}$ 中定义加权内积

$$\langle f(x),g(x)\rangle\overset{d}{=}\int_a^b f(x)g(x)\rho(x)\mathrm{d}x, \tag{2.2.8}$$

$L_\rho^2[a,b]$ 也成为内积空间. 对于 $L_\rho^2[a,b]$ 中有二阶连续导数且满足边界条件 (2.2.6b) 式的任意函数 $f(x),g(x)$, 利用分部积分公式可得

$$\begin{aligned}\langle Lf(x),g(x)\rangle&=\int_a^b[Lf(x)]g(x)\rho(x)\mathrm{d}x\\ &=\int_a^b[-(k(x)f'(x))'g(x)+q(x)f(x)g(x)]\mathrm{d}x\\ &=-k(x)f'(x)g(x)\Big|_a^b+\int_a^b k(x)f'(x)g'(x)\mathrm{d}x+\int_a^b q(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

从而有

$$\langle Lf(x), g(x)\rangle - \langle f(x), Lg(x)\rangle = -k(x)[f'(x)g(x) - f(x)g'(x)]\Big|_a^b. \tag{2.2.10}$$

当 $f(x), g(x)$ 在 a 端有相同的齐次边界条件时, 有 $k(x)[f'(x)g(x) - f(x)g'(x)]\Big|_{x=a} = 0$, 在 b 端也有同样的结果. 故当 $f(x), g(x)$ 都满足边界条件 (2.2.6b) 式时, 有

$$\langle Lf(x), g(x)\rangle = \langle f(x), Lg(x)\rangle,$$

即常微分算子 L(2.2.7b) 式是 $L^2_\rho[a,b]$ 中有二阶连续导数且满足边界条件 (2.2.6b) 式的子空间上的自共轭算子.

在复函数空间 $L^2_\rho[a,b]$ 内, 定义加权内积

$$\langle f(x), g(x)\rangle \stackrel{d}{=} \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\mathrm{d}x,$$

注意到 $\langle f(x), g(x)\rangle = \overline{\langle g(x), f(x)\rangle}$, 同样可证明 L 是自共轭的. 无限维函数空间上的自共轭算子的固有值问题 (2.2.7) 式有类似有限维内积空间上自共轭算子的性质.

定理 2.2.1(常点情况下的 Sturm-Liouville 定理)

S-L 型方程的固有值问题 (2.2.6) 式的固有值、固有函数有以下性质:

(1) 非负性 所有的固有值 λ 均为实数, 且 $\lambda \geqslant 0$. 有零固有值 $\lambda_0 = 0$ 的充要条件是 $q(x) \equiv 0$, 且两端不出现第 Ⅰ、Ⅲ类边界条件. 零固有值对应的固有函数为常数 1.

(2) 可数性 全体固有值组成无穷数列

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \quad \lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty.$$

对应于每一个固有值, 只有一个线性独立的固有函数, 组成对应的固有函数列

$$X_1(x), \quad X_2(x), \quad \cdots, \quad X_n(x), \quad \cdots.$$

(3) 正交性 不同固有值对应的固有函数相互加权正交, 即若固有值 $\lambda_n \neq \lambda_m$, 对应的固有函数为 $X_n(x), X_m(x)$, 则有

$$\langle X_n(x), X_m(x)\rangle = \int_a^b X_n(x)X_m(x)\rho(x)\mathrm{d}x = 0.$$

(4) 完备性 全体固有函数 $\{X_n(x),\ n = 1, 2, \cdots\}$ 构成 $L^2_\rho[a,b]$ 空间中以 $\rho(x)$ 为权函数的完备正交函数系 (正交基).

这里的完备性有如下两种情况:

对于在 $[a,b]$ 上有连续一阶导数, 分段连续二阶导数, 且满足定解问题中的齐次边界条件 (2.2.6b) 式的函数 $f(x)$, 有在 $[a,b]$ 上绝对一致收敛的广义 Fourier 展开

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}C_nX_n(x), \tag{2.2.11a}$$

其中, 广义 Fourier 系数

$$C_n=\frac{\int_a^b f(x)X_n(x)\rho(x)\mathrm{d}x}{\|X_n(x)\|^2}, \tag{2.2.11b}$$

模 $\|X_n(x)\|=\left[\int_a^b|X_n(x)|^2\rho(x)\mathrm{d}x\right]^{1/2}$.如果 $\|X_n(x)\|=1$, 则称 $X_n(x)$ 为归一的, $\{X_n(x)\}$ 为**标准正交基**.

对于 $L_\rho^2[a,b]$ 中任意函数 $f(x)$, Fourier 展开式 (2.2.11a)、(2.2.11b) 式仍然成立, 但是展式 (2.2.11a) 是均方收敛意义下的, 即部分和的极限

$$f(x)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}C_nX_n(x)$$

是指

$$\lim_{N\to+\infty}\left\|f(x)-\sum_{n=1}^{N}C_nX_n(x)\right\|=\lim_{N\to+\infty}\left(\int_a^b\left|f(x)-\sum_{n=1}^{N}C_nX_n(x)\right|^2\rho(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}=0.$$

定理结论中的非负性、正交性可由算子 L 的特性证得.

非负性的证明 设 λ 是固有值问题 (2.2.6) 式的固有值, $X(x)$ 是相应的固有函数. 由公式 (2.2.9) 可得

$$\begin{aligned}\lambda\langle X(x),X(x)\rangle=&\langle LX(x),X(x)\rangle\\=&-k(x)X'(x)X(x)\Big|_a^b+\int_a^b k(x)[X'(x)]^2\mathrm{d}x\\&+\int_a^b q(x)X^2(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因为固有函数 $X(x)$ 满足齐次边界条件 (2.2.6b) 式, 上式等号右边第一项非负. 又因在 $[a,b]$ 上 $k(x)>0$, $q(x)\geqslant 0$, 第二、三项均为非负, 从而可知 $\lambda\geqslant 0$.

又若 $\lambda=0$ 是固有值, 由上式可知第二、三项的积分均为 0. 由 $k(x)>0$ 知, 在 $[a,b]$ 上 $X'(x)\equiv 0$, 从而有 $X(x)\equiv 1$, 在端点不能满足第 Ⅰ、Ⅲ类齐次边界条件. 又由 $q(x)\geqslant 0$, $X(x)\equiv 1$ 知, 在 $[a,b]$ 上 $q(x)\equiv 0$. 反之, 当 $q(x)\equiv 0$, 两端不出现第 Ⅰ、Ⅲ类边界条件时, 可直接验证 $\lambda=0$ 是固有值, $X(x)\equiv 1$ 是相应的固有函数.

正交性的证明 设 λ_n, λ_m 是固有值问题 (2.2.6) 式的固有值, $X_n(x)$, $X_m(x)$ 是相应的固有函数, 则 $LX_n = \lambda_n X_n$, $LX_m = \lambda_m X_m$, 由算子 L(2.2.7b) 的自共轭性, 有

$$\begin{aligned} 0 &= \langle LX_n, X_m\rangle - \langle X_n, LX_m\rangle \\ &= \lambda_n\langle X_n, X_n\rangle - \lambda_m\langle X_n, X_m\rangle = (\lambda_n - \lambda_m)\langle X_n, X_m\rangle, \end{aligned}$$

当 $\lambda_n \neq \lambda_m$ 时, 有 $\langle X_n, X_m\rangle = 0$, 即 $X_n(x)$ 与 $X_m(x)$ 在加权内积 (2.2.8) 意义下正交.

固有函数系的可数性、完备性是 S-L 定理最重要的结论, 由于函数空间是无限维的, 其证明超出本书范围, 此处从略.

定理 2.2.1 给出了 S-L 型方程的全体固有函数构成完备正交系的充分条件. 在 2.1.1 小节中, 最简 S-L 型方程 $X'' + \lambda X = 0$ 在 $X(0) = X(l) = 0$ 条件下得到固有值 $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$, 相应的固有函数系 $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{l}x,\ n = 1, 2, \cdots\right\}$ 构成 $[0, l]$ 上 Fourier 正弦展开的正交基. 还可给出其他的充分条件.

定理 2.2.2(周期条件下的 Sturm-Liouville 定理)

S-L 型方程固有值问题

$$\begin{cases} [k(x)X'(x)]' - q(x)X(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0, \quad a < x < b, & (2.2.6\,\mathrm{a}) \\ X(a) = X(b), \quad X'(a) = X'(b) \quad (\text{周期条件}), & (2.2.6\,\mathrm{b})' \end{cases}$$

其中, 系数 $k(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ 满足条件 (2.2.6c) 式、(2.2.6d) 式, 且 $k(a) = k(b)$.

该问题的固有值固有函数有定理 2.2.1 的相同结论, 但是对应于每一个非零固有值有两个相互正交的固有函数.

将 $k(a) = k(b)$ 及 $X(x)$ 的周期条件 (2.2.6b)′ 式, 代入 (2.2.10) 式, 知微分算子 L(2.2.7b) 在以 $(b - a)$ 为周期的周期函数中也是自共轭的. 在 2.1.2 小节中, 最简 S-L 型方程 $X'' + \lambda X = 0$ 在 $X(x + 2\pi) = X(x)$ 的条件下有固有值 $\lambda_n = n^2 (n = 0, 1, 2, \cdots)$. $\lambda_0 = 0$ 对应的 $X_0(x) = 1$, $\|X_0(x)\|^2 = 2\pi$; $n \geqslant 1$ 时 λ_n 对应的固有函数 $X_n(x) = \{\cos nx, \sin nx\}$, $\|X_n(x)\|^2 = \pi$. 全体固有函数构成 $[0, 2\pi]$ 上的 Fourier 展开的正交基.

若将 S-L 型方程 (2.2.6a) 式改写为

$$X''(x) + \frac{k'(x)}{k(x)}X'(x) + \frac{\lambda\rho(x) - q(x)}{k(x)}X(x) = 0, \tag{2.2.12}$$

定理 2.2.1、2.2.2 中方程系数 $k(x), q(x), \rho(x)$ 满足的条件 (2.2.6c) 式、(2.2.6d) 式保证了方程在区间 $[a, b]$, 包括端点 a, b 没有奇性, 称 a, b 是方程的常点, 定理 2.2.1、2.2.2 是常点情况下的 S-L 定理. 若在 a(或 b) 端方程 (2.2.12) 式出现奇性, 当奇性不太

高时, 如 a(或 b) 是 $k(x)$ 的一级零点, 是 $q(x)$ 的至多一级极点时, 称 a(或 b) 是方程的正则奇点. 此时 S-L 定理仍然成立. 详见第 3 章.

S-L 定理提供了分离变量法的理论依据. 通过解固有值问题找出函数空间的正交基, 再将未知函数表示成关于正交基的 Fourier 展开式. 所以, 分离变量法实质就是 Fourier 展开法.

在实际问题中也会出现 S-L 定理条件不成立的其他固有值问题, 如端点奇性太高, 或区间无界等, 此时固有值分布比较复杂, 除离散部分还会有连续部分, 也可取负数, 在第 4 章中将会看到区间无界的情况. 更一般的关于奇型微分算子谱问题有专著讨论.

2.2.3 例题

例 2.2.1(有界杆上的温度分布) 长为 l 的导热细杆, 杆身侧面绝热, 内部无热源. 杆的一端绝热, 杆的另一端与外界温度保持零度的介质自由热交换, 杆的初始温度已知, 求此有界杆上的温度分布.

解 设杆上各点的温度为 $u(t,x)$, 则 u 满足定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t>0,\ 0<x<l, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \gamma u\right)\right|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases} \tag{2.2.13}$$

其中, $\gamma = \dfrac{h}{k}$, k 为杆身的热传导系数, h 为杆端与外界的热交换系数.

设 $u(t,x) = T(t)X(x)$, 代入方程和边界条件, 分离得固有值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0<x<l, \\ X'(0) = X'(l) + \gamma X(l) = 0 \end{cases} \tag{2.2.14}$$

和常微分方程

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0.$$

上述固有值问题中的方程是 S-L 型的, $k(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$, $\rho(x) \equiv 1$. 两端 $x=0$, $x=l$ 均为方程的常点, 分别配以第 II、III类齐次边界条件. 由 S-L 定理得, 固有值 $\lambda > 0$.

设 $\lambda = \omega^2 > 0$, 解得

$$X(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x,$$

代入 $x=0$ 端边界条件

$$X'(0) = B\omega = 0,$$

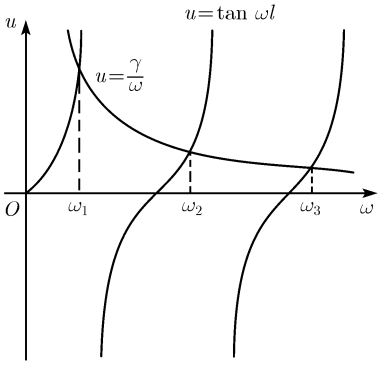


图 2.2.1

有 $B=0$. 代入 $x=l$ 端边界条件

$$X'(l)+\gamma X(l)=-A\omega\sin\omega l+A\gamma\cos\omega l=0,$$

得

$$\tan\omega l=\frac{\gamma}{\omega}.$$

由图 2.2.1 可见, 此超越方程有无穷多个正实根. 记第 n 个正实根为 ω_n, 则得固有值

$$\lambda_n=\omega_n^2,\quad n=1,2,\cdots$$

和相应的固有函数

$$X_n(x)=\cos\omega_n x.$$

此固有函数的模平方为

$$\begin{aligned}\|X_n(x)\|^2&=\int_0^l\cos^2\omega_n x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^l(1+\cos 2\omega_n x)\mathrm{d}x\\&=\frac{l}{2}+\frac{1}{4\omega_n}\sin 2\omega_n l=\frac{l}{2}+\frac{1}{4\omega_n}\cdot\frac{2\tan\omega_n l}{1+\tan^2\omega_n l}\\&=\frac{1}{2}\left(l+\frac{\gamma}{\omega_n^2+\gamma^2}\right).\end{aligned}$$

由 $T(t)$ 的方程, 解得相应于 $\lambda_n=\omega_n^2$ 的

$$T_n(t)=\mathrm{e}^{-a^2\omega_n^2 t}.$$

设 $u(t,x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}C_n\mathrm{e}^{-a^2\omega_n^2 t}\cos\omega_n x$, 代入 (2.2.13) 的初始条件

$$u|_{t=0}=\sum_{n=1}^{+\infty}C_n\cos\omega_n x=\varphi(x),$$

这是 $\varphi(x)$ 按固有函数系 $\{\cos\omega_n x\}$ 的展开式, 由 S-L 定理中公式 (2.2.11b) 得

$$C_n=\frac{1}{\|X_n(x)\|^2}\int_0^l\varphi(x)\cos\omega_n x\mathrm{d}x=\frac{2}{l+\dfrac{\gamma}{\omega_n^2+\gamma^2}}\int_0^l\varphi(x)\cos\omega_n x\mathrm{d}x.$$

最后得问题 (2.2.13) 式的形式解

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}\left(l+\frac{\gamma}{\omega_n^2+\gamma^2}\right)\right]^{-1}\int_0^l\varphi(\xi)\cos\omega_n\xi\mathrm{d}\xi\,\mathrm{e}^{-a^2\omega_n^2 t}\cos\omega_n x.$$

例 2.2.2 截面为矩形的无穷长棱柱, 内部无热源. 两相对侧面与外界绝热, 另两相对侧面温度分别保持 0° 和与高度无关的稳恒分布, 求此棱柱的温度分布.

解 可以看成二维问题. 设矩形为 $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$, 温度分布为 $u(x,y)$, 则有边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a,\ 0 < y < b, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=a} = f(y), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0. \end{cases} \tag{2.2.15}$$

设 $u(x,y) = X(x)Y(y)$, 代入方程和齐次边界条件, 分离得固有值问题

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \\ Y'(0) = Y'(b) = 0 \end{cases} \tag{2.2.16}$$

和关于 $X(x)$ 的常微分方程

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0.$$

对比 S-L 型方程 (2.2.6a), 固有值问题 (2.2.16) 式中 $q(y) \equiv 0$, 且两端不出现第Ⅰ、Ⅲ类边界条件. 由 S-L 定理, 固有值 $\lambda = \omega^2 \geqslant 0$, 具体可解得固有值

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

固有函数

$$Y_n(y) = \cos\frac{n\pi}{b}y$$

和相应的

$$\begin{aligned} X_0(x) &= C_0 + D_0 x, \\ X_n(x) &= C_n \mathrm{ch}\,\frac{n\pi}{b}x + D_n \mathrm{sh}\,\frac{n\pi}{b}x, \quad n = 1, 2, \cdots. \end{aligned}$$

将所有变量分离形状解叠加, 令

$$u(t,x) = C_0 + D_0 x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(C_n \mathrm{ch}\,\frac{n\pi}{b}x + D_n \mathrm{sh}\,\frac{n\pi}{b}x\right)\cos\frac{n\pi}{b}y,$$

由 (2.2.15) 式中另一组非齐次边界条件

$$u|_{x=0} = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos\frac{n\pi}{b}y = 0,$$

可推出 $C_n = 0,\ n = 0, 1, 2, \cdots$;

$$u|_{x=a} = D_0 a + \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \mathrm{sh}\, \frac{an\pi}{b} \cos \frac{n\pi}{b} y = f(y),$$

这是 $f(y)$ 在 $[0, b]$ 上的 Fourier 余弦展开, 由 (2.2.11b) 式可得

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{ab} \int_0^b f(y) \mathrm{d}y, \\ D_n &= \frac{2}{b \mathrm{sh}\, \dfrac{an\pi}{b}} \int_0^b f(y) \cos \frac{n\pi}{b} y \mathrm{d}y, \quad n = 1, 2, \cdots . \end{aligned}$$

最后得矩形域上边值问题 (2.2.15) 式的形式解

$$u(x, y) = \frac{x}{ab} \int_0^b f(\eta) \mathrm{d}\eta + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{b} \left(\mathrm{sh} \frac{an\pi}{b} \right)^{-1} \int_0^b f(\eta) \cos \frac{n\pi}{b} \eta \mathrm{d}\eta\, \mathrm{sh}\, \frac{n\pi}{b} x \cos \frac{n\pi}{b} y.$$

例 2.2.3 求解扇形域上的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, \quad 1 < r < \mathrm{e},\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}, \\ u|_{r=1} = u|_{r=\mathrm{e}} = 0, \\ u|_{\theta=0} = 0, \quad u|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = g(r), \end{cases} \tag{2.2.17}$$

这里, (r, θ) 为极坐标, e 为自然对数的底数.

解 极坐标下, 方程为

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,$$

设 $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$, 代入方程和关于 r 的齐次边界条件, 分离变量得固有值问题

$$\begin{cases} r^2 R''(r) + r R'(r) + \lambda R(r) = 0, \quad 1 < r < \mathrm{e}, \\ R(1) = R(\mathrm{e}) = 0 \end{cases} \tag{2.2.18}$$

及常微分方程

$$\Theta''(\theta) - \lambda \Theta(\theta) = 0.$$

固有值问题中的方程是变系数二阶线性方程, 可化为 S-L 型

$$[rR'(r)]' + \lambda \frac{1}{r} R(r) = 0,$$

这里, $k(r) = r,\ q(r) \equiv 0,\ \rho(r) = \dfrac{1}{r}$. 由 S-L 定理知 $\lambda > 0$.

$R(r)$ 的方程是欧拉 (Euler) 方程, 作变量代换 $r=\mathrm{e}^t$, 记 $y(t)=R(\mathrm{e}^t)$, 则变系数方程的固有值问题 (2.2.18) 式转化为最简 S-L 型方程固有值问题

$$\begin{cases} y''(t)+\lambda y=0, \quad 0<t<1, \\ y(0)=y(1)=0. \end{cases}$$

即得固有值

$$\lambda_n=(n\pi)^2, \quad n=1,2,\cdots$$

及固有函数

$$y_n(t)=\sin n\pi t,$$

亦即

$$R_n(r)=\sin(n\pi\ln r).$$

相应地

$$\Theta_n(\theta)=A_n\mathrm{ch}\, n\pi\theta+B_n\mathrm{sh}\, n\pi\theta.$$

设

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\mathrm{ch}\, n\pi\theta+B_n\mathrm{sh}\, n\pi\theta)\sin(n\pi\ln r),$$

代入关于 θ 的边界条件, 得

$$u|_{\theta=0}=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\sin(n\pi\ln r)=0,$$

$$u|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\sum_{n=1}^{+\infty}B_n\mathrm{sh}\,\frac{n\pi^2}{2}\sin(n\pi\ln r)=g(r),$$

这里, $\{\sin(n\pi\ln r),\ n=1,2,\cdots\}$ 是区间 $[1,\mathrm{e}]$ 上加权函数 $\rho(r)=\dfrac{1}{r}$ 的完备正交函数系, 故

$$\begin{aligned} A_n&=0, \\ B_n&=\frac{1}{\mathrm{sh}\,\dfrac{n\pi^2}{2}}\cdot\frac{\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}g(r)\sin(n\pi\ln r)\frac{1}{r}\mathrm{d}r}{\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\sin^2(n\pi\ln r)\frac{1}{r}\mathrm{d}r} \\ &=\frac{2}{\mathrm{sh}\,\dfrac{n\pi^2}{2}}\int_0^1 g(\mathrm{e}^t)\sin(n\pi t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

例 2.2.4　求满足双调和方程定解问题

$$\begin{cases} \Delta^2\varphi = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 \varphi = 0, \quad 0 < x < l, & (2.2.19a) \\ \left.\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right|_{x=0} = \left.\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right|_{x=l} = 0, & (2.2.19b) \\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \not\equiv 0 & (2.2.19c) \end{cases}$$

的所有变量分离形状的解.

解　显然这个定解问题的解不唯一, 且方程和定解条件都不同于可分离变量问题 (2.2.1).

设 $\varphi = X(x)Y(y)$, 代入方程 (2.2.19a) 并除以 φ, 得

$$\frac{X^{(4)}}{X} + 2\frac{X''Y''}{XY} + \frac{Y^{(4)}}{Y} = 0. \tag{2.2.20}$$

将上式对 y 求导, 得

$$2\frac{X''}{X}\left(\frac{Y''}{Y}\right)' + \left(\frac{Y^{(4)}}{Y}\right)' = 0,$$

从而, 可推得

$$\begin{aligned} X'' &= -\lambda X, \\ X^{(4)} &= (-\lambda X)'' = \lambda^2 X. \end{aligned}$$

代入方程 (2.2.20), 便有 $Y(y)$ 满足的方程

$$Y^{(4)} - 2\lambda Y'' + \lambda^2 Y = 0.$$

又将 $\varphi = X(x)Y(y)$ 代入定解条件 (2.2.19b) 式、(2.2.19c) 式, 得

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right|_{x=0} &= X(0)Y''(y) = 0, \\ \left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right|_{x=l} &= X(l)Y''(y) = 0, \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} &= X(x)Y''(y) \not\equiv 0, \end{aligned}$$

可知 $Y''(y) \not\equiv 0$, 从而有

$$X(0) = X(l) = 0.$$

解得

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

代入 $Y(y)$ 满足的 4 阶常微分方程, 其特征方程为

$$k^4 - 2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 k^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 = 0,$$

有两个二重根

$$k_{1,2} = \frac{n\pi}{l}, \quad k_{3,4} = -\frac{n\pi}{l},$$

解得相应的

$$Y_n(y) = (A_n + B_n y)\mathrm{ch}\,\frac{n\pi}{l}y + (C_n + D_n y)\mathrm{sh}\,\frac{n\pi}{l}y.$$

问题 (2.2.19) 式的全部变量分离形状解为

$$\left\{\sin\frac{n\pi}{l}x\left[(A_n + B_n y)\mathrm{ch}\,\frac{n\pi}{l}y + (C_n + D_n y)\mathrm{sh}\,\frac{n\pi}{l}y\right]\right\}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

2.3 非齐次问题

在前两节中用分离变量法求解的定解问题都是齐次的, 即泛定方程和边界条件都是齐次的, 这就保证了满足齐次方程和齐次边界条件的变量分离形式的解线性叠加以后, 仍然满足齐次方程和齐次边界条件. 如果泛定方程或边界条件出现非齐次项, 则不能直接用分离变量法. 本节将着重讨论如何将非齐次问题转化为齐次问题, 进而用分离变量法求解.

2.3.1 齐次边界条件下非齐次发展方程的混合问题

我们通过具体例子介绍处理非齐次方程的方法.

例 2.3.1 两端固定弦的强迫振动

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x), \quad t > 0,\ 0 < x < l, & \text{(2.3.1a)} \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0, & \text{(2.3.1b)} \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x). & \text{(2.3.1c)} \end{cases}$$

这是一个齐次边界条件下的非齐次发展方程的混合问题, 非齐次项 $f(t,x)$ 反映了弦身上外力的作用.$f(t,x) \equiv 0$ 时, 即为齐次问题 (2.1.1) 式, 已在 2.1.1 小节中用分离变量法求得其精确解 (2.1.5) 式. 求解非齐次问题 (2.3.1) 式的基本想法是通过方程“齐次化”, 把非齐次问题转化成相应的齐次问题 (2.1.1) 式.

1. 特解法

由叠加原理, 找非齐次方程 (2.3.1a) 的一个特解 $v(t,x)$, 可把方程齐次化. 为了保持边界条件的齐次性, 还应要求 $v(t,x)$ 满足齐次边界条件 (2.3.1b) 式. 对于比较特殊的 $f(t,x)$, 这样的特解 $v(t,x)$ 有可能找到.

比如, $f(t,x)=Ax,\ A$ 为常数. 不失一般性, 不妨设 $\varphi(x)\equiv 0,\ \psi(x)\equiv 0,\ l=1$. 此时的特解可取为一元函数 $v(x)$.

现令 $u(t,x)=v(x)+w(t,x)$, 其中, $v(x)$ 满足常微分方程边值问题

$$\begin{cases} -a^2v''(x)=Ax, \\ v(0)=v(1)=0. \end{cases}$$

积分得方程的通解

$$v(x)=-\frac{A}{a^2}\left(\frac{1}{6}x^3+Cx+D\right),$$

由边界条件定出积分常数

$$D=0,\quad C=-\frac{1}{6},$$

得

$$v(x)=\frac{A}{6a^2}(x-x^3).$$

根据叠加原理, $w(t,x)$ 满足定解问题

$$\begin{cases} w_{tt}-a^2w_{xx}=0, \\ w|_{x=0}=w|_{x=1}=0, \\ w|_{t=0}=-v(x)=\dfrac{A}{6a^2}(x^3-x),\quad w_t|_{t=0}=0. \end{cases}$$

这是齐次方程齐次边界条件的问题, 可直接用 2.1.1 小节的公式 (2.1.5) 得

$$w(t,x)=\frac{2A}{a^2\pi^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\cos an\pi t\sin n\pi x.$$

2. 冲量原理法

在 1.6.2 小节中, 对无穷长弦的纯强迫振动问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=f(t,x),\quad t>0,\ -\infty<x<+\infty, \\ u\big|_{t=0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \end{cases}$$

通过冲量原理, 把非齐次方程齐次初始条件的问题转化为齐次方程非齐次初始条件的问题. 注意到两端固定弦的强迫振动 (2.3.1) 式中的边界条件是齐次的, 可直接验证对有限区间的混合问题, 冲量原理仍然成立.

首先, 令 (2.3.1) 式的解 $u = u_1 + u_2$, 其中, u_1, u_2 分别是混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = f(t,x), \quad t > 0,\ 0 < x < l, & \text{(2.3.2a)} \\ u_1\big|_{x=0} = u_1\big|_{x=l} = 0, & \text{(2.3.2b)} \\ u_1|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 & \text{(2.3.2c)} \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0,\ 0 < x < l, \\ u_2|_{x=0} = u_2|_{x=l} = 0, \\ u_2|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \tag{2.1.1}$$

的解. 由公式 (2.1.5)

$$u_2(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\varphi_n \cos \frac{an\pi}{l} t + \frac{l}{an\pi} \psi_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

其中, $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ 分别为 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 关于 $\left\{\sin \dfrac{n\pi}{l} x\right\}$ 的 Fourier 正弦展开系数.

对于 (2.3.2) 式, 由冲量原理, 先求出相应的齐次方程混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad t > \tau > 0,\ 0 < x < l, & \text{(2.3.3a)} \\ w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0, & \text{(2.3.3b)} \\ w|_{t=\tau} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=\tau} = f(\tau, x) & \text{(2.3.3c)} \end{cases}$$

的解 $w(t,x;\tau)$, 则

$$u_1(t,x) = \int_0^t w(t,x;\tau) \mathrm{d}\tau$$

是 (2.3.2) 式的解.

在定解问题 (2.3.3) 式中作平移 $t' = t - \tau$, 利用公式 (2.1.5), 有

$$w(t,x;\tau) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{l}{an\pi} f_n(\tau) \sin \frac{an\pi}{l} (t-\tau) \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

其中

$$f_n(\tau) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\tau, \xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi \mathrm{d}\xi,$$

故

$$u_1(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{l}{an\pi} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{an\pi}{l} (t-\tau) \mathrm{d}\tau \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

非齐次定解问题 (2.3.1) 式的解

$$u(t,x)=u_1(t,x)+u_2(t,x).$$

由定理 1.6.2(齐次化原理) 可知, 对一般的非齐次发展方程的混合问题

$$\begin{cases} L_tu+L_xu=f(t,x), \quad t>0,\ a<x<b, & \text{(2.3.4a)}\\ \left(\alpha_1u-\beta_1\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=a}=0, \quad \left(\alpha_2u+\beta_2\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=b}=0, & \text{(2.3.4b)}\\ u|_{t=0}=0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0, & \text{(2.3.4c)} \end{cases}$$

其中, L_t, L_x 分别为关于 t,x 的二阶线性常微分算子. 当 L_t 中最高阶导数的系数为 1 时, 先用分离变量法求出齐次方程的混合问题

$$\begin{cases} L_tw+L_xw=0, \quad t>\tau>0,\ a<x<b, & \text{(2.3.5a)}\\ \left(\alpha_1w-\beta_1\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\Big|_{x=a}=0, \quad \left(\alpha_2w+\beta_2\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\Big|_{x=b}=0, & \text{(2.3.5b)}\\ w|_{t=\tau}=0, \quad \dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=\tau}=f(\tau,x) & \text{(2.3.5c)} \end{cases}$$

的解 $w(t,x;\tau)$, 则

$$u(t,x)=\int_0^t w(t,x;\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.3.6}$$

是非齐次方程混合问题 (2.3.4) 的解.

3. Fourier 展开法

我们已了解分离变量法就是 Fourier 展开法, 从 Fourier 展开观点看, 方程增加非齐次项并不会增加原则性困难.

对于本例, 在 2.1.1 节中, 对相应的齐次情形 ($f(t,x)=0$), 用分离变量法得到了固有值和固有函数系

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x, \quad n=1,2,\cdots. \tag{2.3.7}$$

由于固有函数系 $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{l}x, n=1,2,\cdots\right\}$ 是满足齐次边界条件 (2.3.1b) 式的函数空间里的完备正交函数系, 我们可把强迫振动问题 (2.3.1) 式的解 $u(t,x)$ 按此固有函数系作 Fourier 正弦展开, 设

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中, 展开系数 $T_n(t)$ 待定. 由叠加原理知, 这样的 $u(t,x)$ 一定满足齐次边界条件 (2.3.1b) 式, 问题在于确定系数 $T_n(t)$, 使这样的 $u(t,x)$ 满足非齐次方程 (2.3.1a) 和初始条件 (2.3.1c) 式. 为此, 将问题 (2.3.1) 式中的已知函数 $f(t,x)$, $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 都按固有函数系 $\left\{\sin\frac{n\pi}{l}x\right\}$ 作正弦展开

$$f(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\varphi_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\psi_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中, 展开系数

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(t,x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,$$

$$\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,$$

$$\psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x.$$

把这些展式代入方程 (2.3.1a) 和初始条件 (2.3.1c) 式, 得

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{+\infty}T_n''(t)\sin\frac{n\pi}{l}x-a^2\sum_{n=1}^{+\infty}T_n(t)\left(\sin\frac{n\pi}{l}x\right)''\\=&\sum_{n=1}^{+\infty}T_n''(t)\sin\frac{n\pi}{l}x+a^2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x\\=&\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x,\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}T_n(0)\sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\varphi_n\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad\sum_{n=1}^{+\infty}T_n'(0)\sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\psi_n\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

由正弦展开的唯一性, 两边比较系数得 $T_n(t)$ 的初值问题

$$\begin{cases}T_n''(t)+\left(\dfrac{an\pi}{l}\right)^2T_n(t)=f_n(t), & \text{(2.3.8a)}\\ T_n(0)=\varphi_n,\quad T_n'(0)=\psi_n. & \text{(2.3.8b)}\end{cases}$$

注意, 能从方程 (2.3.1a) 中得到 $T_n(t)$ 的方程 (2.3.8a) 是因为 $X_n(x)=\sin\dfrac{n\pi}{l}x$ 满足方程 $X_n''(x)=-\lambda_nX_n(x)$. 与齐次方程情形不同的是, 这里 $T_n(t)$ 满足的常微分方程是非齐次的.

可用通解法或 Laplace 变换法求解初值问题 (2.3.8) 式, 这里用通解法. 方程 (2.3.8a) 对应的齐次方程的基础解系

$$T_{n1}(t)=\cos\frac{an\pi}{l}t,\quad T_{n2}(t)=\sin\frac{an\pi}{l}t,$$

非齐次方程 (2.3.8a) 的一个特解

$$\begin{aligned}T_n^*(t)&=\int_0^t\frac{T_{n1}(\tau)T_{n2}(t)-T_{n1}(t)T_{n2}(\tau)}{T_{n1}(\tau)T'_{n2}(\tau)-T'_{n1}(\tau)T_{n2}(\tau)}f_n(\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\frac{l}{an\pi}\int_0^t\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)f_n(\tau)\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

方程 (2.3.8a) 的通解

$$T_n(t)=C_n\cos\frac{an\pi}{l}t+D_n\sin\frac{an\pi}{l}t+\frac{l}{an\pi}\int_0^t\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)f_n(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

代入初始条件 (2.3.8b) 式, 定出 $C_n=\varphi_n,\ D_n=\dfrac{l}{an\pi}\psi_n$, 最后得两端固定弦的强迫振动的解

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\varphi_n\cos\frac{an\pi}{l}t+\frac{l}{an\pi}\psi_n\sin\frac{an\pi}{l}t+\frac{l}{an\pi}\int_0^t\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)f_n(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

本例中采用的 Fourier 展开法, 可用于一般的非齐次问题

$$\begin{cases}L_tu+L_xu=f(t,x),\quad t>0,\ a<x<b,&\text{(2.3.9a)}\\\left(\alpha_1u-\beta_1\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=a}=0,\quad\left(\alpha_2u+\beta_2\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=b}=0,&\text{(2.3.9b)}\\u|_{t=0}=\varphi(x),\quad\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x),&\text{(2.3.9c)}\end{cases}$$

其中, L_t, L_x 分别是关于 t,x 的二阶线性常微分算子.

第一步 分离变量法, 求出 (2.3.9) 式相应的齐次问题 ($f(t,x)=0$) 的固有值问题, 解出该问题相应的固有值 $\{\lambda_n\}$ 及固有函数系 $\{X_n(x)\}$.

第二步 据 S-L 定理判断 $\{X_n(x)\}$ 的完备性, 并将未知函数 $u(t,x)$ 及已知函数 $f(t,x)$, $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 按固有函数系 $\{X_n(x)\}$ 作广义 Fourier 展开

$$\begin{aligned}u(t,x)&=\sum_n T_n(t)X_n(x),\\f(t,x)&=\sum_n f_n(t)X_n(x),\\\varphi(x)&=\sum_n\varphi_nX_n(x),\quad\psi(x)=\sum_n\psi_nX_n(x),\end{aligned}$$

代入方程 (2.3.9a) 及初始条件 (2.3.9c) 式, 利用 $L_xX_n(x)=-\lambda X_n(x)$, 得到未知函数 $u(t,x)$ 的广义 Fourier 系数 $T_n(t)$ 的初值问题

$$\begin{cases} L_tT_n(t)+\lambda_nT_n(t)=f_n(t), \\ T_n(0)=\varphi_n, \quad T_n'(0)=\psi_n. \end{cases}$$

第三步 解此初值问题, 确定 $T_n(t)$, 给出 $u(t,x)$ 的级数表达式.

2.3.2 一般的非齐次混合问题

现在考虑一般的非齐次混合问题

$$\begin{cases} L_tu+L_xu=f(t,x), \quad t>0,\ a<x<b, & (2.3.10a) \\ \left(\alpha_1u-\beta_1\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=a}=g_1(t), \quad \left(\alpha_2u+\beta_2\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=b}=g_2(t), & (2.3.10b) \\ u|_{t=0}=\varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x). & (2.3.10c) \end{cases}$$

边界条件出现非齐次项 $g_1(t),g_2(t)$, 不能再用分离变量法 (Fourier 展开法) 或冲量原理法求解, 但是可以通过寻找满足非齐次边界条件的特解把边界条件齐次化.

设 $v(t,x)$ 满足非齐次边界条件

$$\left(\alpha_1v-\beta_1\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_{x=a}=g_1(t), \quad \left(\alpha_2v+\beta_2\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_{x=b}=g_2(t), \tag{2.3.10b}$$

这样的 $v(t,x)$ 显然不唯一, 最简单地, 可取为 x 的线性函数

$$v(t,x)=A(t)x+B(t),$$

其中, $A(t),B(t)$ 待定. 将此 $v(t,x)$ 代入边界条件 (2.3.10b) 式, 整理得 $A(t),B(t)$ 的线性方程组

$$\begin{cases} (\alpha_1a-\beta_1)A(t)+\alpha_1B(t)=g_1(t), \\ (\alpha_2b+\beta_2)A(t)+\alpha_2B(t)=g_2(t)\,, \end{cases}$$

解出 $A(t),B(t)$ 便可得满足非齐次边界条件的 $v(t,x)$. 若上述线性方程组无解, 则可设 $v(t,x)$ 为 x 的二次函数.

找到这样的 $v(t,x)$, 令 $u(t,x)=v(t,x)+w(t,x)$, 由叠加原理知, $w(t,x)$ 满足非齐次方程齐次边界条件的定解问题

$$\begin{cases} L_tw+L_xw=f(t,x)-L_tv-L_xv, \quad t>0,\ a<x<b, \\ \left(\alpha_1w-\beta_1\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\Big|_{x=a}=0, \quad \left(\alpha_2w+\beta_2\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\Big|_{x=b}=0, \\ w|_{t=0}=\varphi(x)-v|_{t=0}, \quad \dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)-\dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}. \end{cases}$$

这在 2.3.1 节中已经解决.

例 2.3.2 一端固定, 一端周期振动弦的自由振动

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0, 0 < x < l, \qquad (2.3.11a) \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = \sin \omega t, \quad \omega \neq \dfrac{an\pi}{l}, & (2.3.11b) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x). & (2.3.11c) \end{cases}$$

解 设

$$v(t, x) = A(t)x + B(t),$$

代入非齐次边界条件

$$\begin{aligned} v|_{x=0} &= B(t) = 0, \\ v|_{x=l} &= A(t)l = \sin \omega t, \end{aligned}$$

得

$$v(t, x) = \frac{\sin \omega t}{l} x.$$

再令

$$u(t, x) = w(t, x) + \frac{\sin \omega t}{l} x,$$

则 $w(t, x)$ 是定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \dfrac{\omega^2}{l} x \sin \omega t, \quad t > 0, \ 0 < x < l, \\ w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=l} = 0, \\ w|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) - \dfrac{\omega}{l} x \end{cases} \qquad (2.3.12)$$

的解. 这是例 2.3.1 的情况, 可仿照解之.

这里, 对 $v(t, x)$ 只要求满足边界条件, 这样的 $v(t, x)$ 很多, 如在本例中也可取 $\sin \dfrac{\pi x}{2l} \sin \omega t$ 作为 $v(t, x)$, 这种任意性容易掩盖解的物理背景. 并且在本例中, 原来 u 的齐次方程转化成了 w 的非齐次方程. 能否找到将方程和边界条件同时齐次化的特解呢? 一般情况下很困难, 但是对某些特殊的非齐次边界条件和非齐次方程可以做到, 例 2.3.2 恰在其列.

另解 注意到非齐次项 $\sin \omega t$ 满足 $(\sin \omega t)'' = -\omega^2 \sin \omega t$, 可设分离变量形状特解 $v(t, x) = X(x) \sin \omega t$, 其中, $X(x)$ 待定. 代入方程 (2.3.11a) 得

$$-\omega^2 \sin \omega t X(x) - a^2 \sin \omega t X''(x) = 0,$$

消去 $\sin\omega t$, 得 $X(x)$ 满足的方程

$$X''(x)+\frac{\omega^2}{a^2}X(x)=0.$$

代入边界条件 (2.3.11b) 式得

$$X(0)\sin\omega t=0,\quad X(l)\sin\omega t=\sin\omega t,$$

消去 $\sin\omega t$, 有

$$X(0)=0,\quad X(l)=1.$$

解得

$$X(x)=\frac{\sin\frac{\omega x}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}}.$$

令 $u(t,x)=\dfrac{\sin\dfrac{\omega x}{a}}{\sin\dfrac{\omega l}{a}}\sin\omega t+w(t,x)$, 则 $w(t,x)$ 是定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0,\\ w|_{x=0}=0,\quad w|_{x=l}=0,\\ w|_{t=0}=\varphi(x),\quad \left.\dfrac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)-\dfrac{\omega}{\sin\frac{\omega l}{a}}\sin\dfrac{\omega}{a}x\end{cases}$$

的解, 当 $\varphi(x)=\psi(x)=0$ 时，可由 2.1.1 节结果直接写出

$$w(t,x)=2\omega al\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(wl)^2-(n\pi a)^2}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

与 $v(t,x)$ 相加, 得到例 2.3.2 当 $\varphi(x)=\psi(x)=0$ 时的解. 从解中可以看出, 当端点强迫振动的频率 ω 等于弦的固有频率 $\dfrac{an\pi}{l}$ 时, 产生共振.

2.3.3 非齐次稳定方程的边值问题

我们主要讨论 Poisson 方程 (即场位方程) 的边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=-f(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in V\subset\mathbf{R}^n,\ n=1,2,3, & \text{(2.3.13a)}\\ \left.\left(\alpha u+\beta\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial V}=\varphi(\boldsymbol{x})|_{\partial V}, & \text{(2.3.13b)}\end{cases}$$

其中, V 是空间区域, ∂V 是其边界曲面. 类似发展方程的混合问题, 仍可用 Fourier 展开法或特解法求解.

例 2.3.3 环内 Poisson 方程边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=12(x^2-y^2), \quad 0<a^2<x^2+y^2<b^2<+\infty, & (2.3.14a)\\ u\Big|_{x^2+y^2=a^2}=1, \quad \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x^2+y^2=b^2}=0, & (2.3.14b) \end{cases}$$

其中, n 为边界 $x^2+y^2=b^2$ 的外法向.

解　易见

$$v=x^4-y^4=r^4\cos 2\theta$$

是非齐次方程 (2.3.14a) 的一个特解. 设 $u=v+w$, 则 w 满足 Laplace 方程的边值问题

$$\begin{cases} \Delta_2 w=0, & (2.3.15a)\\ w|_{r=a}=1-a^4\cos 2\theta, & (2.3.15b)\\ \dfrac{\partial w}{\partial r}\Big|_{r=b}=-4b^3\cos 2\theta. & (2.3.15c) \end{cases}$$

因为是环内的问题, 这里采用极坐标. 由 2.1.2 节中 Laplace 方程环内问题的一般解

$$A_0+B_0\ln r+\sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)(C_nr^n+D_nr^{-n})$$

及边界条件的特点, 可设

$$w(r,\theta)=A_0+B_0\ln r+(C_2r^2+D_2r^{-2})\cos 2\theta,$$

代入 (2.3.15b) 式、(2.3.15c) 式, 得方程组

$$\begin{cases} A_0+B_0\ln a=1,\\ \dfrac{B_0}{b}=0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} a^2C_2+a^{-2}D_2=-a^4,\\ 2bC_2-2b^{-3}D_2=-4b^3. \end{cases}$$

解得

$$\begin{aligned} &B_0=0, \quad A_0=1,\\ &C_2=-\frac{a^6+2b^6}{a^4+b^4}, \quad D_2=\frac{a^4b^4(2b^2-a^2)}{a^4+b^4}, \end{aligned}$$

从而, 得 (2.3.14) 式的解为

$$u(r,\theta)=1-\left[\frac{a^6+2b^6}{a^4+b^4}r^2+\frac{a^4b^4(a^2-2b^2)}{a^4+b^4}r^{-2}-r^4\right]\cos 2\theta.$$

另解 也可用 Fourier 展开法. 先将问题 (2.3.14) 式改为极坐标形式

$$\begin{cases} \Delta_2 u = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 12r^2\cos 2\theta, \\ \qquad\qquad 0 < a < r < b < +\infty, & (2.3.14\text{a})' \\ u|_{r=a} = 1, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = 0, & (2.3.14\text{b})' \end{cases}$$

这里隐含周期条件

$$u(r, \theta + 2\pi) = u(r, \theta).$$

由 2.1.2 节可知, 相应的齐次问题的固有值为

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

固有函数为

$$\Theta_n(\theta) = \left\{ \begin{matrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{matrix} \right\}.$$

将 (2.3.14)′ 式中未知函数与已知函数按此固有函数系作 Fourier 展开,

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= A_0(r) + \sum_{n=1}^{+\infty}[A_n(r)\cos n\theta + B_n(r)\sin n\theta], \\ f(r, \theta) &= 12r^2\cos 2\theta, \\ \varphi(\theta) &= 1, \\ \psi(\theta) &= 0, \end{aligned}$$

代入方程和边界条件, 注意到 $\Theta_n''(\theta) = -n^2\Theta_n(\theta)$, 比较 Fourier 展开的系数, 可得

$$\begin{aligned} n = 0\text{时}, \quad & \begin{cases} \dfrac{1}{r}(rA_0'(r))' = A_0''(r) + \dfrac{1}{r}A_0'(r) = 0, \\ A_0(a) = 1, \quad A_0'(b) = 0, \end{cases} \\ n = 2\text{时}, \quad & \begin{cases} \dfrac{1}{r}(rA_2'(r))' - \dfrac{4}{r^2}A_2(r) = 12r^2, \\ A_2(a) = 0, \quad A_2'(b) = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

而其余的系数 $A_n(r) = 0 (n \neq 0, 2)$, $B_n(r) = 0$. 易见 $A_0(r) \equiv 1$, $n = 2$ 时的方程为非齐次 Euler 方程

$$r^2A_2''(r) + rA_2'(r) - 4A_2(r) = 12r^4,$$

有通解

$$A_2(r) = Cr^2 + Dr^{-2} + r^4.$$

再由定解条件

$$Ca^2 + Da^{-2} + a^4 = 0,$$
$$2Cb - 2Db^{-3} + 4b^3 = 0,$$

同样可解出 C, D, 并得到用特解法得到的解.

习　题　2

1. 求方程 $y'' + \lambda y = 0 (0 < x < l)$ 在下列边界条件下的固有值和固有函数：

(1) $y'(0) = 0, \quad y(l) = 0.$

(2) $y(0) = 0, \quad y'(l) + hy(l) = 0.$

(3) $y'(0) - ky(0) = 0, \quad y'(l) + hy(l) = 0, \quad h, k > 0.$

2. 解下列固有值问题：

(1) $\begin{cases} y'' - 2ay' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} (r^2 R')' + \lambda r^2 R = 0, \quad 0 < r < a, \\ |R(0)| < +\infty, \quad R(a) = 0. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y^{(4)} - \lambda y = 0, \quad 0 < x < l, \\ y(0) = y(l) = y''(0) = y''(l) = 0. \end{cases}$

3. 长为 l 的均匀弦, 两端点固定, 在距离一端 $(x = 0)b$ 处拨离平衡位置 h 后放开, 求此弦的微小横振动.

4. 长为 l 的均匀导热细杆, 侧面绝热, 初始温度分布为 $\varphi(x)$, 杆内无热源分布, 一端 $(x = 0)$ 温度为 0, 另一端与零度介质有热交换, 求此导热杆的温度变化规律.

5. 长为 l 的柱形管, 一端 $(x = 0)$ 封闭, 另一端开放, 管内空气中含有某种浓度为 u_0 的气体向管外散失, 管外空气中这种气体浓度始终保持为 0, 求此管内该气体的浓度分布.

6. 边长为 l_1 和 l_2 的矩形薄膜, 长为 l_1 的两边固定, 另两边自由, 求此薄膜的固有振动.

7. 半径为 a 的无限长 $(-\infty < z < +\infty)$ 的圆柱体内无自由电荷分布, 已知圆柱侧面电位如下, 求圆柱内部电位分布, 其中, (r, θ, z) 为柱坐标.

(1) $u|_{r=a} = A\cos\theta$; (2) $u|_{r=a} = A + B\sin\theta$; (3) $u|_{r=a} = \sin 2\theta \cos\theta.$

8. 长为 l 的水平静止均匀细弦, 一端 $(x = 0)$ 固定, 另一端在其平衡位置附近以 $\cos t + \cos 2t$ 做简谐横振动, 求此弦运动规律.

9. 解下列定解问题：

(1) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, 0 < x < 2l, \\ u_x(t, 0) = u_x(t, 2l) = 0, \\ u(0, x) = \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2A}, & |x - l| < A < l, \\ 0, & \text{其余 } x. \end{cases} \end{cases}$

求解 $u(t, x)$, 并讨论当 $t \to +\infty$ 时及 $A \to 0$ 时解的极限.

(2) $\begin{cases} u_t = x^2u_{xx} + 3xu_x - 2u, \quad t > 0, 1 < x < \mathrm{e}, \\ u(t,1) = u(t,\mathrm{e}) = 0, \\ u(0,x) = \dfrac{1}{x}\big[\sin(\pi \ln x) - \sin(2\pi \ln x)\big]. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} u_{tt} + 2hu_t = a^2u_{xx}, \quad t > 0,\ 0 < x < l,\ h\text{为常数},\ 0 < h < \dfrac{\pi a}{l}, \\ u(t,0) = u(t,l) = 0, \\ u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x). \end{cases}$

(4) $\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} + bu_x - u, \quad t > 0, 0 < x < l, \\ u(t,0) = u(t,l) = 0, \quad u(0,x) = 0, \quad u_t(0,x) = \psi(x). \end{cases}$

(5) $\begin{cases} u_{tt} + a^2u_{xxxx} = 0, \quad t > 0, 0 < x < l, \\ u(0,x) = x(l-x), \quad u_t(0,x) = 0, \\ u(t,0) = u(t,l) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,l) = 0. \end{cases}$

10. 解下列边值问题：

(1) $\begin{cases} \Delta_2 u = 1, \quad 1 < r < 2, \\ u|_{r=1} = \dfrac{5}{4} + \cos^2\theta, \\ u|_{r=2} = 1 + \sin^2\theta, \quad \text{其中}, (r,\theta)\text{为极坐标}. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \Delta_2 u = 0, \quad a < r < b,\ 0 < \theta < \alpha < 2\pi, \\ u|_{r=a} = 0, \quad u_r|_{r=b} = \sin^2\theta, \\ u|_{\theta=0} = 0, \quad u|_{\theta=\alpha} = 0, \quad \text{其中}, (r,\theta)\text{为极坐标}. \end{cases}$

11. 求二维热传导方程 $u_t = a^2\triangle_2 u$ 的所有满足条件 $\lim\limits_{t\to+\infty} u = 0$ 的变量分离解.

12. 解下列定解问题：

(1) $\begin{cases} u_t = a^2u_{xx} + A\mathrm{e}^{-\alpha x}, \quad t > 0,\ 0 < x < l, \\ u(t,0) = u(t,l) = 0, \\ u(0,x) = T_0. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} + A\cos\dfrac{\pi x}{l}\sin\omega t, \quad t > 0,\ 0 < x < l, \\ u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0, \\ u(0,x) = 0, \quad u_t(0,x) = 0. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} u_t = a^2u_{xx} + A(1 - \dfrac{x}{l})\mathrm{e}^{-ht}, \quad t > 0,\ 0 < x < l, \\ u(t,0) = u(t,l) = 0, \\ u(0,x) = 0. \end{cases}$

13. 解下列定解问题：

(1) $\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx}, \quad t > 0,\ 0 < x < 1, \\ u_x(t,0) = 1, \quad u(t,1) = 0, \\ u(0,x) = 0, \quad u_t(0,x) = 0. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \triangle_2 u = f(x,y), \quad 0 < x < a,\ 0 < y < b, \\ u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(a,y) = \varphi_2(y), \qquad\qquad (*) \\ u(x,0) = \psi_1(x), \quad u(x,b) = \psi_2(x). \end{cases}$

[提示：先求一个满足边界条件 $(*)$ 的函数 $Ax + B$, 然后用固有函数方法求解.]

第 3 章　特殊函数及其应用

将分离变量法推广到高维情况. 在正交曲线坐标系下对数学物理方程分离变量, 会出现某些变系数线性常微分方程, 这些方程的解在数学物理中有广泛应用, 是一些特殊函数. 作为例子, 本章将讨论应用上特别重要的勒让德函数和贝塞尔函数, 并用以求解三类方程在球形、柱形域上的定解问题.

3.1　正交曲线坐标系下的变量分离

在求高维空间中发展方程的变量分离形状解时, 通常先把时间变量分离出去, 得到仅含空间变量的偏微分方程. 如对于三维波动方程 $u_{tt} = a^2\Delta_3 u$ 或热传导方程 $u_t = a^2\Delta_3 u$, 均可令 $u = T(t)v(x, y, z)$, 代入方程, 两边同除以 Tv, 分别得

$$\frac{T''}{T} = a^2\frac{\Delta_3 v}{v} \quad \text{或} \ \frac{T'}{T} = a^2\frac{\Delta_3 v}{v},$$

分离得常微分方程

$$T'' + a^2k^2T = 0 \quad \text{或} \ T' + a^2k^2T = 0$$

和**亥姆霍兹** (Helmholtz) **方程**

$$\Delta_3 v + k^2 v = 0. \tag{3.1.1}$$

Laplace 方程

$$\Delta_3 v = 0$$

可视作 Helmholtz 方程 $k = 0$ 的特殊情形. 进一步对 v 的变量分离则依赖于坐标系的选取.

3.1.1　Helmholtz 方程在直角坐标系下的变量分离及高维 Fourier 展开

在空间矩形区域上求解时, 应采用直角坐标系, 此时 Laplace 算子有简单表示形式

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{3.1.2}$$

设 $v(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$, 代入 Helmholtz 方程 (3.1.1), 得

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + k^2 = 0.$$

逐层剥离, 得常微分方程

$$X''+\lambda X=0, \tag{3.1.3a}$$

$$Y''+\mu Y=0, \tag{3.1.3b}$$

$$Z''+\nu Z=0, \tag{3.1.3c}$$

其中, 参数有关系式

$$\lambda+\mu+\nu=k^2.$$

它们配以相应的齐次边界条件, 分别构成最简 S–L 型方程的固有值问题. 求出相应的固有值、固有函数, 可得高维 Fourier 展开形式的解.

例 3.1.1 求长方体内稳恒温度分布.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \quad 0<x<a,\ 0<y<b,\ 0<z<c, & \text{(3.1.4a)}\\ u|_{x=0}=\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a}=\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=u|_{y=b}=0, & \text{(3.1.4b)}\\ u|_{z=0}=0, \quad u|_{z=c}=\varphi(x,y). & \text{(3.1.4c)} \end{cases}$$

解 设 $u=X(x)Y(y)Z(z)$, 分离得方程 (3.1.3a)、(3.1.3b)、(3.1.3c), 其中, $\lambda+\mu+\nu=0$. 注意到 x,y 方向的边界条件为齐次, 再分离齐次边界条件, 得固有值问题

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0,\\ X(0)=X'(a)=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} Y''+\mu Y=0,\\ Y'(0)=Y(b)=0 \end{cases}$$

以及常微分方程

$$Z''-(\lambda+\mu)Z=0.$$

以上两个固有值问题的解为

$$\lambda_n=\left[\frac{(2n+1)\pi}{2a}\right]^2, \quad X_n(x)=\sin\frac{(2n+1)\pi}{2a}x, \quad n=0,1,2,\cdots,$$

$$\mu_m=\left[\frac{(2m+1)\pi}{2b}\right]^2, \quad Y_m(y)=\cos\frac{(2m+1)\pi}{2b}y, \quad m=0,1,2,\cdots.$$

相应的

$$Z_{nm}(z)=C_{nm}\mathrm{ch}\,\omega_{nm}z+D_{nm}\mathrm{sh}\,\omega_{nm}z, \quad \omega_{nm}=\sqrt{\lambda_n+\mu_m}.$$

由叠加原理知

$$u(x,y,z)=\sum_{n,m=0}^{+\infty}(C_{nm}\mathrm{ch}\,\omega_{nm}z+D_{nm}\mathrm{sh}\,\omega_{nm}z)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2a}x\cos\frac{(2m+1)\pi}{2b}y$$

满足齐次方程 (3.1.4a) 和齐次边界条件 (3.1.4b) 式. 再代入非齐次边界条件 (3.1.4c) 式, 得

$$u|_{z=0} = \sum_{n,m=0}^{+\infty} C_{nm} \sin\frac{(2n+1)\pi}{2a}x \cos\frac{(2m+1)\pi}{2b}y = 0,$$

$$\begin{aligned} u|_{z=c} &= \sum_{n,m=0}^{+\infty} (C_{nm}\mathrm{ch}\,\omega_{nm}c + D_{nm}\mathrm{sh}\,\omega_{nm}c) \sin\frac{(2n+1)\pi}{2a}x \cos\frac{(2m+1)\pi}{2b}y \\ &= \varphi(x,y). \end{aligned}$$

这两式可视作为 0 及 $\varphi(x,y)$ 关于二元正交系 $\left\{\sin\frac{(2n+1)\pi}{2a}x\cos\frac{(2m+1)\pi}{2b}y,\right.$ $\left.n,m=0,1,\cdots\right\}$ 的 Fourier 展开式. 一般地, 有

定理 3.1.1　当 $\{X_n(x),\ n=1,2,\cdots\}$ 为区间 $[0,a]$ 上带权 $\rho(x)$ 的一元完备正交系, 对每个固定的 n, $\{Y_{nm}(y),\ m=1,2,\cdots\}$ 是区间 $[0,b]$ 上带权 $\sigma(y)$ 的一元完备正交系, 则二元函数系 $\{X_n(x)Y_{nm}(y),\ n,m=1,2,\cdots\}$ 是矩形 $[0,a]\times[0,b]$ 上加权 $\rho(x)\cdot\sigma(y)$ 的完备正交函数系, 即 $\forall f(x,y)\in L^2_{\rho\sigma}\big[[0,a]\times[0,b]\big] = \left\{f(x,y)\middle|\int_0^b\int_0^a |f(x,y)|^2\rho(x)\sigma(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<+\infty\right\}$, 有

$$f(x,y) = \sum_{n,m=1}^{+\infty} C_{nm}X_n(x)Y_{nm}(y),$$

其中, 系数

$$C_{nm} = \frac{\displaystyle\int_0^a\int_0^b f(x,y)X_n(x)Y_{nm}(y)\rho_{(x)}\sigma_{(y)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{\|X_n(x)\|^2\|Y_{nm}(y)\|^2}.$$

在本例中, 可求得

$$\begin{aligned} &C_{nm} = 0, \\ &D_{nm} = \frac{4}{ab\,\mathrm{sh}\,\omega_{nm}c}\int_0^a\int_0^b \varphi(x,y)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2a}x\cos\frac{(2m+1)\pi}{2b}y\mathrm{d}y\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

3.1.2　Helmholtz 方程在柱坐标系下的变量分离及 Bessel 方程的导出

在圆柱坐标曲面所围的区域上求解时, 应采用柱坐标系 (r,θ,z), 此时

$$\Delta_3 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{3.1.5}$$

设 $v(r,\theta,z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$, 代入 Helmholtz 方程 (3.1.1), 两边同除以 $R\Theta Z$, 有

$$\frac{\frac{1}{r}(rR')'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{Z''}{Z} + k^2 = 0.$$

逐层剥离, 得常微分方程

$$Z'' + \mu Z = 0, \tag{3.1.6a}$$

$$\Theta'' + \sigma\Theta = 0, \tag{3.1.6b}$$

$$\frac{1}{r}(rR')' + \left(k^2 - \mu - \frac{\sigma}{r^2}\right)R = 0. \tag{3.1.6c}$$

如果改记 $\lambda = k^2 - \mu$, $\sigma = \nu^2$, 方程 (3.1.6c) 可改写为 S–L 型方程

$$(rR')' + \left(\lambda r - \frac{\nu^2}{r}\right)R = 0. \tag{3.1.7}$$

当 $\lambda > 0$ 时, 作自变量代换 $x = \sqrt{\lambda}\, r$, 记 $y(x) = R\left(\dfrac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$, 方程 (3.1.7) 变为

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \tag{3.1.8}$$

称之为 ν **阶贝塞尔** (Bessel) **方程**. 这将是本章重点讨论的特殊函数方程之一.

3.1.3 Helmholtz 方程在球坐标系下的变量分离及 Legendre 方程的导出

在球坐标曲面所围区域上讨论问题时, 自然应采用球坐标 (r, θ, φ), 此时 Laplace 算子

$$\Delta_3 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{3.1.9}$$

设 $v(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, 代入 Helmholtz 方程 (3.1.1), 两边同除以 $R\Theta\Phi$, 有

$$\frac{\dfrac{1}{r^2}(r^2R')'}{R} + \frac{1}{r^2}\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{(\sin\theta\Theta')'}{\Theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\Phi''}{\Phi}\Big] + k^2 = 0.$$

逐层剥离, 得常微分方程

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0, \tag{3.1.10a}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\Theta')' + \left(\lambda - \frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0, \tag{3.1.10b}$$

$$\frac{1}{r^2}(r^2R')' + (k^2 - \frac{\lambda}{r^2})R = 0, \tag{3.1.10c}$$

其中, 方程 (3.1.10c) 称为**球 Bessel 方程**, 在 3.4.4 节中将看到可以转化为 Bessel 方程. 特别地, 当 $k = 0$ (Laplace 方程) 时, (3.1.10c) 式为**Euler 方程**

$$r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0. \tag{3.1.11}$$

关于 $\Theta(\theta)$ 的方程 (3.1.10b), 经变量代换 $x=\cos\theta$, 并记 $y(x)=\Theta(\arccos x), \mu=m^2$, 可改写为 S–L 型方程

$$[(1-x^2)y']'+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0, \tag{3.1.12}$$

称为 **m 阶伴随勒让德 (Legendre) 方程**. 特别地, 当 $m=0$ 时, 方程

$$[(1-x^2)y']'+\lambda y=0 \tag{3.1.13}$$

称为 **Legendre方程**, 是另一个我们将重点讨论的方程.

Bessel 方程和 Legendre 方程都是变系数二阶线性常微分方程, 它们的解 Bessel 函数和 Legendre 多项式是重要的特殊函数, 将在后续各节讨论. 数学物理中还有其他重要的变系数二阶线性常微分方程和作为解的其他特殊函数, 可参阅有关专著.

3.2　常微分方程的幂级数解

用分离变量法求解偏微分方程将导出常微分方程. 当这些方程是常系数线性常微分方程或可通过变量代换化为常系数线性常微分方程时, 通解可用初等函数表示. 但是, 很多情况下这些常微分方程是变系数线性方程, 它们的解不能用初等函数表示, 求它们的幂级数解是经常采用的有效方法. 本节将介绍幂级数解法的理论根据, 并用以求解 Legendre 方程和 Bessel 方程.

3.2.1　二阶线性常微分方程的解析理论

我们在复数域考虑问题. 以复数 z 记自变量, $w=w(z)$ 记未知函数, 二阶线性常微分方程的标准形式为

$$w''(z)+p(z)w'(z)+q(z)w(z)=0, \tag{3.2.1}$$

其中, $p(z), q(z)$ 是已知函数. 利用复变函数方法研究, 可得以下结论:

(1) 若 z_0 是 $p(z), q(z)$ 的解析点, 则称 z_0 是方程 (3.2.1) 的**常点**. 在常点附近, 有如下定理.

定理 3.2.1 (柯西 (Cauchy))　设 $p(z), q(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析, 则初值问题

$$\begin{cases} w''(z)+p(z)w'(z)+q(z)w=0, \\ w(z_0)=a_0, \quad w'(z_0)=a_1 \end{cases}$$

在圆域 $|z-z_0|<R$ 内的解存在唯一且解析.

由定理可知, 选取线性无关的两组初值 $(a_0,a_1),(b_0,b_1)$, 在方程 (3.2.1) 的常点的邻域 $|z-z_0|<R$ 内, 可用幂级数方法求出方程 (3.2.1) 的线性无关的两个解析解

$$w_1(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n,\quad w_2(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n(z-z_0)^n. \tag{3.2.2}$$

进而得到通解 $C_1w_1(z)+C_2w_2(z)$.

(2) 若 z_0 是 $p(z)$ 的至多一级极点, 是 $q(z)$ 的至多二级极点, 则称 z_0 是方程 (3.2.1) 的**正则奇点**. 在正则奇点附近, 有如下定理.

定理 3.2.2 (富克斯 (Fuchs)) 设 z_0 是方程 (3.2.1) 的正则奇点, 即 $(z-z_0)p(z)$, $(z-z_0)^2q(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析, 则在去心圆域 $0<|z-z_0|<R$ 上, 方程 (3.2.1) 有两个线性无关解

$$w_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n, \tag{3.2.3a}$$

$$w_2(z)=\alpha w_1(z)\ln(z-z_0)+(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{n=0}^{+\infty}b_n(z-z_0)^n, \tag{3.2.3b}$$

其中, 系数 $a_0b_0\neq 0$, 常数 α 可为 0. 常数 ρ_1,ρ_2 称为正则奇点 z_0 的**指标**.

通常把形如 $(z-z_0)^{\rho}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$ 的级数称为**广义幂级数**, (3.2.3) 式给出的 $w_1(z),w_2(z)$ 称为正则解. Fuchs 定理提示在方程 (3.2.1) 的正则奇点的去心邻域里, 可用广义幂级数方法求解.

(3) 若 z_0 是 $p(z),q(z)$ 的分别超过一级、二级的极点或本性奇点, 则称 z_0 是方程 (3.2.1) 的非正则奇点. 此时, 如果 $p(z),q(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 内解析, 则方程 (3.2.1) 在此去心圆域内有两个线性无关解 $w_1(z)$ 与 $w_2(z)$, 其形式同于 (3.2.3) 式, 但是求和指标的下限应改为 $n=-\infty$.

(2)、(3) 中所述的去心圆域, 当 $\alpha\neq 0$ 或 ρ_1, ρ_2 中至少有一个为非整数时, 为保证函数的单值性, 应理解为沿某支割线剪开后的去心圆域. 后述文中类似情况将不再说明.

以上定理的证明, 可通过将幂级数或广义幂级数形式的解代入方程, 定出其中的待定常数, 并证明其收敛性而完成. 我们将通过以下具体例子说明.

3.2.2 Legendre 方程的幂级数解及 Legendre 函数

Legendre 方程

$$[(1-x^2)y']'+\lambda y=0 \tag{3.1.13}$$

的标准形式为

$$y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{\lambda}{1-x^2}y=0.$$

将 x,y 看作复变量, 复平面上除 $x=\pm1$ 为方程的正则奇点外均为常点. 由 Cauchy 定理知, 在常点 $x=0$ 的邻域 $|x|<1$ 内可求方程的解析解.

设 $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, 其中, $\{a_n\}$ 为待定系数. 在收敛圆域 $|x|<1$ 内可逐项求导, 有

$$\begin{aligned}(1-x^2)y''&=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_n(x^{n-2}-x^n)\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n,\\-2xy'&=-\sum_{n=0}^{+\infty}2na_nx^n,\\\lambda y&=\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda a_nx^n.\end{aligned}$$

代入方程 (3.1.13), 合并同类项, 得

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\{(n+1)(n+2)a_{n+2}-[n(n+1)-\lambda]a_n\}x^n=0.$$

令 x^n 的系数为 0, 当参数 $\lambda\geqslant 0$ 时设 $\lambda=l(l+1)(l\geqslant 0)$ 得系数 a_n 的递推公式

$$a_{n+2}=\frac{n(n+1)-l(l+1)}{(n+1)(n+2)}a_n=\frac{(n-l)(n+l+1)}{(n+1)(n+2)}a_n. \tag{3.2.4}$$

取 $a_0\neq 0$ 和 $a_1=0$, 得方程 (3.1.13) 的一个偶次升幂解

$$\begin{aligned}y_1(x)&=a_0\left[1+\frac{(-l)(1+l)}{2!}x^2+\frac{(2-l)(-l)(1+l)(3+l)}{4!}x^4+\cdots\right]\\&=a_0\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^{2k}\Gamma\left(k-\dfrac{l}{2}\right)\Gamma\left(k+\dfrac{l+1}{2}\right)}{(2k)!\Gamma\left(-\dfrac{l}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{l+1}{2}\right)}x^{2k}.\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

取 $a_0=0$ 和 $a_1\neq 0$, 得方程 (3.1.13) 的另一个奇次升幂解

$$\begin{aligned}y_2(x)&=a_1\left[x+\frac{(1-l)(2+l)}{3!}x^3+\frac{(3-l)(1-l)(2+l)(4+l)}{5!}x^5+\cdots\right]\\&=a_1\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^{2k}\Gamma\left(k+\dfrac{1-l}{2}\right)\Gamma\left(k+\dfrac{2+l}{2}\right)}{(2k+1)!\Gamma\left(\dfrac{1-l}{2}\right)\Gamma\left(1+\dfrac{l}{2}\right)}x^{2k+1}.\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

显然 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性无关, 方程的通解

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x). \tag{3.2.7}$$

当 $l \neq n$ (非负整数) **时**, $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 均为无穷级数. 由递推公式 (3.2.4) 知当 $n \to +\infty$ 时, $\dfrac{a_{n+2}}{a_n} \to 1$, 由 d'Alembert 判别法知, $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 的收敛半径均为 1, 在收敛圆域内可逐项求导, 故 (3.2.7) 式给出了 Legendre 方程 (3.1.13) 在圆域 $|x| < 1$ 内的解析解. 由更精细的判别法, 可知 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 在 $x = \pm 1$ 都发散, 此时 Legendre 方程没有在 $x = \pm 1$ 都有界的解.

当 $l = n$ (非负整数) **时**, 由递推公式 (3.2.4) 可知, 当 n 为偶数或奇数时, 相应的 $y_1(x)$ 或 $y_2(x)$ 为 n 次多项式. 此时, 取 $a_n = \dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$, 利用递推公式 (3.2.4), 可得到按降幂排列的 Legendre 方程的一个多项式解

$$P_n(x) \overset{d}{=} \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}, \quad [\cdot]\text{为取整函数}, \tag{3.2.8}$$

称之为 **Legendre 多项式** (第一类 Legendre 函数). 利用常微分方程中的 Liouville 公式可求得 Legendre 方程的另一个线性无关解

$$\begin{aligned} Q_n(x) &\overset{d}{=} P_n(x) \int \frac{1}{(P_n(x))^2} \exp\Big\{ -\int \frac{-2x}{1-x^2} \mathrm{d}x \Big\} \mathrm{d}x \\ &= P_n(x) \int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)(P_n(x))^2}, \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

称为**第二类 Legendre 函数**. 经过计算, 可以得到

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \ln \frac{1+x}{1-x} - \sum_{k=1}^{[\frac{n+1}{2}]} \frac{2n-4k+3}{(2k-1)(n-k+1)} P_{n-2k+1}(x).$$

可见, 当 $x \to \pm 1$ 时, $Q_n(x) \to \infty$. 当 $\lambda = n(n+1)$ 时, Legendre 方程的通解为

$$y(x) = CP_n(x) + DQ_n(x), \quad C, D \text{ 为任意常数}. \tag{3.2.10}$$

3.2.3 Bessel 方程的广义幂级数解及 Bessel 函数

Bessel 方程

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu^2 \geqslant 0 \tag{3.1.8}$$

在复平面上除正则奇点 $x = 0$ 外解析. 由 Fuchs 定理, 在区域 $0 < |x| < +\infty$, 方程有广义幂级数解.

设 $y(x) = x^\rho \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, 其中, 指标 ρ 和系数 $\{a_n\}$ 待定, $a_0 \neq 0$. 代入方程 (3.1.8), 逐项求导, 合并同类项, 得

$$a_0(\rho^2-\nu^2)x^\rho+a_1[(1+\rho)^2-\nu^2]x^{1+\rho}+\sum_{n=2}^{+\infty}\{a_n[(n+\rho)^2-\nu^2]+a_{n-2}\}x^{n+\rho}=0,$$

由此得指标和系数满足的关系式

$$a_0(\rho^2-\nu^2)=0, \tag{3.2.11a}$$

$$a_1[(1+\rho)^2-\nu^2]=0, \tag{3.2.11b}$$

$$a_n[(n+\rho)^2-\nu^2]+a_{n-2}=0,\quad n\geqslant 2. \tag{3.2.11c}$$

设 $\nu\geqslant 0$, 由指标方程 (3.2.11a) 即可定出指标

$$\rho_{1,2}=\pm\nu, \tag{3.2.11a}'$$

从而方程 (3.2.11b)、(3.2.11c) 改写为

$$a_1(1\pm 2\nu)=0, \tag{3.2.11b}'$$

$$a_n n(n\pm 2\nu)+a_{n-2}=0,\quad n\geqslant 2. \tag{3.2.11c}'$$

(1) 先取 $\rho_1=\nu\geqslant 0$. 此时 $n+2\nu>0$ ($n\geqslant 1$), 由 (3.2.11b)′ 式知 $a_1=0$. 由 (3.2.11c)′ 式得系数的递推公式

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{n(n+2\nu)},\quad n\geqslant 2, \tag{3.2.12}$$

从而, 可推得

$$\begin{aligned} a_{2k+1}&=0,\\ a_{2k}=\frac{-1}{2^2k(k+\nu)}a_{2(k-1)}&=\frac{(-1)^k}{2^{2k}k(k+\nu)(k-1)(k+\nu-1)\cdots 1(\nu+1)}a_0\\ &=\frac{(-1)^k\Gamma(\nu+1)}{2^{2k}k!\Gamma(k+\nu+1)}a_0,\quad k=1,2,\cdots. \end{aligned}$$

不妨取首项系数 $a_0=\dfrac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$, 得形式解

$$y_1(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \tag{3.2.13}$$

由于 $\lim\limits_{k\to+\infty}\left|\dfrac{a_{2k}}{a_{2k-2}}\right|=\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{1}{4k(k+\nu)}=0$, $y_1(x)$ 中幂级数部分的收敛半径为 $+\infty$, 故对于任何 x, $y_1(x)$ 为有限值, 且可逐项求任意阶导, 从而 $y_1(x)$ 在去掉原点的复平面上是 ν 阶 Bessel 方程 (3.1.8) 的解, 记作 $J_\nu(x)$, 称之为**第一类 $\boldsymbol{\nu}$ 阶 Bessel 函数**. 易见

$$\lim_{x\to 0}J_\nu(x)=\begin{cases}0, & \nu>0,\\ 1, & \nu=0.\end{cases} \tag{3.2.14}$$

(2) 再取 $\rho_2=-\nu$ $(\nu>0)$. 当 $2\nu\neq m$ (正整数) 时, $n-2\nu\neq 0$. 代替递推公式 (3.2.12) 的是

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{n(n-2\nu)}, \tag{3.2.12$'$}$$

可得 ν 阶 Bessel 方程的另一个形式解

$$y_2(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k-\nu}. \tag{3.2.15}$$

当 $2\nu=2m+1$ 时, 由 (3.2.11b)$'$ 式、(3.2.11c)$'$ 式, 只要令 $a_{2m+1}=0$, 仍可推出所有奇次幂的系数为 0, 偶次幂系数服从递推公式 (3.2.12)$'$, 从而得 (3.2.15) 式给出的解 $y_2(x)$.

注意到 $y_2(x)$ 中的幂级数部分在复平面解析, 可逐次求导, 而指标数 $\rho_2=-\nu<0$, 故 $y_2(x)$ 在去掉原点的复平面 $0<|x|<+\infty$ 也是 Bessel 方程的解, 记为 $J_{-\nu}(x)$. 由 (3.2.15) 式易知

$$\lim_{x\to 0}J_{-\nu}(x)=+\infty,\quad \nu>0,\nu\neq \text{整数}. \tag{3.2.16}$$

对比 (3.2.14) 式, 当 ν 为非整数时, $J_\nu(x)$ 与 $J_{-\nu}(x)$ 线性无关, ν 阶 Bessel 方程的通解可表示为

$$y(x)=CJ_\nu(x)+DJ_{-\nu}(x).$$

问题出在 $\nu=m$ (非负整数) 时. 当 $n=2m$, 有 $n(n-2\nu)=0$, 不存在这样一组系数 $\{a_{2k}\}$, 满足关系式 (3.2.11c)$'$ 且使 $a_0\neq 0$. 事实上, 由于所有负整数是 Γ 函数的一级极点, 且

$$\begin{aligned}
J_{-m}(x)&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-m+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k-m}\\
&=\sum_{k=m}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-m+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k-m}\\
&=\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{l+m}}{(l+m)!\Gamma(l+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2l+m}\\
&=(-1)^m\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-1)^l}{l!\Gamma(l+m+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2l+m}\\
&=(-1)^mJ_m(x),
\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

$J_{-m}(x)$ 与 $J_m(x)$ 线性相关. 这表明, 当 $\nu=m$ 时, Bessel 方程的与 $J_m(x)$ 线性无关的解应是 Fuchs 定理中 $\alpha\neq 0$ 时公式 (3.2.3b) 所示的形式. 可用 Liouville 公式

或待定系数方法求之, 这里我们试用另一种方法.

当 $\nu \neq m$(非负整数) 时, 令

$$N_\nu(x) \overset{d}{=} \frac{\cos \nu\pi}{\sin \nu\pi} J_\nu(x) - \frac{1}{\sin \nu\pi} J_{-\nu}(x), \tag{3.2.18a}$$

这是 Bessel 方程的与 $J_\nu(x)$ 线性无关的另一个解, 称之为**ν 阶诺伊曼** (Neumann) **函数**, 也称为**第二类 Bessel 函数.**

当 $\nu = m$(非负整数) 时, 令 **m 阶 Neumann 函数**

$$N_m(x) \overset{d}{=} \lim_{\nu \to m} N_\nu(x). \tag{3.2.18b}$$

利用洛必达 (L'Hospital) 法则, 经过冗长的计算, 可得

$$\begin{aligned} N_m(x) =& \frac{2}{\pi} J_m(x) \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k-m} \\ & - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+m)!} \left(\sum_{l=0}^{m+k-1} \frac{1}{l+1} + \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l+1} \right) \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+m}, \end{aligned} \tag{3.2.19a}$$

特别地

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x) \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l+1} \right) \left(\frac{x}{2} \right)^{2k}, \tag{3.2.19b}$$

其中, $\gamma = \lim\limits_{k \to +\infty} [1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} - \ln(k+1)] = 0.5772\cdots$ 为 Euler 常数. 当 $x \to 0$ 时, (3.2.19a) 式中的主部为 $-\dfrac{(m-1)!}{\pi} \left(\dfrac{x}{2} \right)^{-m}$, (3.2.19b) 式中的主部为 $\dfrac{2}{\pi} J_0(x) \ln \dfrac{x}{2}$, 都有 $\lim\limits_{x \to 0} N_m(x) = -\infty$, 故 $N_m(x)$ 与 $J_m(x)$ 线性无关.

综上所述, 当 $\nu \geqslant 0$ 时, 无论 ν 是否为整数, ν 阶 Bessel 方程的通解可表示为

$$y(x) = CJ_\nu(x) + DN_\nu(x), \quad 0 < |x| < +\infty, \tag{3.2.20}$$

其中, $J_\nu(x)$ 在 $x = 0$ 有界, $N_\nu(x)$ 在 $x = 0$ 无界.

一般情况下, $J_\nu(x)$ 与 $N_\nu(x)$ 是非初等函数, 但是由 (3.2.13) 式知

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma\left(k + \frac{1}{2} + 1 \right)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{x}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!!(2k+1)!! \Gamma\left(\frac{1}{2} \right)} x^{2k+1} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x,$$

由 (3.2.15) 式可得

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

从而

$$N_{\frac{1}{2}}(x) = -J_{-\frac{1}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, \quad N_{-\frac{1}{2}}(x) = J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

在 3.4 节中还可看到所有半整数阶 Bessel 函数都是初等函数.

在物理学中, 有时还用函数

$$H_\nu^{(1)}(x) \overset{d}{=} J_\nu(x) + \mathrm{i}N_\nu(x), \tag{3.2.21a}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) \overset{d}{=} J_\nu(x) - \mathrm{i}N_\nu(x) \tag{3.2.21b}$$

作为 ν 阶 Bessel 方程的基础解系. 这两个函数分别称为**第一、二类汉克尔** (Hankel) **函数**, 也称为**第三类 Bessel 函数**.

关于二阶线性常微分方程的更一般的讨论和其他解法, 参见有关专著.

3.3 Legendre 函 数

作为重要常微分方程解的特殊函数, 如 Legendre 多项式、Bessel 函数等, 将在用分离变量法求解问题时扮演重要角色. 本节先讨论 Legendre 多项式及其在求解轴对称 Laplace 方程球面边值问题时的应用, 再通过伴随 Legendre 函数引进球函数, 并用以求解一般的 Laplace 方程球面边值问题.

3.3.1 Legendre 多项式的表示和性质

在 3.2 节中, 我们已经用幂级数形式定义了 n 次 Legendre 多项式

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{3.2.8}$$

可以直接验证, $P_n(x)$ 有**微分表示** (罗德里格斯 (Rodrigues) 公式)

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^2 - 1)^n. \tag{3.3.1}$$

具体地说, 由二项式定理

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} x^{2n-2k},$$

逐项求导, 即可证得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\\&=\frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!}(2n-2k)(2n-2k-1)\cdots(2n-2k-n+1)x^{2n-2k-n}\\&=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}\,x^{n-2k}=P_n(x).\end{aligned}$$

由于 $(z^2-1)^n$ 在全平面解析, 由 Cauchy 积分公式, 又可得 $P_n(x)$ 的**复积分表示** (施拉夫利 (Schläfli) 公式)

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n 2\pi\mathrm{i}}\oint_c\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\mathrm{d}z, \tag{3.3.2}$$

其中, c 是围绕 x 的任意闭路. 当 $|x|<1$ 时, 取 c 为以 x 为圆心, $\sqrt{1-x^2}$ 为半径的圆周, 可得 $P_n(x)$ 的**实积分表示** (Laplace 公式)

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\sqrt{1-x^2}\mathrm{i}\cos\theta)^n\mathrm{d}\theta. \tag{3.3.3}$$

公式 (3.3.3) 可解析开拓至任意复数 x.

Legendre 多项式最先由 Legendre 在研究势函数时引进. 源点 P 的点质量 (或点电荷) 在场点 P' 的引力势 (或电势) 与两点间的距离 R 的倒数成正比. 由余弦定理

$$\frac{1}{R}=(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{r}(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}},$$

其中, $t=\dfrac{r'}{r}$, $x=\cos\theta$, r,r' 分别为原点 O 到 P,P' 的距离, θ 为 OP 与 OP' 的夹角. 记 $w(t,x)=(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}$, 将 t 视为复数, 规定 $w(0,x)=1$, 则 $w(t,x)$ 在单位圆域 $|t|<1$ 内单值解析, 可做幂级数展开

$$w(t,x)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(x)t^n,$$

其中

$$c_n(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_c\frac{(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}}{t^{n+1}}\mathrm{d}t,$$

c 是 $|t|<1$ 内任意包含原点 $t=0$ 的闭路. 作变量代换

$$(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}=1-tz,$$

则有

$$c_n(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{c'}\frac{(z^2-1)^n}{2^n(z-x)^{n+1}}\mathrm{d}z,$$

c' 是 z 平面上绕 x 的闭路. 由 Schläfli 公式 (3.3.2) 知, $c_n(x)$ 即为 n 阶 Legendre 多项式 $P_n(x)$. 从而有

$$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)t^n, & |t|<1,\\ \displaystyle\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)\left(\frac{1}{t}\right)^n, & |t|>1,\end{cases}\tag{3.3.4}$$

即 Legendre 多项式是函数 $w(t,x)=(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}$ 的 Taylor 展开的系数, 称 $w(t,x)$ 为 **Legendre 多项式的母函数** (或生成函数).

利用各种表示, 可对 Legendre 多项式作进一步研究, 得到有关性质.

奇偶性 $P_n(-x)=(-1)^nP_n(x)$.

特殊点的函数值 由级数表示 (3.2.8) 式, 易得

$$P_n(0)=\begin{cases}0, & n=2m+1\geqslant 1,\\ \dfrac{(-1)^m(2m-1)!!}{(2m)!!}, & n=2m\geqslant 2,\\ 1, & n=0.\end{cases}\tag{3.3.5a}$$

又由实积分表示 (3.3.3) 知, 当 $|x|\leqslant 1$ 时

$$|P_n(x)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|x+\sqrt{1-x^2}\mathrm{i}\cos\theta\right|^n\mathrm{d}\theta\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta=1,$$

且

$$P_n(1)=1,\quad P_n(-1)=(-1)^n.\tag{3.3.5b}$$

零点分布 在微分表示式 (3.3.1) 中, $x=\pm1$ 是 $(x^2-1)^n$ 的 n 级零点. 利用 Rolle 定理, 可逐步推知 $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$, 进而 $P_n(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有且仅有 n 个互不相同的单零点.

利用这些性质, 可作前 6 个 Legendre 多项式的图形 (图 3.3.1). 前 6 个 Legendre 多项式为

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),\quad P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),$$

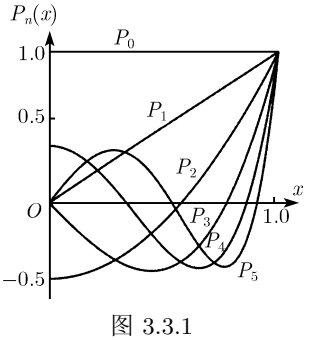


图 3.3.1

$$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x).$$

递推公式　利用母函数可以推得 Legendre 多项式有以下递推公式 ($n\geqslant 1$)：

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0, \tag{3.3.6a}$$

$$nP_n(x)-xP_n'(x)+P_{n-1}'(x)=0, \tag{3.3.6b}$$

$$nP_{n-1}(x)-P_n'(x)+xP_{n-1}'(x)=0, \tag{3.3.6c}$$

$$P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)=(2n+1)P_n(x). \tag{3.3.6d}$$

这些公式常用来求含有 Legendre 多项式的积分.

例 3.3.1　设 $m\geqslant 1, n\geqslant 1$, 试证

$$\int_0^1 x^mP_n(x)\mathrm{d}x=\frac{m}{m+n+1}\int_0^1 x^{m-1}P_{n-1}(x)\mathrm{d}x.$$

证　由递推公式 (3.3.6b) 及 $P_n(x)$ 在特殊点的函数值 (3.3.5) 式

$$\begin{aligned}
&n\int_0^1 x^mP_n(x)\mathrm{d}x\\
=&\int_0^1 x^m\big[xP_n'(x)-P_{n-1}'(x)\big]\mathrm{d}x\\
=&\big[x^{m+1}P_n(x)-x^mP_{n-1}(x)\big]_0^1\\
&-\int_0^1(m+1)x^mP_n(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 mx^{m-1}P_{n-1}(x)\mathrm{d}x\\
=&-(m+1)\int_0^1 x^mP_n(x)\mathrm{d}x+m\int_0^1 x^{m-1}P_{n-1}(x)\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

移项, 两边同除以 $m+n+1$ 即为所求证之等式.

例 3.3.2　设 $n\geqslant 2$, 计算积分 $I=\displaystyle\int_0^1 P_n(x)\mathrm{d}x$.

解　由递推关系 (3.3.6d) 式, 可得

$$\begin{aligned}
I=&\int_0^1 P_n(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2n+1}\Big[P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)\Big]_0^1\\
=&\begin{cases}
0, & n=2k,\\
\dfrac{1}{4k+3}\left[\dfrac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!}-\dfrac{(-1)^{k+1}(2k+1)!!}{(2k+2)!!}\right]=\dfrac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k+2)!!}, & n=2k+1.
\end{cases}
\end{aligned}$$

3.3.2 Legendre 方程的固有值问题及正则奇点情况下的 S–L 定理

考察 Legendre 方程的固有值问题

$$\begin{cases} [(1-x^2)y']' + \lambda y = 0, \quad -1 < x < 1, \\ |y(\pm 1)| < +\infty. \end{cases} \tag{3.3.7}$$

在 3.2.2 节中已知, 当 $\lambda = l(l+1), l$ 不是非负整数时, Legendre 方程不存在满足有界性边界条件 $|y(\pm 1)| < +\infty$ 的解, 只有当 l 为非负整数时, 才有在 $[-1,1]$ 上有界的解, 即 Legendre 多项式. 故该固有值问题的**固有值** $\lambda_n = n(n+1), n = 0,1,2,\cdots$, 相应的**固有函数** $P_n(x)$. 利用 Rodrigues 公式 (3.3.1) 和分部积分公式可以直接验证 $\{P_n(x)\}$ 的**正交性**, 即

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x = 0, \quad n \neq m.$$

由魏尔斯特拉斯 (Weierstrass) 的多项式逼近定理, $[-1,1]$ 上任意连续函数可用多项式序列一致逼近, 可推出 $\{P_n(x)\}_{n=0,1,2,\cdots}$ 在 $C[-1,1]$, 进而在 $L^2[-1,1]$ 中完备.

一般地, 对于有限区间 $[a,b]$ 上的 S–L 型方程

$$[k(x)X'(x)]' - q(x)X(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0, \quad a < x < b, \tag{2.2.6a}$$

若一端 (或两端) 为方程的正则奇点, 由 Fuchs 定理知, 方程在正则奇点邻域的两个线性无关解中至少有一个无界. 根据问题的实际意义需在正则奇点端添加有界性条件, 在常点端加三类齐次边界条件, 此时算子 $L = -\dfrac{1}{\rho(x)}\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(k(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}) - q(x)\right]$ 仍是自共轭的, S–L 定理仍然成立, 表述为

定理 3.3.1 (正则奇点情况下的 S–L 定理) S–L 型方程的固有值问题

$$\begin{cases} [k(x)X'(x)]' - q(x)X(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0, \quad a < x < b, & (2.2.6a) \\ |z(a)| < +\infty, \quad |z(b)| < +\infty & (2.2.6b)'' \end{cases}$$

方程的系数满足条件

(1) $k(x) \in C^1[a,b],\ \rho(x) \in C[a,b],\ q(x) \in C(a,b)$. (2.2.6c)′

(2) 在 (a,b) 上, $k(x) > 0,\ q(x) \geqslant 0,\ \rho(x) > 0,\ a,b$ 端是 $k(x)$ 的零点 (至多一级), $q(x)$ 的极点 (至多一级). (2.2.6d)′

则该正则奇点情况下的固有值问题的固有值、固有函数有与常点情况下相同的结论 (定理 2.2.1).

如果一端为常点, 在常点端配以三类齐次边界条件, 定理仍然成立. 对于其他的奇异情况, 如端点为非正则奇点, 区间为无限或半无限, 其固有值问题有专著讨论.

回到 Legendre 多项式, $\{P_n(x)\}$ 的正交完备性保证了: $\forall f(x)\in L^2[-1,1]$, 可关于 Legendre 多项式系 $\{P_n(x), n=0,1,2,\cdots\}$ 作广义 Fourier 展开

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_nP_n(x), \tag{3.3.8a}$$

其中, 广义 Fourier 系数

$$C_n=\frac{1}{\|P_n(x)\|^2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)\mathrm{d}x. \tag{3.3.8b}$$

模平方　$\|P_n(x)\|^2=\displaystyle\int_{-1}^{1}|P_n(x)|^2\mathrm{d}x$ 有多种计算方法, 这里利用母函数. 由公式 (3.3.4), 得

$$(1-2xt+t^2)^{-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}P_n(x)P_m(x)t^{n+m},\quad |t|<1,$$

等式两边对 x 从 -1 到 1 积分

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x\right)t^{n+m},$$

利用正交性, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\big\|P_n(x)\big\|^2t^{2n}&=-\frac{1}{2t}\ln(1-2xt+t^2)\Big|_{-1}^{1}\\&=\frac{1}{t}\Big[\ln(1+t)-\ln(1-t)\Big]\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{2n+1}t^{2n},\end{aligned}$$

两边比较系数, 即得

$$\big\|P_n(x)\big\|^2=\frac{2}{2n+1}. \tag{3.3.8c}$$

例 3.3.3　将函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1\leqslant x<\alpha,\\ \dfrac{1}{2}, & x=\alpha,\\ 1, & \alpha<x\leqslant 1\end{cases}$$

按 Legendre 多项式展开.

解　设 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}C_nP_n(x)$, 则

$$C_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_0(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{1}P_0(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1-\alpha),$$

由递推公式 (3.3.6d) 得, 当 $n \geqslant 1$ 时

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\mathrm{d}x = \frac{2n+1}{2}\int_{\alpha}^{1} P_n(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{1}\Big[P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)\Big]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\Big[P_{n-1}(\alpha) - P_{n+1}(\alpha)\Big], \end{aligned}$$

故得展式

$$f(x) = \frac{1}{2}(1-\alpha) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big[P_{n-1}(\alpha) - P_{n+1}(\alpha)\Big]P_n(x).$$

例 3.3.4 将函数 $f(x) = x^2$ 按 Legendre 多项式展开.

解 由于 $P_n(x)$ 为 n 次多项式, 且当 n 为奇数时, $P_n(x)$ 为只含奇次幂的奇函数, 当 n 为偶数时, $P_n(x)$ 为只含偶次幂的偶函数, 不妨设展式为

$$\begin{aligned} x^2 &= C_0P_0(x) + C_2P_2(x) \\ &= C_0 + C_2\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

比较系数

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2}C_2 = 1, \\ C_0 - \dfrac{1}{2}C_2 = 0, \end{cases}$$

解得

$$x^2 = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x).$$

3.3.3 轴对称 Laplace 方程球面边值问题

在本小节中, 我们利用 Legendre 多项式求解轴对称情形 ($u(r,\theta,\varphi) = u(r,\theta)$) Laplace 方程的球面边值问题, 此时方程为

$$\Delta_3 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = 0. \tag{3.3.9}$$

设 $u = R(r)\Theta(\theta)$, 分离得固有值问题

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\Theta')' + \lambda\Theta = 0, \quad 0 < \theta < \pi, & \text{(3.3.10a)} \\ \Theta(0), \quad \Theta(\pi)\text{有界} & \text{(3.3.10b)} \end{cases}$$

和 Euler 方程

$$(r^2R')' - \lambda R = 0. \tag{3.3.11}$$

固有值问题中的有界性边界条件 (3.3.10b) 式由 $\theta=0,\pi$ 是方程 (3.3.10a) 的奇点而引入.

令 $x=\cos\theta, y(x)=\Theta(\arccos x)$, 则固有值问题 (3.3.10) 式即为 Legendre 方程的固有值问题 (3.3.7) 式

$$\begin{cases} \big[(1-x^2)y'\big]'+\lambda y=0, & -1<x<1,\\ \big|y(\pm1)\big|<+\infty. \end{cases}$$

故 (3.3.10) 式的固有值 $\lambda_n=n(n+1), n=0,1,2,\cdots$, 固有函数 $\Theta_n(\theta)=P_n(\cos\theta)$, 模平方

$$\big|\big|\Theta_n(\theta)\big|\big|^2=\int_0^{\pi}P_n^2(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2n+1}.$$

相应地, λ_n 对应的 Euler 方程 (3.3.11) 的解为

$$R_n(r)=C_nr^n+D_nr^{-(n+1)}.$$

从而, 得轴对称情况下 Laplace 方程 (3.3.9) 的解的一般形式

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}[C_nr^n+D_nr^{-(n+1)}]P_n(\cos\theta). \tag{3.3.12a}$$

球内问题的解为

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_nr^nP_n(\cos\theta), \tag{3.3.12b}$$

球外问题的有界解为

$$u(r,\theta)=C_0+\sum_{n=0}^{+\infty}D_nr^{-(n+1)}P_n(\cos\theta). \tag{3.3.12c}$$

例 3.3.5　在半径为 a 的接地金属球壳内, 距球心距离为 b 的 P 点处置一点电荷 $4\pi\varepsilon q$, 求球内电位.

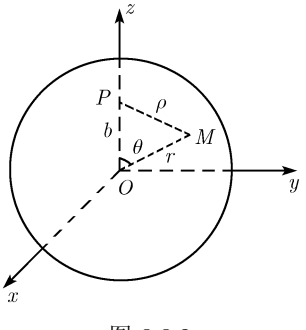


图 3.3.2

解　球内置正点电荷后, 金属球壳上产生负的感应电荷, 故球内电位

$$U=u_0+u,$$

其中, $u_0=\dfrac{q}{\rho}$ 为点电荷产生的电位, ρ 为源点 P 到场点 M 的距离, u 为感应电荷产生的电位 (图 3.3.2).

取球心为坐标原点, z 轴通过 P 点, 则感应电位 u 和总电位 U 均为轴对称. 感应电位 u 在球内满足 Laplace 方程

$$\Delta_3 u = 0, \quad r < a,$$

由于球壳接地, 在球面上 $U|_{r=a} = 0$, 即

$$u|_{r=a} = -u_0|_{r=a} = \frac{-q}{\sqrt{b^2 + a^2 - 2ab\cos\theta}}.$$

由 (3.3.12b) 式知, 球内

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n\big(\cos\theta\big),$$

代入边界条件

$$u\big|_{r=a} = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n P_n\big(\cos\theta\big) = -\frac{q}{a}\Big[1 - 2\frac{b}{a}\cos\theta + \Big(\frac{b}{a}\Big)^2\Big]^{-\frac{1}{2}}.$$

由母函数的 Legendre 多项式展开 (3.3.4) 式

$$\Big[1 - 2\frac{b}{a}\cos\theta + \Big(\frac{b}{a}\Big)^2\Big]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{b}{a}\Big)^n P_n\big(\cos\theta\big),$$

比较系数, 可求得

$$A_n = -\frac{q}{a}\Big(\frac{b}{a}\Big)^n,$$

从而得球内感应电场

$$\begin{aligned} u &= -\frac{q}{a}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{br}{a^2}\Big)^n P_n\big(\cos\theta\big) \\ &= -\frac{q}{a}\Big[1 - 2\frac{br}{a^2}\cos\theta + \Big(\frac{br}{a^2}\Big)^2\Big]^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{aq}{b}\Big[\Big(\frac{a^2}{b}\Big)^2 - 2\frac{a^2}{b}r\cos\theta + r^2\Big]^{-\frac{1}{2}} = \frac{q'}{\rho'}, \end{aligned}$$

其中

$$q' = -\frac{a}{b}q, \quad \rho' = \Big[\Big(\frac{a^2}{b}\Big)^2 - 2\frac{a^2}{b}r\cos\theta + r^2\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

可见感应电场等效于在 P 点关于球面的对称点放置一个 $-4\pi\varepsilon\dfrac{a}{b}q$ 的虚设电荷产生的电场. 球内总电位

$$U = \frac{q}{\rho} + \frac{q'}{\rho'}.$$

例 3.3.6 在匀强电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中放一个带电量 Q 的均匀导体球, 设球心在原点, 球的半径为 a, 求球外电位.

解 导体球放入均匀电场, 球上产生感应电荷 (图 3.3.3), 球外总电位 U 为匀强电场的电位 u_0 和导体球产生电位 u 的和.

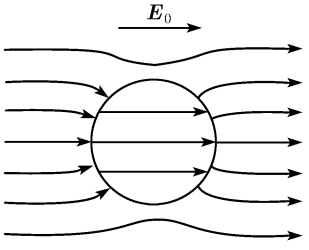


图 3.3.3

取导体球中心 O 为坐标原点, 均匀电场 $\boldsymbol{E}_0$ 的方向为 z 轴, 这样 u_0 和 u 均为轴对称, 且 $\boldsymbol{E}_0 = E_0\boldsymbol{k} = -\nabla u_0 = -\dfrac{\partial u_0}{\partial z}\boldsymbol{k}$, 故

$$u_0 = -E_0 z + c = -E_0 r\cos\theta + c,$$

常数 c 为匀强电场在原点的电位, 待定.

不妨设 $U|_{r=a} = 0$, 则带电导体球在球外产生的电场 u 满足定解问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, \quad r > a, \\ u|_{r=a} = U - u_0|_{r=a} = E_0 a\cos\theta - c, \quad u|_{r=+\infty} = 0. \end{cases}$$

由公式 (3.3.12c) 知, Laplace 方程在球外满足 $u|_{r=+\infty} = 0$ 的解为

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \Big(\frac{r}{a}\Big)^{-(n+1)} P_n(\cos\theta),$$

代入边界条件

$$u|_{r=a} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n P_n(\cos\theta) = -c + E_0 a\cos\theta,$$

比较系数得 $B_0 = -c,\ B_1 = E_0 a,\ B_n = 0\ (n \geqslant 2)$. 故

$$u(r,\theta) = -\frac{ca}{r} + \frac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta,$$

从而

$$U(r,\theta) = c - E_0 r\cos\theta + u(r,\theta).$$

下面来确定导体球取零电位时常数 c 的值. 由于在球面上总电场的电场强度

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}\Big|_{r=a} &= -\nabla U\Big|_{r=a} = -\Big(\frac{\partial U}{\partial r}\boldsymbol{r}^\circ + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\boldsymbol{\theta}^\circ + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\boldsymbol{\varphi}^\circ\Big)\Big|_{r=a} \\ &= \Big\{\Big[-\frac{ca}{r^2} + E_0\cos\theta\Big(1 + \frac{2a^3}{r^3}\Big)\Big]\boldsymbol{r}^\circ + \frac{E_0}{r}\sin\theta\Big(\frac{a^3}{r^2} - r\Big)\boldsymbol{\theta}^\circ\Big\}\Big|_{r=a} \\ &= \Big(-\frac{c}{a} + 3E_0\cos\theta\Big)\boldsymbol{r}^\circ, \end{aligned}$$

由 Gauss 定理得

$$Q = \oiint_{r=a} \varepsilon\boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \varepsilon\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\Big(3E_0\cos\theta - \frac{c}{a}\Big)a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta = -4\pi a\varepsilon c,$$

故

$$c = -\frac{Q}{4\pi a\varepsilon},$$

球外总电位

$$U=-\Big(\frac{Q}{4\pi a\varepsilon}+E_0r\cos\theta\Big)+\frac{Q}{4\pi\varepsilon r}+\frac{E_0a^3}{r^2}\cos\theta,$$

其中, 三部分分别为匀强电场的电位、点电荷 Q 的电位和感应电荷的极化偶极子产生的电位.

例 3.3.7 半球球面保持定温 u_0, 底面保持零度, 求半球内温度分布.

解 设半球内温度为 u, 取球心为坐标原点, 半球底面为 xy 平面, 则温度分布轴对称, u 的定解问题为

$$\begin{cases}\Delta_3u=0,\quad 0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2},\ r<a,\\ u\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0,\\ u\big|_{r=a}=u_0.\end{cases}$$

设 $u=R(r)\Theta(\theta)$, 分离得固有值问题

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta\Theta'\right)'+\lambda\Theta=0,\quad 0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2},\\ \Theta(0)\text{ 有界},\quad \Theta\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0.\end{cases}$$

已知当且仅当 $\lambda=n(n+1)$ 时方程有在 $\theta=0$ 有界的解 $\Theta_n(\theta)=P_n(\cos\theta)$, 关于 θ 的另一边界条件

$$\Theta_n\left(\frac{\pi}{2}\right)=P_n(0)=0$$

要求 n 为奇数, 故该半球问题的固有值 $\lambda_n=(2n+1)(2n+2), n=0,1,2,\cdots$, 固有函数 $\Theta_n(\theta)=P_{2n+1}(\cos\theta)$, 固有函数的模平方

$$\begin{aligned}N_n^2&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[P_{2n+1}(\cos\theta)]^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^1[P_{2n+1}(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^1P_{2n+1}{}^2(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2(2n+1)+1}=\frac{1}{4n+3}.\end{aligned}$$

得半球 Laplace 方程满足底面第 I 类齐次边界条件的有界解为

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1}P_{2n+1}(\cos\theta),$$

代入球面边界条件

$$u|_{r=a}=\sum_{n=0}^{+\infty}A_nP_{2n+1}(\cos\theta)=u_0,$$

可定出系数

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{N_n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_0 P_{2n+1}(\cos\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta \\ &= (4n+3)u_0\int_0^1 P_{2n+1}(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^n(2n-1)!!(4n+3)}{(2n+2)!!}u_0. \end{aligned}$$

最后一步由例 3.3.2 得到.

注意, 由于定解条件在圆周 $r=a,\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 上不连续, 这里得到的是**广义解**.

3.3.4 伴随 Legendre 方程和伴随 Legendre 函数

在 3.1.3 节中, Helmholtz 方程在球坐标下分离变量, 得到关于 θ 的常微分方程

$$\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\Theta')' + \Big(\lambda - \frac{\mu}{\sin^2\theta}\Big)\Theta = 0. \tag{3.1.10b}$$

作变量代换 $x=\cos\theta$, 记 $y(x)=\Theta(\arccos x)$, 记 $\mu=m^2$, 即为 **m 阶伴随 Legendre 方程**

$$[(1-x^2)y']' + \Big(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\Big)y = 0. \tag{3.1.12}$$

特别地, 当 $\mu=0$ 时即为 Legendre 方程. $\theta=0,\pi$ 为方程 (3.1.10b) 的奇点, 需要添加有界性边界条件

$$|\Theta(0)|, \quad |\Theta(\pi)| < +\infty.$$

亦即对方程 (3.1.12) 添加有界性边界条件

$$|y(\pm 1)| < +\infty,$$

构成 S–L 型固有值问题.

下面我们找出 m 为正整数时伴随 Legendre 方程与 Legendre 方程的联系, 利用 Legendre 多项式给出伴随 Legendre 方程固有值问题的解.

令 $y=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}u(x)$, 代入方程 (3.1.12), 得常微分方程

$$(1-x^2)u'' - 2x(m+1)u' + [\lambda - m(m+1)]u = 0. \tag{3.3.13}$$

若把 Legendre 方程

$$(1-x^2)v'' - 2xv' + \lambda v = 0 \tag{3.3.14}$$

关于 x 求一阶导数, 得

$$(1-x^2)(v')'' - 2x(1+1)(v')' + [\lambda - 1\cdot(1+1)]v' = 0,$$

恰为 $m=1$ 时的方程 (3.3.13). 一般地, 利用乘积求导的莱布尼茨公式, 将 Legendre 方程 (3.3.14) 两边对 x 求 m 阶导, 不难得到

$$(1-x^2)v^{(m+2)}-2x(m+1)v^{(m+1)}+[\lambda-m(m+1)]v^{(m)}=0.$$

因此, 当 $v(x)$ 是 Legendre 方程 (3.3.14) 的解时, $u(x)=v^{(m)}(x)$ 是方程 (3.3.13) 的解, 进而 $y(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\ v^{(m)}(x)$ 是整数 m 阶伴随 Legendre 方程 (3.1.12) 的解. 实际上, 由 Legendre 方程的通解可得伴随 Legendre 方程的通解.

在 3.3.2 小节中已知 Legendre 方程 (3.3.14) 只在 $\lambda=n(n+1), n=0,1,2,\cdots$ 时有在 $x=\pm1$ 有界的解 $P_n(x)$, 此时方程的通解可表示为

$$v(x)=CP_n(x)+DQ_n(x),$$

$P_n(x)$ 为 n 次 Legendre 多项式, $Q_n(x)$ 为第二类 Legendre 函数, $Q_n(\pm1)$ 无界. 记

$$P_n^m(x)\overset{d}{=}\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_n(x),\quad m\leqslant n, \tag{3.3.15a}$$

$$Q_n^m(x)\overset{d}{=}\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}Q_n(x), \tag{3.3.15b}$$

分别称为 m 阶 n 次第一类、第二类**伴随 Legendre 函数**, 相应的 m 阶伴随 Legendre 方程的通解则为

$$y(x)=CP_n^m(x)+DQ_n^m(x),$$

其中, 伴随 Legendre 函数 $P_n^m(x)$ 在 $x=\pm1$ 有界, 而 $Q_n^{(m)}(x)$ 在 $x=\pm1$ 无界.

综上所述, 我们得到了 ***m* 阶伴随 Legendre 方程的固有值问题**

$$\begin{cases}\left[(1-x^2)y'\right]'+\left(\lambda-\dfrac{m^2}{1-x^2}\right)y=0, & -1<x<1, \quad (3.1.12)\\ y(\pm1)\text{有界} & (3.1.12a)\end{cases}$$

的**固有值** $\lambda_n=n(n+1)$, 相应的**固有函数**为 $P_n^m(x), n=m,m+1,m+2,\cdots$.

下面来计算固有函数的模平方. 由 Legendre 多项式的微分表示式 (3.3.1) 得伴随 Legendre 函数的微分表示式

$$P_n^m(x)=\frac{1}{2^n n!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}[(x^2-1)^n]^{(n+m)}, \tag{3.3.16}$$

当 $l\geqslant n\geqslant m$ 时, 积分

$$\begin{aligned}I_{nl}^m&=\int_{-1}^{1}P_n^m(x)P_l^m(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2^{n+l}n!l!}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^m[(x^2-1)^n]^{(m+n)}\mathrm{d}[(x^2-1)^l]^{(m+l-1)}.\end{aligned}$$

记 $G(x)=(1-x^2)^m[(x^2-1)^n]^{(m+n)}$, 这是最高项系数为 $\dfrac{(-1)^m(2n)!}{(n-m)!}$ 的 $m+n$ 次多项式. 将上式分部积分 m 次, 由于 $x=\pm1$ 是 $G(x)$ 的 m 级零点, 有

$$\begin{aligned}I_{nl}^m=&\frac{1}{2^{n+l}n!l!}\Big\{\Big[G(x)\big[(x^2-1)^l\big]^{(m+l-1)}-G'(x)\big[(x^2-1)^l\big]^{(m+l-2)}+\cdots\\&+(-1)^{m-1}G^{(m-1)}(x)\big[(x^2-1)^l\big]^{(l)}\Big]\Big|_{-1}^{1}\\&+(-1)^m\int_{-1}^{1}G^{(m)}(x)\big[(x^2-1)^l\big]^{(l)}\mathrm{d}x\Big\}\\=&\frac{(-1)^m}{2^{n+l}n!l!}\int_{-1}^{1}G^{(m)}(x)\big[(x^2-1)^l\big]^{(l)}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

再分部积分 n 次, 由于 $x=\pm1$ 是 $(x^2-1)^l$ 的 l 阶零点,

$$\begin{aligned}I_{nl}^m=&\frac{(-1)^m}{2^{n+l}n!l!}\Big\{\Big[G^{(m)}(x)\big[(x^2-1)^l\big]^{(l-1)}-G^{(m+1)}(x)\big[(x^2-1)^l\big]^{(l-2)}+\cdots\\&+(-1)^{n-1}G^{(m+n-1)}(x)\big[(x^2-1)^l\big]^{(l-n)}\Big]\Big|_{-1}^{1}\\&+(-1)^n\int_{-1}^{1}G^{(m+n)}(x)\big[(x^2-1)^l\big]^{(l-n)}\mathrm{d}x\Big\}\\=&\frac{(-1)^{m+n}}{2^{n+l}n!l!}\int_{-1}^{1}G^{(m+n)}(x)[(x^2-1)^l]^{(l-n)}\mathrm{d}x\\=&\frac{(-1)^{m+n}}{2^{n+l}n!l!}\cdot\frac{(-1)^m(2n)!(n+m)!}{(n-m)!}\int_{-1}^{1}[(x^2-1)^l]^{(l-n)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

当 $l>n$ 时

$$\int_{-1}^{1}[(x^2-1)^l]^{(l-n)}\mathrm{d}x=0,$$

当 $l=n$ 时

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!},$$

最终得到积分

$$I_{nl}^m=\delta_{nl}\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!},\quad \delta_{nl}=\begin{cases}0, & n\neq l,\\ 1, & n=l.\end{cases}$$

此公式说明对固定的整数 $m\geqslant0$, 固有函数系 $\{P_n^m(x),n=m,m+1,\cdots\}$ 是**正交函数系**, 固有函数的**模平方**

$$\big\|P_n^m(x)\big\|^2=I_{nn}^m=\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{(n+m)!}{(n-m)!}.\tag{3.3.17}$$

由 S–L 定理得, 函数系 $\{P_n^m(x), n = m, m+1, \cdots\}$ 在 $L^2[-1,1]$ 中完备, 故区间 $[-1,1]$ 上任意平方可积函数 $f(x)$, 在均方收敛意义下有广义 Fourier 展开式

$$f(x) = \sum_{n=m}^{+\infty} C_n P_n^m(x),$$

其中, 展开系数

$$C_n = \frac{1}{\|P_n^m(x)\|^2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n^m(x) \mathrm{d}x.$$

伴随 Legendre 函数的其他表示和性质, 可利用关系式 (3.3.15) 从 Legendre 多项式的表示和性质推得 (见有关专著). 这里仅列出前几个伴随 Legendre 函数, 以便使用.

$$\begin{aligned}
&P_0^0(x) = 1, \quad P_1^0(x) = x = \cos\theta, \quad P_1^1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \sin\theta,\\
&P_2^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1), \quad P_2^1(x) = 3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sin 2\theta,\\
&P_2^2(x) = 3(1-x^2) = \frac{3}{2}(1-\cos 2\theta).
\end{aligned}$$

3.3.5 一般情形下 Laplace 方程球面边值问题及球函数

球坐标下三维 Laplace 方程为

$$\Delta_3 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right] = 0,$$

Laplace 算子 Δ_3 由关于 r 和关于 (θ,φ) 的两个偏微分算子构成. 设 $u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi)$, 分离得常微分方程

$$(r^2R')' - \lambda R = 0 \tag{3.3.18}$$

和球函数方程

$$\Delta_{\theta\varphi} Y = \left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] Y = -\lambda Y. \tag{3.3.19}$$

二元偏微分算子 $\Delta_{\theta\varphi}$ 称为**球面上的 Laplace 算子**. (3.3.19) 式在单位球面上求解, 需配以周期条件

$$Y(\theta,\varphi+2\pi) = Y(\theta,\varphi)$$

和有界条件

$$|Y(0,\varphi)| < +\infty, \quad |Y(\pi,\varphi)| < +\infty,$$

构成偏微分方程的固有值问题. 称球函数方程 (3.3.19) 的有界周期解为**球面函数**, 或简称为**球函数**.

继续分离变量, 令 $Y=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, 得常微分方程的固有值问题

$$\begin{cases} \Phi''+\mu\Phi=0, \\ \Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi) \end{cases} \tag{3.3.20}$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\Theta')'+\left(\lambda-\dfrac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0, \quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi, \\ \Theta(0), \quad \Theta(\pi)\text{ 有界.} \end{cases} \tag{3.3.21}$$

(3.3.20) 式的固有值 $\mu_m=m^2$, 固有函数

$$\Phi_m(\varphi)=\left\{\begin{array}{c}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{array}\right\}, \quad m=0,1,2,\cdots.$$

对每一个固定的 $\mu_m=m^2$, (3.3.21) 式为 m 阶伴随 Legendre 方程的固有值问题. 由 3.3.4 节, 固有值 $\lambda_n=n(n+1)$, 固有函数

$$\Theta_{mn}(\theta)=P_n^m(\cos\theta), \quad n=m,m+1,\cdots.$$

进而得球函数方程 (3.3.19) 在单位球面上的变量分离的解族

$$Y_{nm}(\theta,\varphi)=\left\{\begin{array}{c}Y_{nm}^{(1)}(\theta,\varphi)\\ Y_{nm}^{(2)}(\theta,\varphi)\end{array}\right\}\overset{d}{=}\left\{\begin{array}{c}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{array}\right\}P_n^m(\cos\theta), \quad \begin{array}{l}n=0,1,2,\cdots,\\ m=0,1,2,\cdots,n.\end{array} \tag{3.3.22}$$

这些 $Y_{nm}(\theta,\varphi)$ 都是**球函数**, 独立的 n 次球函数有 $2n+1$ 个. 由函数系 $\{\cos m\varphi,\sin m\varphi, m=0,1,2,\cdots\}$ 在 $L^2[0,2\pi]$ 中和 $\{P_n^m(\cos\theta), n=m,m+1,\cdots\}$ 在 $L^2[0,\pi]$ 中的完备正交性及定理 3.1.1, 可知球函数系 $\left\{Y_{nm}^{(i)}(\theta,\varphi), i=1,2; \begin{array}{l}n=0,1,2,\cdots\\ m=0,1,2,\cdots,n\end{array}\right\}$ 是**单位球面上的完备正交函数系**, 有

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}Y_{nm}^{(i)}(\theta,\varphi)Y_{n'm'}^{(j)}(\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta=N_{nm}^2\delta_{nn'}\delta_{mm'}\delta_{ij},$$

其中, **模平方**

$$\begin{aligned} N_{n0}^2&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\left|Y_{n0}^{(1)}(\theta,\varphi)\right|^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\\ &=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\left|P_n^0(\cos\theta)\right|^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\\ &=\frac{4\pi}{2n+1}, \end{aligned} \tag{3.3.23a}$$

$$\begin{aligned} N_{nm}^2 &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} |Y_{nm}(\theta,\varphi)|^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} |\Phi_m(\varphi)|^2 \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} |P_n^m(\cos\theta)|^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad m \geqslant 1. \end{aligned} \tag{3.3.23b}$$

任意单位球面上的平方可积函数 $f(\theta,\varphi)$, 可按球函数系 $\{Y_{nm}(\theta,\varphi)\}$ 作**广义 Fourier 展开**

$$\begin{aligned} f(\theta,\varphi) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{n} \left[C_{nm} Y_{nm}^{(1)}(\theta,\varphi) + D_{nm} Y_{nm}^{(2)}(\theta,\varphi) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{n} (C_{nm}\cos m\varphi + D_{nm}\sin m\varphi) P_n^m(\cos\theta), \end{aligned} \tag{3.3.24a}$$

其中, 系数

$$\begin{aligned} C_{nm} &= \frac{1}{N_{nm}^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta,\varphi) \cos m\varphi P_n^m(\cos\theta) \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi, \\ D_{nm} &= \frac{1}{N_{nm}^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta,\varphi) \sin m\varphi P_n^m(\cos\theta) \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi, \end{aligned} \tag{3.3.24b}$$

模平方 N_{nm}^2 由公式 (3.3.23a)、(3.3.23b) 给出.

进一步, 可得球坐标下三维调和方程 $\Delta_3 u = 0$ 的**解的一般形式**

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{n} (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}) P_n^m(\cos\theta)(C_{nm}\cos m\varphi + D_{nm}\sin m\varphi). \tag{3.3.25}$$

例 3.3.8 解球内第 II 边值问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, \quad r < a, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\theta,\varphi), \end{cases}$$

并给出 $f(\theta,\varphi) = 3\sin^2\theta\cos^2\varphi - 1$ 时的解.

解 由解的一般形式 (3.3.25) 得, $\Delta_3 u = 0$ 在球内的解

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{n} r^n (C_{nm}\cos m\varphi + D_{nm}\sin m\varphi) P_n^m(\cos\theta),$$

代入边界条件

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{n} n a^{n-1} (C_{nm}\cos m\varphi + D_{nm}\sin m\varphi) P_n^m(\cos\theta), \\ &= f(\theta,\varphi), \end{aligned}$$

注意到该展式的球函数系 $\left\{\left\{\begin{array}{c}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{array}\right\}P_n^m(\cos\theta),\quad \begin{array}{l}n=1,2,\cdots\\ m=0,1,2,\cdots,n\end{array}\right\}$ 缺少 $Y_{00}^{(1)}=1$, 并不完备, 故仅对 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=0$ 的 $f(\theta,\varphi)$ 成立, 第Ⅱ边值问题有解. 此时记

$$\tilde{C}_{nm}=na^{n-1}C_{nm},\quad \tilde{D}_{nm}=na^{n-1}D_{nm},\quad n\geqslant 1,$$

$\tilde{C}_{nm},\tilde{D}_{nm}$ 可由公式 (3.3.24b) 给出.

当 $f(\theta,\varphi)=3\sin^2\theta\cos^2\varphi-1=\dfrac{3}{4}(1-\cos 2\theta)(1+\cos 2\varphi)-1$ 时, 可直接设

$$\begin{aligned}f(\theta,\varphi)&=\tilde{C}_{00}+\tilde{C}_{20}P_2^0(\cos\theta)+\tilde{C}_{22}P_2^2(\cos\theta)\cos 2\varphi\\&=\tilde{C}_{00}+\tilde{C}_{20}\frac{1}{4}(3\cos 2\theta+1)+\tilde{C}_{22}\frac{3}{2}(1-\cos 2\theta)\cos 2\varphi,\end{aligned}$$

两边比较系数, 得 $\tilde{C}_{00}=0$, $\tilde{C}_{20}=-1$, $\tilde{C}_{22}=\dfrac{1}{2}$. 由 $\tilde{C}_{00}=0$ 知问题有解, 且解为

$$u(r,\theta,\varphi)=C_{00}-\frac{1}{2a}r^2P_2^0(\cos\theta)+\frac{1}{4a}r^2P_2^2(\cos\theta)\cos 2\varphi,$$

其中, C_{00} 为任意常数.

由本例可见, **Laplace 方程第Ⅱ边值问题**

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta_3 u=0,\quad M=(x,y,z)\in V,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial V}=f(M)|_{\partial V}\end{array}\right.$$

与第Ⅰ、Ⅲ边值问题不同, 它的解不一定存在. 如果解存在则不唯一, 可相差任意常数. **解存在的充要条件为**

$$\oint_{\partial V} f(M)\mathrm{d}M=0.$$

在物理学中, 周期固有值问题 (3.3.20) 式的固有函数通常采用复形式 $\{\Phi_m(\varphi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},\ m=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$.

注意到 (3.3.21) 式中伴随 Legendre 方程当 $\mu=m^2$ 时, 将 m 换成 $-m$ 方程不变, 记

$$P_n^{-m}(x)=\frac{1}{2^n n!}(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n-m)},$$

则 $P_n^{-m}(x)$ 也是 m 阶伴随 Legendre 方程的解. 事实上, 直接计算可得关系式

$$P_n^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(x),$$

$$\left\|P_n^{-m}(x)\right\|^2=\frac{2}{2n+1}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}.$$

因此, 球函数也常常采用复形式

$$\left\{Y_{nm}(\theta,\varphi)\overset{d}{=}P_n^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},\quad \begin{matrix} n=0,1,2,\cdots \\ m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n \end{matrix}\right\},$$

其正交性表示为

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}Y_{nm}(\theta,\varphi)\overline{Y_{n'm'}(\theta,\varphi)}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=N_{nm}^2\delta_{nn'}\delta_{mm'},$$

模平方

$$N_{nm}^2=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|Y_{nm}(\theta,\varphi)\right|^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

定义在单位球面上的函数 $f(\theta,\varphi)$ 的球函数展式为

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=-n}^{n}C_{nm}Y_{nm}(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=-n}^{n}C_{nm}P_n^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},$$

展开系数

$$C_{nm}=\frac{1}{N_{nm}^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)P_n^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

球坐标下三维调和方程 $\Delta_3u=0$ 的解一般形式为

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=-n}^{+n}(A_{nm}r^n+B_{nm}r^{-(n+1)})Y_{nm}(\theta,\varphi).$$

3.4 Bessel 函 数

Bessel 函数是另一个常用的特殊函数, 本节将重点讨论 Bessel 函数的性质及其应用, 并结合具体问题介绍相关的虚变量 Bessel 函数和球 Bessel 函数.

3.4.1 Bessel 函数的表示和性质

Bessel 函数

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+\nu}\tag{3.2.13}$$

在很多问题中将作为固有函数出现, 构成函数空间的正交基. 尽管在一般情况下, 它是非初等函数, 我们仍然可以通过它的各种表示来研究它的有关性质. 而其他的 Bessel 函数 $N_\nu(x),H_\nu^{(1)}(x)$ 和 $H_\nu^{(2)}(x)$ 的相应性质可由它们与 $J_\nu(x)$ 的关系 (3.2.18) 式, (3.2.21) 式推得.

微分关系和递推公式

由级数表达式 (3.2.13) 不难直接推得 Bessel 函数的**微分关系式**

$$(x^{\nu}J_{\nu})' = x^{\nu}J_{\nu-1}, \tag{3.4.1a}$$

$$(x^{-\nu}J_{\nu})' = -x^{-\nu}J_{\nu+1}. \tag{3.4.1b}$$

特别地, 有

$$J_0' = -J_1, \tag{3.4.1c}$$

即 $\int J_1(x)\mathrm{d}x = -J_0(x) + c.$

将 (3.4.1a) 式、(3.4.1b) 式中的导数求出并化简, 可得关系式

$$xJ_{\nu}' + \nu J_{\nu} = xJ_{\nu-1}, \tag{3.4.2a}$$

$$xJ_{\nu}' - \nu J_{\nu} = -xJ_{\nu+1}. \tag{3.4.2b}$$

两式相加或相减分别得**递推关系**

$$2J_{\nu}' = J_{\nu-1} - J_{\nu+1}, \tag{3.4.3a}$$

$$2\nu x^{-1}J_{\nu} = J_{\nu-1} + J_{\nu+1}. \tag{3.4.3b}$$

由公式 (3.4.3b), 整数阶 Bessel 函数最终可由 $J_0(x), J_1(x)$ 表出.

称满足递推关系 (3.4.3a) 式、(3.4.3b) 式 (或等价的 (3.4.1a) 式、(3.4.1b) 式) 的函数为**柱函数**, $N_{\nu}(x)$, $H_{\nu}^{(1)}(x)$, $H_{\nu}^{(2)}(x)$ 与 $J_{\nu}(x)$ 一样都是柱函数. 可以证明柱函数一定是 Bessel 方程 (3.1.8) 的解, 反之, Bessel 方程的解 $y_{\nu}(x) = C_{\nu}J_{\nu}(x) + D_{\nu}N_{\nu}(x)$ 仅当常数 $C_{\nu+1} = C_{\nu}, D_{\nu+1} = D_{\nu}$ 时才是柱函数.

将 (3.4.1a) 式、(3.4.1b) 式改写为算子形式

$$\Big(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)(x^{\nu}J_{\nu}) = x^{\nu-1}J_{\nu-1},$$

$$\Big(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)(x^{-\nu}J_{\nu}) = -x^{-(\nu+1)}J_{\nu+1},$$

便可得相隔 n 阶的两个 Bessel 函数间的递推关系

$$\Big(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^{n}(x^{\nu}J_{\nu}) = x^{\nu-n}J_{\nu-n}, \tag{3.4.4a}$$

$$\Big(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^{n}(x^{-\nu}J_{\nu}) = (-1)^{n}x^{-(\nu+n)}J_{\nu+n}. \tag{3.4.4b}$$

在 3.2.3 节中, 已知

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x,$$

利用递推公式 (3.4.4a)、(3.4.4b), 便可求得

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x^{n+\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^n\Big(\frac{\sin x}{x}\Big),\tag{3.4.5a}$$

$$J_{-(n+\frac{1}{2})}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x^{n+\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^n\Big(\frac{\cos x}{x}\Big),\tag{3.4.5b}$$

$$n=0,1,2,\cdots.$$

可见所有的**半整数阶 Bessel 函数都是初等函数**.

由定义 (3.2.18) 式, 还可得

$$N_{n+\frac{1}{2}}(x)=(-1)^{n+1}J_{-(n+\frac{1}{2})}(x),$$
$$N_{-(n+\frac{1}{2})}(x)=(-1)^nJ_{n+\frac{1}{2}}(x),$$

故半整数阶 Neumann 函数, 乃至 Hankel 函数都是初等函数.

常常利用微分关系和递推公式计算含有 Bessel 函数的积分.

例 3.4.1 计算积分 $I_1=\int x^3J_0(x)\mathrm{d}x,\ I_2=-\int x^2J_{-2}(x)\mathrm{d}x.$

解

$$\begin{aligned}I_1&=\int x^2\cdot xJ_0(x)\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}(xJ_1(x))\\&=x^3J_1(x)-2\int x^2J_1(x)\mathrm{d}x\\&=x^3J_1(x)-2x^2J_2(x)+c\\&=x^3J_1(x)-2x^2\Big[\frac{2}{x}J_1(x)-J_0(x)\Big]+c\\&=(x^3-4x)J_1(x)+2x^2J_0(x)+c,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2&=-\int x^2J_2(x)\mathrm{d}x=\int x^3\mathrm{d}(x^{-1}J_1(x))\\&=x^2J_1(x)-3\int xJ_1(x)\mathrm{d}x=x^2J_1(x)+3\int x\mathrm{d}J_0(x)\\&=x^2J_1(x)+3\,xJ_0(x)-3\int J_0(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

整数阶 Bessel 函数的母函数和积分表示

含实参数 x 的复函数 $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}(\zeta-\zeta^{-1})}$ 在 ζ 平面上除 $\zeta=0$ 外解析, 因此在环域 $0<|\zeta|<+\infty$ 可作洛朗 (Laurent) 展开

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}(\zeta-\zeta^{-1})}&=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}\zeta}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}\zeta^{-1}}\\&=\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{1}{l!}\Big(\frac{x}{2}\zeta\Big)^l\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\Big(-\frac{x}{2}\zeta^{-1}\Big)^k\\&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Big[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+n}\Big]\zeta^n\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\zeta^n. \tag{3.4.6}$$

整数阶 Bessel 函数 $\{J_n(x), n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 恰好是复函数 $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}(\zeta-\zeta^{-1})}$ 关于 ζ 的 Laurent 展开系数, 称 $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}(\zeta-\zeta^{-1})}$ 为**整数阶 Bessel 函数的母函数**.

另外, 由 Laurent 展开系数的计算公式, 取路径 $C : \zeta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$, 有**整数阶 Bessel 函数的积分表示式**

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}(\zeta-\zeta^{-1})}}{\zeta^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\sin\theta - n\theta)} \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta) \mathrm{d}\theta, \quad n \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

例 3.4.2 证明: 整数阶 Bessel 函数的**加法公式**

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x) J_{n-k}(y).$$

证 利用母函数 (3.4.6) 式

$$\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}\left(\zeta-\zeta^{-1}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x+y)\zeta^n,$$

对于 $\zeta \neq 0$, 展式 (3.4.6) 绝对收敛, 可作级数乘法

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}\left(\zeta-\zeta^{-1}\right)} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x)\zeta^k \cdot \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l(y)\zeta^l \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x) J_{n-k}(y) \right] \zeta^n. \end{aligned}$$

由展式的唯一性, 加法公式得证.

***例 3.4.3** 计算积分 $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} J_0(bt) \mathrm{d}t (a > 0, b$ 为实数), 并求 $J_n(t)$ 的 Laplace 变换 $L[J_n(t)], n = 0, 1, 2, \cdots$.

解 由 $J_0(bt)$ 的积分表达式 (3.4.7) 得

$$I(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-at + \mathrm{i}bt\sin\theta} \mathrm{d}\theta,$$

由于 $|\mathrm{e}^{-at+\mathrm{i}bt\sin\theta}|\leqslant \mathrm{e}^{-at}$, 依据 Weierstrass 判别法, 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at+\mathrm{i}bt\sin\theta}\mathrm{d}t$ 关于 $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$ 一致收敛, 积分可交换次序, 故

$$\begin{aligned}I(a)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at+\mathrm{i}bt\sin\theta}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a-\mathrm{i}b\sin\theta}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a+\mathrm{i}b\sin\theta}{a^2+b^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{a}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a^2+b^2\sin^2\theta}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}},\end{aligned}$$

最后一步的积分可由留数定理算得. $I(a)$ 在 $\mathrm{Re}p>0$ 的解析开拓为 $\dfrac{1}{\sqrt{p^2+b^2}}$.

由 $t\to+\infty$ 时 $J_0(bt)\to 0$, 知

$$L\big[J_0(bt)\big]=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}J_0(bt)\mathrm{d}t=\bar{J}_0(p)$$

在 $\mathrm{Re}p>0$ 解析. 又在正实轴上, 记 $p=a$, 则 $\bar{J}_0(a)=I(a)$. 由解析开拓的唯一性得

$$L\big[J_0(bt)\big]=\frac{1}{\sqrt{p^2+b^2}},$$

特别地

$$L\big[J_0(t)\big]=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

由微分公式 $J_0'(t)=-J_1(t)$ 得

$$\begin{aligned}L\big[J_1(t)\big]&=\int_0^{+\infty}J_1(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\\&=-J_0(t)\mathrm{e}^{-pt}\Big|_0^{+\infty}-p\int_0^{+\infty}J_0(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\\&=1-\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}=\frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}}.\end{aligned}$$

再由递推公式 (3.4.3a) 得, 当 $n\geqslant 1$ 时, $J_n'(t)=\dfrac{1}{2}[J_{n-1}(t)-J_{n+1}(t)]$, 有

$$\begin{aligned}L\big[J_n(t)\big]&=\int_0^{+\infty}J_n(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{p}J_n(t)\mathrm{e}^{-pt}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{p}\int_0^{+\infty}J_n'(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2p}\int_0^{+\infty}\big[J_{n-1}(t)-J_{n+1}(t)\big]\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2p}\Big(L\big[J_{n-1}(t)\big] - L\big[J_{n+1}(t)\big]\Big),$$

即像函数的递推公式

$$L[J_{n+1}(t)] = L[J_{n-1}(t)] - 2pL[J_n(t)],$$

可得

$$L[J_2(t)] = L[J_0(t)] - 2pL[J_1(t)] = \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^2}{\sqrt{p^2+1}}.$$

一般地, 用归纳法可证

$$L[J_n(t)] = \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}. \tag{3.4.8}$$

零点和衰减振荡性

我们已知

$$\lim_{x\to 0^+} J_\nu(x) = \begin{cases} 1, & \nu = 0, \\ 0, & \nu > 0, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} N_\nu(x) = -\infty, \quad \nu \geqslant 0.$$

由公式 (3.4.5a)、(3.4.5b) 可知, 半阶 Bessel 函数当 $x \to +\infty$ 时, 是一个衰减震荡函数. 对于其他阶的 Bessel 函数, 利用其积分表示式及一些专门的方法, 可推出当 $x \to +\infty$ 时, 它们有渐近表达式

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\Big(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\Big) + O(x^{-\frac{3}{2}}), \tag{3.4.9a}$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\Big(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\Big) + O(x^{-\frac{3}{2}}). \tag{3.4.9b}$$

由此可见, $\lim\limits_{x\to+\infty} J_\nu(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} N_\nu(x) = 0$, 且是相位相差 $\dfrac{\pi}{2}$ 的两个**衰减震荡函数**.

Bessel 函数的**零点**在固有值问题中有重要意义. 由渐近表达式可知 $J_\nu(x)$ 与 $N_\nu(x)$ 都有无穷多个实零点. 事实上, 关于 $J_\nu(x)$ 的零点有以下主要结论：

(1) $J_\nu(x)$ 有无穷多个实零点, 当 $\nu > -1$ 时所有零点在实轴. 由 $J_\nu(-x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$ 可知, $J_\nu(x)$ 的零点在实轴上关于原点对称分布;

(2) $J_\nu(x)$, $\nu > -1$ 时的非零零点都是一级的, $\nu = \pm n$ 时 0 为 n 级零点, $\nu \neq$ 整数时 0 为支点;

(3) $J_\nu(x)$ 与 $J_{\nu+1}(x)$ 的正零点两两相间分布, 且 $J_\nu(x)$ 的第一个正零点小于 $J_{\nu+1}(x)$ 的第一个正零点;

(4) $J'_\nu(x)$ 及 $J_\nu(x) + hxJ'_\nu(x)$ (h 常数) 在实轴上都有无穷多零点.

这些性质可在图 3.4.1、图 3.4.2 上体现, $J_0(x), J_1(x)$ 的零点可在数学手册上查到.

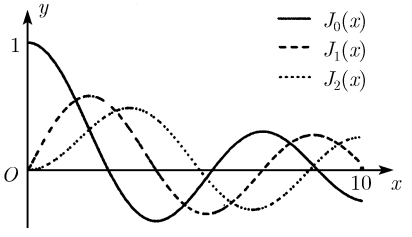


图3.4.1

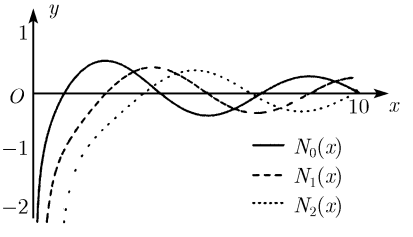


图3.4.2

3.4.2 Bessel 方程的固有值问题

在 3.1.2 节中, Helmholtz 方程在柱坐标下分离变量, 得到关于 $R(r)$ 的 Bessel 方程 (3.1.7). 如果在圆柱内求解问题, 则需配以柱面上的边界条件, 构成**Bessel 方程固有值问题**

$$\begin{cases} (rR')' + \left(\lambda r - \dfrac{\nu^2}{r}\right) R = 0, \quad 0 < r < a, & (3.1.7) \\ |R(0)| < +\infty, \quad \alpha R(a) + \beta R'(a) = 0, & (3.1.7a) \end{cases}$$

其中, 有界性条件是由 $r = 0$ 为方程的正则奇点而自然添加. 这是 S–L 型方程固有值问题, 固有值 $\lambda = \omega^2 \geqslant 0$. 令 $x = \omega r$, 记 $y(x) = R\left(\dfrac{x}{\omega}\right)$, 则 (3.1.7) 式即为标准的 Bessel 方程

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0. \tag{3.1.8}$$

故方程 (3.1.7) 的通解为

$$R_\nu(r) = CJ_\nu(\omega r) + DN_\nu(\omega r).$$

因为 $N_\nu(x)$ 在 $x = 0$ 处无界, 由 $|R(0)| < +\infty$ 推得 $D = 0$. 代入 a 端边界条件, 有

$$\alpha J_\nu(\omega a) + \beta\omega J'_\nu(\omega a) = 0. \tag{3.4.10}$$

由 $J_\nu(x)$ 的零点性质, 可得**固有值**和**固有函数**如下.

当 a 端为第 I 类边界条件 ($\beta = 0$) 时, $\lambda_n = \omega_{1n}^2 (n = 1, 2, \cdots), \omega_{1n}$ 是方程 $J_\nu(\omega a) = 0$ 的第 n 个正根, 固有函数 $R_n(r) = J_\nu(\omega_{1n} r)$.

当 a 端为第 II 类边界条件 ($\alpha = 0$) 时, $\lambda_n = \omega_{2n}^2 (n = 1, 2, \cdots), \omega_{2n}$ 是方程 $J'_\nu(\omega a) = 0$ 的第 n 个正根, 固有函数 $R_n(r) = J_\nu(\omega_{2n} r)$. 需注意的是当 $\nu = 0$ 时, 还要增加一个固有值 $\lambda_0 = 0$, 对应的固有函数 $R_0(r) = 1$.

当 a 端为第Ⅲ类边界条件 $(\alpha\beta \neq 0)$ 时, $\lambda_n = \omega_{3n}^2 (n = 1, 2, \cdots), \omega_{3n}$ 是方程 (3.4.10) 的第 n 个正根, 固有函数 $R_n(r) = J_\nu(\omega_{3n} r)$.

由 S–L 定理, 固有函数系 $\{J_\nu(\omega_{1n} r)\}, \{J_\nu(\omega_{2n} r)\}, \{J_\nu(\omega_{3n} r)\}$ 分别是满足相应边界条件的函数空间里的**加权 r 的完备正交函数系**, 故对 $L_r^2[0, a]$ 中的函数 $f(r)$, 有 Fourier–Bessel 展开式

$$f(r) = \sum_{n=0\text{或}1}^{+\infty} C_n J_\nu(\omega_{kn} r), \tag{3.4.11a}$$

$$C_n = \frac{1}{N_{\nu kn}^2} \int_0^a r f(r) J_\nu(\omega_{kn} r) \mathrm{d}r, \quad k = 1, 2, 3, \tag{3.4.11b}$$

其中, **模平方**

$$N_{\nu kn}^2 = \int_0^a r J_\nu^2(\omega_{kn} r) \mathrm{d}r.$$

方程本身也是其解的一种表示, 我们利用 Bessel 方程来求 Bessel 函数的模平方.

设 $R_n(r) = J_\nu(\omega_n r)$ 满足 ν 阶 Bessel 方程

$$(r R_n')' + \Big(\omega_n^2 r - \frac{\nu^2}{r}\Big) R_n = 0,$$

两边同乘以 $r R_n'$, 对 r 从 0 到 a 积分

$$\int_0^a (r R_n')' r R_n' \mathrm{d}r + \int_0^a \Big(\omega_n^2 r - \frac{\nu^2}{r}\Big) r R_n' R_n \mathrm{d}r = 0,$$

得

$$\frac{1}{2}[(r R_n'(r))^2 + (\omega_n^2 r^2 - \nu^2) R_n^2(r)]_0^a - \omega_n^2 \int_0^a r R_n^2(r) \mathrm{d}r = 0,$$

即有

$$\frac{a^2}{2} \omega_n^2 [J_\nu'(\omega_n a)]^2 + \frac{1}{2}(\omega_n^2 a^2 - \nu^2) J_\nu^2(\omega_n a) = \omega_n^2 N_\nu^2.$$

相应于三类边界条件, 分别有

$$N_{\nu 1n}^2 = \frac{a^2}{2}[J_\nu'(\omega_{1n} a)]^2 = \frac{a^2}{2} J_{\nu+1}^2(\omega_{1n} a), \tag{3.4.12a}$$

$$N_{\nu 2n}^2 = \frac{1}{2}\Big[a^2 - \frac{\nu^2}{\omega_{2n}^2}\Big] J_\nu^2(\omega_{2n} a), \tag{3.4.12b}$$

$$N_{\nu 3n}^2 = \frac{1}{2}\Big[a^2 - \frac{\nu^2}{\omega_{3n}^2} + \frac{a^2 \alpha^2}{\beta^2 \omega_{3n}^2}\Big] J_\nu^2(\omega_{3n} a). \tag{3.4.12c}$$

例 3.4.4 设 $\omega_n(n=1,2,\cdots)$ 是 $J_0(x)=0$ 的全体正根, 将 $f(x)=1-x^2$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上按 $\{J_0(\omega_n x)\}$ 作广义 Fourier 展开.

解 设

$$1-x^2=\sum_{n=1}^{+\infty}C_nJ_0(\omega_n x),$$

$$\begin{aligned}C_n&=\frac{1}{N_{01n}^2}\int_0^1 x(1-x^2)J_0(\omega_n x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{N_{01n}^2\omega_n^2}\int_0^1(1-x^2)(\omega_n x)J_0(\omega_n x)\mathrm{d}(\omega_n x)\\&=\frac{1}{N_{01n}^2\omega_n^2}\Big[(1-x^2)(\omega_n x)J_1(\omega_n x)\Big|_0^1+2\int_0^1 x(\omega_n x)J_1(\omega_n x)\mathrm{d}x\Big]\\&=\frac{2}{N_{01n}^2\omega_n^4}(\omega_n x)^2J_2(\omega_n x)\Big|_0^1\\&=\frac{2}{N_{01n}^2\omega_n^2}J_2(\omega_n)=\frac{4J_2(\omega_n)}{J_1^2(\omega_n)\omega_n^2}=\frac{8}{\omega_n^3J_1(\omega_n)},\end{aligned}$$

最后一步利用递推公式 (3.4.3b) $J_2(\omega)=\dfrac{2}{\omega}J_1(\omega)-J_0(\omega)$ 推得.

3.4.3 圆柱形区域上的混合问题和边值问题, 虚变量 Bessel 函数

Bessel 函数常用来求解圆柱形区域上的问题, 并充当固有函数的角色.

例 3.4.5 圆柱体冷却问题. 无限长圆柱体, 半径为 r_0, 内部无热源, 初始温度为 $\varphi(x,y)$, 柱表面温度保持零度, 求圆柱内温度变化规律.

解 这是热传导方程的柱内混合问题, 应采用柱坐标. 又由柱无限长, 定解条件与柱高无关, 故柱内的温度 $u=u(t,r,\theta)$ 应满足混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u=a^2\Big[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\Big], & t>0, r<r_0,\\ u\big|_{r=r_0}=0,\\ u\big|_{t=0}=\varphi\big(r\cos\theta,r\sin\theta\big)=\Phi\big(r,\theta\big).\end{cases}$$

设 $u=T(t)R(r)\Theta(\theta)$, 分离变量得固有值问题

$$\begin{cases}\Theta''+\mu\Theta=0,\\ \Theta\big(\theta+2\pi\big)=\Theta\big(\theta\big),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r}\big(rR'\big)'+\big(\lambda-\dfrac{\mu}{r^2}\big)R=0, & 0<r<r_0,\\ \big|R(0)\big|<+\infty, \quad R\big(r_0\big)=0\end{cases}$$

和常微分方程

$$T' + \lambda a^2 T = 0.$$

由关于 $\Theta(\theta)$ 的固有值问题解得

$$\mu_m = m^2, \quad m = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$\Theta_m(\theta) = \left\{ \begin{array}{c} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{array} \right\}.$$

对每一个 $\mu_m = m^2$, 从 $R(r)$ 的固有值问题可得

$$\lambda_{mn} = \omega_{mn}^2,$$

$$R_{mn}(r) = J_m(\omega_{mn} r), \quad n = 1, 2, \cdots,$$

其中, ω_{mn} 是 $J_m(\omega r_0) = 0$ 的第 n 个正根. 将固有值 λ_{mn} 代入 $T(t)$ 的方程, 通解为

$$T_{mn}(t) = c\,\mathrm{e}^{-a^2\omega_{mn}^2 t},$$

进而得到满足热传导方程和柱面齐次边条件的所有分离变量形状的解族

$$\left\{ \begin{array}{c} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{array} \right\} J_m(\omega_{mn} r)\mathrm{e}^{-a^2\omega_{mn}^2 t}, \qquad \begin{array}{l} m = 0, 1, 2, \cdots \\ n = 1, 2, 3, \cdots \end{array}.$$

将分离变量形状的解叠加, 令

$$u(t, r, \theta) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (C_{mn} \cos m\theta + D_{mn} \sin m\theta) J_m(\omega_{mn} r)\mathrm{e}^{-a^2\omega_{mn}^2 t}, \tag{3.4.13}$$

代入初始条件, 得

$$u|_{t=0} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (C_{mn} \cos m\theta + D_{mn} \sin m\theta) J_m(\omega_{mn} r) = \Phi(r, \theta).$$

由于 $\{\cos m\theta, \sin m\theta, m = 0, 1, 2, \cdots\}$ 是 $[0, 2\pi]$ 上的完备正交函数系, 对每个固定的 m, $\{J_m(\omega_{mn} r),\ n = 1, 2, \cdots\}$ 是 $[0, r_0]$ 上加权 r 的完备正交函数系, 由定理 3.1.1 知, 上式即为 $\Phi(r, \theta)$ 在矩形域 $[0, 2\pi] \times [0, r_0]$ 上的广义 Fourier 展开, 故

$$\begin{aligned} C_{mn} &= \frac{1}{\|\cos m\theta\|^2 \|J_m(\omega_{mn} r)\|^2} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \Phi(r, \theta) \cos m\theta J_m(\omega_{mn} r) r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r \\ &= \frac{\delta_m}{\pi r_0^2 J_{m+1}^2(\omega_{mn} r_0)} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \Phi(r, \theta) \cos m\theta J_m(\omega_{mn} r) r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r, \end{aligned}$$

其中

$$\delta_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 2, & m > 0. \end{cases}$$

$$D_{mn} = \frac{2}{\pi r_0^2 J_{m+1}^2(\omega_{mn} r_0)} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \Phi(r,\theta) \sin m\theta J_m(\omega_{mn} r) r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r.$$

代入式 (3.4.13), 便可得解. 可见, 为了确定柱形域上定解问题的解, 我们需要计算含 Bessel 函数的积分.

例 3.4.6 半径为 a 高为 h 的均匀圆柱, 侧面绝热, 下底面温度保持为 $f_1(r) = 0$, 上底面保持为 $f_2(r) = 1 - \dfrac{r^2}{a^2}$, 试求柱内温度分布.

解 采用柱坐标, 稳恒温度 u 满足调和方程的柱内边值问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, \quad r < a,\ 0 < z < h, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 0, \\ u\big|_{z=0} = 0, \quad u\big|_{z=h} = 1 - \dfrac{r^2}{a^2}. \end{cases}$$

由定解条件，可设 $u = u(r,z)$, 方程化简为

$$\Delta_3 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u}{\partial r}\Big) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

设 $u = R(r)Z(z)$, 注意到圆柱侧面的边界条件是齐次的, 而上底面的边界条件为非齐次, 分离变量得关于 $R(r)$ 的固有值问题

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}(rR')' + \lambda R = 0, \quad 0 < r < a, \\ |R(0)|\text{有界}, \quad R'(a) = 0 \end{cases}$$

和关于 $Z(z)$ 的常微分方程

$$Z'' - \lambda Z = 0.$$

$R(r)$ 满足的是零阶 Bessel 方程第 II 类边界条件下的固有值问题, 有固有值

$$\lambda_n = \omega_n^2, \quad \omega_0 = 0, \quad \omega_n \text{为} J_0'(\omega a) = 0 \text{ 的第 } n \text{ 个正根 } (n = 1, 2, \cdots),$$

相应的固有函数为

$$R_0(r) = 1, \quad R_n(r) = J_0(\omega_n r), \quad n \geqslant 1,$$

固有函数的模平方

$$N_{0n}^2 = \frac{a^2}{2} J_0^2(\omega_n a), \quad n \geqslant 0.$$

将 λ_n 代入 $Z(z)$ 的方程, 相应的通解为

$$Z_0(z) = C_0 + D_0 z,$$

$$Z_n(z) = C_n \mathrm{ch}\omega_n z + D_n \mathrm{sh}\omega_n z.$$

令

$$u(r,z) = C_0 + D_0 z + \sum_{n=1}^{+\infty} (C_n \mathrm{ch}\omega_n z + D_n \mathrm{sh}\omega_n z) J_0(\omega_n r),$$

代入下底面的边界条件

$$u|_{z=0} = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n J_0(\omega_n r) = 0,$$

故 $C_n = 0 (n = 0, 1, 2, \cdots)$. 再代入上底面边界条件

$$u|_{z=h} = D_0 h + \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \mathrm{sh}\omega_n h J_0(\omega_n r) = 1 - \frac{r^2}{a^2},$$

由此可知

$$D_0 = \frac{1}{N_{00}^2 h} \int_0^a \Big(1 - \frac{r^2}{a^2}\Big) r \mathrm{d}r = \frac{2}{a^2 h} \Big[\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4a^2} r^4\Big]_0^a = \frac{1}{2h},$$

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{N_{0n}^2 \mathrm{sh}\omega_n h} \int_0^a \Big(1 - \frac{r^2}{a^2}\Big) r J_0\Big(\omega_n r\Big) \mathrm{d}r \\ &= \frac{2}{a^2 J_0^2(\omega_n a) \mathrm{sh}\omega_n h} \int_0^{\omega_n a} \frac{1}{\omega_n^2} \Big(1 - \frac{x^2}{a^2 \omega_n^2}\Big) x J_0\big(x\big) \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\omega_n^2 a^2 J_0^2(\omega_n a) \mathrm{sh}\omega_n h} \Big[\Big(1 - \frac{x^2}{a^2 \omega_n^2}\Big) x J_1\big(x\big) + \frac{2}{a^2 \omega_n^2} x^2 J_2\big(x\big)\Big]_0^{\omega_n a} \\ &= \frac{4 J_2(\omega_n a)}{\omega_n^2 a^2 J_0^2(\omega_n a) \mathrm{sh}\omega_n h}. \end{aligned}$$

由递推公式 (3.4.3b) 与 (3.4.1c), 得

$$\begin{aligned} J_2(\omega_n a) &= \frac{2}{\omega_n a} J_1(\omega_n a) - J_0(\omega_n a) \\ &= -\frac{2}{\omega_n a} J_0'(\omega_n a) - J_0(\omega_n a) = -J_0(\omega_n a), \end{aligned}$$

于是

$$D_n = -\frac{4}{\omega_n^2 a^2 J_0(\omega_n a) \mathrm{sh}\omega_n h}.$$

最终, 得解

$$u(r,z)=\frac{z}{2h}-\frac{4}{a^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\omega_n^2 J_0(\omega_n a)\mathrm{sh}\omega_n h}\mathrm{sh}\omega_n z J_0(\omega_n r).$$

在有些问题中, Bessel 方程不构成固有值问题, 此时需要引进虚变量 Bessel 函数.

例 3.4.7 将例 3.4.6 中“侧面绝热”的条件改为“侧面流入强度为 q 的均匀热流”, 求圆柱内的温度分布.

解 此时温度 u 的定解问题为

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0, & r<a,\ 0<z<h,\\ k\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a}=q, & \text{常数 } k \text{ 为热传导系数},\\ u\big|_{z=0}=0, & u\big|_{z=h}=1-\dfrac{r^2}{a^2}.\end{cases}$$

由叠加原理, 令 $u=v+w, v$ 与 w 分别为定解问题

$$\begin{cases}\Delta_3 v=0,\\ k\dfrac{\partial v}{\partial r}\Big|_{r=a}=q,\\ v\big|_{z=0}=v\big|_{z=h}=0\end{cases}\quad\text{与}\quad\begin{cases}\Delta_3 w=0,\\ \dfrac{\partial w}{\partial r}\Big|_{r=a}=0,\\ w\big|_{z=0}=0,\quad w\big|_{z=h}=1-\dfrac{r^2}{a^2}\end{cases}$$

的解. w 即为例 3.4.6 的解, 下面求解 $v=v(r,z)$.

令 $v(r,z)=R(r)Z(z)$, 代入方程和 $z=0, z=h$ 的齐次边界条件, 分离得固有值问题

$$\begin{cases}Z''+\lambda Z=0, & 0<z<h,\\ Z(0)=Z(h)=0\end{cases}$$

和常微分方程

$$(rR')'-\lambda rR=0 \tag{3.4.14}$$

及自然边界条件 $|R(0)|<+\infty$. 解得

$$\text{固有值}\quad \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2,$$

$$\text{固有函数}\quad Z_n(z)=\sin\frac{n\pi}{h}z,\quad n=1,2,\cdots,$$

$$\text{固有函数的模平方}\quad N_n^2=\frac{h}{2}.$$

在相应的 $R(r)$ 的方程 (3.4.14) 中令 $x=\sqrt{\lambda_n}r,\ y(x)=R\Big(\dfrac{x}{\sqrt{\lambda_n}}\Big)$, 得方程

$$x^2y''+xy'-x^2y=0,$$

称之为**零阶虚变量 Bessel 方程**.

一般地, 称二阶变系数方程

$$x^2y''+xy'-(x^2+\nu^2)y=0 \tag{3.4.15}$$

为**ν 阶虚变量 Bessel 方程**. 显然, 作自变量变换 $\xi=\mathrm{i}x$, (3.4.15) 式即为 ν 阶 Bessel 方程

$$\xi^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\xi^2}+\xi\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}+(\xi^2-\nu^2)y=0,$$

故 ν 阶虚变量 Bessel 方程的通解为

$$y(x)=CJ_\nu(\mathrm{i}x)+DN_\nu(\mathrm{i}x).$$

通常引进两个实函数

$$I_\nu(x)\overset{d}{=}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\nu\pi}{2}}J_\nu(\mathrm{i}x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+\nu}, \tag{3.4.16a}$$

$$K_\nu(x)\overset{d}{=}\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\nu+1}{2}\pi}H_\nu^{(1)}(\mathrm{i}x)=\frac{\pi[-I_\nu(x)+I_{-\nu}(x)]}{2\sin\nu\pi}, \tag{3.4.16b}$$

分别称为**第一、二类 ν 阶虚变量 Bessel 函数**. 故 ν 阶虚变量 Bessel 方程的通解可表示为

$$y(x)=AI_\nu(x)+BK_\nu(x), \tag{3.4.17}$$

其中, $I_\nu(x)$ 在 $x=0$ 处有界, $K_\nu(x)$ 在 $x=0$ 处无界. 当 $x\to+\infty$ 时 $I_\nu(x)\to+\infty, K_\nu(x)\to0$, 且 $I_\nu(x)$ 及 $K_\nu(x)$ 在正实轴上都无零点 (图 3.4.3).

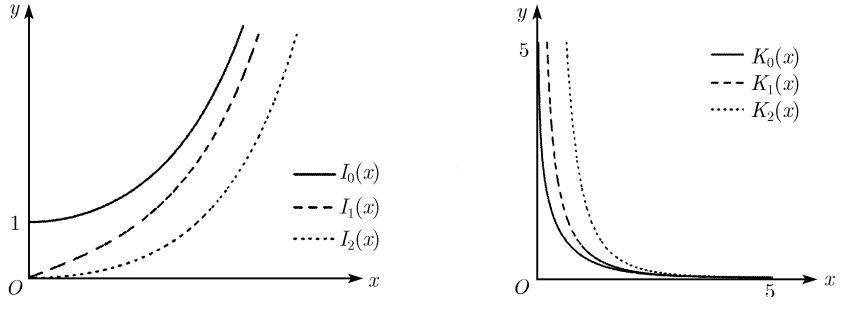


图 3.4.3

回到本例, $R(r)$ 的方程 (3.4.14) 的有界解

$$R_n(r)=I_0\Big(\frac{n\pi}{h}r\Big),$$

因此得

$$v(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}C_nI_0\Big(\frac{n\pi}{h}r\Big)\sin\frac{n\pi}{h}z.$$

代入边界条件

$$\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=a}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{h}C_nI_0'\Big(\frac{n\pi}{h}a\Big)\sin\frac{n\pi}{h}z=\frac{q}{k},$$

由于

$$I_0'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_0(\mathrm{i}x)=\mathrm{i}J_0'(\mathrm{i}x)=-\mathrm{i}J_1(\mathrm{i}x)=\mathrm{i}^{-1}J_1(\mathrm{i}x)=I_1(x),$$

可求出

$$\begin{aligned}C_n&=\frac{h}{n\pi I_0'\Big(\dfrac{n\pi}{h}a\Big)}\cdot\frac{2}{h}\int_0^h\frac{q}{k}\sin\frac{n\pi}{h}z\mathrm{d}z\\&=\frac{2q}{kn\pi I_1\Big(\dfrac{n\pi}{h}a\Big)}\cdot\frac{h}{n\pi}\big[1-(-1)^n\big]\\&=\begin{cases}0, & n=2m,\\ \dfrac{4hq}{k(2m+1)^2\pi^2I_1\Big(\dfrac{2m+1}{h}\pi a\Big)}, & n=2m+1.\end{cases}\end{aligned}$$

故

$$v(r,z)=\frac{4hq}{k\pi^2}\sum_{m=0}^{+\infty}\Big[(2m+1)^2I_1\Big(\frac{2m+1}{h}\pi a\Big)\Big]^{-1}I_0\Big(\frac{2m+1}{h}\pi r\Big)\sin\frac{2m+1}{h}z.$$

Bessel 函数也可能出现在非圆柱问题中.

例 3.4.8 长为 l 的匀质楔形细杆, 其横截面积正比于它与尖端 $x=0$ 的距离, 杆的粗端自由. 已知杆的初始位移为 $\varphi(x)$, 初始速度为 0, 求杆的纵振动.

解 在习题 1 中我们推导过等截面均匀细杆的纵振动方程, 这里的不同之处在于杆的横截面是位置变量的线性函数.

如图 3.4.4 所示, 选取坐标系, 位移函数 $u(t,x)$. 取微元 $[x,x+\mathrm{d}x]$, 所受张力为

$$Ys(x)u_x|_{x+\mathrm{d}x}-Ys(x)u_x|_x=Y\frac{\partial}{\partial x}(s(x)u_x)\mathrm{d}x,$$

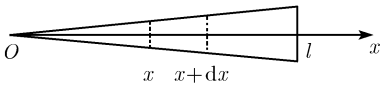


图 3.4.4

其中, Y 为杨氏模量, $s(x)=kx$ 为横截面, k 为比例系数. 由牛顿 (Newton) 定律得运动方程

$$\rho s(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\mathrm{d}x = Y\frac{\partial}{\partial x}\Big(s(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big)\mathrm{d}x,$$

即

$$\rho x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Y\frac{\partial}{\partial x}\Big(x\frac{\partial u}{\partial x}\Big).$$

此杆的纵振动的定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big), \quad 0<x<l, \quad a^2=\dfrac{Y}{\rho},\ \rho\text{为密度}, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

用分离变量法求解, 令 $u(t,x)=T(t)X(x)$, 代入方程和齐次边界条件, 分离得固有值问题

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}(xX')' + \lambda X = 0, \quad 0<x<l, \\ X(0)\text{有界}, \quad X'(l)=0 \end{cases}$$

和常微分方程

$$T'' + \lambda a^2 T = 0.$$

解得固有值

$$\lambda_n = \omega_n^2, \quad \omega_n \text{ 是 } J_0'(\omega l) = -J_1(\omega l) \text{ 的第 } n \text{ 个非负零点},$$

固有函数为

$$X_n(x) = J_0(\omega_n x), \quad n=0,1,2,\cdots,$$

相应解得

$$T_0(t) = A_0 + B_0 t,$$

$$T_n(t) = A_n\cos a\omega_n t + B_n\sin a\omega_n t, \quad n\geqslant 1.$$

由叠加原理, 设

$$u(t,x) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\cos a\omega_n t + B_n\sin a\omega_n t)J_0(\omega_n x),$$

代入初始条件

$$u\big|_{t=0} = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n J_0(\omega_n x) = \varphi(x),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = B_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a\omega_n B_n J_0(\omega_n x) = 0,$$

由 $\{J_0(\omega_n x)\}$ 的完备正交性, 可解得

$$\begin{aligned} &B_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \\ &A_0 = \frac{2}{l^2}\int_0^l x\varphi(x)\mathrm{d}x, \\ &A_n = \frac{2}{l^2 J_0^2(\omega_n l)}\int_0^l x\varphi(x)J_0(\omega_n x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

故本例的纵振动为

$$u(t,x) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(a\omega_n t)J_0(\omega_n x).$$

3.4.4 球 Bessel 函数及其应用

在 3.1.3 节中, 我们在球坐标下将 Helmholtz 方程 $\Delta_3 v + k^2 v = 0$ 分离变量, 得到关于 $R(r)$ 的 ***l* 阶球 Bessel 方程**

$$(r^2 R')' + [k^2 r^2 - l(l+1)]R = 0, \tag{3.4.18}$$

这里已把球 Bessel 方程 (3.1.10c) 改写为 S–L 型, 并记 $\lambda = l(l+1)$, 其权函数为 r^2.

当 $k = 0$ 时, (3.4.18) 式即为 Euler 方程

$$r^2 R'' + 2rR' - l(l+1)R = 0,$$

有通解

$$R(r) = Cr^l + Dr^{-(l+1)}.$$

当 $k \neq 0$ 时, 令 $x = kr$, 记 $y(x) = R\left(\dfrac{x}{k}\right)$, (3.4.18) 式变为

$$x^2 y'' + 2xy' + [x^2 - l(l+1)]y = 0, \tag{3.4.19}$$

这个方程也称为 ***l* 阶球 Bessel 方程**. 再令 $z(x) = \sqrt{x}\, y(x)$, (3.4.19) 式化为

$$x^2 z'' + xz' + \left[x^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2\right] z = 0.$$

这是 $l + \dfrac{1}{2}$ 阶 Bessel 方程, 其通解为

$$z(x) = CJ_{l+\frac{1}{2}}(x) + DN_{l+\frac{1}{2}}(x).$$

相应地, l 阶球 Bessel 方程 (3.4.19) 的通解为

$$y(x)=\frac{C}{\sqrt{x}}J_{l+\frac{1}{2}}(x)+\frac{D}{\sqrt{x}}N_{l+\frac{1}{2}}(x).$$

记

$$j_l(x)\overset{d}{=}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+\frac{1}{2}}(x),\quad n_l(x)\overset{d}{=}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}N_{l+\frac{1}{2}}(x),\tag{3.4.20}$$

分别称为**l 阶球 Bessel 函数**和**球 Neumann 函数**, 则 l 阶球 Bessel 方程 (3.4.19) 的通解也可表成

$$y(x)=Cj_l(x)+Dn_l(x).\tag{3.4.21}$$

由球 Bessel 函数与 Bessel 函数的关系 (3.4.20) 式不难看出, 当 $l\geqslant 0$ 时, $j_l(x)$ 在 $x=0$ 处有界, $n_l(x)$ 在 $x=0$ 处无界. 当 l 取整数时, $j_l(x)$ 与 $n_l(x)$ 都是初等函数. 还可由 Bessel 函数的其他性质推出球 Bessel 的相应性质, 如递推公式、衰减震荡性等.

下面求解**球 Bessel 方程的固有值问题**

$$\begin{cases}(r^2R')'+[k^2r^2-l(l+1)]R=0,\quad 0<r<r_0,&(3.4.18)\\ R(0)\text{ 有界},\quad R(r_0)=0.&(3.4.18a)\end{cases}$$

由以上讨论知, 方程在 $r=0$ 有界的解为

$$R(r)=j_l(kr)=\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}J_{l+\frac{1}{2}}(kr),$$

代入 $r=r_0$ 的边界条件

$$R(r_0)=\sqrt{\frac{\pi}{2kr_0}}J_{l+\frac{1}{2}}(kr_0)=0,$$

解得**固有值**

$$k^2=k_n^2,\quad \text{其中, } k_n \text{ 为方程 } J_{l+\frac{1}{2}}(kr_0)=0 \text{ 的第 } n \text{ 个正根},\tag{3.4.22}$$

固有函数

$$R_n(r)=j_l(k_nr)=\sqrt{\frac{\pi}{2k_nr}}J_{l+\frac{1}{2}}(k_nr),\quad n=1,2,\cdots.\tag{3.4.23}$$

固有函数的**模平方**

$$\begin{aligned}N_{ln}^2&=\int_0^{r_0}r^2j_l^2\big(k_nr\big)\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi}{2k_n}\int_0^{r_0}rJ_{l+\frac{1}{2}}^2\big(k_nr\big)\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi r_0^2}{4k_n}J_{l+\frac{3}{2}}^2\big(k_nr_0\big)=\frac{r_0^3}{2}j_{l+1}^2\big(k_nr_0\big).\end{aligned}\tag{3.4.24}$$

可见, 球 Bessel 函数的模平方归结为 Bessel 函数的模平方. 对第Ⅱ、Ⅲ类边界条件的固有值问题也可类似解得.

由 S–L 定理, 固有函数系 $\{j_l(k_n r),\ n=1,2,\cdots\}$ 是完备正交函数系, 任意在 $[0,r_0]$ 上加权 r^2 平方可积的 $f(r)$, 都可展开成均方收敛的广义 Fourier 级数

$$f(r)=\sum_{n=1}^{+\infty} C_n j_l(k_n r), \tag{3.4.25a}$$

其中, 广义 Fourier 系数

$$C_n=\frac{1}{N_{ln}^2}\int_0^{r_0} r^2 f(r) j_l(k_n r)\mathrm{d}r. \tag{3.4.25b}$$

利用球 Bessel 函数, 我们可用分离变量法求解球域上的热传导方程和波动方程的混合问题.

例 3.4.9 半径为 r_0 的均匀圆球, 初始温度为 0. 加热过程中, 球面温度始终保持 u_0, 求球内温度的变化.

解 球内温度 u 满足混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta_3 u, \quad r<r_0, \\ u\big|_{r=r_0}=u_0, \\ u\big|_{t=0}=0. \end{cases}$$

首先把边界条件齐次化. 设 $u=v+u_0$, 则 v 满足齐次边条件的混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}=a^2\Delta_3 v, \quad r<r_0, \\ v\big|_{r=r_0}=0, \\ v\big|_{t=0}=-u_0. \end{cases}$$

由于问题球对称, 可简化 $v=v(t,r)$. 令 $v=T(t)R(r)$, 分离得固有值问题

$$\begin{cases} (r^2R')'+\lambda r^2 R=0, \\ R(0)\text{ 有界}, \quad R(r_0)=0 \end{cases}$$

和常微分方程

$$T'+\lambda a^2 T=0.$$

关于 $R(r)$ 的方程是零阶球 Bessel 方程, 固有值 $\lambda=k^2, k$ 满足

$$j_0(kr_0)=\sqrt{\frac{\pi}{2kr_0}}J_{\frac{1}{2}}(kr_0)=\frac{1}{kr_0}\sin kr_0=0,$$

所以, 固有值

$$\lambda_n = \Big(\frac{n\pi}{r_0}\Big)^2, \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

固有函数

$$R_n(r) = j_0\Big(\frac{n\pi}{r_0}r\Big) = \frac{r_0}{n\pi r}\sin\frac{n\pi}{r_0}r.$$

相应地, 解得

$$T_n(t) = \mathrm{e}^{-(\frac{n\pi a}{r_0})^2 t}.$$

令

$$v(t,r) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n j_0\Big(\frac{n\pi}{r_0}r\Big)\mathrm{e}^{-(\frac{n\pi a}{r_0})^2 t},$$

代入初始条件

$$v|_{t=0} = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n j_0\Big(\frac{n\pi}{r_0}r\Big) = -u_0,$$

可求出

$$C_n = \frac{-u_0}{N_0^2}\int_0^{r_0} r^2 j_0\Big(\frac{n\pi}{r_0}r\Big)\mathrm{d}r = -u_0\frac{\dfrac{r_0}{n\pi}\displaystyle\int_0^{r_0} r\sin\frac{n\pi}{r_0}r\mathrm{d}r}{\dfrac{r_0^3}{2}j_1^2\Big(\dfrac{n\pi}{r_0}r_0\Big)} = (-1)^n 2u_0.$$

最终, 解得

$$\begin{aligned} u(t,r) &= u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\big(-1\big)^n 2u_0 j_0\Big(\frac{n\pi}{r_0}r\Big)\mathrm{e}^{-(\frac{n\pi a}{r_0})^2 t} \\ &= u_0\Big[1 + \frac{2r_0}{\pi r}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi r}{r_0}\mathrm{e}^{-(\frac{n\pi a}{r_0})^2 t}\Big]. \end{aligned}$$

*3.4.5 可以化为 Bessel 方程的方程

像球 Bessel 方程一样, 很多二阶变系数线性常微分方程都可以通过变量代换转化为 Bessel 方程, 它们的解便可用 Bessel 函数表出.

例如, 对 ν 阶 Bessel 方程

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu \geqslant 0,$$

作自变量代换 $x = \lambda t^\beta$, 因变量代换 $z = t^\alpha y$, λ, β, α 为常数, 则可得一族二阶线性方程

$$t^2\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + (1-2\alpha)t\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + [\lambda^2\beta^2 t^{2\beta} + (\alpha^2 - \nu^2\beta^2)]z = 0, \tag{3.4.26}$$

它们的解可表示成

$$z_\nu(t) = t^\alpha y_\nu(\lambda t^\beta),$$

其中, $y_\nu(x)$ 是相应 ν 阶 Bessel 方程的解. 通过别的变换, 还有其他可化为 Bessel 方程的方程.

例 3.4.10 解混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big) + \omega^2 u, \quad 0 < x < l, t > 0, \\ u\big|_{x=0} \text{有界}, \quad u\big|_{x=l} = 0, \\ u\big|_{t=0} = f(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(x), \quad \text{其中, } a, \omega \text{ 为正常数, } \omega \text{ 很小.} \end{cases}$$

解 设 $u = T(t)X(x)$, 分离变量, 得

$$\begin{cases} (xX')' + \mu X = 0, \\ X(0) \text{有界}, \quad X(l) = 0, \end{cases}$$

$$T'' + (\mu a^2 - \omega^2)T = 0.$$

由 S–L 定理, 固有值 $\mu > 0, X(x)$ 的方程改写为

$$x^2 X'' + xX' + \mu x X = 0.$$

比较方程 (3.4.26), 可定出 $\alpha = 0, \beta = \dfrac{1}{2}, \lambda = 2\sqrt{\mu}, \nu = 0$, 故方程的通解为

$$X(x) = CJ_0(2\sqrt{\mu x}) + DN_0(2\sqrt{\mu x}).$$

由 $X(0)$ 有界, 推出 $D = 0$, 再由 $X(l) = CJ_0(2\sqrt{\mu l}) = 0$, 可推出固有值

$$\mu_n = \frac{x_n^2}{4l}, \quad x_n \text{ 为 } J_0(x) \text{ 的第 } n \text{ 个正零点},$$

固有函数

$$X_n(x) = J_0\left(x_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right), \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

固有函数的模平方

$$\begin{aligned} N_n^2 &= \int_0^l J_0^2\left(x_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\mathrm{d}x \\ &= 2l\int_0^1 \xi J_0^2(x_n\xi)\mathrm{d}\xi = lJ_1^2(x_n). \end{aligned}$$

相应地, 可解出

$$T_n(t) = A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t,$$

$$\omega_n = \left(a^2\mu_n - \omega^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a^2x_n^2}{4l} - \omega^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

设

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t)J_0\left(x_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right),$$

由初始条件得

$$u\Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{+\infty}A_nJ_0\left(x_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right) = f(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{+\infty}\omega_nB_nJ_0\left(x_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right) = g(x).$$

由 $\{X_n(x)\}$ 的完备正交性, 可定出系数

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{1}{N_n^2}\int_0^l f(x)J_0\left(x_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{2l}{N_n^2}\int_0^1 f(l\xi^2)J_0(x_n\xi)\xi\mathrm{d}\xi\\ &= \frac{2}{J_1^2(x_n)}\int_0^1 f(l\xi^2)J_0(x_n\xi)\xi\mathrm{d}\xi,\\ B_n &= \frac{2}{\omega_nJ_1^2(x_n)}\int_0^1 g(l\xi^2)J_0(x_n\xi)\xi\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

习　题　3

1. (1) 在柱坐标系中, 对拉普拉斯方程分离变量, 写出各常微分方程.

(2) 在球坐标系中, 已知 $u = u(t,r,\theta,\varphi)$, 把方程 $u_t = a^2\Delta_3u + b(r)u$ 分离变量, 写出各常微分方程, 其中, $b(r)$ 为已知函数.

2. 在 $x = 0$ 点邻域内, 求拉盖尔方程 $xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0$ 的幂级数解. 当 λ 取什么值时, 此级数解为多项式?

3. 求 $P_n(0)$ 及 $P_n'(0)$ 的值.

4. 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^mP_n(x)\mathrm{d}x$ (分别考虑 $m < n$ 及 $m \geqslant n$ 两种情况).

(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 xP_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x$.

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 (1-x^2)[P_n'(x)]^2\mathrm{d}x$ [提示：分部积分, 利用 Legendre 方程的 S–L 形式.].

5. 把下列函数按 Legendre 函数系展开：

(1) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1,\\ 0, & -1 < x < 0.\end{cases}$

(2) $f(x)=x^3,-1<x<1$.

(3) $f(x)=|x|,-1<x<1$.

6. 解下列定解问题, 其中, (r,θ,φ) 为球坐标.

(1) $\begin{cases}\Delta_3 u=0, & r<a,\\ u|_{r=a}=\cos^2\theta.\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\Delta_3 u=0, & r>1,\\ u|_{r=1}=\cos^2\theta,\\ u|_{r=+\infty}=0.\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\Delta_3 u=0, & 1<r<2,\\ u|_{r=1}=\cos\theta,\\ u|_{r=2}=1+\cos^2\theta.\end{cases}$

7. 半径为 a 的金属球壳, 用绝缘材料分成上、下两个半球壳仍组成一个金属球壳, 经分别充电后, 上、下半球壳的电位分别为 u_1 和 u_2, 计算球壳内部电位分布.

8. 半径为 a, 表面黑色的均质球体, 在温度为 0 的空气中受阳光照射, 阳光的热流强度为 q, 求此球体内的稳定温度分布.

9. 一个半径为 R, 厚度为 $\dfrac{R}{2}$ 的半空心球, 外球面和内球面上的温度始终保持为

$$f(\theta)=A\sin^2\frac{\theta}{2},\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},$$

底面温度保持为 $\dfrac{A}{2}$, 求半空心球内部各点的定常温度.

10. 用球函数将下列函数展开:

(1) $f(\theta,\varphi)=\sin^2\theta\cos^2\varphi$.

(2) $f(\theta,\varphi)=(1+3\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi$.

11. 解下列定解问题 ((r,θ,φ) 为球坐标):

(1) $\begin{cases}\Delta_3 u=0, & r<a,\\ u|_{r=a}=\sin 2\theta\cos\varphi.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\Delta_3 u=0, & r>a,\\ u_r|_{r=a}=f(\theta,\varphi),\\ u|_{r\to+\infty}=0.\end{cases}$

12. 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int x^2J_0(x)\mathrm{d}x$. (2) $\displaystyle\int x^4J_1(x)\mathrm{d}x$. (3) $\displaystyle\int J_3(x)\mathrm{d}x$. (4) $\displaystyle\int xJ_1(x)\mathrm{d}x$.

13. 设 ω_n 是方程 $J_1(\omega)=0$ 的正实根, $n=1,2,3,\cdots$. 把函数 $f(x)=x$ $(0<x<1)$ 按完备正交函数系 $\{J_1(\omega_n x)\}$ 展开成 Fourier–Bessel 级数, 并判断其收敛性.

14. 设 ω_n 是方程 $J_0(2\omega)=0$ 的正实根, $n=1,2,3,\cdots$. 把函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & x=1,\\ 0, & 1<x<2\end{cases}$$

按完备正交函数系 $\{J_0(\omega_n x)\}$ 展开成 Fourier–Bessel 级数.

15. 解下列定解问题：

(1) $\begin{cases} u_{tt}+2hu_t=a^2\left(u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r\right), \quad h\ll 1, \quad t>0,\ 0<r<l, \\ |u(t,0)|<+\infty, \quad u(t,l)=0, \\ u(0,r)=\varphi(r), \quad u_t(0,r)=0. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+u_{zz}=0, \quad 0<r<a,\ 0<z<h, \\ |u(0,z)|<+\infty, \quad u(a,z)=f(z), \\ u(r,0)=u(r,h)=0, \quad \text{并计算当 } f(z)=f_0 \text{ (常数) 时的结果.} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} u_{tt}=\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)-b^2u, \quad t>0,\ 0<x<1, \\ |u(t,0)|<+\infty, \quad u(t,1)=0, \\ u(0,x)=0, \quad u_t(0,x)=\psi(x). \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \Delta_2 u-u=0, \quad r<1,\ 0\leqslant\theta<2\pi, \\ u|_{r=1}=f(\theta). \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \Delta_3 u-k^2u=0, \quad r<a, \\ u|_{r=a}=\sin^2\theta\cos^2\varphi. \end{cases}$

16. 半径为 R 的无限长均匀圆柱体, 侧表面保持常温 u_0, 柱内初始温度为 0, 求柱体内温度分布.

17. 有一均匀圆柱体高为 h, 半径为 a, 柱体侧面绝热, 上、下底面温度分别为 $f_2(r)$ 和 $f_1(r)$, 求柱内稳定温度分布.

18. 半径为 1 的均质球体, 初始温度为 $1-r$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 若球面温度保持为零度, 求此球内各点温度变化规律.

19. 求出下列微分方程的通解：

(1) $y''+\dfrac{1}{x}y'+4\left(x^2-\dfrac{\nu^2}{x^2}\right)=0.$

(2) $xy''+2y'-4xy=0.$

20. 求柱坐标系中三维拉普拉斯方程 $\Delta_3 u=0$ 的所有满足 $u(r,\varphi,z)=u(r,\varphi+2\pi,z)$ 的变量分离解.

第 4 章　积分变换法

积分变换法是求解线性偏微分方程定解问题的另一种重要方法, 常用于求解无界或半无界区域上的问题. 积分变换法通过函数的积分变换, 把微分运算转化为代数运算, 从而减少偏微分方程中自变量的个数, 直至化简为常微分方程或代数方程以解之. 本章将重点讨论数学物理方程中最常用的 Fourier 变换法和 Laplace 变换法, 并对积分变换的一般原理及其他重要积分变换作简要介绍.

4.1　Fourier 变换法

通过变换把复杂问题转化为简单问题是处理问题常用的手法. 比如, 取对数可以把方程 $ax = b$ 转化为更简单的方程 $\ln a + \ln x = \ln b$, 解出 $\ln x$ 后再取指数得到 x. 这里对变换有两个基本要求, 一是把需处理的运算化简; 二是要有反变换存在. 对于求解偏 (常) 微分方程而言, Fourier 变换恰好是符合这两个要求的一种积分变换.

4.1.1　Fourier 变换

定义在实轴上的函数 $f(x)$ 在任意有界区间逐段光滑, 且在 $(-\infty, +\infty)$ 绝对可积, 即 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x < +\infty$, 则 $\forall \lambda \in (-\infty, +\infty)$, 含参量积分

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x \tag{4.1.1}$$

收敛. 称 $f(x) \to \widehat{f}(\lambda)$ 的对应为 Fourier 变换, $\widehat{f}(\lambda)$ 为 $f(x)$ 的 Fourier 变换的像 (或简称为 $f(x)$ 的 Fourier 变换), $f(x)$ 为 $\widehat{f}(\lambda)$ 的 Fourier 变换的原像 (或简称为 $\widehat{f}(\lambda)$ 的 Fourier 反变换), 分别记为 $\widehat{f}(\lambda) = F[f(x)], f(x) = F^{-1}[\widehat{f}(\lambda)]$.

Fourier 变换有以下基本性质.

(1) 若 $F[f_1(x)]$, $F[f_2(x)]$ 存在, 则对任意常数 c_1, c_2, 有

$$F[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] = c_1 F[f_1(x)] + c_2 F[f_2(x)], \tag{4.1.2}$$

即 Fourier 变换是**线性变换**.

(2) 若 $F[f'(x)]$ 存在, $f(\pm\infty) = 0$, 由分部积分公式得**微分关系式**

$$F[f'(x)] = \mathrm{i}\lambda F[f(x)] \ .$$

这里, Fourier 变换把求导运算变成了代数运算. 更一般地, 若 $F[f^{(n)}(x)]$ 存在, $f(\pm\infty)=f'(\pm\infty)=\cdots=f^{(n-1)}(\pm\infty)=0$, 则有

$$F[f^{(n)}(x)]=(\mathrm{i}\lambda)^n F[f(x)]\ . \tag{4.1.3}$$

(3) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积, 且在任何有界区间上逐段光滑, 则有**反演公式**

$$\frac{1}{2}\big[f(x-0)+f(x+0)\big]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda\ .$$

在 $f(x)$ 的连续点上, 有

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda\ . \tag{4.1.4}$$

将式 (4.1.1) 代入式 (4.1.4), 即得 Fourier 积分公式

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi-x)\lambda}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda\ . \tag{4.1.5}$$

公式 (4.1.4) 也可看作 Fourier 反变换的定义.

公式 (4.1.1) 与 (4.1.4) 给出了 Fourier 正反变换的定义. 在信号分析中, λ 是谐振动的频率, 信号 $f(x)$ 的 Fourier 变换 $\widehat{f}(\lambda)$ 称为频谱, 反映了信号 $f(x)$ 中频率为 λ 的简谐波所占的份额. 将 $\widehat{f}(\lambda)$ 作反变换, 即把所有频率的谐波按频谱加权叠加, 便得到了原有的信号. 在量子力学中, λ 称为波数, 记 $\lambda=\dfrac{p}{\hbar}$ ($\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$, h为 Plank 常数), 且把这一对公式 (4.1.4) 和 (4.1.1) 改写为

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}c(p)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}px}\mathrm{d}p\ ,$$

$$c(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}px}\mathrm{d}x\ ,$$

其中, $\psi(x)$ 为坐标表象下的波函数, 而 $c(p)$ 则为动量表象下的波函数.

Fourier 变换的其他常用性质如下.

频移和时移 (位移) **特性** 设 $f(x)$ 的 Fourier 变换为 $\widehat{f}(\lambda)$, 则 $\forall\lambda_0,x_0\in(-\infty,+\infty)$, 有

$$F[f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_0 x}]=\widehat{f}(\lambda-\lambda_0)\ ,$$

$$F[f(x-x_0)]=\widehat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_0\lambda}\ . \tag{4.1.6}$$

相似性质 设 $f(x)$ 的 Fourier 变换为 $\widehat{f}(\lambda)$, 则对不为 0 的实数 α, 有

$$F[f(\alpha x)]=\frac{1}{|\alpha|}\widehat{f}\Big(\frac{\lambda}{\alpha}\Big)\ . \tag{4.1.7}$$

积分公式 设 $f(x)$ 的 Fourier 变换为 $\widehat{f}(\lambda)$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi$ 的 Fourier 变换存在, 则

$$F\left[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right] = \frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\widehat{f}(\lambda). \tag{4.1.8}$$

卷积公式 设 $f(x), g(x)$ 的 Fourier 变换分别为 $\widehat{f}(\lambda)$ 与 $\widehat{g}(\lambda)$, 则它们的卷积函数

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)g(x-\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{4.1.9a}$$

的 Fourier 变换也存在, 且

$$F[f(x) * g(x)] = \widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda)\ . \tag{4.1.9b}$$

反射性 设 $f(x)$ 的 Fourier 变换为 $\widehat{f}(\lambda)$, 则

$$F[\widehat{f}(x)] = 2\pi f(-\lambda). \tag{4.1.10}$$

有关 Fourier 变换的更多公式可查阅 Fourier 变换表.

4.1.2 用 Fourier 变换求解无界区间上的定解问题

我们通过典型例子说明 Fourier 变换在求解数学物理问题中的应用.

例 4.1.1 无穷长杆的热传导问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t>0,\ -\infty<x<+\infty\ , \\ u|_{t=0} = \varphi(x)\ . \end{cases} \tag{4.1.11}$$

解 假设未知函数 $u(t,x)$ 及其有关偏导函数都能作 Fourier 变换, 并满足所用公式要求的条件, 记 $\widehat{u}(t,\lambda) = F[u(t,x)] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(t,x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x$.

对方程和初始条件中各项作 Fourier 变换, 即用 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}$ 遍乘方程和初始条件中的各项, 并对变量 x 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分, 利用微分公式及积分号下求导数、求极限的公式, 得到像函数 $\widehat{u}(t,\lambda)$ 满足的常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\widehat{u}}{\mathrm{d}t} = -a^2\lambda^2\widehat{u}, \quad t>0\ , \\ \widehat{u}|_{t=0} = \widehat{\varphi}(\lambda)\ , \end{cases}$$

其中, $\widehat{\varphi}(\lambda)$ 是 $\varphi(x)$ 的 Fourier 变换. 这里, 正是 Fourier 变换的微分公式使 $u(t,x)$ 的偏微分方程变成了 $\widehat{u}(t,\lambda)$ 的常微分方程.

解此一阶常微分方程的初值问题, 得到像函数

$$\widehat{u}(t,\lambda) = \widehat{\varphi}(\lambda)\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}\ .$$

对像函数作 Fourier 反变换, 利用卷积公式 (4.1.9),

$$\begin{aligned} u(t,x) &= F^{-1}\big[\widehat{\varphi}(\lambda)\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}\big] \\ &= F^{-1}\big[\widehat{\varphi}(\lambda)\big] * F^{-1}\big[\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}\big] \\ &= \varphi(x) * \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\ \exp\Big(-\frac{x^2}{4a^2 t}\Big) \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\ \exp\Big[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\Big]\mathrm{d}\xi, \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

其中

$$\begin{aligned} F^{-1}\big[\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}\big] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\ \exp\Big(-\frac{x^2}{4a^2 t}\Big)\ . \end{aligned}$$

以上解得的 $u(t,x)$ 是用含参量积分表示的形式解. 由其构成可知, 只要 $\varphi(x)$ 连续, 且当 $|x|\to+\infty$ 时 $|\varphi(x)|$ 有界或增长不超过 $\mathrm{e}^{|x|}$, 该广义积分收敛且可以在积分号下求导和求极限, 从而公式 (4.1.12) 给出了无穷长杆上热传导问题的古典解.

由本例可见, 用 Fourier 变换解题, 作正变换, 解出像函数, 再作反变换, 步骤清晰, 且有许多现成公式可用, 因此是求解无界区域上线性定解问题的常用方法.

现在再考虑杆上有热源的情况

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), \quad t>0, -\infty<x<+\infty\ , \\ u|_{t=0} = \varphi(x)\ . \end{cases} \tag{4.1.13}$$

由叠加原理知, 只需求解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), \quad t>0, -\infty<x<+\infty\ , \\ u|_{t=0} = 0\ . \end{cases} \tag{4.1.14}$$

将其解与齐次问题 (4.1.11) 式的解叠加, 便可得到式 (4.1.13) 的解.

解 将 (4.1.14) 式关于 x 的函数作 Fourier 变换, 记 $\widehat{u}(t,\lambda)=F[u(t,x)]$, 得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\widehat{u}}{\mathrm{d}t} = -a^2\lambda^2\widehat{u} + \widehat{f}(t,\lambda), \quad t>0, -\infty<\lambda<+\infty\ , \\ \widehat{u}|_{t=0} = 0\ , \end{cases}$$

其中, $\widehat{f}(t,\lambda)=F[f(t,x)]$.

此非齐次常微分方程的通解为

$$\widehat{u}(t,\lambda)=\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}\Big[c+\int_0^t \widehat{f}(\tau,\lambda)\mathrm{e}^{a^2\lambda^2\tau}\mathrm{d}\tau\Big] ,$$

代入初始条件

$$\widehat{u}|_{t=0}=c=0 ,$$

解得像函数

$$\widehat{u}(t,\lambda)=\int_0^t \widehat{f}(\tau,\lambda)\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau .$$

作 Fourier 反变换, 得式 (4.1.14) 的解

$$\begin{aligned}
u(t,x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int_0^t \widehat{f}(\tau,\lambda)\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\Big]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda\\
&=\int_0^t\Big[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\tau,\lambda)\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda\Big]\mathrm{d}\tau\\
&=\int_0^t F^{-1}\big[\widehat{f}(\tau,\lambda)\big]*F^{-1}\big[\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\big]\mathrm{d}\tau\\
&=\int_0^t f(\tau,x)*\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\ \exp\Big[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\Big]\mathrm{d}\tau\\
&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\tau,\xi)}{\sqrt{t-\tau}}\ \exp\Big[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\Big]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \qquad (4.1.15)
\end{aligned}$$

可见, 方程中出现非齐次项时, 仍可用 Fourier 变换求解. 与齐次时相比, 不同之处仅在于像函数满足的是非齐次常微分方程. 虽然这会在求像函数和反变换时带来一定麻烦, 但是并无原则困难, 这是积分变换法的另一优点. 而且从求解过程可见, 我们并不需要真正求出已知函数 $\varphi(x), f(t,x)$ 的像函数.

公式 (4.1.15) 也可利用冲量原理从公式 (4.1.12) 直接得到.

例 4.1.2 无限长弦的自由振动

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t>0,-\infty<x<+\infty ,\\ u|_{t=0}=\varphi(x) , & \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\psi(x) .\end{cases}$$

解 设 $\widehat{u}(t,\lambda)=F[u(t,x)]$, 对方程和初始条件作 Fourier 变换, 得像函数满足的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\widehat{u}}{\mathrm{d}t^2}=-a^2\lambda^2\widehat{u} ,\\ \widehat{u}|_{t=0}=\widehat{\varphi}(\lambda) , & \dfrac{\mathrm{d}\widehat{u}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}=\widehat{\psi}(\lambda) ,\end{cases}$$

其中, $\widehat{\varphi}(\lambda)=F[\varphi(x)]$, $\widehat{\psi}(\lambda)=F[\psi(x)]$.

该方程的通解为

$$\widehat{u}(t,\lambda)=A(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda at}+B(\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda at}\ .$$

代入初始条件, 确定

$$A(\lambda)=\frac{1}{2}\Big[\widehat{\varphi}(\lambda)+\frac{1}{\mathrm{i}\lambda a}\widehat{\psi}(\lambda)\Big]\ ,$$
$$B(\lambda)=\frac{1}{2}\Big[\widehat{\varphi}(\lambda)-\frac{1}{\mathrm{i}\lambda a}\widehat{\psi}(\lambda)\Big]\ .$$

代入通解, 得到像函数

$$\widehat{u}(t,\lambda)=\frac{1}{2}\big[\widehat{\varphi}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda at}+\widehat{\varphi}(\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda at}\big]+\frac{1}{2a\mathrm{i}\lambda}\big[\widehat{\psi}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda at}-\widehat{\psi}(\lambda)e^{-\mathrm{i}\lambda at}\big]\ .$$

对像函数作反变换, 由 Fourier 变换的积分公式 (4.1.8)

$$F\Big[\int_{-\infty}^{x}f(\xi)\mathrm{d}\xi\Big]=\frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\tilde{f}(\lambda)$$

和位移公式 (4.1.6)

$$F\big[f(x+\xi)\big]=\widehat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\xi}\ ,$$

得

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\big[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\big]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\ ,$$

这正是我们在第 1 章中用通解法得到的 d'Alembert 公式.

Fourier 变换也可用来求解无界区域上的边值问题 (见习题 4).

4.1.3 Fourier 正弦、余弦变换和半无界区间上的定解问题

对于定义在半无界区间 $[0,+\infty)$ 上的函数, 可将其奇或偶开拓至 $(-\infty,+\infty)$ 后作 Fourier 变换, 这就导出了 $[0,+\infty)$ 区间上的**Fourier 正弦变换**和**余弦变换**

$$\widehat{f}_{\mathrm{s}}(\lambda)=F_{\mathrm{s}}[f(x)]\overset{d}{=}\int_{0}^{+\infty}f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\ , \tag{4.1.16a}$$

$$\widehat{f}_{\mathrm{c}}(\lambda)=F_{\mathrm{c}}[f(x)]\overset{d}{=}\int_{0}^{+\infty}f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x\ . \tag{4.1.16b}$$

利用 Fourier 反变换公式可以推出它们的反演公式分别为

$$f(x)=F_{\mathrm{s}}^{-1}[\widehat{f}_{\mathrm{s}}(\lambda)]=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\widehat{f}_{\mathrm{s}}(\lambda)\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda\ , \tag{4.1.17a}$$

$$f(x)=F_{\mathrm{c}}^{-1}[\widehat{f}_{\mathrm{c}}(\lambda)]=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\widehat{f}_{\mathrm{c}}(\lambda)\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda\ . \tag{4.1.17b}$$

正弦变换和余弦变换可用来求解半无界空间上的定解问题.

例 4.1.3 杂质扩散问题. 半导体工艺中, 通过固态扩散形成杂质扩散层. 由于杂质扩散很慢, 扩散深度远小于硅片厚度, 故可把硅片的内部相对视为半无界空间 $[0,+\infty)$. 一般扩散分两步形成: 第一步, 外界的杂质被引入硅片内的一定深度, 称为预积淀; 第二步, 在不再追加杂质的条件下通过高温处理使已积淀的杂质向深处扩散. 这两个扩散过程的数学模型分别为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad t>0, x>0\ , \\ -k\dfrac{\partial u_1}{\partial x}|_{x=0} = h(u_0-u_1)|_{x=0}\ , \\ u_1|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{4.1.18}$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad t>\tau, x>0\ , \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x}|_{x=0} = 0\ , \\ u_2|_{t=\tau} = u_1|_{t=\tau}\ . \end{cases} \tag{4.1.19}$$

其中, u_1, u_2 分别表示两个过程中的杂质浓度, 常数 u_0 是硅表面外界的杂质浓度, 常数 k 与 h 则分别是杂质在硅内的扩散系数和交界面上的转移系数.

我们考虑 $k << hD$ 的特殊情况, D 为杂质浓度的变化幅度. 此时, u_1 的模型 (4.1.18) 式简化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad t>0, x>0\ , \\ u_1|_{x=0} = u_0\ , \\ u_1|_{t=0} = 0\ , \end{cases} \tag{4.1.20}$$

且由问题的实际意义, 增添边界条件 $u_1|_{x=+\infty} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x}|_{x=+\infty} = 0$.

解 用正弦变换解 (4.1.20) 式. 令 $\widehat{u}_1(t,\lambda) = F_{\mathrm{s}}[u_1(t,x)]$, 则

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{s}}\Big[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\Big] &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\sin\lambda x \mathrm{d}x \\ &= \Big[\frac{\partial u_1}{\partial x}\sin\lambda x - \lambda u_1\cos\lambda x\Big]_0^{+\infty} - \lambda^2\int_0^{+\infty} u_1\sin\lambda x\mathrm{d}x \\ &= \lambda u_0 - \lambda^2\widehat{u}_1\ , \end{aligned}$$

这就是正弦变换的微分公式, 利用分部积分和 u_1 的边界条件算得. 这样, u_1 的半直线上的混合问题 (4.1.20) 式变换成

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\widehat{u}_1}{\mathrm{d}t} + a^2\lambda^2\widehat{u}_1 = a^2\lambda u_0 \ , \\ \widehat{u}_1|_{t=0} = 0 \ , \end{cases}$$

解得

$$\widehat{u}_1 = \frac{u_0}{\lambda}(1 - \mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}) \ .$$

作反正弦变换

$$\begin{aligned} u_1(t,x) &= \frac{2u_0}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\lambda}(1-\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t})\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{2u_0}{\pi}\Big[\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\mathrm{d}\lambda - \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda^2a^2t}\Big(\int_0^x\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi\Big)\mathrm{d}\lambda\Big] \\ &= u_0 - \frac{2u_0}{\pi}\int_0^x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda^2a^2t}\cos\lambda\xi\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\xi \\ &= u_0 - \frac{u_0}{a\sqrt{\pi t}}\int_0^x\exp\Big(-\frac{\xi^2}{4a^2t}\Big)\mathrm{d}\xi \\ &= u_0\Big[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\Big] \\ &= u_0\Big[1-\mathrm{erf}\Big(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\Big)\Big] = u_0\ \mathrm{erfc}\Big(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\Big) \ , \end{aligned}$$

这里, 函数 $\mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x)$, $\mathrm{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$, 分别称为**余误差函数**和**误差函数**, 其函数值有表可查.

分析此解可知, 随着时间 t 的增加, 杂质进入硅片的深度增加. 对固定的深度 x, 当 $t \to +\infty$ 时杂质浓度 u_1 趋向于表面浓度 u_0. 在 t 时刻进入硅片的杂质总量为

$$\begin{aligned} Q(t) &= \int_0^{+\infty}u_1(t,x)\mathrm{d}x = u_0\int_0^{+\infty}\mathrm{erfc}\Big(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\Big)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\int_0^{2a\sqrt{t}y}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{2a\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}u_0 \ , \end{aligned}$$

倒数第二步可通过交换积分次序得到. 这样, 可改写预积淀浓度为

$$u_1(t,x)=Q(t)\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}\mathrm{erfc}\Big(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\Big)\ .$$

从本例可见, 用正弦或余弦变换解题, 不需事先把边界条件齐次化, 但是在用分部积分推导微分公式时需要用到边界条件. 选用何种积分变换, 既取决于边界条件, 也取决于方程.

对于定解问题 (4.1.19) 式, 因为方程中只出现关于 x 的二阶导数, $x=0$ 端的边界条件为第 II 类, 应用余弦变换解之. 一般情形下定解问题 (4.1.18) 式, 由于边界条件是第 III 类, 需要采用其他的积分变换 (参见 4.3.2 节).

4.1.4 高维问题

求解全空间上的高维定解问题, 可利用高维 Fourier 变换. 以三维为例, 称

$$\widehat{f}(\lambda,\mu,\nu)=\iiint_{-\infty}^{+\infty}f(x,y,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\lambda x+\mu y+\nu z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{4.1.21}$$

为 $f(x,y,z)$ 的 Fourier 变换, 记为 $F[f]$. 它的反变换为

$$f(x,y,z)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\lambda,\mu,\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda x+\mu y+\nu z)}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu\ , \tag{4.1.22}$$

记为 $F^{-1}[\widehat{f}]$. 相应地, 有**微分公式**

$$F\Big[\frac{\partial f}{\partial x}\Big]=\mathrm{i}\lambda F[f],\quad F\Big[\frac{\partial f}{\partial y}\Big]=\mathrm{i}\mu F[f],\quad F\Big[\frac{\partial f}{\partial z}\Big]=\mathrm{i}\nu F[f]\ . \tag{4.1.23a}$$

特别地

$$F[\Delta_3 f]=-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)F[f]\ . \tag{4.1.23b}$$

对于高维函数的卷积

$$f*g=\iiint_{-\infty}^{+\infty}f(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)g(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\ , \tag{4.1.24a}$$

有**卷积公式**

$$F[f*g]=F[f]\cdot F[g]\ . \tag{4.1.24b}$$

类似一维情形, 以上公式都是在一定条件下成立.

例 4.1.4 求解三维热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta_3 u, \quad t > 0,\ -\infty < x, y, z < +\infty\ , \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y, z)\ . \end{cases}$$

解 对方程和初始条件两边作三维 Fourier 变换, 得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\widehat{u}}{\mathrm{d}t} + a^2\rho^2\widehat{u} = 0\ , \quad \rho^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2\ , \\ \widehat{u}|_{t=0} = \widehat{\varphi}(\lambda, \mu, \nu)\ . \end{cases}$$

像函数

$$\widehat{u}(t, \lambda, \mu, \nu) = \widehat{\varphi}(\lambda, \mu, \nu)\mathrm{e}^{-a^2\rho^2 t}\ .$$

因为

$$\begin{aligned} F^{-1}[\mathrm{e}^{-a^2\rho^2 t}] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^2(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)t} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda x+\mu y+\nu z)} \mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu \\ &= \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda\Big) \cdot \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^2\mu^2 t} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu y}\mathrm{d}\mu\Big) \\ &\quad \cdot \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^2\nu^2 t} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu z}\mathrm{d}\nu\Big) \\ &= \Big(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\Big)^3 \exp\Big(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2 t}\Big)\ , \end{aligned}$$

由卷积公式得到

$$u(t, x, y, z) = \Big(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\Big)^3 \iiint_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, \eta, \zeta) \exp\Big(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4a^2 t}\Big)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\ .$$

我们将在第 5 章讨论其他的高维问题.

4.2 Laplace 变换法

Laplace 变换是另一种广泛应用的积分变换, 可用来求解任意区域上发展方程的初值问题或混合问题.

4.2.1 Laplace 变换

作 Laplace 变换时, 被变换函数规定为

$$f(t) = f(t)H(t)\ ,$$

$$H(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0\ ,\\ 0, & t<0\ .\end{cases}$$

称含复参量 $p=\sigma+\mathrm{i}\lambda$ 的积分

$$\bar{f}(p)\overset{d}{=}\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \tag{4.2.1}$$

为 $f(t)$ 的Laplace **变换的像函数**, 或简称为 $f(t)$ 的**Laplace 变换**, 记作 $L[f(t)]$. 而 $f(t)$ 则称为**像函数 $\bar{f}(p)$ 的原像**, 或 Laplace 反变换, 记作 $L^{-1}[\bar{f}(p)]$. 若 $f(t)$ 连续并在任意有限区间逐段光滑, $t\to+\infty$ 时为指数增长型 (即存在增长指数 $\sigma_0\geqslant 0$ 和常数 $M>0$, 使 t 充分大后 $|f(t)|\leqslant M\mathrm{e}^{\sigma_0 t}$), 则像函数 $\bar{f}(p)$ 在半复平面 $\mathrm{Re}p>\sigma_0$ 解析, 当 $\mathrm{Re}p\to+\infty$ 时 $\bar{f}(p)\to 0$, 且有**反演公式**

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}\bar{f}(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p\ , \tag{4.2.2}$$

其中, σ 为任意大于 σ_0 的实数.

常用的 Laplace 变换的性质如下：

线性关系

$$L[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha L[f(t)]+\beta L[g(t)]\ .$$

微分公式

$$L[f^{(n)}(t)]=p^n\bar{f}(p)-p^{n-1}f(+0)-p^{n-2}f'(+0)-\cdots-pf^{(n-2)}(+0)-f^{(n-1)}(+0)\ . \tag{4.2.3}$$

与 Fourier 变换相同, Laplace 变换把求导运算变成了代数运算, 但是 n 阶导函数的 Laplace 变换需要知道相应的从 0 阶到 $n-1$ 阶导函数的初始值.

延迟定理

$$L[f(t-\tau)]=L[f(t-\tau)H(t-\tau)]=\mathrm{e}^{-p\tau}\bar{f}(p)\ ,\quad \tau>0\ . \tag{4.2.4}$$

复频移公式 对任何一个复常数 p_0, 有

$$L[f(t)\mathrm{e}^{p_0 t}]=\bar{f}(p-p_0). \tag{4.2.5}$$

相似定理 对任意常数 $\alpha>0$, 有

$$L[f(\alpha t)]=\frac{1}{\alpha}\bar{f}\Big(\frac{p}{\alpha}\Big). \tag{4.2.6}$$

积分公式

$$L\Big[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\Big]=\frac{\bar{f}(p)}{p}. \tag{4.2.7}$$

卷积公式

$$L[f(t)*g(t)]=\bar{f}(p)\cdot\bar{g}(p)\ , \tag{4.2.8}$$

这里, 卷积

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{0}^{t}f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau\ . \tag{4.2.9}$$

像函数的微分公式

$$L[(-t)^nf(t)]=\bar{f}^{(n)}(p). \tag{4.2.10}$$

像函数的积分公式

$$L\Big[\frac{f(t)}{t}\Big]=\int_{p}^{\infty}\bar{f}(p)\mathrm{d}p,\ \text{积分路径取在半平面 Re}p>\sigma_0\ \text{内}. \tag{4.2.11}$$

更多公式可参见 Laplace 变换表.

4.2.2 用 Laplace 变换求解发展方程的定解问题

例 4.2.1 求解端点温度已知的半无限长杆上的温度分布

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2},\quad t>0,x>0\ ,\\ u(t,0)=f(t)\ ,\\ u(0,x)=0.\end{cases} \tag{4.2.12}$$

解 定解问题 (4.1.20) 式是本问题的特殊情况, 这里用 Laplace 变换求解.

记 $\bar{u}(p,x)=L[u(t,x)]$, $\bar{f}(p)=L[f(t)]$. 对定解问题 (4.2.12) 式作 Laplace 变换, 得

$$\begin{cases}p\bar{u}=a^2\dfrac{\mathrm{d}^2\bar{u}}{\mathrm{d}x^2}\ ,\\ \bar{u}|_{x=0}=\bar{f}(p)\ .\end{cases}$$

由问题的实际意义, 对每个 $t>0$, 应增加自然边界条件 $u(t,+\infty)=0$, 从而有 $\bar{u}(p,+\infty)=0$.

方程的通解为

$$\bar{u}(p,x)=C\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}+D\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\ ,$$

其中, $\sqrt{p}$ 为 $p>0$ 时取正值的单值分支. 由 $\bar{u}(p,+\infty)=0$ 推出 $C=0$. 再由 $\bar{u}(p,0)=\bar{f}(p)$, 推出 $D=\bar{f}(p)$. 故

$$\bar{u}(p,x)=\bar{f}(p)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\ .$$

查 Laplace 变换表, 可知

$$L^{-1}\left[\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right]=\frac{x}{2a\sqrt{\pi t^3}}\exp\left[-\frac{x^2}{4a^2t}\right],$$

对 $\bar{u}$ 作 Laplace 反变换, 根据卷积公式 (4.2.8), 最后得到

$$\begin{aligned}u(t,x)&=L^{-1}\Big[\bar{f}(p)\cdot\exp\Big(-\frac{\sqrt{p}}{a}x\Big)\Big]\\&=f(t)*\frac{x}{2a\sqrt{\pi t^3}}\exp\Big[-\frac{x^2}{4a^2t}\Big]\\&=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}\exp\Big[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\Big]\mathrm{d}\tau\,.\end{aligned}$$

现在考虑更一般的问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}, & t>0,x>0\,,\\ u(t,0)=f(t)\,,\\ u(0,x)=\varphi(x)\,.\end{cases}\tag{4.2.13}$$

由叠加原理知, 只需再用正弦变换求解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2v}{\partial x^2}, & t>0,x>0\,,\\ v(t,0)=0\,,\\ v(0,x)=\varphi(x)\,.\end{cases}\tag{4.2.14}$$

例 4.2.2 求解半无界弦的强迫振动

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}, & t>0,x>0\,,\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}|_{x=0}=f(t)\,,\\ u|_{t=0}=\dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=0\,.\end{cases}\tag{4.2.15}$$

解 注意到方程中关于 t 和 x 都是二阶导数, $x=0$ 端的边界条件是一般的非齐次项 $f(t)$, 而关于 t 的初始条件均为齐次, 故用 Laplace 变换要优于用余弦变换.

由于弦的运动完全由端点所受外界作用引起, 在每个 t 时刻, 应添加自然边界条件 $u(t,+\infty)=0$.

记 $\bar{u}(p,x)=L[u(t,x)]$, 对定解问题作 Laplace 变换, 得

$$\begin{cases}p^2\bar{u}=a^2\dfrac{\mathrm{d}^2\bar{u}}{\mathrm{d}x^2}, & x>0,\\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}x}|_{x=0}=\bar{f}(p)\,, & \bar{u}|_{x=+\infty}=0\,.\end{cases}$$

方程的通解为

$$\bar{u} = C\mathrm{e}^{\frac{p}{a}x} + D\mathrm{e}^{-\frac{p}{a}x} ,$$

由边界条件定出 $C = 0,\ D = -\dfrac{a}{p}\bar{f}(p)$, 所以

$$\bar{u} = -\frac{a}{p}\bar{f}(p)\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}p} .$$

由拉氏变换的积分公式 (4.2.7)

$$L^{-1}\Big[-\frac{a}{p}\bar{f}(p)\Big] = -a\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau = -aH(t)\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau ,$$

再由延迟定理 (4.2.4) 式, 原像

$$u(t,x) = -aH\Big(t-\frac{x}{a}\Big)\int_0^{t-\frac{x}{a}} f(\tau)\mathrm{d}\tau .$$

例 4.2.3 求解有限长弦的强迫振动

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t>0,\ \ 0<x<l , \\ u(t,0) = 0 , \quad u_x(t,l) = A\sin\omega t, \quad \omega \neq \dfrac{2k-1}{2l}\pi a, k = 1,2,\cdots , \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0 . \end{cases} \tag{4.2.16}$$

解 这是弦振动方程在有界区间上的混合问题, 可用 Laplace 变换解之.

记 $\bar{u}(p,x) = L[u(t,x)]$, 混合问题在 Laplace 变换下成为

$$\begin{cases} p^2\bar{u} = a^2\dfrac{\mathrm{d}^2\bar{u}}{\mathrm{d}x^2}, \quad 0<x<l, \\ \bar{u}|_{x=0} = 0 , \quad \dfrac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}x}|_{x=l} = \dfrac{A\omega}{p^2+\omega^2} . \end{cases}$$

常微分方程的通解

$$\bar{u} = C\mathrm{ch}\frac{p}{a}x + D\mathrm{sh}\frac{p}{a}x ,$$

由边界条件定出特解

$$\bar{u} = \frac{Aa\omega}{p(p^2+\omega^2)\mathrm{ch}\dfrac{l}{a}p}\mathrm{sh}\frac{x}{a}p .$$

像函数比较复杂, 利用反演公式 (4.2.2) 和留数定理

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}\bar{u}(p,x)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p = \sum \mathrm{Res}[\bar{u}(p,x)\mathrm{e}^{pt}] ,$$

这里, $\sum$ 是对 $\bar{u}(p,x)\mathrm{e}^{pt}$ 的所有孤立奇点的留数求和. 由于 $\bar{u}(p,x)$ 在 p 平面上有可去奇点 $p=0$, 一级极点 $p=\pm\mathrm{i}\omega$ 和 $p=\pm\mathrm{i}\omega_k$, 其中, $\omega_k=\dfrac{(2k-1)\pi a}{2l}(k=1,2,3,\cdots)$, 故

$$\begin{aligned}u_0(t,x)&=\Big(\operatorname*{Res}_{p=\mathrm{i}\omega}+\operatorname*{Res}_{p=-\mathrm{i}\omega}\Big)\big[\bar{u}(p,x)\mathrm{e}^{pt}\big]=2\mathrm{Re}\Big\{\operatorname*{Res}_{p=\mathrm{i}\omega}\big[\bar{u}(p,x)\mathrm{e}^{pt}\big]\Big\}\\&=2\mathrm{Re}\left[\frac{Aa\omega\mathrm{sh}\Big(\dfrac{x}{a}p\Big)\mathrm{e}^{pt}}{p(p+\mathrm{i}\omega)\mathrm{ch}\Big(\dfrac{l}{a}p\Big)}\right]_{p=\mathrm{i}\omega}=\frac{Aa}{\omega\cos\dfrac{\omega l}{a}}\sin\frac{\omega x}{a}\sin\omega t\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v(t,x)&=\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\operatorname*{Res}_{p=\mathrm{i}\omega_k}+\operatorname*{Res}_{p=-\mathrm{i}\omega_k}\Big)\big[\bar{u}(p,x)\mathrm{e}^{pt}\big]\\&=\sum_{k=1}^{+\infty}2\mathrm{Re}\Big\{\operatorname*{Res}_{p=\mathrm{i}\omega_k}\big[\bar{u}(p,x)\mathrm{e}^{pt}\big]\Big\}\\&=2\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{Re}\left[\frac{Aa\omega\mathrm{sh}\left(\dfrac{x}{a}p\right)\mathrm{e}^{pt}}{p(p^2+\omega^2)\dfrac{l}{a}\mathrm{sh}\left(\dfrac{l}{a}p\right)}\right]_{p=\mathrm{i}\omega_k}\\&=16Aa\omega l^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\sin\dfrac{\omega_k}{a}x\sin\omega_k t}{(2k-1)\pi[4l^2\omega^2-(2k-1)^2\pi^2a^2]}\ ,\end{aligned}$$

最后得到三角级数形式的解 $u(t,x)=u_0(t,x)+v(t,x)$.

这里的 $u_0(t,x)$ 相应于用分离变量法求解时将边界条件齐次化的特解. 在用 Laplace 变换求解时, 对于非齐次边界条件不需作特殊处理, 这是它的优点, 当然随之而来的是求反变换的麻烦.

对于发展方程的初值问题原则上也可用 Laplace 变换, 在实际问题中经常将 Fourier 变换与 Laplace 变换联合使用, 我们将在习题中加以练习.

*4.3 一般积分变换简介

在本节中我们首先比较分离变量法和积分变换法, 从 Fourier 展开来认识积分变换. 然后直接从积分变换的一般原理来寻找适用于某类定解问题的积分变换. 最后将罗列一些在数学物理中有用的其他积分变换.

本节是前两节的延伸和提高, 仅供有兴趣读者参考.

4.3.1　分离变量法和积分变换法

我们用分离变量法重新求解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0,\ -\infty < x < +\infty\ , \\ u|_{t=0} = \varphi(x)\ . \end{cases} \tag{4.1.11}$$

设 $u = T(t)X(x)$, 分离得固有值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad -\infty < x < +\infty\ , \\ X(\pm\infty) \text{ 有界} \end{cases}$$

和常微分方程

$$T'(t) + \lambda a^2 T = 0\ .$$

当且仅当 $\lambda = \omega^2 \geqslant 0$ 时, 固有值问题才有非零解. 取其复形式, 固有函数

$$X(x, \omega) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}, \quad -\infty < \omega < +\infty\ ,$$

相应的

$$T(t, \omega) = \mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t}\ .$$

与有限区间上的分离变量法不同的是, 无限区间上的固有值连续分布, 对连续参数 ω 积分叠加得满足式 (4.1.11) 中方程的解

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \mathrm{e}^{-a^2\omega^2 t + \mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}\omega\ . \tag{4.3.1}$$

代入初始条件

$$u(0, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}\omega = \varphi(x)\ ,$$

说明 $\varphi(x)$ 是 $A(\omega)$ 的 Fourier 反变换, 故

$$A(\omega) = F[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\xi} \mathrm{d}\xi\ .$$

代入上式得, 未知函数的 Fourier 积分

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\xi} \mathrm{d}\xi \Big] \mathrm{e}^{-\omega^2 a^2 t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}\omega,$$

交换积分次序

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \Big[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\omega^2 a^2 t} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-\xi)} \mathrm{d}\omega \Big] \mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \exp\Big[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} \Big] \mathrm{d}\xi.$$

这就是用 Fourier 变换得到的解 (4.1.12) 式.

可见分离变量法同样可用于求解无限区间上的问题, 但是固有值连续取值,$u(t,x)$ 的 Fourier 展开以积分形式出现. 在展开式 (4.3.1) 中, 将未知函数 $u(t,x)$ 的 Fourier 展开系数 $A(\omega)\mathrm{e}^{-\omega^2 a^2 t}$ 看作未知函数 $u(t,x)$ 的 Fourier 变换 $\widehat{u}(t,\omega)$, 则 $u(t,x)$ 的 Fourier 展开式即是 $\widehat{u}(t,\omega)$ 的 Fourier 反变换. 因此, 分离变量法与积分变换法都源于 Fourier 分析, 前者着眼于 Fourier 展开, 通过分离变量找出固有函数系, 再求出未知函数在此正交基上的分解系数, 最后叠加得到解的级数 (积分) 表达式; 后者则将此分解、重组过程视作函数的正变换和反变换, 在已知积分核前提下, 径直寻求解的像函数, 再通过反变换求出解.

4.3.2 一般积分变换原理和其他积分变换

一般地, 定义在 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 的含参量积分

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_a^b f(x) K(x;\lambda) \mathrm{d}x \tag{4.3.2}$$

称为 $f(x)$ 的**以** $K(x;\lambda)$ **为积分核的积分变换**. 在 Fourier 变换和 Laplace 变换中, 积分核分别为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}$ 和 e^{-pt}. 积分核 $K(x;\lambda)$ 如何选取, 取决于有待解决的问题和反变换的存在.

以求解下面的泛定方程的混合问题为例说明, 我们着重于说明想法和做法, 并不给出函数空间的严格规定.

现有混合问题

$$\begin{cases} L_t u(t,x) + L_x u(t,x) = f(t,x), & -\infty \leqslant a < x < b \leqslant +\infty, \\ & 0 < t < +\infty, \\ u \text{ 在 } x = a, b \text{ 端的边界条件}, \\ u \text{ 在 } t = 0 \text{ 的初始条件}, \end{cases} \tag{4.3.3a}$$

其中, 微分算子

$$L_t = a_0(t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} + a_1(t)\frac{\partial}{\partial t} + a_2(t)\ , \tag{4.3.3b}$$

$$L_x = b_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b_1(x)\frac{\partial}{\partial x} + b_2(x)\ . \tag{4.3.3c}$$

对 (4.3.3) 式中方程作积分变换 (4.3.2) 式, 积分核 $K(x;\lambda)$ 待定. 记

$$\widehat{u}(t,\lambda) = \int_a^b u(t,x) K(x;\lambda) \mathrm{d}x\ ,$$

$$\widehat{f}(t,\lambda)=\int_a^b f(t,x)K(x;\lambda)\mathrm{d}x\ .$$

易见, L_tu 的积分变换

$$\int_a^b (L_tu)K(x;\lambda)\mathrm{d}x=L_t\int_a^b u(t,x)K(x;\lambda)\mathrm{d}x=L_t\widehat{u}\ ,$$

利用分部积分公式, L_xu 的积分变换

$$\begin{aligned}\int_a^b (L_xu)K(x;\lambda)\mathrm{d}x&=\int_a^b\Big[b_0(x)\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+b_1(x)\frac{\partial u}{\partial x}+b_2(x)u\Big]K(x;\lambda)\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\Big[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(b_0(x)K)-\frac{\partial}{\partial x}(b_1(x)K)+b_2(x)K\Big]u\mathrm{d}x\\&\quad+\Big[b_0(x)K\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}(b_0(x)K)u+b_1(x)Ku\Big]\Big|_a^b\ .\end{aligned}$$

记微分算子

$$L_x^*v=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(b_0(x)v)-\frac{\partial}{\partial x}(b_1(x)v)+b_2(x)v\ ,\tag{4.3.4}$$

称为微分算子 L_x(4.3.3c) 式的**共轭微分算子**, 则

$$\int_a^b (L_xu)K(x;\lambda)\mathrm{d}x=\int_a^b u(L_x^*K)\mathrm{d}x+r(t,\lambda)\ ,$$

其中

$$r(t,\lambda)=\Big[b_0(x)K\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}(b_0(x)K)u+b_1(x)Ku\Big]\Big|_a^b$$

由 u 与 K 的边界条件确定. 如果选取积分核 $K(x;\lambda)$ 满足方程

$$L_x^*K(x;\lambda)=g(\lambda)K(x;\lambda)\ ,\tag{4.3.5}$$

$K(x;\lambda)$ 在 $x=a,b$ 的边界条件要保证 $r(t,\lambda)$ 能计算出, 这样

$$\begin{aligned}\int_a^b (L_xu)K(x;\lambda)\mathrm{d}x&=\int_a^b g(\lambda)Ku\mathrm{d}x+r(t,\lambda)\\&=g(\lambda)\widehat{u}(t,\lambda)+r(t,\lambda)\ .\end{aligned}$$

$u(t,x)$ 关于 x 的微分经过这样的积分变换后不再出现, u 的偏微分方程 (4.3.3a) 变成了像函数的常微分方程

$$L_t\widehat{u}+g(\lambda)\widehat{u}=\widehat{f}(t,\lambda)-r(t,\lambda)\ .\tag{4.3.6}$$

配以由 $u(t,x)$ 关于 t 的初始条件得到的 $\widehat{u}(t,\lambda)$ 关于 t 的初始条件, 可解出像函数 $\widehat{u}(t,\lambda)$.

问题是反变换是否存在, 反变换的公式是什么? 由 4.3.1 节知, 如果对方程 (4.3.5) 的相应边值问题有非零解的 λ(固有值) 的集合 $\sigma_p(L_x)$, 积分核 $K(x;\lambda)$ 有某种**完备性**, 即存在某一非负函数 $c(\lambda)$, $\forall F(x)$, 成立帕塞瓦尔 (Parseval) 等式

$$\int_a^b \big|F(x)\big|^2\mathrm{d}x = \int\limits_{\sigma_p(L_x)} c(\lambda)\big|\widehat{F}(\lambda)\big|^2\mathrm{d}\lambda \ ,$$

其中, $\widehat{F}(\lambda) = \displaystyle\int_a^b F(x)K(x;\lambda)\mathrm{d}x$. 这说明经过这种积分变换后能量没有损失, 反变换存在.

例如, 在式 (4.3.3a) 中取 $L_x = \dfrac{1}{\rho(x)}L_1$,

$$L_1u = -\frac{\partial}{\partial x}\Big(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + q(x)u \ , \tag{4.3.7}$$

由式 (4.3.4) 容易验证 $L_1^* = L_1$, 称这样的微分算子 L_1 为**自共轭微分算子**. 设积分变换的积分核

$$K(x;\lambda) = \rho(x)K_1(x;\lambda) \ ,$$

则 L_xu 的积分变换

$$\begin{aligned}\int_a^b (L_xu)K(x;\lambda)\mathrm{d}x &= \int_a^b (L_1u)K_1(x;\lambda)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b u(L_1K_1)\mathrm{d}x + r(t,\lambda) \ ,\end{aligned}$$

$$r(t,\lambda) = -k(x)\Big[K_1\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial K_1}{\partial x}\Big]\Big|_a^b \ . \tag{4.3.8}$$

取 $K_1(x;\lambda)$ 满足

$$\begin{cases} L_1K_1(x;\lambda) = \lambda\rho(x)K_1(x;\lambda) \ , \\ K_1(x;\lambda) \text{ 在 } x=a,b \text{ 端的边界条件} \ , \end{cases} \tag{4.3.9}$$

当 a 或 b 是方程的常点, $u(t,x)$ 在 $x=a$ 或 b 端取第 I、II、III 类边界条件时, 令 $K_1(x;\lambda)$ 在 $x=a$ 或 b 端取相应的齐次边界条件; 当 a 或 b 是方程的正则奇点, $u(t,x)$ 和 $u_x(t,x)$ 在 $x=a$ 或 b 端有界时, 令 $K_1(x;\lambda)|_{x=a}$ 或 $K_1(x;\lambda)|_{x=b}$ 有界; 如果 $b=+\infty$, 当 u 满足一定条件时, 通常对 $K_1(x;\lambda)$ 添加有界或趋于 0 的条件. 如此给出的 $K_1(x;\lambda)$ 的边界条件保证式 (4.3.8) 中的 $r(t,\lambda)$ 能够确定. 取积分核为 $K(x;\lambda) = \rho(x)K_1(x,\lambda)$ 时, 有微分公式

$$\int_a^b (L_xu)K(x;\lambda)\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b uK(x;\lambda)\mathrm{d}x + r(t,\lambda)$$

$$= \lambda\widehat{u} + r(t,\lambda).$$

$K_1(x;\lambda)$ 的边值问题 (4.3.9) 式就是用分离变量法求解定解问题 (4.3.3)、(4.3.7) 式时得到的 S–L 型方程的固有值问题. 在 $\rho(x)$, $k(x)$ 与 $q(x)$ 满足一定的连续性、非负性条件下, S–L 定理保证了 $\{K_1(x;\lambda)\}$ 在 $L^2_{\rho(x)}[a,b]$ 的正交完备性, 函数关于 $\{K_1(x;\lambda)\}$ 的广义 Fourier 展开式即为反变换公式.

例 4.3.1 上半空间轴对称调和方程的边值问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad r>0, z>0\ , \\ u(r,0) = \varphi(r)\ , \quad u(r,\infty) = 0\ , \\ u(0,z)\text{有界}\ , \quad u(\infty,z) = 0\ . \end{cases} \tag{4.3.10}$$

解 以 r 为积分变量作积分变换, 记

$$\widehat{u}(\lambda,z) = \int_0^{+\infty} u(r,z)K_1(r;\lambda)\rho(r)\mathrm{d}r, \quad \rho(r) = r\ .$$

根据式 (4.3.9), $K_1(r;\lambda)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r\dfrac{\mathrm{d}K_1}{\mathrm{d}r}\Big) = -\lambda r K_1, \\ K_1|_{r=0}\text{有界}\ , \quad K_1|_{r\to+\infty} = 0\ , \end{cases}$$

解得 $\lambda = \xi^2 \geqslant 0$, 相应的

$$K_1(r;\xi) = J_0(\xi r)\ .$$

积分变换

$$\widehat{f}(\xi) = \int_0^{+\infty} f(r)J_0(\xi r)r\mathrm{d}r \tag{4.3.11}$$

称为**零阶 Hankel 变换**. 它有反变换公式

$$f(r) = \int_0^{+\infty} \widehat{f}(\xi)J_0(\xi r)\xi\mathrm{d}\xi\ . \tag{4.3.12}$$

现对边值问题 (4.3.10) 式作零阶 Hankel 变换, 得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\widehat{u}}{\mathrm{d}z^2} - \xi^2\widehat{u} = 0, \quad \xi>0\ , \\ \widehat{u}|_{z=0} = \widehat{\varphi}(\xi)\ , \quad \widehat{u}|_{z\to+\infty} = 0\ , \end{cases}$$

这里, 用到了边界值

$$r\Big[K_1\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial K_1}{\partial r}\Big]\Big|_0^{+\infty} = 0\ .$$

解出像函数

$$\widehat{u}(\xi,z)=\widehat{\varphi}(\xi)\mathrm{e}^{-\xi z}\ ,\quad \xi>0\ ,$$

由反变换公式 (4.3.12) 得

$$u(r,z)=\int_0^{+\infty}\widehat{\varphi}(\xi)\mathrm{e}^{-\xi z}J_0(\xi r)\xi\mathrm{d}\xi\ .$$

例 4.3.2 再解杂质扩散问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad t>0,x>0\ ,\\ \left(h_1u-\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=0}=h_1u_0\ ,\quad h_1=\dfrac{h}{k}\ ,\\ u|_{t=0}=0\ .\end{cases}\tag{4.1.18}$$

解 这是例 4.1.3 的一般情形, 求解要困难得多. 以 x 为积分变量, 作积分变换

$$\widehat{u}(t,\lambda)=\int_0^{+\infty}u(t,x)K(x;\lambda)\mathrm{d}x\ ,\tag{4.3.13}$$

积分核 $K(x;\lambda)$ 待定. 由前述积分变换的一般原理, $K(x;\lambda)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2K}{\mathrm{d}x^2}=-\lambda^2K,\quad 0<x<+\infty\ ,\\ \left(h_1K-\dfrac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}x}\right)\Big|_{x=0}=0\ ,\quad K\big|_{x\to+\infty}\text{有界}\ .\end{cases}$$

解此固有值问题, 可得 $\lambda>0$, 相应的

$$K(x;\lambda)=\frac{\lambda\cos\lambda x+h_1\sin\lambda x}{\sqrt{\lambda^2+h_1^2}}\ ,\tag{4.3.14}$$

这里, 我们将解中常数取为 $(\lambda^2+h_1^2)^{-\frac{1}{2}}$, 以使正反变换较为对称. 以此积分核作的积分变换

$$\widehat{f}(\lambda)=\int_0^{+\infty}f(x)K(x;\lambda)\mathrm{d}x\ ,$$

有反变换公式

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\widehat{f}(\lambda)K(x;\lambda)\mathrm{d}\lambda\ .\tag{4.3.15}$$

对混合问题 (4.1.18) 式作此积分变换, 方程变换为

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{u}}{\mathrm{d}t}=-a^2\lambda^2\widehat{u}+a^2\Big(K\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial K}{\partial x}\Big)\Big|_0^{+\infty}$$

$$= -a^2\lambda^2\widehat{u} - a^2K\Big(\frac{\partial u}{\partial x} - h_1u\Big)\Big|_{x=0}$$
$$= -a^2\lambda^2\widehat{u} + \frac{a^2\lambda h_1u_0}{\sqrt{\lambda^2+h_1^2}} ,$$

这里, 用到了自然边界条件 $u\big|_{x\to+\infty} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\big|_{x\to+\infty} = 0$, 从问题的物理背景看, 这是合理的. 初始条件变换为

$$\widehat{u}\big|_{t=0} = 0 .$$

解此常微分方程的初值问题, 得像函数

$$\widehat{u}(t,\lambda) = \frac{h_1u_0}{\lambda\sqrt{\lambda^2+h_1^2}}(1-\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2t}) .$$

作反变换 (4.3.15) 式

$$u(t,x) = \frac{2h_1u_0}{\pi}\int_0^{+\infty}(1-\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2t})\frac{\lambda\cos\lambda x + h_1\sin\lambda x}{\lambda(\lambda^2+h_1^2)}\mathrm{d}\lambda,$$

利用

$$F^{-1}\Big[\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2t}\Big] = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\Big(-\frac{x^2}{4a^2t}\Big) , \quad F^{-1}\Big[\frac{1}{\lambda^2+h_1^2}\Big] = \frac{1}{2h_1}\mathrm{e}^{-h_1|x|}$$

及 Fourier 变换的微分公式和卷积公式, 可算出

$$u(t,x) = u_0\Big[\mathrm{erfc}\Big(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\Big) - \mathrm{e}^{h_1(x+a^2h_1t)}\mathrm{erfc}\Big(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ah_1\sqrt{t}\Big)\Big] .$$

与例 4.1.3 的结果相比, 多出了第二项. 当 $ah_1\sqrt{t} = \dfrac{ah}{k}\sqrt{t}$ 很大时, 该项很小, 即退化为 (4.1.20) 式的解.

在数学物理和工程技术中用得最多的是 Fourier 变换 FT (包括 Fourier 正弦、余弦变换 $\mathrm{F_sT}$ 和 $\mathrm{F_cT}$) 和 Laplace 变换 LT, 此外比较重要的还有如下变换:

ν阶 Hankel 变换 $\mathbf{H_\nu T}$

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^{+\infty} xJ_\nu(\lambda x)f(x)\mathrm{d}x = H_\nu[f(x)], \quad \lambda\geqslant 0 ,$$

反变换公式为

$$f(x) = \int_0^{+\infty}\lambda J_\nu(\lambda x)\hat{f}(\lambda)\mathrm{d}\lambda = H_\nu^{-1}[\hat{f}(\lambda)] ;$$

梅林(Mellin) **变换 MT**

$$\hat{f}(s) = \int_0^{+\infty} f(x)x^{s-1}\mathrm{d}x = M[f(x)],$$

反变换公式为

$$f(x)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}\hat{f}(s)x^{-s}\mathrm{d}s=M^{-1}[\hat{f}(s)];$$

有限区间上的积分变换如下：

有限 Fourier 变换

$$a_n=\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\ ,\quad b_n=\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\ ,\quad n=0,1,\cdots\ ,$$

反变换公式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2l}+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)\ ;$$

有限 Fourier 正弦变换

$$b_n=\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\ ,\quad n=1,2,\cdots\ ,$$

反变换公式为

$$f(x)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\ ;$$

有限 Fourier 余弦变换

$$a_n=\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\ ,\quad n=0,1,2,\cdots\ ,$$

反变换公式

$$f(x)=\frac{a_0}{l}+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x\ ;$$

有限 Hankel 变换

$$a_n=\int_{0}^{a}xf(x)J_\nu(\omega_n x)\mathrm{d}x\ ,\quad n=1,2,\cdots\ ,$$

其中, ω_n 是 $J_\nu(\omega a)$ 的第 n 个正零点, 反变换公式为

$$f(x)=\frac{2}{a^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{J_{\nu+1}^2(\omega_n a)}J_\nu(\omega_n x)\ .$$

有限积分变换可用来求解有限区间上的混合问题和边值问题, 实际上就是分离变量法, 但齐次、非齐次边界条件同样处理, 这是它的优点. 需注意的是, 其微分公式需用分部积分和边界条件推出.

遗憾的是这些积分变换只能应用于线性微分方程的求解. 对于非线性偏微分方程, 20 世纪后半叶发展起来的反散射方法, 从某种意义上说, 可以看成 Fourier 变换的推广.

用 Fourier 方法求解线性偏微分方程, 起关键作用的是线性固有值问题. 物理学中的定态 Schrödinger 方程

$$\varphi_{xx} + u(x)\varphi = \lambda\varphi\ , \quad \lambda = -k^2\ , \quad -\infty < x < +\infty$$

是一个带有势函数 $u(x)$ 的固有值问题, 这里, $u(x)$ 是一个当 $|x| \to \infty$ 时很快趋于 0 的函数. 这个固有值问题的解依赖于位势 $u(x)$, 已知 $u(x)$ 则可确定固有值 $\{ik_j, j = 1, 2, \cdots, N\}$ 和其他数据, 统称为散射数据, 用集合 $S(\lambda)$ 记之. 反过来, 已知 $S(\lambda)$, 可用盖尔范德 (Gelfand), 列维坦 (Levitan), Marchenko 建立的积分方程 (GLM) 定出势函数 $u(x)$, 这就是反散射方法.

20 世纪 70 年代以后, 发现数学物理中一些重要的非线性方程与这类带势函数的线性固有值问题相联系. 如前述 KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

可作为上述 Schrödinger 方程和另一个线性偏微分方程

$$\varphi_t = (u_x + \nu)\varphi + (4k^2 - 2u)\varphi_x, \quad \nu\text{为常数}$$

的相容性条件

$$\varphi_{xxt} = \varphi_{txx}$$

出现. 这样, 就可将 KdV 方程的初值问题通过正散射和反散射来解决. 先由初始条件 $u(0, x)$ 求出初始时刻的散射数据 $S(0, \lambda)$, 再通过散射数据的演化求出 $u(t, x)$ 对应的散射数据 $S(t, \lambda)$, 最后由 GLM 方程构造出任意 t 时刻的位势, 亦即 KdV 方程初值问题的解 $u(t, x)$. 幸运的是, 散射数据 $S(t, \lambda)$ 的演化满足的是关于 t 的线性常微分方程, 使整个解法可行.

以上解法通过正散射把非线性偏微分方程变换成散射数据的线性常微分方程, 求得线性常微分方程初值问题的解后, 再通过反散射求出原非线性偏微分方程的精确解. 其步骤类似积分变换法, 所以反散射方法也称为“非线性 Fourier 分析”. 利用反散射方法, 不仅可求出我们在行波解 (1.4 节) 中求得的 KdV 的单孤子解, 还可以求得多孤子解. 但是具体求解时并非容易, 特别是求解 GLM 方程.

非线性方程要比线性方程复杂得多, 并非任意非线性方程都可用反散射方法求解. 什么样的非线性方程可用反散射方法求解, 混合问题是否可用反散射方法求解, 反散射方法中的具体困难如何解决等, 都是需要继续探索的问题.

作为 Fourier 变换的发展和改进的小波变换从 20 世纪八九十年代以来蓬勃发展, 现在已成为一种新的数学理论和分析方法, 在应用数学、信号处理、图像处理、物理学、地球科学等诸多领域被广泛应用. 将小波变换用于求解数学物理方程, 是近些年来正在兴起的一个研究方向, 已有一些有应用前途的成果, 可参见有关专著.

习 题 4

1. 用 Fourier 变换解下列定解问题:

(1) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+a\dfrac{\partial u}{\partial x}=f(t,x), \quad t>0,\ -\infty<x<+\infty, \\ u|_{t=0}=\varphi(x). \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(t,x), \quad t>0,\ -\infty<x<+\infty, \\ u(0,x)=0, \quad u_t(0,x)=0. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \Delta_2 u=0, \quad -\infty<x<+\infty,\ y>0, \\ u(x,0)=f(x), \quad u(x,y)\ \text{有界}. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u, \quad t>0,\ -\infty<x<+\infty, \\ u(0,x)=0, \quad u_t(0,x)=x. \end{cases}$

*(5) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a^2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0, \quad t>0,\ -\infty<x<+\infty, \\ u(0,x)=\varphi(x), \quad u_t(0,x)=0. \end{cases}$

2. 用 Laplace 变换解下列定解问题:

(1) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1, \quad x>0,\ y>0, \\ u(0,y)=y+1, \quad u(x,0)=1. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t>0,\ x>0, \\ u(0,x)=0, \quad u_t(0,x)=b, \\ u(t,0)=0. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t>0,\ 0<x<l, \\ u_x(t,0)=0, \quad u(t,l)=u_0, \\ u(0,x)=u_1, \quad u_0,\ u_1\text{为常数}. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\cos\omega t, \quad t>0,\ x>0, \\ u(t,0)=0, \\ u(0,x)=0, \quad u_t(0,x)=0. \end{cases}$

3. 用正弦变换或余弦变换解下列定解问题:

(1) $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & t>0,\ x>0, \\ u(t,0)=\varphi(t), \\ u(0,x)=0. \end{cases}$

[提示: 用正弦变换.]

(2) $\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta_3 u, \quad t>0, r>0, \\ u|_{r=0}\text{有界}, \quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ u|_{t=0}=0, \quad u_t|_{t=0}=(1+r^2)^{-2}. \end{cases}$

[提示: 采用球坐标, 令 $v=ru$.]

(3) $\begin{cases} \Delta_2 u = 0, \quad x>0,\ y>0, \\ u|_{y=0}=f(x), \quad u_x|_{x=0}=0, \quad u(x,y)\text{ 有界}. \end{cases}$

[提示: 用余弦变换.]

第 5 章　基本解方法

一个偏微分方程通常反映了某个物理场和引起这个场的场源之间的关系. 最简单的场源是点源, 连续分布的场源则可看成点源的叠加. 对于线性偏微分方程, 如果知道点源产生的场 (称为基本解或点源函数), 便可通过线性叠加原理求出相应连续源产生的场, 这就是基本解方法. 由于点源的特殊性, 基本解有可能用较简单、特殊的方法求得. 因此, 基本解方法成为求解线性偏微分方程的重要方法之一.

在本章, 我们首先介绍点源的数学描述 —— δ 函数, 同时引入广义函数的概念, 再根据不同的定解问题引进不同的基本解定义, 建立相应的解的积分公式, 并讨论基本解的求法和给出一些重要的基本解. 由于 δ 函数不再是我们熟悉的普通函数, 基本解也不再是古典解, 我们将在最后一节简明且较系统地介绍广义函数的各种运算和变换, 使我们在前面所作的一切运算在数学上有个合理的说法.

5.1　δ 函数, 广义函数简介

δ 函数最初由狄拉克 (Dirac) 根据物理学的需要而引进, 为物理学家、工程师们卓有成效地使用, 在物理学中称为**Dirac δ 函数**, 在信号处理等领域称为**单位冲激函数**. 20 世纪 30 年代建立的广义函数理论, 使 δ 函数及有关问题有了坚实的数学基础.

5.1.1　δ 函数和广义函数

δ 函数起源于集中分布物理量的数学描述.

描述一个在空间连续分布的物理量 Q, 通常有两种方式. 一种是局部性的, 给出密度函数 (分布) $\rho(M)=\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}M}$, $M\in\mathbf{R}^n(n=1,2,3)$; 另一种是整体性的, 通过空间任意区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 该物理量的总量

$$Q(\Omega)=\int_{\Omega}\rho(M)\mathrm{d}M$$

给出. 对于集中分布的物理量, 也可通过这两种方式来表述. 我们先来讨论集中分布物理量的密度函数.

例 5.1.1 (点电荷的线密度)　直线 L 上仅在 $x=0$ 处置一单位电荷, 这可以看成是单位电荷均匀分布在小区间 $[-\varepsilon,\varepsilon]$ 上当 $\varepsilon\to 0$ 时的极限情况. 后者的密度

$$\rho_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x|\leqslant\varepsilon,\\ 0, & |x|>\varepsilon,\end{cases}$$

且对 $\forall\varepsilon>0$, 直线上的电荷总量

$$Q=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_\varepsilon(x)\mathrm{d}x=1\ .$$

令 $\varepsilon\to 0$, 可由 $\rho_\varepsilon(x)$ 的极限推得单位点电荷的分布

$$\rho(x)=\begin{cases}+\infty, & x=0,\\ 0, & x\neq 0,\end{cases}$$

且保持直线上的电荷总量为 1.

将集中于 $x=0$ 点的单位物理量引起的密度函数称为 **δ函数**, 记为 $\delta(x)$. 即 $\delta(x)$ 是满足条件

$$\delta(x)=\begin{cases}+\infty, & x=0,\\ 0, & x\neq 0\end{cases}\tag{5.1.1a}$$

和

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1\tag{5.1.1b}$$

的函数.

置于 $x=\xi$ 点的单位物理量引起的密度函数可用 $\delta(x)$ 的平移 $\delta(x-\xi)$ 表示

$$\delta(x-\xi)=\begin{cases}+\infty, & x=\xi,\\ 0, & x\neq\xi,\end{cases}\tag{5.1.2a}$$

且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi)\mathrm{d}x=1\ .\tag{5.1.2b}$$

例 5.1.2 (点热源产生的温度分布)　温度为 0 的均匀导热细杆, 线密度为 ρ, 比热为 c. 在某一瞬间给 $x=\xi$ 点热量 Q, 求这一瞬时杆上的温度分布.

加热的瞬时, 热量尚未传播出去, 在 $x\neq\xi$ 处, 瞬时温度保持为 $T(x)=0$. 而在加热点 ξ, 加热瞬间温度上升

$$T(\xi)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{Q}{c\rho\Delta x}=+\infty\ .$$

整根杆上使温度增加的热量是确定的,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}c\rho T(x)\mathrm{d}x=Q\ .$$

对比 δ 函数的定义 (5.1.2) 式, 加热瞬时杆上的温度分布

$$T(x)=\frac{Q}{c\rho}\delta(x-\xi)\ .$$

例 5.1.3 (冲量一定的瞬时力) 在 $t=\tau$ 瞬间, 有冲量一定的瞬时力作用在质量为 m 的静止小球上, 小球产生速度为 v 的匀速直线运动, 求小球所受的外力 $F(t)$.

显然, 当 $t\neq\tau$ 时, 小球所受外力 $F(t)=0$. 在 $t=\tau$ 瞬间, 小球得到动量

$$mv=\lim_{\Delta t\to+0}F(\tau)\Delta t,$$

因此, 在 $t=\tau$ 瞬时, 小球所受的外力 $F(\tau)$ 应为 $+\infty$. 又由动量守恒原理知, 在整个过程中

$$mv=\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)\mathrm{d}t\ .$$

所以, 小球所受的外力

$$F(t)=mv\delta(t-\tau)\ .$$

无论是关于空间还是关于时间集中分布的物理量都可用 δ 函数来描述. 关于时间集中分布的物理量在实际问题中常称为脉冲.

由公式 (5.1.1) 定义的 δ 函数虽然直观, 符合我们对函数的习惯认识, 但是这个 $\delta(x)$ 在 $x=0$ 处非常奇异, 又如何对其取极限、作微分、求积分? 这需要我们对 δ 函数有更深入的了解.

δ 函数有一条非常重要的基本性质, 应用上称为**筛选性**. 即对任意 $\varphi(x)\in C(\mathbf{R})$,

$$\int_a^b\delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\varphi(0), & 0\in[a,b],\\ 0, & 0\bar{\in}[a,b],\end{cases}\tag{5.1.3}$$

特别地

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(0)\ .\tag{5.1.4}$$

可以这样看，由于当 $x\neq0$ 时 $\delta(x)=0$, 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(0)\mathrm{d}x=\varphi(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=\varphi(0)\ .$$

式 (5.1.3) 可同样推出. $\delta(x-\xi)$ 的筛选性为

$$\int_a^b\delta(x-\xi)\varphi(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\varphi(\xi), & \xi\in[a,b],\\ 0, & \xi\bar{\in}[a,b],\end{cases}\tag{5.1.5}$$

特别地

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(\xi)\ .\tag{5.1.6}$$

式 (5.1.3) 就是集中分布物理量的另一种数学描述. 当 $\varphi(x)=1$ 时, 式 (5.1.3) 说明, 只要区间里包含 $x=0$ 点, 该区间内此物理量的总量为 1, 否则总量为 0. 对一般的 $\varphi(x)$, 式 (5.1.3) 是 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上以 $\delta(x)$ 为权函数的加权平均, 同样反映了 $\delta(x)$ 的集中分布性. 所以, 也可把式 (5.1.3) 或式 (5.1.4) 作为 $\delta(x)$ 的另一种定义.

选用式 (5.1.4) 作为 $\delta(x)$ 的定义, 使我们对 δ 函数有了一种全新的认识.δ 函数实际上是一个映射, 它把 $C(\mathbf{R})$ 中的元素 $\varphi(x)$ 映成了 $\mathbf{R}$ 中的一个数 $\varphi(0)$. 称函数空间到数域的线性映射为**函数空间上的一个线性泛函**, 则 δ 函数就是 $C(\mathbf{R})$ 上的一个特殊的线性泛函, 用内积或积分形式记 δ 函数对应的泛函值, 即 $\langle\delta(x),\varphi(x)\rangle=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(0)$. 如果一个只在有限区间上不为 0 的可积函数 $f(x)$, 则由 $\langle f(x),\varphi(x)\rangle=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ 也确定了一个 $C(\mathbf{R})$ 上的线性泛函. 所以, 从线性泛函的角度, $\delta(x)$ 和 $f(x)$ 并无二异. 称 $C(\mathbf{R})$ 上的线性泛函为**广义函数**, 线性泛函的全体构成一个广义函数空间, 记为 $C'(\mathbf{R})$, 称为基本函数空间 $C(\mathbf{R})$ 的对偶空间. 上述 $\delta(x)$, $f(x)$ 均为广义函数, 称 $\delta(x)$ 为奇异广义函数, 称 $f(x)$ 为正则广义函数.

基本函数空间可以是不同的, 定义在其上的线性泛函的全体构成的广义函数空间也就不同. 例如, 基本函数空间是 $C^\infty(\mathbf{R})$ 时, 与其对偶的广义函数空间就记为 $(C^\infty(\mathbf{R}))'$, 上述 $\delta(x)$, $f(x)$ 也都是此空间中的广义函数. 以后常常用 $\varphi(x)$, $\varphi_n(x)$, $\psi(x)$ 等表示基本函数空间中的函数, 而广义函数空间中的广义函数常常用 $f(x)$, $f_n(x)$, $g(x)$ 等表示.

总之, 从物理的角度 $\delta(x)$ 表示一种特殊的分布, 从数学的角度它表示一个基本函数空间上特殊的线性泛函. 在线性泛函的基础上建立起广义函数的理论, 使得在广义函数中可以通行无阻地进行各种代数和分析运算, 本节将作一些简单的介绍, 在最后一节将作更为系统严格的论述.

5.1.2 δ 函数和广义函数的性质和运算

一般要从泛函的角度去认识 δ 函数和广义函数的性质和运算.

1. 对称性

$$\delta(x-\xi)=\delta(\xi-x),\quad \text{特别地, } \delta(x)=\delta(-x)\ . \tag{5.1.7}$$

这是由于 $\forall\varphi(x)\in C(\mathbf{R})$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\xi-x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(u)\varphi(\xi-u)\mathrm{d}u=\varphi(\xi-u)\big|_{u=0}=\varphi(\xi),$$

与 $\delta(x-\xi)$ 对 $\varphi(x)$ 的筛选作用相同, 故作为泛函来说

$$\delta(x-\xi)=\delta(\xi-x)\ .$$

2. **δ 函数与连续函数的乘积**

对于连续函数 $a(x)$, 有

$$a(x)\delta(x-\xi)=a(\xi)\delta(x-\xi)\ . \tag{5.1.8}$$

这是因为 $\forall\varphi(x)\in C(\mathbf{R})$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}a(x)\delta(x-\xi)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi)\big[a(x)\varphi(x)\big]\mathrm{d}x=a(\xi)\varphi(\xi),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}a(\xi)\delta(x-\xi)\varphi(x)\mathrm{d}x=a(\xi)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-\xi)\varphi(x)\mathrm{d}x=a(\xi)\varphi(\xi)\ .$$

可见, 当 $a(\xi)=0$ 时, “不定式” $a(x)\delta(x-\xi)=0$. 例如, 我们有

$$x^n\delta(x)=0,\quad n=1,2,\cdots\ .$$

3. **δ 函数与普通函数的复合**

设 $u(x)\in C^1(\mathbf{R})$, 且在实轴上只有单零点 $x_k(k=1,2,\cdots,N)$, 则复合函数

$$\delta[u(x)]=\sum_{k=1}^{N}\frac{\delta(x-x_k)}{|u'(x_k)|}\ . \tag{5.1.9}$$

可以这样看, $\forall\varphi(x)\in C(\mathbf{R})$, 由于 $u(x_k)=0$ $(k=1,2,\cdots,N)$, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta[u(x)]\varphi(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{N}\int_{x_k-\varepsilon_k}^{x_k+\varepsilon_k}\delta\big[u(x)\big]\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

其中, ε_k 为小正数. 又由于 $u'(x_k)\neq0$ 及 $u'(x)$ 连续, 总可将相应的 ε_k 取得足够小, 使 $u'(x)$ 在积分区间 $[x_k-\varepsilon_k,x_k+\varepsilon_k]$ 上不变号. 不妨设 $u'(x_k)<0$, 则 $u(x)$ 在此区间上严格单调下降. 作变量代换 $u=u(x)$, 记 $u_1=u(x_k+\varepsilon_k),u_2=u(x_k-\varepsilon_k)$, 有 $u_1<0<u_2$, 所以

$$\begin{aligned}\int_{x_k-\varepsilon_k}^{x_k+\varepsilon_k}\delta\big[u(x)\big]\varphi(x)\mathrm{d}x\ &=-\int_{u_1}^{u_2}\delta(u)\varphi(x(u))x'(u)\mathrm{d}u\\&=\int_{u_1}^{u_2}\delta(u)\frac{\varphi(x(u))}{-u'(x)}\mathrm{d}u\\&=\frac{\varphi(x(u))}{|u'(x(u))|}\Big|_{u=0}=\frac{\varphi(x_k)}{|u'(x_k)|}\ .\end{aligned}$$

而 (5.1.9) 式右边的每一项对 $\varphi(x)$ 的作用也得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(x-x_k)}{|u'(x_k)|}\varphi(x)\mathrm{d}x=\frac{\varphi(x_k)}{|u'(x_k)|}\ .$$

利用复合公式 (5.1.9), 可以得到很多有用的结果, 例如

$$\delta(ax)=\frac{\delta(x)}{|a|},$$
$$\delta(x^2-a^2)=\frac{\delta(x-a)}{2|a|}+\frac{\delta(x+a)}{2|a|}=\frac{\delta(x-a)}{2|x|}+\frac{\delta(x+a)}{2|x|},$$
$$\delta(\sin x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(x-k\pi),\quad |x|\delta(x^2)=\lim_{a\to 0}|x|\delta(x^2-a^2)=\delta(x),$$

等等.

4. **δ 函数和广义函数的导数**

为了使 δ 函数和一般的广义函数无穷次可导, 也为了扩大广义函数的范围, 就要使基本函数空间具有 $C^\infty(\mathbf{R})$ 的光滑性且还要有其他较强的性质, 为此引入 $C_0^\infty(\mathbf{R})$(或记为 $\mathscr{D}(\mathbf{R})$) 基本函数空间, 它包含的函数 $\varphi(x)$ 是无穷次连续可导而且在一个有界的闭区间外为零. 例如

$$\varphi(x)=b(x)\eta(x,a),\quad \eta(x,a)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-a^2}}, & |x|<a,\\ 0, & |x|\geqslant a,\end{cases}\qquad b(x)\in C^\infty(\mathbf{R})$$

是最典型的这类函数. 定义在 $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ 上线性泛函的全体构成一个广义函数空间 $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$, $\delta(x)$ 是其中一个奇异广义函数, 任何一个局部可积的函数 $f(x)$ 均为正则广义函数, 它们的泛函值分别为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(0)\quad 和\quad \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

如果 $f(x)$ 是 $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ 中的广义函数, 则 $f^{(n)}(x)$ 也是一个广义函数, 其定义为

$$\langle f^{(n)}(x),\varphi(x)\rangle\overset{d}{=}(-1)^n\langle f(x),\varphi^{(n)}(x)\rangle,\quad \forall\varphi(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}),$$

其中, 符号 d 表示用等式的右端来定义左端, 用积分的形式来表示即为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f^{(n)}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\overset{d}{=}(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi^{(n)}(x)\mathrm{d}x.\tag{5.1.10}$$

在形式上相当于进行分部积分, 把对广义函数的求导运算转移到基本函数上, 特别地

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi^{(n)}(x)\mathrm{d}x=(-1)^n\varphi^{(n)}(0).\tag{5.1.11}$$

这样, 任何一个广义函数均是无穷次可导的, 特别地任何一个连续函数 $f(x)$ 是无穷次可导的.

5. 广义函数的原函数和 $\boldsymbol{\delta}$ 函数的原函数

若 $g'(x)=f(x)$, 则称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 这时 $g(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数. 特别地, 不难直接证明 $H'(x)=\delta(x)$, 即 $H(x)$ 是 $\delta(x)$ 的一个原函数. 这个结果形式上也可从 $\delta(x)$ 变上限的积分得到, 即

$$\int_{-\infty}^{x}\delta(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & x<0\\ & \\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}=H(x).$$

根据原函数的概念, 要求 $\delta(x)$ 的原函数就是要求微分方程 $y'(x)=\delta(x)$ 的解, 方程的通解为 $H(x)+C$, 若取 $C=-\dfrac{1}{2}$, 可得 $\delta(x)$ 的另一个原函数 $\dfrac{1}{2}\mathrm{sgn}\,x$.

6. 广义函数的卷积、$\boldsymbol{\delta}$ 函数和广义函数的卷积

若 $f(x),g(x)$ 为两个广义函数, 则卷积 $h(x)=f(x)*g(x)$ 定义了一个广义函数 $h(x)$ 如下:

$$\langle h(x),\varphi(x)\rangle\overset{d}{=}\langle f(x),\langle g(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle,\tag{5.1.12}$$

即用累次泛函来定义. 广义函数的卷积仍形式地记为

$$f(x)*g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)g(x-\xi)\mathrm{d}\xi.$$

在这种形式下

$$\langle h(x),\varphi(x)\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)g(x-\xi)\mathrm{d}\xi,$$

若形式地交换积分的顺序并进行变数代换, 得

$$\langle h(x),\varphi(x)\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{+\infty}g(u)\varphi(\xi+u)\mathrm{d}u=\langle f(x),\langle g(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle.$$

特别地, 不难得到

$$\begin{aligned}&\delta(x)*f(x)=f(x),\\ &\delta'(x)*f(x)=\delta(x)*f'(x)=f'(x),\\ &\delta^{(n)}(x)*f(x)=\delta(x)*f^{(n)}(x)=f^{(n)}(x),\\ &L(f(x)*g(x))=(Lf)*g=f*Lg,\end{aligned}$$

其中, L 是常系数线性微分算子.

7. 广义函数和 $\boldsymbol{\delta}$ 函数的 Fourier 变换

为了自由地进行广义函数的 FT 和 $\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}$ 又需引入另一个基本函数空间 $\varphi(\mathbf{R})$, 它的函数 $\varphi(x)$ 是无穷次连续可导且是速降的, 即对于任意非负整数 m 和 n, 当 $|x|\to+\infty$ 时, $x^m\varphi^{(n)}(x)\to 0$. 这种函数最典型的一类是 $p(x)\mathrm{e}^{-ax^2}(a>0)$, 其

中, $p(x)$ 是 x 的多项式. 在 $\varphi(\mathbf{R})$ 上线性泛函的全体构成一个对偶的广义函数空间 $\varphi'(\mathbf{R})$, $\delta(x)$ 也是它的奇异广义函数、任意一个局部可积的函数 $f(x)$, 且当 $|x|\to\infty$ 时 $f(x)$ 的增长不超过一个多项式, 这时 $f(x)$ 是 $\varphi'(\mathbf{R})$ 的正则广义函数.

若 $f(x)\in\varphi'(\mathbf{R})$, 则 $F[f]$, $F^{-1}[f]$ 也是广义函数, 定义如下:

$$\langle F[f],\varphi\rangle \stackrel{d}{=} \langle f,F[\varphi]\rangle, \tag{5.1.13}$$

$$\langle F^{-1}[f],\varphi\rangle \stackrel{d}{=} \langle f,F^{-1}[\varphi]\rangle, \tag{5.1.14}$$

即把 FT 和 $\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}$ 转移到基本函数上. 广义函数的 FT 和 $\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}$ 仍记为

$$F[f]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x=\widehat{f}(\lambda),$$

$$F^{-1}[f]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda.$$

这样, FT 建立了 $\varphi'(R)$ 中广义函数之间一一对应的关系

$$f(x)\underset{\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}}{\overset{\mathrm{FT}}{\rightleftharpoons}}\widehat{f}(\lambda),$$

而且保持着 FT 的基本性质: 线性性质、微分性质、像函数的微分性质、平移性质、频移性质、相似性质、反射性质和卷积性质. 根据这些性质由某几个特殊的广义函数的 FT 就能得出许多广义函数的 FT. 特别地由于

$$F[\delta(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x=1,$$

可得

$$1\underset{\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}}{\overset{\mathrm{FT}}{\rightleftharpoons}}2\pi\delta(\lambda),$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\rightleftharpoons 2\pi\delta(\lambda-a),$$

$$\cos ax\rightleftharpoons\pi[\delta(\lambda+a)+\delta(\lambda-a)],$$

$$\sin ax\rightleftharpoons\mathrm{i}\pi[\delta(\lambda+a)-\delta(\lambda-a)],$$

$$x\rightleftharpoons 2\pi\mathrm{i}\delta'(\lambda).$$

如果用积分形式来表示, 可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x=2\pi\delta(\lambda), \tag{5.1.15}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\lambda x\mathrm{d}x=2\pi\delta(\lambda), \tag{5.1.16}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\delta'(\lambda).$$

8. δ 函数的 Fourier 展开

当 $x,\xi\in(-\pi,\pi)$ 时

$$\delta(x-\xi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\tag{5.1.17}$$

其中, Fourier 系数

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(x-\xi)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\cos n\xi,\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(x-\xi)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\sin n\xi\ .\end{aligned}\tag{5.1.18}$$

对于其他的正交基, δ 函数同样可以作广义 Fourier 展开.

9. 广义函数序列的收敛性和 δ 序列

设 $f_n(x)$ 为一个广义函数的序列, $f(x)$ 为一个广义函数, 若对于基本函数空间上的任意函数 $\varphi(x)$ 均有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

则称 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\overset{w}{=}f(x)$, 这种收敛称为弱收敛和弱极限. 特别地, 弱收敛于 δ 函数的序列称为 δ 序列, 典型的几个 δ 序列为

矩形脉冲序列 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\rho_\varepsilon(x)\overset{w}{=}\delta(x)$,

Cauchy 脉冲序列 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\dfrac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}\overset{w}{=}\delta(x)$,

Gauss 脉冲序列 $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}t}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t^2}}\overset{w}{=}\delta(x)$,

采样脉冲序列 $\lim\limits_{N\to+\infty}\dfrac{\sin Nx}{\pi x}\overset{w}{=}\delta(x)$.

直观地看, 这些函数列趋于 $\delta(x)$(图 5.1.1(a)$\sim$(d)), 而且其中每一个函数在实轴上的积分为 1. 严格的证明需从弱收敛定义出发.

利用 δ 序列可以验证 Fourier 反变换公式 (5.1.16), (5.1.15). 例如, 由采样脉冲序列可知

$$\begin{aligned}F^{-1}[1]&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda\\ &=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda=\lim_{N\to+\infty}\frac{\sin Nx}{\pi x}\overset{w}{=}\delta(x)\ .\end{aligned}$$

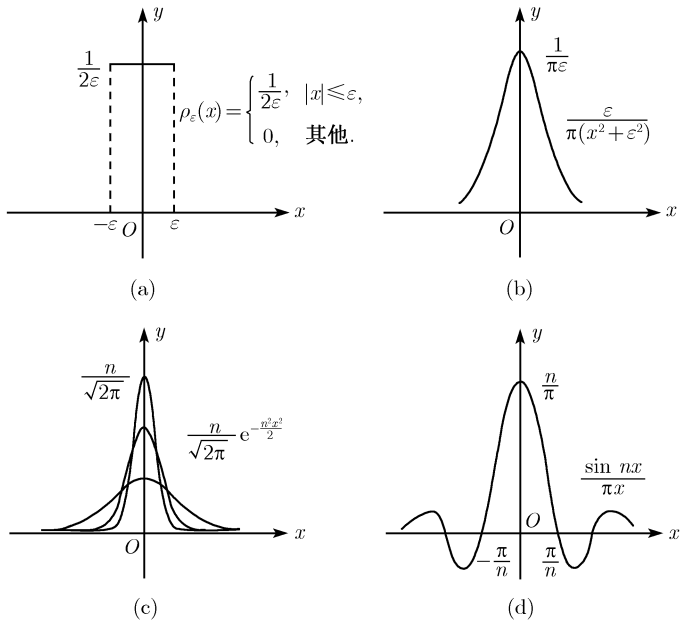


图 5.1.1

另外, 不难证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin nx \overset{w}{=} 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\cos nx \overset{w}{=} 0$. 前面所述的 $\delta(x)$ 的 Fourier 级数展开也是在弱收敛意义下的展开式, 有时弱收敛也用通常的记号表示.

5.1.3　高维 δ 函数和广义函数

类似一维的情况, 可讨论高维的 δ 函数和广义函数. 以三维说明, $\delta(M-M_0)$ 表示 $\mathbf{R}^3$ 中单位物理量集中在 M_0 点的密度函数, 其中, $M=(x,y,z)$, $M_0=(x_0,y_0,z_0)$, 它具有性质

$$\delta(M-M_0)=\begin{cases}0, & M\neq M_0,\\ +\infty, & M=M_0,\end{cases}$$

$$\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\delta(M-M_0)\mathrm{d}M=1.$$

从泛函的角度, 把 $\delta(M-M_0)$ 定义为在基本函数空间 $C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$ (即 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^3)$) 或速降空间 $\varphi(\mathbf{R}^3)$ 上的线性泛函, 它把基本空间上的任意函数 $\varphi(x,y,z)$ 对应到一个数 $\varphi(x_0,y_0,z_0)$, 记为

$$\langle\delta(M-M_0),\varphi(M)\rangle=\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\delta(M-M_0)\varphi(M)\mathrm{d}M=\varphi(M_0).$$

任意一个局部可积的函数 $f(x,y,z)$, 只要它和基本函数空间的任意函数 $\varphi(x,y,z)$ 的内积 $\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} f(M)\varphi(M)\mathrm{d}M$ 收敛, 就定义了一个基本函数空间上的线性泛函. 把定义在基本函数空间上的线性泛函称为广义函数, 上述 $\delta(M-M_0)$, $f(x,y,z)$ 均为广义函数, $\delta(M-M_0)$ 为奇异广义函数, $f(x,y,z)$ 为正则广义函数. 基本函数空间上线性泛函的全体构成一个对偶的广义函数空间 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^3)$ 或 $\varphi'(\mathbf{R}^3)$, 和一维的情况一样要从泛函的角度来讨论 δ 函数和广义函数的各种运算和变换, 列举最常用的几点.

1. 高维与低维 δ 函数的关系

$$\delta(x,y,z)=\delta(x)\delta(y)\delta(z)\ .$$

2. 变量代换

当 $x=x(\xi,\eta,\zeta),\ y=y(\xi,\eta,\zeta),\ z=z(\xi,\eta,\zeta)(|J|\neq 0)$ 时, 有

$$\delta(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=\frac{1}{|J|}\delta(\xi-\xi_0,\eta-\eta_0,\zeta-\zeta_0),$$

其中, $|J|$ 是 Jacobi 行列式的绝对值, (x_0,y_0,z_0) 与 (ξ_0,η_0,ζ_0) 相对应.

3. 广义函数的偏导数和 δ 函数的偏导数

设 $f(x,y,z)$ 是一个广义函数, 则 $\dfrac{\partial^m f}{\partial x^{m_1}\partial y^{m_2}\partial z^{m_3}}$ 也是一个广义函数, 定义如下:

$$\left\langle \frac{\partial^m f}{\partial x^{m_1}\partial y^{m_2}\partial z^{m_3}},\ \varphi(x,y,z)\right\rangle \overset{d}{=}(-1)^m\left\langle f,\frac{\partial^m\varphi}{\partial x^{m_1}\partial y^{m_2}\partial z^{m_3}}\right\rangle,$$

特别地

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{\partial^m\delta(x,y,z)}{\partial x^{m_1}\partial y^{m_2}\partial z^{m_3}}\varphi(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=(-1)^m\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\delta(x,y,z)\frac{\partial^m\varphi}{\partial x^{m_1}\partial y^{m_2}\partial z^{m_3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=(-1)^m\frac{\partial^m\varphi(0,0,0)}{\partial x^{m_1}\partial y^{m_2}\partial z^{m_3}}.\end{aligned}$$

不难证明

$$\Delta\frac{1}{r}=-4\pi\delta(x,y,z),$$

$$\frac{\partial^3 H(x,y,z)}{\partial x\partial y\partial z}=\delta(x,y,z),$$

其中, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ H(x,y,z)=H(x)H(y)H(z)$.

4. 广义函数和 δ 函数的 Fourier 变换

设 $f(x,y,z)$ 是 $\varphi'(\mathbf{R}^3)$ 中的广义函数, 则 $F[f]$, $F^{-1}[f]$ 仍为广义函数, 定义为

$$\langle F[f],\ \varphi\rangle \overset{d}{=} \langle f,\ F[\varphi]\rangle,$$
$$\langle F^{-1}[f],\ \varphi\rangle \overset{d}{=} \langle f,\ F^{-1}[\varphi]\rangle.$$

广义函数的 FT 和 $\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}$ 仍用下列的积分形式表示:

$$F[f] = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} f(x,y,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\lambda x+\mu y+\nu z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \widehat{f}(\lambda,\mu,\nu),$$
$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} f(\lambda,\mu,\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda x+\mu y+\nu z)}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu.$$

通过 FT 建立了 $\varphi'(\mathbf{R}^3)$ 中广义函数间一一对应的关系

$$f(x,y,z) \underset{\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}}{\overset{\mathrm{FT}}{\rightleftharpoons}} \widehat{f}(\lambda,\mu,\nu),$$

而且仍保持着 FT 的基本性质, 由此不难推得

$$\delta(x,y,z) \underset{\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}}{\overset{\mathrm{FT}}{\rightleftharpoons}} 1,$$

$$1 \rightleftharpoons (2\pi)^3\delta(\lambda,\mu,\nu),$$
$$x \rightleftharpoons (2\pi)^3\mathrm{i}\frac{\partial\delta(\lambda,\mu,\nu)}{\partial\lambda},$$
$$x^2+y^2+z^2 \rightleftharpoons -(2\pi)^3\Delta\delta(\lambda,\mu,\nu),$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} \rightleftharpoons (2\pi)^3\delta(\lambda-a,\mu,\nu).$$

5. 广义函数的卷积、$\boldsymbol{\delta}$ 函数和广义函数的卷积

设 f,g 为两个广义函数, 则 $h=f*g$ 仍确定一个广义函数, 其定义为

$$\langle h(x,y,z),\ \varphi(x,y,z)\rangle \overset{d}{=} \langle f(x,y,z),\ \langle g(\xi,\eta,\zeta),\ \varphi(x+\xi,y+\eta,z+\zeta)\rangle\rangle,$$

广义函数的卷积仍表示为积分形式

$$f*g = \iiint\limits_{\mathbf{R}^3} f(\xi,\eta,\zeta)g(x-\xi,y-\eta,z-\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta.$$

可以证明

$$\delta * f = f,$$
$$\frac{\partial \delta}{\partial x} * f = \delta * \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(f * g) = \frac{\partial f}{\partial x} * g = f * \frac{\partial g}{\partial x},$$
$$L(f * g) = (Lf) * g = f * (Lg),$$
$$f * g \underset{\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}}{\overset{\mathrm{FT}}{\rightleftharpoons}} \widehat{f} \cdot \widehat{g},$$

其中, L 是常系数线性微分算子. 类似地, 也可定义三维广义函数序列的极限和三维的 δ 序列.

5.2 $Lu=0$ 型方程的基本解

本节讨论用基本解方法求解方程

$$Lu = f(x,y,z), \quad -\infty < x,y,z < +\infty,$$

其中, L 是关于 x,y,z 的常系数线性偏微分算子. 现在可以把 u 和 f 均作为广义函数, 在广义函数空间中可以较自由地进行各种运算和变换来求得方程的解, 这种解是广义函数, 称之为广义解. 通常这种解是一个正则广义函数, 甚至还有足够的光滑性, 那么这种解就称为古典解. 当方程的右端为 $\delta(x,y,z)$ 时, 所得的解 $U(x,y,z)$ 称为方程的基本解, 其物理意义就是由点源而产生的物理场. 根据基本解可得出一般的右端函数所对应的解, 即一般的源所对应的物理场. 基本解不但数学上讨论较为容易, 而且有时可根据问题的物理意义求出.

5.2.1 基本解和解的积分表达式

以场位方程为例

$$\Delta_3 u = f(M), \quad M = (x,y.z) \in \mathbf{R}^3, \tag{5.2.1}$$

这里, $f(M) = -\dfrac{\rho(M)}{\varepsilon}$, $\rho(M)$ 为空间电荷分布, ε 为介电常数.

由 δ 函数与广义函数的卷积运算, 有

$$f(M) = \delta(M) * f(M) = \int_{\mathbf{R}^3} \delta(M - M_0) f(M_0) \mathrm{d}M_0 \ .$$

这说明一般源 $f(M)$ 可看成置于 M_0 点的点源 $f(M_0)\delta(M-M_0)$ 的积分叠加. 由积分叠加原理知, 只要求出方程

$$\Delta_3 V = \delta(M - M_0), \quad M = (x,y,z), M_0 = (\xi,\eta,\zeta) \in \mathbf{R}^3 \tag{5.2.2}$$

的解 $V(M;M_0)$, 便可得方程 (5.2.1) 的解

$$u(M)=\int_{\mathbf{R}^3}V(M;M_0)f(M_0)\mathrm{d}M_0\ .$$

由于在全空间求解, 不妨先求解方程

$$\Delta_3U=\delta(M),\quad M\in\mathbf{R}^3\ . \tag{5.2.3}$$

若式 (5.2.3) 的解为 $U(M)$, 则平移可得 (5.2.2) 式的解 $V(M;M_0)=U(M-M_0)$, 进而有式 (5.2.1) 的解的积分公式

$$u(M)=\int_{\mathbf{R}^3}U(M-M_0)f(M_0)\mathrm{d}M_0=U(M)*f(M)\ . \tag{5.2.4}$$

该公式反映了一般的源产生的场是点源产生场的叠加. 这里起基本作用的是置于原点的点源 $\delta(M)$ 产生的场 $U(M)$, 称它为基本解. 一般有如下定义.

定义 5.2.1 方程 $LU=\delta(M)$ 的解 $U(M)$ 称为 $Lu=0$ 型方程的**基本解**, 其中, L 是关于自变量 $M=(x,y,z)$ 的**常系数线性偏微分算子**.

由定义可见, 基本解是点源产生的场, 物理上也称为**点源函数**. 这里的基本解没有定解条件限制, 因此不是唯一的, 可以相差齐次方程 $Lu=0$ 的解, 通常根据问题的物理意义和数学的需要选定其中一个. 基本解满足的方程的右端是 $\delta(M)$, 因此基本解已经不是古典解, 而是一种**广义解**.

由基本解可得到非齐次方程 $Lu=f(M)$ 的**解的积分公式**.

定理 5.2.1 设 $U(M)$ 是 $Lu=0$ 型方程的基本解, 则

$$u=U(M)*f(M)=\int_{\mathbf{R}^3}U(M-M_0)f(M_0)\mathrm{d}M_0 \tag{5.2.5}$$

满足方程

$$Lu=f(M)\ .$$

证 由 $LU(M-M_0)=\delta(M-M_0)$,

$$\begin{aligned}Lu=L(U(M)*f(M))&=\int_{\mathbf{R}^3}LU(M-M_0)f(M_0)\mathrm{d}M_0\\&=\int_{\mathbf{R}^3}\delta(M-M_0)f(M_0)\mathrm{d}M_0=f(M)\ .\end{aligned}$$

这里, 我们毫无顾忌地交换了微分和积分的次序, 这在经典分析中是不允许的. 但是, 现在我们求的是广义解, 在广义函数理论中广义函数的微分与卷积可以交换次序, 形式上便是微分与积分可以任意交换次序. 今后我们将不加说明地继续这样做.

5.2.2 基本解的求法

从数学上求基本解, 即在全空间求解方程 $Lu=\delta(M)$. $\delta(M)$并非普通函数, 但由 5.1 节中介绍的有关运算和性质, 可以像对待普通函数一样求解这个方程. 另一方面由 δ 函数的泛函特性 (筛选性), 也可采用一些特殊方法求解.

例 5.2.1 求常微分方程 $y'+ay=0$ 的基本解, 这里, 常数 $a>0$.

解 求该方程的基本解, 即求方程

$$U'+aU=\delta(x)$$

的解. 将方程两边同乘以 e^{ax}, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{ax}U)=\mathrm{e}^{ax}\delta(x)=\delta(x),$$

由于 $H'(x)=\delta(x)$, 取基本解

$$U(x)=\mathrm{e}^{-ax}H(x)\ .$$

利用解的积分公式 (5.2.5), 可得非齐次方程

$$y'+ay=f(x)$$

的一个解

$$\begin{aligned} y(x)=U*f(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a\xi}H(\xi)f(x-\xi)\mathrm{d}\xi\\ &=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a\xi}f(x-\xi)\mathrm{d}\xi\\ &=\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-a(x-\xi)}f(\xi)\mathrm{d}\xi\ . \end{aligned}$$

例 5.2.2 求三维 Laplace 方程的基本解.

解 用三维 FT 求解

$$\Delta_3 U=\delta(x,y,z),\quad -\infty<x,y,z<+\infty\ .$$

记 $\widehat{U}(\lambda,\mu,\nu)=F[U(x,y,z)]$. 由于 $F[\delta(x,y,z)]=1$, 像函数满足代数方程

$$-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\widehat{U}=1\ .$$

解得

$$\widehat{U}=-\frac{1}{\rho^2},\quad \rho^2=\lambda^2+\mu^2+\nu^2,\quad (\lambda,\mu,\nu)\in\mathbf{R}^3\ .$$

作反变换, 得

$$U = F^{-1}[\widehat{U}] = -\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\rho^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda x+\mu y+\nu z)}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\rho^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\rho^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho r\cos\theta}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu,$$

这里, 向量 $\boldsymbol{\rho}=(\lambda,\mu,\nu), \boldsymbol{r}=(x,y,z), r^2=x^2+y^2+z^2, \theta$ 为$\boldsymbol{\rho}$与 $\boldsymbol{r}$ 的夹角. 由于积分区域是全空间, 被积函数关于向量 $\boldsymbol{r}$ 轴对称, 不妨将 ν 轴取在 $\boldsymbol{r}$ 方向, 作球坐标变换

$$\lambda = \rho\sin\theta\cos\varphi, \quad \mu = \rho\sin\theta\sin\varphi, \quad \nu = \rho\cos\theta,$$

得

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho r\cos\theta}\sin\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho r\cos\theta}}{\mathrm{i}\rho r}\Big|_0^{\pi}\mathrm{d}\rho \\ &= -\frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\rho r}{\rho}\mathrm{d}\rho = -\frac{1}{4\pi r}\ . \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

这个基本解就是置于原点的 $-\varepsilon$ 电荷在无穷远零电位的条件下在全空间产生的电场.

还可以利用 δ 函数的泛函性质 (筛选性) 来求基本解, 这需要用到场论里的格林 (Green) 公式.

定理 5.2.2 设区域 V 由分片光滑闭曲面 S 围成, $u(M)$, $v(M)$ 在区域 V 内有二阶连续偏导数, 在 $V\cup S$ 上有一阶连续偏导数, 则有

Green第一公式

$$\oiint\limits_S u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S = \iiint\limits_V u\Delta v\mathrm{d}V + \iiint\limits_V \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}V, \tag{5.2.7}$$

Green第二公式

$$\oiint\limits_S \Big(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\Big)\mathrm{d}S = \iiint\limits_V (u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}V\ . \tag{5.2.8}$$

证 Green 第一公式由 Gauss 公式

$$\oiint\limits_S u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S = \oiint\limits_S u\nabla v\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \iiint\limits_V \nabla(u\nabla v)\mathrm{d}V$$

推得. 在 (5.2.7) 式中交换 u 和 v 的位置, 两式相减就可以得到 Green 第二公式.

类似地, **有二维 Green 公式**

$$\oint_l u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}l=\iint_D u\Delta v\mathrm{d}A+\iint_D \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}A, \tag{5.2.9}$$

$$\oint_l \Big(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\Big)\mathrm{d}l=\iint_D \big(u\Delta v-v\Delta u\big)\mathrm{d}A\ . \tag{5.2.10}$$

其中, l 是平面有界区域 D 的边界, $\boldsymbol{n}$ 是边界的外法向.

推论 Helmholtz 算子 $L=\Delta\pm k^2$, 也有 Green 第二公式. 二维时为

$$\oint_l \Big(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\Big)\mathrm{d}l=\iint_D \big(uLv-vLu\big)\mathrm{d}A\ . \tag{5.2.11}$$

例 5.2.3 求二维 Helmholtz 方程 $\Delta_2 u+cu=0$ $(c=k^2>0)$ 的基本解.

解 基本解满足方程

$$LU=\Delta_2 U+k^2U=\delta(x,y)\ . \tag{5.2.12}$$

由方程的对称性, 设 $U=U(r)$, 在极坐标下方程可改写为

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\Big)+k^2U=0,\quad r>0,$$

即

$$r^2U''+rU'+k^2r^2U=0\ .$$

这是零阶 Bessel 方程, 其通解为

$$U(r)=AJ_0(kr)+BN_0(kr)\ .$$

由于 $J_0(kr)$ 在 $r=0$ 无奇性, 是齐次方程 $\Delta_2 u+k^2u=0$ 在全平面的解, 故可取 $A=0$. 而 $N_0(kr)$ 在 $r=0$ 有奇性, 有望通过 B 的选取成为基本解.

令 $U(r)=BN_0(kr)\sim B\dfrac{2}{\pi}\ln(kr)$, 取 $\varphi(x,y)\in C_0^{+\infty}(\mathbf{R}^2)$, 即在全平面上有任意阶连续偏导且在一个包含原点的有界区域 Ω 外恒为 0 的函数 (紧支函数). 则

$$\begin{aligned}\varphi(0,0)&=\iint_{\mathbf{R}^2}\delta(x,y)\varphi(x,y)\mathrm{d}A\\&=\iint_{\mathbf{R}^2}LU\varphi(x,y)\mathrm{d}A=\iint_{\mathbf{R}^2}UL\varphi(x,y)\mathrm{d}A,\end{aligned}$$

后一个等式来自广义函数求导的规定 (见 5.1 节)

$$\iint_{\mathbf{R}^2}\frac{\partial U}{\partial x}\varphi\mathrm{d}A=-\iint_{\mathbf{R}^2}U\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}A,\quad \iint_{\mathbf{R}^2}\frac{\partial U}{\partial y}\varphi\mathrm{d}A=-\iint_{\mathbf{R}^2}U\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}A\ .$$

由于 $U(r)$ 在 $r=0$ 有奇性, 以原点为中心, ε 为半径取小圆盘 D_ε. 又由 $\varphi(x,y)$ 的紧支性, 不妨取包含原点的有界区域 $D\supset\Omega$, 则

$$\begin{aligned}\varphi(0,0)&=\lim_{\varepsilon\to0}\iint\limits_{D-D_\varepsilon}UL\varphi\mathrm{d}A\\&=\lim_{\varepsilon\to0}\iint\limits_{D-D_\varepsilon}(UL\varphi-\varphi LU)\mathrm{d}A\ .\end{aligned}$$

由 Green 第二公式得

$$\begin{aligned}\varphi(0,0)&=\lim_{\varepsilon\to0}\Big[\oint_{\partial D}\Big(U\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial U}{\partial n}\Big)\mathrm{d}l-\oint_{\partial D_\varepsilon}\Big(U\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial U}{\partial n}\Big)\mathrm{d}l\Big]\\&=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\partial D_\varepsilon}\Big(\varphi\frac{\partial U}{\partial r}-U\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big)\mathrm{d}l\\&=\lim_{\varepsilon\to0}2\pi\varepsilon\Big(\varphi\frac{\partial U}{\partial r}-U\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big)\Big|_{(x^*,y^*)\in\partial D_\varepsilon}\quad\text{(积分中值定理)}\\&=\lim_{\varepsilon\to0}2\pi\varepsilon\Big[\varphi\big(x^*,y^*\big)B\frac{2}{\pi\varepsilon}-B\frac{2}{\pi}\ln\big(k\varepsilon\big)\frac{\partial\varphi}{\partial r}\big(x^*,y^*\big)\Big]\\&=4B\varphi(0,0),\end{aligned}$$

所以 $B=\dfrac{1}{4}$, 得到二维 Helmholtz 方程 $\Delta_2u+k^2u=0$ 的基本解为

$$U(x,y)=\frac{1}{4}N_0(kr)\ . \tag{5.2.13}$$

用同样的方法还可以求出二维 Laplace 方程 $\Delta_2u=0$ 的基本解

$$U(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}, \tag{5.2.14}$$

二维 Helmholtz 方程 $\Delta_2u+cu=0$ $(c=-k^2<0)$ 的基本解

$$U(x,y)=-\frac{1}{2\pi}K_0(kr), \tag{5.2.15}$$

三维 Helmholtz 方程 $\Delta_3u+cu=0$ 的基本解

$$U(x,y,z)=\frac{-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\Big(\text{或}-\frac{\cos kr}{4\pi r}\Big),\quad c=k^2>0, \tag{5.2.16}$$

$$U(x,y,z)=-\frac{\mathrm{e}^{-kr}}{4\pi r},\quad c=-k^2<0\ . \tag{5.2.17}$$

5.3 边值问题的 Green 函数法

本节讨论用基本解方法求解稳定方程的边值问题, 主要是场位方程和 Helmholtz 方程的边值问题.

5.3.1 场位方程边值问题的 Green 函数及解的积分公式

首先讨论场位方程 (Poisson 方程) 第 I 边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = -f(M), \quad M = (x, y, z) \in V, \\ u\big|_{\partial V} = \varphi(M). \end{cases} \tag{5.3.1}$$

在物理上, 这可以看成静电场的基本问题: 空间区域 V 内有电荷分布 $\varepsilon f(M)$, 边界电位已知为 $\varphi(M)$, 求 V 内电位 $u(M)$.

由叠加原理知, $u = u_1 + u_2, u_1$ 与 u_2 分别满足

$$\begin{cases} \Delta u_1 = -f(M), \quad M \in V, \\ u_1\big|_{\partial V} = 0 \end{cases} \tag{5.3.2}$$

和

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0, \quad M \in V, \\ u_2\big|_{\partial V} = \varphi(M), \end{cases} \tag{5.3.3}$$

其中, u_1 表示在边界接地条件下体内电荷产生的电场, u_2 则为边界约束引起的电场. 体内连续分布电荷 $f(M)$ 可表示成点源的叠加

$$f(M) = \int_V \delta(M - M_0) f(M_0) \mathrm{d}M_0,$$

注意到 (5.3.2) 式中的边界条件是齐次的, 只要求出点源 $\delta(M - M_0)$ 在齐次边界条件下的解, 作相应的积分叠加, 便可得到连续源 $f(M)$ 在齐次边界条件下的解.

定义 5.3.1 称定解问题

$$\begin{cases} \Delta G(M; M_0) = -\delta(M - M_0), \quad M, M_0 \in V, \\ G\big|_{M \in \partial V} = 0 \end{cases} \tag{5.3.4}$$

的解 $G(M; M_0)$ 为场位方程第 I 边值问题 (5.3.1) 式的 **Green 函数**.

从物理上看, Green 函数就是边界接地条件下, 置于 V 内 M_0 点 (源点) 电荷为 $+\varepsilon$ 的点源在 V 内 M 点 (场点) 产生的电场, 仍然是一个点源函数, 一个基本解 (图 5.3.1).

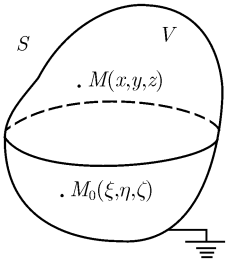


图 5.3.1

由于边界的限制, 它不能由原点的点源产生的场通过平移得到. 这样, 一个含有参数 M_0 的点源函数一般称之为 Green 函数.

为了由 Green 函数得到 (5.3.1) 式的解, 我们先来讨论 Green 函数的重要性质.

定理 5.3.1 (对称性)　设 $G(M;M_0)$ 为场位方程第 I 边值问题 (5.3.1) 式的 Green 函数, 则 $\forall M_1, M_2 \in V$, 有

$$G(M_2;M_1) = G(M_1;M_2)\ . \tag{5.3.5}$$

证　由 Green 函数的定义, $G(M;M_1)$ 和 $G(M;M_2)$ 分别满足边值问题

$$\begin{cases} \Delta G(M;M_1) = -\delta(M-M_1), & M, M_1 \in V, \\ G(M;M_1)\big|_{M\in\partial V} = 0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \Delta G(M;M_2) = -\delta(M-M_2), & M, M_2 \in V, \\ G(M;M_2)\big|_{M\in\partial V} = 0\ . \end{cases}$$

利用 Green 第二公式, 有

$$\begin{aligned} & G(M_2;M_1) - G(M_1;M_2) \\ &= \int_V G(M;M_1)\delta(M-M_2)\mathrm{d}M - \int_V G(M;M_2)\delta(M-M_1)\mathrm{d}M \\ &= -\int_V \Big[G(M;M_1)\Delta G(M;M_2) - G(M;M_2)\Delta G(M;M_1)\Big]\mathrm{d}M \\ &= -\oint_{\partial V}\left[G(M;M_1)\frac{\partial G(M;M_2)}{\partial n} - G(M;M_2)\frac{\partial G(M;M_1)}{\partial n}\right]\mathrm{d}S = 0\ . \end{aligned}$$

这个性质在物理上称为**倒易性**, 说明不管 V 是什么样的区域, Green 函数中的场点和源点可以互换, 即在边界接地条件下 M_1 点的源在 M_2 点产生的场等同于 M_2 点的源在 M_1 点产生的场.

需要说明的是, 以上证明在数学上不严格, 因为 Green 公式成立的条件在此并不满足. 严格的证明应按瑕积分处理, 在奇点 M_1 和 M_2 处挖去半径为 ε 的小球后应用 Green 公式, 再令 $\varepsilon \to 0$ 取极限证得. 今后类似使用 Green 公式时将不再加以说明.

下面利用 Green 函数给出场位方程第 I 边值问题的解的积分公式.

定理 5.3.2 (Poisson 公式)　设 $G(M;M_0)$ 是场位方程第 I 边值问题 (5.3.1) 式的 Green 函数, 则 (5.3.1) 式的解

$$u(M)=\int_V f(M_0)G(M;M_0)\mathrm{d}M_0-\oint_{\partial V}\varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}S_0. \tag{5.3.6}$$

证 由

$$\int_V(u\Delta G-G\Delta u)\mathrm{d}M=\oint_{\partial V}\left(u\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S,$$

将 u 和 G 满足的方程和边界条件代入, 有

$$\int_V(-u\delta(M-M_0)+Gf)\mathrm{d}M=\oint_{\partial V}\varphi\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}S,$$

故得

$$u(M_0)=\int_V f(M)G(M;M_0)\mathrm{d}M-\int_{\partial V}\varphi\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}S. \tag{5.3.6}'$$

由于对称性得 (5.3.1) 式解的积分公式 (5.3.6)

$$u(M)=\int_V f(M_0)G(M;M_0)\mathrm{d}M_0-\int_{\partial V}\varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}S_0.$$

对于场位方程第Ⅱ、Ⅲ边值问题, 也可类似讨论. 若定义定解问题

$$\begin{cases}\Delta G(M;M_0)=-\delta(M-M_0), & M,M_0\in V,\\ \left(\alpha G+\beta\dfrac{\partial G}{\partial n}\right)\Big|_{\partial V}=0\end{cases} \tag{5.3.7}$$

的解 $G(M;M_0)$ 为第Ⅲ边界条件下的 Green 函数, 则相应边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=-f(M), & M\in V,\\ \left(\alpha u+\beta\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\partial V}=\varphi(M)\end{cases} \tag{5.3.8}$$

的解的积分公式为

$$\begin{aligned}u(M)&=\int_V f(M_0)G\mathrm{d}M_0+\frac{1}{\beta}\oint_{\partial V}\varphi(M_0)G\mathrm{d}S_0\\&=\int_V f(M_0)G\mathrm{d}M_0-\frac{1}{\alpha}\oint_{\partial V}\varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial n_0}\mathrm{d}S_0.\end{aligned} \tag{5.3.9}$$

当 $\beta=0$ 时即为第Ⅰ边值问题. 当 $\alpha=0$ 时相应于第Ⅱ边值问题, 但此时由 (5.3.7) 式定义的 Green 函数不存在. 从物理上看, $\alpha=0$ 时 (5.3.7) 式表示内部有热源而边界绝热的稳恒温度场, 这是不可能的. 因此需要引进推广的 Green 函数

$$\begin{cases}\Delta G=-\delta(M-M_0)+\dfrac{1}{v}, & M,M_0\in V,\\ \dfrac{\partial G}{\partial n}\Big|_{\partial V}=0,\end{cases} \tag{5.3.10}$$

其中, v 是区域 V 的体积. 相应边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=-f(M), & M\in V,\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial V}=\varphi(M).\end{cases}$$

当且仅当 $\int_V f\mathrm{d}M = -\int_{\partial V}\varphi\mathrm{d}S$ 时, 解的积分公式为

$$u(M) = \int_V f(M_0)G\mathrm{d}M_0 + \oint_{\partial V}\varphi(M_0)G\mathrm{d}S_0 + C\ . \tag{5.3.11}$$

以上 Green 函数的定义和解的积分公式在二维时同样适用, 只需把有关的体积分和边界曲面积分相应改为平面区域 D 上的二重积分和边界曲线 ∂D 上的曲线积分.

5.3.2　Green 函数的求法

场位方程边值问题的 Green 函数是含有广义函数 $\delta(M-M_0)$ 的特殊边值问题 (5.3.4) 式、(5.3.7) 式、(5.3.10) 式的解. 由于 $\delta(M-M_0)$ 可像经典函数一样作 Fourier 展开和 Fourier 变换, Fourier 方法是求 Green 函数的基本方法. 对某些特殊的区域和边界条件, 则可以采用一些特殊方法求之. 以下讨论中的 Green 函数, 若不加说明, 均指 Poisson 方程第 I 边值问题的 Green 函数.

1. 镜像法

场位方程第 I 边值问题的 Green 函数是定解问题

$$\begin{cases} \Delta G = -\delta(M-M_0), \quad M, M_0 \in V, \\ G\big|_{\partial V} = 0 \end{cases} \tag{5.3.4}$$

的解 $G(M;M_0)$. 由叠加原理得

$$G(M;M_0) = U(M;M_0) + g(M;M_0),$$

其中, U 满足方程

$$\Delta U(M;M_0) = -\delta(M-M_0),$$

是 M_0 点的点电荷产生的场. $g(M;M_0)$ 满足 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta g(M;M_0) = 0, \quad M, M_0 \in V, \\ g\big|_{\partial V} = -U(M,M_0)\big|_{\partial V}, \end{cases}$$

是 M_0 的点电荷在边界上的感应电荷产生的电场. 利用 5.2 节中 Laplace 方程的基本解, 易知在二、三维情形分别有

$$U(M;M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(M,M_0)}, \quad r(M,M_0) = \left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$U(M;M_0) = \frac{1}{4\pi r(M,M_0)}, \quad r(M,M_0) = \left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{\frac{1}{2}}\ .$$

由于区域 V 外的点源在 V 内产生的电场满足 Laplace 方程, 可以将边界感应电荷产生的电场 $g(M;M_0)$ 视作区域外某些虚设电荷产生的等效电场, 这就是**镜像法**.

困难在于域外虚设电荷的电场与域内点电荷的电场在边界上必须相抵消, 对于某些特殊区域 V, 这样的虚设电荷可用初等方法找到.

例 5.3.1 求上半空间 ($z>0$) Poisson 方程第 I 边值问题的 Green 函数.

解 解定解问题

$$\begin{cases} \Delta G = -\delta(M-M_0), & z,\zeta>0, \\ G\big|_{z=0} = 0\ . \end{cases}$$

M_0 点的正电荷 ε 在空间产生的电场为

$$U_0 = \frac{1}{4\pi r(M,M_0)}, \quad r(M,M_0) = \left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

边界面上 $U_0\big|_{z=0} = \dfrac{1}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2}}$. 虚设电荷应置于下半空间 M_0 关于平面 $z=0$ 的对称点 $M_1=(\xi,\eta,-\zeta)$ 上 (图 5.3.2), 电荷量为 $-\varepsilon$, 则该虚设电荷在空间产生的电场为

$$\begin{aligned} U_1 &= -\frac{1}{4\pi r(M,M_1)}, \\ r(M,M_1) &= \left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

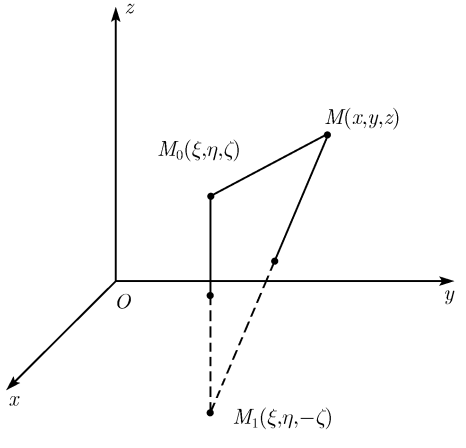


图 5.3.2

在边界面上

$$U_1\Big|_{z=0} = -\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2}} = -U_0\Big|_{z=0}.$$

故上半空间 Poisson 方程第一边值问题的 Green 函数为

$$
\begin{aligned}
& G(M;M_0) \\
=& \frac{1}{4\pi r(M,M_0)} - \frac{1}{4\pi r(M,M_1)} \\
=& \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{\frac{1}{2}}}\right. \\
& \left. - \frac{1}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2]^{\frac{1}{2}}}\right], \quad z,\zeta>0.
\end{aligned} \tag{5.3.12}
$$

由于

$$
\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_{z=0} = -\frac{\partial G}{\partial z}\Big|_{z=0} = -\frac{\zeta}{2\pi[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{\frac{3}{2}}},
$$

代入 (5.3.6)′ 式得上半空间场位方程第 I 边值问题 (5.3.1) 式的解. 特别地, 得 Dirichlet 问题

$$
\begin{cases}
\Delta_3 u = 0, \quad z>0, \\
u\big|_{z=0} = \varphi(x,y)
\end{cases}
$$

的解的 Poisson 积分公式

$$
u(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta\varphi(x,y)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
$$

或

$$
u(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{z\varphi(\xi,\eta)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta. \tag{5.3.13}
$$

在二维情形, 若求上半平面 Poisson 方程第 I 边值问题的 Green 函数, 利用基本解 $U=\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r}$, 将虚设点电荷置于 $M_0(\xi,\eta)$ 在下半平面的对称点 $M_1(\xi,-\eta)$ 上, 有

$$
\begin{aligned}
G(M;M_0) &= \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r(M,M_0)} - \ln\frac{1}{r(M,M_1)}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}, \quad y,\eta>0\ .
\end{aligned} \tag{5.3.14}
$$

进而, 又一次得到上半平面 Dirichlet 问题

$$
\begin{cases}
\Delta_2 u = 0, \quad y>0, \\
u\big|_{y=0} = \varphi(x)
\end{cases}
$$

的解的积分公式

$$
u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}\mathrm{d}\xi\ . \tag{5.3.15}
$$

例 5.3.2 求半径为R的球域内Poisson方程第Ⅰ边值问题的Green函数.

解 球域内 Green 函数的定解问题为

$$\begin{cases} \Delta_3 G = -\delta(M - M_0), \quad 0 \leqslant r, \rho < R, \\ G\big|_{r=R} = 0, \end{cases}$$

其中, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$.

球内 M_0 点正电荷 ε 在 M 点的电场为 $U_0 = \dfrac{1}{4\pi r(M, M_0)}$. 该电场关于射线 OM_0 轴对称, 虚设电荷 $-Q$ 应置于球外 OM_0 射线的某一点 M_1 上. 虚设电荷与 M_0 点真实点电荷在球面上产生的电位要相抵消, 即对于球面上任一点 M, 有

$$U_0 + U_1 = \frac{1}{4\pi r(M, M_0)} - \frac{Q/\varepsilon}{4\pi r(M, M_1)} = 0 \ .$$

因此, M_1 需满足

$$\frac{r(M, M_1)}{r(M, M_0)} = \frac{Q}{\varepsilon} \quad (\text{常数}) \ .$$

由几何知识知，取 M_1 为 M_0 关于球面的对称点 ($r(O, M_0) \cdot r(O, M_1) = R^2$) 时 (图 5.3.3), 三角形 OM_0M 与三角形 OMM_1 相似, 从而有

$$\frac{r(M, M_1)}{r(M, M_0)} = \frac{r(O, M)}{r(O, M_0)} = \frac{R}{\rho} \ .$$

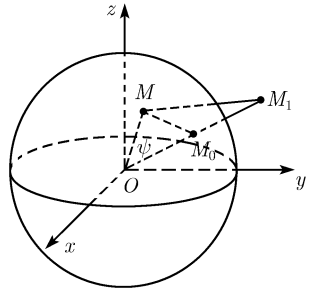


图 5.3.3

故虚设电荷应置于 M_0 关于球面的对称点 M_1 上, 电荷量应为 $-Q = -\dfrac{R}{\rho}\varepsilon$. 从而**球内 Green 函数**

$$G(M; M_0) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r(M, M_0)} - \frac{R}{\rho r(M, M_1)}\right] \ . \tag{5.3.16}$$

取球坐标, 记场点 $M = (r, \theta, \varphi)$, 源点 $M_0 = (\rho, \theta_0, \varphi_0), \psi$ 为 OM_0 与 OM 的夹角, 则

$$r(M, M_0) = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\psi},$$

$$r(M, M_1) = \sqrt{r^2 + \left(\frac{R^2}{\rho}\right)^2 - 2r\frac{R^2}{\rho}\cos\psi} = \frac{1}{\rho}\sqrt{\rho^2 r^2 + R^4 - 2\rho r R^2\cos\psi},$$

$$\cos\psi = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0),$$

有

$$G(M; M_0) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2\rho r\cos\psi}} - \frac{R}{\sqrt{\rho^2 r^2 + R^4 - 2\rho r R^2\cos\psi}}\right] \ .$$

在球面上

$$\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_{r=R}=\frac{\partial G}{\partial r}\Big|_{r=R}=-\frac{R^2-\rho^2}{4\pi R(R^2+\rho^2-2\rho R\cos\psi)^{\frac{3}{2}}},$$

得 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0, & r<R,\\ u\big|_{r=R}=f(\theta,\varphi)\end{cases}$$

的解的 Poisson 积分公式

$$u(\rho,\theta_0,\varphi_0)=\frac{1}{4\pi R}\oiint_{S_R}\frac{R^2-\rho^2}{(R^2+\rho^2-2R\rho\cos\psi)^{\frac{3}{2}}}f(\theta,\varphi)\mathrm{d}S \tag{5.3.17}'$$

或

$$u(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{4\pi R}\oiint_{S_R}\frac{R^2-r^2}{(R^2+r^2-2Rr\cos\psi)^{\frac{3}{2}}}f(\theta_0,\varphi_0)\mathrm{d}S_0, \tag{5.3.17}$$

其中, S_R 为以 O 为球心, R 为半径的球面. 若取 M_0 为球心 O, $\rho=0$, 则 (5.3.17)′ 式为

$$u(O)=\frac{1}{4\pi R^2}\oiint_{S_R}f(M)\mathrm{d}S,$$

说明 Laplace 方程的解在球心的值等于它的球面平均值.

例 5.3.3　求圆域内 Poisson 方程第 I 边值问题的 Green 函数.

解　Green 函数满足

$$\begin{cases}\Delta_2 G=-\delta(M-M_0), & r=\sqrt{x^2+y^2}<R,\ \rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}<R,\\ G\big|_{r=R}=0\ .\end{cases}$$

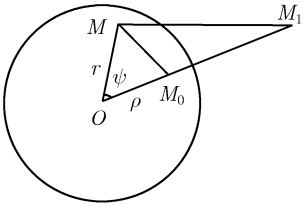


图 5.3.4

圆内过 $M_0=(\xi,\eta)$ 点的线电荷 ε 在 M 点的电位为

$$U_0=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(M,M_0)},$$

在 M_0 点关于圆周的对称点 M_1 上放置虚设线电荷 $-Q$(待定)(图 5.3.4), 产生的电位为

$$U_1=-\frac{Q}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{r(M,M_1)}+C.$$

因为 Laplace 方程的基本解不唯一, 这里增添了待定常数 C, Green 函数

$$G(M;M_0)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r(M,M_0)}-\frac{Q}{\varepsilon}\ln\frac{1}{r(M,M_1)}\right]+C\ .$$

当 M 在圆域边界上, $r(M,M_1)=\dfrac{R}{\rho}r(M,M_0)$, 边界条件

$$G\Big|_{r=R}=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r(M,M_0)}-\frac{Q}{\varepsilon}\ln\frac{1}{r(M,M_0)}-\frac{Q}{\varepsilon}\ln\frac{\rho}{R}\right]+C=0,$$

推出 $Q=\varepsilon$ 和 $C=-\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{R}{\rho}$, 最后得到**圆内 Green 函数**

$$G(M;M_0)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r(M,M_0)}-\ln\frac{R}{\rho r(M,M_1)}\right]. \tag{5.3.18}$$

取极坐标 $M=(r,\theta),M_0=(\rho,\theta_0),\psi=\theta-\theta_0$, 有

$$G(M;M_0)=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{R^4+r^2\rho^2-2R^2r\rho\cos\psi}{R^2(r^2+\rho^2-2r\rho\cos\psi)},$$

$$\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_{r=R}=\frac{\partial G}{\partial r}\Big|_{r=R}=-\frac{1}{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R(R^2+\rho^2-2R\rho\cos\psi)},$$

故圆内 Laplace 方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0, & r<R,\\ u\big|_{r=R}=\varphi(\theta)\end{cases}$$

的解可表示为**Poisson积分公式**

$$u(M_0)=u(\rho,\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-\rho^2)\varphi(\theta)}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\theta_0)}\mathrm{d}\theta \tag{5.3.19}'$$

或

$$u(M)=u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)\varphi(\theta_0)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\theta_0)}\mathrm{d}\theta_0\ . \tag{5.3.19}$$

其他一些由平面与球面所围的空间区域,由直线和圆弧围成的平面区域的Green函数可利用上述结果用镜像法解得. 如第一象限内场位方程第一边值问题的 Green 函数

$$G(M;M_0)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r(M,M_0)}-\ln\frac{1}{r(M,M_1)}-\ln\frac{1}{r(M,M_2)}+\ln\frac{1}{r(M,M_3)}\right],$$

其中, $M_0=(\xi,\eta)$ 为真实源点, $M_1=(\xi,-\eta),M_2=(-\xi,\eta),M_3=(-\xi,-\eta)$ 为虚设电荷点, 分别是 M_0 关于 x 轴、y 轴和原点的对称点.

2. 保形变换法

二维 Poisson 方程的问题还可以利用复变函数的方法解决. 比如, 圆内调和函数的 Poisson 积分公式 (5.3.19) 也可从解析函数的 Cauchy 积分公式得到. 又如求较复杂的平面区域内的 Green 函数, 可以通过保形变换将复杂区域映成简单区域

来解决.

二维 Laplace 方程的基本解 $U=\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r}, r=\sqrt{x^2+y^2}$ 是单位圆内边值问题

$$\begin{cases} \Delta_2 U=-\delta(x,y), & r<1,\\ U\big|_{r=1}=0 \end{cases}$$

的解. 一般单连通区域 D 上的 Green 函数, 则可通过保形变换得到.

定理 5.3.3　设 D 为 z 平面上一单连通区域, $z=x+\mathrm{i}y, z_0=\xi+\mathrm{i}\eta\in D$. 如果 $w=w(z)$ 是把 D 映为 w 平面上单位圆 $|w|<1$, 并把 z_0 映为 $w=0$ 的保形变换, 则

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|w(z)|} \tag{5.3.20}$$

是二维区域 D 上的 Green 函数, 即边值问题

$$\begin{cases} \Delta_2 G=-\delta(x-\xi,y-\eta), & (x,y),(\xi,\eta)\in D,\\ G\big|_{\partial D}=0 \end{cases} \tag{5.3.4}$$

的解.

证　由 (5.3.20) 式得

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|z-z_0|}-\frac{1}{2\pi}\ln\Big|\frac{w(z)}{z-z_0}\Big|,$$

其中, 第一项显然满足方程

$$\Delta\Big(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|z-z_0|}\Big)=-\delta\big(x-\xi,y-\eta\big),$$

只需验证第二项在 D 内调和. 作辅助函数

$$F(z)=\begin{cases} \dfrac{w(z)}{z-z_0}, & z\neq z_0,\\ \displaystyle\lim_{z\to z_0}\frac{w(z)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{w(z)-w(z_0)}{z-z_0}=w'(z_0), & z=z_0\ . \end{cases}$$

因为 $w(z)$ 是单叶解析函数, $w'(z)\neq 0$, 所以 $F(z)$ 在 D 内解析, 且 $F(z)\neq 0\ (z\in D)$. 在 D 内可取对数函数的单值解析分支

$$\ln F(z)=\ln\frac{w(z)}{z-z_0}=\ln\Big|\frac{w(z)}{z-z_0}\Big|+\mathrm{i}\arg\frac{w(z)}{z-z_0},$$

其实部 $\ln\Big|\dfrac{w(z)}{z-z_0}\Big|$ 在 D 内调和. 所以

$$\begin{aligned}\Delta G(x,y;\xi,\eta)&=\Delta\Big(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|z-z_0|}\Big)-\Delta\Big(\frac{1}{2\pi}\ln\Big|\frac{w(z)}{z-z_0}\Big|\Big)\\&=-\delta(x-\xi,y-\eta)\ .\end{aligned}$$

又

$$G\Big|_{\partial D}=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|w(z)|}\Big|_{|w|=1}=0,$$

故 $\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|w(z)|}$ 是区域 D 内的 Green 函数.

例如, 在复变函数中已知分式线性变换

$$w(z)=k\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0},\quad |k|=1$$

将上半平面 $\mathrm{Im}z>0$ 映为单位圆 $|w|<1$, 将 z_0 点映为单位圆心 $w=0$; 分式线性变换

$$w(z)=k\frac{R(z-z_0)}{R^2-z\bar{z}_0},\quad |k|=1$$

将圆心在原点半径为 R 的圆盘映为单位圆 $|w|<1$, 将 z_0 点映为单位圆心 $w=0$. 利用定理 5.3.3 直接可得上半平面的 Green 函数 (5.3.14) 式和圆内 Green 函数 (5.3.18) 式.

例 5.3.4 求带形域 $D:0<\mathrm{Im}z<\pi$ 内的 Green 函数.

解 指数函数和分式线性变换的复合

$$w=k\frac{\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{z_0}}{\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{\bar{z}_0}},\quad |k|=1$$

将带形域 D 映为单位圆 $|w|<1$, 将 z_0 点映为单位圆心 $w=0$, 故带形域 D 内的 Green 函数为

$$G(z;z_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{\bar{z}_0}}{\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{z_0}}\right|.$$

例 5.3.5 求两个正交圆弧所围区域 D 的 Green 函数.

解 设两圆正交于 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 和 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$, 取 $z=x+\mathrm{i}y, z_0=\xi+\mathrm{i}\eta$ 为相交区域 D 内任意两点 (图 5.3.5(左)). 在圆弧 $\overset{\frown}{z_1z_2}$ 上任取 C 点 $z_3=x_3+\mathrm{i}y_3$, 分式线性变换

$$w(z)=k\frac{z-z_1}{z-z_2},\quad k=\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

将区域 D 映为 w 平面上的第 I 象限, z_0 映为第 I 象限内的点 $w_0=w(z_0)$(图 5.3.5(右)).

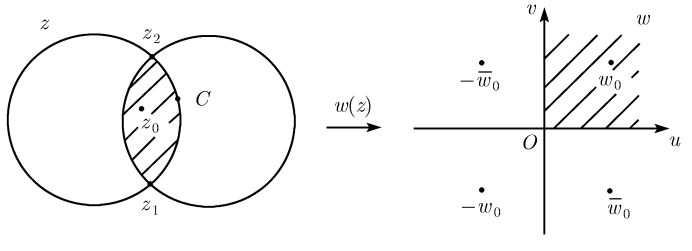


图 5.3.5

再用镜像法, 可得 w 平面上第一象限的 Green 函数

$$G(w;w_0)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{|w-w_0|}-\ln\frac{1}{|w-\bar{w}_0|}+\ln\frac{1}{|w+w_0|}-\ln\frac{1}{|w+\bar{w}_0|}\right],$$

故 z 平面上正交圆弧所围区域 D 内的 Green 函数

$$G(z;z_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{[w(z)-\overline{w(z_0)}][w(z)+\overline{w(z_0)}]}{[w(z)-w(z_0)][w(z)+w(z_0)]}\right|.$$

3. Fourier 方法

Fourier 方法是指按固有函数作广义 Fourier 展开的方法, 包括分离变量和积分变换, 仍然是求 Green 函数的基本方法.

例 5.3.6 半径为 R 的匀质球内, M_0 点处有强度为 Q 的热源, 球面与温度为 0° 的外界自由热交换, 求达到稳恒后球内的温度分布.

解 这是点源引起的温度分布, 稳恒温度 $u(x,y,z)$ 满足

$$\begin{cases}\Delta_3 u=-\dfrac{Q}{k}\delta(M-M_0), & r,\rho<R,\\ \Big(k\dfrac{\partial u}{\partial r}+hu\Big)\Big|_{r=R}=0,\end{cases}$$

其中, k 为介质内热传导系数, h 为边界面热交换系数. 若取 $Q=k,u$ 即为 Poisson 方程第III类边界条件的 Green 函数.

由 Laplace 方程的基本解, 令 $U(M;M_0)=\dfrac{1}{4\pi r(M,M_0)}$,

$$u(M;M_0)=\frac{Q}{k}U(M;M_0)+g(M;M_0),$$

则 $g(M;M_0)$ 满足

$$\begin{cases}\Delta_3 g=0, & r<R,\\ \Big(k\dfrac{\partial g}{\partial r}+hg\Big)\Big|_{r=R}=-\dfrac{Q}{k}\Big(k\dfrac{\partial U}{\partial r}+hU\Big)\Big|_{r=R}.\end{cases}$$

由于温度分布关于球心到 M_0 点的 OM_0 轴对称, 将 OM_0 轴取作极轴, 由球内 Laplace 方程解的一般形式 (3.3.12b) 式, 知

$$g(M;M_0)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n\Big(\frac{r}{R}\Big)^n P_n\big(\cos\theta\big),$$

进而

$$\Big(k\frac{\partial g}{\partial r}+hg\Big)\Big|_{r=R}=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{nk}{R}+h\Big)C_nP_n\big(\cos\theta\big).$$

利用 Legendre 多项式的母函数 (3.3.4) 式, 当 $\rho < r$ 时, 有

$$\frac{1}{r(M,M_0)} = \frac{1}{(r^2+\rho^2-2r\rho\cos\theta)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^n P_n\big(\cos\theta\big),$$

故

$$-\frac{Q}{k}\Big(k\frac{\partial U}{\partial r}+hU\Big)\Big|_{r=R} = -\frac{Q}{k}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{hR-(n+1)k}{4\pi R^{n+2}}\rho^n P_n\big(\cos\theta\big)\ .$$

代入边界条件, 比较系数, 解得

$$C_n = \frac{Q}{k}\frac{[(n+1)k-hR]}{hR+nk}\cdot\frac{\rho^n}{4\pi R^{n+1}},$$

故温度分布为

$$u = \frac{Q}{4\pi k}\left\{\frac{1}{r(M,M_0)}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{[(n+1)k-hR]}{(hR+nk)R}\Big(\frac{\rho r}{R^2}\Big)^n P_n(\cos\theta)\right\}\ .$$

$\rho > r$ 时该式同样成立. 此解说明温度分布受内部点热源及边界面热交换两方面的影响, 后者的影响比较复杂.

例 5.3.7 求矩形域 $D: 0<x<a,\ 0<y<b$ 内 Poisson 方程第 I 边值问题的 Green 函数.

解 即求解边值问题

$$\begin{cases} \Delta_2 G = -\delta(x-\xi,y-\eta), \quad 0<x,\ \xi<a,\ 0<y,\ \eta<b, \\ G\big|_{x=0} = G\big|_{x=a} = G\big|_{y=0} = G\big|_{y=b} = 0\ . \end{cases}$$

考虑同一齐次边界条件下 Laplace 算子的固有值问题

$$\begin{cases} \Delta_2 v + \lambda v = 0, \quad 0<x<a,\ 0<y<b, \\ v\big|_{x=0} = v\big|_{x=a} = v\big|_{y=0} = v\big|_{y=b} = 0\ . \end{cases}$$

令 $v(x,y) = X(x)Y(y)$, 分离得常微分方程的固有值问题

$$\begin{cases} X''+\mu X = 0, \quad 0<x<a, \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} Y''+\nu Y = 0, \quad 0<y<b, \\ Y(0) = Y(b) = 0, \end{cases}$$

且 $\mu+\nu=\lambda$. 解得固有值和固有函数分别为

$$\mu_n = \Big(\frac{n\pi}{a}\Big)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{a}x, \quad n = 1,2,\cdots\ ;$$

$$\nu_m = \Big(\frac{m\pi}{b}\Big)^2, \quad Y_m(y) = \sin\frac{m\pi}{b}y, \quad m = 1,2,\cdots\ .$$

所以, 相应的 Laplace 方程的固有值问题有固有值和固有函数

$$\lambda_{nm} = \Big(\frac{n\pi}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{m\pi}{b}\Big)^2,$$

$$v_{nm}(x,y) = \sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y, \quad n,m = 1,2,\cdots .$$

由于 $\{v_{nm}(x,y)\}$ $(n,m=1,2,\cdots)$ 是该矩形区域上的完备正交函数系, 设 Green 函数

$$G = \sum_{n,m=1}^{+\infty} C_{nm}v_{nm}(x,y),$$

则有

$$\Delta_2 G = -\sum_{n,m=1}^{+\infty} C_{nm}\Big[\Big(\frac{n\pi}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{m\pi}{b}\Big)^2\Big]v_{nm}(x,y) .$$

又

$$\delta(x-\xi,y-\eta) = \sum_{n,m=1}^{+\infty} B_{nm}v_{nm}(x,y),$$

$$\begin{aligned} B_{nm} &= \frac{1}{||v_{nm}(x,y)||^2}\int_0^a\int_0^b \delta(x-\xi,y-\eta)\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{4}{ab}\sin\frac{n\pi}{a}\xi\sin\frac{m\pi}{b}\eta . \end{aligned}$$

代入 G 的方程, 两边比较系数, 确定

$$C_{nm} = \frac{4}{ab}\Big[\Big(\frac{n\pi}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{m\pi}{b}\Big)^2\Big]^{-1}\sin\frac{n\pi}{a}\xi\sin\frac{m\pi}{b}\eta,$$

得到矩形域上 Dirichlet 问题的 Green 函数

$$G(x,y;\xi,\eta) = \frac{4ab}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(nb)^2+(ma)^2}\sin\frac{n\pi}{a}\xi\sin\frac{m\pi}{b}\eta\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y .$$

例 5.3.8 求半条形区域 $D: 0<x<a,\ y>0$ 内 Poisson 方程第 I 边值问题的 Green 函数.

解 解定解问题

$$\begin{cases} \Delta_2 G = -\delta(x-\xi,y-\eta), \quad 0<x,\ \xi<a,\ y,\eta>0, \\ G\big|_{x=0} = G\big|_{x=a} = G\big|_{y=0} = 0, \\ G\big|_{y\to+\infty} \text{有界} . \end{cases}$$

考虑相应偏微分方程固有值问题

$$\begin{cases} \Delta_2 v + \lambda v = 0, \quad 0<x<a,\ y>0, \\ v\big|_{x=0} = v\big|_{x=a} = v\big|_{y=0} = 0, \\ v\big|_{y\to+\infty} \text{有界} . \end{cases}$$

令 $v=X(x)Y(y)$, 分离出两个常微分方程固有值问题

$$\begin{cases} X''+\mu X=0, \quad 0<x<a, \\ X(0)=X(a)=0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} Y''+\nu Y=0, \quad 0<y<+\infty, \\ Y(0)=0, \quad Y(+\infty)\text{有界}, \end{cases}$$

其中, $\mu+\nu=\lambda$. 分别解得

$$\mu_n=\Big(\frac{n\pi}{a}\Big)^2, \quad X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{a}x, \quad n=1,2,\cdots,$$

$$\nu=\omega^2, \quad Y(y,\omega)=\sin\omega y, \quad \omega>0\ .$$

故相应偏微分方程固有值问题有固有值和固有函数系

$$\lambda_{n\omega}=\Big(\frac{n\pi}{a}\Big)^2+\omega^2, \quad v_n(x,y,\omega)=\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\omega y\ .$$

设 $G=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}C_n(\omega)\sin\omega y\mathrm{d}\omega\sin\dfrac{n\pi}{a}x$, 代入 G 的方程, 得

$$\begin{aligned} -\Delta_2 G&=\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\int_0^{+\infty}C_n(\omega)\left[\Big(\frac{n\pi}{a}\Big)^2+\omega^2\right]\sin\omega y\mathrm{d}\omega\right\}\sin\frac{n\pi}{a}x \\ &=\delta(x-\xi,y-\eta)\ . \end{aligned}$$

这是 $\delta(x-\xi,y-\eta)$ 关于 $\Big\{\sin\dfrac{n\pi}{a}x\Big\}$ 的正弦展开, 展开系数

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty}C_n(\omega)\Big[\Big(\frac{n\pi}{a}\Big)^2+\omega^2\Big]\sin\omega y\mathrm{d}\omega&=\frac{2}{a}\int_0^a\delta(x-\xi,y-\eta)\sin\frac{n\pi}{a}x\mathrm{d}x \\ &=\frac{2}{a}\sin\frac{n\pi}{a}\xi\delta(y-\eta)\ . \end{aligned}$$

此式又可看成是 $C_n(\omega)\Big[\Big(\dfrac{n\pi}{a}\Big)^2+\omega^2\Big]$ 的正弦变换, 由反变换公式求出

$$\begin{aligned} C_n(\omega)\Big[\Big(\frac{n\pi}{a}\Big)^2+\omega^2\Big]&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\Big[\frac{2}{a}\sin\frac{n\pi}{a}\xi\delta\big(y-\eta\big)\Big]\sin\omega y\mathrm{d}y \\ &=\frac{4}{a\pi}\sin\frac{n\pi}{a}\xi\sin\omega\eta, \end{aligned}$$

故

$$C_n(\omega)=\frac{4a}{\pi[(n\pi)^2+(a\omega)^2]}\sin\frac{n\pi}{a}\xi\sin\omega\eta,$$

所以, Green 函数

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{4a}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big[\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\eta\sin\omega y}{(n\pi)^2+(a\omega)^2}\mathrm{d}\omega\Big]\sin\frac{n\pi}{a}\xi\sin\frac{n\pi}{a}x\ .$$

如果有一水槽, 底面温度保持 0°, 两侧温度只与高度有关, 分别为 $\varphi_1(y), \varphi_2(y)$, 则槽内温度分布 u 满足 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, & 0 < x < a,\ y > 0, \\ u\big|_{y=0} = 0, \quad u\big|_{y\to+\infty} \text{有界}, & \\ u\big|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad u\big|_{x=a} = \varphi_2(y), & \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0\ . \end{cases}$$

由 Poisson 积分公式 (5.3.6) 得

$$u(x,y) = -\int_0^{+\infty} \varphi_2(\eta) \frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=a} \mathrm{d}\eta + \int_0^{+\infty} \varphi_1(\eta) \frac{\partial G}{\partial(-\xi)}\Big|_{\xi=0} \mathrm{d}\eta\ .$$

因为

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = \sum_{n=1}^{+\infty} 4n \int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega\eta \sin\omega y}{(n\pi)^2 + (a\omega)^2} \mathrm{d}\omega \cos\frac{n\pi}{a}\xi \sin\frac{n\pi}{a}x,$$

所以, 解得

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} 4n \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{[\varphi_1(\eta) + (-1)^n \varphi_2(\eta)] \sin\omega\eta \sin\omega y}{(n\pi)^2 + (a\omega)^2} \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\omega \sin\frac{n\pi}{a}x\ .$$

*5.3.3 Helmholtz 方程边值问题及其 Green 函数

Helmholtz 方程第 I 边值问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u + k^2 u = f(M), \quad M = (x,y,z) \in V, \\ u\big|_{\partial V} = \varphi(M)\big|_{\partial V}\ . \end{cases} \tag{5.3.21}$$

当 k^2 不是固有值问题

$$\begin{cases} \Delta_3 v + \lambda v = 0, \quad M \in V, \\ v\big|_{\partial V} = 0 \end{cases} \tag{5.3.22}$$

的固有值时, 问题 (5.3.21) 式的解存在唯一.

定义 5.3.2 若 $G(M; M_0)$ 满足

$$\begin{cases} \Delta_3 G + k^2 G = \delta(M - M_0), \quad M, M_0 \in V, \\ G\big|_{\partial V} = 0, \end{cases} \tag{5.3.23}$$

则称 $G(M; M_0)$ 为**Helmholtz 方程第 I 边值问题的 Green 函数.**

由 Helmholtz 算子 $L = \Delta + k^2$ 的 Green 第二公式 (5.2.11)

$$\int_V (vLu - uLv)\mathrm{d}V = \oint_{\partial V} \Big(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\Big)\mathrm{d}S,$$

同样可证 $G(M;M_0)=G(M_0;M)$, 且有问题 (5.3.21) 式解的积分公式.

定理 5.3.4 若 $G(M;M_0)$ 是 Helmholtz 方程第一边值问题的 Green 函数, 则问题 (5.3.21) 式的解

$$u(M_0)=\int_V f(M)G(M;M_0)\mathrm{d}M+\oint_{\partial V}\varphi(M)\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{5.3.24}$$

或

$$u(M)=\int_V f(M_0)G(M;M_0)\mathrm{d}M_0+\oint_{\partial V}\varphi(M_0)\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}S_0\ . \tag{5.3.24$'$}$$

求 Green 函数的基本方法是广义 Fourier 展开. 若已知固有值问题 (5.3.22) 式的固有值 $\{\lambda_{nml}\}$, 固有函数 $\{v_{nml}(M)\}$, 它们构成区域 V 上的完备正交函数系, 从而可设

$$G(M;M_0)=\sum_{n,m,l}C_{nml}v_{nml}(M),$$

代入 (5.2.23) 式中的方程, 确定 C_{nml}, 最后得到

$$G(M;M_0)=\sum_{n,m,l}\frac{1}{(k^2-\lambda_{nml})||v_{nml}(M)||^2}v_{nml}(M_0)v_{nml}(M)\ .$$

当 V 为某些特殊区域, 也可用镜像法求 Green 函数.

对于第Ⅱ、Ⅲ类边界条件, 可类似定义 Green 函数, 并利用 Green 公式推出相应的解的积分公式. 对于二维情形, 可如法炮制.

需要说明的是, 当 k^2 为固有值问题 (5.3.22) 式的固有值时, 问题 (5.3.21) 式相应的齐次问题有非零解, 设为 $f_0(M)$. 由 Green 公式可推出当非齐次项 $f(M),\varphi(M)$ 满足相容性条件

$$\int_V f(M)f_0(M)\mathrm{d}V=-\oint_{\partial V}\varphi(M)\frac{\partial f_0}{\partial n}\mathrm{d}S$$

时, 非齐次问题 (5.3.21) 式有解, 但是解不唯一. 当 $f(M)=\delta(M-M_0),\varphi(M)=0$ 时, 一般不满足相容条件, 因此 Green 函数通常不存在, 需要定义广义 Green 函数.

5.4 初值问题的基本解方法

本节介绍用基本解方法求解发展方程 $u_t=Lu$ 和 $u_{tt}=Lu$ 的初值问题, 并重点讨论高维热传导方程和波动方程初值问题的解, 最后将扼要介绍混合问题的基本解方法.

5.4.1 $u_t = Lu$ 型方程初值问题的基本解

考虑初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(t, M), \quad t > 0,\ M \in \mathbf{R}^n,\ n = 1, 2, 3, \\ u|_{t=0} = \varphi(M), \end{cases} \tag{5.4.1}$$

其中, L 是关于空间变量 M 的常系数线性偏微分算子.

典型例子是热传导方程 ($L = a^2\Delta$). 若取 $n = 1$, 由叠加原理知 $u = u_1 + u_2$, u_1 和 u_2 分别满足初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \\ u_1|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + f(t, x), \\ u_2|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

在 5.1 节例 5.1.2 中已见, 若杆上无热源, 初始瞬间在 $x = 0$ 点给杆热量 $Q = c\rho$ 时, 该点源在杆上引起的温度 $U(t, x)$ 满足初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad t > 0,\ -\infty < x < +\infty, \\ U|_{t=0} = \delta(x). \end{cases} \tag{5.4.2}$$

由于 $\varphi(x) = \delta * \varphi(x)$, 根据叠加原理, 初始时刻连续源 $\varphi(x)$ 产生的温度场 $u_1 = U * \varphi$. 杆身热源 $f(t, x)$ 在 τ 时刻的作用则可由齐次化原理 (定理 1.5.2) 转化为等效的 "初始条件" $f(\tau, x)$, 进而得到 $u_2 = \displaystyle\int_0^t U(t - \tau, x) * f(\tau, x)\mathrm{d}\tau$. 因此, 初始时刻点源 $\delta(x)$ 引起的温度场 $U(t, x)$ 是最基本的. 一般地, 有如下定义:

定义 5.4.1 称初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = LU, \quad t > 0,\ M \in \mathbf{R}^n,\ n = 1, 2, 3, \\ U|_{t=0} = \delta(M) \end{cases} \tag{5.4.3}$$

的解 $U(t, M)$ 为方程 $u_t = Lu$ 的**初值问题**(5.4.1) 式的**基本解**.

初值问题 (5.4.1) 式的解可由以下定理得到:

定理 5.4.1 若 $U(t, M)$ 是 $u_t = Lu$ 型方程的初值问题 (5.4.1) 式的基本解, 则

$$u(t, M) = U(t, M) * \varphi(M) + \int_0^t U(t - \tau, M) * f(\tau, M)\mathrm{d}\tau \tag{5.4.4}$$

是初值问题 (5.4.1) 式的解.

证 令 $u_1 = U(t, M) * \varphi(M)$, $u_2 = \displaystyle\int_0^t U(t - \tau, M) * f(\tau, M)\mathrm{d}\tau$. 由基本解定义, 易直接验证

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[U(t, M) * \varphi(M)] = \left[\frac{\partial}{\partial t}U(t, M)\right] * \varphi(M)$$

$$
\begin{aligned}
&= [LU(t,M)] * \varphi(M) = L[U(t,M) * \varphi(M)] = Lu_1,\\
u_1|_{t=0} &= [U(t,M) * \varphi(M)]\Big|_{t=0} = U(t,M)\Big|_{t=0} * \varphi(M)\\
&= \delta(M) * \varphi(M) = \varphi(M),\\
\frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t U(t-\tau,M) * f(\tau,M)\mathrm{d}\tau\\
&= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} U(t-\tau,M) * f(\tau,M)\mathrm{d}\tau + U(0,M) * f(t,M)\\
&= \int_0^t LU(t-\tau,M) * f(\tau,M)\mathrm{d}\tau + \delta(M) * f(t,M)\\
&= \int_0^t L[U(t-\tau,M) * f(\tau,M)]\mathrm{d}\tau + f(t,M)\\
&= L\int_0^t U(t-\tau,M) * f(\tau,M)\mathrm{d}\tau + f(t,M)\\
&= Lu_2 + f(t,M),\\
u_2|_{t=0} &= 0.
\end{aligned}
$$

再由叠加原理知 $u = u_1 + u_2$ 满足初值问题 (5.4.1) 式.

这里, 我们反复交换积分与求导, 积分与取极限的次序, 从广义函数看, 都是允许的.

5.4.2 $u_{tt} = Lu$ 型方程初值问题的基本解

现有初值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(t,M), \quad t > 0, M \in \mathbf{R}^n,\ n = 1,2,3,\\
u|_{t=0} = \varphi(M), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(M),
\end{cases}
\tag{5.4.5}
$$

其中, L 是关于空间变量 M 的常系数线性偏微分算子. 类似 $u_t = Lu$ 型方程初值问题, 给出以下定义.

定义 5.4.2 称初值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = LU, \quad t > 0, M \in \mathbf{R}^n,\ n = 1,2,3,\\
U\Big|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = \delta(M)
\end{cases}
\tag{5.4.6}
$$

的解 $U(t,M)$ 为方程 $u_{tt} = Lu$ 的**初值问题**(5.4.5) 式的**基本解**.

当 $L = a^2\Delta$ 时, (5.4.5) 式就是波动方程的初值问题. 一维时候, 基本解 $U(t,x)$ 就是初始瞬间在弦的 $x = 0$ 点给了量值为 ρ 的冲量引起的弦的振动.

类似 5.4.1 节中的分析, 因为 $\psi\ (M) = \delta\ (M) * \psi\ (M)$, 据叠加原理可知 $u_1 = U(t, M) * \psi(M)$ 是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = Lu_1, \\ u_1|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(M) \end{cases} \tag{5.4.7}$$

的解; 又根据冲量原理可知 $u_3 = \displaystyle\int_0^t U(t-\tau, M) * f(\tau, M)\mathrm{d}\tau$ 是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = Lu_3 + f(t, M), \\ u_3|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u_3}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{5.4.8}$$

的解. 若令 (5.4.5) 式的解 $u = u_1 + u_2 + u_3$, 则 u_2 应满足初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = Lu_2, \\ u_2|_{t=0} = \varphi(M), \quad \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{5.4.9}$$

设 $u_2 = v_t$, 则当 v 满足初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = Lv, \\ v|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(M), \end{cases}$$

即 $v = U(t, M) * \varphi(M)$ 时, $u_2 = v_t$ 应是初值问题 (5.4.9) 式的解, 故有如下定理.

定理 5.4.2 若 $U(t, M)$ 是 $u_{tt} = Lu$ 型方程的初值问题 (5.4.5) 式的基本解, 则

$$u(t, M) = U(t, M) * \psi(M) + \frac{\partial}{\partial t}[U(t, M) * \varphi(M)] + \int_0^t U(t-\tau, M) * f(\tau, M)\mathrm{d}\tau \tag{5.4.10}$$

是初值问题 (5.4.5) 式的解.

证 对于 $u_2 = \dfrac{\partial}{\partial t}[U(t, M) * \varphi(M)]$, 由基本解的定义, 交换积分与求导、求极限的次序, 可以验证

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= \frac{\partial^3}{\partial t^3}[U(t, M) * \varphi(M)] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} U(t, M) * \varphi(M)\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t}[LU(t, M) * \varphi(M)] = \frac{\partial}{\partial t} L[U(t, M) * \varphi(M)] \\ &= L\frac{\partial}{\partial t}[U(t, M) * \varphi(M)] = Lu_2, \\ u_2\Big|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t}[U(t, M) * \varphi(M)]|_{t=0} = \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} * \varphi(M) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \delta(M) * \varphi(M) = \varphi(M),\\
\left.\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{t=0} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}[U(t,M) * \varphi(M)]|_{t=0} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} * \varphi(M)|_{t=0}\\
&= [LU(t,M) * \varphi(M)]|_{t=0} = L[U(t,M)|_{t=0}] * \varphi(M)\\
&= 0 * \varphi(M) = 0,
\end{aligned}
$$

故 u_2 是 (5.4.9) 式的解. 类似定理 5.4.1 的证明, 还可验证 $u_1 = U\ (t,\ M) * \psi\ (M)$, $u_3 = \displaystyle\int_0^t U(t-\tau, M) * f(\tau, M)\mathrm{d}\tau$ 分别是初值问题 (5.4.7) 式和 (5.4.8) 式的解. 再由叠加原理可知, 公式 (5.4.10) 给出的 u 是初值问题 (5.4.5) 式的解.

对于一般的 $\dfrac{\partial^k u}{\partial t^k} = Lu (k \geqslant 1)$ 型方程的初值问题, 可类似定义基本解, 并利用基本解得到解的积分公式. 如果方程中还有关于 t 的低阶导数, 则解的积分公式有所不同. 例如, 对于初值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\dfrac{\partial u}{\partial t} = Lu, \quad t > 0,\ M \in \mathbf{R}^n,\\
u\Big|_{t=0} = \varphi(M), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(M),
\end{cases}
\tag{5.4.11}
$$

若定义基本解为初值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} + a\dfrac{\partial U}{\partial t} = LU, \quad t > 0,\ M \in \mathbf{R}^n,\\
U\Big|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = \delta(M)
\end{cases}
\tag{5.4.12}
$$

的解, 则 (5.4.11) 式的解的积分公式为

$$
u = \frac{\partial}{\partial t}\Big[U(t,M) * \varphi(M)\Big] + U(t,M) * \Big[a\varphi(M) + \psi(M)\Big]. \tag{5.4.13}
$$

基本解方法也可用于求解常微分方程的初值问题. 对于常系数线性微分方程初值问题

$$
\begin{cases}
Lu = u^{(n)}(t) + a_1 u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}u'(t) + a_n u(t) = f(t), \quad t > 0,\\
u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1, \cdots, u^{(n-1)}(0) = u_{n-1},
\end{cases}
\tag{5.4.14}
$$

定义初值问题

$$
\begin{cases}
LU = 0, \quad t > 0,\\
U(0) = U'(0) = \cdots = U^{(n-2)}(0) = 0, \quad U^{(n-1)}(0) = 1
\end{cases}
\tag{5.4.15}
$$

的解 $U(t)$ 为它的基本解. 则当 $f(t)$ 连续时, (5.4.14) 式的解

$$
u(t) = U(t) * f(t) + b_{n-1}U(t) + b_{n-2}U'(t) + \cdots + b_1 U^{(n-2)}(t) + u_0 U^{(n-1)}(t), \tag{5.4.16}
$$

这里, $b_1,\cdots,b_{n-1}$ 由 (5.4.14) 式的初始条件和 (5.4.15) 式的方程递推确定, 而

$$U(t)*f(t)=\int_0^t U(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

5.4.3 热传导方程的初值问题

热传导方程的初值问题已在第 4 章中用 Fourier 变换解决, 这里用基本解方法重新解之.

例 5.4.1 求 n 维热传导方程初值问题的基本解, 即求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}U=a^2\Delta_n U, & t>0,\ \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n,\\ U|_{t=0}=\delta(\boldsymbol{x}).\end{cases}\tag{5.4.17}$$

解 求解初值问题的常用方法是 Fourier 变换, 对 (5.4.17) 式作 n 维 FT, 记 $\widehat{U}(t,\boldsymbol{\lambda})=F[U(t,\boldsymbol{x})]$, $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in\mathbf{R}^n$, 得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\widehat{U}}{\mathrm{d}t}=-a^2\rho^2\widehat{U}, & \rho^2=\displaystyle\sum_{j=1}^n\lambda_j^2,\\ \widehat{U}|_{t=0}=1.\end{cases}$$

可知, 像函数

$$\widehat{U}(t,\boldsymbol{\lambda})=\mathrm{e}^{-a^2\rho^2t},$$

作反变换, 求得基本解

$$\begin{aligned}U(t,\boldsymbol{x})&=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-a^2\rho^2t}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}\\&=\prod_{j=1}^n\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2\lambda_j^2t}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_jx_j}\mathrm{d}\lambda_j\right]\\&=\prod_{j=1}^n\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x_j^2}{4a^2t}}\\&=\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^n\mathrm{e}^{-\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{4a^2t}}.\end{aligned}\tag{5.4.18}$$

由定理 5.4.1 得, 热传导方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta_nu+f(t,\boldsymbol{x}), & t>0,\ \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,\\ u|_{t=0}=\varphi(\boldsymbol{x})\end{cases}\tag{5.4.19}$$

的解

$$u(t,\boldsymbol{x})=U(t,\boldsymbol{x})*\varphi(\boldsymbol{x})+\int_0^tU(t-\tau,\boldsymbol{x})*f(\tau,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\tau$$

$$= \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^n \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(\boldsymbol{x}') \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^2}{4a^2 t}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}'$$
$$+\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\right)^n \int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{(\sqrt{t-\tau})^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(\tau, \boldsymbol{x}') \exp\left[-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \mathrm{d}\boldsymbol{x}', \quad (5.4.20)$$

其中, 积分变量 $\boldsymbol{x}' = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$.

由此可见, 不同维数的热传导方程初值问题的基本解和一般解的形式都是一样的. 以 $n = 1$ 为例, 基本解

$$U = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) \qquad (5.4.18)'$$

是一维 Gauss 分布密度函数, 它所描述的温度的分布曲线如图 5.4.1 所示, 其中, 不同的时刻 $t_1 < t_2 < t_3$.

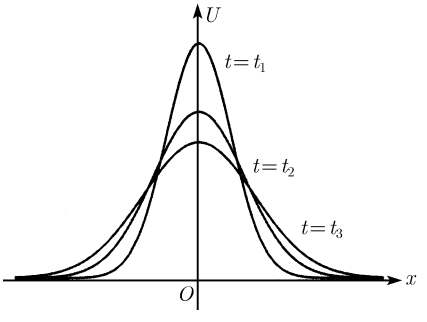


图 5.4.1

由图可见, t 越小, 对应的温度曲线在 $x = 0$ 附近升得越高, 在远离 $x = 0$ 处温度曲线越低. 当 $t \to +0$ 时温度曲线趋于 $\delta(x)$, 当 $t \to +\infty$ 时曲线越来越平, 最终各点温度趋于 0. 这个温度变化过程符合初始时刻 $x = 0$ 点受到热脉冲作用引起的热量传播的实际过程, 表明杆上的温度随着时间发展, 逐渐趋于平衡.

Gauss 曲线的宽度 (统计意义) 为 $a\sqrt{2t}$, 高度为 $(2a\sqrt{\pi t})^{-1}$, 因此 a 决定了热平衡的速度. a 越大, 热平衡过程越快. 由于 $a = \sqrt{k(c\rho)^{-1}}$ (k 为热传导系数, c 为比热, ρ 为密度), a 的这种作用也是合理的.

对于任意时刻 t, 基本解的积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(t,x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) \mathrm{d}x \equiv 1.$$

这说明杆上的总能量不变, 始终保持为初始时刻热脉冲给予的热量 $c\rho$, 这是符合能量守恒定律的.

但是, 基本解也有不符合实际的地方. 由图 5.4.1 可知, 对于任意时刻 t, $U(t,x) > 0$, 即杆上每一点都受到了初始 $x=0$ 处热脉冲的影响, 意味着热量传播速度为无穷大, 当然是不可能的. 这说明我们的数学模型还不能完全反映客观实际.

5.4.4 波动方程的初值问题

波动方程的初值问题可用 Fourier 变换直接求解, 这里我们采用基本解方法.

例 5.4.2 求单波方程初值问题的基本解, 即求解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} + a\dfrac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad t > 0,\ -\infty < x < +\infty, \\ U|_{t=0} = \delta(x). \end{cases}$$

解 对方程和初始条件作 Fourier 变换, 记 $\widehat{U}(t,\lambda)=F[U(t,x)]$, 得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\widehat{U}}{\mathrm{d}t}+\mathrm{i}a\lambda\widehat{U}=0,\\ \widehat{U}|_{t=0}=1.\end{cases}$$

此常微分方程初值问题的解

$$\widehat{U}(t,\lambda)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\lambda t}$$

作反变换, 得

$$U(t,x)=F^{-1}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\lambda t}]=\delta(x-at).$$

由定理 5.4.1 可直接得到单波方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+a\dfrac{\partial u}{\partial x}=f(t,x), \quad t>0,\ -\infty<x<+\infty,\\ u|_{t=0}=\varphi(x)\end{cases}$$

的解

$$\begin{aligned}u(t,x)&=\delta(x-at)*\varphi(x)+\int_0^t\delta(x-a(t-\tau))*f(\tau,x)\mathrm{d}\tau\\&=\varphi(x-at)+\int_0^t f(\tau,x-a(t-\tau))\mathrm{d}\tau\\&=\varphi(x-at)+\frac{1}{a}\int_{x-at}^{x}f\left(t-\frac{x-\xi}{a},\xi\right)\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

例 5.4.3 求三维波动方程初值问题的基本解, 即求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2U}{\partial t^2}=a^2\Delta_3U, \quad t>0,\ -\infty<x,y,z<+\infty,\\ U|_{t=0}=0, \quad \left.\dfrac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0}=\delta(x,y,z).\end{cases}\tag{5.4.21}$$

解 记 $\widehat{U}(t,\lambda,\mu,\nu)=\mathrm{F}[U(t,x,y,z)]$. 对方程和初始条件作 Fourier 变换, 得常微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\widehat{U}}{\mathrm{d}t^2}=-a^2\rho^2\widehat{U}, \quad t>0,\ -\infty<\lambda,\mu,\nu<+\infty,\\ \widehat{U}|_{t=0}=0, \quad \left.\dfrac{\partial\widehat{U}}{\partial t}\right|_{t=0}=1,\end{cases}$$

其中, $\rho=\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}$. 该初值问题的解为

$$\widehat{U}(t,\lambda,\mu,\nu)=\frac{\sin a\rho t}{a\rho}.$$

作反变换, 有

$$\begin{aligned} U(t,x,y,z) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin a\rho t}{a\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda x+\mu y+\nu z)}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin a\rho t}{a\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu, \end{aligned}$$

这里, 向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, $\boldsymbol{\rho}=(\lambda,\mu,\nu)$. 以 $\boldsymbol{r}$ 方向为极轴方向取球坐标, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则

$$\begin{aligned} U(t,x,y,z) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{+\infty}\frac{\sin a\rho t}{a\rho}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho r\cos\theta}\rho^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho \\ &= -\frac{1}{4\pi^2 a}\int_0^{+\infty}\sin a\rho t\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho r\cos\theta}}{\mathrm{i}r}\bigg|_0^{\pi}\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{1}{2\pi^2 ar}\int_0^{+\infty}\sin a\rho t\sin\rho r\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{1}{4\pi^2 ar}\int_0^{+\infty}\left[\cos\rho(r-at)-\cos\rho(r+at)\right]\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{1}{8\pi^2 ar}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho(r-at)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho(r+at)}\right]\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{1}{4\pi ar}\left[\delta(r-at)-\delta(r+at)\right] \\ &= \frac{\delta(r-at)}{4\pi ar}. \end{aligned} \tag{5.4.22}$$

由定理 5.4.2 知, 三维波动方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta_3 u+f(t,x,y,z), \quad t>0,-\infty<x,y,z<+\infty, \\ u|_{t=0}=\varphi(x,y,z), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x,y,z) \end{cases} \tag{5.4.23}$$

的解

$$\begin{aligned} u(t,M) &= U(t,M)*\psi(M)+\frac{\partial}{\partial t}[U(t,M)*\varphi(M)] \\ &\quad +\int_0^t U(t-\tau,M)*f(\tau,M)\mathrm{d}\tau, \quad M=(x,y,z)\in\mathbf{R}^3. \end{aligned}$$

其中

$$u_1(t,x,y,z)=U(t,M)*\psi(M)=\frac{1}{4\pi a}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(r-at)}{r}\psi(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,$$

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

若以 $M=(x,y,z)$ 为中心,r 为半径作球面 S_r, 球坐标变换 $\xi=x+r\sin\theta\cos\varphi$, $\eta=y+r\sin\theta\sin\varphi$, $\zeta=z+r\cos\theta$, 则

$$\begin{aligned}u_1(t,x,y,z)&=\frac{1}{4\pi a}\int_0^{+\infty}\frac{\delta(r-at)}{r}\Big[\oiint_{S_r}\psi(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}S\Big]\mathrm{d}r\\&=\frac{1}{4\pi a^2t}\oiint_{S_{at}}\psi(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}S=t\cdot\frac{1}{4\pi(at)^2}\oiint_{S_{at}}\psi(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}S\\&=tM_{at}(\psi),\end{aligned}\tag{5.4.24a}$$

其中, 记号 $M_{at}(\psi)$ 表示函数 ψ 在以 (x,y,z) 为中心, at 为半径的球面 S_{at} 上的平均值. 类似地, 可得

$$u_2(t,x,y,z)=\frac{\partial}{\partial t}U(t,M)*\varphi(M)=\frac{\partial}{\partial t}\left[tM_{at}(\varphi)\right],\tag{5.4.24b}$$

$$\begin{aligned}u_3(t,x,y,z)&=\int_0^t U(t-\tau,M)*f(\tau,M)\mathrm{d}\tau\\&=\int_0^t(t-\tau)M_{a(t-\tau)}(f)\mathrm{d}\tau\\&=\int_0^t\frac{1}{4\pi a^2(t-\tau)}\oiint_{S_{a(t-\tau)}}f(\tau,\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}S\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at}\oiint_{S_r}\frac{f\left(t-\frac{r}{a},\xi,\eta,\zeta\right)}{r}\mathrm{d}S\mathrm{d}r.\end{aligned}\tag{5.4.24c}$$

最后一步由变量代换 $r=a(t-\tau)$ 得, 公式中的球面 $S_{a(t-\tau)}$ 和 S_r 均以 (x,y,z) 为中心.

齐次三维波动方程初值问题的解为

$$u(t,x,y,z)=tM_{at}(\psi)+\frac{\partial}{\partial t}[tM_{at}(\varphi)].\tag{5.4.25}$$

从以上解的积分公式可以清楚地看到, 初始条件引起的位移 u_1 与 u_2 由**球面积分**确定. 具体说, t 时刻 (x,y,z) 点的位移, 由以 (x,y,z) 为中心、at 为半径的球面上各点的初位移 $\varphi(\xi,\eta,\zeta)$ 和初速度 $\psi(\xi,\eta,\zeta)$ 决定. 这反映了初始扰动以速度 a 向外传播的事实. 而外力 $f(t,x,y,z)$ 引起的 t 时刻 (x,y,z) 点的位移 $u_3(t,x,y,z)$ 是 $\frac{1}{r}f(t-\frac{r}{a},\xi,\eta,\zeta)$ 在以 (x,y,z) 为中心, at 为半径的球体内的**球体积分**确定. 这反映了 $M=(x,y,z)$ 点在 t 时刻的扰动受到附近各点 $M_0=(\xi,\eta,\zeta)$ $(r(M_0,M)\leqslant at)$ 所受外力的影响, 而且这些外力是 $t-\frac{r}{a}$ 时刻的, $\frac{r}{a}$ 恰好是外力影响从 M_0 传到 M 点所需的时间. 外力影响前的因子 $\frac{1}{r}$ 则反映了外力影响向各方传播过程中的能量

守恒. 这些都是符合实际情况的. 物理上常把 u_3 的积分称为**推迟势**.

下面讨论二维波动方程的初值问题. 低维的问题可以看成高维问题的特殊情况, 从而可以利用高维的已知结论来解决低维的问题. 这种方法称为**降维法**.

例 5.4.4 求解二维波动方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \quad t>0,\ -\infty<x,y<+\infty, \\ u|_{t=0} = \varphi(x,y), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x,y). \end{cases} \tag{5.4.26}$$

解 此二维问题可以看成是三维波动方程当初始条件 $u|_{t=0}=\varphi(x,y),\ u_t|_{t=0}=\psi(x,y)$ 时的特殊情况. 由公式 (5.4.25) 知

$$u(t,x,y) = tM_{at}(\psi) + \frac{\partial}{\partial t}[tM_{at}(\varphi)].$$

先将 $M_{at}(\psi)$ 中的球面上的第一型积分

$$\oiint_{S_{at}} \psi(\xi,\eta)\mathrm{d}S$$

化为二重积分 (图 5.4.2). 由于被积函数 $\psi(\xi,\eta)$ 与 ζ 无关, ψ 在上、下半球面上的积分值相同. 上半球面 $S_{at上}$ 的方程为

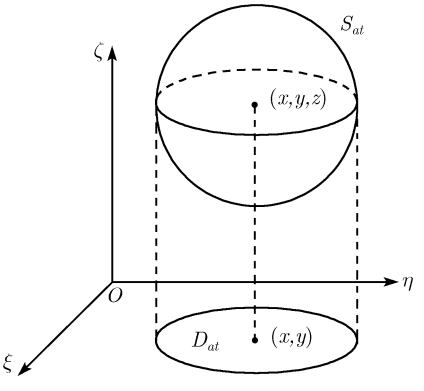


图 5.4.2

$$\zeta = z + \sqrt{(at)^2 - (\xi-x)^2 - (\eta-y)^2},$$

球面面积元 $\mathrm{d}S$ 与其在 ξ–η 平面的投影 $\mathrm{d}A$ 间有关系

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)^2}\,\mathrm{d}A \\ &= \frac{at}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\mathrm{d}A, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \oiint_{S_{at}} \psi(\xi,\eta)\mathrm{d}S &= 2\iint_{S_{at上}} \psi(\xi,\eta)\mathrm{d}S \\ &= 2at\iint_{D_{at}} \frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\mathrm{d}A. \end{aligned}$$

二重积分区域 D_{at} 是 S_{at} 在 ξ–η 平面上的投影, 即以 (x,y) 为中心 , at 为半径的圆域.

所以, 二维波动方程初值问题 (5.4.26) 式的解为

$$u(t,x,y)=\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{D_{at}}\frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$
$$+\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{D_{at}}\frac{\varphi(\xi,\eta)}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta. \tag{5.4.27}$$

若取 $\varphi(x,y)\equiv 0,\ \psi(x,y)=\delta(x,y)$, 由公式 (5.4.27) 可得二维波动方程初值问题的基本解

$$\begin{aligned}U(t,x,y)&=\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{D_{at}}\frac{\delta(\xi,\eta)}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\&=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi a\sqrt{(at)^2-x^2-y^2}}, & r<at\\ 0, & r>at\end{cases}\\&=\frac{1}{2\pi a\sqrt{(at)^2-r^2}}H(at-r),\quad r=\sqrt{x^2+y^2}.\end{aligned} \tag{5.4.28}$$

继续降维, 可从二维波动方程初值问题的解 (5.4.27) 式, 或从三维波动方程初值问题的解 (5.4.25) 式, 得一维波动方程 (弦振动方程) 初值问题解的积分公式, 即达朗贝尔公式

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

进而可得一维波动方程初值问题的基本解

$$U(t,x)=\frac{1}{2a}H(at-|x|). \tag{5.4.29}$$

一、二、三维波动方程初值问题的基本解反映了初始时刻在原点给以数值为 1 的冲量引起的扰动在空间的传播过程. 可以证明, 在传播过程中总动量保持不变. 但是与热传导方程不一样的是, 不同维数波动方程的基本解具有不同的形式, 基本解的奇异性随着维数的增加而增加.

我们再从解的积分公式来看波在空间的传播.

如前所述, 三维空间中, 齐次波动方程初值问题的解 $u(t,x,y,z)$ 完全决定于初始条件 φ 和 ψ 在以 (x,y,z) 为中心 at 为半径的球面 S_{at} 上的平均值 (公式 (5.4.25)). 如果初始扰动仅发生在空间的一个有界闭区域 T_0, 考察 T_0 外一点 $M(x,y,z)$ 在不同时刻 t 的状态 $u(t,x,y,z)$. 记 d_1,d_2 分别为 T_0 到 M 点的最短和最长距离, 则当 $t<\dfrac{d_1}{a}$ 时, S_{at} 与 T_0 不相交, $u(t,x,y,z)=0$, 反映初始扰动尚未到达 M 点. 当 $\dfrac{d_1}{a}\leqslant t\leqslant\dfrac{d_2}{a}$ 时, S_{at} 与 T_0 相交, $u(t,x,y,z)$ 一般不为 0, 反映 M 点处于受扰状态.

当 $t > \dfrac{d_2}{a}$ 时, T_0 已完全进入球面 S_{at} 内, 又有 $u(t,x,y,z)=0$, 即点 M 回复到原来状态 (图 5.4.3). 反过来, 考察 t_0 时刻空间各部分的受扰情况. 为简单起见, 假设初始扰动集中于以 R_0 为半径的球 T_0 内, 显然在 t_0 时刻与 T_0 同心的, 以 at_0+R_0 和 at_0-R_0 为半径的两个同心球面内的点处于受扰状态, 空间其余部分处于原来的位置. 称这两个球面为**波的前阵面和后阵面**, 前后阵面以法向速度 a 前进. 当初始扰动集中于有界区域时, 三维空间中波传播的前、后阵面都是清晰的 (图 5.4.4).

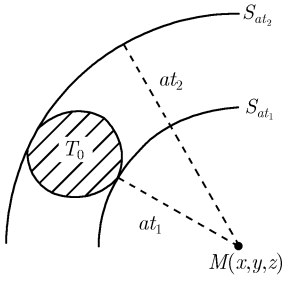


图 5.4.3

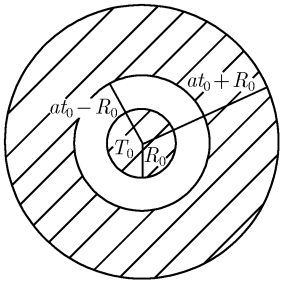


图 5.4.4

二维情形则不同. 由公式 (5.4.27) 知, 齐次波动方程的解 $u(t,x,y)$ 决定于初始条件 φ 和 ψ 在以 (x,y) 为中心 at 为半径的圆域 D_{at} 上的积分. 对于发生在平面有界闭区域 T_0 的初始扰动, 若点 $M=(x,y)$ 到 T_0 的最短最长距离分别为 d_1,d_2, 当 $t<\dfrac{d_1}{a}$ 时, D_{at} 与 T_0 不相交, $u(t,x,y)=0$, 说明初始扰动尚未到达. 当 $\dfrac{d_1}{a}<t<\dfrac{d_2}{a}$, D_{at} 与 T_0 相交, $u(t,x,y)$ 一般不为 0, M 点进入受扰状态. 但是当 $t>\dfrac{d_2}{a}$ 后, T_0 完全落入 D_{at} 内, M 点继续受到扰动, 直到永远 (图 5.4.5). 因此, 当 T_0 为平面有界区域时, 在每一个时刻 t_0, 波的传播有清晰的前阵面, 但无明晰的后阵面 (图 5.4.6).

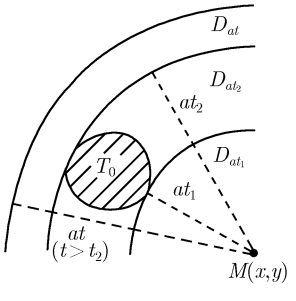


图 5.4.5

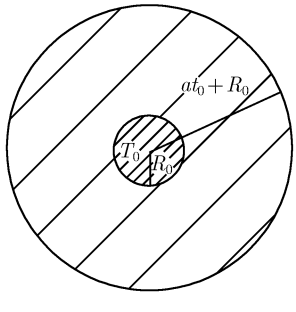


图 5.4.6

由以上分析可知, 二维和三维空间波的传播是不同的. 如果 $u(t,x,y,z)$ 的值在

平行于 z 轴的直线上为常数, 则可看成二维情形, 称之为柱面波. 柱面波不适用于传递信号.

*5.4.5 混合问题的 Green 函数法

对于发展方程的混合问题通常用分离变量法或积分变换法求解, 当然也可以利用点源函数. 仅以一维波动方程的混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), \quad t>0,\ 0<x<l, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

为例.

称混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad t>\tau>0,\ 0<x,\xi<l, \\ G|_{x=0} = G|_{x=l} = 0, \\ G|_{t=\tau} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial G}{\partial t}\right|_{t=\tau} = \delta(x-\xi) \end{cases}$$

的解 $G(t,x;\tau,\xi)$ 为**一维波动方程混合问题的 Green 函数**.

由于 δ 函数同样可作 Fourier 展开, 用分离变量法即可求出

$$G(t,x;\tau,\xi) = \frac{2}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{l}\xi\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

注意到这里的**边界条件齐次**, 类似初值问题的分析方法, 可以得到上述混合问题解的积分公式

$$\begin{aligned} u(t,x) = &\int_0^l \psi(\xi)G(t,x;0,\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{\partial}{\partial t}\int_0^l \varphi(\xi)G(t,x;0,\xi)\mathrm{d}\xi \\ &+ \int_0^t\int_0^l f(\tau,\xi)G(t,x;\tau,\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

不难直接代入方程和定解条件验证.

对于一般的方程 $u_t = Lu + f$, $u_{tt} = Lu + f$ 在第 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ类边界条件下的混合问题, 也可类似地给出 Green 函数的定义和解的积分公式, 但是需注意**边界条件必须是齐次的**.

混合问题的 Green 函数也可定义为混合问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \delta(t-\tau)\delta(x-\xi), \quad t,\ \tau>0,\ 0<x,\xi<l, \\ G|_{x=0} = G|_{x=l} = 0, \\ G|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial G}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

的解.

若改记第一种定义的 Green 函数为 $U(t,x;\tau,\xi)$, 利用冲量原理不难证明

$$G(t,x;\tau,\xi)=\int_0^t\int_0^l\delta(\tau'-\tau)\delta(\xi'-\xi)U(t,x;\tau'\xi')\mathrm{d}\xi'\mathrm{d}\tau'$$
$$=\begin{cases}U(t,x;\tau,\xi), & \tau\in[0,t],\xi\in[0,l],\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以, 可以认为这两种定义是一致的.

*5.5 广 义 函 数

在前面几节中已引入了 δ 函数和它的某些运算和变换, 和 δ 函数有关又引入了微分方程的基本解、初值问题的基本解, 得出了一些在经典意义下发散的含参变量积分公式. 在前边的章节中用各种方法解定解问题时, 常常不严格地分析必要的条件而进行各种演算和变换, 如交换积分的顺序, 交换微分和积分的顺序, 逐项求导, 进行积分变换等, 而这些演算和变换在经典的意义下不总是可以进行的. 但将会看到在广义函数理论的意义下这些演算和变换常常是可以进行的, 广义函数的引入不但扩大了函数的范围, 引入了某些奇异的广义函数, 更重要的是扩大了函数的运算和变换. 在广义函数中, 在经典意义下不可导的函数可以是无穷阶可导, 许多在经典意义下发散的积分具有确定的意义, 许多函数都可进行 FT, $\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}$ 和卷积, 可以较自由交换积分的顺序, 交换积分和微分的顺序等. 总之, 广义函数理论的引入常常可以较自由地进行各种运算和变换.

5.5.1 广义函数的概念

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个变量, Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个区域, $M(\Omega)$ 是定义在 Ω 上的某一类函数构成的一个函数空间, 此空间是一个线性空间且有一定的极限关系

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=\varphi(x),$$

其中, $\varphi_k(x)$, $\varphi(x)$ 为 $M(\Omega)$ 中的函数. 具有这种线性结构和极限关系 (拓扑结构) 的函数空间 $M(\Omega)$ 称为一个**基本空间**.

称定义在 $M(\Omega)$ 上的线性连续泛函 f 为一个**广义函数**, 即 f 是一个从 $M(\Omega)$ 到实数 $\mathbf{R}$(或复数 $\mathbf{C}$) 的映射:

$$M(\Omega)\longrightarrow\mathbf{R}\ \ (\text{或 }\mathbf{C}),$$
$$\varphi(x)\longrightarrow\langle f,\varphi(x)\rangle,$$

$\langle f, \varphi(x)\rangle$ 称为一个配对, 它表示泛函的值. 此泛函是线性的, 即

$$\langle f, \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x)\rangle = \alpha_1\langle f, \varphi_1(x)\rangle + \alpha_2\langle f, \varphi_2(x)\rangle,$$

其中, $\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x)$ 是 $M(\Omega)$ 中函数的线性组合. 同时, 此泛函是连续的, 即

$$\text{当 } \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = \varphi(x) \text{ 时, 则 } \lim_{k\to\infty} \langle f, \varphi_k(x)\rangle = \langle f, \varphi(x)\rangle.$$

把泛函 f 也记为 $f(x)$, x 也称为**广义函数的自变量**. 而形式上用积分的符号来表示配对的值, 即

$$\langle f(x), \varphi(x)\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall\varphi(x) \in M(\Omega),$$

这是 n 重积分的记号, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$. 这时, 称广义函数 $f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 n 元广义函数.

在广义函数理论中, 称 $\varphi(x)$ 为**试验函数**, 以后常用 $\varphi(x)$, $\psi(x), \varphi_1(x)$ 等表示. 而用 $f(x), g(x), f_1(x)$ 等表示广义函数. 在广义函数中, 虽然只是用积分的符号形式表示配对的值, 但是它将给广义函数的各种运算和变换带来很大的方便. 例如, 在这种形式记号下, 泛函的线性相当于线性组合的积分等于积分的线性组合, 泛函的连续性相当于积分号下求极限.

广义函数的全体构成一个广义函数空间, 记为 $M'(\Omega)$, 称之为 $M(\Omega)$ 的**对偶空间**. 而 $M'(\Omega)$ 也是一个线性空间且具有下述的极限关系, 即当 $f_1(x), f_2(x) \in M'(\Omega)$ 时, 按下列自然的方式确定其线性运算, 即 $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \in M'(\Omega)$ 定义为

$$\langle \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x),\ \varphi(x)\rangle = \alpha_1\langle f_1(x), \varphi(x)\rangle + \alpha_2\langle f_2(x), \varphi(x)\rangle,$$

这也相当于线性组合的积分等于积分的线性组合. 另外设有广义函数的序列 $f_k(x)$ 和一个广义函数 $f(x)$, 如果有

$$\lim_{k\to\infty} \langle f_k(x), \varphi(x)\rangle = \langle f(x), \varphi(x)\rangle, \quad \forall\varphi(x) \in M(\Omega),$$

则称在 $M'(\Omega)$ 中有极限关系

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x),$$

这也是相当于积分号下求极限, 称这种极限为**弱极限**. 有了广义函数序列的极限, 相应地就可定义广义函数项级数的收敛性及其和函数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) = S(x)$. 另外, 也可类似定义具有连续参变数 t 的广义函数 $f(t, x)$ 的极限, $\lim\limits_{t\to t_0} f(t, x) = g(x)$ 定义为

$$\lim_{t\to t_0} \langle f(t, x), \varphi(x)\rangle = \langle g(x), \varphi(x)\rangle, \quad \forall\varphi(x) \in M(\Omega).$$

这样基本函数空间 $M(\Omega)$ 和与它对偶的广义函数空间 $M'(\Omega)$ 均为线性空间且均有各自的极限关系, 而且只要确定了 $M(\Omega)$, 也就自然地确定了 $M'(\Omega)$. 但在广义函数中只讨论后面所述的三个空间, 由于其基本空间具有无穷的光滑性和其他很强的性质, 这样就使得在对偶的广义函数中也具有无穷阶的可导性, 而且可以较自由地进行极限运算、FT 和 $\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}$、卷积等运算和变换, 而且还能较自由地交换这些运算和变换的顺序.

5.5.2 $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$, $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{R}^n)$, $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 与 $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$, $\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{R}^n)$, $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$

$\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$: 它表示在 $\mathbf{R}^n$ 上无穷阶连续可微函数的全体. 它显然是一个线性空间. 另外按无穷阶局部一致收敛的极限确定其极限关系, 即

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=\varphi(x)$$

表示对于 $\mathbf{R}^n$ 中的任意一个有界闭域 $\overline{\Omega}$ 上, 当 k 趋于无穷时, $\varphi_k(x)$ 和它的各阶导数均一致收敛于 $\varphi(x)$ 和它的相应阶的导数, 即对于任意的多重指标 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\varphi_k(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}=\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

在 $\overline{\Omega}$ 上一致成立. 这样 $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$ 就构成一个基本空间, 和它对偶的广义函数空间为 $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$.

$\varphi(\mathbf{R}^n)$: 它表示在 $\mathbf{R}^n$ 上无穷阶连续可微且速降的函数空间. 所谓速降的函数 $\varphi(x)$ 是指它和它的任意阶偏导数乘上一个任意次的 n 元多项式 $P(x)$, 当 $|x|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\to\infty$ 时, 均在 $\mathbf{R}^n$ 中一致收敛于 0, 显然 $\varphi(\mathbf{R}^n)$ 是一个线性空间. 另外, 其中的极限关系

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=\varphi(x)$$

是表示对于任意次的多项式 $P(x)$ 和任意的多重指标 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 均有

$$\lim_{k\to\infty}P(x)\left(\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\varphi_k(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}-\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)=0$$

在 $\mathbf{R}^n$ 中一致成立. 这样 $\varphi(\mathbf{R}^n)$ 就构成一个基本空间, 与其对偶的广义函数空间为 $\varphi'(\mathbf{R}^n)$. $\varphi(\mathbf{R}^n)$ 中的函数也是很多的, 最典型的函数是

$$P(x)\mathrm{e}^{-a^2|x|^2},$$

其中, $P(x)$ 表示任意次的 n 元多项式.

$\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$: 它表示在 $\mathbf{R}^n$ 上无穷阶连续可微且有界的支集的函数类. 所谓函数 $\varphi(x)$ 的支集是

$$\operatorname{supp}\varphi(x)=\overline{\{x|\varphi(x)\neq 0\}},$$

即支集为 $\varphi(x)\neq 0$ 的点集与它的极限点的并集. 如果支集有界, 那么 $\varphi(x)$ 在某个有界闭域之外恒等于 0. 这样的函数也是很多的, 最典型的函数是

$$\varphi(x)=b(x)\eta(x,a),$$

其中, $b(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上任意无穷阶连续可微函数,

$$\eta(x,a)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{|x|^2-a^2}}, & |x|<a,\\ 0, & |x|\geqslant a,\end{cases}$$

这样的函数其支集在球体 $\{|x|\leqslant a\}$ 之内. 显然 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 是一个线性空间. 另外 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 中的极限关系 $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x)=\varphi(x)$ 是指

(1) $\varphi_k(x),\varphi(x)$ 的支集均在一个有界的公共闭域 $\overline{\Omega}$ 内.

(2) 当 k 趋于无穷大时, $\varphi_k(x)$ 和它的任意阶偏导数均在 $\overline{\Omega}$ 上一致收敛于 $\varphi(x)$ 和它的相应阶偏导数, 即对任意的多重指标 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 均有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\varphi_k(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}=\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

在 $\overline{\Omega}$ 上一致成立. 这样 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 就构成一个基本空间, 与其对偶的广义函数空间为 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$.

以上三个基本函数空间有下列关系:

$$\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)\supsetneq\varphi(\mathbf{R}^n)\supsetneq\mathscr{D}(\mathbf{R}^n),$$

上述符号不但表示集合的包含关系, 而且也表示极限的包含关系. 其意义是若 $\varphi(\mathbf{R}^n)$ 中有极限 $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x)=\varphi(x)$ 成立, 那么把它作为 $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$ 的极限也成立. 若 $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x)=\varphi(x)$ 作为 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 中的极限成立, 那么它作为 $\varphi(\mathbf{R}^n)$ 和 $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$ 的极限也成立.

作为对偶空间的广义函数空间正好有相反的关系

$$\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)\subsetneq\varphi'(\mathbf{R}^n)\subsetneq\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n),$$

也就是说基本空间越小, 与其对偶的广义函数空间越大 (广). 且当作为 $\varphi'(\mathbf{R}^n)$ 的极限 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$ 成立时, 那么把它作为 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 的极限也成立. 当作为 $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$ 的极限 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$ 成立时, 那么把它作为 φ' $(\mathbf{R}^n)$ 和 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 中的极限也成立.

对于 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 和 $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$, $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$ 也可以在 $\mathbf{R}^n$ 中的一个区域 Ω 中加以类似的讨论, 分别地记为 $\mathscr{D}(\Omega)$, $\mathscr{D}'(\Omega)$ 和 $\mathscr{E}(\Omega)$, $\mathscr{E}'(\Omega)$.

在有的教材中直接把 $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$ 记为 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$, 把 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 记为 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, 但本书中 C^∞ 只表示无穷阶连续可微的函数类, C_0^∞ 只表示无穷阶连续可微且具有有界支集的函数类, 并不考虑它们的极限关系.

在上述三个广义函数空间中最广的是 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, 当不加特别说明时, 以后说的广义函数 $f(x)$ 是此空间的广义函数. 但为了在广义函数中进行 $\mathrm{FT}, \mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}$ 和卷积等运算在 $\varphi'(\mathbf{R}^n)$ 中讨论更为封闭和方便, 本书中给出的具体的广义函数都是 $\varphi'(\mathbf{R}^n)$ 中的广义函数, 而且可以证明 $L^p(\mathbf{R}^n)(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ 和缓增函数都是 $\varphi'(\mathbf{R}^n)$ 中的正则广义函数.

5.5.3 广义函数和广义函数极限的几个例子

例 5.5.1 (正则广义函数) 若 $f(x)$ 是在 $\mathbf{R}^1$ 上局部绝对可积的普通的一元函数, 即 $f(x)$ 在任意一个有界闭区间 $[a,b]$ 上绝对可积. 这时, 把它作为一元广义函数 $f(x)$, 与试验函数的配对就用经典意义下的积分来定义, 即

$$\langle f(x), \varphi(x)\rangle \stackrel{d}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi(x) \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^1),$$

称此广义函数为**正则广义函数**, 或称为**积分型广义函数**. 非正则广义函数称为奇异广义函数.

如果 $f(x)$ 不但在 $\mathbf{R}^1$ 上局部绝对可积, 而且当 $|x|$ 充分大时它的值不超过一个多项式, 则 $f(x)$ 还可作为 $\varphi'(\mathbf{R}^1)$ 中的正则广义函数. 如果 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上绝对可积, 而且它的支集有界, 则 $f(x)$ 还可作为 $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^1)$ 中的正则广义函数.

例 5.5.2 $\delta(x)$, $\delta(x-\xi)$, 其配对的定义分别为

$$\langle \delta(x), \varphi(x)\rangle = \int_{\mathbf{R}^n} \delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \stackrel{d}{=} \varphi(0),$$
$$\langle \delta(x-\xi), \varphi(x)\rangle = \int_{\mathbf{R}^n} \delta(x-\xi)\varphi(x)\mathrm{d}x \stackrel{d}{=} \varphi(\xi).$$

这是奇异广义函数, 且它们也都是 $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$ 中的广义函数, 当然更是 $\varphi'(\mathbf{R}^n)$ 和 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 中的广义函数.

例 5.5.3 广义函数 $\dfrac{1}{x}$(一元广义函数), 其配对定义为

$$\left\langle \frac{1}{x}, \varphi(x)\right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x \stackrel{d}{=} P.V\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

即用积分主值来定义配对的值, 所以不难推出

$$\left\langle \frac{1}{x}, \varphi(x)\right\rangle = P.V\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x|\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

此广义函数也是 $\varphi'(\mathbf{R}^1)$ 中的广义函数, 但它不是 $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^1)$ 中的广义函数.

例 5.5.4 可以证明, 在一元广义函数的意义下有下列极限公式:

(a) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \rho_\varepsilon(x) = \delta(x)$, 其中

$$\rho_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x|<\varepsilon,\\ 0, & |x|>\varepsilon.\end{cases}$$

(b) $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\dfrac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}=\delta(x)$.

(c) $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}=\delta(x)$.

(d) $\lim\limits_{N\to+\infty}\dfrac{\sin Nx}{\pi x}=\delta(x)$.

这些例子说明, 左端的正则广义函数, 甚至是 C^∞ 类的正则广义函数其极限得到奇异广义函数. 上列正则广义函数的函数在 $\mathbf{R}^1$ 上的积分总是为 1, 并且作出这些函数的图形可以看到, 当参数在取极限时, 函数分布的值不断地向原点集中 (图 5.1.1).

这些广义函数极限的公式的证明直接由定义进行. 例如, 不难看出

$$\lim_{\varepsilon\to0}\langle\rho_\varepsilon(x),\varphi(x)\rangle=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(0)=\langle\delta(x),\varphi(x)\rangle,$$

所以, 在广义函数意义下有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(0).$$

这相当于积分号下求极限, 在经典意义下是不可以的.

根据例 5.5.4 中的公式 (c) 可得

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}=\delta(x),$$

此式中左端的函数就是一维热传导方程初值问题的基本解, 当 $t\to0$ 时得奇异广义函数 $\delta(x)$.

例 5.5.5 作为一元广义函数的极限有下列公式:

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{x+\mathrm{i}\varepsilon}=-\mathrm{i}\pi\delta(x)+\frac{1}{x}\overset{d}{=}\frac{1}{x+\mathrm{i}0},$$
$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{x-\mathrm{i}\varepsilon}=\mathrm{i}\pi\delta(x)+\frac{1}{x}\overset{d}{=}\frac{1}{x-\mathrm{i}0}.$$

设 $\ln(x\pm\mathrm{i}\varepsilon)=\ln|x\pm\mathrm{i}\varepsilon|+\mathrm{i}\arg(x\pm\mathrm{i}\varepsilon)$, 其中, $\varepsilon>0$ 为参数, 它们显然均为 $\varphi'(\mathbf{R}^n)$ 中的正则广义函数, 则

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\ln(x\pm\mathrm{i}\varepsilon)=\ln|x|\pm\mathrm{i}\pi H(-x)\overset{d}{=}\ln(x\pm\mathrm{i}0).$$

右端的三个广义函数在物理中常用到, 它们也都是 $\varphi'(\mathbf{R}^1)$ 中的广义函数.

类似地, 多元广义函数也有正则广义函数和奇异广义函数, 也可举出多元广义函数极限的例子.

例 5.5.6 在二元广义函数极限的意义下有下列极限公式:

(a) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\rho_\varepsilon(x)=\delta(x)=\delta(x_1,x_2)$, 其中

$$\rho_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\varepsilon^2}, & |x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}<\varepsilon,\\ 0, & |x|>\varepsilon.\end{cases}$$

(b) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\dfrac{\varepsilon}{2\pi(|x|^2+\varepsilon^2)^{3/2}}=\delta(x_1,x_2)$.

(c) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\dfrac{1}{2\pi\varepsilon^2}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{2\varepsilon^2}}=\delta(x_1,x_2)$.

由 (c) 可知

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{4a^2t}}=\delta(x,y),$$

此式左端函数是正则广义函数, 它是二维热传导方程初值问题的基本解, 当 $t\to 0$ 时得奇异广义函数 $\delta(x,y)$.

例 5.5.7 二维广义函数 $\delta(|x|-r_0)$ 和三维广义函数 $\delta(|x|-r_0)$, 其配对的定义分别为

$$\begin{aligned}\langle\delta(|x|-r_0),\varphi(x_1,x_2)\rangle&=\iint_{\mathbf{R}^2}\delta(|x|-r_0)\varphi(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\&\overset{d}{=}\int_{|x|=r_0}\varphi(x_1,x_2)\mathrm{d}l,\end{aligned}$$

$$\langle\delta(|x|-r_0),\varphi(x_1,x_2,x_3)\rangle\overset{d}{=}\iint_{|x|=r_0}\varphi(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}S.$$

此两个广义函数分别也是 $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^2)$ 和 $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^3)$ 中的广义函数. 当然也是 φ' 和 $\mathscr{D}'$ 中的广义函数.

5.5.4 广义函数的局部性质及广义函数的支集

对于广义函数 $f(x)$ 来说, 它在一点 x_0 的值没有意义, 但是仍可定义它的局部性质和它的支集, 仍可定义它在一个区域 Ω 内等于 0, 或等于一个充分光滑的函数.

为叙述和记号简单, 对一元广义函数 $f(x)$ 来加以讨论, 对于多元广义函数是类似的. 设 (a,b) 是一个区间, 若对于任意支集在 (a,b) 内的试验函数 $\varphi(x)$, $\langle f(x),\varphi(x)\rangle=0$, 则称在 (a,b) 内 $f(x)=0$. 显然, 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内为 0, 则它在 (a,b) 内的任何小区间内也等于 0. 反之, 若 $f(x)$ 对于 (a,b) 内的任何一个点 x_0, 均存在 x_0 的一个小的邻域 $B_\varepsilon(x_0)=\{|x-x_0|<\varepsilon\}$, 使在此邻域内 $f(x)=0$, 那么在 (a,b) 内 $f(x)=0$. 由此可以定义广义函数的支集为

$$\operatorname{supp}f(x)=\{\text{ 在 }\mathbf{R}^1\text{ 中 }f(x)\text{ 为 }0\text{ 的小区间的并集的余集 }\}.$$

对于多元广义函数的支集的定义是类似的. 可以证明广义函数的支集也是一个闭集, 例如

$$\begin{aligned}&\operatorname{supp}\delta(x)=\{(0)\},\quad \operatorname{supp}\delta(x-\xi)=\{(\xi)\},\\&\operatorname{supp}\delta(|x|-r_0)\text{是圆周 }|x|=r_0\quad(\text{二元}),\\&\operatorname{supp}\delta(|x|-r_0)\text{是球面 }|x|=r_0\quad(\text{三元}).\end{aligned}$$

一个正则广义函数的支集和它作为普通函数的支集是一致的. 一个广义函数的性质由它在支集上的性质完全确定, 所以和普通的积分记号类似, 广义函数的配对也可记为

$$\begin{aligned}\langle f(x),\varphi(x)\rangle&=\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{\Omega}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{\Omega\cap\Omega_0}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{\Omega_0}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中, Ω_0 为试验函数 $\varphi(x)$ 的支集, Ω 为广义函数的支集, 或者试验函数的支集在 Ω_0 内, 广义函数的支集在 Ω 内.

另外, 可以证明一个广义函数 $f(x)$ 为 $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$ 中广义函数的充分必要条件是 $f(x)$ 的支集有界.

一个 n 元广义函数 $f(x)$, 如果它的支集是一些低维的集合 (即为 $\mathbf{R}^n$ 中的曲面、曲线、点等的并集), 这种广义函数都是奇异广义函数. 直观地讲, 在这些低维支集的点上广义函数有尖的脉冲, 称这种广义函数为 δ- 型广义函数.

5.5.5　广义函数的某些简单运算

(1) 乘子　如果 $a(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $f(x)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, 则 $a(x)f(x)$ 确定一个 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 中的广义函数, 定义为

$$\langle a(x)f(x),\varphi(x)\rangle\overset{d}{=}\langle f(x),a(x)\varphi(x)\rangle.$$

由于 $a(x)\varphi(x)$ 也是基本空间 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 中的函数, 所以右端是有意义的, 称 $a(x)$ 为 $f(x)$ 的乘子, 也就是说 C^∞ 类函数是 $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ 中的乘子, 也可以说是 $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ 中的乘子. 类似地, C^∞ 类函数也是 $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$ 中的乘子, 也可以说是 $\mathscr{E}(\mathbf{R}^n)$ 中的乘子. 如果 $a(x)\in C^\infty$ 且是缓增的, 即当 $|x|$ 充分大时, $a(x)$ 和它的各阶导数的增长不超过多项式, 则 $a(x)$ 也是 $\varphi'(\mathbf{R}^n)$ 和 $\varphi(\mathbf{R}^n)$ 中的乘子. 根据乘子的定义 $a(x)\delta(x)=a(0)\delta(x)$, 特别地, 当 $a(0)=0$ 时, $a(x)\delta(x)=0$(此处表示为零泛函).

(2) 直积　设 $f(x)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^1)$, $g(y)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^1)$, 则直积 $f(x)\otimes g(y)$ 定义了一个二元广义函数

$$\langle f(x)\otimes g(y),\ \varphi(x,y)\rangle\overset{d}{=}\langle f(x),\langle g(y),\varphi(x,y)\rangle\rangle,$$

直积也可以简单地记为 $f(x)g(y)$. 直积不同于两个广义函数的乘积 $f(x)g(x)$, 在一般情况下定义两个广义函数相乘是困难的. 不难证明 $\delta(x,y)=\delta(x)\delta(y)$. 当 $\delta(x)$ 作

为一个二元广义函数时应理解为 $\delta(x)\otimes 1$, 即

$$\begin{aligned}\langle\delta(x),\varphi(x,y)\rangle&=\langle 1,\langle\delta(x),\varphi(x,y)\rangle\rangle=\langle 1,\varphi(0,y)\rangle\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(0,y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

一般而言, 若 $f(x)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, $g(y)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^m)$, 则 $f(x)\otimes g(y)=f(x)g(y)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^{n+m})$.

(3) 广义函数自变量的代换　设 $f(u)$ 是一个广义函数, $u=u(x)$ 是自变量的代换, 它有唯一的反变换, 且 $u(x),x(u)$ 都是 C^∞ 类的函数, 则广义函数 $f(u(x))$ 定义为

$$\langle f(u(x)),\varphi(x)\rangle\overset{d}{=}\left\langle f(u),\varphi(x(u))\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right|\right\rangle,$$

其中, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}$ 表示变量代换的 Jacobi 行列式. 从形式的积分来看, 上述定义相当于积分的变量代换. 特别地, 有

$$\langle f(x-x_0),\varphi(x)\rangle=\langle f(x),\varphi(x+x_0)\rangle,$$

$$\langle f(ax),\varphi(x)\rangle=\frac{1}{|a|}\langle f(x),\varphi(\tfrac{x}{a})\rangle\quad(\text{一元}),$$

$$\langle f(ax),\varphi(x)\rangle=\frac{1}{|a|^n}\langle f(x),\varphi(\tfrac{x}{a})\rangle\quad(n\text{ 元}),$$

$$\langle\delta(x-x_0),\varphi(x)\rangle=\langle\delta(x),\varphi(x+x_0)\rangle=\varphi(x_0),$$

$$\delta(ax+b)=\frac{1}{|a|}\delta\left(x+\frac{b}{a}\right)\quad(\text{一元}),$$

$$\delta(ax+b)=\frac{1}{|a|^n}\delta\left(x+\frac{b}{a}\right)\quad(n\text{ 元}),$$

$$\delta(\boldsymbol{A}x+b)=\frac{1}{|\det\boldsymbol{A}|}\delta(x+\boldsymbol{A}^{-1}b)\quad(n\text{ 元}),$$

其中, $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶非奇异矩阵. 在自变量的变量代换中, 要求双方单值且均为 C^∞ 类函数, 但对于具有有界支集的广义函数, 尤其对于 δ-型的广义函数, 由于广义函数由它在支集上的性质决定, 所以作自变量的代换 $u=u(x)$ 时, 只要求在广义函数支集附近双方单值且无穷光滑即可. 例如, 设 $u(x)$ 为一元无穷阶的连续可微函数, $u(x)$ 仅有一些一阶的实零点 $x_1,x_2,\cdots$, 则

$$\delta(u(x))=\sum\frac{1}{|u'(x_j)|}\delta(x-x_j),$$

特别地

$$\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2|a|}[\delta(x-a)+\delta(x+a)],$$

$$\delta(\sin x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-k\pi).$$

又如, 因为 $\delta(x-x_0,y-y_0)$ 是支集为一个点 (x_0,y_0) 的二元广义函数, 作极坐标变换, 则

$$\begin{aligned}\delta(x-x_0,y-y_0)&=\delta(r\cos\theta-r_0\cos\theta_0,\ r\sin\theta-r_0\cos\theta_0)\\&=\frac{\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)}{r}.\end{aligned}$$

其意义是, 一方面

$$\langle\delta(x-x_0,y-y_0),\ \varphi(x,y)\rangle=\varphi(x_0,y_0);$$

另一方面, 作极坐标变换, 则

$$\begin{aligned}&\langle\delta(r\cos\theta-r_0\cos\theta_0,r\sin\theta-r_0\sin\theta_0),r\varphi(r\cos\theta,r\sin\theta)\rangle\\=&\left\langle\frac{\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)}{r},r\varphi\right\rangle\\=&\varphi(r_0\cos\theta_0,r_0\sin\theta_0).\end{aligned}$$

作为支集在球面 $r=r_0$ 上的三元广义函数 $\delta(r-r_0)$, 则应用球坐标变换得

$$\begin{aligned}\langle\delta(r-r_0),\psi(x,y,z)\rangle&=\langle\delta(r-r_0),r^2\sin\theta\psi(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)\rangle\\&=\iint_{r=r_0}\psi(x,y,z)\mathrm{d}S,\end{aligned}$$

在这里右端的 $\delta(r-r_0)$ 应理解为三重的直积 $\delta(r-r_0)\otimes 1\otimes 1$.

作为支集在圆周 $r=r_0$ 上的二元广义函数 $\delta(r-r_0)$, 则应用极坐标变换, 得

$$\begin{aligned}\langle\delta(r-r_0),\varphi(x,y)\rangle&=\langle\delta(r-r_0),r\varphi(r\cos\theta,r\sin\theta)\rangle\\&=\textstyle\int_{r=r_0}\varphi(x,y)\mathrm{d}l,\end{aligned}$$

这里, 右端的 $\delta(r-r_0)$ 应理解为直积 $\delta(r-r_0)\otimes 1$.

5.5.6 广义函数的导数和对参变数的导数

若 $f(x)$ 为一个一元广义函数, 则 $f'(x)$ 也是广义函数, 其配对定义为

$$\langle f'(x),\varphi(x)\rangle\overset{d}{=}-\langle f(x),\varphi'(x)\rangle.$$

若 $f(x)$ 为 n 元广义函数, 则 $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k}$ 仍为广义函数, 其配对的定义为

$$\left\langle\frac{\partial f(x)}{\partial x_k},\varphi(x)\right\rangle\overset{d}{=}-\left\langle f(x),\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_k}\right\rangle.$$

从积分形式来看, 广义函数的导数相当于应用分部积分公式把求导运算转移到基本函数空间的求导运算. 由于在基本空间中求导运算是封闭的, 即基本空间中函数的导数仍是基本空间的函数, 所以广义函数的求导运算也可以不断地进行, 而且有下列性质:

(1) 任意一个广义函数 $f(x)$ 均无穷阶可导, 而且有

$$\langle f^{(n)}(x),\varphi(x)\rangle=(-1)^n\langle f(x),\varphi^{(n)}(x)\rangle \quad (\text{一元}),$$

$$\left\langle \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},\varphi(x)\right\rangle=(-1)^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\left\langle f(x),\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right\rangle \quad (n\ \text{元}).$$

(2) 多元广义函数的求导和顺序无关, 即

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k\partial x_j}=\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j\partial x_k}.$$

(3) 如果 $a(x)$ 为乘子, 则

$$(a(x)f(x))'=a'(x)f(x)+a(x)f'(x) \quad (\text{一元}),$$
$$\frac{\partial}{\partial x_k}(a(x)f(x))=\frac{\partial a(x)}{\partial x_k}f(x)+a(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \quad (n\ \text{元}).$$

(4) 若 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$, 则

$$\lim_{k\to\infty}f_k'(x)=f'(x) \quad (\text{一元}),$$
$$\lim_{k\to\infty}\frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j}=\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \quad (n\ \text{元}).$$

(5) 若 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x)=f(x)$, 则

$$\sum_{k=1}^{\infty}f_k'(x)=f'(x)\ (\text{一元}), \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j}=\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\ (n\ \text{元}).$$

(6) 若 $\lim\limits_{t\to t_0}f(t,x)=g(x)$, 则

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}=g'(x) \quad (\text{一元}),$$
$$\lim_{t\to t_0}\frac{\partial f(t,x)}{\partial x_j}=\frac{\partial g(x)}{\partial x_j} \quad (n\ \text{元}).$$

另外, 不难证明, 广义函数的导数也可等价地定义为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x) \quad (\text{一元}),$$

$$\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{f(x+\Delta x_k)-f(x)}{\Delta x_k}=\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\quad (n\text{ 元}).$$

例 5.5.8　$H'(x)=\delta(x)$, $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$, $(\ln(x\pm \mathrm{i}0))'=\dfrac{1}{x\pm \mathrm{i}0}$.

例 5.5.9　若 $f(x)$ 为分段光滑的一元函数, 其第一类的间断点 $x_1,x_2,\cdots$, 其对应的跃度为 $p_1,p_2,\cdots$, 则

$$f'(x)=(f'(x))+\sum_j p_j\delta(x-x_j),$$

其中, $(f'(x))$ 表示对 $f(x)$ 的可导点求普通导数而得出的一个正则广义函数. 显然 $H'(x)=\delta(x)$ 是例 5.5.9 的特例. 从例子中, 可以看出一个正则广义函数的导数可产生奇异广义函数.

例 5.5.10　$\delta(x)$ 的各阶导数

$$\langle\delta^{(n)}(x),\varphi(x)\rangle=(-1)^n\varphi^{(n)}(0)\quad (\text{一元}).$$

物理上称 $\delta'(x)$ 为偶极子分布, $\delta''(x)$ 为四极子分布. 如果把 $\delta(x)$ 解释为点分布, 那么 $\delta'(x)$ 可以解释为两个点分布的极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\delta(x+\Delta x)-\delta(x)}{\Delta x}=\delta'(x),$$

所以, 这就是偶极子分布的物理意义. 对于多元 δ 函数, 类似的有

$$\left\langle\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\delta(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},\varphi(x)\right\rangle=(-1)^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\varphi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

例 5.5.11　广义函数族 $\dfrac{1}{x^m}$, $m=1,2,\cdots$(一元).

在前边已定义了广义函数 $\dfrac{1}{x}$, 即

$$\left\langle\frac{1}{x},\varphi(x)\right\rangle\overset{d}{=}P.V\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x=-\int_{-\infty}^{+\infty}(\ln|x|)\varphi'(x)\mathrm{d}x,$$

所以在广义函数的意义下, 奇异广义函数 $\dfrac{1}{x}$ 是正则广义函数 $\ln|x|$ 的导数. 下面用递推公式来定义广义函数族 $\dfrac{1}{x^m}$:

$$\frac{1}{x^2}\overset{d}{=}-\left(\frac{1}{x}\right)'=-(\ln|x|)'',$$
$$\frac{1}{x^m}\overset{d}{=}\frac{1}{1-m}\left(\frac{1}{x^{m-1}}\right)',\qquad m\geqslant 2.$$

所以

$$\left\langle \frac{1}{x^2}, \varphi(x) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\varphi(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} (\ln|x|)\varphi''(x)\mathrm{d}x,$$
$$\left\langle \frac{1}{x^3}, \varphi(x) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\varphi(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (\ln|x|)\varphi'''(x)\mathrm{d}x,$$
$\cdots\cdots$

从形式上看, 用上述递推公式来定义广义函数 $\dfrac{1}{x^m}$ 和普通函数求导的递推公式形式上是一致的, 但在一般情况下这是不成立的. 上述的广义函数族是用关于发散积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^m}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

的理论统一地建立起来的. 本例的广义函数族也是 $\varphi'(\mathbf{R}^1)$ 中的广义函数.

例 5.5.12 广义函数族 $\dfrac{1}{x^m}H(x)$ $(m = 1, 2, \cdots)$. 这是一族支集在 $x \geqslant 0$ 上的广义函数族. 首先定义

$$\frac{1}{x}H(x) \overset{d}{=} ((\ln x)H(x))',$$

即

$$\left\langle \frac{1}{x}H(x), \varphi(x) \right\rangle = -\int_0^{+\infty} \ln x\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

接着用下列递推公式来定义广义函数族 $\dfrac{1}{x^m}H(x)$:

$$\frac{1}{x^2}H(x) \overset{d}{=} -\left(\frac{1}{x}H(x)\right)' - \delta'(x) = -(H(x)\ln x)'' - \delta'(x),$$
$$\frac{1}{x^{m+1}}H(x) \overset{d}{=} -\left(\frac{1}{mx^m}H(x)\right)' + \frac{(-1)^m\delta^{(m)}(x)}{m!\cdot m}, \quad m \geqslant 1.$$

在用递推公式来定义这一族广义函数中, 它和普通函数求导的公式形式不相同. 上述广义函数族也是根据发散积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^m}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

的理论统一地建立起来的. 现在用递推公式的定义, 有

$$\left\langle \frac{1}{x}H(x), \varphi(x) \right\rangle = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} \ln x\varphi'(x)\mathrm{d}x,$$
$$\left\langle \frac{1}{x^2}H(x), \varphi(x) \right\rangle = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\varphi(x)\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} \ln x\varphi''(x)\mathrm{d}x + \varphi'(0),$$
$\cdots\cdots$

上述定义的广义函数族 $\dfrac{1}{x^m}H(x)$ 不能理解为两个广义函数的乘积, 所以通常

把它整体地记为 x_+^{-m}. 类似地, 可以定义支集在 $x \leqslant 0$ 中具有奇点的广义函数族 x_-^{-m}

$$\langle x_-^{-m}, \varphi(x)\rangle = \langle x_+^{-m}, \varphi(-x)\rangle = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{|x|^m}\varphi(x)\mathrm{d}x \overset{d}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^m}\varphi(-x)\mathrm{d}x.$$

例 5.5.13　设 $f(x)$ 为周期为 2π 的函数, 在一个周期 $(0, 2\pi)$ 内 $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$, 它显然是 $\varphi'(\mathbf{R})$ 中的一个正则广义函数, 它在 $x = 2k\pi$ 上有跃度为 π 的第一类间断点, 做 Fourier 级数展开, 得

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

在广义函数的意义下, 可以逐项求导任意多次而得

$$\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi) - \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx,$$

$$\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta'(x - 2k\pi) = -\sum_{n=1}^{\infty} n \sin nx,$$

$$\pi \sum_{-k=-\infty}^{\infty} \delta''(x - 2k\pi) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cos nx,$$

$$\cdots\cdots$$

如果把广义函数限制在 $(-\pi, \pi)$ 内, 也就是说把基本函数限制为支集在 $(-\pi, \pi)$ 内的试验函数, 则有

$$\pi\delta(x) - \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx,$$

$$\pi\delta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} n \sin nx,$$

$$\pi\delta''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cos nx,$$

$$\cdots\cdots$$

它们就是在 $(-\pi, \pi)$ 内广义函数 $\delta^{(k)}(x)$ 的 Fourier 级数展开式.

例 5.5.14　设

$$H(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & x_1 > 0,\ x_2 > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

此为二维的单位阶跃函数, 则不难证明

$$\frac{\partial^2 H(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \delta(x_1, x_2).$$

例 5.5.15 可以证明

$$\Delta_2 \ln|x| = 2\pi\delta(x_1, x_2) \qquad (\text{二元广义函数}),$$
$$\Delta_3 \frac{1}{|x|} = -4\pi\delta(x_1, x_2, x_3) \quad (\text{三元广义函数}).$$

这是在前边讨论场位方程的基本解时已经知道的结论, 也是从正则广义函数的导数得到奇异广函的重要例子.

若 $f(t,x)$ 是有连续参变数 t 的广义函数, 则 $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial t}$ 定义为

$$\left\langle \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}, \varphi(x) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\langle f(t,x), \varphi(x)\rangle,$$

当然要求对任意的试验函数 $\varphi(x)$, $\langle f(t,x), \varphi(x)\rangle$ 是 t 的可导函数.

5.5.7 广义函数的 FT 和 $\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}$

对于广义函数的 FT 和 $\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}$, 本节只对 $\varphi'(\mathbf{R}^n)$ 中的广义函数进行讨论, 这种广义函数已包含了很多的正则广义函数和奇异广义函数.

首先可以证明基本函数空间 $\varphi(\mathbf{R}^n)$ 有下列两条特殊的性质:

(1) 它对于 FT 和 $\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}$ 是封闭的;

(2) 它对于卷积运算也是封闭的.

所以, 在 $\varphi(\mathbf{R}^n)$ 中通过 FT 和 $\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}$ 的公式建立了它自身之间的一一对应的关系

$$\varphi(x) \underset{\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}}{\overset{\mathrm{FT}}{\rightleftharpoons}} \widehat{\varphi}(\lambda).$$

而且由于 $\varphi(\mathbf{R}^n)$ 对于求导运算也是封闭的, 所以在 $\varphi(\mathbf{R}^n)$ 中的 FT 和 $\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}$ 具有关于 FT 的所有性质.

现在可以转到对 $\varphi'(\mathbf{R}^n)$ 中广义函数的 FT 和 $\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}$ 的讨论, 若 $f(x)$ 是 $\varphi'(\mathbf{R}^n)$ 中的广义函数, 那么 $F[f(x)]$ 和 $F^{-1}[f(x)]$ 也是 $\varphi'(\mathbf{R}^n)$ 中的广义函数, 定义为

$$\langle F[f(x)], \varphi(x)\rangle \overset{d}{=} \langle f(x), F[\varphi(x)]\rangle,$$
$$\langle F^{-1}[f(x)], \varphi(x)\rangle \overset{d}{=} \langle f(x), F^{-1}[\varphi(x)]\rangle.$$

也就是说, 进行配对时, 把广义函数的 FT 和 $\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}$ 转移到对试验函数的 FT 和 $\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}$. 由此就建立了在广义函数空间 $\varphi'(\mathbf{R}^n)$ 中自身的一一对应的关系

$$f(x) \underset{\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}}{\overset{\mathrm{FT}}{\rightleftharpoons}} \widehat{f}(\lambda).$$

广义函数的 FT 和 $\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}$ 仍然形式地记为

$$F[f(x)]=\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\cdot x}\mathrm{d}x=\widehat{f}(\lambda),$$
$$F^{-1}[f(x)]=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\cdot x}\mathrm{d}x,$$

其中, $\lambda\cdot x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n$. 在这种形式的记号下, FT 和 $\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}$ 与试验函数的配对相当于交换了积分的顺序.

由于在 $\varphi(\mathbf{R}^n)$ 中 FT 和 $\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}$ 的性质, 所以广义函数的 FT 和 $\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}$ 也有下列性质成立:

$$f(x-x_0)\rightleftharpoons \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\cdot x_0}\widehat{f}(\lambda),\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}a\cdot x}f(x)\rightleftharpoons\widehat{f}(\lambda-a),$$
$$f(ax)\rightleftharpoons\frac{1}{|a|^n}\widehat{f}\left(\frac{\lambda}{a}\right),\quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\rightleftharpoons \mathrm{i}\lambda_k\widehat{f}(\lambda),$$
$$x_kf(x)\rightleftharpoons \mathrm{i}\frac{\partial\widehat{f}(\lambda)}{\partial\lambda_k},\quad \widehat{f}(x)\rightleftharpoons(2\pi)^nf(-\lambda).$$

另外, 不难证明

若 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}\widehat{f}_k(\lambda)=\widehat{f}(\lambda)$,

若 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x)=s(x)$, 则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\widehat{f}_k(\lambda)=\widehat{s}(\lambda)$,

若 $\lim\limits_{t\to t_0}f(t,x)=g(x)$, 则 $\lim\limits_{t\to t_0}\widehat{f}(t,\lambda)=\widehat{g}(\lambda)$.

即若仍形式地用积分表示 FT, 则上述性质相当于可交换积分和极限的顺序, 可逐项积分. 对于 $\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}$ 也是一样的.

根据上述性质, 从一个简单的广义函数的 FT 可以推出无穷多个广义函数的 FT 和 $\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}$. 例如, 由

$$\delta(x)\rightleftharpoons 1,$$

可立即推得

$$\delta(x-x_0)\rightleftharpoons\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\cdot x_0},$$
$$1\rightleftharpoons 2\pi\delta(-\lambda)=2\pi\delta(\lambda)\quad(\text{一元}),$$
$$1\rightleftharpoons(2\pi)^n\delta(\lambda)\quad(n\text{ 元}),$$
$$x^k\rightleftharpoons \mathrm{i}^k2\pi\delta^{(k)}(\lambda)\quad(\text{一元}),$$
$$x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}\rightleftharpoons(2\pi)^n(\mathrm{i})^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\delta(\lambda)}{\partial\lambda_1^{\alpha_1}\cdots\partial\lambda_n^{\alpha_n}},$$
$$\sin a\cdot x\rightleftharpoons \mathrm{i}2^{n-1}\pi^n(\delta(\lambda+a)-\delta(\lambda-a)),$$
$$\cos a\cdot x\rightleftharpoons 2^{n-1}\pi^n(\delta(\lambda+a)+\delta(\lambda-a)).$$

又如, 由 $\dfrac{1}{x}\rightleftharpoons-\pi\mathrm{i}\mathrm{sgn}\lambda$, 立即可以推得广义函数族 $\dfrac{1}{x^n},\mathrm{sgn}x,x\mathrm{sgn}x=|x|,H(x)$,

$x^kH(x)$ 等的 FT 的公式. 如

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sgn} x \rightleftharpoons \frac{2}{\mathrm{i}\lambda},\\
&\frac{1}{x^2} \rightleftharpoons -\pi\lambda\operatorname{sgn}\lambda = -\pi|\lambda|,\\
&\frac{1}{x^3} \rightleftharpoons \frac{\pi}{2}\lambda|\lambda|\mathrm{i},\\
&H(x) \rightleftharpoons \pi\delta(\lambda) - \mathrm{i}\frac{1}{\lambda},\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

另外, 列出下列几个广义函数 FT 和 $\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}$ 的公式, 供应用时参考.

$\dfrac{1}{|x|} \rightleftharpoons 4\pi\dfrac{1}{|\lambda|^2}$ (三元), $\dfrac{1}{|x|^2} \rightleftharpoons \pi\dfrac{1}{|\lambda|}$ (三元),

$\dfrac{1}{|x|^2} \rightleftharpoons -2\pi\ln|\lambda| - 2\pi\gamma$ (二元, γ为Euler常数), $\ln|x| \rightleftharpoons -\dfrac{1}{|\lambda|^2} - 2\pi\gamma\delta(\lambda)$ (二元),

$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-|x|^2}}H(a^2-|x|^2) \rightleftharpoons 2\pi\dfrac{\sin a|\lambda|}{|\lambda|}$ (二元),

$\delta(|x|-a) \rightleftharpoons 4\pi a\dfrac{\sin a|\lambda|}{|\lambda|}$ (三元), $\delta(|x|-a) \rightleftharpoons 2aJ_0(a|\lambda|)$ (二元),

$\ln|x| \rightleftharpoons -\pi\left(\dfrac{1}{|\lambda|} + 2\gamma\delta(\lambda)\right)$ (一元), $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \rightleftharpoons \dfrac{1}{a}K_0(a|\lambda|)$,

$\dfrac{1}{x^2-a^2} \rightleftharpoons -\pi\dfrac{\sin a|\lambda|}{a}$, $\dfrac{1}{x^2+a^2} \rightleftharpoons 2\pi\dfrac{\mathrm{e}^{-a|\lambda|}}{a}$, $a>0$.

5.5.8 广义函数的卷积

若 $f(x)\in\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$, $g(x)\in\varphi'(\mathbf{R}^n)$, 则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的卷积 $f(x)*g(x)\in\varphi'(\mathbf{R}^n)$ 定义为

$$\langle f(x)*g(x),\varphi(x)\rangle \overset{d}{=} \langle f(x),\langle g(y),\varphi(x+y)\rangle\rangle.$$

一切还是延用形式的积分记号, 广义函数的卷积仍记为

$$f(x)*g(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(\xi)g(x-\xi)\mathrm{d}\xi.$$

在形式的积分记号下, 广义函数的卷积相当于交换了积分的顺序和进行变数代换, 即

$$\begin{aligned}
\langle f(x)*g(x),\varphi(x)\rangle &= \int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)\mathrm{d}x\int_{\mathbf{R}^n} f(\xi)g(x-\xi)\mathrm{d}\xi\\
&= \int_{\mathbf{R}^n} f(\xi)\mathrm{d}\xi\int_{\mathbf{R}^n} g(u)\varphi(u+\xi)\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$$= \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y)\rangle\rangle.$$

在这里的卷积定义中, 由于假设了 $f(x) \in \mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$, 保证了上式最左端的配对具有确定的意义, 而且这时也保证了广义函数 FT 的卷积定理依然成立, 即

$$f(x) * g(x) \overset{\text{FT}}{\rightleftharpoons} \widehat{f}(\lambda) \cdot \widehat{g}(\lambda).$$

在右端两个广义函数相乘中, 实际上保证了 $\widehat{f}(\lambda)$ 是一个乘子的作用.

广义函数的卷积也具有下列的运算性质:

$$\begin{aligned}
&f(x) * g(x) = g(x) * f(x),\\
&\frac{\partial}{\partial x_k}(f(x) * g(x)) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} * g(x) = f(x) * \frac{\partial g(x)}{\partial x_k},\\
&\delta(x) * f(x) = f(x),\\
&\lim_{k\to\infty}(f_k(x) * g(x)) = (\lim_{k\to\infty} f_k(x)) * g(x),\\
&\lim_{k\to t_0}(f(t,x) * g(x)) = \left(\lim_{t\to t_0} f(t,x)\right) * g(x),
\end{aligned}$$

因为形式上仍用积分来表示卷积, 上述性质相当于积分的变数代换、积分号下求导, δ 函数的筛选性和积分号下取极限等.

以上介绍了广义函数的一些基本的概念和理论, 着重介绍了广义函数的各种运算和变换. 可以看到, 作为广义函数, 求导运算, FT 和 $\mathrm{F}^{-1}\mathrm{T}$, 卷积, 积分顺序的交换, 积分和极限的交换等常常是可以自由的进行. 一个常系数线性微分方程或者一个系数为乘子函数的变系数的线性微分方程都可视为是一个广义函数空间中的微分方程, 微分方程的解是一个广义函数. 但是, 在理论和应用问题中常常只是借助于在广义函数空间中进行运算和变换, 最后得到的解是一个正则的广义函数, 甚至还具有适当的光滑性.

习　题　5

1. 证明下列等式:
   (1) $\delta(x)\cos x + \delta(x)\sin x = \delta(x)$.
   (2) $x\delta'(x) = -\delta(x)$.
   (3) $\delta'(-x) = -\delta'(x)$.
2. 设有坐标变换式 $x = x(\xi,\eta), y = y(\xi,\eta), J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}$, (x_0,y_0) 与 (ξ_0,η_0) 为相应的点. 证明: $\delta(x-x_0, y-y_0) = \dfrac{1}{|J|}\delta(\xi-\xi_0,\eta-\eta_0)$. 特别地, 证明在极坐标情况下, 有 $\delta(x-x_0,y-y_0) = \dfrac{1}{r}\delta(r-r_0,\theta-\theta_0)$.

3. 把 $\delta(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上展开成 Fourier 级数, 并在弱收敛意义下, 验证所得级数的和确是 $\delta(x)$. $\left[\text{提示：利用公式 } 1+2\sum\limits_{n=1}^{N}\cos nx=\dfrac{\sin\left(N+\dfrac{1}{2}\right)x}{\sin\dfrac{x}{2}}.\right]$

4. 解下列定解问题：

(1) $\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, \quad t>0,\ 0<x,\xi<l, \\ u(t,0)=u(t,l)=0, \\ u(0,x)=\delta(x-\xi). \end{cases}$

(2) $\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad t>0,\ 0<x,\xi<l, \\ u_x(t,0)=u_x(t,l)=0, \\ u(0,x)=0, \quad u_t(0,x)=\delta(x-\xi). \end{cases}$

5. 利用 Green 第二公式求二维 Laplace 方程的基本解.

6. 利用 Laplace 方程的基本解, 求解下列方程：

(1) $\alpha^2u_{xx}+\beta^2u_{yy}=\delta(x.y)$ $(x>0,\ \alpha,\ \beta>0$为常数).

(2) $\Delta_2\Delta_2u=\delta(x,y)$ (二维双调和方程的基本解).

(3) $\Delta_3\Delta_3u=\delta(x,y,z)$ (三维双调和方程的基本解).

7. 用 Fourier 变换求三维 Helmholtz 方程的基本解, 即求方程 $\Delta_3u+k^2u=\delta(x,y,z)$ 的解.

8. 求下列空间区域内 Poisson 方程第 I 边值问题的 Green 函数：

(1) 四分之一空间：$x>0,\ y>0$.

(2) 上半球内：$x^2+y^2+z^2<R^2,\ \ z>0$.

(3) 层状空间：$0<z<H$.

9. 用镜像法或保形变换法求下列平面区域内 Poisson 方程第 I 边值问题的 Green 函数：

(1) 四分之一平面：$x>0,\ \ y>0$.

(2) 六分之一圆内：$|z|<R,\ \ 0<\arg z<\dfrac{\pi}{3}$.

(3) 区域：$|z|>R,\ \ \mathrm{Re}\ z>0$.

10. 求方程 $u_t=a^2u_{xx}+bu$ 的 Cauchy 问题的基本解.

11. 先求出 Cauchy 问题基本解, 再应用相应的积分公式解下列定解问题：

(1) $\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}-b^2u+f(t,x), \quad t>0,\ -\infty<x<+\infty, \\ u|_{t=0}=\varphi(x), \quad u_t|_{t=0}=\psi(x). \end{cases}$

(2) $\begin{cases} u_t=a^2\Delta_2u-u+f(t,x,y), \quad t>0,\ -\infty<x,\ y<+\infty, \\ u|_{t=0}=\varphi(x,y). \end{cases}$

(3) $\begin{cases} u_{tt}=a^2\Delta_2u+f(t,x,y), \quad t>0,\ -\infty<x,\ y<+\infty, \\ u|_{t=0}=\varphi(x,y), \quad u_t|_{t=0}=\psi(x,y). \end{cases}$

(4) $\begin{cases} u_{tt}=a^2\Delta_2u, \quad t>0,\ -\infty<x,\ y<+\infty, \\ u|_{t=0}=x^2(x+y), \quad u_t|_{t=0}=0. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} u_{tt}+2u_t=a^2u_{xx}-2u, \quad t>0,\ -\infty<x<+\infty, \\ u|_{t=0}=0, \quad u_t|_{t=0}=\psi(x). \end{cases}$

附：$F^{-1}\left[\dfrac{\sin a\sqrt{\lambda^2+b^2}}{\sqrt{\lambda^2+b^2}}\right]=\dfrac{1}{2}J_0(b\sqrt{a^2-x^2})H(a-|x|), \quad a>0,\ b>0.$

12*. 用 Green 函数法求解下列混合问题：

(1) $\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}-u+f(t,x), \quad t>0,\ 0<x<l, \\ u(t,0)=u_x(t,l)=0, \\ u(0,x)=\varphi(x). \end{cases}$

(2) $\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(t,x), \quad t>0,\ 0<x<l, \\ u(t,0)=0, \quad u(t,l)=0, \\ u(0,x)=\varphi(x), \quad u_t(0,x)=\psi(x). \end{cases}$

13*. 设 L 是关于 x 的常系数线性微分算子, $G(t,x;\tau,\xi)$ 满足下列定解问题：

$$\begin{cases} u_t=Lu, \quad t>\tau>0,\ x_1<x,\xi<x_2, \\ (\alpha_1u_x-\beta_1u)|_{x=x_1}=0, \\ (\alpha_2u_x+\beta_2u)|_{x=x_2}=0, \\ u|_{t=\tau}=\delta(x-\xi). \end{cases}$$

证明下述定解问题：

$$\begin{cases} u_t=Lu+f(t,x), \quad t>0,\ x_1<x<x_2, \\ (\alpha_1u_x-\beta_1u)|_{x=x_1}=0, \\ (\alpha_2u_x+\beta_2u)|_{x=x_2}=0, \\ u|_{t=0}=\varphi(x) \end{cases}$$

的解是 $u(t,x)=\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\varphi(\xi)G(t,x;0,\xi)\mathrm{d}\xi+\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{x_1}^{x_2}f(\tau,\xi)G(t,x;\tau,\xi)\mathrm{d}\xi.$

14*. 在 $\varphi'(\mathbf{R})$ 中证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\cos nx=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin nx=0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}=\delta(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty}n^k\cos nx=0$($k$ 为非负整数), $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\dfrac{x}{\sqrt{2\pi}\varepsilon^3}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}=-\delta'(x)$, $F[\delta(x)]=1, F[1]=2\pi\delta(\lambda)$.

第 6 章　微分方程的变分方法

在某些几何和物理问题中常提出某一类泛函的极值问题, 称之为变分问题. 解决变分问题的一个经典方法是将其转化为微分方程的定解问题; 但另一方面也可将某些微分方程的定解问题转化为变分问题, 通过直接求解和研究变分问题来求解和研究微分方程定解问题, 这称为微分方程的变分方法. 本章将讨论上述两个方面问题的最基本的理论概念和方法.

6.1　泛函和泛函极值

6.1.1　泛函和泛函极值

设 $M = \{y(x),\ a \leqslant x \leqslant b\}$ 是定义在 $[a,b]$ 上的一个函数的集合, 几何上表示为某一平面曲线的集合, 若任意给定 $y(x) \in M$, 按一定的规律对应一个数, 则称**在M中定义了一个泛函**, 记为 $J[y(x)]$. 在泛函中自变元是函数 $y(x)$, 它的变化范围 M 称作此泛函的**定义域**, 记作 $D(J)$.

设 $M = \{(y(x), z(x)), a \leqslant x \leqslant b\}$ 是函数对的某一集合, 几何上表示为某一空间曲线的集合, 若任意给定 $(y(x), z(x)) \in M$, 按一定的规律对应着一个数, 则称**在M中定义了一个泛函**, 记为 $J[y(x), z(x)]$, 此泛函的定义域 $D(J) = M$.

设 $M = \{u(x,y),\ (x,y) \in \Omega\}$ 为定义在平面区域 Ω 上二元函数的集合, 几何上表示为某一曲面的集合, 若任意给定 $u(x,y) \in M$, 按一定规律对应着一个实数, 则称**在M上定义了一个泛函**, 记为 $J[u(x,y)]$, 泛函的定义域 $D(J) = M$.

类似地, 多元函数的泛函, 如 $J[u(x,y,z)]$, 此泛函中自变元是三元函数, 借助于几何的语言也称 $u(x,y,z)$ 为一个曲面.

泛函是函数概念的推广, 类似于函数的极值问题有泛函的极值问题.

设 $J[y(x)]$ 是定义在 $M = \{y(x),\ a \leqslant x \leqslant b\}$ 上的泛函, 若有 $y_0(x) \in M$, 使 $J[y_0(x)] \leqslant J[y(x)]$, $\forall y(x) \in M$, 则称在 $y_0(x)$ 使 $J[y(x)]$ 达到最小值, 称 $y_0(x)$ 为**最小元**. 若 $y_0(x) \in M$, 使 M 中和 $y_0(x)$ 相邻近的 $y_0(x) + \delta y(x) \in M$, 有 $J[y_0(x)] \leqslant J[y_0(x) + \delta y(x)]$, 则称在 $y_0(x)$ 使 $J[y(x)]$ 达到极小值, 称 $y_0(x)$ 为**极小元或极小曲线**. 显然极小值是局部最小值, 最小值也是极小值. 类似地定义最大值和最大元, 极大值和极大元, 极大极小值统称**极值**, 达到极值的极值元也称为**极值曲线**.

类似地, 定义泛函 $J[u(x,y)]$ 的极值和极值元, 极值元也称为**极值曲面**. 其他的泛函 $J[u(x,y,z)]$, $J[y(x),z(x)]$ 等泛函的极值和极值元的概念是类似的.

6.1.2　几个例子

下面是泛函和泛函极值的几个典型的例子, 这些例子的问题会在后边的内容中加以直接引用和讨论.

例 6.1.1 (极小曲线问题)　设 $M=\{y(x),\ a\leqslant x\leqslant b\}$ 为 C^1 类函数中某些函数的集合, 如 M 是 C^1 类函数中给定边界值 $y(a)=\alpha,\ y(b)=\beta$ 的函数的全体, 任意给 $y(x)\in M$, 则曲线的弧长定义了一个泛函

$$J[y(x)]=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x.$$

要求使弧长最小的曲线就是求泛函的极小值和极小元, 称此为极小曲线问题.

例 6.1.2 (捷线问题, 最速下降问题)　设 $M=\{y(x),\ a\leqslant x\leqslant b\}$ 为 C^1 类函数中某些函数的集合, 在平面上有一个已知的速度场 $v(x,y)$, 质点沿着光滑曲线 $y(x)$ 运动, 则所需的时间定义了一个泛函

$$J[y(x)]=\int_a^b\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x,y)}\mathrm{d}x.$$

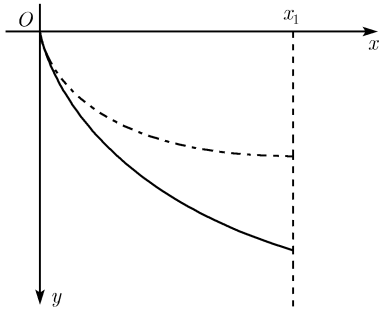


图 6.1.1

求所需时间最小的问题称为**捷线问题**. 如图 6.1.1 所示, 如果质点从原点 $(0,0)$ 在重力作用下沿着光滑曲线下降, 则所需时间为

$$J[y(x)]=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x.$$

要求最小下降时间问题, 这就是著名的最速下降问题.

设空间速度场 $v(x,y,z)$, 质点沿着空间曲线 $y(x),z(x),a\leqslant x\leqslant b$ 运动, 所需时间为

$$J[y(x),z(x)]=\int_a^b\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v(x,y,z)}\mathrm{d}x.$$

求此泛函的极小值问题为捷线问题.

例 6.1.3 (极小曲面问题)　设 $M=\{u(x,y),\ (x,y)\in\Omega\}$ 为定义在平面区域 Ω 上 C^1 类函数的某一集合, 如 M 是在边界 $\partial\Omega$ 取值 $\varphi(x,y)$ 的光滑曲面族, 则曲面的面积定义了一个泛函

$$J[u(x,y)]=\iint_\Omega\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

此泛函的极小值问题称为**极小曲面问题**.

例 6.1.4 (最小势能原理, 弦和薄膜的静态平衡位移问题) 对于一个静态的力学系统在所有的容许位移中, 其真实的位移是使系统的总势能达到最小的位移, 称此为**最小势能原理**.

设一理想的均匀的弦, 其平衡位置为 x 轴上的一个区间 $[0,l]$, 在外力的作用下弦产生形变. 设 $u(x)$ 为弦在点 x 的垂直于 x 轴的横向位移 , $f(x)$ 为外加在弦上的横向外力密度, T 为张力系数, 这时由于形变产生的势能为

$$U=T\int_0^l\left[\sqrt{1+u'^2}-1\right]\mathrm{d}x.$$

如果横向位移 $u(x)$ 是微小的, 即 $|u'(x)|\ll 1$, 把上式右端的被积函数展开, 省去高阶小量, 得

$$U=\frac{T}{2}\int_0^l u'^2\mathrm{d}x,$$

外加力所做的功为

$$W=\int_0^l f(x)u(x)\mathrm{d}x,$$

所以总势能为

$$J[u(x)]=U-W=\int_0^l\left[\frac{T}{2}u'^2-f(x)u\right]\mathrm{d}x.$$

如果横向位移 $u(x)$ 不是微小的, 则总势能为

$$J[u(x)]=\int_0^l[T(\sqrt{1+u'^2}-1)-f(x)u]\mathrm{d}x.$$

根据最小势能原理, 真实的位移是使上式泛函达到最小值的位移.

设一理想的均匀薄膜, 其平衡位置为 Oxy 平面的一个区域 Ω, $\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界, 在外力作用下薄膜产生形变. $u(x,y)$ 表示在点 (x,y) 的垂直于 Oxy 平面的横向位移, $f(x,y)$ 是外加在膜上的横向外力密度, T 为张力系数, 这时由于形变产生的势能为

$$U=\iint_\Omega T\left(\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}-1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

如果横向位移是微小的, 即 $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|\ll 1$, $\left|\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|\ll 1$, 把上式展开, 省去高阶的小量, 得

$$U=\frac{T}{2}\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

外力所做的功为

$$W=\iint_\Omega f(x,y)u\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

所以总的势能为

$$J[u(x,y)] = U - W = \iint\limits_{\Omega} \left[\frac{T}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{T}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - fu \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

如果横向位移 $u(x,y)$ 不是微小的, 则总势能为

$$J[u(x,y)] = \iint\limits_{\Omega} \left[T \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2} - 1 \right) - f(x,y)u \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

根据最小势能原理, 其真实的位移是使上列泛函 $J[u(x,y)]$ 达到最小值的位移. 如果在边界 $\partial\Omega$ 上再加上一个弹性支撑, 其强度系数是 σ, 则在边界上产生的横向恢复力的线密度为 $\dfrac{-\sigma u}{2}$. 另外, 设在边界 $\partial\Omega$ 上外加一个线密度为 h 的横向力, 这两种在边界上的力所做的功

$$W_1 = \int\limits_{\partial\Omega} \left(-\frac{\sigma u}{2} + h \right) u \mathrm{d}s = \int_{\partial\Omega} \left(-\frac{\sigma u^2}{2} + hu \right) \mathrm{d}s.$$

这时, 系统的总势能为

$$\begin{aligned} J[u(x,y)] &= U - W - W_1 \\ &= \iint\limits_{\Omega} \left[\frac{T}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{T}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - fu \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\sigma u^2}{2} - hu \right) \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

根据最小势能原理, 其真实的位移是使上式的泛函达到最小值的位移.

例 6.1.5 (弹性杆和弹性板的静态平衡位移问题) 设一弹性杆 (梁), 其平衡位置在 Ox 轴的一个区间 $[0,l]$ 上, 在外力作用下杆产生微小的形变. 设 $u(x)$ 为杆在点 x 的垂直于 x 轴的横向位移, $f(x)$ 是外加在杆上的横向外力密度, D 为杆的弯曲硬度, 由弹性力学知, 该力学系统的总势能为

$$J[u(x)] = \int_0^l \left[\frac{D}{2} (u'')^2 - f(x)u \right] \mathrm{d}x.$$

根据最小势能原理, 真实的位移是使上式的泛函达到最小值的位移.

设一弹性薄板 (薄壳), 其平衡位置是 Oxy 平面的一个区域 Ω, 在外力作用下产生微小的形变. 设 $u(x,y)$ 为板在点 (x,y) 的垂直于 Oxy 平面的横向位移, $f(x,y)$ 是外加于板的横向外力密度, D 为板的弯曲硬度, 根据弹性力学知, 该力学系统的总势能为

$$J[u(x,y)] = \iint\limits_{\Omega} \left[\frac{D}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) - f(x,y)u \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

根据最小势能原理, 真实的位移 $u(x,y)$ 是使上式的泛函达到最小值的位移.

以上几个例子说明了泛函和泛函极值问题的实际意义, 这些例子的几何意义和物理意义直观地说明了, 在一定的容许函数中这些泛函一定有最小值和最小元.

6.2 泛函的变分, Euler 方程和边界条件

泛函的类型很多, 而上节的例子得到的泛函均为积分型的泛函, 本章讨论的都是这种积分型泛函的变分问题, 且设积分的区间或区域都是固定的. 只在本节最后的6.2.9节讨论活动区间的问题.

6.2.1 变分法基本引理

在后面的推导过程中, 常常需要用到下列引理, 称之为**变分法基本引理**.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 若对于任意的在两个端点为 0 的 C^2 类函数 $\eta(x)$ 均有

$$\int_a^b f(x)\eta(x)\mathrm{d}x = 0,$$

则必有 $f(x)=0$. 由于 $\eta(x)$ 的任意性, 引理可用反证法证明. 即若设有一点 x_0 使 $f(x_0)\neq 0$, 则可构造一个函数 $\eta(x)$, 使 $\int_a^b f(x)\eta(x)\mathrm{d}x > 0$, 这里不详细写出证明的过程.

对于多元函数重积分的情况也有类似的引理. 以二重积分的情况说明, 设 $f(x,y)$ 在闭区域 $\overline{\Omega}$ 上连续, 若对于任意在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上为 0 的 C^2 类函数 $\eta(x,y)$, 均有

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\eta(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

则必有 $f(x,y)=0$.

6.2.2 一元函数泛函的变分, Euler 方程和边界条件

设

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x,$$

为了本节讨论的需要, 假设 F 是所含变元的 C^2 类函数, 且泛函的定义域 $M=D(J)$ 也是 C^2 类函数中的满足适当边界条件的函数集合.

给定 $y(x)\in D(J)$ 及改变元 $\delta y(x)$, 使 $y(x)+\alpha\delta y(x)$ 也是 $D(J)$ 的一个函数, 则得小参数 α 的函数 $J[y(x)+\alpha\delta y(x)]$, 称

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}J\left[y(x)+\alpha\delta y(x)\right]\Big|_{\alpha=0}$$

为**泛函在自变元为 $y(x)$ 时的变分**, 记为 $\delta J[y(x)]$.

由定义可知

$$\delta J[y(x)] = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'(x)\right]\mathrm{d}x,$$

其中, $\delta y'(x)=(\delta y(x))'$. 把上式积分中的第二项分部积分一次, 得

$$\delta J[y(x)]=\int_a^b\left(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y(x)\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y(x)\Big|_a^b. \tag{6.2.1}$$

对于一元函数 $f(x)$ 来说, 它在 x 点的微分是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}f(x+\alpha\mathrm{d}x)\Big|_{\alpha=0}=f'(x)\mathrm{d}x,$$

所以泛函 $J[y(x)]$ 的变分是函数微分的推广. 而且在变分学中, 变量 x 的微分就是它的变分且记为 δx, 函数 $f(x)$ 的微分就是它的变分且记为 $\delta f(x)=f'(x)\delta x$.

如果 $y(x)$ 是 $J[y(x)]$ 的极值元 (极值曲线), 则 $J[y(x)+\alpha\delta y(x)]$ 作为 α 的函数在 $\alpha=0$ 时达到极值, 所以得出一个重要的结论：**若 $y(x)$ 为 $J[y(x)]$ 的极值曲线, 则必有 $\delta J[y(x)]=0$.**又由于在 $[a,b]$ 上 $\delta y(x)$ 可任意, 根据变分法基本引理, $y(x)$ 为极值曲线时必满足

$$\begin{cases} F_y-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0, & \text{(6.2.2a)}\\ \dfrac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_a^b=\dfrac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=b}\delta y(b)-\dfrac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=a}\delta y(a)=0, & \text{(6.2.2b)}\end{cases}$$

其中

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=F_y-F_{y'x}-F_{y'y}y'-F_{y'y'}y''=0$$

是一个二阶常微分方程, 称此微分方程为**泛函 $J[y(x)]$ 的 Euler 方程**. 方程中左边的微分式称为**泛函 $J[y(x)]$ 的 Euler 导数**, 记为 $[F]_y$, 即

$$[F]_y=F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}. \tag{6.2.3}$$

如果在容许函数 $D(J)$ 中, 给定边界值 $y(a)=\alpha, y(b)=\beta$, 即容许曲线**两个端点固定**, 这时 (6.2.2b) 式一定满足, 所以极值曲线必满足

$$\begin{cases}[F]_y=0,\\ y(a)=\alpha,\quad y(b)=\beta.\end{cases}$$

如果容许函数 $D(J)$ 中, 端点 $y(a), y(b)$ 可以任意, 即容许曲线的两个端点可在直线 $x=a$ 和 $x=b$ 上自由地滑动, 则由于 $\delta y(a)$ 和 $\delta y(b)$ 可以任意取值, 所以由 (6.2.2b) 式得

$$F_{y'}|_{x=a}=0,\quad F_{y'}|_{x=b}=0.$$

称此边界条件为**自然边界条件**, 极值曲线必满足

$$\begin{cases}[F]_y=0,\\ F_{y'}|_{x=a}=0,\quad F_{y'}|_{x=b}=0.\end{cases}$$

如果容许曲线的一个端点固定 (如 $x=a$ 时 $y(a)=\alpha$), 另一端点可以在直线 $x=b$ 上自由地滑动, 由 $\delta J[y(x)]=0$ 可知, 极值曲线必满足边值问题

$$\begin{cases}[F]_y=0,\\ y(a)=\alpha,\quad F_{y'}|_{x=b}=0,\end{cases}$$

其中, $F_{y'}|_{x=b}=0$ 为自然边界条件.

在有些问题中端点既不是固定, 也不是自由地滑动, 这时会出现混合型的泛函

$$J[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x+g(y)|_{x=a}+h(y)|_{x=b},$$

其中, 后两项是端点值的函数, 称之为泛函的附加项. 这时泛函的变分是

$$\begin{aligned}\delta J[y(x)]&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}J[y(x)+\alpha\delta y(x)]|_{\alpha=0}\\ &=\int_a^b\left(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x+F_{y'}\delta y|_a^b+g_y(y)|_{x=a}\delta y(a)+h_y(y)|_{x=b}\delta y(b)\\ &=\int_a^b\left(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x+\left(F_{y'}+h_y\right)|_{x=b}\delta y(b)+\left(g_y(y)-F_{y'}\right)|_{x=a}\delta y(a).\end{aligned}$$

所以, 如果 $y(x)$ 为极值曲线, 则由 $\delta J[y(x)]=0$, 得

$$\begin{cases}[F]_y=F_y-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0,\\ \left(g_y-F_{y'}\right)|_{x=a}=0,\quad \left(F_{y'}+h_y\right)|_{x=b}=0.\end{cases}$$

这时, 两个边界条件也是自然边界条件, $[F]_y=0$ 也是此种泛函的 Euler 方程.

在 $D(J)$ 的元素中 $\delta J[y(x)]=0$, 即 $y(x)$ 满足 $J[y(x)]$ 的 Euler 方程和上述相应的边界条件, 是 $y(x)$ 为极值元的必要条件而非充分条件. 通常把在容许函数类中满足 Euler 方程的函数 $y(x)$ 称为**泛函的稳定元** (或逗留元或极值带), 它类似于函数极值问题中的驻点 (或逗留点). 极值元一定是稳定元, 反之不成立. 在什么条件下稳定元是极值元的问题本章不再讨论, 但是若根据所讨论的泛函的实际意义和某些分析可知, 在容许函数类中一定有唯一的极值元, 那么由 Euler 方程和相应边界条件得到的唯一的稳定元也就是所求的极值元, 许多实际问题经常是这种情况.

如果 $F(x,y,y')=k(x)y'^2+q(x)y^2-2f(x)y, k(x)>0, q(x)\geqslant 0$, 则 $J[y]$ 的 Euler 方程为线性方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)-q(x)y+f(x)=0.$$

特别地, 当 $k(x)$ 和 $q(x)$ 为常数时得常系数二阶非齐次线性方程, 这时 Euler 方程的通解比较容易得到.

如果 $F(x,y,y')=F(x,y')$, 即 F 中不显含 y 时, 则 Euler 方程为 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0$, 所以它有一个第一积分

$$F_{y'} = C_1.$$

如果 $F(x, y, y') = F(y, y')$, 即 F 中不显含 x, 则不难验证 Euler 方程有一个第一积分

$$F - y'F_{y'} = C_1.$$

由第一积分再积分一次可得 Euler 方程含有两个独立常数的通解, 再由边界条件得出稳定元.

如果 $F(x, y, y') = F(x, y)$, 即 F 中不含 y' 时, 则 Euler 方程是一个隐函数方程 $F_y = 0$.

例 6.2.1 在例 6.1.2 的最速下降问题中 (图 6.1.1)

$$J[y(x)] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} \mathrm{d}x.$$

此泛函中 $F(x, y, y') = \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}$ 不显含 x, 所以 Euler 方程有一个第一积分

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} - \frac{y'^2}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+y'^2}} = C,$$

化简, 得

$$y(1+y'^2) = 2C_1, \quad \text{其中,} \quad C_1 = \frac{1}{4gC^2} > 0.$$

因为此第一积分中可把 y 解出, 所以用参数法来解此一阶常微分方程. 令

$$\begin{cases} y' = \cot\dfrac{\theta}{2}, \\ y = \dfrac{2C_1}{1+y'^2} = C_1(1-\cos\theta), \end{cases}$$

由 $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}y}{y'} = \dfrac{C_1 \sin\theta}{\cot\dfrac{\theta}{2}} \mathrm{d}\theta = C_1(1-\cos\theta)\mathrm{d}\theta$, 所以得 Euler 方程通解的参数形式

$$\begin{cases} x = C_1(\theta - \sin\theta) + C_2, \\ y = C_1(1-\cos\theta), \end{cases} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1.$$

由于 $y(0) = 0 (\theta = 0$ 对应于 $x = 0, \theta = \theta_1$ 对应于 $x = x_1)$ 得 $C_2 = 0$, 即起点为原点的最速下降曲线为

$$\begin{cases} x = C_1(\theta - \sin\theta), \\ y = C_1(1-\cos\theta), \end{cases} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1.$$

另外一个常数 C_1 需由当 $x = x_1 (\text{即 } \theta = \theta_1)$ 时的边界条件来确定, 且也用这个边界条件来确定 θ_1, 这又可分为两种情况进行讨论.

第一种情况是给定 $y(x_1) = y_1$, 即固定最速下降曲线的另一个端点. 则由

$$\begin{cases} x_1 = C_1(\theta_1 - \sin\theta_1), \\ y_1 = C_1(1 - \cos\theta_1), \end{cases}$$

推出

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{\theta_1 - \sin\theta_1}{1 - \cos\theta_1},$$

求出该方程的最小正根 θ_1, 接着确定

$$C_1 = \frac{x_1}{\theta_1 - \sin\theta_1} = \frac{y_1}{1 - \cos\theta_1},$$

这样就确定得唯一的最速下降曲线.

第二种情况是另一个端点可以在直线 $x = x_1$ 上滑动, 这时在 x_1 的边界条件由自然边界条件确定

$$F_{y'}|_{x=x_1} = 0, \quad \text{即} \quad y'|_{x=x_1} = 0.$$

此时最速下降曲线在另一个端点处和直线 $x = x_1$ 正交, 由 $y'|_{x=x_1} = 0$ 得

$$\frac{C_1 \sin\theta}{C_1(1 - \cos\theta)}|_{\theta=\theta_1} = 0,$$

由此确定 $\theta_1 = \pi$, 接着可确定

$$C_1 = \frac{x_1}{\theta_1 - \sin\theta_1} = \frac{x_1}{\pi}.$$

所以这种情况下的最速下降曲线是

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1}{\pi}(\theta - \sin\theta), \\ y = \dfrac{x_1}{\pi}(1 - \cos\theta), \end{cases} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

以上两种情况的最速下降曲线均为旋轮线, 滚圆的半径为 C_1. 从上面的讨论可知, 一般而言两种情况的最速下降曲线是不同的 (图 6.1.1), 即确定的 C_1 和 θ_1 一般不相同.

例 6.2.2 在例 6.1.4 的弦的静态微小位移问题中, 系统的总势能为

$$J[u(x)] = \int_0^l \left[\frac{T}{2}u'^2 - f(x)u\right] \mathrm{d}x,$$

则真实的位移满足的 Euler 方程为

$$Tu'' + f(x) = 0.$$

特别地, 若令 $f(x) = 1$, 则

$$u(x) = \frac{-1}{2T}x^2 + C_1 + C_2 x,$$

即在均匀的横向外力作用下, 静态的弦的形状是抛物线, 对于两端固定的弦, 设 $u(0)=u(l)=0$, 则

$$u(x)=\frac{1}{2T}x(l-x).$$

若不是微小的位移时

$$J[u(x)]=\int_0^l [T(\sqrt{1+u'^2}-1)-f(x)u]\mathrm{d}x,$$

则 Euler 方程是非线性的方程

$$T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1+u'^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right]+f(x)=0.$$

6.2.3 二元函数泛函和多元函数泛函的情况

设

$$J[u(x,y)]=\iint\limits_{\Omega} F(x,y,u,p,q)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中, $p=\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $q=\dfrac{\partial u}{\partial y}$, F 是所含变元的 C^2 类函数. 设泛函的定义域 $D(J)$ 也是在闭区域 $\overline{\Omega}$ 上的 C^2 类函数且满足适当的边界条件.

给定 $u(x,y)\in D(J)$ 及改变元 $\delta u(x,y)$, 使 $u(x,y)+\alpha\delta u(x,y)$ 为 $D(J)$ 中的另一个函数, 得作为小参数 α 的函数 $J[u(x,y)+\alpha\delta u(x,y)]$, 则称

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}J[u(x,y)+\alpha\delta u(x,y)]|_{\alpha=0}$$

为**泛函 $J[u(x,y)]$ 在自变元为 $u(x,y)$ 时的变分**, 记为 $\delta J[u(x,y)]$. 所以

$$\delta J[u(x,y)]=\iint\limits_{\Omega}\left[F_u\delta u+F_p(\delta u)_x+F_q(\delta u)_y\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

把上式积分中的第二项和第三项应用 Green 公式, 得

$$\begin{aligned}\delta J[u(x,y)]=&\iint\limits_{\Omega}\left[F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_p-\frac{\partial}{\partial y}F_q\right]\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&+\int\limits_{\partial\Omega}\left[F_p\cos(\boldsymbol{n},x)+F_q\cos(\boldsymbol{n},y)\right]\delta u\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{6.2.4}$$

其中, $\boldsymbol{n}$ 为 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 的外法向, $(\boldsymbol{n},x)$, $(\boldsymbol{n},y)$ 分别是 $\boldsymbol{n}$ 方向与 x,y 轴的夹角, 且

$$\frac{\partial}{\partial x}F_p=F_{px}+F_{pu}\frac{\partial u}{\partial x}+F_{pp}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F_{pq}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F_q=F_{qy}+F_{qu}\frac{\partial u}{\partial y}+F_{qp}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+F_{qq}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

这里, $\dfrac{\partial}{\partial x}F_p$ 是把 F_p 作为自变量 x,y 的复合函数时对于 x 的偏导数, 可称为全偏

导数, $\dfrac{\partial}{\partial y}F_q$ 也是全偏导数.

若 $u(x,y)$ 为泛函 $J[u(x,y)]$ 的极值元 (极值曲面), 那么作为 α 的函数 $J[u(x,y)+\alpha\delta u(x,y)]$ 在 $\alpha=0$ 时达到极值, 所以必有 $\delta J[u(x,y)]=0$. 又由于在 Ω 上 $\delta u(x,y)$ 可以任意, 根据变分法基本引理可得

$$\begin{cases} F_u-\dfrac{\partial}{\partial x}F_p-\dfrac{\partial}{\partial y}F_q=0, & \text{(6.2.5a)}\\ \displaystyle\int_{\partial\Omega}\left[F_p\cos(\boldsymbol{n},x)+F_q\cos(\boldsymbol{n},y)\right]\delta u\mathrm{d}s=0. & \text{(6.2.5b)}\end{cases}$$

称方程 (6.2.5a) 为**泛函 $J[u(x,y)]$ 的 Euler 方程**, 称 (6.2.5a) 式中左边的微分式为 Euler 导数, 记为 $[F]_u$, 即

$$[F]_u=F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_p-\frac{\partial}{\partial y}F_q. \tag{6.2.6}$$

若在 $\partial\Omega$ 上给定第一边界条件 $u|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y)$, 那么 (6.2.5b) 式一定满足, 所以极值曲面必满足

$$\begin{cases}[F]_u=0,\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y).\end{cases}$$

若在 $\partial\Omega$ 上 $u(x,y)$ 可以任意取值, 即容许曲面 $u(x,y)$ 可以在以 Ω 为底的柱面 $\partial\Omega$ 上自由的滑动, 那么极值曲面 $u(x,y)$ 必满足

$$\begin{cases}[F]_u=0,\\ \left(F_p\cos(\boldsymbol{n},x)+F_q\cos(\boldsymbol{n},y)\right)|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}$$

称上述边界条件为**自然边界条件**.

例如, $F(x,y,u,p,q)=k(x,y)\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+k(x,y)\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+q(x,y)u^2-2f(x,y)u$, 则 Euler 方程为二阶线性偏微分方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(k\frac{\partial u}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(k\frac{\partial u}{\partial y}\Big)-qu+f=0,$$

这时的自然边界条件为 $k\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0$.

例 6.2.3 在例 6.1.4 的薄膜的静态位移问题中, 系统的总势能为

$$J[u(x,y)]=\iint_{\Omega}\left[\frac{T}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{T}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-f(x,y)u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

如果薄膜的边界是固定的, 即给定了第一边界条件, 那么真实的位移满足

$$\begin{cases}T\left(\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)+f(x,y)=0,\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y).\end{cases}$$

如果薄膜可以在 $\partial\Omega$ 上自由地滑动, 那么真实的位移满足

$$\begin{cases} T\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y)=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega}=0. \end{cases}$$

例 6.2.4 在例 6.1.3 的极小曲面问题中

$$J[u(x,y)]=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+p^2+q^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

则极小曲面满足的 Euler 方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}F_p+\frac{\partial}{\partial y}F_q=0,$$

即

$$r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)=0,$$

其中, $r=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ s=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, t=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

如果容许曲面的边界固定, 则极小曲面满足

$$\begin{cases} r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)=0, \\ u|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y). \end{cases}$$

如果边界曲线是一平面曲线, 即 $u|_{\partial\Omega}=(ax+by+c)|_{\partial\Omega}$, 显然极小曲面是一个平面

$$u(x,y)=ax+by+c.$$

如果容许曲面可以在 $\partial\Omega$ 上自由地滑动, 那么由自然边界条件知, 极小曲面满足

$$\begin{cases} r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)=0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0, \end{cases}$$

显然, 这时的极小曲面是平面 $u=c$, c 为任意常数.

类似地, 可以讨论三元函数的泛函和泛函极值的情况. 设

$$J[u(x,y,z)]=\iiint\limits_{\Omega}F(x,y,z,u,P_1,P_2,P_3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

Ω 是空间的一个固定的区域, $\partial\Omega$ 是 Ω 的边界曲面, $P_1=\dfrac{\partial u}{\partial x},\ P_2=\dfrac{\partial u}{\partial y},\ P_3=\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

此时, 泛函的变分是

$$\delta J[u]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}J\left[u+\alpha\delta u\right]|_{\alpha=0}$$

$$= \iiint_{\Omega} \left[F_u \delta u + F_{P_1}(\delta u)_x + F_{P_2}(\delta u)_y + F_{P_3}(\delta u)_z\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

在上式中应用 Gauss 公式, 得

$$\begin{aligned}\delta J[u] = &\iiint_{\Omega} \left(F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{P_1} - \frac{\partial}{\partial y}F_{P_2} - \frac{\partial}{\partial z}F_{P_3}\right) \delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &+ \iint_{\partial\Omega} \left[F_{P_1}\cos(\boldsymbol{n}, x) + F_{P_2}\cos(\boldsymbol{n}, y) + F_{P_3}\cos(\boldsymbol{n}, z)\right] \delta u \mathrm{d}S, \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

其中, $\boldsymbol{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的外法向.

如果 $u(x, y, z)$ 为 $J[u(x, y, z)]$ 的极值元, 则必有 $\delta J[u] = 0$. 根据三元函数时的变分法基本引理可得

$$\begin{cases} F_u - \dfrac{\partial}{\partial x}F_{P_1} - \dfrac{\partial}{\partial y}F_{P_2} - \dfrac{\partial}{\partial z}F_{P_3} = 0, & \text{(6.2.8a)} \\ \displaystyle\iint_{\partial\Omega} \left[F_{P_1}\cos(\boldsymbol{n}, x) + F_{P_2}\cos(\boldsymbol{n}, y) + F_{P_3}\cos(\boldsymbol{n}, z)\right] \delta u \mathrm{d}S = 0, & \text{(6.2.8b)} \end{cases}$$

称 (6.2.8a) 式为泛函的 Euler 方程, 泛函的 Euler 导数为

$$[F]_u = F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{P_1} - \frac{\partial}{\partial y}F_{P_2} - \frac{\partial}{\partial z}F_{P_3},$$

其中, $\dfrac{\partial}{\partial x}F_{P_1}, \dfrac{\partial}{\partial y}F_{P_2}, \dfrac{\partial}{\partial z}F_{P_3}$ 是全偏导数, 比如

$$\frac{\partial}{\partial x}F_{P_1} = F_{P_1 x} + F_{P_1 u}\frac{\partial u}{\partial x} + F_{P_1 P_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_{P_1 P_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + F_{P_1 P_3}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}.$$

若容许函数 $u(x, y, z)$ 给定了第 I 边界条件, 那么极值元必满足

$$\begin{cases} [F]_u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x, y, z). \end{cases}$$

若在 $\partial\Omega$ 上容许函数可以自由地滑动, 那么极值元必满足

$$\begin{cases} [F]_u = 0, \\ \left(F_{p_1}\cos(\boldsymbol{n}, x) + F_{P_2}\cos(\boldsymbol{n}, y) + F_{P_3}\cos(\boldsymbol{n}, z)\right)|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

称上述边界条件为**自然边界条件**.

例 6.2.5 设

$$J[u(x, y, z)] = \iiint_{\Omega} \left[\frac{T}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{T}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{T}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 - f(x, y, z)u\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其极值元必满足的 Euler 方程为

$$T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z)=0.$$

如果容许函数中给定了第 I 边界条件, 那么极值元 $u(x,y,z)$ 必满足

$$\begin{cases} T\Delta_3 u+f(x,y,z)=0, \\ u|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y,z). \end{cases}$$

如果容许函数在边界 $\partial\Omega$ 上可以任意的变化, 那么极值元必满足

$$\begin{cases} T\Delta_3 u+f(x,y,z)=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega}=0. \end{cases}$$

6.2.4 混合积分型泛函的情况

设

$$J[u(x,y)]=\iint\limits_{\Omega}F(x,y,u,p,q)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\partial\Omega}g(x,y,u)\mathrm{d}s,$$

在此种泛函中的第二项称为附加项, 它是依赖于 u 在边界 $\partial\Omega$ 上取值的一个泛函. 这种混合积分型泛函的讨论是类似的, 即泛函在自变元为 $u(x,y)$ 时的变分是

$$\begin{aligned}\delta J[u(x,y)]&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}J\left[u+\alpha\delta u\right]|_{\alpha=0}\\ &=\iint\limits_{\Omega}\left(F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_p-\frac{\partial}{\partial y}F_q\right)\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\quad+\int\limits_{\partial\Omega}\left[F_p\cos(\boldsymbol{n},x)+F_q\cos(\boldsymbol{n},y)+g_u\right]\delta u\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

若 $u(x,y)$ 为极值曲面, 则它必满足下列 Euler 方程的边值问题:

$$\begin{cases} F_u-\dfrac{\partial}{\partial x}F_p-\dfrac{\partial}{\partial y}F_q=0, & (6.2.9a)\\ (F_p\cos(\boldsymbol{n},x)+F_q\cos(\boldsymbol{n},y)+g_u)|_{\partial\Omega}=0, & (6.2.9b)\end{cases}$$

在这种混合型泛函的情况, 边界条件为自然边界条件.

对于三元函数的混合型积分泛函的情况是类似的. 设

$$J[u(x,y,z)]=\iiint\limits_{\Omega}F(x,y,z,u,P_1,P_2,P_3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\partial\Omega}g(x,y,z,u)\mathrm{d}S,$$

这时, 泛函的变分为

$$\begin{aligned}\delta J[u(x,y,z)]&=\iiint\limits_{\Omega}\left(F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{P_1}-\frac{\partial}{\partial y}F_{P_2}-\frac{\partial}{\partial z}F_{P_3}\right)\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &\quad+\iint\limits_{\partial\Omega}\left[F_{P_1}\cos(\boldsymbol{n},x)+F_{P_2}\cos(\boldsymbol{n},y)+F_{P_3}\cos(\boldsymbol{n},z)+g_u\right]\delta u\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

若 $u(x,y,z)$ 为极值元, 则它必满足 Euler 方程的下列边值问题:

$$\begin{cases} F_u - \dfrac{\partial}{\partial x}F_{P_1} - \dfrac{\partial}{\partial y}F_{P_2} - \dfrac{\partial}{\partial z}F_{P_3} = 0, \\ (F_{P_1}\cos(\boldsymbol{n},x) + F_{P_2}\cos(\boldsymbol{n},y) + F_{P_3}\cos(\boldsymbol{n},z) + g_u)|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

例 6.2.6 在例 6.1.4 的理想薄膜的静态位移问题中, 若在薄膜的边界上加上强度为 σ 的弹性支撑和线密度为 h 的横向力, 此力学系统的总势能为

$$J[u(x,y)] = \iint\limits_{\Omega}\left[\frac{T}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{T}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - f(x,y)u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{\sigma u^2}{2} - hu\right)\mathrm{d}s,$$

根据最小势能原理, 真实的横向位移必满足

$$\begin{cases} T\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big) + f(x,y) = 0, \\ \Big(T\dfrac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\Big)|_{\partial\Omega} = h, \end{cases}$$

其边界条件为自然边界条件.

例 6.2.7 设三元函数的泛函

$$\begin{aligned} J[u(x,y,z)] = &\iiint\limits_{\Omega}\left\{\frac{T}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] - fu\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &+ \iint\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{\sigma u^2}{2} - hu\right)\mathrm{d}S, \end{aligned}$$

则泛函的极值元 $u(x,y,z)$ 必满足

$$\begin{cases} T\Delta_3 u + f(x,y,z) = 0, \\ \left(T\dfrac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_{\partial\Omega} = h. \end{cases}$$

6.2.5 两个一元函数 $(y(x), z(x))$ 的泛函的情况

设

$$J[y(x),z(x)] = \int_a^b F(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x,$$

F 是所含变元的 C^2 类函数, $M = \{(y(x),z(x))\}$ 是定义在 $[a,b]$ 上满足适当的边界条件的 C^2 类函数对的集合, 称之为泛函的**定义域** $D(J)$.

若给定 $(y(x),z(x)) \in M$ 及改变元 $(\delta y(x), \delta z(x))$, 使 $(y(x)+\alpha\delta y(x), z(x)+\alpha\delta z(x)) \in M$, 则称

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}J[y(x)+\alpha\delta y(x), z(x)+\alpha\delta z(x)]_{\alpha=0} = \delta J[y(x),z(x)]$$

为泛函 $J[y(x),z(x)]$**在自变元为** $(y(x),z(x))$ **时的变分**, 所以

$$\delta J[y(x),z(x)]=\int_a^b\left(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x+\int_a^b\left(F_z-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}\right)\delta z\mathrm{d}x$$
$$+(F_{y'}\delta y+F_{z'}\delta z)|_a^b.$$

若 $(y(x),z(x))$ 为极值元 (极值曲线), 则必有

$$\delta J[y(x),z(x)]=0,$$

由于当 $x\in[a,b]$ 时, $\delta y(x),\delta z(x)$ 的任意性, 所以若 $(y(x),z(x))$ 为极值曲线, 则必有

$$\begin{cases}[F]_y=F_y-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0,\\ [F]_z=F_z-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}=0,\\ (F_{y'}\delta y+F_{z'}\delta z)|_a^b=0,\end{cases}$$

其中, $[F]_y=0$, $[F]_z=0$ 称为泛函的 Euler 方程组, 称 $[F]_y$ 和 $[F]_z$ 为**Euler 导数**.

如果在容许曲线中两个端点固定, 即给出边界条件

$$\begin{pmatrix}y(x)\\z(x)\end{pmatrix}\Big|_{x=a}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\beta_1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}y(x)\\z(x)\end{pmatrix}\Big|_{x=b}=\begin{pmatrix}\alpha_2\\\beta_2\end{pmatrix},$$

则极值曲线必满足边值问题

$$\begin{cases}[F]_y=0,\\ [F]_z=0,\\ \begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}\Big|_{x=a}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\beta_1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}\Big|_{x=b}=\begin{pmatrix}\alpha_2\\\beta_2\end{pmatrix}.\end{cases}$$

如果在容许曲线中, 两个端点可以分别在平面 $x=a$ 和 $x=b$ 上自由地滑动, 则极值曲线必满足

$$\begin{cases}[F]_y=0,\\ [F]_z=0,\\ F_{y'}|_{x=a}=0,\quad F_{y'}|_{x=b}=0,\quad F_{z'}|_{x=a}=0,\quad F_{z'}|_{x=b}=0,\end{cases}$$

上述边界条件称为自然边界条件.

类似地, 可以讨论其他边界条件的情况, 如一个端点固定, 另一个端点自由滑动.

例 6.2.8 求泛函

$$J[y(x),z(x)]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y'^2+z'^2+2yz)\mathrm{d}x$$

的逗留函数, 容许曲线两端固定, $y(0)=0,z(0)=0$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1,z\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$.

解 逗留函数满足下列泛函的 Euler 方程组的边值问题：

$$\begin{cases} y''-z=0, \\ z''-y=0, \end{cases} \quad \left.\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\right|_{x=0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left.\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

解 Euler 方程组得通解

$$\begin{cases} y(x)=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x, \\ z(x)=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-x}-C_3\cos x-C_4\sin x, \end{cases}$$

由边界条件求得 $C_1=C_2=C_3=0, C_4=1$, 故所求逗留曲线为

$$\begin{cases} y=\sin x, \\ z=-\sin x, \end{cases} \quad 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

6.2.6 泛函中包含二阶导数的情况

设

$$J[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y',y'')\mathrm{d}x,$$

类似地, 可以定义 $\delta J[y(x)]$, $y(x)$ 为极值元的必要条件为 $\delta J[y(x)]=0$, 极值曲线必满足 Euler 方程

$$[F]_y=F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''}=0.$$

设

$$J[u(x,y)]=\iint\limits_{\Omega}F(x,y,u,p,q,r,s,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中, $p=\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $q=\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $r=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $s=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, $t=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. 类似地, 可定义 $\delta J[u(x,y)], u(x,y)$ 为极值曲面的必要条件是 $\delta J[u(x,y)]=0$, 极值曲面必满足 Euler 方程

$$[F]_u=F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_p-\frac{\partial}{\partial y}F_q+\frac{\partial^2}{\partial x^2}F_r+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_s+\frac{\partial^2}{\partial y^2}F_t=0.$$

在这种情况下 Euler 方程为四阶微分方程.

例 6.2.9 在例 6.1.5 的弹性杆和弹性板的静态横向位移中, 对应的总势能分别为

$$J[u(x)]=\int_0^l\left[\frac{D}{2}(u'')^2-f(x)u\right]\mathrm{d}x,$$

$$J[u(x,y)]=\iint\limits_{\Omega}\left[\frac{D}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2+a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2\right)-f(x,y)u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

相应的 Euler 方程分别为

$$Du^{(4)}(x)-f(x)=0,$$

$$D\Big(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}\Big)-f(x,y)=0.$$

在适当的边界条件下, 即可求出真实的相应的位移函数 $u(x)$ 和 $u(x,y)$. 例如, 对于边界固定的情况, 相应的边界条件分别是

$$u(0)=u(l)=u'(0)=u'(l)=0$$

和

$$u|_{\partial\Omega}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega}=0.$$

特别地, 在弹性杆的静态横向位移中, 若 $f(x)=1$, 则

$$u(x)=\frac{x^4}{24D}+C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3,$$

即在均匀的横向外力作用下, 静态的杆形状是四次曲线. 对于两端固定的杆

$$u(x)=\frac{x^2}{24D}(x-l)^2.$$

6.2.7 两个二元函数泛函的情况

设

$$J[u(x,y),v(x,y)]=\iint\limits_{\Omega}F(x,y,u,v,p_1,q_1,p_2,q_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中, $p_1=\dfrac{\partial u}{\partial x},\ q_1=\dfrac{\partial u}{\partial y},\ p_2=\dfrac{\partial v}{\partial x},\ q_2=\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

泛函在自变元为 $u(x,y),v(x,y)$ 时的变分为

$$\begin{aligned}\delta J[u,v]&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}J\left[u+\alpha\delta u,v+\alpha\delta v\right]|_{\alpha=0}\\&=\iint\limits_{\Omega}\left(F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{p_1}-\frac{\partial}{\partial y}F_{q_1}\right)\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Omega}\left(F_v-\frac{\partial}{\partial x}F_{p_2}-\frac{\partial}{\partial y}F_{q_2}\right)\delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad+\int_{\partial\Omega}\left[F_{p_1}\cos(\boldsymbol{n},x)+F_{q_1}\cos(\boldsymbol{n},y)\right]\delta u\mathrm{d}s\\&\quad+\int_{\partial\Omega}\left[F_{p_2}\cos(\boldsymbol{n},x)+F_{q_2}\cos(\boldsymbol{n},y)\right]\delta v\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

极值元 $u(x,y),v(x,y)$ 必满足 $\delta J[u,v]=0$, 从而极值元必满足下列 Euler 方程组和边界条件:

$$\begin{cases}[F]_u=F_u-\dfrac{\partial}{\partial x}F_{p_1}-\dfrac{\partial}{\partial y}F_{q_1}=0,\\[2ex][F]_v=F_v-\dfrac{\partial}{\partial x}F_{p_2}-\dfrac{\partial}{\partial y}F_{q_2}=0,\\[2ex]\displaystyle\int_{\partial\Omega}[(F_{p_1}\cos(\boldsymbol{n},x)+F_{q_1}\cos(\boldsymbol{n},y))\delta u+(F_{p_2}\cos(\boldsymbol{n},x)+F_{q_2}\cos(\boldsymbol{n},y))\delta v]\mathrm{d}s=0.\end{cases}$$

如果给定了第一边界条件, 则极值元必满足

$$\begin{cases} [F]_u = 0, \\ [F]_v = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x,y), \quad v|_{\partial\Omega} = \psi(x,y). \end{cases}$$

如果极值元可以自由地在 $\partial\Omega$ 上滑动, 则它们必满足

$$\begin{cases} [F]_u = 0, \\ [F]_v = 0, \\ (F_{p_1}\cos(\boldsymbol{n},x) + F_{q_1}\cos(\boldsymbol{n},y))|_{\partial\Omega} = 0, \\ (F_{p_2}\cos(\boldsymbol{n},x) + F_{q_2}\cos(\boldsymbol{n},y))|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

6.2.8 Hamilton 原理和例子

从前边的讨论可知, 根据最小势能原理, 对于讨论静态的力学系统时, 变分法起着基本的作用. 对于研究动态的力学系统的运动规律时, 变分法也起着重要的作用, 这是因为有下列 **Hamilton 原理**.

一个动态的力学系统, 以 $u(t,M)$ 表示在 t 时刻空间点 M 的状态 (如 $u(t,M)$ 为位移函数), 那么从 t_0 时刻的状态转移到 t_1 时刻的状态时, 其真实的运动是使

$$J[u(t,M)] = \int_{t_0}^{t_1} L\mathrm{d}t$$

的变分为 0, 即 $\delta J[u(t,M)] = 0$, 其中

$L = V - U$ 称为拉格朗日 (Lagrange) 函数,

$V =$ 系统在时刻 t 的总动能,

$U =$ 系统在时刻 t 的总势能.

例 6.2.10 (弦的横向微小振动问题) 此问题在第 1 章中已讨论过. 在本章的例 6.1.4 和例 6.2.2 中讨论过弦的静态位移, 现在讨论的是动态位移的问题. 即 $u(t,x)$ 表示在时刻 t 弦上 x 点的横向位移, $f(t,x)$ 是 t 时刻作用在弦上 x 点的横向力的密度, ρ 为弦的密度, 这时

$$\begin{aligned} V &= \int_0^l \frac{\rho}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 \mathrm{d}x, \\ U &= \int_0^l \left[\frac{T}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - f(t,x)u\right]\mathrm{d}x, \\ J[u(t,x)] &= \int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\int_0^l \left[\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{T}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + f(t,x)u\right]\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

由 $\delta J[u(t,x)] = 0$, 得 $u(t,x)$ 满足的 Euler 方程为

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-f(t,x)=0.$$

为了得出确定的位移 $u(t,x)$, 还需给出初始条件和适当的边界条件.

如果弦的横向振动不是微小的, 则

$$U=\int_0^l\left[T\left(\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}-1\right)-f(t,x)u\right]\mathrm{d}x,$$

$$J[u(t,x)]=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\int_0^l\left[\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-T\left(\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}-1\right)+fu\right]\mathrm{d}x,$$

由 $\delta J[u(t,x)]=0$, 得 $u(t,x)$ 满足的 Euler 方程为非线性方程

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-T\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x}\right]=f(t,x).$$

例 6.2.11 (薄膜的横向微小振动问题) 在本章的例 6.1.4 和例 6.2.3 中已讨论过膜的静态位移问题, 现在讨论的是动态的问题. 即 $u(t,x,y)$ 表示在时刻 t 膜上点 (x,y) 的横向位移, $f(t,x,y)$ 是 t 时刻作用在膜的外加横向力密度, T 为张力强度, ρ 为膜的密度. 在此力学系统中

$$V=\iint_\Omega\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$U=\iint_\Omega\left[\frac{T}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{T}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-f(t,x,y)u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

所以

$$J[u(t,x,y)]=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\iint_\Omega\left[\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-\frac{T}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\frac{T}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+fu\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由 $\delta J[u(t,x,y)]=0$ 得, u 满足的 Euler 方程为

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-f(t,x,y)=0.$$

为了确定真实的位移, 还需加初始条件和边界条件.

例 6.2.12 (弹性杆和弹性板的振动问题) 在本章的例 6.1.5 和例 6.2.9 中讨论过杆和板的静态位移问题, 现在讨论的是动态位移问题. 即用 $u(t,x)$ 和 $u(t,x,y)$ 分别表示杆和板在 t 时刻的横向位移, 其线密度或面密度均用 ρ 表示, $f(t,x)$ 和 $f(t,x,y)$ 分别表示在 t 时刻作用在杆和板上的外力密度, 在这样的力学系统中, 分别可得

$$J[u(t,x)]=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\int_0^l\left[\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-\frac{D}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+f(t,x)u\right]\mathrm{d}x,$$

$$\begin{aligned}J[u(t,x,y)]=&\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\iint_{\Omega}\left[\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-\frac{D}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right.\\&\left.-a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2\right)+f(t,x,y)u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由 $\delta J[u(t,x)]=0$ 和 $\delta J[u(t,x,y)]=0$, 则 $u(t,x)$ 和 $u(t,x,y)$ 满足的 Euler 方程分别为

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+D\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-f(t,x)=0,$$

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+D\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}\right)-f(t,x,y)=0.$$

为了确定位移函数还需加初始条件和适当的边界条件.

6.2.9 活动区间问题和横截条件

在前边讨论的泛函极值问题中积分区间是固定不变的, 本段讨论活动区间的问题. 设泛函

$$J[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')\mathrm{d}x,$$

其中, 区间 $[x_1,x_2]$ 是可以活动的, 曲线 $y(x)$ 的下端点 (x_1,y_1) 可以在曲线 $\varphi(x,y)=0$ 上变动, 上端点 (x_2,y_2) 可以在曲线 $\psi(x,y)=0$ 上变动. 设变量 x_1, y_1, x_2, y_2 的变分分别为 δx_1, δy_1, δx_2, δy_2. 这些变分不是相互独立的, 它们满足 $(\varphi_x\delta x_1+\varphi_y\delta y_1)\big|_{x=x_1}=0$, $(\psi_x\delta x_2+\psi_y\delta y_2)\big|_{x=x_2}=0$. 相应地, 设函数 $y(x)$ 的变分为 $\delta y(x)$, 则泛函在自变元 $y(x)\,(x_1\leqslant x\leqslant x_2)$ 处的变分可定义为

$$\delta J[y(x)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_{x_1+\alpha\delta x_1}^{x_2+\alpha\delta x_2}F(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\mathrm{d}x\Big|_{\alpha=0},$$

其中, $\delta y'=(\delta y)'$, 所以

$$\delta J[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}[F]_y\delta y\mathrm{d}x+F(x,y,y')\delta x\Big|_{x_1}^{x_2}+F_{y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2}.$$

注意到 $\delta y(x_2)=\delta y_2-y'(x_2)\delta x_2$, $\delta y(x_1)=\delta y_1-y'(x_1)\delta x_1$, 所以得

$$\delta J[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}[F]_y\delta y\mathrm{d}x+(F-y'F_{y'})\delta x\Big|_{x_1}^{x_2}+F_{y'}\Big|_{x_2}\delta y_2-F_{y'}\Big|_{x_1}\delta y_1.$$

这是泛函 $J[y(x)]$ 变分的较为一般的形式, 当两个端点固定时, $\delta x_1=\delta y_1=\delta x_2=\delta y_2=0$, 这时

$$\delta J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} [F]_y \delta y \mathrm{d}x + F_{y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2}.$$

如果 $y(x)(x_1 \leqslant x \leqslant x_2)$ 给出泛函的极值, 则由 $\delta J[y(x)] = 0$ 得

$$\begin{cases} [F]_y = 0, \\ [(F - y'F_{y'})\delta x_1 + F_{y'}\delta y_1]_{x_1} = 0, \\ [(F - y'F_{y'})\delta x_2 + F_{y'}\delta y_2]_{x_2} = 0, \end{cases}$$

上述边界条件就称为横截条件. 特别地, 当两端固定时就给出第一类边界条件 $y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = y_2$. 当两端分别在直线上 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 上自由地滑动时就得自然边界条件 $F_{y'}\big|_{x_1} = 0,\ F_{y'}\big|_{x=x_2} = 0$. 当 (x_1, y_1) 在曲线 $\varphi(x, y) = 0$ 上变动, (x_2, y_2) 在曲线 $\psi(x, y) = 0$ 上变动时, 得一般的横截边界条件

$$\left(\frac{F - y'F_{y'}}{\varphi_x} = \frac{F_{y'}}{\varphi_y}\right)_{x_1} = 0,$$
$$\left(\frac{F - y'F_{y'}}{\psi_x} = \frac{F_{y'}}{\psi_y}\right)_{x_2} = 0.$$

例 6.2.13　求泛函

$$J[y(x)] = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y}\mathrm{d}x$$

的极带, 其中, $y(0) = 1$, 上端点 $(a, y(a))$ 在直线 $y = x - 5$ 上变动, 根据横截条件, 极值曲线 $y(x)$ 满足

$$\begin{cases} [F]_y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(a) = -1. \end{cases}$$

$(a, y(a))$ 点的横截条件表示极值函数在此点和直线 $y = x - 5$ 正交. 解之得

$$(x - 5)^2 + y^2 = 5^2 + 1 = 26,$$

所以极值曲线是两条圆弧, 而且可以由它和直线 $y = x - 5$ 的交点确定出极值曲线的上限 a.

对于活动区间空间曲线的泛函

$$J[y(x), z(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, z, y', z')\mathrm{d}x$$

的讨论是类似的, 这时下端点 (x_1, y_1, z_1) 可以在某一空间曲面或某一空间曲线上变动, 上端点也类似. 此时泛函在 $(y(x), z(x)),\ x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ 处的变分的一般形式为

$$\begin{aligned}\delta J[y(x), z(x)] = &\int_{x_1}^{x_2} [F]_y \delta y \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} [F]_z \delta z \mathrm{d}x + (F - y'F_{y'} - z'F_{z'})\delta x\Big|_{x_1}^{x_2} \\ &+ F_{y'}\big|_{x_2}\delta y_2 - F_{y'}\big|_{x_1}\delta y_1 + F_{z'}\big|_{x_2}\delta z_2 - F_{z'}\big|_{x_1}\delta z_1,\end{aligned}$$

其中, 端点变量 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) 的变分为 $(\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1)$ 和 $(\delta x_2, \delta y_2, \delta z_2)$. 由 $\delta J[y(x), z(x)] = 0$ 可得极值元 $(y(x), z(x))$ 所满足的 Euler 方程组和横截的边界条件. 例如, 若下端点在曲面 $\varphi(x, y, z) = 0$ 上变动, 则横截条件是

$$\left(\frac{F - F'F_{y'} - z'F_{z'}}{\varphi_x} = \frac{F_{y'}}{\varphi_y} = \frac{F_{z'}}{\varphi_z}\right)_{x_1}.$$

如果下端点在曲线 $y = \varphi(x),\ z = \psi(x)$ 上变动, 则横截条件是

$$[F - (y' - \varphi')F_{y'} - (z' - \psi')F_{z'}]_{x_1} = 0.$$

对于活动区间, $(n+1)$ 维空间中曲线的泛函

$$J[y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n')\mathrm{d}x$$

的讨论是类似的.

6.3 变分问题的直接法及微分方程的变分方法

6.3.1 变分问题的直接法

6.2 节讨论的问题是把变分问题转化为微分方程的边值问题来讨论和研究, 这是解决变分问题的一个经典和间接的方法. 但是, 也可以直接由积分型泛函的形式来求解和研究泛函的极值问题, 称这种方法为**变分问题的直接法**.

设

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')\mathrm{d}x, \tag{6.3.1}$$

泛函的容许函数类为 $D(J)$, 不失一般性, 讨论泛函在 $D(J)$ 中的极小值问题, 设 $D(J)$ 中有一个唯一的极小元, 而无其他的极值元.

在 $D(J)$ 中选取一个基函数序列 $\varphi_i(x), i = 1, 2, \cdots$, 设极小元的 n 级近似为 $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 的线性组合

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(x),$$

由此得

$$J[y_n(x)] = \int_a^b F(x, y_n, y_n')\mathrm{d}x,$$

它是线性组合系数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的函数, 记为 $J(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 由多元函数取极值的必要条件知

$$\frac{\partial J(a_1, a_2, \cdots, a_n)}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{6.3.2}$$

这是关于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的方程组, 解此方程组得出组合系数, 从而确定**泛函极小元的 n 级近似解**.

若

$$F(x, y, y') = k(x)y'^2 + q(x)y^2 - 2f(x)y,$$

其中, $k(x) > 0, q(x) \geqslant 0$, 这时 $J(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的二次式, 方程组 (6.3.2) 为一个线性代数方程组, 直接地把求泛函 (6.3.1) 式的 n 级近似极小元的问题化为一个线性代数方程组的求解问题.

泛函的 n 级近似极小元就是泛函在由 $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 所张成的 n 维线性空间中的极小元, 所以应该有

$$J[y_1(x)] \geqslant J[y_2(x)] \geqslant \cdots \geqslant J[y_n(x)] \geqslant \cdots.$$

极小元序列 $y_1(x), \cdots, y_n(x), \cdots$ 称为**泛函的极小序列**, 在一定条件和意义下, 极小序列的极限给出泛函的极小元. 在实际的应用中, 选取的 n 级近似极小元作为变分问题的极小元.

例 6.3.1　设

$$J[y(x)] = \int_0^1 \left(y'^2 - y^2 - 2xy\right) \mathrm{d}x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

若选取基函数序列 $\varphi_i(x) = (1-x)x^i, i = 1, 2, \cdots$, 令极小元的二级近似解为 $y_2(x) = a_1x(1-x) + a_2(1-x)x^2$, 由此得 $J(a_1, a_2) = J[y_2(x)]$, 它是 a_1, a_2 的二次式, 所以得线性方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J(a_1, a_2)}{\partial a_1} = 0, \\ \dfrac{\partial J(a_1, a_2)}{\partial a_2} = 0, \end{cases}$$

解之, 得

$$a_1 = \frac{71}{369}, \quad a_2 = \frac{7}{41},$$

从而得出泛函的二级近似解是 x 的三次多项式

$$y_2(x) = \frac{71}{369}(1-x)x + \frac{7}{41}(1-x)x^2.$$

在这样的多项式基序列下, 泛函极小元的 n 级近似解为 x 的 $(n+1)$ 次多项式.

若选取的基函数序列为 $\varphi_i(x) = \sin i\pi x (i = 1, 2, \cdots)$, 则泛函极小元的 n 级近似为 x 的三角多项式.

这两种基函数序列的选取, 考虑到了容许函数的齐次边界条件和基函数序列的“完备性”, 这也是选取基函数序列的一般原则.

设

$$J[u(x, y)] = \iint\limits_{\Omega} F(x, y, u, p, q)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{6.3.3}$$

其中, $p=\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $q=\dfrac{\partial u}{\partial y}$, 设泛函的容许函数类为 $D(J)$, 在 $D(J)$ 中泛函有一个唯一的极小元而无其他的极值元.

在 $D(J)$ 中选取一基函数序列 $\varphi_i(x,y), i=1,2,\cdots$, 设极小元的 n 级近似为 $\varphi_1(x,y),\cdots,\varphi_n(x,y)$ 的线性组合

$$u_n(x,y)=\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i(x,y),$$

由此得

$$J[u_n(x,y)]=\iint_{\Omega}F\left(x,y,u_n,\frac{\partial u_n}{\partial x},\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

它是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的函数, 记为 $J(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 由多元函数取极值的必要条件得

$$\frac{\partial J(a_1,a_2,\cdots,a_n)}{\partial a_i}=0,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{6.3.4}$$

它是关于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的方程组, 由此确定 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 从而确定 n 级近似极小元 $u_n(x,y)$.

若

$$F(x,y,u,p,q)=k(x,y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+k(x,y)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+q(x,y)u^2-2uf(x,y),$$

其中, $k(x,y)>0, q(x,y)\geqslant 0$, 则 $J(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的二次式, 方程组 (6.3.4) 为一个线性代数方程组.

例 6.3.2 设

$$J[u(x,y)]=\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-4u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$u(-a,y)=u(a,y)=u(x,-b)=u(x,b)=0.$$

若选基函数为 $\varphi_{ij}(x,y)=(a^2-x^2)(b^2-y^2)x^{2(i-1)}\cdot y^{2(j-1)}, i,j=1,2,\cdots$, 若按对角线的排列方法可取得基函数的序列为

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x,y)=\varphi_{11}(x,y)=(a^2-x^2)(b^2-y^2),\\
&\varphi_2(x,y)=\varphi_{21}(x,y)=(a^2-x^2)(b^2-y^2)x^2,\\
&\varphi_3(x,y)=\varphi_{12}(x,y)=(a^2-x^2)(b^2-y^2)y^2,\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

由此可构造出泛函的 n 级近似极小元 $u_n(x,y)$, 它是 x,y 的多项式. 如一级近似为 $u_1(x,y)=a_1(a^2-x^2)(b^2-y^2)$, 由 $J[u_1(x,y)]=J(a_1)$, $\dfrac{\mathrm{d}J(a_1)}{\mathrm{d}a_1}=0$ 得 $a_1=$

$\dfrac{5}{4(a^2+b^2)}$, 由此得出一级近似解 $u_1(x,y)=\dfrac{5}{4(a^2+b^2)}(a^2-x^2)(b^2-y^2)$.

若选取基函数为$\varphi_{ij}(x,y)=\sin\dfrac{i\pi(x+a)}{2a}\cdot\sin\dfrac{j\pi(y+b)}{2b}(i=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots)$, 则又可得泛函极小元的另一种各级近似解, 它们是 x,y 的三角多项式.

上述方法就是最基本的变分问题的直接法, 有许多的理论和计算方法问题均需讨论, 如极小序列的收敛性问题, 近似解的误差分析, 基函数序列的选取, 方程组的求解等. 另外, 在基于上述最基本的直接法的基础上, 由于理论和应用的需要已发展了许许多多的直接方法. 变分问题的经典方法和直接法是相辅相成的, 各自有其优点和局限性. 直接法较为灵活, 它把问题化为方程组, 在许多重要的情况下就是线性代数方程组, 但通常它只能求出近似解. 相反, 变分问题的经典方法可以应用微分方程的理论和方法, 在有些情况可以求得精确解, 但在一般情况下, 由于区域的复杂性和 Euler 方程的复杂性, 精确求解微分方程是困难的.

6.3.2　微分方程的变分方法

把一个微分方程的定解问题转化为变分问题, 通过直接研究和求解变分问题来求解和研究微分方程的问题, 这称为**微分方程的变分方法**. 特别地, 对于二阶线性椭圆型方程的边值问题可转化为一个二次泛函的极小问题 (即泛函的被积表达式中是未知函数和其一阶导数的二次式), 所以通过直接法就把问题转化为线性代数方程组的问题, 下面直接列出一些最基本的结果.

在区间 (a,b) 内考虑二阶自共轭线性方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)-q(x)y+f(x)=0, \tag{6.3.5}$$

其中, $k(x)>0, q(x)\geqslant 0$. 若讨论 (6.3.5) 式的第一边值问题, 即给定了 $y(a)=\alpha, y(b)=\beta$, 则它可转化为泛函

$$J[y(x)]=\int_a^b\left[ky'^2+qy^2-2f(x)y\right]\mathrm{d}x \tag{6.3.6}$$

的极小值问题, 其中, 泛函 $J[y(x)]$ 通过以下内积的方法确定出来, 即设 $y(x)$ 满足齐次边值条件, 则

$$\begin{aligned}J[y(x)]&=-\left\langle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}k(x)y'-q(x)y,y\right\rangle-2\langle f(x),y\rangle\\&=-\int_a^b\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}k(x)y'-q(x)y\right)y\mathrm{d}x-2\int_a^b f(x)y\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\left(ky'^2+q(x)y^2-2f(x)y\right)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

在上述推导过程中最后一式的推导用了分部积分公式和齐次边界条件.

设在一平面区域 Ω 内考察自共轭线性椭圆型方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)-q(x,y)u+f(x,y)=0 \tag{6.3.7}$$

的边值问题, 其中, $k(x,y)>0,\ q(x,y)\geqslant 0$.

若对于第 I 边值条件 $u|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y)$ 的边值问题, 则它可转化为泛函

$$J[u(x,y)]=\iint\limits_{\Omega}\left[k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+k\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+q(x,y)u^2-2f(x,y)u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6.3.8}$$

的极小值问题, 其中, 泛函 $J[u(x,y)]$ 也是通过内积的方法构造出来, 即设 $u(x,y)$ 满足齐次边界条件, 则

$$\begin{aligned}J[u(x,y)]&=-\left\langle\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)-qu,u\right\rangle-2\langle f,u\rangle\\&=-\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)-qu\right)u\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\iint\limits_{\Omega}fu\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{\Omega}\left(k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+k\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+qu^2-2fu\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

在上述推导过程中最后一步用到了二重积分的分部积分公式 (即 Green 公式) 和齐次边界条件.

对于第 II 或第III边界条件

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(x,y)u\right)\Big|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y) \tag{6.3.9}$$

下方程 (6.3.7) 的边值问题, 则它可转化为泛函

$$\begin{aligned}J[u]=&\iint\limits_{\Omega}\left[k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+k\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+qu^2-2fu\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&+\int\limits_{\partial\Omega}(k\sigma u^2-2k\varphi u)\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{6.3.10}$$

的极小值问题. 这时, 泛函中有了附加项, 它使得由此推出的自然边界条件就是边界条件 (6.3.9) 式. 如果边界条件 (6.3.9) 式是齐次的 ($\varphi=0$), 则附加项只含 u 的二次方. 如果 (6.3.9) 式变为第 II 类齐次边界条件 (即 $\sigma=0,\ \varphi=0$), 则泛函的附加项也自然消失.

从物理上看, 上面推出的泛函可解释为某一静态的力学系统中的总势能. 对应于上述二阶常微分方程的 $J[y(x)]$ 可解释为不均匀的弦的微小横向静态位移时的总

势能. 对应于上述偏微分方程时的 $J[u(x,y)]$ 可解释为不均匀的薄膜的横向微小静态位移时的总势能.

类似地, 可以将三维线性自共轭椭圆型方程的边值问题转化为一个二次泛函的极小问题. 在三维区域 Ω 内, 考虑方程

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\&-q(x,y,z)u+f(x,y,z)=0\end{aligned}\tag{6.3.11}$$

的边值问题, 其中, $k(x,y,z)>0,\ q(x,y,z)\geqslant 0$.

对于第 I 类边界条件下的边值问题, 它可转化为泛函

$$J[u]=\iiint_{\Omega}\left[k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+k\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+k\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+qu^2-2fu\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\tag{6.3.12}$$

的极小值问题.

对于第 II 类或第III类边界条件

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma(x,y,z)u\right)\Big|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y,z)\tag{6.3.13}$$

下, 方程 (6.3.11) 的边值问题可转化为泛函

$$\begin{aligned}J[u]=&\iiint_{\Omega}\left[k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+k\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+k\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+qu^2-2fu\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&+\iint_{\partial\Omega}(k\sigma u^2-2k\varphi u)\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{6.3.14}$$

的极小值问题.

6.3.3 微分方程的广义解

一个二阶线性方程边值问题的古典解, 要求在 C^2 类函数中求解, 但若把它转化为一个二次泛函的极小值问题时, 泛函的极值问题可以在更大的函数空间中加以讨论, 这种在更大的函数空间的极小元就很自然地定义为原二阶方程边值问题的广义解, 这种广义解可以是比 C^1 类函数更广的函数类. 微分方程的变分方法不论从理论上还是从具体的求解方法上均提供了一种很有效的途径, 即从泛函分析的观点来研究微分方程的新理念, 这已有许多成熟的理论和方法.

6.4 泛函的条件极值

和多元函数的条件极值问题类似, 在变分学中也有在某些附加条件下求泛函的极值问题.

6.4.1 条件极值

在约束条件 $G(x,y,z)=0$ 下, 求泛函

$$J[y(x),z(x)]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x \tag{6.4.1}$$

的极值问题, 其中, $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为曲面 $G=0$ 上两个固定的点.

设 $\dfrac{\partial G}{\partial z}\neq 0$, 则由 $G=0$ 可解得 $z=\varphi(x,y)$, 代入泛函 (6.4.1) 式得

$$J[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}F_1(x,y,y')\mathrm{d}x, \tag{6.4.2}$$

其中, $F_1=F(x,y,\varphi,y',\varphi_x+\varphi_y y')$, 即用消元法把条件极值问题转化为无条件的泛函极值问题, 所以极值元满足的方程为

$$[F_1]_y=0,$$

即

$$\left(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)+\varphi_y\left(F_z-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}\right)=0.$$

又因为 $G(x,y,z)=0$, $\varphi_y=-G_y/G_z$, 所以得

$$\frac{F_y-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}}{G_y}=\frac{F_z-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}}{G_z},$$

即沿着条件泛函极值曲线 $(y(x),z(x))$, 上式两端是同一个 x 的函数, 记为 $-\lambda(x)$, 于是, 得

$$\begin{cases}[F]_y+\lambda(x)G_y=0,\\ [F]_z+\lambda(x)G_z=0,\end{cases}$$

故得出了条件泛函极值问题的 Lagrange 乘子法:

若 G_y, G_z 不全为零, 则存在函数 $\lambda(x)$, 使泛函 (6.4.1) 式的满足约束条件 $G=0$ 的极值元 $(y(x),z(x))$ 必满足

$$J_0[y(x),z(x)]=\int_{x_1}^{x_2}H(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x \tag{6.4.3}$$

的 Euler 方程组

$$\begin{cases}[H]_y=0,\\ [H]_z=0,\end{cases}$$

其中, $H=F+\lambda(x)G$. 再由 $G=0$ 和边界条件可以求得极值元, 也可求得待定的函数 $\lambda(x)$. 这样, 也就把求条件泛函极值问题转化为求泛函 (6.4.3) 式的极带问题, 称上述的方法为 Lagrange 乘子法, $\lambda(x)$ 称为乘子.

例 6.4.1 测地线问题

在 $G(x,y,z)=0$ 条件下, 求泛函

$$J[y(x),z(x)]=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\mathrm{d}x=\int_{M_1}^{M_2}\mathrm{d}s$$

的极小值问题, 又称为短程线问题, 其极小元就是过曲面 $G=0$ 上两点 M_1,M_2 弧长最小的曲线, 称之为曲面上的测地线.

根据 Lagrange 乘子法, 极小元满足

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)-\lambda(x)G_y=0,\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)-\lambda(x)G_z=0.\end{aligned}$$

又因 $G(x,y,z)=0$, 所以 $G_x+G_yy'+G_zz'=0$, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)-\lambda(x)G_x=0.$$

如果以弧长 s 作为参数, 则

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\cos\alpha=\mu(x)G_x,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\cos\beta=\mu(x)G_y,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\cos\gamma=\mu(x)G_x,\end{cases}$$

其中, $(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ 为测地线切向的方向余弦, $\mu(x)=\lambda(x)\cos\alpha$. 上列方程组表明, 测地线的主法向 $\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\cos\alpha,\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\cos\beta,\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\cos\gamma\right)$ 平行于曲面 $G=0$ 的法向.

若曲面 $G(x,y,z)=0$ 用参数 (u,v) 来表示

$$\begin{cases}x=x(u,v),\\y=y(u,v),\\z=z(u,v),\end{cases}$$

M_1 和 M_2 点的曲面坐标为 (u_1,v_1) 和 (u_2,v_2), 代入泛函 (6.4.1) 式得

$$J[v(u)]=\int_{u_1}^{u_2}F_2(u,v,v')\mathrm{d}u,$$

其中

$$F_2=F\left(x,y,z,\frac{y_u+y_vv'}{x_u+x_vv'},\ \frac{z_u+z_vv'}{x_u+x_vv'}\right)(x_u+x_vv').$$

所以由

$$\begin{cases} [F_2]_v = 0, \\ v(u_1) = v_1, \\ v(u_2) = v_2 \end{cases}$$

给出极值曲线的参数表示. 例如, 求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 上的测地线时, 应用球面坐标 (θ,φ), 不难求得测地线为大圆弧. 求柱面 $x^2+y^2=R^2$ 上的测地线时, 用柱面坐标 (θ,z), 不难求得其测地线为螺旋线. 这些自然满足曲面上测地线的主法向平行于曲面的法向.

一般的 $(n+1)$ 维空间的条件泛函极值问题是在 m 个独立的约束条件

$$G_j(x,y_1,\cdots,y_n)=0, \quad j=1,2,\cdots,m$$

下求泛函

$$J[y_1(x),\cdots,y_n(x)]=\int_{x_1}^{x_2} F(x,\ y_1,\cdots,y_n,\ y_1',\cdots,y_n')\mathrm{d}x$$

的极值, 其中, $m<n$, $M_1(x_1,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $M_2(x_2,\beta_1,\cdots,\beta_n)$ 是 $(n+1)$ 维空间中满足约束条件的两个固定的点, 其讨论的方法和上述三维空间的情况是类似的. 特别地, 由 Lagrange 乘子法, 极值元必满足

$$\begin{cases} [H]_{y_i}=0, & i=1,2,\cdots,n, \\ G_j=0, & j=1,2,\cdots,m, \end{cases}$$

其中, $H=F+\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j(x)G_j$, 再由边界条件 $y_i(x_1)=\alpha_i$, $y_i(x_2)=\beta_i$ 可得出极值元和极值, 也可得出 m 个乘子函数 $\lambda_j(x)$.

在上述的问题中, 约束条件 $G_j=0$ 不包含待求函数 y_i 的导数, 称之为整约束. 若约束条件包含有待求函数的导数, 即 $G_j(x,y_1,\cdots,y_n,y_1',\cdots,y_n')=0$, 称之为非整约束条件, 这时 Lagrange 乘子法仍然有效, 但和整约束的重大差别是 Euler 方程组中将出现乘子函数的一阶导数 $\lambda_j'(x)$, 所以

$$\begin{cases} [H]_{y_i}=0, \\ G(x,y_1,\cdots,y_n,y_1',\cdots,y_n')=0 \end{cases}$$

为包含 $(n+m)$ 个待求函数 $y_i(x)$, $\lambda_j(x)$ 的微分方程组.

6.4.2 等周问题

在等周条件 $J_1[y(x)]=\int_a^b G(x,y,y')\mathrm{d}x=L$ 下, 求泛函

$$J[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

的极值问题称为等周问题, 其中, L 是一个常数, $y(a)=\alpha,\ y(b)=\beta$.

可以证明等周问题也有下列 Lagrange 乘子法的定理：若 $y(x)$ 是上述等周问题的极值元, 且沿着 $y(x)$ 时, $[G]_y\neq 0$, 则存在常数 λ, $y(x)$ 必是

$$J_0[y(x)]=\int_a^b H(x,y,y')\mathrm{d}x$$

的极带, 其中, $H=F+\lambda G$, 所以极值元满足

$$\begin{cases}[H]_y=0,\\ y(a)=\alpha,\quad y(b)=\beta,\\ \displaystyle\int_a^b G\mathrm{d}x=L,\end{cases}$$

由上述方程组可得等周问题的极值, 当然也可得出 Lagrange 乘子 λ.

例 6.4.2 经典等周问题

在等周条件 $J_1[y(x)]=\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=L$ 下, 求泛函 $J[y(x)]=\displaystyle\int_a^b y(x)\mathrm{d}x$ 的极大元和极大值, 其中, $L>b-a,\ y(a)=0,\ y(b)=0$. 问题的几何意义是求过 $A(a,0),\ B(b,0)$ 两点的曲线段, 在弧长一定的条件下, 使此曲线和直线段 $\overline{AB}$ 围成的面积最大.

用 Lagrange 乘子法求解, 由于 $H(x,y,y')=y+\lambda\sqrt{1+y'^2}$ 不包含 x, 所以微分方程 $[H]_y=0$ 有第一积分 $H-y'H_{y'}=c_1$, 解得

$$y'=\frac{\sqrt{\lambda^2-(y-c_1)^2}}{y-c_1},$$

再积分可得 $[H]_y=0$ 的隐式通解

$$(x-c_2)^2+(y-c_1)^2=\lambda^2.$$

由边界条件 $y(a)=0,\ y(b)=0$, 得 $c_2=\dfrac{1}{2}(a+b)$, 所以极值曲线是圆心在 $\left(\dfrac{a+b}{2},c_1\right)$, 半径为 $|\lambda|$ 的圆弧.设 ω 为圆心对 $\overline{AB}$ 的圆心角, 则由等周条件得 $L=|\lambda|\omega$, $(b-a)=2|\lambda|\sin\dfrac{\omega}{2}$, 消去 λ 得 $\sin\dfrac{\omega}{2}:\dfrac{\omega}{2}=(b-a):L$, 由此方程确定 ω, 也可确定 $|\lambda|$ 和 c_1, 从而确定极大元的圆弧.

更一般的等周问题是, 在等周条件

$$J_j[y_1,\cdots,y_n]=\int_a^b G_j(x,y_1,\cdots,y_n,y_1',\cdots,y_n')\mathrm{d}x=L_j,\quad j=1,2,\cdots,m$$

下, 求泛函

$$J[y_1,\cdots,y_n]=\int_a^b F(x,y_1,\cdots,y_n,y_1',\cdots,y_n')\mathrm{d}x$$

的极值元和极值, 其中, L_j 为常数, $y_i(a)=\alpha_i,\ y_i(b)=\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$. 此时 Lagrange 乘子法的定理成立, 即极值元必满足

$$[H]_{y_i}=0,$$

其中, $H=F+\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j G_j$, λ_j 是 Lagrange 乘子, 是待求的常数, 通常可由

$$\begin{cases}[H]_{y_i}=0, & i=1,2,\cdots,n,\\ y_i(a)=\alpha_i,\quad y_i(b)=\beta_i,\\ J_j[y_1,\cdots,y_n]=L_j, & j=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

得出极值元和乘子.

和 6.4.1 节的约束条件下的泛函极值不同的是, 等周问题的 Lagrange 乘子是常数, 而且等周条件的个数 m 可以大于或等于待求函数的个数 n.

等周问题也常出现在待求函数为多元函数的情况, 这时泛函对应的是重积分, Lagrange 乘子法仍然成立, 极值元满足偏微分方程的边值问题.

例 6.4.3 在等周条件 $J_1[u(x,y)]=\iint\limits_{\Omega}\rho(x,y)u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$ 下, 求泛函

$$J[u(x,y)]=\iint\limits_{\Omega}\left[k(x,y)\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)+q(x,y)u^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的极小值和极小元, 其中, $k(x,y)>0,\ \rho(x,y)>0,\ q(x,y)\geqslant 0,\ u\big|_{\partial\Omega}=0$.

根据 Lagrange 乘子法, 极小元一定是泛函

$$J_0[u]=\iint\limits_{\Omega}H\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的极带, 其中, $H=k(x,y)\left(\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)+qu^2-\lambda\rho u^2$, 所以极值元必为

$$\begin{cases}[H]_u=0,\\ u\big|_{\partial\Omega},\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(k\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(k\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)-qu+\lambda\rho u=0,\\ u\big|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}\tag{6.4.4}$$

这是一个自共轭线性偏微分方程的固有值问题, 在第 2 章中已介绍过自共轭线性常微分固有值问题的理论, 对于偏微分方程的情况也有类似的结论, 在接下来的 6.4.3 节目中专门介绍等周问题和上列自共轭线性微分方程固有值之间的相互关系.

6.4.3 等周问题和自共轭微分方程的固有值问题

在等周条件 $\int_a^b\rho(x)y^2(x)\mathrm{d}x=1$ 下, 求泛函

$$J[y(x)]=\int_a^b[k(x)y'^2+q(x)y^2]\mathrm{d}x$$

的极小值问题, 其中, $k(x)>0$, $q(x)\geqslant 0$, $\rho(x)>0$, $y(a)=0$, $y(b)=0$, 根据 Lagrange 乘子法, 极小元必满足

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0,\\ y(a)=0,\quad y(b)=0.\end{cases}\tag{6.4.5}$$

这是第 2 章讨论过的 S-L 型方程的固有值问题, 可以证明等周问题的极小值 λ_1 就是上列固有值问题的最小固有值, 极小元 $y_1(x)$ 就是对应的固有函数, 所以 $\lambda_1=J[y_1(x)]$. 当得到 $y_1(x)$ 以后在等周条件

$$\int_a^b\rho(x)y^2\mathrm{d}x=1,$$
$$\int_a^b\rho(x)y_1(x)y(x)\mathrm{d}x=0$$

下, 泛函 $J[y(x)]$ 的极小值 λ_2 就是上列固有值问题的第二个固有值, 极小元 $y_2(x)$ 就是对应的固有函数, $\lambda_2=J[y_2(x)]$. 以此类推, 依序增加带权 ρ 正交的等周条件个数, 得出一列等周问题的极小值和相应的极小元序列 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\cdots$, $\lambda_n=J[y_n(x)]$. 这些就是固有值问题 (6.4.5) 式的全部固有值序列和相应的固有函数系, 而且 $\lambda_n\to+\infty$, $\{y_n(x)\}$ 构成区间 $[a,b]$ 上完备带权 $\rho(x)$ 的标准正交系.

问题是双向的. 由固有值问题 (6.4.5) 式可以通过内积的方法来构造出相应的泛函 $J[y(x)]$, 即

$$\begin{aligned}J[y(x)]&=\left\langle-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+q(x)y,\ y\right\rangle\\&=\int_a^b\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+q(x)y\right]y\mathrm{d}x\\&=\int_a^b[k(x)y'^2+q(x)y^2]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

则也可以从固有值问题的固有值序列和相应的带权 $\rho(x)$ 的标准固有函数系 $y_n(x)$, 得出泛函 $J[y(x)]$ 一系列等周问题的极小值和极小元.

回到例 6.4.3 的问题. 等周条件下的泛函 $J[u(x,y)]$ 的极小问题和自共轭线性偏微分方程的固有值问题 (6.4.4) 式的关系是完全类似的, 即等周条件下的极小值 λ_1 就是固有值问题的最小固有值. 极小元 $u_1(x,y)$ 就是 λ_1 对应的一个固有函数, 且 $\lambda_1=J[u_1(x,y)]$. 依序增加带权 $\rho(x,y)$ 的正交性条件, 得出等周问题序列的极小值序列 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots$ 和相应的极小元序列 $u_1(x,y)$, $u_2(x,y),\cdots,\lambda_n=J[u_n(x,y)]$,

它们就是自共轭线性偏微分方程固有值问题 (6.4.4) 式的全部固有值和相应的固有函数系 $u_n(x,y)$, 固有函数系构成区域 Ω 上完备的带权 $\rho(x,y)$ 的标准正交系.

完全类似, 由固有值问题 (6.4.4) 式通过内积来构造泛函 $J[u(x,y)]$ 的等周问题, 即

$$\begin{aligned} J[u] &= \left\langle -\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + q(x,y)u,\ u(x,y)\right\rangle \\ &= \iint\limits_{\Omega}\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + qu\right]u\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{\Omega}\left[k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + k\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + qu^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

对于三元函数的等周问题和三元函数的线性自共轭偏微分方程固有值问题间的相互关系是完全类似的.

一般情况下, 精确求出等周问题的极小值和极小元是困难的, 在应用问题中通常是应用变分问题的直接方法得出极小值的近似值和极小元的近似函数, 这也是相应固有值问题的固有值的近似值和相应的近似的固有函数.

对于某一内积空间中的线性自共轭算子 L 的固有值问题 $L\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}$ 和在等周条件 $\|\boldsymbol{X}\|^2=1$ 下泛函 $J[\boldsymbol{X}]=\langle L\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}\rangle$ 的极值问题之间存在着上列所述的关系. 例如, $\mathbf{R}^n$ 空间中实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的固有值问题 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}$, 其中, $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, 与之相关联的是在条件 $\|\boldsymbol{X}\|^2=x_1^2+\cdots+x_n^2=1$ 下, 泛函 $J[\boldsymbol{X}]=\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ 的极值问题.

在内积空间中有一类线性自共轭算子 L 称为正定算子, 其意义就是在 $\|\boldsymbol{X}\|^2=1$ 时, $J[\boldsymbol{X}]=\langle L\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}\rangle>0$, 其充要条件是固有值问题 $L\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}$ 的固有值均为正数. 例如, 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为正定矩阵的充分必要条件是在 $\|\boldsymbol{X}\|^2=1$ 条件下, 泛函 $J[\boldsymbol{X}]=\sum\sum a_{ij}x_ix_j>0$, 即为正定二次型, 其充分必要条件是固有值问题 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}$ 的固有值大于 0. 又如在前边所述的条件下, 固有值问题 (6.4.4) 式和 (6.4.5) 式所对应的算子

$$\begin{aligned} Lu(x,y) &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + qu, \\ Ly(x) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + q(x)y \end{aligned}$$

均为正算子.

根据前边所述, 一个自共轭线性算子的固有值和固有函数对应的是某一个泛函的极值和极值元. 如果把泛函解释为某种能量 (如势能), 则极值元 (即固有函数) 可

解释为可能实现的状态, 而相应的固有值就表示此状态对应的能级.

在用分离变量法解偏微分方程的边值问题和混合问题时, 我们得到过一些自共轭线性微分方程固有值问题的精确解, 所以可得出相应的在等周条件下泛函的极小值和极小元的精确解. 下面是最简单的两个例子.

例 6.4.4 在 $\int_0^l y^2(x)\mathrm{d}x = 1$ 条件下, 泛函

$$J[y] = \int_0^l y'^2\mathrm{d}x, \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0$$

的极小值和极小元问题. 根据 Lagrange 乘子法, 它对应的固有值问题是

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = 0, \quad y(l) = 0, \end{cases}$$

其固有值序列为 $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$, 对应标准的固有函数序列为 $y_n = \sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\dfrac{n\pi}{l}x (n = 1, 2, \cdots)$. 根据固有值问题和泛函极值的关系, λ_n 和 y_n 是在等周条件

$$\int_0^l y^2\mathrm{d}x = 1,$$
$$\int_0^l y_j(x)y(x)\mathrm{d}x = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n-1$$

下泛函 $J[y(x)] = \int_0^l y'^2\mathrm{d}x$ 的极小值和极小元, $\lambda_n = J[y_n]$. 特别地, 最小固有值 $\lambda_1 = \left(\dfrac{\pi}{l}\right)^2$ 和 $y_1(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{l}}\sin\dfrac{\pi}{l}x$ 就是原等周问题的最小值和最小元.

例 6.4.5 在 $\int_0^a\int_0^b u^2(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$ 条件下, 泛函

$$J[u] = \int_0^a\int_0^b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的极小值和极小元问题, 其中, $u\big|_{x=0} = u\big|_{x=a} = u\big|_{y=0} = u\big|_{y=b} = 0$. 根据 Lagrange 乘子法, 它对应的固有值问题是

$$\begin{cases} \Delta_2 u + \lambda u = 0, \quad (x, y) \in \Omega = \{0 < x < a,\ 0 < y < b\}, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

其固有值为 $\lambda_{n,m} = \left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{m\pi}{b}\right)^2$, 相应标准的固有函数为

$$u_{n,m} = \frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y, \quad n = 1, 2, \cdots, m = 1, 2, \cdots .$$

特别最小固有值 $\lambda_1=\lambda_{1,1}=\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^2+\left(\dfrac{\pi}{b}\right)^2$, 相应的标准的固有函数 $u_1(x,y)=u_{1,1}=\sqrt{\dfrac{2}{ab}}\sin\dfrac{\pi}{a}x\sin\dfrac{\pi}{b}y$ 就是原等周问题的最小值和最小元. 下面需根据 $\lambda_{n,m}$ 的大小顺序进行排列得出固有值序列 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots$ 和相应的固有函数序列 $u_n(x,y)$, λ_n 和 u_n 就是在等周条件

$$\int_0^a\int_0^b u^2\mathrm{d}x=1,$$
$$\int_0^a\int_0^b u_j u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\quad j=1,2,\cdots,n-1$$

下, 泛函 $J[u(x,y)]=\displaystyle\int_0^a\int_0^b\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的极小值和极小元, $\lambda_n=J[u_n]$.

习 题 6

1. 写出下列泛函的变分和 Euler 方程:

(1) $J[y(x)]=\displaystyle\int_0^l[y'^2+2y^2-xy]\mathrm{d}x.$

(2) $J[y(x)]=\displaystyle\int_0^l[p(x)y'^2+q(x)y^2-2f(x)y]\mathrm{d}x.$

(3) $J[u(t,x)]=\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int_0^l\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2xtu\right]\mathrm{d}x.$

(4) $J[u(x,y)]=\displaystyle\iint_\Omega\left[a(x,y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+b(x,y)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+c(x,y)u^2-2f(x,y)u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

(5) $J[u(x,y)]=\displaystyle\iint_\Omega\left[a(x,y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+b(x,y)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+c(x,y)u^2-2f(x,y)u\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
$\displaystyle+\int_{\partial\Omega}[g(x,y)u^2+h(x,y)u]\mathrm{d}s.$

(6) $J[u(t,x,y,z)]=\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iiint_\Omega\Big[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$
$+2f(t,x,y,z)u\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

2. 试求出下列泛函的极小元:

(1) $J[y(x)]=\displaystyle\int_0^1(12xy+yy'+y'^2)\mathrm{d}x,\ \ y(0)=0,\ y(1)=4,\ y(x)>0.$

(2) $J[u(x,y)]=\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant1}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2xyu\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \ u\big|_{x^2+y^2=1}=xy.$

3. 将下列微分方程边值问题转化为泛函极小值问题:

(1) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - q(x)y = -f(x), \\ y(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \Delta_2 u(x,y) = -f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \Delta_3 u(x,y,z) - c^2 u = -f(x,y,z),\ (x,y,z) \in \Omega, \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases}$

4. 设

$$\begin{cases} \Delta_2 u = -xy(x-a)(y-b), \quad (x,y) \in \Omega = \{0 < x < a,\ 0 < y < b\}, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

(1) 把上述边值问题转化为泛函的极小值问题.

(2) 用直接法求出泛函极小元的二级近似, 并求出相应的泛函的近似极小值.

(a) 选取基函数为 $\varphi_{ij}(x,y) = (x-a)(y-b)x^i y^j,\ i = 1,2,\cdots,\ j = 1,2,\cdots.$

(b) 选取基函数为 $\varphi_{ij}(x,y) = \sin\dfrac{i\pi x}{a} \cdot \sin\dfrac{j\pi y}{b},\ i = 1,2,\cdots,\ j = 1,2,\cdots.$

(3) 求出泛函极小值问题 (1) 的极小元和极小值.

5. 写出下列泛函对应的 Euler 方程:

(1) $J[u(x,y,z)] = \iiint\limits_{\Omega} \left[\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)^2 + 2fu\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

(2) $J[u(t,x)] = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 - 2fu\right] \mathrm{d}x.$

6. 求下列条件极值:

(1) 分别求出球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 上和柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 上的测地线 (短程线).

(2) 设 $y(0) = 0,\ y(1) = 1,\ \displaystyle\int_0^1 y^2(x)\mathrm{d}x = 1$, 试求 $J[y] = \displaystyle\int_0^1 y'^2 \mathrm{d}x$ 的极带.

(3) 设 Ω 为圆域 $x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ u\big|_{\partial\Omega} = 0,\ \displaystyle\iint\limits_{\Omega} u^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$

试求 $J[u(x,y)] = \displaystyle\iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的最小值和最小元.

7. 试述自共轭的固有值问题

$$\begin{cases} \Delta u - q(x,y,z)u + \lambda\rho(x,y,z)u = 0, \quad (x,y,z) \in \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

和泛函

$$J[u(x,y,z)] = \iiint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + qu^2\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

在等周条件下的极小问题的联系, 其中, $q(x,y,z) \geqslant 0,\ \rho(x,y,z) > 0.$

习题参考答案

习题 1

2. (1) $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=0,\quad u(r)=c_1\ln r+c_2.$

   (2) $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}+k^2u=0.$

3. (1) $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=0,\quad u(r)=\dfrac{c_1}{r}+c_2.$

   (2) $\dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+\dfrac{\omega^2}{a^2}R=0.$

4. (1) $u(x,y)=\dfrac{1}{3}x^2y+\dfrac{1}{y^2}f(x)+g(y)$，$f(x)$ 及 $g(y)$ 为两个一次可微的任意函数.

   (2) $u(x,y)=\mathrm{e}^{-\int p(x,y)\mathrm{d}y}\Big[\int q(x,y)\mathrm{e}^{\int p(x,y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+f(x)\Big]$，$f(x)$ 为一次可微的任意函数.

   (3) $\mathrm{e}^{-x}F(y,z)+G(x,z)$，$F$ 及 G 为一阶可微的任意二元函数.

5. $\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=g\dfrac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]$，$g$ 为重力加速度.

6. 设 $u(t,x)$ 为纵向位移，$\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$，$a=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$，$E$ 为杨氏模量，ρ 为杆的线密度.

7. $$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx},\quad (t>0,\ 0<x<l),\\ u(t,0)=u(t,l)=0,\\ u(0,x)=\begin{cases}\dfrac{2h}{l}x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{l}{2},\\ \dfrac{2h}{l}(l-x), & \dfrac{l}{2}\leqslant x\leqslant l,\end{cases}\\ u_t(0,x)=0. \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}-b(u-u_0)+f(t,x),\quad t>0,\ 0<x<l,\\ [-ku_x+h(u-u_0)]|_{x=0}=0,\\ [ku_x+h(u-u_0)]|_{x=l}=0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\qquad \text{其中},a=\sqrt{\dfrac{k}{c\rho}},\ b=\dfrac{h}{c\rho},\ f(t,x)=\dfrac{1}{c\rho}g(t,x). \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} u_t=a^2\Delta_3u,\quad t>0,\ r<R,\\ (ku_r+hu)|_{r=R}=hf(t),\\ u|_{t=0}=\varphi(r),\quad \text{其中},a=\sqrt{\dfrac{k}{c\rho}}. \end{cases}$$

10. $\begin{cases} \Delta_3 u = 0, \quad 0 < x < a,\ 0 < y < b,\ 0 < z < c, \\ u|_{x=0} = u|_{x=a} = u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0, \\ u|_{z=0} = 0, \quad u|_{z=c} = \varphi(x, y). \end{cases}$

又 $\begin{cases} \Delta_2 u = 0, \quad 0 < x < a,\ 0 < z < b, \\ u|_{x=0} = u|_{x=a} = 0, \\ u|_{z=0} = 0, \quad u|_{z=b} = u_0. \end{cases}$

11. (1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0, \quad \xi = \dfrac{y}{x}, \quad \eta = y.$

(2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \dfrac{1}{2\xi}\dfrac{\partial u}{\partial \xi} + \dfrac{1}{2\eta}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad \xi = y^2, \quad \eta = x^2.$

12. (1) $u = \varphi\Big[\dfrac{z-x}{y-z}, (x-y)^2(x+y+z)\Big]$, φ 为一次可微的任意二元函数.

(2) $-xy + f(x^2 + y^2)$, f 为一次可微的任意函数.

(3) $\dfrac{1}{x-y}\big[\varphi(x) + \psi(y)\big]$, φ 及 ψ 为一次可微的任意函数.

13. (1) $u = y - z - 2(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{y} - \sqrt{z})$.

(2) $\dfrac{3}{4}(x+y)^2 + \dfrac{1}{4}(3x - y)^2$.

(3) $\dfrac{1}{2}\big[\varphi(x - \sin x + y) + \varphi(x + \sin x - y)\big] + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x+\sin x - y}^{x - \sin x + y} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi$.

14. (1) $x^2(t+1)$.

(2) $(x + at)^2$.

(3) $\varphi\left(\dfrac{x+at}{2}\right) - \varphi\left(\dfrac{at-x}{2}\right) + f\left(t - \dfrac{x}{a}\right)$,

$\varphi\left(\dfrac{x+at}{2}\right) + \varphi\left(\dfrac{at-x}{2}\right) - \varphi(0) - a\displaystyle\int_0^{t-\frac{x}{a}} f(\xi)\mathrm{d}\xi$.

(4) $(1 - \cos y)\cos x + 4xy$.

(5) $\big[x^2 + (y+2)^2 + z^2\big]^{-\frac{1}{2}}$.

(6) $\dfrac{1}{6}(x^3 - 1)y^2 + x^2 - 1 + \cos y$.

(7) $x^2 + a^2t^2 + \dfrac{1}{2a}\sin 2x \sin 2at + \dfrac{1}{3}xt^3$.

15. $\sin x \cos at + kxt \quad (x > 0)$.

又：若 $u(0, x) = \cos x$, 则 $\begin{cases} \text{当 } x - at > 0\text{时}, \quad u = kxt + \cos x \cos at, \\ \text{当 } x - at < 0\text{时}, \quad u = kxt - \sin x \sin at, \end{cases}$ 解在特征线上有间断.

习题 2

1. (1) $\lambda_n = \left(\dfrac{2n+1}{2l}\pi\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$

$y_n(x) = \cos\dfrac{2n+1}{2l}\pi x.$

(2) λ_n 是方程 $\tan\sqrt{\lambda}l = -\dfrac{\sqrt{\lambda}}{h}$ 的第 n 个正根, $n = 1, 2, 3, \cdots,$

$y_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}\, x.$

(3) λ_n 是方程 $\cot\sqrt{\lambda}l = \dfrac{1}{h+k}\left(\sqrt{\lambda} - \dfrac{hk}{\sqrt{\lambda}}\right)$ 的第 n 个正根, $n = 1, 2, 3, \cdots,$

$y_n(x) = \sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}\, x + k\sin\sqrt{\lambda_n}\, x.$

2. (1) $\lambda_n = a^2 + (n\pi)^2, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots,$

$y_n(x) = \mathrm{e}^{ax}\sin n\pi x.$

(2) $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots,$

$R_n(r) = \dfrac{1}{r}\sin\dfrac{n\pi}{a}r.$

(3) $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^4, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots,$

$y_n(x) = \sin\dfrac{n\pi}{l}x.$

3. $$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0,\ 0 < x < l, \\ u(t,0) = u(t,l) = 0, \\ u(0,x) = \begin{cases} \dfrac{h}{b}x, & 0 \leqslant x \leqslant b, \\ \dfrac{h}{l-b}(l-x), & b < x \leqslant l, \end{cases} \\ u_t(0,x) = 0. \end{cases}$$

$$u(t,x) = \frac{2hl^2}{b(l-b)\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{l}b\cos\frac{n\pi a}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

4. $$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad t > 0,\ 0 < x < l, \\ u(t,0) = 0, \\ u_x(t,l) + hu(t,l) = 0, \quad h\text{为常数}, \\ u(0,x) = \varphi(x). \end{cases}$$

$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{-a^2\mu_n^2 t}\sin\mu_n x$, 其中, μ_n 为方程 $\tan\mu l = -\dfrac{\mu}{h}$ 的正根,

$$c_n = \int_0^l \varphi(x)\sin\mu_n x\mathrm{d}x / \|\sin\mu_n x\|^2,\ \|\sin\mu_n x\|^2 = \frac{1}{2}\left(l + \frac{h}{\mu_n^2 + h^2}\right).$$

5. $$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad t > 0,\ 0 < x < l, \\ u_x(t,0) = 0, \quad ku_x(t,l) + hu(t,l) = 0, \\ u(0,x) = u_0. \end{cases}$$

$u(t,x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n\mathrm{e}^{-a^2\mu_n^2t}\cos\mu_nx$, 其中, μ_n 为方程 $\tan\mu l=\dfrac{h}{k\mu}$ 的正根,

$c_n=\dfrac{2u_0}{\mu_n}\left(l+\dfrac{kh}{k^2\mu_n^2+h^2}\right)^{-1}\sin\mu_nl.$

6. $\begin{cases}u_{tt}=a^2\Delta_2u,\quad t>0,\ 0<x<l_1,\ 0<y<l_2,\\ u_x(t,0,y)=u_x(t,l_1,y)=0,\\ u(t,x,0)=u(t,x,l_2)=0.\end{cases}$

$$u_{mn}(t,x,y)=\left[C_{mn}\cos\sqrt{\left(\frac{m}{l_1}\right)^2+\left(\frac{n}{l_2}\right)^2}a\pi t+D_{mn}\sin\sqrt{\left(\frac{m}{l_1}\right)^2+\left(\frac{n}{l_2}\right)^2}a\pi t\right]\times\cos\frac{m\pi}{l_1}x\sin\frac{n\pi}{l_2}y,\quad m=0,1,2,\cdots,\ n=1,2,\cdots.$$

7. (1) $u(r,\theta)=\dfrac{A}{a}r\cos\theta.$

(2) $u(r,\theta)=A+\dfrac{B}{a}r\sin\theta.$

(3) $u(r,\theta)=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{r}{a}\sin\theta+\left(\dfrac{r}{a}\right)^3\sin3\theta\right].$

8. $\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx},\quad t>0,\ 0<x<l,\\ u(t,0)=0,\quad u(t,l)=\cos t+\cos2t,\\ u(0,x)=0,\quad u_t(0,x)=0.\end{cases}$

$u(t,x)=u_1(t,x)+u_2(t,x),$

$$u_1(t,x)=2a^2\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^nn}{(n\pi a)^2-l^2}\cos\frac{n\pi a}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x+\frac{\sin\dfrac{x}{a}}{\sin\dfrac{l}{a}}\cos t,$$

$$u_2(t,x)=2a^2\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^nn}{(n\pi a)^2-4l^2}\cos\frac{n\pi a}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x+\frac{\sin\dfrac{2x}{a}}{\sin\dfrac{2l}{a}}\cos2t.$$

9. (1) $u(t,x)=\dfrac{1}{2l}+\dfrac{1}{\pi A}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\sin\dfrac{n\pi A}{l}\mathrm{e}^{-(\frac{n\pi a}{l})^2t}\cos\dfrac{n\pi}{l}x.$

$$\lim_{t\to\infty}u(t,x)=\frac{1}{2l},\qquad\lim_{A\to0}u(t,x)=\frac{1}{2l}+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\mathrm{e}^{-(\frac{n\pi a}{l})^2t}\cos\frac{n\pi}{l}x.$$

(2) $u(t,x)=\mathrm{e}^{-(3+\pi^2)t}\dfrac{1}{x}\sin(\pi\ln x)-\mathrm{e}^{-(3+4\pi^2)t}\dfrac{1}{x}\sin(2\pi\ln x).$

(3) $u(t,x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ht}(a_n\cos\omega_nt+b_n\sin\omega_nt)\sin\dfrac{n\pi}{l}x$, 其中, $\omega_n=\sqrt{\left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2-h^2}$,

$a_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\dfrac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,\ b_n=\dfrac{a_n}{\omega_n}h+\dfrac{2}{l\omega_n}\int_0^l\psi(x)\sin\dfrac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x.$

(4) $u(t,x)=\mathrm{e}^{-\frac{b}{2a^2}x}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}B_n\sin\sqrt{\left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2+\dfrac{b^2}{4a^2}+1}\ t\sin\dfrac{n\pi}{l}x$, 其中,

$$B_n=\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2+\frac{b^2}{4a^2}+1l}}\int_0^l \mathrm{e}^{\frac{b}{2a^2}x}\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x.$$

(5) $u(t,x)=\dfrac{8l^2}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\mathrm{ch}\frac{(2n+1)^2\pi^2}{l^2}at\sin\frac{2n+1}{l}\pi x.$

10. (1) $u(r,\theta)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\ln 2-\ln r}{\ln 2}-\dfrac{1}{6}\left(r^2-\dfrac{4}{r^2}\right)\cos 2\theta+\dfrac{r^2}{4}.$

(2) $u(r,\theta)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_nr^{\frac{n\pi}{\alpha}}+B_nr^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta$, 其中,

$$A_n=\frac{E_n}{a^{\frac{2n\pi}{\alpha}}b^{-\frac{n\pi+\alpha}{\alpha}}+b^{\frac{n\pi-\alpha}{\alpha}}},B_n=\frac{-E_n}{a^{-\frac{2n\pi}{\alpha}}b^{\frac{n\pi-\alpha}{\alpha}}+b^{-\frac{n\pi+\alpha}{\alpha}}},$$

$$E_n=\frac{\alpha}{(n\pi)^2}[1-(-1)^n]-\frac{\alpha}{(n\pi)^2-(2\alpha)^2}[1-(-1)^n\cos 2\alpha].$$

11. (1) 若 $\lambda<0,\mu<0$, 记 $\lambda=-\lambda_1^2,\mu=-\mu_1^2(\lambda_1>0,\mu_1>0)$, 则有

$$u(t,x,y)=\mathrm{e}^{-a^2(\lambda_1^2+\mu_1^2)t}\cdot\left\{\begin{array}{c}\sin\lambda_1x\\ \cos\lambda_1x\end{array}\right\}\cdot\left\{\begin{array}{c}\sin\mu_1y\\ \cos\mu_1y\end{array}\right\}.$$

(2) 若 $\lambda=0,\mu<0$, 则有

$$u(t,x,y)=\mathrm{e}^{-a^2\mu_1^2t}\cdot\left\{\begin{array}{c}x\\ 1\end{array}\right\}\cdot\left\{\begin{array}{c}\sin\mu_1y\\ \cos\mu_1y\end{array}\right\}.$$

(3) 若 $\lambda<0,\mu=0$, 则有

$$u(t,x,y)=\mathrm{e}^{-a^2\lambda_1^2t}\cdot\left\{\begin{array}{c}\sin\lambda_1x\\ \cos\lambda_1x\end{array}\right\}\cdot\left\{\begin{array}{c}y\\ 1\end{array}\right\}.$$

(4) 若 $\lambda>0,\mu<0$, 且 $\lambda+\mu<0$, 记 $\lambda=\omega_1^2,\mu=-\omega_2^2(\omega_1>0,\omega_2>0)$, 则有

$$u(t,x,y)=\mathrm{e}^{a^2(\omega_1^2-\omega_2^2)t}\cdot\left\{\begin{array}{c}\mathrm{e}^{\omega_1x}\\ \mathrm{e}^{-\omega_1x}\end{array}\right\}\cdot\left\{\begin{array}{c}\sin\omega_2y\\ \cos\omega_2y\end{array}\right\}.$$

(5) 若 $\lambda<0,\mu>0$, 且 $\lambda+\mu<0$, 记 $\lambda=-\omega_1^2,\mu=\omega_2^2$, 则有

$$u(t,x,y)=\mathrm{e}^{a^2(\omega_2^2-\omega_1^2)t}\cdot\left\{\begin{array}{c}\sin\omega_1x\\ \cos\omega_1x\end{array}\right\}\cdot\left\{\begin{array}{c}\mathrm{e}^{\omega_2y}\\ \mathrm{e}^{-\omega_2y}\end{array}\right\}.$$

12. (1) $u(t,x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n\pi}2T_0\mathrm{e}^{-(\frac{n\pi a}{l})^2t}-\frac{2A}{a^2n\pi}\frac{1-(-1)^n\mathrm{e}^{-\alpha l}}{\alpha^2+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}(\mathrm{e}^{-(\frac{n\pi a}{l})^2t}-1)\right]\sin\frac{n\pi}{l}x.$

(2) $u(t,x)=\dfrac{Al}{\pi a}\cdot\dfrac{1}{\omega^2-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2}\left(\omega\sin\dfrac{\pi a}{l}t-\dfrac{\pi a}{l}\sin\omega t\right)\cos\dfrac{\pi}{l}x.$

(3) $u(t,x)=\dfrac{2Al^2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{1}{n[(n\pi a)^2-l^2h]}\cdot\left\{\mathrm{e}^{-ht}-\exp\left\{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2t\right\}\right\}\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}.$

13. (1) $u(t,x)=x-1+\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\cos\frac{2n+1}{2}\pi at\cos\frac{2n+1}{2}\pi x.$

(2) $u(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(y)\sin\dfrac{n\pi}{a}x+\varphi_1(y)+\dfrac{\varphi_2(y)-\varphi_1(y)}{a}x,$

其中, $f_n(y)$ 由以下常微方程的边值问题确定:

$$\begin{cases} f_n''(y)-\dfrac{n^2\pi^2}{a^2}f_n(y)=\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a\Big[f(x,y)-\varphi_1''(y)+\dfrac{\varphi_1''(y)-\varphi_2''(y)}{a}x\Big]\sin\dfrac{n\pi}{a}x\mathrm{d}x,\\ f_n(0)=\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a\Big[\psi_1(x)-\varphi_1(0)+\dfrac{\varphi_1(0)-\varphi_2(0)}{a}x\Big]\sin\dfrac{n\pi}{a}x\mathrm{d}x,\\ f_n(b)=\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a\Big[\psi_2(x)-\varphi_1(b)+\dfrac{\varphi_1(b)-\varphi_2(b)}{a}x\Big]\sin\dfrac{n\pi}{a}x\mathrm{d}x. \end{cases}$$

也可用叠加原理分成两个或三个定解问题后求解.

习题 3

1. (1) $Z''(z)-\lambda Z(z)=0;\ \Theta''(\theta)+m^2\Theta(\theta)=0;\ r^2R''(r)+rR'(r)+(\lambda r^2-m^2)R(r)=0.$

(2) $T'(t)+\lambda T(t)=0;\quad r^2R''(r)+2rR'(r)+\Big\{\big[\lambda+b(r)\big]\dfrac{r^2}{a^2}-\mu\Big\}R(r)=0;$

$$\Phi''(\varphi)+m^2\Phi(\varphi)=0;\quad \Theta''(\theta)+\cot\theta\Theta'(\theta)+\left[\mu-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta(\theta)=0.$$

2. $y(x)=1+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-k+1)}{(k!)^2}x^k.$ 当$\lambda=n\ \ (n=0,1,2,\cdots)$时,

$y(x)=L_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{C}_n^k\dfrac{1}{k!}x^k.$

3. $P_0(0)=1,\quad P_n(0)=\begin{cases}0, & n=2k+1,\\ \dfrac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!}, & n=2k,\end{cases}\qquad k=1,2,3\cdots.$

$$P_n'(0)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ \dfrac{(-1)^k(2k+1)!!}{(2k)!!}, & n=2k+1,\end{cases}\qquad k=0,1,2,\cdots.$$

4. (1) 当 $m<n$ 时, 0; 当 $m\geqslant n$ 时, $\dfrac{m![1+(-1)^{m-n}]}{(m-n)!!(m+n+1)!!}.$

(2) 当 $m-n\neq\pm1$ 时, 0; 当 $m=n-1$ 时, $\dfrac{2n}{4n^2-1}$; 当 $m=n+1$ 时, $\dfrac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}.$

(3) $\dfrac{2n(n+1)}{2n+1}.$

5. (1) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}P_1(x)+\dfrac{5}{16}P_2(x)+\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{4n+1}{2}\dfrac{(2n-3)!!}{(2n+2)!!}P_{2n}(x).$

(2) $\dfrac{3}{5}P_1(x)+\dfrac{2}{5}P_3(x).$

(3) $\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(4n+1)}{2^{2n}[(n-1)!]}\dfrac{(2n-2)!}{(n+1)!}P_{2n}(x).$

6. (1) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{r}{a}\right)^2 P_2(\cos\theta)$.

(2) $\dfrac{1}{3r}+\dfrac{1}{r^3}\cos^2\theta-\dfrac{1}{3r^3}$.

(3) $\dfrac{8}{3}-\dfrac{8}{3r}-\left(\dfrac{r}{7}-\dfrac{8}{7r^2}\right)P_1(\cos\theta)+\left(\dfrac{16}{93}r^2-\dfrac{16}{93r^3}\right)P_2(\cos\theta)$.

7. $u(r,\theta)=\dfrac{u_1+u_2}{2}+\dfrac{3}{4}(u_1-u_2)\left(\dfrac{r}{a}\right)P_1(\cos\theta)$

$$+\frac{u_1-u_2}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(4n+3)[(2n-1)!!]}{(2n+2)!!}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1}P_{2n+1}(\cos\theta).$$

8. $$\begin{cases}\Delta_3 u=0, & r<a,\\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial r}+Hu\right)\Big|_{r=a}=f(\theta)\triangleq\begin{cases}q\cos\theta, & 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi.\end{cases}\end{cases}$$

$$u(r,\theta)=\frac{q}{4H}+\frac{q}{2(Ha+1)}rP_1(\cos\theta)+\frac{q}{(Ha+2)a}\frac{5}{16}r^2P_2(\cos\theta)$$

$$+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{q}{(Ha+2n)a^{2n-1}}\cdot\frac{(-1)^{n+1}(4n+1)}{2}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n+2)!!}r^{2n}P_{2n}(\cos\theta),$$

其中, $H=\dfrac{h}{k}$, k 为热传导系数, h 为热交换系数.

9. $\dfrac{A}{2}-\left(\dfrac{3r}{7R}+\dfrac{R^2}{14r^2}\right)A\cos\theta$.

10. (1) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}P_2^0(\cos\theta)+\dfrac{1}{6}P_2^2(\cos\theta)\cos 2\varphi$.

(2) $P_1^1(\cos\theta)\cos\varphi+P_2^1(\cos\theta)\cos\varphi$.

11. (1) $-\left(\dfrac{r}{a}\right)^2 P_2^0(\cos\theta)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r}{a}\right)^2 P_2^2(\cos\theta)\cos 2\varphi$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{-a^{n+2}}{(n+1)r^{n+1}}(A_{nm}\cos m\varphi+B_{nm}\sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta)$, 其中,

$$A_{nm}=\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{(2n+1)}{2\delta_m\pi}\int_0^{2\pi}\cos m\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)P_n^m(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta,$$

$$B_{nm}=\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{(2n+1)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin m\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)P_n^m(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta.$$

$$\delta_m=\begin{cases}1, & m\neq 0,\\ 2, & m=0.\end{cases}$$

12. (1) $J_0(x)+xJ_1(x)+c$.

(2) $x^2(8-x^2)J_0(x)+4x(x^2-4)J_1(x)+c$.

(3) $J_0(x)-4x^{-1}J_1(x)+c$.

(4) $-xJ_0(x)+\displaystyle\int J_0(x)\mathrm{d}x$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2}{\omega_n J_2(\omega_n)}J_1(\omega_n x)$, 在 $[0,1]$ 上均方收敛于 x.

14. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{J_1(\omega_n)}{2J_1^2(2\omega_n)\omega_n}J_0(\omega_n x)$.

15. (1) $u(t,r)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ht}(C_n\cos q_n t+D_n\sin q_n t)J_0(\omega_n r)$, 其中, ω_n 是方程 $J_0(\omega l)=0$ 的第 n 个正根, $q_n=\sqrt{a^2\omega_n^2-h^2}$, $C_n=\dfrac{2}{J_1^2(\omega_n l)l^2}\displaystyle\int_0^l\varphi(r)rJ_0(\omega_n r)\mathrm{d}r$, $D_n=\dfrac{h}{q_n}C_n$.

(2) $u(r,z)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}A_nI_0\left(\dfrac{n\pi}{h}r\right)\sin\dfrac{nx}{h}z$, 其中, $A_n=\dfrac{2}{hI_0\left(\dfrac{n\pi}{h}a\right)}\displaystyle\int_0^h f(z)\sin\frac{n\pi}{h}z\mathrm{d}z$.

特别地, 当 $f(z)=f_0$(常数) 时, $A_n=\dfrac{2f_0[1-(-1)^n]}{n\pi I_0\left(\dfrac{n\pi}{h}a\right)}$.

(3) $u(t,x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}D_n\sin\sqrt{\omega_n^2+b^2}\ tJ_0(\omega_n x)$, 其中, ω_n 是方程 $J_0(\omega)=0$ 的第 n 个正根, $D_n=\dfrac{2}{\sqrt{\omega_n^2+b^2}J_1^2(\omega_n)}\displaystyle\int_0^1\psi(x)xJ_0(\omega_n x)\mathrm{d}x$.

(4) $u(r,\theta)=\dfrac{C_0}{2}I_0(r)+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta)I_n(r)$, 其中, $C_0=\dfrac{1}{\pi I_0(1)}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(\theta)\mathrm{d}\theta$, $C_n=\dfrac{1}{\pi I_n(1)}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta\mathrm{d}\theta$, $D_n=\dfrac{1}{\pi I_n(1)}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin n\theta\mathrm{d}\theta$.

(5) $\dfrac{\sqrt{R}I_{\frac{1}{2}}(kr)}{3\sqrt{r}I_{\frac{1}{2}}(kR)}-\dfrac{\sqrt{R}I_{\frac{5}{2}}(kr)}{3\sqrt{r}I_{\frac{5}{2}}(kR)}P_2(\cos\theta)+\dfrac{\sqrt{R}I_{\frac{5}{2}}(kr)}{6\sqrt{r}I_{\frac{5}{2}}(kR)}P_2^2(\cos\theta)\cos 2\varphi$.

16. $u_0-2u_0\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\omega_n J_1(\omega_n)}J_0\left(\dfrac{\omega_n}{R}r\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{a\omega_n}{R}\right)^2 t}$, 其中, ω_n 是 $J_0(\omega)=0$ 的第 n 个正根.

17. $u(r,z)=D_0z+C_0+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(C_n\mathrm{ch}\omega_n z+D_n\mathrm{sh}\omega_n z)J_0(\omega_n r)$, 其中, ω_n 为方程 $J_1(\omega a)=0$ 的第 n 个正根

$$C_0=\frac{2}{a^2}\int_0^a f_1(r)r\mathrm{d}r\triangleq f_{10},$$

$$C_n=\frac{2}{a^2J_0^2(\omega_n a)}\int_0^a J_0(\omega_n r)rf_1(r)\mathrm{d}r\triangleq f_{1n},$$

$$C_0+D_0h=\frac{2}{a^2}\int_0^a f_2(r)r\mathrm{d}r\triangleq f_{20},$$

$$C_n\mathrm{ch}\omega_n h+D_n\mathrm{sh}\omega_n h=\frac{2}{a^2J_0^2(\omega_n a)}\int_0^a J_0(\omega_n r)rf_2(r)\mathrm{d}r\triangleq f_{2n},$$

$$D_0=\frac{f_{20}-f_{10}}{h},\quad D_n=\frac{f_{2n}-f_{1n}\mathrm{ch}\omega_n h}{\mathrm{sh}\omega_n h}.$$

18. $u(t,r)=\dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{8}{(2k+1)^3\pi^3}\mathrm{e}^{-[a(2k+1)\pi]^2 t}\sin(2k+1)\pi r.$

19. (1) $CJ_\nu(x^2)+DN_\nu(x^2)$.

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}[CJ_{\frac{1}{2}}(2\mathrm{i}x)+DN_{\frac{1}{2}}(2\mathrm{i}x)]$.

20. $Z''(z)-\lambda Z(z)=0;\quad \begin{cases}\Phi''(\varphi)+\mu\Phi(\varphi)=0,\\ \Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi);\end{cases}\quad r^2R''(r)+rR'(r)+(\lambda r^2-\mu)R(r)=0$.

$\mu=m^2\quad(m=0,1,2,\cdots)$.

(1) 若 $\lambda>0$, 记 $\lambda=\omega^2$, 则 $u(r,\varphi,z)=\left\{\begin{array}{c}J_m(\omega r)\\ N_m(\omega r)\end{array}\right\}\cdot\left\{\begin{array}{c}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{array}\right\}\cdot\left\{\begin{array}{c}\mathrm{ch}\omega z\\ \mathrm{sh}\omega z\end{array}\right\}$.

(2) 若 $\lambda=0$, 当 $m=0$ 时, 则 $u(r,\varphi,z)=\left\{\begin{array}{c}1\\ \ln r\end{array}\right\}\cdot\left\{\begin{array}{c}1\\ z\end{array}\right\}$.

当 $m\neq 0$ 时, 则 $u(r,\varphi,z)=\left\{\begin{array}{c}r^m\\ r^{-m}\end{array}\right\}\cdot\left\{\begin{array}{c}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{array}\right\}\cdot\left\{\begin{array}{c}1\\ z\end{array}\right\}$.

(3) 若 $\lambda<0$, 记 $\lambda=-\omega^2$, 则 $u(r,\varphi,z)=\left\{\begin{array}{c}I_m(\omega r)\\ K_m(\omega r)\end{array}\right\}\cdot\left\{\begin{array}{c}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{array}\right\}\cdot\left\{\begin{array}{c}\cos\omega z\\ \sin\omega z\end{array}\right\}$.

习题 4

1. (1) $\varphi(x-at)+\displaystyle\int_0^t f[\tau,x-a(t-\tau)]\mathrm{d}\tau=\varphi(x-at)+\frac{1}{a}\int_{x-at}^{x} f\left(t-\frac{x-\xi}{a},\xi\right)\mathrm{d}\xi.$

(2) $\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^t \mathrm{d}\tau\int_{x-a\tau}^{x+a\tau} f(t-\tau,\xi)\mathrm{d}\xi.$

(3) $\dfrac{y}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}\mathrm{d}\xi.$

(4) $xt\mathrm{e}^{-t}$.

(5) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-\xi)\frac{1}{2\sqrt{at}}\Big(\cos\frac{\xi^2}{4at}+\sin\frac{\xi^2}{4at}\Big)\mathrm{d}\xi.$

2. (1) $xy+y+1$.

(2) $bt-b\left(t-\dfrac{x}{a}\right)H\left(t-\dfrac{x}{a}\right).\qquad H(t)=\left\{\begin{array}{ll}0, & t<0,\\ 1, & t\geqslant 0.\end{array}\right.$

(3) $u_0+\dfrac{4}{\pi}(u_1-u_0)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\mathrm{e}^{-\left(\frac{2n+1}{2l}\pi a\right)^2 t}\cos\frac{2n+1}{2l}\pi x.$

(4) $\dfrac{2}{\omega^2}\sin^2\dfrac{\omega t}{2}-\dfrac{2}{\omega^2}\sin^2\dfrac{\omega}{2}\left(t-\dfrac{x}{a}\right)\cdot H\left(t-\dfrac{x}{a}\right).$

3. (1) $\dfrac{x}{2a\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau$.

   (2) $\dfrac{t}{[1+(r-at)^2][1+(r+at)^2]}$.

   (3) $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} f(\xi)\left[\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}+\frac{y}{(x+\xi)^2+y^2}\right]\mathrm{d}\xi$.

习题 5

4. (1) $\dfrac{2}{l}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{n\pi}{l}\xi\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{e}^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t}$.

   (2) $\dfrac{t}{l}+\dfrac{2}{\pi a}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{l}\xi\sin\frac{an\pi}{l}t\cos\frac{n\pi}{l}x$.

5. $U(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}\ln r,\quad r=\sqrt{x^2+y^2}$.

6. (1) $U(x,y)=\dfrac{1}{4\pi\alpha\beta}\ln\left[\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\dfrac{y}{\beta}\right)^2\right]$.

   (2) $U(x,y)=\dfrac{1}{8\pi}r^2\ln r,\quad r=\sqrt{x^2+y^2}$.

   (3) $U(x,y,z)=-\dfrac{r}{8\pi},\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

7. $U(x,y,z)=-\dfrac{\cos kr}{4\pi r}$.

8. (1) $\dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}\right)$, 其中

   $r=\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{\frac{1}{2}}$,

   $r_1=\left[(x+\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{\frac{1}{2}}$,

   $r_2=\left[(x-\xi)^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{\frac{1}{2}}$,

   $r_3=\left[(x+\xi)^2+(y+\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

   (2) $\dfrac{1}{4\pi}\Big[\dfrac{1}{r(M,M_0)}-\dfrac{R}{\rho_0}\dfrac{1}{r(M,M_1)}-\dfrac{1}{r(M,M_2)}+\dfrac{R}{\rho_0}\dfrac{1}{r(M,M_3)}\Big]$, 其中, $M(x,y,z)$, $M_0(\xi,\eta,\zeta)$ 在上半球内, M_1 与 M_0 关于球面对称, M_2 与 M_0 及 M_3 与 M_1 均关于平面 $z=0$ 对称.

   (3) 平面 $z=0$ 及 $z=H$ 如两面镜子反复反射, 形成无穷多个电像, 在所有坐标为 $(\xi,\eta,2nH+\zeta)$ 点处都放置正点电荷 ε_0, 所有点 $(\xi,\eta,2nH-\zeta)$ 处都放置负点电荷 $-\varepsilon_0, n\epsilon\mathbf{Z}$.

$$G(M;M_0)=\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{r_n}-\frac{1}{r_n'}\right),$$

其中, $r_n=[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-2nH-\zeta)^2]^{\frac{1}{2}}$, $r_n'=[(x+\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-2nH+\zeta)^2]^{\frac{1}{2}}$.

9. (1) $G(x,y;\xi,\eta)=\dfrac{1}{2\pi}\ln\left|\dfrac{z^2-\overline{z_0^2}}{z^2-z_0^2}\right|=\dfrac{1}{4\pi}\ln\dfrac{(x^2-y^2-\xi^2+\eta^2)^2+4(xy+\xi\eta)^2}{(x^2-y^2-\xi^2+\eta^2)^2+4(xy-\xi\eta)^2}$.

(2) $G(r,\theta;\rho_0,\theta_0)=\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{r(M,M_1)\cdot r(M,M_2)}{r(M,M_0)\cdot r(M,M_3)}$, 其中, $M(r^3,3\theta)$, $M_0(\rho_0^3,3\theta_0)$, $M_1\left(\dfrac{R^6}{\rho_0^3},3\theta_0\right)$, $M_2(\rho_0^3,-3\theta_0)$, $M_3\left(\dfrac{R^6}{\rho_0^3},-3\theta_0\right)$, (r,θ) 及 (ρ_0,θ_0) 为原六分之一圆内的点的极坐标.

(3) $G(M;M_0)=\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{r(M,M_1)\cdot r(M,M_2)}{r(M,M_0)\cdot r(M,M_3)}$, 其中, $M(r,\theta)$, $M_0(\rho_0,\theta_0)$ 为右半平面圆外的点, $M_1\left(\dfrac{R^2}{\rho_0},\theta_0\right)$, $M_2(\rho_0,\pi-\theta_0)$, $M_3\left(\frac{R^2}{\rho_0},\pi-\theta_0\right)$.

10. $U(t,x)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}+bt}$.

11. (1) $U(t,x)=\dfrac{1}{2a}J_0\left(\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2t^2-x^2}\right)H(at-|x|)$, $H(x)$ 是单位函数.

$$u(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}\big[U(t,x)*\varphi(x)\big]+U(t,x)*\psi(x)+\int_0^t U(t-\tau,x)*f(\tau,x)\mathrm{d}\tau.$$

(2) $U(t,x,y)=\dfrac{1}{4a^2\pi t}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{4a^2t}-t}$,

$$u(t,x,y)=U(t,x,y)*\varphi(x,y)+\int_0^t U(t-\tau,x,y)*f(\tau,x,y)\mathrm{d}\tau.$$

(3) $U(t,x,y)=\dfrac{1}{2\pi a}\dfrac{h(a^2t^2-x^2-y^2)}{\sqrt{a^2t^2-x^2-y^2}}$, $h(at-r)$ 为单位函数, $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

$$u(t,x,y)=\frac{\partial}{\partial t}\big[U(t,x,y)*\varphi(x,y)\big]+U(t,x,y)*\psi(x,y)+\int_0^t U(t-\tau,x,y)*f(\tau,x,y)\mathrm{d}\tau.$$

(4) $u(t,x,y)=x^2(x+y)+a^2t^2(3x+y)$.

(5) $u(t,x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{2a}\displaystyle\int_{-at}^{at}J_0\left(\frac{1}{a}\sqrt{a^2t^2-\xi^2}\right)\psi(x-\xi)\mathrm{d}\xi$.

12. (1) $G(t,x;\tau,\xi)=\dfrac{2}{l}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sin\frac{2n+1}{2l}\pi\xi\cdot\mathrm{e}^{-[(\frac{2n+1}{2l}\pi a)^2+1](t-\tau)}\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x$.

$$u(t,x)=\int_0^l\varphi(\xi)G(t,x;0,\xi)\mathrm{d}\xi+\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_0^l f(\tau,\xi)G(t,x;\tau,\xi)\mathrm{d}\xi.$$

(2) $G(t,x;\tau,\xi)=\dfrac{2}{\pi a}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{l}\xi\cdot\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\sin\frac{n\pi}{l}x$.

$$u(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l\varphi(\xi)G(t,x;0,\xi)\mathrm{d}\xi+\int_0^l\psi(\xi)G(t,x;0,\xi)\mathrm{d}\xi+\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_0^l f(\tau,\xi)G(t,x;\tau,\xi)\mathrm{d}\xi.$$

习题 6

1. (1) $\delta J\big[y(x)\big] = \int_0^1 \Big[(4y-x)\delta y + 2y'\delta y'(x)\Big]\mathrm{d}x = \int_0^1 (4y-x-2y'')\delta y\mathrm{d}x + 2y'\delta y(x)\Big|_0^1$,
$2y'' - 4y + x = 0.$

(2) $\delta J\big[y(x)\big] = 2\int_0^l \Big[\big(q(x)y - f(x)\big)\delta y + p(x)y'\delta y'\Big]\mathrm{d}x$
$= 2\int_0^l \Big[q(x)y - f(x) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(p(x)y'\big)\Big]\delta y\mathrm{d}x + 2p(x)y'\delta y\Big|_0^l,$
$\big(p(x)y'\big)' - q(x)y + f(x) = 0.$

(3) $\delta J\big[u(t,x)\big] = 2\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int_0^l \Big[xt\delta u + \frac{\partial u}{\partial t}\delta u_t - \frac{\partial u}{\partial x}\delta u_x\Big]\mathrm{d}x$

$= 2\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int_0^l \Big(xt - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)\delta u\mathrm{d}x$

$+ 2\int_0^l \Big[\frac{\partial u(t_2,x)}{\partial t}\delta u(t_2,x) - \frac{\partial u(t_1x)}{\partial t}\delta u(t_1,x)\Big]\mathrm{d}x$

$+ 2\int_{t_1}^{t_2} \Big[\frac{\partial u(t,0)}{\partial x}\delta u(t,0) - \frac{\partial u(t,l)}{\partial x}\delta u(t,l)\Big]\mathrm{d}t,$

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xt = 0.$

(4)

$\delta J\big[u(x,y)\big] = 2\iint_\Omega \Big[\big(c(x,y)(x,y)u - f(x,y)\big)\delta u + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\delta u_x + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\delta u_y\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$= 2\iint_\Omega \Big[c(x,y)u - f(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big]\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$+ 2\int_{\partial\Omega} \Big[a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},x) + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n},y)\Big]\delta u\mathrm{d}S,$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) - c(x,y)u + f(x,y) = 0.$

(5) $\delta J[u] = 2\iint_\Omega \Big[(cu-f)\delta u + a\frac{\partial u}{\partial x}\delta u_x + b\frac{\partial u}{\partial y}\delta u_y\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega}(2gu+h)\delta u\mathrm{d}S$

$= 2\iint_\Omega \Big[cu - f - \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big]\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$+ \int_{\partial\Omega} \Big[2a\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},x) + 2b\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n},y) + 2gu + h\Big]\delta u\mathrm{d}s,$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(b\frac{\partial u}{\partial y}\Big) - c(x,y)u + f(x,y) = 0.$

(6) $\delta J\big[u(t,x,y,z)\big]$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iiint_{\Omega}\Big[f\delta u+\frac{\partial u}{\partial t}\delta u_t-\frac{\partial u}{\partial x}\delta u_x-\frac{\partial u}{\partial y}\delta u_y-\frac{\partial u}{\partial z}\delta u_z\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&= 2\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iiint_{\Omega}\Big[f-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\Delta_3 u\Big]\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&\quad+2\iiint_{\Omega}\Big[\frac{\partial u(t_2,x,y,z)}{\partial t}\delta u(t_2,x,y,z)-\frac{\partial u(t_1,x,y,z)}{\partial t}\delta u(t_1,x,y,z)\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&\quad-2\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iint_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\delta u\mathrm{d}S,
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta_3 u-f(t,x,y,z)=0.$$

2. (1) $y=x^3+3x$.

(2) $u(x,y)=\dfrac{13}{12}xy-\dfrac{xy(x^2+y^2)}{12}$.

3. (1) $J\big[y(x)\big]=\displaystyle\int_a^b\Big[\frac{1}{2}y'^2+\frac{1}{2}q(x)y^2-f(x)y\Big]\mathrm{d}x-\beta y(b)$,

$y(a)=\alpha,\qquad y'(b)=\beta.$

(2) $J\big[u(x,y)\big]=2\displaystyle\iint_{\Omega}\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2-f(x,y)u\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

$u\big|_{\partial\Omega}=\varphi.$

(3)

$$
\begin{aligned}
J\big[u(x,y,z)\big]=&\iiint_{\Omega}\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big)^2+\frac{c^2}{2}u^2-f(x,y,z)u\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&+\iint_{\partial\Omega}\Big[\frac{\sigma}{2}u^2-\varphi(x,y,z)u\Big]\mathrm{d}S.
\end{aligned}
$$

5. (1) $\Delta_3\Delta_3 u-f(x,y,z)=0$.

(2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}-f(t,x)=0$.

6. (1) 大圆弧和螺旋线.

(2) 极带函数为 $y_n(x)=\dfrac{\sin\omega_n x}{\sin\omega_n}$, 其中, ω_n 为 $2\omega-\sin 2\omega=4\omega\sin^2\omega$ 的第 n 个正根, $n=1,2,\cdots$.

(3) 最小值 ω_1^2, 最小元 $\pm\dfrac{1}{R\sqrt{\pi}J_1(\omega_1 R)}J_0(\omega_1 r), r=\sqrt{x^2+y^2}$, ω_1 为 $J_0(\omega R)=0$ 的最小正零点.

7. 和教材中一维和二维的情形类似陈述.

参 考 文 献

陈祖墀. 2002. 偏微分方程. 合肥：中国科学技术大学出版社

盖尔芳特 I M, 希洛夫 G E. 1965. 广义函数 (Ⅰ). 林坚冰译. 北京：科学出版社

谷超豪, 李大潜等. 2002. 数学物理方程. 北京：高等教育出版社

郭敦仁. 1978. 数学物理方法. 北京：人民教育出版社

加藤敏夫. 1960. 变分法及其应用. 周怀生译. 上海：上海科学技术出版社

柯朗 R, 希尔伯特 D. 1981. 数学物理方法 (Ⅱ). 熊振翔, 杨应辰译. 北京：科学出版社

李翊神. 1999. 孤立子与可积系统. 上海：上海科技教育出版社

梁昆淼. 1978. 数学物理方法. 北京：人民教育出版社

陆振球. 2004. 经典和现代数学物理方法. 上海：上海科学技术出版社

斯米尔诺夫 B N. 1958. 高等数学教程 (第四卷第二分册). 谷超豪, 金福临译. 北京：人民教育出版社

梯其玛希 E C. 1964. 与二阶微分方程相联系的本征函数展开 (第一册). 芝萌译. 上海：上海科学技术出版社

王竹溪, 郭敦仁. 2000. 特殊函数概论. 北京：北京大学出版社

吴崇试. 2004. 数学物理方法. 北京：北京大学出版社

薛兴恒. 1995. 数学物理偏微分方程. 合肥：中国科学技术大学出版社

严镇军. 1989. 数学物理方程. 合肥：中国科学技术大学出版社

姚端正. 2004. 数学物理方法. 武汉：武汉大学出版社

Bradbury T C. 1984. Mathematical Methods with Applications to Problems in the Physical Sciences. New York: John Wiley & Sons

Haberman R. 1987. Elementary Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems. Englewood cliffs: Prentice-Hall International. Inc.

Tyn Myint-U. 1983. 数学物理中的偏微分方程. 徐元钟译. 上海：上海科学技术出版社