How to BaiLan　　ベイランのしかた

如何摆烂

Little FIVE
小飞舞

LaTeX

希望你对你自己的人生也是这个态度，如果被别人问：

“啊你怎么还么没有男朋友/女朋友？”

啊对对对

Γ 函数

1 阶乘与 Γ 函数

阶乘被定义为：

$$n! = n(n-1)!, \quad 0! = 1.$$

其中 n 必须要是整数。阶乘可以处理很多排列组合的问题，比如说，二项式系数:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

——就是用阶乘来定义的。另外，由于阶乘的定义域只在非负整数有定义，因此为了得到延拓版本的阶乘，许多数学家做了很多的努力。

其中一种著名的延拓被称为 Γ 函数[1]：

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t \quad \Re(z) > 0.$$

上面的 Γ 函数是通过欧拉第二类积分定义的，其收敛域在 $\Re(z) > 0$，即右平面。为了将其延拓到左平面，尝试采用将 e^t 进行级数展开的方法。不过在此之前应该要先证明 Γ 函数在右平面解析。

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^1 \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t}_{G_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t}_{G_2}$$

对 G_2 进行分析，有存在一个 $N > |z| + 1 \wedge N \in \mathbb{N}^+$，那么对 e^t 进行 Taylor 展开得到：

$$\mathrm{e}^t > \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!} > \frac{t^N}{N!}$$

因此

$$G_2 < \int_0^T \frac{t^{z-1}}{\frac{t^N}{N!}} < \int_0^\infty N!\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t < \infty$$

故收敛，同理可证其一致收敛，那么 G_2 代表的积分在 $\Re(z)$ 上解析。

接下来是 G_1:

$$G_1 = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t < \mathrm{e}\int_0^1 t^{\frac{z}{2}-1}\,\mathrm{d}t < \infty.$$

同理一致收敛，故 $\Gamma(z)$ 在右平面上解析。

[1] 有另外一些长得比较奇怪的 Γ 函数，比如 $\Gamma(z, z_0) = \int_{z_0}^\infty \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$，$\Gamma(z, z_0, z_1) = \int_{z_0}^{z_1} \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$，被称为不完全 Γ 函数和广义不完全 Γ 函数。

另外的是，为了将 $\Gamma(z)$ 延拓到左半平面，尝试对待 G_1 这个瑕积分（因为 G_2 无论如何都是收敛的）：

$$\int_0^1 \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{n+z-1}}{n!}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (-1)^n \frac{t^{n+z-1}}{n!}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+z)}}_{G_s} \quad \text{when } \Re(z) > 0$$

由于一致收敛因此我们可以对调，最后有 G_s 在复平面上几乎处处解析，唯一有问题的是 z 为负整数和 0 的情况。因此重定义后的 Γ 函数应该是：

$$\Gamma(z) = \int_1^{\infty} \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+z)} \qquad z \neq \mathbb{N}^- \cup \{0\}$$

事实上容易证明 G_s 在全平面的任意一个不包含非正实数的闭区域中也是一致收敛的，故 G_s 在全平面除非正整数外解析。

这样子就得到了解析函数 $\Gamma(z)$。

2 Γ 函数的一些性质

Γ 函数可以用在一些热力学、统计学上面，不过在这里暂时不考虑这些。直接来看 Γ 函数的数学性质。

性质 1 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty}\frac{t^z}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = -\frac{t^z}{\mathrm{e}^t}\bigg|_0^{\infty} + z\int_0^{\infty}\frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = z\int_0^{\infty}\frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = z\Gamma(z)$$

一个有趣的推论式 Γ 函数的极点全都是一阶极点，那也就是说：

$$\operatorname{res}\Gamma(-n) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

性质 2 $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$ 这被称为余元公式，证明如下可见 Beta 函数一节。

性质 3 $\Gamma(z) \sim z^{z-1/2}\dfrac{\sqrt{2\pi}}{\mathrm{e}^z}$，$(z \to \infty)$ 这被称为 Stirling 公式。事实上更精准（事实上并不）的可以用 Euler-Maclaurin 求和公式进行渐进展开：

$$\ln\Gamma(z) \sim \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \sum_{n=1}^{N}\frac{\mathrm{B}_{2n}}{2n(2n-1)z^{2n-1}}$$

其中 B_k 被称为伯努利数，满足：

$$\sum_{n=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\frac{k!\mathrm{B}_{2n}}{(2n)!(k-2n+1)!} = \frac{1}{2}$$

其他的有：

$$\mathrm{B}_1 = 1, \qquad B_{2k+1} = 0, \qquad k \in \mathbb{N}^+$$

但上面的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{B}_{2n}}{2n(2n-1)z^{2n-1}}$ 对于任何的 z 都是发散的。所以我用了有限的 N 作为求和上标防止发散。

3 Γ 函数的其他表示

$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{i}\right)^z}{1+\frac{z}{i}}$ 这是 Γ 函数的 Euler 乘积表示，以下是不严格的推导：

引理.1 控制收敛定理（的一个简化版本）

对于一个可积函数序列 $f_n(x)$，若 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，且对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$，存在控制函数 $g(x)$ 使得：

$$\left|f_n(x)\right| \leqslant g(x)$$

对 $\forall x \in S$ 上成立。且 $\int_S g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f(x)\,\mathrm{d}x = \int_s f(x)\,\mathrm{d}x$$

考虑奇怪的函数序列：

$$f_n(t) = \begin{cases} t^{z-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n & t \in [0,n] \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases}$$

然后证明这个函数满足 DSP 引理：

$$\left|f_n(t)\right| \leqslant \left|\Re\left(f_n(t)\right)\right| + \left|\Im\left(f_n(t)\right)\right| < 2\frac{t^{\Re(z)-1}}{\mathrm{e}^t}$$

等号最右边在 $(0,\infty)$ 上面可积，因此就有

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(z)$$

然后现在可以对 $f_n(t)$ 进行讨论：

$$\int_0^n t^{z-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \mathrm{d}t \xrightarrow[\mathrm{d}t=n\mathrm{d}x]{t\to nx} = \int_0^1 n^z x^{z-1}(1-x)^n\,\mathrm{d} = n^z \underbrace{\int x^{z-1}(1-x)^n\,\mathrm{d}x}_{I(n,z)}$$

$$
\begin{aligned}
I(n,z) &= \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^n \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{z}\int_0^1 (1-x)^n \,\mathrm{d}\left(x^z\right) \\
&= \frac{1}{z}\left(\underbrace{x^z(1-x)^n\Big|_0^1}_{0} + n\int_0^1 (1-x)^{n-1}x^z \mathrm{d}z\right) \\
&= \frac{n}{z}I(n-1,z+1)
\end{aligned}
$$

因此 $I(n,z)$ 是存在递推公式的，虽然很奇怪，但是可以这样：

$$
\begin{aligned}
I(0,z+n) &= \int_0^1 x^{n+z-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{n+z} \\
I(1,z+n-1) &= \frac{1}{z+n-1}\cdot\frac{1}{n+1} \\
&= \cdots\cdots\cdots \\
I(n,z) &= \frac{n!}{(z+n-1)(z+n-2)\cdots z}\cdot\frac{1}{n+z} = \frac{n!}{\prod_{i=0}^{n}(z+i)}
\end{aligned}
$$

所以按照之前说的 $\Gamma(z) = \lim\limits_{n\to\infty} n^z I(n,z) = \lim\limits_{n\to\infty} n^z \dfrac{n!}{\prod_{i=0}^{n}(z+i)}$，依靠这个中间表示可以推出 $\Gamma(z)$ 的 Euler 乘积表示：

$$
\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{\prod_{i=0}^{n}(z+i)} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^z}_{\downarrow 1}\frac{1}{z}\prod_{i=1}^{n}\frac{(i+1)/i}{i+z} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{z}\prod_{i=1}^{n}\frac{(i+1)/i}{i+z}
$$

这就是 Euler 乘积表示下的 Γ 函数。
当然也可以美化一下：

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{z}\prod_{i=1}^{n}\frac{(i+1)/i}{i+z} = \frac{1}{z}\prod_{i=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{i}\right)^z\left(1+\frac{z}{i}\right)^{-1}
$$

4 Γ 函数的好朋友 Beta 函数

Beta 函数记为 $\mathrm{B}(x,y)$，其定义为：

$$
\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,\mathrm{d}\theta \qquad \Re(p)>0, \Re(q)>0
$$

Beta 函数和 Γ 函数是连在一起的，在 Beta 函数的定义域内，可以证明：

$$
\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}
$$

以下是不严谨的推导：

引理 2. Fubini 定理（的一个不严谨版本）
若 $\iint_{(A\times B)} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛，那么：

$$\int_A\left(\int_B f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_B\left(\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\iint_{(A\times B)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

那么我们就可以有：

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t\xrightarrow[\mathrm{d}x=\mathrm{d}t/(2x)]{t=x^2} 2\int_0^\infty \frac{x^{2p-1}}{\mathrm{e}^{x^2}}\,\mathrm{d}x$$

因此，我们可以有：

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\iint_{(0,\infty)\times(0,\infty)} \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}x^{2p-1}y^{2q-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad\text{（显然绝对收敛）}$$

然后做代换 $x=r\sin\theta, y=r\cos\theta$，得到：

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q)&=4\int_0^\infty\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-r^2}(r\sin\theta)^{2p-1}(r\cos\theta)^{2q-1}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=4\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2}r^{2(p+q)-1}\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=\Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q)\end{aligned}$$

接下来就可以立即补足余元公式的证明：

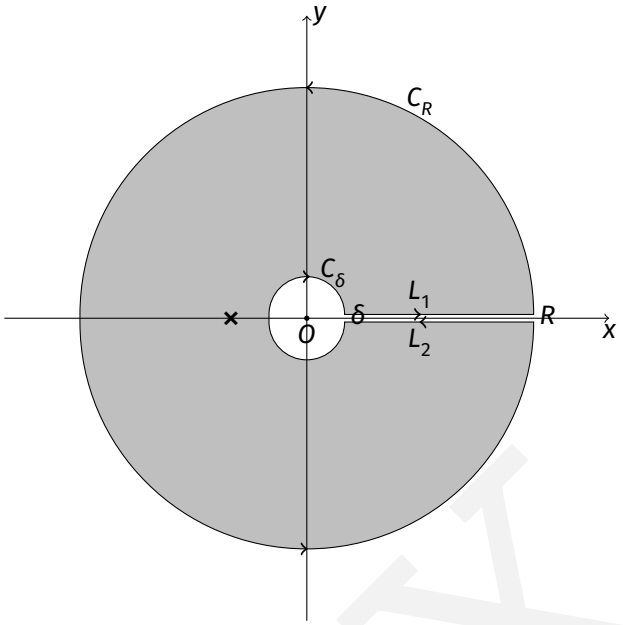
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\mathrm{B}(z,1-z)=\int_0^1\frac{t^{z-1}}{(1-t)^z}\,\mathrm{d}t\xrightarrow{x=\frac{t}{1-t}}\underline{\int_0^\infty\frac{x^{z-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin\pi z}}$$

最后面的下划线积分证明如下：
对于图中函数由于是具有多值性的，故采用常见的 C 型围道。其中有：

$$I_a=\oint_C\frac{z^{a-1}}{1+z}\,\mathrm{d}z=\underbrace{\left(-\oint_{C_\delta}+\oint_{C_r}\right)\frac{z^{a-1}}{1+z}\,\mathrm{d}z}_{I_G}+\underbrace{\int_\delta^R\frac{z^{a-1}}{1+z}\,\mathrm{d}z-\int_\delta^R\frac{\left(z\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}\right)^{a-1}}{1+z}\,\mathrm{d}\left(z\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}\right)}_{\left(1-\mathrm{e}^{2\pi a\mathrm{i}}\right)\int_\delta^R\frac{z^{a-1}}{1+z}\,\mathrm{d}z}$$

其中非常好的有 $\lim\limits_{z\to\infty}z\dfrac{z^{a-1}}{1+z}=\lim\limits_{z\to0}z\dfrac{z^{a-1}}{1+z}=0$，那么由小圆弧定理和大圆弧定理就有 $I_G=0$。
也就是

$$I_a=\left(1-\mathrm{e}^{2\pi a\mathrm{i}}\right)\int_0^\infty\frac{z^{a-1}}{1+z}\,\mathrm{d}z$$



由于函数唯一的极点是在 $z = e^{\pi i}$ 处，此处的留数是 $\mathcal{R}es_z\left\{\dfrac{z^{a-1}}{1+z}, e^{\pi i}\right\} = -e^{a\pi i}$，也就是说

$$\int_0^\infty \frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz = -e^{a\pi i}\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi a i}} = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

然后是这个余元公式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$ 两端都在复平面上除了整数点解析，因此由解析延拓可知，这公式在复平面上除了整数点都成立。

4.1 B 函数、Γ 函数与一些积分

B 函数与 Γ 函数与相当多的积分有关联，在这里列举几个。

Raabe 积分

$$\int_a^{a+1} \ln \Gamma(x)\,dx = a\ln a - a + \frac{\ln 2\pi}{2}$$

考虑最简单的情况：

$$R_0 = \int_0^1 \ln \Gamma(x)\,dx = \int_0^1 \ln \Gamma(1-x)\,dx$$

两者相加得到：

$$2R_0 = \int_0^1 \ln \Gamma(x)\Gamma(1-x)\,dx = \int_0^1 \ln\left(\frac{\pi}{\sin \pi x}\right)dx \xrightarrow{t=\pi x} \ln \pi - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \ln \sin t\,dt$$

对待积分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln \sin t\,dt$ 可以用区间再现：

$$\int_0^{\pi/2} \ln\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln\cos t\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t)\,\mathrm{d}t - \frac{\pi}{4}\ln 2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln\sin t\,\mathrm{d}t - \frac{\pi}{4}\ln 2$$

最后得到 $\int_0^{\pi/2} \ln\sin t\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ln 2$，因此 $R_0 = \frac{\ln 2\pi}{2}$ 接下来考虑积分

$$R(a) = \int_a^{a+1} \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x, \qquad R'(a) = \ln\Gamma(a+1) - \ln\Gamma(a) = \ln a$$

因此，$R(a) = \int_0^a R'(t)\,\mathrm{d}t + R_0 = a\ln a - a + \frac{\ln 2\pi}{2}$

拓展的 Euler 第一类积分

$$E_e = \int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m}\mathrm{B}\left(\frac{p}{m}, q\right)$$

简单的换个元：$y = x^m$，得到 $E_e = \frac{1}{m}\int_0^1 y^{\frac{p}{m}-1}(1-y)^{q-1}\,\mathrm{d}y = \mathrm{B}\left(\frac{p}{m}, q\right)$。
顺带一提，由 Chebyshev 判别定理知道，对于二项微分式的积分：

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x \qquad p, m, n \in \mathbb{Q}$$

是初等函数的充要条件是：$p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n} + p$ 至少有一个是整数。

一个与 ζ 函数相联系的积分

$$\int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \Gamma(z)\zeta(z) \qquad \Re(z) > 1$$

首先考虑到被积函数和 $\Gamma(z)$ 里面的被积函数很接近，因此试试对其 Taylor 展开：

$$\frac{x^{z-1}}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{x^{z-1}}{\mathrm{e}^x}\frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{e}^x}} = \frac{x^{z-1}}{\mathrm{e}^x}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\mathrm{e}^{nx}} = x^{z-1}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\mathrm{e}^{nx}}$$

因此这个积分可以写成（由于函数是一致收敛的，那么可以交换求和号与积分号:）:

$$\int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty x^{z-1}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\mathrm{e}^{nx}}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{z-1}\frac{1}{\mathrm{e}^{nx}}\,\mathrm{d}x$$

对任意一个 $\int_0^\infty x^{z-1}\frac{1}{\mathrm{e}^{nx}}\,\mathrm{d}x$ 应该作 $t = nx$ 换元得到 $\int_0^\infty x^{z-1}\frac{1}{\mathrm{e}^{nx}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^z}\Gamma(z)$ 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} x^{z-1}\frac{1}{\mathrm{e}^{nx}}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(z)}{n^z}=g(z)\zeta(z)$$

其中 ζ 函数被称为 Zeta 函数，当 $\Re(z)>1$ 时，$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$。

5 ψ 函数

好（さあ），现在开始才是高潮呢（これからが本番よ）[2]！——古明地觉（こめいじさとり）

5.1 什么是 ψ 函数

ψ 函数被称为 Digamma 函数，事实上与 Γ 函数有着千丝万缕的联系。ψ 函数的定义为：

$$\psi(z)=\left(\ln\Gamma(z)\right)'=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

至于为什么要取对数然后再求导呢……我们看看 Γ 函数的表达式：

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}\frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t,\qquad \Gamma'(z)=\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}\frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t}\ln t\,\mathrm{d}t.$$

结果就是后面这个玩意不知道是什么几把……又有指数有对数还有幂的，而且随便一扯就扯到多值去了。至于取对则是另外一个原因：考虑 Γ 函数的 Euler 乘积表示：$\frac{1}{z}\prod_{i=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{i}\right)^z\left(1+\frac{z}{i}\right)^{-1}$，取对之后就可以变成无穷级数：

$$\ln\Gamma(z)=-\ln z+\sum_{i=1}^{\infty}z\ln\left(1+\frac{1}{i}\right)-\ln\left(1+\frac{z}{i}\right)$$

然后就可以求导（由于左边在整个单值复平面除了某些点上面解析，因此右边的级数一致收敛），得到

$$\psi(z)=-\frac{1}{z}+\sum_{i=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{i}\right)-\frac{1}{i+z}$$

然后为了让求和中的 $\sum_{i=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{i}\right)$ 看起来更加有用，可以考虑：

$$-\frac{1}{z}+\sum_{i=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{i}\right)-\frac{1}{i+z}=\overbrace{\lim_{n\to\infty}\left[\ln(n+1)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right]}^{-\gamma}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+z}-\frac{1}{z}=-\gamma+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+z}$$

[2] 其实也就是计算量比较大罢了。

这个可以说是 ψ 函数非常非常重要的性质之一。

接下来由 Γ 函数的一些特征可以得到 ψ 函数的一些性质：

$$\Gamma(z+n)=\prod_{k=0}^{n-1}(z+k)g(z)\longrightarrow\psi(z+n)=\psi(z)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z+k}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}\longrightarrow\psi(1-z)=\psi(z)+\pi\cot\pi z$$

留意到一件非常不错的事情——那就是比起 Γ 函数，ψ 函数可以由更简单的级数所定义，而不是被什么阴间的难以展开的积分所限制。

5.2 ψ 函数与一类无穷级数

考虑级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+a}-\frac{1}{n+b}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b-a}{(n+a)(n+b)}$$

这是一个很出名的几把有理分式的求和，现在我们把他写成 ψ 函数的形状：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+a}-\frac{1}{n+b}=\left(-\gamma+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+b}\right)-\left(-\gamma+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+a}\right)=\psi(b)-\psi(a)$$

因此，我们可以用 ψ 函数来表示一种无穷级数。

考虑更加麻烦的无穷级数（也就是更一般情况），对于一个有理分式 $\dfrac{A(x)}{B(x)}$，其中 $A(x),B(x)$ 都是多项式，为了保证 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A(n)}{B(n)}$ 收敛。必然要使得 $\dfrac{A(n)}{B(n)}=o\left(\dfrac{1}{n}\right)$，也就是 $\deg A(n)+2\leqslant\deg B(n)=\mathcal{D}$，为了使 $B(n)$ 更容易分解，我们可以认为 $B(n)$ 有多个不重复的有理根 n_i，这样子 $B(n)$ 就可以分解为

$$\prod_{i=1}^{\mathcal{D}}b\left(n-n_i\right)$$

因此我们可以最终将 $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ 分解：

$$\frac{A(x)}{B(x)}=\sum_{n=1}^{\mathcal{D}}\frac{a_i}{n-n_i}$$

最后有一个重要的问题，就是我们能否将这个级数化成是多个 ψ 函数的值的和。

首先先看这个——“$\deg A(n)+2\leqslant\deg B(n)$”，也就是说 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{nA(n)}{B(n)}=\sum_{i=1}^{\mathcal{D}}a_i=0$。那么我们就可以看到：

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{D}} a_i \psi(-n_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^{\mathcal{D}} a_i(-\gamma)}_{0} + \sum_{i=1}^{\mathcal{D}} a_i \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-n_i} \right) \right]$$

由于绝对收敛我们可以随机 (?) 的调换最后两个求和号：

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{D}} a_i \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-n_i} \right) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{\mathcal{D}} a_i \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-n_i} \right) \right] = -\sum_{i=1}^{\mathcal{D}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_i}{n-n_i}$$

因此，我们就把那个破级数和化成了可以用 ψ 函数表达的形式：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(n)}{B(n)} = -\sum_{i=1}^{\mathcal{D}} a_i \psi(-n_i)$$

5.3 ψ 函数与 Gauss ψ 函数公式

到了这里，我们需要找到一个可以随意 (?) 求出 ψ 函数的值的一个式子，这个式子被称为 Gauss ψ 公式：

$$\psi\left(\frac{m}{n}\right) = -\gamma - \frac{\pi}{2}\cot\frac{m\pi}{n} - \ln 2n + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\sin\frac{k\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{2\pi km}{n}\right) \qquad m,n \in \mathbb{Z} \cap (0,1) \text{ and } m < n, \gcd\langle m,n\rangle = 1.$$

这实际上表明了一个在 (0,1) 上面的有理数可以通过**有限和**的形式表示出来，这是非常难能可贵的。以下是不严谨的推导：

引理.3 对于两个不可约多项式 $P(x), Q(x)$，其中 $\deg P(x) < \deg Q(x) = m$，且 $Q(x)$ 有 m 个不同的根 $x_1, x_2 \cdots x_m$，则：

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{m} \frac{P(x_k)}{Q'(x_k)} \ln\left(x - x_k\right)$$

我们总是能够将这样的有理分式分解，原因是如果我们有：

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{b(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{x-x_k} \tag{A}$$

那么两边同乘上 $(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)$ 得到：

$$\frac{P(x)}{b} = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{x-x_k}(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)$$

现在证明对于这样子的多项式 $P_k(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)}{x-x_k}$ 线性无关：

如果存在 c_k 使得 $\sum_{k=1}^{m} c_k \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)}{x-x_k} = \mathbf{0}$

那么肯定是对任意的 x 都要上式成立，令 $x = x_k$ 就可以得到 $c_k = 0$（前提是 x_k 两两不相等）。因此对于方程 A 可以写成：

$$\overbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{P}_1(x)\\ \mathbf{P}_2(x)\\ \cdots\\ \mathbf{P}_m(x)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}}^{\mathbf{K}} \begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ \cdots\\ a_m\end{bmatrix} = \mathbf{P}(x)$$

是有且仅有唯一解的，因为 $\mathbf{K}$ 满秩。因此上面的假设是没有问题的。这就证明了可分解性。
至于每个 a_k 具体的值的求解也很简单，由于 A 方程中，a_k 是左右两边方程在 x_k 的留数，因此对待只有一阶极点的 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 可直接对 $Q(x)$ 求导得到留数（因为 $P(x_k) \neq 0$）：

$$\mathcal{R}es\left\{\frac{P(x)}{Q(x)}, x_k\right\} = \frac{P(x_k)}{Q'(x_k)}$$

两边积分后，这样就证明了我们的引理。

我们重新审一下 ψ 函数：

$$\psi(z) = -\gamma + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+z}\right)$$

然后考虑这样搞：

$$\psi(z) = -\gamma + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^1 \left(t^k - t^{k+z-1}\right)\mathrm{d}t\right) \xlongequal{\text{DSP 定理}} -\gamma + \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(t^k - t^{k+z-1}\right)\mathrm{d}t\right)$$
$$= -\gamma + \int_0^1 \left(\left(1 - t^{z-1}\right)\sum_{k=0}^{\infty} t^k\,\mathrm{d}t\right) = -\gamma + \underbrace{\int_0^1 \frac{1-t^{z-1}}{1-t}\,\mathrm{d}t}_{U_1}$$

这样就得到了 ψ 函数的一个全新的用积分表达的形式，这个形式对于推导 Gauss 公式有很大的帮助。
现在考虑当 $z = \frac{p}{q}$，且 $p, q \in \mathbb{Z}^+, p < q, \gcd\langle p, q\rangle = 1$ 的情况。
对积分 U_1 进行换元：

$$\int_0^1 \frac{1-t^{z-1}}{1-t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\mathrm{d}t = q x^{q-1}\mathrm{d}x]{x^q = t} q\int_0^1 \frac{\overbrace{x^{p-1} - x^{q-1}}^{w(x)}}{x^q - 1}\,\mathrm{d}x$$

其中这个 $w(x)$ 满足引理 3 的要求，因此我们可以将它展开成有限级数。

$$U_1 = q\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{x^q-1}-\frac{x^{q-1}}{x^q-1}\,\mathrm{d}x = q\left(\overbrace{\sum_{k=1}^{q-1}\frac{\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}(p-1)/q}}{q\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}/q}}\ln\left(x-\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}(q-1)/q}\right)}^{M_1}+\overbrace{\frac{\ln(x-1)}{q}}^{M_2}-\overbrace{\frac{\ln(x^q-1)}{q}}^{M_3}\right)\Bigg|_0^1$$

其中对于 U_1 后面一项 $\dfrac{x^{q-1}}{x^q-1}$ 的积分就是 M_3，前面一项的积分得到 M_1+M_2，为了防止发散将 M_2 单独提出来。现在我们需要对 M_1 这个小级数复展开：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}(p-1)/q}}{\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}(q-1)/q}}\ln\left(x-\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}/q}\right)\Big|_0^1 &= \frac{\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}(p-1)/q}}{\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}(q-1)/q}}\ln\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}/q}}\right)\\ &= \mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}(p-q)/q}\ln\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}/q}}\right)\\ =\left[\cos\left(\frac{2k\pi(p-q)}{q}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{2k\pi(p-q)}{q}\right)\right]&\left[\frac{\ln\left(2-2\cos\frac{2k\pi}{q}\right)}{2}+\mathrm{i}\arctan\left(\frac{\sin\frac{2k\pi}{q}}{1-\cos\frac{2k\pi}{q}}\right)\right]\end{aligned}$$

看上去非常吓人（实际上也……）但总之由于 p,q 是实数，因此 $\psi\left(\dfrac{p}{q}\right)$ 也是实数，我们只需要求级数的实部就可以了：

$$\begin{aligned}S_k &= \Re\left\{\left[\cos\left(\frac{2k\pi(p-q)}{q}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{2k\pi(p-q)}{q}\right)\right]\left[\frac{\ln\left(2-2\cos\frac{2k\pi}{q}\right)}{2}+\mathrm{i}\arctan\left(\frac{\sin\frac{2k\pi}{q}}{1-\cos\frac{2k\pi}{q}}\right)\right]\right\}\\ &= \left[\cos\left(\frac{2k\pi(p-q)}{q}\right)\frac{\ln\left(2-2\cos\frac{2k\pi}{q}\right)}{2}-\sin\left(\frac{2k\pi(p-q)}{q}\right)\arctan\left(\frac{\sin\frac{2k\pi}{q}}{1-\cos\frac{2k\pi}{q}}\right)\right]\end{aligned}$$

考虑到在 $x\in(0,1)$ 时，$\arctan\left(\dfrac{\sin\pi x}{1-\cos\pi x}\right)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}x$，因此代入可以得到：

$$S_k = \left[\cos\left(\frac{2k\pi p}{q}\right)\frac{\ln\left(2-2\cos\frac{2k\pi}{q}\right)}{2}-\sin\left(\frac{2k\pi p}{q}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{q}\right)\right]$$

好，现在我们就完成了每个求和分量的化简，但事实上有一些东西是可以因为求和互相抵消掉的，这些我们也要考虑：

$$\sum_{k=1}^{q-1}S_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{q-1}\left(\cos\left(\frac{2k\pi p}{q}\right)\frac{\ln\left(2-2\cos\frac{2k\pi}{q}\right)}{2}\right)}_{Y_0}-\frac{\pi}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^{q-1}\sin\left(\frac{2k\pi p}{q}\right)}_{Y_1}+\frac{\pi}{q}\underbrace{\sum_{k=1}^{q-1}k\sin\left(\frac{2k\pi p}{q}\right)}_{Y_2}$$

接下来对 Y_1 和 Y_2 下手：

$$Y_1 = \Im\left(\sum_{k=1}^{q-1}\mathrm{e}^{\frac{2kpi\pi}{q}}\right)=\Im\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{2kpi\pi}{q}}-\mathrm{e}^{\frac{2kpiq\pi}{q}}}{1-\mathrm{e}^{\frac{2kpi\pi}{q}}}\right)=0$$

$$Y_2 = \mathfrak{I}\left(\sum_{k=1}^{q-1} k\mathrm{e}^{\frac{2k\mathrm{i}\pi}{q}}\right) = \mathfrak{I}\left(\frac{(q-1)\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi(q+1)}{q}} - q\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}q\pi}{q}} + \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{q}}}{\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{q}}-1\right)^2}\right) = \mathfrak{I}\left(\frac{q\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{q}} - q}{\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{q}}-1\right)^2}\right) = -\frac{q}{2}\frac{\sin\left(\frac{2p\pi}{q}\right)}{1-\cos\left(\frac{2p\pi}{q}\right)}$$

然后就可以代入进去了：

$$\sum_{k=1}^{q-1} S_k = Y_0 - \frac{\pi}{2}\frac{\sin\left(\frac{2p\pi}{q}\right)}{1-\cos\left(\frac{2p\pi}{q}\right)} = Y_0 - \frac{\pi}{2}\cot\left(\frac{p}{q}\pi\right)$$

接下来对 Y_0 这个东西进行下简单操作：

$$\begin{aligned} Y_0 &= \sum_{k=1}^{q-1}\cos\left(\frac{2k\pi p}{q}\right)\frac{\ln\left(2-2\cos\frac{2k\pi}{q}\right)}{2} = \sum_{k=1}^{q-1}\cos\left(\frac{2k\pi p}{q}\right)\ln\left(2\sin\left(\frac{2k\pi p}{q}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{q-1}\cos\left(\frac{2k\pi p}{q}\right)\ln\left(\sin\left(\frac{k\pi p}{q}\right)\right) + \ln 2\sum_{k=1}^{q-1}\cos\left(\frac{2k\pi p}{q}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{q-1}\cos\left(\frac{2k\pi p}{q}\right)\ln\left(\sin\left(\frac{k\pi p}{q}\right)\right) - \ln 2 \end{aligned}$$

接下来将所有东西结合起来就可以得到 Gauss ψ 公式：

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{k=1}^{q-1}\cos\left(\frac{2k\pi p}{q}\right)\ln\left(\sin\left(\frac{k\pi p}{q}\right)\right) - \frac{\pi}{2}\cot\left(\frac{p}{q}\pi\right) - \ln 2n - \gamma \qquad p,q\in\mathbb{Z}^+, p<q, \gcd\langle p,q\rangle = 1$$

首先要说明的是，这个 Gauss 公式得到的是 z 是有理数且属于 0 到 1 的开区间内，算上 $\psi(1) = -\gamma + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} = -\gamma$，我们就定义了 ψ 函数所有 $(0,1]$ 上的值。再利用 $\psi(z+n) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z+k} + \psi(z)$ 我们就可以把 Gauss ψ 公式很轻松地推广到除了非正整数的所有有理数上面：

$$\underbrace{\psi\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{k=1}^{q-1}\cos\left(\frac{2k\pi p}{q}\right)\ln\left(\sin\left(\frac{k\pi p}{q}\right)\right) - \frac{\pi}{2}\cot\left(\frac{p}{q}\pi\right) - \ln 2n - \gamma + \begin{cases} \sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{p}{q}\right\rfloor}\frac{q}{p-iq} & \frac{p}{q} > 1 \\ \sum_{i=\left\lfloor\frac{p}{q}\right\rfloor+1}^{0}\frac{q}{p-iq} & \frac{p}{q} < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}}_{p,q\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}, \gcd\langle p,q\rangle = 1, \frac{p}{q}\notin\mathbb{Z}^-}$$

接下来我们就可以肆意求出那些符合条件的无穷级数的值了。

5.4 ψ 函数的（高阶）导数

我们再进一步，对 ψ 函数求导：

$$\psi'(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(-\gamma+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+z}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+z)^2}$$

其中求导和求和交换是因为一致收敛。

也就是说，ψ 函数的导数又是一个新奇的级数，而且显然有：

$$\psi^{(n)}(z)=(-1)^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n!}{(k+z)^{n+1}}$$

这个级数没有什么好的求和方法，但是可以显然注意到：

$$\psi^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n!}{(k+1)^{n-1}}=(-1)^{n-1}(n-1)!\zeta(n-1)$$

这样也可以和 ζ 函数联系到一起。顺带一提的是 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)^k}=\frac{2^k-1}{2^k}\zeta(k)$。因此对于 $\psi^{(n)}$ 的某些非常特殊的值，我们也可以求出它的值，以下是不严谨的推导：

如果 $z\in\mathbb{Z}\cup\mathbb{Z}+\dfrac{1}{2}\backslash\mathbb{Z}^-\cup\{0\}$，则 $\psi^{(n)}(z)$ 可以有比较好的表示。

- 如果 $z\in\mathbb{Z}^+$，那么有

$$\psi^{(n)}(z)=(-1)^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n!}{(k+z)^{n+1}}=(-1)^{n-1}n!\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{n+1}}-\sum_{i=1}^{z}\frac{1}{i}\right)=(-1)^{n-1}n!\left(\zeta(n+1)-\sum_{i=1}^{z-1}\frac{1}{i}\right)$$

如果 $z=1$ 发现求和上标少于下标，此时忽略求和即可。

- 若 $z\in\mathbb{Z}+\dfrac{1}{2}$，则

$$\psi^{(n)}\left(k+\frac{1}{2}\right)=(-1)^{n-1}n!\left(\left(2^{n+1}-1\right)\zeta(n+1)+2^{n+1}\begin{cases}\displaystyle\sum_{m=1}^{-k-1}\frac{1}{(2m+1)^{n+1}} & k<0\\ 0 & k=0\\ \displaystyle-\sum_{m=1}^{k-1}\frac{1}{(2m+1)^{n+1}} & k>0\end{cases}\right)\qquad k\in\mathbb{Z}$$

在后面的讨论中，当 n 是正奇数的时候 $\zeta(n+1)$ 有初等表达，因此对于某些比较特殊的级数比如：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(n)}{\prod_{q=1}^{a}(n-n_q)\prod_{z=1}^{b}(n-n_z)\prod_{p=1}^{c}(n-n_p+\frac{1}{2})}$$

其中 n_q 是非整数的有理数，n_z 和 n_p 都是整数，且 n_z 不为非正整数，$\deg A(n)$ 是多项式且 $A(n) < a+b+c$

这种也是可以有比较正常的值的（其中可能会有什么 ζ(3) 这种展不开的玩意）。

6 其他有趣的东西

Γ 函数还可以和其他一些玩意联系到一起，比如之前的余元公式：

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \longrightarrow \Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{\pi}{-z\sin \pi z}$$

为了让两个 Γ 函数的乘积变得能看，考虑一下 Γ 函数的 Euler 乘积表示：

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{1}{z}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{i}\right)^{z}}{1+\frac{z}{i}} \cdot \frac{1}{-z}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{i}\right)^{-z}}{1-\frac{z}{i}} = -\frac{1}{z^2}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{z^2}{i^2}} = \frac{\pi}{-z\sin \pi z}$$

那我们就可以得到 $\sin \pi z$ 的无穷乘积展开：

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{i^2}\right) \tag{SIN}$$

有了这个玩意同时也能推出其他三角函数的无穷乘积展开：

$$\cos \pi z = \prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2i-1)^2}\right) \tag{COS}$$

$$\tan \pi z = \frac{\sin \pi z}{\cos \pi z} = \prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2i-1)^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{i^2}\right) \tag{TAN}$$

然后再用相同的办法——取对数求导：

$$\mathrm{SIN} \longrightarrow \pi\cot \pi z = \frac{1}{z} - \sum_{i=1}^{\infty}\frac{2z}{i^2-z^2} \tag{TSIN}$$

$$\mathrm{COS} \longrightarrow \pi\tan \pi z = -8z\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4z^2-(2m-1)^2} \tag{TCOS}$$

此时可以得到：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-z^2} = \frac{1-\pi z\cot \pi z}{2z^2}$$

由于左边的级数是连续的，因此可以直接得到 Basel 问题的解：

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

另外的是针对 TCOS 中后面的级数中的 $\frac{1}{4z^2 - (2m-1)^2}$，对其在 $z = 0$ 处 Taylor 展开可以得到：

$$\pi z \tan \pi z = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^{2n}} (2z)^{2n}$$

同理对 TSIN 进行这样的操作：

$$\pi z \cot \pi z = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{2n}} (2z)^{2n}$$

无脑交换求和：

$$\pi z \tan \pi z = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n+1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^{2n}} z^{2n}$$

$$\pi z \cot \pi z = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) z^{2n}$$

这样我们就可以把两个级数比较容易（?）地找出来。

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^{2n}} = \frac{\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\Big|_{z=0} \sqrt{z} \tan \sqrt{z}}{2^{2n+1} n!} \pi^{2n}$$

$$\zeta(2n) = -\frac{\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} \sqrt{z} \cot \sqrt{z}}{2n!} \pi^{2n}$$

这样我们也可以将 ζ 函数的正偶数值轻易（?）地求出来。

7 结语

~~啊这到底是什么几把~~

另外想要说的是，这应该是一篇小型的 Γ 函数笔记，但是应该会有不少错误，反正无所谓了。

另外一点是这破笔记里面很多东西都是抄的，真正是自己推的应该就只有 Gauss ψ 公式那里（虽然推完后去看 MSE 还是一愣一愣的），其次就是 Mathematica 帮了大忙（毕竟手算实在是 TM 难了）。~~快说，感谢 Wolfram。~~

8 参考文献

(1). 吴崇试、高春媛《数学物理方法》(第三版)，北京大学出版社，2019.
(2). 林琼桂《数学物理方法》，2020.
(3). Gamma 函数的那些事儿（1）——定义 - TravorLZH 的文章 - 知乎
https://zhuanlan.zhihu.com/p/114041258
(4). Gamma 函数的那些事儿（2）——欧拉常数与 Digamma 函数 - TravorLZH 的文章 - 知乎
https://zhuanlan.zhihu.com/p/114320236
(5). Gamma 函数的那些事（3）——Gamma 函数的应用 - TravorLZH 的文章 - 知乎
https://zhuanlan.zhihu.com/p/114595109
(6). Γ 函数 - 维基百科，自由的百科全书
https://zh.wikipedia.org/wiki/%CE%93%E5%87%BD%E6%95%B0
(7). Gamma Wolfram 语言参考资料
https://reference.wolfram.com/language/ref/Gamma.html、
(8). Gauss Digamma theorem proof
https://math.stackexchange.com/questions/2075565/gauss-digamma-theorem-proof/2075586#2075586