高校经典教材配套考研辅导系列

# 普通物理学

## 题解精粹

田旭　赵中云　主编



崇文书局

O4-44
TX:1

高校经典教材配套考研辅导

# 普通物理学题解精粹

主　编：田　旭　赵中云
副主编：刘奇琼　周蔚华
张小玲　李建青

崇文书局

(鄂)新登字07号

图书在版编目(CIP)数据

普通物理学题解精粹/田旭主编. -武汉：
崇文书局，2003
ISBN 7-5403-0674-2

Ⅰ.普… Ⅱ.田… Ⅲ.普通物理学-研究生-
入学考试-解题 Ⅳ.04-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第082674号

出版发行:崇文书局
（武汉市黄鹂路75号 430077）
印　　刷:汉川市育才印务有限责任公司
开　　本:850x1168 1/32
印　　张:11.5
版　　次:2003年9月第1版
印　　次:2003年9月第1次印刷
字　　数:280千字
定　　价:18.80元

# 前　言

普通物理，又称大学物理，是高等学校一门重要基础课，许多高校理工、师范专业将其作为研究生入学考试科目。

要想深入理解普通物理学及在科学技术中的应用，应该多解算习题。如果准备参加研究生普通物理入学考试，则更应该理论联系实际，反复加强练习。作者潜心收集我国高校近年来研究生入学考试普通物理学试题，精心提炼、研究写成此书，旨在为高校师生和准备研究生普通物理学入学考试的考生提供一本有用的参考书。

本书按力学、电磁学、热学、光学和量子物理学顺序编排。各部分编写都是先从研究生普通物理学入学考试考点综述开始，接下来的经典题解对每一试题均给出本题考点及详细的解答，试题的解题思路和解题技巧则贯穿于解题过程之中。我们建议读者使用本书时，不要急着看本书解答，而应先亲自解之，再参看答案，以期本书更具参考价值。

本书由赵中云、刘奇琼、周蔚华、张小玲、李建青、田旭等编写。他们都是有普通物理学丰富的教学及研究生入学试题出卷经验的高校教师。尽管作者分工执笔，各部分均经互换通读、相互磋商，但欠妥之处，在所难免，如蒙读者指正，不胜感激之至。

编　者

2003 年 7 月

# 目　　录


第一部分　力学 …… (1)

一、考点综述 …… (1)

二、经典题解 …… (10)

Ⅰ. 运动学 …… (10)

Ⅱ. 动力学 …… (18)

Ⅲ. 刚体 …… (61)

Ⅳ. 振动与波 …… (89)

Ⅴ. 相对论 …… (114)

第二部分　电磁学 …… (124)

一、考点综述 …… (124)

二、经典题解 …… (129)

Ⅰ. 静电场 …… (130)

Ⅱ. 稳恒磁场 …… (177)

Ⅲ. 电磁感应 …… (214)

Ⅳ. 麦克斯韦方程组 …… (242)

Ⅴ. 电路及其暂态过程 …… (255)

第三部分　热学 …… (265)

一、考点综述 …… (265)

二、经典题解 …… (268)

Ⅰ. 统计物理 …… (268)
Ⅱ. 热力学 …… (275)
**第四部分　光学** …… (301)
**一、考点综述** …… (301)
**二、经典题解** …… (303)
Ⅰ. 几何光学 …… (303)
Ⅱ. 光的干涉 …… (306)
Ⅲ. 光的衍射 …… (320)
Ⅳ. 光的偏振 …… (334)
**第五部分　量子物理学** …… (340)
**一、考点综述** …… (340)
**二、经典题解** …… (342)
Ⅰ. 量子光学 …… (342)
Ⅱ. 量子力学 …… (347)
Ⅲ. 原子物理 …… (351)
Ⅳ. 其它 …… (359)

# 第一部分 力 学

## 一、考点综述

### 1. 运动学方程、速度和加速度

(1) 运动学方程,参数方程,轨迹方程.

位置矢量 $\vec{r}$ 与时间 $t$ 的函数关系

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

称为运动学方程

平面运动时,取直角坐标($x$、$y$),位矢分量为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

称为直角坐标系运动学方程的参数方程形式.消去参数 $t$,得 $x$、$y$ 的函数关系

$$f(x、y) = 0$$

称为直角坐标系下的轨迹方程.取极坐标($r$、$\theta$),位矢分量为

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$$

称为极坐标系下运动学方程的参数方程形式.消去参数 $t$,得 $r$、$\theta$ 的函数关系

$$f(r、\theta) = 0$$

称为极坐标系下的轨迹方程.

(2) 速度

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

取直角坐标系、速度分量为

$$V_x = \frac{dx}{dt}, V_y = \frac{dy}{dt}, V_z = \frac{dz}{dt}$$

即 $$\vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

而速度的大小称为速率

$$V = |\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

平面极坐标($r$、$\theta$)下的速度径向分量

$$V_r = \frac{dr}{dt}$$

角向分量

$$V_\theta = \frac{d\theta}{dt}$$

位移 $d\vec{r}$ 与路程 $ds$ 的关系

$$|d\vec{r}| = ds$$

而一般来说

$$|\Delta\vec{r}| \neq |\Delta s|$$

速度合成定理

$$\vec{V}_{绝} = \vec{V}_{相} + \vec{V}_{牵}$$

(3) 加速度

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

直角坐标系下,它的分量是

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

而它的大小则由

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$ 给出

平面极坐标系下的加速度分量是

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r(\frac{d\theta}{dt})^2$$

$$a_\theta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\theta}{dt})$$

自然坐标系下切向加速度

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}$$

法向加速度

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}$$

**2. 牛顿运动定律及动量定理**

(1) 牛顿第二定律

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

投影式,例如

$$F_x = ma_x = m\frac{dV_x}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F_r = ma_r = m\frac{d^2r}{dt^2} - mr(\frac{d\theta}{dt})^2$$

$$F_\theta = ma_\theta = m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\frac{d\theta}{dt})$$

$$F_\tau = ma_\tau = m\frac{dV}{dt}$$

$$F_n = ma_n = m\frac{V^2}{\rho}$$

(2) 动量定理

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t}\vec{F}\,dt = \vec{p} - \vec{p}_0$$

投影式,例如

$$I_x = \int_{t_0}^{t} F_x dt = p_x - p_{x0}$$

(3) 动量守恒定律

若 $F = 0$,则 $P = P_0$

或者若 $F_x = 0$,则 $P_x = P_{x0}$

**3. 相互作用及惯性力**

(1) 万有引力

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

(2) 重力加速度

$$g = \frac{GM}{R^2} = 9.8(m \cdot s^{-2})$$

$M$ 是地球的质量

(3) 弹性力

$$F = -kx$$

(4) 支承力与摩擦力

(5) 惯性力

以角速度 $\omega$ 旋转的非惯性系中,存在着离心力

$$\vec{F} = m\omega^2 x\vec{i} + m\omega^2 y\vec{j}$$

科利奥利力

$$\vec{F} = 2m\omega\frac{dy}{dt}\vec{i} - 2m\omega\frac{dx}{dt}\vec{j}$$

**4. 机械能守恒定律**

(1) 功

$$A_{ab} = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_a^b F\cos\theta ds$$

(2) 动能

$$E_k = \frac{1}{2}mV^2$$

(3) 势能

若$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$,则势能 $E_{pa(\cdot)} = \int_a^c \vec{F} \cdot d\vec{s}$(C 为势能零点)

例如

重力势能 $E_P = mgh$ (C 取在 $h = 0$ 处)

万有引力势能 $E_P = -G\frac{m_1 m_2}{r}$ (C 取在 $r = \infty$ 处)

弹性势能 $E_P = \frac{1}{2}kx^2$ (C 取在 $x = 0$ 处)

(4) 机械能守恒定律

若 $A_{外} + A_{内非} = 0$,则机械能

$$E = \frac{1}{2}mV^2 + E_P = 恒量$$

**5. 角动量守恒**

(1) 角动量守恒定律

若 $\vec{M} = 0$,则 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} =$ 恒矢量

(2) 天体运动轨道方程

$$r = \frac{l}{1 + \varepsilon\cos\theta}$$

$$l = \frac{r^2}{GM}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\varepsilon = \left[1 + \frac{2Er^4}{G^2M^2m}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]^{1/2}$$

当 $E < 0$ 时,为椭圆轨道,$E = 0$ 时,为抛物线轨道,$E > 0$ 时,为双曲线轨道.

**6. 刚体运动**

(1) 线量与角量的关系

$$\Delta s = r\Delta\theta$$

$$v = r\omega$$

$$a_\tau = r\beta, a_n = r\omega^2$$

(2) 转动定律

$$M = I\beta$$

(3) 转动刚体的动能

$$E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$$

角动量 $L = I\omega$

## 7. 振动与波

(1) 简谐振动

运动微分方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

通解为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$\omega$ 为角频率，$A$ 为振幅，$\varphi$ 为初位相，$T = \frac{2\pi}{\omega}$ 为周期，$\nu = \frac{1}{T}$ 为频率.

两同振动方向、同频率、位相差恒定的简谐振动

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1), x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

则合振动 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

振幅 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 + \varphi_1)}$，

位相 $\varphi = \tan^{-1}(\frac{A_1\sin\varphi_1}{\quad})$，质量为 $m$，劲度为 $k$，弹簧振子

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m(\frac{dx}{dt})^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$$

(2) 衰减振动

运动微分方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

通解分为三种情况

(a) 衰减振动($\gamma < \omega_0$)

$$x = Ce^{-\gamma t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,t + \varphi)$$

(b) 强衰减($\gamma > \omega_0$)

$$x = e^{-\gamma t}[\,Ae^{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t} + Be^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t}\,]]$$

(c) 临界衰减($\gamma = \omega_0$)

$$x = e^{-\gamma t}(A + Bt)$$

(3) 受迫振动

运动微分方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_0\cos\omega t$$

特解为

$$x = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}\cos(\omega t + \varphi)$$

当 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ 时,发生共振

(4) 波动方程

波动微分方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

平面简谐波解

$$y = A\cos\left[\omega\left(t \mp \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

$\omega$ 为角频率，$u$ 为波速，$v = \frac{\omega}{2\pi}$ 为频率，$T = \frac{1}{2}$ 为周期，$\lambda = uT$ 为波长，“$\mp$”分别表示波沿 $x$ 轴正向、负向传播.

沿波线方向两点，相位差与坐标差的关系.

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$$

(5) 多普勒效应

$$\nu' = \nu\frac{u - u_0}{u - u_s}$$

$u_0$ 为观察者的速度，$u_s$ 为波源的速度，$v$ 为波源的振动频率，$\nu'$ 为观察到的频率.

(6) 波的叠加

叠加原理

两个波 $y_1(x,t) = A_1\cos(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_1)$，

$$y_2(x,t) = A_2\cos(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_2)$$

$$y(x、t) = y_1(x、t) + y_2(x、t)$$

相干波干涉

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left[\varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)\right]}$$

(7) 混沌

混沌运动只在非线性系统中发生，其显著特征是($a$) 对初值的极端敏感性，($b$) 存在奇异吸引力，($c$) 具有分形结构.

**8. 狭义相对论**

(1) 相对性原理与光速不变原理

(2) 洛仑兹坐标变换.

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

(3) 相对论长度收缩

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

相对论时间延缓

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

(4) 高速运动物体的质量、动量和能量

质量 $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$

动量 $P = mv = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$

动能 $E_k = mc^2 - m_0c^2$

静能 $E_0 = m_0c^2$

总能量 $E = mc^2$

能量 — 动量关系 $E^2 = P^2c^2 + m_0^2c^4$

# 二、经典题解

## Ⅰ. 运动学

**1.(北京大学2002年)** 质点作平面运动.在平面极坐标系中其角速度与矢径的长度成反比,比例系数为常量 $a_1$,径向速率为常量 $a_2$. $t=0$时,$r=r_0,\theta=0$.求质点在任意时刻 $t$ 时的位置$r=r(t),\theta=\theta(t)$ 和加速度及质点的轨迹方程 $r=r(\theta)$.

**本题考点:**在极坐标下求轨迹方程、加速度

**解:** $\dot{\theta}=\omega=\dfrac{a_1}{r}$ $\qquad$ $v=a_2$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=a_2\vec{i}+a_1\vec{j}$$

$$\frac{dr}{dt}=a_2 \qquad r=a_2t+r_0 \qquad \frac{d\theta}{dt}=\frac{a_1}{r}$$

$$\frac{d\theta}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=\frac{a_1}{r} \qquad a_2\frac{d\theta}{dr}=\frac{d\theta}{dt}=\frac{a_1}{r}$$

$$d\theta=\frac{a_1}{a_2}\frac{dr}{r}$$

$$\theta=\frac{a_1}{a_2}\ln\frac{r}{r_0}=\frac{a_1}{a_2}\ln\frac{a_2t+r_0}{r_0}$$

轨迹方程 $r=r_0e^{\frac{a_2}{a_1}\theta}$

加速度 $\vec{a}=\dfrac{d}{dt}\vec{v}=\dfrac{d}{dt}(v_r\vec{i}+r\dot{\theta}\vec{j})$

$$=a_2\frac{d\vec{i}}{dt}+a_1\frac{d\vec{j}}{dt}$$

$$=a_2\frac{a_1}{r}\vec{j}+a_1\left(-\frac{a_1}{r}\right)\vec{i}$$

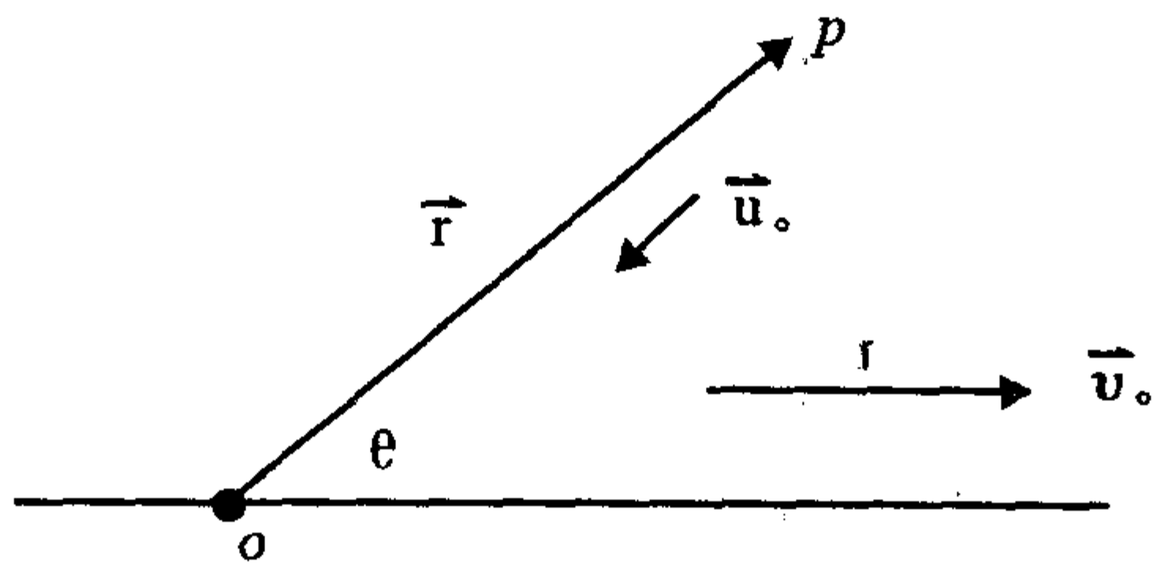
$$= -\frac{a_1^2}{r}\vec{i} + \frac{a_1 a_2}{r}\vec{j}$$

**2.(北京大学2001年)**　河中的小船 $P$ 系在缆绳一端,固定于岸上 $O$ 点的绞盘机以固定的速度 $u_0$ 收回缆绳,已知水流速为 $v_0$($u_0, v_0$ 为常量).在平面极坐标系中,

(1) 求 $P$ 点的速度

(2) 若 $t = 0$ 时,$r = r_0, \theta = \theta(t)$,求 $P$ 点的运动轨迹.

**本题考点:**相对运动




**解:**(1)$\begin{cases} V_r = -u_0 \\ V_\theta = v_0 \sin\theta \end{cases}$

(2) $\frac{dr}{dt} = -u_0 \Rightarrow r = r_0 - u_0 t$

$$r\frac{d\theta}{dt} = v_0 \sin\theta$$

$$(r_0 - u_0 t)\frac{d\theta}{dt} = v_0 \sin\theta$$

$$\frac{d\theta}{\sin\theta} = \frac{v_0\, dt}{r_0 - u_0 t}$$

$$\ln\tan\frac{\theta}{2}\Big|_{\theta_0}^{\theta} = -\left[\frac{v}{u_0}\ln(r_0 - u_0 t)\right]\Big|_0^t$$

$$\ln\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\tan\frac{\theta_0}{2}} = \frac{v}{u_0}\ln\frac{r_0}{r_0 - u_0 t}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \left(\frac{r_0}{r_0 - u_0 t}\right)^{\frac{v_0}{u_0}}\tan\frac{\theta_0}{2}$$

$$\left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\tan\frac{\theta_0}{2}}\right)^{\frac{u_0}{v_0}} = \frac{r_0}{r_0 - ut}$$

$$r_0 - u_0 t = r_0\left(\frac{\tan\frac{\theta_0}{2}}{\tan\frac{\theta}{2}}\right)^{\frac{u_0}{v_0}}$$

$$r = \dot{r}_0\left(\frac{\tan\frac{\theta_0}{2}}{\tan\frac{\theta}{2}}\right)^{\frac{u_0}{v_0}}$$

**3.(北京大学 2000 年)** 质点沿平面曲线 $r = r_0 e^{a\theta}$ 运动(其中,$r$ 和 $\theta$ 为平面极坐标中的矢径和极角).已知 $\frac{d\theta}{dt} = \omega_0$,$\omega_0$、$r_0$、$a$ 为常量,求质点的速率、切向加速度和法向加速度.

**本题考点:**极坐标系中求运动学速率、切线加速度、法线加速度

**解法 1:** $r = r_0 e^{a\theta}$,把极坐标化为直角坐标.

$$\vec{r} = r\cos\theta\, i + r\sin\theta\, j$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{i} + \left(\frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{j}$$

$$= \left(r_0 a e^{a\theta}\omega_0\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{i} +$$

$$\left(r_0 a e^{a\theta}\omega_0\sin\theta + r\omega_0\cos\theta\right)\vec{j}$$

$$= r\omega_0(a\cos\theta - \sin\theta)\vec{i} + r\omega_0(a\sin\theta + \cos\theta)\vec{j}$$

速率　$V = r\omega_0\sqrt{(a\cos\theta - \sin\theta)^2 + (a\sin\theta + \cos\theta)^2}$

$$= r\omega_0\sqrt{a^2 + 1}$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = ar\omega_0^2\sqrt{a^2 + 1}$$

$$\vec{a} = \frac{dr}{dt}[\omega_0(a\cos\theta - \sin\theta)\vec{i} + \omega_0(a\sin\theta + \cos\theta)\vec{j}] +$$

$$r\omega_0(-a\sin\theta - \cos\theta)\frac{d\theta}{dt}\vec{i} + \omega_0(a\cos\theta - \sin\theta)\frac{d\theta}{dt}\vec{j}$$

$$= a\omega_0^2 r[(a\cos\theta - \sin\theta)\vec{i} + (a\sin\theta + \cos\theta)\vec{j}] +$$

$$r\omega_0^2[(-a\sin\theta - \cos\theta)\vec{i} + (a\cos\theta - \sin\theta)\vec{j}]$$

$$= r\omega_0^2[(a^2\cos\theta - 2a\sin\theta - \cos\theta)\vec{i} +$$

$$(a^2\sin\theta + 2a\cos\theta - \sin\theta)\vec{j}]$$

$$a = r\omega_0^2\sqrt{(a^2\cos\theta - 2a\sin\theta - \cos\theta)^2 + (a^2\sin\theta + 2a\cos\theta - \sin\theta)^2}$$

$$= r\omega_0^2\sqrt{a^4 + 4a^2 + 1 - 2a^2}$$

$$= r\omega_0^2(a^2 + 1)$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = r\omega_0^2\sqrt{(a^2 + 1)^2 - (a^2 + 1)a^2}$$

$$= r\omega_0^2\sqrt{a^2 + 1}$$

**解法 2：** $\vec{r} = r\vec{i} = r_0 e^{a\theta}\vec{i}$　　（$\vec{i}$ 是矢向的单位矢量）

$$\vec{v} = ar_0 e^{a\theta}\frac{d\theta}{dt}\vec{i} + r_0 e^{a\theta}\frac{d\vec{i}}{dt} = a\omega_0 r\vec{i} + r\omega_0\vec{j}$$

（$\vec{j}$ 是垂直矩的单位矢量）

速率 $v = \sqrt{(a\omega_0 r)^2 + (r\omega_0)^2} = r\omega_0\sqrt{a^2 + 1}$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = ar\omega^2\sqrt{a^2 + 1}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a\omega_0 a\omega_0 r\vec{i} + \omega_0 a\omega r\vec{j} + a\omega_0 r\frac{d\vec{i}}{dt} + r\omega_0\frac{d\vec{j}}{dt}$$

$$(a^2\omega_0^2 r - r\omega_0^2)\vec{i} + (a\omega^2 r + a\omega^2 r)\vec{j}$$

$$= r\omega_0^2(a^2 - 1)i + 2a\omega_0^2 rj$$

$$a = r\omega_0^2\sqrt{(a^2-1)^2 + (2a)^2} = r\omega_0^2(a^2+1)$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{[r\omega_0^2(a^2+1)^2 - (a\omega_0^2 r\sqrt{a^2+1})^2]}$$

$$= r\omega_0^2\sqrt{a^2+1}$$

**4.(武汉理工大学2003年)** 质点作半径为 $R$ 的圆周运动,其速率与时间的关系为 $v = ct^2$($c$ 为常数),则 $t$ 时刻质点的切向加速度 $a_\tau =$ _____,法向加速度 $a_n =$ _____.

**本题考点:**质点运动的切向加速度,法向加速度公式.

**解:** $a_\tau = \frac{dv}{dt} = 2ct$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{c^2t^4}{R}$$

空处分别填 $2ct$, $\frac{c^2t^4}{R}$

**5.(武汉理工大学2003年)** 一质点在 $X-Y$ 平面内运动,运动方程为 $x = t, y = t^2$,求该质点的轨迹方程、速度、加速度及切向加速度.

**本题考点:**质点运动的参数方程、轨迹方程及位矢、速度、加速度、切向加速度.

**解:**由参数方程 $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$,消去参数 $t$,可得轨迹方程 $y = x^2$

位置矢量 $\vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{j}$,则

速度 $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} + 2\vec{tj}$

加速度 $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{j}$

由于速率 $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1 + 4t^2}$

从而切向加速度 $a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{4t}{\sqrt{1 + 4t^2}}$.

**6.(清华大学 2000 年)**　下列哪种速度的数量级在 $10^2$m/s:

A. 提速后的火车速度　　B. 声速

C. 赛马的速度　　D. 第一宇宙速度

**本题考点:**常见速度数量级.

**解:**一般火车速度 200 千米/小时约为 60 ~ 70m/s

声速在空气中　340m/s

赛马速度一百米约　30m/s

第一宇宙速度　7.9km/s

答案选 B

**7.(东北大学 2002 年)**　一质点沿半径为 $R$ 的圆周运动,质点所经过的弧长与时间的关系是 $S = bt + \frac{1}{2}ct^2$,其中 $b$ 和 $c$ 是大于零的常数,求任意时刻质点的切向加速度和法向加速度.

**本题考点:**圆周运动切向加速度和法向加速度

**解:** $S = bt + \frac{1}{2}ct^2$

速率　$V = \frac{ds}{dt} = b + ct$

$a_\tau = \frac{dv}{dt} = c$　　$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{(b + ct)^2}{R}$

**8.(辽宁大学 2001 年)**　在一个转动的齿轮上,一个齿尖 $P$ 沿半径为 $R$ 的圆周运动,其路程 $s$ 随时间的变化规律为 $s = v_0 t + \frac{1}{2}bt^2$,其中 $v_0$ 和 $b$ 都是正的常量,则 $t$ 时刻齿尖 $P$ 的速度大小为_____,加速度大小为_____.

本题考点:速度,加速度

解:$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(v_0 t + \frac{1}{2} bt^2)}{dt} = v_0 + bt$

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(v_0 + bt)}{dt} = b$

空处填:$v_0 + bt, b$

**9.(北京理工大学2002年)** 在相对地面静止的坐标系内,$A$、$B$ 二船都以 $2m \cdot s^{-1}$ 的速率匀速行驶,$A$ 船沿 $x$ 轴正向,$B$ 船沿 $y$ 轴正向.今在 $A$ 船上设置与静止坐标系方向相同的坐标系($x$、$y$ 方向单位矢用 $\vec{i}, \vec{j}$ 表示),那么在 $A$ 船上的坐标系中,$B$ 船的速度(以 $m \cdot s^{-1}$ 为单位)为

A. $2\vec{i} + 2\vec{j}$ B. $-2\vec{i} + 2\vec{j}$ C. $-2\vec{i} - 2\vec{j}$ D. $2\vec{i} - 2\vec{j}$

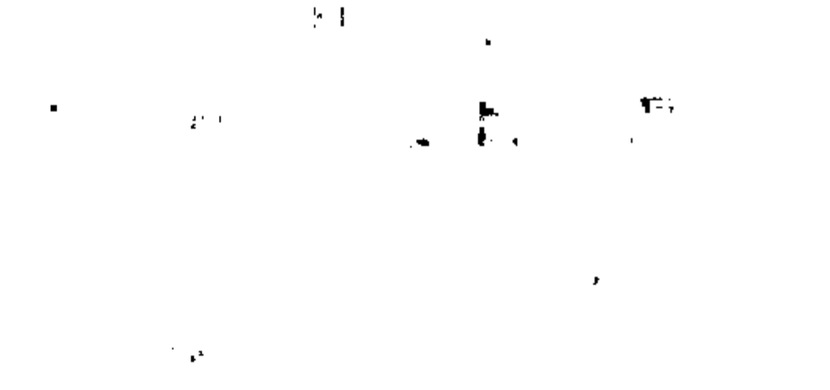
本题考点:相对运动速度公式

解:$\vec{v}_{相} = \vec{v}_{绝} - \vec{v}_{牵}$,

$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_{BE} - \vec{v}_{AE} = 2\vec{j} - 2\vec{i}$

答案选 B

**10.(华南师范大学2002年)** $A$、$B$ 两质点在同一平面上分别绕两个固定圆心 $O$ 和 $O'$ 按顺时针方向作匀速圆周运动,角速度都是 $\omega$,这两个圆的半径都是 $R$,$O$ 和 $O'$ 之间的距离为 $3R$。$t = 0$ 时,这两个质点的距离最近,为 $R$,如图所示.试求质点 $B$ 相对质点 $A$ 的轨迹方程、速度和加速度.(要求速度和加速度用矢量式表示)




本题考点:相对运动

解:$\vec{OA} = R\cos\omega t\,\vec{i} - R\sin\omega t\,\vec{j}$

$\vec{OB} = (3R - R\cos\omega t)\vec{i} + R\sin\omega t\,\vec{j}$

$B$ 相对 $A$ 的运动方程

$\vec{AB} = \vec{r'} = \vec{OB} - \vec{OA} = (3R - 2R\cos\omega t)\vec{i} + 2R\sin\omega t\vec{j}$

以 $A$ 为坐标原点建立 $x'$、$y'$ 系，$x'$、$y'$ 轴分别平行 $x$、$y$ 轴

有 $x' = 3R - 2R\cos\omega t \quad y' = 2R\sin\omega t$

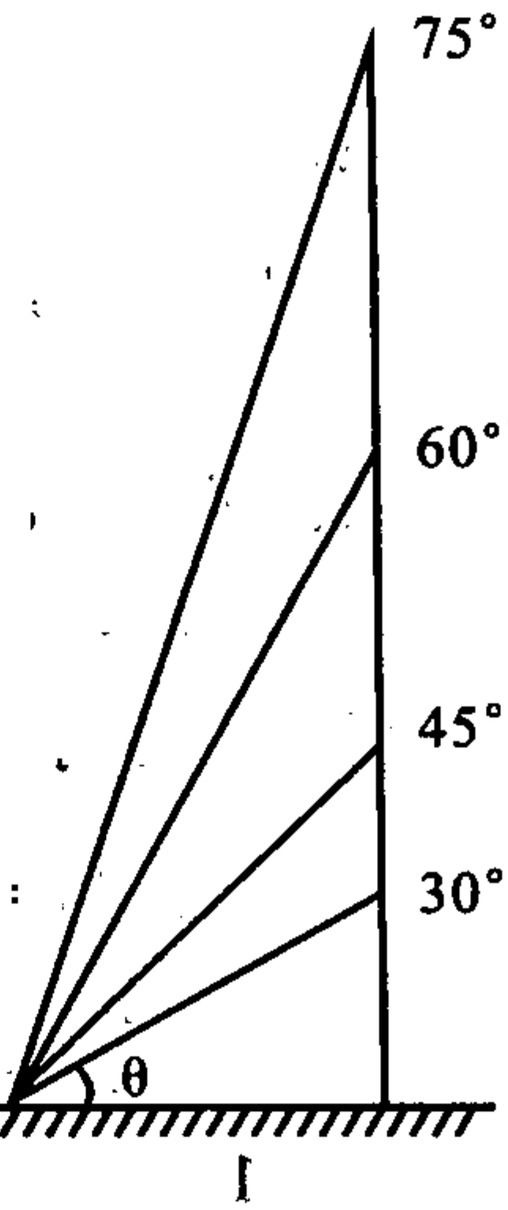
轨迹方程　$(x' - 3R)^2 + y'^2 = 4R^2$

$$\vec{V'} = \frac{d\vec{r'}}{dt} = 2R\omega\sin\omega t\vec{i} + 2R\omega\cos\omega t\vec{j}$$

$$= 2R\omega(\sin\omega t\vec{i} + \cos\omega t\vec{j})$$

$$\vec{a'} = \frac{d\vec{v'}}{dt} = 2R\omega^2(\cos\omega t\vec{i} - \sin\omega t\vec{j})$$

**11.(辽宁大学 2001 年)**　如图所示，几个不同倾角的光滑斜面，有共同的底边，顶点也在同一竖直面上，若使一物体(视为质点)从斜面上端由静止滑到下端的时间最短，则斜面的斜角应选




A.30°　　B.45°

C.60°　　D.75°

**本题考点:**均加速直线运动

**解:**斜面长为 $\frac{l}{\cos\theta}$，物体沿斜面加速度为，$g\sin\theta$，

由 $S = \frac{1}{2}at^2$，有 $\frac{l}{\cos\theta} = \frac{1}{2}gt^2\sin\theta$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{4l}{g\sin 2\theta}}$$

当 $\theta = 45°$ 时，$\sin 2\theta = \sin 90° = 1$，$t$ 最短，故选 B

答案选 B

**12.(北京市 1999 年)**　一质点做直线运动，其运动方程为 $x = t^2 - 4t + 2$(式中 t 的单位为 s，x 的单位为 m)，则质点在前 5s 内通过的路程和平均速度大小分别为：

$A$.13m,1m/s　$B$.5m,1m/s　$C$.13m,3m/s　$D$.5m,3m/s

**本题考点**:位移与路程

**解**:$v = \frac{dx}{dt} = 2t - 4$,

当 $t = 2$ 时,$v = 0$

$t = 0 \sim t = 2s$　间路程:$S_1 = |t^2 - 4t + 2|_0^2 = 4(m)$

$t = 2s \sim t = 5s$　间路程:$S_2 = t_2 - 4t + 2|_2^5 = 9(m)$

前 5s 内总路程　$S_1 + S_2 = 13m$

前 5s 内位移为　$\Delta x = x_5 - x_0 = 7 - 2 = 5m$

故前 5s 内平均速度大小为　$\frac{\Delta x}{5} = \frac{5}{5} = 1(m/s)$

答案选 A

**13.(南京师范大学 2000 年)**　一物体由静止开始,在有阻力的介质中下落时,其运动方程为$\frac{dV}{dt} = A - BV$,式中 $A$,$B$ 为常数.试用 $A$ 和 $B$ 表示下列各量:(1) 初加速度;(2) 当加速度为零时的速度;(3) 在任一时刻 $t$ 的速度.

**本题考点**:速度与加速度

**解**:$t = 0$ 时,$V = 0$,由$\frac{dV}{dt} = A - BV$ 得

$$V = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt})$$

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{A}{B}(Be^{-Bt}) = Ae^{-Bt}$$

(1) 当 $t = 0$ 时,初加速度 $a_0 = A$

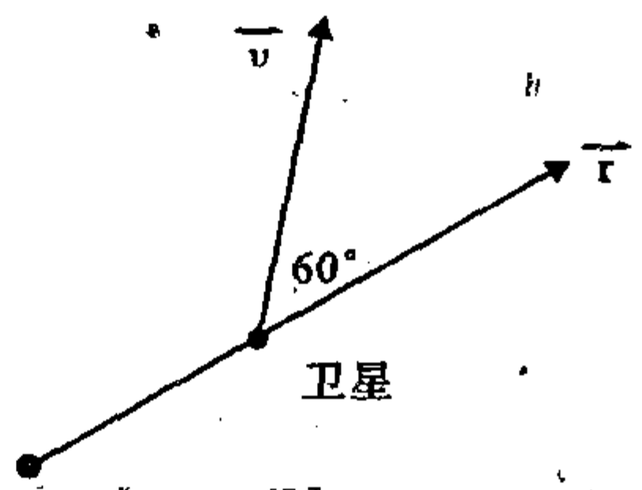
(2) 加速度为零时的速度由$\frac{dV}{dt} = A - BV = 0$ 得 $V = \frac{A}{B}$

(3) 任意时刻的速度大小为 $V(t) = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt})$

## Ⅱ. 动力学

**14.(北京大学 2002 年)**　人造卫星某时刻距地心的距离 $r_0$

($r_0 > 2R_e$),速率为 $v_0 = \sqrt{\dfrac{3GM}{2r_0}}$(其中 $G$ 为万有引力常量,$M$ 为地球质量,$R_e$ 为地球半径),速度方向与地心指向卫星的矢径方向的平角为 60°.求卫星轨道距地心的最近和最远距离及卫星的周期.




**本题考点:**中心力场中机械能守恒、角动量守恒

**解:**卫星角动量 $|\vec{r} \times m\vec{v}| = mv_0 r_0 \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} m r_0 \sqrt{\dfrac{3GM}{(2r_0)}}$

即:$|\vec{r} \times m\dfrac{d\vec{r}}{dt}| = \dfrac{3}{2} m \sqrt{\dfrac{GMr_0}{2}}$

卫星机械能 $-G\dfrac{Mm}{r} + \dfrac{1}{2}mv^2 = -G\dfrac{Mm}{r_0} + \dfrac{1}{2}mv_0^2$

$$\begin{cases} |\vec{r} \times \dfrac{d\vec{r}}{dt}| = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{GMr_0}{2}} & (1) \\ v^2 - 2G\dfrac{M}{r} = -\dfrac{GM}{2r_0} & (2) \end{cases}$$

在近地点和远地点有 $\vec{v} \perp \vec{r}$

$$\begin{cases} vr = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{GMr_0}{2}} \\ v^2 - 2G\dfrac{M}{r} = -\dfrac{GM}{2r_0} \end{cases}$$

$$\left(\frac{3\sqrt{\dfrac{GMr_0}{2}}}{2r}\right)^2 - \frac{2GM}{r} = \frac{GM}{2r_0}$$

$4r^2 - 16rr_0 + 9r_0^2 = 0$

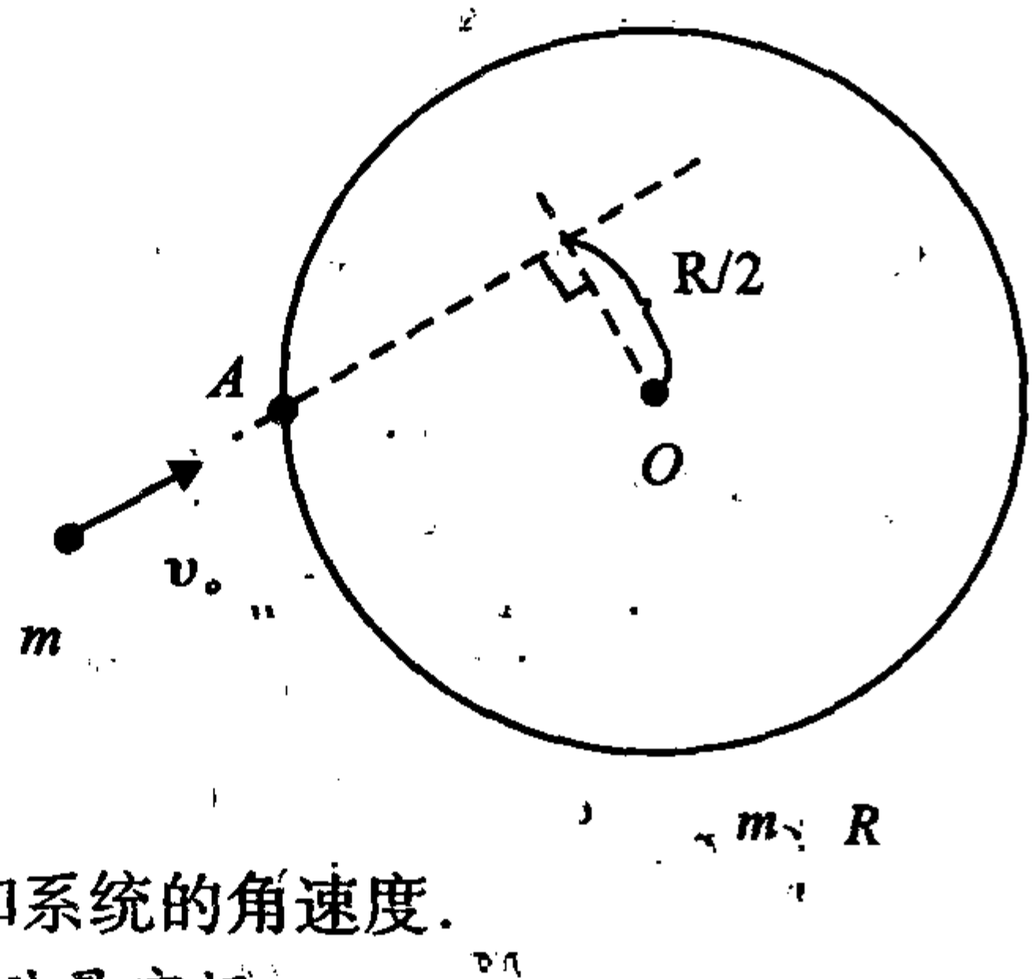
解得 $r_{\min} = (2 - \dfrac{\sqrt{7}}{2})r_0$　　$r_{\max} = (2 + \dfrac{\sqrt{7}}{2})r_0$

所以长轴 $a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = 2r_0$

短轴 $b = \sqrt{a^2 - [\frac{(r_{\max} - r_{min})}{2}]^2} = \frac{3}{2}r_0$

$$T = \frac{\pi(2r_0) \cdot (\frac{3}{2}r_0)}{\frac{1}{2} | \vec{r}_0 \times \vec{v}_0 |} = 4\pi r_0 \sqrt{\frac{2r_0}{GM}}$$

**15.（北京大学 2002 年）** 半径为 $R$、质量为 $m$ 的匀质圆盘静止于光滑的水平面上，一质量也为 $m$ 的质点以水平速度 $v_0$ 与圆盘发生完全非弹性碰撞并粘在盘边 $A$ 点，盘心到速度延长线的垂直距离为 $\frac{R}{2}$，如图，求碰后系统质心的速度和系统的角速度.




**本题考点：**动量守恒、角动量守恒

**解：**质心的位置

$$\begin{cases} x = -\frac{mR}{2m} = -\frac{R}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

碰撞时质心的转动惯量

$$I = m(\frac{R}{2})^2 + \frac{1}{2}mR^2 + m(\frac{R}{2})^2 = mR^2$$

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{2}v_0\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}v_0\vec{i}$$

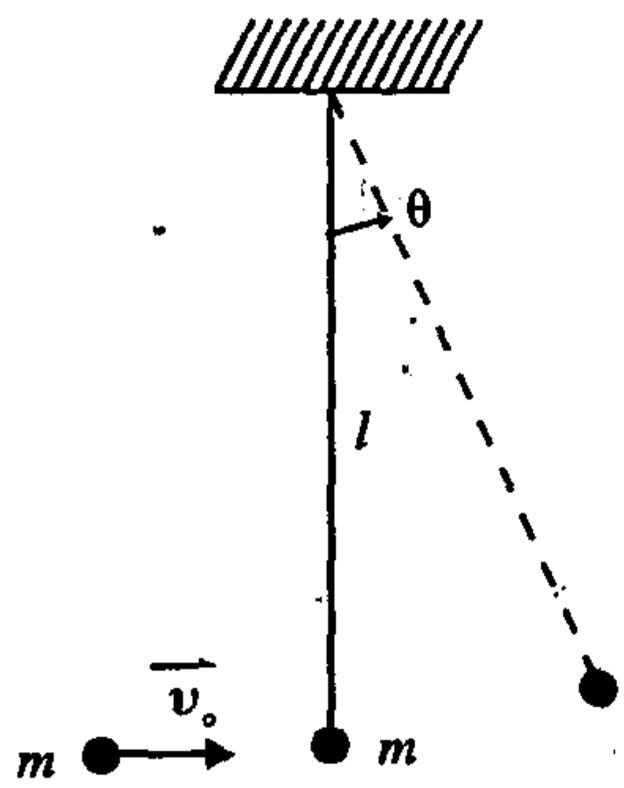
$$\frac{1}{2}v_0 m(\frac{R}{2}) = mR^2\omega \qquad \omega = \frac{v_0}{4R}$$

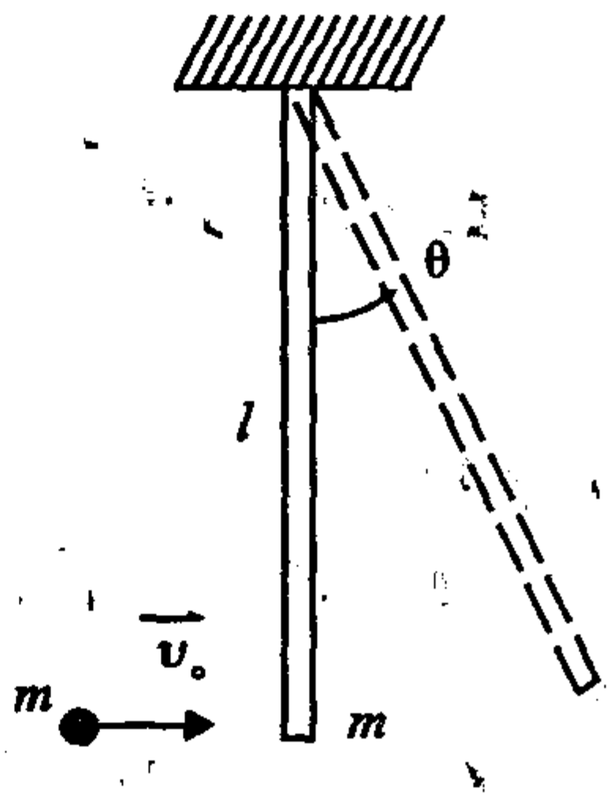
$$\frac{\sqrt{3}}{2}mv_0 = 2mv \qquad v = \frac{\sqrt{3}}{4}v_0$$

**16.（北京大学2001年）** 质量为 $m$ 的子弹以水平速度 $v_0$ 击中单摆的质点（质量也为 $m$，摆长为 $L$）并粘在一起，随后单摆上升至 $\theta = 60°$ 时停止.

(1) 求击中前瞬间子弹的速度 $v_0$

(2) 若子弹击中的是由长为 $L$、质量为 $m$ 的匀质杆组成的复摆，并粘于杆端，初速 $v_0$ 也与(1)题中相同，问碰后最大摆角变为多大?




**本题考点：**角动量守恒、机械能守恒

**解：**(1) $mv_0L = 2mv'L$　　$v' = \frac{1}{2}v_0$

$$\frac{1}{2} \times 2m(\frac{1}{2}v_0)^2 = 2mgL(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{m}{4}v_0^2 = \frac{1}{2}mgL \times 2$$

$$v_0 = 2\sqrt{gL}$$

(2) $mv_0L = \omega(L^2m + \frac{1}{3}L^2m)$

$$\omega = \frac{v_0}{\frac{4}{3}L} = \frac{2\sqrt{gL}}{\frac{4}{3}L} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\frac{1}{2}\left(L^2 m + \frac{1}{3}L^2 m\right)\omega^2$$

$$= mgL(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}mgL(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{1}{2}\left(L^2 m + \frac{1}{3}L^2 m\right)\left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{g}{L} = mgL(1 - \cos\theta) \cdot \frac{3}{2}$$

$$\frac{4}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}g = g(1 - \cos\theta)$$

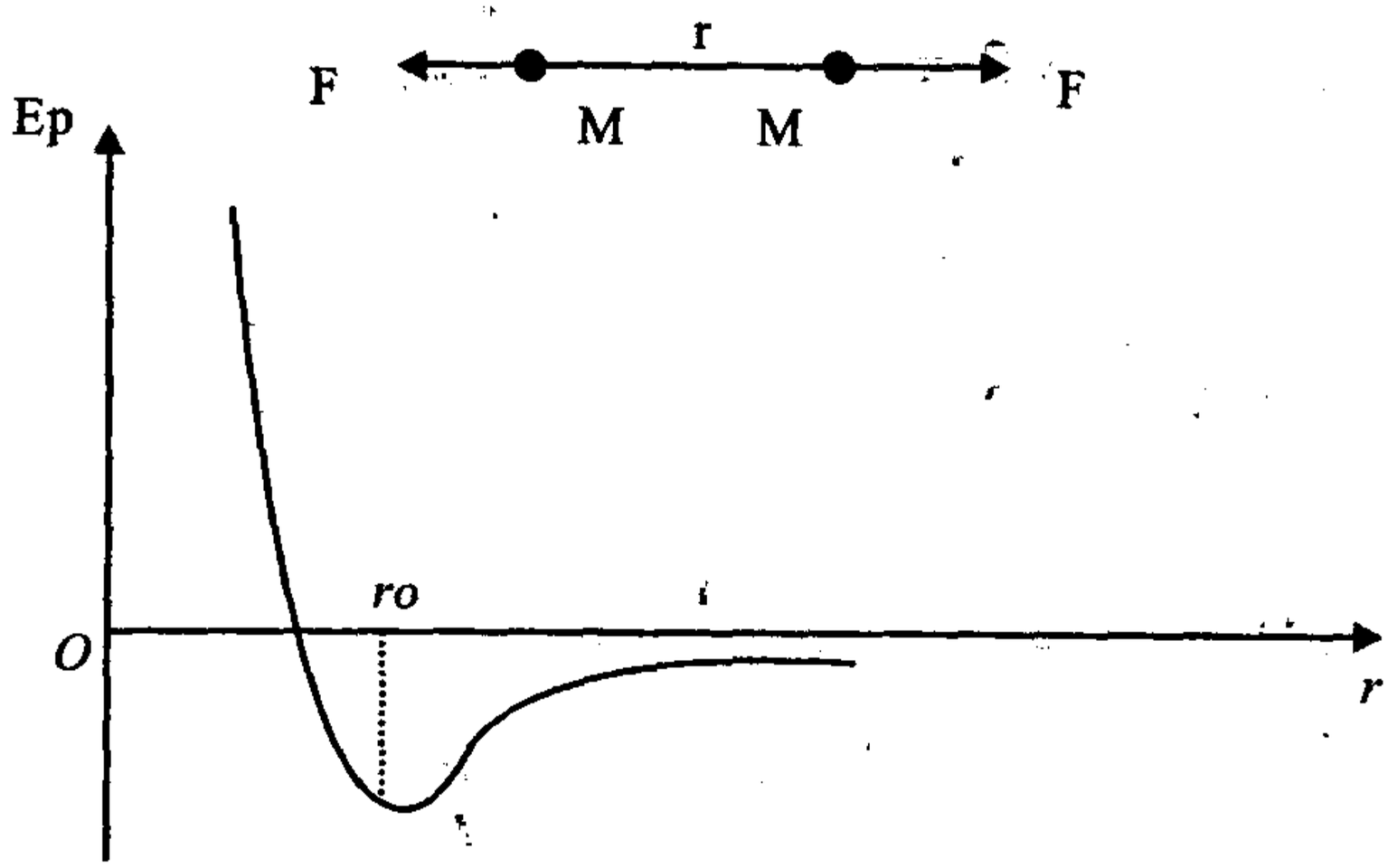
$$\cos\theta = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

**17.(北京大学 1999 年)** 已知某种双原子分子两原子之间的作用力可以表示为 $F = -\frac{a}{r^7} + \frac{b}{r^8}$,其中 $r$ 为两原子之间的距离,$a$、$b$ 为正常数

(1) 求出其势能,两原子之间的平衡距离 $r_0$,并画出势能曲线示意图.

(2) 不考虑其他分子的作用,求两原子作小振动时的角频率,设两原子的质量均为 $M$.




**本题考点:分子势能、振动频率**

**解:**(1) 力 $F = -\frac{a}{r^7} + \frac{b}{r^8}$

势能以无穷远点 $r = \infty$ 为零势点

$$E_p = \int_r^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{a}{6r^6} + \frac{b}{7r^7}$$

平衡点:

$F = 0$,(或$\frac{dE_p}{dt} = 0$　　$E_p$ 为极小值)

$$r_0 = \frac{b}{a}$$

(2) $\frac{1}{2}Mu^2 - \frac{a}{6r^6} + \frac{b}{7r^6} = E$

$$Mu\frac{du}{dt} + (\frac{a}{r^6} - \frac{b}{r^7})\frac{dr}{dt} = 0$$

设 $r = r_0 + x$

$$\frac{dr}{dt} = u = \frac{dx}{dt}$$

$$M\frac{du}{dt} + \frac{a}{(r_0 + x)^7} - \frac{b}{(r_0 + x)^8} = 0$$

$$M\frac{d^2x}{dt} + \frac{a}{r_0^7}(1 - \frac{7x}{r_0}) - \frac{b}{r_0^8}(1 - \frac{8x}{r_0}) = 0$$

当 $x$ 远小于 $r$ 时有

$$M\frac{d^2x}{dt} + \frac{a}{r_0^7} - \frac{b}{r_0^8} + \frac{8bx}{r_0^9} - \frac{7ax}{r_0^8} = 0$$

$$M\frac{d^2x}{dt} + (\frac{8b}{r_0^9} - \frac{7a}{r_0^8})x = 0$$

把 $r_0 = \frac{b}{a}$ 代入

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{a^9}{b^8}x = 0$$

角频率　$\omega = \sqrt{\frac{a^9}{Mb^8}}$

**18.(清华大学2002年)** 一人重600牛顿,站在电梯内的磅秤上.电梯开始运动时,磅秤读数为800牛顿.求:(1) 电梯的加速度(大小和方向)?(2) 如读数为450牛顿,该电梯的加速度为多大?(3) 何时磅秤的读数为零.

**本题考点:**牛顿第二定律

**解:**由 $\vec{F} = m\vec{a}$,有

$$M - mg = \frac{mg}{g} \cdot a$$

其中 $M$ 为杆对人的支承力,mg 为人重 600N. $a$ 为电梯的加速度

(1) $M = 800\text{N}$ 时

$$800 - 600 = \frac{600}{9.8}a,\text{则}$$

$$a = \frac{9.8}{600}(800 - 600) = 3.27(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$$

方向向上

(2) $M = 450\text{N}$ 时

$$450 - 600 = \frac{600}{9.8}a$$

$$a = \frac{9.8}{600}(450 - 600) = -2.45(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$$

负号表示加速度方向向下

(3) $M = 0$ 时,

$$0 - 600 = \frac{600}{9.8}a$$

$$a = \frac{9.8}{600}(-600) = -9.8(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$$

即当电梯加速度为重力加速度向下时,磅称的读数为0.

**19.(武汉理工大学2003年)** 炮车(加炮身)的质量为 $M$,停在光滑的水平地面上,炮筒与水平成 $\theta$ 角,炮发出一质量为 $m$ 的炮

弹,求炮弹出口时炮弹动能与炮车(加炮身)动能之比.

**本题考点:**动量守恒定律.

**解:**设炮车后退速度为 $V$,炮弹出口速度为 $u$;水平方向动量守恒

$$mu\cos\theta - MV = 0$$

则炮弹出口时,炮弹动能与炮车动能之比为

$$\frac{\frac{1}{2}mu^2}{\frac{1}{2}MV^2} = \frac{m}{M}\cdot\frac{M^2}{m^2\cos^2\theta} = \frac{M}{m\cos^2\theta}$$

**20.(清华大学 2001 年)** 保守力的特点是_____,保守力与势能的关系是_____.

**本题考点:**保守力的功,保守力与势能的关系

空处分别填:做功与路径无关,势能梯度的负值等于保守力

**21.(清华大学 2001 年)** 在一个质量为 $M$,半径为 $R$ 的均质圆盘边缘焊有一个质量为 $m$,半径为 $r$ 的均质小球(球与盘相切),则整个焊件的质心在_____.

**本题考点:**质心位置的计算

**解:**焊件质心一定在均质圆盘中心与均质小球的连线上,则该质心离盘心距离 $x_c$ 为

$$x_c = \frac{M}{M+m}\times 0 + \frac{m}{M+m}R$$

$$= \frac{m}{M+m}R$$

空处填:均质圆盘中心与均质小球的连线上,且距盘心 $\frac{m}{M+m}R$

**22.(清华大学 2001 年)** 质心系动量守恒的条件是_____,角动量守恒的条件是_____,机械能守恒的条件是_____.

**本题考点**:动量、角动量、机械能守恒的条件

**解**:空处分别填合外力为 0,合外力矩为 0,合外力做功与非保守内力做功为 0.

**23.(清华大学 2001 年)** 质点系的下述物理量中哪些不一定为零?

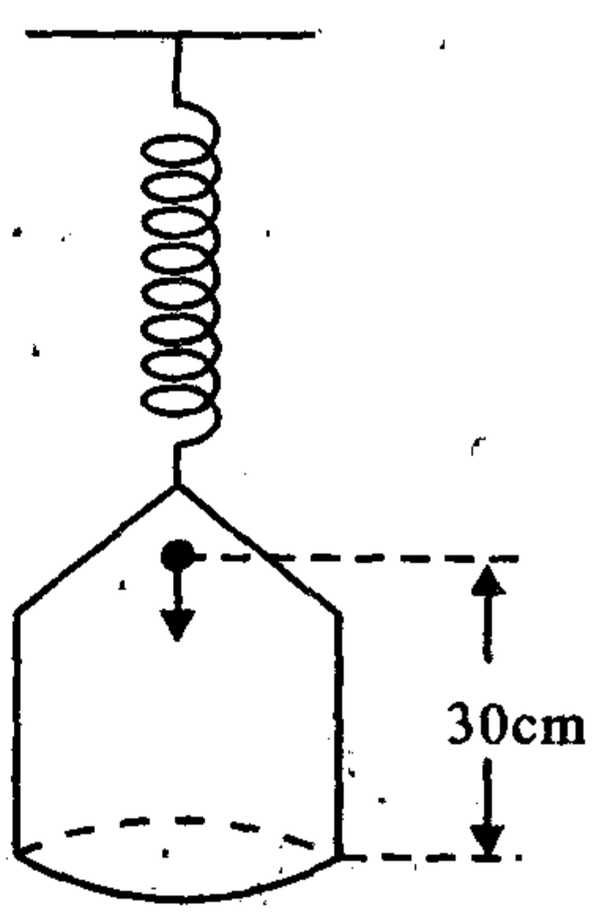
A. 内力之和　　B. 内力矩之和

C. 内力冲量之和　　D. 内力作功之和

**本题考点**:内力及内力矩,内力冲量,内力作功等概念.

答案选 D

**24.(中国科学技术大学 1998 年)** 如图所示,质量为 $m_2 = 0.2\text{kg}$ 的框子,用一弹簧悬挂起来,平衡时弹簧伸长为 10cm. 质量为 $m_1 = 0.2\text{kg}$ 的一滴油灰由距框底 30 cm 高的由静止开始,落到框底上,求框子向下运动的最大距离.




**本题考点**:动量守恒、机械能守恒

**解**:a) 油灰落底速度　$V = \sqrt{2gh}$

b) 动量守恒

$$(m_1 + m_2)V = m_1 V \Rightarrow = \frac{m_1\sqrt{2gh}}{m_1 + m_2}$$

c) 机械能守恒

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + (m_1 + m_2)gl_2 + \frac{1}{2}kl_1^2 = \frac{1}{2}k(l_1 + l_2)$$

将 $m_2 g = kl_1 \Rightarrow k = \frac{m_2 g}{l_1}$ 代入上式,得

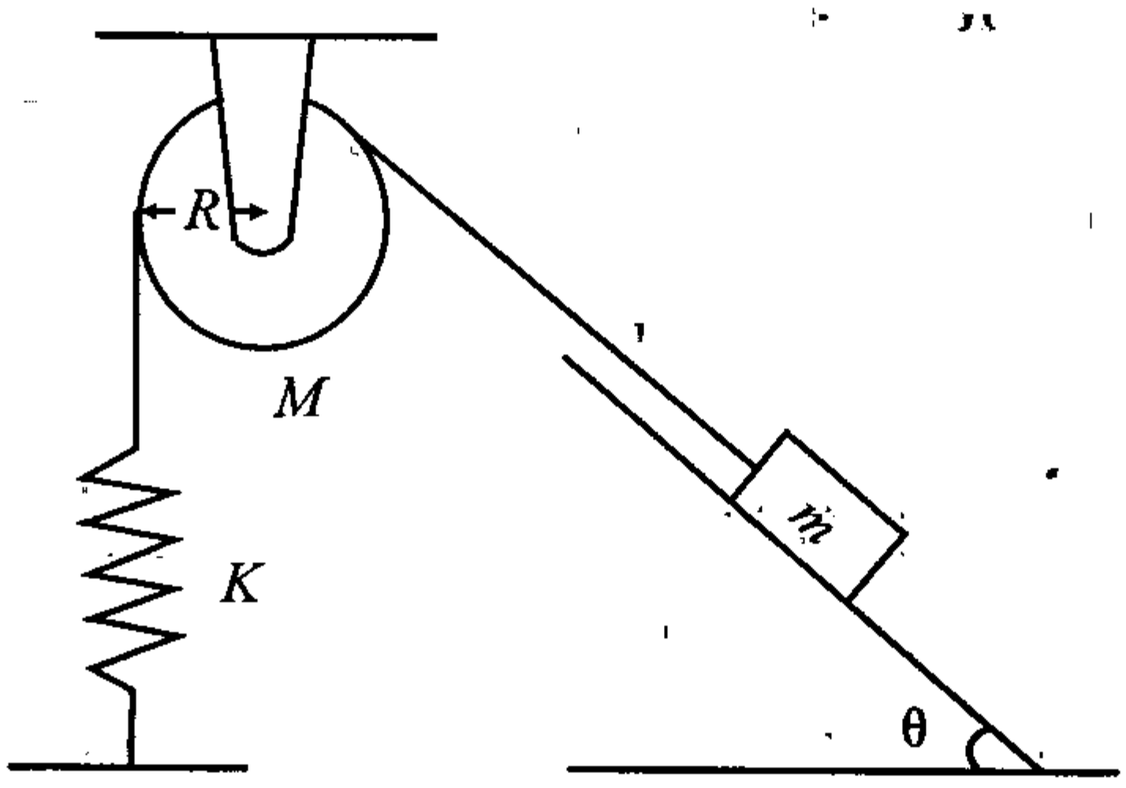
$$\frac{m_2 g}{2l_1}l_2^2 - m_2 g l_2 - \frac{m_1^2 gh}{m_1 + m_2} = 0$$

代入数据得

$$10l_2^2 - 2l_2 - 0.3 = 0, l_2 \approx \frac{2.0 + \sqrt{16}}{20} \approx 0.3(\text{m})$$

**25.(中国科学技术大学 1998 年)**　如图所示,已知滑轮的质量为 $M$,半径为 $R$,物体的质量为 $m$,弹簧的弹性系数为 $K$,斜面的倾角为 $\theta$,物体放在光滑的斜面上,由静止释放.释放时弹簧无形变,细绳正好被拉直.设细绳不可伸长且与滑轮间无相对滑动,忽略轴间摩擦力矩,求物体沿斜面下滑 $x$ 米时速度多大?(滑轮可视作均匀圆盘).

**本题考点:**能量守恒、运动学



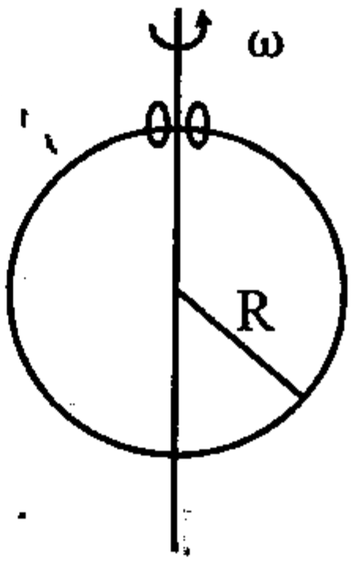

**解:**由能量守恒

$$\frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I_M\omega^2 + (\frac{1}{2}kx^2 - mgx\sin\theta) = 0$$

代入　$V = R\omega, I_M = \frac{1}{2}MR^2$

得　$V = \sqrt{\frac{4mgx\sin\theta - 2kx^2}{2m + M}}$

**26.(中国科学院 2000 年)**　如图所示,大圆环质量为 $M$,半径为 $R$,绕通过竖直直径的光滑轴转动.另有两只全同的小环套在大环上.当两小环圆固定于大环顶端转轴两侧时,大环转速为,释放两小环任其自由滑下,当它们滑至大环水平直径两端时,相对大环的速度 $v$ 是多



大?设小环质量 $m = \frac{1}{4}$,不计摩擦.

**本题考点**:能量守恒、角动量守恒

**解**:由能量守恒、角动量守恒定律得

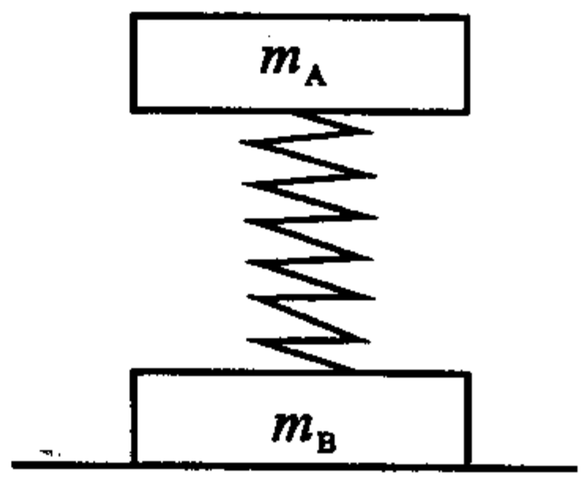
$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 + 2mgR = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}(2m)(R^2\omega^2 + v^2)$$

$$I\omega_0 = (I + 2mR^2)\omega$$

式 $I = \frac{1}{2}MR^2$ 是大环转动惯量,解之得

$$v = \sqrt{\frac{1}{2}R^2\omega_0^2 + 2kg}$$

**27.(中国科学院 2000 年)** 已知两个质量为 $1kg$ 的物体用轻质弹簧连接在一起,竖直地放在水平面桌上,如图所示,求:




(1) 开始时两物体都静止,将桌面突然移掉,在此瞬间两物体的加速度是多少?

(2) 在 $m_A$ 上加多大的力,才能在压力突然撤去时,由于弹簧的反跳,导致 $m_B$ 刚好能离开桌面?

**本题考点**:牛顿第二定律的应用

**解**:(1) 桌面撤去时对物体 $A$ 应用牛顿第二定律有

物体 $A$:$\Sigma F = 0$, $a_A = \frac{\Sigma F}{m_A} = 0$

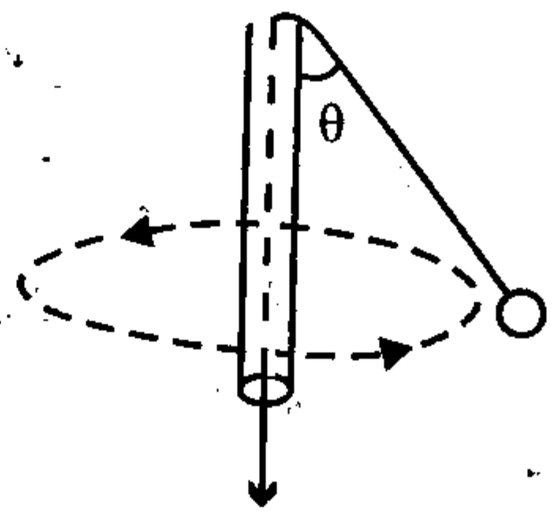
物体 $B$:$\Sigma F = (m_A + m_B)g$, $a_B = \frac{(m_A + m_B)g}{m_B} = 2g$

(2) $k(x_2 - x_1) = m_Bg = k(\frac{N}{k} - \frac{m_Ag}{k})$,

压力 $N_{min} = (m_A + m_B)g$

**28.(中国科学院 2001 年)** 一不可伸长的细绳穿过铅直放置、管口光滑的细管,其一端系一质量为 $5g$ 的小球作水平圆周运

动.最初 $l_1 = 2m, \theta_1 = 30^0$,后来继续向下拉绳使小球以 $\theta_2 = 60^0$ 作水平圆周运动,求小球的初速 $V_1$,末速 $V_2$ 及绳对小球作的总功 $A$.




**本题考点**:牛顿第二定律的应用、角动量守恒、功能原理

**解**:开始:$T_1\sin\theta_1 = m\dfrac{V_1^2}{l_1\sin\theta_2}$,

$$T_1\cos\theta_1 = mg$$

末态:$T_2\sin\theta_2 = \dfrac{m_1V_2^2}{l_2\sin\theta_2}$, $T_2\sin\theta_2 = mg$

初态到末态过程中,小球对管轴角动量守恒:

$ml_1\sin\theta_1 V_1 = ml_2V_2\sin\theta_2$

解得:$V_1 = 2.38(ms^{-1})$, $V_2 = 3.43(ms^{-1})$

再由功能原理得:$A = 0.08(J)$

**29.(南京师范大学 1997 年)** 质量为 $M$ 的平板小车,放在光滑的水平面上,一质量为 $m$ 的物体以水平速度 $V_0$ 进入小车的表面,物体与车之间的摩擦系数为 $\mu$,设小车足够长,求物体相对小车的最大距离及损失的动能.

**本题考点**:动量守恒、动能定理

**解**:取 $M$ 与 $m$ 为研究对象,在水平方向上,$m$ 从 $V_0$ 开始到带动 $M$ 一起运动的过程,$M$ 与 $m$ 在水平方向受合外力为零,由动量守恒得:

$$mV_0 = (m + M)V$$

设 $m$ 开始运动到相对 $M$ 静止,在 $M$ 上移动了 $x$ 距离,由动能定理得:

$$\mu mgx = \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{1}{2}(M + m)V^2$$

$$x = \frac{MV_0^2}{2\mu g(m + M)}$$

损失的能量为$\frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = -\frac{Mm(M+2m)}{2(M+m)^2}V_0^2$

**30.(南京师范大学 1997 年)** 一球形容器竖直落入水中,刚接触水面时其速度为 $V_0$,设此容器在水中所受的浮力与重力相等,水的阻力 $f = -bV$,求:(1)时间 $t$ 秒内阻力所作的功.(2)下降距离与时间的函数关系.

**本题考点:**牛顿定律的应用

**解:**设球形容器的半径为 $R$,质量为 $m$,选取竖直向下为 $x$ 正向,水平面上为坐标原点,则由于它受到重力、浮力、水的阻力作用,由牛顿第二定律有:

$$\begin{cases} mg - bV - f_1 = m\dfrac{dV}{dt} \\ mg - f_1 = 0 \end{cases}$$

联立解得: $V = V_0 e^{\frac{b}{m}t}$

1) 阻力 $f = -bV$ 从 $0 \to t$ 时间内所做的功为

$$A = \int_0^t f dx = -\int_0^t bV^2 dt = -\frac{mV_0^2}{2}(1 - e^{\frac{-2bt}{m}})$$

2) 由 $\frac{dx}{dt} = V = V_0 e^{-bt}$,且 $t = 0$ 时,$x = 0$

积分得: $x(t) = \frac{V_0}{b}(1 - e^{-bt})$

**31.(华中科技大学2001 年)** 桌上有一质量为 1 千克的板,板上放一质量为 2 千克的物体.设物体与板、板与桌面之间的摩擦系数均为 0.25,静摩擦系数均为 0.30.

(1) 今以水平力 $F$ 拉板,使板与物体一起以 1 米/秒$^2$ 的加速度运动,试计算物体与板、板与桌面的相互作用力.

(2) 要将板从物体下面抽出,至少需要多大的力.

**本题考点:**摩擦力、牛顿定律

**解:**(1) 当板与物体一起以 1 米/秒$^2$ 的加速度运动时,则板与

物体之间相对静止.其相互作用力必为静摩擦力,其大小为:

$f_1 = \mu_{静} m_{物} g = 0.30 \times 9.8 \times 2 = 5.88N$

板与地面之间存在相对运动,其相互作用力大小为相互的动摩擦力:

$f_2 = \mu_{动}(m_1 + m_2)g = 0.25 \times 3 \times 9.8 = 7.35N$

(2) 设将板从物体下面抽出所需的最小力为 $f_5$,由受力分析可知,板与物体之间至少存在相对运动趋势,则物体对板的动摩擦力为:

$f_3 = 0.25\ m_2\ g = 0.25 \times 2 \times 9.8\ (N)$

板与桌面之间的摩擦力必为动摩擦力:

$f_4 = 0.25(m_1 + m_2)g = 0.25 \times 3 \times 9.8(N)$

故外力需克服此两力才有可能将板抽出,此时外力大小至少为:

$f_5 = 0.25 \times 2 \times 9.8 + 0.25 \times 3 \times 9.8$

$= 0.25 \times 3 \times 9.8 = 12.25(N)$

**32.(华中科技大学 2001 年)** 一质量为 30 千克的小孩以 4 米/小时 的速度跳上质量为 80 千克、速度为 2.5 千米/小时运动的小车,问:

(1) 如果小孩从后面跳上小车,小车运动的速度变为多大?

(2) 如果小孩迎面跳上小车,小车运动的速度变为多大?

**本题考点:**动量、动量守恒定律

**解:**(1) 选取小车运动的方向为正方向,小孩与小车在水平方向上受外力为零,由动量守恒定律得

$m_{人} v_1 + m_{车} v_2 = (m_{人} + m_{车}) v_{车}$

$v_{车} = (m_{人} v_1 + m_{车} v_2) / (m_{人} + m_{车})$

$= 2.9(\mathrm{m/s})$

(2) 当小孩迎面跳上小车时,小孩与小车在水平方向所受的外力为零,同理得

$$m_{车}v_2 - m_{人}v_1 = (m_{人} + m_{车})v'$$

$$v' = (m_{车}v_2 - m_{人}v_1) / (m_{人} + m_{车})$$

$$= 0.73(\mathrm{m/s})$$

**33.(华中科技大学2002年)** 一颗人造卫星的质量为1327千克,在离地面1850公里的高空中环绕地球作匀速圆周运动,设地球是半径为6370公里的球体,地面的重力加速度 $g = 9.8$ 米/秒$^2$. 求:

(1) 卫星所受的向心力的大小;

(2) 卫星的速率;

(3) 卫星绕地球运行一周的时间.

**本题考点:** 万有引力、圆周运动

**解:** (1) 依题意,当人造卫星绕地球作匀速圆周运动时,所受向心力的大小即是地球对卫星的万有引力大小为:

$$F_{引力} = \frac{Gm_{卫}m_e}{r^2} = \frac{m_{卫}}{r^2}g(R_e)^2 = 7.8 \times 10^3(N)$$

(2) 万有引力提供卫星作圆周运动时有

$$\frac{m_{卫}V^2}{r} = \frac{Gm_{卫}m_{地}}{r^2}$$

$$V^2 = \frac{Gm_{地}}{r} = \frac{R_{地}^2}{r^2}g$$

$$V = \sqrt{\frac{g}{r}R_{地}} = \sqrt{\frac{9.8}{8.22 \times 10^6}} \times 6.37 \times 10^6$$

$$= 2.07 \times 10^3(\mathrm{m/s})$$

(3) 由角速度大小 $\omega = \frac{V}{r}$ 及周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 可得

$$T = 2\pi\frac{r}{V} = 2\pi\frac{8.22 \times 10^6}{2.07 \times 10^3} = 2.49 \times 10^4(\text{秒}) = 2.88(\text{天})$$

**34.(华中科技大学 2002 年)**　倔强系数为 $k$ 的弹簧,上端固定,下端挂一质量为 $m$ 的物体.先用手托住物体,使弹簧不伸长.

(1) 托着物体慢慢放下至平衡位置,问弹簧的最大伸长和弹性力是多少?

(2) 将手突然拿开,使物体快速落下,问弹簧的最大伸长和弹性力是多少?

(3) 在(2) 中,物体经过平衡位置时的速度是多少?

**本题考点:**牛顿定律、机械能守恒律

**解:**(1) 由牛顿定律,当物体 $m$ 平衡时,所受的重力与弹簧的弹力相等,其值为

$$x_{max} = \frac{mg}{k}$$

(2) 物体快速落下时,选取开始位置为势能零面,由于物体只受弹力与重力作用,故机械能守恒.设到达最大位置时弹簧的伸长量为 $x_1$,则 $\frac{1}{2}kx_1^2 - mgx_1 = 0, x_1 = \frac{2mg}{k}$,此时弹性力大小为 $kx_1 = 2mg$

(3) 设物体经过平衡位置时的速度大小为 $V$,由机械能守恒律有

$$\frac{1}{2}kx_{max}^2 + \frac{1}{2}mV^2 - mgx_{max} = 0$$

$$V = \sqrt{\frac{m}{k}}g$$

**35.(华中科技大学 2003 年)**　一质量为 $m$ 的快艇在行驶中受到阻力 $F$ 与速度 $V$ 的平方成正比,当它达到速率 $V_0$ 突然关闭发动机,求关闭发动机后

(1) 艇的速度对时间的函数关系

(2) 艇行驶的路程对时间的函数关系

(3) 艇的速度对路程的函数关系

**本题考点**:牛顿第二定律的计算

**解**:(1) 由题意知,在关闭发动机后快艇在水平方向上受阻力 $F$ 作用,由牛顿第二定律知:

$$F = -kV^2 = m\frac{dV}{dt}\ (\text{为比例系数}) \tag{1}$$

对(1) 式积分得:

$$V(t) = \frac{1}{\frac{kV_0}{m}t}V_0 \tag{2}$$

(2) 又因为$\frac{ds}{dt} = V(t)$,将上式代入并积分得

$$s(t) = \frac{m}{k}\ln\frac{m}{m - kV_0t} \tag{3}$$

(3) 由 $-kV^2 = m\frac{dV}{dt} = m\frac{dV}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$,两边积分得:

$$V(t) = V_0e^{-\frac{k}{m}s}$$

**36.(华中科技大学2003年)** 质量为 $m$ 的地球卫星沿圆轨道绕地球运动,卫星离地面的高度等于地球半径 $R$ 的三倍.设引力恒量为 $G$、地球质量为 $M$,求此情况下

(1) 卫星的动能

(2) 卫星在地球引力场中的引力势能

(3) 卫星的总机械能

**本题考点**:万有引力与向心力、动能、势能、机械能

**解**:(1) 地球对卫星的万有引力提供卫星沿圆周轨道运动的向心力,设卫星的运动速率为 $V_0$,则由牛顿第二定律有

$$G\frac{mM_e}{(3R)^2} = m\frac{V^2}{3R}$$

即

$$V^2 = \frac{GM_e}{3R}$$

则卫星的动能　$E_k = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{GM_em}{6R}$

(2) 设地球表面的势能为零,则

$$E_P = -\frac{GmM_e}{3R}$$

(3) 卫星的总机械能为

$$E = E_k + E_P = \frac{GmM_e}{6R} - \frac{GmM_e}{3R} = -\frac{GmM_e}{6R}$$

**37.(华中科技大学 2003 年)**　一列质量为 $1.0 \times 10^5$kg、以 1m/s 的速率前进的货车与另一节重 $2.0 \times 10^4$kg、以 2m/s 的速率沿相同方向前进的车厢挂接,不计摩擦

(1) 如挂接成功,求挂接后它们的速率和挂接期间的动能损失

(2) 如挂接失败,把挂接过程看成完全弹性碰撞,求各自的速率.

**本题考点:**完全非弹性碰撞、动量守恒

**解:**(1) 设货车与车厢的质量及初速度大小分别为 $m_1, m_2$; $V_1, V_2$.

若挂接成功,则两者的作用可视为完全非弹性碰撞.依题意,由动量守恒得

$$m_1V_1 + m_2V_2 = (m_1 + m_2)V$$

$$V = \frac{m_1V_1 + m_2V_2}{m_1 + m_2} = \frac{7}{6}(\text{m/s})$$

则损失的动能 $\Delta E_k = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_1V_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2$

$$= \frac{5}{6} \times 10^4(J).$$

(2) 若挂接失败,两者碰后的速率分别为 $V'_1$ 与 $V'_2$,由动量与动能守恒

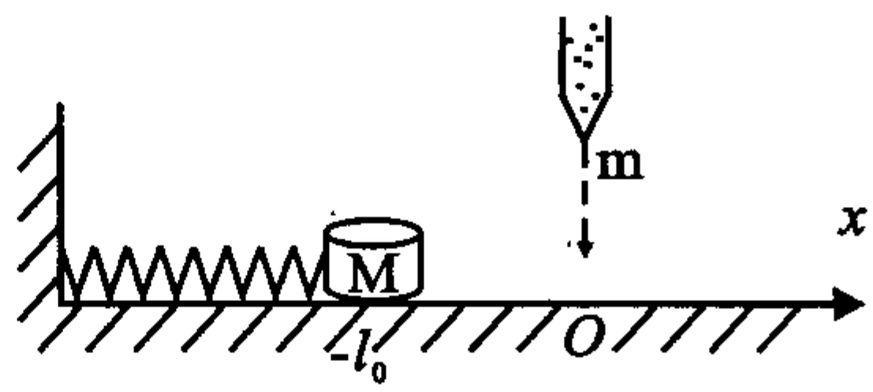
$$m_1V_1 + m_2V_2 = m_1V'_1 + mV'_2$$

$$\frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 = \frac{1}{2}m_1(V_1^1)^2 + \frac{1}{2}m_2V_2'^2$$

联系上两式求解得：

$$V'_1 = \frac{4}{3}(\mathrm{m/s}), \qquad V'_2 = \frac{1}{3}(\mathrm{m/s})$$

**38.**(北方交大 2002 年) 如图所示，弹簧的一端固定在墙上，另一端连接一质量为 $M$ 的容器，容器可在光滑水平面上运动. 当弹簧未变形时，容器位于 $O$ 点处，今使容器自 $O$ 点左端 $l_0$ 处从静止开始运动，每经过 $O$ 点一次时，从上方滴管中滴入一质量为 $m$ 的油滴. 求：




(1) 滴到容器中 $n$ 滴以后，容器运动到距 $O$ 点最远的距离；

(2) 第$(n+1)$滴与第 $n$ 滴的时间间隔.

**本题考点：**动量守恒、机械能守恒、简谐振动

**解：**(1) 设第一次 $M_O$ 经过 $O$ 点前，由机械能守恒得 $\frac{1}{2}kl_O^2 = \frac{1}{2}M_OV_O^2$，故有 $V_O = \sqrt{\frac{k}{M_O}}l_O$ 在水平方向上 $M_O$ 与 $m$ 发生完全非弹性碰撞，由动量守恒得其经过 $O$ 点后瞬间的速度大小为 $V_1$.

$$M_OV_O = (M_O + m)V_1 \Rightarrow V_1 = \frac{M_OV_O}{M_O + m}$$

第二次经过 $O$ 点后瞬间，由动量守恒得

$$(M_O + m)V_1 = (M_O + m + m)V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{M_2V_2}{M_O + 2m}$$

第 $n$ 次经过 $O$ 点后瞬间的速率为 $V_n$，同上理可推得

$$V_n = \frac{M_OV_O}{M_O + nm} = \frac{M_Ol_O}{M_O + nm}\sqrt{\frac{k}{M_O}}$$

第 $n$ 滴滴入后，由机械能守恒得其运动到距 $O$ 点的最远距离为 $X_n$，此时有

$$\frac{1}{2}(M_O + nm)V_n^2 = \frac{1}{2}kX_n^2 \Rightarrow X_n = \sqrt{\frac{M_O}{M_O + nm}}l_O$$

(2) 第$(n+1)$滴与第$n$滴的时间间隔必为周期的一半,故

$$\text{时间间隔} = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{M_O + nm}{k}}(\text{秒})$$

**39.(华东理工大学2002年)** 已知质点$m = 5\text{kg}$,运动方程式为$\vec{r} = 2t\vec{i} + t^2\vec{j}$,试求质点在0→2秒内受的冲量$\vec{I}$及所作的功$A$?

**本题考点:**力、冲量与功的计算

**解:**由$\vec{r} = 2t\vec{i} + t^2\vec{j}$得　　$\vec{v} = 2\vec{i} + 2t\vec{j}$,　　$\vec{a} = 2\vec{j}$

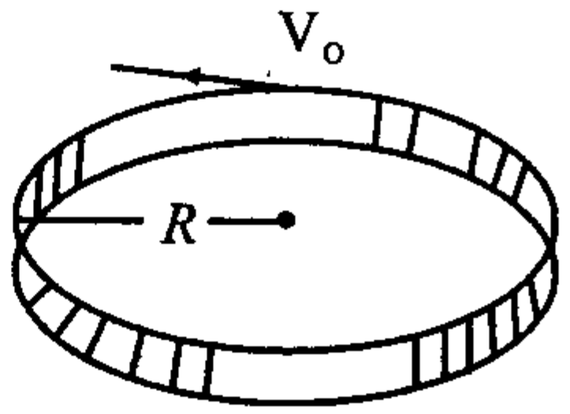
所受合力$\vec{F} = m\vec{a} = 2 \times 2\vec{j} = 10\vec{j}(N)$

冲量$\vec{I} = \int_0^2 \vec{F}\,dt = 20\vec{j}(NS)$

再由功的定义$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$得

$$A = \int_0^2 (20\vec{j}) \cdot (2\vec{i} + 2t\vec{j})\,dt = \int_0^2 20\,dt^2 = 80(\text{J})$$

**40.(华东理工大学2002年)** 在光滑的水平桌面上平放一固定的圆环,其半径为$R$.物体与环内侧的摩擦系数为$\mu$.当$t = 0$时,物体的速率为$V_0$,求:




(1)$t$在时刻物体的速率;

(2) 在时间$t$内物体经过的路程.

**本题考点:**牛顿定律、速率与路程的关系

**解:**① 设物体的质量为$m$,由牛顿第二定律

$$f = ma_t = m\frac{dV}{dt} = \mu ma_n = \mu\frac{mV^2}{R}$$

积分得

$$V = \left[-\frac{\mu}{R}t + \frac{1}{V_0}\right]^{-1}$$

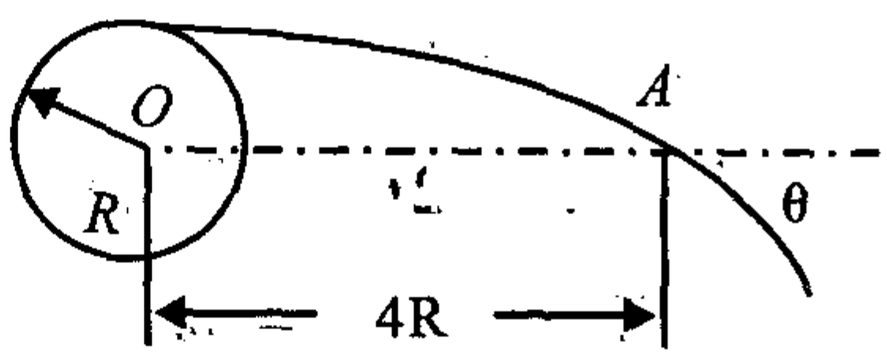
② 由 $V = \frac{ds}{dt} = \left[-\frac{\mu}{R}t + \frac{1}{V_0}\right]^{-1}$ 积分得

$$s = \frac{R}{\mu}\ln(1 - \frac{\mu V_0}{R}t)$$

当 $t < \frac{R}{\mu_0 V_0}$ 时，上式成立.

当 $t \to \frac{R}{\mu_0 V_0}$ 时，$V \to 0$，物体逐渐停下来.

**41.（华东理工大学 2002 年）** 火箭以第二宇宙速度 $v_2 = \sqrt{2Rg}$ 沿地面切向飞出.在飞离过程中，火箭发动机停止工作，不计空气阻力，则火箭在距地心 $4R$ 的 $A$ 处速度大小为多大?




**本题考点：**角动量守恒、机械能守恒

**解：**由于火箭在飞行过程中不受任何外力矩作用，故角动量守恒

$$mRv_2 = m4R\sin\theta v_A$$

$$v_A = \frac{v_2}{4\sin\theta} = \frac{\sqrt{2Rg}}{4\sin\theta}$$

由机械能守恒得

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{Gm_e m}{R} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{Gm_e m}{4R}$$

$$v_A = \frac{\sqrt{2Rg}}{2} = \frac{v_2}{2}$$

**42.（北京理工大学 2001 年）** 一水平圆盘可绕通过其中心的固定铅直轴转动，盘上站着一个人，把人和圆盘取作系统，当此人在盘上随意走动时，若忽略轴的摩擦，则此系统

A. 动量守恒

B. 机械能守恒

C. 对转轴的角动量守恒

D. 动量、机械能和角动量都守恒

E. 动量、机械能和角动量都不守恒

**本题考点**:角动量守恒

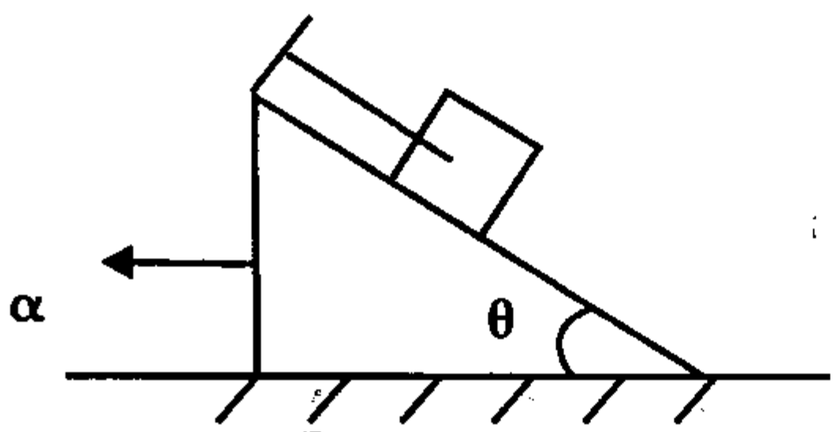
**解**:系统受内力矩作用,角动量守恒

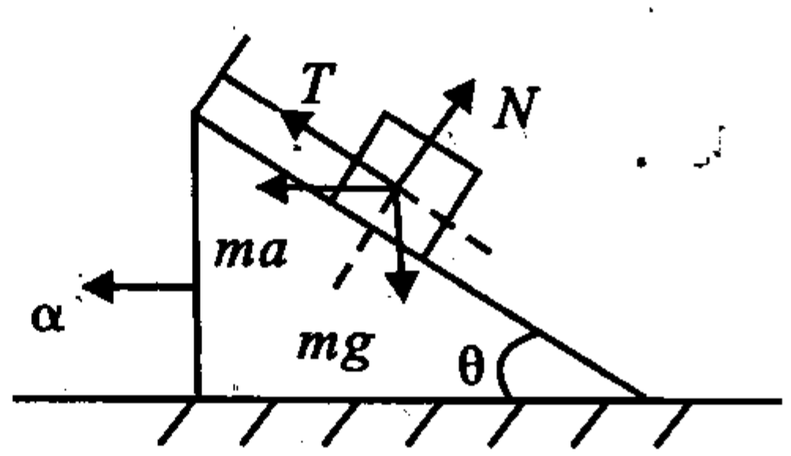
答案选 C

**43.(辽宁大学 2001 年)**　如图所示,质量为 $m$ 的物体 $A$ 用平行于斜面的细线连结置于光滑的斜面上,若斜面向左方作加速运动,当物体开始脱离斜面时,它的加速度的大小为

A. $g\sin\theta$　　B. $g\cos\theta$　　C. $g\cot\theta$　　D. $g\tan\theta$

**本题考点**:牛顿第二定律




**解**:物体的受力如图所示,根据牛顿第二定律

$$mg\cos\theta - N = ma\sin\theta$$

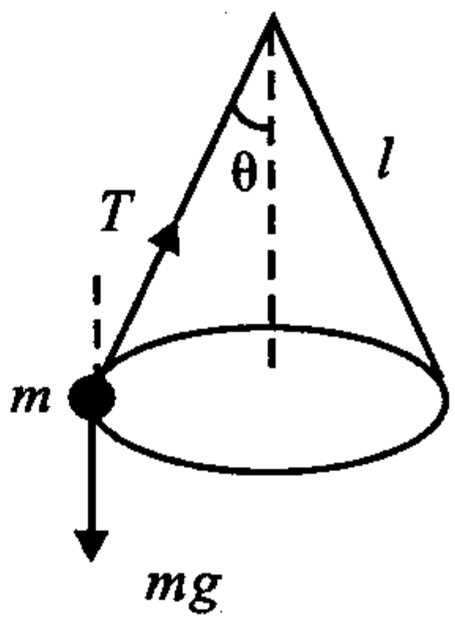
物体开始脱离斜面时 $N = 0$

$$mg\cos\theta = ma\sin\theta$$

$$\Rightarrow a = g\cos\theta$$

答案选 C

**44.(辽宁大学 2001 年)**　一圆锥形的摆球在一水平面内作匀速圆周运动,细悬线长为 $l$,与竖直方向夹角 $\theta$,线的张力为 $T$,小球的质量为 $m$,忽略空气阻力,则下述结论中正确的是(　　)□




A. $T\cos\theta = mg$　　B. 小球动量不变

C. $T\sin\theta = \dfrac{mv^2}{l}$　　D. $T = \dfrac{mv^2}{l}$

**本题考点**:牛顿第二定律

解：$T\cos\theta - mg = 0$

$T\cos\theta = mg$

答案选 A

**45.（北京邮电大学 1999 年）** 一辆汽车从静止出发在平直公路上加速前进，如果发动机的功率一定，下面哪一种说法是正确的？

A. 汽车的加速度是不变的.

B. 汽车的加速度随时间减小.

C. 汽车的加速度与它的速度成正比.

D. 汽车的速度与它通过的路程成正比.

E. 汽车的动能与它通过的路程成正比.

**本题考点：**功率、力、速度三者关系.

**解：**功率 $P = F \cdot v$　　$P$ 为常数

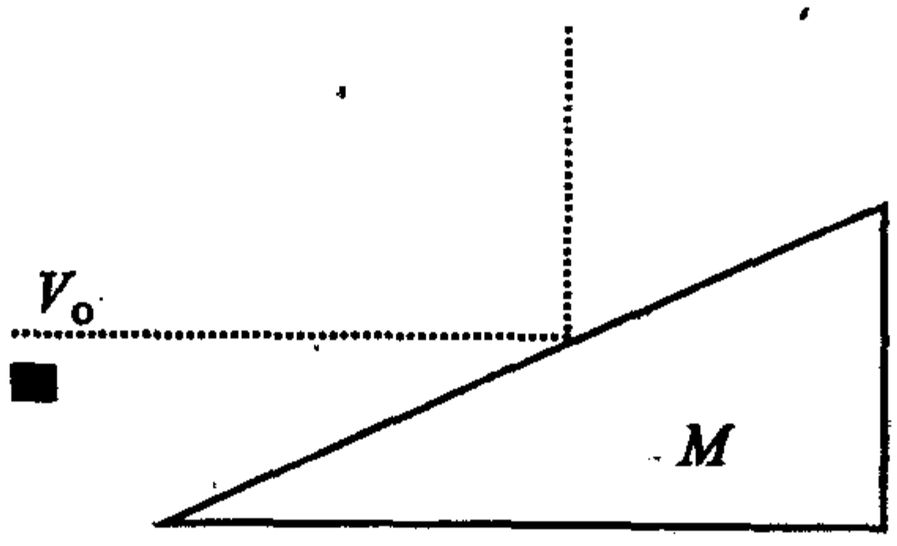
$$F = \frac{P}{v} \qquad m\frac{dv}{dt} = \frac{P}{v}$$

$$m\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{P}{v} \qquad mv\frac{dv}{dx} = \frac{P}{v} \qquad \frac{1}{3}mv^3 = px$$

A、C、D、E 不对.

答案选 B

**46.（北京邮电大学 1999 年）** 质量为 $m$ 的小球，以水平速度 $V_0$ 与光滑桌面上质量为 $M$ 的静止斜劈作弹性碰撞后竖直弹起，则斜劈的运动速度值 $V =$ _____；小球上升的高度 $h =$ _____.




**本题考点：**弹性碰撞中动量、能量守恒

**解：**碰撞为弹性时有

$$\begin{cases}\frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}mV'^2 \\ mV_0 = MV\end{cases}$$

$$V = \frac{m}{M}V_0$$

$$\frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{M}{2}(\frac{m}{M}V_0)^2 + \frac{1}{2}mV'^2$$

$$\frac{1}{2}mV'^2 = \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}V_0^2 = mgh$$

$$h = \frac{V_0^2}{2g}(1 - \frac{m}{M})$$

空处分别填$\frac{m}{M}V_0$、$\frac{V_0^2}{2g}(1 - \frac{m}{M})$

**47.(南开大学 2002 年)**　有两个带电粒子($A$、$B$).它们的质量均为 $m$,电荷均为 $q$;其中 $B$ 初始静止,$A$ 以初速 $V_0$ 由无限远处向 $B$ 运动.问这两个粒子最接近时的距离是多少?问这时两个粒子的速率是多少?(提示:只考虑一维、库仑力).

**本题考点:**库仑势,机械能守恒定律,动量守恒定律.




**解:**只有静电场力做功,所以机械能守恒,最接近时两者有相同的速度,设为 $v$,相距为 $r_{min}$,则有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(2m)v^2 + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_{min}} \tag{1}$$

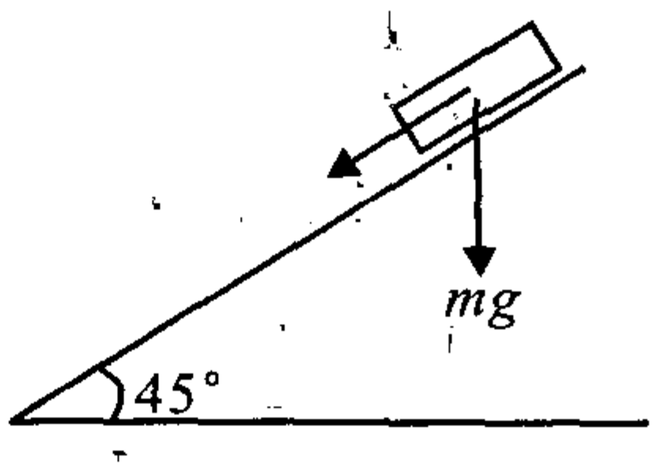
又由动量守恒定律

$$mv_0 = 2mv \Rightarrow v = \frac{1}{2}v_0 \tag{2}$$

解(1)、(2)得 $r_{min} = \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 mv_0^2}$

**48.(清华大学 1998 年)**　一物体从与水平方向成45度角的滑

梯上滑下.初速度为0,滑下5米时的速度为6m/s.求滑下5米所需的时间,以及滑梯与物体之间的滑动摩擦系数 $\mu$.




**本题考点:**已知运动条件求运动时间和力

**解:**物体在斜面方向上受到的力,下滑力 $mg\sin45°$,摩擦力 $\mu mg\cos45°$

$$a = \frac{mg\sin45° - \mu mg\cos45°}{m} = g(\sin45° - \mu\cos45°)$$

对于匀变速直线运动有

$$v^2 = v_0^2 + 2sa \qquad a = \frac{6^2}{2\times5} = 3.6(\mathrm{m/s^2})$$

$$g\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mu) = 3.6 \qquad \mu = 0.49$$

$$S = v_0^2 + 2at^2, t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \frac{5}{3}\text{秒}$$

**49.(清华大学1998年)** 一质量为 $M$ 的小物体从半径为 $R$ 的球的顶部滑下.假定摩擦力为零,求该物体离开球面处的位置.

**本题考点:**向心力

**解:**如图,设物体在球 $P$ 点切向加速度

$$a_\tau = g\sin\theta = R\frac{d\omega}{dt}$$

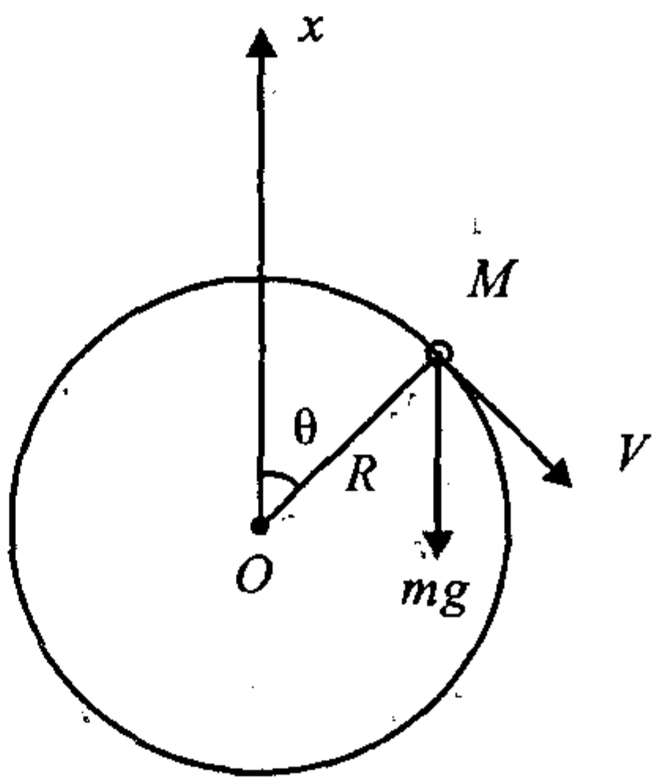
$$R\frac{d\omega}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = g\sin\theta$$

$$R\omega d\omega = g\sin\theta d\theta$$

$$R\int_0^\omega \omega d\omega = \int_0^\theta g\sin\theta d\theta$$

$$\frac{1}{2}\omega^2 = \frac{g(1-\cos\theta)}{R}$$

物体离开球面的条件是



$$a_n = g\cos\theta = R\omega^2$$

$$g\cos\theta = 2R\frac{g}{R}(1-\cos\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{2}{3}$$

$$\theta = \arccos(\frac{2}{3})$$

**50.(清华大学 1998 年)**　在地面附近,雨点下落的速度可以看作恒定不变.试求该速度.

**本题考点:**已知力求速度

**解:**在雨点下落时我们一般假设粘滞阻力与速度成正比或速度平方正比,即

$$f = \mu v \qquad \text{或} f = \mu v^2$$

在空气中 $\mu$ 很小,匀速下落的条件

$$-f + mg = 0$$

当阻力与速度成正比时,落地速度　$v = \frac{mg}{\mu}$

当阻力与速度平方成正比时,落地速度　$v = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}$

**51.(清华大学 2000 年)**　地球绕太阳公转的轨道是一个椭圆,太阳位于椭圆的一个焦点上,地球在轨道上每一点的加速度指向:

A. 轨道切线方向　　B. 轨道法线方向

C. 太阳所在的椭圆焦点　　D. 椭圆的中心

**本题考点:**中心力的方向

**解:**太阳所在的椭圆焦点,地球绕太阳公转所受力是万有引力,指向太阳,加速度方向与力的方向相同.

答案选 C

**52.(清华大学 2000 年)**　在中心力场中运动的质点的守恒量有:

A. 质点绕力心的角动量　　B. 质点的动能

C. 质点的势能　　D. 质点力心的角速度

**本题考点**:角动量守恒

**解**:中心力场中,中心力与位矢平行,力矩为零,因此角动量守恒.

答案选 A

**53.(东北大学 2002 年)** 直径为 $D$,高为 $H$ 的圆柱形水罐竖直放置,上端开口,罐内充满水,现在其底部开一直径为 $d$ 的圆形小孔($d << D$),求经过多长时间罐内的水流净.(提示,应用伯努利方程 $P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh =$ 常量,$\rho$ 是水的密度).

**本题考点**:伯努利方程的应用

**解**:设 $t$ 时刻罐内水高为 $h$

有 $P_0 + \rho gh = P_0 + \frac{1}{2}\rho V^2$

得 $V = \sqrt{2gh}$

此时流量 $dQ = Vdt \cdot \frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{1}{4}\pi d^2 Vdt$

罐中的高度变化 $dh = -\frac{dQ}{\frac{1}{4}\pi D^2} = -\frac{d^2}{D^2}Vdt$

$$dh = -\frac{d^2}{D^2}\sqrt{2gh}dt$$

$$\frac{dh}{h^{1/2}} = -\sqrt{2g}\,\frac{d^2}{D^2}dt$$

积分 $\int_H^0 \frac{dh}{h^{1/2}} = -\int_0^t \sqrt{2g}\,\frac{d^2}{D^2}dt$

最后解得

$$t = \frac{D^2}{d^2}\frac{2H^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2g}} = \frac{D^2}{d^2}\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

**54.(辽宁大学 2001 年)** 两球质量分别为 $m_1 = 2.0\text{g}, m_2 = 5.0\text{g}$,在光滑的水平桌面上运动,用直角坐标 oxy 描述其运动,两者

速度分别为 $\vec{v}_1 = 10\vec{i}\,\text{cm/s}, \vec{v}_2 = (3.0\vec{i} + 5.0\vec{j})\,\text{cm/s}$，若碰撞后两球合为一体，则碰撞后两球速度 $\vec{v}$ 的大小 $v =$ _____，$\vec{v} =$ _____，$\vec{v}$ 与 $x$ 轴的夹角 $\alpha =$ _____.

**本题考点**：动量守恒定律

**解**：由动量守恒，$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}$

代入数据得：

$$\vec{v} = \frac{35\vec{i} + 25\vec{j}}{7}(\text{cm/s})$$

$$v = \sqrt{(\frac{35}{7})^2 + (\frac{25}{7})^2} = 6.1(\text{cm/s})$$

设 $v$ 与 $x$ 轴夹角为 $\theta$　　$\tan\theta = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$

$$\theta = \arctan\frac{5}{7}$$

空处填：$6.1(\text{cm/s})$，$\arctan\frac{5}{7}$

**55.（辽宁大学 2001 年）** 一质点在二恒力的作用下，位移为 $\Delta\vec{r} = 3\vec{i} + 8\vec{j}(SI)$，在此过程中，动能增量为 $24J$，已知其中一恒力 $F_1 = 12\vec{i} - 3\vec{j}(SI)$，则另一恒力所作的功为_____

**本题考点**：功的计算，动能定理

**解**：做功为：$A_1 = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r} = (12\vec{i} - 3\vec{j}) \cdot (3\vec{i} + 8\vec{j}) = 12(J)$

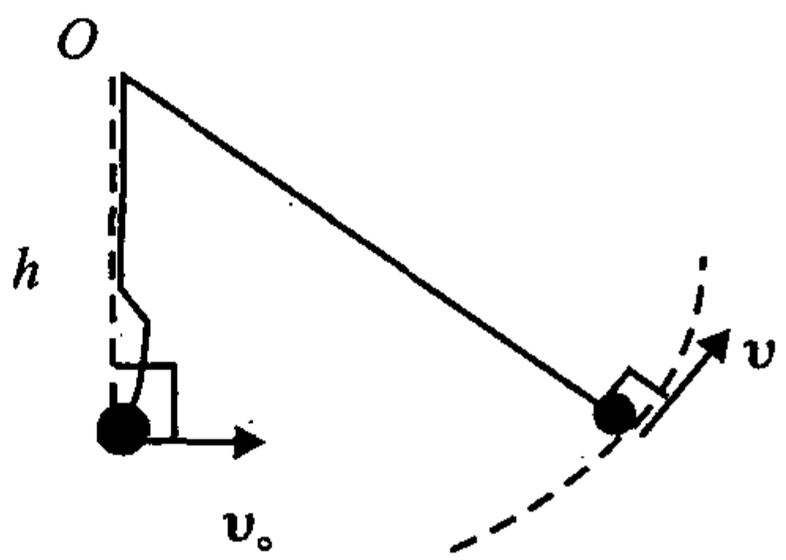
由动能定理有：$A = A_1 + A_2 = \Delta E_k$

另一恒力做功　$A_2 = \Delta E_k - A_1 = 24 - 12 = 12(J)$

空处填：12(J)

**56.（辽宁大学 2001 年）** 一根长为 $l$ 的细绳的一端固定于光滑水平面上的 $O$ 点，另一端系一质量为 $m$ 的小球，开始时绳子是松弛的，小球与 $O$ 点的距离为 $h$，使小球以某个初速率沿该光滑水

平面上作一直线运动，该直线垂直于小球初始位置与 $O$ 点的连线. 当小球与 $O$ 点的距离达到 $l$ 时，绳子绷紧从而使小球沿一个以 $O$ 点为圆心的圆形轨迹运动，则小球作圆周运动时的动能 $E_K$，与初动能 $E_{KO}$ 的比值.




$E_K/E_{KO}$ = _____

**本题考点**：角动量守恒定律

**解**：当小球与 $O$ 点距离达到 $l$ 时，作圆周运动的速度为 $\vec{v}'$，

由角动量守恒有：

$$mv_0h = mv'L$$

$$\Rightarrow v' = v_0h/l$$

$$\frac{E_k}{E_{k0}} = \frac{\frac{1}{2}mv'^2}{\frac{1}{2}mv_0} = \frac{h^2}{l^2}$$

空处填：$\frac{h^2}{l^2}$

**57.（北京理工大学2002年）** 质量 $m = 1\text{kg}$ 的物体，在坐标原点处从静止出发在水平面内沿 $x$ 轴运动，其所受合力方向与运动方向相同，合力大小为 $F = 3 + 2x(\text{SI})$，那么，物体在开始运动的 3m 内，合力所作功 ④= _____；当 $x = 3m$ 时，其速率 $v$ =

**本题考点**：变力的功，动能定理

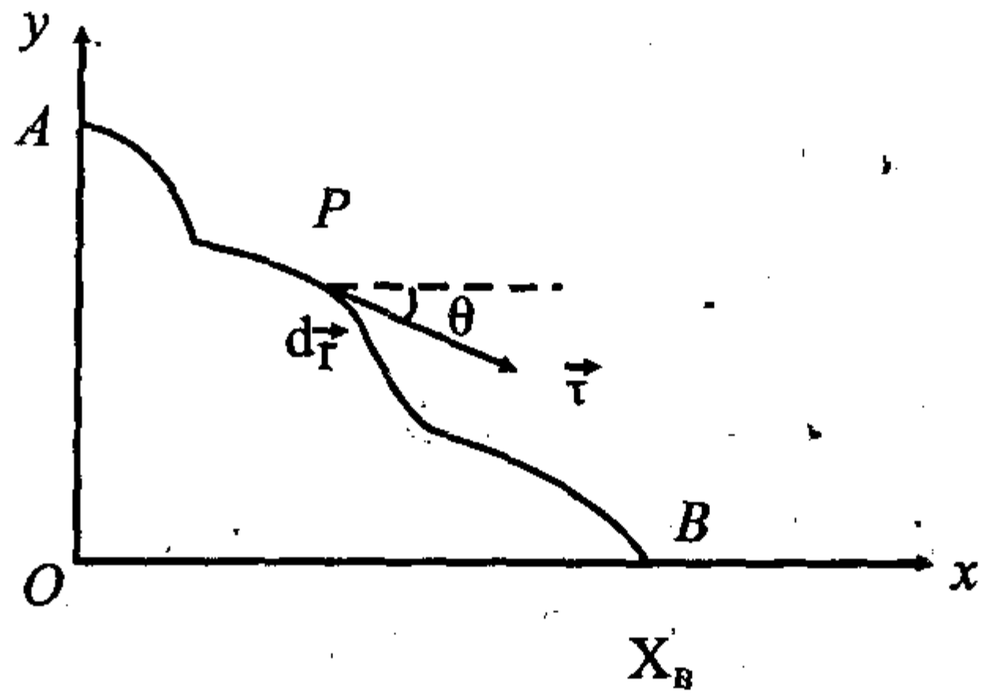
**解**：$A = \int_0^3 F dx = \int_0^3 (3 + 2x)\,dx = (3x + x^2)\,|_0^3 = 18(\text{J})$

$x = 3m$ 处有：

$$A = \frac{1}{2}mv^2 - 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2A}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 18}{1}} = 6(\text{m/s})$$

空处填:18 J；6 m/s

**58.(华南师范大学 2002 年)**　如图,质量为 $m$ 的质点沿竖直平面上的一条曲线由 $A$ 点运动到 $B$ 点,$B$ 点的坐标为($x_B$,0) 曲线上各点的滑动摩擦系数都是 $\mu$,试求在上述过程中,摩察力对质点所作的功.




**本题考点:**摩擦力作功

**解:**设在 $AB$ 曲线上任一点 $P$ 的切向与水平的夹角为 $\theta$

则摩擦力 $\vec{f} = -\mu mg\cos\theta\vec{\tau}$　($\vec{\tau}$ 为轨迹的切线方向的单位矢量)

$$dA = \vec{f}\cdot d\vec{s} = -\mu mg\cos\theta\vec{\tau}\cdot d\vec{s} = -\mu mg\cos\theta \mid d\vec{r} \mid$$

其中 $\mid d\vec{r} \mid$ 指质点在 $P$ 点的运动 $d\vec{r}$ 位移的模

$$\mid d\vec{r} \mid \cos\theta = dx$$

$$dA = -\mu mgdx$$

$$A = -\int_0^{x_B} \mu mgdx = -\mu mgx_B$$

**59.(南京大学 2002 年)**　光滑斜坡与水平面成 $\alpha$ 角.大炮沿斜坡滑下距离 $L$ 再向水平方向发射一枚炮弹.发射后的瞬时炮身静止.设炮身质量为 $M$,炮弹质量为 $m$,求炮弹速度.

**本题考点:**能量、动量守恒

**解:**设炮弹速度为 $u$

火炮在光滑斜坡滑下时机械能守恒

$$\frac{1}{2}MV^2 - Mgl\sin\alpha = 0$$

$$V = \sqrt{2gL\sin\alpha}$$

$V$ 方向沿斜坡向下，在水平方向分量为 $V\cos\alpha$

火炮发射炮弹时，(发射方向为水平方向) 动量守恒

$$mu = MV\cos\alpha$$

$$u = \frac{M}{m}\cos\alpha\sqrt{2gL\sin\alpha}$$

**60.(南京大学 2002 年)** 一人站在以速度 $V$ 向前运动的小船的船尾，向船头方向抛出一质量为 $m$ 的球，测得球相对于船的速度 $V_r$. 若已知人和船的总质量 $M$. 求：(1) 抛球后船的速率为多大？(2) 作了多少功？

**本题考点：**相对运动，动量守恒

**解：**(1) 设 $V'$ 为抛球后船的速率

动量守恒

$$MV = (M - m)V' + m(V_r + V')$$

$$V' = \frac{MV - mV_r}{M}$$

(2) 由功能原理

$$A = \frac{1}{2}m(V_r + V')^2 + \frac{1}{2}MV'^2 - \frac{1}{2}MV^2 - \frac{1}{2}mv^2$$

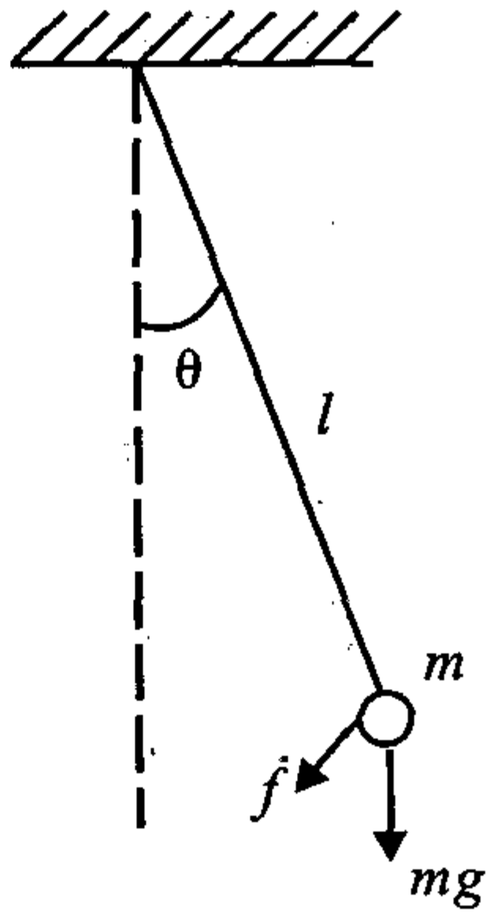
$$= \frac{1}{2}m\left[V + \frac{(M + m)}{M}V_r\right]^2 + \frac{(MV - mV_r)^2}{2M} - \frac{1}{2}MV^2 - \frac{1}{2}mV^2$$

近似 $M + m \sim M$

$$A = \frac{1}{2}m(V + V_r)^2 + \frac{1}{2}(MV - mV_r)^2/M - \frac{1}{2}MV^2 - \frac{1}{2}mV^2$$

$$= \frac{1}{2}mV_r^2 + \frac{m^2}{2M}V_r^2$$

**61.**(清华大学 1999 年)　一物体质量为 $m$,长为 $l$.开始时,$\theta$ 角为1弧度,然后该物体受到一个沿圆周的弧线方向的力 $f = mg$,当物体到达垂直位置时,力 $f$ 停止作用.求物体到达垂直位置所经历的时间?(对于 $\theta \leqslant 1$ 弧度,有 $\sin\theta \approx \theta$)




**本题考点:**圆周运动,牛顿第二定律

**解:**在切线方向有

$$F = f + G\sin\theta = -mg(1 + \sin\theta)$$

$$\leqslant -mg(1 + \theta)$$

$$ml\frac{d\omega}{dt} = -mg(1 + \theta)$$

$$\omega d\omega = -\frac{g}{l}(1 + \theta)\,d\theta$$

$$\int_0^{\omega}\omega d\omega = -\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{g}{l}(1 + \theta)\,d\theta$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}[-(\theta + 1)^2 + (\theta_0 + 1)^2]$$

$$\frac{d\theta}{[-(\theta + 1)^2 + (\theta_0 + 1)^2]^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{g}{l}}dt$$

$$\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{[-(\theta + 1)^2 + (\theta_0 + 1)^2]^{\frac{1}{2}}} = \int_0^t\sqrt{\frac{g}{l}}dt$$

$$\arcsin\frac{\theta + 1}{\theta_0 + 1}\Big|_{\theta_0}^{0} = \sqrt{\frac{g}{l}}t$$

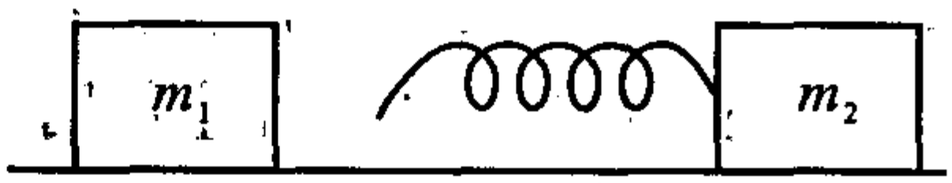
$$-\frac{1}{2} + 1 = \sqrt{\frac{g}{l}}t$$

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$$

**62.(复旦大学2001年)** 在光滑水平面上有两质量分别为 $m_1$ 和 $m_2(m_1 < m_2)$ 的物块,$m_2$ 连有一轻弹簧,第一次,$m_1$ 以动能 $E_0$ 与静止的 $m_2$ 相碰;第二次,$m_2$ 以动能 $E_0$ 与静止的 $m_1$ 相碰,两次碰撞中弹簧的最大缩量分别为 $l_1$ 和 $l_2$.

(1) 试比较 $l_1$ 和 $l_2$ 的大小;

(2) 若碰前两物均运动,且总动量为 $E_0$,则两物碰前的动能各为多大,才能使碰撞中弹簧的压缩量达到最大?




**本题考点:**动量守恒定律,机械能守恒定律

**解:**(1) $m_1$ 以动能 $E_0$ 与静止的 $m_2$ 相碰,由机械能守恒和动量守恒有

$$\left.\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2 &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2+\frac{1}{2}kl_1^2 \end{aligned}\right\}\Rightarrow l_1^2 = \frac{2m_2E_0}{(m_1+m_2)k}$$

$$m_1v_1 = m_1v + m_2v$$

同理,$m_2$ 以动能 $E_0$ 与静止的 $m_1$ 相碰,则有

$$l_2^2 = \frac{2m_1E_0}{(m_1+m_2)k}$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

$$m_1 < m_2 \qquad l_1 > l_2$$

(2) 若碰前两物体均运动,由动量守恒有

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = E_0 \qquad ①$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1+m_2)V \qquad ②$$

要使碰撞中弹簧的最大压缩量达最大,则须使上式中 $V=0$,则 $l$ 为最大,

由 ② 式有: $m_1v_1 = -m_2v_2$ ③

联立①、③,解得:

$$E_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}E_0$$

$$E_2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}E_0$$

**63.(北京市 1999 年)** 一船浮于静水中,船长 5m,质量为 m,一个质量也为 m 的人从船尾走到船头,不计水和空气的阻力,则此过程中船将后退_____m.

**本题考点:**相对运动,动量守恒定律

**解:**设人相对于船的速度为 $v$,船相对于水的速度为 $\vec{v}$,人相对水的速度为 $\vec{u} + \vec{v}$.

由动量守恒有:

$$m(\vec{u} + \vec{v}) + M\vec{v} = 0$$

$$(M + m)\vec{v} = -m\vec{u}$$

$$(M + m)\int_0^t \vec{v}\cdot dt = -m\int_0^t \vec{u}\cdot dt$$

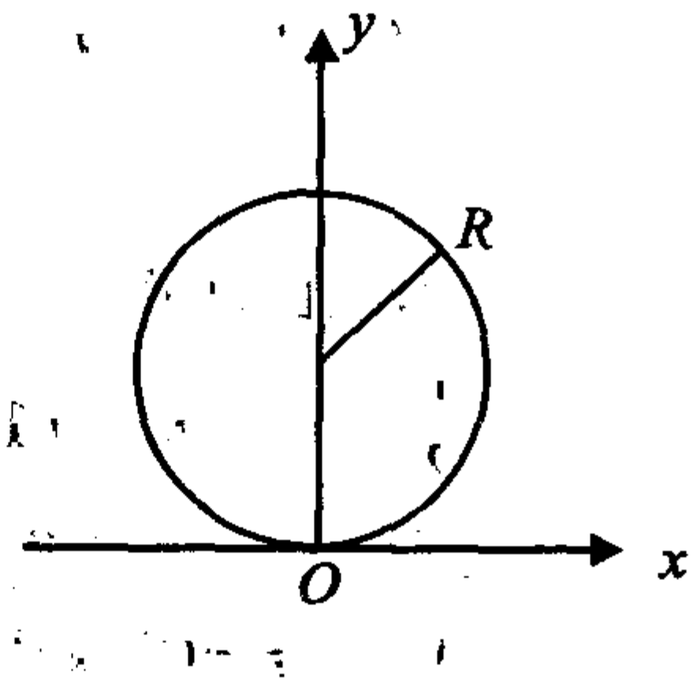
$$(M + m)L = -ml_{船长}$$

$$L = -\frac{m}{M + m}l_{船长} = -\frac{m}{m + m}\times 5 = -\frac{5}{2}(\mathrm{m})$$

故船将后退$\frac{5}{2}m$

空处填:$\frac{5}{2}$

**64.(北京市 1999 年)** 一质点在如图所示的坐标平面内作圆周运动,有一力 $\vec{F} = C(x\vec{i} + y\vec{j})$ 作用在质点上.在该质点从坐标原点运动到$(0,2R)$位置过程中,此力 $\vec{F}$ 对它作的功为_____.



本题考点:变力的功,路径积分

解:$A = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$= \int_{(0,0)}^{(0,2R)} c(x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot d(x\vec{i} + y\vec{j})$$

$$= \int_0^0 cxdx + \int_0^{2R} cydy = 2cR^2$$

空处填:$2cR^2$

**65.(复旦大学 1999 年)** 一轻质光滑圆环,半径为 $R$,用细线悬挂在支点上,环上串有质量都是 $m$ 的两个珠子.让两珠从环顶同时静止释放向两边下滑,问滑到何处(用 $\theta$ 表示)时环将上升?

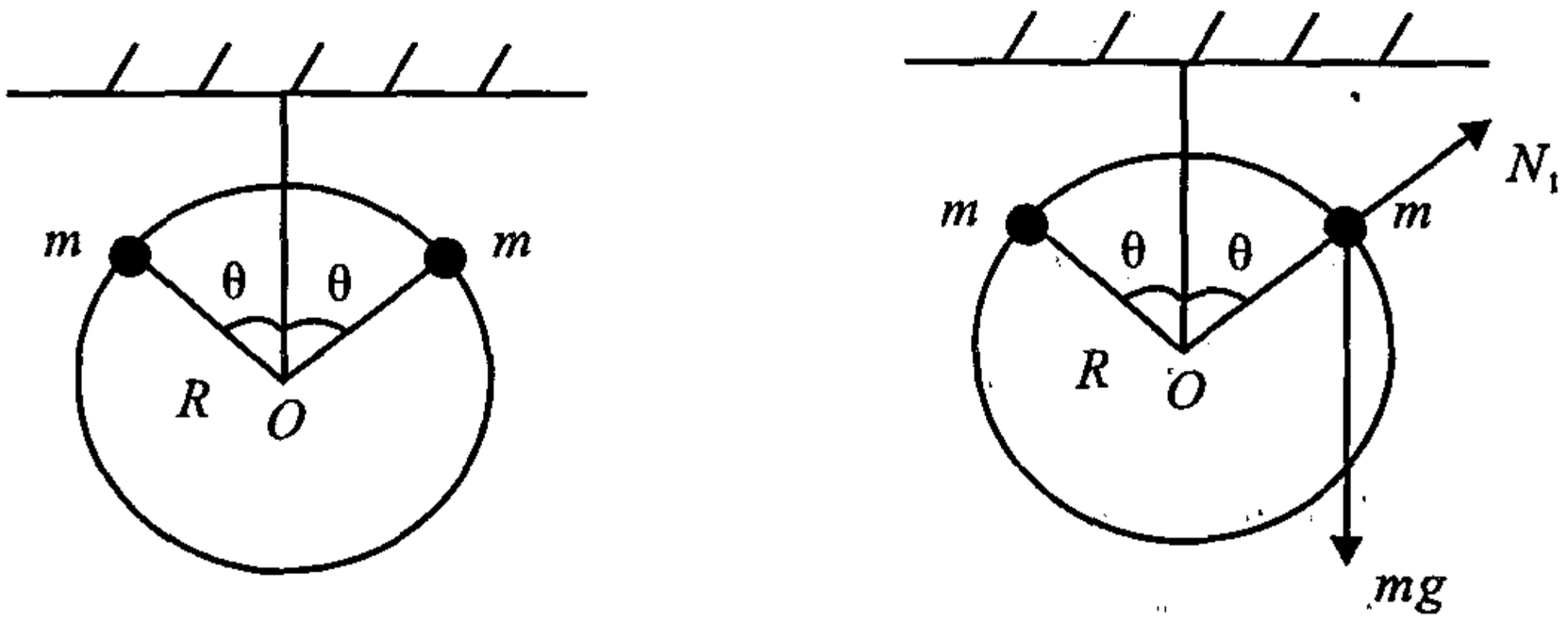



图 1

本题考点:牛顿定律,机械能守恒定律.

解:首先对一个小环进行受力分析,如图 1 所示.

若小环的运动速度为 $v$,则根据牛顿第二定律得:

$$mg\cos\theta - N_1 = m\frac{v^2}{R} \qquad N_1 = mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R} \quad ①$$

取环上 $O$ 点为重力势做零点,由机械能守恒定律可得

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1 - \cos\theta) \quad ②$$

联立①、②式得

$$N_1 = mg(3\cos\theta - 2) \quad ③$$

当 $3\cos\theta_0 - 2 = 0$ 时，$N_1 = 0$

$$\cos\theta_0 = \frac{2}{3}, (\theta_0 = 48°11') \quad ④$$

当 $\cos\theta < \frac{2}{3}$，即 $\theta > \theta_0$ 时，$N_1 < 0$，即 $N_1$ 指向 $O$ 点.

此时大环受一个小环的反作用力 $\vec{N}'_1 = -\vec{N}_1$ 沿大环半径背向 $O$ 点.

设大环质点为 $M$，所受重力为 $Mg$，绳子张力 $T$，如图 2 所示.

大环受两个环的反作用力为

$2N_1' = -2N_1$，

当 $T = 0$，且 $-2N_1\cos\theta = Mg$ 时，大环恰上升.

将 ③ 式代入上式得

$$-2mg(3\cos\theta - 2)\cos\theta = Mg$$

$$即 \cos^2\theta - \frac{2}{3}\cos\theta + \frac{M}{6m} = 0 \quad ⑤$$

解 ⑤ 式得

$$\cos\theta = \frac{\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{2}{3}\frac{M}{m}}}{2} \geqslant 0 \quad ⑥$$

⑥ 式有解的必要条件为

$$(\frac{4}{9} - \frac{2}{3}\frac{M}{m}) \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \frac{M}{m} \leqslant \frac{2}{3},$$

将 $M = \frac{2}{3}m$ 代入 ⑥ 式得

$$\cos\theta = \frac{1}{3}, \theta = 70.5°$$

即小环下滑到 $\theta = 70.5°$ 时，大环开始上升.

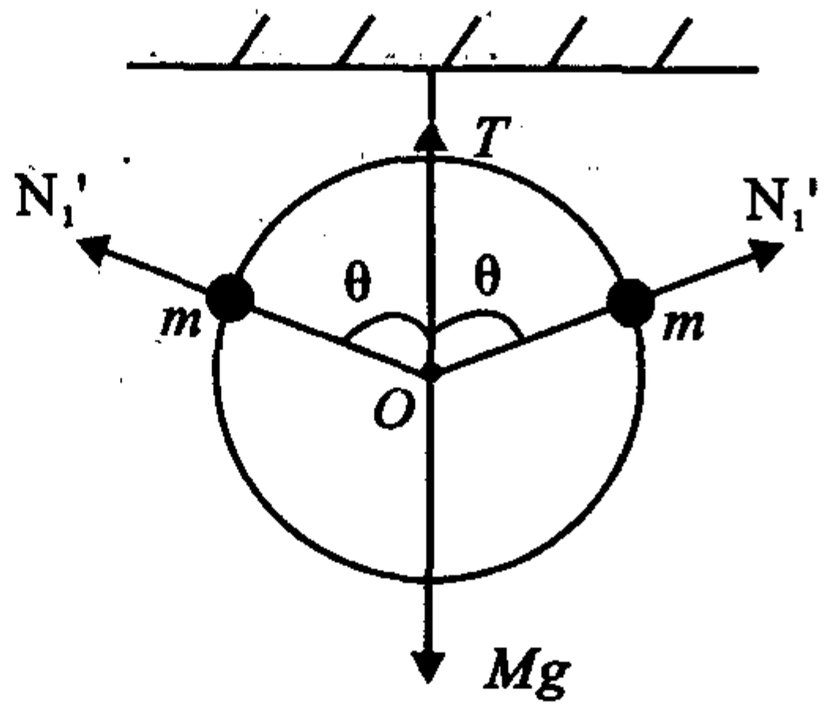
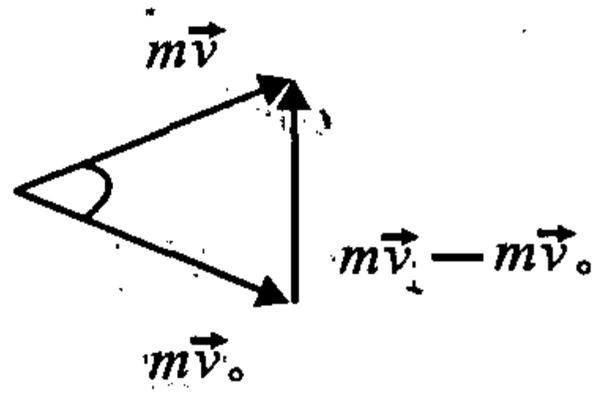



图 2

**66.**(北京市 1999 年)　已知物体的质量为 $m$,在受到一冲量作用后它的速度 $v$ 的数值不变,而方向改变 $\theta$ 角,则这个冲量的大小为:

A. $mv\cos\theta$　　B. $2mv\cos\dfrac{\theta}{2}$

C. $mv\sin\theta$　　D. $2mv\sin\dfrac{\theta}{2}$




**本题考点:**动量定理

**解:**由动量定理　$\vec{I}=\int\vec{F}\cdot dt=m\vec{v}-m\vec{v}_0$

由图冲量大小为　$2mv\sin\dfrac{\theta}{2}$

答案选 D

**67.**(北京理工大学 2002 年)　质量为 5.6g 的子弹 $A$,以 501m/s 的速率水平的射入一静止在水平面上的质量为 2kg 的木块 $B$ 内,$A$ 射入 $B$ 后,向前移动了 50cm 后而停止,求:

(1) $B$ 与水平面间的摩擦系数;

(2) 木块对子弹所作的功 $W_1$;

(3) 子弹对木块所作的功 $W_2$;

(4) $W_1$ 与 $W_2$ 的大小是否相等?为什么?

**本题考点:**动量守恒定律,动能定理

**解:**(1)取子弹 $m$ 和木块 $M$ 为系统,$A$ 入射前的速度为 $v$,$A$ 入射后与 $B$ 的共同速度为 $V'$,则

碰撞瞬间动量守恒:　$mv=(M+m)V'$

碰后过程有:$\dfrac{1}{2}(M+m)V'^2=\mu(M+m)g\cdot S$

$$\Rightarrow\mu=\frac{(\frac{m}{M+m})^2v^2}{2gs}\doteq 0.2$$

(2) 木块对子弹所做的功:

$$W_1 = \frac{1}{2}mV'^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m[(\frac{m}{m+M})^2v^2 - v^2]$$

$$\doteq -7.0 \times 10^2(\mathrm{J})$$

(3) 子弹对木块所做的功：

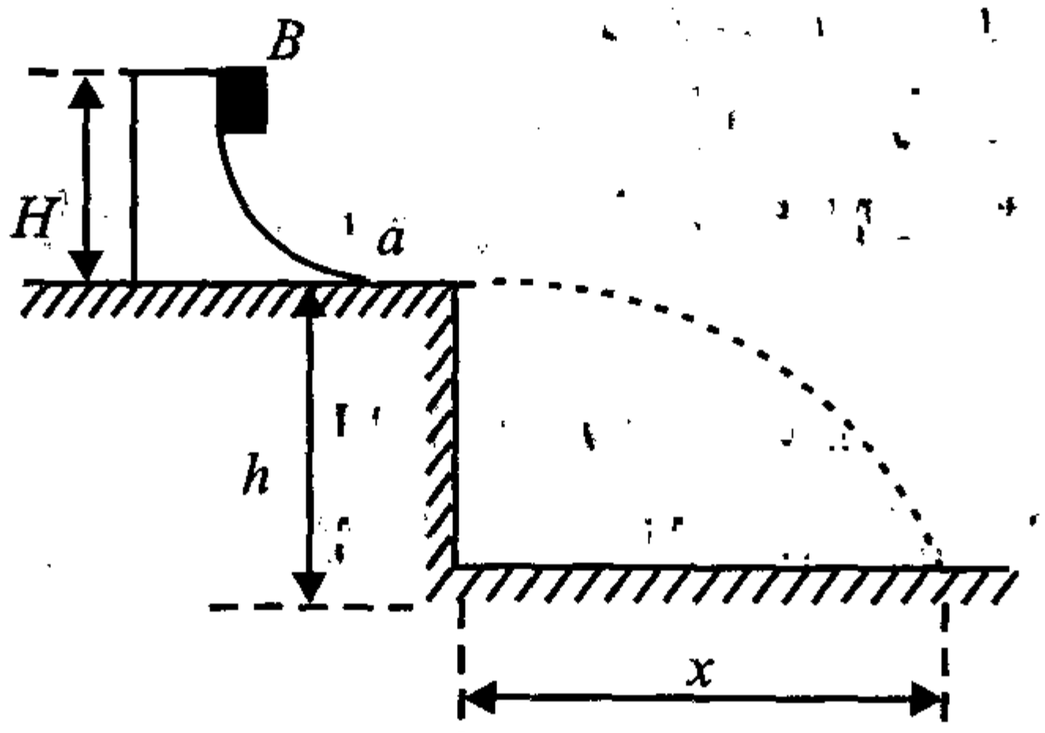
$$W_2 = \frac{1}{2}MV'^2 = \frac{1}{2}M(\frac{m}{M+m})^2v^2 = 2.0(\mathrm{J})$$

(4) $|W_1| \neq |W_2|$

**68.(北京师范大学 2002 年)** 如图所示，质量为 $M$ 的光滑曲面物体 $A$，置于高出地面 $h$ 的光滑平台上，物体 $A$ 的曲面的最下端 $a$ 点同平台面相切. 今有一质量 $\frac{1}{3}M$ 为的小滑块 $B$(视为质点)，自距平台高 $H$ 处沿曲面从静止开始滑下. 试求：

(1) 当小滑块 $B$ 刚滑到平台面时，小滑块 $B$ 和曲面物体 $A$ 的速度各为多少?

(2) 当小滑块 $B$ 落地时，落地点距平台边缘的水平距离 $x$(不计空气阻力)




**本题考点：**动量守恒定律，机械能守恒定律

**解：**(1) 设小滑块 $B$ 刚滑到平台面时，其速度为 $\vec{v}_B$，滑块 $A$ 的速度为 $\vec{v}_A$

$$\left.\begin{aligned} &\text{由动量守恒：} Mv_A = \frac{1}{3}Mv_B \\ &\text{由机械能守恒：} \frac{1}{3}MgH = \frac{1}{2}Mv_A^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}M\right)v_B^2 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow v_A = \frac{\sqrt{6gH}}{6} \quad \text{方向向左}$$

$$\Rightarrow v_B = \frac{\sqrt{6gH}}{2} \quad \text{方向向右}$$

(2) 设小滑块 $B$ 从平台面落地过程的时间为 $t$，则有

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}gt^2 \\ x &= v_B t \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = v_B\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{3Hh}$$

**69.（南京师范大学 1997 年）** 质量为 $M$ 的平板小车，放在光滑的水平面上，一质量为 $m$ 的物体以水平速度 $v_0$ 进入小车的表面，物体与车之间的摩擦系数为 $\mu$，设小车足够长，求物体相对小车的最大距离及损失的动能.

**本题考点：**动量守恒、动能定理

**解：**取 $M$ 与 $m$ 为研究对象，在水平方向上，$m$ 从 $V_0$ 开始到带动 $M$ 一起运动的过程，$M$ 与 $m$ 在水平方向受合外力为零，由动量守恒得：

$$mV_0 = (m + M)V \tag{1}$$

设 $m$ 开始运动到相对 $M$ 静止，在 $M$ 上移动了 $x$ 距离，由动能定理得：

$$\mu mgx = \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{1}{2}(M + m)V^2$$

$$x = \frac{MV_0^2}{2\mu g(m + M)}$$

损失的能量为 $\frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = -\frac{Mm(M + 2m)}{2(M + m)^2}V_0^2$

**70.（南京师范大学 1997 年）** 一球形容器竖直落入水中，刚

接触水面时其速度为 $V_0$，设此容器在水中所受的浮力与重力相等，水的阻力 $f = -bV$，求：

(1) 时间 $t$ 秒内阻力所作的功.

(2) 下降距离与 $V$ 的函数关系.

**本题考点：**牛顿定律的应用

**解：**设球形容器的半径为 $R$，质量为 $m$，选取竖直向下为 $x$ 正向，水平面上为坐标原点，则由于它受到重力、浮力、水的阻力作用，由牛顿第二定律有：

$$\begin{cases} mg - bv - f_1 = m\dfrac{dV}{dt} \\ mg - f_1 = 0 \end{cases}$$

联立解得：$V = V_0 e^{-\frac{b}{m}t}$

1) 阻力 $f = -bV$ 从 $0 \to t$ 时间内所做的功为

$$V = \int_0^t f dx = -\int_0^t bV^2 dt = -\frac{mV_0^2}{2}(1 - e^{\frac{-2bt}{m}})$$

2) 由 $\dfrac{dx}{dt} = V = V_0 e^{-bt}$，且 $t = 0$ 时，$x = 0$

积分得：$x(t) = \dfrac{V_0}{b}(1 - e^{-bt})$

**71.(南京师范大学 1999 年)**　低速迫击炮以发射角 45° 发射炮弹，其初速率 $v_0 = 90$ 米/秒，在与发射点同一水平面上落地，若不计空气阻力，试求：

(1) 炮弹达到最高点所需的时间；

(2) 炮弹落地时的速率；

(3) 炮弹在最高点和落地点其运动轨迹的曲率半径.

**本题考点：**曲线运动中的加速度、动量定理、法向加速度、法向加速度大小的计算

解:(1) $t = \dfrac{v_0\sin45°}{g} = \dfrac{10 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{9.8} = 0.72$ 秒

(2) 由动量定理得

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 - 2\vec{g}t = v_0(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}) - 2 \times 9.8 \times 0.72\vec{j}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{v}_0(\vec{i} + \vec{j}) - v_0\sqrt{2}\vec{j} = 5\sqrt{2}(\vec{i} - \vec{j})$$

(3) 在最高点处,切向加速度为零,法向加速度大小为 $g$.

在落地点处的曲率半径为 $R_2$,落地点的法向加速度大小为 $a_n = g\cos45° = \dfrac{v_0^2}{R_2}$,可得 $R_2 = 14.43$ 米.

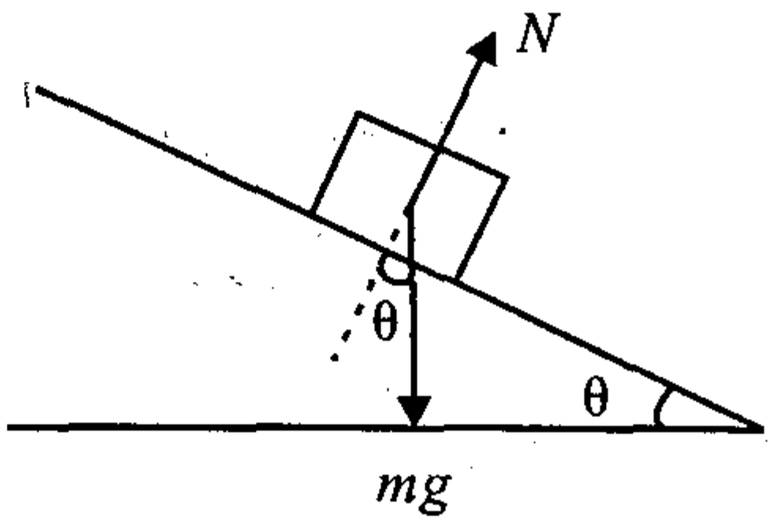
**72.(南京师范大学 1999 年)** 有一质量为 $m$ 的重物,静止地放在倾角为 $\theta$ 的斜面上,当 $\theta$ 增大到过超过某值 $\theta_0$ 时,重物开始向下滑行,试求:

(1) 重物与斜面间的静摩擦系数 $\mu_0$;

(2) 重物与斜面间的静摩擦系数 $\mu$;

(3) 滑动时重物的运动规律.

**本题考点:**牛顿第二定律的运用




**解:**(1) 当斜面倾角为 $\theta$ 时,$m$ 能静止于其上,由牛顿第二定律知

$$mg\cos\theta = N$$

$$mg\sin\theta - \mu N = ma_c$$

当 $\theta = \theta_0$ 时,$\mu_0 = \tan\theta_0$

(2) 当倾角为 $\theta$ 且 $m$ 能静止时,对 $m$ 受力分析必有

$$\begin{cases} mg\sin\theta - \mu N = 0 \\ mg\cos\theta - N = 0 \end{cases}$$

$$\mu = \mathrm{tg}\theta$$

(3) 当斜面倾角为 $\theta$ 时,重物滑动时的动力力学方程为

$mg\sin\theta - \mu_0 mg\cos\theta = ma_c$，$a_c(\sin\theta - \mu_0\cos\theta)g$，当 $\tan\theta > \mu_0 = \tan\theta_0$ 时，重物在斜面上以匀加速度 $a_c$ 向下运动. 运动的速度大小为 $V_c = a_c t = (\sin\theta - \mu_0\cos\theta)gt$. 当速度较大时，它受的阻力 $f$ 一般随物体运动速率的增大而增大，令 $f = -kV$，则

$$mg\sin\theta_0 - kV = m\frac{dV}{dt} \qquad (k \text{ 为比例系数})$$

得
$$V(t) = \frac{mg\sin\theta_0}{R}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

当 $t \to \infty$ 时，$V(\infty) \to 0$，即只要斜面是足够长，随着 $m$ 下滑速率增大，阻力力也增加，重力对其做的功，部分克服摩擦力做功，另一部分转化为其运动的动能，当重力功完全用来克服阻力做功时，物体最后停止.

**73.（南京师范大学 1999 年）** 设有一个水平放置的针筒，内径为 $2R$，针孔内径为 $2r$，当用力 $F$ 推活塞时，可使药水从针孔喷出，设药水密度为 $\rho$，求药水喷出的速率.

**本题考点：**伯努利原理、流体的连续性原理的应用

**解：**针筒的截面积为 $\pi R^2$，针的截面积为 $\pi r^2$，当用力 $F$ 推活塞时，针筒中轴线上的压强为 $\frac{F}{\pi R^2} = P_1$. 当针水平放置时，药水满足伯努利方程：

$$\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$$

由流体的连续性原理得　$v_1\pi R^2 = v_2\pi r^2$

若将 $P_2$ 以一个大气压强计算，则 $P_2 = P_0$，可得

$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho}\left(\frac{F}{\pi R^2} - \rho_0\right)\left(\frac{(R^4 - r^4)}{R^4}\right)}$$

**74.（同济大学 1999 年）** 地面垂直上抛一物，要使它不再落回地面上，其初速至少应多大？（忽略空气阻力）

**本题考点：**机械能守恒、万有引力做功

解:依题意,设此物体的初速度大小为 $V_0$,地球的半径为 $R$,重力加速度为 $g$,物体的质量为 $m$,要使 $m$ 不再返回,则必须使其脱离地球引力场作用.地球对 $m$ 的引力是保守力,取地球与 $m$ 为一系统时,选取脱离点处的势能为零势能面,$m$ 在地球表面处的机械能为

$$E_1 = \frac{1}{2}mV_0^2 - G\frac{M_e m}{R_e}$$

在脱离点处的机械能为零,由机械能守恒定律有:

$$\frac{1}{2}mV_0^2 - G\frac{M_e m}{R_e} = 0$$

可得 $$V_0 = \sqrt{2gR_e} = 11.2 \times 10^3(\text{m/s})$$

**75.(南京师范大学2000年)** 在水管的某一点 $A$ 处水的流速为1米/秒,压强为 $3 \times 10^5$ 帕,如果沿水管到另一点 $B$ 处,$B$ 点比 $A$ 点低20米,$B$ 处的水管横截面积为 $A$ 处的 $\frac{1}{2}$,求 $B$ 点处的压强.

**本题考点:**流体连续性原理、伯努利原理的运用

**解:**由伯努利原理有

$$\frac{1}{2}\rho V_A^2 + P_A + \rho g h_A = \frac{1}{2}\rho V_B^2 + P_B + \rho g h_B$$

$$h_A - h_B = 20(\text{m})$$

$$P_A = 3 \times 10^5 \text{ 帕}, V_A = 1 \text{ 米/秒}$$

又由流体的连续性原理有

$$V_A S_A = V_B S_B = V_B \frac{S_A}{2}$$

有

$$P_B = P_A + \rho g(h_A - h_B) + \frac{1}{2}\rho(V_A^2 - V_B^2)$$

$$= 3 \times 10^5 + 10^3 \times 9.8 \times 20 + \frac{1}{2} \times 10^3 \times [1^2 - 2^2]$$

$$= 4.95 \times 10^5(\text{帕})$$

## Ⅲ. 刚体

**76.**(北京大学 2000 年)　半径为 $R$,质量为 $M$ 的匀质圆球在倾角为 $\theta$ 的斜角上自静止开始无滑动下滚,已知圆球对过其球心的转轴的转动惯量为 $\frac{2}{5}MR^2$.求质心沿斜面运动的距离为 $x$ 时,

1) 圆球的角速度和质心的速度

2) 在质心系中,摩擦力对圆球所作的功.

**本题考点:**刚体的转动

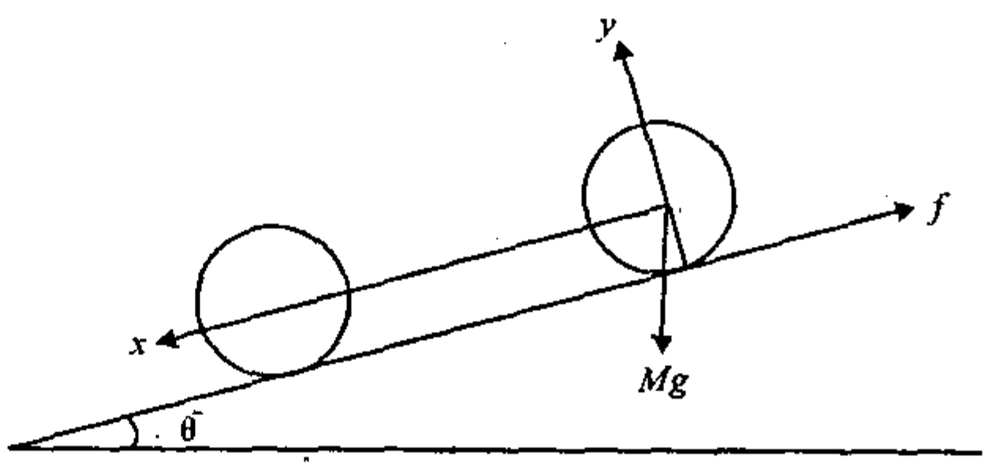
**解:**设球与斜面摩擦力为 $f$

$$\begin{cases} Mg\sin\theta - f = Ma_c \\ Rf = I_d\beta \\ a_c = R\beta \end{cases}$$

$$a_c = \frac{5}{7}g\sin\theta$$

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{5}{7}g\sin\theta$$

$$v_c dv_c = \frac{5}{7}g\sin\theta dx$$




$$(1)\ v_c = \sqrt{\frac{10}{7}gx\sin\theta}$$

(2) 在质心系中,刚体只有转动

$$A_f = \frac{1}{2}I_c\omega^2 - Mgx\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}R^2M\cdot\left(\frac{\sqrt{\frac{10}{7}gx\sin\theta}}{R}\right)^2 - Mgx\sin\theta$$

$$= \frac{1}{5}R^2M\cdot\frac{\frac{10}{7}gx\sin\theta}{R^2} - Mgx\sin\theta$$

$$= -\frac{5}{7}Mgx\sin\theta$$

**77.(北京大学 1999 年)** 质量为 $m$,半径为 $R$ 的均质圆盘静止于粗糙水平面上,在离地面 $h$ 处突然施以一水平打击,冲量为 $F\Delta t$,如图,求:

1) 打击后瞬间,圆盘质心的速度,圆盘的角速度以及圆盘接地点的速度

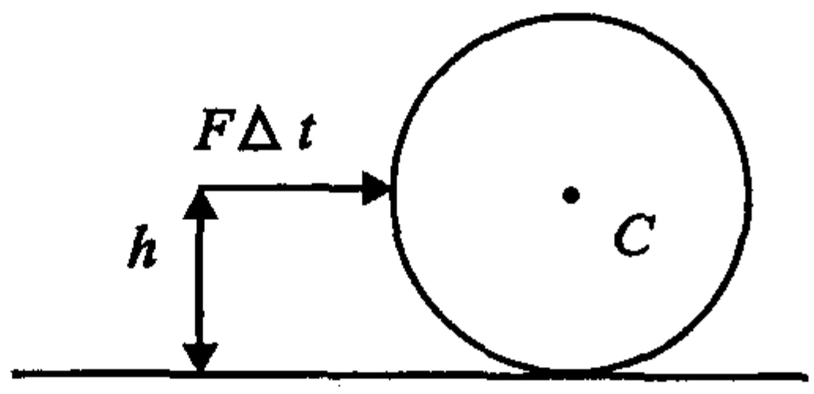
2) $h$ 多大时,打击后圆盘作无滑动滚动?

**本题考点:**动量定理与角动量定理

**解:**对接地点的有

$$Fh\Delta t = (MR^2 + \frac{1}{2}R^2M)\omega$$

$$\omega = \frac{F\Delta th}{\frac{3}{2}MR^2} = \frac{2Fh\Delta t}{3MR^2}$$




对于质心有

$$F(h - R)\Delta t - fR\Delta t = \frac{1}{2}R^2M\omega$$

$$F\Delta t - f\Delta t = Mv_{c平}$$

$$f\Delta t = F\Delta t(\frac{2h}{3R} - 1) \qquad v_{c平} = \frac{F\Delta t(1 - \frac{h}{3R})}{M}$$

滑动速度

$$v_{c平} - v_{c转} = \frac{F\Delta t}{M}(1 - \frac{h}{3R} - \frac{2h}{3R}) = \frac{F\Delta t}{M}(1 - \frac{h}{R})$$

无滑条件 $H \geqslant R$

因此 ① 质心的速度、圆盘的角速度及接地点速度为

$$v_c = \frac{F\Delta t}{M}(1 - \frac{h}{3R})$$

$$\omega = \frac{2F\Delta th}{3MR^2}$$

接地点的速度 $v = v_c - R\omega = \frac{F\Delta t}{M}(1 - \frac{h}{R})$

(2) 无滑条件 $h \geqslant R$

**78.(清华大学 2001 年)**　两个质量和半径都相同的均质滑轮 $A$、$B$ 分别在质量为 $m$ 的重块和力 $F(F = mg)$ 的作用下绕各自的中心轴转动.假定绳不伸长,轴处无摩擦,则 $A$、$B$ 两轮的角加速度 $\alpha_A$ 和 $\alpha_B$ 之间的关系为:

A. $\alpha_A = \alpha_B$　B. $\alpha_A > \alpha_B$　C. $\alpha_A < \alpha_B$　D. 条件不够,无法判

**本题考点:**牛顿第二定律,转动定律,角量与线量的关系.

**解:**对 $A$ 来说,由牛顿第二定律,转动定律及切向加速度与角加速度的关系,有

$$mg - T = ma \quad ①$$

$$TR = I\alpha_A \quad ②$$

$$a = R\alpha_A \quad ③$$

其中,$T$ 为绳中张力,$R$ 为滑轮半径,$I$ 为滑轮的转动惯量,$a$ 为重块的加速度,$\alpha_A$ 为滑轮的角加速度

解方程 ①—③:有 $\alpha_A = \dfrac{mgR}{I + mR^2}$

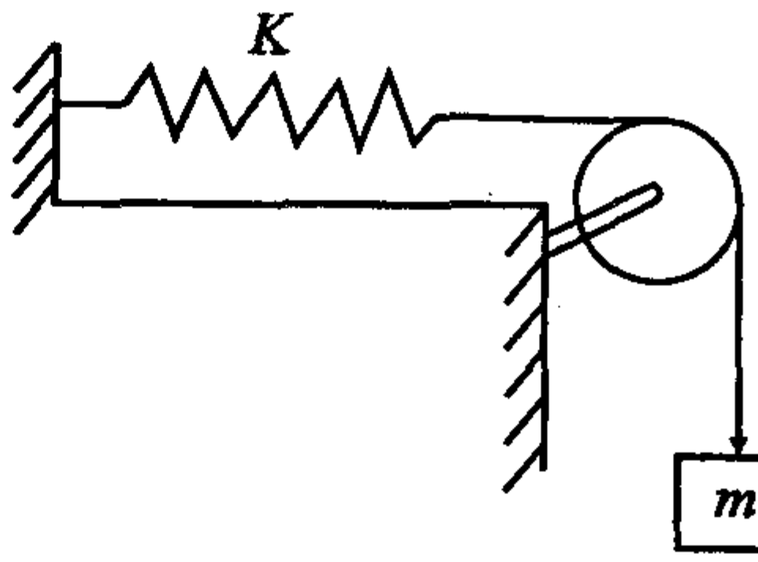
对 $B$ 来说,由转动定律,有 $mgR = I\alpha_B$,

则 $\alpha_B = \dfrac{mgR}{I}$

显然 $\alpha_B > \alpha_A$

答案选 B

**79.(中国科学院 2001 年)** 如图所示的装置中,轻弹簧一端固定,另一端通过跨过桌边定滑轮的细绳与物块相连.已知弹簧的倔强系数为 $k$,滑轮的质量为 $M$,半径为 $R$,物块的质量为 $m$.




(1) 求系统静止时弹簧的伸长量和绳的张力;

(2) 现将物块托起一小距离再突然放手,人物块下落而整个

系统进入振动状态.试求物块的振动周期.(设绳子长度一定,绳子与滑轮间不打滑,滑轮轴承处无摩擦.)

**本题考点:**牛顿第二定律、转动定律的应用、简谐振动

**解:**(1) 用隔离法,因为系统静止:$mg - T_1 = 0$,$T_1 = mg$;

$T'_1R - T_2R = 0 \Rightarrow T'_1 = T_2$,

$T'_2 = kx_0, T'_1 = T_1, T'_2 = T_2$

$$x_0 = \frac{T'_2}{k} = \frac{T_2}{k} = \frac{T_1}{k} = \frac{mg}{k}, T_2 = T_1 = kx_0 = mg$$

(2) 设物体 $m$ 在 $x$ 点处

物块: $mg - T_1 = ma$ ①

滑轮: $T'_1R - T_2R = I\beta$ ②

弹簧: $T'_2 - R(x_0 + x) = 0$ ③

$$T'_1 = T_1, T'_2 = T_2, \beta = \frac{a}{R}, kx_0 = mg$$

解得: $$a = -\frac{R}{m + \frac{I}{R^2}}x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R}{m + \frac{I}{R^2}}x = 0$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{I}{R^2}}{R}} = 2\pi\sqrt{\frac{2m + M}{2R}}$$

**80.(南京师范大学 1997 年)** 一转动惯量为 $I$ 的圆盘绕一固定轴转动,起初角速度为 $\omega_0$.设它所受的阻力矩与转动角速度成正比,即 $M = -k\omega$($k$ 为正常数).若它的角速度从 $\omega_0$ 变为 $\omega_0/2$,则所需时间 $t$ 等于多少?

**本题考点:**转动定律的应用

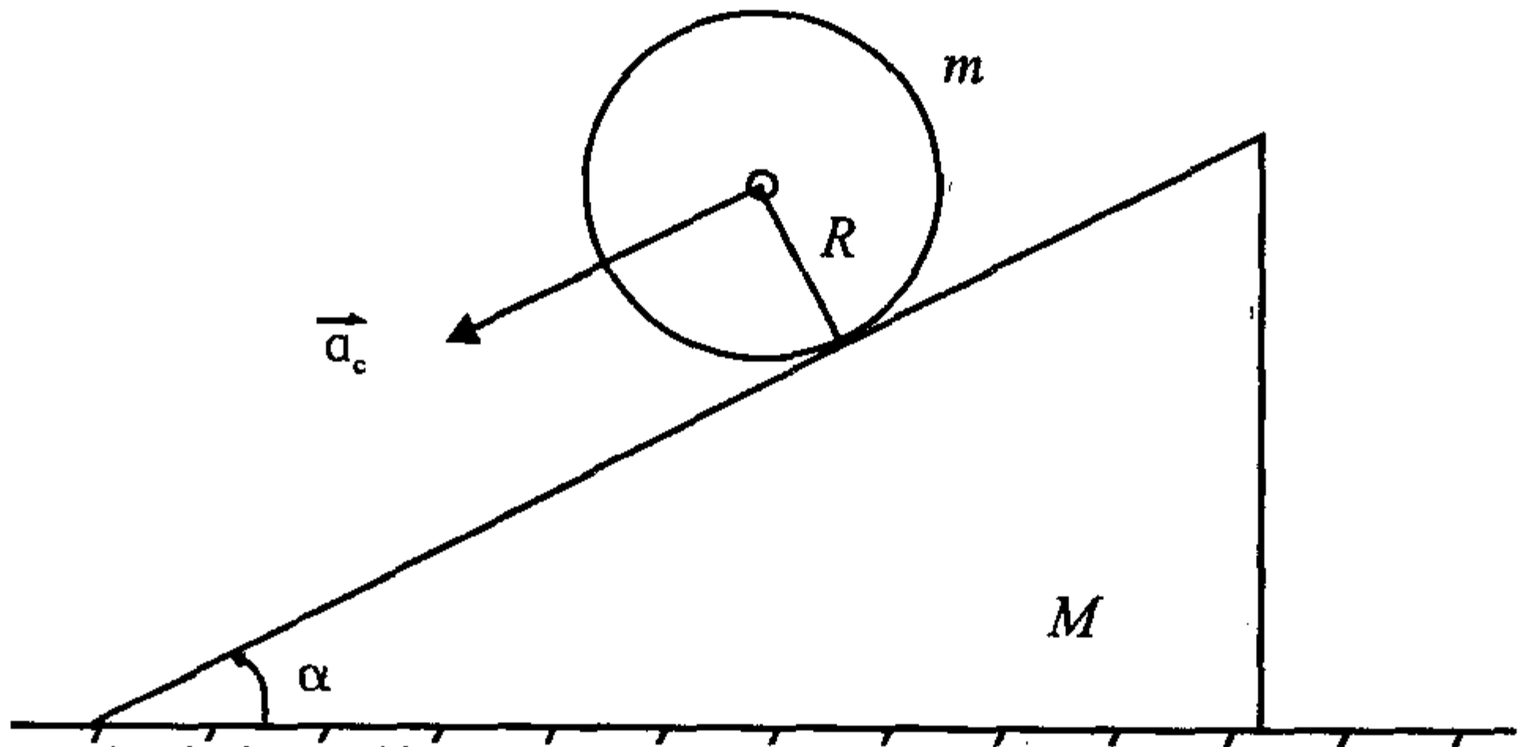
**解:**由转动定律有: $M = -k\omega = I\frac{d\omega}{dt}$( $\omega$ 为角速度大小)

两边积分得

$$\ln\frac{\omega}{\omega_0} = -\frac{k}{I}t \Rightarrow t = \frac{I}{R}\ln 2$$

**81.**（南京师范大学 1997 年）　如图所示，斜面的质量为 $M$，倾角为 $\alpha$，有一半径为 $R$，质量为 $m$ 的均质圆柱体，顺斜面向下作无滑滚动，斜面在地面上是静止的. 求：(1) 圆柱体质的加速度，斜面作用于圆柱体的摩擦力. (2) 若圆柱体自静止开始滚下，质心下落高度 $h$ 时，求圆柱体转动动能与平动动能之比. (3) 求地面给斜面的摩擦力，斜面与地面的摩擦系数应等于多少？

**本题考点：**摩擦力与摩擦系数、牛顿定律与转动定律在刚体运动中的应用




**解：**(1) 当斜面静止时，圆柱体质心的平动加速度大小为 $a_c$，

对质心有：

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - N = ma_c \\ fR = \frac{1}{2}mR^2\beta = \frac{1}{2}mRa_c \\ a_c = \frac{2}{3}g\sin\alpha \end{cases}$$

联立求解可得：静摩擦力 $f = \frac{m}{3}g\sin\alpha$

(2) 转动时加速度 $\beta$ 大小为 $\beta = \frac{a_c}{R} = \frac{2}{3R}g\sin\alpha$，质心下落

高度为 $h$,斜面静止时有,

$$\frac{E_{转}}{E_{平}} = \frac{\frac{1}{2}J\omega_O^2}{\frac{1}{2}mV_c^2} = \frac{J}{mR^2} = \frac{1}{2}$$

(3)地面给斜面的摩擦力大小为 $f_{地} = mg\sin\alpha\cos\alpha - f\cos\alpha$

$= \frac{2}{3}mg\sin\alpha\cos\alpha$. 静摩擦系数最少应为

$$\mu = \frac{2m\sin\alpha\cos\alpha}{3M + mg\sin^2\alpha + 3m\cos\alpha\sin\alpha}$$

**82.(华中科技大学 2002 年)** 一飞轮直径为 0.30 米,质量为 5.0 千克,边缘绕有绳子,用恒力 $F$ 拉绳子的一端,使飞轮由静止匀加速地转动起来,已知拉动 0.50 秒时转速达到 10 转 / 秒,飞轮为实心圆柱体,求:

(1) 拉力 $F$ 的大小和最初 0.5 秒内拉力所做的功;

(2) 拉动 10 秒时飞轮的角速度、角动量及飞轮边缘上的一点的速度.

**本题考点:**转动定律、动能定理

**解:**(1) 设飞轮的角加速度大小为 $\beta$,将飞轮视为均质圆盘,其转动惯量 $J = \frac{1}{2}mR^2$,其角加速度 $\beta$ 大小为 $\frac{\omega}{t} = \frac{2\pi n}{t}$,由转动定律 $FR = J\beta$ 得

$$F = \frac{1}{2}mR \cdot \frac{\omega}{t} = \frac{1}{2} \times 5 \times 0.15 \times \frac{2\pi \times 1}{0.5} = 15\pi(N)$$

由动能定理知,拉力 $F$ 做功的大小为飞轮动能的增量即:

$$A = \frac{1}{2}J\omega^2 - 0 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 5 \times (0.15)^2 \times (2\pi)^2 = 110.9(\mathrm{J})$$

(2) 角加速度 $\beta = \frac{2\pi \times 10}{0.5} = 40\pi(rad/s^2)$,由 $\omega_t - \omega_0 = \beta t$ 得拉动 10 秒时飞轮的速度大小为

$$\omega_t = \omega_0 + \beta t = \beta t = 40\pi \times 10 = 400\pi(rad/s)$$

**83.(华中科技大学 2003 年)**　半径 $r$、质量 $m$ 都相同的圆柱体、圆筒、实心球沿同一斜面从同样的高度 $h$ 以静止状态开始纯滚动地滚下斜面,用计算作依据说明它们到达斜面底部的先后次序.

**本题考点:**牛顿第二定律和转动定律的应用、运动学

**解:**方法一:质心法

设质量为 $m$,半径为 $r$ 的圆柱体、圆筒、实心球的转动惯量分别为 $J_1$,$J_2$,和 $J_3$,且它们沿同一斜面作纯滚动时其质心的加速度大小(沿斜面)为 $a_{c1}$、$a_{c2}$、$a_{c3}$,其静摩擦力都为 $N$,由牛顿第二定律和转动定律有:

$$mg\sin\theta - N = ma_c \tag{1}$$

$$Nr = J\beta \tag{2}$$

$$a_c = r\beta \tag{3}$$

由(2)(3)可知,当 $Nr$ 都相同时,$J$ 大的物体其 $\beta$ 和 $a_c$ 小,实心圆柱体的转动惯量 $J_1 = \frac{1}{2}mr^2$,圆筒的转动惯量 $J_2 = mr^2$,实心球的转动惯量 $J_3 = \frac{2}{5}mr^2$.可见,$J_3 < J_1 < J_2$.再由运动学可知,$S = \frac{1}{2}a_ct^2$,当 $S$ 一定时,$a_c$ 小的物体 $t$ 就越大,故其所需时间依次为

$t_{球} < t_{圆柱体} < t_{圆筒}$

方法二:瞬心法

参见下题

**84.(华中科技大学 2001 年)**　请证明:(1)半径和质量都相同的圆柱体、圆筒、实心球沿同一斜面从同一高度从静止状态开始纯滚动地滚下时,它们到达底部的次序是:实心球最先,圆柱体次之,圆筒最后.(2)不同质量、不同半径的均匀实圆柱体在斜面上滚下时,质心具有同样的线加速度.

**本题考点:**牛顿定律、转动惯量、运动学、转动定律

**解:**(1)方法一:质心法

参见上题

方法二:瞬心法

各刚体与斜面的接触点是瞬时转轴

$$M = mg\sin\theta \cdot r = J\beta$$

角加速度 $\beta \propto \frac{1}{J}$,质心加速度 $a_c = r\beta \propto \frac{1}{J}$

因 $L = \frac{1}{2}a_c t^2$, $t = \sqrt{\frac{2L}{a_c}} \propto \sqrt{J}$

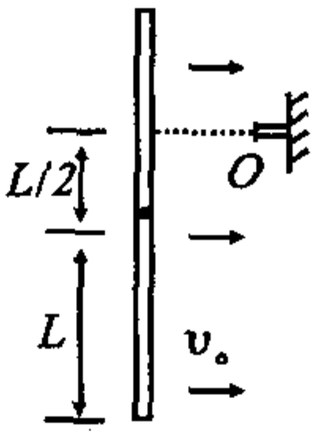
又实心圆柱体的转动惯量 $J_1 = \frac{1}{2}mr^2$,圆筒的转动惯量 $J_2 = mr^2$,实心球的转动惯量 $J_3 = \frac{2}{5}mr^2$. 可见,$J_3 < J_1 < J_2$

故其所需时间依次为 $t_{球} < t_{圆柱体} < t_{圆筒}$

(2) $a_c$ 越大,其达到斜面底部的时间越小,且 $a_c$ 与 $m$ 及 $r$ 无关.

故质心具有同样的线加速度.

**85.(北方交大 2002 年)** 一匀质细棒长为 $2L$,质量为 $m$,以与杆长方向垂直的速率 $v_0$ 在光滑的水平面上平动时与前方一固定的光滑支点 $O$ 完全非弹性碰撞,碰撞点位于距杆中心上方 $\frac{L}{2}$ 处,如图所示.求:杆在碰撞后瞬间绕 $O$ 点转动的角速度 $\omega$.




**本题考点:**角动量守恒、转动惯量

**解:**碰撞前杆对 $O$ 点的角动量为 $m\frac{L}{2}V_0$,碰撞后杆对 $O$ 点的角动量为 $J\omega$

$$J = \frac{1}{12}(2L)^2 m + m(\frac{L}{2})^2 = \frac{7}{12}mL^2$$

杆在碰撞前后所受合外力矩为零,由角动量守恒定律得

$$m\frac{L}{2}V_0 = \frac{7}{12}mL^2\omega$$

$$\omega = \frac{6}{7}\frac{V_0}{L}(rad/s)$$

**86.**(武汉理工大学 2003 年)　匀质细杆长为 $l$,质量为 $m$,一端悬于固定轴上,转动惯量为$\frac{1}{3}ml^2$,如将此杆从水平位置释放,则杆通过铅直位置时的角速度为_____.

**本题考点:**刚体定轴转动的机械能守恒定律.

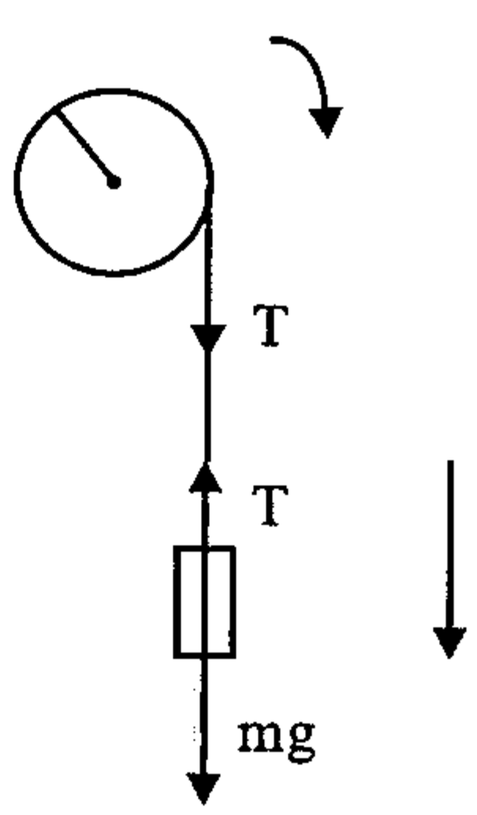
**解:**由机械能量守恒定律,有:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}ml^2 \times \omega^2 - mg\frac{l}{2} = 0$$

则 $\omega^2 = \frac{3g}{l}$,所以 $\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$

空处填$\sqrt{\frac{3g}{l}}$.

**87.**(武汉理工大学 2003 年)　一轻绳绕在转动惯量为 $I$,半径为 $R$ 的定滑轮上,在绳的一端挂一质量为 $m$ 的重物.如果阻力忽略不计,求滑轮的角加速度.




**本题考点:**牛顿第二定律,刚体定轴转动时的转动定律,角量与线量的关系.

**解:**受力分析如图

对重物,由有 $\vec{F} = m\vec{a}$ 有

$mg - T = ma$……①

对滑轮,由 $M = I\beta$,有

$TR = I\beta$……②

又 $a = R\beta$……③

解方程 ① ~ ③,有 $\beta = \frac{mgR}{I + mR^2}$.

**88.**(北京理工大学2001 年)　转动着的飞轮的转动惯量为 $J$,

在 $t = 0$ 时角速度为 $\omega_0$ 此后飞轮经历制动过程.阻力矩 $M$ 的大小与角速度 $\omega$ 的平方成正比,比例系数为 $k$($k$ 为大于 0 的常数).当 $\omega = \frac{1}{3}\omega_0$ 时,飞轮的角加速度 $\beta =$ _____ .从开始制动到 $\omega = \frac{1}{3}\omega_0$ 所经过的时间 $t =$ _____.

**本题考点:**转动定理

**解:** $M = -k\omega^2 = J\beta$

当 $\omega = \frac{1}{3}\omega_0$ 时

$$\beta = -\frac{k\omega_0^2}{9J}$$

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{k\omega^2}{J}$$

$$-\frac{d\omega}{\omega^2} = \frac{k}{J}dt$$

$$\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_0} = \frac{k}{J}t$$

$$\omega = \frac{1}{3}\omega_0 \quad t = \frac{2J}{k\omega_0}$$

空格分别填 $\beta = -\frac{R\omega^2}{J}$, $t = \frac{2J}{R\omega_0}$

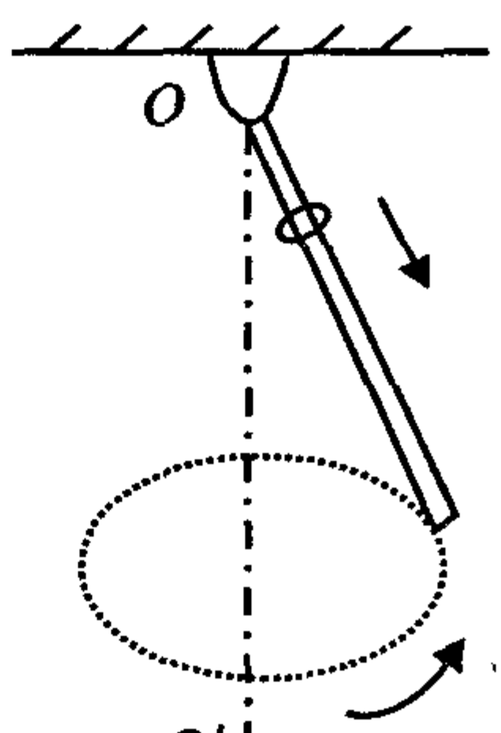
**89.(北京市 1999 年)** 如图所示,一光滑细杆上端由光滑绞链固定,杆可绕其上端作与竖直线 $oo'$ 成任意角度的锥面运动.有一小环套在杆的靠近上端处,开始使杆沿一锥面运动,而后小环由静止开始沿杆下滑,在小环下滑过程中,小环、杆和地球系统的机械能以及小环加杆对轴 $oo'$ 的角动量这两个量中:

A. 机械能、角动量都守恒

B. 机械能守恒、角动量不守恒

C. 机械能不守恒、角动量守恒

D. 机械能、角动量都不守恒



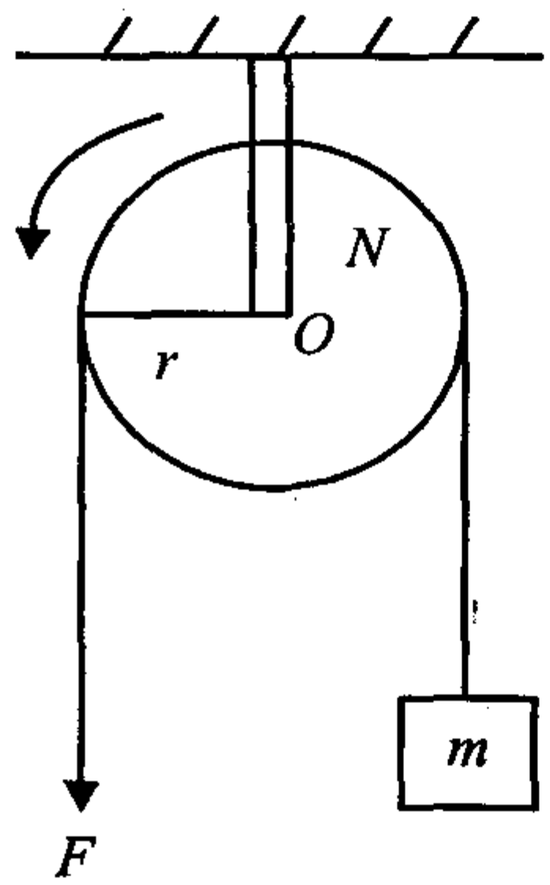

**本题考点**：机械能守恒

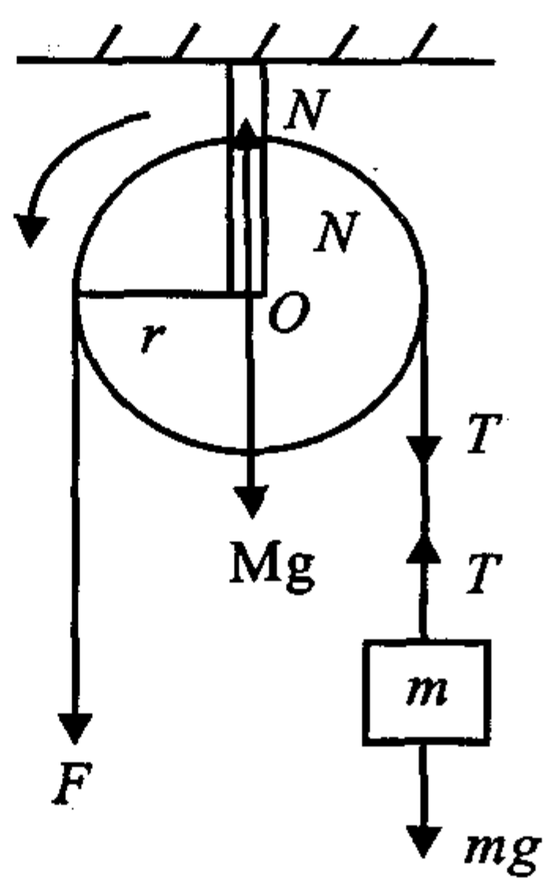
**解**：因系统运动过程中只有重力做功，故机械能守恒，但力矩不为零，故角动量不守恒.

答案选 B

**90.（复旦大学 1999 年）** 轻绳跨过一个质量为 $M$ 的均质圆盘状定滑轮，其一端悬挂一质量为 $m$ 的物体，另一端施加一竖直向下的拉力 $F$，使定滑轮按逆时针方向转动，如图所示，滑轮半径为 $r$. 求物体上升加速度 $a$ 和物体与滑轮间绳子的张力 $T$.

**本题考点**：牛顿定律，刚体转动定律.




**解**：受力分析如右上图所示.

对 $m$ 根据牛顿第二定律有

$$T - mg = ma \qquad ①$$

对 $M$ 根据刚体转动定律有

$$Fr - Tr = I\beta \qquad ②$$

$$I = \frac{1}{2}Mr^2$$

又

$$\beta = \frac{a}{r} \qquad ③$$

联立 ①—③ 得

$$a = \frac{F - mg}{m + \frac{M}{2}}$$

$$T = m(g + a) = \frac{2F + Mg}{2m + M}$$

**91.(北京理工大学 2001 年)** 质量为 $M$ 的匀质圆盘,可绕通过盘中心垂直于盘的固定光滑轴转动,绕过盘的边缘挂有质量为 $m$,长为 $l$ 的匀质柔软绳索(如图),设绳与圆盘无相对滑动,试求当圆盘两侧绳长之差为 $S$ 时,绳的加速度的大小.

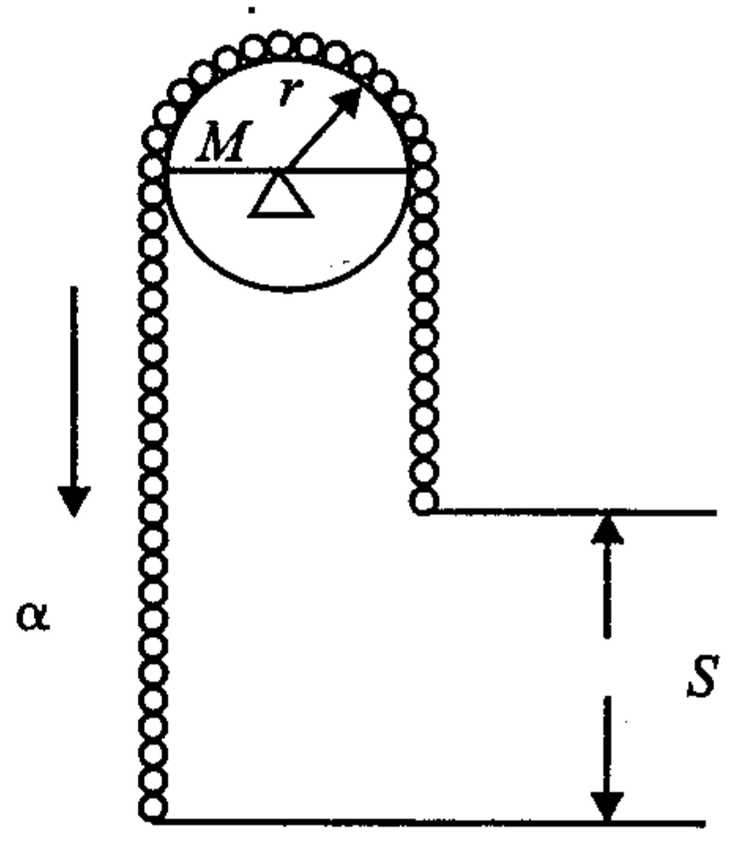
**本题考点:**刚体的转动定理

**解:**线密度 $\lambda = \frac{m}{l}$

$$M = \lambda rgS = (\frac{1}{2}Mr^2 + mr^2)\beta$$

$$\beta = \frac{\lambda gS}{\frac{1}{2}Mr + mr}$$

$$a = \beta r = \frac{2S\lambda g}{M + 2m} = \frac{2mSg}{l(M + 2m)}$$

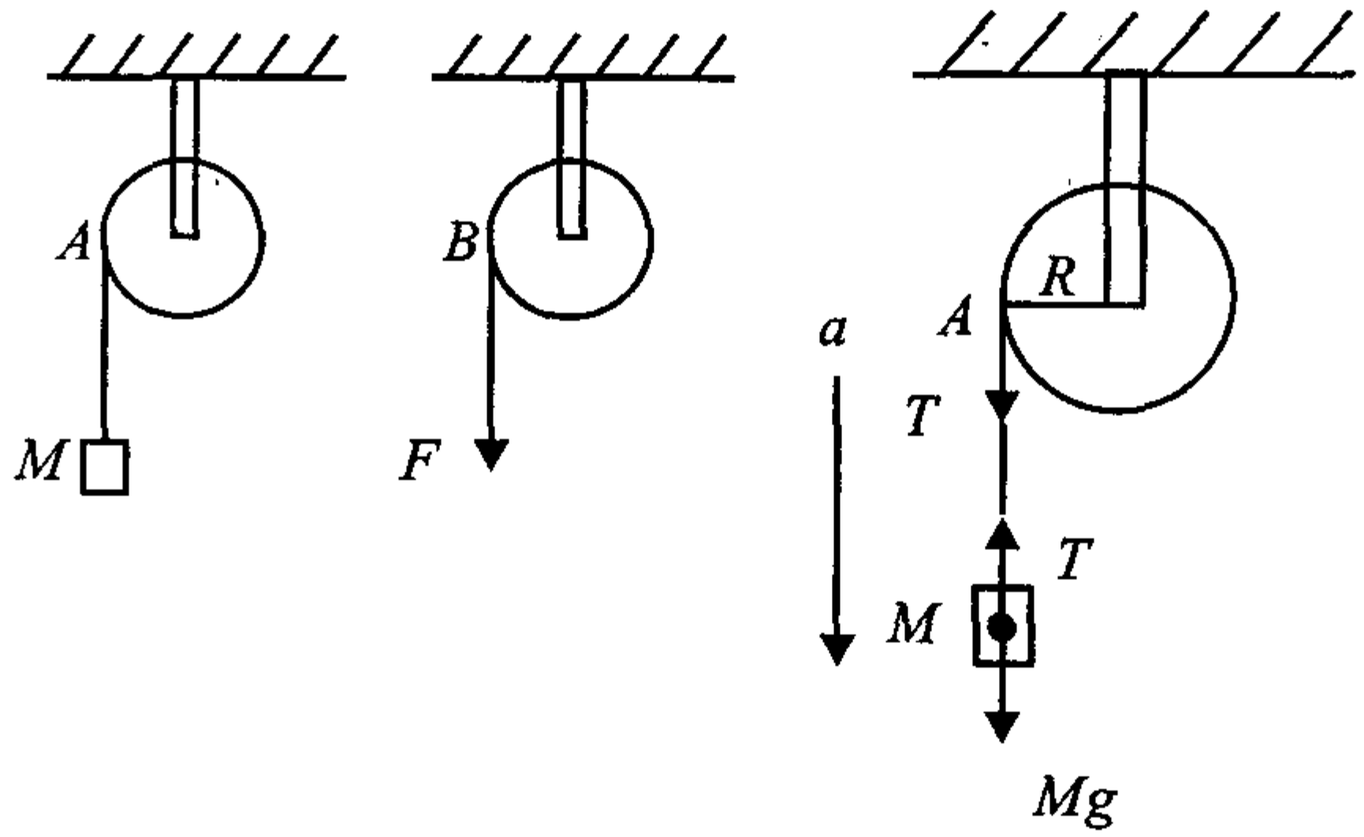



**92.(北京理工大学 2002 年)** 如图所示,$A$、$B$ 为两个相同的绕着轻绳的定滑轮.$A$ 滑轮挂一质量为 $M$ 的物体,$B$ 滑轮受拉力 $F$,而且 $F = Mg$.设 $A$、$B$ 两滑轮的角加速度分别为 $\beta_A$ 和 $\beta_B$,不计滑轮的摩擦,则有

A. $\beta_A = \beta_B$　　B. $\beta_A > \beta_B$

C. $\beta_A < \beta_B$　　D. 开始时 $\beta_A = \beta_B$,以后 $\beta_A < \beta_B$

**本题考点**：刚体的转动定律，牛顿定律




**解**：根据牛顿第二定律

$$Mg - T = ma$$

$$T = Mg - ma < Mg = F$$

根据刚体的转动定律 $\beta = \frac{M}{I}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{对 } A \text{ 轮} \quad \beta_A = \frac{TR}{I} \\ \text{对 } B \text{ 轮} \quad \beta_A = \frac{FR}{I}\end{array}\right\} \begin{array}{l} T < F \\ \Rightarrow \beta_A < \beta_B \end{array}$$

答案选 C

**93.**（北京市 1999 年）　质量 $m = 1.0\text{kg}$，半径 $r = 0.6\text{m}$ 的匀质圆盘，可以绕通过其中心且垂直盘面的水平光滑固定轴转动，对轴的转动惯量 $J = \frac{1}{2}mr^2$，圆盘边缘绕有绳子，绳子下端挂一质量 $m = 1.0\text{kg}$ 的物体，如图所示．起初在圆盘上加一恒力矩使物体以速率 $V_0 = 0.6\text{m/s}$ 匀速上升，如撤去所加力矩，问经历多少时间圆盘开始作反方向转动．

**本题考点**：系统的动能定理

**解**：起初 $t = 0$ 时，对圆盘有 $\omega_0 = \frac{v_0}{r} = \frac{0.6}{0.6} = 1(rad/s)$．

取圆盘和物体为系统，其初始动能为

$$E_{k0} = \frac{1}{2}J\omega_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2,$$

设经历 $t$ 时间，圆盘开始作反向转动，此时系统的动能为 $E_k = 0$.

由动能定理：$A = E_k - E_{k0}$

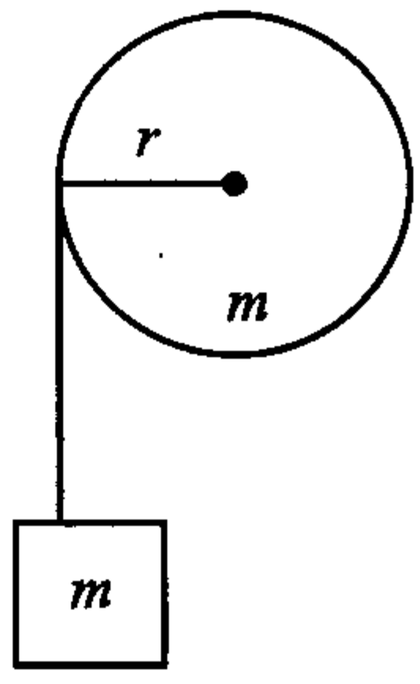
即 $-mgH = 0 - \frac{1}{2}J\omega_0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

$H$ 为 $t$ 时间内物体上升的高度

$$\Rightarrow H = \frac{\frac{1}{2}J\omega_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2}{mg} = 0.027(m)$$

上升过程有：$\begin{cases} 2aH = 0^2 - v_0^2, \\ 0 - v_0 = at \end{cases}$

$$\Rightarrow t = \frac{2H}{v_0} = \frac{2 \times 0.027}{0.6} = 0.09(\text{s})$$



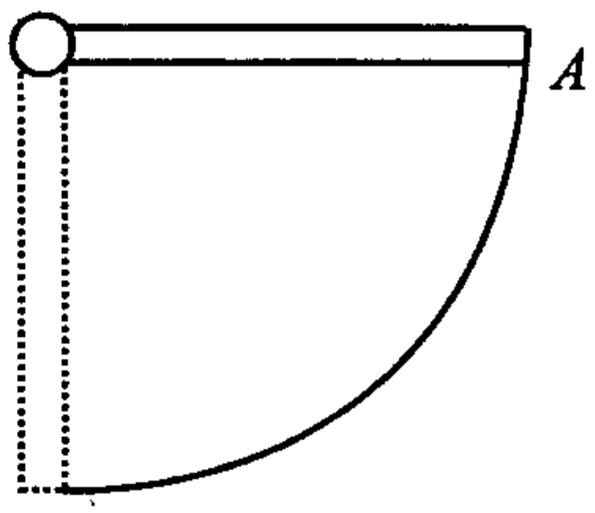

**94.（大连理工大学 2000 年）** 均匀细棒 $OA$ 可绕通过其一端 $O$ 而与棒垂直的水平固定光滑轴转动，在棒从水平位置由静止开始下落到竖直位置的过程中，下述哪一种说法是正确的？

A. 角速度从小到大，角加速度从大到小.

B. 角速度从小到大，角加速度从小到大.

C. 角速度从大到小，角加速度从大到小.

D. 角速度从大到小，角加速度从小到大.




**本题考点：**转动定理 $M = I\beta$

**解：**$OA$ 转过 $\theta$ 角：力矩为

$$M = mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

$\beta = \frac{M}{I} = \frac{mgL}{2I}\cos\theta$. 即 $\beta$ 随着 $\theta$ 从 $0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 增大而变小，至于 $\omega$，可以用下列方法求

因为 $\beta = \frac{mgL}{2I}\cos\theta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$

所以 $\omega d\omega = \beta d\theta = \frac{mgL}{2I}\cos\theta d\theta$

左右两边积分得：$\frac{1}{2}\omega^2 = \frac{mgL}{2I}\sin\theta$

所以 $\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}sin\theta}$，即 $\omega$ 随着 $\theta$ 从 $0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 增大而增大

答案选 A

**95.（北京邮电大学 1999 年）** 一质量为 $m$ 的质点沿着一条空间曲线运动，该曲线在直角坐标系下的定义式为 $\vec{r} = a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega\vec{j}$，其中 $a$、$b$、$\omega$ 皆为常数，则此质点所受的对原点的力矩 $\vec{M}$ = _____；该质点对原点的角动量 $\vec{L}$ = _____.

**本题考点：刚体的力矩，角动量**

**解：** $\vec{r} = a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega t\vec{j}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -a\omega\sin\omega t\vec{i} + b\omega\cos\omega t\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -aw^2\cos t\vec{i} - b\omega^2\sin\omega t\vec{j} = -\omega^2\vec{r}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2\vec{r}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (-m\omega^2\vec{r}) = 0$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$= (a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega t\vec{j}) \times m(-\omega a\sin\omega t\vec{i} + \omega b\cos\omega t\vec{j})$$

$$= abm\omega\vec{k}$$

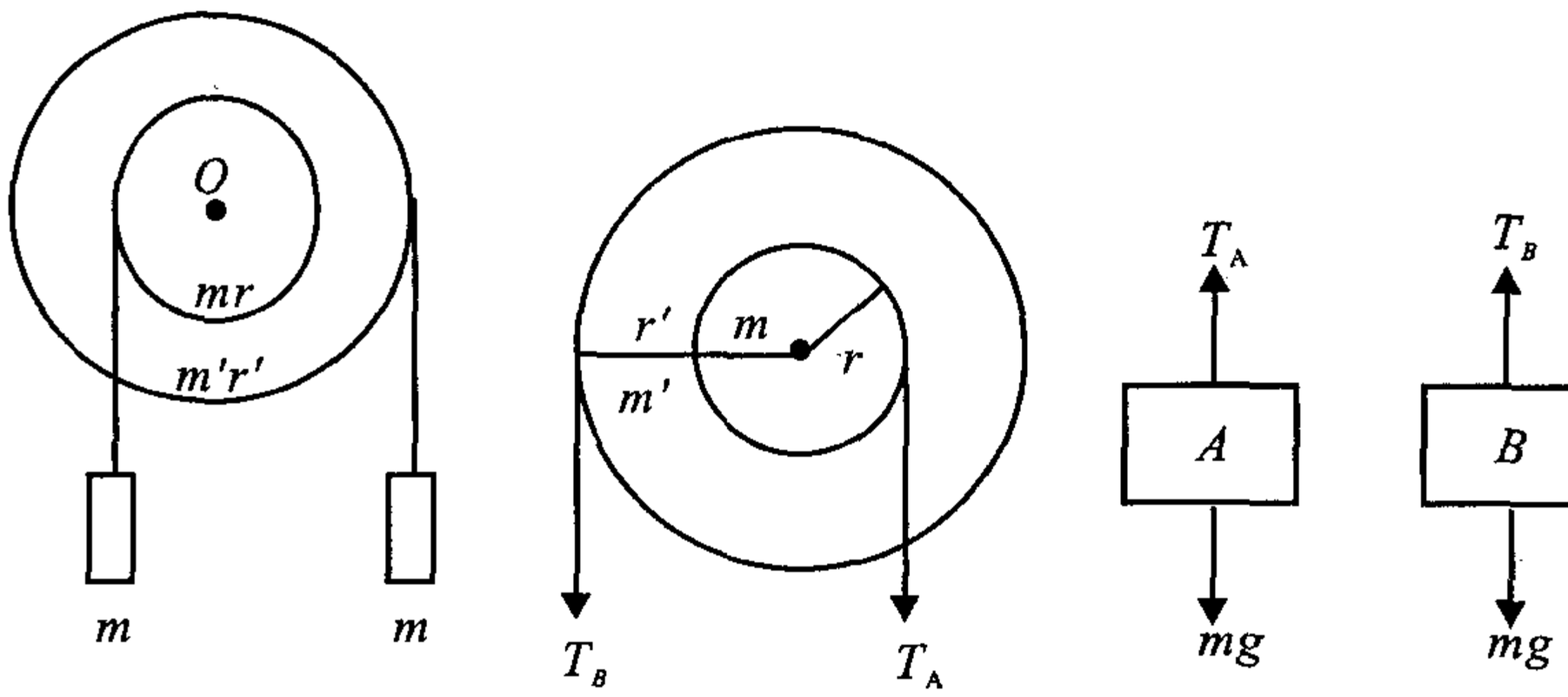
空处填 0，$abm\omega\vec{k}$

**96.（北京邮电大学 1999 年）** 两个匀质圆盘，一大一小，同轴

地粘结在一起,构成一个组合轮,小圆盘的半径为 $r$,质量为 $m$;大圆盘的半径 $r' = 2r$,质量 $m' = 2m$,组合轮可绕通过其中心且垂直于盘面的光滑水平固定轴 $O$ 转动,对 $O$ 轴的转动惯量 $J = 9mr^2/2$.两圆盘边缘上分别绕有轻质细绳,细绳下端各悬挂一个质量为 $m$ 的物体 $A$ 和 $B$,如图所示.这一系统从静止开始运动,绳与盘无相对滑动,绳的长度不变,已知 $r = 10\text{cm}$.求:

(1) 组合轮的角加速度 $\beta$;

(2) 当物体 $A$ 上升 $h = 40\text{cm}$ 时,组合轮的角速度 $\omega$.




**本题考点:**转动定律 $M = I\beta$

**解:**如图将 $A$、$B$ 与园盘看成整体则

$$J = \frac{9}{2}mr^2 + 4r^2m + r^2m = \frac{19}{2}mr^2$$

合力矩 $M = mg2r - mgr = mgr$

$$\beta = \frac{M}{J} = \frac{mgr}{\frac{19}{2}mr^2} = \frac{2g}{19r} = \frac{200}{19}(rad/s^2)$$

$h = r\theta$ ($\theta$ 为转过的角度) $\theta = \frac{h}{r}$

$$\omega^2 = 2\beta\theta = \frac{4g}{19r} \cdot \frac{h}{r} = \frac{4gh}{19r^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4 \times 10 \times 0.4}{19 \times (0.1)^2}} = \frac{40\sqrt{19}}{19}(1/s)$$

对于第一问可以用隔离法解

对轮有 $T_B 2r - T_A r = \frac{9}{2} mr^2 \beta$ ①

对物 $B$ 有 $mg - T_B = ma_B$ ②

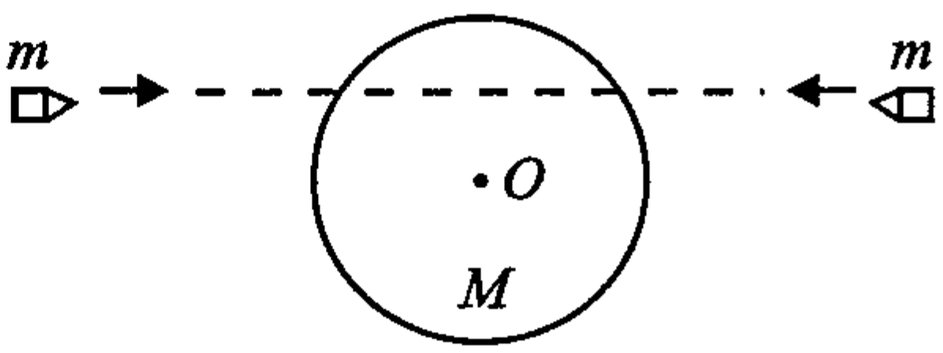
对物 $A$ 有 $T_A - mg = ma_A$ ③

$a_A = \beta \cdot 2r$ ④

$a_B = \beta r$ ⑤

①②③④⑤ 联立求解得 $\beta = \frac{2g}{19r}$

**97.(北京理工大学 2002 年)** 一圆盘正绕垂直于盘面的水平光滑固定轴 $O$ 转动,如图射来两个质量相同,速度大小相同,方向相反并在一条直线上的子弹,子弹射入圆盘并且留在盘内,则子弹射入后的瞬间,圆盘的角速度 $\omega$




A. 增大　B. 不变　C. 减小　D. 不能确定

**本题考点:** 系统的角动量守恒定律

**解:** 由系统的角动量守恒定律,对"两子弹 + 圆盘"

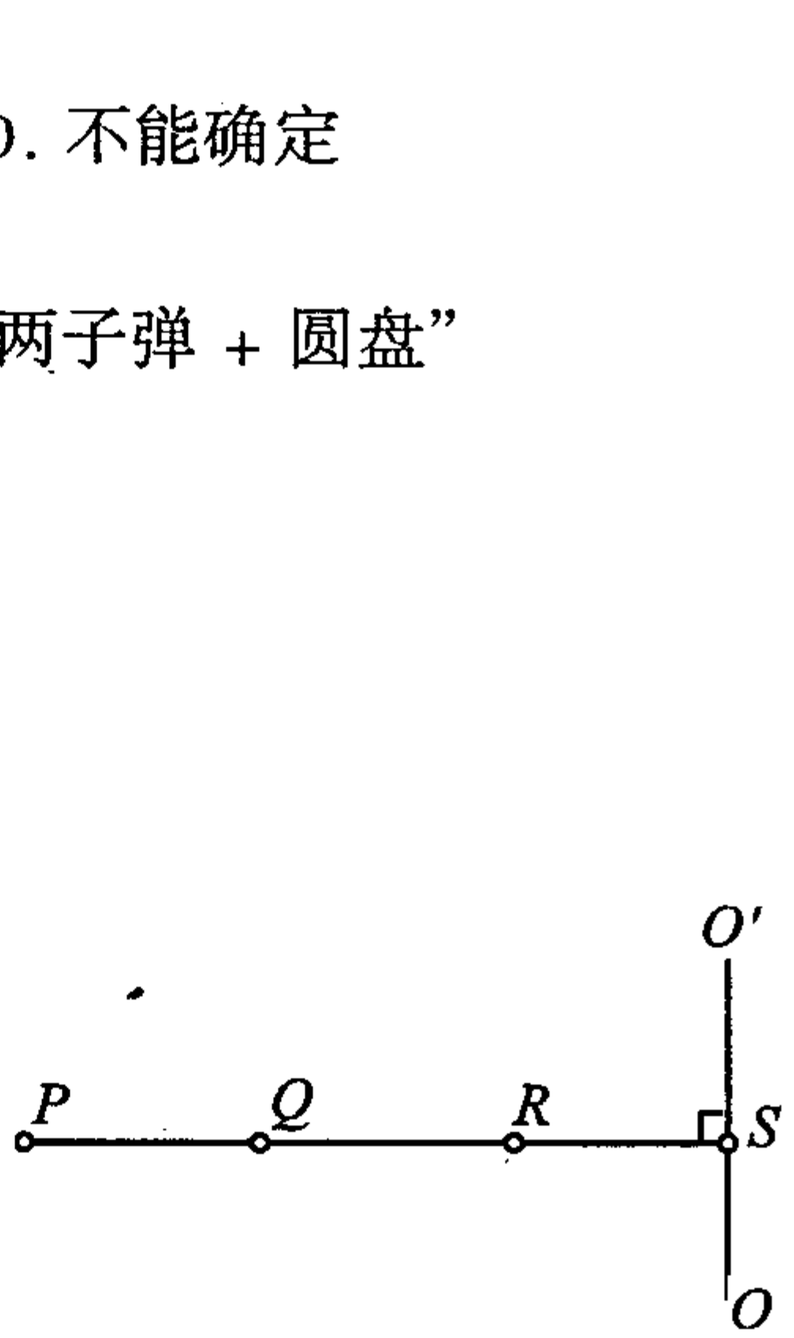
$mvr - mvr + I_0\omega_0 = I'\omega$

圆盘角速度为 $\omega = \frac{I_0\omega_0}{I'}$

又 $I' > I_0$　故 $\omega < \omega_0$

答案选 C

**98.(北京理工大学 2002 年)** 如图所示,$P$、$Q$、$R$ 和 $S$ 是附于刚性轻质细杆上的质量分别为 4m、3m、2m 和 m 的四个质点,$PQ = QR = RS = l$,则系统对 $OO'$ 轴的转动惯量为 _____.

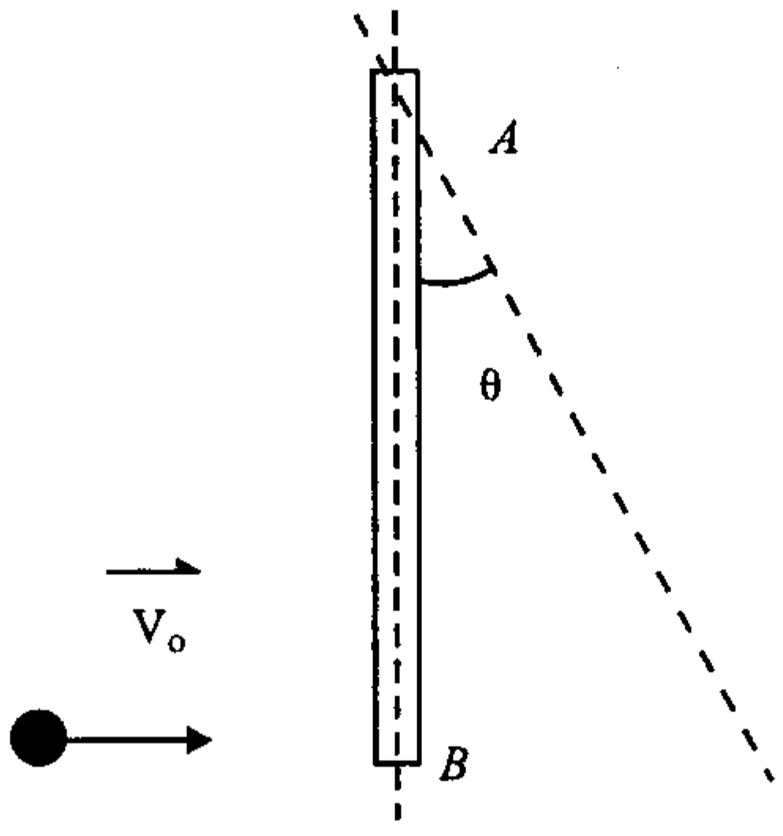


本题考点:质点系的转动惯量

解:$I = 2ml^2 + 3m(2l)^2 + 4m(3l)^2 = 50ml^2$

空处填:$50ml^2$

**99.**(北京邮电大学2002年)　一长为 $L$ 质量为 $M$ 的匀质刚性细杆 $AB$,杆可绕过 $A$ 端的水平轴作无摩擦的定轴转动.今有一质量为 $m$ 的小球以初速 $v_0$ 水平射向杆的 $B$ 端,在 $B$ 端和杆发生完全弹性碰撞.碰撞时间很短暂.求:(1) 碰撞完成后,杆获得的角速度 $\omega$?(2) 杆能摆起的最大角度 $\theta$ = ?




本题考点:刚体的能量,角动量守恒

解:(1) 刚体弹性碰撞,能量,角动量守恒有

$$mv_0L = mvL + \frac{1}{3}ML^2\omega \qquad ①$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}ML^2)\omega^2 \qquad ②$$

联立上两式得:$\omega = \dfrac{6mv_0}{3m + M}$

(2) $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3}ML^2\omega^2 = \dfrac{1}{2}MgL(1 - \cos\theta)$

$$\theta = \arccos[1 - \frac{12m^2v_0^2L}{(3m + M)^2g}]$$

**100.**(清华大学2001年)　有一长为 $L$ 的均质细杆,置于光滑

水平面上，初始时杆静止，有一质量与杆相同的小球沿与杆垂直的速度 $v$ 飞来，与杆端点碰撞，并粘附于杆端点上. 系统碰撞后绕其质心转动的角速度是_____.

**本题考点：**角动量守恒

**解：**小球与匀质细杆组成的系统的角动量守恒

$$mv \cdot \frac{1}{4}L = (\frac{1}{12}mL^2 + \frac{1}{8}mL^2)\omega$$

$$\omega = \frac{6v}{5L}$$

空处填　$\frac{6v}{5L}$

**101.（清华大学 2000 年）**　在经典力学中，下列哪个说法是错误的：

A. 质点的位置，速度，加速度都是矢量.

B. 刚体定轴转动的转动惯量是标量.

C. 质点运动的总机械能是标量.

D. 刚体转动的角速度是标量.

**本题考点：**力学中基本的物理量

**解：**刚体转动的角速度是矢量.

答案选 D

**102.（北京市 1999 年）**　一飞轮以角速度 $\omega_0$ 绕轴旋转，飞轮对轴的转动惯量为 $J_1$；另一静止飞轮突然啮合到同一轴上，该飞轮对轴的转动惯量为前者的二倍. 啮合后整个系统的角速度 $\omega$ = _____.

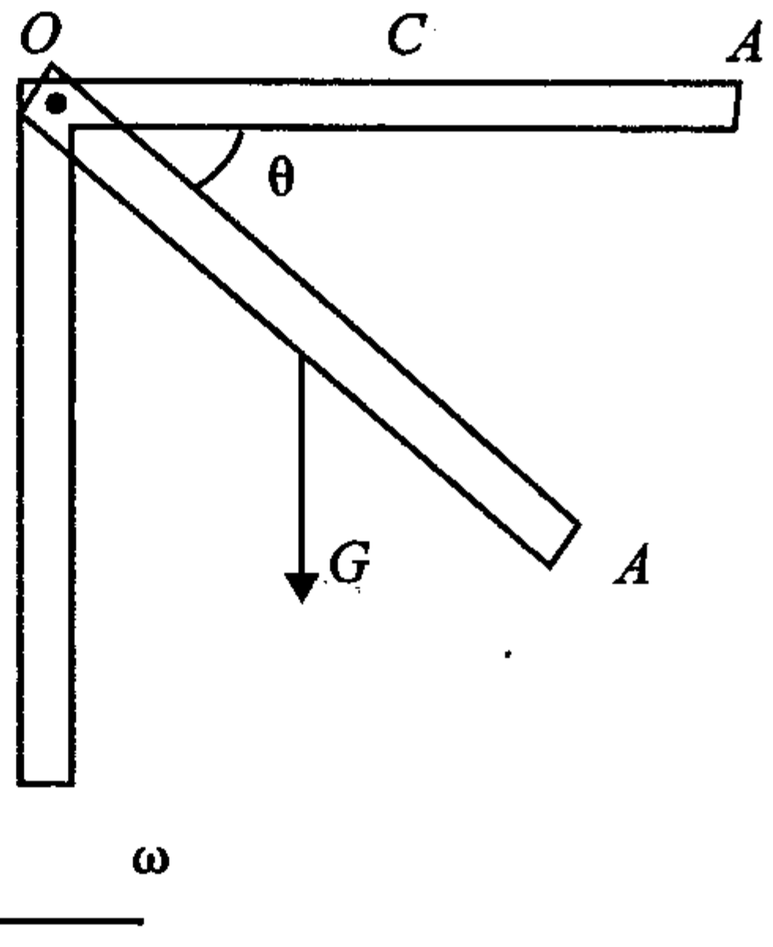
**本题考点：**刚体的角动量守恒

**解：**由角动量守恒　$J_1\omega_0 = (2J_1 + J_1)\omega$

$$\Rightarrow \omega = \frac{1}{3}\omega_0$$

空处填：$\frac{\omega_0}{3}$

**103.(东北大学 2002 年)** 一根质量为 $m$,长为 $l$ 的均匀细棒 $OA$(如图),可绕通过其一端的光滑轴 $O$ 在竖直平面内转动,今使棒从水平位置开始自由下摆,求细棒摆到竖直位置时其中心点 $C$ 和端点 $A$ 的速度.(已知棒绕端点的转动惯量是 $J = ml^2/3$)




**本题考点:**刚体的转动

**解:**细棒在绕 $O$ 点转动,机械能守恒有

$$\frac{1}{2}mgl = \frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{3}\right)\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

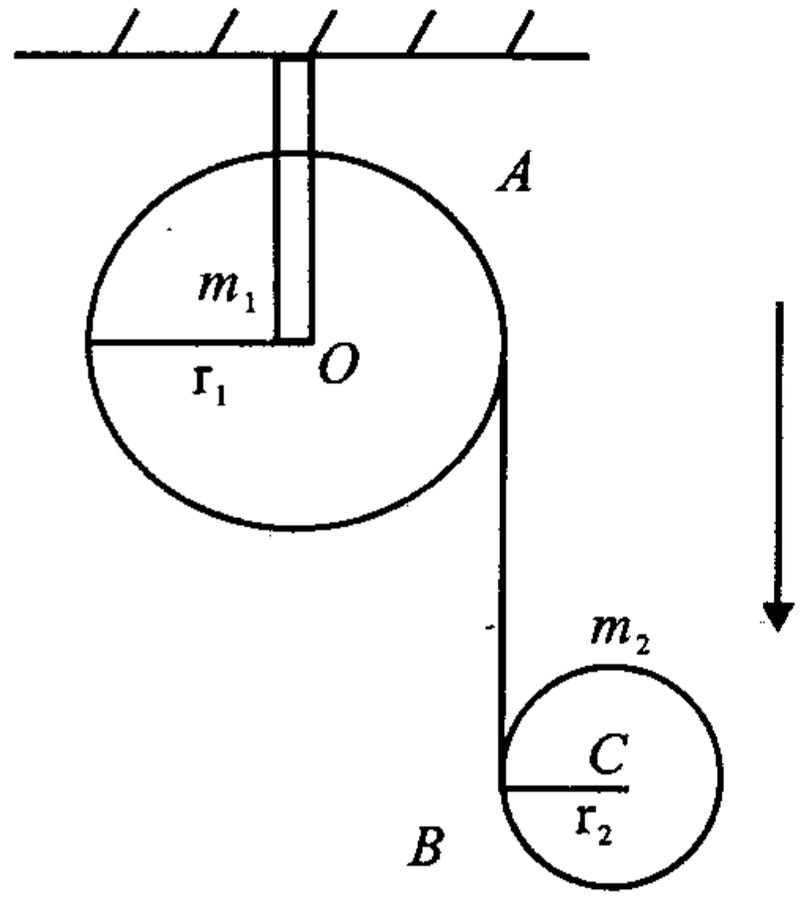
中心 $C$ 点的速度

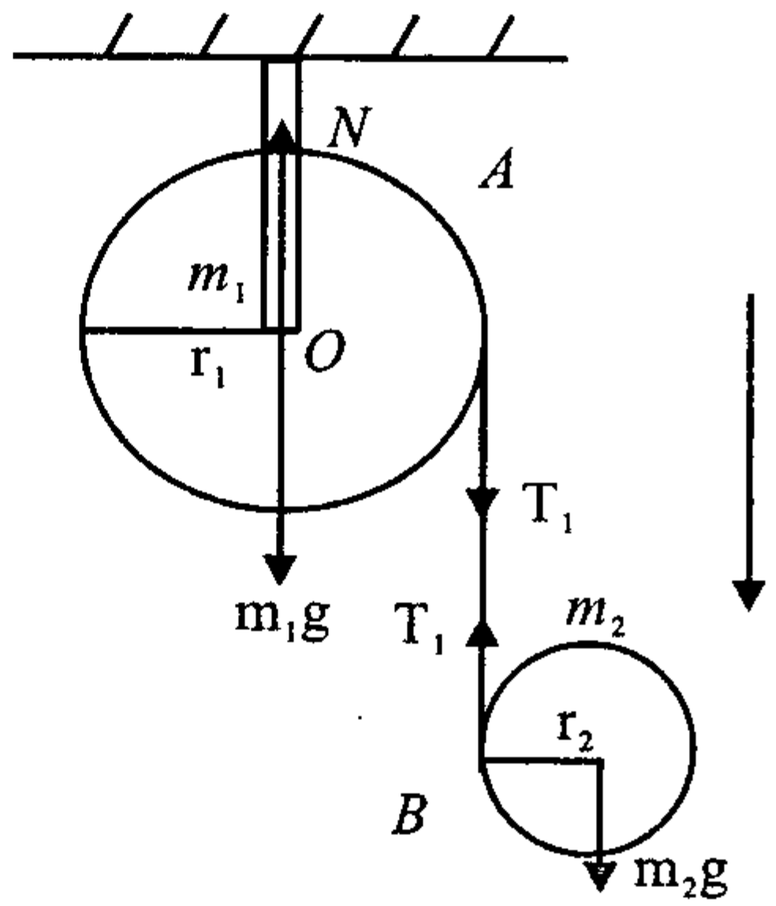
$$V_c = \frac{l}{2}\omega = \sqrt{\frac{3gl}{2}}$$

端点 $A$ 点的速度

$$V_A = l\omega = \sqrt{3gl}$$

**104.(南开大学 2002 年)** 如图所示,$A$、$B$ 两个轮子的质量分别为 $m_1, m_2$;半径分别为 $r_1, r_2$.另有一细绳绕在两轮上,并按图所示连接,其中轮 $A$ 绕固定轴 $O$ 转动.



试求：(1) 轮 $B$ 下落时，其轮心的加速度；(2) 细绳的拉力.

**本题考点：**刚体转动定律，牛顿定律

**解：**$m_1$ 和 $m_2$ 的重力分析如图所示，

对 $m_1$ 由转动定律得：

$$T_1 r_1 = I_{1c}\beta_1 = I_{1c}\frac{a_1}{r_1} \quad ①$$

对 $m_2$ 由牛顿定律得：

$$m_2 g - T_1 = m_2 a_c \quad ②$$

又　$a_1 = a_c + \beta_2 r_2$ ③

对 $m_2$ 由转动定律得：

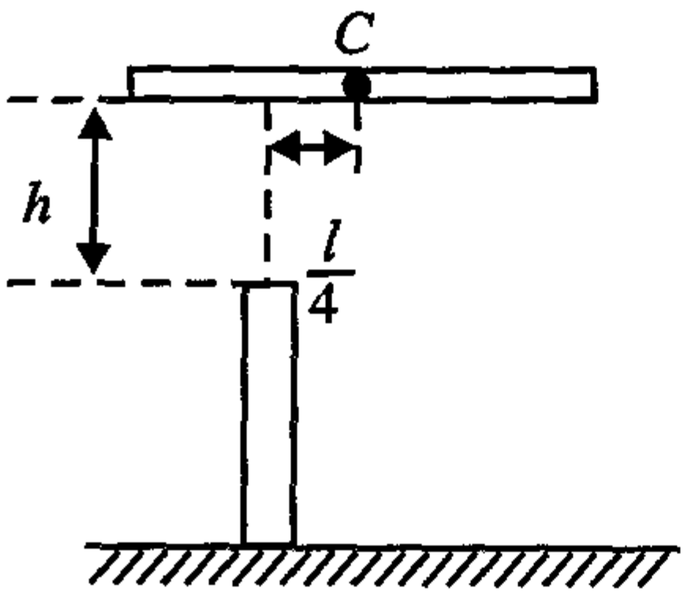
$$-T_1 r_2 = I_{2c}\beta_2 \quad ④$$

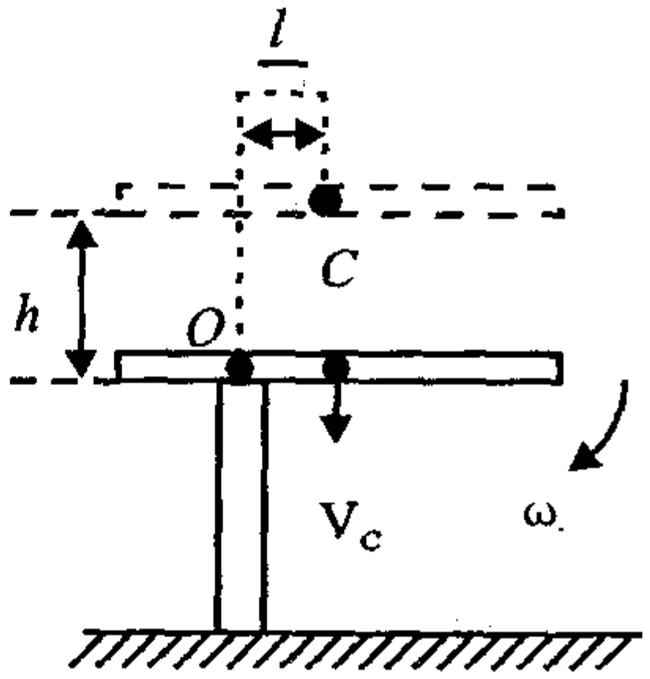
其中 $I_{1c} = \frac{1}{2}m_1 r_1^2, I_{2c} = \frac{1}{2}m_2 r_2^2$

联立 ①—④ 得　$a_c = \frac{2(m_1 + m_2)}{3m_1 + 2m_2}g$

(2) 由 ② 式得　$T_1 = m_2(g - a_c) = \frac{m_1 m_2}{3m_1 + 2m_2}g$

**105.(北京师范大学 2002 年)**　如图，一长为 $l$ 的匀质杆自水平放置的初始位置平动自由下落，落下 $h$ 距离时与一竖直固定板的顶部发生完全弹性碰撞，杆上碰撞点在距质心 $c$ 为 $\frac{1}{4}$ 处，求碰撞后瞬间的质心速度和杆的角速度.



本题考点:刚体的转动动能,机械能守恒定律

解:根据机械能守恒定律:$mgh = \frac{1}{2}mv_c^2$

又因两杆作弹性碰撞:$\frac{1}{2}mv_c^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$

所以有: $mgh = \frac{1}{2}I\omega^2$ (1)

根据平行轴定理,对通过 $O$ 点与棒垂直的转轴,棒的转动惯量:

$$I = I_c + md^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m(\frac{l}{4})^2 = \frac{7}{48}ml^2 \quad (2)$$

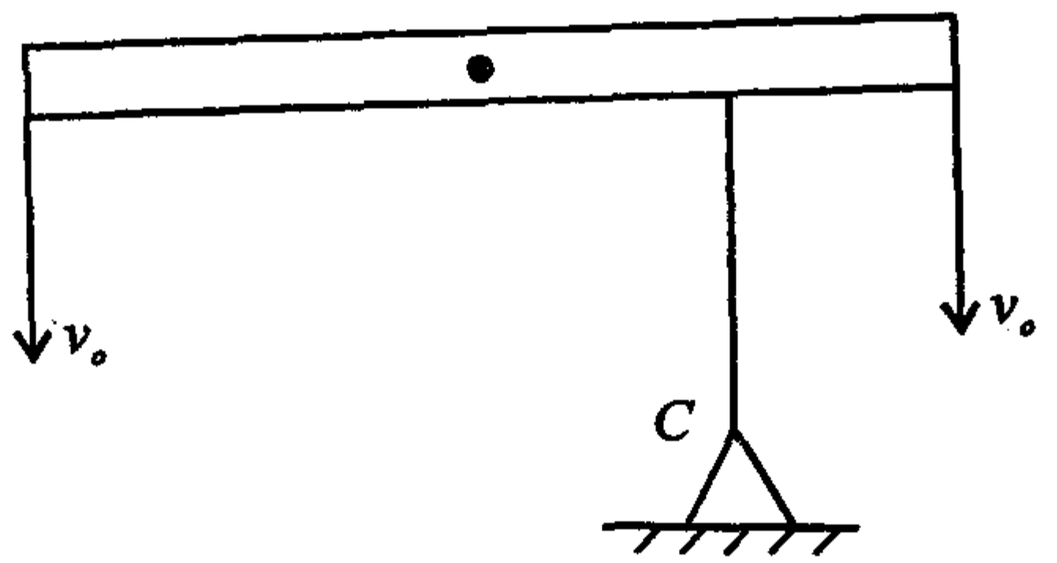
将(2) 式代入(1) 式得

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgh}{\frac{7}{48}ml^2}} = 3.7\sqrt{\frac{gh}{l}}$$

碰撞后质心的速度:$V_c = \omega\frac{l}{4} \doteq 0.93\sqrt{gh}$

**106.(南京大学2002年)** 匀质棒长$2L$,质量为$m$,以垂直于自身速度在水平面上(附图1面)运动时,与固定的 $C$ 点发生完全非弹性碰撞,发生碰撞处距棒中心$\frac{L}{2}$,求解棒在碰撞以后的运动状态?

本题考点:角动量守恒




解:线密度 $\lambda = \frac{m}{2L}$

碰撞前的角动量

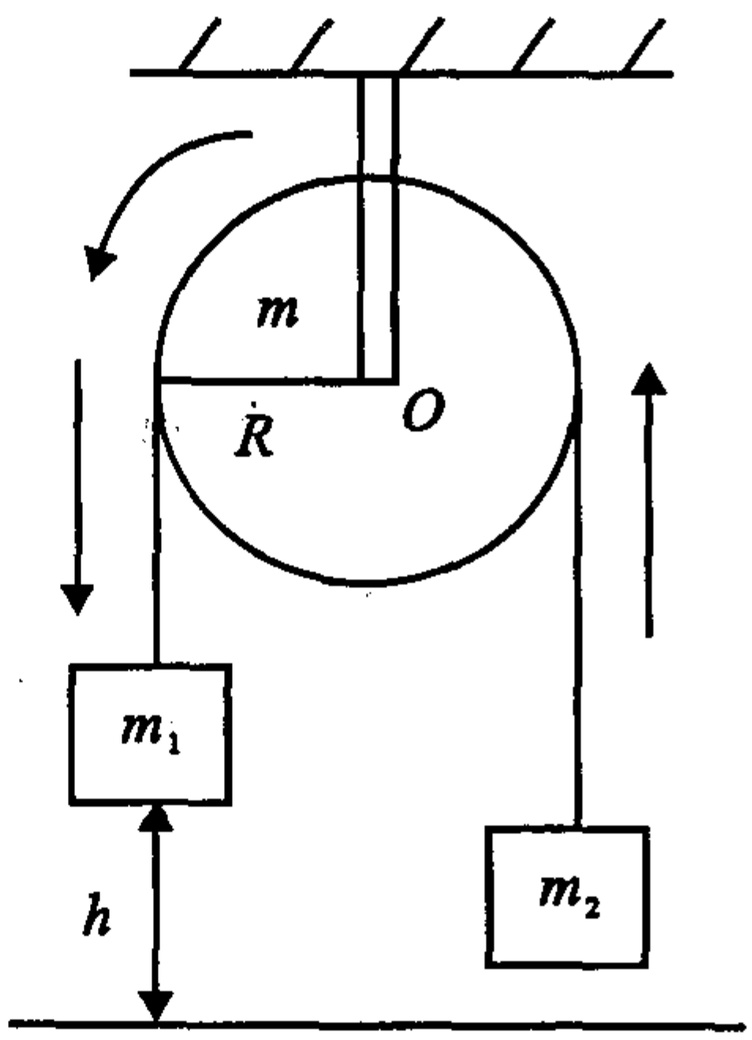
$$L = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{3}{2}L} xV\lambda dx = = V\lambda L^2$$

把 $\lambda = \frac{m}{2L}$ 代入得　$L = \frac{mVL}{2}$

碰撞后　$I\omega = \frac{7}{12}mL^2\omega = \frac{VmL}{2}$

$$\omega = \frac{6V}{7L}$$

**107.(复旦大学 2001 年)** 两质量分别为 $m_1$ 和 $m_2(m_1 > m_2)$ 的物体,由跨过定滑轮的轻绳连接,如图所示.滑轮是一质量为 $m$ 的均质圆柱体,半径为 $R$,转动时所受的阻力矩恒为 $M$. $m_1$ 由离地高为 $h$ 处从静止开始释放,在以后运动过程中绳与滑轮间无相对滑动(不计滑轮轴承处的摩擦).求:




(1)$m_1$ 和 $m_2$ 的运动加速度;

(2)$m_1$ 着地时,滑轮的转动动能及两物体与定滑轮的总动能.

**本题考点:** 系统的角动量定理、动量定理

**解:**(1) 根据系统的角动量定理　$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

对"$m_1 + m_2 + m$"有

$$m_1gR - m_2gR - M = \frac{d(m_1vR + m_2vR + \frac{1}{2}mR^2\omega)}{dt}$$

$$\underline{\underline{v = \omega R}}\ \frac{d}{dt}(m_1vR + m_2vR + \frac{1}{2}mRv)$$

$$= (m_1R + m_2R + \frac{1}{2}mR)\frac{dv}{dt}$$

$m_1$ 和 $m_2$ 的运动加速度为

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{m_1g - m_2g - \frac{M}{R}}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} = \frac{2(m_1g - m_2g - \frac{M}{R})}{2m_1 + 2m_2 + m}$$

(2) 滑轮的转动动能为 $E_{kr} = \frac{1}{2}I\omega^2$

$v^2 - v_0^2 = 2ah \Rightarrow v^2 = 2ah$，且 $\omega = \frac{v}{R}$

$$E_{kr} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}mR^2 \times \frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{4}m \times 2ah$$

$$= \frac{mh(m_1g - m_2g - M/R)}{2m_1 + 2m_2 + M}$$

对整个系统，由动能定理

$$m_1gh - m_2gh - M\theta = E_{k总} - 0$$

又 $h = R\theta$

$$\Rightarrow E_{k总} = m_1gh - m_2gh - \frac{Mh}{R}$$

**108.(辽宁大学 2001 年)** 两个均质圆盘 $A$ 和 $B$ 的密度分别为 $\rho_A$ 和 $\rho_B$，若 $\rho_A > \rho_B$，但两圆盘的质量与厚度相同，如两盘对通过盘心垂直于盘面轴的转动惯量各为 $J_A$ 和 $J_B$，则

A. $J_A > J_B$　　B. $J_B > J_A$

C. $J_A = J_B$　　D. $J_A$、$J_B$ 哪个大，不能确定

**本题考点：**刚体的转动惯量

**解：**设圆盘半径为 $R$，厚度为 $h$，密度为 $\rho$

$$m - \rho\pi R^2 \cdot h \Rightarrow R^2 = m/\rho\pi h$$

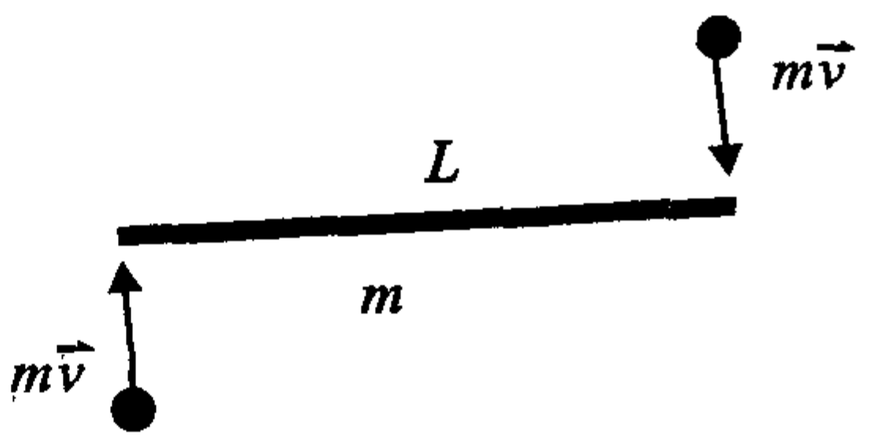
$$J = \frac{m}{2}R^2 = \frac{1}{2}m \times (\frac{m}{\rho\pi h}) = \frac{m^2}{2\rho\pi h}$$

$m$ 与 $h$ 相同，则 $\rho$ 越大，$J$ 越小

$\rho_A > \rho_B$　　$J_A < J_B$

答案选 B

**109.**(辽宁大学 2001 年) 光滑的水平桌面上,有一长为 $2L$,质量为 $m$ 的匀质细杆,可绕过其中点且垂直于杆的竖直光滑固定轴 $O$ 自由转动,其转动惯量为 $\frac{1}{3}mL^2$,起初杆静止,桌面上有两个质量均为 $m$ 的小球,各自在垂直于杆的方向上,正对着杆的一端,以相同速度 $v$ 相向运动,如图所示,当两小球同时与杆的两个端点发生完全非弹性碰撞后,就与杆粘在一起转动,则这一系统碰撞后的转动角速应为




A. $\frac{2V}{3L}$　　B. $\frac{4V}{5L}$　　C. $\frac{6V}{7L}$　　D. $\frac{8V}{9L}$　　E. $\frac{12V}{7L}$

**本题考点:** 系统的角动量守恒定律

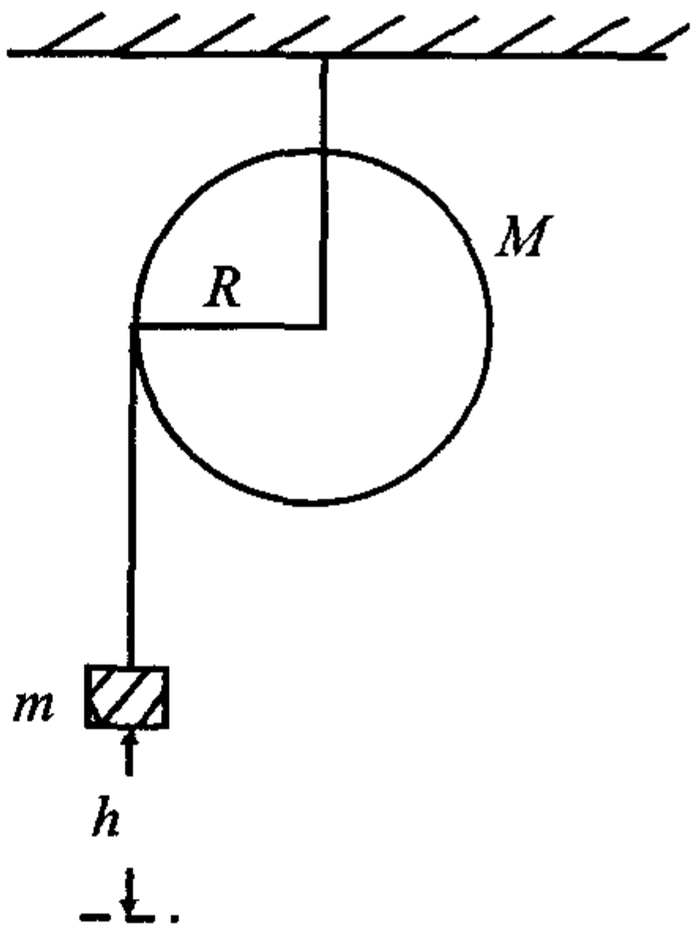
**解:** 由系统角动量守恒有

$$mvl + mvl = J\omega$$

$$2mvl = (\frac{1}{3}mL^2 + mL^2 + mL^2)\omega \Rightarrow \omega = \frac{6V}{7L}$$

答案选 C

**110.**(南京师范大学 1997 年) 如图所示一质量为 $M$ 半径为 $R$ 的圆盘,可绕一无摩擦的水平轴转动,圆盘上绕有轻绳,一端悬挂质量为 $m$ 的物体. 问物体由静止下落高度为 $h$ 时,其速度的大小为多少?角加速度为多大?(绳的质量忽略).




**本题考点:** 牛顿定律、转动定律、运动学

解:方法一:设绳的张力为 $T$,对 $m$ 作受力分析,其加速度大小为 $a$,取向下为 $x$ 轴正方向,由牛顿第二定律得

$$mg - T = ma \tag{1}$$

对定滑轮,由转动定律有

$$TR = \frac{1}{2}MR^2\beta \tag{2}$$

又

$$a = R\beta \tag{3}$$

当 $m$ 下降 $h$ 时,由运动学得

$$V^2 = 2ha = (R\beta)^2 \tag{4}$$

联立求解得角加速度大小为

$$\beta = \frac{2m}{(M + 2m)R}g$$

速度大小为 $V = \sqrt{\frac{4hmg}{M + 2m}}$

方法二:由于外力只有重力做功,故系统机械能守恒,取开始时的水平位置为势能零势面,势能无变化.故

$$\frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)\frac{V^2}{R^2} - mg = 0$$

$$V = \sqrt{\frac{4mgh}{M + 2m}}$$

又绳与滑轮无相对滑动,则 下落任一位置 $x$ 时,必有

$$\frac{1}{2}m(\frac{dx}{dt})^2 + \frac{1}{2}J(\frac{d\omega}{dt}) - mgx = 0$$

再对求导得

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{J}{R^2}\frac{d^2x}{dt^2} - mg = 0$$

即

$$\beta = \frac{2mg}{R(M + 2m)}$$

**111.(南京师范大学 1997 年)** 一转动惯量为 $I$ 的圆盘绕一固定轴转动,起初角速度为 $\omega_0$,设它所受的阻力矩与转动角速度

成正比，即 $M = -k\omega$，($k$ 为正常数). 若它的角速度从 $\omega_0$ 变为 $\omega_0/2$，则所需时间 $t$ 等于多少?

**本题考点：转动定律的应用**

**解：**由转动定律有：$M = -k\omega = I\frac{d\omega}{dt}$( $\omega$ 为角速度大小)

两边积分得

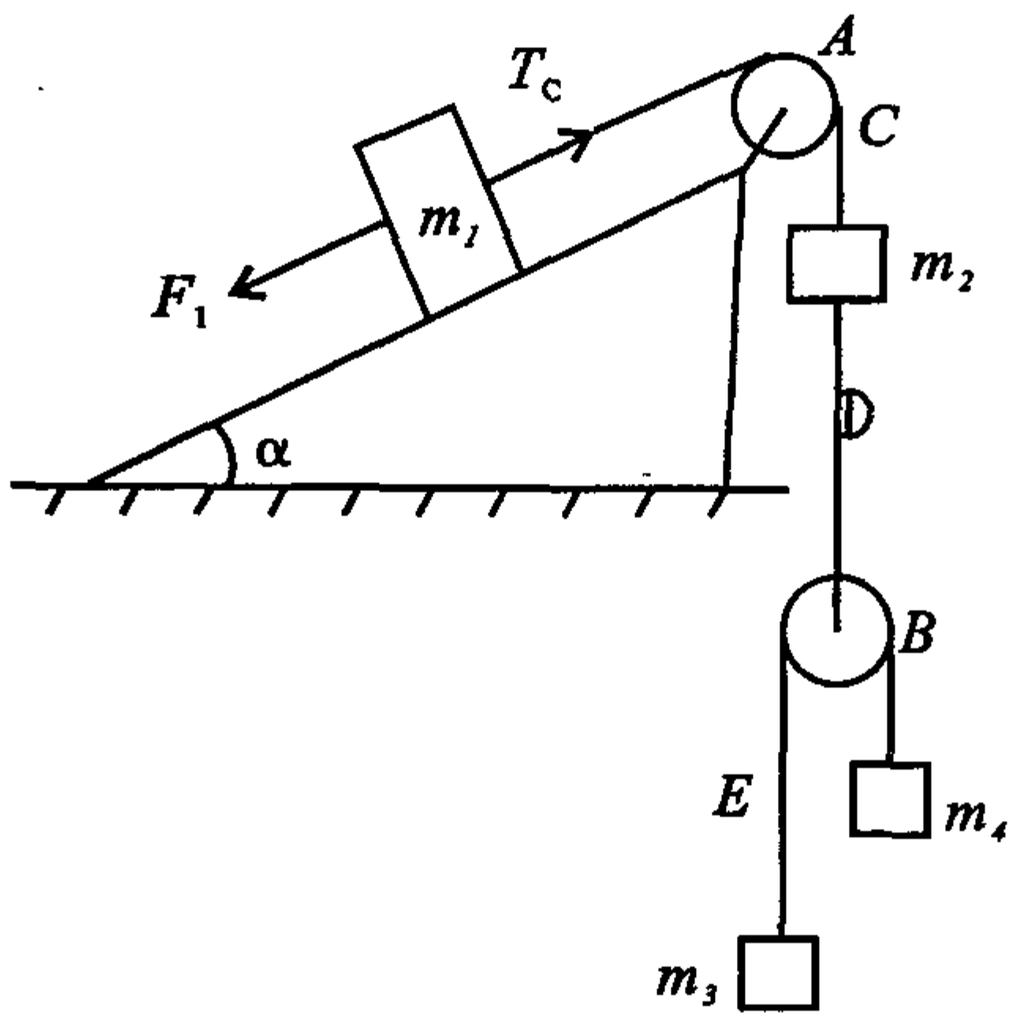
$$\ln\frac{\omega}{\omega_0} = -\frac{k}{I}t \Rightarrow \frac{I}{R}\ln 2$$

**112.(南京师范大学 2000 年)**　如题图所示的联接体，设 $m_3 > m_4$，滑轮 $A$、$B$ 及各段细绳 $C$、$D$、$E$ 的质量可忽略不计，也不考虑滑轮与绳之间的摩擦作用. 已知物体 $m_1$ 与斜面之间的摩擦系数为 $\mu$，斜面的倾角为 $\alpha$，当 $m_1$ 受力 $F_1$ 作用而沿斜面下滑时，求：

(1) 物体 $m_1$ 的加速度；

(2) 各段绳 $D$、$C$、$E$ 中的张力 $T_D$，$T_C$，$E_E$.

**本题考点：牛顿定律与相对运动**




**解：**对 $m_1$ 作受力分析，设 $m_1$ 沿斜面向下的加速度大小为 $\alpha_1$，由牛顿第二定律有

$$F_1 - T_c + m_1 g\sin\alpha - \mu m_1\cos\alpha = m_1 a_1 \quad ①$$

对 $m_2$ 作受力分析,也有

$$T_c - T_D - m_2 g = m_2 a_2 = m_2 a_1 \quad ②$$

当滑轮质量,绳的质量不计时,滑轮 $B$ 向下的加速度也必为 $a_1$,设 $m_3$、$m_4$ 对地的加速度为 $a_3$ 与 $a_4$,对 $m_3$ 及 $m_4$ 作受力分析有

$$m_3 g - T_E = m_3 a_3 \quad ③$$

$$T_B - m_4 g = m_4 a_4 \quad ④$$

$$T_C = T_D = T_B + T_E = 2T_E \quad ⑤$$

设 $a'$ 为 $m_3$ 及 $m_4$ 相对滑轮 $B$ 的加速度大小有:

$$a_4 = a_1 + a' \quad ⑥$$

$$a_3 = a' - a_1 = a' - a_1 \quad ⑦$$

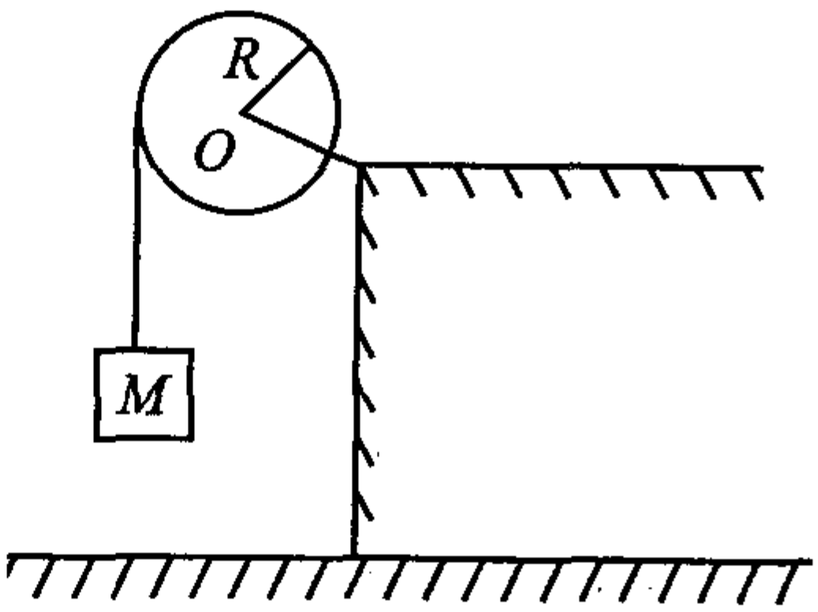
解之得

$$a_1 = \frac{m_3 + m_4}{m_1 m_3 + m_1 m_4 + m_2 m_3 + m_2 m_4 + 4m_3 m_4} \times \left(F_1 + m_1 g\sin\alpha - \mu g m_1\cos\alpha - m_2 g - \frac{4m_3 m_4 g}{m_3 + m_4}\right)$$

$$\begin{cases} T_C = F_1 + m_1 g\sin\alpha - m_1 g\cos\alpha\mu - m_1 a_1 \\ T_D = T_C - m_2 g - m_2 a_1 \\ T_E = \dfrac{1}{2}T_D = \dfrac{1}{2}[T_C - m_2 g - m_2 a_1] \end{cases}$$

**113.(南京师范大学 2000 年)**

如题图所示,一质量为 $M$ 的均质圆盘,半径为 $R$,其中心轴垂直于纸面,装在光滑且固定的轴承上,圆盘对轴的转动惯量是 $I = \frac{1}{2}MR^2$.若在盘的边缘绕一轻绳,绳的一端挂一质量为 $m$ 的物体,试求:



(1) 圆盘的角加速度和圆盘边缘各点处的切向加速度和绳子的张力;

(2) 圆盘在 $t$ 时刻的角速度(设圆盘从静止开始转动,初角速度 $\omega_0 = 0$);

(3) 作用在圆盘上的力矩在时段 $t$ 内所做的功.

**本题考点:**牛顿定律与转动定律、角加速度与角速度的关系及动能定理的运用

**解:**(1) 对 $m$ 作受力分析,$m$ 向下加速度大小为 $a$,则

$$mg - T = ma \tag{①}$$

对定滑轮作受力矩分析得

$$TR = I\beta = \frac{1}{2}MR^2\frac{d\omega}{dt} \tag{②}$$

$$a = R\beta \tag{③}$$

可得角加速度大小为 $\beta = \frac{a}{R} = \frac{2mg}{(2m + M)R}$,其方向垂直纸面向外,边缘各点切向加速度大小为 $a = \frac{2m}{2m + M}g$,张力 $T = \frac{mMg}{2m + M}$.

(2) 因为角加速度是恒量,故由 $\omega_t - \omega_0 = \beta t$ 得

$$\omega_t = \beta t = \frac{2mgt}{R(2m + M)}$$

(3) 由动能定理有

$$A_{功} = E_{k2} - E_{k1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{MR^2}{2}\left[\frac{2mgt}{R(M + 2m)}\right]^2 = \frac{Mmg^2t^2}{(M + 2m)^2}$$

## Ⅳ. 振动与波

**114.**(北京大学 2001 年)　强迫振动的标准方程为 $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\Omega t$

(1) 试说明 $\beta$、$\omega_0$、$F_0$、$\Omega$ 的物理意义;

(2) 求出强迫振动的稳定解,并画出其振幅的频率响应曲线的示意图.

**本题考点:**强迫振动

**解:**(1) $\beta$ 阻尼因子

$\omega_0$ 是振动系统的固有角频率

$F_0$ 是强迫力的力幅,是强迫力的最大值

$\Omega$ 是强迫力的角频率.

(2) 方程 $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\Omega t$

的通解 $x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \Phi') + A\cos(\Omega t + \Phi)$

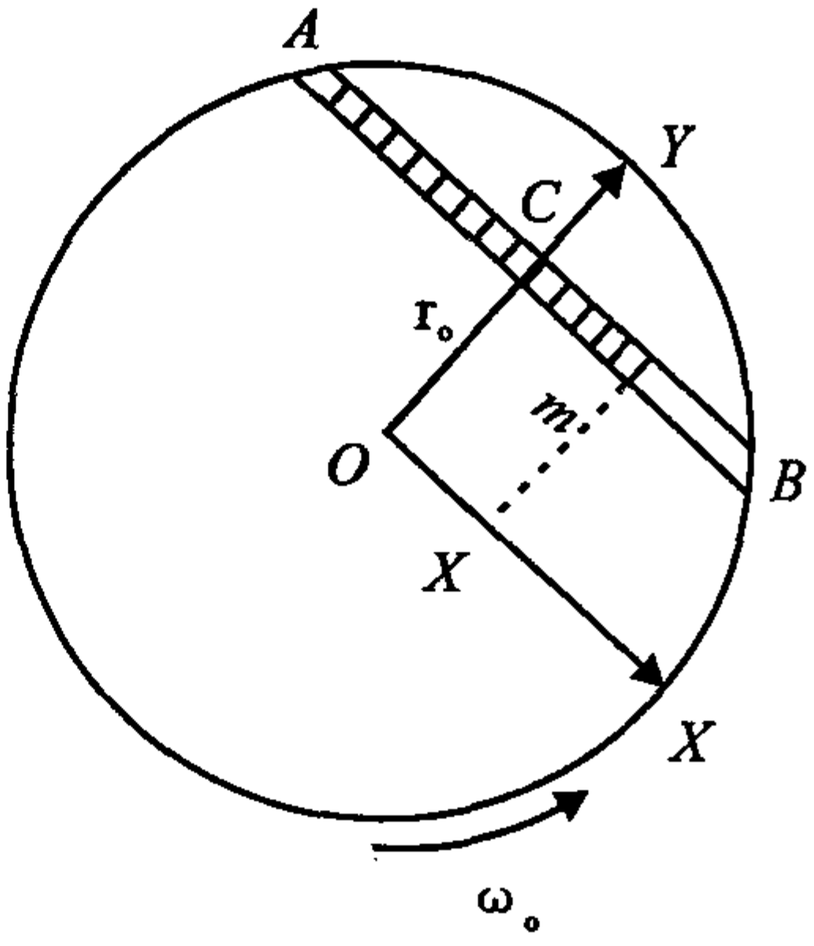
第一项 $A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \Phi')$ 是随时间的增长而衰减掉了,所以强迫振动的稳定解:

$$xA\cos(\Omega t + \Phi)$$

振幅的频率响应为

$$A = \frac{(F/m)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$$

**115.(北京大学 2000 年)** 水平圆盘绕过其中心 $O$ 的垂直轴以 $\omega_0$ 匀角速转动,弹簧振子$(m, k)$ 限制在盘上的一条管道 $AB$ 内运动,弹簧一端固定于 $A$ 点,弹簧处于自然长时,$m$ 处于$AB$ 中的中点 $C$,已知 $OC$、$r_0$,$xy$ 为固定在圆盘上的直角坐标系,$OX$ 轴与 $AB$ 平行.




(1) 以圆盘为参考系,用 $m$、$\omega_0$、$r_o$、$x$ 、$\frac{dx}{dt}$ 等表示出 $m$ 所受的惯性离

心力和柯利奥里惯性力.

(2) 不计摩擦,写出 $m$ 的坐标 $x$ 所满足的运动微分方程,问在何条件下,$m$ 可作简谐振动?

**本题考点**:惯性离心力、柯利奥里惯性力、振动方程

**解**:(1) $r = \sqrt{r_0^2 + x^2}$

$$V_r = \frac{dr}{dt} = \frac{x\dfrac{dx}{dt}}{\sqrt{r_0^2 + x^2}} = \frac{xx}{\sqrt{r_0^2 + x^2}}$$

$$F_c = 2\omega_0 v_r m = \frac{2\omega_0 xx\ m}{\sqrt{r_0^2 + x^2}}, \text{方向} - \vec{\omega}_0 \times \vec{V}_r$$

$$F_{离} = m\omega_0^2 r = m\omega_0\sqrt{r_0^2 + x^2}$$

$$(2)\, m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \frac{2\omega_0 x\ xm}{\sqrt{r_0^2 + x^2}}\frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + x^2}} + m\omega_0\sqrt{r_0^2 + x^2}\frac{x}{\sqrt{r_0^2 + x^2}}$$

$$= -kx - \frac{2\omega_0 xx\ mr_0}{r_0^2 + x^2} + m\omega_0 x$$

可作简谐振动的条件　$\dfrac{2\omega_0 xx\ m}{r_0^2 + x^2} + m\omega_0 x = c_1 x + c_2$

即 $\dfrac{2xx\ r_0}{r_0^2 + x^2} + x = c_1 x + c_2$

$\dfrac{dx}{dt}$ 项的 0 的条件 $r_0 = 0$

因此作简谐振动的条件 $r_0 = 0$

**116.(清华大学 2002 年)**　一个单摆长 4 米,作振幅 0.2 米的摆动.求:(1) 摆锤到达最低点时的速度;(2) 它在最高点时的加速度.

本题考点:单摆运动的角频率,速度、加速度最大值公式.

解:单摆为简谐振动,其振动角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9.8}{4}} = 1.57 \cdot s^{-1}$$

(1) 摆锤到达最低点时,速度达到最大值,则

$$V_{max} = A\omega = 0.2 \times 1.57$$

$$= 0.314\ m \cdot s^{-1}$$

(2) 它在最高点时,加速度达到最大值,则

$$a_{max} = A\omega^2 = 0.2 \times 1.57^2$$

$$= 0.493\ m \cdot s^{-1}$$

**117.(武汉理工大学 2003 年)** 一弹簧振子作简谐振动,总能量为 $E$ .如果谐振动的振幅增加 3 倍,振子的质量增加 4 倍,则它的总能量变为_____.

本题考点:弹簧振子振动的能量公式.

解:$\frac{E}{E'} = \frac{\frac{1}{2}KA^2}{\frac{1}{2}K \cdot (3A)^2} = \frac{1}{9}$

空处填:$9E$

**118.(武汉理工大学 2003 年)** 已知两谐振动的振动方程分别为 $x_1 = 2\cos(5t + \frac{3}{4}\pi)$, $x_2 = 2\cos(5t - \frac{\pi}{4})$,则 $x = x_1 + x_2$ 的振幅为_____.

本题考点:同方向同频率,相位差恒定的两谐振动合成的合振幅公式.

解:$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\phi}$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2 + 2 \times 2 \times 2 \times \cos(-\frac{\pi}{4} - \frac{3}{4}\pi)} = 0$$

空外填 0

**119.(武汉理工大学 2003 年)**　弹簧振子按 $x = 2\cos(2\pi t + \pi)(SI)$ 作谐振动,求:

(1) 振动周期、振幅及速度、加速度的最大值;

(2) 振子由 $-\sqrt{2}m$ 处运动至$\sqrt{3}m$ 处所须的最短时间.

**本题考点:**简谐振动的振动方程及旋转矢量法模拟.

**解:**(1) 由振动方程 $x = 2\cos(2\pi t + \pi)$

可知 $A = 2m, \omega = 2\pi rad \cdot s^{-1}, \phi = \pi$

而 $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1(s)$

$v_{max} = A\omega = 2 \times (2\pi)^2 = 12.56(m \cdot s^{-1})$

$a_{max} = 2\omega^2 = 2 \times (2\pi)^2 = 78.88(m \cdot s^{-2})$

(2) 由旋转矢量法可知:$\Delta t = \dfrac{\Delta\theta}{\omega} = \dfrac{\frac{7}{12}\pi}{2\pi} = 0.29(s)$.

**120.(清华大学 2002 年)**　混沌理论的三个要素是什么?"非线性确定性系统的长期不可预测性"的原因是什么?举一例说明.

**本题考点:**混沌理论三要素

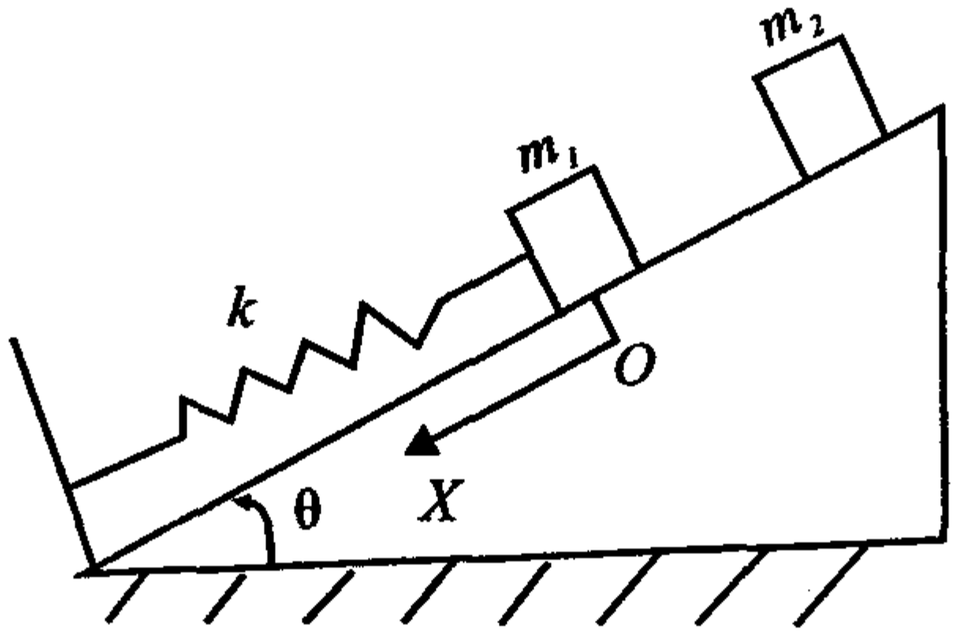
**解:**混沌理论的三个要素是(1) 具有蝴蝶效应 —— 对初值的极端敏感性;(2) 存在奇异吸引子;(3) 具有分形结构,—— 无穷嵌套的自相似性.非线性确定性系统的长期不可预测的,其原因是系统对初值的极端敏感性.例如天气预报,南半球某地的一只蝴蝶拍打一下翅膀所引起的微小气流,几星期后可能变成席卷北半球某地的一场龙卷风.

**121.(中山大学 2002 年)**　倾角为 $\theta$ 的光滑斜面上放有一根劲度系数为 $k$ 的轻弹簧,底端固定,上端固连着一个质量为 $m_1$ 的静止物体.另一个质量为 $m_2$ 的物体自斜面顶点由静止下滑路程 $l$ 后,与 $m_1$ 发生完全非弹性碰撞(见图示).

(1) 碰撞后这系统作简谐振动吗?

(2)设 $m_1 = m_2 = \frac{1}{98}k, l = 0.2m, \theta = 30^0$,试写出振动表达式.

**本题考点**:牛顿定律、碰撞、机械能守衡、机械振动、振动方程




**解**:(1)$m_2$ 自顶端由静止下滑与 $m_1$ 发生完全非弹性碰撞前的速度大小由机械能守恒定律得

$$\frac{1}{2}m_2v_0^2 = mgl\sin\theta$$

$m_2$ 与 $m_1$ 发生碰撞时,沿斜面方向上的作用时间很短,相互作用力远大于弹簧弹力与重力的分力,故其受斜面方向上的合外力为零,由动量守恒得两物体一起开始运动的速度大小为 $v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}v_0$.

选取碰撞时 $m_1$ 所在位置为坐标原点,沿斜面向下为 $x$ 轴正向.设弹簧开始的压缩量为 $x_0$,有 $kx_0 = m_1g\sin\theta \Rightarrow x_0 = \frac{m_1g\sin\theta}{k}$

由于只有重力与弹簧弹力做功,故机械能守恒.若令 $O$ 点的重力势能为零势面,$m_1$ 与 $m_2$ 共同运动到任意 $x$ 处时由机械能守恒有

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_1^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}k(x + x_0)^2 - (m_1 + m_2)g(x + x_0)\sin\theta$$

对上式求导得

$$(m_1 + m_2)\frac{d^2x}{dt^2} + k(x - \frac{m_2g\sin\theta}{k}) = 0$$

令 $x' = x - \frac{m_2 g\sin\theta}{k}$，$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$ 上式变为

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{k}{(m_1 + m_2)}x' = 0$$

可见 $x'$ 随时间的变化关系必为正弦或余弦形式，因而该系统作简谐振动，其振动周期为

$$t = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}$$

(2) 若 $m_1 + m_2 = \frac{1}{98}k$，则系统的振动圆频率为

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \sqrt{49} = 7 \quad (\text{rad/s})$$

振动的平衡位置距原点下 $x_1 = \frac{m_2 g\sin\theta}{k}$

$t = 0$ 时，谐振动初始速率为

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}v_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2gl\sin\theta} = 0.7(\text{m/s})$$

由初始条件求得振幅

$$A = \sqrt{x_1^2 + \frac{v_1^2}{\omega_0{}^2}} = \sqrt{x_1^2 + \frac{0.7^2}{49}} = \frac{\sqrt{5}}{20}(\text{m})$$

又 $v_1 = 0.7\text{m/s} > 0$，则 $\tan\varphi_0 = \frac{-v_1}{x_1\omega_0} = 2$

将上述数值代入 $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ 得

$$x(t) = 0.05 + \frac{\sqrt{5}}{10}\cos(7t + \tan^{-1}2)(\text{m})$$

**122.（华东理工大学2002年）** 某物体作简谐振动，其振动方程为 $x = 12\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})\text{cm}$，求物体从初始位置运动到 $x = -6\text{cm}$ 处所需要的最短时间.

**本题考点：**简谐振动、旋转矢量法

**解**:由 $x = 12\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})$ 知,其运动初始速度 $v_0 = 12\pi\sin\frac{\pi}{3} > 0$. 由旋转矢量法得 $t = 0$ 时,物体的初位相 $\varphi_0 = -\frac{\pi}{3}$,位于第四象限,且 $-6 = 12\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})$,则

$$t_{\min} = \frac{7}{6} \text{ 秒}.$$

**123.(北京理工大学 2001 年)** 当质点以频率 $\nu$,作简谐振动时,它的动能的变化频率为

A.$\nu$　　B.$2\nu$　　C.$4\nu$　　D.$\frac{1}{2}\nu$

**本题考点**:质点的振动频率、与动能变化频率关系.

**解**:$x = A\cos(2\pi\nu t + \varphi)$

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(2\pi\nu t + \varphi)$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2A^2\frac{1 - \cos2(2\pi\nu t + \varphi)}{2}$$

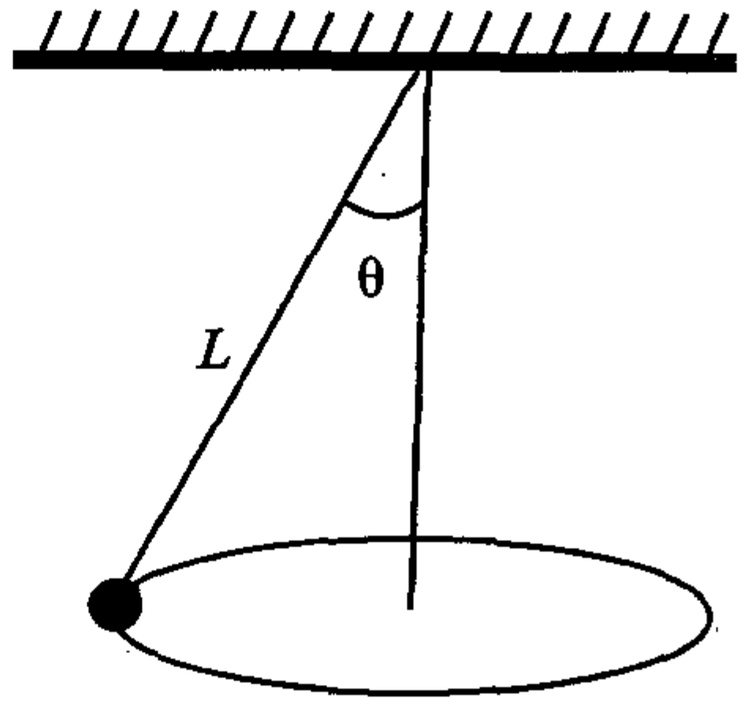
因此频率为 $2\nu$

答案选 B

**124.(大连理工大学 2000 年)** 一个圆锥摆的摆线长为 $L$,摆线与垂直方向的夹角恒为 $\theta$(如图所示),则摆捶转动的周期为

A.$\sqrt{\frac{L}{g}}$　　B.$\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$

C.$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$　　D.$2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$




**本题考点**:向心力

**解**:绳对摆锤的拉力 $T$ 和摆锤的重力 $mg$ 的合力为 $mgth\theta$ 提供摆作圆周运动的向心力

$$mg\tan\theta = mR\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g\tan\theta}{R}}$$

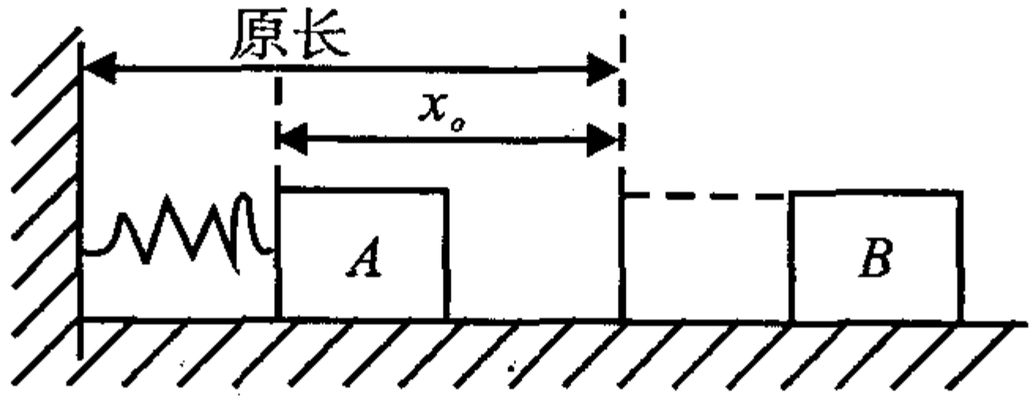
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g\tan\theta}} \qquad R = L\sin\theta$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$$

答案选 D

**125.**(北京市 1999 年)　一质量为 $m_A = 0.1\text{kg}$ 的物体 $A$ 与一轻弹簧相连放在光滑水平桌上,弹簧的倔强系数 $k = 90\text{N/m}$,现在用力推 $A$,从而弹簧被压缩了 $x_0 = 0.1\text{m}$,在弹簧的原长处放有质量 $m_B = 0.2\text{kg}$ 的物体 $B$,如图所示,由静止释放物体 $A$ 后,$A$ 将与静止的物体 $B$ 发生弹性碰撞.求碰撞后 $A$ 物体还能把弹簧压缩多大距离.

**本题考点:**动量守恒定律,机械能守恒定律




**解:**$A$ 从初位置到平衡位置时机械能守恒:

$$\frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}m_Av_{A_0}^2$$

$$v_{A_0} = \sqrt{\frac{kx_0^2}{m}} = \sqrt{\frac{90\times 0.1^2}{0.1}} = 3(\text{m/s})$$

在原长处 $A$ 与 $B$ 的碰撞过程中,动量及机械能守恒

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}m_Av_{A_0}^2 &= \frac{1}{2}m_Av_A^2 + \frac{1}{2}m_Bv_B^2\\ m_Av_{A_0} &= m_Av_A + m_Bv_B\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}V_A = \dfrac{m_A - m_B}{m_A + m_B}V_{A_0} = -1(\text{m/s})\\ V_B = \dfrac{2m_A}{m_A + m_B}V_{A_0} = 2(\text{m/s})\end{cases}$$

设碰撞后,$A$ 压缩弹簧的最大值为 $\Delta x$,

则$\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}m_Av_A^2 \Rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{m_Av_A^2}{k}} = \sqrt{\frac{0.1 \times 1^2}{90}} = \frac{1}{30}(\text{m})$

**126.(北京理工大学2001年)** 一个轻弹簧在60N的拉力作用下可伸长30cm.现将一物体悬挂在弹簧的下端并在它上面放一小物体,它们的总质量为4kg.待其静止后再把物体向下拉10cm,然后释放.问:

(1) 此小物体是停在振动物体上面还是离开它?

(2) 如果使放在振动物体上的小物体与振动物体分离,则振幅$A$需满足何条件?二者在何位置开始分离?

**本题考点:**弹簧振子振动

**解:** $F = -kx$

$$k = \frac{60}{0.3} = 200$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x = -\frac{200}{4}x = -50x$$

$x \leqslant 10\text{cm}, x < g$ 不分开.

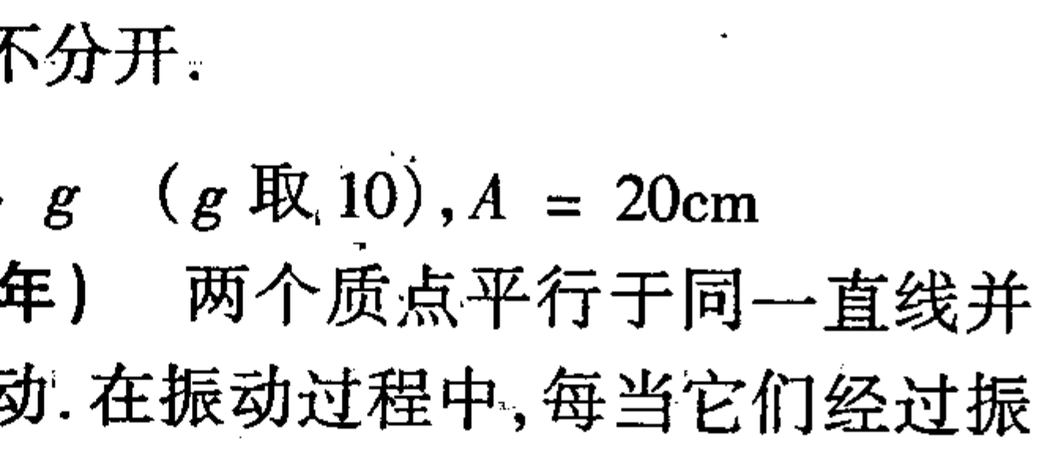
分离条件 $a = \ddot{x} > g$ ($g$取10), $A = 20\text{cm}$

**127.(北京邮电大学2002年)** 两个质点平行于同一直线并排做同频率、同振幅的简谐振动.在振动过程中,每当它们经过振幅的一半的地方时相遇,而运动方向相反.它们的相位差$\Delta\varphi =$_____.

**本题考点:**旋转矢量

**解:** $\Delta\varphi = \frac{2}{3}\pi$(或120°)

空处填$\frac{2}{3}\pi$(或120°)




**128.(清华大学2000年)**

在横截面为$S$的$U$形管中有适量液体,液体总长度为$L$,质量为$m$,密度为$\rho$.管子垂直放置,两边的液面起始高度差为$2A$,问

(1) 如果忽略液体和管壁间的摩擦,推导出液体的运动方程.

(2) 液面简谐振动位移随时间的表达式是什么?频率多大?

(3) 如果考虑液体和管壁的摩擦,摩擦的阻尼系数为 $\gamma$(摩擦力大小与速率之比).问此时的准周期运动的频率是多少?从考虑摩擦力开始,多长时间后液面的振幅减为原来的一半?

**本题考点:**简谐振动和阻尼振动

**解:**(1) 建立如图的坐标系,取平衡位置为原点,在液体高度差为 $2x$ 时

$$F = -2\rho g x s$$

$$m = L\rho S$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2\rho g x s$$

运动方程 $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2g}{L}x$

(2) $\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \left(\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}\right)$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

在如图的坐标中,由初始条件得

$$\varphi = 0$$

所以

$$x = A\cos\omega t$$

频率 $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{L}}$

(3) 有摩擦时 $F = -2\rho g s x - \gamma\frac{dx}{dt}$

微分方程 $m\frac{dx^2}{dt^2} = -2\rho g s x - \gamma\frac{dx}{dt}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2g}{L}x + \frac{\gamma}{L\rho S}\frac{dx}{dt} = 0$$

令可得 $\omega_0^2 = \frac{2g}{L}, 2\beta = \frac{\gamma}{L\rho S}$ 可得

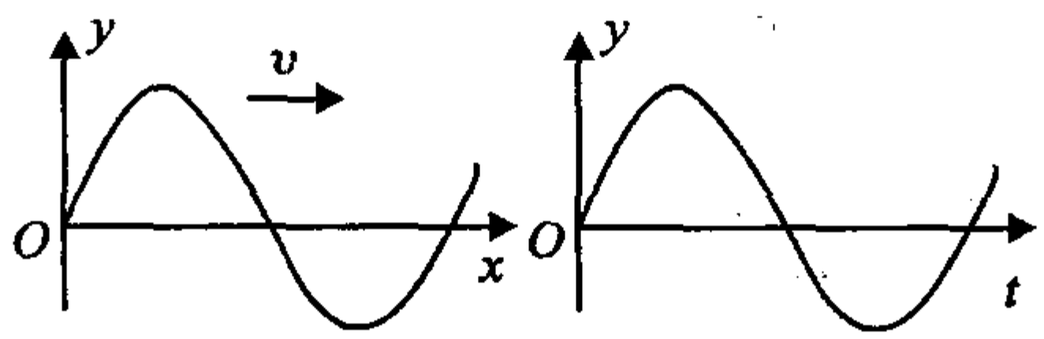
$$x = A_0 e^{\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

准周期运动的频率 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{2g}{L} - \left[\frac{\gamma}{2L\rho S}\right]^2}$

$$A_0 e^{-\beta t} = \frac{1}{2}A_0$$

$$t = \frac{1}{\beta}\ln 2 = \frac{2L\rho S}{\gamma}\ln 2$$

**129.**(北京市 1999 年)　图($a$)表示 $t = 0$ 时的余弦波的波形图,波沿 $X$ 轴正向传播;图($b$)为一余弦振动曲线.则图($a$)中所表示的 $x = 0$ 处振动的初相位与图($b$)所表示的振动的初相位:




(a)　　(b)

A. 均为零;　　B. 均为$\frac{\pi}{2}$;

C. 均为 $-\frac{\pi}{2}$;　　D. 依次分别为和 $-\frac{\pi}{2}$ 和 $-\frac{\pi}{2}$;

$E$. 依次分别为 $-\frac{\pi}{2}$ 和$\frac{\pi}{2}$.

**本题考点:**初相位、波形图、振动曲线

**解:**答案选 D

**130.**(东北大学 2002 年)　一弹簧振子放置在光滑的水平面上,弹簧的弹性系数是 $k$,物体的质量为 $m$,$t = 0$ 时将弹簧从自由状态拉长 $x_0$ 距离,之后放开,使弹簧振子作简谐振动,求振子的振动方程.(取平衡位置为坐标原点)

**本题考点:**振动方程

**解**:角频率 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

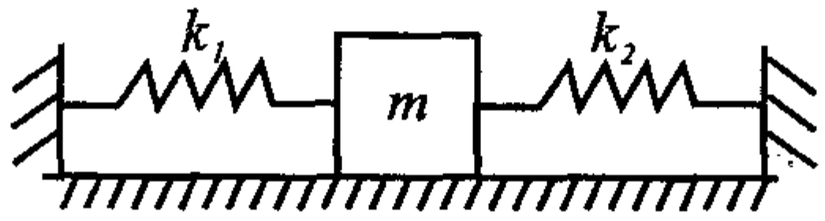
$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

因 $t = 0$ 时 $x = x_0, v = 0$ 的初试条件得

$\varphi_0 = 0, A = x_0$

$$x = x_0\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$$

**131.(辽宁大学 2001 年)**　如图所示,质量为 $m$ 的物体由倔强系数 $k_1$ 和 $k_2$ 的两个轻弹簧连接,在光滑导轨上作微小振动,则系统的振动频率为




A. $\nu = 2\pi\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$　　B. $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$

C. $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{mk_1k_2}}$　　D. $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1k_2}{m(k_1 + k_2)}}$

**本题考点**:胡克定律、牛顿定律、弹簧振子

**解**:设 $m$ 离开平衡位置的位移为 $x$,此时物体所受合力为

$$F = -k_1x - k_2x = -(k_1 + k_2)x$$

由牛顿第二定律有:$m\ddot{x} = -(k_1 + k_2)x$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

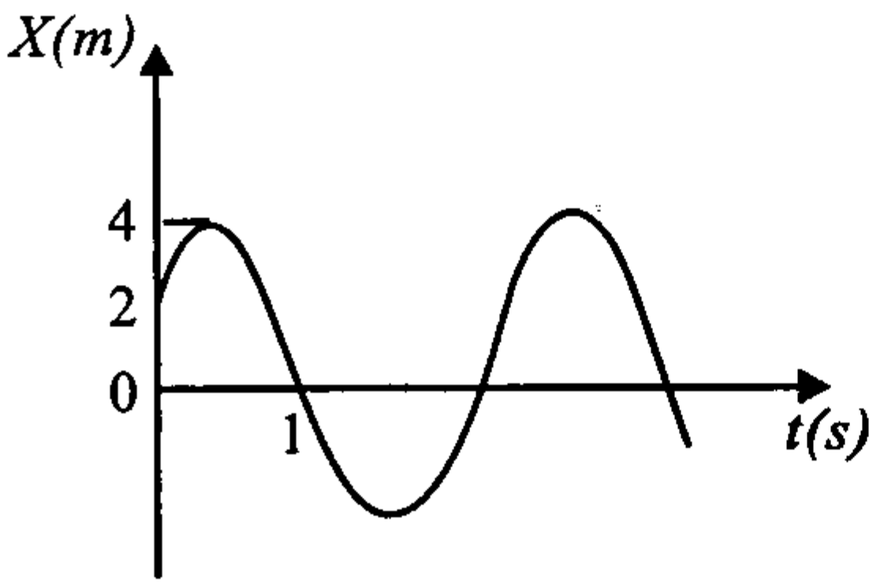
$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

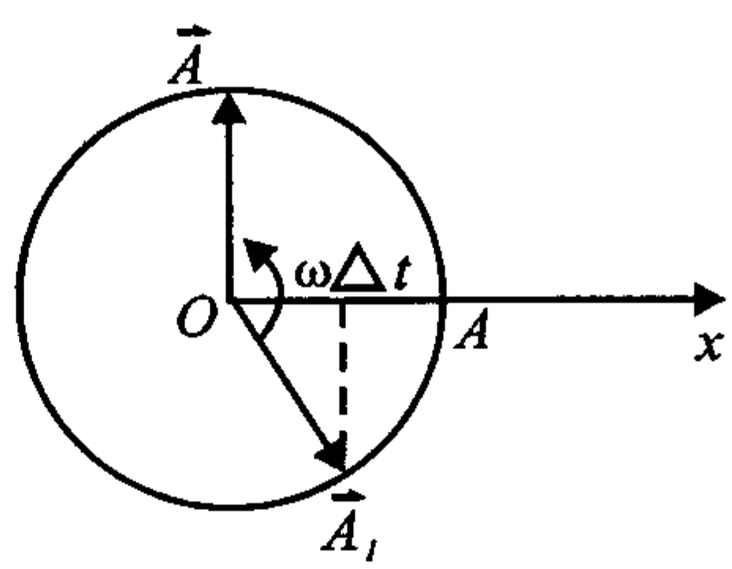
答案选 B

**132.(辽宁大学 2001 年)**　一简谐振动曲线如图所示,则振动周期是

A. 2.62 $s$　　B. 2.40 $s$　　C. 2.20 $s$　　D. 2.00 $s$

本题考点：简谐振动、旋转矢量、相位




解：作对应的旋转矢量图，$\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$ 分别为 $t_1 = 0s$，$t_2 = 1s$ 时对应的旋转矢量. 由图可知：

$$\omega\Delta t = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi$$

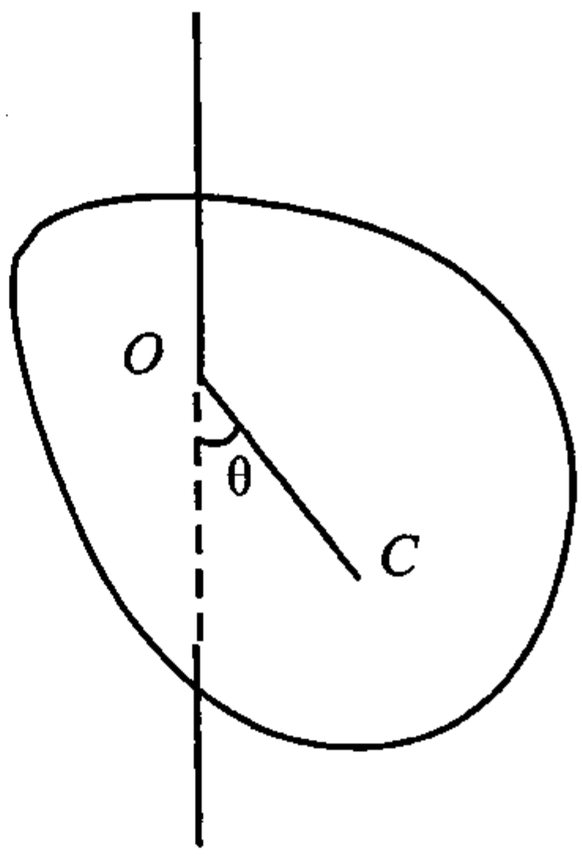
$$\Delta t = t_2 - t_1 = 1s$$

$$\omega = \frac{5}{6}\pi(rads^{-1})$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{12}{5} = 2.4(s)$$

答案选 B

**133.（南京师范大学 1998 年）** 如图所示，一个可绕固定轴 $O$ 摆动的刚体称为复摆，设此刚体的重点为 $C$，质量为 $m$，$\overline{OC} = l$，刚体对 $O$ 的转动惯量为 $I$. 若复摆的摆动角 $\theta$ 为小量时，试定性说明（不需求解微分方程）：(1) 复摆作简谐振动；(2) 其振动园频率为 $\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$，（$g$ 为重力加速度）.(3) 复摆的运动轨迹为 $\theta = A\cos(\omega t + \alpha)$，$A$，$\alpha$ 均为常数.(4) 当 $x = 0$ 时，$\theta = \theta_0$，$\omega = \omega_0$，则有 $tg\alpha = \frac{\omega_0}{\omega\theta_0}$.



本题考点:转动定律与简谐振动的计算

解:(1) 当复摆的摆角很小时,由转动定律得

$$-mgl\sin\theta \approx -mgl\theta = I\theta''_{\alpha}$$

即$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\theta = 0$

令 $\omega^2 = \frac{mgl}{I}$ 为复摆的质心绕转动点摆动的圆频率.可见复摆作小角摆动时受的外力矩的大小与其角位移大小成正比,而方向相反,则其一定作简谐振动.

(2) 振动的圆频率 $\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$

(3) 令 $\theta(t) = \theta_m\cos(\omega t + \varphi_0)$,则当

$t = 0$ 时,$\theta = \theta_0$,角速度大小为

$$\omega_0 = -\theta_m\omega\sin\varphi_0$$

又　　$\theta_0 = \theta_m\cos\varphi$($\theta_m$ 为最大角位移量)

可得　　$tan\varphi_0 = -\frac{\omega_0}{\theta_0\omega} = -\frac{\omega_0}{\theta_0\sqrt{\frac{mgl}{I}}}$

**134.(南京师范大学 1999 年)** 一质量为 $m$,半径为 $R$ 的均匀细圆环悬挂在支点 $O$ 上,若圆环绕支点发生小偏角 $\varphi_0$,而后绕支点作往复摆动,试证明细圆环做简谐振动.

本题考点:转动定律与简谐振动

证明:细环的半径为 $R$,质量为 $m$,其对称中心在圆心处,开始时有一小偏角 $\varphi_0$,圆环的转动惯量 $I_0 = I_C + mR^2 = 2mR^2$,依转动定律有

$$-mgR\sin\theta = I_0\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$\theta$ 很小时,$\sin\theta = \theta$

令 $\omega^2 = \frac{g}{2R}$ 得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{2R}\theta = 0$$

由观察法知，$\theta$ 随时间 $t$ 的变化为正弦或余弦函数 $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t + \varphi_0)$，细环做简谐振动.

**135.（南京师范大学 2000 年）** 试从能量关系证明：单摆作微小振动时是作简谐振动.

**本题考点：**机械能守恒、简谐振动

**解：**以悬挂点为势能零势面，摆长为 $l$，不计阻力，小球质量为 $m$，开始时小球偏离竖直方向的夹角为 $\theta_0$，从静止开始摆动，设其摆动到与竖直方向夹角为 $\theta$ 时 $m$ 的速率为 $v$. 则在摆动过程中，只有重力做功，故其机械能守恒

$$-mgl\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2 = -mgl\cos\theta_0$$

上式对 $t$ 求导有

$$mv\frac{dv}{dt} + mgl\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = 0$$

又 $v = l\frac{d\theta}{dt}$ 且微小摆动时必有 $\sin\theta = \theta$，故 $l^2m\frac{d^2\theta}{dt^2} + mgl\theta = 0$

利用初始条件 $t = 0$ 时，$\theta = \theta_0$，及 $\omega_0 = \frac{d\theta}{dt} = 0$ 得上述方程的解为

$$\theta = \theta_0\cos(\omega t + \varphi_0)$$

故小球的角位移随时间作余弦形式变化，即做简谐振动.

**136.（武汉理工大学 2003 年）** 由频率 $\nu$ 在 $y$ 轴方向作谐振动的波源所产生的横波，沿着 $x$ 轴正负方向以速度 $u$ 前进. 设波源位于坐标原点，沿 $x$ 轴正方向前进的波动方程为 $y = A\cos2\pi\nu(t -$

$\frac{x}{u}$).求:

(1) 沿 $x$ 轴负方向前进的波动方程;

(2)$x = L$ 处质点的振动方程和速度.

**本题考点:**简谐波的波动方程.

**解:**(1) 由于沿 $x$ 轴负向传播,故波动方程为:

$$y_{-} = A\cos 2\pi\nu\left(t + \frac{x}{u}\right)$$

(2)$x = L > 0$ 故

$$y_L = y\mid_{x=L} = A\cos 2\pi\nu\left(t - \frac{L}{u}\right)$$

$$v_L = \frac{dy_L}{dt} = -2\pi\nu A\sin 2\pi\nu\left(t - \frac{L}{u}\right).$$

**137.(武汉理工大学 2003 年)** 在介质中传播一平面波,沿着波的传播方向观察相距为 34m 的两点 $A$ ,$B$.发现 $B$ 点相位较 $A$ 点落后 $2\pi$.已知振源的频率为 10Hz,则波速为_____.

**本题考点:**沿波线方向两点相位差与坐标差的关系.

**解:**由 $\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$,得

$$\lambda = -\frac{2\pi}{\Delta\varphi}\Delta x = -\frac{2\pi}{-2\pi}\times 34 = 34(\mathrm{m})$$

而 $u = \nu\lambda = 10\times 34 = 340\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

空处填 $340\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

**138.(北京理工大学 2001 年)** 一平面简谐机械波在 $t$ 时刻的波形曲线.若此时 $A$ 点处媒质质元的振动动能在增大,则

A.$A$ 点处质元的弹性势能在减小

B. 波沿 $x$ 轴负方向传播

C.$B$ 点处质元的振动动能在减小

D. 各点的波的能量密度都不随时间变化

**本题考点:**平面波振动动能与位移关系

**解:**$A$ 向平衡位置运动时,媒质质元的动能增大,说明波向 $x$ 轴及负方向传播.

答案选 B

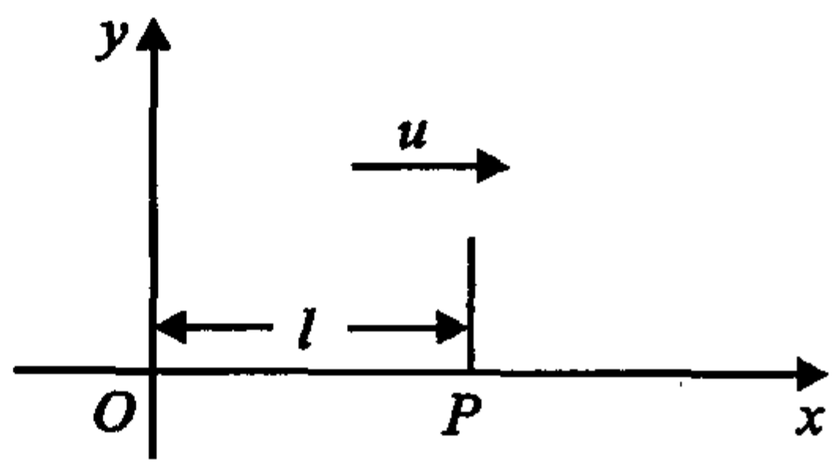
**139.(北京理工大学 2001 年)** 一简谐波沿 $x$ 轴方向传播,波的表达式为 $y = 0.02\cos(2\pi t + \pi x)(SI)$,则 $x = -1m$ 处 $P$ 点的振动方程为_____.

**本题考点:**波的某一点的振动方程

**解:**把 $x = -1m$,代入波动方程即是 $y = 0.02\cos(2\pi t - \pi)$

空格填:$y = 0.02\cos(2\pi t - \pi)$

**140.(北京理工大学 2002 年)** 如图所示,一平面简谐波沿 $x$ 轴正向传播,已知 $P$ 点的振动方程为 $y = A\cos(\omega t + \phi_0)$,则波动方程为




A. $y = A\cos[\omega(t - \frac{x - l}{u}) + \phi_0]$

B. $y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \phi_0]$

C. $y = A\cos\omega(t - \frac{x}{u})$

D. $y = A\cos[\omega(t + \frac{x - l}{u}) + \phi_0]$

**本题考点:**波动方程的建立

**解:**答案选 A.

**141.(南开大学 2002 年)** 在一个两端固定的 3.0 米长的弦上激发起了一个驻波,该驻波上有三个波腹,其振幅为 1.0cm,弦上的波速为 100m/s.(1) 试计算该驻波的频率;(2) 若把它视为入射

波与反射波叠加而成的理想驻波，试写出产生此驻波的两个行波的表达式.

**本题考点：**波动方程、驻波.

**解：**(1) 两固定端为波节，其间有3个波腹，两端间距为三个半波长，

$$\lambda = 2m$$

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{100}{2} = 50(H_z)$$

(2) 设任一波腹所在处为坐标原点，入射波传播方向沿 $x$ 轴正向，

驻波的振幅为 $2A_0 = 1.0\text{cm}$，$A_0 = 0.5\text{m}$

$$\text{入射波：} y = A_0\cos\omega(t - \frac{x}{u}) = 0.5x\cos[100\pi(t - \frac{x}{100})]\text{cm}$$

$$\text{反射波：} y = A_0\cos\omega(t + \frac{x}{u}) = 0.5x\cos[100\pi(t + \frac{x}{100})]\text{cm}$$

**142.(北京市 1999 年)**　一平面简谐行波在弹性媒质中传播，在媒质质元从平衡位置运动到最大位移处的过程中

A. 它的动能转换成热能；

B. 它的势能转换成动能；

C. 它从相邻的一段质元获得能量，其能量逐渐增大；

D. 它把自己的能量传给相邻的一段质元，其能量逐渐减少.

**本题考点：**波的能量

**解：**波在弹性媒质中传播伴随着能量在媒质中的传播，平面简谐行波在弹性媒质质元中的动能和势能随时间的变化是同相位的，即当质元处在平衡位置时，其运动动能和势能同时具有最大值，而到达最大位移处，其动能和势能同时具有最小值. 因而此过程中该质元的能量传给了相邻的一段质元.

答案选 D

**143.(北京邮电大学 1999 年)** 在弦线上有一简谐波,其表达式是

$$y_1 = 2.0 \times 10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{0.02} - \frac{x}{20}) + \frac{\pi}{3}](SI)$$

为了在此弦线上形成驻波,并且在 $x = 0$ 处为一波节,此弦上还应有一简谐波,其表达式为:

A. $y_2 = 2.0 \times 10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{0.02} + \frac{x}{20}) + \frac{\pi}{3}](SI)$

B. $y_2 = 2.0 \times 10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{0.02} + \frac{x}{20}) + \frac{2\pi}{3}](SI)$

C. $y_2 = 2.0 \times 10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{0.02} + \frac{x}{20}) + \frac{4\pi}{3}](SI)$

D. $y_2 = 2.0 \times 10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{0.02} + \frac{x}{20}) - \frac{\pi}{3}](SI)$

**本题考点:**驻波

**解:** $y_1 = 2.0 \times 10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{0.02} - \frac{x}{20} + \frac{\pi}{3})](SI)$

原点 $x = 0$ 处的初始 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ 要形成波节,另一波的初位相应为

$$\varphi_2 = \varphi + \pi = \frac{4}{3}\pi$$

因为波 $y_2$ 向 $x$ 轴负方向传播,所以波的方程

$$y_2 = 2.0 \times 10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{0.02} + \frac{x}{20}) + \frac{4\pi}{3}]$$

答案选 C

**144.(北京邮电大学 1999 年)** 设入射波的表达式为 $y_1 = A\cos2\pi(\nu t + x/\lambda)$,波在 $x = 0$ 处发生反射,反射点为固定端,则形成的驻波表达式为_____.

**本题考点:**驻波条件

**解**:在 $x = 0$ 固定端为波节即反射波与 $y_1$ 反相,

向正方向传播为　$y_2 = A\cos[2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda}) + \pi]$

空处填:$y_2 = A\cos[2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda}) + \pi]$

**145.(北京理工大学 2002 年)** 一平面简谐波,波速为 6.0m/s,振动周期为 0.1s,则波长为_____.在波的传播方向上,有两质点的振动相位差为 5π/6,此两质点相距为_____.

**本题考点**:相位差与波程差之关系

**解**:$\lambda = uT = 6.0 \times 0.1 = 0.6(\mathrm{m})$

两质点相距　$\Delta x = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \Delta\varphi = \frac{0.6}{2\pi} \cdot \frac{5\pi}{6} = 0.25(\mathrm{m})$

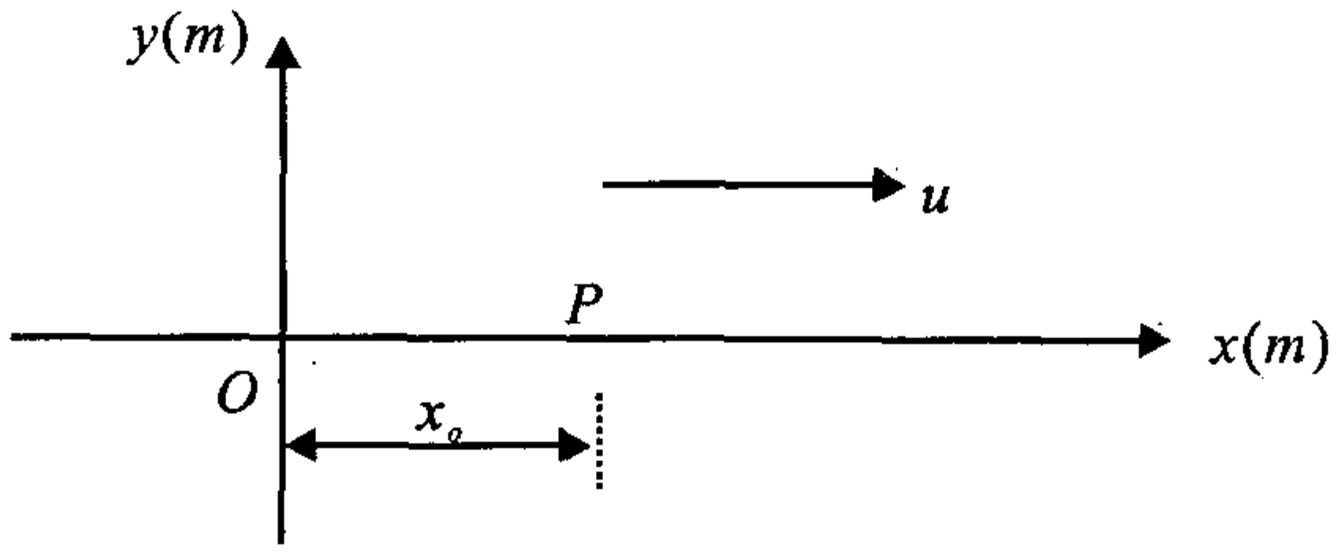
空处填:0.6m　　0.25m

**146.(北京邮电大学 1999 年)** 如图所示,一简谐波 $X$ 轴正向传播,波速 $u = 500\mathrm{m/s}$, $P$ 点的振动方程为

$$y = 0.03\cos(500\pi t - \frac{1}{2}\pi)(SI), \quad \overline{OP} = x_0 = 1m.$$

(1) 按图所示坐标系,写出相应的波的表达示;

(2) 在图上画出 $t = 0$ 时刻的波形曲线.




**本题考点**:波动方程和用波动方程画波形曲线

**解**:(1) $\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{500}{250} = 2m$

$$y = 0.03\cos(500\pi t - (\frac{x-1}{2})2\pi - \frac{1}{2}\pi)$$

$$y = 0.03\cos(500\pi t - \pi x)$$

(2) $y(t = 0) = 0.03\cos\pi x$

**147.(北京邮电大学 2002 年)** 海面上波浪的波长为 120 米，周期为 10 秒，一只快艇以 24 米／秒的速度迎浪开行，则每过_____秒快艇撞击浪峰一次.

**本题考点:** 多普勒效应

**解:** 因 $v = 24(\text{m/s}), u = \dfrac{120}{10} = 12(\text{m/s})$

$$u' = 12 + 24 = 36\text{m/s}$$

$$\nu' = \frac{u'}{\lambda} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10} \qquad T = \frac{1}{\nu'} = \frac{10}{3}(\text{s})$$

空处填 $\dfrac{10}{3}$

**148.(清华大学 2001 年)** 一个音响，当音量调得过大时会产生啸叫，话筒和音箱的距离为 $L$，啸叫的频率大约是_____.

**本题考点:** 驻波

**解:** $\dfrac{\dfrac{L}{\lambda}}{2} = n + \dfrac{1}{2}$

$$\lambda = \frac{4L}{2n+1}$$

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{2n+1}{4L}u(n \text{ 为整数}, u \text{ 为声速})$$

空处填 $\dfrac{2n+1}{4L}u(n \text{ 为整数}, u \text{ 为声速})$

**149. (清华大学 2000 年)** 假设在潜艇上安装了一个声纳，潜艇离开基地到别处游弋.潜艇发现一个不明物体，反射回来的声波频率比发射出的声波频率要低，那么：

A. 不明物体在潜艇的前方，速度与潜艇同向，但比潜艇大；

B. 不明物体在潜艇的前方，速度与潜艇同向，但比潜艇小；

C. 不明物体在潜艇前进的方向不动.

**本题考点:**多普勒效应

**解:** $v' = \frac{u + u_B}{u - u_s}v, \frac{u + u_B}{u - u_s} < 1$

因为 $u_B > 0$,因此必须 $u_s < 0$,而 $| u_s | > | u_B |$

答案选 *A*

**150.(辽宁大学 2001 年)** 一横波的波动方程是 $y = 0.02\sin 2\pi(100t - 0.4x)(SI)$, 则振幅是 _____, 波长是 _____,频率是 _____,波的传播速度是_____ .

**本题考点:**波动方程

$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

**解:**与波动方程

$$y = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

相比较得

$A = 0.02\text{m}, \omega = 200\pi$

$$\frac{\omega}{u} = 2\pi \times 0.4 = 0.8\pi \Longrightarrow = \frac{\omega}{0.8\pi} = \frac{200\pi}{0.8\pi} = 250(\text{m/s})$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{200\pi}{2\pi} = 100(H_Z)$$

$$\lambda = uT = \frac{u}{\nu} = \frac{250}{100} = 2.5(\text{m})$$

空处分别填: 0.02m ,2.5m ,100$H_Z$,250m/s

**151.(北京市 1999 年)** 频率为 500HZ 的波, 其速率为 350m/s,相位差为$\frac{2\pi}{3}$ 的两点间距为_____ .

**本题考点:**波程差与相位差之关系

**解:** $v = \lambda\nu \Longrightarrow \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{350}{500} = 0.7(\text{m})$

$$\Delta x = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}\lambda = \frac{3}{2\pi} \times 0.7 \doteq 0.23(\text{m})$$

空处填:0.23m

**152.(华东理工大学 2002 年)** 设入射波的表达式为 $y_{入} = A\cos 2\pi[\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}]$,在 $x = 0$ 处发生反射,反射点为一自由端,求:

(1) 反射波的表达式;

(2) 合成波的表达式.

**本题考点:**波的叠加与干涉、半波损失、驻波的波幅点与波节点

**解:**(1) 当反射端是自由端时无半波损失,则反射波的波动方程为

$$y_{反} = A\cos 2\pi[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}]$$

(2) 合成波的波动方程为

$$y = y_{入} + y_{反} = A\cos 2\pi[\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}] + A\cos 2\pi[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}]$$

$$= 2\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\cos(\frac{2\pi t}{T})$$

它是一个以振幅为 $2A\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$、频率为$\frac{2\pi}{T}$ 的振动方程

波腹点 $x_k = k\lambda, (k = 1,2,3,4\cdots\cdots)$

波节点$\frac{2\pi x_k}{\lambda} = 2\pi(k + \frac{1}{2}), (k = 0,1,2\cdots\cdots)$

即 $x_k = \frac{\lambda}{2}, \frac{3}{2}\lambda, \frac{5}{2}\lambda \cdots \frac{2k+1}{2}\lambda$

**153.(北京市 1999 年)** 在截面积为 $S$ 的圆管中,有一列平面简谐波在传播,其波的表达式为 $y = A\cos(\omega t - 2\pi\frac{x}{\lambda})$.管中波的平均能量密度是 $W$,则通过截面积 $S$ 的平均能流是_____.

**本题考点:**波的平均能流

解：$u = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\lambda\omega}{2\pi}$

平均能流为　$Wus = \frac{WS\lambda\omega}{2\pi}$

空处填：$\frac{WS\lambda\omega}{2\pi}$

**154.**（东北大学 2002 年）一平面简谐波以 400m/s 的波速在均匀媒质中沿一直线传播. 已知振源的振动周期为 0.02s，振幅为 0.02m，若把波源振动经过平衡位置且向负方向运动的时刻设为计时起点，求：

(1) 若以波的传播方向为 $x$ 轴正方向，波源所在点为坐标原点，写出该平面简谐波的波动方程

(2) 距波源为 $2m$ 和 $4m$ 处两点的振动位相差.

**本题考点：**平面波的波动方程、位相差

**解：**(1) 由波源的振动初始条件 $t = 0, y = 0, v < 0$

得初始相位　$\varphi = \frac{\pi}{2}$

因 $T = 0.02(\mathrm{s}), \omega = \frac{2\pi}{T} = 100(rad/s)$

波源的振动方程：$y = 0.02\cos(100\pi t + \frac{\pi}{2})$

波长 $\lambda = uT = 400 \times 0.02 = 8(\mathrm{m})$

向 $X$ 轴正方向传播的波动方程

$$y = 0.02\cos(100\pi t - \frac{2\pi x}{8} + \frac{\pi}{2})$$

$$= 0.02\cos(100\pi t - \frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{2})$$

(2) $x_2 = 4m$ 和 $x_1 = 2m$ 处两点振动相差

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi \times (4 - 2)}{8} = \frac{1}{2}\pi$$

（$x_1 = 2$ 超前 $x_2 = 4$ 的相位$\frac{1}{2}\pi$）

**155.（华南师范大学 2002 年）** 一平面简谐波在媒质中以速度 $u = 20\text{m/s}$ 自右向左传播.已知波线上某点 $A$ 处的质元的振动方程为 $y = 3\cos(4\pi t - \pi)(\text{SI})$，$B$ 点在 $A$ 点的左方 9m 处，若取 $x$ 轴正方向向右.并以 $A$ 点作为坐标原点，试写出：(1) 这平面简谐波方程；(2) $B$ 点处质元的振动速度.

**本题考点：**波动方程

**解：**(1) 原点的振动方程为：$y = 3\cos(4\pi t - \pi)$

波动方程

$$y = 3\cos\left[4\pi\left(t + \frac{x}{20}\right) - \pi\right] = 3\cos\left(4\pi t + \frac{\pi x}{5} - \pi\right)(\text{SI})$$

(2) 质元振动速度 $v = \frac{\partial y}{\partial t} = -12\pi\sin\left(4\pi t + \frac{\pi t}{5} - \pi\right)(\text{SI})$

因此 $x = -9$ 米时，$v_{(-9)} = -12\pi\sin\left(4\pi t - \frac{14\pi}{5}\right)$ (SI)

## Ⅴ. 相对论

**156.（清华大学 2002 年）** 一艘宇宙船以 0.8C（C 为光速）的速度飞向月球.一人在月球上量得运动中的飞船长度为 200 米，当飞船在月球上登陆后，他再测量飞船的长度.问测得的结果如何.

**本题考点：**相对论长度收缩公式

**解：**相对论长度收缩

$$l = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, l_0$$

其中，$l$ 为运动长度，$l_0$ 为静止长度，$v$ 为物体的速度.

则 $l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{200}{\sqrt{1 - 0.8^2}} = 333.3(\text{米})$

**157.(清华大学 2001 年)**　爱因斯坦狭义相对论的两条基本假设是_____.

**本题考点:**狭义相对论基本原理

空处填:相对性原理和光速不变原理

**158.(清华大学 2001 年)**　电子的静止质量为 $m_0$,当电子以 0.8C 的速度运动时,它的动量 $P$,动能 $E_1$,和总能量 $E$ 分别是:

A. $P = \frac{3}{4}m_oC, E_1 = m_oC^2, E = \frac{5}{3}m_oC^2$

B. $P = 0.8m_oC, E_1 = 0.3m_oC^2, E = 0.64m_oC^2$

C. $P = \frac{4}{3}m_oC, E_1 = \frac{8}{15}m_oC^2, E = \frac{5}{3}m_oC^2$

D. $P = 0.8m_oC$ , $E_1 = \frac{2}{3}m_oC^2, E = 0.64m_oC^2$

**本题考点:**相对论、质量、动量、能量公式

**解:** $E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-0.8^2}} = \frac{5}{3}m_0c^2$

$E_k = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = \frac{2}{3}m_0c^2$

$mv = \frac{m_0v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$= \frac{m_0}{\sqrt{1-0.8^2}} \times 0.8c = \frac{4}{3}m_0c$

答案选 A

**159.(北京理工大学 2000 年)**　两个静止质量都是 $m_0$ 的粒子,以相同速率 $v$ 对心相撞后合成一个复合粒子.试求这个复合粒子的静止质量、总能量.

**本题考点:**相对论质量、能量

解:①$v \ll c$ 时,非相对论粒子

动量守恒　$m_0 v - m_0 v = 2mv'$

复合粒子　$v' = 0, E_k = 0$

能量守恒　$\frac{1}{2} m_0 v^2 + m_0 c^2 + \frac{1}{2} mv^2 + mc^2 = m'c^2$

$$\Rightarrow m'c^2 = m_0 v^2 + 2m_0 c^2$$

静止质量　$m' = 2m_0 + m_0(\frac{v}{c})^2 \approx 2m_0$

总能量为 $2m_0 c^2$

② $v$ 与 $c$ 可比拟时,相对论粒子

动量守恒　$mv - mv = m'v'$

复合粒子　$v' = 0$

能量守恒　$mc^2 + mc^2 = m'c^2 = E_{总}$

$$m'C^2 = 2mc^2$$

$$m' = 2m = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

**160.**(北京邮电大学 1999 年)$\mu$ 子是一种基本粒子,在相对于 $\mu$ 子静止的坐标系中测得其寿命为 $\tau_0 = 2 \times 10^{-8} s$,如果 $\mu$ 子相对于地球的速度为 $v = 0.988c$($c$ 为真空中光速),则在地球坐标系中测出的 $\mu$ 子的寿命 $\tau =$ _____.

**本题考点:**时间膨胀效应

**解:** $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = \frac{2 \times 10^{-8}}{\sqrt{1 - (0.988)^2}} = 1.3 \times 10^{-7} s$

空处填:$1.3 \times 1^{-7} s$

**161.**(北京邮电大学 2002 年)　当 $v =$ _____ $c$ 时粒子的相对论动量等于非相对论动量的二倍. 当 $v =$ _____ $c$ 时粒子的

相对论动能等于非相对论动能的二倍.

**本题考点:**相对论动量、动能

**解:** $P_{相} = mv = \dfrac{m_0 v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

$P_{非} = m_0 v$

$\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = \dfrac{1}{2}$　　所以 $v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$

$E_{k相} = mc^2 - m_0 c^2 = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2$

$E_{k相} = mc^2 - m_0 c^2 = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2$

$E_k = \dfrac{1}{2} m_0 v^2$

$\dfrac{c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - c^2 = v^2$　　$\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = 1 + \dfrac{v^2}{c^2}$

解得　$v = \dfrac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}c$

空处分别填: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$、$\dfrac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$

**162.(清华大学 2000 年)**　与伽里略的时空观相比较,狭义相对论中哪个仍然保持不变.

A. 空间的绝对性.　　B. 时间的绝对性.

C. 事件的同时性.　　D. 光在真空中的传播速度.

**本题考点:**伽里略时空、狭义相对论

解:光在真空中的传播速度不变是狭义相对论假设之一.

答案选 D

**163.(清华大学 2000 年)** 按照狭义相对论,一个不稳定粒子衰变的寿命,在一个相对于该粒子运动的参照系看比在粒子静止的参照系看要:

A. 长　　B. 短　　C. 相同

**本题考点:**时间膨胀效应

**解:**时间膨胀效应

答案选 A

**164.(华中科技大学 2001 年)** (1) 一观察者测得运动着的米尺长度为 0.50 米,求此米尺相对于观察者以多大速度飞来?

(2) 如一观察者测得一运动的电子质量为 $2m_0$,求出电子此时运动的速度.($m_0$ 是电子的静止质量)

**本题考点:**狭义相对论性的长度收缩、相对论性物体的运动质量与静止质量关系

**解:**(1) 由狭义相对论性的长度收缩公式

$$l = l_0\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}$$

代入 $l = 0.5$ 米, $l_0 = 1$ 米有

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c\ (C \text{ 为光速})$$

即米尺相对于观察者以 $\frac{\sqrt{3}}{2}c$ 倍的光速飞来.

(2) 由相对性物体的运动质量 $m$ 和静止质量 $m_0$ 的关系式得

$$m = 2m_0 = m_0[1-(\frac{v}{c})^2]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

**165.(华中科技大学 2002 年)** 某观察者测得一静止细棒的长度为 $a$,质量为 $m$,在相对论情况解下列问题:

(1) 若此棒以速度 $v$ 沿棒长方向运动，观察者测得此棒的线密度应为多少？

(2) 若此棒以速度 $v$ 沿与棒长向垂直方向运动，观察者测得此棒的线密度应为多少？

**本题考点：**相对论性长度收缩、相对论性运动质量与静止质量关系

**解：**(1) 由相对论长度收缩效应，观察者测得棒的长度为

$$a' = a\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}$$

相对论运动质速关系有

$$m' = m\left[1-(\frac{v}{c})^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

得观察者测量到此棒的线密度大小为

$$\frac{m'}{a'} = \frac{m}{a}\left[1-(\frac{v}{c})^2\right]^{-1}$$

(2) 若此棒以速度 $v$ 沿与棒长相垂直的方向运动时，观察者测量到的棒长为 $a$，但其质量 $m' = m\left[1-(\frac{v}{c})^2\right]^{-\frac{1}{2}}$

故由此可得观察者测得此棒的线密度大小为

$$\frac{m'}{a} = \frac{m}{a}\left[1-(\frac{v}{c})^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

**166.(华中科技大学 2003 年)** 设一介子在静止下来后衰变为一个 $\mu$ 子和一个中微子，其静止质量分别为 $m_1$、$m_2$ 和 0. 求衰变后该 $\mu$ 子和中微子的动能.

**本题考点：**相对论性动量及能量守恒

**解：**由动量守恒，$\mu$ 介子和中微子的动量方向相反，大小相等. 根据相对论的动量与能量守恒有：

$$P_\mu = P_v$$

$$m_1 c^2 = \sqrt{m^2 \mu c^4 + p_\mu^2 c^2} + P_v c$$

中微子的动能为 $P_v c = \dfrac{m_1^2 - m_2^2}{2m_1} c^2$

而 $\mu$ 介子的动能为 $(m_1 - m_2)c^2 - P_v c = \dfrac{(m_1 - m_2)^2 c^2}{2m_1}$

**167.(华中科技大学 2003 年)** 如不考虑相对论效应,把电子从静止状态加速到 0.5 倍光速需要多高电压?如考虑相对论效应,用上述电压加速电子,电子的最后速度能达到多大?电子的静止质量为 $9.11 \times 10^{-31}$kg,电子电量为 $1.60 \times 10^{-19}$C,光速取 $3.0 \times 10^8$m/s.

**本题考点:**非相对论性动能、相对论总能与动能 $E_k$ 的关系

**解:**不考虑相对论效应时,将电子从静止状态加速到 0.5 倍光速需做功为电子获得的非相对论性动能 $= E_k = \dfrac{1}{2} m_e u^2 = eU$

则有 $U = \dfrac{m_e}{2e} u^2$

代入数据得

$$U = \frac{1}{2} \times \frac{9.11 \times 10^{-31}}{1.60 \times 10^{-19}} \times (\frac{1}{2} \times 3 \times 10^8)^2 = 6.4 \times 10^4(\text{伏特})$$

考虑相对论效应时,设电子所能达到的速率为 $u$,则由相对论总能与动能 $E_k$ 的关系式 $mc^2 - m_0 c^2 = E_k$ 得

$$u = \frac{\sqrt{17}}{9} c = \frac{\sqrt{17}}{3} \times 10^8(\text{m/s})$$

**168.(大连理工大学 2000 年)** 两个静止质量都是 $m_0$ 的粒子,以相同速率 $v$ 对心相撞后合成一个复合粒子.试求这个复合粒子的静止质量、总能量.

**本题考点:**动量守恒、质量守恒、静止质量与运动质量

**解**:在实验室参考系中,设碰撞前两粒子的质量分别为 $m_1$ 和 $m_2$ 碰撞后粒子的质量为 $M$,速度为 $v$,由动量守恒及质量守恒有:

$$m_1 v_2 + m_2 v_2 = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} + \frac{m_0(-v)}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = 0 = Mv$$

$$\text{得 } v = 0, M = m_1 + m_2 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \cong 2m_0$$

总能量为 $2m_0c^2$

**169.(清华大学 1998 年)**　在惯性系 $K$ 中,有两个事件同时发生在 $X$ 轴上相距 1000m 的两点,而在另一惯性系 $K'$(沿 $X$ 轴方向相对于 $K$ 系运动)中测得这两个事件发生的地点相距 2000m,求在 $K'$ 系中测得这两个事件的时间间隔.

**考点**:相对论时间间隔.

**解**:
$$\begin{cases} t' = \dfrac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta t' = \dfrac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \Delta x' = \dfrac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

$$\text{把 } \Delta t = 0 \text{ 代入} \begin{cases} \Delta t' = \dfrac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \Delta x' = \dfrac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

由得 $\Delta x = 1000(\text{m}), \Delta x' = 2000(\text{m})$ 得

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{1}{2},\frac{v^2}{c^2}=\frac{3}{4},v=\frac{\sqrt{3}}{2}c$$

$$\Delta t'=\frac{\frac{\sqrt{3}\times 1000}{2\quad c}}{1}=5.77\times 10^{-5}s$$

$$\overline{2}$$

**170.(华东理工大学 2000 年)** 某一宇宙射线中的介子的动能 $E_k=7m_0c^2$,其中 $m_0$ 介子的静止质量.试求实验室中观察者测得介子的寿命是它固有寿命的多少倍?

**本题考点:**相对论的总能与动能

**解:**设宇宙射线的运动速度大小为 $u$

由相对论动能公式 $E_k=mc^2-m_0c^2$得

$$7m_0c^2=mc^2-m_0c^2$$

$$m=8m_0=\frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}$$

再由 $\Delta t=\frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}$ 可得,实验观测到的介子的寿命是其固有寿命的 8 倍.

**171.(北京市 1999 年)** 匀质细棒静止时的质量为 $m_0$,长度为 $l_0$,当它沿棒长方向作高速匀速直线运动时,测得它的长为 $l$,那么,该棒的运动速度 $v=$_____,该棒所具有的动能 $E_K=$_____.

**本题考点:**长度收缩效应、质能公式

**解:** $l=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\Rightarrow v=c\sqrt{1-\frac{l^2}{l_0^2}}$

又 $E_k=mc^2-m_0c^2$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{l^2}}} = m_0 \frac{l_0}{l}$$

$$E_k = m_0 \frac{l_0}{l} c^2 - m_0 c^2 = \frac{l_0 - l}{l} m_0 c^2$$

空处填：$c\sqrt{1 - \frac{l^2}{{l_0}^2}}$，$\frac{l_0 - l}{l} m_0 c^2$

**172.（南京师范大学 1998 年）** 判断下列各小题的正误，认为对标以“√”，认为错标以“×”.

(1) 引起物体动量变化的是力.

(2) 作用于质点的保守力所作的功与质点运动的路经无关.

(3) 一质点作匀速曲线运动时，其动量守恒，其动能也守恒.

(4) 轮子沿固定平面作无滑滚动时，没有静摩擦力存在.

(5) 质点受恒力 $F$ 作用，则 $I = Ft$ 表示在 $t$ 瞬时该力 $F$ 的冲量.

(6) 做平面运动刚体的动能表达式 $E_k = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} I_A \omega^2$，(式中，$m$ 为刚体质量，$v_A$ 为刚体上 $A$ 点的运动速度，$I_A$ 为刚体对 $A$ 点的转动惯量，$\omega$ 刚体转动的角速度). 只有在 $A$ 点为刚体的质心时才成立.

(7) 若刚体的各点都作圆周运动，则该刚体必定作定轴运动.

(8) 对于有拉伸和压缩的弹性体，其杨氏模量等于该弹性体所受的正应力与产生的线应变之比.

(9) 作简谐振动的单摆，其振动周期取决定于摆线长.

(10) 在重力作用下，静止流体内等高各点的压强相等.

**本题考点：**动量、力、保守力作功的特点、动量与动能守恒.

**解：**(1) × (2)√ (3) × (4) × (5) × (6)√ (7) × (8)√ (9) × (10) √

# 第二部分　电磁学

## 一、考点综述

### 1. 库仑定律

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0$$

### 2. 电场强度

(1) 定义　$\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_0}$

(2) 点电荷的场强　$\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0$

场强叠加原理　$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$，或 $\vec{E} = \int_Q d\vec{E}$

(3) 电通量　$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

高斯定理　$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum q$

### 3. 电势

(1) 环路定理　$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

(2) 电势　$V_a = \int_a^{p(0)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

电势能　$W_a = qV_a$

电势差　$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$

电场力做功　$A_{ab} = q(V_a - V_b)$

(3) 点电荷的电势　$V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

电势叠加原理　$V = \sum_i V_i$，或 $V = \int_Q dV$

(4) 场强与电势的微分关系　$\vec{E} = -\nabla V$

**4. 导体静电平衡条件**

$$\begin{cases} E_{\text{导体内}} = 0 \\ E_{\text{导体表面}} = E_{\perp} \end{cases}, \text{或} \begin{cases} V_{\text{导体}} = C \\ V_{\text{导体表面}} = C \end{cases}$$

**5. 电介质**

(1) 极化强度

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

(2) 电位移

$$\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

(3) 高斯定理

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q$$

**6. 电容器**

(1) 电容

$$C = \frac{Q}{U}$$

平行板电容器电容

$$C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d}$$

柱形电容器电容

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_r \varepsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)}$$

(2) 静电能

能量密度

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

电容器贮存的能量

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}qU$$

**7. 欧姆定律**

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

电动势

$$\varepsilon = \int_a^b \vec{E}_{非} \cdot d\vec{l}$$

**8. 磁感应强度**

(1) 毕奥 – 萨伐尔定律

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{r}^0}{4\pi r^2}, \vec{B} = \int_a^b d\vec{B}$$

(2) 安培环路定理

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

(3) 磁通量

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

(4) 磁场的高斯定理

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

**9. 磁力**

(1) 安培定律

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = \int_a^b d\vec{F}$$

(2) 洛仑兹公式

$$\vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

电场、磁场对运动电荷的作用力

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

(3) 电荷在均匀磁场中的运动

半径　$R = \dfrac{mv\sin\theta}{qB}$

周期　$T = \dfrac{2\pi m}{qB}$

螺距　$h = \dfrac{2\pi mv\cos\theta}{qB}$

(4) 平面载流线圈在均匀磁场中的磁力矩

$$\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}$$

其中磁矩　$\vec{P}_m = NIS\vec{n}$

**10. 霍耳电压**

$$U_H = R_H \frac{IB}{d}$$

霍耳系数

$$R_H = \frac{1}{nq}$$

**11. 磁介质**

(1) 磁场强度　$\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_r\mu_0}$

$$\mu_r \begin{cases} \lesssim 1 & \text{抗磁质} \\ \gtrsim 1 & \text{顺磁质} \\ \gg 1 & \text{铁磁质} \end{cases}$$

(2) 安培环路定理

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I$$

## 12. 电磁感应

(1) 法拉第定律

$$\varepsilon_i = -N\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}$$

(2) 动生电动势

$$\varepsilon_{ab} = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

感生电动势

$$\varepsilon_{ab} = \int_a^b \vec{E}_B \cdot d\vec{l}$$

(3) 自感系数

$$L = \frac{\Psi}{I}, \text{或者 } L = -\frac{\varepsilon_L}{dI/dt}$$

长直螺线管的自感系数 $L = \mu n^2 V$

互感系数

$$M = \frac{\Psi_{12}}{I_1}, \text{或者 } M = -\frac{\varepsilon_{21}}{dI_1/dt}$$

(4) 磁场能量

磁场能量密度 $W_m = \frac{1}{2\mu}B^2$

贮存在线圈中的磁场能量为 $W_m = \frac{1}{2}LI^2$

## 13. 位移电流与麦克斯韦方程组:

(1) 位移电流密度

$$\vec{j}_0 = \frac{\partial D}{\partial t}$$

位移电流

$$I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

(2) 全电流

$$I_S = I_C + I_D$$

(3) 麦克斯韦方程组积分形式

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_C + \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

微分形式

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\triangle \times \vec{H} = \vec{J}_C + \frac{\partial \vec{N}}{\partial t}$$

**14. 电磁波**

(1) 电磁波是横波,传播速度 $u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ 为光速,$E$ 和 $H$ 位相相同,$\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H$

(2) 能流密度 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

(3) 电磁波的动量 $\vec{P} = \frac{\vec{S}}{C^2} = \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{C^2}$

## 二．经典题解

## Ⅰ. 静电场

**1.(北京大学 2002 年)** 一个均匀带电的球体,半径为 $r_0$,所带电荷密度为 $\rho$,证明该带电体的电场矢量 $\vec{E}$ 满足电场的散度方程:($\varepsilon_0$ 为真空电容率)

$$\nabla \cdot \vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & (r < r_0) \\ 0 & (r > r_0) \end{cases}$$

**本题考点:** 高斯定理

**解:** 用高斯定理的积分形式可以计算得

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{r_0^3 \rho \vec{r}}{3\varepsilon_0 r^3} & (r > r_0) \\ \dfrac{\rho \vec{r}}{3\varepsilon_0} & (r < r_0) \end{cases}$$

在直角系中 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\therefore \quad \nabla \cdot \vec{E} = (\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z})\vec{E}$$

在 $r > r_0$ 时, $\nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{r_0^3 \rho}{3\varepsilon_0}(\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{x}{r^3} + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{y}{r^3} + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{z}{r^3})$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^4} \cdot \frac{2x}{2r} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}$$

同理 $$\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{r^3} = \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{r^3} = \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{\partial r^5}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{r_0^3 \rho}{3\varepsilon_0}[\frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5}] = 0$$

在 $r < r_0$ 时

$$\nabla \cdot \vec{E} = (\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z})(\frac{\rho(x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k})}{3\epsilon_0}) = \frac{3\rho}{3\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

综合有　　$\nabla \cdot \vec{E} = \begin{cases} 0 & (r > r_0) \\ \frac{\rho}{\epsilon_0} & (r < r_0) \end{cases}$

本题可以用球坐标系的散度

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta E_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}$$

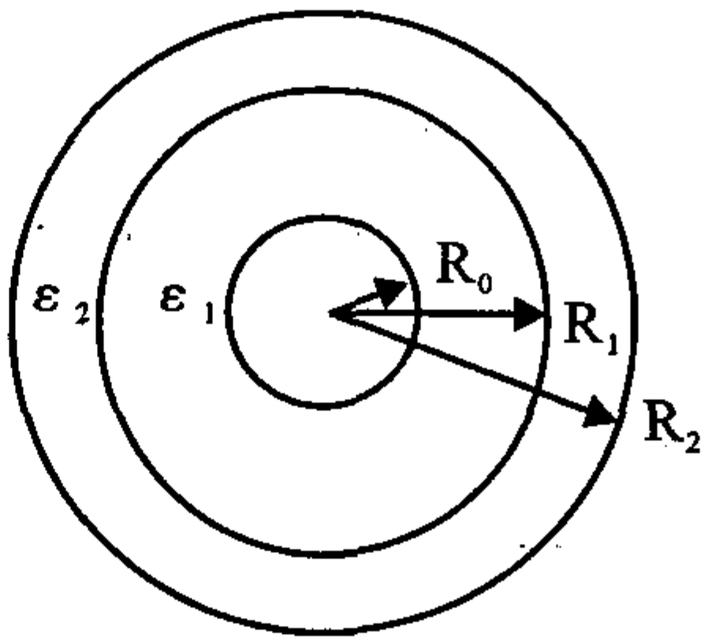
$E_\varphi = E_\theta = 0$

$r > r_0$　　$E_r = \left|\frac{r_0^3 \rho \vec{r}}{3\epsilon_0 r^3}\right| = \frac{r_0^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2}$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{r_0^3 \rho r^2}{3\epsilon_0 r^2}) = 0$$

$r < r_0$　　$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$, $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{r^2 \rho r}{3\epsilon_0}) = \frac{1}{r^2}\frac{3r^2 \rho r}{3\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

**2.(北京大学 2000 年)** 附图是同心两球面的剖面图,其中充满相对介电常数(电容率)为 $\epsilon_1$ 和 $\epsilon_2$ 的两层线性电介质,已知内导体的半径为 $R_0$,介质界面的半径为 $R_1$,外导体的内半径为 $R_2$,求电容器的电容。




**本题考点:**电容器的电容

**解:**设 $R$ 球面带电为 $Q$,因此用高斯定理有

$R_0 < r < R_2$　　$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$　　$E = \frac{D}{\epsilon}$

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2} & (R_0 < r < R_1) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r^2} & (R_1 < r < R_2) \end{cases}$$

$$U = \int_{R_0}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_0}^{R_1} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2} dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q dr}{4\pi\varepsilon_2 r^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_1 R_0} - \frac{1}{\varepsilon_1 R_1} + \frac{1}{\varepsilon_2 R_1} - \frac{1}{\varepsilon_2 R_2}\right)$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_2 R_0 R_1 R_2}{\varepsilon_2 R_1 R_2 - \varepsilon_2 R_0 R_2 + \varepsilon_1 R_0 R_2 - \varepsilon_1 R_0 R_1}$$

**3.(清华大学2001年)** 静止点电荷 $q$ 在距离为 $r$ 处的电场强度 $\vec{E}$ 为_____,电势 $U$ 为_____。

**本题考点:** 点电荷的场强,电势公式

**解:** 空处分别填 $\frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$, $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$($\varepsilon_0$ 为真空中的介电常数)

**4.(武汉理工大学2003年)** 设半径为 $R$ 的半球面的轴与匀强电场 $\vec{E}$ 的方向平行,则通过这半球面的 $\vec{E}$ 的通量为_____。

**本题考点:** 电通量计算

**解:** $\Phi = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = E\pi R^2$

空处填: $\pi R^2 E$

**5.(武汉理工大学2003年)** 两点电荷的电量分别为 $q$、$-q$,相距 $2l$.则两点电荷连线中点 $O$ 处的场强大小为_____,电势为_____。

**本题考点:** 点电荷的场强、电势公式,场强、电势叠加原理。

**解:** $E = \frac{q}{4\pi\lambda\varepsilon_0 l^2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l^2} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l^2}$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} = 0$$

空处分别填: $\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l^2}$, 0

**6.(武汉理工大学2003年)** 一平行板电容器两极板的面积均为 $s$,相距为 $d$,其间充满相对电容率为 $\varepsilon_r$ 的电介质。则电容器的电

容为_____。若充电量为 $\pm Q$，则电容器中的电场能量密度为_____，储存的能量为_____。

**本题考点：**平行板电容器电容公式，能量密度公式及储存的能量公式。

**解：**$C = \varepsilon_r C_0 = \dfrac{\varepsilon_r \varepsilon_0 s}{d}$

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_r \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_r \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{\varepsilon_r \varepsilon_0 s}\right)^2 = \frac{Q^2}{2\varepsilon_r \varepsilon_0 s^2}$$

$$W_e = w_e V = \frac{Q^2}{2\varepsilon_r \varepsilon_0 s^2} \cdot sd = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_r \varepsilon_0 s}$$

空处分别填：$\dfrac{\varepsilon_r \varepsilon_0 s}{d}$，$\dfrac{Q^2}{2\varepsilon^r \varepsilon_0 s^2}$，$\dfrac{Q^2 d}{2\varepsilon_r \varepsilon_0 s}$

**7.（武汉理工大学 2003 年）**一静电平衡的球形导体，球心 $O$ 处的电势为 $V_0$，则导体内 $P$ 处的电势为_____，场强为_____。

**本题考点：**导体的静电平衡条件.

**解：**空处分别填：$V_0$，0

**8.（武汉理工大学 2003 年）**一电量为 $q$ 的点电荷处于一不带电的导体球壳（内、外半径分别为 $a$、$b$）的球心。

(1) 求空间的电场场强分布；

(2) 若将导体球壳搬到无穷远，须做功多少？

**本题考点：**静电场中高斯定理求场强，电场力做功计算。

**解：**(1) 由导体静电平衡条件得知，导体球壳内外表面分别均匀分布电荷 $-q$，$q$。故产生电场的电荷分布具有球对称性，对称点在点电荷 $q$ 处。

以 $q$ 为中心，以 $r$ 为半径作球面 $S$ 为高斯面。则由对称性分析可知：$\vec{E}$ 处处平行高斯面的法线；在高斯面上 $E_{处}$ 处相等，则应用高斯定理

$$\int_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_s Eds = E4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q$$

有 $E = \dfrac{\sum q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

而 $$\sum q = \begin{cases} q & (r < a) \\ 0 & (a < r < b) \\ q & (r > b) \end{cases}$$

所以 $$E = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r < a) \\ 0 & (a < r < b) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > b) \end{cases}$$

(2) 由功能关系,有

$A = W_2 - W_1$

$$= \int_a^b \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right) \cdot 4\pi r^2 dr = \int_a^b \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

**9.(清华大学 2001 年)** 两共轴的导体圆筒组成的电容器,内外筒半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$。$R_2 < 2R_1$。其间有两层均匀的电介质。分界面半径为 $r_0$. 内层介质的相对介电常数为 $\varepsilon_{r1}$,外层介质的相对介电常数为 $\varepsilon_{r2}$,$\varepsilon_{r2} = \dfrac{\varepsilon_{r1}}{2}$. 两层介质的击穿场强都是 $E_m$。当电压升高时,哪层介质先击穿,两筒间能加的最大电势差 $V_0$ 是多少?

**本题考点:** 电介质中的高斯定理,电位移矢量与场强的关系,轴形电容器中场强,电势差的计算.

**解:** 设电容器极板带电 $q$,则由介质中的高斯定理

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q$$

可以得到电位移矢量

$$D = \frac{q}{2\pi lr}(R_1 < r < R_2)$$

则电容器内的场强为

$$E = \frac{D}{\varepsilon_r\varepsilon_0} = \begin{cases} \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 lr} & (R_1 < r < r_0) \\ \dfrac{q}{\pi\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 lr} & (r_0 < r < R_2) \end{cases}$$

电容器极板差的电势差为

$$\begin{aligned} U &= \int_{R_1}^{R_2} E dr \\ &= \int_{R_1}^{r_0} \frac{q}{2\pi\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 lr} dr + \int_{r_0}^{R_2} \frac{q}{\pi\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 lr} dr \\ &= \frac{q}{2\pi\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 lr}\ln\frac{r_0}{R_1} + \frac{q}{\pi\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 lr}\ln\frac{R_2}{r_0} \end{aligned}$$

显然,电容器两介质交界处,位于介质 $\varepsilon_{r2}$ 处的场强最大,当电压升高,使其值达到 $E_m = \dfrac{q}{\pi\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 lr_0}$,介质 $\varepsilon_{r2}$ 先被击穿,此时电势差

$$\begin{aligned} V_D &= \frac{1}{2}E_m r_0 \ln\frac{r_0}{R_1} + E_m r_0 \ln\frac{R_2}{r_0} \\ &= E_m R_1 \ln\left(\sqrt{\frac{r_0}{R_1}} \cdot \frac{R_2}{r_0}\right) \\ &= E_m R_1 \ln\frac{R_2}{\sqrt{R_1 r_0}} \end{aligned}$$

即为两筒间能加的最大电势差

**10.(清华大学 2002 年)** 一平行板电容器使用的电介质的介电常数为 3,介电强度为 $2 \times 10^7 V/m$. 电容器的电容为 $0.15\mu F$,能够耐压 6000 伏特. 求此电容器的平板面积至少要多大?($\varepsilon_0 = 0.85 \times 10^{-12} C/V \cdot m$).

**本题考点:** 平行板电容器电容公式、场强与电势差的关系.

**解:** 电容器极板间距为

$$d = \frac{U}{E} = \frac{6000}{2 \times 10^7} = 3 \times 10^{-4} m$$

而平行板电容器电容

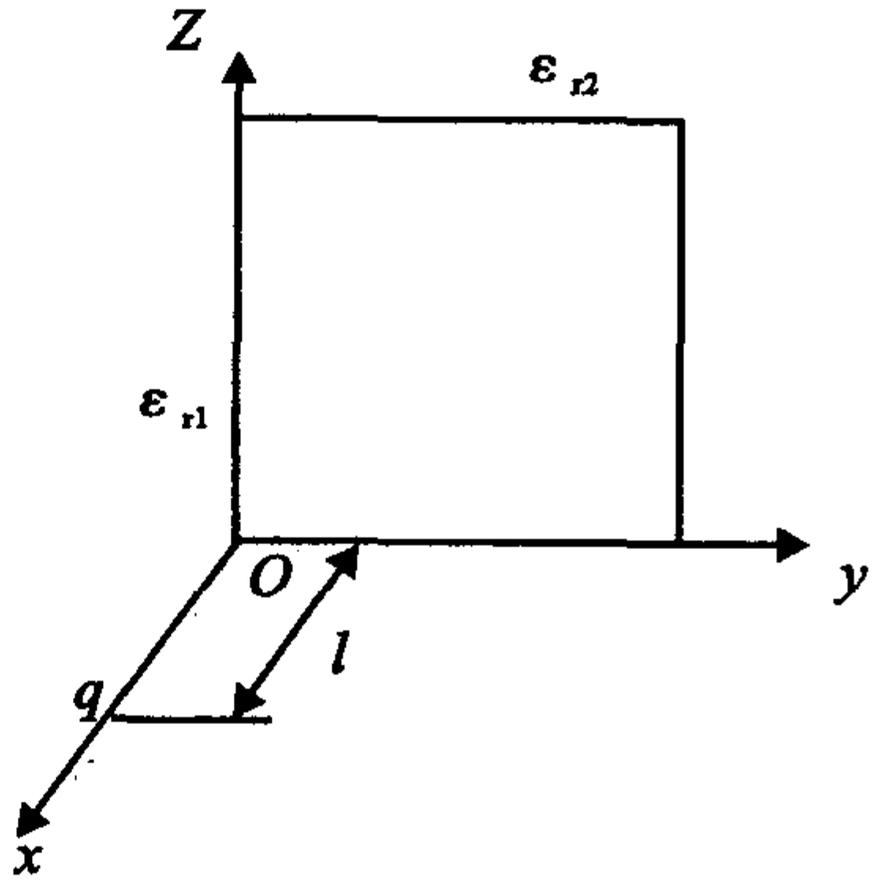
$C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d}$,则

$$S = \frac{Cd}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \frac{0.15 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^{-4}}{3 \times 8.85 \times 10^{-12}} = 1.69(\mathrm{m}^2)$$

**11.(武汉大学 2000 年)**(1) 设真空中距离接地的无限大导体平面 $l$ 处有一个点电荷 $Q$,求导体平面上的面电荷密度分布;

(2) 在空间中建立有坐标系 $o - xyz$,设在 $yz$ 平面(即 $x = 0$ 平面) 的两侧分别充满相对介电常数为 $\varepsilon_{r1}$ 和 $\varepsilon_{r2}$ 的不同电介质,在 $x$ 轴上 $x = l$ 处有一个自由点电荷 $Q$.求两种介质的分界面上的极化面电荷密度分布.

**本题考点:**镜象法求电场的物理量、介质的极化电荷




**解:**(1) 因为无限导体平面接地,所以电势为零,等效于在以平面为对称面离平面 $l$ 处放一负 $Q$ 电荷产生的电势,因此对导体平面等效于电偶子它的垂直平分面.

设原点 $o$ 为 $Q$、$-Q$ 的与 $x = 0$ 平面的交点,$P$ 到 $o$ 的距离为 $r$,则

$$\vec{E}_{x+} = \frac{Ql}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{(l^2 + r^2)^3}} \vec{i} = \vec{E}_{x-}$$

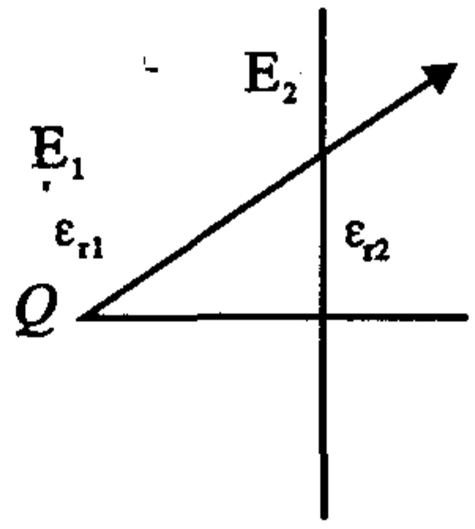
$$\vec{E} = 2\vec{E}_{x+} = -\frac{Ql}{2\pi\varepsilon_0 (l^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{i}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma = -\frac{Ql}{2\pi(l^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(2) 在空间任一点离 $Q$ 为 $r$ 处的电位矢量

$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\vec{r}_0$　　$\vec{r}_0$ 为 $\vec{r}$ 的单位矢量，对




$P$ 是 $yz$ 平面上的点$(o, y, z)$

$D = \frac{Q}{4\pi(l^2 + y^2 + z^2)}$　$P$ 点两侧的附近

$\varepsilon_{r1}$ 介质　　$E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}(l^2 + y^2 + z^2)}$

$\varepsilon_{r2}$ 介质　　$E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}(l^2 + y^2 + z^2)}$

$$\sigma'_{e1} = -P_{n1} = -\chi_{e1}\varepsilon_0 E_1 \frac{l}{\sqrt{l^2 + y^2 + z^2}} = \frac{-(\varepsilon_{r1} - 1)\varepsilon_0 Ql}{\sqrt{(l^2 + y^2 + z^2)^3}}$$

$$\sigma'_{e2} = -P_{n2} = +\chi_{e2}\varepsilon_0 E_2 \frac{l}{\sqrt{l^2 + y^2 + z^2}} = \frac{(\varepsilon_{r2} - 1)\varepsilon_0 Ql}{\sqrt{(l^2 + y^2 + z^2)^3}}$$

分界面上极化面电荷密度

$$\sigma'_e = \sigma'_{e1} + \sigma'_{e2} = \frac{(\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1})\varepsilon_0 lQ}{\sqrt{(l^2 + y^2 + z^2)^3}}$$

**12.(武汉大学 2002 年)** 什么是电介质的电极化现象?电极化有哪两种微观机制?再定义电极化强度矢量 $P$,并写出均匀电介质表面极化电荷面密度分布与极化强度矢量之间的关系式.

**本题考点:** 电介的极化

**解:** 电介质在外电场中出现极化电荷的现象称为电介质的极化,电极化的微观机制有位移极化和取向极化两种.电极化强度定义 $\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{P}_i}{\Delta V}$,$\sum_i \vec{P}_i$ 为 $\Delta V$ 体积内总电矩的矢量和,均匀电介质表面极化电荷密度 $\sigma'$ 与极化强度 $\vec{P}$ 关系为 $\vec{P} \cdot \vec{n} = \sigma'$,$\vec{n}$ 是介质表面的法线方向.

**13.**(武汉大学2002年)将一个半径为 $R$ 的球体切为相同的八块,取其中的一块使之均匀带电,设电荷体密度为 $\rho$.试求这块八分之一带电球体在球心处产生的电场强度的大小.

**本题考点:**电场强度计算

**解:** $dq = \rho r^2 dr d\theta d\varphi$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho dr d\theta d\varphi$$

$$dE_x = dE\sin\theta\cos\varphi,\ dE_y = dE\sin\theta\sin\varphi,\ dE_z = dE\sin\theta$$

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho\int_0^R dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi = -\frac{\rho_0 R}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$E_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho\int_0^R dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta = -\frac{\rho R}{4\pi\varepsilon_0}$$

同理 $E_z = -\frac{\rho R}{4\pi\varepsilon_0}$

$$\vec{E} = -\frac{\rho R}{4\pi\varepsilon_0}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}) \qquad |\vec{E}| = \frac{\sqrt{3}\rho R}{4\pi\varepsilon_0}$$

**14.**(武汉大学2002年)(1)试计算均匀带电球体的静电能,设球的半径为 $R$,带电总量为 $Q$,球外真空;

(2)若带电球是导体球,求其静电能.

**本题考点:**电场的能量.

**解:**(1)球体:用高斯定理可以求得场强

$$E = \begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} & (r \geq R)\\ \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & (0 < r \leq R)\end{cases}$$

能量密 $w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \begin{cases}\frac{1}{2}\cdot\varepsilon_0(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2})^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} & (r \geq R)\\ \frac{1}{2}\cdot\varepsilon_0(\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3})^2 = \frac{Q^2 r^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^6} & (0 < r < R)\end{cases}$

$$W = \int_v w_e dv$$

$$= \int_0^R \frac{Q^2 r^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 R^6} 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{Q^2 4\pi r^2 dr}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^4}$$

$$= \frac{Q^2}{40\pi\varepsilon_0 R} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$$

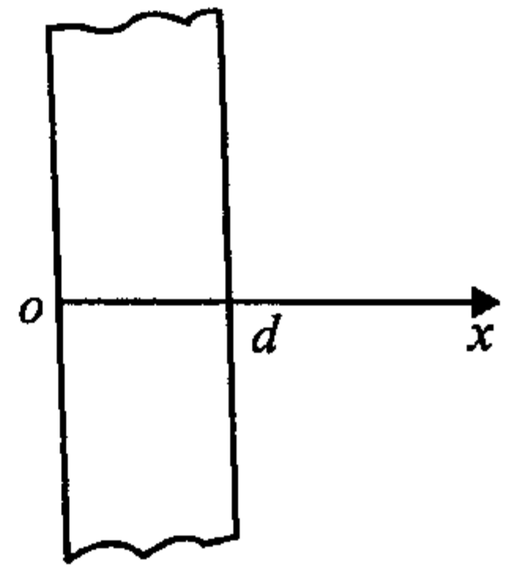
(2) 导体球

$$E = \begin{cases} 0 & (r \leq R) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > R) \end{cases}$$

能量密度　$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}$　$(r > R)$

$$W = \int_R^\infty \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

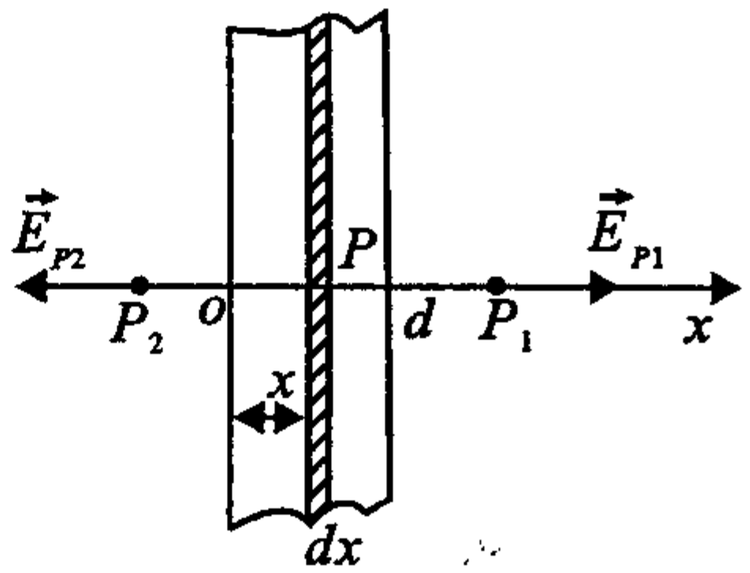
**15.**(北京理工大学 2002) 如图,无限大带电平板,板的厚度为 $d$,电荷体密度为 $\rho = \rho_0(1 + \frac{x}{d})$.式中 $\rho_0$ 为常量.




(1) 求电场分布.

(2) 以 $x = 0$ 平面作为电势零点,求电势分布.

**本题考点:** 平行板电容器的场强,场强迭加原理,电势的计算




**解:**(1) 取离 $O$ 点距离为 $x$,厚度为 $dx$ 的带电薄板,其面电荷密度为

$$d\sigma = \rho dx = \rho_0(1 + \frac{x}{d})dx$$

带电薄板在板右侧任一点 $P_1$ 处产生的场强

$$d\vec{E} = \frac{d\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}(1 + \frac{x}{d})dx\vec{i}$$

则无限大带电平板在 $P_1$ 处的合场强

$$\vec{E}_{P_1} = \int d\vec{E} = \int_0^d \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(1 + \frac{x}{d}\right) dx\vec{i} = \frac{3\rho_0 d}{4\varepsilon_0}\vec{i} \quad (d < x < \infty)$$

同理,在板左侧任一点 $P_2$ 处

$$E_{P_2} = -\frac{3\rho_0 d}{4\varepsilon_0}\vec{i} \quad (x < 0)$$

平板内部任一点 $P$ 的电场是 $P$ 点的左右两边部分产生电场的叠加,

即 $\vec{E} = \vec{E}_{左} + \vec{E}_{右}$

$$\vec{E}_{左} = \int_0^x \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(1 + \frac{x}{d}\right) dx\vec{i} = \frac{\rho_0 x}{2\varepsilon_0}\left(1 + \frac{x}{2d}\right)\vec{i}$$

$$\vec{E}_{右} = -\int_x^d \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(1 + \frac{x}{d}\right) dx\vec{i}$$

$$= -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}(d - x)\left(1 + \frac{d + x}{2d}\right)\vec{i}$$

所以 板内任一点 $P$ 的场强为

$$\vec{E}_P = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(x + \frac{x^2}{2d} + x - d + \frac{x^2 - d^2}{2d}\right)\vec{i}$$

$$= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(2x - \frac{3}{2}d + \frac{x^2}{d}\right)\vec{i}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{E}_{P_1} = \dfrac{3\rho_0 d}{4\varepsilon_0} = \vec{i} & (d < x < \infty) \\ \vec{E}_P = \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(2x - \dfrac{3}{2}d + \dfrac{x^2}{d}\right)\vec{i} & (0 \leqslant x \leqslant d) \\ \vec{E}_{P_2} = -\dfrac{3\rho_0 d}{4\varepsilon_0}\vec{i} & (x < 0) \end{cases}$$

(2) 以 $x = 0$ 平面作为电势零点,则

$x < 0$: $U_{P_2} = \int_{P_2}^0 \vec{E}_{P_2} \cdot d\vec{l}$

$$= -\int_x^0 \frac{3\rho_0 d}{4\varepsilon_0} dx$$

$$= \frac{3\rho_0 d}{4\varepsilon_0} x$$

$0 < x < d$:　$U_p = \int_p^0 \vec{E}_p \cdot d\vec{l}$

$$= -\int_p^0 \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}(2x - \frac{3}{2}d + \frac{x^2}{d})\, dx$$

$$= \frac{\rho_0 x}{2\varepsilon_0}(x - \frac{3}{2}d + \frac{x^2}{3d})$$

$d < x < \infty$:　$U_{p_1} = \int_{p_1}^0 \vec{E}_{p_1} \cdot d\vec{l} = \int_x^d - E_{p_1} dx + \int_d^0 - E_p dx$

$$= -\int_x^d \frac{3\rho_0 d}{4\varepsilon_0} dx - \int_d^0 \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}(2x - \frac{3}{2d} + \frac{x^2}{d})\, dx$$

$$= \frac{\rho_0 d}{2\varepsilon_0}(\frac{3}{2}x - \frac{5}{3}d)$$

**16.**(北京理工大学2001年)将一个试验电荷 $q_0$(正电荷)放在带有负电荷的大导体附近 $P$ 点处,测得它所受的力为 $F$.若考虑到电量 $q_0$ 不是足够小,则

A. $\frac{F}{q_0}$ 比 $P$ 点处原先的场强数值大

B. $\frac{F}{q_0}$ 比 $P$ 点处原先的场强数值小

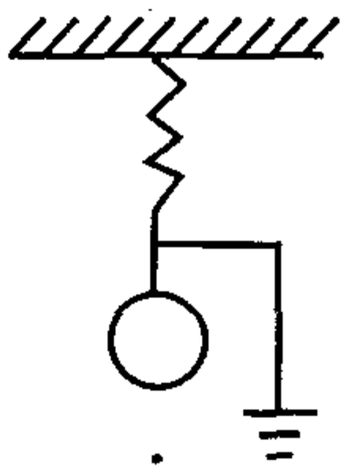
C. $\frac{F}{q_0}$ 等于原先 $P$ 点处场强的数值

D. $\frac{F}{q_0}$ 与 $P$ 点处场强数值关系无法确定

**本题考点:**电场与导体的相互作用

**解:**因为 $q_0$ 与带负电的导体相互作用,使电荷重新分布,负电荷靠近正电荷,导体在 $P$ 点的产生场强 $|\vec{E}|$ 大小增大,$\frac{F}{q_0}$ 也增大.

答案选 A




**17.**(北京理工大学 2001 年) 有一接地的金属球,用一弹簧吊起,金属球原来不带电,若在它的下方放置一电量为 $q$ 的点电荷,则

A. 只有当 $q > 0$ 时,金属球才下移

B. 只有当 $q < 0$ 时,金属球才下移

C. 无论 $q$ 是正是负金属球都下移

D. 无论 $q$ 是正是负金属球都不动

**本题考点:**导体静电平衡时的电荷的分布

**解:**因为在靠近 $q$ 的球面感应异号电荷,而感应出的同种电荷通过接地线流向大地,异种电荷相互吸引.

答案选 C

**18.**(北京理工大学 2001 年) 一半径为 $R$ 的"无限长"圆柱形带电体,其电荷体密度为 $\rho = Ar(r < R)$,式中 $A$ 为常数. 试求:

(1) 圆柱体内、外各点场强大小分布;

(2) 选距离轴线的距离为 $l(l > R)$ 处为电势零点,计算圆柱体内、外各点的电势分布.

**本题考点:**高斯定理求电场场强,已知电场求电势

**解:**电荷是轴对称的,因此电场强度分布也是轴对称。以圆柱的轴线为中心 $r$ 为半径,高为 $h$,一柱面加上垂直轴线的两个底面为高斯面,侧面上 $\vec{E} \parallel \vec{n}$,且 $E$ 处处相等,上、下底面上有 $\vec{E} \perp \vec{n}$,故

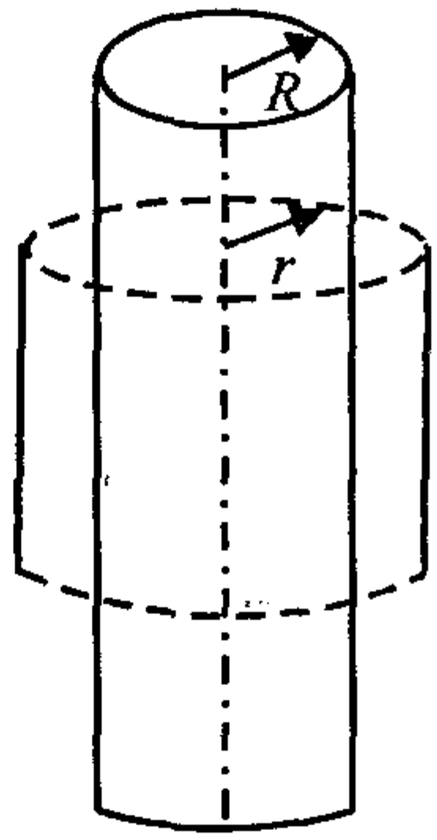
$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{侧}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \left( \iint_{\text{上}} + \iint_{\text{下底面}} \right)$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E \iint_{\text{侧}} dS = E \cdot 2\pi rh$$

又因

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_1 = \frac{1}{\varepsilon_0} \times \begin{cases} \int_0^R Ar \cdot h2\pi r dr & (r > R) \\ \int_0^r Arh \cdot 2\pi r dr & (r < R) \end{cases}$$

$$= \frac{Ah}{\varepsilon_0} \times \begin{cases} \frac{2}{3}\pi R^3 & (r > R) \\ \frac{2}{3}\pi r^3 & (r < R) \end{cases}$$




根据高斯定理得　$2\pi rhE = \frac{Ah}{\varepsilon_0} \times \begin{cases} \frac{2}{3}\pi R^3 \\ \frac{2}{3}\pi r^3 \end{cases}$

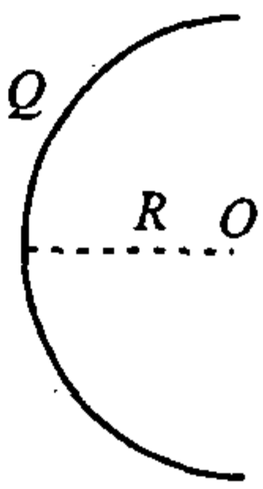
$$\Rightarrow \quad E = \begin{cases} \frac{AR^3}{3\varepsilon_0 r} & (r > R) \\ \frac{Ar^2}{3\varepsilon_0} & (r < R) \end{cases}$$

(2) $r > R$　　$V = \int_P^{b(0)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^l \frac{AR^3}{3\varepsilon_0 r} dr = \frac{AR^3}{2\varepsilon_0} \ln \frac{l}{r}$

$r < R$　　$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^R \frac{Ar^2}{3\varepsilon_0} dr + \int_R^l \frac{AR^3}{3\varepsilon_0 r} dr$

$$= \frac{A(R^3 - r^3)}{9\varepsilon_0} - \frac{AR^3}{3\varepsilon_0} \ln \frac{1}{R}$$

**19.**(北京理工大学 2001 年) 真空中有一半径为 $R$ 的半圆细环,均匀带电 $Q$,如图所示. 设无穷远处为电势零点,则圆心 $O$ 点处的电势 $U_0 =$ _____,若将一带电量为 $q$ 的点电荷从无穷远处移到圆心 $O$ 点,则电场力做功 $A =$ _____.




**本题考点:** 电势,电场力作功

**解:**　　$V_0 = \frac{\int dq}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$$A = -q(V_0 - V_\infty) = -qV_0 = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

空格分别填 $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$, $-\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}$

**20.**(北京邮电大学 1999 年) 设雷雨云位于地面以上 500m 的高度,其面积为 $10km^2$,为了估算,把它与地面看作一个平行板电容

器,此雷雨云与地面间的电势梯度为 $10^4$V/m,若一次雷电即把雷雨云的电能全部释放完,则此能量相当于质量为_____kg 的物体从 500m 高空落到地面所释放的能量.

**本题考点:**场强与梯度的关系,电场的能量

**解:**场强 $\vec{E} = 10^4(\mathrm{Vm})$

能量密度

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

释放能量 $W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Sh$

$$= \frac{1}{2} \times 8.85 \times 10^{-12} \times (10^4)^2 \times 500 \times 10 \times (10^3)^2$$

$$= mgh(\text{取 } g = 10)$$

$$m = 4.43 \times 10^2\mathrm{kg} = 443\mathrm{kg}$$

空处填 443kg

**21.(北京邮电大学 1999 年)** 一任意形状的带电导体,其电荷面宽度分布为 $\sigma(x,y,z)$,则在导体表面外附近任意点处的电场强度的大小 $E(x,y,z) =$ _____,其方向_____.

**本题考点:**导体表面的电场

**解:** $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ 其方向垂直于导体表面(正电荷向外,负电荷向里).

空处分别填:$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$,垂直于导体表面(正电荷向外,负电荷向里)

**22.(北京邮电大学2002年)** 一对平行放置的导体平板 $A$ 和 $B$. 极板面积为 $S$,极板间距为 $d$,且 $S \gg d^2$. 若两极板所带的电量分别为 $Q_A$ 和 $Q_B$,求:(1) 两板上的电荷分布;(2) 空间各区域的场强;(3) 两极板间的电势差.

**本题考点:**静电场中的导体电荷场强、电势

解:(1)$S \gg d^2$ 看成极板无限大平面

$$(\sigma_1 + \sigma_2)S = Q_A \qquad ①$$

$$(\sigma_3 + \sigma_4)S = Q_B \qquad ②$$

由静电平衡条件有:

$$\sigma_3 + \sigma_2 = 0 \qquad ③$$

在导体 $B$ 中,$E = 0$ 即

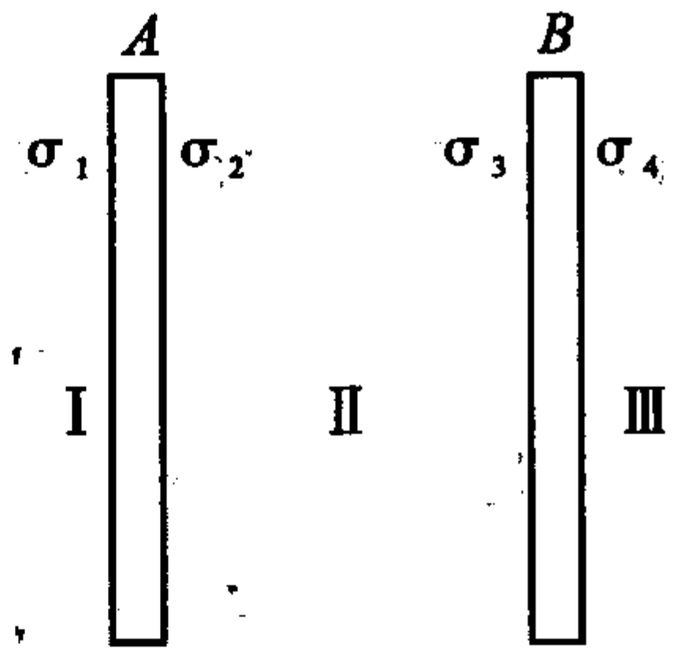
$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0$$

即　　$\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_2 - \sigma_4 = 0$

把 ③ 代入上式有:

$\sigma_1 - \sigma_4 = 0$　　④

由 ①②③④ 解之得




$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{Q_A + Q_B}{2S}$$

$$\sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{Q_A - Q_B}{2S}$$

(2) Ⅰ 区　　$E_{Ⅰ} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = \frac{Q_A + Q_B}{2S\varepsilon_0}$

Ⅱ 区　　$E_{Ⅱ} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = \frac{Q_A - Q_B}{2S\varepsilon_0}$

Ⅲ 区　　$E_{Ⅲ} = E_{Ⅰ} = \frac{Q_A + Q_B}{2S\varepsilon_0}$

(3)　　$V = E_{Ⅱ} d = \frac{(Q_A - Q_B)d}{2S\varepsilon_0}$

**23.(清华大学 2001 年)** 真空中,在半径为 $R$ 的接地金属球外,与球心相距 $a$ 处($a > R$),置一点电荷 $q$,不计接地导线上电荷的影响,则金属球表面上的电荷总量为_____.

**本题考点:**静电感应

**解:**设导体表面的电荷为 $q'$

$$\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} = 0$$

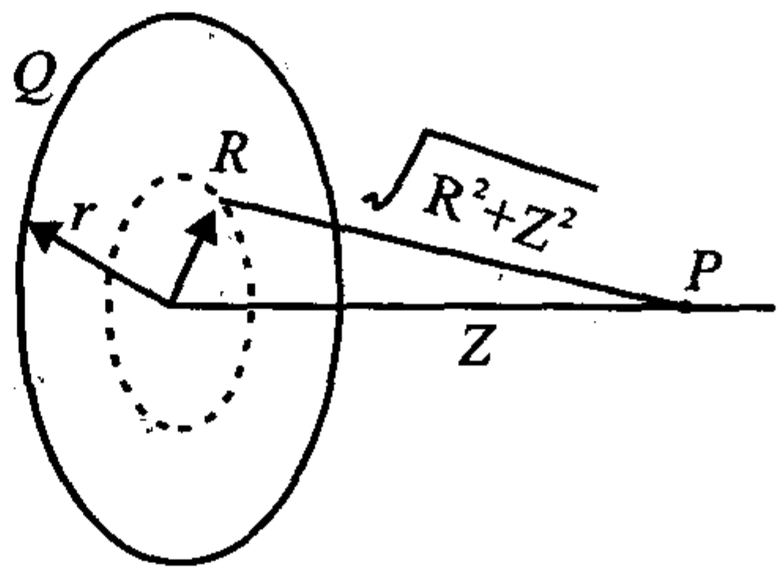
$$q' = -\frac{qR}{a}$$

空处填 $-\frac{qR}{a}$

**24.(清华大学1998年)** 电荷 $Q$ 均匀分布在半径为 $r$ 的圆盘上. 求通过该圆盘中心垂直于圆盘的轴上距中心为 $Z$ 的 $P$ 点的电势(相对于无穷远处). 然后由该电势求出 $P$ 点以及当 $Z$ 趋于无穷远时的电势.

**本题考点:** 电势的计算

**解:** $R \to R + dR$ 在 $P$ 的电势




$$dV = \frac{\frac{Q}{\pi r^2}2\pi R dR}{4\pi\varepsilon_0(R^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{QRdR}{2\pi\varepsilon_0(R^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}} r^2}$$

$$V = \int_0^r \frac{QRdR}{2\pi\varepsilon_0 r^2(R^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{Q[(r^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}} - Z]}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{QZ}{2\pi\varepsilon_0 r^2}[(1 + (\frac{r}{Z})^2)^{\frac{1}{2}} - 1]$$

$Z \to \infty$ 则 $[1 + (\frac{r}{Z})^2]^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{r^2}{2Z^2}$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 Z}$$

**25.(清华大学2000年)** 静电场中的理想导体:

A. 其表面的电势高于体内的电势;

B. 其体内的自由电荷密度高于表面自由电荷密度;

C. 其体内的电场强度为零;

D. 其表面的电场强度为零.

**本题考点:**导体的静电平衡性质

**解:**导体静电平衡的条件是导体内场强处处为零.

答案选 C

**26.(清华大学 2000 年)** 考虑三个同心球面,半径分别为 $R_1$, $R_2$, $R_3$ 且 $R_1 < R_2 < R_3$. 在 $R < R_1$ 的球体内为理想导体,在 $R_1 < R < R_2$ 的区域内填有相对介电常数为 $\varepsilon_r$ 的电介质,在 $R_2 < R < R_3$ 的区域内为理想导体,$R > R_3$ 的区域为真空,在 $R < R_1$ 的球体上带有总自由电荷 $Q$,其余区域没有自由电荷. 现取一闭合曲面包含以上三个曲面,则通过该曲面由内向外的电场强度的通量为(取真空介电常数为 $\varepsilon_0$):

A. $\frac{Q}{\varepsilon_0}$　　B. $\frac{Q}{\varepsilon_r\varepsilon_0}$　　C. $\frac{\varepsilon_r Q}{\varepsilon_0}$　　D. $\frac{\varepsilon_0 Q}{\varepsilon_r}$

**本题考点:**高斯定理

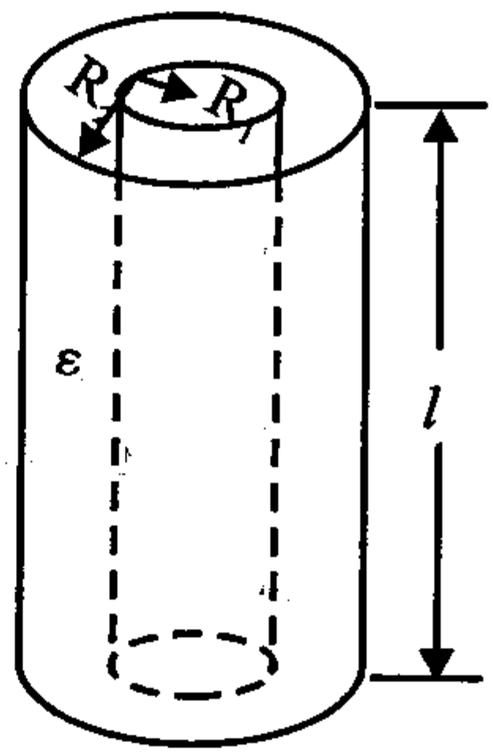
**解:**根据高斯定理　$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q$

代数和　$\sum q = Q$

通量　$\frac{Q}{\varepsilon_0}$

答案选 A

**27.(中国科学技术大学 1998 年)** 如图所示,圆柱形电容器由长为 $l$,半径分别为 $R_1$, $R_2(R_1 < R_2)$ 的两个同轴圆柱形导体圆筒构成(圆筒厚度忽略不计),其间充满介电常数为 $\varepsilon$ 的电介质. 设内外圆筒上的单位长度均匀带电量分别为 $\lambda$ 和 $-\lambda$. 不计边缘效应,试求:



(1) 介质中的电场强度 $E$,电位移矢量 $D$,极化强度 $P$;

(2) 内外圆筒之间的电位差;

(3) 电容 $C$.

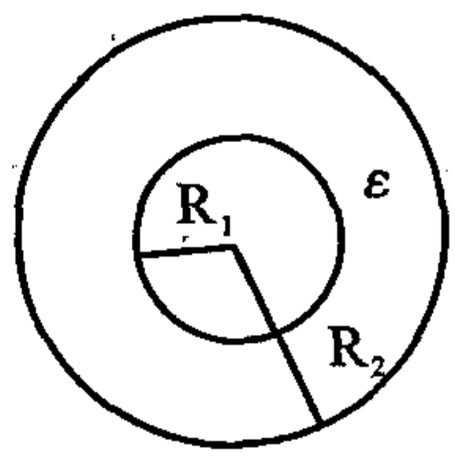
**本题考点:**点场强度、电势、极化强度、电容的关系

**解:**(1) $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon r}, D = \dfrac{\lambda}{2\pi r}, P = \dfrac{(\epsilon_r - 1)\lambda}{2\pi\epsilon_r r}$

(2) $V = \displaystyle\int_{R_1}^{R_2} E dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda dr}{2\pi\epsilon r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1}$

(3) $C = \dfrac{\lambda l}{V} = \dfrac{2\pi\epsilon l}{\ln \dfrac{R_2}{R_1}}$

**28.(中国科学院 2001 年)** 半径为 $R_1$ 的导体球上带有 $Q$ 的电量.在导体球处有一层介电常数为 $\epsilon$ 的绝缘介质外半径为 $R_2$(如图所示).在介质层中带有球对称分布的电荷,电荷密度为 $p = ar(R_1 < r < R_2)$,$a$ 为常数.试求:




(1) 整个空间的电场强度分布;

(2) 求 $r > R_2$ 处的电势分布.

**本题考点:**高斯定理的应用、利用电场求电势

**解:**(1) 由高斯定理得:

$E = 0 \qquad (r < R_1)$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q + \displaystyle\int_{R_1}^{r} ar 4\pi r^2 dr}{\epsilon} = \frac{Q + \pi a[r^4 - R_1^4]}{\epsilon}$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} + \frac{a[r^4 - R_1^4]}{4\epsilon r^2} \qquad (R_1 < r < R_2)$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} + \frac{a[R_2^4 - R_1^4]}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad (r > R_2)$$

$$(2)\varphi(r) = -\int_{\infty}^{r} E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{a[R_2^4 - R_1^4]}{4\epsilon_0 r} \qquad (r > R_2)$$

**29.(南京师范大学 1997 年)** 半径分别为 $R_1$ 与 $R_2$ 的两个同心金属球壳,已知其电势分别为 $U_1$ 和 $U_2$,电势零点在无限远处,求:(1) 内球壳外表面的电量.(2) 外球壳外表面的电量.(3) 内球壳之间离球心 $r$ 一点处的电势.

**本题考点:** 电势叠加原理

**解:**(1) 设内外球壳带电量分别为 $q_1$ 和 $q_2$,由电势叠加原理知

内球电势为　　$U_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

外球电势为　　$U_2 = \dfrac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

联系上两式求解出 $q_1$ 和 $q_2$ 得

$$q_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}(U_1 - U_2)$$

$$q_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_2(R_2 U_2 - R_1 U_1)}{R_2 - R_1}$$

(2) 当 $R_1 < r < R_2$ 时的 $r$ 处的电势为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{R_2}\right)$$

$$= \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\frac{U_1 - U_2}{r} + \frac{R_2 U_2 - R_1 U_1}{R_2 - R_1}$$

**30.(南京师范大学 1997 年)** $a$、$d$ 为一平行板电容器的两个极板,$bc$ 是一块长宽都与板 $a$ 相同的厚导体板,平行地插在 $a$、$d$ 之间.导体板的厚度 $bc = ab = cd$,极板 $a$、$d$ 与内阻可忽略的电动势为 $\varepsilon$ 的蓄电池及电阻 $R$ 相连,已知在没有导体 $bc$ 时的电容为 $C$,现将导体 $bc$ 抽走,设已知抽走过程中外力对电场所作的功为 $A$,求:(1) 存在导体时的电容器.(2) 抽走导体板过程中电阻 $R$ 上消耗的电能.

**本题考点:** 电容器上的功与能的转换

**解:**(1) 设原来 $a$ 与 $d$ 之间的距离为 $t$,极板面积为 $S$,则电容 $C = \dfrac{\varepsilon_0 s}{t}$,插入 $bc$ 后,可看成两个电容都为 $C_1 = C_2 = \dfrac{3\varepsilon_0 s}{t}$ 的电容的

串联,则总电容 $C'_{ad} = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \dfrac{1}{2} C_1 = \dfrac{3}{2} \dfrac{\varepsilon_0 s}{t} = \dfrac{3}{2} C$

(2) 由于抽走导体板过程中电压不变,将导体板抽走前后,极板上的电量改变,抽走前电容器上储能为 $W_{e_1} = \dfrac{1}{2} C'_{ad} \varepsilon^2$,后来的储能为 $W'_e = \dfrac{1}{2} C\varepsilon^2$,故电容器上的储能改变量为 $\Delta W_e = W'_e - W_{e_1} = \dfrac{1}{2} \cdot (-\dfrac{1}{2} C)\varepsilon^2$, $\Delta W_e = -\dfrac{1}{4} C\varepsilon^2 < 0$,能量减少.这时电容器对外释放能量,极板上电量减少量为 $\Delta Q = \varepsilon \Delta C$,抵抗电源做功

$$A_{\text{电源}} = \varepsilon^2 \Delta c = \varepsilon^2 (C - \frac{3}{2} C) = -\frac{1}{2} C\varepsilon^2$$

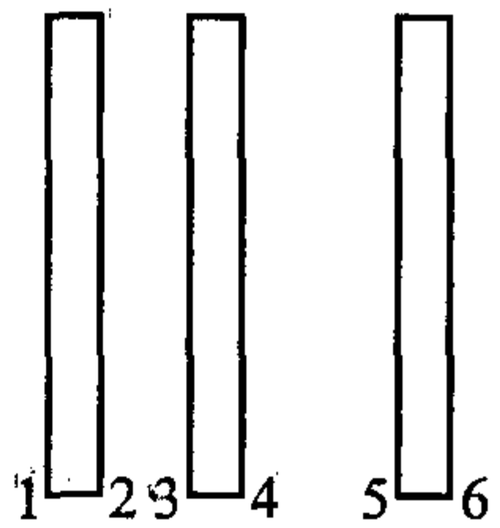
由能量守恒有:电容器上的能量的减少量 = 外力做功 + 反抗电源做功 + 电阻上消耗的能量.

即 $R$ 上消耗的能量 $= A + \dfrac{1}{2} C\varepsilon^2 - \dfrac{1}{4} C\varepsilon^2 = A + \dfrac{1}{2} C\varepsilon^2$

**31.(中山大学 2002 年)** 三块无限大平面带电导体板平行靠近放置(见图示).试论证:

(1) 相向的两对表面(2 与 3,4 与 5) 上,其电荷面密度都总是大小相等,符号相反;

(2) 相背的两个表面(1 与 6) 上,电荷面密度总是大小相等,符号相同.




**本题考点:** 静电平衡条件、高斯定理与场强叠加

**解:** 由三个导体板在静电平衡时其内部场强必为零得

$$\begin{cases} \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4 - \sigma_5 - \sigma_6 = 0 \\ \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 - \sigma_5 - \sigma_6 = 0 \\ \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 - \sigma_6 = 0 \end{cases}$$

解之得 $\sigma_2 = -\sigma_3, \sigma_4 = \sigma_5, \sigma_1 = \sigma_6$

**32.(华中科技大学 2001 年)** 两个均匀带电的金属同心球壳,内球壳半径为 5.0 厘米,厚度忽略,带 $0.60 \times 10^{-8}$ 库仑的正电荷;

外球壳的内半径为7.0厘米,厚度为2.0厘米,带$2.0\times10^{-8}$库伦的负电荷.求距球心3.0、6.0、8.0、10.0厘米各点处的电场强度.

**本题考点:**在静电平衡下应用高斯定理求电场强度

**解:**外球壳内表面在静电平衡下必感应出与内球壳等量异号的电荷$q'=-0.6\times10^{-8}$库仑.

由高斯定理得

(1) 当$r<R_1=5.0\times10^{-2}$m时

$$E_1=0\quad(r<R_1=5.0\times10^{-2}\text{m})$$

在$r=3\times10^{-2}$cm处的场强$E=0$

(2) 当$R_1<r<R_2=7.0\times10^{-2}$m时,由高斯定理得

$$E_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

在$r=6\times10^{-2}$m处的场强大小为

$$E_2=\frac{(0.6\times10^{-8})}{[4\pi\varepsilon_0\times(6\times10^{-2})^2]}$$

$$\approx1.5\times10^4\text{伏}/\text{米}$$

(3) 当$R_2<r<R_3=9\times10^{-2}$m时,在$r=8\times10^{-2}$m处的场强可由导体的静电平衡或高斯定理知:

$$E_3=0$$

(4) 当$r>R_3$时,由高斯定理得

$$E_4=\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0\times r^2}$$

$$=\frac{(2\times10^{-8})}{[4\pi\varepsilon_0\times(6\times10^{-2})^2]}$$

$$\approx1.8\times10^4\text{伏}/\text{米}$$

**33.(华中科技大学2001年)** 一平行板电容器的两板带有等值异号的电荷,两板间的距离为5毫米,两板间充满相对介电常数$\varepsilon_r=3$的介质,如介质中的电场强度为$1.0\times10^6$伏特/米,求(1)介

质中的电位移矢量,(2) 平行板上的自由电荷密度,(3) 介质中的极化强度,(4) 介质面上的极化电荷面密度.($\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ 法拉/米).

**本题考点:**介质中的高斯定理、极化强度、极化电荷的计算

**解:**(1) 在不考虑边缘效应时,由

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = 8.85 \times 10^{-12} \times 3 \times 1 \times 10^{+6}$$

$$= 2.66 \times 10^{5} \text{ 库仑/米}^2$$

(2) 由高斯定理可得平行板上的自由电荷面密度:

$$\sigma_0 = D = 2.66 \times 10^{-5} \text{ 库仑/米}^2$$

(3) 介质中的极化强度

$$P = 8.85 \times 10^{-12} \times 2 \times 1 \times 10^{6} = 1.77 \times 10^{-5} \text{ 库仑/米}^2$$

(4) 由 $\sigma' = (\frac{1}{\varepsilon_r} - 1)\sigma_0$ 可得介质面上的极化电荷密度:

$$\sigma' = (\frac{1}{3} - 1)\sigma_0 = -\frac{2}{3} \times 2.66 \times 10^{-5}$$

$$= 1.77 \times 10^{-5} \text{ 库仑/米}^2$$

**34.(华中科技大学2002年)** 半径为 $R$ 的均匀带电球面置于真空中,其面电荷密度为 $\sigma$,求:

(1) 球面内、外的电场强度;

(2) 球面内、外的电势.

**本题考点:**高斯定理的应用 —— 求场强与电势

**解:**(1) 球面总带电量 $Q = 4\pi R^2 \sigma$,设球面内外的电场强度分别为 $\vec{E}_1$、$\vec{E}_2$,由高斯定理及对称性分析知

$$\Phi_e = \oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} = 0, \qquad \vec{E}_1 = 0 \qquad (r < R)$$

$$\Phi_e = \oint_{s'} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \qquad \vec{E}_2 = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}\vec{r}^0 \qquad (r > R)$$

式中 $\vec{r}^0$ 为沿径向向外的单位向量.

(2) 选取无穷远处电势为零,由电势的定义知:当 $r > R$ 时任意 $r$ 处的电势为

$$V(r) = \int_r^{\infty} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} \qquad (r > R)$$

当 $r = R$ 时, $V(R) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} R$;

当 $r < R$ 时, $V(r) = \int_r^R \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_R^{\infty} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} R$

**35.(华中科技大学2002年)** 平行板电容器的电容100皮法拉,极板的面积为100厘米$^2$,极板间充满相对介电常数为5.4的云母介质,如极板的电势差为50伏特,求:

(1) 介质中的电场强度,($\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ 法拉/米)

(2) 云母介质面上的极化面电荷.

**本题考点:** 平行板电容器的电容、电势差与场强的关系、极化电荷面密度 $\sigma'$ 与自由电荷面密度 $\sigma_0$ 的关系

**解:** (1) 在介质均匀极化及不考虑边缘效应时,由平行板电容器的电容 $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$ 得

极板间距: $d = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{c}$

由电势差 $\Delta V = Ed$ 得

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{\Delta V C}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} = \frac{50 \times 100 \times 10^{-12}}{5.4 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 10^{-2}}$$

$$= 1.05 \times 10^4 (\text{伏/米})$$

(2) 由极化电荷面密度 $\sigma'$ 与自由电荷面密度 $\sigma_0$ 的关系

$\sigma' = (\frac{1}{\varepsilon_r} - 1)\sigma_0$ 得

$$q' = S\sigma' = (\frac{1}{\varepsilon_r} - 1) S\sigma_0$$

$$= (\frac{1}{5.4} - 1) \times 100 \times 10^{-12} \times 50 = -4.26 \times 10^{-9} (\text{库仑})$$

**36.(华中科技大学 2003 年)** 计算二根半径为 $a$、中心距离相隔为 $d$、带异号电荷的无限长平行导线单位长度的电容量.($d \gg a$)

**本题考点:** 高斯定理与叠加原理、电势与电场强度的关系、电容

**解:** 由题意 $d \gg a$,设单位长度上带电量为 $\pm\lambda$,平行导线间任意 $x$ 处的电场强度可由高斯定理与叠加原理得

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d-x)}$$

再由电势差的定义得平行导线间的电势差为

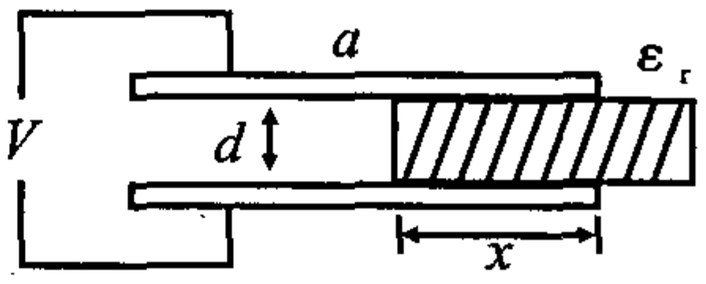
$$\Delta V = \int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= \int_a^{d-2a}\left[\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d-x)}\right]dx$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln 2 + \ln\frac{d-2a}{d-a}\right]$$

单位长度上的电容 $C = \dfrac{\lambda}{\Delta V} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{2(d-2a)}{d-a}} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\ln 2}$

**37.(北方交大 2002 年)** 正方形平行板电容器的边长为 $a$,两级板间距为 $d$,与电源相接保持恒电压 $V$,其右侧 $x$ 部分充满相对电容率为 $\varepsilon_r$ 的固体电介质,如图所示.试求:




(1) 若电介质与电容器级板接触光滑,松手后介质如何运动?为什么?

(2) 计算电介质向左移动 $\Delta x$ 时,电源所做的功;

(3) 计算电介质在 $x$ 位置时受到的电场力.

**本题考点:** 电容器上的能量转换、电场力做功、电源做功图

**解:** (1) 介质板插入一段距离 $x$ 时,电容器的总电容为

$$C = \frac{\varepsilon_0 a}{d}[a + (\varepsilon_r - 1)x]$$

因为电压 $V$ 不变,所储能量用 $V$ 表示为

$$W_c = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 a}{d}[a + (\varepsilon_r - 1)x]V^2$$

若松手后,因为 $V$ 不变,则电容器所带电量将增加. $dQ = VdC$

这个 $dQ = VdC$ 是电源在恒定电压 $V$ 下供给的,电源做的功 $dA_\varepsilon = VdQ = V^2 dC$,而电容器能量的增量为 $dW_c = \frac{1}{2}V^2 dC$,由功能关系: $dA_\varepsilon = dW_c + Fdx$. 即电场力 $F$ 对介质板位移 $dx$ 所做的功为 $Fdx = dA_\varepsilon - dW_c$

即　　$$Fdx = V^2 dC - \frac{1}{2}V^2 dc = \frac{1}{2}V^2 dC$$

故　　$$F = \frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{2d}aV^2 > 0$$

$F$ 表现为"吸力"(指向电容器内部).

(2) 电源做功 $A_\varepsilon = \int_x^{x+\Delta x} V^2 dC = \frac{\varepsilon_0 aV^2}{d}(\varepsilon_r - 1)\Delta x$

**38.**(华东理工大学2002年) 电荷 $Q$ 均匀地分布在半径 $R$ 的球体内,试求离球心 $r(r < R)$ 处的电场强度和电势 $V$ 的大小.

**本题考点:** 高斯定理求电场强度与电势

**解:** 由对称性分析及高斯定理有:当 $r < R$ 时

$$\iint_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q' - \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{R^3}Q$$

$$E\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 R^3}r^3$$

即　　$$\vec{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r} \qquad (r < R)$$

对于 $r > R$ 的区域,同理有

$$\vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} \qquad (r > R)$$

令无穷远处的电势为零,则

$$V(r) = \int_r^R \vec{E}_1\cdot d\vec{r} + \int_R^r \vec{E}_2\cdot d\vec{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^3}(R^2 - r^2) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

**39.**(东北大学 2002 年) 求电偶极子电场的电势空间分布.(电偶极子的电矩是 $P$)

**本题考点:**电势

**解:**以无穷远点为零势点

负电荷产生的电势 $V_- = -\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_-}$

正电荷产生的电势 $V_+ = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r_+}$

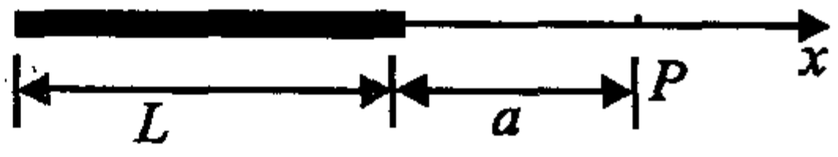
所以,电偶产生的电势 $V = V_+ + V_- = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_+} - \dfrac{1}{r_-}\right)$

在 $r \doteq r_+ = r_- \gg l$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_- - r_+}{r^2} = \frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

**40.**(东北大学2002年)如图,电荷 $q$ 均匀分布在长为 $L$ 的细棒上,棒延长线上一点 $P$ 点离棒端点的距离为 $a$,求 $P$ 点的电场强度和电势(设无穷远点处的电势为零).

**本题考点:**叠加原理求电场强度、电势




**解:**如图建立坐标系在细棒上取 $dx$,带电荷,为 $dq = \dfrac{q}{L}dx$

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{q}{L}dx}{(L + a - x)}$$

$$V = \int dV = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L}\int_0^L \frac{dx}{L + a - x}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{a}{L + a}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{L + a}{a}$$

求电场强度解法 1:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{q}{L}dx}{(L+a-x)^2}$$

$$E = \int dE = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L}\int_0^L \frac{dx}{(L+a-x)^2}$$

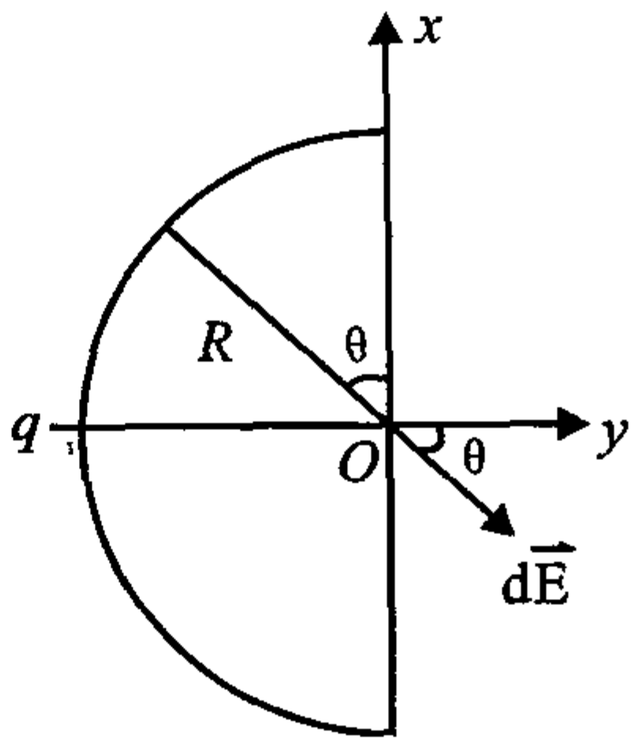
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{L+a}\right] = \frac{qL}{4\pi\varepsilon_0 La(a+L)}$$

解法 2:

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{L+a}{a} \qquad (\text{变量为 } a)$$

$$E = -\frac{dU}{da} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{L+a} - \frac{1}{a}\right) = \frac{qL}{4\pi\varepsilon_0 La(L+a)}$$

**41.(东南大学2001年)**半径为 $R$ 的半圆细环,均匀地分布有 $+q$ 的电荷,如图所示,试求环心处的电场强度大小和方向




**本题考点:**叠加原理求场强

**解:**线密度　$\lambda = \frac{q}{\pi R}$　$dq = \lambda R d\theta$

$$dE = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\lambda d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

分解 $\vec{E}$

$$dE_x = -dE\cos\theta = -\frac{\lambda\cos\theta d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$dE_y = +dE\sin\theta = +\frac{\lambda\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}d\theta$$

$$E_x = \int_0^{\pi} -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\theta d\theta = 0$$

$$E_y = \int_0^{\pi}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta d\theta$$

$$= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}[-1+(-1)] = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

把 $\lambda = \frac{q}{\pi R}$ 代入上式得

$$\vec{E} = \frac{q}{2\pi^2 \varepsilon_0 R}\vec{j}$$

**42.**(东南大学 2001 年) 在真空中,均匀带电为 $q$ 的球体,半径为 $R$,求球内、外任一点处(用 $r$ 表示) 的电场强度的大小.

**本题考点:** 用高斯定理求场强

**解:** 由于电荷是球对称的,因此以球体圆心为中心,任意长 $r$ 为半径,作一个球面为高斯面,有球面上的 $E$ 大小相同,方向沿径向

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \varepsilon_0 \sum q_i$$

当 $r \geqslant R$ 时 $\sum q_i = q$

当 $r < R$ 时 $\sum q_i = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{qr^3}{R^3}$

$$E = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} & (r \geq R) \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qr}{R^3} & (r < R) \end{cases}$$

**43.**(东南大学 2001 年) 半径为 $R_1 = 10\text{cm}$ 金属导体球,带电量为 $Q = 1.0 \times 10^{-8}\text{C}$,在它外面套一金属球壳,其半径为 $R_2 = 20\text{cm}$ 和 $R_3 = 30\text{cm}$,球壳与球之间是真空,而球壳外整个空间充满相对电容率为 $\varepsilon_r = 3$ 的电介质,计算 $a, b$ 两点间的电势差,已知 $r_a = 10\text{cm}, r_b = 40\text{cm}, \varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ 或

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.0 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$$

**本题考点:** 计算电势差(用定义求)

**解:** 根据静电平衡条件得:导体球壳内表面带 $-Q$ 的电荷,外表面带 $Q$,用高斯定理可以求空间的电场

$$E = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} & (R_1 < r < R_2) \\ 0 & (R_2 < r < R_3) \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\dfrac{Q}{r^2} & (r > R_3) \end{cases}$$

$$U_a - U_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= \int_{r_a}^{R_2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}dr + \int_{R_3}^{r_b}\frac{Qdr}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_3}-\frac{1}{r_b}\right)\right]$$

代入数据得　$\Delta U = 475$(伏)

**44.(东南大学2002年)**点电荷$Q$被闭合曲面$S$包围,从无穷远处引入另一点电荷$q$到曲面外某点,如图所示,则引入前后

(A) 曲面 $S$ 上的电通量不变,曲面上各点电场强度也不变;

(B) 曲面 $S$ 上电通量变化,曲面上各点电场强度不变;




(C) 曲面 $S$ 上电通量变化,曲面上各点电场强度变化;

(D) 曲面 $S$ 上电通量不变,曲面上各点电场强度变化.

**本题考点:**高斯定理

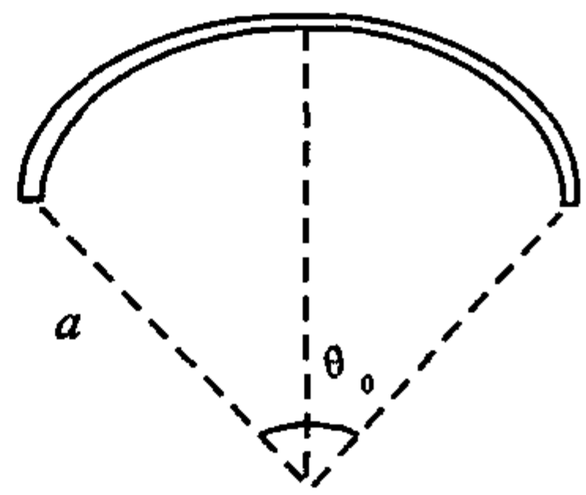
**解:**闭合面电通量只与面内的电荷有关与曲面外电荷无关,闭合面上的场强由内外电荷共同决定.

答案选 D

**45.(辽宁大学 2001 年)**一段半径为 $a$ 的细圆弧,对圆心的张角为 $\theta_0$,其上均匀分布有正电荷 $q$,如图所示.试以 $a$, $q$, $\theta_0$ 表示出圆心 $O$ 处的电场强度

**本题考点:**用电场迭加原理求场强

解:如图建立坐标系,设电荷线密度为

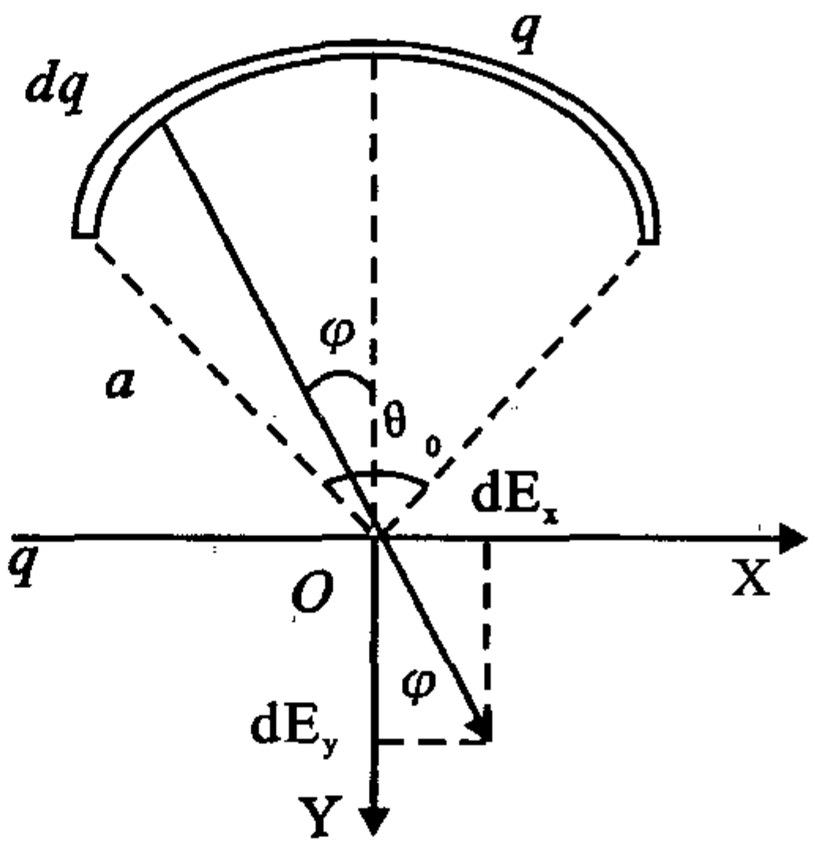



$$\lambda = \frac{q}{a\theta_0}$$

在圆弧上任取一电荷元 $dq$:

$$dq = \lambda a d\varphi = \frac{q}{\theta_0} d\varphi$$

$dq$ 在 $O$ 处的场强: $dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$




正交分解 $d\vec{E}$:

$$dE_x = dE\cos\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\cos\varphi$$

$$dE_y = dE\sin\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\sin\varphi$$

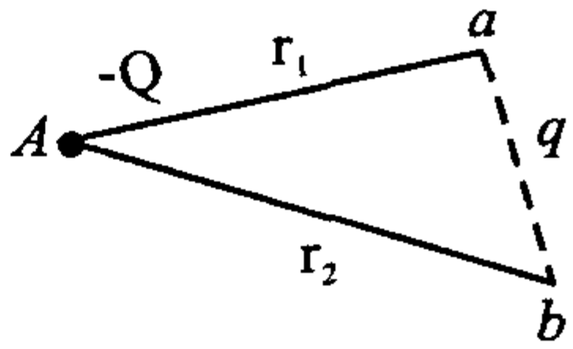
根据场强迭加原理求 $E$:

由对称性,可知 $E_x = 0$

$$E = E_y = \int dE_y = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\cos\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{\frac{\theta_0}{2}} \frac{q\cos\varphi}{4\pi\varepsilon_0 a^2\theta_0} d\varphi = \frac{q\sin\frac{\theta_0}{2}}{2\pi\varepsilon_0 a^2\theta_0}$$

**46.(辽宁大学 2001 年)** 在带电量为 $-Q$ 的点电荷 $A$ 的静电场中,将另一带电量为 $q$ 的点电荷 $B$ 从 $a$ 点移动到 $b$ 点,$a$、$b$ 两点距离点电荷 $A$ 的距离分别为 $r_1$ 和 $r_2$,如图所示,则移动过程中电场力做的功为




A. $\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2})$

B. $\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2})$

C. $\frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2})$

D. $\frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0(r_1 - r_2)}$

**本题考点**:电势能、电场力的功

**解**:$A_{ab} = qU_{ab} = q(V_A - V_B)$

$$= -\left(\frac{Q}{4x\varepsilon_0 r_1} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}\right)q = \frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

答案选 C

**47.(辽宁大学 2001 年)** 一点电荷带电量 $q = 10^{-9}C$,$A$、$B$、$C$ 三点分别距离点电荷 10cm、20cm、30cm,若选 $B$ 点的电势为零,则 $A$ 点的电势为_____.$C$ 点的电势为_____.

($\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}$)

**本题考点**:电势的计算

**解**:$V_A = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{0.1}^{0.2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{0.1} - \frac{1}{0.2}\right) = 45(\text{V})$

$$V_c = \int_C^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{0.3}^{0.2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{0.3} - \frac{1}{0.2}\right) = -15(\text{V})$$

空处填:45V - 15V

**48.(东南大学 2002 年)** 当一带电导体达到静电平衡时(　　)

A. 表面上电荷密度较大处电势较高;

B. 表面曲率较大处电势较高;

C. 导体内部电势比导体表面电势高;

D. 导体内任一点与其表面上任一点的电势差为零.

**本题考点**:静电平衡

**解**:导体是一个等势体,表面是一个等势面.因此导体内与表面没有电势差

答案选 D

**49.(东南大学 2002 年)** 一半径为 $R$ 的导体球表面的电荷面密度为 $\sigma$,在距球面中心为 $2R$ 处的电场强度为_____;在距球心为 $r$ 处且 $r < R$ 的电场强度为_____.

本题考点:电场强度,导体

解:球面带电量 $Q = \sigma 4\pi R^2$

在 $2R$ 处的电场 $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(2R)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi R^2\sigma}{(2R)^2} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$

在 $r < R$ 处 $E = 0$

空处分别填:$\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$、0

**50.**(东南大学 2002 年)半径为 $r$ 的导体球带电 $q$,球外有一半径为 $R$ 的同心球壳,且带电为 $Q$,则两球的电势差为(　　)

A. $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{q}{r} - \frac{Q}{R})$;　　B. $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{q}{r} - \frac{q}{R})$

C. $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{Rr}$　　D. $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{Q}{r} - \frac{Q}{R})$

本题考点:电势差的计算

解:在 $r < b < R$ 的场强,$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b^2}$

$$V = \int_r^R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b^2}db = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r} - \frac{1}{R})$$

答案选 B

**51.**(东南大学 2002 年)有一无限长均匀带电直线,单位长度上的电荷(电荷线密度为 $\lambda$),求距均匀带电直线的垂直距离为 $r$ 处的电场强度大小.

本题考点:高斯定理

解:因为电荷是轴对称分布,所以电场强度也具有轴对称,以轴为中心作任一半径为 $r$,长为 $l$ 圆柱面,柱面上各点 $E$ 大小相同,方向是径向向外.圆柱面上、下端用一个垂直轴的圆面封面,则上、下圆面的电场强度垂直面法线方向 $\vec{E} \perp \vec{n}$,即电通量为 0.

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 2\pi lr^2 = \lambda l$$

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

**52.**(东南大学 2002 年) 两个同心的均匀带电导体球面,半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$ 且 $R_1 < R_2$,带电分别为 $Q_1$ 和 $Q_2$,求(1)$r < R_1$;(2)$r > R_1$ 且 $r < R_2$;(3)$r > R_2$ 各处的电势.(设无穷远处的电势为零)

**本题考点:**由电势的叠加或定义求电势

解法 1:半径为 $R$ 的导体球面带电为 $Q_1$,在空间产生的电势

$$U_1 = \begin{cases} \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r \geq R_1) \\ \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} & (r < R_1) \end{cases}$$

半径为 $R_2$ 的导体球面带电为 $Q_2$,在空间产生的电势

$$U_2 = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_2}{r} & (r \geq R_2) \\ \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_2}{R_2} & (r < R_2) \end{cases}$$

总电势

$$U = U_1 + U_2 = \begin{cases} \dfrac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r \geq R_2) \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\dfrac{Q_1}{r} + \dfrac{Q_2}{R_2}\right) & (R_1 \leq r \leq R_2) \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{Q_2}{R_2} + \dfrac{Q_1}{R_1}\right) & (r \leq R_1) \end{cases}$$

解法 2:两个同心导体球面带电后,要静电感应平衡后,$R_1$ 球面带电 $Q_1$,$R_2$ 球面内表面带电 $-Q_1$,外表面带电为 $Q_1 + Q_2$,用高斯定理可计算得空间的场强分布为

$$E = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_1 + Q_2}{r^2} & (r \geq R_2) \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_1}{r} & (R_1 \leq r \leq R_2) \\ 0 & (r < R_1) \end{cases}$$

方向径向向外

$$U = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$r > R_2$ $\quad U = \int_r^{\infty} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_1 + Q_2}{r^2} dr = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_1 + Q_2}{r}$

$R_1 < r < R_2$ $\quad U = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_2}^{\infty} \dfrac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr + \int_r^{R_2} \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$

$$= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r} - \frac{Q_2}{R_2}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_1}{r}\right)$$

$r < R_1$ $\quad U = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$$= \int_r^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2}$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

**53.(东南大学 2002 年)** 平行板电容器两极板相距 0.2mm,其间充满相对介电常数(相对电容率)$\varepsilon_r = 5$ 的玻璃片,当两极极间电压为400V时,玻璃表面上的极化(束缚)电荷面密度为多少?(已知真空中的电容率 $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}(C \cdot N^{-1} \cdot m^{-2})$

**本题考点:**介质极化,束缚电荷

**解:**平行极电容器中,设自由电荷密度为 $\sigma_0$,束缚电荷密度 $\sigma'$

$V = Ed$,因此介质中

$$E = \frac{V}{d} = \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\varepsilon_0}$$

又因为　　$D = \varepsilon_0\varepsilon_r E = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_r V}{d} = \sigma_0$

$$\frac{\sigma_0 - \sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{V}{d}$$

$$\varepsilon_r\sigma_0 - \varepsilon_r\sigma' = \sigma_0 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r V}{d}$$

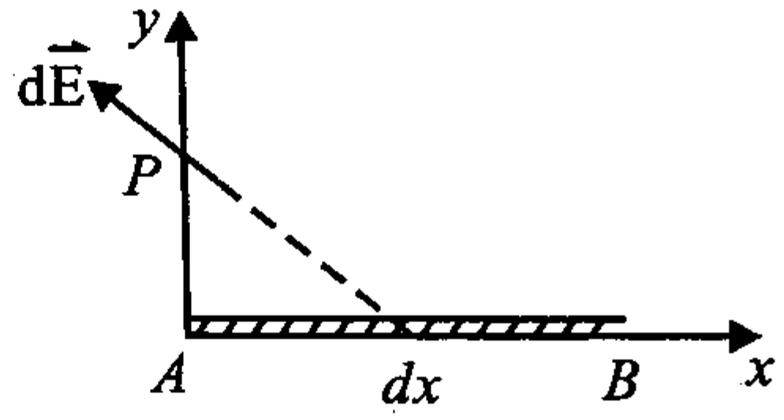
$$\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r^2 V}{d} - \varepsilon_r\sigma' = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r V}{d}$$

$$\sigma' = \frac{\varepsilon_0 V}{d}(\varepsilon_r - 1) = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 400}{0.2 \times 10^{-3}} \times 4$$

$$= 7.08 \times 10^{-5}(\text{库仑} / \text{米}^2)$$

**54.(华南师范大学2002年)** 如图,均匀带电细棒 $AB$ 长度 $L$,总带电量为 $q$,$P$ 是棒外一点,$PA$ 与 $AB$ 垂直,$P$ 到棒的距离为 $h$,求 $P$ 点的电场强度.

**本题考点:**电场强度计算




**解:**电荷线密度　$\lambda = \dfrac{q}{L}$

$$dq = \lambda dx$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{\sqrt{(x^2 + h^2)^2}}$$

$$dE_x = -dE\sin\theta = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda x dx}{(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$dE_y = dE\sin\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda y dx}{(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_x = -\int dE_x = -\int_0^l \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda x dx}{(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(h^2 + L^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{h}\right]$$

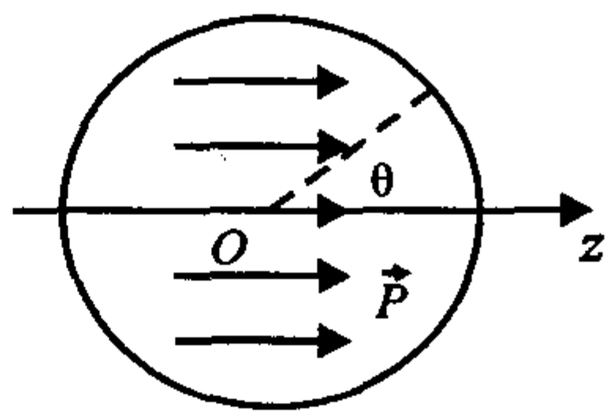
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left[-\frac{1}{h} + \frac{1}{\sqrt{(h^2 + L^2)^2}}\right]$$

$$E_y = \int dE_y = \int_0^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda y dx}{(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{y(L^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 y\sqrt{L^2 + h^2}}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2 + L^2}} - \frac{1}{h}\right)\vec{i} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 y\sqrt{L^2 + h^2}}\vec{j}$$

**55.(复旦大学 1999 年)** 一半径为 $R$ 的电介质球均匀极化,极化强度为 $P$,取球坐标系,原点在球心 $O$,极轴 $z$ 与 $\vec{P}$ 平行,如图.




(1) 求球面上极角为 $\theta$ 处的极化电荷面密度 $\sigma'(\theta)$,

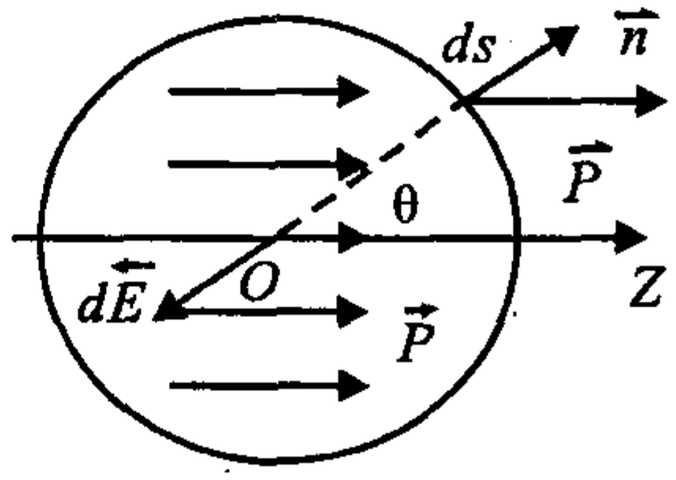
(2) 极化电荷在球心处产生的退极化场的场强 $\vec{E}$.

**本题考点:** 电介质球的极化,极化电荷,退极化场强.

**解:** (1) 如图所示,极化电荷面密度为

$$\sigma'(\theta) = \vec{P} \cdot \vec{n} = P\cos\theta$$

(2) 由于球对称性,得知球心处的退极化场 $E'$ 只有 $z$ 分量,在球面上任取一面元 $ds$,则




$$ds = R^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

($\varphi$ 为方位角)

$ds$ 上的束缚电荷为 $dq' = \sigma' ds = P\cos\theta ds$

$dq'$ 在球心产生的电场为 $dE$,

$$dE' = \frac{dq'}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\cos\theta\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$dE'_z = dE\cos(\pi - \theta) = -\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\cos^2\theta\sin\theta d\theta d\varphi$$

对球面积分得 $O$ 点的总退极化场为:

$$E' = E'_z = \int_s dE'_z = -\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta\int_0^2 d\varphi = -\frac{P}{3\varepsilon_0}$$

即　　$\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$

**56.**(华南师范大学 2002 年) 面积很大的三块薄导体板 $A$、$B$、$C$ 平行放置,已知三板一个侧面的面积均为 $S$,板间距离均为 $d$,$A$ 板的总电量为 $q_A$,$B$ 板的总电量为 $q_B$,$C$ 板接地,

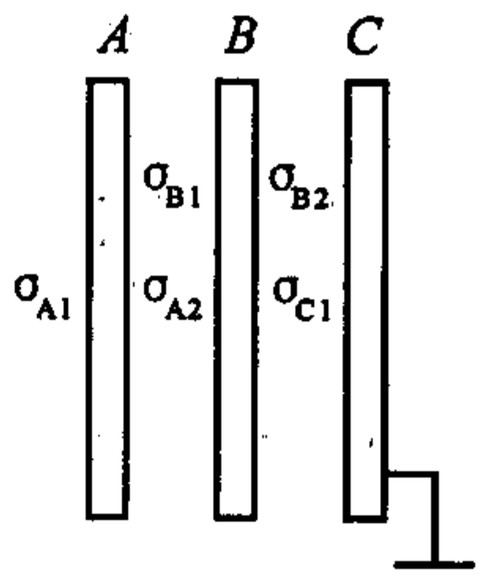
(1) 求各导体板的电荷密度

(2) 求 $A$ 板的电位.

(3) 若要使 $B$ 板的电位最高,求 $q_A$、$q_B$ 应满足的条件.

**本题考点:**导体的静电平衡条件的电荷分布,电场、电势

**解:**(1) 如图设三板各侧面的电荷密度,由静电平衡条件得:




$$\sigma_{A2} + \sigma_{B1} = 0 \quad \sigma_{A1} + \sigma_{A2} = \sigma_A = \frac{q_A}{S}$$

$$\sigma_{B2} + \sigma_{C1} = 0 \quad \sigma_{B1} + \sigma_{B2} = \sigma_B = \frac{q_B}{S}$$

$$\frac{\sigma_{A1}}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_{A2}}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_{B1}}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_{C1}}{2\varepsilon} - \frac{\sigma_{b2}}{2\varepsilon_0} = 0$$

即　$\sigma_{A1} = 0$

$$\sigma_{C1} = -\frac{q_A + q_B}{S}$$

$$\begin{cases} \sigma_{A1} = 0 \\ \sigma_{A2} = \dfrac{q_A}{S} \\ \sigma_{B1} = -\dfrac{q_A}{S} \\ \sigma_{B2} = \dfrac{q_A + q_B}{S} \end{cases}$$

(2) $A$ 板电势 $U_A = E_{AB}d + E_{BC}d$

$$= \frac{\sigma_{A2}}{\varepsilon_0}d + \frac{\sigma_{B2}}{\varepsilon_0}d = \frac{q_A d}{s\varepsilon_0} + \frac{(q_A + q_B)d}{\varepsilon_0 S} = \frac{2q_A + q_B d}{\varepsilon_0 S}$$

(3) $U_B = (\frac{q_A + q_B)d}{\varepsilon_0 S} > U_A = \frac{2q_A d + q_B d}{\varepsilon_0 S}$

$$U_B = \frac{(q_A + q_B)d}{\varepsilon_0 S} > 0$$

必须：$q_A < 0, q_B > -q_A$

即：$A$ 极板带负电，$B$ 极板带正电荷且大于 $A$ 板带负电的电量.

**57.（华南师范大学 2002 年）** 圆柱形电容器由半径为 $a$ 的圆柱导体及共轴的导体圆筒构成，圆筒的内半径为 $b$，圆柱导体和导体圆筒的长度均为 $L$，其间充满相对介电常数为 $\varepsilon_r$ 的介质. 设导体圆柱和圆筒的电位差为 $U$，求

(1) 介质中的电场强度

(2) 介质表面的极化电荷面密度

**本题考点：圆柱形电荷的电场**

**解：**(1) 设圆柱形电容器内圆柱导体带电线密度为 $\lambda$，用高斯定理可求

$a < r < b$ 时，$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$

$$U = \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{b}{a}$$

$$\lambda = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{U}{\ln\frac{b}{a}}$$

电场强度 $E = \frac{\frac{U}{r}}{\ln\frac{b}{a}} = \frac{U}{r\ln\frac{b}{a}}$

(2) $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sum q_f + \sum q_c)$

取一圆柱面加两底面，柱面是以圆柱电容器轴为轴，半径为

$r,(a < r < b)$ 并为 $l$,两底面垂直于轴线.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{U}{r\ln\frac{b}{a}} \cdot 2\pi rl = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{2\pi\varepsilon_0 U\varepsilon_r}{\ln\frac{b}{a}} + \lambda'\right)l$$

束缚电荷线密度　$\lambda' = \frac{2\pi U}{\ln\frac{b}{a}}(1 - \varepsilon_r)$

介质内表面密度为　$\sigma'_1 = \frac{\lambda'}{2\pi a} = \frac{U}{a\ln\frac{b}{a}}(1 - \varepsilon_r)$

介质外表面密度为　$\sigma'_2 = \frac{\lambda'}{2\pi b} = \frac{U}{b\ln\frac{b}{a}}(\varepsilon_r - 1)$

**58.(南京大学 2002 年)** 一个电容为 $C$ 的电容器,用电池充电,充好后若电容器所带电量为 $Q$,则充电过程中电池做功为多少?

**本题考点:**电容的能量

**解:**开始 $Q_0 = 0$　　电容器存储的电能

$$W_1 = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C} = 0$$

充好 $Q$ 电量的电容器存储的电能

$$W_2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

充电过程电池做功　　$A = W_2 - W_1 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

**59.(复旦大学 2001 年)** 一平行板电容器极板面积为 $S$,板间距离为 $d$,与一直流电源联接,使电容器有恒定电压 $U$,在外力作用下将极板的间距拉大到 $2d$.试求:

(1) 电容器静电能的改变量;

(2) 外力在此过程中所作的功.

**本题考点:**带电平行板电容的静电能.

**解:**(1) 极板间距离为 $d$ 时,带电平行板电容的静电能密度为

$$w_3 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{U^2}{d^2}$$

其静电能为：$W_e = w_e V = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{U^2}{d^2} Sd = \varepsilon_0 \frac{SU^2}{2d}$

极板间距离为 $2d$ 时，$E' = \frac{U}{2d}$

$$w'_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E'^2 = \frac{1}{8}\varepsilon_0 \frac{U^2}{d^2}$$

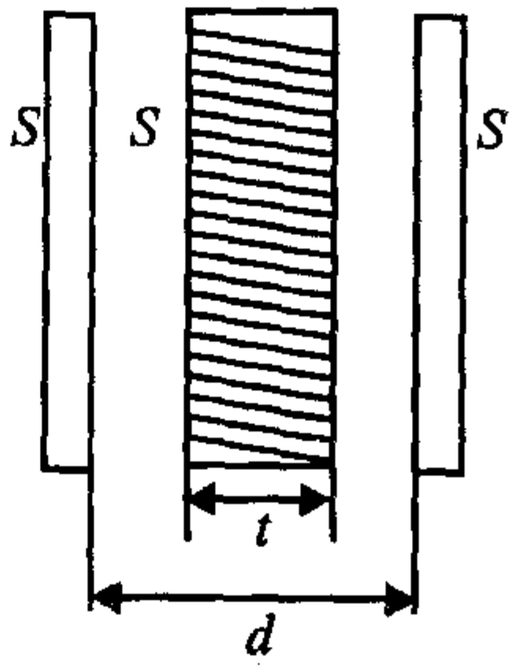
静电能变为：$W_e' = w'_e \cdot 2dS = \varepsilon_0 \frac{U^2 S}{4d}$

静电的改变量：$|\Delta W_e| = W_e - W'_e = \frac{\varepsilon_0 U^2 S}{4d}$

(2) 根据功能原理，外力在此过程中做的功为

$$A = \Delta W_e = -\frac{\varepsilon_0 U^2 S}{4d}$$

**60.**(辽宁大学 2001 年) 一空气平行板电容器，两极板面积均为 $S$，板间距离为 $d$($d$ 远小于极板线度)，在两极板间平行地插入一面积也是 $S$、厚度为 $t < d$ 的金属片，试求：




(1) 电容 $C$ 等于多少？

(2) 金属片放在两极板间的位置对电容值有无影响？

**本题考点：**平行板电容器

**解：**(1) 设两极板分别带上等量异号电荷，其面电荷密度为 $+\sigma$，$-\sigma$，

则在两极间空气中 $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$，金属片中 $E = 0$.

两极间电压为 $U = E(d - t) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d - t)$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma S}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d - t}$$

(2) 金属片放在两极板间的位置对电容值无影响.

**61.(南京师范大学 1997 年)** 半径分别为 $a$ 与 $b$ 的两个同心金属球壳,已知其电势分别为 $U_1$ 和 $U_2$,电势零点在无限远处,求:(1) 内球壳外表面的电量.(2) 外球壳外表面的电量.(3) 内球壳之间离球心 $r$ 一点处的电势 $U$.

**本题考点:** 电势叠加原理

**解:**(1) 设内外球壳带电量分别为 $q_1$ 和 $q_2$,由电势叠加原理知

内球电势为 $U_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

外球电势为 $U_2 = \dfrac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

联系上两式求解出 $q_1$ 和 $q_2$ 得

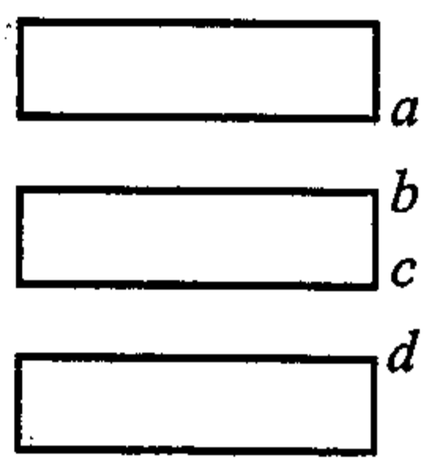
$$q_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}(U_1 - U_2)$$

$$q_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_2(R_2 U_2 - R_1 U_1)}{R_2 - R_1}$$

(2) 当 $R_1 < r < R_2$ 时的 $r$ 处的电势为

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{R_2}\right) = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\frac{U_1 - U_2}{r} + \frac{R_2 U_2 - R_1 U_1}{R_2 - R_1}$$

**62.(南京师范大学 1997 年)** 如图所示 $a$、$d$ 为一平行板电容器的两个极板,$bc$ 是一块长宽都与板 $a$ 相同的厚导体板,平行地插在 $a$、$d$ 之间.导体板的厚度 $bc = ab = cd$,极板 $a$、$d$ 与内阻可忽略的电动势为 $\varepsilon$ 的蓄电池及电阻 $R$ 相连,已知在没有导体 $bc$ 时的电容为 $C$,现将导体 $bc$ 抽走,设已知抽走过程中外力对电场所作的功为 $A$,求:(1) 存在导体时的电容器 $ad$ 的电容.(2) 抽走导体板过程中电阻 $R$ 上消耗的电能.




**本题考点:** 电容器上的功与能的转换

解:(1) 设原来 $a$ 与 $d$ 之间的距离为 $t$,极板面积为 $S$,则 $C = \frac{\varepsilon_0 s}{t}$,插入 $bc$ 后,可看成两个电容都为 $C_1 = C_2 = \frac{3\varepsilon_0 S}{t}$ 的电容的串联,则总电容 $C'_{ad} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{2} C_1 = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{t} = \frac{3}{2} C$

(2) 由于抽走导体板过程中电压不变,将导体板抽走前后,极板上的电量改变,抽走前电容器上储能为 $W_{e1} = \frac{1}{2} C'_{ad} \varepsilon^2$,后来的储能为 $W'_e = \frac{1}{2} C\varepsilon^2$,故电容器上的储能改变量为 $\Delta W_e = W'_e - W_{e_1} = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2} C)\varepsilon^2$,$\Delta W_e = -\frac{1}{4} C\varepsilon^2 < 20$,能量减少.这时电容器对外释放能量,极板上电量减少量为 $\Delta Q = \varepsilon \Delta c$,抵抗电源做功

$$A_{\text{电源}} = \varepsilon^2 \Delta c = \varepsilon^2 (C - \frac{3}{2} C) = -\frac{1}{2} C\varepsilon^2$$

由能量守恒有:电容器上的能量的减少量 = 外力做功 + 反抗电源做功 + 电阻上消耗的能量.

即 $R$ 上消耗的能量 $= A + \frac{1}{2} C\varepsilon^2 - \frac{1}{4} C\varepsilon^2 = A + \frac{1}{2} C\varepsilon^2$

**63.(南京师范大学 1998 年)** 一同轴圆柱形电容器,外导体筒的半径为 $b$,内导体筒的半径为 $a$,两筒之间充满各自同性的均匀电介质,电介质的介电常数为 $\varepsilon$,击穿场强为 $E_m$,导体圆柱长为 $l$,求:(1) 该电容器的内导体筒所能带的最大电量;(2) 该电容器所能承受的最大电压;(3) 该电容器的电容量.

**本题考点:** 电场强度、电势、电容的计算

**解:** 设圆柱单位长度上带电 $l$,当 $a < r < b$ 时,由高斯定理得

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r} \qquad (a < r < b)$$

当内筒带最大电量 $\lambda_m$ 时,(不计边缘效应),则内筒表面处附近的最大场强为 $E = \frac{\lambda_m}{2\pi\varepsilon a}$.

(1) 当 $E = \frac{\lambda_m}{2\pi\epsilon a} \leqslant E_m$ 时,内筒单位长度上的最大带电量 $\lambda_m = 2\pi\epsilon a E_m$,则内筒最大带电量为 $2\pi\epsilon a E_m l$.

(2) 由 $V = \int \vec{E} \cdot d\vec{r}$ 得最大电压差为

$$V_m = \int_a^b \frac{\lambda_m}{2\pi\epsilon r} dr = aE_m \ln \frac{b}{a}$$

(3) 单位长度上的电容 $C_0 = \frac{\lambda_m}{V_m} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}$

$$\text{总电容 } C = laC_0 = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{b}{a}}$$

**64.(南京师范大学 1999 年)** 一无限长带电圆柱体,半径为 $b$,其电荷体密度 $\rho = kr$,$k$ 为大于零的常量,$r$ 为由柱体轴线到任一点的距离,求:(1) 带电体内、外的电场强度分布;(2) 带电圆柱体轴线与表面的电势差.

**本题考点:** 高斯定理、电势差

**解:**(1) 由高斯定理及对称性分析,当 $r < b$ 时

$$E \cdot 2\pi rl = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_Q \rho l 2\pi r' dr'$$

$$= \frac{kl}{\epsilon_0} \int_0^r r' 2\pi r' dr' = \frac{2kl\pi r^3}{3\epsilon_0}$$

$$E = \frac{kr^2}{3\epsilon_0} \qquad (0 < r < b)$$

当 $r > b$ 时,同理有

$$E = \frac{kb^3}{3\epsilon_0 r} \qquad (r > b)$$

(2) 由 $\Delta V = \int_0^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$ 得

$$\Delta V = \int_0^b \frac{k}{3\epsilon_0} r^2 dr = \frac{k}{9\epsilon_0} b^3 (\text{伏})$$

**65.**(南京师范大学 1999 年) 两平行板电容器,极板面积各为 $S_1$ 和 $S_2$,极板间隔为 $d_1$ 和 $d_2$,极板之间分别充以相对介电常数为 $\varepsilon_{r1}$ 和 $\varepsilon_{r2}$,电阻率为 $\rho_1$ 和 $\rho_2$ 的介质,边缘效应可略,求:(1) 两电容器串联接到直流电源上,两电容器中电场之比 $E_1/E_2$;(2) 电压之比 $U_1/U_2$;(3) 电容器所带电量之比 $Q_1/Q_2$.

**本题考点:**电容器的电容、电压与电量

**解:**(1) $$\frac{E_1}{E_2} = \frac{P_1 \frac{I}{S_1}}{P_2 \frac{I}{S_2}} = \frac{P_1 S_2}{P_2 S_1}$$

(2) 由题意,两电容器的电容分别为

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} S_1}{d_1}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} S_2}{d_2}$$

串联接到直流电源 $V_0$ 上时,两电容器对应的电阻 $R_1 = \frac{d_1}{S_1}\rho_1$ 和 $R_2 = \frac{d_2}{S_2}\rho_2$,总电阻 $R = R_1 + R_2$,$R_1$ 与 $R_2$ 上分得的电压比为

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{d_1 \rho_1}{S_1} \frac{S_2}{d_2 \rho_2}$$

(3) 带电量之比为

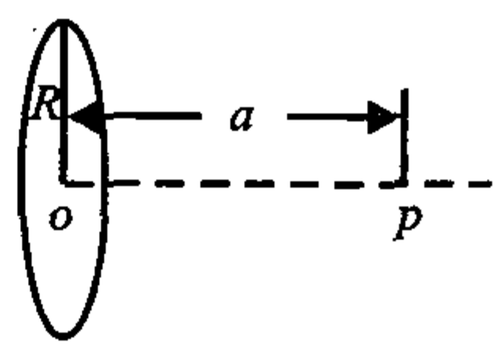
$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{U_1 C_1}{U_2 C_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$$

**66.**(南京师范大学 1999 年) 如图,一半径为 $R$ 的均匀带电圆环,带电量为 $q(q > 0)$,若圆环中心轴线上位于环心 $O$ 附近的 $P$ 点放一电子,$OP = a$,$(a << R)$. 试求:(1) 圆环上的电荷 $q$ 在其轴线上的任一点处产生的电场强度. (2) 忽略电子的重量,试证电子作简谐振动,并求出电子的振动频率.

**本题考点**：带电粒子在静电场中的运动、简谐振动

**解**：(1) 均匀带电环在其对称轴距圆心 $O$ 点附近的 $x$ 处产生的电场强度可由迭加原理及对称性分析得：

$$\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{i}$$




当 $x$ 一定时，对上式积分得，

$$\vec{E} = \frac{xq}{4\pi\varepsilon_0(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{i}$$

(2) 电子带电量为 $-e$，故电子在 $p$ 处受的电场力为

$$\vec{F}_e = (-e)\vec{E} = -\frac{eqx}{4\pi\varepsilon_0(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{i}$$

当 $R \gg x$ 时，上式化为

$$\vec{F}_e = -\frac{eqx}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \vec{i}$$

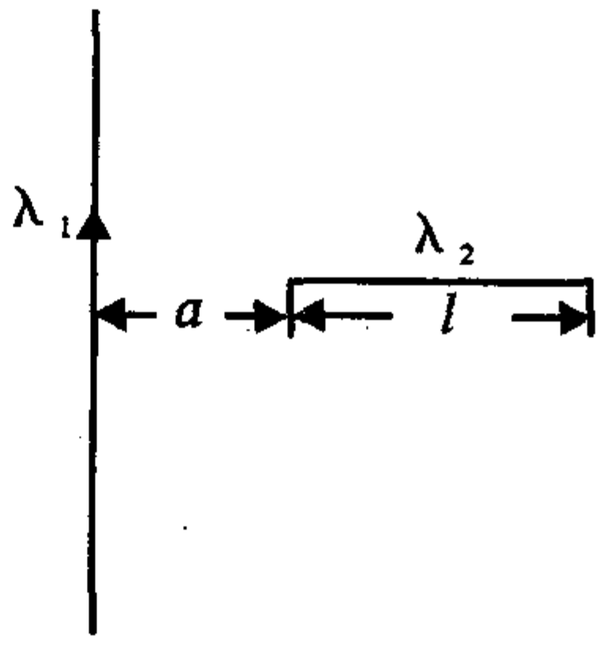
故电子受到的电场力大小与其偏离圆心位移 $x$ 成正比，方向相反．故由牛顿第二定律得 $F_e$ 的大小

$$F_e = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \left(k = \frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)$$

记 $\omega^2 = \frac{k}{m}$ 为电子振动的圆频率，则

$$\omega = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 mR^3}}$$

**67.(同济大学 1999 年)** 一无限长均匀带电线，其线电荷密度为 $\lambda_1$，在该带电线的同一平面内有一有限长的均匀带电线，其线电荷密度为 $\lambda_2$，如图所示，试求它们之间的相互作用力．




**本题考点**：高斯定理求场强、电

场对带电体的作用力的计算

解:由牛顿第三定律知,它们之间的相互作用力等值反向,故只需求 $\lambda_1$ 对 $\lambda_2$ 的作用力就可以了.设在 $\lambda_2$ 上取一微元 $dx$,$dx$ 上带电量为 $\lambda_2 dx$,且距其左端为 $x$.则 $\lambda_1$ 在该微元所在处的电场强度可由高斯定理及对称性分析得

$$E = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 x}$$

则电荷元 $\lambda_2 dx$ 受 $E$ 的作用力元大小为 $dF = E\lambda_2 dx$,积分得:

$$F = \int_a^{a+l} \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 x}\lambda_2 dx = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{a+l}{a} \quad (N)$$

**68.(南京师范大学2000年)**一平行板电容器极板面积为 $S$,间距为 $d$,接在电源上以保持电压为 $V$,将极板的距离拉开一倍,计算:(1) 静电能的改变;(2) 电场对电源作的功;(3) 外力对极板作的功.

**本题考点:**平行板电容器上的能量转换:静电能、作功

**解:**拉开前的电容:$C_0 = \frac{\epsilon_0 S_0}{d_0}$

拉开后的电容 $C = 2\frac{\epsilon_0 S_0}{d_0} = 2C_0$.由 $W_e = \frac{1}{2}CV^2$ 得

(1) 则拉开前后的静电能的改变为

$$\Delta W_e = \frac{1}{2}CV^2 - \frac{1}{2}C_0V^2$$

$$= \frac{1}{2}C_0V^2 = \frac{\epsilon_0 S_0}{2d_0}V^2$$

(2) 拉开前极板带电 $Q_0 = C_0V$,拉开后带电量为 $Q = CV = 2C_0V$,则极板上电量的改变为 $\Delta Q = 2C_0V - C_0V = C_0V = \frac{\epsilon_0 S_0}{d_0}V$

则电场对电源做的功为

$$A_e = \Delta Q \cdot V = \frac{\epsilon_0 S_0}{d_0}V^2$$

(3) 由能量守恒,外力的功 $A'$ 为

$$A' + A_e = \Delta W_e$$

$$A' = \Delta W_e - A_e = -\frac{\varepsilon_0 S_0}{2d_0} V^2 \text{(负号表示外力做负功)}$$

## Ⅱ. 稳恒磁场

**69.(武汉理工大学 2003 年)** 一电流元置于直角坐标系的原点,其方向沿 $X$ 轴正向,则此电流元在 $X$ 轴上产生的 $d\vec{B}$ 为_____,在 $Y$ 轴上产生的 $d\vec{B}$ 的方向为_____.

**本题考点:** 毕奥 — 萨伐尔定律.

**解:** $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}^0}{r^2}$

在 $X$ 轴上,$d\vec{l} \,//\, \vec{r}^0$,故 $d\vec{B} = 0$

在 $Y$ 轴上,$d\vec{l}$ 沿 $X$ 轴方向,$\vec{r}^0$ 沿 $Y$ 轴方向,故 $d\vec{l} \,//\, \vec{r}^0$ 沿 $Z$ 轴方向,即

$d\vec{B}$ 沿 $Z$ 轴方向.

空处分别填:0,$Z$ 轴方向.

**70.(武汉理工大学 2003 年)** 假设氢原子中电子(电量为 $e$)在第一玻尔轨道(半径为 $r_1$)上作匀速圆周运动(速率为 $v_1$),证明电子的这种运动在轨道中心产生的磁感应强度 $B = \frac{\mu_0 e v_1}{4\pi r_1^2}$.

**本题考点:** 环形电流的磁感应强度计算

**证:** 电子在半径为 $r_1$ 上以速率 $v_1$ 作圆周运动,对应的电流强度为

$$I = \frac{q}{t} = \frac{e}{\frac{2\pi r_1}{v_1}} = \frac{ev_1}{2\pi r_1}$$

该电流为环形电流,在环心产生的磁场为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0}{2r_1} \cdot \frac{eV_1}{2\pi r_1} = \frac{\mu_0 eV_1}{4\pi {r_1}^2}.$$

**71.(北京理工大学 2001 年)** 一开口曲面,开口是半径为 $R$ 的圆,匀强磁场 $B$ 与开口圆所决定平面的内法线方向的夹角为 $\theta$,通过这个曲面的磁通量为.

**本题考点:** 磁通量、高斯定理

**解:** 把开口曲面与开口圆所决定平面一起组成一闭合曲线有

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\iint_{\text{曲面}} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{开口平面}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\Phi_m = \iint_{\text{曲面}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_{\text{开口平面}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = B\pi R^2 \cos\theta$$

空格填 $\pi R^2 B\cos\theta$

**72.(清华大学 2001 年)** 一个半径为 $R$ 的塑料圆盘,表面均匀分布电量 $q$.

试证明:当它绕通过盘心而垂直于盘面的轴以角速度 $\omega$ 转动时

(1) 盘心处的磁感应强度为 $B = \dfrac{\mu_0 \omega q}{2\pi R}$

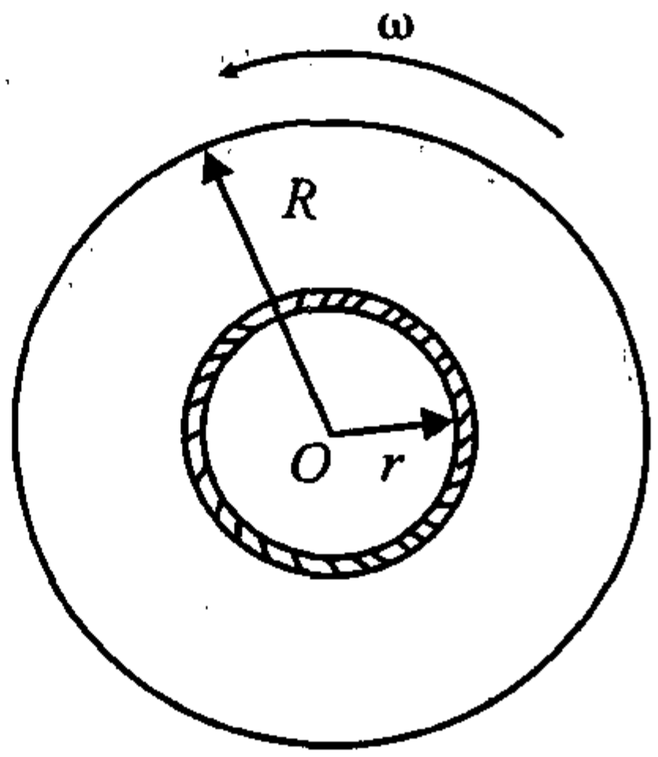
(2) 圆盘的磁矩为:$P_m = q\omega R^2/4$

**本题考点:** 磁场的叠加原理,圆环在圆心产生的磁感应强度公式,磁矩公式.

**证:**(1) 半径为 $r$,宽度为 $dr$ 的圆环在盘心产生的磁场为

$$dB = \frac{\mu_0 \dfrac{q}{\pi R^2} \cdot \omega r dr}{2r} = \frac{\mu_0 q\omega dr}{2\pi R^2}$$

而半径为 $R$ 的塑料圆盘在盘心的磁场为




$$B = \int_r^R dB$$

$$= \int_r^R \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2} dr$$

$$= \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2}[r]_0^R$$

$$= \frac{\mu_0 \omega q}{2\pi R^2}$$

(2) 半径为 $r$,宽度为 $dr$ 的圆环的磁矩为

$$dp_m = \frac{q}{\pi R^2}\omega r dr \pi r^2$$

$$= \frac{q\omega r^3 dr}{R^2}$$

这样圆盘的磁矩为

$$p_m = \int_{r=0}^R dp_m$$

$$= \int_0^R \frac{q\omega r^3 dr}{R^2}$$

$$= \frac{q\omega}{R^2} \cdot [\frac{R^4}{4}]_0^R$$

$$= \frac{q\omega R^2}{4}$$

**73.(清华大学 2001 年)** 以下各物理量中哪些和介质无关?

A. 电场强度 $E$　　B. 电位移 $D$

C. 磁场强度 $H$　　D. 磁感应强度 $B$

**本题考点:** 电场强度,电位移,磁感应强度,磁场强度与介质的关系

**解:** 答案选 B、C

**74.(北京理工大学 2000 年)** 设计一个圆形螺线管,截面积为 $260mm^2$,长为 150mm.(1) 如果要做螺线管中心附近磁场的最大值

在最大电流为 0.75A 时为 1.8mT,此螺线管的匝数为多少?(2) 需要多长的导线才能制作出此螺线管?(3) 如果螺线管是用电阻率为 $1.7 \times 10^{-8}\Omega.m$ 的铜线单层密绕制作的,螺线管的电阻为多大?(4) 要想得到大小为 1.8mT 的恒定磁场,导线上必须加多大的电势差?($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$T.m/A;忽略绝缘层的厚度.)

**本题考点:**磁场的磁感应强度

**解:**① 近似把圆形螺线管的中心看无限长螺线管

$$B = \mu_0 nI = \mu_0 \frac{N}{L} I$$

$$N = \frac{BL}{\mu_0 I} = \frac{1.8 \times 10^{-3} \times 0.15}{4\pi \times 10^{-7} \times 0.75} = 287 \text{ 匝}$$

② $S = \pi R^2, R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$

导线长度 $L = 2\pi RN = 2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}}N = 16.4(\text{m})$

导体横截面 $S = \frac{1}{4}\pi(\frac{0.15}{2.87})^2 = 2.13 \times 10^{-7}(\text{m}^2)$

③ 螺线管的电阻 $R = \rho\frac{L}{S} = 1.31(\Omega)$

④ $V = IR = 0.75 \times 1.31 = 0.98(\text{V})$

**75.(清华大学 2001 年)** 在磁场中运动电荷所受到的磁力 $\vec{F}_m$ 是_____,式中各量的意义分别是_____.

**本题考点:**沦仑兹公式

**解:**空处分别填 $\vec{F}_m = q\vec{V} \times \vec{B}$,$q$ 为运动粒子的电荷;$\vec{V}$ 为粒子的速度,$\vec{B}$ 为磁感应强度矢量.

**76.(清华大学 2002 年)** 一个电子和一个 $\alpha$ 粒子,以相同的切线速度在一磁场中的圆形路径上运动.求它们每秒转过的圈数比.($\alpha$ 粒子的质量为 $6.64 \times 10^{-27}$kg,电子的质量为 $9.11 \times 10^{-31}$kg,电

子的电荷为 $1.6 \times 10^{-19}$C)

**本题考点**:均匀磁场中带电粒子圆周运动周期公式

**解**:带电粒子在均匀磁场中作移圆周运动的周期为

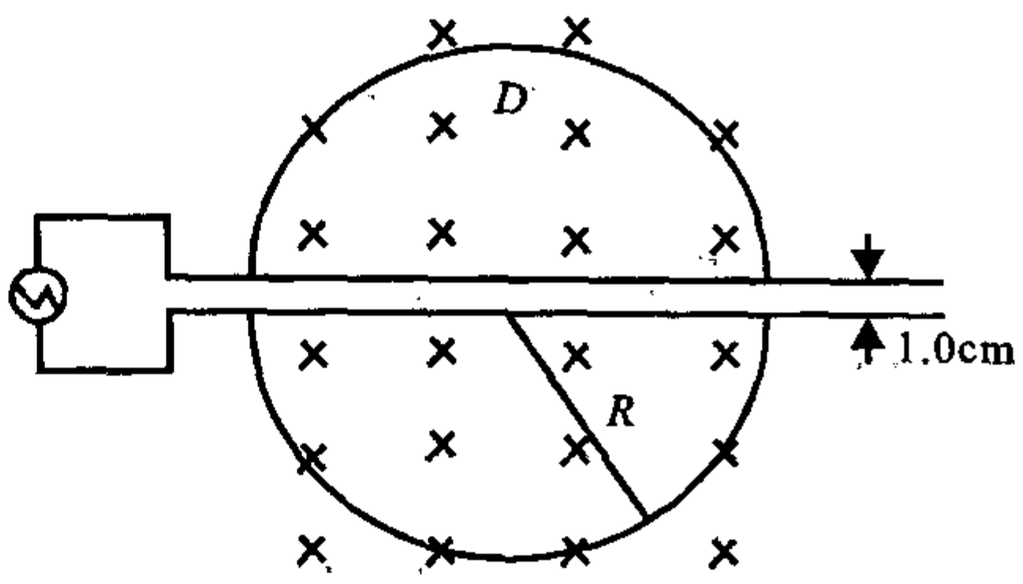
$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

其中,$q$、$m$ 分别为粒子的电荷和速度,$B$ 为磁感应强度,则圈数比为

$$\frac{N_e}{N_\alpha} = \frac{\frac{1}{T_e}}{\frac{1}{T_a}} = \frac{\frac{2\pi m_\alpha}{2eB}}{\frac{2\pi m_e}{eB}} = \frac{m_\alpha}{2m_e}$$

$$= \frac{6.64 \times 10^{-27}}{2 \times 9.11 \times 10^{-31}} = 3644$$

**77.(中国科学院 2000 年)** 如图所示,一回旋加速器 $D$ 形电极圆周的最大半径 $R$ = 60cm,用它来加速质量为 $1.6 \times 10^{-27}$kg、电荷为 $1.6 \times 10^{-19}$ 库仑的质子。要使质子从静止加速到 4.0Mev 的能量




(1) 求所需的磁感应强度 $B$;

(2) 设两 $D$ 形电极间的距离为 1.0cm,电压为 $2.0 \times 10^4$ 伏特,其间电场是均匀的,求加速到上述能量所需的时间.(要求一位有效数字)

**本题考点**:带电粒子在磁场中的运动

**解**:(1)

$$B = \frac{mV}{Rq} = \frac{\sqrt{2ME}}{Re} = \frac{\sqrt{2 \times 1.6 \times 10^{-27} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 4 \times 10^6}}{60 \times 10^{-2} \times 1.6 \times 10^{-19}}$$

$\approx$ 0.48 特斯拉

(2) 加速次数: $N = \dfrac{4.0 \times 10^6 eV}{2.0 \times 10^4 eV} = 200$ 次

极间飞行时间: $\dfrac{1}{2} a t_1^2 = 2Nd$

将 $a = \dfrac{Ee}{m} = \dfrac{Ve}{dm}$ 代入上式得: $t_1^2 = \dfrac{4Nmd^2}{eV}$

$$t_1 = \frac{2\sqrt{Nmd^2}}{\sqrt{eN}} = 2\sqrt{\frac{2 \times 10^2 \times 1.6 \times 10^{-27} \times 1 \times 10^{-4}}{1.6 \times 10^{-19} \times 2.0 \times 10^4}}$$

$$\approx 2 \times 10^{-7} \text{ 秒}$$

$$t_2 = \frac{N}{2} T = \frac{N}{2} \frac{2\pi m}{Be} = \frac{2 \times 10^2 \times 3.14 \times 1.6 \times 10^{-27}}{0.48 \times 1.6 \times 10^{-19}}$$

$$\approx 1.4 \times 10^{-5} \text{ 秒}$$

$$t = t_1 + t_2 \approx 1.4 \times 10^{-5} \text{ 秒}$$

**78.(大连理工大学 2000 年)** 设计一个圆形螺线管,截面积为 $260mm^2$,长为 150mm.

(1) 如果要使螺线管中心附近磁场的最大值在最大电流为 0.75A 时为 1.8mT,此 螺线管的匝数为多少?

(2) 需要多长的导线才能制作出此螺线管?

(3) 如果螺线管是用电阻率为 $1.7 \times 10^{-8} \Omega m$ 的铜线单层密绕制作的,螺线管的电阻为多大?

(4) 要想得到大小为 1.8mT 的恒定磁场,导线上必须加多大的电势差?

**本题考点:** 安培环路定理的应用

**解:** (1) 对圆形螺线管,由安培环路定理得,螺线管中的磁感强度 $B$ 与电流的关系是 $B = \mu_0 nI$, $n$ 为单位长度上的匝数; $n = \dfrac{N}{l} = \dfrac{B}{\mu_0 I}$,

$$N = \frac{B \cdot l}{\mu_0 I} = \frac{1.8 \times 150 \times 10^{-6}}{4\pi \times 10^{-7} \times 0.75} = 287(\text{匝})$$

(2) 所需导线长 $L = N2\pi R_0 = 2 \cdot \pi\sqrt{\frac{S}{\pi}} = 16.4$(米)

(3) 因为单层密绕铜线的截面积 $S = \pi(\frac{d}{2})^2$

铜线的直径 $d = \frac{L}{N} = \frac{150}{287} = 0.523\text{mm}$

$$R = \frac{\rho L}{S} = \frac{1.7 \times 10^{-8} \times 16.4}{\pi \times (\frac{5.23}{2} \times 10^{-4})^2} = 1.3\Omega$$

(4) 由 $V = IR$ 及 $B = \mu_0 \frac{N}{l} I$ 得

$$V = \frac{RBl}{\mu_0 N} = 1\text{(伏特)}$$

**79.(武汉大学2000年)** 在真空中,(1) 求一根无限长载流直导线周围的磁场分布(忽略导线横截面的面积);(2) 两根平行的无限长直导线之间垂直距离为 1 米,两导线流过的电流相等,均为 $I$ = 1 安培.求两导线之间每米长度上的相互作用力的大小和方向.(已知 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ 牛顿 / 安培$^2$)

**本题考点:安培环路定理、安培力**

**解:**(1) 电流是一无限长直电流是轴对称分布、电流产生的磁场也是轴对称分布,因此,以无限长直电流为中心,在垂直电流的平面内作任一半径 $r$ 的圆周,如图圆周上各点磁感应强度大小相等,方向为圆周的切线方向.

由安培环路定理

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}$,$\vec{B}$ 方向与 $I$ 由右手定则确定.

(2) 无限长直导线的电流 $I$ 产生的磁场

$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$　　方向如图

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

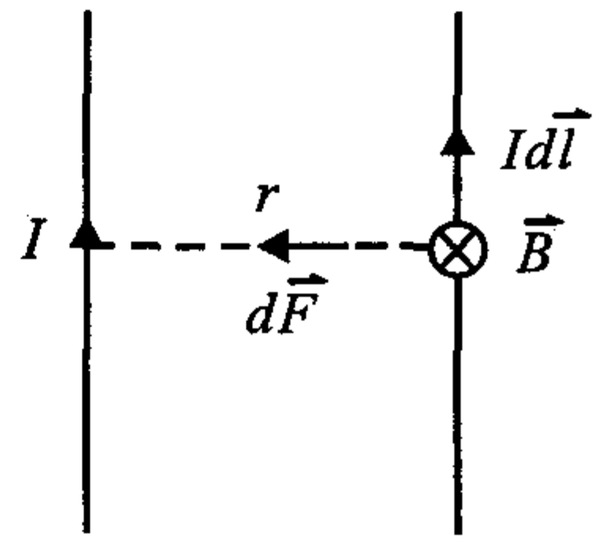
方向相互吸引

$$| d\vec{F} | = IBdl$$

单位长度相互作用为

$$F = \frac{| d\vec{F} |}{dl} = IB = 1 \times \frac{\mu_0 \times 1}{2\pi \times 1}$$

$= 2 \times 10^{-7}\mathrm{N}$



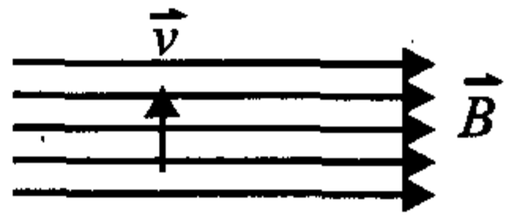

**80.(北京理工大学 2000 年)** 一电子以 $\vec{v}$ 的速度垂直进入磁感应强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场中,此电子在磁场中的运动轨道所围面积内的磁通量

A. 正比于 $B$,反比于 $v^2$

B. 正比于 $B$,反比于 $v$

C. 反比于 $B$,正比于 $v^2$

D. 反比于 $B$,正比于 $v$




**本题考点:**洛仑兹力

**解:**电子进入磁场后作圆周运动有 $m\frac{V^2}{R} = qVB$

$$R = \frac{mv}{qB}$$

运动轨道所围面积 $S = \pi R^2 = (\frac{mv}{qB})^2 \propto \frac{v^2}{B^2}$

$$\phi = BS \propto \frac{v^2 B}{B^2} \propto \frac{v^2}{B},$$

因此,其磁通量反比于 $B$,正比于 $v^2$

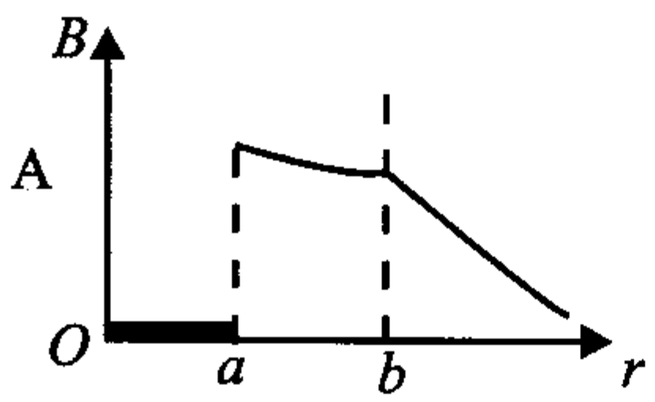
答案选 C

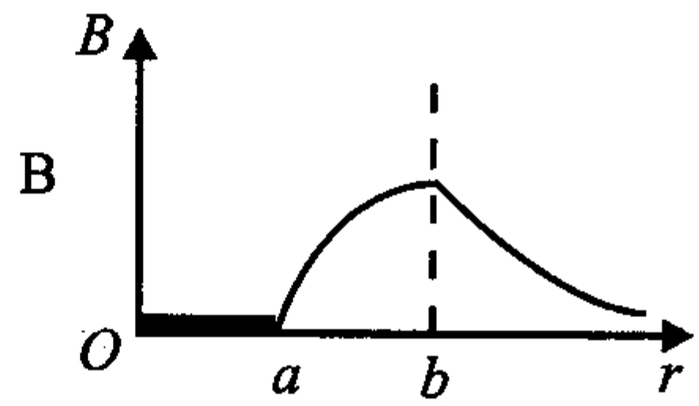
**81.(北京邮电大学 1999 年)** 无限长载流空心圆柱导体的内外半径分别为 $a$、$b$,电流在导体截面上均匀分布,则空间各处的 $B$ 的大小与场点到圆柱中心轴线的距离 $r$ 的关系定性地如图所示.

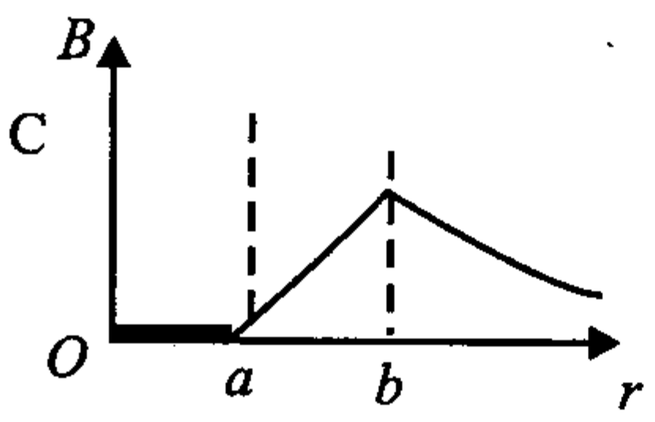
**本题考点**:安培环路定理的应用

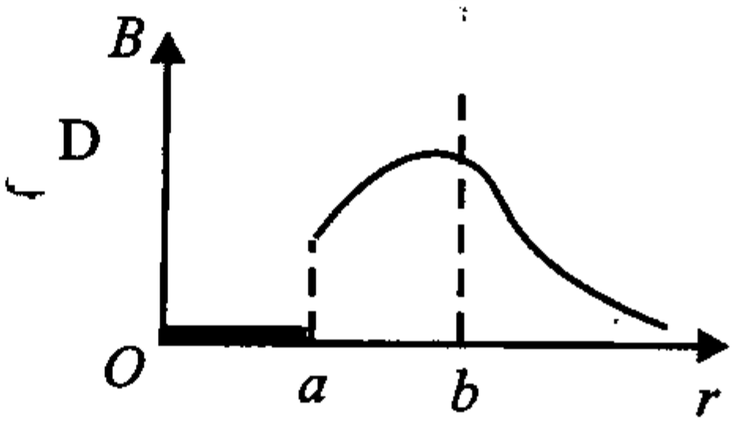
**解**:根据安培环路定理可求得设电流为 $I$

$$B = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{I(r^2 - a^2)}{r(b^2 - a^2)} & (a < r < b) \\ \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{I}{r} & (r > b) \end{cases}$$




即
$$B \propto \begin{cases} 0 & (r \leq a) \\ r - \dfrac{a^2}{r} & (a < r < b) \\ \dfrac{1}{r} & (r > a) \end{cases}$$

答案选 B

**82.**(北京邮电大学 1999 年)长为 $l$ 的细杆均匀分布着电荷 $q$,杆绕垂直杆并经过其中心的轴,以恒定的角速度 $\omega$ 旋转,此旋转带电杆的磁矩大小是_____.

**本题考点**:磁矩的计算

**解**:$\lambda = \dfrac{q}{l}$　　$dq = \lambda dr$

$$dI = \frac{2\omega}{2\pi}dq = \frac{\omega}{\pi}dq = \frac{\omega\lambda}{\pi}dr \qquad dP_m = \pi r^2 dI = \omega\lambda r^2 dr$$

$$P_m = \omega\lambda\int_0^{\frac{1}{2}} r^2 dr = \frac{\omega l^3\lambda}{24} = \frac{\omega q l^2}{24}$$

空处填$\frac{\omega q l^2}{24}$

**83.(北京邮电大学 2002 年)** 导电材料的厚度为 0.5mm,通以 2.2A 的电流,置于强度为 2.5T 的外磁场中,材料两侧的霍尔电压为 40mV,材料中的载流子浓度为.

**本题考点:**霍尔效应

**解:**霍尔电压 $V = \frac{1}{nq}\frac{IB}{d}$

$$n = \frac{1}{Vq}\frac{IB}{d} = \frac{1}{40\times10^{-3}\times1.6\times10^{-19}}\frac{2.2\times2.5}{0.5\times10^{-3}}$$

$$= 1.7\times10^{24}(\frac{1}{m^3})$$

空处填 $1.7\times10^{24}(\frac{1}{m^3})$

**84.(清华大学 2000 年)** 在均匀静磁场中运动的电子:

A. 作直线加速运动,其能量不断增加;

B. 作匀速圆周运动,其能量不变;

C. 作直线减速运动,其能量不断减小;

D. 作加速圆周运动,其能量不断增加.

**本题考点:**洛伦兹力不做功 .

**解:**在均匀静磁场中运动的电荷,磁场力(洛仑兹力)不做功,电荷的能量不变.

答案选 B

**85.(清华大学 2000 年)** 在电子聚焦、回旋加速器、质谱仪等仪器中,使用了:

A. 只是静电场和交变电场; B. 只是静磁场和交变磁场;

C. 只是静电场和静磁场；　　D. 只是电磁波.

**本题考点**：电子聚焦、回旋加速器、质谱仪的原理

**解**：三种仪器电场、磁场是静电场、静磁场

答案选 C

**86.（清华大学 2000 年）**物质磁性的形成在微观上是由于

A. 组成物质的粒子的运动和固有磁矩；

B. 组成物质的粒子的电荷和电偶极矩；

C. 外加的强磁场；

D. 组成物质的粒子的热运动.

**本题考点**：物质磁性形成的微观机制、分子电流

**解**：物质磁性是分子电流形成的，即粒子的运动和固有磁矩

答案选 A

**87.（清华大学 2000 年）**将电子看成是一个带电的理想导体球，半径为 $R$，假设电子在介电常数为 $\varepsilon$，磁导率为 $\mu$ 的空间中，沿 $z$ 方向做匀速运动，速度为 $v$. 在某一时刻，电子正好通过了空间坐标系的原点，问在此时刻，

(1) 全空间的电场强度 $E$.

(2) 全空间总的电场能.

(3) 全空间的磁场强度 $H$.

(4) 全空间总的磁场能.

(5) 总电场能和总磁场能哪个大？为什么？

**本题考点**：运动电荷的电场和磁场及电场能量和磁场能量.

**解**：(1) 电子看成一个理想导体球. 电荷只能均匀分布在其表面。因此，原点为中心，任意长 $r$ 为半径作一球面为高斯面有

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 D = \begin{cases} -e & (r > R) \\ 0 & (r < R) \end{cases}$$

$$\vec{D} = \begin{cases} -\dfrac{e}{4\pi r^3}\vec{r} & (r > R) \\ 0 & (r \leq R) \end{cases}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \begin{cases} \dfrac{-e\vec{r}^0}{4\rho\varepsilon r^2} & (r > R) \\ 0 & (r \leq R) \end{cases}$$

方向,径向向内

$$(2)\, w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{e^2}{32\pi^2\varepsilon r^4}$$

$$W_e = \int_R^\infty \frac{e^2}{32\pi^2\varepsilon r^4} 4\pi r^2 \cdot dr = \frac{e^2}{8\pi^2\varepsilon R}$$

$$(3)\, \vec{H} = \frac{1}{4\pi}\frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi}\frac{qv(x\vec{i} - y\vec{j})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(4)\, w_m = \frac{1}{2}HB = \frac{1}{2}\frac{\mu_0}{(4\pi)^2} = \frac{qv^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$$

$$dW_m = \omega_m dv = \frac{\mu_0}{32\pi^2}\frac{ev^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} dxdydz$$

$$W_m = \iiint \frac{\mu_0}{32\pi^2}\frac{ev^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} dxdydz = \frac{\mu_0 ev^2}{12\pi R}$$

$$(5)\, \frac{W_e}{W_m} = \frac{\dfrac{e}{4\pi^2\varepsilon R}}{\dfrac{\mu_0 ev^2}{12\pi R}} = \frac{3}{\mu_0\varepsilon\pi v^2} = \frac{3C^2}{\pi n^2 v^2} > 1$$,其中 $C$ 为光速,$n$ 为折射率,

所以,$W_e > W_m$

**88.(华中科技大学 2001 年)** 在霍尔效应实验中,一宽 1.0 厘米、长 4.0 厘米、厚 $1.0 \times 10^{-3}$ 厘米的导体,沿长度方向载有 3.0 安培的电流,当磁感应强度 $B = 1.5$ 特拉斯的磁场垂直地通过该导体时,在导体宽度方向产生 $1.0 \times 10^{-5}$ 伏的横向霍尔电压.试求:

(1) 导体中载流子的漂移速度;

(2) 导体中每立方厘米的载流子的数目;

(3) 假设载流子是电子,试就一自己设定的电流和磁场方向,在图上画出霍尔电压的极性.

**本题考点**:霍尔效应、载流子数的计算

**解**:(1) 由霍尔效应可设载流子的漂移速率为 $v$,霍尔电势差为 $\Delta u$.对每一载流子,其所受电场力与磁场力平衡有:

$$qE = qvB$$

两边同乘以宽度 $b$ 有:

$$qEb = b\Delta U = qvBb$$

$$v = \frac{\Delta U}{Bd} = \frac{1.0 \times 10^{-5}}{1.5 \times 1 \times 10^{-2}} \frac{2}{3} \times 10^{-3}(\mathrm{m/s})$$

(2) 设 $n$ 为单位体积的载流子数,由 $I = nqvbd$ 可得

$$\Delta U = \frac{IB}{nqd}$$

即　　$$n = 1.88 \times 10^{24}\mathrm{m}^{-3} = 1.88 \times 10^{18}\mathrm{cm}^{-3}$$

(3)(图略)

**89.(华中科技大学 2002 年)** 设在真空中有一根很长的由两个同轴筒状导体组成的同轴电缆,其内筒的外半径为 $a$,外筒的内半径为 $b$,外筒的外半径为 $c$,在这两个导体筒中,有大小相等而方向相反的电流 $I$ 通过,求离同轴电缆轴心为 $r$ 处的磁感应强度 $B$

(1)$r < a$;(2)$a < r < b$;(3)$b < r < c$;(4)$r > c$

**本题考点**:安培环路定理求磁场场强

**解**:(1) 若内筒是非实心的,由安培环路定理及对称性分析知,

当 $r < a$ 时,有

$$B_1 = 0 \qquad (r < a)$$

若内筒是实心的,则以 $r$ 为半径的圆形环路,有

$$\oint_L \vec{B_1'} \cdot d\vec{l} = B_1' 2\pi r = \mu_0 \sum I = \mu_0 \frac{1}{a^2} r^2$$

$$B_1' = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \qquad (r < a)$$

(2) 当 $a < r < b$ 时,由安培环路安定理得:$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi r} I$

(3) 当 $b < r < c$ 时,同理有

$$\oint \vec{B}_3 \cdot d\vec{l} = \oint B_3 dl = \mu_0 I' = \mu_0 [I - \frac{I}{c^2 - b^2}(r^2 - b^2)]$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}) \qquad (b < r < c)$$

(4) 当 $r > c$ 时,同理有

$$B_4 = 0 \qquad (r > c)$$

**90.(华中科技大学 2003 年)** 在同一平面上有两个同心圆形电路,用相同大小的电动势在两个电路中通以相反方向的电流,使在圆形电路的中心处产生的磁感应强度为零.已知直径为 200cm 的外圆用铜导线,内圆用铝导线,两种导线具有相同的截面积.问此情况下内圆的直径应为多大?(铜和铝的电阻率分别为 $1.7 \times 10^{-6}\Omega.cm$ 和 $2.8 \times 10^{-6}\Omega.cm$)

**本题考点:** 毕 — 萨定律、欧姆定律、电阻与电阻率的关系

**解:** 载流圆形线圈在其圆心处的磁感应强度的大小由毕 — 萨定律可得

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2R^3} = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

依题意有

$$B_0 = B_{Cu} + B_{Al} = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} - \frac{\mu_0 I_2}{2R_2} \qquad (1)$$

设圆形铜导线的总电阻为 $r_1$,铝导线的总电阻为 $r_2$,两同心圆线圈中的电流分别为 $I_1$ 和 $I_2$,有

$$\varepsilon = I_1 r_1 = I_2 r_2 \qquad (2)$$

又由电阻与电阻率 $\rho$、载面积 $S$ 及长度的关系

$$r = \frac{\rho l}{S} = 2\pi \frac{\rho R}{S}$$

有

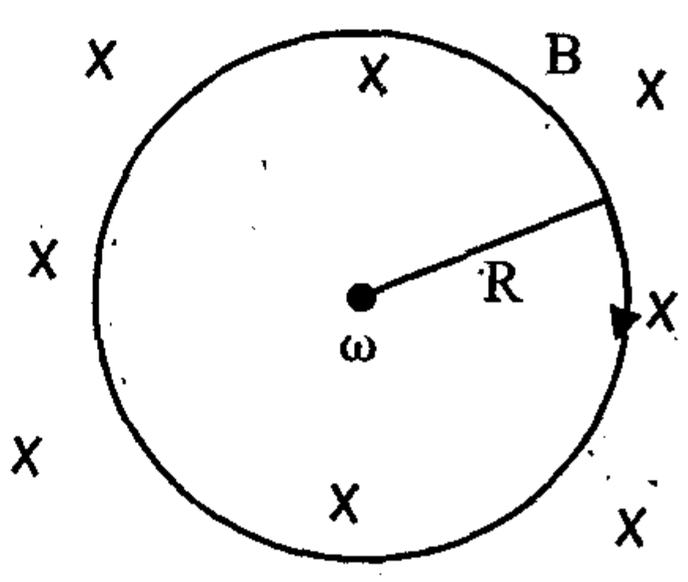
$$\frac{d_2^2}{d_1^2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

即　　$$d_2 = d_1\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$$

代入数据得

$$d_2 = 2.0 \times \sqrt{\frac{1.7}{2.8}} = 1.56\text{m}$$

**91.**(南京大学2002年)半径为 $R$、质量为 $M$ 的细圈环上均匀带电,电量为 $+Q$,将此环平放在光滑水平桌面上,让环以角速度 $\omega$ 绕竖直中心轴旋转,一均匀磁场的磁感应强度大小为 $B$,磁场方向竖直向下(如图所示),求细圆环上的张力.




**本题考点:**安培力

**解:**环旋转时形成的电流　　$$I = \frac{Q}{2\pi R}\omega R = \frac{Q\omega}{2\pi}$$

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

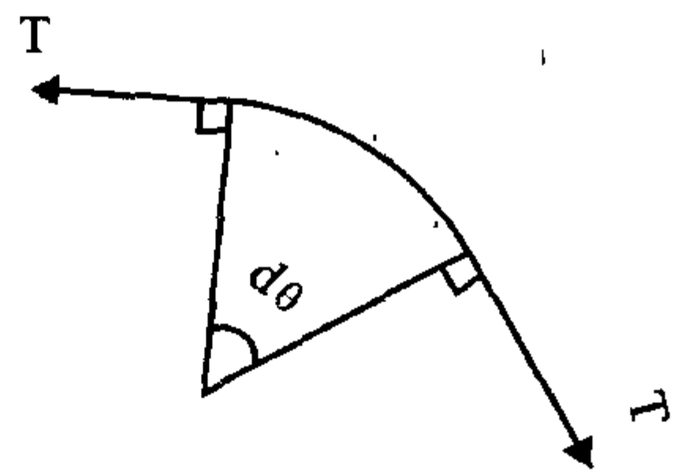
$$dF = B \cdot \frac{Q\omega}{2\pi} dl \qquad \text{方向径向向外}$$

$$2T\sin\frac{d\theta}{2} = dF$$

$$Td\theta = dF$$

$$T\frac{dl}{R} = B\frac{Q\omega}{2\pi} dl$$

$$T = \frac{\omega RQB}{2\pi}$$




**92.**(北京市 1999 年)已知一高斯面所包围的体积内电量代数和 $\sum_i q_i = 0$,则可肯定:

(1) 高斯面上各点场强度为零;

(2) 穿过高斯面上每一面元的电通量均为零;

(3) 穿过整个高斯面的电通量为零;

(4) 以上说法都不对.

**本题考点:**高斯定理

**解:**虽然$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i = 0$,但各点场强度 $E$ 不一定为零.

答案选(3)

**93.(北京市 1999 年)** 在一个孤立的导体球壳内,若在偏离球中心处放一个点电荷,则在球壳内、外表面上将出现感应电荷,其分布将是:

(1) 内表面均匀,外表面也均匀;(2) 内表面不均匀,外表面均匀;

(3) 内表面均匀,外表面不均匀;(4) 内表面不均匀,外表面也不均匀.

**本题考点:**导体的静点平衡

**解:**略

答案选(2)

**94.(北京市 1999 年)** 图 7 中所示为一静电场中的电力线图,若将一负电荷从 $a$ 点经任意路径移到 $b$ 点,电场力作正功还是负功?_____;

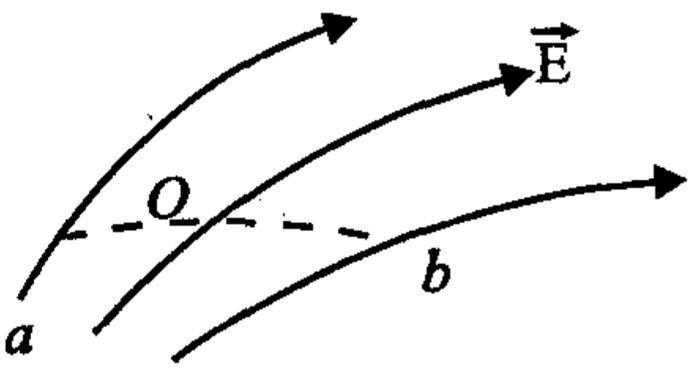


图 7

$a$、$b$ 两点哪一点电势高?_____.

**本题考点:**电场力的功

**解:**作分别经过 $a$ 和 $b$ 点且与电力线垂直的两个等势面 $S_1$ 和 $S_2$,如图所示.

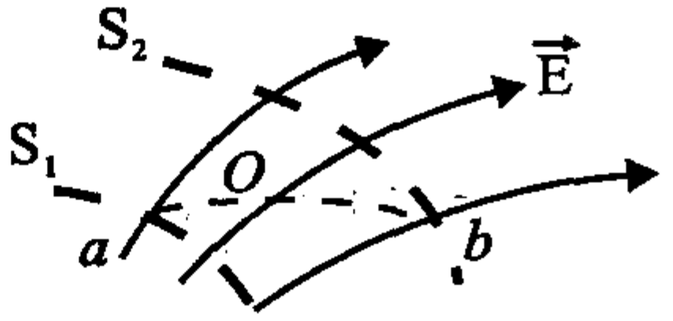


图 7

沿电力线方向电势降低,故 $U_a > U_c = U_b$,即

$$U_a > U_b$$

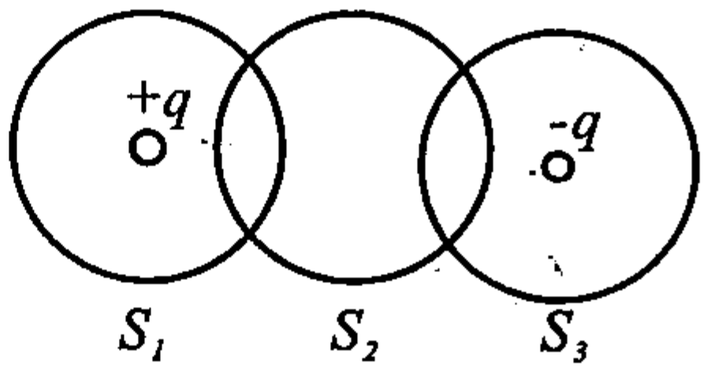
又因　$A_{ab} = U_{ab}q$

$q < 0 \Rightarrow U_{ab} > 0$

$A_{ab} < 0$　故电场力做负功.

空处填:负功;$A$ 点电势高

**95.**(北京理工大学 2002) 在点电荷 $+q$ 和 $-q$ 的静电场中,作出如图所示的三个闭合面 $S_1$、$S_2$、$S_3$,则通过这些闭合合面的电场强度通量分别是:$\phi_1$ = _____,$\phi_2$ = _____,$\phi_3$ = _____.




**本题考点:**高斯定理

**解:**根据高斯定理

$$\phi = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

$$\phi_1 = \frac{q}{\varepsilon_0}, \phi_2 = 0, \phi_3 = -\frac{q}{\varepsilon_0}$$

空处填:$\frac{q}{\varepsilon_0}$,0,$-\frac{q}{\varepsilon_0}$

**96.**(北京理工大学 2002 年) 一个平行板电容器的电容值 $C$ = 100pf,面积 $S = 100\text{cm}^2$,两板间充以相对介电常数为 $\varepsilon_r = 6$ 的云母片.当把它接到 50V 的电源上时,云母中电场强度的大小 $E$ = _____,金属板上的自由电荷电量 $q$ = _____.[$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\text{C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$]

**本题考点:**平行板电容器

**解:** $E = \frac{U}{d}$

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} \Rightarrow d = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{C}$$

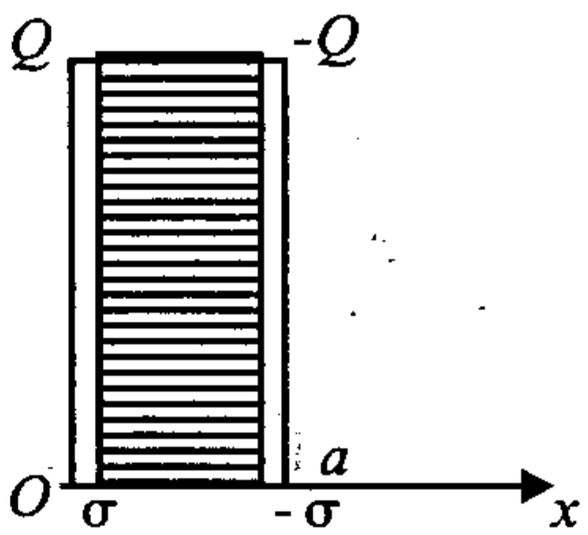
$$E = \frac{UC}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} = \frac{50 \times 100 \times 10^{-12}}{8.85 \times 10^{-12} \times 6 \times 100 \times 10^{-4}}$$

$$= 9.4 \times 10^3 (\text{V/m})$$

$$q = CU = 100 \times 10^{-12} \times 50 = 5.0 \times 10^{-9}(\mathrm{C})$$

空处填:$9.4 \times 10^{3}\mathrm{V/m}$;$5.0 \times 10^{-9}\mathrm{C}$

**97.**(北京师范大学 2002 年)一平行板电容器中介质的介电常数按 $\varepsilon = \varepsilon_0(x + a)/a$ 的规律变化,式中 $a$ 是两极板的距离,$x$ 轴的方向与平板垂直,如图.设平板的面积是 $S$,所带电量为 $\pm Q$,忽略边缘效应.




求:该电容器的电容及介质表面的束缚电荷.

**本题考点**:平行板电容器,极化电荷

**解**:$E_x = \dfrac{\sigma}{\varepsilon} = \dfrac{aQ}{\varepsilon_0(x + a)S}$

$$U = \int_0^a E_x dx$$

$$= \int_0^a \frac{aQ}{\varepsilon_0(x + a)S}dx = \frac{aQ}{\varepsilon_0 S}\ln(x + a)\Big|_0^a = \frac{Qa}{\varepsilon_0 S}\ln 2$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{a\ln 2}$$

$$\sigma' = P_n = \chi_e \varepsilon_0 E = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E = (\varepsilon - \varepsilon_0)E$$

$x = 0$ 处,$\sigma'_1 = (\varepsilon_0 - \varepsilon_0)E_{x=0} = 0$

$x = a$ 处,$\sigma'_2 = (2\varepsilon_0 - \varepsilon_0)E_{x=a} = \varepsilon_0 E_{x=a} = \dfrac{Q}{2S}$

**98.**(东南大学 2001 年)平板空气电容器两极板接上恒定电源,然后注满相对电容率 $\varepsilon_r > 1$ 的电介质.则注入介质后,下述各物理量的变化情况:(填入:不变、变大或变小)

(1) 电容器的电容量_____

(2) 电容器中电场强度_____

(3) 电容器中的电位移_____

(4) 电容器的总静止能_____

**本题考点**:介质对电容器,电场,电场能的影响

**解**:与恒定电源连接,表示在整个过程中电容的两板的电压 $U$ 不变,真空中物理量用脚标"0" 表示

(1) 介质 $C = \varepsilon_r C_0$ 有介质时,电容量变大

(2) $E_0 d = Ed = U$ 不变,电容器中电场强度不变

(3) $D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E, D_0 = \varepsilon_0 E_0$ 电容器中电位移变大

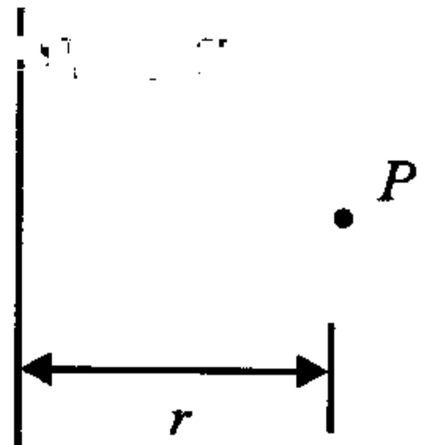
(4) $W = \frac{1}{2} EDV$　介质中 $D$ 变大,电容器的总静电能变大.

空处填:变大、不变、变大、变大

**99.(东南大学 2001 年)** 计算真空中一无限长载流直导线外一点 $P$ 的磁感应强度的大小和方向,已知导线载流为 $I$, $P$ 点到导线的垂直距离为 $r$(如图所示)

**本题考点**:用安培环路定理求磁感强度

**解**:无限长直电流,电流是轴对称的. 因此,电流产生的磁场也是轴对称,现以电流为轴作为一半径为 $r$ 的圆环,圆环上各点的 $\vec{B}$ 的方向是环切线方向, $\vec{B}$ 大小相同




$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

本题可用毕奥 —— 沙伐尔定律求解参见有关教科书上的例

**100.(东南大学 2001 年)** 图示几种载流导线平面内的分布电流均为 $I$,求它们在 $O$ 点的磁感应强度的大小.

**本题考点**:求电流产生磁感应强度用到公式

① 直线电流的磁场　$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}[\cos\theta_1 - \cos\theta_2]$

② 圆心角为 $\theta$ 的圆弧的磁场　$B = \frac{\mu_0 \theta I}{4\pi R}$

解:(1) 图 ① 两直电流产生的磁感应强度

$$B_1 = 0$$

$\frac{1}{4}$ 圆环产生的磁感应强度 $B_2 = \frac{\mu_0 I}{8R}$

总磁感应强度 $B = B_2 = \frac{\mu_0 I}{8R}$

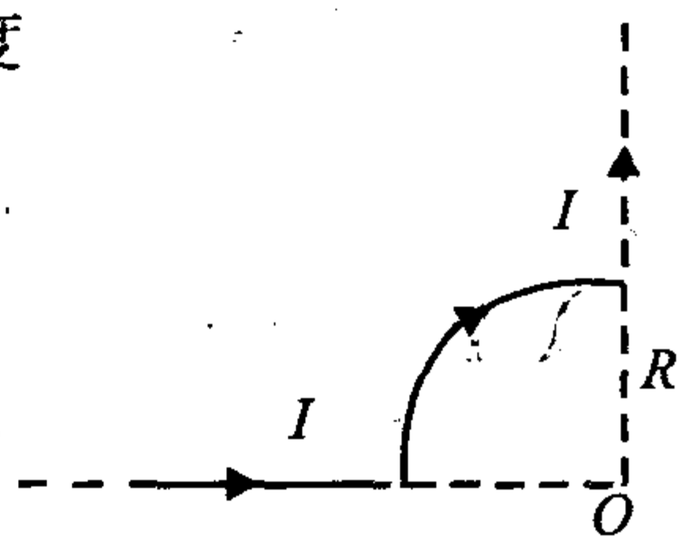



图 ①

(2) 图 ② 两直电流产生的磁感应强度

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

圆环产生的磁感应强度为

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

因 $B_1$、$B_2$ 方向相反,故总磁感应强度为

$$B = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I}{2R}(1 - \frac{1}{\pi})$$

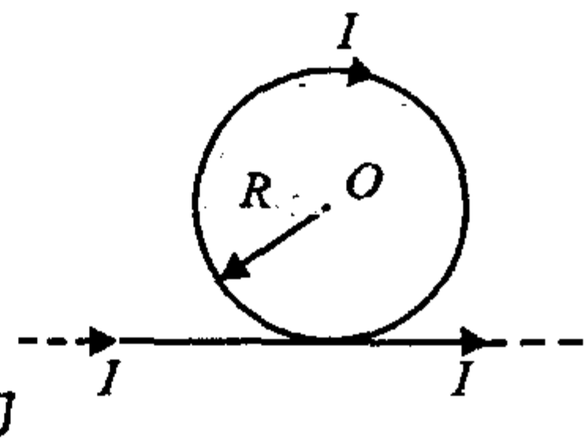



图 ②

(3) 图 ③ 两直电流产生的磁感应强度为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

$\frac{1}{2}$ 圆环产生的磁感应强度为

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

$B_1$、$B_2$ 方向相同,故总磁感应强度为

$$B = B_2 + B_1 = \frac{\mu_0 I}{2R}(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi})$$

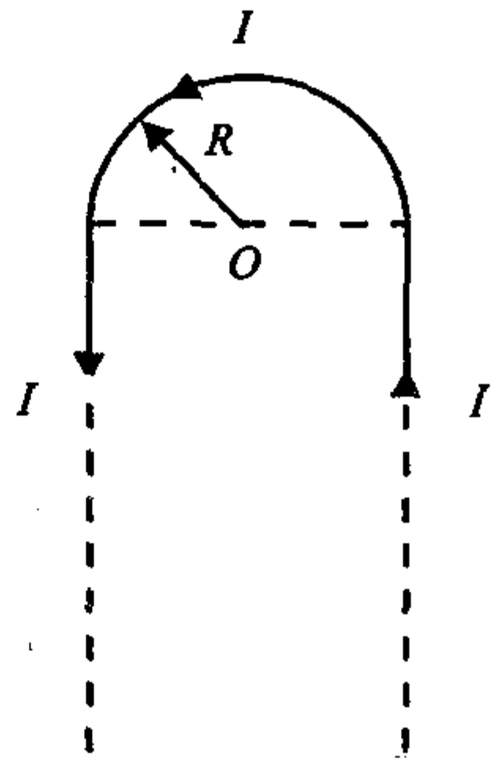
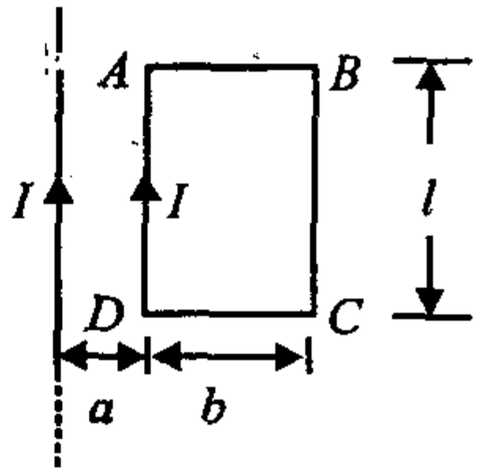



图 ③

**101.(东南大学 2001 年)** 载流无限长直导线的电流为 $I$

(1) 求通过图示矩形线框面积的磁通量(矩形线框与直导线位于同一平面)

(2) 若矩形线框通以电流也为 $I$,求线框中



各条导线所受力的大小和方向

**本题考点**:电流之间的相互作用

**解**:(1) 长直电流产生的磁场　　$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$

在矩形线圈面积的磁通量

$$\Phi_m = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r} l dr = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\ln\frac{a+b}{a}$$

(2) 安培力 $d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$

$AB$ 受力大小　$F = \int_a^{a+b} I\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}dr = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}$

方向垂直 $AB$ 向上

$BC$ 受力大小　$F = \int_0^l \frac{\mu_0 I^2}{2\pi(a+b)}dl = \frac{\mu_0 Il}{2\pi(a+b)}$

方向垂直 $BC$ 向右

$CD$ 受力大小　$F = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}Idr = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} I_n \frac{a+b}{a}$ 方向垂直 $CD$ 向下

$DA$ 受力大小　$F = \int_0^l \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{a}dl = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi a}$ 方向垂直 $DA$ 向左

**102.(清华大学 1998 年)** 一长直螺线管是由直径 $d = 0.2\text{mm}$ 的漆包线密绕而成.当它通以 $I = 0.5\text{A}$ 的电流时,其内部的磁感应强度 $B =$ _____.(忽略绝缘层厚度)($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\text{N/A}^2$)

**本题考点**:长直螺线管的磁感应强度 $B = \mu_0 nI$

**解**:螺线管的单位长度线圈匝数

$$n = \frac{1}{d} = \frac{1}{0.2 \times 10^{-3}} = 5 \times 10^3$$

$$B = \mu_0 nI = 3.14 \times 10^{-3} T$$

空格填:$3.14 \times 10^{-3}\text{T}$

**103.(辽宁大学 2001 年)** 用细导线均匀密绕成长为 $l$,半径为

$a(l >> a)$、总匝数为 $N$ 的螺线管，管内充满相对磁导率为 $\mu_r$ 的均匀磁介质，若线圈中载有稳恒电流 $I$，则管中任一点的

A. 磁感应强度大小为 $B = \mu_0\mu_r NI$

B. 磁感应强度大小为 $B = \dfrac{\mu_r NI}{l}$

C. 磁场强度大小为 $H = \dfrac{\mu_0 NI}{l}$

D. 磁场强度大小为 $H = \dfrac{NI}{l}$

**本题考点：**螺线管，介质中的磁场

**解：** $H = \dfrac{B}{\mu_r} = nI = \dfrac{NI}{l}$

答案选 D

**104.（辽宁大学 2001 年）**真空中一根无限长直细导线上通有电流强度 $I$ 的电流，则距导线垂直距离为 $a$ 的空间某点处的磁能密度为

A. $\dfrac{1}{2}\mu_0(\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a})^2$　　B. $\dfrac{1}{2\mu_0}(\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a})^2$

C. $\dfrac{1}{2}(\dfrac{2\pi a}{\mu_0 I})^2$　　D. $\dfrac{1}{2\mu_0}(\dfrac{\mu_0 I}{2a})^2$

**本题考点：**无限长载流导体的磁场，磁能密度

**解：**距导线垂直距离为 $a$ 处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0}(\frac{\mu_0 I}{2\pi a})^2$$

答案选 B

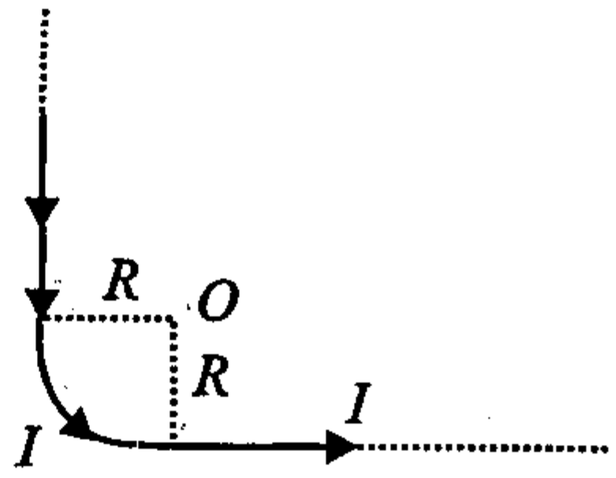
**105.（东南大学 2002 年）**一根无限长载流为 $I$ 的直导线，中部弯曲成图示四分之一圆弧，圆心为 $O$，半径为 $R$，则在 $O$ 处的磁感应强度 $B$ 的大小为_____.

**本题考点:**磁感应强度 $\vec{B}$

**解:**两直线产生的磁感应强度

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}$$

$\frac{1}{4}$ 圆环产生的磁感应强度




$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4R\pi} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\mu_0 I}{8R}$$

$O$ 处的磁感应强度

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{8R}(1 + \frac{4}{\pi})$$

空处填:$\frac{\mu_0 I}{8R}(1 + \frac{4}{\pi})$

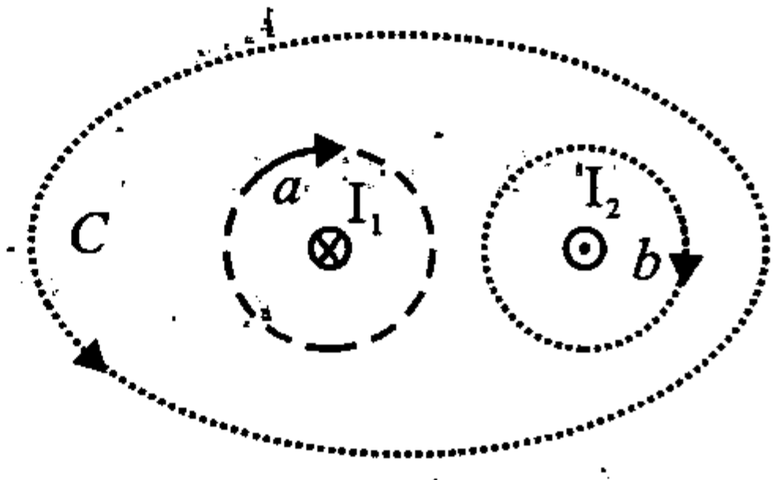
**106.(东南大学 2002 年)** 图示两导线中的电源 $I_1 = I_2 = 5A$,根据安培环路定律对图中所示三条闭合曲线 $a, b, c$ 分别可得下列各式,其中哪一个式是错误的(　　)

A. $\oint_a \vec{H} \cdot d\vec{l} = 5A$

B. $\oint_b \vec{H} \cdot d\vec{l} = -5A$

C. $\oint_c \vec{H} \cdot dl \neq 0$

D. $\oint_c \vec{H} \cdot dl = 0$




**本题考点:**安培环路定理

**解:** $\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_i = I_1 + I_2$

又 $I_1$ 为正,$I_2$ 为负,即 $I_1 + I_2 = 0$

所以,沿 $C$ 环的积分为 0

答案选 C

**107.**(华南师范大学 2002 年) 如图,两平行无限长圆柱形直导线半径相同,彼此绝缘,两圆柱重叠的部分(即图中没有阴影的部分) 挖空. 两导线阴影部分流过方向相反的电流,电流在横截面上均匀分布,电流密度的大小均匀为 $j$,两导线的轴线间的距离为 $d$,证明两圆柱间被挖空的部分的磁场是均匀的,并求出磁感应强度的大小.

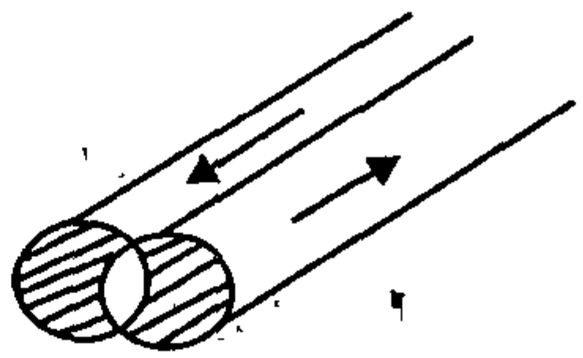
**本题考点:** 求磁感应强度

**证明:** 把重叠的部分想象为两反方向流动电流密度同为 $j$ 的电流的合成

求图中 $P$ 点产生磁感应强度 $B$

左边圆柱内电流在 $P$ 点产生磁场

$$B_1 = \frac{\mu_0 j\pi r_1}{2\pi r_1} = \frac{\mu_0 j r_1}{2}$$

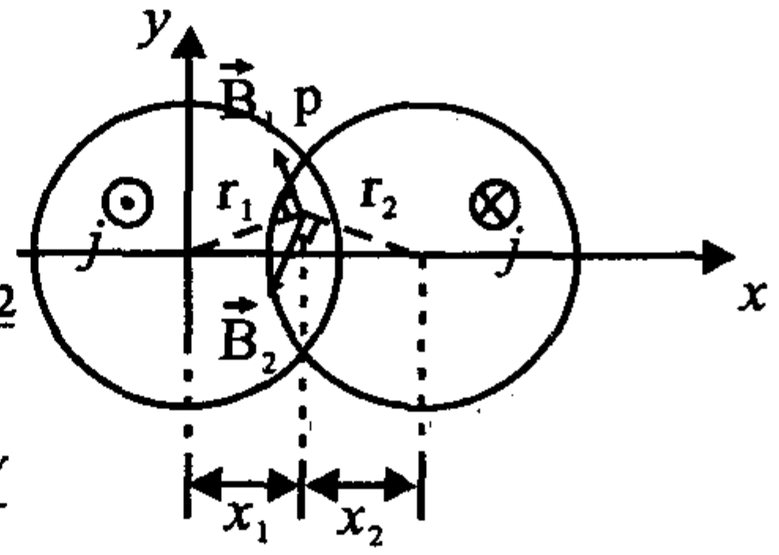


分解得 $B_{1y} = \frac{\mu_0 j r_1}{2} \cdot \frac{|x_1|}{r_1} = \frac{\mu_0 j |x_1|}{2}$

$$B_{1x} = \frac{\mu_0 j r_1}{2} \cdot \frac{(-y)}{r_2} = -\frac{\mu_0 j y}{2}$$

右边圆柱内电流在 $P$ 产生的磁场

$$B_2 = \frac{\mu_0 j\pi r_2^2}{2\pi r_2} = \frac{\mu_0 j r_2}{2}$$




分解得 $B_{2x} = \frac{\mu_0 j r_2}{2} \cdot \frac{x_2}{r_2} = \frac{\mu_0 j x_2}{2}$

$$B_{2y} = \frac{\mu_0 j r_2}{2} \cdot \frac{y}{r_2} = \frac{\mu_0 j y}{2}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = (B_{1x} + B_{2x})\vec{i} + (B_{1y} + B_{2y})\vec{j}$$

$$= \frac{\mu_0 j(x_2 + |x_1|)}{2}\vec{j} = \frac{\mu_0 j d}{2}\vec{j}$$

说明挖空的部分磁场为均匀的磁场 $B = \frac{\mu_0 j d}{2}$

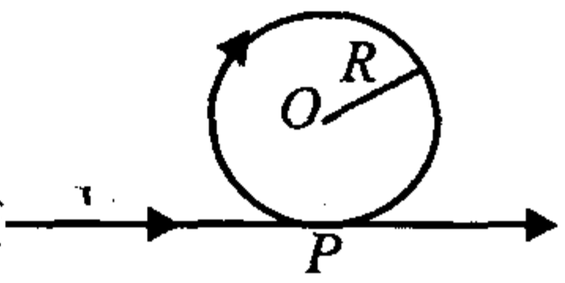
**108.**(清华大学 1998 年) 无限长直导线在 $P$ 处弯成半径为 $R$ 的

圆，当通以电流 $I$ 时，则在圆心 $O$ 点的磁感应强度大小等于

A. $\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$　　B. $\frac{\mu_0 I}{4R}$　　C.0

D. $\frac{\mu_0 I}{2R}(1-\frac{1}{\pi})$　　E. $\frac{\mu_0 I}{4R}(1+\frac{1}{\pi})$

**本题考点：**园电流和长直电流的磁场




**解：**无限长直电流在 $O$ 点产生的磁场的磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$ 方向垂直纸面向外

半径 $R$ 园电流 $I$ 在 $O$ 点产生的磁场的磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$ 方向垂直纸面向内

总的磁感强度

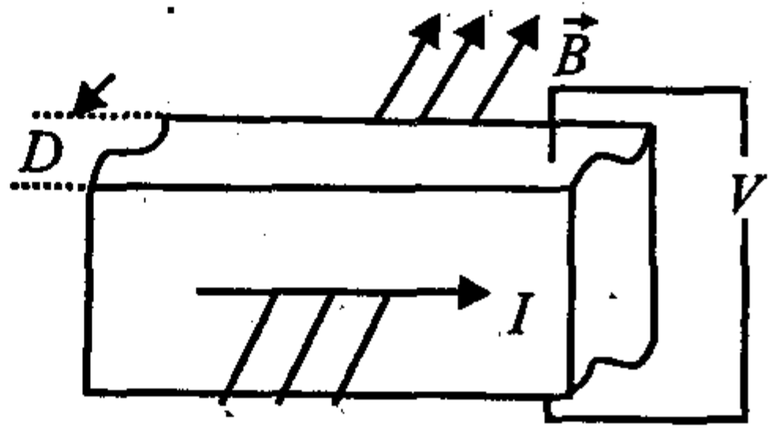
$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} - \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2R}(1-\frac{1}{\pi})$$

答案选 D

**109.（清华大学 1998 年）**一铜板厚度为 $D = 1.00\text{mm}$，放置在磁感应强度为 $B = 1.35\text{T}$ 的均强磁场中，磁场方向垂直于导体的侧表面，如图所示，现测得铜板上下两面电势差为 $V = 1.10 \times 10^{-5}\text{V}$，已知铜板中自由电子数密度 $n = 4.20 \times 10^{28}\text{m}^{-3}$，电子电量 $e = 1.60 \times 10^{-19}\text{C}$，则此铜板中的电流为（　　）

A.82.2A　　B.54.8A

C.30.8A　　D.22.2A




**本题考点：**霍耳效应，霍耳电压

**解：** $U_H = \frac{IB}{nqd}$

$$I = \frac{nqU_H d}{B} = \frac{4 \times 20 \times 10^{28} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 10^{-3} \times 1.1 \times 10^{-5}}{1.35}$$

$$= 54.8(\text{A})$$

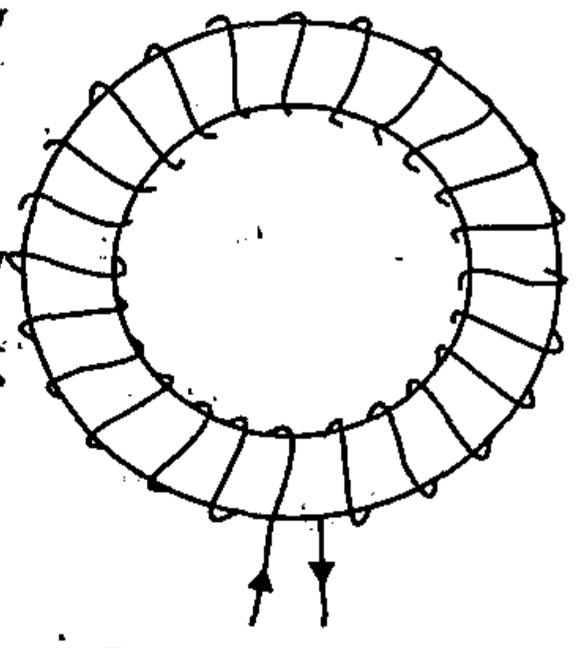
答案选 B.

**110.(清华大学 1998 年)** 如图所示的一细螺绕环,它由表面绝缘的导线在铁环上密绕而成,每厘米绕10匝,当导线中的电流 $I$ 为 2.0A 时,测得铁环内的磁感应强度的大小 $B$ 为 1.0T,则可求得铁环的相对磁导率 $\mu_r$ 为(真空磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{T \cdot m \cdot A^{-1}}$)

A. $7.96 \times 10^2$　　B. $3.98 \times 10^2$

C. $1.99 \times 10^2$　　D. 63.3

**本题考点:** 磁介质中的安培环路定理和 $H$ 与 $B$ 的关系.



**解:** 因螺绕环的电流轴对称分布,所以 $\vec{H}$ 是轴对称分布,以螺绕环的轴为中心在螺绕环内作一园周,如图所示

有 $$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot 2\pi r = NI$$

$$H = \frac{N}{2\pi r} I = nI$$

$$B = \mu_0 \mu_1 nI$$

$$\mu_1 = \frac{B}{\mu_0 nI} = \frac{1}{4\pi \times 10^{-7} \times 10^3 \times 2} = 3.98 \times 10^2$$

答案选 B

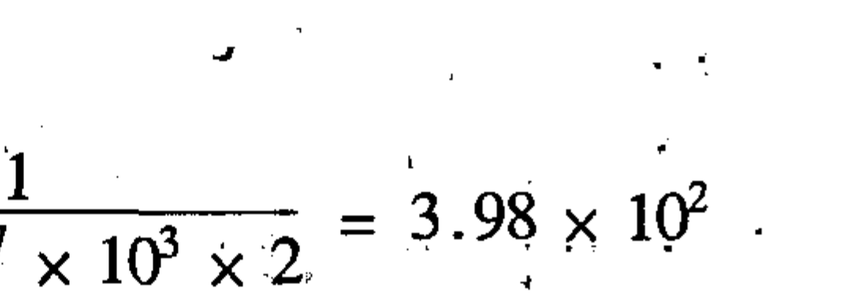
**111.(清华大学 1998 年)** 在无限长空心螺线管内同轴地插入一块圆柱形顺磁介质,若 1、2 点为圆柱介质中分面上靠近柱面而分居柱面两边的两个点,在 1、2 点处的磁感应强度分别为 $B_1$、$B_2$,磁场强度分别为 $H_1$、$H_2$,则它们之间的关系为:

A. $B_1 > B_2, H_2 = H_1$

B. $B_2 > B_1, H_2 > H_1$

C. $B_2 < B_1, H_2 = H_1$

D. $B_2 < B_1, H_2 > H_1$



**本题考点**:磁介质的性质.

**解**:$B = \mu_0\mu_r H$,$H$ 只与传导电流有关,与磁介质无关,因此 1、2 点个 $H_1 = H_2$ 在顺磁质中 $B_1$ 比真空中的磁场 $B_2$ 大.

答案选 A

**112.(清华大学 1998 年)** 真空中一根无限长直细导线上通有电流强度为 $I$ 的电流,则距导线垂直距离为 $a$ 的空间某点处的磁能密度为

A. $\frac{1}{2}\mu_0(\frac{\mu_0 I}{2\pi a})^2$　　B. $\frac{1}{2\mu_0}(\frac{\mu_0 I}{2\pi a})^2$

C. $\frac{1}{2}(\frac{2\pi a}{\mu_0 I})^2$　　D. $\frac{1}{2\mu_0}(\frac{\mu_0 I}{2a})^2$

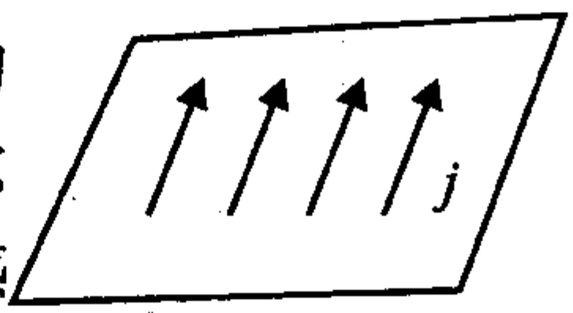
**本题考点**:磁能密度

**解**:无限长直电流 $I$ 产生　$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$

$$w_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{1}{2\mu_0}(\frac{\mu_0 I}{2\pi a})^2$$

答案选 B

**113.(清华大学 1998 年)** 电流均匀地流过无限大平面导体薄板,面电流密度为 $j$,设板的厚度可以忽略不计,试用分别用毕奥 — 萨伐尔定律和安培环路定理求板外任意一点的磁感应强度.




**本题考点**:毕奥 — 萨伐尔定律和安培环路定理求磁感应强度

**解**:(1) 毕奥 — 萨伐尔定律法

求板外任意点 $P$ 的磁场感应强度 $\vec{B}$,建立如图的坐标系

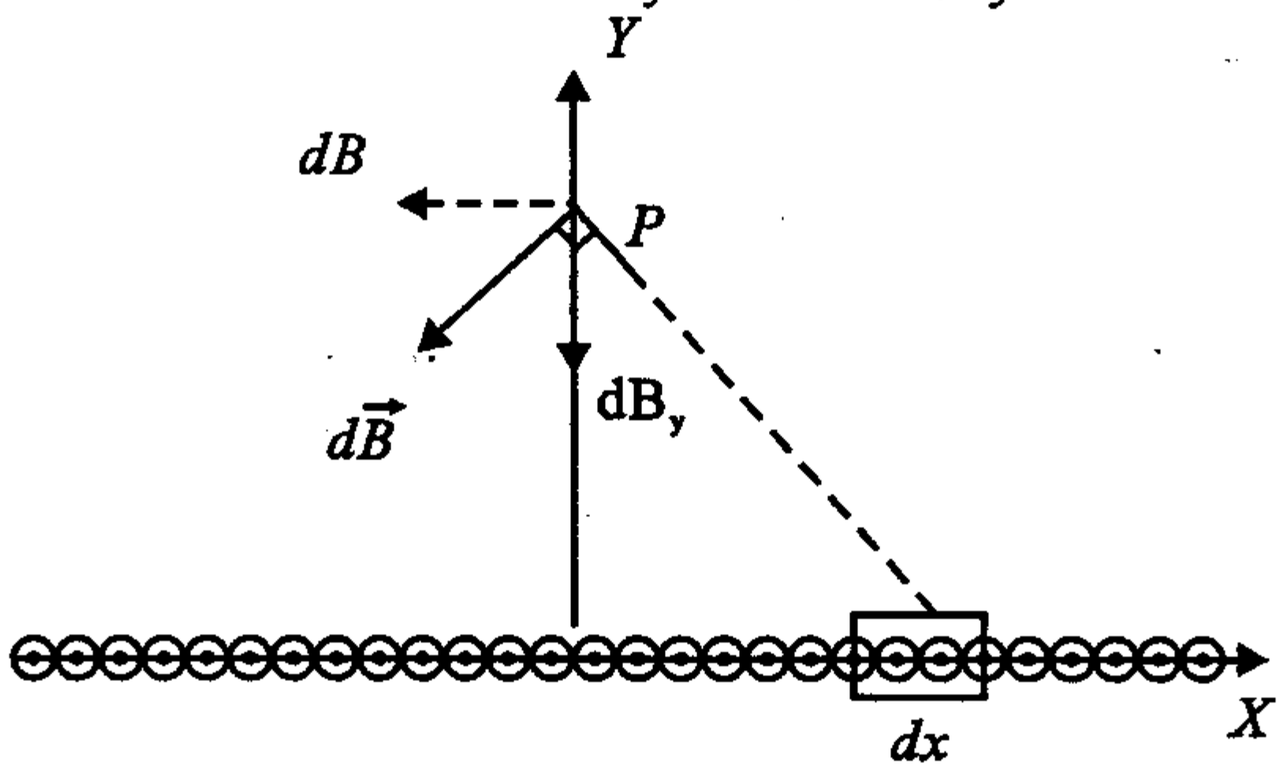
先取电流 $dI$ 求其在 $P$ 点产生的 $d\vec{B}$

$d\vec{B}$ 大小 $dB = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{jdx}{\sqrt{x^2+y^2}}$,$d\vec{B}$ 方向如图.

因此 $d\vec{B}$ 分解为

$$dB_x = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{jdx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = -\frac{\mu_0 jydx}{2\pi(x^2 + y^2)}$$

$$dB_y = -\frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{jdx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{\mu_0 jxdx}{2\pi(x^2 + y^2)}$$




所以

$$B_x = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 jydx}{2\pi(x^2 + y^2)} = -\frac{\mu_0 j}{2}$$

$$B_y = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{\mu_0 jxdx}{2\pi(x^2 + y^2)} = 0$$

所以

$B = \frac{\mu_0 j}{2}$，方向上或者前方向左，上或后方向右

(2) 安培环路定理法

**分析**：电流均匀地流过无限大面，即面对称，所以磁感应强度 $\vec{B}$ 面对称.

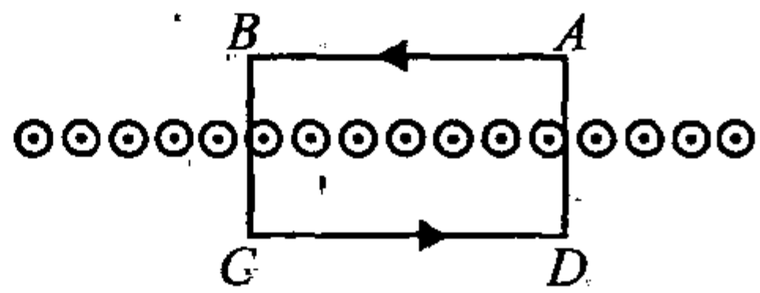
如图由于电流是面对称，我们取一个矩形回路 $ABCD$，使 $ABCD$ 与电流正交，$AB$、$CD$ 边到电流面距离相同，$BC$、$AD$ 与电流面垂直

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{BC} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{DA} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$\int_{BC}\vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{CD}\vec{B}\cdot d\vec{l} = 0;$$

$$AB = BC = l$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\cdot 2l = \mu_0 jl$$




$B = \frac{\mu_0 j}{2}$，方向 $A \rightarrow B$　　下面 $C \rightarrow B$

**114.**（**清华大学** 1998 **年**）载有电流为 $I$ 的细软导线围成一个正方形回路，放在磁感应强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场中，该回路磁矩与外磁场同方向．若保持电流不变，将此正方形回路变成圆的过程中磁力作功为 $A$，试求此圆形回路的半径 $R$．

**本题考点：***磁场力或磁力矩作功* $A = I\Delta\Phi$

**解：**在变化的过程中导线长度不变即 $2\pi R = 4a$

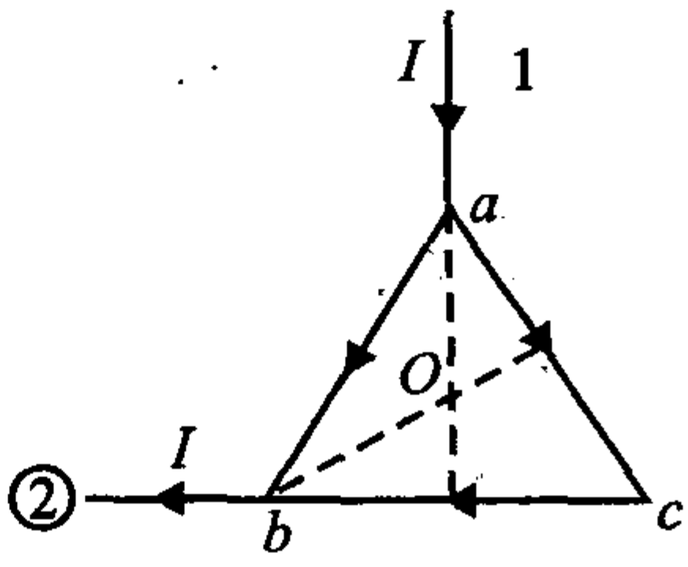
圆 $S_{圆} = \pi R^2$，正方形 $S_{正} = a^2 = \frac{\pi^2 R^2}{4}$

$$\Phi = BS$$

$$A = I\Delta\Phi = IB\pi\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)R^2$$

$$R = \left[\frac{A}{IB\pi\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

**115.**（**北京市** 1999 **年**）电流 $I$ 由长直导线 1 沿垂直 $bc$ 边方向经 $a$ 点流入一电阻均匀分布的正三角形金属线框，再由 $b$ 点沿 $cb$ 方向流出，经长直导线 2 返回电源（如图所示）．若载流导线 1、2 和三角形框在框中心 $O$ 点产生的磁感应强度分别用 $\vec{B}_1$、$\vec{B}_2$ 和 $\vec{B}_3$ 表示，则 $O$ 点的磁感应强度大小：（　　）



$A$. $B = 0$,因为 $B_1 = B_2 = B_3 = 0$;

$B$. $B = 0$,因为虽然 $B_1 \neq 0, B_2 \neq 0$,但 $\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 0, \vec{B}_3 = 0$;

$C$. $B \neq 0$,因为虽然 $B_3 = 0, B_1 = 0$,但 $B_2 \neq 0$;

$D$. $B \neq 0$,因为虽然 $\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 0$,但 $\vec{B}_3 \neq 0$.

**本题考点:**欧姆定律,磁场迭加原理

**解:**根据毕 – 萨定律知:$B_1 = 0, B_2 \neq 0$

根据欧姆定律知:$a \to c \to b$ 上电流为$\frac{I}{3}$,

$A \to b$ 上电流为$\frac{2I}{3}$,

正三角形框的磁场 $B_3 = 0$;

根据磁场迭加原理得 $B = B_1 + B_2 + B_3 \neq 0$

答案选 C

**116.(北京市 1999 年)** 用细导线密绕成的长为 $l$,半径为 $a(l >> a)$,总匝数为 $N$ 的直螺线管中,通以稳恒电流 $I$,当管内充满相对磁导率为 $\mu_r$ 的均匀磁介质后,管中任意一点磁场强度大小为_____.

**本题考点:**长直螺线管中的磁场

**解:**长直螺线管中的磁感应强度为 $B = \mu nI$

磁场强度大小为 $H = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} = nI = \frac{NI}{l}$

空处填:$\frac{NI}{l}$

**117.(北京市 1999 年)** 铜的相对磁导率 $\mu_r = 0.9999912$,则其磁化率 $\chi_m =$ _____,它是磁性磁介质_____.

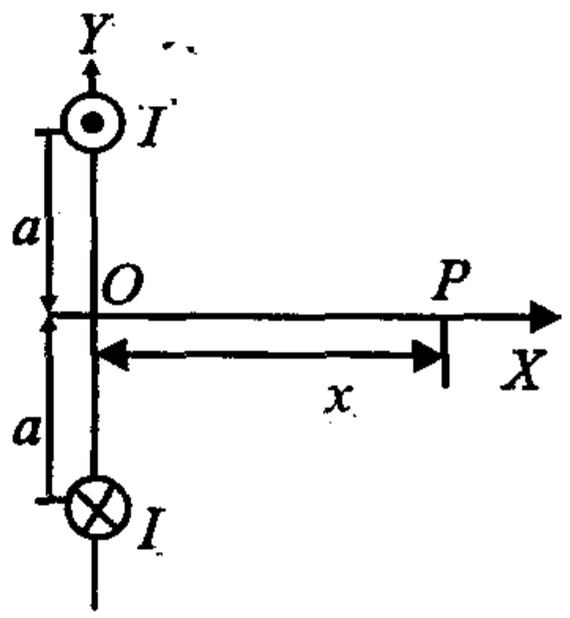
**本题考点:**磁介质的磁化规律

**解:**$\chi_m = 1 - \mu_r = 1 - 0.9999912 = -0.0000088$,

$\mu_r < 0$,铜是抗磁质.

空处填:$-0.0000088$,抗磁质

**118.**(北京市 1999 年) 图为两条穿过 $Y$ 轴且垂直于 $X-Y$ 平面的平行长直导线的俯视图,两条导线皆通有电流 $I$,但方向相反,它们到 $X$ 轴的距离皆为 $a$.




(1) 推导出 $X$ 轴上 $P$ 点处的磁感应强度的表达式;

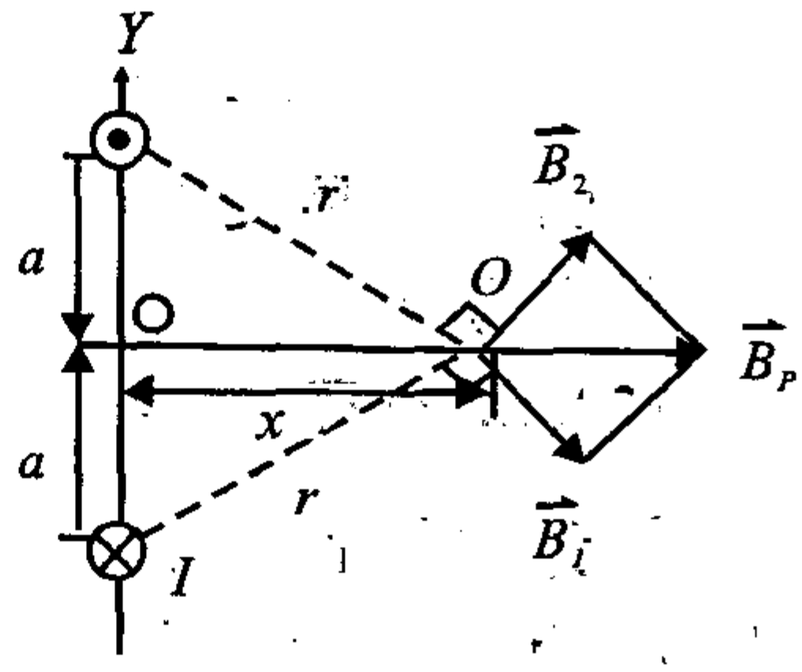
(2) 求 $P$ 点在 $X$ 轴上何处时,该点的磁感应强度取得最大值.

**本题考点:**无限长载流导线的磁场,磁场迭加原理

**解:**(1) 根据无限长载流导线的磁场公式

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

1、2 导线在 $P$ 处产生的磁感应强度分别为 $\vec{B}_1, \vec{B}_2$,




如图所示,其大小为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{a^2 + x^2}}$$

根据磁场迭加原理

$$\vec{B}_p = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 2B_1\cos\theta\vec{i}$$

$$= 2 \times \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{a_2 + x^2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}\vec{i}$$

$$= \frac{\mu_0 Ia}{\pi(a^2 + x^2)}\vec{i}$$

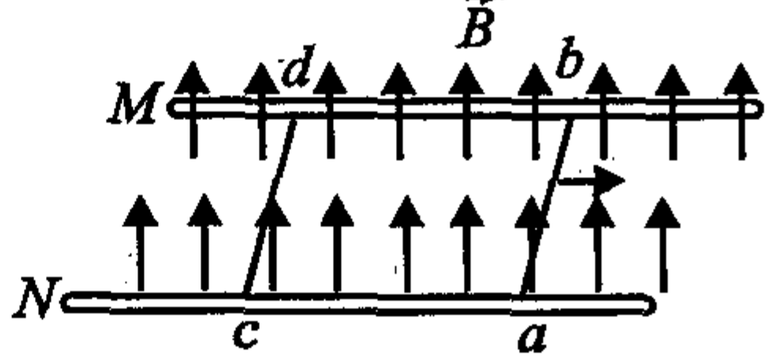
(2) 当 $x = 0$,即 $P$ 在原点处时,$B_p$ 有最大值

$$\vec{B}_{p\max} = \frac{\mu_0 I}{\pi a}\vec{i}$$

**119.**(北京理工大学2002年)如图,$M$、$N$为水平面内两根平行金属导轨,$ab$与$cd$为垂直于导轨并可在其上自由滑动的两根直裸导线.外磁场垂直水平面向上.当外力使$ab$向右平移时,$cd$

A. 不动　　B. 转动

C. 向左移动　　D. 向右移动




**本题考点:**电磁感应,安培力

**解:**$ab$因切割磁场线产生感应电动势,其方向为$b \to a$,从而在$abcda$回路中产生感应电流,且$cd$上的感应电流方向为$c \to d$.

根据安培定律

$$\vec{F} = \vec{IL} \times \vec{B}$$

所以$cd$上所受安培力向右.

答案选D

**120.**(北京理工大学2002年)一面积为$S$,载有电流$I$的单匝平面闭合线圈置于磁感应强度为$\vec{B}$的均匀磁场中,此线圈受到的最大磁力矩的大小为_____,此时通过线圈的磁通量为_____.当此线圈受到最小的磁力矩作用时通过线圈的磁通量为_____.

**本题考点:**磁力矩,磁通量

**解:**均匀磁场中的闭合线圈受到的磁力矩为$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$

磁力矩的最大值为$M_{\max} = p_m B = ISB$;

磁力矩的最小值为$M_{\min} = 0$.

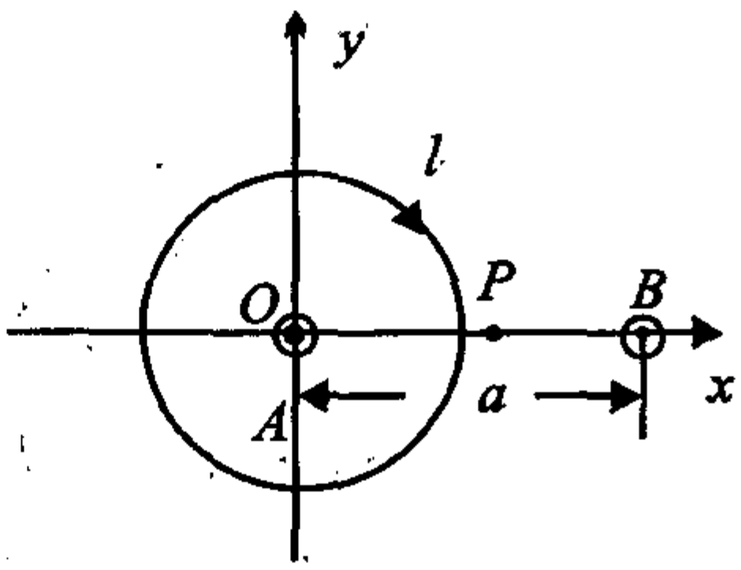
且此时$\vec{S} \,//\, \vec{B}$,因此磁通量为$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS$

空处填:$BIS$,0,$BS$

**121.**(北京理工大学2002年)如图,平行的无限长直载流导线$A$和$B$,电流强度均为$I$,垂直纸面向外,两根载流导线之间相距为

$a$,则

(1) $\overline{AB}$ 中点($P$ 点)的磁感应强度 $\vec{B}_p$ = _____.




(2) 磁感应强度 $\vec{B}$ 沿图中环路 $l$ 的线积分 $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ = _____.

**本题考点:**磁场迭加原理,安培环路定理

**解:**由磁场迭加原理

$$\vec{B}_p = \vec{B}_{AP} + \vec{B}_{BP} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \frac{a}{2}} \vec{j} + \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi \frac{a}{2}} \vec{j}\right) = 0$$

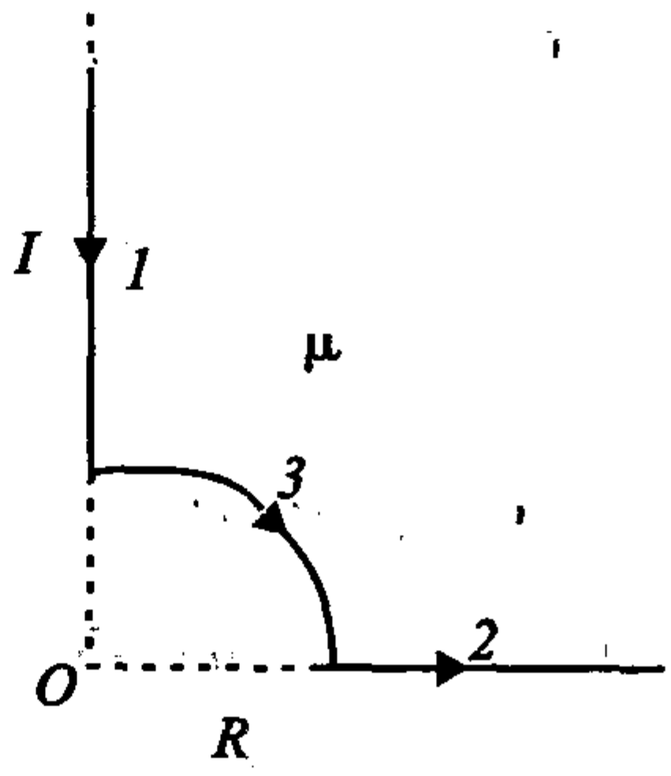
由安培环路定理

$$\oint \vec{B} \cdot dl = \mu_0 \sum I_i = -\mu_0 I$$

"—"号是因 $A$ 中电流方向与 $l$ 绕向呈左手螺旋关系,故电流取负值.

空处填:0, $-\mu_0 I$

**122.(北京师范大学2002年)**如图所示,一条放在相对磁导率为 $\mu_r$ 的介质中的无限长直导线在一处弯成1/4圆弧,圆弧半径为 $R$,圆心在 $O$ 点,直线的延长线都通过圆心,已知导线中的电流为 $I$.求: $O$ 点的磁感应强度.




**本题考点:**用毕—沙定律,磁场的迭加原理求磁感应强度

**解:** $d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$

1 和 2 部分在 $O$ 点产生的磁感应强度为 0，

即　　$B_{10} = 0$，　$B_{20} = 0$，

1/4 圆弧在 $O$ 点产生的磁感应强度为

$$B_{30} = \frac{\mu_r \mu_0 I}{8R}$$，方向：⊗

$$B_0 = B_{10} + B_{20} + B_{30} = \frac{\mu_r \mu_0 I}{8R}$$　　方向：⊗

**123.**（南京师范大学 1998 年）半径为 $R_2$ 的薄圆板，中心挖去半径为 $R_1$ 的圆孔，此板均匀带电，电荷面密度为 $\sigma$，$(\sigma > 0)$，有一电子（质量为 $m$，带电量为 $-e$）以初速度 $v_0$ 从无穷远处沿垂直于圆板平面的中心轴线飞向盘. 求：(1) 电子达到圆板中心 $O$ 点时的速率. (2) 若圆板以角速度 $\omega$ 绕通过 $O$ 点并与板面相垂直的轴线旋转，求 $O$ 点的磁场的大小.

**本题考点：**电势与电势能、电场力做功、磁感应强度

**解：**(1) 先求出圆心处相对于无穷远处的电势

$$V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma_2 \pi r dr}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(R_2 - R_1)$$

则电子从无穷远处以 $v_0$ 速率沿圆板平面的中心轴线飞向盘心处的过程中，电场力做功. 由能量守恒得：

$$\frac{\sigma e}{2\varepsilon}(R_2 - R_1) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

即

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{\sigma}{\varepsilon}e(R_2 - R_1)}$$

(2) 在 $R_1 < r < R_2$ 上取 $r \sim r + dr$ 的微元，该微元绕其对称轴以 $\omega$ 旋转时的等效电流元为 $dI = \frac{\omega}{2\pi}dq = \frac{\omega}{2\pi}\sigma 2\pi r dr$，由毕——萨定律及对称性分析得其在轴线上的 $O$ 点处产生的磁感应强度大小为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0}{2}\omega\sigma dr$$

$$B = \int_{R_1}^{R_2} dB = \frac{\mu_0}{2}\omega\sigma(R_2 - R_1)$$

**124.**(南京师范大学 1998 年) 设在讨论的空间范围内有匀强磁场 $B$,如图,方向垂直纸面朝里.在纸平面内有一长为 $h$ 的光滑绝缘空心细管 $MN$,管的 $M$ 端内有一质量为 $m$,带电量为 $q > 0$ 的小球 $P$.开始时 $P$ 相对于管静止,而后如图所示,管带着 $P$ 朝垂直于管的长度方向以均速度 $u$ 运动,求:(1) 小球 $P$ 从 $N$ 端离开管后,在磁场中作圆周运动的半径.(不计小球的重力)(2) 分析小球动能的来源.

**本题考点:** *洛仑兹力与功的关系*

**解:**(1) $q$ 在离开 $N$ 点前瞬间相对于 $MN$ 的速率为 $u_1$,则由动能定理有:

$$\frac{1}{2}mu_1^2 = \int_0^h f'ds\int_0^h qBV\cos\theta ds$$

$$= \int_0^h qBuds = qBuh$$

即 $$u_1^2 = \frac{2qBuh}{m}$$

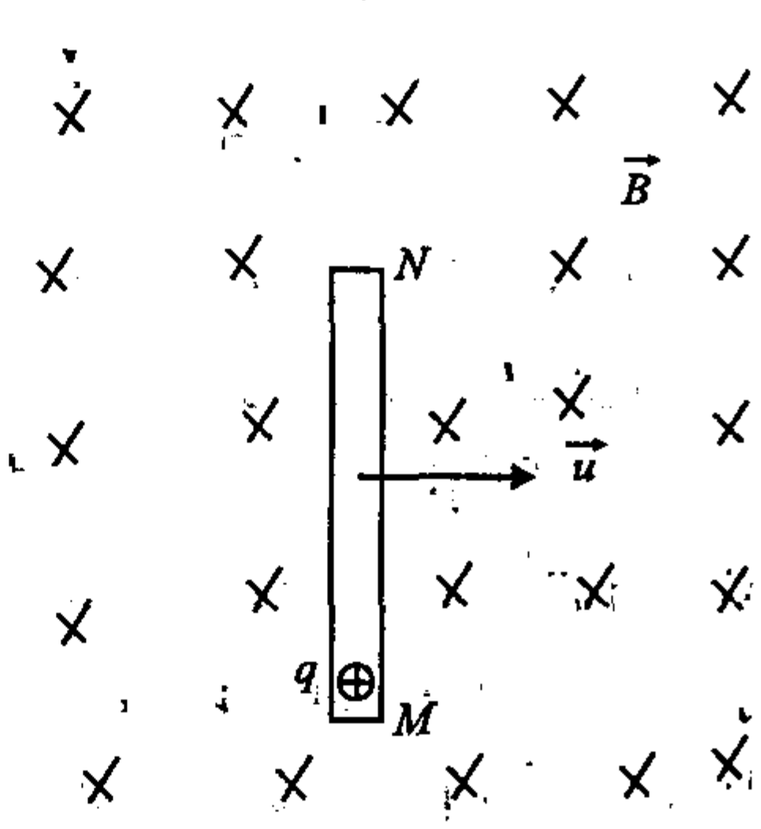
则 $q$ 对地的速度大小为

$$V^2 = u_1^2 + u^2 = \frac{2qBhu}{m} + u^2$$

$$V = \sqrt{u^2 + \frac{2qbhu}{m}}$$

再由 $R = \frac{mV}{qB}$ 得

$$R = \sqrt{\frac{m^2u^2}{q^2B^2} + \frac{2mhu}{qB}}$$




X 两等长对称

X 号匀均分部

$$= \frac{mu}{qB}\sqrt{1 + \frac{2Bqh}{mu}}$$

(2) 小球功能的来源于细管对其作的功.

**125.(南京师范大学 1999 年)** 在载有电 $I_1$ 的长直导线旁,有一与长直导线共面,长为 $l$ 的导线 $MN$,且载有电流 $I_2$,导线 $MN$ 与长直导线的夹角为 $\theta$,$M$ 点到长直导线的距离为 $a$,求载流导线 $MN$ 所受的磁场力的大小和方向.

**本题考点:** 安培环路定理应用与安培力计算

**解:** 在 $MN$ 上取电流元 $I_2 d\vec{l}$,其方向与 $I_2$ 同向,$I_2 dl$ 到 $M$ 的距离为 $l$,$Id\vec{l}$ 与 $\vec{B}$ 垂直,所在点的 $\vec{B}$ 可由安培环路定理得:

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a + l\sin\theta)}$$

由安培力公式:$dF = | I_2 d\vec{l} \times \vec{B} | = I_2 dlB$

得 $$F = \int_0^L \frac{\mu_0 I_1 I_2 dl}{2\pi(a + l\sin\theta)} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{a + L\sin\theta}{a}$$

$\vec{F}$ 的方向为垂直 $MN$ 且指向左上方.

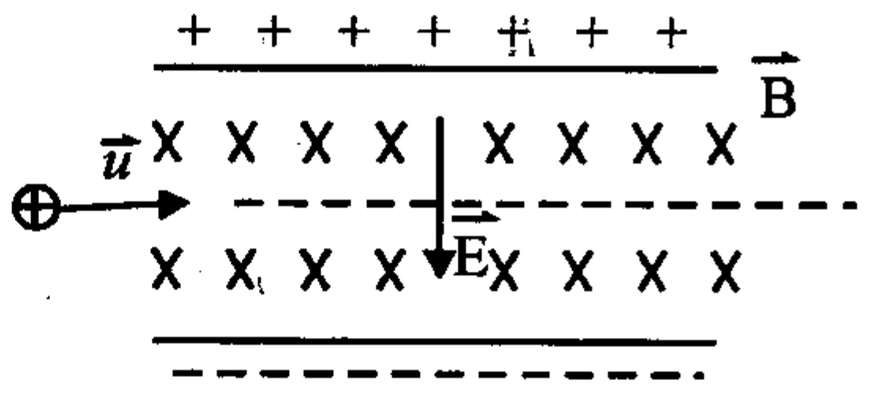
**126.(同济大学 1999 年)** 一方向沿直向下的均匀电场与一方向垂直纸面向里的均匀磁场互相垂直.电场强度大小为 $E = 1.0 \times 10^{-3}\mathrm{Vm}^{-1}$,若要使速率 $v = 6 \times 10^6\mathrm{cm5}^{-1}$ 的带正电质点沿水平方向穿过这两个场而不改变运动方向(如图 3 所示),且不计质点的重力,则磁场的磁感应强度应为何值?

**本题考点:** 电场与磁场对带电体的作用

**解:** 已知 $E = 1.0 \times 10^3\mathrm{v \cdot m}^{-1}$,$v = 6 \times 10^3\mathrm{m \cdot s}^{-1}$.

设带正电的质点电量为 $q$,不计重力时,质点在电场中受的作用力大小为

$F_e = qE$,方向向下,



而运动质点受的磁场力大小

$F_m = qvB$,

要使其不改变运动方向,则 $F_m$ 应与 $F_e$ 等值反向

由 $qE = qvB$ 得

$$B = \frac{E}{v} = \frac{1 \times 10^{-3}}{6 \times 10^{3}} = 0.167(\mathrm{T})$$

**127.(南京师范大学 2000 年)** 在一电视显像管中,电子在水平面内从南向北运动,动能为 $1.2 \times 10^4 eV$,该处地球磁场在竖直方向的分量向下,磁感应强度数值为 $5.5 \times 10^{-5}$T. 问:(1) 电子在地球磁场作用下朝哪个方向偏转. (2) 电子在显像管内的南北方向下飞行 $2.0 \times 10^{-1}$m 时,偏转量 $\alpha$ 有多大?

**本题考点:** 带电粒子在磁场中的运动

**解:** (1) 由带电粒子在磁场中受洛仑兹力作用,有

$$evB = m\frac{v^2}{R},$$

$$R = \frac{mv}{eB},$$

其洛仑兹力方向向东,故电子会向东偏转.

(2) 偏转角 $\alpha$ 可由 $\sin\alpha = \frac{y}{R}$, $y$ 为电子向北飞行的距离

$$\alpha = \sin^{-1}\left[\frac{yeB}{mv}\right] = \sin^{-1}(0.03)$$

**128.(南京师范大学 2000 年)** 一直流输电站将电压为 500KV 的直流电,通过两条截面不计的平行输电线输至远方,已知两输电线间单位长度的电容为 $10^{-11}$F,两电线间距为 0.5m,求:(1) 两导线间单位长度上所受的静电力. (2) 若导线上的静电力与安培力正好抵消,求通过输电线的电流.

**本题考点:** 载流导线间的相互作用、高斯定理、静电场力、安培环路定理

**解**:(1) 单位长度上的电容为 $C_0$,其带电量 $\lambda = C_0 V$,一导线在另一平行共面的导线上任意一点的静电场场强由高斯定理及对称性分析得 $E_{+\lambda} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}$,另一单位长度上带电量为 $-\lambda$ 的部分受的静电场力大小为

$$F_e = E_\lambda' \cdot \lambda = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 d} = \frac{C_0^2 V^2}{2\pi\varepsilon_0 d}$$

代入数据得:$F_e = \dfrac{(10^{-11})^2 \times 25 \times 10^{10}}{2 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 0.5} = 0.9(\mathrm{N})$

(2) 一载流导线在另一载流导线处产生的磁场可由安培环路定理得

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

单位长度上受的安培力大小为

$$F_m = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}$$

当 $F_m = F$ 时,$I^2 = \dfrac{\lambda^2}{\varepsilon_0\mu_0} = \dfrac{C_0^2 V_0^2}{\varepsilon_0\mu_0}$

$$I = 3 \times 10^8 \times C_0 V = 1500(\text{安培})$$

## Ⅲ. 电磁感应

**129.(北京大学 2000 年)** 简要地回答下列问题:

(1) 何谓法拉第电磁感应定律?它与楞次定律有何差异?

(2) 怎样依据法拉第定律得到涡旋电场的旋度?

**本题考点**:法拉第电磁感应定律、楞次定律、涡旋电场的旋度

**解**:(1) 答:法拉第电磁感应定律是在一个闭合导体回路产生的感生电动势正比于穿过以回路为边界的面的磁通量的变化(在 $SI$ 制为 $\varepsilon = -\dfrac{d\Phi_m}{dt}$).

与楞次定律的差异：楞次定律定性描述电磁感应的性质和方向，法拉第电磁感应定律是定量的描述电磁感应的电动势和方向.

$$(2)\varepsilon_i = \oint_s \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \iint_s (\nabla \times \vec{E}_k) \cdot d\vec{s} = -\iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

由斯托克斯定理

$$\oint \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \iint_s (\nabla \times \vec{E}_k) \cdot d\vec{s} = -\iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

**130.（北京大学 1999 年）** 在一圆筒上均匀密绕一层线圈. 问：线圈的电感（自感）是否与其匝数成正比？为什么？

**本题考点：** 自感

**解：** 对一圆筒上的密绕一层线圈，看作螺线管，并设通有电流 $I$，此时

$$B = \mu_0 nI \qquad \text{即：} B \propto nI$$

$$\Phi = BS = \mu_0 nIS \qquad (S \text{ 为圆筒横截面面积})$$

磁通链

$$\Psi = BSN = \mu_0 nISN = \mu_0 N^2 IV(\text{其中线圈体积 } V = LS)$$

$$L = \frac{\Psi}{I} \propto N^2$$

故 $L$ 不是正比于 $N$.

**131.（武汉大学 2002 年）** 说明电源的电动势的定义，以及什么叫做动生电动势，什么叫做感生电动势.

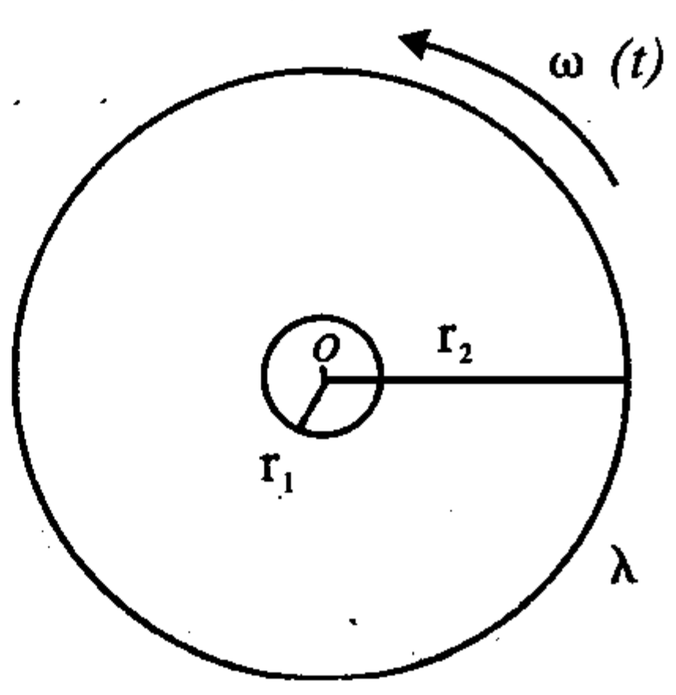
**本题考点：** 电动势的含义

**解：** 电源的电动势是把单位电荷从电源负极移动的正极非静电力所做的功 $\varepsilon = \int_-^+ \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$.

动生电动势是指由于导体在磁场运动产生的电动势.

感应电动势是指由于磁场的变化产生的电动势.

**132.**(北京理工大学 2001 年) 如图,一半径为 $r_2$,电荷线密度为 $\lambda$ 的均匀带电圆环,里边有一半径为 $r_1$ 总电阻为 $R$ 的导体环,两环共面同心($r_2 >> r_1$),当大环以变角速度 $\omega = \omega(t)$ 绕垂直于环面的中心轴旋转时,求小环中的感应电流.其方向如何?




**本题考点:**电磁感应,感应电流

**解:** $I = \dfrac{q}{T} = \dfrac{\lambda_2 \pi r_2}{\dfrac{2\pi}{w}} = \lambda r_2 \omega$

大圆环的磁场为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r_2} = \frac{\mu_0 \lambda \omega r_2}{2r_2} = \frac{1}{2}\mu_0 \lambda \omega$$

小环中的磁场可视为均匀磁场,故有

$$\Phi_m = BS = \frac{1}{2}\mu_0 \lambda \omega \pi r_1^2 \quad \text{(环方向逆时针方针)}$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{1}{2}\mu_0 \lambda \pi r_1^2 \frac{d\omega}{dt}$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{\mu_0 \lambda \pi r_1^2}{2R} \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

$\dfrac{d\omega}{dt} > 0$ 感应电流顺时针方向;

$\dfrac{d\omega}{dt} < 0$ 感应电流逆时针方向

**133.**(清华大学 1998 年) 一个密绕的探测线圈面积为 $4cm^2$,匝数 $N = 160$,电阻 $R = 50\Omega$.线圈与一个内阻 $r = 30\Omega$ 的冲击电流计相连.今把探测线圈放入一均匀磁场中,线圈法线与磁场方向平行.当把线圈法线转到垂直磁场的方向时,电流计指示通过的电量为 $4 \times 10^{-5}C$.问磁场的磁感应强度为多少?

**本题考点:**电磁感应定律中,通过回路的电量为 $q = \dfrac{1}{R}(\Psi_1 - \Psi_2)$

解：$\Psi_1 = BSN, \Psi_2 = 0$

$$q = \frac{1}{R_{总}}BSN$$

$$B = \frac{qR_{总}}{SN} = \frac{4 \times 10^{-5} \times 80}{4 \times 10^{-4} \times 160} = 0.05\text{T}$$

**134.**（南开大学 2002 年）有一平绕于圆筒上的螺旋线圈，长 10 厘米，直径 1.0 厘米，共有线圈 1000 匝，用 32 号漆包线绕制，漆包线的电阻是 247 欧姆／千米(20℃)．若把这线圈接在一个电动势为 2.0 伏特的蓄电池上，问

(1) 线圈的自感系数、电阻和时间常数各是多少？

(2) 线圈中通电开始时的电流增长率是多少？

(3) 线圈中的电流达到稳定后，稳定电流是多少？

(4) 在稳定后线圈中所储存的磁能密度是多少？

**本题考点：**自感，*RL* 电路，磁能密度．

解：(1) 设线圈中通有电流为 $i$，其自感为

$$L = \frac{N\Phi_m}{i}$$

$$\Phi_m = BS = \mu_0 ni\pi r^2$$

$$L = N\mu_0 n\pi r^2 = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{l} =$$

$$\frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1000^2 \times \pi \times (\frac{0.01}{2})^2}{0.1} = 9.86 \times 10^{-5}(\text{H})$$

线圈的电阻 $R = 0.247\text{N}\pi d$

$$= 0.247 \times 1000 \times 3.14 \times 1.0 \times 10^{-2} = 7.76\Omega$$

时间常数：$\tau = \frac{L}{R} = \frac{9.86 \times 10^{-5}}{7.76} = 1.27 \times 10^{-5}(\text{s})$

(2) 此电路为一 *RL* 回路，故有

$$\varepsilon = iR + L\frac{di}{dt}$$

解上试得 $i = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$$

$t = 0s$ 时有

$$\frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon}{L} = \frac{2.0}{9.86 \times 10^{-5}} = 2.03 \times 10^4(\mathrm{A \cdot s^{-1}})$$

(3) 当 $t \to \infty$ 时,稳定电流为

$$I = i_\infty = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{2.0}{7.76} = 0.258(\mathrm{A})$$

(4) 磁能密度为

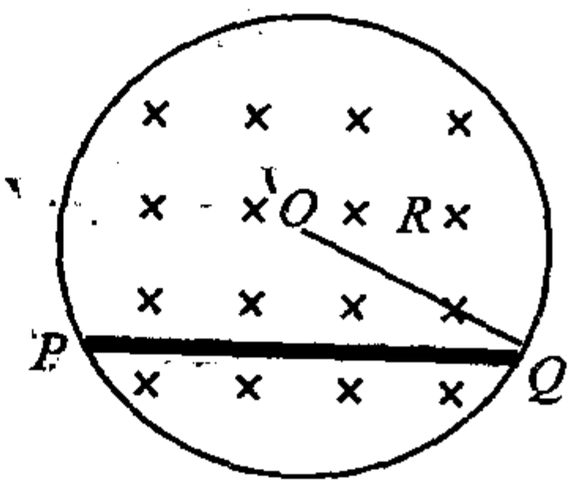
$$w_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{(\mu_0 nI)^2}{\mu_0} = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{2l^2}$$

$$= 2\pi \times 10^{-7}(\frac{1000 \times 0.258}{0.1})^2 = 4.18(\mathrm{J/m^3})$$

**135.**(南开大学 2002 年) 在半径为 $R$ 的圆柱形空间中存在着均匀磁场,$B$ 的方向与柱的轴平行,如图所示,有一长为 $l$ 的金属棒放在磁场中,设 $B$ 的变化率$\frac{dB}{dt} = k$ 为常量,

试证:棒上感应电动势的大小为

$$\varepsilon_{PQ} = \frac{dB}{dt}\frac{1}{2}\sqrt{R^2 - (\frac{l}{2})^2}$$

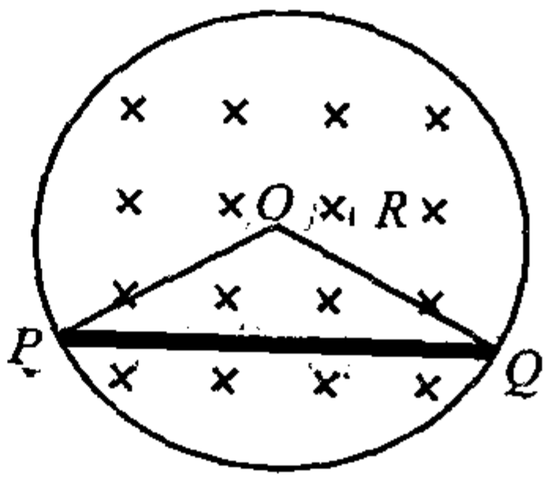



**本题考点:**法拉第电磁感应定律,电动势.

**证明:**作闭合回路 $OQPO$ 回路如图所示,回路的感应电动势为

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$= -\frac{d(BS_{\Delta OQP})}{dt}$$



$$= -\frac{dB}{dt}S_{\Delta OQP}$$

$$= -\frac{dB}{dt}\frac{1}{2}\sqrt{R^2-(\frac{1}{2})^2}$$

又根据电动势的定义

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_{OQ}\vec{E}_k \cdot d\vec{l} + \int_{QP}\vec{E}_k \cdot d\vec{l} + \int_{PO}\vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

在 $OP$ 和 $OQ$ 线段上 $d\vec{E}_k \perp d\vec{l}$，

$$\varepsilon_{OQ} = \varepsilon_{PO} = \int_{OQ}\vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_{PO}\vec{E}_k \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\varepsilon_i = \int_{QP}\vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \varepsilon_{QP}$$

$$\varepsilon_{PQ} = -\varepsilon_i = \frac{dB}{dt}\frac{l}{2}\sqrt{R^2-(\frac{l}{2})^2}$$

**136.**（武汉理工大学 2003 年）一纸筒长为 $l$，半径为 $R$. 则应绕_____匝线圈才能使所构成的螺线管的自感为 $L$；若螺线管线圈通以电流强度为 $I$、变化率为 $\beta$ 的电流，则线圈中的自感电动势为_____，储存的能量为_____.

**本题考点：**细长螺线管的自感系数、自感电动势和储存的磁能公式.

**解：**因 $L = \mu_0 N^2 V = \mu_0 N^2 \cdot \pi R^2 \cdot l$

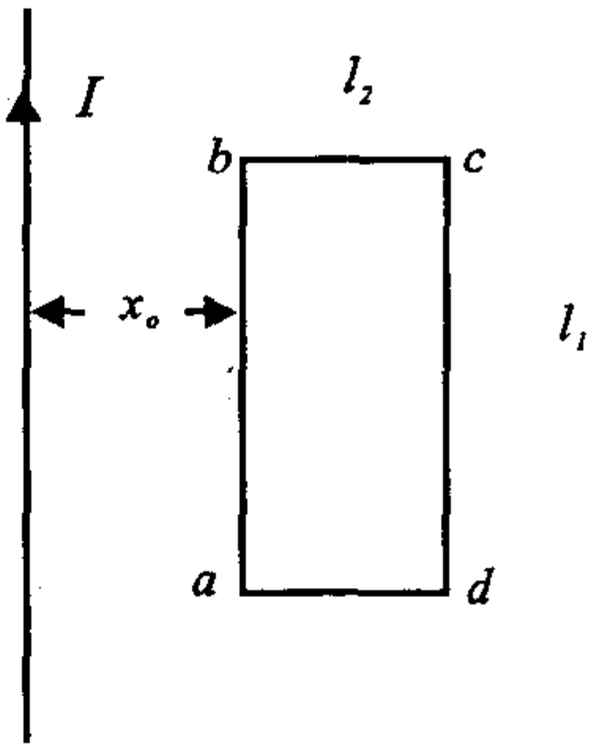
故 $N = \sqrt{\frac{Ll}{\mu_\pi R^2}}$

$$\varepsilon_L = -L \cdot \frac{dI}{dt} = -L\beta$$

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2$$

空处填：$\sqrt{\frac{Ll}{\mu_0 \pi R^2}}$；$-\beta L$，$\frac{1}{2}LI^2$.

**137.**(武汉理工大学 2003 年) 如图所示,一长直导线载有电流 $I = I_0\sin\omega t$. 旁有一单匝矩形线圈 $abcd$ 与其共面,线圈的长,宽分别为 $l_1, l_2$,且长边 $ab$ 与导线平行,至导线的距离为 $x_0$,求线圈中感应电动势.




**本题考点:**非均匀磁场时磁通量的计算及法拉第电磁感应定律.

**解:**电流 $I$ 在线圈平面上某一点产生的磁场为 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}$

方向垂直纸面向里,与线圈 $abcda$ 法向方向一致,其中 $x$ 为该点到直导线的距离,则

$$\Phi = \int_s \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_{x_0}^{x_0+l_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l_1\, dx = \frac{\mu_0 I l_1}{2\pi}\ln\frac{x_0 + l_2}{x_0}$$

由法拉第电磁感应定律,有

$$\varepsilon_i = -N\frac{d\Phi}{dt}$$

$$= -\frac{\mu_0 l_1}{2\pi}\ln\frac{x_0 + l_2}{x_0}\cdot\frac{dI}{dt}$$

$$= -\frac{\mu_0 l_1 I_0\omega}{2\pi}\ln\frac{x_0 + l_2}{x_0}\cdot\cos\omega t$$

**138.**(武汉理工大学2003年) 如图 – 题 12 所示,一均匀磁场 $B$ 垂直纸面向里,长为 $l$、质量为 $m$ 的导体棒 $ab$ 可无摩擦地在导轨上滑动,除电阻 $R$ 外,其余部分的电阻可忽略不计. 假设 $t = 0$ 时刻,导体棒以速度 $v_0$ 向右运动,求 $t$ 时刻,$ab$ 棒的速度.

**本题考点:**动生电动势,安培定律、牛顿第二定律.

**解:**导体棒 $ab$ 以速度 $V$ 滑动时,动生电动势为

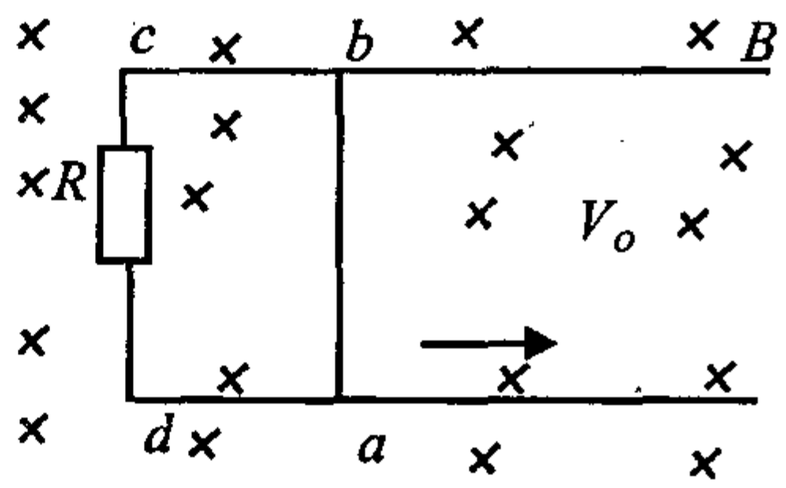
$$\varepsilon_{ab} = BlV$$

这样,回路中的电流为

$$i = \frac{\varepsilon_{ab}}{R} = \frac{BlV}{R}$$

这时,棒 $ab$ 受到的安培力为

$$F_{ab} = ilB = \frac{B^2 l^2 V}{R}$$,方向与速率方向相反.




由牛顿第二定律,有

$$-\frac{B^2 l^2 V}{R} = m \cdot \frac{dV}{dt}$$

解此方程,有

$$\frac{dV}{V} = -\frac{B^2 l^2}{Rm} dt$$

$$\int_{V_0}^{V} \frac{dV}{V} = -\int_0^t \frac{B^2 l^2}{Rm} dt$$

$$\ln V \Big|_{V_0}^{V} = -\frac{B^2 l^2}{Rm} t \Big|_0^t$$

$$\ln \frac{V}{V_0} = -\frac{B^2 l^2}{Rm} t$$

$$\Rightarrow \quad V = V_0 e^{-\frac{B^2 l^2}{Rm} t}$$

**139.(清华大学2002年)** 一螺线管圈长0.5米,直径0.08米,绕有50圈.另一个用绝缘线绕成的紧密线圈绕在其中心,共20圈,线圈二端接一个验电器,电路总电阻为25Ω.当螺线圈中的电流从3安培很快降到1安培时,经过仪器的电荷量为多大?($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$H/m).

**本题考点:** 电磁感应电量公式及均匀磁场中通过平面的磁通量计算.

**解:** 螺线管线圈内磁感应强度

$$B = \mu_0 \frac{N_0}{l} \cdot I$$

其中，$N_1 = 50$ 圈，$l = 0.5$ 米，$I$ 为所通电流

绝缘线线圈得到的磁链为

$$\Psi = N_2 BS \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi d^2}{4l} I$$

其中 $N_3 = 20$ 圈，$d = 0.08$ 米

当螺线圈中的电流从 $I_1 = 3$ 安，降到 $I_2 = 1$ 安时，经过仪器的电磁量为

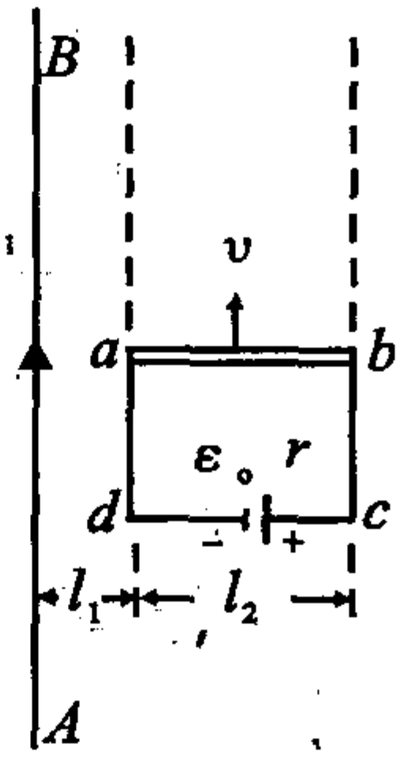
$$q = \frac{1}{R}(\Psi_1 - \Psi_2)$$

$$= \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi d^2}{4lR}(I_1 - I_2)$$

$$= \frac{4 \times 3.14 \times 10^{-7} \times 50 \times 20 \times 3.14 \times 0.08^2 \times 2}{4 \times 0.5 \times 25}$$

$$= 10^{-6}(\text{库})$$

**140.（中国科学技术大学 2001 年）** 如图所示的长直导线 $AB$ 中的电流为 $I_1$，导体框 $abcd$ 与 $AB$ 共面. $AB$ 与 $abcd$ 都水平放置并且 $bc$、$ad$ 边与 $AB$ 平行，$ab$ 边可以在长轨道 $ad$ 及 $bc$ 边上无摩擦地平动，电源电动势及内阻分别为 $\varepsilon_0$ 及 $r$，$ab$ 边的电阻为 $R$，忽略电路其余部分的电阻. 若 $I_1 = 100\text{A}$，方向由 $A$ 到 $B$；$l_1 = 1\text{cm}$，$l_2 = 19\text{cm}$，$R = 0.1$ 欧姆，$\varepsilon_0 = 1$ 伏，$r = 1.9$ 欧姆. 试求：为了使 $ab$ 边能以 $v = 10$ 米/秒的速度在线框上匀速平动，需在 $ab$ 上作用多大的外力？




**本题考点：**动生电动势、安培力的计算

**解：**(1) $ab$ 中的动生电动势：

$$\varepsilon = \int_{l_1}^{l_1+l_2} -BV dx = -\int_{l_1}^{l_1+l_2} \frac{\mu_0 I_1 V}{2\pi x} dx$$

$$= -\frac{\mu_0 I_1 V}{2\pi}\ln\frac{l_1 + l_2}{l_1}$$

$$= -2 \times 10^{-7} \times 100 \times 10\ln 20$$

$$= -6 \times 10^{-4}(\text{伏})$$

方向：$b \rightarrow a$

(2) 回路中电流强度：

$$I_2 = \frac{\varepsilon_0 + |\varepsilon|}{R + r} = \frac{1 + 6 \times 10^{-4}}{0.1 + 0.9} \approx 0.5\text{A}$$

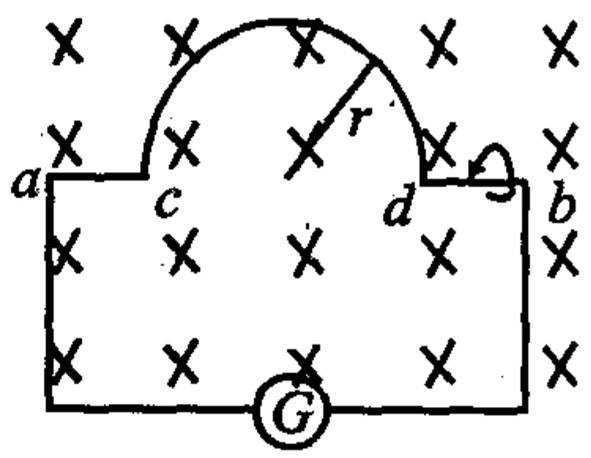
方向 $c \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow d$

$$(3)\ F_m = \int_{l_1}^{l_1+l_2} I_2 B dx = \int_{l_1}^{l_1+l_2} I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} dx$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{l_1 + l_2}{l_1} = 3 \times 10^{-5}(\text{N})$$

**141.**（中国科学院 2000 年）一导线被弯成图所示的形状（其中 $cd$ 是半径为 $r = 0.10\text{m}$ 半圆，$ac$、$ab$ 两端长度均为 $l = 0.10\text{m}$），在均匀磁场（$B$ 为 0.50 特斯拉）中绕轴线 $ab$ 转动，转速 $\omega = 60$ 转/秒. 设电路中的总电阻（包括电表 $G$ 的内阻）为 1000Ω，求导线中的感应电动势和感应电流，它们的最大值各是多少？

**本题考点：**磁通量、感应电动势与电流的计算




**解：**磁通量 $\Phi = \frac{\pi r^2}{2} B\cos\omega t$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{-d}{dt}\left(\frac{\pi r^2 B}{2}\cos\omega t\right)$$

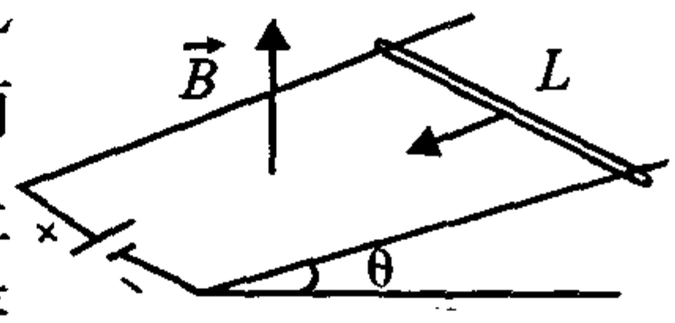
$$= \frac{B\pi r^2 \omega}{2}\sin\omega t$$

$$= \frac{0.50 \times 3.14 \times 0.10^2 \times 60 \times 2 \times 3.14}{2}\sin 120\pi t$$

$$= 3.0\sin 120\pi t(\text{伏特})$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = 3.0 \times 10^{-3}\sin 120\pi t$$

**142.**(中国科学院 2001 年) 一根长为 $L$ 的直导线,质量为 $m$,电阻为 $R$. 导线沿着两条足够长的平行导电轨道无摩擦的由静止开始下滑,轨道电阻不计. 在两根轨道的底端接有电动势为 $\varepsilon$ 的电源. 如图所示,导电轨道所在平面与水平成 $\theta$ 角,磁感应强度 $B$ 铅直向上. 求:




(1) 导线下滑的最大速度;

(2) 达到最大速度的直导线放出的电功率.

**本题考点:** 安培力、牛顿第二定律的应用、动生电动势

**解:**(1) $$mg\sin\theta - ILB\cos\theta = m\frac{dV}{dt} \qquad ①$$

$$I = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{R} = \frac{LBV\cos\theta - \varepsilon}{R} \qquad ②$$

联立求解上式得

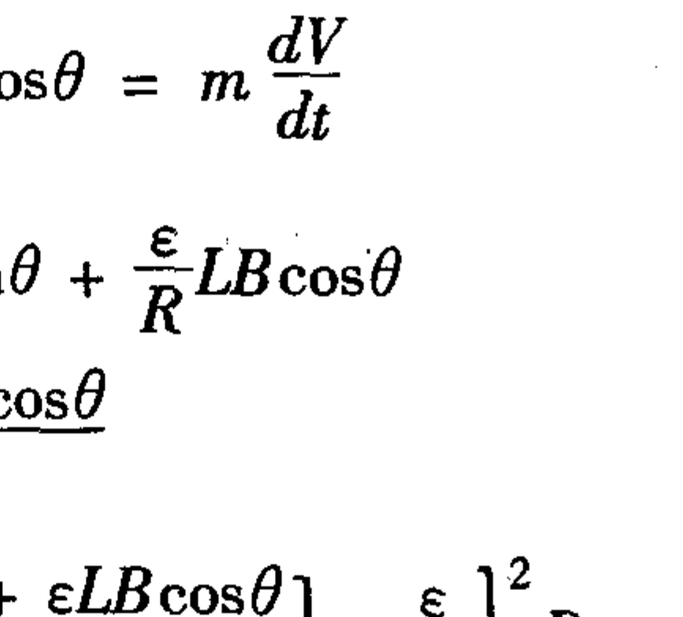
$$mg\sin\theta - \frac{(LB\cos\theta)^2 V}{R} + \frac{\varepsilon}{R}LB\cos\theta = m\frac{dV}{dt}$$

当 $\frac{dV}{dt} = 0$ 时, $\frac{(LB\cos\theta)^2 V_{mak}}{R} = mg\sin\theta + \frac{\varepsilon}{R}LB\cos\theta$

$$V_{max} = \frac{Rmg\sin\theta + \varepsilon LB\cos\theta}{(LB\cos\theta)^2}$$

$$(2)\ P = I_{max}^2 R = \left\{\frac{LB\cos\theta}{R}\left[\frac{Rmg\sin\theta + \varepsilon LB\cos\theta}{(LB\cos\theta)^2}\right] - \frac{\varepsilon}{R}\right\}^2 R$$

**143.**(南京师范大学 1997 年) 电流 $I$ 的长直导线近旁有一根与其共面的导线 $ab$,长为 $l$,设 $a$ 端与导线相距 $r_a$, $ab$ 与导线夹角为如图所示,当导线 $ab$ 以匀速 $V$ 沿电流方向平移时,求 $ab$ 内的感应电动势的大小及指向.




**本题考点:** 安培环路定理与动生电

动势

**解**:在 $ab$ 上任意距 $a$ 端 $x$ 处取微元 $dx$,则由安培环路定理可得该处的磁感应强度大小为:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(r_a + x\sin\theta)}(\text{方向向里})$$

由 $d\varepsilon = (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot dl = VB\cos(\frac{\pi}{2} + \theta)dx$ 得

$$\varepsilon_{ab} = \int_0^l V\frac{\mu_0 Idx(-\sin\theta)}{2\pi(r_a + x\sin\theta)} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}V\ln\frac{r_a + l\sin\theta}{r_a}$$

负号表示 $B$ 端电势低于 $a$ 端电势,电动势方向由 $b \to a$.

**144.(华中科技大学 2001 年)** 一螺绕环,每厘米上绕有 40 匝,铁心载面积为 3.0 厘米$^2$,磁导率为 $2000\mu_0$,绕组中的通有 5.0 毫安的电流,试求:

(1) 环中的磁场强度 $H$;

(2) 环中的磁感应强度 $B$;

(3) 环中的磁通量;

(4) 如环上绕有 2 匝次级线圈,设初级绕组中的电流在 0.10 秒内均匀地由 5.0 安培降到 0,在初级绕组中引起的感生电动势为多少?($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ 亨利/米)

**本题考点**:有介质时的安培环路定理、互感系数、互感电动势的计算

**解**:(1) 设单位长度上的匝数 $n = \frac{40}{1 \times 10^{-2}} = 4000$ 匝/米,由于铁心截面积很小可视为均匀磁场. 由有介质时的安培环路定理得:

在以 $r$ 为半径的环路 $L$ 上有

$$H = \frac{N}{L}I_0 = nI_0 = 4000 \times 5 \times 10^{-3} = 20\text{A/m}$$

(2) 由 $\vec{B} = \mu\vec{H}$ 得:

$$B = \mu H = 2000 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 20 = 4.4 \times 10^{-2}(\mathrm{T})$$

(3) 由 $\Phi_m = \int BdS \approx B\int dS$ 得:

$$\Phi_m = 4.4 \times 10^{-2} \times 3 \times 10^{-4}$$

$$= 1.32 \times 10^{-5}(\mathrm{W_b})$$

(4) 先求初级线圈与次级线圈的互感系数 $M_{12}$.

设初级线圈通过 $I_1$ 的电流,则通过次级线圈的磁链为:

$$\Psi = \mathrm{N_2BS} = \mathrm{N_2}\mu\mathrm{HS} = \mathrm{M_{12}I_1}$$

当 $N_2 = 2, \mu = 2000\mu_0, n = 4000, S = 3 \times 10^{-4}\mathrm{m}^2$ 时

$$M_{12} = \frac{N_2\mu HS}{I_1} = 6.02 \times 10^{-3}(\text{亨利})$$

由互感电动势 $\varepsilon_2 = -M_{12}\frac{dI_1}{dt}$ 得

$$\varepsilon_2 = -M_{12}\frac{dI_1}{dt} = 6.02 \times 10^{-3} \times \frac{0-5.0}{0.1} \to \approx 0.3(\text{伏特})$$

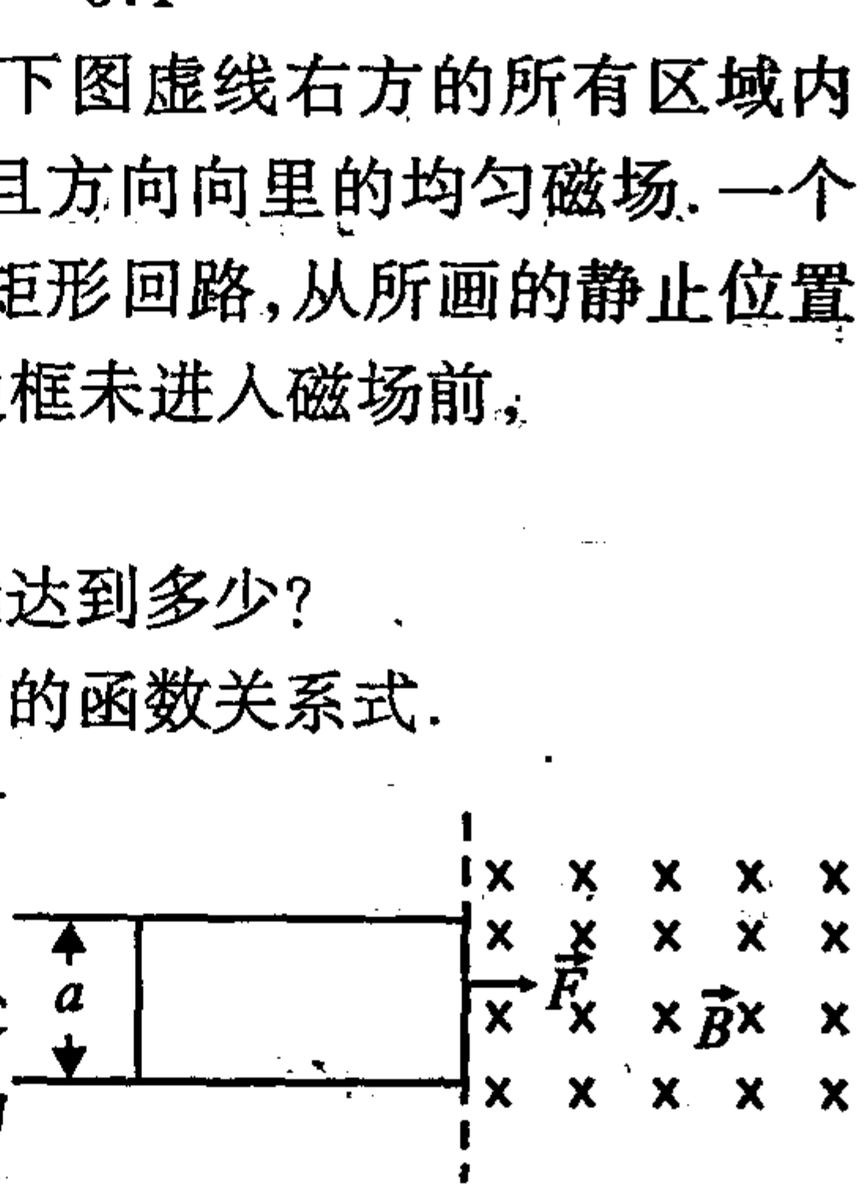
**145.(华中科技大学 2002 年)** 在下图虚线右方的所有区域内存在磁通量密度为 $B$ 且垂直于纸面且方向向里的均匀磁场.一个电阻为 $R$、质量为 $m$、宽为 $a$ 的窄长矩形回路,从所画的静止位置开始受恒力 $F$ 作用,在矩形回路左边框未进入磁场前,

(1) 矩形回路会作怎样的运动?

(2) 矩形回路运动的最大速度能达到多少?

(3) 推导矩形回路的速度随时间的函数关系式.

**本题考点:**感生电动势大小的计算、安培力的计算




**解:**(1) 设矩形回路的一部分处于匀强磁场,其长为 $x$,矩形的总长为 $b$,则穿过矩形回路的有效磁通量 $\Phi_m = Bax$,回路中产生的感生电动势大小

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -Ba\frac{dx}{dt}$$

其感应电流大小为：$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Badx}{Rdt}$，$I$ 的方向垂直于 $\vec{F}$ 与 $\vec{B}$ 的指向向上.

右边边长为 $a$ 的部分以速度 $u = \frac{dx}{dt}$ 运动时，受的磁场力大小为

$$F_1 = IaB(\text{方向向左}),$$

由牛顿第二定律知矩形回路受水平方向的合力为

则有　　$$F = -\frac{B^2a^2}{R}u = m\frac{du}{dt}$$

其通解为

$$u(t) = \frac{FR}{a^2B^2}[1 - e^{-\frac{a^2B^2}{mR}t}]$$

加速度大小为

$$a = \frac{F}{m}e^{-\frac{a^2B^2}{mR}t}$$

(2) 其达到的最大速度　$u_{\max} = \frac{FB}{a^2B^2}$

(3) 其速度大小随时间的变化关系式为

$$u(t) = \frac{FR}{a^2B^2}(1 - e^{-\frac{a^2B}{mR}t})$$

**146.(华中科技大学 2003 年)** 一平面上有两个磁场区，1 区的磁感应强度 $B_1 = 0.20\text{T}$，方向向上，2 区的磁感应强度 $B_2 = 0.10\text{T}$ 方向向下，将一个放在 1 区的面积为 $3.0\text{cm}^2$ 的二匝平面线圈在 0.50s 时间内移至 2 区，求

(1) 移动时在线圈中产生的电压脉冲 $\int \varepsilon \cdot dt$

(2) 移动过程中线圈里的平均电动势.

**本题考点：**法拉第电磁感应定律的应用、电压的脉冲、平均电

动势的计算

**解**:(1) 由法拉第电磁感应定律 $\varepsilon = -\frac{d\Psi}{dt} = -N\frac{d\Phi}{dt}$

得 $$\int \varepsilon dt = -\int d\Psi = -N\int d\Phi_m$$

线圈从 1 区运动到 2 区过程中,处在 2 区的线圈面积为 $S_1$(线圈的总面积为 $S_0$),在 $t$ 到 $t + dt$ 时间内线圈向 2 区移动过的面积增为 $S_1 + dS$,在 1 区的面积为 $S_0 - S_1 - dS$,则在 $dt$ 时间内可得到线圈磁链的增量元为

$$d\Psi = Nd\Phi_m = N[-B_1 dS - B_2 dS]$$

当 $B_1$、$B_2$ 恒定时有,

$$\int \varepsilon dt = -N\int [-(B_1 + B_2)]dS = N(B_1 + B_2)\int dS$$

$$= 2 \times (0.2 + 0.1)\Delta S = 0.6\Delta S,$$

$\Delta S$ 为线圈在 2 区中面积的增量.

当 $\Delta S = 3.0\text{cm}^2$ 时,脉冲为 $1.8 \times 10^{-4}$(伏/秒).

(2) 由平均值的定义,移动过程中线圈上的平均电动势为

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon dt = \frac{1}{0.5}\int_0^{0.5} \varepsilon dt = \frac{6}{5}\Delta S = 3.6 \times 10^{-4}(\text{伏特})$$

**147.(北方交大 2002 年)** 两根长直导线平行放置,导线本身的半径为 $a$,两根导线间距离为 $b(b >> a)$.两根导线分别保持通有电流强度均为 $I$,但方向相反的电流.试求:

(1) 两导线单位长度的自感系数(忽略导线内的磁通);

(2) 若将导线间距离由 $b$ 增加到 $2b$,求磁场对单位长度导线做的功;

(3) 导线间距离由 $b$ 增到 $2b$,则导线方向上单位长度的磁能改变了多少?是增加还是减少?说明能量的转换情况.

**本题考点**:自感、磁能与做功

**解**:(1) $\Phi = 2\int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}$

$$= 2\int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} 1 dr$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

$$\approx \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{b}{a}$$

单位长度上的自感为

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{b}{a}$$

(2) 磁场对单位长度导线所做的功为

$$A = \int \vec{F}_m \cdot d\vec{r} = \int_b^{2b} \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln 2$$

(3) 由磁能 $W_m = \frac{1}{2} LI^2$ 得

$$\Delta W_m = \frac{1}{2} L_2 I^2 - \frac{1}{2} L_1 I^2$$

$$= \frac{I^2}{2} \left[ \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{2b}{a} - \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{b}{a} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \mu_0 I^2 \ln \frac{2b}{b} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln 2$$

要保持两电流平行且大小不变,感应电动势 $\varepsilon$ 所做的功

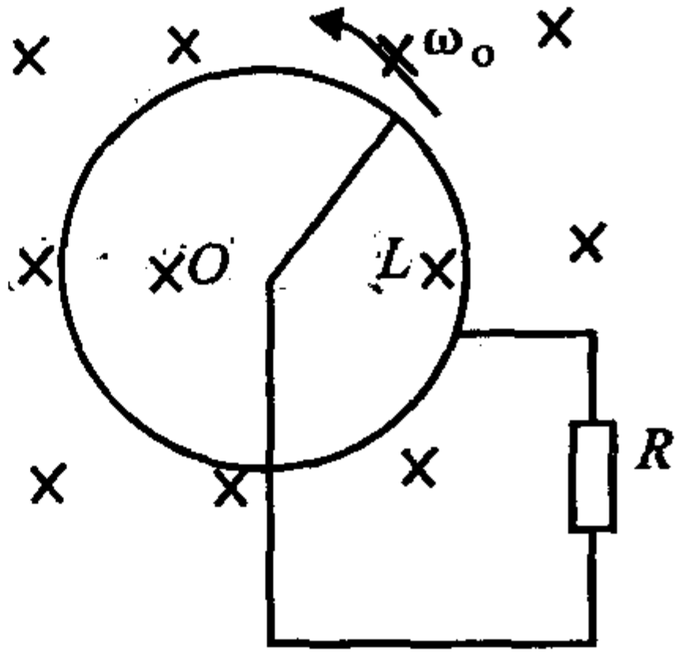
$$A_\varepsilon = \int \varepsilon I dt = -\int \frac{d\Phi}{dt} I dt$$

$$= -I\Delta\Phi = -\frac{\mu_0 I^2}{\pi} \ln 2$$

则电源需克服此感应电动势做功,即电源的功 $A_{电源} = A_\varepsilon = \frac{\mu_0 I^2}{\pi} \ln 2$,即当两导线间距由 $b$ 变到 $2b$ 过程中,电源克服感应电动势做的功等于电流磁场能的增量和磁力做功之和.

**148.(华东理工大学 2000 年)** 在光滑的平面上有一根长为 $L$、质量为 $m$ 的匀质金属棒,以一端 $O$ 为中心旋转,另一端在半径为 $L$

的金属圆环上滑动,接触良好.棒在中心的一端和金属环之间接一电阻为 $R$(如图所示).在桌面法线方向加一均匀磁场 $B$,若棒起始转动的角速度为 $\omega_0$,求 $t$ 时刻棒的角速度 $\omega(t)$ 为多大?




**本题考点:**动生电动势、转动定律的应用及磁力矩的计算

**解:**设棒子绕定点转动时的角速度大小为 $\omega$,则动生电动势大小为

$$\varepsilon = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$= B\omega \int_0^L l dl = \frac{1}{2} B\omega L^2$$

回路中的感应电流元 $Idx$ 受的力为

$$dF = IdxB = \frac{\varepsilon}{R} Bdx = \frac{B^2 L^2}{2R} \omega dx$$

对应的力矩大小为

$$M = \int_0^L x dF = \frac{B^2 L^2}{2R} \omega \int_0^L x dx = \frac{B^2 L^2}{4R} \omega L^2$$

由转动定律得 $M = J\beta$ 得

$$-\frac{B^2 L^2}{4R} \omega = \frac{1}{3} mL^2 \frac{d\omega}{dt}$$

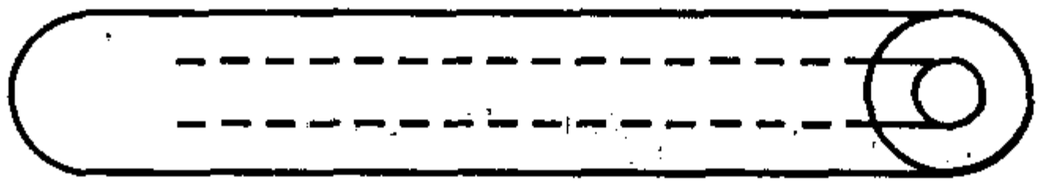
$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{3B^2 L^2}{4mR} dt$$

对上式积分并利用 $t = 0$ 时 $\omega = \omega_0$ 得

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{B^2 L^2}{4mR} t}$$

上式中没有考虑金属圆球的电阻.

**149.(北京邮电大学 2002 年)** 由一对无限长空心薄圆筒面(导体)组成的同轴传输线,内筒半径为 $R_1$,外筒半径为 $R_2$,两筒之间为真空.传输线单位长度上的自感系数为_____.



**本题考点**：自感系数计算

**解**：设同轴传输线电流为 $I$

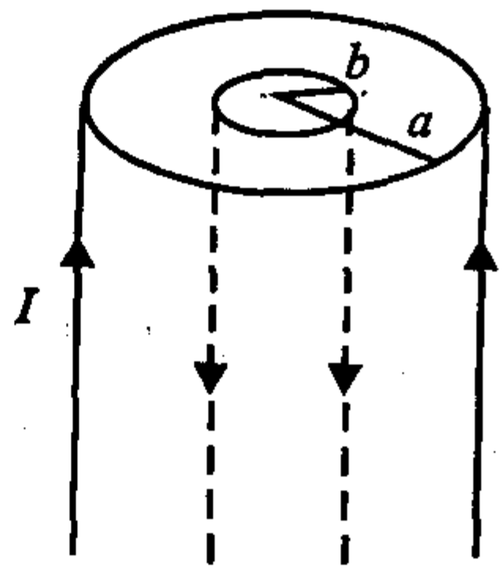
$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r} \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$\Phi_m = \int_{R_2}^{R_1} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$L = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

空处填$\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$

**150.**（复旦大学 2001 年）一同轴电缆是由两半径分别为 $a$ 和 $b$ 的同轴薄壁导体圆筒构成，当电流强度为 $I$ 的恒定电流从电缆的一端沿内圆柱均匀流入，并从外圆筒均匀流回时，求：

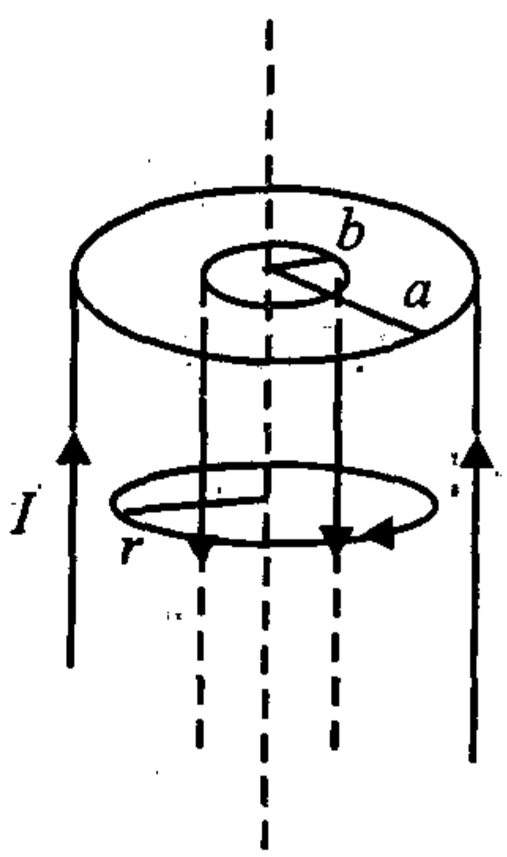



(1) 各处的磁感应强度；

(2) 若电流强度 $I$ 随时间变化，变化率为恒量 $K$，求轴线上的感应电场的场强.

**本题考点**：用安培环路定理求磁感应强度，互感电动势，感应电场.

**解**：(1) 由电流分布呈轴对称性，得知磁场的分布亦呈轴对称分布，磁力线是一组分布在垂直于轴线的平面上的同心圆环，并且在与圆柱轴线等距离处的磁感应强度 $\vec{B}$ 的大小处处相等，其方向与电流呈右手螺旋



关系.

作半径为 $r$ 的圆形回路,绕向如图所示.

由安培环路定理 $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$

$$\Rightarrow \quad B \cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I_i$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} \sum I_i \qquad (1)$$

由(1)式

当 $r < b$ 时,$\Sigma I_i = 0, B = 0$

当 $a > r > b$ 时,$\Sigma I_i = I, B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$,方向沿回路上该点的切向.

当 $r > a$ 时,$\Sigma I_i = I - I = 0, B = 0$

(2) 假设轴线是一载流为 $I_1$ 的无限长直导线,其磁场分布为

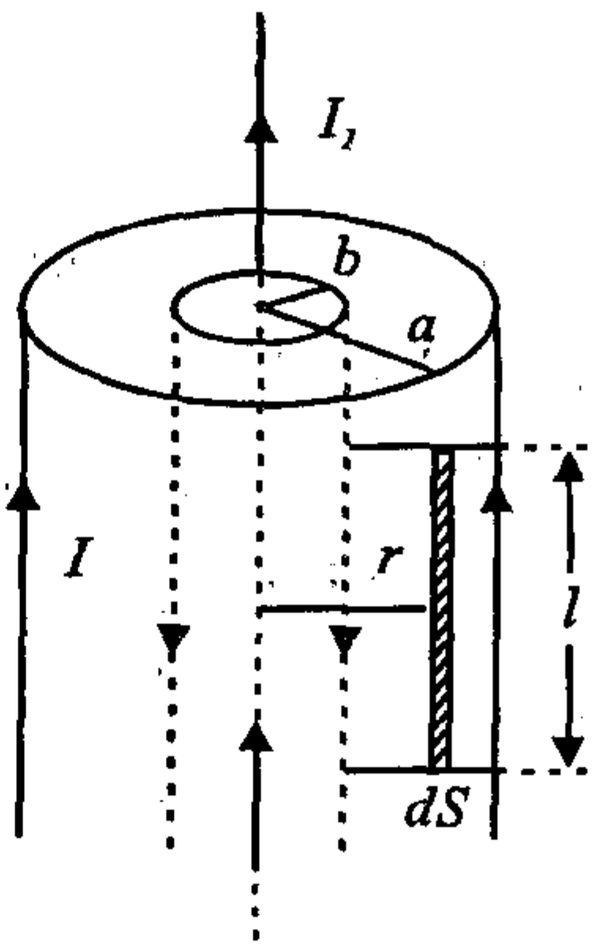
$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r},$$

在磁场 $B_1$ 中,高为 $l(l \to \infty)$ 的同轴电缆的磁通为

$$\Phi_{12} = \int_s \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \int_a^b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} ln \frac{b}{a},$$

长直导线与同轴电缆之间的互感系数为

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$




当同轴电缆载流 $I$,且 $\frac{dI}{dt} = K$ 时,在轴线上产生的感应电动势为

$$\varepsilon_1 = -M \frac{dI}{dt} = -\frac{\mu_0 lK}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \qquad (2)$$

由电动势定义,得长直导线上的感应电动势为

$$\varepsilon_1 = \int_0^l \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_0^l E_K dl = E_K l \quad (3)$$

比较(2)和(3)式得长直导线上即同轴电缆轴线上的感应电场强度为

$$E_K = -\frac{\mu_0 K}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

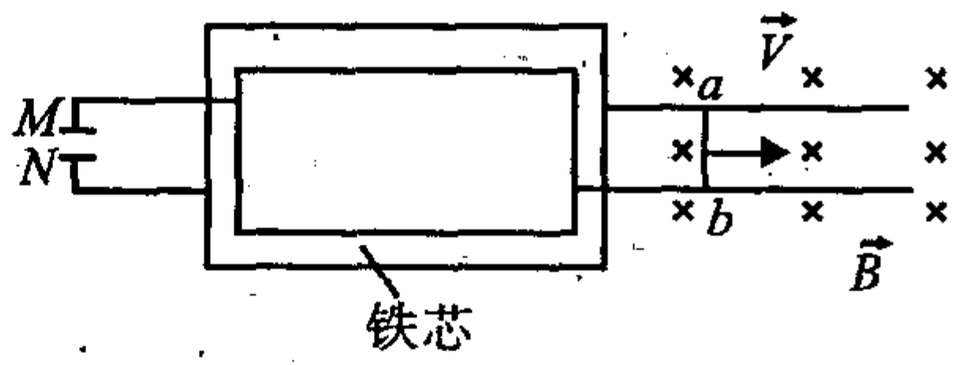
**151.(清华大学1998年)**如图,一导体棒 $ab$ 在均匀磁场中沿金属导轨向右作匀加速运动,磁场方向垂直导轨所在平面,若导轨电阻忽略不计,并设铁芯磁导率为常数,则达到稳定后在电容器的 $M$ 极板上

A. 带有一定量的正电荷

B. 带有一定量的负电荷

C. 带有越来越多的正电荷

D. 带有越来越多的负电荷




**本题考点:**动生电动势与互感

**解:** $ab$ 运动产生的动生电动势

$$\varepsilon_{ab} = \overline{ab} BV$$

$$V = V_0 + at$$

$$\varepsilon_{ab} = B\overline{ab}(V_0 + at)$$

$$I = \frac{\varepsilon_{ab}}{R} = \frac{B\overline{ab}}{R}(V_0 + at)$$

电流方向为 $-(\vec{V} \times \vec{B})$,在 $ab$ 内部由 $b \rightarrow a$

$I$ 产生的 $B$ 线在磁芯中逆时针,互感电动势大小

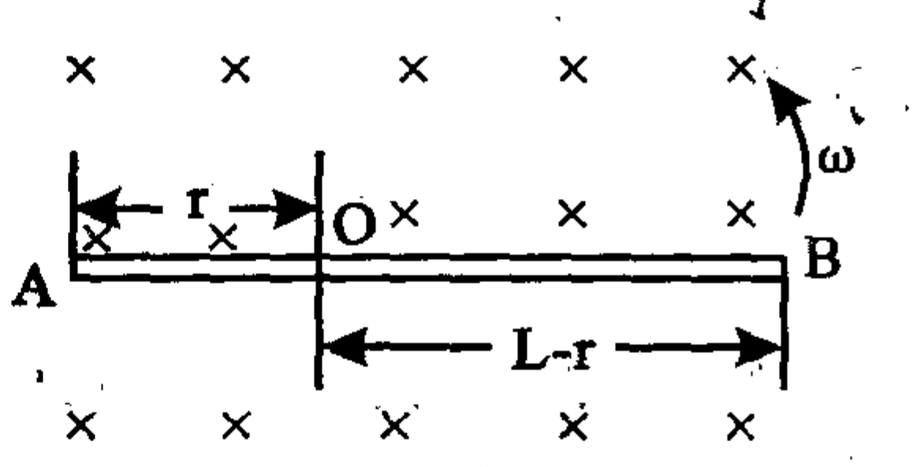
$$\varepsilon_M = M\frac{dI}{dt} = \frac{MB\overline{aba}}{R} = 常数$$

$M$ 低电势点 $V_{MN} = |\varepsilon_M| = \frac{q}{C}$

答案选 B

**152.(东南大学2001年)**长为 $L$ 的铜棒,以距端点 $r$ 处为支点,

以角速度 $\omega$ 绕通过支点且垂直铜棒的轴转动，设磁感应强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场与轴平行(图示)，求棒两端的电势差.哪一端电势高?




**本题考点:**动生电动势

**解:**非静力强度 $\vec{E}_k = \vec{V} \times \vec{B}$

$OB$ 段　$\vec{E}_k$ 方向 $B \to O$

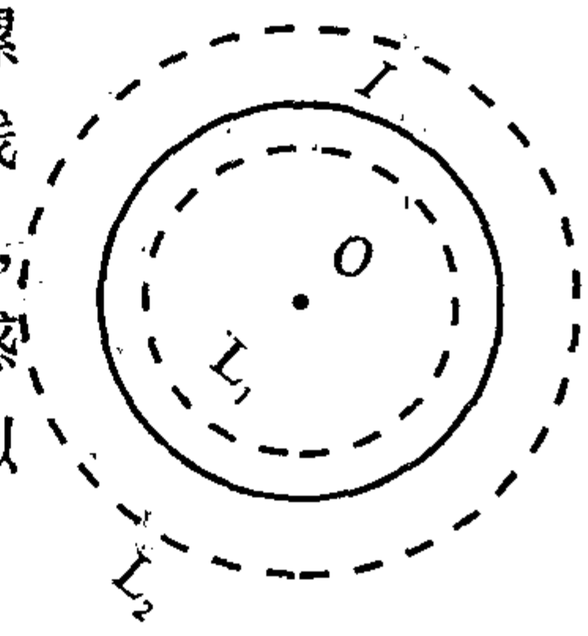
$OA$ 段　$\vec{E}_k$ 方向由 $A \to O$

$$\varepsilon_{AB} = \int_A^B \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_{-r}^{L-r} \omega x B dx$$

$$= \frac{1}{2}\omega B[r^2 - (L-r)^2] = \frac{1}{2}\omega B(2Lr - L^2)$$

$\varepsilon_{AB} < 0$　说明 $A$ 端的电势高

**153.(东南大学 2002 年)** 有一载流长直螺线管，在管内部有一导线回路 $L_1$，另外有导线回路 $L_2$ 在螺线管外，且包围该管(如图所示)，若管中电流以恒定速率增加，这时 $L_1$ 中产生感应电动势为 $1.2V$，则 $L_2$ 中感应电动势近似(　　)




A.0.6V　　B.0

C.1.2V　　D.2.4V

**本题考点:**电磁感应

**解:**管外的回路的磁通量与管内的回路磁通量近似看作相等，变化率相等.

答案选 C

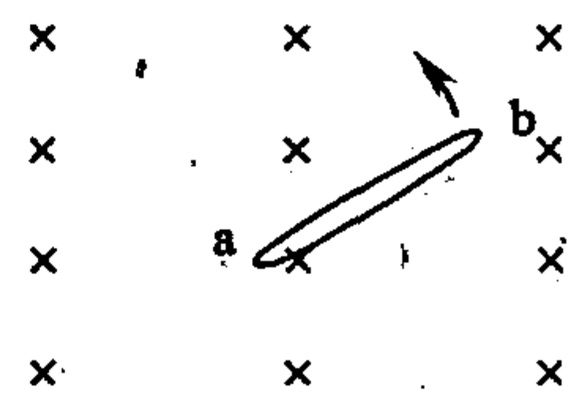
**154.(东南大学 2002 年)** 一根长为 1.0m 的细金属棒 $\vec{ab}$，绕一垂直棒且过其一端的轴以每秒 2 周的角速度旋转，又棒的旋转平面垂直于 $B = 0.5T$ 的均匀磁场，则在棒的中点，等效的非静电场的大小和方向为(　　)

A.3.14V · $m^{-1}$,方向由 $a$ 指向 $b$

B.6.28V · $m^{-1}$,方向由 $b$ 指向 $a$

C.3.14V · $m^{-1}$,方向由 $b$ 指向 $a$

D.6.28V · $m^{-1}$,方向由 $b$ 指向 $a$




**本题考点:**动生电动势

**解:**$\omega = 4\pi$,棒中心处 $v = \omega \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2} = 2\pi L$

$$\vec{E}_k = \vec{v} \times \vec{B}$$

$$E_k = 2\pi L \cdot 0.5 = \pi$$

方向 $\vec{V} \times \vec{B}$, $b \rightarrow a$

答案选 C

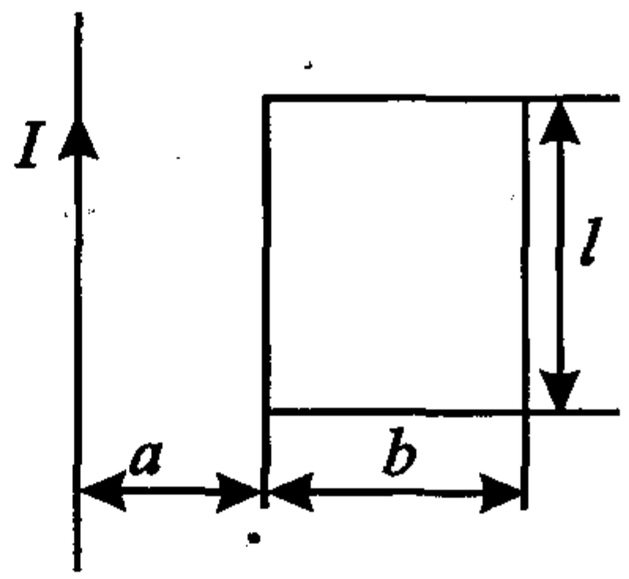
**155.(东南大学 2002 年)** 一无限长载流直导线旁,放一矩形线圈,线圈与导线在同一平面,且其边与导线平行,如图所示,若线圈不动,导线上的电流 $I = 2 + kt$ 变化,式中 $k$ 为常数,求在图示位置处矩形线圈中的感应电动势大小.

**本题考点:**电磁感应

**解:**电流 $I$ 在空间产生磁感应强度 $B$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r},$$

$\vec{B}$ 的方向垂直于纸面向里. 因此,线圈围成曲面的通量

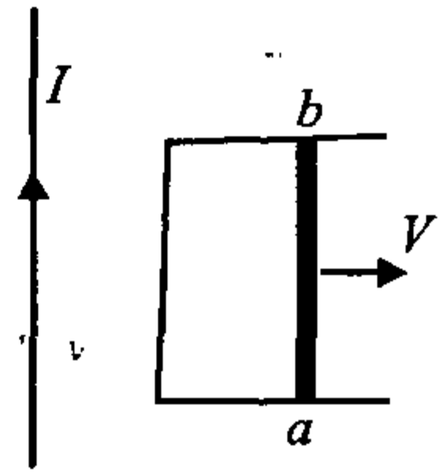



$$\Phi_m = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} l dr = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} \cdot \frac{dI}{dt} = -\frac{\mu_0 kl}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

**156.(东北大学2002年)** 长直导线通电流 $I(t)$. $I(t) = I_0 e^{-kt}$,其中 $k$ 是常数,矩形导体框与直导线共面,框上有一导体滑边 $ab$ 与导体框良好接触,$ab$ 向右运动,某一时刻 $ab$ 运动 $x$ 距离,此时它

的速度大小是 $V$,求此时线框中的感应电动势.




**本题考点**:法拉第电磁感应定律长直电流 $I$ 在空间产生的磁场

**解**:$B = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{I}{r}$

长为 $x$,宽为 $l_2$ 的导体闭合回路上的磁通量

$$\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{l_1}^{l_1+l_2} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Ix}{r}dr = \frac{\mu_0 Ix}{2\pi}\ln\frac{l_1 + l_2}{l_1}$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{\mu_0 Ixk}{2\pi}\ln\frac{l_1 + l_2}{l_1} - \frac{\mu_0 IV}{2\pi}\ln\frac{l_1 + l_2}{l_1}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{l_1 + l_2}{l_1}\right)(xk - V)$$

$\varepsilon > 0$, $b$ 点电势高

**157.**(南京大学 2002 年) 如图所示,金属棒 $ab$ 以 $V = 2.0$ 米/秒的速度平行一长直导线运动,此导线电流 $I = 40$ 安培,求棒中感应电动势的大小,哪一端的电位高?

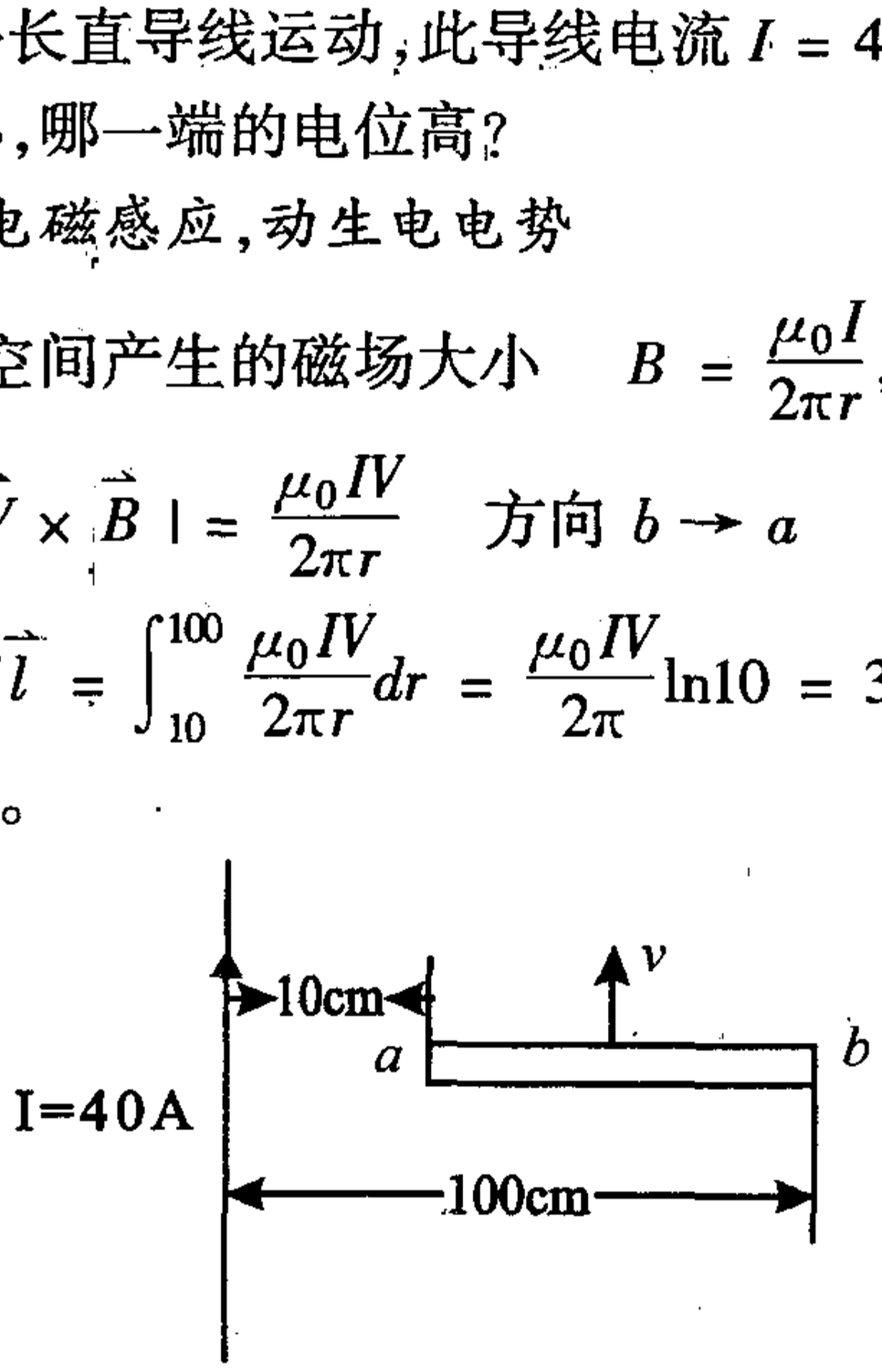
**本题考点**:电磁感应,动生电电势

**解**:电流 $I$ 空间产生的磁场大小 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$,方向如图

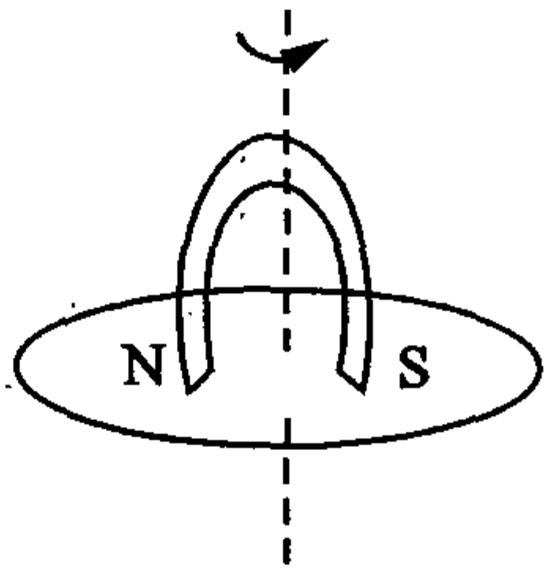
$$|\vec{E}_k| = |\vec{V} \times \vec{B}| = \frac{\mu_0 IV}{2\pi r} \quad \text{方向 } b \to a$$

$$\varepsilon = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{10}^{100} \frac{\mu_0 IV}{2\pi r}dr = \frac{\mu_0 IV}{2\pi}\ln 10 = 3.7 \times 10^{-5}(V)$$

$b$ 点电势高。



**158.**(辽宁大学 2001 年) 在一马蹄形磁铁下面放一铜盘,铜盘可自由绕轴转动,如图所示,当上面的磁铁迅速旋转时,下面的铜盘也跟着以相同转向转动起来,这是因为_____.




**本题考点:** *电磁感应,磁力矩*

空处填:在圆上沿径向产生了感应电流,感应电流又受到磁铁磁场的力的作用,所受磁力矩方向与磁铁角速度方向一致.

**159.**(辽宁大学 2001 年) 一根直导线在磁感应强度为 $B$ 的均匀磁场中以速度 $v$ 运动切割磁力线,导线中对应于非静电力的场强(称作非静电场场强) $E_K$ = _____.

**本题考点:** *非静电场*

**解:** 空处填: $\vec{v} \times \vec{B}$

**160.**(北京市 1999 年) 如图所示,两条平行的长直载流导线与一矩形导线框共面.已知两长直导线中的电流同为 $I = I_0 \sin\omega t$,导线框的长为 $l$,宽为 $b$,其一边到两长直导线的距离分别为 $r_1$ 和 $r_2$,试求导线框中的感应电动势.

**本题考点:** *磁场迭加原理,法拉第电磁感应定律*

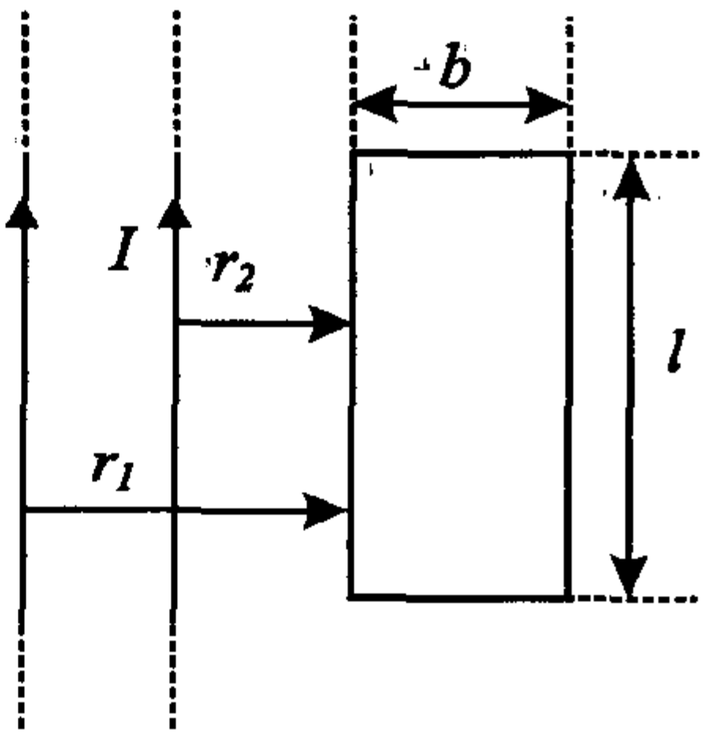
**解:** 如图建立坐标系 $OX$,根据长载流导线的磁场公式

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

在 $r = x$ 处的磁场为

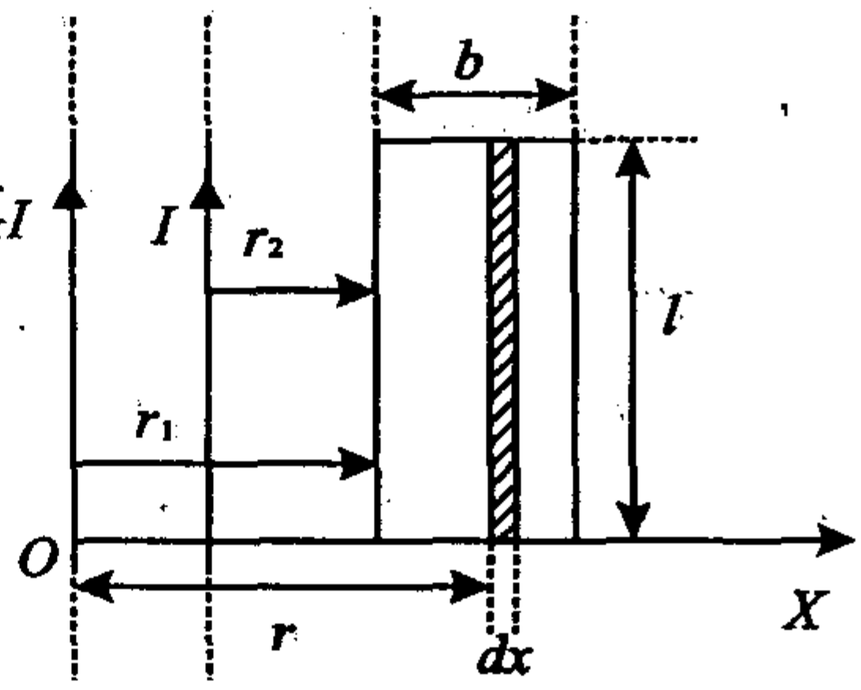
$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(x + r_2 - r_1)}$$

$$d\Phi = Bldx = \frac{\mu_0 Il}{2\pi x}dx +$$



$$\frac{\mu_0 Il}{2\pi(x + r_2 - r_1)}dx$$

在 $r = x$ 处取面积元 $ds = ldx$，其磁通量为：




$$\Phi = \int d\Phi = \int Bds$$

$$= \int_{r_1}^{r_1+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi x}ldx + \int_{r_1}^{r_1+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi(x + r_2 - r_1)}ldx$$

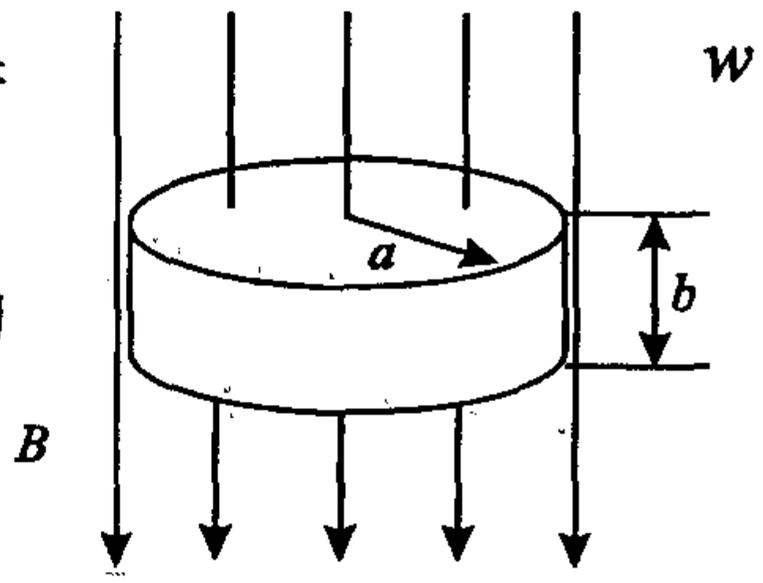
$$= \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\left(\ln\frac{r_1 + b}{r_1} + \ln\frac{r_2 + b}{r_2}\right)$$

根据法拉第电磁感应定律

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I_0 l\omega\cos\omega t}{2\pi}\left(\ln\frac{r_1 + b}{r_1} + \ln\frac{r_2 + b}{r_2}\right)$$

**161.**（北京师范大学 2002 年）在圆形的匀强磁场中同轴地放一个半径为 $a$，厚度为 $b$ 的金属圆盘，如图. 今使磁场随时间变化 dB/dt = K. K 为一常数. 已知金属圆盘的电导率为 $\sigma$. 试求：金属盘内的总的涡电流.

**本题考点：**法拉第电磁感应定律，电阻，涡电流




**解：**在圆盘上，由于 $\frac{dB}{dt} = K \neq 0$，产生同心环状的感应电流.

考虑半径为 $r$，厚度为 $dr$，高为 $b$ 的导体圆筒，

根据欧姆定律 $I = \frac{\varepsilon_i}{R}$

在此圆筒内的涡流为 $dI = \varepsilon_i(r)d\left(\frac{1}{R(r)}\right)$

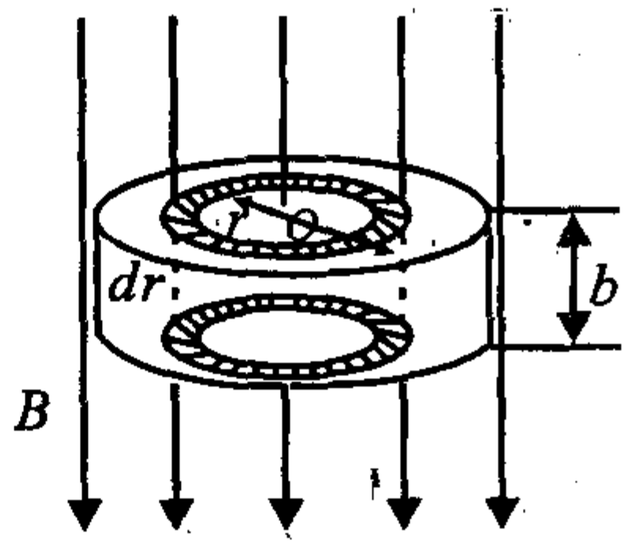
其中　$\varepsilon_i(r) = \dfrac{d\phi_m}{dt} = \dfrac{d(B\pi r^2)}{dt}$

$= \pi r^2 \dfrac{dB}{dt} = \pi r^2 K$

$d\left(\dfrac{1}{R(r)}\right) = \dfrac{ds}{\rho l} = \dfrac{bdr}{\rho \cdot 2\pi r} = \dfrac{\sigma b dr}{2\pi r}$

$\Rightarrow \quad dI = \dfrac{\sigma b K}{2} r dr,$

总涡流为　$I = \int dI = \int_0^a \dfrac{\sigma b K}{2} r dr = \dfrac{\sigma b K a^2}{4}$.




**162.**（南京师范大学 1998 年）截面积为 $A$，单位长度上匝数为 $n$ 的螺绕环上套一边长为 $l$ 的方形线圈．今在方形线圈上通以交流电 $I = I_0\sin\omega t$．问：(1) 螺绕环与方形线圈间的互感系数 $M$，(2) 螺绕环上导线两端 $a$、$b$ 间的感应电动势

**本题考点：**互感系数、互感电动势的计算

**解：**(1) 设互感系数为 $M$，螺绕环上通电流为 $I_1$，穿过方形框的互感磁链为

$$\Psi = BA = \frac{\mu_0 N I_1}{l} A = \mu_0 n I_1 A$$

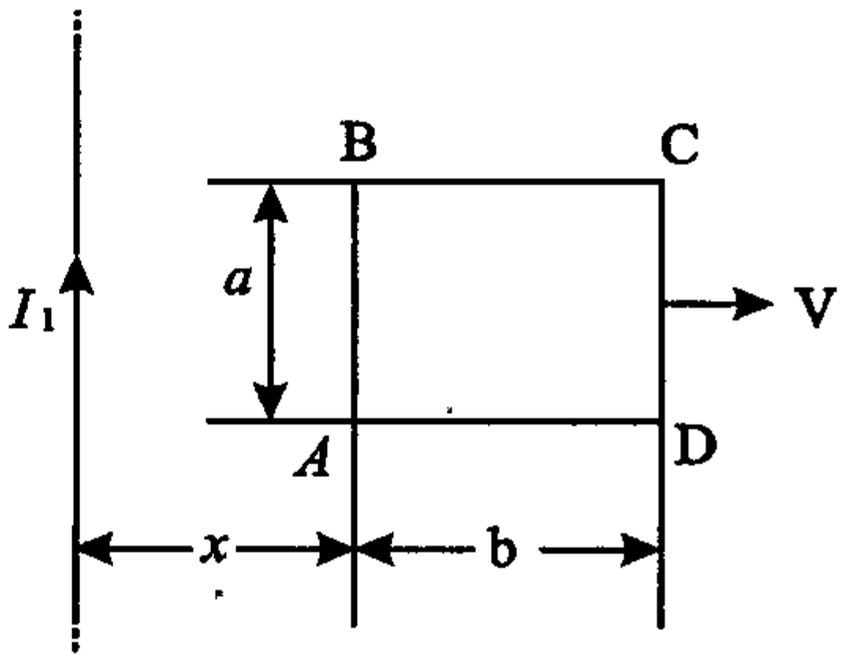
$$M = M_{12} = M_{21} = \frac{\Psi}{I_1} = \mu_0 n A$$

(2) 当方形框通电流 $I = I_0\sin(\omega t)$ 时，由互感电动势定义得螺绕环上产生的感应电动势的大小为：

$$\varepsilon = -M\frac{dI}{dt} = \mu_0 n A I_0 \omega \cos(\omega t)\text{(伏特)}$$

**163.**（南京师范大学 1998 年）一长直导线通有电流 $I_1$，旁边有一与它共面的长方形线圈 $ABCD$ 以垂直于长导导线方向的速度 $v$ 向右运动，线圈的电阻为 $R$，如图所示．求：(1) 当 $AB$ 边到长直导线的距离为 $x$ 时，线圈内的感应电流 $I_2$．(2) 载流直导线作用在线圈上的安培力的合力．

**本题考点**:电动势与安培力的计算




**解**:(1)$I_1$ 穿过长方形线圈 $ABCD$ 的磁通量为

$$\Phi_m = \int_0^b \frac{\mu_0 I_1 a dy}{2\pi(x+y)} = \frac{\mu_0 a I_1}{2\pi} \ln \frac{x+b}{x}$$

其电动势大小为

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{\mu_0 a I_1 v}{2\pi}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+b}\right]$$

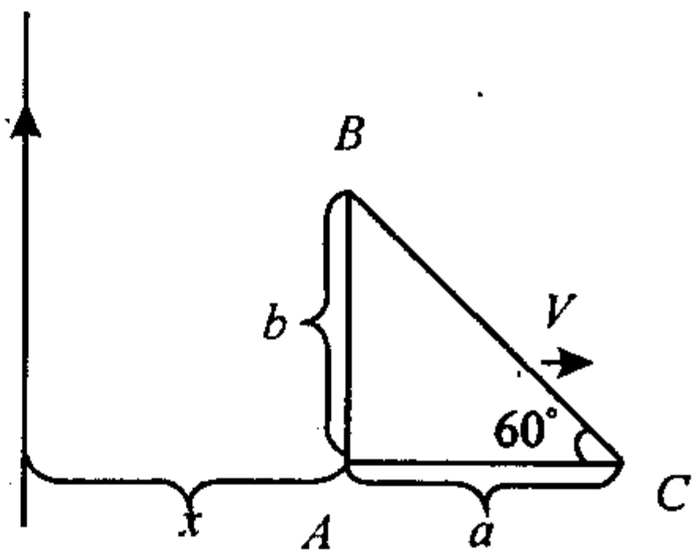
电流大小为

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\mu_0 a I_1 v}{2\pi}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+b}\right]$$

(2) 由法拉第电磁感应定律及楞次定律知,线圈中的感应电流方向为顺时针方向,则由安培力公式得线框受力大小为

$$F = IaB_1 - IaB_2 = Ia\left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} - \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(x+b)}\right) = \frac{\mu_0 I_1^2 a^2 b^2 v}{4\pi^2 R x^2 (x+b)^2}$$

**164.(南京师范大学 1999 年)** 如图,载有电流 $I$ 的长直导线共面,其中 $AB$ 边平行于长直导线,角 $C$ 为 60°,若线圈以匀速 $V$ 水平向右运动,试求线圈运动到图示位置时,其中的感应电动势(大小及方向)




**本题考点**:动生电动势、磁通量的计算

**解**:当 $AB$ 边与长直导线相距任意 $x$ 时,穿过三角形 $ABC$ 的磁通量为

$$\Phi_m = \int_0^a \frac{\mu_0 I(a-l)\sqrt{3}}{2\pi(x+l)} dl$$

$$= \int_0^a \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{a + x - (x + l)}{x + l}\right]dl$$

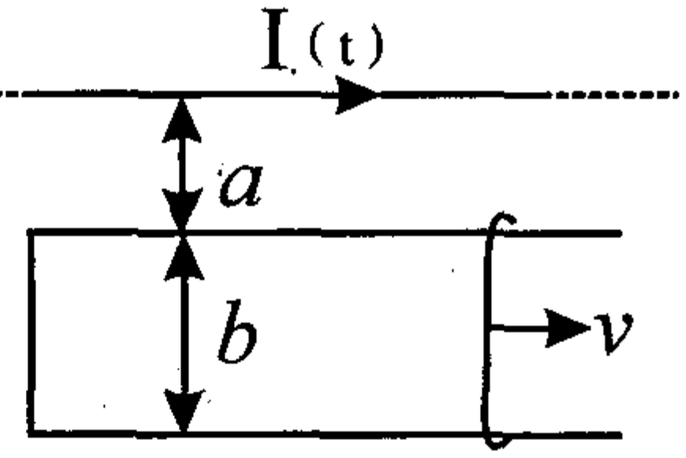
$$= \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi}(a + x)\ln\frac{x + a}{a} - \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi}a$$

由法拉第电磁感应定律得动生电动势大小为

$$|\varepsilon| = \frac{d\Phi_m}{dt} = \left(\frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{2\pi}V\ln\frac{x + a}{a} + \frac{\sqrt{3}\mu_0 Ia}{2\pi}V\right)$$

由楞次定律知 $ABC$ 中的动生电动势方向 $A \to B \to C$.

**165.**(南京师范大学 2000 年) 如图,真空中一长直导线通有电流 $I(t) = I_0 e^{-\lambda t}$(式中 $I_0, \lambda$ 为常量,$t$ 为时间),有一带滑动边的矩形导线框与长直导线平行共面,两者相距为 $a$,矩形线框的滑动边与长直导线垂直,它的长边为 $b$,并且以匀速 $v$ 滑动.若忽略线框中的自感电动势,并设开始时滑动边与对边重合,试求任意时刻 $t$ 在矩形线框内的感应电动势,并讨论 $\varepsilon_i$ 的方向.




**本题考点:**法拉第电磁感应定律

**解:**当不计线圈的自感电动势时,任意时刻 $t$ 穿过线圈中的磁通量大小为

$$\Phi_m = \int_0^b \frac{\mu_0 Ixdy}{2\pi(a + y)} = \frac{\mu_0 Ix}{2\pi}\ln\frac{a + b}{a} = \frac{\mu_0 I_0 e^{-\lambda t}}{2\pi}x\ln\frac{a + b}{a}$$

由法拉第电磁感应定律知

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{\lambda\mu_0 I_0 e^{-\lambda t}x}{2\pi}x\ln\frac{a + b}{a} - \frac{\mu_0 I_0 e^{-\lambda t}}{2\pi}\ln\frac{a + b}{a}\cdot V$$

$$\underline{\underline{x = Vt}}\ \frac{I_0\mu_0 V\ln\dfrac{a + b}{a}}{2\pi}\left[\lambda e^{-\lambda t}\cdot t - e^{-\lambda t}\right]$$

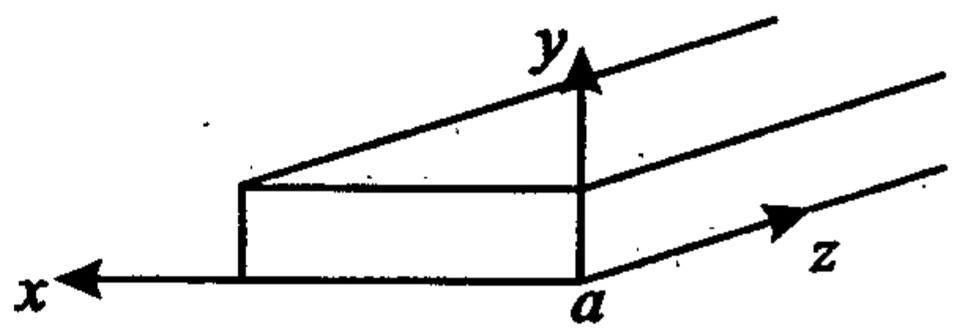
当 $\lambda t > 1$ 即 $t > \frac{1}{\lambda}$ 时,$\varepsilon > 0$,顺时针方向

当 $\lambda t < 1$ 即 $t < \frac{1}{\lambda}$ 时，$\varepsilon < 0$，逆时针方向.

## Ⅳ. 麦克斯韦方程组

**166.**（北京大学 2002 年）方波导是一种常用的微波传输器件，由中空的矩形金属筒构成，已知方波导（如图）中的电场强度分布为：$E_x = 0; E_y = E_0\sin(\frac{\pi}{a}x)e^{j(\omega t-\beta z)}; E_z = 0$. 其中，$\omega$ 为电磁波圆频率；$a$ 为方波导宽边长；$\beta, E_0$ 为正常数，$j = \sqrt{-1}$，$t$ 为时间. 求出该电磁波的能流密度矢量 $\overline{S}$ 并说明能流特征.

**本题考点：**坡印廷矢量




**解：**

$$\vec{H} = -\frac{j}{\mu_0\omega}\nabla \times \vec{E} =$$

$$-\frac{j}{\mu_0\omega}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[E_0\sin(\frac{\pi}{a}x)e^{j(\omega t-\beta z)}\right]\vec{k} - \frac{\partial}{\partial z}\left[E_0\sin(\frac{\pi}{a}x)e^{j(\omega t-\beta z)}\vec{i}\right]\right\}$$

$$B_x = -\frac{\beta}{\omega}E_0\sin(\frac{\pi}{a}x)e^{j(\omega t-\beta z)}$$

$$B_z = -\frac{\pi j}{\omega a}E_0 e^{j(\omega t-\beta z)}\cos(\frac{\pi}{a}x)$$

$$B_y = 0$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = E_0\sin(\frac{\pi}{a}x)e^{j(\omega t-\beta z)}\frac{\beta}{\mu_0\omega}E_0\sin(\frac{\pi}{a}x)e^{j(\omega t-\beta z)}\vec{i}$$

$$+ E_0\sin(\frac{\pi}{a}x)e^{j(\omega t-\beta z)} \cdot \frac{\pi j}{\mu_0\omega a}E_0\cos(\frac{\pi}{a}x)e^{j(\omega t-\beta z)}\vec{k}$$

$$= -\frac{\beta}{\mu_0\omega}E_0^2\sin^2(\frac{\pi}{a}x)e^{-2j(\omega t-\beta z)}\vec{k} -$$

$$\frac{\pi E j}{\mu_0\omega a}\sin(\frac{\pi}{a}x)\cos(\frac{\pi}{a}x)e^{2j(\omega t-\beta z)}\vec{i}$$

$\vec{S}$ 实部为能流由两部分组成：一部分向 $z$ 轴传播，另一部分向 $x$ 轴传播.

**167.(北京大学 1999 年)** 试说明下列基本概念,并写出它们的表达式

(1) 电场的能量密度;

(2) 磁场的能量密度;

(3) 电磁能流密度矢量.

**本题考点:**电场、磁场的能量,能流密度矢量

**解:**(1) 电场的能量密度是电场中空间某点单位体积的电场所携带的能量.

$$w_e = \frac{dW_e}{dV} = \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E}$$

(2) 磁场的能量密度是磁场存在的空间某点单位体积磁场所携带的能量

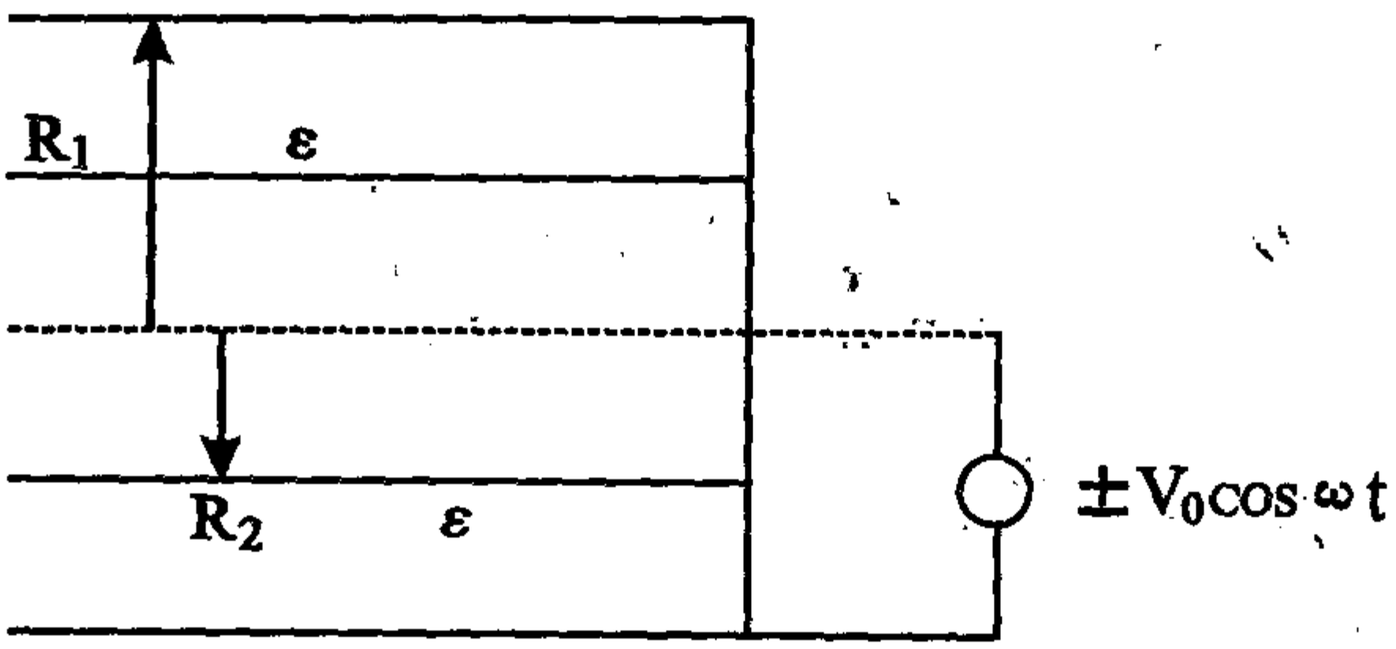
$$w_m = \frac{dW_{in}}{dV} = \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B}$$

(3) 电磁能流密度矢量

在电磁波的传播中,单位时间内通过垂直于电磁波的运动方向单位面积的能量

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

**168.(北京大学 1999 年)** 附图是一长直同轴导体的剖面图.外导体的内半径为 $R_1$、内导体的外半径为 $R_2$,两导体间充满相对电容率为 $\varepsilon$ 的均匀电介质:



(1) 求单位长度的电容:

(2) 若在两导体间接有交变电压源,问是否有电流(含全电流)通过电介质?为什么

**本题考点:**电容、位移电流

**解:**(1) 设内导体带电线密度 $\lambda$,外为 $-\lambda$

电场

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} \qquad R_2 < r < R_1$$

$$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_2}^{R_1} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \frac{1}{r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2}$$

单位长度电容 $C = \frac{\lambda}{U} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{R_1}{R_2}}$

(2) 设长度为 $l$

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2}$$

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 U}{\ln \frac{R_1}{R_2}}$$

$$E = \frac{U}{r \ln(\frac{R_1}{R_2})}$$

$$D = \epsilon E = \frac{\epsilon U}{r \ln \frac{R_1}{R_2}}$$

$$\Phi_D = \int \vec{D} \cdot d\vec{S} = \frac{\epsilon U}{r \ln \frac{R_1}{R_2}} \cdot 2\pi r l = \frac{2\pi\epsilon U l}{\ln(\frac{R_1}{R_2})}$$

$$I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = -\frac{2\pi\epsilon U l}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \omega \sin\omega t$$

因此有电流通过电介质，因为两导体间电场随时间的变化会产生位移电流 $I_D$

**169.（武汉理工大学 2003 年）**已知平行板电容器中的位移电流为 $I_d$，电容为 $C$，则两板间的电势差 $U$ 随时间的变化率 $dU/dt$ =

**本题考点：**电容器电容定义，位移电流，传导电流，总电流概念.

**解：**$C = \frac{q}{U}$，则 $I_d = \frac{dq}{dt} = C\frac{dU}{dt}$，故 $\frac{dU}{dt} = \frac{I_d}{C}$

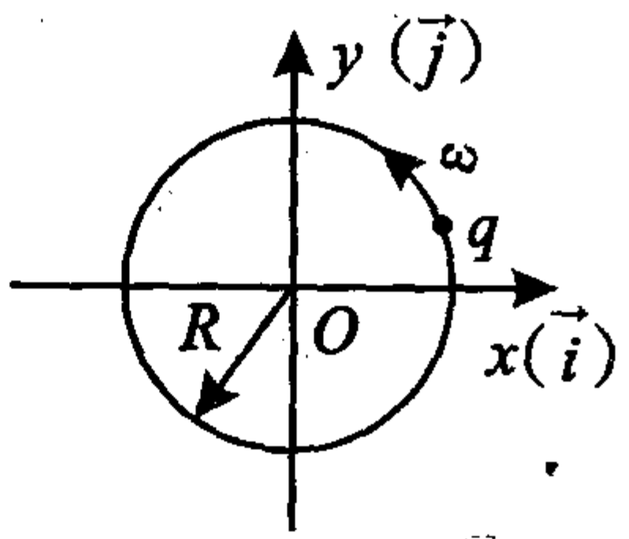
空处填 $\frac{I_d}{C}$.

**170.（北京理工大学2001年）**如图所示，一电量为 $q$ 的点电荷，以匀角速度 $\omega$ 作圆周运动，圆周的半径为 $R$. 设 $t = 0$ 时 $q$ 所在点的坐标为 $x_0 = R, y_0 = 0$，以 $\vec{i}, \vec{j}$ 分别表示 $x$ 轴和 $y$ 轴上的单位矢量，则圆心 $O$ 点的位移电流密度为：

A. $\frac{q\omega}{4\pi R^2}\sin\omega t\vec{i}$　　B. $\frac{q\omega}{4\pi R^2}\cos\omega t\vec{j}$

C. $\frac{q\omega}{4\pi R^2}\vec{k}$　　D. $\frac{q\omega}{4\pi R^2}(\sin\omega t\vec{i} - \cos\omega t\vec{j})$

**本题考点：**位移电流密度




**解：**$q$ 的位置 $\vec{r}\ R\cos\omega t\vec{i} + R\sin\omega t\vec{j}$

圆心 $O$ 点的电位矢量

$$\vec{D} = -\frac{q}{4\pi R^2}(\cos\omega t\vec{i} + \sin\omega t\vec{j})$$

$$\vec{j} = \frac{d\vec{D}}{dt} = \frac{q\omega}{4\pi R^2}(\sin\omega t\vec{i} - \cos\omega t\vec{j})$$

答案选 D

**171.（清华大学 2000 年）**根据电磁场满足的麦克斯韦方程组：

A. 电场产生磁场,磁场产生电场;

B. 变化的电场产生磁场,变化的磁场产生电场;

C. 变化的电场产生电场但不产生磁场;

D. 有电场时磁场为零,有磁场时电场为零.

**本题考点:**麦克斯韦方程组

**解:**由 $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

可知变化电场产生磁场,变化磁场产生电场

答案选 B

**172.(清华大学 2000 年)** 真空中的电磁场所满足的麦克斯韦方程组:

A. 在不同惯性系的洛仑兹变换下不变;

B. 在不同惯性系的伽里略变换下不变;

C. 在不同惯性系下形式不同.

**本题考点:**电磁场满足的坐标系变换

**解:**麦克斯韦方程组是满足狭义相对论时空观,即洛仑兹变换

答案选 A

**173.(清华大学 2000 年)** 真空中的电磁波:

A. 为横波,电场强度、磁场强度相互垂直并都与传播方向垂直;

B. 为纵波,电场强度、磁场强度相互平行并都与传播方向平行;

C. 为横波,电场强度、磁场强度相互平行并都与传播方向垂直;

D. 为纵波，电场强度与传播方向垂直，磁场强度与传播方向平行.

**本题考点：**电磁波的性质.

**解：**电磁波是横波，电场强度、磁场强度相互垂直并都与传播方向垂直

答案选 A

**174.（清华大学 2000 年）**电视和雷达中使用的电磁波的波长范围是：

A. $3 \times 10^4$m – 1m　　B. 1m – 1mm

C. 1mm – 760nm　　D. 760nm – 390nm

**本题考点：**电视、雷达的波长

**解：**电视使用电磁波是微波即微米数量波长的电磁波

答案选 C

**175.（南京师范大学 1997 年）**写出麦克斯韦议程组中表示电磁场有关联的两个公式，并分别阐明其物理意义.

**本题考点：**麦克斯韦方程组

**解：**积分形式

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{s}$$

微分形式为

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial D}{\partial t}$$

同时 $$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

上式说明变化的磁场$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$时能激发出电场 $\vec{E}$(涡旋电场),变化的电场$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ 也能激发出涡旋磁场 $\vec{B}$,空间的电磁场是相互激发从而形成电磁波.

**176.(北京邮电大学1999年)** 电位移矢量的时间变化率 $d\vec{D}/dt$ 的单位是

A. 库仑 / 米$^2$　　B. 库仑 / 秒

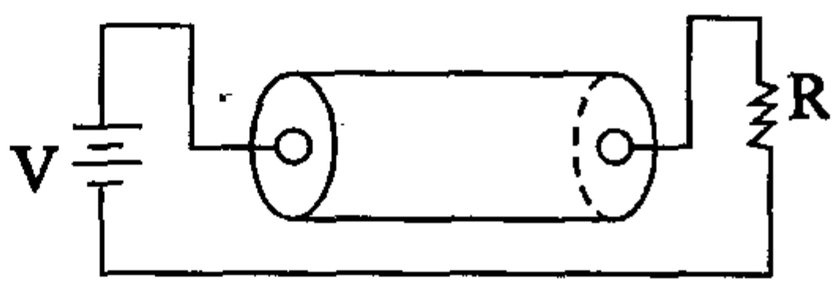
C. 安培 / 米$^2$　　D. 安培 · 米$^2$

**本题考点:** 位移电流

**解:** $\frac{d\vec{D}}{dt}$ 位移电流密度,单位是电流密度单位$\frac{\text{安培}}{\text{米}^2}$

答案选 C

**177.(清华大学 1999 年)** 一个同轴电缆的两导体与一个电池,一个电阻相连接,求区域 $r_1 < r < r_2$ 中的:(a) 电场,用 $V, r_1, r_2$ 表示;(b) 磁场,用 $V, R, r_1, r_2$ 表示;(c) 玻印亭矢量 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ 的表达式;(d) 对玻印亭矢量积分,证明在 $r_1 < r < r_2$ 中通过的功率是$\frac{V^2}{R}$.(忽略电缆自身的电阻,附图)




**本题考点:** 电场、磁场的能量,玻印亭矢量

**解:**(a) 由忽略电缆自身的电阻,所以同轴电缆两导体的电势差为 $V$

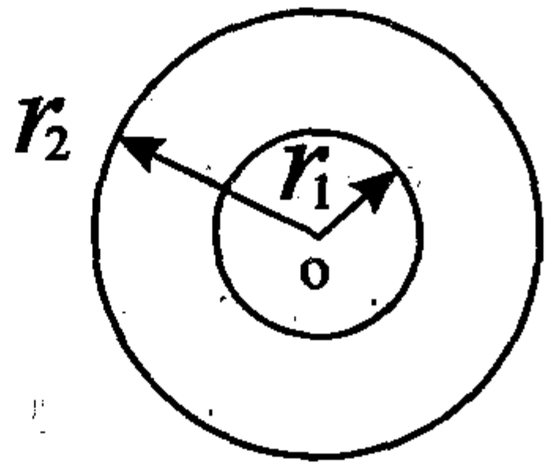
设内外导体带电密度为 $\lambda$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$V = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$\lambda = \frac{2\pi\varepsilon_0 V}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

$$E = \frac{V}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad \text{矢径方向}$$




(b) 磁场 $I = \frac{V}{R}$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} = \frac{\mu_0 V}{2\pi r R}$$

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{V}{2\pi r R}$$

(c) $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{V}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \frac{V}{2\pi r R} \vec{i}$　$\vec{i}$ 为电流方向的单位矢

$$S = \frac{V^2}{2\pi r^2 R \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

(d) $W = \int S ds = \int_{r_1}^{r_2} \frac{V^2}{2\pi r^2 R \ln(\frac{r_2}{r_1})} 2\pi r dr = \frac{Vl}{R \ln(\frac{r_2}{r_1})} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{V^2}{R}$

**178.**(清华大学 1999 年) 求光波垂直入射到折射率 $n = 1.33$ 的深水表面的反射波和入射波的强度之比.

**本题考点:** 用麦克斯韦方程组、边界条件

**解:** $\vec{E} \perp$ 入射面有

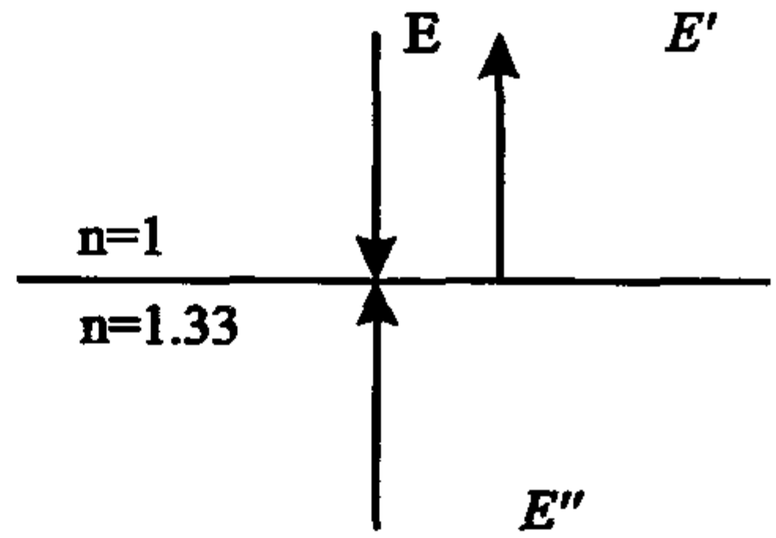
$E + E' = E''$

$E$ 表示入射光振幅, $E'$ 反射光振幅, $E''$ 拆射光振幅

$\sqrt{\varepsilon_1}(E - E') = \sqrt{\varepsilon_2}E''$

即有 $E - E' = nE''$

$I'' = 36.7I'$




$\vec{E}$// 入射面有

$$\begin{cases} E - E' = E'' \\ E + E' = nE'' \end{cases}$$ 由此得

$2E' = (n + 1)E''$, $I'' = 36.7I'$

$\frac{I''}{I'} = 36.7$

$\frac{I}{I'} = 37.7$ 即反射波和入射波强度比 1:37.7

$I = I' + I''$

**179.**(清华大学 1998 年) 某段时间内,圆形极板的平板电容器两板电势差随时间变化的规律是:$U_{ab} = U_a - U_b = Kt$($K$ 是正常量,$t$ 是时间).设两板间电场是均匀的,此时在极板间 1、2 两点(2 比 1 更靠近极板边缘) 处产生的磁感应强度 $B_1$ 和 $B_2$ 的大小有如下关系:

A. $B_1 > B_2$　　B. $B_1 < B_2$

C. $B_1 = B_2 = 0$　　D. $B_1 = B_2 \neq 0$

**本题考点:**位移电流及其产生的磁场.

**解:**设电容器的电容为 $C$,半径为 $R$

$Q = CU_{ab} = CKt$　　$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{CK}{\pi R^2}t$

对无限大平行板 $D = \sigma$

$j = \frac{dD}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{CK}{\pi R^2}$ = 常数

以圆形极的轴为中心作一半径 $r$ 的园环有($r \leqslant R$)

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot 2\pi r = j\pi r^2 \qquad H = \frac{1}{2}jr$$

说 $r$ 越大，$H$ 越大，$B$ 越大.

答案选 B

**180.**（清华大学 1998 年）（东南大学 2001 年）反映电磁场基本性质和规律的积分形式的麦克斯韦方程组为

$$\int_s \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} q_i \qquad ①$$

$$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_m}{dt} \qquad ②$$

$$\int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \qquad ③$$

$$\int_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^{n} I_i + \frac{d\phi_e}{dt} \qquad ④$$

试判断下列结论是包含于或等效于哪一个麦克斯韦方程式的.将你确定的方程式用代号填在相应结论后的空白处.

（1）变化的磁场一定伴随有电场：_____

（2）磁感应线是无头无尾的：_____

（3）电荷总伴随有电场：_____

**本题考点：**麦克斯韦方程组各方程的物理意义.

**解：**① 方程 $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$ 是变化的磁场一定伴随有电场

② 方程 $\oint_0 \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ 磁场是无源场

③ 方程 $\int \vec{D} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^{n} q_i$ 静电场是有源场，源是净电荷，

$\sum_i q_i \neq 0, \vec{D}$ 一定有不为零处.

空处分别填:②,③,①

**181.(清华大学 1998 年)** 在没有自由电荷与传导电流的变化电磁场中

$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} =$ _____.

$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} =$ _____.

**本题考点:**麦克斯方程组的特定条件的写法.

**解:** $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{d\Phi_m}{dt}$ 中没有 $\sum_{i=1}^{n} I_i$ 项

$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$

空处分别填:$\frac{d\Phi_D}{dt}$(或$\frac{d}{dt}\int \vec{D} \cdot d\vec{s}$), $-\frac{d\Phi_M}{dt}$(或 $-\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot d\vec{s}$).

**182.(复旦大学 1999 年)** 有一很长圆柱形导体,半径为 $a$,电阻率为 $\rho$,载有均匀分布的电流 $I_0$,试求:

(1) 在导体内与轴线相距 $r$ 的某点的电场 $E$ 的大小与方向.

(2) 该点磁场强度 $H$ 的大小与方向;

(3) 该点坡印廷矢量 $S$ 的大小与方向;

(4) 把(3) 中结果与长为 $L$,半径为 $r$ 的导体内消耗的焦耳热作比较.

**本题考点:**欧姆定律,安培环路定理,磁能流密度,焦耳热.

**解:**(1) 根据欧姆定律得

$E = \frac{j}{\sigma} = \rho \frac{I_0}{S} = \rho \frac{I_0}{\pi a^2}$, $\vec{E}$ 的方向与电流流向一致.

(2) 根据安培环路定理 $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = j\pi r^2$

$$H \cdot 2\pi r = j\pi r^2$$

得　　$\Rightarrow$　$H = j\frac{r}{2} = \frac{I_0 r}{2\pi a^2}$

$H$ 的方向在过该点与轴线垂直的平面内，与电流方向成右手螺旋关系.

(3) 坡印廷矢量 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

大小：$S = EH = \rho\frac{I_0}{\pi a^2} \cdot \frac{I_0 r}{2\pi a^2} = \frac{\rho I_0^2 r}{2\pi^2 a^4}$

方向：$\vec{S} \,//\, (\vec{E} \times \vec{H})$

(4) 长为 $L$，半径为 $r$ 的导体的电阻为

$$R = \rho\frac{L}{S} = \rho\frac{L}{\pi r^2}$$

通过电阻 $R$ 的电流为 $I' = j\pi r^2 = \frac{I_0 r^2}{a^2}$，

导体内消耗的焦耳热为

$$Q = W = I'^2 R = (\frac{I_0 r^2}{a^2})^2 \cdot \rho\frac{L}{\pi r^2} = \frac{P I_0^2 r^2 L}{\pi a^4}$$

又　　$\frac{Q}{S} = 2\pi rL$

$\Rightarrow Q = 2\pi rLS$

可见导体内消耗的能量等于从导体表面注入的电磁场的能量.

**183.**（清华大学 1998 年）一平行板电容器，两板间为空气，极板是半径为 $r$ 的圆导体片，在充电时极板间电场强度的变化率为 $\frac{dE}{dt}$，若略去边缘效应，则两极板间位移电流密度为_____；位移电流为_____.

**本题考点：**位移电流

解：$I_D = \dfrac{d\int \vec{D} \cdot d\vec{s}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(D\pi r^2) = \dfrac{d}{dt}(\varepsilon_0 E\pi r^2) = \varepsilon_0 \pi r^2 \dfrac{dE}{dt}$

位移电流 $\vec{j} = \dfrac{d\vec{D}}{dt} = \varepsilon_0 \dfrac{dE}{dt}$

空处分别填：$\varepsilon_0 \pi r^2 \dfrac{dE}{dt}$，$\varepsilon_0 \dfrac{dE}{dt}$.

**184.（南京师范大学 1997 年）**写出麦克斯韦方程组中表示电磁场有关联的两个公式，并分别阐明其物理意义.

**本题考点：**麦克斯韦方程组

**解：**积分形式

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{s}$$

微分形式为

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

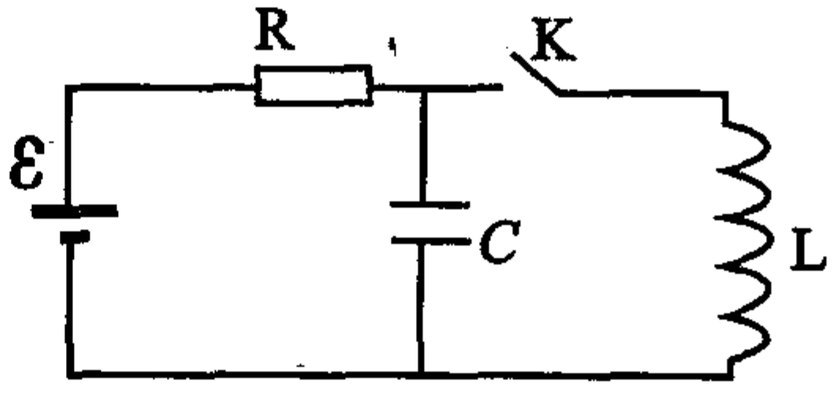
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

同时 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

上式说明变化的磁场 $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$ 时能激发出电场 $\vec{E}$（涡旋电场），变化的电场 $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ 也能激发出涡旋磁场 $\vec{B}$，空间的电磁场是相互激发从而形成电磁波.

## Ⅴ. 电路及其暂态过程

**185.**(北京大学 2002 年) 如图电路由理想电源(电动势 $\varepsilon$)、电阻 $R$、电容 $C$ 和电感 $L$ 组成. 在 $t < 0$ 时,开关 $K$ 在断开状态,电路在稳恒状态,在 $t = 0$ 时合上开关 $K$,已知电容、电阻和电感的数值满足: $R^2 = \frac{L}{2C}$,求通过电感的电流在合上开关 $K$ 后随时间的变化.




**本题考点:** $LCR$ 电路

**解:** 设通过电阻 $R$ 的电流为 $I$,电感的电流为 $i$,电容两极的电荷为 $q$

$$\therefore \text{有}\begin{cases}\varepsilon = IR + \dfrac{q}{C}\\ \varepsilon = IR + L\dfrac{di}{dt}\\ V_c = L\dfrac{di}{dt}\end{cases}$$

$$\varepsilon = (\frac{dq}{dt} + i)R + L\frac{di}{dt}$$

$$q = CL\frac{di}{dt}$$

$$\varepsilon = (CL\frac{d^2i}{dt^2} + i)R + L\frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{CR}\frac{di}{dt} + \frac{i}{CL} = \frac{\varepsilon}{RCL}$$

$$\text{解为 } i = Ae^{-\frac{t}{2RC}}\cos(\sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{1}{2RC})^2} + \varphi) + \frac{\varepsilon}{R}$$

$$t = 0, \quad i = 0, \quad A\cos\varphi + \frac{\varepsilon}{R} = 0$$

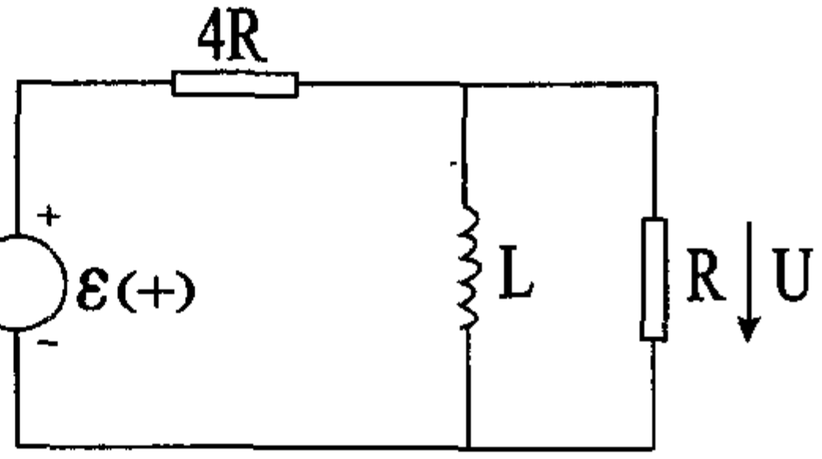
$$t = 0, \quad \frac{di}{dt} = \varepsilon, \quad -A\sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{1}{2RC})^2}\sin\varphi = \varepsilon$$

$$A = \frac{\varepsilon}{R}\sqrt{1 - \frac{R^2}{\frac{1}{LC} - (\frac{1}{2RC})^2}}$$

$$\varphi = tg^{-1}\frac{R}{\sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{1}{2RC})^2}} \quad \text{第三象限角}$$

**186.(北京大学 2000 年)** 在附图中电源是电压源,其电动势为 $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\cos\omega t$.求输出电压 $U$ 的频率响应.

**本题考点:** 电感的电路的频率响应




**解:** $\varepsilon(t) = 4R(I_1 + I_2) + L\frac{dL_1}{dt}$

$$U = L\frac{dI_1}{dt} = I_2R$$

$$I_2 = \frac{L}{R}\frac{dI_1}{dt}$$

$$\varepsilon(t) = 4R(I_1 + \frac{L}{R}\cdot\frac{dI_1}{dt}) + L\frac{dI_1}{dt}$$

$$\varepsilon_0\cos\omega t = 4RI_1 + 5L\frac{dI_1}{dt}$$

设: $I_1 = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

$$\varepsilon_0\cos\omega t = 4R(A\cos\omega t + B\sin\omega t) + 5L(-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t)$$

$$= (4RA + 5LB\omega)\cos\omega t + (4RB - 5LA\omega)\sin\omega t$$

$$\varepsilon_0 = 4RA + 5LB\omega \qquad (1)$$

$$4RB - 5LA\omega = 0 \qquad (2)$$

解(1)(2)式 $\quad B = \frac{5L\omega}{4R}A$

$$(4R + \frac{25L^2\omega^2}{4R})A = \varepsilon_0$$

$$A = \frac{4R\varepsilon_0}{16R^2 + 25L^2\omega^2}$$

$$B = \frac{5L\omega\varepsilon_0}{16R^2 + 25L^2\omega^2}$$

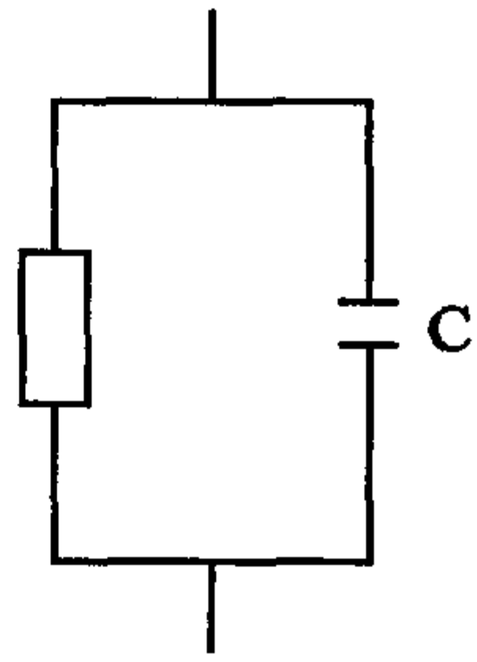
$$I = \frac{4R\varepsilon_0\cos\omega t + 5L\omega\varepsilon_0\sin\omega t}{16R^2 + 25L^2\omega^2}$$

$$V = L\frac{dI_1}{dt} = \frac{\omega L\varepsilon_0(-4R\sin\omega t + 5L\omega\cos\omega t)}{16R^2 + 25L^2\omega^2}$$

**187.(武汉大学 2000 年)** 试分别应用矢量图解法和复数法求交流 *RC* 并联电路的总阻抗以及电压与电流的位相差.

**本题考点:** *RC* 并联电路、矢量法与复数法

**解:**方法一:矢量图解法



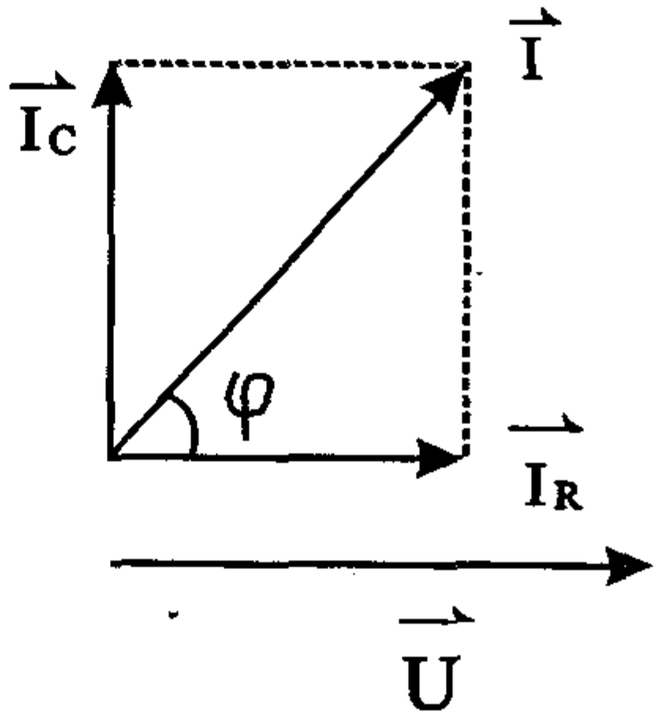

设 $u(t) = V_0\cos\omega t$

$$\vec{I}_R = \frac{V_0}{R}\cos\omega t$$

$$\vec{I}_c = \omega CV_0\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$I = V_0\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2}$$

$$Z = \frac{V_0}{I} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega \cdot C^2)}}$$




$$\varphi = -tg^{-1}\frac{I_c}{I_R} = -tg^{-1}(\omega CR)$$

方法二:复数法

$$\tilde{V} = V_0e^{i\omega t} \qquad (\frac{dq}{dt} = I_c \quad \frac{dCV}{dt} = I_c)$$

$$\tilde{I}_R = \frac{V_0}{R}e^{i\omega t} \qquad \tilde{I}_R = i\omega CV_0 e^{i\omega t}$$

$$\tilde{I} = \tilde{I}_R + \tilde{I}_C = (\frac{V_0}{R} + i\omega CV_0)\, e^{i\omega t} = V_0(\frac{1}{R} + i\omega C)\, e^{i\omega t}$$

$$\tilde{Z} = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{I} = \frac{1}{\frac{1}{R} + i\omega C} = \frac{R}{i\omega RC + 1} = \frac{R(1 - j\omega CR)}{1 + (\omega CR)^2}$$

$$Z = |\tilde{Z}| = \sqrt{\left[\frac{R}{1 + (\omega CR)}\right]^2 + \left[\frac{\omega CR^2}{1 + (\omega CR)^2}\right]^2}$$

$$= \sqrt{\frac{R^2[1 + (\omega CR)^2]}{[1 + (\omega CR)^2]^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2}}$$

$$\varphi = - tg^{-1}\frac{\omega C}{(\frac{1}{R})} = - tg^{-1}(\omega CR)$$

**188.**(武汉大学 2002 年) 试述直流电路的基尔霍夫方程组,并具体说明第一、第二方程组各自的物理基础.

**本题考点:**直流电流的基尔霍夫方程组

**解:**直流电流的基尔霍夫方程组:

第一方程组即节点电流方程组,汇于节点的各支路电流强度的代数和为 0.

第二方程组即回路电压方程,沿回路一周电位降的代数和为 0.

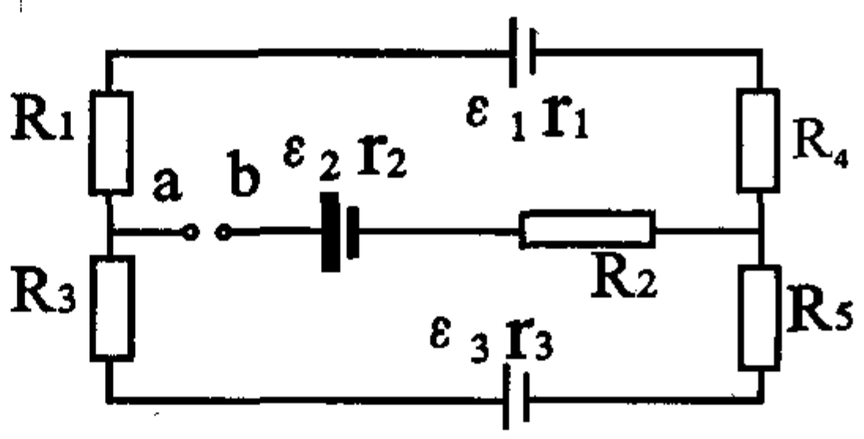
电流方程组是电荷连续方程的表示.

回路电压方程是静电场环路定理的表示 $\oint \vec{E}_{静} \cdot d\vec{l} = 0$.

**189.**(武汉大学 2002 年) 一个直流电路如图所示. 已知 $\varepsilon_1 = 12$ 伏, $\varepsilon_2 = 9$ 伏, $\varepsilon_3 = 8$ 伏, $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ 欧姆, $R_2 = 3$ 欧姆, $R_1 = R_3 = R_4 = R_5 = 2$ 欧姆. 试求:

(1)$a$、$b$ 断开时的端电压 $U_{ab}$;

(2)$a$、$b$ 短路时通过 $\varepsilon_2$ 的电流的大小和方向.




**本题考点:**直流电路

**解:**(1)$ab$ 断开时,设电流 $I$ 如图所示

由基尔霍夫电压定律得

$$I(R_1 + R_3 + R_5 + R_4 + r_1 + r_3) + \varepsilon_3 - \varepsilon_1 = 0$$

$$I = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{R_1 + R_3 + R_5 + R_4 + r_1 + r_3} = \frac{12 - 8}{2 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1}$$

$$= 0.4(A)$$

$$V_{ab} = I(R_3 + r_3 + R_5) - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0.4 \times 5 - 9 + 8 = 1(V)$$

(2)$a$、$b$ 短路时,设环流如图所示分别为 $I_a$、$I_b$ 通过 $\varepsilon_2$ 的电流的参考方向为 $I_2$,则

$$\text{列网孔方程}\begin{cases}(R_1 + r_1 + R_4 + R_2 + r_2)I_a - (R_2 + r_2)I_b = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \\ (R_2 + R_5 + r_3 + R_3 + r_2)I_b - (R_2 + r_2)I_a = \varepsilon_3 - \varepsilon_2\end{cases}$$

$$\text{代入数据得}\begin{cases}9I_a - 4I_b = -3 \\ -4I_a + 9I_b = -1\end{cases}\quad \text{解得 } I_a = -\frac{21}{65}\quad I_b = -\frac{31}{65}$$

流经 $\varepsilon_2$ 的电流 $I_2 = I_a - I_b = -\frac{21}{65} - (-\frac{31}{65}) = \frac{2}{13}(A)$,$a$、$b$ 短路时通过 $\varepsilon_2$ 的电流大小为$\frac{2}{13}$ 安培,方向由负极径内部流向正极.

**190.**(清华大学 1998 年)为从硫酸铜溶液中电解析出 20 克铜,如用 2 安培的电流,需通电多长时间?(法拉第常数为 96522C/克当量,铜的原子量为 63.5,原子价为 2)

**本题考点:**电荷与电流关系

**解:**$I = \frac{q}{t}$

$$q = It = \frac{m}{M_{\text{mol}}} \times N_F \times 2$$

$$t = \frac{20}{63.5 \times 2} \times 96522 \times 2 = 30400s = 3.04 \times 10^4 s = 8\text{小时}26\text{分}41\text{秒}$$

**191.(清华大学2000年)** 在电路中,电源起的作用是:

A. 静电力作功、产生电荷;

B. 静电力作功,产生电场;

C. 非静电力作功,将电子由高电势移由低电势;

D. 非静电力作功,将电子由低电势移向高电势.

**本题考点:** 电源的作用

**解:** 电源起的作用是非静电力作功,将正电荷由低电势移向高电势,或负电荷(电子)从电势高移向电势低.

答案选 C

**192.(华中科技大学2003年)** 电阻为 $3.0 \times 10^6\Omega$ 的电阻器、电容为 $1.0\mu F$ 的电容器和电动势的4.0V的电源组成一串联电路,求电路接通1.0秒时电容器一极板上的电荷增加的速率.($e^{1/3} = 1.4$)

**本题考点:** 基尔霍夫定律在动态电路中的应用

**解:** 由基尔霍夫定律,$k$ 合上后,电路中的电压降关系式为:

$$E = V_R + V_C = IR + V_C = RC\frac{dV_C}{dt} + V_c$$

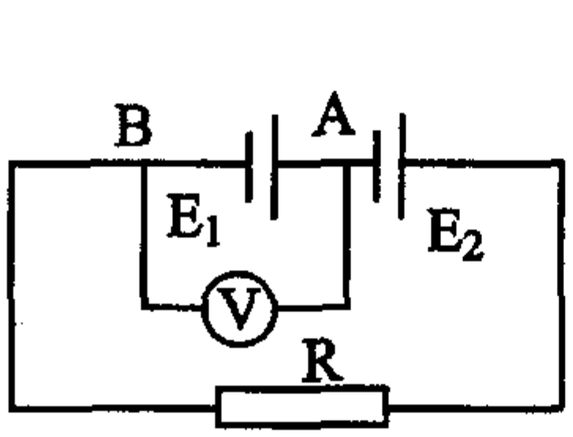
通解为: $V_C = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

电容器 $C$ 上电荷的增加速率为

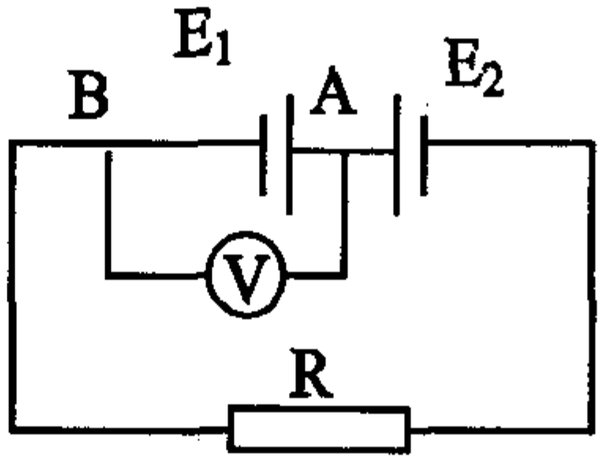
$$\frac{dq}{dt} = I = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{Rc}} = \frac{4}{3.0 \times 10^6}e^{-\frac{1}{3\times10^6\times1\times10^{-6}}} = 2 \times 10^{-6}(C/s)$$

**193.(南京大学2002年)** 电动势分别为 $E_1 = 14V$, $E_2 = 18V$ 的两个电池组成如附图(a)所示的电路,接在 $A$、$B$ 两点间电压表读

数是6V.若将 $E_2$ 的极性对调,成为附图(b)所示的电路,则电压表的读数是多少?电压表正负接线柱要变动吗?(电压表的内阻很大,可不考虑它对电路的影响).




(a)




(b)

**本题考点:**直流电路

**解:**设 $E_1$ 电池组内阻为 $r_1$,$E_2$ 电池组内阻为 $r_2$

图(a)的接法时 $I_1 = \dfrac{E_1 + E_2}{R + r_1 + r_2}$

$$\Delta V_1 = V_A - V_B = E_1 - I_1 r_1 = E_1 - \frac{(E_1 + E_2) r_1}{R_1 + r_1 + r_2}$$

图(b)的接法　$I_2 = \dfrac{E_2 - E_1}{R + r_1 + r_2}$

$$\Delta V_2 = V_A - V_B = E_1 + \frac{(E_2 - E_1)}{R_1 + r_1 + r_2}$$

$$\frac{(E_1 + E_2) r_1}{R + r_1 + r_2} = 14 - 6 = \frac{32 r_1}{R + r_1 + r_2} \tag{1}$$

$$\frac{(E_2 - E_1) r_1}{R + r_1 + r_2} = - E_1 + \Delta V_2 = - 14 + \Delta V_2 = \frac{4 r_1}{R + r_1 + r_2} \tag{2}$$

式(1)除以(2)得

$$\frac{8}{- 14 + \Delta V_2} = 8 \qquad \Delta V_2 = 15(V)$$

不变动电压表正负接线柱

**194.(清华大学 1998 年)**一个自感系数为 0.05mH,电阻为

0.01Ω 的线圈连接到内阻可以忽略的电池上，则开关接通_____后的时刻，线圈中的电流达到最大值的 90%.

**本题考点：***RL* 电路暂态过程

**解：**微分方程 $\varepsilon - L\frac{di}{dt} = iR$

初始条件 $t = 0, i = 0$

解微分方程得 $i = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$ $i = \frac{\varepsilon}{R} \times 90\%$

$e^{-\frac{R}{L}t} = 0.1$ $t = -\frac{L}{R}\ln 0.01 = \frac{L}{R}\ln 10 = 1.15 \times 10^{-2}s$

空格填：11.5ms

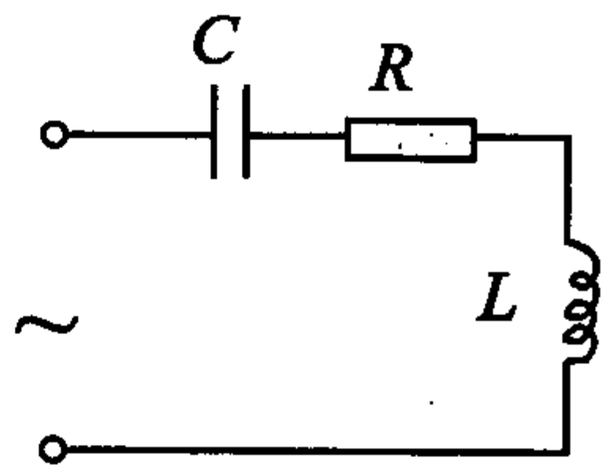
**195.（复旦大学 2001 年）**一 *RLC* 串联谐振电路中，L = 238μH，R = 15Ω，

(1) 电路在 $f_0$ = 1MHz 频率时发生谐振，求 *C* 的值；

(2) 若在输入端加上有效值 $U$ = 1mV，

谐振时求电路中电流的有效值，

电容上电压的有效值和电感上的电压的有效值；




(3) 求电路的 *Q* 值.

**本题考点：***RLC* 电路，阻抗，*Q* 值

**解：**(1) 谐振频率

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{(2\pi \times 1 \times 10^6)^2 \times 238 \times 10^{-6}}$$

$$= 1.065 \times 10^{-10}(F)$$

(2) 谐振回路中的阻抗为 $Z = R$

电流的有效值为　$I = \frac{U}{Z} = \frac{1 \times 10^{-3}}{15} = 6.7 \times 10^{-5} A$

电容上的电压有效值为　$V_C = IZ_C$

电感上的电压有效值为　$V_L = IZ_L$

揩振时 $Z_C = Z_L$,

即　$\frac{1}{\omega_0 C} = \omega_0 L$

$V_C = V_L = I\omega_0 L$

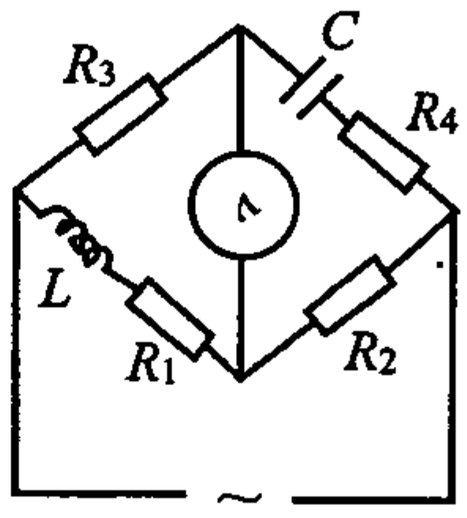
$= 6.7 \times 10^{-5} \times 2\pi \times 1 \times 10^6 \times 238 \times 10^{-6} = 0.10(V)$

(3) 电路的 $Q$ 值为

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2\pi \times 1 \times 10^6 \times 238 \times 10^{-6}}{15} = 99.6$$

**196.**(复旦大学 1999 年) 如图惠斯登电桥,已知在电源角频率为 $\omega$ 时,电桥处于平衡状态,试求电感 $L$ 和电容 $C$.

**本题考点:**惠斯登电桥,电桥平衡条件.




195

**解:**电桥平衡时,各桥臂参数应满足:

$$R_2 R_3 = (R_1 + j\omega L)(R_4 - \frac{j}{\omega C})$$

$$= (R_1 R_4 + \frac{L}{C}) + j(R_4 \omega L - \frac{R_1}{\omega C})$$

即:$R_4 \omega L = \frac{R_1}{\omega C}$　　①

$$R_2 R_3 = R_1 R_4 + \frac{L}{C}$$　　②

解 ①、② 式得:

$$L = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{R_1}{R_4}(R_2 R_3 - R_1 R_4)}$$

$$C = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{R_1}{R_4(R_2 R_3 - R_1 R_4)}}$$

**197.**(南京师范大学 2000 年) 已知两个同心金属球壳的半径分别为 $a, b(b > a)$,中间充满电导率为 $\sigma$ 的材料,$\sigma$ 是随电场变化的,且 $\sigma = KE$,其中 $K$ 为常数,现将两球壳维持恒定电压 $V$,求两球壳间的电流强度.

**本题考点:**电阻、电势与电流

**解:**设在 $r - r + dr$ 之间的电阻为 $dR$,即

$$dR = \frac{\rho dr}{S} = \frac{dr}{\sigma S} = \frac{dr}{KE4\pi r^2}$$

又 $V = \int_a^b Edr = E(b - a)$,则 $E$ 是均匀的,且

$$R = \frac{1}{4\pi KE}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi KE}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

由 $V = RI$ 得

$$I = \frac{V}{R} = \frac{4\pi KV^2 ab}{(b - a)^2}$$

# 第三部分　热　学

## 一、考点综述

### 1. 理想气体

(1) 状态方程

$$PV = \frac{M}{\mu}RT \text{ 或 } P = nkT$$

(2) 气压公式

$$P = P_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

(3) 麦克斯韦速率分布

$$f(v) = 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$$

最概然速率

$$v_P = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$$

平均速率

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$$

方均根速率

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

(4) 能均分定理

分子每一个自由度所分配的能量均为$\frac{1}{2}kT$

分子平均平动动能 $\bar{\varepsilon}_{kt} = \frac{3}{2}kT$

分子平均转动功能 $\varepsilon_{kr} = \frac{r}{2}kT$，$r$ 为分子转动自由度，对单、双、多原子分子气体，$r$ 分别为 0、2、3.

分子平均总动能 $\bar{\varepsilon}_k = \frac{i}{2}kT$，$i$ 为分子的自由度，对单、双、多原子分子气体，$i$ 分别为 3、5、6.

(5) 内能

$$E = \frac{M}{\mu}\frac{i}{2}RT$$

**2. 范德瓦尔斯状态方程**

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = \frac{M}{\mu}RT$$

**3. 热力学第一定律**

(1) 定律

$$Q = A + \Delta E$$

其中

$$A = \int_{v_1}^{v_2} PdV$$

$$\Delta E = \frac{M}{\mu}\frac{i}{2}R(T_2 - T_1)$$

$$Q = Cm(T_2 - T_1)$$

(2) 理想气体过程方程

$V$ = 恒量，或 $PT^{-1}$ = 恒量(等体过程)

$P$ = 恒量，或 $VT^{-1}$ = 恒量(等压过程)

$T$ = 恒量，或 $PV$ = 恒量 (等温过程)

$PV^{\gamma}$ = 恒量，或 $TV^{-\gamma}$ = 恒量，

或 $P^{\gamma-1}T^{-\gamma}$ = 恒量(绝热过程)

(3) 理想气体内能增加,作功、吸热计算

$$\Delta E = \frac{M}{\mu}\frac{i}{2}R(T_2 - T_1)$$

$A_V = 0$　　(等体过程)

$A_P = P(V_2 - V_1)$　　(等压过程)

$A_T = \frac{M}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1}$　　(等温过程)

$A_Q = -\frac{M}{\mu}\frac{i}{2}R(T_2 - T_1)$　　(绝热过程)

$Q_V = \frac{M}{\mu}\frac{i}{2}R(T_2 - T_1)$　　(等体过程)

$Q_P = \frac{M}{\mu}(\frac{i}{2}R + R)(T_2 - T_1)$　　(等压过程)

$Q_T = \frac{M}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1}$　　(等温过程)

$Q_Q = 0$　　(绝热过程)

**4. 热力学第二定律**

(1) 克劳修斯表述和开尔文表述

(2) 热机效率

$$\eta = \frac{A}{Q_2} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \leqslant \eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$(可逆过程等号成立)

(3) 熵

$$\int_a^b \frac{\delta Q}{T} = S(b) - S(a)$$

$$TdS = dE + PdV$$

对于一摩尔理想气体

$$S = \frac{i}{2}R\ln T + R\ln V + S_0$$

熵增加原理:在孤立系统中,如果产生不可逆过程,系统的熵就增加

**5. 平均自由程**

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$$

平均碰撞频率

$$\bar{Z} = \sqrt{2}\pi d^2 \bar{v} n$$

**6. 热传导**

$$dQ = -K\left(\frac{dT}{dz}\right)_{z0} dSdt$$

**7. 扩散**

$$dM = -D\left(\frac{d\rho}{dz}\right)_{z0} dSdt$$

## 二、经典题解

### Ⅰ. 统计物理

**1.(武汉理工大学2003年)**(1)某气体在平衡温度 $T_2$ 时的最概然速率与它在平衡温度 $T_1$ 时的方均根速率相等,求比值 $T_1/T_2$. (2)如果已知这种气体的压强 $P$ 和密度 $\rho$,试导出其方均根速率的表达式.

**本题考点:**最概然速率,方均根概速率,状态方程.

**解:**(1)最概然速率 $v_P = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$

方均根速率 $\sqrt{\bar{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$

依题意,有 $\sqrt{\frac{2RT_2}{\mu}} = \sqrt{\frac{3RT_1}{\mu}}$

故 $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{3}$

(2) 由状态方程$\frac{PV}{T} = \frac{M}{\mu}R$,可知$\frac{RT}{\mu} = \frac{PV}{M} = \frac{P}{\rho}$

从而$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}}$

**2.(北京理工大学2001年)**　三个容器$A$、$B$、$C$中装有同种理想气体,其分子数密度$n$相同,而方均根速率之比为$(\overline{V_A^2}) : (\overline{V_B^2}) : (\overline{V_C^2}) = 1 : 2 : 4$,则其压强之比$P_A : P_B : P_C$为:

A.1 : 2 : 4　B.4 : 2 : 1　C.1 : 4 : 16　D.1 : 4 : 8

**本题考点:**理想气体的方均根速率

**解:**$\frac{1}{2}m\overline{V^2} = \overline{\varepsilon_k} = \frac{3}{2}kT$

$$T_A : T_B : T_C = \overline{V_A^2} : \overline{V_B^2} : \overline{V_C^2} = 1 : 4 : 16$$

$$P = nkT$$

$$P_A : P_B : P_C = T_A : T_B : T_C = 1 : 4 : 16$$

答案选 C

**3.(北京理工大学2001年)**　容积为10升的盒子以速率$v = 200m/s$匀速运动,容器中充有质量为50g,温度为18℃的氢气,设盒子突然停止,全部定向运动的动能都变为气体分子热运动的动能,容器与外界没有热量交换,则达到热平衡后:氢气的温度增加了_____$K$;氢气的压强增加了_____$Pa$.(摩尔气体常量$R = 8.31J.mol^{-1}.K^{-1}$,氢气分子可视为刚性分子)

**本题考点:**能均分定理

**解:**$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2} \times 50 \times 10^{-3} \times (200)^2 = \frac{5}{2}\frac{M}{M_{mol}}R\Delta T$

$$\Delta T = \frac{4 \times 10^2}{25 \times 8.31} = 1.9K$$

分子数密度$n = N_A\frac{M}{M_{mol}V}$

$$P = nkT$$

$$\Delta P = nk\Delta T$$

$$= 25 \times 6.023 \times 10^{23} \times \frac{1}{10 \times 10^{-3}} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 1.9$$

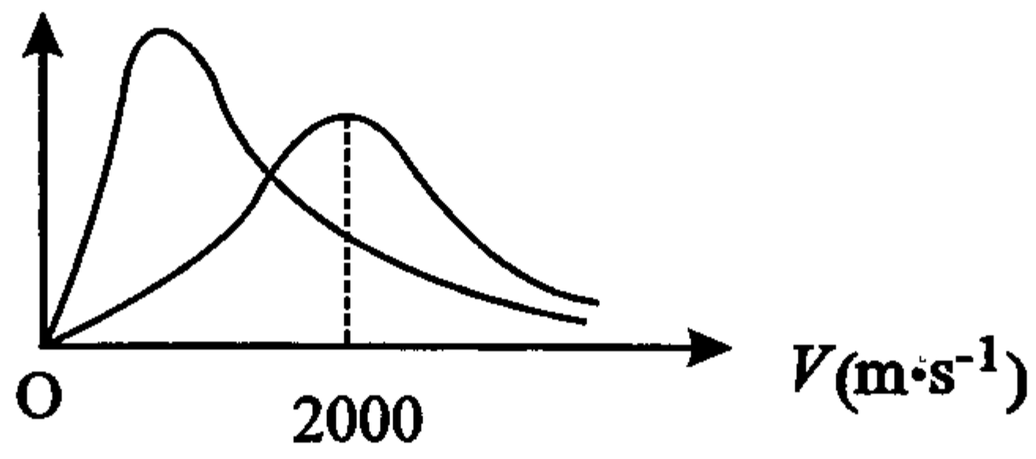
$$= \frac{25 \times 8.31 \times 1.9}{10 \times 10^{-3}} = 3.94 \times 10^{4}\text{Pa}$$

空处分别填 $1.9K$, $3.94 \times 10^4 Pa$

**4.(北京理工大学 2001 年,北京市 1999 年)** 如图示的两条 $f(V)$—$V$ 曲线分别表示氢气和氧气在同一温度下的麦克斯韦速率分布曲线,由图上数据可得

氢气分子的最可几速率为_____;

氧气分子的最可几速率为 _____.




**本题考点:**最可几速率 $V_P = \sqrt{\dfrac{2RT}{m}}$

**解:**$f(V)$ 最大值对应的速率为最可几速率

$$V_P = \sqrt{\frac{2RT}{M_{\text{mol}}}}$$

$$V_{P\text{氧气}} : V_{P\text{氢气}} = \sqrt{\frac{M_{\text{mol氧气}}}{M_{\text{mol,氢气}}}} = \sqrt{\frac{32}{2}} = 4$$

$$V_{P\text{氧气}} = \frac{1}{4} V_{P\text{氢气}} = 8000/4 = 500(\text{m/s})$$

空处分别填 2000m/s,500m/s

**5.(清华大学 1998 年)** 在 0℃ 时氢气的原子

(a) 最可几速率 (b) 平均速率 (c) 方均根速率

($m_P = 1.67 \times 10^{-27kg}, k = 1.38 \times 10^{-23} J \cdot K^{-1}$)

**本题考点:**热运动的三种速率

**解:**最可几速率 $V_P = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 273}{2 \times 1.67 \times 10^{27}}}$

$= 1502(\mathrm{m/s})$

平均速率 $\overline{V} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = 1694(\mathrm{m/s})$

方均根速率 $\sqrt{\overline{V^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = 1839(\mathrm{m/s})$

**6.(清华大学 2000 年)**　按照气体分子运动论,气体的压强的形成是由于:

A. 气体分子不断碰撞器壁;

B. 气体分子之间不断发生碰撞;

C. 气体分子的扩散;

D. 气体的热胀冷缩现象.

**本题考点:**压强微观机制

**解:**气体的压强是气体分子不断碰撞器壁的结果.

答案选 A

**7.(清华大学 2000 年)**　按照经典的能均分定理,由刚性双原子分子组成的理想气体的摩尔定容热容量是理想气体常数 $R$ 的:

A.1 倍;　B.1.5 倍;　C.2 倍;　D.2.5 倍.

**本题考点:**摩尔定容热容量

**解:**双原子分子自由度 $i = 5$　$C_v = \frac{i}{2}R = \frac{5}{2}R$

答案选 D

**8.(清华大学 2000 年)**　根据麦克斯韦速率分布,在室温下($300K$)氢气分子的方均根速率的数量级为:

A. $10^1 \mathrm{m/s}$;　B. $10^2 \mathrm{m/s}$;　C. $10^3 \mathrm{m/s}$;　D. $10^4 \mathrm{m/s}$;

**本题考点:**方均根速率

解:$\sqrt{\overline{V^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{mol}}}$,氢气分子 $M_{mol} = 2 \times 10^{-3}\text{kg}$

$$\sqrt{\overline{V^2}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.31 \times 300}{2 \times 10^{-3}}} = 1.933 \times 10^{3}\text{m/s}$$

答案选 C

**9.(清华大学 2000 年)** 氢气分子在标准状态(一个大气压,273$K$)下的平均自由程的数量级最接近于:

A.$10^{-3}$m　　B.$10^{-5}$m　　C.$10^{-7}$m　　D.$10^{-9}$m.

**本题考点:**平均自由程

**解:**$\overline{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$

$d = 2.30 \times 10^{-10}\text{m}, \overline{\lambda} = 1.123 \times 10^{-7}\text{m}$

答案选 C

**10.(北京市 1999 年)** 如果在一固定容器内,理想气体的温度提高为原来的两倍,那么,出现的结果是

A. 分子的平均动能和压强都提高为原来的两倍;

B. 分子的平均动能提高为原来的两倍,压强提高为原来的四倍;

C. 分子的平均动能提高为原来的四倍,压强提高为原来的两倍;

D. 分子的平均动能和压强都不变.

**本题考点:**理想气体状态方程,分子平均动能.

**解:**$V$ 不变,

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}, \qquad T_2 = 2T_1,$$

则 $P_2 = 2P_1$,故压强提高为原来的 2 倍

又　分子平均动能 $\overline{\varepsilon} = \frac{i}{2}kT$,

所以温度升高为原来的 2 倍,分子平均动能也为原来的 2 倍.

答案选 A

**11.**（北京理工大学2002）　若气体分子的平均平动动能等于 $1.06 \times 10^{-19}$J,则该气体的温度 T = _____K.(玻耳兹曼常量 k = $1.38 \times 10^{-23}$J · $K^{-1}$)

**本题考点:**理想气体温度公式

**解:** $\bar{\varepsilon}_t = \frac{3}{2}kT = 1.06 \times 10^{-19} J \Rightarrow T = 5.1 \times 10^3 (\mathrm{K})$

空处填 $5.1 \times 10^3 K$

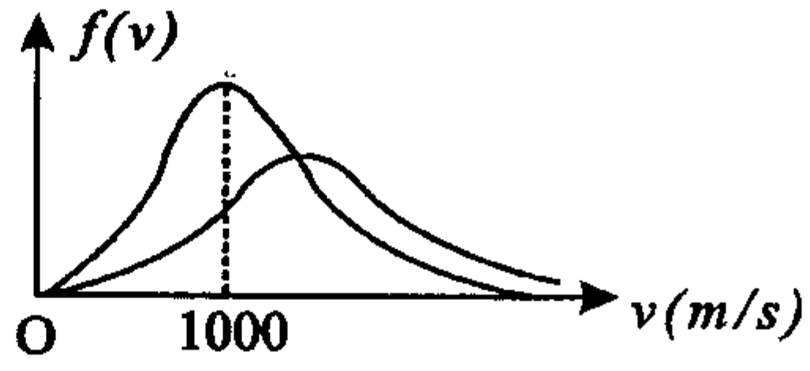
**12.**（北京理工大学 2002 年）　图示的曲线分别表示了氢气和氧气在同一温度下的麦克斯韦分子速率的分布情况.由图可知,氧分子的最概然速率为 _____. 氢气分子的最概然速率为 _____.

**本题考点:**最概然速率

**解:**最概然速率 $V_P = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$, $M$ 为气体摩尔质量.

$T$ 相同时,$M$ 越大,$V_p$ 越小

从图中可知 $V_{po} = 1000\mathrm{m/s}$




又 $\frac{V_{PH}}{V_{PO}} = \sqrt{\frac{M_0}{M_H}} = \sqrt{\frac{32}{2}} = 4$,

$\therefore V_{PH} = 4V_{PO} = 4000\mathrm{m/s}$.

氢气分子最概然速率亦为 4000m/s.

空处分别填 1000m/s,4000m/s

**13.**（北京师范大学2002年）　用麦克斯韦速度分布函数 $f(v) = (\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$,求单位时间内碰撞到容器内表面单位面积上的气体分子数.

**本题考点:**麦克斯韦速度分布律

**解:**取直角坐标系 $xyz$,在垂直于 $x$ 轴的器壁上取一面积元

$dA$,并设 $n$ 为单位体积内的分子数,则单位体积内速度分量在 $v_x$ ~ $v_x + dv_x$ 区间内的分子数为 $nf(v_x)\,dv_x$,且在 $dt$ 时间内能够与 $dA$ 相碰的分子数为:$nf(v_x)\,dv_x \cdot v_x dtdA$.

$$f(v) = f(v_x)f(v_y)f(v_z) = (\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

$$f(v_x) = (\frac{m}{2\pi kT})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}$$

每秒碰到单位面积上的分子数为

$$N_1 = \int_0^\infty \frac{mv_x f(v_x)\,dv_x dtdA}{dtdA} = \int_0^\infty nv_x f(v_x)\,dv_x$$

$$= n(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} v_x dv_x$$

$$= n(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{1}{2}} \frac{kT}{m} = n(\frac{kT}{2\pi m})^{\frac{1}{2}}$$

**14.(同济大学1999年)** 最可几速率是否就是分子速率分布中的最大值?最可几速率对应的动能是否就是最可几速率动能?

**本题考点:**最可几速率

**解:**最可几速率 $v_p$ 表示一定量理想气体分体在一定的平衡态下,单位速率区间内处在最可几速率附近的分子数占总分子数的百分比是最大的,即若把整个速率区间 $v \in (0,\infty)$ 分成许多相等的速率区间时,则在 $v_p$ 附近发现的分子数占总分子数的百分比(概率)是最大的,因而 $v_p$ 不是分子速率分布中的最大速率值,最大速率的分子在大多数情况下比 $v_p$ 大得多.另一方面,由理想气体的麦克斯韦速率分布函数得:

$$f(v.T) = 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$$

$$f(\varepsilon_k.T) = 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{m} e^{-\frac{\varepsilon_k}{kT}} \varepsilon_k$$

令 $\frac{df}{d\varepsilon_k} = 0$ 得最概然平动动能 $\varepsilon_{k\cdot p} = \frac{1}{2}kT$,而最可几速率对应

的动能$\frac{1}{2}mv_p^2 = kT$两者显然不同.

## Ⅱ. 热力学

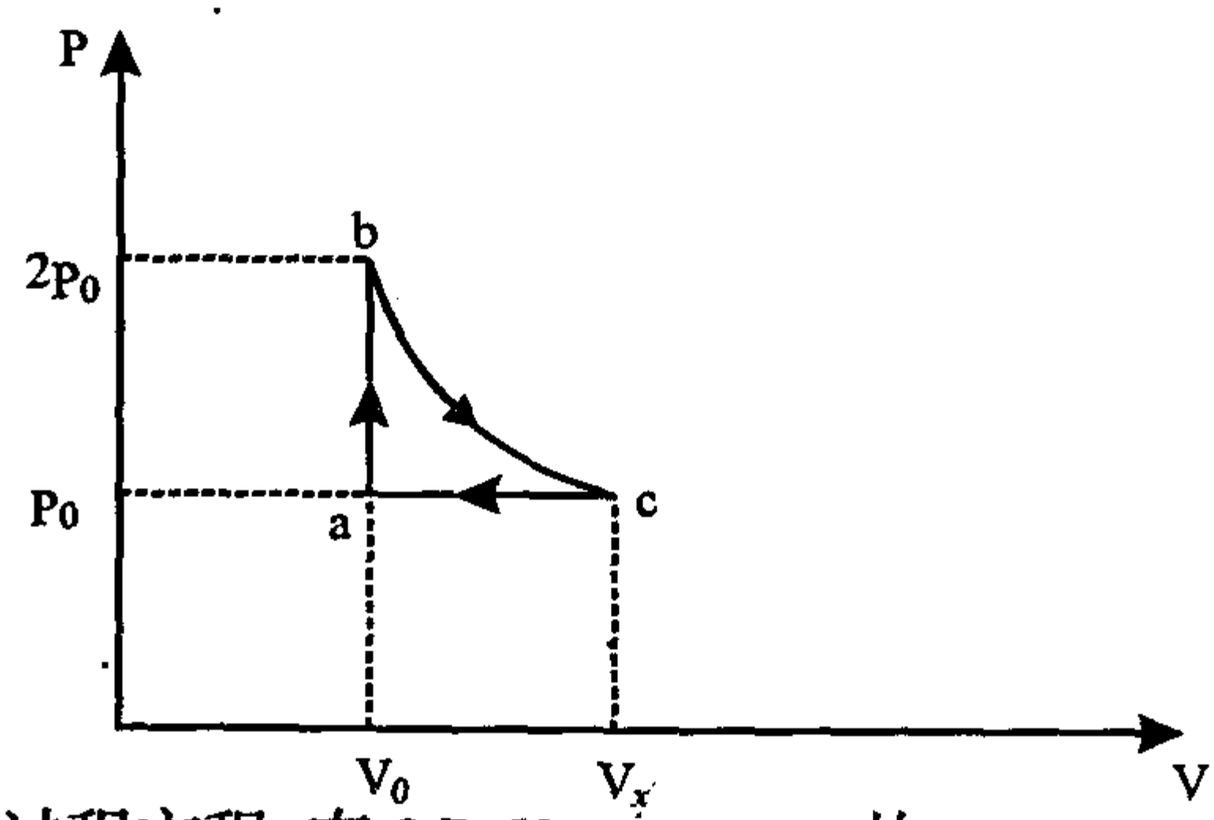
**15.(武汉理工大学 2003 年)** 一单原子理想气体压强为 $P_0$，体积为 $V_0$，经历一等体过程压强升到 $2P_0$，后等温膨胀，压强降到 $P_0$，最后经由等压过程回到初态.

(1) 在 $P-V$ 图上画出该过程的示意图;

(2) 求该过程气体所作的功.

**本题考点:** 理想气体等体、等压、等温过程方程及功的计算.

解:(1)$P-$ 图




由等温过程方程,有 $2P_0V_0 = P_0V_x$,故 $V_x = 2V_0$

$$(2)A = A_{ab} + A_{bc} + A_{ca} = \frac{M}{\mu}RT_b\ln\frac{V_c}{V_b} + P(V_a - V_c)$$

$$= 2P_0V_0\ln\frac{2V_0}{V_0} + P_0(V_0 - 2V_0)$$

$$= (2\ln2 - 1)P_0V_0$$

**16.(清华大学 2001 年)** $\nu$mol 的理想气体的可逆循环过程由定温膨胀过程 $ab$、定容过程 $bc$ 和绝热过程 $ca$ 组成.已知 $a$ 点的温度为 $T_1$,体积为 $V_1$,$b$ 点的体积为 $V_2$.又气体的 $C_v$ 和 $\nu$ 为已知常数.求:

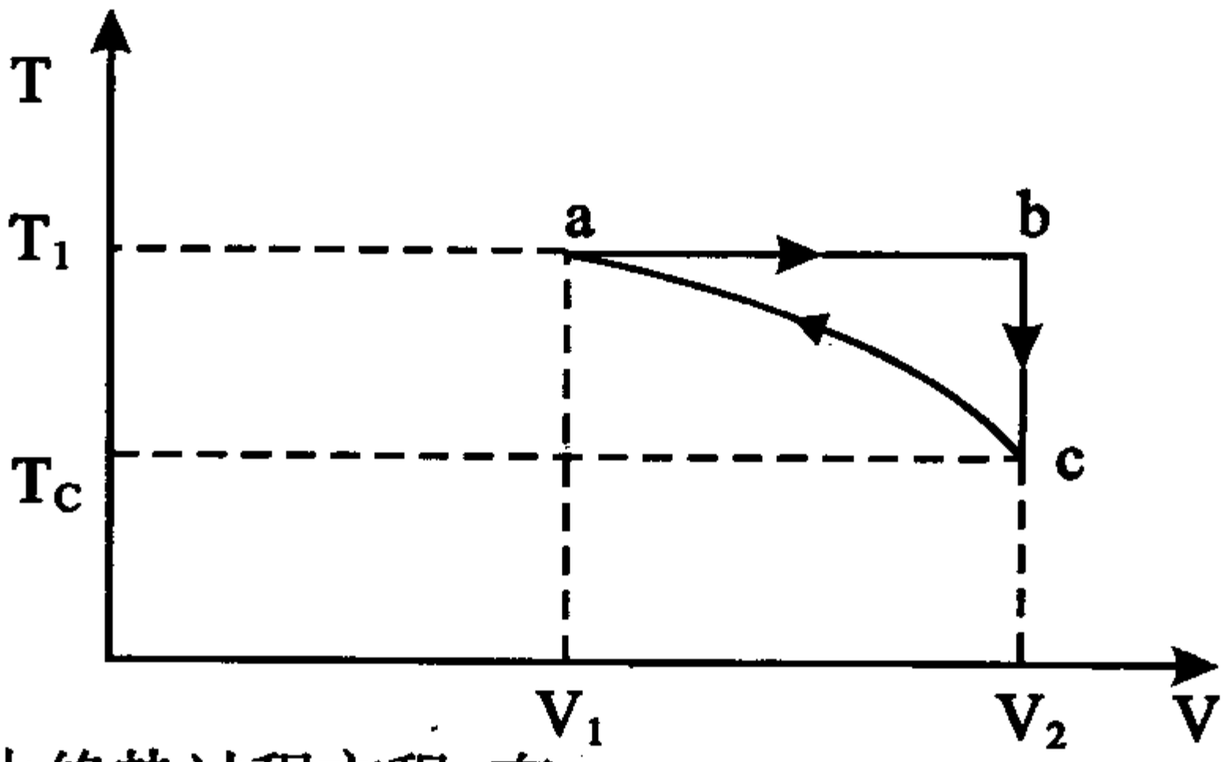
(1) 在 $T-V$ 图上画出此循环过程;

(2) $c$ 点的温度;

(3) 循环的效率.

**本题考点**:绝热过程方程,等温、等体过程的吸收的热量的计算,循环效率公式

**解**:(1)




(2) 由绝热过程方程,有

$T_aV_a^{\gamma-1} = T_cV_c^{\gamma-1}$,则

$$T_c = (\frac{V_a}{V_c})^{\gamma-1}T_a$$

$$= (\frac{V_1}{V_2})^{\gamma-1}T_1$$

$$\gamma = \frac{c_v + R}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v}$$

$$T_c = (\frac{V_1}{V_2})^{\frac{R}{C_v}}T_1$$

(3) $Q_{ab} = \frac{M}{\mu}RT\ln\frac{V_b}{V_a}$

$$= \nu RT_1\ln\frac{V_2}{V_1} > 0$$

$$Q_{bc} = \frac{M}{\mu}C_v(T_c - T_b)$$

$$= \nu C_v\left[(\frac{V_1}{V^2})^{\gamma-1} - 1\right]T_1 < 0$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{|\ Q_{bc}\ |}{Q_{ab}}$$

$$= 1 - \frac{\nu C_v\left[1 - (\frac{V_1}{V_2})^{\frac{R}{C_v}}\right]T_1}{\nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

$$= 1 - \frac{C_v\left[1 - (\frac{V_1}{V_2})^{\frac{R}{C_v}}\right]}{R \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

**17.(清华大学 2002 年)**　理想气体初始压强为 10 大气压,温度为 300K,经绝热膨胀直到体积加倍.设气体为(1) 单原子的;(2) 双原子的,分别求它们的最终压力和最终温度.

**本题考点:**单、双原子理想气体的绝热过程方程

**解:**由绝热过程方程可知

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

$$P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$$

这样

$$T_2 = (\frac{V_1}{V_2})^{\gamma-1} T_1 = (\frac{1}{2})^{\gamma-1} T_1$$

$$= 2^{1-\gamma} T_1$$

$$P_2 = (\frac{V_1}{V_2})^{\gamma} P_1 = (\frac{1}{2})^{\gamma} P_1$$

$$= 2^{-\gamma} P_1$$

(1) 对单原子分子

$$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3}$$

故 $T_2 = 2^{1-\frac{5}{3}} \times 300$

$$= 2^{-\frac{2}{3}} \times 300$$

$$= 189(K)$$

$$P_2 = 2^{-\frac{5}{3}} \times 10$$

$$= 3.1(\text{大气压})$$

(2) 对双原子分子

$$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{5+2}{5} = \frac{7}{5}$$

$$\text{故 } T_2 = 2^{1-\frac{7}{5}} \times 300$$

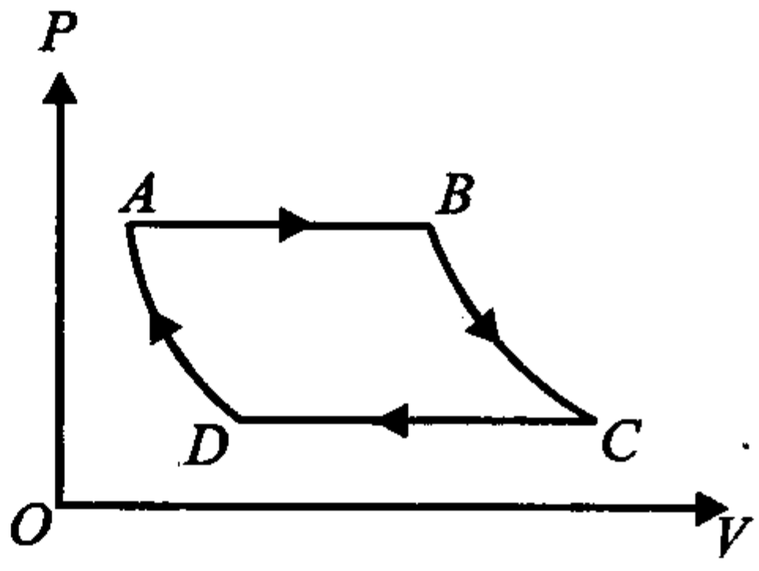
$$= 227(K)$$

$$P_2 = 2^{-\frac{7}{5}} \times 10$$

$$= 3.8(\text{大气压})$$

**18.(北京理工大学 2001 年)** 一定量的理想气体经历如图所示的循环过程,$A \to B$ 和 $C \to D$ 是等压过程,$B \to C$ 和 $D \to A$ 是绝热过程.已知:$T_C = 300\text{k}$,$T_B = 400\text{k}$.试求:此循环的效率.

**本题考点:**热力学过程,循环的效率




**解:**对于 $BC$ 过程有:

$$P_B V_B^{\gamma} = P_C V_C^{\gamma}$$

$DA$ 过程有:

$$P_A V_A^{\gamma} = P_D V_D^{\gamma}$$

$$\frac{V_B^{\gamma}}{V_A^{\gamma}} = \frac{V_C^{\gamma}}{V_D^{\gamma}} \text{ 即} \frac{V_B}{V_C} = \frac{V_A}{V_D}$$

$$\frac{V_B - V_A}{V_C - V_D} = \frac{V_B}{V_C}$$

$AB$ 过程吸热

$$Q_1 = C_P \frac{M}{M_{mol}}(T_B - T_A) = \frac{C_P}{R}(P_A V_B - P_A V_A)$$

$CD$ 过程放热

$$Q_2 = C_P \frac{M}{M_{mol}}(T_C - T_D) = \frac{C_p}{R}P_C(V_C - V_D)$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{P_C(V_C - V_D)}{P_A(V_B - V_A)}$$

$$= 1 - \frac{P_C V_C}{P_B V_B}$$

$$= 1 - \frac{T_B}{T_C} = 1 - \frac{300}{400} = 25\%$$

**19.(北京邮电大学1999年)** 3mol的理想气体开始时处在压强 $P_1 = 6\text{atm}$,温度 $T_1 = 500\text{K}$ 的平衡态,经过一个等温过程,压强变为 $p_2 = 3\text{atm}$,该气体在此等温过程中吸收的热量为 $Q =$ _____ $J$.(摩尔气体常量 $R = 8.31\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)

**本题考点:**等温过程

**解:**等温过程　$\Delta E = 0$　　$A = Q$

$$Q = A = \int PdV = \int_v^{2v} nRT\frac{dV}{V} = nRT\ln 2 = 8.6 \times 10^3 J$$

空处填 $8.6 \times 10^3$

**20.(清华大学2001年)** 1mol水蒸汽(不考虑量子效应),经等压过程,体积扩大一倍温度达到600K.该过程系统吸热_____.

**本题考点:**等压过程的做功、内能变化、吸热

**解:**水蒸汽看成理想气体

等压过程方程 $\frac{V}{T}$ = 常数

$V_1 \rightarrow 2V_2$ 时,温度由 $T_1 \rightarrow T_2 = 2T_1 = 600\text{K}$

因此 $T_1 = 300\text{K}$

对1mol理想气体由状态方程有 $PV = RT$

$$A = P\Delta V = R\Delta V = R\Delta T = 8.31 \times 300(\text{J})$$

$$\Delta E = C_V \Delta T = \frac{6}{2}R\Delta T = 3 \times 8.31 \times 300(\text{J})$$

$$Q = A + \Delta E = 4 \times 8.31 \times 300 = 9972(\text{J})$$

空处填 9972(J)

**21.(清华大学 1998 年)** 试设计一个测定比热容比 $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ 的实验.

**本题考点:**比热容比的物理意义

**解:**设计一个绝热气缸,在绝热条件下,把一定质量的气体在 $(P_1, V_1)$ 升压为 $2P_1$,测出体积 $V_2$.

由绝热方程有 $P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$

$$(\frac{V_1}{V_2})^{\gamma} = 2$$

$$\gamma 1\text{n} \frac{V_1}{V_2} = 2$$

$$\gamma = \frac{2}{1\text{n} \frac{V_1}{V_2}}$$

**22.(清华大学 2000 年)** 有一绝热容器,中间有一隔板将容器分为左右两部分.开始时,隔板左边的部分中充有理想气体,右边为真空.现将隔板撤去,气体开始自由膨胀,当气体充满整个容器并达到热平衡后,气体的温度比开始时:

A. 升高; B. 不变; C. 降低.

**本题考点:**热力学第一定律、气体自由膨胀

**解:**气体自由膨胀,吸收热量 $Q$ 为 0,没有对外作功.根据热力学第一定律,内能不变,温度不变.

答案选 B

**23.(中国科学技术大学 1998 年)** 试求理想气体的克分子热容量 $C$ 为常数的过程方程.在下列各种情况:(a) $C = C_v$,(b) $C = C_p$,(c) $C = 0$,(d) $C = \infty$,它们分别是什么过程?

**本题考点:**热力学第一定律、多方过程、状态方程

**解**:由 $dQ = dE + pdV \Rightarrow \frac{dQ}{dT} = \frac{dE}{dT} + \frac{pdV}{dT}$ 得

$$(C + C_v)\,dT = pdV \tag{1}$$

又由 $pV = RT$,因而

$$pdV + Vdp = RdT \tag{2}$$

代入(1)式得:

$$\frac{(C - C_v - R)}{(C - C_v)}\frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0 \tag{3}$$

积分有:$PV^n$ = 恒量,式中 $n = \frac{(C - C_v - R)}{(C - C_v)}$

(a) $C = C_v, n = \infty, V$ = 恒量,等容过程

(b) $C = C_P, n = O, P$ = 恒量,等压过程

(c) $C = 0, n = \gamma, PV^\gamma$ = 恒量,绝热过程

(d) $C = \infty, n = 1, PV$ = 恒量,等温过程

**24.(中国科学院 2000 年)**　一台理想热机按卡诺循环工作,每一循环作功 $W = 7.35 \times 10^4$ 焦耳,热源温度 $T_1 = 100℃$,低温 $T_2 = 0℃$.求:

(1) 热机效率;

(2) 热机每一循环从热源吸收的热量;

(3) 每一循环向低温处排除的热量;

(4) 工作物质在一个循环中的熵增;

(5) 整个系统在一个循环中的熵增.

**本题考点**:循环效率、热量与熵的计算

**解**:(1) $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{273}{373} = 0.268$

(2) 由 $\eta = \frac{W}{Q_1} \Rightarrow Q_1 = \frac{W}{\eta} = 2.743 \times 10^5$ 焦耳

(3) $Q_2 = Q_1 - W = 2.008 \times 10^5$ 焦耳

(4)$\Delta S = 0$

(5)$\Delta S = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = (7.355 - 7.354) \times 10^2 \frac{\text{焦耳}}{\text{开}}$

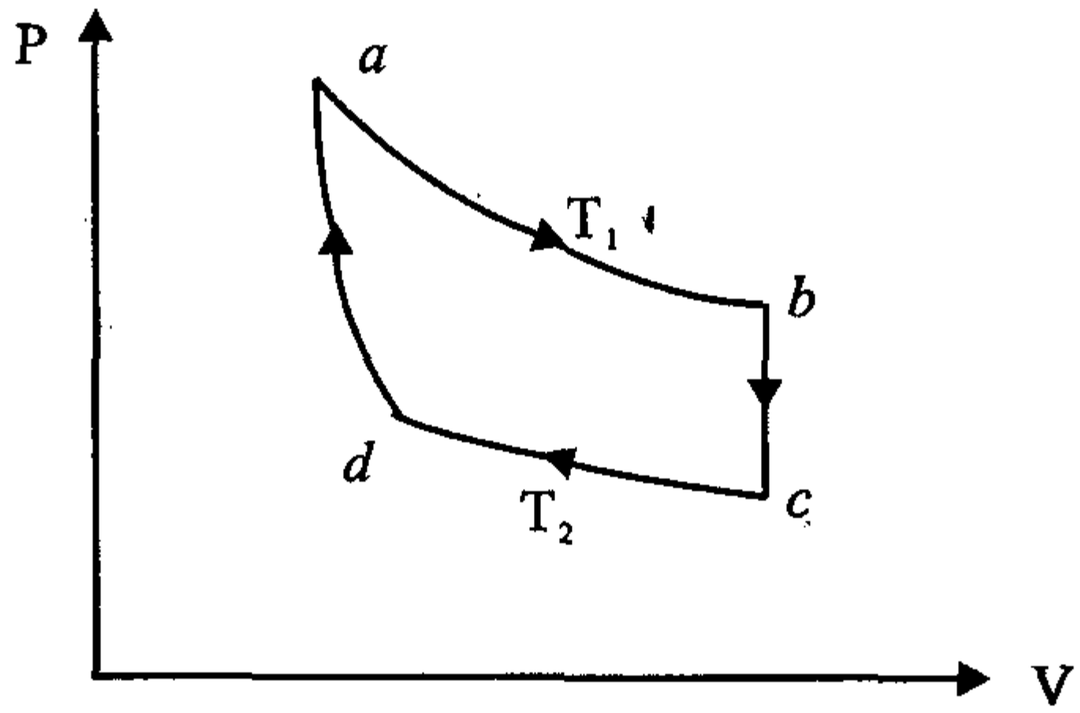
$= 0.1$ 焦耳 / 开

**25.(中山大学 2002 年)** 如图,单原子理想气体从状态 $a$ 开始,经历温度为 $T_1$和 $T_2(T_1 > T_2)$ 的等温过程($a \to b$;$c \to d$),体积为 $V_b$ 的等体过程($b \to c$),绝热过程($d \to a$),回到状态 $a$.

(1) 证明:此循环效率小于工作在 $T_1$ 和 $T_2$ 之间的可逆热机效率;

(2) 若 $T_1 = eT_2, V_b = eV_a$,试粗算此循环效率.

**本题考点:**四个过程中的功、热量的计算与循环效率的计算




**解:**(1) 设 $a(V_a, P_a)$、$b(V_b, P_b)$、$c(V_c, P_c)$、$d(V_d, P_d)$,理想气体摩尔数为 $n$

依题意 $C_V = \frac{3}{2}R$, $C_P = \frac{5}{2}R, \gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{5}{3}$

$a \to b$:等温膨胀吸热

$$(Q_{ab})_{吸} = A_{ab} = nRT_1 \ln \frac{V_b}{V_a}$$

$b \to c$:等容放热

$$(Q_{bc})_{放} = \Delta E_{bc} = nC_V(T_2 - T_1) < 0$$

$c \to d$:等温压缩放热(对外做负功)

$$(Q_{cd})_{放} = nRT_2 \ln \frac{V_d}{V_c} < 0$$

$d \to a$:绝热升温

$$\Delta E_{ad} = -A_{da} = nC_V(T_1 - T_2)$$

由循环效率定义

$$\eta = \frac{A}{Q_{吸}} = 1 - \frac{nRT_2 \ln \frac{V_c}{V_d} + nC_v(T_1 - T_2)}{nRT_1 \ln \frac{V_b}{V_a}}$$

$$= 1 - \frac{T_2 \ln \frac{V_c}{V_d} + \frac{3}{2}(T_1 - T_2)}{T_1 \ln \frac{V_b}{V_a}}$$

又　　$T_1 > T_2, V_a < V_d, V_b = V_c, T_a V_a^{\gamma-1} = T_d V_d^{\gamma-1}$

即　　$T_1 V_d^{\frac{2}{3}} = T_2 V_d^{\frac{2}{3}}$

$$\ln \frac{V_c}{V_d} = \ln \frac{V_b}{V_a} = \frac{3}{2} \ln \frac{T_1}{T_2}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} - \frac{3}{2}\left[T_1 - T_2 - T_2 \ln \frac{T_1}{T_2}\right]\left[T_1 \ln \frac{V_b}{V_a}\right]^{-1}$$

$$< 1 - \frac{T_2}{T_1} = \eta_{可}$$

(2) 将 $T_1 = eT_2, V_b = eV_a$ 代入上式得

$$\eta = \frac{4 - e}{2e} = 23.8\%$$

**26.(东北大学 2002 年)**　计算奥托循环内燃机的效率. 这种内燃机的工质是汽油与空气的混合气体,其循环由四个过程组成. 当混合气体进入汽缸后,先由初状态 $I(V_1, T_1)$ 经过绝热压缩达到状态 $\text{II}(V_2, T_2)$;这时点火燃烧,由于燃烧非常迅速而气体还来不及膨胀,故可视为是在等体条件下进行的,这一过程中气体的温度

和压强迅速上升，达到状态 Ⅲ（$V_3, T_3$）；接着气体绝热膨胀对外作功，达到状态 Ⅳ（$V_4, T_4$）；最后经等体放热回到初态，完成一个循环.（已知 $V_1$ 和 $V_2$）

**本题考点：**奥托循环效率

**解：** Ⅱ → Ⅲ　过程吸热

$$Q_1 = \frac{M}{M_{\text{mol}}} C_V (T_3 - T_2)$$

Ⅳ → Ⅰ　过程放热

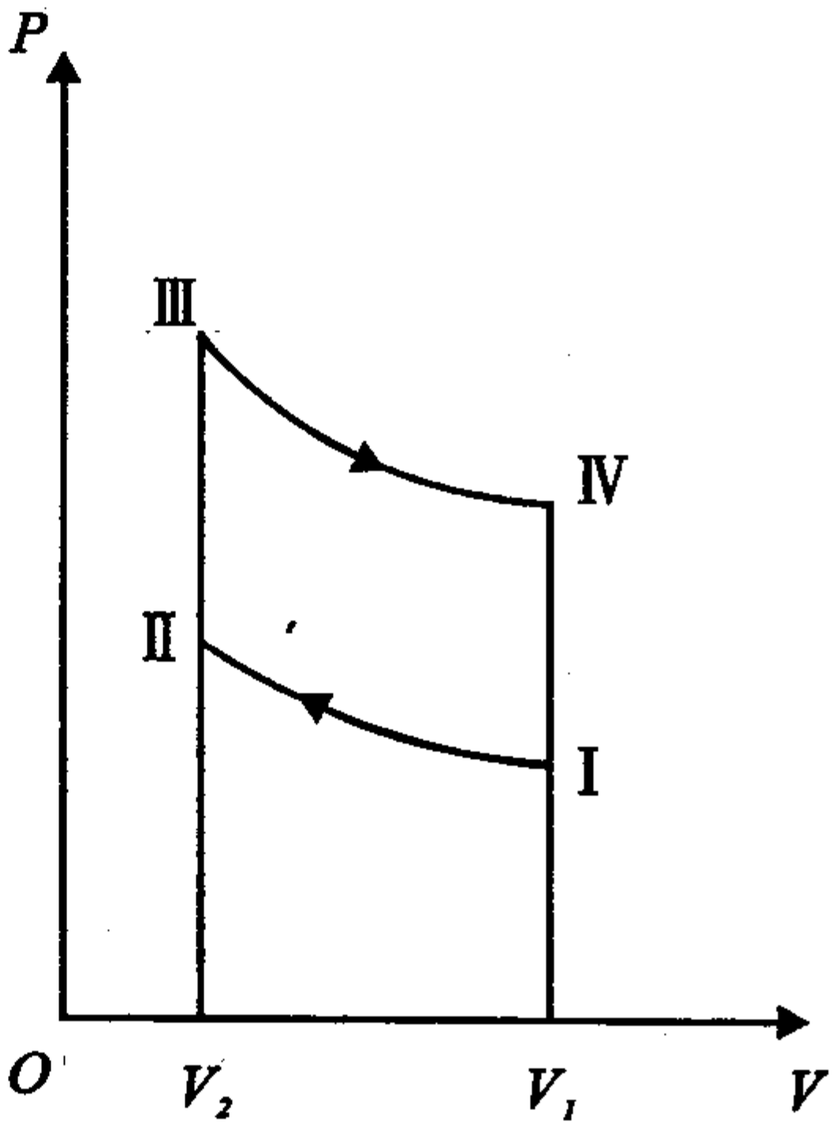
$$Q_2 = \frac{M}{M_{\text{mol}}} C_V (T_4 - T_1)$$

$$\eta = 1 - \frac{T_3 - T_2}{T_4 - T_1}$$

Ⅰ → Ⅱ 过程是绝热过程：

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

Ⅲ → Ⅳ 过程也是绝热过程有




$$T_3 V_2^{\gamma-1} = T_4 V_1^{\gamma-1}$$

$$(T_3 - T_2) V_2^{\gamma-1} = (T_4 - T_1) V_1^{\gamma-1}$$

$$\frac{T_3 - T_2}{T_4 - T_1} = (\frac{V_1}{V_2})^{\gamma-1}$$

$$\eta = 1 - (\frac{V_1}{V_2})^{\gamma-1} \qquad (\gamma \text{ 为比容比})$$

**27.（南京大学 2002 年）** 有一内放有气球的烧瓶，瓶里的温度及压强同周围空气，设为 $T_0, P_0$. 将瓶口塞好（保证不漏气）加热，至温度 $T$ 时，拔开瓶塞，随即再塞好. 然后停止加热，让其冷却，求冷却到 $T_0$ 时气球的体积与它的初始体积之比. 计算时可不考虑气球张力的影响.

**本题考点：**热力学过程

**解：**设烧瓶的体积为 $V$

(1) 等容加热 $T_0 \rightarrow T$,压强增加

(2) 拔开瓶塞,时间较短,等温膨胀过程压强降为 $P_0$

(3) 再塞好瓶塞,等容降温过程,温度由 $T \rightarrow T_0$,压强降低为 $P$

对过程(3) 烧瓶有

$$\frac{P_0 V_0}{T} = \frac{P V_0}{T_0}$$

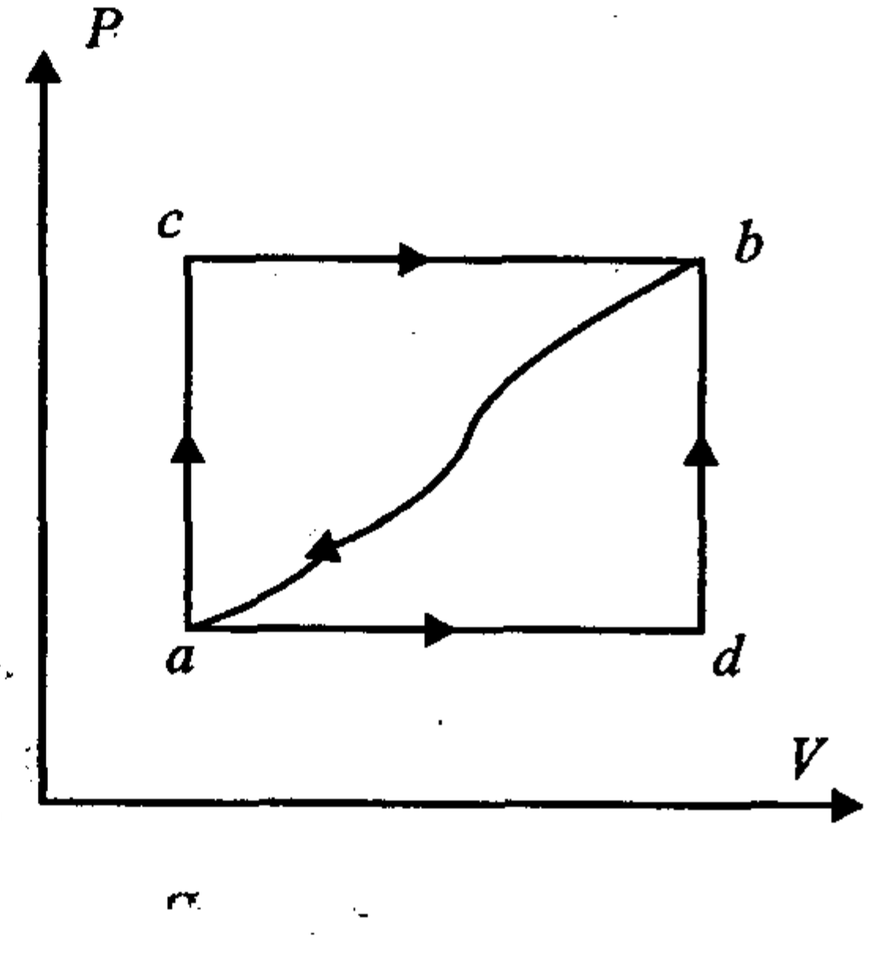
$$P = P_0 \frac{T_0}{T}$$

对于瓶中气球 (开始体积为 $V_a$,压强为 $P_0$,最后体积为 $V$,压强为 $P$)

$$PV = P_0 V_a$$

$$\frac{V}{V_a} = \frac{P_0}{P} = \frac{T}{T_0}$$

**28.(南京大学 2002 年)** 系统由如图所示的 $a$ 状态沿 $acb$ 到达 $b$ 状态,有 80 卡的热量传入系统,而系统作功 126 焦耳. (1) 若 $adb$ 过程系统作功 42 焦耳,问有多少热量传入系统?(2)、当系统由 $b$ 状态沿曲线 $ba$ 返回状态 $a$ 时,外界对系统作功为 84 焦耳. 试问系统是吸热或是放热?热量传递是多少?(1 卡 = 4.2 焦耳)




**本题考点:热力学第一定律**

**解:**(1) $E_b - E_a = Q_{吸} - A = 80 \times 4.2 - 126 = 210(J)$(或者 50 卡)

$a\,d\,b$ 过程中系统吸收的热量 $Q_2 = E_b - E_a + A = 80 \times 4.2 - 126 + 42(J) = 252(J)$ (或者 60 卡)

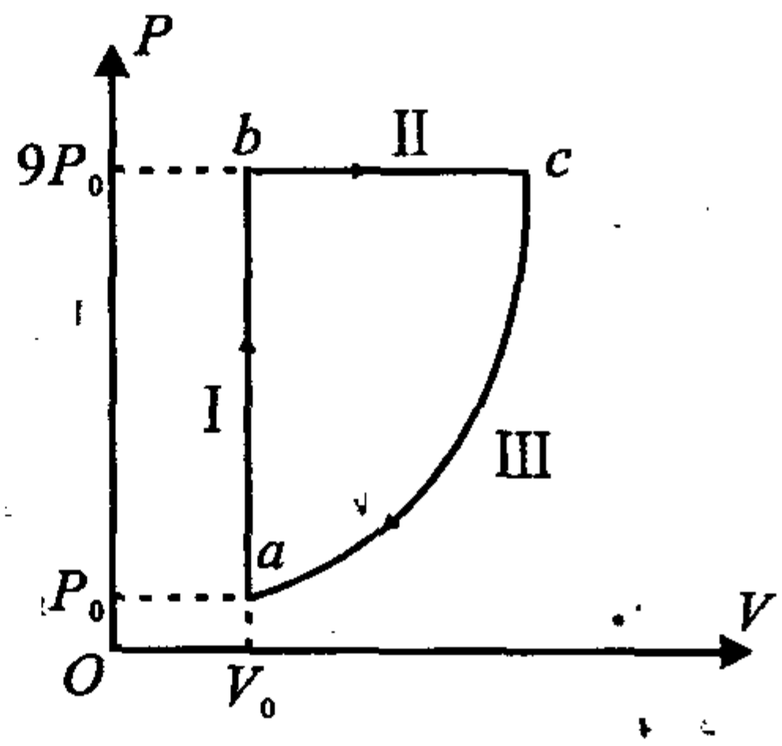
$ba$ 曲线过程中系统吸收热量 $Q_3 = \Delta E + A = -(80 \times 4.2 - 126) - 84 = -294(J)$(或者 $-70$ 卡)

负号表示放热,热量传递为 $294(J)$ (或者 70 卡).

**29.**(南京大学 2002 年) 一摩尔单原子理想气体经历如附图所示的可逆循环. 曲线 Ⅲ($c$、$a$) 的方程为 $P = (\frac{P_0}{V_0^2})V^2$, $a$ 点温度 $T_0$

(1) 试以 $T_0$、$R$ 表示 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ 过程中传输的热量;

(2) 求此循环的效率.




**本题考点:**热力学过程循环效率

**解**:(1) $ab$ 过程(等容)

$a$ 点 $P_0V_0 = RT_0$

$b$ 点 $9P_0V_0 = RT_b$

得 $T_b = 9T_0$

$ab$ 过程吸热

$$Q_1 = \frac{3}{2}R\Delta T = \frac{3}{2}R(9T_0 - T_0) = 12RT_0$$

$bc$ 过程为等压过程吸热 $Q_2 = \frac{5}{2}R\Delta T$

由 $ca$ 过程 $P = (\frac{P_0}{V_0^2})V^2$

$c$ 态 $P = 9P_0$ 有 $9P_0 = \frac{P_0}{V_0^2}V^2$ 得

$V = 3V_0$

$c$ 点有 $9P_0 \times 3V_0 = RT$ 得

$T_c = 27T_0$

$$Q_2 = \frac{5}{2}R(27T_0 - 9T_0) = 45RT_0$$

$cd$ 过程作功

$$A = \int PdV = \int_{3V_0}^{V_0} \left(\frac{P_0}{V_0^2}\right) V^2 dV = \frac{1}{3}\left(\frac{P_0}{V_0^2}\right)(V_0^3 - 27V_0^3)$$

$$= -\frac{26}{3}P_0V_0 = -\frac{26}{3}RT_0$$

$$\Delta E = C_V\Delta T = \frac{3}{2}R(T_0 - 27T_0) = -39RT_0$$

$$Q_3 = \Delta E + A = -\left(\frac{26}{3} + 39\right)RT_0$$

$$= -47\frac{2}{3}RT_0$$，负号代表放热

整个过程有

$$\eta = 1 - \frac{|Q_3|}{Q_1 + Q_2} = 1 - \frac{47\frac{2}{3}RT_0}{12RT_0 + 45RT_0} = 16.4\%$$

**30.（清华大学 1999 年）** 求：(a) 每摩尔空气的能量(设空气温度为 27℃)

(b) 为了把一个大气压的 1 摩尔空气从 0℃ 加热到 20℃，要多少热量？

(c) 为了把一个大气压的 1 摩尔空气从 20℃ 冷却到 18℃，冰箱要做多少功？冰箱向 40℃ 的环境放热.（$R = 8.314\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$）

**本题考点：**理想气体的内能、过程放热

**解：**(a) 空气看成双原子分子，自由度为 5(只考虑平动自由度、转动自由度，认为振动自由度冻结可忽略)，

$$E_{内} = \frac{i}{2}RT = \frac{5}{2} \times 8.31 \times 300 = 6.23 \times 10^3 J$$

(b) 等压过程

$$Q = C_P(T_2 - T_1) = \left(\frac{i}{2} + 1\right)RT = \frac{7}{2} \times 8.31 \times 20 = 581.7\text{J}$$

(c) 冰箱的循环近似于卡诺制冷循环，

$$\varepsilon = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{293}{20} = 14.7$$

$$Q_2 = \frac{M}{M_{mol}} \frac{5}{2} R\Delta T = 1 \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times 2 = 41.55\text{J}$$

$$A = \frac{Q_2}{\varepsilon} = 2.8\text{J}$$

**31.(复旦大学 2001 年)** 已知一摩尔双原子分子组成的理想气体,由初态$(P_1, V_1)$开始,在常温下,经历 $PV^2$ = 常数 的过程,体积扩大一倍,试求:

(1) 在该过程中系统内能的增量;

(2) 系统吸收的热量.

**本题考点:**理想气体的状态方程,热力学第一定律,热量、功及内能增量的计算.

**解:**(1) 理想气体的内能增量为 $\Delta E = \frac{i}{2} R(T_2 - T_1)$

$P_1V_1 = RT_1, \quad P_2V_2 = RT_2, i = 5$

$$\Delta E = \frac{5}{2} R(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}(P_2V_2 - P_1V_1) \tag{1}$$

又 $PV^2 =$ 常数

即 $P_1V_1^2 = P_2V_2^2, V_2 = 2V_1$

$\Rightarrow P_1V_1^2 = 4P_2V_1^2 \Rightarrow P_1 = 4P_2$

$$P_2V_2 = \frac{1}{4} P_1 \cdot 2V_1 = \frac{1}{2} P_1V_1 \tag{2}$$

将(2) 式代入(1) 式得

$$\Delta E = -\frac{5}{4} P_1V_1$$

(2) $PV^2 =$ 常数 $= P_1V_1^2 \Rightarrow P = \frac{P_1V_1^2}{V^2}$

系统对外做功为

$$A = \int_{V_1}^{2V_1} PdV = \int_{V_1}^{2V_1} \frac{P_1 V_1^2}{V^2} dV = P_1 V_1^2 (\frac{1}{V_1} - \frac{1}{2V_1}) = \frac{1}{2} P_1 V_1$$

根据热力学第一定律,系统吸收的热量为

$$Q = A + \Delta E = \frac{1}{2} P_1 V_1 + \left( - \frac{5}{4} P_1 V_1 \right) = - \frac{3}{4} P_1 V_1$$

**32.(辽宁大学 2001 年)** 有 1mol 刚性多原子分子的理想气体,原来的压强为 1.0atm,温度为 27℃,若经过一绝热过程,使其压强增加到 16atm,试求

(1) 气体内能的增量;

(2) 在该过程中气体所作的功;

(3) 静态时,气体的分子数密度.

(1atm = $1.013 \times 10^5$Pa,玻耳兹曼常量 k = $1.38 \times 10^{-23}$J·K$^{-1}$,摩尔气体常量 R = 8.31J·mol$^{-1}$·K$^{-1}$)

**本题考点:**理想气体绝热过程,内能,功,物态方程.

**解:**(1) 对多原子分子 $i = 6, \gamma = (i + 2)/i = 4/3$

绝热过程有:$P_1^{\gamma-1} T_1^{-\gamma} = P_2^{\gamma-1} T_2^{-\gamma}$

$$P_1^{\frac{1}{3}} T_1^{-\frac{4}{3}} = P_2^{\frac{1}{3}} T_2^{-\frac{4}{3}}$$

$$\Rightarrow T_2 = T_1 (\frac{P_2}{P_1})^{\frac{1}{4}} = T_1 (\frac{16}{1})^{\frac{1}{4}} = 2T_1$$

$$= 2 \times (27 + 273) = 600(K)$$

$$\Delta E = \frac{i}{2} R(T_2 - T_1) = \frac{6}{2} \times 8.31 \times (600 - 300) \doteq 7.5 \times 10^3 (\mathrm{J})$$

(2) 由于 $Q = \Delta E + A$

绝热过程 $Q = 0$

$$A = - \Delta E = - 7.5 \times 10^3 (\mathrm{J})$$

(3) 由 $P = nkT$ 有终态时气体分子数密度

$$n = \frac{P_2}{kT_2} = \frac{16 \times 1.01 \times 10^5}{1.38 \times 10^{-23} \times 600} = 1.95 \times 10^{26} (\text{个}/\mathrm{m}^3)$$

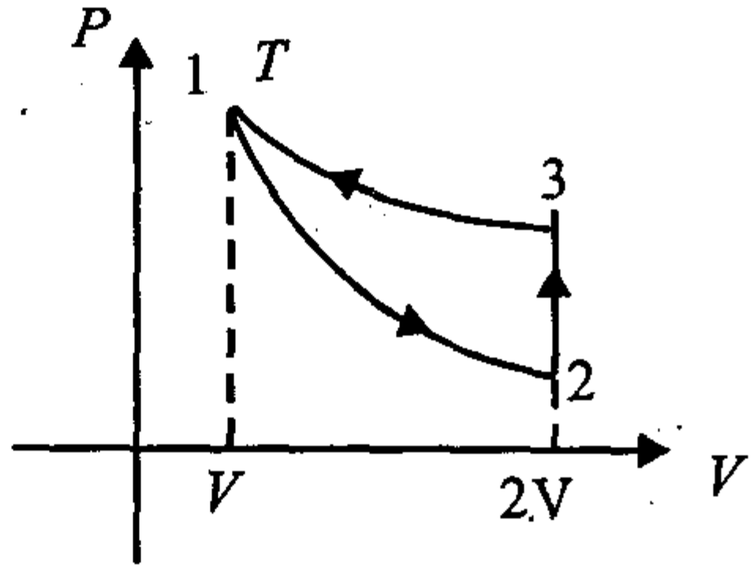
**33.**(北京市 1999 年) 理想气体起始温度为 $T$,体积为 $V$,在下面的循环过程中,气体经绝热膨胀到体积 $2V$,再经等容过程使温度恢复为 $T$,然后等温压缩到原来体积为 $V$.在此循环中气体的变化情况是:

A. 气体向外界放热;

B. 气体对外作功;

C. 气体内能增加;

D. 气体内能减少.



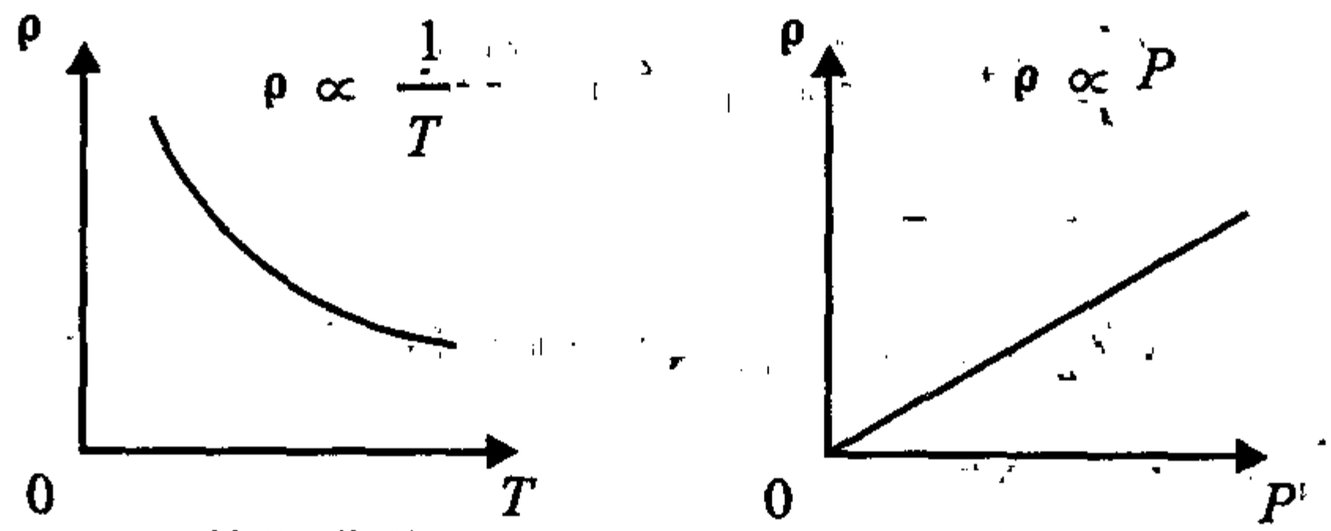

**本题考点:**热力学第一定律

**解:**由题义可画出 $P$—$V$ 图,此过程为逆循环,$\Delta E = 0$,根据热力学第一定律 $Q = A < 0$,

故气体对外做负功,气体向外界放热.

答案选 A

**34.(北京市 1999 年)** 质量一定的某种理想气体,(1) 对等压过程来说,气体的密度随温度的增加而_____,并在图中绘出曲线.(2) 对等温过程来说,气体的密度随压强的增加而_____,并在图中绘出曲线.




(1)等压曲线　　(2)等温曲线

**本题考点:**理想气体压强公式

**解:**(1)$P$ 一定,$P = nkT$,$T$ 一定,$n \propto \frac{1}{T}$,又 $\rho = nm =$

$\frac{mR}{kT}$($m$ 为分子质量),故 $\rho \propto \frac{1}{T}$,即气体的密度减少.(2)$T$ 一定,$P = \frac{M}{\mu V}RT$,即气体的密度增加.

空处分别填减少、增加.

**35.(北京理工大学 2002 年)** 1mol 的单原子分子理想气体从状态 $A$ 变为状态 $B$,如果不知是什么气体,变化过程也不知道,但 $A$、$B$ 两态的压强、体积和温度都知道,则可求出:

A. 气体所作的功　　B. 气体内能的变化

C. 气体传给外界的热量　　D. 气体的质量

**本题考点:**理想气体内能的特性

**解:**1mol 的单原子分子理想气体内能增量

$$\Delta E = 1 \times \frac{i}{2}R\Delta T = \frac{3}{2}R\Delta T$$　内线是状态量

答案选 B

**36.(北京市 1999 年)** 一定量的刚性双原子分子理想气体,开始时处于压强为 $P_0 = 1.0 \times 10^5 Pa$,体积为 $V_0 = 4 \times 10^{-3} m^3$,温度为 $T_0 = 300K$ 的初态,后经等压膨胀过程温度上升到 $T_1 = 450K$,再经绝热过程温度降回到 $T_2 = 300K$,求气体在整个过程中对外作的功.

**本题考点:**热力学第一定律,理想气体状态方程,热力学系统的功

**解:**设气体有 $\gamma$ 摩尔

由于 $T_2 = T_0$,则气体在整个过程中内能变化 $\Delta E = 0$.

由热力学第一定律　$Q = \Delta E + A$

故气体在整个过程中对外作的功等于吸收的热量 $A = Q$

等压膨胀过程:

$$P_0V_0 = \gamma RT_0 \Rightarrow \gamma R = \frac{P_0V_0}{T_0}$$

$$Q_1 = \gamma C_P \Delta T$$

$$= \gamma \frac{7}{2} R(T_1 - T_0)$$

$$= \frac{7}{2}(T_1 - T_0)\frac{P_0 V_0}{T_0}$$

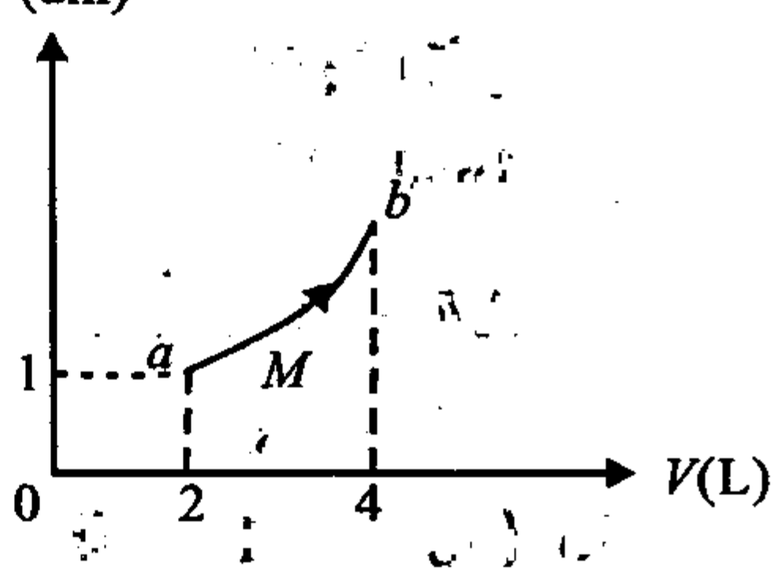
$$= 700(\mathrm{J})$$

绝热过程：$Q_2 = 0$

则气体在整个过程中对外作的功为

$$A = Q_1 + Q_2 = 700(\mathrm{J})$$

**37.（北京理工大学 2002 年）** 如图，一定量的氮气（视为刚性分子理想气体）从状态 $a$ 经 $aMb$ 过程膨胀到状态 $b$. 曲线 $aMb$ 的方程为 $P = \alpha V^2$，式中 $\alpha$ 为常量：$\alpha = 0.25(\mathrm{atm}/L^2)$.




求此过程中气体吸收的热量，对外所作的功和内能变化.

**本题考点：**理想气体的内能，状态方程，热力学第一定律

**解：**由图知，$\mathrm{P_a} = 1\mathrm{atm}$　　$V_a = 2L$　　$\mathrm{V_b} = 4L$

$$P_b = \alpha V_b^2 = 0.25 \times 4^2 = 4(\mathrm{atm})$$

内能变化　$\Delta E = \gamma \cdot \frac{i}{2} R(T_b - T_a)$

$\because P_b V_b = \gamma R T_b$　　（$\gamma$ 为气体摩尔数）

$P_b V_b = \gamma R T_b$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{i}{2}(P_b V_b - P_a V_a)$$

$$= \frac{5}{2} \times (1.01 \times 10^5 \times 4 \times 10^{-3} - 1.01 \times 10^5 \times 2 \times 10^{-3})$$

$$\doteq 3.5 \times 10^3(\mathrm{J})$$

对外做功

$$A = \int_{V_a}^{V_b} PdV = \int_{V_a}^{V_b} \alpha V^2 dV = \left(\frac{1}{3}\alpha V^3\right)_{V_a}^{V_b}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{0.25 \times 1.01 \times 10^5}{(10^{-3})^2} \times [(4 \times 10^{-3})^3 - (2 \times 10^{-3})^3]$$

$$= 4.7 \times 10^2(\mathrm{J})$$

吸收的热量

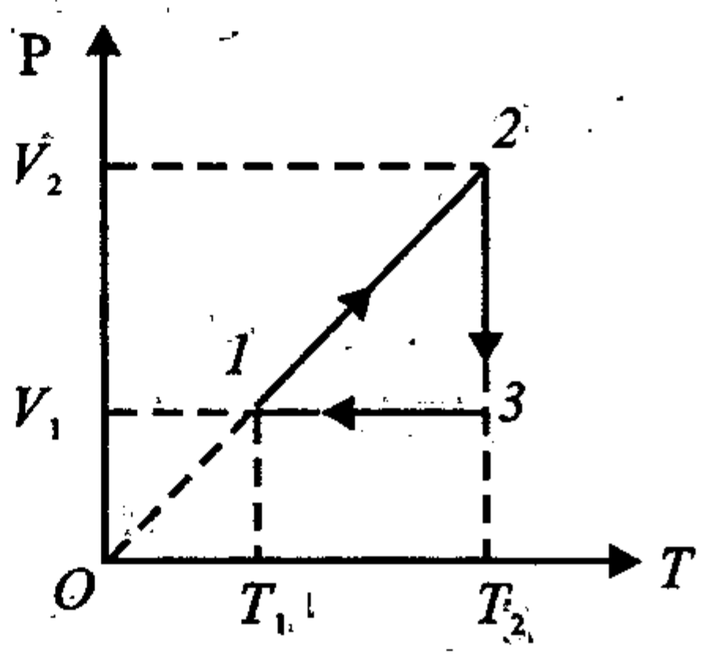
$$Q = A + \Delta E = 4.7 \times 10^2 + 3.5 \times 10^3 = 4.1 \times 10^3(\mathrm{J})$$

**38.(北京师范大学 2002 年)** 如果一摩尔的理想气体进行如图所示的准静态循环,理想气体的摩尔定压热容量 $C_p$ 为已知.

试问:(1)1→2,2→3,3→1 各是什么样过程?

(2) 写出在每个过程中系统对外界做的功和从外界吸收的热量.

(3) 求循环的效率.




**本题考点:** 理想气体等值过程的热量、功及内能增量,热机效率

**解:**(1)1→2 等压过程,2→3 等温过程,3→1 等容过程

(2)1→2 压强 $P_1$ 不变

对 1mol 理想气体有:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= P_1(V_2 - V_1) \\ \frac{P_1 V_1}{T_1} &= R \Rightarrow P_1 = R\frac{T_1}{V_1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$A_1 = R(V_2 - V_1)\frac{T_1}{V_1} > 0$,系统对外界做正功;

$Q_1 = C_P(T_2 - T_1) > 0$,系统从外界吸收热量.

2→3 过程,等温过程 $\Delta E = 0$.

$$A_2 = Q_2 = \int_{V_2}^{V_1} PdV = \int_{V_2}^{V_1} \frac{RT_2}{V}dV = T_2 R \ln\frac{V_1}{V_2} < 0$$

系统放热

$3 \rightarrow 1$ 过程，等容过程 $A_3 = 0$

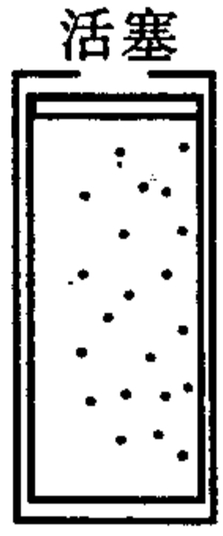
$$Q_3 = \Delta E = C_V(T_1 - T_2) = (C_p - R)(T_1 - T_2) < 0$$

系统放热

$$(3)\eta = \frac{A}{Q_{吸}} = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{Q_1}$$

$$= \frac{R(V_2 - V_1)\frac{T_1}{V_1} + T_2 R \ln \frac{V_1}{V_2}}{C_p(T_1 - T_2)}$$

**39.（北方交大2002年）** 如图所示，体积为30$L$的圆柱形容器内，有一能上下自由滑动的活塞（活塞的质量和厚度可忽略），容器内盛有1摩尔，温度为127℃的单原子分子理想气体．若容器外大气压强为1标准大气压，气温为27℃，求：当容器内气体与周围达到平衡时需向外排放的热量．（摩尔气体常量 $R = 8.31\ \mathrm{mol^{-1} \cdot K^{-1}}$）．




**本题考点：**理想气体状态变化过程中的功、内能与热量计算

**解：**开始时容器内的压强 $P_1$ 可由理想气体状态方程求出

$$P_1 = \frac{nRT_1}{V_1} = \frac{1 \times 8.31}{30 \times 10^{-3}} \times 400 = 1.108 \times 10^5 Pa$$

$P_1 > 1.013 \times 10^5 Pa$，当气体与外界达到平衡时，内部的压强必为标准大气压，内外温度也相等，且无热量传递，最后的体积为

$$V_2 = \frac{P_1 V_1}{P_0 T_1} T_2 = \frac{1.108 \times 10^5 \times 30 \times 10^{-3}}{1.013 \times 10^5 \times 400} \times 300 = 24.6(L)$$

整个过程可看成准静态过程．设想实际过程为先等容放热，再等压压缩放热

从初态到末态的内能改变量为

$$\Delta E = nC_v(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) = 1.25 \times 10^3 \mathrm{J}$$

压缩过程对外界做的功

$A = P_0(V_2 - V_3)$

$= 1.013 \times 10^5 \times (24.5 - 30) \times 10^{-3}$

$= -5.5 \times 10^2 \text{J}$

由热力学第一定律知系统对外放热至少为

$Q_{放} = \Delta E + A = -(1.25 \times 10^3 5 + 550)$

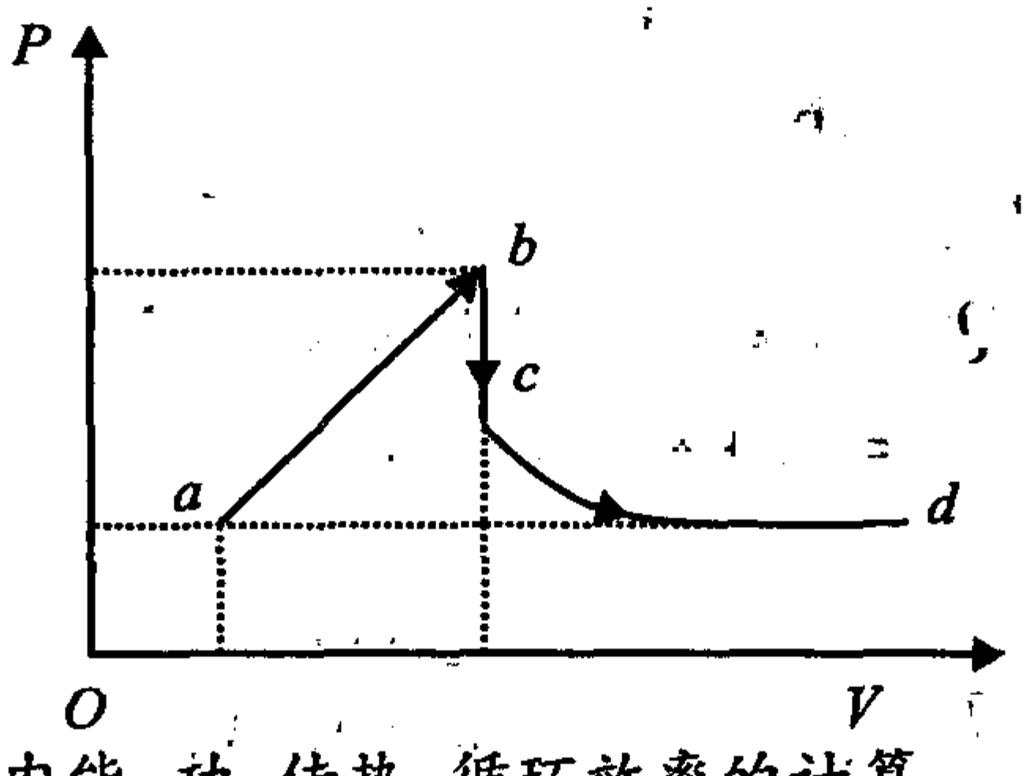
$= -1.8 \times 10^3 (\text{J})$　　（负号表示放热）

**40.（华东理工大学 2002 年）** 一摩尔双原子分子视作理想气体，经过图示的过程，$ab$ 直线，$bc$ 是等容过程、$cd$ 是等温过程，已知状态 $a$、$b$、$c$、$d$ 的状态参量 物体 $a(P_1, V_1)$，$b(3P_1, 3V_1)$，$c(2P_1, 3V_1)$，$P_d = P_a$，求：

(1) 从 $a$ 到 $b$ 气体内能的变化；

(2) $abcd$ 过程中气体所作的功；

(3) 气体经过程 $abcd$ 后由等压过程回到 $a$ 构成一循环过程，求此循环过程的效率.




**本题考点：**内能、功、传热、循环效率的计算

**解：**(1) 由理想气体状态方程 $P_1 V_1 = nRT_a = RT_a$，$a$ 点温度为 $T_a = \frac{1}{R} P_1 V_1$，同理 $b$ 点的温度 $T_b = \frac{9}{R} P_1 V_1$，对于 1mol 理想气体双原子分子，$C_v = \frac{5}{2} R$，由内能的变化公式得：

$$\Delta E_{ba} = 1 \times \frac{5}{2} R(T_b - T_a) = 20 P_1 V_1(\mathrm{J})$$

(2) $b \to c$ 过程不做功，$a \to b$ 过程的功的大小为 $ab$ 线下的梯形面积大小

$$\frac{1}{2}(P_1 + 3P_1)(3V_1 - V_1) = 4P_1 V_1$$

$c \to d$ 等温过程的功为

$$nRT_c \ln \frac{V_d}{V_e} = RT_c \ln \frac{P_c}{P_d} = RT_c \ln 2$$

而 $T_c = \frac{P_c}{P_b} T_b = \frac{2P_1}{3P_1} \cdot \frac{9}{R} P_1 V_1 = \frac{6}{R} P_1 V_1$，则

$$A_{abcd} = 4P_1 V_1 + 6P_1 V_1 ln2(\mathrm{J})$$

(3) $P_c V_c = P_d V_d$，$V_d = \frac{2P_1 \cdot 3V_1}{P_1} = 6V_1$

每一循环过程中的有用功为

$$\begin{aligned} A &= A_{abcd} - A_{da} \\ &= (4 + 6\ln 2) P_1 V_1 - P_1(V_d - V_a) \\ &= (6\ln 2 - 1) P_1 V_1 \end{aligned}$$

整个过程只有 $a \to b$ 及 $c \to d$ 吸热，总吸热为：

$$\begin{aligned} Q_{吸} &= \Delta E_{ab} + 4P_1 V_1 + PT_c \ln 2 \\ &= (24 + 6\ln 2) P_1 V_1 \end{aligned}$$

循环效率为

$$\eta = \frac{A}{Q_{吸}} = \frac{(6\ln 2 - 1) P_1 V_1}{(24 + 6\ln 2) P_1 V_1}$$

$$= \frac{6\ln 2 - 1}{6\ln + 24} = 11.2\%$$

**41.（清华大学 2001 年）** 质量为 $M$，温度为 $T_1$ 的水与同质量而温度为 $T_2$ 的水在等压条件下绝热的混合，整个系统的熵变是 _____.

本题考点：熵的变化

解：

$$\Delta S = \frac{M}{M_{\text{mol水}}}\int_{T_1}^{T_1-\frac{T_2}{2}} \frac{C_P dT}{T} + \frac{M}{M_{mol水}}\int_{T_1}^{T_1-\frac{T_2}{2}} \frac{C_P dT}{T}$$

$$= \frac{M}{M_{\text{mol水}}} C_p \ln\left(\frac{T_1 - T_2}{2}\right) - \ln T_1 + \frac{M}{M_{\text{mol水}}} C_p \ln\left(\frac{T_1 - T_2}{2}\right) - \ln T_2$$

$$= \frac{M}{M_{mol水}} C_p \ln \frac{(T_1 - T_2)^2}{4T_1T_2}$$

空处填$\frac{M}{M_{mol水}} C_p \ln \frac{(T_1 - T_2)^2}{4T_1T_2}$

**42.（清华大学 2000 年）** 工作在一个高温热源和一个低温热源间的热机：

A. 用理想气体做工作物质的热机效率最高；

B. 做可逆卡诺循环的热机效率最高，与工作物质无关；

C. 做不可逆非卡诺循环的热机效率最高；

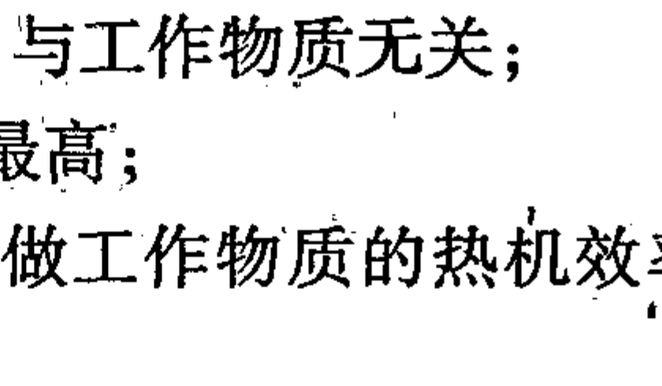
D. 做不可逆卡诺循环且用理想气体做工作物质的热机效率最高.

本题考点：卡诺循环、卡诺定理

解：卡诺定理指出可逆卡诺循环的热机效率最高且与工作物质无关

答案选 B

**43.（中国科学院 2001 年）** 如图所示，1 mol 的理想气体氢（比热容比 $\gamma = 1.4$），在状态 $a$ 的参量为：$V_a = 2 \times 10^{-2} m^3$；$T_a = 300\text{K}$. 在状态 $c$ 的 $a$ 的参量为：$V_c = 4 \times 10^{-2}\text{m}^3$；$T_c = 300\text{K}$. 计算其熵差.



**本题考点**:利用等温线求熵差

**解**:由所给条件知,$a$、$c$两状态位于$P-V$图上一条等温线上,计算熵可沿该温线积

$$S_c - S_a = \int_a^c \frac{dQ}{T}$$

在等温线上 $dQ = dW = pdV$

由于是理想气体 $pV = RT \rightarrow P = \frac{RT}{V}$

$$S_c - S_a = \int_a^c PdV/T = \int_a^c R\frac{dV}{V} = R\ln\frac{V_c}{V_a} = R\ln 2$$

代入数值

$$S_c - S_a = 5.76(J/K)$$

**44.(清华大学2002年)** 一开口容器内有500克,-20℃的冰,容器的质量忽略不计.对此容器以420焦耳/分的速率加热500分钟.求:(1) 多长时间后冰开熔化?(2) 多少时间后温度开始大于零度?(3) 最终水温为多高?(冰的比热为0.48卡/克·度,熔化热79.7卡/克).

**本题考点**:物体升温及发生相变时,吸收热量的计算

**解**:(1) 加热功率

$$P = 420(\text{焦}/\text{分}) = 100(\text{卡}/\text{分})$$

将-20℃的冰变成0℃的冰,需时$T_1$

则 $PT_1 = C_{冰}m(t - t_0)$

$$T_1 = \frac{C_{冰}m(t - t_0)}{P}$$

$$= \frac{0.48 \times 500 \times (0 + 20)}{100}$$

$$= 48(\text{分})$$

即加热后48分钟后冰开始熔化

(2) 将0℃的冰变成0℃的水,需时$T_2$,则

$$PT_2 = C_{溶} m$$

$$T_2 = \frac{C_{溶} m}{P} = \frac{79.7 \times 500}{100}$$

$$= 398.5(分)$$

$48 + 398.5 = 446.5(分)$

即加热 446.5 分钟后，温度开始大于 0℃.

(3) 在剩下的时间 $T_3$ 内，0℃ 的冰吸热升温到 $t_x$，则

$$PT_3 = C_{水} m(t_x - t'_0)$$

即 $t_x - t'_0 = \frac{PT_3}{c_{水} m}$，则

$$t_x = \frac{420 \times (500 - 446.5)}{4200 \times 500 \times 10^{-3}}$$

$$= 10.7℃$$

即最终水温为 10.7℃

**45.(清华大学 2002 年)**　地球和太阳是热平衡的吗?它们熵的变化和太阳传热给地球有关吗?熵的变化和传热的方式有关吗?

**本题考点:**热平衡及熵的基本概念

**答:**地球和太阳之间有热量传递，不是热平衡的，熵为态函数，它们熵的变化与太阳传热给地球有关，但与传热方式没有关系.

**46.(清华大学 2002 年)**　在什么温度下，物体的热运动的平均平动动能为 1 电子伏特?在此温度下是否还存在固态铁?(玻尔兹曼常数为 $1.38 \times 10^{-23} J \cdot K^{-1}$)

**本题考点:**热运动平均动能公式.

**解:**考虑平均平动能 $\overline{\varepsilon}_{kt} = \frac{3}{2} kT$，

则 $T = \frac{\overline{\varepsilon}_{kt}}{\frac{3}{2} k}$

$$= \frac{2 \times 1.6 \times 10^{-19}}{3 \times 1.38 \times 10^{-23}}$$

$$= 7729\text{K}$$

$$= 7456℃$$

常压下铁的熔点为 1539℃，故常压下在温度 7456℃ 下不存在固态铁.

**47.（清华大学 1999 年）** 将 20 克 0℃ 的冰放入装有 120 克 70℃ 水的烧杯中，忽略烧杯的热容量. 求混合后的最终温度.（冰的溶解热为 80 卡／克，水的定压比热为 1 卡／克·度）

**本题考点：**不同温度混合的热平衡

**解：**水升温的收热 $Q_2 = m_1 C_2 \Delta t$

则 $20 \times 80 + 20 \times t = 120 \times (70 - t)$

即 $140t = 6800$

$t = 4.9℃$

# 第四部分　光　学

## 一、考点综述

### 1. 单球面近轴成像

焦距

$$f = \frac{-n}{n' - n} r$$

$$f' = \frac{n'}{n' - n} r$$

高斯公式

$$\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1$$

### 2. 扬氏双缝干涉

明、暗纹中心位置

$$x = \begin{cases} \pm k \dfrac{D}{d}\lambda & \text{(明纹)} \\ \pm \dfrac{(2k+1)}{2} \dfrac{D\lambda}{d} & \text{(暗纹)} \end{cases}$$

$(k = 0、1、2、3\cdots\cdots)$

相邻明(暗) 纹间距

$$\Delta x = \frac{D}{d}\lambda$$

### 3. 薄膜干涉

(1) 光程差

$$\delta = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \delta'$$

$$\text{而 } \delta' = \begin{cases} 0 & (n_1 < n_2 < n_3; n_1 < n_2 < n_3) \\ \dfrac{\lambda}{2} & (n_1 > n_2 < n_3; n_1 < n_2 > n_3) \end{cases}$$

(2) 劈尖

厚度差　　$\Delta e = \dfrac{\lambda}{2n_2}$

条纹间距　$\Delta l = \dfrac{\Delta e}{\sin\theta}$

(3) 牛顿环

明、暗环半径　　$r = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2k+1}{2}\dfrac{R\lambda}{n_2}} & \text{(明环)} \\ \sqrt{k\dfrac{R\lambda}{n_2}} & \text{(暗环)} \end{cases}$

$(k = 0,1,2,\cdots)$

(4) 迈克耳逊干涉仪

动镜的轴向移动量　$d = N\dfrac{\lambda}{2}$

**4. 衍射**

(1) 单缝衍射明、暗纹条件

$$a\sin\theta = \begin{cases} 0 & \text{(中央明纹)} \\ \pm k\lambda & \text{(暗纹)} \\ \pm (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{(次明纹)} \end{cases}$$

$(k = 1,2,3,\cdots)$

中央明纹宽度

$$\Delta x_0 = \frac{f\lambda}{a}$$

次明纹宽度

$$\Delta x = \frac{f\lambda}{2a}$$

(2) 光学仪器的最小分辨角

$$\theta_0 = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

(3) 光栅方程

$$(a + b)\sin\theta = \pm k\lambda$$

斜入射光栅方程

$$(a + b)(\sin\theta \pm \sin\alpha) = \pm k\lambda$$

$$(k = 0,1,2,\cdots)$$

(4) 布喇格公式

$$2d\sin\theta = k\lambda \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$$

**5. 马吕斯定律**

$$I = I_0\cos^2\alpha$$

**6. 布儒斯特定律**

$$\tan i_b = \frac{n_2}{n_1}$$

**7. 波片**

线偏振光垂直入射时，$o$ 光与 $e$ 光的光程差

$$\delta = d(n_o - n_e) = \begin{cases} (2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{二分之一波长} \\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{4} & \text{四分之一波长} \end{cases}$$

$$(k = 0,1,2,\cdots)$$

利用四分之一波片可以由线偏振光得到椭圆或圆偏振光.

## 二、经典题解

### Ⅰ. 几何光学

**1.（清华大学 2002 年）** 折射率为 1.50 的玻璃棒二端磨成半

径为 5cm 的半球面.一个物体在轴上距一端 20cm 时,最后成像于距另一端 40cm 处,求棒的长度.

**本题考点:**单球面近轴成系的焦距计算及高斯公式.

**解:**由 $f = \frac{-n}{n'-n}r, f' = \frac{n'}{n'-n}r$ 有

$$f_1 = -\frac{5}{1.5-1} = -10\text{cm}$$

$$f_1' = -\frac{1.5\times 5}{1.5-1} = -15\text{cm}$$

$$f_2 = \frac{-1.5\times(-5)}{1.5-1} = 15\text{cm}$$

$$f_2' = \frac{-5}{1.5-1} = 10\text{cm}$$

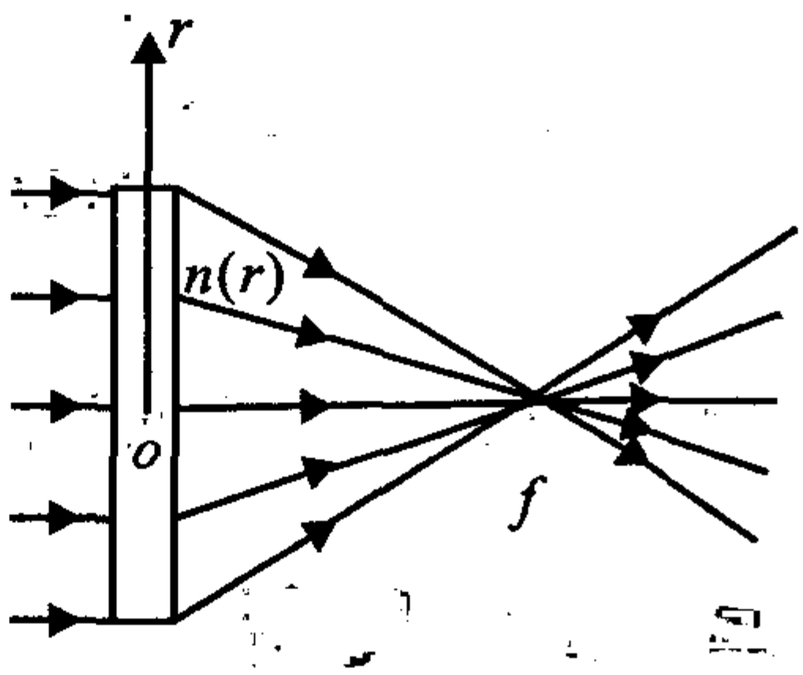
由 $\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1$,有

$$p_1' = \frac{p_1}{p_1 - f_1}f_1' = \frac{-20\times 15}{-20+10} = 30\text{cm}$$

$$p_2 = \frac{p_2'}{p_2' - f_2'}f_2 = \frac{40\times 15}{40+10} = 12\text{cm}$$

故棒长为:$p_1' - p_2 = 30 - 12 = 18\text{cm}$

**2.(南京大学 2002 年)** 一半径为 10m,厚度为 0.05m,用人工绝缘材料加工成的圆盘,被利用做成一个微波透镜.此圆盘的折射率随 r 而连续变化,中心为 1.6,边缘为 1.1,而圆盘上任意一点厚度都一样,试问用此圆盘一凸透镜,折射率如何随 r 的增大而变化?此透镜焦距多大?(见图)




**本题考点:**透镜

**解:**设透镜焦距为 $f$

光程 $l = \frac{f}{\cos\theta} + ne = \sqrt{f^2 + r^2} + ne$

$\sqrt{f^2 + r^2} + ne$ = 常数，

$r = 0$ 时，$l = f + 1.6 \times 0.05$

$r = 10$ 时，$\sqrt{f^2 + 10^2} + 1.1 \times 0.05 = f + 1.6 \times 0.05$

$f^2 + 10^2 = (f + 0.5 \times 0.05)^2$

$0.05f + 0.5^2 \times 0.05^2 = 100$ $f = 2000m = 2km$

对 $r$ 处的光程 $l_r = \sqrt{f^2 + r^2} + e_r n_r = f + e_0 n_0$

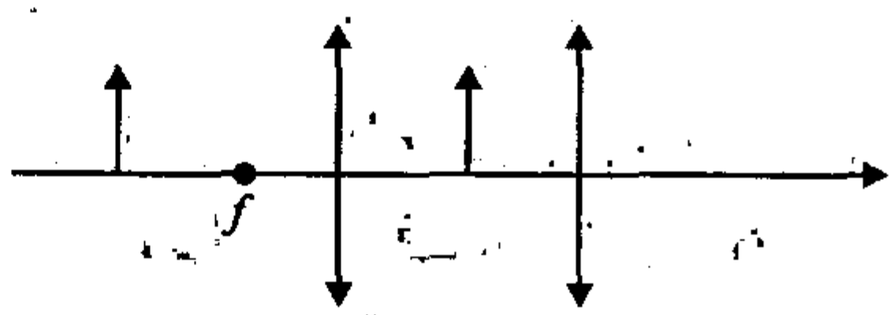
$n_r = 4 \times 10^4 - 20\sqrt{4 \times 10^6 + r^2} + 1.6$

**3.（清华大学 1999 年）** 一个高 $h$ 的发光体位于一个焦距为 10cm 的会聚透镜的左侧 40cm 处.第二个焦距为 20cm 的会聚透镜位于第一个会聚透镜的右侧 30cm 处.(a) 求最终成像的位置;(b) 像的高度与物体高度 h 之比.

**本题考点:** 透镜组的成象,放大率

**解:** $\frac{1}{u_1} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f}$ $\frac{1}{40} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{10}$

$\frac{1}{v_1} = \frac{3}{40}$ $v_1 = \frac{40}{3}$




放大率 $= \frac{v}{u} = \frac{4}{3}$

$u_2 = 30 - \frac{40}{3} = \frac{50}{3}$

$\frac{1}{u_2} + \frac{1}{v_2} = \frac{1}{f_2}$

$\frac{1}{v_2} = \frac{1}{20} - \frac{1}{50/3} = \frac{5 - 6}{100} = -\frac{1}{100}$ $v_2 = -100\text{cm}$

放大率 $\frac{v_2}{u_2} = \frac{100}{\frac{40}{3}} = 7.5$ 总放大率 $\frac{30}{4} \times \frac{4}{3} = 10$ 倍

## Ⅱ. 光的干涉

**4.(北京大学 2002 年)** 说明影响干涉条纹对比度的因素.

**本题考点:**干涉

**解:**① 两相干光波振幅不等的影响

对比度 $V = \dfrac{2A_1A_2}{A_1^2 + A_2^2}$

$A_1 = A_2$ 时, $V = 1$

$A_1 \neq A_2$ 时, $V < 1$, $A_1 - A_2$ 差愈大, $V$ 越小.

② 光源大小的影响 —— 空间相干性

③ 光源单色性的影响 —— 时间相干性

**5.(北京大学 2002 年)** 写出光程表达式,指出其物理意义与几何程长的区别.

**本题考点:**光程

**解:** $L = \int ndl$ 或 $L = \sum_{i=1}^{n} n_i l_i$

$dl$ 或 $l_i$ 是光在第 $i$ 介质走的几何程长.

光程表达式的物理意义,把介质传播的变为真空中传播,使两者的时间相同,位相的改变相同.

**6.(北京大学 2002 年)** 杨氏干涉仪中,试分别分析横向宽度 $b$ 增加,缝宽 $a$ 增加对干涉条纹的影响.

**本题考点:**杨氏干涉仪

**解:**杨氏干涉仪中,我们一般 $a$ 较小不考虑 $a$ 对条纹的影响,条纹的间隔 $\Delta x = \dfrac{D}{b}\lambda$, $D$ 是双缝到屏的距离, $\lambda$ 是入射波的波长. $b$ 增加, $\Delta x$ 减小条纹变密, $a$ 增加,我们要考虑衍射问题,杨氏干涉就过度到双缝衍射. $a$ 增加中央变亮,随着条纹的极数 $K$ 增大,亮度变小.

**7.(北京大学 2002 年)** 杨氏双缝干涉装置对钠黄光($\lambda$ =

5890?)产生角距离为0.2°的干涉条纹,若将此装置浸入水中,问干涉条纹角距离有多大?

**本题考点:**杨氏双缝干涉

**解:**角距离　$\frac{\Delta x}{D} = \frac{\lambda}{d} = 0.2°$

在水中角距离变为　$\frac{\Delta x^1}{D} = \frac{\lambda}{nd} = \frac{1}{n} = 0.2° = \frac{1}{\frac{4}{3}} \times 0.2°$

$$= \frac{0.6^0}{4} = 0.15°$$

**8.(北京大学2000年)**　在杨氏干涉实验中,两小孔的距离为1mm,观察屏离小孔的垂直距离为1m.

(1)使用两种光源,$\lambda_1 = 600\text{nm}$,$\lambda_2 = 546\text{nm}$,试求

① 两光波分别形成的条纹间距

② 两组条纹的第10级亮纹之间的距离.

(2)若改变实验装置结构,使上述$\lambda_1$和$\lambda_2$分别照亮杨氏双孔之$S_1$和$S_2$,定性说明实验现象的变化.

**本题考点:**杨氏双缝干涉

**解:**(1)① $\Delta x = \frac{D}{d}\lambda$

$x_1 = 600\text{nm}$

$\Delta x_1 = \frac{1}{1 \times 10^{-3}} \times 6 \times 10^{-7} = 6 \times 10^{-4}\text{m} = 0.6\text{mm}$

$\lambda_2 = 546\text{nm}$

$\Delta x_2 = \frac{1}{1 \times 10^{-3}} \times 5.46 \times 10^{-7} = 5.46 \times 10^{-4} m$

②$\Delta x_{10} = k\frac{D}{d}\Delta\lambda = 10 \times \frac{1}{10^{-3}} \times (600 - 546) \times 10^{-9}$

$= 5.4 \times 10^{-4}\text{m}$

(2)双缝干涉现象消失,出现$\lambda_1$、$\lambda_2$两套衍射条纹.

**9.(清华大学 2002 年)** 波长为 500nm 的光从空气中垂直入射到一厚度为 $1 \times 10^{-4}$cm,折射率为 1.375 的薄膜.求:(1) 沿光在薄膜中的路径有多少个波长?(2) 在薄膜二个表面上反射的波的相位差为多大?为什么?

**本题考点:**薄膜干涉中光程差的计算及光程差与相位差的关系

**解:**(1) $\delta_0 \doteq 2ne$

$$= 2 \times 1.375 \times 10^{-4} \times 10^{-2}$$

$$= 2.75 \times 10^{-6}(\mathrm{m})$$

$$K = \frac{\delta_0}{\lambda} = \frac{2.75 \times 10^{-6}}{500 \times 10^{-10}} = 55$$

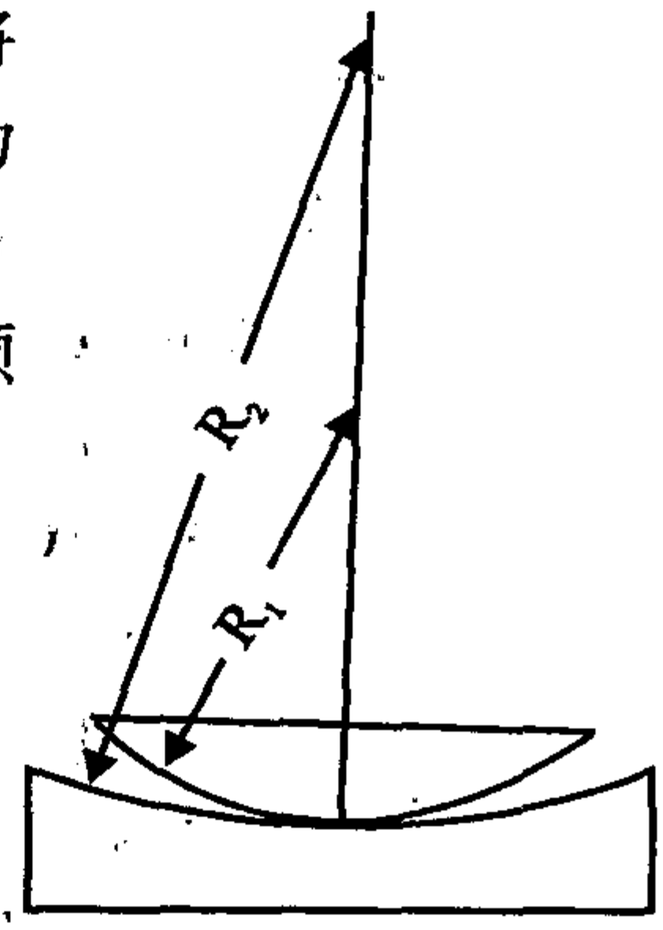
$$(2)\delta = \delta_0 + \frac{\lambda}{2}$$

$$= (55 + \frac{1}{2})\lambda$$

$$\Delta\Phi = -\frac{2\pi}{\lambda}\delta = -111\pi$$

光走的几何路差和半波损失,造成相位差.

**10.(中国科学技术大学 1998 年)** 将曲率半径为 $R_1$ 的平凸透镜放在曲率半径为 $R_2$ 的凹球面上(见图),得到牛顿环.$R_2 > R_1$,若光波波长为 $\lambda$.问在反射光中观牛顿环时,第 $m$ 个暗环半径 $r_m$ 为多少?




**本题考点:**牛顿环暗环半径公式

**解:** $r^2 = R_1^2 - (R_1 - h_1)^2 \approx 2R_1h_1$

同理 $r^2 \approx 2R_2h_2$

空气膜厚:

$$h = h_1 - h_2 = \frac{r^2}{2}(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$$

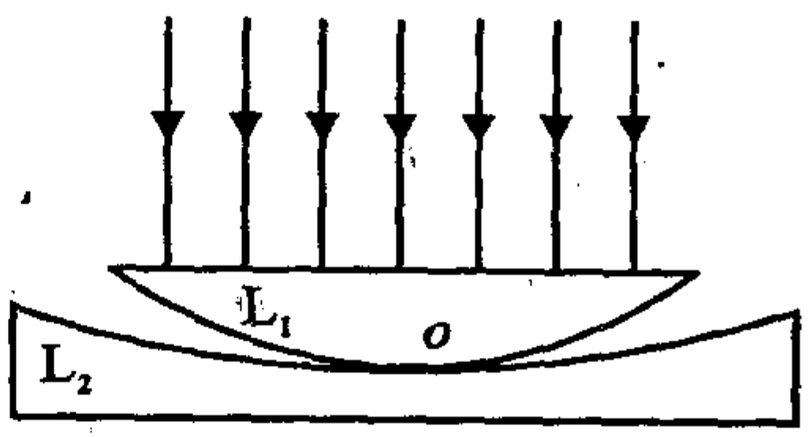
暗环条件：$2h_m + \frac{\lambda}{2} = (m + \frac{1}{2})\lambda$

$$2h_m = m\lambda$$

$$2\frac{r_m^2}{2}(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) = m\lambda$$

$$r_m = \sqrt{\frac{m\lambda R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$$

**11.（中国科学院 2000 年）** 如图所示为一观察干涉条纹的实验装置，$R_1$ 为透镜 $L_1$ 下表面的曲率半径，$R_2$ 为透镜 $L_2$ 上表面的曲率半径. 今用一束波长为 600nm 的单色平行光垂直照射，由反射光测得第 20 级暗条纹半径 r 为 3.0cm，又已知 $R_2$ 为 2.00m. 试求透镜 $L_1$ 下表面的曲率半径.




**本题考点：**牛顿环暗环半径公式

**解：**由 $R_1^2 - (R_1 - h_1)^2 = r^2$ 得　　$h_1 \approx \frac{r^2}{2R_1}$

同理　$h_2 \approx \frac{r^2}{2R_2}$，

$$h = h_1 - h_2 = \frac{r^2}{2R_1} - \frac{r^2}{2R_2} = \frac{r^2}{2}(\frac{R_2 - R_2}{R_2 R_1}) \quad ①$$

由暗环处光程差：

$$\delta = 2h + \frac{\lambda}{2} = (2m_1 + 1)\frac{\lambda}{2}(m = 0,1,2\cdots)$$

可知 $h = \frac{m}{2}\lambda$ ②

综合 ①、② 可得

$$R_1 = \frac{r^2 R_2}{r^2 + m\lambda R_2}$$

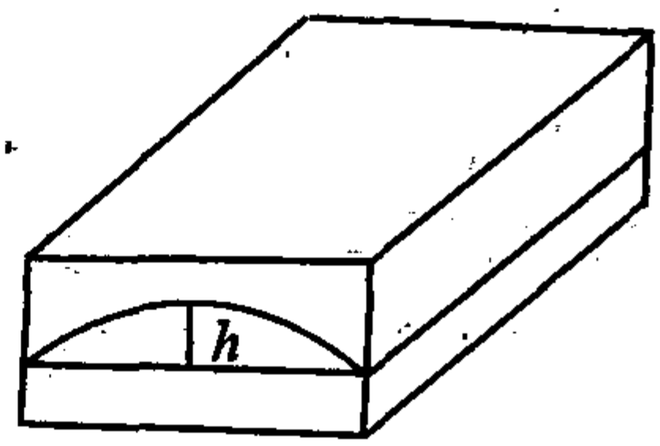
$$= \frac{(3.0 \times 10^{-2})^2 \times 2}{(3.0 \times 10^{-2})^2 + 20 \times 6000 \times 10^{-10} \times 2} \approx 1.95\text{m}$$

**12.(中国科学院 2001 年)** 如图所示,一块曲率半径为 $R$ 的柱面凹透镜,盖在一块平板玻璃上,形成空气薄膜.沿波长为 $\lambda$ 的单色光垂直照射,中央处空气膜厚度为 $h = \frac{7\lambda}{4}$.问:

(1) 若从反射方向看,中央是亮纹还是暗纹?总共能看到几条亮纹?

(2) 算出纹外边一条亮纹到中央的距离.

**本题考点:**等厚干涉与半波损失.




**解:**(1) $\frac{7}{2}\lambda + \frac{\lambda}{2} = 4\lambda$

中央为 4 级亮纹,共看到 7 条亮纹

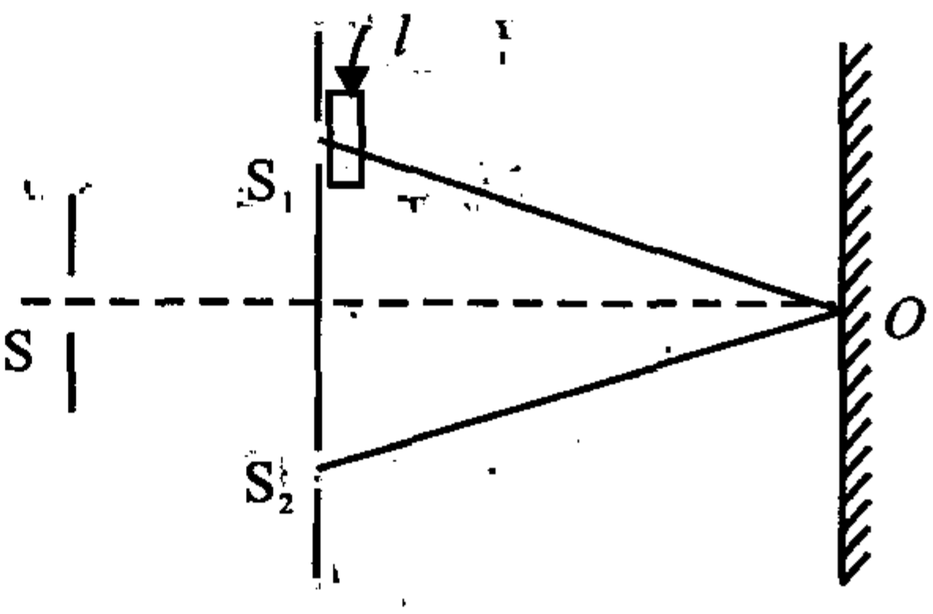
$$2h_1 + \frac{\lambda}{2} = \lambda$$

$$\text{即 } h_1 = \frac{\lambda}{4}$$

(2) $$R^2 - x^2 = [R - (h - h_1)]^2$$

$$x = \sqrt{2R(h - h_1) - (h - h_1)^2} \approx \sqrt{3R\lambda}$$

**13.(中山大学 2002 年)** 杨氏双缝实验中,用波长 $\lambda$ 的单色光作光源.将一小块厚度为 $l$,折射率为 $n$ 的云母片贴在其中一个单缝上.若 $l$ 可变,与两狭缝中点对称的屏幕中心 $O$,其干涉条纹将是 $l$ 的函数.令 $l = 0$ 时,$O$ 处光强为 $I_0$.求:




(1) 从两缝到达 $O$ 处的两光线光程差 $\delta$;

(2) $O$ 处光强为 $I_0$ 与 $l$ 的关系.

(3) 若要 $O$ 处光强最小,可取哪些 $l$ 值.

**本题考点**:光强、光程差、位相差、干涉相消

**解**:(1) 设云母片的厚度为 $l$,折射率为 $n$,由相干叠加得 $O$ 点的光强 $I$ 与位相差 $\Delta\varphi$ 满足 $I = 4I_0\cos^2\frac{\Delta\varphi}{2}$,其中 $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)l$,即光程差为 $\delta = (n-1)l$

(2) $O$ 点的光强 $I$ 与 $l$ 的关系为 $I = 4I_0\cos^2\frac{\Delta\varphi}{2}$

$$\doteq 4I_0\cos\left[\frac{\pi}{\lambda}(n-1)l\right]$$

(3) 要使 $O$ 处的光强 $I$ 最小,即干涉相消

$$\frac{\pi}{\lambda}(n-1)l = \frac{(2k+1)}{2}\pi$$

即
$$l = \frac{(2k+1)}{2(n-1)}\lambda \qquad (k = 0,1,2,3\cdots\cdots)$$

**14.(武汉大学 2002 年)**　欲在折射率为 1.5 的基片上镀一层介质薄膜,试说明该薄膜分别起增反作用或增透作用时,膜的折射率和厚度应满足的条件.

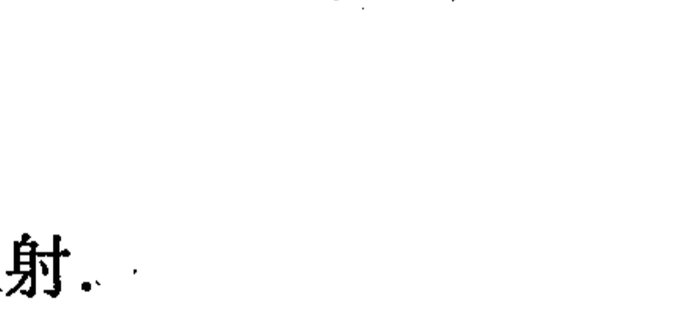
**本题考点**:增透膜和增反膜

**解**:设薄膜厚度 $e$,折射率为 $n$,垂直入射.

$$\text{在 } 1 < n < 1.5\begin{cases}\text{增反膜} & 2en = k\lambda \qquad k = 1,2,3\cdots\cdots \\ \text{增透膜} & 2en + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \qquad k = 1,2,3\cdots\cdots\end{cases}$$

$$n < 1.5\begin{cases}\text{增反膜} & 2en + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \\ \text{增透膜} & 2en = k\lambda\end{cases}$$

**15.(北京理工大学 2001 年)**　如图,用单色光垂直照射在观察牛顿环的装置上,当平凸透镜垂直向上缓慢平移而远离平面玻璃时,可以观察到这些环状干涉条纹




A. 向右平移　　B. 向中心收缩

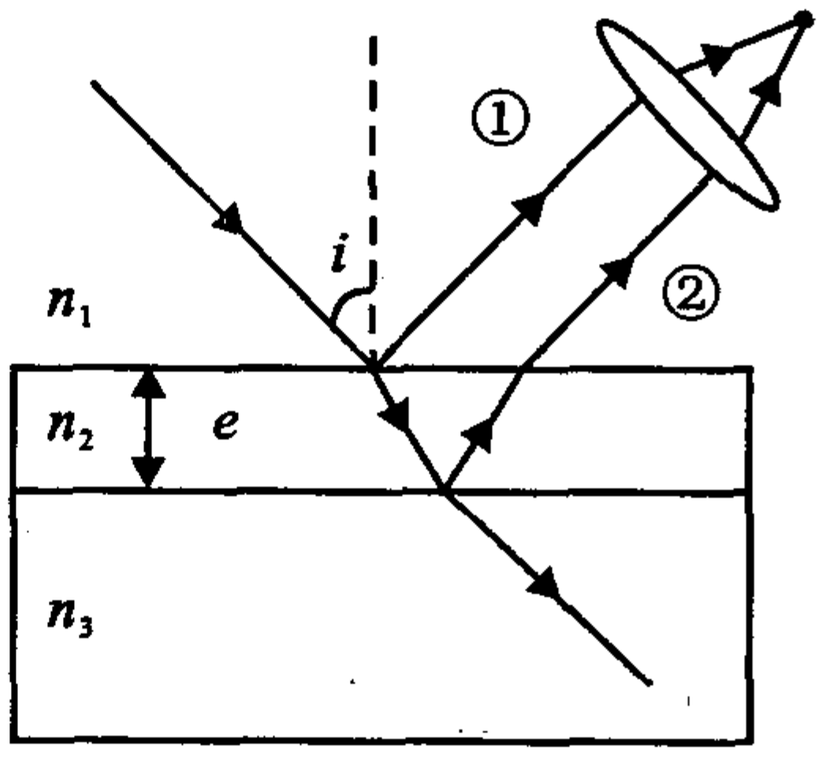
C. 向外扩张　　D. 静止不动　　E. 向左平移

**本题考点:**牛顿环

**解:**第 $k$ 级明纹 $2en + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$,与第 $k$ 级条纹对应的平凸透镜与平面玻璃之间距离 $e$ 不变,但与 $e$ 对应的牛顿环的半径变小.

答案选 B

**16.**(北京邮电大学 2002 年) 如图所示,波长为 $\lambda$ 的单色平行光以入射角 $i$ 射向一厚度为 $e$ 折射率为 $n_2$ 的平行平板状薄膜,图中三个折射率的大小关系为 $n_1 < n_2 > n_3$.求图中①②两条光线在相遇点的相位差,并给出干涉极大和极小的条件.




**本题考点:**等斜干涉的光程差,极大、极小条件

**解:**①② 光程差

$$\delta = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}$$

所以,相位差 $\Delta\Phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2 i}}{\lambda} + \pi$

极大条件 $2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$

即: $2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2 i} = (2k - 1)\frac{\lambda}{2}$ $(k = 1,2,3,4\cdots\cdots)$

极小条件

$2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$ $(k = 0,1,2,3,4\cdots\cdots)$

即 $2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2 i} = k\lambda$ $(k = 0,1,2,3,4)$

**17.(清华大学 1998 年)**　有一间隔为 0.2mm 的双缝,在距缝 100cm 处的屏上产生的干涉条纹间隔为 2.95mm,求该光的波长.

**本题考点:**杨氏双逢干涉

**解:**$\Delta x = \frac{D}{d}\lambda$

$$\lambda = \frac{d}{D}\Delta x = \frac{2 \times 10^{-4}}{1} \times 2.95 \times 10^{-3}$$

$$= 5.9 \times 10^{-7}\text{m}(\text{或 } 5900\text{Å})$$

**18.(清华大学 2000 年)**　如果同一空间中有两束光波,其振幅相同、振动方向相同、相位差恒定,但频率稍有差别,那么下列哪些叙述是正确的:

A. 空间每一点的能量是一样的;

B. 空间每一点的波的传播速度是不一样的;

C. 空间每一点的振幅是不一样的;

D.空间每一点的相位是一样的.

**本题考点:**拍

**解:**答案选 C

**19.(东北大学 2002 年)**　在比较复杂的光学系统中,常常包含有多个透镜,光能因反射而损失严重,为了减少入射光光能在透镜玻璃表面上反射时所引起的损失,常在镜面上镀一层厚度均匀的透明薄膜(常用的如 $MgF_2$,它的折射率 $n = 1.38$,介于玻璃与空气之间),利用薄膜的干涉使反射光减到最小,这样的薄膜称为增透膜,增透膜的厚度必须满足什么条件?(写出公式,设光的波长是 $\lambda$).

**本题考点:**增透膜

**解:**设膜为 $e$

透射光程差　$\delta = 2en + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$

$$e = (2k-1)\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{2n} \qquad k = 1,2,3\cdots\cdots$$

$$e = \frac{(2k-1)\lambda}{5.52} = 0.181(2k-1)\lambda$$

**20.(东北大学 2002 年)** 将演示牛顿环装置中的平凸透镜向上平移,在视场中观察到的牛顿环是向中心收缩还是向外冒.将整个牛顿环装置从空气中移到水中,牛顿环如何变化?

**本题考点:**等厚干涉、牛顿环

**解:**明纹条件 $\delta = 2en + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$ $(k = 1,2,3,4\cdots)$

透镜向上平移,同半径处 $e$ 增加,$k$ 也增加,因此观察到牛顿环中心向外冒

在空气中,明纹条件 $\delta = 2e + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$

水中,明纹条件 $\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$

$r_k = \sqrt{R(2k-1)\frac{\lambda}{2n}}$ ($R$ 为平凸镜的半径)

因此牛顿环变密

**21.(东北大学 2002 年)** 调节迈克逊干涉仪的一臂,在视场中观察到有 $N$ 条条纹向一侧移动,问调节了多大距离.(设所用光的波长是 $\lambda$)

**本题考点:**迈克尔逊干涉

**解:**设一臂移动的距离为 $e$,因此光线的光程差的改变

$\delta = 2e = N\lambda$

即调节了 $\frac{N}{2}\lambda$ 距离

**22.(东南大学 2001 年)** 为测定 $S_iO_2$ 的厚度,在 $S_iO_2$ 一侧腐蚀成劈尖形状,如图所示,今用 $\lambda = 5890\text{Å}$ 的光垂直照射到 $S_iO_2$ 上在垂直方向观察 $S_iO_2$ 劈尖的反射光干涉条纹,看到有七条暗纹,且第七条暗纹恰好位于 N 处,问 $S_iO_2$ 的厚度 d 为多少?再问:M 处(棱边)是明纹还是暗纹?

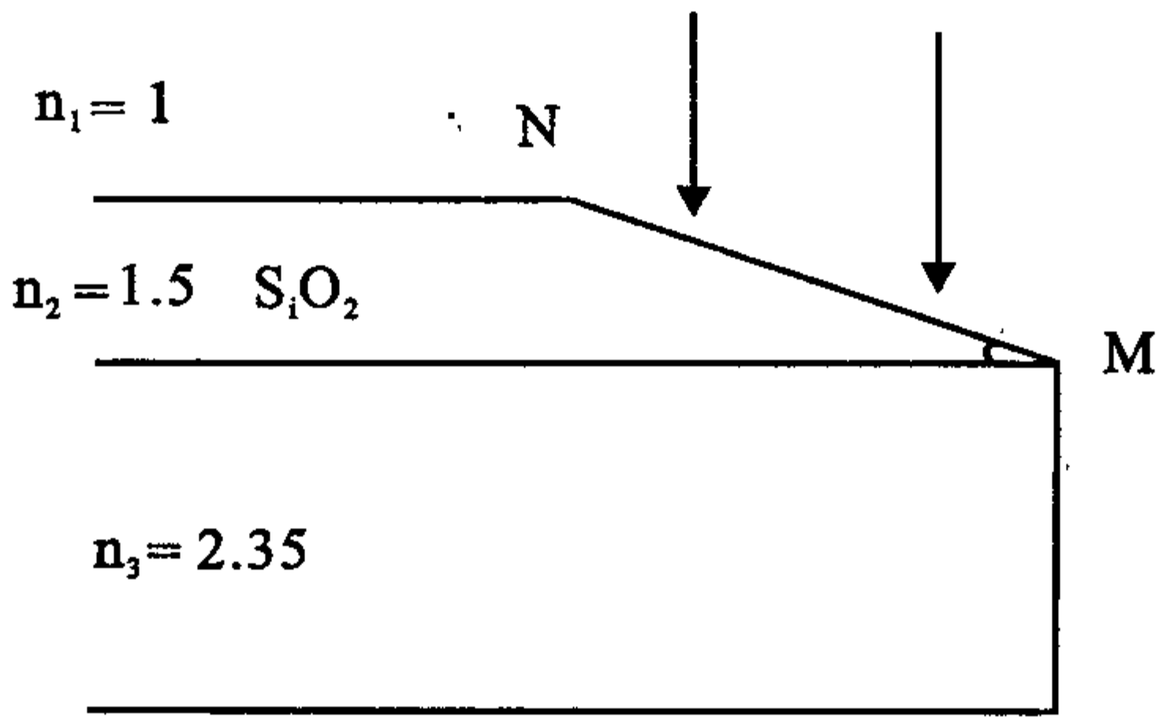
**本题考点**:等厚干涉

**解**:光程差　$\delta = 2ne$

在 $M$ 处　$e = 0$,　$\delta = 0$ 是第 0 级明纹

暗纹条件 $\delta = 2ne = (2K+1)\frac{\lambda}{2}$,　$(K = 0,1,2)$

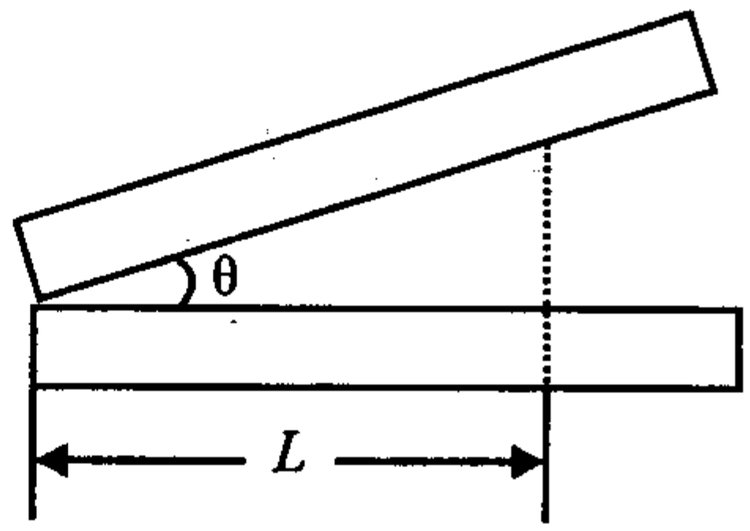
在 $N$ 点第七条暗纹说明 $k = 6$




$$2ne = (2\times 6+1)\frac{\lambda}{2} = 13\times\frac{\lambda}{2}$$

$$e = \frac{13\lambda}{4n} = 1.28\times 10^{-6}\text{m} = 1.28\mu m$$

**23.(东南大学 2002 年)**　用波长为 $\lambda$ 的单色光垂直入射到空气劈尖上,从反射光中观察干涉条纹,距顶点为 $L$ 处是一条暗条纹,将劈尖 $\theta$ 角连续增大,直到该处再次出现暗条纹为止,则劈尖角的改变量 $\Delta\theta$ 约为_____.




**本题考点**:劈尖干涉

**解**:$L$ 处的厚度 $e = L\tan\theta = L\theta$

暗纹条件

$$2e+\frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

当 $e' = L\tan(\theta+\Delta\theta) = L(\theta+\Delta\theta)$

$$2e'+\frac{\lambda}{2} = (2k+3)\frac{\lambda}{2}$$

$$2L\Delta\theta = \lambda \qquad \Delta\theta = \frac{\lambda}{2L}$$

空处填 $\frac{\lambda}{2L}$

**24.**(东南大学 2002 年) 迈克耳孙干涉仪的一条支路中放入一片折射率为 $n$ 的透明介质薄膜后,测出两束光的光程差改变为一个波长 $\lambda$,则薄膜的厚度为

A. $\frac{\lambda}{2}$ B. $\frac{\lambda}{2n}$ C. $\frac{\lambda}{n}$ D. $\frac{\lambda}{2(n-1)}$

**本题考点:**迈克耳孙干涉

**解:**加入厚度为 $e$ 的介质后光程的改变

$$2ne - 2e = 2(n-1)e = \lambda$$

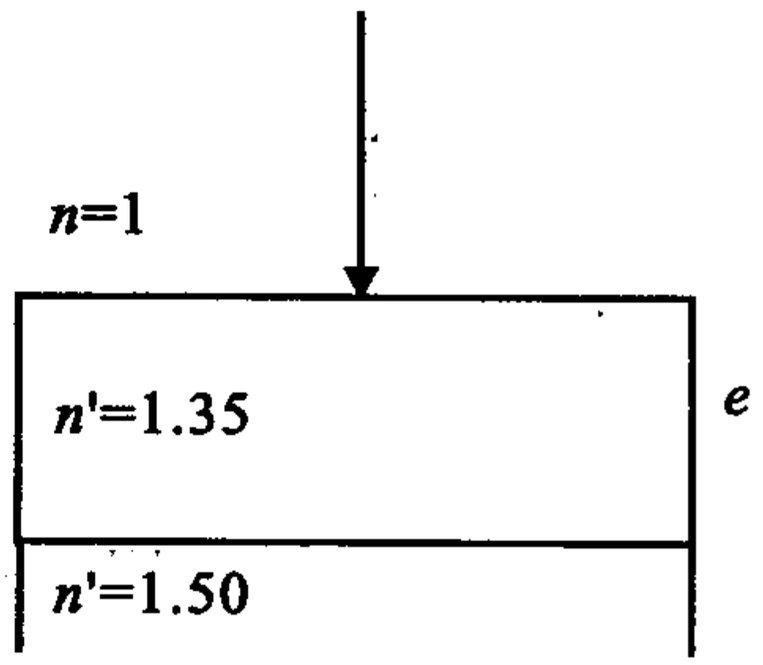
所以 $e = \frac{\lambda}{2(n-1)}$

答案选 D

**25.**(东南大学2002年) 在折射率 $n = 1.50$ 的玻璃上镀上 $n' = 1.35$ 的透明介质薄膜,入射光波垂直于介质膜照射,观察反射光的干涉,发现对 $\lambda_1 = 600\text{nm}$ 的光波干涉相消,对 $\lambda_2 = 700\text{nm}$ 的光波干涉相长,且在 600nm 到 700nm 之间没有别的波长是相消和相长情况,求所镀介质膜的厚度.

**本题考点:**薄膜干涉

**解:**光程差 $\begin{cases} 2ne = (2k+1)\frac{\lambda_1}{2} \\ 2ne = k\lambda_2 \end{cases}$




$k$ 为整数

$$2ne = 300(2k+1) = 700k$$

$$k = 3$$

$$e = \frac{3 \times 700}{2 \times 1.35} = 778\text{nm}$$

**26.**(东南大学 2002 年) 在牛顿环装置中透镜与玻璃间若充

以某种液体时，则观察到原第 16 条亮环的直径由 1.40cm 变为 1.27cm，所以该液体的折射率应为多少？

**本题考点：**牛顿环

**解：**牛顿环的明纹公式

空气　　$r_k = 1.40 = \sqrt{(2k-1)R\frac{\lambda}{2}}$

介质中　　$r'_k = 1.27 = \sqrt{(2k-1)R\frac{\lambda}{2n}}$

$$n = (\frac{r_k}{r'_k})^2 = (\frac{1.4}{1..27})^2 = 1.22$$

**27.（清华大学 1999 年）**　一杨氏双缝干涉仪入射光波长 $\lambda = 500\text{nm}$. 当把一块透明薄膜放在一缝的后面时，零级条纹移至原来的第四级亮条纹处，薄膜的折射率 $n = 1.2$，求膜的厚度.

**本题考点：**杨氏双缝干涉

**解：**没有薄膜时光程差为

$$r_2 - r_1 = 4\lambda$$

有薄膜后，设薄膜厚度为 $d$，光程差为

$$r_2 - (r_1 - d + nd) = r_2 - r_1 + (1-n)d = 0$$

$$0.2d = 4\lambda$$

$$d = 20\lambda = 10000\text{nm} = 10\mu\text{m}$$

**28.（复旦大学 2001 年）**　为了利用光的干涉作用减少玻璃表面对入射光的反射，以增大透射光的强度，常在仪器镜头（折射率为 1.50）的表面镀上一层透明介质膜（常用 $M_gF_2$，折射率为 1.38），称为增透膜. 若使镜头对人眼和照相底片最敏感的黄绿光（$\lambda = 550\text{nm}$）反射最小，试求介质膜的厚度.

**本题考点：**平行平面薄膜干涉，光程差.

**解：**因为 $n_1 < n_2 < n_3$，所以两反射 1 和 2 的光程差 $\delta = 2n_2e$

欲使反射光最小，则有

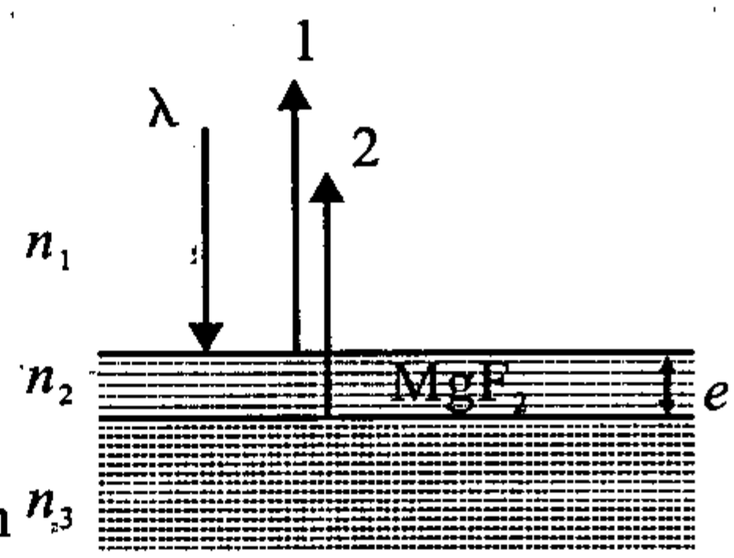
$$2n_2e = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow e = \frac{(2k+1)\lambda}{4n_2}$$

$k = 0$ 时,薄膜的厚度为最小

$$e_{\min} = \frac{\lambda}{4n_2} = \frac{500\text{nm}}{4 \times 1.38} = 99.6\text{nm}$$

$$\approx 100\text{nm}$$




薄膜的厚度亦可取

$$e = 100(2k+1) \qquad (k = 0,1,2\cdots\cdots)$$

**29.(北京市 1999 年)** 在迈克耳逊干涉仪的一条光路中,垂直于光路放入一折射率为 $n$,厚度为 $d$ 的透明薄片,放入后,这条光路的光程改变了:

A.2(n − 1)d; B.2nd; C.2(n − 1)d + $\frac{\lambda}{2}$;

D.nd; E.(n − 1)d

**本题考点:**光程差

**解:**答案选 A

**30.(北京理工大学 2002 年)** 波长为 λ 的平行单色光垂直照射到劈尖薄膜上,劈尖薄膜的折射率为 $n$,在由反射光形成的干涉条纹中,第五条明条纹与第三条明条纹所对应的薄膜厚度之差为

_____.

**本题考点:**劈尖干涉条纹特点

**解:**相邻明纹膜厚相差 $\Delta e = \frac{\lambda}{2n}$

故第五条明纹与第三条明纹所对应的薄膜厚度之差为

$$\Delta e_{5,3} = 2\Delta e = \frac{\lambda}{n}$$

空处填 $\frac{\lambda}{n}$

**31.(北京理工大学 2002 年)** 如图所示,牛顿环装置的平凸

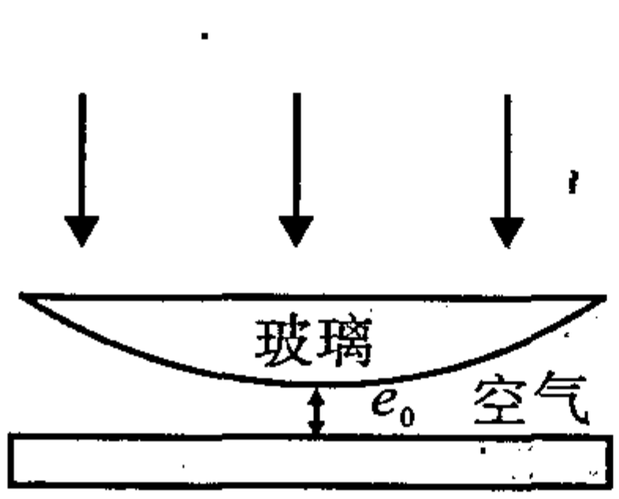
透镜与平板玻璃有一小缝隙 $e_0$. 现用波长为 $\lambda$ 的单色光垂直照射，已知平凸透镜的凸面曲率半径为 $R$，求反射光形成的牛顿环的各暗环半径.

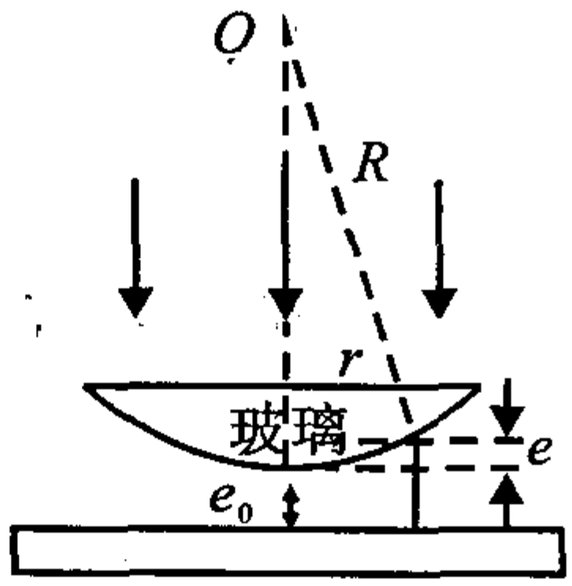
**本题考点：**牛顿环，光程差

**解：**空气薄层上下表面反射光产生暗条纹的条件为：

$$2e_0 + 2e + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \qquad (1)$$

$$k = 0,1,2,\cdots\cdots$$




又由几何关系　$r^2 = R^2 - (R-e)^2 = 2eR - e^2$

因 $R \gg e$，略去 $e^2$ 项，由上式得：

$$e = \frac{r^2}{2R} \qquad (2)$$

将(2) 代入(1) 式，解得

暗环半径

$$r = \sqrt{(k\lambda - 2e_0)R} \qquad (k = 0,1,2\cdots)$$

**32.（同济大学 1999 年）** 在折射率为 1.5 的玻璃上镀一层折射率为 2.5 的透明介质膜增强反射. 镀膜过程中用正入射平行光（$\lambda = 600.0\text{nm}$）进行监视，用照明表测量透射光的强度. 镀膜过程透射光发生时强弱的现象. 当观察到透射光第四次出现最弱时，膜已镀了多厚？

**本题考点：**薄膜干涉、半波损失、位相差.

**解：**设透射光第 4 次出现最弱时，已镀膜厚度为 $e$，则波长为 $\lambda$

= 600.00nm 的光垂直照射上表面时，从上表面反射回的反射光与从玻璃与介质分界面上反射回的反射光进行干涉.

当透射光第四次出现最弱时，说明此时从上下两分界面上反射回入射空间的干涉光是干涉加强的，又考虑到光在上表面上反射时有半波损失，而在下表面反射时无半波损失.故反射光干涉时的位相差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2n_{介} e - \pi = 2k\pi(k \text{ 为整数}), e = \frac{(2k+1)}{4n_{介}}\lambda$$

当 $k = 0$ 时，反射光第一次出现最弱，此时已镀了

$$\frac{600.0\text{nm}}{4 \times 2.5} = 60(\text{nm})$$

当 $k = 3$ 时，反射光第四次出现最弱，此时已镀膜厚度为

$$e = \frac{7 \times 600}{4 \times 2.5}\text{nm} = 420\text{nm} = 4.2 \times 10^{-7}\text{m}$$

## Ⅲ. 光的衍射

**33.（北京大学 2002 年）** 设计一个平面透射光栅，当用白光垂直入射，能在 30° 方向上观察到 6000Å 的第二级主级大干涉条纹，并能在该处分辨 $\Delta\lambda = 0.05$Å 的两条谱线，可是在 30° 方向上都却很难观测到 4000Å 的第三级干涉主极大，求缝宽 $a$，缝距 $d$ 和光栅宽度 $D$. $d$、$a$ 有几种设计可能?试说明选取的原则.

**本题考点：**光栅衍射、缺级

**解：** $D\sin30° = 2 \times 6000$　　$D = 4 \times 6000 = 2.4 \times 10^{-6}\text{m}$

$D\sin30° = 3 \times 4000$　　$a\sin30° = k' \times 4000$

对于第三级缺级有 $\frac{D}{a} = \frac{3}{k'}$　　$k' = 1$

$$a = \frac{D}{3} = 8000\text{Å}$$

$k' = 2$　　$a = \frac{2D}{3} = 16000\ \mathring{A}$

分辨谱线　$\triangle\lambda = \frac{\lambda}{kN}$

光栅缝数　$N = \frac{\lambda}{K\triangle\lambda} = 60000$ 条

光栅长　$L = DN = 0.084\text{m}$

故光栅宽度 $D = 24000\ \text{Å}$

$d, a$ 第一种设计可能是　$a = 8000\text{Å}, d = 16000\text{Å}$

第二种设计可能是　$a = 16000\text{Å}, d = 8000\text{Å}$

且光栅的长不少于 0.084m.

**34.(北京大学 2000 年)**　回答问题:

(1) 简述空间相干性及时间相干性产生的机理?

(2) 分析比较杨氏双缝干涉与夫琅和费双缝衍射.

**本题考点:**干涉、衍射

**答:**(1) 空间相干性及时间相干性产生的机理是要得到同频率,同方向,有固定相位差的相干光只有通过把一个光源变成两个或多个光源(分波阵面法),或把一条光线分成两条光线(分振幅法).但是光源发光是一个波列,一个波列的,每个波列空间长度不过 1m 左右或时间不到 $10^{-8}$S,在干涉必须是同一波列分波的两条光线相遇,因此两光线光程差或到同一点时间差不能大小一个波列长,或一个波列发光时间.

(2) 杨氏双缝与夫琅和费双缝衍射比较

联系:都是分阵面法的干涉、干涉条纹大体相同

区别:① 杨氏双缝的缝很狭,缝看成线光源.没有考虑缝产生单缝衍射,而夫琅和费双缝衍射考虑了单缝衍射的影响.② 双缝衍射是平行光线的干涉,条纹的位置由双缝后的透镜决定,杨氏双缝不是平行光的干涉,条纹的位置由缝的位置决定.

**35.(北京大学 1999 年)** 简要回答问题:

(1) 光栅的机理是干涉还是衍射原理?

(2) 简要叙述迈克尔干涉仪与法布里—珀洛干涉仪原理及性能的差异

(3) 说明光学仪器分辨率和波长的关系?此结论由什么原理分析出来,简要叙述上述结论的来由.

**本题考点:**光栅衍射,干涉仪,光学仪器分辨率

**答:**(1) 光栅的机理是单缝衍射和多缝干涉共同作用的结果,光栅首先是每个单缝衍射,衍射的同一级条纹在屏上同一位置再进行干涉.

(2) 迈克尔逊干涉仪与法布里 —— 珀洛干涉仪原理的差异:迈克尔两束光的干涉,法布里 —— 珀洛干涉仪是相邻两束光相位差相同的多束光的干涉、性能差异:迈克尔逊的条纹与法布里 —— 珀罗比较,法布里 —— 珀罗的干涉条纹锐利,几乎是在全黑的背景上一组很细的亮条纹.迈克尔逊条纹有一定的宽度,因此,法布里 —— 珀罗测光的波长误差较小.

(3) 光学仪器分辨率和波长的关系.

光的衍射原理分析出来,每一个光学仪器都有一定的孔径,对于光的衍射都形成一个斑或带,不是一个点或线.光学仪器看成圆孔或单缝的衍射能分辨两点或线光线角距离与波长成反比.

**36.(武汉大学 2000 年)** 一块平面透射光栅,其宽度为 10 厘米,在每毫米内刻有 100 条均匀狭缝.当波长为 5000$\AA$ 的平行光垂直入射于光栅时,第四级光谱线刚好消失.求:(1) 每条狭缝的宽度.(2) 是否能在第二级光谱中分辨 $5000 \pm 0.1\AA$ 的谱线?(3) 如果本题中入射光不是垂直入射,而是以 30° 入射角入射时,仍是第四级光谱线消失,则每条狭缝的宽度应为多少?

**本题考点:**光栅衍射,缺级

解：$d = \frac{1 \times 10^{-3}}{100} = 1 \times 10^{-5}\text{m}$

$d\sin\theta = 4\lambda$

$a\sin\theta = K'a \qquad K' = 1,2,3\cdots\cdots$

$\frac{d}{a} = \frac{4}{K'} \qquad a = \frac{K'}{4}d$

$K' = 1 \qquad a = \frac{1}{4}d = 2.5 \times 10^{-6}\text{m}$

$K' = 2$　　没有 $K = 2$ 缺级，$a$ 不存在.

$K' = 3$ 时　$a = \frac{3}{4}d = 0.75 \times 10^{-6}\text{m}$

(2) 光栅分辨第二级波长差

$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{KN} \qquad K = 2$

$N = \frac{l}{d} = 10^2 \times 10^2 = 10^4$

$\Delta\lambda = \frac{5 \times 10^{-7}}{2 \times 10^4} = 2.5 \times 10^{-11}\text{m} = 0.25\text{埃} > 0.1\text{埃}$

不能分辨

(3) 光栅方程

$$\begin{cases} d\sin\theta - d\sin30^\circ = \pm 4\lambda \\ a\sin\theta - a\sin30^\circ = K'\lambda \end{cases}$$

同样有　$\frac{d}{a} = \frac{4}{K'}$

$a = \frac{1}{4}d$ 和 $a = \frac{3}{4}d$ 两宽度

**37.（清华大学 2001 年）** $x$ 射线在晶体中发生衍射的条件(布喇格公式) 是_____,式中各量的意义分别是_____.

**本题考点：**布喇格公式

**解：**空处分别填 $2d\sin\theta = k\lambda$ $(k = 1,2,3\cdots)$，$d$ 为相邻两晶面的距离，$\theta$ 为掠射角，$\lambda$ 为 $x$ 射线的波长.

**38.(武汉大学 2002 年)** 简述光学仪器中孔径光阑的作用，并指出望远镜系统、人眼系统中的孔径光阑是系统中的哪一部分.

**本题考点:**仪器中孔径光阑

**解:**光学仪器中孔径光阑作用是控制进光强度和进光的角度使之近光轴成像.

望远镜是物镜,人眼是瞳孔.

**39.(武汉大学 2002 年)** 光栅的角色散、色分辨本领、色散范围(自由光谱区)分别从不同角度描写了一个光栅的分光能力,试述上述光栅性能参数中的任意一个参数的定义.

**本题考点:**光栅性能参数

**解:**光栅的角色散 $D_\theta$ 是指波长相差 $1\mathring{A}$ 的两条线之间的角距离 $D_\theta = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{k}{d\cos\theta}$

色分辨本领是指分辨两个很靠近的谱线能力 $A = \frac{\lambda}{\Delta x} = kN$

$\Delta\lambda$ 为最小可分辨两谱线的光波长差.

自由光谱区域色散范围.

在波长 $\lambda$—$\lambda + \Delta\lambda$ 范围内,$K$ 级谱级不会与其他谱线重迭,$\Delta\lambda$ 就称为该光栅第 $k$ 级光的色散范围 $G = \Delta\lambda = \frac{\lambda}{k}$.

**40.(武汉大学 2002 年)** 波长为 $\lambda$ 的单色平行光垂直入射到有等宽等距三条缝的衍射屏上,如图所示,$M$、$N$、$Q$ 为经衍射屏后的三条光线,它们在透镜焦平面上的 $P$ 点叠加,已知 $M$ 光线与 $N$ 光线之间的光程差为 $\lambda$,$M$ 光线与 $Q$ 光线之间的光程差为 $3\lambda$.

(1) 试以 $\sin\theta$ 为横轴($\theta$ 为衍射角)、光强 $I$ 为纵轴,画出它的夫琅和费衍射强度分布图,至少画出第五级主极大;

(2) 设单独每一个缝在 $\theta = 0$ 方向的衍射强度为 $A^2$,问上述系统中零级和一级主极大的强度为多少?$P$ 的光强又是多少?

**本题考点:**衍射

**解**:(1) 三条缝设单缝宽为 $a$,三条缝组成的光栅常数为 $d$

现有:$d\sin\theta = 3\lambda$　　$a\sin\theta = \lambda$　　$d = 3a$

因此 $k = \pm 3, \pm 6\cdots\cdots$ 缺级

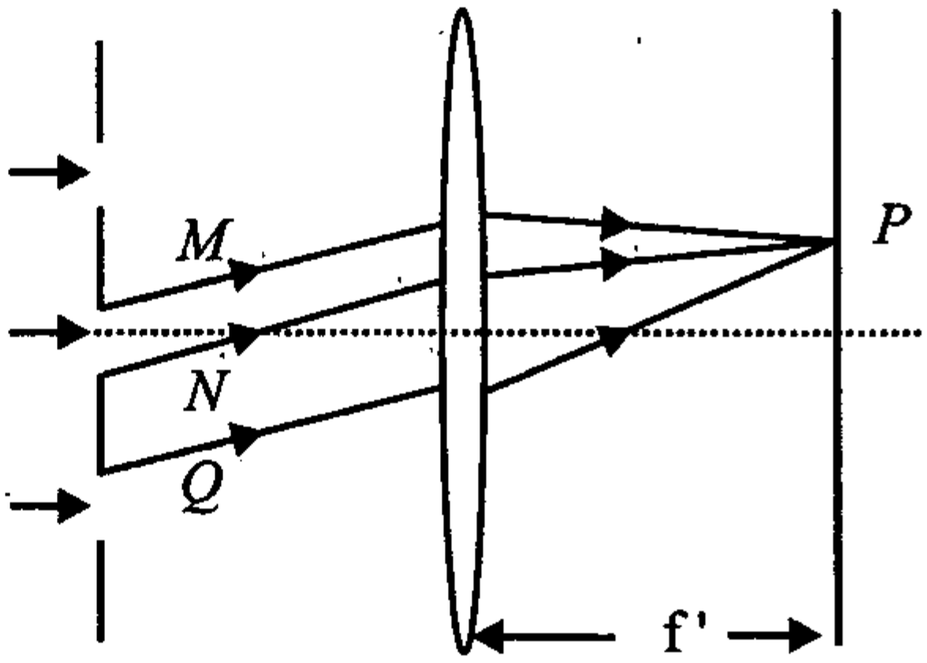
则可作出主极大,$K = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 4\cdots\cdots$,分布图略.

(2) 第一级　$d\sin\theta = \lambda$

$$a\sin\theta = \frac{a\lambda}{d} = \frac{\lambda}{3}$$

$$u = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda} = \frac{\pi}{3}$$

$$I_1 = I_0 \frac{\sin^2\frac{\pi}{3}}{(\frac{\pi^2}{9})} = \frac{27}{2\pi^2} I_0$$




中央明条纹的强度　$I_0 = 9A^2$

第一级的强度　$I_1 = \frac{27}{4\pi^2} \times 9A^2 = \frac{243}{4\pi^2} A^2 = 6.2A^2$

$P$ 点是缺级点,因此　$I_P = 0$

**41.(北京理工大学 2001 年)**　在如图所示的夫琅和费衍射装置中,将单缝宽度 $a$ 稍稍变窄,同时使会聚透镜 $L$ 沿 $y$ 轴正方向作微小位移,则屏幕 $C$ 上的中央衍射条纹将

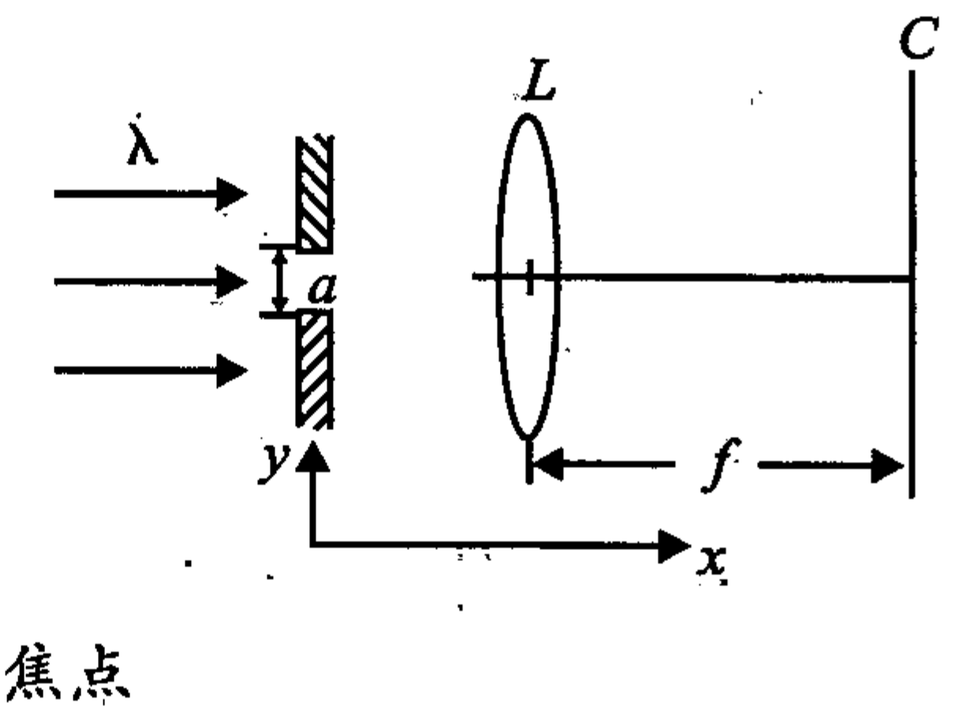
A. 变宽,同时向上移动

B. 变宽,同时向下移动

C. 变宽,不移动

D. 变窄,同时向上移动

E. 变窄,不移动

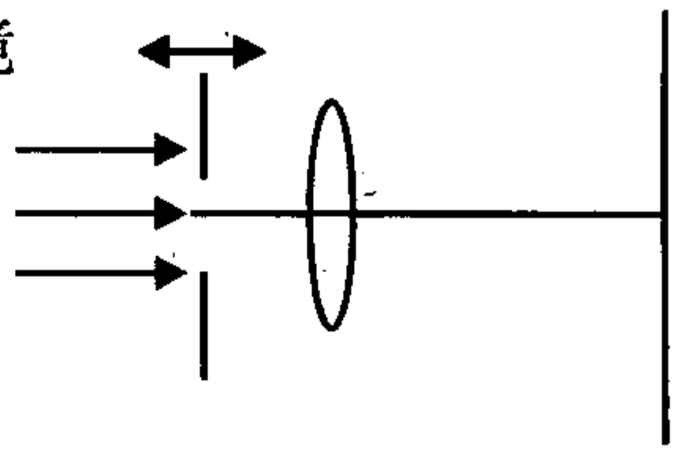



**本题考点**:单缝衍射、透镜主焦点

**解**: 因为 $a\sin\theta = \lambda$,$\theta$ 为中央条纹半角宽度,$a$ 减小,$\theta$ 增大,中央明纹在透镜的主焦点上,透镜上移主焦点上上移.

答案选 A

**42.(北京邮电大学 1999 年)** 在如图所示的单缝夫琅和费衍射实验中,若将单缝沿透镜光轴方向向透镜平移,则屏幕上的衍射条纹



A. 间距变大

B. 间距变小

C. 不发生变化

D. 间距不变,但明暗条纹的位置交替变化

**本题考点:**单缝衍射

**解:**单缝衍射的条纹与单缝和透镜距离无关

答案选 C

**43.(北京邮电大学 1999 年)** 某单色光垂直入射到一个每毫米有 800 条刻线的光栅上,如果第一级谱线的衍射角为 30°,则入射光的波长应为_____.

**本题考点:**光栅衍射

**解:** $d = \dfrac{1 \times 10^{-3}}{800} = 1.25 \times 10^{-6}\text{m}$ $\quad d\sin 30° = \lambda$

$$\lambda = \frac{1}{2}d = 6.25 \times 10^{-7}\text{m} = 625\text{nm}$$

空处填 625nm

**44.(北京邮电大学 1999 年)** 在单缝的夫琅和费衍射实验中,屏上第三级暗纹对应的单缝处波面可划分为_____ 个半波带,若将缝宽缩小一半,原来第三级暗纹处将是_____ 纹.

**本题考点:**单缝衍射,半波带

**解:**暗纹条件 $\quad a\sin\theta = 2k(\dfrac{\lambda}{2})$

第三级 $\quad k = 3 \quad$ 6 个半波带

$a \to \dfrac{1}{2}a$ $\quad \dfrac{1}{2}a\sin\theta = 3 \cdot \dfrac{\lambda}{2}$ $\quad$ 为第一级明纹

空处分别填 6,第一级明

**45.(清华大学 2000 年)**　在单缝衍射中,观测到的第一级暗纹与衍射图样中心的距离:

A. 正比于光的频率　　B. 正比于缝的宽度

C. 正比于缝的长度　　D. 正比于光波长

**本题考点:**单逢衍射

**解:** $a\sin\theta = \lambda$

所以 $\theta = \frac{\lambda}{a}, x = f\tan\theta = f\frac{\lambda}{a} \propto \lambda$

答案选 D

**46.(东北大学 2002 年)**　地球到月球的平均距离是 $3.8 \times 10^5$ 千米,现在用光学望远镜观察月球上的环形山,若想分辨出直径是 1 千米的环形山,则望远镜物镜的口径(直径) 至少多大?(设用于观察的光的波长是 $0.55\mu m$).

**本题考点:**分辨本领

**解:** $\Delta\theta = \frac{1.22\lambda}{D} = \frac{10^3}{3.8 \times 10^5 \times 10^3}$

$D = 1.22 \times 3.8 \times 10^5\lambda = 0.255m$

**47.(东南大学 2001 年)**　波长为 $\lambda = 6000\text{Å}$的单色光垂直入射到衍射光栅上,该光栅上缝宽为 $a$,刻痕宽度为 $b$,且 $b = 3a$,在屏上观察到第二级明条纹出现在衍射角 $\sin\theta = 0.2$ 处,求:

(1) 该光栅的光栅常数为多少?

(2) 在屏上最多能看到多少条明纹?

**本题考点:**光栅衍射　　缺级

**解:** (1) $d\sin\theta = 0.2d = 2\lambda$ ,　　$d = 10\lambda$

(2) $a + b = d = 4a$　　$\frac{d}{a} = 4$

即: $\pm 4, \pm 8, \pm 12\cdots\cdots$ 缺级

$10\lambda\sin\frac{\pi}{2} = k\lambda$　　$k = 10$

屏上能看 0，±1，±2，±3，±5，±6，±7，±9，±10，共 17 条(或 ±10 看不到，有 15 条)

**48.(东南大学2002年)** 波长为589nm($1nm = 10^{-9}m$)的光垂直照射到1.0mm宽的单缝上，观察屏在离缝为3.0m的透镜焦平面处，则第一级衍射暗条与第二级暗条之间在屏上的距离

A.0.9mm　　B.1.8mm　　C.3.6mm　　D.0.45mm

**本题考点：**单缝衍射的条纹问题

**解：**单缝衍射的第一、二级暗纹满足方程是

$$\begin{cases} a\sin\theta_1 = \lambda \\ a\sin\theta_2 = 2\lambda \end{cases} \quad \text{所以} \begin{cases} \theta_1 = \dfrac{\lambda}{a} \\ \theta_2 = \dfrac{2\lambda}{a} \end{cases}$$

$$\Delta x = f\theta_2 - f\theta_1 = f\left(\frac{2\lambda}{a} - \frac{\lambda}{a}\right) = 3 \times \frac{589}{1 \times 10^6} = 1.8\text{mm}$$

答案选 B

**49.(东南大学 2002 年)** 以氢放电管发出的光垂直照射在某光栅上，当衍射角 $\theta = 30°$ 的方向上看到 $\lambda_1 = 640\text{nm}$ 和 $\lambda_2 = 400\text{nm}$ 的谱线相重合，求光栅常数最小是多少？

**本题考点：**光栅常数

**解：** $d\sin\theta = k_1\lambda_1$

$d\sin\theta = k_2\lambda_2$　　$k_1, k_2$ 为整数

$d$ 最小，$k_1, k_2$ 为最小.

$640k_1 = 400k_2$，即 $16k_1 = 10k_2$

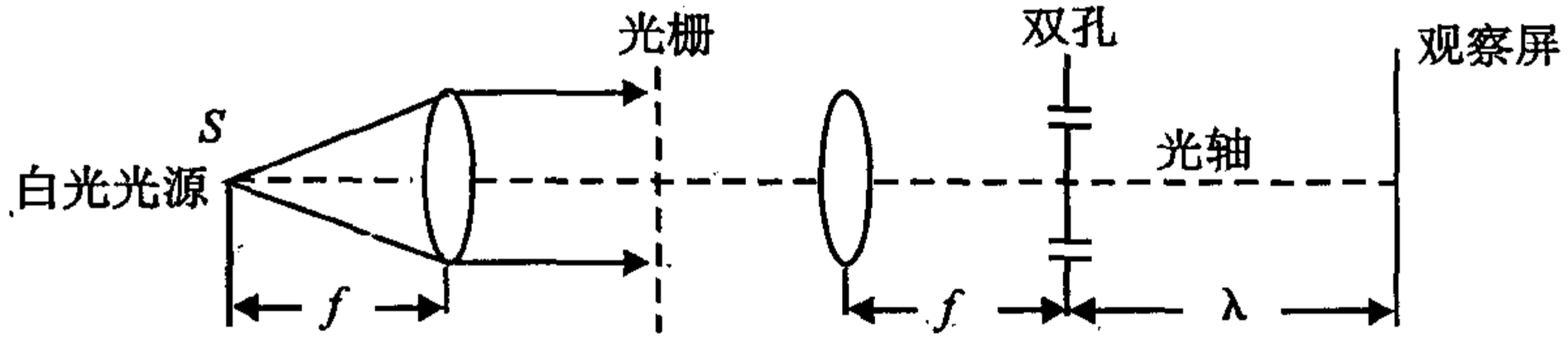
最小 $k_1, k_2$ 整数，$k_1 = 5$　　$k_2 = 8$

$$d = \frac{8 \times 400}{\frac{1}{2}} = 6400\text{nm} = 6.4\text{nm}$$

**50.(南京大学 2002 年)** 试计算，装置中(见图)观察屏上条纹的宽度，并讨论干涉条纹的特点(只要指明是彩色的，还是非彩色的以及为什么).注，光栅常数为 $d$，双孔是对称于系统的光轴，

大小足够让 ± 1 级光从蓝光到红光通过.

**本题考点:**光栅干涉,杨氏双缝的综合题




**解:**对于波光为 λ 的第一级谱线

$$d\sin\theta = \lambda$$

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{d}$$

波长 λ 的入射光第一级谱光线在双孔处的线距离

$$D = 2f\tan\theta = 2f\sin\theta = \frac{2f\lambda}{d}$$

因此,双缝干涉的第 $k$ 级条纹位置

$$x = k\frac{L}{D}\lambda = k\frac{Ld}{2f}$$

第 $k$ 级谱线的位置入射光波长 λ 无关.说明不同的波长的光波干涉同一级条纹的位置相同,因此条纹是非彩色光.

**51.(复旦大学 2001 年)** 波长为 500nm 的单色平行光垂直地照射在一光栅常量为 $2.0 \times 10^{-3}$cm 的衍射光栅上,在光栅后放置一焦距为 2.0m 的透镜,把衍射光会聚在接收屏上,试求第一级谱线与第三级谱线之间的距离.

**本题考点:**光栅方程,条纹间距.

**解:**根据光栅衍射方程　$d\sin\theta = k\lambda$

有　$\sin\theta = \frac{k\lambda}{d}$

$$k = 1 \quad \sin\theta_1 = \frac{\lambda}{d} = \frac{500 \times 10^{-9}}{2 \times 10^{-3} \times 10^{-2}} = 2.5 \times 10^{-2}$$

$$\approx \tan\theta_1$$

$$k = 3 \quad \sin\theta_3 = \frac{3\lambda}{d} = 7.5 \times 10^{-2} \approx \tan\theta_3$$

第一级谱线与第三级谱线之间的距离

$$\Delta x_{31} = x_3 - x_1$$

$$= f\tan\theta_3 - f\tan\theta_1$$

$$\approx 2 \times (7.5 \times 10^{-2} - 2.5 \times 10^{-2}) = 0.1(\mathrm{m})$$

**52.(复旦大学1999年)** 试计算物镜直径分别为 $D_1 = 5.0\mathrm{cm}$ 和 $D_2 = 50\mathrm{cm}$ 的望远镜,对可见光平均波长 $\lambda = 5500\text{Å}$ 的最小分辨角,并问这两个望远镜的放大率各以多少为宜?已知人眼的最小分辨角为 $1'$.

**本题考点:** 圆孔衍射,光学仪器分辨率.

**解:** 望远镜的最小分辨角为 $\theta_m = 1.22\frac{\lambda}{D}$

若 $D_1 = 5.0\mathrm{cm}$,

有 $\theta_{m1} = 1.22 \times \frac{5500 \times 10^{-8}}{5.0} = 1.34 \times 10^{-5} rad$

若 $D_2 = 50\mathrm{cm}$,

有 $\theta_{m2} = 1.22 \times \frac{5500 \times 10^{-8}}{50} = 1.34 \times 10^{-6} rad$

人眼的最小分辨角为:

$$\theta_0 = 1' = \frac{1}{60} \times \frac{2\pi}{360} = 2.91 \times 10^{-4} rad$$

物镜 $D_1 = 5.0\mathrm{cm}$ 的望远镜视角放大率应选择为

$$M_1 = \frac{\theta_0}{\theta_{m1}} = \frac{2.91 \times 10^{-4}}{1.34 \times 10^{-5}} = 21.7$$

物镜 $D_2 = 50\mathrm{cm}$ 的望远镜视角放大率应选择为

$$M_2 = \frac{\theta_0}{\theta_{m2}} = \frac{2.91 \times 10^{-4}}{1.34 \times 10^{-6}} = 217$$

**53.(辽宁大学2001年)** 在双缝干涉实验装置中,幕到双缝

的距离 $D$ 远大于双缝之间的距离 $d$，整个双缝装置放在空气中，对于纳黄光($\lambda = 5893\mathring{A}$)，产生的干涉条纹纹相邻明条纹的角距离(即相邻两明条纹对中心处的张角)为 0.20°.

(1) 对于什么波长的光，这个双缝装置所得相邻两明条纹的角距离将比用纳黄光测得的角距离大 10%.

(2) 假想将此整个装置浸人水中(水的折射率 $n = 1.33$)，相邻两明条纹的角距离有多大?

**本题考点**：双缝干涉

**解**：(1) 设角距离为 $\varphi$ 表示

$$\frac{\pi}{180^\circ} \cdot \varphi = \frac{\Delta x}{D} = \frac{D}{d} \cdot \frac{\lambda}{D} = \frac{\lambda}{d}$$

要使 $\varphi$ 增大 10%，则所用波长 $\lambda'$ 要比钠黄光的波长 5893Å大 10%

所求 $\lambda' = 5893 \times (1 + 10\%) = 6482(\mathring{A})$

(2) 放人水中　$\frac{\pi}{180^\circ}\varphi = \frac{\lambda}{nd}$,

角距离应为原来的　$\frac{1}{n}$

所求 $\varphi = \frac{1}{1.33} \times 0.20^\circ = 0.15^\circ$

**54.(北京理工大学 2002 年)**　在单缝夫琅和费衍射实验中，波长为 $\lambda$ 的单色光垂直入射在宽度为 $a = 4\lambda$ 的单缝上，对应于衍射角为 30° 的方向，单缝处波阵面可分成的半波带数目为

A.2 个　　B.4 个　　C.6 个　　D.8 个

**本题考点**：单缝衍射、半波带法

**解**：$a\sin 30^\circ = 4\lambda \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot \frac{\lambda}{2}$

比较单缝衍射公式　$a\sin\theta = 2k\frac{\lambda}{2}$

得知单缝处波阵面可分成 4 个半波带.

答案选 B

**55.(北京理工大学 2002 年)** 一束平行单色光垂直入射在光栅上,当光栅常数$(a+b)$为下列哪种情况时($a$ 代表每条缝的宽度)$k=3$、6、9 等级次的主极大均不出现?

A. $a+b=2a$　　B. $a+b=3a$

C. $a+b=4a$　　D. $a+b=6a$

**本题考点:**光栅缺级

**解:**

光栅主极大满足　$(a+b)\sin\theta=k\lambda$

单缝衍射暗纹满足　$a\sin\theta=k'\lambda$

$$\Rightarrow k=k'\frac{a+b}{a}$$

$(k'=1,2,3,\cdots\cdots)$

当 $a+b=3a$ 时, $k=3k'=3,6,9\cdots$ 缺级

答案选 B

**56.(北方交大 2002 年)** 用每毫米有 300 刻痕的衍射光栅来检验仅含有属于红和蓝的两种单色成分的光谱. 已知红谱线波长 $\lambda_r$ 在 600 ~ 760nm 范围内,蓝谱线波长 $\lambda_b$ 在 430 ~ 490nm 范围内,当光垂直入射到光栅时,发现在 24.46° 角度处,红、蓝两谱线同时出现:

(1) 在什么角度下,红、蓝谱线再次同时出现?

(2) 在什么角度下,只有红谱线出现?

**本题考点:**光栅衍射、光栅方程、光谱

**解:**光栅常数　$d=\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1\times10^{-3}}{300}=\dfrac{1}{3}\times10^{-5}$(米)

(1) 由光栅方程 $d\sin\theta=k\lambda$,知在 $\theta=24.46°$ 处,对于红光的最小可能级次为

$$k_{\min}=\frac{d\sin24.46°}{\lambda_{\max}}=\frac{1\times10^{-5}\times0.44}{3\times7.6\times10^{-7}}=2$$

对于红光的最大可能级次为 $k_{\max}=\dfrac{10^{-5}\times0.44}{3\times6\times10^{-7}}=2.4$

说明在 $\theta = 24.46°$ 处,红光是第二级光谱线出现,对应的波长约为

$$\lambda_r = \frac{1}{2} \times d\sin\theta = \frac{1}{6} \times 10^{-5} \times 0.44 = 730\text{nm}$$

而蓝光谱在此处出现的可能级次为

$$k_{\min} = \frac{1 \times 10^{-5} \times 0.44}{3 \times 4.90 \times 10^{-7}} = 3$$

故红光的第2级与蓝光的第3级在 $\theta = 24.46°$ 处第一次重合.

设第二次再重合出现的衍射角为 $\theta_1$,红色谱线波长为730nm

由 $k_r\lambda_r = k_b\lambda_b$,令 $k_r = 2, k'_b = 3$ 则

$$\lambda_b = \frac{k_r}{k_b}\lambda_r = \frac{2}{3} \times 730 = 487\text{nm}$$

因 $\frac{\lambda_r}{\lambda_b} = \frac{k_b}{k_r} = \frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \cdots\cdots$ 但由于 $\sin\theta \leq 1$,即 $k \leq \frac{d}{\lambda}$

红光的最大级次为 $k_{r\max} \leq \frac{d}{730} = \frac{3333}{730} = 4.5$

蓝光的最大级次为 $k_{b\max} \leq \frac{d}{490} = 6.8 = 6$

即红光的0级、2级、4级与蓝光的0级、3级、6级重合.

其对应的角度为

$$\sin\theta' = \frac{4 \times 730}{d} = 0.876, \theta' = 61.2°$$

(2) 因为红光的最高级次为4级,而其第0、2、4级与蓝光重合,故其第1、3级能单独出现,其对应的角度为

$$\sin\theta_1 = \frac{\lambda_r}{d} = \frac{730\text{nm}}{d} = 0.219, \theta_1 = 12.7°$$

$$\sin\theta_3 = \frac{3\lambda_r}{d} = \frac{3 \times 730\text{nm}}{3333} = 0.647, \theta_3 = 41.1°$$

**57.(华东理工大学2002年)** 波长 $\lambda = 600\text{nm}$ 的单色光垂直入射到光栅上,已知第二级主级大出现在 $\theta = 30^0$ 处,第三级缺级,求:

(1) 光栅常数 $a + b$;

(2) 光栅每个缝的宽度 $a$;

(3) 光屏上可以看到的明条纹数 $N$.

**本题考点:**光栅衍射、光栅方程、缺级

**解:**依题意 $\lambda = 600\text{nm}$,由光栅方程 $d\sin\theta = k\lambda$ 将:

$k = 2, \theta = 30°$ 代入有:

$$(1)\, d = a + b = \frac{2 \times 6000 \times 10^{-10}}{\sin 30°} = 2400(\text{nm});$$

(2) 由于第 3 级缺级,则必有

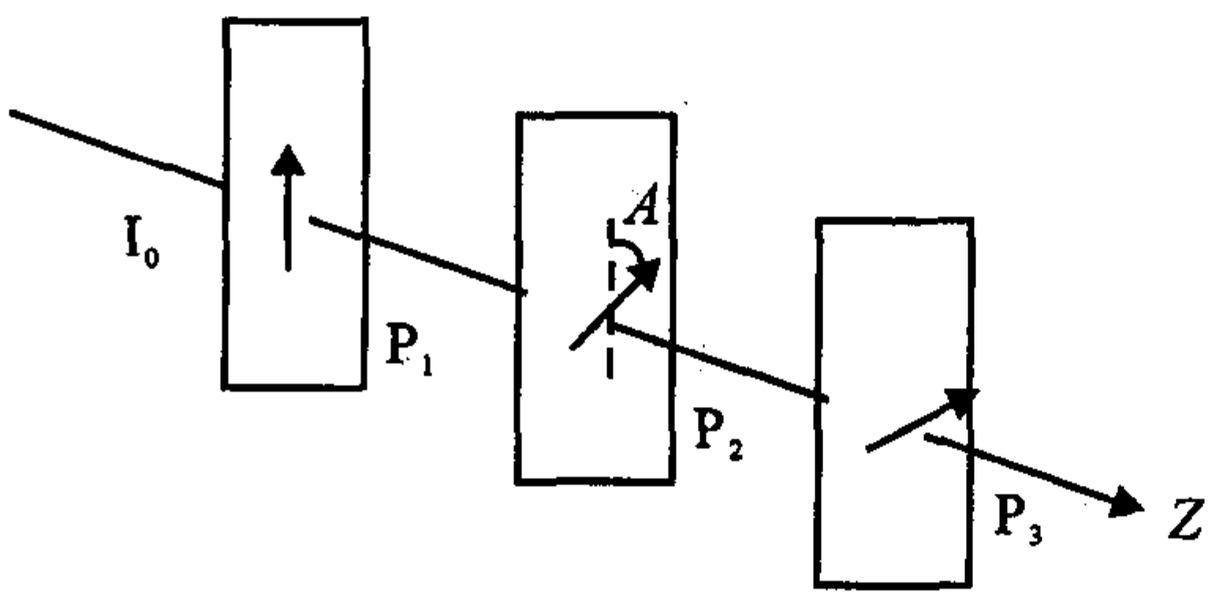
$$\frac{d}{a} = \frac{a + b}{a} = 3, a = \frac{d}{3} = 800(\text{nm});$$

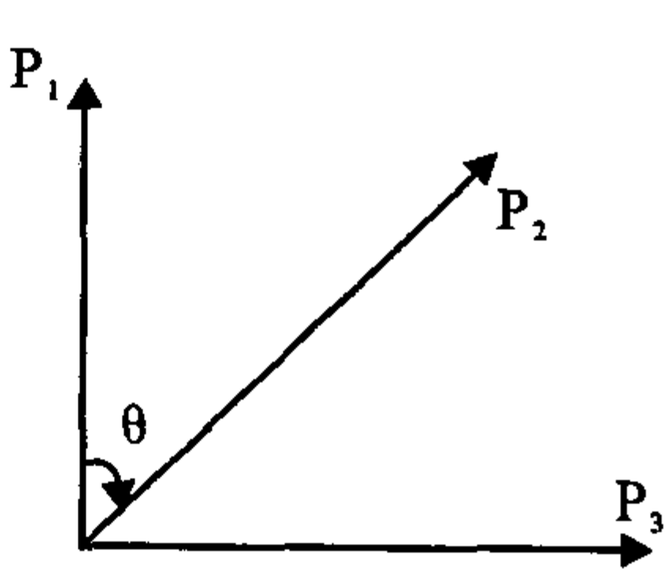
(3)不考虑缺级时可看到的最多明条纹数 $k = \frac{d}{\lambda} = \frac{2400}{600} = 4$,考虑缺级后只能看到 0, ± 1, ± 2, ± 4 共 7 条明纹.

## Ⅳ. 光的偏振

**58.(武汉大学 2000 年)** 三块偏振片 $P_1, P_2, P_3$ 平行地放置,如图所示,$P_1$ 的透振方向(既它允许通过的光振动方向)和 $P_3$ 的透振方向垂直. $P_1$ 与 $P_2$ 的透振方向的夹角为 $\theta$. 一束光强为 $I_0$ 的单色平行自然光垂直地射到偏振片 $P_1$ 上,忽略偏振片的吸收,求:(1) 通过 $P_1, P_2, P_3$ 各个偏振片后光的偏振态和光强;(2) 旋转偏振片 $P_2$ 时(保持其平面方向不变)通过偏振片 $P_3$ 的最大光强.

**本题考点:**偏振片



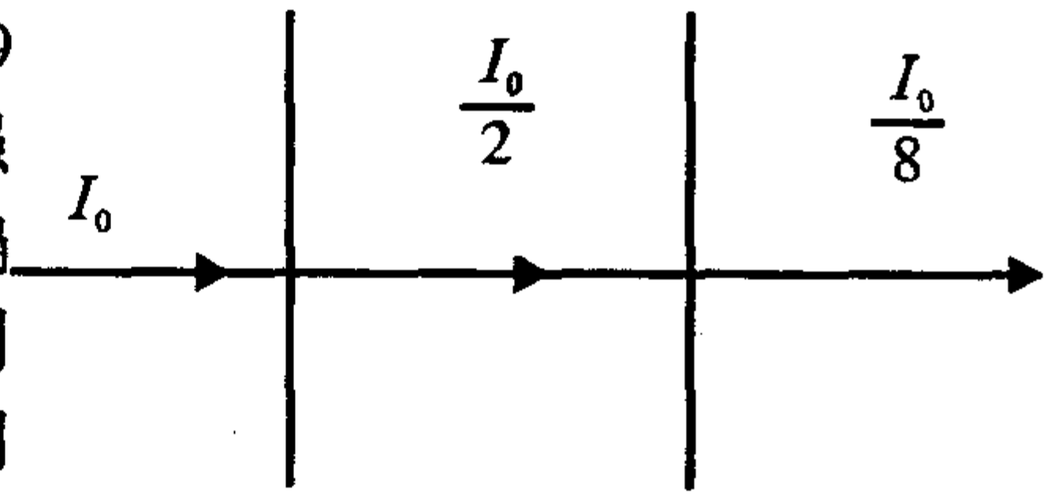



**解**:(1) 自然光通过 $P_1$ 光强为 $\frac{1}{2}I_0$ 再通过 $P_2$ 为 $\frac{1}{2}I_0\cos^2\theta$,进一步通过 $P_3$ 光强为

$$\frac{1}{2}I_0\cos^2\theta\cos^2(90-\theta)=\frac{1}{2}I_0\cos^2\theta\sin^2\theta=\frac{1}{8}I_0\sin^2 2\theta$$

(2) 最大光强是当 $\theta=45°$、$|\sin^2\theta|=1$ 时　为 $\frac{1}{8}I_0$

**59.(北京邮电大学 1999 年)** 设偏振片没有吸收,光强为 $I_0$ 的自然光垂直通过两个偏振片后,出射光强 $I=I_0/8$,则两个偏振片的偏振化方向之间的夹角为 _____.




**本题考点**:马吕斯定律

**解**:由 $\frac{I_0}{2}\cos^2\alpha=\frac{I_0}{8}$　得　$\cos^2\alpha=\frac{1}{4}$

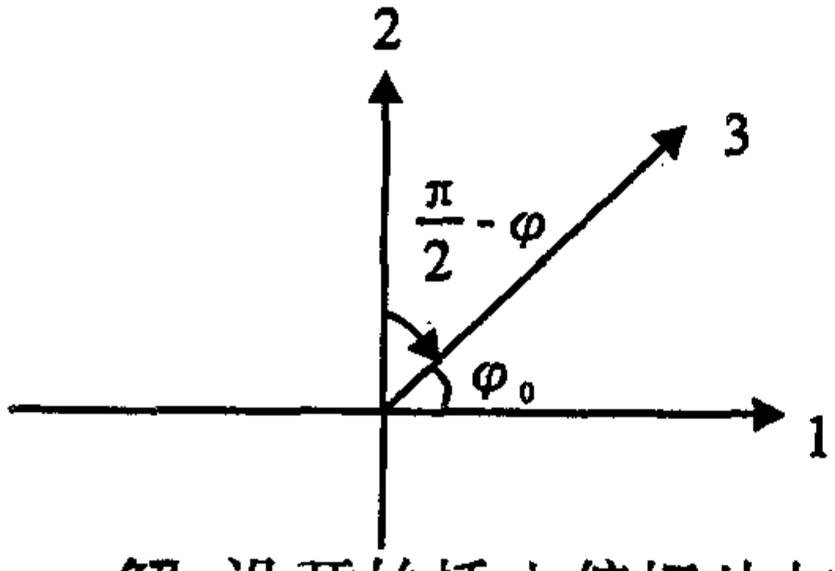
$\cos\alpha=\frac{1}{2}$　　$\alpha=60°$(或$\frac{\pi}{3}$)

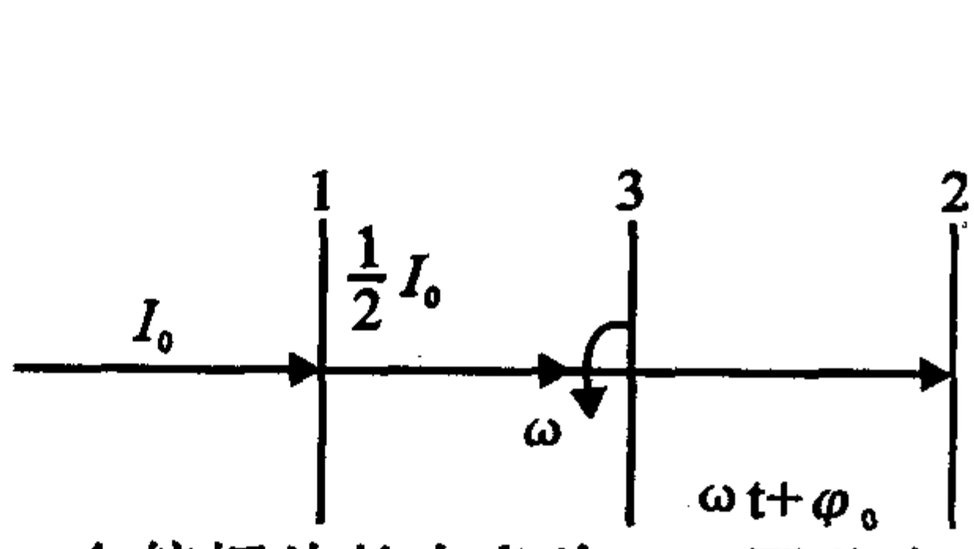
空处填 60°(或$\frac{\pi}{3}$)

**60.(北京邮电大学 2002 年)** 在两个正交的偏振片之间插入另一个偏振片,并令其以匀角速旋转,以光强稳定的自然光入射,则偏振片转动周期是出射光强变化周期的_____倍.

**本题考点**:马吕斯定律

2




**解**:设开始插入偏振片与第一个偏振片的夹角为 $\varphi_0$.因此在 $t$

时刻,1、3 两片夹角为 $\omega t + \varphi_0$.($\omega$ 为角速度)

透射光强　$I = \frac{1}{2} I_0 cos^2(\omega t + \varphi_2)$

第二偏片与第三偏片的夹角　$\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}$

最后透射光方程

$$I' = \frac{1}{2} I_0 \cos^2(\omega t + \varphi_0)\cos^2(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

$$= \frac{1}{2} I_0 \cos^2(\omega t + \varphi_0)\sin^2(\omega t + \varphi)$$

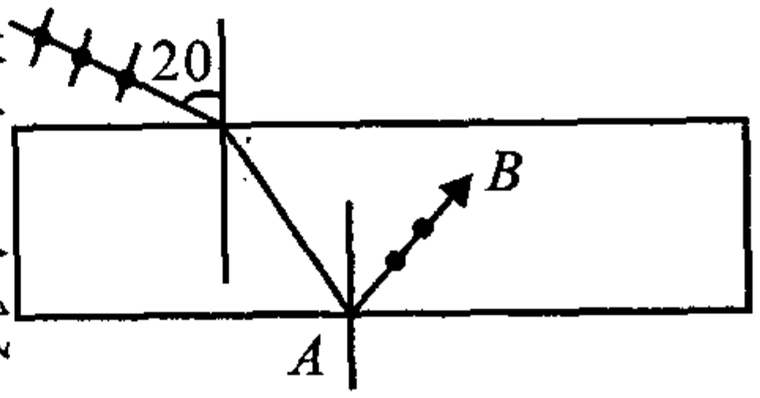
$$= \frac{1}{8} I_0 \sin^2(2\omega t + 2\varphi_0)$$

$$= \frac{1}{2} I[\frac{1 - \cos(4\omega t + 4\varphi_0)}{2}]$$

因此为光强变化周期的四倍

空处填四

**61.(东北大学2002年)**　如图,一块平板媒质处于空气中,一束自然光以布儒斯特角入射到媒质的上表面上并进入媒质,在媒质的下表面上又产生反射,试在图上画出反射光 $AB$ 的偏振状态.




**本题考点:**布儒斯特定律

**解:**反射光是完全偏振光偏振方向垂直于入射面

**62.(东南大学2001年)**　(1) 自然光入射通过两偏振片,两偏振片的偏振化方向成 30° 夹角时,透射光强为 $I_1$,若入射光强保持不变,使两偏振片的偏振化方向的夹角为 45°,则透射光的光强 $I_2$ 与第一次透射光强 $I_1$ 的比值为多少?

(2) 若自然光强度 $I_0$ 入射在两偏振片的偏振化方向互相垂直的偏振片组合上,透射光强为多少?若在这两个偏振片之间插入第三片偏振片,其偏振化方向与第一片偏振片的偏振化方向夹角为 $\alpha$,则通过这三片偏振片组合的透射光强为多少?

**本题考点**:马吕斯定律

**解**:(1) 设自然光的强度为 $I_0$

通过第一个偏振片光强度变为　$\frac{1}{2}I_0$

再通过与第一个偏振片夹角为 30° 的第二偏振片光强度

$$I = \frac{1}{2}I_0\cos^2 30 = \frac{3}{8}I_0$$

若两偏振片间夹角为 45°

$$I' = \frac{1}{2}I_0\cos^2 45 = \frac{1}{4}I_0$$

故 $I' = \frac{2}{3}I$

(2) 两偏振化方向互相垂直,透射光强 $I = \frac{1}{2}I_0\cos^2\frac{\pi}{2} = 0$

两偏振片中插入第三片后,透射光强

$$I = \frac{1}{2}I_0\cos^2\alpha\cos^2(90 - \alpha) = \frac{1}{8}I_0\sin^2 2\alpha$$

**63.(东南大学 2002 年)**　一束光是自然光和线偏振光的混合光,让它垂直通过一偏振光测得透射光强度最大值是其最小值的 5 倍,那么,入射光束中的自然光与线偏振光的光强之比值为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

**本题考点**:光的偏振

**解**:设自然光光强为 $I_0$. 线偏振光光强为 $I'$

$$\frac{I' + \frac{1}{2}I_0}{\frac{1}{2}I_0} = 5$$

$$I' = \frac{5}{2}I_0 - \frac{1}{2}I_0 = 2I_0$$

$$\frac{I_0}{I'} = \frac{1}{2}$$

答案选 A

**64.(东南大学 2002 年)** 一束自然光入射一个由四个偏振片所构成的偏振片组上,每个偏振片的偏振化方向相对于前一个偏振片的偏振化方向沿顺时针方向转过 30°,则通过偏振片组后的光强为多大,设入射自然光强为 $I$.

**本题考点:**马吕斯定律

**解:** 自然光光强为 $I_0 \xrightarrow{\text{经过第一个偏振片后}}$ 光强为 $\frac{1}{2}I_0$

$\xrightarrow{\text{经过第二个偏振片后}}$ 光强为 $\frac{1}{2}I_0\cos^2 30 = \frac{3}{8}I_0$

$\xrightarrow{\text{经过第三个偏振片后}}$ 光强为 $\frac{3}{8}I_0\cos^2 30 = \frac{9}{32}I_0$

$\xrightarrow{\text{经过第四个偏振片后}}$ 光强为 $\frac{9}{32}I_1\cos^2 30 = \frac{27}{256}I_0$

所以,最后的光强为 $\frac{27}{256}I_0$

**65.(南开大学 2002 年)** 一束光是自然光和线偏振光的混合,当它通过一偏振片时,发现透射光的强度取决于偏振片的取向,其强度可变化 5 倍,求入射光中两种光的强度各占总入射光的百分比.

**本题考点:**自然光,偏振光,马吕斯定律

**解:**自然光光强为 $I_1$,线偏振光光强为 $I_2$,则透射光强度的最大值和最小值之比为

$$\frac{I_{max}}{I_{m,in}} = \frac{\frac{1}{2}I_1 + I_2}{\frac{1}{2}I_1} = 5$$

$$\Rightarrow I_2 = 2I_1$$

自然光占总光强百分比:$\frac{I_1}{I_2 + I_1} = \frac{I_1}{2I_1 + I_1} = 33.9\%$

线偏振光占总光强百分比:$\frac{I_2}{I_2 + I_1} = 66.7\%$

**66.(北京市 1999 年)** 某种透明媒质对于空气的临界角(指

全反射）等于45°,光从空气射向此媒质时的布儒斯特角是____.

**本题考点:**全反射,布儒斯特定律

**解:**全反射有:$\frac{\sin 45^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{n_2}{n_1}$　　$(n_2 = 1)$

光从空气射入此媒质,布儒斯特角

$$\tan i_2 = \frac{n_1}{1} = \sqrt{2} \quad i_0 = \arctan\sqrt{2}$$

空处填:$\arctan\sqrt{2}$

**67.(北京理工大学2002年)**　使一光强为 $I_0$ 的平面偏振光先后通过两个偏振片 $P_1$ 和 $P_2$. $P_1$ 和 $P_2$ 的偏振化方向与原入射光光矢量振动方向的夹角分别是 $\alpha$ 和90°,则通过这两个偏振片后的光强 $I$ 是

A. $\frac{1}{2} I_0 \cos^2\alpha$　　B.0　　C. $\frac{1}{4} I_0 \sin^2(2\alpha)$

D. $\frac{1}{4} I_0 \sin^2\alpha$　　E. $I_0 \cos^4\alpha$

**本题考点:**马吕斯定律

**解:**偏振光通过 $P_1$ 后,光强为 $I_1 = I_0\cos^2\alpha$,光强为 $I_1$ 的偏振通过 $P_2$ 后,光强变为

$$I_2 = I_1\cos^2(90^\circ - \alpha) = I_0\cos^2\alpha\sin^2\alpha = \frac{1}{4} I_0\sin^2(2\alpha)$$

答案选 C

# 第五部分　量子物理学

## 一、考点综述

**1. 斯特藩—玻耳兹曼定律**

$$M_B(T) = \sigma T^4$$

**2. 维恩位移定律**

$$T\lambda_m = b$$

**3. 爱因斯坦光电效应方程**

$$h\nu = A + \frac{1}{2}mv^2$$

**4. 康普顿偏移**

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\phi)$$

**5. 氢原子光谱的实验规律**

$$\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}),(m < n = 1,2,3,\cdots)$$

$m = 2, n = 3,4,5\cdots$ 为巴耳末系.

**6. 波尔氢原子理论**

轨道半径

$$r_n = n^2 a_0 \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

$$a_0 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = 5.29 \times 10^{-11}(\mathrm{m})$$,是第一玻尔轨道半径

能级

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2} ev$$

**7. 德布罗意波**

$$E = h\nu$$

$$P = \frac{h}{\lambda}$$

**8. 一维无限深势阱**

波函数

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & (\text{阱外}) \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} & (\text{阱内}) \end{cases}$$

能级

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2} \quad (n = 1,2,3\cdots)$$

**9. 隧道效应穿透系数近似为**

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(v_0 - E)}\right)$$

**10. 不确定关系**

$$\Delta x \Delta P_x \geqslant \frac{\hbar}{2}$$

**11. 原子中电子运动状态的四个量子数**

主量子数 $n = 1,2,3,\cdots$

角量子数(副量子数) $l = 0,1,2,\cdots,n-1$

磁量子数 $m = 0, \pm 1, \pm 2,\cdots \pm l$

自旋磁量子数　$m_s = \pm \frac{1}{2}$

原子能级,电子组态,塞曼效应

**12. 物体发光机制**

热发光的激励的能量来源于周围的温度场,物体中的原子、分

子因热运动而不断被激发到高能态，这种发光称为热发光，热发光所产生的辐射光谱分布与物体的温度有关，而与它的种类、形状、结构都没有关系. 非热发光所辐射的光谱则与物体中原子或分子的能量状态有关.

## 二、经典题解

### Ⅰ. 量子光学

**1.(北京理工大学 2000 年)** 金属产生光电效应的红限依赖于

A. 入射光的频率　　B. 金属的逸出功

C. 入射光的强度　　D. 光对金属的入射角

**本题考点:光电效应**

**解:**光电效应红限是指入射光能产生光电效应的最低频率 $\nu_0$

$U_0 = h\nu_0$　　$U_0$ 为金属的逸出功

答案选 B

**2.(北京邮电大学2002年)** 波长 $\lambda_0 = 0.20\text{Å}$的 $x$ 射线与静止的自由电子碰撞. 今在和入射线垂直的方向观察散射辐射. 求:(1) 散射 $x$ 射线的波长;(2) 反冲电子获得的能量;(3) 反冲电子的动量的大小,以及反冲电子运动方向和入射光子运动方向之间的夹角(可用反三角函数表示).

**本题考点:康普顿散射**

**解:**光子与电子散射是完全弹性的.

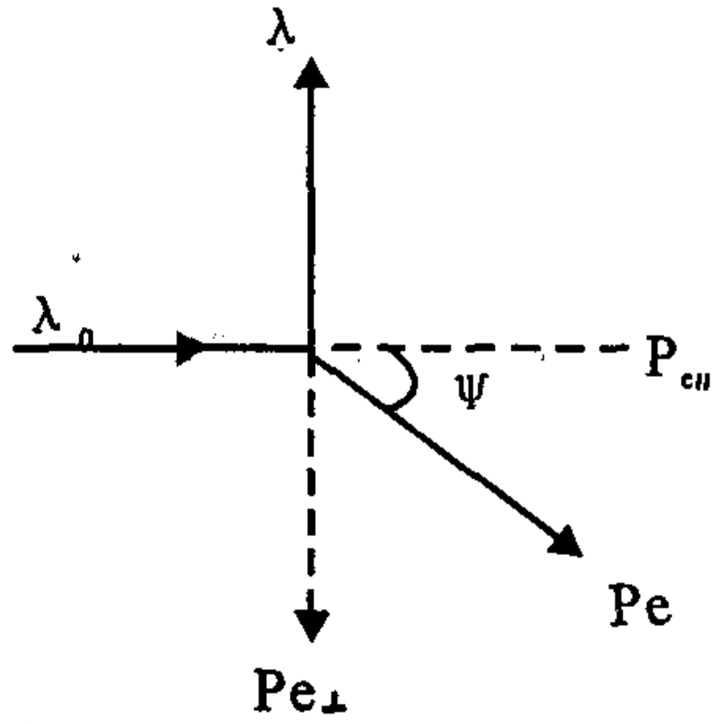
$$\frac{hc}{\lambda_0} + m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda} + mc^2 \qquad ①$$

$$\frac{h}{\lambda_0} = p_{e\parallel} \quad ②$$

$$\frac{h}{\lambda} = P_{e\perp} \quad ③$$

$$P_e^2 = P_{e\parallel}^2 + P_{e\perp}^2 \quad ④$$

$$(mc^2)^2 = (m_0 \cdot c^2)^2 + P_e^2 c^2 \quad ⑤$$




解得：$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} = 2.43 \times 10^{-12}\text{m}$

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = 0.2243 \times 10^{-12}(\text{m}) = 0.22\text{Å}$$

$$(2)\Delta E = mc^2 - m_0 c^2 = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda} = 8.95 \times 10^{-16}\text{J} = 5.6 \times 10^3 ev$$

$$(3)\ P_e = \sqrt{\frac{h^2}{\lambda_0} + \frac{h^2}{\lambda^2}} = 1.4 \times 10^{-23}(\text{kg} \cdot \text{m/s})$$

$$\tan\varphi = \frac{p_{e\perp}}{p_{e\parallel}} = \frac{\frac{h}{\lambda_0}}{\frac{h}{\lambda}} = \frac{\lambda}{\lambda_0} = 1.1$$

$$\varphi = \tan^{-1}1.1$$

**3.(清华大学 2000 年)**　为解决黑体辐射单位频率的辐射强度与频率的关系问题，普朗克的量子假设是假设了什么物理量的量子化？

A. 能量；　B. 频率；　C. 角动量；　D. 速度.

**本题考点：普朗克的量子假设**

**解：普朗克的量子假设能量是量子化的**

答案选 A

**4.(清华大学 2000 年)**　爱因斯坦对光电效应的解释中，主要的创新了什么概念？

A. 电子可以转化为 X 射线　　B. 能量守恒；

C. 光子的存在　　D. 光的波粒二象性.

**本题考点**:爱因斯坦的光电效应

**解**:爱因斯坦的光电效应解释中提出光量子即光子的概念

答案选 C

**5.(清华大学 1998 年)**　已知一单色光照射在钠表面上,测得光电子的最大动能是 $1.2eV$,而钠的红限波长是 5400Å,那么入射光的波长是

A.5350Å　　B.5000Å　　C.4350Å　　D.3550 Å

**本题考点**:爱因斯坦的光电效应

**解**:$h\nu = h\nu_0 + E_k$,　　$\dfrac{hc}{\lambda} = \dfrac{hc}{\lambda_0} + e\nu$,

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0} + \frac{e\nu}{hc}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5400 \times 10^{-10}} + \frac{1.2 \times 1.6 \times 10^{-19}}{hc}$$

$$\frac{1}{\lambda} = 1.85 \times 10^{6} + 9.817 \times 10^{5} \quad \lambda = 3.529 \times 10^{-7}\text{m}$$

答案选 D

**6.(清华大学 1998 年)**　在加热黑体过程中,其最大单色辐出度(单色辐射本领)对应的波长由 $0.8\mu m$ 变到 $0.4\mu m$,则其辐射出射度(总辐射本领)增大为原来的:

A.2 倍　　B.4 倍　　C.8 倍　　D.16 倍

**本题考点**:维恩位移定律和斯特藩 — 玻耳兹曼定律.

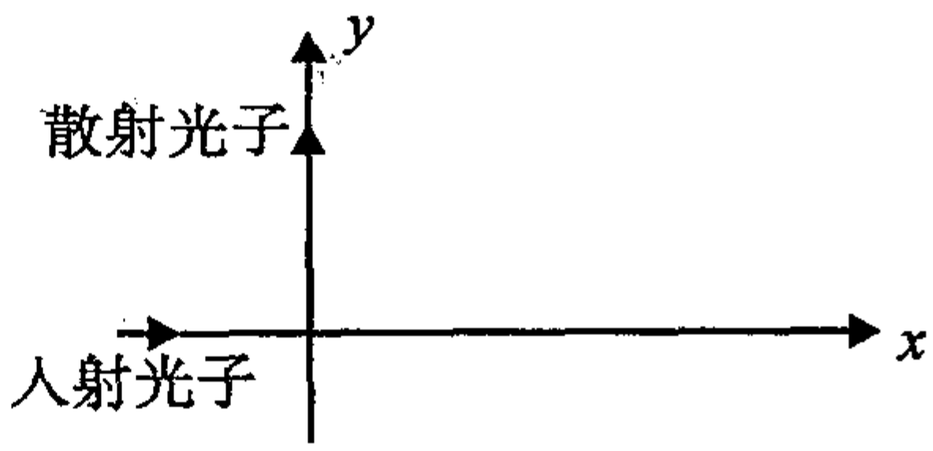
**解**:$\lambda_m T = b$

当　$\lambda_m \to \dfrac{\lambda_m}{2}$, $T \to 2T$ 时

$M_\lambda = \sigma T^4$　　$M_\lambda \to 16M_\lambda$

答案选 D

**7.(清华大学 1998 年)**　设康普频效应中入射的 $X$ 射线(伦琴射线)的波长 $\lambda = 0.700\text{Å}$,散射的 $X$ 射线与入射的 $X$ 射线垂直,求:




(1) 反冲电子的动能 $E_k$.

(2) 反冲电子运动的方向与入射的 $X$ 射线之间的夹角 $\theta$.

(普朗克常量 $h = 6.63 \times 10^{-34}\text{J}\cdot\text{S}$,电子静止质量 $m_0 = 9.11 \times 10^{-31}\text{kg}$)

**本题考点:**康普顿效应是光子和电子的碰撞是弹性.

**解:**碰撞动量守恒(脚标 $e$ 表示电子对应的物理量)

$X$ 轴上 $\frac{h}{\lambda} = P_{ex}$, $Y$ 轴上 $\frac{h}{\lambda'} + P_{ey} = 0$

能量守恒 $\frac{hc}{\lambda} + m_e c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + [m_e^2 c^4 + (P_{ex}^e + P_{ey}^2) c^2]^{\frac{1}{2}}$

解得 $\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} = 0.7 + 0.0243 = 0.7243\text{Å}$

$E_k = [E_0^2 + (P_{ex}^2 + P_{ey}^2) c^2]^{\frac{1}{2}} - E_0$

$= [m_e^2 c^4 + (\frac{h^2 c^2}{\lambda^2} + \frac{h^2 c^2}{\lambda^2})]^{\frac{1}{2}} - m_e c^2 = 581(eV)$

$$\tan\theta = \frac{P_{ey}}{P_{ex}} = \frac{\frac{h}{\lambda}}{\frac{h}{\lambda'}} = \frac{\lambda'}{\lambda}$$

$\theta = 51°2'$

**8.(复旦大学 1999 年)**　波长为 $\lambda_0 = 2.00\text{Å}$的 $X$ 射线在某物

质中发生康普顿散射,在散射角为 $\varphi = 90°$ 的方向上观察到散射 $X$ 射线,求:

(1) 散射 $X$ 的射线相对于 $\lambda$ 射线的波长改变量 $\Delta\lambda$

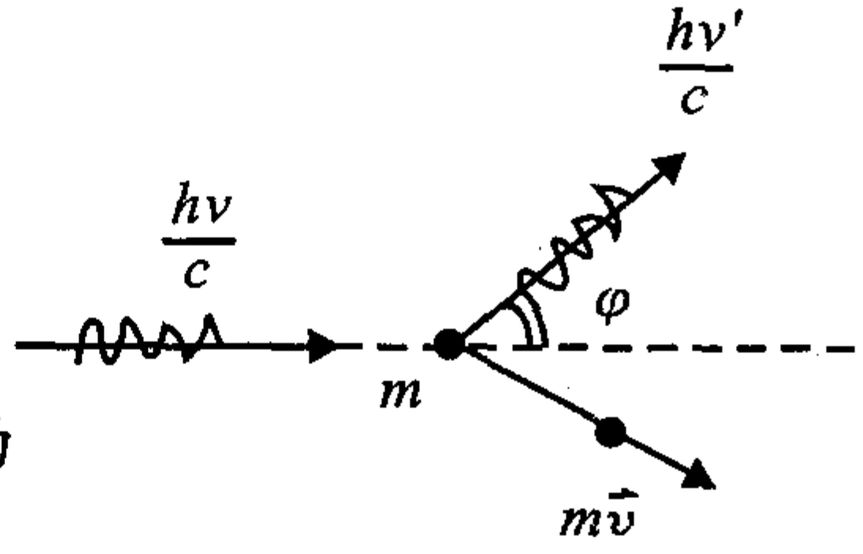
(2) 引起这种散射的反冲电子所获得的动能 $E_K$

已知暑朗克常数

$h = 6.63 \times 10^{-34}(\mathrm{J \cdot S})$,

电子静质量

$m_0 = 9.11 \times 10^{-31}\mathrm{kg}$




**本题考点:** 康普顿散射公式,动量守恒和能量守恒.

**解:**(1) 由康普顿散射公式

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\varphi)$$

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 C} = 0.024\text{Å},$$

$$\varphi = 90°$$

$$\Delta\lambda = \lambda_c = 0.024\text{Å}$$

(2) 康普顿散射是 $X$ 射线中的光子和"静止"电子的相互碰撞过程,碰撞前后总动量和总能量守恒.

即 $$\frac{h\nu}{C}\vec{k} = \frac{h\nu'}{C}\vec{k}' + m\vec{v} \qquad ①$$

$$h\nu + m_0 C^2 = h\nu' + mC^2 \qquad ②$$

其中 $v$ 和 $v'$ 是入射光子和散射光子的频率,$m_0$ 是电子的静止质量,$m$ 为反冲电子的质量.

$$E = mC^2 = m_0 C^2 + E_k \qquad ③$$

将 ③ 代入 ② 式得

$$h\nu + m_0 C^2 = h\nu' + m_0 C^2 + E_k$$

反冲电子的动能为

$$E_k = h(\nu - \nu') = hc(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda'}) = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda_0\lambda'}$$

又 $\lambda' = \lambda_0 + \Delta\lambda = 2.00 + 0.024 = 2.024\dot{A}$

$$E_k = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8 \times 0.024}{2.00 \times 10^{-10} \times 2.024}$$

$$= 1.18 \times 10^{-17}(\mathrm{J}) = 74eV$$

## Ⅱ. 量子力学

**9.(清华大学2002年)**(1)经200伏特电位差加速的电子,其德布罗意波长多大?(2)该电子遇到直径1$mm$的障碍或孔时,呈现粒子性还是波动性?为什么?(电子的质量为$9.11 \times 10^{-31}$kg,电子的电荷为$1.6 \times 10^{-19}$C,$h = 6.63 \times 10^{-34}$Jss)

**本题考点:**物质波波长的计算及衍射现象

**解:**(1)$\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2mE_k}}$

$$\frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 911 \times 10^{-31} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 200}}$$

$$= 8.86 \times 10^{-11}m$$

(2)因 $\lambda = 8.68 \times 10^{-11}\mathrm{m} << \mathrm{d} = 1\mathrm{mm}$

衍射效应不明显,故电子呈现粒子性.

**10.(北京理工大学2000年)**　计算速率为10m/s、质量为4.0kg的物体的德布罗意波波长.

**本题考点:**德布罗意波波长,测不准关系

**解:**(1)$p = mv$　$\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{6.63 \times 10^{34}}{10 \times 4} = 1.66 \times 10^{-35}\mathrm{m}$

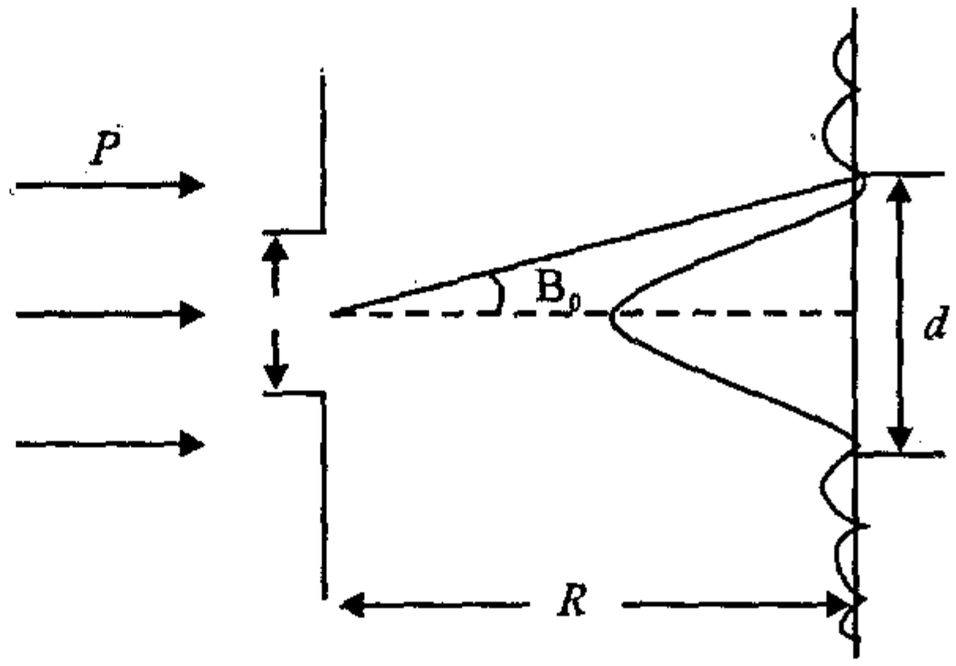
**11.(北京邮电大学1999年)**　如图所示,一束动量为$P$的电

子,通过缝宽为 $a$ 的狭缝后,在距离狭缝为 $R$ 处放置一荧光屏,屏上衍射图样中央最大的宽度 $d$ 等于.

A. $\frac{2a^2}{R}$　　B. $\frac{2ha}{P}$　　C. $\frac{2ha}{RP}$　　D. $\frac{2Rh}{aP}$

**本题考点:**测不准关系

**解:** $\Delta x = a$　　$\Delta P \geqslant \frac{h}{\Delta x}$




$$t = \frac{R}{P/m} = \frac{mR}{P}$$

$$\frac{d}{2} = \frac{\Delta p}{m}t = \frac{hR}{\Delta xP} = \frac{Rh}{aP}$$

$$d = \frac{2Rh}{aP}$$

答案选 D

**12.(清华大学 1998 年)**　设电子被限定在 0.1nm 的尺度范围里,那么当测定它的速度时,其不确定量为多大?($\hbar = 1.05 \times 10^{-34}\mathrm{J \cdot S}, m_e = 9.11 \times 10^{-31}\mathrm{kg}$)

**本题考点:**测不准关系

**解:** $\Delta x \Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2}$

$$\Delta x = 0.1 \times 10^{-9} m$$

$$\Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{1.05 \times 10^{-34}}{2 \times 10^{-10}} = \frac{1}{2} \times 1.05 \times 10^{-23}$$

$$m\Delta v = \frac{1}{2} \times 1.05 \times 10^{-23}$$

$$\Delta v = \frac{\hbar}{2\Delta x m} = \frac{\frac{1}{2} \times 1005 \times 10^{-23}}{9.11 \times 10^{-31} \times 2} = 5.76 \times 10^6 \mathrm{m/s}$$

**13.(清华大学 1998 年)**　关于不确定关系 $\Delta x \Delta p_x \geqslant \hbar$($\hbar = h/2\pi$) 有以下几种理解:

(1) 粒子的动量不可能确定.

(2) 粒子的坐标不可能确定.

(3) 粒子的动量和坐标不可能同时确定.

(4) 不确定关系不仅适用于电子和光子,也适用于其它粒子.

其中正确的是:

(A)(1),(2)　(B)(2),(4)　(C)(3),(4)　(D)(4),(1)

**本题考点:**不确定关系的理解.

**解:**$\Delta x\Delta p_x \geqslant \hbar$ 是坐标和动量不能同时测准(或确定).,对一切粒子都正确.

答案选(C)

**14.(清华大学 1998 年)**　粒子在一维无限深势阱中运动(势阱宽度为 $a$),其波函数为 $\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{3\pi x}{a}$,且 $0 < x < a$,粒子出现的几率最大的各个位置是 $x =$ _____.

**考点:**波函数的物理意义.

**解:**粒子几率密度　$\rho(x) = \Psi^2(x) = \frac{2}{a}\sin^2\frac{3\pi x}{a}$

$$\frac{d\rho(x)}{dx} = \frac{2}{a}\cdot 2\sin\frac{3\pi x}{a}\cdot\cos\frac{3\pi x}{a}\cdot\frac{3\pi}{a} = \frac{6\pi}{a^2}\sin\frac{6\pi x}{a} = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{a}{6}, x_3 = \frac{a}{3}, x_4 = \frac{2a}{3}, x_5 = \frac{5}{6}a, x_6 = a$$

还要 $x_2 = \frac{a}{3}$ ,$x_5 = \frac{2}{3}a$,$x_6 = a$ 处是极小点,则极大点是 $x$ 为$\frac{1}{6}a, \frac{a}{2}, \frac{5}{6}a$ 处.

空处填$\frac{1}{6}a, \frac{1}{2}a, \frac{5}{6}a$

**15.(大连理工大学 2000 年)**　(1) 计算速率为 10m/s,质量为 4.0kg 的物体的德布罗意波波长;(2) 如果实际测量该物体的位

置、速度都允许有千分之一的误差，讨论其波动性的显见程度.

**本题考点：**波长与动量的关系、测不准关系

**解：**(1) $m = 4.0\text{kg}$, $V = 10\text{m/s}$，由德布罗意物质波的波长 $\lambda$ 与动量 $p$ 的关系式 $\lambda = \frac{h}{p}$（$h$ 为普朗克常数）

$$\lambda = \frac{h}{mV} = 1.65 \times 10^{-33} \text{米} = 1.65 \times 10^{-23} \text{Å}$$

(2) 由位置与动量的测不准关系式有 $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$. 由于其速率远小于光速，故不考虑相对论效应，$\Delta p = m\Delta V$，依题意有

$$\Delta x \cdot \Delta p = m\Delta x \cdot \Delta V = 4 \times \frac{1}{1000} \times \frac{1}{1000} > \frac{\hbar}{2}$$

当允许位置有千分之一的误差时，其速率的允许误差为

$$\Delta V \geqslant \frac{\hbar}{2m\Delta X} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{4 \times 3.14 \times 10^{-3}} = 1.32 \times 10^{-30}(\text{m/s})$$

同理有 $\Delta x \geqslant \frac{\hbar}{2m\Delta V} = 1.32 \times 10^{-30}$，两者的许可误差程度如此之小，以致可以不考虑其测量的不确定性，可以用经典方法描述之.

**16.（南开大学 2002 年）** 求温度为 27℃ 时，对应于方均根速率的氧气分子的德布罗意波的波长.

**本题考点：**气体分子的方均根速率，物质波

**解：**$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3 \times 3.81 \times 300}{32 \times 10^{-3}}} = 483\text{ms}^{-1}$

非相对论情况下：$\overline{\varepsilon_k} = \frac{1}{2} m \overline{v^2}$

德布罗意波的波长为

$$\lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{\sqrt{2m\overline{\varepsilon_k}}} = \frac{h}{m\sqrt{\overline{v^2}}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{5.32 \times 10^{-25} \times 483}$$

$$= 2.58 \times 10^{-11}\text{m}$$

**17.(北京市1999年)**　若$\alpha$粒子(电量为$2e$)在磁感应强度为$B$的均匀磁场中沿半径为$R$的圆形轨道运动,则$\alpha$粒子的德布罗意波长是:(　　)

A. $\frac{h}{2eRB}$;　B. $\frac{h}{eRB}$;　C. $\frac{1}{2eRBh}$;　D. $\frac{1}{eRBh}$

**本题考点:**物质波,磁场中的运动电荷

**解:**$\lambda = \frac{h}{p}$

又　$R = \frac{mv}{Bq}$,　　$p = mv = BqR$

$\lambda = \frac{h}{BqR} = \frac{h}{2eBR}$

答案选A

## Ⅲ. 原子物理

**18.(北京理工大学2000年)**　(1)画出氢原子光谱的巴耳末线系中5条频率最低的谱线的能级跃迁图;(2)估算它们在电磁波谱中的波段位置.(里德伯常数$R = 1.09677 \times 10^7 m^{-1}$;普朗克常数$h = 6.626 \times 10^{-34} J.s$)

**本题考点:**氢原子光谱

**解:**(1)巴耳末线系

$$\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}) \quad n = 3,4,5,6,7$$

能级跃图

$$(2)\lambda = \frac{1}{R(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2})} = \frac{4n^2}{(n^2-2)R}$$

$n = 3$　$\lambda_1 = 656.5nm$

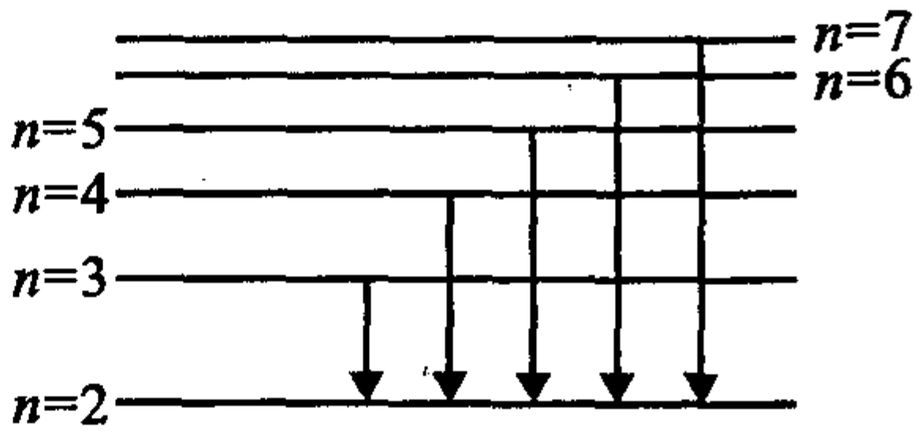
$n = 4$　$\lambda_2 = 486.3nm$

$n = 5 \quad \lambda_3 = 434.2\text{nm}$

$n = 6 \quad \lambda_4 = 410.3\text{nm}$

$n = 7 \quad \lambda_5 = 3.971\text{nm}$

前四线 $\lambda_1 \rightarrow \lambda_4$ 是可见光，$\lambda_5$ 是紫外线.




**19.(清华大学 1998 年)** 写出氦、氖、氩处于基态时的电子组态.

**本题考点:**原子的电子排列

**解:**氦 $1S^2$，氖 $1S^2 \quad 2S^2 \quad 2P^6$，氩 $1S^2 \quad 2S^2 \quad 2P^6 \quad 3S^2$

**20.(清华大学 2000 年)** 氢原子的玻尔半径，基态能量的数量级分别为:

A. $10^{-8}$m 和 $10^{1}$ev ；　　B. $10^{-8}$m 和 $10^{2}$ev;

C. $10^{-10}$m 和 $10^{1}$ev;　　D. $10^{-12}$m 和 $10^{1}$ev.

**本题考点:**氢原子玻尔半径、基态能量

**解:** 玻尔半径 $a_0 = 0.5$ 埃为 $10^{-10}m$ 数量级，基态能量 $E_1 = -13.6$ 电子伏特为 $10^{1}$ev

答案选 C

**21.(清华大学 1998 年)** 原子内电子的量子态由 $n$、$l$、$m_l$ 及 $m_s$ 四个量子数表征，当 $n$、$l$、$m_l$ 一定时，不同的量子态数目为_____；当 $n$、$l$ 一定时，不同的量子态数目为_____；当 $n$ 一定时，不同的量子态数目为_____.

**本题考点:**原子的四个量子数取值，量子态数目.

**解:** $n, l, m_l$ 一定　　$m_s$ 取 $\pm \frac{1}{2}$ 两个状态

$n, l$ 一定　　$m_l$ 取 $0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm l$

$m_s = \pm \frac{1}{2}$ 共 $2(2l+1)$ 个状态数

$n$ 一定　　$l = 0,1,2,\cdots(n-1)$

$m_l = 0, \pm 1, \pm 2\cdots \pm l \quad 2l+1$

$m_s = \pm \frac{1}{2}$

共 $2[1+3+5+\cdots 2(n-1)] = 2n^2$ 个状态数

空处分别填两个，$2(2l+1)$ 个，$2n^2$ 个

**22.（中国科学院 2000 年）** 已知一群处于基态的氢原子被外来单色光激发后，在其发射的赖曼系谱线中仅观察到四条光谱线（不考虑精细结构）.

（1）试求这外来单色光的光子能量；

（2）总共可观察到多少条谱线？写出它们的波数表达式，并标明各个谱线属于氢原子哪个谱线系？

（3）计算频率最低的谱线的波长.要求结果四位有效数字.

（已知 $R_H = 1.0967758 \times 10^{-7}$ 米）

**本题考点：**氢原子的能级跃迁及其光谱线系

**解：**（1）氢原子被激发到 $n_1 = 4+1 = 5$ 的能级

单色光子能量：

$$E = hcR(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{5^2}) = hcR(1 - \frac{1}{25}) = 13.6 \times \frac{24}{25} eV \approx 13.06 eV$$

（2）共观察到 $N$ 条谱线　$N = 4+3+2+1 = 10$

赖曼系：$\tilde{\nu} = R_H(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2})$　　$n = 2,3,4,5$

巴耳末系：$\tilde{\nu} = R_H(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2})$　　$n = 3,4,5$

帕邢系：$\tilde{\nu} = R_H(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2})$　　$n = 4,5$

布喇开系：$\tilde{\nu} = R_H(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2})$　　$n = 5,6$

(3) $$\frac{1}{\lambda_{max}} = R_H(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2}) = R_H\frac{9}{25 \times 16}$$

$$\lambda_{max} = \frac{25 \times 16}{9} \times 1.0968 \times 10^{-7} = 4.875 \times 10^{16}\text{m}$$

**23.**(中国科学院2001年) 毕克体系是由 $He^+$ 发出的,其中的一条谱线的波长与氢原子的巴耳末系第一条谱线相近.为使基态 $He^+$ 激发,并射出这条谱线,必须至少用多大动能的电子去轰击它?

**本题考点:**氢原子的能级跃迁及其光谱线系

**解:**由氢原子的巴尔末系公式$\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2})$得第一条谱线的能量为 $h\frac{c}{\lambda} = Rhc(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2})$ 设基态 $H_e^+$ 全部吸收电子的动能,则所需电子的动能为

$$Rhc\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) = 1.89(\text{电子伏特})$$

**24.**(中国科学技术大学 1998 年) (1) 试写出钠原子(Z = 11) 主线系,第一辅线系、第二辅线系和柏格曼线系的波数表达式;

(2) 已知 ΔS = 1.35,Δp = 0.86,Δd = 0.01,求钠原子的电离电势;

(3) 若不考虑精细结构,则钠原子自3D态向低能级跃迁时,可产生几条谱线?是两个能级间的跃迁?各对应哪个线系的谱线?

(4) 若考虑精细结构,则上问中的谱线分别是几线结构?

(5) 用光谱项表达式表示出相应的跃迁.

**本题考点:** $Na$ 原子的光谱线系、电离能、精细结构

**解:** $Na$ 原子 $Z = 11$,基态 $1S^22S^22P^63S$

(1) 主线系 $\tilde{\nu}_n = \frac{R}{(3 - \Delta S)} - \frac{R}{(n - \Delta P)^2}$

$n = 3,4,5\cdots\cdots$

第一辅线系：$\tilde{\nu}_n = \dfrac{R}{(3-\Delta P)^2} = \dfrac{R}{(n-\Delta d)^2}$

$n = 3,4,5\cdots\cdots$

第二辅线系：$\tilde{\nu}_n = \dfrac{R}{(3-\Delta d)^2} - \dfrac{R}{(n-\Delta f)^2}$

$n = 4,5,6\cdots\cdots$

柏格曼线系：$\tilde{\nu}_n = = \dfrac{R}{(3-\Delta d)^2} - \dfrac{R}{(n-\Delta f)^2}$

$n = 4,5,6\cdots\cdots$

(2) 电离能为$\dfrac{hcR}{(3-\Delta S)^2} = \dfrac{13.6}{(3-1.35)^2} eV \approx 5.00 eV$

(3) 不考虑精细结构，可产生两条谱线

$3D \rightarrow 3P$　　第一辅线系

$3P \rightarrow 3S$　　主线系

(4) 考虑精细结构

$3D \rightarrow 3P$　　三线结构　　$3^2D_{\frac{3}{2},\frac{5}{2}} \rightarrow 3^2P_{\frac{3}{2}}$

$3^2D_{\frac{3}{2}} \rightarrow 3^2P_{\frac{3}{2}}$

$3P \rightarrow 3S$　　三线结构　　$3^2D_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}} \rightarrow 3^2S_{\frac{1}{2}}$

**25.(中山大学2002年)** (1) 氢原子从激发能为10.2 eV的能态跃迁到结合能为0.85 eV的能态，求吸收的光子能量，并在能级图上画出这个跃迁及标出两能级对应的量子数.(2)He原子的两个电子处在2p3p电子组态，问：可能组成哪几种原子态?用原子态符号表示之.(设电子之间是LS藕合.)

**本题考点：**氢原子的跃迁定则、原子耦合

**解：**(1) 依题意，氢原子的能量是量子化的，其能量 $E_n$ 与量子数 $n$ 的关系为

$$E_n = -\frac{Rch}{n^2} \qquad (n = 1,2,3\cdots\cdots)$$

式中 $R$ 为里德伯常数，$c$ 为光速，$h$ 为普朗克常数

当 $n = 1$ 时为基态 $\qquad E_1 = -\frac{13.58}{1^2} = -13.58eV$

氢原子从激发能为 $10.2eV$ 的能态跃迁到结合能为 $0.85eV$ 的能态，由跃迁定则知

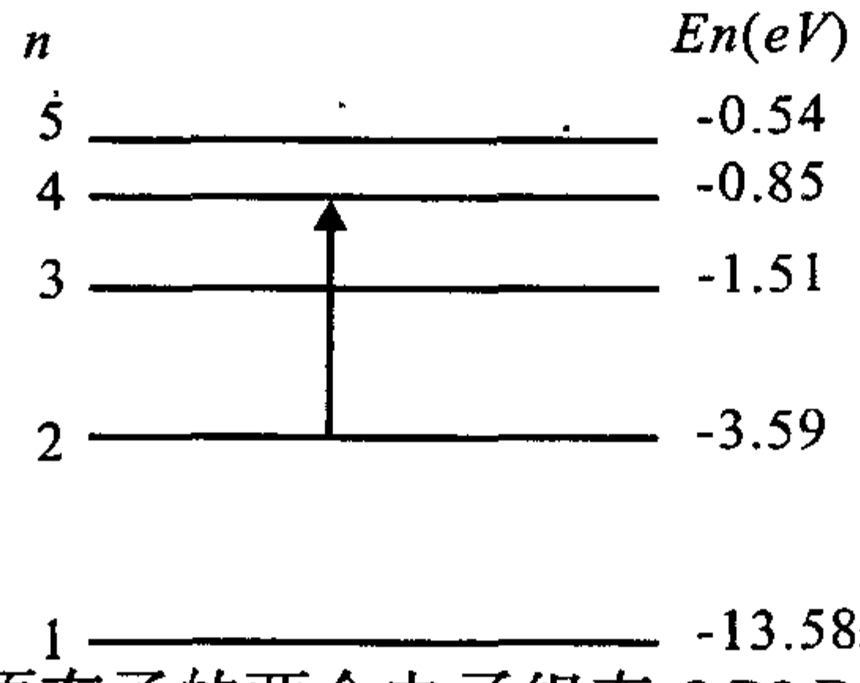
$$h\nu = 10.2eV = (-\frac{13.58}{n_2^2}) - (-\frac{13.58}{n_1^2})eV$$

当 $n_1 = 1$ 时得 $n_2 = 2$ 即开始跃迁前氢原子处于第一激发态．而结合能为 $0.85eV$ 的能态对应于第 $n = 4$ 的第三激发态．

再由跃迁定则得吸收光子的能量为

$$\varepsilon = (-0.85eV) - (-\frac{13.58}{4}eV) = 2.54eV$$

图示如下




(2) 由 $H_e$ 原有子的两个电子组态 $2P3P$ 知 $l_1 = 1, l_2 = 1$

由 $L-S$ 耦合模型 $L = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, l_1 + l_2 - 2, |l_1 - l_2|$

得 $L = 2,1,0$．而 $S = s_1 + s_2$ 和 $|s_1 - s_2|$，即 $S = 1,0$

当 $S = 0$ 时，$J = L + S$ 可取 $J = 2,1,0$

当 $S = 0$ 时，$J = L + S$ 可取 $J_1 = S = 1$(当 $L = 0$)；$J_2 = 2,1,0$( $L = 1$ 时) $J_3 = 3,2,1$(当 $L = 2$ 时)，列表如下：

| $S$ | $L$ | $J$ | 光谱符号 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $^1S_0$ |
|  | 1 | 1 | $^1P_1$ |
|  | 2 | 2 | $^2D_2$ |
| 1 | 0 | 0 | $^3S_0$ |
|  | 1 | 2　1　0 | $^3P_2$　$^3P_1$　$^3P_0$ |
|  | 2 | 3　2　1 | $^3D_2$　$^3D_2$　$^3D_1$ |

**26.(复旦大学 2001 年)**　设某原子的两个价电子的组态为 2p3d,求通过 L－S 耦合可形成的原子态.

**本题考点:**原子光谱,原子态,L－S 耦合.

**解:** $l_1 = 1, l_2 = 2, s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$,

$S = s_1 + s_2$,或 $s_1 - s_2$

$L = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, \cdots | l_1 - l_2 |$

$S = 0,1; L = 3,2,1, L - S$ 耦合可形成如下 12 个组合:

| | S = 0, | 1 |
|---|---|---|
| L = 1 | $^1P_1$ | $^2P_{0,1,2}$ |
| 2 | $^1D_2$ | $^3D_{1,2,3}$ |
| 3 | $^1F_3$ | $^3F_{2,3,4,}$ |

**27.(复旦大学 1999 年)**　试比较氦原子在弱磁场中的跃迁:$(1s3s)^1S_0 \rightarrow (1s2p)^1P_1$ 和 $(1s3s)^3S_1 \rightarrow (1s2p)^3P_1$,画出各谱项在

磁场中的裂距和能级跃迁图,定性说明它们的主要特点.

**本题考点:**氦原子光谱,塞曼效应.

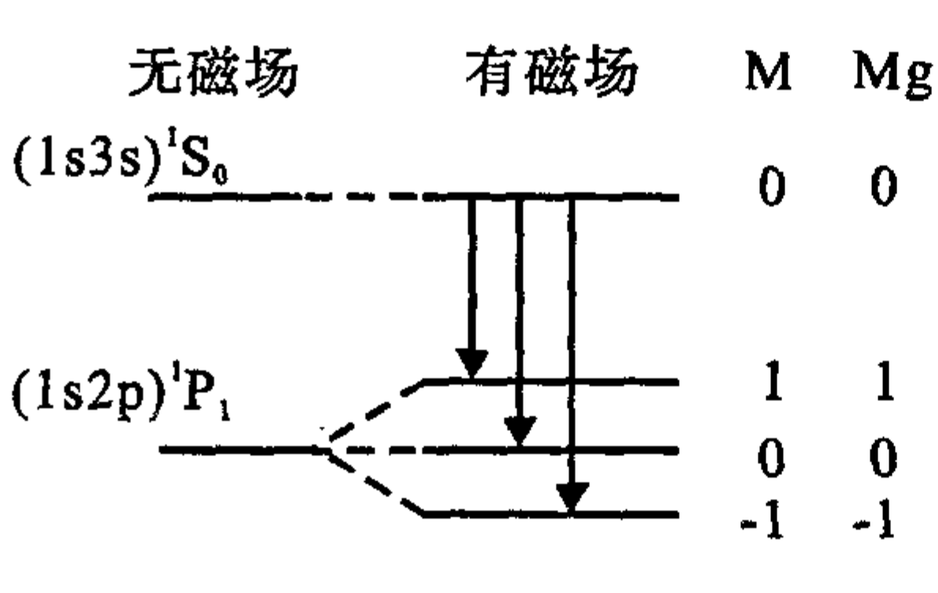



图 1

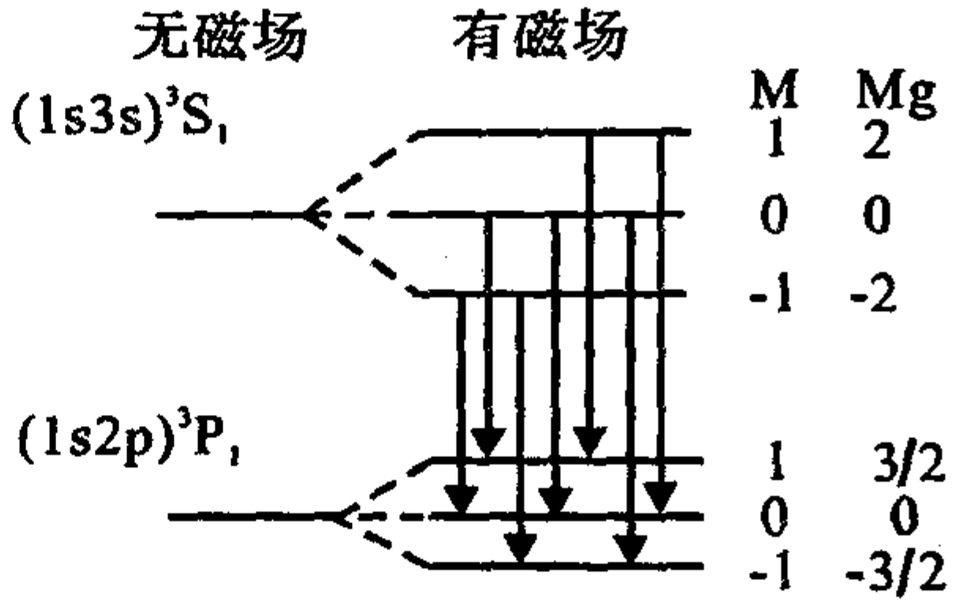



图 2

**解:**(1) 对$^1S_0$ 能级:$L = 0, S = 0, J = 0, M_2 = 0,\ g_2 = 1$

对$^1P_1$ 能级:$L = 1, S = 0, J = 1, M_1 = \pm 1, 0, g_1 = 1$

裂开后的谱线同原谱线的波数之差为:

$$\Delta\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda} = (M_2 g_2 - M_1 g_1)\frac{Be}{4\pi mc}$$

令 $$\nu_0 = \frac{Be}{4\pi mc}$$

则 $$\Delta\tilde{\nu} = [1, 0, -1]\nu_0$$

光谱线在磁场中分裂为三条光谱线,且每条谱线间距相等,是正常塞曼效应,如图 1 所示.

(2) 对$^3S_1$ 能级:$L = 0, S = 1, J = 1, M_2 = \pm 1, 0, g_2 = 2$;

对$^3P_1$ 能级:$L = 1, S = 1, J = 1, M_1 = \pm 1, 0, g_1 = \frac{3}{2}$

$$\Delta\tilde{\nu} = (M_2 - g - M_1 g)L$$

$$= \left[-2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2,\right]\nu_0$$

光谱线在磁场中可发生7种跃迁,光谱分裂成7条,而且各谱线与原谱线的波数差不相等,属反常塞曼效应,如图2所示.

## Ⅳ. 其它

**28.(清华大学2002年)** (1) 物体被加热到很高的温度时会自行发光,随温度升高,发出的光由红变为黄,又变为蓝,为什么? (2) 气态的元素发出的是线光谱,而加热固体发出的是连续光谱,为什么?

**本题考点:** 维恩位移定律,气体、固体发光原理

**答:** (1) 由维恩位移定律,随着温度升高,物体发光波长变短,所以光有红 → 黄 → 蓝的变化. (2) 气体的元素发光,是由于原子中电子在两量子能级之间跃迁的结果,所发光为线光谱. 而加热固体发光,是由于分子、原子经典运动而导致的发光,所发光为连续光谱.

**29.(清华大学1998年)** $C^{14}$ 以5600年的半衰期进行 $\beta$ 衰变,设大气中的 $C^{14}$ 的比例恒定不变,有一古生物骨骼中含有 $C^{14}$ 所产生的 $\beta$ 的量为现在生物骨骼中 $C^{14}$ 所产生的 $\beta$ 的1/10. 求该古生物生存在多少年以前?

**本题考点:** 半衰期的物理意义,放射性元素的衰变规律

**解:** 半衰期为 $\tau$ , $e^{-k\tau} = \frac{1}{2}$ , $k = \frac{1n2}{\tau}$

现在 $e^{-kt} = \frac{1}{10}$

$2^{\frac{t}{\tau}} = 10$

$\frac{t}{\tau}1g21$

$$t = \frac{\tau}{\lg 2} = 1.86 \times 10^4 \text{ 年，即 } 1.86 \text{ 万年}$$

**30.**(大连理工大学 2000 年) 名词解释

(1) 原子核的结合能；

(2) 质量亏损；

(3) 隧道效应；

(4) 狭义相对性原理；

(5)A – B 效应；

(6) 体系的对称性.

**本题考点**:基本概念、原理

**解**:(1) 原子核的结合能:理论和实验表明:当构成原子核的质子中子结合时,有能量放出.这个放出的能量大小就是原子核的结合能.或者说将原子核拆成分散各个自由的质子和中子时外界所需做的功.

(2) 质量亏损:是指一个稳定的原子核的质量总小于组成该原子核的各核子的质子、中子的质量之和,即自由核子(质子、中子)结合成稳定的原子核后其静质量的减少就是质量亏损.设 $m_n$, $m_p$ 和 $m_A$ 表示原子核中子、质子和原子核 ${}_Z^A x$ 的质量,则其质量亏损

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_A$$

(3) 隧道效应:是指微观粒子能穿过比其能量更高的势垒的一种量子现象,经典的微观粒子在没有外界作用时是不能穿越比其能量更高的势垒的.

(4) 狭义相对性原理:① 光速不变原理:光在真空中传播的速度与光源和观察者的运动无关.即在任何惯性系中测量的光在真空中的传播速度大小均为常数 $C$,与光源及观察者的运动无关.② 相对性原理:在任何惯性系中,所有的物理学定律都是等价的,都

具有相同的形式.

(5)A – B 效应:1959 年,阿哈罗偌夫和玻姆指出,电磁场的势具有可直接观测的物理效应,在电磁场场强为零、但磁势不为零的区域,电磁的作用使带电粒子的波函数的相位发生变化而引起的物理效应.

(6) 体系的对称性:在对一体系进行某种对称性操作后仍能得出和原先一样的结论,我们就称之为具有对称性. 诸如空间平移、转动操作及其对称性,时空反演操作及其对称性,经典力学中时间的均匀性、空间的均匀性及各向同性性,等等.

**31.(中山大学 2002 年)** 解释名词术语

(1) 多普勒效应;

(2) 能量均分定理;

(3) 涡旋电场;

(4) 线偏振光和自然光;

(5) 泡利不相容原理.

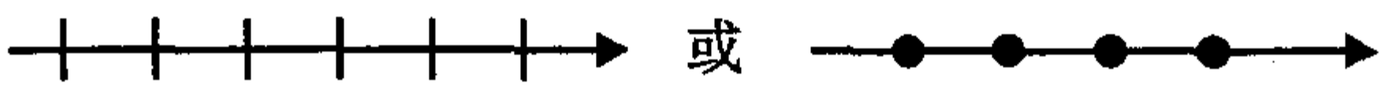
**本题考点:** 物理概念,原理

**解:**(1) 多普勒效应:当波源相对于观测者、媒质有相对运动时,观测者测量到的波的频率不同于波源的固有频率的现象.

(2) 能量均分定理:理想气体在一定的平衡态下,分子的每个自由度上都能平均地取得$\frac{1}{2}kT$的能量($k$为波尔兹曼常数,$T$为平衡态热力学温标).

(3) 涡旋电场:感生电场 $\vec{E}_B$ 又称为涡旋电场. 它是指变化的磁场($\frac{d\vec{B}}{dt}$)能在其周围空间激发一种涡旋状非静电场. 其环流不等于零,它是非保守力场.

(4) 线偏振光:又称平面偏振光.它是指描述光束中的光矢量 $\vec{E}$ 只沿某个确定的方向振动,且其振动方向与光的传播方向垂直.可表示为:



自然光:是指在垂直于光传播方向上的一横截面内,光矢量 $\vec{E}$ 的振动在所有可能的方向上出现的概率相等,且各方向上光振动的时间的平均值相同.即光矢量对光的传播方向具有轴对称性又均匀分布,其振动的振幅既具有时间分布的均匀性,又具有空间分布的均匀性.

(5) 泡利不相容原理:在同一个原子中,不可能有两个或两个以上的电子具有完全相同的4个量子数:主量子数 $n$,角量子数 $l$,磁量子数 $m_l$ 和自旋磁量子数 $m_s$.或者说,原子中每一个量子态上最多只能容纳一个电子.

[General Information]
书名=普通物理学题解精粹
作者=田旭，赵中云主编
页数=362
SS号=11991285
出版日期=2003.9

封面
书名
版权
前言
目录
第一部分　力学
　　一、考点综述
　　二、经典题解
　　Ⅰ．运动学
　　Ⅱ．动力学
　　Ⅲ．刚体
　　Ⅳ．振动与波
　　Ⅴ．相对论
第二部分　电磁学
　　一、考点综述
　　二、经典题解
　　Ⅰ．静电场
　　Ⅱ．稳恒磁场
　　Ⅲ．电磁感应
　　Ⅳ．麦克斯韦方程组
　　Ⅴ．电路及其暂态过程
第三部分　热学
　　一、考点综述
　　二、经典题解
　　Ⅰ．统计物理
　　Ⅱ．热力学
第四部分　光学
　　一、考点综述
　　二、经典题解
　　Ⅰ．几何光学
　　Ⅱ．光的干涉
　　Ⅲ．光的衍射
　　Ⅳ．光的偏振
第五部分　量子物理学
　　一、考点综述
　　二、经典题解
　　Ⅰ．量子光学
　　Ⅱ．量子力学
　　Ⅲ．原子物理
Ⅳ．其它