

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材
配套参考书

普通物理学
（第七版）
学习指导

胡盘新　汤毓骏　钟季康　主编

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材
配套参考书

普通物理学

（第七版）

学习指导

阜阳师范学院图书馆
藏书

胡盘新　汤毓骏　钟季康　主编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是与程守洙、江之永主编，胡盘新等修订的《普通物理学》（第七版）相配套的同步学习指导书，旨在帮助读者正确掌握教材中所阐述的基本知识、基本概念、基本规律和基本方法，使读者在学习过程中更好地掌握学习主动权。

本书按照主教材的章节顺序编排，各章由“学习要求”“知识框图”“内容导读”“解题指导”“自我检测”和“问题讨论”六个部分组成。

本书由主教材的编者亲自撰写，更好地把握要点，阐述也更加透彻、简明扼要，而且由浅入深，便于掌握。

本书不仅适用于使用程守洙、江之永主编的《普通物理学》（第七版）的读者作为学习辅导用书，对授课教师也有参考价值。本书可作为高等学校非物理类专业学生学习大学物理课程的辅导书或自学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

普通物理学（第七版）学习指导/胡盘新，汤毓骏，钟季康主编.--北京：高等教育出版社，2017.3

ISBN 978-7-04-047103-8

Ⅰ.①普… Ⅱ.①胡… ②汤… ③钟… Ⅲ.①普通物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 001863 号

Putong Wulixue (Di Qi Ban) Xuexi Zhidao

策划编辑	程福平	责任编辑	程福平	封面设计	王 鹏	版式设计	王艳红
插图绘制	杜晓丹	责任校对	刘娟娟	责任印制	耿 轩		

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印 刷	北京市密东印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开 本	787mm×960mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印 张	15.5		
字 数	270 千字	版 次	2017 年 3 月第 1 版
购书热线	010-58581118	印 次	2017 年 3 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	27.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 47103-00

前言

大学物理是一门重要的基础理论课。为什么重要？因为物理学是研究物质、能量及物质间的相互作用和转化的学科。人类为了生存，必须要和周围的物质世界打交道，要从物质世界获取生活所需的资源、能量和动力。物理学和人类的生活息息相关，密切相连。1999年国际纯粹与应用物理联合会(IUPAP)第23届代表大会通过一项决议，明确地指出："物理学是研究物质、能量和物质间的相互作用的学科，是一项国际事业，它对人类未来的进步起着关键的作用。"为了引导读者去理解物理学的主题思想，我们认为有必要为程守洙、江之永主编的《普通物理学》(第七版)编写这本同步学习指导书。本书各章由"学习要求""知识框图""内容导读""解题指导""自我检测"和"问题讨论"六个部分组成。这些都是以主教材为中心展开的。

编写本书的目的是，希望读者在学习过程中更好地掌握学习的主动权。"学习要求"为读者指点各章的主要内容和学习的重点；"知识框图"有利于了解各章内容的层次与脉络；"内容导读"将引导读者掌握各章的基本知识和基本规律并指出它们与物理学主题思想的关系；"解题指导"则帮助读者培养分析问题的能力；"自我检测"将使读者及时掌握和了解自己对物理规律和物理方法的认识程度；"问题讨论"相对教材内容稍有扩展，有利于开拓思路和眼界，倡导创新思维。在学习大学物理课程时，若课前预习本书或课后复习本书，我们相信一定能对读者有所裨益，在主教材的学习和钻研中发现物理学是多么有趣又多么有用。

高等教育出版社物理分社高建分社长及程福平编辑为本书的出版给予了大力支持，谨向他们表示衷心的感谢。

限于编者的水平，书中不当之处敬请使用本书的师生和同志们指正。

编　者

2016年1月

目录

第一章　运动和力 …… 1
第二章　运动的守恒量和守恒定律 …… 15
第三章　刚体和流体的运动 …… 30
第四章　相对论基础 …… 39
第五章　气体动理论 …… 47
第六章　热力学基础 …… 58
第七章　静止电荷的电场 …… 69
第八章　恒定电流的磁场 …… 101
第九章　电磁感应　电磁场理论 …… 131
第十章　机械振动和电磁振荡 …… 159
第十一章　机械波和电磁波 …… 174
第十二章　光学 …… 194
第十三章　早期量子论和量子力学基础 …… 211
第十四章　激光固体的量子理论 …… 223
第十五章　原子核物理和粒子物理 …… 226
自我检测参考答案 …… 230

第一章
运动和力

一、学习要求

1. 掌握描述质点运动的物理量:位矢、位移、速度、加速度以及角位移、角速度和角加速度.

2. 根据具体问题能用直角坐标系求运动学方程,并由运动学方程求质点的位移、速度、加速度以及由速度或加速度求运动学方程或速度.

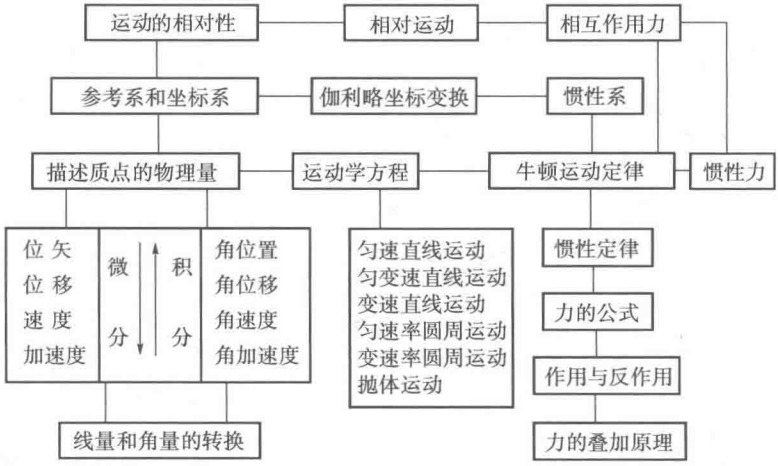
3. 能计算质点作圆周运动时的角速度、角加速度、法向加速度和切向加速度.掌握抛体运动的运算规律.

4. 理解伽利略相对性原理,理解伽利略坐标变换和速度变换.

5. 掌握牛顿三定律及其适用条件,掌握用隔离体法分析质点受力和解题的基本方法.

6. 了解惯性力,知道其特点和应用.

二、知识框图



三、内容导读

1. 参考系

自然界的一切物质都处于永恒运动之中.根据运动的相对性,要了解物质的运动形式,必须选用参考系.物理学中的参考系,不同于几何参考系那样抽象,它是客观的物质.选用了不同的参考系,同一物体的运动会表现为不同的运动形式.这就是说,描述物体运动而使用的物理量,如位矢、速度、加速度等都具有相对性,都是对一定参考系而言的,它们所反映的都是物体和该参考系间的相对运

动.这是学习物理学应该明确的基本认识.

2. 机械运动的特性

机械运动是最普遍而又最基本的运动.直线运动、圆周运动和抛体运动都是比较常见的机械运动形式.机械运动的基本特性,除相对性外,还有瞬时性和矢量性.应通过这些常见运动的介绍,加深对它们的认识.

3. 运动学方程

研究机械运动的核心是运动学方程.通过运动学方程的介绍,既要掌握用微分法求质点的速度和加速度,又要能够用积分法从加速度或速度去求质点的速度和位置.

4. 牛顿运动三定律

物理学主要研究物质、能量和物质间的相互作用.而对这个主题的研究,却首先是从力学开始的.物理学的进展表明,力学既是物理知识之源,也是物理方法之源.学习物理必须以力学为基础.经典力学的体系是由牛顿建立起来的,牛顿的三条运动定律全面地阐明了关于力的基本概念、基本性质和基本公式,极大地促进了力学以至物理学的发展.第一定律揭示了物质惯性的存在.运动不一定就是机械运动,所以惯性也决非力学现象所独有.第二定律给出了力的基本公式,将平动惯性量化,引入了质量的概念.这个概念的重要性是不言而喻的.爱因斯坦在相对论里用质速关系和质能关系,使质量和能量挂起钩来,就足以说明质量在整个物理学中的重要性和基本性.第三定律揭示了力的相互作用性质,但遗憾的是对力为什么会有这种性质未作进一步的解释.第二定律给出的力的基本公式,是用力的作用效果来计算力的大小的,所以也不能解释第三定律.这就是第三定律是个独立定律的原因.没有第三定律,许多力学问题将无法解决.

5. 非惯性系和惯性力

经典力学不适用于高速运动,因为它是绝对时空观的产物.但它同样不适用于非惯性系,因为牛顿定律只适用于惯性系.为了使牛顿定律能够用于非惯性系,引进了惯性力.但这种做法,令人对惯性力的真实性产生了怀疑,它似乎是个虚拟的力.它给人的感觉是找不到相应的施力物体.把惯性力看作是在非惯性系中来自参考系本身加速效应的力,其实是说它是经典力学在选用参考系方面的很大局限性所带来的副产品,并不足以反映力的本质.

四、解题指导

大学物理的力学中常涉及的两类问题是:常力作用下的连接体问题和变力作用下的单体问题.这是就研究对象而分类的.还有按问题性质的分类,也有两类:一类是已知力求运动;另一类是已知运动求力.当然在实际问题中很可能是两者兼有.应用牛顿运动定律解决力学问题,不管哪一类,都要先注意三件事:

(1) 牛顿运动定律是个整体,不能只注意牛顿第二定律,而把其他两条定律置之脑后.第一定律说明第二定律只能在惯性系中使用.不能把 ma 误认为力.只有在处理非惯性系中的问题时,才需添加惯性力.第三定律为我们正确分析物体受力情况提供了依据.通常在力学问题中,对每个物体来说,除重力外,其他外力都可以在该物体和其他物体相接触处去寻找,以免把作用在物体上的一些力遗漏掉.

(2) 要能正确分析问题,特别要注意所提供的已知条件,列出足够的方程去求解.不能盲目地套用公式,避免答非所问.

(3) 要掌握微积分的运算方法和矢量运算的方法.在用微积分时,要会进行变量的换算,并能确定积分的上下限.在用矢量运算时,既要能分解,又要能合成.

其后,解题可按以下的方法和步骤进行:

1. 确定研究对象.对于连接体问题,往往涉及多个物体,可以分别隔离,分别研究.

2. 分析研究对象的受力情况,画出隔离体受力示意图.

3. 分析运动.根据研究对象的运动状态,找出相应物理量间的关系,例如速度、加速度间大小和方向关系,相对运动关系,连接体加速度方向的设定,等等.

4. 根据受力和运动分析,对所取坐标系,列出文字方程.一般根据坐标系列出牛顿定律的分量式方程.在方程式足够的情况下,求解未知量.

5. 对解出的文字结果作必要讨论,既可增强对物理概念和规律的理解,还可收到举一反三,触类旁通的效果.

例 1-1

矿山升降机作加速运动时,其加速度可用下式表示:

$$a=C\left(1-\sin\frac{\pi t}{T}\right)$$

式中 C 及 T 为已知常量,当 $t=0$ 时 $v=v_0=0$.试求运动开始经时间 t 后升降机的速度及其所走过的路程.

分析 已知加速度,可用积分法求路程.

解 因为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t$$

则

$$v=\int_0^v \mathrm{d}v=\int_0^t a\mathrm{d}t=\int_0^t C\left(1-\sin\frac{\pi t}{T}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\left[Ct+\frac{TC}{\pi}\cos\frac{\pi t}{T}\right]_0^t=Ct+\frac{TC}{\pi}\cos\frac{\pi t}{T}-\frac{TC}{\pi}$$

$$s=\int_0^t v\mathrm{d}t=\frac{1}{2}Ct^2+\frac{T^2C^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi t}{T}-\frac{TC}{\pi}t$$

例 1-2

一质点沿着一圆周运动，其路程与时间的关系为 $s=5-2t+t^2$（SI 单位）①.若 $t=2$ s 时，其法向加速度 $a_n=0.5\ \mathrm{m/s^2}$.试求：

（1）圆周半径；

（2）$t=3$ s 时的速度、切向加速度、法向加速度及总加速度.

分析　由运动方程可用导数法求速度、加速度.

解　（1）
$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-2+2t$$
$$v\Big|_{t=2}=-2\ \mathrm{m/s}+2\times 2\ \mathrm{m/s}=2\ \mathrm{m/s}$$
$$R=\frac{v^2}{a_n}=\frac{2^2}{0.5}\ \mathrm{m}=8\ \mathrm{m}$$

（2）
$$v\Big|_{t=3}=-2\ \mathrm{m/s}+2\times 3\ \mathrm{m/s}=4\ \mathrm{m/s}$$
$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2\ \mathrm{m/s^2}$$
$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{4^2}{8}\ \mathrm{m/s^2}=2\ \mathrm{m/s^2}$$

即
$$\boldsymbol{a}=(2\boldsymbol{e}_t+2\boldsymbol{e}_n)\ \mathrm{m/s^2}$$
$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=2\sqrt{2}\ \mathrm{m/s^2}$$
$$\theta=\arctan\frac{a_n}{a_t}=\arctan\frac{2}{2}=45^\circ$$

例 1-3

河宽为 d，靠岸处水流速度为零，中流的速度最快为 v_0.从岸边到中流，流速按正比增大，即 $v=ky$.有人以不变的划速 u 垂直于流水方向向对岸划去（图 1-1）.试求：

（1）船的运动学方程；

（2）船的轨道方程；

（3）任一时刻船的切向和法向加速度.

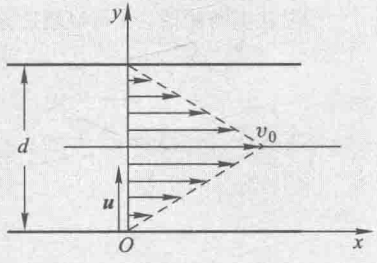


图 1-1

分析　由于划速与流速已知，x 和 y 两个方向上的运动学方程可分别求出，消去时间即得轨道方程.

解　（1）船相对岸的速度在 x，y 方向上的分量

① 本书中方程之后括注 SI 单位表示方程中各量均采用 SI 单位.在国际单位制中，凡是没有加词头的单位（kg 除外），国际上统一称为“SI 单位”.

分别为

$$v_x = ky \quad \left(0<y<\frac{d}{2}\right) \tag{①}$$

$$v_y = u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{②}$$

由题意知在河流中心处

$$y = \frac{d}{2}, \quad v_x = v_0$$

所以有

$$k = \frac{v_0}{d/2}$$

$$v_x = \frac{2v_0}{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{③}$$

由式②得

$$\mathrm{d}y = u\mathrm{d}t$$

$$y = \int_0^y \mathrm{d}y = \int_0^t u\mathrm{d}t = ut \tag{④}$$

由式③、式④得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2v_0}{d}ut$$

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t \frac{2v_0}{d}ut\mathrm{d}t$$

$$x = \frac{v_0 u}{d}t^2$$

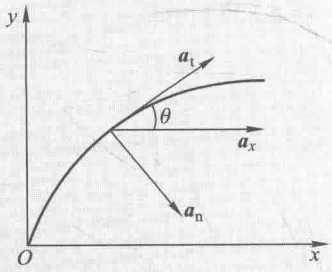


图 1-2

船的运动方程为

$$\begin{cases} x = \dfrac{v_0 u}{d}t^2 \\ y = ut \end{cases}$$

(2) 从上两式消去 t 可得轨道方程

$$x = \frac{v_0}{ud}y^2 \tag{⑤}$$

(3) 由图 1-2 可知

$$a_x = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{2v_0 u}{d}$$

$$a_y = 0$$

并由式⑤知

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{ud}{v_0 x}}$$

根据三角关系,有

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{ud}{4v_0x}}}=\frac{2\sqrt{v_0x}}{\sqrt{4v_0x+ud}}$$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{4v_0x}{4v_0x+ud}}=\sqrt{\frac{ud}{4v_0x+ud}}$$

故

$$a_t=a_x\cos\theta=\frac{2v_0u}{d}\cdot\frac{2\sqrt{v_0x}}{\sqrt{4v_0x+ud}}=\frac{4v_0u}{d}\sqrt{\frac{v_0x}{4v_0x+ud}}$$

$$a_n=a_x\sin\theta=\frac{2v_0u}{d}\sqrt{\frac{ud}{4v_0x+ud}}$$

例 1-4

在如图 1-3(a)所示的装置中,质量为 m_1 和 m_2 的两个物体由一细绳相连,细绳跨过装在质量为 m_3 的大物体上的定滑轮,已知所有接触面都是光滑的.

(1) 若在物体 m_3 上作用一水平力 $\boldsymbol{F}$,使物体 m_1 和 m_2 相对物体 m_3 静止,则 $\boldsymbol{F}$ 为多大?

(2) 若没有水平作用时,物体 m_3 的加速度为多大?

分析　画出各物体的受力图,仔细分析各物体的运动情况,并注意牛顿运动定律仅适用于惯性系.

解　(1) 当物体 m_3 受力 $\boldsymbol{F}$ 向右运动时,物体 m_2 的左表面将与物体 m_3 接触,故相互间有 $\boldsymbol{F}_N$ 作用,如图 1-3(b)所示.列出各物体的主要运动方程如下:

$$m_1:\quad F_T=m_1a_1$$

$$m_2:\quad F_N=m_2a_{2x}=m_2a_1$$

$$m_3:\quad F_T-m_2g=m_3a_{2y}=0$$

联立解以上方程得

$$F=(m_1+m_2+m_3)\frac{m_2}{m_1}g$$

(2) 若 $\boldsymbol{F}=0$,则整个系统在水平方向上的合力为零,因而物体 m_2 向下运动时,物体 m_1 向右运动,物体 m_3 将同时向左运动.设物体 m_3 的加速度为 $\boldsymbol{a}_3$,则物体 m_2 相对于物体 m_3 的加速度为 $\boldsymbol{a}_1'$,相对于地面的加速度为 $a_1=a_1'-a_3$,物体 m_2 的水平方向加速度为 a_3,竖直方向的加速度为 $\boldsymbol{a}_1'$.根据受力图 1-3(c)列出各物体的主要运动方程如下:

$$m_1:\quad F_T=m_1a_1=m_1(a_1'-a_3)$$

$$m_2:\quad -F_N=-m_2a_2$$

$$F_T-m_2g=-m_2a_1'$$

$$m_3:\quad F_T-F_N=m_3a_3$$

联立解以上方程得

$$a_3=\frac{m_1m_2}{m_1m_3+m_2m_3+2m_1m_2+m_2^2}g.$$

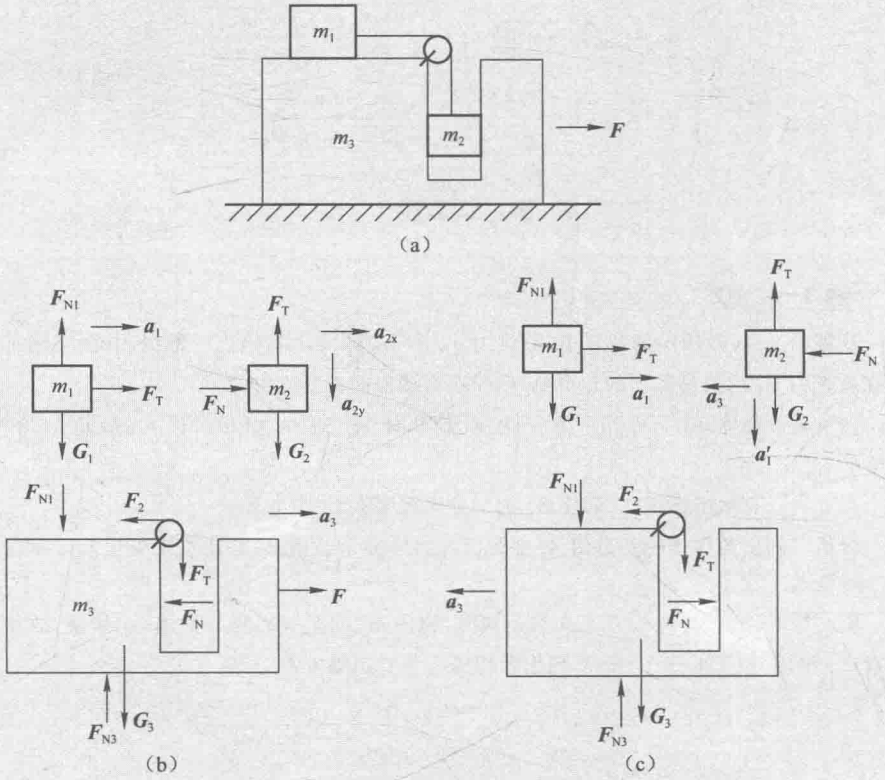


图 1-3

例 1-5

一圆台可绕其轴在水平面内转动,圆台半径为 R,甲、乙两物体质量分别为 m_1 与 m_2 ($m_1>m_2$),它们与台面间的静摩擦因数都是 μ,现用一根长度 $l<R$ 的绳子将它们连接.

(1) 将甲放在圆心,乙放在距圆心为 l 处,要使物体与圆台不发生相对滑动,圆台旋转的最大角速度是多少?

(2) 若将甲与乙互换位置,(1)的结果又将如何?

(3) 如果两物体均不放在圆心但连线经过转轴时,又将如何?

分析　由于摩擦力提供向心力,需注意运动趋势.

解　(1) 由图 1-4,有

$$\begin{cases} F_T - F_{f1} = 0 \\ F_T + F_{f2} = m_2\omega^2 l \\ F_{f1} = \mu m_1 g \\ F_{f2} = \mu m_2 g \end{cases}$$

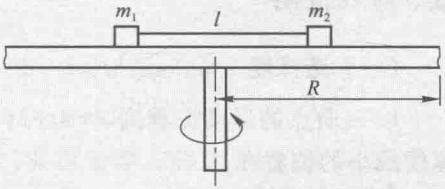


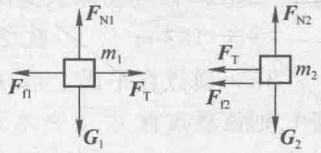
图 1-4

解得

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu(m_1+m_2)g}{m_2 l}}$$

(2) 甲与乙互换位置后(图 1-5),有

$$\begin{cases} F_T - F_{f2} = 0 \\ F_T + F_{f1} = m_1\omega^2 l \\ F_{f1} = \mu m_1 g \\ F_{f2} = \mu m_2 g \end{cases}$$

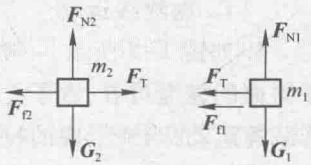


(a)

解得

$$\omega' = \sqrt{\frac{\mu(m_1+m_2)g}{m_1 l}}$$

因为 $m_1 > m_2$,故　$\omega > \omega'$.



(b)

图 1-5

(3) 若系统有向 m_2 一侧运动的趋势(图 1-6),则有

$$\begin{cases} F_{f2} + F_T = m_2\omega^2(l-x) \\ F_T - F_{f1} = m_1\omega^2 x \\ F_{f1} = \mu m_1 g \\ F_{f2} = \mu m_2 g \end{cases}$$

解得

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu g(m_1+m_2)}{m_2 l - (m_1+m_2)x}}$$

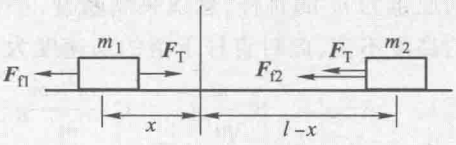


图 1-6

在此情况下必须满足 $m_2 l > (m_1+m_2)x$.

若系统有向 m_1 一侧运动的趋势,则有

$$\begin{cases} F_T - F_{f2} = m_2\omega^2(l-x) \\ F_T + F_{f1} = m_1\omega^2 x \\ F_{f2} = \mu m_2 g \\ F_{f1} = \mu m_1 g \end{cases}$$

解得

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu(m_1+m_2)g}{(m_1+m_2)x - m_2 l}}$$

在此情况下必须满足 $(m_1+m_2)x > m_2 l$.

五、自我检测

(一) 选择题

1. 一质点的运动方程为 $x=4t+2$(SI 单位), $y=3t^2-6t+5$(SI 单位),则质点速度最小的位置在　　[　　]

A. (6,1)　　B. (5,2)　　C. (2,6)　　D. (6,2)

2. 一物体以与水平方向成 60°角的初速度被抛出,经过 4 s,速度的垂直分量 $v_y=84$ m/s,则物体从抛出点到落地点的水平距离是　　[　　]

A. 183 m　　B. 83 m　　C. 283 m　　D. 383 m

3. 一质点在平面上运动,已知质点位矢的表达式为 $\boldsymbol{r}=at^3\boldsymbol{i}+bt^3\boldsymbol{j}$($a$、$b$ 为常量),则该质点作　　[　　]

A. 匀速直线运动　　B. 变速直线运动

C. 抛物线运动　　D. 一般曲线运动

4. 如图 1-7 所示,一质量为 m 的物体 A 用平行于斜面的轻绳拉着,置于光滑的斜面上,若斜面向左作减速运动,当绳子中的拉力为零时,物体 A 的加速度 $\boldsymbol{a}$ 的大小为　　[　　]

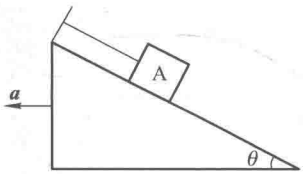


图 1-7

A. $g\sin\theta$　　B. $g\cos\theta$

C. $g\tan\theta$　　D. $g\cot\theta$

5. 如图 1-8 所示,一只质量为 m 的小猴,原来抓住一根用线吊在天花板上的质量为 m'的直杆,悬线突然断开,小猴则沿杆子竖直向上爬以保持它离地面的高度不变,此时直杆下落的加速度为　　[　　]

A. g　　B. $\dfrac{m}{m'}g$　　C. $\dfrac{m'+m}{m'}g$　　D. $\dfrac{m'+m}{m'-m}g$　　E. $\dfrac{m'-m}{m'}g$

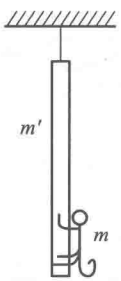


图 1-8

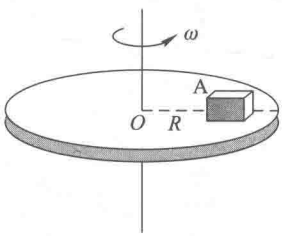


图 1-9

6. 在作匀速转动的水平转台上,与转轴相距 R 处有一体积很小的工件 A,如

图 1-9 所示.设工件与转台间静摩擦因数为 μ,若使工件在转台上无滑动,则转台的角速度 ω 应满足　　[　　]

A. $\omega \leqslant \sqrt{\mu g/R}$　　B. $\omega \leqslant \sqrt{3\mu g/2R}$

C. $\omega \leqslant \sqrt{3\mu g/R}$　　D. $\omega \leqslant 2\sqrt{\mu g/R}$

7. 质量为 m 的质点沿 Ox 轴方向运动,其运动学方程为 $x=A\cos \omega t$.式中 A、ω 均为正的常量,t 为时间变量,则该质点所受的合外力 F 为　　[　　]

A. $F=\omega^2 x$　　B. $F=m\omega^2 x$　　C. $F=-m\omega x$　　D. $F=-m\omega^2 x$

8. 质量为 $m=10$ kg 的物体在力 $\boldsymbol{F}=(120t+40)\boldsymbol{i}$(SI 单位)作用下沿 Ox 轴运动,在 $t=0$ s 时,速度 $v_0=6$ m/s,则 $t=3$ s 时,其速度大小为　　[　　]

A. 120 m/s　　B. 66 m/s　　C. 72 m/s　　D. 126 m/s

9. 质量 $m=10$ kg 的木箱放在光滑的地面上,在水平拉力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下由静止开始沿直线运动,其拉力随时间的变化关系如图 1-10 所示,则在 $t=7$ s 时,其速度大小为　　[　　]

A. 12 m/s　　B. 16.5 m/s　　C. 7 m/s　　D. 2.5 m/s

10. 如图 1-11 所示,绳子跨过两个定滑轮,两端分别挂一个质量均为 m 的完全相同的物体,开始时它们处于同一高度.现将右边的物体在平衡位置附近来回摆动,则左边的物体将　　[　　]

A. 向上运动　　B. 向下匀速运动

C. 向下加速运动　　D. 时而向上,时而向下运动

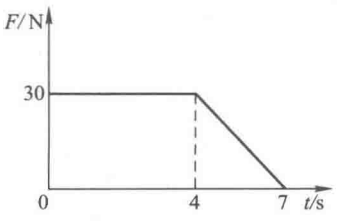


图 1-10

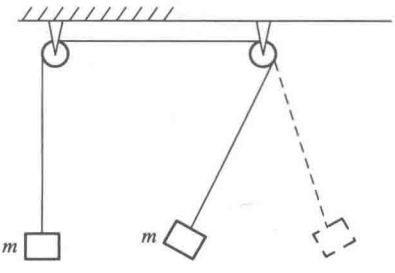


图 1-11

(二) 填空题

1. 一质点沿直线运动,其运动学方程为 $x=12t-2t^2$(SI 单位),则在 t 由 0 至 4 s 的时间内,质点的位移大小为_____,在 t 由 0 到 4 s 的时间内质点走过的路程为_____.

2. 一质点沿半径为 R 的圆周运动,在 $t=0$ 时经过 P 点,此后它的速率 v 按 $v=A+Bt$(A、B 为正的常量)变化,则质点沿圆周运动一周再经过 P 点时的切向加

速度 a_t=_____,法向加速度 a_n=_____.

3. 当一列火车以 10 m/s 的速率向东行驶时,若相对于地面竖直下落的雨滴在列车的窗子上形成的轨迹偏离竖直方向 30°,则雨滴相对于地面的速率是_____,相对于列车的速率是_____.

4. 质点作半径为 0.10 m 的圆周运动,其角位置满足关系式 $\theta=5+2t^3$(SI 单位),$t=1$ s时,切向加速度_____,法向加速度_____,总加速度_____.

5. 一质点作半径 R 的圆周运动,路程随时间的变化规律为 $s=v_0t+\frac{1}{2}bt^2$,则 t 时质点的速率_____,加速度的大小_____.

6. 质量为 m 的木块在水平面上作直线运动,当速度为 v_0 时仅在摩擦力作用下开始作匀减速运动,经过距离 s 后停止,则木块加速度的大小为 a=_____,木块与水平面间摩擦因数为 μ=_____.

7. 质量为 $m=5$ kg 的质点在 Oxy 平面内运动,其运动学方程为 $\boldsymbol{r}=6\boldsymbol{i}-3t^2\boldsymbol{j}$(SI 单位),则质点所受的合力 $\boldsymbol{F}$ 的大小为 F=_____ N,其方向为_____.

8. 质量为 $m=0.25$ kg 的质点,受力 $\boldsymbol{F}=t\boldsymbol{i}$(SI 单位)的作用,式中 t 为时间.在 $t=0$ 时质点以 $v=2\boldsymbol{j}$ m/s 的速度通过坐标原点,则质点任意时刻的位矢 $\boldsymbol{r}$=_____.

9. 在光滑水平桌面上,有一自然长度为 l_0,劲度系数为 k 的轻弹簧,其一端固定,另一端系一质量为 m 的小球.若小球在桌面上以角速度 ω 绕固定端作匀速圆周运动,则该圆周的半径 R=_____,弹簧作用于质点的拉力 F=_____.

10. 如图 1-12 所示,系统放在 $a=g/2$ 的加速上升的电梯内.设 A、B 两物体的质量相等均为 m,A 放在水平桌面上,绳和定滑轮的质量不计,A 与桌面的摩擦因数为 μ,若物体 A 在桌面上加速运动,则绳中张力为_____.

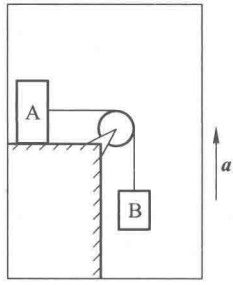


图 1-12

(三)计算题

1. 一质点以半径 $R=6$ m 作圆周运动,其在自然坐标系中的运动学方程为

$$s=bt+\frac{1}{2}ct^2$$

式中,$b=2.0$ m/s,$c=1.0$ m/s^2.试求质点切向加速度与法向加速度大小相等之前,其所经历的时间.

2. 如图 1-13 所示,质量 $m=2.0$ kg 的均匀绳子,长 $L=1.0$ m,两端分别连

接重物 A 和 B，$m_A = 8.0$ kg，$m_B = 5.0$ kg.今在 B 端施以大小为 $F = 180$ N 的竖直拉力，使绳和物体向上运动，求距离绳的下端为 x 处绳中的张力 $F_T(x)$.

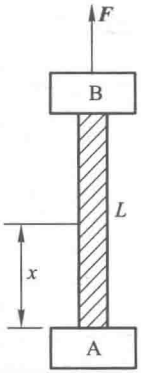


图 1-13

六、问题讨论

1. 牛顿运动定律和参考系

牛顿第一定律揭示了任何物体都具有保持其原有运动状态的特性，这就是惯性，它是物体的固有属性.从而定律提示人们要区别两类运动；一类是在惯性支配下的运动；另一类是在力作用下的运动.前者作匀速直线运动，而后者的运动状态却要改变.为了维持物体的运动，不但不需要力的作用，相反地应不受合外力.力的作用只是改变物体的运动状态，即力是改变物体运动速度，产生加速度的原因.于是，第一定律就这样定义了力的概念.

根据牛顿第一定律，对于一个不受力作用的物体，一定存在一个参考系，如地面参考系，相对于这个参考系，该物体保持静止或匀速直线运动状态.而且，其他所有不受力作用的物体，相对于地面参考系也都保持静止或匀速直线运动状态.凡是相对于它，所有不受力作用的物体都保持自身的运动速度不变，这种参考系就叫惯性参考系.所以，应用牛顿定律，对选择参考系是有特殊要求的，这种特殊性在很大程度上反映了牛顿定律的局限性，它不是普遍适用的.

2. 惯性力

由于选择了非惯性系，要使牛顿定律在形式上有效，就要引入惯性力.下面我们要介绍的科里奥利力就是一种惯性力.地球虽说是个良好的惯性系，但它却在自转着，地球的自转对地面上物体的运动有没有影响呢？法国学者科里奥利根据研究证明，如果物体相对于旋转着的地球作匀速直线运动，而不是静止时，该物体将受到一个与运动方向相垂直的作用力，它叫科里奥利力.在这个力的影响下，物体的运动方向要出现偏差.这个力因选择旋转地球这个非惯性系而出现，所以是惯性力.这种力不能用牛顿第二定律解释.试想物体作匀速直线运动，它在运动方向上是没有加速度的，在和运动垂直的方向上，也没有加速度.该力似乎不存在.但事实使人很感意外.在北半球河流的右岸（按运动方向）被严重地冲刷，在南半球河流的左岸也被大量冲刷，这些证明了科里奥利力确实存在，是实际存在的力.下面利用图 1-14，通过分析给出科里奥利力的表达式.如图 1-14 所示，在一个绕轴线 O 以角速度 ω 转动的水平圆盘上，有一物体原来在 A 点，沿盘半径 OC 相对于盘以 v'

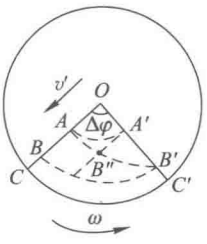


图 1-14

匀速移动.在时间 Δt 内,物体走过距离 $AB=v'\Delta t$,圆盘则转过一角度 $\Delta\varphi=\omega\Delta t$.由于此时半径 OC 转到了 OC' 位置,实际上物体是由 A 沿曲线 $\overset{\frown}{AB'}$ 到达 B' 点.这种运动的结果可看作是径向运动和横向运动的叠加.物体的横向路程不是 $\overset{\frown}{AA'}$,而是 $\overset{\frown}{BB'}$.物体在 Δt 时间内由于径矢的增大而多走了一段距离 Δs,即

$$\begin{aligned}\Delta s &= \overset{\frown}{BB'}-\overset{\frown}{AA'}=\overset{\frown}{B''B'}=|AB|\Delta\varphi\\ &=v'\Delta t\omega\Delta t=v'\omega(\Delta t)^2\end{aligned}$$

在 Δt 很小的情况下,Δs 可以看成是一直线,由于 Δs 正比于时间 Δt 的平方,所以 $B''B'$ 这段直线运动可看作匀加速直线运动,从此求出加速度 a_C,即令 $|B''B'|=\frac{1}{2}a_C(\Delta t)^2$.$a_C$ 是决定切向速度变化的科里奥利加速度.从以上两式消去 $(\Delta t)^2$,得 $a_C=2v'\omega$,方向与 v' 垂直,指向右方.这时为了由加速度去求出力,用牛顿定律得科里奥利力为

$$F_C=ma_C=2mv'\omega$$

式中 v' 与转轴相垂直.如果物体沿转轴方向运动,则 $F_C=0$,科里奥利力将不出现.所以,考虑 $\boldsymbol{v}'$ 与转轴的夹角为 θ,则一般表达式应为

$$F_C=2mv'\omega\sin\theta$$

第二章
运动的守恒量和守恒定律

一、学习要求

1. 掌握功的概念,能计算变力的功.

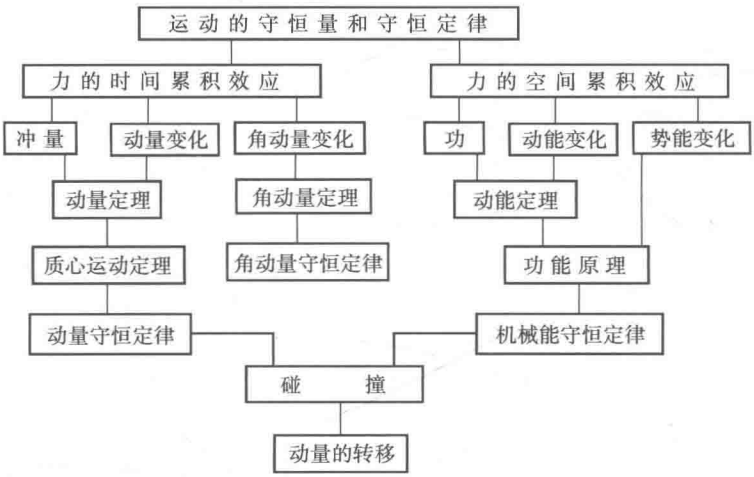
2. 掌握质点的动能定理和动量定理.

3. 理解保守力做功的特点和势能的概念,会计算重力、弹性力和万有引力的势能.

4. 掌握机械能守恒定律、动量守恒定律,掌握运用守恒定律分析问题的思想和方法,能分析简单系统在平面内运动的力学问题.

5. 通过质点在平面内的运动情况,理解质点的角动量和角动量守恒定律,并能用它们分析、解决质点在平面内运动时的简单力学问题.

二、知识框图



三、内容导读

1. 力的时间累积效应和空间累积效应

本章以相互作用为纲,分别讨论了力的时间累积效应和力的空间累积效应.这些都是力的过程效应.经过过程效应,引起了物体间动量和能量的转移.动量和能量都是机械运动的一种量度,但前者是矢量,后者是标量;前者突出了机械运动的矢量性这个特征,而后者则反映着机械运动和其他运动的通性.现代物理学的发展说明,在宏观、微观各领域的研究中,动量和能量都在支配着所有自然过程.一般地说,对于物体系统内发生的各种过程,如果某物理量始终保持不变,

该物理量就称为守恒量.动量守恒、能量守恒、角动量守恒将是本章研究的主题.它们还将在以后各章中发挥其不可替代的作用.它们为何能有如此威力？其深层次的原因,将在“对称性与守恒定律”这一节中适当介绍.

2. 守恒定律的特点

守恒定律特别适用于研究质点系统的过程效应.利用守恒定律研究物体系统,不管系统内各物体的相互作用如何复杂,也不管过程的细节如何曲折,仅就系统的始末状态,结合已知条件,就能解决问题.读者应通过例题多种解法的比较,体验和掌握使用守恒定律的解题法.

3. 质心、质心运动定理

引入质心概念,讨论质点系统的动量,是比较方便的.因为质心是与质点系的质量分布有关的一个代表点,它的位置在平均意义上代表质点系的质量分布中心.通过质点系的质心运动定理,发现质点系所受外力的矢量和$\sum \boldsymbol{F}_i$的方向与质心所获得的加速度$\boldsymbol{a}_c$的方向一致,质心所获加速度$\boldsymbol{a}_c$的大小又与质点系所受外力的矢量和$\sum \boldsymbol{F}_i$的大小成正比.由此可知,质心运动定理是确定质点系整体平动的力学规律.质点系的总动量是各质点动量的矢量和.质点系内质点间的相互作用力,是系统的内力,它可以改变各质点的动量,使系统内质点的动量发生相互转移,但不会改变系统质心的动量,即不会改变质点系的总动量.由质心运动定理直接可以看出,如果质点系所受外力的矢量和为零,则系统的总动量就在过程中保持不变.这就是动量守恒定律.应该注意,动量守恒的条件是“质点系所受外力的矢量和为零”,不要说成“质点系所受合外力为零”.当许多外力作用于同一质点,这些外力的矢量和可称为合外力.但质点系所受许多外力并不都作用于一个质点,而是分散作用于许多质点,应该是外力的矢量和.“质点系所受外力的矢量和为零”只表明质点系整体的平动状态,即质心的运动状态保持不变,而系统在外力的力矩作用下,是有可能产生绕质心的转动的.动量守恒是矢量守恒,如果所受外力的矢量和在某方向的分量为零,则质点系在该方向上的动量守恒.

4. 功和能量

从质点的动能定理,经质点系统的动能定理、功能原理,而发展为机械能守恒定律,直到能量守恒定律,中间有两个重要概念必须切实掌握.一个是功的概念,另一个是势能的概念.功是能量变化的量度,和能量不同,它是过程量.当质点系在某状态中,说它有“功”是不正确的,只可说它具有做功本领,而做功本领的量度则是能量.所以,能量是状态量,是随状态而变的状态函数.当人们对各种力所做的功进行计算时,发现保守力做功只与物体的始末位置有关,而与所经历的路径无关.重力的功、弹性力的功、引力的功都是如此,都可写成各与始末位置

有关的两个物理量之差.既然,功是能量变化的量度,那么,这些物理量也应是能量.和动能不同,动能是因运动速度而具有的能量,而这些能量却因取决于质点间的相对位置,故被叫作位能或势能.势能是属于质点系的.机械能包含动能与势能,在一定条件下,它们可相互转化,而使机械能的总和在过程中始终保持不变,这就是机械能守恒定律.机械能守恒需要什么条件,这是读者学习必须切实掌握的.

四、解题指导

1. 任何力学过程既是力的时间累积过程,也是力的空间累积过程,要根据题意及已知条件,决定采用动量还是能量,或者两者都采用来解题.

2. 动量定理和动能定理在所有惯性系中都成立.但在不同惯性系中,动量及其增量的量值、功和动能的量值都因参考系而异.

3. 应用守恒定律解题,必须注意三点:第一,要掌握各个守恒定律所需满足的条件.动量守恒定律的条件是质点系所受外力的矢量和为零,而不是合外力为零.在此条件保证下,质点系的质心作匀速直线运动.机械能守恒定律的条件是外力对系统不做功以及系统内的非保守力不做功.前者保证外界与系统间无能量交换,而后者则保证系统内部没有机械能与其他运动形式能量间的转化.考虑到非保守内力的功,在不同惯性系中有不同量值,在 A 系中为零,在 B 系中不一定为零,所以对同一物体系统的运动过程,在不同惯性系中,机械能守恒定律不能都成立.至于质点的角动量是否守恒,不仅与受力的性质有关,还与参考点的选择有关.它守恒的条件是该质点所受的合外力矩为零.质点在有心力作用下,对力心的角动量一定守恒.这是所受力的性质决定的守恒.而力矩是由确定的参考点定义的物理量,选择了不同的参考点,同一个力的力矩大小、方向以及有无都不相同,所以角动量守恒的条件能否成立,还取决于参考点的选择.第二,要掌握守恒量的特性,动量、角动量是矢量,它们的方向要心中有数.要了解它们和其他有关物理量之间的矢量关系.能量是标量.作为机械能之一的势能,是通过保守内力做功而引进来的.在具体计算中,有实际意义的只是势能的变化.势能的大小是相对的,是相对于所选定的势能零点而言的.因为势能的变化来自保守力所做的功,所以当解题时考虑了保守力做功,就不必计较势能的变化,反之亦然.有些机械能守恒的问题,也能用功能原理计算,原因就在于此.第三,在一些物体系统的运动过程中,各个守恒量守恒的条件往往不是都可满足的,但若在某分过程中某个守恒量可以满足,则在该分过程中该守恒量守恒.因此在应用时需确定分过程所对应的系统和分过程所对应的守恒量的始末状态的量值.

例 2-1

质量为 m 的小球在水平面内作速率为 v_0 的匀速圆周运动(图 2-1).试求小球经过:(1) $\frac{1}{4}$圆周;(2) $\frac{1}{2}$圆周;(3) $\frac{3}{4}$圆周;(4) 整个圆周的过程中的动量改变.试从冲量的计算得出结果.

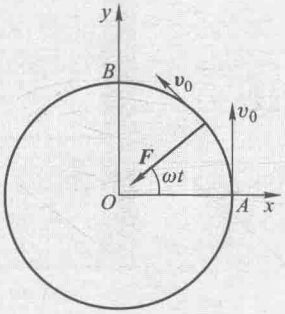


图 2-1

分析　求动量变化,用动量定理最方便,不必考虑过程细节.

解　质点作匀速圆周运动时其向心力大小为

$$F=mR\omega^2=m\frac{v_0^2}{R}$$

设 $t=0$ 时刻质点在圆周上的 A 点.任一时刻向心力为

$$\boldsymbol{F}=-F\cos\omega t\boldsymbol{i}-F\sin\omega t\boldsymbol{j}$$

经过$\frac{1}{4}$圆周时质点得到的冲量为

$$\begin{aligned}\int_0^{T/4}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t&=\left[\int_0^{T/4}-F\cos\omega t\mathrm{d}t\right]\boldsymbol{i}+\left[\int_0^{T/4}-F\sin\omega t\mathrm{d}t\right]\boldsymbol{j}\\&=\left[-\frac{F}{\omega}\sin\omega t\right]_0^{T/4}\boldsymbol{i}+\left[\frac{F}{\omega}\cos\omega t\right]_0^{T/4}\boldsymbol{j}\\&=-\frac{F}{\omega}\boldsymbol{i}-\frac{F}{\omega}\boldsymbol{j}=-mv_0\boldsymbol{i}-mv_0\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

根据动量定理,它等于质点的动量增量.

经过$\frac{1}{2}$圆周质点得到的冲量(它等于质点的动量增量)

$$\int_0^{T/2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t=\left[-\frac{F}{\omega}\sin\omega t\right]_0^{T/2}\boldsymbol{i}+\left[\frac{F}{\omega}\cos\omega t\right]_0^{T/2}\boldsymbol{j}=-2mv_0\boldsymbol{j}$$

经过$\frac{3}{4}$圆周时质点的冲量为

$$\int_0^{3T/4}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t=\left[-\frac{F}{\omega}\sin\omega t\right]_0^{3T/4}\boldsymbol{i}+\left[\frac{F}{\omega}\cos\omega t\right]_0^{3T/4}\boldsymbol{j}=\frac{F}{\omega}\boldsymbol{i}-\frac{F}{\omega}\boldsymbol{j}=mv_0\boldsymbol{i}-mv_0\boldsymbol{j}$$

经过一周时的冲量为

$$\int_0^{T}\boldsymbol{F}\mathrm{d}v=\left[-\frac{F}{\omega}\sin\omega t\right]_0^{T}\boldsymbol{i}+\left[\frac{F}{\omega}\cos\omega t\right]_0^{T}\boldsymbol{j}=0$$

例 2-2

一地下蓄水池,面积为 50 m^2,贮水深度为 1.5 m.假定水平面低于地面的高度是 5.0 m[图 2-2(a)].问要将这池水全部抽到地面,需要做多少功?若抽水机的效率为 80%,输入功率为 35 kW,则需多少时间可以抽完?

分析　由于不同水深处提取同量的水所做的功不同,所以采用取元法积分求解.

解　设水池横截面的面积为 S,高度为 $\mathrm{d}h$ 的水的质量为[图 2-2(b)]

$$\mathrm{d}m=\rho S\mathrm{d}h$$

将质量为 $\mathrm{d}m$ 的水抽到地面所做的元功为

$$\mathrm{d}A=\mathrm{d}mgh$$

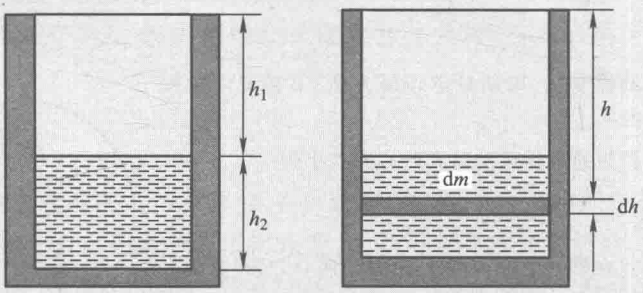


图 2-2

将水池中的水全部抽到地面需要做功

$$A=\int \mathrm{d}A=\int_{h_1}^{h_1+h_2}\rho Sgh\mathrm{d}h=\rho Sg\left[\frac{h^2}{2}\right]_{h_1}^{h_1+h_2}=\frac{1}{2}\rho Sg[(h_1+h_2)^2-h_1^2]$$

$$=\frac{1}{2}\rho Sg(h_2^2+2h_1h_2)=\frac{1}{2}\times1\times10^3\times50\times9.8\times(1.5^2+2\times1.5\times5.0)\ \mathrm{J}$$

$$=4.23\times10^6\ \mathrm{J}$$

$$P_{输入}=P_{输出}\cdot\eta=35\times10^3\times0.8\ \mathrm{W}=28\times10^3\ \mathrm{W}$$

所需时间为

$$t=\frac{A}{P_{输出}}=\frac{4.23\times10^6}{28\times10^3}\ \mathrm{s}=1.51\times10^2\ \mathrm{s}$$

例 2-3

A,B 两木块,质量各为 m_A 与 m_B,由弹簧连接,开始静止于水平光滑的桌面上,现将两木块拉开(弹簧被拉长)然后由静止释放(见图 2-3),求两木块的动能之比.

分析　由于两木块在水平方向没有受外力,弹簧的拉力是内力,所以系统的动量守恒.

解　由系统动量守恒

$$m_Av_A+m_Bv_B=0$$

$$v_A=-\frac{m_B}{m_A}v_B$$

又

$$E_{kA}=\frac{1}{2}m_Av_A^2=\frac{(m_Av_A)^2}{2m_A}$$

$$E_{kB}=\frac{1}{2}m_Bv_B^2=\frac{(m_Bv_B)^2}{2m_B}$$

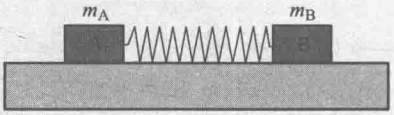


图 2-3

故
$$\frac{E_{kA}}{E_{kB}}=\frac{m_B}{m_A}$$

例 2-4

一质量为 m 的球，从质量为 m_0 的圆弧形槽中自静止滑下，设圆弧形槽的半径为 R（图 2-4）.若所有摩擦都可忽略，求小球刚离开圆弧形槽时，小球和木块的速度各是多少？

分析　在系统滑动时不受外力的作用，所以动量和机械能都守恒.

解　设小球刚脱离轨道时相对地面的速度为 v，而圆弧形槽相对地面的速度为 u.

在整个过程两物体所组成的系统机械能守恒、动量守恒，所以有

$$mgR=\frac{1}{2}m_0u^2+\frac{1}{2}mv^2$$

$$m_0u+mv=0$$

解得

$$v=\sqrt{\frac{2m_0gR}{m_0+m}}$$

$$u=-\sqrt{\frac{2m^2gR}{m_0(m_0+m)}}$$

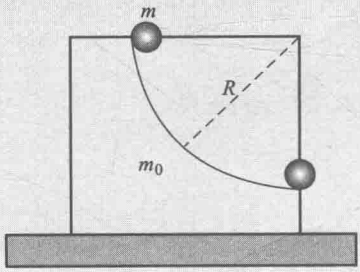
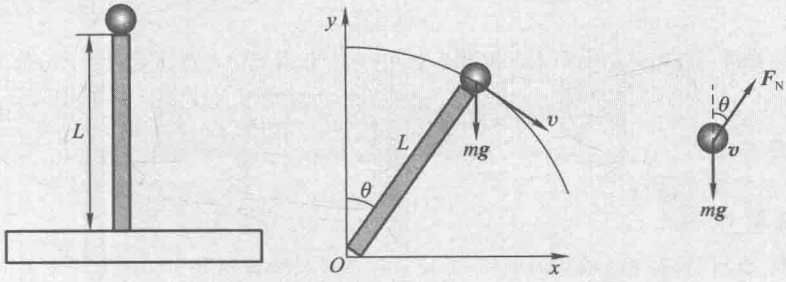


图 2-4

例 2-5

在一粗糙平面上有一竖直放置的长为 L 细杆，杆的质量不计，在杆的顶端放置一小球.由于系统处于不稳定平衡状态，稍有扰动细杆将倾斜，小球脱离细杆而下落[图 2-5(a)].试求小球与地面即将碰撞前的速度.



(a)　(b)　(c)

图 2-5

分析　杆子倾斜过程小球作圆周运动[图 2-5(b)]，由牛顿第二定律可求出其脱离细杆时的速度.小球脱离细杆后将作抛体运动.

解 当细杆倾斜角度为 θ 时,小球的运动方程为

$$mg\cos\theta - F_N = \frac{mv^2}{L} \qquad ①$$

小球脱离细杆时,小球与细杆间的正压力

$$F_N = 0$$

脱离细杆的瞬间小球的速度为 v_0,细杆倾斜角度为 θ_0,由式①,令 $F_N = 0$ 得

$$mg\cos\theta_0 = \frac{mv_0^2}{L} \qquad ②$$

取小球和地球为物体系,在上述过程中系统机械能守恒,得

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgL(1-\cos\theta_0) \qquad ③$$

由式②、式③解得

$$\cos\theta_0 = \frac{2}{3}$$

$$v_0 = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)} = \sqrt{\frac{2gL}{3}}$$

小球脱离细杆后作初速为 v_0 的抛体运动.

$$v_{0x} = v_0\cos\theta_0 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2gL}{3}} \qquad ④$$

$$v_{0y} = -v_0\sin\theta_0 = -\frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{\frac{2gL}{3}} \qquad ⑤$$

取小球与地球为物体系,并取小球最初的静止状态为初态,落地时的状态为终态,由机械能守恒

$$mgL = \frac{1}{2}mv^2$$

得到小球在落地时的速度大小

$$v = \sqrt{2gL}$$

小球脱离细杆后作抛体运动中水平速度不变,仍为式④.落地时小球速度的竖直分量大小为

$$v_y = \sqrt{v^2 - v_x^2} = \sqrt{v^2 - v_{0x}^2} = \sqrt{2gL - \frac{8gL}{27}} = \sqrt{\frac{46gL}{27}}$$

例 2-6

质量为 m_1,长度为 l 的均匀细棒,静止平放在滑动摩擦因数为 μ 的水平桌面上,它可绕端点 O 转动.另有一水平运动的质量为 m_2 的小滑块,它与棒的 A 端相碰撞,碰撞前后的速度分别为 $\boldsymbol{v}_1$ 及 $\boldsymbol{v}_2$.求:棒从碰撞开始到停止转动所用的时间[图 2-6(a)].

分析 碰撞中系统的角动量守恒,但动量不守恒,转动因摩擦而减速,所需时间可由角动量定理求出,摩擦力矩是分散的,要用积分计算.

解　以棒与滑块为系统，由于没有外力矩，由角动量守恒得

$$m_2v_1l=J\omega-m_2v_2l$$

$$J=\frac{1}{3}m_1l^2 \qquad ①$$

故
$$\omega=\frac{m_2v_1l+m_2v_2l}{J}=\frac{3m_2(v_1+v_2)}{m_1l} \qquad ②$$

棒上 dx 段与桌面间的摩擦力为[见图 2-6(b)]

$$dF_f=-\mu g\frac{m_1}{l}dx$$

dx 段所产生的摩擦力对 O 点的力矩为

$$dM=xdF_f=-x\mu g\frac{m_1}{l}dx$$

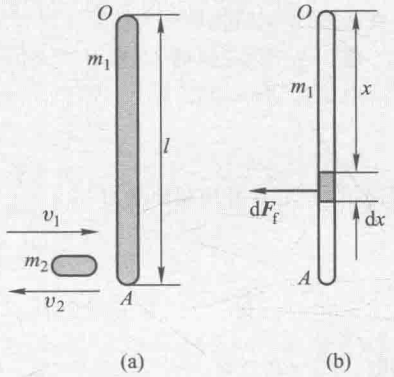


图 2-6

摩擦力矩为

$$M=\int_0^l-x\mu g\frac{m_1}{l}dx=-\frac{1}{2}\mu m_1gl$$

由于 M 为恒力矩，由角动量定理得

$$\int_0^t Mdt=Mt=0-J\omega \qquad ③$$

将式①、式②代入式③得

$$t=\frac{2m_2(v_1+v_2)}{\mu m_1l}$$

例 2-7

一长为 $3l$，质量为 $3\ m$ 的匀质细棒以速度 v 在光滑水平面内作平动，速度方向与棒长方向垂直.它与前方一光滑支点 O 发生完全非弹性碰撞，碰撞点在棒上的 C 点，如图 2-7(a)所示.试求棒在碰撞后的瞬间绕 O 点转动的角速度.

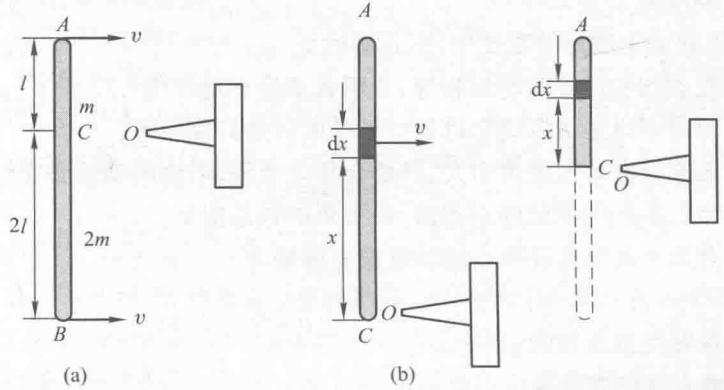


图 2-7

分析　由于棒上各质元对 O 点的角动量不同,故需用取元积分求解.棒与支点作完全弹性碰撞,所以碰撞前后角动量守恒.

解　先计算碰撞前 AC 段对 O 点的角动量,见图 2-7(b).

取质量元 $\mathrm{d}m$

$$\mathrm{d}m=\frac{m}{l}\mathrm{d}x$$

质量元 $\mathrm{d}m$ 对 O 点的角动量为

$$\mathrm{d}L_1=\mathrm{d}mvx=\frac{m}{l}\mathrm{d}xvx$$

$$L_1=\int\mathrm{d}L_1=\frac{mv}{l}\int_0^L x\mathrm{d}x=\frac{mv}{l}\cdot\frac{l^2}{2}=\frac{mvl}{2}$$

同理,对于 CB 段有

$$L_2=\int\mathrm{d}L_2=\frac{mv}{l}\int_0^{2l}x\mathrm{d}x=\frac{mv}{l}\frac{(2l)^2}{2}=\frac{4mvl}{2}$$

AC 段及 CB 段的转动惯量分别为

$$J_1=\frac{1}{3}ml^2,\ J_2=\frac{1}{3}(2m)(2l)^2=\frac{8}{3}ml^2$$

由角动量守恒

$$L_2-L_1=J_2\omega-J_1\omega$$

$$\frac{4}{2}mvl-\frac{1}{2}mvl=\frac{8}{3}ml^2\omega-\frac{1}{3}ml^2\omega$$

解得

$$\omega=\frac{9v}{14l}$$

五、自我检测

(一)选择题

1. 在下列关于动量的表述中,不正确的是　　[　　]

A. 质点始末位置的动量相等,表明其动量一定守恒;

B. 动量守恒是指运动全过程中动量时时处处都相等;

C. 系统的内力无论为多大,只要合外力为零,系统的动量必守恒;

D. 内力不影响系统的总动量,但要影响其总能量;

E. 内力对系统内各质点的动量没有影响.

2. 在下列关于功或能的表述中,正确的是　　[　　]

A. 保守力做正功时,系统的相关势能增加;

B. 质点在保守力场中沿任意闭合路径运动一周,保守力对其做功为零;

C. 作用力与反作用力大小相等,方向相反,所以两者做功的代数和必

为零；

D. 只要有摩擦力存在，系统的机械能就不可能守恒；

E. 质点系机械能的改变与保守内力无关.

3. 两个质点组成一力学系统，它们之间只有引力相互作用，且所受外力的矢量和为零，则该系统的　[　]

A. 动量、机械能和对某一点的角动量均守恒；

B. 动量、机械能守恒，角动量不一定守恒；

C. 动量、角动量守恒，机械能不一定守恒；

D. 动量守恒，机械能和角动量不一定守恒.

4. 一质点在两个力的同时作用下，位移为 $\Delta\boldsymbol{r}=(4\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k})$ m，其中一个力 $\boldsymbol{F}=(-3\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k})$ N，则此力在此过程中做的功是　[　]

A. 67 J　　B. 57 J　　C. 47 J　　D. 41 J

5. 一质量为 2 g 的子弹，在枪筒中前进时所受合力 $F=400-\frac{8\,000}{9}x$（SI 单位），设开枪时子弹在 $x=0$ 处，已知子弹出口速度是 300 m/s，则枪筒的长度为　[　]

A. 0.15 m　　B. 0.35 m　　C. 0.45 m　　D. 0.55 m

6. A 物体以一定的动能 E_k 与静止的 B 物体发生完全弹性碰撞，设 $m_A=2m_B$，则碰撞后两物体的总动能为　[　]

A. E_k　　B. $\frac{2}{3}E_k$　　C. $\frac{1}{3}E_k$　　D. $\frac{1}{2}E_k$

7. 质量为 $m=2$ kg 的质点，受合力 $\boldsymbol{F}=12t\boldsymbol{i}$（SI 单位）的作用，沿 Ox 轴作直线运动，已知 $t=0$ 时，$x_0=0$，$v_0=0$，则从 $t=0$ 到 $t=3$ s 这段时间内，合力的冲量和 3 s 末质点的速度 v 分别为　[　]

A. $108\boldsymbol{i}$ N·s，$54\boldsymbol{i}$ m/s　　B. $54\boldsymbol{i}$ N·s，$54\boldsymbol{i}$ m/s

C. $54\boldsymbol{i}$ N·s，$27\boldsymbol{i}$ m/s　　D. $27\boldsymbol{i}$ N·s，$27\boldsymbol{i}$ m/s

8. 已知地球的质量为 m_E，太阳的质量为 m_S，地球与日心的距离为 R，引力常量为 G，则地球绕太阳作圆周运动的轨道角动量为　[　]

A. $m_E\sqrt{Gm_SR}$　　B. $\sqrt{\frac{Gm_Em_S}{R}}$　　C. $m_Em_S\sqrt{\frac{G}{R}}$；　　D. $\sqrt{\frac{Gm_Em_S}{2R}}$

9. 质量为 $m=10$ kg 的质点沿 Ox 轴作直线运动时，受一变力 F 的作用，力随坐标 x 变化的关系如图 2-8 所示.若质点从坐标原点出发时的速度为 1 m/s，则质点运动到 16 m 处的速度为　[　]

A. $2\sqrt{2}$ m/s　　B. 3 m/s　　C. 4 m/s　　D. $\sqrt{17}$ m/s

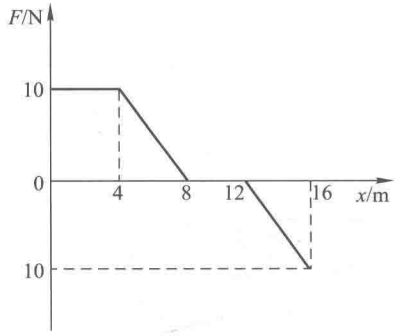


图 2-8

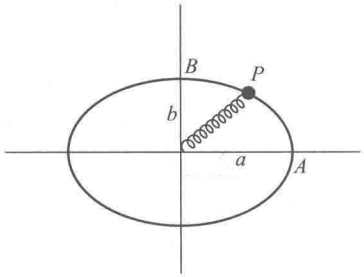


图 2-9

10. 质点 P 与一固定轻弹簧相连接,并沿椭圆轨道运动,如图 2-9 所示.已知椭圆的长半轴和短半轴分别为 a 和 b,弹簧原长为 $l_0(a>l_0>b)$,劲度系数为 k,则在质点由 A 运动到 B 的过程中,弹性力所做的功为　　[　　]

A. $\frac{1}{2}ka^2-\frac{1}{2}kb^2$　　B. $\frac{1}{2}k(a-l_0)^2-\frac{1}{2}k(l_0-b)^2$

C. $\frac{1}{2}k(a-b)^2$　　D. $\frac{1}{2}k(l_0-b)^2-\frac{1}{2}k(a-l_0)^2$

(二) 填空题

1. 如图 2-10 所示,质量 $m=2$ kg 的物体从静止开始,沿 1/4 圆弧从 A 滑到 B,在 B 处速度的大小为 $v=6$ m/s,已知圆的半径 $R=4$ m,则物体从 A 到 B 的过程中摩擦力对它所做的功 $A=$_____.

2. 一颗子弹在枪筒里前进时所受的合力大小为 $F=400-4\times10^5t/3$(SI 单位).子弹从枪口射出时的速率为 300 m/s.假设子弹离开枪口时合力刚好为零,则(1) 子弹走完枪筒全长所用的时间 $t=$_____,(2) 子弹在枪筒中所受力的冲量 $I=$_____,(3) 子弹的质量 $m=$_____.

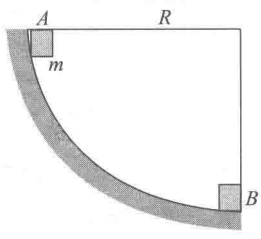


图 2-10

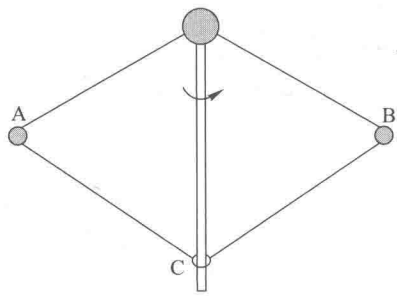


图 2-11

3. 如图 2-11 所示,钢球 A 和 B 质量相等,正被绳牵着以 $\omega_0=4$ rad/s 的角

速度绕竖直轴转动，二球与轴的距离都为 $r_1=15$ cm.现在把轴上环 C 下移，使得两球离轴的距离缩减为 $r_2=5$ cm，则钢球的角速度 $\omega=$_____.

4. 一长为 l，质量可以忽略的直杆，可绕通过其一端的水平光滑轴在竖直平面内作定轴转动，在杆的另一端固定着一质量为 m 的小球，如图 2-12 所示.现将杆由水平位置无初转速地释放，则杆刚被释放时的角加速度 $\alpha_0=$_____，杆与水平方向夹角为 60°时的角加速度 $\alpha=$_____.

5. 质量为 m 的质点，在竖直平面内以速度 v 作半径为 R 的匀速圆周运动，如图 2-13 所示，当质点由 A 点运动到 B 点时，质点的

（1）动能增量 $\Delta E_k=$_____；

（2）动量增量 $\Delta p=$_____；

（3）在任一时刻，质点对圆心 O 的角动量 $I=$_____；

（4）除重力外，其他外力所做之功 $A=$_____.

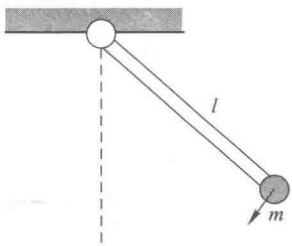


图 2-12

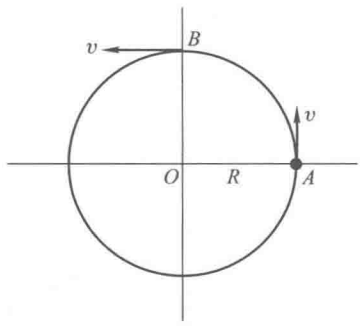


图 2-13

6. 如图 2-14 所示，桌面固定不动，m_0 与桌面摩擦因数为 μ，弹簧的劲度系数为 k，开始时静止在原点 O.当把 m 轻轻挂上，使 m_0 运动，在 m 下降一段距离 d 的过程中，按功能原理分别写出下列不同物体系统的功能关系（忽略绳和滑轮的质量及它们间的摩擦）

（1）以 m 和 m_1 为系统，功能关系为_____；

（2）以 m、m_0、k 为系统，功能关系为_____；

（3）以 m、m_0、k、地球为系统，功能关系为_____.

7. 长为 l 的单摆，从水平位置自由向下摆落，如图 2-15 所示，其速度在竖直方向上的分量先逐渐增大，后又逐渐减小.当摆线与竖直方向的夹角 $\theta=$_____时，此竖直分量具有最大值，此最大值 $v_m=$_____.

8. 质量为 m 的质点，从 A 点由静止开始沿如图 2-16 所示的轨道滑动到 B 点停止，图中 H_1 与 H_2 分别表示 A、B 两点离水平面的高度，则质点在滑动过程中

（1）摩擦力的功 $A_f=$_____；

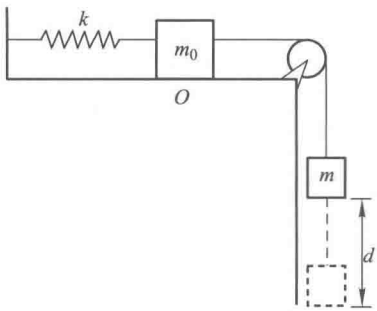


图 2-14

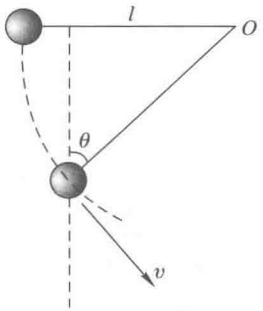


图 2-15

(2) 合力的功 $A=$_____.

9. 一颗土星的卫星,沿半径为 $3R$ 的圆形轨道绕土星运动,R 为土星半径.已知土星质量为 m_1,卫星质量为 m_2,引力常量为 G,则可知

(1) 卫星的动能 $E_k=$_____;

(2) 卫星与土星系统的引力势能 $E_p=$_____;

(3) 卫星的机械能 $E=$_____.

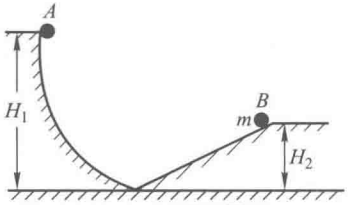


图 2-16

10. 宇宙飞船关闭发动机返回地球的过程,可认为是仅在地球引力作用下运动.若用 m 表示飞船的质量,m_E 表示地球的质量,G 表示引力常量,则飞船从距地球中心 r_1 处下降到 r_2 处的过程中,动能的增量为 $\Delta E_k=$_____.

(三) 计算题

1. 质量为 $m=56$ g 的子弹 A,以 $v_0=501$ m/s 的速率水平地射入一静止在水平面上的质量为 $m'=2$ kg 的木块 B 内,A 射入 B 后,B 向前移动了 $s=50$ cm 后停止,求:(1) B 与水平面间的摩擦因数;(2) 木块对子弹所做的功 A_1;(3) 子弹对木块所做的功 A_2;(4) A_1 与 A_2 的大小是否相等?为什么?

2. 如图 2-17 所示,质量为 m 的靶置于光滑水平面上,靶上固定有劲度系数为 k 的弹簧,靶最初处于静止状态.现有质量为 m_0,速度为 v_0 的钢球沿水平方向射向弹簧靶,试求弹簧被压缩的最大距离 x_{max}.

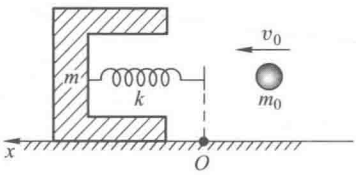


图 2-17

六、问题讨论

力和动量的转移

恩格斯在《自然辩证法》中敏锐地指出:"力——它以运动的转移为前

提”①.他在此处指的运动，和牛顿在其著作中对第二定律的叙述时所用的“运动”一词，意义是一致的，“运动”是物体的质量和速度矢量之积，现在，这个乘积称为物体的动量.两个速度不同的物体相遇时，要怎样才能引起动量的转移呢？实验表明，在两个动量相等而速度不同的物体相遇时，动量要发生转移，亦即出现机械运动的转移，因而出现碰撞中的力；而动量不等，速度相同的物体一起运动，却没有动量的转移，亦即不发生机械运动的转移，因而也不出现力.两个速度不同的物体，不管它们的动量相等与否，由于彼此有相对运动速度，一定会产生力.由此可见，力的本质是动量的转移，而产生动量的转移则以两个物体的速度不同为前提.现在，我们计算碰撞中平均冲力的大小，仍以书中两球碰撞为例，设碰撞接触时间极短，用 Δt 表示.把动量定理用于质量为 m_2 的小球，即得

$$\bar{F}_2=\frac{m_2v_2-m_2v_{20}}{\Delta t}$$

式中 $\bar{F}_2$ 是变力在 Δt 时间内的平均值，下标 2 表示它作用在质量为 m_2 的小球上.将书中求出的

$$v_2=v_{20}+\frac{(1+e)m_1(v_{10}-v_{20})}{m_1+m_2}$$

代入上式，最后得

$$\bar{F}_2=\frac{m_1m_2(1+e)(v_{10}-v_{20})}{(m_1+m_2)\Delta t}$$

用同法求得作用在质量为 m_1 的小球上的力

$$\bar{F}_1=\frac{m_1m_2(1+e)(v_{20}-v_{10})}{(m_1+m_2)\Delta t}=-\bar{F}_2$$

从以上式子可见：力的大小和两物体相遇前的接近速度（相对速度）成正比，而和接触时间成反比.式中的恢复系数和物体的质量还说明，力的大小与接触物体的质量和材料有关，此外，力的成对出现，作用力与反作用力大小相等而方向相反，这些力的性质，也在此得到了解释.$\boldsymbol{F}$ 的式子说明它是被作用的物体在 Δt 时间内所转移的动量对时间的平均值.据此，可以把力定义为两个物体因相对运动而引起的动量转移率，从而写成如下定义式：

$$\boldsymbol{F}\equiv\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$$

显然，力的这个定义和“力是产生加速度的原因”相比，更能从根本上说明问题.

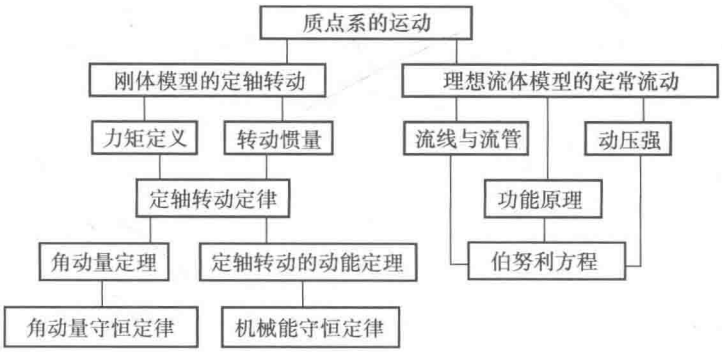
① 恩格斯.自然辩证法.北京：人民出版社，1971：259.

第三章
刚体和流体的运动

一、学习要求

1. 理解转动惯量概念.
2. 掌握刚体绕定轴转动的转动定律.
3. 理解刚体在绕定轴转动情况下的角动量守恒定律.
4. 能分析刚体在平面内运动的力学问题.
5. 理解伯努利方程.

二、知识框图



三、内容导读

1. 刚体和理想流体的物理模型

物理学的研究,离不开物理模型的建立.前两章介绍的质点、质点系是物理模型,本章介绍的刚体和理想流体也是质点系中常用的物理模型.质点是为了研究物体的平动而建立的物理模型.但是,物体是有形状大小的,它可以作平动、转动,甚至更复杂的运动,而且在运动中物体的形状也可能发生改变.为了研究转动,就得建立刚体模型.什么叫刚体呢?刚体是在外力作用下能保持其大小和形状都不变的物体,亦即物体内任何两质元之间的距离,都不因外力而改变,它是一种特别的质点系.以刚体为研究对象,除了研究它的平动外,还可研究它的转动以及平动与转动的复合运动等.流体也是一种质点系.流体一般具有不易压缩性和黏性.如把实际流体看作密度不变而又无黏性的理想流体,这个模型有助于突出体现流体流动的基本特征,由此而导出的伯努利方程就因其基本性而受到广泛的关注.

2. 学习本章的方法

本章在前几章的基础上,扩大了牛顿运动定律的应用范围,总结应用牛顿定

律分析计算的方法,特别是类比法和能量法,更应受到读者的关注和重视.对刚体定轴转动所做的介绍,先引入基本概念,后分析定轴转动的瞬时规律,接着分别考虑时间和空间的累积过程效应,最后归结到守恒定律,这种做法和步骤与第二章完全一样,通过类比,可以加深理解和认识.对理想流体伯努利方程的介绍,则是突出显示了能量法的应用.

3. 力矩

力矩是表征力对物体作用时产生转动效应的物理量.力矩是个矢量,大小为 $M=rF\sin\varphi$,方向为 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$,遵循右手螺旋定则.它是相对某确定的参考点而定义的,对不同的参考点,同一个力的力矩大小和方向都不相同.在质点系内,各个质点所受力对确定参考点的力矩之矢量和称为总力矩,不能称为合力矩,因为这些力矩不是作用在同一质点上的.质点系相对惯性系内某确定参考点 O 所受的总外力矩 $\boldsymbol{M}$,对通过该参考点 O 的固定转轴(z 轴),能产生转动效应的是 $\boldsymbol{M}$ 沿转轴的分量 M_z.它的大小与 O 在轴上的位置无关,是个标量.

4. 刚体的定轴转动定律

刚体的定轴转动定律是个标量表达式.定轴转动刚体的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 总是沿 z 轴方向的.一般说来,刚体所受总外力矩 $\boldsymbol{M}$ 和刚体的角动量 $\boldsymbol{L}$ 不与 $\boldsymbol{\omega}$ 同方向,这时起作用的仅是 M_z 和 L_z 这些沿 z 轴的分量.

5. 理想流体的压力

当理想流体流动时,由于忽略了内摩擦力,所以流体各部分之间也不存在这种切向力,因而流动着的流体内的动压强,仍然具有静止流体内压强的特点,即压力总是垂直于作用面的.

四、解题指导

1. 处理刚体力学问题,必须切实掌握好质点力学的基本理论,并能灵活应用.解题步骤与处理质点力学的方法相同.

2. 应用刚体定轴转动定律时,力矩、转动惯量和角加速度必须对同一转轴.

3. 应用动量守恒定律和角动量守恒定律时,必须注意运用条件.

例 3-1

电动机带动一个转动惯量为 $J=50\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ 的系统作定轴转动.在 0.5 s 内由静止开始最后达到 120 r/min 的转速.假定在这一过程中转速是均匀增加的,求电动机对转动系统施加的力矩.

分析 应用定轴转动定律时,角加速度、转动惯量和力矩必须同一转轴.

解 当 $t=0$ 时,$\omega_0=0$,当 $t=0.5$ s 时

$$n=120\ \text{r/min}=2\ \text{r/s}$$

$$\omega = 2\pi n_0 = 4\pi \text{ rad/s}$$

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t-0} = \frac{4\pi}{0.5} \text{ rad/s}^2 = 8\pi \text{ rad/s}^2$$

电动机所施加的力矩为

$$M = J\alpha = 50 \times 8\pi \text{ N} \cdot \text{m} = 1.26 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

例 3-2

在自由旋转的水平圆盘边上，站一质量为 m 的人.圆盘的半径为 R，转动惯量为 J，角速度为 ω.如果这人由盘边沿半径走到盘心，求角速度的变化及此系统动能的变化(图 3-1).

分析　由于人和盘组成的系统不受外力矩，所以系统的角动量守恒，由此可求出角速度，由转动惯量及角速度的变化可求动能变化.

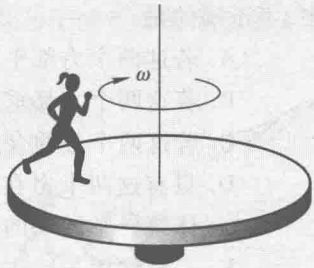


图 3-1

解　当人从盘的边缘走向盘心时，系统的转动惯量逐渐变小，但整个过程系统的角动量守恒.设人走到盘心时系统的角速度为 ω'.由角动量守恒定律知

$$(mR^2 + J)\omega = J\omega'$$

$$\omega' = \frac{(mR^2 + J)}{J}\omega$$

$$\Delta\omega = \omega' - \omega = \frac{mR^2\omega}{J}$$

$$E_k = \frac{1}{2}(mR^2 + J)\omega^2$$

$$E_k' = \frac{1}{2}J\omega'^2 = \frac{1}{2}J \times \frac{(mR^2 + J)^2}{J^2}\omega^2 = \frac{(mR^2 + J)^2}{2J}\omega^2$$

$$\Delta E_k = E_k' - E_k = \frac{(mR^2 + J)^2}{2J}\omega^2 - \frac{1}{2}(mR^2 + J)\omega^2 = \frac{(mR^2 + J)mR^2\omega^2}{2J}$$

五、自我检测

(一) 选择题

1. 一刚体以每分钟 60 转绕 z 轴作匀速转动，设某时刻该刚体上一点的位矢 $\boldsymbol{r} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$，其单位为 cm，若以 cm/s 作为速度单位，则该时刻 P 点的速度为　[　]

A. $\boldsymbol{v} = 94.2\boldsymbol{i} + 125.6\boldsymbol{j}$　　B. $\boldsymbol{v} = -25.1\boldsymbol{i} + 18.8\boldsymbol{j}$

C. $\boldsymbol{v} = 25.1\boldsymbol{i} + 18.8\boldsymbol{j}$　　D. $\boldsymbol{v} = 31.4\boldsymbol{k}$

2. 刚体的转动惯量仅决定于　[　]

A. 刚体的质量　　B. 刚体质量的空间分布

C. 刚体的质量对定轴的分布　　D. 转轴的位置

3. 在下列关于刚体的表述中,不正确的是　　[　　]

A. 刚体作定轴转动时,其上各点的角速度相同,线速度不同

B. 刚体定轴转动定律中,力矩、转动惯量和角加速度均对同一固定轴而言,否则该式不成立

C. 对给定的刚体而言,它的质量和形状是一定的,则其转动惯量也是唯一确定的

D. 刚体的转动动能等于刚体上各质点的动能之和

4. 一个作定轴转动的刚体受到两个外力的作用,则在下列有关力矩的表述中,不正确的是　　[　　]

A. 若这两个力都平行于轴,它们对轴的总力矩一定是零

B. 若这两个力都垂直于轴,它们对轴的总力矩可能为零

C. 若这两个力的合力为零,它们对轴的总力矩一定是零

D. 只有这两个力在转动平面上的分力对转轴产生力矩,才能改变该刚体绕转轴转动的运动状态

E. 一对作用与反作用力对同一轴的力矩之和一定为零

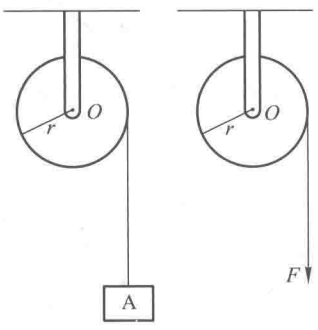
5. 在下列关系到转动定律的表述中,正确的是　　[　　]

A. 对作定轴转动的刚体而言,内力矩不会改变刚体的角加速度

B. 两个质量相等的刚体,在相同力矩的作用下,运动状态的变化情况一定相同

C. 同一刚体在不同力矩作用下,必然得到不同的角加速度

D. 作用在定轴转动刚体上的力越大,刚体转动的角加速度越大



(a)　　(b)

图 3-2

E. 角加速度的方向一定与外力矩的方向相同

6. 如图 3-2(a)所示,一轻绳绕在具有水平转轴的定滑轮上,绳下端挂一质量为 m 的物体 A,此时滑轮的角加速度为 α.若将物体 A 卸掉,而改用力 $\boldsymbol{F}$ 拉绳子,该力的大小 $F=mg$,力的方向向下,如图 3-2(b)所示,则滑轮的角加速度 α 将　　[　　]

A. 变大　　B. 不变　　C. 变小　　D. 难判断

7. 两飞轮 A、B 组成一摩擦啮合器(图 3-3).A 通过与 B 之间的摩擦力矩带

动 B.则此刚体系在啮合前后 [　　]

A. 角动量改变,动能也改变

B. 角动量改变,动能不改变

C. 角动量不变,动能改变

D. 角动量不变,动能也不变

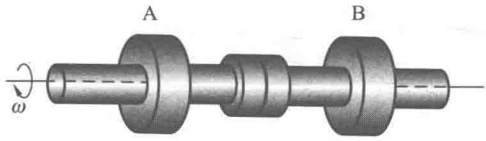


图 3-3

8. 理想流体的密度和黏性不同于实际流体,它们是 [　　]

A. 密度可变又有黏性　　B. 密度不变又无黏性

C. 密度可变又无黏性　　D. 密度不变又有黏性

9. 如图 3-4 所示,一圆盘绕通过盘心 O 且垂直于盘面的水平轴转动,轴间摩擦不计.两颗质量相同、速度大小相等、方向相反且沿同一直线运动的子弹,同时射进圆盘并留在盘内,则两子弹射入后的瞬间,圆盘和子弹系统的角动量 L 及圆盘的角速度 ω 为 [　　]

A. L 不变,ω 增大　　B. L 不变,ω 减小

C. L 增大,ω 减小　　D. L 增大,ω 增大

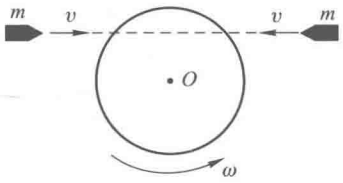


图 3-4

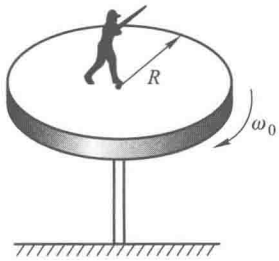


图 3-5

10. 如图 3-5 所示,有一半径为 R 的水平圆转台,可绕通过其中心的竖直固定光滑轴转动,转动惯量为 J.开始时转台以匀角速度 ω_0 转动,此时有一质量为 m 的人站在转台中心,随后人沿半径方向向外跑去,当人到达转台边缘时,转台的角速度为 [　　]

A. $\dfrac{J}{I+mR^2}\omega_0$　　B. $\dfrac{J}{(I+m)R^2}\omega_0$

C. $\dfrac{J}{mR^2}\omega_0$　　D. ω_0

(二) 填空题

1. 一汽车发动机的曲轴,在 12 s 内,其转速由 $n_0=1.2\times10^3$ r/min 均匀增加到 $n=2.7\times10^3$ r/min,则此曲轴转动的角加速度 $\alpha=$_____ rad/s^2;在此时间

内,曲轴共转了_____圈.

2. 半径为 $R=1$ m 的飞轮,以角速度 $\omega_0=50\pi$ rad/s 转动,受到制动后均匀减速,经 $t=50$ s后静止.则飞轮在 $t=25$ s 时的角速度 $\omega=$_____ rad/s;此时,飞轮边缘上某一点的切向加速度 $a_t=$_____ m/s^2;法向加速度 $a_n=$_____ m/s^2.

3. 刚体转动惯量的物理意义是_____,它的计算公式为 $I=$_____,表明转动惯量的大小取决于_____、_____和_____三个因素.

4. 如图 3-6 所示,一长为 l 而质量可以忽略的直杆,两端分别固定有质量为 $2m$ 和 m 的小球,杆可绕通过其中心且与杆垂直的水平光滑固定轴在竖直平面内转动.开始时,杆与水平方向成 θ_0,并处于静止状态;释放后,杆绕 O 轴转动,则当杆转到水平位置时,该系统所受到的总外力矩的大小 $M=$_____,此时该系统角加速度的大小 $\alpha=$_____.

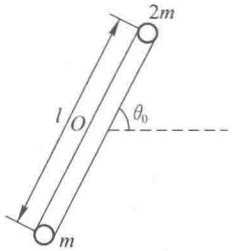


图 3-6

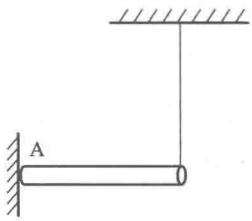


图 3-7

5. 如图 3-7 所示,长为 l,质量为 m 的均质细杆,其左端与墙用铰链 A 连接,右端用一竖直细线悬挂着,使杆处于水平状态,此时将细线突然烧断,则杆右端的加速度 $a=$_____ m/s^2.

6. 刚体作定轴转动,其角动量的矢量表达式为 $\boldsymbol{L}=$_____,角动量守恒的条件是_____.

7. 一定轴转动刚体的运动方程为 $\theta=20\sin 20t$(SI 单位),其对轴的转动惯量为$J=100$ kg·m^2,则在 $t=0$ 时,刚体的角动量 $L=$_____ kg·m^2/s;刚体的转动动能 $E_k=$_____ J.

8. 实验测得电子自旋的角动量为 $L=0.53\times10^{-34}$ kg·m^2/s.若把电子看作一个半径 $R=1.0\times10^{-18}$ m、质量 $m_0=9.11\times10^{-31}$ kg 的小球体,则该"电子球"表面上任一点的线速度大小 $v=$_____ m/s,你认为这样构造的电子模型_____(填合理、不合理)的,原因是_____.

9. 一冲床的飞轮，转动惯量 $I=25\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$，并以角速度 $\omega_0=10\pi\ \text{rad/s}$ 转动.在带动冲头对板材作成型冲压过程中，所需的能量全部由飞轮来提供.已知冲压一次，需做功 $A=4.0\times10^3\ \text{J}$，则在冲压过程之末飞轮的角速度 $\omega=$_____ rad/s.

10. 伯努利方程表明，_____流体作_____流动时，在同一条流管内任一横截面上_____头、_____头和_____头三者之和为一常量.

（三）计算题

1. 设绕线轮子的质量为 m，半径为 r，相对于它本身的轴，其转动惯量为 J.轮上所绕线极轻且细，如图 3-8 所示，线的末端系在离地面某一高度处，轮子在本身重力作用下降落.试证明轮子总动能的表达式为

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2$$

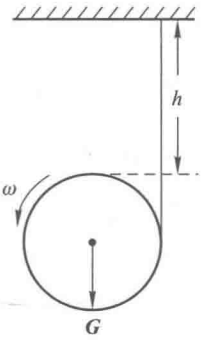


图 3-8

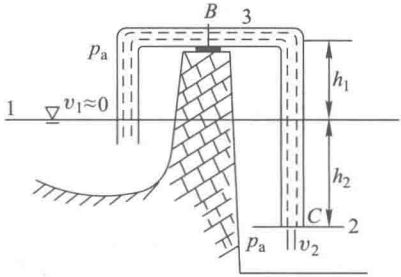


图 3-9

2. 图 3-9 为黄河下游居民借横跨堤顶的虹吸管从“悬河”中引水示意图.使用前须将虹吸管抽气，使管内形成真空.当管内空气压强比大气压 p_a 小到一定程度时，河水便被虹吸管吸入堤内.已知虹吸管粗细均匀，$h_1=3\ \text{m}$，$h_2=5\ \text{m}$.求虹吸管出口处 C 的水流速度和最高点 B 处的压强.（提示：取河面和出口 C 处的横截面 1、2 及 C 处和 B 处的横截面 2、3.）

六、问题讨论

刚体的平面平行运动

刚体作为特殊的质点系，在作平面平行运动时，同样遵从质点系的各种力学规律，比如动能定理、动量定理（质心运动定理）以及角动量定理等.对应不同的分析方法，适用不同的力学方程.通常将刚体的平面平行运动看作两种运动的叠加，即质心的平动和绕垂直于平面的质心轴的转动，这是一种简洁有效的分析方法.

由于刚体质心在平面内运动,具有 2 个自由度,而绕质心轴转动具有 1 个定轴转动自由度.因此刚体平面平行运动的自由度 $i=3$,对应以下 3 个动力学方程

$$\sum F_x = ma_{Cx} \qquad \sum F_y = ma_{Cy} \qquad M_C = J_C\alpha$$

式中 J_C 为刚体对质心轴的转动惯量.

在刚体的平面平行运动中,刚体的总动能等于代表整体平动的质心平动动能与刚体对质心的转动动能之和,即

$$E_k = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2$$

对于纯滚动刚体,根据运动关系的相对性可知,刚体上任一点 P 对惯性系的速度为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 为从质心到 P 的位矢.

作纯滚动的圆形刚体相对惯性系速度为零的点瞬时静止,比如纯滚动圆柱体与地面的接触点.圆形物体质心相对该瞬时静止点的速率由上式可知为

$$v_C = \omega r$$

代入动能表达式即有

$$E_k = \frac{1}{2}(mr^2 + J_C)\omega^2 = \frac{1}{2}J\omega^2$$

上式表明:纯滚动刚体以过瞬时静止点且垂直于刚体平面的瞬时轴为转动轴,其动能自然可表示为对瞬时轴的转动动能,对瞬时轴的转动惯量可用平行轴定理求得.

第四章

相对论基础

一、学习要求

1. 了解爱因斯坦狭义相对论的两个基本假设.

2. 了解洛伦兹坐标变换,会应用洛伦兹变换计算问题.

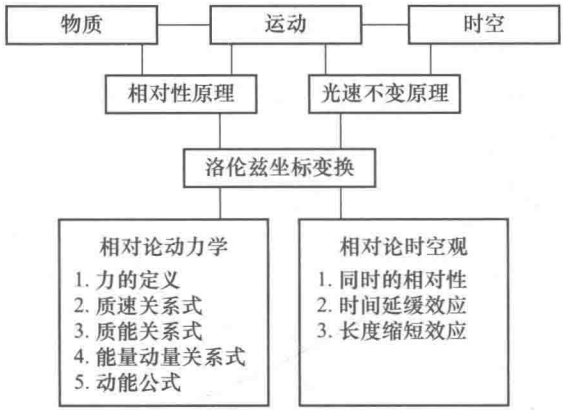
3. 着重了解狭义相对论中同时性的相对性以及长度缩短和时间膨胀概念.

4. 了解牛顿力学中的时空观和狭义相对论中的时空观以及二者的差异.

5. 理解狭义相对论中质量和速度的关系、质量和能量的关系以及能量和动量的关系.

6. 进一步确认力的定义式为 $\boldsymbol{F}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$.

二、知识框图



三、内容导读

1. 牛顿力学和狭义相对论

物理学中物质、能量和相互作用的研究,是从力学开始的.质量和力的概念是牛顿首先提出来的.牛顿力学依据牛顿运动定律分别从力的时间累积效应和空间累积效应得出了动量定理和动能定理,进而得出相应的守恒定律,有力地促进了力学的发展.但由于绝对时空观的影响,质量被认为是与运动无关的物质属性;时间和空间相互隔离,力的过程效应不是时空一体化的累积效应,而被认为是时间和空间相互独立的两类效应;力的定义未能探本穷源.这就使牛顿力学的应用有了局限性,它不适用于高速运动的物体.物质、能量和物质间的相互作用之间的深层次关系,直到 1905 年,才被爱因斯坦的狭义相对论所揭开.作为狭义相对论的两条基本原理是相对性原理和光速不变原理.相对性原理表明,所有惯

性系对于描述物理现象都是等价的.这是运动相对性的一种反映.光速不变原理表明,在彼此相对作匀速直线运动的任一惯性系中,所测得的光在真空中的传播速度都是相等的.它所说的惯性系似乎是几何参考系,其实是"光"物质,亦即物质运动.所以,建立在这两条基本原理基础上的狭义相对论,能够论证运动是物质存在的形式,时空不可分割,而是物质存在的形式.这些基本概念才是理解物质、能量和物质间的相互作用之间关系的根据.

2. 洛伦兹变换

洛伦兹变换包含了狭义相对论时空关系的全部信息,是求解时空问题的基本依据.特别要理解"同时性的相对性""长度缩短"和"时间延缓"等相对论效应都可由洛伦兹变换导出.两组洛伦兹变换在数学上完全等价.但在运用时应根据具体物理内涵来选择使用.例如一静止在 K′系中的尺平行于 $O'x'$,在 K′系中测得的长度 $l'=x'_2-x'_1$,用洛伦兹变换导出在相对运动的 K 系中的长度 $l=x_2-x_1$.如用一组洛伦兹变换得出 $l=l'\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}$,则另一组变换将得出 $l=\dfrac{l'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$.两种结果孰对孰错?尺相对于 K′系静止,因此在 K′系中测得的长度 l'是固有长度,上述第二种结果当然是错的.那么错在何处呢?原来 K 系相对尺是运动的,在 K 系中测量尺的长度必须同时测量尺两端的坐标 x_2、x_1,即必须要求 $t_2=t_1$.而在 K′系中测量尺两端的坐标 x'_2、x'_1,却并不要求同时,即 $t'_2\neq t'_1$.但在导出第二种结果时,却使用了 $t'_2=t'_1$ 的假定,由此而得出错误的结果.

长度缩短效应和时间延缓效应密切相关,是时空属性的表现,并不是由于运动而引起物质之间的相互作用而产生的实在的收缩.有一点应该指出,长度缩短并不同于观察者的"视觉效果".

3. 相对论动力学

力在相对论中被定义为动量的变化率,和牛顿力学中的定义形式相同,但不认为物体的质量是个常量,因此,力和加速度的关系变得复杂起来,不再有简单的正比关系.

在狭义相对论中,爱因斯坦创造性地提出了质能关系式

$$E=mc^2$$

揭示了物质与能量的深刻联系.能量和质量的改变是相互联系着的.外界以做功的形式传递给物体的能量,将导致物体动能的变化,或者说引起物体质量的变化.静质量改变 Δm 时,伴随着 $\Delta E=\Delta mc^2$ 的能量改变.这就是原子能和核能利用的原理.通过计算,加深对能量库的认识.考虑了质速关系

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

把 m_0 叫做固有质量或静质量，$E_0=m_0c^2$ 叫做固有能量或静能，而把动能 E_k 定义为

$$E_k=mc^2-m_0c^2$$

可以证明，在 $v\ll c$ 的情形中，$E_k\approx\frac{1}{2}mv^2$，这和牛顿力学中的动能定义相一致.在牛顿力学中，分别对力的时间和空间的累积效应研究的结果，得到了动量定理和动能定理.由此而求得的动量和动能的关系式为

$$E_k=\frac{p^2}{2m}$$

这个关系在狭义相对论中并不成立，取代它的是下列能量与动量关系式：

$$E^2=p^2c^2+E_0^2$$

上式直接由质速关系式平方即可求出.这个能量与动量关系式不仅揭示了能量与动量间的关系，而且实际上它还反映了能量与动量的不可分割性与统一性，就像时间与空间的不可分割性与统一性那样.这个关系式指出了静质量为零的粒子存在的可能性.按牛顿力学的观念，这是难以理解的.光子和中微子就是静质量为零或近似为零的粒子.由 $m_0=0$ 可知，它们的能量为

$$E=pc$$

动量为

$$p=\frac{E}{c}=\frac{mc^2}{c}=mc$$

而速度均为 c.因此，粒子的动量不再是速率的函数，它们可以有不同的值.粒子的能量也不再是速率的函数，它们也可以有不同的值.

四、解题指导

处理相对论问题时，首先要明确静止参考系和运动参考系、固有时间和固有长度、事件发生的时间和地点，然后应用适当的公式进行计算.

例 4-1

一光源在 K′坐标系的原点 O' 发出一光线.光线在 $x'y'$ 平面内与 x' 轴的交角为 θ'.设 K′相对 K 以速度 u 沿 x 轴运动.试求在 K 坐标中测量到这束光线的传播方向(图4-1).

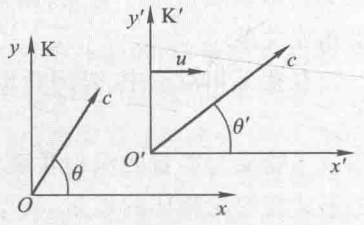


图 4-1

分析　用相对论速度变换公式时，x，y 方向的分速度都有变换.

解　在 K′系光线传播速度在坐标轴上的两个分量分别为

$$\begin{cases}u'_x=c\cos\theta\\u'_y=c\sin\theta\end{cases}$$

在 K 系中测量时，光线传播速度 c 在两个坐标中的分量分别为

$$\begin{cases} u_x=\dfrac{u'_x+u}{1+\dfrac{uu'_x}{c^2}}=\dfrac{c\cos\theta+u}{1+\dfrac{uc\cos\theta}{c^2}} \\ u_y=\dfrac{u'_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+\dfrac{uu'_x}{c^2}}=\dfrac{c\sin\theta\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+\dfrac{uc\cos\theta}{c^2}} \end{cases}$$

光线 c 在 K 系中与 x 轴的夹角 θ 为

$$\theta=\arctan\frac{u_y}{u_x}=\arctan\left(\frac{c\sin\theta\sqrt{1-u^2/c^2}}{c\cos\theta+u}\right)$$

例 4-2

一中性 π 介子相对于观察者以速度 $v=kc$ 运动，后衰变为两个光子. 两光子的运动轨迹与 π 介子原来方向成相等的角度 θ（见图 4-2），证明：

（1）两光子有相等的能量；

（2）$\cos\theta=k$.

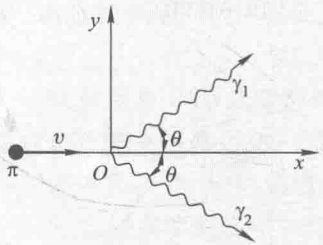


图 4-2

分析　π 介子衰变时，能量守恒，动量也守恒.

证明　设两个光子的能量分别为 E_1 及 E_2. 由动量守恒定律得

x 方向　$$\frac{m_{\pi 0}v}{\sqrt{1-k^2}}=\frac{E_1}{c}\cos\theta+\frac{E_2}{c}\cos\theta \qquad ①$$

y 方向　$$0=\frac{E_1}{c}\sin\theta-\frac{E_2}{c}\sin\theta \qquad ②$$

由能量守恒定律得

$$\frac{m_{\pi 0}c^2}{\sqrt{1-k^2}}=E_1+E_2 \qquad ③$$

由式②得

$$E_1=E_2$$

式③代入式①得

$$\frac{m_{\pi 0}v}{\sqrt{1-k^2}}=\frac{2E_1}{c}\cos\theta \qquad ④$$

由式③得

$$E_1=\frac{m_{\pi 0}c^2}{2\sqrt{1-k^2}} \qquad ⑤$$

式⑤代入式④得

$$\frac{m_{\pi 0}v}{\sqrt{1-k^2}}=\frac{2}{c}\cdot\frac{m_{\pi 0}c^2}{2\sqrt{1-k^2}}\cos\theta$$

$$v=c\cos\theta$$

故
$$\cos\theta=\frac{v}{c}=k$$

五、自我检测

(一) 选择题

1. 已知惯性系 K′相对 K 以 0.6c 匀速沿 xx'轴正方向运动.若从 K′系中原点 O'沿 xx'轴正方向发出一光脉冲,在 K′系中测得光速 $v_x'=c$,则在 K 系中测得光速为　　[　　]

A. 0.6c　　B. 1.6c　　C. 0.4c　　D. c

2. 有一粒子以 0.05c 的速率相对实验室参考系运动.此粒子衰变时发射一个电子,电子相对衰变粒子的速率为 0.80c,电子的运动方向与粒子的运动方向相同,则电子相对实验室参考系的速率为　　[　　]

A. 0.517c　　B. 0.617c　　C. 0.717c　　D. 0.817c

3. 一艘飞船和一颗彗星相对地面分别以0.60c和 0.80c 的速度相向而行,如图 4-3 所示.在飞船上测得彗星速度是　　[　　]

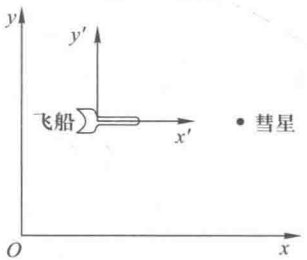


图 4-3

A. 0.946c　　B. −0.946c

C. 0.746c　　D. −0.746c

4. 下列说法正确的是　　[　　]

(1) 一切运动物体相对于观察者的速度都不能大于真空中的光速.

(2) 质量、长度、时间的测量结果,都随物体与观测者的相对运动状态而改变.

(3) 在一惯性系中发生于同一时刻,不同地点的两事件在其他一切惯性系中也是同时发生的.

(4) 惯性系中的观察者观测一个相对他作匀速相对运动的时钟,会看到这个时钟比相对于他静止的相同的时钟走得慢些.

A. (1)(3)(4)　B. (1)(2)(4)　C. (1)(2)(3)　D. (2)(3)(4)

5. 某一时刻从上海和北京同时发出两列高速列车,有一飞船恰从北京向上海方向的高空掠过,在飞船上观测,这两列列车是　　[　　]

A. 同时发车　　B. 上海先发　　C. 北京先发　　D. 不能确定

6. 设某微观粒子的总能量是它静能的 k 倍,则其速度大小为　　[　　]

A. $\frac{c}{k-1}$　　B. $\frac{c}{k}\sqrt{1-k^2}$

C. $\frac{c}{k}\sqrt{k^2-1}$　　D. $\frac{c}{k+1}\sqrt{k(k+2)}$

（二）填空题

1. 设有两个惯性系 K 和 K′，它们的原点在 $t=0$ 和 $t'=0$ 时重合在一起.有一事件，在 K′系中发生在 $t'=8\times10^{-8}$ s，$x'=60$ m，$y'=0$，$z'=0$ 处.若 K′系相对 K 系以速率 $v=0.6c$ 沿 xx' 轴正方向运动.则该事件在 K 系中 $x=$_____ m，$t=$_____ s.

2. π^+介子是不稳定粒子，平均寿命是 2.6×10^{-8} s（在它自己的参考系中测量），如果此粒子相对实验室参考系以 $0.8c$ 的速度运动，那么在实验室参考系中 π^+介子的寿命为_____ s，π^+介子在衰变前运动距离为_____ m.

3. 相对地面以速度 v 沿 Ox 轴正方向运动的粒子，在 y 方向上发射一个光子，地面的观测者测得光子速度的大小 $u=$_____，$\boldsymbol{u}$ 与 Ox 轴的夹角 $\theta=$_____.

4. K 系与 K′系是坐标轴相互平行的两个惯性系，K′系相对 K 系沿 Ox 轴正方向以速率 v 匀速运动.一根刚性尺静止在 K′系中与 Ox' 轴成 30°角，今在 K 系中观测该尺与 Ox 轴夹角将_____于 30°.

5. 已知在实验室中一个质子的静质量是 m_0，速度是 $0.99c$，则它的相对论总能量 $E=$_____，动量 $p=$_____，动能 $E_k=$_____.

6. 一列高速火车以速度 u 驶过车站时，固定在站台上的两只机械手在车厢上同时划出两个痕迹，静止在站台上的观察者同时测出两痕迹之间的距离为 1 m，则车厢上的观察者应测出这两个痕迹之间的距离为_____.

（三）计算题

一艘宇宙飞船的船身固有长度为 $L_0=90$ m，相对于地面以 $u=0.8c$ 的匀速度在地面观测站的上空飞过.（1）观测站测得飞船的船身通过观测站的时间间隔是多少？（2）宇航员测得船身通过观测站的时间间隔是多少？

六、问题讨论

狭义相对论的“时空”关系的讨论

考虑到“时空”的物质性，对物体大小、长度的测量有必要讨论一下其实在性.物理学中的长度不是几何长度而应言之有物，它是物质性的.长度缩短效应是相对的.在 K 系中测量 K′系中相对静止的刚性杆时，同样会认为 K′系中的杆

在运动方向上变短.通常把$\frac{1}{\gamma}=\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}$称为长度缩短因子,而将$\gamma=\left(\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}\right)^{-1}$称为时间延缓因子或质量增加因子."时空"的这些性质都为近代物理实验所证实.因此,读者不能因为长度缩短效应的相对性,而影响了对其实在性的认识.而且同一个γ因子把长度缩短与时间延缓、长度缩短与质量增大联系在一起,这绝不是偶然事件.前者使长度与时间的乘积为一常量,后者则使长度与质量的乘积为一常量.前者表明了空间与时间的一体性,此消彼长,后者则表明空间与物质的一体性,同样也是此消彼长.这些足以说明"时空"就是物质运动,决非几何概念.长度与质量之积是个常量,其值可由普朗克长度与普朗克质量求得如下:

$$ml=m_{\mathrm{P}}l_{\mathrm{P}}=\left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2}\left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{1/2}=\frac{\hbar}{c}$$

其实上式是所有基本粒子必须满足的根本条件.当物质的长度因运动而缩短,其质量则同时在增大,试从功能关系,对这种现象作些剖析.考察其间有无相互作用存在.根据狭义相对论,物质的动能E_{k}与其相对论总能量$E=mc^2$和静能量$E_0=m_0c^2$之间的关系为

$$E=mc^2=E_{\mathrm{k}}+m_0c^2$$

对一个孤立的物质系统,应用机械能守恒定律得

$$E=E_{\mathrm{k}}+E_{\mathrm{p}}$$

相比之下,可见物质的静能相当于物质系统的势能,它是保守内力做功的结果.我们知道势能的大小取决于物质系统之内各点的相对位置和相互作用力,和物质系统有无运动速度是没有关系的.现在,一个运动着的物质的长度在缩短,而其质量或能量却在增大.这样的物理过程应该是个使长度收缩的引力做功而使能量增加的过程,否则能量的增大将成为无中生有.这个引力就是我们要寻求的保守内力,它决定了物质的形状大小,所做的功决定着物质的静能.由于这个引力存在于所有物质之内,所以叫做万有引力.普朗克长度l_{P}是长度的最小限度,有着普朗克长度的物质,其质量即普朗克质量,与之相应的能量(静能)就可看作由万有引力做功得来.功能关系如下:

$$m_{\mathrm{P}}c^2=\int\boldsymbol{F}_{\text{引}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{\infty}^{l_{\mathrm{P}}}G\frac{m_{\mathrm{P}}^2}{l^2}\mathrm{d}l=Gm_{\mathrm{P}}^2\left(\frac{1}{l_{\mathrm{P}}}-\frac{1}{l_{\infty}}\right)=\frac{Gm_{\mathrm{P}}^2}{l_{\mathrm{P}}}=\frac{\hbar c}{l_{\mathrm{P}}}$$

显然,这个结果满足基本粒子的根本条件.用相同方法可求出其他基本粒子的静能,例如核子的静能$m_{\mathrm{n}}c^2$:

$$m_{\mathrm{n}}c^2=\int_{\infty}^{l_{\mathrm{n}}}G\frac{m_{\mathrm{P}}^2}{l^2}\mathrm{d}l=\frac{Gm_{\mathrm{P}}^2}{l_{\mathrm{n}}}=\frac{\hbar c}{l_{\mathrm{n}}}$$

第五章
气体动理论

一、学习要求

1. 了解气体分子热运动的图像.

2. 掌握描述热运动系统的状态参量:压强、体积和温度.

3. 理解理想气体的压强公式和温度公式.

4. 了解从提出模型、进行统计平均、建立宏观量与微观量的联系,直到阐明宏观量的微观本质的思路和方法.了解系统的宏观性质是微观运动的统计表现.

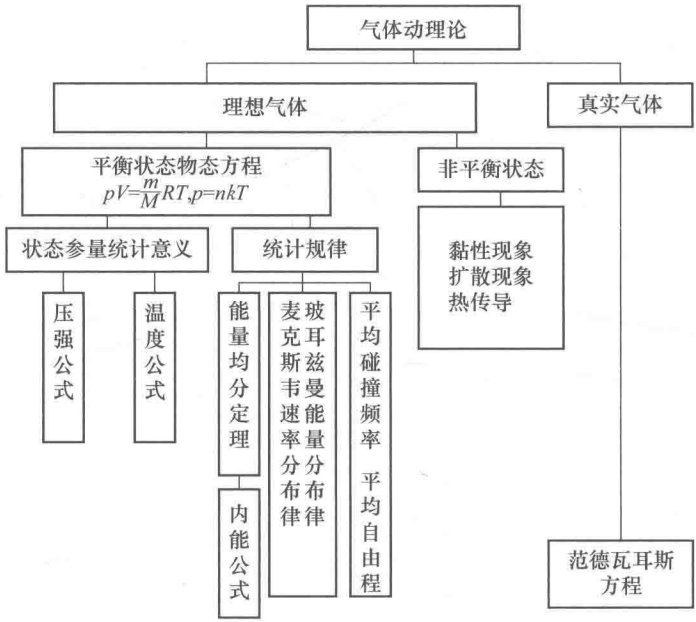
5. 了解麦克斯韦速率分布律、速率分布函数和速率分布曲线的物理意义.了解气体分子热运动的算术平均速率、方均根速率和最概然速率.了解玻耳兹曼能量分布律.

6. 理解能量按自由度均分定理,要会用该定理计算理想气体的摩尔定容热容、摩尔定压热容和内能.

7. 了解气体分子平均碰撞频率和平均自由程概念.

8. 了解气体中三种输运过程的物理本质及其宏观规律和微观的定性解释.

二、知识框图



三、内容导读

1. 气体动理论的研究方法

通过分子热运动图像的介绍，明确分子热运动与众不同的主要特征是它的无序性.因此，为了研究分子热运动系统，特别是气体的物质、能量和相互作用的关系，必须遴选合适的状态参量去描述气体的状态.而研究的方法也不能完全搬用力学方法.气体动理论的研究对象是分子的热运动.分子数目十分巨大，运动情况非常复杂，具有明显的无序性.我们对个别分子的表现不感兴趣，我们关心的是大量分子的集体表现，所以在研究时，既要提出理想模型，又要运用统计方法，通过微观量的平均值和宏观量的联系，去阐明系统的宏观性质，揭示宏观现象的本质.

2. 压强公式和温度公式

由于分子热运动的无序性，描述个别分子运动的物理量如位置、速度等，将为描述分子热运动系统的状态参量如体积、温度等所替代.压强公式和温度公式是气体动理论的两个基本公式，它们是采用统计假设结合力学方法研究物质能量以及相互作用的范例.从本质上看，它们是统计规律，适用于大量分子的集体，对少数分子是无效的.但是，力和能量的定义和性质并没有改变.压强来自压力，压力来自分子碰撞，相互作用力仍然是因物体间相对运动而引起的动量变化率.而在剖析黏性力的成因时，则更鲜明地看到力是以定向动量的转移为前提的.

3. 平衡态

平衡态是指热力学系统在不受外界影响（指不做功、没有热交换）的条件下，宏观状态性质不随时间变化的状态.当系统内部存在宏观恒定的粒子流或能量流时，经过足够长的时间后，也能达到一个宏观性质不随时间变化的状态.例如：将铁棒的一端插入冰水混合的容器中，另一端与沸水接触，经足够长的时间后，铁棒的宏观性质也不随时间变化，这个状态称为定常态.要将定常态与平衡态区别开来.定常态是在外界持续作用下，不随时间变化的状态，它是非平衡态，不是平衡态.

4. 气体分子的理想模型

物理模型的建立是有针对性的，随着讨论对象在不同场合表现的主要矛盾的不同，构建的模型也随之不同.如理想气体，在讨论压强时，分子对器壁碰撞是主要的，碰撞来自平动，因此理想气体分子可看成质点.而在讨论其能量时，因转动动能不能忽略，需要把分子看成刚性小球.在讨论分子碰撞的自由程时，分子碰撞的作用范围问题凸显出来，就要提出分子作用球的模型.

5. 分布函数

分布函数是平衡态统计理论的核心，它可反映出无序性的程度，具有归一

性.根据概率的概念,分布函数也可理解为在一定条件下,某随机事件出现概率的分布.处于平衡态下的气体分子,其速度、速率、能量都存在确定的分布规律,可表示为一定的分布曲线,相当直观地从图中反映出它们无序性的程度.分布函数可用来计算各种微观量的平均值.通过这些微观量的统计平均值,可以对各种宏观热学量和热学宏观定律作出微观解释.平衡态所对应的分布称为最概然分布,是包含微观状态数目最多的一种分布,其出现的概率最大.但因系统内大量分子的热运动能引起对这种分布的偏离,这就是涨落现象.涨落是统计规律的一个特性.

四、解题指导

1. 在用理想气体物态方程解题时,必须考虑气体状态的热动平衡条件是否满足,要不要联合应用.因为该方程只适用于热动平衡状态.

2. 在用温度公式、压强公式和内能公式解题时,要理解这些宏观量的微观本质,要明白在推导这些公式时使用了哪些统计假设.

3. 在应用速率分布函数和分布曲线时,要注意:

(1) 速率分布律是平衡态时大量气体分子服从的统计规律.

(2) 速率分布函数是个概率函数,它指出一个气体分子处于 $v\sim v+\mathrm{d}v$ 速率区间的概率,也等于处于此区间内的分子数占总分子数的百分比.讨论具有某一速率的分子数是没有意义的.

(3) 应用分布函数计算平均值时,要注意积分的上下限.因为在不同区间内所得平均值是不一样的.有关分子热运动的三个统计平均速率都是对速率从零到无限大的整个区间求出来的.要对计算结果所反映的分子热运动的无序性程度做到心中有数.

例 5-1

一封闭的圆筒,内部被导热的不漏气的可移动活塞隔为两部分.最初,活塞位于筒中央,圆筒两侧的长度 $l_1=l_2$(图 5-1).当两侧各充以 T_1,p_1,与 T_2,p_2 的相同气体后,问平衡时活塞将在什么位置上(即 l_1/l_2 是多少)?已知 $p_1=1.013\times10^5\,\mathrm{Pa}$,$T_1=680\ \mathrm{K}$,$p_2=2.026\times10^5\,\mathrm{Pa}$,$T_2=280\ \mathrm{K}$.

分析 当活塞在平衡位置时,两侧的气体温度相同,压强相等.

解 设活塞的横截面积为 S.当两部分气体处于初始平衡状态时,它们的状态方程分别为

$$p_1 l_1 S=\frac{m_1}{M_1}RT_1$$

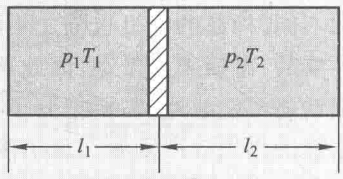


图 5-1

$$p_2 l_2 S=\frac{m_2}{M_2}RT_2$$

由已知：$l_1=l_2$，$M_1=M_2$，代入上两式得

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{p_1 T_2}{p_2 T_1}$$

当活塞处于平衡位置时，由力学平衡条件知

$$p_1'=p_2'$$

由热学平衡条件知

$$T_1'=T_2'$$

两部分气体达到新的平衡状态时它们的物态方程分别为

$$p_1' l_1' S=\frac{m_1}{M_1}RT_1'$$

$$p_2' l_2' S=\frac{m_2}{M_2}RT_2'$$

将平衡条件代入上述物态方程得

$$\frac{l_1'}{l_2'}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{p_1 T_2}{p_2 T_1}=\frac{1.013\times10^5\times280}{2.026\times10^5\times680}=\frac{7}{34}=0.206$$

例 5-2

求：(1)速度大小在 0 与 v_p 之间的气体分子的平均速率；(2) 速度大小比 v_p 大的气体分子的平均速率.

分析　应用麦克斯韦速率分布率和求平均值的公式时，注意积分上下限.附积分公式：

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-x^2}dx=0.842\ 6$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}dx=1$$

解　麦克斯韦速率分布律为

$$f(v)=4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}v^2$$

令　　$x=v/v_p$　　①

则　　$dv=v_p dx$　　②

(1) 计算在区间 $0\sim v_p$ 速率平均值不能用下式计算：

$$\bar{v}=\int_0^{v_p} vf(v)\,dv \qquad ③$$

因为分布函数在 $0\sim\infty$ 区间内是归一化的，即

$$\int_0^\infty f(v)\,dv=1$$

但在区间 $0\sim v_p$ 内并不归一,即

$$\int_0^{v_p} f(v)\,\mathrm{d}v \neq 1$$

要计算区间 $0\sim v_p$ 的速率平均值,必须寻找一个新的函数,使这一函数在此区间内满足归一化条件,令这个函数为

$$f'(v)=Af(v)$$

A 称为归一化系数,令这个新的函数 $f'(v)$ 在这一区间内满足归一化条件,即令

$$\int_0^{v_p} f'(v)\,\mathrm{d}v=\int_0^{v_p} Af(v)\,\mathrm{d}v=A\int_0^{v_p} f(v)\,\mathrm{d}v=1$$

由此得到

$$A=\frac{1}{\int_0^{v_p} f(v)\,\mathrm{d}v}$$

速率 v 在区间 $0\sim v_p$ 内的平均值为

$$\bar{v}=\int_0^{v_p} vf'(v)\,\mathrm{d}v=A\int_0^{v_p} vf(v)\,\mathrm{d}v=\frac{\int_0^{v_p} vf(v)\,\mathrm{d}v}{\int_0^{v_p} f(v)\,\mathrm{d}v} \qquad ④$$

将式②代入式④得

$$\bar{v}=\frac{\int_0^{v_p} vf(v)\,\mathrm{d}v}{\int_0^{v_p} f(v)\,\mathrm{d}v}=\frac{v_p\int_0^1 x^3\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x}$$

$$=\frac{v_p\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x^2}}{\int_0^1 x\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x^2}}=v_p\frac{\frac{1}{\mathrm{e}}+\frac{1}{\mathrm{e}}-1}{\frac{1}{\mathrm{e}}-0.84\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=0.705v_p \qquad ⑤$$

(2) 速率在 $v_p\sim\infty$ 区间内的平均值

$$\bar{v}=\frac{\int_{v_p}^{\infty} vf(v)\,\mathrm{d}v}{\int_{v_p}^{\infty} f(v)\,\mathrm{d}v}=\frac{v_p\int_1^{\infty} x^3\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x}{\int_1^{\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x}$$

$$=v_p\frac{\int_1^{\infty} x^2\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x^2}}{\int_1^{\infty} x\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x^2}}=v_p\frac{0-\frac{1}{\mathrm{e}}-\frac{1}{\mathrm{e}}}{0-\frac{1}{\mathrm{e}}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1-0.84)}=1.4v_p$$

五、自我检测

（一）选择题

1. 关于温度的意义有下列几种说法，其中正确的是　[　]

（1）气体的温度是分子平均平动动能的量度.

（2）气体的温度是大量分子热运动的集中表现，具有统计意义.

（3）温度高低，反映物质内部分子运动剧烈程度不同.

（4）从微观上看气体温度表示每个分子的冷热程度.

A.（1）（2）（4）　B.（1）（2）（3）　C.（2）（3）（4）　D.（1）（2）（3）（4）

2. 一瓶氦气和一瓶氮气的密度相同，分子的平均平动动能相同，它们都处在平衡态，则　[　]

A. 温度相同，压强相同

B. 温度、压强都不相同

C. 温度相同，但氦气的压强大于氮气的压强

D. 温度相同，但氦气的压强小于氮气的压强

3. 三个容器 A、B、C 中装有同种理想气体，其分子数密度 n 相同，而方均根速率之比 $\sqrt{\overline{v_A^2}}:\sqrt{\overline{v_B^2}}:\sqrt{\overline{v_C^2}}=1:2:4$，则其压强之比 $p_A:p_B:p_C$ 为　[　]

A. 1∶2∶4　　B. 1∶4∶8　　C. 1∶4∶16　　D. 4∶2∶1

4. 在标准状态下，若氧气（视为刚性双原子分子的理想气体）和氦气的体积比 $V_1:V_2=1:2$，则其内能之比 $E_1:E_2$ 为　[　]

A. 3∶10　　B. 1∶2　　C. 5∶6　　D. 5∶3

5. 设某种气体的分子速率分布函数为 $f(v)$，则速率在 $v_1\sim v_2$ 区间内的平均速率为　[　]

A. $\int_{v_1}^{v_2} vf(v)\,\mathrm{d}v$　　B. $v\int_{v_1}^{v_2} vf(v)\,\mathrm{d}v$

C. $\int_{v_1}^{v_2} vf(v)\,\mathrm{d}v\Big/\int_{v_1}^{v_2} f(v)\,\mathrm{d}v$　　D. $\int_{v_1}^{v_2} f(v)\,\mathrm{d}v\Big/\int_{0}^{\infty} f(v)\,\mathrm{d}v$

6. 某理想气体在平衡态（温度为 T）下的分子速率分布曲线如图 5-2 所示，图中 A、B 两部分相等，则图中 v_0 的正确判断为　[　]

A. 平均速率 $\bar{v}=v_0$

B. 最概然速率 $v_p=v_0$

C. 方均根速率 $\sqrt{\overline{v^2}}=v_0$

D. 速率大于 v_0 和小于 v_0 的分子数各占总分子数的一半

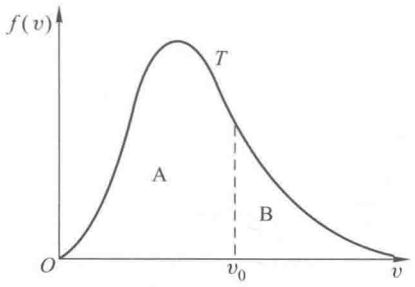


图 5-2

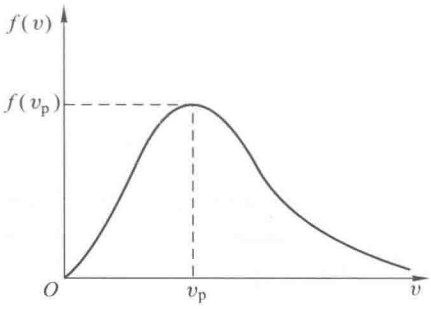


图 5-3

7. 两个容积相同的容器中,分别装有氦气和氢气,若它们的压强相同,则它们的内能关系为 [ ]

A. $E_{He}=E_{H_2}$ B. $E_{He}>E_{H_2}$ C. $E_{He}<E_{H_2}$ D. 无法确定

8. 室温下,理想气体分子的速率分布如图 5-3 所示.当气温降低时, [ ]

A. v_p 变小,$f(v_p)$不变 B. v_p 和 $f(v_p)$都变小

C. v_p 变小,$f(v_p)$变大 D. v_p 不变,$f(v_p)$变大

9. 以下各式中所表示的能量为 1 mol 理想气体之内能的是(i 表示理想气体分子自由度) [ ]

A. $\frac{1}{2}kT$ B. $\frac{i}{2}kT$ C. $\frac{i}{2}RT$ D. $\frac{m}{M}\frac{i}{2}RT$

10. 一定量的理想气体,在体积不变的条件下,当温度升高时,分子的平均碰撞频率 $\bar{Z}$ 和平均自由程 $\bar{\lambda}$ 的变化情况是 [ ]

A. $\bar{Z}$ 增大,$\bar{\lambda}$ 不变 B. $\bar{Z}$ 不变,$\bar{\lambda}$ 增大

C. $\bar{Z}$ 和 $\bar{\lambda}$ 都增大 D. $\bar{Z}$ 和 $\bar{\lambda}$ 都不变

(二)填空题

1. 某容器中装有一定量的某种气体:

(1) 若容器内各部分的压强相等,此状态是否一定是平衡态? _____

(2) 若容器内各部分的温度相等,此状态是否一定是平衡态? _____

(3) 若容器内各部分的压强相等,并且容器中各部分分子密度也相同,此状态是否一定是平衡态? _____

2. 某容器中贮有一定量的氧气,处于 $T=300$ K 的热平衡状态时,氧气分子的平均平动动能 $\bar{E}_{平}$ = _____,平均转动动能 $\bar{E}_{转}$ = _____,平均动能 $\bar{E}$ = _____.

3. 有体积为 $V=2\times10^{-3}\ \mathrm{m}^3$ 的刚性双原子分子理想气体，其内能为 $6.75\times10^2\ \mathrm{J}$，则气体的压强 $p=$_____.

4. 理想气体压强的微观（统计）意义是_____；压强公式可表示为 $p=$_____. 温度是_____的量度，其关系式为_____.

5. 气体在温度为 T 的平衡状态下，处于能量状态为 E_1 的分子，其数密度为 n_1，则处于分子的另一能量状态 $E_2(E_2>E_1)$ 的分子数密度 n_2 ____ n_1（>，<，或=）.

6. 设大气温度不随高度变化，在 $t=27℃$ 的温度下，高度为 $h=$_____ m 处的大气压减为地面的一半.

7. 一容器贮有氧气，其压强 $p=1.01\times10^5\ \mathrm{Pa}$，温度 $t=27℃$，其分子数密度 $n=$_____；若在同样的温度下，把容器抽成 $p'=1.01\times10^{-13}\ \mathrm{Pa}$ 的真空（这是当前可获得的极限真空度）. 则此时的分子数密度为 $n'=$_____.

8. 氮气在标准状态下的分子平均碰撞频率为 $5.42\times10^8\ \mathrm{s}^{-1}$，分子的平均自由程为 $6\times10^{-6}\ \mathrm{cm}$，若温度不变，气压降为 0.1 atm（1 atm = $1.01\times10^5\ \mathrm{Pa}$）时，分子平均碰撞频率为_____ s^{-1}，分子的平均自由程为_____ m.

9. 当温度 $T=$_____ K 时，氧气分子的方均根速率等于其离开地球表面的逃逸速度 11.2 km/s.

10. 根据玻耳兹曼分布律，当温度 T 恒定时，处于一定速度区间和坐标区间的分子数与因子_____成正比，总能量 E 愈高的状态，分子占有该状态的概率就_____. 因此，从统计观点看，分子总是优先占据_____状态.

（三）计算题

在容积为 $V=2\times10^{-3}\ \mathrm{m}^3$ 的容器内，盛有 $m=0.01\ \mathrm{kg}$ 的氧气，其压强为 $p=9.07\times10^4\ \mathrm{Pa}$. 试求：

（1）氧气分子的方均根速率；

（2）单位体积内的分子数；

（3）氧气分子的平均动能；

（4）氧气分子的平均自由程和连续两次碰撞的平均时间间隔（已知氧分子的有效直径为 $2.9\times10^{-10}\ \mathrm{m}$）.

六、问题讨论

输运过程公式的推导

用定性半定量的初级气体动理论解释输运过程，可以认为：黏性现象是流速分布不均匀引起的动量传递，形成“动量流”，即动量的转移或作用力；热传导现

象是温度分布不均匀引起的热量传递,形成“热量流”;扩散现象是密度分布不均匀引起的质量传递,形成“质量流”.总之,输运过程是因某个宏观参量分布不均匀引起相应物理量的迁移,形成某种“流”.从微观上看,某物理量 A 的迁移是靠分子热运动来输运的,而输运过程中物理量 A 的交接,则靠碰撞,分子的热运动和分子间的碰撞的合效果,起到了“搅拌”作用.

输运过程是处于非平衡态中的气体向平衡态转化的过渡过程,其中分子的速率分布不服从麦克斯韦速率分布律.输运过程所涉及的系统虽然整体上处于非平衡状态,不能用统一确定的参量来描述,但若将系统划分成很多很小的区域,就可近似认为每个宏观小微观大的小区域内的分子都处于平衡态.设物理量 A 沿着 Oy 轴方向均匀地变化着,这就是说,存在梯度 $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}y}$.现在考察 A 在单位时间内通过位于 $y=y_0$ 处的一个面积 ΔS 的净输运.为此,我们在 ΔS 两侧各取一个以 ΔS 为底面而高度为 $\bar{v}$ 的柱体,如图 5-4 所示,其中上下两部分就都是处于平衡态的小区域,它们的体积都是 $\bar{v}\Delta S$.凡是处于这个体积内的分子都可能在 1 s 内通过这个面积 ΔS.设单位体积内的分子数为 n,则在该体积内的分子总数就是 $n\bar{v}\Delta S$.这些分子不可能全部向着 ΔS 运动.因分子运动沿各个方向的机会是均等的,所以,向着 ΔS 运动的分子数只是 $\dfrac{1}{6}n\bar{v}\Delta S$.当这些分子通过 ΔS 时,带过去的 A 值主要由在通过 ΔS 前分子最后一次碰撞的位置所决定.因平均自由程是分子连续两次碰撞中的平均距离,所以,这 $\dfrac{1}{6}n\bar{v}\Delta S$ 个分子虽对 ΔS 的距离有远有近,但平均地说,却可认为它们都是在离 ΔS 的距离为 $\bar{\lambda}$ 处发生最后一次碰撞而通过该 ΔS 面的.这情况对 ΔS 上下两侧都是一样的.上下两侧分子作最后一次碰撞的位置因此将相距 $2\bar{\lambda}$.因两侧分子的相对迁移而在这段距离上每个分子带过来的 A 的迁移量就是 $2\bar{\lambda}\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}y}$.用柱体内通过 ΔS 的分子数乘 $2\bar{\lambda}\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}y}$,即得单位时间内通过 ΔS 面积沿 Oy 轴方向迁移的 A 的净数量:

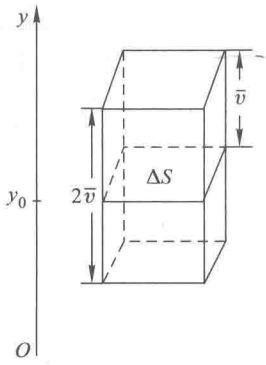


图 5-4

$$\Gamma_A=-\frac{1}{6}n\bar{v}\Delta S\left(2\bar{\lambda}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}y}\right)=-\frac{1}{3}n\bar{v}\bar{\lambda}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}y}\Delta S$$

负号表示 A 沿 Oy 轴负方向迁移,与 $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}y}$ 的方向相反.

在黏性现象中,令 $\Gamma_A=\dfrac{\Delta p}{\Delta t}$,$p$ 为气流的定向动量.因 $\dfrac{\Delta p}{\Delta t}=F$,即 $\Gamma_A=F$.再令

$A=mu$为分子的定向动量.代入上式,即得单位时间的动量净迁移或黏性力为

$$F=-\frac{1}{3}n\bar{v}\ \bar{\lambda}\ \frac{\mathrm{d}(mu)}{\mathrm{d}y}\Delta S=-\frac{1}{3}nm\bar{v}\bar{\lambda}\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\Delta S$$

和黏性力的实验公式相比较,即得

$$\eta=\frac{1}{3}nm\bar{v}\bar{\lambda}=\frac{1}{3}\rho\bar{v}\bar{\lambda}$$

用类似方法,可求得

$$D=\frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}$$

$$\kappa=\frac{1}{3}\ \frac{C_{V,\mathrm{m}}}{M}\rho\bar{v}\bar{\lambda}$$

从这些结果中,可以看出,气体分子的算术平均速率 $\bar{v}$ 体现了热运动的作用,而气体分子的平均自由程 $\bar{\lambda}$ 则体现了分子碰撞的作用.气体输运过程的研究表明物质、能量和相互作用的定量计算既离不开分子热运动,又离不开分子碰撞.

第六章
热力学基础

一、学习要求

1. 掌握功和热量的概念.理解准静态过程.

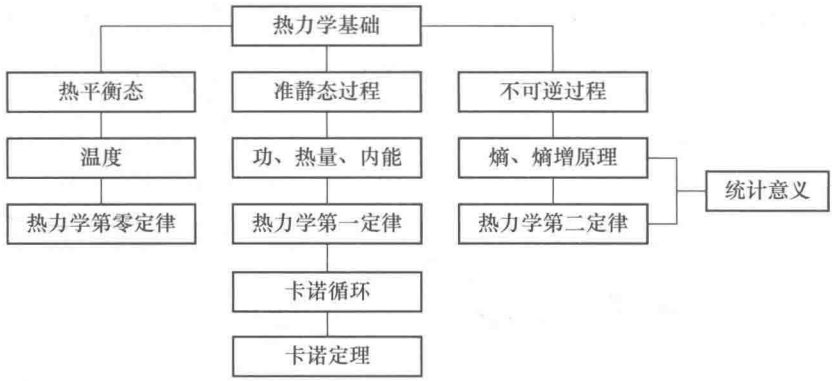
2. 掌握热力学第一定律,能分析计算理想气体在等值过程和绝热过程中的功、热量、内能改变量.

3. 理解循环过程和卡诺循环的特征,掌握卡诺循环等简单循环效率的计算方法.

4. 了解可逆过程和不可逆过程.

5. 了解热力学第二定律及其统计意义.了解熵增加原理和熵的玻耳兹曼公式的物理意义.

二、知识框图



三、内容导读

1. 热力学三条定律的意义

热力学的研究和牛顿力学非常相似.牛顿力学以牛顿运动三定律为基础,而作为热力学基础的也有三个定律.热力学第零定律是热平衡定律,它确定了温度的定义.热力学第一定律是用功能关系表达的能量守恒定律,和机械能守恒定律不同的是它被拓展成关于内能和其他形式能量相互转化的规律.有关功的定义也在力学的基础上有了进一步拓展.热力学第二定律是独立于热力学第一定律的一条基本定律,虽然它也是关于内能和其他形式能量相互转化的规律,但它主要解决与热现象有关的宏观过程的进行方向问题.热力学第二定律揭示了热现象的不可逆性.热力学和力学一样,都是以观测和实验事实作根据,研究物质、能量和相互作用的关系和规律.

2. 热力学的研究对象和方法

力学研究的是物质系统的机械运动,热力学的研究对象则是热力学系统的分子热运动.机械运动形式多种多样,我们分别选取质点、刚体、流体为研究对象,研讨了一些典型的直线运动、圆周运动、转动和流动.在热力学中,我们选取理想气体为热力学系统,讨论它所经历的一些典型的变化过程如等体过程、等压过程、等温过程和绝热过程等.由于研究对象的差别,描述运动状态的物理量不用位矢、速度和加速度,而是采用温度、体积和压强.力学中的运动学方程将让位于过程关系式.

3. 准静态过程

处于平衡态的热力学系统,其状态可由温度、体积和压强来描述.当热力学系统在从一个平衡态过渡到另一个平衡态的过程中,如果系统所经历的每一个中间状态都可看作平衡态,则该过程就称为准静态过程或平衡过程.显然,准静态过程是个理想模型,只有当实际过程进行得足够缓慢时,才能把这种过程看作准静态过程.在准静态过程中,理想气体所做的功可在$p-V$图上方便地表示出来.在$p-V$图上由一系列代表平衡态的点所连成的曲线,就表示一个准静态过程,而在曲线下面对V轴所包围的面积就表示该过程所做功的大小.准静态过程也可用$p-T$图或$V-T$图上一段曲线表示,但该过程所做的功却无法图示了.

4. 功、热量、内能

做功是热力学系统与外界传递能量的一种方式,是通过宏观的有规则的运动来完成的,也称宏观功.热力学中的功,不仅包括机械功,还包括除传热方式以外一切可以改变系统内能的方式,例如电磁功、表面张力做功等,一般称为广义功.

热量是因系统与外界或系统内各部分之间存在着温度差而传递的能量,也是一种能量变化的量度.它和功一样都是过程量,而非状态量.它和功的区别在于热量的传递是通过分子的碰撞或热辐射来完成的,亦即它是通过微观的无规则运动来完成的.不要将热量与内能混为一谈,也不要将热量与温度混为一谈.内能和温度都是状态量.热力学系统在确定状态中,具有一定的内能和温度,但绝无热量可言.只有状态发生变化的过程中,内能和温度发生变化时,才有热量出现.

内能是物质系统由其内部状态所决定的能量,从微观上看,内能包括系统内所有分子热运动的动能、分子间相互作用的势能以及分子内部原子、电子的能量的总和.

5. 热力学第一定律

热力学第一定律反映了热力学系统在状态变化过程中,功、热量和内能之间的转化关系,其中功和热量之间的转换,是通过系统内能的变化来实现的.热力学第一定律适用于初、终态是确定的平衡态的任何热力学系统的任何热力学过

程.换言之,在确定的初、终态间,系统所经历的中间状态即使不是平衡态,包括热现象在内的能量守恒与转化定律仍然是成立的.

6. 热力学第二定律

热力学第二定律的实质是说明一切与热现象有关的实际宏观过程都是不可逆的.热现象是由大量分子的无规则运动所引起的.热现象和热运动有着鲜明的无序性,无序性和过程的不可逆性有没有关系呢? 克劳修斯通过对卡诺循环的分析研究,发现了熵的存在.熵是个状态函数.在状态变化的任何过程中,熵的变化和能量的变化同时存在,人们发现,熵的变化趋向支配着能量传递的方向,一个过程能否实现取决于熵的变化.玻耳兹曼首先建立了熵与系统微观性质的联系,用玻耳兹曼公式 $S=k\ln W$ 表明熵是分子运动无序性的量度,从而给出了熵的统计解释.系统处于某宏观态的熵与该状态所对应的微观状态数,亦即热力学概率 W 的对数成正比.系统的无序性越高,所包含的微观状态数目越多,熵就越大.反之,系统越有序,熵就越小.熵 S 随热力学概率 W 单调增加.这意味着宏观热力学过程不可逆性的微观实质是从有序趋向无序.所以,封闭系统内的自发过程总是沿着熵增加的方向进行的.熵增加原理就是热力学第二定律的定量表达式.热力学第二定律适用于宏观系统,对由少数原子、分子组成的系统是不适用的.

四、解题指导

1. 运用热力学第一定律解题时,必须注意两点.第一点是牢记内能是状态量,其值与过程无关,而功与热量则均是依赖于具体过程的过程量.第二点是注意 Q、A、ΔE 的正负规定.系统吸热,Q 为正,系统对外做功,A 为正,系统内能增加,ΔE 为正;系统放热,Q 为负,外界对系统做功,A 为负,系统内能减小,ΔE 为负.

2. 由于理想气体的内能是温度的单值函数,因此,只要系统的始末态温度一定,那么,不论在始末态间系统经历了什么过程,内能的增量都是 $\Delta E=\dfrac{m}{M}C_{V,m}\cdot(T_2-T_1)$.

3. 作为过程量,功的大小可用 $p-V$ 图上过程曲线下的面积来表示.在系统的始末态不变时,不同的过程曲线,反映着不同的功.

4. 要区别循环的效率 $\eta=1-\dfrac{Q_2}{Q_1}$ 和卡诺循环的效率 $\eta_{卡}=1-\dfrac{T_2}{T_1}$.要知道卡诺循环是所需热源数最少的、最简单的一种理想化循环.它的循环效率对其他循环不适用.一切实际的热机,不可避免地存在散热、漏气、摩擦等因素,工作物质在

整个循环中不可能只与两个热源交换热量.

5. 对于系统确定的始末状态,态函数熵的增量也是确定的,与连接始末态的过程是否可逆无关.因此,对于由不可逆过程连接的始末态间的熵变,可以利用熵是态函数的性质,任意设计一个连接两态的可逆过程来计算熵变,亦即使 $\mathrm{d}S=\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}\right)_{\text{可逆}}$ 可以应用.

例 6-1

在一个密闭的抽空气缸中,有个劲度系数为 k 的弹簧,下面吊着一个质量不计且没有摩擦的滑动活塞,如图 6-1 所示.弹簧下活塞的平衡位置位于气缸的底部.当活塞下面的空间引进一定量的摩尔定容热容为 $C_{V,\mathrm{m}}$ 的理想气体时,活塞上升到高度 h,如图所示.弹簧作用在活塞上的力正比于活塞的位移.如果该气体从原来的温度 T 升高到 T_1,并吸热 Q.问活塞所在的高度 h' 等于多少?

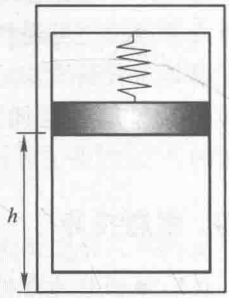


图 6-1

分析 活塞平衡时,弹簧的作用力和气体的压力相等.

解 当活塞到达高度 h 时弹簧对活塞的作用力与气体压力相平衡,且

$$F=ch=pS \qquad ①$$

由理想气体物态方程知

$$phS=\frac{m}{M}RT \qquad ②$$

由式①、式②得

$$\frac{m}{Mc}=\frac{h^2}{RT} \qquad ③$$

$$\begin{aligned} Q &= E_1-E+A \\ &=\frac{m}{M}C_{V,\mathrm{m}}(T_1-T)+\int_h^{h'}cx\mathrm{d}x \\ &=\frac{m}{M}C_{V,\mathrm{m}}(T_1-T)+\frac{1}{2}c(h'^2-h^2) \qquad ④ \end{aligned}$$

将式③代入式④得

$$Q=\frac{ch^2}{RT}C_{V,\mathrm{m}}(T_1-T)+\frac{1}{2}c(h'^2-h^2)$$

经整理后得

$$h'=\sqrt{\frac{2Q}{c}+h^2-\frac{2h^2}{RT}C_{V,\mathrm{m}}(T_1-T)}$$

例 6-2

在室温 27 ℃下一定量理想气体氧的体积为 2.3×10^{-3} m^3，压强为 1.0×10^5 Pa，经过一多方过程后，体积变为 4.1×10^{-3} m^3，压强变为 0.5×10^5 Pa.

求：（1）多方指数 n；

（2）内能的改变；

（3）吸收的热量；

（4）氧气膨胀时对外所做的功.已知氧的 $C_{V,m}=5R/2$.

分析　多方过程的过程方程为 $pV^n=C$，其中 n 为多方指数；可由给定的 p,V 求出.

解　$T_1=(27+273)\ \mathrm{K}=300\ \mathrm{K}$

$V_1=2.3\times10^{-3}\mathrm{m}^3,\ V_2=4.1\times10^{-3}\mathrm{m}^3$

$p_1=1.0\times10^5\mathrm{Pa},\ p_2=0.5\times10^5\mathrm{Pa}$

（1）对于多方过程

$$p_1V_1^n=p_2V_2^n$$

$$\frac{p_1}{p_2}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^n$$

$$\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)=n\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$n=\frac{\ln\left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)}{\ln\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)}=\frac{\ln\left(\dfrac{1.0}{0.5}\right)}{\ln\left(\dfrac{4.1}{2.3}\right)}=\frac{0.693}{0.577}=1.20$$

（2）$E_2-E_1=\dfrac{m}{M}C_{V,m}(T_2-T_1)=\dfrac{m}{M}\dfrac{i}{2}R(T_2-T_1)=\dfrac{i}{2}(p_2V_2-p_1V_1)$

$$=\frac{5}{2}(0.5\times10^5\times4.1\times10^{-3}-1.0\times10^5\times2.3\times10^{-3})\ \mathrm{J}$$

$$=-62.5\ \mathrm{J}$$

（3）（4）$A=\dfrac{p_1V_1-p_2V_2}{n-1}=\dfrac{-2(E_2-E_1)}{i(n-1)}$

$$=\frac{-2(-62.5)}{5\times(1.20-1)}\ \mathrm{J}=125\ \mathrm{J}$$

由第一定律

$$Q=A+\Delta E=125\ \mathrm{J}-62.5\ \mathrm{J}=62.5\ \mathrm{J}$$

例 6-3

两个体积相同的容器盛有不同的理想气体,一种气体质量为 m_1,摩尔质量为 M_1,另一种质量为 m_2,摩尔质量为 M_2.它们的压强与温度都相同.两者相互连通起来,开始了扩散,求这个系统总的熵变.

分析　扩散是个等温过程,计算系统的熵变,可分别计算两种气体的熵变再相加.

解　由已知

$$\begin{cases} p_1=p_2,\ T_1=T_2,\ V_1=V_2 \\ p_1V_1=\dfrac{m_1}{M_1}RT_1 \\ p_2V_2=\dfrac{m_2}{M_2}RT_2 \end{cases}$$

所以

$$\frac{m_1}{M_1}=\frac{m_2}{M_2}$$

对于等温过程

$$\mathrm{d}Q=\mathrm{d}A=p\mathrm{d}V=\frac{m}{M}RT\int\frac{\mathrm{d}V}{V}$$

$$\Delta S_1=\int\frac{\mathrm{d}Q_1}{T}=\frac{m_1}{M_1}R\int_{V_1}^{2V_1}\frac{\mathrm{d}V}{V}=\frac{m_1}{M_1}R\ln 2$$

同理

$$\Delta S_2=\frac{m_2}{M_2}R\ln 2$$

$$\Delta S=\Delta S_1+\Delta S_2=\frac{2m_2}{M_2}R\ln 2$$

五、自我检测

(一) 选择题

1. 设单原子理想气体由平衡态 A 经一平衡过程变化到状态 B,如果变化过程不知道,但 A、B 两状态的压强、体积和温度都已知,那么就可以求出　[　　]

A. 气体膨胀所做的功

B. 气体的内能变化

C. 气体传递的热量

D. 气体的总质量

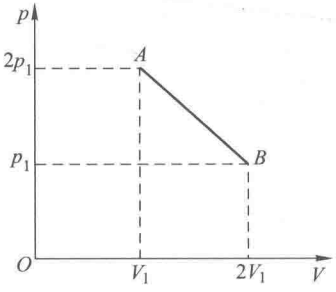


图 6-2

2. 如图 6-2 所示,在 $p-V$ 图中 1 mol 理想气体从状态 A 沿直线过程变化到状态 B,在此过程

中系统的功和内能的变化是　　[　　]

A. $A>0,\Delta E>0$　　B. $A<0,\Delta E<0$　　C. $A>0,\Delta E=0$　　D. $A<0,\Delta E>0$

3. 一定量的理想气体起始温度为 T,体积为 V,先经过绝热膨胀到体积为 $2V$,再经过等容过程使温度恢复为 T,最后经等温压缩回到体积 V,则在此过程中　　[　　]

A. 气体向外界放热　　B. 气体对外界做功

C. 气体内能增加　　D. 气体内能减少

4. 在卡诺热机的一个循环过程中,从高温热源吸收的热量为 Q_1,若高温热源的温度是低温热源温度的 n 倍,那么传递给低温热源的热量为　　[　　]

A. nQ_1　　B. $(n-1)Q_1$　　C. Q_1/n　　D. $(n+1)Q_1/n$

5. 在温度分别为 327℃ 和 27℃ 的高低温热源间工作的热机,理论上最大效率为　　[　　]

A. 25%　　B. 50%　　C. 75%　　D. 90%

6. 图 6-3 中(a)(b)(c)各表示连接在一起的两个循环过程,其中图(c)是两个半径相等的圆构成的两个循环过程,图(a)和图(b)则为半径不等的两个圆.那么　　[　　]

A. 图(a)总净功为负,图(b)总净功为正,图(c)总净功为零

B. 图(a)总净功为负,图(b)总净功为负,图(c)总净功为正

C. 图(a)总净功为负,图(b)总净功为负,图(c)总净功为零

D. 图(a)总净功为正,图(b)总净功为正,图(c)总净功为负

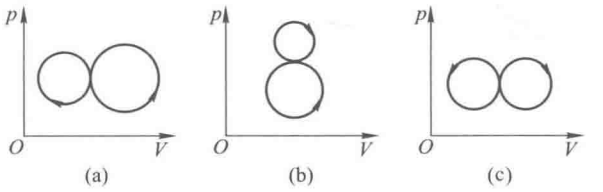


图 6-3

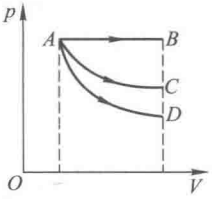


图 6-4

7. 如图 6-4 所示,一定量的理想气体从体积 V_1 膨胀到体积 V_2 分别经历的过程是:$A\to B$ 等压过程,$A\to C$ 等温过程,$A\to D$ 绝热过程,其中吸收热量最多的过程　　[　　]

A. 是 $A\to B$

B. 是 $A\to C$

C. 是 $A\to D$

D. 既是 $A\to B$ 也是 $A\to C$,两过程吸热一样多

8. 如图 6-5 所示,一定量的理想气体,沿着图中直线从状态 a(压强 $p_1=4\times10^5\,\mathrm{Pa}$,体积 $V_1=2\ \mathrm{L}$)变到状态 b(压强 $p_2=2\times10^5\,\mathrm{Pa}$,体积 $V_2=4\ \mathrm{L}$).则在此过程中 [ ]

A. 气体对外做正功,向外界放出热量

B. 气体对外做正功,从外界吸热

C. 气体对外做负功,向外界放出热量

D. 气体对外做正功,内能减少

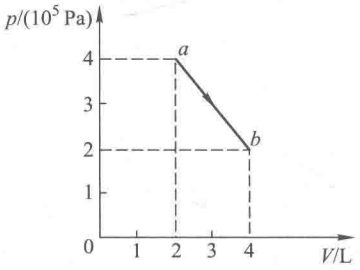


图 6-5

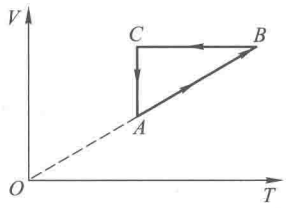


图 6-6

9. 一定量的理想气体经历的循环过程用 $V-T$ 曲线表示,如图 6-6 所示.在此循环过程中,气体从外界吸热的过程是 [ ]

A. $A\to B$　　B. $B\to C$

C. $C\to A$　　D. $B\to C$ 和 $C\to A$

10. 甲说:"由热力学第一定律可证明任何热机的效率不可能等于 1."乙说:"热力学第二定律可表述为效率等于 100% 的热机不可能制造成功."丙说:"由热力学第一定律可证明任何卡诺循环的效率都等于 $1-T_2/T_1$."丁说:"由热力学第一定律可证明理想气体卡诺热机(可逆的)循环的效率等于 $1-T_2/T_1$."对以上说法,有如下几种评论,哪种是正确的? [ ]

A. 甲、乙、丙、丁全对　　B. 甲、乙、丙、丁全错

C. 甲、乙、丁对,丙错　　D. 乙、丁对,甲、丙错

(二)填空题

1. 有一个电子管,其真空度(即电子管内气体压强)为 133 Pa,则 27 ℃时管内单位体积的分子数为_____.

2. A、B、C 三个容器中皆装有理想气体,它们的分子数密度之比 $n_A:n_B:n_C=4:2:1$,而分子的平均平动动能之比 $\varepsilon_A:\varepsilon_B:\varepsilon_C=1:2:4$,则它们的压强之比 $p_A:p_B:p_C=$_____.

3. 某理想气体在温度为 27 ℃和压强为 1.0×10^3 Pa 情况下,密度为 11.3 $\mathrm{g/m^3}$,

则这气体的摩尔质量 $M=$_____.

4. 在一个以匀速度 v 运动的容器中，盛有分子质量为 m 的某种单原子理想气体.若使容器突然停止运动，则气体状态达到平衡后，其温度的增量 $\Delta T=$_____.

5. 在相同的温度和压强下，氢气（视为刚性双原子分子气体）与氦气的单位体积内能之比为_____，氢气与氦气的单位质量内能之比为_____.

6. 设气体分子服从麦克斯韦速率分布律，$\bar{v}$ 代表平均速率，Δv 为一固定的速率区间，则速率在 $\bar{v}$ 到 $\bar{v}+\Delta v$ 范围内的分子数占分子总数的百分比随气体的温度升高而_____（填入：增加、降低或保持不变）.

7. 如图 6-7 所示，已知图中画不同斜线的两部分的面积分别为 S_1 和 S_2，那么（1）如果气体的膨胀过程为 $a\to1\to b$，则气体对外做功 $A=$_____；（2）如果气体进行 $a\to2\to b\to1\to a$ 的循环过程，则它对外做功 $A=$_____.

8. 常温常压下，一定量的某种理想气体（其分子可视为刚性分子，自由度为 i）在等压过程中吸热为 Q，对外做功为 A，内能增加为 ΔE，则 $A/Q=$_____，$\Delta E/Q=$_____.

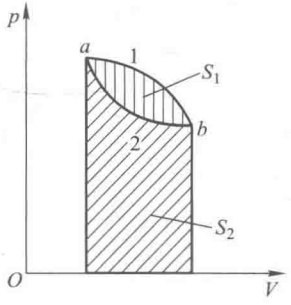


图 6-7

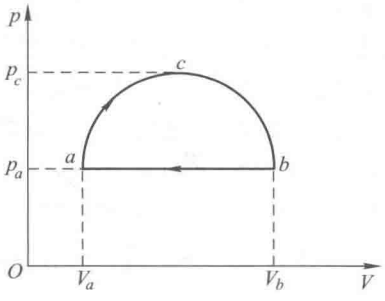


图 6-8

9. 物质的量为 ν 的理想气体，作如图 6-8 所示的循环过程 $acba$，其中 acb 为半圆弧，$b\to a$ 为等压线，$p_c=2p_a$.令气体进行 $a\to b$ 的等压过程时吸热 Q_{ab}，则在此循环过程中气体净吸收热量 Q _____ Q_{ab}（填入：>，<或=）.

10. 熵是_____的定量量度.若一定量的理想气体经历一个等温膨胀过程，它的熵将_____（填入：增加、减少或不变）.

（三）计算题

1. 3 mol 温度为 $T_0=273$ K 的理想气体，先经等温过程体积膨胀到原来的 5 倍，然后等体加热，使其末态的压强刚好等于初始压强，整个过程传给气体的

热量为 $Q=8\times10^4$ J.试画出此过程的 $p-V$ 图,并求这种气体的热容比 $\gamma=C_{p,m}/C_{V,m}$ 值.

2. 1 mol 单原子分子理想气体的循环过程如图 6-9 所示,其中 c 点的温度为 $T_c=600$ K.试求:(1) ab、bc、ca 各个过程系统吸收的热量;(2) 经一循环系统所做的净功;(3) 循环的效率.

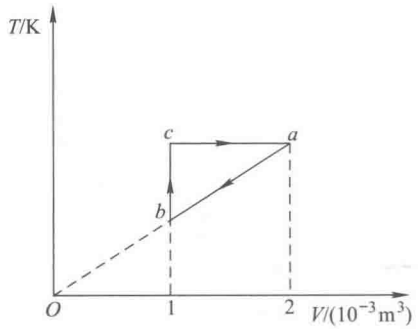


图 6-9

六、问题讨论

能源与环境污染

能源短缺与环境污染是当今世界困扰许多国家的重大问题.随着经济的发展,人类对能源的需求日益增长,而与此同时,人类生存环境的恶化日趋严重.就目前来说,人们所需能量的主要来源仍旧是矿物燃料(如煤、石油、天然气等),而获取能量的方式除了直接燃烧燃料之外,更多的则是通过热机将热转化为功,或将燃料释放的热量转化成其他形式的能量(主要是电能).伴随着热机的大量使用,不可避免地出现了两种形式的环境污染:大气污染与热污染.

大气污染主要是由热机,特别是内燃机,排出的废气造成的.例如,在汽车发动机中,由于燃烧过程进行得很快,燃料不可能得到充分的燃烧,因此在排放的废气中包含了大量的有害气体.不仅如此,即使燃烧是充分的,燃烧过程中产生的二氧化碳,排放到大气层中,也会吸收从地面发出的红外辐射.这是引起温室效应的主要原因之一.预计在 21 世纪,由于温室效应,大气层的平均温度将会提高几摄氏度.这还可能导致全球雨量分布的变化,使大批森林变成荒漠.另一方面,二氧化碳在大气层中的堆积又有可能阻挡部分射向地球的阳光,从而导致新的冰河时期.

另一种形式的环境污染则是热污染.每一台热机都要向周围的环境排放热量.根据卡诺定理,要提高热机的效率,必须尽可能地降低低温热源的温度,这就需要加大冷却水的用量.当吸热以后的冷却水排放到工厂附近的水源时,水源的温度便会升高,即使水温只升高几摄氏度,也会给水生动物造成严重的伤害.因为温水中溶解的氧气比凉水中少,缺氧既影响鱼类的生存,又可能造成藻类生物的过快繁殖.这就破坏了生态平衡.如果把热量排向空气中,热空气也会影响当地的气候.

总之,不管是哪种生产能源的方式,都有它的副作用或局限性.因此,除了要进一步探索能源开发的新技术和新方法之外,如何减少不必要的能源浪费,使有限的能量资源发挥出最大的效益,是一个应当引起全人类关注的问题.

第七章

静止电荷的电场

一、学习要求

1. 掌握静电场的电场强度和电势的概念,能应用它们的叠加原理求解点电荷系和几何形状简单的带电体的电场强度和电势.

2. 掌握电场强度和电势之间的积分关系,了解电场强度和电势的微分关系.

3. 理解反映静电场的高斯定理和静电场的环路定理,并能应用高斯定理计算某些特定电荷分布的电场强度.

4. 理解导体静电平衡的条件以及静电屏蔽的原理.

5. 了解电介质的极化机制以及极化强度 $\boldsymbol{P}$ 的物理意义.

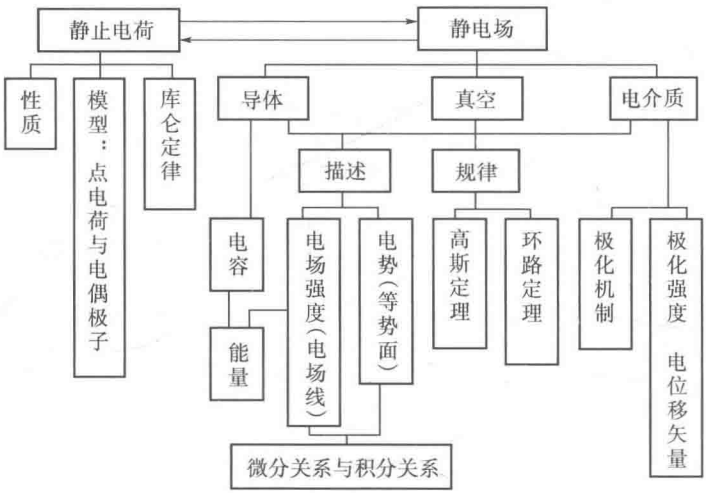
6. 理解电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的概念,理解有电介质时的高斯定理并能用它求解有电介质时的电场强度问题.

7. 理解电容器的概念以及掌握简单电容器的计算方法.

8. 掌握电场的能量及能量密度的概念和简单带电系统的电场能量计算.

9. 通过本章的学习要使学生的矢量计算能力和微积分等数学方法在物理中的应用能力有较大的提高.

二、知识框图



三、内容导读

1. 两个重要模型:点电荷和电偶极子

点电荷是一种理想化的模型,任一带电体只要其线度与其至场点的距离小

很多时都可当作点电荷处理.点电荷是研究带电体与静电场相互作用的基础,因为在任何情况下一带电体的电行为都可以看作是许多电荷元(点电荷)电行为的总合效果.点电荷的模型与力学中的质点模型很相似,前者是只有电荷量而不计大小的"点",后者是只有质量而无大小的"点".

电偶极子也是电磁学中重要的物理模型.相距 l 的两个等量异号的点电荷 $+q$ 和 $-q$ 组成的系统称为电偶极子.例如一个电介质分子,从整体上看是中性的(正负电荷量相等),但正负电荷的中心可能不重合,分开距离 $\boldsymbol{l}$,产生电偶极矩 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$.在研究电介质的极化、电磁波的发射和吸收以及中性分子相互作用等理论时,都要用电偶极子这一模型来研究这一对等值异号电荷的电性质.通常两电荷之间的距离比其离所求场点的距离小得多.在均匀电场中,偶极子受到的净力为零,但受到的力矩一般不为零($\boldsymbol{M}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}$);在非均匀电场中,沿偶极子的方向将被拉向强电场区域($\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 平行),或者被拉向弱电场区域($\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 反平行).

2. 库仑定律

库仑定律是静电学的理论基础,它描述了两个静止点电荷之间的相互作用力 $\boldsymbol{F}$,其大小与这两个点电荷所带的电荷量 q_1 和 q_2 的乘积成正比,与它们之间的距离 r 的平方成反比,作用力 $\boldsymbol{F}$ 的方向沿它们的连线方向,同种电荷相斥,异种电荷相吸.在真空中库仑定律可写为

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{7-1}$$

式中 $\boldsymbol{e}_r$ 为单位矢量,其方向由施力者指向受力者方向.ε_0 称为真空介电常量,又称真空电容率.其量值为 $\varepsilon_0=8.854\ 187\ 817\times10^{-12}\ \mathrm{C^2\cdot N^{-1}\cdot m^{-2}}$.

库仑定律在形式上可以与万有引力的公式

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$$

作一比较,二者非常相似,电荷量与质量相当,但万有引力没有排斥力,只有吸引力.

3. 电场的描述:电场强度与电场线

物理学研究的是物质能量和相互作用,所以描述电场的物理量也是从相互作用力和能量这两个角度来定义.

(1) 描述静电场的基本物理量是电场强度 $\boldsymbol{E}$,它是从电荷在电场中的受力角度来定义的:静电场中某一点的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 是一个矢量,其大小等于单位正电荷在该点所受电场力的大小,其方向与正电荷在该点的受力方向一致,即

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q_0} \tag{7-2}$$

如果已知空间某点处的电场强度 $\boldsymbol{E}$,则电荷 q 在该点处受到的电场力为

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E} \tag{7-3}$$

上式所表述的电场力是一个比库仑定律更有广泛意义的结果.库仑定律所表述的是点电荷之间的作用力.它需要测量两个点电荷的距离,对在复杂带电体(其大小形状和电荷分布均很复杂)作用下的问题,这是困难的;而上式却可计算点电荷 q 在任何复杂带电体的电场 $\boldsymbol{E}(r)$ 中所受到的作用力,所需要做的仅是确定 q 在电场中的什么位置.这不仅体现出引入电场概念的重要意义,而且还表明描述电场的物理量必须是位置的函数.

(2) 电场可以用电场线形象地表示,电场线上每一点的切线方向都与该点处的电场强度方向一致;电场强的地方电场线密度高,电场弱的地方电场线密度低.如果把通过某面积的电场线条数称作电场强度通量 $\Delta\Phi_e$,那么该处电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的大小强度又可以称作电场强度通量密度,即通过垂直于电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的单位面积的电场线条数,等于该点处电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的大小:

$$E=\frac{\Delta\Phi_e}{\Delta S} \tag{7-4}$$

如果已知电场强度 $\boldsymbol{E}$,通过电场中任意曲面 S 的电场强度通量为

$$\Phi_e=\int_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S E\cos\theta \mathrm{d}S \tag{7-5}$$

电场线是电场的一种形象描述,而由此导出的通量概念是更为抽象的描述方法,它已不再有一般的一根根的线条意义.

(3) 几种常用带电体的电场强度公式:

点电荷的电场	$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$ ($\boldsymbol{e}_r$ 为 $\boldsymbol{r}$ 的单位矢量)
无限长均匀带电直线的电场	$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{e}_r$ (λ 为电荷线密度,电场强度为方向垂直带电直线)
均匀带电圆环轴线上的电场	$\boldsymbol{E}=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}\boldsymbol{i}$ ($\boldsymbol{i}$ 为 x 轴单位矢量)
均匀带电球面的电场	$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$ ($r>R$)　　$E=0$ ($r<R$)
均匀带电球体的电场	$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$ ($r>R$)　　$\boldsymbol{E}=\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\boldsymbol{e}_r$ ($r<R$)

续表

均匀带电“无限大”平面的电场	$\boldsymbol{E}=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_n$　（σ 为电荷面密度）
带电平板电容器的电场	$E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$　（两板内，方向由正板指向负板）　　$E=0$　（两板外）

4. 电场的描述：电势与等势面

（1）描述静电场的另一个物理量是电势，它是从电场力做功和电势能的角度来定义的：电场中某一点 a 的电势 V_a，在数值上等于单位正电荷在该处的电势能；或等于单位正电荷从 a 点移到无限远处（电势能零点），静电场力所做的功，即

$$V_a=\frac{W_{\infty a}}{q_0}=\int_a^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{7-6}$$

（2）静电场中 a、b 两点之间的电势差，等于将单位正电荷从 a 点移到 b 点时，静电场力所做的功：

$$V_a-V_b=\int_a^b\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{7-7}$$

（3）在静电场中，将电势相等的各点连起来所形成的曲面，称为等势面. 如果画一系列等势面时，使任何两个相邻等势面间的电势差都相等，那么等势面密集的地方电场强度较大，稀疏的地方电场强度较小. 等势面处处与电场线正交.

（4）几种常用带电体的电势公式（除特别声明外，均以无限远处的电势为零电势）：

点电荷电场中的电势	$V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$
无限长均匀带电直线电场中的电势	$V=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r$　（λ 为电荷线密度，取 $r=1$ m 处为零电势）
均匀带电圆环轴线上的电势	$V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$
均匀带电球面的电势分布	$V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$　（$r>R$）　　$V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$　（$r<R$）
均匀带电球体电场的电势分布	$V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$　（$r>R$）　　$V=\dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3-\dfrac{r^2}{R^2}\right)$　（$r<R$）

5. 电场强度与电势的关系

(1) 电势的定义式(7-6)反映了电势与电场强度的积分关系,即已知电场强度分布通过一个积分可求得电场中某点的电势.由于电场强度满足叠加原理,从电势与电场强度的积分关系可以看出,电势也满足叠加原理,而且它是更简单的标量叠加.

(2) 电场强度与电势的微分关系:

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x},\quad E_y=-\frac{\partial V}{\partial y},\quad E_z=-\frac{\partial V}{\partial z} \tag{7-8}$$

负号表示电场强度 $\boldsymbol{E}$ 指向电势降低的方向.由于电势是一空间坐标的标量函数,在多数情况下对一带电体的电场其电势分布比较好求,所以总是先求出电势后,再利用上述微分关系求出电场强度.

6. 静电场的基本定理:高斯定理和场强环路定理

高斯定理与静电场的环路定理是反映静电场基本特性的两条重要定理.首先要弄清楚这两条定理究竟反映了静电场的什么特性,这两条定理的数学表达式是如何反映了这些特性的,最后才是如何应用这些定理去求解场量的.

(1) 高斯定理讲的是通过任何闭合曲面的电场强度通量等于什么:在静电场中,通过任何闭合曲面的电场强度通量,等于包围在该闭合曲面内的所有电荷的代数和的 $1/\varepsilon_0$,其数学表达式为

$$\Phi_e=\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i \tag{7-9}$$

它表明了静电场的一种性质,即静电场是有源场,电场线起发于正电荷、终止于负电荷.因为,如果 $\sum_{i=1}^{n} q_i>0$,闭合曲面内有净正电荷,则 $\Phi_e>0$,从闭合曲面内出来的电场线比进入闭合曲面内的电场线多,换言之,闭合曲面内有发出电场线的源;反之,闭合曲面内有净负电荷,则进入闭合曲面内的电场线比从闭合曲面内出来的电场线多,闭合曲面内有收拢电场线的源.特别是,如果 $\sum_{i=1}^{n} q_i=0$,闭合曲面内净电荷为零,则 $\Phi_e=0$,说明从闭合曲面内发出的电场线与进入闭合曲面内的电场线数量相等.但要注意,闭合曲面上各点的电场强度不为零.

在理解了高斯定理的物理意义之后,才能掌握在什么条件下如何应用它去求解电场强度(关于如何应用高斯定理去求解电场强度见下面解题指导的讨论).

(2) 静电场的环路定理讲的是电场强度 $\boldsymbol{E}$ 沿任意闭合路径的线积分等于什么——恒等于零:

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0 \tag{7-10}$$

它表明静电场是一种保守力场.因为如果上式两边乘一电荷量 q_i 仍成立:$\oint_l q_i\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_l \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$,它表示了作用在该电荷上的电场力沿任意闭合路径做的功恒等于零,这正是保守力做功的特点.从数学的角度说,任何一个力场沿任意闭合路径的线积分等于零的话,这个场就是保守力场.对保守力场可以引进势能的概念,这是对电场可以引入电势概念的前提.

由电场力做功的特点引入电势概念可以与力学中所论及的重力、万有引力和弹性力作一比较,它们都是保守力,因此都可以引入相应的势能.

(3) 保守力做功与路径无关,使得在静电场中移动电荷做功的计算变得非常简单:只要将移动的电荷乘以起末端位置的电势差,而可不必理会经什么路径从起端到末端的,甚至也可不必知道电场的分布,当然也就不必通过作一个积分运算来求得这个功,这就是

$$A_{AB}=\int_A^B q_0\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=q_0(V_A-V_B) \tag{7-11}$$

(4) 结论:综合上面两个定理的讨论,静电场是什么性质的场呢? 静电场是有源的保守力场.

7. 导体的静电平衡

与力学中的力平衡,热学中的热平衡一样,电学中的电平衡同样是个需要研讨的问题.

什么是导体的静电平衡? 如何才能达到静电平衡? 静电平衡时的导体有些什么特征? 如何利用导体在静电场中的行为特征? 这是我们研究静电场中的导体需要回答的问题.

(1) 导体在静电场中,电荷重新分布后(表面产生了感应电荷),其内部和表面均无电荷作宏观运动,这就是静电平衡状态.

(2) 从电场看导体的静电平衡:导体内部的电场强度处处为零;导体表面附近某点电场强度的方向,都与导体表面垂直,其大小与该处的电荷面密度成正比,即

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{7-12}$$

(3) 从电势看导体静电平衡:导体内的电势处处相等,即导体为等势体,其表面为等势面.

(4) 从电荷分布看导体静电平衡:对无空腔导体,电荷都分布在导体的外表面上,内部各处的净电荷为零;对空腔导体,当空腔导体内没有带电体时,电荷只

能分布在空腔的外表面,内表面无电荷;当空腔导体内有带电体时,除空腔导体外表面有电荷分布外,空腔导体内表面有与腔内带电体电荷等量而异号的感应电荷.

导体外表面上的电荷分布仅在导体外没有其他电荷存在时(导体为"孤立"的)才取决于导体表面的曲率,表面平坦处电荷面密度较小;反之,电荷面密度较大.

(5) 静电屏蔽:空腔导体(不论是否接地)的内部空间不受腔外电场的影响;接地的空腔导体,腔外空间不受腔内电荷的影响.

8. 电介质的极化

电介质在静电场中其内部电场强度不再为零,所涉及的电场与电介质的相互作用问题比导体在静电场中的行为要复杂得多,所以电介质的极化问题是本章的难点之一.但重点还是如何求解介质中的电场强度,因为电场强度是描述静电场的基本物理量,为此还必须很好地理解有电介质时的高斯定理.

(1) 电介质的极化:在外电场的作用下均匀电介质表面会出现极化电荷(束缚电荷)这个现象称作电介质的极化.极化电荷是不能在电介质内作宏观移动的,但如果外电场太强,将电介质分子强行拉开脱离束缚状态而成为自由电荷——这个现象称作电介质的"击穿",此时电介质变成导电材料.

(2) 电极化强度:反映电介质极化程度和方向的物理量,定义为单位体积内分子电矩的矢量和.

$$\boldsymbol{P}=\frac{\sum \boldsymbol{p}_i}{\Delta V} \tag{7-13}$$

$\boldsymbol{p}$ 为分子的电偶极矩,$\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$.

对于均匀电介质,极化电荷只出现在电介质的表面上,介质极化所产生的极化电荷面密度 σ' 与电极化强度的关系为

$$\sigma'=P\cos\theta=P_n=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_n \tag{7-14}$$

式中 $\boldsymbol{e}_n$ 为电介质表面外法线方向的单位矢量.

(3) 电介质中的电场:由于极化电荷的附加电场 $\boldsymbol{E}'$ 的方向总是与外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 相反,所以在电介质中的合电场强度 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}'$,和外电场强度 $\boldsymbol{E}_0$ 相比显著地削弱了.当各同性均匀电介质充满整个电场空间或均匀电介质的界面为等势面时,有

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{E}_0}{\varepsilon_r} \tag{7-15}$$

(4) 电位移矢量:它是为了方便求解电场强度而引进的辅助物理量,没有明显的物理意义,定义为

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P} \tag{7-16}$$

电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 不仅与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 有关，而且与极化强度 $\boldsymbol{P}$ 有关.

(5) 有电介质时的高斯定理：

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum_i q_i \tag{7-17}$$

它表明，通过任意封闭曲面的电位移通量等于该封闭曲面所包围的自由电荷之代数和.有电介质时的高斯定理式(7-17)与式(7-9)所述的高斯定理的主要区别在于式(7-9)中封闭曲面的电场强度通量不仅要计及所包围的自由电荷，而且要计及所包围的极化电荷，但封闭曲面的电位移通量只与所包围的自由电荷有关，不必计及所包围的极化电荷.

应用有电介质时的高斯定理计算电介质中的电场强度时，其应用条件和方法将在下面的解题指导中论述.

(6) $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{P}$ 及 χ_e、ε_r 的一些关系式：

关系式	适用条件
$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$	普遍适用
$\boldsymbol{P}=\chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E}$	线性各向同性电介质
$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E}=\varepsilon\boldsymbol{E}$	各向同性的均匀电介质
$\varepsilon_r=1+\chi_e$	
$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$	

(7) χ_e 为电介质的电极化率；ε_r 为电介质的相对介电常量，它们是反映电介质极化性能和存储电能能力的电参量.

在研究电介质的静电性质时，常常用“均匀电介质”“线性电介质”和“各向同性电介质”等名称来描述不同性质的电介质以及它们的极化规律.所谓“均匀电介质”是指 ε_r 与介质内各点的位置无关，处处相同，是一常量.所谓“线性电介质”是指 ε_r 与电场强度无关的电介质，否则为非线性电介质.在电场强度不太强时，电介质的行为是线性的.至于“各向同性电介质”是指 ε_r 的大小与介质内电场方向无关.如果电场方向发生变化，ε_r 的大小也跟着变化，那么这样的介质就称作各向异性电介质.在本教材中除铁电体物质外，所讨论的电介质都是均匀、线性和各向同性的电介质，即相对介电常量 ε_r 的大小与介质内各点的位置、电场强度的大小和方向无关，是一常量.这是最一般的简单电介质.

9. 电容

电容器不仅仅是一个储能器件，而且在各种电路中起着隔断直流电通过交流电、产生微分和积分信号的重要元件.为了研究和引出一些新的物理量，在本

章的许多讨论中还利用了电容器可以将电场局限在一定空间范围内的特点,使问题的讨论大为简便.例如电场能量和电场能量密度公式的导出、电介质的极化和介质中电场问题的研究等.因此,除了掌握简单电容器电容的计算外,重点要掌握电容器极板电荷、电势差、有介质与无介质时的电场等各量之间的关系.

(1) 导体的电容是一个与其大小、形状和周围介质有关,表征其储电能力的物理量,定义为

$$C=\frac{q}{V} \tag{7-18}$$

对孤立导体,式中 q 为导体所带的电荷量,V 为导体的电势;对电容器,q 为电容器一个极板所带的电荷量,V 改为两极板之间的电势差 U.

充满相对介电常量 ε_r 的电介质的电容器,其电容量 C 比真空时的电容量 C_0 增大 ε_r 倍,即 $C=\varepsilon_r C_0$.

(2) 几种常用电容器的电容计算公式:

平行板电容器的电容	$C=\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}$
球形电容器的电容	$C=\dfrac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_A R_B}{R_B-R_A}$
圆柱形电容器的电容	$C=\dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}{\ln\dfrac{R_B}{R_A}}$

(3) 电容器的连接:

电容器串联时,电容器组合的等效电容的倒数等于各个电容的倒数之和

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C} \tag{7-19}$$

电容器并联时,等效电容等于各个电容器的电容之和.

$$C=C_1+C_2+\cdots+C_n=\sum_{i=1}^{n}C_i \tag{7-20}$$

(4) 电容器中电介质的极化问题,如极化电荷、电极化强度、电场强度等的计算是本章比较复杂的问题.现将三种简单电容器内充满电介质时各量的计算公式汇总如下:

平行板电容器内充满均匀电介质时,此时不仅电介质层内的电场强度是均匀的,而且极化也是均匀的.各量有如下关系:

极板上的电荷量	$Q_0=CU=\sigma_0 S$	σ_0 为两极板上自由电荷面密度，S 为极板面积
电位移	$D=\sigma_0$	
电场强度	$E=\dfrac{D}{\varepsilon}=\dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0}=\dfrac{E_0}{\varepsilon_{r1}}$	ε_r 为两极板内介质的相对介电常量，E_0 为无电介质时的电场强度
电势差	$U=Ed$	d 为两极板的间距
电极化强度的大小	$P=D-\varepsilon_0 E=\left(1-\dfrac{1}{\varepsilon_r}\right)\sigma_0$	
电介质表面的极化电荷面密度	$\sigma'=\pm P=\pm\left(1-\dfrac{1}{\varepsilon_r}\right)\sigma_0$	
极化电荷产生的电场	$E'=\dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}$	

球形电容器充以均匀电介质时，此时电介质层内的电场强度和极化都不是均匀的，如果电介质的表面是等势面，那么各物理量有如下关系：

电位移	$D=\dfrac{Q_0}{4\pi r^2}$	Q_0 为球形电容器的电荷量
电场强度	$E=\dfrac{D}{\varepsilon}=\dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r^2}=\dfrac{E_0}{\varepsilon_r}$	ε_r 为两极板内介质的相对电容率，E_0 为无电介质时的电场强度
电极化强度的大小	$P=D-\varepsilon_0 E=\left(1-\dfrac{1}{\varepsilon_r}\right)\dfrac{Q_0}{4\pi r^2}$	
电介质表面的极化电荷面密度	$\sigma'=\pm P_{r=R}=\pm\left(1-\dfrac{1}{\varepsilon_r}\right)\dfrac{Q_0}{4\pi R^2}$	R 为电介质内表面或外表面的半径

圆柱形电容器充以均匀电介质时，此时电介质层内的电场强度和极化都不是均匀的，如果电介质的表面是等势面，那么各物理量有如下关系：

电位移	$D=\dfrac{\lambda_0}{2\pi r}$	λ_0 为圆柱形电容器的电荷线密度
电场强度	$E=\dfrac{D}{\varepsilon}=\dfrac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r}=\dfrac{E_0}{\varepsilon_r}$	ε_r 为两极板内介质的相对介电常量，E_0 为无电介质时的电场强度
电极化强度的大小	$P=D-\varepsilon_0 E=\left(1-\dfrac{1}{\varepsilon_r}\right)\dfrac{\lambda_0}{2\pi r}$	
电介质表面的极化电荷面密度	$\sigma'=\pm P_{r=R}=\pm\left(1-\dfrac{1}{\varepsilon_r}\right)\dfrac{\lambda_0}{2\pi R}$	R 为电介质内表面或外表面的半径

10. 电场的能量

能量问题是物理学研究的最重要问题之一.电场作为物质的一种形态,它具有能量.正如前面所述,充电电容器的电场局限在两极之间的空间内,所以本章对电场能量的研究由最简单的平板电容器入手,首先导出了电容器的能量公式,进而说明了电能是存储在电场中的道理,最后给出了计算任一电场空间能量的方法.

(1) 电容器的能量

$$W_e=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU \tag{7-21}$$

式中,Q 为电容器极板上所带的电荷,U 为两极板之间的电势差.

(2) 电场空间的能量

电场的能量密度

$$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2 \tag{7-22}$$

在体积为 V 的电场空间的能量

$$W_e=\int_V w_e\mathrm{d}V=\int_V\frac{1}{2}\varepsilon E^2\mathrm{d}V \tag{7-23}$$

对一电容器来说,电场集中在两板之间的空间,因此将式(7-21)与式(7-23)应用于两板之间的整个空间所计算出的能量是相等的.

四、解题指导

1. 电场强度的计算

静电场的电场强度求解一般有三种方法:用叠加原理、高斯定理以及求电势梯度.其中叠加原理的方法计算上比较复杂,但它是最基本的;已知电势分布函数用求梯度的方法求电场强度应是最简单的;用高斯定理求电场强度条件要求高,有一定的局限性,但因本章所研究的带电体的电场分布大都满足要求,所以这个方法又是最常用且最简单的.

(1) 叠加原理的方法是基于已知点电荷的电场公式

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

那么多个点电荷组成的电荷系的电场是这些电荷产生的电场的叠加

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\cdots+\boldsymbol{E}_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^{\,2}}\boldsymbol{e}_{ri} \tag{7-24}$$

需要注意的是:r_i 是 q_i(源点)至所计算场点的距离;$\boldsymbol{e}_r$ 是由 q_i 指向场点处的单位矢量,因此这里的求和是矢量和,必须按照矢量叠加的规则进行.

对于连续分布电荷的电场强度，必须把上式求和号换成积分号，改写为

$$\boldsymbol{E}=\int \mathrm{d}\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\mathrm{d}q}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{7-25}$$

在本书中所碰到的电荷连续分布的带电体大多数是线带电和面带电.应用式(7-25)来解这些问题，由于这是一矢量积分，一般不能直接进行计算，必须按照矢量运算的规则进行.应用式(7-25)通常必须按如下步骤进行：

第一步：根据给定的电荷分布特点，选定便于计算的坐标系，并在带电体上截取电荷元.如是直线带电，则必须在直线上(通常把直线方向作为 x 轴)取一元段 $\mathrm{d}x$；如是圆弧形的线带电，则必须在圆弧上取一元弧段 $\mathrm{d}l$，那么它们所带电荷分别是 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$(直线)和 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}l$(弧线)，$\lambda$ 是电荷线密度.

第二步：将上述 $\mathrm{d}q$ 的表达式代入式(7-25)，式中的 r 为该电荷元段 $\mathrm{d}x$(或 $\mathrm{d}l$)到所求场点的距离；如果 $\mathrm{d}q$ 是正的，则场点的电场强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 的方向沿 r 向外，如果 $\mathrm{d}q$ 是负的，则场点的电场强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 的方向沿 r 指向电荷元段.

第三步：本书所涉及的多为一维或二维问题.如果场点在带电直线的延长线上，那么这就是一维问题，式(7-25)中的 r 改为 x 后积分即可(如果非均匀带电，则 λ 是 x 的函数).对于二维问题，必须将 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 分解为沿坐标的两个分量，分析每个分量对不同的电荷元段是否有对称性，如果有，那么某个分量就可能抵消为零，而只需对另一个分量作积分(如果积分式有多个变量，则须统一变量后才能完成积分).

对于面带电的问题，首先要对带电体的形状和电荷分布作一分析，看它们是否可以分割为无限多已知的线带电(直线带电或者圆弧形带电)，如果有这样的特征，那么就可能应用已知的线带电电场强度公式把本应作二维面积分的问题化作一维积分来求解.

事实上，叠加原理是一应用极为广泛的方法，它不仅应用多个点电荷电场的叠加或某一连续分布电荷的电场强度的求解，而且适用于求解任意多个带电体建立的电场问题，包括电荷在电场中的受力问题.

(2) 应用高斯定理计算带电体的电场条件比较苛刻，必须先对所讨论问题的电荷分布和电场分布有一预分析，看能不能找出合适的高斯面，这是应用高斯定理求电场强度的关键.

什么是“合适的高斯面”？所构造的闭合曲面必须满足这样的条件：所求场点必须在这个面上；这个闭合曲面上电场强度大小处处相等，方向垂直于这个闭合面；或者在闭合面上有部分面电场强度相等、方向与该面垂直，其他面的电场强度方向与该面平行.

事实上，能找到“合适的高斯面”从而可以应用高斯定理求解电场的情况是

很有限的,只有电荷呈球对称分布,电荷均匀分布在一个“无限大”平面上以及电荷呈无限长圆柱形轴对称均匀分布等少数几种带电体所激发的电场强度可以直接应用高斯定理求解电场强度.

需要注意的是,并不是电荷分布和电场分布有对称性就一定能用高斯定理求电场.计算电偶极子的电场强度、电四极子的电场强度以及电荷均匀分布的有限长直线的电场强度问题,电荷分布和电场分布都具有一定的对称性,但因找不到满足条件的“合适的高斯面”从而无法应用高斯定理求解电场强度(见例 7-1).

另一方面,有些问题虽然电荷分布和电场分布没有对称性,但通过某种处理后仍能用高斯定理和叠加原理结合起来求出电场强度(见例 7-2).

还须说明,高斯定理不仅可以应用于已知电荷分布求电场,而且可以应用于已知电场分布求电荷的情况(见例 7-3).

有介质时的电场计算是高斯定理应用的一个很重要的方面,但此时不是直接应用式(7-11)所示的高斯定理,而是应用所谓“有介质时的高斯定理”[见式(7-18)].这是因为在有电介质的情况下,电场强度是自由电荷与极化电荷共同激发的,但因极化电荷是不易直接测量的未知量,所以必须应用不显含极化电荷的有电介质的高斯定理先求出电位移矢量 $\boldsymbol{D}$,再利用电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的简单关系式[见教材式(7-71)]解出电场强度.

与高斯定理的应用一样,用有电介质的高斯定理求电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 也必须对所讨论问题的电荷分布和电场分布作一预分析,看能不能找出合适的高斯面.本教材所列的所有有关问题,均是均匀球带电外有电介质、平行板电容器内有电介质和均匀带电无限长圆柱形外有电介质等几种情况,所以都可以应用高斯定理求电位移矢量 $\boldsymbol{D}$.

值得注意的是,上述所有例题和习题所求出的电介质中的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与真空时的电场强度 $\boldsymbol{E}_0$ 以及电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的关系都满足 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0/\varepsilon_r$,及 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0$,这是因为所有这些情况都满足均匀电介质充满整个电场空间或者电介质表面是等势面.

(3) 如果已知电势的空间分布函数,利用电场强度与电势的微分关系是求解电场强度最简便的方法.例如教材中的例 7-15,例 7-16 以及习题 7-30、7-31、7-32 等.

电势是标量,电场是矢量,一般标量的求解比矢量的求解更容易,且已知电势求电场是求导运算,而已知电场求电势是积分运算,一般说来求导运算总比积分运算容易些,所以通常是先求出电势再求出电场(见例 7-4).

例 7-1

宽为 a 的无限长带电薄板，电荷面密度为 σ，P 点位于薄板同一平面，距薄板的一边为 b[图 7-1(a)].(1)试分析能否用高斯定理求 P 点的电场强度；(2)求 P 点的电场强度.

(1) **分析**　应用高斯定理求带电体的电场的关键是，所论问题的电荷分布和电场分布有没有对称性，以及能不能找出合适的高斯面.本例从表面看电荷分布和电场分布是有一定的对称性，薄板均匀带电，其前后两面的电场分布应是对称的，薄板左右两边电场也是对称的，但薄板周围的电场线基本上是弯曲发散(薄板带正电荷)或者收敛的(薄板带负电荷)，通过 P 点无法构建一个“合适的高斯面”，或者说通过 P 点作的任何包围薄板的闭合曲面(球、圆筒或者方形等形状)都无法满足这个闭合曲面上电场强度大小处处相等(等于 P 点的电场)，方向垂直于这个闭合面；或者在闭合面上有部分面电场强度相等、方向与该面垂直，其他面的电场强度方向与该面平行，所以本例无法应用高斯定理求 P 点的电场强度.

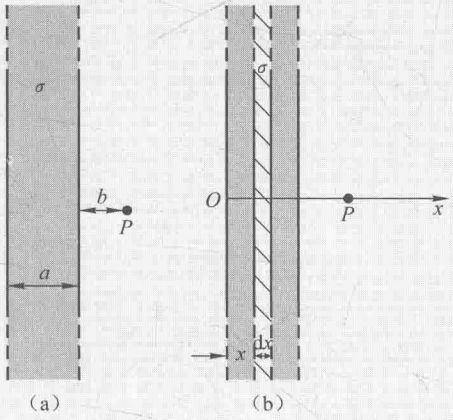


图 7-1

(2) **解**　可以采用叠加原理的方法求 P 点的电场强度.如图 7-1(b)所示，可以把薄板切割为无数细长线，在 x 位置处取一宽度为 $\mathrm{d}x$ 的细长线，其电荷密度为 $\lambda=\sigma\mathrm{d}x$，由无限长带电线电场强度公式知，它在 P 点的电场强度是

$$\mathrm{d}E=\frac{\sigma\mathrm{d}x}{2\pi\varepsilon_0(a+b-x)}$$

根据叠加原理，整个带电薄板在 P 点的电场强度是无数带电细长线在 P 点的电场的叠加，因此有

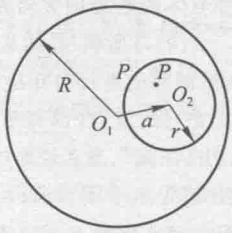
$$E=\int\mathrm{d}E=\int_0^a\frac{\sigma\mathrm{d}x}{2\pi\varepsilon_0(a+b-x)}$$

$$=\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\ln(a+b-x)\Big|_0^a$$

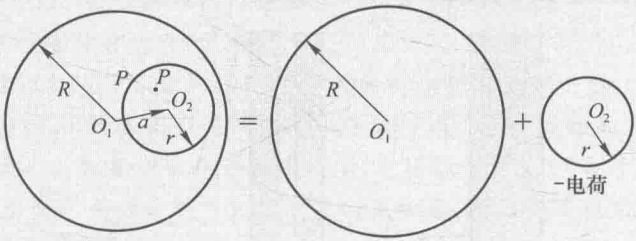
$$=\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a+b}{b}$$

例 7-2

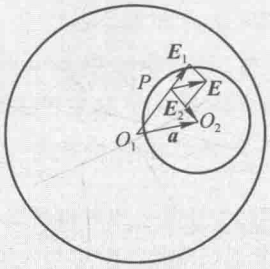
在半径为 R,电荷体密度为 ρ 的均匀带电球内,挖去一个半径为 r 的小球,如图 7-2(a)所示,两球中心的距离为 a.试求空腔内任一点 P 的电场强度.



(a) 均匀带电球内挖去一小球



(b) 分析图



(c) P点电场合成图

图 7-2

分析　显然,本例直接应用叠加法或者高斯定律都难以求得 P 点的电场强度,但将二者结合起来,用所谓"补缺法"先处理一下,就不难解决.即先将这个空腔填充电荷体密度分别为正、负 ρ 的两种等量电荷——它们的总电荷量为零,这就保证了以 r 为半径的球体实际上是不带电的(即为空腔),这样,空腔内任一点的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 可看成是由半径为 R、电荷体密度为 ρ 的大球体和半径为 r、电荷体密度为 $-\rho$ 的小球体各自在该点激发的电场强度 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 的叠加[图 7-2(b)],即 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$.而 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 都可以用高斯定理求得.

解　设大、小带电球体的电场强度分别为 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$,则空间各点处的合场强度为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$$

分别对大球和小球运用高斯定理.首先过点 P 作半径为 r_1 与大带电球同心的闭合球面,作为高斯面,在这个高斯面上各点电场强度的大小都相等,方向沿径向,可以得到

$$\oint_S \boldsymbol{E}_1 \cdot \mathrm{d}S = E_1 \oint_S \mathrm{d}S = 4\pi r_1^2 E_1$$

而高斯面所包围的电荷量是半径为 $r_1(r_1<R)$ 的球体内的电荷量,即

$$q' = \rho \frac{4}{3}\pi r_1^3$$

于是得到

$$4\pi r^2 E_1 = \frac{q'}{\varepsilon_0} = \frac{\rho 4\pi r_1^3}{3\varepsilon_0}$$

$$E_1 = \frac{\rho r_1}{3\varepsilon_0}$$

同理,在小球内过点 P 作半径为 r_2 与小球同心的闭合球面作为高斯面,在这个高斯面上各点电场强度的大小都相等,方向沿径向,运用高斯定理可以得到

$$\boldsymbol{E}_2 = -\frac{\rho \boldsymbol{r}_2}{3\varepsilon_0}$$

式中 $\boldsymbol{r}_1$ 为 P 点相对 O 点的径矢,$\boldsymbol{r}_2$ 为 P 点相对 O' 点的径矢,由 O 点指向 O' 点的矢量记为 $\boldsymbol{a}$.那么,由叠加原理,空腔内任一点 P 的电场强度是

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = \frac{\rho \boldsymbol{r}_1}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho \boldsymbol{r}_2}{3\varepsilon_0}$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{a}$$

在上式,$\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{a}$ 是因为 OPO' 构成一矢量三角形.结果表明,空腔内有均匀的电场强度,方向均由 O 点指向 O' 点.

例 7-3

已知地面处的电场强度为 E_2,地面上方 h 高度处的电场强度为 E_1,计算大气中电荷的平均体密度以及地面上的电荷面密度.

分析　如图 7-3(a)所示,由于同一高度处的电场强度大小相等,方向均指向地面,如果作一圆柱形的高斯面,如图 7-3(b)所示,侧面垂直底面,没有电场线通过,电场强度通量为零;底面 ΔS 平行地面,通过上下底面的电场强度通量为分别为 $E_1\Delta S$ 和 $E_2\Delta S$,这样就可以很容易求出该高斯面所包围的电荷.

解　对图(7-4)所示的闭合曲面,有

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E_2\Delta S - E_1\Delta S = (E_2 - E_1)\Delta S$$

设电荷的平均体密度为 ρ,则高斯面 S 包围的电荷为

$$\sum q_i = h\Delta S\rho$$

由高斯定理,

$$(E_2 - E_1)\Delta S = h\Delta S\rho/\varepsilon_0$$

所以

$$\rho = \frac{1}{h}\varepsilon_0(E_2 - E_1)$$

又取如图 7-3(b)的高斯面,由于地球内的电场为零,电荷只分布在地表面,对此应用高斯定理:

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i \rightarrow -E\Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma\Delta S$$

所以

$$\sigma = -\varepsilon_0 E$$

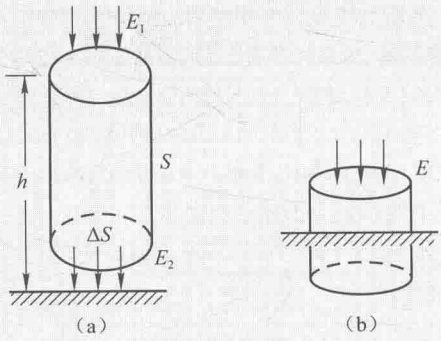


图 7-3

例 7-4

求出均匀带电圆盘轴线上与盘心 O 相距为 x 的任一给定点 P 处的电势,并由电场强度与电势的微分关系求该点的电场强度.设盘的半径为 R,电荷面密度为 σ.

分析　根据本题的电荷分布具有轴对称的特点,如图 7-4 所示,可以把圆盘分成一系列同心的细圆环,每个细圆环可看作为电荷元,圆盘轴上各点处的电势就是这些半径不同的细圆环的电势的叠加.

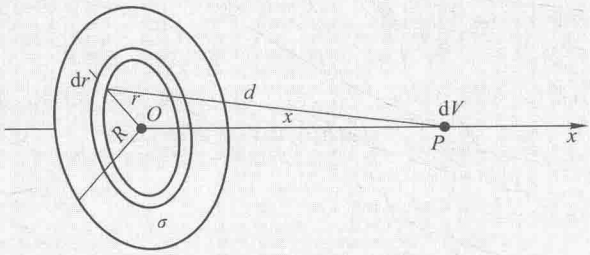


图 7-4

解　取一半径为 r，宽度为 $\mathrm{d}r$ 的细圆环，它所带的电荷量为

$$\mathrm{d}q=\sigma 2\pi r\mathrm{d}r$$

根据教材例题 7-12 的结果，可得到此带电细圆环在点 P 处的电势为

$$\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}}$$

由电势的叠加原理，带电圆盘的电势就是这些带电细圆环的电势和，所以

$$V=\int\mathrm{d}V=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{x^2+r^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+x^2}-x\right]$$

圆盘轴线上 x 处的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{i}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)\boldsymbol{i}$$

2. 电势的计算

电势的计算有两种方法：用叠加原理和已知电场求电势.

(1) 叠加原理的方法是基于已知点电荷的电势公式

$$V_P=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

那么点电荷系电场中的电势等于各个点电荷在该处产生的电势的标量和，即

$$V_P=V_{P1}+V_{P2}+\cdots+V_{Pn}=\sum_i\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}\tag{7-26}$$

在本书中，有许多习题涉及计算点电荷系电场中的电势.这些问题都比较简单，只要将各电荷 q_i 及其到场点的距离 r_i 代入式(7-26)即可.由于电势是标量，没有方向性的问题，只要注意电荷 q_i 的正负从而作加减运算即可.

对于电荷连续分布的带电体，可将其看作无限多个电荷元 $\mathrm{d}q$ 的集合，电场中某点的电势为

$$V=\int\mathrm{d}V=\int\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}\tag{7-27}$$

处理这类问题的具体步骤与求解连续分布电荷的电场强度问题类似，但因电势是标量处理起来更简便，大致有如下的步骤：

第一步：若是直线带电，则必须在直线上(通常把直线方向作为 x 轴)取一元段 $\mathrm{d}x$；若是圆弧形的线带电，则必须在圆弧上取一元弧段 $\mathrm{d}l$，那么它们所带电荷分别是 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$(直线)和 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}l$(弧线).

第二步：将上述 $\mathrm{d}q$ 的表达式代入式(7-27)中，式中的 r 为该电荷元到所求场点的距离，完成式(7-23)的积分即求出了某点的电势.

如果是面带电或体带电的电势问题,原则上必须取面元 dS 或体元 dV,并分别用电荷面密度 σ 和电荷体密度 ρ 表示出所带电荷量:$dq=\sigma dS$ 或 $dq=\rho dV$.但事实上,常见的一些面带电的电势问题,可以看作是无限多已知的线带电(直线带电或者圆弧形带电)的集合,这样就可能应用已知的线带电电势公式把本应作二维面积分的问题化作一维积分来求解.

例 7-5

试求出均匀带电圆盘轴线上与盘心 O 相距为 x 的任一给定点 P 处的电势.设盘的半径为 R,电荷面密度为 σ.

分析　根据本题的电荷分布具有轴对称的特点,如图 7-5 所示,可以把圆盘分成一系列同心的细圆环,每个细圆环可看作电荷元,圆盘轴上各点处的电势就是这些半径不同的细圆环的电势的叠加.

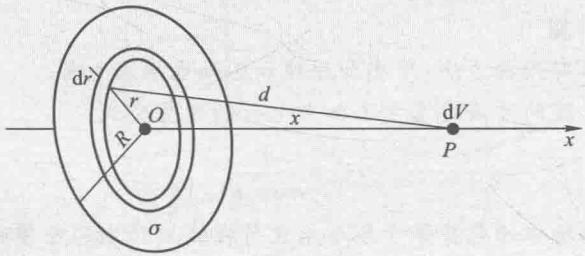


图 7-5

解　取一半径为 r,宽度为 dr 的细圆环,它所带的电荷量为

$$dq=\sigma 2\pi r dr$$

此带电细圆环在点 P 处的电势为

$$dV=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}}$$

由电势的叠加原理,带电圆盘的电势就是这些带电细圆环的电势和,所以

$$V=\int dV=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r dr}{\sqrt{x^2+r^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+x^2}-x\right)$$

(2) 已知电场强度求电势和电势差

如果已知带电体激发的电场分布,可按电势的定义式(7-6)作一积分即可.本书涉及的这方面问题都是均匀带电的球体(球面)或均匀带电的柱体(柱面).

为了说明如何应用上述两种计算电势的方法,现再举如下一例:

例 7-6

如图 7-6 所示，一沿 x 轴放置的长度为 l 的均匀带电细棒，其电荷线密度为 λ_0，λ_0 为一常量.求其延长线上 P 点的电势.

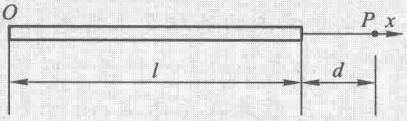


图 7-6　求均匀带电细棒延长线上的电势

分析　本题是电荷连续分布带电体的电势求解问题，既可以用叠加原理求解，也可以由电场求电势的方法得出结果.事实上，用后一种方法得先按叠加原理求出电场强度，不如用前一种方法按叠加原理求出电势一步到位方便，而且可避免一些可能出现的错误.下面分别用两种方法解这个问题，并加以比较.

解　(a) 用叠加原理求解

在带电细棒上离 O 点 x 远处任取一长度为 $\mathrm{d}x$ 的电荷元 $\mathrm{d}q$，其上所带的电荷量为 $\mathrm{d}q=\lambda_0\mathrm{d}x$，该电荷元离 P 点距离为 $(l+d-x)$，则该电荷元在 P 点处的电势为

$$\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\lambda_0\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0(l+d-x)}$$

$$V=\int\mathrm{d}V=\int_0^l\frac{\lambda_0\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0(l+d-x)}=\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{l+d}$$

(b) 求出电场后再求电势

同样地，写出电荷元 $\mathrm{d}q$ 在 P 点处的电场强度后，仍用叠加原理解出 P 点的电场强度：

$$\mathrm{d}E=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\lambda_0\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0(l+d-x)^2}$$

$$E=\int\mathrm{d}E=\int_0^l\frac{\lambda_0\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0(l+d-x)^2}=\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{l+d}-\frac{1}{d}\right)$$

将 d 改写为 x，得到 x 轴上的电场分布

$$E=\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{l+x}-\frac{1}{x}\right)$$

于是

$$V=\int_d^\infty E\mathrm{d}x=\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_d^\infty\left(\frac{1}{l+x}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{l+d}$$

方法(b)与方法(a)结果相同，但步骤更复杂也容易出错.许多同学在求出 P 点的电场后便错误地认为 P 点的电势为

$$V=\int_d^\infty E\mathrm{d}x=\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_d^\infty\left(\frac{1}{l+d}-\frac{1}{d}\right)\mathrm{d}x\longrightarrow\infty$$

其错误在于没有注意到某点的电势是单位正电荷从该点经过任意路径到无限远处时电场力所做的功，P 点的电势并不等于 P 点的恒定电场力做功，而是从

P 点至无限远一条漫长路径上不同电场力做功，所以必须把沿 x 轴至无限远的路径上的电场分布函数写出来，这就是为什么要把式(7-25)中的 d 改为 x 才能代入式(7-6)求出 P 点的电势.

电势零点的选取是求解电势需要特别注意的问题.虽然电势值只有相对的意义，因而电势的零点位置可以任意选取，但对点电荷的零电势位不能选在点电荷本身，一般选在无限远；而对无限大的带电体(如无限大的带电平板)则不能选在无限远处为零电势位，如求无限长均匀带电直线电场的电势分布，若选离直线为 1 m 处作为电势零位，从而得到了最为简便的电势表达式.在实际问题中，常取大地为零电势.某导体板或仪器的金属外壳的所谓“接地”就意味着该导体板或外壳的电势为零.

例 7-7

一“无限大”平面，中部有一半径为 R 的圆孔，设平面上均匀带电，电荷面密度为 σ.如图 7-7 所示，试求通过小孔中心 O 并与平面垂直的直线上各点的场强和电势(选 O 点的电势为零).

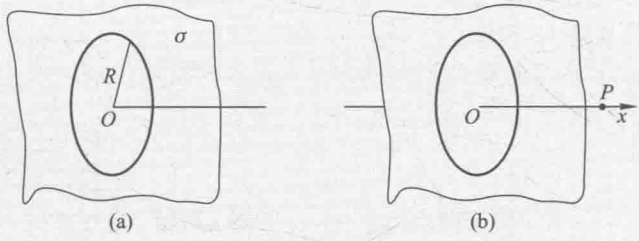


图 7-7　挖去一圆孔的“无限大”平面

分析　本例涉及“无限大”带电面，不能选在无限远处为零电势位，按题意选小孔中心 O 点为零电势位.根据带电体的形状特点，可以用上面讲的“补缺法”把这个有圆孔无限大平面电荷分布看作电荷面密度为 σ 的大平面和电荷面密度为 $-\sigma$ 的圆盘叠加的结果，从而先求出电场强度后，再求电势分布.

解　选 x 轴垂直于平面，坐标原点 O 在圆盘中心，将题中的电荷分布看作电荷面密度为 σ 的大平面和电荷面密度为 $-\sigma$ 的圆盘的叠加，那么“无限大”平面在 x 处产生的电场强度为 $E_1=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$；电荷面密度为 $-\sigma$ 的小圆盘在该处的电场强度为 $E_2=\dfrac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$，它们的方向都沿 x 轴，所以总的电场强度为

$$E=E_1+E_2=\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

该点电势为

$$U=\int_x^0 \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2+x^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(R-\sqrt{R^2+x^2}\right)$$

上述积分的上限为“0”，表示了零电势位在坐标原点 O.

(3) 电势差的计算也是静电场的一个很重要内容.本书有许多电容器分析的问题，如计算平行板电容器、球形电容器和圆柱形电容器的电荷、电场强度、电势差、电容的关系，在这些问题中常常是已知极板上的电荷求出电场强度后，再利用公式

$$U_{ab}=V_a-V_b=\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{7-28}$$

求得电势差.

电势差求出后就不难计算电势能和电场力做的功：

$$A_{ab}=q_0\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=q_0U_{ab}=-(W_b-W_a) \tag{7-29}$$

3. 有关电容器的问题

本书主要研究了三种结构简单的电容器(平行板电容器、球形电容器和圆柱形电容器)的电荷、电场强度、电势(电势差)、电场能量和电容的关系，以及充有电介质后这些物理量有什么变化，电介质的极化情况(极化电荷分布、电极化强度等的计算).大致上有这样几类问题：

(1) 电容器的串联和并联电容的计算，以及极板上的电荷、板间电场强度和两板电势差的计算.

这类问题比较简单，只要按式(7-19)和式(7-20)计算即可.

(2) 有电介质的电容器中的电场强度、电势差、电容及电介质的极化电荷、电极化强度的计算.

有电介质的电容器中的电场强度的计算，前面有介质时的电场计算中已经讨论过了.充满均匀电介质的电容器的电容计算也很简单，如前所述，$C=\varepsilon_r C_0$，是真空电容器电容的 ε_r 倍.至于电容器中电介质的极化问题的计算可参照“内容导读”中有关介质电容的公式.

4. 电场能量的计算

电场能量的计算不外乎已知电容，利用式(7-21)求出电容器的电场能量；或者已知电场强度写出电场能量密度后，利用式(7-23)求出电场空间内的能量；或者研究一个或两个电容器的电荷量或电介质发生变化后能量如何变化.

五、自我检测

(一) 选择题

1. 一均匀带电球面，电荷面密度为 σ，球面内电场强度处处为零，球面上面

元 dS 带有 σdS 的电荷,该电荷在球面内各点产生的电场强度　　[　　]

A. 处处为零　　B. 不一定都为零

C. 处处不为零　　D. 无法判定

2. 图 7-6 中实线为某电场中的电场线,虚线表示等势面,由图可看出　　[　　]

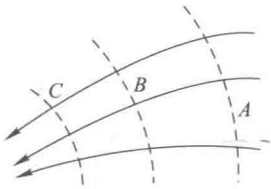


图 7-6

A. $E_A>E_B>E_C$, $U_A>U_B>U_C$

B. $E_A<E_B<E_C$, $U_A<U_B<U_C$

C. $E_A>E_B>E_C$, $U_A<U_B<U_C$

D. $E_A<E_B<E_C$, $U_A>U_B>U_C$

3. 关于静电场中的电位移线,下列说法中,哪一个是正确的?　　[　　]

A. 起自正电荷,止于负电荷,不形成闭合线,不中断

B. 任何两条电位移线互相平行

C. 起自正自由电荷,止于负自由电荷,任何两条电位移线在无自由电荷的空间不相交.

D. 电位移线只出现在有电介质的空间

4. C_1 和 C_2 两空气电容器串联以后接电源充电.在电源保持连接的情况下,在 C_2 中插入一电介质板(图 7-7),则　　[　　]

A. C_1 极板上电荷增加,C_2 极板上电荷增加

B. C_1 极板上电荷减少,C_2 极板上电荷增加

C. C_1 极板上电荷增加,C_2 极板上电荷减少

D. C_1 极板上电荷减少,C_2 极板上电荷减少

5. 如图 7-8 所示,一球形导体,带有电荷 q,置于一任意形状的空腔导体中,当用导线将两者连接后,则与未连接前相比系统静电场能量将　　[　　]

A. 增大　　B. 减小

C. 不变　　D. 如何变化无法确定

6. 点电荷 Q 被曲面 S 所包围,从无穷远处引入另一个点电荷 q 至曲面外一点,如图 7-9 所示,则引入前、后　　[　　]

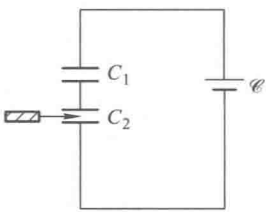


图 7-7

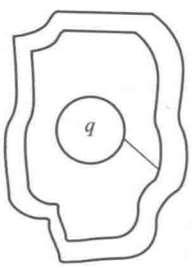


图 7-8

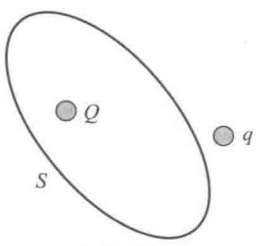


图 7-9

A. 曲面 S 上的 Φ_e 不变，各点电场强度也不变

B. 曲面 S 上的 Φ_e 变化，而各点电场强度不变

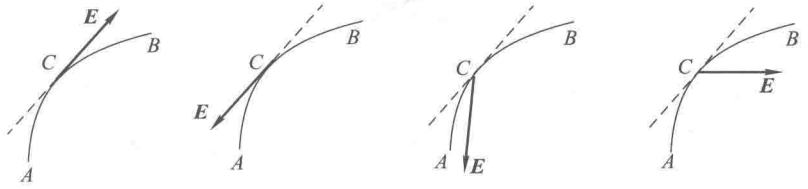
C. 曲面 S 上的 Φ_e 变化，各点电场强度也变化

D. 曲面 S 上的 Φ_e 不变，而各点电场强度变化

7. 半径为 R 的均匀带电球面，若其电荷面密度为 σ，则在球面外靠近球面处的电场强度大小为　　[　　]

A. $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$　　B. $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$　　C. $\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$　　D. $\frac{\sigma}{8\varepsilon_0}$

8. 一个带正电荷的质点，在电场力的作用下从 A 点经 C 点运动到 B 点，其运动轨迹如图 7-10 所示.已知质点运动的速率是递增的，下面关于 C 点电场强度方向的四个图示中正确的是　　[　　]



A.　　B.　　C.　　D.

图 7-10

9. 当一个带电导体达到静电平衡时：　　[　　]

A. 导体表面上电荷密度较大处电势较高

B. 导体表面曲率较大处电势较高

C. 导体内部的电势比导体表面的电势高

D. 导体内任一点与其表面上任一点的电势差等于零

10. 在一点电荷产生的静电场中，一块电介质如图7-11放置.以点电荷所在处为球心作一球形闭合面，则对此球形闭合面　　[　　]

A. 高斯定理成立，且可用它求出闭合面上各点的电场强度

B. 高斯定理成立，但不能用它求出闭合面上各点的电场强度

C. 由于电介质不对称分布，高斯定理不成立

D. 即使电介质对称分布，高斯定理也不成立

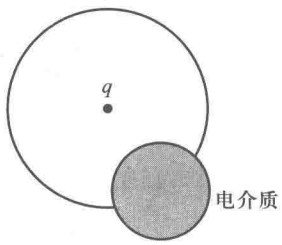


图 7-11

（二）填空题

1. A、B 为真空中两个平行的“无限大”均匀带电平面，已知两平面间的电

场强度大小为 E_0,两平面外侧电场强度大小都为 $E_0/3$,方向如图 7-12 所示.则 A、B 两平面上的电荷面密度分别为 $\sigma_A=$_____,$\sigma_B=$_____.

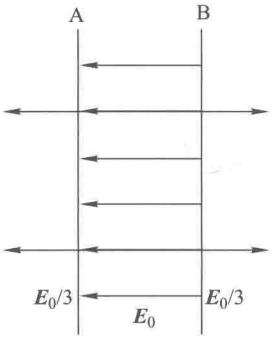


图 7-12

2. 一均匀带正电的导线,电荷线密度为 λ,其单位长度上总共发出的电场线条数(即电场强度通量)是_____.

3. 一半径为 R 的均匀带电细圆环,带有电荷 Q,水平放置如图 7-13 所示,在圆环轴线的上方离圆心 R 处,有一质量为 m、带电荷为 q 的小球.当小球从静止下落到圆心位置时,它的速度 $v=$_____.

4. 一平行板电容器,两板间充满各向同性均匀电介质,已知相对介电常量为 ε_r.若极板上的自由电荷面密度为 σ,则介质中电位移的大小 $D=$_____,电场强度的大小 $E=$_____.

5. 如图 7-14 所示,真空中有一半径为 R 的均匀带电球面,总电荷量为 Q($Q>0$).今在球面上挖去非常小的一块面积 ΔS(连同电荷),且假设挖去后不影响原来的电荷分布,则挖去 ΔS 后球心处电场强度的大小 $E=$_____,其方向为_____.

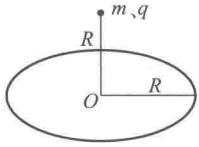


图 7-13

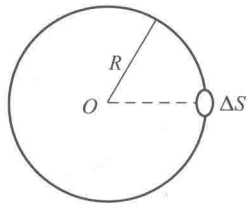


图 7-14

6. 在“无限大”的均匀带电平板附近,有一点电荷 q,沿电场线方向移动距离 d 时,电场力做的功为 A,则平板上的电荷面密度 $\sigma=$_____.

7. 如图 7-15 所示,两同心导体球壳,内球壳带电荷量 $+q$,外球壳带电荷量 $-2q$.静电平衡时,外球壳的内表面带电荷量为_____;外表面带电荷量为_____.

8. 一空气平行板电容器,两极板间距为 d,充电后板间电压为 V_0,然后将电源断开,在两板间平行地插入一厚度为 $\frac{d}{3}$ 的金属板,则板间电压变为 $V=$_____.

9. 带电荷量为 Q_0 的导体球外部，有一层相对介电常量为 ε_r 的介质球壳，如图 7-16 所示.在介质球壳内、外分别有两点 P_1、P_2，且已知 $OP_1=r_1$，$OP_2=r_2$，则 $D_{P_1}=$_____，$D_{P_2}=$_____，$E_{P_1}=$_____，$E_{P_2}=$_____.

10. 如图 7-17 所示，两块很大的导体平板平行放置，面积都是 S，两导体平板带电荷量分别是 Q_1 和 Q_2.若不计边缘效应，则四个表面上的电荷面密度分别是 $\sigma_A=$_____，$\sigma_B=$_____，$\sigma_C=$_____，$\sigma_D=$_____.

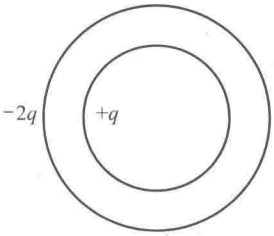


图 7-15

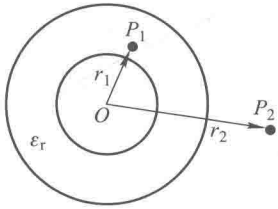


图 7-16

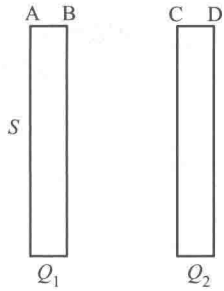


图 7-17

（三）计算题

1. 两导体球 A、B，半径分别为 $R_1=0.5$ m，$R_2=1.0$ m，中间以导线连接，两球外分别包以内半径为 $R=1.2$ m 的同心导体球壳（与导线绝缘）并接地，导体间的介质均为空气，如图 7-18 所示.已知：空气的击穿场强为 3×10^6 V/m，今使 A、B 两球所带电荷逐渐增加，计算：

（1）此系统何处首先被击穿？这里场强为何值？

（2）击穿时两球所带的总电荷 Q 为多少？

（设导线本身不带电，且对电场无影响.真空介电常量 $\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\,C^2\cdot N^{-1}\cdot m^{-2}$.）

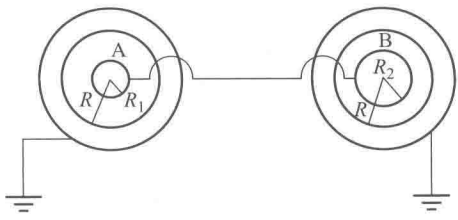


图 7-18

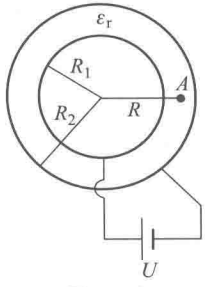


图 7-19

2. 一电容器由两个很长的同轴薄圆筒组成,内、外圆筒半径分别为 $R_1=2\ \text{cm}$,$R_2=5\ \text{cm}$,其间充满相对介电常量为 ε_r 的各向同性、均匀电介质.电容器接在电压 $U=32\ \text{V}$ 的电源上,如图 7-19 所示.试求距离轴线 $R=3.5\ \text{cm}$ 处 A 点的电场强度和 A 点与外筒间的电势差.

3. 如图 7-20 所示,一厚为 b 的"无限大"带电平板,其电荷体密度分布为 $\rho=kx(0\leqslant x\leqslant b)$,式中 k 为一正的常量.求:

(1) 平板外两侧任一点 P_1 和 P_2 处的电场强度大小;

(2) 平板内任一点 P 处的电场强度;

(3) 电场强度为零的点在何处?

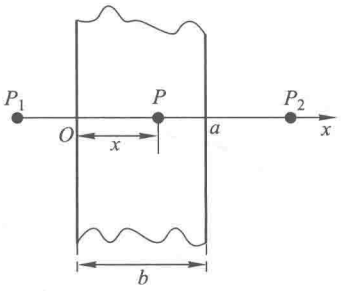


图 7-20

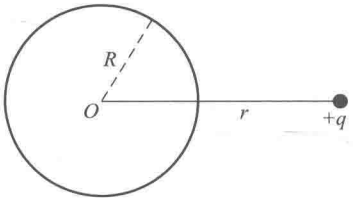


图 7-21

4. 如图 7-21 所示,在一不带电的金属球旁,有一点电荷 $+q$,金属球半径为 R,点电荷 $+q$ 与金属球心的间距为 r,试求:

(1) 金属球上感应电荷在球心处产生的电场强度是多少?

(2) 若取无穷远处为电势零点,金属球的电势为多少?

(3) 若将金属球接地,球上的净电荷是多少?

六、问题讨论

1. 库仑定律与高斯定理

库仑定律指出,两点电荷的作用力与它们距离的平方成反比

$$F=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^n}$$

$$n=2$$

有许多科学家对此做了大量实验来验证这个指数确实等于 2.最早卡文迪许做的实验指出 $n=1.98\sim2.02$ 之间;后来麦克斯韦改进了实验,把指数 n 确定在 2.000 05~1.999 95之间;1936 年普里姆顿和洛顿又把精度提高到 n 在 2.000 000 002~1.999 999 998 之间.试想如果 n 不是精确地等于 2,会有什么结果?

在一般情况下,点电荷 q 的电场可以设想写为

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^n}$$

那么通过以 q 为中心半径为 r 的球面的电场强度通量为

$$\Phi_e=\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^n}\cdot 4\pi r^2$$

如果 $n\neq 2$，比如 $n=2.01$，则

$$\Phi_e=\frac{q}{\varepsilon_0 r^{0.01}}$$

电场强度通量与球面的半径有关.r 愈大，电场强度通量愈小；只要 r 足够大，电场强度通量可以趋于零.这意味着电场线会在电场空间中自然中断和消失；而如果 $n<2$，又意味着电场线可以随距离变化自己产生出来.总之，$n\neq 2$ 的任何偏差都会导致高斯定理不再成立！

要保证高斯定理成立，n 必须等于 2，这样通过任一闭合曲面的电场强度通量才与曲面的大小和形状无关.高斯定理是电磁学的基本定律之一，它可以说是库仑定律（$n=2$）的必然结果；也可以反过来说，高斯定理的积分形式本身就表明了库仑定律的正确性.它们二者的表述是等效的.库仑定律告诉我们已知电荷如何求电场；而高斯定理则可在电场已知时如何确定一区域内有多少电荷.如果其中一个定律破坏了，另一个也一定不成立，整个电磁学的基础就必将受到动摇.

2. 引力场与静电场的类比

在本章开头我们比较了库仑定律与万有引力定律，说明了库仑力与万有引力十分相似，它们的大小都与距离的平方成反比，它们都是保守力，都能引入势能的概念等，那么是否能用描述电场的方法如电场强度、高斯定理、环路定理等引出相应的物理量和物理定理来描述引力场？答案是肯定的.

（1）引力场强度

由库仑定律知两点电荷 Q 与 q 之间的电性作用力，以及由万有引力定律知两质点 m' 与 m 之间的引力分别是

$$\boldsymbol{F}_e=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\boldsymbol{e}_r,\quad \boldsymbol{F}_g=-G\frac{m'm}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

电荷 Q 所激发的电场的电场强度 $\boldsymbol{E}_e$ 是被定义为在距 Q 为 r 处单位正电荷所受电场力的大小和方向，同样地，质点 m' 所激发的引力场的引力场强度 $\boldsymbol{E}_g$ 可以定义为在距 m' 为 r 处单位质量所受引力的大小和方向.由此，它们分别是

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}_e}{q}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\boldsymbol{e}_r,\quad \boldsymbol{E}_g=\frac{\boldsymbol{F}_g}{m}=-G\frac{m'}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

显然引力场强度 $\boldsymbol{E}_g$ 具有加速度的量纲.

现在我们来考察地球表面附近的引力场强度.如图 7-22 所示，设 P 点距地

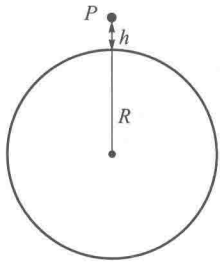


图 7-22 地球表面的引力场强度

面高为 h,地球半径为 R,那么 $r=R+h$,P 点处的引力场强度

$$\boldsymbol{E}_g=-G\frac{m_E}{r^2}\boldsymbol{e}_r=-G\frac{m_E}{(R+h)^2}\boldsymbol{e}_r\approx-G\frac{m_E}{R^2}\boldsymbol{e}_r$$

上式表明,在地球表面附近由于 $h\ll R$,引力场强度是一常量.本教材上册 P.28 已论述了一物体在地球表面附近受到的地球引力称为重力,那么地球表面引力场也可称为重力场.一个电荷 q 在电场中的受力可以表达为电荷与电场强度的乘积 $\boldsymbol{F}_e=q\boldsymbol{E}$;类似地,一个质量 m 的物体在重力场中的受力即重力可以表达为质量与重力场强度的乘积 $\boldsymbol{F}_g=m\boldsymbol{E}_g$.重力的大小又可以表达为 $F_g=mg$,由此可见重力场强度就是重力加速度:

$$\boldsymbol{E}_g=\boldsymbol{g}=-G\frac{m_E}{R^2}\boldsymbol{e}_r$$

上式的负号表示重力场强度与重力加速度的方向一样,都是指向地心的.在精度不高的计算中,一般取 $g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$,就是按上式以地球的质量 $m_E=5.98\times10^{24}\ \mathrm{kg}$ 及半径 $R=6\ 400\ \mathrm{m}$ 而得到的.

(2) 引力场的高斯定理

电场可以用电场线形象地表示,同样地,引力场也可以用引力场线形象地表示,即引力场线上任一点的切线方向都与该点处的引力场强度方向一致;引力场强度大的地方引力场线密度高,引力场弱的地方引力场线密度低.在引力场中通过某曲面的引力场线条数称作通过该曲面的引力场线通量.按电场的高斯定理,我们不难用类比的方法写出引力场的高斯定理

$$\oint_S \boldsymbol{E}_g\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-4\pi\ G\sum_i m_i'$$

即在引力场中通过某一闭合曲面的引力场线通量等于该闭合曲面所包围的质量的代数和乘以常量($-4\pi G$).

(3) 引力场的环路定理

由于库仑力与万有引力都是保守力,从场的观念可以类比出引力场的环路定理:

$$\oint_S \boldsymbol{E}_g\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$

即在引力场中沿任一闭合路径的线积分等于零.它实际上反映了在引力场中移动单位质量沿任何闭合路径一周,万有引力做的功等于零.

(4) 引力势能与引力场强度的关系

保守力场都可以引进势的概念.仿照静电场的电势概念,在引力场中某点 P 的引力势为

$$U_{P_g}=\int_r^{\infty}\boldsymbol{E}_g\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

即在引力场中某点的引力势等于万有引力把单位质量从该点处移到零势处(上式假定无穷远处的势为零)所做的功.例如在重力场中,如果我们假定地面为零重力势位置,那么在地面之上高为 h 处的引力势就是

$$U_{P_g}=\int_h^0\boldsymbol{E}_g\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_h^0\boldsymbol{g}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=gh$$

质量为 m 的物体处于该处的重力势能是

$$W_{P_g}=mU_{P_g}=mgh$$

同样地,引力势与引力场强度还有类似于电势与电场强度的微分关系

$$\boldsymbol{E}_g=-\nabla U_{P_g}$$

即引力场强度等于引力势梯度的负值.仍以重力场为例,引力势是高度 h 的函数,由上式

$$\boldsymbol{E}_g=-\frac{\mathrm{d}U_{P_g}}{\mathrm{d}h}\boldsymbol{j}=-g\boldsymbol{j}$$

即重力场强度的大小等于重力加速度,方向指向地面.

3. 电场能量损失的分析讨论

对习题:"电容 $C_1=4\ \mu\mathrm{F}$ 的电容器在 800 V 的电势差下充电,然后切断电源,并将此电容器的两个极板分别和原来不带电、电容为 $C_2=6\ \mu\mathrm{F}$ 的两极板相连,求:(1) 每个电容器极板所带电荷量;(2) 连接前后的静电场能",如果不考虑各量的具体数值,其解为:(1)两个电容器极板所带电荷量分别是 $q_1=\dfrac{C_1}{C_1+C_2}\cdot q_0$,$q_2=\dfrac{C_2}{C_1+C_2}q_0$,其中 $q_0=C_1U$;(2) 连接前后的静电场能变化为

$$\Delta W=W-W_0=\frac{q_0^2}{2C_1}-\left(\frac{q_1^2}{2C_1}+\frac{q_2^2}{2C_2}\right)=\frac{q_0^2C_2}{2C_1(C_1+C_2)}$$

为讨论简单起见,假定 $C_1=C_2=C$,那么连接前后的静电场能变化为 $\Delta W=\dfrac{q_0^2}{4C}=\dfrac{W_0}{2}$,即前后的能量损失了一半.现在的问题是:损失的能量哪里去了呢?

通常我们说把两个电容器连接起来,都不会在意连接导线有没有电阻,但是如果完全忽略了导线电阻,那么这样一个理想化的电路的确不存在消耗能量的机制,因此我们必须寻求更为实际的电路及其能量损耗机制.

一个更为实际的电路应当考虑连接导线的电阻 R,其实际电路如图 7-23 所示.按电荷守恒和回路定理,对这个电路可以列出下列方程:

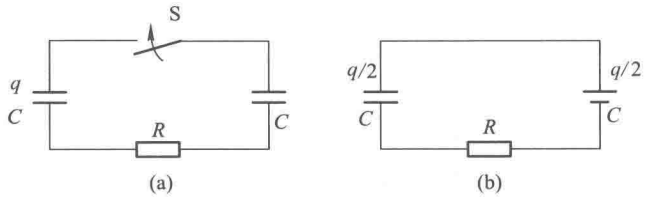


图 7-23 有电阻的导线连接两相同的电容器

(a) 连接前;(b) 连接后

$$\frac{q}{C}-\frac{q_0-q}{C}-R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=0$$

$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}-\frac{2q-q_0}{C}=0$$

式中 q 是第一只电容器上的瞬间电荷,因此第一项是第一只电容器上的电压,第二项是第二只电容器上的电压,最后一项是导线电阻上的电压降.在 $t=0$ 时,$q=q_0$,这样上述方程的解是

$$q(t)=\frac{q_0}{2}(1+\mathrm{e}^{-2t/RC})$$

在这个过程中导线中的电流为

$$i(t)=-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{q_0}{RC}\mathrm{e}^{-2t/RC}$$

不难求出电流通过连线而损失的焦耳热

$$W_{\mathrm{J}}=\int_0^{\infty}i^2R\mathrm{d}t=\frac{q_0^2}{RC^2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-4t/RC}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{q_0^2}{RC^2}\frac{RC}{4}=\frac{q_0^2}{4C}=\frac{W_0}{2}$$

由此可见,两电容损失的一半能量是消耗在连线的电阻上.

第八章

恒定电流的磁场

一、学习要求

1. 理解产生电流的条件;理解电流、电流密度和电动势的概念.

2. 掌握磁感应强度的概念,理解毕奥-萨伐尔定律,并能应用它计算一些简单电流分布的磁感应强度.

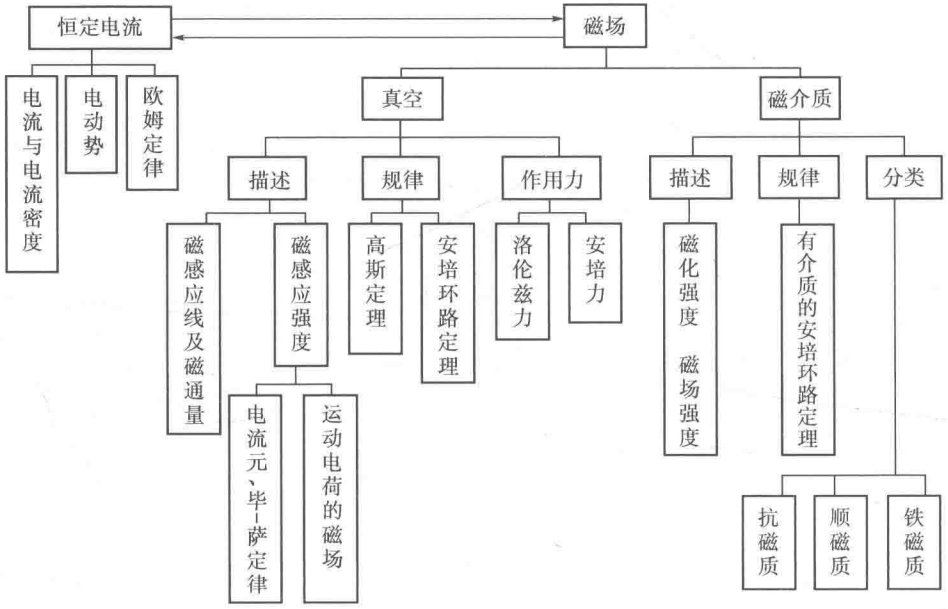
3. 理解反映恒定磁场基本性质的磁场高斯定理和安培环路定理,并能应用安培环路定理计算某些特定电流分布的磁感应强度.

4. 理解安培定律和洛伦兹力公式,能用安培定律计算载流导线在磁场中受到的安培力;理解磁矩的概念,能计算载流线圈在磁场中受到的磁力矩.

5. 了解磁介质磁化的微观机制和铁磁质的磁化特性,以及磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 的物理意义.

6. 了解磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的概念,以及在各向同性磁介质中磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 与磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 之间的关系;理解有磁介质时的安培环路定理并能用它求解有磁介质时磁场的磁感应强度问题.

二、知识框图



三、内容导读

本章主要讲述恒定电流激发的磁场,因此首先介绍了什么是恒定电流,它是

如何产生的，然后才重点讨论了恒定电流磁场的描述和规律.

1. 恒定电流　电动势

在电路中要维持恒定的电流必须要有电动势.电动势的英文是 electromotive force，意为“电的驱动力”，这个力不可能是静电力，只能是非静电力.因此电动势、非静电力以及非静电力场是本章开头最重要的概念，它们在下一章电磁感应中还会作更进一步的讨论.

（1）电动势：描述电源内“非静电力”移动电荷做功本领的物理量，定义为

$$\mathscr{E}=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}q} \tag{8-1}$$

即电源的电动势等于电源把单位正电荷从负极经电源内移到正极所做的功，或将单位正电荷沿闭合回路移动一周的过程中，非静电力所做的功，即

$$\mathscr{E}=\int_l \boldsymbol{E}_{\mathrm{k}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint \boldsymbol{E}_{\mathrm{k}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{8-2}$$

（2）电流：单位时间内通过导体任一横截面的电荷量，称为电流.

$$I=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{8-3}$$

电流是标量，在选定了回路正方向后，电流只有正（与回路正方向相同的流向）负（与回路正方向相反的流向）之分.

（3）电流密度：单位时间内通过垂直于电流方向单位面积的电荷量为电流密度 j 的大小，即 $j=\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}$.在电流场中，通过某一面积 S 的电流就是通过该面积电流密度的通量：

$$I=\int_S \boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{8-4}$$

电流密度是矢量，其方向为该点正电荷漂移运动的方向，与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的方向一致，可表达为

$$\boldsymbol{j}=\gamma\boldsymbol{E} \tag{8-5}$$

γ 为导体的电导率.上式表明了导体中任一点处电流密度与电场强度之间的关系，称为欧姆定律的微分形式.

2. 磁场的描述：磁感应强度与磁感应线

磁场的磁感应强度与电场的电场强度相对应，磁感应线则与电场线相对应，因此对磁场的描述可以参照电场的有关描述，但要特别注意它们各自的特点.例如电场除了可以用电场强度和电场线来描述外，还可以用电势和等势面来描述，但对磁场没有相应的标量“磁势”概念，因此也就没有相对应的“势”的描述方法.

（1）磁场起源于电荷的运动，恒定电流在它周围激发起恒定的磁场.描述电

流磁场的基本物理量是磁感应强度 $\boldsymbol{B}$.磁场中某点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的大小定义为

$$B=\frac{F_{\max}}{q_0 v} \tag{8-6}$$

式中 $F_{\max}$ 表示当试验电荷 q_0 以某一速度 $\boldsymbol{v}$ 沿垂直于磁场方向运动时所受到的最大磁场力.磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的方向与 $\boldsymbol{F}_{\max}\times\boldsymbol{v}$ 的方向一致.

(2) 磁场可以用磁感应线形象地表示,磁感应线上每一点的切线方向都与该点处磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的方向一致;磁场强的地方磁感应线密度高,磁场弱的地方磁感应线密度低.如果把通过某面积的电场线条数 $\Delta\Phi$ 称作磁通量或 $\boldsymbol{B}$ 通量,那么该处磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的大小又可以称为 $\boldsymbol{B}$ 通量密度,即通过垂直于磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 单位面积的磁感应线条数,等于该点处磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的大小.

$$B=\frac{\Delta\Phi}{\Delta S_{\perp}} \tag{8-7}$$

如果已知磁感应强度 $\boldsymbol{B}$,通过磁场中任意曲面 S 的 $\boldsymbol{B}$ 通量为

$$\Phi=\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S B\cos\theta \mathrm{d}S \tag{8-8}$$

磁场用磁感应线形象地表示与电场用电场线形象表示的方法是一致的,但磁通量的计算比电通量的计算重要得多,在下面的"解题指导"中将会作进一步的讨论.

3. 毕奥-萨伐尔定律

毕奥-萨伐尔定律是从实验总结出的计算电流磁场的基本公式.

(1) 毕奥-萨伐尔定律:电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在空间某点所产生的磁感应强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{e}_r}{r^2} \tag{8-9}$$

$\boldsymbol{r}$ 是电流元到场点的位矢,$\boldsymbol{e}_r$ 为位矢 $\boldsymbol{r}$ 的单位矢量.毕奥-萨伐尔定律表明,磁感应强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的大小 $\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$ 与电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的大小成正比,与到场点的位矢 $\boldsymbol{r}$ 与电流元方向的夹角 θ 的正弦成正比,与位矢 $\boldsymbol{r}$ 大小的平方成反比.

(2) 由毕奥-萨伐尔定律可以导出运动电荷的磁场公式.电流是大量电荷定向运动形成的,单个运动电荷的磁场可以看作是这些运动电荷磁场的平均效果,因此一个电荷量为 q,以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的电荷,在空间某点 P 所产生的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 为

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}N}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{e}_r}{r^2} \tag{8-10}$$

式中 $\mathrm{d}N$ 是电流元中运动电荷的总数,r 为从点电荷所在点指向场点的位矢大小,$\boldsymbol{B}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 所组成的平面,其指向由右手螺旋定则确定.

（3）几种常见电流的磁感应强度公式

有限长载流直导线的磁场	$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$　（θ_1 和 θ_2 分别为直线的两个端点到场点处的矢量与场点到直导线垂线之间的夹角）
无限长载流直电流的磁场	$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
圆形载流导线轴线上的磁场	$B=\frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{(R^2+x^2)^{3/2}}$　（R 为圆形线圈的半径）
无限长直载流螺线管内的磁场	$B=\mu_0 nI$　（n 为线圈单位长度的匝数）
环形载流螺线管内的磁场	$B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$　（N 为环形螺线管线圈的匝数）

4. 磁场中的高斯定理和安培环路定理

磁场中的高斯定理和安培环路定理是反映电流磁场基本特性的两条重要定理.它们分别与电场中的高斯定理和电场强度的环路定理相对应,但结果并不对称,充分反映了磁场与电场是性质不同的两类场.

（1）高斯定理:在磁场中通过任意闭合曲面的磁通量等于零,即

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0 \tag{8-11}$$

它表明,磁场的磁感应线无头无尾,恒是闭合的,所以磁场可称作无源场.这与静电场有很大的不同,静电场是有源场.

（2）安培环路定理:在真空中,磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 沿任意闭合路径 L 的线积分等于被此闭合路径所包围电流的代数和的 μ_0 倍,而与路径的形状和大小无关.

$$\int_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\sum I_i \tag{8-12}$$

I_i 是闭合路径 L 所包围的电流,它可正可负,在确定了闭合路径 L 的绕行方向后,由所取绕行方向与电流流向的右手螺旋定则决定电流的正负.

在数学上把一矢量沿任意闭合路径的线积分称作该矢量的环流,如果这个环流总不为零,则把这个矢量场称为有旋场.安培环路定理表明磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的环流不为零,说明磁场是有旋场.而电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的环流恒等于零,所以把静电场称为无旋场.这再一次说明磁场是与静电场性质不同的两类场.

5. 带电粒子在电磁场中的运动

带电粒子在磁场中受到的磁场力

$$\boldsymbol{F}_m=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{8-13}$$

称为洛伦兹力.洛伦兹力清楚地揭示了相互作用力与相互运动速度的关系,它垂直于带电粒子运动速度,对带电粒子不做功.

带电粒子在电磁场中受到的电场力和磁场力的总合力

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}+q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{8-14}$$

称为洛伦兹关系式.

当粒子的速度 v 远小于光速 c 时,带电粒子在电磁场中的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=q\boldsymbol{E}+q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{8-15}$$

在一般情况下求解这个方程比较复杂,本章仅讨论了一些带电粒子在简单而重要的电磁力作用下的运动,主要有

(1) 带电粒子仅在均匀电场中运动:$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=q\boldsymbol{E}$,例如电子在平行板电场中偏向平行板的运动.

(2) 带电粒子仅在均匀磁场中运动:$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$,按带电粒子以不同的初速 $\boldsymbol{v}_0$ 进入磁场,带电粒子可作直线运动(初速 $\boldsymbol{v}_0$ 与 $\boldsymbol{B}$ 同方向)、圆周运动(初速 $\boldsymbol{v}_0$ 与 $\boldsymbol{B}$ 方向垂直)或螺旋线运动(初速 $\boldsymbol{v}_0$ 与 $\boldsymbol{B}$ 方向的夹角不为 0 或 90°).

(3) 带电粒子仅在非均匀磁场中运动:带电粒子一般可绕磁感应线作螺旋运动,螺旋线的半径将随着磁感应强度的增加而不断地减小.

(4) 带电粒子在互为垂直的均匀电场和均匀磁场中运动:最典型的例子是速度选择器,即当带电粒子的速度大小满足 $v=\frac{E}{B}$ 时,带电粒子将保持原有的速度运动.

(5) 霍耳效应:导体中的载流子(形成电流的运动电荷)在磁场中受洛伦兹力的作用发生横向漂移,在导体板的上、下两侧出现的电势差:

$$U=\frac{IB}{nqd}$$

式中 n 为导体单位体积内的载流子数,d 为导体厚度.

6. 磁偶极子及其磁矩

与电偶极子相对应,我们将一个小平面载流回路称为磁偶极子.磁偶极子的特性用磁偶极矩矢量 $\boldsymbol{m}$(或简称磁矩)来描述.磁偶极子的磁矩定义为

$$\boldsymbol{m}=I\boldsymbol{S} \tag{8-16}$$

磁矩的方向与线圈平面法线方向一致.如果线圈由 N 匝导线构成,则其磁矩为

$$\boldsymbol{m}=NI\boldsymbol{S} \tag{8-17}$$

作为对照,可以比较电偶极子的电偶极矩定义 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$.

7. 磁场对载流导线的作用

（1）安培定律：电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在磁场中某点所受到的磁场力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B} \tag{8-18}$$

对于任意形状的载流导线 L 在磁场中所受的安培力为

$$\boldsymbol{F}=\int_L \mathrm{d}\boldsymbol{F}=\int_L I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B} \tag{8-19}$$

在均匀磁场中，任意形状的载流导线在磁场中所受的安培力可简化为

$$\boldsymbol{F}=I\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B} \tag{8-20}$$

L 为该载流导线的起点指向终点的有向线段.

（2）载流线圈在均匀磁场中所受的磁力矩为

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B} \tag{8-21}$$

在均匀磁场中，载流线圈受到的净力为零，但磁力矩一般不为零，在此磁力矩作用下将产生转动；在非均匀磁场中，净力和磁力矩一般都不为零，因此载流线圈不仅有转动，还有平动.

作为对照，电偶极子在电场中受到的力矩为 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}$，它也将使电偶极子产生转动.

8. 磁介质的磁化　有磁介质时的安培环路定理

与介质在电场中要极化一样，介质在磁场中也会磁化.介质磁化问题的处理思路与介质极化问题的处理有许多相似之处和对应关系，例如

磁化面电流线密度 j_s ⟷极化电荷面密度 σ

磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ ⟷电场强度 $\boldsymbol{E}$

磁场强度 $\boldsymbol{H}$ ⟷电位移矢量 $\boldsymbol{D}$

磁化强度 $\boldsymbol{M}$ ⟷极化强度 $\boldsymbol{P}$

磁导率 μ ⟷介电常量 ε

磁化率 χ_m ⟷电极化率 χ_e

但是，磁介质的磁化与电介质的极化也有很重要的不同，例如，极化电荷的电场总是与外电场方向相反，从而削弱外电场；而介质磁化产生的磁场可以削弱外磁场，也可以增强外磁场，甚至在铁磁质的情况下大大增强外磁场.

磁介质的磁化也是本章的难点之一，在了解介质的磁化机制以及描述磁化的物理量基础上，重点理解有磁介质时的安培环路定理.

（1）磁介质的磁化：在磁场中实物物质的分子状态发生变化反过来影响磁场分布的现象.磁介质磁化后在其表面会出现磁化分子面电流.

（2）磁化强度：表征磁介质磁化程度的物理量，定义为磁介质中某点处单位体积内分子磁矩的矢量和

$$\boldsymbol{M}=\frac{\sum \boldsymbol{m}_i}{\Delta V} \tag{8-22}$$

$\boldsymbol{m}_i$ 为分子的磁矩.当 $\boldsymbol{M}$ 与磁介质表面平行时,磁化强度的大小等于磁化面电流线密度 α,即

$$M=\alpha \tag{8-23}$$

方向与磁化分子面电流的流向成右手螺旋关系.

(3) 磁介质中的磁场:磁介质中任一点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 等于原电流在真空中激发的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_0$ 与磁化电流激发的附加磁感应强度 $\boldsymbol{B}'$ 矢量和,即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}'$,对顺磁质 $\boldsymbol{B}>\boldsymbol{B}_0$;对抗磁质,$\boldsymbol{B}<\boldsymbol{B}_0$;对铁磁质,$\boldsymbol{B}\gg\boldsymbol{B}_0$.

(4) 磁场强度:描述磁场的辅助物理量,定义为

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M} \tag{8-24}$$

(5) 有介质存在时的安培环路定理:磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 沿任一闭合回路的环路积分,等于该闭合回路所包围并穿过的传导电流之代数和:

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum I \tag{8-25}$$

它表明 $\boldsymbol{H}$ 矢量的环流只和传导电流 I 有关,而在形式上与磁介质的磁化电流无关.安培环路定理式(8-12)与式(8-25)所述的有介质存在时的安培环路定理的主要区别在于前者必须计及积分回路所包围的所有电流,包括传导电流和磁化电流;但后者只需计及所包围的传导电流 I.

(6) $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{M}$ 及 χ_m、μ_r 的一些关系

关系式	适用条件
$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}$	普遍适用
$\boldsymbol{M}=\chi_m\boldsymbol{H}$	线性各向同性磁介质
$\boldsymbol{B}=\mu_0\mu_r\boldsymbol{H}=\mu\boldsymbol{H}$	各向同性的磁介质
$\mu_r=1+\chi_m$	
$\mu=\mu_0\mu_r$	

(7) χ_m 是磁介质的磁化率,μ_r 称为磁介质的相对磁导率,μ 称为磁介质的磁导率.它们都是反映物质磁特性的重要参量.

所谓均匀磁介质是指磁介质的磁导率 μ_r 与介质内各点的位置无关,处处相同,是一常量.对非铁磁质(包括顺磁质和抗磁质),其相对磁导率 μ_r 几乎等于1;对铁磁质,$\mu_r\gg1$;对"真空",$\mu_r=1$.相应地,顺磁质的 $\chi_m>0$ 而接近0;抗磁质的 $\chi_m<0$ 而接近0;"真空"的 $\chi_m=0$.

所谓"线性磁介质"是指 μ_r 与磁场强度无关,或者说磁感应强度或磁化强度

与磁场强度成正比的磁介质，否则的话就为非线性磁介质.铁磁质的磁滞现象说明铁磁质是非线性磁介质.非铁磁质(包括顺磁质和抗磁质)都是线性磁介质.

所谓“各向同性磁介质”是指 μ_r 与空间方向没有关系的磁介质.反之，如果在不同方向上 μ_r 的值也不同，那么这样的介质就称作各向异性磁介质.

本章所讨论的非铁磁质在一般情况下都是均匀、线性和各向同性的磁介质，即介质的磁导率 μ_r 的大小与介质内各点的位置、磁感应强度的大小和方向无关，是一常量.

9. 铁磁质

铁磁质是磁介质中最特别的一类，从应用的角度看，掌握这一类磁介质的特性有非常重要的实际意义.

(1) 特征：具有很高的 μ 值，即 $\mu_r \gg 1$，因此 $\boldsymbol{B} \gg \boldsymbol{B}_0$；$\mu_r$ 不是常量，是 $\boldsymbol{H}$ 的函数，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 不是线性关系，存在磁滞现象，即磁感应强度 B 值的变化总是落后于磁场强度 H 的变化；温度达到在居里点后转化为顺磁质.

(2) 机理：铁磁质中存在饱和磁化状态的小区域，称为磁畴.在没有外磁场作用时，不同的磁畴其磁矩的取向各不相同，在整体上对外不显示磁性；在外磁场作用下，磁畴的磁矩与外磁场方向趋于一致，大大增强了总合磁场.

(3) 分类：软磁材料，其磁滞损耗比较小，容易磁化，也容易退磁；硬磁材料，其磁滞特性显著，磁滞损耗比较大，磁化后保留有很强的剩磁.

四、解题指导

1. 电流磁场磁感应强度的计算

电流磁场的磁感应强度计算一般有两种方法：用毕奥-萨伐尔定律以及应用安培环路定理.

(1) 毕奥-萨伐尔定律是计算电流磁场磁感应强度的基本公式

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{e}_r}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{B}=\int \mathrm{d}\boldsymbol{B}=\int_L \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{e}_r}{r^2}$$

应用该公式时需要注意的是：(a) 如何选取电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$；(b) 电流 I 在空间某点的磁场是各电流元在该点的磁场的矢量和，必须按照矢量叠加的规则进行积分运算.

在本教材中已详细讲解了如何求解载流长直导线的磁场和载流圆线圈轴线上的磁场，这些结果是解决更为复杂的电流磁场的基础，因为在许多情况下载流导体可以看作是载流长直导线或载流圆线圈的组合.这样我们就没有必要从原始的毕奥-萨伐尔定律公式(8-9)出发求一小电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的磁场 $\mathrm{d}B$，而可以利用直长导线的磁场结果 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$，或载流圆线圈轴线上磁场的结果 $B=\dfrac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$，

将式中的 I 改为 $\mathrm{d}I$，B 改写为 $\mathrm{d}B$，即

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}B=\frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2\pi r} \quad (\text{直长导线})$$

$$B=\frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{(R^2+x^2)^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{2}\frac{R^2\mathrm{d}I}{(R^2+x^2)^{3/2}} \quad (\text{圆线圈})$$

然后用磁场的叠加原理得出复杂载流导体磁场的最后结果.

例 8-1

电流均匀地流过宽为 b 的无限长平面导体薄板，电流为 I，沿板长方向流动.求：(1) 在薄板平面内，距板的一边为 b 的点 P 处的磁感应强度[图 8-1(a)]；(2) 通过板的中线并与板面垂直的直线上一点 Q 处的磁感应强度，Q 点到板面的距离为 x[图 8-1(b)].

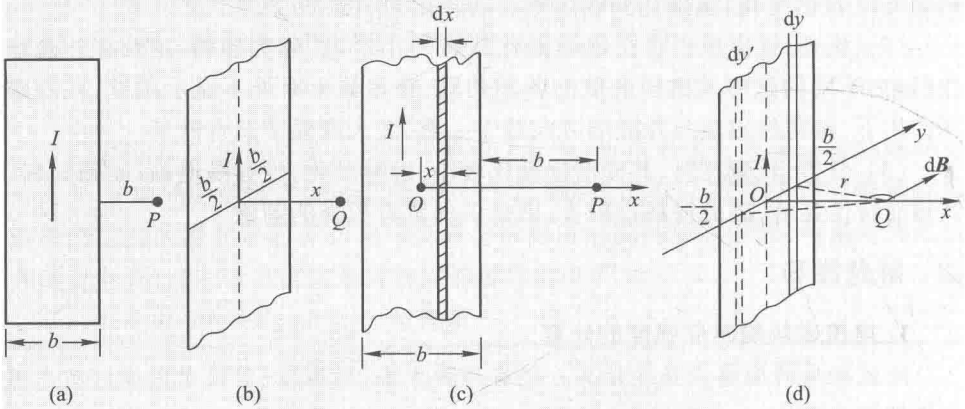


图 8-1　无限长载流平面导体薄板的磁场求解

解　(1) 把这条无限长平面导体薄板分割为许多宽度为 $\mathrm{d}x$ 的无限长载流细条，由于单位长度的电流是 $j=\frac{I}{b}$，那么宽度为 $\mathrm{d}x$ 的细条就流有电流 $\mathrm{d}I=j\mathrm{d}x=\frac{I}{b}\mathrm{d}x$，利用无限长载流直导线的公式，可以写出它在 P 点的磁感应强度是

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2\pi(2b-x)}=\frac{\mu_0 I\mathrm{d}x}{2\pi b(2b-x)} \tag{8-26}$$

$(2b-x)$ 是如图 8-1(c)所示的坐标中电流 $\mathrm{d}I$ 至 P 点的距离.该载流长条 $\mathrm{d}I$ 在 P 点激发的磁场方向垂直纸面向里，所有载流长条在 P 点产生的磁感应强度的方向都相同，所以载流平板在 P 点产生的磁感应强度为

$$B=\int \mathrm{d}B=\frac{\mu_0 I}{2\pi b}\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{(2b-x)}=\frac{\mu_0 I}{2\pi b}\ln 2 \tag{8-27}$$

方向垂直纸面向里.

(2) 要求板面中垂线上 Q 点处的磁感应强度,其基本分析方法与(1)是相同的,但从图 8-1(d)可以看到,电流 dI 至 Q 点的距离应为 r,所以所选载流长条 dx 在 Q 点激发的磁场是

$$dB=\frac{\mu_0 I dx}{2\pi br} \tag{8-28}$$

方向与 r 垂直,在 Oxy 平面里.选取不同位置的载流长条 dx,不仅 r 的大小不等,而且 dB 在 Oxy 平面里的方向也将发生变化.所以不能直接对式(8-28)作积分,必须先完成两件事:将对 $d\boldsymbol{B}$ 的矢量积分化作标量积分;对 dB 式作统一变量处理.为此,我们将 $d\boldsymbol{B}$ 写作

$$d\boldsymbol{B}=dB_x\boldsymbol{i}+dB_y\boldsymbol{j} \tag{8-29}$$

其中

$$\begin{cases} dB_x=dB\cos\theta=\dfrac{\mu_0 I dx}{2\pi br}\sin\theta \\ dB_y=dB\sin\theta=\dfrac{\mu_0 I dx}{2\pi br}\cos\theta \end{cases} \tag{8-30}$$

它们分别是 $d\boldsymbol{B}$ 在 Ox 方向和 Oy 方向的分量.如果我们进一步分析将发现,在平面导体薄板中心轴线两边对称地取两条载流长条,它们在 Q 点激发磁场的 dB_x 分量大小相等、方向相反,叠加的结果为零.由此对整个平面导体薄板而言:

$$B_x=\int dB_x=0$$

$$B_y=\int dB_y=\int dB\cos\theta=\int_{-b/2}^{b/2}\frac{\mu_0 I dx}{2\pi br}\cos\theta$$

r 和 θ 都随 x 而变,必须统一到一个变量作积分,至于统一到哪个变量,并没有一定的规则,视积分的简易程度而定.例如本例将 r 和 x 都化作 θ 的函数,最终对 θ 积分,有

$$\begin{aligned} &r=b\sec\theta,\quad x=b\tan\theta,\quad dx=b\sec^2\theta d\theta \\ &B_x=\frac{\mu_0 I}{2\pi b}\int_{-\arctan\frac{1}{2}}^{\arctan\frac{1}{2}}d\theta=\frac{\mu_0 I}{\pi b}\arctan\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{8-31}$$

如果将 r 和 θ 都化作 x 的函数,最终统一到对 x 的积分,有

$$\begin{aligned} &r=\sqrt{x^2+b^2},\ \cos\theta=\frac{b}{r}=\frac{b}{\sqrt{x^2+b^2}} \\ &B_y=\frac{\mu_0 I}{2\pi b}\int_{-b/2}^{b/2}\frac{b}{x^2+b^2}dx=\frac{\mu_0 I}{\pi b}\arctan\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{8-32}$$

结果一样,但前者显然比后者的积分要简单得多.

最后,Q 点的磁感应强度可表达为

$$\boldsymbol{B}=B_y\boldsymbol{j}=\frac{\mu_0 I}{\pi b}\arctan\frac{1}{2}\boldsymbol{j} \tag{8-33}$$

在许多载流导体的电流磁场问题中,其电流磁场都可能有一定的对称性,在某个方向上的磁场分量因叠加而抵消,因此在建立起互为垂直的坐标后,要将 $d\boldsymbol{B}$ 分解为沿各坐标的分量,分析每个分量对不同的电流元段是否有对称性,如

果有,那么某个分量就可能抵消为零,而只需对另一个分量作积分,这对简化计算是很重要的一步.例如本例磁感应强度的 x 分量等于零,就可分析而得,不必作积分运算.又如图 8-2 所示,求"无限长"半圆柱形载流金属薄片轴线上一点 P 的磁感应强度,如果建立起如图所示的坐标后,不难分析出在 Ox 方向的 $\mathrm{d}B_x$ 分量具有对称性,叠加的结果为零,只需求 B_y 分量.

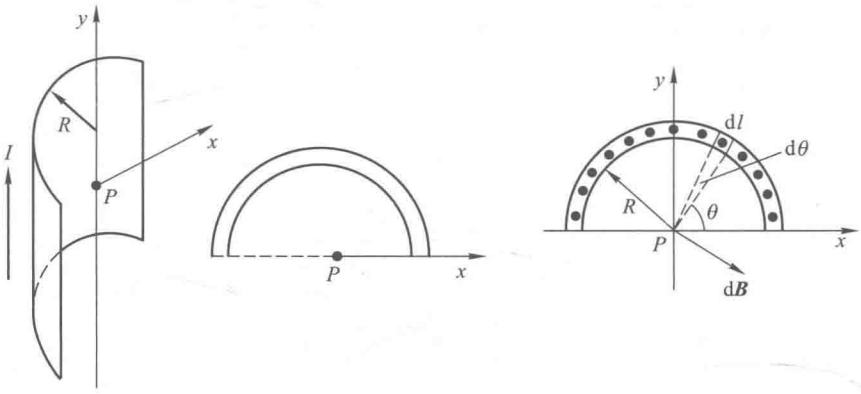


图 8-2 "无限长"半圆柱形金属薄片磁感应强度

(2) 用安培环路定理也是求解电流磁场磁感应强度的基本方法.与应用高斯定理求带电体的电场强度需要严格的条件一样,应用安培环路定理求解磁感应强度也有一定的条件,必须先对所讨论问题的电流分布和磁场分布有一预分析,看能不能找出合适的积分回路,这是应用安培环路定理求磁感应强度的关键.

什么是"合适的积分回路"?通过所求场点所构造的积分回路必须满足这样的条件:这个积分回路上磁感应强度必须大小处处相等且其方向与积分回路一致;或者在积分回路的某一部分上磁感应强度处处相等且方向与回路平行,另一部分上磁感应强度为零或磁感应强度方向与该回路垂直,使 $\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$.提出这样的条件是为了在应用安培环路定理 $\oint_L \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\sum I_i$ 时避免对磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 作左边的积分,而只要作比较简单的电流计算即可解出磁感应强度.

很显然能满足上述条件的情况是很有限的,在本章的例题和习题中大致上有三种电流磁场的磁感应强度可用安培环路定理求解:① 长直载流导线和长直圆柱形载流导线的磁场;② 载流长直螺线管内的磁场;③ 载流螺绕环内的磁场.此外,无限大载流平板导体的磁场也可以用安培环路定理求解.现仍以上例说明为什么在有限大载流平板导体的磁场中找不到应用安培环路定理的"合适的积分回路",因而不能应用安培环路定理求解磁感应强度;但在无限大载流平板导体的磁场中能找到满足条件的积分回路,因而可以用安培环路定理求解磁感应强度.

例 8-2

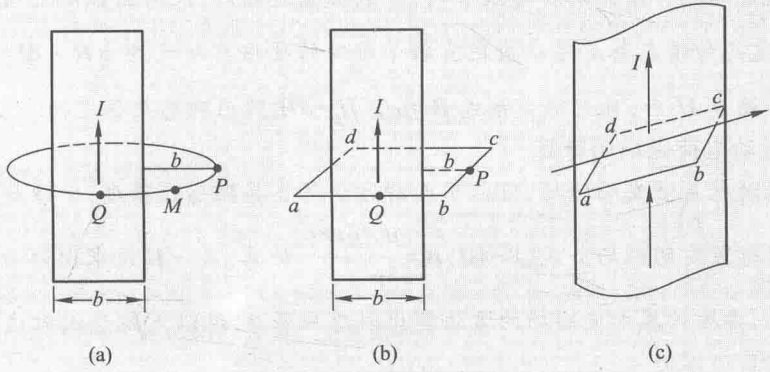
试分析为什么上例有限宽而无限长载流平面导体薄板不能用安培环路定理求出 Q 点的磁感应强度，而将有限宽载流平板扩展为无限大载流平板后就能用安培环路定理求出 Q 点的磁感应强度.

分析　在如图所示的坐标系中，宽为 b 的无限长平面导体薄板电流是以 z 轴为中心对称的，可以肯定，其电流磁场也是以通过 z 轴垂直导体薄板的平面而对称分布的，但通过 Q 点无论我们作一个圆[图 8-3(a)]或者一个矩形[图 8-3(b)]还是其他任意形状的闭合回路都不能满足上述作为“合适的积分回路”的条件.

首先，若积分回路 L 是一个圆，在 L 上的 Q 点与 P 点、M 点的磁感应强度都不相等(上例已证明了 Q 点与 P 点的磁感应强度不等)，尤其是 M 点的磁感应强度方向既不与积分回路相切，也不与积分回路垂直，在这条积分回路上的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 是空间坐标 (x,y) 的未知函数，无法实现 $\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=BL$ 的操作.

如果积分回路 L 是一个矩形 $abcd$[图 8-3(b)]，虽然 bc 段上的 P 点的磁感应强度方向垂直积分回路，有 $\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$，但 bc 段上其他各点的磁感应强度方向都不垂直 bc 段，而且大小也不尽相同，整体上对 bc 段没有 $\int_{bc} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$. 同样地，在包含有场点 Q 的 ab 段上各点的磁感应强度方向都不与 ab 段平行，大小也不尽相同，无法实现 $\int_{ab} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=B|ab|$ 的结果.

不难想象其他任何形状的闭合回路都不能满足应用安培环路定理求解磁感应强度的条件，所以只能用叠加原理的方法来求解.



(a)　(b)　(c)

图 8-3　积分闭合回路分析

(a) 圆形积分回路；(b) 矩形积分回路；(c) 无限大载流平板的矩形积分回路

但是，对于无限大载流平板，空间任一点的磁感应强度方向都与板面平行，因为以任一点去看载流平板，左右两边电流都是对称的，电流磁场在该点叠加的结果方向总是一致平行于载流平板. 如果积分回路 L 是一个矩形 $abcd$，那么至少在 ab 和 cd 段上的磁感应强

度大小也是相同的,可以实现 $\int_{ab}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{cd}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=Bab$,至于 bc 段和 da 段,由于这两段上的磁感应强度方向总与回路方向垂直,处处有 $\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$.因此对无限大载流平板来说,如图 8-3(c)所示的一个矩形积分回路 L 满足应用安培环路定理求解磁感应强度的条件,可以应用安培环路定理求解磁感应强度.

设这块无限大载流平板沿 z 方向的电流密度为 δ,那么过 Q 点作矩形积分回路 $abcd$ 后,由安培环路定理,有

$$\oint_L\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{ab}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{bc}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{cd}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{da}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$=Bab+0+Bcd+0=\mu_0\delta ab$$

所以

$$B=\frac{\mu_0\delta}{2}$$

方向沿 x 轴正方向.

由上分析可知,并不是电流分布和磁场分布有对称性就一定能用安培环路定理求解磁感应强度,有限宽度的无限长平面导体薄板电流和磁场都有一定的对称性,但这种对称性仍不能满足"合适的积分回路"的要求,还是不能用安培环路定理求解磁感应强度.

(3) 有介质时的磁场计算

应用有磁介质时的安培环路定理 $\oint\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum I$ 的条件与上面应用安培环路定理的分析相同,即也必须对所论问题作一预分析,看是否能找到合适的积分回路.本章所涉及的有介质时的磁感应强度计算问题一般都比较简单,只讨论了均匀各向同性的磁介质充满在螺线管内,或载流螺绕环内,或两圆柱筒之间等几种情况,而这几种情况都是可以应用有磁介质时的安培环路定理 $\oint\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum I$,先求出磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 后,再利用关系式 $\boldsymbol{B}=\mu_0\mu_r\boldsymbol{H}=\mu\boldsymbol{H}$ 解出磁感应强度的.

2. 运动电荷磁场的计算

对运动电荷激发的磁场,可以用两种方法计算其磁感应强度:一种是直接应用运动电荷激发的磁场公式(8-10)$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{e}_r}{r^2}$ 计算;另一种是求出运动电荷等价的电流,再按计算电流磁场的方法解出磁感应强度.现以下题为例对这两种方法的应用作一剖析.

例 8-3

如图 8-4 所示,一均匀带电的半圆形弧线,半径为 R,所带电荷量为 q,以匀角速度 ω 绕 Oy 轴转动,求 O 点的磁感应强度.

解　(1) 直接应用运动电荷激发的磁场公式

在弧线上取一元弧段 $\mathrm{d}l$,其电荷量 $\mathrm{d}q$,该运动电荷元在 O 点激发的磁场为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{e}_R}{R^2}$$

$\boldsymbol{e}_R$ 是 $\mathrm{d}q$ 指向 O 点的单位矢量,式中电荷元

$$\mathrm{d}q=\frac{q\mathrm{d}l}{\pi R}=\frac{q}{\pi R}R\mathrm{d}\theta$$

它运动的速度为

$$v=r\omega=R\cos\ \theta\omega$$

在如图 8-4 所示的位置时,速度的方向垂直纸面向里.根据磁场的叠加原理,O 点的磁场是半圆弧线上所有电荷元在 O 点激发的磁场的矢量和.显然,选取不同位置的 $\mathrm{d}q$,$\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的方向不同.现将 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 分解为 $\mathrm{d}B_x$ 和 $\mathrm{d}B_y$ 两个分量,其中

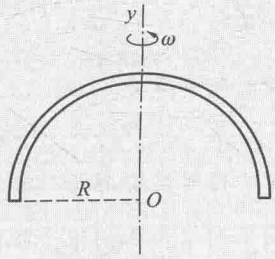


图 8-4　以匀角速度转动的带电弧线

$$\mathrm{d}B_x=\mathrm{d}B\sin\ \theta=\frac{\mu_0 q\omega}{2\pi^2 R}\cos\ \theta\sin\ \theta\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}B_y=\mathrm{d}B\cos\ \theta=\frac{\mu_0 q\omega}{2\pi^2 R}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta$$

不难发现,半圆弧线的电荷分布相对 Oy 轴具有对称性,各电荷元在 O 点的磁场的 x 分量将会相互抵消.所以 O 点的磁场仅有 y 分量,即

$$B=\int\mathrm{d}B_y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mu_0 q\omega}{2\pi^2 R}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0 q\omega}{8\pi R}$$

方向沿 Oy 轴.

(2) 以 Oy 轴为对称各选一对电荷元 $\mathrm{d}q$,当它们以匀角速度 ω 绕 Oy 轴转动时形成一圆电流,其大小为

$$\mathrm{d}I=\frac{\omega}{2\pi}\mathrm{d}q=\frac{\omega}{2\pi}\frac{2q}{\pi R}R\mathrm{d}\theta=\frac{\omega q}{\pi^2}\mathrm{d}\theta$$

该圆电流在 O 点产生的磁场为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 r^2}{2(r^2+y^2)^{3/2}}\mathrm{d}I=\frac{\mu_0\omega q(R\cos\ \theta)^2}{2\pi^2 R^3}\mathrm{d}\theta$$

$\mathrm{d}B$ 方向与 y 轴正向一致.当半圆形弧线以匀角速度 ω 绕 Oy 轴转动时,所有电荷元就形成了半径不等的圆电流,它们在 O 点产生的磁场叠加为

$$B=\int\mathrm{d}B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mu_0\omega q(R\cos\ \theta)^2}{2\pi^2 R^3}\mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0\omega q}{8\pi R}$$

方向沿 Oy 轴.结果与方法(1)一致.

3. 磁通量的计算

磁通量的计算在磁路分析和电磁感应问题中有着十分重要的意义.求通过

均匀磁场中某面积的磁通量,这比较简单.如果是一平面,则只要应用 $\Phi=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}=BS\cos\theta$ 即可;如果是一曲面,则可以考虑是否能用一平面与该曲面构成一闭合曲面,然后应用磁场的高斯定理

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_{\text{曲面}}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_{\text{平面}}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

将通过一曲面的磁通量化为求通过一平面 S 的磁通量:

$$\Phi=\int_{\text{曲面}}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\int_{\text{平面}}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}=-BS\cos\theta$$

这就简单得多.

对一已知电流,须先求出非均匀磁感应强度 $\boldsymbol{B}$,再求通过某面积的磁通量.由于是非均匀磁场的磁通量,必须完成一个积分运算:$\Phi=\int_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S B\cos\theta\mathrm{d}S$.如果所求曲面的这个积分比较困难,我们也可以将该曲面构建一闭合曲面,应用磁场的高斯定理将其转化为其他较为容易的曲面磁通量的计算.现用下面一个例子加以说明.

例 8-4

在通有电流 I 的无限长直导线产生的磁场中,有一个与导线共面的矩形平面线圈 $cdef$,线圈 cd 和 ef 边与长直导线平行,线圈尺寸和其与长导线的距离如图 8-5 所示.现在使平面线圈沿其平面法线方向 $\boldsymbol{e}_n$(平行 z 轴)移动 Δz 距离,求在此位置上通过线圈的磁通量.

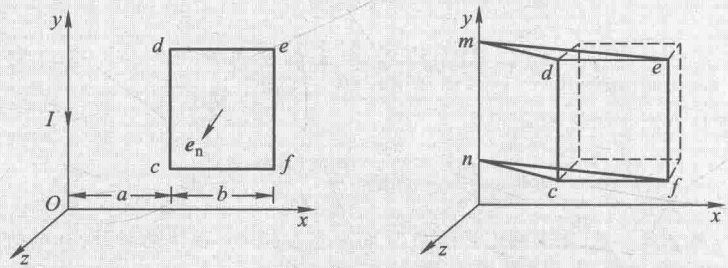


图 8-5　线圈在不同位置时的磁通量求解

(a) 移动前的位置;(b) 移动后的位置

解　如图 8-5 所示,由于无限长直载流导线产生的磁场,其磁感应线是以导线为中心的同心圆,平面 $cdef$ 沿 z 轴正向平行移动 Δz 后,其平面法线不再与磁感应线相切,直接求通过该平面的磁通量比较困难.为了避免这个困难,我们作下面的处理:设 mn 是 cd 和 ef

在 Oy 轴上的正投影，由此可以构建由 $cdef$、$cdmn$、$efnm$ 以及 dem、cfn 组成的一闭合曲面，那么通过这一闭合曲面的磁通量，由磁场的高斯定理可得

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_{cdef}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_{cdmn}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_{efnm}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_{dem}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_{cfn}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

对无限长直载流导线产生的磁场，其磁感应线仅在平行 Ozx 的平面内，因此没有磁通量通过 dem 和 cfn 两个平面，即上式后两项为零.于是

$$\Phi=\int_{cdef}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\int_{cdmn}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}-\int_{efnm}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

由于长直载流导线均与平面 $cdmn$ 和平面 $efnm$ 共面，平面法线与磁感应线相切，所以上式右面两项都不难求得.

已知无限长直载流导线的磁感应强度为 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$，在图 8-5(a)所示的电流方向下，通过 $cdmn$ 面的磁通量为正，通过 $efnm$ 面的磁通量为负，因此

$$\Phi=\int_{cdef}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\int_0^{R_1}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}h\mathrm{d}r+\int_0^{R_2}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}h\mathrm{d}r=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 Ih}{2\pi r}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 Ih}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

式中

$$R_1=\sqrt{\Delta z^2+a^2},\quad R_2=\sqrt{\Delta z^2+(a+b)^2}$$

所以

$$\Phi=\int_{cdef}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\mu_0 Ih}{4\pi}\ln\frac{\Delta z^2+(a+b)^2}{\Delta z^2+a^2}$$

4. 磁力的计算

本章有关磁力计算的问题大致包括以下三方面：

(1) 运动电荷在磁场中受到的洛伦兹力 $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$，或在洛伦兹力作用下电荷的运动规律的讨论.由于这些问题的磁场都是均匀磁场，且运动速度又不是很高(不必考虑相对论效应)，所以无论是运动电荷的受力，还是电荷的运动规律都比较简单，通常都是直接代入公式便能解决.

(2) 载流导线在磁场中受到的安培力 $\boldsymbol{F}=\int_L \mathrm{d}\boldsymbol{F}=\int_L I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$ 计算.

在均匀磁场中，安培力公式的应用变得特别简单，即不管什么形状的载流导线在均匀磁场中所受的安培力的大小的计算，可简化为测量该载流导线的起点与终点的长度 L，然后有 $F=BIL$.

在非均匀磁场中，安培力的计算可按下面步骤进行：

第一步：建立起二维或三维坐标系，写出电流磁场的分布函数.例如在本章的习题中非均匀磁场大都是长直载流导线产生的，因此磁感应强度为 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$，

它的大小与到长直导线的距离 r 成反比.坐标系的一条轴线应建立在产生磁场的长直载流导线方向上.

第二步:在需求受力的载流导线上任取一电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$,写出该电流元的安培力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$.

第三步:分析不同电流元段的受力方向是否相同,如果相同,则有限载流导线的受力在代入磁感应强度 B 后可直接完成

$$F=\int_L \mathrm{d}F=\int_L I\mathrm{d}l B\sin\theta$$

(θ 是 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的夹角);如果电流元段的受力方向不相同,则必须将 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 按坐标分解写出 $\mathrm{d}F_x$、$\mathrm{d}F_y$、$\mathrm{d}F_z$ 三个分量,分别求各分量的积分值

$$F_x=\int \mathrm{d}F_x,\quad F_y=\int \mathrm{d}F_y,\quad F_z=\int \mathrm{d}F_z$$

如果被积函数有多个变量,必须统一到一个变量后才能实施积分.最后得出合力:

$$\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+\boldsymbol{F}_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}$$

现用下面一个例子对上面所述的方法作进一步的说明.

例 8-5

在 Oxy 平面内有一圆心在 O 点半径为 R 的半圆线圈,通以顺时针绕向的电流 I_1.另有一无限长直导线与 y 轴重合,通以电流 I_2,方向向上,如图 8-6 所示,求长直导线距 O 点 $d=2R$ 时半圆线圈所受的磁力.

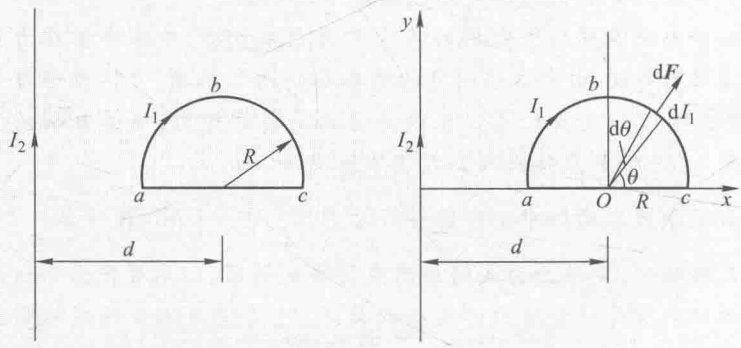


图 8-6　半圆线圈在非均匀磁场的受力

解　通以电流 I_2 的无限长直导线所激发的磁场是

$$B=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi x}$$

方向垂直纸面向里.

把半圆线圈所受的磁力分 ca 直线和 abc 圆弧两段来求解.在直线段 ca 任取一电流元 $I\mathrm{d}x$,它受到的安培力大小为

$$\mathrm{d}F' = BI\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x} I_1 \mathrm{d}x$$

方向沿 y 轴负方向.不难看到 ca 段上任取的电流元所受到的安培力方向都相同,即都沿 y 轴负方向,因此 ca 段的总受力的大小可以直接对上式积分:

$$F' = \int_{d-R}^{d+R} \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x} I_1 \mathrm{d}x = \int_{R}^{3R} \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x} I_1 \mathrm{d}x = \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi} \ln 3$$

对于 abc 圆弧段的受力,由于 abc 圆弧段所处的磁场是非均匀磁场,它并不等于圆弧导线直径 ca 段的受力.仍按非均匀磁场中载流导线安培力计算的步骤进行,在 abc 圆弧段任取一电流元 $I\mathrm{d}l$,它受到的安培力大小为

$$\mathrm{d}F'' = BI\mathrm{d}l = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x} I_1 R\mathrm{d}\theta$$

其方向在纸面内垂直电流元 $I\mathrm{d}l$ 向外.显然,不同的电流元 $I\mathrm{d}l$ 的受力方向是不同的,必须将它按坐标分解为 $\mathrm{d}F''_x$、$\mathrm{d}F''_y$ 两个分量,而且要统一到一个变量后才能进一步作积分运算.由图 8-6 不难得出 $r = d + R\cos\theta$,所以

$$\mathrm{d}F''_x = \mathrm{d}F''\cos\theta = \frac{\mu_0 I_2 I_1 R}{2\pi} \frac{\cos\theta \mathrm{d}\theta}{d + R\cos\theta}$$

$$\mathrm{d}F''_y = \mathrm{d}F''\sin\theta = \frac{\mu_0 I_2 I_1 R}{2\pi} \frac{\sin\theta \mathrm{d}\theta}{d + R\cos\theta}$$

$\mathrm{d}F''_y$ 的积分运算比较容易,可直接得出结果

$$F''_y = \int \mathrm{d}F''_y = \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{R\sin\theta \mathrm{d}\theta}{d + R\cos\theta} = \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi} \int_0^{\pi} -\frac{\mathrm{d}(2R + R\cos\theta)}{2R + R\cos\theta}$$

$$= \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi} \ln 3$$

方向沿 y 轴正方向.

$\mathrm{d}F''_x$ 的积分运算比较困难,但用计算机编程也很容易得到明确的结果(Matlab 的积分程序附在下面):

$$F''_x = \int \mathrm{d}F''_x = \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{R\cos\theta \mathrm{d}\theta}{(2R + R\cos\theta)} = -0.486 \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi}$$

负号表示在 x 方向的受力是沿 x 负方向.由此,abc 圆弧段受到的安培力为

$$\boldsymbol{F}'' = F''_x \boldsymbol{i} + F''_y \boldsymbol{j} = \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi} (\ln 3\boldsymbol{i} - 0.486\boldsymbol{j})$$

计算结果表明,该半圆线圈在 y 方向的受力大小相等而方向相反;在 x 方向有一指向长直导线的受力,所以它在 x 方向有一靠拢长直导线的平动运动.

附:F_x 的 Matlab 积分程序

```
%关于 Fx 的积分
```

```
f='(R*cos(sita)/(2*R+R*cos(sita)))'        %写入被积函数
y=int(f,'sita',0,pi)                       %给出积分结果
```

(3) 载流线圈在磁场中受到的磁力矩 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$,及力矩做功的计算.

在均匀磁场中载流线圈所受的安培力的合力总是等于零,但线圈各段受到的安培力不仅方向不同,而且力的作用线也不总在一条直线上,这就要产生磁力矩,在这个磁力矩作用下线圈只作转动而无平动.磁力矩的计算一般有两种方法:写出各电流元的受力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$,按力矩的定义

$$\mathrm{d}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{F}$$

求出各电流元的力矩后,再求得整个线圈磁力矩

$$\boldsymbol{M}=\int\mathrm{d}\boldsymbol{M}$$

第二种方法是写出线圈的磁矩 $\boldsymbol{m}=NI\boldsymbol{S}$ 后,那么磁力矩

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$$

显然,第二种方法要简便得多,它避免了矢量积分运算.由于磁场是均匀的(本章只讨论了这种情况),所以一定的载流线圈磁力矩大小的变化只取决于线圈平面位置,即线圈平面法线与磁场方向的夹角 θ:

$$M=NISB\sin\theta$$

在均匀磁场中磁力矩做功的计算非常简单,它由载流线圈初末位置的磁通量的差值决定:

$$A=I(\Phi_2-\Phi_1)$$

5. 磁介质磁化问题的计算

关于有介质时的磁场计算在前面已经分析过了,在本章中还有几道习题是关于磁介质的磁感应强度、磁场强度、磁化强度、磁化面电流和磁化率等量相互关系的计算问题.由于本章只涉及均匀、各向同性的磁介质,所以这些问题的处理一般都比较简单,只要掌握磁介质中各量的关系即可.现将本章所涉及的一些典型公式罗列如下:

磁场强度	螺线管(螺绕环):$H=nI$,　　圆柱形(电缆线):$H=\dfrac{I}{2\pi r}$
磁感应强度	螺线管(螺绕环):$B=\mu H=\mu_r\mu_0 nI$,　圆柱形(电缆线):$B=\mu H=\dfrac{\mu_r\mu_0 I}{2\pi r}$
磁化强度	$M=\chi_m H=(\mu_r-1)H$,　$M=\dfrac{B}{\mu_0}-H$, $M=\alpha$,　$M=\dfrac{\lvert\sum\boldsymbol{m}\rvert}{V}$
磁化电流	$I=\alpha l=Ml$　(α 为磁化面电流线密度,$\alpha=M$)

五、自我检测

（一）选择题

1. 如图 8-7 所示，一个电流元 $id\boldsymbol{l}$ 位于直角坐标系原点 O，电流沿 Oz 轴方向，空间点 $P(x,y,z)$ 的磁感应强度沿 Ox 轴的分量是　　[　　]

A. 0　　B. $-\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{iy\mathrm{d}l}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

C. $-\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{ix\mathrm{d}l}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$　　D. $-\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{iy\mathrm{d}l}{(x^2+y^2+z^2)}$

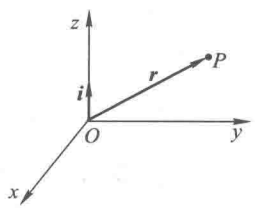


图 8-7

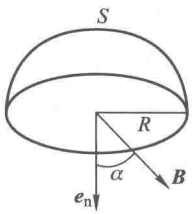


图 8-8

2. 如图 8-8 所示，在磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的均匀磁场中作一半径为 R 的半球面 S，S 边线所在平面的法线方向单位矢量 $\boldsymbol{e}_n$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的夹角为 α，则通过半球面 S 的磁通量为　　[　　]

A. πR^2B　　B. $2\pi R^2B$　　C. $\pi R^2B\sin\alpha$　　D. $\pi R^2B\cos\alpha$

3. 如图 8-9 所示，无限长直导线在 Q 处弯成半径为 r 的圆，当通以电流 I 时，则在圆心 O 点的磁感应强度大小为　　[　　]

A. $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$　　B. $\dfrac{\mu_0 I}{4r}$　　C. 0　　D. $\dfrac{\mu_0 I}{2r}\left(1-\dfrac{1}{\pi}\right)$　　E. $\dfrac{\mu_0 I}{2r}\left(1+\dfrac{1}{\pi}\right)$

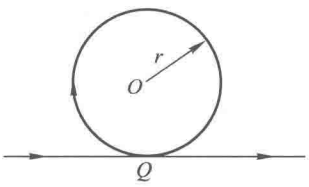


图 8-9

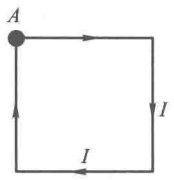


图 8-10

4. 边长为 l 的正方形线圈中通有电流 I，此线圈在 A 点（见图 8-10）产生的

磁感强度B为　　[　　]

A. $\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi l}$　　B. $\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi l}$　　C. $\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi l}$　　D. 以上均不对

5. 有一半径为R的单匝圆线圈,通以电流I,若将该导线弯成匝数$N=2$的平面圆线圈,导线长度不变,并通以同样的电流,则线圈中心的磁感应强度和线圈的磁矩分别是原来的　　[　　]

A. 4倍和1/8　　B. 4倍和1/2　　C. 2倍和1/4　　D. 2倍和1/2

6. 有一无限长通电流的扁平铜片,宽度为a,厚度不计,电流I在铜片上均匀分布,在铜片外与铜片共面,离铜片右边缘为b处的P点(如图8-11所示)的磁感应强度$\boldsymbol{B}$的大小为　　[　　]

A. $\frac{\mu_0 I}{2\pi(a+b)}$　　B. $\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\ln\frac{a+b}{b}$

C. $\frac{\mu_0 I}{2\pi b}\ln\frac{a+b}{b}$　　D. $\frac{\mu_0 I}{\pi(a+2b)}$

7. 面积为S_1和$S_2(=2S_1)$的两圆线圈1、2如图8-12放置,通有相同的电流I.线圈1的电流所产生的通过线圈2的磁通用Φ_{21}表示,线圈2的电流所产生的通过线圈1的磁通用Φ_{12}表示,则Φ_{21}和Φ_{12}的大小关系为　　[　　]

A. $\Phi_{21}=2\Phi_{12}$　　B. $\Phi_{21}>\Phi_{12}$　　C. $\Phi_{21}=\Phi_{12}$　　D. $\Phi_{21}=\frac{1}{2}\Phi_{12}$

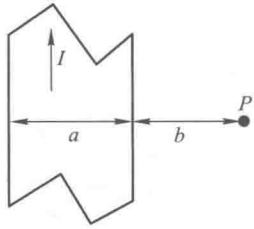


图8-11

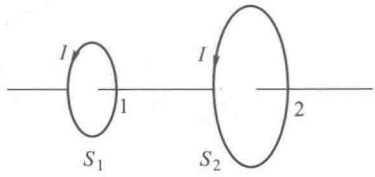


图8-12

8. 如图8-13所示,在磁感应强度为$\boldsymbol{B}$的均匀磁场中,有一圆形载流导线,a、b、c是其上三个长度相等的电流元,则它们所受安培力大小的关系为　　[　　]

A. $F_a>F_b>F_c$　　B. $F_a<F_b<F_c$　　C. $F_b>F_c>F_a$　　D. $F_a>F_c>F_b$

9. 有一矩形线圈$AOCD$,通以如图8-14所示方向的电流I,将它置于均匀磁场$\boldsymbol{B}$中,$\boldsymbol{B}$的方向与x轴正方向一致,线圈平面与x轴之间的夹角为α,$\alpha<90°$.若AO边在y轴上,且线圈可绕y轴自由转动,则线圈将　　[　　]

A. 转动使α角减小　　B. 转动使α角增大

C. 不会发生转动　　D. 如何转动尚不能判定

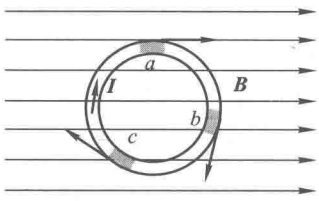


图 8-13

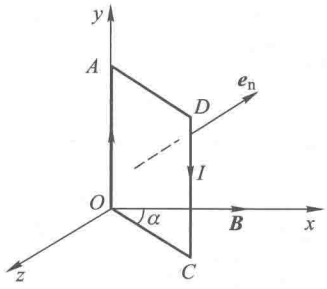


图 8-14

10. 关于恒定电流磁场的磁场强度 $\boldsymbol{H}$，下列几种说法中哪个是正确的？

[　　]

A. $\boldsymbol{H}$ 仅与传导电流有关

B. 若闭合曲线内没有包围传导电流，则曲线上各点的 $\boldsymbol{H}$ 必为零

C. 若闭合曲线上各点 $\boldsymbol{H}$ 均为零，则该曲线所包围传导电流的代数和为零

D. 以闭合曲线 L 为边缘的任意曲面的 $\boldsymbol{H}$ 通量均相等

（二）填空题

1. 在一根通有电流 I 的长直导线旁，与之共面地放着一个长、宽各为 a 和 b 的矩形线框，线框的长边与载流长直导线平行，且二者相距为 b，如图 8-15 所示.在此情形中，线框内的磁通量 Φ=_____.

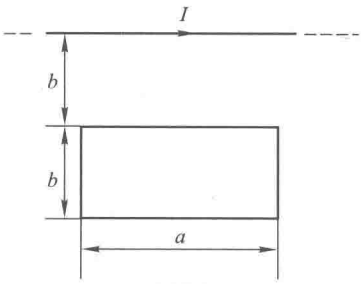


图 8-15

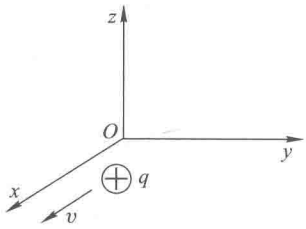


图 8-16

2. 如图 8-16 所示，一正电荷在磁场中运动，已知其速度 $\boldsymbol{v}$ 沿 Ox 轴正向.（1）如果电荷不受力，则磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的方向_____.（2）如果受力的方向沿 Oz 轴方向.且力的数值为最大，则磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的方向为_____.（3）如果受力的方向沿 Oz 轴方向，且力的数值为最大值的一半，则磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的方向为_____.

3. 如图 8-17 所示,半圆形线圈(半径为 R)通有电流 I.线圈处在与线圈平面平行向右的均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中.线圈所受磁力矩的大小为_____,方向为_____.把线圈绕 OO' 轴转过角度_____时,磁力矩恰为零.

4. 如图 8-18 所示,在无限长直载流导线的右侧有面积为 S_1 和 S_2 的两个矩形回路.两个回路与长直载流导线在同一平面,且矩形回路的一边与长直载流导线平行.则通过面积为 S_1 的矩形回路的磁通量与通过面积为 S_2 的矩形回路的磁通量之比为_____.

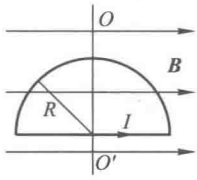


图 8-17

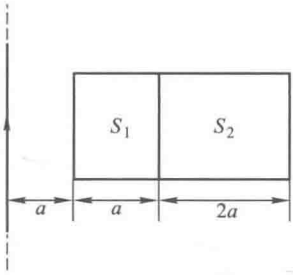


图 8-18

5. 半径分别为 R_1 和 R_2 的两个半圆弧与直径的两小段构成的通电线圈 $abcda$(如图8-19所示),放在磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的均匀磁场中,$\boldsymbol{B}$ 平行线圈所在平面.则线圈的磁矩为_____,线圈受到的磁力矩为_____.

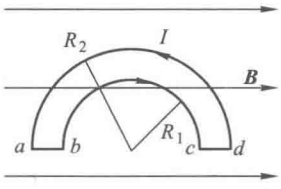


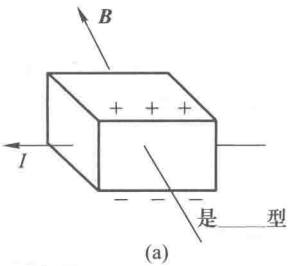
图 8-19

6. 在磁感应强度 $B=0.02$ T 的匀强磁场中,有一半径为10 cm的圆线圈,线圈磁矩与磁感线同向平行,回路中通有 $I=1$ A 的电流.若圆线圈绕某个直径旋转 180°,使其磁矩与磁感线反向平行,且线圈转动过程中电流 I 保持不变,则外力的功_____.

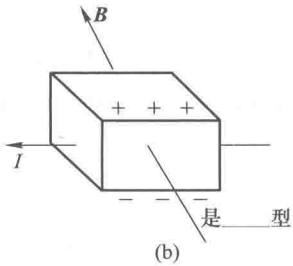
7. 有半导体通以电流 I,放在均匀磁场 B 中,其上下表面积累电荷如图 8-20 所示.试判断它们各是什么类型的半导体?

8. 长直电缆由一个圆柱导体和一共轴圆筒状导体组成,两导体中有等值反向均匀电流 I 通过,其间充满磁导率为 μ 的均匀磁介质.介质中离中心轴距离为 r 的某点处的磁场强度的大小 $H=$_____,磁感应强度的大小 $B=$_____.

9. 图 8-21 为三种不同磁介质的 B-H 关系曲线,其中虚线表示的是 $B=\mu_0 H$ 的关系.说明 a、b、c 各代表哪一类磁介质的 B-H 关系曲线:



(a)



(b)

图 8-20

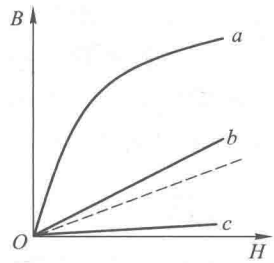


图 8-21

a 代表_____的 $B-H$ 关系曲线.

b 代表_____的 $B-H$ 关系曲线.

c 代表_____的 $B-H$ 关系曲线.

10. 有很大的剩余磁化强度的软磁材料不能做成永磁体,这是因为软磁材料_____,如果做成永磁体,它的磁性将_____.

(三) 计算题

1. 如图 8-22 所示,半径为 R,电荷线密度为 $\lambda(\lambda>0)$ 的均匀带电的圆线圈,绕圆心且与圆平面垂直的轴以角速度 ω 转动,求:

(1) 圆心 O 处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_0$;

(2) 轴线上任一点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的大小及其方向.

2. 在半径为 R 的长直金属圆柱体内部挖去一个半径为 r 的圆柱,形成一圆柱形空腔,圆柱体与圆柱形空腔两者轴线平行,其间距为 $a(a>r)$,如图 8-23 所示,在此导体上通以电流 I,电流在截面上均匀分布,方向平行于轴线.求:

(1) 圆柱空腔轴线上磁感应强度;

(2) 空腔中任一点的磁感应强度.

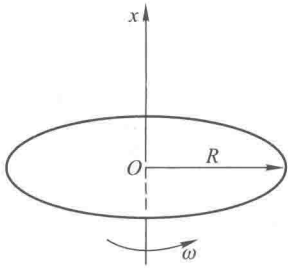


图 8-22

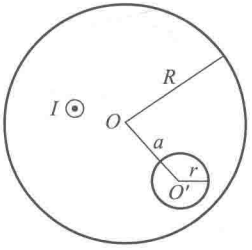


图 8-23

3. 半径为 R 的半圆线圈 ACD 通有电流 I_2,置于电流为 I_1 的无限长直线电流的磁场中,直线电流 I_1 恰过半圆的直径,两导线相互绝缘.求半圆线圈受到长

直线电流 I_1 的磁力.

4. 一铁环中心线周长 $l=30$ cm,横截面 $S=1.0$ cm^2,环上紧密地绕有 $N=300$ 匝线圈.当导线中电流 $I=32$ mA 时,通过环截面的磁通量 $\Phi=2.0\times10^{-5}$Wb.试求铁芯的磁化率 χ_m.

六、问题讨论

1. 安培环路定理对载流长直螺线管外磁场的应用

如果以载流长直螺线管轴线为中心作一包围螺线管的圆,因载流长直螺线管外磁感应强度 $\boldsymbol{B}=0$,那么以该圆为积分回路的线积分 $\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$,但从图 8-24看长直螺线管的电流 I 通过了以积分回路为边线的面,所以按安培环路定理似乎有 $\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0 I$,如何解释这个矛盾?

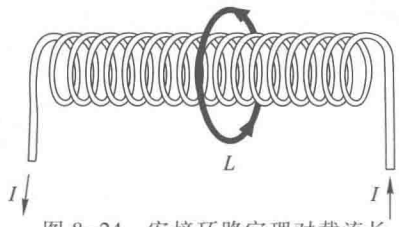


图 8-24 安培环路定理对载流长直螺线管外磁场的应用

首先我们应该肯定安培环路定理 $\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\sum I$ 是不容怀疑的,问题是我们应该如何理解与应用安培环路定理于所论的情况中.对所论的问题我们将安培环路定理写作

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\int_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$\boldsymbol{S}$ 为以积分回路为边线的圆面积,它作为一个矢量,方向沿螺线管轴线;$\boldsymbol{j}$ 是穿过该圆面积的电流密度矢量.显然,在该圆面内只有螺线管导线中有电流通过,其电流密度矢量的方向与导线一致,因此

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\int_{S'} j\mathrm{d}S\cos\theta$$

S' 是 S 中导线部分的面积,θ 则是 $\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{j}$ 之间的夹角.对于一个长直螺线管,我们总是假定它是密绕的,因此导线的走向几乎与长直螺线管轴线垂直,即 $\theta\approx\dfrac{\pi}{2}$,$\cos\theta\approx0$,所以按安培环路定理有

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\int_{S'} j\mathrm{d}S\cos\theta=0$$

与载流长直螺线管外因磁感应强度 $\boldsymbol{B}=0$ 而得 $\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$ 的结果是一致的,并不矛盾.

2. 洛伦兹力做功吗?

一方面,洛伦兹力恒与运动电荷的速度相垂直,因此它对运动电荷不做功;另一方面,我们又讲过安培力是洛伦兹力的宏观表现,但安培力在使导线

运动时却可能做功;在第九章还将进一步说明与动生电动势相应的非静电力是洛伦兹力,而电动势的定义却是移动单位电荷非静电力的功.这两个问题好像都和洛伦兹力不做功有矛盾,而矛盾的焦点集中表现在:洛伦兹力到底做功不做功?

为了得到清楚的答案,下面对图 8-25 中导线 ab 在磁场中运动时,导线内的电子所受的洛伦兹力作全面的分析.当导线 ab 中通有电流时,其中电子沿导线向上作定向漂移运动,其漂移速度为 $\boldsymbol{v}_1$,此时导线因受安培力的作用向右运动,电子又有一个随导线一起运动的速度 $\boldsymbol{v}_2$.电子的合速度为 $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$,它受到的洛伦兹力为(见图 8-26)

$$\boldsymbol{F}=e(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)\times\boldsymbol{B}$$

此力可分为两部分:$\boldsymbol{F}_1=e\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{B}$,有垂直导线与导线的运动方向相同的方向,对电子做功;$\boldsymbol{F}_2=e\boldsymbol{v}_2\times\boldsymbol{B}$,有沿导线且与 $\boldsymbol{v}_1$ 相反的方向,对电子做负功.可以证明,两分力对电子所做的总功为零,这就是说,洛伦兹力总体来说是不做功的.但是,从宏观上看,$\boldsymbol{F}$ 的两个分力却起着不同的作用,$\boldsymbol{F}_1$ 在宏观上表现为导线 ab 受到的安培力;$\boldsymbol{F}_2$ 表现为产生动生电动势的非静电性力,它恒与电源电动势的方向相反,即在第九章所说的反电动势.综上所述,"安培力(磁力)的做功"和"动生电动势的存在"是一对共存的矛盾,两者之间的联系与能量守恒定律紧密地结合着.在发电机中,动生电动势处于对外表现的主要地位(供应电能),但它与"磁力做负功,向外界索取机械能"紧密地关联着.在电动机中,磁力做功处于主要地位(供应机械能),但它与"动生电动势的存在,向电源索取电能"分不开.对电磁现象之间的矛盾关系,要善于分析和掌握,并加以利用.

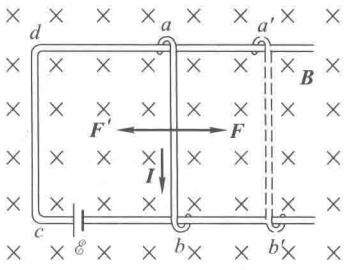


图 8-25　通电导线在磁场中的受力及运动

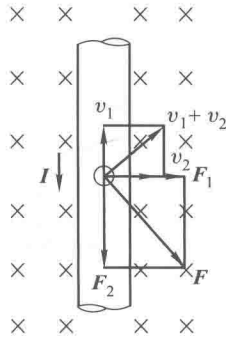


图 8-26　洛伦兹力不做功

3. 一个尚未解决的问题——磁单极子是否存在?

本章在讨论磁场的高斯定理时指出,磁场的高斯定理与静电场的高斯定理是不对称的,在此后讲述安培环路定理时也提到了磁场与电场的不对称性.对这

种不对称的解释是自然界存在独立的正负电荷,而并没有单个磁荷——磁单极子(magnetic monopole).但科学家寻找磁单极子的努力一直没有停止过.那么自然界是否存在单个磁荷——磁单极子呢?

1905 年,爱因斯坦建立相对论提出的相对性原理揭示的对称性称为洛伦兹对称性或洛伦兹不变性.而对称性是现代物理的主角,根据对称性分析探讨物理定律的形式已成为现代物理研究的一条必由之路.

在电磁学中,看上去只有磁场能量与电场能量是比较对称的,磁场能量密度与电场能量密度分别是

$$w_m=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}=\frac{1}{2}BH,\quad w_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}DE$$

或者在真空下磁场与电场是对称的,此时麦克斯韦方程组的形式为

电场的高斯定理:$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$

磁场的高斯定理:$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$

修正后的安培环路定理:$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$

法拉第电磁感应定律:$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$

但在一般情况下麦克斯韦方程组就很不对称了.试想,如果自然界存在磁单极子,那么麦克斯韦方程组将会有怎样的修改呢?从对称性出发,应该得到下表右面的修改方程组:

麦克斯韦方程组(不存在磁单极子)	麦克斯韦方程组(存在磁单极子)
电场的高斯定理:$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=q$	电场的高斯定理:$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=q$
磁场的高斯定理:$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$	磁场的高斯定理:$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=g$
修正后的安培环路定理: $\int_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$	修正后的安培环路定理: $\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$
法拉第电磁感应定律: $\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$	电场的环路定理: $\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_S \boldsymbol{j}_g\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$

在上表右边方程中的 g 是磁单极子的“磁荷量”，磁荷的运动就是“磁流”，可以用 I_g 来表示，上表的 $\boldsymbol{j}_g$ 是相应的磁流密度.如果用电场线来表示电场，磁场线来表示磁场，那么此时也有对称的图像了(如图 8-27 所示).

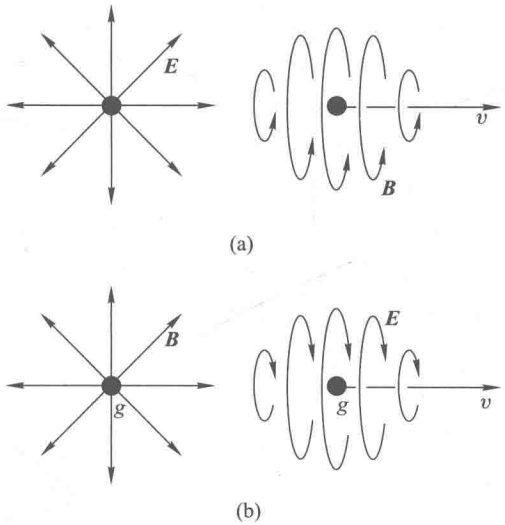


图 8-27　电荷和磁荷

(a)电荷产生电场以及运动时产生磁场；(b)磁荷产生磁场以及运动时产生电场

当然，自然界是否存在磁单极子并非仅仅为了满足麦克斯韦方程组对称性的需要.事实上早在相对论创立之前麦克斯韦就已建立了经典电动力学的这组方程，而且证明它们是满足洛伦兹不变性的(现代物理学拒绝不满足洛伦兹不变性的相对性原理).从这个角度看麦克斯韦方程组是没有必要修正的.但是，1931 年著名的英国物理学家狄拉克首先从分析量子系统波函数相位不确定性出发，得出磁单极子存在的条件，他预言磁单极子是可以独立存在的.狄拉克曾最先提出了反物质学说和基本物理常量随时间变化学说，其中反物质学说已在实验上得到证实.由于他对量子力学发展所做出的杰出贡献，曾荣获 1933 年诺贝尔物理学奖.此后，许多著名的物理学家也提出过多种学说，如物理学家费米、美籍华裔物理学家杨振宁等都从理论上探讨过磁单极子，并且认为它的存在是可能的.当今磁单极子的存在与否已影响到物理学许多重大理论的发展.例如，狄拉克用磁单极子的存在解释了电荷量子化的问题，在如何理解联系强相互作用和弱相互作用的理论上起着十分重要的作用；20 世纪 70 年代以后建立起来的大统一理论以及早期宇宙的研究都要求存在磁单极子.

但是,长期以来人们对地球古代大陆岩石和海洋底岩石、从天外降落到地球上的各种陨石、从月球带回的岩石等进行观测都没有发现磁单极子的踪迹.人们还设想在宇宙射线中可能含有磁单极子,或者宇宙射线粒子与高空大气原子、离子、分子等发生碰撞时会产生磁单极子,于是曾利用高空气球和空间飞行器上的粒子探测器探测磁单极子,但也没有发现磁单极子行迹的确切认证.后来在实验室中利用高灵敏度和高磁屏蔽的超导量子干涉仪(SQUID)的磁强计进行了大量磁单极子的探测实验,也同样没有观测到磁单极子存在的令人信服的结果.几十年来经过多方面大量的实验观测,虽有过几次可能是磁单极子的观测报道,但都不能得到重复的证实.可以说迄今为止所有寻找磁单极子的实验都失败了.

最近(2003 年),一组由中国、瑞士、日本等多国的科学家组成的研究小组报告说,他们在一种被称为铁磁晶体的物质中观察到反常霍耳效应,并且认为只有假设存在磁单极子才能解释这种现象. 这是发现了磁单极子存在间接证据的最新进展.一些科学家认为,磁单极子之所以不能被发现,是因为它们成对结合得太紧密了,现有的高能加速器产生的高能粒子尚不能把它们轰开.由上看来,寻找与证实磁单极子的存在不是件简单容易的事情,但因它涉及磁学、电磁对称、宇宙早期演化、微观基本粒子结构和大一统理论等多方面的问题,科学家们不会轻易放弃,还会从实验观测和理论研究两方面继续努力,以期得到更明确的结果.

第九章

电磁感应　电磁场理论

一、学习要求

1. 掌握法拉第电磁感应定律,会用楞次定律判断感应电动势和感应电流的方向.

2. 理解产生动生电动势的原因,掌握动生电动势的计算方法.

3. 理解感生电动势和感生电场的概念,并能计算简单情况下的感生电动势和感生电场.

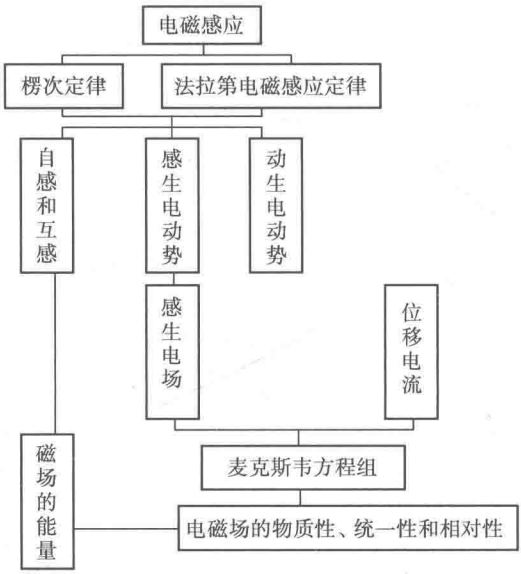
4. 理解自感和互感的物理意义并能计算简单回路的自感和互感系数.

5. 理解磁场能量和磁场能量密度公式.

6. 理解位移电流的概念,了解麦克斯韦方程组的积分形式及其物理意义.

7. 了解电磁场的物质性、统一性和相对性.

二、知识框图



三、内容导读

法拉第电磁感应定律和感生电场、位移电流的概念是本章最重要的核心内容,可以说其他内容都是围绕它们而展开的.因此学习本章应在掌握法拉第电磁感应定律的基础上,学会分析与计算各种情况下的感应电动势;同时,深刻领会感生电场和位移电流的物理概念,以及它们在创建完整的麦克斯韦电磁理论的重大意义.

1. 电磁感应的基本规律

电磁感应的基本规律包括了法拉第电磁感应定律和楞次定律.法拉第电磁

感应定律是各种电磁感应现象的总结和数学描述;楞次定律则提出了判断感应电流方向的法则.

(1) 法拉第电磁感应定律:当穿过回路所包围面积的磁通量发生变化时,在这回路上将要产生感应电动势,感应电动势$\mathscr{E}_i$与穿过回路的磁通量对时间的变化率成正比.在国际单位制中,其数学表达式为

$$\mathscr{E}_i=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}t} \tag{9-1}$$

(2) 楞次定律:在闭合回路中感应电流的方向,总是使它自己激发的磁场的磁通量反抗引起感应电流的磁通量的变化,这即是法拉第电磁感应定律中负号的物理意义.

法拉第电磁感应定律指明了产生感应电动势的条件是通过回路所围面积中的磁通量发生变化,而磁通量发生变化的原因是多种多样的,但从本质上讲,可归纳为两类:一类是由于回路形状或方位发生变化而使磁通量发生变化的,称为动生电动势(motional emf);另一类是由磁场的变化而引起磁通量发生变化的,称为感生电动势(induced emf).因此,在研究感应电动势时要学会分析与利用不同类型感应电动势的特征和计算方法.

2. 动生电动势

动生电动势可以形象地说成是由"导线切割磁感应线"而产生,因为导线切割磁感应线的运动是一种可以使回路磁通量增加或减少的方式."切割"仅能说可以产生动生电动势,但不能有定量的描述.动生电动势的定量描述为:一段长为L的导体棒,当以速度$\boldsymbol{v}$在磁场中运动时,导体棒上产生的动生电动势

$$\mathscr{E}_{ab}=\int_L(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{9-2}$$

显然,导体棒沿磁感应线而运动,即$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=0$,这时没有"切割"运动,在导体棒上将不产生动生电动势;仅当$|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}|=vB\sin\alpha\neq0$时才有可能产生动生电动势.

按第八章关于电动势的一般定义可知,电动势的出现必定有一个非静电力做功.所以

$$\mathscr{E}_{ab}=\int\boldsymbol{E}_k\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_L(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

可见,产生动生电动势的非静电力是洛伦兹力($\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$是作用在单位电荷上的洛伦兹力),此时非静电力场强是

$$\boldsymbol{E}_k=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{9-3}$$

动生电动势通过洛伦兹力将机械能转化为电能.洛伦兹力对带电粒子不做功,但可以传递能量,外力克服洛伦兹力做功转化为感应电流的能量.

3. 感生电动势和感生电场

(1) 感生电动势:当导体回路固定不动,由于磁场变化引起磁通量的变化,导致在导体回路中产生的感应电动势,其表示式为

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\int_S\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9-4}$$

(2) 感生电场是为了解释产生感生电动势的非静电力而提出的重要概念.麦克斯韦认为,变化的磁场在其周围激发了一种电场——感生电场,记作 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}$.那么回路内的感应电动势即是感生电场力做功的结果:

$$\mathscr{E}=\oint_L\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_S\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9-5}$$

感生电场的产生与空间是否有导体无关,只要有变化的磁场,$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}$便存在.感生电场的电场线是闭合曲线,上式反映了其环流不为零的事实.

本章仅讨论了一种特别情况的感生电场:磁场 $\boldsymbol{B}$ 均匀地局限在半径为 R 的圆柱体内部,且随时间的变化率为已知时,圆柱体内外的感生电场分别为

$$E_{\mathrm{i}}=-\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\quad(r<R) \tag{9-6a}$$

$$E_{\mathrm{i}}=-\frac{R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\quad(R\geqslant r) \tag{9-6b}$$

(3) 感生电场与静电场的异同:感生电场与静电场都对电荷有作用力,但它们是性质完全不同的电场,其不同之处表现在:静电场由静止电荷激发,其环流为零$\left(\oint_L\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0\right)$,是有源无旋场,可以引入电势来描述;感生电场由变化的磁场激发,其环流不为零,是无源有旋场,无法引入相应的标量势函数.

4. 自感应和互感应

磁场是电流激发的.当回路中的电流发生变化时,磁场也将随之变化,引起了通过自身回路或邻近回路的磁通量的变化,从而产生了自感电动势或互感电动势.由此可见,自感电动势和互感电动势就其本质来说也是一种感生电动势,但它的计算不是由磁场的变化率来表示,而是直接用电流的变化率,以及表征回路性质的自感系数或互感系数来表示.计算自感电动势和互感电动势的关键在于弄清自感系数和互感系数.

(1) 自感电动势和自感系数:由于导线回路中的电流变化,而在自身回路中引起感应电动势的现象称为自感应,相应的电动势称为自感电动势.自感电动势的大小正比于电流的变化率,可表达为

$$\mathscr{E}_L=-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{9-7}$$

比例系数 L 称为回路的自感系数,简称自感,它与回路的几何形状以及周围的磁

介质有关.在周围没有铁磁介质的情况下,如果回路的几何形状保持不变,那么回路的自感系数是一常量,可定义为

$$L=\frac{\Phi_N}{I} \tag{9-8}$$

即通过回路所围面积的磁通量与回路中的电流的比值.

几种典型回路的自感系数计算公式:

空心长直螺线管	$L=\mu_0\frac{N^2}{l}\pi R^2$
环形线圈(螺绕环)	$L=\frac{\mu N^2 S}{2\pi R}$ (设 R 为环形线圈的平均半径,且环形线圈的内外半径 R_1、R_2≫(R_2-R_1),S 为环形线圈的截面积)
单位长度的同轴电缆	$L=\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$

(2) 互感电动势和互感系数:当一个回路中的电流发生变化时,在其周围激发出变化的磁场,从而引起相邻回路内产生感生电动势的现象称为互感应,相应的电动势称为互感电动势.一个回路中的互感电动势的大小正比于激发磁场的回路电流的变化率,可表达为

$$\mathscr{E}=-M\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{9-9}$$

比例系数 M 称为两回路的互感系数,简称互感,它与两回路的几何形状、相互位置以及周围的磁介质有关.在周围没有铁磁介质的情况下,如果两回路的几何形状保持及相互位置保持不变,那么回路的互感系数是一常量,可定义为

$$M=\frac{\Phi_{21}}{I_1}=\frac{\Phi_{12}}{I_2} \tag{9-10}$$

即通过任一回路所围面积的磁通量与另一回路中的电流的比值.

(3) 互感系数与自感系数的关系:两个自感系数分别为 L_1 和 L_2 的回路,在一般情形下它们的互感系数为

$$M=k\sqrt{L_1L_2} \tag{9-11}$$

其中 k 称为耦合因数,根据两个回路之间磁耦合松紧情况有 $0\leqslant k\leqslant 1$.

5. 磁场的能量

磁场与电场一样具有能量,因此理解磁场的能量,学习磁场能量的计算方法,都可以与电场能量相类比.

(1) 自感线圈中的磁场能量:一个自感系数为 L 的载流线圈所具有的磁场能量为

$$W_m=\frac{1}{2}LI^2 \tag{9-12}$$

(2) 任意磁场的能量:磁场中体积为 V 的磁场能量为

$$W_m=\int_V w_m\mathrm{d}V=\int_V\frac{1}{2}BH\mathrm{d}V \tag{9-13}$$

式中 w_m 为磁场的能量密度:

$$w_m=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}=\frac{1}{2}\mu H^2=\frac{1}{2}BH \tag{9-14}$$

(3) 磁场的能量与电场能量公式的比较:

磁　　场	电　　场
自感线圈中的磁场能量:$W_m=\frac{1}{2}LI^2$	电容器中的电场能量:$W_e=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$
磁场能量密度:$w_m=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}=\frac{1}{2}BH$	电场能量密度:$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}DE$
一定体积中的磁场能量: $W_m=\int_V w_m\mathrm{d}V=\int_V\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\mathrm{d}V$	一定体积中的电场能量: $W_e=\int_V w_e\mathrm{d}V=\int_V\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V$

(4) 由于铁磁质具有磁滞现象,上述磁能公式不适用于有铁磁质的磁场;对于两个有互感耦合的载流回路,它们的磁场能量除了各自的自感磁能外,还要加上互感磁能,所以总磁能为

$$W_m=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2\pm MI_1I_2 \tag{9-15}$$

式中,互感磁能的正、负对应两互感回路中磁通式相互加强或相互减弱的情况.

(5) 真空中的一个电荷在其周围激发了静电场.当观察者相对电荷运动时,除了电场外,同时还观察到了磁场的存在.磁场的存在表明了磁能的存在.在力学中,一个具有一定质量的物体周围建立起了引力场,具有引力势能.当物体相对观察者运动时,该物体不仅有势能,而且由于相对速度的出现物体还具有动能.比较这两种情况可以发现,即电荷的电场能量与物体的势能相当,而磁能的存在和动能的出现都是由于观察者与观察客体(电荷、质量)的相对运动而产生的.

6. 位移电流

电磁感应现象是电磁学中的最重大发现之一,它揭示了电和磁的相互联系与转化规律的重要方面,即变化的磁场能激发涡旋电场.很对称地,麦克斯韦提

出了位移电流的重要概念，揭示了这个规律的另一面，即变化的电场也能激发磁场.涡旋电场与静电场是两类不同的电场，前面已剖析了它们的异同特征；位移电流与传导电流也是两类不同的电流，在这里也要弄清楚位移电流与传导电流的异同特征.

（1）位移电流：通过电场中某一面积的电位移通量对时间的变化率等效为一电流，称为位移电流，可写为

$$I_{\mathrm{d}}=\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} \tag{9-16}$$

它仅在激发磁场方面与传导电流等效.在电流的热效应方面，传导电流引起的热效应遵从焦耳-楞次定律，而位移电流在真空中没有热效应，在介质中虽有热效应（因电介质的反复极化而引起），但不遵从焦耳-楞次定律.

（2）位移电流密度：空间任意一点处电位移矢量对时间的变化率，可写为

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{d}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}t} \tag{9-17}$$

由 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$ 可知，位移电流的本质是电场以及电介质的极化随时间的变化率，因此位移电流与电荷的宏观移动无直接关系，但在有电介质时，与极化电荷的微观运动有关.进一步说，位移电流可存在于真空、电介质和导体中.在任何地方，变化的电场都可以表示为相应的位移电流；而传导电流因涉及电荷的宏观移动，多数情况下只存在于导体中.

（3）全电流安培环路定理：传导电流 I_{c} 和位移电流 I_{d} 可以共存，二者之代数和称为全电流，即 $I_{\text{全}}=I_{\mathrm{c}}+I_{\mathrm{d}}$.引入全电流概念后，安培环路定理修改为

$$\oint\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum(I_{\mathrm{c}}+I_{\mathrm{d}})=\int\boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9-18}$$

说明传导电流和位移电流都能激发涡旋磁场.

7. 麦克斯韦方程组的积分形式

从第七章到第九章，我们研究了静电场（表示为 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{D}_1$）和恒定磁场（表示为 $\boldsymbol{B}_1$、$\boldsymbol{H}_1$）以及变化的磁场激发的涡旋电场（表示为 $\boldsymbol{E}_2$、$\boldsymbol{D}_2$）和变化的电场激发的涡旋磁场（表示为 $\boldsymbol{B}_2$、$\boldsymbol{H}_2$），那么，在一般情况下电场的电场强度和电位移矢量，以及磁场的磁感应强度和磁场强度是上述两种不同场的矢量和，可以分别表示为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2,\quad \boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{D}_2$$
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2,\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2$$

麦克斯韦方程把这一般情况下的电磁规律归纳为下面四个方程组，称为麦克斯韦方程组，它们是宏观电磁场理论的基础，现列于下表的左部：

麦克斯韦方程组	静电场的和恒定磁场的基本性质
电场的高斯定理： $\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum q=\int_V \rho \mathrm{d}V$	静电场的高斯定理： $\oint_S \boldsymbol{D}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum q=\int_V \rho \mathrm{d}V$
磁场的高斯定理：$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$	恒定磁场的高斯定理：$\oint_S \boldsymbol{B}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$
修正后的安培环路定理： $\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=I_c+I_d=\int_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$	恒定磁场的安培环路定理： $\oint_L \boldsymbol{H}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=I=\int_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$
法拉第电磁感应定律： $\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$	静电场的环路定理： $\oint_L \boldsymbol{E}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$

如果将上述麦克斯韦方程组与静电场的 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{D}_1$ 和恒定磁场的 $\boldsymbol{B}_1$、$\boldsymbol{H}_1$ 所遵从的高斯定理和环路定理作一比较，可以发现主要差别在后两个方程上.这说明涡旋电场与位移电流的引入是麦克斯韦建立电磁场方程组时最重要的突破和贡献，它系统而完整地概括了电磁场的基本性质和规律，为建立统一的电磁场理论奠定了基础，且预言了电磁波的存在，揭示了光的电磁本性.

8. 电磁场的物质性、相对性和统一性

(1) 电磁场是物质存在的一种形态，具有一切(实物)物质的基本特性，如具有一定的质量、能量和动量等.

电磁能量密度：

$$w=\frac{1}{2}(\boldsymbol{D}\cdot \boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\cdot \boldsymbol{H}) \tag{9-19}$$

电磁场单位体积的质量：

$$m=\frac{w}{c^2}=\frac{1}{2c^2}(\boldsymbol{D}\cdot \boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\cdot \boldsymbol{H}) \tag{9-20}$$

电磁场单位体积的动量：

$$p=\frac{w}{c} \tag{9-21}$$

当然，电磁场作为一种特殊的物质，与实物物质也有一定的区别，例如几个不同的电磁场可以同时叠加而占据同一空间，但不同的几个粒子却不能同时占据同一空间.又如场对物质的作用不是场的整体而是其局部起作用，说明实物的分布有集中性，而场的分布有分散性.

(2) 在电磁场的相对性和统一性问题的讨论中常常涉及在不同的惯性参考

系中考察电场和磁场，比如有一电荷，那么相对于这个电荷为静止的观察者发现电荷周围只存在静电场.但是对于相对于这个电荷作匀速直线运动的观察者将发现在电荷周围既有电场又有磁场.到底在电荷周围存在着什么？回答是明确的——存在着电磁场.简单地说，这就是电磁场的相对性和统一性.

实际上，电场和磁场是相互关联的两种场，它们在不同的惯性参考系中有不同的量值，可以互相变换；它们所满足的麦克斯韦方程组，在洛伦兹变换下保持不变，说明电磁场是统一的整体，电磁场量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是描述电磁场所需的分量，是相对的；电磁规律在所有的惯性系中是等同的、绝对的；

四、解题指导

1. 感应电动势的计算

感应电动势按照其产生的特点可分为动生电动势、感生电动势、自感电动势和互感电动势，本章有大量的习题涉及它们的求解问题.现对它们的求解方法作一剖析.

(1) 法拉第电磁感应定律的应用

应用法拉第电磁感应定律求感应电动势的关键是求出回路内磁通量的表达式，然后对时间求导得感应电动势的大小，再按感应电动势的正负与回路的绕行方向的规则或用楞次定律判断感应电动势的方向.

法拉第电磁感应定律是求解感应电动势的基础.无论是何种形式的感应电动势，在大多数情况下都可以直接应用法拉第电磁感应定律求解.特别是导体不仅在磁场中有运动，而且磁场也在发生变化时，用法拉第电磁感应定律式求解较方便，下例就是这种情况.

例 9-1

如图 9-1(a)所示，有一弯成 θ 角的金属架 COD 放在磁场中，磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 的方向垂直于金属架 COD 所在平面.一导体杆 MN 垂直于 OD 边，并在金属架上以恒定速度 $\boldsymbol{v}$ 向右滑动，$\boldsymbol{v}$ 与 MN 垂直.设 $t=0$ 时，$x=0$，求磁场为非均匀的时变磁场 $B=Kx\cos\omega t$ 情形下，框架内的感应电动势 $\mathscr{E}$.

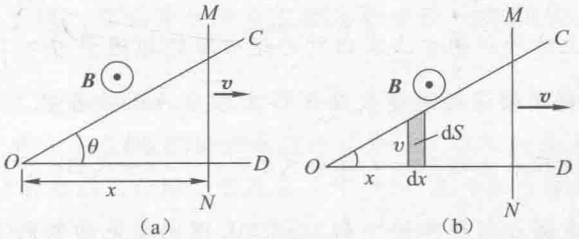


图 9-1　在非均匀磁场中运动的导体杆

解 根据题设,导体杆 MN 在磁场中运动,在它上面有动生电动势;同时,磁场也在发生变化,即使导体杆不动,OMN 回路中也会有感生电动势.那么无论是导体杆的运动使回路的面积扩大,还是磁场的变化都使回路中的磁通量发生改变,如果我们能求出任一时刻回路的磁通量,那么用法拉第电磁感应定律式直接求解就非常方便.

取 $O\to N\to M\to O$ 为回路的绕行正方向.在 ONM 回路内取如图 9-1(b)所示的小面积,它的磁通量为

$$\mathrm{d}\Phi = B\mathrm{d}S = By\mathrm{d}x, \quad y = x\tan\theta$$

$$\mathrm{d}\Phi = Bx\tan\theta\mathrm{d}x = Kx^2\cos\omega t\tan\theta\mathrm{d}x$$

在 OMN 回路内的磁通量为

$$\Phi = \int \mathrm{d}\Phi = \int_0^x Kx^2\cos\omega t\tan\theta\mathrm{d}x = \frac{1}{3}Kx^3\cos\omega t\tan\theta = \frac{1}{3}Kv^3t^3\cos\omega t\tan\theta$$

由法拉第电磁感应定律的此时刻的感应电动势是

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3}K\omega x^3\sin\omega t\tan\theta - Kx^2v\cos\omega t\tan\theta = Kv^3\tan\theta\left(\frac{1}{3}\omega t^3\sin\omega t - t^2\cos\omega t\right)$$

从所得的结果看,第一项正是感生电动势

$$\mathscr{E}_1 = -\int\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_0^x Kx\omega\sin\omega t(x\tan\theta)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}Kx^3\omega\sin\omega t\tan\theta$$

$$= \frac{1}{3}Kv^3t^3\omega\sin\omega t\tan\theta$$

第二项正是动生电动势.因为在 t 时刻,当导体杆 MN 以恒定速度 $\boldsymbol{v}$ 运动到图示位置时的长度为 $L = x\tan\theta$,而且它上面的磁场是均匀的,所以动生电动势为

$$\mathscr{E}_2 = -vBL = -vKx\cos\omega t(x\tan\theta) = -Kv^3t^2\cos\omega t\tan\theta$$

这里取负号,是因为动生电动势的方向由 M 指向 N,与回路的绕行方向相反.总的感应电动势为两项之和

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2$$

如果 $\mathscr{E}>0$,则 $\mathscr{E}$ 方向与所设绕行正向一致,反之,则 $\mathscr{E}$ 方向与所设绕行正向相反.

总结上例可以看到,在一般情况下应用法拉第电磁感应定律求感应电动势大致有如下的运算步骤:

第一步:选定回路的绕行正方向;

第二步:如果磁场是未知的,则必须先求出回路所在处的磁场 $\boldsymbol{B}$;

第三步:按上章所讲的方法求出所讨论回路的磁通量 $\Phi = \int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$,如果回路是 N 匝线圈,则必须将磁通量乘以 N 得出相应的总磁通量.

第四步:用法拉第电磁感应定律公式 $\mathscr{E}_i = -\dfrac{\mathrm{d}(N\Phi)}{\mathrm{d}t}$ 求出 $\mathscr{E}_i$;

第五步:确定感应电动势的方向,若 $\mathscr{E}_i>0$,则感应电动势的方向与设定的回路的绕行正方向一致,否则,与之相反(也可以用楞次定律来判断回路的感应电

动势方向)；但如果是交变磁场，则感应电动势的方向也是交变的.

此外，对于一个闭合回路的电阻为已知的话，可以求得该闭合回路的感应电流

$$I=\frac{\mathscr{E}_i}{R}=-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}(N\Phi)}{\mathrm{d}t}$$

在有关电磁感应问题的讨论中，常常会涉及回路处于什么样的磁场中，例如是在均匀磁场还是在非均匀磁场中，是变化磁场还是恒定磁场.“均匀”或“非均匀”在这里是一个空间分布的概念.如果是均匀磁场，那么磁场在任一空间坐标点都相同；反之，磁场与坐标位置有关，是非均匀的.“变化”或“恒定”则是一时间概念.如果是一恒定磁场，表明磁场不随时间而变化；反之，是一时变磁场.在一般情况下，可以把磁场写作 $\boldsymbol{B}(t,r)$，是时间和坐标的函数.当然，均匀磁场可以是一时变磁场 $\boldsymbol{B}(t)$(例如讨论感生电场时局限在半径为 R 的圆柱体内部且随时间变化的磁场)；非均匀磁场也可以是恒定磁场 $\boldsymbol{B}(r)$(例如载有恒定电流的长直导线周围的磁场).

(2) 动生电动势的计算

计算动生电动势的基本公式是 $\mathscr{E}_i=\int_L(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$.只有在均匀磁场中的导线以匀速垂直切割磁感应线时才有 $\mathscr{E}_i=Blv$.一般地，磁场可能是非均匀的，或者导线段各部分的运动速度不同，在这些情况下原则上都要按这个基本公式作一积分运算才能得出结果.应用这个公式的步骤是：

第一步：首先写出磁场的分布表达式 $\boldsymbol{B}$；

第二步：在导线上任意选取一元段 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，写出这一元段的非静电力场强 $\boldsymbol{E}_k=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 的大小和方向；

第三步：选定积分路线的方向，写出 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 元段的动生电动势 $\mathrm{d}\mathscr{E}_i=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$；

第四步：对整个线段作积分运算，得到整个线段的动生电动势的大小(如果积分式有多个变量，则统一变量后完成积分)；

第五步：动生电动势的方向由 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 的方向与积分路线的方向确定，如果它们之间的夹角小于 90°，那么导线末端点为高电势的一端；反之，导线始端点为高电势的一端.

还有一种情况需要特别提到，如果导线不是直线而是一曲线段，可以尝试用所谓“以直代曲”的方法求解，即将曲线段两端用直线段连接起来构成一闭合回路，如果回路运动时回路内的磁通量没有变化，那么就可仅计算直线段的动生电动势，曲线段的动生电动势等于该直线段以同一速度运动时动生电动势的负值.下面的例子将对这个方法作进一步的说明.

例 9-2

如图 9-2(a)所示,一长直导线通有电流 I,有一半径为 R 的半圆形导线与其共面,半圆形导线的直径 AC 与长直导线垂直.已知半圆形导体的左端点 A 距长直导线为 L,求:(1) 半圆形导线以速度为 $\boldsymbol{v}$ 沿平行于长直导线方向匀速向下运动时,半圆弧导线 ADC 中产生的感应电动势大小及方向;(2) 半圆形导线以相同的速度 $\boldsymbol{v}$ 沿垂直于长直导线方向匀速向右运动在 $L=R$ 位置时,半圆弧导线 ADC 中产生的感应电动势大小及方向.

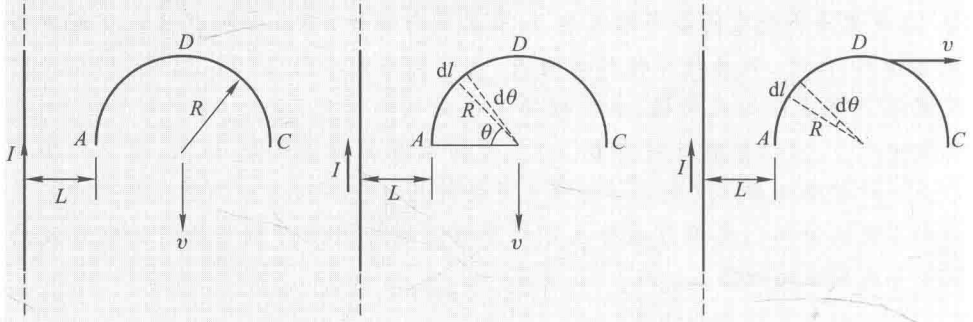


图 9-2 半圆弧导线 ADC 在不同方向运动的感应电动势

解 无限长载流直电流的磁场为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

(1) 如图 9-2(b)所示,在半圆形导线上任意选取一元段 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$,这一元段处的非静电力场的大小为

$$|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}|=\frac{\mu_0 Iv}{2\pi r}$$

方向向右.该元段的动生电动势为

$$\mathrm{d}\mathscr{E}_i=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{\mu_0 Iv}{2\pi r}\mathrm{d}l\sin\theta=\frac{\mu_0 IvR}{2\pi(L+R-R\cos\theta)}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

对上式从 0 到 π 积分,得到整个半圆形导线的动生电动势的大小

$$\mathscr{E}_i=\frac{\mu_0 IvR}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{L+R-R\cos\theta}=\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln\frac{L+2R}{L}$$

由于 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 的方向与积分路线的方向之间的夹角总是不大于 90°,所以积分的方向即是动生电动势的方向,即从 A 指向 C.

(2) 如图 9-2(c)所示,当半圆形导体线匀速向右运动时,元段 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 处的非静电力场的方向向上,因此该元段的动生电动势为

$$\mathrm{d}\mathscr{E}_i=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{\mu_0 Iv}{2\pi r}\mathrm{d}l\cos\theta=\frac{\mu_0 IvR}{2\pi(L+R-R\cos\theta)}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

同样地，令 $L=R$，对上式从 0 到 π 积分，得到整个半圆形导线的动生电动势的大小

$$\mathscr{E}_i=\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta\mathrm{d}\theta}{2-\cos\theta}=\frac{\mu_0 Iv}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\right)$$

至于感应电动势的方向，可以分两段来考虑：AD 段 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 的方向与积分路线的方向之间的夹角小于 90°，因此该段感应电动势的方向由 A 指向 D；DC 段 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 的方向与积分路线的方向之间的夹角大于 90°，因此该段感应电动势的方向由 C 指向 D，但因 AD 段的磁场比 DC 段强，所以总体看 C 端的电势仍比 A 端高.

事实上，在第一种情况中，我们可以设想将 AC 连接起来，构成一个闭合回路，由于这个闭合回路以速度为 $\boldsymbol{v}$ 沿平行于长直导线方向匀速向下运动时，穿过整个线圈内的磁通量没有发生变化，所以线圈中的感应电动势为零，这样

$$\mathscr{E}_i=\mathscr{E}_{ADC}+\mathscr{E}_{CA}=0$$

$$\mathscr{E}_{ADC}=-\mathscr{E}_{CA}=\mathscr{E}_{AC}$$

将求半圆形导线的动生电动势转化为求直线 CA 段以速度 $\boldsymbol{v}$ 向下运动时的动生电动势，这在计算上就简单得多：在直导线 AC 中离长直导线为 r 处取一线元 $\mathrm{d}r$，则直导线 AC 的动生电动势为

$$\mathscr{E}_{AC}=\int_A^C(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_L^{L+2R}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}v\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln\frac{L+2R}{L}$$

方向从 A 指向 C.

但是，对于第二种情况，当半圆形导体线匀速向右运动时，由于远离长直载流导线越远磁场越弱，即使将 AC 连接起来构成一个闭合回路，在运动过程中该回路通过的磁通量也一直在发生变化，整个线圈中的感应电动势不为零，我们不可能期望用一条直线段的运动来代替该半圆形导体线匀速运动时动生电动势的求解.

(3) 感生电动势的计算

在大多数情况下，感生电动势的求解均可应用法拉第电磁感应定律 $\mathscr{E}=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ 直接得出，求解步骤如前面“(1) 法拉第电磁感应定律的应用”中所述.

由于本章仅讨论了 $\boldsymbol{B}$ 是均匀局限在半径为 R 的圆柱体内部的时变磁场这一特例的感生电场求解，所以在这一种情况下还可由感生电场求出感生电动势 $\mathscr{E}=\int_L\boldsymbol{E}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，下面一例是这一类的问题，我们以此作进一步的分析.

例 9-3

均匀磁场被限制在半径为 R 的无限长圆柱形空间内，且 $\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$ 为常量，如图 9-3 所示. 有一梯形导体回路，其中 $ab=R$，$dc=2R$，求梯形导体回路各段的感生电动势以及整个回路的感生电动势.

解　解法一:应用感生电场求出各段的感生电动势后,再得到整个回路的感生电动势.

取顺时针方向作为梯形导线回路的正方向.ab 段在磁场区内,各点的感生电场大小是

$$E_i=-\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

在 ab 段上任取一元段 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$,其感生电动势为 $\mathrm{d}\mathscr{E}_i=\boldsymbol{E}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$,于是 ab 段的感生电动势为

$$\mathscr{E}_i=\int_{ab}\boldsymbol{E}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_0^R\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\cos\theta\mathrm{d}l$$

上式中 θ 角是感生电场 $\boldsymbol{E}_i$ 与 ab 段的夹角,由图9-3可知

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}}{r}=\frac{\sqrt{3}R}{2r}$$

代入上式积分,求得 ab 段的感生电动势为

$$\mathscr{E}_{ab}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\int_0^R r\frac{\sqrt{3}R}{2r}\mathrm{d}l=\frac{\sqrt{3}}{4}R^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

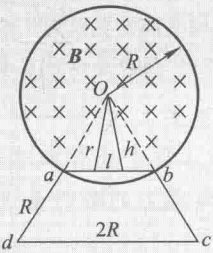


图 9-3　梯形导体回路在圆柱形磁场中的感生电动势

bc,cd,da 三段在磁场区外,各点的感生电场大小是

$$E_i=-\frac{R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

由于 $\boldsymbol{E}_i$ 的方向垂直圆柱半径,所以在 bc,da 的各元段上都有 $\mathrm{d}\mathscr{E}_i=\boldsymbol{E}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$,因此

$$\mathscr{E}_{bc}=\mathscr{E}_{da}=0$$

用求 ab 段感生电动势同样的方法,可以求出 cd 段的感生电动势为

$$\mathscr{E}_{cd}=\int_{cd}\boldsymbol{E}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_0^R-\frac{R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\cos\theta\mathrm{d}l$$

积分函数有三个变量,从图 9-3 还可以看出它们之间有下面的关系:

$$r=h\sec\theta,\quad l=\tan\theta,\quad \mathrm{d}l=\sec^2\theta\mathrm{d}\theta$$

代入上述积分,并考虑到 Oab 是一正三角形,张角 $\angle dOc$ 为 $\frac{\pi}{3}$,所以

$$\mathscr{E}_{cd}=-\frac{R^2}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\theta h\sec^2\theta}{h\sec\theta}\mathrm{d}\theta=-\frac{R^2}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\theta=-\frac{R^2\pi}{6}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

于是整个回路的感生电动势为

$$\mathscr{E}_i=\mathscr{E}_{ab}+\mathscr{E}_{cd}=-\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

由于 $\mathscr{E}_i<0$,所以回路感应电动势的方向沿逆时针方向.

上述计算表明,尽管 cd 段在磁场区外,即该段所在位置的磁感应强度为零,但因存在感生电场,cd 段仍有感生电动势.

解法二:整个回路的感生电动势也可以直接用法拉第电磁感应定律求出.

在 $abcd$ 回路中只有一小块弓形面积中有均匀磁通通过,该弓形面积为

$$S=\left(\frac{\pi}{6}R^2-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}R^2\right)$$

通过回路的磁通量为

$$\Phi=\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=B\left(\frac{\pi}{6}R^2-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}R^2\right)=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2B$$

梯形导线回路 $abcd$ 中的感生电动势为

$$\mathscr{E}_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

与前一方法的结果一致.

(4) 自感电动势和互感电动势的计算

求解自感电动势和互感电动势的关键在于求出自感系数或互感系数,然后按公式(9-7)或式(9-9)演算即可.

2. 自感系数和互感系数的计算

在本章所讨论的问题中,自感系数 L 和互感系数 M 都符合定义式(9-8)或式(9-10)的要求.虽然自感系数和互感系数与回路中有无电流无关,但为了按定义式(9-8)或式(9-10)求出自感系数和互感系数,我们总是要假定回路中有一定的电流,然后才能按定义式(9-8)或式(9-10)求出自感系数和互感系数.其求解过程如下:

第一步:假定回路中通有电流 I;

第二步:求出通过回路自身的总磁通量 $N\Phi$(求自感的情况),或求出该电流磁场通过另一回路的总磁通量 $N\Phi$(求互感的情况);

第三步:按定义式(9-8)或式(9-10)求出自感系数或互感系数.

此外,对自感系数和互感系数的求解还有两点须强调说明:

(1) 有时用上述方法求自感有一定的困难,这里还有另一种求自感系数的方法,即先求出电流回路的磁场能量,再利用自感与磁场能量关系解出自感 $L=\frac{2W}{I^2}$.这是计算自感很重要的一种方法.

(2) 互感系数涉及两个线圈的相互关系,理论上说设任一线圈通有电流 I,它与通过另一回路的总磁通量 $N\Phi$ 的比值都是互感系数,但实际上如果电流磁场是非均匀的,并不是通过任意回路的总磁通量 $N\Phi$ 都可轻易求出的.所以,在做第一步时要考虑到第二步的实际可操作性.现在讨论下面一例以作进一步的理解.

例 9-4

长直导线与矩形单匝线圈共面放置,导线与线圈的长边平行.矩形线圈的边长分别为 a、b,它到直导线的距离为 c(如图 9-4 所示).当矩形线圈中通有电流 $I=I_0\sin\omega t$ 时,求长直导线与矩形单匝线圈之间的互感系数以及直导线中的感应电动势.

解　长直导线作为一个回路是难以求出通过它的磁通量的,所以无法直接应用法拉第电磁感应定律$\mathscr{E}_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$来求得长直导线上的感应电动势.同样的,也无法以矩形线圈通有电流来计算它与长直导线之间的互感系数.但如果我们反过来假定长直导线通有电流 I,就很容易求出通过矩形线圈的磁通量,从而求出它们的互感系数 M,最后应用$\mathscr{E}=-M\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$求得直导线中的感应电动势.

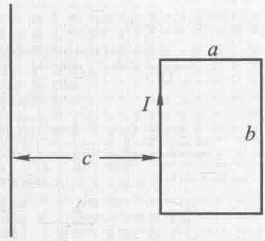


图 9-4　长直导线与矩形线圈之间的互感

按照上面分析的思路,假定长直导线通有电流 I,则空间的磁场分布为 $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$,穿过矩形线圈的磁通量为

$$\Phi=\int \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_c^{c+a}\frac{1}{r}b\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 bI}{2\pi}\ln\frac{c+a}{a}$$

互感系数为

$$M=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\frac{c+a}{a}$$

当矩形线圈中通有变化的电流时,长直导线中的感应电动势为

$$\mathscr{E}=-M\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 I_0 b\omega}{2\pi}\ln\frac{c+a}{a}\cos\omega t$$

设顺时针方向为电流的正方向,直导线中的感应电动势以从下向上为正.

3. 磁场能量的计算

磁场能量的计算有两种方法:一是已知线圈的自感和电流,利用式(9-12)求出线圈内的磁场能量;二是由已知电流的磁感应强度可写出磁场能量密度,然后利用式(9-13)求出磁场空间内的能量.本章所研究的磁场能量计算问题大多是柱对称磁场分布,所以式(9-13)中的体积分可以化作仅对半径的积分,因为此时 $\mathrm{d}V=2\pi lr\mathrm{d}r$,这样演算起来将简便得多.

4. 位移电流的计算

本章习题中有两方面的问题与位移电流有关.一是当电容器极板上的电荷或电压发生变化时,求电容内的位移电流或位移电流密度;二是当圆形平板电容器极板上的电荷或电压发生变化时,求由全电流在电容内激发的磁场.

由于本章研究的都是比较简单的电容器内的位移电流,而平行板电容器中的位移电流可写为 $I_{\mathrm{d}}=C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$这一结果,依然适用于其他形状的电容器,所以在计算任一电容器中的位移电流时可以直接应用这个重要公式.

关于包括位移电流在内的全电流在电容内激发的磁场问题,本章也只讨论

了一种简单的特例，即求圆形平板电容器内外的磁场.其目的在于使学生加深对变化的电场激发的磁场的理解.这种情况与前面讨论的变化磁场均匀地局限在半径为 R 的圆柱体内部，求圆柱体内外的感生电场的特例相类似，学生可以通过它们的对比掌握应用公式(9-5)求感生电场以及应用公式(9-17)求磁场的条件和方法，加深对电磁场基本规律的理解.

五、自我检测

(一) 选择题

1. 在无限长的载流直导线附近放置一矩形闭合线圈，开始时线圈与导线在同一平面内，且线圈中两条边与导线平行.当线圈以相同的速度作如图 9-5 所示的三种不同方向的平动时，线圈中的感应电流　[　]

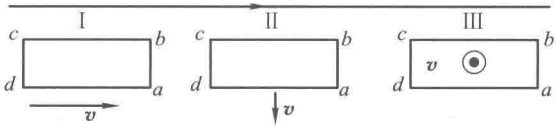


图 9-5

A. 以情况 I 中为最大　　B. 以情况 II 中为最大

C. 以情况 III 中为最大　　D. 在情况 I 和 II 中相同

2. 已知圆环式螺线管的自感系数为 L.若将该螺线管锯成两个半环式螺线管，则两个半环螺线管的自感系数　[　]

A. 都等于 $L/2$　　B. 有一个大于 $L/2$，另一个小于 $L/2$

C. 都大于 $L/2$　　D. 都小于 $L/2$

3. 如图 9-6 所示，闭合电路由带铁芯的螺线管、电源、滑线变阻器组成.问在下列哪一种情况下可使线圈中产生的感应电动势与原电流 I 的方向相反.　[　]

A. 滑线变阻器的触点 A 向左滑动

B. 滑线变阻器的触点 A 向右滑动

C. 螺线管上接点 B 向左移动(忽略长螺线管的电阻)

D. 把铁芯从螺线管中抽出

4. 两根无限长平行直导线载有大小相等方向相反的电流 I，并各以 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ 的变化率增长，一矩形线圈位于导线平面内(如图 9-7 所示)，则　[　]

A. 线圈中无感应电流　　B. 线圈中感应电流为顺时针方向

C. 线圈中感应电流为逆时针方向　　D. 线圈中感应电流方向不确定

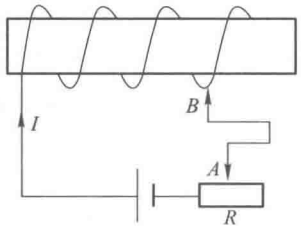


图 9-6

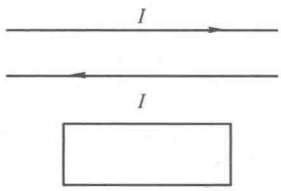


图 9-7

5. 如图 9-8 所示,一矩形线框(长边与磁场边界平行)以匀速 v 自左侧无场区进入均匀磁场又穿出,进入右侧无场区,那么,线框中电流 I 随时间 t 的变化关系为 [ ]

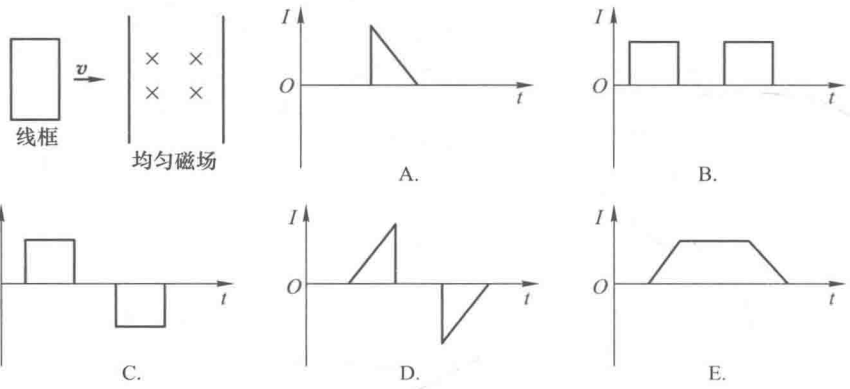


图 9-8

6. 有两个长直密绕螺线管,长度及线圈匝数均相同,半径分别为 r_1 和 r_2.管内充满均匀介质,其磁导率分别为 μ_1 和 μ_2.设 $r_1 : r_2 = 1:2$,$\mu_1 : \mu_2 = 2:1$,当将两只螺线管串联在电路中通电稳定后,其自感系数之比 $L_1 : L_2$ 与磁能之比 $W_{m1} : W_{m2}$ 分别为 [ ]

A. $L_1 : L_2 = 1:1$, $W_{m1} : W_{m2} = 1:1$　　B. $L_1 : L_2 = 1:2$, $W_{m1} : W_{m2} = 1:1$

C. $L_1 : L_2 = 1:2$, $W_{m1} : W_{m2} = 1:2$　　D. $L_1 : L_2 = 2:1$, $W_{m1} : W_{m2} = 2:1$

7. 在圆柱形空间内有一磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的均匀磁场,如图 9-9 所示.$\boldsymbol{B}$ 的大小以速率 $\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$ 变化,有一长度为 L_0 的金属棒先后放在磁场的两个不同位置 ab 和 $a'b'$,那么,金属棒在这两个位置时棒内的感应电动势的大小关系为 [ ]

A. $\mathscr{E}_{ab} = \mathscr{E}_{a'b'} \neq 0$　　B. $\mathscr{E}_{a'b'} > \mathscr{E}_{ab}$　　C. $\mathscr{E}_{a'b'} < \mathscr{E}_{ab}$　　D. $\mathscr{E}_{ab} = \mathscr{E}_{a'b'} = 0$

8. 两个相距不太远的平面圆线圈，怎样可使其互感系数近似为零？设其中一线圈的轴线恰通过另一线圈的圆心.　　[　　]

A. 两线圈的轴线互相平行放置　　B. 两线圈并联

C. 两线圈的轴线互相垂直放置　　D. 两线圈串联

9. 如图 9-10 所示，平板电容器（忽略边缘效应）充电时，沿环路 L_1、L_2 磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的环流中，必有　　[　　]

A. $\oint_{L_1} \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} > \oint_{L_2} \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$　　B. $\oint_{L_1} \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_{L_2} \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$

C. $\oint_{L_1} \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} < \oint_{L_2} \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$　　D. $\oint_{L_1} \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$

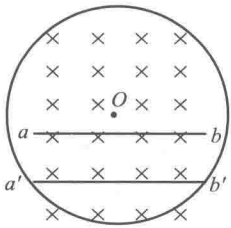


图 9-9

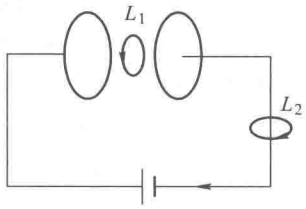


图 9-10

10. 关于恒定电流磁场的磁场强度 $\boldsymbol{H}$，下列几种说法中哪个是正确的？　　[　　]

A. $\boldsymbol{H}$ 仅与传导电流有关

B. 若闭合曲线内没有包围传导电流，则曲线上各点的 $\boldsymbol{H}$ 必为零

C. 若闭合曲线上各点 $\boldsymbol{H}$ 均为零，则该曲线所包围传导电流的代数和为零

D. 以闭合曲线 L 为边缘的任意曲面的 $\boldsymbol{H}$ 通量均相等

（二）填空题

1. 桌子上水平放置一个半径 $r=10$ cm 的金属圆环，其电阻 $R=1\ \Omega$. 若地球磁场磁感应强度的竖直分量为 5×10^{-5} T. 那么将环面翻转一次，沿环流过任一横截面的电荷 $q=$_____.

2. 如图 9-11 所示，在一长直导线 L 中通有电流 I，$ABCD$ 为一矩形线圈，它与 L 皆在纸面内，且 AB 边与 L 平行.（1）矩形线圈在纸面内向右移动时，线圈中感应电动势方向为_____，（2）矩形线圈绕 AD 边旋转，当 BC 边已离开纸面正向外运动时，线圈中感应动势的方向为_____.

3. 如图 9-12 所示，一段长度为 l 的直导线 MN，水平放置在载电流为 I 的竖直长导线旁与竖直导线共面，并从静止由图示位置自由下落，则经时间 t，导线两端的电势差 $U_M-U_N=$_____.

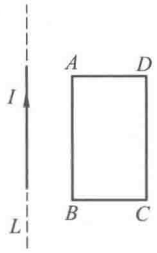


图 9-11

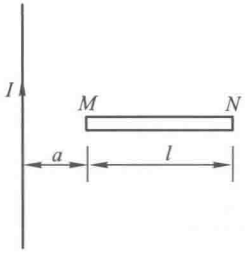


图 9-12

4. 载有恒定电流 I 的长直导线旁有一半圆环导线 cd,半圆环半径为 b,环面与直导线垂直,且半圆环两端点连线的延长线与直导线相交,如图 9-13 所示.当半圆环以速度 $\boldsymbol{v}$ 沿平行于直导线的方向平移时,半圆环上的感应电动势的大小是_____.

5. 如图 9-14 所示,一半径为 r 的很小的金属圆环,在初始时刻与一半径为 $a(a\gg r)$ 的大金属圆环共面且同心.在大圆环中通以恒定的电流 I,方向如图所示,如果小圆环以角速度 ω 绕其任一方向的直径转动,并设小圆环的电阻为 R,则任一时刻 t 通过小圆环的磁通量 Φ=_____;小圆环中的感应电流 i=_____.

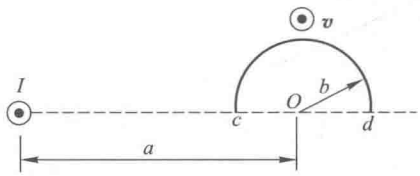


图 9-13

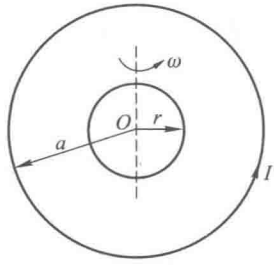


图 9-14

6. 一无铁芯的长直螺线管,在保持其半径和总匝数不变的情况下,把螺线管拉长一些,则它的自感系数将_____(填:增大、减少和不变).

7. 自感系数 L=0.3 H 的长直螺线管中通以 I=8 A 的电流时,螺线管存储的磁场能量 W=_____.

8. 无铁芯的长直螺线管的自感系数表达式为 $L=\mu_0 n^2 V$,其中 n 为单位长度上的匝数,V 为螺线管的体积.若考虑端缘效应时,实际的自感系数应_____(填:大于、小于或等于)此式给出的值.若在管内装上铁心,则 L

与电流_____(填:有关、无关).

9. 充了电的由半径为 r 的两块圆板组成的平行板电容器,在放电时两板间的电场强度的大小为 $E=E_0e^{-t/RC}$,式中 E_0、R、C 均为常量.则两板间的位移电流的大小为_____;其方向与场强方向_____.

10. 反映电磁场基本性质和规律的积分形式的麦克斯韦方程组为

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum_{i=0}^{n} q_i \qquad ①$$

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \qquad ②$$

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0 \qquad ③$$

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum_{i=0}^{n} I_i+\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} \qquad ④$$

试判断下列结论是包含于或者等效于哪一个麦克斯韦方程式的,将你确定的方程式用代号填在相应结论后的空白处:

(1) 变化的磁场一定伴随有电场:_____;

(2) 磁感应线是无头无尾的:_____;

(3) 电荷总伴随有电场:_____.

(三) 计算题

1. 将等边三角形平面回路 $ACDA$ 放在磁感应强度为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0t$(其中 $\boldsymbol{B}_0$ 为常矢量)的均匀磁场中,回路平面垂直于磁场方向,如图 9-15 所示.回路的 CD 段为滑动导线,以匀速 $\boldsymbol{v}$ 远离 A 端运动,且始终保持回路为等边三角形.设滑动导线 CD 到 A 端的垂直距离为 x,且初始 $x=0$.试求回路 $ACDA$ 中的感应电动势$\mathscr{E}$和时间 t 的关系.

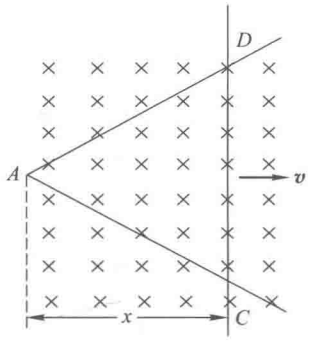


图 9-15

2. 一矩形截面螺绕环($\mu_r=1$),由细导线均匀密绕而成,内半径为 R_1,外半径为 R_2,高为 b,共 N 匝,如图 9-16 所示.求此螺绕环的自感系数.如果在螺绕环内通以交变电流 $i=I_0\cos\omega t$,求感应电动势.(已知 $R_1=8\times10^{-2}$ m, $R_2=2.4\times10^{-1}$ m, $b=6\times10^{-2}$ m, $N=1\,000$ 匝, $I_0=5$ A, $\omega=100\pi$ rad/s.)

3. 有一水平的无限长直导线,线中通有交变电流 $I=I_0\cos\omega t$,其中 I_0 和 ω 为常量,t 为时间,$I>0$ 的方向如图 9-17 所示.导线离地面的高度为 h,D 点在导线的正下方.地面上有一 N 匝平面矩形线圈其一对边与导线平行.线圈中心离 D

点水平距离为 d_0,线圈的边长为 $a\left(\frac{1}{2}a<d_0\right)$ 及 b,总电阻为 R.取法线 $\boldsymbol{e}_n$ 竖直向上,试计算导线中的交流电在线圈中引起的感应电流(忽略线圈自感).

4. 一电荷为 q 的点电荷,以匀角速度 ω 作圆周运动,圆周的半径为 R(图9-18).设 $t=0$ 时 q 所在点的坐标为 $x_0=R$,$y_0=0$,以 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 分别表示 x 轴和 y 轴上的单位矢量.求圆心处的位移电流密度 $\boldsymbol{J}$.

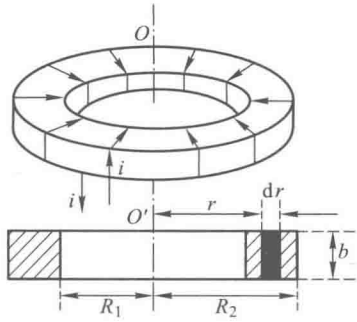


图 9-16

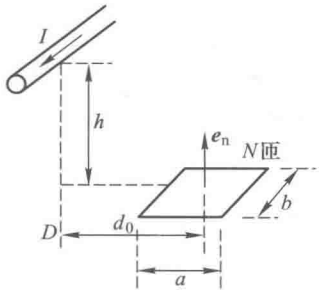


图 9-17

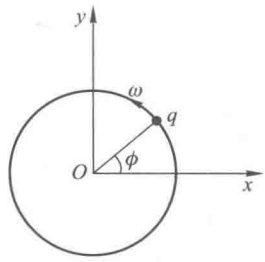


图 9-18

六、问题讨论

1. 为什么只研究圆柱形内的感生电场和位移电流?

本章研究感生电场时仅讨论了磁场 $\boldsymbol{B}$ 均匀地局限在圆柱体内部一种情况的感生电场计算问题,而在位移电流一节中也仅研究了圆形平板电容器内外全电流激发的磁场计算,这两种情况都强调了"圆柱"或"圆形",它们有什么特别的意义吗?是不是其他情况就没有感生电场,或者其他形状的电容器内就没有激发的磁场?

我们首先讨论一下为什么在本章的例题和习题中,凡是涉及计算电容器内激发的磁场问题时都声明了"圆形"平板电容器.这是因为全电流的安培环路定理 $\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum(I_c+I_d)$ 是原安培环路定理 $\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum I_c$ 的推广,而应用安培环路定理计算磁场强度有一定的条件.在上一章已讨论过这个条件,即电流和磁场的分布有一定的对称性,才能找得到合适的积分回路,这样可以避免对磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的积分运算,通过对所包围的电流的计算来求得磁场强度.同样的道理,应用

全电流的安培环路定理求解磁场强度也必须满足这个条件.在圆形平板电容器内的位移电流是一圆柱形的,其激发的涡旋磁场磁感应线是以轴为中心的同心圆,那么取磁感应线为积分回路,在这个回路上的磁场强度大小处处相等,方向与积分回路一致,满足了应用安培环路定理求解磁场强度的条件,就能应用全电流的安培环路定理通过计算所包围的全电流(在电容器内只有位移电流)来解出磁场强度.

如果情况不是这样,比如所讨论电容器是一矩形的,那么当它通有交变电流因而在电容器内也有位移电流时,全电流也会激发起涡旋磁场,但这时的磁感应线并不是以轴为中心的同心圆,我们无法找到一个合适的积分回路应用全电流的安培环路定理来解出其中的磁场强度.这就是说,在任何情况下全电流的安培环路定理都正确地揭示了位移电流与传导电流一样都能激发涡旋磁场,但在大多数情况中,我们无法应用全电流的安培环路定理的积分形式来解出磁场强度.所以说本章所讨论的圆形平板电容器内有变化电场的情况只是能够应用全电流的安培环路定理的积分形式来解出磁场强度的一种特例.

最后还要强调一点,在应用全电流的安培环路定理来解磁场强度时,所求的磁场强度不应理解为积分回路所包围的位移电流所激发的,而应理解为整个回路电流,包括位移电流和传导电流共同激发的,只是在应用全电流的安培环路定理计算时只需计及所包围的位移电流而已.

应用法拉第电磁感应定律 $\oint_L \boldsymbol{E}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 解出感生电场的条件和方法与上述情况类似.为了应用这个定律,也必须构建合适的积分回路,以避免对感生电场 $\boldsymbol{E}_i$ 的积分运算,只需通过对回路所包围的磁通量的变化来求得感生电场.很显然,磁场 $\boldsymbol{B}$ 均匀地局限在半径为 R 的圆柱体内部且随时间而变化时,其激发的涡旋电场线是一些以圆柱轴为中心的同心圆,以此为积分回路就有可能应用法拉第电磁感应定律解出感生电场.其他空间形状的变化磁场区域内当然也会激发起感生电场,只不过因难以找到"合适的积分回路"而无法直接应用法拉第电磁感应定律解出感生电场而已.

2. 自感系数与互感系数关系的讨论

如果把一个线圈看作是两个线圈的串联,那么线圈整体的自感系数与两半线圈的自感系数有怎样的关系?

有两种方法计算一个线圈的自感系数与其左右两半线圈的自感系数.

第一种方法:假定有一个长为 l,截面积为 S,总匝数为 N 的线圈,那么它的自感系数是

$$L = \mu n^2 Sl = \mu \frac{N^2}{l} S \tag{9-22}$$

如果把这个线圈当作是两个长为 $l/2$,匝数为 $N/2$ 的线圈串接而成(图 9-19),那么每只线圈的自感系数为

$$L_0=\mu\frac{(N/2)^2}{l/2}S=\frac{1}{2}\mu\frac{N^2}{l}S \tag{9-23}$$

所以,比较式(9-22)与式(9-23),有

$$L=2L_0 \tag{9-24}$$

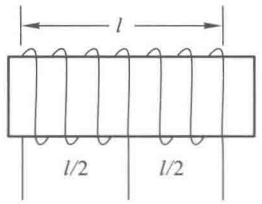


图 9-19　分作两半的长线圈

第二种方法:

这两半线圈是顺向串联的,它们的磁通量互相加强.此时,当线圈中的电流 I 发生变化时,左半线圈中的感应电动势为

$$\mathscr{E}_1=-L_0\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}-M\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

右半线圈中的感应电动势为

$$\mathscr{E}_2=-L_0\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}-M\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

线圈中总的感应电动势为

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2=-(L_0+L_0+2M)\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

所以此时等效自感为

$$L=L_0+L_0+2M$$

已知互感系数与自感系数的关系为 $M=k\sqrt{L_1L_2}$,本例在导出式(9-22)时已假定每一匝电流的磁通量都穿过其他各匝,这就是完全耦合的情况,即耦合系数 $k=1$,所以这只长线圈的自感应该是

$$L=L_0+L_0+2M=L_0+L_0+2\sqrt{L_0L_0}=4L_0 \tag{9-25}$$

显然,两种方法所示的结果是不一致的,后者比前者大了一倍.矛盾的根源在于前者把同一个线圈的左右两半看作是孤立的,完全没有磁耦合(耦合系数 $k=0$);而后者把同一个线圈的左右两半看作是完全耦合的(耦合系数 $k=1$).由此看来一个线圈的自感与左右两半线圈自感的关系完全由它们的耦合情况决定.现分两种极端情况来讨论.

(1) 如果线圈密绕在铁磁质上,由于铁磁质的磁导率很大,磁感应线基本上都沿着铁芯走,所以铁芯有使磁场集中到它内部的作用.在这种情况下,磁路的长度就是铁芯的长度(图 9-20).此时无论在计算整个线圈的 L 时还是计算一半线圈的 L_0 时,其长度都应取铁芯的长度 l.这样左右两半线圈自感系数应为

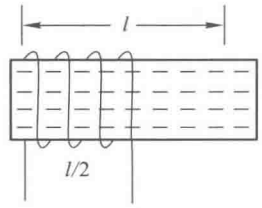


图 9-20　铁芯线圈

$$L_0=\mu\frac{\left(\frac{N}{2}\right)^2}{l}S=\frac{1}{4}\mu\frac{N^2}{l}S \tag{9-26}$$

比较式(9-22)与式(9-26),得整个线圈的自感系数为

$$L=4L_0 \tag{9-27}$$

由于这时磁感应线基本上都沿着铁芯走,两个线圈作完全耦合,$k=1$,所以按两只线圈串接的计算方法,整个线圈的自感系数为

$$L=L_0+L_0+2M=L_0+L_0+2\sqrt{L_0L_0}=4L_0 \tag{9-28}$$

比较式(9-27)与式(9-28),两种计算方法所得结果是一致的.

(2) 线圈绕在非铁磁质上

当线圈中充满的不是铁磁质,比如是一个空心的螺丝管线圈,其漏磁较大,(图 9-21),磁路的长度近似为线圈的实际长度,它们的自感系数最理想的情况也只可以按式(9-26)计算.

另一方面,由于线圈的每一匝电流的磁通并不完全耦合到所有其他各匝线圈.此时可以认为左右两半线圈之间无耦合,即耦合系数 $k=0$,互感系数 $M=0$,所以整个线圈的自感系数为

$$L=L_0+L_0+2M=L_0+L_0=2L_0 \tag{9-29}$$

与式(9-24)结果一致.

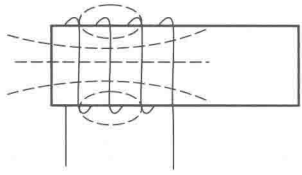


图 9-21　非铁芯线圈

在一般情况下一个线圈的自感系数 L 与它两半线圈自感系数 L_0 的关系,仍可采用两个线圈串接的公式:

$$L=L_0+L_0+2M=L_0+L_0+2kL_0=2(1+k)L_0$$

由上面讨论可见,$L=4L_0$ 与 $L=2L_0$ 只是两种极端情况的反映,并不能代表一般情况下的真实自感关系.这个结论可以通过实验得到验证.如果我们分别在木芯、铁芯和铁氧体磁环上绕制线圈,并在线圈的中心抽一测试头(图 9-22).分别测量半只线圈的自感系数 L_0 以及整个线圈的自感系数 L.我们将发现,当在非铁磁质作芯的情况下(如木芯等),$L<2L_0$,这是因为线圈的磁漏相当大,不仅两半线圈之间的耦合几乎为零,而且线圈匝间由于不甚紧密也有一定的磁漏,所以整个线圈的自感系数 L 还不到一半线圈的 2 倍.这也就是说,线圈绕在非铁磁质上时,由于总存在着漏磁,线圈的实际自感总比按理论公式(9-22)所计算的自感值小.

在铁芯线圈的情况下,$2L_0<L<4L_0$,此时由于铁芯的磁导率 μ 很高,线圈匝间的磁漏大为减少,长线圈的自感虽还不到 $4L_0$,但已比 $2L_0$ 大很多.

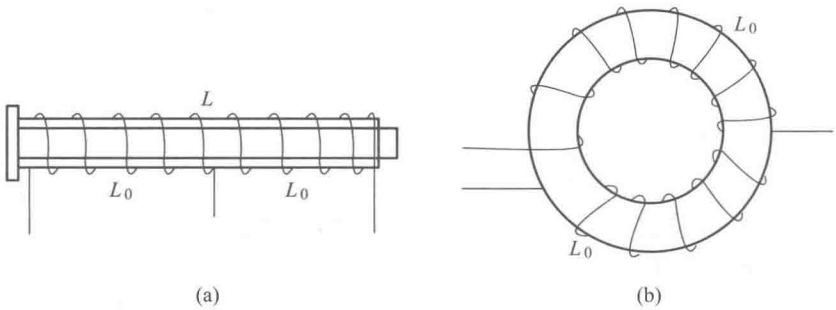


图 9-22 在不同材料上绕制的线圈

(a) 木芯线圈或铁芯线圈;(b) 铁氧体磁环线圈

对于铁氧体磁环上绕制的线圈,不仅磁导率 μ 值极高,磁阻很小,而且磁路闭合,几乎没有磁漏.在这种情况下,整个线圈的自感系数 L 基本上是一半线圈的 4 倍.所以,仅当在磁导率 μ 值很高的环形线圈的情况下 $L=4L_0$ 才成立,但此时的 L_0 计算必须用整个磁路的长度,而不是半圆环的长度.

3. 由麦克斯韦方程组的积分形式导出电磁波波动方程

麦克斯韦方程组不仅总结了普遍而完整的电磁场理论,而且还成功地预言了电磁波的存在,揭示了光的电磁本质.利用麦克斯韦方程组的积分形式,我们可以导出自由空间(电荷 q 和电流 I 均为零的空间)平面电磁波的波动方程.

首先,我们建立起 x、y、z 坐标,并假定电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的方向平行于 y 轴,磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的方向平行于 z 轴,如图 9-23 所示.因此,在这种情况下,各个方向的电磁场量为

$$\begin{aligned} E_x&=0, \quad E_y=E, \quad E_z=0 \\ B_x&=0, \quad B_y=0, \quad B_z=B \end{aligned} \tag{9-30}$$

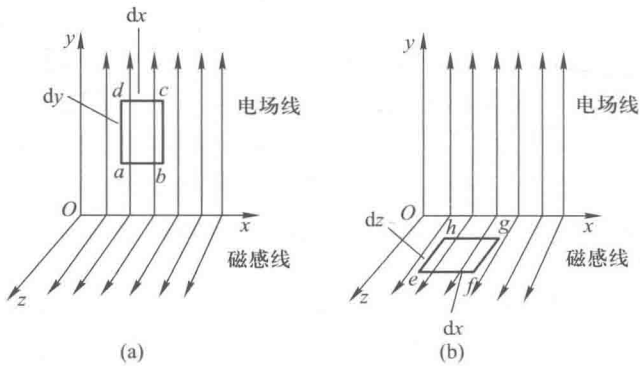


图 9-23 电磁波波动方程的推导

为了导出自由空间平面电磁波的波动方程，我们可以构建图 9-23(a)中所示的积分回路$abcd$，其中$|ab|=|cd|=\mathrm{d}x$，$|bc|=|da|=\mathrm{d}y$，并对这个回路应用电场强度的环路定理：

$$\oint_{abcd} E\cdot \mathrm{d}l=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{abcd} B\cdot \mathrm{d}S \tag{9-31}$$

考虑到电场强度 $\boldsymbol{E}$ 仅在 y 方向有值，设 cb 处的电场强度为 E'，da 处的电场强度为 E，因此上式左边可以写为

$$\oint_{abcd} E\cdot \mathrm{d}l=E'|cb|-E|da|=(E'-E)\,\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{9-32}$$

$\boldsymbol{B}$ 的方向与 $abcd$ 这一小面积 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向一致，小面积的大小即为 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，所以式(9-31)右边可以写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{abcd} B\cdot \mathrm{d}S=\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{9-33}$$

将式(9-32)、式(9-33)式代入式(9-31)，有

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}=-\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \tag{9-34}$$

另一方面，我们可以构建图 9-23(b)中所示的积分回路 $efgh$，其中$|ef|=|gh|=\mathrm{d}x$，$|fg|=|he|=\mathrm{d}z$，对这个回路应用安培定律，得

$$\oint_{efgh} B\cdot \mathrm{d}l=\varepsilon_0\mu_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{abcd} E\cdot \mathrm{d}S \tag{9-35}$$

考虑到电场强度 $\boldsymbol{B}$ 仅在 z 方向有值，设 fg 处的电场强度为 B'，he 处的电场强度为 B，因此上式左边可以写为

$$\oint_{efgh} B\cdot \mathrm{d}l=-B'(fg)+B(he)=-(B'-B)\,\mathrm{d}z=-\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\mathrm{d}z \tag{9-36}$$

在这种情况下，$\boldsymbol{E}$ 的方向是与 $hefg$ 这一小面积 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向一致的，小面积的大小为 $\mathrm{d}x\mathrm{d}z$，所以式(9-35)右边的积分可以写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{efgh} E\cdot \mathrm{d}S=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x\mathrm{d}z \tag{9-37}$$

将式(9-36)、式(9-37)代入式(9-35)，有

$$-\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \tag{9-38}$$

方程(9-34)和式(9-38)将空间每一点的电场与磁场耦合起来了.如果我们取式(9-34)对 x 的导数，以及式(9-38)对 t 的导数，即

$$\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}x\mathrm{d}t},\qquad -\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}x^2}$$

消除上两式的$\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}$,从而获得了电场强度的波动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}x^2}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}t^2} \tag{9-39}$$

用同样的方法我们可以获得磁感应强度的波动方程.我们取式(9-34)对 t 的导数,以及式(9-38)对 x 的导数,即

$$\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}x\mathrm{d}t},\qquad -\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}x^2}$$

消除上两式的$\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}$,并利用关系式 $B=\mu_0H$ 从而可获得磁场强度的波动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2H}{\mathrm{d}x^2}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\mathrm{d}^2H}{\mathrm{d}t^2} \tag{9-40}$$

令

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

这就是光速.

第十章
机械振动和电磁振荡

一、学习要求

1. 掌握简谐振动的基本特征以及描述简谐振动的三个特征量(特别是相位)的物理意义和各量间的相互关系.

2. 掌握描述简谐振动的旋转矢量法和图线表示法,能根据初始条件写出简谐振动的运动表达式.

3. 掌握简谐振动的运动(微分)方程,能根据给定条件建立一维运动的微分方程,并判定其是否作简谐振动,求出简谐振动的周期.

4. 理解简谐振动的能量特征,了解如何用能量法求解简谐振动问题.

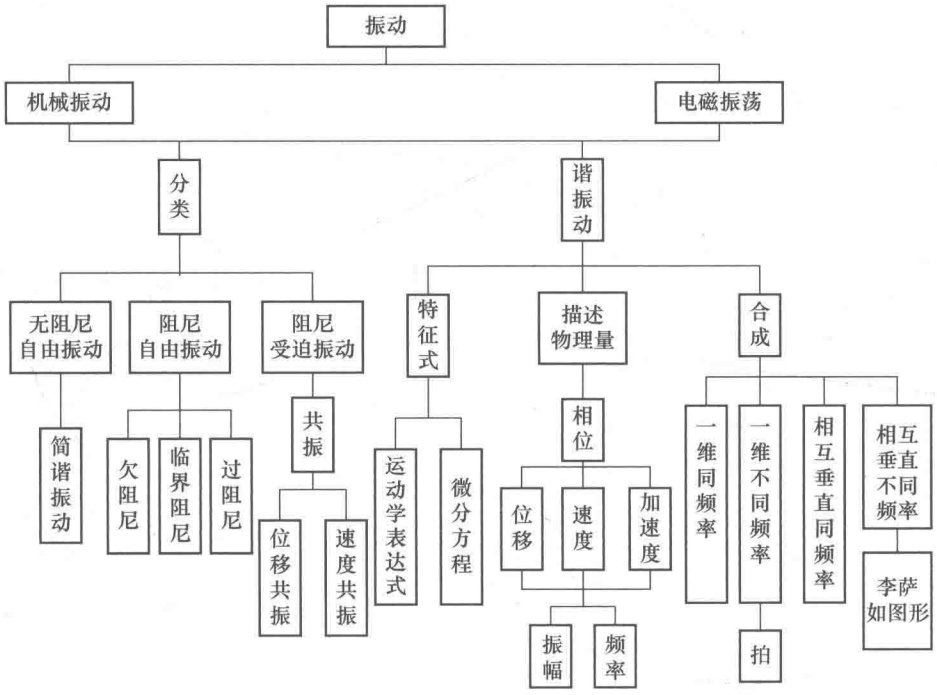
5. 掌握在同一直线上两个同频率简谐振动合成的规律.能利用解析法和旋转矢量法处理其合成问题.了解拍和拍频.

6. 了解两个互相垂直的同频率简谐振动合成的规律,了解李萨如图的形成.

7. 了解阻尼振动、受迫振动和共振的一般规律.

8. 用力电类比法了解电磁振荡的规律.

二、知识框图



三、内容导读

1. 振动的分类

振动是物体的一种重要运动形式，常见的振动有机械振动和电磁振动（也称电磁振荡）.广义地说，任何一个物理量在一定数值附近随时间反复地变化都叫作振动.一般的振动是比较复杂的，根据振动过程的具体特点可以分成周期性振动和非周期性振动，根据振动物体受力情况可分为线性振动和非线性振动，根据振动过程中是否有能量消耗可分为阻尼振动和无阻尼振动，根据振动过程中是否有外来的驱动力又可分为受迫振动和自由振动，等等.最简单的周期性振动是简谐振动.

2. 简谐振动的定义及其判据

简谐振动的定义可从两个方面来考虑：从运动学方面考虑，简谐振动是物体偏离平衡位置的位移随时间按余弦（或正弦）函数规律变化的运动，即

$$x=A\cos(\omega t+\phi_0)$$

由此可得，物体的加速度与位移成正比而方向相反.

$$a=-\omega x^2$$

从动力学方面考虑，作简谐振动的物体所受的恢复力与位移成正比而反向，即

$$\boldsymbol{F}=-k\boldsymbol{x}$$

此恢复力可以是弹性力，也可以是准弹性力.由以上两式，都可以得到简谐振动的特征式：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0$$

就是说，任何物理量的变化规律满足上述的微分方程，则该物理量的运动是简谐振动.

以上四式都是简谐振动的判据.它们形式上虽然不同，但实质上是一致的.处理振动问题时，使用何种判据，可根据问题的性质决定.

3. 描述简谐振动的特征量

描述简谐振动的物理量主要是振幅、频率（或周期、角频率）和相位.其中相位是比较难以理解的概念，但它是描述振动状态的一个非常重要的物理量.振动的主要特点是周期性，而相位便是一个能充分体现周期性的描述运动状态的物理量.我们知道，描述一个物体的运动状态，一般用位置和速度这两个物理量.在简谐振动中，物体在任一时刻的位置和速度都和$(\omega t+\phi_0)$有关，对于一个振幅和角频率已确定的简谐振动，知道了$(\omega t+\phi_0)$就确定了振动系统的运动状态.$(\omega t+\phi_0)$从0到2π之间的变化就反映了简谐振动在一个周期内的运动状态.由

于月亮在绕地球运动的一个周期中表现出来的圆缺变化情况称为月相,所以物理学中把$(\omega t+\phi_0)$称为简谐振动的相位.$t=0$时的相位叫做初相位ϕ_0,它由振动的初始条件(x_0,v_0)决定,也可由振幅矢量图上直接读出.

相位差的概念在比较两个简谐振动的步调时特别有用,可以判断哪个振动超前,哪个振动落后.相位差在讨论波的传播和波的叠加都要用到.

振幅是描述振动物体运动范围和运动幅度的物理量,它的大小由初始条件决定.由于简谐振动的机械能是守恒的,所以也可以说,振幅由振动系统的能量决定.

频率、周期和角频率都是描述振动时间周期性的物理量,反映振动的快慢,由振动系统本身的性质决定,所以它们又称为固有频率、固有周期、固有角频率.

在振动系统中,能量也是重要的物理量.对于无阻尼自由振动,振动系统的机械能是守恒的,其中势能应包括弹性力和准弹性力的势能以及重力势能.动能和势能都呈周期性交替变化,动能最大时,势能为零,反之,势能最大时,动能为零,动能和势能相互转化.如果写出振动系统在任一时刻机械能的表达式,然后对时间t求导,如能得到$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$形式的微分方程,那么可以判断这系统作简谐振动,这种用能量方法求解振动系统的固有频率,在工程实际中有着广泛的应用.

4. 阻尼振动、受迫振动和共振

阻尼振动和受迫振动的运动微分方程都比较复杂,其求解已超出本课程的教学要求,因此读者主要了解这些振动的特点.

在阻尼振动中,按阻尼的大小,可分为弱阻尼、过阻尼和临界阻尼三种.我们重点讨论弱阻尼的情况.在弱阻尼的阻尼振动中,振幅随时间按指数规律减小,它的振动没有周期的重复性,所以阻尼振动不是周期运动.为了和无阻尼自由振动的周期进行比较,常把振动系统 在相继两次通过极大(或极小)位置经历的时间称作为阻尼振动的"周期",所以阻尼振动也称为准周期性运动.

受迫振动是系统在外界驱动力作用下发生的振动.驱动力可以是周期性的,也可以是非周期性的.例如小孩在荡秋千时,大人推他一把就是非周期性的驱动力.在周期性驱动力中,最简单的是按正弦或余弦规律变化的周期力.

在受迫振动中,由于阻尼的作用消耗能量,驱动力对系统做功输入能量.在一个周期内,若输入的能量恰好等于消耗的能量,这时系统达到稳态振动的情况,因而系统作等幅振动,我们讨论的正是这种稳态的受迫振动.

共振是受迫振动系统在特定条件下发生的现象,有位移共振和速度共振之分.当驱动力的频率接近系统的固有频率时,振幅将达到最大值,这是位移振幅;当驱动力的频率等于系统的固有频率时,速度的幅值达到最大值,这是速度共振,在工程实际中,人们关心的是位移共振,而在电磁振荡中,人们关心的是电流的幅值随

频率的变化，而电流要当于机械振动中的速度，所以实质上考虑的是速度共振.

5. 简谐振动的合成

在实际问题中，常常遇到一个物体同时参与两个或多个简谐振动，这时合运动是怎样的运动呢？振动合成（或叠加）实质上是位移的叠加.因为位移是矢量，所以这个叠加是矢量叠加.但对于一维的情况，即同方向振动的情况，则为各分振动位移在该方向上的投影相加.求解简谐振动合成的方法可用解析法（即用三角函数公式）、作图法、旋转矢量法，而旋转矢量法最为简便.

两个同方向同频率简谐振动合成的结果仍为简谐振动，其频率与分振动的频率相同，振幅和初相位决定于两分振动的振幅和初相位.这种合成情况，不仅在机械振动和机械波中常遇到，在交流电和波动光学中也经常使用.两个同方向不同频率简谐振动的合成的结果不是简谐振动，一般比较复杂，当两分振动的频率相差很小时，合振动的振幅将随时间缓慢地作周期性变化，这种现象称为拍.拍现象在工程技术上有着广泛的应用.

两个相互垂直同频率简谐振动的合运动一般是椭圆（或圆）运动，椭圆的形状由两分振动的相位差决定，在特殊情况下，椭圆退化为直线，即合运动为简谐振动.频率相差较大但有简单整数比关系的两个简谐振动的合成，其合运动为有一定规则的稳定的闭合曲线，即李萨如图形.

四、解题指导

谐振动的习题可归纳为以下几类：

（1）有关简谐振动表达式的问题；

（2）用动力学判据分析简谐振动问题；

（3）阻尼振动、受迫振动和共振问题；

（4）电磁振荡问题；

（5）简谐振动的合成问题.

1. 有关简谐振动表达式的问题，如已知振幅、频率、运动情况等写出振动表达式，或已知振动曲线写出振动表达式等.求解这类问题时，特别要注意初相位和相位问题.

例 10-1

一弹簧振子，物体的质量 $m=50$ g，弹簧的劲度系数 $k=0.2$ N/m，水平放置（图 10-1（a））.开始时，物体在平衡位置，且向 x 轴正方向运动，速度 $v_0=1.0$ m/s.（1）写出振子的振动表达式；（2）求物体到达 $x=-\dfrac{A}{2}$ 处所需的时间.

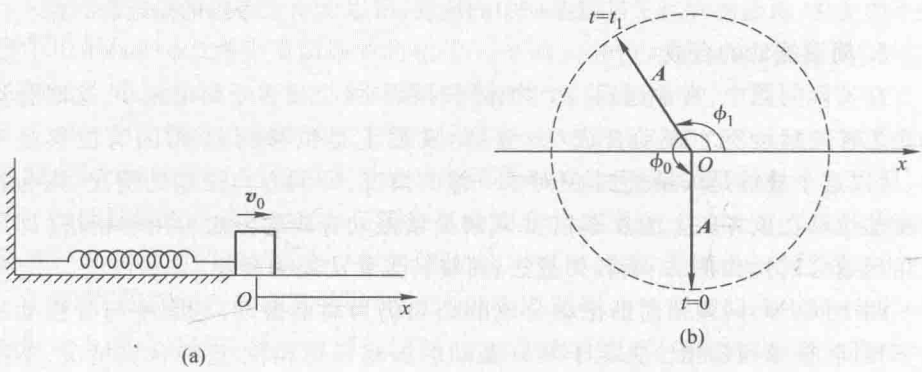


图 10-1

解 (1) 由题给条件可以得到振子的角频率

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{0.2}{50\times10^{-3}}}\ \mathrm{s^{-1}}=2\ \mathrm{s^{-1}}$$

题中没有给出振动的振幅,但已知初始条件,物体在开始时处于平衡位置,且向 x 轴正方向运动,即 $x_0=0;v_0=1.0\ \mathrm{m/s}$,且 $v_0>0$,于是可得振幅

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=\frac{v_0}{\omega}=\frac{1.0}{2}\ \mathrm{m}=0.5\ \mathrm{m}$$

或由物体在平衡位置,速度最大 $v=A\omega$ 直接得到.

关于初相位 ϕ_0 有两种解法,一是解析法,由初始条件得

$$\phi_0=\arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\left(\text{或}-\frac{\pi}{2}\right)$$

又根据题意 $v_0>0$,而 $v_0=-\omega A\sin\phi_0$,将 v_0 代入得 ϕ_0 应取值 $\frac{3}{2}\pi\left(\text{或}-\frac{\pi}{2}\right)$.$\phi_0$ 值也可利用 $\cos\phi_0=\frac{x_0}{A}$,$\sin\phi_0=-\frac{v_0}{A\omega}$ 求得.如用旋转矢量图,可以简捷地、直观地得到量值,参看图 10-1(b).于是,弹簧振子的振动表达式为

$$x=A\cos(\omega t+\phi_0)=0.5\cos\left(2t+\frac{3\pi}{2}\right)\ (\mathrm{m})$$

或

$$x=0.5\cos\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)\ (\mathrm{m})$$

(2) 求解物体从初始位置到达 $x=-\frac{A}{2}$ 处的最短时间,也可用两种方法.设物体到达 $x=-\frac{A}{2}$ 处的时刻为 t_1,由振动表达式得

$$x=-\frac{A}{2}=A\cos\left(2t_1-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos\left(2t_1-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2},\quad 2t_1-\frac{\pi}{2}=\frac{2}{3}\pi$$

$$t_1=\frac{7}{12}\pi\ \text{s}=1.83\ \text{s}$$

$$\Delta t=t_1-t_0=1.83\ \text{s}$$

或由旋转矢量图得物体到达 $x=-\frac{A}{2}$ 处的相位 $\phi_1=\frac{2\pi}{3}$，所以相位差

$$\Delta\phi=\phi_1-\phi_0=\frac{2}{3}\pi-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{7}{6}\pi$$

$$\Delta t=\frac{\Delta\phi}{\omega}=\frac{7}{12}\pi\ \text{s}=1.83\ \text{s}$$

例 10-2

已知一振动系统的 $x-t$ 曲线如图 10-2(a)所示.试求系统的振动表达式.

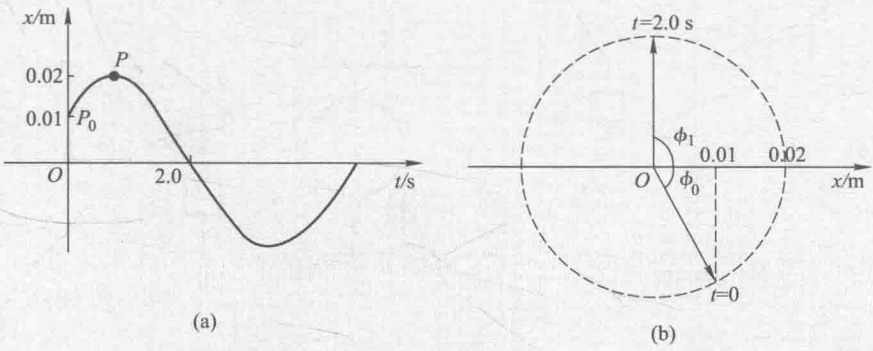


图 10-2

解　由振动曲线可知振幅 $A=0.20$ m，由于 $t=0$ 时，$x_0=0.10$ m，且向 x 轴正方向运动，由旋转矢量图可知初相 $\phi_0=-\frac{\pi}{3}\left(\text{或}\frac{5}{3}\pi\right)$，如图 10-2(b)所示.建立振动表达式时，$\omega$ 尚是未知数，根据振动曲线可知，当 $t=2.0$ s 时，$x=0$ 且向 x 轴负方向运动，再从旋转矢量图知 $\phi_1=\frac{\pi}{2}$.于是

$$\omega\Delta t=\Delta\phi=\phi_1-\phi_0=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

得

$$\omega=\frac{5}{12}\pi\ \text{s}^{-1}$$

则振动表达式为

$$x=0.02\cos\left(\frac{5}{12}\pi t-\frac{\pi}{3}\right)\ (\text{m})$$

读者也可用解析法自行计算得到.

2. 用动力学判据物体是否作简谐振动,具体的处理方法有两种,一种是解析法,先分析物体的受力情况.根据牛顿运动定律或定轴转动定律建立运动方程,与简谐振动的特征方程进行比较.另一种是能量法,写出振动系统的机械能表达式,如机械能守恒,即系统作简谐振动.然后对时间求一阶导数,可得简谐振动的特征方程,并可求得相关的物理量.

例 10-3

一定滑轮,半径为 R,转动惯量为 J,轻绳绕过滑轮,一端与固定的轻弹簧相连接,弹簧的劲度系数为 k,另一端拉一质量为 m 的物体,如图10-3(a)所示.现将物体从平衡位置向下拉一微小的距离后放手.试证物体作简谐振动,并求其振动周期.设绳与滑轮间无滑动,轴的摩擦及空气阻力忽略不计.

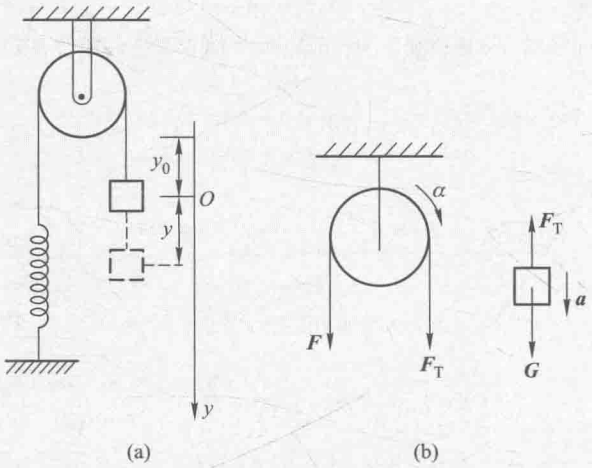


图 10-3

解　解法一:用解析法求解.

先画出物体的受力图[图 10-3(b)],选取适当的坐标系,一般以挂上物体后的平衡位置为坐标原点,设此时弹簧的伸长量为 y_0,所以

$$ky_0 = mg$$

物体向下运动到任一位置,设距原点的距离为 y,根据牛顿运动定律及转动定律列出物体和滑轮的运动方程:

$$mg - F_T = ma = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$F_T R - FR = J\alpha$$

而

$$F = k(y + y_0)$$

$$a=R\alpha$$

联立解以上方程得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{kR^2}{J+mR^2}y$$

这符合简谐振动的判据，因而物体作简谐振动，由此得圆频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{kR^2}{J+mR^2}}$$

周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{J+mR^2}{kR^2}}$$

解法二：用能量法求解

先写出物体在任一位置时系统的总机械能.设物体在此位置时的速度为 v，滑轮的角速度为 ω，离平衡位置的距离为 y，并设弹簧原长时的弹性势能为零，物体在平衡位置时的重力势能为零.所以，系统的总机械能

$$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2-mgy+\frac{1}{2}k(y+y_0)^2$$

$$=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\left(\frac{v}{R}\right)^2-mgy+\frac{1}{2}ky^2+ky_0y+\frac{1}{2}ky_0{}^2$$

以 $mg=ky_0$ 代入，化简得

$$E=\frac{1}{2}\left(m+\frac{J}{R^2}\right)v^2+\frac{1}{2}ky^2+\frac{1}{2}ky_0{}^2$$

因为对物体、滑轮、弹簧和地球组成的系统，外力的功为零，所以系统的机械能守恒.将上式对时间 t 求导，得

$$\left(m+\frac{J}{R^2}\right)v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+ky\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{kR^2}{mR^2+J}y$$

得到与方法一相同的结果.

例 10-4

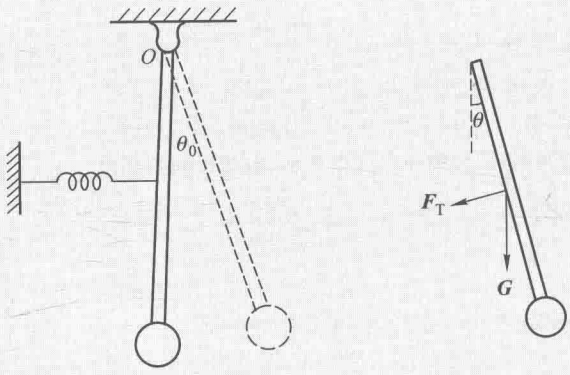
长为 l 的轻质细杆，一端固定一质量为 m 的小球，另一端可绕 O 轴自由转动，中间与一劲度系数为 k 的轻弹簧相连，当细杆竖直时，弹簧无伸长，若令杆自小角位移 θ_0 时静止释放.如图 10-4(a)所示.

(1) 证明系统作简谐振动；

(2) 取逆时针绕向为正，写出振动表达式.

解　(1) 当细杆偏离平衡位置 θ 角时，如图 10-4(b)所示，杆受到的力矩为

$$M=-mgl\sin\theta-k\frac{l}{2}\sin\theta\frac{l}{2}$$



(a) (b)

图 10-4

根据定轴转动定律有

$$-mgl\sin\theta - k\frac{l}{2}\sin\theta\frac{l}{2} = J\alpha = ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

当角位移很小时,$\sin\theta \approx \theta$,于是

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{g}{l} + \frac{k}{4m}\right)\theta$$

杆的运动符合简谐振动判据,所以细杆的振动为简谐振动.

(2) 由上式可得

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{4m}}$$

由于开始时,杆的角位移为 θ_0,静止释放的,所以初相位为

$$\phi_0 = 0$$

杆的振动表达式为

$$\theta = \theta_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{4m}}\,t\right)$$

3. 简谐振动的合成也可以用解析法和旋转矢量法求解,但后者比较直观、简便.

例 10-5

已知两个同方向同频率的简谐振动,它们的振动表达式分别为

$$x_1 = 0.06\cos\left(2\pi t + \frac{5}{6}\pi\right)\ (\text{m})$$

$$x_2 = 0.08\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\ (\text{m})$$

试求合振动的表达式.

解　用解析法求解

根据同方向同频率两简谐振动的合振动公式

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\phi_{02}-\phi_{01})}$$

$$=\sqrt{(0.06)^2+(0.08)^2+2\times0.06\times0.08\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)}\ \text{m}$$

$$=0.10\ \text{m}$$

$$\phi_0=\arctan\frac{A_1\sin\phi_{01}+A_2\sin\phi_{02}}{A_1\cos\phi_{01}+A_2\cos\phi_{02}}$$

$$=\arctan\frac{0.06\sin\frac{5\pi}{6}+0.08\sin\frac{\pi}{3}}{0.06\cos\frac{5\pi}{6}+0.08\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$=\arctan(-8.30)$$

因合振动的初相位有两个值,在Ⅱ、Ⅳ象限,又根据

$$\cos\phi_0=\frac{A_1\cos\phi_{01}+A_2\cos\phi_{02}}{A}$$

$$=\frac{0.06\cos\frac{5\pi}{6}+0.08\cos\frac{\pi}{3}}{0.10}=-0.12$$

所以 ϕ_0 在第Ⅱ象限,$\phi_0=0.54\pi$.

合振动的表达式为

$$x=0.10\cos(2\pi t+0.54\pi)\ (\text{m})$$

画出 $t=0$ 时刻两分振动的旋转矢量图(图10-5),得 $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_2$ 之间的夹角为 $\phi_{01}-\phi_{02}=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$,即 $\boldsymbol{A}_1\perp\boldsymbol{A}_2$.所以

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}=\sqrt{(0.06)^2+(0.08)^2}\ \text{m}$$

$$=0.10\ \text{m}$$

设 $\boldsymbol{A}_2$ 与 $\boldsymbol{A}$ 之间的夹角为 θ,由图得

$$\theta=\arctan\frac{3}{4}=0.205\pi$$

合振动的初相位

$$\phi_0=\phi_{02}+\theta=\frac{\pi}{3}+0.205\pi=0.54\pi$$

合振动的表达式为

$$x=0.10\cos(2\pi t+0.54\pi)\ (\text{m})$$

由此可见,用旋转矢量法求解比较简便.

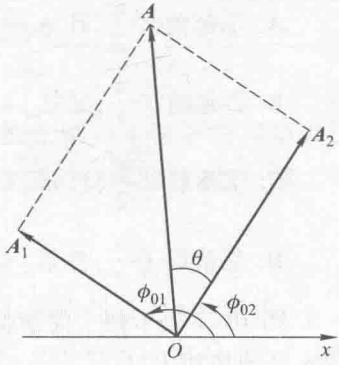


图 10-5

五、自我检测

(一) 选择题

1. 一个沿 y 轴作简谐振动的弹簧振子,振幅为 A,周期为 T,其运动学方程用余弦函数表示.下面左侧是振子的初始状态,右侧列出了一些初始值.试用连线的方法确定它们的对应关系:

A. 过 $y=\frac{A}{2}$ 处向 y 轴正方向运动　　A′. $\phi_0=-\frac{3}{4}\pi$

B. 过 $y=-\frac{A}{\sqrt{2}}$ 处向 y 轴正方向运动　　B′. $\phi_0=\pm\pi$

C. 过平衡位置处向 y 轴正方向运动　　C′. $\phi_0=-\frac{1}{3}\pi$

D. 过 $y_0=-A$　　D′. $\phi_0=-\frac{1}{2}\pi$

2. 一物体悬挂在一轻弹簧下端,使其振动时,测得其周期为 T.然后将弹簧分割成两半,并联悬挂同一物体,作振动时,测得其周期为 T',则 T/T' 为 [　　]

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

3. 一个系统作简谐振动,周期为 T,初相位为零,物体的动能和势能相等的时刻为 [　　]

A. $\frac{T}{8}$　　B. $\frac{T}{6}$　　C. $\frac{T}{4}$　　D. $\frac{T}{2}$

4. 图 10-6 表示两个简谐振动的 $x-t$ 曲线,两振动之间的相位 [　　]

A. ①超前②$\frac{\pi}{2}$,且 $\phi_{01}=0$

B. ②超前①$\frac{\pi}{2}$,且 $\phi_{01}=\frac{1}{2}\pi$

C. ①落后②$\frac{\pi}{2}$,且 $\phi_{01}=\frac{3}{2}\pi$

D. ②落后①$\frac{\pi}{2}$,且 $\phi_{01}=\frac{1}{2}\pi$

5. 图 10-7 表示两个简谐振动的 $x-t$ 曲线,将这两个简谐振动叠加,合成的余弦振动的初相为 [　　]

A. 0　　B. $\frac{1}{2}\pi$　　C. π　　D. $\frac{3}{2}\pi$

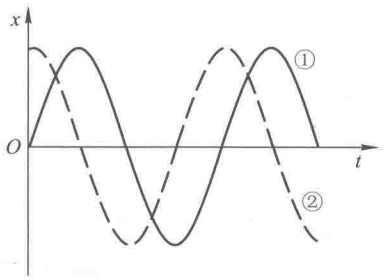


图 10-6

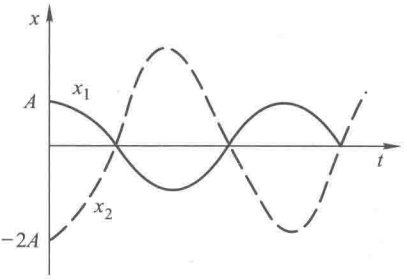


图 10-7

（二）填空题

1. 设质点沿 x 轴作简谐振动，位移为 x_1 和 x_2 时速度分别为 v_1 和 v_2，此质点振动的周期为_____.

2. 一个弹簧振子和一个单摆作小幅度振动，在地面上的固有周期分别为 T_1 和 T_2，将它们拿到月球上去，周期分别为 T_1' 和 T_2'，则相应的周期关系是_____（填“>、=或<”）.

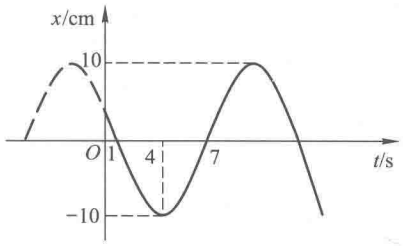


图 10-8

3. 图 10-8 所示为一物体运动的位移-时间曲线，它的振动表达式用余弦函数表示为_____.

4. 两个线振动合成为一圆运动的条件是（1）_____，（2）_____，（3）_____，（4）_____.

5. 一电容器和一线圈构成 LC 电路，已知电容 $C=2.5\ \mu F$.若要使此振荡电路的固有频率 $\nu=1.0\times10^3$ Hz，则所用线圈的自感 $L=$_____.

（三）计算题

1. 两个简谐振子作同频率、同振幅的简谐运动.第一个振子的振动表达式为 $x_1=A\cos(\omega t+\phi_0)$，当第一个振子从振动的正方向回到平衡位置时，第二个振子恰在正方向的端点.

（1）求第二振子的振动表达式和二者的相差；

（2）若 $t=0$ 时，$x_1=-A/2$，并向 x 负方向运动，画出二者的 $x-t$ 曲线.

2. 质量为 m，长为 l 的均匀细杆，可绕通过其一端的固定轴 O_1 在竖直面内自由转动，在离轴 $\dfrac{l}{\sqrt{3}}$ 处有劲度系数为 k 的轻弹簧与杆连接，弹簧的另一端固定于

O_2,如图 10-9 所示.开始时杆刚好在水平位置且静止.现将杆沿顺时针方向绕 O_1 轴转过一个很小的角度 θ_0,然后放手.试证明杆将作简谐运动,并求其周期,列出其振动表达式.

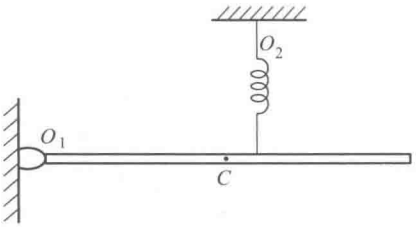


图 10-9

六、问题讨论

自激振动

振动系统受到阻尼的作用,振动是不能持久的,用周期性外力激励的受迫振动,振动系统将作等幅振动.如果不是用周期性力激励,系统将如何运动呢?下面举一个简单的实验加以说明.

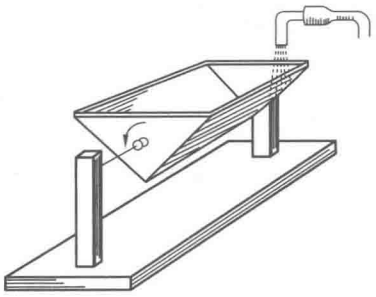


图 10-10

如图 10-10 所示,一个装在轴上具有三角形剖面的水槽,它能够绕轴自由振动,受到摩擦力和空气阻力会使其自由振动停止.现把水沿槽壁(远离中心线)均匀地注入槽内,水槽的重心将随水的注入而升高.当重心高于水槽的轴线时,较小的水流压力就会使水槽翻转,于是槽内的水倒出,水槽又翻回过来.如此重复注水、翻转,水槽在作振动.这种振动与我们前面所讨论的振动有很大的区别,首先,外部的作用力不是周期性力;其次,振动系统虽受摩擦阻尼等作用,但它仍作等幅振动.这种由非周期性外力激励引起的振动称为自激振动(self-excited vibration).上述的自激振动曲线如图10-11所示.

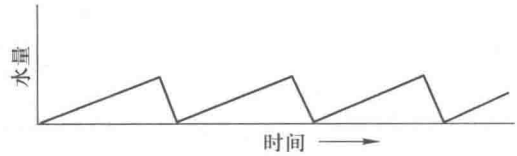


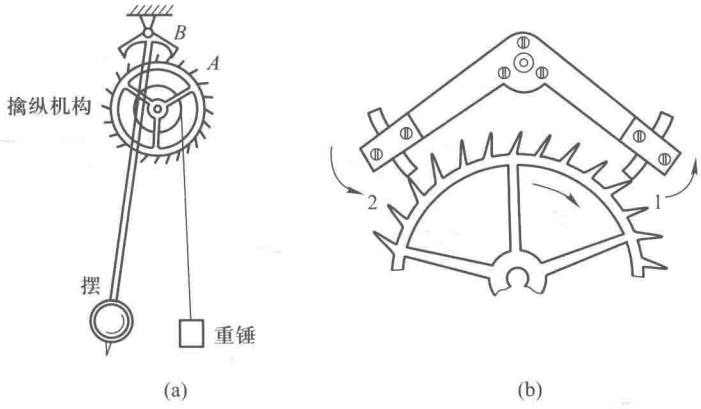
图 10-11

自激振动在自然界里和生活中是常见的.例如,树梢在狂风中呼啸,提琴奏出美妙的乐曲,自来水管突如其来的喘振,滑润不好的门铰链发出的轧轧声,老式摆钟发出滴答滴答声等都是各式各样的自激振动.在金属机械加工时,若安装不好,刀具也会自激振动,使工件表面出现波浪式纹路,严重影响加工的质量,也

影响机床的寿命.

自激振动系统的结构,一般由三部分组成:① 振动系统;② 能源,用以供给自激振动中的能量消耗;③ 具有反馈特性的控制和调节系统.下面以摆钟为例进行分析.

摆钟是最简单的自激振动系统.振动系统是摆,能源是降落重锤(或弹簧发条)和与之相连的棘轮,控制系统是与摆刚性连接的擒纵机构,如图 10-12(a)所示.当棘轮齿落在擒纵叉齿 1 时,棘轮齿就推动擒纵叉和与它相连的摆.这时擒纵叉齿 2 就沿棘轮齿侧面滑动而下降,并挡住下一个棘轮齿,直到摆完成向右偏移而回到中间位置为止,如图 10-12(b)所示.在设计擒纵叉和棘轮时,要使摆在行程中得到两次推动:一次是从左到右,一次是从右到左.如果使机构在适当的时刻推动钟摆,那么摆锤将作等幅振动.机构推动摆锤,而摆锤对机构发生相反的作用.如果摆锤不动,那么推动力就停止.摆锤控制着自己的振动.所以钟摆的摆动表面上看来好像与受迫振动类似,钟摆受到的冲击力也是周期性的,其实这个周期是由摆本身决定的,这是自激振动的一个特性,称为反馈(feedback).



(a)　(b)

图 10-12

第十一章
机械波和电磁波

一、学习要求

1. 了解波的形成与传播，理解波动的物理本质，掌握描述波动的各物理量的意义及其相互关系.

2. 理解平面简谐波的波动表达式的物理意义，掌握根据已知条件建立平面简谐波的波动表达式的方法.

3. 理解波的能量传播特点，理解波的能量、能流、平均能流密度（波的强度）的概念和相关计算.

4. 了解波动（微分）方程建立的方法及其意义.

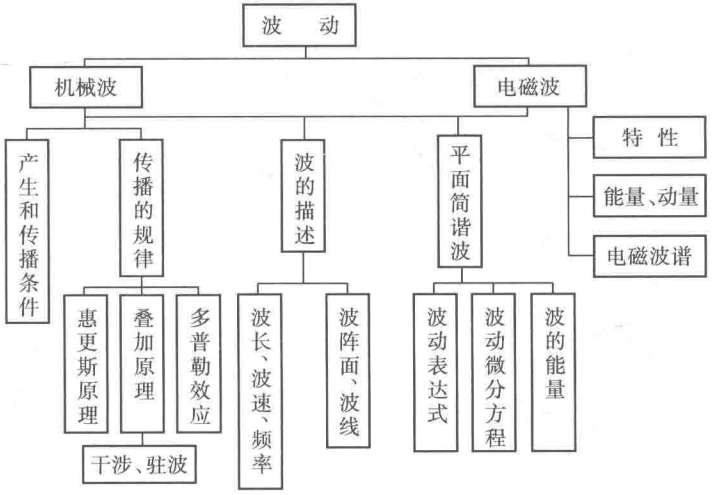
5. 了解惠更斯原理.理解波的叠加原理.掌握波的相干条件，会利用波程差或相位差分析、确定相干波相干后干涉相长和相消的条件.

6. 理解驻波的形成、波动表达式及其振幅、相位分布特点，会计算波腹和波节的位置.理解半波损失概念及产生条件.了解驻波和行波的区别.

7. 了解机械波的多普勒效应及其产生的原因，会计算频率的改变.

8. 了解电磁波的性质.

二、知识框图



三、内容导读

1. 波动是什么在传播

机械波是机械振动在弹性介质中的传播，电磁波是变化的电场和变化的磁

场在空间的传播,它们都属于波动.那么就一般而言,波动是什么在传播呢?我们知道,机械波在弹性介质中传播时,各质元都在各自的平衡位置附近振动,并不"随波逐流",因此波的传播不是介质质元的传播.由于波传播时,各质元的振动是在前一个质元的弹性力作用下发生的,所以前一质元的振动状态就是后一质元晚一些时间的振动状态.如用相位来描述,在波的传播方向上介质的各质元的相位不同,后者比前者落后一相位差.由此可知,波动过程只是振动状态的传播,也就是振动相位的传播.从能量角度来看,波动过程伴随着能量的传播.

2. 描述波动的物理量

波动具有空间周期性和时间周期性,因而描述波动既要考虑每一质元振动的时间周期性,还要考虑所有质元振动状态整体的空间周期性.波的周期(或频率)描述波的时间周期性;波长描述波的空间周期性.除此以外,波的振幅和波速也是波的特征量.对于波速应注意以下几点:① 由于波是振动状态的传播,所以波的传播速度就是相位传播的速度,所以它又称为相速度;② 要区别波的传播速度和介质质元的振动速度;③ 机械波的波速由介质的性质决定,即介质的惯性(由密度来反映)和介质的弹性(由弹性模量来反映).介质的弹性又决定了传播怎样的波,那些只有容变弹性的介质,如气体和液体,只能传播纵波;那些具有长变弹性或切变弹性的介质,如固体,既能传播纵波,又能传播横波.

3. 平面简谐波

建立平面简谐波的波动表达式(或称波函数)和了解它的物理意义是本章的主要内容之一.建立波动表达式,一般可采取以下步骤:

(1) 选取坐标系并明确波的传播方向.可以选取任何一条波线为 Ox 轴,波的传播方向与 Ox 轴的正方向一致.Oy 轴表示波线上各点振动的物理量.坐标原点不一定选在波源上.

(2) 写出给定点 a 的振动表达式,例如 $y_a(t)=A\cos(\omega t+\phi_0)$

(3) 比较距原点距离为 x 的任一点和给定点间的相位差,写出该点的振动表达式,由于该点的任意性,实质上,这就是波动表达式.若任一点 P 的相位比 a 点落后 $\frac{2\pi}{\lambda}(x-a)$,于是 P 点的振动表达式为

$$y(x,t)=A\cos\left[\omega t+\phi_0-\frac{2\pi}{\lambda}(x-a)\right]$$

$$=A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\frac{2\pi a}{\lambda}+\phi_0\right)$$

这就是波动表达式.若 P 点选在 O 点的左侧或 O、a 之间,上式仍是正确的.读者可自行验证.如果以给定点作为坐标原点,则波动表达式为

$$y(x,t)=A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\phi_0\right)$$

无论是纵波还是横波，上式都是适用的.在纵波情况下，波动位移 x 和振动位移 y 相平行；而在横波情况下，x 和 y 相垂直.

波动表达式的物理意义可归纳如下：当 x 给定，t 为变量时，波动表达式表示介质中该给定点的振动；当 t 给定，x 为变量时，波动表达式表示在该给定瞬间，介质中各质点位移的分布；当 x 和 t 都是变量时，波动表达式表示波形在介质中传播的情形，即行波.所以波动表达式是描述介质整体的运动状态.

4. 波动方程

一维波动方程的一般形式为

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

这是物理学中描述波动过程的一个具有普遍意义的微分方程.任何一个与时间 t 和坐标 x 有关的物理量，只要满足这个微分方程，这个物理量所代表的物理性质一定是按波动规律传播的，而且 $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ 的系数的倒数的平方根就是该波动的波速.

各种介质中传播的机械波的波动方程以及波速可以通过介质质元的受力和运动的关系（牛顿运动定律）以及介质质元受力和形变的关系（模量的定义）导出.

必须指出，上述波动微分方程的解不仅是一维简谐波，对于具有 $\xi=f(x-at)$ 形式的函数所表示的一维的波都能满足.

5. 波的能量

波在介质中传播时，介质中各质元都在振动，因此都有动能；与此同时，介质将发生弹性形变，因此各质元又具有势能.由于同一时刻不同质元的能量状况不同，因而在介质中有一个分布，由不同时刻的能量分布状况可以知道能量是在传播着的.

对于波的能量，必须注意以下几点：① 在波的传播过程中，任一体积元的动能和势能都随时间变化，在任何时刻量值都相等，且是同相位的，即动能达到最大值时，势能也达到最大值；动能为零时，势能也为零.这和简谐振动的能量变化完全不同.② 在波动传播过程中，任一体积元的总能量不是一个常量，而是随时间 t 作周期性变化的，这与简谐振动的总能量是一常量也完全不同.③ 由能量公式中的相位项可以知道，能量以速度 u 在介质中伴随波一起传播.④ 要区别波的能量和振动能量以及它们的关系.

描写波动能量传播的物理量较多，如能流、能流密度、波的强度等，必须注意它们的定义、与其他物理量的关系以及它们的单位.

6. 波动传播过程中的现象和规律

(1) 波动传播过程中所遵从的基本原理

(a) 惠更斯原理:波面上的每一点都可看成发射子波的波源.在其后的任一时刻,这些子波的包迹就成为新的波阵面.惠更斯原理能较直观和形象地说明波的传播方向问题.如波的反射和折射等,它适用于任何波动过程.

(b) 波的叠加原理:两列或两列以上的波可以互不影响地同时通过某一区域,在相遇区域内,任一点的振动为各列波单独在该点引起的振动的合振动.波的干涉和驻波都是在一定条件的波的叠加现象.

(2) 波的干涉

关于波的干涉,首先要弄明白什么是干涉现象,然后要了解产生干涉现象的条件,最后要掌握干涉的结果.学习波的干涉也为学习下一章光的干涉打下基础.

当两列满足一定条件的波在空间相遇时,在空间某些点处振动始终加强,而在另一些点处,振动始终减弱或消失,在空间形成一个稳定的图像,这就是波的干涉现象.这里应注意"始终""稳定"几个字.就是说,在干涉现象发生的始末,都观察到稳定的结果.这在机械波的情况下是很容易实现的,但在研究光的干涉时,却较难实现.

不是任意两列波都能够观察到干涉现象,只有相干波才能发生干涉现象,相干波必须满足以下三个条件:(a) 频率相同:若两列波的频率不同,则两者的相位差随时间变化,合振动的振幅也随时间变化,因而不可能观察到稳定的结果;(b) 振动方向相同;若振动方向不同,则它们对于相遇处质点引起的振动不是直线振动,而是平面振动.(c) 相位差恒定:合振动的振幅要稳定,那必须使该点的两个振动的相位差恒定,不随时间改变,这就要求两波源的初相位差恒定,传播介质的情况不变.以上三个条件是产生干涉现象的必要条件,是缺一不可的.波的干涉是一种特定条件下波的叠加现象.

干涉加强和减弱的条件是:

加强: $\Delta\phi=\phi_{02}-\phi_{01}-2\pi\dfrac{r_2-r_1}{\lambda}=\pm 2k\pi,\ k=0,1,2,\cdots$

合振幅:$A=A_1+A_2$,强度 $I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}$

减弱: $\Delta\phi=\phi_{02}-\phi_{01}-2\pi\dfrac{r_2-r_1}{\lambda}=\pm(2k+1)\pi,\ k=0,1,2,$

合振幅:$A=|A_1-A_2|$,强度 $I=I_1+I_2-2\sqrt{I_1I_2}$

从能量角度来看,波的干涉将使能量在空间形成稳定的、有规则的不均匀分布.

(3) 驻波

驻波也是两相干波的叠加,但它们的传播方向相反.叠加的结果使各质元以相同频率、振幅按余弦函数规律在各自的平衡位置附近振动,它们的振动状态并不向外传播,只是合成波的波形驻定在原地起伏变化着,驻而不行.这就是驻波区别于行波的特点.

驻波的能量也不传播,这是区别于行波的又一特点.我们知道,当质元的位移都同时到达各自的最大值时,其动能均为零,全部能量为势能,由于波节处的质元相对形变最大,弹性势能最大,波腹处质元形变为零,势能为零,因而能量主要以势能形式集中在波节附近.当质元同时通过平衡位置时,各质元均无形变,势能为零,全部能量都是动能.由于波腹处的质元速度最大,动能最大,因而能量主要以动能形式集中在波腹附近.从整个振动过程看,能量仅在相邻的波腹和波节之间相互转换,并在波腹和波节之间往返集结.

驻波通常可由垂直入射于两种介质界面的入射波和垂直的反射波在一定范围内叠加而成.当波从波疏介质射向波密介质界面而反射回到波疏介质时,反射波相对于入射波发生了 π 的相位突变,相当于增加或减少了半个波长的波程差,这一现象被形象地称为"半波损失",这时,叠加后反射点处是波节.反之,波被波疏介质反射时,反射波没有相位突变,所以反射点是波腹.

7. 多普勒效应

多普勒效应是波传播过程中特有的重要现象之一.当波源或观察者之间有相对运动时,观察者所测得的波的频率会高于或低于波源的频率.对于机械波的情况,波源和观测者的运动都是以介质为参考系,我们只研究波源和观测者在它们的连线上运动时发生的多普勒效应.

当波源和观测者同时运动时,观测者测到的频率

$$\nu_R = \frac{u+v_R}{u-v_S}\nu_S$$

式中 ν_S 为波源振动频率,v_S 和 v_R 分别为波源和观测者相对介质的运动速度,其符号规定如下:当波源和观测者相向运动时,v_S 和 v_R 均取正值,当波源和观测者相背运动时,v_S 和 v_R 均取负值.具体推导过程请仔细阅读教材.

四、解题指导

本章的习题主要有以下几种类型:

(1) 有关波动表达式(波函数)问题;

(2) 波的能量;

(3) 波的叠加——波的干涉和驻波;

(4) 多普勒效应.

1. 关于波动表达式问题有:(1) 已知波动表达式求有关波动的特征量,求解这类问题的方法一般采用比较法,即将已知的波动表达式与标准的表达式进行比较,从而找出相应的物理量;也可以根据各物理量的定义,通过计算得到结果.(2) 已知有关振动物理量,建立波动表达式,一般采用下列步骤:

① 在波线上建立坐标系,由题给条件写出原点或传播方向上某一点的振动表达式;

② 距原点任取一点 P,计算出 P 点的振动比已知点的振动在相位上超前或落后,在原振动表达式中的相位项中加上或减去相位差,即得到波动表达式.

③ 如已知波形曲线,则从曲线确定有关波动特征量,特别要注意确定点的振动相位,写出该点的振动表达式,再根据传播方向写出波动表达式.

例 11-1

一平面简谐波以速度 $u=20$ m/s 沿直线传播.已知在传播过程中某点 A(图 11-1)的简谐振动表达式为 $y=0.03\cos 4\pi t$ (SI 单位).(1) 以 A 点为坐标原点,写出波动表达式;(2) 以距 A 点为 5 m 处的 B 点为坐标原点,写出波动表达式.

解 本题主要理解坐标原点选取不同,波动表达式也就不同.从相位的超前或落后确定表达式.

(1) 以 A 点为坐标原点,则轴线正方向任意点 P 处的振动比 A 点的振动落后时间 $\frac{x}{u}$,即相位落后 $\frac{\omega x}{u}$,所以波动表达式为

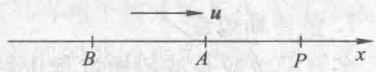


图 11-1

$$y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\phi_0\right]$$

$$=0.03\cos\left[4\pi\left(t-\frac{x}{20}\right)\right] \quad \text{(SI 单位)}$$

(2) 以 B 点为坐标原点,则 B 点的振动比 A 点的振动相位超前 $\frac{\omega|BA|}{u}$,所以 B 点的振动表达式为

$$y_B=0.03\cos\left[4\pi\left(t+\frac{5}{20}\right)\right] \quad \text{(SI 单位)}$$

而轴线正方向任意点的振动比 B 点的振动时间落后 $\frac{x}{u}$,也就是相位落后 $\frac{\omega x}{u}$,所以以 B 点为坐标原点的波动表达式为

$$y=0.03\cos\left[4\pi\left(t+\frac{5}{20}-\frac{x}{u}\right)\right]$$

$$=0.03\cos\left(4\pi t-\frac{\pi}{5}x+\pi\right) \quad \text{(SI 单位)}$$

例 11-2

一平面简谐波在 $t=0$ 时的波形曲线如图 11-2 所示.波速 $u=0.08$ m/s.(1) 写出该波的波动表达式;(2) 画出 $t=\dfrac{T}{8}$ 时的波形曲线.

解　(1) 由波形曲线可知

$$A=0.04\text{ m},\quad \lambda=0.4\text{ m}$$

所以

$$\nu=\frac{u}{\lambda}=\frac{0.08}{0.4}\text{ Hz}=0.2\text{ Hz}$$

从波形曲线还知,当 $t=0$ 时,原点 O 处的质元向 y 轴负方向运动,即 $y=0$,$v<0$,所以 O 点处质元振动的初相 $\phi_0=\dfrac{\pi}{2}$.O 点处质元的振动表达式为

$$y=A\cos(\omega t+\phi_0)=A\cos(2\pi\nu t+\phi_0)$$

$$=0.04\cos\left(0.4\pi t+\frac{\pi}{2}\right)\quad(\text{SI 单位})$$

于是,波动表达式为

$$y=A\cos\left[2\pi\left(\nu t-\frac{x}{\lambda}\right)+\phi_0\right]$$

$$=0.04\cos\left[2\pi\left(0.2t-\frac{x}{0.4}\right)+\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=0.04\cos\left[0.4\pi t-5\pi x+\frac{\pi}{2}\right]\quad(\text{SI 单位})$$

(2) 经过 $\dfrac{T}{8}$,波形向右移动了 $\dfrac{\lambda}{8}=\dfrac{0.4}{8}\text{ m}=0.05\text{ m}$ 的距离,如图 11-3 所示.

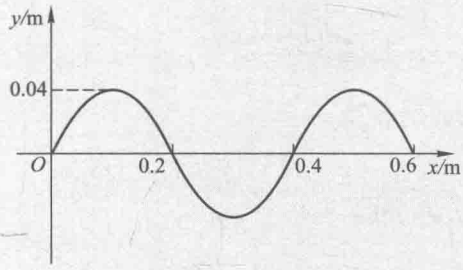


图 11-2

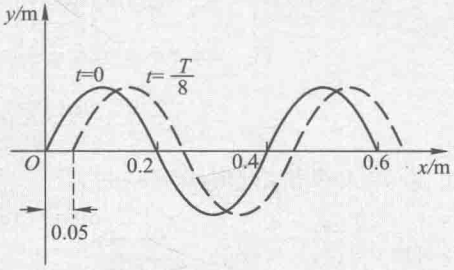


图 11-3

2. 关于波的叠加,主要有波的干涉和驻波两部分内容.波的干涉问题主要是计算相干波在空间各处相遇是增强还是减弱,这可通过二者的相位差或波程差来确定.在驻波问题中,波腹和波节的位置是计算问题的重点.当驻波由入射波和反射波叠加而形成时,写出反射波的波动表达式是关键,这时要注意在反射点是否有半波损失.

例 11-3

在无限大、均匀无吸收的介质中,有两个同方向振动的波源 S_1 和 S_2,相距 $L=19$ m,它们的振幅相同,振动频率均为 50 Hz.波源 S_1 的相位比 S_2 超前 $\frac{\pi}{2}$,若波源 S_1 和 S_2 产生的平面简谐波在它们的连线上传播,波速 $u=200$ m/s.试求两波源的连线上因干涉而加强和减弱各点的位置.

解 取 S_1 和 S_2 的连线为 x 轴,S_1 处于坐标原点.S_1 指向 S_2 为 x 轴的正方向,如图 11-4 所示.由于这两列波满足相干波条件,因干涉而加强的各点,其相位差必须满足 $\Delta\phi=2k\pi$ 的条件,因干涉而减弱的各点的相位差条件是 $\Delta\phi=(2k+1)\pi$.现分成三个区域来讨论.

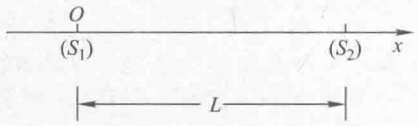


图 11-4

(1) $x<0$ 区域

在这区域内任取一点,其坐标为 $-|x|$,则波源 S_1 和 S_2 产生的波传到该点的波程差

$$\delta=r_2-r_1=L+|x|-|x|=L$$

相位差

$$\Delta\phi=\phi_2-\phi_1=\phi_{02}-\phi_{01}-\frac{2\pi(r_2-r_1)}{\lambda}$$

$$=-\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi L}{\lambda}=-10\pi$$

在此区域内,两列波的相位差满足 2π 的整数倍,故干涉的结果是每一点的振动都加强.

(2) $0<x<L$ 区域

在这区域内任取一点,两列波在该点的相位差

$$\Delta\phi=\phi_{02}-\phi_{01}-\frac{2\pi(r_2-r_1)}{\lambda}=-\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi(L-x-x)}{\lambda}$$

$$=-\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi(19-2x)}{4}=(-10+x)\pi$$

干涉加强各点应满足条件

$$\Delta\phi=-(10+x)\pi=\pm 2k\pi$$

k 可取 0,1,2,3,4,得

$$x=2,4,6,\cdots,18\ \text{m}$$

共 9 个点.

干涉减弱各点应满足条件

$$\Delta\phi=-(10+x)\pi=\pm(2k+1)\pi$$

k 可取 0,1,2,3,4,得

$$x=1,3,5,\cdots,17\ \text{m}$$

共 9 个点.

(3) $x>L$ 区域

$$\Delta\phi=\phi_{02}-\phi_{01}-\frac{2\pi(r_2-r_1)}{\lambda}=-\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi(x-L-x)}{\lambda}=9\pi$$

因 $\Delta\phi$ 为 π 的奇数倍，所有各点都因干涉而减弱.

例 11-4

如图 11-5 所示，在 $x=0$ 处有一平面波波源，其运动学方程为 $y=A\cos\ \omega t=A\cos\ \dfrac{2\pi}{T}t$，它产生的波沿 x 轴正、负方向传播. MN 为波密介质的反射面，距波源 $\dfrac{3}{4}\lambda$. 求：(1) 波源沿 O 点两侧所发射的波的表达式；(2) 在 MN 处反射波的表达式；(3) 在 $O\sim MN$ 区域内形成的驻波方程，以及波节和波腹的位置；(4) 在 $x>0$ 区域内合成波的表达式.

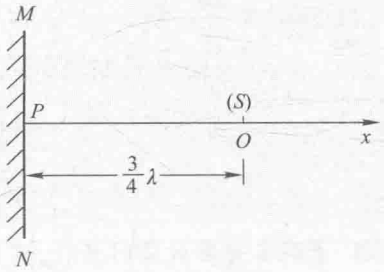


图 11-5

解　(1) 沿左方向和右方向传播的波的表达式分别为

$$y_{左}=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{u}\right)\right]=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$y_{右}=A\cos\left[\omega'\left(t-\frac{x}{u}\right)\right]=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

(2) $y_{左}$ 在反射面 MN 处引起质点 P 振动的表达式为

$$y_{左P}=A\cos\left[\frac{2\pi}{T}t+\frac{2\pi}{\lambda}\left(-\frac{3}{4}\lambda\right)\right]=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{3}{2}\pi\right)$$

因反射时有半波损失，所以反射波在此处引起的振动表达式应为

$$y'_{左P}=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{3}{2}\pi+\pi\right)=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{1}{2}\pi\right)$$

设反射波的波动表达式为 $y_{反}=A\cos\left[\omega\left(\dfrac{2\pi}{T}t-\dfrac{2\pi x}{\lambda}\right)+\phi\right]$，则反射波在 $x=-\dfrac{3}{4}\lambda$ 处的引起的振动为

$$y_{反P}=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{3}{2}\pi+\phi\right)$$

比较以上两式得 $\phi=-2\pi$，于是，反射波的波动表达式为

$$y_{反}=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi x}{\lambda}-2\pi\right)$$

$$=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

(3) 在 $O\sim MN$ 区域由 $y_{左}$ 和 $y_{反}$ 合成的驻波为

$$y_1 = y_{左} + y_{反} = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) + A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$= 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

波节的位置:$\frac{2\pi}{\lambda}x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $x = k\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$,取 $k=-1,-2$,得 $x=-\frac{1}{4}\lambda, -\frac{3}{4}\lambda$ 处为波节.

波腹的位置:$\frac{2\pi}{\lambda}x = k\pi$, $x = k\frac{\lambda}{2}$,取 $k=0,-1$,得 $x=0, -\frac{\lambda}{2}$ 处为波腹.

(4) 在 $x>0$ 区域,两个波为 $y_{右}$ 和 $y_{反}$,沿同方向传播,其合成波为

$$y_2 = y_{右} + y_{反} = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) + A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

$$= 2A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

3. 求解多普勒效应问题时,首先分析波源和观察者(接收器)的运动情况,以便应用不同公式进行处理.应特别注意公式中的符号规则,即二者相向运动时,速率取正值,背离运动时取负值.同时,要注意运动物体接收和反射波的情况,接收时是"观察者",反射时则是"波源"了.

例 11-5

道路交通管理条例中规定,在城市街道上小型客车的行驶速度不得超过 70 km/h.为了检查过往车辆的行驶速度,某岗亭上装置了超声波探测仪,它能够发射出频率为 100 kHz 的超声波探测信号.有一辆迎面驶来的小客车,探测仪接收到从车辆反射回来的超声波频率为 112 kHz.已知此时空气中的声速为 340 m/s,试问此小车是否违章?

解 当超声波从探测仪传向车辆时,车辆是"观察者",车辆接收到的超声波的频率为

$$\nu' = \frac{u+v}{u}\nu_0$$

式中 v 是车辆行驶的速度.在超声波被车辆反射回来过程中,车辆变为"波源",而探测仪成为"观察者",这时探测仪接收到的反射波频率为

$$\nu'' = \frac{u}{u-v}\nu'$$

结合以上两式,得到探测仪所接收到的反射波频率为

$$\nu'' = \frac{u+v}{u-v}\nu_0$$

由此可解得小车行驶的速度

$$v = \frac{\nu''-\nu_0}{\nu''+\nu_0}u = \frac{112-100}{112+100}\times 340\ \text{m/s} = 19.2\ \text{m/s}$$

而 $$70\ \text{km/h} = 19.4\ \text{m/s}$$

所以该小车没有违章.

五、自我检测

（一）选择题

1. 已知一平面简谐波的表达式为 $y=A\cos(at-bx)$（a、b 为正值），则 [　　]

A. 波的频率为 a　　B. 波的周期为 $\frac{2\pi}{a}$

C. 波长为 $\frac{\pi}{b}$　　D. 波的传播速度为 $\frac{b}{a}$

2. 一余弦横波以速度 u 沿 x 轴正向传播，$t=0$ 时刻的波形曲线如图 11-6（a）所示，而图 11-6（b）为一质点的振动曲线．则图（a）中 $x=0$ 处质点振动的初相位与图（b）所表示的振动初相位分别为 [　　]

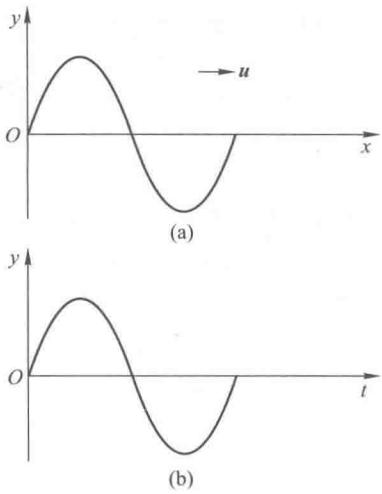


图 11-6

A. 均为零　　B. 均为 $\frac{\pi}{2}$

C. 均为 $-\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{2}$ 与 $-\frac{\pi}{2}$

E. $-\frac{\pi}{2}$ 与 $\frac{\pi}{2}$

3. 一平面简谐波，波长 10 cm，沿 x 轴正方向传播．在 $x=0$ 处质点的位移——时间函数如图 11-7 所示，则此波的波动表达式为 [　　]

A. $y=4\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{10}-\frac{x}{10}\right)+\frac{\pi}{2}\right]$（SI 单位）

B. $y=4\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{10}-\frac{x}{10}\right)+\frac{3\pi}{2}\right]$（SI 单位）

C. $y=4\cos\left[2\pi\left(10t-\frac{x}{10}\right)+\frac{\pi}{2}\right]$（SI 单位）

D. $y=4\cos\left[2\pi\left(10t-\frac{x}{10}\right)\right]$（SI 单位）

4. 一列机械横波在 t 时刻的波形曲线如图 11-8 所示，则该时刻能量最大的介质质元的位置是 [　　]

A. a,c,e　　B. b,d,f　　C. a,e　　D. c

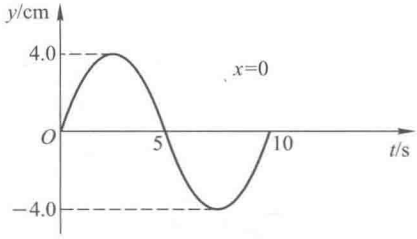


图 11-7

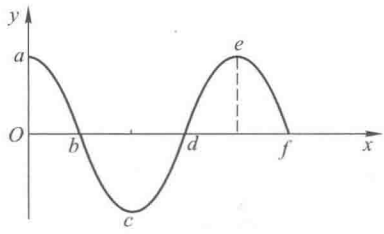


图 11-8

5. 设入射波的表达式为 $y_1=A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)$,在 $x=0$ 处发生反射,反射点为一固定端,则驻波的波腹位置为 [ ]

A. $\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{4}$　　B. $k\cdot\frac{\lambda}{2}$　　C. $(2k-1)\frac{\lambda}{4}$　　D. $k\cdot\frac{\lambda}{4}$

(二)填空题

1. 一个用余弦函数表示的沿 x 轴正方向传播的平面简谐波,在 $t=0$ 时的波形如图 11-9 所示,设波速 $u=20$ m/s,则该波的表达式为_____.

2. 一个用余弦函数表示的沿 x 轴正方向传播的平面简谐波,在 $t=0$ 时的波形如图 11-10 所示.则 a 点的振动初相位为 $\phi_{0a}=$_____,b 点的 $\phi_{0b}=$_____,c 点的 $\phi_{0c}=$_____,d 点的 $\phi_{0d}=$_____.

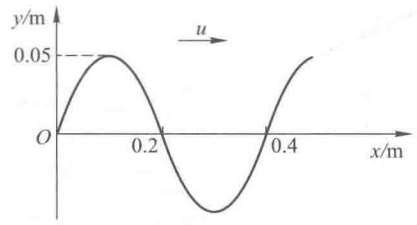


图 11-9

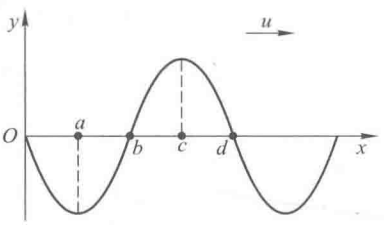


图 11-10

3. 图 11-11 中(Ⅰ)是 $t=0$ 时的波形图,(Ⅱ)是 $t=0.1$ s 时的波形图,已知 $T>0.1$ s,则波动表达式为_____.

4. 如图 11-12 所示,在坐标原点 O 处有一波源,它所激发的振动表达式为 $y_0=A\cos 2\pi\nu t$,该振动以平面波的形式沿 x 轴正方向传播,在距波源 d 处有一平面将波全反射回来(反射时无半波损失),则在坐标 x 处反射波的表达式为_____.

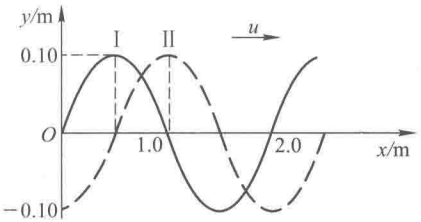


图 11-11

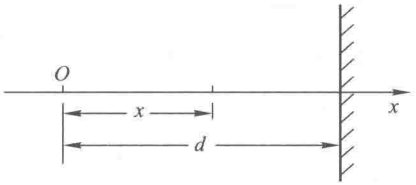


图 11-12

5. 真空中沿 x 轴正向传播的平面余弦电磁波.若已知其电场分量的波长为 λ,幅值为 E_0,$t=0$ 时刻的波形如图 11-13 所示,则

(a) $x=0$ 处电场分量的振动表达式为 $E=$_____.

(b) 磁场分量的波动表达式为 $H=$_____.

(c) 在图上画出 $t=0$ 时刻的磁场分量波形.

6. 无线电台发射功率为 P 的电磁波,若该电磁波可近似地视为以电台为中心的球面波,则离电台为 r 处的坡印廷矢量平均值 $\overline{S}=$_____,磁场的幅值 $H_0=$_____.

7. 火车 A 以速度 v_A 向前行驶,另一火车 B 以速度 v_B 与 A 相向而行.两火车同时拉响汽笛,若 A 司机听到 B 汽笛的频率与 B 司机听到 A 汽笛的频率恰好相等,均为 ν.设声音的传播速度为 u,则火车 A 的汽笛声频率 $\nu_A=$_____,火车 B 的汽笛声频率 $\nu_B=$_____.

8. 图 11-14 中 A、B 是两个相干的点波源,它们的振动相位差为 π(反相).A、B 相距30 cm,观察点 P 和 B 点相距 40 cm,且 $PB\perp AB$.若发自 A、B 的两波在 P 点处最大限度地互相削弱,则波长的最大可能值为_____.

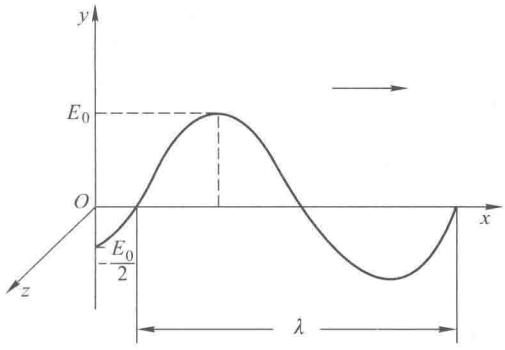


图 11-13

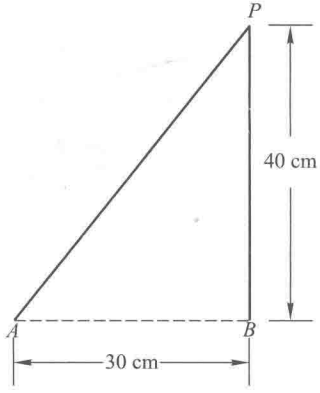


图 11-14

六、问题讨论

1. 波包和群速度

前面我们讨论了波的干涉现象,它是两列同频率、同方向振动的简谐波的叠加.现在我们进一步分析两个频率相近、同方向振动的简谐波的叠加.设两列简谐波的波动表达式为

$$y_1(x,t)=A\cos(\omega_1 t-k_1 x)$$

$$y_2(x,t)=A\cos(\omega_2 t-k_2 x)$$

为简单起见,假设两列波的振幅相同,它们在原点的初相位相等且为零.式中 k_1 和 k_2 分别为两列波的角波数.它们叠加后得到

$$\begin{aligned} y &= y_1+y_2 \\ &= 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t-\frac{k_1-k_2}{2}x\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t-\frac{k_1+k_2}{2}x\right) \end{aligned}$$

令

$$\bar{\omega}=\frac{\omega_1+\omega_2}{2},\quad \bar{k}=\frac{k_1+k_2}{2}$$

$$\omega_m=\frac{\omega_1-\omega_2}{2},\quad k_m=\frac{k_1-k_2}{2}$$

$$A_m=2A\cos(\omega_m t-k_m x)$$

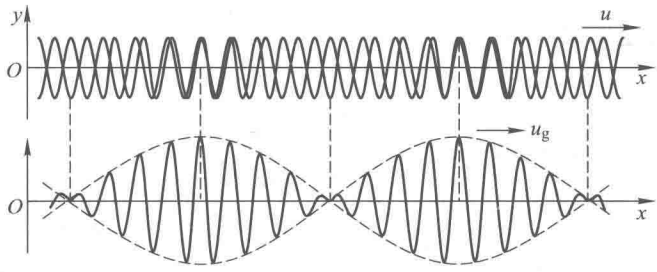
则上式可写成

$$y=A_m\cos(\bar{\omega}t-\bar{k}x)$$

由于 ω_1 和 ω_2 很相近,所以 $\omega_m=\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2}\ll\omega_1$ 或 ω_2,而 $\bar{\omega}\approx\omega_1$ 或 ω_2,又由于两列波的相速度 u_1 和 u_2 差别不大,所以 $k_m=\dfrac{k_1-k_2}{2}\ll k_1$ 和 k_2,而 $\bar{k}\approx k_1$ 或 k_2.这样,上式表示的合成波就可看成是振幅 A_m 以频率 ω_m 缓慢变化着而各质元以频率 $\bar{\omega}$ 迅速振动着的波.合成波的波形曲线如图 11-15 所示,实线表示高频率振动传播的波形,虚线表示振幅变化的波形,它表示振幅受到调制.由于振幅的变化,合成波显现为一簇一簇的振动向前传播,这样的一簇称为一个波群或波包(wave packet).由合成波的相位,可以得到合成波的传播速度,令($\bar{\omega}t-\bar{k}x$)= 常量,得

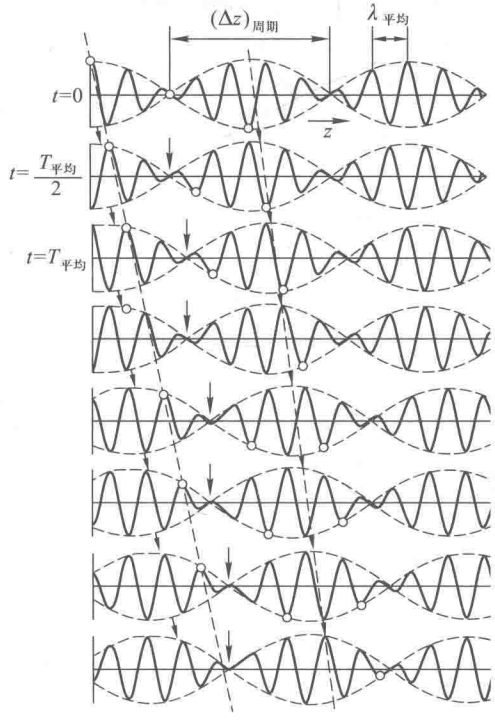
$$u_p=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$$

这就是合成波的相速度.调制的振幅也以一定的速度运动,这速度称为波包的群速度(group velocity),以 u_g 表示.它可以通过令($\omega_m t-k_m x$)= 常量求得,即



(a)

上图表示频率稍有不同的两列波，下图表示上面两列波的合成
合成波的振幅(虚线)随时间作周期性地变化



(b)

箭头以群速度u_g行进，白圈以平均相速度u_p行进

图 11-15　波包相速度的群速度

(a) 波包；(b) 相速度和群速度

$$u_g=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\omega_m}{k_m}=\frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

在 ω_1 和 ω_2 很接近的极限情况下.上式变为

$$u_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$$

这就是波包群速度的普遍表达式.利用 $\omega=u_p/k$ 以及 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$,可以把上式改写为

$$u_g=u_p+\lambda\frac{\mathrm{d}u_p}{\mathrm{d}k}$$

这是群速度和相速度之间的关系式.

我们知道,不同波长的光具有不同的颜色,它们有不同的传播速度(相速度),相应有不同的折射率,因而会出现色散(dispersion)现象.现在把色散概念推广到包括弹性波在内的各种类型的波.由于波的色散是由介质的特性决定的,因此常把介质分成色散介质和非色散介质.在非色散介质,相速度 u_p 与波长 λ $(=2\pi/k)$ 无关,即 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}k=0$,这时群速度与相速度没有区别.但是,在色散介质中,相速度与波长有关,波包的群速度与相速度不同,随着时间的推移,波包将会逐渐扩散开去,即波包的宽度将逐渐增大.

携带能量和传递信息的波包的调制振幅 A_m,它的传播速度是波包的群速度.理想的简谐波始终以同一振幅振动,所以并不传递信息和能量.

2. 反射波、透射波的强度和相位

(1) 机械波的反射和透射

在讨论波入射到两种介质界面时,只讨论了反射定律和折射定律,没有涉及波的强度问题,现在进一步讨论简谐波垂直入射到两种介质界面时反射波和透射波的强度问题.

设平面简谐波垂直入射到两种介质的交界面上,将出现反射波和透射波.如图 11-16 所示,取界面处为 $x=0$,适当选择时间零点,使入射波在 $x=0$ 处的振动初相位为零.这样,入射波、反射波和透射波的表式如下:

$$\left.\begin{aligned}&\text{入射波}\quad y_1=A_1\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u_1}\right)\right]\\&\text{反射波}\quad y_1'=A_1'\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{u_1}\right)+\phi_1'\right]\\&\text{透射波}\quad y_2=A_2\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u_2}\right)+\phi_2\right]\end{aligned}\right\}\qquad①$$

式中 ϕ_1' 和 ϕ_2 分别为 $x=0$ 处反射波、透射波的振动相对入射波振动的相位差.

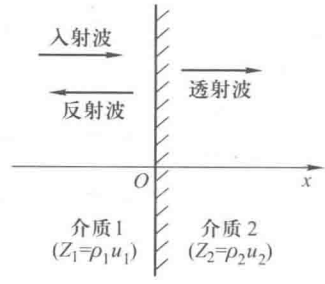


图 11-16　入射波在界面处的反射和透射

为了计算的方便,将式①换写成复数形式:

$$\left.\begin{aligned}&\text{入射线}\quad y_1=A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[\omega\left(t-\frac{x}{u_1}\right)\right]}\\&\text{反射波}\quad y_1'=A_1'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[\omega\left(t+\frac{x}{u_1}\right)+\phi_1'\right]}\\&\text{透射波}\quad y_2=A_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[\omega\left(t-\frac{x}{u_2}\right)+\phi_2\right]}\end{aligned}\right\}\qquad②$$

在分界面上($x=0$ 处)的边界条件为:

① 振动位移连续　就是说紧邻边界两侧质点的振动位移每时每刻都应相等,即

$$(y_1+y_1')_{x=0}=(y_2)_{x=0} \tag{3}$$

② 应力连续　即分界面处两侧介质中的应力相等,如以纵波为例,由于

$$\sigma=E\frac{\partial y}{\partial x}$$

所以

$$E_1\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}+\frac{\partial y_1'}{\partial x}\right)_{x=0}=E_2\left(\frac{\partial y_2}{\partial x}\right)_{x=0} \tag{4}$$

将式②代入式③和式④中,消去共同含时因子 $e^{i\omega t}$,并应用 $u_1=\sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}$,$u_2=\sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}}$,整理后得

$$A_1+A_1'e^{i\phi_1'}=A_2e^{i\phi_2}$$

$$\rho_1u_1A_1-\rho_1u_1A_1'e^{i\phi_1'}=\rho_2u_2A_2\,e^{i\phi_2}$$

将两式联立,并以介质的特性阻抗 $Z_1=\rho_1u_1$,$Z_2=\rho_2u_2$ 代入得

$$\frac{A_1'}{A_1}e^{i\phi_1'}=\frac{\rho_1u_1-\rho_2u_2}{\rho_1u_1+\rho_2u_2}=\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}$$

$$\frac{A_2}{A_1}e^{i\phi_2}=\frac{2\rho_1u_1}{\rho_1u_1+\rho_2u_2}=\frac{2Z_1}{Z_1+Z_2}$$

这两个等式的等号右方都是实数,左方也必定是实数,这就决定了 $e^{i\phi_1'}$ 和 $e^{i\phi_2}$ 都应为实数.又因 Z_1 和 Z_2 都大于零,所以 $e^{i\phi_2}=1$,得 $\phi_2=0$.又 $e^{i\phi_1'}$ 的值有两种可能,当 $Z_1>Z_2$,$e^{i\phi_1'}=1$,得$\phi_1'=0$;当 $Z_1<Z_2$,$e^{i\phi_1'}=-1$,得$\phi_1'=\pi$.这就是说,在 $Z_1>Z_2$ 的情形,波由特性阻抗大的介质进入特性阻抗小的介质,反射波和入射波在界面处的振动是同相位的;在 $Z_1<Z_2$ 的情形,波由特性阻抗小的介质进入特性阻抗大的介质,反射波和入射波在界面处的振动是反相的,也就是说,反射波有相位突变 π.因为相位差 π 相当于波程差半个波长,所以也称反射波有**半波损失**.

反射波、透射波的振幅与入射波的振幅之比可写成

$$\frac{A_1'}{A_1}=\left|\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}\right| \tag{5}$$

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{2Z_1}{Z_1+Z_2} \tag{6}$$

我们把反射波强度与入射波强度之比称为**强度反射系数**,以 R 表示;透射波强度与入射波强度之比称为**强度透射系数**,以 T 表示,于是有

$$R=\frac{\frac{1}{2}Z_1\omega^2A_1^2}{\frac{1}{2}Z_1\omega^2A_1^2}=\frac{A_1'^2}{A_1^2}=\left(\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}\right)^2 \tag{7}$$

$$T=\frac{\frac{1}{2}Z_2\omega^2A_2^2}{\frac{1}{2}Z_1\omega^2A_1^2}=\frac{Z_2A_2^2}{Z_1A_1^2}=\frac{4Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)^2} \tag{8}$$

显然

$$R+T=1$$

这符合能量守恒定律的要求.由式⑤还可以知道,如果 $Z_2\to\infty$ 或 $Z_2\gg Z_1$,这种极端情况相当于介质 2 是一种刚性壁.例如绳子的一端固定在墙上,由于墙的特性阻抗 Z_2 比绳子的特性阻抗 Z_1 大得多,这种情况对绳来说也称“固定端”情况.这时在界面上反射波的振动与入射波的振动始终反相位.如反射波的振幅与入射波的振幅相等,则在固定端的合振动恒为零.如果 $Z_2\to0$,或 $Z_1\gg Z_2$,这又是一种极端情况.例如棒的一端固定,另一端置于空气中,由于空气的特性阻抗 Z_2 相对于棒的特性阻抗 Z_1 可以略去,这种情况对棒来说也称“自由端”情况.这时在界面上反射波的振动与入射波振动相位完全相同,在自由端的合振幅恒为极大.

强度反射系数和透射系数的关系式(式⑦和式⑧)在实际问题中是非常重要的.举例来说,标准状态下空气的 $Z=420\ \mathrm{kg/(m^2\cdot s)}$,水的 $Z=1.5\times10^6\mathrm{kg/(m^2\cdot s)}$,钢的 Z(按无限介质纵波波速计算)约为 $4.6\times10^7\ \mathrm{kg/(m^2\cdot s)}$,按式⑧算得下列交界面上的透射比 T 的数值如下:空气-水,0.1%,空气-钢,0.004%(通常可认为不能透入);水-钢,12%.由此可知,要使超声波透入钢质工件,不能从空气直接射向工件,必须将工件表面适当加工,并且涂油,以保持良好的“声接触”.

(2) 电磁波的反射和折射

设有平面电磁波从一介质(折射率为 n_1)以入射角 i 射向另一介质(折射率为 n_2),在界面上将发生反射和透射现象,其反射角为 $i'(=i)$,折射角为 r.我们将入射电磁波的电场矢量 $\boldsymbol{E}_1$ 分解为垂直于入射面的分矢量 $\boldsymbol{E}_{1\perp}$ 和平行于入射面的分矢量 $\boldsymbol{E}_{1/\!/}$(相应地,磁场矢量 $\boldsymbol{H}_1$ 也分解为 $\boldsymbol{H}_{1/\!/}$ 和 $\boldsymbol{H}_{1\perp}$ 两个分矢量),它们的方向如图 11-17a 所示,反射波和折射波的电场矢量 $\boldsymbol{E}_1'$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 也可分解为平行于入射面的分矢量 $\boldsymbol{E}'_{1/\!/}$、$\boldsymbol{E}_{2/\!/}$ 和垂直于入射面的分矢量 $\boldsymbol{E}'_{1\perp}$、$\boldsymbol{E}_{2\perp}$.注意图中所画的各分矢量方向分别表示各量所取的正方向,而不是入射波、反射波和折射波电场矢量的实际方向,如计算结果为正值,则该分矢量与图中所示方向一致,反之,则与图中所示方向相反.我们可用和机械波类似的处理方法,并利用电磁场的边

界条件，可以导出（推导从略）如下关系式：

$$\left(\frac{E_1'}{E_1}\right)_{\perp}=\frac{n_1\cos i-n_2\cos r}{n_1\cos i+n_2\cos r}=-\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)} \tag{9}$$

$$\left(\frac{E_2}{E_1}\right)_{\perp}=\frac{2n_1\cos i}{n_1\cos i+n_2\cos r}=\frac{2\cos i\sin r}{\sin(i+r)} \tag{10}$$

$$\left(\frac{E_1'}{E_1}\right)_{/\!/}=\frac{n_2\cos i-n_1\cos r}{n_2\cos i+n_1\cos r}=\frac{\tan(i-r)}{\tan(i+r)} \tag{11}$$

$$\left(\frac{E_2}{E_1}\right)_{/\!/}=\frac{2n_1\cos i}{n_2\cos i+n_1\cos r}=\frac{2\cos i\sin r}{\sin(i+r)\sin(i-r)} \tag{12}$$

以上四式就是著名的菲涅耳（A.J.Fresnel）反射折射公式.其中式⑨和式⑪是反射公式，式⑩和式⑫是折射公式.反射波的 E_1' 和入射波的 E_1 之比（对垂直分量是 $r_{\perp}$，平行分量是 $r_{/\!/}$）称为振幅反射系数，透射波的 E_2 和入射波的 E_1 之比（$t_{\perp}$ 和 $t_{/\!/}$）称为振幅透射系数.它们的平方分别称为强度反射系数和强度透射系数.菲涅耳公式是研究波动光学的基础，可以确定反射光的相位和强度以及偏振程度等.

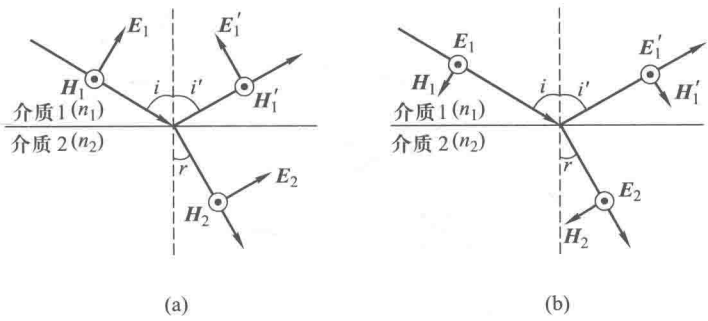


图 11-17　平面电磁波斜向入射到两种介质分界面时的反射和折射

（a）电场矢量平行于入射面的情况；（b）电场矢量垂直于入射面的情况

当电磁波垂直入射时，$i=r=0$，根据反射系数定义得振幅反射系数

$$r_{/\!/}=\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1}=-r_{\perp}$$

强度反射系数

$$R_{\perp}=R_{/\!/}=\left(\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1}\right)^2$$

以玻璃为例，设其折射率为 $n_2=1.5$，光从空气（$n_1=1.0$）垂直入射在玻璃表面时 $r_{/\!/}=20\%$，$r_{\perp}=-20\%$，$R_{/\!/}=R_{\perp}=4\%$.这就是说，入射光中的光能，有 4% 的能量反射回空气，有 96% 的能量透射入玻璃.

第十二章
光学

一、学习要求

1. 理解几何光学的基本定律和光传播的基本原理.

2. 理解平面镜、球面镜、薄透镜等光学器件的成像规律,会用成像公式及作图法处理成像问题.了解显微镜、望远镜等光学仪器的工作原理.

3. 了解普通光源所发射光波的性质,掌握光波对相干条件的要求以及获得相干光的方法.

4. 掌握光程概念和光程差与相位差的关系.

5. 会分析确定杨氏双缝干涉条纹和薄膜干涉条纹(主要是等厚干涉条纹)的形成及条纹分布特征.

6. 了解惠更斯-菲涅耳原理的物理内容,理解用半波带法分析单缝夫琅禾费衍射条纹分布的方法,会分析缝宽及波长对衍射条纹分布的影响.

7. 理解光栅衍射方程.会确定光栅衍射谱线的位置,会分析光栅常量及光波波长对光栅衍射条纹分布的影响.

8. 理解光学仪器分辨本领的瑞利判据的意义,知道提高光学仪器分辨本领的途径.

9. 了解 X 射线在晶体中衍射的基本规律.

10. 了解自然光和偏振光的概念及起偏、检偏的方法,理解布儒斯特定律和马吕斯定律.

11. 了解光的双折射现象,了解偏振光的干涉现象以及人工双折射的应用.

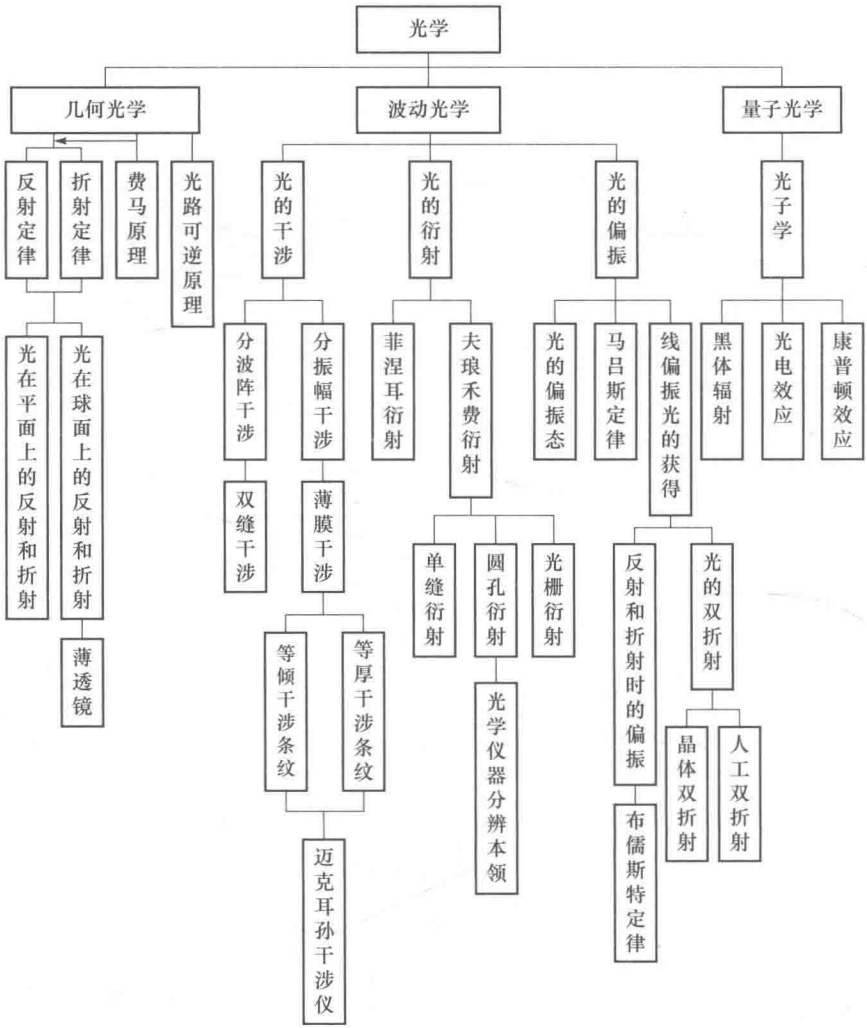
二、知识框图(见下页)

三、内容导读

1. 几何光学的基本定律和原理

通常把光学分成几何光学、波动光学、量子光学以及近代光学四个分支.几何光学是从实验得到的基本原理出发来研究光的传播问题.波动光学是从波动观点出发来研究光在传播过程中发生的现象,如光的干涉、衍射和偏振以及光在各向异性介质中传播所表现的现象,例如光的双折射现象.量子光学是从光的量子理论出发来研究光和物质的相互作用.我们的教材把量子光学的内容放在量子理论基础一章中讨论.

几何光学有三条基本定律:光的直线传播定律、光的反射定律和折射定律.还有两条基本原理:光路可逆原理和费马原理.光路可逆原理在研究成像问题时



特别有用,即物像的位置互换,光的传播方向逆转,但光路不变.费马原理用光程的概念把上述的三条实验定律高度概括成一条统一的原理.

2. 光在球面上反射、折射和薄透镜的成像问题

光在球面上反射的物像公式:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{2}{r}$$

光在球面上折射的物像公式:

$$\frac{n_1}{p}+\frac{n_2}{p'}=\frac{n_2-n_1}{r}$$

薄透镜的物像公式:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}$$

使用这些公式时，需注意以下几点：① 这些公式仅适用于近轴光线；② 必须采用教材中约定的符号法则；③ 注意像的性质（实像还是虚像、放大还是缩小，正还是倒）.

3. 光波及其相干条件

光波的相干条件和机械波的相干条件相同，即两光束的频率相同、振动方向相同或它们有互相平行的振动分量、具有恒定的相位差.要获得显著的干涉条纹，还要求两光束在相遇点所产生的振幅不能相差悬殊，而且光程差也不能太大.

实际上，两个频率相同的普通光源或者同一光源上的两个不同部分所发出的光波不能产生干涉现象.这是因为普通光源的发光是原子或分子从高能态跃迁到低能态时发出的辐射，它的持续时间很短，约为 10^{-8} s，它是一个有限长的波列.因为这种跃迁是随机的和间歇的，每个原子或分子先后发出的不同波列.不同原子或分子发射的各个波列之间，彼此在振动方向上和相位上都是没有联系的.所以两个独立光源或同一光源的两部分所发出的光波即使频率相同、振动方向相同，但无法保证它们有恒定的相位差，因而不能产生干涉现象.

要得到干涉现象，必须使一个波列分成完全相同的两个波列，就是说，从同一光源的同一点发出的光波，通过某些装置分成相同的两束，才能获得符合相干条件的相干光波.一般采用以下两种方法：① 分波阵面法，就是在同一波阵面上取出两个子波源，如杨氏双缝实验；② 分振幅法，就是通过反射和折射把入射光的能量分成两部分，它们来自同一波列，满足相干条件.由于波的能量正比于振幅的平方，所以形象地说把入射光的振幅分成两部分.

对于激光光源，所有发光原子或分子的动作步调都是一致的，所以它所发出的光波具有高度的相干性，不必采用上述方法也能观测到干涉现象.

4. 分波阵面干涉

杨氏双孔（或双缝）干涉实验是利用分波阵面法获得相干光波的典型实验.其他的装置很多，例如菲涅耳双面镜、菲涅耳双棱镜、劳埃德镜等，它们产生的干涉和杨氏实验很相似，所不同的是它们利用反射或折射来改变光的传播方向.本教材只讨论杨氏双缝干涉实验和劳埃德镜实验.学习时应注意以下几个问题：

（1）分析光的干涉问题，先要明确哪两束光在干涉，然后计算相干光在叠加点的相位差或光程差，最后分析干涉条纹的特点（形状、位置、间距等）以及决定因素.

(2) 在杨氏双缝干涉装置中,要求光源的狭缝 S 以及双缝 S_1 和 S_2 的宽度都是无限窄的,这样才能得到一组等间距、等强度、明暗相间的干涉条纹.双缝的间距 d 也不宜过大,否则会因条纹过密而无法分辨.观察点 P 离屏幕上的对称中心 O 点的距离也不能太远,即两光束的光程差不能太大,否则同一波列分成的两波列不能重叠,甚至不能相遇,也就不能发生干涉现象.

(3) 在劳埃德镜实验中,得到一个结论:光波从折射率小的光疏介质向折射率大的光密介质表面上反射时有数值为 π 的相位突变,即半波损失.这就使得干涉本来亮纹的地方变成了暗纹,暗纹的地方变成了亮纹.

5. 分振幅干涉

薄膜干涉是最简单的分振幅干涉.它的详细讨论是比较复杂的,本教材仅限于讨论厚度均匀的薄膜在无穷远处形成的等倾干涉条纹以及劈尖薄膜表面上形成的等厚干涉条纹两种情况.在学习薄膜干涉时应注意以下几点:

(1) 等倾干涉条纹是在厚度均匀的薄膜而入射光具有不同的角度所形成的干涉现象.在等倾干涉中,薄膜上、下两个表面对同一束入射光的反射光线是平行的,所以干涉条纹出现在无限远处,若用会聚透镜,则干涉条纹呈现在透镜的焦平面上.

等厚干涉条纹是在薄膜厚度不均匀而入射光具有相同的入射角(一般是在垂直照射下)的情形下所形成的干涉现象.由于薄膜很薄,薄膜厚度相同处在膜的表面出现干涉条纹,用眼睛可以直接观察到.

(2) 在计算相干光的光程差时,需要特别注意薄膜上、下表面的反射光有无相位突变,即光程差中是否要加上(或减去)附加光程差.在我们的教材中,这半波损失都用加上 $\lambda/2$ 表示,有的书上可能用减 $\lambda/2$ 表示,这时只是条纹的级次 k 的取值不同,并不影响讨论结果,希望读者注意.

(3) 观察薄膜干涉现象一般采用扩展光源(即面光源).薄膜的等倾干涉条纹和牛顿环的等厚干涉条纹相似,它们都是一组内疏外密的同心圆环,但其不同的是:等倾干涉条纹的中间条纹的级次高,外围的级次低.这是因为半径大的条纹对应的入射角也大,光程差就小,因而级次低.而牛顿环的情况恰恰相反,半径大的条纹对应的膜的厚度大,因而光程差大,级次高,半径小的条纹级次低,中间条纹的级次最低.

(4) 迈克耳孙干涉仪的设计精巧,用途广泛,不少其他干涉仪是由此派生的.可以说,迈克耳孙干涉仪是许多近代干涉仪的原型.利用它可以观察到等厚干涉条纹和等倾干涉条纹以及条纹的变动情况.当平面反射镜 M_1 和 M_2 严格相互垂直时,则得到环形的等倾条纹,当 M_1 和 M_2 不严格垂直时,则得到等厚干涉条纹.

6. 光的衍射现象和处理方法

光的衍射现象是光波在传播过程中因遇到障碍物而偏离直线传播,其能量将重新分布,呈现明暗条纹.只有当障碍物(也称衍射物)的尺度与波长可比拟时,衍射现象才比较显著.

按光源、衍射物和接收屏的位置关系,可将光的衍射现象分为菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射两大类.可以认为夫琅禾费衍射是菲涅耳衍射的特例,但其分析和计算方法比较简单,而且在实际应用中比较重要,它也是近代傅里叶光学的基础.本教材仅讨论单缝、圆孔和光栅的夫琅禾费衍射.

分析光的衍射现象的理论基础是惠更斯-菲涅耳原理:波阵面上各个面元发出的子波在空间任一点相干叠加就是引起该点的光振动.

光的衍射的基本分析方法有三种:菲涅耳积分法、半波带法和振幅矢量法.① 菲涅耳积分法:根据惠更斯-菲涅耳原理的数学表达式求出波阵面 S 上任一面元 $\mathrm{d}S$ 发出的子波在衍射场中任一点引起的振动,然后进行积分求出所有面元的子波在该点引起的合振动.利用此方法,原则上可定量地描述光波通过障碍物所产生的衍射现象,但是积分运算一般是相当复杂的.② 半波带法:这是常用的近似方法,就是把波阵面按一定的规律分割成有限个波带,使相邻的两波带对应点发出的子波到达衍射场中任一点的光程差为 $\frac{\lambda}{2}$,这样两波带上所有子波叠加的结果相互抵消.这种方法比较简单,但它只能定性说明衍射场中某点是明还是暗,不能给出强度的定量结果.③ 振幅矢量法:把波阵面分为无限多个面积极小的微带,每个微带对衍射场中某点的振动用一小的振幅矢量表示,根据相邻两微带对振动的相位差将这些小矢量合成而得到合振幅.这种方法用振幅矢量叠加代替了积分,因而比较方便直观.

7. 单缝和圆孔的夫琅禾费衍射

(1) 在单缝夫琅禾费衍射问题中,要理解菲涅耳半波带法,其中半波带是如何划分的,它有什么特点.在此基础上掌握衍射条纹的分布规律和单缝衍射图样的计算公式.特别是中央明纹的特点.条纹的宽度将随缝宽 a 的变化而变化.在保持波长 λ 不变的情况下,条纹的宽度与 a 成反比,a 越小,条纹的宽度越大,中央明纹的光强曲线就越扩展.当 $a\to 0$ 时,中央明纹的光强曲线将过渡到一条水平直线,这就是双缝干涉要求缝很窄的道理.相反,若 a 很大,则条纹宽度趋于零,整个衍射图样将趋于一条直线,这就是线光源经透镜所形成的几何光学的像.综合上述关系可见,当 $\frac{\lambda}{a}\to 0$ 时,衍射效应可以忽略,波动光学的结果过渡到几何光学的结果,因此,可以说,几何光学是波动光学在 $\frac{\lambda}{a}\to 0$ 时的极限情形.

(2) 在圆孔夫琅禾费衍射中,衍射图样为中间有一亮斑(称为艾里斑),周围有明暗相间的圆条纹,中央亮斑集中了绝大部分的光能,艾里斑的大小反映了衍射光的弥散程度,艾里斑越大表示衍射光越弥散,成像越不清晰;艾里斑越小,衍射光集中在几何光学的像点上,成像就越清晰.

(3) 光学仪器的分辨本领 大多数光学成像仪器的通光孔都有限制光束的光阑,因而总有衍射现象发生.这样,一个物点通过仪器所成的像不是一个几何点而是一个像斑(艾里斑),两个靠得很近的物点所形成的像斑就有可能重叠,这样就无法加以分辨.瑞利判据是两个像斑刚可分辨的标准.提高望远镜分辨本领的途径是增大物镜的直径,而提高显微镜分辨最小距离的途径是增大物方折射率(如油浸显微镜),另外尽可能减小观测光的波长.

8. 光栅衍射

对于光栅衍射,学习时必须考虑以下几个问题:① 光栅衍射的图样为什么明条纹很亮很细,两明条纹之间有较暗的背景? ② 光栅方程给出的光强极大条件,为什么是多缝干涉出现光强极大的条件? ③ 怎样理解光栅衍射图样是单缝衍射和多缝干涉共同的结果? ④ 何谓缺级? 产生缺级的条件是什么?

在学习了光的干涉和衍射以后,读者可能存在一个问题,干涉和衍射有何区别? 杨氏双缝实验究竟是双缝干涉还是双缝衍射? 这个问题请阅读教材 P.175 七"干涉和衍射的区别和联系"的内容.

9. 光的偏振基本概念和规律

什么是偏振现象? 我们先举一个机械波的例子来说明.设在机械波的传播路径上,设置一个狭缝 AB,当缝 AB 与横波的振动方向平行时,横波能穿过狭缝继续向前传播[图 12-1(a)];但当缝 AB 与横波的振动方向垂直时,振动受阻,就不能穿过狭缝继续向前传播[图12-1(a)].对于纵波,无论狭缝的位置如何都能穿过狭缝继续向前传播[图 12-1(b)].这种波的振动方向对传播方向的不对称性,称为偏振.这是横波区别于纵波的一个最明显的区别.光波通过某些装置(如偏振片等,参看教材图 12-91)也可以得到传播方向的不对称性,所以光的偏振现象证实了光的横波性,光的干涉、衍射和偏振现象都是对光的电磁理论的有力证明.

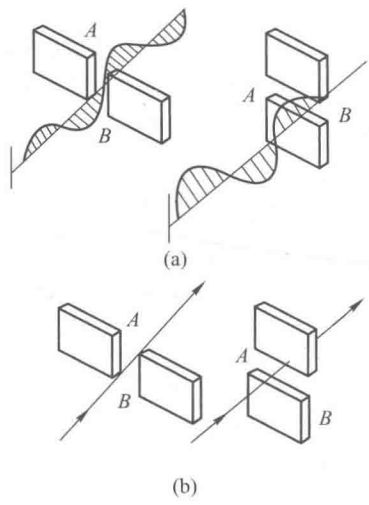


图 12-1

(a) 横波;(b) 纵波

按照光的振动矢量(光矢量)在光的传播

方向垂直平面上的分布划分，自然界存在五种类型的光：自然光、部分偏振光、线偏振光、圆偏振光和椭圆偏振光.普通光源的发光来自大量原子或分子的光辐射，具有随机性.因此自然光是无限多个振动方向任意的、彼此之间没有固定相位关系的光振动的组合.注意，通常把自然光分解为两个相互垂直的等幅振动，它们之间没有固定的相位差，不能再按两相互垂直振动合成的规律再合成起来.

马吕斯定律是线偏振光通过检偏器后光强变化的规律.布儒斯特定律是光在两种介质界面反射折射时偏振状态变化的规律.只有当光的入射角为布儒斯特角 $\left(i_B=\arctan\dfrac{n_2}{n_1}\right)$ 时，反射光才是线偏振光，而折射光是部分偏振光.这时入射角和折射角满足 $i_B+r=90°$ 的关系.这是获得线偏振光的主要方法之一.

10. 双折射现象及其应用

当一束光射入各向异性的晶体时，在晶体内部产生两束折射光；寻常光（o 光）和非常光（e 光）.① o 光和 e 光的差别如下：o 光遵守折射定律，e 光不遵守折射定律，甚至不在入射面内.② o 光在晶体内各个方向传播的速度相同，所以晶体对 o 光的折射率 n_o 是相同的；而 e 光在晶体内各方向传播速度不同，沿光轴方向，e 光和 o 光的速度相同，其他方向则不同，在垂直于光轴方向，e 光和 o 光的速度差别最大，所以把光速 c 与垂直光轴方向 e 光速度的比值定义为 e 光的主折射率 n_e.n_o 和 n_e 是晶体的重要参量.$n_e>n_o$ 的晶体称为正晶体，$n_e<n_o$ 的晶体称为负晶体.③ o 光和 e 光都是线偏振光，o 光的振动方向垂直于 o 光的主平面，e 光的振动方向则平行于 e 光的主平面.当光轴位于入射面内时，o 光和 e 光的主平面重合，因而 o 光和 e 光的振动方向相互垂直.设法把晶体内的 o 光和 e 光尽量分开或者把其中一束光消除掉，就可以得到线偏振光，这是获得线偏振光的又一主要方法.

偏振光干涉是光的双折射现象在实际应用中的理论基础.线偏振光通过晶片的双折射后（注意，这晶片的光轴必须与晶面平行），成为两束光振动方向相互垂直的、有一定相位差的线偏振光，（注意：这两束光为什么会有光程差）通过检偏器后，使它们成为振动方向相同（与检偏器透振方向一致）、频率相同、具有恒定相位差的相干光.于是，在检偏器后方，可以观察到偏振光的干涉情况.若用复色自然光投射到起偏器，则可以观察到彩色的干涉图样.

四、解题指导

本章的习题可分为以下几类：

（1）几何光学；

（2）双缝干涉条纹的计算；

（3）薄膜干涉条纹的计算；

(4) 单缝衍射和光栅衍射;

(5) 光学仪器的分辨本领;

(6) 晶体的 X 射线衍射;

(7) 光的偏振;

(8) 双折射现象.

1. 解几何光学题时,应画出光路图,图上标明题给的物距、像距、曲率半径或焦距以及各光线的走向等.图应按比例画,这样有助于检查计算结果的正误.在应用物像公式、放大率公式时,必须正确按符号规则确定物距、像距、曲率半径或焦距的正负号.对计算所得的结果(如物、像的位置和像的性质等)需作进一步讨论.

2. 在求解干涉问题时,首先要明确哪两束光产生干涉,然后计算两光束的光程差,计算光程差时,特别要注意光波在界面上反射时是否存在"半波损失",根据干涉条纹的明暗条件就可以求得结果.

对于杨氏双缝干涉,干涉条纹间距公式 $\Delta x=\dfrac{D\lambda}{d}$ 是经常用到的.不论是明条纹或暗条纹都是适用的.对于薄膜干涉,无论薄膜的厚度是均匀的或不均匀的,主要讨论垂直入射的情况,因而明条纹和暗条纹的条件分别为 $2nd+\left[\dfrac{\lambda}{2}\right]=k\lambda$ 和 $2nd+\left[\dfrac{\lambda}{2}\right]=(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$.这括号中的 $\dfrac{\lambda}{2}$ 是半波损失项,一般地说,如果两束光都是从光疏到光密界面上反射(即 $n_1<n<n_2$ 的情况)或都是从光密到光疏界面上反射(即 $n_1>n>n_2$ 的情况)则两束反射光之间无需考虑"半波损失",如果一束光从光疏到光密界面上反射,而另一束光从光密到光疏界面上反射(即 $n_1<n>n_2$ 或 $n_1>n<n_2$ 的情形),则两束反射光之间有"半波损失".要掌握等厚干涉中相邻明条纹(或暗条纹)对应的薄膜厚度公式和条纹间距公式.根据这些公式,可以分析当光波波长、介质折射率、薄膜厚度等变化时条纹的变化情况.

3. 在夫琅禾费单缝衍射问题中,要掌握条纹分布计算公式,特别是中央明纹,它是指 $k=\pm1$ 两暗纹之间的区域,通常以相邻暗纹的角距离作为其间明纹的角宽度,所以,中央明纹的宽度是其他明纹宽度的 2 倍.要注意单缝衍射的暗纹条件公式与双缝干涉的明纹条件公式似乎相同,不要加以混淆,其意义截然不同.

对于光栅衍射问题,主要记住光栅公式,它是光栅光谱分布的规律.在讨论衍射条纹级数时,缺级现象要特别注意,取决于光栅常量 $a+b$ 与光栅缝宽之间的关系.

单缝衍射公式和光栅公式一般只适用于平行单色光垂直入射的情况.如果入射光是斜入射的,那么在计算光程差时还要考虑在单缝和光栅前面的光程差.

在计算光学仪器分辨本领问题时,最小分辨角 $\theta_R=1.22\dfrac{\lambda}{d}$ 是常用的公式.

由此可得到不同仪器的分辨本领.

4. 光的偏振问题中,主要有两个定律,一是马吕斯定律,说明偏振光通过偏振器后光强的规律,$I=I_0\cos^2\alpha$;另一个是布儒斯特定律,说明入射光以布儒斯特角入射时,其反射光是完全偏振光,折射光是部分偏振光,入射角应满足 $\tan i_B=\frac{n_2}{n_1}$,要注意光矢量的振动方向.当入射角等于布儒斯特角时,此时入射角和折射角相互垂直,$i+r=90°$.

其他如光通过晶体的双折射现象,只要了解 o 光和 e 光的传播情况以及光矢量的振动情况.

由于本章的习题比较简单,且教材中已举了很多例子,所以在"解题指导"中没有再举例.其他的例子请参阅教材.

五、自我检测

(一) 选择题

1. 在相同的时间内,一束波长为 λ 的单色光在空气中和在玻璃中　[　　]

A. 传播的路程相等,走过的光程相等

B. 传播的路程相等,走过的光程不相等

C. 传播的路程不相等,走过的光程相等

D. 传播的路程不相等,走过的光程不相等

2. 在双缝干涉实验中,屏幕 E 上的 P 点处是明条纹,若将缝 S_2 盖住,并在 S_1、S_2 连线的垂直平分面处放一反射镜 M,如图 12-2 所示,则此时　[　　]

A. 无干涉条纹

B. P 点处仍为明条纹

C. P 点处为暗条纹

D. 不能确定 P 点处是明条纹还是暗条纹

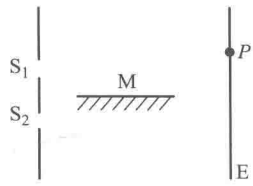


图 12-2

3. 在牛顿环装置中,把玻璃平凸透镜和平面玻璃(设玻璃的折射率均为 $n=1.50$)之间的空气改换成水($n'=1.33$).则干涉条纹　[　　]

A. 中心暗斑变成亮斑　　B. 变密

C. 变疏　　D. 间距不变

4. 在空气中肥皂膜泡的厚度为 0.32 μm,折射率为 1.33.若用白光垂直照射,肥皂膜呈现的颜色是　[　　]

A. 紫色　　B. 蓝色　　C. 绿色　　D. 红色

5. 在单缝夫琅禾费衍射实验中,波长为 λ 的单色光垂直入射到宽度 $a=4\lambda$

的单缝上,对应于衍射角 $\theta=30°$ 的方向,单缝处波阵面可分成的半波带数目为 [ ]

A. 2 个　　B. 4 个　　C. 6 个　　D. 8 个

6. 在单缝夫琅禾费衍射实验中,设第一级暗纹的衍射角很小,若用钠黄光($\lambda=589.3$ nm)垂直照射,中央明纹宽度为 4.0 mm;若改用波长 $\lambda=442.0$ nm 的蓝紫光照射,则中央明纹的宽度为 [ ]

A. 2.0mm　　B. 3.0 mm　　C. 4.0 mm　　D. 5.0 mm

7. 若用衍射光栅准确测定一单色可见光的波长,在下列各种光栅常量的光栅中选用哪一种最好 [ ]

A. 1.0×10^{-5}mm　　B. 5.0×10^{-5}mm

C. 1.0×10^{-4}mm　　D. 1.0×10^{-3}mm

8. 自然光以布儒斯特角由空气入射到一介质表面上,反射光是 [ ]

A. 在入射面内振动的完全偏振光

B. 平行于入射面的振动占优势的部分偏振光

C. 垂直于入射面振动的完全偏振光

D. 垂直于入射面的振动占优势的部分偏振光

9. 如图 12-3 所示,$ABCD$ 为一块方解石的一个截面,AB 为垂直于纸面的晶体平面与纸面的交线,光轴方向在纸面内且与 AB 成一锐角 θ.一束平行的单色自然光垂直于 AB 端面入射,在方解石内折射光分解为 o 光和 e 光,o 光和 e 光的 [ ]

A. 传播方向相同,$\boldsymbol{E}$ 矢量的振动方向互相垂直

B. 传播方向相同,$\boldsymbol{E}$ 矢量的振动方向不互相垂直

C. 传播方向不同,$\boldsymbol{E}$ 矢量的振动方向互相垂直

D. 传播方向不同,$\boldsymbol{E}$ 矢量的振动方向不互相垂直

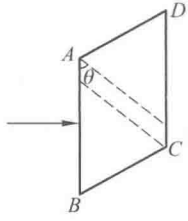


图 12-3

(二)填空题

1. 在双缝干涉实验中,为使屏上的干涉条纹间距变大,可以采取的办法是_____.

2. 在玻璃($n_1=1.50$)表面上镀上一层厚度均匀的 MgF_2($n_2=1.38$)透明薄膜,利用薄膜干涉使反射光减到最小.当波长为 500 nm 的光垂直照射时,此薄膜的最小厚度为_____.

3. 用波长为 λ 的单色光垂直照射到空气劈尖上,观察反射光的干涉条纹,距端点为 L 处为暗条纹,使劈尖角 θ 连续变大,直到该处再次出现暗条纹,此时劈尖角的改变量 $\Delta\theta$ 是_____.

4. 用钠黄光($\lambda=589.3$ nm)观察迈克耳孙干涉仪的等倾圆条纹,开始时中

心为亮斑.移动干涉仪一臂的平面镜,观察到共有 10 个亮环缩进中央,视场中心仍为亮斑,平面镜移动的距离为_____.

5. 波长 $\lambda=500$ nm 的单色光垂直入射到宽 $a=0.25$ mm 的单缝上,单缝后面放置一焦距 $f=1.0$ mm的凸透镜,透镜焦平面上放置一屏幕,则幕上中央明条纹两侧第 3 条暗纹之间的距离为_____.

6. 用波长为 λ 的单色平行光垂直入射在一块光栅上,其光栅常量 $d=3\ \mu m$,缝宽 $a=1\ \mu m$,则在单缝衍射的中央明条纹中共有_____条谱线(主极大).

7. 以波长 400~760 nm 的白光垂直照射在光栅上,在它的衍射光谱中,第二级和第三级发生重叠,则第二级光谱被重叠的波长范围为_____.

8. 卫星上的照相机能清楚地识别地面上汽车的牌照号码.设牌照上数字间的距离为 5 cm,在 160 km 高空的卫星上拍照,光的波长以 500 nm 计.此照相机的孔径应为_____.

9. 如果从一池静水($n=1.33$)的表面反射出来的太阳光是完全偏振的,那么太阳的仰角(太阳光与水面的夹角)应等于_____.在这反射光中的光矢量的方向应_____.

10. 使一光强为 I_0 的平面偏振光先后通过两个偏振片 P_1 和 P_2,P_1 和 P_2 的偏振方向与原入射光光矢量振动方向的夹角分别是 α 和 90°,则通过这两个偏振片后的光强 $I=$_____.

六、问题讨论

干涉条纹的可见度

相干条件是产生干涉条纹的必要条件,能否观察到干涉条纹,还有赖其清晰程度.例如,用普通单色光源进行双缝干涉实验时,我们可以看到,在中央明条纹附近,干涉条纹比较清晰.远离中央两侧,条纹逐渐模糊.再远些,干涉条纹消失了.并且在实验中,为了得到清晰的条纹,通常都把光源狭缝开得很窄.如果把狭缝逐渐变宽,干涉条纹也逐渐模糊.再宽些,干涉条纹也消失.这是什么缘故呢?下面我们来进行分析.

1. 干涉条纹的可见度

为了描述干涉条纹的清晰程度,常用可见度(也称对比度或衬比度等)来定量描述,其定义为干涉图像中明纹的最大强度 I_{max} 和相邻暗纹的最小强度 I_{min} 两者之差与两者之和的比值,即

$$V=\frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}} \tag{12-1}$$

I_{max} 与 I_{min} 两者相差越大,可见度越大,条纹越清晰,$I_{max}\approx I_{min}$ 时 $V\approx 0$,条纹无法辨认.

两束相干光叠加时,光强分布为

$$I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi$$

I_1、I_2 为两束光的强度,$\Delta\varphi$ 为相遇处两束光的相位差.空间不同位置处,$\Delta\varphi$ 不同,便形成了光强在空间的不均匀分布,即形成明暗相间的条纹.图 12-4 给出了 I 与 $\Delta\varphi$ 的关系曲线.从这些曲线可以看出,不同情况下的干涉条纹实际上是在 I_1+I_2 的背景下的明暗变化,变化幅度为 $2\sqrt{I_1I_2}$,这样

$$I_{max}-I_{min}=4\sqrt{I_1I_2}$$
$$I_{max}+I_{min}=2(I_1+I_2)$$

代入式(12-1)得

$$V=\frac{4\sqrt{I_1I_2}}{2(I_1+I_2)}=\frac{2\sqrt{I_2/I_1}}{1+I_2/I_1} \tag{12-2}$$

由此可见,$2\sqrt{I_1I_2}$ 与 I_1+I_2 相对大小不同,条纹可见度也不同.两者大小越接近,可见度越大,从而观察到的条纹也越清晰[如图 12-4(a)、(b)所示].反之,则可见度降低,条纹难以辨认,看起来很模糊[如图 12-4(c)所示].从上式还可以看出,两束光强度 I_1、I_2 越接近,可见度也越大,干涉条纹就越清晰.因此在观察双光束干涉时,总设法使它们的光强尽量相等.

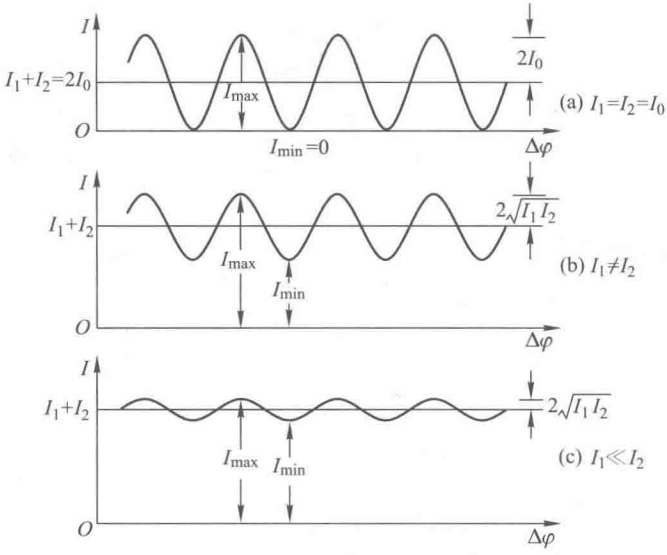


图 12-4　干涉条纹的可见度

影响干涉条纹可见度的因素很多，除了两束光强的比较外，还有光的单色性和光源的线度也会影响可见度.

2. 光的非单色性对干涉条纹可见度的影响

普通光源所发出的单色光并不是单一频率（或波长）的，它有一定的频率（或波长）范围.假设光源发出波长为 λ 的准单色光，其谱线宽度为 $\Delta\lambda$.为了简单起见，我们认为各种波长成分具有相同的强度.由于不同波长的光是非相干的，这时观察到的干涉条纹实际上是各种波长成分的光各自形成的干涉条纹的非相干叠加（即光强直接相加）.再假设每一波长成分形成的条纹可见度都等于1，叠加后合成的干涉条纹光强分布如图 12-5 所示，在图中只画出两个边缘波长，即 $\lambda-\frac{\Delta\lambda}{2}$ 与 $\lambda+\frac{\Delta\lambda}{2}$ 的光强曲线，其上方为合成光强曲线.由图可见，在 $x=0$ 处，各种波长的光的光程差为零，因此各波长的零级明纹都在这里重合，其他各级条纹由于波长不同就错开了.由图还可见，合成条纹在中央附近处，相邻的明、暗条纹的光强差别较大，随着 x 的增加，这种差别逐渐减小，或者说，随着光程差的增大，条纹可见度逐渐减小.当光程差达到某一值时，可见度几乎为零，看不到条纹.这就是干涉实验中难以观察到清晰的高级次条纹的原因.

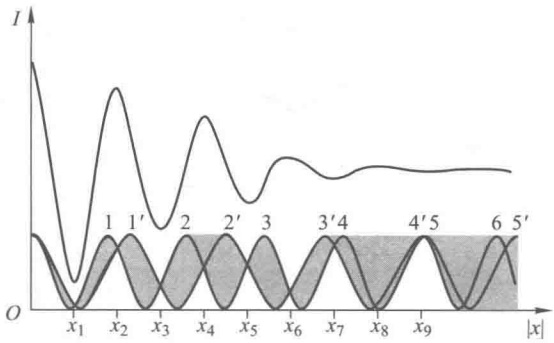


图 12-5　各种波长的光干涉条纹的叠加

$\Delta\lambda$ 越大，随着光程差的增大，条纹可见度下降得越快.当光程差增加到某一值时，干涉条纹消失（$V=0$），可以用这一光程差来标志非单色光形成干涉条纹的性能，称为这种光的相干长度.

由图 12-5 可以看出，当光程差增大到使波长为 $\lambda-\frac{\Delta\lambda}{2}$ 的第（$k+1$）级明纹和波长为 $\lambda+\frac{\Delta\lambda}{2}$ 的第 k 级明纹正好重合在一起，条纹的可见度降低，从而将看不到干涉条纹.这时的最大光程差即为相干长度.

$$\delta_m=(k+1)\left(\lambda-\frac{\Delta x}{2}\right)=k\left(\lambda+\frac{\Delta\lambda}{2}\right)$$

由此可得

$$k=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

$$\delta_m=\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \tag{12-3}$$

上式表明最大光程差与谱线宽度成反比,光源的单色性越好,则产生干涉条纹的最大光程差越大,即光源的相干长度越大.

光源的相干长度也可以用原子发光的机理来说明.我们知道,普通光源发光的微观过程是间歇的,每个原子的持续发光时间是有限的,这就决定了光源发射的每个波列有一定的长度.当光波在干涉装置中分成两束光时,每个波列都被分成两部分,如图 12-6 中的 a_1、a_2、b_1、b_2 等.若两光路的光程差不太大时,由同一波列分解出来的两波列如 a_1 和 a_2、b_1 和 b_2 等可能相遇叠加,这时能够发生干涉[图 12-6(a)].若两光路的光程差太大,由同一波列分解出来的两波列不能叠加,而相互叠加的可能是由前后两波列分解出来的波列(譬如说 b_1 和 a_2),这时就不能发生干涉[图 12-6(b)].这就是说,两光路之间的光程差超过了波列长度时,就不再发生干涉.可见,相干长度就等于原子光波列的长度.显然,波列的长度越长,则这两个波列在相遇点相互叠加的时间就越长,干涉条纹的可见度就越高,我们就说光场的时间相干性越好.通常称发光的持续时间为相干时间.

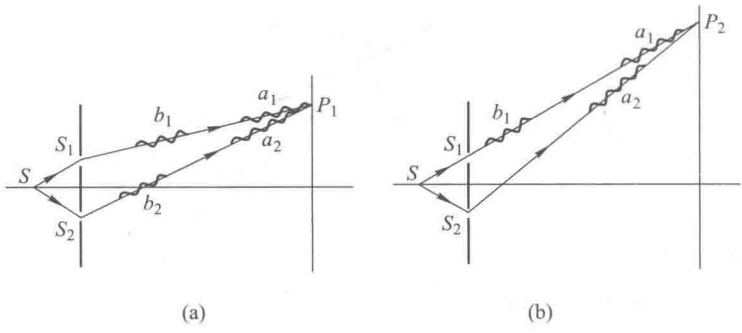


图 12-6 说明相干长度用图

3. 光源的宽度对干涉条纹可见度的影响

在双缝干涉实验中,当光源狭缝逐渐变宽时,干涉条纹就逐渐模糊,当缝宽达到一定宽度时,干涉条纹也由模糊趋向消失.这说明干涉条纹的可见度与光源的宽度有密切关系.下面解释其原因.

如图 12-7 所示,用宽度为 w 的单色面光源 AB 直接照射到双缝上,此光源

可看成是由许多垂直纸面的线光源排列组成.每个线光源的光通过双缝后在屏上都要产生一套干涉条纹.总的条纹强度是各套条纹的非相干叠加.由于光源上不同点所形成的各套条纹不相重合,彼此错开.例如光源中心 C 产生的中央明纹位于屏中央 O 点处,而 C 上(下)方的线光源产生的中央明纹移到 O 点的下(上)方,距 C 点愈远的线光源,其条纹上下移动愈多.如果上边缘处的线光源 A 所产生的第一级暗纹正好落在 C 所产生的中央明纹上,就会使整个干涉条纹因相互错开而变得完全模糊起来.图 12-8(a)(b)(c)表示光源宽度逐渐增大时条纹的强度分布,随着宽度的增加,条纹的可见度下降了.理论计算求出光源的极限宽度为

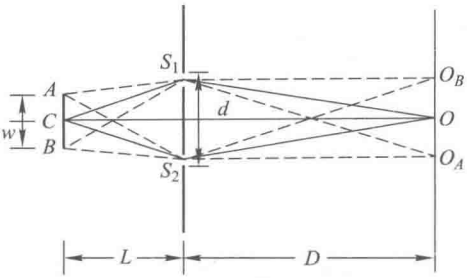


图 12-7　宽光源的双缝干涉

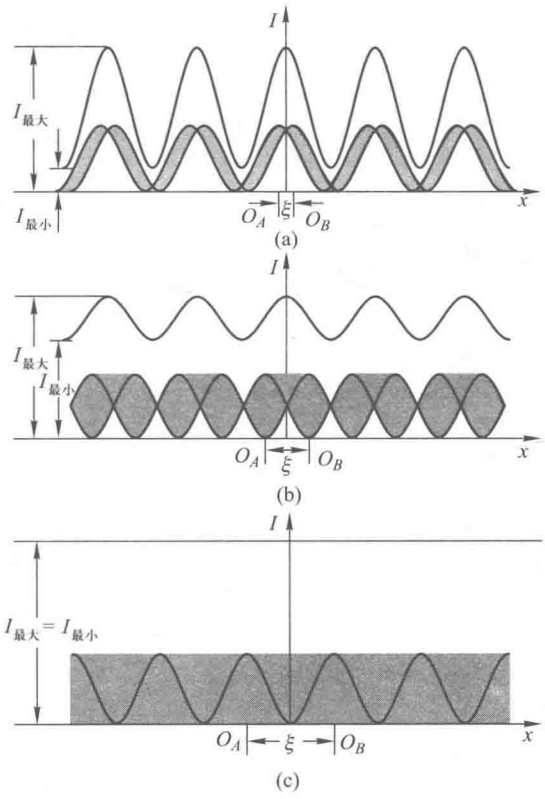


图 12-8　各线光源干涉条纹的叠加

$$w_0=\frac{L\lambda}{d} \tag{12-4}$$

式中 L 为光源至双缝的距离,d 为双缝间距.实际上,为了能看到足够清晰的干涉条纹,一般要求光源的宽度不大于$\frac{w_0}{4}$,即

$$w\leqslant\frac{1}{4}\frac{L\lambda}{d} \tag{12-5}$$

实际上,这里所讨论的正是光场的空间相干性问题.所谓空间相干性,就是描述光场中在波阵面上多大的横向范围内提取出来的两个子波源 S_1 和 S_2 仍是相干的.这个范围越大,我们就说光场的空间相干性越好.空间相干性问题来源于普通扩展光源的不同部分是不相干的,理想的点光源具有最好的空间相干性.

第十三章

早期量子论和量子力学基础

一、学习要求

1. 了解黑体辐射的基本规律,理解普朗克量子假设的物理意义.

2. 理解光电效应和康普顿效应的实验规律,理解爱因斯坦的光子理论,会用光子理论解释这两个效应,理解光的波粒二象性.

3. 理解氢原子光谱的规律及玻尔氢原子理论.

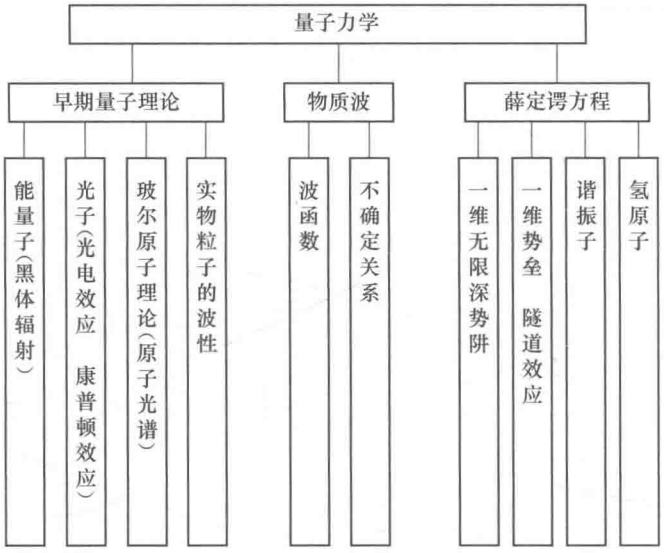
4. 了解德布罗意的物质波假设及其实验验证.理解实物粒子的波粒二象性.

5. 了解波函数及其统计诠释,正确理解不确定关系的意义.

6. 了解一维定态的薛定谔方程.了解量子力学处理问题的方法、步骤.所得结果的特点及其与经典理论所得结果的主要区别.

7. 了解描述原子中电子运动状态的四个量子数.了解泡利不相容原理和原子的电子壳层结构.

二、知识框图



三、内容导读

1. 量子理论发展简史

为了使读者对本章的内容理出一个头绪,我们先介绍一下量子理论发展的简史.

19 世纪末,物理学理论已发展到相当完善的阶段.物体的机械运动在速度远比光速小时准确地遵从牛顿力学的规律;电磁现象的规律(包括光的波动理

论）总结为麦克斯韦方程组；热现象也有完整的热力学和经典统计物理的理论.当时有不少物理学家认为，物理学的大厦已经基本建成，物理学理论上的一些基本的原则的问题都已得到解决，后辈们只需要把已有的实验做得更精密些，已知公式中的各个常量测量得更精确些，在一些细节上作些补充和修正.正当物理学家为经典物理学理论的辉煌成就而欢欣鼓舞之际，一些新的实验事实与经典物理学理论发生尖锐的矛盾.例如，迈克耳孙-莫雷实验证实了以太相对于地球没有运动，没有提供绝对静止的参考系存在的证据，黑体辐射的“紫外灾难”等，使经典物理面临新的危机，以致开尔文把这些矛盾说成是在物理学晴朗天空的“两朵乌云”.相对论和量子论的建立驱散了这两朵乌云，开创了物理学中一场深刻的革命.

1900 年，普朗克为了解释黑体辐射问题，提出了振荡偶极子的能量是以不连续的量值改变的量子假设，并导出了与实验结果相符合的黑体辐射公式.在以后爱因斯坦继承和发展了普朗克的量子假设，进一步提出了“光子学说”，认识到电磁辐射以微粒的形式吸收和发射，很好地解释了光电效应和康普顿效应，从而揭示了光具有微粒和波动的双重特性，称为光的波粒二象性.在普朗克、爱因斯坦明确了光的量子性以后，1913 年玻尔根据卢瑟福的原子有核模型以及原子光谱的规律性，提出氢原子的量子假设，初步奠定了原子物理学的基础.但是，由于当时对微观粒子的基本属性缺乏认识，玻尔的理论本身仍有其不可克服的缺点.

直到 1924 年，德布罗意在光具有波粒二象性的启发下，认为微观实物粒子（如电子、质子、中子等）也具有波动性，提出了物质波的假设，这一假设不久为电子衍射实验所证实.这样确认了微观粒子也具有波粒二象性.在 1923—1927 年间，海森伯等从物理上的可观察量出发，赋予每一个物理量以一个矩阵，创立了矩阵力学.薛定谔推广了物质波的概念，建立了描写微观粒子的物质波的运动方程，称为波动力学.随后，薛定谔证明了波动力学与矩阵力学是等价的，统称为量子力学.量子力学提出后，许多悬而未决的问题很快得到了解决.如 1926 年玻恩对波函数的统计诠释；1927 年海森伯提出的不确定性原理等.1928 年，狄拉克把量子论与相对论结合起来，建立了相对论量子力学，很自然地解释了电子自旋和内禀磁矩的存在.量子力学和相对论一起，成为近代物理学两块理论基石.本章就是按照这样的历史进展编写的.

2. 黑体辐射

关于黑体辐射的量子理论.其公式的推导在普通物理学中较难讲述，而且量子化的概念又是第一次接触，观念上要有所更新，这些可能都给读者造成一定的困难.因此，学习时主要掌握黑体辐射的实验定律以及普朗克建立量子论的思路

和结论.

黑体是研究热辐射的理想模型.对于一般物体,它们所接收到的辐射能包括两部分,一部分来自物体本身的辐射能,另一部分是由它反射的辐射能.对于黑体,它的吸收比等于1,即反射比为零.这样,它们所接收到的辐射能仅是它自身的热辐射,这就为我们研究物体的热辐射提供了方便.

另外,基尔霍夫辐射定律只有在热平衡条件下才成立.斯特藩-玻耳兹曼定律和维恩定律是黑体辐射的两个基本定律,它们在现代科技中有着广泛的应用,是高温测量以及遥感和红外追踪等技术的物理基础.

3. 光电效应和康普顿效应

光电效应和康普顿效应都是光和物质相互作用产生的效应,经典理论都无法解释它们的实验结果.爱因斯坦继承和发展了普朗克的能量子假设,提出了光(量)子的概念,很好地解释了这些效应,并确立了光的波粒二象性.

(1) 爱因斯坦是如何继承和发展普朗克的量子理论呢?普朗克只认为电磁辐射在发射或吸收时能量是量子化的,而爱因斯坦认为光是由能量量子化的粒子(即光子)组成,光在空间传播时也具有粒子性.

(2) 光电效应和康普顿效应都是光和物质的相互作用,它们的区别何在?光电效应是光子被束缚电子吸收而消失,出射的粒子是电子,过程中遵守能量守恒定律.康普顿效应是光子和自由电子发生弹性碰撞,出射的粒子是散射光子和反冲电子,此过程中既遵守能量守恒定律,又遵守动量守恒定律.电子的束缚和自由是相对于光子的能量而言的.在光电效应中,所用的光在可见光及紫外波段,光子的能量数量级是几个eV,它与原子外层电子的能量同一数量级,也与固体内电子受到离子的作用同一数量级.因此,电子可以认为是被束缚的.电子吸收光子后在晶体内发生弹性碰撞,光子的能量完全被吸收.电子和光子系统的能量守恒,但光子的动量没有全部转移给电子,有一部分动量转移给了晶格.电子和光子系统的动量不再守恒.在康普顿效应中,所用的光是X射线波段,光子的能量具有10^4 eV,电子的动能以及它和离子间的相互作用等都不必考虑,原子的外层电子可以看作是自由的.所以,当X射线光子与电子碰撞时,可以看作是光子和一个静止电子的二体碰撞.所以,在碰撞过程中,电子和光子系统的能量和动量都守恒.

(3) 在康普顿效应中,反冲电子获得的能量总是小于入射光子的能量,这是否意味着入射光的光子分成两部分,其中一部分被电子吸收,这与光子的粒子性是否矛盾?不矛盾.在康普顿效应中,处理光子和电子的碰撞过程,既考虑到能量守恒,又要考虑动量守恒,这两个守恒定律只涉及过程的初态和末态,不涉及过程的细节.如果考虑细节,我们可以认为入射光子的能量全部被电子吸收,电

子由原来的能量状态跃迁到新的高能态，然后由此新能态跃迁另一个低能态，发射出能量为 $h\nu$ 的光子.

4. 氢原子光谱和玻尔量子论

根据原子的核式结构模型和氢原子光谱的规律性，玻尔着眼于原子的稳定性，吸取了普朗克、爱因斯坦的量子概念，提出了原子结构的玻尔理论，其核心是三个基本假设：定态假设、频率条件和量子化条件.由这三个基本假设出发，可以很好地说明氢原子光谱的规律，给出氢原子中电子稳定的圆轨道半径及相应的量子化能量（能级）公式.

玻尔理论的成功证实了原子等微观客体的量子性质，对量子论和原子物理学的发展起了很大的推动作用.但由于当时历史条件的限制，未能认识到电子具有波动性，把电子作为经典力学的质点来处理，人为地加上一些量子化条件.量子力学完全克服了玻尔理论的缺陷.但玻尔理论的定态假设和频率条件（即量子跃迁）的假设在量子力学处理原子和分子同辐射的相互作用过程仍然适用.

5. 微观粒子的波动性

（1）德布罗意受到光的波粒二象性的启示和从自然界的对称性出发，认为实物粒子也具有二象性.他提出了物质波的概念.物质波不同于机械波和电磁波，它并不表示某种振动的传播，或某种形式能量的传播，而是代表了粒子在空间存在的概率分布，这种概率分布遵从波动的规律，所以物质波又称概率波.可见，微观粒子的运动应该使用统计方法来描述.

（2）由于微观粒子具有波粒二象性，所以不能用经典力学描述质点运动的方法来描述微观粒子的运动.海森伯提出的不确定关系给出了一个可以采用经典描述还是必须采用量子描述的分界判据，这就是两个不确定量的乘积不能小于作用量子 h.既然不确定关系存在的根源在于微观粒子具有波粒二象性，这种不确定性必定具有普遍意义，即不仅存在于坐标和动量之间，也应存在能量和时间之间，以及其他力学量之间.

不确定关系的存在不是测量的问题，不是由于测量仪器不完善或实验技术不高明所引起，而是微观粒子波粒二象性的必然表现.不确定关系是量子力学的一个关系，它的存在是由微观粒子的本质决定的，并且可以从量子力学的基本假设中推导出来.

6. 波函数和薛定谔方程

（1）波函数 $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ 是量子力学用来描述微观粒子的运动状态的，它是坐标和时间的函数.它不是实在的物理量随时间变化在空间的传播，不能直接测量或观察，它本身没有直接的物理意义.但是用波函数的模的平方 $|\Psi(\boldsymbol{r},t)|^2$ 就可表

示在空间某处粒子被发现的概率密度,这种概率在空间的分布,遵从波动的规律.$\Psi(\boldsymbol{r},t)$是和粒子概率分布有关的波函数,故又称概率波.由于$|\Psi(\boldsymbol{r},t)|^2$与概率波的强度相对应,$\Psi(\boldsymbol{r},t)$就与概率波的"振幅"相对应,故把波函数$\Psi(\boldsymbol{r},t)$称为概率幅.波函数既然与粒子在空间出现的概率相联系,所以它必定是单值的、连续的和有限的,并且满足归一化条件.

(2) 薛定谔方程是薛定谔提出的物质波的波函数所满足的波动微分方程,它是量子力学的基本方程.作为一个基本方程,薛定谔方程不能从数学上推导出来,是量子力学一个基本假设,运用于粒子速度较低的非相对论情况,其正确性完全由实验来检验.有几个概念需要说明:(a) 定态:当势函数$U(\boldsymbol{r},t)$与时间无关,只是坐标的函数时,满足薛定谔的波函数可表示为坐标函数$\psi(\boldsymbol{r})$和时间函数$f(t)$的乘积,即$\psi(\boldsymbol{r},t)=\psi(\boldsymbol{r})f(t)$,其中$\psi(\boldsymbol{r})$称为定态波函数.定态波函数所描述的粒子系统中,各种可能的状态(量子态)不随时间变化,这种状态称为定态.(b) 本征值和本征函数:在定态薛定谔方程$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla+U(\boldsymbol{r})\right]\psi(\boldsymbol{r})=E\psi(\boldsymbol{r})$中,等式左边方括号中所表示的称为力学量算符,力学量算符作用于波函数$\psi(\boldsymbol{r})$运算的结果正好等于常量E与波函数$\psi(\boldsymbol{r})$的乘积,这类方程称为本征方程,满足本征方程的常量称为该力学量的本征值,而波函数$\psi(\boldsymbol{r})$则为属于该本征值的本征函数,本征函数所描写的状态称为本征态.上述定态薛定谔方程是能量的本征方程,等式左边括号表示的为能量算符,E为能量本征值,$\psi(\boldsymbol{r})$为能量本征值E的本征函数.

(3) 应用定态薛定谔方程处理微观粒子一维运动问题的方法和步骤如下:

① 将给定的势能函数$U(x)$代入一维定态薛定谔方程,若$U(x)$在不同区域有不同的函数形式,则应分别列出薛定谔方程;

② 解微分方程,求得各区的波函数.

③ 根据边值条件和标准条件,求得满足这些条件的波函数;

④ 根据归一化条件定出波函数的系数(归一化常量);

⑤ 讨论所得结果的物理意义,得出粒子的概率密度分布等.

(4) 对于一维势阱问题,主要使读者领会量子力学处理问题的方法,以及量子力学的结论与经典力学结论的差异.对于一维势垒问题着重了解隧道效应.对于一维谐振子问题主要了解零点能量的概念.对于氢原子问题主要了解四个量子数的意义及原子中电子排布遵从的两条规律:泡利不相容原理和能量最小原理.

四、解题指导

本章的习题涉及黑体辐射、光电效应、康普顿效应、光子、德布罗意波、波函

数、氢原子理论和量子数等.主要着重在概念的应用.

1. 黑体辐射两个实验定律(斯特藩-玻耳兹曼定律 $M_0(T)=\sigma T^4$ 和维恩位移定律 $T\lambda_m=b$)的应用,有时这两个定律要联合起来应用.

2. 由爱因斯坦光电效应方程 $h\nu=A+\frac{1}{2}mv_m^2$,可以计算金属的逸出功、红限频率、光电子逸出金属的最大初动能以及截止电压等多种信息.

3. 康普顿波长改变量 $\Delta\lambda=\frac{h}{m_0c}(1-\cos\theta)=\frac{2h}{m_0c}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ 是研究康普顿效应的唯一公式.

光子的能量 $E=h\nu$,动量 $p=\frac{h}{\lambda}$ 也是常用的两个公式.

4. 德布罗意关系式 $\lambda=\frac{h}{p}$ 可以计算各种实物粒子的波长.

5. 利用波函数的归一化条件 $\iiint_V|\Psi(\boldsymbol{r},t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=1$ 可以求出波函数的归一化系数.从而可求出粒子在不同状态在某区间内出现的概率.

6. 通过不确定关系可以判断哪些情况下微观粒子可以看成经典力学的粒子,哪些情况下则不能.又可估算能级的平均寿命以及确定能级的稳定性等.

7. 氢原子理论中的玻尔频率公式 $\nu_{kn}=\frac{|E_n-E_k|}{h}$ 是一个非常有用的公式.氢原子基态能量 $E_1=-13.6$ eV 这个数据也应记住.

五、自我检测

(一) 选择题

1. 已知某单色光射到一个金属表面产生了光电效应,若此金属的逸出电势 U_0(使电子从金属逸出需做功 eU_0),则此单色光的波长必须满足　[　]

A. $\lambda\leqslant hc/(eU_0)$　　B. $\lambda\geqslant hc/(eU_0)$

C. $\lambda\leqslant eU_0/(hc)$　　D. $\lambda\geqslant eU_0/(hc)$

2. 一个光子和一个电子具有相同的波长,则　[　]

A. 光子具有较大的动量　　B. 电子具有较大的动量

C. 电子和光子的动量相等　　D. 电子和光子的动量不确定

3. 设用频率为 ν_1 和 ν_2 的两种单色光,先后照射同一种金属均能产生光电效应,已知金属的红限频率为 ν,测得两次照射时的遏止电势差 $|U_2|=2|U_1|$,则这两种单色光的频率有如下关系:　[　]

A. $\nu_2=\nu_1-\nu$　　B. $\nu_2=\nu_1+\nu$

C. $\nu_2=2\nu_1-\nu$　　D. $\nu_2=\nu_1-2\nu$

4. 静止质量不为零的微观粒子作高速运动,这时粒子物质波的波长 λ 与速度 v 有如下关系: [　　]

A. $\lambda\propto v$　　B. $\lambda\propto\sqrt{c^2-v^2}$

C. $\lambda\propto\sqrt{\dfrac{1}{v^2}-\dfrac{1}{c^2}}$　　D. $\lambda\propto\dfrac{1}{v}$

5. 电子显微镜中的电子从静止开始通过电势差为 U 的静电场加速后,其德布罗意波长为 0.04 nm,则 U 约为 [　　]

A. 150 V　　B. 330 V　　C. 630 V　　D. 940 V

6. 具有下列哪一能量的光子,能被处于 $n=2$ 的能级的氢原子吸收? [　　]

A. 1.51 eV　　B. 1.89 eV　　C. 2.16 eV　　D. 2.40 eV

7. 已知粒子在一维矩形无限深势阱中运动,其波函数为

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}\cos\frac{3\pi x}{2a}\quad(-a\leqslant x\leqslant a)$$

那么粒子在 $\dfrac{5}{6}a$ 处出现的概率密度为 [　　]

A. $1/(2a)$　　B. $1/a$　　C. $1/\sqrt{2a}$　　D. $1/\sqrt{a}$

8. 关于不确定关系 $\Delta x\Delta p_x\geqslant\dfrac{\hbar}{2}$ 有以下几种解释:

A. 粒子的动量不可能确定

B. 粒子的坐标不可能确定

C. 粒子的动量和坐标不可能同时确定

D. 不确定关系不仅适用于电子和光子,也适用于其他粒子.

其中正确的是 [　　]

(二)填空题

1. 在地面上测得一恒星辐射波谱中的峰值波长为 λ_m,恒星的直径为 D,假设恒星表面近似为星体表面,则恒星的温度 $T=$_____,恒星的辐射总功率 $P=$_____.

2. 已知钾的逸出功为 2.0 eV,如果用波长 360 nm 的光照射在钾上,则钾的遏止电势差的绝对值为_____,从钾表面所发射的电子的最大速度 $v_{max}=$_____.

3. 在康普顿散射实验中,若入射光子与散射光子的波长分别为 λ 和 λ',则反冲电子获得的动能 $E_k=$_____.

4. 若一无线电接收机接收到频率为 10^8 Hz 电磁波的功率为 1 μW，则每秒接收到的光子数为_____.

5. 要使处于基态的氢原子受激发后能辐射氢原子光谱中波长最短的谱线，最少需向氢原子提供_____ eV 的能量.

6. 描述粒子运动的波函数为 $\Psi(\boldsymbol{r},t)$，则 $\Psi\Psi^*$ 表示_____；$\Psi(\boldsymbol{r},t)$需要满足的条件是_____；其归一化条件是_____.

7. 在一维无限深方势阱中自由运动的粒子：(1) 其定态薛定谔方程为_____；(2) 应用(何种)_____条件，解出其能量是量子化的；(3) 粒子最小能量不为零的原因是_____；(4) 若势阱宽度增大，则粒子基态能量_____(增大、减小或不变)，粒子处在势阱中心附近的概率将_____(增大、减小或不变).

8. 设一维无限深势阱中质量为 m 的粒子所处的状态波函数如图 13-1 所示. 则粒子的德布罗意波波长 $\lambda=$_____；粒子的能量 $E=$_____；粒子出现的最大概率位置 $x=$_____.

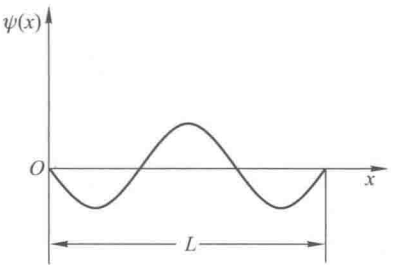


图 13-1

9. 设光子的波长 λ 为 300 nm，如果确定此波长的精确度 $\Delta\lambda/\lambda=10^{-6}$，则此光子的坐标不确定量为_____.

10. 主量子数 $n=4$ 的量子态中，角量子数 l 的可能取值为_____；磁量子数 m_l 的可能取值为_____.

六、问题讨论

1. 用光子观点导出光的多普勒效应公式

设发光原子的静止质量为 m_0，发射一个能量为 $h\nu_0$ 的光子后，静止质量变为 m_0'[图 13-2(a)]，在这个过程中能量关系为

$$m_0'c^2=m_0c^2-h\nu_0 \qquad ①$$

若该原子以速度 $\boldsymbol{v}$ 自由运动，原子的能量为 $E=mc^2=\dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$，动量为 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}=\dfrac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$(式中 $\beta=\dfrac{v}{c}$). 在发射能量 $h\nu$ 的光子后，原子的速度变为 $\boldsymbol{v}'$，静止质量为 m_0'，能量为 E'，动量为 $\boldsymbol{p}'$. 为简单起见，假定所发射的光子沿着原子运动方向，如图13-2(b)所示. 由能量守恒和动量守恒有

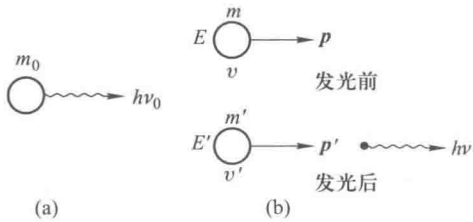


图 13-2 原子发光的频率变化

$$E'=E-h\nu \tag{②}$$

$$p'=p-\frac{h\nu}{c} \tag{③}$$

因此,按能量-动量关系可得

$$E'^2-c^2p'^2=E^2$$

$$(E-h\nu)^2-c^2\left(p-\frac{h\nu}{c}\right)^2=m_0'c^2 \tag{④}$$

将左边展开,并将式①代入得

$$E^2-2Eh\nu+(h\nu)^2-p^2c^2+2pch\nu-(h\nu)^2=(m_0c^2-h\nu_0)^2$$

再根据 $E^2-(pc)^2=(m_0c^2)^2$,代入得

$$(m_0c^2)^2-2Eh\nu+2pch\nu=(m_0c^2)^2-2m_0c^2h\nu_0+(h\nu_0)^2$$

化简得

$$\nu=\frac{2m_0c^2-h\nu_0}{2(E-pc)}\nu_0 \tag{⑤}$$

由于

$$E-pc=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1-\frac{v}{c}\right)=m_0c^2\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

代入得

$$\nu=\nu_0\left(1-\frac{h\nu_0}{2m_0c^2}\right)\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \tag{⑥}$$

式中$\frac{h\nu_0}{2m_0c^2}$项表示由于原子的反冲造成光子能量的减少.由于原子作为光子源,其静止能量远远大于光子的能量,所以这一项可以略去.因此最终可以得到光源运动时所测得的光子频率

$$\nu=\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\nu_0 \tag{⑦}$$

这就是光的多普勒效应公式.

2. 德布罗意对物质波的假设

1924 年,德布罗意在题为《量子理论的研究》的博士论文中,他提出了所有

的物质粒子都具有波粒二象性的假设.他认为“任何物体伴随着波,而且不可能将物体的运动和波的传播分开”;并给出粒子的动量 p 与其伴随的波的波长 λ 之间的关系为

$$\lambda=\frac{h}{p}$$

这就是著名的德布罗意关系式.它与相对论中的质能关系式

$$E=mc^2$$

同为近代物理学中最重要的两个关系式.前者,通过普朗克常量 h(一个很小的量)把粒子性和波动性联系起来;后者,通过光速 c(一个很大的量)把能量和质量联系起来.

德布罗意怎么把光的波粒二象性推广到所有的实物粒子呢?他在 1929 年领取诺贝尔物理学奖时曾回忆过当时的想法:“一方面,并不能认为光的量子论是令人满意的,因为它依照方程式 $E=h\nu$ 定义了光粒子的能量,而这个方程中却包含着频率 ν.在一个单纯的微粒理论中没有什么东西使我们定义一个频率;单单这一点就迫使我们在光的情形中必须同时引入微粒的观念和周期性的观念.另一方面,在原子中电子稳定运动的确定,引入了整数;到目前为止,在物理学中涉及整数的现象只有干涉和振动的简正模式.这一事实使我产生了这样的想法:不能把电子简单地视为微粒,必须同时赋予它们以周期性.”

德布罗意当年怎样得到物质波的波长 λ 和粒子动量 p 的关系式 $\lambda=\frac{h}{p}$ 呢?他把当时量子论的主要公式 $E=h\nu$ 和狭义相对论的时空变换式、质能关系式等有关公式结合在一起得到的.

一个电子静止在某参考系中,它的静质量为 m_0,能量为 m_0c^2,假设电子服从量子理论,则其能量为 $h\nu_0$,于是

$$h\nu_0=m_0c^2 \tag{8}$$

ν_0 的存在意味着电子具有某种振动.假设有一个“波”同它相联系:

$$\psi=A\cos(\omega_0 t_0) \tag{9}$$

式中

$$\omega_0=2\pi\nu_0=2\pi\frac{m_0c^2}{h} \tag{10}$$

t_0 是静止参考系 K 内的时间.现在取一个相对于 K 系以速率 v 沿 x 轴方向运动的参考系 K′,则在 K′系内时空坐标按洛伦兹变换有

$$t_0=\frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{11}$$

将式⑪代入式⑨得

$$\psi = A\cos\ \omega\left(t-\frac{vx}{c^2}\right) = A\cos(\omega t - kx) \qquad ⑫$$

式中

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega v}{c^2}$$

式⑫表示一个沿 x 轴正方向传播的波,这就是德布罗意假设的运动粒子伴随的波.此波的相速度

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c^2}{v}$$

德布罗意认为这个相速度并不是粒子的运动速度.因为能够与粒子联系在一起的波不可能是空间范围扩展到无限长的平面波,而应该是有限扩展的波包.波包在空间运动时,其速度为群速度.为了计算群速度,先计算一下相应的波长,按定义

$$\lambda = \frac{v_p}{\nu} = \frac{c^2}{\nu v}$$

利用 $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 以及 $p = mv$ 和式⑩代入上式得

$$\lambda = \frac{c^2 2\pi}{v\omega_0}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{h}{m_0 v}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p}$$

这就是德布罗意关系式.

下面计算波的群速度,按定义波数 k 为

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi m_0 v}{h\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\beta\omega_0}{c\sqrt{1-\beta^2}}$$

群速度的定义为

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\beta}\Big/\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\beta}$$

而

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\beta} = \frac{\beta\omega_0}{(1-\beta^2)^{3/2}}, \qquad \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\beta} = \frac{\omega_0}{c(1-\beta^2)^{3/2}}$$

两者相除,于是得

$$v_g = \beta c = v$$

这样,与粒子相关的波群,其速度恰好跟粒子运动的速度一样,粒子和它的波群是一起向前运动的.这个结论不是偶然巧合,恰恰说明德布罗意所假设的粒子本身具有某种内在的振动.

第十四章
激光固体的量子理论

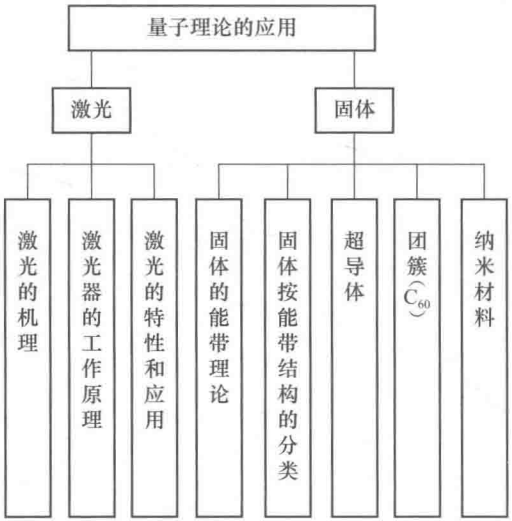
一、学习要求

1. 了解激光的形成、特性及其主要应用.

2. 了解固体能带的形成,并用能带观点区分导体、半导体和绝缘体.了解本征半导体、n 型半导体和 p 型半导体的特性.

3. 了解超导体的主要电性质及其理论解释.

二、知识框图



三、内容导读

1. 激光的机理

激光是原子受激辐射光的简称.按照辐射的量子理论,受激辐射所发射的光子,在频率、相位、偏振方向和传播方向等方面,都与原来诱发的光子相同.在受激辐射中,一个入射光子作用的结果得到两个状态全同的光子,两个得四个……这就是光放大.

要发生光放大过程,就必须使受激辐射占优势,而要使受激辐射占优势,必须实现粒子数反转.要实现粒子数反转,须满足两个条件,一是工作物质必须具有亚稳能级;二是外界必须向工作物质提供能量.实现粒子数反转是产生激光的必要条件,但还不是充分条件,因为即使已实现了激活物质的粒子数反转,但由于自发辐射的概率要比受激辐射大得多,如果不采取措施,就得不到方向性好和相干性好的激光,光学谐振腔就能起到这个作用.

2. 固体的能带理论

能带论是目前研究固体中电子运动的一个主要理论基础，能带论是在用量子力学研究金属导电理论的过程中发展起来的.能带论的出发点是固体中的电子不再束缚于个别原子，而是在整个固体内运动.这就是电子共有化.这些共有化电子在晶格周期性势场中的运动状态，需用量子力学来计算.超出本书的教学范围.其结论是能级分裂，形成能带，并且能带还分成满带、导带和禁带等.导体、半导体和绝缘体的区分，就在于它们的能带结构不同，产生不同的导电性质.

3. 超导电性

超导体的超导电性是一个非常奇特的宏观量子现象，零电阻是超导体的一个主要特性，但超导体的完全抗磁性更为基本，因此，我们不能把超导电性看成单纯是电阻消失的效应，它还应包括完全抗磁性.人们常用临界温度 T_c、临界磁场 H_c 和临界电流密度 j_c 表征超导材料的超导性能.

BCS 理论是解释超导电性比较成功的微观理论，根据这一理论，产生超导电现象的关键在于在超导体中的电子形成了电子对，叫“库珀对”，每个“库珀对”由两个自旋相反、动量相反的电子组成.在有电流的超导金属中，每一个电子对都有一个总动量，这动量的方向与电流方向相反，因而能传送电荷.电子对通过晶格运动时不受阻力.这在宏观上就表现为超导体对电流的电阻为零.

四、解题指导

本章的习题主要是概念性问题.因此要很好地领会教材中的概念.

五、自我检测

填空题

1. 产生激光的必要条件是_____.

2. 激光器中光学谐振腔的作用是(1)_____，(2)_____，(3)_____.

3. 与绝缘体相比较，半导体能带结构的特点是_____.

4. 纯净半导体能级的禁带是较_____的，在常温下有少量_____由满带激发到空带中，从而形成由_____参与导电的本征导电性.

5. 导体的电阻随温度升高而增大，这是因为_____，半导体的电阻随温度升高而减小，这是因为_____.

6. p 型半导体由于掺杂而形成局部能级(受主能级)，这些能级在能带结构中应处于_____.

7. 超导体的主要特性有_____.

第十五章
原子核物理和粒子物理

一、学习要求

1. 了解原子核的基本性质.

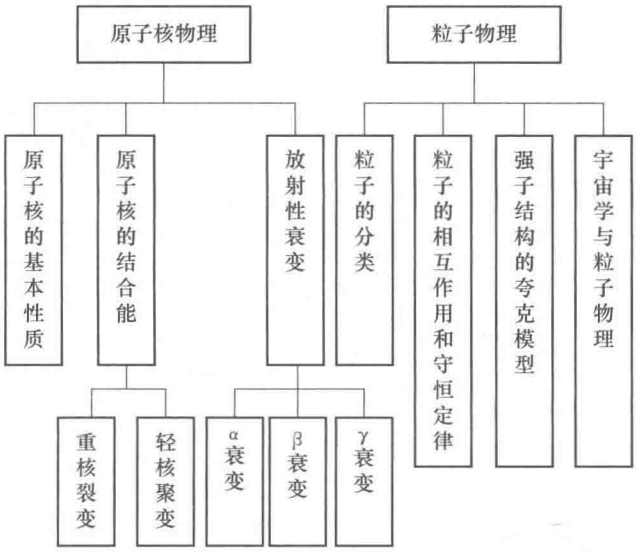
2. 理解原子核结合能和质量亏损的含义,理解重核裂变和轻核聚变释放结合能的道理.

3. 理解放射性衰变规律,衰变常量、半衰期和平均寿命的意义以及它们之间的关系.了解 α 衰变、β 衰变和 γ 衰变的基本规律.

4. 了解粒子物理发展概况以及粒子间的相互作用和守恒定律、粒子物理的标准模型.

5. 了解哈勃定律、大爆炸宇宙模型与宇宙学的关联.

二、知识框图



三、内容导读

1. 原子核的基本性质

原子核的电荷、质量、大小、形状及组成是一般性质,而自旋、磁矩等是原子核的量子性质.需要指出的是中子是电中性的,却具有磁矩,这表示其内部存在电结构.

2. 原子核能

原子核的质量略小于组成原子核的核子质量总和,这两者的差值就是原子核的质量亏损.孤立的核子组成原子核时所释放出来的能量就是该原子的结合

能.注意:质量亏损并不表示质量消失,也不能说质量转变为能量,而是物体的静能转化为物体的动能,原子核的核子平均结合能的大小反映核子结合的牢固程度和原子核的稳定程度.重核裂变和轻核聚变是释放和利用核能的方法和途径.

3. 原子核的放射性衰变

放射性衰变定律是对大数量原子核才成立的统计规律,衰变常量 λ 的大小表示母核随时间衰变的快慢,也表示一个原子核在单位时间内发生衰变的概率.衰变常量 λ、半衰期和平均寿命都是放射性核素的特征量,要了解它们之间的关系.对三类放射性衰变要了解它们的基本特征.

4. 粒子物理

粒子的基本属性可用质量、寿命、自旋、同位旋、轻子数、重子数、奇异数等物理量来描述.粒子的分类:按粒子自旋可分为玻色子和费米子两类;按粒子质量可分为轻子、介子和重子三类;按粒子间相互作用可分为引力子、规范玻色子、轻子和强子四类.对于轻子迄今尚未发现有任何结构,而强子却有内部结构,比较成功的模型是夸克模型,它认为每一个介子由一个夸克和一个反夸克组成,每一个重子由三个夸克组成.

5. 原子核物理与宇宙学

近 20 年来,物理学理论和方法在天体的形成、结构和演化等方面的深入和发展,形成了一系列物理学分支,如相对论天体物理、等离子天体物理、高能天体物理等.同时,几乎物理学的所有方面,如引力、时空、粒子物理,等离子物理,固体、原子和分子,辐射和激光等,都与天体的研究有密切关系,特别是天体的结构和演化、宇宙的结构和演化,与原子核物理、粒子物理之间都表现了全面的渗透和结合.因此本教材在原子核物理和粒子物理简介一章的最后列了宇宙学简介一节.

宇宙在膨胀,并且现在还在继续膨胀着,这已是千真万确的事实,这是大爆炸宇宙学的基本观点.大爆炸宇宙学的实验基础有:① 星系红移的发现,建立了哈勃定律;② 2.7 K 微波背景辐射的发现;③ 宇宙原初状态下氢核的含量.大爆炸宇宙学是目前被公认的宇宙学的标准模型.

四、解题指导

本章的习题比较简单,主要有:

(1) 根据质量数和电荷数平衡核反应式.

(2) 原子核结合能的计算要用到质量亏损和爱因斯坦质能关系式.计算时要注意单位换算,质量亏损 Δm 常用原子质量单位 u,要换算到 kg,1 u = 1.660×10^{-27} kg,能量单位常将 J 化成 MeV.有时直接用 1 u = 931.5 MeV/c^2 计算更为方便.

五、自我检测

(一) 选择题

试判断下列过程中可能发生的是：　[　]

A. $p+p=n+p+\pi^+$　　B. $e^++e^-\rightarrow\mu^++\pi$

C. $\Lambda^0\rightarrow\pi^++\pi^-$　　D. $\pi^-+p\rightarrow n+\pi^0$

(二) 填空题

1 由质量亏损可求得^3_2He和^3_1H的结合能之差为_____.

2. 1 g 的^{235}U裂变时全部释放的能量约等于_____t 煤在空气中燃烧所放出的热量;1 g的^2H聚变所放出的能量约等于_____t 煤在空气中燃烧所放出的热量(煤的燃烧热约等于3.3×10^7 J/kg).

3. 试判断反应 $\mu^-+p\rightarrow n+X$ 中,未知粒子 X 可能是_____.

4. 今有 1.49 μg 的纯$^{14}_7N$,其半衰期为 10.0 min.最初有核子_____,1.0 h后其放射性强度为_____.

5. 与夸克成分 uus 和 uds 相对应的粒子分别是_____和_____.

自我检测参考答案

第 一 章

(一) 选择题

1. (D) 2. (C) 3. (A) 4. (D) 5. (C) 6. (A) 7. (D) 8. (C)
9. (B) 10. (C)

(二) 填空题

1. 6 m,6 m

2. B, $\dfrac{A^2+4\pi BR}{R}$

3. 17.3 m/s,20 m/s

4. 1.2 m/s^2,3.6 m/s^2,3.79 m/s^2

5. v_0+bt, $\dfrac{1}{R}\sqrt{(v_0+bt)^4+R^2b^2}$

6. $v_0^2/2s$, $v_0^2/2sg$

7. 30 m/s^2, $-y$ 方向

8. $\dfrac{t^3}{1.5}\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}$

9. $\dfrac{kl_0}{k-m\omega^2}$, $\dfrac{km\omega^2 l_0}{k-m\omega^2}$

10. $\dfrac{3}{4}(1+\mu)mg$

(三) 计算题

1. 0.4 s

2. $96+24x$

第 二 章

(一) 选择题

1. (A,E) 2. (B,D,E) 3. (B) 4. (A) 5. (C) 6. (B) 7. (C)
8. (A) 9. (B) 10. (D)

(二) 填空题

1. −42.4 J

2. 3×10^{-3} s, 0.6 N · s, 2×10^{-3}kg

3. 36 s^{-1}

4. g/l, $g/2l$

5. 0, $\sqrt{2}mv$, mvR, mgR

6. $mgd-\frac{1}{2}kd^2-\mu m_0 gd=\frac{1}{2}(m+m_0)v^2$, $mdg-\mu m_0 gd=\frac{1}{2}(m+m_0)v^2+\frac{1}{2}kd^2$, $-\mu_0 m_0 gd=\frac{1}{2}(m+m_0)v^2-mgd+\frac{1}{2}kd^2$

7. $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{2}{3}\sqrt{\sqrt{3}gl}$

8. $(H_1-H_2)mg$, 0

9. $\frac{Gm_1m_2}{6R}$, $-\frac{Gm_1m_2}{3R}$, $\frac{Gm_1m_2}{6R}$

10. $Gmm_E\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$

(三) 计算题

1. (1) 0.196;(2) 703 J;(3) 1.96 J;(4) 位移不同,$A_1\neq A_2$

2. $v_0\sqrt{\frac{mm_0}{(m+m_0)k}}$

第 三 章

(一) 选择题

1. (B) 2. (C) 3. (C) 4. (C) 5. (A,C,E) 6. (A) 7. (C)
8. (B) 9. (B) 10. (A)

(二) 填空题

1. $25\pi\times10^3$ s^{-2},25

2. 25π s^{-1}, π m/s, $625\pi^2$ m/s^2

3. 刚体转动惯性的量度,$I=\int r^2 dm$,总质量,转轴位置,质量分布

4. $\frac{1}{2}mgl$, $\frac{2}{3}g/l$

5. $\frac{3}{2}g$

6. $J\omega$,总外力矩为零

7. 4×10^4 kgm^2/s, 8×10^6 J

8. 16×10^{12} m/s,不合理,非刚体定轴转动

9. 17.7 s^{-1}

10. 理想,定常,压力,速度,水

(三) 计算题

1. 略

2. 10 m/s, 2×10^{4} Pa

第 四 章

(一) 选择题

1. (C) 2. (D) 3. (B) 4. (B) 5. (B) 6. (C)

(二) 填空题

1. 93 m, 2.5×10^{-7} s

2. 4.3×10^{-8} s, 10.3 m

3. c, $\arctan\dfrac{\sqrt{c^2-v^2}}{c}$

4. 大

5. $7.09m_0c^2$, $7.09m_0c$, $6.09m_0c^2$

6. $\sqrt{1-u^2/c^2}$

(三) 计算题

(1) 22.5×10^{-8} s;(2) 37.5×10^{-8} s

第 五 章

(一) 选择题

1. (B) 2. (C) 3. (C) 4. (D) 5. (A) 6. (C) 7. (C) 8. (C)
9. (C) 10. (A)

(二) 填空题

1. 否,否,是

2. 6.21×10^{-21} J, 4.14×10^{-21} J, 1.04×10^{-20} J

3. 135×10^{3}Pa

4. 大量分子热运动碰撞器壁的结果,$\dfrac{1}{3}nm_0\overline{v^2}$,分子平均平动动能,$\bar{\varepsilon}=\dfrac{3}{2}kT$

5. <

6. 6 080 m

7. 2.44×10^{25}, 2.44×10^{7}

8. $5.42\times10^{7}\ s^{-1}$, 6×10^{-5} m

9. 1 770 K

10. $e^{-\frac{E}{kT}}$,愈小,低能量

(三) 计算题

(1) 230 m/s;(2) 9.3×10^{25};(3) 2.43×10^{-21} J;(4) 2.9×10^{-8} m, 1.13×10^{-10} s

第 六 章

(一) 选择题

1. (B) 2. (C) 3. (A) 4. (C) 5. (C) 6. (C) 7. (A) 8. (B)
9. (A) 10. (D)

(二) 填空题

1. $3.2\times10^{22}/m^{3}$

2. 1:1:1

3. 27.8 g/mol

4. $\frac{1}{3}\frac{mv^{2}}{k}$

5. 5:3,10:3

6. 降低

7. S_1+S_2, $-S_1$

8. $\frac{2}{i+2}$, $\frac{i}{i+2}$

9. <

10. 热运动无序性,增加

(三) 计算题

1. 1.40

2. -6.23×10^{3} J, 3.74×10^{3}J, 3.46×10^{3}J, 0.97×10^{3}J, 13.4%

第 七 章

(一) 选择题

1. (C) 2. (D) 3. (C) 4. (A) 5. (B) 6. (D) 7. (A) 8. (D)

9.（D） 10.（B）

（二）填空题

1. $-2\varepsilon_0 E_0/3$；$4\varepsilon_0 E_0/3$

2. λ/ε_0

3. $[2gR-(Q/2\pi\varepsilon_0 R)(1-1/\sqrt{2})]^{1/2}$

4. σ，$\sigma/(\varepsilon_0\varepsilon_r)$

5. $\dfrac{Q\Delta S}{16\pi^2\varepsilon_0 R^4}$，指向被挖去的小块处

6. $\dfrac{2\varepsilon_0 A}{qd}$

7. $-q$，$-q$

8. $\dfrac{2}{3}U_0$

9. $\dfrac{Q_0}{4\pi r_1^2}$；$\dfrac{Q_0}{4\pi r_2^2}$；$\dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r_1^2}$；$\dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$；

10. $\dfrac{Q_1+Q_2}{2S}$；$\dfrac{Q_1-Q_2}{2S}$；$-\dfrac{Q_1-Q_2}{2S}$；$\dfrac{Q_1+Q_2}{2S}$

（三）计算题

1.（1）B 球表面上的场强最大，先达到击穿场强，即 $E_{2\max}=3\times10^6$ V/m；（2）$Q=Q_1+Q_2=3.77\times10^{-4}$ C；

2. $E_A=998$ V/m，$U'=12.5$ V；

3.（1）$E=\dfrac{kb^2}{4\varepsilon_0}$（板外两侧）；

（2）$E'=\dfrac{k}{2\varepsilon_0}\left(x^2-\dfrac{b^2}{2}\right)$（$0\leqslant x\leqslant b$）（3）$x=\dfrac{b}{\sqrt{2}}$

4.（1）$\boldsymbol{E}'=-\boldsymbol{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$（$\boldsymbol{e}_r$ 是从 O 指向电荷 $+q$ 的单位矢量）；

（2）$U'=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$；（3）$q'=-qR/r$

第 八 章

（一）选择题

1.（B） 2.（D） 3.（D） 4.（A） 5.（B） 6.（B） 7.（C） 8.（C）

9. (B) 10. (C)

(二) 填空题

1. $\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln 2$

2. 沿 Ox 轴; 沿 Oy 轴正向;在 Oxy 平面内与 Ox 轴正向成 30°角

3. $\pi R^2 IB/2$,在图面中向上,$\pi/2+n\pi$($n=1,2,\cdots$)

4. 1:1

5. $m=\pi I(R_2^2-R_1^2)/2$, $M=\pi IB(R_2^2-R_1^2)/2$

6. $A=1.26\times10^{-3}$ J

7. n,p

8. $I/(2\pi r)$, $\mu I/(2\pi r)$

9. 铁磁质,顺磁质,抗磁质

10. 矫顽力小,容易退磁

(三) 计算题

1. (1) $B_0=B_x=\frac{\mu_0\lambda\omega}{2}$; (2) $B=B_x=\frac{\mu_0 R^3\lambda\omega}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$

2. (1) $\boldsymbol{B}_{O'}=\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{a}$; (2) $\boldsymbol{B}_P=\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{a}$

由此结果可知空腔内任意点 P 处磁感应强度与空腔轴线上 O' 处磁感应强度相同,因此空腔内为均匀磁场

3. $F=\mu_0 I_1 I_2/2$; 方向垂直 I_1 向右

4. $\chi_m=496$

第 九 章

(一) 选择题

1. (B) 2. (D) 3.(A) 4. (B) 5. (C) 6. (C) 7. (B) 8. (C)
9. (C) 10. (C)

(二) 填空题

1. $q=3.14\times10^{-6}$ C

2. $ADCBA$ 绕向,$ADCBA$ 绕向

3. $-\frac{\mu_0 Ig}{2\pi}t\ln\frac{a+l}{a}$

4. $\dfrac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln\dfrac{a+b}{a-b}$

5. $\dfrac{\mu_0 I\pi r^2}{2a}\cos\omega t$；$\dfrac{\mu_0 I\omega\pi r^2}{2Ra}\sin\omega t$

6. 减小

7. 9.6 J

8. 小于；有关

9. $-\dfrac{\pi r^2\varepsilon_0 E_0}{RC}\mathrm{e}^{-t/RC}$；相反

10. 2；3；1

（三）计算题

1. $\mathscr{E}=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}B_0v^2t^2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}B_0v^2t^2=\sqrt{3}B_0v^2t^2$

2. $\mathscr{E}=\dfrac{\mu_0N^2b\omega I_0}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}\sin\omega t=20.7\sin 100\pi t$

3. $I_i=\mathscr{E}_i/R=(\mu_0I_0\omega bN\sin\omega t/4\pi R)\ln\dfrac{h^2+x_2^2}{h^2+x_1^2}$

4. $\boldsymbol{J}=\partial\boldsymbol{D}/\partial t=\dfrac{q\omega}{4\pi R^2}(\sin\omega t\,\boldsymbol{i}-\cos\omega t\,\boldsymbol{j})$

第 十 章

（一）选择题

1.（A、C′）（B、A′）（C、D′）（D、B′） 2.（D） 3.（A） 4.（C） 5.（C）

（二）填空题

1. $\dfrac{2\pi}{\sqrt{(x_1^2-x_2^2)(v_2^2-v_1^2)}}$

2. $T_1'=T_1$，$T_2'>T_2$

3. $x=10\cos\left(\dfrac{\pi}{6}t+\dfrac{\pi}{3}\right)$（SI 单位）

4. 同频率、同振幅、振动方向互相垂直、相位差为$(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）

5. 10.1 mH

(三) 计算题

1. (1) $\varphi_2-\varphi_1=-\dfrac{\pi}{2}$, $x_2=A\cos(\omega t+\varphi_0-\pi/2)$ (2) 略

2. $2\pi\sqrt{m/k}$

第十一章

(一) 选择题

1. (B) 2. (D) 3. (B) 4. (B) 5. (C)

(二) 填空题

1. $y=0.05\cos\left[100\pi\left(t-\dfrac{x}{20}\right)+\dfrac{\pi}{2}\right]$ (SI 单位)

2. π, $\dfrac{\pi}{2}$, 0, $\dfrac{3\pi}{2}$

3. $y=0.10\cos\left[2\pi\left(\dfrac{t}{0.4}-\dfrac{x}{2.0}\right)+\dfrac{\pi}{2}\right]$ (SI 单位)

4. $y=A\cos\ 2\pi\left(\nu t-\dfrac{2d-x}{\lambda}\right)$

5. $E_0\cos\left(\dfrac{2\pi c}{\lambda}t+\dfrac{2}{3}\pi\right)$, $\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0\cos\left[\dfrac{2\pi c}{\lambda}\left(t-\dfrac{x}{c}\right)+\dfrac{2}{3}\pi\right]$

6. $\dfrac{P}{4\pi r^2}$, $\sqrt{\dfrac{2\bar{S}}{c\,\mu_0}}=\dfrac{1}{r}\sqrt{\dfrac{P}{2\pi c\mu_0}}$

7. $\dfrac{u-v_A}{u+v_B}\nu$, $\dfrac{u-v_B}{u+v_A}\nu$

8. 10 cm

第十二章

(一) 选择题

1. (C) 2. (C) 3. (B) 4. (C) 5. (B) 6. (B) 7. (D) 8. (C) 9. (C)

(二) 填空题

1. (1) 使屏离开双缝,即 D 增大;(2) 使双缝间距变小,即 d 减小;(3) 用波长较长的单色光源,即 λ 增大

2. 0.09 μm

3. $\frac{\lambda}{2L}$

4. 2 947 nm

5. 2 mm

6. 5

7. 600~760 nm

8. 2 m

9. 37°,垂直于入射面

10. $\frac{1}{4}I_0\sin^2(2\alpha)$

第十三章

(一) 选择题

1. (A) 2. (C) 3. (C) 4. (C) 5. (D) 6. (B) 7. (A)

8. (C)(D)

(二) 填空题

1. b/λ_m, $\pi D^2\sigma\left(\frac{b}{\lambda_m}\right)^4$

2. 1.45 eV, 7.1×10^5 m/s

3. $hc\frac{\lambda'-\lambda}{\lambda'\lambda}$

4. 1.5×10^{19}

5. 13.6

6. t 时刻粒子在 $\boldsymbol{r}(x,y,z)$ 处出现的概率密度;单值、有限、连续;

$$\iiint_V |\psi(x,y,z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 1$$

7. (1) $-\frac{\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}=E\psi$,(2) 波函数是单值、有限、连续以及边界条件;(3) 粒子遵守不确定关系;(4) 减小 减小

8. $\frac{2}{3}L$; $\frac{p^2}{2m}=\frac{9h^2}{8mL}$; $\frac{L}{6}$, $\frac{3L}{6}$, $\frac{5L}{6}$

9. 0.134 mm

10. 0,1,2,3; 0,±1,±2,±3

第十四章

填空题

1. 粒子数反转分布

2. 产生与维持光的振荡,使光得到加强;使激光有极好的方向性;使激光的单色性好

3. 价带与导带间的禁带宽度较窄

4. 窄,价电子,导带,满带中的空穴和导带中的电子

5. 随着温度的升高,电子的无规则运动加剧、阻碍电子的定向运动,使电阻增加

半导体的载流子是满带中的空穴和导带中的电子,且禁带宽度较窄,由于温度的升高,电子的能量增高,有更多的电子从满带激发到导带,形成更多的电子-空穴对,使半导体导电性增强

6. 禁带中,但接近满带顶

7. 零电阻,临界磁场与临界电流,完全抗磁性,同位素效应

第十五章

(一) 选择题

(A), (D)

(二)填空题

1. 0.764 MeV

2. 2.5,10

3. ν_{μ}

4. 6.9×10^{16}, $1.23\times10^{12}\ s^{-1}$

5. Σ^{+},Λ^{0}

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话　(010)58581999　58582371　58582488

反盗版举报传真　(010)82086060

反盗版举报邮箱　dd@hep.com.cn

通信地址　北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社法律事务与版权管理部

邮政编码　100120

普通物理学系列教材

（程守洙　江之永　主编）

□ 978-7-04-042919-0　普通物理学（第七版）　上册

□ 978-7-04-043797-3　普通物理学（第七版）　下册

□ 978-7-04-044934-1　普通物理学简明教程（第三版）　上册

□ 978-7-04-044933-4　普通物理学简明教程（第三版）　下册

□ 978-7-04-046009-4　普通物理学（第七版）习题分析与解答

■ 978-7-04-047103-8　普通物理学（第七版）学习指导

ISBN 978-7-04-047103-8

9 787040 471038 >

定价：27.00 元