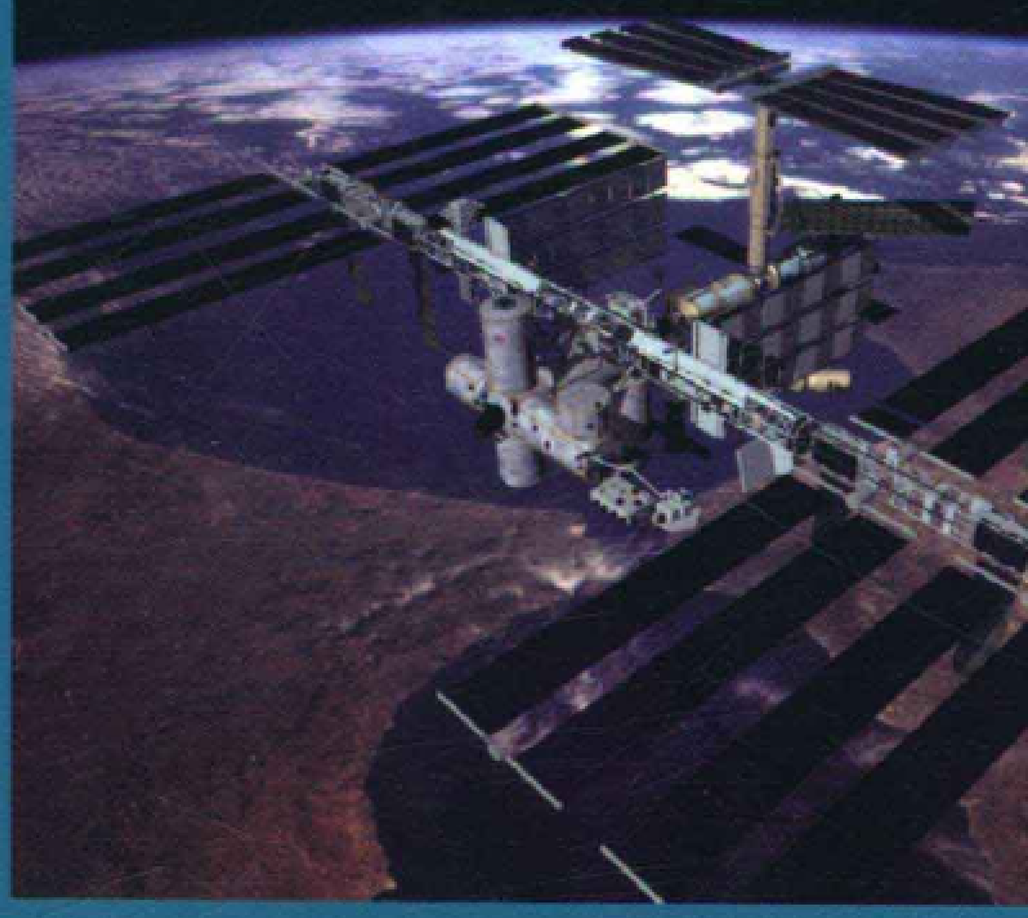
高等学校理工类课程学习辅导丛书

力　学（第二版）习题解答

■ 张汉壮　王文全



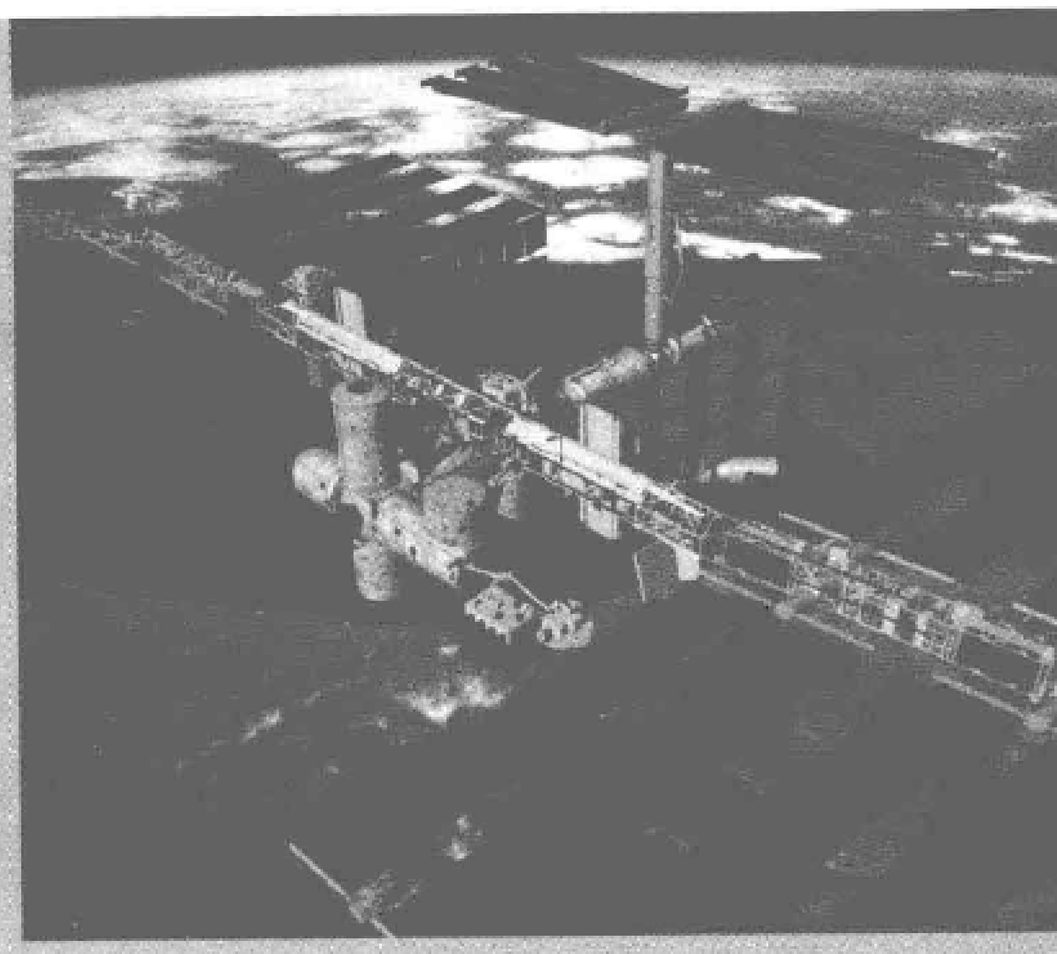
高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校理工类课程学习辅导丛书

力　学（第二版）习题解答

Lixue Xiti Jieda

■ 张汉壮　王文全



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是为张汉壮等编写的国家精品课程主讲教材《力学》(第二版)配套的习题解答。全书按照主教材的章节顺序编排，每章包括基本概念的总结、章后全部习题的题目和详细解答，对于典型的习题还给出了解题分析。

本书可作为使用张汉壮等编写的《力学》(第二版)的教师和学生的参考书，也可供使用其他教材的读者参考，对于准备研究生入学考试的学生也有一定的指导作用。

图书在版编目(CIP)数据

力学(第二版)习题解答/张汉壮,王文全编. --
北京:高等教育出版社,2013.7
ISBN 978-7-04-035531-4

Ⅰ.①力… Ⅱ.①张… ②王… Ⅲ.①力学-高等学校-题解 Ⅳ.①O3-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 099911 号

策划编辑 忻 蓓　　责任编辑 忻 蓓　　封面设计 张 志　　版式设计 范晓红
责任校对 胡晓琪　　责任印制 张泽业

出版发行 高等教育出版社　　咨询电话 400-810-0598
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号　　网　　址 http://www.hep.edu.cn
邮政编码 100120　　http://www.hep.com.cn
印　　刷 中国农业出版社印刷厂　　网上订购 http://www.landraco.com
开　　本 787mm ×960mm 1/16　　http://www.landraco.com.cn
印　　张 14.5　　版　　次 2013 年 7 月第 1 版
字　　数 260 千字　　印　　次 2013 年 7 月第 1 次印刷
购书热线 010-58581118　　定　　价 22.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 35531-00

前　言

本书针对张汉壮、王文全编写的《力学》(第二版)(2012 年由高等教育出版社出版)书后的全部习题给出了解答。

全书共分四篇。第一篇是质点基本运动规律知识内容的练习,包括质点运动学、惯性系下质点动力学、非惯性系下质点动力学三章内容。第二篇是以质点的基本运动规律为基础导出的运动定理(原理)与守恒定律等知识内容的练习,包括动量定理与动量守恒定律、功能原理与机械能守恒定律、角动量定理与角动量守恒定律三章内容。第三篇是针对以前两篇理论为基础,解决两种特殊质点系(刚体和流体)及两种较为普遍运动形式(振动和波动)的典型力学问题的练习。第四篇是狭义相对论知识内容的练习。

在学时有限的情况下,为了能达到使学生对基本知识内容进行重点练习的目的,每章的练习题被分为课后作业题和自检练习题两部分,课后作业题部分尽可能覆盖相关章节的最基本知识点内容,是课后需要完成的基本练习内容;在此基础上,个人可以根据自身的情况,选取自检练习题部分的内容进一步进行自我检查练习。

本书编写的重点是突出对习题中物理过程和所用定理(原理)、定律的分析和理解,培养学生理论联系实际的能力,本书可作为理工科、师范类等院校大学生普通物理学力学知识内容练习的参考书,也可作为理科学生考研复习的参考资料。

本书中非 * 标记的题目是力学中较为基础的练习题,有 * 标记的题目是作为基本内容的扩展练习题列出的,在学时有限的情况下,可以不做练习。

本书在编写过程中,在图文编辑、排版、校对等方面得到了陆国会、张涵、刘国强、薛燕等老师,以及李玲、纪文宇、姜丽、张晓军等多位研究生的大力帮助,在此对他们的支持与帮助表示由衷的感谢。由于编者水平有限,不足之处在所难免,恳请各位读者批评指正。

张汉壮

2011 年 12 月

目　　录

第一篇　质点基本运动规律

第一章　质点运动学 …… 1
第二章　惯性系下质点动力学 …… 16
第三章　非惯性系下质点动力学 …… 35

第二篇　运动定理(原理)与守恒定律

第四章　动量定理与动量守恒定律 …… 47
第五章　功能原理与机械能守恒定律 …… 67
第六章　角动量定理与角动量守恒定律 …… 96

第三篇　两种特殊质点系的运动与两种普遍的运动形式

第七章　刚体 …… 108
第八章　流体 …… 140
第九章　振动 …… 152
第十章　波动 …… 186

第四篇　时 空 结 构

第十一章　狭义相对论简介 …… 197

第一篇　质点基本运动规律

第一章　质点运动学

课后作业题

1-1. 一质点沿 x 轴方向做直线运动，t 时刻的坐标为 $x(t)=5t^2-t^3$，式中 x 以 m 为单位，t 以 s 为单位。求：(1) 第 3 s 至第 4 s 内质点的位移和平均速度；(2) 第 3 s 至第 4 s 内质点所走过的路程。

解：(1) 根据题意：

$$x(t)=5t^2-t^3$$

得第 3 s 至第 4 s 内质点的位移：

$$\Delta x=x(4)-x(3)=-2\ \text{m}$$

平均速度为

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(4)-x(3)}{(4-3)\ \text{s}}=-2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

(2) 根据题意：

$$x=5t^2-t^3$$

对上式微分得速度表达式：

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=10t-3t^2$$

题中 $x=5t^2-t^3$ 表示的是质点在 t 时刻相对坐标原点的位移，它与质点所走过的路程是不同的。由 $v=10t-3t^2$ 可知，质点在 4 s 内的速度方向会改变，速度改变方向的时刻为 $v=0$，得

$$t=\frac{10}{3}\ \text{s}$$

根据 $x(t)=5t^2-t^3$，分别计算速度变号前后的位移并求和，得第 3 s 至第 4 s 内质点所走过的路程：

$$s=\left|x\left(\frac{10}{3}\right)-x(3)\right|+\left|x(4)-x\left(\frac{10}{3}\right)\right|=3.04\ \text{m}$$

1-2. 沿 x 轴运动的质点，其速度和时间的关系 $v(t)=t^2+\pi\cos\frac{\pi}{6}t$（SI 单位）。在 $t=0$ 时，质点的位置 $x_0=-2$ m。试求：$t_1=3$ s 时，(1) 质点的位置；(2) 质点的加速度。

解：根据题意：

$$v=t^2+\pi\cos\frac{\pi}{6}t$$

积分得位移：

$$x=\int v\mathrm{d}t=\frac{1}{3}t^3+6\sin\frac{\pi}{6}t+c$$

微分得加速度：

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2t-\frac{\pi^2}{6}\sin\frac{\pi}{6}t$$

由 $t=0$ 时，$x=x_0=-2$ m，确定 $c=-2$。

根据题中给出的条件得：

(1) $t_1=3$ s 时质点的位置为

$$x(3)=13\ \mathrm{m}$$

(2) $t_1=3$ s 时质点的加速度为

$$a(3)=\left(6-\frac{1}{6}\pi^2\right)\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

1-3. 一质点沿 x 轴运动，其加速度与位置的关系为 $a(x)=2x+4x^2$（SI 单位），已知质点在 $x=0$ 处的速度为 2 m/s，试求质点在 $x=3$ m 处的速度。

解：根据题意：

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2x+4x^2$$

上式两边同乘 $\mathrm{d}x$ 有

$$\mathrm{d}x\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(2x+4x^2)\cdot\mathrm{d}x$$

由 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，上式化为

$$v\cdot\mathrm{d}v=(2x+4x^2)\,\mathrm{d}x$$

对上式两边积分得到

$$\frac{v^2}{2}=x^2+\frac{4}{3}x^3+c$$

由 $x=0$，$v=2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，确定 $c=2$。

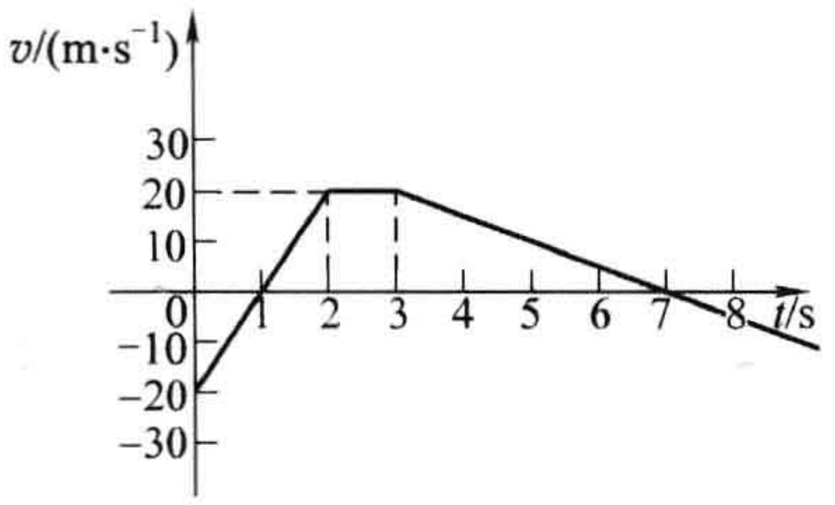
则当 $x=3$ m 时，解得

$$v=\sqrt{94}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

1-4. 一质点沿 x 轴做直线运动，其速度 v 随时间 t 的变化关系如习题1-4图所示。设 $t=0$ 时，质点位于坐标原点。试根据习题 1-4 图分别尽可能准确地画出，

（1）表示质点运动的加速度 a 随时间 t 变化关系的 $a-t$ 图；

（2）表示质点运动的位移 x 随时间 t 变化关系的 $x-t$ 图。

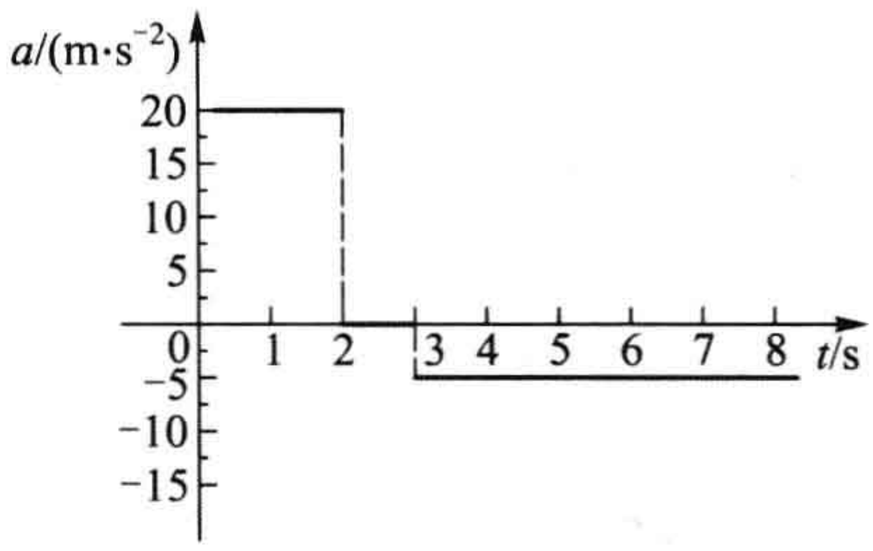


习题 1-4 图

解：依据质点在一维运动时，速度相对于时间曲线的斜率对应加速度，速度相对于时间曲线下的面积对应位移的规律，并根据题意可得：

（1）表示质点运动的加速度 a 随时间 t 变化关系的 $a-t$ 曲线如习题 1-4 图(a)所示；

（2）表示质点运动的位移 x 随时间 t 变化关系的 $x-t$ 曲线如习题 1-4 图(b)所示。



习题 1-4 图(a)

1-5. 质点的运动学方程为 $\boldsymbol{r}=3t\boldsymbol{i}+(2t^3+1)\boldsymbol{j}$(SI 单位)。求：

（1）自 $t_0=0$ 至 $t_1=1$ s 质点的位移；

（2）$t_0=0$ 和 $t_1=1$ s 两时刻质点的速度和加速度。

解：根据题意：

$$\boldsymbol{r}=3t\boldsymbol{i}+(2t^3+1)\boldsymbol{j}$$

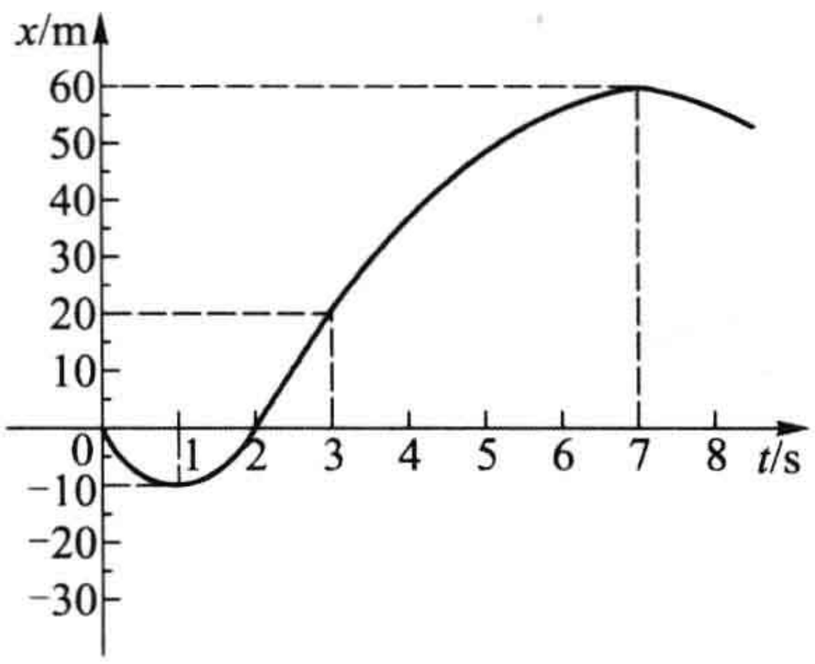
$$\Delta\boldsymbol{r}=(3t_2-3t_1)\boldsymbol{i}+(2t_2^3-2t_1^3)\boldsymbol{j}$$

微分得

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=3\boldsymbol{i}+6t^2\boldsymbol{j}$$

再次微分得

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=12t\boldsymbol{j}$$



习题 1-4 图(b)

联立得

（1）$\Delta\boldsymbol{r}=(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})$ m

（2）$\boldsymbol{v}(0)=3\boldsymbol{i}$ m/s，$\boldsymbol{a}(0)=0$ m/s^2

$\boldsymbol{v}(1)=(3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j})$ m/s，$\boldsymbol{a}(1)=12\,\boldsymbol{j}$ m/s^2

1-6. 一质点从 $\boldsymbol{r}_0=-5\boldsymbol{j}$ m 位置开始运动，其速度与时间的关系为 $\boldsymbol{v}=2t\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{r}$ 以 m 为单位，$\boldsymbol{v}$ 以 m/s 为单位。试问：

（1）经过多少时间质点到达 x 轴？

（2）此时质点位于 x 轴上哪一点？

解：根据题意：

$$\boldsymbol{v}(t)=2t\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}$$

积分得

$$\boldsymbol{r}=\int\boldsymbol{v}\mathrm{d}t=(t^2+c_x)\boldsymbol{i}+(5t+c_y)\boldsymbol{j}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$$

其中

$$x=t^2+c_x,y=5t+c_y$$

由 $t=0$ 时 $x=0,y=-5$，确定 $c_x=0,c_y=-5$。质点到达 x 轴时，$y=0$，求出 $t=1$ s。联立可得 $x=1$ m

1-7. 质点运动学方程为：$\boldsymbol{r}=a\cos\ \omega t\boldsymbol{i}+a\sin\ \omega t\boldsymbol{j}+bt\boldsymbol{k}$，其中 a、b、ω 均为正常量，式中 $\boldsymbol{r}$ 以 m 为单位，t 以 s 为单位。

（1）求质点速度和加速度与时间的关系式；

（2）问质点做什么运动？

解：根据题意：

$$\boldsymbol{r}=a\cos\ \omega t\boldsymbol{i}+a\sin\ \omega t\boldsymbol{j}+bt\boldsymbol{k}$$

（1）微分得

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=-\omega a\sin\ \omega t\boldsymbol{i}+a\omega\cos\ \omega t\boldsymbol{j}+b\boldsymbol{k}$$

再次微分得

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\omega^2 a\cos\ \omega t\boldsymbol{i}-a\omega^2\sin\ \omega t\boldsymbol{j}$$

（2）把质点的运动分解到三个方向上：

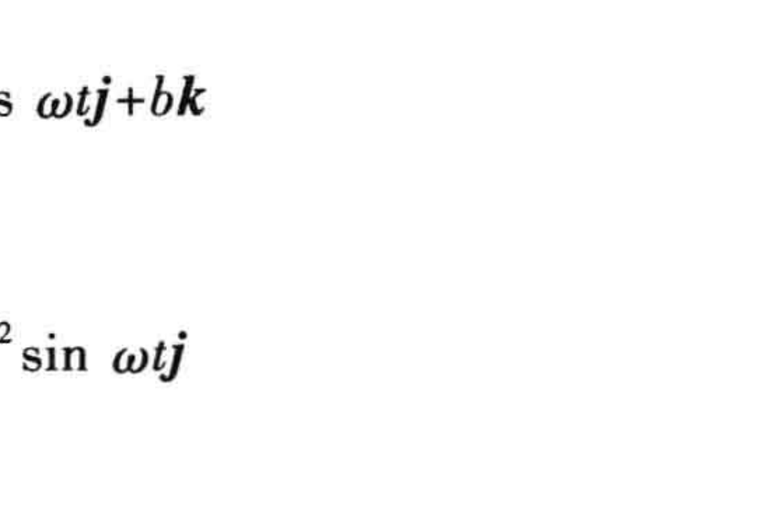
$$x=a\cos\ \omega t,y=a\sin\ \omega t,z=bt$$

整理可知

$$x^2+y^2=a^2,z=bt$$

则质点是以 z 轴为中心做匀速螺旋运动，速度大小为 $\sqrt{\omega^2a^2+b^2}$。

1-8. 离水面高度为 h 的岸上有人用绳索拉船靠岸。人以恒定速率 v_0 拉绳，求当船离岸的距离为 s 时，船的速度和加速度。



习题 1-8 图

解：建立如习题 1-8 图所示坐标系，将船的位置用 x 轴的坐标来表示，则船的速度和加速度可表示为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

从习题 1-8 图的几何关系可得

$$x=\sqrt{l^2-h^2}$$

并注意到

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{l(t+\Delta t)-l(t)}{\Delta t}=-v_0$$

则船的速度为

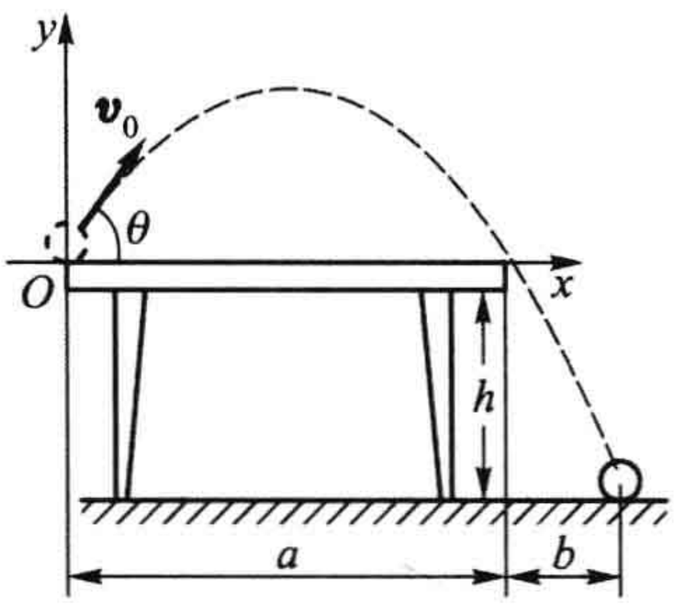
$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-v_0\sqrt{h^2+s^2}/s$$

船的加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-v_0^2h^2/s^3$$

此题说明了建立坐标系的重要性。

1-9. 如习题 1-9 图所示，在桌面的一边，一小球做斜抛运动。已知桌面高 $h=1.0$ m，宽 $a=2.0$ m。若欲使小球能从桌面的另一边切过，并掉在离该边水平距离 $b=0.50$ m 处，求小球的初速度 v_0 和抛射角 θ。



习题 1-9 图

解：根据题意，建立如习题 1-9 图所示的坐标系。沿 x 和 y 方向的运动方程分别为

$$x=v_0\cos\theta\cdot t,\ y=v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2$$

由已知条件 $x=a$ 时，$y=0$，$x=a+b$ 时，$y=-h$，且已知

$a=2.0$ m，$b=0.5$ m，$h=1.0$ m，联立求解得

$$v_0=4.7\ \mathrm{m/s},\ \theta=58°$$

1-10. 杆以匀角速 ω_0 绕过其固定端 O 且垂直于杆的轴转动。在 $t=0$ 时，位于点 O 的小珠从相对于杆静止开始沿杆做加速度为 a_0 的匀加速运动。求小珠在 t 时刻的速度和加速度。

解：以小珠为研究对象，由位矢、速度、加速度之间的关系可得

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}(r\boldsymbol{e}_r)}{\mathrm{d}t}=\dot{r}\,\boldsymbol{e}_r+r\omega_0\boldsymbol{e}_\theta,\ \boldsymbol{a}=(\ddot{r}-r\omega_0^2)\boldsymbol{e}_r+2\dot{r}\,\omega_0\boldsymbol{e}_\theta$$

其中

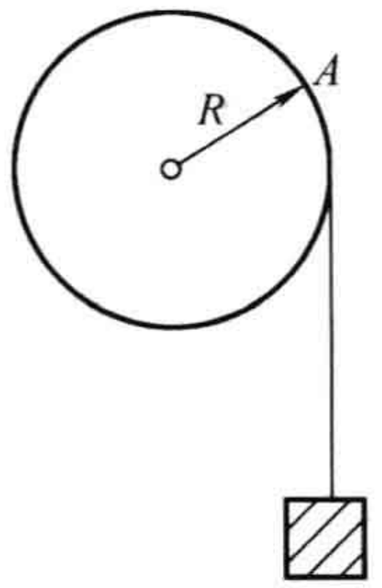
$$\dot{r}=a_0t,\ r=\frac{1}{2}a_0t^2,\ \ddot{r}=a_0$$

代入求得

$$\boldsymbol{v}=a_0 t\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{2}a_0\omega_0 t^2\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\left(a_0-\frac{1}{2}a_0\omega_0^2 t^2\right)\boldsymbol{e}_r+2a_0\omega_0 t\boldsymbol{e}_\theta$$

1-11. 有一半径为 R 的定滑轮，沿轮周绕着一根绳子，悬在绳子一端的物体按 $s=\frac{1}{2}bt^2$ 的规律向下运动，如习题 1-11 图所示。若绳子与轮周间没有相对滑动，试求轮周上一点 A 在任一时刻 t 的速度、切向加速度、法向加速度和总加速度大小。



习题 1-11 图

解：已知 $s=\frac{1}{2}bt^2$，根据 s、v、a 的关系，微分可得速度大小：

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=b\cdot t$$

切向加速度大小：

$$a_\mathrm{t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=b$$

法向加速度大小：

$$a_\mathrm{n}=\frac{v^2}{R}=\frac{b^2t^2}{R}$$

总加速度大小：

$$a=\sqrt{a_\mathrm{t}^2+a_\mathrm{n}^2}=b\sqrt{1+b^2t^4/R^2}$$

1-12. 当蒸汽船以 15 km/h 的速度向正北方向航行时，船上的人观察到船上的烟囱里冒出的烟飘向正东方向。过一会儿，船以 24 km/h 的速度向正东方向航行，船上的人则观察到烟飘向正西北方向。若在这两次航行期间风速不变，求风速及方向。

解：以地面为静系，船为动系，风为研究对象，则

风对地的速度为绝对速度：

$$v=v_{风}$$

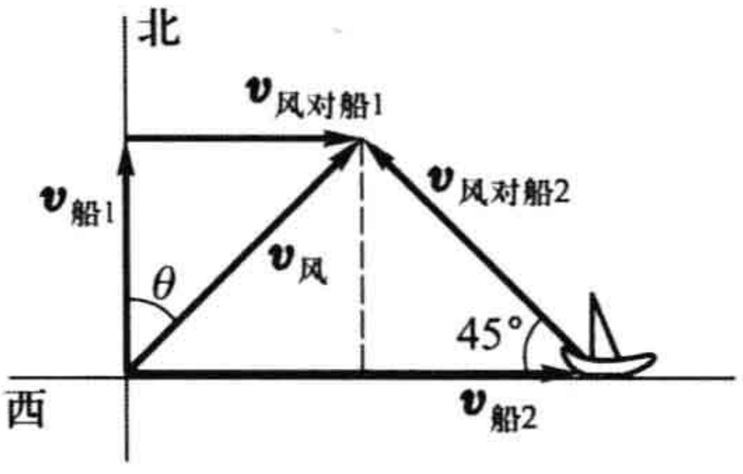
船对地的速度为牵连速度：

$$v_{牵连}=v_{船}$$

风对船的速度为相对速度：

$$v_{相对}=v_{风对船}$$

由绝对速度、牵连速度和相对速度的关系可得 $v_{风}=v_{船}+v_{风对船}$，其矢量几何关系如习题 1-12图所示，由此几何关系可得



习题 1-12 图

$$v_{风}=\frac{v_{船1}}{\cos\theta},v_{船2}-v_{船1}\cot 45°=v_{风}\sin\theta$$

联立解得

$$\theta=31°,v=17.5\ \text{km/h}$$

自检练习题

1-13. 一个自由落体在它运动的最后 1 s 内所通过的路程等于全程的$\frac{1}{3}$。

求:(1) 物体下落的高度;(2) 通过全程所需的时间。

解: 设自由落体的全程下落时间和下落高度分别为 t、S_t。

由自由落体关系式得

$$S_t=\frac{1}{2}gt^2,S_{t-1}=\frac{1}{2}g(t-1)^2(\text{SI 单位})$$

另由题意可知

$$S_t-S_{t-1}=\frac{1}{3}S_t$$

联立上面两式可求得

$$t_1=(3-\sqrt{6})\ \text{s},t_2=(3+\sqrt{6})\ \text{s}$$

因为 $t_1<1$ s,所以只有 t_2是本题的解。

可知物体下落的高度 $S_t=145.5$ m。

1-14. 一小球做竖直上抛运动,测得小球两次经过 A 点和两次经过 B 点的时间间隔分别为 Δt_A、Δt_B,如习题 1-14 图所示。求 A、B 两点间的高度差 h。

解: 以抛出点 O 为坐标原点,竖直向上为正方向,建立 x 轴。

由匀减速直线运动公式

$$x=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

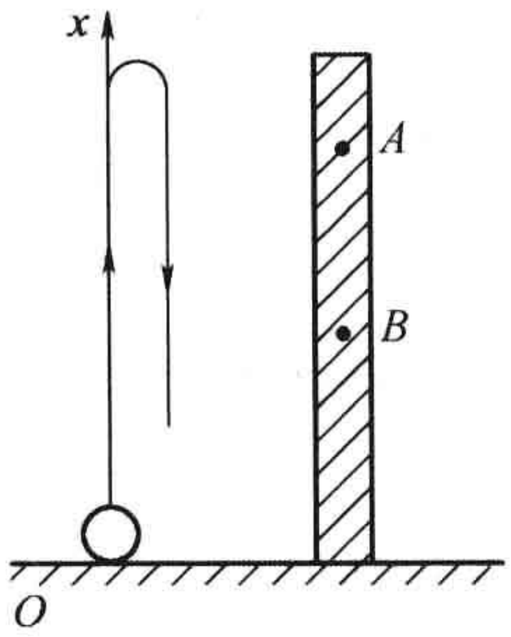
解得

$$t=\frac{v_0\pm\sqrt{v_0^2-2gx}}{g}$$

小球达到同一点的时间间隔为

$$\Delta t=\frac{2\sqrt{v_0^2-2gx}}{g}$$

小球两次到达 A 点的时间间隔为



习题 1-14 图

$$\Delta t_A = \frac{2\sqrt{v_0^2 - 2gx_{OA}}}{g}$$

小球两次到达 B 点的时间间隔为

$$\Delta t_B = \frac{2\sqrt{v_0^2 - 2gx_{OB}}}{g}$$

由此解出

$$h = x_{OA} - x_{OB} = \frac{g(\Delta t_B^2 - \Delta t_A^2)}{8}$$

1-15. 汽车沿平直公路匀加速行驶，它通过某一段距离 s 所需的时间为 t_1，而通过下一段相同距离 s 所需的时间为 t_2。求汽车的加速度。

解：设汽车的初速度为 v_0，经过 t_1 后的速度为 v_1，汽车的加速度为 a，通过第一段距离：

$$s = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2, v_1 = v_0 + a t_1$$

通过下一段同样的距离：

$$s = v_1 t_2 + \frac{1}{2} a t_2^2 = (v_0 + a t_1) t_2 + \frac{1}{2} a t_2^2$$

由上面式子联立可得

$$a = \frac{2s(t_1 - t_2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)}$$

1-16. 火车从 A 城由静止开始沿平直轨道驶向 B 城，A、B 两城相距为 s。火车先以加速度 a_1 做匀加速运动，当速度达到 v 后再匀速行驶一段时间，然后刹车，并以加速度大小为 a_2 做匀减速行驶，使之正好停在 B 城。求火车行驶的时间 t。

解：设火车匀加速运动行驶的路程为 s_1，匀速运动行驶的路程为 s_2，匀减速运动行驶的路程为 s_3。根据位移、加速度和时间的关系有加速行驶时：

$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2, v = a_1 t_1$$

匀速行驶时：

$$s_2 = v t_2$$

减速行驶时：

$$s_3 = v t_3 - \frac{1}{2} a_2 t_3^2, 0 = v - a_2 t_3$$

总位移：

$$s = s_1 + s_2 + s_3$$

联立各式解出

$$t=t_1+t_2+t_3=\frac{s}{v}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)v$$

1-17. 如习题 1-17 图所示，物体从具有共同底边，但倾角不同的若干光滑斜面顶端由静止开始自由滑下。问当倾角为何值时，才能使物体滑至底端所需的时间最短？

解：设斜面底边长为 s，由题意知，斜面长度为

$$l=s/\cos\theta$$

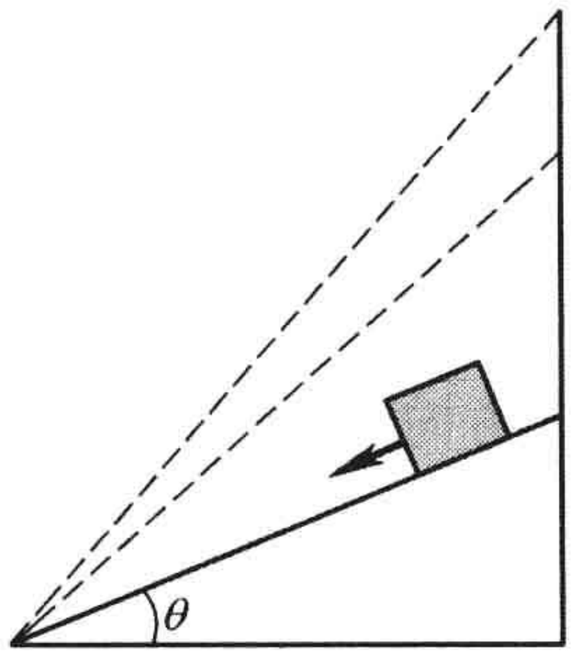
沿斜面方向位移与速度关系为

$$\frac{s}{\cos\theta}=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}g\sin\theta\cdot t^2$$

则所需时间为

$$t=2\sqrt{\frac{s}{g\sin 2\theta}}$$

因此，当 $2\theta=\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，t 最小。



习题 1-17 图

1-18. 石块从楼顶以 $v_0=10$ m/s 的速度被水平抛出，落地时速度方向与水平方向之间成 60°角，求楼房的高度。

解：设石块落地时速度方向与水平方向之间的夹角为 θ，石块末速度大小为 v，由题意知，末速度水平方向分量和初速度相等：

$$v\cos\theta=v_0$$

竖直方向：

$$v\sin\theta=gt,h=\frac{1}{2}gt^2$$

其中

$$\theta=60°,v_0=10\ \text{m/s}$$

联立可解出楼房的高度 $h=15.3$ m。

1-19. 一物体被水平抛出，经过 2.5 s 后，它的速度与加速度之间的夹角为 45°，问又经过多少秒，它的速度与加速度之间的夹角变为 30°。

解：设经时间 t 后物体速度与加速度之间的夹角为 θ，以抛出点为原点，水平方向为 x 轴，垂直方向为 y 轴，由题意知 x、y 方向的速度为

$$v_x=v_0,v_y=v\cos\theta=gt$$

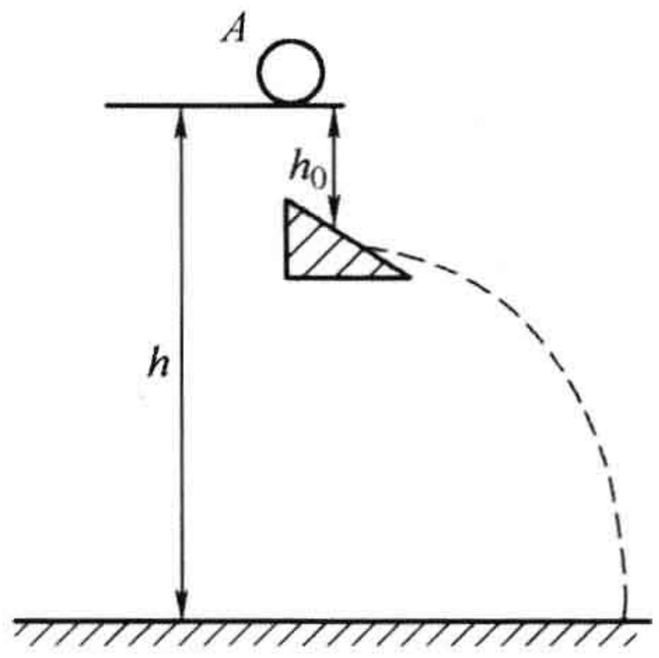
合速度为

$$v=\sqrt{v_0^2+(gt)^2},\cos\theta=\frac{gt}{\sqrt{v_0^2+(gt)^2}}$$

将 $\theta=45°$，$t=2.5$ s 代入上式，求出 v_0，然后由 $\theta=30°$ 确定又经过的时间 t'。

解得又经过 1.83 s，它的速度与加速度之间的夹角变为 30°。

1-20. 一小球从离地面高为 h 的 A 点处自由下落。当它下落了 h_0 时，与一斜面发生碰撞，并以原速水平弹出，如习题 1-20 图所示。问 h_0 为多大时，小球弹得最远？



习题 1-20 图

解：如习题 1-20 图所示，设小球刚接触斜面时的速度大小为 v_0，小球水平弹出的距离为 s。

由题意得

$$v_0=\sqrt{2gh_0}$$

水平方向：

$$s=v_0t=\sqrt{2gh_0}\cdot t$$

竖直方向：

$$h-h_0=\frac{1}{2}gt^2$$

其中 t 为从斜面到落地所用的时间。联立解得

$$s=\sqrt{2gh_0}\cdot\sqrt{\frac{2(h-h_0)}{g}}=2\cdot\sqrt{h_0(h-h_0)}$$

令 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}h_0}=0$，得 $h_0=\frac{1}{2}h$ 时，小球弹得最远。

1-21. 斜向上抛出一物体，经过一段时间物体仍然向斜上方运动，此时速度方向与水平面成 45°角，又过了相同的时间，物体已向斜下方运动，但速度方向与水平面仍成 45°角。求物体的抛射角。

解：设物体的初速度大小为 v_0，抛射角为 θ_0，经过时间 t 与 $2t$ 后速度都为 v，$\theta=45°$。

水平方向速度不变：

$$v\cos\theta=v_0\cos\theta_0$$

竖直方向变化关系为

$$v\sin\theta=v_0\sin\theta_0-gt$$

$$-v\sin\theta=v_0\sin\theta_0-2gt$$

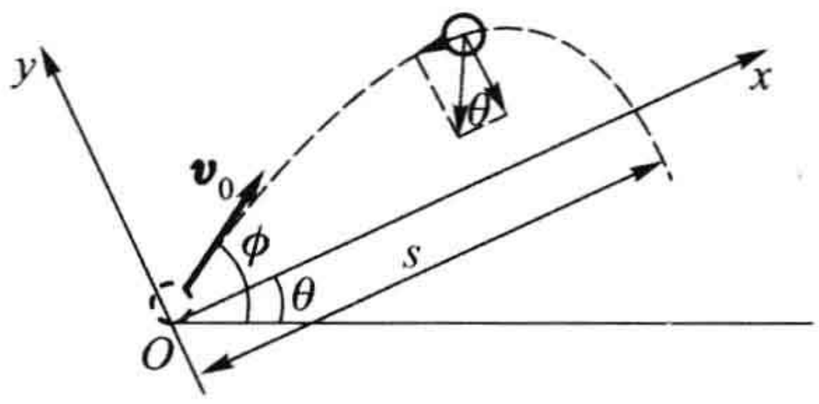
联立求得

$$\tan\theta_0=3\tan\theta=3$$

1-22. 在与水平面成 θ 角的山坡上，一石块以 v_0 的初速度做斜抛运动，如习题 1-22图所示。

（1）若抛射角为 ϕ（抛出速度与水平面夹角），求石块沿山坡方向的射程 s；

（2）问抛射角 ϕ 为多大时，s 最大？



习题 1-22 图

解：建立坐标系如习题 1-22 图所示，令 $\varphi=\phi-\theta$，分别列出沿 x 轴和 y 轴方向的运动方程：

$$x=v_0\cos\ \varphi\cdot t-\frac{1}{2}gt^2\sin\ \theta$$

$$y=v_0\sin\ \varphi\cdot t-\frac{1}{2}gt^2\cos\ \theta$$

射程条件为

$$x=s,y=0$$

联立解出：

$$t=\frac{2v_0\sin\ \varphi}{g\cos\ \theta}$$

代入 x 式求得射程：

$$s=2v_0^2\sin(\phi-\theta)\cos\ \phi/(g\cos^2\theta)$$

将 s 对 ϕ 求导并取极值，得最大射程 s_{max}，此时 $\phi=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}$。

1-23. 从原点在竖直平面内以相同的初速度 v_0 向各个方向投出许多质点。试证明：

（1）任何时刻这些质点都处在同一圆周上；

（2）它们的最高点位于同一椭圆上。

证明：以投出的第 i 个质点为研究对象，以出射点为坐标原点，取水平方向为 x 轴，竖直方向为 y 轴。则第 i 个质点的运动方程为

$$x_i=v_0\cos\ \theta_i\cdot t,y_i=v_0\sin\ \theta_i\cdot t-\frac{1}{2}gt^2$$

可得

$$x_i^2+\left[y_i-\left(-\frac{1}{2}gt^2\right)\right]^2=(v_0t)^2$$

则任何时刻质点都在以$\left(0,-\frac{1}{2}gt^2\right)$为圆心，$v_0t$ 为半径的圆周上。

最高点处：

$$v_{iy}=v_0\sin\ \theta_i-gt=0$$

则

$$t=v_0\sin\theta_i/g$$

最高点处坐标

$$x_i=v_0^2\sin\ 2\theta_i/2g,y_i=v_0^2\sin^2\theta_i/2g$$

联立得

$$\frac{x_i^2}{(v_0^2/2g)^2}+\frac{(y_i-v_0^2/4g)^2}{(v_0^2/4g)^2}=1$$

即投出质点的最高点处于一个椭圆上。

1-24. 汽车沿一圆周以 $v_0=7.0\ \mathrm{m/s}$ 的初速度匀减速行驶。经过 $t_1=5\ \mathrm{s}$ 后，汽车的加速度与速度之间的夹角 $\theta_1=135°$。又经过 $t_2=3\ \mathrm{s}$ 后，其加速度与速度之间的夹角 $\theta_2=150°$。求：

（1）圆的半径 R；

（2）切向加速度 a_τ；

（3）这两时刻的法向加速度 a_{n1} 和 a_{n2}。

解：如习题 1-24 图所示，根据题意得瞬时速度大小为

$$v=v_0+a_\tau t$$

法向加速度大小为

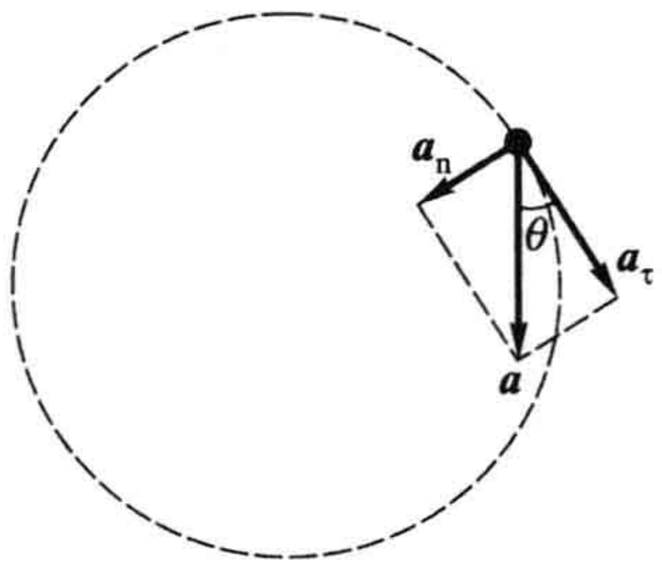
$$a_n=\frac{v^2}{R}$$

由几何关系可知

$$a_n=a_\tau\tan\theta$$

联立得

$$a_\tau\tan\theta=\frac{(v_0+a_\tau t)^2}{R}$$



习题 1-24 图

由 $t_1=5\ \mathrm{s}$ 时，$\theta_1=135°$，$t_3=(5+3)\ \mathrm{s}=8\ \mathrm{s}$ 时，$\theta_2=150°$，

代入联立得

$$R=62.5\ \mathrm{m},a_\tau=-0.4\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_{n1}(t=5\ \mathrm{s})=0.4\ \mathrm{m/s^2},a_{n2}(t=8\ \mathrm{s})=0.23\ \mathrm{m/s^2}$$

注意：习题 1-24 图示意的是锐角图，而实际情况是钝角。

1-25. 一摩托车沿着半径 $R=64\ \mathrm{m}$ 的圆周以 $v_0=1\ \mathrm{m/s}$ 的初速度行驶，其切向加速度与时间的数值关系为 $a_\tau=\frac{1}{2\sqrt{t+1}}$（SI 单位），问 t 为多少时，总加速度最小？

解：法向加速度大小为

$$a_n=\frac{v_\tau^2}{R}$$

切向速度大小为

$$v_\tau=\int a_\tau\cdot\mathrm{d}t=v_0+(\sqrt{t+1}-1)$$

总加速度大小为

$$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}$$

当 $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=0$ 时，加速度具有最小值，最终求得

$$t=7\ \text{s}$$

1-26. A 船以 30 km/h 的速度向东航行，B 船以 45 km/h 的速度向正北航行。求 A 船上的人观察到的 B 船的航速和航向。

解：设地面为静系，A 船为动系，B 船为研究对象。B 船对地的绝对速度为

$$v_B=45\ \text{km/h}$$

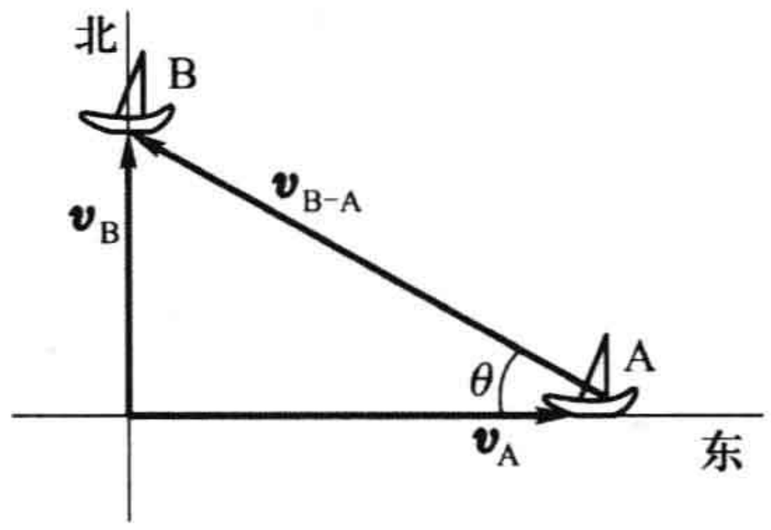
A 船的牵连速度为

$$v_A=30\ \text{km/h}$$

由相对速度关系得 B 船对 A 船的相对速度为

$$\boldsymbol{v}_{B-A}=\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A$$

由此确定出如习题 1-26 图所示的几何关系，由此得



习题 1-26 图

$$v_{B-A}=\sqrt{v_A^2+v_B^2}\ ,\tan\ \theta=\frac{v_B}{v_A}$$

把 $v_A=30\ \text{km/h}$，$v_B=45\ \text{km/h}$ 代入上式，得

$$\theta=56.3°,v_{B-A}=54.1\ \text{km/h}$$

1-27. 一溜冰者在冰面上以 $v_0=7\ \text{m/s}$ 的速度沿半径 $R=35\ \text{m}$ 的圆周溜冰。某时刻他平抛出一小球，为使小球能击中冰面的圆心处，他应以多大的相对于他的速度抛球？并求出该速度的方向（用与他溜冰速度之间的夹角 θ 表示）。已知人抛球时手的高度 $h=1.5\ \text{m}$。

解：以地面为静系，溜冰者为动系，小球为研究对象。如习题 1-27 图所示，小球的绝对水平速度 $\boldsymbol{v}$ 应指向圆心，由题意得球的水平位移为

$$R=v\cdot t$$

竖直方向的位移为

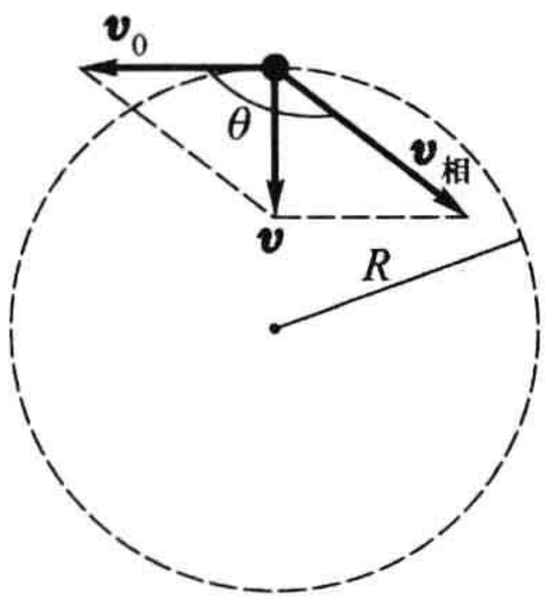
$$h=\frac{1}{2}gt^2$$

由图中几何关系知

$$v=v_0\cdot\tan(\pi-\theta)\ ,v_{相}=\frac{v_0}{\cos(\pi-\theta)}$$

联立求解得

$$\theta=96°15'\ ,v_{相}=64.283\ 2\ \text{m/s}$$



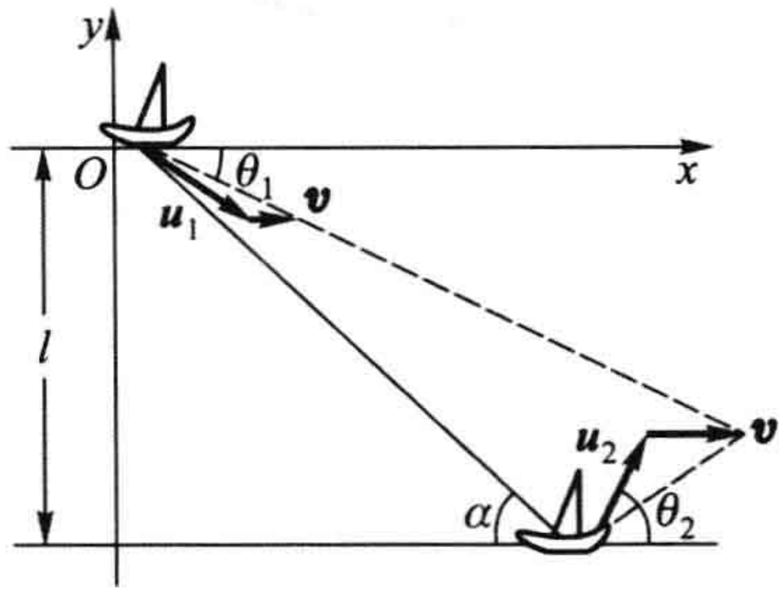
习题 1-27 图

1-28. 在宽为 l 的河的两岸停着两艘小船，它们的连线与河岸线成 α 角。已知两艘小船在静水中最大的划行速度分别为 u_1 和 u_2，河水流速为 v。若它们同时出发，则各应向什么方向划行才能在最短的时间内相遇？并求出此时间。

解：以河岸为静系，河水为动系，两小船为研究对象，建立如习题 1-28 图所示的坐标系。由相对运动关系得两小船在 x 轴和 y 轴方向的位移分别为

$$\begin{cases} x_1 = (u_1 \cos\theta_1 + v)t \\ y_1 = -u_1 \sin\theta_1 \cdot t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = l \cdot \cot\alpha + (u_2 \cos\theta_2 + v)t \\ y_2 = -l + u_2 \sin\theta_2 \cdot t \end{cases}$$



习题 1-28 图

相遇时有

$$x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

联立得

$$(u_1 \cos\theta_1 - u_2 \cos\theta_2)t = l \cdot \cot\alpha \quad ①$$

$$(u_1 \sin\theta_1 + u_2 \sin\theta_2)t = l \quad ②$$

①、②两式二次方相加得

$$t^2[u_1^2 + u_2^2 - 2u_1u_2\cos(\theta_1 + \theta_2)] = \left(\frac{l}{\sin\alpha}\right)^2$$

所以

$$t^2 = \frac{\left(\frac{l}{\sin\alpha}\right)^2}{u_1^2 + u_2^2 - 2u_1u_2\cos(\theta_1 + \theta_2)}$$

可知当 $\theta_1 + \theta_2 = \pi$，即两者沿连线方向运动时，$t$ 最小，此时

$$t_{\min} = \frac{l}{\sin\alpha(u_1 + u_2)}$$

本题从物理上分析，二者的相对速度最大时，用时最短。只有在连线方向，相对速度才最大，而与河水流速无关。

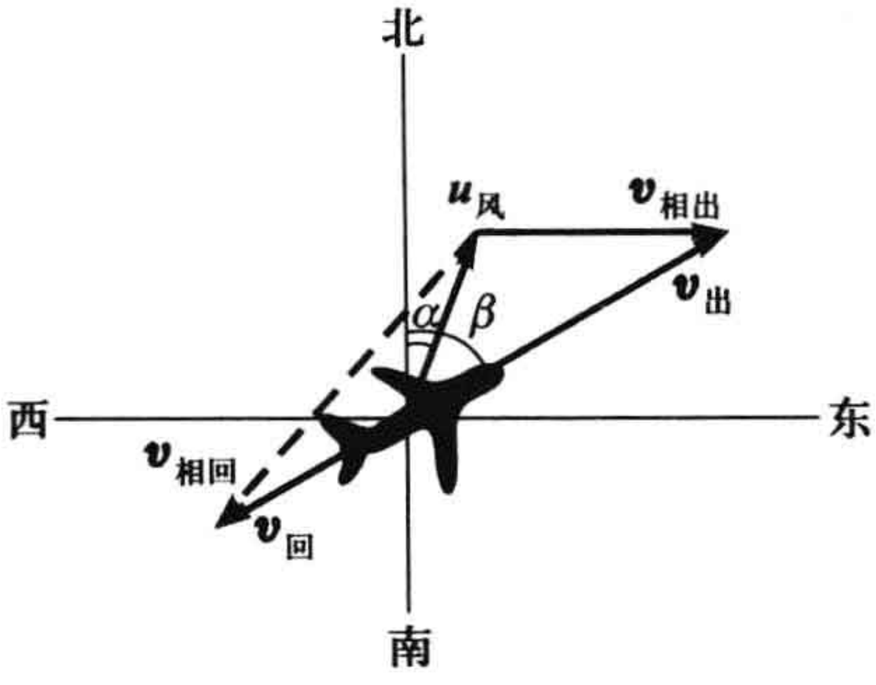
1-29. 一架飞机在无风时以匀速 v 相对地面飞行，能飞出的最远距离为 R（包括飞出和飞回）。现在风速为 u，方向为北偏东、角度为 α 的风中飞行，而飞行的实际航向为北偏东、角度为 β。求证：在这种情况下，飞机能飞出的最远距离为

$$\frac{R(v^2 - u^2)}{v\sqrt{v^2 - u^2\sin^2(\beta - \alpha)}}$$

证明：以地面为静系，风为动系，以飞机为研究对象，得习题 1-29 图所示的几何关系，由此得到无风时，飞机飞出的最长时间为

$$t = \frac{2R}{v}$$

有风时，飞机飞出：



习题 1-29 图

$$v_{相出}^2 = u_{风}^2 + v_{出}^2 - 2u_{风}v_{出}\cos(\beta-\alpha)$$

飞机飞回：

$$v_{相回}^2 = u_{风}^2 + v_{回}^2 - 2u_{风}v_{回}\cos[\pi-(\beta-\alpha)]$$

且

$$v_{相回} = v_{相出} = v$$

由有风时飞出和飞回所用的时间与无风时的时间相同，整理得

$$\frac{s}{v_{出}} + \frac{s}{v_{回}} = \frac{2R}{v}$$

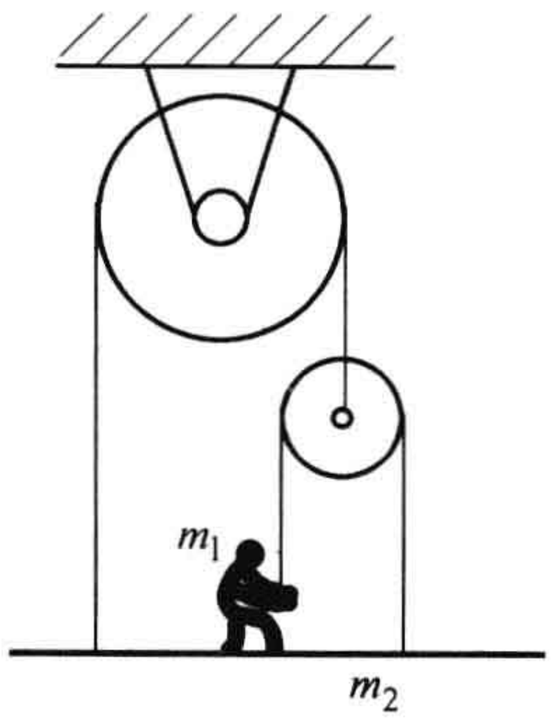
进一步计算即可得证：

$$s = \frac{R(v^2-u^2)}{v\sqrt{v^2-u^2\sin^2(\beta-\alpha)}}$$

第二章　惯性系下质点动力学

课后作业题

2-1. 在习题 2-1 图中，人的质量 $m_1=60\ \text{kg}$，底板的质量 $m_2=40\ \text{kg}$。人若想站在底板上静止不动，则必须以多大的力拉住绳子？



习题 2-1 图

解：当人站在底板上静止不动时，设三条绳向上的拉力从左向右分别为 $2F_T$、F_T、F_T，以人与底板组成的整体为研究对象，由牛顿第二定律

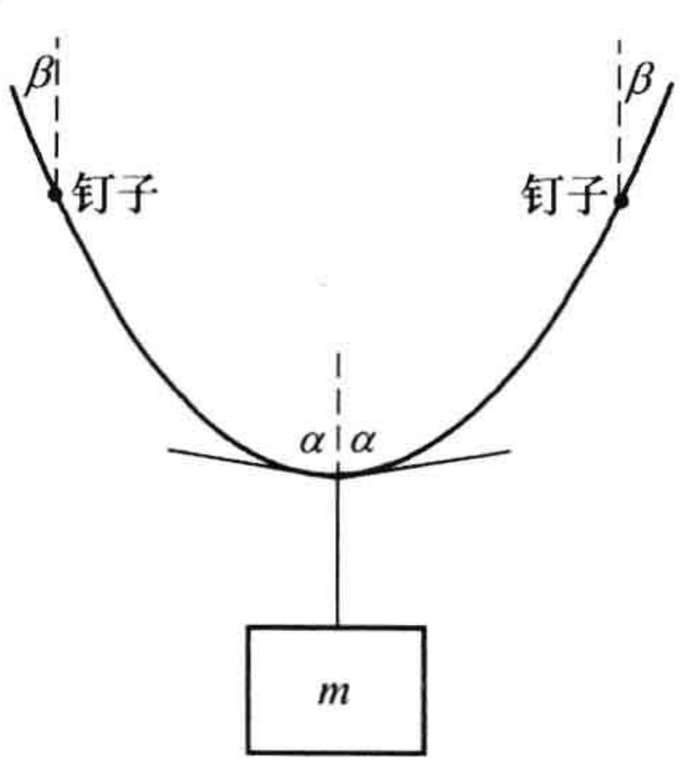
$$(F_T+F_T+2F_T)=m_1g+m_2g$$

解得

$$F_T=\frac{(m_1g+m_2g)}{4}=\frac{(60+40)\times 9.8}{4}\ \text{N}=245\ \text{N}$$

所以，人以 245 N 的力拉住绳子时才能使底板静止不动。

2-2. 一根质量为 m_0 的均质绳子，两端固定在同一高度的两个钉子上，在其中点挂一质量为 m 的物体。设 α、β 分别为在绳子中点和端点处绳子的切线方向与竖直方向的夹角，如习题 2-2 图所示。求 $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$ 与 m_0、m 的关系。



习题 2-2 图

解：设绳子中点处张力为 F_{T1}，两个钉子处绳子张力分别为 F_{T2}、F_{T3}。

以整个绳索和物体构成的整体为研究对象，则

水平方向：

$$F_{T2}\sin\beta-F_{T3}\sin\beta=0$$

可得

$$F_{T2}=F_{T3}=F_T$$

竖直方向：

$$2F_T\cos\beta=(m_0+m)g$$

以绳中间的物体为研究对象，则

$$2F_{T1}\cos\alpha=mg$$

以右半侧绳子为研究对象，则

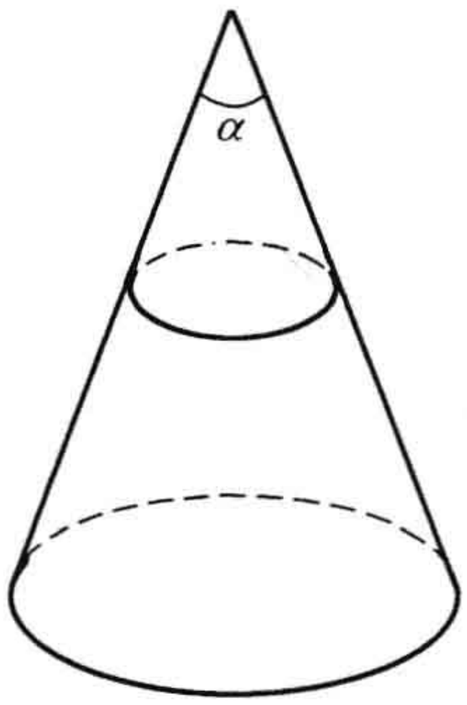
$$F_T\sin\beta=F_{T1}\sin\alpha$$

联立求得

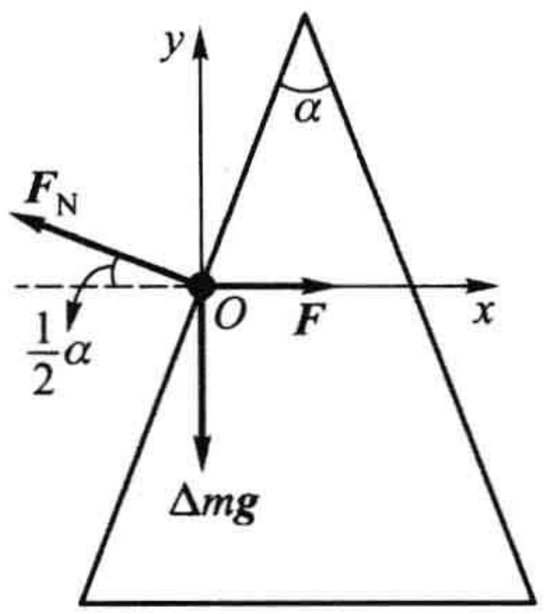
$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\frac{m_0+m}{m}$$

2-3. 如习题 2-3 图(a)所示，一长为 l、质量为 m 的均匀链条套在一表面光滑、顶角为 α 的圆锥上，当链条在圆锥面上静止时，求链中的张力。

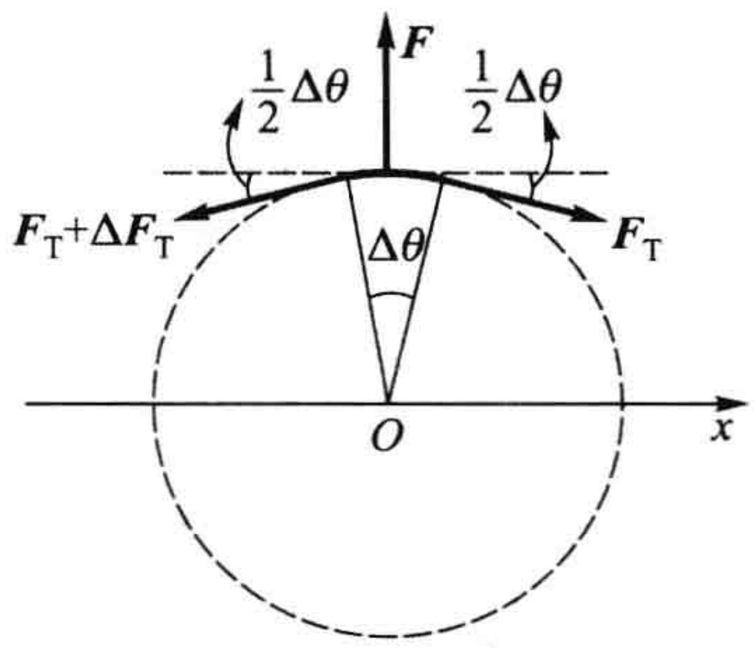
解：由对称性知链条内各点张力大小相等，即习题 2-3 图(c)中的 $\Delta F_T=0$。



习题 2-3 图(a)



习题 2-3 图(b)



习题 2-3 图(c)

取链条上一微元：

$$\Delta m=\frac{m}{l}\cdot\Delta l=\frac{m}{l}\Delta\theta\cdot R=\frac{m}{l}\cdot\Delta\theta\cdot\frac{l}{2\pi}=\frac{\Delta\theta\cdot m}{2\pi}$$

对小微元作受力分析，如习题 2-3 图(b)所示侧视图建立坐标系。

y 方向：

$$F_N\cdot\sin\frac{1}{2}\alpha=\Delta m\cdot g$$

x 方向：

$$F_N\cdot\cos\frac{1}{2}\alpha=F$$

从习题 2-3 图(c)俯视图中可以得出：

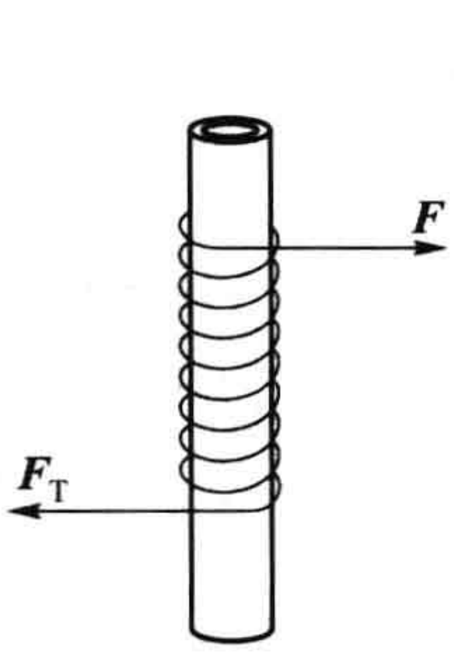
$$F=2F_T\cdot\sin\frac{1}{2}\Delta\theta\approx2F_T\cdot\frac{1}{2}\Delta\theta=F_T\cdot\Delta\theta$$

联立可得

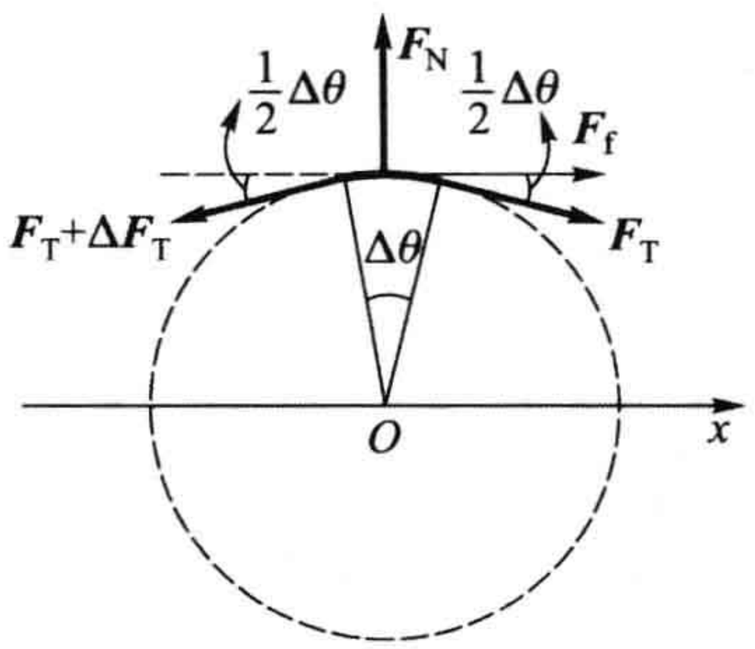
$$F_T=\frac{1}{2\pi}\cdot mg\cdot\cot\frac{\alpha}{2}$$

2-4. 一条绳索的一端系到停泊在河中的小船上，另一端由站在岸上的人拿着。人正欲收绳把船拉往岸边时，突然刮起了大风，风把船吹向河心。为了不让风把船吹走，人把绳索在岸边的固定圆柱上缠绕若干圈后再拉住绳索。若由于大风使船与圆柱间的绳索中的张力变为 50 000 N，而人拉绳的最大力为 500 N。已知绳索与圆柱之间的摩擦因数为 0.32，问绳索至少在圆柱上绕几圈，船才不会被吹走？

解：如习题 2-4 图(a)所示，选取绳索上一微元，受力分析如习题 2-4 图(b)所示，规定俯视图中受力水平向右为正方向。对选取的微元应用牛顿第二定律。



习题 2-4 图(a)



习题 2-4 图(b)

切线方向：

$$F_f+F_T\cos\frac{1}{2}\Delta\theta-(F_T+\Delta F_T)\cos\frac{1}{2}\Delta\theta=0$$

法线方向：

$$F_N=(F_T+\Delta F_T)\sin\frac{1}{2}\Delta\theta+F_T\sin\frac{1}{2}\Delta\theta$$

当绳索刚好滑动时

$$F_f=F_N\mu$$

当 $\Delta\theta\to0$ 时，

$$\cos\frac{1}{2}\Delta\theta\approx1,\sin\frac{1}{2}\Delta\theta\approx\frac{1}{2}\Delta\theta,\Delta F_T=\mathrm{d}F_T,\Delta\theta=\mathrm{d}\theta$$

忽略二阶小量，联立上式可得

$$\frac{\mathrm{d}F_T}{F_T}=\mu\mathrm{d}\theta$$

设绳索至少在圆柱上绕 n 圈，两边积分：

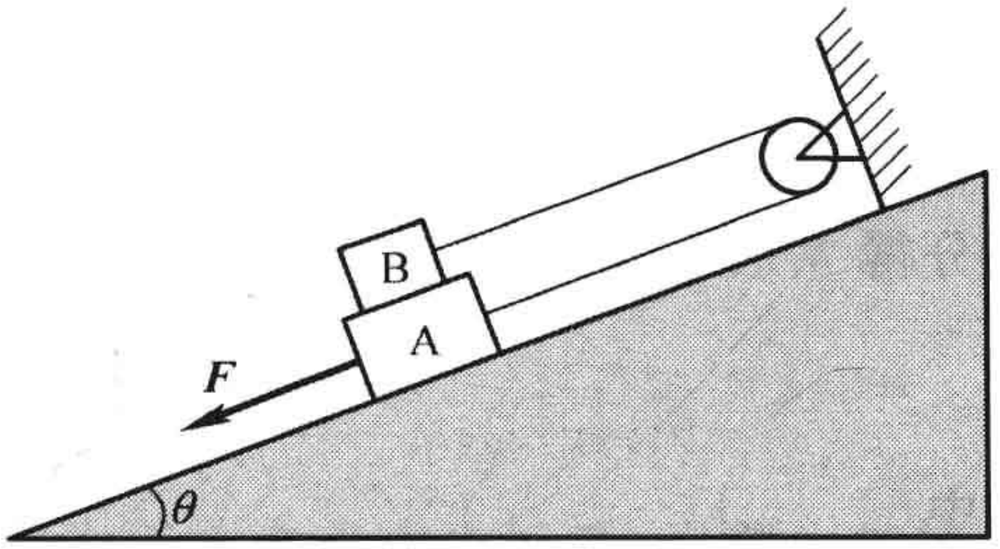
$$\int_F^{F_T}\frac{\mathrm{d}F_T}{F_T}=\int_0^{n\cdot2\pi}\mu\mathrm{d}\theta$$

可得

$$F=F_{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-2n\pi\cdot\mu}$$

其中 F 为人的拉力，F_{T}为绳索最后的张力。将 $F=500\ \mathrm{N}$，$F_{\mathrm{T}}=50\ 000\ \mathrm{N}$，$\mu=0.32$ 代入，可得 $n=2.3$。

2-5. 在习题 2-5 图中，物体 A 和 B 的质量分别为 m_{A}和 m_{B}，用跨过定滑轮的细线相连，静止地叠放在倾角为 θ 的斜面上，各接触面的静摩擦因数为 μ，现有一平行于斜面的力 F 作用在物体 A 上，问 F 至少为多大才能使两物体运动？



习题 2-5 图

解：设沿斜面方向向下为正方向。A、B 为静止状态时，受力平衡。

对于 A，在平行于斜面方向有

$$F+m_{\mathrm{A}}g\sin\theta-F_{\mathrm{T}}-F_{\mathrm{f1}}-F_{\mathrm{f2}}=0$$

对于 B，在平行于斜面方向有

$$F_{\mathrm{f1}}+m_{\mathrm{B}}g\sin\theta-F_{\mathrm{T}}=0$$

静摩擦力的极值条件为

$$F_{\mathrm{f1}}\leqslant\mu m_{\mathrm{B}}g\cos\theta,F_{\mathrm{f2}}\leqslant\mu(m_{\mathrm{B}}+m_{\mathrm{A}})g\cos\theta$$

联立上几式可得，使两物体运动的最小力 $F_{\min}$满足

$$F_{\min}=(m_{\mathrm{B}}-m_{\mathrm{A}})g\sin\theta+(3m_{\mathrm{B}}+m_{\mathrm{A}})g\mu\cos\theta$$

2-6. 质量为 m_1的气球以加速度 a 匀加速上升，突然一只质量为 m_2的小鸟飞到气球上，并停留在气球上。若气球仍能向上加速，求气球的加速度减少了多少？

解：以竖直向上为正方向。

小鸟落到气球上前，对气球应用牛顿第二定律：

$$F_{浮}-m_1g=m_1a$$

小鸟落到气球上后，对气球和小鸟整体应用牛顿第二定律：

$$F_{浮}-(m_1+m_2)g=(m_1+m_2)a_2$$

联立可得

$$a_2=\frac{m_1a-m_2g}{m_1+m_2}$$

加速度减小了 $a-a_2=\dfrac{m_2(a+g)}{m_1+m_2}$。

2-7. 一质量为 m 的汽艇在湖水中以速率 v_0直线运动，当关闭发动机后，受水的阻力为 $F_{\mathrm{f}}=-kv$，求速度、位移随时间的变化关系。

解：以关闭发动机时刻汽艇所在的位置为原点和计时零点，以 v_0 方向为正方向建立坐标系。

根据牛顿第二定律得

$$ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv$$

整理后得

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{k}{m}\mathrm{d}t$$

积分得

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} = v_0 \mathrm{e}^{-\beta t}$$

其中

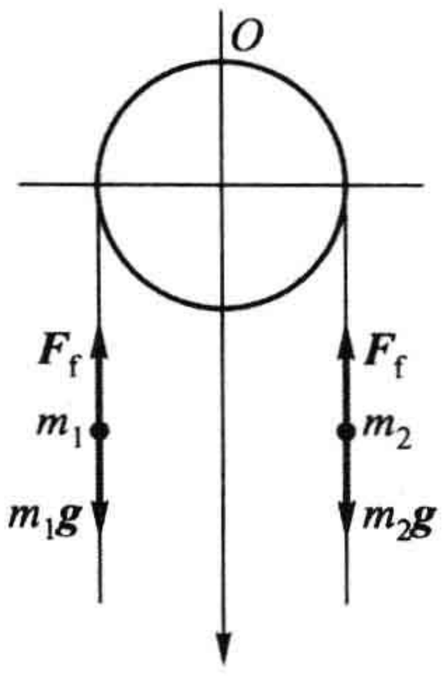
$$\beta = \frac{k}{m}$$

再次积分得

$$x = \frac{v_0}{\beta}(1 - \mathrm{e}^{-\beta t})$$

2-8. 质量分别为 m_1 和 m_2（$m_2 > m_1$）的两个人，分别拉住跨在定滑轮（忽略质量）上的轻绳两边往上爬。开始时两人至定滑轮的距离都是 h。试证明：质量为 m_1 的人经过时间 t 爬到滑轮处时，质量为 m_2 的人与滑轮的距离为 $\frac{m_2 - m_1}{m_2}\left(h + \frac{1}{2}gt^2\right)$。

证明：如习题 2-8 图所示建立坐标系，进行受力分析，选竖直向下为正方向。设人与绳之间的静摩擦力为 F_f，当质量为 m_1 的人经过时间 t 爬到滑轮处时，质量为 m_2 的人与滑轮的距离为 h'，对二者分别列动力学方程。



习题 2-8 图

$$\text{对 } m_1: -F_f + m_1 g = m_1 a_{m_1} = m_1 \frac{\mathrm{d}v_{m_1}}{\mathrm{d}t}$$

$$\text{对 } m_2: -F_f + m_2 g = m_2 a_{m_2} = m_2 \frac{\mathrm{d}v_{m_2}}{\mathrm{d}t}$$

将上两式对 t 求积分，可得

$$\int -F_f \mathrm{d}t + m_1 g t = m_1 v_{m_1} = m_1 \frac{\mathrm{d}y_{m_1}}{\mathrm{d}t}$$

$$\int -F_f \mathrm{d}t + m_2 g t = m_2 v_{m_2} = m_2 \frac{\mathrm{d}y_{m_2}}{\mathrm{d}t}$$

再将上两式对 t 求积分，可得

$$\iint -F_f dt^2 + \frac{1}{2}m_1 g t^2 = 0 - m_1 h$$

$$\iint -F_f dt^2 + \frac{1}{2}m_2 g t^2 = m_2 h' - m_2 h$$

由上两式联立求得

$$h' = \frac{m_2 - m_1}{m_2}\left(h + \frac{1}{2}gt^2\right)$$

2-9. 一物体以 v_0 的初速度做竖直上抛运动，若受到的阻力 F_f 与其速度的二次方 v^2 成正比，大小可表示为 $F_f = mgk^2v^2$，其中 m 为物体的质量，k 为常量。试证明此物体回到上抛点时的速度为 $v_1 = \sqrt{\frac{v_0^2}{1+(kv_0)^2}}$。

证明：以抛出点为坐标原点，竖直向上为正方向建立坐标系，根据牛顿第二定律，可得竖直方向的方程。

在上升过程中：

$$-mg - mgk^2v^2 = m\frac{dv}{dt}，则 \frac{dv}{-g-gk^2v^2} = dt$$

$$H_1 - 0 = \int_0^{t_1} v dt = \int_{v_0}^{0} \frac{v dv}{-g - gk^2v^2}$$

在下降过程中：

$$-mg + mgk^2v^2 = m\frac{dv}{dt}，则 \frac{-dv}{g-gk^2v^2} = dt$$

$$0 - H_2 = \int_0^{t_2} v dt = \int_0^{v_1} \frac{-v dv}{g - gk^2v^2}$$

已知 $H_1 = H_2$，即

$$\int_{v_0}^{0} v\frac{dv}{-g - gk^2v^2} = \int_0^{v_1} v\frac{dv}{g - gk^2v^2}$$

解得

$$v_1 = \sqrt{\frac{v_0^2}{1+k^2v_0^2}}$$

2-10. 一半顶角为 α 的倒立圆锥面的内表面光滑，内表面上一质点绕对称轴做半径为 r 的匀速圆周运动。求质点的速率。

解：以圆锥面为参考系，对质点应用牛顿第二定律。

水平方向：$F_N \cos\alpha = m\frac{v^2}{r}$

竖直方向：$F_N \sin\alpha = mg$

联立可得

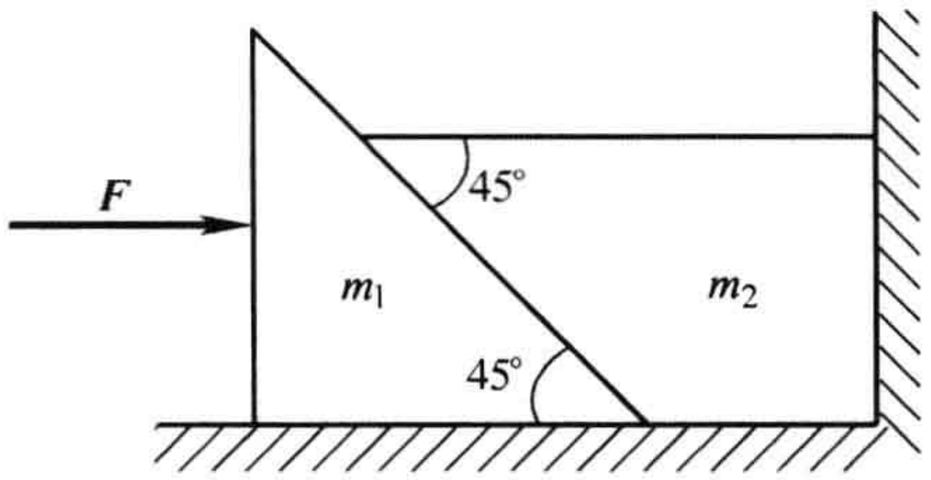
$$v=\sqrt{rg\cot\ \alpha}$$

2-11. 如习题 2-11 图所示，两个物体的质量分别为 $m_1=15\ \text{kg}$，$m_2=20\ \text{kg}$，作用在物体 m_1 上的水平力 $F=280\ \text{N}$。设所有接触面都光滑。试求：

（1）m_1 的加速度的大小和方向；

（2）m_2 的加速度的大小和方向；

（3）两物体间的相互作用力。



习题 2-11 图

解：设两物体间的相互作用力为 F_N，墙与 m_2 间的相互作用力为 $F_{N'}$，水平向右和竖直向上为互相垂直的 x 轴、y 轴正方向，对 m_1、m_2 分别应用牛顿第二定律：

$$a_{1y}=a_{2x}=0$$

m_1 的 x 轴方向：

$$F-F_N\sin\ \theta=m_1a_{1x}$$

m_2 的 x 轴方向：

$$F_N\sin\ \theta-F_{N'}=0$$

m_2 的 y 轴方向：$F_N\cos\ \theta-m_2g=m_2a_{2y}$

m_1 和 m_2 始终接触，m_1 的水平移动距离和 m_2 的竖直移动距离的关系为

$$\left(\frac{1}{2}a_{2y}t^2\right)\Big/\left(\frac{1}{2}a_{1x}t^2\right)=\tan\ \theta=1$$

则 $\theta=45°$，联立可得

$$a_{2y}=a_{1x}=\frac{F-m_2g}{m_1+m_2}=2.4\ \text{m/s}^2,\ F_N=(F-m_1a_{1x})\sqrt{2}=345\ \text{N}$$

2-12. 从地面以相对地面成 θ_0 仰角、v_0 的速度发射一炮弹，炮弹在运动过程中始终受到与速度成正比的阻力 $F_f=kv$（k 为常量）作用，求炮弹的运动轨迹方程。

解：以发射点为坐标原点，发射的水平方向和竖直向上方向分别作为 x 轴、y 轴建立直角坐标系。对炮弹在 x 轴、y 轴方向分别应用牛顿第二定律：

x 轴方向：

$$-kv_x=m\frac{\text{d}v_x}{\text{d}t}$$

y 轴方向：

$$-mg-kv_y=m\frac{\text{d}v_y}{\text{d}t}$$

整理上式并积分得

$$\int_{v_{x0}}^{v_x}\frac{\mathrm{d}v_x}{v_x}=\int_0^t-\frac{k}{m}\mathrm{d}t$$

$$\int_{v_{y0}}^{v_y}\frac{\mathrm{d}v_y}{\frac{k}{m}v_y+g}=-\int_0^t\mathrm{d}t$$

积分结果为　$v_x=v_{x0}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$，$v_y=\left(v_{y0}+\frac{m}{k}g\right)\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}-\frac{m}{k}g$

其中

$$v_{x0}=v_0\cos\theta_0,v_{y0}=v_0\sin\theta_0$$

由炮弹的位移与速度的关系得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_x=v_{x0}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_y=\left(v_{y0}+\frac{m}{k}g\right)\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}-\frac{m}{k}g$$

再次积分得

$$x=\frac{mv_{x0}}{k}(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}),y=\frac{m}{k}\left(v_{y0}+\frac{mg}{k}\right)(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t})-\frac{mg}{k}t$$

联立两式消去 t 得炮弹轨迹方程：

$$y=\frac{\left(v_{y0}+\frac{mg}{k}\right)}{v_{x0}}x+\frac{m^2g}{k^2}\ln\left(1-\frac{kx}{mv_{x0}}\right)$$

自检练习题

2-13. 如习题 2-13 图所示的系统，系统中人的质量 $m_1=60$ kg，人所站着的底板质量 $m_2=20$ kg，绳子和滑轮质量均可忽略不计。人要用多大的力拉住绳子，才能保持自己和底板静止不动？

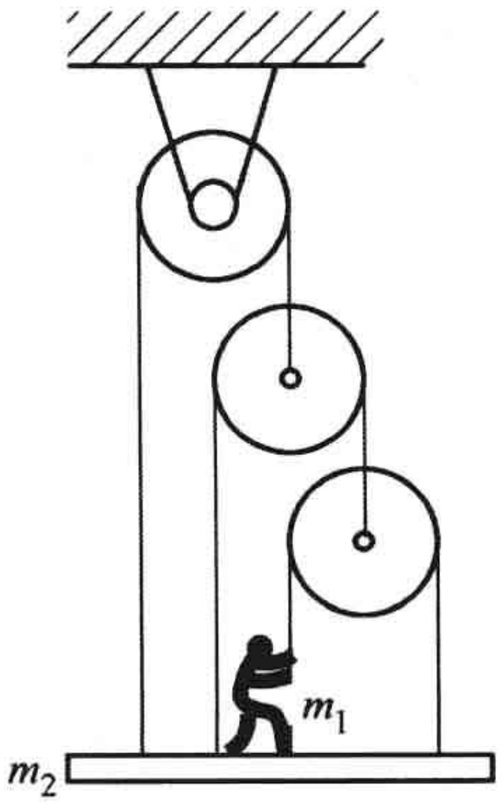
解：当人站在底板上静止不动时，设四条绳向上的拉力从左向右分别为 $4F_T$、$2F_T$、F_T、F_T，则系在天花板上的绳子向上的拉力为 $8F_T$。以三个滑轮、人、底板和连接它们的绳子组成的整体为研究对象，则由牛顿第二定律得

$$8F_T-m_1g-m_2g=0$$

解得

$$F_T=\frac{1}{8}(m_1+m_2)g=98\ \mathrm{N}$$

所以，人要用 98 N 的力，才能保持自己和底板静止不动。

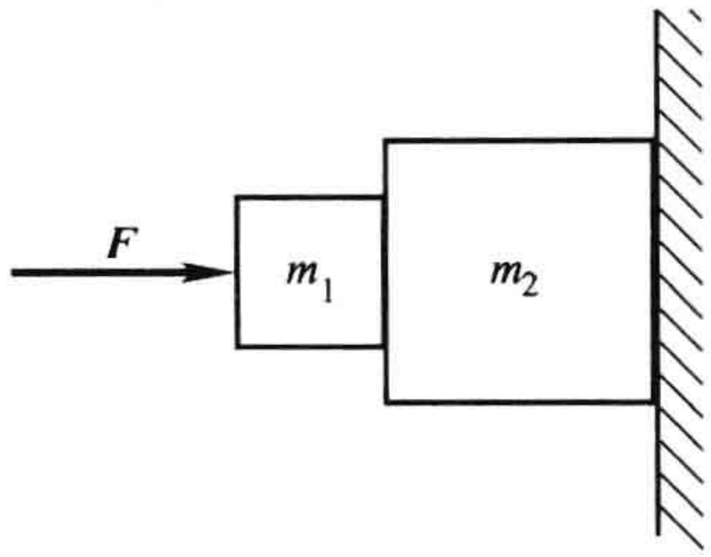


习题 2-13 图

2-14. 质量为 m_1 和 m_2 的两物体，在水平力 F 的作用下紧靠在墙上，如习题 2-14 图所示。为使两物块均不掉下，试问在以下两种情况下，F 至少应为多大？

（1）各接触面间的静摩擦因数均为 μ 时；

（2）m_1、m_2 之间的静摩擦因数为 μ_1，m_2 与墙面间的静摩擦因数为 μ_2 时。



习题 2-14 图

解：由 m_1、m_2 整体受力平衡可知，墙给 m_2 的支持力也为 F，方向水平向左。设竖直向上为正方向，对 m_1、m_2 分别应用牛顿第二定律，则

对 m_1：

$$F_{f1}-m_1g=0$$

对 m_2：

$$F_{f2}-F_{f1}-m_2g=0$$

静摩擦力的极值条件为

$$F_{f1}=F\mu_1\,,F_{f2}=F\mu_2$$

则联立可知

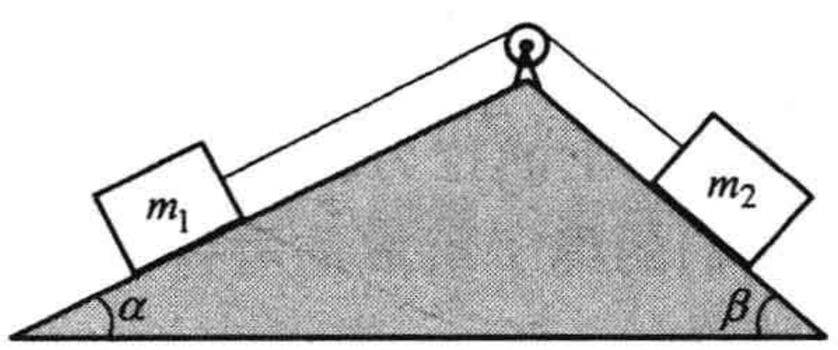
$$F\geqslant\frac{m_1g}{\mu_1}\,,F\geqslant\frac{(m_1+m_2)g}{\mu_2}$$

所以，F 的最小值应为 $\dfrac{m_1g}{\mu_1}$ 和 $\dfrac{(m_1+m_2)g}{\mu_2}$ 中的较大者。

显然，当 $\mu_1=\mu_2=\mu$ 时，F 的最小值应为 $\dfrac{(m_1+m_2)g}{\mu}$。

2-15. 一个三棱柱固定在桌面上，形成两个倾角分别为 α 和 β 的斜面，一细绳跨过顶角处的滑轮与质量分别为 m_1 和 m_2 的两物体相连，如习题 2-15 图所示。已知物体与斜面间的静摩擦因数均为 μ，求两物体在斜面上保持静止的条件。

解：设左边斜面沿斜面向上为正方向，右边斜面沿斜面向下为正方向，对 m_1、m_2 分别应用牛顿第二定律，则



习题 2-15 图

对 m_1：

$$F_T+F_{f1}-m_1g\sin\alpha=0$$

对 m_2：

$$m_2g\sin\beta+F_{f2}-F_T=0$$

静摩擦力的极值条件为

$$F_{f1}=\pm m_1g\mu\cos\alpha\,,F_{f2}=\pm m_2g\mu\cos\beta$$

其中，F_{f1}、F_{f2} 同时取“+”号，或同时取“-”号。取“+”号意味着系统整体有向左

的运动趋势，取“-”号意味着系统整体有向右的运动趋势。

联立上式并整理分析可得使物体保持静止的条件为

$$\frac{\sin\alpha-\mu\cos\alpha}{\sin\beta+\mu\cos\beta}\leqslant\frac{m_2}{m_1}\leqslant\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\sin\beta-\mu\cos\beta}$$

此式成立的条件是式中均为正值，若出现负值，可作如下分析：

不妨设 $\alpha<\beta$，则

如果 $\mu<\tan\alpha$，两物体质量须满足上式才能保持静止；

如果 $\mu>\tan\beta$，无论两物体质量如何，均能保持静止；

如果 $\tan\alpha<\mu<\tan\beta$，物体只有可能正向下滑，则两物体质量须满足下式：

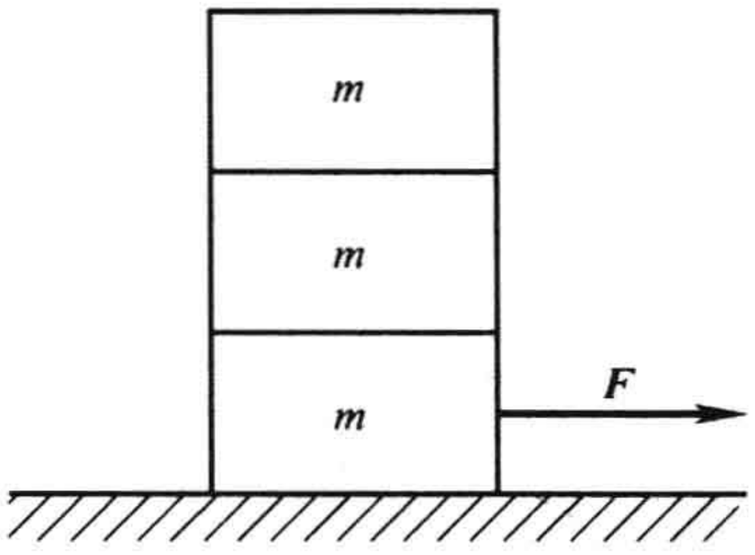
$$\frac{m_2}{m_1}\leqslant\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\sin\beta-\mu\cos\beta}$$

才能保持静止。

2-16. 三块质量均为 m 的相同物块叠放在水平面上，如习题 2-16 图所示。已知各接触面间的摩擦因数均为 μ。

（1）现有一水平力 F 作用在最底下的物块上，使之从上面两物块下抽出，则 F 至少为多大？

（2）若水平力 F 作用在中间的物块上，使它从上、下两物块中抽出，则 F 至少为多大？



习题 2-16 图

解：设水平向右为正方向。

（1）当 F 作用于下面物体时，设上、中两物体间的摩擦力为 F_f，上、中、下三物体的加速度分别为 a_1、a_2、a_3，分别对三物体运用牛顿第二定律：

对于上物块：$F_f=ma_1$

对于中物块：$2mg\mu-F_f=ma_2$

对于下物块：$F-3mg\mu-2mg\mu=ma_3$

上、中物块间达到最大静摩擦力时，$F_f=mg\mu$，此时 $a_1=a_2$，否则 $a_1<a_2$。

将下面的物块抽出的条件为

$$a_1\leqslant a_2<a_3$$

此时

$$F>3mg\mu+2mg\mu+mg\mu=6mg\mu$$

（2）当 F 作用于中间物块时，设下物体与地面间的摩擦力为 F_f，上、中、下三物块加速度分别为 a_1、a_2、a_3，分别对三物块运用牛顿第二定律：

对于上物块：$mg\mu=ma_1$

对于中物块：$F-mg\mu-2mg\mu=ma_2$

对于下物块：$2mg\mu - F_f = ma_3$

已知 $F_f \leqslant 3mg\mu$，则下物块始终不动。

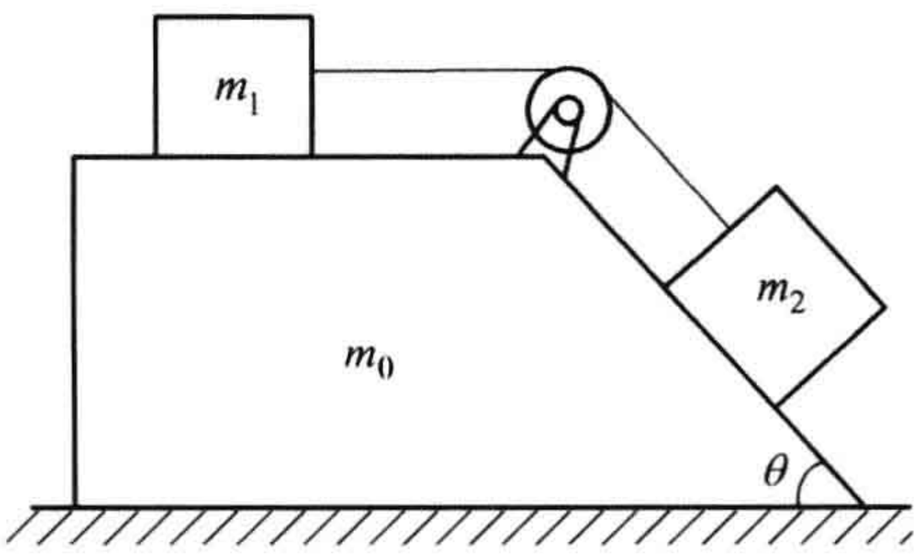
中间物块能被抽出的条件为

$$a_2 > a_1$$

则

$$F > 2mg\mu + mg\mu + mg\mu = 4mg\mu$$

2-17. 如习题2-17图所示，质量分别为 m_1 和 m_2 的两物体用一细绳相连，细绳跨过装在另一质量为 m_0 的大物体上的定滑轮，使 m_1 和 m_2 分别与 m_0 上的水平面和倾角为 θ 的斜面接触，而整个系统放在水平地面上。设 m_1、m_2 与 m_0 间的接触面都光滑。试问，若要 m_0 保持静止，则 m_0 与水平地面之间的摩擦因数至少为多大？



习题2-17图

解：以地面为参考系，分别设水平向右（斜面向下）和竖直向下为正方向，m_1、m_2 之间的绳张力为 F_T，它们与 m_0 之间的压力分别为 F_{N1}、F_{N2}，m_0 与地面间的压力为 F_N。对 m_0、m_1、m_2 分别应用牛顿第二定律：

对于 m_1：$F_T = m_1 a$

对于 m_2：$m_2 g\sin\theta - F_T = m_2 a$

对于 m_0 的水平方向：$-F_T + F_T\cos\theta - F_{N2}\sin\theta + F_f = 0$

对于 m_0 的竖直方向：$m_1 g + m_0 g + F_T\sin\theta + F_{N2}\cos\theta - F_N = 0$

静摩擦力的极值条件为

$$F_f = F_N\mu$$

联立求得

$$a = \frac{m_2 g\sin\theta}{m_1 + m_2},\quad F_T = \frac{m_1 m_2 g\sin\theta}{m_1 + m_2}$$

$$\mu \geqslant \frac{m_2\sin\theta(m_1 + m_2\cos\theta)}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_2 + m_0) - m_2^2\sin^2\theta}$$

2-18. 一条质量为 m 的均匀绳索悬结于两座高度相等的山顶之间，绳索在悬结处与竖直方向的夹角均为 θ，如习题2-18图所示。试求：

（1）两山顶各自受到的绳索的作用力的大小；

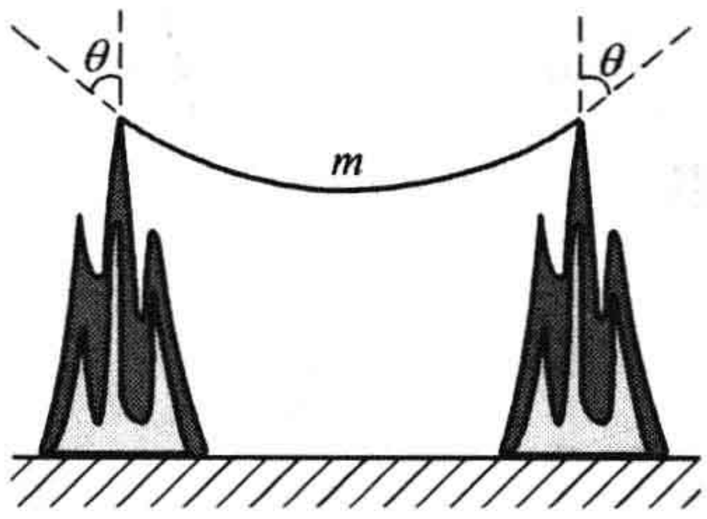
（2）绳索中点处的张力。

解：设两山顶受到绳索的作用力分别为 F_{T1}、F_{T2}，绳索中点处的张力为 F'_T。

（1）以整个绳索为研究对象，并建立坐标系：

x 轴方向：$F_{T2}\sin\theta - F_{T1}\sin\theta = 0$，则 $F_{T1} = F_{T2} = F_T$

y 轴方向：$2F_T\cos\theta - mg = 0$，则 $F_T = \dfrac{mg}{2\cos\theta}$



习题 2-18 图

（2）以绳子的中点到悬挂点的部分绳子为研究对象，并建立坐标系，应用牛顿第二定律：

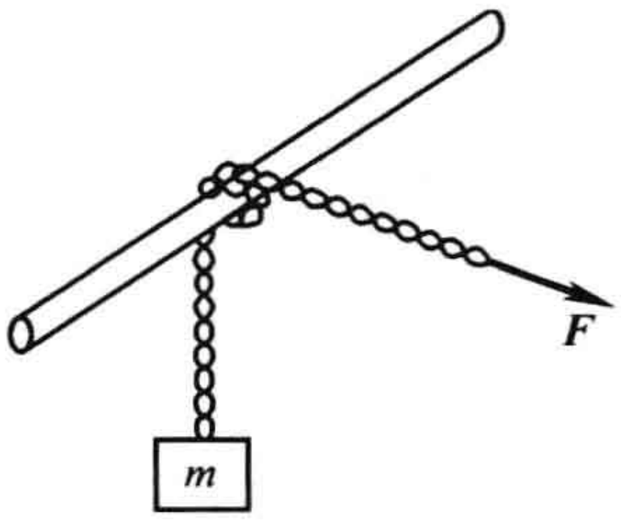
x 轴方向：$F_T\sin\theta - F'_T = 0$

y 轴方向：$F_T\cos\theta - \dfrac{1}{2}mg = 0$

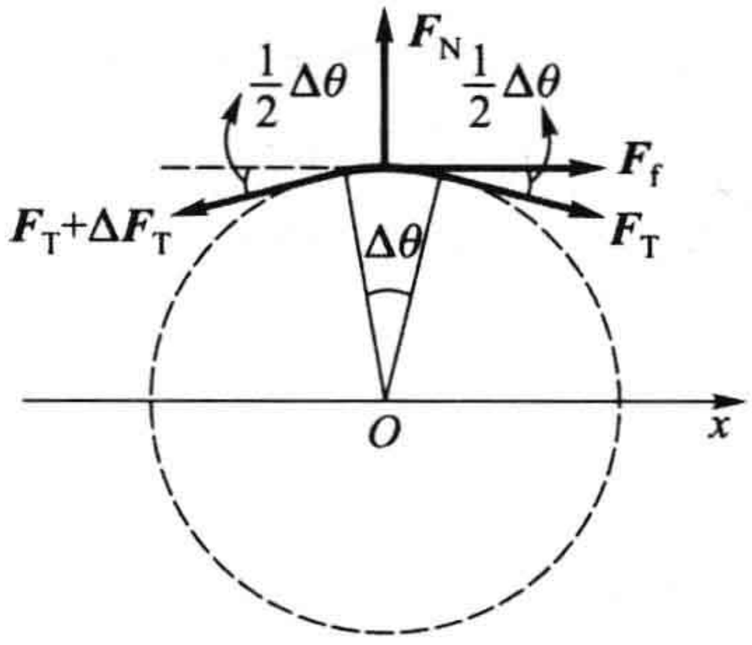
联立解得

$$F'_T = F_T \cdot \sin\theta = \frac{mg}{2}\tan\theta$$

2-19. 一个质量为 m 的物体通过一根质量可以不计的绳子绕水平棒 $1\dfrac{1}{4}$ 周后于另一端加一水平力 F，如习题 2-19 图(a)所示。若绳子和棒之间的摩擦因数为 μ，要使物体保持静止状态，应施加多大的水平拉力？



习题 2-19 图(a)



习题 2-19 图(b)

解：如习题 2-19 图(a)所示，选取绳索上一微元，受力分析如习题 2-19 图(b)所示，规定俯视图中受力水平向右和法线向外为正方向。

对选取的微元应用牛顿第二定律，即

切线方向：$F_f + F_T\cos\dfrac{1}{2}\Delta\theta - (F_T+\Delta F_T)\cos\dfrac{1}{2}\Delta\theta = 0$

法线方向：$F_N - (F_T+\Delta F_T+F_T)\sin\dfrac{1}{2}\Delta\theta = 0$

该题有两种临界情况，一种是 $F<mg$ 的情况，另一种是 $F>mg$ 的情况。在两种情况下，摩擦力均为最大静摩擦力，但方向相反，可表示为 $F_f = \pm\mu F_N$。

当 $\Delta\theta\to 0$ 时，$\cos\frac{1}{2}\Delta\theta\approx 1$，$\sin\frac{1}{2}\Delta\theta\approx\frac{1}{2}\Delta\theta$，$\Delta F_T=\mathrm{d}F_T$，$\Delta\theta=\mathrm{d}\theta$，忽略二阶小量联立解得

$$\frac{\mathrm{d}F_T}{F_T}=\pm\mu\mathrm{d}\theta$$

两边积分：

$$\int_F^{mg}\frac{\mathrm{d}T}{T}=\int_0^{\frac{5\pi}{2}}\pm\mu\mathrm{d}\theta$$

求解可得

$$F_1=mg\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}\mu\pi},F_2=mg\mathrm{e}^{\frac{5}{2}\mu\pi}$$

施加的水平力 F 在两个临界情况之间，物体都能保持静止，即

$$mg\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}\mu\pi}<F<mg\mathrm{e}^{\frac{5}{2}\mu\pi}$$

2-20. 两物体的质量分别为 m_0 和 m，用一根质量可以忽略的细绳相连，细绳跨过装置在桌面上的定滑轮，使物体 m_0 放在光滑的桌面上，而物体 m 悬在桌边，如习题 2-20 图所示。求物体 m_0 运动的加速度。若将物体 m 拿去，而用大小为 mg 的力向下拉绳，则物体 m_0 的加速度是否发生变化？略去滑轮的质量和滑轮轴承处的摩擦力，且细绳不能伸长。

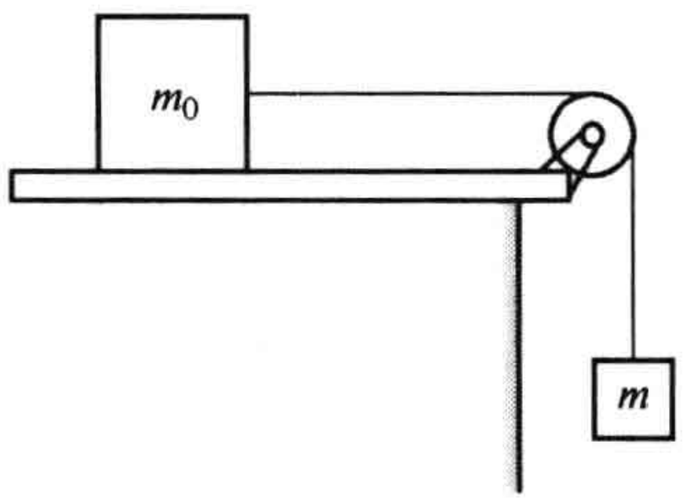
解：设 m 拿去前后 m_0 的加速度分别为 a_1、a_2。m 拿去前，对两物体整体应用牛顿第二定律：

$$(m+m_0)a_1=mg,\text{则 }a_1=\frac{mg}{m+m_0}$$

m 拿去后，对 m_0 应用牛顿第二定律：

$$m_0a_2=mg$$

则 $a_2=\frac{mg}{m_0}>a_1$，即 m 拿去后 m_0 的加速度变大。



习题 2-20 图

2-21. 一质量为 50 kg 的人站在电梯里的台秤上，求：

（1）当电梯以 4.9 m/s 的速度匀速上升或下降时，台秤读数各是多少？

（2）当电梯以 4.9 m/s² 的加速度上升或下降时，台秤读数又各是多少？

解：（1）当电梯以 4.9 m/s 的速度匀速上升或下降时，加速度为 0，台秤读数与电梯静止时相同，为 50 kg；

（2）当电梯以 4.9 m/s² 的加速度上升时，台秤受压力为

$$F_{N1}=mg+ma$$

台秤读数为

$$F_{N1}/g=(ma+mg)/g=(50\times9.8+50\times4.9)/9.8\ \text{kg}=75\ \text{kg}$$

当电梯以 4.9 m/s^2 的加速度下降时，台秤受压力为

$$F_{N2}=mg-ma$$

台秤读数为

$$F_{N2}/g=(mg-ma)/g=(50\times9.8-50\times4.9)/9.8\ \text{kg}=25\ \text{kg}$$

2-22. 一飞机在竖直平面内以 540 km/h 的速度沿一圆周飞行。为使在飞机飞行过程中，驾驶员与座椅之间的相互作用力不大于驾驶员重力的 8 倍，试求此圆周的最小半径。

解：已知 $v=540\ \text{km/h}=150\ \text{m/s}$

分析知当飞机飞到圆周的最下面时，驾驶员与座椅之间的相互作用力 F_N 最大，方向竖直向上。由牛顿第二定律及圆周运动的向心力公式得

$$m\cdot\frac{v^2}{R}=F_N-mg=8mg-mg=7mg$$

将已知量代入，可得

$$R=328\ \text{m}$$

2-23. 一质量为 m 的物体静止于倾角为 θ 的固定斜面上，如习题 2-23 图所示。已知物体与斜面间的静摩擦因数为 μ，试问，至少要用多大的力作用在物体上，才能使它运动？并指出该力的方向。

解：物体有沿斜面向下的运动趋势，显然沿运动趋势一侧用力使物体运动将用力最小。设 F 与斜面方向的夹角为 φ，如习题 2-23 图所示，建立沿斜面向上和垂直斜面的坐标系，对 m 应用牛顿第二定律：

x 轴方向：$-mg\sin\theta-F\cos\varphi+F_f=0$

y 轴方向：$F_N-mg\cos\theta+F\sin\varphi=0$

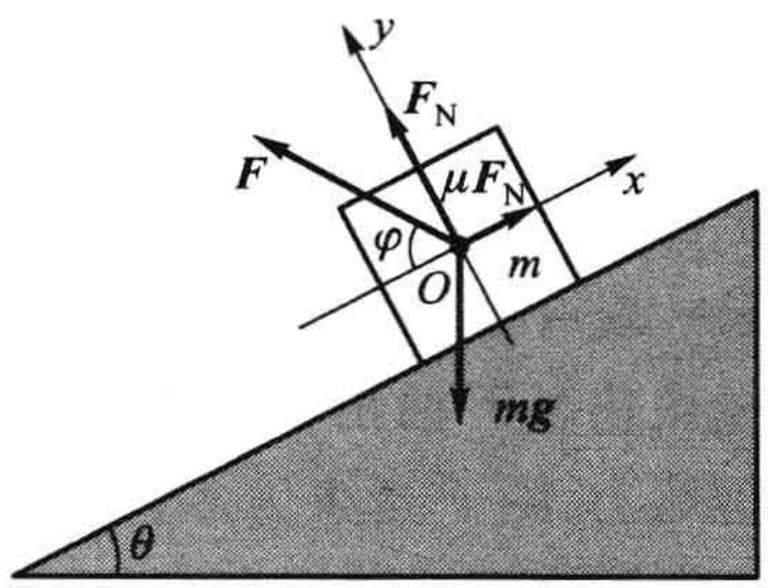
静摩擦力的极值条件为：

$$F_f=F_N\mu$$

联立可得

$$F=\frac{mg(\mu\cos\theta-\sin\theta)}{\cos\varphi+\mu\sin\varphi}$$

令 $\frac{dF}{d\varphi}=0$，则 $\tan\varphi=\mu$，此时 F 最小。将 $\sin\varphi=\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$，$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$ 代入上式得



习题 2-23 图

$$F_{min}=mg(\mu\cos\theta-\sin\theta)/\sqrt{\mu^2+1}$$

与斜面的夹角 $\varphi=\arctan\mu$。

2-24. 两个质量均为 m 的质点 A 和 B 连在一个劲度系数为 k 的弹簧的两

端。开始两质点静止在光滑的水平面上，弹簧处于原长，然后沿 AB 方向给 B 以恒力 ka。求两质点的运动学方程。

解：用 x、y 分别表示质点 A、B 的位置，设弹簧原长为 l，$t=0$ 时，初始条件满足 $x=0, y=l, \dot{x}=0, \dot{y}=0$，对 A、B 分别应用牛顿第二定律：

对质点 A：$m\ddot{x}=k(y-x-l)$

对质点 B：$m\ddot{y}=ka-k(y-x-l)$

令 $z=y-x-\frac{1}{2}a-l, \omega^2=\frac{2k}{m}$，联立上面两式可得

$$\ddot{z}+\omega^2 z=0$$

解得

$$z=c\cos(\omega t+\alpha)$$

即

$$y-x-\frac{1}{2}a-l=c\cos(\omega t+\alpha)$$

考虑初始条件：$x=0, y=l, \dot{x}=0, \dot{y}=0$ 可得

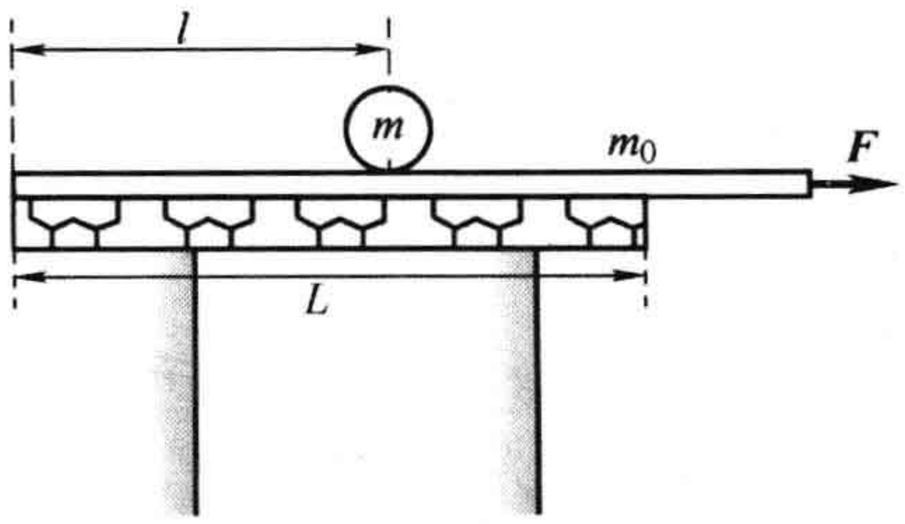
$$y-x=\frac{1}{2}a(1-\cos\omega t)+l$$

将上式代入质点 A、B 的运动方程并结合初始条件，积分可得

$$x=\frac{1}{8}a\omega^2 t^2-\frac{1}{4}a(1-\cos\omega t)$$

$$y=x+\frac{1}{2}a(1-\cos\omega t)+l=\frac{1}{8}a\omega^2 t^2+\frac{1}{4}a(1-\cos\omega t)+l$$

2-25. 质量为 m_0 的木板静置在水平桌面上，其一端与桌面对齐，木板上放一质量为 m 的小花瓶，花瓶与板左端相距为 l，桌面长为 L，如习题 2-25 图所示。现有一水平恒力 F 作用于板上，将板从花瓶下抽出。为使花瓶不至于掉落地上，则 F 至少为多大？设各接触面之间的摩擦因数均为 μ。



习题 2-25 图

解：以桌面为参考系，设花瓶在木板上运动的时间为 t。

花瓶在木板上运动时，

对于花瓶：　　$mg\mu=ma_1$，则 $a_1=g\mu$　　①

对于木板：　　$F-\mu mg-\mu(m+m_0)g=m_0a_2$　　②

花瓶在桌上运动时，

对于花瓶：$-mg\mu=ma_1'$，则 $a_1'=-g\mu$

对于木板：$F-\mu m_0 g=m_0 a'_2$

即花瓶在板上做加速度为 $g\mu$ 的匀加速直线运动，落到桌面上后，做加速度为 $-g\mu$ 的匀减速直线运动。显然，花瓶的加速度具有加速和减速的对称性。由于花瓶从相对桌面静止开始运动，因此花瓶不落在地上的临界条件如下。

花瓶运动到桌边时，速度为 0。花瓶在木板上相对桌面的位移均为

$$s_1=\frac{1}{2}a_1 t^2=\frac{L-l}{2} \qquad ③$$

此时，木板相对桌面行进的位移为

$$s_2=\frac{1}{2}a_2 t^2=l+s_1=\frac{L+l}{2} \qquad ④$$

由①、②式求得加速度 a_1、a_2，代入③、④式联立解得

$$F=2g\mu\left[(m_0+m)+\frac{m_0 l}{L-l}\right]$$

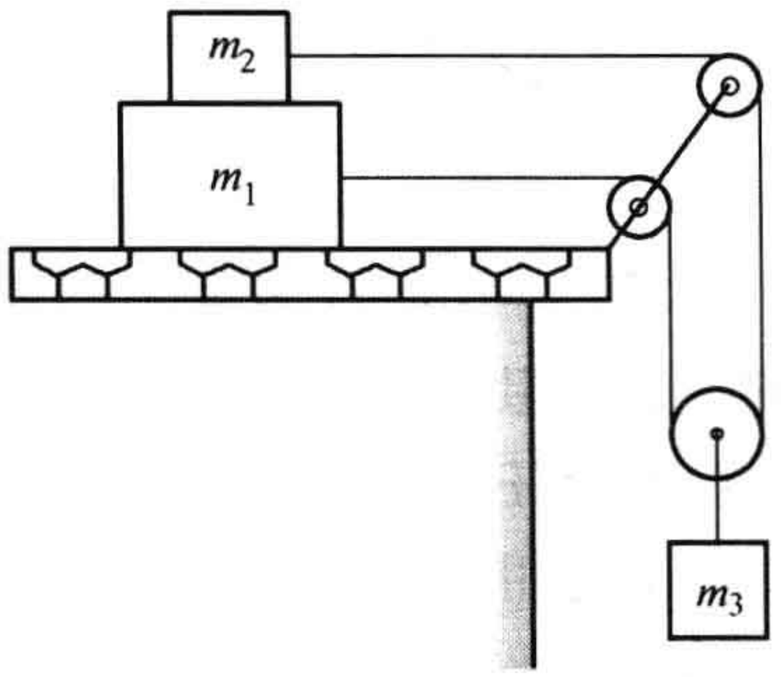
所以，为使花瓶不落在地上，F 的最小值为

$$2g\mu\left[(m_0+m)+\frac{m_0 l}{L-l}\right]$$

2-26. 如习题 2-26 图所示，质量分别为 m_1 和 m_2（$m_1>m_2$）的两物体叠放在水平桌面上，另一质量为 m_3 的物体通过细绳和滑轮组与 m_1、m_2 相连并悬在桌边。

（1）若 m_1 与 m_2 之间的摩擦因数为 μ，而 m_1 与桌面之间无摩擦力，求运动时，m_1 与 m_2 之间无相对滑动的条件；

（2）若各接触面之间的摩擦因数均为 μ，求 m_2 与 m_3 运动，而 m_1 保持静止的条件。



习题 2-26 图

解：选水平方向中水平向右为正方向，竖直方向中竖直向下为正方向。

（1）若运动时 m_1 与 m_2 之间无相对滑动，则 m_1、m_2、m_3 具有共同的加速度 a。以地面为参考系，分别应用牛顿第二定律：

对 m_3：$m_3 g-2F_T=m_3 a$

对 m_2：$F_T-F_f=m_2 a$

对 m_1：$F_T+F_f=m_1 a$

联立可得

$$F_f=\frac{m_3(m_1-m_2)g}{2(m_1+m_2+m_3)}$$

F_f为静摩擦,满足

$$F_f \leqslant m_2 g\mu$$

综合得

$$\mu \geqslant \frac{(m_1-m_2)\,m_3}{2m_2(m_1+m_2+m_3)}$$

(2) 若 m_2与 m_3运动,设 m_3的加速度为 a,则 m_2的加速度为 $2a$。

对 m_3:　　$m_3 g-2F_T=m_3 a$　　①

对 m_2:　　$F_T-m_2 g\mu=2m_2 a$　　②

m_1受力平衡:

$$F_T+m_2 g\mu-F_f=0 \qquad ③$$

F_f为静摩擦力,满足

$$F_f \leqslant (m_1+m_2)\,g\mu \qquad ④$$

由①、②式以及 $a>0$,可得

$$\mu<\frac{m_3}{2m_2} \qquad ⑤$$

由①、②、③、④四式联立可得

$$\mu \geqslant \frac{2m_2 m_3}{4m_1 m_2+m_1 m_3-m_2 m_3} \qquad ⑥$$

综合⑤、⑥式可得

$$\frac{2m_2 m_3}{4m_1 m_2+m_1 m_3-m_2 m_3} \leqslant \mu<\frac{m_3}{2m_2}$$

2-27. 空中有许多大小不等的雨滴(可看成圆球形)由静止开始下落。若受到的空气阻力 F_f与其速度 v 的一次方成正比,即 $F_f=-kv$,其中 k 为常量。

(1) 求任一时刻 t 雨滴的速度 $v(t)$;

(2) 证明雨滴的速度最终将趋于一极限值 v_f(称为终极速度),并求出此 v_f;

(3) 若常量 k 正比于各雨滴的大圆面积,即 $k \propto \pi r^2$(r 为雨滴的半径),试问:大、小雨滴中哪种雨滴获得的终极速度较大?

解:(1) 对雨滴应用牛顿第二定律:

$$mg+F_f=mg-kv=m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

整理并求积分得

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{g-\frac{k}{m}v}=\int_0^t \mathrm{d}t$$

解得

$$v=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$$

(2) 将上式对 $t\to\infty$ 求极限,可得

$$v_f=\lim_{t\to\infty}v=\frac{mg}{k}$$

(3) 已知 $v=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$,令 $k=a\pi r^2$,则

$$v=\frac{mg}{a\pi r^2}(1-e^{-\frac{a\pi r^2}{m}t})$$

当 $t\to\infty$ 时,得终极速度:

$$v_f=\lim_{t\to\infty}v=\frac{mg}{a\pi r^2}=\frac{4\pi r^3\rho g/3}{a\pi r^2}=\frac{4\rho gr}{3a}$$

所以 r 越大,v_f越大,即大雨滴的终极速度较大。

2-28. 一子弹以 v_0的初速度和 θ 仰角自地面射出,子弹在飞行时受到的空气阻力为其速度的 km 倍(m 为子弹的质量,k 为常量)。试求子弹的速度与水平线成45°角时,子弹与发射点之间的水平距离 s。

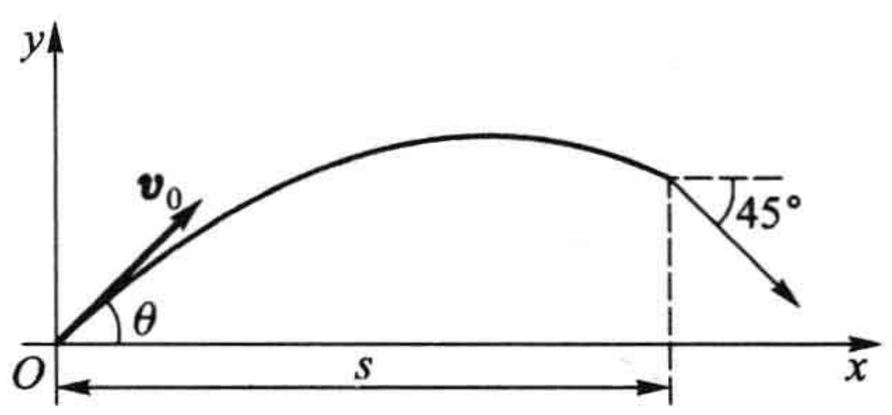
解: 建立如习题 2-28 图所示的坐标系。子弹射出时,

$$v_{x0}=v_0\cos\theta,v_{y0}=v_0\sin\theta$$

子弹射出之后,

x 轴方向: $-kmv_x=m\frac{dv_x}{dt}$

y 轴方向:



习题 2-28 图

$$-mg-kmv_y=m\frac{dv_y}{dt}$$

积分可得

$$v_x=v_{x0}e^{-kt},v_y=\frac{1}{k}[(kv_{y0}+g)e^{-kt}-g]$$

当子弹的速度方向与水平线成45°角时,$v_x=\pm v_y$。其中,"+"对应子弹上升阶段时的速度与水平线成45°角,"-"对应子弹下降阶段时的速度与水平线成45°角。

由以上各式可得子弹的速度与水平线成45°时所需的时间:

$$t_{上升}=\frac{1}{k}\ln\left[1+\frac{k}{g}(v_{y0}-v_{x0})\right]$$

$$t_{下降}=\frac{1}{k}\ln\left[1+\frac{k}{g}(v_{y0}+v_{x0})\right]$$

由此可知,当子弹初始分速度满足 $v_{y0}>v_{x0}$(即 $\theta>45°$)时,$t_{上升}>0$,$t_{下降}>0$,即子弹在上升和下降阶段,其速度方向均可与水平线成45°角。而当子弹初始分速度满

足 $v_{y0} \leqslant v_{x0}$（即 $\theta \leqslant 45°$）时，$t_{上升} \leqslant 0$，$t_{下降} > 0$，即子弹只有在下降阶段，其速度方向才可与水平线成45°角。

子弹与发射点之间的水平距离：

当 $v_{y0} > v_{x0}$ 时，

$$s_{上升} = \int_0^{t_{上升}} v_x \mathrm{d}t = \int_0^{t_{上升}} v_{x0} \cdot \mathrm{e}^{-kt} \mathrm{d}t = \frac{v_0^2 \cos\theta(\sin\theta - \cos\theta)}{g + kv_0(\sin\theta - \cos\theta)}$$

$$s_{下降} = \int_0^{t_{下降}} v_x \mathrm{d}t = \int_0^{t_{下降}} v_{x0} \cdot \mathrm{e}^{-kt} \mathrm{d}t = \frac{v_0^2 \cos\theta(\sin\theta + \cos\theta)}{g + kv_0(\sin\theta + \cos\theta)}$$

当 $v_{y0} \leqslant v_{x0}$ 时，

$$s_{下降} = \int_0^{t_{下降}} v_x \mathrm{d}t = \int_0^{t_{下降}} v_{x0} \cdot \mathrm{e}^{-kt} \mathrm{d}t = \frac{v_0^2 \cos\theta(\sin\theta + \cos\theta)}{g + kv_0(\sin\theta + \cos\theta)}$$

第三章　非惯性系下质点动力学

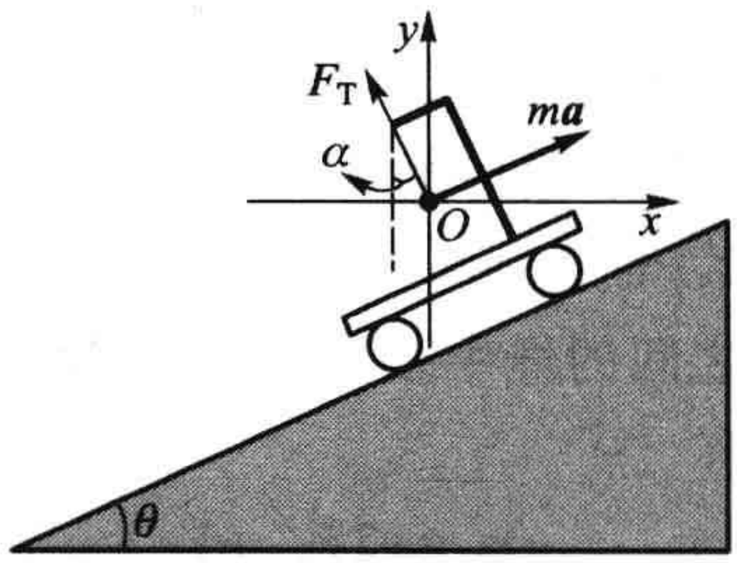
课后作业题

3-1. 如习题3-1图所示，一小车沿倾角为 θ 的光滑斜面滑下。小车上悬挂一摆锤。当摆锤相对小车静止时，摆线与竖直线的夹角为多大？

解：以斜面为参考系（惯性系），以小车与摆锤整体为研究对象，设小车与摆锤的总质量为 m_0，摆锤的质量为 m，应用牛顿第二定律有

$$m_0 g\sin\theta = m_0 a$$

以小车为参考系（加速直线运动的非惯性系），以水平向右和竖直向上为 x 轴、y 轴的正方向，如习题3-1图所示，以摆锤为研究对象，加上沿斜面向上的惯性力 ma 后，对摆锤应用牛顿第二定律：



习题3-1图

x 轴方向：$F_T\sin\alpha = ma\cos\theta$

y 轴方向：$F_T\cos\alpha + ma\sin\theta = mg$

两式联立得

$\tan\alpha = \tan\theta$，即 $\alpha = \theta$

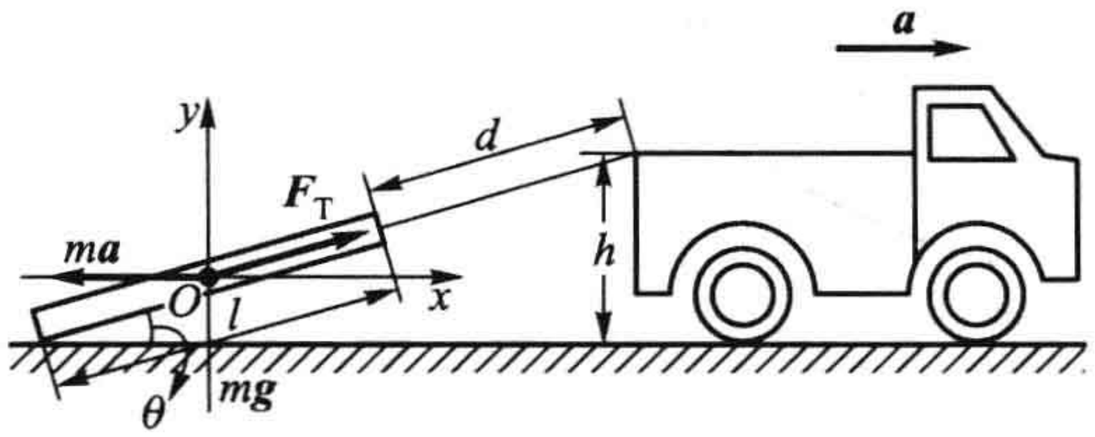
3-2. 在卡车的尾部通过一根绳子拖着一根粗细均匀的圆木。绳长为 d，圆木长为 l，绳与卡车的连接点距地高 h。问卡车必须以多大的加速度 a 行驶，才能使圆木与地面脱离？

解：以卡车为参考系（加速直线运动的非惯性系），以圆木为研究对象。设圆木与地面间夹角为 θ，加上惯性力 $-ma$ 后，圆木处于平衡状态，圆木脱离地面的条件是圆木与地面的相互作用力为零。

水平方向：$F_T\cos\theta = ma$

竖直方向：$F_T\sin\theta = mg$

由习题3-2图所示的几何关系得



习题 3-2 图

$$\sin\theta=\frac{h}{l+d}$$

联立得

$$a=\frac{g}{h}\sqrt{(l+d)^2-h^2}$$

3-3. 在一体积为 V,质量为 m_0的铁盒内置有一阿特伍德机,已知两物体的质量分别为 m_1和 m_2。现将此铁盒放入密度为 ρ 的液体中,如习题 3-3 图所示,试求铁盒在下沉过程中的加速度。忽略液体对铁盒的阻力作用。

解:如习题 3-3 图所示,以液体为参考系(惯性系),竖直向下为正方向,设 m_1、m_2之间的绳中张力为 F_T。以 m_0为研究对象有

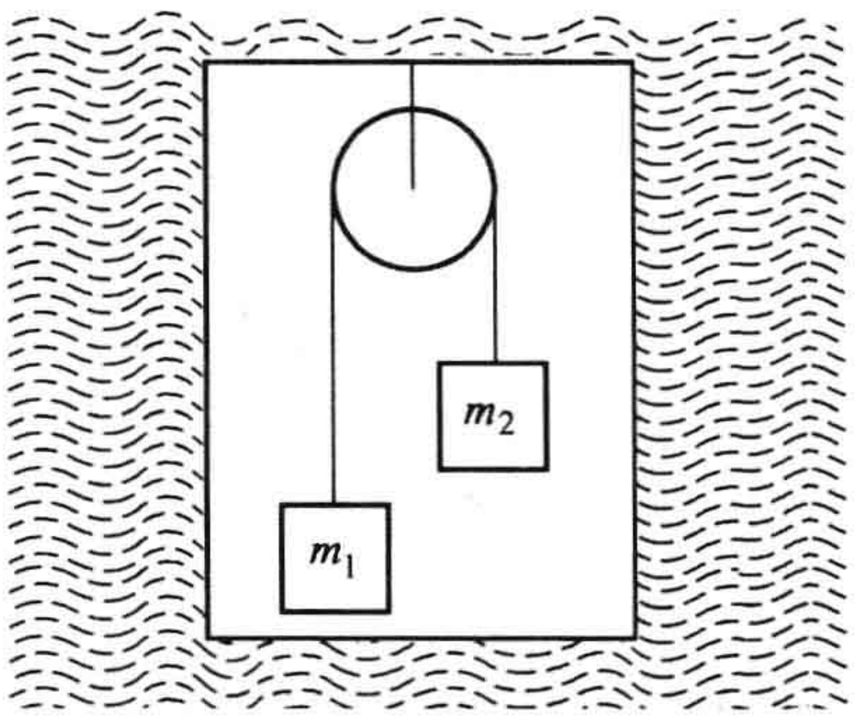
$$m_0g+2F_T-\rho Vg=m_0a$$

以铁盒为参考系(加速直线运动的非惯性系),设竖直向下为正方向,分别以 m_1、m_2为研究对象,分别加上$-m_1a$、$-m_2a$ 的惯性力,m_1、m_2相对于铁盒具有等值的加速度 $a_{相}$,应用牛顿第二定律:

对 m_1:$m_1g-F_T-m_1a=m_1a_{相}$

对 m_2:$m_2g-F_T-m_2a=m_2(-a_{相})$

联立解得 $a=\dfrac{(m_1+m_2)(m_0-\rho V)+4m_1m_2}{m_0(m_1+m_2)+4m_1m_2}g$



习题 3-3 图

3-4. 如习题 3-4 图所示,质量为 $m_2=2$ kg 和 $m_3=1$ kg 的两个物体分别系在一根跨过滑轮 B 的细绳的两端,而滑轮 B 又与质量为 $m_1=3$ kg 的物体系在另一根跨过定滑轮 A 的细绳的两端。试求:

(1) m_1、m_2和 m_3的加速度 a_1、a_2和 a_3;

(2) 跨过滑轮 A 的绳和跨过滑轮 B 的绳中张力 F_{TA}、F_{TB}。

解:设竖直向下为正方向,B 的加速度为 a_B,跨过滑轮 A、B 细绳的两端拉力分别为 F_{TA}、F_{TB}。

以滑轮 A 为参考系(惯性系),以 m_1 为研究对象有

$$m_1 g - F_{TA} = m_1(-a_B),\text{且 } F_{TA} = 2F_{TB}$$

以 B 为参考系(加速直线运动的非惯性系),以 m_2、m_3 为研究对象,两者相对 B 具有等值的加速度 $a_{相}$,仍以竖直向下为正方向,对 m_2、m_3 分别加上 $-m_2 a_B$ 和 $-m_3 a_B$ 的惯性力后,应用牛顿第二定律:

对 m_2:

$$m_2 g - F_{TB} - m_2 a_B = m_2 a_{相}$$

对 m_3:

$$m_3 g - F_{TB} - m_3 a_B = m_3(-a_{相})$$

代入数据联立解得

$$F_{TB} = \frac{24}{17}g,\ F_{TA} = \frac{48}{17}g,\ a_B = -\frac{1}{17}g,\ a_{相} = \frac{6}{17}g$$

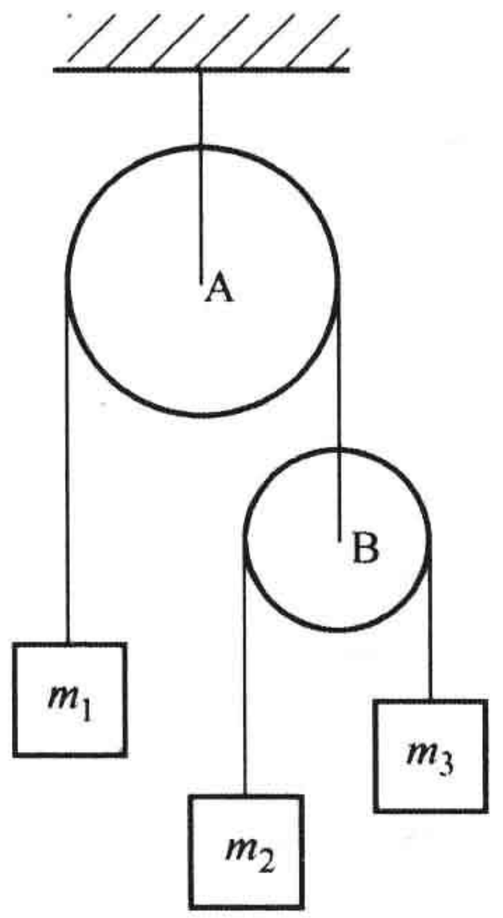
进一步可得

(1) $a_1 = -a_B = \frac{1}{17}g \approx 0.58\ \text{m/s}^2$

$$a_2 = a_{相} + a_B = \frac{5}{17}g \approx 2.9\ \text{m/s}^2$$

$$a_3 = -a_{相} + a_B = -\frac{7}{17}g \approx -4\ \text{m/s}^2$$

(2) $F_{TA} = \frac{48}{17}g = 27.7\ \text{N},\ F_{TB} = \frac{24}{17}g = 13.8\ \text{N}$

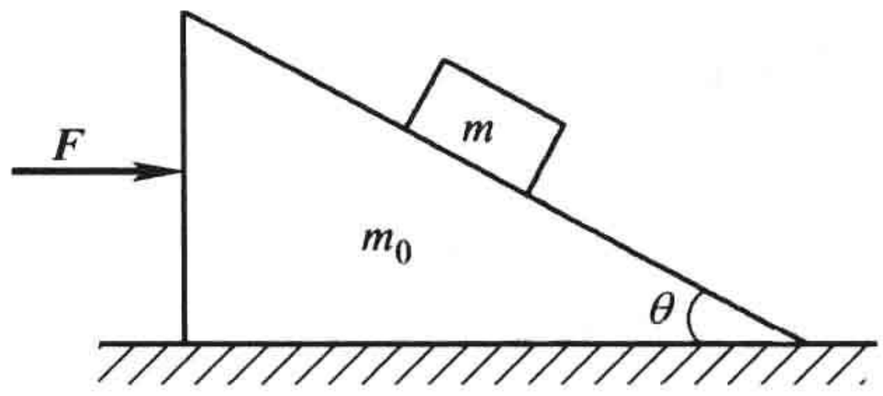


习题 3-4 图

3-5. 一质量为 m_0,倾角为 θ 的斜面体放在水平面上,在斜面体上有一质量为 m 的物体。为使 m 不与斜面发生相对运动,现用一水平力 F 作用在 m_0 上,如习题 3-5 图所示。

(1) 若所有接触面均光滑,F 应为多大?

(2) 若 m 与 m_0 之间的摩擦因数为 μ,而 m_0 与水平面间无摩擦,求 F 的范围。



习题 3-5 图

解:在 m 不与斜面发生相对运动时,以地面为参考系,对 m 与 m_0 整体应用牛顿第二定律有

$$F = (m + m_0)a$$

以 m_0 为参考系(加速直线运动的非惯性系),以沿斜面向下和垂直斜面向上为 x 轴、y 轴的正方向,以 m 为研究对象,加上水平向左的惯性力 ma 后,对 m 应用牛顿第二定律:

x 轴方向:$mg\sin\theta + F_f - ma\cos\theta = 0$

y 轴方向：$F_N - mg\cos\theta - ma\sin\theta = 0$

m 与 m_0 不发生相对滑动的极值条件为

$$F_f = \pm F_N \mu$$

联立可得

$$\frac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta}(m_0+m)g \leqslant F \leqslant \frac{\sin\theta + \mu\cos\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta}(m_0+m)g$$

所有接触面均光滑时，$\mu = 0$，此时 $F = (m_0+m)g\tan\theta$。

3-6. 一摩托车以 36 km/h 的速率在地面上行驶。其轮胎与地面间的摩擦因数 μ 为 0.3。试求：

（1）摩托车在转弯时轨道的最小曲率半径；

（2）摩托车与竖直线之间的最大倾斜角。

解：设摩托车与地面间的摩擦力为 F_f，弯道的曲率半径为 R，以摩托车为参考系（匀角速转动的非惯性系），加上水平方向的惯性离心力 $\frac{mv^2}{R}$ 后，摩托车处于平衡状态：

水平方向受力平衡：$F_f - \frac{mv^2}{R} = 0$

竖直方向受力平衡：$F_N - mg = 0$

相对于摩托车质心力矩平衡：

$$F_f l\cos\theta = F_N l\sin\theta$$

其中 l 为摩托车与地接触点到摩托车质心的距离。最大静摩擦力条件：

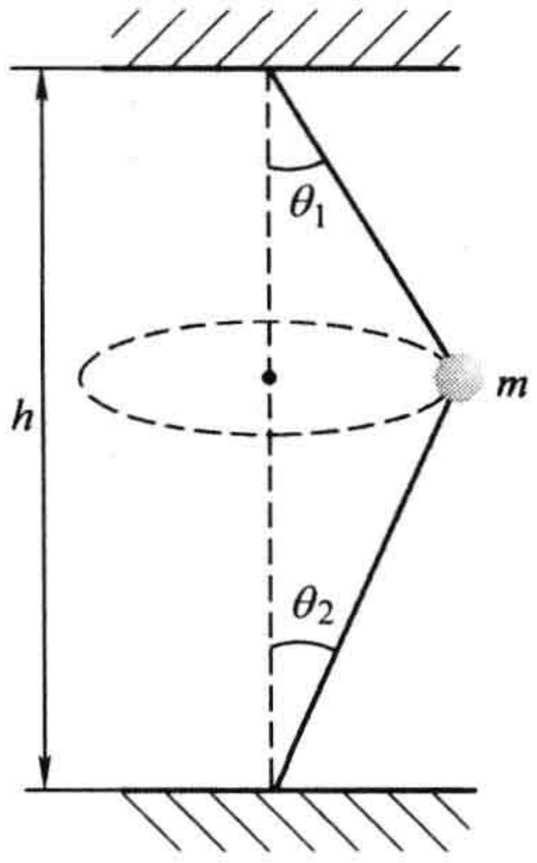
$$F_f \leqslant F_N \cdot \mu$$

联立得最小半径 $R_{min} = 34$ m，最大倾角 $\tan\theta_{max} = \mu = 0.3$，$\theta_{max} = 16.7°$。

3-7. 一根绳子的两端分别固定在顶板和底板上，两固定点位于同一竖直线，相距为 h。一质量为 m 的小球系于绳上某点处，当小球两边的绳均被拉直时，两绳与竖直线的夹角分别为 θ_1 和 θ_2，如习题 3-7 图所示。当小球以一定的速度在水平面内做匀速圆周运动时，两绳均被拉直。试问：

（1）若下面的绳子中的张力为零，则小球的速度为多大？

（2）若小球的速度是（1）小题中求得的速度的 $\sqrt{2}$ 倍，则上、下两段绳中的张力各为多大？



习题 3-7 图

解：以小球为参考系（匀角速转动的非惯性系），小球上、下两侧绳中的张力分别为 F_{T1}、F_{T2}，加上水平方向的惯性离心力 $m\frac{v^2}{R}$ 后，对小球应用牛顿第二

定律：

水平方向：$F_{T1}\sin\theta_1+F_{T2}\sin\theta_2=m\dfrac{v^2}{R}$

竖直方向：$F_{T1}\cos\theta_1=F_{T2}\cos\theta_2+mg$

通过习题3-7图中的几何关系可得

$$\frac{R}{\tan\theta_1}+\frac{R}{\tan\theta_2}=h$$

（1）若 $F_{T2}=0$，则

$$F_{T1}=\frac{mg}{\cos\theta},v=\sqrt{\frac{\tan\theta_1}{\cot\theta_1+\cot\theta_2}gh}$$

（2）若 $v'=\sqrt{2}v$，联立可求得

$$F_{T1}=\frac{2\tan\theta_1+\tan\theta_2}{\tan\theta_1+\tan\theta_2}\cdot\frac{mg}{\cos\theta_1},F_{T2}=\frac{mg}{(\cot\theta_1+\cot\theta_2)\cdot\sin\theta_2}$$

3-8. 一小物体放在一半径为 R 的水平圆盘边缘上，小物体与圆盘间的静摩擦因数为 μ。若圆盘绕其轴的角速度逐渐增大到一个值时，小物体滑出圆盘并最终落到比盘面低 h 的地面上。问从它离开圆盘的那一点算起，小物体越过的水平距离多大？

解：设小物体落下时越过的水平距离为 l，下落时间为 t，有

$$h=\frac{1}{2}gt^2,l=vt$$

其中，$v=R\omega$ 为物体刚好离开圆盘时相对地面的速度（此时，物体相对圆盘的速度近似为零）。

设小物体质量为 m，与圆盘的摩擦力为 F_f，以圆盘为参考系（因为圆盘绕其轴的角速度逐渐增大，所以可将其在短时间内视为匀角速转动的非惯性系）。小物体恰好滑出圆盘时受最大静摩擦力 $F_f=\mu mg$，加上沿圆盘径向方向的惯性离心力 $m\omega^2R=\dfrac{mv^2}{R}$ 后，小物体相对圆盘处于平衡状态，对其应用牛顿第二定律：

$$0=\mu mg-\frac{mv^2}{R}$$

联立可得

$$l=\sqrt{2\mu Rh}$$

3-9. 一根光滑的钢丝弯成如习题3-9图所示的形状，其上套有一小环。当钢丝以恒定角速度 ω 绕其竖直对称轴旋转时，小环在其上任何位置都能相对静止。求钢丝的形状（即写出 y 与 x 的关系）。

解：以钢丝为参考系（匀角速转动的非惯性系），对小球加上水平方向的惯

性力 $m\omega^2 x$ 后，应用牛顿第二定律：

x 轴方向：

$$-F_N\cos\ \alpha+m\omega^2 x=0$$

y 轴方向：

$$F_N\sin\ \alpha-mg=0$$

联立可得

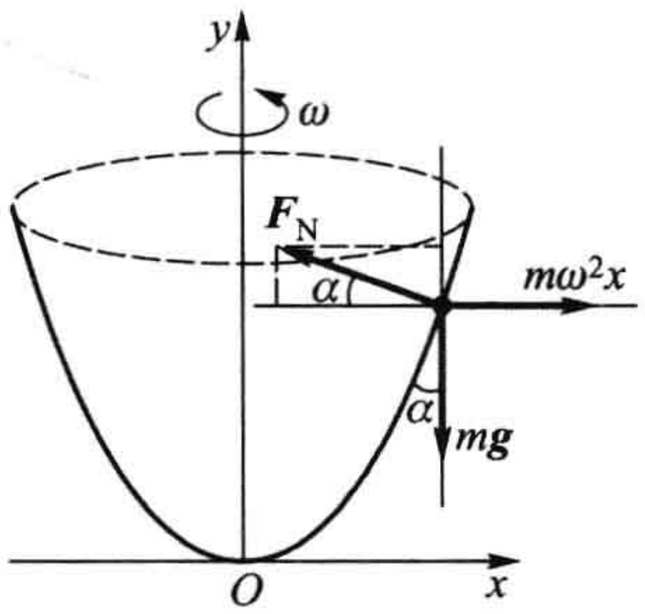
$$\cot\ \alpha=\frac{\omega^2}{g}x$$

由微积分几何性质得

$$\cot\ \alpha=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

联立积分得

$$y=\frac{1}{2}\ \frac{\omega^2}{g}x^2$$



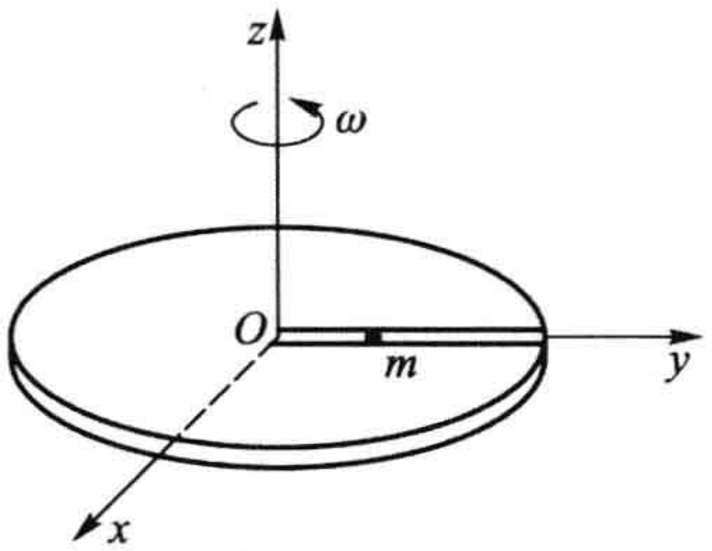
习题 3-9 图

3-10. 一圆盘绕其竖直的对称轴以恒定的角速度 ω 旋转。在圆盘上沿径向开有一光滑小槽，槽内一质量为 m 的质点以 v_0 的初速从圆心开始沿半径向外运动。试求：

（1）质点到达习题 3-10 图所示位置（即 $y=y_0$）时相对圆盘的速度 v；

（2）质点到达该处所需要的时间 t；

（3）质点在该处所受到的槽壁对它的侧向作用力 F。



习题 3-10 图

解：以圆盘为参考系（匀角速转动的非惯性系），以质点为研究对象，加上径向的惯性离心力 $m\omega^2 y$ 后，对质点应用牛顿第二定律有

y 轴方向：

$$m\omega^2 y=ma=m\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

两边同时乘 $\mathrm{d}y$ 得

$$m\omega^2 y\mathrm{d}y=m\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}y=mv\mathrm{d}v$$

两边积分可得

$$v^2-v_0^2=\omega^2 y^2$$

（1）把 $y=y_0$ 代入上式解得

$$v=\sqrt{v_0^2+\omega^2 y_0^2}$$

（2）通过上面的求解可知

$$v=\sqrt{v_0^2+\omega^2y^2}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

对上式进行整理积分 $\int_0^t \mathrm{d}t=\int_0^{y_0}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{v_0^2+\omega^2y^2}}$

计算可得

$$t=\frac{1}{\omega}\ln\left(\frac{\omega y_0}{v_0}+\sqrt{1+\frac{\omega^2y_0^2}{v_0^2}}\right)$$

（3）该处槽壁对质点的侧向作用力 F 与科里奥利力的大小相等，为

$$F=2mv\omega=2m\omega\sqrt{v_0^2+\omega^2y_0^2}$$

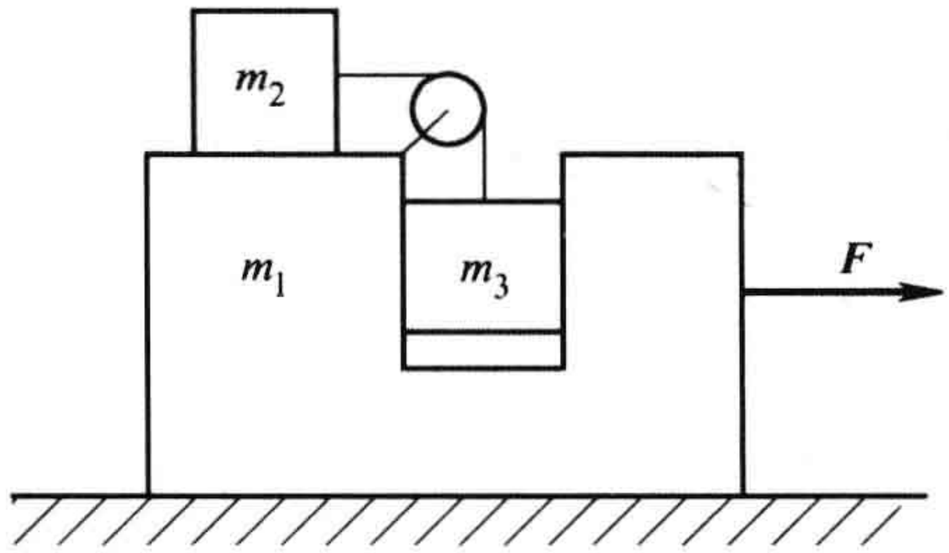
方向为沿质点径向运动方向的左方。

自检练习题

3-11. 在如习题 3-11 图所示的装置中，质量分别为 m_2 和 m_3 的两物体由一细绳相连。细绳跨过装在一质量为 m_1 的大物体上的定滑轮。已知所有的表面都光滑。试问：

（1）m_1 的加速度为多大？

（2）若在 m_1 上作用一水平力 F，使 m_2 和 m_3 相对 m_1 静止，则 F 为多大？



习题 3-11 图

解：设水平向右和竖直向下为相互垂直的正方向，m_2 和 m_3 间绳中张力为 F_T，m_1 与 m_3 间的水平相互作用力为 F_N，并设 m_3 对 m_1 的作用力向右（正方向），m_1 与 m_2 对地的加速度分别为 a_1、a_2。

（1）以地面为参考系，对 m_1、m_2 应用牛顿第二定律有

对 m_1：$F_N-F_T=m_1a_1$

对 m_2：$F_T=m_2a_2$

以 m_1 为参考系（加速直线运动的非惯性系），以 m_3 为研究对象，加上惯性力 $-m_3a_1$ 后，对 m_3 应用牛顿第二定律有

水平方向：$-F_N-m_3a_1=0$

竖直方向：$m_3g-F_T=m_3(a_2-a_1)$

联立可得

$$a_1=\frac{-m_2m_3g}{m_1m_2+m_1m_3+2m_2m_3+m_3^2}$$

（2）以地面为参考系，对 m_1、m_2 应用牛顿第二定律有

对 m_1：$F-F_N-F_T=m_1a_1$

对 m_2：$F_T=m_2a_2$

以 m_1 为参考系（加速直线运动的非惯性系），以 m_3 为研究对象，加上惯性力 $-m_3a_1$ 后，对 m_3 应用牛顿第二定律有

水平方向：$F_N-m_3a_1=0$

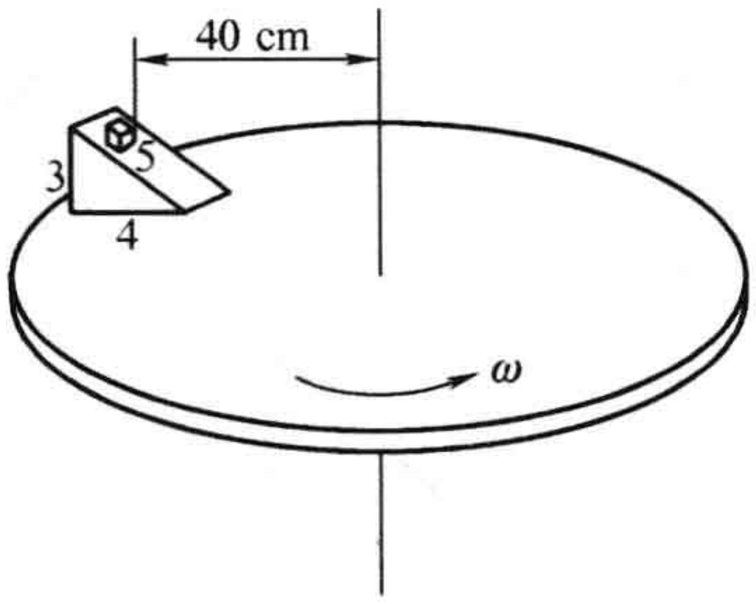
竖直方向（相对静止）：$m_3g-F_T=m_3(a_2-a_1)=0$

联立可得

$$F=(m_1+m_2+m_3)\frac{m_3}{m_2}g$$

3-12. 一个侧面边长比为 3∶4∶5 的斜面固连在一转盘上，如习题 3-12 图所示，一木块静止在斜面上，斜面和木块之间的摩擦因数 $\mu=\frac{1}{4}$。求此木块能保持在离转盘中心的水平距离为 40 cm 处相对转盘不动的最小转动角速度 ω。

解：取转盘为参考系（匀角速转动的非惯性系），以木块为研究对象，受力分析：重力 $m\boldsymbol{g}$、静摩擦力 $\boldsymbol{F}_f$、斜面的支持力 $\boldsymbol{F}_N$、惯性离心力 $\boldsymbol{F}=m\omega^2\boldsymbol{r}$（其中，$r$ 为木块离盘心的水平距离，方向沿径向向外）。木块处于静止状态，受力平衡有



习题 3-12 图

沿斜面方向：$mg\sin\theta-m\omega^2r\cos\theta+F_f=0$

沿垂直于斜面的方向：$F_N-mg\cos\theta-m\omega^2r\sin\theta=0$

木块刚好滑动时有

$$F_f=\pm\mu F_N$$

其中的“+”号对应木块有沿斜面向上的运动趋势；“-”号对应木块有沿斜面向下的运动趋势，此种情况对应圆盘的最小角速度情况。

联立解得

$$\omega=\sqrt{\frac{\sin\theta-\mu\cos\theta}{\cos\theta+\mu\sin\theta}\cdot\frac{g}{r}}=3.2\ \text{rad/s}$$

3-13. 一辆汽车驶入曲率半径为 R 的弯道，弯道倾斜一角度 θ，车轮与路面之间的摩擦因数为 μ。求汽车在路面上不侧向滑动时的最大和最小速度。

解：以汽车为参考系（匀角速转动的非惯性系），设沿斜面向上和垂直斜面向上分别为 x 轴、y 轴的正方向，加上水平方向的 $m\frac{v^2}{R}$ 惯性离心力后，汽车处于

平衡状态。对汽车应用平衡条件：

x 轴方向：$F_f-mg\sin\theta+m\dfrac{v^2}{R}\cos\theta=0$

y 轴方向：$F_N-m\dfrac{v^2}{R}\sin\theta-mg\cos\theta=0$

不侧向滑动的极值条件为

$$F_f=\pm F_N\mu$$

联立可得

$$\sqrt{\frac{\sin\theta-\mu\cos\theta}{\cos\theta+\mu\sin\theta}gR}\leqslant v\leqslant\sqrt{\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\cos\theta-\mu\sin\theta}gR}$$

此式成立的条件为根号下式子取值为正。若出现负值情况，可作如下分析：

如果 $\mu>\tan\theta$，但 $\mu<\cot\theta$，则速度只需满足 $v\leqslant\sqrt{\dfrac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\cos\theta-\mu\sin\theta}gR}$；

如果 $\mu<\tan\theta$，但 $\mu>\cot\theta$，则速度只需满足 $v\geqslant\sqrt{\dfrac{\sin\theta-\mu\cos\theta}{\cos\theta+\mu\sin\theta}gR}$；

如果 $\mu>\tan\theta$ 且 $\mu>\cot\theta$，则对速度没有要求。

3-14. 一半顶角为 α 的竖直倒立圆锥面，圆锥面以恒定的角速度 ω 绕其对称轴旋转。在圆锥内表面距轴为 r 处有一质点。

（1）若圆锥面内表面光滑，要使质点随锥面一起匀速转动，即与锥面相对静止，求 ω 的值；

（2）若质点与锥面间的摩擦因数为 μ，为使质点相对锥面静止，求 ω 的范围。

解：（1）以圆锥面为参考系（匀角速转动的非惯性系），以质点为研究对象，对质点加上水平方向的惯性离心力 $m\omega^2r$ 后，对质点应用牛顿第二定律有

水平方向：$F_N\cos\alpha=m\omega^2r$

竖直方向：$F_N\sin\alpha=mg$

联立解得

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{r}\cot\alpha}$$

（2）设沿圆锥面向上和垂直圆锥面向上为相互垂直的 x 轴、y 轴正方向，并设圆锥面给质点的静摩擦力向上，对质点应用牛顿第二定律有

x 轴方向：$F_f+m\omega^2r\sin\alpha-mg\cos\alpha=0$

y 轴方向：$F_N-m\omega^2r\cos\alpha-mg\sin\alpha=0$

静摩擦力的极值条件为

$$F_f=\pm F_N\mu$$

联立得

$$\sqrt{\frac{g}{r}\left(\frac{\cot\alpha-\mu}{1+\mu\cot\alpha}\right)}\leqslant\omega\leqslant\sqrt{\frac{g}{r}\left(\frac{\cot\alpha+\mu}{1-\mu\cot\alpha}\right)}$$

上式根号下式子如果出现负值情况，可参考 3-13 题情况讨论。

3-15. 质量分别为 m 及 m'的两个质点，用未伸缩时长度为 a 的弹性绳相连，绳的劲度系数 $k=\dfrac{2mm'\omega^2}{m+m'}$。将此系统放在光滑的水平管内，管子绕通过管上某点的竖直轴以恒定角速度 ω 转动。开始时，两质点相对于管子是静止的，两质点间距为 a。试求此后任何时刻两质点间的距离。

解：以水平管为参考系（匀角速转动的非惯性系），以转轴处为坐标原点，沿管径向方向为 x 轴，以 m、m'两质点为研究对象。设质点 m、m'均在转轴的一侧，且位于 x 轴的正半轴一侧，m 在靠近转轴一侧，并设 m 距离转轴的坐标为 x，两质点之间的距离为 s，则质点 m'距离转轴的坐标为 $x+s$。分别以两个质点为研究对象，加上径向的惯性离心力 $m\omega^2x$、$m'\omega^2(x+s)$后，对两个质点分别应用牛顿第二定律有

对质点 m：$m\ddot{x}=m\omega^2x+k(s-a)$

对质点 m'：$m'(\ddot{x}+\ddot{s})=m'\omega^2(x+s)-k(s-a)$

上述两式联合，并注意题给条件 $k=\dfrac{2mm'\omega^2}{m+m'}$，整理得

$$\ddot{s}+\omega^2s=2\omega^2a$$

该式的通解为

$$s=2a+A\cos(\omega t+\alpha)$$

由初始条件 $t=0$ 时，$s=a$，$\dot{s}=0$，可定出

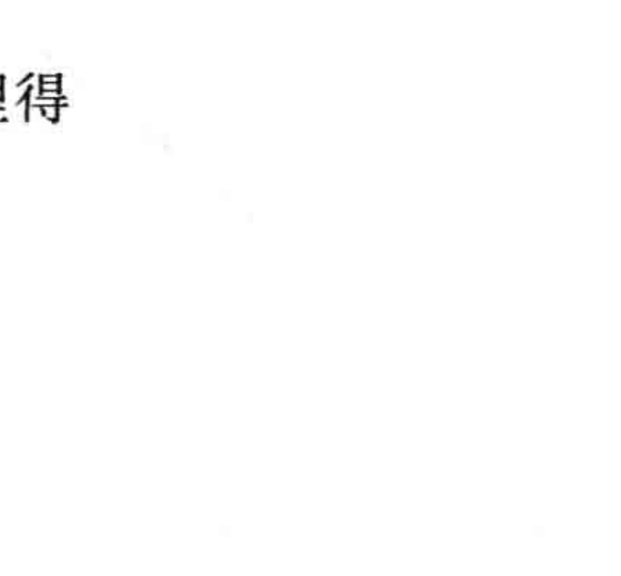
$$A=a,\alpha=\pi$$

即两质点的距离关系为

$$s=2a+a\cos(\omega t+\pi)=2a-a\cos\omega t$$

对于 m、m'处于转轴两侧的情况，同样分析可得与上述相同的结果。

3-16. 质量为 m 的小环套在半径为 a 的光滑圆圈上，可在其上滑动。如圆圈在水平面内以恒定角速度 ω 绕圈上某点 O 转动，转轴垂直于水平面，如习题 3-16 图所示，试求小环沿圆圈切线方向的运动微分方程。



习题 3-16 图

解：如习题 3-16 图所示，以转动的圆圈为参考系（匀角速转动的非惯性系）。以圆圈中心 C 为

原点，取 OC 的延长线为极轴。以小环为研究对象，小环受力分析为：圆圈给小环的作用力 F_N，沿 r 的径向向外；小环所受惯性离心力，沿 r' 的径向向外；小环所受的科里奥利力，沿 r 的径向向内。在垂直 r 方向，即圆圈的切线方向，对小环应用牛顿第二定律有

$$-m\omega^2 r'\sin\frac{\varphi}{2}=ma_\varphi=m(2\dot{r}\,\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi})$$

对于本题，

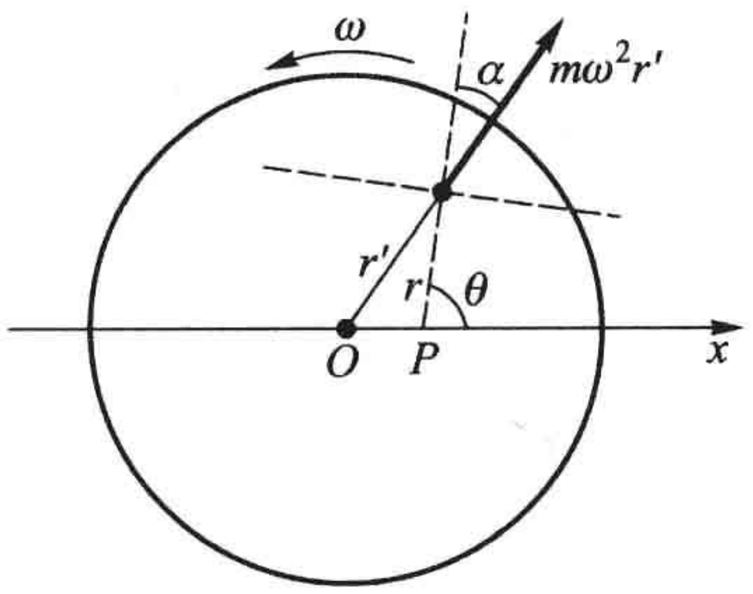
$$r=a,\ \dot{r}=0,\ r'=2a\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

联立整理得

$$\ddot{\varphi}+\omega^2\sin\varphi=0$$

3-17. 质量为 m 的小球置于光滑水平台面，用长为 l 的细绳系于台面上的 P 点，水平台面绕着过 O 点的竖直轴以恒定角速度 ω 旋转，P 点与 O 点的距离为 d。试列出小球的运动方程。设在小球运动过程中，绳始终保持拉直状态。

解：如习题 3-17 图所示，台面绕过 O 点垂直纸面的轴匀角速转动。以转动的台面为参考系（匀角速转动的非惯性系）。以 P 为坐标原点，OP 连线为极坐标轴。以小球为研究对象，对小球加上 r' 径向向外的惯性离心力 $F_{离}=m\omega^2 r'$ 以及科里奥利力后可对小球应用牛顿第二定律。由于绳不可伸长，因此小球相对圆盘的速度方向一定垂直于 r，与 ω 转动引起的线速度的方向相反。因此，由科里奥利力 $\boldsymbol{F}_{科}=2m\boldsymbol{v}_{相}\times\boldsymbol{\omega}$ 的定义以及习题 3-17 图所示的几何关系可判定：小球所受科里奥利力的方向沿 r 径向指向 P 点，大小为 $F_{科}=2mv_{相}\omega=2mr\dot{\theta}\,\omega$。对小球沿极坐标轴的横向（垂直 r 方向）应用牛顿第二定律有



习题 3-17 图

$$-m\omega^2 r'\sin\alpha=ma_\theta=m(2\dot{r}\,\dot{\theta}+r\ddot{\theta})$$

对于本题，

$$r=l,\ \dot{r}=0$$

由习题 3-17 图所示的几何关系知

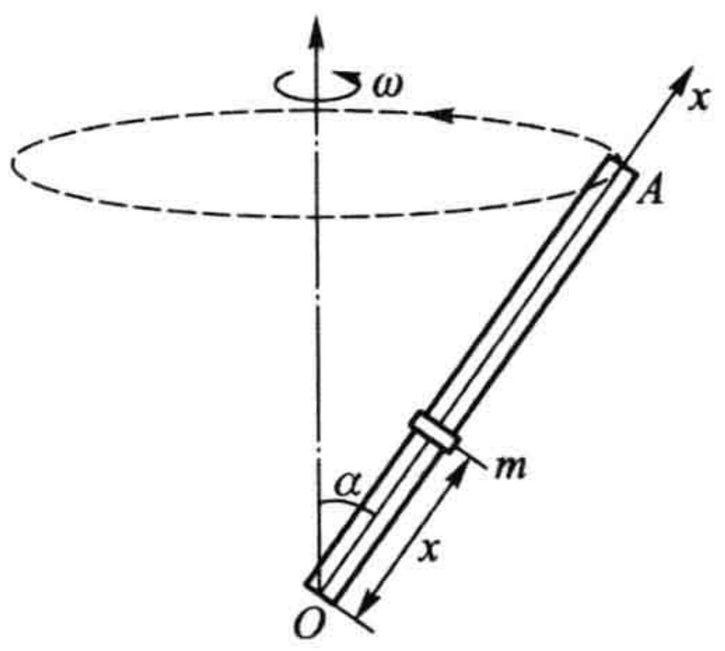
$$\frac{\sin\alpha}{OP}=\frac{\sin(\pi-\theta)}{r'}$$

其中 $OP=d$，整理得

$$\ddot{\theta}l+\omega^2 d\sin\theta=0$$

式中 θ 为细绳与 PO 连线的夹角。

3-18. 一圆柱形刚性杆 OA 上套有一质量为 m 的小环，杆的一端固定，整个杆绕着通过固定端 O 的竖直轴以恒定的角速度旋转，旋转时杆与竖直方向的夹角 α 保持不变。设小环与杆之间的摩擦因数为 μ，已知当小环相对杆运动到习题 3-18 图所示的位置 x 时，其相对于杆的速度为 $\dot{x}$，试列出此时小环沿杆的运动方程。（不要求解出此方程）



习题 3-18 图

解：设沿杆向上、垂直杆向上、垂直纸面向外分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向。以杆为参考系（匀角速转动的非惯性系），对小环加上水平方向的惯性离心力 $m\omega^2 x\sin\alpha$，及 z 轴方向的科里奥利力 $2m\dot{x}\omega\sin\alpha$ 后，沿杆的径向（x 轴方向）应用牛顿第二定律有

$$m\ddot{x}=m\omega^2 x\sin^2\alpha-mg\cos\alpha\pm F_N\mu$$

其中

$$F_N=\sqrt{F_{Ny}^2+F_{Nz}^2}$$

$$F_{Ny}=m\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha+mg\sin\alpha$$

$$F_{Nz}=2m\dot{x}\omega\sin\alpha$$

联立得

$$F_N=\sqrt{(mg\sin\alpha+m\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha)^2+(2m\omega\dot{x}\sin\alpha)^2}$$

所求方程为

$$m\ddot{x}=m\omega^2 x\sin^2\alpha-mg\cos\alpha\pm F_N\mu$$

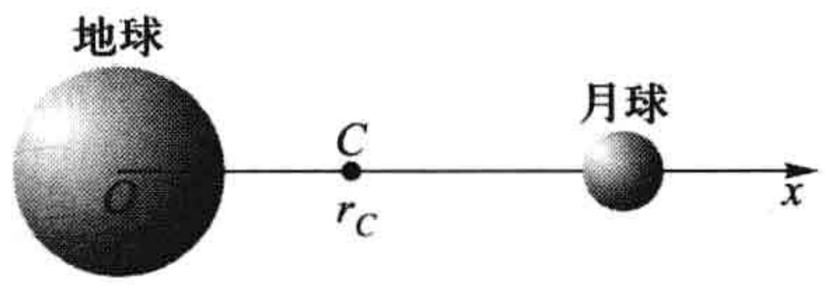
公式中的“±”号分别对应小环沿 x 轴负、正方向运动时的摩擦力方向。

第二篇　运动定理(原理)与守恒定律

第四章　动量定理与动量守恒定律

课后作业题

4-1. 地球的质量是月球的 81 倍。地球和月球的中心相距 3.84×10^8 m,求地球和月球组成的系统的质心与地球中心的距离。



习题 4-1 图

解:如习题 4-1 图所示,取地心为原点,地心指向月心的方向为 x 轴方向。由质心计算公式可知

$$r_C=\frac{m_{地}\cdot 0+m_{月}\cdot l}{m_{地}+m_{月}}=\frac{m_{月}\cdot l}{81m_{月}+m_{月}}=\frac{l}{82}=4.68\times10^6\ \text{m}$$

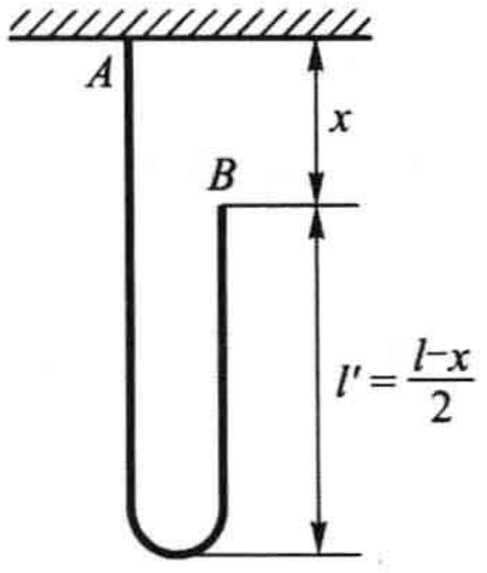
4-2. A、B、C 三质点在某一时刻的位置坐标分别为:(-3,4,3)、(3,-8,6)、(1,2,-1),坐标以 m 为单位,B 的质量是 A 的两倍,而 C 的质量是 A 的三倍。求此时由此三质点组成的体系的质心的位置。

解:根据题中给定的坐标系,由质心计算公式可知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_C&=\frac{m_A\cdot\boldsymbol{r}_A+m_B\cdot\boldsymbol{r}_B+m_C\cdot\boldsymbol{r}_C}{m_A+m_B+m_C}=\frac{m_A\cdot\boldsymbol{r}_A+2m_A\cdot\boldsymbol{r}_B+3m_A\cdot\boldsymbol{r}_C}{m_A+2m_A+3m_A}\\&=\frac{\boldsymbol{r}_A+2\boldsymbol{r}_B+3\boldsymbol{r}_C}{6}\end{aligned}$$

将已知数据代入可求得质心的坐标为(1,-1,2)。

4-3. 长为 l、线密度为 ρ_l 的柔软绳索,原先两端点 A、B 并合一起,悬挂在支点上,现让 B 端脱离支点自由下落,求当 B 端下落了 x 时,支点上所受的力 F_T。



习题 4-3 图

解:如习题 4-3 图所示,以支点的位置(即 A 点)为原点,竖直向下为正方向,建立坐标系。对全绳应用质心运动定理可得

$$mg-F_{\mathrm{T}}=ma_C$$

其中

$$m=l\cdot\rho_l$$

当 B 端下落了 x 时,质心位置为

$$r_C=\frac{\frac{(l+x)}{2}\rho_l\cdot\frac{(l+x)}{4}+\frac{(l-x)}{2}\left(\frac{l-x}{4}+x\right)\rho_l}{l\rho_l}=-\frac{x^2}{4l}+\frac{x}{2}+\frac{l}{4}$$

B 端自由下落:

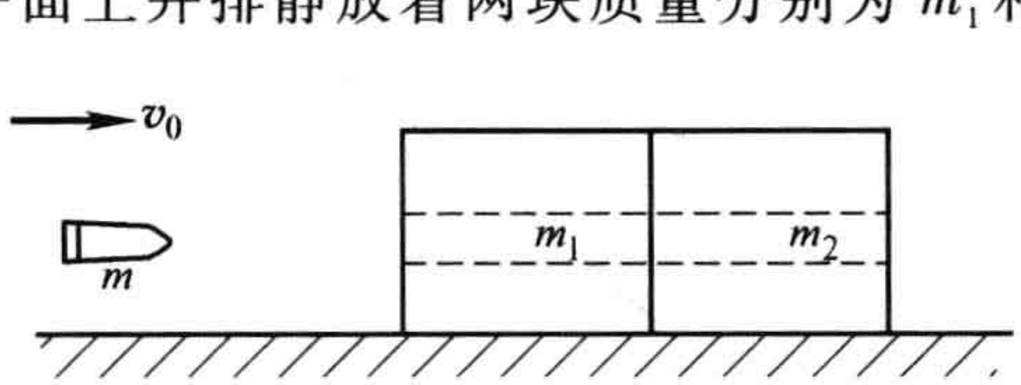
$$x=\frac{1}{2}gt^2$$

联立解得 $r_C=-\frac{\frac{1}{4}g^2t^4}{4l}+\frac{gt^2}{4}+\frac{l}{4}$

$$a_C=\ddot{r}_C=-\frac{3g^2t^2}{4l}+\frac{g}{2}=\frac{g}{2}\left(1-\frac{3x}{l}\right)$$

$$F_{\mathrm{T}}=mg-ma_C=\frac{l+x}{2}\rho_lg+\rho_lxg$$

4-4. 如习题 4-4 图所示,光滑水平面上并排静放着两块质量分别为 m_1 和 m_2 的木块。一质量为 m 的子弹以初速度 v_0 水平射向两木块,射穿两木块后以 v' 的速度沿原方向运动。求两木块的速度 v_1 和 v_2。设子弹在两木块中受到的阻力(可视为恒力)相等,而穿过 m_1 所用的时间为穿过 m_2 所用时间的一半。



习题 4-4 图

解:子弹穿入木块 m_1 时,两木块同速,设此时子弹速度为 v_1',两木块速度为 v_{20},子弹穿入木块 m_2 后,m_1 以 v_{20} 匀速运动,所以 $v_1=v_{20}$。

从子弹入射到刚好穿过第一木块过程中,子弹与两木块系统动量守恒:

$$mv_0=mv_1'+(m_1+m_2)\,v_{20}$$

对子弹应用动量定理:

$$-F_{\mathrm{f}}t=mv_1'-mv_0$$

从子弹入射到刚好穿过第二木块过程中,子弹与两木块系统动量守恒:

$$mv_0=mv'+m_1v_1+m_2v_2$$

对子弹应用动量定理:

$$-F_{\mathrm{f}}(t+2t)=mv'-mv_0$$

联立求得

$$v_1=\frac{m(v_0-v')}{3(m_1+m_2)},v_2=\frac{(2m_1+3m_2)m}{3(m_1+m_2)m_2}(v_0-v')$$

4-5. 一块长为 L 的大平板静放在光滑水平冰面上，一小孩骑着儿童自行车以 v_0 的速度从板的一端驶上平板，在板上他的速度忽快忽慢，在将近板的另一端时，他相对板的速度为 u。此时，他忽然刹车，在板的另一端边缘车相对板静止。已知人在板上骑车的时间为 t，板的质量为 m_0，小孩与车一起的质量为 m。试求：

（1）刹车前瞬时板的速度；

（2）车相对板刚静止时板的位移。

解：（1）以小孩刚上板处小孩所在的位置为坐标原点，以 v_0 的方向为正方向，设刹车前瞬时板的速度为 v，在驶上平板到刹车之前，人、车和板组成的系统水平方向动量守恒：

$$mv_0+0=m_0v+m(v+u)$$

整理解得

$$v=\frac{m(v_0-u)}{m_0+m}$$

（2）人、车和板组成的系统动量守恒，质心速度不变，

$$v_C=\frac{mv_0+m_0\cdot 0}{m_0+m}=\frac{mv_0}{m_0+m}$$

质心做匀速运动。

以小孩从一端刚好驶上板以及车相对板刚静止时为系统的始末态，设板的初始坐标和移动的位移分别为 x_0、Δx，则板的末态坐标为 $x_0+\Delta x$，人和车的始末坐标分别为 $x_0-\frac{1}{2}L$、$x_0+\Delta x+\frac{1}{2}L$，则系统质心位移为

$$\Delta x_C=x_{Ct}-x_{C0}=v_C\cdot t$$

即

$$\frac{m_0(x_0+\Delta x)+m(x_0+\Delta x+\frac{1}{2}L)}{m_0+m}-\frac{m_0x_0+m(x_0-\frac{1}{2}L)}{m+m_0}=\frac{mv_0}{m_0+m}t$$

解得

$$\Delta x=\frac{m(v_0t-L)}{m_0+m}$$

4-6. 两个质量分别为 m_1 和 $m_2(m_1>m_2)$ 的人身高相同，他们同时以相同的速率竖直上跳，在空中二人用力互推。若胖人的落地点距起跳点为 s，则瘦人的落地点距起跳点多远？

解：以两人组成的系统为研究对象，已知两人竖直方向的运动同步，空中互推过程中水平方向动量守恒：

$$0=m_1v_1+m_2v_2$$

由于两人互推瞬时在同一高度处,因此两人互推后瞬时到落地时间相同,设为 t,则

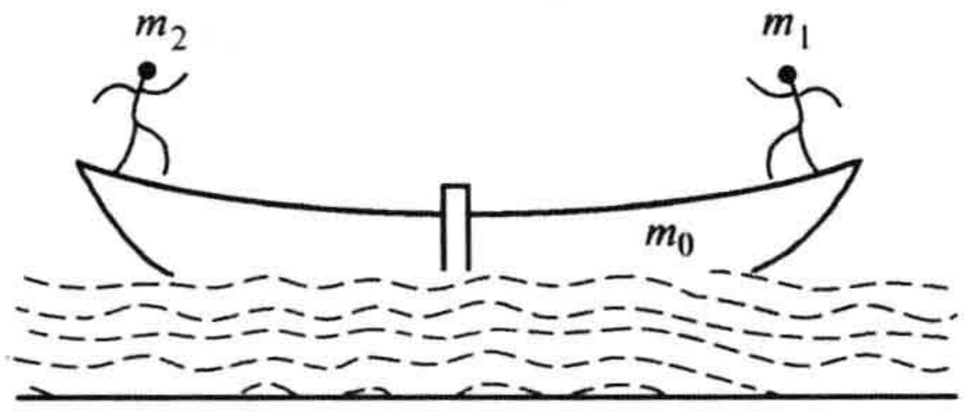
$$s=|v_1\cdot t|,s'=|v_2\cdot t|$$

联立可得 $s'=\dfrac{m_1}{m_2}s$

4-7. 质量为 m_0,长为 l 的小船静浮于河中,小船两头分别站着质量为 m_1 和 $m_2(m_1>m_2)$ 的人,他们同时相对船以相同的速率 u 走向原位于船正中,但固定在河中的木桩,如习题 4-7 图所示。若忽略水对船的阻力作用,试问:

(1) 谁先走到木桩处?

(2) 他用了多少时间?



习题 4-7 图

解:(1) 以 m_2 的运动方向为正方向,设当两人之一走到木桩处时,船速为 v,则 m_1、m_2 相对于地面的速度分别为

$$v_1=v-u,v_2=v+u$$

两人和船组成的系统动量守恒:

$$0=m_0v+m_1v_1+m_2v_2$$

解得

$$v=\frac{(m_1-m_2)u}{m_0+m_1+m_2}>0,v_1=-\frac{(m_0+2m_2)u}{m_0+m_1+m_2},v_2=\frac{(m_0+2m_1)u}{m_0+m_1+m_2}$$

由此可以看出,$|v_1|<|v_2|$,即 m_2 先到。

(2) 由(1)结果可得

$$t=\frac{\frac{l}{2}}{v_2}=\frac{(m_0+m_1+m_2)l}{2(m_0+2m_1)u}$$

4-8. 一质量为 m_1 的杂技演员,从蹦床上沿竖直方向跳起。当他上升到某一高度时,迅速抱起边上栖木上的质量为 m_2 的猴子,结果他又上升了相同的高度然后落下。试求此种情况下杂技演员所能上升的高度 h 与他不抱猴子所能达到的最大高度 h_0 之比。

解:设杂技演员从蹦床上跳起时速度为 v_0,不抱猴子时,上升到最高点过程中机械能守恒:

$$\frac{1}{2}m_1v_0^2=m_1gh_0$$

设杂技演员抱猴子前的速度为 v_1,上升高度为 h_1,依题意抱起猴子之后还能上升的高度也为 h_1,总的上升高度为

$$h=2h_1$$

抱起猴子之前机械能守恒：

$$\frac{1}{2}m_1v_0^2=m_1gh_1+\frac{1}{2}m_1v_1^2$$

抱起猴子的过程中，人和猴子竖直方向动量守恒：

$$m_1v_1=(m_1+m_2)v_2$$

抱起猴子后到上升到最高点过程机械能守恒：

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_2^2=(m_1+m_2)gh_1$$

联立上面各式求得

$$\frac{h}{h_0}=\frac{2h_1}{h_0}=\frac{2m_1^2}{m_1^2+(m_1+m_2)^2}$$

4-9. 一火箭竖直向上发射，当它达到最高点时炸裂成三个等质量的碎片，观察到其中一块碎片经时间 t_1 竖直地落到地上，而其他两块碎片在炸裂后的 t_2 时刻落在地上，求火箭炸裂时离地面的高度。

解：火箭到达最高点时，速度为零，炸裂成三块，只有内力作用，质点系动量守恒：

$$m_1v_1+m_2v_2+m_3v_3=0$$

根据题意

$$m_1=m_2=m_3$$

可得

$$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3=0$$

取 z 轴沿竖直方向，原点在炸裂处，竖直向下为正方向。在竖直方向动量守恒：

$$v_{1z}+v_{2z}+v_{3z}=0$$

设炸裂处离地面的高度为 h，则

$$h=v_{1z}t_1+\frac{1}{2}gt_1^2,\ h=v_{2z}t_2+\frac{1}{2}gt_2^2,\ h=v_{3z}t_2+\frac{1}{2}gt_2^2$$

联立可得 $h=\dfrac{gt_1t_2(t_1+2t_2)}{2(2t_1+t_2)}$

4-10. 将一空盒放在秤盘上，并将秤的读数调整到零，然后从高出盒底 h 处将小钢珠以每秒 B 个的速率由静止开始掉入盒内，每一小钢珠的质量为 m。若钢珠与盒底碰撞后即静止，忽略小球在空中的时间，试求自钢珠落入盒内起，经过时间 t 后秤的读数。

解：对 t 到 $t+\Delta t$ 时间内落入秤盘的钢珠 Δm 应用动量定理：

$$(F-\Delta mg)\,\Delta t=\Delta m\cdot 0-\Delta m(-\sqrt{2gh})$$

解得下落钢珠对秤盘的冲击力为

$$F=\frac{\Delta m}{\Delta t}\sqrt{2gh}+\Delta mg\approx B\cdot m\cdot\sqrt{2gh}$$

经过时间 t 后秤盘受力为落下钢珠的重力与冲击力之和,即 $mgBt+mB\sqrt{2gh}$,则秤盘的读数为$\left(mgBt+mB\sqrt{2gh}\right)/g$。

4-11. 由喷泉中喷出的水柱,把一个质量为 m 的垃圾桶倒顶在空中。水以恒定的速率 v_0从面积为 S 的小孔中喷出,射向空中,在冲击垃圾桶桶底以后,有一半的水吸附在桶底,并顺内壁流下,其速度可忽略,而另一半则以原速竖直溅下。求垃圾桶停留的高度 h。

解:以地面为参考系,设竖直向下为正方向,以 m 为研究对象,由 m 受力平衡知

$$mg=[u_1-(-v)]\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t}+[u_2-(-v)]\frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}t}$$

其中 v 为水柱的速度,$u_1=0$ 为顺内壁流下的水的速度,$u_2=v$ 为水冲击垃圾桶底时的流速,且

$$\mathrm{d}m=\rho Sv_0\mathrm{d}t,\mathrm{d}m_1=\mathrm{d}m_2=\frac{1}{2}\mathrm{d}m$$

$\mathrm{d}m$ 与地球构成的系统机械能守恒:

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}mv_0^2=\frac{1}{2}\mathrm{d}mv^2+\mathrm{d}mgh$$

联立解得

$$h=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{2m^2g}{9\rho^2v_0^2S^2}$$

4-12. 一质量为 m_0(无水时)的水桶开始时处于静止状态,桶中装有质量为 m 的水,通过一根绳子施以恒力 F 将桶从井中提上来,桶中的水以恒定的质量速率从桶中漏出来,经过时间 t 桶变成空的。求变成空桶的瞬间桶的速度。

解:设竖直向上为正方向,以桶及桶中的水为研究系统,系统在 t_i时刻的质量为$\left(m_0+m-\frac{m}{t}t_i\right)$,根据变质量质点的运动方程有

$$F+u'\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t_i}-\left(m_0+m-\frac{m}{t}t_i\right)g=\left(m_0+m-\frac{m}{t}t_i\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t_i}$$

其中,$t_i=0$ 时,系统质量为 m_0+m,桶中的水以不变的速率从桶中漏出,说明$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t_i}$为常量,水从桶中漏出时对桶的相对速度 u'为零。

对上式整理积分可得,$t_i=t$ 时水桶的速度为

$$v=\int_0^v\mathrm{d}v=\int_0^t\left(\frac{F}{m_0+m-\frac{m}{t}t_i}-g\right)\mathrm{d}t_i=\frac{Ft}{m}\ln\left(\frac{m_0+m}{m_0}\right)-gt$$

自检练习题

4-13. 求均质的内外半径分别为 a 和 b 的半球壳的质心。

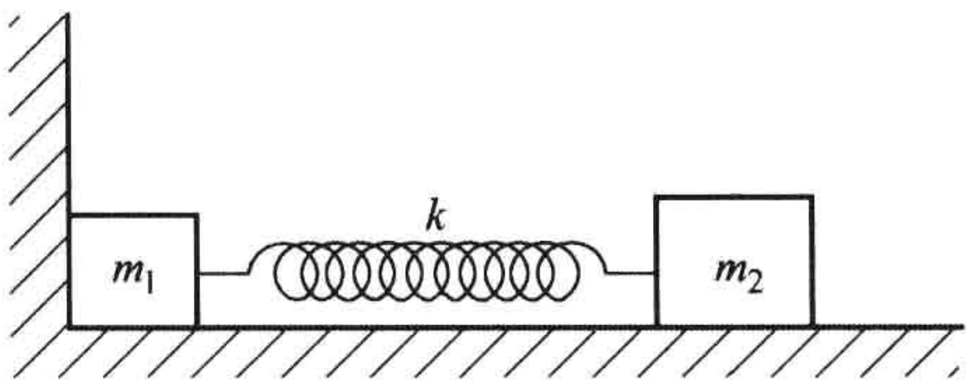
解：采用球坐标，取球心为原点，对称轴为 z 轴，根据对称性可以判断质心位于 z 轴上，即 $x_C=0, y_C=0$。设半球壳密度为 ρ，则位于 $r\sim r+\mathrm{d}r$、$\theta\sim\theta+\mathrm{d}\theta$、$\varphi\sim\varphi+\mathrm{d}\varphi$ 的质元的质量为 $\mathrm{d}m=\rho r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$，此质元的 z 轴坐标为 $z=r\cos\theta$，由质心计算公式可知

$$z_C=\frac{\int z\mathrm{d}m}{\int\mathrm{d}m}=\frac{\iiint r\cos\theta\cdot\rho r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{\iiint\rho r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}$$

$$=\frac{\int_a^b r^3\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi}{\int_a^b r^2\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}(b^4-a^4)\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{2}\times2\pi}{\frac{1}{3}(b^3-a^3)\times1\times2\pi}=\frac{3(a+b)(a^2+b^2)}{8(a^2+ab+b^2)}$$

4-14. 在光滑的水平面上有两个质量分别为 m_1 和 m_2 的物体。它们中间用一根原长为 l，劲度系数为 k 的弹簧相连，如习题 4-14 图所示。开始时，将 m_1 紧靠墙，并将弹簧压缩至原长的 $\frac{1}{2}$，然后将 m_2 释放。若以 m_1、m_2 和弹簧为系统，试求：



习题 4-14 图

（1）系统质心的加速度随时间的变化关系；

（2）系统质心的速度最大值。

解：（1）将 m_1 和 m_2 看成一个系统，设质心加速度为 a_C。由质心运动定理得

$$F=(m_1+m_2)a_C$$

以弹簧原长时 m_2 所在位置为原点，即离墙壁距离为 l 的点为 x 的零点，水平向右为正方向建立坐标系，对 m_2 应用牛顿第二定律得

$$F=-kx=m_2\ddot{x}$$

整理得

$$\ddot{x}+\frac{k}{m_2}x=0$$

其解为

$$x=A\cos\left(\omega t+\varphi\right),\omega=\sqrt{\frac{k}{m_2}}$$

由初始条件:$t=0,x=-\frac{l}{2},\dot{x}=0$,可确定

$$A=\frac{l}{2},\varphi=\pi$$

所以

$$x=-\frac{l}{2}\cos\sqrt{\frac{k}{m_2}}t,\dot{x}=\frac{l}{2}\sqrt{\frac{k}{m_2}}\sin\sqrt{\frac{k}{m_2}}t$$

由此得

$$v_C=\frac{m_1\cdot 0+m_2\dot{x}}{m_1+m_2}$$

$$a_C=\dot{v}_C=\frac{m_2\ddot{x}}{m_1+m_2}=\frac{kl}{2(m_1+m_2)}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_2}}t\right)$$

弹簧恢复原长时 $x=0$,可确定时间为 $t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m_2}{k}}$,当弹簧恢复原长后,系统不受外力作用,$F=0$,则

$$a_C=\frac{F}{m_1+m_2}=\begin{cases}\dfrac{kl}{2(m_1+m_2)}\cos\sqrt{\dfrac{k}{m_2}}t, & t\leqslant\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m_2}{k}}\\ 0, & t>\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m_2}{k}}\end{cases}$$

(2) 由(1)中的分析可知:

$$v_C=\frac{m_1\cdot 0+m_2\dot{x}}{m_1+m_2}$$

$$\dot{x}=\frac{l}{2}\sqrt{\frac{k}{m_2}}\sin\sqrt{\frac{k}{m_2}}t$$

当弹簧恢复原长时,质心速度达到最大值,此时

$$t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m_2}{k}}$$

联立解得

$$v_C=\frac{m_1\cdot 0+m_2\dot{x}}{m_1+m_2}=\frac{l\sqrt{km_2}}{2(m_1+m_2)}$$

4-15. 一圆锥摆的摆线长为 l，摆锤的质量为 m，圆锥的半顶角为 α。试求当摆锤从习题 4-15 图中位置 A 沿圆周匀速运动到位置 B 的过程中张力的冲量。

解：设绳中张力为 F，摆锤的运动周期为 T。对摆锤应用牛顿第二定律：

竖直方向：$F\cos\ \alpha = mg$

水平方向：$F\sin\ \alpha = m\dfrac{v_0^2}{R}$

其中 $R = l\cdot\sin\ \alpha$，又知 $2\pi R = v_0 T$，从 A 到 B 位置对摆锤应用动量定理：

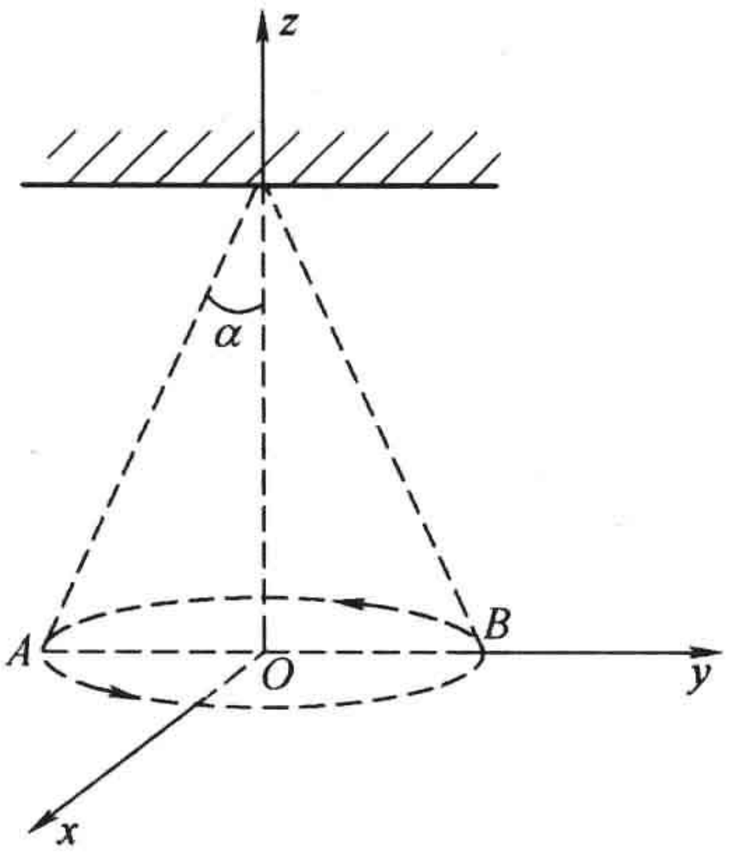
$$\boldsymbol{I}_{mg} + \boldsymbol{I}_F = (-mv_0\boldsymbol{i}) - mv_0\boldsymbol{i}$$

即

$$-mg\frac{T}{2}\boldsymbol{k} + \boldsymbol{I}_F = -2mv_0\boldsymbol{i}$$

解得

$$\boldsymbol{I}_F = -2m\sin\ \alpha\sqrt{\frac{lg}{\cos\ \alpha}}\boldsymbol{i} + m\pi\sqrt{lg\cos\ \alpha}\boldsymbol{k}$$



习题 4-15 图

4-16. 两质量皆为 m_0 的冰车头尾相接地静止在光滑的水平冰面上。一质量为 m 的人从一车跳到另一车，然后再跳回。试证明：两冰车的末速度之比为 $\dfrac{m_0+m}{m_0}$。

解：不论人如何跳，两车与人构成的系统动量守恒。设最终人所在的车的速度为 v_1，另一车速度为 v_2。由动量守恒得

$$(m_0+m)v_1 = m_0 v_2$$

则

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_0}{m_0+m}$$

即人所在的车速度小。

4-17. 如习题 4-17 图所示，质量为 m 的物体从静止下落 y 后开始拉起质量为 $m_0(m_0>m)$ 的物体。两物体通过一根很轻且不可伸长的细绳相连并挂在一固定的光滑滑轮上。(1) 求物体 m_0 返回原来位置所用的时间；(2) 求物体 m_0 被拉起运动时系统减少的动能与原动能的比值。

解：(1) 如习题 4-17 图所示，以质量分别为 m 和 m_0 的物体构成的系统为研究对象，$v=\sqrt{2gy}$ 为物体 m 在绳拉紧前的速率，v' 为绳刚好拉紧后系统的速率（两物体共同的速率）。忽略作用过程中两物体的重力作用，绳中的张力为 F，

绳子拉紧前后瞬间,分别对 m_0 和 m 应用动量定理(竖直向下为正方向):

对 m_0 : $-F\Delta t=m_0(-v')-0$

对 m : $-F\Delta t=mv'-mv$

对系统应用牛顿第二定律:

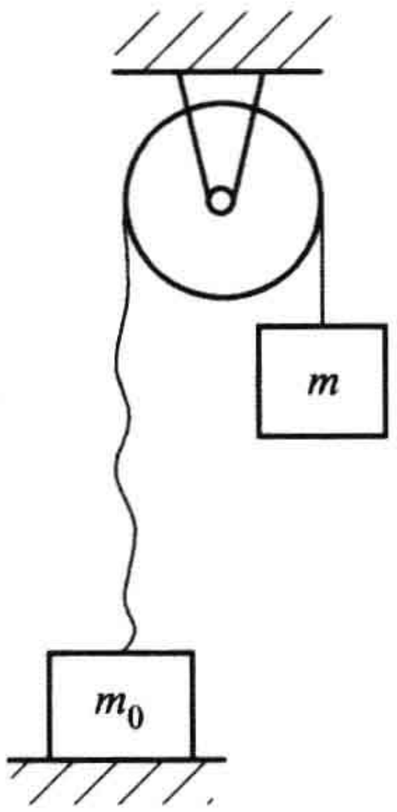
$$mg-m_0g=(m_0+m)\,a$$

运用匀加速运动的公式

$$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

得出系统回到原处所用的时间满足

$$0=v't+\frac{1}{2}at^2$$



习题 4-17 图

联立解得

$$t=\frac{2m}{m_0-m}\sqrt{\frac{2y}{g}}$$

(2) 系统减少的动能与原动能的比值为

$$\frac{\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}(m_0+m)\,v'^2}{\frac{1}{2}mv^2}=\frac{m_0}{m_0+m}$$

4-18. 质量为 m_0 的人手里拿着一个质量为 m 的物体,以 v_0 的初速度向与地平线成 α 角的方向跳去,当他达到最高点时,将物体以相对速度 u 水平向后抛出。问由于物体的抛出,人向前跳出的距离增加了多少?

解: 设竖直向下和人水平运动的方向为正方向。人到达最高点时具有水平方向的速度为

$$v_1=v_0\cos\,\alpha$$

从人起跳至最高点将球抛出后瞬时的过程中,以人和物体为研究对象,则

竖直方向动量定理: $(m_0+m)gt=0-[-(m_0+m)v_0\sin\,\alpha]$

水平方向动量守恒: $(m_0+m)v_1=m_0v_2+m(v_2-u)$

由竖直方向的运动知,人下落时间和上升时间相同,则人向前跳出的距离增加量为

$$\Delta s=(v_2-v_1)t$$

联立以上各式可得

$$\Delta s=\frac{mu}{m_0+m}t=\frac{muv_0\sin\,\alpha}{(m_0+m)g}$$

4-19. 一质量为 m 的男孩站在质量为 m_0 的雪橇上以恒定的速度 v_i 在冰面上滑行。若男孩沿与 v_i 相反的方向在雪橇上跑动,在离开雪橇末端时相对于雪

橇的速率为 v。求雪橇相对于冰面的末速度。

解：设雪橇相对于冰面的末速度为 v_f，则男孩跳离雪橇时相对于冰面的末速度为 v_f-v。以冰面为参考系（静系），以男孩和雪橇构成的系统为研究对象，由于无外力作用，因此动量守恒：

$$(m+m_0)\,v_i=m(v_f-v)+m_0v_f$$

解得

$$v_f=v_i+\frac{mv}{m_0+m}$$

4-20. 有 N 个人站在铁路上静止的质量为 m_0 的平板车上，每人的质量均为 m。他们以相对于平板车的速度 u 跳离平板车。设平板车与轨道间无摩擦力。

（1）若所有的人同时跳，则平板车的最终速度是多少？

（2）若他们一个一个地跳，则平板车的最终速度是多少？

（3）以上两种情况中哪一种的最终速度大些？

解：以人和平板车组成的系统为研究对象，水平方向动量守恒。

（1）所有的人同时跳，由动量守恒得

$$m_0v+Nm(v-u)=0$$

整理得平板车的最终速度为

$$v=\frac{Nmu}{m_0+Nm}$$

（2）他们一个一个地跳，列出每一个人跳后瞬间的动量守恒方程：

$$[m_0+(N-1)m]v_1+m(v_1-u)=0$$

$$[m_0+(N-2)m]v_2+m(v_2-u)=[m_0+(N-1)m]v_1$$

$$[m_0+(N-3)m]v_3+m(v_3-u)=[m_0+(N-2)m]v_2$$

……

$$[m_0+0\cdot m]v_N+m(v_N-u)=[m_0+m]v_{N-1}$$

整理得对应的平板车的速度：

$$v_1=\frac{mu}{m_0+Nm}$$

$$v_2=v_1+\frac{mu}{m_0+(N-1)m}$$

$$v_3=v_2+\frac{mu}{m_0+(N-2)m}$$

……

$$v_N=v_{N-1}+\frac{mu}{m_0+m}$$

可见

$$v_N=\frac{mu}{m_0+m}+\frac{mu}{m_0+2m}+\frac{mu}{m_0+3m}+\cdots+\frac{mu}{m_0+Nm}>\frac{Nmu}{m_0+Nm}$$

(3) 由上式中 v_N 的表达式可以看出,第(2)种情况车获得的速度大。

4-21. 一质量 $m_1=50$ kg 的人 A 手里拿着一质量 $m=5.0$ kg 的小球以 $v_1=1.2$ m/s 的速率在光滑冰面上沿直线滑冰,而另一质量 $m_2=45$ kg 的人 B 以 $v_2=0.8$ m/s 的速率向 A 对面滑来,为避免碰撞,A 把球以相对于他的速率 u 向 B 水平抛去,让 B 接住。试问 u 至少应多大?

解: 以两人和小球组成的系统为研究对象,运动过程中动量守恒。两人不相碰的极值条件为:B 接住球后两人有共同的速度,设为 v。整个过程系统动量守恒:

$$(m+m_1)v_1-m_2v_2=(m_1+m_2+m)v$$

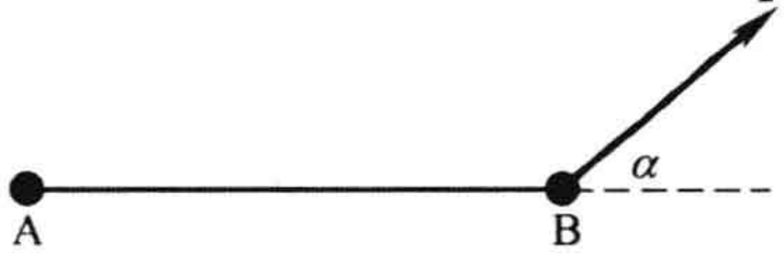
B 接球过程中,B 和球组成的系统动量守恒:

$$m(v+u)-m_2v_2=(m+m_2)v$$

两式联立,代入已知数据可得

$$u=9.9\ \text{m/s}$$

4-22. 质量为 m_A 与 m_B 的两个小球 A 和 B,用不可伸长的轻绳相连,静止在水平面上。绳子拉紧时,给 B 球一个冲量 $\boldsymbol{I}$,$\boldsymbol{I}$ 的方向与 AB 连线成 α 角,$\alpha<\frac{\pi}{2}$,如习题 4-22图所示。已知冲击后的速度 v_B 的大小,求 v_B 的方向和冲量 $\boldsymbol{I}$ 的大小。



习题 4-22 图

解: 设 v_B 的方向与 A、B 连线的夹角为 β,以小球 A 和 B 构成的系统为研究对象,只有内力作用,由动量守恒得

沿 A、B 连线方向:

$$m_Av_A+m_Bv_B\cos\beta=I\cos\alpha$$

沿 A、B 连线垂直方向:$m_Bv_B\sin\beta=I\sin\alpha$

由绳子不可伸长得

$$v_A=v_B\cos\beta$$

联立解得

$$\beta=\arctan\left(\frac{m_A+m_B}{m_B}\tan\alpha\right)$$

$$I=\frac{1}{\sin\alpha}m_Bv_B\sin\beta=\frac{m_B(m_A+m_B)v_B}{\sqrt{m_B^2\cos^2\alpha+(m_A+m_B)^2\sin^2\alpha}}$$

4-23. 如习题 4-23 图所示,漏斗中的煤粉不断地落到速度 $v=1.5$ m/s 的自动传送带上,每秒钟落下的煤粉量为 20 kg。求煤粉作用在传送带上的水平方向的力。

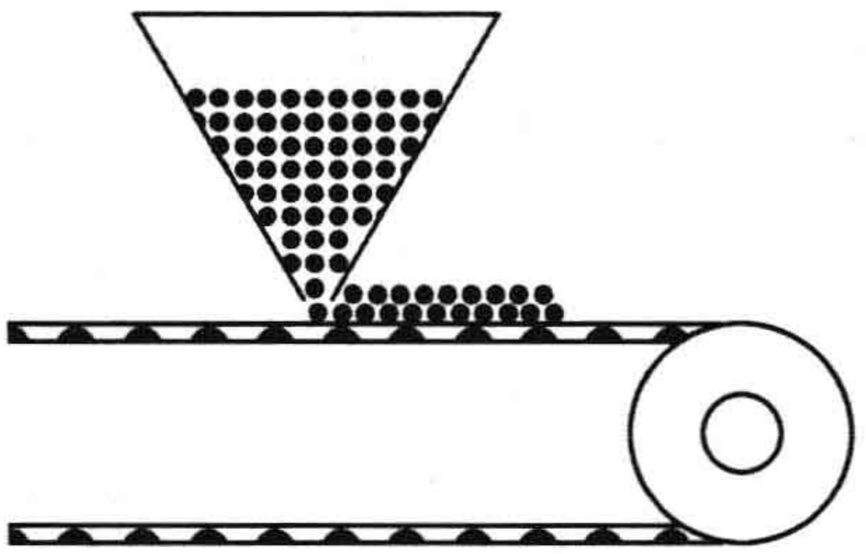
解：以 Δt 时间内落到传送带上的煤粉 Δm 为研究对象，设传送带作用在煤粉上的水平方向的力为 F_x，对 Δm 应用动量定理：

$$F_x \cdot \Delta t = \Delta m v - \Delta m \cdot 0$$

解得

$$F_x = v \cdot \frac{\Delta m}{\Delta t} = 30\ \text{N}$$

则煤粉作用在传送带上的水平方向的力为 30 N。



习题 4-23 图

4-24. 一股横截面积为 S、密度为 ρ、以绝对速度 v_0 在水平方向运动的水流，无弹性地射中一静止在水平面上、质量为 m 的木块，水离开木块时相对于木块的水平速度分量为零。若木块与它在其上滑动的水平面间的摩擦因数为 μ，求木块的最终速度。

解：以木块为研究对象，设木块运动的方向为正方向，t 时刻木块的速度为 v，则水流相对木块的速度为 $v_0 - v$。水流入射到木块的过程为主体吸附附体的过程，水流离开木块时为附体离开主体的过程。依据题意，单位时间内流入和流出木块的水的流量为

$$\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t} = \rho (v_0 - v) S$$

依据题意对木块应用变质量运动方程：

$$(v_0 - v) \frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t} + (v - v) \frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t} - \mu m g = m \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

达到最终速度时有

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$$

联立解得

$$\rho (v_0 - v)^2 S = \mu m g$$

根据题意 $v < v_0$，从而可得木块的最终速度

$$v = v_0 - \left(\frac{\mu m g}{\rho S} \right)^{1/2}$$

4-25. 某人用木桶从深井中打水。木桶的质量为 m_0，刚开始提桶（$t = 0$）时，桶内装有质量为 m 的水，由于桶的底部有一面积为 S 的小洞，桶内的水以相对于桶的恒定速率 u 从洞口流出。

（1）若人以恒定的速率向上提桶，求提桶力随时间的变化关系；

（2）若人以恒力 F 向上提桶，求水桶在时刻 t 的速率。设 $t = 0$ 时桶静止。

解：以地面为参考系，竖直向上为正方向，以木桶以及其中的水为研究

对象。

(1) 设提桶力为 F,水的密度为 ρ,根据变质量质点的运动方程有

$$F-(m_0g+mg-\rho Stug)+u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=0,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\rho Su$$

解得

$$F=(m_0+m-uS\rho t)g-u^2S\rho$$

(2) 人以恒力 F 向上提桶时,根据变质量质点的运动方程有

$$F-(m_0g+mg-Su\rho tg)+u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=(m_0+m-Su\rho t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

将 $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\rho Su$ 代入,上式可化为积分的形式:

$$\int_0^v \mathrm{d}v=\int_0^t\left(-g+\frac{F+u^2S\rho}{m_0+m-Su\rho t}\right)\mathrm{d}t$$

积分可得

$$v=-gt+\left(u+\frac{F}{Su\rho}\right)\ln\frac{m_0+m}{m_0+m-Su\rho t}$$

4-26. 质量为 m 的卡车关闭发动机后在雨中行驶。雨水以速率 B(kg/s)竖直滴进敞开的车厢内。设 $t=0$ 时,车厢是空的,车速为 v_0,车厢内总共可容纳质量为 m_0(kg)的水。忽略地面对卡车的阻力作用,试求卡车的速率随时间的变化关系(t 从 0 到 ∞)。

解:以卡车和车内的水作为研究对象,只考虑水平方向,设水平向右为正方向。系统自始至终都不受水平外力作用,应用变质量质点的运动方程,在车装满水之前,即 $t\leqslant\frac{m_0}{B}$ 时,运动方程式为

$$-v\frac{\mathrm{d}m'}{\mathrm{d}t}=(m+B\cdot t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\qquad①$$

其中 v 为系统的速度,m' 为系统的质量,且

$$\frac{\mathrm{d}m'}{\mathrm{d}t}=B$$

由①式得

$$\int_{v_0}^v-\frac{1}{v}\mathrm{d}v=\int_0^t\left(\frac{B}{m+Bt}\right)\mathrm{d}t$$

积分可得

$$v=\frac{m}{m+Bt}v_0$$

在车装满水之后,即 $t>\frac{m_0}{B}$ 时,运动方程式变为

$$-v\frac{\mathrm{d}m'}{\mathrm{d}t}=(m+m_0)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

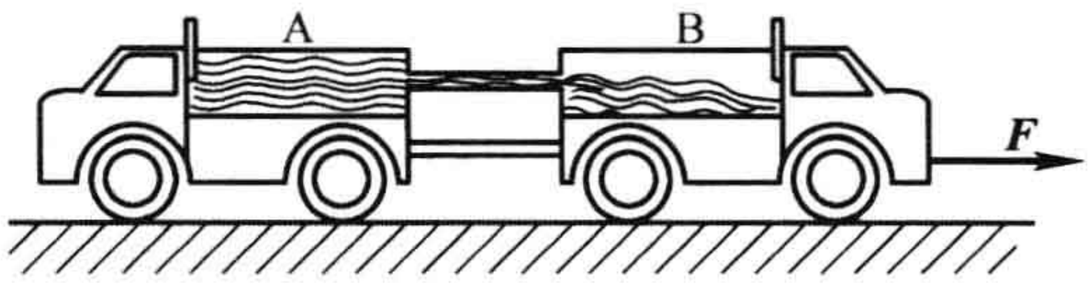
由此得到积分式：

$$\int_{\frac{m}{m+m_0}v_0}^{v}\frac{1}{v}\mathrm{d}v=-\int_{\frac{m_0}{B}}^{t}\frac{B}{m+m_0}\mathrm{d}t$$

积分得

$$v=v_0\frac{m}{m+m_0}\mathrm{e}^{-\frac{B}{m+m_0}\left(t-\frac{m_0}{B}\right)}$$

4-27. 两质量分别为 m_1 和 m_2 的小车 A、B 尾尾相接地停在水平路面上，如习题 4-27 图所示。两车之间用粗绳连接，A 车上装有质量为 m 的水。在 $t=0$ 时，B 车开始受到一水平恒力 F 的作用，而 A 车开始以相对于自身的速率 u 把水水平地喷向 B 车，并全部进入 B 车。设水柱的横截面积为 S，并忽略地面对两车的阻力作用。试求绳中张力随时间的变化关系。忽略在空中飞行的水柱。



习题 4-27 图

解：这是个变质量系统问题，本题中只需考虑水平方向，规定水平向右为正方向。应用变质量质点的运动方程，设绳子拉力为 F_T，水的密度为 ρ，A 的速度为 v_1，B 的速度为 v_2。

对 A 车：

$$F_T-u\frac{\mathrm{d}m'}{\mathrm{d}t}=(m_1+m-Su\rho t)\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}$$

对 B 车：

$$F+u\frac{\mathrm{d}m'}{\mathrm{d}t}-F_T=(m_2+Su\rho t)\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}m'}{\mathrm{d}t}=Su\rho$$

对两车和水组成的系统应用质心运动定理得

$$F=(m_1+m_2+m)a$$

及

$$\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}=a$$

联立解得

$$F_T=\frac{F(m_1+m-uS\rho t)}{m_1+m_2+m}+u^2\rho S$$

4-28. 若上题中两车之间没有粗绳连接:(1) 在 A 车喷水以后,B 车在外力作用下始终与 A 车保持一定的距离。试求此外力随时间的变化关系;(2) 若两车均无外力作用,试求在水不能喷入 B 车以前,A、B 两车的速度随时间的变化关系。

以上两小题均忽略地面对车的阻力作用,并可忽略在空中飞行的水柱。

解: 同样以地面为参考系,只需考虑水平方向,规定水平向右为正方向。

(1) 两车始终保持一定距离,说明两车速度相同;而两车的初速又一样,说明两车具有相同的加速度,即$\frac{dv_1}{dt}=\frac{dv_2}{dt}$。

对 A 车:$-u\frac{dm'}{dt}=(m_1+m-Su\rho t)\frac{dv_1}{dt}$

对 B 车:$F+u\frac{dm'}{dt}=(m_2+Su\rho t)\frac{dv_2}{dt}$

其中

$$\frac{dm'}{dt}=Su\rho$$

联立解得

$$F=-\frac{m_1+m_2+m}{m_1+m-uS\rho t}\cdot u^2S\rho$$

(2) 若两车均无外力作用,在水不能喷进 B 车以前,

对 A 车:$$-u\frac{dm'}{dt}=(m_1+m-Su\rho t)\frac{dv_1}{dt}\qquad①$$

对 B 车:$$(u+v_1-v_2)\frac{dm'}{dt}=(m_2+uS\rho t)\frac{dv_2}{dt}\qquad②$$

其中$\frac{dm'}{dt}=Su\rho$,又知 $t=0$ 时,$v_1=v_2=0$,联立可得 A 的速度

$$v_1=-u\ln\frac{m_1+m}{m_1+m-uS\rho t}\qquad③$$

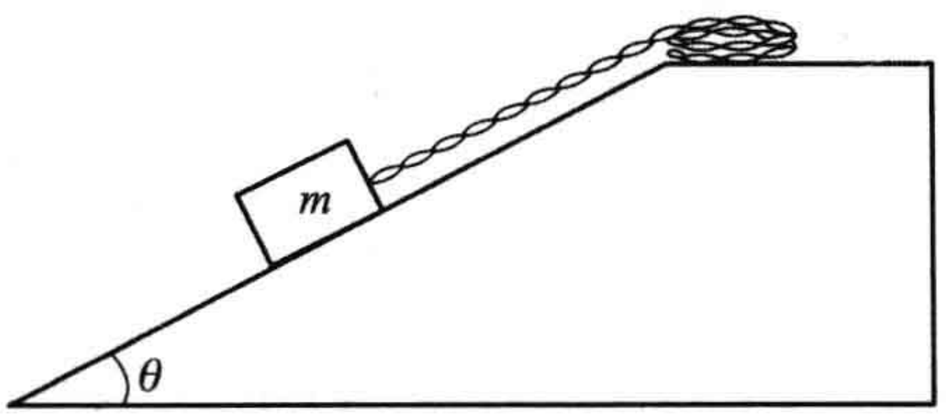
将③式代入②式中,积分可得 B 的速度

$$v_2=\frac{m_1+m-uS\rho t}{m_2+uS\rho t}u\ln\frac{m_1+m}{m_1+m-uS\rho t}$$

4-29. 如习题 4-29 图所示,一质量为 m 的物体与单位长度的质量为 ρ_l 的软绳相连。开始时,物体静置于倾角为 θ 的光滑斜面的顶端,而软绳则盘放在斜

面顶端边的平台上。释放物体，让其沿斜面滑下。求当它下滑距离 x 时的速度。

解：以地面为参考系，以物体和滑下的绳作为研究对象，只考虑沿斜面的力，沿斜面向下为正方向。根据变质量质点运动方程可得



习题 4-29 图

$$(m+\rho_l x)g\sin\theta - v\frac{\mathrm{d}(m+\rho_l x)}{\mathrm{d}t} = (m+\rho_l x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g\sin\theta - \frac{\rho_l v^2}{m+\rho_l x}$$

其中 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，令 $u=v^2$，上式化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{2\rho_l u}{m+\rho_l x} = 2g\sin\theta$$

积分得

$$v=\sqrt{u}=\sqrt{\frac{2g\sin\theta}{3\rho_l}\cdot\frac{(m+\rho_l x)^3+c}{(m+\rho_l x)^2}}$$

当 $x=0$ 时，$v=0$，可知 $c=-m^3$，则

$$v=\sqrt{\frac{2g\sin\theta}{3\rho_l}\cdot\frac{(m+\rho_l x)^3-m^3}{(m+\rho_l x)^2}}$$

4-30. 线密度为 ρ_l 的柔软长链条盘成一团置于地面，链条的一端系着一质量为 m 的球，若将球以初速 v_0 竖直上抛，球能上升至多高？

解：以地面为参考系，以球和在空中的绳的整体作为研究对象，竖直向上为正方向。设球上升的高度为 x，应用变质量质点的运动方程，得

$$-(m+\rho_l x)g - v\frac{\mathrm{d}(m+\rho_l x)}{\mathrm{d}t} = (m+\rho_l x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

整理得

$$-g-\frac{\rho_l v^2}{m+\rho_l x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

其中，$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，令 $u=v^2$，上式化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{2u\rho_l}{m+\rho_l x} = -2g$$

对上述一阶非线性微分方程积分得

$$v=\sqrt{u}=\sqrt{\frac{-2g[(m+\rho_l x)^3+c]}{3\rho_l(m+\rho_l x)^2}}$$

当 $x=0$ 时，$v=v_0$，可知 $c=-\dfrac{3m^2\rho_l v_0^2}{2g}-m^3$，即

$$v=\sqrt{\frac{2g\left[\left(\dfrac{3m^2\rho_l v_0^2}{2g}+m^3\right)-(m+\rho_l x)^3\right]}{3\rho_l(m+\rho_l x)^2}}$$

上升到最大高度时，$v=0$，即

$$x=\frac{m}{\rho_l}\left[\left(1+\frac{3\rho_l v_0^2}{2mg}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right]$$

注意：在 4-29 和 4-30 题的物理过程中，绳子质元从静止状态到突然获得速度的过程，相当于一种非完全弹性碰撞过程，因此绳子加上绳子一端所系物体构成的系统在运动过程中能量并不守恒。

4-31. 从地面发射质量为 m 的火箭(包括燃料)，其喷射的燃料气体相对火箭的速度为 v_r，经过时间 t_0 后，燃料全部喷射完，此时火箭正好获得逃逸速度。设在燃料喷射过程中重力加速度 g 为常量。求空火箭的质量 m_0。

解：以地面为参考系，以火箭和剩余燃料的整体作为研究对象，设竖直向上为正方向，火箭的逃逸速度为 v_2。运用变质量运动方程 $-m(t)g-v_r\dfrac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t}=m(t)\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

解得

$$v=-gt+v_r\ln\frac{m}{m(t)}$$

当 $t=t_0$ 时，$m(t)=m_0$，$v=v_2$，即

$$v_2=-gt_0+v_r\ln\frac{m}{m_0}$$

又知火箭的逃逸速度 $v_2=\sqrt{2gR_0}$，其中 R_0 为地球半径。联立可得

$$m_0=m\mathrm{e}^{\frac{-\left(\sqrt{2gR_0}+gt_0\right)}{v_r}}$$

4-32. 从地面发射一初始质量为 m_0 的火箭，喷射的燃料相对火箭的速度为 v_r。(1) 若其燃料的每秒消耗量 $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ 可调节，为使火箭在地面以上某个高度保持静止，求 $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ 与时间 t 的函数关系。(2) 若其燃料的每秒消耗量 $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ 正比于火箭的瞬时质量 m，即 $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-\alpha m$，其中 α 为正常量。证明当 $\alpha v_r>g$ 时，火箭将以恒定加速度向上加速，并求出此加速度。(3) 若其燃料的每秒消耗量 $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ 正比于 m_0，即

$\frac{dm}{dt}=-km_0$，其中 k 为正常量。试求火箭在任一时刻 t 的速度。（4）在（3）的情况下，若火箭本身的质量为 m，试求火箭所能到达的最大高度（不计火箭燃料燃尽后的自由上抛过程）。设火箭到达最大高度时仍未脱离地球引力范围，并设此过程中重力加速度 g 为常量。

解：以地面为参考系，以火箭及剩余的燃料的整体作为研究对象，竖直向上为 y 轴的正方向，设火箭 t 时刻的质量为 m。应用变质量运动方程得

$$-mg-v_r\frac{dm}{dt}=m\frac{dv}{dt} \qquad ①$$

解得

$$v=-gt+v_r\ln\frac{m_0}{m(t)}$$

（1）令 $v=0$，可求得

$$\frac{dm}{dt}=-\frac{m_0g}{v_r}e^{\frac{-gt}{v_r}}$$

（2）①式两边同除以 m，可得

$$-g-v_r\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}=\frac{dv}{dt}$$

代入已知条件 $\frac{dm}{dt}=-\alpha m$，可得

$$a=\frac{dv}{dt}=\alpha v_r-g$$

当 $\alpha v_r>g$，且 α 和 v_r 都是常量时，$a>0$ 并有确定值 $a=\alpha v_r-g$。

（3）由已知条件 $\frac{dm}{dt}=-km_0$，以及 $t=0$ 时，$m=m_0$，积分得

$$m(t)=m_0(1-kt)$$

代入①式整理得

$$v(t)=-gt+v_r\ln\frac{1}{1-kt}$$

（4）$y=\int v\mathrm{d}t=\int\left(-gt+v_r\ln\frac{1}{1-kt}\right)\mathrm{d}t$，设最大高度为 h_{max}，积分可得

$$h_{max}=-\frac{1}{2}gt^2+v_r\int_0^t\ln\frac{1}{1-kt}\mathrm{d}t$$

在最大高度处

$$m(t)=m=m_0(1-kt)$$

联立可得

$$h_{\max}=-\frac{g}{2k^2}\left(1-\frac{m}{m_0}\right)^2+\frac{v_r}{k}\left(1-\frac{m}{m_0}-\frac{m}{m_0}\ln\frac{m_0}{m}\right)$$

4-33. 一火箭总质量为 m,其中机壳重为 βm,每秒喷出燃料 αm(α 为常量)。为使火箭在开始喷射燃料的瞬时即能竖直起飞,燃料的喷射速度(相对火箭)v_r至少为多大?维持用这样的速度喷射燃料,当燃料恰好喷射完时,火箭上升的最大高度 h 为多少?设重力加速度 g 为常量。

解:以地面为参考系,以火箭以及剩余的燃料的整体作为研究对象,竖直向上为正方向。对火箭应用变质量运动方程,有

$$-m(t)g-v_r\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t}=m(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

由题意得

$$\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t}=-\alpha m$$

故有

$$m(t)=m-\alpha mt$$

解得

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-g+\frac{v_r\alpha}{1-\alpha t},v=-gt-v_r\ln(1-\alpha t)$$

火箭竖直起飞的条件为 $t=0$ 时,$a\geqslant 0$,即初始速度至少为 $v_r=\frac{g}{\alpha}$。火箭到达最高处 h 时有 $m(t)=m-\alpha mt=\beta m$,则 $t=\frac{1-\beta}{\alpha}$,从而可得

$$\begin{aligned}h&=\int_0^{\frac{1-\beta}{\alpha}}v\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{1-\beta}{\alpha}}[-gt-v_r\ln(1-\alpha t)]\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{2}g\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^2-\int_0^{\frac{1-\beta}{\alpha}}\frac{g}{\alpha}\ln(1-\alpha t)\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{2}g\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)^2+\frac{g}{\alpha^2}(1+\beta\ln\beta-\beta)\\&=\frac{g}{2\alpha^2}(1-\beta^2+2\beta\ln\beta)\end{aligned}$$

则火箭上升的最大高度为

$$h=\frac{g}{2\alpha^2}(1-\beta^2+2\beta\ln\beta)$$

第五章　功能原理与机械能守恒定律

课后作业题

5-1. 光滑水平面上并排静放着两块质量分别为 m_1 和 m_2 的木块。一质量为 m 的子弹以 v_0 的初速度水平地射向两木块，若 $m_1=2m_0$，$m_2=m_0$，质量为 m 的子弹水平射穿 m_1 后，射入 m_2 内。当子弹相对 m_2 静止时，m_2 的速度是 m_1 的两倍。求此过程中摩擦阻力所做的功。

解：以水平面为参考系，以子弹和两个木块组成的系统为研究对象。设子弹射穿木块 m_1 后，m_1 的速度为 v_1。

系统动量守恒：

$$mv_0=m_1v_1+(m_2+m)v_2$$

运用功能原理：

$$A_f=\left[\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}(m_2+m)v_2^2\right]-\frac{1}{2}mv_0^2$$

已知

$$v_2=2v_1,\ m_1=2m_0,\ m_2=m_0$$

联立求得

$$A_f=\frac{--mm_0(8m_0+5m)\,v_0^2}{4\,(2m_0+m)^2}$$

5-2. 汽车沿着一坡度不大的斜坡以 $v_1=12$ m/s 的速率向上匀速行驶，当此车用同样的功率沿斜坡向下匀速行驶时，车速为 $v_2=20$ m/s。若此车保持功率不变而沿同样的水平路面以匀速 v 行驶，设汽车在水平路面上受到的阻力与在斜坡上受到的阻力相同，求 v 的大小。

解：设汽车受的阻力为 F_f，以汽车和地球组成的系统为研究对象。

运用功能原理：

$$\mathrm{d}A_{外}+\mathrm{d}(A_{内发}+A_{内阻})=\mathrm{d}E$$

对于本题，

$$\mathrm{d}A_{外}=0$$

两边同时对时间求导数,得

$$0+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A_{内发}+A_{内阻})=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}A_{内发}}{\mathrm{d}t}=P,\frac{\mathrm{d}A_{内阻}}{\mathrm{d}t}=-F_{\mathrm{f}}v$$

则

$$P-F_{\mathrm{f}}v=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

上坡过程中:

$$P-F_{\mathrm{f}}v_1=\frac{\mathrm{d}(mgx_1\sin\theta)}{\mathrm{d}t}=v_1mg\sin\theta$$

下坡过程中:

$$P-F_{\mathrm{f}}v_2=\frac{\mathrm{d}(mgx_2\sin\theta)}{\mathrm{d}t}=v_2mg\sin\theta$$

水平路面上:

$$P-F_{\mathrm{f}}v=0$$

联立求得

$$v=15\ \mathrm{m/s}$$

5-3. 一质点在保守力场中沿 x 轴(在 $x>0$ 范围内)运动,其势能为 $E_{\mathrm{p}}=\frac{kx}{x^2+a^2}$。式中 k、a 均为大于零的常量。试求:

(1) 质点所受到的力的表示式;

(2) 质点的平衡位置;

(3) 若质点静止在平衡位置,试讨论平衡的稳定性。

解:(1) 质点在运动过程中只受保守力作用,其值为

$$F=-\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}x}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{kx}{x^2+a^2}\right)=\frac{k(x^2-a^2)}{(x^2+a^2)^2}$$

(2) 平衡位置处 $F=0$,则质点的平衡位置为 $x=a$。

(3) $$\left.\frac{\mathrm{d}^2E_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=a}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{k(x^2-a^2)}{(x^2+a^2)^2}\right]\Bigg|_{x=a}=-\frac{k}{2a^3}<0$$

为不稳定平衡。

5-4. 一块长为 l,质量为 m_0 的木板静置于光滑的水平桌面上,在板的左端有一质量为 m 的小物体(大小可忽略)以 v_0 的初速度相对板向右滑动,当它滑至板的右端时相对板静止。试求:

(1) 物体与板之间的摩擦因数;

（2）在此过程中板的位移。

解：以水平桌面为参考系，以板和小物体组成的系统为研究对象。

（1）在运动过程中，所受合外力为零，系统动量守恒：

$$mv_0=(m+m_0)v$$

对系统应用功能原理：

$$-\mu mgl=\frac{1}{2}(m+m_0)v^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

联立可得

$$\mu=\frac{m_0v_0^2}{2(m+m_0)gl},v=\frac{mv_0}{m+m_0}$$

（2）以水平桌面为参考系，以板为研究对象，设板的位移为 s。

运用动能定理：

$$\mu mgs=\frac{1}{2}m_0v^2-0$$

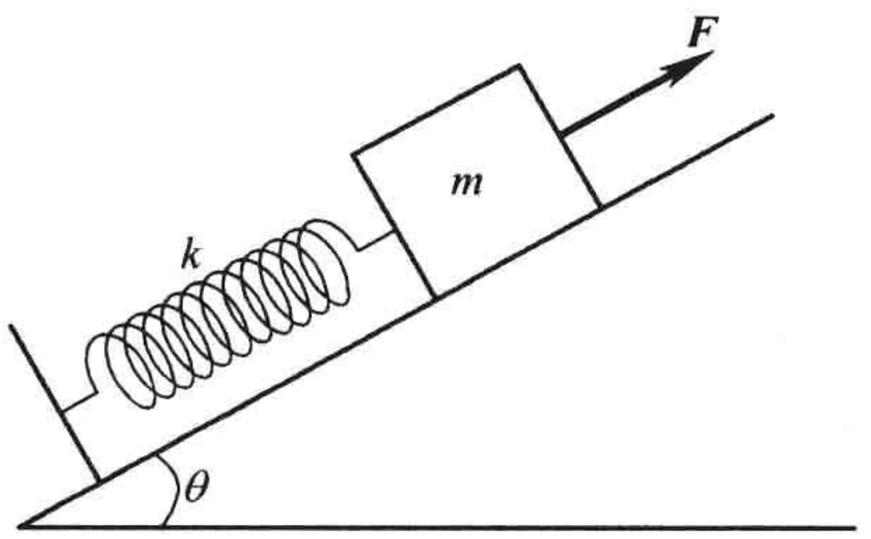
由(1)得

$$v=\frac{mv_0}{m+m_0},\mu=\frac{m_0v_0^2}{2(m+m_0)gl}$$

整理即得

$$s=\frac{m}{m+m_0}l$$

5-5. 在倾角为 θ 的斜面上，一质量为 m 的物体通过一劲度系数为 k 的弹簧与固定在斜面上的挡板相连，如习题5-5图所示。物体与斜面间的摩擦因数为 μ。开始时，m 静止，弹簧处于原长。现有一沿斜面向上的恒力 F 作用在 m 上，使 m 沿斜面向上滑动。试求：从 m 开始运动到它运动到最高位置过程中力 F 所做的功。



习题5-5图

解：以地面为参考系，以弹簧、挡板、物体及地球组成的系统为研究对象，设弹簧的最大伸长量为 l，从 m 开始运动到它运动到最高位置过程中运用功能原理：

$$\int_0^l F\mathrm{d}l-\mu mg\cos\theta\cdot l=\left(mgl\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}kl^2\right)-0$$

则

$$l=\frac{2(F-mg\sin\theta-\mu mg\cos\theta)}{k}$$

所以

$$A_{外}=F\cdot l=\frac{2F}{k}(F-mg\sin\theta-\mu mg\cos\theta)$$

5-6. 一小球做竖直上抛运动,当它回到抛出点时,速度为抛出时的3/4。设小球运动中受到的空气阻力为恒力。试求:

(1) 小球受到的空气阻力与重力之比;

(2) 小球上升的最大高度与真空情况下最大高度之比($g=10\ \mathrm{m/s^2}$)。

解:(1) 以地面为参考系,以地球和小球组成的系统为研究对象,运用功能原理:

上升过程中:

$$-F_f h=mgh-\frac{1}{2}mv_0^2$$

下降过程中:

$$-F_f h=\frac{1}{2}m\cdot\left(\frac{3}{4}v_0\right)^2-mgh$$

联立得小球受到的空气阻力与重力之比为

$$\frac{F_f}{mg}=\frac{7}{25}$$

(2) 真空情况下,系统机械能守恒:

$$\frac{1}{2}mv_0^2=mgh_{真空}$$

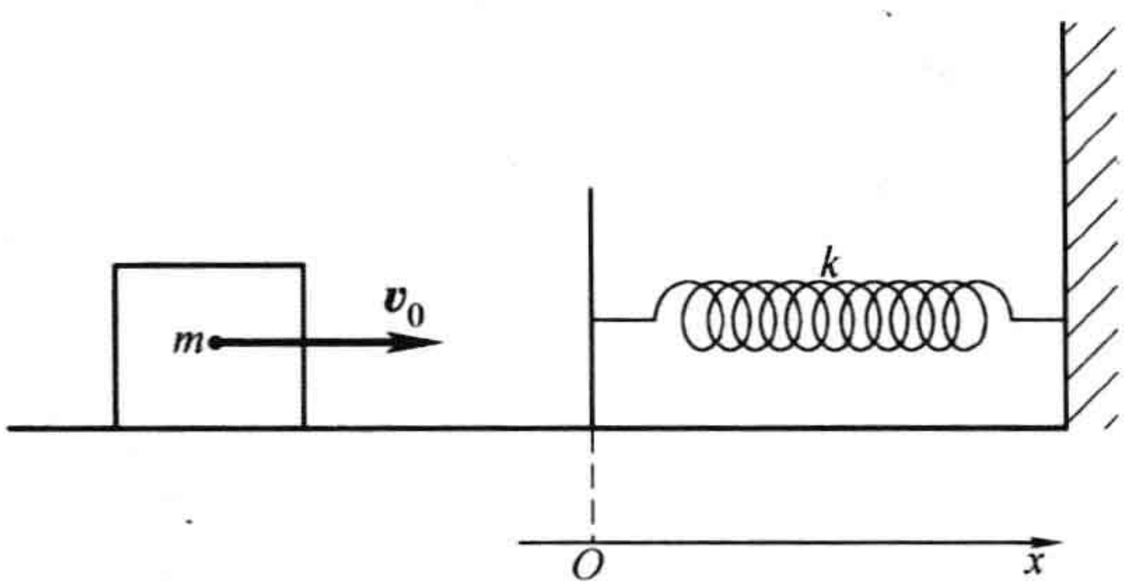
有阻力时:

$$-F_f h=mgh-\frac{1}{2}mv_0^2$$

联立得小球上升的最大高度与真空情况下的最大高度之比为

$$\frac{h}{h_{真空}}=\frac{25}{32}$$

5-7. 如习题5-7图所示,质量为m的物体以v_0的速度在光滑水平面上沿x轴正方向运动,当它到达原点O时,撞击一劲度系数为k的轻弹簧,并开始受到



习题5-7图

摩擦力的作用，摩擦因数是位置的函数，可表示为 $\mu = ax$（a 为一较小的常量）。求物体第一次返回 O 点时的速度。

解：以物体和弹簧组成的系统为研究对象，设弹簧最大压缩量为 l，运用功能原理：

入射过程：

$$-\int_0^l \mu mg\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kl^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

已知 $\mu = ax$，则

$$l = \sqrt{\frac{m}{k+mga}}v_0$$

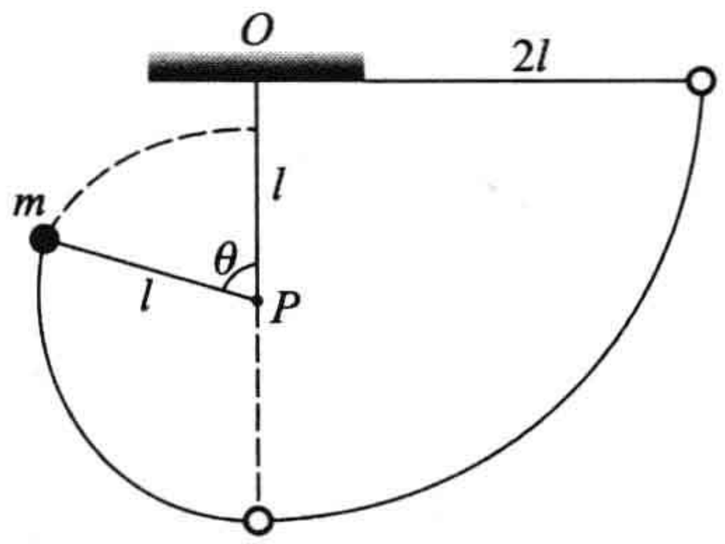
返回过程：

$$\int_l^0 \mu mg\mathrm{d}x = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}kl^2$$

将 l 的表达式代入上式得

$$v = \sqrt{\frac{k-mga}{k+mga}}v_0$$

5-8. 质量为 m 的小球通过一根长为 $2l$ 的细绳悬挂于 O 点。在 O 点的正下方 l 远处有一个固定的钉子 P。开始时，把绳拉至水平位置，然后释放小球。试求：当细绳碰到钉子后小球所能上升的最大高度。



习题 5-8 图

解：以悬挂点为参考点，选择小球和地球组成的系统为研究对象。设起始位置为重力势能零点，整个过程机械能守恒。当细绳碰到钉子并转过水平线后，设细绳与竖直线成某一 θ 角，如习题 5-8 图所示，绳子开始松弛无张力作用，假设此时速度为 v，由机械能守恒得

$$mg \cdot 0 = \frac{1}{2}mv^2 - mg(l - l\cos\theta)$$

在 θ 角处应用牛顿第二定律：

$$mg\cos\theta = m\frac{v^2}{l}$$

到最高点时，小球竖直方向的速度变为零，此时

$$0 = v\sin\theta - gt$$

此时小球竖直方向的位移

$$h = v\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2$$

联立可得

$$\cos\theta=\frac{2}{3},h=\frac{5}{27}l$$

细绳碰到钉子后小球所能上升的最大高度为

$$l+(l\cos\theta+h)=\frac{50}{27}l$$

5-9. 如习题5-9图所示,质量为m_0的两质点分别固定在x轴上的$A(-a,0)$、$B(a,0)$两点,若有一质点m在万有引力作用下从$y=3a$处由静止开始向原点运动。试求质点经过原点时的速度。

解:以地面为参考系,以质点A、B、m组成的系统为研究对象,已知

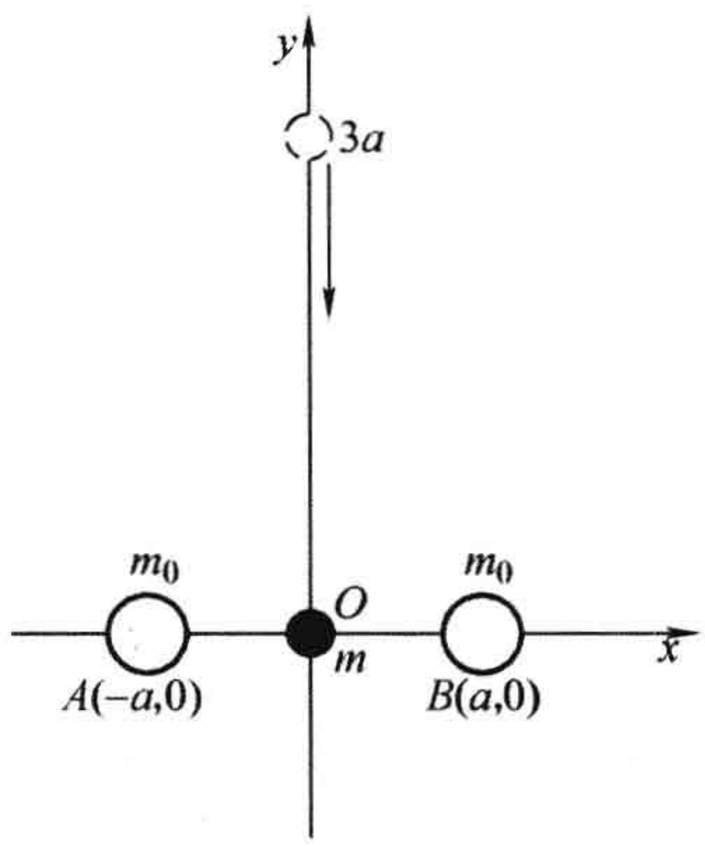
$$E_p=-\frac{2Gm_0m}{r}=-\frac{2Gm_0m}{\sqrt{a^2+y^2}}$$

运动过程机械能守恒,选择无穷远处引力势能为零,设质点过原点时的速度为v,则

$$-Gm_0m\frac{2}{\sqrt{a^2+(3a)^2}}+0=-Gm_0m\frac{2}{a}+\frac{1}{2}mv^2$$

求得

$$v=\sqrt{\frac{4Gm_0}{a}\left(1-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)}$$



习题5-9图

5-10. 某人在地面上双脚起跳可使他的重心升高h。现在他和另一个体重同为m_1的人分别站在轻滑轮两边的秤盘中,如习题5-10图所示。盘重均为m_2。试求:当此人在秤盘中用和在地面上起跳同样的能量双脚起跳时,他的重心可升高多少?

解:以地面为参考系,滑轮轴处有作用力,因此人起跳前后整个系统动量不守恒。设右边人起跳,忽略有限重力的瞬时冲量,分别应用动量定理(以竖直向上为正)

对右盘和起跳人:

$$F_T\Delta t=(m_1v_{10}+m_2v_{20})-0$$

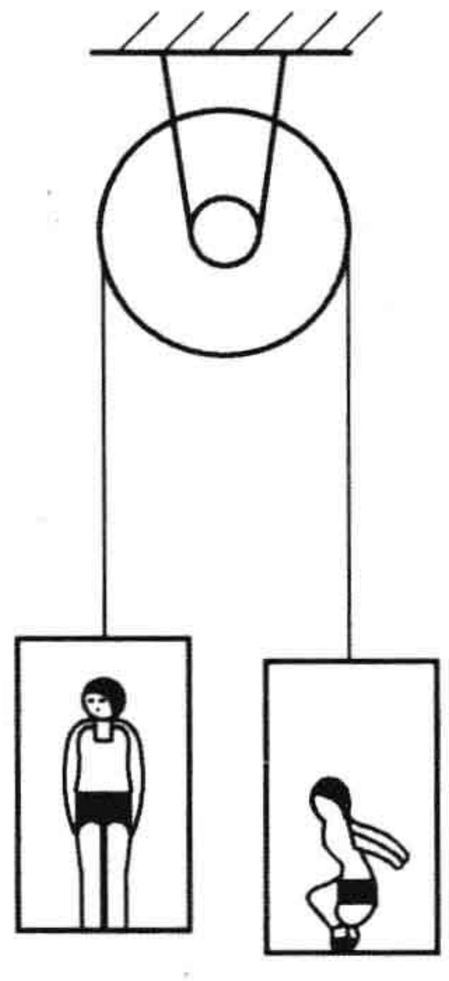
对左盘和人:

$$F_T\Delta t=(m_2+m_1)(-v_{20})-0$$

联立求得

$$m_1v_{10}=-(m_1+2m_2)v_{20}$$

在起跳前后,对两盘、人和地球组成的系统应用功能原理:



习题5-10图

$$A_{内非2}=\frac{1}{2}\cdot m_1 v_{10}^2+\frac{1}{2}\cdot(m_1+2m_2)v_{20}^2-0$$

起跳后，以右边的起跳人为研究对象，起跳后上升的高度为 h'，由机械能守恒得

$$\frac{1}{2}\cdot m_1 v_{10}^2=m_1 h'$$

对在地面上起跳的过程运用功能原理得

$$A_{内非1}=\frac{1}{2}\cdot m_1 v_0^2=m_1 gh$$

由已知条件得知

$$A_{内非2}=A_{内非1}$$

联立各式求得

$$h'=\frac{m_1+2m_2}{2(m_1+m_2)}h$$

5-11. 在光滑半球形碗底静放着一质量 $m=50$ g 的光滑小球 B，另一与 B 完全相同的小球 A 从高为 $h=5.0$ cm 的碗内壁处由静止滑下。若 A、B 球的碰撞为非弹性碰撞，恢复系数为 $e=0.6$。求 B 球被碰后能升多高？

解：A、B 球碰撞前，A 与地球机械能守恒：

$$mgh=\frac{1}{2}mv_{A0}^2$$

A、B 碰撞前后动量守恒：

$$mv_{A0}=mv_A+mv_B$$

碰撞满足碰撞定律：

$$\frac{v_B-v_A}{v_{A0}-0}=e$$

碰后 B 和地球组成的系统机械能守恒：

$$mgh_B=\frac{1}{2}mv_B^2$$

联立求得

$$h_B=3.2\ \text{cm}$$

5-12. 在光滑的水平桌面上有三个弹性小环 A、B、C，它们的质量分别为 m、m、$\alpha m(\alpha>1)$，并依次排列在一条直线上。开始时，B、C 静止，并挨在一起，而 A 以 v_0 的速度向 B 运动。试证明，当它们之间的碰撞结束时，B 环静止，而 A、C 的运动状态和没有 B 环时 A、C 碰撞后的运动状态一样。

解：(1) 有 B 存在时，A、B 发生弹性碰撞，由于 $m_A=m_B$，因此 A、B 碰后交换速度，即

$$v_{B1}=v_0\,,v_{A1}=0$$

B、C 相碰动量守恒：

$$mv_{B1}=mv_0=mv_{B2}+\alpha\ mv_C$$

满足碰撞定律：

$$\frac{v_C-v_{B2}}{v_{B1}}=\frac{v_C-v_{B2}}{v_0}=1$$

联立求得

$$v_{B2}=\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)v_0<0\,,v_C=\frac{2}{1+\alpha}v_0$$

即 B 反向与 A 再次相碰交换速度，最后

$$v_B=0\,,v_A=v_{B2}=\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)v_0\,,v_C=\frac{2}{1+\alpha}v_0$$

(2) 无 B 存在时，A、C 相撞动量守恒：

$$mv_0=mv_A+\alpha\ mv_C$$

满足碰撞定律：

$$\frac{v_C-v_A}{v_0}=1$$

联立求得

$$v_A=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}v_0\,,v_C=\frac{2}{1+\alpha}v_0$$

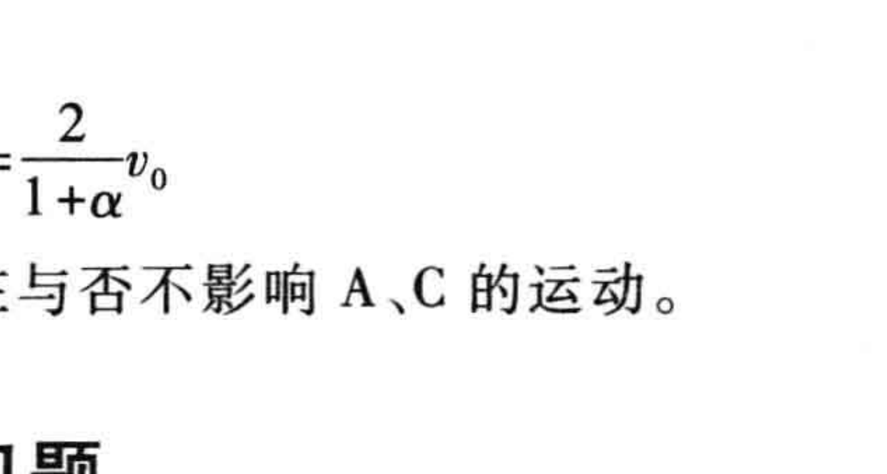
与情况(1)相比，结果相同，即 B 的存在与否不影响 A、C 的运动。

自检练习题

5-13. 一小球与两个相同的弹簧相连，如习题 5-13 图所示。当小球平衡时，两弹簧均受到拉伸。若忽略重力，试讨论小球平衡的稳定性。

解：小球受到的两面弹簧的拉力均为保守力，建立如习题 5-13 图所示的坐标系。设两弹簧的原长分别为 l_1、l_2，两板之间距离为 L。小球与两弹簧系统的势能为：

$$E_p=\frac{1}{2}k\,(x-l_1)^2+\frac{1}{2}k\,(L-x-l_2)^2$$



习题 5-13 图

系统的保守内力和为

$$F=-\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}=-k(x-l_1)+k(L-x-l_2)=-2kx+k(L+l_1-l_2)$$

小球平衡位置处 $F=0$,则

$$x=\frac{1}{2}(L+l_1-l_2)$$

从而可得

$$\frac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}=2k>0$$

因此小球为稳定平衡。

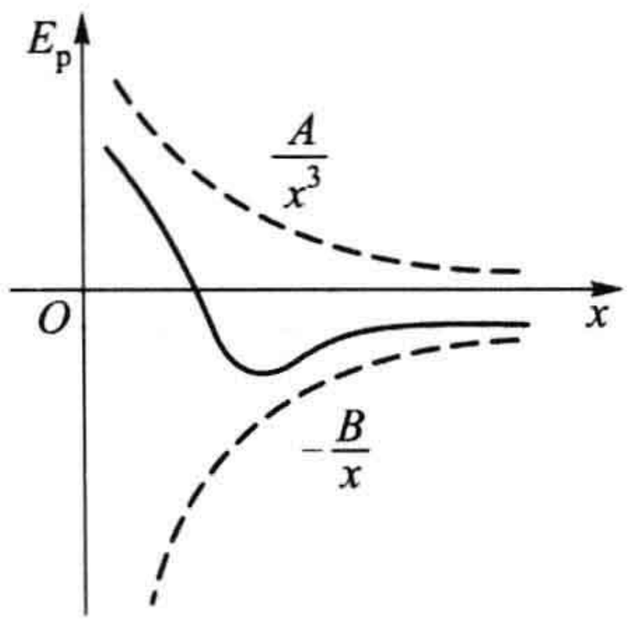
5-14. 一质量为 m 的质点在保守力的作用下沿 x 轴(在 $x>0$ 范围内)运动,其势能的数值为:$E_\mathrm{p}=\frac{A}{x^3}-\frac{B}{x}$,其中 A、B 均为大于零的常量。

(1) 画出势能曲线图;

(2) 确定势阱的深度(最低点势能值);

(3) 找出质点运动中受到沿 x 轴负方向最大力的位置;

(4) 若质点的总能量 $E=0$,试确定质点的运动范围。(本题中 x 以 m 为单位,E_p以 J 为单位。)



习题 5-14 图

解:(1) 分别画出 $E_{\mathrm{p}1}=\frac{A}{x^3}$、$E_{\mathrm{p}2}=-\frac{B}{x}$曲线,两曲线相加得习题 5-14 图实线所示的势能曲线。

(2) 势能最低点:

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}=-3\ \frac{A}{x^4}+\frac{B}{x^2}=0$$

则

$$x=\sqrt{\frac{3A}{B}}$$

代入 E_p表达式中

$$E_\mathrm{p}=-\frac{2}{3}B\sqrt{\frac{B}{3A}}$$

所以,势阱的深度为$\frac{2}{3}B\sqrt{\frac{B}{3A}}$。

(3) 质点受力为

$$F=-\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}=3\ \frac{A}{x^4}-\frac{B}{x^2}$$

质点运动中受最大力的极值条件为$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=0$,即

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(3\frac{A}{x^4}-\frac{B}{x^2}\right)=-\frac{12A}{x^5}+2\frac{B}{x^3}=0$$

则 $x=\sqrt{\frac{6\mathrm{A}}{B}}$，此时 $F=-\frac{B^2}{12A}<0$，即沿负方向力达最大值。

（4）依题意有

$$E=\frac{1}{2}mv^2+E_{\mathrm{p}}=0$$

即

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{A}{x^3}-\frac{B}{x}=0$$

当 $v=0$ 时

$$x=\sqrt{\frac{A}{B}}$$

由总能量 $E=\frac{1}{2}mv^2+E_{\mathrm{p}}=0$ 的限制条件可知：

当 $x<\sqrt{\frac{A}{B}}$ 时，$E_{\mathrm{p}}>0$，质点不能在此范围运动；

当 $x>\sqrt{\frac{A}{B}}$ 时，$E_{\mathrm{p}}<0$，质点可以运动。

所以，质点的运动范围为

$$\sqrt{\frac{A}{B}}\leqslant x<\infty$$

5-15. 一质量为 m 的质点在保守力的作用下沿 x 轴方向运动，其势能的数值为：$E_{\mathrm{p}}=ax^2(b-x)$（x 的单位是 m，E_{p} 的单位是 J），其中 a、b 均为大于零的常量。

（1）试求质点所受力的表达式；

（2）画出势能曲线图；

（3）确定平衡位置，并讨论平衡位置的稳定性；

（4）若质点从原点 $x=0$ 处以 v_0 开始运动，试问，v_0 在什么范围内质点不可能到达无穷远？

解：（1）质点所受力为

$$F=-\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}x}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[ax^2(b-x)]=ax(3x-2b)\ 。$$

（2）由 $E_{\mathrm{p}}=ax^2(b-x)$，分别画出 $E_{\mathrm{p1}}=ax^2$、$E_{\mathrm{p2}}=b-x$ 曲线，两曲线相乘得习题5-15图中实线所示的势能曲线。

（3）平衡位置处：

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}x}=-3ax^2+2abx=0,$$

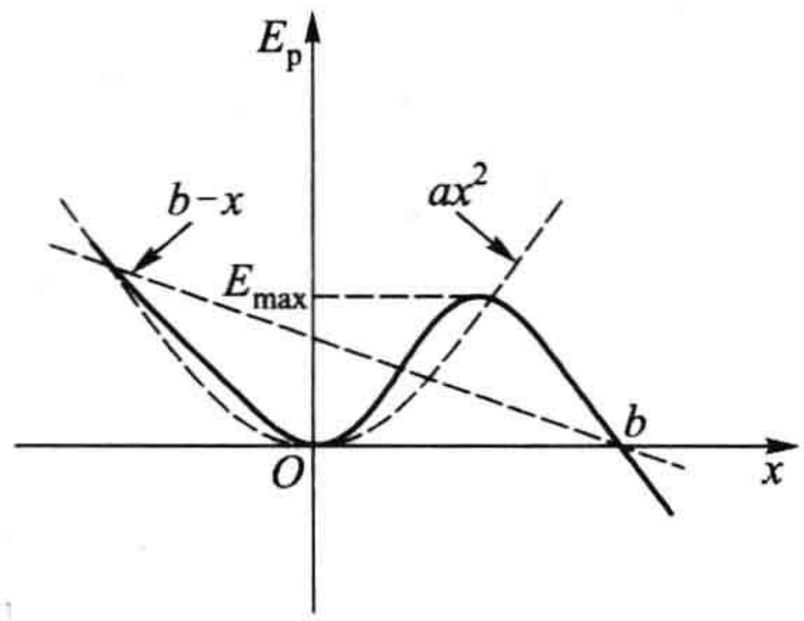
解得

$$x=0 \text{ 或 } x=\frac{2}{3}b$$

且

$$\frac{\mathrm{d}^2E_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}x^2}=-6ax+2ab$$

当 $x=0$ 时，$\left.\frac{\mathrm{d}^2E_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=2ab>0$，因此该平衡位置为稳定平衡，此时 $E_{\mathrm{pmin}}=0$。



习题 5-15 图

当 $x=\frac{2}{3}b$ 时，$\left.\frac{\mathrm{d}^2E_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=\frac{2}{3}b}=-2ab<0$，为非稳定平衡，此时 $E_{\mathrm{pmax}}=\frac{4}{27}ab^3$。

（4）由系统机械能守恒得

$$E_0=\frac{1}{2}mv_0^2=E=E_{\mathrm{k}}+E_{\mathrm{p}}$$

若质点不能到达无穷远，则

$$\frac{1}{2}mv_0^2<E_{\mathrm{pmax}}=\frac{4}{27}ab^3$$

解得

$$v_0\leqslant\sqrt{\frac{8ab^3}{27m}}$$

即当 $v_0\leqslant\sqrt{\frac{8ab^3}{27m}}$ 时，质点不可能到达无穷远。

5-16. 一颗质量为 m 的人造地球卫星以圆形轨道环绕地球飞行。由于受到空气阻力的作用，其轨道半径从 r_1 变小到 r_2。求在此过程中空气阻力所做的功。

解：设地球质量为 m_{e}，以地面为参考系，以地球和人造卫星组成的系统为研究对象，轨道半径从 r_1 变小到 r_2 过程中对其应用功能原理：

$$A_{\text{阻}}=\left(\frac{1}{2}mv_2^2-G\frac{m_{\mathrm{e}}m}{r_2}\right)-\left(\frac{1}{2}mv_1^2-G\frac{m_{\mathrm{e}}m}{r_1}\right)$$

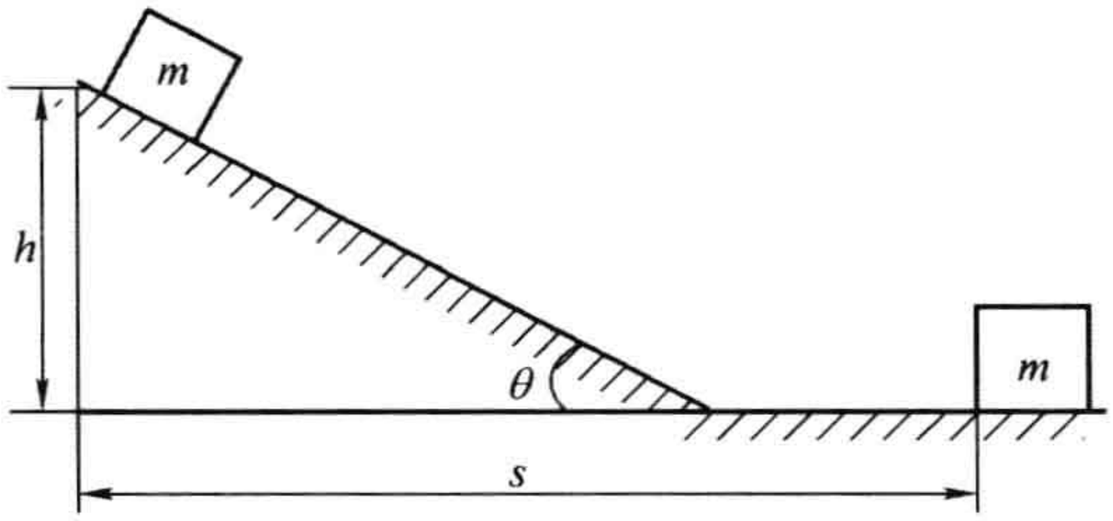
对人造地球卫星：

$$G\frac{m_{\mathrm{e}}m}{r_1^2}=m\frac{v_1^2}{r_1},G\frac{m_{\mathrm{e}}m}{r_2^2}=m\frac{v_2^2}{r_2}$$

联立求得

$$A_{阻}=-\frac{Gm_e m}{2}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

5-17. 如习题 5-17 图所示,物体从高为 h 的斜面顶端自静止开始滑下,最后停在与起点的水平距离为 s 的水平地面上。若物体与斜面和与地面间的摩擦因数均为 μ,证明 $\mu=h/s$。



习题 5-17 图

证明:以地面为参考系,对物体和地球组成的系统运用功能原理:

$$A_{外}+A_{内非}=E-E_0$$

其中

$$A_{外}=0,A_{内非}=-\mu mg\cos\theta\frac{h}{\sin\theta}-\mu mg[s-h\cot\theta]$$

又知

$$E-E_0=0-mgh$$

整理得

$$\mu=h/s$$

5-18. 若上题中物体与斜面间摩擦因数和物体与地面之间的摩擦因数并不相同。当物体自斜面顶端静止滑下时,停在地面上的 A 点,而当物体以 v_0 的初速度(方向沿斜面向下)自同一点滑下时,则停在地面上的 B 点。已知 A、B 点与斜面底端 C 点的距离之间满足 $BC=2\ AC$。试求物体在斜面上运动的过程中摩擦力所做的功。

解:以地面为参考系,以物体和地球组成的系统为研究对象,设 $BC=s_2$,$AC=s_1$,则

$$2s_1=s_2$$

在两个过程中分别对研究对象运用功能原理,物体自斜面顶端静止滑下过程中:

$$A_f-\mu mgs_1=0-mgh$$

物体以初速 v_0 自同一点滑下过程中:

$$A_f-\mu mgs_2=0-\left(mgh+\frac{1}{2}mv_0^2\right)$$

联立求得

$$A_f=\frac{1}{2}mv_0^2-mgh$$

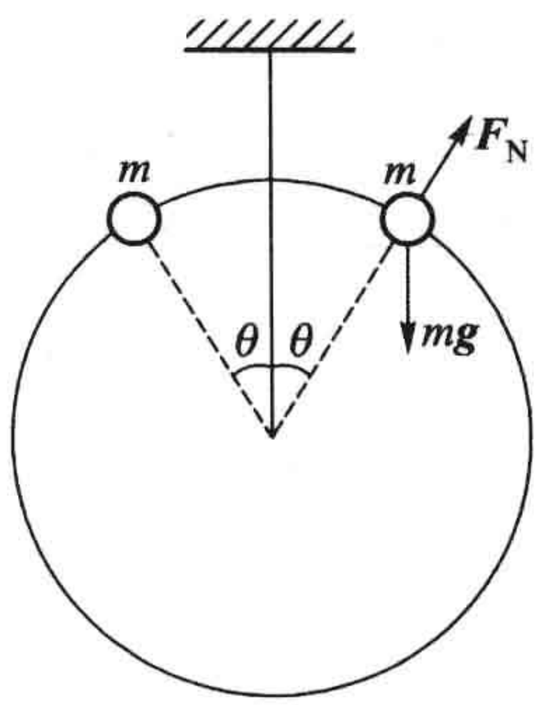
5-19. 一光滑圆环，半径为 R，用细线悬挂在支点上。环上穿有质量都是 m 的两颗珠子，让两珠子从环顶同时静止释放并向两边下滑。若圆环的质量为 m_0，试证明：只有当 $m>\frac{3}{2}m_0$ 时，圆环才会升起，并求出珠子所在半径与细线所在竖直线的夹角 θ。

解：以地面为参考系，以环、珠和地球组成的系统为研究对象，设圆环的顶部位置为重力势能零点，两珠从环顶滑到习题 5-19 图示位置过程中机械能守恒：

$$0=2\times\frac{1}{2}mv^2-2mg(R-R\cos\theta)$$

设在 θ 角处，圆环给珠子的作用力为支持力。对珠子应用牛顿第二定律：

$$m\frac{v^2}{R}=mg\cos\theta-F_N$$



习题 5-19 图

以圆环为研究对象，由牛顿第二定律可知，当 $-2F_N\cos\theta=m_0g$ 时（式中“-”号意味着，此时圆环对珠子的作用力是拉力），圆环刚好升起。

联立可得

$$\cos\theta=\frac{2m\pm\sqrt{4m^2-6mm_0}}{6m}=\frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{1}{9}-\frac{m_0}{6m}}$$

要使上式有物理意义，须满足：

$$\frac{1}{9}-\frac{m_0}{6m}>0，即\ m>\frac{3}{2}m_0$$

只有当 $m>\frac{3}{2}m_0$ 时，圆环才会升起。

因为

$$\arccos\left(\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{1}{9}-\frac{m_0}{6m}}\right)<\arccos\left(\frac{1}{3}-\sqrt{\frac{1}{9}-\frac{m_0}{6m}}\right)$$

所以，圆环刚开始上升时

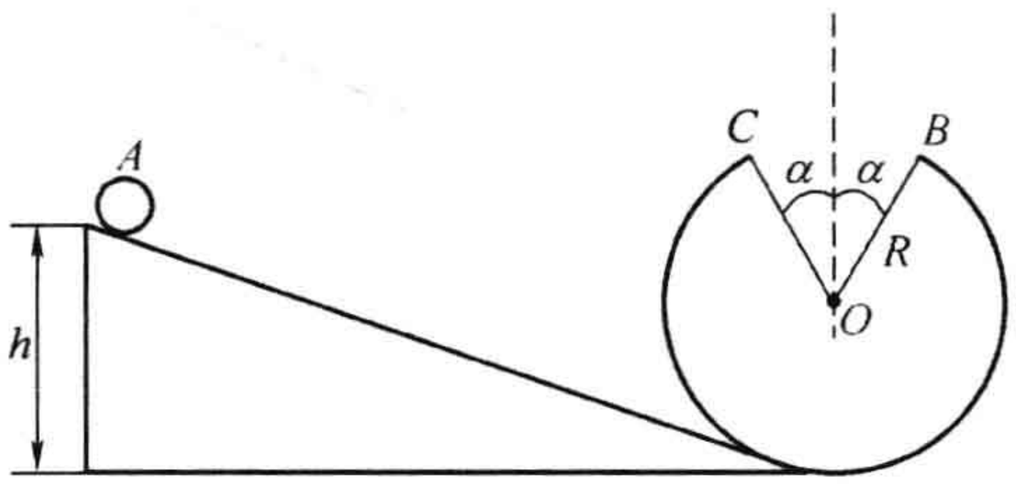
$$\theta=\arccos\left(\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{1}{9}-\frac{m_0}{6m}}\right)$$

5-20. 物体沿习题 5-20 图所示的光滑轨道自点 A 由静止开始滑下。轨道的圆环部分有一对称的缺口 BC，缺口的张角 $\angle BOC=2\alpha$，圆环的半径为 R。试

问:A 点的高度 h 应等于多少才能使物体恰好越过缺口而走完整个圆环?

解:以水平地面为参考系和零势能面,选择物体和地球组成的系统为研究对象,设物体在 B 点速度为 v。从 A 到 B 系统机械能守恒:

$$mgh=mg(R+R\cos\alpha)+\frac{1}{2}mv^2 \quad ①$$



习题 5-20 图

若物体恰好越过缺口而走完整个圆环,由机械能守恒知 B、C 两点速度大小相等,均为 v。以 B 点为坐标原点,以 BC 为 x 轴,竖直方向为 y 轴建立坐标系,C 点坐标为 (x,y),则

$$x=2R\sin\alpha=vt\cos\alpha,\ y=vt\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2=0$$

由上两式可知

$$v^2=\frac{Rg}{\cos\alpha}$$

代入①式可得

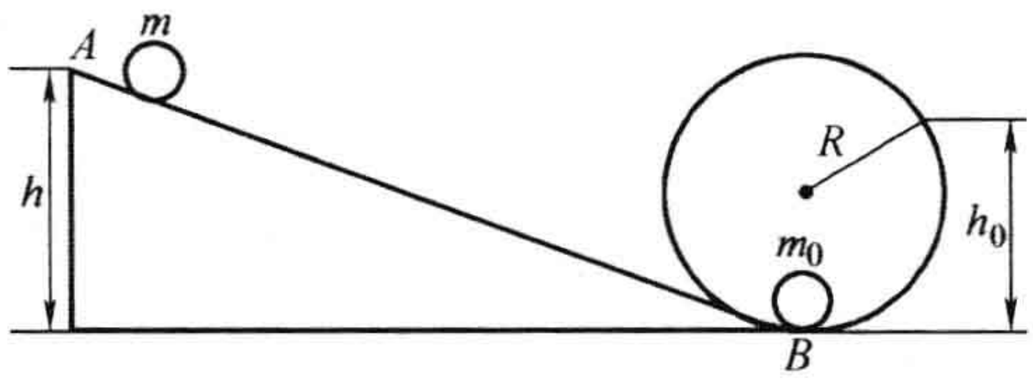
$$h=R\left(1+\cos\alpha+\frac{1}{2\cos\alpha}\right)$$

5-21. 如习题 5-21 图所示,质量为 m 的物体从光滑轨道的顶端 A 点,由静止开始沿斜道滑下,在半径为 R 的圆环部分的最低点 B 与另一质量为 m_0 的静止物体发生弹性碰撞,碰后 m_0 沿圆环上升,并在高度为 h_0 处脱离圆环,而 m 则沿斜道上升后又滑下,并在 m_0 脱离点脱离圆环。试求:

(1) m 与 m_0 之比;

(2) A 点的高度 h。

解:以地面为参考系,m 从斜面滑下到与 m_0 相碰前,m 和地球组成的系统机械能守恒:



习题 5-21 图

$$\frac{1}{2}mv_{m0}^2=mgh$$

m_0 与 m 碰撞前后动量守恒:

$$mv_{m0}=mv_{m1}+m_0v_{m_01}$$

弹性碰撞满足碰撞定律:

$$\frac{v_{m_01}-v_{m1}}{v_{m0}}=1$$

小球与 m_0 碰后沿轨道上升,当它再次返回 B 点时的速度仍为 v_{m1}(机械能守

恒），从 B 点到 h_0 处，如下系统机械能守恒：

m_0 和地球组成的系统：

$$\frac{1}{2}m_0v_{m_01}^2=\frac{1}{2}m_0v_{m_02}^2+m_0gh_0$$

m 和地球组成的系统：

$$\frac{1}{2}mv_{m1}^2=\frac{1}{2}mv_{m2}^2+mgh_0$$

$m_0(m)$ 脱离圆环时，圆环与 $m_0(m)$ 之间的相互作用力为零，此时，对 m_0 应用牛顿第二定律：

$$m_0g\cos\theta=m_0\frac{v_{m_02}^2}{R}$$

对 m 应用牛顿第二定律：

$$mg\cos\theta=m\frac{v_{m2}^2}{R}$$

由图得几何关系：

$$h_0=R+R\cos\theta$$

其中 θ 为 R 与竖直方向的夹角。联立上述各方程可得：(1) $\frac{m}{m_0}=\frac{1}{3}$；(2) $h=6h_0-2R$。

5-22. 质量分别为 m_1 和 m_2 的两个物块由一劲度系数为 k 的轻弹簧相连，竖直地放在水平桌面上，如习题 5-22 图所示。另有一质量为 m 的物体从高出 m_1 为 h 的地方由静止开始自由落下，当与 m_1 发生碰撞后，即与 m_1 黏合在一起向下运动。试问 h 至少应多大，才能使得弹簧反弹后 m_2 与桌面互相脱离？

解：初始时弹簧压缩，满足

$$kx_0=m_1g,x_0=\frac{m_1}{k}g$$

m 下落 h 过程中，m 和地球组成的系统机械能守恒：

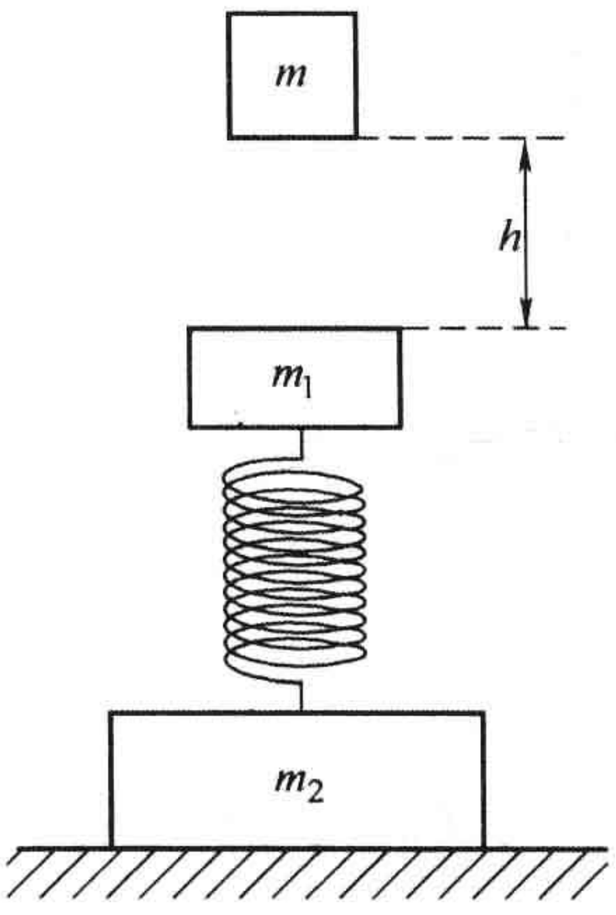
$$\frac{1}{2}mv_0^2=mgh$$

m 与 m_1 碰撞前后动量守恒：

$$mv_0=(m+m_1)v_1$$

之后整个过程机械能守恒。反弹后当 m_2 恰好与桌面脱离时，弹簧伸长，满足：

$$kx=m_2g,\text{即 }x=\frac{m_2}{k}g$$



习题 5-22 图

极值条件为:m_2与桌面脱离时,m、m_1、m_2速度恰好同为0。

由能量守恒得

$$\frac{1}{2}kx_0^2+\frac{1}{2}(m+m_1)v_1^2=\frac{1}{2}kx^2+(m+m_1)g(x+x_0)$$

联立可得

$$h=\frac{1}{2km^2}(m_1+m)(m_1+m_2)(m_1+m_2+2m)g$$

5-23. 在水平桌面上,质量分别为m_1和m_2的两物块由一劲度系数为k的弹簧相连。物块与桌面间的摩擦因数均为μ。开始时,弹簧处于原长,m_2静止,而m_1以$v_0=\sqrt{\frac{6m_1m_2g^2\mu^2}{k(m_1+m_2)}}$的速度拉伸弹簧。试求:当弹簧达最大拉伸时的伸长量(设$m_1>m_2$)。

解:当$kl_0=\mu m_2g$,即$l_0=\frac{\mu m_2g}{k}$时,m_2开始运动,设此时m_1具有速度v_{m_10}。在此之前,以地面为参考系,对系统应用功能原理得

$$-\mu m_1gl_0=\left(\frac{1}{2}m_1v_{m_10}^2+\frac{1}{2}kl_0^2\right)-\frac{1}{2}m_1v_0^2$$

弹簧的伸长量为x时,以地面为参考系,对m_2应用牛顿第二定律得

$$-\mu m_2g+kx=m_2a$$

以m_2为参考系(加速直线运动的非惯性系),对m_1加上惯性力$-m_1a$后,以m_2刚好开始运动和弹簧的最大拉伸处为系统的初、末态,对系统应用功能原理:

$$-\mu m_1g(l-l_0)-\int_{l_0}^{l}m_1a\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}m_1v'^2_{m_1}+\frac{1}{2}kl^2\right)-\left(\frac{1}{2}m_1v'^2_{m_10}+\frac{1}{2}kl_0^2\right)$$

其中,$v'_{m_10}=v_{m_10}$、$v'_{m_1}=0$分别为m_1相对m_2的初、末态速度。联立各式求解

$$l=\frac{m_2g\mu}{k(m_1+m_2)}\sqrt{m_1(5m_1-m_2)}$$

5-24. 质量分别为m_1和m_2的两物体发生非弹性正碰,恢复系数为e。试证明:在质心坐标系中碰撞时损失的动能为其初始动能的$(1-e^2)$倍。

解:设实验室坐标系中两球的初速度分别为v_{10}、v_{20}。两物体碰撞过程动量守恒:

$$m_1v_{10}+m_2v_{20}=m_1v_1+m_2v_2$$

碰撞满足碰撞定律:

$$\frac{v_2-v_1}{v_{10}-v_{20}}=e$$

质心速度为

$$v_C=\frac{m_1v_{10}+m_2v_{20}}{m_1+m_2}$$

在质心坐标系中：

$$v'_{10}=v_{10}-v_C\,,v'_{20}=v_{20}-v_C\,,v'_1=v_1-v_C\,,v'_2=v_2-v_C$$

则

$$E_0=\frac{1}{2}m_1v'^2_{10}+\frac{1}{2}m_2v'^2_{20}\,,E=\frac{1}{2}m_1v'^2_1+\frac{1}{2}m_2v'^2_2$$

$$\Delta E=\left(\frac{1}{2}m_1v'^2_{10}+\frac{1}{2}m_2v'^2_{20}\right)-\left(\frac{1}{2}m_1v'^2_1+\frac{1}{2}m_2v'^2_2\right)$$

联立求得

$$\frac{\Delta E}{E_0}=1-e^2$$

5-25. 长为 $2a$ 的轻绳两端各系有一质量为 m 的小球，中点处系有一质量为 m_0的小球，三球排成一直线静置于光滑水平台面，绳恰被拉直。对小球 m_0施以冲力，使其获得与绳垂直的初速度 v_0，求：

（1）当两小球 m 相碰的瞬时各球的速率；

（2）当两小球 m 相碰的瞬时绳中的张力；

（3）若从 m_0启动到两球 m 相碰历时 t，而在此期间 m_0行进的距离为 x，试证明：$(m_0+2m)\,x=m_0v_0t+2ma$。

解：（1）整个过程三球动量守恒。由垂直 v_0方向的初始总动量为零可知，两小球 m 具有大小相等、方向相反的垂直 v_0方向的分速度 $v_\perp$，由对称性知两个 m 具有与 v_0同方向的分速度 $v_\parallel$。在 v_0方向动量守恒：

$$m_0v_0=m_0v_{m_0}+2mv_\parallel$$

由能量守恒得

$$\frac{1}{2}m_0v_0^2=\frac{1}{2}m_0v_{m_0}^2+2\times\frac{1}{2}m(v_\perp^2+v_\parallel^2)$$

两小球 m 相碰瞬时有 $v_{m_0}=v_\parallel$，联立上式求得

$$v_{m_0}=v_\parallel=\frac{m_0}{m_0+2m}v_0\,,v_\perp=\sqrt{\frac{m_0}{m_0+2m}}v_0$$

$$v_m=\sqrt{v_\perp^2+v_\parallel^2}=\frac{v_0}{m_0+2m}\sqrt{2m_0(m_0+m)}$$

（2）设两小球 m 相碰瞬间 m_0的加速度为 a_{m_0}，绳中张力为 F_T，以地面为参考系，以 v_0方向为正，对 m_0应用牛顿第二定律：

$$-2F_T=m_0a_{m_0}$$

以 m_0为参考系（加速直线运动的非惯性系），以 m 为研究对象，加上惯性力 $-ma_{m_0}$后，m 做圆周运动，应用牛顿第二定律：

$$F_T - ma_{m_0} = m\frac{v_\perp^2}{a}$$

联立求得

$$F_T = \frac{mm_0^2v_0^2}{a(m_0+2m)^2}$$

(3) 设以原轻绳中点为原点,轻绳中垂线为 x 轴,系统总动量守恒,质心速度 $v_C = \frac{m_0v_0}{2m+m_0}$ 保持不变,则有:

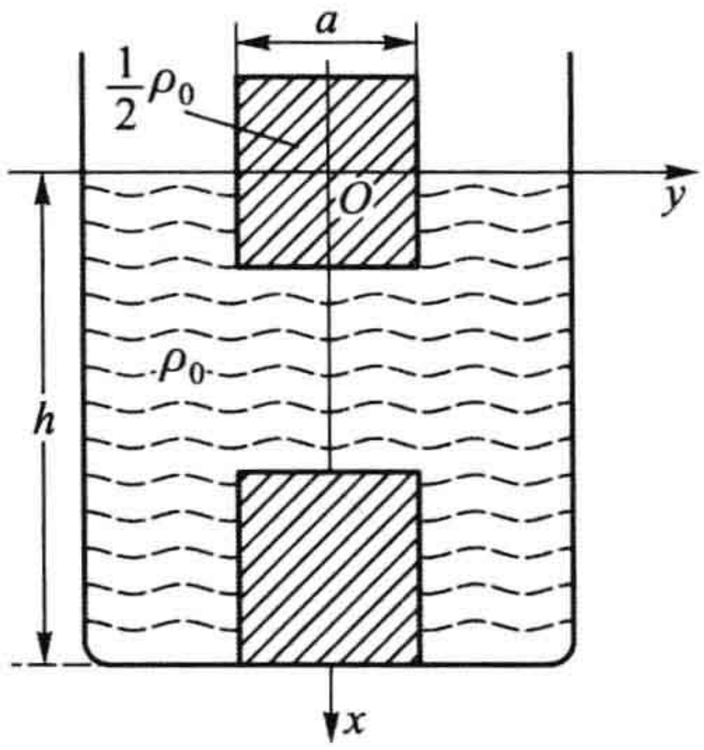
$$v_Ct = x_C - x_{C0} = \frac{m_0x+2m(x-a)}{2m+m_0} - \frac{2m\cdot 0+m_0\cdot 0}{2m+m_0}$$

联立得

$$(m_0+2m)\,x = m_0v_0t+2ma$$

从而得证。

5-26. 边长为 a 的正方体木块静浮于横截面积为 $4a^2$ 的杯内水面上,水的深度 $h=2a$。已知水的密度为 ρ_0,木块的密度为 $\frac{1}{2}\rho_0$,现将木块非常缓慢地压至水底。忽略水的阻力作用,求在此过程中外力所做的功。



习题 5-26 图

解: 木块静浮在水面上时,将木块没入水中的深度设为 h',由受力平衡得

$$\rho_0ga^2h' = \frac{1}{2}\rho_0ga^3,\text{则 } h' = \frac{a}{2}$$

建立固定坐标系(液面上升时,坐标系不动),如习题 5-26 图所示。若木块未完全进入水中,设其质心进入水中 x 时,水面升高的高度为 h_1,木块排开水的体积等于液体上升的体积,即

$$(4a^2-a^2)h_1 = a^2x,\text{则 } h_1 = \frac{1}{3}x$$

当 $x+\frac{1}{3}x = \frac{a}{2}$,即 $x=\frac{3}{8}a$ 时,木块恰好全部进入水中;当 $x=h-\frac{1}{2}a$ 时,木块到达水底。

以杯子为参考系,从起始到木块被压入水底,对木块运用动能定理:

$A_{外}+A_{浮}+A_G=0$,已知 $h=2a$

$$A_{浮} = -\int_0^{\frac{3}{8}a} a^2\left(x+\frac{1}{3}x+\frac{a}{2}\right)\rho_0g\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{3}{8}a}^{h-\frac{1}{2}a} a^3\rho_0g\,\mathrm{d}x = -\frac{45}{32}\rho_0a^4g$$

$$A_G = mg\left(h-\frac{a}{2}\right) = \frac{3}{4}\rho_0 a^4 g$$

所以

$$A_{外} = -A_{浮} - A_G = \frac{45}{32}\rho_0 a^4 g - \frac{3}{4}\rho_0 a^4 g = \frac{21}{32}\rho_0 a^4 g$$

5-27. 一条长为 $2l$、质量为 m 的柔软绳索，挂在一光滑的水平轴钉（粗细可忽略）上，当两边的绳长均为 l 时，绳索处于平衡状态。若给其一端加一个竖直方向的微小扰动，则绳索就从轴钉上滑落。试求：

（1）当绳索刚脱离轴钉时，绳索的速度；

（2）当较长的一边绳索的长度为 x 时，轴钉上所受的力。

解：以轴钉为参考系，竖直向下为正方向，以绳子、钉和地球组成的系统为研究对象，运动过程机械能守恒。设绳的线密度为 ρ，则 $m=\rho\cdot 2l$。设轴钉处为势能零点，当较长的一边绳索的长度为 x 时，其速度为 v，则

$$-\frac{1}{2}mg\,\frac{l}{2}\cdot 2 = \frac{1}{2}mv^2 - \rho x g\cdot\frac{1}{2}x - \rho g(2l-x)\cdot\frac{1}{2}(2l-x)$$

整理解得

$$v = \sqrt{gl + xg\left(\frac{x}{l}-2\right)}$$

（1）当 $x=2l$ 时 $v=\sqrt{gl}$；

（2）绳索质心坐标为

$$x_C = \frac{\rho x\cdot\frac{x}{2} + \rho(2l-x)\cdot\frac{1}{2}(2l-x)}{2l\rho} = \frac{1}{2l}(x^2-2lx+2l^2)$$

又知 $\dot{x}=v$，则

$$a_C = \ddot{x}_C = \frac{v^2+\frac{g}{l}(x-l)^2}{l} = \frac{2g\,(x-l)^2}{l^2}$$

由质心运动定理知：

$$mg - F_T = ma_C$$

联立求得

$$F_T = mg\left[1-\frac{2\,(x-l)^2}{l^2}\right]$$

由 F_T 的表达式可以看出

当 $x=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)l$ 时，$F_T=0$；

当 $x>\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)l$ 时，$F_T<0$。

但是轴钉对绳索的作用力不可能是负值。所以：

当 $x<\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)l$ 时，$F_T=mg\left[1-\frac{2(x-l)^2}{l^2}\right]$。此种情况下，绳索在竖直方向运动但不脱离轴钉；

当 $x\geqslant\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)l$ 时，$F_T=0$。此种情况下，绳索中围绕轴钉运动的部分质元将脱离轴钉向上运动，此时绳索的质心位置并不严格满足

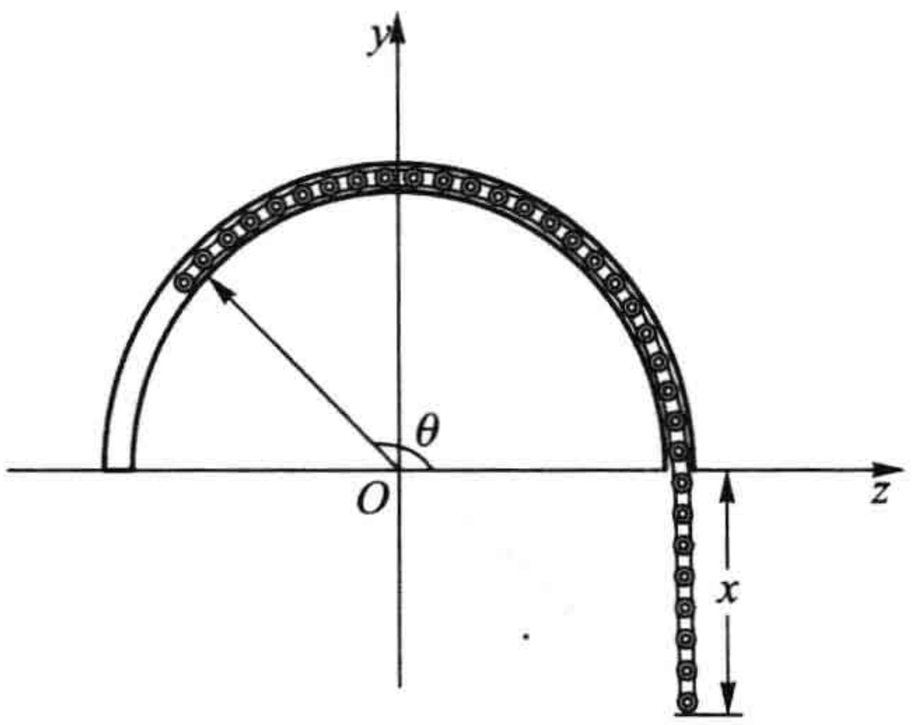
$$x_C=\frac{\rho x\cdot\frac{x}{2}+\rho(2l-x)\cdot\frac{1}{2}(2l-x)}{2l\rho}=\frac{1}{2l}(x^2-2lx+2l^2)$$

这一关系式，绳子的运动情况较为复杂，但绳子整体的质心仍然在竖直方向运动(因为水平方向绳子不受外力作用)。

5-28. 在竖直平面内有一光滑的半圆形管道，圆的半径为 R。管内有一条长度正好为半圆周长 πR 的链条，其线密度为 ρ_l，如习题 5-28 图所示。若由于微小的扰动，链条从管口向外滑出。试求：

(1) 当链条刚从管口全部滑出时的速度；

(2) 当链条从管口滑出的长度为 $\frac{\pi}{3}R$ 时的速度和加速度。



习题 5-28 图

解：如习题 5-28 图建立坐标系，则管道中链条质心的 y 轴坐标为

$$y_C=\frac{\int_0^y y\mathrm{d}m}{m}=\frac{\int_0^{\theta_x}R\sin\theta R\mathrm{d}\theta\cdot\rho_l}{\rho_l\cdot\theta_x\cdot R}=\frac{R}{\theta_x}(1-\cos\theta_x)$$

其中

$$\theta_x=\frac{\pi R-x}{R}=\pi-\frac{x}{R}$$

当 $x=0$ 时，$\theta_x=\pi$，$y_C=\frac{2R}{\pi}$；

当 $x=\frac{\pi R}{3}$ 时，$\theta_x=\frac{2\pi}{3}$，$y_C=\frac{9R}{4\pi}$；

当 $x=\pi R$ 时，$\theta_x=0$，$y_C=0$。

以地面为参考系，链条和地球组成的系统机械能守恒：

$$\pi R\rho_l g\frac{2R}{\pi}=\frac{1}{2}\pi R\rho_l v^2+R\theta_x\rho_l g\cdot\frac{R}{\theta_x}(1-\cos\theta_x)-x\rho_l g\cdot\frac{1}{2}x$$

即

$$2R^2 g=\frac{1}{2}\pi Rv^2+R^2 g(1-\cos\theta_x)-\frac{1}{2}gx^2 \qquad ①$$

（1）当链条刚从管口全部滑出时，$x=\pi R$，$\theta_x=0$。由①式得

$$v^2=\frac{4Rg}{\pi}+\pi Rg,\text{则 } v=\sqrt{\frac{Rg}{\pi}(\pi^2+4)}$$

（2）当 $x=\frac{\pi R}{3}$ 时，$\theta_x=\frac{2}{3}\pi$，由①式得

$$v=\sqrt{\frac{Rg}{\pi}\left(1+\frac{\pi^2}{9}\right)}$$

将①式两边对 t 求导，又知 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，则

$$a=\frac{(R\sin\theta_x+x)\,g}{\pi R}$$

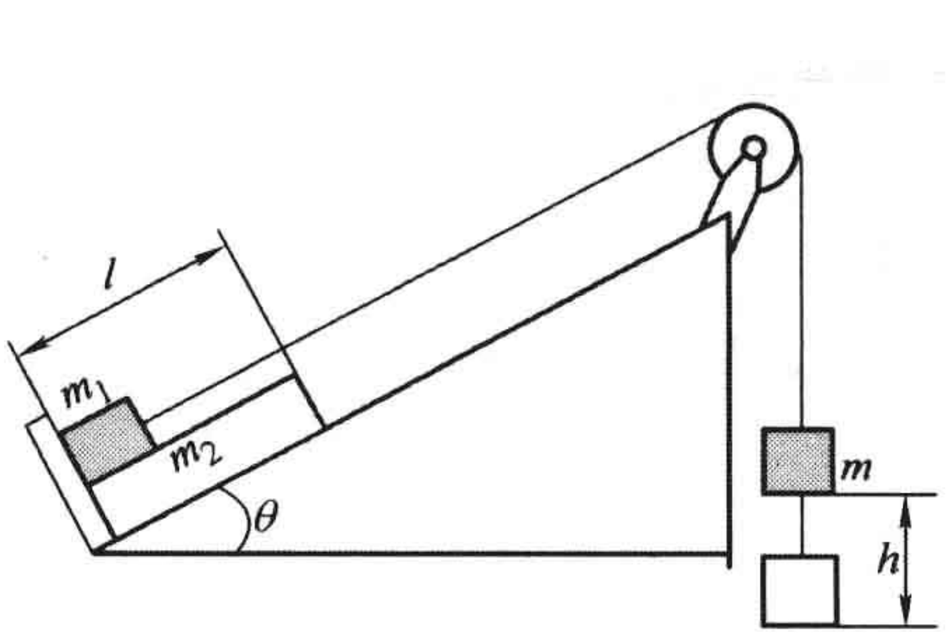
当 $x=\frac{\pi R}{3}$ 时，代入数据可得

$$a=\left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi}+\frac{1}{3}\right)g$$

5-29. 在倾角 $\theta=\arctan\frac{3}{4}$ 的光滑斜面上叠放着质量 $m_1=40$ kg 的重物和质量 $m_2=20$ kg、长 $l=0.2$ m 的板，重物与板之间的摩擦因数 $\mu=0.5$。m_1 与另一质量 $m=30$ kg 的重物由一跨过装在斜面顶端的定滑轮的细绳相连，如习题 5-29 图所示。开始时，m_1 和 m_2 均静靠在斜面上一挡板处，m 由手托住，使绳松弛，然后放手，当 m 自由下落的高度为 h 时，绳被拉紧。若 m_1 体积很小，以致可忽略其线度，并设斜面和 m 的运动长度足够长。忽略绳与滑轮的质量和滑轮轴承处的摩擦力。

（1）试分析由此三物体组成的系统以后运动的情况；

（2）一种分析是，若 h 不太大时，则 m_1 和 m_2 在以后的运动过程中不会互相脱离。这种分析是否正确？如是正确的话，求出 h 的最大值。



习题 5-29 图

解：以地面为参考系，m 下落 h 时，m 和地球机械能守恒。设此时 m

速度为 v_{m0},则

$$mgh=\frac{1}{2}mv_{m0}^2$$

具有 v_{m0}速度的 m 与 m_1拉伸瞬间,m_1、m 动量守恒,设绳拉紧后 m_1、m 的瞬时速度为 v_0,则

$$mv_{m0}=(m_1+m)\,v_0$$

碰后瞬时 m_2不动。

m_1能否脱离板,取决于 m_2的加速度 a_2与对应的 m_1、m 的加速度 a_1的关系。分别对 m_2、m_1和 m 的整体应用牛顿第二定律得

$$a_2=\frac{\mu m_1 g\cos\theta-m_2 g\sin\theta}{m_2},a_1=\frac{mg-m_1 g\sin\theta-m_1 g\cos\theta\mu}{m_1+m}$$

如果 $a_2\leqslant a_1$,则 m_1最终一定会脱离板;如果 $a_2>a_1$,由于 m_1具有 v_0的初速度,则 m_1在一定条件下不会脱离板。此时的极值条件为:当 m_1在板上运动 l 时,三者速度相等。以下求此极值对应的 h。

设 m_1刚好脱离 m_2时,m_1和 m 速度为 v_1,m_2速度为 v_2,所用时间为 t,板移动的距离为 x,以板为参考系。对 m_1:

$$v_1-v_2=(v_0-0)+(a_1-a_2)t$$

$$l=(v_0-0)t+\frac{1}{2}(a_1-a_2)t^2$$

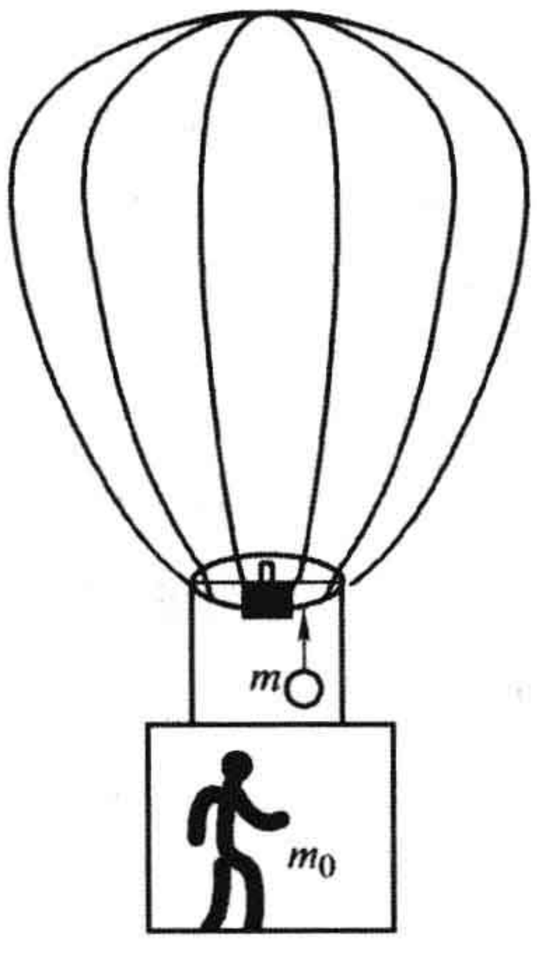
极值条件为

$$v_2=v_1$$

以上各式联立可得

$$h_{\max}=0.37\ \mathrm{m}$$

5-30. 如习题 5-30 图所示,一个人手持质量为 m 的小球乘坐在热气球下的吊篮里。气球、吊篮和人的总质量为 m_0。整个系统静止在空中。突然,人将小球向上急速抛出,经过时间 t 后小球又返回人手中。若人手在抛接球时相对吊篮的位置不变,试求人在抛球过程中对系统做的功。



习题 5-30 图

解:设竖直向上为正方向,以人抛球前后瞬时为初、末态,对气球、吊篮、人和小球组成的系统应用功能原理:

$$A_{\text{内非}}=\left(\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}m_0v_0'^2\right)-0$$

其中,v_0、v_0'分别为人抛小球后瞬时小球和吊篮分别相

对地面的速度。为了使 v_0、v_0'与题给已知量联系起来，进一步作如下分析。

抛球前，气球、吊篮、人和小球构成的系统受力平衡：

$$F_{浮}=(m_0+m)g$$

抛球前后系统动量守恒：

$$mv_0+m_0v_0'=0$$

球抛出后，气球和吊篮系统所受浮力不变，以地面为参考系，对 m_0 应用牛顿第二定律：

$$F_{浮}-m_0g=m_0a$$

以气球和吊篮为参考系（匀变速直线运动的非惯性系），对 m 加上惯性力 $-ma$ 后，应用牛顿第二定律：

$$-mg-ma=ma',v''_0=v_0-v_0'$$

其中，a'、v''_0 分别为小球相对气球和吊篮的加速度和速度。小球偏离人距离最大时：

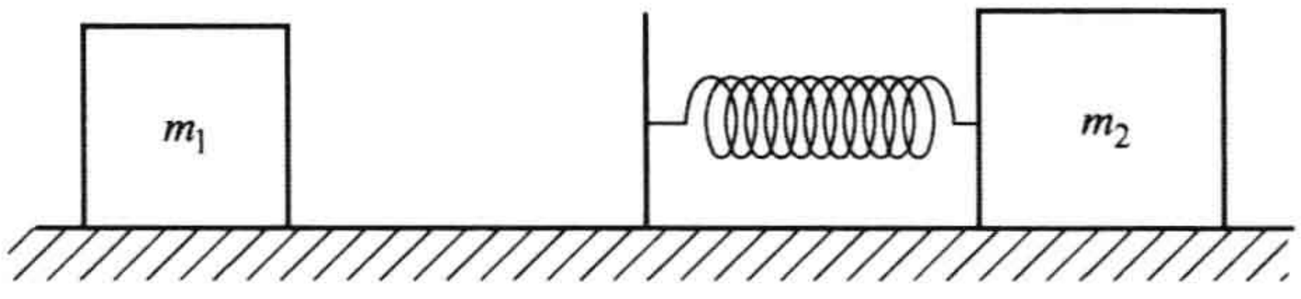
$$v'=v''_0+a'\frac{t}{2}=0$$

综合上述各式整理得

$$A_{内排}=\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}m_0v_0'^2=\frac{m(m+m_0)}{8m_0}g^2t^2$$

即为人对系统所做的功。

5-31. 在光滑的水平面上有两个质量分别为 m_1 和 $m_2(m_1<m_2)$ 的物块，m_2 上连有一轻弹簧，如习题 5-31 图所示。第一次，具有动能 E_0 的 m_1 与静止的 m_2 相碰；第二次，具有动能 E_0 的 m_2 与静止的 m_1 相碰，两次碰撞均压缩轻弹簧。试问：



习题 5-31 图

（1）两次碰撞中哪一次弹簧的最大压缩量较大？

（2）若碰前两物块的总动能为 E_0，则 E_0 如何分配，才能使在两物块碰撞过程中弹簧的最大压缩量最大？

解：碰撞过程动量守恒，机械能守恒。

（1）对于第一次碰撞：

$$E_0=\frac{1}{2}m_1v_{10}^2$$

动量守恒：

$$m_1v_{10}=(m_1+m_2)v_{12}$$

能量守恒：

$$E_0=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{12}^2+\frac{1}{2}kl_1^2$$

整理得

$$\frac{1}{2}kl_1^2=\frac{m_2}{m_1+m_2}E_0 \qquad ①$$

对于第二次相碰：

$$E_0=\frac{1}{2}m_2v_{20}^2$$

动量守恒：

$$m_2v_{20}=(m_1+m_2)v_{21}$$

能量守恒：

$$E_0=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{21}^2+\frac{1}{2}kl_2^2$$

整理得

$$\frac{1}{2}kl_2^2=\frac{m_1}{m_1+m_2}E_0 \qquad ②$$

由于 $m_1<m_2$，比较①，②得

$\frac{1}{2}kl_1^2>\frac{1}{2}kl_2^2$，即 $l_1>l_2$ 即第一次碰撞弹簧的最大压缩量较大。

（2）设碰前 m_1、m_2 的动能分别为 E_{10}、E_{20}，则

$$E_{10}+E_{20}=E_0 \qquad ③$$

动量守恒：

$$m_1v_{10}+m_2v_{20}=(m_1+m_2)v_{12} \qquad ④$$

能量守恒：

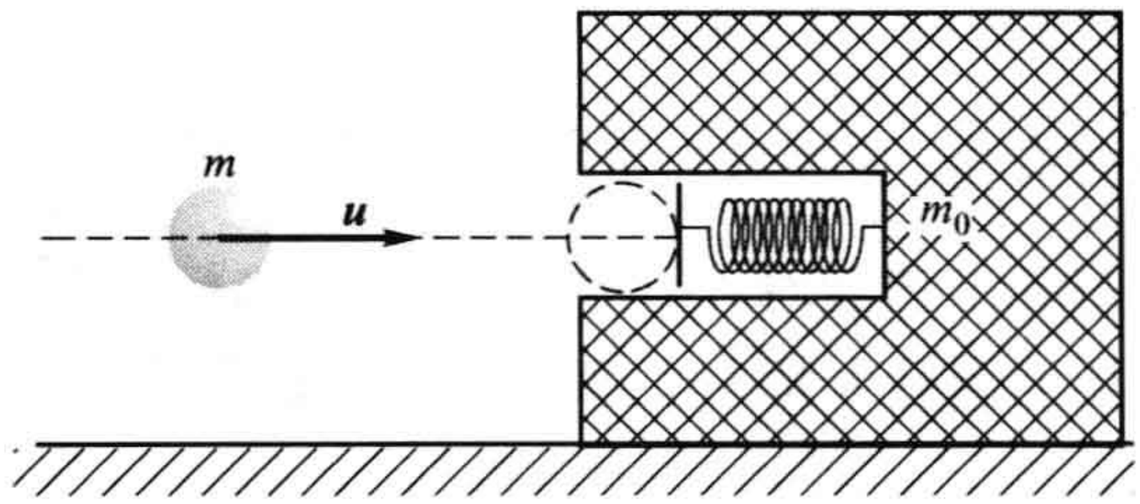
$$E_0=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{12}^2+\frac{1}{2}kl^2 \qquad ⑤$$

由⑤式可知，当 E_0 固定，$v_{12}=0$ 时，l 最大，由③④⑤式联立得弹簧压缩量最大时的能量分配：

$$E_{10}=\frac{m_2}{m_1+m_2}E_0,E_{20}=\frac{m_1}{m_1+m_2}E_0$$

5-32. 在光滑的水平面上，一质量为 m_0 的架子内连有一劲度系数为 k 的弹

簧，如习题 5-32 图所示。一质量为 m 的小球以 u 的速度射入静止的架子内，并开始压缩弹簧。设小球与架子内壁间无摩擦力。试求：



习题 5-32 图

（1）弹簧的最大压缩量；

（2）从弹簧被压缩到弹簧达最大压缩量所需的时间；

（3）在此过程中架子的位移。

解：以地面为参考系，将 m_0、m 和弹簧看成一个系统。

（1）弹簧压缩过程系统动量守恒、机械能守恒，弹簧压缩量最大时，m 和 m_0 速度相同。

动量守恒：

$$mu=(m+m_0)v$$

机械能守恒：

$$\frac{1}{2}mu^2=\frac{1}{2}(m+m_0)v^2+\frac{1}{2}kl^2$$

联立解得

$$l=u\sqrt{\frac{m_0m}{k(m_0+m)}}$$

（2）当弹簧的压缩量为 x' 时，以地面为参考系。对 m_0 应用牛顿第二定律：

$$kx'=m_0a$$

以 m_0 为参考系（加速直线运动的非惯性系），对 m 加上惯性力 $-ma$ 后，应用牛顿第二定律：

$$-kx'-ma=m\ddot{x}'$$

整理得

$$\ddot{x}'+\frac{k(m+m_0)}{mm_0}x'=0$$

则 m 相对于 m_0 做简谐振动

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k(m+m_0)}{mm_0}}$$

弹簧被压缩到最大压缩量所需时间

$$t=\frac{T}{4}=\frac{2\pi}{4\omega_0}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m_0 m}{k(m+m_0)}}$$

(3) 以地面为参考系,系统质心速度 $v_C=\frac{mu}{m+m_0}$,碰撞过程动量守恒,质心速度不变。设小球刚好压缩弹簧时,小球所在位置为坐标原点,架子本身的质心坐标为 x_{C0},当弹簧被压缩到最大量 l 时,架子移动的位移为 Δx,则小球与架子系统的初、末态质心满足:

$$\left[\frac{m\cdot(\Delta x+l)}{m+m_0}+\frac{m_0(x_{C0}+\Delta x)}{m+m_0}\right]-\left(\frac{m\cdot 0}{m+m_0}+\frac{m_0 x_{C0}}{m+m_0}\right)=v_C t$$

与(1)(2)结果联立解得

$$\Delta x=\frac{mu}{m+m_0}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\sqrt{\frac{m_0 m}{k(m+m_0)}}$$

5-33. 在光滑的水平桌面上有三个完全相同光滑弹性小球,两个静止小球 B、C 互相紧靠着,另一小球 A 则以 v_0 的速度沿 B、C 球心连线的中垂线向着两球运动。求碰后三球的速度。

解:设从 B 到 C 两球心的连线方向和 A 球的初始运动方向分别为 x 轴、y 轴的正方向,三球质量均为 m,三球组成的系统动量、机械能均守恒。x 轴方向动量守恒:

$$0=mv_{Ax}+mv_{Bx}+mv_{Cx}$$

y 轴方向动量守恒:

$$mv_0=mv_{Ay}+mv_{By}+mv_{Cy}$$

能量守恒:

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\left(\frac{1}{2}mv_{Ay}^2+\frac{1}{2}mv_{Ax}^2\right)+\left(\frac{1}{2}mv_{Bx}^2+\frac{1}{2}mv_{By}^2\right)+\left(\frac{1}{2}mv_{Cx}^2+\frac{1}{2}mv_{Cy}^2\right)$$

由三球的对称性可得

$$v_{Ax}=0,v_{By}=v_{Cy}$$

碰撞过程 A 给 B、C 的力分别沿 A、B,A、C 球心的连线方向,故

$$\left|\frac{v_{By}}{v_{Bx}}\right|=\left|\frac{v_{Cy}}{v_{Cx}}\right|=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$

联立求得碰后三球的速度分别为

$$v_A=v_{Ay}=\frac{v_0}{5},v_B=v_C=\sqrt{v_{Bx}^2+v_{By}^2}=\frac{2\sqrt{3}}{5}v_0$$

A 球沿 $\boldsymbol{v}_0$ 的相反方向,B 球和 C 球在 $\boldsymbol{v}_0$ 方向两侧,与 $\boldsymbol{v}_0$ 方向成 30°角。

*5-34. 一运动粒子与另一质量与其相等的静止粒子发生弹性斜碰,试证

明：碰撞后两粒子的运动方向彼此垂直。

证明：如习题 5-34 图所示，以 v_{10} 方向为 x 轴建立坐标系，设 v_{10} 为运动粒子碰前的速度，v_1、v_2 分别为粒子碰后的速度，它们与 x 轴夹角分别为 α、β，根据动量守恒有：

x 轴方向：

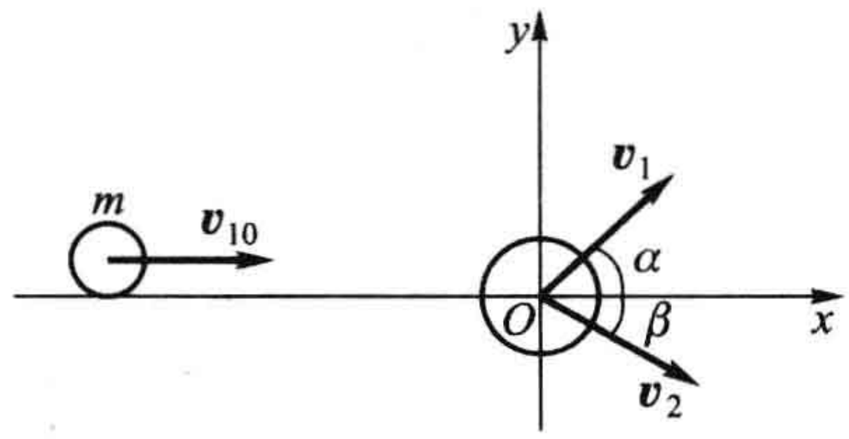
$$mv_{10}=mv_1\cos\ \alpha+mv_2\cos\ \beta$$

y 轴方向：

$$0=mv_1\sin\ \alpha+mv_2\sin\ \beta$$

弹性斜碰能量守恒：

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2$$



习题 5-34 图

联立可得

$$\cos\ \beta=\sin\ \beta\tan\ \alpha$$

即

$$\cot\ \beta=\tan\ \alpha=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

所以

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$$

即 v_1、v_2 互相垂直。

***5-35**. 一质量为 2 kg 的小球 A 以 $v_{A0}=32$ m/s 的速度与另一质量为 6 kg 的静止小球 B 相碰。设碰撞是弹性的，则在质心坐标系中，两小球的反射角均为 90°。试问：

（1）在实验室坐标系中，A 球的反射角为多大？

（2）在实验室坐标系中，碰后 B 球的运动方向与 A 球原运动方向之间的夹角为多大？

解：设 $v_{A0}=v_0$，系统质心速度大小为

$$|\boldsymbol{v}_C|=\frac{m_Av_0}{m_A+m_B}$$

质心坐标系中碰前两球的速度大小分别为

$$|\boldsymbol{u}'_A|=|\boldsymbol{v}_{A0}-\boldsymbol{v}_C|=\frac{m_Bv_0}{m_A+m_B},\ |\boldsymbol{u}'_B|=|0-\boldsymbol{v}_C|=\frac{m_Av_0}{m_A+m_B}$$

碰撞后，对于完全弹性碰撞，两个球各自的速度大小不变，即

$$|\boldsymbol{v}'_A|=|\boldsymbol{u}'_A|,\ |\boldsymbol{v}'_B|=|\boldsymbol{u}'_B|=|\boldsymbol{v}_C|$$

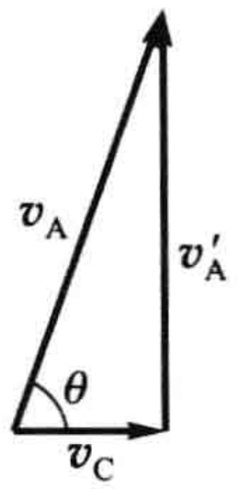
碰后两球的实验室坐标系下的速度为

$$\boldsymbol{v}_A=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{v}'_A,\ \boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{v}'_B$$

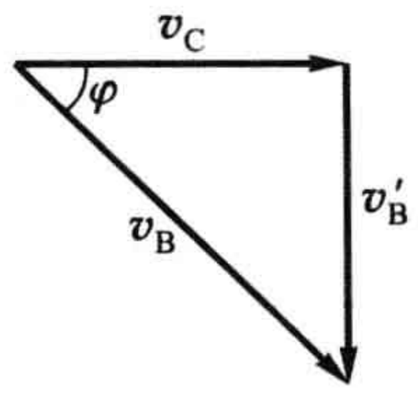
（1）碰后，由习题 5-35 图(a)的几何关系得

$$\tan\theta=\left|\frac{\boldsymbol{v}'_{\mathrm{A}}}{\boldsymbol{v}_C}\right|=\frac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}}}=3$$

因此,A 球的反射角为 arctan 3。



习题 5-35 图(a)



习题 5-35 图(b)

(2) 已知 $\boldsymbol{v}_C$ 与 $\boldsymbol{v}_0$ 方向一致,且 $v'_{\mathrm{B}}=v_C$,由习题 5-35 图(b)的几何关系得

$$\varphi=\frac{\pi}{4}$$

***5-36**. 一质量为 m 的质子以 v_0 的速度去撞击静止质量为 $4m$ 的氦核。在实验室坐标系里,质子以 $\frac{1}{2}v_0$ 的速度和 30°角散射。试求:

(1) 在实验室坐标系里,撞击后氦核的速度及运动方向;

(2) 在质心坐标系里质子的散射速度,以及两粒子的散射角度;

(3) 系统在散射中总能量的变化。

解:(1) 如习题 5-36 图(a)所示建立坐标系,碰撞过程动量守恒:

x 轴方向:

$$mv_0=4mv_2\cos\beta+mv_1\cos 30°$$

y 轴方向:

$$0=4mv_2\sin\beta-mv_1\sin 30°$$

联立求得

$$v_2=0.155v_0,\beta=23.8°$$

即方向与 v_0 的夹角为 23.8°。

(2) 在质心坐标系中,$v_C=\frac{mv_0}{m+4m}=\frac{1}{5}v_0$

实验室坐标系与质心坐标系的速度变换关系为

$$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{v}'_1,\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{v}'_2$$

其矢量关系如习题 5-36 图(b)所示,由其几何关系得

$$v'_1=\sqrt{v_1^2+v_C^2-2v_1v_C\cos 30°},v'_2=\sqrt{v_2^2+v_C^2-2v_2v_C\cos\beta}$$

$$\frac{v_1}{\sin(\pi-\theta')}=\frac{v'_1}{\sin 30°}$$

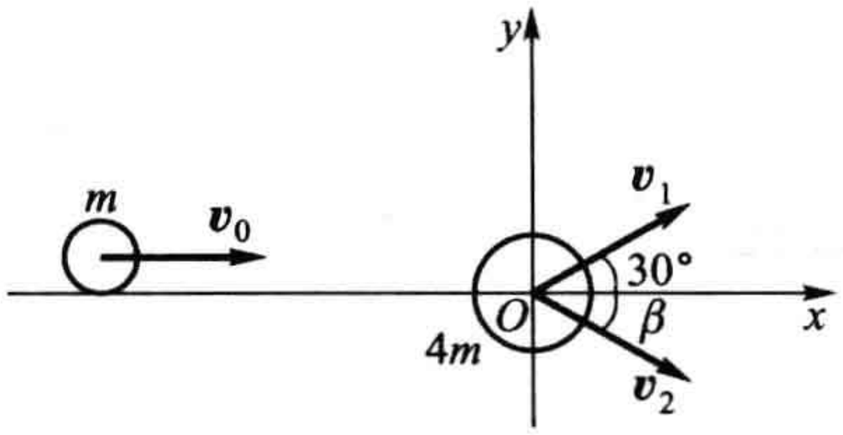
解得

$$v_1' = 0.342v_0, \theta' = 47°$$

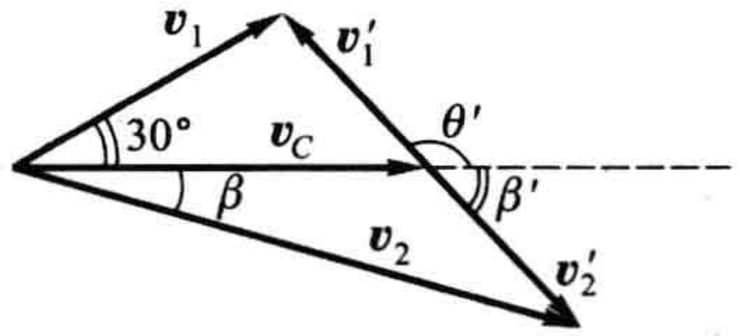
即质子的散射角度为 47°，氦核的散射角度 $\beta' = 180° - \theta' = 133°$。

（3）系统的能量变化为

$$\Delta E = \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}4mv_2^2\right) - \frac{1}{2}mv_0^2 = -0.654\left(\frac{1}{2}mv_0^2\right)$$



习题 5-36 图(a)



习题 5-36 图(b)

第六章　角动量定理与角动量守恒定律

课后作业题

6-1. 在给定的坐标系下，设力 $\boldsymbol{F}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{k}$ 的作用点位置矢量为：$\boldsymbol{r}=2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$，其中 $\boldsymbol{F}$ 以 N 为单位，$\boldsymbol{r}$ 以 m 为单位，求力对坐标原点的力矩。

解：依据力矩的定义 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ 得

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=(2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k})\times(3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{k})\ \text{N}\cdot\text{m}=(8\boldsymbol{i}-18\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k})\ \text{N}\cdot\text{m}$$

6-2. 若将地球绕太阳的公转看作是以太阳为中心的圆周运动，试求地球相对太阳中心的角动量。已知地球的质量 $m_{\text{E}}=6.0\times10^{24}$ kg，轨道半径 $R=1.49\times10^{11}$ m。

解：设 ω 为地球绕太阳转动的角速度。

$$\begin{aligned}L&=R\cdot m_{\text{E}}v=R^2\cdot m_{\text{E}}\omega\\&=\left[(1.49\times10^{11})^2\times6.0\times10^{24}\times\frac{2\pi}{365\times24\times3600}\right]\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}\\&=2.65\times10^{40}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}\end{aligned}$$

6-3. 一质量 $m=2$ kg 的质点由静止开始做半径 $R=5$ m 的圆周运动。其相对圆心的角动量随时间的变化关系为 $L=3t^2$，角动量 L 的单位为 $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$，$t$ 的单位为 s。

试求：(1) 质点受到的相对于圆心的力矩；

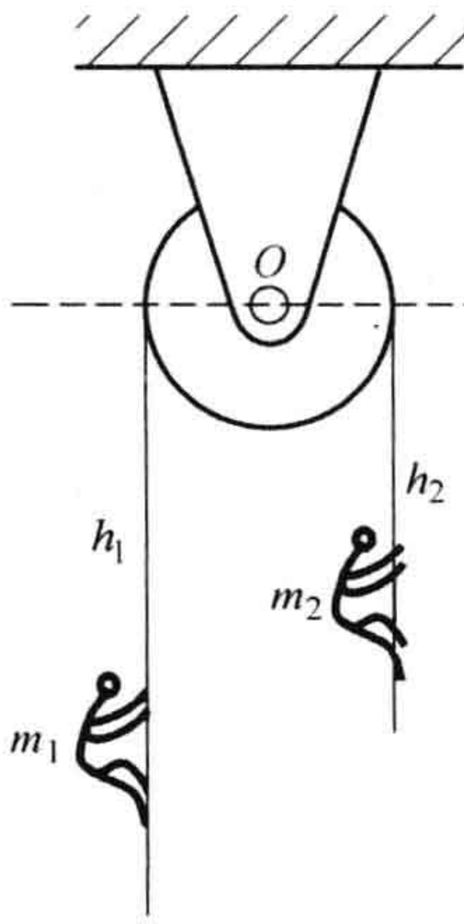
(2) 质点运动角速度随时间的变化关系。

解：以质点为研究对象，以圆心为参考点。

(1) $M=\dfrac{\text{d}L}{\text{d}t}=\dfrac{\text{d}(3t^2)}{\text{d}t}=6t(\text{N}\cdot\text{m})$

(2) 由 $L=R\cdot mv=R^2m\cdot\omega$ 得

$$\omega=\frac{L}{R^2\cdot m}=\frac{3t^2}{25\times2}=0.06t^2(\text{rad/s})$$



习题 6-4 图

6-4. 如习题 6-4 图所示，一根轻绳跨过具有光滑水平轴的定滑轮(质量可忽略)，两个质量分别为 m_1 和

m_2的人各抓住绳子的一端。开始时，两人与水平轴之间的高度差分别为 h_1 和 h_2，他们同时开始向上爬，并同时到达该滑轮的水平轴处。试求他们爬绳所经历的时间 t。

解：分别以两个人为研究对象，以转轴为坐标原点，竖直向下和垂直纸面向外为正方向，以转轴为参考点，对每个人分别应用角动量定理。

左边人角动量定理：

$$\int (m_1 g - F_f)\, R\mathrm{d}t = Rm_1 v_1 - 0 = Rm_1 \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}$$

右边人角动量定理：

$$\int (F_f - m_2 g)\, R\mathrm{d}t = -Rm_2 v_2 - 0 = -Rm_2 \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}$$

积分得

$$\frac{1}{2} m_1 g t^2 - \iint F_f \mathrm{d}^2 t = m_1 (0 - h_1)$$

$$\frac{1}{2} m_2 g t^2 - \iint F_f \mathrm{d}^2 t = m_2 (0 - h_2)$$

联立解得

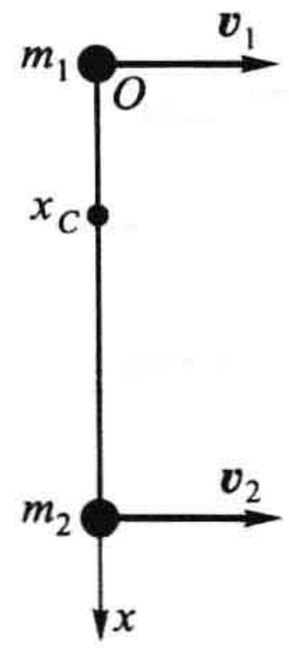
$$t = \sqrt{\frac{2(m_1 h_1 - m_2 h_2)}{g(m_2 - m_1)}}$$

6-5. 在光滑的水平面上，用长为 l 的轻线连接两个质量分别为 m_1 和 m_2 的小球。开始时，线正好拉直，m_1 和 m_2 的速度分别为 v_1 和 v_2（$v_1 > v_2$），它们的方向相同，且垂直于连线。试问：

（1）系统相对质心的角动量为多大？

（2）线中的张力为多大？

解：（1）两个小球和轻线组成系统，以 m_1 小球所在点为坐标原点，建立如习题 6-5 图所示的坐标系（其中，水平向右为 y 轴正方向，垂直纸面向外为 z 轴正方向）。



习题 6-5 图

系统的质心为

$$x_C = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot l}{m_1 + m_2}$$

质心的速度为

$$v_C = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

m_1 相对于质心的速度为

$$v_1' = v_1 - v_C = \frac{(v_1 - v_2)\, m_2}{m_1 + m_2}$$

m_2相对于质心的速度为

$$v_2' = v_2 - v_C = \frac{(v_2 - v_1)\, m_1}{m_1 + m_2}$$

系统相对于质心的角动量为

$$L' = -m_1 v_1' x_C + m_2 v_2' (l - x_C) = \frac{m_1 m_2 l}{m_1 + m_2}(v_2 - v_1)$$

(2) 以 m_1、m_2系统质心为参考系，m_1、m_2相对于质心做圆周运动。对 m_1(或 m_2)应用牛顿第二定律：

$$F_T = m_1 \cdot \frac{v_1'^2}{x_C} = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2) l} \cdot (v_1 - v_2)^2$$

6-6. 两个质量均为 60 kg 的滑冰者，在两条相距 10 m 的平直跑道上以 6.5 m/s的速率沿相反方向匀速滑行。当他们之间的距离恰好等于 10 m 时，他们分别抓住一根长 10 m 的绳子的两端。若将滑冰者看成质点，并略去绳子的质量。

(1) 求他们抓住绳子前后相对于绳子中点的角动量；

(2) 两人都用力缓慢往自己这边拉绳子，当他们之间的距离为 5 m 时，各自的速率是多大?

(3) 求此时绳中的张力；

(4) 计算每个人在拉绳过程中所做的功。

解：两人系统质心位置始终不变，当他们刚开始抓绳子瞬时，他们距质心的距离均为

$$l_C = \frac{1}{2} l = 5\ \text{m}$$

设两人沿绳子和垂直绳子方向的速度分别为 $v_{\parallel}$、$v_{\perp}$，缓慢拉绳子意味着 $v_{\parallel} = 0$。两人抓绳子前相对绳子中点的角动量为

$$L = 2 \cdot m v_0 \cdot l_C$$

抓绳子前后，两人相对绳子中点角动量守恒：

$$2 \cdot m v_0 \cdot l_C = 2 \cdot m v_{\perp} \cdot l_C'$$

其中

$$l_C' = \frac{1}{2} s$$

缓慢拉绳子时，两人相对绳子中点做圆周运动，由向心力公式得

$$F_T = m \frac{v_{\perp}^2}{l_C'}$$

对两人应用动能定理：

$$A_{外}=\frac{1}{2}m(v_{\perp}^2+v_{\parallel}^2)-\frac{1}{2}mv_0^2$$

联立解得

（1）二人抓住绳子前后相对于绳子中点的角动量为 $L=3.9\times10^3\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$；

（2）二人之间的距离为 5 m，即 $s=5$ m 时，各自的速率：$v=v_{\perp}=13\ \mathrm{m/s}$；

（3）二人之间的距离为 5 m 时，绳中拉力：$F_T=4\ 056\ \mathrm{N}$；

（4）每个人在拉绳过程中做的功：$A_{外}=3.8\times10^3\ \mathrm{J}$。

6-7. 一颗人造地球卫星沿椭圆轨道绕地球运行。在近地点，卫星与地球中心的距离为地球半径的 3 倍。而在近地点，卫星的速度为在远地点时的 4 倍。求在远地点时卫星与地球中心之间的距离为地球半径的多少倍。

解：卫星运行过程中相对地球质心的角动量保持不变，设地球半径为 R，以卫星为研究对象，以地球中心为参考点。角动量守恒：

$$L_{近}=L_{远}$$

即

$$mr_{近}v_{近}=mr_{远}v_{远},m\cdot3R\cdot4v_{远}=mr_{远}v_{远}$$

解得

$$r_{远}=12R$$

6-8. 由火箭将一颗人造卫星送入离地面很近的轨道，进入轨道时，卫星的速度方向平行于地面，其大小为在地面附近做圆周运动的速度的$\sqrt{1.5}$倍。试求该卫星在运行中与地球中心的最远距离。

解：设地球半径为 R，地球和卫星质量分别为 m_e、m，卫星在地面附近做圆周运动的速度为 v_0。以卫星为研究对象，以地球中心为参考点。

由牛顿运动定律：

$$G\frac{m_em}{R^2}=m\frac{v_0^2}{R}$$

角动量守恒：

$$mr_{近}v_{近}=mr_{远}v_{远}$$

卫星和地球组成的系统机械能守恒：

$$\frac{1}{2}mv_{近}^2-G\frac{m_em}{r_{近}}=\frac{1}{2}mv_{远}^2-G\frac{m_em}{r_{远}}$$

又知

$$v_{近}=\sqrt{1.5}v_0,r_{近}=R$$

联立以上式子可得

$$r_{远}=3R$$

6-9. 试求月球表面的重力加速度和从月球表面逃逸的速度。已知月球的半径 $R_{月球}=1.7\times10^{6}$ m,月球的质量 $m_{月球}=7.3\times10^{22}$ kg。

解:以月球为参考系,对月球上的物体 m,有

$$G\frac{m_{月球}m}{R_{月球}^{2}}=mg_{月球}$$

则

$$g_{月球}=G\frac{m_{月球}}{R_{月球}^{2}}=1.7\ \text{m/s}^{2}$$

以月球和物体组成的系统为研究对象。在物体逃逸过程中机械能守恒,得

$$\frac{1}{2}mv^{2}-G\frac{m_{月球}m}{R_{月球}}=0$$

则

$$v=\sqrt{\frac{2Gm_{月球}}{R_{月球}}}=2.4\times10^{3}\ \text{m/s}$$

6-10. 在光滑水平桌面上,质量分别为 m_0 和 m 的两物体系于原长为 a,劲度系数为 k 的弹簧的两端。现使 m_0 获得一与弹簧垂直的速度 v_0。试证明:若 $v_0=3a\sqrt{\frac{k}{2m'}}$,其中 m' 为约化质量,则在以后的运动过程中两物体之间的最大距离为 $3a$。

证明:以 m 为参考系,m_0 以折合质量 $m'=\frac{mm_0}{m+m_0}$ 代替,将两体问题化为单体问题。设 m' 相对 m 的径向和横向速度分别为 $v_{\parallel}$,$v_{\perp}$。由于初始时 m 静止,因此 m' 相对 m 的初始速度为

$$v_{\parallel 0}=0,v_{\perp 0}=v_0=3a\sqrt{\frac{k}{2m'}}$$

运动到最大距离 x 的过程中,系统相对 m 角动量守恒:

$$m'v_0a=m'v_{\perp}x$$

系统机械能守恒:

$$\frac{1}{2}m'v_0^{2}=\frac{1}{2}k(x-a)^{2}+\frac{1}{2}m'(v_{\perp}^{2}+v_{\parallel}^{2})$$

弹簧达到最大拉伸时:

$$v_{\parallel}=0$$

联立解得

$$x=3a$$

自检练习题

6-11. 发射一宇宙飞船去考察一质量为 m_0、半径为 R 的行星。当飞船静止于空间离行星中心 $5R$ 处时，以速度 v_0 发射一包仪器，如习题 6-11 图所示。仪器包的质量 m 远小于飞船的质量，要使该仪器包恰好掠擦行星表面着陆，θ 角应是多少？

解：以仪器包和行星为研究对象，以行星中心为参考点。在仪器包从发射到着陆过程中，有

机械能守恒：

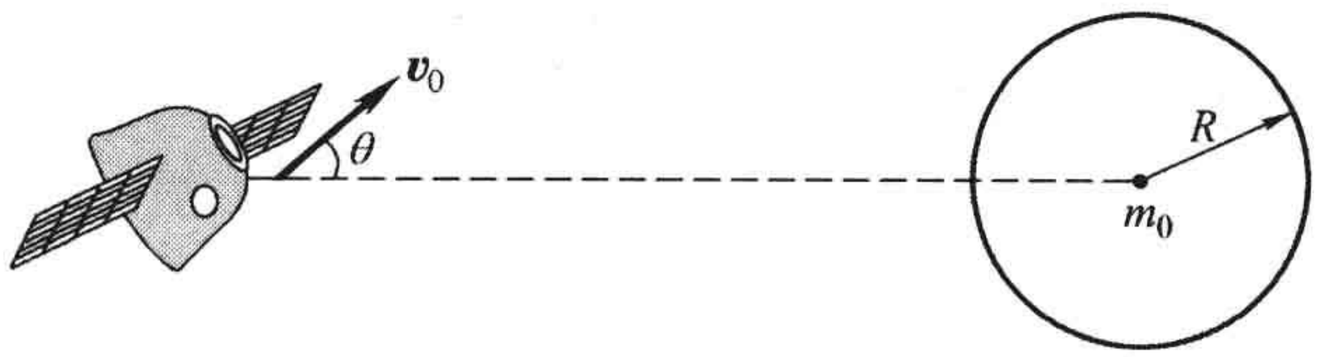
$$\frac{1}{2}mv_0^2-G\frac{m_0m}{5R}=\frac{1}{2}mv^2-G\frac{m_0m}{R}$$

角动量守恒：

$$5Rmv_0\sin\ (180°-\theta)=Rmv$$

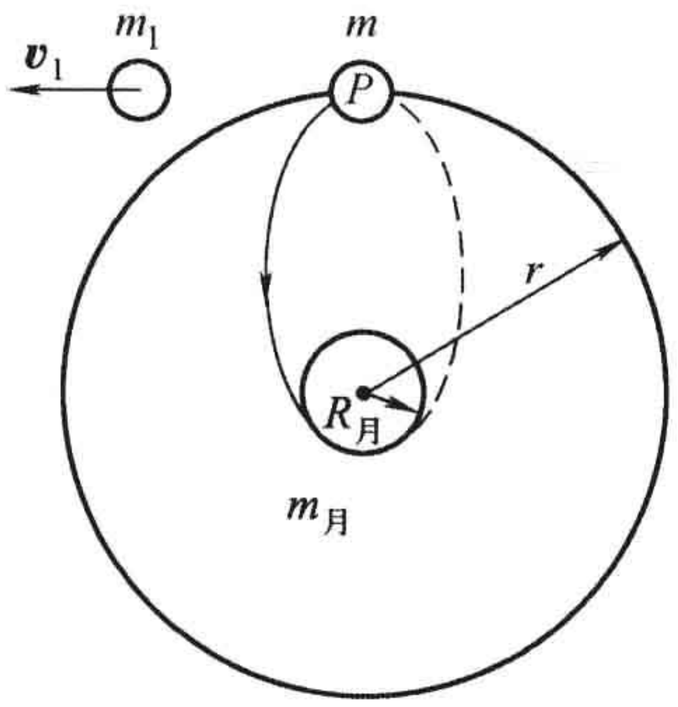
联立上述两方程解得

$$\theta=\arcsin\left(\frac{1}{5}\sqrt{1+\frac{8Gm_0}{5Rv_0^2}}\right)$$



习题 6-11 图

6-12. 一质量为 m 的空间站沿半径为 r 的圆周绕月球运动。为使空间站能在月球上登陆，当空间站运行至轨道上 P 点时向前发射一质量为 m_1 的物体，来改变空间站的运行速度，从而使其沿习题 6-12 图所示的新轨道运动，并在月球表面登陆。已知月球的半径为 $R_{月}$，月球的质量为 $m_{月}$，试求 m_1 的发射速度 v_1（相对月球参考系）。



习题 6-12 图

解：发射物体前对空间站与发射物体运用牛顿第二定律：

$$G\frac{m_{月}m}{r^2}=m\frac{v_0^2}{r}$$

空间站与发射物体出射前后动量守恒：

$$mv_0 = m_1 v_1 + (m - m_1) v_{空}$$

以空间站与月球为系统,以月球中心为参考点。

角动量守恒:

$$(m - m_1) v_{空} \cdot r = (m - m_1) v_R \cdot R_{月}$$

机械能守恒:

$$\frac{1}{2}(m - m_1) \cdot v_{空}^2 - G\frac{m_{月}(m - m_1)}{r} = \frac{1}{2}(m - m_1) v_R^2 - G\frac{m_{月}(m - m_1)}{R_{月}}$$

联立得

$$v_1 = \frac{m}{m_1}\sqrt{\frac{Gm_{月}}{r}}\left[1 - \left(1 - \frac{m_1}{m}\right)\sqrt{\frac{2R_{月}}{r + R_{月}}}\right]$$

***6-13**. 质量为 m 的质点在质量为 m_0 的质点(视为固定)的引力场中以 m_0 为中心做半径为 r_0 的周期运动。若给 m 以沿径向的冲量 I,并设 I 与质点的原动量之比为一小量,求 m 在以后运动过程中径矢的最大值 r_2 与最小值 r_1,并证明在忽略二级以上小量的情况下,$r_2 - r_0 \approx r_0 - r_1$,即质点 m 的运动轨道近似为一偏心的圆。

解: 以 m_0 和 m 组成的系统为研究对象。质量为 m 的质点受冲击后,系统瞬时的能量为

$$E_{初} = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\frac{I^2}{m} - G\frac{m_0 \cdot m}{r_0}$$

以后运动的能量:

$$E_{末} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 - G\frac{m_0 \cdot m}{r}$$

以 m_0 为参考系,由角动量守恒得

$$mv_{\perp} r = mv_0 r_0$$

由万有引力定律:

$$\frac{Gmm_0}{r_0^2} = m\frac{v_0^2}{r_0}$$

可得

$$v_0 = \sqrt{Gm_0 / r_0}$$

能量守恒:

$$E_{初} = E_{末}$$

得

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\frac{I^2}{m} - G\frac{m_0 \cdot m}{r_0} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{r_0^2}{r^2}v_0^2 - G\frac{m_0 \cdot m}{r}$$

最远、最近点条件:

$$\dot{r}=0$$

整理上式

$$\left(v_0^2+\frac{I^2}{m^2}-\frac{2Gm_0}{r_0}\right)r^2+2Gm_0r-r_0^2v_0^2=0$$

解出两根

$$r_1=r_0\frac{Gm_0m^2-I^2m\sqrt{Gm_0r_0}}{Gm_0m^2-I^2r_0}$$

$$r_2=r_0\frac{Gm_0m^2+I^2m\sqrt{Gm_0r_0}}{Gm_0m^2-I^2r_0}$$

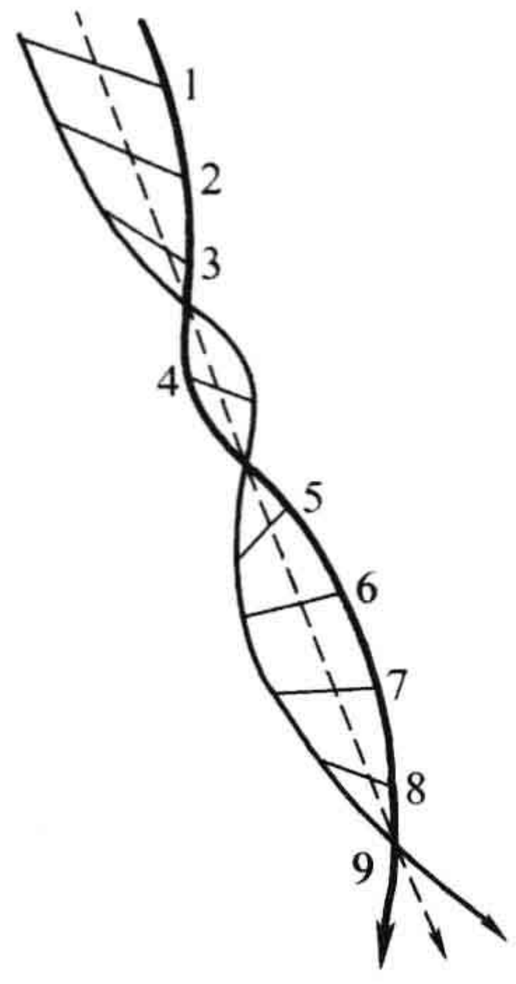
依题意，$I<<mv_0$，在 r_1、r_2 表达式中忽略 I^2，可得

$$r_1\approx r_0\left(1-\sqrt{\frac{I^2r_0}{Gm_0m^2}}\right),r_2\approx r_0\left(1+\sqrt{\frac{I^2r_0}{Gm_0m^2}}\right)$$

即

$$r_2-r_0\approx r_0-r_1$$

***6-14**. 天狼星是天空中最明亮的恒星，因此人们很早就已开始观察它的运动。1844 年德国天文学家弗里德里希·贝塞尔注意到天狼星运动的异常情况，并据此预言它附近有伴星。1862 年美国阿尔文·克拉克首次观测到这一伴星（系白矮星，肉眼看不到）。根据以后的观测资料，该双星系统的运动轨迹如习题 6-14 图所示。图中粗、细实线分别表示天狼星与其伴星的运动轨迹，虚线为质心的运动轨迹，第一组黑点表示 1862 年的双星位置，其余各组黑点分别表示自 1870 年起至 1940 年每隔 10 年的双星位置。天狼星和伴星的平均距离为 $s=20.4$ AU（1 AU $=1.496\times10^8$ km），它们与质心的距离之比约为 2∶5。



习题 6-14 图

（1）由图判断双星在相对做圆周运动还是椭圆运动？运动周期是多少年？

（2）假定双星相对做距离为 a 的匀速圆周运动，试估算天狼星及其伴星的质量 m_A 和 m_B（用太阳质量 m_S 表示）。

解：（1）由习题 6-14 图可知，双星的相对位置不是常量，因此它们在做椭圆运动。3、8 点为相同点，所以周期 T 为 50 年。

（2）天狼星及其伴星的质量分别为 m_A、m_B，依题意得

$$\frac{\dfrac{m_B a}{m_A+m_B}}{\dfrac{m_A a}{m_A+m_B}}=\frac{2}{5}$$

化简得

$$\frac{m_A}{m_B}=\frac{5}{2}$$

以天狼星为参考系,用约化质量 $\mu=\dfrac{m_A m_B}{m_A+m_B}$ 替代伴星质量,将两体问题化为单体问题,对 μ 应用牛顿第二定律有

$$G\frac{m_A m_B}{a^2}=\mu\omega^2 a=\mu\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a$$

已知:$G=6.674\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$,$T=1.576\ 8\times10^{9}\ \mathrm{s}$,$a=3.051\ 8\times10^{12}\ \mathrm{m}$,$m_S=1.99\times10^{30}\ \mathrm{kg}$

得

$$m_A=\frac{5}{7}\cdot\frac{4\pi^2a^3}{GT^2}=4.83\times10^{30}\ \mathrm{kg},\ m_B=\frac{2}{7}\cdot\frac{4\pi^2a^3}{GT^2}=1.93\times10^{30}\ \mathrm{kg}$$

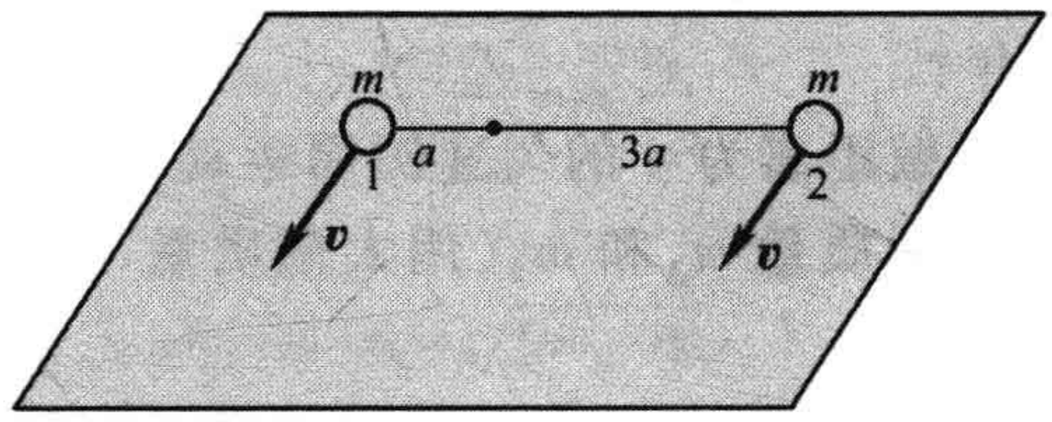
即

$$m_A=2.43m_S,\ m_B=0.97m_S$$

*6-15. 如习题 6-15 图所示,质量均为 m 的小球 1、2 用长为 $4a$ 的细线相连,以速度 v 沿着与线垂直的方向在光滑水平台面上运动,线处于伸直状态。在运动过程中,线上距离小球 1 为 a 的一点与固定在台面上的一竖直光滑细钉相碰,设在以后的运动过程中两球不相碰。求:

(1) 小球 1 与钉的最大距离;

(2) 线中的最小张力。



习题 6-15 图

解:(1) 两球连线与钉相碰后,小球 1 与钉的距离增大,球 2 与钉的距离减小。小球 1 与钉的距离最大为 x 时,两球在沿线方向分速度均为零,设此时两球速度分别为 v_1、v_2。两球分别对钉所在点角动量守恒,且两球总机械能守恒。

对于球 1 角动量守恒：

$$mv \cdot a = mv_1 \cdot x$$

对于球 2 角动量守恒：

$$mv \cdot 3a = mv_2 \cdot (4a - x)$$

系统机械能守恒：

$$2 \times \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mv_1^2 + \frac{1}{2} mv_2^2$$

上面三式联立整理得

$$x^4 - 8ax^3 + 11a^2x^2 + 4a^3x - 8a^4 = 0$$

解得

$$x_1 = a(\text{舍}), x_2 = 6.135\ 5a > 4a(\text{舍}),$$
$$x_3 = -0.788\ 715a < 0(\text{舍}), x_4 = 1.653\ 117a$$

则

$$x = 1.653a, v_1 = 0.605v, v_2 = 1.278v$$

即小球 1 与钉的最大距离为 $1.653a$。

（2）以钉为原点建立极坐标系，设某一时刻，球 1 的坐标为 (r, θ)，则球 2 的坐标为 $(4a - r, \theta')$。在小球与钉的连线方向上对两小球分别应用牛顿第二定律：

对于球 1：

$$F_T = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

由球 1 对钉角动量守恒：

$$mrv_\perp = mr^2\dot{\theta} = mav$$

得

$$r\dot{\theta}^2 = \frac{a^2v^2}{r^3}$$

代入上式整理可得：

$$F_T = m\left(\ddot{r} - \frac{a^2v^2}{r^3}\right) \quad ①$$

同理对于球 2：

$$F_T = m\left[\frac{d^2}{dt^2}(4a - r) - (4a - r)\dot{\theta}'^2\right] = m\left[-\ddot{r} - \frac{9a^2v^2}{(4a - r)^3}\right] \quad ②$$

①、②两式联立得

$$m\left(\ddot{r} - \frac{a^2v^2}{r^3}\right) = m\left[-\ddot{r} - \frac{9a^2v^2}{(4a - r)^3}\right]$$

进一步整理得

$$\ddot{r} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{a^2v^2}{r^3} - \frac{9a^2v^2}{(4a - r)^3}\right]$$

将其代入①式可得

$$F_T = m\left(\ddot{r} - \frac{a^2v^2}{r^3}\right) = -\frac{ma^2v^2}{2}\left[\frac{1}{r^3} + \frac{9}{(4a-r)^3}\right] \qquad ③$$

当 F_T 取最小值时，

$$\frac{dT}{dr} = \frac{d}{dr}\left\{-\frac{ma^2v^2}{2}\left[\frac{1}{r^3} + \frac{9}{(4a-r)^3}\right]\right\} = 0$$

整理得

$$\frac{1}{r^4} = \frac{9}{(4a-r)^4}$$

解得

$$r = \frac{4a}{\sqrt{3}+1} = 1.464a$$

将其代入③式得

$$F_T = -\frac{ma^2v^2}{2}\left[\frac{1}{r^3} + \frac{9}{(4a-r)^3}\right] \approx -\frac{0.435mv^2}{a}$$

即当 $r = 1.464a$ 时，线中张力最小，为 $0.435mv^2/a$。

***6-16.** 在一半径为 $R = 2.0\times10^8$ m 的无空气的星球表面，若以 $v_0 = 10$ m/s 的速度竖直上抛一物体，则该物体上升的最大高度为 $h = 8$ m。试问：

(1) 该星球的逃逸速度有多大？

(2) 若要使该星球成为黑洞，则现有的半径应比黑洞的半径大几倍？

(本题可参考第十二章 12.3.5 节有关黑洞的介绍)

解： 设星球表面的重力加速度为 g，逃逸速度为 v，星球质量为 m_0。

(1) 以星球为参考系，以被抛出的物体为研究对象，在下列过程分别对其应用功能原理。

上抛过程：

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \qquad ①$$

逃逸过程：

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{m_0m}{R} = 0 \qquad ②$$

又知

$$G\frac{m_0m}{R^2} = mg \qquad ③$$

联立求得

$$v = \sqrt{\frac{R}{h}}v_0 = \sqrt{\frac{2.0\times10^8}{8}}\times10\ \text{m/s} = 5\times10^4\ \text{m/s}$$

（2）设此星球成为黑洞后的半径为 R'。星球成为黑洞的条件：物体即便以光速从星球表面出发也不能逃逸出去，因此黑洞半径满足方程

$$-G\frac{m_0 m}{R'}=0-\frac{1}{2}mc^2 \qquad ④$$

②、④两式联立可得

$$\frac{R}{R'}=\frac{c^2}{v^2}=3.6\times10^7$$

第三篇　两种特殊质点系的运动与两种普遍的运动形式

第七章　刚　　体

课后作业题

7-1. 一根长为 l 的不均匀细杆，其线密度 $\lambda = a + bx$（x 为离杆的一端 O 的距离。a、b 为已知常量）。求该杆对过 O 端并垂直于杆的轴的转动惯量。

解：转动惯量：

$$J = \int \mathrm{d}J = \int x^2 \mathrm{d}m$$

其中

$$\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}x = (a + bx)\mathrm{d}x$$

积分得

$$J = \int_0^l x^2 (a + bx)\mathrm{d}x = \int_0^l (ax^2 + bx^3)\mathrm{d}x = \frac{a}{3}l^3 + \frac{b}{4}l^4$$

7-2. 一质量为 m_0、半径为 R 的均质圆盘，可绕过其圆心且垂直于圆盘的光滑水平轴在竖直平面内转动。在盘的边上绕有一不可伸长的细绳，绳的一端连有一质量为 m 的物体。开始时，绳子被拉直，物体 m 的高度为 h，并由静止开始下降，设绳与盘边之间无相对滑动。试求：

（1）绳的张力 F_T；

（2）物体 m 到达地面所需的时间 t。

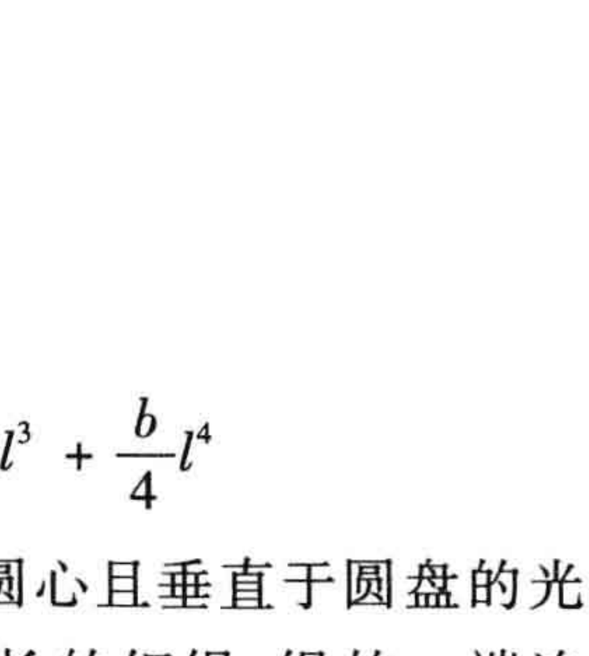
解：建立如习题 7-2 图所示的坐标系。

对圆盘应用转动定律：

$$-F_T R = J\alpha = \frac{1}{2}m_0 R^2 \alpha$$

对 m 应用牛顿第二定律：

$$mg - F_T = ma$$



习题 7-2 图

盘的切向加速度与物体的加速度相等：

$$a_t = -\alpha R = a$$

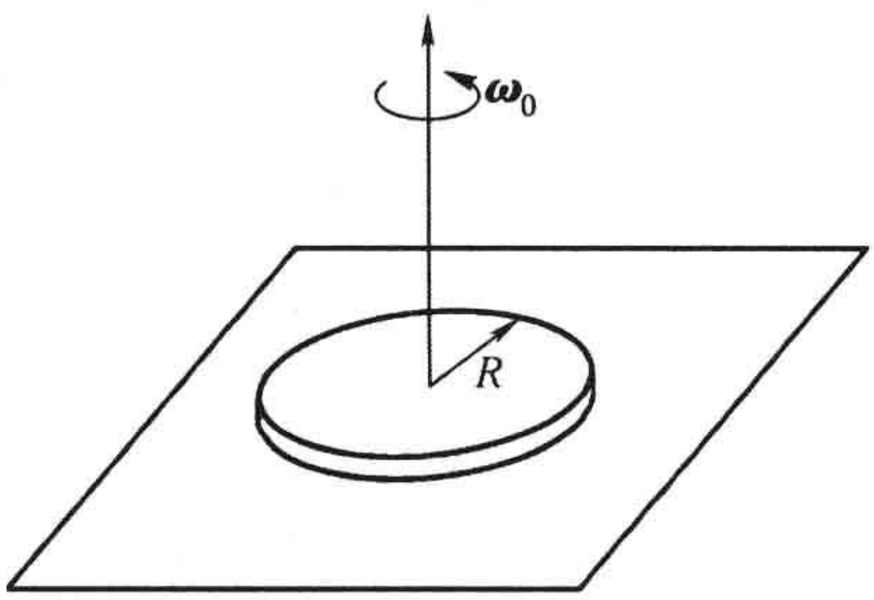
m 的运动学方程：

$$\frac{1}{2}at^2 = h$$

联立解得

$$F_T = \frac{m_0 m}{m_0 + 2m}g, t = \sqrt{\frac{m_0 + 2m}{mg}h}$$

7-3. 在粗糙的水平面上，一半径为 R、质量为 m 的均质圆盘绕过其中心且与盘面垂直的竖直轴转动，如习题 7-3 图所示。已知圆盘的初角速度为 ω_0，圆盘与水平面间的摩擦因数为 μ，若忽略圆盘轴承处的摩擦，问经过多长时间圆盘将静止？



习题 7-3 图

解：以过圆盘中心垂直圆盘平面的为转轴，对圆盘运用角动量定理：

$$\int_0^t M\mathrm{d}t = \Delta L = 0 - J\omega_0, \quad J = \frac{1}{2}mR^2$$

距离转轴 r、宽度为 $\mathrm{d}r$ 的小圆环所受摩擦力对转轴的力矩为

$$\mathrm{d}M = -\mu\left(\frac{m}{\pi R^2}2\pi r\mathrm{d}r\right)g \cdot r$$

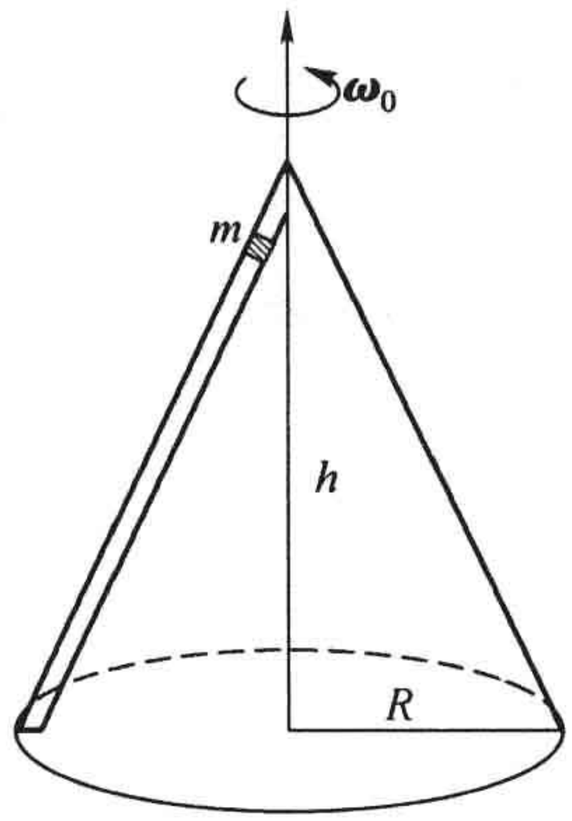
总的摩擦力对转轴的力矩：

$$M = \int \mathrm{d}M = -\int_0^R \mu\left(\frac{m}{\pi R^2}2\pi r\mathrm{d}r\right)g \cdot r = -\frac{2}{3}\mu mgR$$

联立解得

$$\Delta t = \frac{3R\omega_0}{4\mu g}$$

7-4. 一个高为 h、底半径为 R 的圆锥体，可绕其固定的竖直轴自由旋转。在其表面沿母线刻有一条光滑的斜槽，如习题 7-4 图所示。开始时，锥体以角速度 ω_0 旋转，此时，将质量为 m 的小滑块从槽顶无初速



习题 7-4 图

释放。设在滑块沿槽滑下的过程中始终不脱离斜槽，而锥体绕竖直轴的转动惯量为 J_0。试问：

（1）当滑块到达底边时，圆锥体的角速度为多大？

（2）当滑块到达底边时，滑块相对地面的速度为多大？

解：（1）以滑块和圆锥体为研究对象，在转轴方向的外力矩为零，转轴方向角动量守恒：

$$J_0\omega_0=(J_0+mR^2)\omega$$

解得

$$\omega=\frac{J_0\omega_0}{J_0+mR^2}$$

（2）在整个过程中只有重力做功，机械能守恒：

$$\frac{1}{2}J_0\omega_0^2+mgh=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}J_0\omega^2+\frac{1}{2}J\omega^2$$

其中，$J=mR^2$，v_1 为小滑块运动到底边时相对于锥体下滑的速度。

解得

$$v_1^2=\frac{2gh(J_0+mR^2)^2+J_0^2\omega_0^2R^2+J_0\omega_0^2mR^4}{(J_0+mR^2)^2}$$

当滑块到达底边时，滑块相对于地面的速度为相对锥体下滑的速度与随锥体转动速度的合速度，即

$$v=\sqrt{v_1^2+(\omega R)^2}=\sqrt{2gh+\frac{J_0\omega_0^2R^2(2J_0+mR^2)}{(J_0+mR^2)^2}}$$

7-5. 质量为 m、半径为 r 的均质球置于粗糙的水平面上，球与水平面之间的摩擦因数为 μ。开始时，球的转动角速度为 ω_0 而质心静止。试问：

（1）经过多长时间球开始做纯滚动？

（2）球做纯滚动时质心的速度为多大？

解：开始时小球既滚又滑，受滑动摩擦力。设 ω_0 转动的方向为转动的正方向，小球质心初始运动的方向为平动的正方向。

质心运动定理：

$$\mu mgt=mv_C-0$$

质心角动量定理：

$$-mg\mu rt=J\omega-J\omega_0,\ J=\frac{2}{5}mr^2$$

求得

$$v_C=\mu gt,\ \omega=\omega_0-\frac{5\mu gt}{2r}$$

经过时间 t 后，满足纯滚动条件：

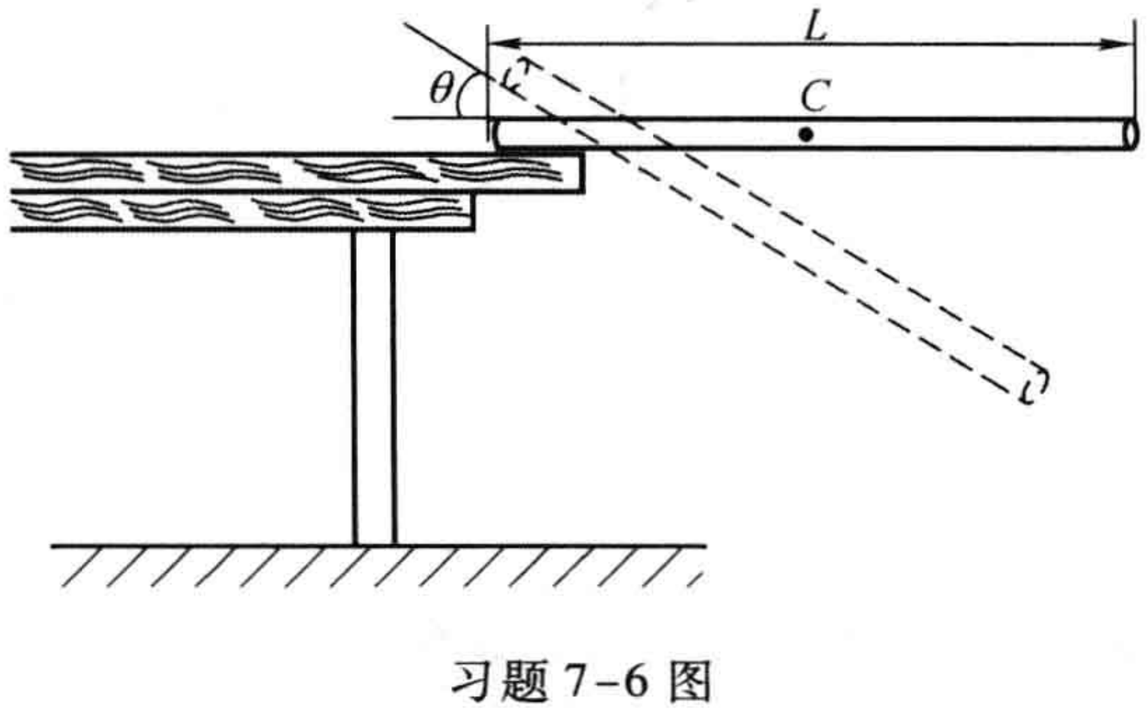
$$v_C-\omega r=0$$

解得

$$t=\frac{2\omega_0 r}{7\mu g},\ v_C=\frac{2\omega_0 r}{7}$$

所以经过 $t=\frac{2\omega_0 r}{7\mu g}$ 后，球开始做纯滚动。此时，小球的质心速度为 $v_C=\frac{2\omega_0 r}{7}$。

7-6. 将一根长为 L、质量为 m 的均匀杆上长为 $l\left(l<\frac{1}{2}L\right)$ 的一段搁在桌边，另一端用手托住，使杆处于水平状态，如习题 7-6 图所示。现释放手托的一端，试问，当杆转过的角度 θ 为多大时，杆开始滑离桌边（设杆与桌边之间的摩擦因数为 μ）？



习题 7-6 图

解：设垂直纸面向里为转动的正方向，将杆的运动作平面平行运动处理。

机械能守恒：

$$0=\frac{1}{2}J\omega^2-\left(\frac{L}{2}-l\right)mg\sin\theta$$

$$J=\frac{1}{12}mL^2+m\left(\frac{1}{2}L-l\right)^2$$

由垂直杆方向质心运动定理：

$$mg\cos\theta-F_N=ma_C$$

由平行杆方向质心运动定理：

$$F_f-mg\sin\theta=m\omega^2\left(\frac{L}{2}-l\right)$$

相对质心转动定律：

$$F_N\left(\frac{L}{2}-l\right)=\frac{1}{12}mL^2\alpha$$

杆与桌面间无滑动的条件：

$$a_C-\alpha\left(\frac{L}{2}-l\right)=0$$

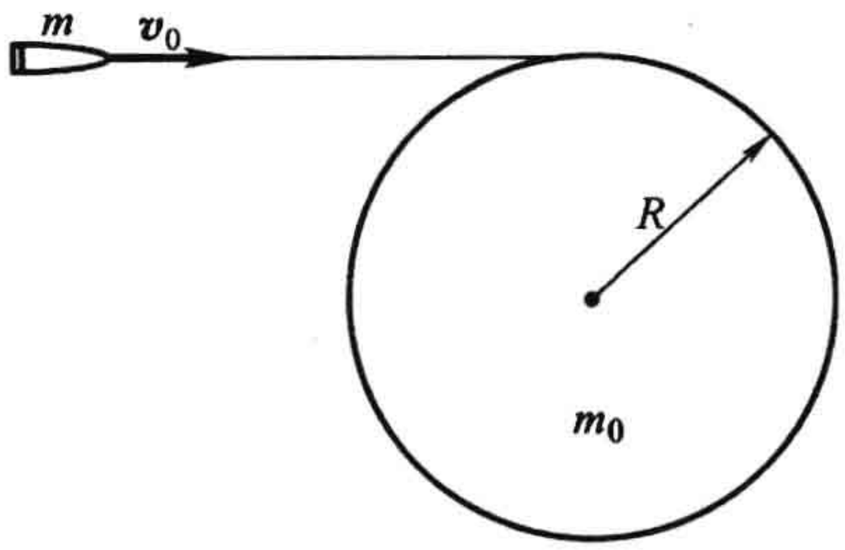
杆与桌边刚好滑动的条件：

$$F_f = \mu F_N$$

联立解得

$$\theta = \arctan\left(\frac{\mu L^2}{10L^2 - 36Ll + 36l^2}\right)$$

7-7. 质量为 m 的子弹，以速度 v_0 射入质量为 m_0、半径为 R 的圆盘的边缘，并留在该处。v_0 的方向与入射处的半径垂直，如习题 7-7 图所示。试就以下两种情况：



习题 7-7 图

（1）盘心装有一与盘面垂直的光滑固定轴；

（2）圆盘是自由的。

求子弹射入后圆盘系统总动能之比 E_{k1}/E_{k2}。

解：以地面为参考系，子弹与圆盘构成的系统为研究对象，设垂直纸面向外为转动的正方向。

（1）若圆盘固定，在入射过程中，系统对圆盘中心角动量守恒：

$$mv_0R = J_1\omega_1 = \left(mR^2 + \frac{1}{2}m_0R^2\right)\omega_1$$

解得

$$\omega_1 = \frac{2mv_0}{(2m+m_0)R}, E_{k1} = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 = \frac{m^2v_0^2}{2m+m_0}$$

（2）若圆盘自由，子弹入射后，子弹和圆盘组成的系统质心与圆盘中心的距离为

$$r_C = \frac{mR}{m_0+m}$$

入射过程动量守恒：

$$mv_0 = (m+m_0)v_C$$

系统对圆盘质心所在的空间固定点角动量守恒：

$$mv_0R = (m+m_0)v_Cr_C + J\omega$$

其中

$$J=\frac{1}{2}m_0R^2+m_0r_C^2+m\ (R-r_C)^2$$

动能为

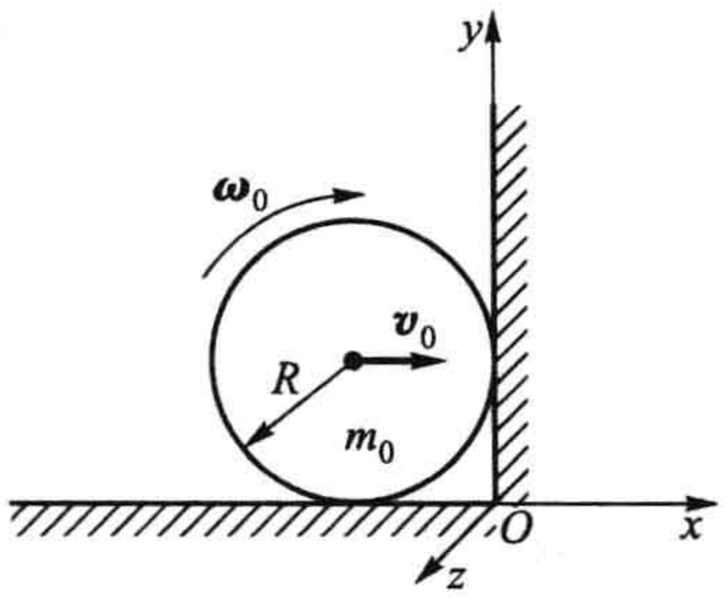
$$E_{k2}=\frac{1}{2}(m_0+m)\ v_C^2+\frac{1}{2}J\omega^2$$

联立解得

$$E_{k2}=\frac{3m^2v_0^2}{2(m_0+3m)}$$

与(1)结果相对比得　　$\frac{E_{k1}}{E_{k2}}=\frac{2(m_0+3m)}{3(m_0+2m)}$

7-8. 如习题7-8图所示,质量为 m_0、半径为 R 的弹性球在水平面上做纯滚动,球心速度为 v_0,与粗糙的墙面发生碰撞后,以相同的球心速度反弹,设球与墙面、水平面的摩擦因数都为 μ,碰撞时球与水平面的摩擦可以忽略。



习题7-8图

(1) 碰撞后,球经过一段时间开始做纯滚动,求此时的球心速度;

(2) 若球与墙面之间的碰撞时间为 Δt,为使碰撞时球不会跳起,则摩擦因数应满足什么关系?设碰撞过程中的相互作用力为恒力。

解:设水平向右和垂直纸面向外为正方向,设墙与球碰撞过程中的相互弹力为 F_N,碰后瞬时球的角速度为 ω_{10},纯滚动时球的角速度为 ω_1,球心速度为 v_1。

碰撞前后球质心运动定理:

$$-F_N\Delta t=m_0(-v_0)-m_0v_0$$

碰撞前后球质心角动量定理:

$$F_N\mu R\Delta t=J\omega_{10}-(-J\omega_0),\ J=\frac{2}{5}m_0R^2$$

小球碰撞前纯滚动条件:

$$v_0-R\omega_0=0$$

碰撞时球不会跳起的条件:

$$F_N\mu\leqslant m_0g$$

联立可得

$$\omega_{10}=\frac{5\mu-1}{R}v_0,\ \mu\leqslant\frac{g\Delta t}{2v_0}$$

依据题意,碰撞后,球与地面接触点的滑动趋势向左,因此地面给球的滑动摩擦力向右。v 减小,ω 正向增大。当 $|v|=\omega R$ 后,小球最终做纯滚动。球碰撞

后处理球运动的方法:质心运动+相对质心的转动。

球质心运动定理:

$$m_0 g\mu t = m_0 v_1 - m_0(-v_0)$$

相对球质心的角动量定理:

$$m_0 g\mu R t = J\omega_1 - J\omega_{10},\ J = \frac{2}{5}m_0 R^2$$

碰撞后纯滚动条件:

$$v_1 + R\omega_1 = 0$$

联立解得

$$v_1 = \frac{5}{7}\left(-v_0 - \frac{2}{5}R\omega_{10}\right) = -\frac{1}{7}(3+10\mu)v_0$$

则纯滚动时球质心速度为 $v_1 = \frac{1}{7}(3+10\mu)v_0$,方向水平向左。

碰撞时为使球不跳起,摩擦因数需满足条件:

$$\mu \leqslant \frac{g\Delta t}{2v_0}$$

7-9. 一根长为 $2l$,质量为 $2m_0$ 的均匀细杆,可以绕过中点的固定轴在水平面内自由转动。在离中心 $\frac{1}{3}l$ 处各套有两个质量均为 m 的小珠子,开始时杆的转动角速度为 ω_0,而两小珠相对静止。当释放小珠后,小珠将沿杆无摩擦地向两端滑动。试问:

(1) 当小珠滑至杆端时,杆的角速度为多大?

(2) 当小珠滑至杆端时,小珠相对杆的速度为多大?

(3) 当小珠滑离杆时,小珠的速度为多大?

解:(1) 以小珠和细杆作为研究对象,系统对转轴无外力矩作用。

角动量守恒:

$$J\omega + 2m\omega l^2 = J\omega_0 + 2m\omega_0\left(\frac{l}{3}\right)^2$$

其中

$$J = \frac{1}{12}\cdot 2m_0(2l)^2 = \frac{2}{3}m_0 l^2$$

解得

$$\omega = \frac{m+3m_0}{9m+3m_0}\omega_0$$

(2) 小球从初态滑动到杆端过程中,系统能量守恒,即

$$\frac{1}{2}J\omega_0^2 + \frac{1}{2}\cdot 2m\left(\frac{l}{3}\right)^2\omega_0^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}2m[v_{\parallel}^2 + (\omega l)^2]$$

其中,$v_{\parallel}$ 为小珠沿杆方向速度,ωl 垂直于杆方向。

解得

小球相对杆的速度

$$v_{\parallel}=\frac{\omega_0 l}{3}\sqrt{\frac{8(m+3m_0)}{3(3m+m_0)}}$$

（3）小球的总速度大小为

$$v=\sqrt{v_{\parallel}^2+(\omega l)^2}=\frac{\omega_0 l}{9(m_0+3m)}\sqrt{153m_0^2+294mm_0+81m^2}$$

7-10. 两根质量均为 m、长度均为 l 的相同均质细杆 AC 与 CB，两杆的 C 端用一光滑的铰链相连。将两杆分开一定角度，让 A、B 端与光滑地面接触，并使两杆均在竖直平面内。开始时，两杆与地面间的夹角均为 θ。现无初速地释放两杆，问两杆着地时 C 点的速度。

解：以两匀质细杆为研究对象，以地面为势能零点，以两杆与地面间的夹角均为 θ 时及落地瞬时为系统的初、末态。

系统机械能守恒：

$$2mg\frac{l}{2}\sin\theta=2\cdot\frac{1}{2}mv_C^2+2\cdot\frac{1}{2}J\omega^2$$

其中

$$J=\frac{1}{12}ml^2$$

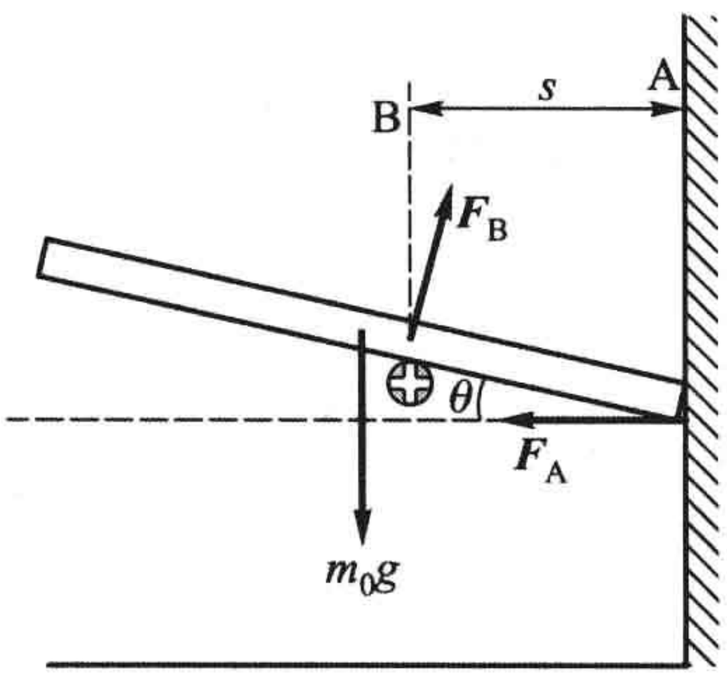
A、B 两点竖直方向的速度为零：

$$v_A=v_B=v_C-\frac{1}{2}l\omega=0$$

联立解得

$$C\text{ 点速度 }v=v_C+\frac{1}{2}l\omega=\sqrt{3gl\sin\theta}$$

7-11. 两光滑墙面互相垂直，在墙 B 上离墙面 A 距离 s 处，有一光滑钉子，将一长度为 $2l$、质量为 m_0 的均匀杆的一端抵在墙上，杆身斜置在钉子上，使杆位于垂直于墙面 A 的竖直平面内，求平衡时杆与水平面所成的角 θ。



习题 7-11 图

解：设墙面 B 平行于纸面，墙面 A 垂直于纸面，如习题 7-11 图所示。以杆为研究对象，系统达到静力学平衡。

竖直方向受力平衡：

$$F_B\cos\theta=m_0g$$

以杆和 A 墙的接触点为参考点力矩平衡：

$$F_{\mathrm{B}}\frac{s}{\cos\theta}=m_0 gl\cos\theta$$

联立得

$$\theta=\arccos\left(\frac{s}{l}\right)^{\frac{1}{3}}$$

7-12. 如习题 7-12 图所示，一飞轮以 ω 的角速度高速转动，其转动惯量为 J_0，试问，为使水平圆台以恒定角速度 Ω 转动（$\Omega \ll \omega$），则所需加在圆台上的力矩为多大？

解：系统水平方向角动量大小为

$$L_{水平}=J_0\omega$$

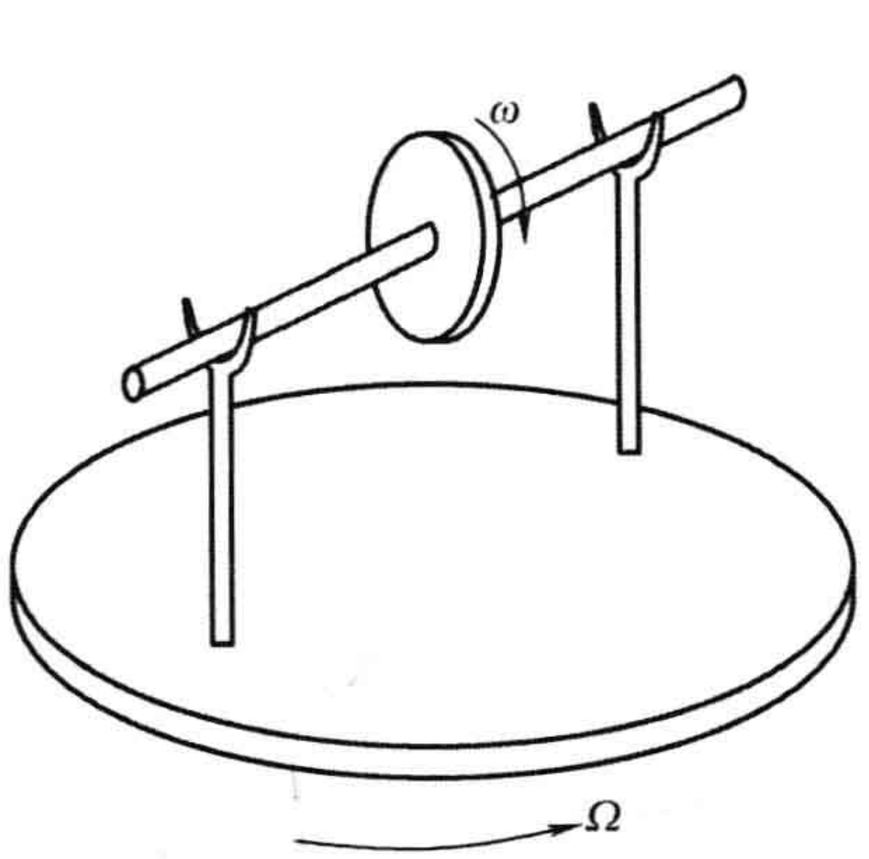
系统在水平方向角动量的变化大小：

$$\Delta L_{水平}=L_{水平}\Delta\varphi$$

依据角动量定理

$$M_{水平}=\frac{\Delta L_{水平}}{\Delta t}=\frac{J_0\omega\Delta\varphi}{\Delta t}$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，$\Omega=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$。



习题 7-12 图

因此，对圆台中心所施力矩：

$$M_{水平}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta L_{水平}}{\Delta t}=J_0\omega\Omega$$

7-13. 在光滑水平面上，质量均为 m_0 的两小球由一长为 l 的轻杆相连。另一质量为 m 的小球以 v_0 的速率向着与杆成 θ 角的方向运动，并与某一 m_0 发生碰撞，碰后 m 以 $\frac{1}{2}v_0$ 的速率沿原路线反弹。试求碰撞后轻杆系统绕其质心转动的角速度 ω，参见习题 7-14 图。

解:以质量均为 m_0 的两个小球和质量为 m 的小球为研究对象组成系统,以地面为参考系,以与 m 相碰的 m_0 球所在点为固定参考点,垂直纸面向外为转动的正方向。

动量守恒:

$$mv_0 = -m\left(\frac{1}{2}v_0\right) + 2m_0 \cdot v_C$$

角动量守恒:

$$0 = L_{\text{质心相对参考点}} + L_{\text{相对质心}} = -2m_0 v_C \cdot \frac{l}{2}\sin\theta + 2m_0\left(\omega\frac{l}{2}\right)\frac{l}{2}$$

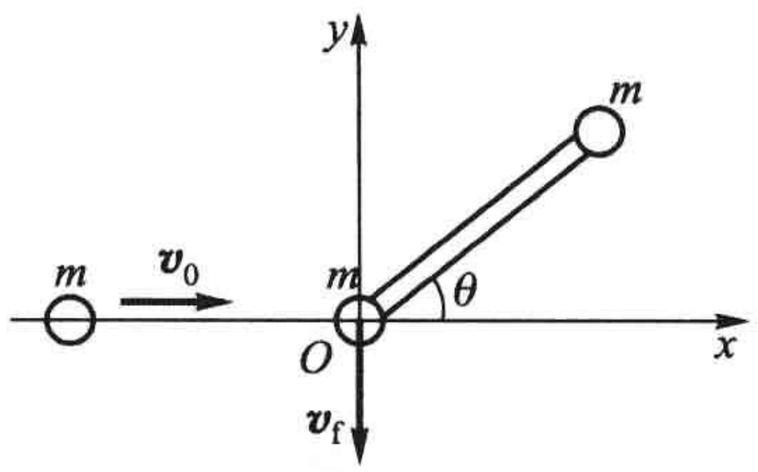
联立解得

$$\omega = \frac{3mv_0\sin\theta}{2m_0 l}$$

7-14. 若上题中三球的质量相同,均为 m,且 $\theta=45°$。当运动小球以 v_0 的速率与连在杆上的某一球发生弹性碰撞后,即沿垂直于原速度的方向运动,如习题 7-14 图所示。试求:

(1) 碰撞后,运动小球的速度 v_f;

(2) 碰撞后,轻杆系统绕其质心转动的角速度 ω。



习题 7-14 图

解:以三个小球组成的系统为研究对象,以地面为参考系,建立如习题 7-14 图所示坐标系,以垂直纸面向外为转动的正方向。

动量守恒:

$$mv_0 = 2mv_{Cx}, 0 = mv_f + 2mv_{Cy}$$

以碰撞所在点为参考点,角动量守恒:

$$0 = L_{\text{质心相对参考点}} + L_{\text{相对质心}}$$

$$= \left[-2mv_{Cx}\frac{l}{2}\sin\theta + 2m \cdot v_{Cy} \cdot \frac{l}{2}\sin(90°-\theta)\right] + 2m\left(\omega\frac{l}{2}\right)\frac{l}{2}$$

能量守恒:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot (v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2) + 2 \cdot \frac{1}{2}m\left(\omega\frac{l}{2}\right)^2$$

联立解得

$$v_f = -0.55v_0, \omega = \frac{0.32v_0}{l}$$

自检练习题

7-15. 一块边长为 a、质量为 m_0 的正三角形薄板,求该板对过其一边的轴的

转动惯量。

解:建立如习题 7-15 图所示的坐标系,在 x 轴上取宽度为 $\mathrm{d}x$、平行于 y 轴的细条质元,其质量为

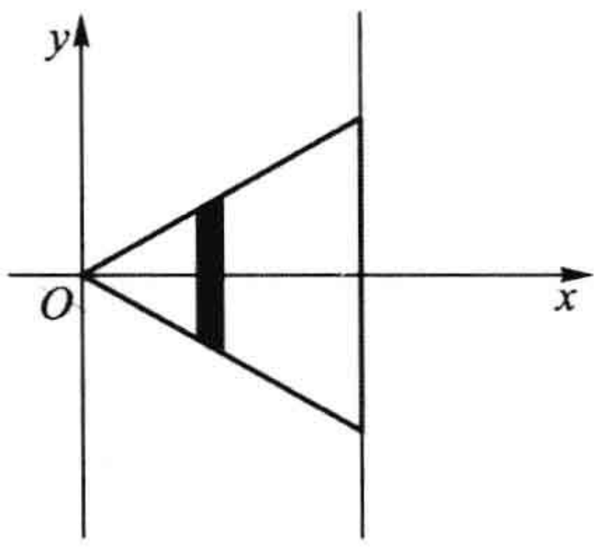
$$\mathrm{d}m = 2\rho y\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{3}}{3}\rho x\mathrm{d}x$$

该细条质元绕一边的转动惯量为

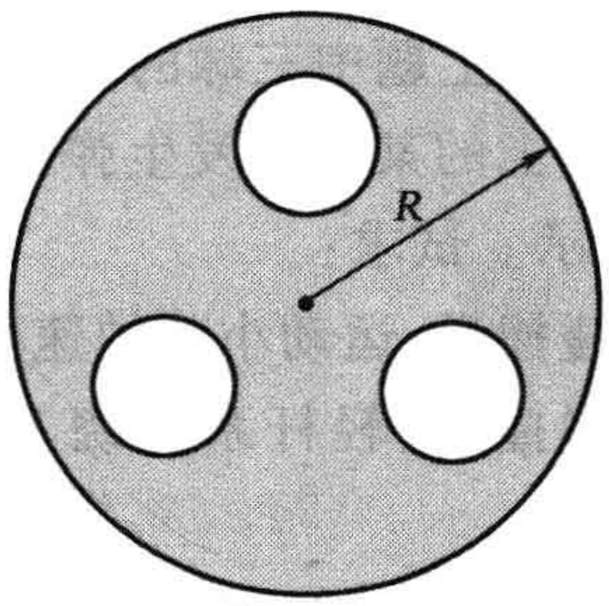
$$\mathrm{d}J = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - x\right)^2 \mathrm{d}m$$

积分得所求转动惯量:

$$J = \int \mathrm{d}J = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - x\right)^2 \frac{2\sqrt{3}}{3}\rho x\mathrm{d}x = \frac{1}{8}m_0 a^2$$



习题 7-15 图



习题 7-16 图

7-16. 在质量为 m_0、半径为 R 的匀质圆盘上,有三个半径为 $\frac{1}{3}R$ 的小圆孔,圆孔的圆心分别在三条半径的中心处,此三条半径把圆盘分割成相等的三块,如习题 7-16 图所示。求此圆盘对过其圆心且与盘面垂直的轴的转动惯量。

解:设用同样材料的、质量为 m 的小圆盘将大圆盘的三个圆孔填满,填充后大圆盘的总质量为 m_2。选过大圆盘中心且与盘面垂直的轴为转轴,设小圆盘、无填充的大圆盘、填充后的大圆盘对转轴的转动惯量分别为 J_1、J、J_2,则转动惯量之间的关系:

$$J_2 = 3J_1 + J$$

小圆盘的转动惯量:

$$J_1 = \frac{1}{2}m\left(\frac{R}{3}\right)^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{11}{36}mR^2$$

填充后大圆盘转动惯量:

$$J_2 = \frac{1}{2}m_2 R^2$$

质量之间的关系:

$$\frac{m}{m_2}=\frac{\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2\rho}{\pi R^2\rho}$$

联立可得

$$J=J_2-3J_1=\frac{43}{72}m_0R^2$$

7-17. 两块质量均为 m_0、半径均为 R 的均匀薄圆盘间连有一均匀细杆，细杆长为 l，质量为 m，过两盘的圆心且与圆盘垂直，如习题 7-17 图所示。求此装置对通过某一圆盘直径的轴的转动惯量。

解：设过上面圆盘直径的轴为转轴。

上面圆盘的转动惯量为

$$J_1=\frac{1}{4}m_0R^2$$

下面圆盘的转动惯量为

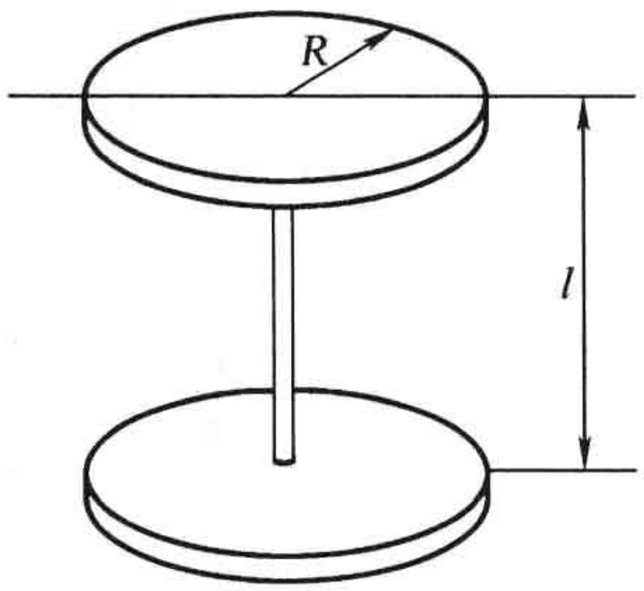
$$J_2=\frac{1}{4}m_0R^2+m_0l^2$$

细杆的转动惯量为：

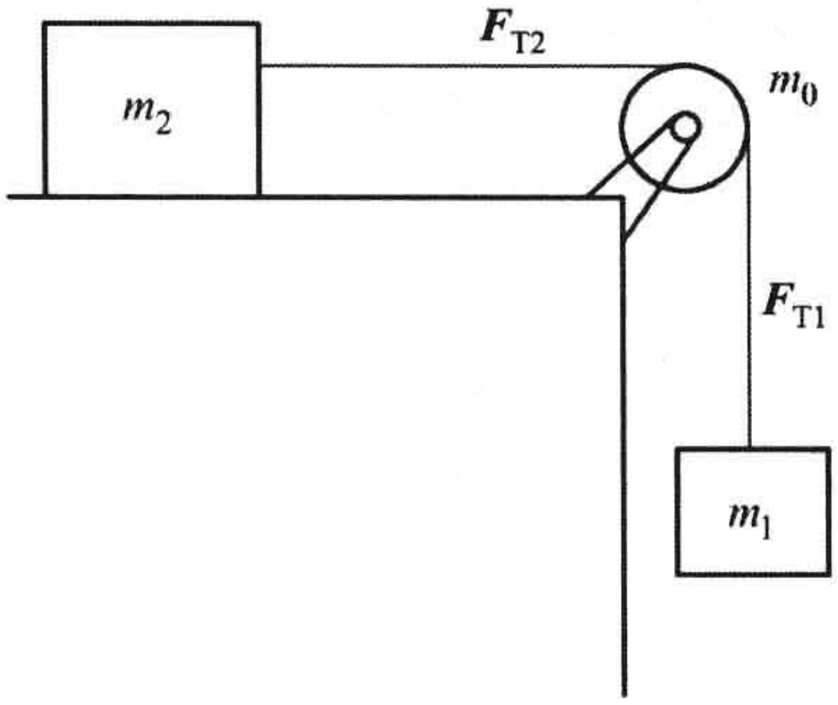
$$J_3=\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{l}{2}\right)^2=\frac{1}{3}ml^2$$

所求转动惯量为

$$J=J_1+J_2+J_3=\frac{1}{2}m_0(R^2+2l^2)+\frac{1}{3}ml^2$$



习题 7-17 图



习题 7-18 图

7-18. 质量分别为 $m_1=200$ g，$m_2=250$ g 的两个物体用细绳相连，绳子套在质量 $m_0=100$ g，半径 $r=10$ cm 的滑轮上，m_2 放在光滑的水平桌面上，m_1 悬挂着，如习题 7-18 图所示。设滑轮为一质量均匀的圆盘，绳子的长度不变，绳子的质量及滑轮轴承处的摩擦均可忽略不计，绳子与滑轮之间无滑动。求 m_1 的加速度 a 以及绳子各处的张力 F_{T1} 和 F_{T2}。

解:分别以 m_1、m_2和 m_0为研究对象。

对 m_1应用牛顿第二定律:

$$m_1 g - F_{T1} = m_1 a$$

对 m_2应用牛顿第二定律:

$$F_{T2} = m_2 a$$

对 m_0应用转动定律:

$$F_{T1} r - F_{T2} r = J\alpha$$

其中,定滑轮的转动惯量为

$$J = \frac{1}{2} m_0 r^2$$

绳与滑轮无滑动的条件:

$$a = r\alpha$$

联立解得

$$a = \frac{2m_1 g}{m_0 + 2m_1 + 2m_2} = 3.9 \text{ m/s}^2$$

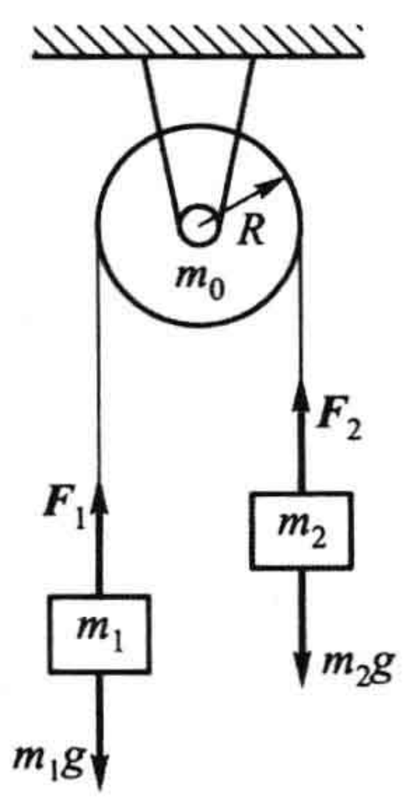
$$F_{T1} = \frac{m_0 + 2m_2}{m_0 + 2m_1 + 2m_2} m_1 g = 1.2 \text{ N}$$

$$F_{T2} = \frac{2m_1}{m_0 + 2m_1 + 2m_2} m_2 g = 0.98 \text{ N}$$

7-19. 如习题7-19图所示的阿特伍德机中,两物体质量分别是 m_1和 m_2,滑轮半径为 R,质量为 m_0。若物体运动时,滑轮与绳之间有相对滑动,两者之间的摩擦因数为 μ。设绳不可伸长,忽略滑轮轴承处的摩擦。试求:

(1) m_1与 m_2的加速度;

(2) 滑轮的角加速度 α。



习题7-19图

解:分别以竖直向上和垂直纸面向外为运动和转动的正方向。

对 m_1应用牛顿第二定律:

$$F_1 - m_1 g = m_1 a$$

对 m_2应用牛顿第二定律:

$$F_2 - m_2 g = m_2(-a)$$

以滑轮上的绳为研究对象,参考教材中例2.3.2-3的求解过程有

$$F_1 = F_2 e^{\pm\mu\theta}$$

其中,$e^{\pm\mu\theta}$中的±号分别对应 $m_1 > m_2$(m_1向下运动、m_2向上运动)和 $m_1 < m_2$(m_1向上运动、m_2向下运动)两种情况,本题中 $\theta = \pi$。

对滑轮应用转动定律：

$$(F_1-F_2)R=\frac{1}{2}m_0R^2\alpha$$

联立解得

$$a=\frac{m_2e^{\pm\mu\pi}-m_1}{m_1+m_2e^{\pm\mu\pi}}g,\quad \alpha=\frac{4m_1m_2g(e^{\pm\mu\pi}-1)}{m_0R(m_1+m_2e^{\pm\mu\pi})}$$

7-20. 同一平面内的半径分别为 R_1 和 R_2，质量分别为 m_1 和 m_2 的轮子以皮带相连接，可绕各自的轴转动，如习题 7-20 图所示。今在 m_1 轮上作用一力矩 M，试求两轮的角加速度。设两轮的质量均集中在轮边，皮带与轮之间无滑动，皮带的质量和两轴承处的摩擦均可忽略。

解：取垂直纸面向里为转动的正方向。对两轮分别应用转动定律：

对 m_1：

$$M+F_1R_1-F_2R_1=m_1R_1^2\alpha_1$$

对 m_2：

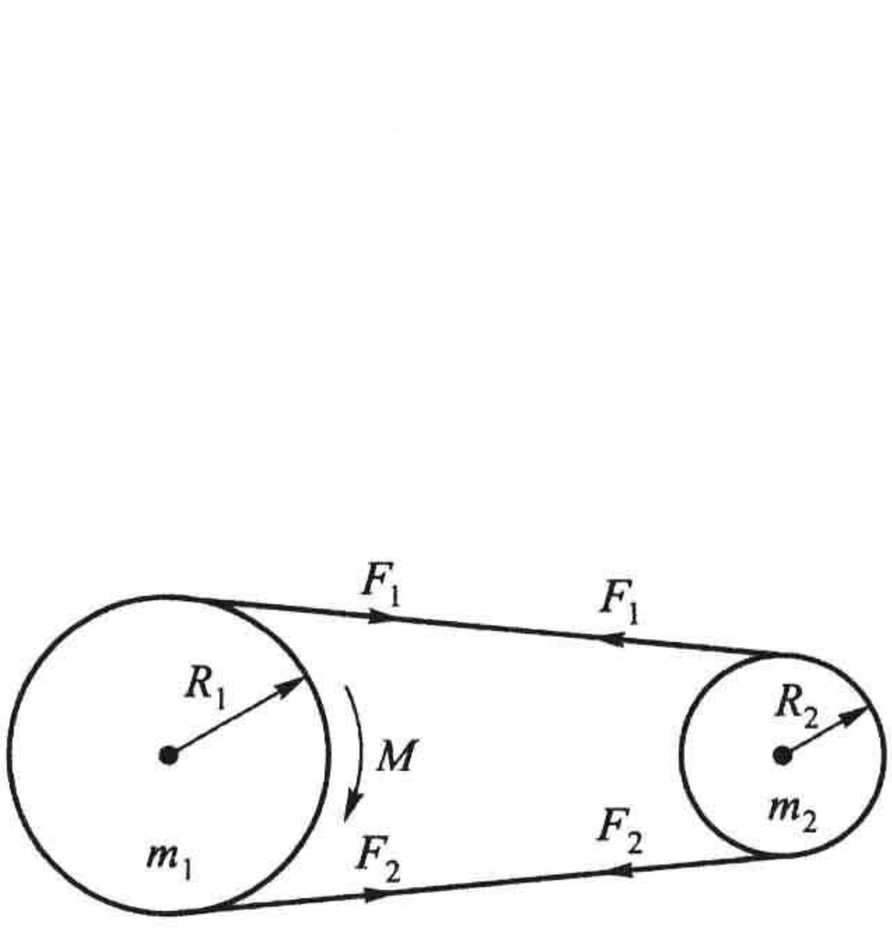
$$F_2R_2-F_1R_2=m_2R_2^2\alpha_2$$

轮与皮带之间无滑动的条件：

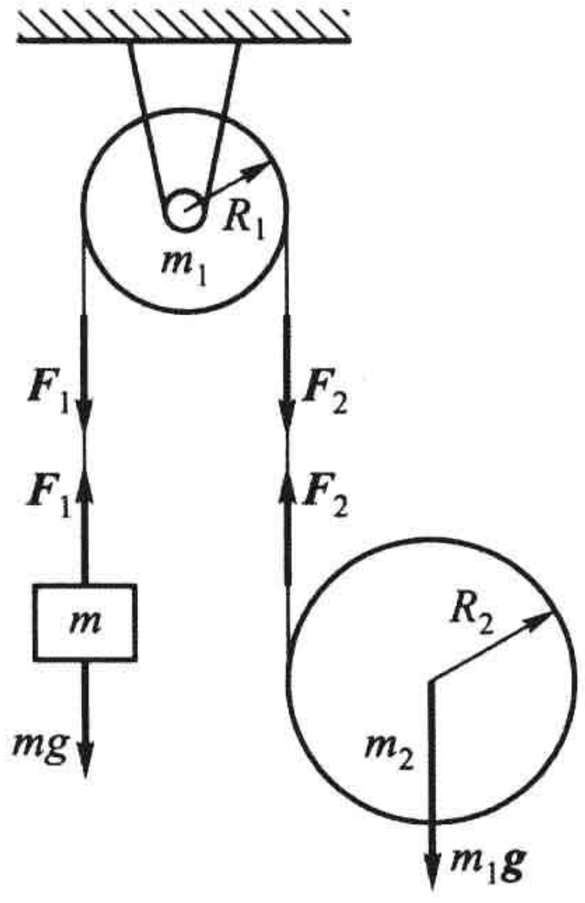
$$R_1\alpha_1=R_2\alpha_2$$

联立解得

$$\alpha_1=\frac{M}{(m_1+m_2)R_1^2},\alpha_2=\frac{M}{(m_1+m_2)R_1R_2}$$



习题 7-20 图



习题 7-21 图

7-21. 一质量为 m_2、半径为 R_2 的圆盘，沿着绕在它边缘上的带子展开，带子跨过一质量为 m_1、半径为 R_1 的定滑轮，带子的另一端悬挂一质量为 m 的重物，如习题 7-21 图所示。设圆盘沿竖直线下落，假定皮带的质量可忽略。试求：

（1）重物 m 的加速度 a_1；

（2）圆盘质心的加速度 a_2。

解：取竖直向下和垂直纸面向外为正方向。

对 m 应用牛顿第二定律：

$$mg-F_1=ma_1$$

对 m_1 应用转动定律：

$$-F_2R_1+F_1R_1=\frac{1}{2}m_1R_1^2\alpha_1$$

对 m_2 应用质心运动定理：

$$m_2g-F_2=m_2a_2$$

对 m_2 应用转动定律：

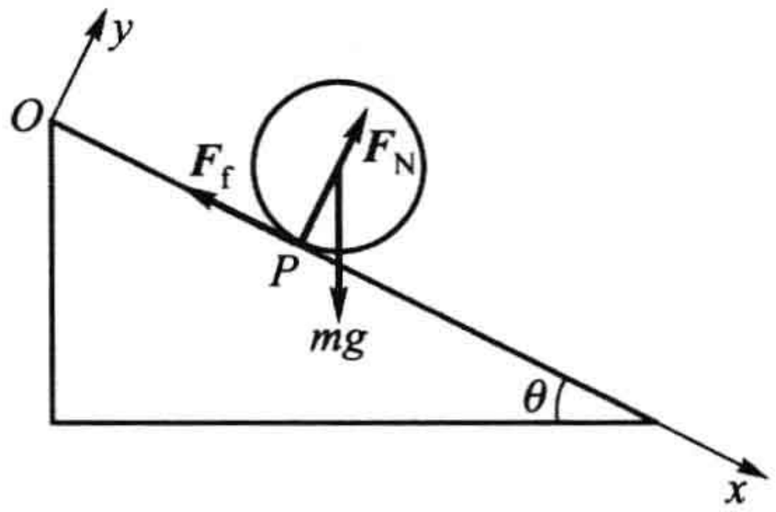
$$-F_2R_2=\frac{1}{2}m_2R_2^2\alpha_2$$

滑轮与绳不发生滑动的条件：$a_1=R_1\alpha_1$，$a_2+R_2\alpha_2=-a_1$

联立解得

$$a_1=\frac{3m-m_2}{\frac{3}{2}m_1+m_2+3m}g,\ a_2=\frac{m_1+m_2+m}{\frac{3}{2}m_1+m_2+3m}g$$

7-22. 如习题 7-22 图所示，一圆柱体沿倾角为 θ 的斜面滚下，圆柱体与斜面之间的摩擦因数为 μ。为使圆柱体沿斜面做纯滚动，试求 θ 的最大值。



习题 7-22 图

解：建立沿斜面向下和垂直斜面向上的 x 轴、y 轴，以垂直纸面向里为转动的正方向。以圆柱体为研究对象。

质心运动定理：

$$F_N-mg\cos\theta=0$$

$$mg\sin\theta-F_f=ma_C$$

相对质心的转动定律：

$$F_fr=\frac{1}{2}mr^2\alpha$$

由纯滚动的约束条件：

$$a_C-\alpha r=0$$

联立解得

$$a_C=\frac{2}{3}g\sin\theta$$

$$F_f = mg\sin\theta - ma_C = \frac{1}{3}mg\sin\theta$$

斜面提供的摩擦力：

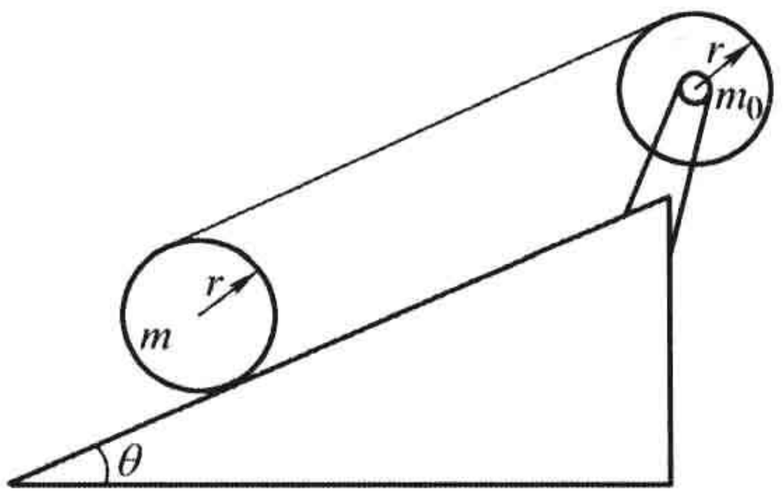
$$F_f \leqslant \mu mg\cos\theta$$

即

$$\frac{1}{3}mg\sin\theta \leqslant \mu mg\cos\theta$$

解得　　$\theta_{max} = \arctan 3\mu$

7-23. 如习题 7-23 图所示，在倾角为 θ 的斜面上，一质量为 m、半径为 r 的圆柱体上绕有细绳，绳的一端缠绕在斜面顶端的定滑轮上，定滑轮为一质量为 m_0、半径也为 r 的圆盘。设圆柱体沿斜面滚下时细绳拉直且不能伸长，并与斜面平行，细绳与圆柱体及定滑轮之间无相对滑动，忽略滑轮轴承处的摩擦。



习题 7-23 图

（1）若圆柱体的滚动为纯滚动，求其质心的加速度；

（2）求圆柱体做纯滚动的条件。

解：分别取沿斜面向下和垂直纸面向外为正方向。

对 m 应用质心运动定理：

$$mg\sin\theta - F_T - F_f = ma_C$$

对 m 应用转动定律：

$$F_f r - F_T r = J_1\alpha_1,\ J_1 = \frac{1}{2}mr^2$$

对 m_0 应用转动定律：

$$F_T r = J_2\alpha_2,\quad J_2 = \frac{1}{2}m_0 r^2$$

圆柱体的滚动为纯滚动的约束条件：

$$a_C - \alpha_1 r = 0$$

绳与圆柱和滑轮无相对滑动的条件：

$$\alpha_2 r = a_C + \alpha_1 r$$

圆柱体做纯滚动的条件：

$$F_f \leqslant \mu F_N = \mu mg\cos\theta$$

联立解得

$$a_C = \alpha_1 r = \frac{2mg\sin\theta}{3m+4m_0},\ F_f = \frac{(m+2m_0)mg\sin\theta}{3m+4m_0}$$

$$\mu \geqslant \frac{(2m_0+m)\tan\theta}{4m_0+3m}$$

7-24. 一质量为 m_0，半径为 R 的均质圆盘，可绕过其圆心且与盘面垂直的竖直轴自由转动。圆盘原来静止，盘边上一质量为 m 的人以恒定的相对于盘面的速度 u 沿盘边缘行走时，盘的转动角速度为多大？

解：以人转动的方向为转动的正方向，以人和圆盘组成的系统为研究对象，系统对圆盘中心的角动量守恒：

$$J\omega+m\omega R^2+muR=0$$

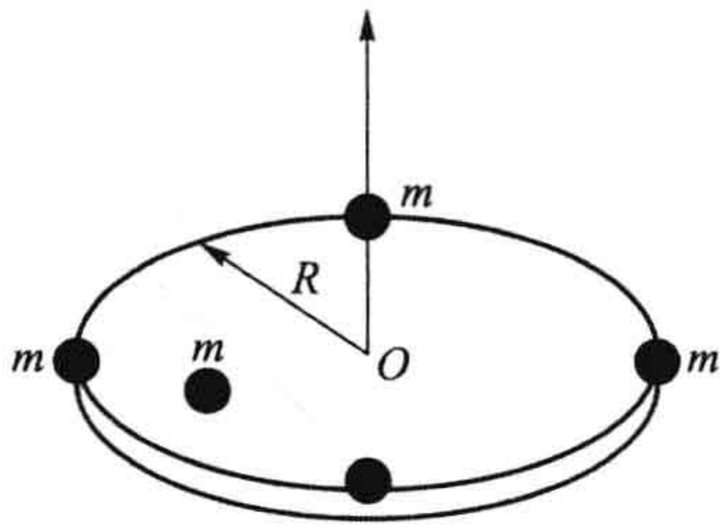
其中

$$J=\frac{1}{2}m_0R^2$$

解得

$$\omega=\frac{-2mu}{(2m+m_0)R}$$

7-25. 一块半径为 R 的水平轻质圆盘，可绕过其圆心 O 的竖直轴自由旋转。在圆盘下面的边缘处等间隔地系有四个质量都为 m 的小球，如习题 7-25 图所示。开始时，圆盘静止，一辆质量也为 m 的玩具汽车从 O 出发，以恒定的相对于盘的速率 v_0 沿半径驶往盘边，并沿盘边行驶。试求：



习题 7-25 图

（1）当玩具汽车沿半径行驶时，圆盘的转动角速度 ω_1；

（2）当玩具汽车沿盘边行驶时，圆盘的转动角速度 ω_2。

解：玩具汽车出发前后，以圆盘中心为参考点，圆盘和玩具车构成的系统角动量守恒，玩具车出发前，系统角动量为 0，所以，（1）汽车沿半径行驶时，

$$0=mv_{车}\cdot r\cdot\sin 0°-4m\cdot R^2\cdot\omega_1$$

解得

$$\omega_1=0$$

（2）汽车沿盘边行驶时，

$$0=4mR^2\omega_2-m(v_0-\omega_2R)R\cdot\sin 90°$$

其中 $v_0-\omega_2R$ 为玩具车相对于地面的速度，解得

$$\omega_2=\frac{v_0}{5R}$$

7-26. 若上题中的竖直轴不在圆心，而在某一小球位置处。玩具汽车从该

轴处以恒定的相对于圆盘的速率 v_0 沿盘边行驶。试求：

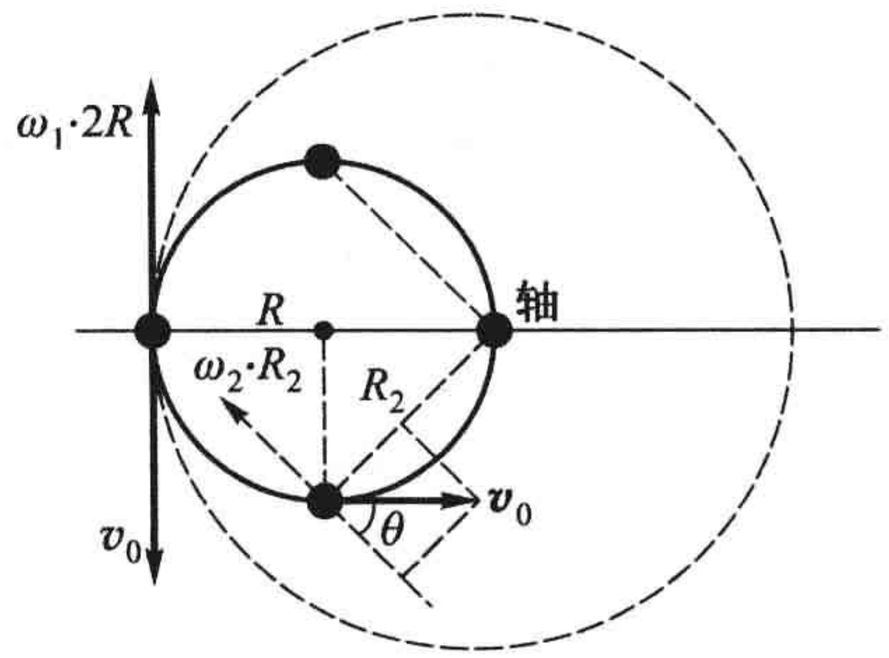
（1）当玩具汽车行驶到第三小球位置处（即行驶了半圈）时，圆盘的转动角速度 ω_1；

（2）当玩具汽车行驶到第四小球位置处（即行驶了 3/4 圈时），圆盘的转动角速度 ω_2；

（3）当玩具汽车回到转轴处时，圆盘的转动角速度 ω_3。

解：设轴处小球为第一小球，第二、四小球与轴的距离为 R_2，则 $R_2=\sqrt{2}R$，R 为圆盘半径，如习题 7-26 图所示。圆盘及小球组成的系统对转轴的转动惯量为

$$J=m\cdot(2R)^2+2m\cdot(R_2)^2=8mR^2$$



习题 7-26 图

（1）以圆盘、小球、玩具汽车组成的系统为研究对象，以轴为参考点，当玩具汽车行驶到第三小球位置时，由角动量守恒：

$$J\cdot\omega_1=m(v_0-\omega_1\cdot 2R)\cdot 2R$$

解得

$$\omega_1=\frac{v_0}{6R}$$

（2）玩具汽车行驶到第四小球位置时，由角动量守恒：

$$J\omega_2=m\cdot(v_0\cos 45°-\omega_2\cdot R_2)\cdot R_2$$

解得

$$\omega_2=\frac{v_0}{10R}$$

（3）玩具汽车回到转轴处时，由角动量守恒：

$$J\cdot\omega_3=m(v_0-\omega_3\cdot 0)\cdot 0$$

解得

$$\omega_3=0$$

7-27. 质量皆为 m 的两珠子可在光滑轻杆上自由滑动，杆可在水平面内绕过 O 点的光滑竖直轴自由旋转。原先两珠对称地位于 O 点的两边，与 O 相距 a，在 $t=0$ 时刻，对杆施以冲量矩，使杆在极短时间内即以角速度 ω_0 绕竖直轴旋转，求 t 时刻杆的角速度 ω、角加速度 α 及两珠与 O 点的距离 r。

解：以地面为参考系，以杆和两个珠子组成的系统为研究对象，当两珠子与 O 点的距离为 r 时，它们相对转轴角动量守恒：

$$2J_0\omega_0 = 2J\omega, J_0 = ma^2, J = mr^2$$

能量守恒：

$$2 \cdot \frac{1}{2}J_0\omega_0^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}(J\omega^2 + m\dot{r}^2)$$

联立求得

$$r = a\sqrt{1+\omega_0^2 t^2}, \omega = \frac{\omega_0}{1+\omega_0^2 t^2}, \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{-2\omega_0^3 t}{(1+\omega_0^2 t^2)^2}$$

7-28. 质量为 m_0、长为 l 的均质细棒以一端为支点悬挂起来。一质量为 m 的子弹以 v_0 的水平速度射入棒的另一端，且留在棒内。试求在子弹射入棒后，棒的最大偏转角 θ。设在棒偏转时，支点处的摩擦可忽略。

解：以子弹和棒构成的系统为研究对象，偏转方向为转动的正方向，子弹与棒碰撞前后对转轴角动量守恒：

$$mv_0 l = J\omega$$

其中

$$J = \frac{1}{12}m_0 l^2 + m_0\left(\frac{1}{2}l\right)^2 + ml^2 = \frac{1}{3}m_0 l^2 + ml^2$$

碰后系统在转动过程中机械能守恒，最大偏转角为 θ。则

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = m_0 g\frac{l}{2}(1-\cos\theta) + mgl(1-\cos\theta)$$

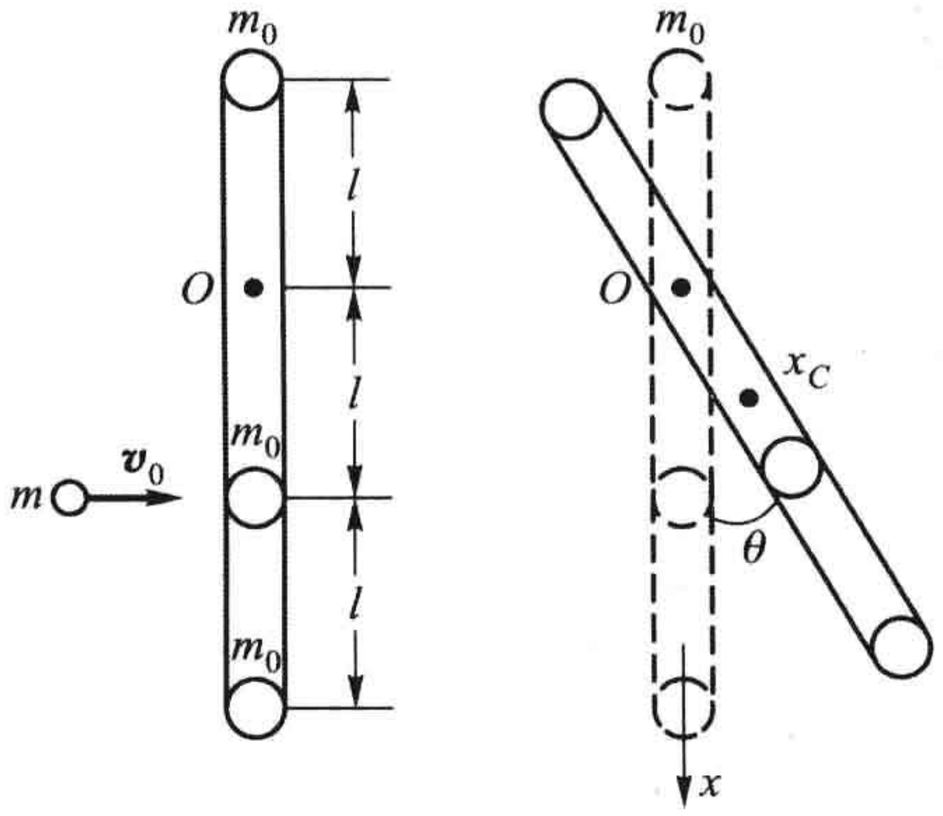
解得

$$\omega = \frac{3mv_0}{m_0 l + 3ml}, \theta = \arccos\left[1 - \frac{3m^2 v_0^2}{(m_0+3m)(m_0+2m)gl}\right]$$

7-29. 在一根长为 $3l$ 的轻杆上打一个小孔，孔离一端的距离为 l，再在杆的两端以及距另一端为 l 处各系一质量为 m_0 的小球。然后通过此孔将杆悬挂于一光滑的水平细轴 O 上，如习题 7-29 图所示。开始时，轻杆静止，一质量为 m 的小铅粒以 v_0 的水平速度射入中间的小球，并留在里面。若铅粒相对小球静止时杆的角位移可以忽略，试求杆在以后摆动中的最大摆角。

解：三个质量为 m_0 的小球构成系统，对 O 点的转动惯量为

$$J_{m_0} = m_0 l^2 + m_0 l^2 + m_0(2l)^2 = 6m_0 l^2$$



习题 7-29 图

三个质量为 m_0 的小球与质量为 m 的铅粒构成系统，对 O 点的转动惯量为

$$J_{m_0m}=6m_0l^2+m\cdot l^2=(6m_0+m)\,l^2$$

设垂直纸面向外为转动的正方向，m 入射前后以杆、杆上所有小球、小铅粒组成的系统为研究对象，以 O 点为参考点。根据角动量守恒：

$$mv_0l=J_{m_0m}\cdot\omega_0$$

联立解得

$$\omega_0=\frac{mv_0}{(6m_0+m)\cdot l}$$

以 O 点为坐标原点，以竖直向下为正方向，碰后系统质心与 O 点距离为

$$x_C=\frac{m_0(-l)+m_0l+ml+m_0\cdot 2l}{3m_0+m}=\frac{(2m_0+m)\,l}{3m_0+m}$$

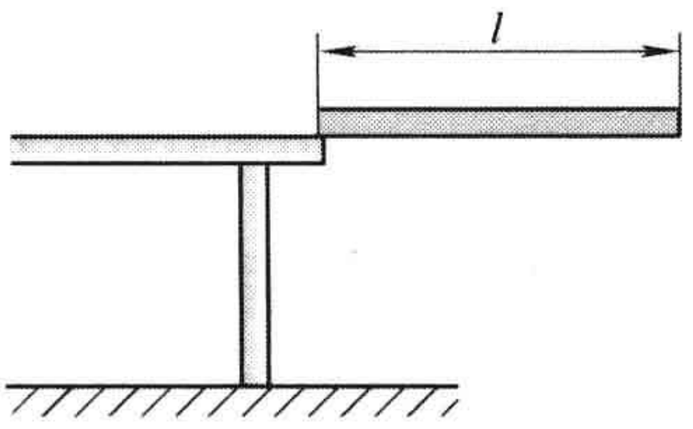
小铅粒入射后，系统机械能守恒：

$$\frac{1}{2}J_{m_0m}\cdot\omega_0^2-(3m_0+m)\,gx_C=0-(3m_0+m)\,gx_C\cos\,\theta_{\max}$$

整理可得

$$\theta_{\max}=\arccos\left[1-\frac{m^2v_0^2}{2(2m_0+m)(6m_0+m)gl}\right]$$

7-30. 将一根长 l、质量为 m_0 的均匀杆的一端搁在桌边，另一端用手托住，使杆处于水平位置，如习题 7-30 图所示。试求将手释放瞬间杆对桌边的作用力。



习题 7-30 图

解：突然放手瞬时，将杆看作平面平行运动，设竖直向下和垂直纸面向外为正方向。

质心运动定理：

$$m_0 g - F = m_0 a_C$$

绕过质心的轴的转动定理：

$$-F\frac{1}{2}l = J\alpha,\ J = \frac{1}{12}m_0 l^2$$

杆与桌面接触点的静止条件：

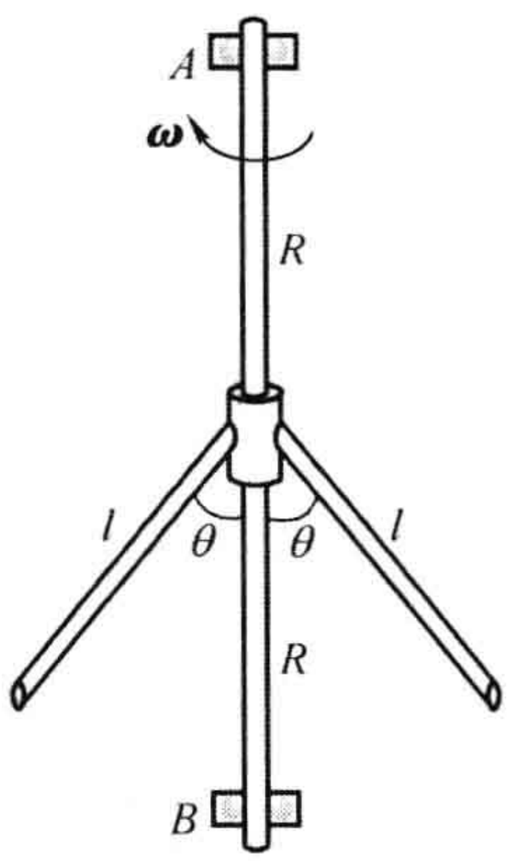
$$a_C + \alpha\frac{1}{2}l = 0$$

联立解得

$$F = \frac{1}{4}m_0 g$$

方向向上。

7-31. 两根质量均为 m、长均为 l 的相同均匀杆，与一竖直轴刚性相连，杆与轴均成 θ 角，且三者在同一平面内，转轴被轴承在 A、B 点处固定，如习题 7-31 图所示。当转轴以恒定角速度 ω 转动时，求转轴对轴承的水平作用力。设两轴承到杆、轴连接点的距离均为 R。



习题 7-31 图

解：以两杆和轴构成的系统为研究对象，以杆和转轴的交点为坐标原点，竖直向上为转动的正方向。系统竖直方向角动量守恒，水平方向可应用角动量定理。

为了求水平方向上的角动量，首先求杆上任一质元的角动量，然后积分、分解得系统水平方向上的角动量，再在水平面上应用角动量定理。

杆上离原点为 r 到 $r+\mathrm{d}r$ 处的质元（质量为 Δm）的角动量为

$$\Delta \boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times\Delta m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}\times\Delta m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

方向与杆垂直，其大小为

$$|\Delta L| = \omega r^2 \sin\theta\Delta m$$

则整个杆的角动量为

$$L = \int_0^l \omega r^2 \sin\theta\left(\frac{m}{l}\mathrm{d}r\right) = \frac{1}{3}ml^2\omega\sin\theta$$

系统在转轴 z 方向的角动量分量为

$$L_z = 2L\sin\theta = \frac{2}{3}ml^2\omega\sin^2\theta$$

系统在水平方向上的角动量分量：

$$L_{\mathrm{h}} = 0$$

设轴承对转轴的水平作用力为 F_A 和 F_B。

水平方向的角动量定理：

$$F_A R+F_B R=\frac{\mathrm{d}L_\mathrm{h}}{\mathrm{d}t}=0$$

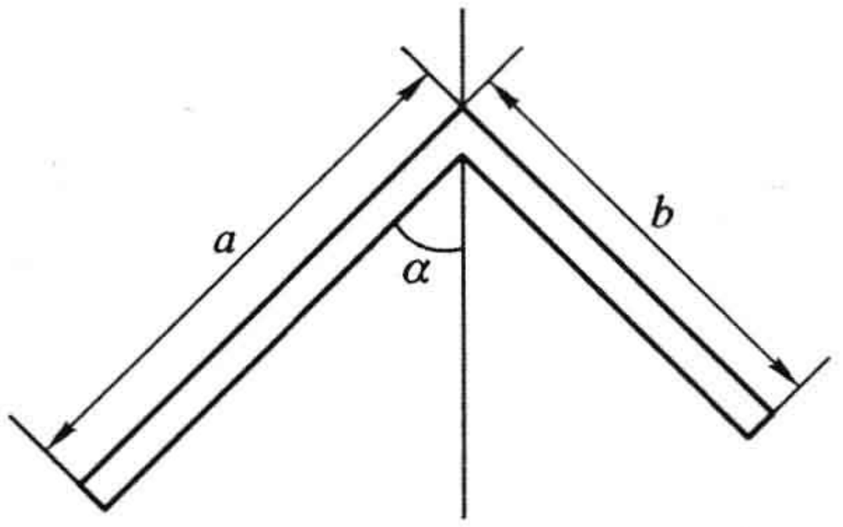
质心运动定理：

$$F_A-F_B=m\omega^2 r_C=0,\ (r_C=0)$$

则轴承对转轴的水平作用力为

$$F_A=F_B=0$$

7-32. 一直角尺由长度分别为 a 和 b 的两根棒构成，能在竖直平面内绕过直角顶点的光滑水平轴自由转动，如习题7-32图所示。设长为 a 的棒与竖直线间的夹角为 α。开始时，将尺拉至 $\alpha=0$ 位置，然后由静止开始释放。求 α 的最大值。



习题 7-32 图

解：设长为 a 的棒受重力为 $m_a g$，长为 b 的棒受重力为 $m_b g$，取 $\alpha=0$ 时长为 a 的棒的最低点为势能零点。系统由初始状态到最大 α 处机械能守恒：

$$m_a g\frac{a}{2}+m_b g a=m_b g\left(a-\frac{b}{2}\sin\alpha\right)+m_a g\left(a-\frac{a}{2}\cos\alpha\right)$$

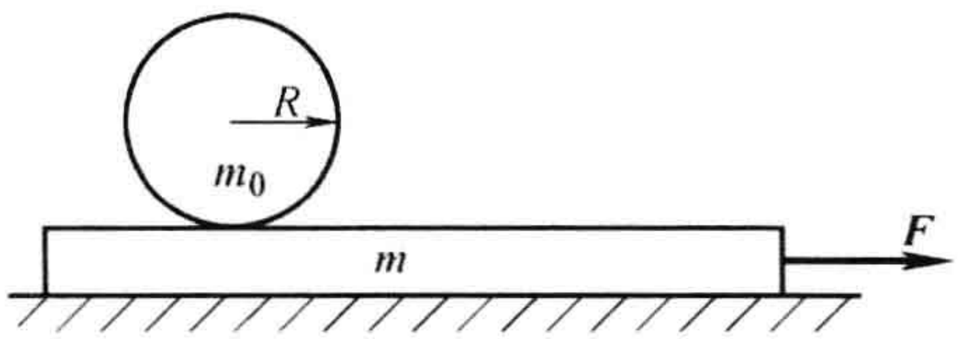
两棒质量均匀：

$$\frac{m_a}{m_b}=\frac{a}{b}$$

联立解得

$$\alpha=2\arctan\frac{b^2}{a^2}$$

7-33. 质量为 m 的板受水平力 F 的作用沿水平面运动，板与水平面之间的摩擦因数为 μ。板上放着质量为 m_0、半径为 R 的圆柱体，如习题7-33图所示。



习题 7-33 图

（1）若圆柱体在板上的运动为纯滚动，求板的加速度。

（2）为使圆柱体做纯滚动，求 F 的最大值。设圆柱体与板之间的摩擦因数也是 μ。

解：设水平向右、垂直纸面向外为正方向。

对板运用牛顿第二定律：

$$F-F_{\mathrm{f}}-(m+m_0)g\mu=ma_m$$

以圆柱体为研究对象。

质心运动定理：

$$F_{\mathrm{f}}=m_0a_{m_0}$$

绕质心的转动定律：

$$RF_{\mathrm{f}}=\frac{1}{2}m_0R^2\alpha$$

圆柱与板之间的纯滚动条件：$a_{m_0}+R\alpha=a_m$

联立解得

$$a_m=\frac{F-(m_0+m)g\mu}{\frac{m_0}{3}+m}$$

圆柱做纯滚动时对应 F 最大的条件：

$$F_{\mathrm{f}}=\mu m_0g$$

联立解得

$$F=2(m_0+2m)g\mu$$

7-34. 一根长为 l、质量为 m 的均匀细棒，放置在光滑的水平桌面上，一个水平的冲量 I 突然垂直地作用于棒的另一端。试问：

（1）当棒旋转了360°时，其质心运动了多远？

（2）冲击后棒的动能为多大？

解：（1）在水平冲量作用后，质心以恒定速度运动，同时棒绕过质心的轴转动。

水平冲量作用前后，质心动量定理：

$$I=F\Delta t=mv_C$$

水平冲量作用前后，质心角动量定理：

$$\frac{Fl}{2}\Delta t=J\omega-0$$

其中

$$J=\frac{1}{12}ml^2$$

当棒旋转360°所用时间：

$$t=\frac{2\pi}{\omega}$$

质心运动的距离：

$$s=v_Ct$$

联立解得

$$s=\frac{1}{3}\pi l$$

（2）冲击后棒的动能：

$$E_k=\frac{1}{2}J\omega^2+\frac{1}{2}mv_C^2=\frac{2}{m}I^2$$

7-35. 如习题7-35图所示，一质量为 m、半径为 r 的小球，从高为 h_0 的斜坡顶端由静止开始滚下，并从高为 $h(h<h_0)$ 的斜坡的另一端飞离。离开时，小球的速度为竖直向上，若小球与斜坡之间的摩擦因数足够大，使小球始终做纯滚动，求小球飞离后所能上升的最大高度。

解：以斜面和小球为研究对象，取高为 h 的斜坡处为势能零点。设飞离斜坡时小球的质心速度和转动角速度分别为 v、ω。

运动过程系统机械能守恒：

$$mg(h_0-h)=\frac{1}{2}J\omega^2+\frac{1}{2}mv^2 \qquad J=\frac{2}{5}mr^2$$

纯滚动的约束条件：

$$v=\omega r$$

当小球脱离斜面向上运动时，做竖直上抛运动：

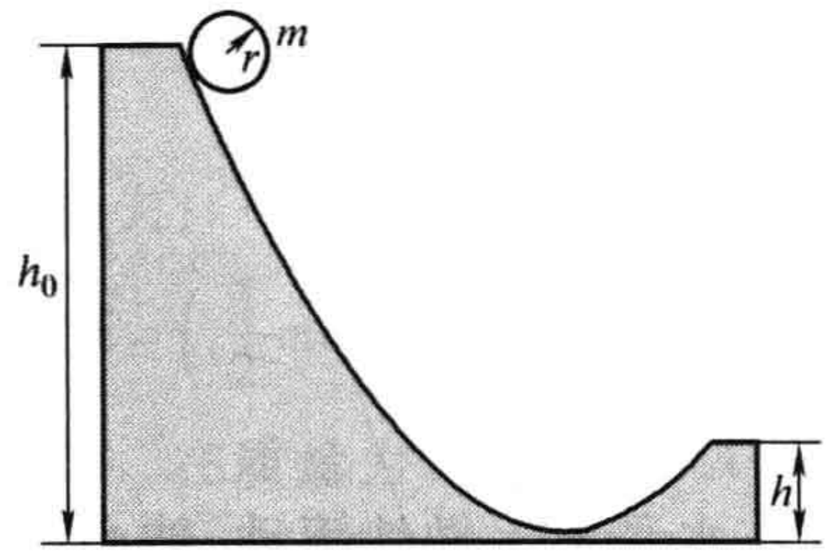
$$v^2=2gh'$$

联立可得

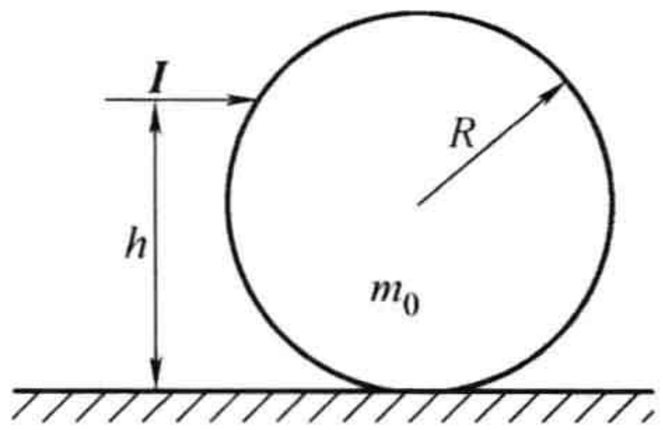
$$h'=\frac{5}{7}(h_0-h)$$

则小球上升的最大高度为

$$h'+h=\frac{5}{7}h_0+\frac{2}{7}h$$



习题7-35图



习题7-36图

7-36. 将一水平方向上的冲量 I 作用在质量为 m_0、半径为 R 的最初是静止的均质小球上，作用点位于球心的上方，距地面的高度为 h，作用线位于过球心而平行于纸面的平面内，如习题7-36图所示。试分析小球以后的运动情况，并

求出小球做纯滚动时的角速度 ω。

解:以水平向右和垂直纸面向外为正方向。冲量作用前后,对球应用质心运动定理:

$$I=F\Delta t=m_0v_0-0$$

对球应用质心角动量定理:

$$-F(h-R)\Delta t=J\omega_0-0,\ J=\frac{2}{5}m_0R^2$$

联立可得

$$v_0=\frac{I}{m_0},\ \omega_0=-\frac{5(h-R)}{2R^2}v_0$$

即小球受冲量作用后,质心获得水平向右的速度和相对质心顺时针方向的角速度。

当 $|\omega_0R|=v_0$,即 $h=\frac{7R}{5}$时,小球做纯滚动;

当 $|\omega_0R|<v_0$,即 $h<\frac{7R}{5}$时,小球受到向左的滑动摩擦力,从而使质心速度减慢,绕质心转动的角速度增大,直至满足纯滚动条件时才开始做纯滚动;

当 $|\omega_0R|>v_0$,即 $h>\frac{7R}{5}$时,小球受到向右的滑动摩擦力,从而使质心速度增大,绕质心转动的角速度减慢,直至满足纯滚动条件时才开始做纯滚动。

下面求纯滚动时角速度的表达式。冲量作用后,对球应用质心运动定理:

$$m_0g\mu t=m_0v-m_0v_0$$

对球应用质心角动量定理:

$$m_0g\mu Rt=J\omega-J\omega_0$$

刚好纯滚动时:

$$v+\omega R=0$$

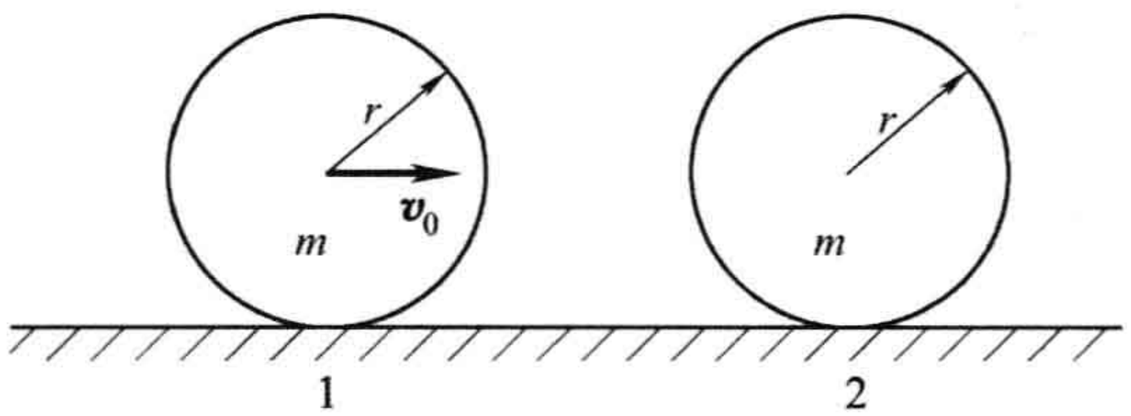
联立解得

$$\omega=-\frac{5Ih}{7m_0R^2}$$

7-37. 一质量为 m、半径为 r 的均质球 1 在水平面上做纯滚动,球心速度为 v_0,与另一完全相同的静止球 2 发生对心碰撞,如习题 7-37 图所示。设碰撞时各接触面间的摩擦均可忽略,碰撞是弹性的。

(1) 碰撞后,各自经过一段时间,两球开始做纯滚动,求出此时各球心的速度;

(2) 求此过程中系统机械能的损失。



习题 7-37 图

解:以地面为参考系,水平向右和垂直纸面向外为正方向。以两球为研究对象,完全弹性碰撞后,两球的初始速度与角速度为

$$v_{10}=0,\ \omega_{10}=-\frac{v_0}{r},v_{20}=v_0,\omega_{20}=0$$

球 1 的质心动量定理:

$$mg\mu t=mv_1-mv_{10}$$

球 1 相对质心角动量定理:

$$mg\mu rt=J\omega_1-J\omega_{10},\ J=\frac{2}{5}mr^2$$

球 2 的质心动量定理:

$$-mg\mu t=mv_2-mv_{20}$$

球 2 相对质心角动量定理:

$$-mg\mu rt=J\omega_2-J\omega_{20},\ J=\frac{2}{5}mr^2$$

刚好纯滚动的条件:

$$v_1+\omega_1 r=0,\ v_2+\omega_2 r=0$$

联立解得

$$v_1=\frac{2}{7}v_0,\ v_2=\frac{5}{7}v_0$$

机械能损失:

$$\Delta E=\left(\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}J\omega_0^2\right)-\left[\left(\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}J\omega_1^2\right)+\left(\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{1}{2}J\omega_2^2\right)\right]=\frac{2}{7}mv_0^2$$

7-38. 在质量为 m、边长为 a 的正方形板的一个顶点上系一根绳,绳的长度也是 a,其另一端与光滑墙面相连。把板的另一顶点靠在墙上,使绳与板平面处在同一与墙面垂直的竖直平面内,如习题 7-38 图所示。求平衡时绳中的张力。

解:对板受力分析如习题 7-38 图所示。

刚体对 A 点力矩平衡:

$$F_T\cdot AB\cdot\sin\alpha=mg\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

质心受力平衡：

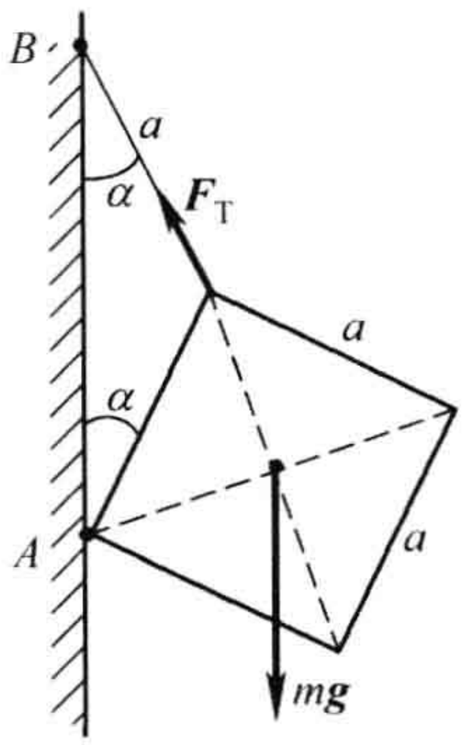
$$F_{\mathrm{T}}\cos\ \alpha = mg$$

由习题 7-38 图的几何关系得

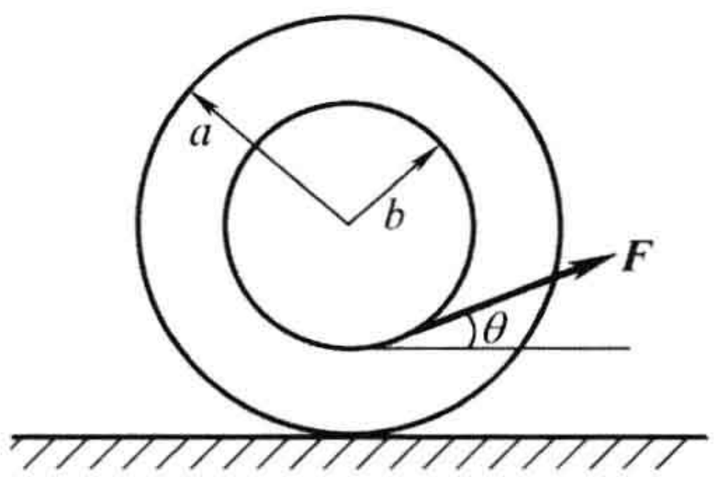
$$AB = 2a\cos\ \alpha$$

联立可得

$$F_{\mathrm{T}} = \frac{\sqrt{10}}{3}mg$$



习题 7-38 图



习题 7-39 图

7-39. 质量为 m 的线轴如习题 7-39 图所示，其外半径为 a，绕线部分的半径为 b，设其绕轴线的转动惯量为 J。今将绕线的一端以一恒力 F 拉它，F 与水平面成 θ 角，设 $F\sin\ \theta<mg$。

（1）为使线轴向后（即与 F 的水平分量方向相反）做纯滚动，

（i）求 θ 的范围；

（ii）若满足（i）中的条件，则摩擦因数 μ 至少应为多大？

（iii）求出线轴质心运动的加速度。

（2）为使线轴向前做纯滚动，同样求出（1）中的三个问题。

解：设物体水平向右为平移正方向，垂直纸面向外为转动正方向，以线轴为研究对象，设地面对线轴的摩擦力向左。

质心运动定理：

$$F\cos\ \theta - F_{\mathrm{f}} = ma_C$$

转动定律：

$$bF - aF_{\mathrm{f}} = J\alpha$$

纯滚动条件：

$$a_C + a\alpha = 0,\ F_{\mathrm{f}} \leqslant \mu(mg - F\sin\ \theta)$$

（1）线轴向后做纯滚动的条件：

$$a_C<0$$

联立解得

$$\theta>\arccos\frac{b}{a},\ F_f=\frac{F(J\cos\theta+mab)}{J+ma^2}$$

$$\mu\geqslant\frac{(J\cos\theta+mab)F}{(mg-F\sin\theta)(J+ma^2)}$$

$$a_C=-\frac{Fa(b-a\cos\theta)}{J+ma^2}$$

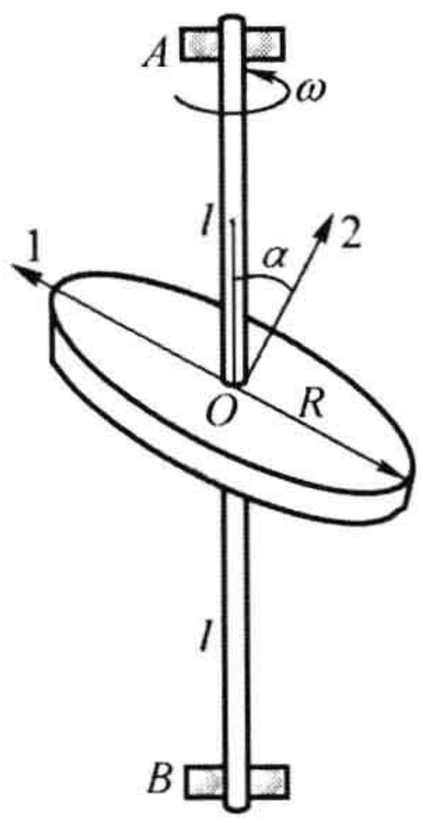
（2）线轴向前做纯滚动的条件：

$$a_C>0$$

联立解得

$$\theta<\arccos\frac{b}{a},\ \mu\geqslant\frac{(J\cos\theta+mab)F}{(mg-F\sin\theta)(J+ma^2)},\ a_C=\frac{Fa(a\cos\theta-b)}{J+ma^2}$$

***7-40**. 一质量为 m、半径为 R 的圆盘可绕通过其中心 O 的竖直轴以 ω 角速度转动，如习题7-40图所示。试求轴承处所受的水平作用力，设 $OA=OB=l$，垂直于圆盘表面的法线与竖直轴成 α 角。



习题7-40图

解：以圆盘中心为参考点，在水平面上对圆盘应用角动量定理，即可求出轴承处的作用力。在圆盘上建立惯量主轴坐标系1、2，使2沿盘面法线，如习题7-40图所示。将 ω 沿惯量主轴方向分解，则

$$\omega_1=\omega\sin\alpha,\ \omega_2=\omega\cos\alpha$$

1、2为惯量主轴方向，则圆盘总角动量可以表示为

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_2+\boldsymbol{L}_1=\frac{1}{2}mR^2\omega_2+\frac{1}{4}mR^2\omega_1$$

$$=\frac{1}{2}mR^2\omega\cos\alpha\boldsymbol{n}_2+\frac{1}{4}mR^2\sin\alpha\boldsymbol{n}_1$$

角动量在水平方向的分量为：

$$L_h=L_2\sin\alpha-L_1\cos\alpha=\frac{1}{4}mR^2\omega\cos\alpha\sin\alpha$$

质心运动定理：

$$F_B-F_A=0$$

水平方向上角动量定理：

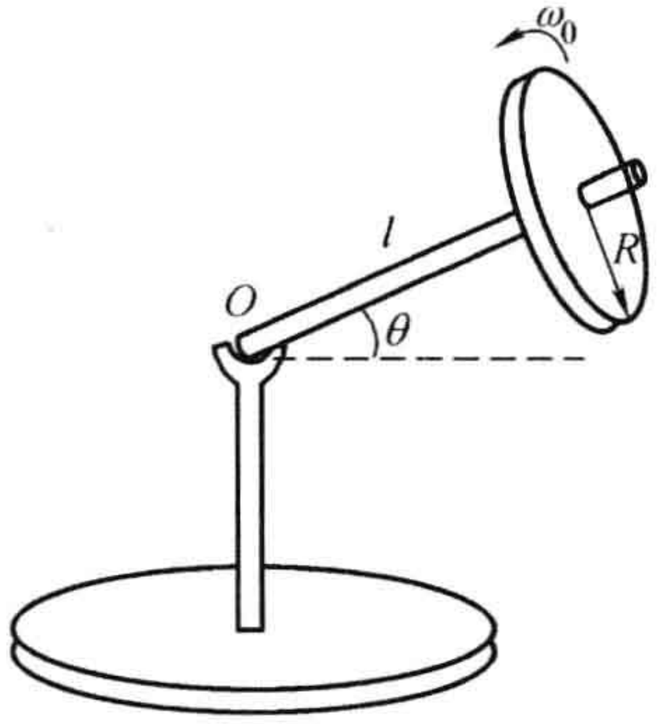
$$F_Al+F_Bl=L_h\omega$$

联立解得

$$F_A=\frac{mR^2\omega^2\cos\ \alpha\sin\ \alpha}{8l}$$

$$F_B=\frac{mR^2\omega^2\cos\ \alpha\sin\ \alpha}{8l}$$

***7-41**. 如习题7-41图所示，一陀螺由一质量为m、半径为R的厚圆盘构成，通过圆心且垂直于圆盘的自转轴为一轻杆，杆的尖端自由地支在离盘质心为l处的枢纽上。现陀螺绕自转轴以ω_0的角速度高速自转，其自转轴以与水平面成θ角做均匀进动。试求：(1) 进动角速度；(2) 枢纽所受的力。



习题7-41图

解：(1) 对陀螺在水平面上应用角动量定理：

$$mgl\cos\ \theta=J\omega_0\cos\ \theta\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

其中，陀螺绕自转轴的转动惯量为

$$J=\frac{1}{2}mR^2$$

解得进动角速度

$$\Omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{2gl}{R^2\omega_0}$$

(2) 对陀螺质心应用运动定律。

水平方向圆周运动：

$$F_x=ml\cos\ \theta\Omega^2$$

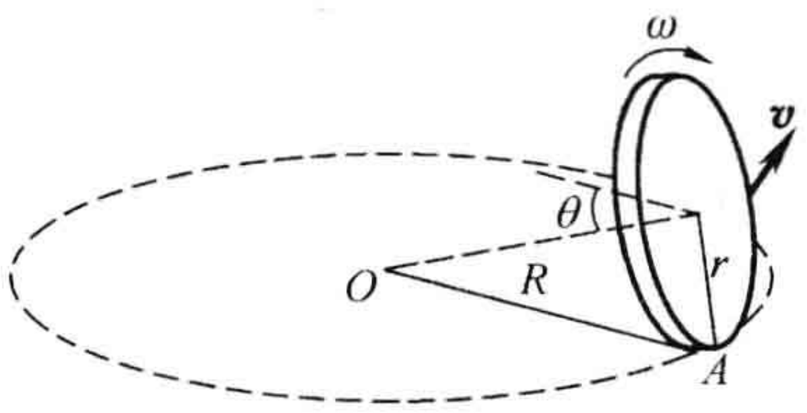
竖直方向受力平衡：

$$F_y=mg$$

联立解得

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=mg\sqrt{1+\frac{16l^6g^2\cos^2\theta}{R^8\omega_0^4}}$$

***7-42**. 一半径为r的硬币，在桌面上绕半径为R的圆滚动，其质心速度为v，如习题7-42图(a)所示。设硬币的滚动为纯滚动。求其轴线与水平线所成的角θ($\theta\ll 1, R\gg r$)。

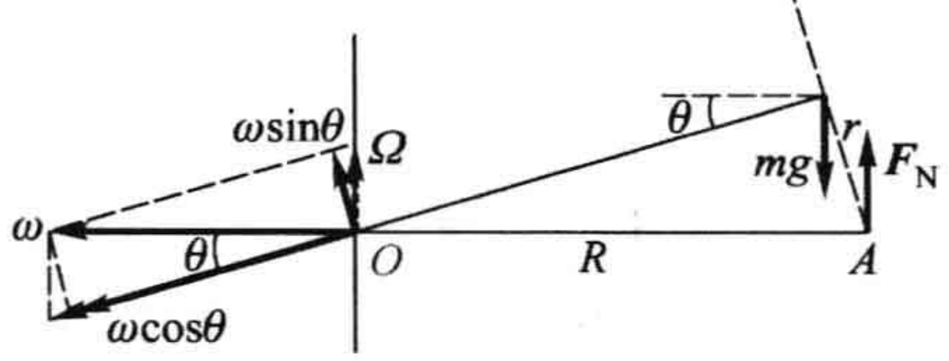


习题7-42图(a)

解：以O点为参考点，系统绕过OA的瞬时轴转动，设其角速度为ω。

定义：过O点，跟随硬币一起转动的、沿

垂直硬币平面、过质心的轴为径向方向；过 O 点，与径向垂直的轴为横向方向。由硬币的对称性可知，这样选取的径向和横向为硬币的惯量主轴方向。如果将系统绕瞬时轴的角速度 ω 沿径向和横向进行分解，那么系统的总角动量可以表示为 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_{径}+\boldsymbol{L}_{横}$。据此求出系统的总角动量 $\boldsymbol{L}$ 后，再将其沿水平方向和竖直方向分解。竖直方向的分量守恒，水平方向的分量将在硬币重力力矩和地面对其的支撑力矩的作用下进动。具体求法如下。



习题 7-42 图(b)

由题意可知，系统绕瞬时轴的总角速度 ω 是由竖直方向的进动分角速度 $\Omega=\dfrac{v}{R\cos^2\theta}$ 和与水平方向成 θ 角的另一分角速度合成而来。由习题 7-42 图(b)的几何关系可得系统的总角速度与进动角速度的关系为 $\omega=\Omega\cot\theta$。再将总角速度 ω 沿径向和横向分解得

$$\omega_{径}=\omega\cos\theta,\ \omega_{横}=\omega\sin\theta$$

$$L_{径}=J_{径}\omega\cos\theta=\frac{1}{2}mr^2\omega\cos\theta$$

$$L_{横}=J_{横}\omega\sin\theta=\left[\frac{1}{4}mr^2+m\left(R\cos\theta\right)^2\right]\omega\sin\theta\approx m\left(R\cos\theta\right)^2\omega\sin\theta$$

水平方向分角动量：

$$L_{h}=L_{径}\cos\theta+L_{横}\sin\theta$$

水平方向的角动量定理(取垂直 OA 的进动方向为正)：

$$mgR\cos^2\theta-F_{N}R=-L_{h}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=-L_{h}\Omega$$

角速度与硬币质心速度关系：

$$\Omega=\frac{v}{R\cos^2\theta},\ \omega=\Omega\cot\theta,\ r=R\sin\theta$$

竖直方向质心运动定理：

$$F_{N}=mg$$

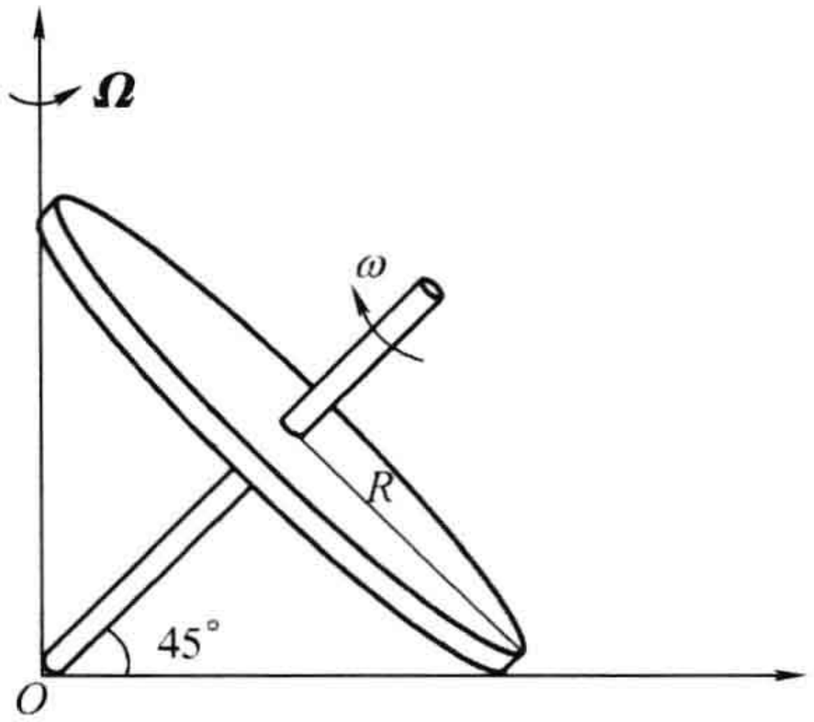
联立求得

$$\theta=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{3v^2}{gR}\right)$$

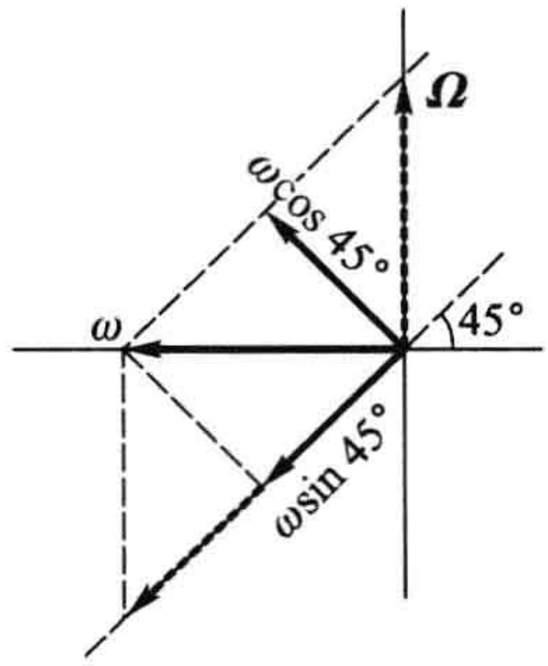
*7-43. 一陀螺由半径为 R、质量为 m 的薄圆盘及过其圆心且垂直于盘面的轻杆组成，盘缘及杆的一端 O 靠在桌面上，杆与桌面成45°角，如习题7-43图(a)所示。今陀螺以杆的一端 O 为支点，靠在桌面上做无滑滚动，使杆绕竖直轴做匀速转动，角速度为 Ω。求：

(1) 桌面对盘缘的支承力 F_N；

(2) 陀螺的动能。



习题7-43图(a)



习题7-43图(b)

解：解题思路与7-42题相同。选取过 O 点的平行于杆和垂直于杆的方向为惯量主轴，在惯量主轴的情况下，系统的总角动量和总动能可以表示为

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_{杆径}+\boldsymbol{L}_{杆横},\quad E_k=\frac{1}{2}J_{杆径}\omega_{杆径}^2+\frac{1}{2}J_{杆横}\omega_{杆横}^2$$

如习题7-43图(b)的几何关系可得总角速度：

$$\omega=\Omega\tan 45^\circ=\Omega$$

$$L_{杆径}=J_{径向}\omega\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{4}mR^2\omega$$

$$L_{杆横}=J_{横向}\omega\sin 45^\circ=\left[\frac{1}{4}mR^2+m\left(R\tan 45^\circ\right)^2\right]\frac{\sqrt{2}}{2}\omega$$

水平面上角动量的分量：

$$L_h=L_{杆径}\cos 45^\circ+L_{杆横}\sin 45^\circ$$

水平面上的角动量定理(垂直 OA 的进动方向为正方向)：

$$mg(R\tan 45^\circ)\cos 45^\circ-F_N\frac{R}{\sin 45^\circ}=-L_h\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=-L_h\Omega$$

联立解得

$$F_N=\frac{7\sqrt{2}}{16}mR\Omega^2+\frac{1}{2}mg$$

$$E_{径向}=\frac{1}{2}J_{径向}(\omega\cos 45°)^2=\frac{1}{8}mR^2\Omega^2$$

$$E_{横向}=\frac{1}{2}J_{横向}(\omega\sin 45°)^2=\frac{5}{16}mR^2\Omega^2$$

$$E=E_{径向}+E_{横向}=\frac{7}{16}mR^2\Omega^2$$

第八章　流　　体

课后作业题

8-1. 在如习题 8-1 图所示的装置中，已知容器与容器内液体的总质量为 5.0 kg，吊在弹簧秤下的重物是边长为 8.0 cm 的立方体，弹簧秤的读数为 6.0 kg，台秤的读数为 8.1 kg。求：(1) 重物的质量；(2) 容器内液体的密度。

解：(1) 以容器与容器内液体及重物为研究对象。

质心运动定理：

$$G_1+G=F_T+F_N$$

其中，G_1 为重物的重力，G 为容器与容器内液体的重力，F_T 为弹簧秤的拉力，F_N 为磅秤对研究对象的支持力，由已知数据解得

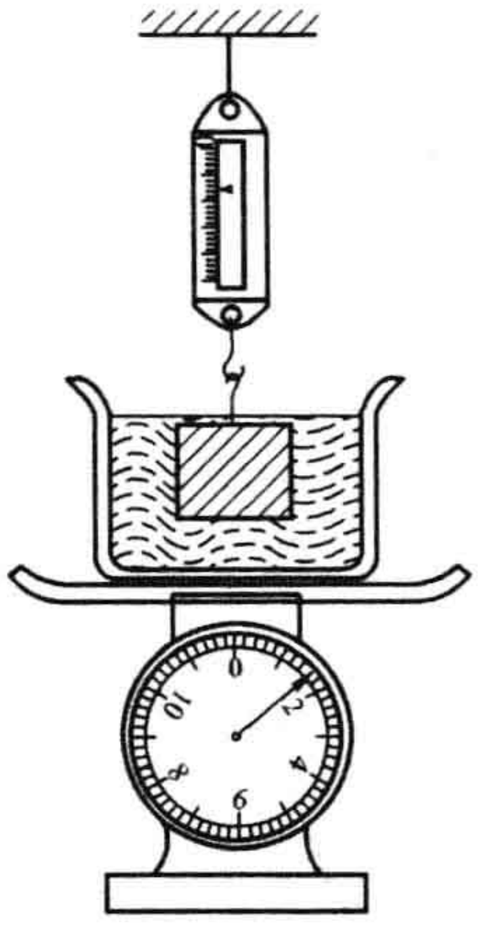
$$G_1=9.1\ \text{kg}$$

(2) 以重物为研究对象，由质心运动定理：

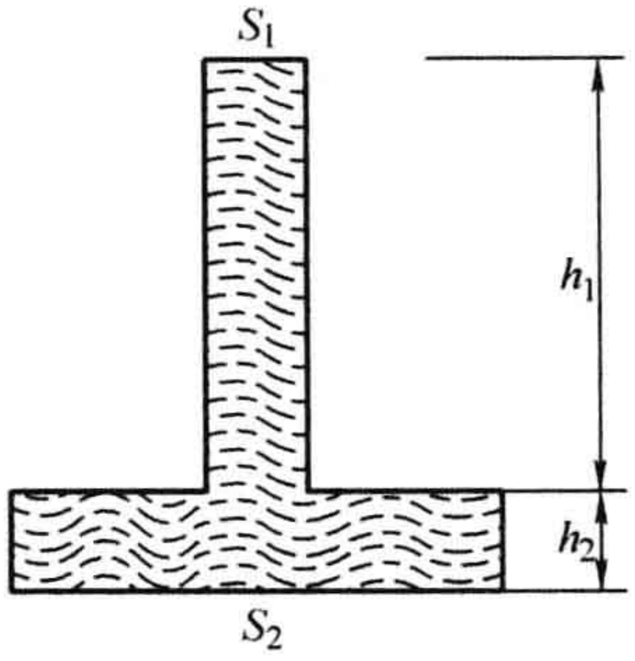
$$G_1=F_T+F$$

其中 $F=\rho gV$ 为重物所受的浮力，解得

$$\rho\approx 6.1\ \text{g/cm}^3$$



习题 8-1 图



习题 8-2 图

8-2. 一根横截面积 $S_1=5.00\ \text{cm}^2$ 的细管，连接在一个容器上，容器的横截面积 $S_2=100\ \text{cm}^2$，高度 $h_2=5.00\ \text{cm}$。把水注入，使水至容器底部的高度 $h_1+h_2=100\ \text{cm}$，如习题 8-2 图所示。求：

（1）水对容器底部的作用力为多大？

（2）此装置内水的重力为多大？

（3）解释(1)、(2)所求得的结果为何不同？

解：(1) 水对容器底部的作用力：

$$F=pS_2=\rho g(h_1+h_2)S_2$$

代入已知数据计算得

$$F=98\ \text{N}$$

(2) 装置内水的重力为：

$$G=\rho g h_1 S_1+\rho g h_2 S_2=9.56\ \text{N}$$

(3) 由(1)、(2)可知，容器底部所受的力大于水的重力。原因如下。

以水为研究对象，其达到静力学平衡。由质心运动定理得

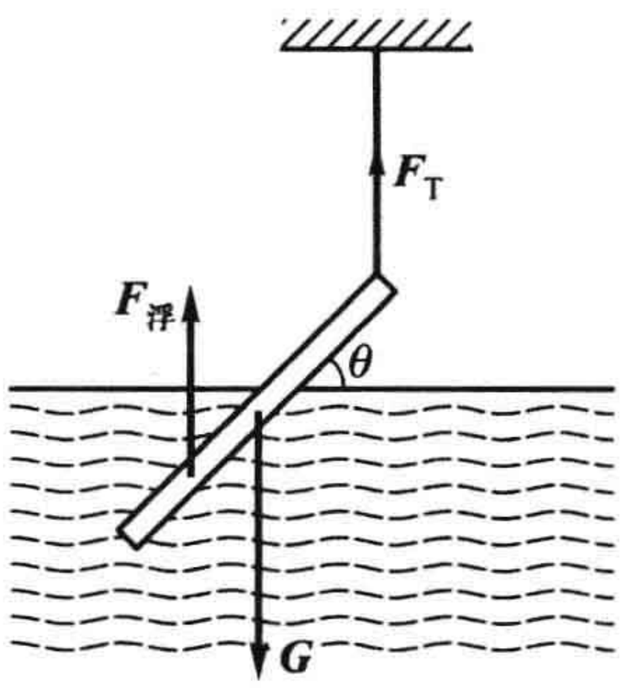
$$\boldsymbol{F}_{\text{底}}=\boldsymbol{F}_{\text{重}}+\boldsymbol{F}_{\text{压}}$$

其中，$\boldsymbol{F}_{\text{压}}$ 是除了容器底部外，容器的其他器壁对水在竖直方向的作用力。根据液体的传压原理，显然，若容器的横截面积相同，则

$$\boldsymbol{F}_{\text{底}}=\boldsymbol{F}_{\text{重}}$$

即容器底部对液体的支持力等于液体的重力。否则，如习题 8-2 图所示，在 h_2 处，容器的水平器壁对液体有向下的压力。这种形状的器壁可以使同质量的水得到很高的液柱。

8-3. 一根长为 l、密度为 ρ 的均质细杆，浮在密度为 ρ_0 的液体里。杆的一端由一竖直细绳悬挂着，使该端高出液面的距离为 d，如习题 8-3 图所示。试求：(1) 杆与液面的夹角 θ；(2) 绳中的张力 F_T。设杆的横截面积为 S。



习题 8-3 图

解：杆所受重力作用于整个杆的质心，即相距悬挂点 $\frac{1}{2}l$ 处；所受浮力作用于浸入液体内杆的质心，即相距悬挂点 $x_C=\frac{1}{2}\left(l-\frac{d}{\sin\theta}\right)+\frac{d}{\sin\theta}$ 处。以杆为研究对象。

竖直方向质心运动定理：

$$F_T+F_{浮}=G$$

相对悬挂点的转动定律：

$$F_{浮}x_C\cos\theta=G\frac{1}{2}l\cos\theta$$

其中

$$G=\rho glS,\ F_{浮}=\rho_0 g\left(l-\frac{d}{\sin\theta}\right)S$$

联立解得

$$\theta=\arcsin\left(\frac{d}{l\sqrt{1-\rho/\rho_0}}\right),F_T=\left(\rho-\rho_0+\rho_0\sqrt{1-\rho/\rho_0}\right)lSg$$

8-4. 若上题中细杆的一端由一竖直细绳与装液体的容器底面相连，使该端低于液面的距离为 d，如习题 8-4 图所示。求解上题中的两个问题。

解：杆所受重力作用于整个杆的质心，即相距悬挂点 $\frac{1}{2}l$ 处；所受浮力作用于浸入液体内杆的质心，即相距悬挂点 $x_C=\frac{1}{2}\frac{d}{\sin\theta}$ 处。以杆为研究对象。

竖直方向质心运动定理：

$$F_T+G=F_{浮}$$

相对悬挂点的转动定律：

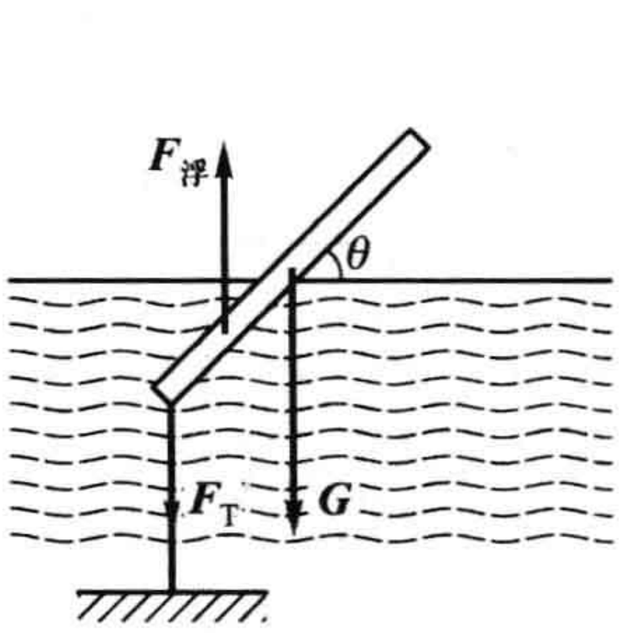
$$F_{浮}x_C\cos\theta=G\frac{1}{2}l\cos\theta$$

其中

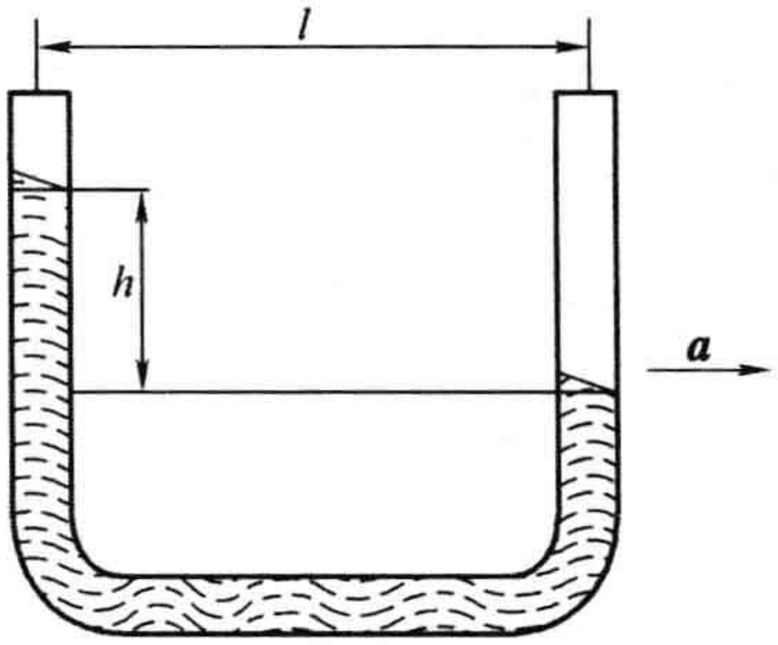
$$G=\rho glS,\ F_{浮}=\frac{\rho_0 gd}{\sin\theta}S$$

联立解得

$$\theta=\arcsin\left(\frac{d}{l}\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}\right),F_T=(\sqrt{\rho_0\rho}-\rho)lSg$$



习题 8-4 图



习题 8-5 图

8-5. 一粗细均匀的 U 形管内装有一定量的液体。U 形管底部的长度为 l。当 U 形管以加速度 a 沿水平方向加速时，如习题 8-5 图所示，求两管内液面的

高度差 h。

解:设管的横截面积为 S,左、右两侧液面高度分别为 h_2、h_1,以 U 形管底部的水平液体为研究对象,以 U 形管为参考系(加速直线运动的非惯性系),Δm 的液体加上 $-\Delta ma$ 的惯性力作用,应用质心运动定理:

$$\rho g h_2 S=\rho g h_1 S+Sl\rho a$$

解得

$$h=h_2-h_1=\frac{a}{g}l$$

8-6. 一立方体钢块平正地浮在容器内的水银中。已知钢块的密度为 7.8 g/cm^3,水银的密度为 13.6 g/cm^3。

(1) 问钢块露出水银面之上的高度与边长之比为多大?

(2) 如果在水银面上加水,使水面恰与钢块的顶相平,问水层的厚度与钢块边长的比例为多大?

解:(1) 设钢块露出水银面的高度为 b,钢块的边长为 a,则浸入水银的钢块体积为 $a^2(a-b)$。以钢块为研究对象,应用质心运动定理:

$$G=F$$

其中

$$G=\rho_{钢块} g a^3,\ F=\rho_{水银} g V=\rho_{水银} g a^2(a-b)$$

分别为钢块所受的重力和浮力。

联立解得

$$b/a\approx 0.43$$

即钢块露出水银面的高度与钢块边长之比为 0.43。

(2) 设水层的厚度为 c,钢块的边长为 a,则浸入水银的钢块体积为

$$V_{水银}=a^2(a-c)$$

浸在水中的钢块体积为

$$V_{水}=a^2 c$$

以钢块为研究对象,对其应用牛顿第二定律:

$$G=F_{浮}=F_{水银浮}+F_{水浮}$$

其中

$$G=\rho_{钢块} g a^3$$

$$F_{水银浮}=V_{水银}\rho_{水银} g=a^2(a-c)\rho_{水银} g$$

$$F_{水浮}=V_{水}\rho_{水} g=a^2 c\rho_{水} g$$

联立解得

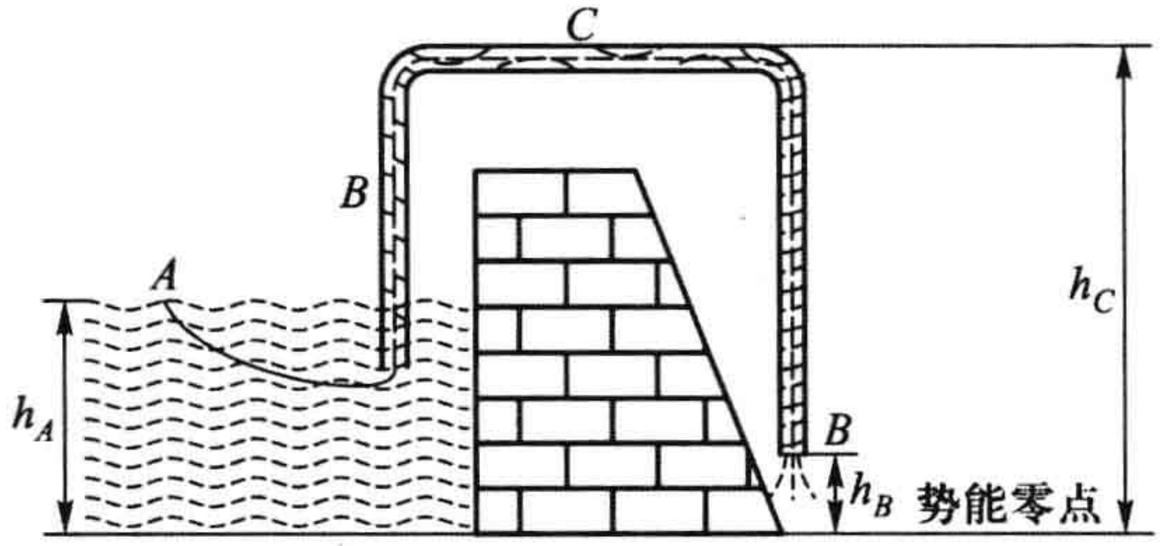
$$c/a\approx 0.46$$

即水层的厚度与钢块边长的比例为 0.46。

8-7. 利用一根跨过水坝的粗细均匀的虹吸管，从水库里取水，如习题 8-7 图所示，已知水库的水位的深度 $h_A=2.00$ m，虹吸管出水口的高度 $h_B=1.00$ m，坝高 $h_C=2.50$ m。设水在虹吸管内做定常流动。

（1）求 A、B、C 三个位置处的压强；

（2）若虹吸管的横截面积为 7.00×10^{-4} m^2，求水从虹吸管流出的体积流量。



习题 8-7 图

解：设水能够形成定常流动，选取流经 A、C、B 的流线，对 A、C、B 点应用伯努利方程：

$$p_A+\rho g h_A+\frac{1}{2}\rho v_A^2=p_C+\rho g h_C+\frac{1}{2}\rho v_C^2=p_B+\rho g h_B+\frac{1}{2}\rho v_B^2$$

管中连续性方程：

$$Sv_C=Sv_B$$

知

$$v_A\approx0,\ p_A=p_B=p_0$$

联立解得

$$p_A=p_B=p_0=1.013\times10^5\ \text{Pa}$$

$$p_C=p_0-\rho g(h_C-h_B)=0.866\times10^5\ \text{Pa}$$

$$v_B=\sqrt{2g(h_A-h_B)}$$

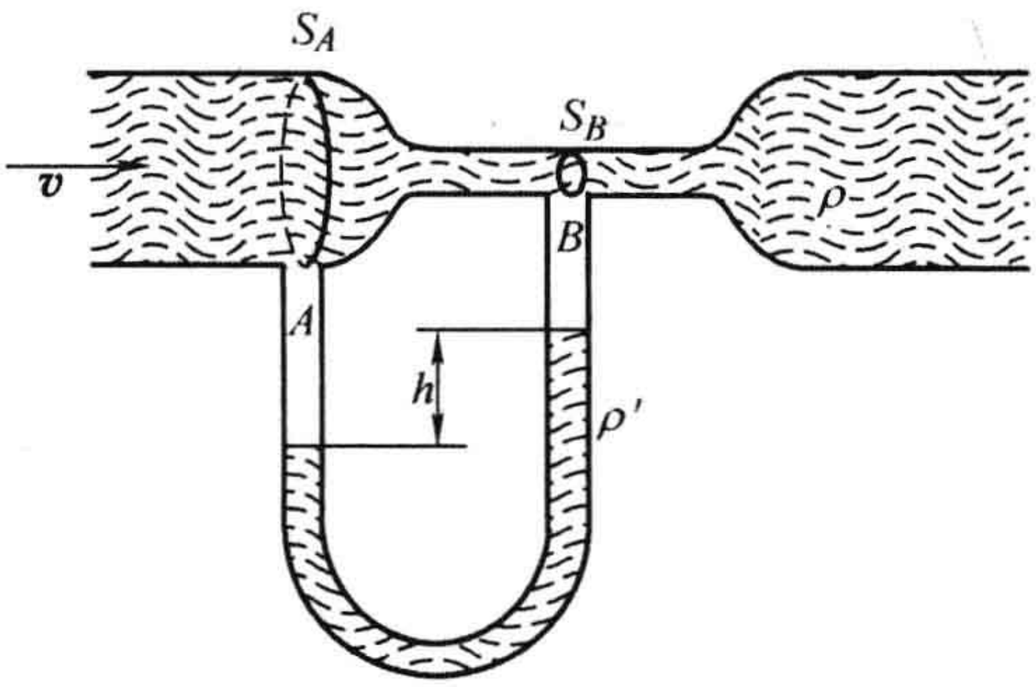
$$Q=Sv_B=\sqrt{2g(h_A-h_B)}\times S=3.1\times10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}$$

8-8. 如习题 8-8 图所示，一水平管下面装有一 U 形管，U 形管内盛有水银。已知水平管中粗、细处的横截面积分别为，$S_A=5.0\times10^{-3}$ m^2，$S_B=1.0\times10^{-3}$ m^2。当水平管中有水流做定常流动时，测得 U 形管中水银面的高度差为 $h=3.0\times10^{-2}$ m。求水流在粗管处的流速 v。已知水和水银的密度分别为 $\rho=1.0\times10^3$ kg/m^3，$\rho'=13.6\times10^3$ kg/m^3。

解：在水平管中的流线 A、B 两点处，

伯努利方程：

$$p_A+\frac{1}{2}\rho v_A^2=p_B+\frac{1}{2}\rho v_B^2$$



习题 8-8 图

连续性方程：

$$v_A S_A = v_B S_B$$

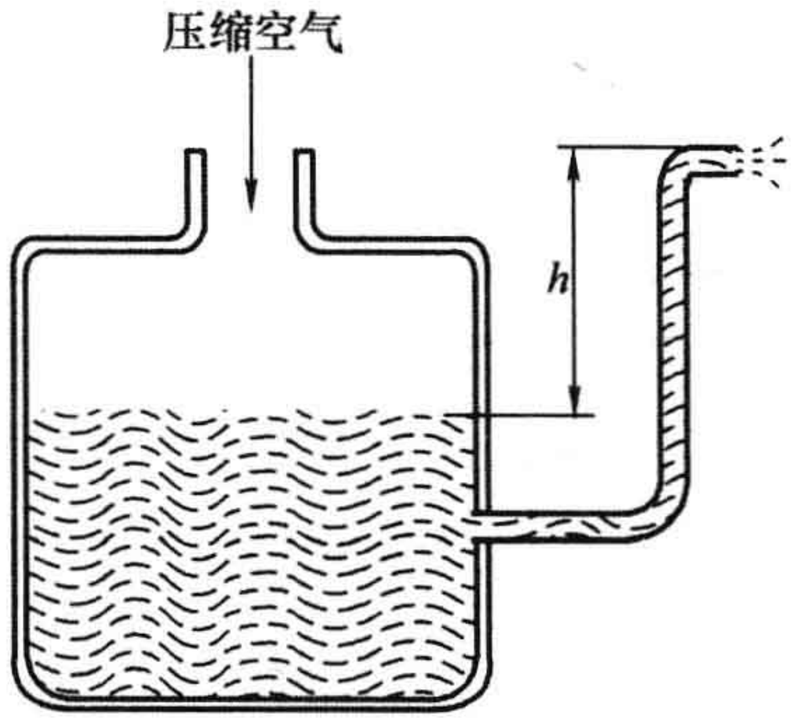
压强关系：

$$p_A = p_B + \rho' g h$$

联立解得

$$v = v_A = \sqrt{\frac{2\rho' g h \quad S_B^2}{\rho \quad S_A^2 - S_B^2}} = 0.58 \text{ m/s}$$

8-9. 利用压缩空气把水从一密封的容器内通过一管子压出，如习题 8-9 图所示。已知管子的出口处比容器内水面高 $h = 0.50$ m。当水从管口以 1.5 m/s 的流速流出时，求容器内空气的压强。



习题 8-9 图

解：设水从管口流出时速度为 v_0，在密闭容器的水平表面和出水口处，对同一流线上的两点应用伯努利方程：

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h_1 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g h_2$$

已知条件

$$v \approx 0, \ h = h_2 - h_1$$

解得

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g h = 1.073 \times 10^5 \text{ Pa}$$

8-10. 一喷泉竖直喷出高度为 H 的水流，喷泉的喷嘴具有上细下粗的截锥形状。上截面的直径为 d_1，下截面的直径为 d_2，喷嘴高为 h。设大气压强为 p_0，求：

（1）水的体积流量；

（2）喷嘴下截面处的压强。

解：对流线上的喷嘴下截面、上截面，水柱最高点三点应用伯努利方程：

$$-\rho gh+\frac{1}{2}\rho v_{下}^2+p_{下}=\frac{1}{2}\rho v_{上}^2+p_0=\rho gH+p_0$$

连续性方程：

$$v_{上}\cdot\frac{1}{4}\pi d_1^2=v_{下}\cdot\frac{1}{4}\pi d_2^2$$

由喷水的最大高度 H 可求得

$$v_{上}=\sqrt{2gH}$$

联立可得体积流量

$$Q=v_{上}\cdot\frac{1}{4}\pi d_1^2=\frac{1}{4}\pi d_1^2\sqrt{2gH}$$

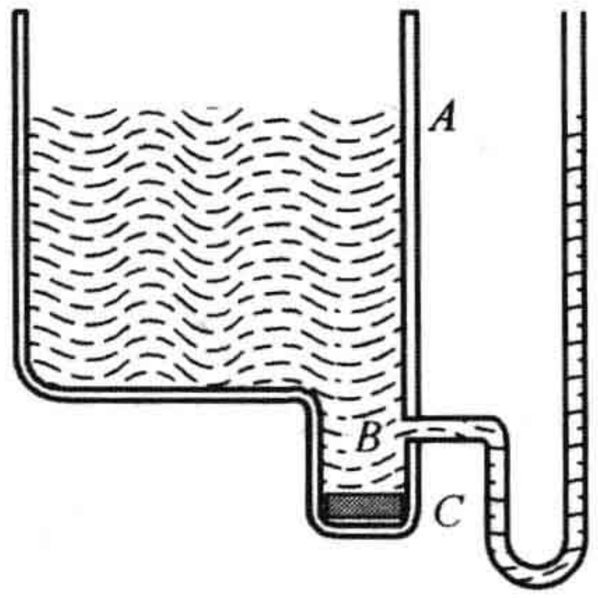
下截面压强

$$p_{下}=p_0+\rho gh+\rho gH\left(1-\frac{d_1^4}{d_2^4}\right)$$

8-11. 如习题 8-11 图所示，在一大容器的底部接一竖直管，在 B 处装有一压力计，竖直管的下口 C 处用软木塞塞住。若 A（容器内液面处）、B 和 C 点的高度分别为 h_A、h_B和 h_C。求：

（1）此时压力计中液面的高度 h_1；

（2）拔去软木塞，当水做定常流动后，压力计中液面的高度 h_2。



习题 8-11 图

解：（1）对于容器和竖直管内的流体表面，大气压相同，均为大气压，由于是静流体，因此 $h_1=h_A$；

（2）做定常流动后，对在流线上的 A、B、C 三点应用伯努利方程和连续性方程得

$$0+\rho gh_A+p_0=\frac{1}{2}\rho v_B^2+\rho gh_B+p_B=\frac{1}{2}\rho v_B^2+\rho gh_C+p_0$$

其中

$$p_B=p_0+\rho g(h_2-h_B)$$

联立整理得

$$h_2=h_C$$

8-12. 在一截锥形容器内盛有高度为 $h=0.7$ m 的水，其侧壁与底面成 $\theta=60°$角，容器被放在高为 $h_0=0.50$ m 的物体上，在容器壁的底部开有一小孔，如习题 8-12 图所示。求水从小孔射出后的水平射程 L。

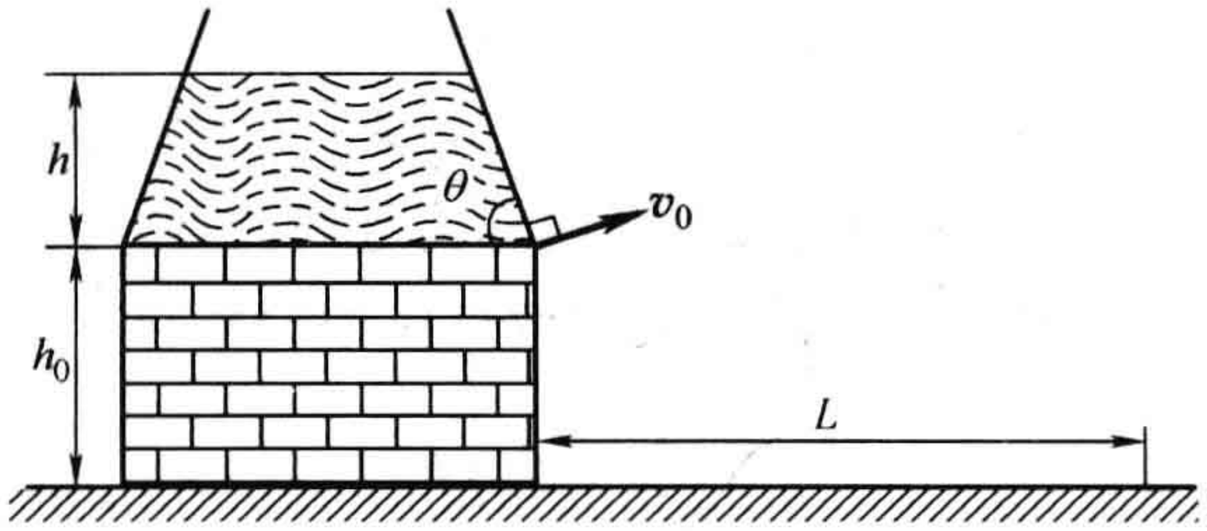
解：对流线上的液面和小孔处两点应用伯努利方程：

$$\rho gh+p_0=\frac{1}{2}\rho v_0^2+0+p_0$$

得水射出时的初始速度大小为

$$v_0=\sqrt{2gh}$$

方向如习题 8-12 图所示。



习题 8-12 图

水射出后在重力作用下,做斜抛运动。

竖直速度

$$v_{0\perp}=v_0\cos\theta$$

水平速度

$$v_{0\parallel}=v_0\sin\theta$$

$$h_0=-v_{0\perp}t+\frac{1}{2}gt^2,\ L=v_{0\parallel}t$$

联立解得

$$L\approx 1.8\ \text{m}$$

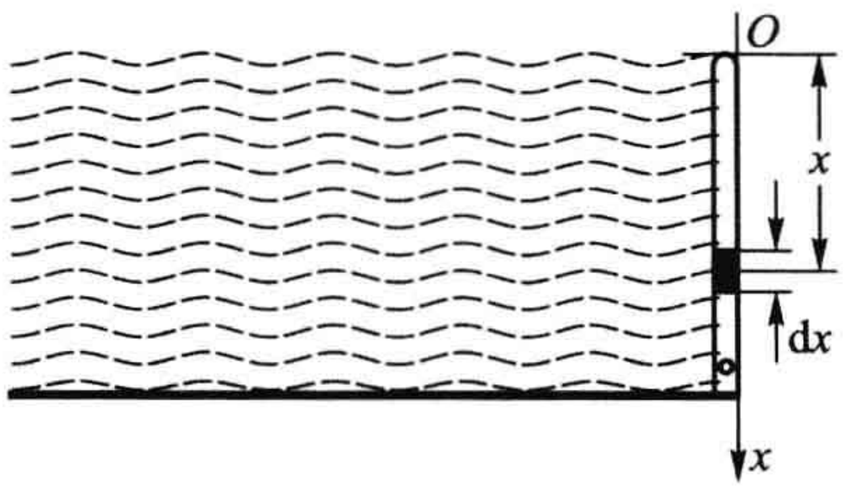
自检练习题

8-13. 在某水池的边上装有一宽为 1.0 m,高为 2.0 m 的小门,其下边与水池底相平,并用铰链与池壁连接。试问,当池内的水深刚好没过门时,门受到的水的作用力相对于铰链的力矩为多大?

解:以水平面为坐标原点,竖直向下为 x 轴的正方向,铰链距离水平面高度为 h,小门宽为 l,如习题 8-13 图所示。在 x 处,$\mathrm{d}x$ 宽的细长条水对铰链的力矩为

$$\mathrm{d}M=(2-x)\rho gxl\cdot\mathrm{d}x$$

门受到的水的作用力相对于铰链的总力矩为



习题 8-13 图

$$M=\int \mathrm{d}M=\int_0^{2.0\ \mathrm{m}}(2-x)\rho g x l\cdot \mathrm{d}x$$

积分得

$$M\approx 1.3\times 10^4\ \mathrm{N\cdot m}$$

8-14. 在一直径很大的圆柱形水桶壁的近底部处有一个直径为 0.04 m 的小孔。若桶内水的深度为 1.60 m。

（1）求此时水从小孔中流出的体积流量 Q_1。

（2）若小孔为薄壁圆孔，其收缩系数为 61%。求实际的体积流量 Q_2，并求由于收缩现象的存在而造成的计算值与实际值之间的百分误差。

解：（1）对流线上的液面和小孔处的两点应用伯努利方程得

$$p_0+\rho g h=p_0+\frac{1}{2}\rho v^2$$

解得

$$v=\sqrt{2gh}=5.6\ \mathrm{m/s}$$

体积流量为

$$Q_1=vS_1=\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\sqrt{2gh}=7.03\times 10^{-3}\ \mathrm{m^3/s}$$

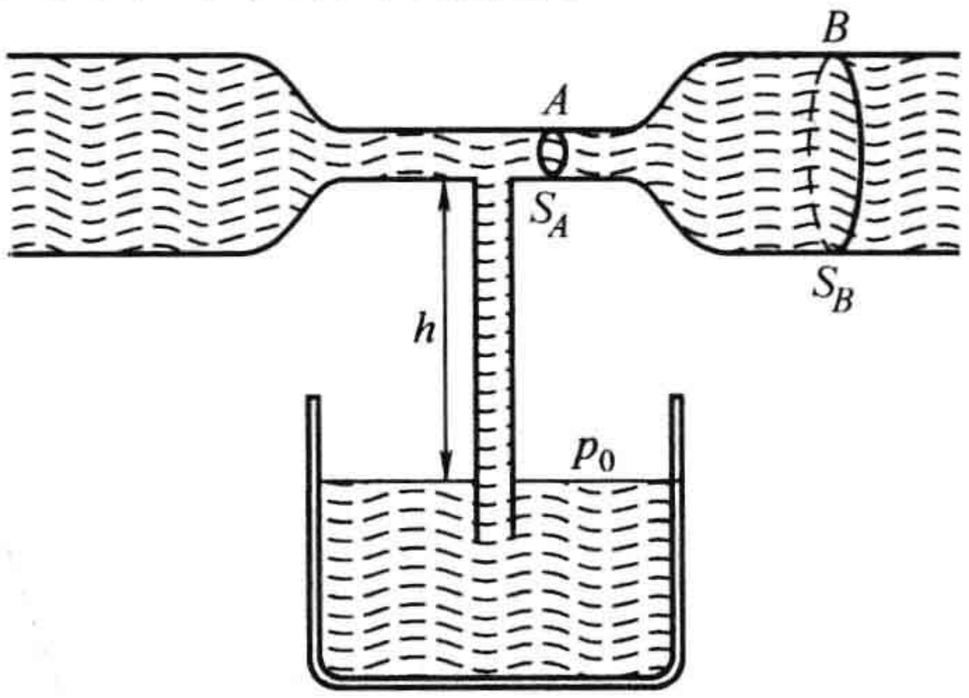
（2）因为 $\frac{S_2}{S_1}\times 100\%=$收缩系数$=61\%$，所以

$$Q_2=vS_2=4.29\times 10^{-3}\ \mathrm{m^3/s}$$

误差为

$$\frac{Q_1-Q_2}{Q_2}\times 100\%=64\%$$

8-15. 液体在一水平管道中流动，A 处和 B 处的横截面积分别为 S_A 和 S_B，B 管口与大气相通，压强为 p_0，若在 A 处用一细管与容器相通，如习题 8-15 图所示，试证明：当 h 满足下式 $h=\frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{S_A^2}-\frac{1}{S_B^2}\right)$ 时，A 处的压强刚好能将比水平管低 h 处的同种液体吸上来。其中 Q 为体积流量。



习题 8-15 图

证明:对在管道中水平流线上的 A、B 两点应用伯努利方程:

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2+p_A=\frac{1}{2}\rho v_B^2+p_B$$

对水平管道应用连续性方程:

$$Q=v_AS_A=v_BS_B$$

已知条件:

$$p_B=p_0$$

刚好在 A 处能将低 h 处的同种液体吸上来的条件:

$$p_A=p_0-\rho gh$$

联立整理得

$$h=\frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{S_A^2}-\frac{1}{S_B^2}\right)$$

8-16. 在一大容器的底部有一小孔,容器横截面积与小孔面积之比为 100,容器内盛有高度 $h=0.80$ m 的水。求容器内水流完所需的时间。设在整个过程中,水的流动可视为定常流动。

解:对流线上的液面和小孔处的两点应用伯努利方程:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho gh+p_0=\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g\cdot 0+p_0$$

连续性方程:

$$v_1S_1=\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}S_1=v_2S_2,\ \frac{S_1}{S_2}=100$$

联立得

$$v_1^2=2\cdot\frac{g}{9999}h$$

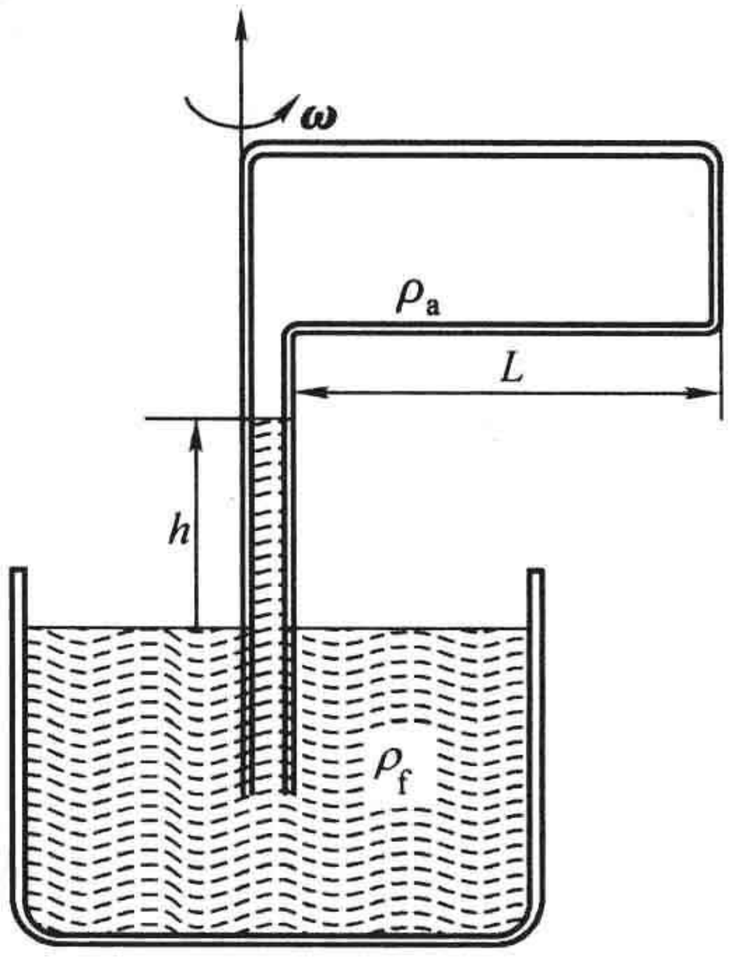
则可等效为匀加速直线运动,加速度 $a=\frac{g}{9999}$,则

$$t=\sqrt{2h/a}$$

代入数据得

$$t\approx 40\ \mathrm{s}$$

8-17. 一根长为 L 的水平粗管与一根竖直细管连接成如习题 8-17 图所示的形状。把细管的下端插入密度为 ρ_f 的液体中,然后将粗管的管口封住,并使其绕细管以恒定的角速度 ω(很小)旋转,如习题 8-17 图所示。已知粗管在绕轴旋转之前,其内空气的密度为 ρ_a,压强为



习题 8-17 图

p_a。设细管的体积与粗管相比可以忽略，忽略毛细现象和旋转前后管内空气密度的变化。求细管中液体上升的高度 h。设温度不变。

解：设粗管的纵向截面为 S，建立以转轴为坐标原点、向外为正方向的 r 坐标系。在粗管旋转之前，$h=0$，即管内外气体压强相同。粗管旋转后，管外气体压强不变，管内气体的压强发生变化。

以粗管为参考系（是一匀角速转动的非惯性系），在距转轴 r 处取一 $\mathrm{d}r$ 的纵向薄气体层为研究对象。

受力平衡：

$$p_r S+S\mathrm{d}r\rho_a\omega^2 r-p_{r+\mathrm{d}r}S=0$$

积分上式得

$$p_r=p_{r0}+\frac{1}{2}\rho_a\omega^2 r^2$$

对粗管内的气体在绕轴旋转前后应用等温气体的状态方程：

$$p_a SL=\int_0^L p_r S\mathrm{d}r=\int_0^L\left(p_{r0}+\frac{1}{2}\rho_a\omega^2 r^2\right)S\mathrm{d}r$$

解得

$$p_a L=p_{r0}L+\frac{1}{6}\rho_a\omega^2 L^3$$

流体静力学平衡方程：

$$p_a=\rho_f gh+p_{r0}$$

联立解得

$$h=\frac{L^2\omega^2}{6g}\frac{\rho_a}{\rho_f}$$

***8-18**. 一个半径 $r=0.20\times10^{-2}$ m 的小球落入 $\rho=0.90\times10^3$ kg/m^3 的黏性液体中。已知小球的密度 $\rho'=6.5\times10^3$ kg/m^3，并测得小球在该液体中的最终速度 $v_f=0.24$ m/s。试求：

（1）液体的黏度 η；

（2）小球在下降过程中加速度为 $\frac{1}{3}g$ 时刻的速度 v。

解：（1）达到收尾速度时，小球受力平衡：

$$F_{浮}+F_{阻}=F_{重力}$$

其中

$$F_{浮}=\rho g\frac{4}{3}\pi r^3,\ F_{重力}=\rho' g\frac{4}{3}\pi r^3,\ F_{阻}=6\pi\eta r v_f$$

联立得

$$\eta\approx0.20\ \mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$$

（2）当 $\eta \approx 0.20\ \text{Pa} \cdot \text{s}$ 时，近似用斯托克斯公式，对小球应用牛顿第二定律：

$$F_{\text{重力}} - F_{\text{浮}} - F_{\text{阻}} = ma = \rho' \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{1}{3}g$$

解得

$$v \approx 0.15\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

第九章　振　　动

课后作业题

9-1. 一质点沿 x 轴做简谐振动，其运动方程为 $x=0.4\cos\left[3\pi\left(t+\frac{1}{6}\right)\right]$，式中 x 和 t 的单位分别为 m 和 s。求：

（1）振幅、周期和角频率；

（2）初相位、初位移和初速度；

（3）$t=1.5$ s 时的位移、速度和加速度。

解：（1）由

$$x=0.4\cos\left[3\pi\left(t+\frac{1}{6}\right)\right]=0.4\cos\left(3\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$$

得振幅 $A=0.4$ m，角频率 $\omega=3\pi$ rad/s，周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2}{3}$ s，初相位 $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$；

（2）由题意得

$$v=\dot{x}=-0.4\times3\pi\sin\left(3\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$a=\ddot{x}=-0.4\times(3\pi)^2\cos\left(3\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$$

当 $t=0$ 时，

$$x_0=0,v_0=-1.2\pi\ \text{m/s}$$

（3）当 $t=1.5$ s 时，

$$x=-0.4\ \text{m},v=0,a=3.6\pi^2\ \text{m/s}^2$$

9-2. 一质点做振幅 $A=0.30$ m 的简谐振动。当质点的位移 $x=0.15$ m 时的速度大小为 $v=0.9$ m/s，求振动频率 ν。

解：设质点运动方程为

$$x=0.3\cos(\omega t+\phi)$$

则

$$v=\dot{x}=-0.3\omega\sin(\omega t+\phi)$$

设 $t=t_1$ 时，

$$x=0.15\ \text{m},\ v=0.9\ \text{m/s}$$

即

$$0.15=0.3\cos(\omega t_1+\phi) \qquad ①$$

$$0.9=-0.3\omega\sin(\omega t_1+\phi) \qquad ②$$

由①得

$$\cos(\omega t_1+\phi)=0.5$$

则

$$\sin(\omega t_1+\phi)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

由②得

$$\omega=-\frac{3}{\sin(\omega t_1+\phi)}>0$$

则

$$\sin(\omega t_1+\phi)=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \omega=2\sqrt{3}\ \text{rad/s}$$

振动频率

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}\approx 0.55\ \text{Hz}$$

9-3. 一质点做正弦简谐振动，在某相位时，其位移为 x_0，当相位增大一倍时，其位移为 $\sqrt{3}x_0$。求振幅 A。

解：设振动方程为 $x_0=A\sin(\omega t+\phi)$，由已知条件得

$$\sqrt{3}x_0=A\sin(2\omega t+2\phi)$$

两式联立可得

$$\cos(\omega t+\phi)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

则

$$\sin(\omega t+\phi)=\pm\frac{1}{2}$$

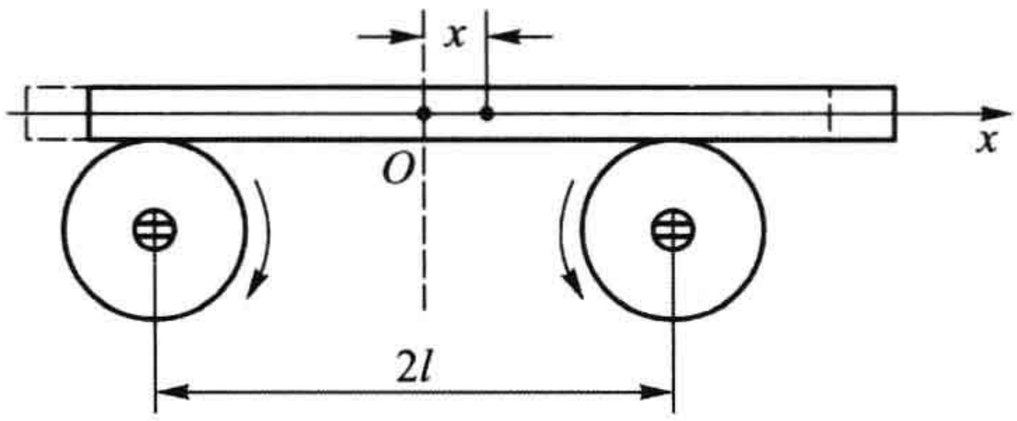
由于 $A>0$，则

$$A=\left|\frac{x_0}{\sin(\omega t+\phi)}\right|=2|x_0|$$

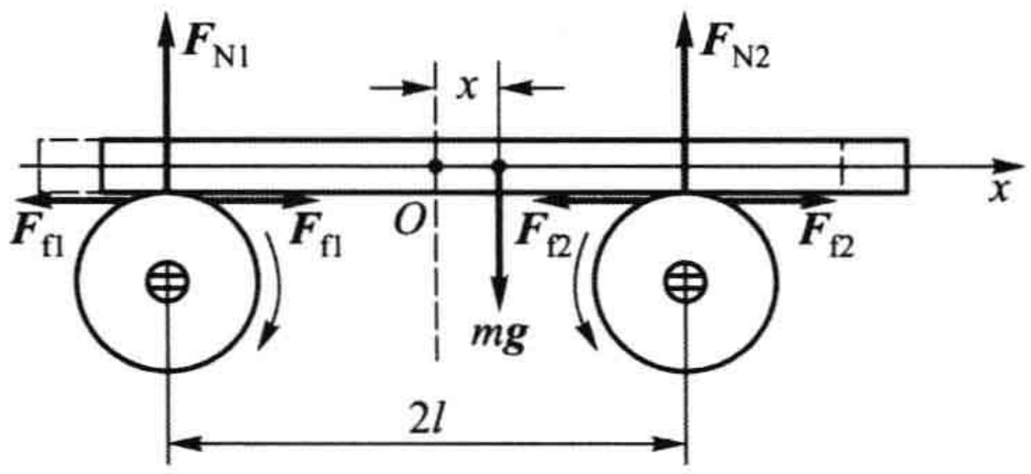
9-4. 一根质量为 m 的均匀杆，放在两个完全相同的轮子上，两轮心间距离为 $2l$，并沿习题 9-4 图(a)所示的方向高速旋转，杆与轮子间的摩擦因数为 μ，$t=0$ 时，杆静止，杆的质心与两轮中间点的距离为 x_0。

（1）证明杆沿水平方向将做简谐振动，并求出振动的角频率；

（2）若两轮均沿与习题 9-4 图(a)所示的相反方向旋转，求杆的质心从 x_0 运动到任意一点 x（x 表示杆的质心与两轮中间点的距离）时所用的时间。



习题 9-4 图(a)



习题 9-4 图(b)

解：以杆的平衡位置（中心）为坐标原点，如习题 9-4 图(b)所示，以向右和垂直纸面向里为正方向，以杆为研究对象。

（1）当两轮沿习题 9-4 图(a)所示的方向高速旋转时，对杆应用质心运动定理：

$$\mu F_{N1}-\mu F_{N2}=m\ddot{x}$$

相对坐标原点力矩平衡：

$$mgx+F_{N1}l-F_{N2}l=0$$

联立可得

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=0\,,\omega_0=\sqrt{\frac{\mu g}{l}}$$

因此，杆沿水平方向做简谐振动，振动的角频率 $\omega_0=\sqrt{\dfrac{\mu g}{l}}$。

（2）当两轮沿习题 9-4 图(a)所示相反方向旋转时，摩擦力的方向均与原来相反，同理可得方程组：

$$\begin{cases}-\mu F_{N1}+\mu F_{N2}=m\ddot{x}\\ mgx+F_{N1}l-F_{N2}l=0\end{cases}$$

联立可得

$$\mu\left(\frac{mgx}{l}\right)=m\ddot{x}$$

两边同乘 $\dot{x}$ 得

$$\dot{x}\,\ddot{x}=\frac{\mu g}{l}x\,\dot{x}$$

两边同时积分

$$\int_0^{\dot{x}}\dot{x}\mathrm{d}\dot{x}=\frac{\mu g}{l}\int_{x_0}^{x}x\mathrm{d}x$$

解得

$$v=\dot{x}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{g\mu}{l}(x^2-x_0^2)}$$

再次整理得

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{g\mu}{l}(x^2-x_0^2)}}=\int_0^t\mathrm{d}t$$

解得

$$t=\sqrt{\frac{l}{g\mu}}\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-x_0^2}}{x_0}\right)$$

9-5. 一摆长为 l，摆锤质量为 m 的单摆悬挂在火车顶上。当火车以加速度 a_0 行驶时，

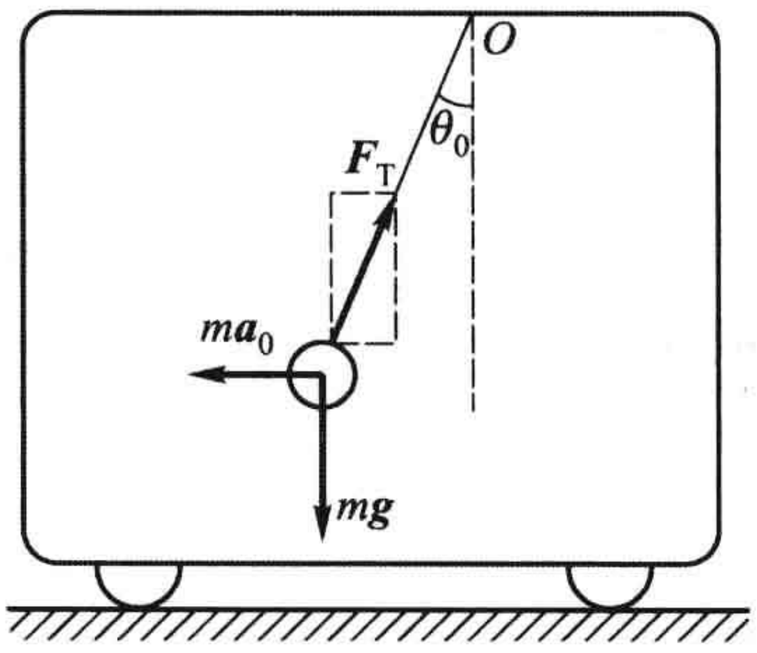
（1）求证：单摆平衡时，摆线与竖直线之间将有一夹角 θ_0，θ_0 的值为

$$\theta_0=\arctan\left(\frac{a_0}{g}\right)$$

（2）将摆锤偏离平衡位置少许后释放，求其振动周期。

解：设火车的加速度 a_0 水平向右。

（1）以火车为参考系（加速直线运动的非惯性系），摆锤受力如习题 9-5 图所示，摆锤平衡，应用牛顿第二定律：



习题 9-5 图

水平方向：

$$F_{\mathrm{T}}\sin\theta_0=ma_0$$

竖直方向：

$$F_{\mathrm{T}}\cos\theta_0=mg$$

联立可得

$$\tan\theta_0=\frac{a_0}{g}$$

则

$$\theta_0 = \arctan\left(\frac{a_0}{g}\right)$$

（2）当偏离平衡位置少许时，以 O 点为转轴，规定从平衡位置向左（增加）的偏离方向为正，相应的转动方向向里为正。以火车为参考系，当偏离平衡位置角度为 θ 时，由转动定律得

$$-mgl\sin(\theta+\theta_0) + ma_0 l\cos(\theta+\theta_0) = ml^2\ddot{\theta}$$

即

$$-l\ddot{\theta} = g\sin(\theta+\theta_0) - a_0\cos(\theta+\theta_0)$$

用和差化积公式展开，并注意小幅度摆动条件：

$$\sin\theta \approx \theta,\ \cos\theta \approx 1$$

整理可得

$$\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g\cos\theta_0 + a_0\sin\theta_0}{l}} = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta_0}} = \sqrt{\frac{a_0}{l\sin\theta_0}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta_0}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l\sin\theta_0}{a_0}}$$

9-6. 若上题中的单摆挂在电梯的顶上。

（1）若电梯以加速度 a_0 向下运动，则摆的周期为多大？若 $a_0 > g$，则会出现什么现象？

（2）若电梯以加速度 a_0 向上运动，则摆的周期有多大？

解：若单摆挂在电梯的顶上，平衡位置为竖直方向。以 O 点为转轴，规定从平衡位置向左（增加）的偏离方向为正，相应的转动方向向里为正。

（1）当电梯以加速度 a_0 向下运动时，以电梯为参考系，摆锤的受力与上题相比只需要将惯性力 ma_0 的方向变为竖直向上即可。由转动定律得

$$-mgl\sin\theta + ma_0 l\sin\theta = ml^2\ddot{\theta}$$

小幅度摆动条件：

$$\sin\theta \approx \theta$$

则

$$\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta = 0,\ \omega_0 = \sqrt{\frac{g-a_0}{l}}$$

所以，摆仍将做简谐振动，并且

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g-a_0}{l}},\ T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a_0}}$$

若 $a_0>g$，则小球会向上运动，直至与电梯顶板接触平衡。

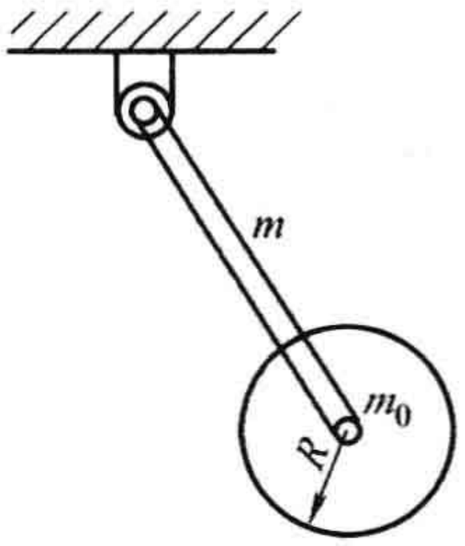
（2）当电梯以加速度 a_0 向上运动时，以电梯为参考系，摆锤的受力与上题相比只需要将惯性力 ma_0 的方向变为竖直向下即可。由转动定律得

$$-(mgl+ma_0l)\sin\theta=ml^2\ddot{\theta}$$

同理可解得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a_0}}$$

9-7. 由一长为 l、质量为 m 的杆和一质量为 m_0、半径为 R 的匀质圆盘组成的复摆，如习题 9-7 图所示。求此复摆在以下两种情况下的周期和等值单摆长。



习题 9-7 图

（1）圆盘与杆固连；

（2）圆盘与杆之间由一光滑轴相连，故圆盘可绕此轴自由旋转。

解：取复摆为研究对象，当它绕悬挂点摆动时，机械能守恒。设杆与竖直方向的夹角为 θ，以复摆平衡位置时圆盘中心为零势能点，则复摆系统在任一位置（θ）时重力势能为

$$E_p=mg\left[\frac{l}{2}(1-\cos\theta)+\frac{l}{2}\right]+m_0gl(1-\cos\theta)$$

再由

$$\sin\frac{\theta}{2}\approx\frac{\theta}{2}(\text{小幅度摆动条件}),1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

整理得

$$E_p=mg\frac{l}{2}\cdot\left(\frac{\theta^2}{2}+1\right)+m_0gl\frac{\theta^2}{2}$$

复摆动能

$$E_k=E_{k杆}+E_{k盘}$$

无论圆盘与杆是否固连，杆都相对悬挂点做圆周运动，则

$$E_{k杆}=\frac{1}{2}I_{杆}\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\dot{\theta}^2$$

当圆盘与杆固连时，圆盘整体相对悬挂点做圆周运动，此时

$$E_{k盘}=\frac{1}{2}I_{盘}\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}\left(m_0l^2+\frac{1}{2}m_0R^2\right)\dot{\theta}^2$$

当圆盘与杆之间由一光滑轴相连时，只有圆盘质心相对悬挂点做圆周运动，而圆盘相对圆盘质心是静止的，此时

$$E_{k盘}=\frac{1}{2}I_{盘}\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}(m_0l^2+0)\dot{\theta}^2$$

无论哪种情况，系统能量守恒，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_k+E_p)=0$$

整理上述得：

（1）当圆盘与杆固连时，

$$\ddot{\theta}+\frac{3(2m_0gl+mgl)\theta}{2(3m_0l^2+ml^2)+3m_0R^2}=0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{3(2m_0+m)gl}{2(3m_0+m)l^2+3m_0R^2}}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{2(3m_0+m)l^2+3m_0R^2}{3(2m_0+m)gl}}$$

等效为单摆时周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{2(3m_0+m)l^2+3m_0R^2}{3(2m_0+m)gl}}$$

则等值单摆长

$$L=\frac{2(3m_0+m)l^2+3m_0R^2}{3(2m_0+m)l}$$

（2）当圆盘与杆之间由一光滑轴相连时，

$$\ddot{\theta}+\frac{3(2m_0gl+mgl)\theta}{2(3m_0l^2+ml^2)}=0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{3(2m_0+m)g}{2(3m_0+m)l}}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{2(3m_0+m)l}{3(2m_0+m)g}}$$

等效为单摆时周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{2(3m_0+m)l}{3(2m_0+m)g}}$$

所以，等值单摆长

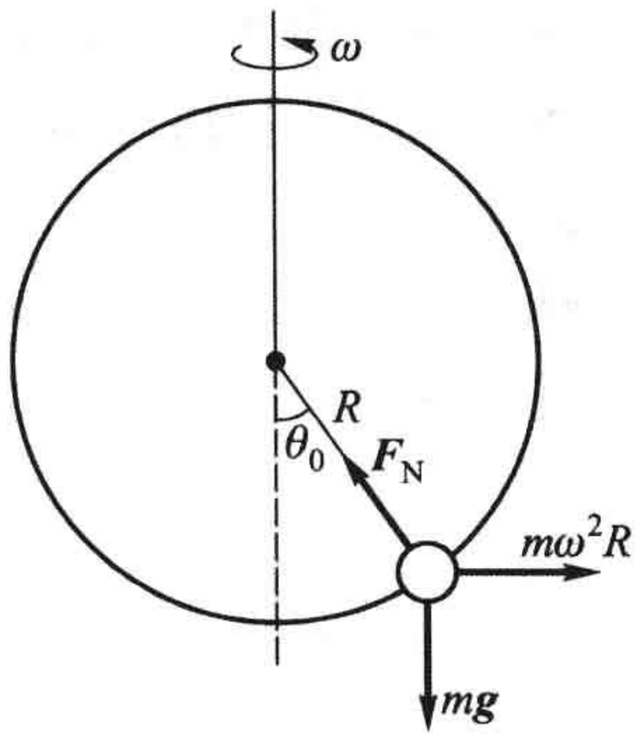
$$L=\frac{2(3m_0+m)l}{3(2m_0+m)}$$

9-8. 一半径为 R 的光滑圆环以恒定的角速度 ω 绕其竖直的直径旋转，圆环上套有一小珠。试求：

（1）小珠相对圆环的平衡位置（以小珠与圆心连线同竖直直径间的夹角 θ_0 表示）；

（2）小珠在平衡位置附近做小振动的角频率。

解：（1）以圆环为参考系，小球处于平衡位置时受力如习题 9-8 图所示，其中 $r=R\sin\ \theta_0$ 为小珠与轴的距离。三力平衡：



习题 9-8 图

水平方向：

$$F_N\sin\ \theta_0=mr\omega^2=mR\sin\ \theta_0\omega^2$$

竖直方向：

$$F_N\cos\ \theta_0=mg$$

联立得

$$\cos\ \theta_0=\frac{g}{R\omega^2}$$

则

$$\theta_0=\arccos\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)$$

（2）当小球偏离平衡位置少许时，规定从平衡位置向右（增加）的偏离方向为正，相应的转动方向向外为正。当小球相对于平衡位置偏离小角度 θ 时，

$$r=R\sin(\theta+\theta_0)$$

由转动定律可得

$$-mgR\sin(\theta+\theta_0)+m\omega^2R^2\cos(\theta+\theta_0)\sin(\theta+\theta_0)=mR^2\ddot{\theta}$$

利用和差化积公式将上式左边展开，忽略二阶小量，并将 $\cos\ \theta_0=\frac{g}{R\omega^2}$ 代入整理得

$$\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta=0,\ \omega_0=\sqrt{\frac{R^2\omega^4-g^2}{R^2\omega^2}}$$

因此，小珠做简谐振动，角频率为

$$\omega_0=\sqrt{\frac{R^2\omega^4-g^2}{R^2\omega^2}}$$

9-9. 如在质量均匀分布的球形行星上沿任一直径挖一隧道。将一物体由静止开始从一道口自由掉下。

（1）求证物体到达隧道的另一道口所需的时间与物体的质量无关，与行星的直径无关，只与行星的密度 ρ 有关，并计算该时间；

（2）若隧道是沿行星的任一弦挖的，求证该时间与弦的长短、位置均无关，并证明该时间与（1）中的完全一样；

（3）若行星以角速度 ω_0 $\left(\omega_0<\sqrt{\dfrac{4\pi\rho G}{3}}\right)$ 匀速自旋，角速度方向与隧道垂直，则（1）、（2）中的时间又为多大？

（4）若上述行星为地球，已知地球密度 $\rho_0=5.52\times10^3\ \mathrm{kg/m^3}$，$G=6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$。由于地球自旋角速度很小，故可忽略。试计算（1）、（2）两问中所提及的时间。

解：（1）如习题9-9图（a）所示，当物体运动到距离行星中心 r 处时，对物体产生引力部分的行星质量为

$$m_0=\frac{4}{3}\pi\rho r^3$$

对物体应用牛顿第二定律：

$$-G\frac{m_0m}{r^2}=m\ddot{r}$$

方程可化为：

$$\ddot{r}+\omega^2r=0,\ \omega=\sqrt{\frac{4}{3}\pi\rho G}$$

物体做简谐振动，振动周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi\rho G}}$$

仅与 ρ 有关。

物体到达另一端口恰好需时半个周期，所以 $t=\dfrac{T}{2}=\pi\sqrt{\dfrac{3}{4\pi\rho G}}$

（2）当隧道为任意弦，且物体距离行星中心为 r 时，对物体产生引力部分的行星质量仍为 $m_0=\dfrac{4}{3}\pi\rho r^3$

如习题9-9图（b）所示，以隧道与垂直于隧道的行星直径的交点为坐标原点，沿隧道方向建立一维坐标系，当物体与行星中心相距 r、与垂直隧道的行星直径夹角为 θ 时，物体在隧道上的坐标为

$$x=r\sin\ \theta$$

在隧道方向对物体应用牛顿第二定律：

$$-G\frac{m_0m}{r^2}\sin\ \theta=m\ddot{x}$$

又知

$$m_0=\frac{4}{3}\pi\rho r^3,\ x=r\sin\ \theta$$

联立解得

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0,\ \omega=\sqrt{\frac{4}{3}\pi\rho G}$$

与(1) 中结果完全一样。

(3) 当行星以角速度 ω_0 匀速自旋时，以行星为参考系，同(2)建立相同的坐标系，如习题 9-9 图(c)所示，物体受力需加一惯性力 $mx\omega_0^2$，方向沿隧道方向，垂直于轴向外。对物体应用牛顿第二定律得

$$-G\frac{m_0 m}{r^2}\sin\ \theta+mx\omega_0^2=m\ddot{x}$$

又知

$$m_0=\frac{4}{3}\pi\rho r^3,\ x=r\sin\ \theta$$

联立整理得

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0,\ \omega^2=\frac{4}{3}\pi\rho G-\omega_0^2$$

振动周期

$$T=2\pi\left(\frac{4\pi\rho G}{3}-\omega_0^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

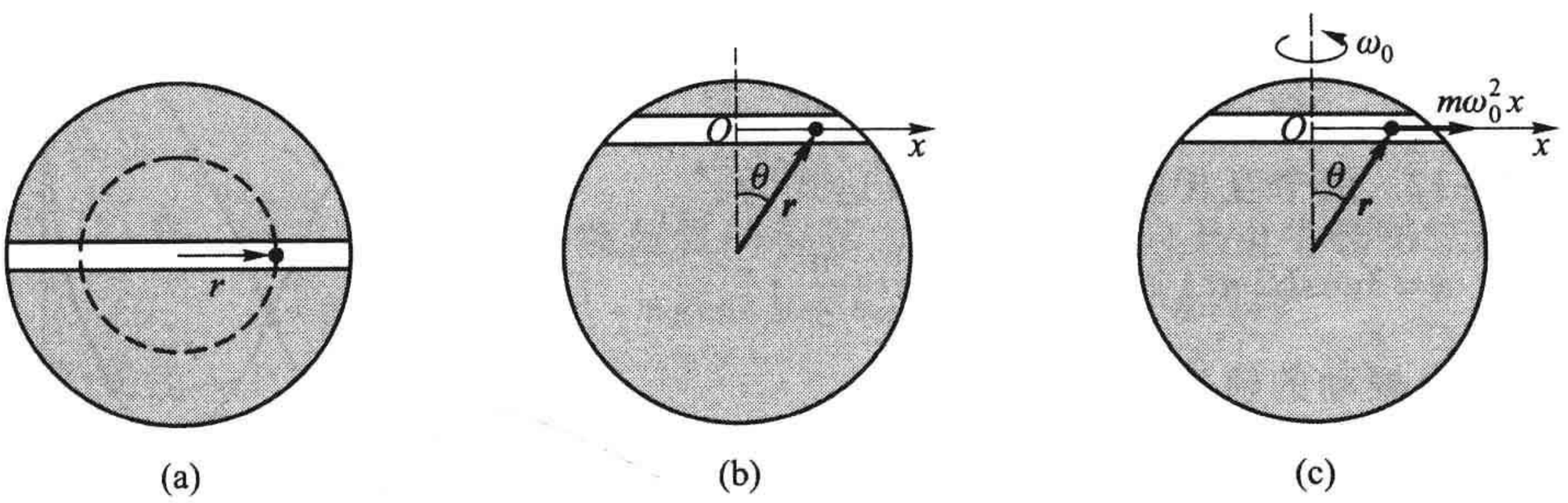
物体到达隧道另一端的时间：

$$t=\frac{T}{2}=\pi\left(\frac{4\pi\rho G}{3}-\omega_0^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

(4) 将已知数据代入(1)问所求结果，得

$$t=\frac{T}{2}=\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi\rho_0 G}}=2.5\times10^3\ \text{s}\approx42\ \text{min}$$

即，如果在地球上任意挖一隧道，物体仅在地球引力的作用下，从一端进到另一端出需要约 42 min。



习题 9-9 图

9-10. 两个同方向同频率的简谐振动 $x_1=0.4\cos\left(0.5\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$(m),$x_2=0.2\cos(0.5\pi t+\varphi_2)$(m),试问:

(1) φ_2为何值时合振动的振幅最大? 并求出此振幅值。

(2) 若合振动的初相位 $\varphi=\varphi_2+\frac{\pi}{2}$,则 φ_2为何值?

解:(1) 两个同方向同频率的简谐振动的合成仍为同频率的简谐振动,合成后的振幅:

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

当 $A=A_{max}$时,$\varphi_2-\varphi_1=0$,

即

$$\varphi_2=\varphi_1=\frac{\pi}{6},\ A_{max}=A_1+A_2=0.6\ \text{m}$$

(2) 合成后的初相位满足:

$$\tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}=\tan\left(\varphi_2+\frac{\pi}{2}\right)$$

整理可得

$$\varphi_2=\frac{3\pi}{2},\text{或}\ \varphi_2=\frac{5\pi}{6}$$

9-11. 一架钢琴的“中音 C”有些不准,出于校准的需要,另取一架标准的钢琴,同时弹响这两架钢琴的“中音 C”键,在 1 分钟内听到 24 拍。试求待校准钢琴此键音的频率。

解:一秒钟内听到 0.4 拍,即拍频为

$$\nu=|\nu_2-\nu_1|=0.4$$

已知标准钢琴“中音 C”的频率为 256 Hz。由拍的定义知

$$|256-\nu_2|=0.4$$

解得

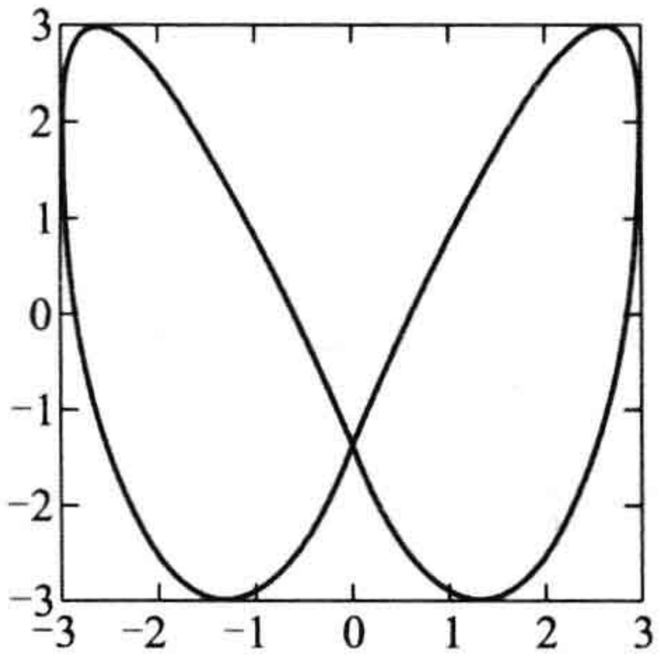
$$\nu_2=256.4\ \text{Hz}\ \text{或}\ \nu_2=255.6\ \text{Hz}$$

9-12. 两个互相垂直的振动表达式为:

$$x=3\cos(2\pi t),\ y=3\cos\left(4\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$$

试作出合振动的轨迹图。

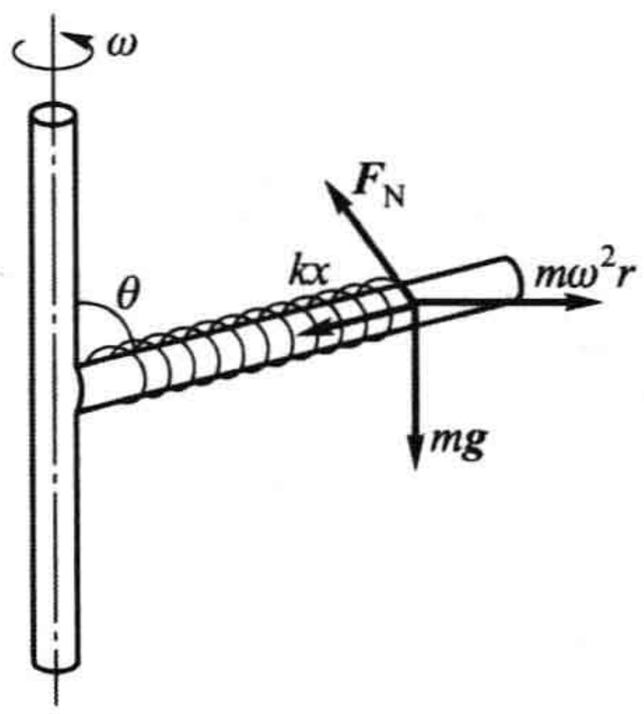
解:合振动的轨迹图如习题 9-12 图所示。



习题 9-12 图

自检练习题

9-13. 一根杆与竖直轴固连，两者之间成 θ 角，一根劲度系数为 k、原长为 l_0 的弹簧套在杆上，其一端与竖直轴相连，另一端系一个同样套在杆上的质量为 m 的小圆环，如习题 9-13 图所示。开始时杆以恒定的角速度 ω 绕竖直轴旋转，小圆环相对杆静止。



习题 9-13 图

（1）求此时小圆环的位置 x_0；

（2）若转动角速度突然变为 2ω，则小圆环从位置 x_0 运动到离轴最远处所需的时间 t 为多大？

解：以转轴与杆相连处为坐标原点，以杆向外方向为 x 轴正向建立坐标系。以杆为参考系（匀角速度转动的非惯性系），以质量为 m 的小圆环为研究对象，需加上 $m\omega^2 r$ 的惯性力，其中，r 为物体相对转轴的垂直距离，即 $r=x\sin\theta$。

（1）当小圆环相对于杆静止时，在沿杆方向受力平衡：

沿杆方向：

$$-k(x-l_0)-mg\cos\theta+m\omega^2 x\sin^2\theta=0$$

求得

$$x_0=x=\frac{kl_0-mg\cos\theta}{k-m\omega^2\sin^2\theta}$$

（2）当角频率 ω 突然变为 2ω 时，受力仍如习题 9-13 图所示，只需将惯性力大小改为

$$mr(2\omega)^2=4m\omega^2 x\sin\theta$$

新的平衡位置变为

$$x_0'=\frac{kl_0-mg\cos\theta}{k-4m\omega^2\sin^2\theta}>x_0 \qquad ①$$

设某一时刻偏离新的平衡位置的位移为 x''，在杆方向上由牛顿第二定律得

$$-k(x''+x_0'-l_0)-mg\cos\theta+4m\omega^2(x''+x_0')\sin^2\theta=m\ddot{x}''$$

将①式代入上式整理可得

$$\ddot{x}''+\frac{k-4m\omega^2\sin^2\theta}{m}x''=0$$

则振子相对新的平衡位置 x_0' 做简谐振动，且

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k-4m\omega^2\sin^2\theta}{m}}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k-4m\omega^2\sin^2\theta}}$$

小环从 x_0 处的静止初始状态，运动到离轴最远处所需时间为半个周期，即

$$t=\frac{T}{2}=\pi\sqrt{\frac{m}{k-4m\omega^2\sin^2\theta}}$$

9-14. 如习题 9-14 图所示，在光滑的水平桌面上开有一小孔，一条穿过小孔的细绳两头各系一质量分别为 m_1 和 m_2 的小球，位于桌面上的小球 m_1，以 v_0 的速度绕小孔做匀速圆周运动，而小球 m_2 则悬在空中，保持静止。

（1）求位于桌面部分的细绳的长度 l_0；

（2）若给 m_1 一微小的径向冲量，则 m_2 将做上下小振动，求振动角频率 ω_0。

解：（1）m_2 保持静止时，受力平衡：

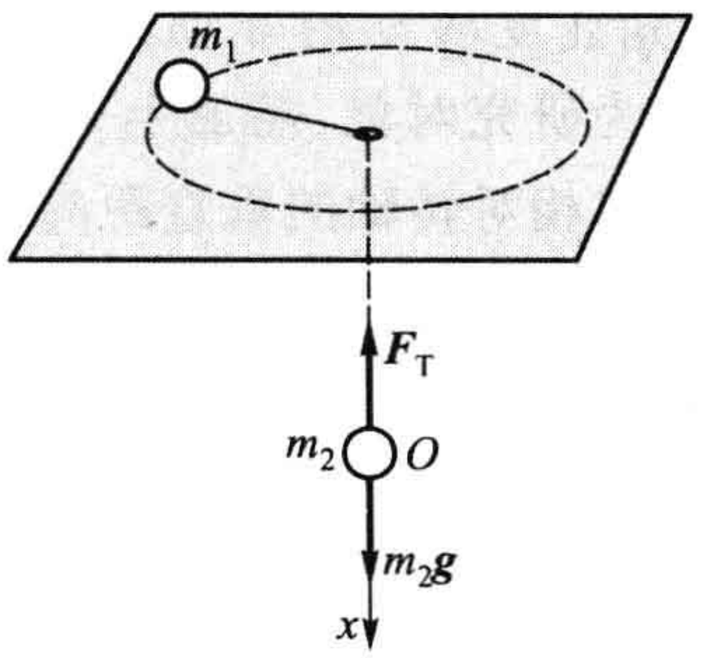
$$F_T=m_2g$$

m_1 以 v_0 的速度绕小孔做匀速圆周运动：

$$F_T=m_1\frac{v_0^2}{l_0}$$

两式联立可得

$$l_0=\frac{m_1v_0^2}{m_2g}$$



习题 9-14 图

（2）以 m_2 平衡位置为坐标原点，竖直向下为正方向建立坐标系，设平衡位置与水平桌面的距离为 h，m_1、m_2 及地球组成的系统相对于 m_2 所在的竖直轴角动量守恒，同时机械能守恒，选择坐标原点为重力势能零点。

角动量守恒：

$$m_1l_0v_0=m_1(l_0-x)^2\omega$$

机械能守恒：

$$\frac{1}{2}m_1(l_0-x)^2\omega^2+\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2+m_1gh-m_2gx=C\ （C\text{ 为常量}）$$

即

$$\frac{1}{2}m_1v_0^2\left(1-\frac{x}{l_0}\right)^{-2}+\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2+m_1gh-m_2gx=C\ （C\text{ 为常量}）\qquad①$$

x 是小量，展开并忽略三阶小量

$$\left(1-\frac{x}{l_0}\right)^{-2}\approx\left(1+\frac{x}{l_0}+\frac{x^2}{l_0^2}\right)^2\approx1+2\cdot\frac{x}{l_0}+3\cdot\frac{x^2}{l_0^2}$$

将其代入①式，并在等式两边同时对 t 求导数，得

$$\frac{1}{2}m_1v_0^2\cdot\left(2\cdot\frac{\dot{x}}{l_0}+6\cdot\frac{x\dot{x}}{l_0^2}\right)+(m_1+m_2)\dot{x}\ddot{x}-m_2g\dot{x}=0$$

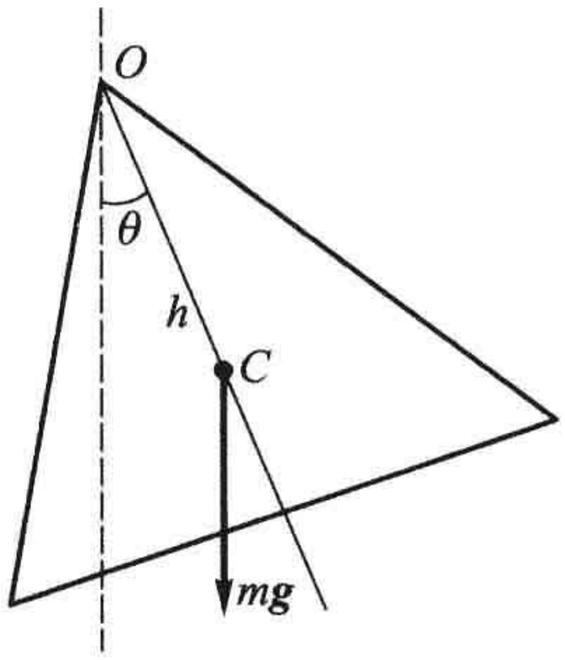
联立整理得

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=0,\ \omega_0=\frac{m_2g}{m_1v_0}\sqrt{\frac{3m_1}{m_1+m_2}}$$

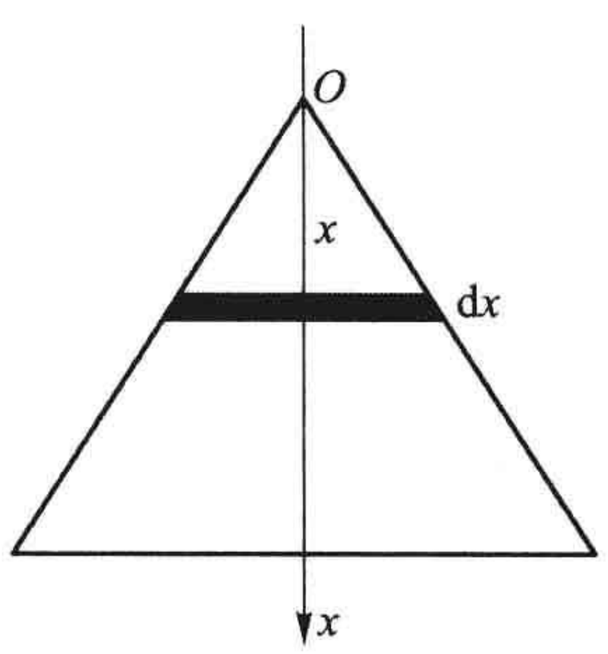
则 m_2 将做上下简谐振动，角频率 $\omega_0=\dfrac{m_2g}{m_1v_0}\sqrt{\dfrac{3m_1}{m_1+m_2}}$。

9-15. 一质量为 m、边长为 a 的正三角形薄板，通过其某一角悬挂在与板面垂直的光滑水平轴上，构成一复摆。求此复摆的周期和等值单摆长。

解：设复摆对水平轴的转动惯量为 J，由对称性知正三角形薄板的质心与固定轴的距离为 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$。以水平轴为转轴，规定 θ 角向右（增加）的方向为正，相应的转动方向向外为正。受力如习题 9-15 图(a)所示。对复摆应用转动定律得



习题 9-15 图(a)



习题 9-15 图(b)

$$J\ddot{\theta}=-mgh\sin\theta\approx-mgh\theta$$

整理得

$$\ddot{\theta}+\frac{mgh}{J}\theta=0$$

则

$$\omega=\sqrt{\frac{mgh}{J}},\ T=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgh}}\qquad①$$

下面求正三角形薄板对 O 点的转动惯量 J。如习题 9-15 图(b)所示建立坐标系，以 O 点为坐标原点。设坐标为 x 处，宽度为 $\mathrm{d}x$ 的小薄层长度 $l=\dfrac{2}{\sqrt{3}}x$，质

量为 $\mathrm{d}m$,则其转动惯量为

$$\mathrm{d}J=\frac{1}{12}l^2\mathrm{d}m+\mathrm{d}mx^2$$

其中

$$\mathrm{d}m=\rho l\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{3}}\rho x\mathrm{d}x\,,\ \rho=\frac{m}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}$$

整理得

$$\mathrm{d}J=\frac{20\sqrt{3}}{27}x^3\rho\mathrm{d}x$$

积分得

$$J=\int\mathrm{d}J=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\frac{20\sqrt{3}}{27}x^3\rho\,\mathrm{d}x=\frac{5}{12}ma^2$$

将 $J=\frac{5}{12}ma^2$,$h=\frac{\sqrt{3}}{3}a$ 代入①式得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{5a}{4\sqrt{3}\,g}}$$

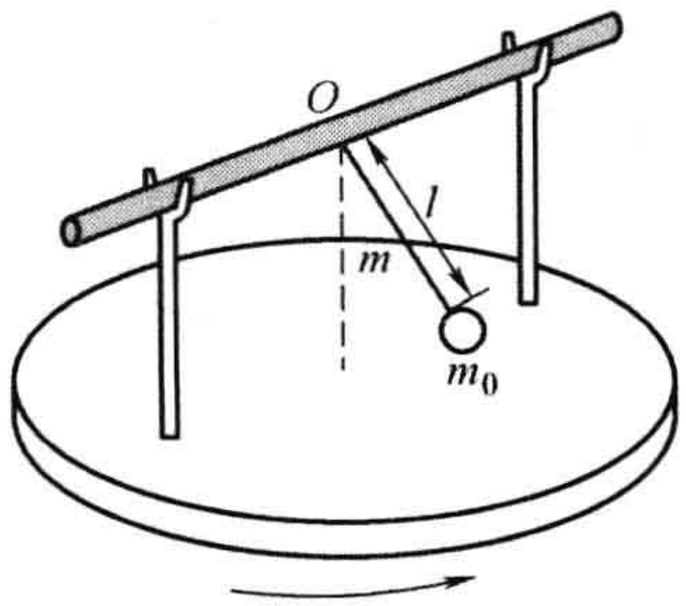
等效为单摆时,周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{5a}{4\sqrt{3}\,g}}$$

所以,等值摆长为

$$L=\frac{5a}{4\sqrt{3}}$$

9-16. 质量为 m_0的小球和长为 l、质量为 m 的杆组成的复摆,被刚性地固定在一横轴上,而横轴被架在一平台上的两个支架上,如习题 9-16 图所示。当平台以较小的角速度 Ω 绕其中心轴(通过摆的上端)旋转时,求该复摆的振动周期,设小球的半径可忽略。



习题 9-16 图

解:易知复摆的平衡位置为竖直方向,以平台为参考系,当复摆偏离平衡位置小角度 θ 时,复摆系统受到重力、杆的拉力 F_T及垂直于轴指向外的惯性力,(这里还有一科里奥利力,沿轴方向,对复摆转轴力矩为 0)。对复摆应用转动定律:

$$M_{杆重}+M_{杆离}+M_{球重}+M_{球离}=J\ddot{\theta}$$

其中

$$M_{杆重}=-mg\frac{l}{2}\sin\theta,\ M_{球重}=-m_0gl\sin\theta,\ M_{球离}=m_0\Omega^2l\sin\theta\cdot l\cos\theta$$

而杆上不同位置所受离心力对转轴的力矩是不同的，各点离心力的力矩积分之和才是所求的力矩，即

$$M_{杆离}=\frac{m}{l}\int_0^l\Omega^2\cdot x\sin\theta\cdot x\cos\theta\mathrm{d}x=\frac{m\Omega^2l^2\sin\theta\cos\theta}{3}$$

总的转动惯量：

$$J=\frac{1}{3}ml^2+m_0l^2$$

小幅度近似条件：

$$\sin\theta\approx\theta,\ \cos\theta\approx1$$

整理上述各式得

$$\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta=0$$

其中

$$\omega_0^2=\frac{3(2m_0+m)g-2(3m_0+m)l\Omega^2}{2(m+3m_0)l}$$

因此，振动周期

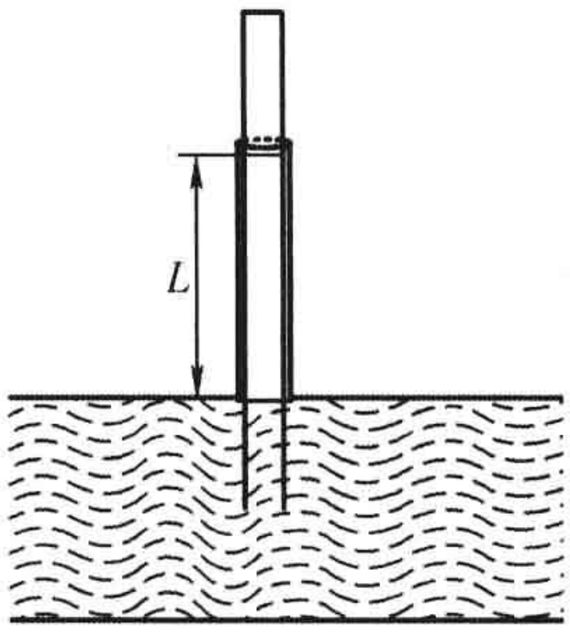
$$T=2\pi\sqrt{\frac{2(m+3m_0)l}{3(2m_0+m)g-2(3m_0+m)l\Omega^2}}$$

9-17. 如习题9-17图所示，一深水池中竖立着一根光滑的细杆，一长度为L的匀质细管套在杆上。用手持管，使其下端正好与水面接触，然后放手，设水的密度为ρ_0。

（1）若管运动到最低位置时，其上端正好与水面持平，求管的密度ρ_1；

（2）证明在（1）中情况下，细管将做简谐振动，求出振幅和周期；

（3）若管的密度为$\frac{4}{3}\rho_1$，求管下沉到最低位置所需的时间。



习题9-17图

解：（1）用x表示细管的下端距水平面的距离，设细管质量为m，细管的横截面积为S，则

$$m=\rho_1SL$$

管运动到最低位置时速度为0，从管下端与水面接触到管运动到最低位置

用动能定理：

$$mgL-\int_0^L \rho_0 gSx\mathrm{d}x=0$$

解得

$$\rho_1=\frac{1}{2}\rho_0$$

（2）平衡位置处，管受的重力与浮力相等，设此时管没入水中的长度为 h，由受力平衡得

$$\rho_1 SLg=\rho_0 Shg$$

则

$$h=\frac{1}{2}L$$

以平衡位置处为坐标原点，竖直向下为正方向建立 x 轴，在管运动到最低位置前，对管应用牛顿第二定律得

$$mg-\rho_0 Sg\left(\frac{L}{2}+x\right)=m\ddot{x},\ \rho_1=\frac{1}{2}\rho_0,\ m=\rho_1 SL$$

整理可得

$$\ddot{x}+\frac{2g}{L}x=0$$

可知细管做简谐振动，且

$$\omega=\sqrt{\frac{2g}{L}},\ T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}},\ A=h=\frac{L}{2}$$

（3）设管的密度变为 $\frac{4}{3}\rho_1$ 后，重力与浮力相等处管没入水中长度为 h'，由受力平衡得

$$\frac{4}{3}\rho_1 SLg=\rho_0 Sh'g,\ h'=\frac{2}{3}L$$

以 $h'=\frac{2}{3}L$ 处为坐标原点，竖直向下为正方向建立 x 轴（x 表示管的下端距坐标原点的距离），在管全部没入水面之前，对管应用牛顿第二定律得

$$m\ddot{x}=mg-\rho_0 Sg\left(\frac{2L}{3}+x\right),\ \rho'_1=\frac{4}{3}\rho_1,\ \rho_1=\frac{1}{2}\rho_0,\ m=\rho'_1 SL$$

联立解得

$$\ddot{x}+\frac{3g}{2L}x=0$$

可知细管在全部没入水面之前做简谐振动，并且

$$\omega'=\sqrt{\frac{3g}{2L}},\ T'=2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}},\ A'=h'=\frac{2}{3}L$$

由于 $2A'>L$,因此管子的运动过程可分为两个阶段。

第一阶段是管子从入水开始到刚好全部没入水面,这个过程是简谐振动。设管子刚好入水时为计时零点,即 $t=0$,这期间管子的运动学方程可以表示为

$$x=\frac{2}{3}L\cos(\omega' t+\varphi),\ v=\dot{x}=-\omega'\cdot\frac{2}{3}L\sin(\omega' t+\varphi)$$

初始条件:

$$t=0\text{ 时},x_0=-\frac{2}{3}L,v_0=0$$

则

$$-\frac{2}{3}L=\frac{2}{3}L\cos\varphi,\ 0=-\omega'\cdot\frac{2}{3}L\sin\varphi$$

由此确定:

$$x=\frac{2}{3}L\cos(\omega' t+\pi)$$

当管刚好全部没入水面时,

$$\frac{1}{3}L=\frac{2}{3}L\cos(\omega' t_1+\pi)$$

此时管子的速度为

$$v=-\omega'\cdot\frac{2}{3}L\sin(\omega' t_1+\pi)=\sqrt{\frac{gL}{2}}$$

解得管子刚好全部没入水面所用时间:

$$t_1=\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

第二阶段是管子从刚好全部没入水面到下沉到最低位置过程,这个过程管子所受重力和浮力均为恒力,且浮力大于重力,因此管子做匀减速直线运动。这个过程中对管子应用动量定理:

$$\left(\frac{4}{3}\rho_1 SLg-\rho_0 SLg\right)t_2=0-\frac{4}{3}\rho_1 SLv,\ \rho_1=\frac{1}{2}\rho_0$$

解得

$$t_2=\frac{2v}{g}=\sqrt{\frac{2L}{g}}$$

则管子下沉到最低位置所需的总时间为

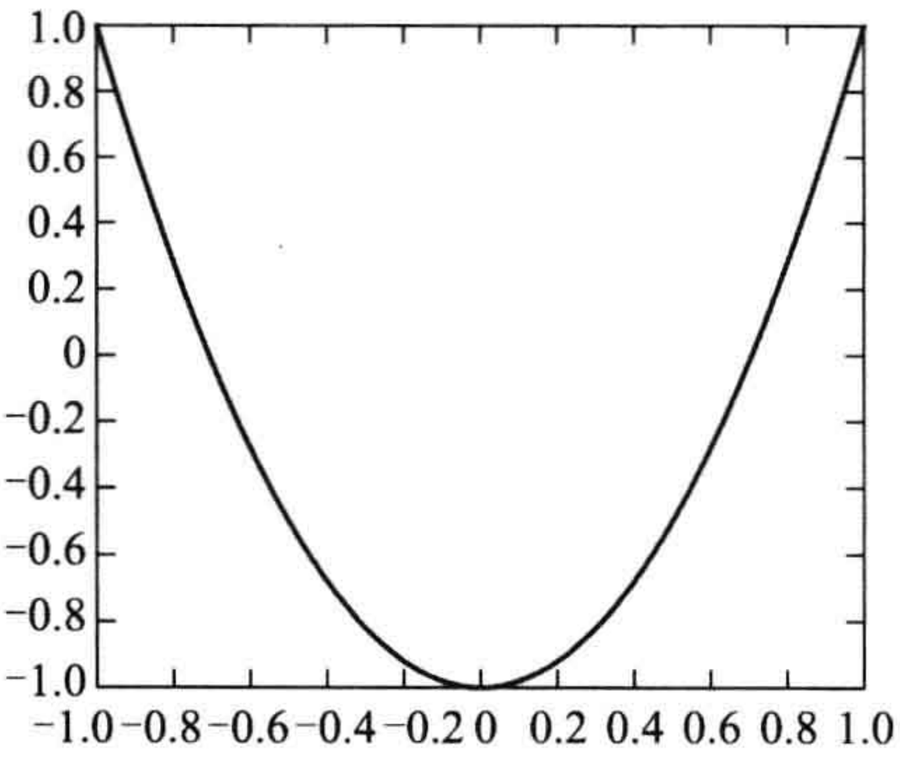
$$t=t_1+t_2=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\pi+\sqrt{2}\right]\sqrt{\frac{L}{g}}$$

9-18. 试作出下列两振动的合振动的李萨如图:

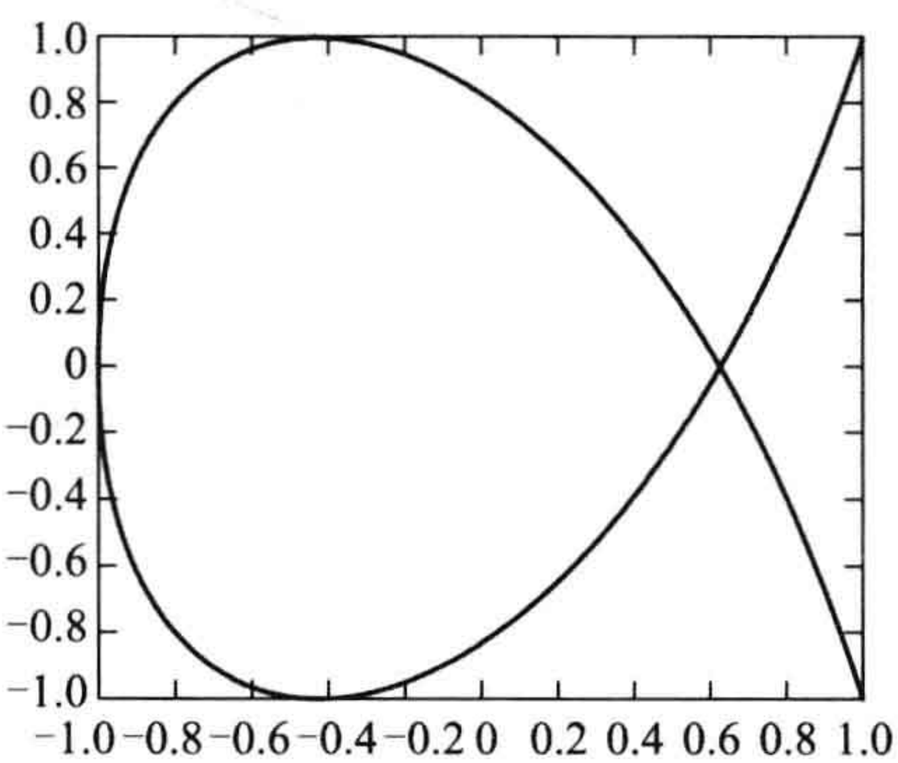
(1) $x=\cos\omega t,y=\cos 2\omega t$。

（2）$x=\cos 2\omega t, y=\cos(3\omega t+\pi)$。

解：两合振动的李萨如图分别为习题 9-18 图(a)和习题 9-18 图(b)所示。

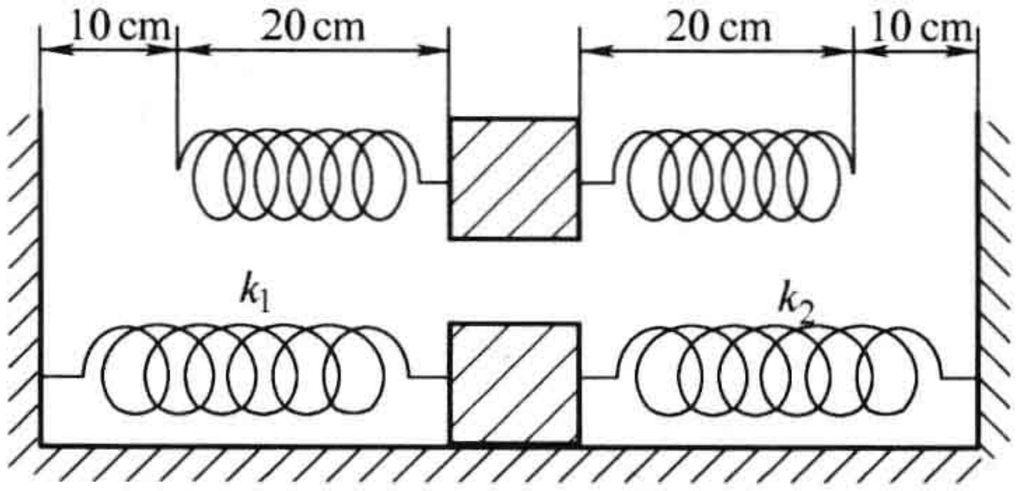


习题 9-18 图(a)



习题 9-18 图(b)

9-19. 一质量为 m_0 的物块置于一光滑水平面上，物块的两端各系有一弹簧，弹簧的自然长度均为 20 cm，其劲度系数分别为 k_1 与 k_2。现将两弹簧分别与两壁相连，两壁与两弹簧原来的自由端都相距 10 cm，如习题 9-19 图所示。设 $k_1=1$ N/m，$k_2=3$ N/m，$m_0=100$ g。



习题 9-19 图

（1）当物块处于平衡位置时，求每个弹簧的长度；

（2）若将此物块略微偏离平衡位置后释放，试求其振动周期；

（3）设此物块振动的振幅为5 cm，当其通过平衡位置时，有一质量为 $m=100$ g 的泥灰竖直地落于其上，并与之一起运动，试求此系统的振动周期和振幅；

（4）若(3)中的泥灰在物块运动到最大位移处时落于其上，求这种情况下系统振动的周期和振幅。

解：(1) 设物块处于平衡位置时，弹簧 1、2 的伸长量分别为 x_1、x_2。物体受力平衡：

$$k_1x_1=k_2x_2,\ x_1+x_2=20\ \text{cm}$$

联立可得

$$x_1=15\ \text{cm},\ x_2=5\ \text{cm}$$

则

$$l_1=x_1+20\ \text{cm}=35\ \text{cm}=0.35\ \text{m},\ l_2=x_2+20\ \text{cm}=25\ \text{cm}=0.25\ \text{m}$$

（2）以平衡位置为坐标原点，水平向右为正方向建立坐标系，当物块位移为 x 时，弹簧 1 的伸长量为 15 cm+x，弹簧 2 的伸长量为 5 cm−x。对物块运用牛顿第二定律得

$$-k_1(15+x)+k_2(5-x)=m_0\ddot{x}$$

将已知各值代入，整理得

$$\ddot{x}+40x=0$$

则

$$\omega=\sqrt{40},\ T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{40}}=0.99\ \text{s}$$

（3）对泥灰与物块组成的系统应用牛顿第二定律得

$$(m_0+m)\ddot{x}=-(k_1+k_2)x$$

将已知各值代入整理得

$$\ddot{x}+20x=0$$

则

$$T'=\frac{2\pi}{\omega'}=\frac{2\pi}{\sqrt{20}}\ \text{s}=1.4\ \text{s}$$

泥灰竖直地落于物体上，前后水平方向动量守恒：

$$m_0v_0=(m_0+m)v'$$

原物块振子机械能守恒：

$$E=\frac{1}{2}(k_1+k_2)A^2=\frac{1}{2}m_0v_0^2$$

泥灰与物块组成振子的机械能守恒：

$$E'=\frac{1}{2}(k_1+k_2)A'^2=\frac{1}{2}(m_0+m)v'^2$$

联立解得

$$A'=\sqrt{\frac{m_0}{m_0+m}}A=3.5\ \text{cm}$$

（4）泥灰在物块运动到最大位移处时落于物体上，其动力学方程同（3）完全相同，因此振动的周期与（3）相同，即

$$T'=\frac{2\pi}{\omega'}=\frac{2\pi}{\sqrt{20}}\text{s}=1.4\ \text{s}$$

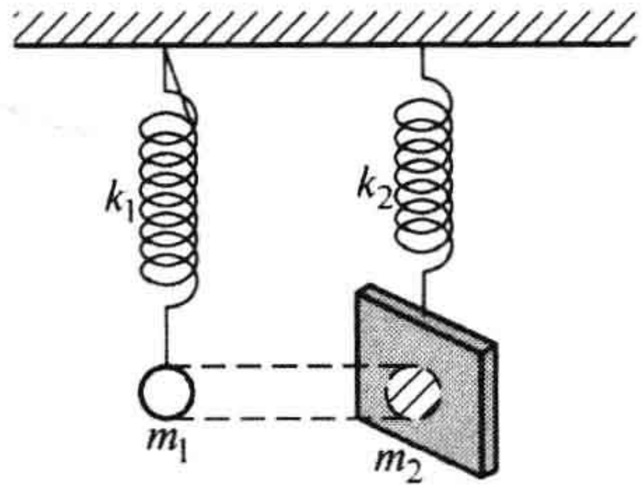
泥灰竖直地落于物体上，前后水平方向动量守恒：

$$0=(m_0+m)v'$$

即仍为原来振子的最大位移处，此时的振幅同（3）相同，

$$A'=A=5\ \text{cm}$$

9-20. 如习题9-20图所示，一弹簧振子，其质量 $m_1=98$ g，劲度系数 $k_1=9.8\times10^{-2}$ N/cm，它的影子水平地投射到一质量 $m_2=980$ g 的屏上，屏在一劲度系数 $k_2=0.98$ N/cm 的弹簧下。开始时把两者都从平衡位置拉下 10 cm，先释放弹簧振子使之振动。如果要使影子在屏上振动的振幅为 5 cm，试问应隔几秒钟后释放屏使之振动？并写出此时影子在屏上的振动方程。



习题9-20图

解：两振子的固有频率分别为

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}=\sqrt{\frac{9.8\times10^3}{98}}\ \text{rad/s}=10\ \text{rad/s},\omega_2=\sqrt{\frac{k_2}{m_2}}=\sqrt{\frac{9.8\times10^4}{980}}\ \text{rad/s}=10\ \text{rad/s}$$

两振子的平衡位置在同一水平面上，由已知条件知两振子的振幅同为 10 cm = 0.1 m。以平衡位置为坐标原点，以振子1释放时为计时零点，经过 Δt 释放振子2，竖直向下为正方向建立 x 轴，可设两振子的振动分别为

$$x_1=0.1\cos(10t+\varphi_1)\quad,x_2=0.1\cos[10(t-\Delta t)+\varphi_1]$$

则

$$v_1=\dot{x}_1=-\sin(10t+\varphi_1)\quad,v_2=\dot{x}_2=-\sin[10(t-\Delta t)+\varphi_1]$$

其中，x、v、t 的单位分别为 m、m/s、s。由初始条件知

$$t=0\text{ 时},x_{10}=10\ \text{cm},v_{10}=0$$

代入可得

$$\cos\varphi_1=1,\ \sin\varphi_1=0,\text{则}\ \varphi_1=0$$

屏上影子相对屏的位移就是 x_1-x_2，已知 x_1 和 x_2 是同频率同方向的简谐振动，则 x_1-x_2 也为同一频率的简谐振动，因此影子的振动为

$$\begin{aligned}x&=x_1-x_2=0.1\cos(10t)-0.1\cos[10(t-\Delta t)]\\&=-0.2\sin(10t-5\Delta t)\sin(5\Delta t)\end{aligned}$$

根据题意，影子在屏上振动的振幅为 0.05 m，则

$$0.05=\left|-0.2\sin(5\Delta t)\right|$$

即

$$\sin(5\Delta t)=\pm\frac{1}{4}$$

则释放屏的时隔时间为：

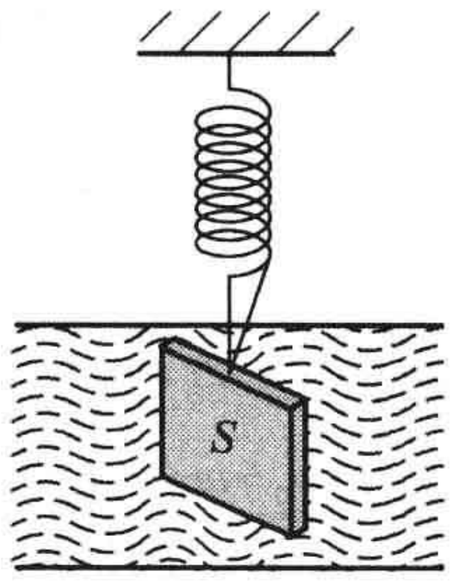
$$\Delta t=\left|\frac{\pm0.252\ 7+n\pi}{5}\right|\ \text{s}=\left|\pm0.051+0.628n\right|\ \text{s}$$

其中 $n=0,1,2,3,\cdots$

振动方程为

$$x=x_1-x_2=0.05\sin(10t\pm0.252\ 7)$$

***9-21.** 一面积为 S、质量为 m 的薄板连在弹簧的下端，弹簧的上端固定，薄板浸在黏性液体中，如习题 9-21 图所示。设薄板在黏性液体中受到的阻力 $F_f=-2\mu Sv$，式中 v 为薄板在竖直方向上的运动速度，μ 是一个与液体黏性有关的常量。设此系统的振动周期为 T，求此系统在空气中时的振动周期 T_0。



习题 9-21 图

解：以平衡位置为坐标原点，竖直向下为正方向，建立坐标系。对薄板运用牛顿第二定律得

$$-kx-2\mu Sv=-kx-2\mu S\dot{x}=m\ddot{x}$$

令

$$\beta=\frac{\mu S}{m},\ \omega_0^2=\frac{k}{m}$$

整理得

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=0$$

其弱阻尼解：

$$x=Se^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi)$$

其中

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2},\ T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}},\ T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$$

联立整理得

$$T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=\left[\left(\frac{\mu S}{2\pi m}\right)^2+\frac{1}{T^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

对应阻尼振动的运动方程，衰减常数 $\beta=\frac{\mu S}{m}$。

***9-22.** 一质量为 0.2 kg 的物体，悬于颈度系数为 10 N/m 的弹簧下，此物体受到的阻力 $F_f=-bv$，其中 v 是物体的速度（单位是 m/s），b 为一较小的常量。

（1）写出系统振动的运动方程；

（2）若系统振动频率比无阻尼时小了万分之一，即 $\frac{\omega_0-\omega_f}{\omega_0}=10^{-4}$，则常量 b 为多大？

（3）此系统的 Q 值为多大？振动经一个整周期后，振幅减弱为几分之几？

解：（1）考虑到振子受到阻力，振动方程为

$$m\ddot{x}+bv+kx=0$$

令

$$2\delta=\frac{b}{m},\omega_0^2=\frac{k}{m}$$

方程可变形为

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2 x=0$$

（2）弱阻尼振子运动学方程为

$$x=A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_f t+\varphi_f)$$

其中

$$\omega_f=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}=\sqrt{\omega_0^2-\left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

由题意$\frac{\omega_0-\omega_f}{\omega_0}=10^{-4}$，及$\omega_0^2=\frac{k}{m}$整理解得

$$b=0.04\ \text{N}\cdot\text{s/m}$$

（3）系统的品质因数为

$$Q=\frac{\omega_0}{2\delta}=\frac{\omega_0 m}{b}=35.36$$

经一个周期后，

$$\frac{A_{t+T}}{A_t}=\frac{A_0 e^{-\delta(t+T)}}{A_0 e^{-\delta t}}=e^{-\delta T}$$

其中

$$T=\frac{2\pi}{\omega_f}\approx\frac{2\pi}{\omega_0}$$

解得

$$\frac{A_{t+T}}{A_t}=0.915$$

即振动经一个整周期后，振幅减弱为原来的0.915。

***9-23**. 某阻尼振动的振幅在一个周期后减为原来的1/4，问此振动周期比无阻尼存在时的周期大百分之几？

解：无阻尼时振动周期

$$T_{无}=\frac{2\pi}{\omega_0}$$

有阻尼时振动周期

$$T_{有}=\frac{2\pi}{\omega_f}$$

其中

$$\omega_f=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$

由题意得

$$\frac{A_{t+T_{有}}}{A_t}=\frac{A_0 e^{-\beta(t+T_{有})}}{A_0 e^{-\beta t}}=e^{-\beta T_{有}}=\frac{1}{4}$$

联合各式整理得

$$T_{有}=\frac{\ln 4}{\beta}=\frac{2\pi}{\omega_f},\ T_{无}=\frac{2\pi\ln 4}{\beta\sqrt{(\ln 4)^2+4\pi^2}}$$

则

$$\frac{T_{有}-T_{无}}{T_{无}}\times 100\%=2.4\%$$

***9-24**. 一摆长为 $l=0.750$ m 的单摆做阻尼振动，经过一分钟后，其振幅衰减为开始时的 1/8，求对数减缩 λ（即 $\lambda=\delta T$）。

解：设一分钟前振幅为 x，一分钟后振幅为 x'，由已知条件知

$$\frac{x'}{x}=\frac{A_0e^{-\delta(t+60)}}{A_0e^{-\delta t}}=e^{-\delta\cdot 60}=\frac{1}{8}$$

可得

$$\delta=\frac{\ln 8}{60}(s^{-1})$$

而单摆周期

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

则对数减缩

$$\lambda=\delta T=0.06$$

***9-25**. 某振动系统从开始振动，经过 16 次振动后，能量减为开始时的 0.6。问再经过 16 次振动后，系统能量减为开始时的几分之几？

解：阻尼振动中系统能量

$$E=\frac{1}{2}m\omega_0^2A^2=\frac{1}{2}m\omega_0^2(A_0e^{-\delta t})^2$$

已知

$$\frac{E_{16T}}{E_0}=\frac{\frac{1}{2}m\omega_0^2(A_0e^{-16\delta T})^2}{\frac{1}{2}m\omega_0^2(A_0e^{0})^2}=e^{-32\delta T}=0.6$$

则

$$\frac{E_{32T}}{E_0}=\frac{\frac{1}{2}m\omega_0^2(A_0e^{-32\delta T})^2}{\frac{1}{2}m\omega_0^2A_0^2}=e^{-64\delta T}=(0.6)^2=0.36$$

即再经过 16 次振动后，系统能量减为开始时的 0.36。

***9-26**. 当在某钢琴上弹响“中音 C”这个琴键时，其振动能量在 1 s 内减至初始值的一半。已知中音 C 的频率为 256 Hz。求此系统的 Q 值。

解:已知在阻尼振动中,

$$E=\frac{1}{2}m\omega_0^2A^2=\frac{1}{2}m\omega_0^2(A_0e^{-\delta t})^2$$

又已知

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{\frac{1}{2}m\omega_0^2(A_0e^{-\delta})^2}{\frac{1}{2}m\omega_0^2(A_0e^{0})^2}=e^{-2\delta}=\frac{1}{2}$$

则

$$\delta=\frac{\ln 2}{2}$$

标准钢琴的“中音 C”频率为 256 Hz,则

$$\omega_0=(2\pi\times256)\ \text{rad/s}$$

所以,

$$Q=\frac{\omega_0}{2\delta}=\frac{2\pi\times256}{\ln 2}=2.32\times10^3$$

*__9-27__. 一质量为 10 kg 的物体,从 0.5 m 高处静止下落到弹簧秤的秤盘里,并黏附在盘上。已知秤盘的质量为 2.0 kg,弹簧的劲度系数为 980 N/m。为使秤盘在最短时间内停下来,就须附上一阻尼系统。求出所必需的阻尼因数 δ,并写出秤盘的位置 y 随时间 t 的变化关系(y 的零点取在平衡位置,t 的零点取在物体掉在秤盘的瞬间)。

解:物体掉在秤盘里后与弹簧秤组成新的弹簧振子,做简谐振动,其固有频率

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m_{盘}+m_{物}}}$$

设新的平衡位置对应弹簧伸长量为 L,则

$$kL=(m_{盘}+m_{物})g$$

同理原平衡位置伸长量 l 满足:

$$kl=m_{盘}g$$

设新平衡位置为原点,竖直向下为正方向建立 y 轴。盘子初始位移

$$y_0=-(L-l)=-\frac{m_{物}}{k}g$$

要使秤盘在最短时间内停下来,即为临界阻尼情况:

$$\delta=\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m_{盘}+m_{物}}}=9\ \text{s}^{-1}$$

临界阻尼振动的运动学方程为

$$y=(c_1+c_2t)e^{-\delta t}$$

$$v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\delta c_1\mathrm{e}^{-\delta t}+c_2(1-\delta t)\mathrm{e}^{-\delta t}$$

初始条件：$t=0$ 时，盘子的初位移为

$$y_0=-(L-l)=-\frac{m_{物}}{k}g$$

盘子的初始速度由动量守恒求得。砝码黏在盘子的前后过程动量守恒：

$$m_{物}\sqrt{2gh}=(m_{盘}+m_{物})v_0$$

由此确定任意常数 c_1、c_2，整理得临界阻尼状态位移与时间的关系：

$$y=\mathrm{e}^{-\delta t}[y_0+(v_0+\delta y_0)t]$$

进一步解得

$$y=(-0.1+1.7t)\mathrm{e}^{-9t}(\mathrm{m})$$

***9-28.** 摆长为 1 m 的单摆，在振动 50 次后振幅减为原来的$\frac{1}{\mathrm{e}}$。现使其悬点做振幅为 1 mm 的水平方向上的简谐振动。

（1）若摆锤的水平位移为 x_1，悬点的水平位移为 x_2，试证明摆锤做微小振动时的运动方程为$\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2}+2\delta\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+\frac{g}{l}x_1=\frac{g}{l}x_2$。如果 $x_2=A\cos\ \omega t$，试求此方程的稳态解。

（2）求共振时摆锤运动的振幅。

（3）在什么角频率时，其振幅为共振时的一半？

解：单摆弱阻尼的运动学方程为

$$\theta=A\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi)$$

其中

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2},\ T=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}},\ T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

依题意有

$$\frac{A\mathrm{e}^{-\delta 50T_0}}{A\mathrm{e}^{-\delta\cdot 0}}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

联立解得

$$\delta=\frac{1}{100\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

（1）以悬点的平衡位置为原点，建立水平方向的 x 轴，如习题 9-28 图所示，设绳子的拉力为 F。对摆锤在水平方向上应用牛顿第二定律：

$$F\sin\ \theta-2m_1\delta\dot{x}_1=m_1\ddot{x}_1$$

竖直方向近似平衡：

$$F\cos\ \theta = m_1 g$$

因为 θ 很小,所以

$$\theta \approx \sin\ \theta = \frac{x_2 - x_1}{l}$$

联立整理可得

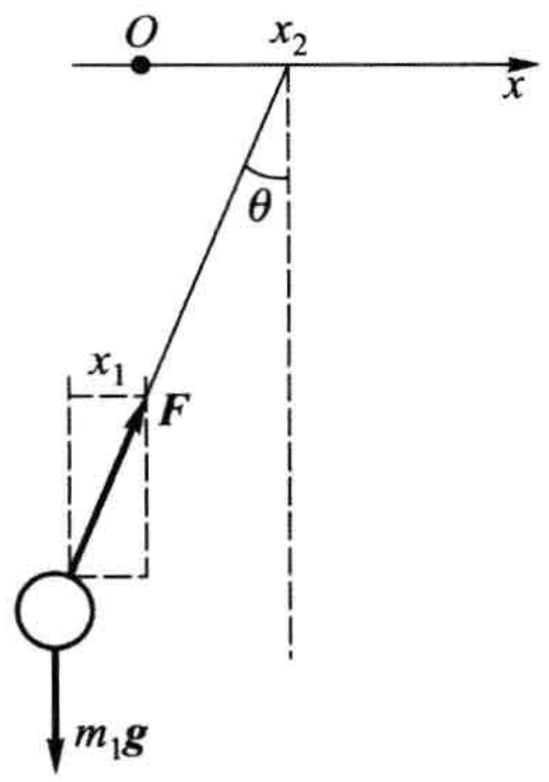
$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g\ \frac{x_2 - x_1}{l} - 2m_1 \delta \dot{x}_1$$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} + 2\delta\ \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \frac{g}{l} x_1 = \frac{g}{l} x_2$$

若 $x_2 = A\cos\ \omega t$,其中 $A = 1$ mm,整理上式得

$$\ddot{x}_1 + 2\delta \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = f_0 \cos\ \omega t$$



习题 9-28 图

其中

$$f_0 = \omega_0^2 A,\ \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

其稳态解为　　$x_1 = A_1 \cos(\omega t - \varphi)$

其中

$$A_1 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}},\ \tan\ \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

(2) 共振时振幅

$$A_r = A_{max} = \frac{f_0}{2\delta\omega_0} = \frac{\omega_0^2 A}{2\delta\omega_0} = 15.7\ \mathrm{cm}$$

(3) 由题意知

$$A_1 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} = \frac{A_r}{2}$$

解得

$$\omega = 3.130 \pm 0.017\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$$

***9-29.** 一谐振子质量 $m = 0.10$ kg,做周期 $T = 2.5$ s 的简谐振动,质点振动的总能量 $E = 0.20$ J,求作用在质点上力的最大值。

解:谐振子振动的总能量

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{4\pi^2 m A^2}{2T^2}$$

将已知数据代入上式可得

$$A = \frac{5}{2\pi}$$

则振动方程为

$$x=\frac{5}{2\pi}\cos(\omega t+\phi)$$

其中

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2.5}\ \text{rad/s}=\frac{4}{5}\pi\ \text{rad/s}$$

则

$$a=\ddot{x}=-\frac{5\omega^2}{2\pi}\cos(\omega t+\phi),F=ma=-\frac{5\omega^2}{2\pi}m\cos(\omega t+\phi)$$

则

$$F'_{\max}=m\cdot\frac{5\omega^2}{2\pi}=0.5\ \text{N}$$

即作用在质点上的力的最大值为 0.5 N。

***9-30.** 一物体悬挂于弹簧下，系统固有振动周期为 0.50 s，今在物体上加一竖直方向的余弦力，其最大值 $F=1\times10^{-3}$ N；此外物体还受到一摩擦阻力 $F_f=-C\dot{x}$ 作用，C 为一较小的常量。已知系统在共振时的振幅为 5.0 cm，求物体在运动过程中受到的最大摩擦力的数值 $F_{f,\max}$。

解：系统共振时，摩擦阻力最大。设正弦力为 $F_1=F\cos\ \omega t$，其中 $F=1\times10^{-3}$ N。则系统的动力学方程为

$$m\ddot{x}+C\dot{x}+kx=F\cos\ \omega t$$

变量代换得

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2x=h\cos\ \omega t$$

其中

$$\delta=\frac{C}{2m},h=\frac{F}{m},\omega_0^2=\frac{k}{m}$$

其稳态解为

$$x=A\cos(\omega t-\varphi)$$

其中

$$A=\frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}},\tan\ \varphi=\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

当 $\omega\approx\omega_0$ 时振子共振，此时方程的解为

$$x=\frac{h}{2\delta\omega_0}\sin\ \omega_0t=x_{\max}\sin\ \omega_0t$$

共振振幅

$$x_{\max}=\frac{h}{2\delta\omega_0}=\frac{mh}{C\omega_0}=\frac{F}{C\omega_0},\text{或}\ C\omega_0=\frac{F}{x_{\max}}$$

共振振动时摩擦阻力：

$$F_f = -C\dot{x} = -C\omega_0 x_{max}\cos(\omega_0 t) = -F\cos(\omega_0 t)$$

摩擦力最大值：

$$F_{f,max} = F = 1\times10^{-3}\ \mathrm{N}$$

***9-31**. 做受迫振动的振子，若其速度与强迫力同相位，求强迫力的频率。设振子的固有频率为 ω_0。

解：设强迫力为

$$F = F_0\cos\ \omega t$$

则振子的运动方程为：

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2 x = h\cos\ \omega t$$

其中

$$\delta=\frac{C}{2m},h=\frac{F_0}{m},\omega_0^2=\frac{k}{m}$$

方程的稳态解为

$$x = A\cos(\omega t+\varphi),v=\dot{x}=\omega A\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$$

其中

$$A=\frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}},\tan\ \varphi=\frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

共振频率

$$\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}\approx\omega_0$$

当系统发生共振时，

$$A\approx\frac{h}{2\delta\omega_0},\varphi\approx-\frac{\pi}{2}$$

此时，

$$v=\dot{x}=\frac{h}{2\delta}\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{h}{2\delta}\cos\ \omega t,\ F=F_0\cos\ \omega t$$

即振子的速度和强迫力同相位。

***9-32**. 一振子在强迫力 $F=F_0\cos\ \omega t$ 的驱动下做受迫振动。已知振子的质量 $m=0.2$ kg，弹簧的劲度系数 $k=80$ N/m，阻力系数 $C=4$ N·s/m，若 $F_0=2$ N，$\omega=30\ \mathrm{s}^{-1}$。试问：

（1）振子系统在一周内反抗阻力而耗散的能量是多少？

（2）输入系统的平均功率是多少？

解：（1）振子的运动方程为：

$$m\ddot{x}+C\dot{x}+kx=F_0\cos\ \omega t$$

令

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}},\ \delta=\frac{C}{2m},\ h=\frac{F_0}{m}$$

振子的稳态方程的解：

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$A=\frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}},\tan\ \varphi=\frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2},\ T=\frac{2\pi}{\omega}$$

振动速度

$$v=\dot{x}\ =-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$

阻力做功为系统消耗的能量，即

$$W=\int Cv\mathrm{d}x=\int_t^{t+T}Cv^2\mathrm{d}t=\int_t^{t+T}C\omega^2A^2\ \sin^2(\omega t\ +\ \varphi)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}C\omega^2A^2T$$

代入题中数据可得

$$W=0.062\ \mathrm{J}$$

（2）平均功率为

$$\bar{P}=\frac{W}{T}=0.30\ \mathrm{W}$$

*9-33. 某振动系统的固有频率为 1 000 Hz，品质因数为 50，若其共振时驱动力所提供的平均功率为 5.0 mW，求此时振子的能量。

解：由品质因数的定义得

$$Q=2\pi\frac{E}{\Delta E}$$

其中，E 为振子某时刻的总能量，ΔE 为一个周期后因阻力而消耗的能量。当振子共振时，外界驱动力始终与阻力相等，即阻力所消耗的能量即为外界输入的能量。

所以

$$E=\frac{Q\Delta E}{2\pi}=\frac{Q\bar{P}T}{2\pi}=\frac{Q\bar{P}}{2\pi\nu_0}$$

其中

$$Q=50,\nu_0=1\ 000\ \mathrm{Hz},\bar{P}=5\times10^{-3}\ \mathrm{W}$$

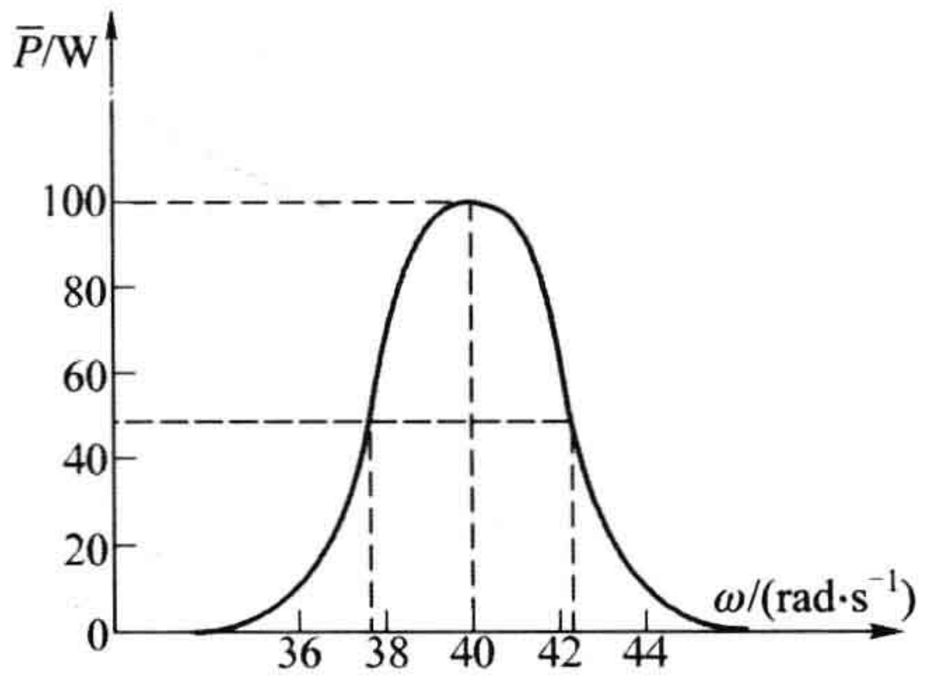
代入解得

$$E=4.0\times10^{-5}\ \mathrm{J}$$

*9-34. 习题 9-34 图所示为某振动系统在驱动力 $F=F_0\sin\ \omega t$ 的驱动下的平均功率共振曲线。此处 F_0 是常量。

（1）求出此系统的固有频率 ω_0 和品质因数 Q 的数值；

（2）若撤去驱动力，则系统经过多少周后能量降至初始值的 e^{-5}？



习题 9-34 图

解：（1）由习题 9-34 图可知，系统功率达最大值时，系统处于共振状态，此时的频率与系统固有频率相同，则

$$\omega_0 = 40 \text{ rad/s}$$

此振动系统的动力学方程为

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = h\sin\ \omega t$$

其中

$$h = \frac{F_0}{m}$$

设振子的位移关系为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

则振子的速度为

$$v = \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

其中

$$A = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

则一个周期内驱动力的平均功率可表示为

$$P_F = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} Fv\mathrm{d}t = -\frac{1}{T}\int_t^{t+T} F_0\sin\ \omega t \cdot A\omega\sin(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}F_0 A\omega\cos\ \varphi$$

由振动系统动力学方程旋转矢量的表示，可以证明

$$-\cos\ \varphi = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{2\delta\omega A}{h}$$

代入上式可得

$$P_F = \delta m\omega^2 A^2$$

可见 P_F 与 A^2 成正比，则功率幅度达到最大功率振幅的一半时，亦即位移振幅达到最大振幅的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，可以得到对应的频率与共振的频率之差，即

$$\Delta\omega = \delta$$

由品质因数定义以及习题 9-34 图的频率半宽度值可得

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega} \approx \frac{40}{2\times 2.5} = 8$$

（2）撤去驱动力后，系统做阻尼振动。阻尼振动中系统能量为

$$E=\frac{1}{2}m\omega_0^2A^2=\frac{1}{2}m\omega_0^2(A_0e^{-\delta t})^2$$

由已知条件

$$\frac{E_t}{E_0}=\frac{\frac{1}{2}m\omega_0^2(A_0e^{-\delta t})^2}{\frac{1}{2}m\omega_0^2(A_0e^{0})^2}=e^{-2\delta t}=e^{-5}$$

则

$$t=\frac{5}{2\delta}$$

又知

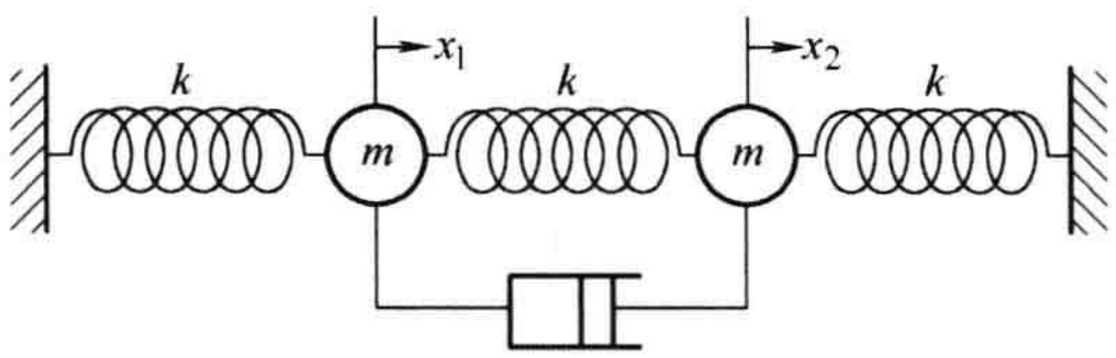
$$Q=\frac{\omega_0}{2\delta}$$

则

$$t=\frac{5}{2\delta}=\frac{5Q}{\omega_0}=\frac{5Q}{2\pi}T\approx 6.4T$$

即撤去驱动力后系统经过 13 个周期后能量降至初始值的 e^{-5}。

***9-35.** 两个质量都为 m 的质点，如习题 9-35 图连接在三个劲度系数都是 k 的弹簧上，两质点间连接一质量可以忽略的阻尼减震器，阻尼减震器所施的力为 bv，这里 v 是它两端的相对速度，b 为常量。该力阻止其两端之间（即两质点之间）的相对运动。令 x_1、x_2 分别为两质点离开其平衡位置的位移。



习题 9-35 图

（1）写出每个质点的运动方程；

（2）证明运动方程可以用新的变量 $y_1=x_1+x_2$ 和 $y_2=x_1-x_2$ 来求解；

（3）证明：如果两质点原来静止于平衡位置，在 $t=0$ 时给质点 1 以初速度 v_0，则在足够长的时间以后，两个质点的运动方程为 $x_1=x_2=\frac{v_0}{2\omega}\sin\omega t$，并求出 ω。

解：（1）对两质点分别应用牛顿第二定律：

$$-2kx_1+kx_2-bv=m\ddot{x}_1$$

$$-2kx_2+kx_1+bv=m\ddot{x}_2$$

其中

$$v=\dot{x}_1-\dot{x}_2$$

整理得

$$m\ddot{x}_1+b(\dot{x}_1-\dot{x}_2)+k(2x_1-x_2)=0 \qquad ①$$

$$m\ddot{x}_2+b(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+k(2x_2-x_1)=0 \qquad ②$$

即是各质点的运动方程。

（2）设新变量 $y_1=x_1+x_2$，$y_2=x_1-x_2$，分别求①-②，①+②，整理可得

$$m\ddot{y}_1+ky_1=0 \qquad ③$$

$$m\ddot{y}_2+2b\dot{y}_2+3ky_2=0 \qquad ④$$

对于新的运动方程，可知方程③为简谐振动的运动方程，而方程④则为阻尼振动的运动方程，则运动方程可以用新变量 y_1、y_2 来求解。

（3）由（2）知对于小阻尼情形，在 $t\to+\infty$ 时，$y_2\to0$。设③的解为

$$y_1=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)\text{，其中 }\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

则

$$\dot{y}_1=-\omega_1 A_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1)$$

将初始条件 $t=0$，$y_{10}=x_{10}+x_{20}=0$，$\dot{y}_{10}=v_0$ 代入可得

$$A_1=\frac{v_0}{\omega_1},\ \varphi_1=-\frac{\pi}{2}$$

由（2）知

$$x_1=\frac{y_1+y_2}{2},\ x_2=\frac{y_1-y_2}{2}$$

则 $t\to+\infty$ 时，

$$x_1=x_2=\frac{v_0}{2\omega_1}\sin\omega_1 t,\omega=\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

***9-36**. 由劲度系数为 k 的轻弹簧和质量为 m 的质点构成的两个相同弹簧振子串联地竖直悬挂，求此系统沿竖直方向做振动的简正频率。

解：如习题 9-36 图所示，设竖直向下为正方向，设两振子偏离平衡位置位移分别为 y_1、y_2，对两振子分别应用牛顿第二定律得

$$-ky_1+k(y_2-y_1)=m\ddot{y}_1$$

$$-k(y_2-y_1)=m\ddot{y}_2$$

整理可得

$$\ddot{y}_1+\frac{k(2y_1-y_2)}{m}=0$$

$$\ddot{y}_2+\frac{k(y_2-y_1)}{m}=0$$

设 $y_1=A\cos\ \omega t, y_2=B\cos\ \omega t$，代入上两式得

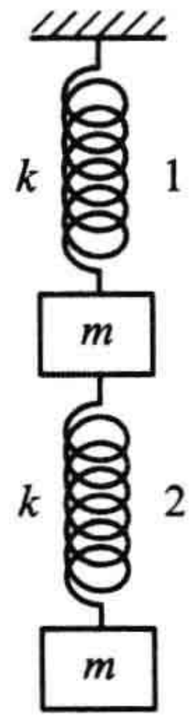
$$-\omega^2 A\cos\ \omega t+\frac{k}{m}\cos\ \omega t(2A-B)=0$$

$$-\omega^2 B\cos\ \omega t+\frac{k}{m}\cos\ \omega t(B-A)=0$$

整理可得

$$\left(\frac{2k}{m}-\omega^2\right)A-\frac{k}{m}B=0$$

$$-\frac{k}{m}A+\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)B=0$$



习题 9-36 图

此方程若有非零解，需满足 $\begin{vmatrix} \frac{2k}{m}-\omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m}-\omega^2 \end{vmatrix}=0$，解得

$$\omega_1=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}}\ ,\ \omega_2=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}}$$

ω_1 对应：

$$\lambda=\frac{A}{B}>0$$

ω_2 对应：

$$\lambda=\frac{A}{B}<0$$

可知，系统有两种简单的振动模式：一是两振子以相同的频率 ω_1，同相位振动；二是两振子以相同频率 ω_2，反相位振动。

第十章　波　　动

课后作业题

10-1. 人耳能听到的声音频率范围一般为 20 ~ 20 000 Hz。试计算在25℃的海水中人耳能听到的声音的波长范围。已知声音在25℃海水中的传播速度为 1 531 m/s。

解:已知

$$\lambda = vT = v\frac{1}{\nu}$$

当 $\nu = 20$ Hz 时,

$$\lambda = 1\ 531 \times \frac{1}{20}\ \text{m} = 76.55\ \text{m}$$

当 $\nu = 20\ 000$ Hz 时,

$$\lambda = 1\ 531 \times \frac{1}{20\ 000}\ \text{m} = 0.076\ 55\ \text{m}$$

则在 25 ℃海水中,人耳能听到的声音波长范围为 0.076 55 ~ 76.55 m。

10-2. 由海底的地震所激发的潮浪,称为海啸。由于大洋的平均深度大约是 5 km,而潮浪的水平长度大于 5 km,故可认为是一种浅水波。若海底地震的震中与海岸的距离为 100 km,试估算潮浪传到海岸所需的时间。

解:浅水波的波速为

$$v = \sqrt{gh}$$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{s}{\sqrt{gh}} = \frac{100 \times 10^3}{\sqrt{5\ 000 \times 9.8}}\ \text{s} = 451.7\ \text{s}$$

即潮浪传到海岸所需的时间为 451.7 s。

10-3. 设有一简谐横波 $y = 5.0\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{0.05} - \frac{x}{10}\right)\right]$,其中 x、y 的单位为 cm,t 的单位为 s。试求:

(1) 振幅 A、频率 ν、波长 λ 以及波速 v;

（2）若某处振动的初相位为$\frac{3}{5}\pi$，求该处的位置 x。

解：（1）已知简谐波方程为

$$y=5.0\cos 2\pi\left(\frac{t}{0.05}-\frac{x}{10}\right)$$

因此，振幅 $A=5.0$ cm，周期 $T=0.05$ s，波长 $\lambda=10$ cm，进而可得

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{1}{0.05}\ \text{Hz}=20\ \text{Hz},\ v=\frac{\lambda}{T}=\frac{10}{0.05}=200\ \text{cm/s}=2.0\ \text{m/s}$$

（2）由已知条件及简谐波的周期性可得

$$\cos\left[2\pi\left(-\frac{x}{10}\right)+2n\pi\right]=\cos\left(\frac{3}{5}\pi\right),\ n=0,\pm1,\pm2,\pm3\cdots$$

则

$$x=(-3.0+10n)\ \text{cm}$$

10-4. 一根质量线密度为 4×10^{-3} kg/m 的均匀钢丝，被 10 N 的力所拉紧。钢丝的一端有一正弦式的横向波扰动，经过 0.1 s，此波扰动即传到钢丝的另一端，而扰动源正好经历 100 个周期。求波长。

解：已知弦中横波的波速为

$$v=\sqrt{\frac{F}{\eta}}$$

由

$$F=10\ \text{N},\eta=4\times10^{-3}\ \text{kg/m},T=0.1\ \text{s}/100=0.001\ \text{s}$$

得波长

$$\lambda=vT=\sqrt{\frac{F}{\eta}}T=\sqrt{\frac{10}{4\times10^{-3}}}\times\frac{0.1}{100}\ \text{m}=0.05\ \text{m}$$

10-5. 一正弦横波沿一弦线自左向右传播，传播速度为 80 cm/s。观察弦上某点的运动，发现该点在做振幅为 2 cm、频率为 10 Hz 的简谐振动。若取该点为坐标 x 的原点，当 $t=0$ 时，该点正好位于原点，且具有向 y 轴正方向运动的速度。试求：

（1）此波的波长 λ；

（2）弦上该点的振动方程；

（3）此波的运动学方程；

（4）弦上 $x=4$ cm 处质点振动的初相位 φ'。

解：（1）由已知得

$$\lambda=\frac{v}{\nu}=80\times\frac{1}{10}\ \text{cm}=8\ \text{cm}$$

（2）由已知可得坐标原点的振动方程：

$$y=A\cos(\omega t-\varphi)=2.0\cos\left(\frac{2\pi t}{0.1}-\varphi\right)$$

$$\dot{y}=-\omega A\sin(\omega t-\varphi)=-40\pi\sin\left(\frac{2\pi t}{0.1}-\varphi\right)$$

已知初始条件：$t=0$ 时，$y=0$，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}>0$，则

$$\cos\varphi=0,\sin(-\varphi)<0$$

可知

$$\varphi=\frac{\pi}{2}$$

所以振动方程为

$$y=2.0\cos\left[2\pi\left(10t-\frac{1}{4}\right)\right];$$

（3）已知原点的振动方程，则波的运动学方程为

$$y=2.0\cos\left(2\pi\left[10\left(t-\frac{x-0}{v}\right)-\frac{1}{4}\right]\right)$$

整理得

$$y=2.0\cos\left[2\pi\left(10t-\frac{1}{4}-\frac{x}{8}\right)\right]$$

（4）由已知 $t=0$ 时，$x=4$ cm，得初相位

$$\varphi'=2\pi\times\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{2}\pi$$

10-6. 设入射波的方程为 $y=0.2\cos(\pi t-1.5\pi x+0.4\pi)$，其中 x、y 的单位是 m，t 的单位是 s。波在 $x=0$ 处反射。试就以下两种情况，求在振幅不衰减情况下合成驻波的方程，并指出 $x=0$ 处是波节还是波腹。

（1）$x=0$ 处是自由端；

（2）$x=0$ 处是固定端。

解：已知入射波为

$$y_{入}=0.2\cos(\pi t-1.5\pi x+0.4\pi)$$

（1）自由端无半波损失时，则反射波为

$$y_{反}=0.2\cos(\pi t+1.5\pi x+0.4\pi)$$

合成驻波为

$$y=y_{入}+y_{反}=0.4\cos(1.5\pi x)\cos(\pi t+0.4\pi)$$

当 $x=0$ 时，

$$1.5\pi x=0,\ A=0.4\cos(1.5\pi x)=0.4=A_{\max}$$

则 $x=0$ 处为波腹。

（2）固定端有半波损失时，反射波：

$$y_{反}=0.2\cos(\pi t+1.5\pi x+0.4\pi+\pi)$$

合成驻波为

$$y=y_{入}+y_{反}=0.4\cos(1.5\pi x+0.5\pi)\cos(\pi t+0.9\pi)$$

当 $x=0$ 时，

$$1.5\pi x+0.5\pi=0.5\pi,\ A=0.4\cos(1.5\pi x+0.5\pi)=0$$

则 $x=0$ 处是波节。

10-7. 两根完全相同的琴弦，它们的基频都是 357 Hz。其中一根琴弦的弦轴略有松动，以致该弦的张力以恒定的速率减小，其每秒减小量 ΔF_T 与原张力 F_{T0} 之比为 0.001。问经过多少时间，此两琴弦同时发声时会产生 1 Hz 的拍频？

解：根据张紧弦的简正模频率公式得

$$\nu_n=\frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F_T}{\eta}}$$

基频 $n=1$，$\nu_1=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F_T}{\eta}}$，$F_T$ 为弦中张力，η 为弦的线密度。第一根没有松动的弦的基频为

$$\nu_1=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F_{T0}}{\eta}}=357\ \text{Hz}$$

对第二根松动弦来说，经历 t 时间后，其基频为

$$\nu'_1=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F_{T0}-0.001tF_{T0}}{\eta}}$$

拍频条件：

$$\nu_1-\nu'_1=1\ \text{Hz}$$

求得

$$t=5.6\ \text{s}$$

10-8. 一装置于海底的超声波探测器，发出一束频率为 30 000 Hz 的超声波，被向着探测器驶来的潜艇反射回来，反射波与原来的波合成后，得到频率为 241 Hz 的拍。求潜艇的速率。设超声波在海水中的波速为 1 500 m/s。

解：根据多普勒效应，潜艇上观察者收到的频率

$$\nu'_s=\frac{u+v}{u}\nu_s$$

潜艇反射波频率为

$$\nu'_r=\frac{u}{u-v}\nu'_s$$

其中 u 为超声波在海水中的波速。拍频

$$\Delta\nu=\nu'_{\mathrm{r}}-\nu_{\mathrm{s}}=\frac{2v}{u-v}\nu_{\mathrm{s}}$$

联立并代入数据可得

$$v=\frac{\Delta\nu\cdot u}{2\nu_{\mathrm{s}}+\Delta\nu}=6\ \mathrm{m/s}$$

10-9. 一平面简谐波沿 x 轴方向传播，其表示式为

$$y=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

在 $x=x_0$ 固定端处反射。求反射波的表示式，振幅不衰减。

解：在 $x=x_0$ 固定端处，

$$y_0=A\cos(\omega t-kx_0+\varphi_0)$$

反射有半波损失，反射波在 $x=x_0$ 处的振动为

$$y_{0反}=A\cos(\omega t-kx_0+\varphi_0+\pi)$$

反射波表达式为

$$y_{反}=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x-x_0}{v}\right)-kx_0+\varphi_0+\pi\right]$$

整理得

$$y_{反}=A\cos(\omega t+kx-2kx_0+\varphi_0+\pi)$$

10-10. 在绳索上传播的波，其表示式为 $y=3\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{0.1}-\frac{x}{10}\right)-\frac{\pi}{3}\right]$，式中 x、y 的单位为 cm，t 的单位为 s。为在绳索上形成驻波（在 $x=0$ 处为波节），则应叠加一个什么样的波？写出此波的表示式。并写出驻波的表示式。

解：入射波

$$y_{入}=3\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{0.1}-\frac{x}{10}\right)-\frac{\pi}{3}\right]$$

该波向右传播。同频率、相反方向传播的波的叠加才能形成驻波，所以，叠加的波向左传播，设其表达式为

$$y_{叠}=3\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{0.1}+\frac{x}{10}\right)+\varphi\right]$$

合成驻波：

$$y=y_{入}+y_{叠}=6\cos\left(\frac{\pi}{5}x+\frac{\varphi+\pi/3}{2}\right)\cos\left(20\pi t+\frac{\varphi-\pi/3}{2}\right)$$

$x=0$ 处为波节，则

$$\frac{\varphi+\pi/3}{2}=(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

初相位取$[0,2\pi]$之间值，则

$$\varphi=\frac{2}{3}\pi$$

叠加波表示式为

$$y_{叠}=3\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{0.1}+\frac{x}{10}\right)+\frac{2\pi}{3}\right]$$

合成驻波为

$$y=6\sin\frac{\pi}{5}x\cos\left(20\pi t-\frac{5}{6}\pi\right)$$

自检练习题

10-11. 一波沿 x 轴传播，观察到 x 轴上两点 x_1 和 x_2 处介质的质点均做频率为 2.0 Hz 的简谐振动，x_1 处振动相位比 x_2 处落后 $\frac{\pi}{4}$。已知 $x_2-x_1=3.0$ cm。

（1）试问此波是沿正 x 轴方向传播，还是沿负 x 轴方向传播？（设 $\lambda>6$ cm）

（2）试求波长 λ 和波速 v。

解：（1）由已知 $x_2-x_1=3.0$ cm，可说明 $x_2>x_1$，又知 x_1 处振动相位比 x_2 处落后 $\frac{\pi}{4}$，说明波由 x_2 处向 x_1 处传播，即波沿 $-x$ 方向传播。

（2）波长：

$$\lambda=\frac{2\pi}{\Delta\varphi}(x_2-x_1)=\frac{2\pi}{\pi/4}\times 3\text{ cm}=24\text{ cm}$$

波速：

$$v=\lambda\cdot\nu=24\times 2.0\text{ cm/s}=48\text{ cm/s}=0.48\text{ m/s}$$

10-12. 在拉紧的弦上传播的一个波脉冲可表示为

$$y(x,t)=\frac{b^3}{b^2+(2x-ut)^2}$$

式中 b、u 均为常量。

（1）画出 $t=0$ 时的波形图。

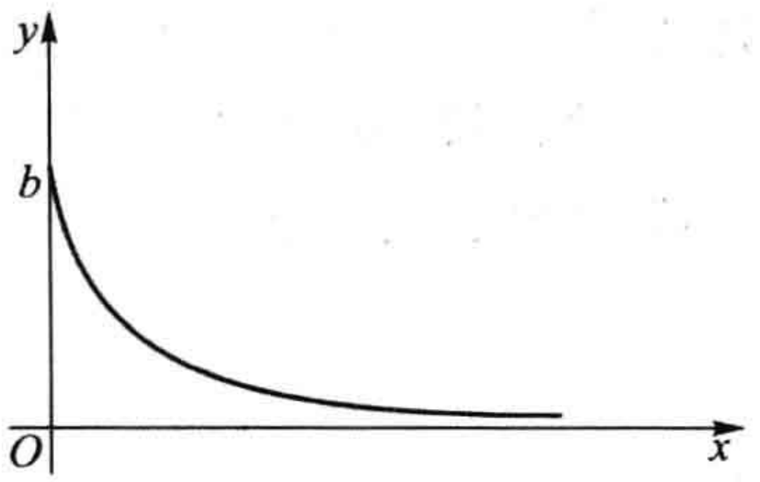
（2）波脉冲传播的速率及方向如何？

（3）试求 $t=0$ 时刻弦上任一点 x 的横向速度。

解：（1）$t=0$ 时，

$$y(x)=\frac{b^3}{b^2+4x^2}$$

可作出波形图如习题 10-12 图所示。



习题 10-12 图

（2）波脉冲传播的速率为

$$v=\frac{\partial x}{\partial t}$$

由 $y(x,t)=\dfrac{b^3}{b^2+(2x-ut)^2}$得

$$x(y,t)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{b^3}{y}-b^2\right)^{\frac{1}{2}}+ut\right]$$

则

$$v=\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{1}{2}u$$

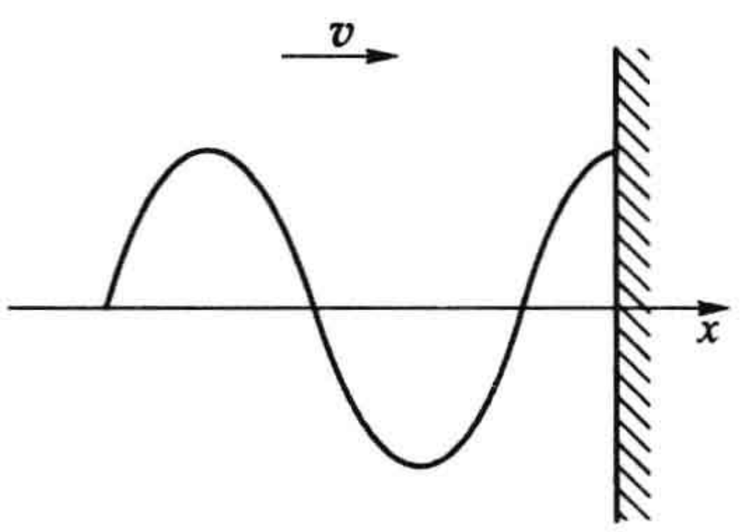
方向沿 x 轴正方向。

（3）$t=0$ 时刻弦上任一点 x 的横向速度为

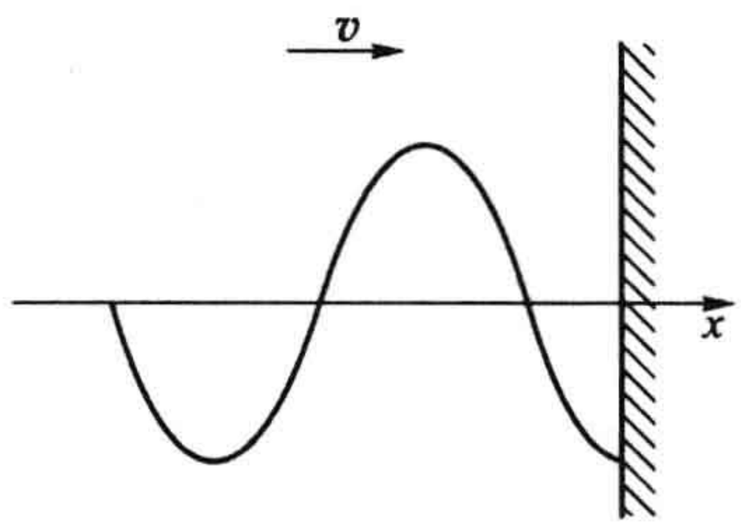
$$v_y=\frac{\partial y}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\frac{4b^3ux}{(b^2+4x^2)^2}$$

10-13. 入射波在固定端全反射，某一瞬时的波形如习题 10-13 图(a)所示。试画出此瞬时反射波的波形图。

解：入射波在固定端全反射，存在半波损失，反射波形如习题 10-13 图(b)所示。



习题 10-13 图(a)



习题 10-13 图(b)

10-14. 如习题 10-14 图所示，一根线密度为 0.15 g/cm 的弦线，其一端与一频率为 50 Hz 的音叉相连，另一端跨过一定滑轮后悬一重物给弦线提供张力，重物质量为 m，音叉到滑轮间的距离为 1 m. 当音叉振动时，为使弦上形成一个、两个、三个波腹，则重物的质量 m 应各为多大？

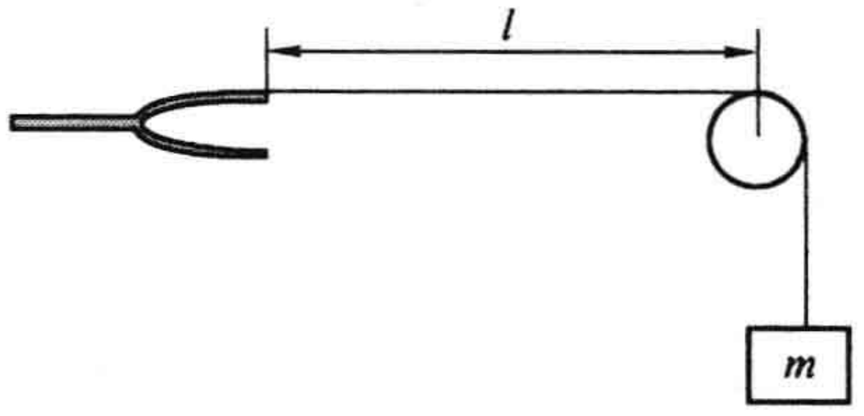
解：已知弦的简正模频率公式：

$$\nu_n=\frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F_T}{\eta}}$$

其中 $F_T=mg$。将已知数据代入可得

$n=1$ 时，$m=15.3$ kg

$n=2$ 时，$m=3.8$ kg



习题 10-14 图

$n=3$ 时，$m=1.7\ \text{kg}$

***10-15.** 在一半径为 10 cm 的圆柱形管子里，一平面简谐空气波沿轴向传播，波长和频率分别为 $\lambda=80\ \text{cm}$，$\nu=425\ \text{Hz}$，波的能流密度为 $1.7\times10^{-2}\ \text{J/(s}\cdot\text{m}^2\text{)}$。试求：

（1）管中波的平均能量密度和最大能量密度；

（2）每两个相邻同相位面间的总能量。

解：（1）平均能流密度 $I=\bar{\varepsilon}v$，其中 $v=\lambda\nu$。将题中已知数据代入上式，整理可得

$$\bar{\varepsilon}=\frac{I}{v}=\frac{I}{\lambda\nu}=\frac{1.7\times10^{-2}}{0.80\times425}\ \text{J/m}^3=5.0\times10^{-5}\ \text{J/m}^3$$

此波为简谐波，能量密度是空间的周期函数。由教材(10.5.1-11)可知

$$\varepsilon_{\max}=2\,\bar{\varepsilon}=1.0\times10^{-4}\ \text{J/m}^3$$

（2）每两个相邻同相位面间的总能量为

$$E=\bar{\varepsilon}\times\lambda\times\pi r^2=5\times10^{-5}\times0.8\times3.14\times0.1^2\ \text{J}=1.26\times10^{-6}\ \text{J}$$

***10-16.** 一波源以 35 000 W 的功率发射球面电磁波。在某处测得该波的平均能量密度为 $7.8\times10^{-15}\ \text{J/m}^3$。求该处离波源的距离。电磁波的传播速度为 $3.0\times10^8\ \text{m/s}$。

解：平均能流密度 $I=\bar{\varepsilon}v$，球面波功率 $P=4\pi Ir^2$，由此可得

$$r=\left(\frac{P}{4\pi I}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{P}{\bar{\varepsilon}v\cdot4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

将题中已知数据代入上式，可得

$$r=\left(\frac{35\ 000}{7.8\times10^{-15}\times3.0\times10^8\times4\times3.14}\right)^{\frac{1}{2}}\ \text{km}=34.5\ \text{km}$$

***10-17.** 以下两列波在介质中叠加：

$$y_1=A\cos(6t-5x)\ ,\ y_2=A\cos(5t-4x)$$

（式中 x、y_1、y_2 的单位是 m，t 的单位是 s）

（1）求此两列波的相速度 v_{p1}、v_{p2}；

（2）写出合成波的方程，并求出振幅为零的相邻两点之间的距离；

（3）求群速度 v_g。

解：（1）由已知波方程可知

$$\omega_1=6\ \text{s}^{-1}\,,k_1=5\ \text{m}^{-1}\,,\omega_2=5\ \text{s}^{-1}\,,k_2=4\ \text{m}^{-1}$$

则

$$v_{p1}=\frac{\omega_1}{k_1}=\frac{6}{5}\ \text{m/s}=1.2\ \text{m/s}\,,\ v_{p2}=\frac{\omega_2}{k_2}=\frac{5}{4}\ \text{m/s}=1.25\ \text{m/s}$$

（2）合成波的方程为

$$y=y_1+y_2=A\cos(6\ t-5x)+A\cos(5\ t-4x)$$

$$=2A\cos\left(\frac{t-x}{2}\right)\cos\left(\frac{11t-9x}{2}\right)$$

合成波可看作振幅为 $2A\cos\left(\frac{t-x}{2}\right)$，相位为 $\left(\frac{11t-9x}{2}\right)$ 的简谐波。当 $A_{max}=0$ 时，

$$\frac{t-x}{2}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$$

则

$x=t-(2n+1)\pi$（n 为整数）

所以，振幅为零的相邻两点之间的距离为 2π m。

（3）根据群速度公式，可得

$$v_g=\frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2}=1\ \text{m/s}$$

***10-18.** 水上短波长（$\lambda\leqslant 1$ cm）的涟波运动，是受表面张力控制的。这种涟波的相速度为 $v_p=\left(\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$，式中 σ 为表面张力系数，ρ 为水的密度。

（1）证明：由接近某给定波长 λ 的诸波长所构成的扰动，群速度等于 $\frac{3}{2}v_p$；

（2）若波群只有两个波组成，此两波的波长分别为 0.99 cm 和 1.01 cm，则波群两相邻峰值间的距离为多大？

解：（1）已知

$$v_g=\frac{d\omega}{dk}=v_p-\lambda\frac{dv_p}{d\lambda}，且\ v_p=\left(\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$$

则

$$\frac{dv_p}{d\lambda}\cdot\lambda=-\frac{1}{2}\lambda\left(\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}}(2\pi\sigma)\frac{\rho}{(\rho\lambda)^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}v_p$$

所以，

$$v_g=v_p-\left(-\frac{1}{2}v_p\right)=\frac{3}{2}v_p$$

（2）已知

$$k_1=\frac{2\pi}{\lambda_1},\ k_2=\frac{2\pi}{\lambda_2}$$

合成波的振幅：

$$A_m=2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t-\frac{k_1-k_2}{2}x\right)$$

因两相邻峰值的距离与 t 无关，不妨设 $t=0$。当 $A_m=\left|2A\cos\left(-\frac{k_1-k_2}{2}x\right)\right|$ 取最大值时，$-\frac{k_1-k_2}{2}x=m\pi$。解得

$$x=-\frac{2m\pi}{\frac{2\pi}{\lambda_1}-\frac{2\pi}{\lambda_2}}\ (m\text{ 为整数})$$

则相邻两峰值的距离为

$$\Delta x=\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{\lambda_1}-\frac{2\pi}{\lambda_2}}=\frac{1}{\frac{1}{0.99}-\frac{1}{1.01}}\ \text{m}=0.5\ \text{m}$$

***10-19**. 对于深水波，考虑到表面张力，其色散关系为 $\omega^2=gk+\frac{\sigma k^3}{\rho}$，式中水的密度 $\rho=1.0\times10^3\ \text{kg/m}^3$，表面张力 $\sigma=7.2\times10^{-2}\ \text{N/m}$。

（1）求出相速度和群速度与 k 的函数关系；

（2）证明对于波长接近 $1.7\times10^{-2}\ \text{m}$ 的诸波所构成的水波，其相速度与群速度相等，并求出速度值。

解：（1）已知 $\omega^2=gk+\frac{\sigma k^3}{\rho}$，即

$$\omega=\sqrt{gk+\frac{\sigma k^3}{\rho}}$$

相速度为

$$v_{\text{p}}=\frac{\omega}{k}=\frac{\sqrt{gk+\frac{\sigma k^3}{\rho}}}{k}=\sqrt{\frac{g}{k}+\frac{\sigma k}{\rho}}$$

群速度为

$$v_{\text{g}}=\frac{\text{d}\omega}{\text{d}k}=\frac{\text{d}\sqrt{gk+\frac{\sigma k^3}{\rho}}}{\text{d}k}=\frac{g+\frac{3\sigma k^2}{\rho}}{2\sqrt{gk+\frac{\sigma k^3}{\rho}}}$$

（2）已知 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$，代入上式得

$$v_{\text{p}}=\sqrt{\frac{g}{k}+\frac{\sigma k}{\rho}}=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}+\frac{2\sigma\pi}{\rho\lambda}}=\sqrt{\frac{9.8\times1.7\times10^{-2}}{2\times3.14}+\frac{2\times3.14\times7.2\times10^{-2}}{1\,000\times1.7\times10^{-2}}}\ \text{m/s}=0.23\ \text{m/s}$$

$$v_{\text{g}}=\frac{g+\frac{3\sigma k^2}{\rho}}{2\sqrt{gk+\frac{\sigma k^3}{\rho}}}=\frac{g+\frac{12\sigma\pi^2}{\rho\lambda^2}}{2\sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda}+\frac{8\sigma\pi^3}{\rho\lambda^3}}}=\frac{9.8+\frac{12\times7.2\times10^{-2}\times3.14^2}{1\,000\times(1.7\times10^{-2})^2}}{2\sqrt{\frac{2\times3.14\times9.8}{1.7\times10^{-2}}+\frac{8\times7.2\times10^{-2}\times3.14^3}{1\,000\times(1.7\times10^{-2})^3}}}\ \text{m/s}=0.23\ \text{m/s}$$

则 $v_{\text{g}}=v_{\text{p}}$，即相速度与群速度相等，且 $v_{\text{g}}=v_{\text{p}}=0.23\ \text{m/s}$。

***10-20**. 把两根连在一起的弦线拉紧，设想有一行波入射到相接处，为使反射波的振幅 B 与入射波的振幅 A 之比 $\frac{B}{A}=\frac{1}{3}$。试求：

（1）两根弦线的线密度之比 $\eta_1 : \eta_2$，设入射波从弦线 1 向弦线 2 方向传播；

（2）透射波的振幅 C 与入射波振幅 A 之比 $\frac{C}{A}$。

解：已知波的反射系数为 $\frac{B}{A}=\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}$，透射系数为 $\frac{C}{A}=\frac{2Z_1}{Z_1+Z_2}$。对于张紧的弦线介质 $Z=\eta v$，$T=\eta v^2$，则 $Z=\sqrt{\eta T}$

又知两弦线 T 相同，则

$$\frac{B}{A}=\frac{\sqrt{\eta_1}-\sqrt{\eta_2}}{\sqrt{\eta_1}+\sqrt{\eta_2}},\quad \frac{C}{A}=\frac{2\sqrt{\eta_1}}{\sqrt{\eta_1}+\sqrt{\eta_2}}$$

由已知

$$\frac{B}{A}=\frac{\sqrt{\eta_1}-\sqrt{\eta_2}}{\sqrt{\eta_1}+\sqrt{\eta_2}}=\frac{1}{3}$$

解得

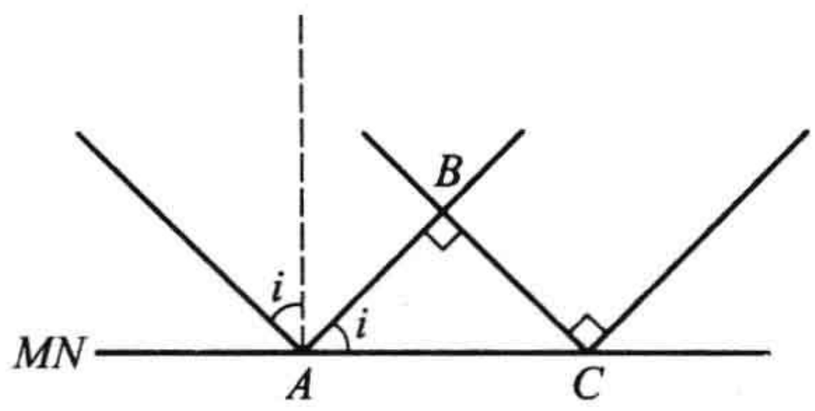
$$\frac{\eta_1}{\eta_2}=4$$

进而解得

$$\frac{C}{A}=\frac{2\sqrt{\eta_1}}{\sqrt{\eta_1}+\sqrt{\eta_2}}=\frac{4}{3}$$

***10-21**. 一列纵波在两种介质的界面上发生反射。设入射波与反射波的振动方向不变，在入射波所在的介质中纵波的波速是横波波速的 $\sqrt{3}$ 倍。试问为使反射波是一横波，则入射角应为多大？

解：如习题 10-21 图所示，若一束纵波射到 MN 界面上，入射波与反射波的振动方向不变，要想使反射波是一横波，则反射线与入射线互相垂直，且入射波应为纵波。



习题 10-21 图

设横波速度为 v，纵波速度为 $\sqrt{3}v$。已知入射线上 A、B 两点等相位，反射线上 B、C 两点等相位，那么当过 A 点的波反射过 B 点时，过 B 点的波正好射到 C 点，设从 B 点到 C 点的时间为 t，则

$$AB=vt,\quad BC=\sqrt{3}vt$$

因此

$$\tan i=\frac{BC}{AB}=\sqrt{3},\quad i=60°，即入射角为60°。$$

第四篇　时空结构

第十一章　狭义相对论简介

课后作业题

11-1. S′系相对 S 系以速度 $v=0.8c$ 沿 x 轴运动。S′系和 S 系的原点在 $t=t'=0$ 时重合。一事件在 S′系中发生在 $x'=300\ \mathrm{m}(y'=z'=0)$，$t'=2\times10^{-7}\ \mathrm{s}$。求该事件在 S 系中发生的空间位置 x 和时间 t。

解:根据题意,由洛伦兹逆变换

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad t_1=\frac{t'_1+\frac{v}{c^2}x'_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

解得

$$x=580\ \mathrm{m},t_1=1.67\times10^{-6}\ \mathrm{s}$$

11-2. 在一惯性系的同一地点,先后发生两个事件,其时间间隔为 0.2 s,而在另一惯性系中测得此两事件的时间间隔为 0.3 s,求两惯性系之间的相对运动速率。

解:设惯性系 S 中先后发生两个事件的时刻分别为 t_1 和 t_2,由洛伦兹变换得另一惯性系 S′中测得的此两事件的时间间隔为

$$\Delta t'=t'_2-t'_1=\frac{(t_2-t_1)-\frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

由于在 S 中发生的两个事件位于同一地点,因此 $\Delta x=0$,由此得

$$\Delta t'=\frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{0.2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=0.3\ \mathrm{s}$$

解得

$$v=\frac{\sqrt{5}}{3}c$$

11-3. S′系相对 S 系以恒定速度沿 x 轴运动。在 S 系中两事件发生在同一时刻,并沿 x 轴相距 2×10^4 m。而在 S′系中,测得两事件的空间间隔为 3×10^4 m,试问在 S′系中测得的两事件的时间间隔是多少?

解:由洛伦兹变换得

$$x'_2=\frac{x_2-vt_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad x'_1=\frac{x_1-vt_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

依据题意有

$$t_1=t_2,\quad \Delta x=x_2-x_1=2\times10^4\ \text{m},\quad \Delta x'=x'_2-x'_1=3\times10^4\ \text{m}$$

解得

$$v=\frac{\sqrt{5}}{3}c$$

再由洛伦兹变换解得

$$\Delta t'=\frac{\Delta t-\frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=-7.45\times10^{-5}\ \text{s}$$

11-4. 一火箭飞船经地球飞往某空间站,该空间站相对地球静止,与地球之间的距离为 9.0×10^9 m。地球上的钟和空间站上的钟是同步校准的。当火箭飞船飞经地球时,宇航员将飞船上的钟拨到与地球上的钟相同的示数。当火箭飞船飞经空间站时,宇航员发现飞船上的钟比空间站上的钟慢了 3 s。求火箭飞船的飞行速率。

解:设地球为 S 系,飞船为 S′系,在 S 系中飞船经过地球的时刻为 t_1,经过空间站的时刻为 t_2。设飞船与地球相遇时为第一事件,飞船与空间站相遇时为第二事件。在 S′系看来,是用位于同一地点的同一时钟测量的两事件间隔 $\Delta t'=t'_2-t'_1$,而在 S 系看来,是用位于异地的两个时钟测量的两事件间隔 $\Delta t=t_2-t_1$,由运动的时钟变慢公式有

$$\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

其中

$$v=\frac{x_2-x_1}{\Delta t}=\frac{9.0\times10^9}{\Delta t},\quad \Delta t-\Delta t'=3\ \text{s}$$

联立解得

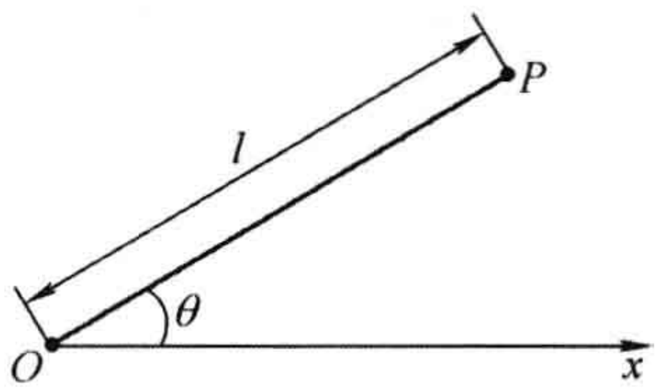
$$v=\frac{6c^2(x_2-x_1)}{9c^2+(x_2-x_1)^2}\approx 0.198c$$

11-5. 一飞船以 $v=0.6c$ 的速率沿平行于地面的轨道飞行。飞船上沿运动方向放置一根杆子，在地面上的人测得此杆子的长度为 l，求此杆子的本征长度 l_0。

解：设地面为 S 系，飞船为 S′系，在 S′系中杆子的长度 $l_0=x'_2-x'_1$ 为本征长度，在 S 系中杆子的长度为 $l=x_2-x_1$。由洛伦兹变换得出的长度收缩公式有

$$l_0=x'_2-x'_1=l\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=1.25l$$

11-6. 一道闪光从 O 点发出，在 P 点被吸收。在 S 系中，OP 具有长度 l 且同 x 轴成 θ 角，如习题 11-6 图所示。在相对于 S 系以恒速 v 沿 x 轴运动的 S′系中：



习题 11-6 图

（1）从光的发出到吸收相隔多长时间 $\Delta t'$？

（2）光的发出点 O 到吸收点 P 的空间间隔 l' 是多大？

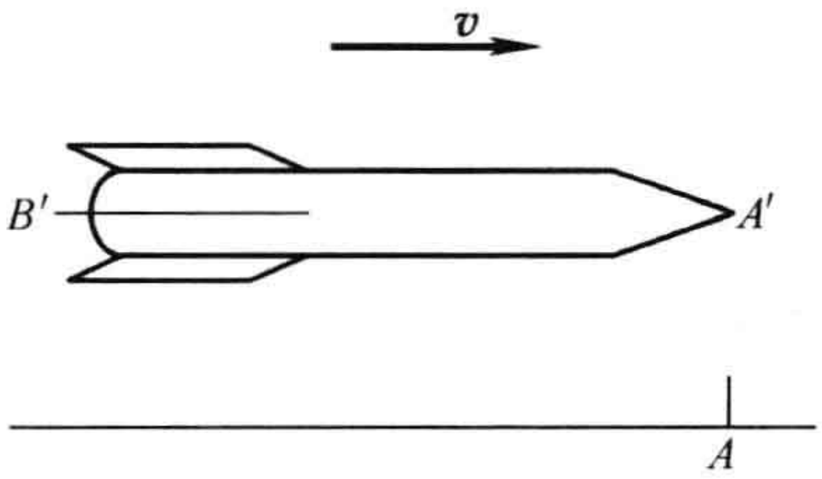
解：（1）由洛伦兹变换有

$$\Delta t'=\frac{\Delta t-\frac{v_x}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{\frac{l}{c}-\frac{vl\cos\theta}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{l}{c}\frac{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

（2）光传播速度 c 与惯性系的运动速度无关，得

$$l'=c\Delta t'=\frac{l\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

11-7. 一静长为 l_0 的火箭飞船以恒速 v 相对地面飞行。飞船的头部 A' 点在 $t=t'=0$ 时通过地面上的 A 点，如习题 11-7 图所示。此时有一光信号从 A' 点发向 B' 点。



习题 11-7 图

（1）按飞船的时间（t'），该信号何时到达船尾 B' 点？

（2）按地面上的测量，该信号何时（t_1）到达船尾 B' 点？

（3）按地面上的测量，船尾何时（t_2）通过 A 点？

解:(1) 根据题意得到达船尾的时间为

$$t' = l_0 / c$$

(2) 根据题意,在地面上测量火箭飞船的长度为 $l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$(洛伦兹收缩)。在地面观察者看来,设观测光信号到达船尾 B' 时,信号光和船尾 B' 相对地面运行的距离分别为 x_1、x_2,则

$$x_1 = vt_1 , x_2 = ct_1 , l = x_1 + x_2$$

联立解得

$$t_1 = \frac{l_0}{c+v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{l_0}{c}\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

(3) 根据题意,在地面上测量火箭飞船的长度为 $l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$(洛伦兹收缩),飞船飞行速度为 v,则船尾通过 A 点的时间为

$$t_2 = \frac{l}{v} = \frac{l_0}{v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

11-8. 在 S′系中,一光速在与 x' 轴成 θ_0 角的方向射出。求在 S 系中光速与 x 轴所成的角 θ。S′系以速度 v 沿 x 轴相对 S 系运动。

解:根据相对论的速度变换公式

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1+\frac{v}{c^2}u'_x}$$

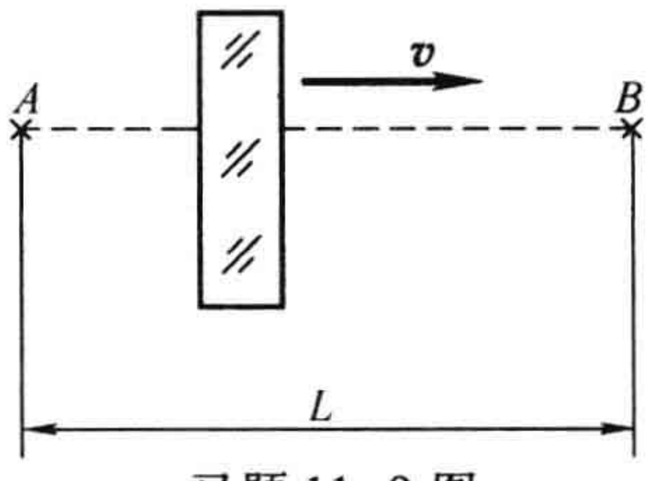
对于本题有

$$c\cos\theta = \frac{c\cos\theta_0 + v}{1+\frac{v}{c^2}c\cos\theta_0}$$

解得

$$\theta = \arccos\left[\frac{\cos\theta_0 + v/c}{1+\frac{v}{c}\cos\theta_0}\right]$$

11-9. 如习题 11-9 图所示,一块厚玻璃以速率 v 向右运动。在 A 点有一闪光灯,它发出的光通过玻璃后到达 B 点。A、B 之间的距离为 L,玻璃在其静止的坐标中的厚度为 d,玻璃的折射率为 n。问光由 A 点传播到 B 点需多少时间?



习题 11-9 图

解:以地面为 S 系,玻璃为 S′系。在 S 系下,

光由 A 点传播到 B 点所需时间由光在玻璃中传播的时间 Δt_1 和在空气中传播的时间 Δt_2 两部分组成。在 S′系下，光在玻璃中传播的时间

$$\Delta t'_1 = \frac{d}{c/n} = \frac{nd}{c}$$

转换为 S 系下的时间为

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta t'_1 + \frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{nd}{c} + \frac{v}{c^2}d}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

在 S 系下，光由 A 点传播到 B 点时在空气中传播的时间为

$$\Delta t_2 = \frac{L - v\Delta t_1 - d\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{c}$$

联立解得

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{L}{c} + \frac{d(n-1)\left(1-\frac{v}{c}\right)}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

11-10. 地面上的人观测到两艘飞船以相同的速率 $v=0.5c$ 沿同一直线相向飞行。若其中一艘飞船发出一束波长 $\lambda_0=632.8$ nm 的激光，求另一艘飞船收到该激光的波长。

解：设飞船 B 发出 632.8 nm 的激光，飞船 A 观察. 以地面为 S 系，A 船为 S′系，由洛伦兹速度变换可得飞船 B 相对于飞船 A 的速度为

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1-\frac{v}{c^2}u_x} = \frac{-0.5c-0.5c}{1-\frac{0.5c}{c^2}(-0.5c)} = -\frac{4}{5}c$$

对于飞船 B 上的 $\lambda_0=632.8$ nm 波长的光，由光波的相对论多普勒效应，可得飞船 A 上的观察者测得的波长为

$$\lambda = \frac{c}{\nu_A} = \frac{\lambda_B \nu_B}{\sqrt{\frac{c-u'_x}{c+u'_x}}\nu_B} = 210.93 \text{ nm}$$

11-11. 设有一宇宙飞船完全通过发射光子而获得加速。当该宇宙飞船从静止开始加速至 $v=0.6c$ 时，其静质量为初始值的几分之几？

解：设飞船发射前后的静质量分别为 m_0、m'。

飞船发射后的总能量

$$E'=\frac{m'c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

飞船发射后的总动量为

$$(p'c)^2=E'^2-(m'c^2)^2$$

以飞船和发射的光子为研究对象,设光子的动量为 p。

能量守恒:

$$m_0c^2=E'+p'c$$

动量守恒:

$$0=p'-p$$

依据题意,当 $v=0.6c$ 时,可得

$$\frac{m'}{m_0}=0.5$$

11-12. 静止的电子偶(即一个电子和一个正电子)湮没时产生两个光子,如果其中一个光子再与另一个静止电子碰撞。求它能给予该电子的最大速度。

解:以电子偶和两个光子为研究对象。

能量守恒:

$$2m_0c^2=2pc$$

以其中的一个光子和另一静止的电子为研究对象,光子与电子正碰,碰后光子沿反方向运动时,电子获得的速度最大,设碰后光子的动量为 $-p'$。

能量守恒:

$$pc+m_0c^2=E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}+p'c$$

动量守恒:

$$p=p_1-p'=\frac{m_0v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-p'$$

联立解得

$$v=0.8c$$

* 自检练习题

11-13. Farley 等人在 1968 年对 μ^- 子所做的实验测得 μ^- 子的速度 $v=0.996\,6c$,其平均寿命 $t=26.15\times10^{-6}$ s。已知 μ^- 子在静止的参考系中的平均寿

命为 $t_0=2.2\times10^{-6}$ s。试问此实验在多大精度上与相对论的预言相符?

解:μ^-子在 0.996 6c 的速度下的寿命为

$$t'=t_0/\sqrt{1-v^2/c^2}=26.7\times10^{-6}\ \text{s}$$

相对误差为

$$\frac{t'-t}{t'}=2.1\%$$

11-14. π 介子的本征寿命为 2.5×10^{-6} s。在实验室里测得一 π 介子在它一生中行进的距离为 375 m。求此 π 介子相对实验室的运动速度。

解:实验室观测到的 π 介子寿命为

$$\tau=\tau_0\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

由题意得到

$$\tau v=l$$

即

$$\frac{2.5\times10^{-6}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}v=375\ \text{m}$$

解得

$$v=0.999\ 8c$$

11-15. 两根静长均为 l_0的棒 A、B,相向沿棒做匀速运动。A 棒上的观测者发现两棒的左端先重合,相隔时间 Δt 后,两棒的右端再重合。试问:

(1) B 棒上的观测者看到两棒的端点以怎样的次序重合?

(2) 两棒的相对速度是多大?

(3) 对于看到两棒以大小相等,而方向相反的速度运动的观测者来说,两棒端点以怎样的次序重合?

解:由于洛伦兹收缩,以任何一棒为参考系观察另一棒的长度都缩短为

$$L'=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

(1) 由题意可得,以 A 棒为 S 系时棒的重合次序如习题 11-15 图(a)所示;因此,以 B 棒作为 S 系时相遇的重合次序如习题 11-15 图(b)所示,即右端先重合。

所以,B 棒上的观察者发现右端先相遇,然后左端相遇。

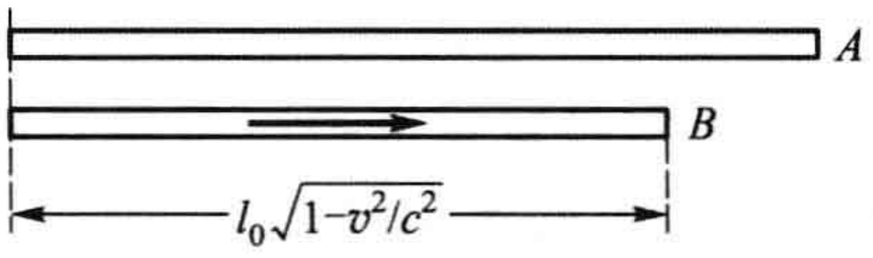
(2) 由题意可知,A 棒上的观察者观察到经过时间间隔 Δt 后,两棒的右端重合,以 A 为 S 系有

$$l_0-l_0\sqrt{1-v^2/c^2}=\Delta tv$$

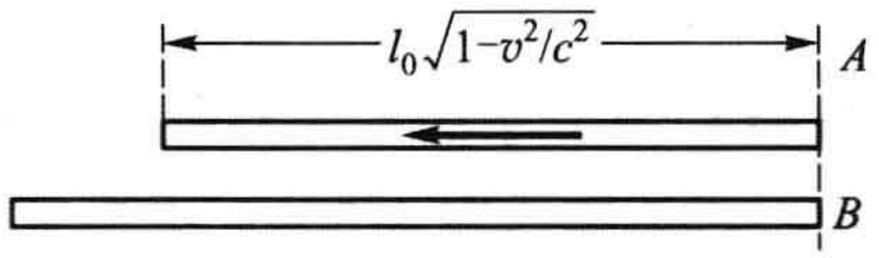
解得

$$v=\frac{2l_0\Delta t}{(\Delta t)^2+l_0^2/c^2}$$

（3）对于这样的观察者，两个棒的洛伦兹收缩是一样的，因此会看到棒的两端同时重合。



习题 11-15 图(a)



习题 11-15 图(b)

11-16. 两根相互平行的米尺，各以 $v=\frac{3}{5}c$ 的速率相向运动，运动方向平行于尺子。求任一尺子上的观察者测量另一尺子的长度。

解：以地面为 S 系，一个尺子 a 为 S′系，另一个尺子 b 为研究对象，由题意知

$$v=\frac{3}{5}c,u=-\frac{3}{5}c$$

由相对论速度变换公式得 b 相对于 a 的速度为

$$u'=\frac{u-v}{1-\frac{v}{c^2}u}=\frac{15}{17}c$$

根据洛伦兹收缩得 b 上的观察者看到 a 的长度

$$l'_a=l_a\cdot\sqrt{1-\left(\frac{u'}{c}\right)^2}=1\times\sqrt{1-\left(\frac{u'}{c}\right)^2}\approx 0.47\ \text{m}$$

11-17. 静长为 L 的车厢，以恒定速率 v 沿地面向右运动。自车厢的左端 A 点发出一光信号，经右端 B 点镜面反射后回到 A 端。

（1）在车厢里的人看来，光信号经多少时间 $\Delta t'_1$ 到达 B 端？从 A 发出经 B 反射后回至 A，共需多少时间 $\Delta t'$？

（2）在地面上的人看来，光信号经多少时间 Δt_1 到达 B 端？从 A 发出经 B 反射后回至 A，共需多少时间 Δt？

解：（1）车厢内的观察者以车厢为 S 系，看到的车长为 L，所以，光信号经过 $\Delta t'_1=L/c$ 到达 B 端，从 A 发出经 B 反射后回至 A，共需

$$\Delta t'=2\Delta t'_1=2L/c$$

（2）参照 11-7 题解法，地面上的观察者以地面为 S 系，车厢为 S′系，根据洛伦兹收缩效应，他观察到车长

$$L'=L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

光信号由 A 到 B 所用的时间

$$\Delta t_1 = \frac{L'}{c-v} = \frac{L}{c}\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

光信号由 B 到 A 所用的时间

$$\Delta t_2 = \frac{L'}{c+v}$$

共需时间

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{2L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

11-18. 一艘静长为 90 m 的飞船以速度 $v=0.8c$ 飞行。当飞船的尾部经过地面上某信号站时，该信号站发出一光信号。

（1）当光信号到达飞船头部时，飞船头部离地面信号站的距离为多远？

（2）按地面上的时间，信号从信号站发出共需多少时间 Δt 才能到达飞船头部？

解：以地面信号站为 S 系，运动的飞船的长度为

$$L' = L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 54 \text{ m}$$

当光信号到达飞船的头部时，

$$0.8c\Delta t + L' = c\Delta t,\ \Delta t = 9\times10^{-7} \text{ s}$$

此时飞船头部距地面信号站

$$x = c\Delta t = 270 \text{ m}$$

11-19. 三艘飞船 A、B、C 沿同一直线飞行。B 船上的观察者发现，A、C 两船以 $v=0.7c$ 的相同速率远离 B 船。

（1）求 A 船上的观察者观测到的 B、C 两船的速率；

（2）若 B 船相对地面的飞行速率为 $v_B=0.9c$，求 A、C 两船相对地面的飞行速率。

解：（1）以 B 船为 S 系，A 船为 S′系，A 船相对 B 船的运动方向为正方向，以 B、C 船分别为研究对象，分别应用相对论速度变换。

对 B 船：$u'_{xB} = \dfrac{u_{xB}-v_{A\to B}}{1-\dfrac{v_{A\to B}}{c^2}u_{xB}} = \dfrac{0-0.7c}{1-\dfrac{0.7c}{c^2}\cdot 0} = -0.7c$

对 C 船：$u'_{xC} = \dfrac{u_{xC}-v_{A\to B}}{1-\dfrac{v_{A\to B}}{c^2}u_{xC}} = \dfrac{-0.7c-0.7c}{1-\dfrac{0.7c}{c^2}(-0.7c)} = -0.94c$

即 A 船上的观察者观测到的 B、C 两船的速率分别为 $-0.7c$ 和 $-0.94c$。

(2) 以地面为 S 系,B 船为 S′系,A、C 两船为研究对象,根据相对论速度变换有

对 A 船:

$$u_{xA}=\frac{u'_{xA}+v_B}{1+\frac{v_B}{c^2}u'_{xA}}=\frac{0.7c+0.9c}{1+\frac{0.9c}{c^2}\cdot 0.7c}=0.98c$$

对 C 船:

$$u_{xC}=\frac{u'_{xC}+v_B}{1+\frac{v_B}{c^2}u'_{xC}}=\frac{-0.7c+0.9c}{1+\frac{0.9c}{c^2}(-0.7c)}=0.54c$$

即地面上的观察者观测到的 A、C 两船的速率分别为 $0.98c$ 和 $0.54c$。

11-20. 在实验室里测得一根沿 x 方向运动的棒与 x 轴的夹角 $\theta_1=45°$。在相对实验室参考系以 $v=0.6c$ 的速度沿 x 方向运动的另一参考系 S′系中,测得此夹角 $\theta'=35°$。

(1) 求棒相对实验室参考系的运动速度;

(2) 棒相对 S′系的运动速度为多大?

(3) 在棒静止的参考系 S″中,棒与 x″轴的夹角 θ″为多大?

解:(1)、(2)以实验室为 S 系,在相对实验室参考系以 $v=0.6c$ 的速度沿 x 方向运动的另一参考系 S′系为动系,以棒为研究对象。设棒的静止长度为 a,在竖直方向上的投影为 H,在水平方向上的投影为 L,相对实验室的运动速度为 u_x。由相对论速度变换公式可得

$$u'_x=\frac{u_x-v}{1-\frac{v}{c^2}u_x}$$

棒在垂直方向上的投影 H 不受参考系运动速度的影响,棒在水平方向有洛伦兹收缩。因此,棒在 S 和 S′系下的运动方向和垂直运动方向上的长度关系满足下式

$$L\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}}=H\cot 45°,\ L\sqrt{1-\frac{u'^2_x}{c^2}}=H\cot 35°$$

整理上面的关系式可有

$$\left(\frac{\cot 45°}{\cot 35°}\right)^2=\frac{c^2-u_x^2}{c^2-u'^2_x}$$

结合上述各式解得

$$u_x=0.73c,u'_x=0.23c$$

分别为棒相对实验室参考系和 S′系的运动速度。

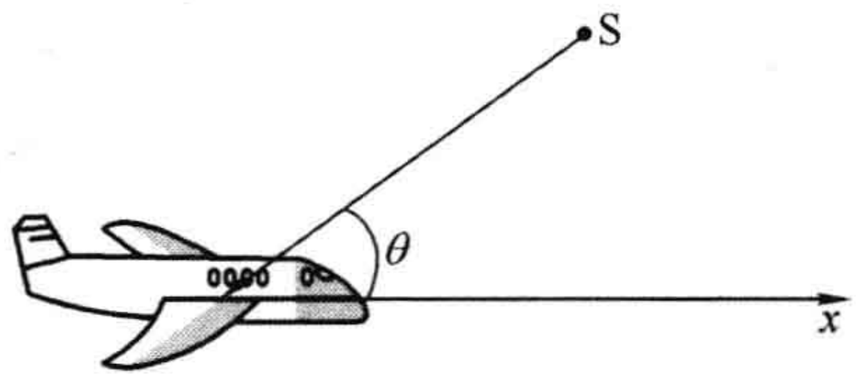
（3）在实验室 S 系和相对棒静止的 S″系中，依据上述运动方向和垂直运动方向上的长度关系得

$$H\cot\theta''\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}}=H\cot 45°$$

解得

$$\theta''=34.2°$$

11-21. 一航天飞机沿 x 方向飞行，接收到一颗恒星发出的光信号。在恒星静止的参考系中，飞机的飞行速度为 v，恒星发出光信号的方向与飞机的轴成 θ 角，如习题 11-21 图所示。



习题 11-21 图

（1）在飞机静止的参考系中此角 θ' 为多大？

（2）若飞机的前端有一半球形的观察室，飞船上的人能看到所有 $\theta'<\frac{\pi}{2}$ 的恒星。试证明：若 $v\to c$，则飞机上的人几乎能看到所有的恒星。

解：（1）由洛伦兹速度变换

$$u'_x=\frac{u_x-v}{1-\frac{v}{c^2}u_x}$$

依据题意

$$-c\cos\theta'=\frac{-c\cos\theta-v}{1-\frac{v}{c^2}(-c\cos\theta)}$$

解得

$$\theta'=\arccos\left[\frac{\cos\theta+v/c}{1+\frac{v}{c}\cos\theta}\right]$$

（2）根据洛伦兹变换

$$u_x=\frac{u'_x+v}{1+\frac{v}{c^2}u'_x}$$

依据题意

$$-c\cos\theta=\frac{-c\cos\theta'+v}{1+\frac{v}{c^2}(-c\cos\theta')}$$

即

$$\theta=\arccos\left(\frac{\cos\theta'-v/c}{1-\frac{v}{c}\cos\theta'}\right)$$

当 $v\to c$ 时，

$$\theta=\lim_{\substack{v\to c\\ \theta'\to-\frac{\pi}{2}}}\arccos\left[\frac{\cos\theta'-v/c}{1-\frac{v}{c}\cos\theta'}\right]=\arccos(-1)=-\pi$$

$$\theta=\lim_{\substack{v\to c\\ \theta'\to\frac{\pi}{2}}}\arccos\left[\frac{\cos\theta'-v/c}{1-\frac{v}{c}\cos\theta'}\right]=\arccos(-1)=\pi$$

即飞机上 θ' 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的视野范围内光线，对应恒星系中 $[-\pi,\pi]$ 的光线，因此飞机上的人看到了所有的恒星。

11-22. 光在介质中的传播速率 $c_n=\frac{c}{n}$，这里 n 是介质的折射率。设光在流动的水中传播，水的流速为 v，折射率为 n_0，在水静止的参考系中，光沿水流方向的传播速度为 $c'_n=\frac{c}{n_0}$。求在实验室参考系中测得的该光速 c_n。

解：以实验室为 S 系，水为 S′系，S′系相对 S 系速度为 $\pm v$，$u'_x=c'_n=\frac{c}{n_0}$，因此实验室参考系中测得的光速为

$$c_n=u_x=\frac{u'_x\pm v}{1\pm\frac{v}{c^2}u'_x}=\frac{\frac{c}{n_0}\pm v}{1\pm\frac{v}{c^2}\cdot\frac{c}{n_0}}=\frac{\frac{c}{n_0}\pm v}{1\pm\frac{v}{cn_0}}=\frac{c}{n_0}\left(\frac{1\pm\frac{n_0v}{c}}{1\pm\frac{v}{n_0c}}\right)$$

$$=\frac{c}{n_0}\left(1\pm\frac{n_0v}{c}\mp\frac{v}{n_0c}\mp\frac{v^2}{c^2}\mp\cdots\right)$$

考虑到 $v\ll c$，可忽略 $\frac{v^2}{c^2}$ 及更高阶小量，则

$$c_n\approx\frac{c}{n_0}\left(1\pm\frac{n_0v}{c}\mp\frac{v}{n_0c}\right)=\frac{c}{n_0}\pm v\left(1-\frac{1}{n_0^2}\right)$$

11-23. 一艘火箭飞船以 $v=0.8c$ 的速度飞经地球，飞船和地球上的观察者

一致同意该事件发生在中午 12:00。

(1) 按照火箭飞船上的时钟读数,该飞船于 12:30 飞经一个行星际宇航站,该站相对地球固定,其时钟指示地球时间。试问这一事件在该站什么时间发生?

(2) 在地球坐标上该站离地球多远?

(3) 在飞船时间 12:30(即飞船飞经该宇航站时),飞船用无线电向地球发回报告。试问按地球时间,地球何时收到信号?

(4) 如果地面站立即回答,试问按飞船时间,飞船何时接到答复?

解:(1) 设飞船经地球时间 Δt 到达宇航站。

$$\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=50\ \text{min}$$

所以这一事件发生在该站的 12:50。

(2) 设该站距离地球 L_1,则

$$L_1=v\Delta t_1=0.8c\times 50\times 60\ \text{s}=7.2\times 10^{11}\ \text{m}$$

(3) 设无线电到达地球所需时间 Δt_1(地球时间)

$$\Delta t_1=\frac{L_1}{c}=2\ 400\ \text{s}=40\ \text{min}$$

也就是说地球在 13:30 收到信号。

(4) 以地球时间计算,从飞船发射信号到地球接收信号过程中,所用时间为

$$\Delta t_1=\frac{L_1}{c}=40\ \text{min}$$

此时间内,飞船运行的距离为

$$L_2=v\Delta t_1=0.8c\times 40\times 60\ \text{s}=5.76\times 10^{11}\ \text{m}$$

仍以地球时间计算,设地球从回答信号开始到飞船接收信号所用时间为 Δt_2,则飞船在此时间内运行的距离为

$$L_3=v\Delta t_2,\ \text{且}\ c\Delta t_2=L_1+L_2+L_3$$

因此,从地球的时间计算,从飞船发射信号到飞船接收信号,总时间为

$$\Delta t_3=\Delta t_1+\Delta t_2$$

转换为飞船时间为

$$\Delta t_3=\frac{\Delta t'_3+\frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

飞船发出信号到飞船接收信号,对于飞船来说是位于同一地点的两个事件,因此上式中的 $\Delta x'=0$。以飞船的时间计算,从飞船发射信号到飞船接收信号,

总计时间为

$$\Delta t'_3 = \Delta t_3 \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

联立解得

$$\Delta t'_3 = 4\ \mathrm{h}$$

即飞船在 16:30 接收到光信号。

11-24. 一宇航员乘坐宇宙飞船去星际航行。如果他从静止开始离开地球，在他的瞬间静止参考系(即与某一瞬间该飞船相对地球运动速度相同的惯性系，不同的时刻对应不同的惯性系)中持续以 $g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$ 的加速度做加速运动。

(1) 在地球时间 t 时，他已经飞过了多长的距离？

(2) 在他的速率达到 $\frac{1}{2}c$ 之前，他已经飞行了多长时间？

解： 以地球为 S 系，相对飞船静止的参考系为 S′系，设 S′系相对 S 系的速度为 v，以飞船为研究对象，则 $u'_x=0$，$a'_x=g$，由狭义相对论的加速度变换公式可得飞船相对地球的加速度为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=a_x=\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}{\left(1+\frac{vu'_x}{c^2}\right)^3}a'_x=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}g$$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}=g\,\mathrm{d}t$$

积分得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v=\frac{gt}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}}$$

再次积分得

$$x=\frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}-1\right)$$

$$v=\frac{gt}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}}=\frac{1}{2}c$$

解得时间 t 为 6.8 个月。

11-25. 氢原子发出的一条光谱线 H_δ 的波长 $\lambda=0.410\ 1\times10^{-6}\ \mathrm{m}$。在极隧射线管中，氢原子的速率可达 $v=5\times10^5\ \mathrm{m/s}$。当氢原子以此速率向着观察者飞行

时，此谱线的波长将增大还是减小？波长将改变多少？已知光速 $c=3\times10^8$ m/s。

解：当氢原子以速率 v 向着观察者飞行时，由光的多普勒效应可知 H_δ 的频率变为

$$\nu'=\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\cdot\nu$$

此时波长变为

$$\lambda'=\frac{c}{\nu'}=\frac{\lambda\nu}{\nu'}=\frac{\sqrt{c-v}}{\sqrt{c+v}}\lambda$$

所以波长减小了。波长的改变量为

$$\Delta\lambda=\lambda-\lambda'=\lambda-\frac{\sqrt{c-v}}{\sqrt{c+v}}\lambda=0.68\times10^{-9}\ \text{m}$$

11-26. 对遥远星系发来的光所作的光谱分析表明，光的谱线非常明显地移向可见光谱的红端，这可解释作为光源的这些星系正向远离地球的方向退行而引起的多普勒效应，故称退行红移。比如钾光谱中有一对容易辨认的吸收线（K线和H线），其谱线的波长在 395.0 nm 附近。而来自牧夫星座某个星云的光中，我们在波长为 447.0 nm 处发现了这两条谱线。试求该星云的退行速度。

解：设星云的退行速度为 v，$\lambda=395.0$ nm，$\lambda'=447.0$ nm，由光的多普勒效应可知，（K线与H线）频率变为

$$\nu'=\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\cdot\nu$$

即

$$\frac{c}{\lambda'}=\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\cdot\frac{c}{\lambda}$$

则

$$\lambda'=\frac{\sqrt{c+v}}{\sqrt{c-v}}\lambda$$

解得星云的退行速度

$$v=\frac{\lambda'^2-\lambda^2}{\lambda'^2+\lambda^2}c=\frac{447.0^2-395.0^2}{447.0^2+395.0^2}c=0.123c$$

11-27. 当一光源以速率 v_1 向地球靠近时，在地球静止系S中的人A看到光源发出的是绿光（$\lambda_1=500.00$ nm），而在相对地球以速率 v_2 运动（与光源的运动沿同一直线）的参考系S′中的人B看到的却是红光（$\lambda_2=600.00$ nm）。当该光源以相同的速率 v_1 远离地球时，A看到的是红光（$\lambda_2=600.00$ nm）。

（1）求 v_1、v_2 的值；

（2）当光源以 v_1 远离地球时，B看到光的波长为多大？

解:(1) 以光源的运动方向为正方向,设光源相对 S′系的速度为 v'_1,由洛伦兹速度变换得

$$v'_1=\frac{v_1-v_2}{\sqrt{1-\frac{v_2}{c^2}v_1}}$$

设 λ 为相对光源静止的参考系中的观察者观察的波长,依据多普勒效应,在 S 系中光源向着地球运动时观察的波长

$$\lambda_1=\frac{\sqrt{c-v_1}}{\sqrt{c+v_1}}\lambda$$

在 S′参考系中观察的波长

$$\lambda_2=\frac{\sqrt{c-v'_1}}{\sqrt{c+v'_1}}\lambda$$

在 S 系中光源远离地球运动时观察的波长

$$\lambda_2=\frac{\sqrt{c+v_1}}{\sqrt{c-v_1}}\lambda$$

由上述公式联立解得

$$v_1=\frac{c}{11}\approx 0.09c, v_2=0.18c, \lambda=547.72\ \text{nm}$$

(2) 仍然选择光源向着地球运动的方向为正方向,设光源相对 S′系的速度为 v''_1,观察到的波长为 λ″。由洛伦兹速度变换得

$$v''_1=\frac{-v_1-v_2}{\sqrt{1-\frac{v_2}{c^2}(-v_1)}}$$

由多普勒效应得

$$\lambda''=\frac{\sqrt{c-v''_1}}{\sqrt{c+v''_1}}\lambda$$

解得

$$\lambda''=720\ \text{nm}$$

11-28. 半人马座 α 星与地球相距 4.3 l. y.(光年),两个孪生兄弟中的一个 A 乘坐速度为 0.8c 的宇宙飞船去该星旅行。他在往程和返程途中每隔 0.01 a 的时间(飞船静止参考系的时间)发出一个无线电信号。另一个留在地球上的孪生兄弟 B 也在相应过程中每隔 0.01 a 的时间(地球静止参考系的时间)发出一个无线电信号。

(1) 在 A 到达该星以前,B 收到多少个 A 发出的信号?

（2）在 A 到达该星以前，A 收到多少个 B 发出的信号？

（3）A 和 B 各自共收到多少个从对方发出的信号？

（4）当 A 返回地球时，A 比 B 年轻了几岁？试证明两孪生兄弟都同意此观点。

解：（1）在 B 看来，A 到达 α 星需用时间

$$T_{\mathrm{B}}=\frac{4.3\ \mathrm{l.y.}}{0.8c}=5.375\ \mathrm{a}$$

B 认为 A 发射脉冲的时间间隔

$$\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\left(\frac{0.8c}{c}\right)^2}}=\frac{1}{60}\ \mathrm{a}$$

B 认为 A 到达星体时发射的总的脉冲数为

$$n'_{1\mathrm{A}}=\frac{T_{\mathrm{B}}}{\Delta t}=322.5$$

由于脉冲的传播需要时间，因此这些脉冲并没有全部被 B 接收到。设 A 到达星体之前，A 在某个位置（距 B 的距离为 $n_{\mathrm{A}}\Delta tv$）时发射第 n_{A} 个脉冲，该脉冲刚好传到 B 时，A 刚好到达星体，则 n_{A} 即为 B 收到的脉冲个数。A 发射第 n_{A} 个脉冲时，A 距离星体的距离为 $l_0-n_{\mathrm{A}}\Delta tv$。因此，从 A 发射的第 n_{A} 个脉冲为计时起点，第 n_{A} 个脉冲传到 B，和 A 到达星体二者运行时间相同，即

$$\frac{n_{\mathrm{A}}\Delta tv}{c}=\frac{l_0-n_{\mathrm{A}}\Delta tv}{v}$$

解得

$$n_{\mathrm{A}}=179.17$$

（2）在 A 看来，旅行的长度

$$l_{\mathrm{A}}=l_0\sqrt{1-\left(\frac{0.8c}{c}\right)^2}=2.58\ \mathrm{l.y.}$$

A 认为 B 发射脉冲的时间间隔

$$\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\left(\frac{0.8c}{c}\right)^2}}=\frac{1}{60}\ \mathrm{a}$$

该星体到达 A 时用时

$$T_{\mathrm{A}}=\frac{l_{\mathrm{A}}}{0.8c}=3.225\ \mathrm{a}$$

B 发射的总脉冲数

$$n'_{1\mathrm{B}}=\frac{T_{\mathrm{A}}}{\Delta t}=193.5$$

同(1)分析相同,由于脉冲的传播需要时间,因此这些脉冲并没有全部被 A 接收到。设该星体到达 A 之前,B 发射的第 n_B 个脉冲(距离 A 的距离为 $n_B\Delta tv$)刚好传到 A 时,该星体刚好到达 A,则 n_B 即为 A 收到的脉冲个数。B 发射第 n_B 个脉冲时,星体距离 A 的距离为 $l_A-n_B\Delta tv$。从 B 发射第 n_B 个脉冲为计时起点,第 n_B 个脉冲传到 A,和星体到达 A,二者运行时间相同,即

$$\frac{n_B\Delta tv}{c}=\frac{l_A-n_B\Delta tv}{v}$$

解得

$$n_B=107.5$$

(3) 在 B 看来,A 的旅行时间为

$$T_{\text{地球静止}}=\frac{2l_0}{0.8c}=10.75\ \text{a}$$

B 收到的信号总数为

$$n_B=\frac{10.75}{\frac{1}{60}}=645$$

在 A 看来,去时所用的时间为

$$T_{\text{飞船静止1}}=\frac{l_0\sqrt{1-\left(\frac{0.8c}{c}\right)^2}}{0.8}=3.225\ \text{a}$$

收到的信号数为

$$n'_1=\frac{3.225}{\frac{1}{60}}=193.5$$

在 A 返程时,A 不再是参考系,参考系仍然在以 $0.8c$ 的速度方向不变的运动下去. A 成为了一个研究对象. 即地球为 S 系,参考系 S′在以 $v=0.8c$ 的速度运动. 此时飞船相对于 S 系的速度为 $u=-0.8c$. 飞船相对于 S′系的速度变成

$$u'=\frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}=-\frac{40}{41}c$$

对于 S′系而言,飞船和地球在同方向运动,飞船在追赶地球,飞船和地球相遇的时间也就是在 S′系看来飞船的返程时间

$$T'_2=\frac{l_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{\frac{40}{41}c-0.8c}=14.691\ 7\ \text{a}$$

这个时间在飞船 A 看来为

$$T_{\text{飞船静止2}} = T'_2\sqrt{1-\left(\frac{u'}{c}\right)^2} = 3.225\ \text{a}$$

在 S′系中认为地球上的 0.01 a 为

$$\Delta t'_1 = \left(0.01\Big/\sqrt{1-\frac{0.8c}{c}}\right)\ \text{a} = \frac{1}{60}\ \text{a}$$

这个时间在飞船上看来是

$$\Delta t'_2 = \Delta t'_1\sqrt{1-\left(\frac{u'}{c}\right)^2} = 0.003\ 7\ \text{a}$$

A 返回时接收到的脉冲数

$$n'_2 = \frac{T_{\text{飞船静止2}}}{\Delta t'_2} = \frac{3.225}{0.003\ 7} = 871.6$$

A 收到的总的脉冲数为

$$n' = n'_1 + n'_2 = 1\ 065$$

（4）当 A 返回地球时，在 B 看来，地球上的静止时钟记录的时间为

$$T_{\text{地球静止}} = \frac{2l_0}{0.8c} = 10.75\ \text{a}$$

飞船上的静止时间为

$$T_{\text{飞船运动}} = T_{\text{地球静止}}\sqrt{1-0.8^2} = 6.45\ \text{a}$$

也就是当 A 返回的时候，他比 B 年轻了 4.3 a。

在 A 看来，地球上运动的时钟记录的时间为

A 去时所用的时间

$$T_{\text{地球运动1}} = T_{\text{飞船静止1}}\sqrt{1-\left(\frac{0.8c}{c}\right)^2} = 1.935\ \text{a}$$

返回用去的时间

$$T_{\text{地球运动2}} = T'_2\sqrt{1-\left(\frac{0.8c}{c}\right)^2} = 8.815\ \text{a}$$

那么 A 看地球上所记录的时间应为

$$T_{\text{地球运动}} = T_{\text{地球运动1}} + T_{\text{地球运动2}} = 10.75\ \text{a}$$

飞船上的静止时间为

$$T_{\text{飞船静止}} = T_{\text{飞船静止1}} + T_{\text{飞船静止2}} = 6.45\ \text{a}$$

即 A 认为自己比 B 年轻了 4.3 a。

11-29. 一粒子的动能等于静能的一半，试求其运动速度。

解：由题意可知

$$E_k = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - m_0c^2 = \frac{1}{2}m_0c^2$$

解得

$$v=2.2\times10^{8}\ \mathrm{m/s}$$

11-30. 一沿 x 轴正方向运动的光子具有 400 MeV 的能量，另一沿 y 轴正方向运动的光子具有 300 MeV 的能量，若有一粒子的总能量和动量与此两光子的总能量和总动量相同。试求：

（1）该粒子的静质量 m_0；

（2）该粒子的运动速度 v。

解：由题意，对于光子

$$E=E_x+E_y=700\ \mathrm{MeV}$$

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_x+\boldsymbol{p}_y=\frac{E_x}{c}\boldsymbol{i}+\frac{E_y}{c}\boldsymbol{j}$$

$$p=\sqrt{p_x^2+p_y^2}=\frac{500}{c}(\mathrm{MeV})$$

对于粒子

$$E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=700\ \mathrm{MeV}$$

$$p=\frac{m_0v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{500}{c}(\ \mathrm{MeV})$$

联立解得

$$m_0=\frac{490}{c^2}(\mathrm{MeV}),\ v=\frac{5}{7}c$$

11-31. 在 S 参考系中观测得一粒子的总能量为 500 MeV，动量为400 MeV/c。而在 S′参考系中观测得该粒子的总能量为 583 MeV。试求：

（1）该粒子的静能；

（2）在 S′系中观测到的该粒子的动量；

（3）S′系相对 S 系的运动速度。

解：（1）总能量与动量的关系为

$$E^2=(pc)^2+(m_0c^2)^2$$

解得静能

$$m_0c^2=\sqrt{E^2-(pc)^2}=\sqrt{500^2-400^2}\ \mathrm{MeV}=300\ \mathrm{MeV}$$

（2）、（3）由 S′系中的动量与能量关系

$$(p'c)^2=E'^2-(m_0c^2)^2=(583^2-300^2)\ (\mathrm{MeV})^2$$

由动量的变换关系

$$p' = \frac{p - \frac{vE}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

联立解得

$$p' = 500\ \text{MeV}/c,\ v = -0.18c$$

11-32. 两静质量相同的粒子，一个处于静止状态，另一个的总能量为其静能的 4 倍。两粒子发生碰撞后黏合在一起，成为一复合粒子。求此复合粒子的静质量与碰撞前单个粒子的静质量之比。

解：依题意，对于非静止的粒子，能量与动量的关系为

$$E^2 = (4m_0c^2)^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$$

解得

$$p = \sqrt{15}\, m_0 c$$

设复合后粒子的质量和速度分别为 m、v，对于复合前后的粒子，由动量守恒得

$$\sqrt{15}\, m_0 c = \frac{m'v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

由能量守恒得

$$4m_0c^2 + m_0c^2 = \frac{m'c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

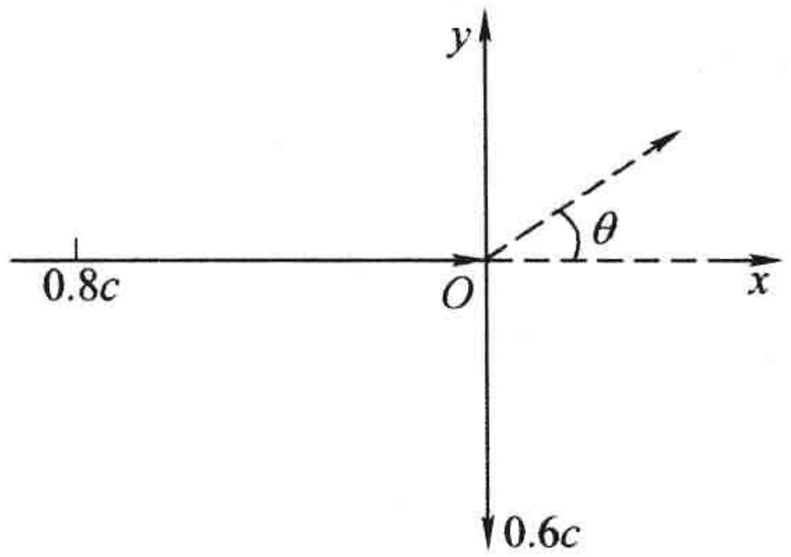
联立解得

$$\frac{m'}{m_0} = \sqrt{10}$$

11-33. 如习题 11-33 图所示，一个以 $0.8c$ 的速率沿 x 轴正方向运动的粒子衰变成两个静质量均为 m_0 的粒子，其中一个粒子以 $0.6c$ 的速率沿 $-y$ 方向运动。设衰变前粒子的静质量为 m'_0。试求

（1）另一个粒子的运动速率 u 和方向（用图中的 θ 表示）；

（2）m_0/m'_0 的值。



习题 11-33 图

解：以衰变前的单个粒子和衰变后的两个粒子为研究对象。

由能量守恒得

$$\frac{m'_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{0.8c}{c}\right)^2}}=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{0.6c}{c}\right)^2}}+\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad ①$$

由动量守恒得

x 轴方向：

$$\frac{m'_0\cdot 0.8c}{\sqrt{1-\left(\frac{0.8c}{c}\right)^2}}=\frac{m_0u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cos\theta \quad ②$$

y 轴方向：

$$0=\frac{m_0u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\sin\theta-\frac{m_0\cdot 0.6c}{\sqrt{1-\left(\frac{0.6c}{c}\right)^2}} \quad ③$$

由②式二次方+③式二次方并消去 θ 得

$$\left(\frac{m_0u}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}\right)^2=\left(\frac{m'_0\cdot 0.8c}{\sqrt{1-\left(\frac{0.8c}{c}\right)^2}}\right)^2+\left(\frac{m_0\cdot 0.6c}{\sqrt{1-\left(\frac{0.6c}{c}\right)^2}}\right)^2 \quad ④$$

由④和①式联立可得

$$u=0.984c$$

将 $u=0.984c$ 代入①式得

$$\frac{m_0}{m'_0}=0.24$$

再由②和③式联立可得

$$\tan\theta=0.135$$

11-34. 动能为 6×10^3 MeV 的质子与静止质子碰撞时，能形成质子-反质子对。若用动能相同的两质子对撞来实现此反应，试求其动能的最小值。已知质子的静能为 938 MeV。

解：运动质子的总能量

$$mc^2=E_k+m_0c^2=6\ 000\ \text{MeV}+938\ \text{MeV}=6\ 938\ \text{MeV}$$

由能量与动量的关系，知合并前运动质子的动量 p_0 为

$$p_0=\frac{\sqrt{(mc^2)^2-(m_0c^2)^2}}{c}$$

设合并后质子-反质子系统的质量为 m'，对应的静止质量为 m'_0，合并系统的动量为 p，在运动质子和静止质子的碰撞过程中，由能量守恒得

$$mc^2+m_0c^2=m'c^2$$

由动量守恒得

$$p=p_0=\frac{\sqrt{(mc^2)^2-(m_0c^2)^2}}{c}$$

由能量与动量关系知

$$(m'c^2)^2=(pc)^2+(m'_0c^2)^2$$

解得

$$m'_0c^2=3\ 843.9\ \text{MeV}$$

若用动能相同的两质子相碰获得质子-反质子对，两质子的最小动能 $E_{k\min}$ 对应质子-反质子的运动速度为零，即只有静能量。

由能量守恒

$$E_{k\min}+2m_0c^2=m'_0c^2$$

解得

$$E_{k\min}=1\ 967.9\ \text{MeV}$$

11-35. 设有一处于激发态的原子以速率 v 运动。当其发射一能量为 E' 的光子后衰变至其基态，并使原子处于静止状态，此时原子的静质量为 m_0。若激发态比基态能量高 E_0，试证明：

$$E'=E_0\left(1+\frac{E_0}{2m_0c^2}\right)$$

解：设激发态原子的静质量为 m'，对应基态原子的静止质量为 m_0，由能量守恒

$$m'c^2=m_0c^2+E_0$$

解得

$$m'=m_0+\frac{E_0}{c^2}$$

光子和原子系统发出光子前后动量守恒：

$$\frac{m'v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{E'}{c}$$

再由能量守恒

$$\frac{m'c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=E'+m_0c^2$$

解得

$$E'=E_0\left(1+\frac{E_0}{2m_0c^2}\right)$$

11-36. 太空火箭(包括燃料)的初始质量为 m'_0,从静止起飞,向后喷出的气体相对火箭的速度 u 为常量。当火箭相对地球速度为 v 时,其静止质量为 m_0,试求 m_0/m'_0的值与速度 v 之间的关系。设此过程中忽略其他天体的引力影响。

解:依据题意,由洛伦兹速度变换可知,当火箭的速度为 v 时,向后喷出的气体相对地球的速度为

$$v_{气}=\frac{u'_x+v}{1+\frac{v}{c^2}u'_x}=\frac{-u+v}{1-\frac{vu}{c^2}}$$

选取 t 时刻火箭主体(包括燃料)为研究对象,以 t 和 $t+\mathrm{d}t$ 时刻为初末态。设 t 时刻火箭主体的静质量为 m_0,则 $t+\mathrm{d}t$ 时刻,火箭主体和喷射燃料的静质量可以分别表示为 $m_0+\mathrm{d}m_0$、$\mathrm{d}m'_0$。如果不考虑相对论效应,则 $\mathrm{d}m_0=-\mathrm{d}m'_0$,当考虑相对论效应时(本题),该式不成立。设 $\beta=\frac{v}{c}$,针对 t 和 $t+\mathrm{d}t$ 时刻的研究对象有

能量守恒:

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{(m_0+\mathrm{d}m_0)c^2}{\sqrt{1-\frac{(v+\mathrm{d}v)^2}{c^2}}}+\frac{\mathrm{d}m'_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v_{气}^2}{c^2}}} \qquad ①$$

动量守恒:

$$\frac{m_0v}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{m_0+\mathrm{d}m_0}{\sqrt{1-\frac{(v+\mathrm{d}v)^2}{c^2}}}(v+\mathrm{d}v)+\frac{\mathrm{d}m'_0}{\sqrt{1-\frac{v_{气}^2}{c^2}}}v_{气} \qquad ②$$

①式代入②式整理得

$$\frac{m_0(v-v_{气})}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{(m_0+\mathrm{d}m_0)}{\sqrt{1-\beta^2-\frac{2v\mathrm{d}v}{c^2}}}(v-v_{气}+\mathrm{d}v) \qquad ③$$

对③式进一步整理得

$$m_0(v-v_{气})=\frac{m_0+\mathrm{d}m_0}{\sqrt{1-\frac{2v\mathrm{d}v}{c^2(1-\beta^2)}}}(v-v_{气}+\mathrm{d}v) \qquad ④$$

对④式的分母以 $\mathrm{d}v$ 作泰勒一级展开得

$$m_0(v-v_{气})=(m_0+\mathrm{d}m_0)\left(1+\frac{v\mathrm{d}v}{c^2(1-\beta^2)}\right)(v-v_{气}+\mathrm{d}v) \qquad ⑤$$

略去⑤式中的二阶、三阶小量整理得

$$m_0 \mathrm{d}v = (\beta^2 - 1)\, u \mathrm{d}m_0 \qquad ⑥$$

对⑥式积分：

$$\ln \frac{m_0}{m'_0} = \frac{c}{2u} \ln \frac{1-\beta}{1+\beta}$$

解得

$$\frac{m_0}{m'_0} = \left(\frac{c-v}{c+v} \right)^{\frac{c}{2u}} \qquad ⑦$$

11-37. 光子火箭从地球起飞时初始静质量（包括燃料）为 m'_0，向相距为 $d = 1.8 \times 10^6$ l. y. 的仙女座星云飞行。要求火箭在火箭时间 25 a 后到达目的地。设不计其他星球的引力影响。

（1）忽略火箭加速和减速所需的时间，求火箭所需的速度；

（2）设到达目的地时火箭的静质量为 m_0，求 m'_0/m_0 的最小值。

解：（1）火箭加速和减速所需时间可略，故火箭以恒定速度 v 飞跃全程，走完全程所需火箭时间为 $\tau_0 = 25$ a。利用时间延缓公式，相应的地球时间为

$$\tau = \frac{d}{v} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

解得

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + \dfrac{c^2 \tau_0^2}{d^2}}} \approx c \left(1 - \frac{c^2 \tau_0^2}{2d^2} \right) = c(1 - 0.96 \times 10^{-10})$$

可见，火箭几乎以光速飞行。

（2）火箭从静止开始加速至上述速度 v，它的静质量从 m'_0 变为 m，然后做匀速运动，火箭质量不变，最后减速运动至速度为零，减速阶段火箭的静质量从 m 变为 m_0。加速阶段的质量变化可应用 11-36 题所得结果。因光子火箭喷射的是光子，以光速 c 离开火箭，即 $u = c$，于是由 11-36 题⑦式结果可得

$$\frac{m}{m'_0} = \left(\frac{c-v}{c+v} \right)^{1/2} \qquad ①$$

对于减速阶段，火箭的静质量从 m 变为 m_0，重复 11-36 题的推导过程，并注意到火箭对速度的积分是从 v 到零的过程，火箭向前喷射燃料，即以 $u = -c$ 代替，最终整理得

$$\frac{m_0}{m} = \left(\frac{c-v}{c+v} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad ②$$

综合①、②两式得

$$\frac{m'_0}{m_0} = \frac{c+v}{c-v} = \frac{2 - 0.96 \times 10^{-10}}{0.96 \times 10^{-10}} \approx 2 \times 10^{10}$$

11-38. 一个 α 粒子以速率 $v_1=\frac{4}{5}c$ 进入厚度 $d=0.35$ m 的水泥防护墙，当此粒子从墙的另一面穿出时，速率减小为 $v_2=\frac{5}{13}c$。已知 α 粒子的静质量 $m_0=\frac{2}{3}\times10^{-26}$ kg。设墙对粒子的作用力是常量。

（1）在墙静止的参考系 S 中作用力 F_0 的值为多大？

（2）在以速率 v_1 沿粒子运动方向相对墙运动的参考系 S′中作用力 F'_0 的值为多大？

（3）在 S 与 S′系中粒子穿过墙各需多长时间？

解：（1）由能量守恒

$$-F_0 d=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}}-\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}}$$

得

$$F_0=1.0\times10^{-9}\ \text{N}$$

（2）在 S′系中墙的厚度为 d'，由洛伦兹收缩得

$$d'=d\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}=\frac{3}{5}d$$

在 S′系中

$$v'_1=0,\ v'_2=\frac{\frac{5}{13}c-\frac{4}{5}c}{1-\frac{1}{c^2}\frac{4}{13}c^2}=-\frac{3}{5}c$$

在 S′系中，对粒子应用动能定理

$$-F'_0 d'=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}}-m_0c^2=\frac{1}{4}m_0c^2$$

解得

$$F'_0=-0.7\times10^{-9}\ \text{N}$$

（3）由 S 系中的动量定理

$$-F_0 t=\frac{m_0\frac{5}{13}c}{\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}}-\frac{m_0\frac{4}{5}c}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}}$$

解得

$$t=1.83\times10^{-9}\ \mathrm{s}$$

由 S′系中的动量定理　$-F'_0t'=p'_2-p'_1$

其中

$$p'_1=0,p'_2=\frac{m_0v'_2}{\sqrt{1-\left(\frac{v'_2}{c}\right)^2}}=-\frac{3}{4}m_0c$$

解得

$$t'=2.1\times10^{-9}\ \mathrm{s}$$

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话　(010)58581897　58582371　58581879

反盗版举报传真　(010)82086060

反盗版举报邮箱　dd@ hep. com. cn

通信地址　北京市西城区德外大街 4 号　高等教育出版社法务部

邮政编码　100120

力学课程推荐教材

● 978-704015201-2	新概念物理教程　力学（第二	
● 978-704036613-6	普通物理学教程　力学（第三版）	漆安慎等
● 978-704035532-1	力学（第二版）	张汉壮等
● 978-704028354-9	力学（第四版）上册	梁昆淼
● 978-704011084-5	力学（第二版）	郑永令
● 978-704010471-4	力学	卢民强等
● 978-704017770-1	普通物理学——力学（第一分册）（第三版）	梁绍荣等

ISBN 978-7-04-035531-4

9 787040 355314 >

定价 22.60 元