大王物理考研

力学（梁昆淼版）
习题分析与解答

大王物理教研团　编著

序　言

本习题指导主要配合梁昆淼教授所著《力学》（第四版上册）的学习而编写。

梁昆淼教授的《力学》在国内享有极高的声誉，是国内众多高校的力学本科教材。梁教授的力学在清楚讲解数学计算的同时，十分注重物理图像，能够让学生形成更加具体的物理模型。国内有一部分教材过于执着于数学的计算反而忽略了对物理模型的训练，而梁教授的书则是将大部分精力花在对物理模型的构建上。因此梁教授的《力学》是国内最适合物理学考研的力学教材。

梁教授的《力学》题量适中，是一本适合反复研究的经典题集。国内很多教材题目众多，每一章的题目动辄五六十道，但是难度又偏低，导致很多考生在训练的过程中耗费了大量时间在无意义的题目上，最终折戟沉沙。此外，很多同学在刷题的过程中，还往往意识不到这些问题。所以笔者极其不推荐这种量大还没有意义的刷题，最有效的刷题，永远是在精而不在多。

梁教授的《力学》难度足以应对国内的所有 985 高校的研究生试题，而且习题难度的选择恰到好处。一方面习题的难度足以让你掌握力学的所有知识点及其变化，另一方面又不会过于执着于物理之外的奇技淫巧。并且梁教授的习题集是各校各年考研命题的一个重要参考，历年真题中也反复出现过习题中的原题或改编题。

这是第一章习题的答案，本题集的答案完全免费，以任何手段买卖罪过无边！接下来几章的答案会在接下来的几个月的时间里陆续更新，同学们可以扫描下方二维码添加婷婷学姐微信领取！

——大王物理考研·教研团队



1.1 小球从竖直标尺的零点无初速地自由落下，用照相机拍摄小球下落情况. 在底片上，小球的路径呈现为从n_1毫米刻度到n_2毫米刻度的一段直线. 求拍摄时的曝光时间.

【解】设小球到达n_1处耗时t_1，n_2处耗时t_2

$$\frac{1}{2}gt_1^2 = n_1 \text{ mm}$$

$$\frac{1}{2}gt_2^2 = n_2 \text{ mm}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{2}{9.8\times10^3}}\left(\sqrt{n_2}-\sqrt{n_1}\right) \text{ s}$$

1.2 电车停在十字路口. 绿灯一亮，电车立刻以 2 m/s^2 的匀加速开动. 在其启动时恰有一卡车以 10 m/s 的匀速追上并驶过. 问电车将在何处追上卡车？

【解】电车与卡车运动距离相同

$$S = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$S = v_1 t$$

其中 $v_0 = 0 \text{ m/s}$　　$a = 2 \text{ m/s}^2$　　$v_1 = 10 \text{ m/s}$

解得

$$t = 10 \text{ s}$$

$$S = 100 \text{ m}$$

1.3 在刹车作用下，汽车通过某段 10 m 长度用了 2.2 s，而通过紧接的 10 m 长度所用时间延长为 3 s，设汽车速度的减慢是匀速的. 求汽车的加速度.

【解】汽车做匀减速运动

$$v_0 t_1 + \frac{1}{2}at_1^2 = s$$

$$v_0 t_2 + \frac{1}{2}at_2^2 = 2s$$

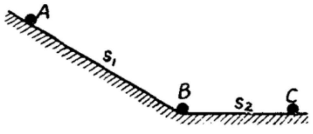
其中

$$t_1 = 2.2 \text{ s}　　t_2 = 5.2 \text{ s}　　s = 10 \text{ m}$$

解得

$$a = -0.47 \text{ m/s}^2$$

1.4 雪橇无初速度的从 *A* 点匀加速滑下斜坡 *AB*，随后沿水平面匀减速运动到 *C* 点停止. 已知 *AB* 长为 s_1，*BC* 长为 s_2，并且已知从 *A* 到 *C* 总共用时间 *T*. 求雪橇在斜坡上的加速度与在 *BC* 上的减速度.



题 1.4

【解】由于全程是匀变速运动，所以有下式.

$$\because \frac{1}{2}v_B T = s_1 + s_2$$

物理考研交流QQ群：861466923

$$\therefore v_B = \frac{2(s_1+s_2)}{T}$$

$$v_B^2 = 2a_1 s_1 = -2a_2 s_2$$

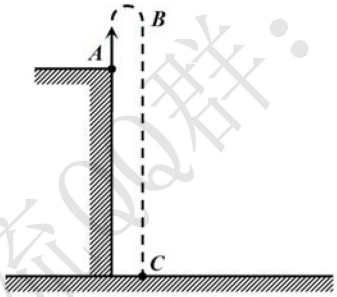
解得

$$a_1 = 2(s_1+s_2)^2/s_1T^2$$

$$a_2 = -2(s_1+s_2)^2/s_2T^2$$

1.5 在高出地面 14.7 m 的 *A* 处以初速 v_0=9.8 m/s 向上抛出一物体，物体上升到最高点 *B* 处然后落到地面 *C* 处，求物体达到最高点 *B* 的时间和距离 *AB*、落地时间和落地速度.

（i）取 *C* 为坐标原点，*x* 轴向上为正. （ii）取 *A* 为原点，*x* 轴向下为正.



【解】（i）取 *C* 为坐标原点，*x* 轴向上为正. 设到达 *B* 的时间为t_1，*AB* 垂直距离为s_1，落地时间为t_2.

$$0 = v_0 - gt_1 \qquad t_1 = v_0/g = 1\ \text{s}$$

$$s_1 = v_0 t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = 4.9\ \text{m}$$

$$v_c^2 - v_0^2 = -2g(-H)$$

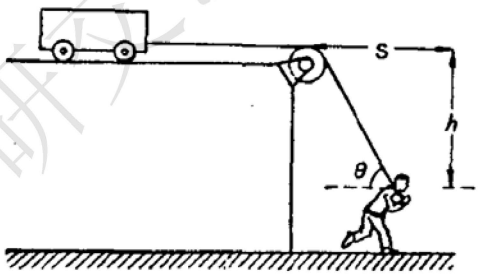
解得

$$v_c = -19.6\ \text{m/s}$$

$$t_2 = \frac{v_c}{g} + t_1 = 3\ \text{s}$$

（ii）标量与（i）相同，矢量与（i）取反即可.

1.6 一人用绳子拉着小车快速前进，小车位于高处绳端 *h* 的平台上. 人的速度 v_0 不变，求小车的速度与加速度.（可用人走过的路程 *s* 表出.）



【解】

$$s = s_0 + v_0 t$$

则人到定滑轮的距离为$x = \sqrt{s^2+h^2} = x_0 + vt$

v为小车速度

物理考研交流QQ群：861466923

$$v = \dot{x} = sv_0/\sqrt{s^2 + h^2}$$

$$a = \dot{v} = v_0^2 h^2/(s^2 + h^2)^{3/2}$$

1.7 路灯距地面高度为 h. 身高 l 的人以匀速v_0在路上行走. 求人影中头顶的移动速度，并求影长增长的速率.

【解】设人到路灯的水平距离为x，人影中头顶到路灯水平距离为a

$$x = v_0 t + x_0$$

根据比例关系

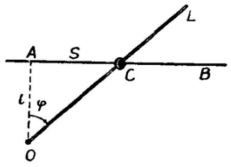
$$\frac{a - x}{a} = \frac{l}{h}$$

解得

$$a' = \frac{h}{h - l} v_0$$

$$(a - x)' = \frac{l}{h - l} v_0$$

1.8 细杆 OL 绕 O 点以匀角速ω转动，并推动小环 C 在固定的钢丝 AB 上滑动. 图中的 l 为已知，试利用φ或 s 表示出小环的速度与加速度。



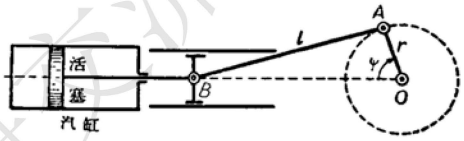
【解】根据几何关系

$$S = \tan\varphi \cdot l \qquad \varphi = \varphi_0 + \omega t$$

$$S' = \tan'\varphi \cdot \varphi' \cdot l = \omega l \sec^2\varphi$$

$$S'' = 2\omega^2 l \sec^2\varphi \tan\varphi$$

1.9 内燃机曲柄 OA 以匀角速度ω转动，通过连杆 AB 带动活塞在气缸中往返运动. 已知 OA=r，AB=l，试利用变角φ求活塞的速度。



【解】设$\angle ABO = \alpha$

则

$$\frac{r}{\sin\alpha} = \frac{l}{\sin\varphi}$$

$$\sin\alpha = r\sin\varphi/l$$

OB 距离$x = l\cos\alpha + r\cos\varphi = l\sqrt{1 - \sin^2\alpha} + r\cos\varphi$

$$\dot{x} = -r\omega\sin\varphi\left(1 + r\cos\varphi/\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}\right)$$

物理考研交流QQ群：861466923

1.10 物体在很深的矿井中下落时，其加速度正比于物体到地心的距离. 求物体无初速度下落深度 S 所需时间及当时的速度，若地球半径 R = 6400 km，S = 1000 m.

【解】由题可知

$$a = k(R - S)$$

当$S = 0$ 时,$a = g$

$$\therefore a = g(R - S)/R$$

令$R - S = x$为地心到物体的距离

则

$$-\ddot{x} = \frac{g}{R}x$$

解上述一元线性微分方程，根据初始条件$x_0 = R$，$\ddot{x}_0 = -g$

解得

$$x = R\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right)$$

$$\therefore S = R - R\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right) \quad (1)$$

$$t = \sqrt{R/g}\arccos[(R - S)/S]$$

$$\dot{S} = \sqrt{gR}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right) \quad (2)$$

结合(1)(2)

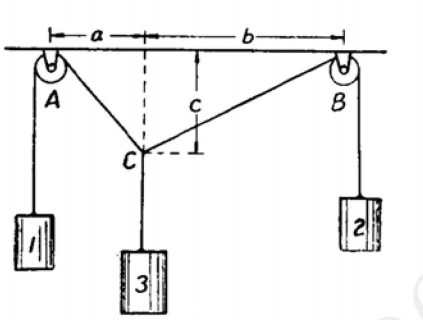
$$\left(\frac{R - S}{R}\right)^2 + \frac{\dot{S}^2}{g\mathrm{R}} = 1$$

解得

$$v = \dot{S} = \sqrt{(2 - S/R)Sg}$$

1.11 一根不可伸长的绳绕过 A、B 两个定滑轮，绳的两端分别悬挂着物体 1 与 2. 在绳上 C 点又悬挂物体 3. 三个物体都在竖直方向运动，已知物体 1 的速度 v_1，利用 a, b, c，求物体 2 与 3 的速度.

物理考研交流QQ群：861466923



【解】物体 1，2，3 沿绳子速度大小相同，设 AC 与垂直方向夹角α，BC 与垂直方向夹角为β.

则

$$-v_3\cos\alpha = v_1$$
$$-v_3\cos\beta = v_2$$

根据几何关系

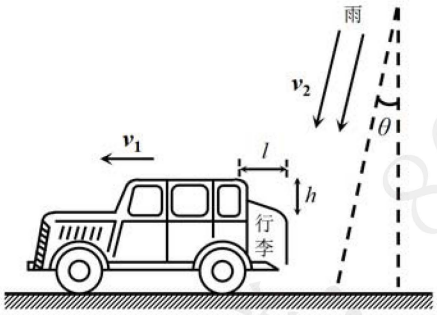
$$\cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}},\ \cos\beta = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

解得

$$v_2 = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}v_1,\ v_3 = -\sqrt{\frac{a^2+c^2}{c^2}}v_1$$

物理考研交流QQ群：861466923

2.1 汽车以速度 v_1 在雨中行驶. 雨滴落下的速度 v_2 偏于竖直方向之前 θ 角. 问车后的一卷行李是否被打湿？

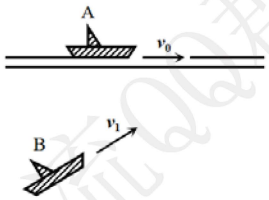


【解】以汽车为参考系，雨的速度为 $\vec{v}_2-\vec{v}_1$，分解为水平与垂直两个方向 $v_\perp=v_2\cos\theta$，$v_\parallel=v_1-v_2\sin\theta$.

$$\frac{v_\parallel}{v_\perp}=\frac{v_1-v_2\sin\theta}{v_2\cos\theta}\geqslant\frac{l}{h}\quad\text{不打湿}$$

$$\frac{v_\parallel}{v_\perp}=\frac{v_1-v_2\sin\theta}{v_2\cos\theta}<\frac{l}{h}\quad\text{打湿}$$

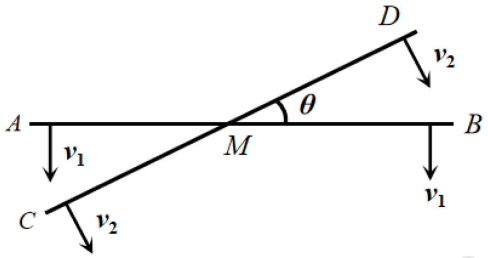
2.2 在宽广的海面上，舰只可以任意航行. A 舰以全速 v_0 沿既定的直线急驰. B 舰则以全速 v_1 急追 A 舰. 试作图表明 B 舰应向什么方向航行，才得以恰恰追及 A 舰.



【解】以 A 为参考系，B 的速度为 $\vec{v}_1-\vec{v}_0$，若此速度为方向沿 $\overrightarrow{AB}$ 方向，则可以恰好追上 A 舰。

2.3 细长棒 AB 与 CD 分别以垂直于自身的速度 v_1 与 v_2 移动. 求交点 M 的速度 v.

物理考研交流QQ群：861466923



【解】设 M 点的速度方向与 CD 夹角为 φ，则可列成下式

$$v\sin\varphi = v_2$$

$$v\sin(\varphi-\theta) = v_1$$

联立以上两式，解得

$$v = \sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\theta}/\sin\theta$$

2.4 求质点在各瞬时的坐标、速度或加速度，并求质点的轨道．已知

(i) $x = 15t^2, y = 4-20t^2$.

(ii) $x = a\cos\omega t, y = b\sin\omega t$.

(iii) $x = ae^{kt}, \dot{y} = -bke^{-kt}, y|_{t=0} = b$.

(iv) $\dot{x} = -a\omega\sin\omega t, x|_{t=0} = a, y = b\sin\omega t$.

(v) $x = 2\cos 3t, y = 2\sin 3t, \dot{z} = 4, z|_{t=0} = 0$.

其中a、b、ω、k均为正值常量.

【解】

(1) $\dot{x} = 30t \qquad \dot{y} = -40t$

$\ddot{x} = 30 \qquad \ddot{y} = -40$

消去参数 t，可得轨道为 $4x+3y-12=0$。

(2) $\dot{x} = -a\omega\sin\omega t \qquad \dot{y} = b\omega\cos\omega t$

$\ddot{x} = -a\omega^2\cos\omega t \qquad \ddot{y} = -b\omega^2\sin\omega t$

轨道为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

(3) $y = be^{-kt} \qquad \dot{x} = ake^{kt}$

$\ddot{x} = ak^2e^{kt} \qquad \ddot{y} = bk^2e^{-kt}$

轨道为 $xy = ab$

(4) 可以解得$x = a\cos\omega t$

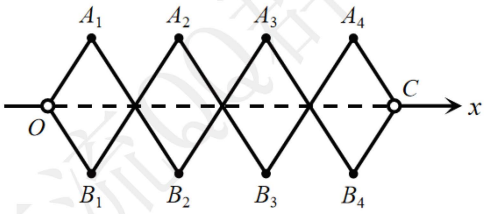
解同(2)

(5) $z = 4t$

$\dot{x} = -6\sin 3t \qquad \dot{y} = 6\cos 3t \qquad \dot{z} = 4$

$\ddot{x} = -18\cos 3t \qquad \ddot{y} = -18\sin 3t \qquad \ddot{z} = 0$

2.5 有一栅栏式结构，由长为 l 的杆OA_1、OB_1、CA_4、CB_4以及长为$2l$的杆A_1B_2、B_1A_2、A_2B_3、B_2A_3、A_3B_4、B_3A_4铰合而成. C 点由 O 出发沿 x 轴运动. 求A_1、A_2、A_3、A_4的轨迹.



【解】令

$$\angle A_1OC = \theta$$

则

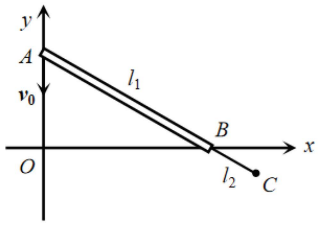
$$A_{ny} = l\sin\theta, A_{nx} = l\cos\theta + (n-1)2l\cos\theta$$

消去参数θ

$$A_n\text{轨迹为}\frac{x^2}{(2n-1)^2l^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1$$

2.6 椭圆规的 AB 杆上 A、B 两点分别沿Oy槽、Ox槽移动. 试证明杆上任意一点 C 的轨迹为椭圆.

如 A 以匀速v_0运动，求 B、C 的速度.



(在车床上可利用本题原理车制椭圆柱体. 不过，车刀 C 以及与刀架固连的 A 和 B 并不动. 相反，夹持工件而带有 xy 槽的夹具在 O 点通过连杆与 AB 的中点

物理考研交流QQ群：861466923

相连并绕后者旋转.)

【解】令

$$\angle ABO = \theta$$

对于 C 点

$$x = (l_1 + l_2)\cos\theta, \qquad y = -l_2\sin\theta$$

消参可得

$$\frac{x^2}{(l_1+l_2)^2} + \frac{y^2}{l_2^2} = 1$$

$$v_0 = \frac{d(l_1\sin\theta)}{dt} = l_1\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

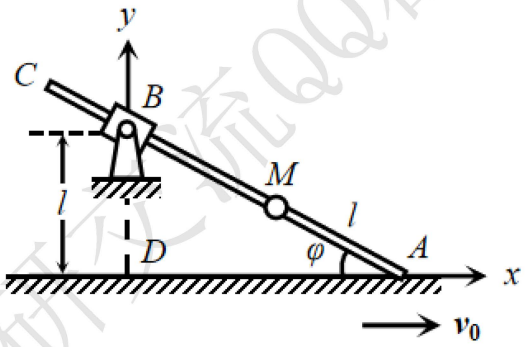
$$v_B = \frac{d(l_1\cos\theta)}{dt} = -l_1\sin\theta\cdot\frac{d\theta}{dt} = -\tan\theta\, v_0$$

同理

$$v_{Cx} = -v_0\tan\theta(l_1+l_2)/l_1$$

$$v_{Cy} = -v_0 l_2/l_1$$

2.7 细杆 AC 穿过套管，套管可绕通过 B 点垂直于图面的固定轴线转动. 杆的一端 A 以匀速 v_0 沿地面运动，$AM = BD = l$，求杆上 M 点的轨迹、速度、加速度. (可用φ表出.)



【解】以 D 为坐标原点，对于 M 有

$$x = \frac{l}{\tan\varphi} - l\cos\varphi = l\cos\varphi\left(\frac{1}{\sin\varphi} - 1\right)$$

$$y = l\sin\varphi$$

消去参数，可得轨道

$$(y-l)^2(y^2-l^2) + x^2y^2 = 0$$

$$v_0 = \dot{x}_A = \left(\frac{l}{\tan\varphi}\right)' = -\frac{l}{\sin^2\varphi}\cdot\dot{\varphi}$$

$$\therefore v_x = v_0(1-\sin^3\varphi) \qquad a_x = -3v_0\sin^2\varphi\cos\varphi\dot{\varphi}$$

$$v_y = -v_0\sin^2\varphi\cos\varphi \qquad a_y = v_0(\sin^3\varphi - 2\sin\varphi\cos^2\varphi)\dot{\varphi}$$

解得

$$v = v_0\sqrt{1-2\sin^3\varphi+\sin^4\varphi}$$

$$a = \frac{{v_0}^2\sin^3\varphi\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}{l}$$

2.8 求质点在各瞬时的坐标、速度、加速度，并求质点的轨道. 已知

(i) $\rho = a_1 t, \varphi = a_2/t.$

(ii) $\rho = \mathrm{e}^{a_1 t}, \dot{\varphi} = a_2, \varphi|_{t=0} = 0.$

(iii) $\dot{\varphi} =$ 常量ω_0, 速率$v =$ 常量$v_0, \rho|_{\varphi=0} = 0.$

(iv) 径向速度$v_\rho =$ 常量a_2, 掠面速度$\dot{S} = \frac{1}{2}a_1\rho.$

(v) 直角坐标$y = a_1 t$, 极角$\varphi = a_2 t.$

其中a_1、a_2均为正值常量.

【解】

（1） 消去参数 t，可以得到轨道为 $\rho\varphi = a_1 a_2$

$$\dot{\rho} = a_1 \qquad \dot{\varphi} = -a_2/t^2$$

$$\ddot{\rho} = 0 \qquad \ddot{\varphi} = 2a_2/t^3$$

$$v_\rho = \dot{\rho} = a_1 \qquad v_\varphi = \rho\dot{\varphi} = -a_2 a_1/t$$

$$v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2} = a_1\sqrt{a_2^2 + t^2}/t$$

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = -a_1 a_2^2/t^3 \qquad a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = 0$$

$$a = \sqrt{{a_\rho}^2 + {a_\varphi}^2} = a_1 a_2^2/t^3$$

（2）

$$\rho = e^{a_1 t}, \varphi = a_2 t$$

物理考研交流QQ群：861466923

消去参数 t，可得轨道$\rho = e^{a_1\varphi/a_2}$

$$\dot{\rho} = a_1 e^{a_1 t}, \qquad \dot{\varphi} = a_2$$

$$\ddot{\rho} = a_1^2 e^{a_1 t}, \qquad \ddot{\varphi} = 0$$

v、a 解法同（1）

$$v = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}\, e^{a_1 t}$$

$$a = ({a_1}^2 + {a_2}^2) e^{a_1 t}$$

（3）由 $\dot{\varphi} = \omega_0$ 可得 $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$

$$\because \dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2 = v_0^2$$

$$\therefore d\rho / \sqrt{v_0^2 - \rho^2\omega_0^2} = dt \text{且} \rho|_{\varphi=0} = 0$$

可得

$$\rho = (v_0/\omega_0)\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

轨道为

$$\rho = (v_0/\omega_0)\sin\varphi$$

（4）

$$\rho = a_2 t + \rho_0$$

掠面速度

$$\dot{S} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi} = \frac{1}{2}a_1\rho$$

$$\therefore \dot{\varphi} = a_1/(a_2 t + \rho_0), \qquad d\varphi = a_1/a_2\, (d\ln(1 + a_2 t/\rho_0))$$

$$\varphi = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)\ln(1 + a_2 t/\rho_0)$$

轨道$\rho = \rho_0 e^{a_2\varphi/a_1}$

（5）

$$\varphi = a_2 t \qquad \rho\sin\varphi = a_1 t \qquad \rho = a_1 t/\sin(a_2 t)$$

$$x = a_1 t\cot(a_2 t), \qquad y = a_1 t$$

消去参数 t，轨道$x = y\cot(a_2 y/a_1)$

2.9 细杆以匀角速 ω_0 绕固定端 O 转动，有一滑块从固定端 O 出发以匀速 v_0 沿杆滑动，求滑块的轨迹、速度、加速度.

物理考研交流QQ群：861466923

【解】

已知极坐标中速度与加速度可以表示为

$$v_p = \dot{\rho} \qquad a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2$$
$$v_\varphi = \rho\dot{\varphi} \qquad a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}$$

由题意可知

$$\dot{\rho} = v_0, \qquad \dot{\varphi} = \omega_0, \qquad \rho_0 = 0$$

即

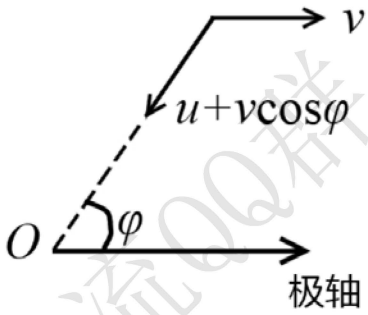
$$\rho = v_0 t, \qquad \varphi = \omega_0 t + \varphi_0$$

消去参数 t，可得轨道

$$\rho = v_0(\varphi - \varphi_0)/\omega_0$$

$$v_p = v_0, \qquad v_\varphi = \omega_0 v_0 t, \qquad a_\rho = -v_0\omega_0^2 t, \qquad a_\varphi = 2v_0\omega_0$$

2.10 在岸边固定地点收绳将河中小船拉回岸边，收绳的速率 u 不变. 求小船的轨迹. 设河中水流均匀，各处流速都是v.



【解】

由题意可知

$$v_\rho = -u, \ v_\varphi = \rho\dot{\varphi} = -v\sin\varphi$$

$$\frac{v_\rho}{v_\varphi} = \frac{u}{v\sin\varphi} = \frac{d\rho/dt}{\rho d\varphi/dt} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\varphi}$$

$$\therefore \frac{d\rho}{\rho} = \frac{u}{v}\frac{1}{\sin\varphi}d\varphi$$

$$\ln(\rho/\rho_0) = u/v\left(\ln\tan\frac{\varphi}{2}\Big|_{\varphi_0}^{\varphi}\right)$$

物理考研交流QQ群：861466923

$$\therefore \rho = \rho_0[\tan(\varphi/2)/\tan(\varphi_0/2)]^{u/v}$$

2.11 已给椭圆$\rho = p/(1 + e\cos\varphi)$. 在椭圆的平面内，有一直线以匀角速$\omega_0$绕椭圆的焦点转动. 求直线与椭圆交点的速度.

【解】

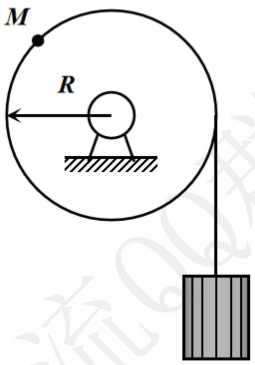
以焦点为极点，焦点与椭圆连线为极轴

$$\rho = p/(1 + e\cos\varphi)，\ \varphi = \omega_0 t + \varphi_0$$

$$v_\rho = \dot{\rho} = \frac{p\omega_0 e\sin\varphi}{(1 + e\cos\varphi)^2} = \omega_0\rho^2 e\sin\varphi/p$$

$$v_\varphi = \rho\dot{\varphi} = \rho\omega_0$$

2.12 将绳子绕在半径为 R 的轮上，绳端挂有物体，物体按 $s = 0.6t^2$ 的规律下降并带动轮子转动. 求轮缘的某个 M 点在 $t = 1$ s 的加速度.



【解】

由题意可得在此极坐标下$\rho = R$为一常量

$$R\varphi = 0.6t^2$$

$$a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = 1.2$$

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = 1.44/R$$

2.13 质点沿着半径为 R 的圆周运动，加速度与速度的夹角保持不变. 求质点速度随时间而变化的规律. 已知初速为 v_0.

物理考研交流QQ群：861466923

【解】

由题意可得在此极坐标下 $\rho = R$，$v = R\omega$

设加速度与速度夹角为 θ

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = -\rho\dot{\varphi}^2$$

$$a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = \rho\ddot{\varphi}$$

$$\tan\theta = \dot{\varphi}^2/\ddot{\varphi} \quad \text{结合}\dot{\varphi}_0 = v_0/R$$

令$\dot{\varphi} = x$，则$v = xt$，且由上式可得

$$\tan\theta \cdot \frac{dx}{x^2} = dt$$

解得

$$1/v = 1/v_0 - t/R\tan\theta$$

2.14 质点在平面内运动，速率不变，而其加速度矢量的延长线总是通过某个定点 *O*. 求点的轨迹.

【解】

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2$$

$$a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi})$$，由题意可知$a_\varphi = 0$

$$v_\rho = \dot{\rho}$$

$$v_\varphi = \rho\dot{\varphi}$$

整理可得

$$\rho^2\dot{\varphi} = c$$

$$\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 = v^2$$

$$\dot{\rho} = \sqrt{v^2 - \frac{c^2}{\rho^2}}$$

（1）若当$\dot{\rho} = 0$，即为匀速圆周运动

（2）若当$\dot{\rho} \neq 0$，

则

物理考研交流QQ群：861466923

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = \ddot{\rho} - \frac{c^2}{\rho^3} = 0$$

且

$$a_\varphi = 0$$

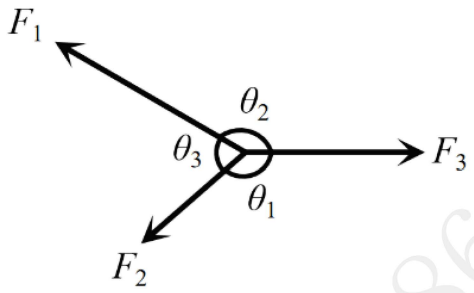
$$\therefore a_y^2 + a_\rho^2 = 0$$

即为匀速直线运动

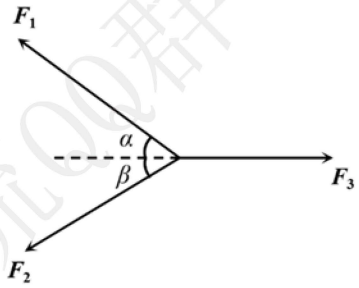
物理考研交流QQ群：861466923
物理考研交流QQ群：861466923

3.1 试证明所谓拉密定理：三力平衡时，

$$\frac{F_1}{\sin\theta_1}=\frac{F_2}{\sin\theta_2}=\frac{F_3}{\sin\theta_3}$$



【解】



设$\theta_3=\alpha+\beta$，其中$\alpha=\pi-\theta_2,\beta=\pi-\theta_1$

由于三力平衡有

$$F_1\sin\alpha=F_2\sin\beta$$

$$\therefore F_1\sin\theta_2=F_2\sin\theta_1$$

$$\frac{F_1}{\sin\theta_1}=\frac{F_2}{\sin\theta_2}$$

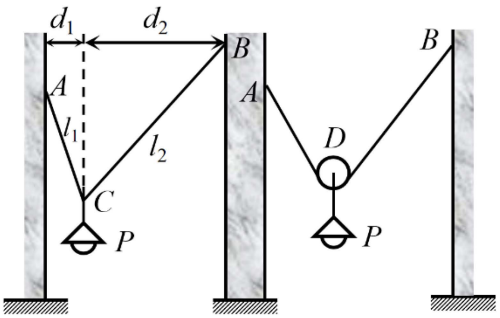
同理可得

$$\frac{F_1}{\sin\theta_1}=\frac{F_2}{\sin\theta_2}=\frac{F_3}{\sin\theta_3}$$

3.2 在两堵平行的墙之间拉有绳索 AB，在绳的 C 点悬挂重为 P 的电灯．已知 $AC=l_1$，$BC=l_2$，C 点距左墙 d_1，距右墙 d_2．求 AC 与 BC 两段绳中张力各为多少？

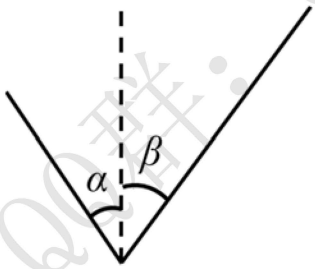
如将灯改挂于动滑轮 D 下，情况有什么不同？

考研物理交流QQ群：861466923



【解】

（1）



设绳子拉力分别为 T_1 和 T_2，与竖直方向的夹角分别为α和β

$$T_1\cos\alpha + T_2\cos\beta = P$$

$$T_1\sin\alpha = T_2\sin\beta$$

$$\text{其中}\sin\alpha = \frac{d_1}{l_1}, \sin\beta = \frac{d_2}{l_2}$$

解得

$$T_1 = Pl_1d_2/\left(d_1\sqrt{l_2^2 - d_2^2} + d_2\sqrt{l_1^2 - d_1^2}\right)$$

$$T_2 = Pl_2d_1/\left(d_1\sqrt{l_2^2 - d_2^2} + d_2\sqrt{l_1^2 - d_1^2}\right)$$

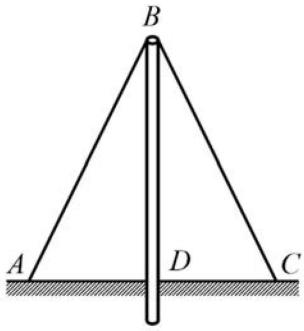
（2）改为动滑轮，则绳中张力相等，且 $\alpha = \beta$

$$2T\cos\alpha = P, \text{其中 } \sin\alpha = \frac{d_1 + d_2}{l_1 + l_2}$$

$$T = P(l_1 + l_2)/2\sqrt{(l_1 + l_2)^2 - (d_1 + d_2)^2}$$

3.3 用两根钢丝绳 *AB* 与 *BC* 将天线竿 *DB* 支持起来. 已知 *AD*=5 m, *DC*=9 m, *DB*=12 m. 希望天线竿不发生弯曲，问两绳中张力的比值应当等于什么？

考研物理交流QQ群：861466923



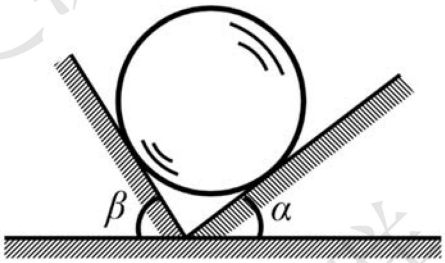
【解】设：$\angle ABD=\alpha$ $\angle CBD=\beta$

$$T_1\sin\alpha=T_2\sin\beta$$

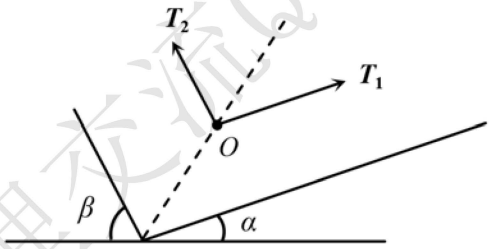
$$T_1\frac{5}{13}=T_2\frac{3}{5}$$

$$T_1/T_2=39/25$$

3.4 两个斜面与水平面各成 α 角与 β 角，在两斜面之间放置重为 P 的匀质球. 问球对两斜面的压力各为多大?



【解】



设T_1与垂直方向夹角为β,T_2与垂直方向夹角为α

$$T_1\cos\alpha+T_2\cos\beta=P$$

$$T_1\sin\alpha=T_2\sin\beta$$

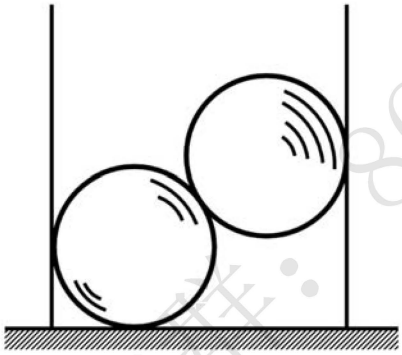
解得

$$T_1=P\sin\beta/\sin(\alpha+\beta)$$

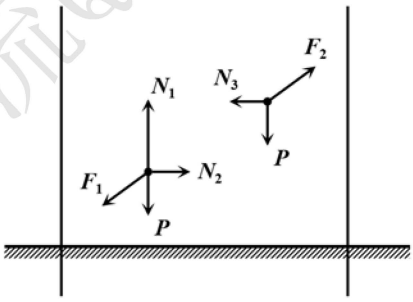
考研物理交流QQ群：861466923

$$T_2 = P\sin\alpha/\sin(\alpha+\beta)$$

3.5 在一光滑水平面上，直立一半径为 R 的中空直圆筒. 在筒内放入两个相同的匀质球，球的半径为 $r\left(\frac{1}{2}R < r < R\right)$，重量为 P. 求两球对圆筒的压力.



【解】



由题意，设左壁的压力为N_1，右壁的压力为N_2，F_1、F_2为球相互作用力，F_1、F_2与水平方向夹角为 α，则

$$N_1 = N_2, F_1 = F_2$$

$$N_2 = F_2\cos\alpha, P = F_2\sin\alpha$$

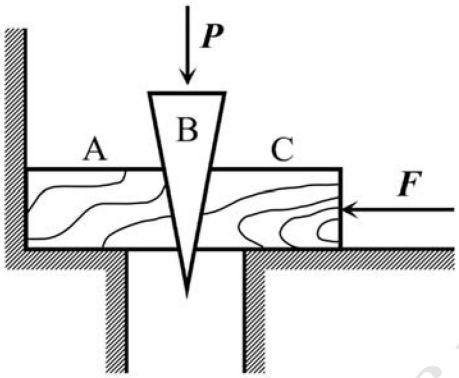
$$2r + 2r\cos\alpha = 2R$$

解得

$$N_1 = N_2 = \frac{(R-r)P}{\sqrt{r^2-(R-r)^2}} = \frac{(R-r)P}{\sqrt{2Rr-R^2}}$$

3.6 顶角为 2α 的尖劈 B 劈入 AC 之间. 劈上受到力 P 作用，问应以多大的力 F 才可以抵住 C 不动？设各个接触面都是光滑的.

考研物理交流QQ群：861466923



【解】设 C 对 B 的作用力为F'

则

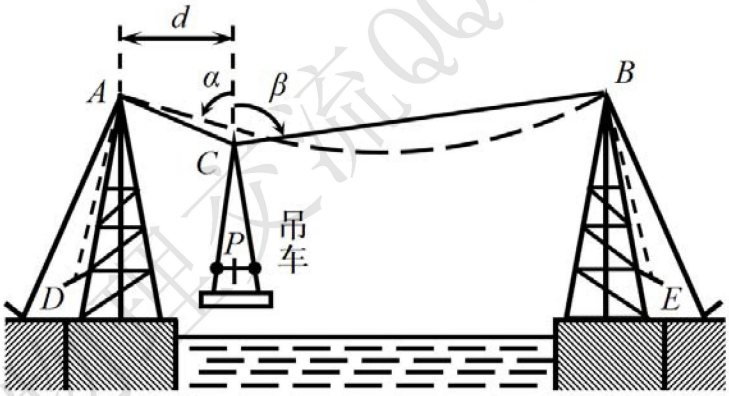
$$F'\sin\alpha=\frac{P}{2}$$

$$F'\cos\alpha=F$$

解得

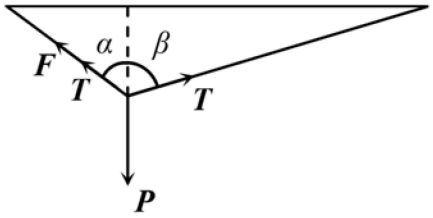
$$F=(p/2)\cot\alpha$$

3.7 图示意地表明用吊车运物过河的情形. A、B 两塔分居于河的两岸, 相距 l. 两塔之间张有钢丝绳, 其长为 L. 吊车连同载荷共重 P, 吊在动滑轮下, 动滑轮可在钢丝绳上滑动. 另用钢丝绳系在动滑轮上, 绕过 A 塔顶端的滑车而缠在绞车 D 上. 转动绞车 D 就能将吊车拉向 A 塔. 某一时刻吊车与 A 塔相距 d, 求此时各个钢丝绳中张力.



【解】

考研物理交流QQ群：861466923



设 CD 中的张力为 F，由题意可得 AC、BC 中张力相等，设为 T

$$(F+T)\cos\alpha + T\cos\beta = P$$

$$(F+T)\sin\alpha = T\sin\beta$$

解得

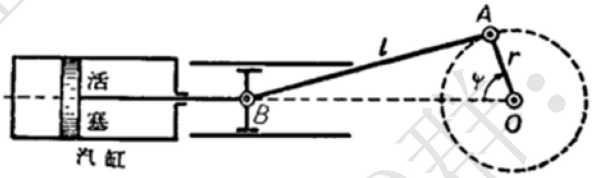
$$F = P(\sin\beta - \sin\alpha)/\sin(\alpha+\beta)$$

$$T = P\sin\alpha/\sin(\alpha+\beta)$$

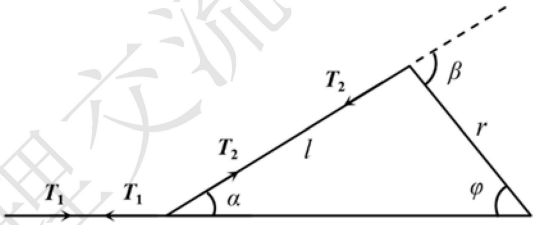
$$\alpha = \arcsin\frac{2Ld}{L^2 - l^2 + 2ld}$$

$$\beta = \arcsin\frac{2L(l-d)}{L^2 + l^2 - 2ld}$$

3.8 参看 1.9 题的图. 内燃机汽缸中气体压强为 p，大气压强为 p_0. 活塞为圆形，半径为 R. 问由于气体推动活塞，连杆将以多大的力转动曲柄?



【解】



如图，由题意可知 $T_1 = (p-p_0)\pi R^2, T_2\cos\alpha = T_1$

$$\frac{l}{\sin\varphi} = \frac{r}{\sin\alpha}, \beta = \alpha + \varphi$$

转动曲柄的力

$$F = T_2\sin\beta$$

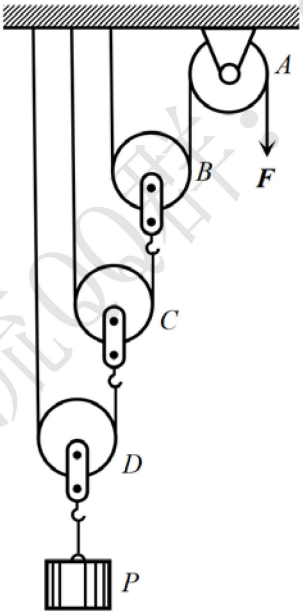
考研物理交流QQ群：861466923

解得

$$F=(p-p_0)\pi R^2\sin\varphi\left(1+\frac{r\cos\varphi}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}}\right)$$

3.9 一组滑车由定滑轮 A 与动滑轮 B、C、D 组成. 为支持重为 P 的物体, 应以多大的力 F 施于绳端? 每个动滑轮的重量为 P', 摩擦力均可不计.

试对 n 个动滑轮的情况作出推论.



【解】设 A 两端绳子张力为 F, 则 B 两端绳子张力为 F, 以此类推 C 为$2F-P'$, D 为$2(2F-P')-P'=4F-3P'$

$$P+P'=2(4F-3P')$$

$$F=\frac{P}{8}+\frac{7}{8}P'$$

对于 n 个动滑轮

$$2a_n=a_{n-1}+P'\quad a_1=\frac{P+P'}{2}$$

$$a_n=\frac{P}{2^n}+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)P'$$

考研物理交流QQ群：861466923

4.1 站立在电梯中的人提着 10 kg 物体. 试就下列各情况计算物体对人手的作用力: (i) 电梯静止, (ii) 电梯匀速上升, (iii) 电梯以匀加速 4.9 m/s^2 上升, (iv) 电梯以匀减速 4.9 m/s^2 上升, (v) 电梯以匀减速 4.9 m/s^2 下降.

【解】

(i)以竖直向上为正方向

$$F-mg=ma$$

$$a=0 \quad F=98\ \mathrm{N}$$

(ii)

$$a=0 \quad F=98\ \mathrm{N}$$

(iii)

$$a=4.9\ \mathrm{m/s^2} \quad F=147\ \mathrm{N}$$

(iv)

$$a=-4.9\ \mathrm{m/s^2} \quad F=49\ \mathrm{N}$$

(v)

$$a=4.9\ \mathrm{m/s^2} \quad F=147\ \mathrm{N}$$

4.2 卡车连同所载人员货物共为 4 吨. 车身在钢板弹簧上振动, 其上下的位移可表为 $0.8\sin 4\pi t(\mathrm{cm})$. 求卡车对路面的压力.

【解】

对卡车, 利用牛顿第二定律

$$F-mg=ma$$

$$a=\ddot{x}$$

$$x=0.8\sin 4\pi t(\mathrm{cm})$$

$$a=-(4\pi)^2\times 0.8\times 10^{-2}\sin 4\pi t(\mathrm{m/s^2})$$

$$F=mg+ma=(4-0.51\sin 4\pi t)\times 10^4\ \mathrm{N}$$

由牛顿第三定律，卡车对路面的压力为

$$F'=F=(4-0.51\sin 4\pi t)\times 10^4\ \mathrm{N}$$

4.3 匀质杆 AB 放在光滑桌面上, 两端分别受到力 F_1 与 F_2 作用. 求 C 处截面两方的相互作用力, 已给 $AC=\frac{1}{n}AB$.

物理考研交流QQ群：861466923



【解】

以水平向右为正方向，设 AB 加速度为 a，则

$$F_1 - F_2 = ma \qquad ①$$

设 BC 段对 AC 段的作用力为 F'，对 AC 段

$$F_1 + F' = \frac{1}{n}m \cdot a \quad ②$$

联立 ① ②，可得

$$F' = \frac{1}{n}(F_1 - \sqrt{2}) - F_1$$

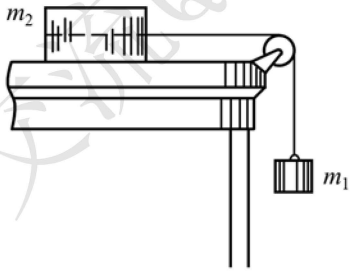
$$\because F_1, F_2 > 0 \qquad \therefore F' < 0$$

$$|F'| = F_1 + \frac{1}{n}(F_2 - F_1)$$

即 C 处两方相互作用力大小为

$$F = |F'| = F_1 + \frac{1}{n}(F_2 - F_1)$$

4.4 光滑桌面上有一质量为 m_2 的物体. 绳的一端系在这物体上，另一端绕过很轻的定滑轮后悬以质量为 m_1 的物体. 求桌上那一物体上下两半部的互相作用力.



【解】

对于m_1，m_2整体，有

$$m_1 g = (m_1 + m_2)a$$

$$a = \frac{m_1}{m_1 + m_2}g$$

对于m_2，竖直方向上

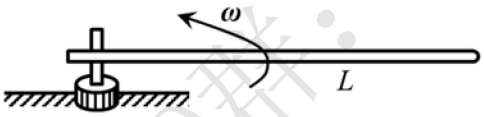
物理考研交流QQ群：861466923

$$N=\frac{1}{2}m_2g$$

水平方向上

$$F=\frac{1}{2}m_2a=\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}g$$

4.5 一条均匀的细棒，质量为 m，长度为 L，绕其一端以匀角速 ω 旋转，问距离转轴为 r 处棒中张力是多大？略去重力.



【解】

将匀质棒看成很多质元的集合，对于 r 处的第 n 个质元

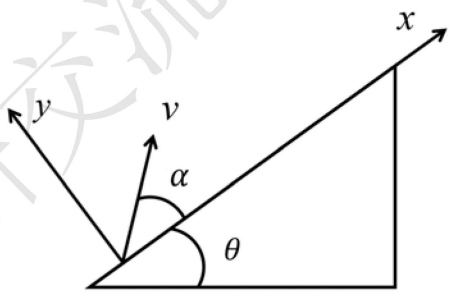
$$F=F_n-F_{n+1}=\mathrm{d}m\omega^2r$$

$$\mathrm{d}m=\frac{m}{L}dr$$

$$F_n=\int_r^L\frac{m}{L}\omega^2rdr=\frac{m\omega^2(L^2-r^2)}{2L}$$

4.6 一斜坡与水平面成 θ 角. 在坡脚朝坡顶方向射击. 问以什么样的仰角射击才使坡上的射程最远?

【解】



设速度与斜坡夹角为α，沿斜面方向加速度为

$$-g\sin\theta$$

垂直斜面方向加速度为

$$-g\cos\theta$$

在斜面上运动时间

$$t = 2\frac{v\sin\alpha}{g\cos\theta}$$

运动距离

$$S = v\cos\alpha t - \frac{1}{2}g\sin\theta t^2$$

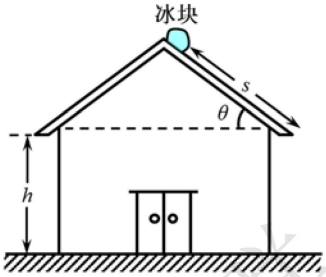
$$S = \frac{2v^2}{g\cos\theta}(\cos\alpha\sin\alpha - \tan\theta\sin^2\alpha)$$

要使射程最远，则令 $S' = 0$，可得

$$\tan\theta = \cot 2\alpha$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta \quad \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$$

4.7 冰块从滑冻的斜屋顶无初速地滑下. 求冰块的落地处.



【解】

沿斜面向下加速度 $a = g\sin\theta$

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2gs\sin\theta}$$

随后进行斜抛运动

$$v\sin\theta t + \frac{1}{2}gt^2 = h$$

$$v\cos\theta t = x$$

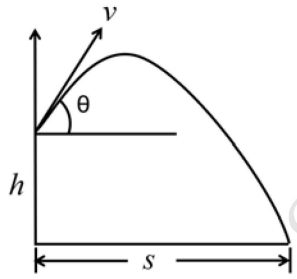
解得

$$x = 2\left(\sqrt{hs\sin\theta + s^2\sin^4\theta} + s\sin^2\theta\right)\cos\theta$$

4.8 从要塞的炮塔先后以仰角 θ_1 与 θ_2 射出两发炮弹，击中地面上同一地点. 已知炮弹初速同为 v，求炮塔离地面的高度. 空气阻力略去不计.

【解】

设炮塔高度为 h，水平运动距离为 S，



$$-v\sin\theta t+\frac{1}{2}gt^2=h \qquad (1)$$

$$v\cos\theta t=S \qquad (2)$$

(2)代入(1)消去t，得

$$\frac{gS^2}{2v^2}(\tan^2\theta+1)-S\tan\theta=h$$

对于不同的θ_1，θ_2的S，h，v相同

$$\frac{gS^2}{2v^2}(\tan^2\theta_1+1)-S\tan\theta_1=\frac{gS^2}{2v^2}(\tan^2\theta_2+1)-S\tan\theta_2$$

$$S=\frac{2v^2(\tan\theta_1-\tan\theta_2)}{g(\tan^2\theta_1-\tan^2\theta_2)}=\frac{2v^2}{g(\tan\theta_1+\tan\theta_2)}$$

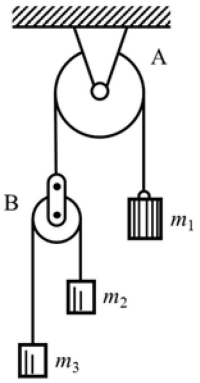
$$h=\frac{gS^2}{2v^2}(\tan^2\theta_1+1)-S\tan\theta_1$$

$$=\frac{2v^2(1-\tan\theta_1\tan\theta_2)}{g(\tan\theta_1+\tan\theta_2)^2}$$

$$=\frac{2v^2\cot(\theta_1+\theta_2)}{g(\tan\theta_1+\tan\theta_2)}$$

4.9 定滑轮 A 一方挂有 m_1 = 5 kg 的物体，另一方挂有轻滑轮 B，滑轮 B 两方分别挂着 m_2 = 3 kg 与 m_3 = 2 kg 的物体. 问物体 m_1 和滑轮 B 是否有加速度?

物理考研交流QQ群：861466923



【解】

设与 m_1 相连接绳子中张力为 T_1，m_2 m_3之间绳子张力为 T_2.以竖直向上为正方向，m_1，m_2，m_3加速度分别设为a_1，a_2，a_3

对m_1，m_2，m_3 列牛顿第二定律

$$T_1 - m_1 g = m_1 a_1 \quad (1)$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \quad (2)$$

$$T_2 - m_3 g = m_3 a_3 \quad (3)$$

B 为轻滑轮

$$T_1 = 2T_2 \qquad (4)$$

以 B 滑轮为参考系

m_2 加速度为 $a_2 + a_1$，m_3 加速度为 $a_3 + a_1$

由题意

$$a_2 + a_1 = -(a_3 + a_1) \quad (5)$$

联立 (1) (2) (3) (4) (5)

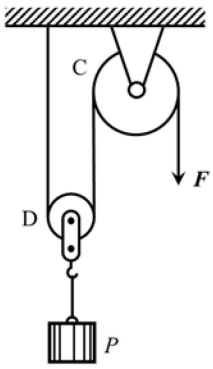
解得

$$a_1 = -\frac{1}{49}g \quad a_2 = -\frac{9}{49}g \quad a_3 = \frac{11}{49}g$$

4.10 (i) 重为 *P* 的物体挂在动滑轮 D 下. 绳一端系在天花板上并绕过动滑轮 D 和定滑轮 C. 以力 *F* 拉绳的自由端. 求物体及 *F* 处的加速度.

(ii) 如撤去力 *F* 改用一重为 *F* 的物体挂在绳的自由端, 情况有无不同?

物理考研交流QQ群：861466923



【解】

(i)滑轮 D 上移ΔS，F 处移动为$2\Delta S$

可知

$$a_F = 2a_D$$

对于 P

$$2F - P = ma_D$$

$$m = \frac{P}{g}$$

$$a_D = \frac{(2F - P)g}{P}$$

$$a_F = \frac{2(2F - P)g}{P}$$

(ii)设绳子中张力为F'

$$2F' - P = ma_D = \frac{P}{g}a_D \quad \text{同(i)}$$

对于物体 F

$$F - F' = m_F a_F = \frac{F}{g}a_F$$

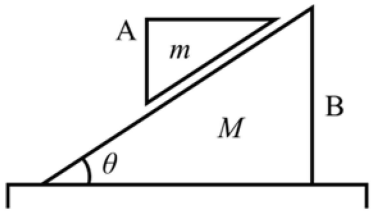
$$a_F = 2a_D$$

解得

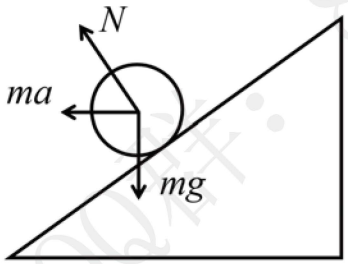
$$a_D = (2F - P)/(4F + P)g$$

4.11 光滑水平桌面上有一质量为 M 的楔子 B. 这楔子的光滑斜面上还有质量为 m 的小楔子 A. 求小楔子的运动情况和大楔子对桌面的压力.

物理考研交流QQ群：861466923



【解】



以 M 为参考系，研究 m 的运动需加入惯性力 ma.

a 为 M 向右运动加速度大小

垂直斜面方向

$$N + ma\sin\theta = mg\cos\theta$$

对于 M

$$N\sin\theta = Ma$$

解得

$$a = \frac{m\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}g \quad , \quad N = \frac{Mmg\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}$$

沿斜面向下，m 的加速度为：

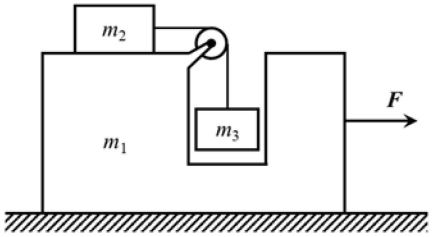
$$a' = g\sin\theta + a\cos\theta = \frac{(M+m)g\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}$$

桌面对 M 的压力

$$\begin{aligned} N' &= N\cos\theta + Mg \\ &= \frac{Mmg\cos^2\theta + M^2g + Mmg\sin^2\theta}{M+m\sin^2\theta} \\ &= \frac{(M+m)Mg}{(M+m\sin^2\theta)} \end{aligned}$$

4.12 如图所示为一教学演示机，所有的表面都是光滑的．问作用于 m_1 上的力F为多大时，才可以维持m_3不升不降？

物理考研交流QQ群：861466923



【解】

对于系统整体

$$F = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

设绳中张力为 T

$$T = m_2 a = m_3 g$$

$$F = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)m_3 g}{m_2}$$

4.13 再次考虑上题的教学演示机. 如 F 为零, 求m_1的加速度.

【解】

设 m_1 的加速度为 a_1 ， m_2 加速度为 a_2，m_3 竖直方向加速度为 a_3

水平方向上系统不受外力：

$$(m_1 + m_3)a_1 + m_2 a_2 = 0 \qquad ①$$

对于m_3，设绳中张力为 T

$$m_3 g - T = m_3 a_3 \qquad ②$$

$$T = m_2 a_2 \qquad ③$$

以 m_1 为参考系，m_2 的加速度为 $a_2 - a_1$

$$a_2 - a_1 = a_3 \qquad ④$$

联立①②③④

解得

$$a_1 = \frac{-m_2 m_3 g}{m_2 m_3 + (m_1 + m_3)(m_2 + m_3)}$$

4.14 求卫星环绕地球 (距地心为定值 ρ) 的速度. 这速度称为第一宇宙速度 (环绕速度).

物理考研交流QQ群：861466923

代入数值时可认为地球具有完整球形，半径为6400 km，并且不妨假定物体贴近地面运行. (事实上应在高空运行，以免被空气阻力所导致的高温所烧毁.)

【解】

近地轨道重力加速度为 g

$$F = mg = m\frac{v^2}{\rho}$$

$$v = \sqrt{g\rho}$$

$$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}\ ,\ \rho = 6.4 \times 10^6\ \mathrm{m}$$

$$v = 7919.6\ \mathrm{m/s}$$

4.15 求出在月球表面上物体的逃逸速度. 已知引力加速度比 g(月球): g(地球)≈ 1/6，而半径比 R(月球): R(地球)≈ 1/3.6，§19例 6 已给出在地球表面上的逃逸速度 v(地球) ≈ 11.2 km/s.

【解】

逃逸速度

$$v_0 = \sqrt{2gR}$$

$$\frac{v_{月}}{v_{地}} = \sqrt{\frac{g_{月}R_{月}}{g_{地}R_{地}}} = \frac{1}{\sqrt{6 \times 3.6}}$$

$$v_{月} = \frac{v_{地}}{\sqrt{6 \times 3.6}} \approx 2.41\ \mathrm{km/s}$$

4.16 载重汽车总质量为 4 t. 途遇临时桥，桥作向上突起的圆弧形，圆弧半径为 20 m. 该桥只能承受3 t，但时间紧迫，不容许驾驶员将所载货物分两次运过桥去. 试为驾驶员解决这一困难.

【解】

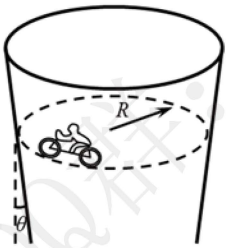
汽车在桥上作圆周运动

$$mg - N = m\frac{v^2}{R}$$

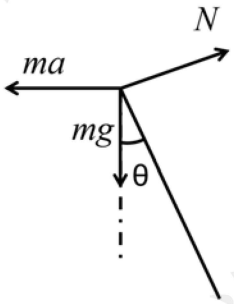
N 不能超过承重 3t，v 最小值为

$$v_{min}=\sqrt{\frac{(mg-N_{min})R}{m}}=7\ \mathrm{m/s}$$

4.17 在环形围墙内壁进行飞车走壁表演. 车在内壁上沿半径为 R 的水平圆圈急驰, 该处墙壁与竖直方向作 θ 角. 车速应达到多大才适宜作这种表演? 在演员的感觉中，“上”、“下”方向是怎样的?



【解】



在水平圆面上，车作圆周运动

$$N\cos\theta=m\frac{v^2}{R}$$

竖直方向上

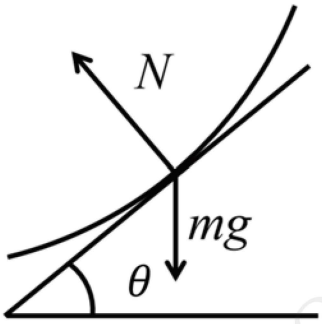
$$N\sin\theta=mg$$

解得

$$v=\sqrt{gR\cot\theta}$$

4.18 在某个科学宫中有大转台绕竖直的轴转动，人站在转台上不论哪里都感到很平稳没有倾斜跌倒的感觉. 问转台的台面是什么形状?

物理考研交流QQ群：861466923



【解】

在台面上，人受支持力 N 与重力 mg 的合力作圆周运动

设切线与水平面夹角为 θ，竖直方向为 z 方向，则

$$N\cos\theta = mg$$

$$N\sin\theta = m\omega^2 r$$

$$\frac{\omega^2 r}{g} = \tan\theta = \frac{dz}{dr}$$

$$dz = \frac{\omega^2}{g} r dr = \frac{\omega^2}{g}\frac{1}{2} dr^2$$

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 = \frac{\omega^2(x^2+y^2)}{2g}$$

台面为旋转抛物面

物理考研交流QQ群：861466923

5.1 质量为 m 的质点在 x 轴上运动时，受到原点的斥力 k^2x 的作用，k^2 为常量. 质点的初始坐标为 x_0，初始速度为 $-v_0$(即指向原点). 求解质点的运动情况. 质点是否有可能达到原点?

【解】

由牛顿第二定律

$$F = k^2x = ma = m\ddot{x}$$

上式的数学通解为

$$x = Ae^{\frac{k}{\sqrt{m}}t} + Be^{-\frac{k}{\sqrt{m}}t}$$

其中，A,B 为待定常数

$$\dot{x} = \frac{k}{\sqrt{m}}Ae^{\frac{k}{\sqrt{m}}t} - \frac{k}{\sqrt{m}}Be^{-\frac{k}{\sqrt{m}}t}$$

当 $t=0$ 时，$x=x_0$，$\dot{x}=-v_0$

$$\begin{cases} A+B=x_0 \\ (A-B)\dfrac{k}{\sqrt{m}} = -v_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{2}(x_0 - \dfrac{v_0\sqrt{m}}{k}) \\ B = \dfrac{1}{2}(x_0 + \dfrac{v_0\sqrt{m}}{k}) \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2}(x_0 - \frac{v_0\sqrt{m}}{k})e^{\frac{k}{\sqrt{m}}t} + \frac{1}{2}(x_0 + \frac{v_0\sqrt{m}}{k})e^{-\frac{k}{\sqrt{m}}t}$$

$$k^2x = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

两边同乘以 dx

$$k^2x\mathrm{d}x = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}dx = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}v\mathrm{d}t = mv\mathrm{d}v$$

$$k^2x^2 = mv^2 + C$$

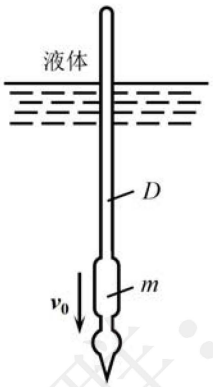
当 $x=x_0$ 时 $v=-v_0$，所以

$$k^2(x^2 - {x_0}^2) = m(v^2 - {v_0}^2)$$

当$v_0 \geq \frac{kx_0}{\sqrt{m}}$时，就能到达原点.

物理考研交流QQ群：861466923

5.2 比重计漂浮于密度为 ρ 的液体中. 比重计质量为 m, 其上端细长圆管直径为 D. 用手稍稍压一下, 给它以竖直向下的初速 v_0. 求解比重计的运动情况.



【解】

比重计所受合力与其偏离平衡位置的距离 x 关系为

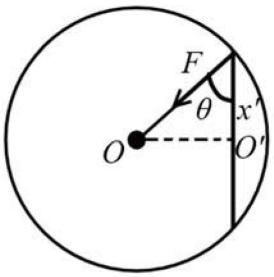
$$F = -\rho g V = -\rho g \pi (\frac{D}{2})^2 x$$

$$k = \rho g \pi \frac{D^2}{4}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{4m}{\rho g \pi D^2}} = \frac{4}{D}\sqrt{\frac{\pi m}{\rho g}}$$

比重计作周期为 T 的简谐振动.

5.3 在深井中, 人的重量正比于距地心的距离. 设想竖直向下开挖深井, 一直穿过地心到达地球的另一面. 问一旦跌入这个深井, 将作怎样的运动? 如跌入时无初速, 问经过多少时间可以到达地球的另一面? 若深井虽直但并不通过地心, 运动情况又如何? 空气阻力略去不计.



【解】

设物体到地心的距离为 x, 人的重量与 x 的比例系数为 A

$$F = Ax$$

当 $x=R$ 时

$$F = AR = mg$$

即有

$$F = \frac{mg}{R}x = ma\ ,\ k = \frac{mg}{R}$$

所以跌入后做简谐振动，单趟所需时间 t 为

$$t = \frac{1}{2}T = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 42.3\ \text{min}$$

若深井虽直但不通过地心

$$F' = F\cos\theta = \frac{mg}{R}x\cos\theta = \frac{mg}{R}x' \qquad k' = \frac{mg}{R}$$

所以跌入后同样作简谐振动，单趟所需时间 t'为

$$t' = \frac{1}{2}T' = \pi\sqrt{\frac{m}{k'}} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 42.3\ \text{min}$$

5.4 弹簧上端固定，下端挂两个等重的物体，此时弹簧伸长 2 cm. 如下面的一个物体忽然松脱，留下的物体将如何运动?



【解】

不挂重物时，弹簧底部在 O，挂一个物体在 O'，挂两个物体在 A

$$OO' = OA' = 1\ \text{cm}$$

以 O' 为原点，$t = 0$ 时，$v = 0$，物体在简谐运动的最大振幅处

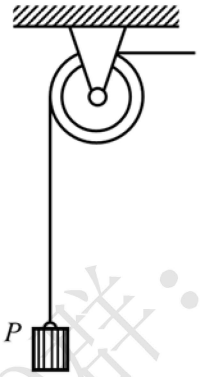
$$x = O'A\cos(\omega t)\ ,\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\ ,\ kO'A = mg$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{O'A}}$$

$$x = O'A\cos(\sqrt{\frac{g}{O'A}}t)$$

物理考研交流QQ群：861466923

5.5 重为 P 的物体挂在吊索上，吊索缠在滑车上. 滑车徐徐匀速转动，物体亦以匀速 v_0 下降. 滑车忽然发生故障停止转动. 已知吊索的劲度系数为 k，求解所挂重物的运动情况及吊索中的最大张力.



【解】

分析可知 P 之后作竖直方向的简谐振动，初始位置为平衡位置

$$x = A\sin(\omega t)$$

A 为振幅

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$A = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0$$

$$x = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$$

当 $A > mg/k$ 时，物体到达吊索原长后会向上作竖直上抛运动，即物体作竖直上抛条件为

$$v_0 > g\sqrt{\frac{m}{k}}$$

最大张力

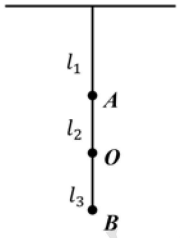
$$F = mg + kA = mg + v_0\sqrt{mk}$$

5.6 一根轻的弹性绳，自然长度为 l_1. 绳的上端固定，下端悬挂某个物体，因而绳的长度伸长 l_2. 今将这物体举高到弹性绳的上端，然后放手任其下落. 研究这物体的运动情况.

物理考研交流QQ群：861466923

【解】

物体作周期性运动，离上端距离超过 l_1 时作简谐振动，离上端距离不足 l_1 时作自由落体或竖直上抛运动



设 O 为平衡位置，B 为下落达到最底端

由能量守恒

$$\frac{1}{2}k(l_2+l_3)^2=mg(l_1+l_2+l_3) \quad ①$$

$$kl_2=mg \quad ②$$

$$\Rightarrow l_3^2=2l_1l_2+l_2^2$$

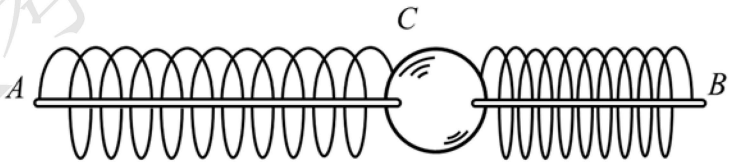
所以小球离 O 点距离可以表示为

$$x=l_3\cos(\omega t+\varphi_0) \quad w=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{g}{l_2}}$$

小球距离顶端距离为

$$x'=x+l_1+l_2=l_1+l_2+\sqrt{l_2(2l_1+l_2)}cos(\sqrt{\frac{g}{l_2}}t+\varphi_0)$$

5.7 小球 C 穿在细杆 AB 上，两方各有劲度系数为k的弹簧，C 的平衡位置在杆的中点 O. 细杆绕中点 O 以匀角速度ω_0转动. 求解小球的运动情况. 在什么条件下，小球在杆上来回振动?



【解】

设小球 C 偏离 O 点距离为 x，其所受合外力

物理考研交流QQ群：861466923

$$F = -kx - kx + F_{惯}$$

$$F_{惯} = m\omega_0^2 x$$

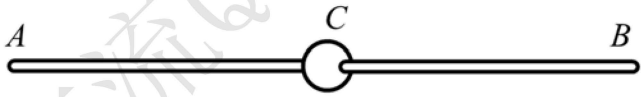
$$F = (m\omega_0^2 - 2k)x$$

当 $m\omega_0^2 - 2k < 0$时，小球在杆上作简谐振动

即来回振动条件为

$$k > \frac{m\omega_0^2}{2}$$

5.8 质点 *C* 穿在光滑细杆 *AB* 上, 细杆在水平面内绕着 *A* 端以匀角加速度α转动. 问质点在杆上如何运动, 质点与杆之间才没有水平方向的相互作用力?



【解】

由于杆光滑，杆与 *C* 的作用力垂直于杆且为零

$$F = ma_\varphi = 0$$

$$a_\varphi = 0$$

$$\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) = 0$$

$$\rho^2\dot{\varphi} = C$$

由题意

$$\dot{\varphi} = \omega_0 + \alpha t$$

$$\rho^2(\omega_0 + \alpha t) = C$$

当 $t = 0$ 时，$\rho = \rho_0$，$C = \rho_0^2\omega_0$

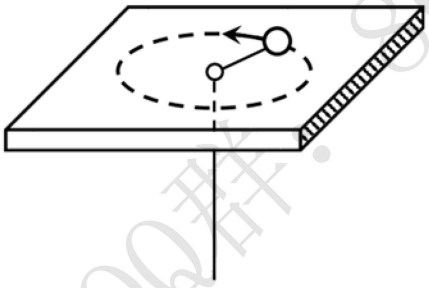
所以

$$\rho^2(\omega_0 + \alpha t) = \rho_0^2\omega_0$$

$$\rho = \rho_0\sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_0 + \alpha t}}$$

物理考研交流QQ群：861466923

5.9 在光滑水平桌面上运动的小球质量为 m，系于绳的一端，绳子穿过桌面上的小孔到桌下. (i) 用手拉绳使之作匀速运动，绳速为 u，求手中作用力 T. (ii) 若以不变的力 T 拉绳，研究小球运动情况. (iii) 在绳的下垂端挂上质量为 m_1 的物体，列出这个系统的运动方程式. (iv) 某个时刻，桌上绳长为 R_1，小球的速度为 v_1 并与绳垂直. 问桌上绳长慢慢减为 R_2 时，小球速度多大?



【解】

设 $t=0$ 时，$\rho=\rho_0$，$\varphi=\varphi_0$，$\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_0$

（i）收绳速度为 u，则

$$\rho=\rho_0-ut$$

$$a_\rho=\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2$$

$$a_\varphi=\rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi}=\frac{1}{\rho}\frac{1}{\mathrm{d}t}(\rho^2\dot{\varphi})$$

$$T=ma_\rho,\ a_\varphi=0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{1}{\mathrm{d}t}(\rho^2\dot{\varphi})=0$$

$$\rho^2\dot{\varphi}=C=\rho_0^2\dot{\varphi}_0$$

将 $\rho=\rho_0-ut$ 代入上式，可得

$$\dot{\varphi}=\frac{\rho_0^2}{(\rho_0-ut)^2}\dot{\varphi}_0=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

整理可得

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{\rho_0^2\dot{\varphi}_0}{u}\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho_0-ut}\right)$$

当 $t=0$ 时 $\varphi=\varphi_0$

物理考研交流QQ群：861466923

$$\varphi=\varphi_0+\frac{\rho_0^2\dot{\varphi}_0}{u}\left(\frac{1}{\rho_0-ut}-\frac{1}{\rho_0}\right)$$

$$T=ma_\rho=m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)$$

$$\ddot{\rho}=0\qquad\dot{\varphi}=\frac{\rho_0^2\dot{\varphi}_0}{\rho^2}\quad\dot{\varphi}^2=\frac{\rho_0^4\dot{\varphi}_0^2}{\rho^4}$$

所以

$$T=-m\rho_0^4\dot{\varphi}_0^2/\rho^3$$

（ii）若拉力 T 不变，则

$$\rho^2\dot{\varphi}=\rho_0^2\dot{\varphi}_0$$

$$-T=ma_\rho=m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)=m\left(\ddot{\rho}-\frac{\rho_0^4\dot{\varphi}_0^2}{\rho^3}\right)$$

$$\frac{-T}{m}\mathrm{d}\rho=\left(\frac{\mathrm{d}\dot{\rho}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\rho-\frac{\rho_0^4\dot{\varphi}_0^2}{\rho^3}\mathrm{d}\rho\right)=\frac{1}{2}\mathrm{d}\dot{\rho}^2+\frac{1}{2}\rho_0^4\dot{\varphi}_0^2\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{d}\dot{\rho}^2+\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\frac{\rho_0^4\dot{\varphi}_0^2}{\rho^2}\right)$$

等式两边积分

$$\frac{-T}{m}(\rho-\rho_0)=\frac{1}{2}(\dot{\rho}^2-\dot{\rho}_0^2)+\frac{1}{2}(\rho\dot{\varphi})^2-\frac{1}{2}(\rho_0\dot{\varphi}_0)^2$$

$$=\frac{1}{2}(\dot{\rho}^2-\dot{\rho}_0^2)+\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0^4\dot{\varphi}_0^2}{\rho^2}-\rho_0^2\dot{\varphi}_0^2\right)$$

$$\dot{\rho}=\sqrt{\frac{-2T}{m}(\rho-\rho_0)+\dot{\rho}_0^2+\rho_0^2\dot{\varphi}_0^2-\frac{\rho_0^4\dot{\varphi}_0^2}{\rho^2}}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$$

$$t=\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\sqrt{\frac{-2T}{m}(\rho-\rho_0)+\dot{\rho}_0^2+\rho_0^2\dot{\varphi}_0^2-\frac{\rho_0^4\dot{\varphi}_0^2}{\rho^2}}}$$

$$=\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{\sqrt{\rho^2\left(\frac{2T\rho_0}{m}+\dot{\rho}_0^2+\rho_0^2\dot{\varphi}_0^2\right)-\frac{2T}{m}\rho^3-\rho_0^4\dot{\varphi}_0^2}}$$

（iii）分别列出小球与物体的动力学方程

$$-T=ma_\rho=m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)$$

$$m\rho^2\dot{\varphi}=m\rho_0^2\dot{\varphi}_0$$

$$T-m_1g=m_1\ddot{\rho}$$

物理考研交流QQ群：861466923

（iv）由题意可知

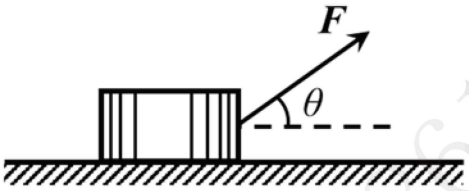
$$\dot{\rho} \approx 0$$

$$\rho^2\dot{\varphi} = \rho v = R_1 v_1$$

$$v = \frac{R_1 v_1}{\rho} = \frac{R_1 v_1}{R_2}$$

物理考研交流QQ群：861466923
物理考研交流QQ群：861466923

6.1 物体放在粗糙水平面上，两者之间摩擦系数为 μ. 用“仰角”为 θ 的力 F 去拉动物体. 问 θ 应为多大才最省力?



【解】

刚好使物块移动，有

$$F\sin\theta + N = mg$$

$$F\cos\theta = \mu N$$

$$\Rightarrow F = \frac{\mu mg}{\mu\sin\theta + \cos\theta}$$

求 $\mu\sin\theta + \cos\theta$ 的极值

$$(\mu\sin\theta + \cos\theta)' = 0$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \mu$$

所以当 $\theta = \arctan\mu$ 时最省力

6.2 物体放在汽车上，已知物体与汽车底板之间的摩擦系数为 0.2. 求物体不致滑动时汽车加速度的最大数值.

【解】

汽车上物体刚好不滑动时，有

$$f = \mu mg = ma$$

$$a = \mu g = 0.2g$$

6.3 物体放在水平转台上，距转轴 10 cm. 只要转速一超过 $\frac{1}{\pi}$ r/s，物体就不再随着转台运动而要发生滑动. 求摩擦系数.

【解】

物体刚好不移动时

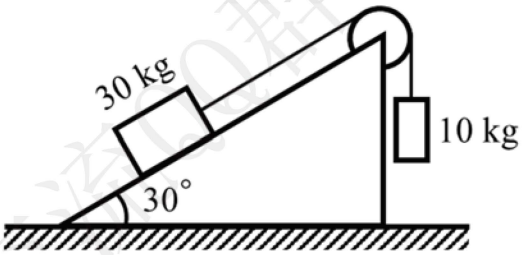
$$f = \mu mg = m\omega^2 r$$

$$\omega = 2\pi \cdot \frac{1}{\pi} = 2\ \mathrm{s}^{-1}$$

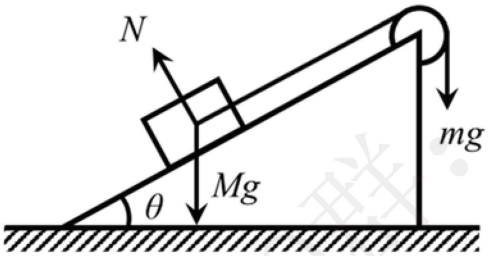
解得

$$\mu = \frac{2}{49}$$

6.4 图中滑轮质量很轻，可忽略不计．斜面上的物体与斜面之间摩擦系数为 $1/2\sqrt{3}$．问斜面上所置物体向哪一方向加速运动？加速度多大？摩擦力多大？



【解】



研究两种极限情况，绳子拉力均为 mg

(1)

M 刚好不沿斜面向下移动

$$Mg\sin\theta - \mu N - mg = 0$$

$$Mg\cos\theta = N$$

解得

$$m = \frac{1}{4}M$$

(2)

M 刚好不沿斜面向上运动

$$Mg\sin\theta + \mu N - mg = 0$$

$$N = Mg\cos\theta$$

解得

$$m = \frac{3}{4}M$$

由题意

$$m = 10\ \text{kg} \quad M = 30\ \text{kg}$$

$$\frac{1}{4}M < m < \frac{3}{4}M$$

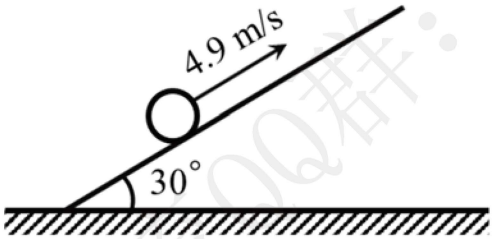
所以无论向哪一方向运动，最终均会静止，即加速度为 0

$$Mg\sin\theta + f - mg = 0$$

$$f = -49\ \text{N}$$

即摩擦力沿斜面向上，大小为 49 N

6.5 在坡度为 30°的粗糙斜面上，物体以 4.9 m/s 的初速被掷向上滑行．斜面与物体之间的摩擦系数为 $1.1/\sqrt{3}$．试研究物体运动情况．何时回到出发点？回到出发点的速度多大?



【解】

在斜面上运动时，摩擦力大小为 μN，方向与运动方向相反

向上运动时

$$a = (\mu mg\cos\theta + mg\sin\theta)/m = 1.1g$$

运行距离

$$s = \frac{v^2}{2a}$$

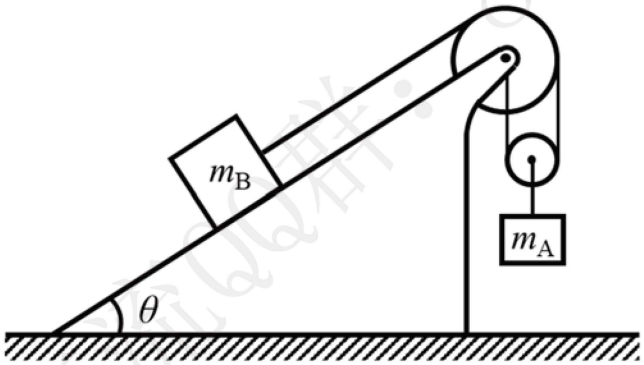
$$t_1 = \frac{v}{a}$$

运动到最高点时

$$\mu mg\cos\theta > mg\sin\theta$$

物体会静止在最高点, 无法返回原点

6.6 在图示的装置中, 物体 A、B 的质量各为 m_A 和 m_B. 斜面的倾角为 θ, 它与物体 B 间的摩擦系数为 μ. 求两物体的加速度及绳子张力(分 A 向下和向上运动两种情况求解). 忽略绳和滑轮的质量以及轴承摩擦, 绳不可伸长.



【解】

由绳子关系, 有

$$a_B = 2a_A$$

(1) A 向上运动

$$m_B g\sin\theta - T - \mu m_B g\cos\theta = m_B a_B$$

$$2T - m_A g = m_A a_A$$

$$a_B = \frac{(2m_B\sin\theta - 2\mu m_B\cos\theta - m_A)g}{2m_B + \frac{1}{2}m_A}$$

$$T = \frac{m_A m_B(2 + \sin\theta - \mu\cos\theta)g}{4m_B + m_A}$$

(2) A 向下运动

$$T - m_B g\sin\theta - \mu m_B g\cos\theta = m_B a_B$$

$$m_A g - 2T = m_A a_A$$

解得

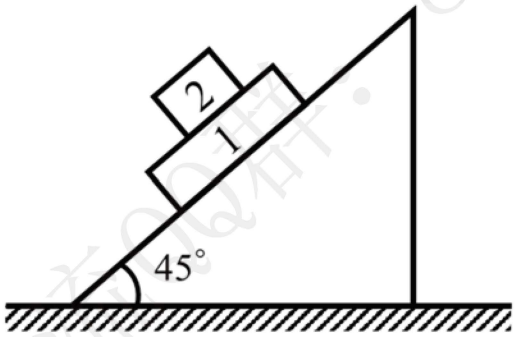
$$a_B = \frac{(m_A - 2m_B\sin\theta - 2\mu m_B\cos\theta)g}{2m_B + \frac{1}{2}m_A}$$

$$T = \frac{m_A m_B(2 + \sin\theta + \mu\cos\theta)g}{4m_B + m_A}$$

物理考研交流QQ群：861466923

6.7 在坡度为45°的粗糙斜面上有质量为 $m_1 = 1$ kg 的木板，板与斜面之间摩擦系数 $\mu_1 = 1/3$. 木板上又有质量为 $m_2 = 6$ kg 的物体，物体与木板之间摩擦系数为 $\mu_2 = 1/2$. 求物体的加速度与木板的加速度，并求物体与木板之间、木板与斜面之间的摩擦力.

【解】



由于 $\mu_2 > \mu_1$，所以 1, 2 不会相对滑动

$\mu_1 \cos\theta < \sin\theta$, 1, 2 会沿斜面向下作匀加速运动

对于 1, 2 整体

$$Mg\sin\theta - \mu_1 Mg\cos\theta = Ma$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{3}g$$

$$f_1 = \mu_1 Mg\cos\theta = \mu_1(m_1+m_2)g\cos\theta = \frac{343}{3}\sqrt{2}\ \text{N} \approx 16.2\ \text{N}$$

$$m_2 g\sin\theta - f_2 = m_2 a$$

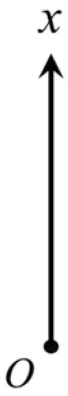
$$f_2 = 9.8\sqrt{2}\ \text{N} \approx 13.9\ \text{N}$$

6.8 以初速 v_0 将重为 P 的物体竖直上抛. 空气阻力正比于速率平方，可记作 k^2Pv^2. 求物体所达到的最大高度及回到出发点的速度.

【解】

(1)物体上升阶段

物理考研交流QQ群：861466923



从初始位置到最大高度

以向上为正方向

$$F = -P - k^2Pv^2 = -P(1 + k^2v^2) = ma$$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g(1 + k^2v^2)$$

$$\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{v}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{-v\mathrm{d}v}{g(1 + k^2v^2)} = -\frac{1}{2g}\frac{\mathrm{d}v^2}{(1 + k^2v^2)}$$

$$x = \frac{-1}{2gk^2}\ln(1 + k^2v^2)\Big|_{v_0}^{v}$$

$$= \frac{1}{2gk^2}\ln\left(\frac{1 + k^2v_0^2}{1 + k^2v^2}\right)$$

当 $v = 0$ 时

$$x = \frac{1}{2gk^2}\ln(1 + k^2v_0^2)$$

(2)物体下降阶段

物理考研交流QQ群：861466923



从最大高度返回出发点

以向下为正方向

$$P-k^2Pv^2=ma$$

同理有

$$\mathrm{d}x=\frac{1}{2g}\frac{\mathrm{d}v^2}{(1-k^2v^2)}$$

$$x=\frac{1}{2gk^2}\ln\left(\frac{1}{1-k^2v^2}\right)$$

当 $x=\frac{1}{2gk^2}\ln(1+k^2v_0^2)$ 时

$$v=\sqrt{\frac{v_0^2}{1+k^2v_0^2}}$$

6.9 在 A 点，以初速 v_0 将一小球竖直上抛. 同时，在 A 的正上方 h 高度处的 B 点，有质量相等的另一小球自由落下. 试研究两球可能相遇的条件，求相遇的时间和地点.

【解】

编者注：根据梁昆淼老师的《力学》课后答案，题干中缺少条件：计及空气阻力，其大小与速率成正比.

以竖直向上为正方向，设初始位置为 x_0，初始速度为 v_0

物理考研交流QQ群：861466923

由题意

$$-mg-kv=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}t=\frac{-m\mathrm{d}v}{mg+kv}=\frac{-m}{k}\mathrm{d}(\ln(mg+kv))$$

$$t=-\frac{m}{k}\left(\ln\frac{mg+kv}{mg+kv_0}\right)$$

$$\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}=\frac{mg+kv}{mg+kv_0}$$

$$v=\frac{mg+kv_0}{k}\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}-\frac{mg}{k}$$

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$x=\frac{-m}{k}\left(\frac{mg+kv_0}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}-\frac{mg}{k}t+C\quad C\text{为常数}$$

当 $t=0$ 时，$x=x_0$

$$\Rightarrow C=x_0+\frac{m}{k}\left(\frac{mg+kv_0}{k}\right)$$

$$x=-\frac{m}{k}\left(\frac{mg+kv_0}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}-\frac{mg}{k}t+x_0+\frac{m}{k}\left(\frac{mg+kv_0}{k}\right)$$

对 A

$$x_0=0\qquad v_0=v_0$$

对 B

$$x_0=h\qquad v_0=0$$

$$x_A=-\frac{m}{k}\left(\frac{mg+kv_0}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}-\frac{mg}{k}t+\frac{m}{k}\left(\frac{mg+kv_0}{k}\right)$$

$$x_B=-\frac{m^2g}{k^2}\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}-\frac{mg}{k}t+h+\frac{m^2g}{k^2}$$

$$x_A=x_B$$

$$\Rightarrow\frac{m}{k}v_0-h=\frac{m}{k}v_0\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}\qquad t=\frac{m}{k}\ln\left(\frac{mv_0}{mv_0-hk}\right)$$

$$\therefore\frac{m}{k}v_0-h>0$$

$$v_0>\frac{hk}{m}$$

将 t 带入 x_A，x_B

$$x_A=x_B=\left(\frac{mg+kv_0}{kv_0}\right)h-\frac{mg}{k}t$$

物理考研交流Q群：861466923

6.10飞机以 $v_0 = 90\ \mathrm{km/h}$ 着陆后在跑道上滑行. 空气阻力 $R = c_1v^2$, 升力 $L = c_2v^2$, 升阻比 $c_2 : c_1 = 5$. 滑行 所受摩擦力相当于摩擦系数 $\mu = 0.1$. 求飞机在跑道上滑行的距离.

说明: ① 刚着陆时, 空气升力恰与飞机重量相等. ② 着陆时, 发动机已停止工作.

【解】

(1)刚着陆时, 空气升力恰与飞机重量相等

$$c_2v_0^2 = mg \quad c_2 = \frac{mg}{v_0^2}$$

(2)由牛顿第二定律

$$-\mu N - c_1v^2 = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$N = mg - c_2v^2$$

其中 $\mu = 0.1 \quad c_2/c_1 = 5$

整理得

$$-\frac{0.1g}{v_0^2}(v_0^2 + v^2) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}t = \frac{{v_0}^2}{-0.1g}\frac{\mathrm{d}v}{v_0^2 + v^2}$$

$$\mathrm{d}s = v\mathrm{d}t = -\frac{v_0^2}{0.2g}\frac{\mathrm{d}v^2}{v^2 + v_0^2}$$

$$s = \int_{v_0}^{v} -\frac{v_0^2}{0.2g}\frac{\mathrm{d}v^2}{v^2 + v_0^2} = \frac{v_0^2}{0.2g}\ln\left(\frac{2v_0^2}{v_0^2 + v^2}\right)$$

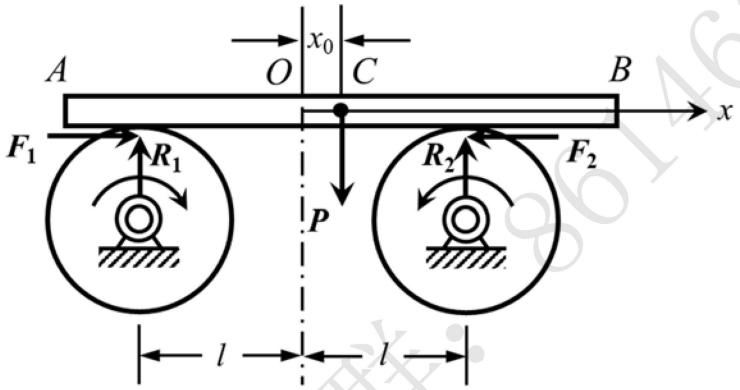
当 $v = 0$ 时

$$s = \frac{v_0^2}{0.2g}\ln 2 \approx 221\ \mathrm{m}$$

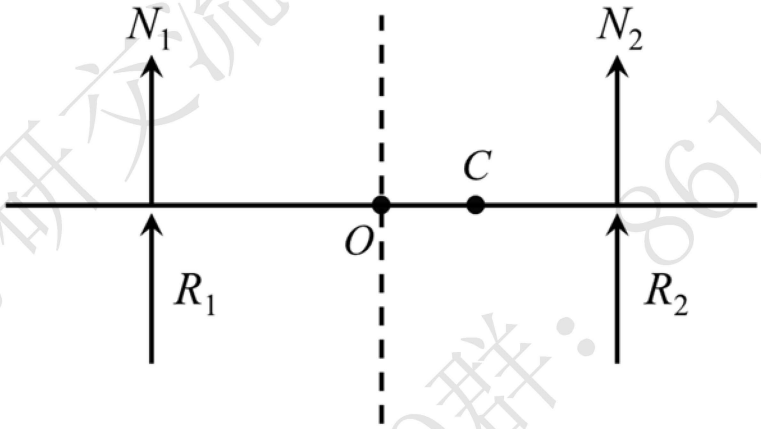
6.11两轮的轴相互平行, 相距 $2l$. 其转速相等而转向相反. 将质量为 m 的一根匀质杆搁在两轮上, 杆与轮的摩擦系数为 μ. 开始时, 杆的初速为 0, 杆的中心

物理考研交流QQ群: 861466923

C 在两轴连线中垂面右方，相距 x_0，求解杆的运动.



【解】



以 C 为参考点，杆子受力矩为 0，可列

$$N_2(l-x)=N_1(l+x)$$

$$N_1+N_2=mg$$

解得

$$N_1=\frac{mg(l-x)}{2l}$$

$$N_2=\frac{mg(l+x)}{2l}$$

$$F=-\mu N_2+\mu N_1=ma$$

$$ma=\frac{-\mu mg}{l}x$$

所以杆做简谐振动，其中

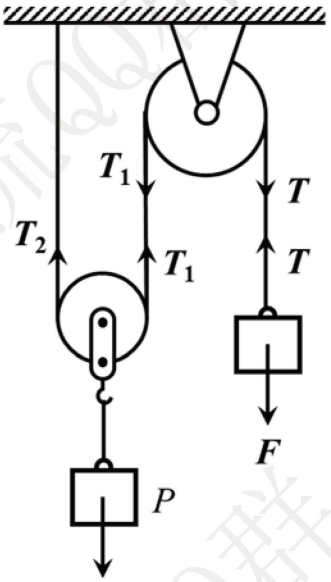
物理考研交流QQ群：861466923

$$k=\frac{\mu mg}{l} \qquad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{\mu g}}$$

$$\frac{1}{2}kx_0^2=\frac{1}{2}mv_{max}^2 \qquad v_{max}=x_0\sqrt{\frac{\mu g}{l}}$$

6.12重新研究 4.10 题 (ii), 设绳恰将相对于滑轮 C 按顺时针方向滑动, 亦即相对于滑轮 D 按逆时针方向滑动.

【解】



对右端物体设其加速度为 a_1, P 加速度为 a_2

$$a_1=2a_2$$

对 F

$$F-T=\frac{F}{g}a_1$$

$$\frac{T}{T_1}=\mathrm{e}^{\mu\pi}$$

$$\frac{T_1}{T_2}=\mathrm{e}^{\mu\pi}$$

对 D

$$(T_1+T_2)-P=\frac{P}{m}a_2$$

整理得

物理考研交流QQ群：861466923

$$\left(F-\frac{F}{g}a_1\right)(\mathrm{e}^{-\mu\pi}+\mathrm{e}^{-2\mu\pi})-P=\frac{P}{g}\frac{a_1}{2}$$

$$a_1=\frac{2g[F(\mathrm{e}^{-\mu\pi}+\mathrm{e}^{-2\mu\pi})-P]}{2F(\mathrm{e}^{-\mu\pi}+\mathrm{e}^{-2\mu\pi})+P}$$

$$a_2=\frac{a_1}{2}$$

物理考研交流QQ群：861466923
物理考研交流QQ群：861466923

7.1 质点在重力作用下沿着光滑曲线运动. 试证明质点速率的变化规律为 $v^2 = v_0^2 + 2gh$ (恰与自由落体速率变化公式相同), 式中 v_0 为质点的初始速率, h 为质点降低的高度.

【解】

物体在固定轨道运动, 采用自然坐标系

切向加速度

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g\sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$$

$$v\mathrm{d}v = -g\sin\theta\,\mathrm{d}s = -g\mathrm{d}y$$

$$\int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v = -g\int_{y_0}^{y}\mathrm{d}y$$

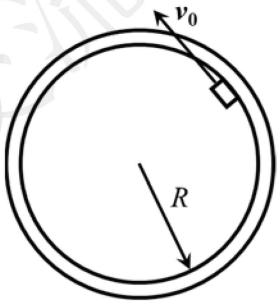
$$v^2 - v_0^2 = 2g(y_0 - y) = 2gh$$

h 为下落的垂直距离, 即所证等式成立

7.2 质量为 m 的物体在无摩擦的桌面上滑动, 其运动被约束于固定在桌面上的半径为 l 的圆环内. 在 $t = 0$ 时, 物体沿着环的内壁以速度 v_0 通过 A 处, 物体与圆环间的摩擦系数为 μ.

(i) 求物体在各时刻 t 的速度.

(ii) 求物体在各时刻 t 的位置.



【解】

(i) 物体沿内壁运动

$$N = m\frac{v^2}{l}$$

$$f = -\mu N = ma$$

切向加速度

$$a = -\frac{\mu v^2}{l} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}t = -\frac{l}{\mu}\frac{\mathrm{d}v}{v^2}$$

$$t = \int_{v_0}^{v} \frac{l}{\mu}\mathrm{d}\frac{1}{v} = \frac{l}{\mu}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right)$$

$$v = \frac{v_0}{1 + v_0\mu t/l}$$

(ii) $S = \int_0^t v\mathrm{d}t = \int_0^t \frac{lv_0}{\mu v_0}\mathrm{d}[\ln(1 + v_0\mu t/l)] = \frac{l}{\mu}\ln(1 + v_0\mu t/l)$

7.3 一个质量为 *m* 的发动机, 以恒定的牵引力工作, 它受到的阻力正比于其自身速率的平方, 求它所能达到的极大速率 *v*. (i) 计算从静止加速到 *v*/2 所需时间. (ii) 计算它从静止加速到 *v*/2 所走过的距离.

【解】

设牵引力为 *F*, 阻力为 $f = kv^2$, 极大速率为 v_0

则

$$F = f = kv_0^2$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{F}{k}}$$

即极大速率为 $\sqrt{\frac{F}{k}}$

(i)由牛顿第二定律

$$F - kv^2 = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}t = \frac{m\mathrm{d}v}{F - kv^2} = \frac{m}{k}\frac{\mathrm{d}v}{v_0^2 - v^2} = \frac{m}{k}[\mathrm{d}\ln(v_0 + v) - \mathrm{d}\ln(v_0 - v)]$$

$$t = \frac{m}{k}\left[\int_0^{\frac{v_0}{2}} \mathrm{d}\ln(v_0 + v) - \int_0^{\frac{v_0}{2}} \mathrm{d}\ln(v_0 - v) = \frac{mv_0}{2F}\ln 3 = \frac{m}{2\sqrt{Fk}}\ln 3\right.$$

物理考研交流QQ群：861466923

(ii)同(i)

$$F - kv^2 = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

等式两边同乘以 $\mathrm{d}x$

$$(F - kv^2)\mathrm{d}x = m\mathrm{d}v \cdot v$$

$$\mathrm{d}x = \frac{mv\mathrm{d}v}{F - kv^2} = -\frac{m}{2k}\mathrm{d}[\ln(F - kv^2)]$$

$$x = -\frac{m}{2k}\ln(F - kv^2)\Big|_0^{\frac{v_0}{2}}$$

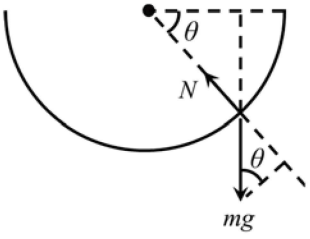
$$= -\frac{m}{2k}\ln\frac{3}{4}$$

$$= \frac{m}{2k}\ln\frac{4}{3} = \frac{mv_0^2}{2F}\ln\frac{4}{3}$$

7.4 半球形的薄玻璃高脚杯，其半径为 $R = 5$ cm，能承受的正压力达 2 N. 如果有一个 100 g 钢球自杯的边缘由静止释放后沿杯的内侧滑下，问球将在杯上的哪一点打破杯子？忽略钢球的半径.



【解】



设小钢球与球心连线和水平方向的夹角为 θ，由牛顿第二定律

$$N - mg\sin\theta = m\frac{v^2}{R}$$

由能量守恒可得

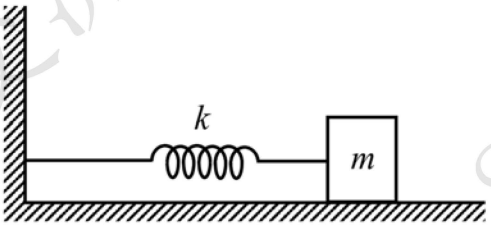
$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR\sin\theta$$

$$N = 3mg\sin\theta$$

将 $N = 2\ \mathrm{N},\ m = 0.1\ \mathrm{kg},\ g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ 代入上式

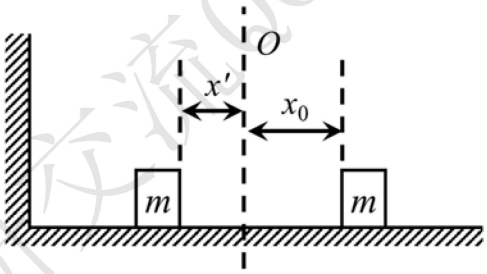
$$\theta = \arcsin\left(\frac{2}{0.3\times 9.8}\right) \approx 42.86^\circ$$

7.5 如图所示，木块受到劲度系数为 k 的弹簧的作用力和小的恒定摩擦力 f. 手持木块从弹簧无伸缩的位置移动一段距离 x_0 而后放松，木块振动若干次以后终于静止. (i) 证明每振动一次，振幅的减小量相同. (ii) 求出振动停止以前振动次数 n.



【解】

研究木块从开始运动到第一次速度为 0 的运动情况



(i) 由能量守恒定律

$$\frac{1}{2}k\left(x_0^2 - x'^2\right) = f(x_0 + x')$$

$$\Rightarrow x_0 - x' = \frac{2f}{k}$$

即每振动半周振幅减小量为 $2f\ /\ k$

物理考研交流QQ群：861466923

(ii) 设 $x_0 / (2f / k)$ 的整数部分为 n

在完成 n 次半周振动后距离弹簧平衡位置的距离为 x_n

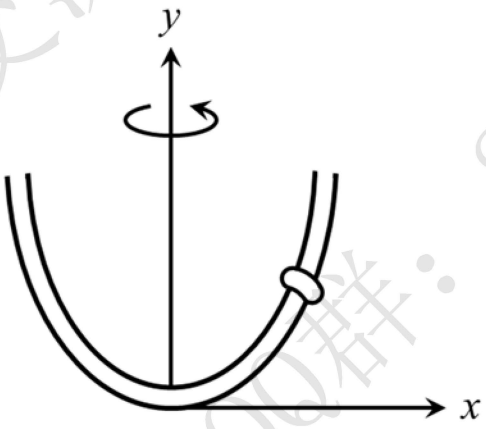
则 $kx_n > f$ 为继续振动条件, 即

$$x_n > \frac{f}{k}$$

当 $[x_n / (2f / k)] > 1 / 2$ 时可继续振动半周

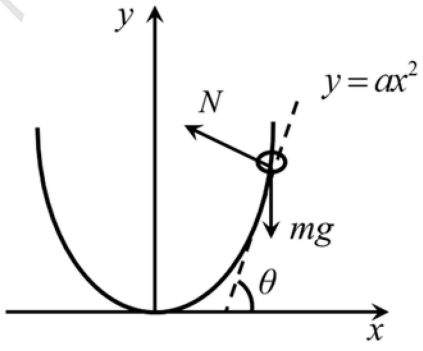
因此, 振动半周的次数为 $(kx_0 / 2f + 1 / 2)$ 的整数部分

7.6 抛物线形弯管的表面光滑, 可绕竖直轴以匀角速率转动. 抛物线方程为 $y = ax^2$, a 为常数, 小环套于弯管上. 求 (i) 弯管角速度多大, 小环可在管上任意位置相对弯管静止. (ii) 若为圆形光滑弯管, 情形如何?



【解】

(i)



物理考研交流QQ群：861466923

做圆环所在处的抛物线切线，设切线与 x 轴夹角为 θ

则

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2ax$$

由牛顿第二定律

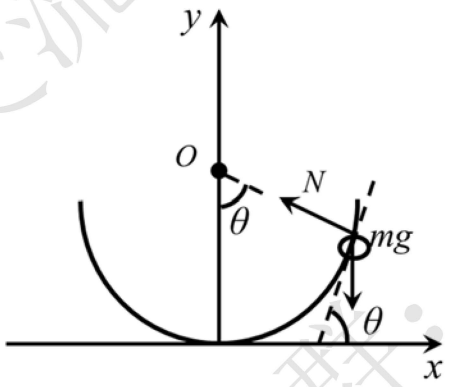
$$N\sin\theta = m\omega^2 x$$

$$N\cos\theta = mg$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\omega^2 x}{g} = 2ax$$

$$\omega = \sqrt{2ag}$$

(ii)



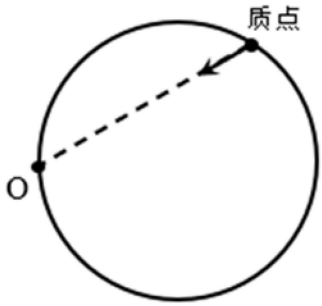
对于圆形光滑弯道

$$\tan\theta = \frac{\omega^2 x}{g} = \frac{x}{R-y}$$

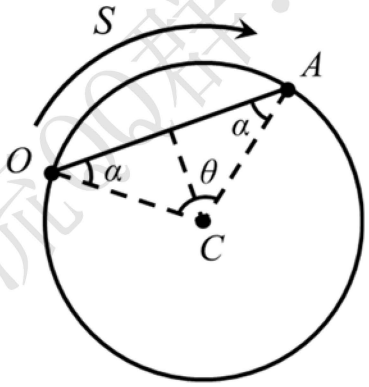
$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R-y}}$$

7.7 质点穿在光滑的钢丝圆圈上，圆圈在水平面内．质点受到圈上 O 点的吸引力，吸引力大小正比于质点与 O 的距离．列出质点的运动方程式．

物理考研交流QQ群：861466923



【解】



设物体位于 A 处

$$OA = 2R\cos\alpha$$

$$F = kOA = 2kR\cos\alpha$$

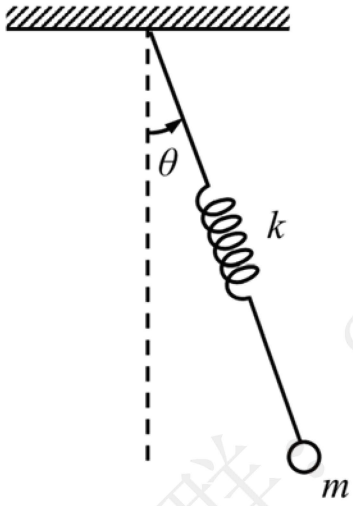
$$F_\tau = -F\sin\alpha = -2kR\sin\alpha\cos\alpha = -kR\sin 2\alpha = -kR\sin\theta$$

$$F_\tau = ma_\tau = m\ddot{s}$$

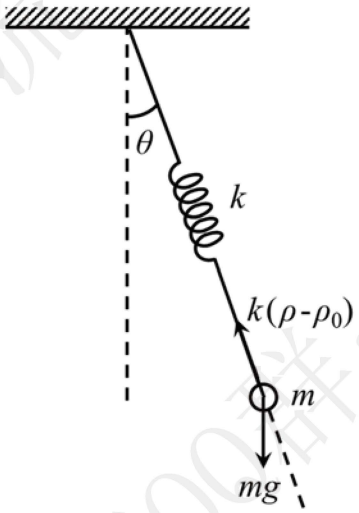
$$\therefore m\ddot{s} = -kR\sin\left(\frac{s}{R}\right)$$

7.8 由质量为 m 的物体系在劲度系数为 k 的轻弹簧一端而构成一弹簧摆. 弹簧的另一端系在固定点. 当弹簧上无载荷时, 它的长度是 l_0, 假定系统的运动限制在竖直平面内. 试导出质点运动方程. 设对于平衡位置的偏离保持为小角度和小径向位移, 试求解运动方程.

物理考研交流QQ群：861466923



【解】



以固定点为极点，绳子为极轴

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2$$

$$a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho^2\dot{\varphi})$$

由牛顿第二定律

$$ma_\rho = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = mg\cos\theta - k(\rho - \rho_0)$$

$$ma_\varphi = m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) = -mg\sin\theta$$

由小角度近似 $\Rightarrow$ $\cos\theta \approx 1$ $\sin\theta \approx \theta$

$\dot{\varphi}^2$、$\dot{\rho}\dot{\varphi}$ 为二阶小量，可以舍去，$\rho \approx \rho_0$

物理考研交流QQ群：861466923

$$m\ddot{\rho} + k\rho = k\rho_0 + mg \;\Rightarrow\; \rho = l + A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_1\right)$$

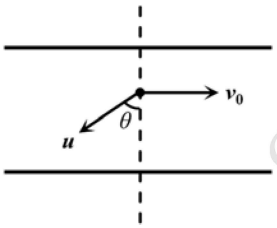
$$m\rho\ddot{\varphi} = -mg\theta \;\Rightarrow\; \theta = B\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\rho_0}}t + \varphi_2\right)$$

$$l = \rho_0 + mg/k$$

物理考研交流QQ群：861466923

8.1 以不变的划速 u 划船渡河. 河中水流均匀, 各处流速都是 v_0. 要想划到正对岸登陆, 问应向什么方向划?

【解】



在岸边上观察船, 船的速度为 $\vec{v}_0+\vec{u}$, 船想要划到正对岸有

$$\sin\theta=\frac{v_0}{u}$$

方位角

$$\theta=\arcsin\left(\frac{v_0}{u}\right)$$

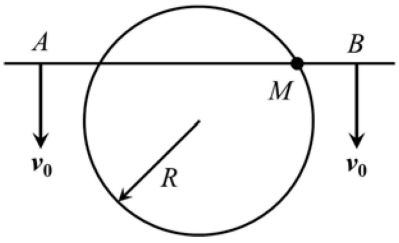
8.2 某人划船逆流航行. 经过某桥时, 渔竿落入水中顺流漂行. 半小时后发觉渔竿失落, 掉头追赶, 终于在桥的下游 5 km 处赶上渔竿. 设划速始终不变, 求流速.

【解】

设船的划速为 u, 水流速度为 v, 以流动的水为参考系, 鱼竿与船相对速度始终为 u, 半小时后发现鱼竿失落, 所以找回鱼竿也必然要再花半小时, 即鱼竿一共运动了一小时, 鱼竿相对于岸的速度为 v, 一小时后进行了 5 km

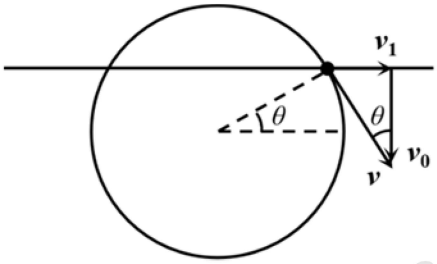
$$v=\frac{5\ \text{km}}{1\ \text{h}}=5\ \text{km/h}$$

8.3 直线 AB 以匀速 v_0 沿垂直于自身的速度运动. 求直线与静止圆周的交点 M (i) 在直线上 (ii) 在圆周上运动的速度.



【解】

物理考研交流QQ群：861466923



以直线 AB 为参考系，设 M 的速度为 $\vec{v}$，沿杆的分速度为 $\vec{v}_1$

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_0 = \vec{v}$$

$$v_1 = v_0 \tan\theta \, , v = \frac{v_0}{\cos\theta}$$

8.4 试用平动参考系重新研究 4.1 题、4.11 题的小楔子、6.2 题.

【解】

4.1 题

(i) (ii) 电梯为惯性系

$$F = mg = 98\ \mathrm{N}$$

(iii) (v) 电梯为非惯性系，以竖直向上为正方向，$a = 4.9\ \mathrm{m/s^2}$

$$F_{惯} = -ma$$

$$\therefore F - ma - mg = 0$$

$$F = m(a + g) = 147\ \mathrm{N}$$

(iv) 电梯为非惯性系，以竖直向上为正方向，$a' = -4.9\ \mathrm{m/s^2}$

$$F_{惯} = -ma'$$

$$F + F_{惯} - mg = 0$$

$$F = m(a' + g) = 49\ \mathrm{N}$$

4.11 题，第四章原解已用惯性力求解

6.2 题

以汽车为参考系

$$F_{惯} = -ma$$

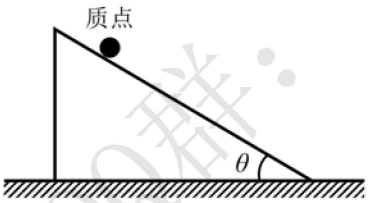
物理考研交流QQ群：861466923

$$F_f + F_{惯} = 0$$

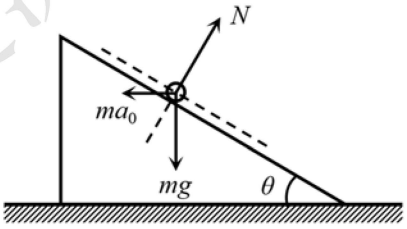
$$a = 0.2g$$

即加速度不应该超过 $0.2g$

8.5 光滑楔子以匀加速度 a_0 沿水平面平动. 质量为 m 的质点沿楔子的光滑斜面滑下. 求解质点运动情况以及质点对楔子的压力.



【解】



假设楔子的加速度方向水平向右，以光滑楔子为参考系，小球需要加上一个向左的惯性力

沿斜面方向，由牛顿第二定律

$$mg\sin\theta - ma_0\cos\theta = ma_1$$

垂直斜面方向，由牛顿第二定律

$$N - mg\cos\theta - ma_0\sin\theta = 0$$

解得

$$a_1 = g\sin\theta - a_0\cos\theta$$

$$N = mg\cos\theta + ma_0\sin\theta$$

如果楔子加速度方向水平向左，同理解得

$$a_1 = g\sin\theta + a_0\cos\theta$$

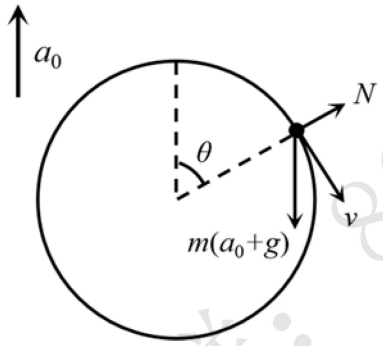
$$N = mg\cos\theta - ma_0\sin\theta$$

8.6 半径为 R 的光滑钢丝圆圈保持其平面竖直，以匀加速度 a_0 竖直向上运

物理考研交流QQ群：861466923

动. 圈上穿有质量为 m 的小环, 求解小环的相对运动以及环对圈的压力.

【解】



以钢圈为参考系，小环所受惯性力竖直向下，大小为 ma_0

对小环所在位置的切向和法向分别列出运动方程式

$$m(a_0+g)\sin\theta = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = ma_\tau \quad ①$$

$$m(a_0+g)\cos\theta - N = m\frac{v^2}{R} \quad ②$$

由 ① 式

$$m(a_0+g)\sin\theta\,\mathrm{d}s = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s$$

$$m(a_0+g)R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = mv\mathrm{d}v$$

$$C - m(a_0+g)R\cos\theta = \frac{1}{2}mv^2$$

C 为常数，与初始条件有关

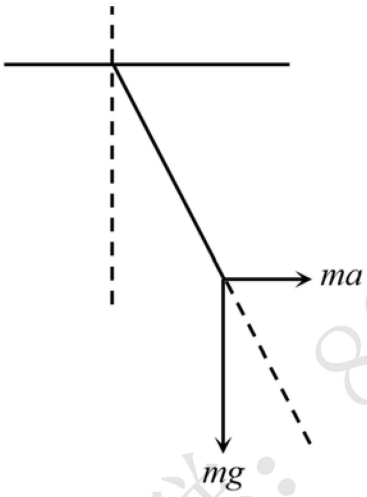
由 ② 式

$$N = m(a_0+g)\cos\theta - m\frac{v^2}{R}$$

8.7 在以匀加速度 a 水平行进的车厢顶部挂一长为 l 的单摆, 求其绕平衡位置作微振动的周期.

【解】

物理考研交流QQ群：861466923



以车厢为参考系，研究物体运动需引入惯性力，其大小

$$F_{惯} = ma$$

方向与车厢加速度方向相反

物体所受合力大小为

$$F = \sqrt{(mg)^2 + (ma)^2} = m\sqrt{g^2 + a^2}$$

等效加速度

$$g' = \sqrt{g^2 + a^2}$$

单摆周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2 + g^2}}}$$

物理考研交流QQ群：861466923

9.1 试用转动参考系重新研究 4.16 题、4.17 题、4.18 题, 6.3 题.

【解】

4.16 题, 以载重汽车为参考系

$$N + F_{惯} - mg = 0$$

$$F_{惯} = m\frac{v^2}{R}$$

$$v = \sqrt{\frac{(mg - N)R}{m}} = 7\ \mathrm{m/s}$$

4.17 题, 以车为参考系

$$N\cos\theta + F_{惯} = 0$$

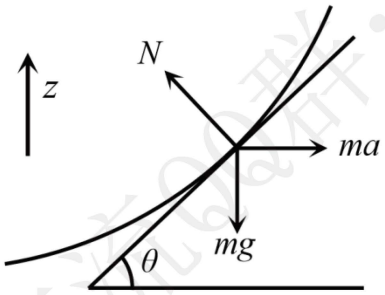
$$N\sin\theta - mg = 0$$

$$F_{惯} = -ma = -m\frac{v^2}{R}$$

解得

$$v = \sqrt{gR\cot\theta}$$

4.18 题, 以转动的转台为参考系



$$N\cos\theta - mg = 0$$

$$N\sin\theta + F_{惯} = 0$$

$$F_{惯} = -m\omega^2 r$$

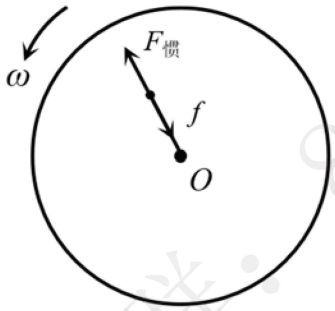
$$\frac{\omega^2 r}{g} = \tan\theta = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}$$

$$\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}\mathrm{d}(r^2)$$

物理考研交流QQ群：861466923

$$z=\frac{\omega^2(x^2+y^2)}{2g}$$

6.3 题，以转动的转台面为参考系

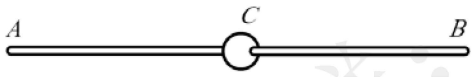


$$F_{惯}-f=0$$

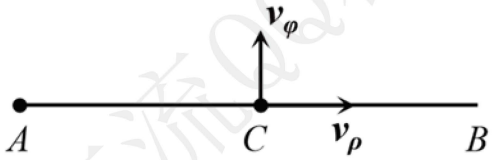
$$f=\mu mg \quad F_{惯}=m\omega^2 r$$

$$\Rightarrow \mu=\frac{2}{49}$$

9.2 直杆 AB 以匀角速 ω 绕 A 端转动 (见题 5.8 图)，质点 C 穿在杆上沿杆运动. 已知 C 的绝对速度 v_0 不变，求解 C 在杆上运动的规律.



【解】



以初始状态下 AB 为极轴，A 为极点，C 的速度有两个分量

$$v_\varphi=\rho\omega$$

$$v_\rho=\dot{\rho}$$

C 的绝对速度不变

$$v_\varphi^2+v_\rho^2=v_0^2$$

$$\rho^2\omega^2+\dot{\rho}^2=v_0^2$$

$$\dot{\rho}=\sqrt{v_0^2-\rho^2\omega^2}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$$

物理考研交流QQ群：861466923

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}\rho}{\sqrt{v_0^2-\rho^2\omega^2}}$$

$$\int_0^t \mathrm{d}t=\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\sqrt{v_0^2-\rho^2\omega^2}}=\frac{1}{\omega}\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\omega}{v_0}\rho\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{v_0}\rho\right)^2}}$$

$$\omega t=\arccos\left(\frac{\omega}{v_0}\rho_0\right)-\arccos\left(\frac{\omega}{v_0}\rho\right)$$

$$\cos(\omega t)=\frac{\omega}{v_0}\rho_0\frac{\omega}{v_0}\rho+\sqrt{1-\frac{\omega^2}{v_0^2}\rho_0^2}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{v_0^2}\rho^2}$$

令 $\theta=\omega t$, 移项平方后化简可得

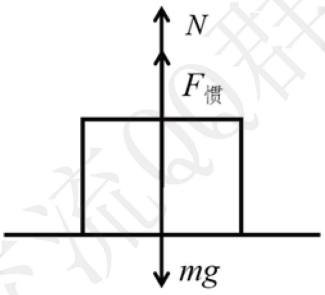
$$(\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\theta)=\frac{v_0^2\sin^2\theta}{\omega^2}$$

$$\rho=\rho_0\cos\theta\pm\left(\frac{\sqrt{v_0^2-\rho_0^2\omega^2}}{\omega}\right)\sin\theta$$

9.3 一船以速度 v 沿赤道航行, 其上有一弹簧秤, 若此秤在船静止时读数正确, 问当它航行时的误差为多少? 设地球自转角速度为 ω.

【解】

船静止时, 以船为参考系, 船受力情况为



$$N+F_{惯}-mg=0$$

$$F_{惯}=m\omega^2R \quad R\text{为地球半径}$$

船运动时

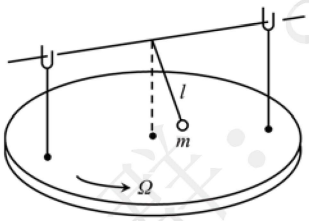
$$F'_{惯}=m\left(\omega+\frac{v}{R}\right)^2R$$

误差为

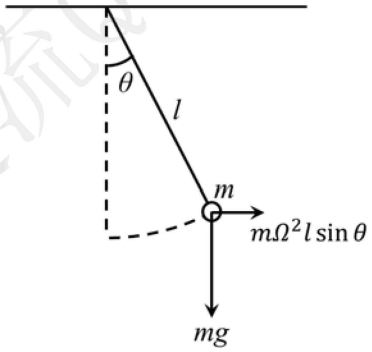
$$\frac{\left|F'_{惯}-F_{惯}\right|}{mg}=\frac{\left(2\omega v+\frac{v^2}{R}\right)}{g}\approx\frac{2\omega v}{g}$$

物理考研交流QQ群：861466923

9.4 一个摆刚性地固定于由两个支架支起的横轴上，因此它只能在垂直于横轴的平面内摆动. 摆是由一个质量为 m 的摆锤固定于长度为 l 而质量可略去的杆的端点组成的. 支架装在一个以恒定角速度 Ω 转动的平台上，假定振幅很小，求摆的频率.



【解】



在摆的运动平面考虑问题

摆随转盘运动，所受惯性力

$$F_{惯} = m\Omega^2 l \sin\theta$$

切向运动方程式

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + m\Omega^2 l \sin\theta\cos\theta$$

由于振幅很小

$$\sin\theta \approx \theta \qquad \cos\theta \approx 1$$

$$ml\ddot{\theta} = -m(g - \Omega^2 l)\theta$$

类比单摆运动，可得

$$\omega = \sqrt{\frac{g - \Omega^2 l}{l}}$$

物理考研交流QQ群：861466923

9.5 试用转动参考系重新研究 5.7 题、5.8 题.

【解】

5.7 题, 第五章原解已用转动参考系求解

5.8 题, 以转动的细杆 AB 为参考系

$$F - m\dot{\omega} \times r - m\omega \times (\omega \times r) - ma_c = ma'$$

由题意, 杆与质点之间无水平方向相互作用力, 即 $F_\varphi = 0$, 杆与质点在法向上无相对位移

$$a' = 0$$

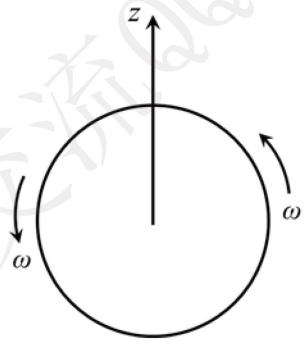
$$\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = 0$$

$$\rho^2\dot{\varphi} = C$$

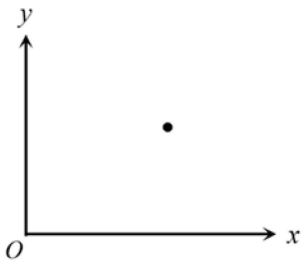
$$\rho = \rho_0\sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_0 + \alpha t}}$$

9.6 质量为 m 的质点在光滑水平桌面上运动, 桌子绕通过原点的竖直轴以匀角速度 ω 转动, 求证质点的运动方程是

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - 2\omega\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \omega^2 x = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 2\omega\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \omega^2 y = 0 \end{cases}$$



【解】



物理考研交流QQ群：861466923

在转动参考系中，由运动定律

$$F - m\dot{\omega} \times r - m\omega \times (\omega \times r) - ma_c = ma'$$

$$a_c = 2\omega \times v' \qquad F = 0$$

$$-m\dot{\omega} \times r - m\omega \times (\omega \times r) - 2m\omega \times v' = ma' \quad (1)$$

$\boldsymbol{a'} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}$　$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 为x, y 方向单位向量

$$\boldsymbol{v'} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$$

$$\omega \times \boldsymbol{i} = \omega\boldsymbol{j} \qquad \omega \times \boldsymbol{j} = -\omega\boldsymbol{i}$$

带入 (1) 式可分别得到 x, y 方向运动方程

$$\omega^2 x + 2\omega v_y = a'_x \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \quad a_y = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\omega^2 y - 2\omega v_x = a'_y \quad v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad a_x = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

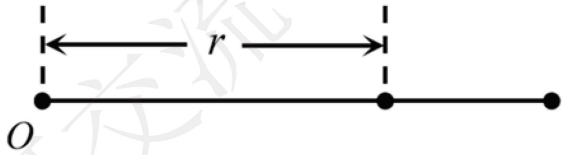
即

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - 2\omega\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \omega^2 x = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2\omega\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \omega^2 y = 0$$

9.7 空心细杆在水平面内以匀角速度 ω 绕其固定端转动. 有一质点从开口的另一端进入，求解其运动情况及其与杆的相互作用. 若杆长为 l，要使质点得以到达固定端，求质点的初速 v_0 至少应为多少?

【解】



以细杆为参考系，列出质点的运动方程

$$F - m\dot{\omega} \times r - m\omega \times (\omega \times r) - 2m\omega \times v' = ma'$$

对于径向分量，由于径向不受力，$a'_\rho = \ddot{r}$

$$m\omega^2 r = m\ddot{r} \qquad (1)$$

对于切向分量，由于细杆与质点无相对位移，$a'_\varphi = 0$

$$F_\varphi - 2m\omega \times v' = 0 \quad (2)$$

由 (1) 式两边同乘以 $\mathrm{d}r$ 可得

$$\omega^2 r\mathrm{d}r = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}r = \dot{r}\mathrm{d}\dot{r}$$

对等式两边从初状态到末状态进行积分

$$\frac{1}{2}\omega^2(r_0^2 - r^2) = \frac{1}{2}(v_0^2 - v^2)$$

质点到达 O 的速度为

$$v = \sqrt{v_0^2 - \omega^2 l^2}$$

$$v_0 \geqslant \omega l$$

由 (2) 式

$$v = -\sqrt{v_0^2 - \omega^2(l^2 - r^2)}$$

$$F_\varphi = -2m\omega\sqrt{v_0^2 - \omega^2(l^2 - r^2)}$$

9.8 一炮弹以初速 v_0，仰角 α 在地球表面北纬 λ 处向北发射，求证经过时间 t 后炮弹东偏的距离

$$s = \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos\lambda - \omega v_0 t^2 \sin(\alpha - \lambda).$$

【解】

取固定于地球的坐标系，原点在发射位置，x' 轴指向南方，y' 轴指向东方，z' 轴竖直向上

落体在各方向的速度

$$\dot{x}' = -v_0\cos\alpha \qquad \dot{y}' = 0 \qquad z' = v_0\sin\alpha - gt$$

科里奥利力的y' 方向分力为$-2m\omega\dot{z}'\cos\lambda - 2m\omega\dot{x}'\sin\lambda$，$x'$ 和z' 方向分力均为 0

即

$$\begin{aligned} m\ddot{y}' &= -2m\omega(v_0\sin\alpha - gt)\cos\lambda + 2m\omega v_0\cos\alpha\sin\lambda \\ &= 2m\omega v_0\sin(\lambda - \alpha) + 2\omega g t\cos\lambda \\ \dot{y}' &= 2\omega v_0\sin(\lambda - \alpha)\,t + \omega g t^2\cos\lambda \\ y' &= \omega v_0\sin(\lambda - \alpha)\,t^2 + \frac{1}{3}\omega g t^3\cos\lambda \end{aligned}$$

物理考研交流QQ群：861466923

9.9 以初速 v_0 将质点从地面竖直上抛. 求质点落回地面的地点与出发点之间的偏差. 设所在地方的纬度为 φ, 地球自转的角速度为 ω.

【解】

同 9.8 题, 取固定于地球的坐标系, x 轴指向南方, y 轴指向东方, z 轴竖直向上

$$m\ddot{x} = 0$$

$$m\ddot{y} = -2m\omega\dot{z}\cos\varphi$$

$$m\ddot{z} = -mg$$

$$\dot{z}_0 = v_0 \qquad \therefore \dot{z} = v_0 - gt$$

$$m\ddot{y} = -2m\omega(v_0 - gt)\cos\varphi$$

$$\dot{y} = \omega\cos\varphi\, gt^2 - 2\omega v_0 t\cos\varphi$$

$$y = \frac{1}{3}\omega\cos\varphi\, gt^3 - \omega v_0 t^2\cos\varphi$$

物体向上抛出到回归地面, 中间运动过程所用时间为

$$t = \frac{2v_0}{g}$$

带入 y 表达式

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{4}{3}\frac{\omega v_0^3\cos\varphi}{g^2}$$

即落地距离偏西 $v_0^3(4\omega/3g^2)\cos\varphi$

9.10 在纬度为 φ 的地点, 有一质点在光滑水平面上运动. 质点相对于地球的初速为 v_0. 地球自转角速度为 ω. 求解质点的运动情况.

【解】

同 9.8 题, 取固定于地球的坐标系, x 轴指向南方, y 轴指向东方, z 轴竖直向上

$$\omega_x = -\omega\cos\varphi \qquad \omega_y = 0 \qquad \omega_z = \omega\sin\varphi$$

不考虑 z 方向的力, x, y 方向的科里奥利力分别为

$$F_{cx} = 2m\left(\dot{y}\omega_z - \dot{z}\omega_y\right)$$

$$F_{cy} = 2m(\dot{z}\omega_x - \dot{x}\omega_z)$$

$$\dot{z} = 0$$

$$F_{cx} = 2m\omega\dot{y}\sin\varphi$$

$$F_{cy} = -2m\omega\dot{x}\sin\varphi$$

$$\boldsymbol{v_0} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{F} = F_{cx} + F_{cy} = 2m\omega\sin\varphi\,(\dot{y}\boldsymbol{i} - \dot{x}\boldsymbol{j})$$

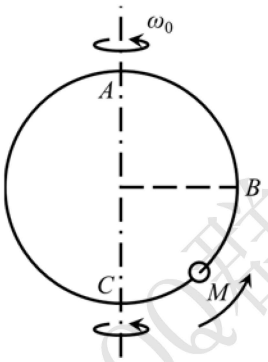
$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v_0} = 0$$

$\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{v_0}$ 垂直, 且 $\boldsymbol{F}$ 的大小为

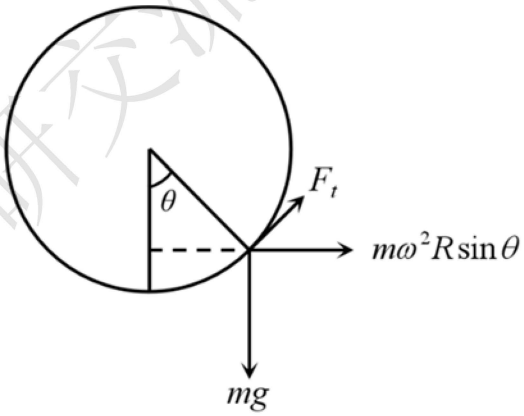
$$F = 2m\omega\sin\varphi\, v_0$$

$$F = ma = m\frac{v_0^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v_0}{2\omega\sin\varphi}$$

9.11 半径为 R 的光滑钢丝圆圈以匀角速 ω_0 绕竖直直径转动. 质点 M 穿在圆圈上. (i) 试列出质点的运动方程式. (ii) 设质点开始时在圆圈最低点 C, 它的初速恰足以使它上升到圆圈的最高点 A, 试计算质点从 C 到 B 所花的时间.



【解】



(i) 切向力

$$F_t = m\omega^2 R\sin\theta\cos\theta - mg\sin\theta = mR\ddot{\theta} \quad (1)$$



等式两边同乘以 $\mathrm{d}\theta$

$$-\frac{1}{4}m\omega^2 R\,\mathrm{d}\cos 2\theta + mg\mathrm{d}\cos\theta = \frac{1}{2}mR\mathrm{d}\dot{\theta}^2$$

对等式两边从初状态到末状态进行积分

$$g(\cos\theta-\cos\theta_0)-\frac{1}{4}\omega^2R(\cos 2\theta-\cos 2\theta_0)=\frac{1}{2}R\left(\dot{\theta}^2-\dot{\theta}_0^2\right) \quad (2)$$

(ii) 当 $\theta=\pi$ 时, $\dot{\theta}=0$, 且 $\theta_0=0$, 带入上式可得

$$\dot{\theta}_0 = 2\sqrt{g/R} \quad (3)$$

再将 (3) 式带入 (2) 式

$$g(\cos\theta-1)-\frac{1}{4}\omega^2R(\cos 2\theta-1)=\frac{1}{2}R\dot{\theta}^2-2g$$

$$2g(\cos\theta+1)+\omega^2R\sin^2\theta=R\dot{\theta}^2$$

$$\dot{\theta}^2=2\frac{g}{R}(\cos\theta+1)+\omega^2\sin^2\theta$$

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2\frac{g}{R}(\cos\theta+1)+\omega^2\sin^2\theta}}$$

$$=\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2\frac{g}{R}\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1+1\right)+\omega^2\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{\mathrm{d}\theta}{2\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{g}{R}+\omega^2\sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\mathrm{d}\theta}{\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}\sqrt{\frac{g}{R}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+\omega^2\sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$=\frac{\mathrm{d}\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\frac{g}{R}+\left(\frac{g}{R}+\omega^2\right)\tan^2\frac{\theta}{2}}}$$

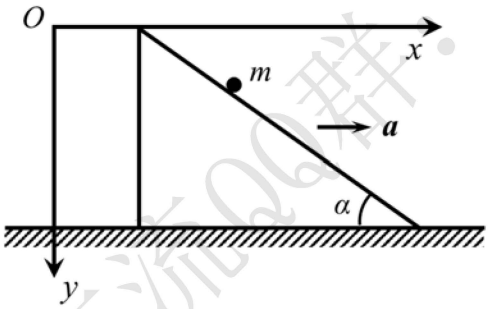
$$t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\frac{g}{R}+\left(\frac{g}{R}+\omega^2\right)\tan^2\frac{\theta}{2}}}$$

令 $\tan\frac{\theta}{2}=x$

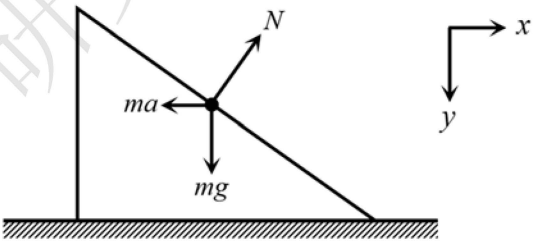
物理考研交流QQ群：861466923

$$
\begin{aligned}
t &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{g}{R}+\left(\frac{g}{R}+\omega^2\right)x^2}} \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{g+\omega^2R}{R}}\sqrt{x^2+\frac{g}{g+\omega^2R}}} \\
&= \sqrt{\frac{R}{g+\omega^2R}}\int_0^1 \mathrm{d}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{g}{g+\omega^2R}}\right)\right] \\
&= \sqrt{\frac{R}{g+\omega^2R}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+\frac{g}{g+\omega^2R}}}{\sqrt{\frac{g}{g+\omega^2R}}}\right) \\
&= \sqrt{\frac{R}{g+\omega^2R}}\ln\left(\sqrt{\frac{g+\omega^2R}{g}}+\sqrt{\frac{2g+\omega^2R}{g}}\right)
\end{aligned}
$$

9.12 倾角为 α 的光滑直角棱柱, 沿一水平面作匀加速直线运动, 加速度大小为 a, 初速为零. 一质量为 m 的质点无初速地沿棱柱的斜面向下运动. 求质点的 (i) 相对加速度, (ii) 绝对加速度, (iii) 绝对轨迹及斜面的反作用力



【解】



(i) 以棱柱为参考系, 小球受力如图所示, 运动定律表达式为

$$N - mg\cos\alpha - ma\sin\alpha = 0$$

$$mg\sin\alpha - ma\cos\alpha = ma_1$$

$a_1 = g\sin\alpha - a\cos\alpha$ 为棱柱中小球的的加速度，沿斜面向下，其 x, y 方向分量为

$$a_{1x} = a_1\cos\alpha = (g\sin\alpha - a\cos\alpha)\cos\alpha$$
$$a_{1y} = a_1\sin\alpha = (g\sin\alpha - a\cos\alpha)\sin\alpha$$

(ii) 在地面参考系中

$$a'_{1x} = a + a_{1x} = (g\cos\alpha - a\sin\alpha)\sin\alpha$$
$$a'_{1y} = a_{1y} = (g\sin\alpha - a\cos\alpha)\sin\alpha$$
$$a'_1 = \sqrt{{a'_{1x}}^2 + {a'_{1y}}^2}$$
$$= \sqrt{a^2 + a_1^2 + 2aa_1\cos\alpha}$$
$$= \sqrt{a^2 + (g\sin\alpha - a\cos\alpha)(g\sin\alpha + a\cos\alpha)}$$
$$= \sqrt{a^2 + g^2}\sin\alpha$$

(iii) 质点初速度为 0，加速度为

$$a'_{1x} = (g\cos\alpha - a\sin\alpha)\sin\alpha$$
$$a'_{1y} = (g\sin\alpha - a\cos\alpha)\sin\alpha$$

由于加速度不随时间变化，故质点的绝对轨迹为

$$y = \frac{a'_{1y}}{a'_{1x}}x + C$$

C 为常数，与初始条件有关

另外

$$N = mg\cos\alpha + ma\sin\alpha$$

物理考研交流QQ群：861466923

11.1 炮身重 P, 置于光滑平台上, 发射出一颗重为 P' 的炮弹. 炮弹出口速率为 v_0, 仰角为 φ. 求炮身所得到速度的大小与方向.

【解】

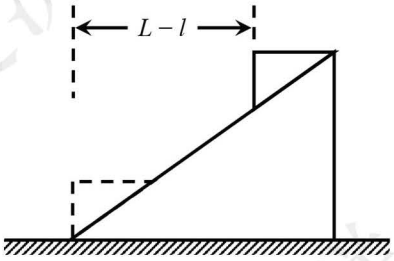
炮身与炮弹整体在水平方向上动量守恒

$$\frac{P'}{g} v_0 \cos\alpha = \frac{P}{g} v$$

$$v = \frac{P'}{P} v_0 \cos\alpha$$

11.2 在 4.11 题中的大楔子重 P, 水平边长 L, 小楔子重 P', 水平边长 l. 小楔子从斜边上最高位置无初速地滑下, 问小楔子滑到底时大楔子移动多远?

【解】



设小楔子左移了 x', 大楔子右移了 x

$$Mx - mx' = 0 \quad M = \frac{P}{g} \quad m = \frac{P'}{g}$$

大小楔子相对水平移动距离为 $L - l$

$$L - l = x + x'$$

解得

$$x = \frac{(L-l)P}{P + P'}$$

物理考研交流QQ群：861466923

11.3 体重为 P 的人拿着重为 P' 的物体跳远. 起跳仰角 φ, 初速 v_0. 到达最高点时, 将手中物体以水平向后的相对速度 u 抛出. 问跳远成绩因此增加多少?

【解】

研究到达最高点之后的运动, 竖直方向上为自由落体运动

$$t=\frac{v_0\sin\varphi}{g}$$

(i) 不抛出物体, 水平前进距离

$$x=v_0\cos\varphi\, t=\frac{v_0^2\cos\varphi\sin\varphi}{g}$$

(ii) 抛出物体, 设抛出后人速度为 v_1, 物体速度为 v_2,

$$x'=v_1t=\frac{v_1v_0\sin\varphi}{g}$$

由动量守恒

$$\frac{P}{g}v_1+\frac{P'}{g}v_2=\frac{P'+P}{g}v_0\cos\varphi$$

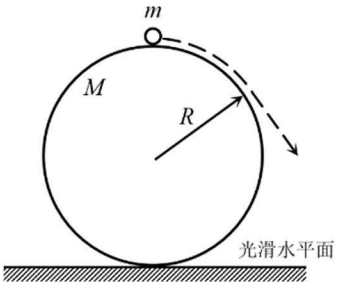
$$v_1-v_2=u$$

$$v_1=\frac{\left(P'+P\right)v_0\cos\varphi+P'u}{P+P'}$$

$$x'-x=\frac{P'uv_0\sin\varphi}{\left(P+P'\right)g}$$

11.4 半径为 R、质量为 M 的光滑圆柱体横卧于光滑水平面上. 质量为 m 的质点从圆柱最高处无初速地滑下. 求质点的绝对轨迹.

物理考研交流QQ群：861466923



【解】

以 M 圆心为参考系，设 m 坐标为 (x,y)，则

$$x^2+y^2=R^2 \quad ①$$

在惯性系中，设 m 坐标为 $\left(x',y\right)$，M 圆心坐标为 $(x_1,0)$，则

$$mx'+Mx_1=0 \quad ②$$

由坐标转换条件

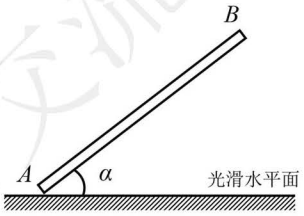
$$x'=x+x_1 \quad ③$$

联立①②③

$$\left[\frac{(M+m)}{M}x'\right]^2+y^2=R^2$$

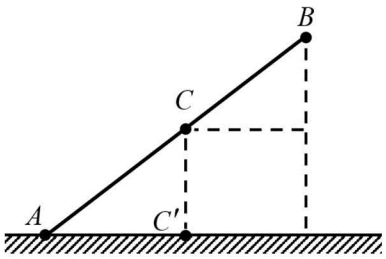
轨迹为椭圆，长轴为 $2R$，短轴为 $2RM/(M+m)$

11.5 用手扶持匀质杆 AB 使斜立于光滑水平面上，放手任杆倾倒，棒长为 $2l$，求 B 点的轨迹.



【解】

物理考研交流QQ群：861466923



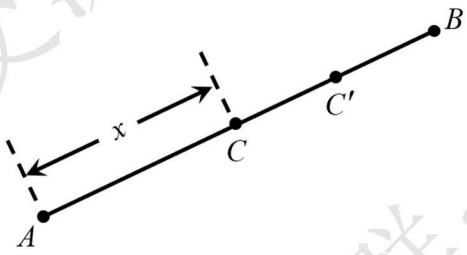
杆水平方向无外力作用，杆质心 C 水平方向无位移，作 CC' 垂直于地面交地面于点 C'，以 C' 为坐标原点，B 坐标为 (x,y)

$$x^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=l^2$$

轨迹为椭圆，长轴为 $4l$，短轴为 $2l$

11.6 均匀细杆长为 l，重为 P，在水平面以匀角速度 ω 绕一端 A 转动. 求与 A 端相距 x 的截面上两方的张力.

【解】



如图，设 C' 为 BC 中点，对 BC 段整体，由牛顿第二定律

$$T=m_{BC}\omega^2 r_{C'}$$

$$m_{BC}=\frac{(l-x)P}{lg}$$

$$r_{C'}=AC'=x+\frac{l-x}{2}=\frac{l+x}{2}$$

$$\Rightarrow T=\frac{P\omega^2(l^2-x^2)}{2gl}$$

11.7 将煤仓中的煤通过传送带倾入敞车. 在 2 s 内倾入的煤有 10 t，在这段

物理考研交流QQ群：861466923

时间内火车行驶10 m. 求机车牵引敞车的力. 煤进入敞车的绝对速度垂直于火车行驶方向.

【解】

$$F\Delta t = mv \qquad v = \frac{x}{\Delta t} = 5\ \mathrm{m/s}$$

$$F = \frac{mv}{\Delta t} = 2.5 \times 10^4\ \mathrm{N}$$

11.8 一个质量为 m 的猴子与一质量相同的石块, 以一细绳相连, 挂在一光滑的定滑轮的两侧. 起初静止不动. 若猴子以相对绳子的速度 u 沿绳上爬, 求解石块的运动.

【解】

系统对定滑轮轴线角动量守恒

$$mrv_1 - mrv_2 = 0$$

$$v_1 + v_2 = u$$

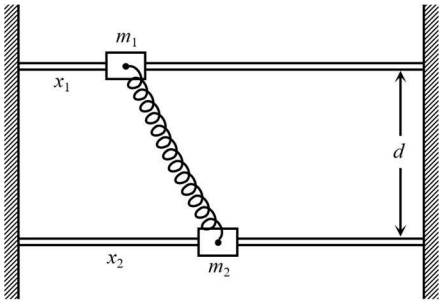
解得

$$v_2 = \frac{u}{2}$$

石块以 $u/2$ 的速度上升

11.9 质量分别为 m_1 及 m_2 的二滑块分别穿于二平行水平光滑导杆上, 二导杆间的距离为 d. 再以一劲度系数为 k 自然长度为 d 的轻弹簧连接, 若起初, m_1 位于 $x_1 = 0$ 处, m_2 位于 $x_2 = l$ 处, 且其速度均为零, 试求释放后两滑块的最大速度.

物理考研交流QQ群：861466923



【解】

二滑块和弹簧水平方向无外力作用

$$m_1v_1+m_2v_2=0$$

由能量守恒

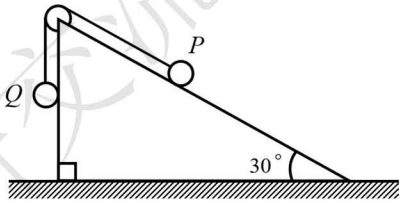
$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}k\left(\sqrt{d^2+l^2}-d\right)^2$$

当弹簧长度最小时，滑块速率达到最大值，即 $x=0$ 时，速率最大

$$v_{1max}=\sqrt{\frac{km_2}{m_1(m_1+m_2)}}\left(\sqrt{d^2+l^2}-d\right)$$

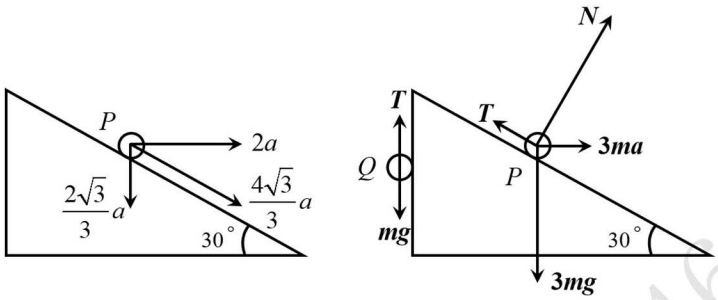
$$v_{2max}=\sqrt{\frac{km_1}{m_2(m_1+m_2)}}\left(\sqrt{d^2+l^2}-d\right)$$

11.10 如图所示质量为 $2m$ 的直角楔子放在水平面上，质点 P 的质量为 $3m$，质点 Q 的质量为 m. 所有接触都是光滑的，不计滑轮和绳子的质量，求楔子的加速度，绳中张力和楔子对 P 点的反作用力.



【解】

物理考研交流QQ群：861466923



直角楔子加速度水平向左，设其大小为 a，因 Q 与楔子合质量为 $3m$，P 质量也为 $3m$，所以 Q 和楔子共同向左的加速度与 P 水平向右的加速度大小相同，以楔子为参考系，P 水平加速度为 $2a$，方向向右

对 Q 做受力分析

$$T-mg=m\frac{4}{3}\sqrt{3}a$$

对 P 做受力分析

(i) 沿斜面方向

$$3mg\sin 30^0+3ma\cos 30^0-T=3m\frac{4}{3}\sqrt{3}a$$

(ii) 垂直斜面方向

$$N+3ma\sin 30^0-3mg\cos 30^0=0$$

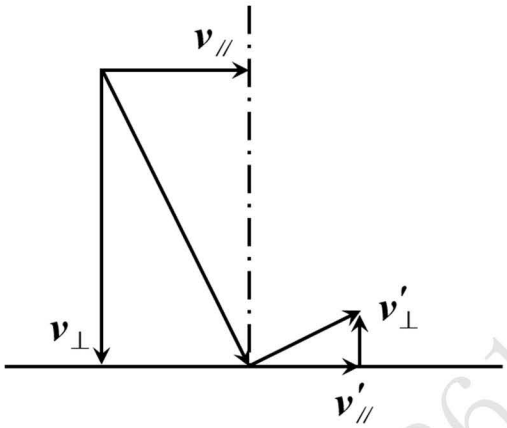
解得

$$a=\frac{\sqrt{3}}{23}g\quad T=\frac{27}{23}mg\quad N=\frac{33}{23}\sqrt{3}mg$$

11.11 一冰雹落在一水平冰面上，它的下落速度与竖直线成 30° 角，回跳速度与竖直线成 60° 角，假定雹子与冰面的接触是光滑的，求它们的碰撞恢复系数 e.

【解】

物理考研交流QQ群：861466923



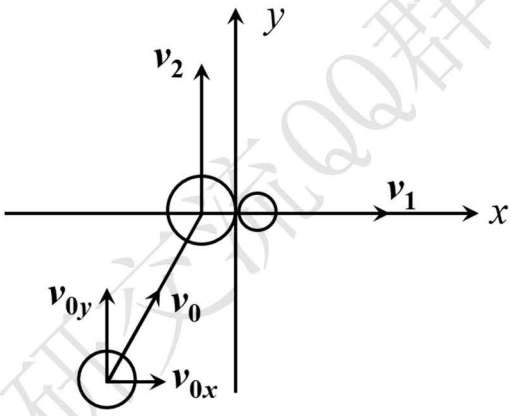
由题意

$$\frac{v_{\perp}'}{v_{//}}=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{v_{\perp}}{v_{//}}=\sqrt{3}$$

$$e=\frac{v_{\perp}'}{v_{\perp}}=\frac{1}{3}$$

11.12 质量为 m 的圆球同另一质量为 m_1 的静止圆球碰撞. 假定他们之间的接触是光滑的, 在碰后两球的速度方向互相垂直, 求证 $m = em_1$ (e 为碰撞的恢复系数).

【解】

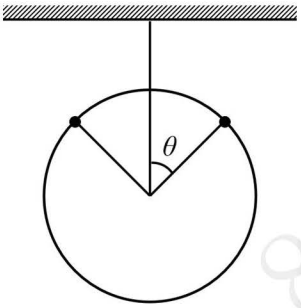


$$e=\frac{v_1}{v_{ox}} \qquad v_{oy}=v_2 \qquad mv_{ox}=m_1v_1$$

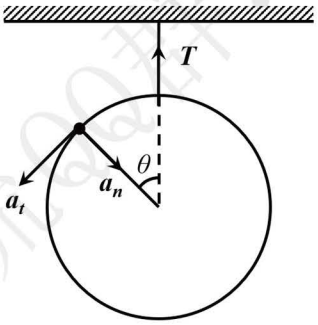
$$\Rightarrow\ e=\frac{m}{m_1} \qquad m=em_1$$

11.13 用线把一质量为 M 的圆环悬挂起来, 两个质量为 m 的小珠, 可在圆

环上作无摩擦地滑动. 若同时在环顶端释放小珠, 使它们沿着环的两边下滑. 证明: 如果 $m > 3M/2$, 圆环在小珠滑到某一位置时会开始上升, 并求出现这一现象时小珠滑过的角度 θ.



【解】



对圆环和两个小珠整体, 列动力学方程

$$Mg + 2mg - T = 2m(a_t \sin\theta + a_n \cos\theta)$$

$$a_t = g\sin\theta \qquad a_n = \frac{v^2}{R}$$

由动能定理

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1-\cos\theta)$$

结合以上各式, 令 $T = 0$, 则

$$3\cos^2\theta - 2\cos\theta + \frac{M}{2m} = 0$$

$$\cos\theta = \frac{2 \pm 2\sqrt{1-\frac{3M}{2m}}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{1-\frac{3M}{2m}}}{3}$$

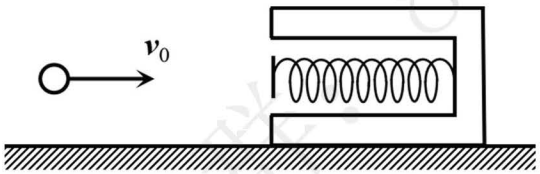
$$1 - \frac{3M}{2m} > 0 \qquad m > \frac{3}{2}M$$

物理考研交流QQ群：861466923

θ 取小角度, 即

$$\cos\theta = \frac{1+\sqrt{1-\frac{3M}{2m}}}{3}$$

11.14 一个质量为 m 的子弹以速度 v_0 向一个质量为 M 的靶射去, 靶中的洞含有一劲度系数为 k 的弹簧, 开始时靶是静止的, 且可以无摩擦地在水平面上滑动. 求弹簧被压缩的最大距离 Δx.



【解】

弹簧压缩了最大长度时, 子弹与靶无相对速度, 设此时子弹与靶共同速度为 v

由动量守恒

$$mv_0 = (m+M)v$$

机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}(m+M)v^2$$

$$\Rightarrow x = v_0\sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}}$$

11.15 铁砧连同砧上的工件共有 250 t. 12 t 的汽锤以 5 m/s 的速率锻打工件. 设碰撞是无弹性的, 求汽锤锻打工件的功、消耗于使基座发生振动的能量, 并求汽锤的效率.

【解】

碰撞无弹性, 由动量守恒

$$mv_0 = (m+M)v_1$$

汽锤锻打工件的功

$$E_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(m+M)v_1^2 = \frac{1}{2}\frac{mM}{M+m}v_0^2 = 143130\ \text{J}$$

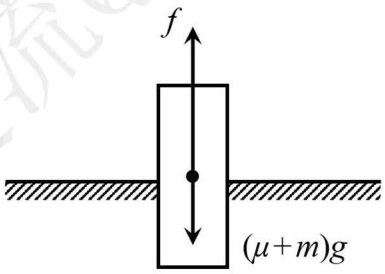
消耗于使基座发生振动的能量

$$E_2 = \frac{1}{2}(m+M)v_1^2 = 6870\ \text{J}$$

$$\eta = \frac{E_1}{E_1+E_2} = 95\%$$

11.16 打桩机的锤质量 M = 350 kg. 从 h = 2 m 的高度落下打桩 n = 25 次, 将质量为 m = 50 kg 的桩子打进土中 s = 5 cm. 撞击是无弹性的. 问桩子能承受多大压力而不致下沉?

【解】



由动量守恒

$$Mv_0 = (M+m)v$$

$$v = \frac{M}{M+m}\sqrt{2gh}$$

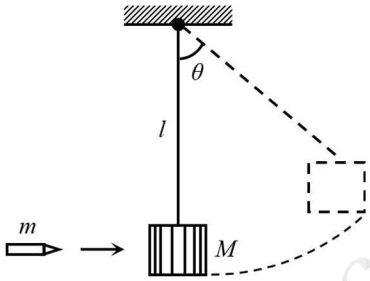
$$f - (M+m)g = (M+m)a$$

$$v^2 = 2a\frac{s}{n}$$

$$\Rightarrow f = (M+m)g\left(1 + \frac{nhM^2}{s(M+m)^2}\right)$$

物理考研交流QQ群：861466923

11.17 质量为 m 的枪弹沿水平方向射进质量为 M 的冲击摆，使摆升高达到悬线偏离竖直方向 θ 角，悬线长 l. 求枪弹射入木块前的速度.



【解】

由动量守恒

$$mv_0 = (m+M)v_1$$

能量守恒

$$(M+m)gl(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}(M+m)v_1^2$$

$$\Rightarrow\ v_0 = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$$

11.18 质量为 m_1 和 m_2 的两质点相互吸引，引力的大小 $F=-km_1m_2/r^2$，r 为两者之间的距离，k 为常量. 开始时两者静止而相距 a，求距离减为 $a/2$ 时两质点的速度各为多大?

【解】

由动量守恒

$$m_1v_1 + m_2v_2 = 0$$

$$\Delta U = -\int_a^{\frac{a}{2}} F\mathrm{d}r = -\frac{km_1m_2}{a}$$

由能量守恒

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \Delta U = 0$$

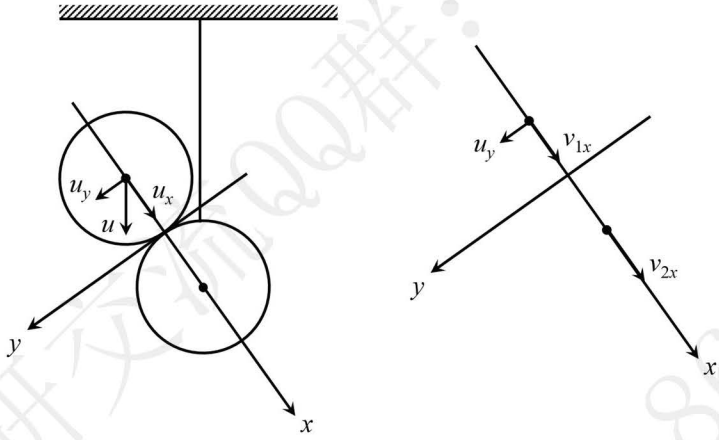
物理考研交流QQ群：861466923

$$v_1 = m_2\sqrt{\frac{2k}{a(m_1+m_2)}}$$

$$v_2 = -m_1\sqrt{\frac{2k}{a(m_1+m_2)}}$$

11.19 光滑球悬在不可伸长的轻绳上，一光滑球以竖直向下的速度 u 与这球碰撞，碰撞时两球连心线与竖直方向成 θ 角．求两球碰后的速度．

【解】



设两球球心连线为 x 轴，其垂直方向选为 y 轴，碰撞后两球沿 x 轴方向速度分别为 v_{1x}, v_{2x}

则

$$u_x = u\cos\theta \qquad u_y = u\sin\theta$$

$$m_1u_x = m_1v_{1x} + m_2v_{2x}$$

$$e = \frac{v_{2x}-v_{1x}}{u_x}$$

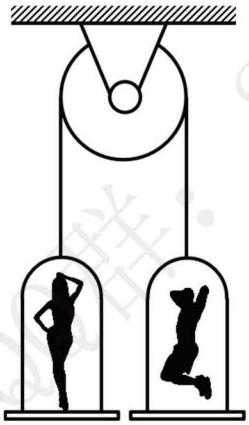
$$\Rightarrow\ v_{1x} = \frac{(m_1-em_2)u_x}{m_1+m_2} = \frac{(m_1-em_2)u\cos\theta}{m_1+m_2}$$

$$v_{2x} = \frac{m_1u_x(e+1)}{m_1+m_2}$$

v_{2x} 沿绳方向分量被绳子给予的冲量抵消，只有垂直于绳子的分量

$$v_2 = v_{2x}\sin\theta = \frac{m_1 u(e+1)\cos\theta\sin\theta}{m_1+m_2}$$

11.20 某甲在地面上立定跳高可使重心升高 H. 现在让他和体重同为 P 的某乙分站在轻滑轮两方的秤盘中, 盘重为 P'. 求某甲在盘中立定跳高使重心升高多少. 设在秤盘上和地面上跳高付出同样多的能量.



【解】

$$E = PH$$

设跳高后甲上升速度为 v_1, 乙上升速度为 v_2

系统对滑轮转轴角动量守恒

$$\frac{P}{g}v_1 R = \frac{P+2P'}{g}v_2$$

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}v_1^2 + \frac{1}{2}\frac{P+2P'}{g}v_2^2 = E = PH$$

$$v_1^2 = 2gh$$

$$\Rightarrow\ h = \frac{\left(P+2P'\right)H}{2\left(P+P'\right)}$$

物理考研交流QQ群：861466923

12.1 计算下列匀质刚体的质心:

(i) 细杆总长 l, 每单位长度的质量 $\rho = \rho_0 + ax$, ρ_0 与 a 为常量.

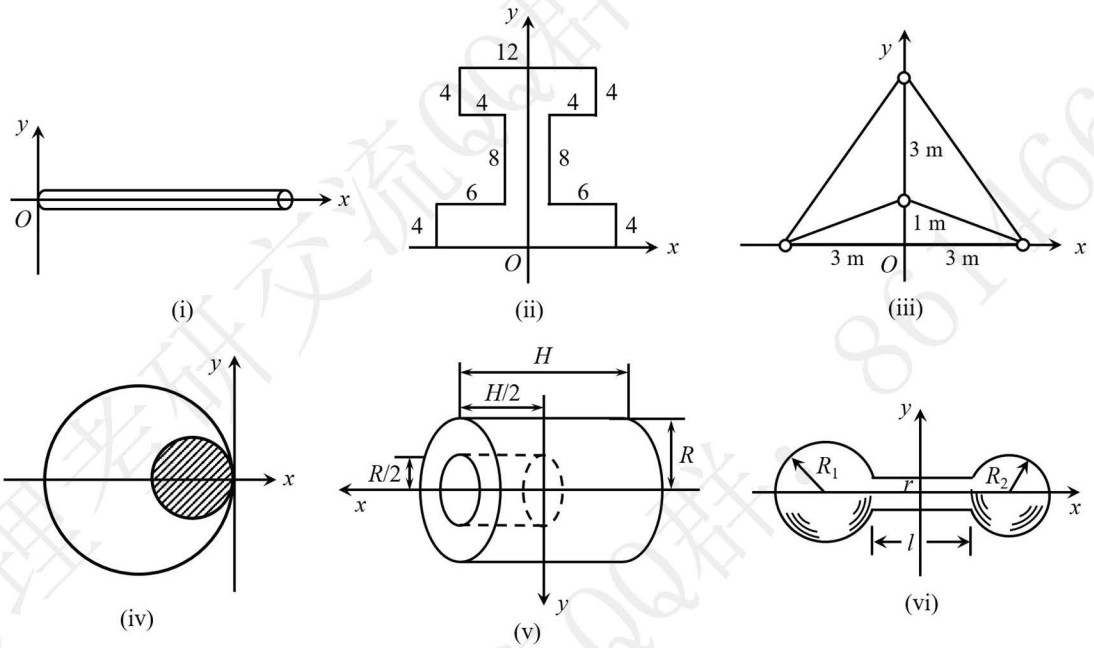
(ii) 匀质薄板, 尺寸见图.

(iii) 五根钢杆组成的桁架, 各杆粗细相等.

(iv) 从半径为 R 的匀质圆板挖去半径为 $\frac{1}{2}R$ 的内切小圆.

(v) 从半径为 R、高为 H 的匀质圆柱挖去圆柱形洞, 洞的半径 $\frac{1}{2}R$, 高 $\frac{1}{2}H$, 且与柱体同轴.

(vi) 匀质哑铃, 两球半径为 R_1、R_2. 中间的圆柱体半径为 r, 长为 l.



【解】

(i)

$$r_{cy} = 0$$

$$r_{cx} = \frac{\int_0^l x\rho \mathrm{d}x}{\int_0^l \rho \mathrm{d}x} = \frac{\int_0^l (\rho_0 x + ax^2)\mathrm{d}x}{\int_0^l (\rho_0 + ax)\mathrm{d}x} = \frac{(3\rho_0 + 2al)l}{6\rho_0 + 3al}$$

(ii)

$$r_{cx} = 0$$

$$r_{cy} = \frac{\rho(4\times 16)\times 2 + \rho(4\times 8)\times 8 + \rho(12\times 4)\times 14}{\rho(4\times 16 + 4\times 8 + 12\times 4)} = \frac{22}{3}$$

物理考研交流QQ群：861466923

(iii)

$$r_{cx}=0$$

$$r_{cy}=\frac{\rho\times10\times2+\rho\times3\times2.5+\rho\times2\sqrt{10}\times0.5}{\rho\left(10+3+2\sqrt{10}\right)}\ \mathrm{m}=1.587\ \mathrm{m}$$

(iv)

$$r_{cy}=0$$

$$r_{cx}=\frac{\rho\pi R^2(-R)-\rho\pi\left(\frac{1}{2}R\right)^2\left(-\frac{1}{2}R\right)}{\rho\left[\pi R^2-\pi\left(\frac{1}{2}R\right)^2\right]}=-\frac{7}{6}R$$

(v)

$$r_{cy}=0$$

$$r_{cx}=\frac{\rho\pi R^2H\times0-\rho\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\frac{H}{2}\times\frac{H}{4}}{\rho\pi R^2H-\rho\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\frac{H}{2}}=-\frac{1}{28}H$$

(vi)

$$r_{cy}=0$$

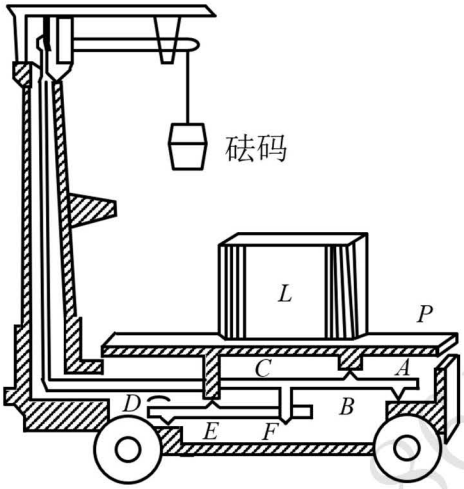
$$r_{cx}=\frac{\rho\frac{4}{3}\pi R_1^3\left(-R_1-\frac{l}{2}\right)+\rho\frac{4}{3}\pi R_2^3\left(R_2+\frac{l}{2}\right)}{\rho\left(\frac{4}{3}\pi R_1^3+\frac{4}{3}\pi R_2^3+\pi r^2l\right)}$$

$$=\frac{4\pi R_2^4+2\pi R_2^3l-4\pi R_1^4-2\pi R_1^3l}{4\pi R_1^3+4\pi R_2^3+\pi r^2l}$$

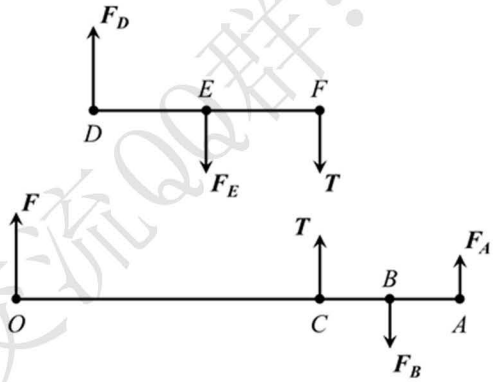
$$=\frac{4(R_2^4-R_1^4)+2l(R_2^3-R_1^3)}{4R_1^3+4R_2^3+r^2l}$$

12.2 图示意地表明磅秤的结构. 物体 L 放在平台 P 上, 物体 (以及平台) 的重量由刀口 B 和 E 分担, 并通过杠杆组的作用由砝码表示出来. 物体不论放在平台上什么位置, 磅秤应给出同一结果. 试证明. 这就要求 $AB:\mathrm{AC}=\mathrm{D}E:DF$.

物理考研交流QQ群：861466923



【解】



系统处于平衡状态，有:

$$F_D \cdot DF - F_E \cdot EF = 0$$

$$F_E + F_B = G$$

$$F_D + F + F_A - F_E - F_B = 0$$

$$F_A \cdot AC - F_B \cdot BC - F_C \cdot OC = 0$$

联立以上四式，得:

$$\left(\frac{EF}{DF} - \frac{BC}{AC}\right) F_E = G - F - \frac{G \cdot BC + F \cdot OC}{AC}$$

等式成立与 F_E 无关.

即:

$$\frac{EF}{DF} = \frac{BC}{AC}$$

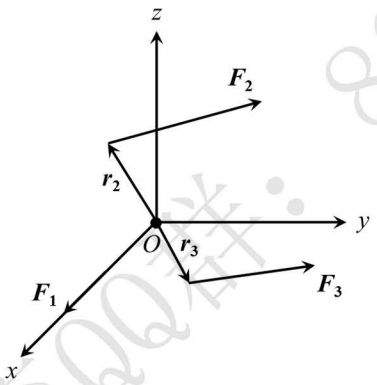
$$\frac{DE}{DF} = \frac{AB}{AC}$$

12.3 刚体在三个力的作用下平衡，试证明这三个力必在同一平面内，而且

它们的作用线 (或其延长线) 必相交于同一点.

【解】

刚体在三个力的作用下平衡，则力矢量必在一个平面内，力的作用线处在三个平行或垂直的平面内. 选取直角坐标系，使其中一个力的作用点为坐标原点，力的方向沿 x 轴正方向，并使三个力平行或处在 xy 平面. 因为作用于刚体的力为滑移矢量，通过平移使另外两个力的作用点处在 zy 平面.



三个力作用点和力矢量可表示为:

$$(0,\ 0,\ 0) \qquad (F_1,\ 0,\ 0)$$

$$(0,\ y_2,\ z_2) \qquad (F_{2x},\ F_{2y},\ 0)$$

$$(0,\ y_3,\ z_3) \qquad (F_{3x},\ F_{3y},\ 0)$$

刚体平衡，有:

$$F_{2x} + F_{3x} = F_1 \quad (1)$$

$$F_{2y} + F_{3y} = 0 \quad (2)$$

$$z_2 \cdot F_{2y} + z_3 \cdot F_{3y} = 0 \quad (3)$$

$$z_2 \cdot F_{2x} + z_3 \cdot F_{3x} = 0 \quad (4)$$

$$-F_{2x} \cdot y_2 - F_{3x} \cdot y_3 = 0 \quad (5)$$

由（2)、(3）

$$F_{2y} = -F_{3y},\ (z_2 - z_3) \cdot F_{2y} = 0$$

讨论:

（i）$z_2 - z_3 = 0$，结合（4）式

有:

$$z_2 = z_3 = 0$$

力作用线均在 xy 平面内，必相交于同一点.

（ii）

$$F_{2y} = F_{3y} = 0$$

由（4）、（5）式

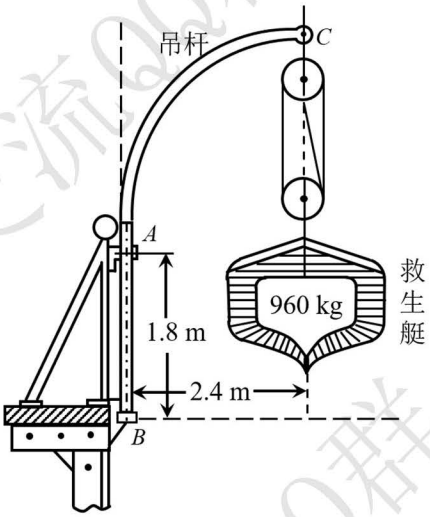
有:

$$z_2 \cdot y_3 = z_3 \cdot y_2$$

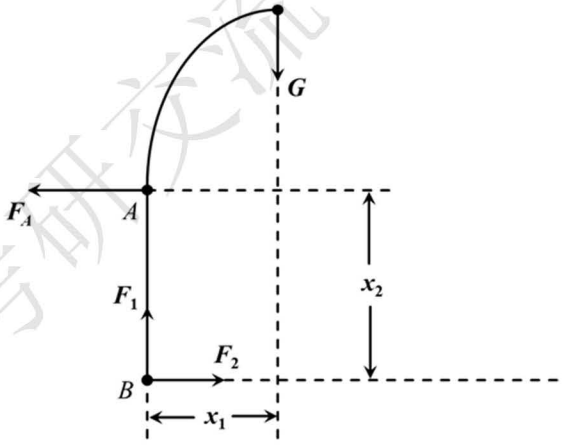
即 F_2、F_3 平行于 x 轴，且力作用点矢量在同一直线上，力作用线均在 r_2、r_3 与 x 轴构成平面内，必相交于一点.

证毕

12.4 图示意地表明轮船上悬吊救生艇的装置. 救生艇质量为 960 kg, 为两根吊船杆分担, 吊杆穿过 A 环, 下端为半球形, 放在止推轴承 B 中. 求吊杆在 A 与 B 处所受的力.



【解】



系统处于平衡状态，研究一根吊船杆受力情况.

物理考研交流QQ群：861466923

$$G = \frac{1}{2}mg = 4.8 \times 10^3 \text{ N}$$

根据受力平衡:

$$F_1 - G = 0$$

$$F_2 - F_A = 0$$

以 A 为参考点，系统对 A 点力矩为 0.

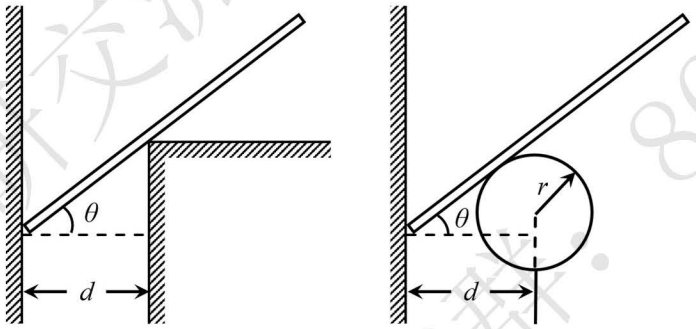
$$F_2 \cdot x_2 - G \cdot x_1 = 0$$

解得:

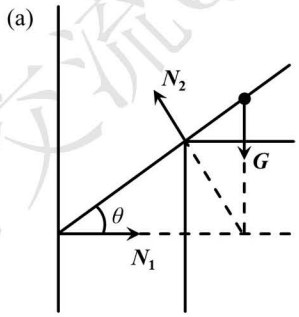
$$F_1 = 4.8 \times 10^3 \text{ N}$$

$$F_2 = F_A = 6.4 \times 10^3 \text{ N}$$

12.5 长为 $2l$ 的匀质杆, 一端抵在光滑墙上, 杆身斜靠在 (i) 与墙相距 d 的光滑棱角上, (ii) 柱轴与墙相距 d 而半径为 r 的光滑圆柱上. 求杆与水平面所成角度 θ.

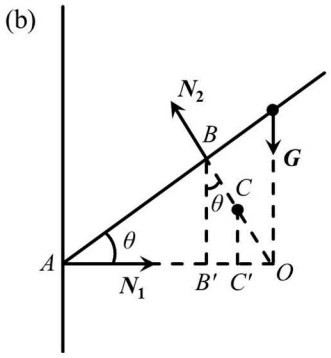


【解】



$$\frac{d}{\cos^3\theta} = l \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{d}{l}\right)^{\frac{1}{3}}$$

物理考研交流QQ群：861466923



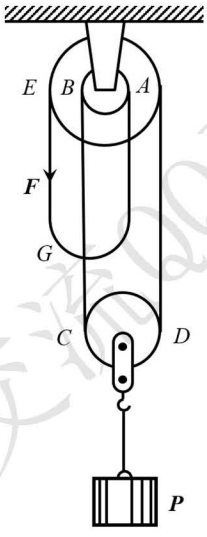
$$AB' = l \cdot \cos^3\theta \quad B'C' = r \cdot \sin\theta$$

$$AC' = AB' + BC' = d$$

即:

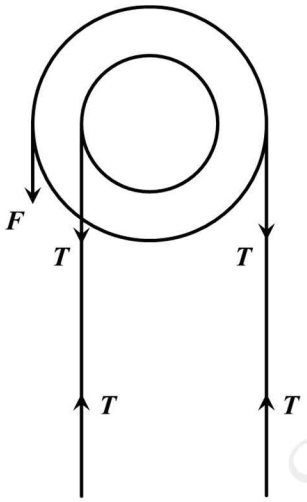
$$l \cdot \cos^3\theta + r \cdot \sin\theta = d$$

12.6 图示起重用的差动滑轮. 首尾环接的链条 *ABCDEGA* 嵌在滑轮边缘的齿上. *GA* 段自由下垂, 不着力. 问要用多大的力 *F* 加在 *EG* 段上才可以支持住重量 *P*? 滑轮重量与摩擦力均可不计. 定滑轮及其轴的半径各为 *R* 与 *r*.



【解】

物理考研交流QQ群：861466923



动滑轮两端受力大小相等

$$2T = P$$

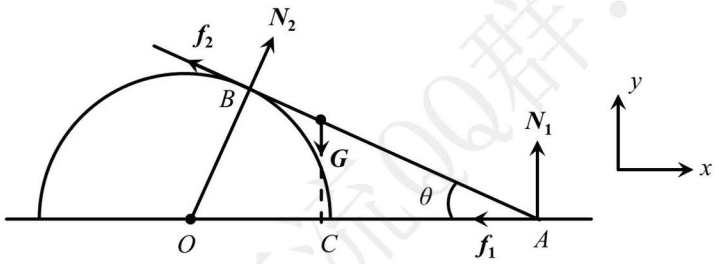
对定滑轮轴力矩为 0

$$F \cdot R + T \cdot r - T \cdot R = 0$$

$$F = \frac{P \cdot (R - r)}{2R}$$

12.7 半径为 R 的半圆柱平面贴地, 长为 l 的匀质杆斜靠在凸面上且垂直于圆柱母线, 下端着地. 两个接触处摩擦系数都是 μ_0, 求杆与地面夹角的最大值.

【解】



建立直角坐标系. 以水平向右为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向，杆与地面夹角达到最大值时，

$$f_1 = \mu_0 N_1$$

$$f_2 = \mu_0 N_2$$

对 A 点受力矩为 0，

$$G \cdot AC - N_2 \cdot AB = 0 \quad (1)$$

y 方向受力平衡，

$$f_2 \sin\theta + N_2 \cos\theta + N_1 - G = 0 \quad (2)$$

x 方向受力平衡，

$$N_2 \sin\theta - f_2 \cos\theta - f_1 = 0 \quad (3)$$

由（1）式可得:

$$N_2 = \frac{Gl\sin\theta}{2R}$$

代入（2)、(3）式，得:

$$(\mu_0 \sin\theta + \cos\theta)\frac{Gl\sin\theta}{2R} + N_1 = G$$

$$(\sin\theta - \mu_0 \cos\theta)\frac{Gl\sin\theta}{2R} = \mu_0 N_1$$

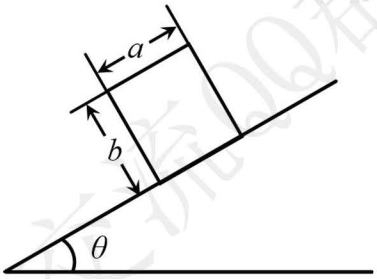
消去 N_1，有

$$(\mu_0^2 + 1)\sin^2\theta = \frac{2\mu_0 R}{l}$$

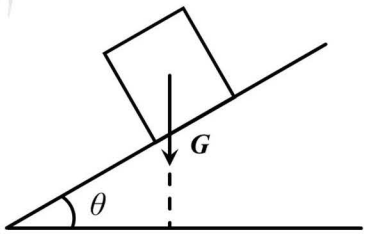
$$\sin\theta = \sqrt{\frac{2\mu_0 R}{(\mu_0^2+1)l}}$$

$$\theta = \arcsin\sqrt{\frac{2\mu_0 \cdot R}{(\mu_0^2+1)\cdot l}}$$

12.8 匀质平行六面体, 放在斜面 AB 上, 两者之间的摩擦系数为 μ, 斜面与水平面成 θ 角. 求六面体与斜面之间的摩擦力, 并求六面体对斜面正压力的作用点. 使 θ 逐渐增大, 何时将发生滑动或翻倒现象?



【解】



若不翻倒，滑动产生的条件为:

物理考研交流QQ群：861466923

$$\tan\theta > \mu$$

若不滑动，翻倒产生的条件为:

$$\tan\theta > \frac{a}{b}$$

（i）当 $\mu > \frac{a}{b}$ 时，

$$\theta > \arctan\frac{a}{b}$$

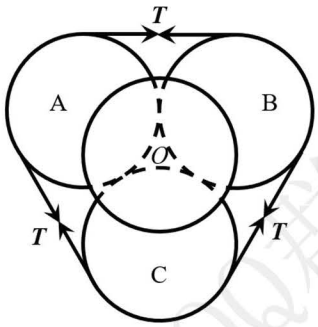
发生翻倒；

（ii）当 $\mu < \frac{a}{b}$ 时，

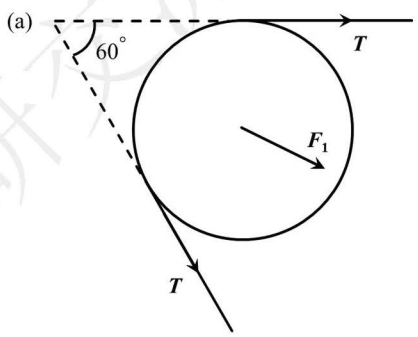
$$\theta > \arctan\mu$$

发生滑动.

12.9 三个完全一样的匀质球放在光滑水平面上, 彼此相切. 用一根绳子在球心的高度缠绕三球, 将它们捆扎起来. 又将第四个相同的球放在三球之上. 求绳中张力 T, 已知每个球的重量为 P.



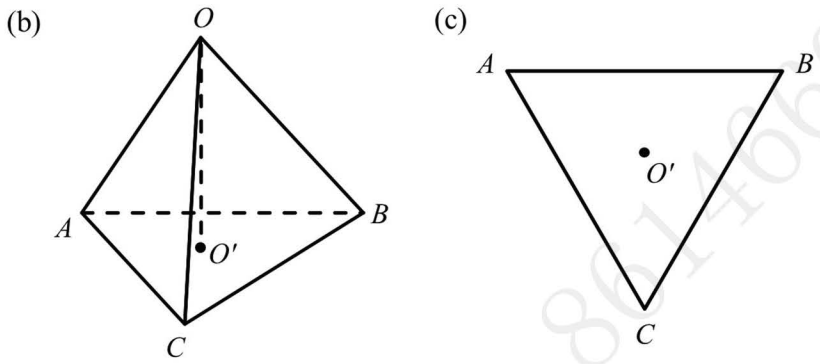
【解】



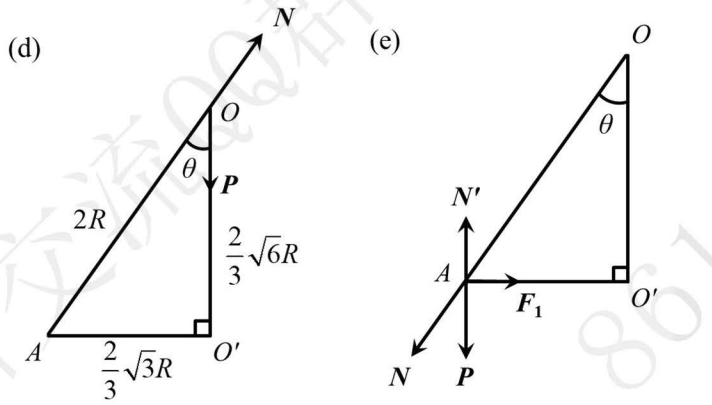
对底部任一球，所受绳子张力的合力为:

$$F_1 = 2T\cos 30^0 = \sqrt{3}T$$

物理考研交流QQ群：861466923



四球球心构成正四面体，作 OO'⊥面 ABC 于 O'



在△AOO'中，对上部球做受力分析:

$$3N\cos\theta - P = 0$$

对下部球做受力分析:

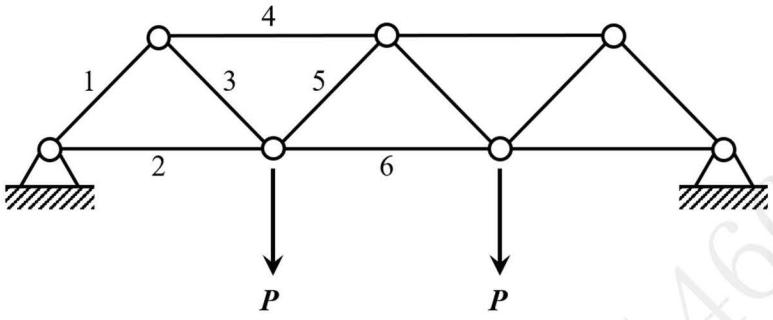
$$F_1 - N\sin\theta = 0$$

$$\therefore\ F_1 = \frac{P\tan\theta}{3}$$

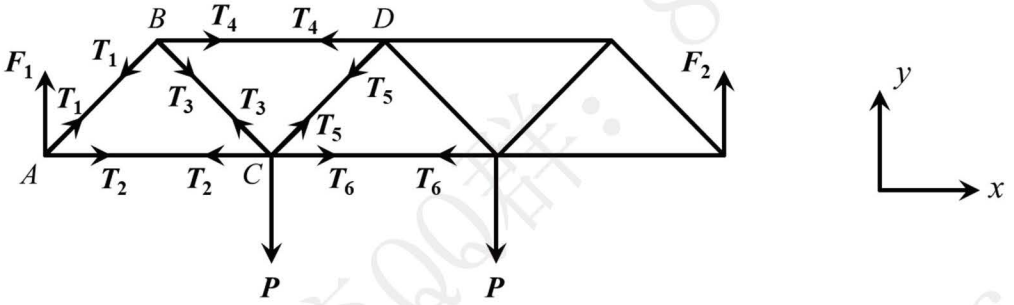
$$T = \frac{P\tan\theta}{3\sqrt{3}} = \frac{P}{3\sqrt{6}} = 0.136P$$

12.10 图示十一根钢杆构成的桁架桥，斜杆与水平面所成角度都是45°．求各杆中的拉力或压力.

物理考研交流QQ群：861466923



【解】



取 x 轴水平向右为正方向、取 y 轴竖直向上为正方向，建立坐标系.

对木框架整体，有:

$$F_1 + F_2 - 2P = 0$$

对 A 所受外力矩为 0，有:

$$F_2 \cdot 3l - P \cdot l - P \cdot 2l = 0$$

解得:

$$F_1 = F_2 = P$$

对 A 列平衡方程式:

$$\begin{cases} F_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} T_1 = 0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} T_1 + T_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = -\sqrt{2}P \\ T_2 = P \end{cases}$$

对 B 列平衡方程式:

$$\begin{cases} T_4 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} T_3 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} T_1 = 0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} T_1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} T_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_3 = \sqrt{2}P \\ T_4 = -2P \end{cases}$$

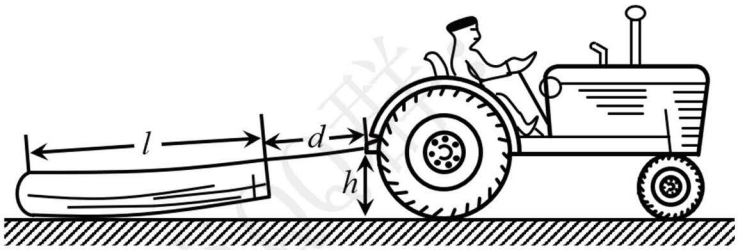
对 C 列平衡方程式:

物理考研交流QQ群：861466923

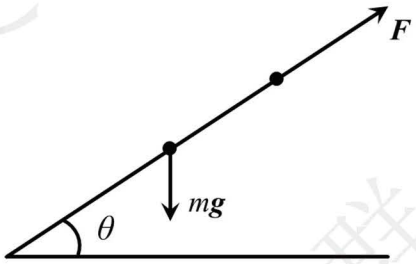
$$\begin{cases} T_6+\dfrac{\sqrt{2}}{2}T_5-\dfrac{\sqrt{2}}{2}T_3-T_2=0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}T_3+\dfrac{\sqrt{2}}{2}T_5-P=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_5=0 \\ T_6=2P \end{cases}$$

T_1、T_4 为压力，T_2、T_3、T_6 为拉力.

12.11 匀质木杆长 l, 用长为 d 的绳系在车后被车拖着走, 车后的系着点距地面高度为 h. 木杆下端就搁在水平路面上. 问车加速度 a 多大时, 木杆下端有离地趋势?



【解】



木杆未发生转动，绳对杆的力必沿杆方向

$$\sin\theta=\frac{h}{d+l}$$

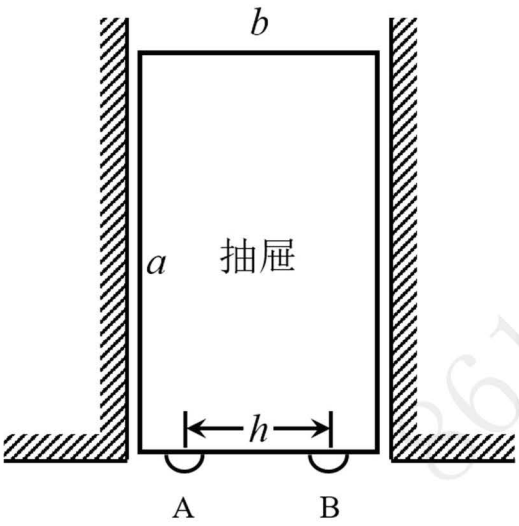
$$\begin{cases} F\cos\theta=ma \\ F\sin\theta-mg=0 \end{cases}$$

解得:

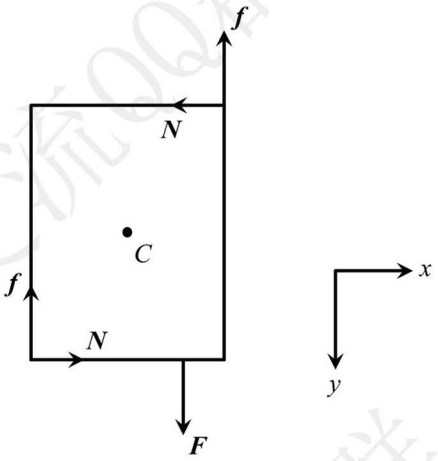
$$a=\frac{g}{\tan\theta}=\frac{g\sqrt{(d+l)^2-h^2}}{h}$$

12.12 抽屉长 a, 宽 b. 抽屉两侧与侧壁之间的摩擦系数为 μ, 抽屉底面是光滑的. 抽屉前方有对称地安装着的两个把手 A 与 B, 相距 h. 要想拉着一个把手将抽屉拉出, 问 μ 应小于什么数值?

物理考研交流QQ群：861466923



【解】



如图建立直角坐标系. 抽屉在 x 方向上受力平衡，即侧壁对抽屉的压力大小相等，设为 N.

所受摩擦力 $f = \mu N$

$$F - 2f = ma_0$$

对抽屉中点 C，该点所受力矩为 0，即:

$$F \cdot \frac{h}{2} - 2N \cdot \frac{a}{2} = 0$$

解得:

$$a_0 = \frac{2N}{m}\left(\frac{a}{h} - \mu\right)$$

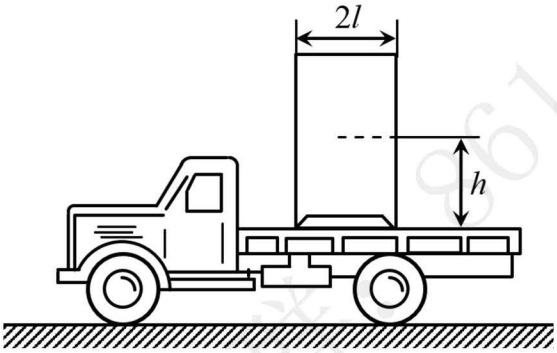
又 $a_0 > 0$

$$\therefore \ \frac{a}{h} - \mu > 0$$

物理考研交流QQ群：861466923

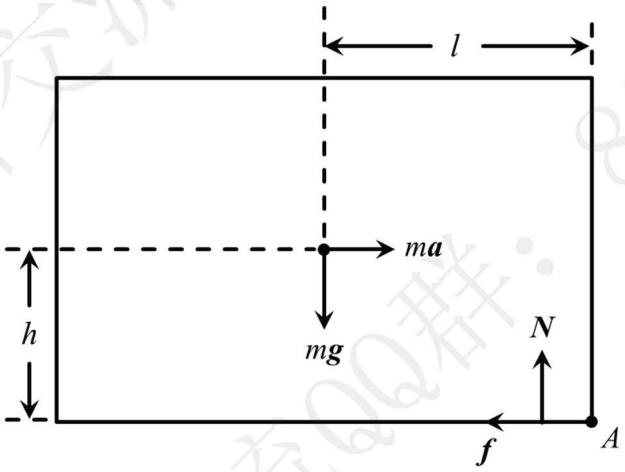
$$\mu < \frac{a}{h}$$

12.13 木柜宽 $2l$, 重心高度 h, 放在卡车上. 卡车猛然以加速度 a 起动向前行驶. 试研究木柜在车上滑动或翻倒的条件, 以便防止这种事故.



【解】

以卡车为参考系，研究木柜运动需要引入惯性力，方向与卡车加速度方向相反，大小为 ma.



（i）若摩擦系数很大

木柜先发生翻倒，以 A 为参考点

$$mgl - mah < 0$$

解得:

$$a > \frac{gl}{h}$$

（ii）若摩擦系数很小

木柜先发生滑动

$$ma - \mu N > 0 \quad N = mg$$

解得:

$$a > \mu g$$

讨论:

（a）

$$\mu > \frac{l}{h}$$

当 $\mu g > a > \frac{gl}{h}$ 时，翻倒；

当 $a > \mu g$ 时，既滑动又翻倒.

（b）

$$\mu < \frac{l}{h}$$

当 $\mu g < a < \frac{gl}{h}$ 时，滑动；

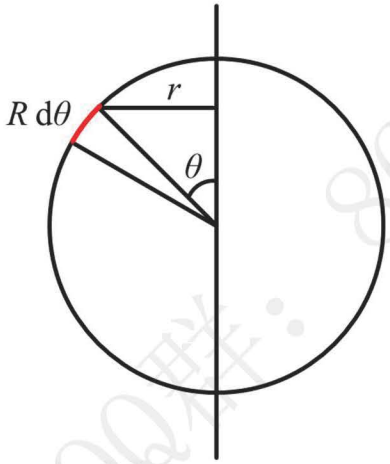
当 $a > \frac{gl}{h}$ 时，既翻倒又滑动.

物理考研交流QQ群：861466923

13.1 计算: (i) 匀质球壳对于其直径的转动惯量. (ii) 匀质圆锥对于底面直径的转动惯量.

【解】

（i）



设球壳总质量为 m，半径为 R

有:

$$I=\int_0^{\pi} r^2 \mathrm{d}m \qquad r=R\sin\theta \qquad \mathrm{d}m=2\pi r R\mathrm{d}\theta\sigma \qquad \sigma=\frac{m}{4\pi R^2}$$

$$I=\frac{mR^2}{2}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\, d\theta$$

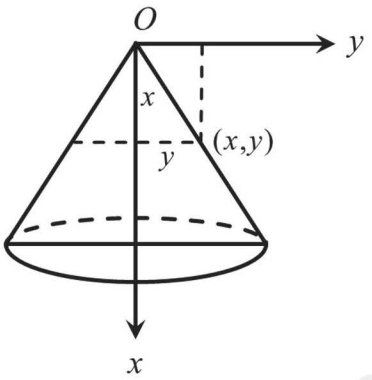
$$=\frac{mR^2}{2}\int_0^{\pi}-(1-\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\cos\theta$$

$$=\frac{mR^2}{2}\left(\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big|_0^{\pi}-\cos\theta|_0^{\pi}\right)$$

$$=\frac{2}{3}mR^2$$

（ii）

物理考研交流QQ群：861466923



设圆锥体高为 h，底面圆半径为 R，总质量为 m. 将圆锥体划分为许多平行于底面的窄条，由平行轴定理可知:(x,y)处窄条相对于底面半径的转动惯量为:

$$I' = I_C' + m'(h-x)^2$$

其中:

$$I_C' = \frac{1}{4}m'y^2 \qquad m' = \rho\pi y^2 \mathrm{d}x \qquad y = \frac{Rx}{h} \qquad \rho = \frac{3m}{\pi R^2 h}$$

$$\begin{aligned} I' &= m'\left[\frac{1}{4}y^2 + (h-x)^2\right] \\ &= \frac{3m}{\pi R^2 h}\pi\frac{R^2x^2}{h^2}\left[\frac{1}{4}y^2 + (h-x)^2\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{3mx^2}{h^3}\left[\frac{R^2x^2}{4h^2} + (h-x)^2\right]\mathrm{d}x \end{aligned}$$

解得:

$$I = \int_0^h I'$$

$$= \frac{3m}{h^5}\int_0^h \left[\frac{R^2x^4}{4} + h^2x^2(x-h)^2\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3m}{h^5}\int_0^h \left[\frac{R^2x^4}{4} + h^2\left(x^4 - 2hx^3 + h^2x^2\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3m}{h^5}\left[\frac{R^2h^5}{20} + h^2\left(\frac{h^5}{5} - \frac{1}{2}h^5 + \frac{1}{3}h^5\right)\right]$$

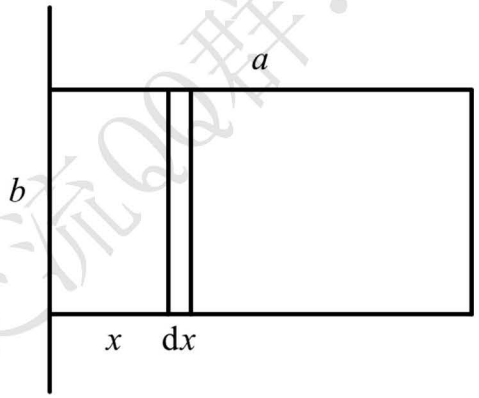
物理考研交流QQ群：861466923

$$=\frac{3m}{h^5}\left[\frac{R^2h^5}{20}+\frac{h^7}{30}\right]$$

$$=\frac{m\left(3R^2+2h^2\right)}{20}$$

13.2 匀质矩形薄板绕其竖直边转动, 初始角速度为 ω_0. 转动时受到空气的阻力. 阻力垂直于板面, 每一小面积所受阻力的大小正比于该块面积及其速度平方的乘积, 比例常量为 k. 经过多少时间, 速度减为一半? 矩形薄板的竖直边长 b, 水平边长 a.

【解】



$$M=I\alpha$$

$$F_x=-kb\mathrm{d}x(\omega x)^2$$

$$M=-\int_0^a kb\mathrm{d}x(\omega x)^2x$$

解得:

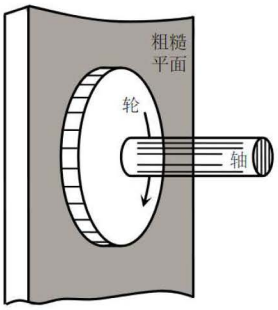
$$-\frac{1}{4}kb\omega^2a^4=\frac{1}{3}ma^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}t=\frac{4m}{3kba^2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

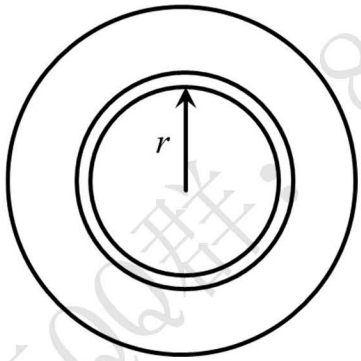
$$\therefore\ t=\frac{4m}{3kb^{\ 2}}\left(\frac{2}{\omega_0}-\frac{1}{\omega_0}\right)=\frac{4m}{3kba^2\omega_0}$$

13.3 以力 F 将一块粗糙平面压紧在轮上. 轮的初速为 ω_0, 问经过多少时间轮停止转动? 已知轮为匀质圆盘, 质量 m, 半径 R, 轴甚轻可以忽略. 设压力 F 均匀分布在盘面上.

物理考研交流QQ群：861466923



【解】



$$\mathrm{d}S = 2\pi r\mathrm{d}r$$

$$f = -\mu N = -\mu\frac{dS}{\pi R^2}F = -\frac{2\mu F}{R^2}r\mathrm{d}r$$

$$M = \int_0^R fr = \int_0^R -\frac{2\mu F}{R^2}r^2\mathrm{d}r = I\alpha$$

解得:

$$\alpha = -\frac{4\mu F}{3mR}$$

$$\therefore\ t = -\frac{3mR}{4\mu F}(0-\omega_0) = \frac{3mR\omega_0}{4\mu}$$

13.4 求下列复摆的微振动周期: (i) 摆是匀质圆环, 质量 m, 半径 R. 摆动轴垂直于环面并通过环上的一点. (ii) 同一圆环, 但摆动轴在环的平面内并与环相切. (iii) 摆是由两根匀质细杆组成的直角规, 两杆长度各为 l_1 与 l_2, 质量各为 m_1 与 m_2. 摆动轴垂直于两杆所在平面并通过直角顶点.

【解】

（i）

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

物理考研交流QQ群：861466923

$$I = I' + mR^2 = 2mR^2$$

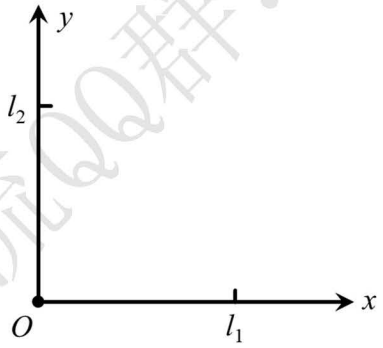
$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

（ii）

$$I = I' + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}$$

（iii）



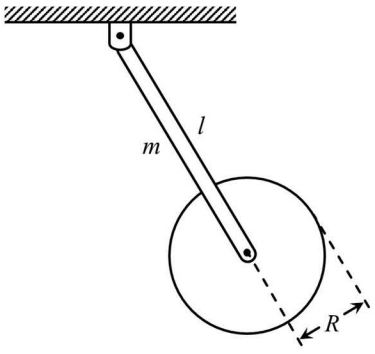
$$r_{cx} = \frac{\frac{1}{2}l_1 m_1}{m_1 + m_2} \quad r_{cy} = \frac{\frac{1}{2}l_2 m_2}{m_1 + m_2} \quad r = \sqrt{r_{cx}^2 + r_{cy}^2}$$

$$I = \frac{1}{3}m_1 l_1^2 + \frac{1}{3}m_2 l_2^2$$

$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{(m_1+m_2)gr}} = 2\pi\sqrt{\frac{2(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)}{3g\sqrt{l_1^2 m_1^2 + l_2^2 m_2^2}}}$$

13.5 质量为 M、半径为 R 的匀质圆盘以其盘心固定于质量为 m、长度为 l 的匀质杆的下端，这样构成一个摆. 求此摆的小振幅周期. 如果盘心并非固定于杆端，而是通过无摩擦的轴承装于杆端从而可以自由转动. 问其周期将如何变化?

物理考研交流QQ群：861466923



【解】

$$r_c = \frac{m\frac{l}{2} + Ml}{m + M}$$

$$I = \frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{2}MR^2 + Ml^2$$

$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{(m+M)gr_c}} = \sqrt{\frac{2ml^2+6Ml^2+3MR^2}{3gl(2M+m)}}$$

盘心非固定，圆盘相对于质心无转动，可看作固定在杆末端的质点.

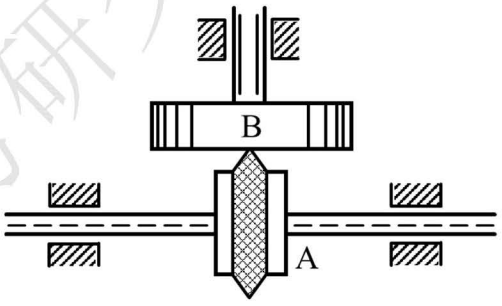
有:

$$I' = \frac{1}{3}ml^2 + Ml^2$$

$$\therefore \quad T' = 2\pi\sqrt{\frac{I'}{(m+M)gr_c}} = \sqrt{\frac{2l(3M+m)}{3g(2M+m)}}$$

13.6 图示一种摩擦传动. 轮 B 是主动轮, 轮 A 以其周围所包的橡皮与轮 B 的盘面接触. 通过橡皮与轮 B 盘面之间的摩擦, 轮 B 带着轮 A 转动. 接触点还可沿轮 B 盘面半径移动, 借此可改变轮 A 的转速.

已知橡皮轮的半径为 r, 接触点距 B 轮盘面中心的距离为 R. 两轮相互压力为 F, 接触处的摩擦系数为 μ. B 的角速为 ω_0. 求这种装置所能传输的最大功率.



【解】

物理考研交流Q群：861466923

$$\omega = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M\mathrm{d}\varphi$$

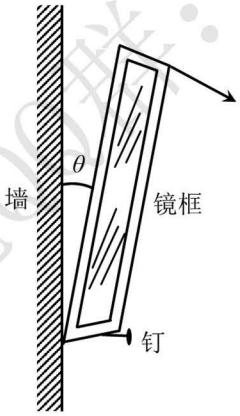
$$P = M\omega$$

$$= \mu F r\omega$$

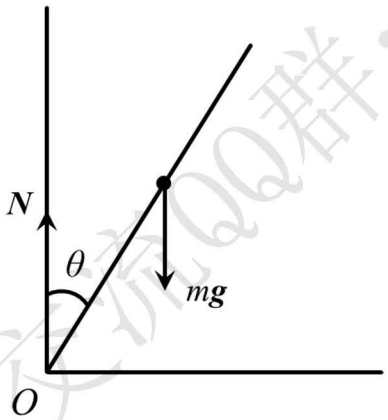
∵ $r\omega$ 最大值为 $R\omega_0$

∴ 最大传输功率为 $P_{max} = \mu FR\omega_0$

13.7 镜框紧贴着墙站在粗糙钉上，稍受扰动就向下倾倒. 求镜框跳离钉子时与墙所成的角 θ.



【解】



设镜框长 $2l$，质量为 m，绕 O 点转动惯量 $I = \frac{4}{3}ml^2$

有:

$$mgl\sin\theta = I\alpha$$

由机械能守恒定律可知:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 - mgl(1-\cos\theta) = 0$$

物理考研交流QQ群：861466923

竖直方向上质心运动方程为:

$$mg - N = ml\alpha \sin\theta + m\omega^2 l \cos\theta$$

联立以上三式，可得:

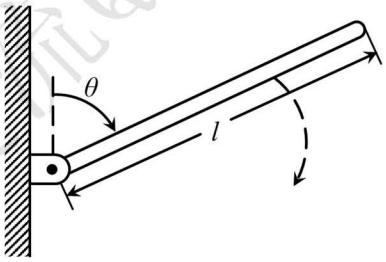
$$N_1 = \frac{1}{4}mg(9\cos^2\theta - 6\cos\theta + 1)$$

令 $N_1 = 0$，可得:

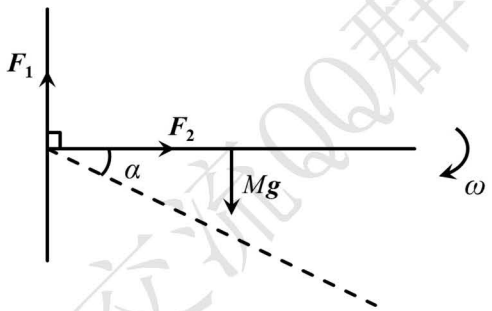
$$\cos\theta = \frac{1}{3}$$

∴ 跳离钉子时高度为 $\theta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$

13.8 一根质量为 M、长度为 l 的细杆，一端装在枢轴上，如图所示. 手持细杆使它与竖直方向夹角 θ 等于 60°，然后释放. 问当细杆达到水平位置即 θ 等于 90°时，枢轴上所受力的大小和方向是怎样的?



【解】



由机械能守恒:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 - Mg\frac{l}{2}\cos 60^0 = 0$$

$$I = \frac{1}{3}Ml^2$$

运动学方程:

$$Mg\frac{l}{2} = I\alpha$$

物理考研交流QQ群：861466923

$$F_1 - Mg = -M\frac{l}{2}\alpha$$

$$F_2 = -M\omega^2\frac{l}{2}$$

解得:

$$F_1 = \frac{1}{4}Mg$$

$$F_2 = -\frac{3}{4}Mg$$

枢轴上受力:

$$F_1{}' = -\frac{1}{4}Mg$$

$$F_2{}' = \frac{3}{4}Mg$$

$$F_{合} = \frac{\sqrt{10}}{4}Mg$$

方向角 $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$

13.9 半径为 R 的圆形水平转台具有转动惯量 I. (i) 转台以角速度 ω_0 转动, 重为 P 的人站立在转台中心. 如此人走到转台边缘, 问转台角速度变为多大? (ii) 重为 P 的人站立在转台边缘, 转台和人都是静止的. 后来, 此人以相对角速度 ω 沿转台边缘行走. 求转台的角速度. 又, 人在转台上走完一圈, 他的“绝对”角位移多大?

【解】

（i）绕中心轴转动角动量守恒.

有:

$$\left(I + \frac{P}{g}R^2\right)\omega = I\omega_0$$

即:

$$\omega = \frac{I\omega_0}{I + \frac{P}{g}R^2}$$

（ii）设人相对转轴角速度为 ω_1，转台角速度为 ω_2.

有:

$$\omega_1 - \omega_2 = \omega$$

$$\frac{P}{g}R^2\omega_1 + I\omega_2 = \omega$$

解得:

$$\begin{cases} \omega_1 = \dfrac{\omega Ig}{Ig + PR^2} \\ \omega_2 = -\dfrac{\omega PR^2}{Ig + PR^2} \end{cases}$$

绝对角位移:

$$\varphi = \frac{\omega_1}{\omega}2\pi = \frac{2\pi Ig}{Ig+PR^2}.$$

13.10 两个相同的飞轮, 转动轴沿着共同的直线. 其一以角速度 ω_0 首先转动, 另一静止. 离合器使两轮紧相接触因而一同转动. 求它们—同转动的角速度, 并对问题中的动能加以考察.

【解】

两飞轮相对转动轴角动量守恒,

有:

$$2I\omega = I\omega_0$$

$$\omega = \frac{\omega_0}{2}$$

即:共同转动角速度为 $\frac{\omega_0}{2}$

$$\Delta T = T - T_0 = 2\times\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right) - \frac{1}{2}I\omega_0^2 = -\frac{1}{4}I\omega_0^2, \quad \left|\frac{\Delta T}{T_0}\right| = \frac{1}{2}$$

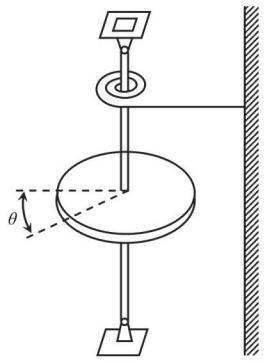
动能损失了一半，因为两轮从刚接触到达到共同角速度期间相互摩擦.

13.11 质量为 M, 半径为 R 的实心圆盘装于竖直轴上, 竖直轴又与一螺线形弹簧连接, 并受到大小为 $k\theta$ 的线性恢复力矩, 这里 θ 是偏离平衡位置的角位移, k 是常量. 忽略轴与弹簧的质量, 并假定支承点无摩擦.

(i)证明圆盘作谐振动, 并求其圆频率.

(ii)设圆盘按照规律 $\theta = \theta_0 \sin\omega t$ 运动[式中 ω 是 (i) 中求出的圆频率], 在 $t_1 = \pi/\omega$ 时, 有一个质量为 M, 半径为 R_1 的油灰圈同心地落在圆盘上, 求其后的圆频率和振幅.

物理考研交流QQ群：861466923



【解】

（i）由运动方程式:

$$M' = I\alpha$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \quad M' = -k\theta \quad \alpha = \ddot{\theta}$$

解得:

$$\ddot{\theta} = -\frac{2k}{MR^2}\theta$$

$$\therefore\ \omega = \sqrt{\frac{2k}{MR^2}} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{MR^2}{2k}}$$

（ii）

$$I' = \frac{1}{2}MR^2 + MR_1^2$$

$$\ddot{\theta}' = -\frac{2k}{MR^2 + 2MR_1^2}\theta'$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{2k}{MR^2 + 2MR_1^2}} \quad \theta' = \theta_0'\sin(\omega' t)$$

$$\dot{\theta}' = \omega'\theta_0'\cos(\omega' t) \quad \dot{\theta} = \omega\theta_0\cos(\omega t)$$

油灰圈落在圆盘上前后对轴角动量守恒.

有

$$I'\dot{\theta}'(\frac{\pi}{\omega'}) = I\dot{\theta}(\frac{\pi}{\omega})$$

$$I'\theta_0'\omega' = I\theta_0\omega$$

解得:

$$\theta_0' = \frac{R\theta_0}{\sqrt{R^2 + 2R_1^2}}$$

物理考研交流QQ群：861466923

13.12 匀质细杆长 $2l$, 质量为 M, 起初以角速度 ω_0 绕中点转动. 杆上穿有两个质量都是 m 的质点, 它们由静止于杆的中点滑到杆的两端, 问这时杆的角速度多大?

【解】

绕转轴角动量守恒，有:

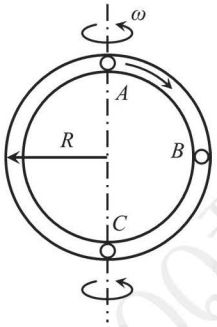
$$I'\omega = I_0\omega_0$$

$$\left[\frac{1}{12}M(2l)^2 + 2ml^2\right]\omega = \frac{1}{12}M(2l)^2\omega_0$$

解得:

$$\omega = \frac{M\omega_0}{M + 6m}$$

13.13 空心圆环可绕竖直轴 AC 自由转动, 转动惯量为 I, 环的半径为 R. 环的初始角速度为 ω_0, 质量为 m 的小球静止于环内 A 点. 由于微小干扰, 小球向下滑动. 问小球滑到 B 点与 C 点时, 环的角速度与质点的速度各为多大? 环的内壁是光滑的.



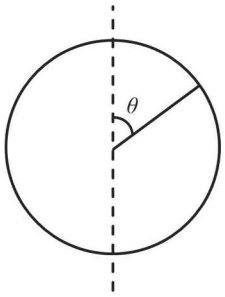
【解】

重力对轴力矩为 0，系统对竖直轴角动量守恒.

设小球在 θ 位置处，沿环速度为 v_1，垂直于环平面速度为 v_2，环角速度为 ω.

则

$$v_2 = \omega R\sin\theta$$



物理考研交流QQ群：861466923

$$I\omega + mv_2R\sin\theta = I\omega_0，且v_2 = R\sin\theta\,\omega$$

有:

$$I\omega + m\omega R^2\sin^2\theta = I\omega_0$$

由机械能守恒，可得:

$$\frac{1}{2}m(v_1^2+v_2^2)+\frac{1}{2}I\omega^2 - mgR(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}I\omega_0^2$$

（i）B 点处，$\theta = \frac{\pi}{2}$

代入，

$$\omega = \frac{I\omega_0}{I+mR^2}$$

$$v_1 = \sqrt{2gR + \frac{I\omega_0^2R^2}{I+mR^2}}$$

$$v_2 = \frac{IR\omega_0}{I+mR^2}$$

（ii）C 点处，

$$\theta = \pi$$

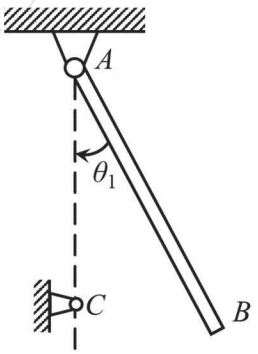
代入，

$$\omega = \omega_0$$

$$v_1 = 2\sqrt{gR}$$

$$v_2 = 0$$

13.14 匀质细杆 AB 可绕 A 端垂直于纸面的水平轴转动. 手持 AB 杆, 使它与竖直方向成 θ_1 角, 然后放手任其摆动到竖直方向并与 C 点碰撞. 碰撞后向回摆动的最大偏角为 θ_2 . 求碰撞时的恢复系数.



物理考研交流QQ群：861466923

【解】

设 AC 长 l_1，杆长为 l.

有

$$e=\frac{I_2}{I_1},\ I=\frac{1}{3}ml^2;$$

$$I_2l_1=I\omega_2;$$

$$\frac{1}{2}I\omega_2^2-\frac{1}{2}mgl(1-\cos\theta_2)=0;$$

$$I_1l_1=I\omega_1;$$

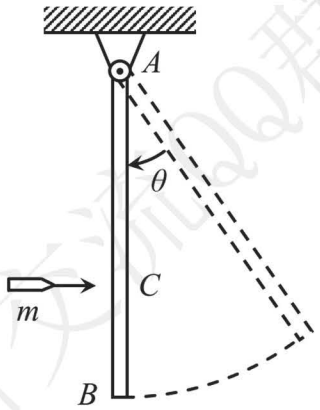
$$\frac{1}{2}I\omega_1^2-\frac{1}{2}mgl(1-\cos\theta_1)=0;$$

解得:

$$e=\sqrt{\frac{1-\cos\theta_2}{1-\cos\theta_1}}=\frac{\sin\frac{\theta_2}{2}}{\sin\frac{\theta_1}{2}}$$

13.15 匀质细杆 AB 长 L, 质量为 M, 可绕 A 端的水平轴自由转动. 在杆自由下垂时, 质量为 m 的枪弹沿水平方向射进杆的 C 点, 并使杆摆动. 摆动的最大偏角为 θ, AC 相距 l. 求枪弹射入前的速度.

试将本题与 11.17 题作一比较.



【解】

碰撞前后极短时间内，系统相对于水平轴角动量守恒.

子弹打入细杆内部后、距离水平轴距离:

$$r_c=\frac{ml+M\frac{L}{2}}{m+M}$$

绕水平轴转动惯量:

$$I' = ml^2 + \frac{1}{3}ML^2$$

由角动量守恒，可得:

$$I'\omega = mv_0 l \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{mv_0 l}{I'}$$

再由机械能守恒，可得:

$$(M+m)gr_c(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}I'\omega^2$$

$$\frac{(mv_0 l)^2}{I'^2}I' = 2(M+m)g\frac{ml + M\frac{L}{2}}{M+m}(1-\cos\theta)$$

解得:

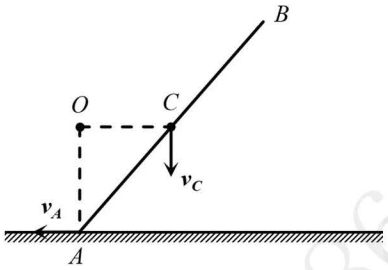
$$v_0 = \frac{\sqrt{2g(1-\cos\theta)\left(ml + M\frac{L}{2}\right)\left(ml^2 + \frac{1}{3}ML^2\right)}}{ml}$$

分析:与 **11.17** 相比，本例只有对轴的角动量守恒；而 **11.17** 碰撞过程中动量、角动量都守恒.

物理考研交流QQ群：861466923

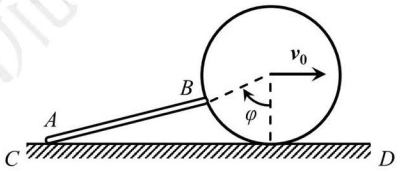
14.1 手持匀质细杆使其竖立于光滑水平面上, 放手任其倾倒, 求任一时刻的杆的瞬心.

【解】

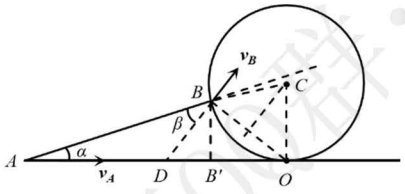


如图, A 点速度沿水平方向, 质心速度沿竖直方向, 过 A 点作竖直线, 过 C 点作水平线, 交于点 O, 则 O 为此时杆的瞬心。

14.2 半径为 R 的圆盘以匀速 v_0 沿直线 CD 无滑动地滚动.长为 l 的杆 AB 的一端 B 铰连于盘的边缘, 另一端 A 则沿 CD 作直线运动.求 A 的速度.



【解】



设

$$\angle BAO=\alpha,\quad BB'=R-R\cos\varphi$$

$$\sin\alpha=\frac{BB'}{l}=\frac{R}{l}(1-\cos\varphi)=\frac{2R\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{l}$$

O 点为圆盘无滑滚动的瞬心

$$v_B=\omega OB\qquad OB=2R\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\qquad \omega=\frac{v_0}{R}$$

$$v_B=2v_0\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

杆上各点沿杆方向速度相同

$$v_A\cos\alpha=v_B\cos\beta.$$

$$\angle BDO=\alpha+\beta \quad \angle BOD=\frac{\varphi}{2}$$

$$\alpha+\beta+\frac{\varphi}{2}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\beta=\frac{\pi}{2}-\left(\alpha+\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$v_A\cos\ \alpha=v_B\sin\left(\alpha+\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$=2v_0\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left(\sin\alpha\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)+\cos\alpha\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)$$

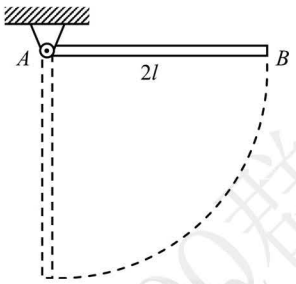
$$=2v_0\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{2R}{l}\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+\cos\ \alpha\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$v_A=2v_0\sin^2\frac{\varphi}{2}\left(\frac{R\sin\ \varphi}{l\cos\ \alpha}+1\right)$$

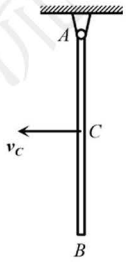
$$\cos\ \alpha=\frac{\sqrt{l^2-4R^2\sin^4\frac{\varphi}{2}}}{l}$$

$$\Rightarrow\ v_A=2v_0\sin^2\frac{\varphi}{2}\left(1+R\sin\ \varphi/\sqrt{l^2-4R^2\sin\frac{\varphi}{2}}\right)$$

14.3 长为 $2l$ 的匀质细杆的一端用铰链固定．手持细杆，使它水平，放手任其摆动.杆摆动到竖直位置时，铰链忽然松脱.试研究杆松脱以后的运动.



【解】



铰链松脱前杆作定轴转动，由机械能守恒定律

$$\frac{1}{2}I_A^2\omega-mgl=0$$

$$\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{3g}{2l}}$$

物理考研交流QQ群：861466923

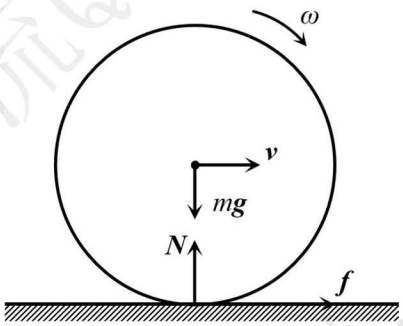
$$v_c = \omega l = \sqrt{\frac{3gl}{2}}$$

杆脱离铰链后所受外力只有重力，由质心运动定理，杆质心做初速度为 $\sqrt{\frac{3gl}{2}}$ 的平抛运动，由动量矩定理，杆绕质心转动的角动量守恒，转动角速度为 $\sqrt{\frac{3g}{2l}}$

14.4 圆柱质量为 m，半径为 R，横卧着在粗糙地面上运动，两者之间的摩擦系数为 μ.(*i*)圆柱具有初始角速度 ω_0，柱轴初始速度为零.(*ii*)在初始时刻，圆柱作平动，其速度 v_0 是水平的且与柱轴垂直.分别求解圆柱的运动.

【解】

（i）



由质心运动定理以及角动量定理

$$f = ma_c$$

$$-fR = I\alpha$$

$$f = \mu N = \mu mg$$

$$\Rightarrow a_c = \mu g$$

$$\alpha = \frac{-2\mu g}{R}$$

$$v = v_0 + a_c t = \mu g t$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = \omega_0 - \frac{2\mu g}{R} t$$

令 $v = \omega R$

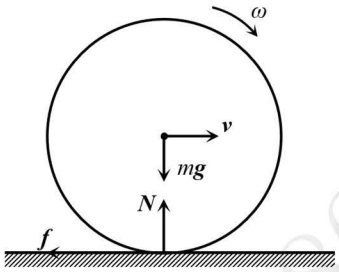
$$\Rightarrow \mu g t = \omega_0 R - 2\mu g t$$

$$t = \frac{\omega_0 R}{3\mu g}$$

当$t \leqslant \omega_0 R/3\mu g$, 柱轴速度为$\mu g t$, 角速度为$\omega_0 - (2\mu g/R)t$,

当 t>$\omega_0 R/3\mu g$, 柱作无滑滚动,角速度为$\omega_0/3$

(ii)



由质心运动定理以及角动量定理

$$-f = ma_c$$

$$fR = I\alpha$$

$$f = \mu N = \mu mg$$

$$\Rightarrow\ a_c = -\mu g$$

$$\alpha = \frac{2\mu g}{R}$$

$$v = v_0 + a_c t = v_0 - \mu g t$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = \frac{2\mu g}{R} t$$

令$v = \omega R$

$$\Rightarrow\ t = \frac{v_0}{3\mu g}$$

当$t \leqslant v_0/3\mu g$, 柱轴速度为$v_0 - \mu g t$, 角速度为$(2\mu g/\mathrm{R})t$

当$t > v_0/3\mu g$, 柱作无滑滚动, 柱轴速度为$2v_0/3$

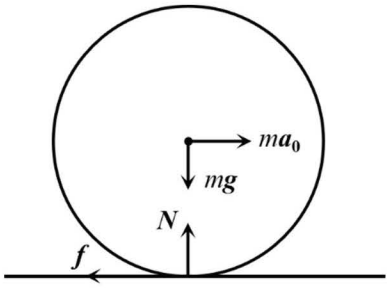
14.5 一圆柱质量为 m, 半径为 R, 静卧在汽车的粗糙地板上, 两者之间的摩擦系数为 μ.柱轴垂直于汽车行驶方向.汽车以匀加速度 a_0 起动行驶, 求解圆柱运动情况.考察圆柱是否发生滑动.

【解】

（i）

假设圆柱作无滑滚动, 设汽车向左加速运动, 以汽车为参考系

物理考研交流QQ群：861466923



$$ma_0 - f = ma_c$$

$$fR = I_c\alpha$$

$$a_c = \alpha R$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{3}ma_0$$

$$\alpha = \frac{2a_0}{3R}$$

$$a_c = \frac{2}{3}a_0$$

$$f \leqslant \mu N = \mu mg$$

$$\mu \geqslant \frac{a_0}{3g}$$

(ii)

$$\mu < \frac{a_0}{3g}$$

$$f = \mu mg$$

$$ma_0 - \mu mg = ma_c$$

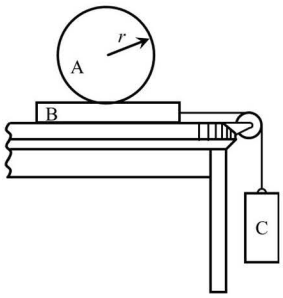
$$\mu mgR = I_c\alpha$$

$$\Rightarrow a_c = a_0 - \mu g$$

$$\alpha = \frac{2\mu g}{R}$$

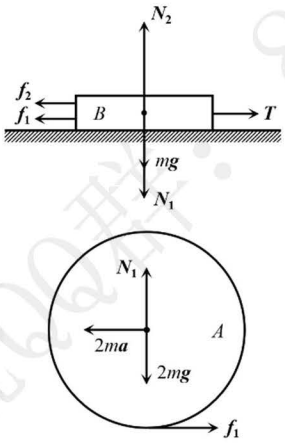
14.6 半径为 r 的匀质圆柱 A 置于粗糙水平板 B 上，板 B 又置于粗糙水平桌面上.这两个粗糙接触的摩擦系数都是 1/4. 定滑轮和绳的质量可以忽略不计.绳是不可伸长的.A 的质量为 B 的质量的二倍，B 的质量等于 C 的质量.求 B 和 C 的加速度，并求 A 的角加速度.

物理考研交流QQ群：861466923



【解】

假设 A 作无滑滚动



对 C

$$mg - T = ma$$

对 B

$$T - f_1 - f_2 = ma$$

$$f_2 = \mu N_2$$

$$N_2 - mg - N_1 = 0$$

以 B 为参考系

对 A

$$N_1 - 2mg = 0$$

$$2ma - f_1 = 2ma_c$$

$$f_1 r = \frac{1}{2} 2mr^2 \alpha$$

$$a_c = \alpha r$$

整理可得

$$mg - \mu 3mg - f_1 = 2ma$$

$$2ma - f_1 = 2ma_c$$

物理考研交流QQ群：861466923

$$f_1 r = \frac{1}{2} 2mr^2 \alpha$$

$$a_c = \alpha r$$

$$\Rightarrow f_1 = \frac{1}{16} \mathrm{mg} < \mu 2mg$$

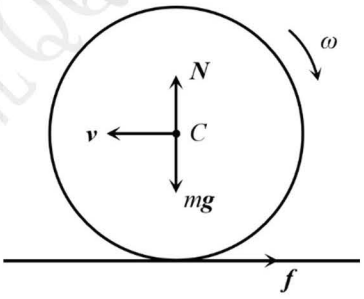
无滑滚动条件成立

$$a = \frac{3}{32} g$$

$$\alpha = \frac{g}{16r}$$

14.7 足球质量为 m, 半径为 R, 在地面上无滑动地滚动, 球心速度为 v_0. 遇到光滑墙壁发生正碰.设碰撞是完全弹性的, 求解足球在碰撞以后的运动.

【解】



足球与墙碰撞后质心速度等值反向

$$f = \mu N = \mu mg$$

$$-f = ma_c$$

$$fR = \frac{2}{3} mR^2 \alpha$$

$$\Rightarrow a_c = -\mu g$$

$$\alpha R = \frac{3}{2} \mu g$$

以水平向左为速度正方向, 逆时针转动时角速度方向为正方向

$$v = v_0 + a_c t = v_0 - \mu g t$$

$$\omega R = -v_0 + \alpha R t = -v_0 + \frac{3}{2} \mu g t$$

令 $v = \omega R$

$$\Rightarrow t = \frac{4v_0}{5\mu g} \qquad v = \omega R = \frac{1}{5} v_0$$

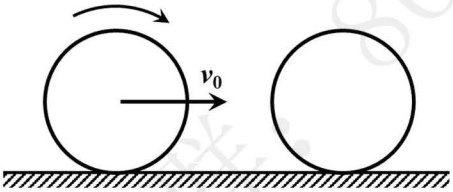
物理考研交流QQ群：861466923

当 $t \le 4v_0/5\mu g$ 时连滚带滑，当 $t > 4v_0/5\mu g$ 时，作无滑滚动，速度为 $v_0/5$

14.8 光滑水平面上有两个匀质实心小球，大小相同，质量各为 m.左边的小球作无滑动滚动，朝着右边的静止小球前进，其质心速度为 v_0.若在两球碰撞瞬间，摩擦力的作用可以忽略，而且碰撞是完全弹性的.

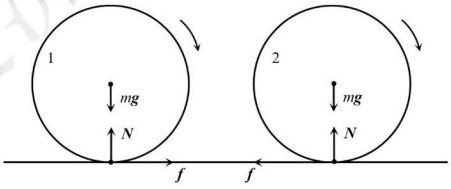
(*i*)碰撞后，经一定时间，两个小球都不再滑动.试计算此时每个小球的速度.

(*ii*)初始能量中有多少由于摩擦而转化为热能？



【解】

由于碰撞为弹性碰撞，碰后左边小球的质心速度为 0，右边小球质心速度为 v_0，方向水平向右



对球 1

$$f = \mu mg = ma_{c1}$$

$$-fR = I\alpha = \frac{2}{5}mR^2\alpha$$

$$v_1 = \mu gt$$

$$\omega_1 R = v_0 - \frac{5}{2}\mu gt$$

$t = \dfrac{2v_0}{7\mu g}$ 时 $v_1 = \omega_1 R = \dfrac{2}{7}v_0$

对球 2

$$-f = -\mu mg = ma_{c2}$$

$$fR = I\alpha = \frac{2}{5}mR^2\alpha$$

$$v_2 = v_0 - \mu gt$$

$$\omega_2 R = \frac{5}{2}\mu gt$$

$$t=\frac{2v_0}{7\mu g}\text{ 时 }v_2=\omega_2 R=\frac{5}{7}v_0$$

（i） 小球速度分别为$\frac{2}{7}v_0$，$\frac{5}{7}v_0$

（ii） 由能量守恒定律

$$\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}I_c\left(\frac{v_0}{R}\right)^2=Q+\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}I_c\left(\frac{v_1}{R}\right)^2+\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{1}{2}I_c\left(\frac{v_2}{R}\right)^2$$

$$\Rightarrow Q=\frac{2}{7}mv_0^2$$

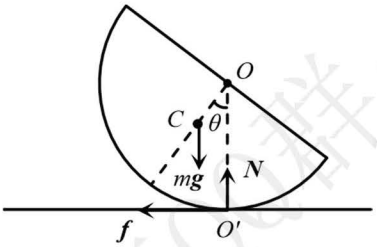
$$\frac{Q}{\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}I_c\left(\frac{v_0}{R}\right)^2}=\frac{20}{49}$$

初始能量的 20/49 转化为热能

14.9 半径为R的匀质半球以其凸面接触粗糙地面而作无滑动地摆动.求摆动的周期.

【解】

瞬心O'有O的牵连加速度αR，在O中O'有切向加速度 $-\alpha R$，法向加速度$\omega^2 R$竖直向上，O'相对惯性系加速度为$\omega^2 R$，小量可以忽略



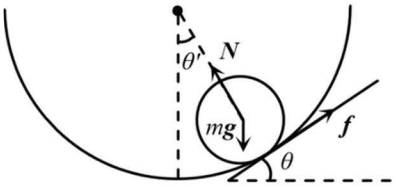
$$-m\,g\frac{3}{8}R\theta=I_{O'}\alpha\Rightarrow-\frac{g}{R}\frac{15}{26}\theta=\alpha$$

$$\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{26R}{15g}}$$

14.10 半径为r的匀质球在半径为R的球形碗内作无滑动的滚动.问球在碗底附近作小幅度摆动的周期多大？

【解】

物理考研交流QQ群：861466923



对小球列动力学方程

$$f - mg\sin\theta' = ma$$

$$-fr = \frac{2}{5}mr^2\alpha$$

匀质球作无滑滚动

$$a = \alpha r$$

设匀质球绕质心转动的角度为 θ

$$\alpha = \ddot{\theta}$$

由几何关系

$$\frac{R\theta'}{r} - \theta' = \theta$$

联立以上各式

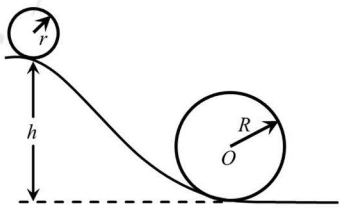
$$\ddot{\theta} = -\frac{5g}{7(R-r)}\theta$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$$

14.11 半径为 r 的小球, 从倾斜轨道的高度 h 处无初速地沿轨道无滑动滚下, 并进入半径为 R 的圆环形轨道,

(*i*)假设小球的滚动始终是无滑动的, h 应为多大才能够使小球刚好通过环的最高点而不坠下?

(*ii*)取 h 为(*i*)所求出的值, 将环心到小球的连线与竖直向上方向之间夹角记作 θ, 试求小球经过 θ 处的摩擦力与轨道正压力实际上是否发生滑动?



【解】

(i) 由机械能守恒

物理考研交流QQ群：861466923

$$\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}I_c\omega^2-mg[(h+r)-(2R-r)]=0$$

小球作无滑滚动

$$v_c=r\omega$$

最高点处列动力学方程

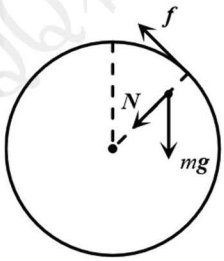
$$mg=m\frac{v_c^2}{(R-r)}$$

联之以上各式

解得

$$h=\frac{27}{10}(R-r)$$

(ii)



对小球列动力学方程

$$-fr=I\alpha$$

$$mg\cos\theta+N=m\frac{v_c^2}{(R-r)}$$

$$f-mg\sin\theta=ma$$

$$a=\alpha r$$

由机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}I_c\omega^2-mg[(h+r)-(R+(R-r)\cos\theta)]=0$$

$$v_c=\omega r$$

解得

$$f=\frac{2}{7}mg\sin\theta$$

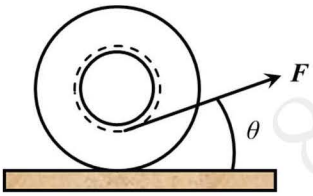
$$N=\frac{17}{7}mg(1-\cos\theta)$$

$$\frac{f}{N}=\frac{2\sin\theta}{17(1-\cos\theta)}$$

物理考研交流QQ群：861466923

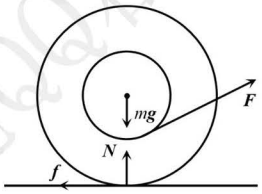
当 θ 很小时 $\sin\theta \approx \theta,\ 1-\cos\theta \approx \frac{1}{2}\theta^2\ \frac{f}{N}=\frac{4}{17\theta},$ 所以不可能一直无滑滚动

14.12 轮轴的半径各为 R 与 r.整个轮轴对于中心轴线的转动惯量为 I.轮轴搁在静止的粗糙水平木板上，摩擦系数为 μ，将线缠在轴上，线尾与水平面成 θ 角.以力 F 去拉线尾.求解轮轴的运动，并考察是否发生滑动.



【解】

假设轮轴不发生滑动,列出轮轴动力学方程



$$F\sin\theta + N - mg = 0$$

$$F\cos\theta - f = ma$$

$$fR - Fr = I\alpha$$

$$a = \alpha R$$

$$\Rightarrow N = mg - F\sin\theta$$

$$f = \frac{F(I\cos\theta + mRr)}{I + mR^2}$$

则

$$\mu \geqslant \frac{f}{N} = \frac{F(I\cos\theta + mRr)}{(mg - F\sin\theta)(I + mR^2)}$$

$$a = \frac{FR(R\cos\theta - r)}{I + mR^2}$$

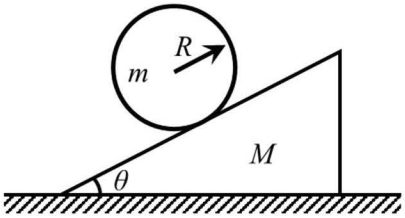
14.13 质量为 M，倾角为 θ 的斜面放置在光滑水平面上，质量为 m，半经为 R 的圆柱体沿斜面无滑动滚下.

(*i*)建立斜面和圆柱体的动力学方程.(对于圆柱体，不妨以斜面为参考系.)并指出圆柱体无滑动滚动的运动学条件.

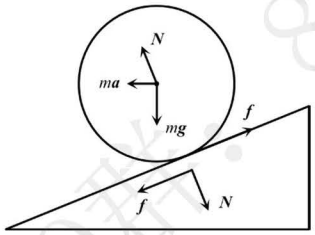
物理考研交流QQ群：861466923

(*ii*)确定此力学系统的守恒量并给出具体表达式.

(*iii*)求解斜面和圆柱体的加速度.



【解】



（i）

对于斜面体

$$N\sin\theta - f\cos\theta = Ma$$

对于圆柱体

$$mg\sin\theta + ma\cos\theta - f = ma'$$

$$N + ma\sin\theta - mg\cos\theta = 0$$

$$fR = \frac{1}{2}mR^2\alpha$$

$$a' = \alpha R$$

（ii）水平方向上动量守恒

$$Ma + m(a - a'\cos\theta) = 0$$

$$f = \frac{1}{2}ma'$$

（iii）

$$N\sin\theta - \frac{1}{2}ma'\cos\theta = Ma$$

$$mg\sin\theta + ma\cos\theta - \frac{1}{2}ma' = ma'$$

$$N + ma\sin\theta = mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow a = \frac{2mg\cos\theta\sin\theta}{3M + 3m\sin^2\theta + m\cos^2\theta} = \frac{2mg\cos\theta\sin\theta}{3M + m + 2m\sin^2\theta}$$

物理考研交流QQ群：861466923

$$a' = \frac{2(m+M)\sin\ \theta}{3M+m+2m\sin^2\ \theta}$$

14.14 求 11.5 题中的匀质杆 A 端对地面的压力.杆 AB 长为 $2l$, 质量为 m.

【解】

设 AB 在刚倾倒时与水平面夹角为 θ

由机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 - mgl(\sin\ \theta - \sin\ \alpha) = 0$$

$$v_c\sin\ \alpha = v_A\cos\ \alpha$$

$$v_c\cos\ \alpha + v_A\sin\ \alpha = \omega l$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{6g(\sin\ \theta - \sin\ \alpha)}{3l\cos^2\ \alpha + l}$$

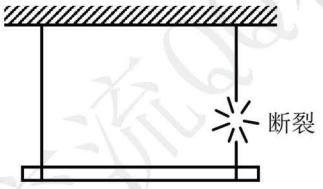
对等式两边求导

$$2\omega\alpha = \frac{6g}{(3l\cos^2\ \alpha + l)^2}[-\cos\ \alpha(3l\cos^2\ \alpha + l) + (\sin\ \theta - \sin\ \alpha)6l\cos\ \alpha\sin\ \alpha] - \omega$$

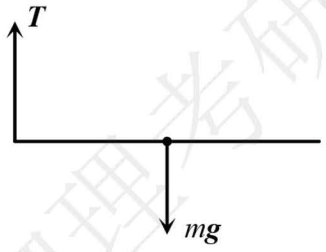
$$N l\cos\ \alpha = \frac{1}{3}ml^2\alpha$$

$$\Rightarrow N = \frac{mg(4 - 6\sin\ \alpha\sin\ \theta + 3\sin^2\ \theta)}{(1+3\cos^2\ \alpha)^2}$$

14.15 匀质细杆长为 $2l$, 质量为 m.在两端用线吊起来, 使杆水平.有一根线忽然断裂试求在这一瞬刻另一根线中的张力.



【解】



$$mg - T = ma_c$$

$$mgl=\frac{4}{3}ml^2\alpha$$

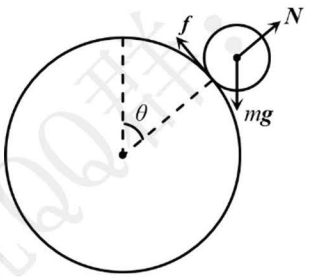
$$a_c=\alpha l$$

$$\Rightarrow T=\frac{1}{4}mg$$

14.16将半径为 r 的小球轻轻搁在半径为 R 的静止大球的顶端，小球就向下滚动.问小球滚到何处将飞离大球？是否可以引用§21 例 2 的结果？

为保证小球飞离之前不发生滑动，两球之间的摩擦系数最小多少？

【解】



设飞离发生在球心连线与竖直向上方向夹角为 θ 处

$$mg\sin\theta-f=ma_t$$

$$fr=\frac{2}{5}mr^2\alpha$$

$$a_t=\alpha r$$

$$\Rightarrow f=\frac{2}{7}mg\sin\theta$$

$$mg\cos\theta-N=ma_n=m\frac{v_c^2}{R+r}$$

$$\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\left(\frac{v_c}{r}\right)^2=mg(R+r)(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow N=\frac{17\cos\theta-10}{7}mg$$

若一直无滑滚动，当 $N=0$ 时飞离大球

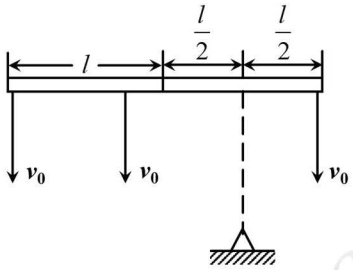
$$\Rightarrow \theta=\arccos\left(\frac{10}{17}\right)$$

$$\frac{f}{N}=\frac{2\sin\theta}{17\cos\theta-10}\qquad \text{当}\ \theta\to\arccos\left(\frac{10}{17}\right)\ \text{时}\qquad \frac{f}{N}\to\infty$$

所以总会在飞离前发生滑动

14.17匀质棒长 $2l$，质量为 m，以垂直于自身的速度 v_0 在水平面(图面)内运动，

与固定的 C 点发生无弹性碰撞.发生碰撞处距棒中心为 $l/2$.求解棒在碰撞以后的运动.



【解】

碰撞后杆上与 C 点接触点速度为 0

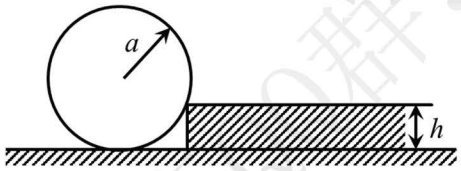
由角动量守恒

$$mv_0\frac{l}{2}=mv_c\frac{l}{2}+I_c\omega$$

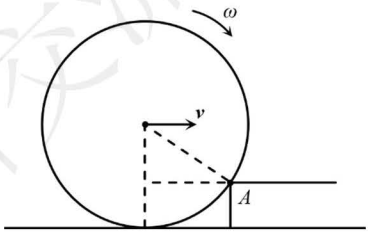
$$v_c-\omega\frac{l}{2}=0$$

$$\Rightarrow\ v_c=\frac{3}{7}v_0\qquad\omega=\frac{6v_0}{7l}$$

14.18 半径为 a 的匀质球以速度 v 沿水平表面无滑动滚动的过程中与高度为 $h<a$ 的台阶发生无弹性碰撞，如图所示.试求球能腾越台阶的最小速度.假定在碰撞点没有发生滑动.



【解】



碰撞前后球对 A 点角动量守恒

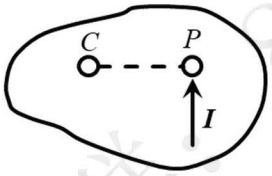
$$mv\,(a-h)+\frac{2}{5}ma^2\omega=\frac{7}{5}ma^2\omega'$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{5}ma^2\omega'^2=mgh$$

物理考研交流QQ群：861466923

$$\Rightarrow\ v=\frac{\sqrt{\frac{10}{7}gh}}{1-\frac{5h}{7a}}$$

14.19 刚体质心在 C.对于通过质心且垂直于图面的轴线，刚体的回转半径为 k.在 P 点处给刚体以垂直于 PC 的冲量 I.求解刚体受冲击以后的运动.



【解】

$$I_c=mk^2$$

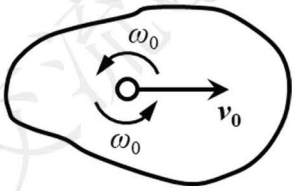
$$mv_c=I$$

$$v_c=\frac{I}{m}$$

$$I_c\omega=I\overline{PC}$$

$$\omega=I\overline{PC}/mk^2$$

14.20 一块匀质薄板在自身平面内运动，质心速度为 v_0，转动的角速度为 ω_0.试在板上选取一点，突然固定该点，则整个板的运动完全停止下来.对于通过质心而垂直板面的轴线，板的转动惯量为 I.



【解】

质心相对于该点的角动量为 0，设质心到该点位矢为 $\boldsymbol{r}$

则

$$-m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v_0}+I\boldsymbol{\omega_0}=0$$

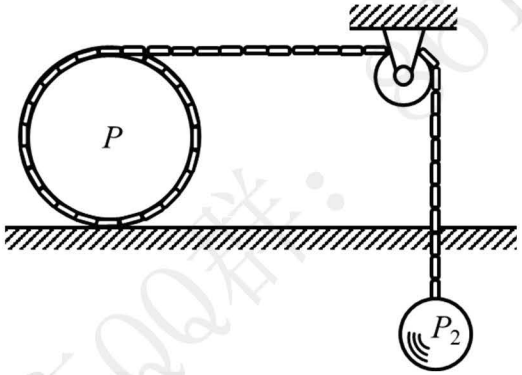
$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v_0}=\frac{I}{m}\boldsymbol{\omega_0}$$

物理考研交流QQ群：861466923

$\boldsymbol{r}$ 通解为

$$\boldsymbol{r}=\frac{I}{mv_0^2}\boldsymbol{v_0}\times\boldsymbol{\omega_0}+a\boldsymbol{v_0}$$

14.21 重量为 P_1 的匀质圆柱放在粗糙水平面上, 柱的外周缠有绳子, 绳的自由端水平伸出, 绕过轻而光滑的定滑轮, 并悬挂重为 P_2 的物体.设圆柱只滚不滑, 求解各物体的加速度以及绳中张力.



【解】

对 2 列动力学方程

$$m_2g-T=m_2a_2$$

对 1 列动力学方程

$$T+f=m_1a_1$$

$$(T-f)R=\frac{1}{2}m_1R^2\alpha$$

$$a_1=\alpha R$$

由运动关系

$$a_2=2a_1$$

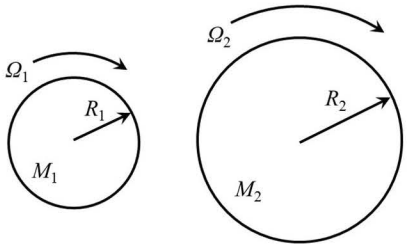
$$\Rightarrow a_1=\frac{4m_2g}{8m_2+3m_1}=\frac{4P_2g}{8P_2+3P_1}$$

$$a_2=\frac{8P_2g}{8P_2+3P_1}$$

$$T=\frac{3P_1P_2}{3P_1+8P_2}$$

14.22 两个匀质圆柱体各自独立地绕自身的轴转动, 两轴互相平行.一个圆柱体质量为 M_1, 半径为 R_1; 另一个圆柱体质量为 M_2, 半经为 R_2.起初, 它们的角速度分别是 Ω_1 和 Ω_2, 转动方向相同.然后移动它们使相接触.问达到稳定状态后, 两个圆柱各自的最终角速度是多少?

物理考研交流QQ群：861466923



【解】

在到达最终角速度之前，对 1 列动力学方程

$$-fR_1=\frac{1}{2}M_1R_1^2\alpha_1\ \Rightarrow\ \alpha_1=\frac{-2f}{M_1R_1}$$

$$\Omega_1'=\Omega_1+\alpha_1 t=\Omega_1-\frac{2ft}{M_1R_1}$$

$$\Omega_1'R_1=\Omega_1R_1-\frac{2ft}{M_1}$$

同理

$$\Omega_2'R_2=\Omega_2R_2-\frac{2ft}{M_2}$$

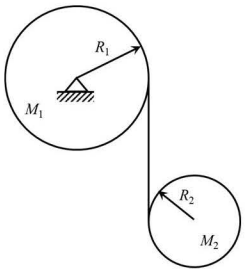
达到稳定状态

$$\Omega_1'R_1=-\Omega_2'R_2\ \Rightarrow\ 2ft=\frac{M_1M_2(\Omega_1R_1+\Omega_2R_2)}{M_1+M_2}$$

$$\Rightarrow\ \Omega_1'=\frac{M_1R_1\Omega_1-M_2R_2\Omega_2}{(M_1+M_2)R_1}$$

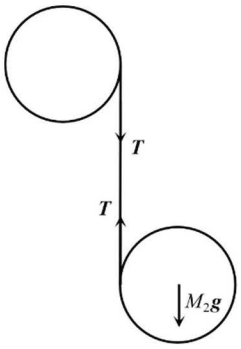
$$\Omega_2'=-\frac{\Omega_1'R_1}{R_2}$$

14.23一个质量为 M_1，半径为 R_1 的圆柱体只能绕其自身的水平轴作定轴转动.一根细绳缠绕在这个圆柱体上，绳的另一端缠绕有一个质量为 M_2，半径为 R_2 的圆柱体，后者可自由地放开缠绕着的绳子，保持其轴水平而下降.假定两者之间的一段绳子保持为竖直的.试求(*i*)M_2 质心的加速度；(*ii*)M_1 与 M_2 的角加速度；(*ii*)竖直段绳中的张力.



【解】

物理考研交流QQ群：861466923



对 M_1 列动力学方程

$$TR_1 = \frac{1}{2}M_1R_1^2\alpha_1$$

对 M_2 列动力学方程

$$TR_2 = \frac{1}{2}M_2R_2^2\alpha_2$$

$$M_2g - T = M_2a_2$$

由相对运动关系

$$a_2 - \alpha_2R_2 = \alpha_1R_1$$

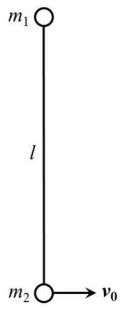
$$\Rightarrow T = \frac{M_1M_2g}{2M_2 + 3M_1}$$

$$\alpha_1 = \frac{2M_2g}{R_1(2M_2 + 3M_1)}$$

$$\alpha_2 = \frac{2M_1g}{R_2(2M_2 + 3M_1)}$$

$$a = \frac{2(M_1 + M_2)g}{3M_1 + 2M_2}$$

14.24 质量为 m_1 和 m_2 的两个小球, 用长度为 l 的线连接, 置于光滑水平桌面上.将这系统快速旋转起来, 这时 m_1 暂时处于静止状态, 而 m_2 以速度 v_0 垂直于它们的连线而运动.释放这系统, 求系统此后的运动和线中的张力.



【解】

物理考研交流QQ群：861466923

系统不受外力作用，质心速度与绕质心转动的角速度不变

$$v_C = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2}$$

$$\omega = \frac{v_0}{l}$$

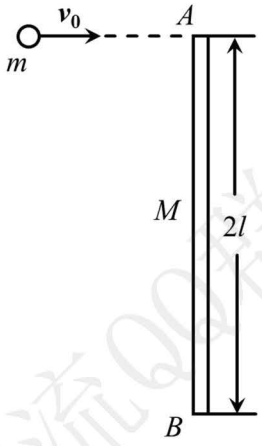
在质心系中 2 小球做圆周运动：

$$r_{2c} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l$$

$$T = m_2 \omega^2 r_{2c} = \frac{m_1 m_2 v_0^2}{(m_1 + m_2) l}$$

14.25(*i*)一根长为 $2l$，质量为 M 的细杆，平放在光滑水平面上.一个质量为 m 的小球，以速度 v_0 撞击杆的 A 端，如图所示.假定碰撞是完全弹性的，且碰撞以后小球的速度仍沿原来的那根直线.求小球碰撞后的速度.

(*ii*)设细杆并不是完全自由的，其 B 端被固定，细杆可绕 B 自由转动.求小球碰撞后的速度.



【解】

（i）设碰后杆质心速度为 v_c，m 速度为 v_1，杆转动角速度为 ω

由动量守恒定律

$$mv_0 = mv_1 + Mv_c$$

由角动量守恒定律

$$mv_0 l = I_c \omega + mv_1 l \qquad I_c = \frac{1}{3} M l^2$$

由能量守恒定律

$$\frac{1}{2}Mv_c^2+\frac{1}{2}I_c\omega^2+\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\Rightarrow\ v_1=\frac{(4m-M)v_0}{M+4m}$$

（ii）

$$mv_0 2l=mv_1 2l+\frac{4}{3}Ml^2\omega$$

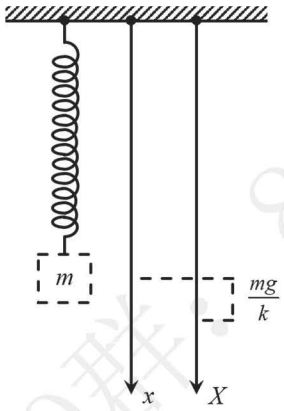
$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}Ml^2\omega^2$$

$$\Rightarrow\ v_1=\frac{3m-M}{3m+M}v_0$$

物理考研交流QQ群：861466923

物理考研交流QQ群：861466923

15.1 一根弹簧，劲度系数为 k，上端固定而竖直地悬挂着. 轻轻地在弹簧下端挂上质量为 m 的物体，弹簧被拉长，弹性势能增加，重力势能减少. 应用能量平衡方程 $\frac{1}{2}kx^2 = mgx$ 可求得物体的平衡坐标 $x=2mg/k$. 这显然是错误的 (按照劲度系数 k 的定义可知物体的平衡坐标应为 mg/k)，试问这错误是怎样造成的？



【解】

物体在到达平衡位置之前，重力大于弹性力，物体向下作加速运动，在平衡位置处动能不为 0，能量平衡方程未计入动能，显然是错误的

15.2 求解上题的物体的运动情况. 分别用 x 坐标轴和 X 坐标轴写出运动方程式，并加以比较.

【解】

$$mg - kx = m\ddot{x}$$

$$-kx = m\ddot{x}$$

两方程通解分别为

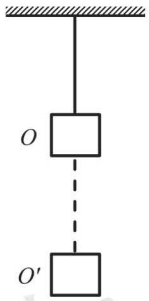
$$x = \frac{mg}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \pi\right)$$

$$x = \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \pi\right)$$

物理考研交流QQ群：861466923

15.3 静止水面上浮着一只质量为 M 的小船. 岸边高出水面 h, 有一个质量为 m 的人无初速地从岸边落入小船. 求解小船的上下振动. 为计算简便, 假定小船是截面积为 S 的柱形.

【解】



$$(M+m)v = m\sqrt{2gh}$$

$$v = \frac{m\sqrt{2gh}}{M+m}$$

O' 为船与人在水中的平衡位置

$$M \to M+m \qquad OO' = \frac{mg}{k}$$

以竖直向下为正方向

$$F_{浮} = -\rho g V_{排} = -\rho g S x \quad k = -\rho g S$$

以平衡位置 O' 为坐标原点

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}} = \sqrt{\frac{\rho g S}{M+m}}$$

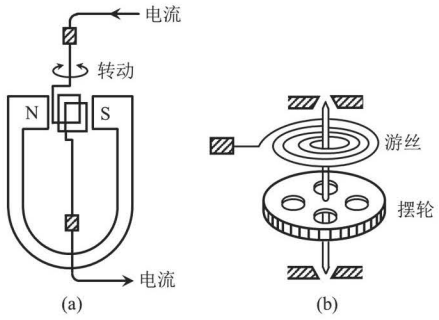
$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kOO'^2 + \frac{1}{2}(M+m)v^2$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{2m^2h}{\rho S(M+m)}} \qquad \varphi = \pi + \arccos\left(\frac{mg}{kA}\right)$$

15.4 悬线式电流计的线圈悬挂在两磁极之间. 当线圈转动而离开其平衡位置时, 被扭的悬线有复原趋势, 对线圈施加恢复力矩. 钟表里的摆轮偏转时, 游丝也对摆轮施加恢复力矩.

设恢复力矩 M 正比于偏转角 θ, 即 $M = G\theta$. 又设转动部分的转动惯量为 I. 求解转动情况.

物理考研交流QQ群：861466923

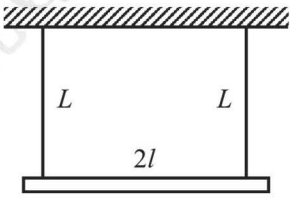


【解】

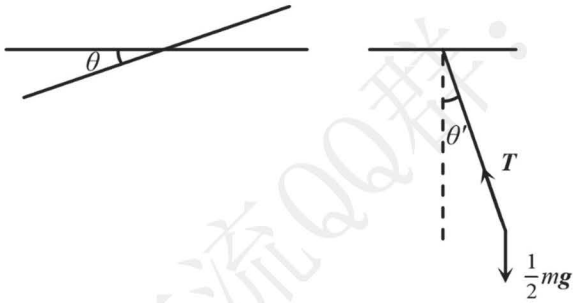
$$-G\theta = I\ddot{\theta}$$

$$\theta = \mathrm{A}\cos\left(\sqrt{\frac{G}{I}}t + \varphi_0\right)$$

15.5 用长为 L 的两根线把长为 $2l$ 的匀质棒两端悬挂起来，并使棒身保持水平. 令棒绕竖直轴稍稍转过一个小角度，求解棒来回转动的周期.



【解】



$$l\theta = L\theta'$$

$$-2\times\frac{1}{2}mg\theta'\cdot l = \frac{1}{3}ml^2\alpha$$

$$\Rightarrow\quad -\frac{3g}{L}\theta = \ddot{\theta}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{3g}}$$

15.6 谐振动 $x = 10\cos\frac{1}{12}\pi t$. 试计算 $t_1 = 0$, $t_2 = 3$ 和 $t_3 = 6$ 时的坐标

x_1, x_2和x_3. 时间间隔 $t_2 - t_1$ 和 $t_3 - t_2$ 是相等的, 在相等的时间间隔里走过的路程是否相等?

【解】

$$x = 10\cos\frac{1}{12}\pi t$$

$$t_1 = 0 \quad x_1 = 10$$

$$t_2 = 3 \quad x_2 = 10\cos\frac{\pi}{4} = 7.07$$

$$t_3 = 6 \quad x_3 = 0$$

$$S_1 = 2.93 \quad S_2 = 7.07$$

不相等

15.7 谐振动 $x = A\cos(8t + \varphi_0)$. 已知初始位移为 0.04 m, 初始速度为 0.24 m/s. 试确定振幅 A 和初始相位 φ_0.

【解】

$$x = A\cos(8t + \varphi_0)$$

$$\dot{x} = -8A\sin(8t + \varphi_0)$$

$t = 0$时

$$\frac{\dot{x}}{x} = -8\tan\varphi_0 = 6$$

$$\tan\varphi_0 = -\frac{3}{4}$$

又 $t = 0$ 时, 初始位移初始速度为正, 振幅矢量位于第四象限

$$\varphi_0 = -\arctan\frac{3}{4}$$

t=0 时

$$x = A\cos\left(-\arctan\frac{3}{4}\right) = 0.04 \Rightarrow A = 0.05$$

即振幅 A=0.05, 初始相位 $\varphi_0 = -\arctan\frac{3}{4}$

15.8 质量为 100 g 的物体作谐振动, 其振幅为 1 cm, 最大加速度为 4 cm/s^2. 求机械能以及通过平衡位置时的动能. 问物体通过何处的时候动能和势能相等.

【解】

物理考研交流QQ群：861466923

$$a_{\max}=\frac{kA}{m}\Rightarrow k=0.4\ \mathrm{N/m}$$

$$E=\frac{1}{2}kA^2=2\times10^{-5}\ \mathrm{J}$$

$$E=T+V$$

$$T=E-V=V$$

$$\Rightarrow V=\frac{1}{2}E=\frac{1}{2}kx^2$$

$$\Rightarrow |x|=\frac{\sqrt{2}}{2}A$$

即物体与平衡位置的距离为振幅的$\frac{\sqrt{2}}{2}$倍

15.9 水平放置的弹簧振子，弹簧的劲度系数 k = 6.272 N/m，振动物体的质量 m = 0.2 kg. 物体的最大偏离为 5 cm，求物体的最大速度和机械能.

【解】

$$E=\frac{1}{2}kA^2=7.84\times10^{-3}\ \mathrm{J}$$

$$\frac{1}{2}mv_{max}^2=E$$

$$\Rightarrow v_{max}=0.28\ \mathrm{m/s}$$

15.10 题 15.2 的竖直弹簧振子是否符合机械能守恒的条件？如符合，请写出机械能守恒的表达式.

【解】

$$x=\frac{mg}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t-\pi\right)=\frac{mg}{k}cos\ \varphi$$

$$\dot{x}=-\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{mg}{k}\sin\ \varphi=-\sqrt{\frac{m}{k}}g\sin\ \varphi$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{m^2g^2}{2k}$$

$$x=\frac{mg}{k}+\frac{mg}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t-\pi\right)=\frac{mg}{k}+\frac{mg}{k}\cos\ \varphi$$

物理考研交流QQ群：861466923

$$\dot{x} = -\sqrt{\frac{m}{k}}g\sin\varphi$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx = 0$$

15.11 阻尼振动 $x = Ae^{-\beta t}\cos\omega t$，求周期 τ. 计算 $t_0 = 0, t_1 = \tau$ 和 $t_2 = 2\tau$ 时的振幅 A_0, A_1 和 A_2. 问 $A_0 - A_1$ 与 $A_1 - A_2$ 是否相等, 这说明什么问题? 又, $A_0 : A_1$ 与 $A_1 : A_2$ 是否相等? 这又说明什么问题?

如 $A_0 = 9\ \text{cm}, A_1 = 6\ \text{cm}$, 问 A_2 =?

【解】

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$t_0 = 0 \quad A_0 = A$$

$$t_1 = \tau \quad A_1 = A\mathrm{e}^{-\beta\tau}$$

$$t_2 = 2\tau \quad A_2 = A\mathrm{e}^{-2\beta\tau}$$

$$A_0 - A_1 = A\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta}\right)$$

$$A_1 - A_2 = A\mathrm{e}^{-\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta\tau}\right)$$

说明振幅减小开始时较快, 后面随时间越来越慢

$$\frac{A_0}{A_1} = \mathrm{e}^{\beta\tau} \quad \frac{A_1}{A_2} = \mathrm{e}^{\beta\tau}$$

振幅在相同时间间隔里等比例减小

15.12 阻尼振动的“周期”比相应的无阻尼振动的周期增大的百分率多大?

【解】

$$\left|\frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} - \omega_0}{\omega_0}\right| = \left|\sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2} - 1\right|$$

$\frac{\beta}{\omega_0}$ 为小量, 由小量近似

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2} = 1 - \frac{\beta^2}{2\omega_0^2}$$

$$\left|\sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2} - 1\right| = \frac{\beta^2}{2\omega_0^2}$$

物理考研交流QQ群：861466923

15.13 单摆初始振幅为 3 cm, 经 10 s 而减小到 1 cm, 问经多少时间而减小到 0.3 cm?

【解】

$$A = 3\ \text{cm} \quad Ae^{-\beta t_1} = 1\ \text{cm} \quad Ae^{-\beta t_2} = 0.3\ \text{cm}$$

$$e^{\beta t_1} = 3 \quad e^{\beta t_2} = 10$$

$$\beta t_1 = \ln 3 \quad \beta t_2 = \ln\ 10$$

$$t_2 = \frac{\ln 10}{\ln 3} t_1 = \left(\frac{10\ln\ 10}{\ln 3}\right)\ \text{s} \approx 21\ \text{s}$$

15.14 在急剧震动的房间内, 为防止精密仪器震坏, 将仪器用软弹簧悬挂起来, 如房屋上下震动频率为 20 Hz, 仪器在软弹簧上自由振动的频率为 2 Hz. 求仪器振幅与房屋振幅的比值.

【解】

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2}} = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{m}{k}\Omega^2\right)^2}} = \frac{\frac{F_0}{k}}{\left|1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right|}$$

$$\frac{A}{\frac{F_0}{k}} = \frac{1}{\left|1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right|} = \frac{1}{|1 - 10^2\ |} = \frac{1}{99}$$

15.15 火车车厢可在弹簧上作上下振动. (1) 设弹簧的负载为 5.5 t, 弹簧劲度系数为 9800 N/1.6 mm. 求车厢振动的本征频率. (2) 火车行驶中, 每经过铁轨接头处就受到一次撞击, 这种周期性的撞击使车厢作受迫振动. 设每段铁轨长 12.5 m, 问火车以多大的速度行驶将会发生强烈共振?

【解】

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$v = S/T = Sf = 66.39\ \text{m/s}$$

物理考研交流QQ群：861466923

15.16 弹簧振子的本征频率为 2 Hz, 今施加幅度为 $F = 10^{-3}$ N 的谐变力, 使其发生共振. 共振时的振幅为 5 cm. 求阻力系数 h 和阻力的幅度.

【解】

$$h = 2m\beta$$

$$A = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx \frac{F_0}{2m\beta\omega_0} = \frac{F_0}{h\omega_0}$$

$$h = \frac{F_0}{A\omega_0} = \frac{F_0}{A2\pi f} = \frac{1}{200\pi}\ \mathrm{kg \cdot s^{-1}}$$

阻力幅度

$$F' = hv_{max} = hA\omega_0 = F_0 = 10^{-3}\ \mathrm{N}$$

15.17 劲度系数为 k 的弹簧竖直悬挂, 下端系有质量为 m 的磁棒, 磁棒插在竖直线圈中, 而只占据线圈中的上部空间, 线圈通有电流 $i = 20\sin 8\pi t$ (A). 磁棒和线圈相互吸引力 $F = 18\pi i$(N). 求解磁棒的运动.

【解】

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} = \frac{360\pi}{m\left|\frac{k}{m} - (8\pi)^2\right|}$$

$$\cos\ \Phi_0 = \frac{k - m\Omega^2}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + h^2\Omega^2}}$$

当

$$k - m\Omega^2 > 0$$

即

$$k > m(8\pi)^2$$

$$\Phi_0 = 0$$

当

$$k < m(8\pi)^2$$

$$\Phi_0 = \pi$$

15.18 直管 OA 绕通过点 O 的水平轴以匀角速 ω 转动. 管内有一弹簧, 一端

固着于O点，另一端系有质量为m的小球. 弹簧自然长度为l_0，劲度系数为k. 求解球的运动. ω取何值将发生共振?

【解】

惯性向心力

$$F_{惯} = m\omega^2\ x$$

与弹性力合力可写为

$$F' = -(k - m\omega^2)x \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} - \omega^2$$

驱动力

$$F = mg\cos\omega t \quad \Omega^2 = \omega^2$$

$$A = \frac{mg}{m|\omega_0^2 - \Omega^2|} = \frac{g}{\left|\frac{k}{m} - 2\omega^2\right|}$$

$$\frac{k}{m} - 2\omega^2 > 0$$

$$\Phi_0 = 0$$

$$\frac{k}{m} - 2\omega^2 < 0$$

$$\Phi_0 = \pi$$

发生共振条件:

$$\frac{k}{m} = 2\omega^2$$

15.19 同在x方向的两个同频率谐振动

$$x_1 = 8\cos\left(10t + \frac{3}{4}\pi\right), x_2 = 6\cos\left(10t + \frac{1}{4}\pi\right).$$

求合成振动的振幅和初始相位.

【解】

令

$$10t + \frac{1}{4}\pi = \alpha$$

$$x_1 = 8\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -8\sin\ \alpha$$

$$x_2 = 6\cos\ \alpha$$

物理考研交流QQ群：861466923

$$x = x_1 + x_2 = 6\cos\ \alpha - 8\sin\ \alpha = 10\left(\cos\ \alpha\frac{3}{5} - \sin\alpha\ \ \frac{4}{5}\right)$$

$$= 10\cos\left(\alpha + \arccos\frac{3}{5}\right)$$

$$A = 10 \quad \varphi_0 = \arccos\frac{3}{5}$$

15.20 对于方向相同而频率不同的两个谐振动的合成问题, (49.10) 式在振幅相等的条件下进行了计算. 试在振幅不等的条件下计算合成振动.

【解】

$$x = A_1\cos\ \omega_1 t + A_2\cos\ \omega_2 t$$

$$= \frac{1}{2}(A_1 + A_2)(\cos\ \omega_1 t + \cos\ \omega_2 t) + \frac{1}{2}(A_1 - A_2)(\cos\omega_1 t - \cos\ \omega_2 t)$$

令

$$\alpha = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t \quad \beta = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t$$

$$x = (A_1 + A_2)\cos\ \alpha\cos\ \beta - (A_1 - A_2)\sin\ \alpha\sin\ \beta$$

$$= A\cos(\alpha + \varphi)$$

$$A = \sqrt{(A_1 + A_2)^2\cos^2\beta + (A_1 - A_2)^2\sin^2\beta}$$

$$= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(\cos^2\beta - \sin^2\ \beta)}$$

$$= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos 2\beta}$$

$$= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\omega_1 - \omega_2)t}$$

$$\cos\varphi = \frac{A_1 + A_2}{A}\cos\beta \quad \sin\ \varphi = \frac{A_1 - A_2}{A}\sin\ \beta$$

$$\tan\ \varphi = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2}\tan\ \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t$$

15.21 两支 C 调音叉, 其一是标准的 256 Hz, 另一是需要校正的. 同时轻敲这两支音叉, 在 10 秒钟里听到 20 拍. 问待校的音叉的频率是多少?

【解】

$$\Delta f = \frac{n}{t} = \frac{20}{10\ \mathrm{s}} = 2\ \mathrm{Hz}$$

$$f = f_0 \pm \Delta f = 256\ \mathrm{Hz} \pm 2\ \mathrm{Hz}$$

物理考研交流QQ群：861466923

15.22 互相垂直的两个同频率谐振动

$$x = 5\cos\omega t, y = 3\cos(\omega t + \delta) \quad \left(\delta = \arccos\frac{8}{15}\right).$$

求合成振动的轨迹.

【解】

$$x = A_1\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$y = A_2\cos(\omega t + \varphi_0 + \delta)$$

合成振动

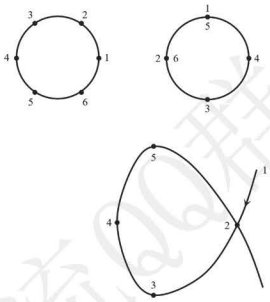
$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos\delta = \sin^2\delta$$

$$A_1 = 5 \quad A_2 = 3 \quad \delta = \arccos\frac{8}{15}$$

$$9x^2 + 25y^2 - 16xy = 161$$

15.23 $x = A\cos\omega t, y = A\cos\frac{3}{2}\omega t$. 试描出合成振动的轨迹.

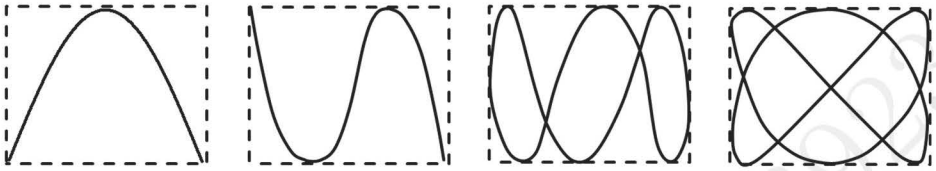
【解】



$$\omega_1 = \omega_2 = 2:3$$

15.24 下列各图为互相垂直的振动的合成的李萨如图. 已给 x 方向的振动圆频率 ω, 试求 y 方向振动的圆频率.

物理考研交流QQ群：861466923



(a) (b) (c) (d)

【解】

在李萨如图形内，垂直于 x 轴的直线交轨迹于 a 个点，垂直于 y 轴的直线交轨位于 b 个点

$$\omega_1:\omega_2 = a:b$$

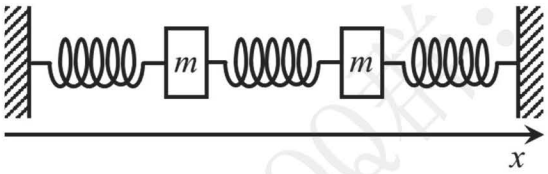
(a): $\omega_1:\omega_2 = 1:2 \quad \omega_2 = 2\omega$

(b) $\omega_1:\omega_2 = 1:3 \quad \omega_2 = 3\omega$

(c) $:\omega_1:\omega_2 = 2:6 = 1:3 \quad \omega_2 = 3\omega$

$(d):\omega_1:\omega_2 = 4:6 = 2:3 \quad \omega_2 = \frac{3}{2}\omega$

15.25 下图三根弹簧完全相同，劲度系数各为 k. 两个物体质量相等，均为 m. 图示为平衡状态，各弹簧恰好都未伸缩. 稍加纵向扰动后即作纵向振动. 试求简正坐标和振动模式.



【解】

设物体的水平方向位移分别为 x_1 x_2

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_2)$$

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k(x_2 - x_1)$$

设 x_1 x_2 通解为

$$x_1 = A\cos(\omega t + \varphi_0) \quad x_2 = B\cos(\omega t + \varphi_0)$$

则

$$\begin{cases}(-m\omega^2 + 2k)A - kB = 0\\ -kA + (-m\omega^2 + 2k)B = 0\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2+2k & -k \\ -k & -m\omega^2+2k \end{vmatrix}=0$$

$$\omega^2=\frac{k}{m} \text{ 或 } \omega^2=\frac{3k}{m}$$

简正坐标

$$\xi_1=x_1-x_2 \quad \xi_2=x_1+x_2$$

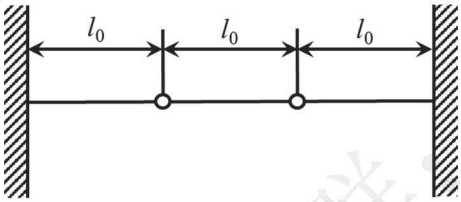
$$\omega^2=\frac{k}{m}$$

$$\xi_1=0 \quad \xi_2=2A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right)$$

$$\omega^2=\frac{3k}{m}$$

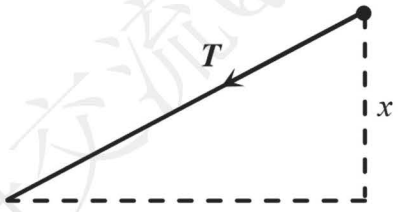
$$\xi_2=0 \quad \xi_1=2B\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t+\varphi_0\right)$$

15.26 上图三段细线长度均为 l_0, 线中张力都是 T. 稍加横向扰动后即作横向振动. 试求简正坐标和振动模式. 设两质点的质量均为 m.



【解】

设垂直方向位移为 x_1 x_2



$$F=T\cdot\frac{x}{l_0}=\frac{T}{l_0}x$$

同 15-25, 令

$$\xi_1=x_1-x_2 \quad \xi_2=x_1+x_2$$

$$\xi_1=0 \quad \xi_2=2A\cos\left(\sqrt{\frac{T}{l_0 m}}t+\varphi_0\right)$$

物理考研交流QQ群：861466923

$$\xi_2 = 0 \quad \xi_1 = 2B\cos\left(\sqrt{\frac{3T}{l_0 m}}t + \varphi_0\right)$$

物理考研交流QQ群：861466923
物理考研交流QQ群：861466923

16.1 在图 7-24(b)上, 质点 0 的相位等于多少? 经过四分之一周期 [见图 7-24(c)], 这个相位传到哪一质点? 又经过四分之三周期 [见图 7-24(f)], 这个相位传到哪一质点? 这个相位在一个周期里传播的距离有多远?

在图 7-24(b), 质点 1 的相位等于多少? 经过一个周期 [图 7-24(f)], 这个相位传到哪一质点? 传播了多远?

在图 7-24(b), 质点 2 的相位等于多少? 经过一个周期, 这个相位传到哪一点? 传播了多远?

各个不同的相位的传播速度是否相同?

【解】

(i) 0, 3, 12, 一个波长, 0 到 12 之间距离

(ii) $-\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{11\pi}{6}$, 13, 一个波长

(iii) $-\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{5\pi}{3}$, 14, 一个波长

(iv) 相同

16.2 某人民广播电台发射频率为 702 kHz 的电磁波. 电磁波的速度是 3×10^8 m/s. 求该电磁波的波长.

氦氖激光 (红色) 的波长是6328 Å (1 Å $=10^{-10}$ m), 求这种激光的频率.

比较以上两种波的频率高低和波长长短.

【解】

$$\lambda = cT = c/f$$

$$\lambda_1 = c/f_1 = \frac{3\times10^8}{702\times10^3}\ \text{m} = 427.4\ \text{m}.$$

$$f_2 = c/\lambda_2 = \frac{3\times10^8}{6328\times10^{-10}}\ \text{Hz} = 4.74\times10^{14}\ \text{Hz}$$

16.3 人耳能听到的声音的最低频率为 20 Hz. 声音在 20°C 空气中速度为 340 m/s, 在水中速度为 1450 m/s. 求 20 Hz 的声波在空气中和水中的波长.

人耳能听到的声音的最高频率为 20000 Hz. 求 20000 Hz 的声波在空气中和水中的波长.

【解】

$$\lambda = c/f$$

物理答疑交流QQ群: 861466923

$$\lambda_1 = c_1/f = 17\ \text{m} \qquad \lambda_1' = c_1/f' = 17\ \text{mm}$$
$$\lambda_2 = c_2/f = 72.5\ \text{m} \qquad \lambda_2' = c_2/f' = 7.25\ \text{cm}$$

16.4 在题 16.2 所述电磁波传播方向上相隔 213.7 m 的两点，电磁波的相位差为多少?

【解】

$$213.7\text{m} = \frac{\lambda}{2}$$

电磁波相位差为 π

16.5 波 $u = 5\cos(8t + 3x + \pi/4)$. 问 (1) 它沿什么方向传播? (2) 它的频率、波长、波速各是多少? (3) 式中的$\pi/4$有什么意义?

【解】

(1)沿 x 轴负方向传播

(2)

$$\omega = 8\ k = \cdot 3$$
$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2}{3}\pi \qquad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi} \qquad c = \frac{\omega}{k} = \frac{8}{3}$$

(3)$\frac{\pi}{4}$为 x=0 处初相

16.6 波源作谐振动，周期$\frac{1}{100}$ s，初相为零. 振动以 400 m/s 的相速沿直线传播. 求距波源为 (1) 8 m (2) 9 m (3) 10 m 处的振动方程和初相.

【解】

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 200\pi \qquad k = \frac{\omega}{c} = \frac{\pi}{2} \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} = 4$$
$$u = A\cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{2}x\right)$$

（1）8 m

$$u = A\cos(200\pi t - 4\pi) \qquad -4\pi$$

（2）9 m

$$u = A\cos\left(200\pi t - \frac{9}{2}\pi\right) \qquad -\frac{9}{2}\pi$$

（3）10 m

$$u = A\cos(200\pi t - 5\pi) \qquad -5\pi$$

物理考研交流QQ群：861466923

16.7 在正常生活环境中，声强 (声波的波强) 应在 $10^{-8}\,\mathrm{J/(m^2\cdot s)}$ 以下. 试按频率 $f=1000\ \mathrm{Hz}$ 估计一下，这个声强所对应的声振动的振幅多大. (空气的密度 ρ 约为 1.29 kg/m^3，空气中的声速 v 约为 340 m/s.)

【解】

$$I=\frac{1}{2}\rho_0 c_s\omega^2A^2$$

$$A=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2I}{\rho_0 c_s}}=\frac{1}{2\pi f}\sqrt{\frac{2I}{\rho_0 c_s}}=1.07\times10^{-9}\ \mathrm{m}$$

16.8 声强达到 $10^{-3}\,\mathrm{J/(m^2\cdot s)}$ 已属于一种噪音公害. 试按频率 $f=1000\ \mathrm{Hz}$ 估计一下这个声强所对应的声振动的振幅.

【解】

$$A=\frac{1}{2\pi f}\sqrt{\frac{2I}{\rho_0 c_s}}=3.4\times10^{-7}\ \mathrm{m}$$

16.9 把驻波的解析表达式 (52.11) 代入能流公式 (51.16) 以计算驻波的能流. 这能流在一个周期上的时间平均值或者在一个波长上的空间平均值是多少? 这结果是否在你的意料之中?

【解】

$$u=2A\cos\ kx\cos\ \omega t$$

$$P=\rho_{线}v_{相}\omega^2A^2\sin^2(\omega t-kx)=-T\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$P=-T(-k)\sin kx\cos\omega t\,(-\omega)\sin\omega t\cos kx\,4A^2$$

$$=-4Tk\omega A^2\sin kx\cos kx\cdot\cos\omega t\sin\omega t$$

$$=-Tk\omega A^2\sin 2kx\sin 2\omega t$$

$$=-\omega^2A^2\rho_{线}v_{相}\sin 2kx\sin 2\omega t$$

$$\bar{P}=\frac{1}{2\pi/\omega}\int_0^{2\pi/\omega}P=0$$

16.10 弦乐器在演奏前要“定音”. “定音”时为什么要把弦适当绷紧或放松? 发出 C 调“do” (频率 256 Hz) 的弦长半米，弦的线密度 $\rho_{线}$ 为 1.5 g/m. 问弦

中张力应为多大?

【解】

$$f=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\rho_{线}}} \qquad T=(2lf)^2\rho_{线}=98.3\ \mathrm{N}$$

16.11 下图是一个玻璃瓶, 可作为声振动的共振器, 叫做亥姆霍兹共振器. 试估算它的本征频率. [提示: 把瓶颈的那一部分空气整体作为质点看待, 体积 V_0 的空气则作为弹簧垫看待, 弹簧垫的弹性力可由物态方程 "$pV^\gamma=$ 常量" 微分而得到.]



【解】

$$pV^\gamma=A$$

$$\mathrm{d}pV^\gamma+p\gamma V^{\gamma-1}\mathrm{d}V=0$$

$$F=Sdp=-\frac{p\gamma\mathrm{d}V}{V}S=m\ddot{x}=\rho Sl\ddot{x}$$

$$\mathrm{d}V=Sx$$

$$\Rightarrow\ \ddot{x}=-\frac{S}{V_0l}\frac{p\gamma}{\rho}x=-\frac{Sc^2}{V_0l}x$$

$$\omega^2=c^2S/V_0l$$

16.12 火车以 20 m/s 的速度行驶, 车上人员听到汽笛声调为 300 Hz. 问迎向火车和目送火车离去两种情况下所听到的汽笛声调各为多大? 在 20℃ 空气中, 声速约 340 m/s.

【解】

接收器静止, 波源运动

$$f'=\frac{c}{c-v}f$$

$$v=\pm20\ \mathrm{m/s}\qquad c=340\ \mathrm{m/s}\qquad f=300\ \mathrm{Hz}$$

$$\Rightarrow\ f_1=319\ \mathrm{Hz}\qquad f_2=283\ \mathrm{Hz}$$

物理考研交流QQ群：861466923

16.13在大教室中，教师手拿振动的音叉，站立不动，学生听到的声音频率 f 为 1020 Hz. 若教师以速度 v = 0.5 m/s 朝黑板匀速走去，则后面的学生将会听到拍音，试解释这一现象. 并计算拍频是多少. (设空气中声速为 340 m/s.)

【解】

学生直接接收音叉频率

$$f_1 = \frac{cf}{c+v}$$

学生接收墙壁反射频率

$$f_2 = \frac{cf}{c-v}$$

$$\Delta f = f_2 - f_1 = 3\ \text{Hz}$$

16.14深水波的色散关系为

$$\omega^2 = gk + \frac{T}{\rho}k^3.$$

试计算深水波的群速.

【解】

$$v_\text{g} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$$

$$\omega^2 = gk + \frac{T}{\rho}k^3$$

$$\omega = \left(gk + \frac{T}{\rho}k^3\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$v_\text{g} = \frac{1}{2}\left(gk + \frac{T}{\rho}k^3\right)^{-\frac{1}{2}}\left(g + 3k^2\frac{T}{\rho}\right)$$

$$= \frac{1}{2\omega}\left(g + \frac{3k^2T}{\rho}\right)$$

16.15两个相干波源，频率为 100 Hz，相位差为 π，两者相距 20 m. 在两波源的中垂线上距波源为 15 m 的点，它的振动情况如何？波速为 10 m/s.

【解】

物理考研交流QQ群：861466923

中垂线上各点与两个波源距离相同，两波源相位差为π该点振动为两个相差π相位振动的叠加，故中垂线上各点均不振动。

物理考研交流QQ群：861466923
物理考研交流QQ群：861466923

后记

对于所有参加物理考研的同学们，笔者还想在复习上给出几点建议：

首先是效率。考研的时间对于每一位同学来说都是有限的，并且对于大部分同学来说甚至是不够的。考研的胜败在于在同样有限的时间里面谁对知识的掌握程度最多，同样的学习一本书，但是到了考场却能产生截然不同的效果。而且往往一本书需要练习很多遍才能达到深刻的掌握，因此效率是决定胜负的关键性因素。决定你的效率的有两个方面，一是自身的认真程度，自己学习是否用心，是否时常总结自己的不足等等。另一方面就是训练题目的选择与反馈，只有先选择了好的训练题目的基础上的训练才是有意义的。考生应该尽量避免无意义的刷题，选择最经典的题目进行刷题。

然后是心态。考研不但是对学习能力的考验也是对心态的巨大挑战。在考研的过程中你会遇到各种各样的疲惫、盲目、自我怀疑和网络上的各种负面情绪。这些时候你可能需要一些自己的调整，也可能需要和知心朋友们说说话。但是还有一点重要的是和已经经历过这些的学长学姐学习一些经验，作为过来人的学长学姐们也经历过这些疲惫与恐慌，也是最能够理解你所遇到的痛苦的一些人。同学们在心态上遇到自己打不开的结也欢迎和我们的婷婷学姐分享！婷婷学姐自己有过同样的经历，能够和学弟学妹们感同身受，也帮助过很多考生重拾信心走出迷茫，也一定能够能帮助到更多同学们。

最后是规划。对于一个好的复习规划对于考生来说至关重要，尤其是对于本科不是特别强势的同学。这里笔者推荐讲复习分为三个阶段。第一个阶段是春季基础阶段，这个阶段应该把所有科目的基础知识点掌握牢固，并且配合以部分例题加以训练。第二个阶段暑期强化阶段。这个阶段学习强度非常大，要非常认真。在有了之前基础的情况下对于考研物理的几本精选书目的习题进行高强度的刷题训练，争取在暑期阶段能够把所有习题练习两三次以上。第三个阶段是真题冲刺阶段，这个阶段应该把重心放在研究历年真题上来，每一份真题都值得反复研究许多遍。如果学有余力的同学还可以将同类院校的真题进行研究！

我们大王物理团队的课程设计也是暗合了这样一个复习规律！在 1-3 月份，我们会安排公开课这种的知识性、普及性的课程，让你最快时间对考研复习和物理专业课有一个全局的宏观认识，快速度过无头苍蝇到处找资料的这个阶段，安心备考上路。寒假过后，就要正式开始复习的基础阶段，我们面临的主要矛盾是如何明确我们要学习的目标和内容。书本上的知识点这么多，哪些是需要你去看去记忆的？这个时候，你就需要化整为零，将这些基础知识点逐个击破。所以在这一阶段，我们会安排更多的知识点基础课程，帮助你嚼烂每一个知

识点，提高输入效果。大王物理考研在春季基础点睛班会将学科划分为几大专题，带你快速复习所有考研核心知识点，形成科学严密的逻辑体系，让你的物理实力突飞猛进。

在掌握了基础知识和课上所传授的例题之后，在暑假这个考研人最有利的时间内，这一阶段的课程，我们将从考研高分选手通用的优秀习题册入手，结合知识点对大家进行实战的指导与教学，提高吸收效果。你可以回忆一下高考，当时有各种期中考、期末考、摸底考等等考试帮我们确定对知识的掌握水平和在所有考生中的相对位置。虽然有时候考试的结果会有些残忍，但是也唯有通过这样的考试和练习，我们才能更清楚地知道还有哪些不足，自己离目标还有多远——如果没有这样的认识，我们往往会时不时地陷入过度自信和过度自卑的循环中，在不确定感中空耗了太多时间。大王物理团队在这几年的考研培训中也发现了这一点，既然没有，那就由我们来做这项“苦差事”。我们甄选题目，讲练结合，弥补了传统授课听得懂但是不会做的不足。在这样良好的做题复习节奏中，可以保证考生最高效率实现飞跃。我们教研团队优中选优，遴选出考研人必刷的习题，节省大家埋没在书山题海的时间。同时，我们也“拉满”了暑假的时间，高效率复习，拒绝盲目做题。

在最后的冲刺阶段中，我们面临的主要矛盾是如何将已经掌握的知识落在卷面上。真题在此阶段的作用得以充分发挥，不能浪费最宝贵的考研资源！正是基于此，我们安排了高强度的 90 天大王物理真题练兵班。通过全面覆盖各大考研热门学校，每天两套专业课真题的练习，让你的大脑对于考研实战不再慌乱，不用怎么思考就能够做出反应，成为条件反射式的技能。通过让你重复运用自己学到的知识，不仅能够帮助你更深刻地理解知识，而且还能帮助你深入理解各个知识点内部之间的联系，才能真正的驾驭你学到的一切。同时，通过全真模拟考研时间，监督考生完成并上交作答，了解到同学们存在的问题，进行下一步的查缺补漏。针对作答情况，老师进行真题答案讲解，不止是白纸黑字的答案，更有思路方面的点拨。

微信扫描下方二维码添加婷婷学姐即可了解全部课程！