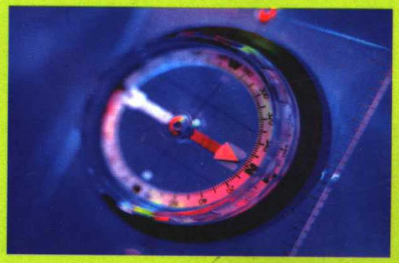
《电磁学》同步学习指导

史祥蓉 韩仙华 主编

DIANCIXUE TONGBU XUEXI ZHIDAO


国防工业出版社
National Defense Industry Press

责任编辑：崔晓莉　xlcui@ndip.cn
责任校对：钱辉玲
封面设计：王晓军　xjwang@ndip.cn

《电磁学》同步学习指导

上架建议：物理
http://www.ndip.cn
ISBN 978-7-118-05283-1
9 787118 052831 >
定价：26.00 元

0441/19C
2007

《电磁学》同步学习指导

史祥蓉　韩仙华　主编

国防工业出版社
·北京·

内容简介

本书是针对国内高等学校广泛使用的，由赵凯华、陈熙谋编写的新概念物理教程《电磁学》教材编写的学习辅导书。本书对教材中全部思考题和习题做了详细解答，并总结了教学的基本要求和难点以及电磁学知识网络结构框架图。

本书可供国内高等学校广泛使用赵凯华、陈熙谋编写的新概念物理教程《电磁学》的师生在教学中使用，亦可供理工类专业采用其它《电磁学》教材的读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

《电磁学》同步学习指导/史祥蓉，韩仙华主编. —北京：国防工业出版社，2007.9

ISBN 978-7-118-05283-1

Ⅰ.电… Ⅱ.①史…②韩… Ⅲ.电磁学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ.0441

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 108502 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100044)

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 14¼ 字数 329 千字

2007 年 9 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 26.00 元

(本书如有印装错误，我社负责调换)

国防书店：(010)68428422 发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535 发行业务：(010)68472764

前　言

由赵凯华、陈熙谋编写的新概念物理教程《电磁学》在全国范围内得到了相当广泛的使用。为了给使用该教材的广大师生提供更多的方便，我们编写了该书。

本书对教材中的全部思考题和习题进行了详细解答，力求概念准确、思路清晰、推理严密、方法简练、启发性强。同时对部分题目还给出了不同解法，以帮助学生加强对所学知识的理解和巩固，提高学习效果。

另外，根据教学大纲，提出了教学基本要求与教学难点；并用直观图表的形式给出了电磁学知识网络结构框架图，便于帮助学生分清层次、把握脉络，形成系统的知识体系；精选了具有代表性、新颖性、技巧性与综合性的思考题和习题作为典型例题，从而帮助学生领悟解题方法和技巧，潜移默化地引导学生思考问题，达到举一反三，拓展思路的效果。

为了引起读者对矢量的关注，本书采用书写体加矢量箭头的方法表示矢量。为了减少篇幅，本书习题详解中省去了一些代入具体数据的运算过程。

本书中的习题和思考题详解及知识网络结构框架图和部分典型例题由史祥蓉完成，韩仙华完成了教学基本要求与教学难点及部分典型例题，并对全书的设计构思做了大量的工作。

本书在编写过程中得到了海军工程大学理学院应用物理系的领导和广大老师的关心和帮助，在此表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，书中缺点、错误在所难免，恳请读者不吝指正。

编　者

目　录

第 1 章　静电场　恒定电流场 …… 1

1.1　基本要求与教学难点 …… 1
1.2　典型例题 …… 1
1.3　思考题详解 …… 6
1.4　习题详解 …… 18

第 2 章　恒磁场 …… 53

2.1　基本要求与教学难点 …… 53
2.2　典型例题 …… 53
2.3　思考题详解 …… 57
2.4　习题详解 …… 63

第 3 章　电磁感应　电磁场的相对论变换 …… 83

3.1　基本要求与教学难点 …… 83
3.2　典型例题 …… 83
3.3　思考题详解 …… 87
3.4　习题详解 …… 91

第 4 章　电磁介质 …… 106

4.1　基本要求与教学难点 …… 106
4.2　典型例题 …… 106
4.3　思考题详解 …… 111
4.4　习题详解 …… 121

第 5 章　电路 …… 150

5.1　基本要求与教学难点 …… 150
5.2　典型例题 …… 150
5.3　思考题详解 …… 154

5.4 习题详解…… 170

第 6 章 麦克斯韦电磁理论 电磁波 电磁单位制…… 205

6.1 基本要求与教学难点…… 205
6.2 典型例题…… 205
6.3 思考题详解…… 207
6.4 习题详解…… 210

附录 知识框架图…… 219

参考文献…… 222

第1章　静电场　恒定电流场

1.1　基本要求与教学难点

1. 基本概念的要求

(1) 理解库仑定律及其适用条件;理解电场强度的定义、场强叠加原理及其物理意义;理解电通量的概念;理解静电场的环流定理和高斯定理的物理意义,了解它们在电磁场中的重要地位;理解电势的定义,了解电势梯度的物理意义;理解静电平衡导体上电荷分布的特点。

(2) 理解电流密度矢量的概念,电流的连续性方程,电流的稳恒条件,稳恒电流场的基本性质;理解非静电力、电动势的基本概念;了解两种导体分界面上的边界条件,电流线在导体界面上的折射。

2. 基本方法的要求

(1) 掌握应用高斯定理计算电场分布的条件和方法,并能熟练运用高斯定理求解有特定对称性分布的电荷所产生的电场的场强分布。

(2) 能熟练运用叠加原理计算简单、典型带电体及其组合体的电场分布。

(3) 掌握导体的静电平衡条件,能够熟练运用导体的静电平衡条件,求解规则形状导体静电平衡时的电荷分布与电场分布问题。

(4) 掌握用电势定义求空间电势分布的方法。

(5) 能熟练运用叠加原理计算简单、典型带电体及其组合体的电势分布。

(6) 理解电势与场强的积分关系、微分关系,并能利用其解决问题。

(7) 理解电容的物理意义,并会计算电容器及电容器组的电容;理解电容器储能的概念,并会计算电容器的储能。

(8) 了解带电体,带电体组的静电能及其计算方法,了解静电屏蔽现象及应用。

3. 教学难点

(1) 电场基本概念的理解;静电场的两条基本定理的把握及应用;电势零点的选取。

(2) 导体达到静电平衡时的性质,导体表面电荷的分布。

(3) 点电荷系统的静电能与电场能量之间的关系。

(4) 对电像法的理解及应用。

(5) 积分形式与微分形式的电荷守恒定律的理解。

1.2　典型例题

例 1-1:根据量子理论,氢原子中心是个带正电 e 的原子核(可看成点电荷),外面是

带负电的电子云。在正常状态(核外电子处在 S 态)下,电子云的电荷密度分布球对称:$\rho_e = -\frac{e}{\pi a_B^3} e^{\frac{-2r}{a_B}}$,式中 a_B 是一个常量(它相当于经典模型中电子圆形轨道的半径,称为玻尔半径)。求原子内的电场分布。

解:设在原子内距原子核为 r 处的场强为 $\vec{E}$,它具有球对称性。以核为球心,r 为半径做一球面为高斯面,通过此面的电通量 $\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E$,又该面内所包围的电荷量为

$$\sum_{s内} q_i = e + \int_0^r dq = e + \int_0^r 4\pi r'^2 \left(-\frac{e}{\pi a_B^3} e^{\frac{-2r'}{a_B}}\right) dr' = e\left(\frac{2r^2}{a_B^2} + \frac{2r}{a_B} + 1\right) e^{\frac{-2r}{a_B}}$$

据高斯定理 $\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{s内} q_i$ 得

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0} e\left(\frac{2r^2}{a_B^2} + \frac{2r}{a_B} + 1\right) e^{\frac{-2r}{a_B}}$$

所以,原子内的电场分布如下

$$E = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{2r^2}{a_B^2} + \frac{2r}{a_B} + 1\right) e^{\frac{-2r}{a_B}}$$

注意:此题是根据高斯定理求解所得,在利用高斯定理求解问题时,一定要详细说明所选用的高斯面。

例 1-2:半径为 R 的均匀带电圆面,电荷的面密度为 σ_e,如图 1-1 所示。

(1) 求轴线上离圆心的坐标为 x 处的场强;

(2) 在保持 σ_e 不变的情况下,当 $R \to 0$ 和 $R \to \infty$ 时,结果各如何?

(3) 在保持总电荷 $Q = \pi R^2 \sigma_e$ 不变的情况下,当 $R \to 0$ 和 $R \to \infty$ 时,结果各如何?

(4) 求轴线上电势 $U(x)$ 的分布,并画出 $U - x$ 关系曲线。

解:(1) 如图 1-2 所示,在圆面上半径为 r 的地方取一宽度为 dr 的圆环,其所带电量 $dq = \sigma_e 2\pi r dr$,其在 P 点产生的场强的大小

$$dE = \frac{x dq}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma_e x}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

方向沿 Ox 轴。

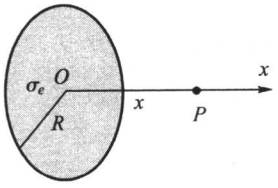


图 1-1　例 1-2

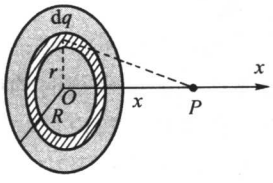


图 1-2　例 1-2 附图

整个均匀带电圆面在 P 点产生的场强大小

$$E = \int_{圆面} dE = \int_0^R \frac{\sigma_e x}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right)$$

方向沿 Ox 轴，考虑到 x 的正、负，则轴线上离圆心的坐标为 x 处的场强

$$\vec{E}=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x}{|x|}-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)\vec{i}$$

(2) 若 σ_e 不变，当 $R\to 0$，$E=0$；当 $R\to\infty$，$\vec{E}=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\frac{x}{|x|}\vec{i}$。

(3) 若 $Q=\pi R^2\sigma_e$ 不变，当 $R\to 0$，此带电圆面可视为一点电荷，则 $\vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\frac{x}{|x|}\vec{i}$；当 $R\to\infty$，$E=0$。

(4) **解法一：**

在圆面上半径为 r 的地方取一宽度为 $\mathrm{d}r$ 的圆环，其所带电量 $\mathrm{d}q=\sigma_e 2\pi r\mathrm{d}r$，其在 P 点产生的电势

$$\mathrm{d}U=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+r^2}}=\frac{2\pi r\sigma_e\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+r^2}}=\frac{r\sigma_e\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0\sqrt{x^2+r^2}}$$

整个均匀带电圆面在 P 点产生的电势

$$U=\int_{\text{圆面}}\mathrm{d}U=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+x^2}}=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+x^2}-x\right)$$

考虑到 x 的正、负，则

$$U=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+x^2}-|x|\right)$$

$U-x$ 关系曲线如图 1-3 所示。

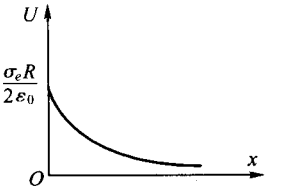


图 1-3　$U-x$ 关系曲线

解法二：

因轴线上

$$\vec{E}=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x}{|x|}-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)\vec{i}$$

若取无限远处为势能零点，则轴线上离圆心的坐标为 x 处的电势

$$U=\int_x^\infty\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_x^\infty\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)\cdot\mathrm{d}x=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+x^2}-x\right)$$

考虑到 x 的正、负，则

$$U=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+x^2}-|x|\right)$$

例 1-3：半径为 R_1 的导体球带有电荷 q，球外有一个内外半径分别为 R_2、R_3 的同心导体球壳，壳上带有电荷 Q（见图 1-4）。

(1) 求两球的电势 U_1 和 U_2；

(2) 求两球的电势差 ΔU；

(3) 以导线把球和壳接在一起后，U_1、U_2 和 ΔU 分别是多少？

(4) 在情形(1)、(2)中，若外球接地，U_1、U_2 和 ΔU 分别是多少？

(5) 设外球离地面很远，若内球接地，情况如何？

解:如图 1－5 所示,根据静电平衡时电荷分布规则可得:静电平衡时导体球表面将带有电荷 q,球壳内表面将带电 $-q$,球壳外表面将带电 $Q+q$,并且都是均匀分布。

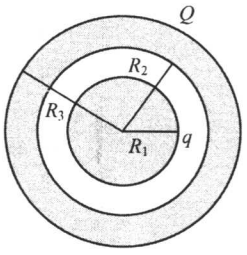


图 1－4　例 1－3

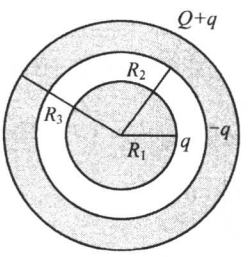


图 1－5　例 1－3 附图

(1) **解法一**:

根据叠加原理,任意点处的电势应为这 3 个带电面在该处所产生的电势的代数和,取无限远处为势能零点,则

内球处电势

$$\begin{aligned} U_1 &= U_1(q) + U_1(-q) + U_1(Q+q) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_2} + \frac{Q+q}{R_3}\right) \end{aligned}$$

球壳处电势

$$\begin{aligned} U_2 &= U_2(q) + U_2(-q) + U_2(Q+q) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} + \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} \end{aligned}$$

解法二:

根据高斯定理可得空间电场的分布

$$\begin{aligned} E_1 &= 0 \qquad (r < R_1) \\ \vec{E}_2 &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \quad (R_1 < r < R_2) \\ E_3 &= 0 \qquad (R_2 < r < R_3) \\ \vec{E}_4 &= \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \quad (r > R_3) \end{aligned}$$

取无限远处为势能零点,则根据 $U = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$,得

内球处电势

$$U_1 = \int_{R_1}^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{R_3}^{\infty} \vec{E}_4 \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_2} + \frac{Q+q}{R_3}\right)$$

球壳处电势

$$U_2 = \int_{R_3}^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{R_3}^{\infty} \vec{E}_4 \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

(2) 两球的电势差

$$\Delta U = U_1 - U_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

(3) 用导线把球和球壳连在一起时，电荷$(Q+q)$全部分布在球壳外表面，且球和球壳的电势相等

$$U_1 = U_2 = \int_{R_3}^{\infty} \vec{E}_4 \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$\Delta U = U_1 - U_2 = 0$$

(4) 在(1)、(2)情形中，若外球壳接地，则外球壳的电势 $U_2=0$，两球的电势差不变

$$\Delta U = U_1 - U_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

内球电势

$$U_1 = U_2 + \Delta U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

(5) 内球接地，则内球的带电就不可能再是 q，设其带电量为 q'，则球壳内表面将带电 $-q'$，外表面将带电 $Q+q'$。根据叠加原理，内球电势

$$\begin{aligned} U_1 &= U_1(q') + U_1(-q') + U_1(Q+q') \\ &= \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{-q'}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q+q'}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = 0 \end{aligned}$$

球壳电势

$$\begin{aligned} U_2 &= U_1(q') + U_1(-q') + U_1(Q+q') \\ &= \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R_3} + \frac{-q'}{4\pi\varepsilon_0 R_3} + \frac{Q+q'}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = \frac{Q+q'}{4\pi\varepsilon_0 R_3} \end{aligned}$$

联立以上两式解之得

$$U_2 = \frac{Q(R_2 - R_1)}{4\pi\varepsilon_0(R_2R_3 - R_1R_3 + R_1R_2)}$$

$$\Delta U = U_1 - U_2 = -\frac{Q(R_2 - R_1)}{4\pi\varepsilon_0(R_2R_3 - R_1R_3 + R_1R_2)}$$

例 1-4: (1)无限大带电面两侧的场强 $E=\sigma_e/(2\varepsilon_0)$，这个公式对于靠近有限大小带电面的地方也适用。这就是说，根据这个结果，导体表面元 ΔS 上的电荷在紧靠它的地方产生的场强也应是$\sigma_e/(2\varepsilon_0)$，但它比静电平衡时导体表面之外附近空间的场强公式 $E=\sigma_e/\varepsilon_0$ 的场强小 1/2，这是为什么?

(2) 根据 $E=\sigma_e/\varepsilon_0$，若一带电导体表面上某点附近电荷密度为 σ_e，这时该点外侧附

近场强为 $E=\frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}$。如果将另一带电体移近，该点场强是否改变？公式 $E=\frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}$是否仍成立？

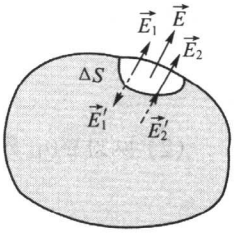


图 1－6　例 1－4

解：(1)如图 1－6 所示，设带电导体表面面元 ΔS 上的电荷面密度为 σ_e。公式 $E=\sigma_e/\varepsilon_0$ 是 ΔS 上的电荷在表面外附近产生的 $\vec{E}_1$ 和除 ΔS 之外，导体表面其余部分所带电荷在该处产生的 $\vec{E}_2$ 之和，即 $\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2$。因为 $\vec{E}_1$ 和 $\vec{E}$都垂直于 ΔS，所以 $\vec{E}_2$ 也垂直于 ΔS，可见 $\vec{E}_1$ 和 $\vec{E}_2$ 二者均垂直于 ΔS。上述矢量式可改写为

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_0} \qquad ①$$

设 $\vec{E}'_1$为 ΔS 上的电荷在靠近自己表面内侧产生的场强，显然 $\vec{E}'_1=-\vec{E}_1$。又设 $\vec{E}'_2$为除 ΔS 之外导体其余部分电荷在 ΔS 内侧附近产生的场强，显然 $\vec{E}'_2=\vec{E}_2$。在 ΔS 内侧，根据静电平衡条件可得 $\vec{E}'_2+\vec{E}'_1=0$，由于 $\vec{E}'_1$垂直于 ΔS，显然 $\vec{E}'_2$也垂直于 ΔS，故有 $E'_2+E'_1=E'_2-E_1=E_2-E_1=0$，所以

$$E'_2 = E_1 = E_2 \qquad ②$$

由式①和式②得

$$E_1 = E_2 = \frac{E}{2} = \frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}$$

可见，ΔS 附近之外的电场强度，一半是分布于 ΔS 上的电荷产生的，另一半是分布于其余表面上的电荷产生的，所以，$E_1=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}$比总场强 $E=\frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}$小 1/2。

(2) 如果将另一带电体移近，该点场强要改变，但公式 $E=\sigma_e/\varepsilon_0$ 仍成立。只不过，由于另一带电体的移近，导体表面上的电荷要重新分布，因此 σ_e 的数值有所变化。

例 1－5：为什么在点电荷组相互作用能的公式 $W_e=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_iU_i$ 中有$\frac{1}{2}$因子，而点电荷在外电场中的电势能公式 $W(P)=qU(P)$中没有这个因子？

解：根据定义，点电荷在外电场中的电势能等于将点电荷从无穷远处移到场中 P 点时反抗电场力所做的功，这就是 $W(P)=qU(P)$，它即是点电荷与产生外场的其它电荷之间的相互作用能，但并不包含产生外场的电荷自身之间的相互作用能。而 $W_e=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_iU_i$ 计算的却是点电荷系统之间的所有相互作用能，式中的 U_i 表示第 i 个电荷 q_i 之外的所有$(n-1)$个电荷在 q_i 处所产生的电势，q_iU_i 即表示第 i 个电荷和其它$(n-1)$个电荷之间的相互作用能，它和 $W(P)=qU(P)$意义一样。当求和遍及所有 n 个电荷时，每一对电荷都重复计算了两次，故需乘以因子$\frac{1}{2}$，才表示系统的全部相互作用能。可见两式并无矛盾。

1.3　思考题详解

1－1　给你两个金属球，装在可以搬动的绝缘支架上，试指出使这两个球带等量异号

电荷的方法。你可以用丝绸摩擦过的玻璃棒，但不使它和两球接触。你所用的方法是否要求两球的大小相等。

答：将这两个金属球先接触，然后把一个带电体接近其中任意一球，再将两球移开即可。此法与球的大小无关。

1－2 带电棒吸引干燥软木屑，木屑接触到棒以后，往往又剧烈地跳离此棒。试解释之。

答：当干燥软木屑因被极化起电而吸引到带电棒时，与带电棒接触，棒上电荷与木屑表面的异号电荷中和后，两者带同种电荷，互相排斥，所以，木屑往往又被弹开。

1－3 用手握铜棒与丝绸摩擦，铜棒不能带电；戴上橡皮手套，握着铜棒和丝绸摩擦，铜棒就会带电。为什么两种情况有不同的结果？

答：对于第一种情况，铜棒因摩擦所起之电通过人身入地，故铜棒不能带电；对于第二种情况，铜棒已绝缘，故铜棒会积累电荷。

1－4 在地球表面上通常有一竖直方向的电场，电子在此电场中受到一个向上的力，电场强度的方向是朝上还是朝下？

答：因电子所受电场力的方向与电场方向相反，故电场方向朝下。

1－5 在一个带正电的大导体附近 P 点放置一个试探点电荷 $q_0(q_0>0)$，实际上测得它受力 F；若考虑到电荷 q_0 不足够小，则 F/q_0 比 P 点的场强 E 大还是小？

答：当 q_0 不是足够小时，它将引起大导体上电荷的重新分布，结果使远离 q_0 的一侧聚集较多正电荷，这就增大了大导体上正电荷中心到 q_0 处的距离，因而 F/q_0 比 P 点的场强 E 小。若大导体带负电，则电荷重新分布的结果是在靠近 q_0 的一侧聚集较多负电荷，这就减小了大导体上负电荷中心到 q_0 处的距离，因而 F/q_0 比 P 点的场强 E 大。

1－6 一般地说电场线代表点电荷在电场中的运动轨迹吗？为什么？

答：电场线上任意一点的切线方向，代表点电荷 q 在该点所受电场力的方向，也就是 q 获得加速度的方向。所以，无论 q 的初速度方向如何，q 都要偏离电场线而运动。除非电场线是直线，且 q 的初速度方向与电场线在同一直线上。一般情况下，运动方向与受力方向不一致，所以电场线不代表点电荷在电场中的运动轨迹。

1－7 在空间里的电场线为什么不相交？

答：电场线的切线方向为该点电场强度的方向。如果电场线在空间相交，那么在交点处将会有两个不同的切线方向，不可能正确描述空间电场强度分布。所以在空间里的电场线不相交。

1－8 一点电荷 q 放在球形高斯面的中心处，试问在下列情况下，穿过这高斯面的电通量是否改变？

(1) 如果第二个点电荷放在高斯球面外附近；

(2) 如果第二个点电荷放在高斯球面内；

(3) 如果将原来的点电荷移离了高斯球面的球心，但仍在高斯球面内。

答：穿过高斯面的电通量只与面内电荷有关，而与面外电荷无关，所以(1)不改变，(2)改变了，(3)不改变。

1－9 (1) 如果上题中的高斯面被一个体积减小 1/2 的立方体表面所代替，而点电荷在立方体的中心，则穿过该高斯面的电通量如何变化？

(2) 通过这立方体 6 个表面之一的电通量是多少?

答:(1) 不改变。因高斯面内电量未变。

(2) 立方体每一侧面对几何中心所张立体角相等,为 $4\pi/6$。点电荷在单位立体角内的电通量为 $q/(4\pi\varepsilon_0)$。每一侧面的电通量为 $q/(6\varepsilon_0)$。

1-10 如图 1-7 所示,在一个绝缘不带电的导体球的周围做一个同心高斯面 S。试定性地回答,在我们将一正点电荷 q 移至导体表面的过程中

(1) A 点的场强大小和方向怎样改变?

(2) B 点的场强大小和方向怎样改变?

(3) 通过 S 面的电通量怎样变化?

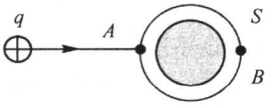


图 1-7 思考题 1-10

答:(1) 当点电荷 $+q$ 在 A 外侧,E_A 指向球心,$+q$ 移近导体,E_A 随之增大。$+q$ 移过 A 点,E_A 反向,并随 $+q$ 向导体球移动而减小。

(2) 随着 $+q$ 向导体球移近,E_B 单调地增大,方向是背离球心。

(3) $+q$ 在闭合曲面 S 外时,通过 S 面的电通量为零,当 $+q$ 移入 S 面内,通过 S 面的电通量为 q/ε_0。

1-11 有一个球形的橡皮气球,电荷均匀分布在表面上。在此气球被吹大的过程中,下列各处的场强怎样变化?

(1) 始终在气球内部的点;

(2) 始终在气球外部的点;

(3) 被气球表面掠过的点。

答:(1) 球面电荷在球内产生的场强始终为零。

(2) 电荷均匀分布在球壳上与全部集中在球心对壳外产生的场强一样。所以球外的点,场强不变。

(3) 被掠过的点,场强有一跃变,从 $q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ 变为零,其中 r 为场点到球心的距离。

1-12 求均匀带正电的无限大平面的场强,高斯面取成如图 1-8 所示的圆柱形,具体回答以下问题。

(1) 为什么柱体的两底要对于带电面对称?不对称行不行?

(2) 柱体底面是否需要是圆的?面积取多大合适?

(3) 为了求距带电平面为 x 处的场强,柱面应取多长?

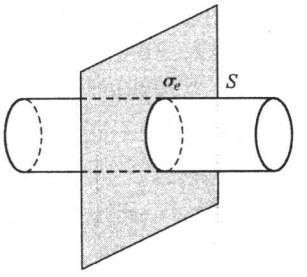


图 1-8 思考题 1-12

答:(1) 只有当两底对于带电平面对称,才能判定两底面上的电通量和场强的数值相等,从而求出场强。所以,两底必须对称。

(2) 底面的形状可以任意,只要平行于带电平面就行。但底面的面积必须有限。

(3) 柱面的长度应为 $2x$。

1-13 求一对等量异号或等量同号的无限大平行平面板之间的场强时,能否只取一个高斯面?

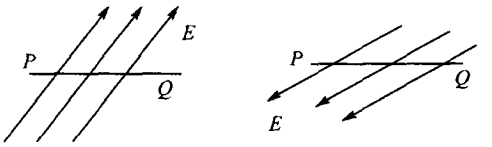
答:如果先对一个均匀带电的无限大平板取一个高斯面,求出 $E=\sigma_e/(2\varepsilon_0)$,再利用

叠加原理，亦可求出平板间的合场强。

1－14 （1）在图 1－9(a)所示情形里，把一个正电荷从 P 移动到 Q，电场力的功 A_{PQ}是正还是负？它的电势能是增加还是减小？P、Q 两点的电势哪里高？

（2）若移动的是负电荷，情况怎样？

（3）若电场线的方向如图 1－9(b)所示，情况怎样？



(a)　　(b)

图 1－9　思考题 1－14

答：(1) 因 $A_{PQ}=q\int_P^Q \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 且积分与路径无关，按图 1－9(a) 所示路径，$\vec{E}$、$\mathrm{d}\vec{l}$ 间恒为锐角，故有 $\int_P^Q \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}>0$，又因 $q>0$，所以 $A_{PQ}>0$，即电场力做正功，电势能减小。再由 $U_{PQ}=U(P)-U(Q)=A_{PQ}/q>0$ 知，P 点电势高于 Q 点。

(2) 若移动的是负电荷，$q<0$，$A_{PQ}<0$，$A_{PQ}/q>0$，故电场力做负功，电势能增加，P 点电势仍高于 Q 点，和电荷符号无关。

(3) 对图 1－9(b) 所示情形 $\vec{E}$、$\mathrm{d}\vec{l}$ 间恒为钝角，$\int_P^Q \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}<0$，所得结论和(1)、(2)相反。

1－15　电场中两点电势的高低是否与试探电荷的正负有关，电势能的高低呢？沿着电场线移动负试探电荷时，电势是升高还是降低？它的电势能增加还是减小？

答：按定义，P、Q 两点间的电势差由公式 $U_{PQ}=U(P)-U(Q)=\int_P^Q \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 确定，它与试探电荷的正负、电荷的电量以及是否存在试探电荷都无关，完全由电场 E 的分布确定，但电势能的高低与试探电荷的正负有关。沿着电场线移动负试探电荷时，电势降低。但因要反抗电场力做功，所以它的电势能增加了。

1－16　说明电场中各处的电势永远逆着电场线方向升高。

答：由 $U_{PQ}=U(P)-U(Q)=\int_P^Q \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$，当积分路径逆着电场线进行时，$\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-E\mathrm{d}l$，故 $U_{PQ}<0$，电势升高。

1－17　（1）将初速度为零的电子放在电场中时，在电场力作用下，这电子是向电场中高电势处跑还是向低电势处跑？为什么？

（2）说明无论对正负电荷来说，仅在电场力作用下移动时，电荷总是从它的电势能高的地方移向电势能低的地方去。

答：(1) 因为电子在电场中所受电场力的方向是由低电势指向高电势，故初速度为零的电子将由低电势跑向高电势。

(2) 无论正、负电荷，从电场中的 P 移动到 Q，其电势能变化 $W_{PQ}=W(P)-W(Q)=A_{PQ}$。若单在电场力作用下移动电荷，必有 $A_{PQ}>0$，所以 $W(P)>W(Q)$，即电

荷总是从高电势能处移向低电势能处。实则，电场力做功是以电势能减少为代价的。

1－18 我们可否规定地球的电势为＋100V，而不规定它为零？这样规定后，对测量电势、电势差的数值有什么影响？

答：可以。这样规定后，空间各点的电势都要增加 100V，但对各点间以及各点对地间的电势差没有影响。

1－19 若甲乙两导体都带负电，但甲导体比乙导体电势高，当用细导线把二者连接起来后，试分析电荷流动情况。

答：连接后，导体中的自由电子将在电场力的作用下，从低电势的乙导体沿导线流向高电势的甲导体，这等效于正电荷从甲导体流向乙导体。

1－20 在技术工作中有时把整机机壳作为电势零点。若机壳未接地，能不能说因为机壳的电势为零，人站在地上就可以任意接触机壳？若机壳接地则如何？

答：把电子仪表的机壳电势选作零，但这并不是说机壳不带电。若机壳对地电势很高，人站在地上接触机壳就会触电。若将机壳接地，机壳和地等电势，人接触它就不会触电了。

1－21 (1) 场强大的地方，是否电势就高？电势高的地方是否场强大？

(2) 带正电的物体的电势是否一定是正的？电势等于零的物体是否一定不带电？

(3) 场强为零的地方，电势是否一定为零？电势为零的地方，场强是否一定为零？

(4) 场强大小相等的地方，电势是否相等？等势面上场强的大小是否一定相等？

答：(1) 不一定。场强在数值上等于电势梯度，场强大的地方只表明该处的电势梯度大，并不表明电势高。例如：一对共轴直圆筒带有等值异号电荷且内筒为负电时，在内筒面上场强最大、电势最低，在外筒面上场强最小而电势最高。

(2) 不一定。因电势零点可以任意选取，如图 1－10 若规定 A 点电势为零，电路中电容器 C_1 的正板带正电，但电势为负；C_2 正板电势为零却带正电。

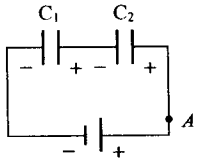


图 1－10 思考题 1－21

(3) 不一定。如等值同号点电荷连线中点处场强为零，但电势不为零；等值异号点电荷连线中点处电势为零，但场强不为零。

(4) 不一定。如平行板电容器内部电场是均匀的，电势则由负板到正板逐渐增大；锥形带电导体的表面是等势面，而场强则随曲率不同而异。总之，场强决定于电势梯度而不决定于电势的数值，电势的高低既和电场分布有关，也和电势零点的选择有关。场强的大小和电势的高低之间并无必然的联系。

1－22 两个不同电势的等势面是否可以相交？同一等势面是否可与自身相交？

答：不同电势的等势面不能相交，否则在交点处电势不能确定。同一等势面自身一般也不能相交，否则在交点处场强的方向(与等势面正交)就不确定了。但是，同一等势面可以在个别奇点相交，例如，两个等值同号点电荷连线中点处就是这样，在该点处，场强为零，方向没有意义。

1－23 已知一高斯面上场强处处为零，在它所包围的空间内任一点都没有电荷吗？

答：不一定。只能说在该空间内，电荷的代数和为零。

1－24 试想在图 1－11 中的导体单独产生的电场 $\vec{E}'$ 的电场线是什么样子(包括导

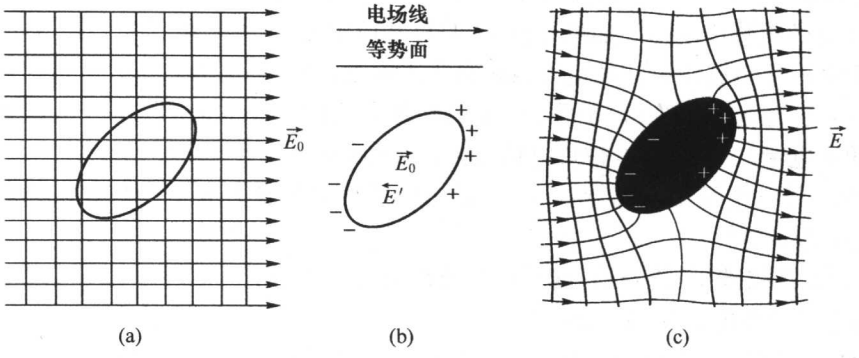


图 1－11　思考题 1－24

体内和导体外的空间)。如果撤去外电场 $\vec{E}_0$,$\vec{E}'$的电场线还会维持这个样子吗?

答:图 1－11 中的导体单独产生的电场 $\vec{E}'$的电场线如图 1－12 所示。

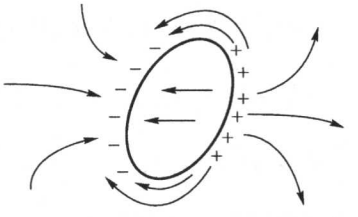


图 1－12　思考题 1－24 附图

如果撤去外电场 $\vec{E}_0$,$\vec{E}'=0$,其电场线消失。

1－25　详见本章典型例题例 1－4。

1－26　详见本章典型例题例 1－4。

1－27　把一个带电物体移近一个导体壳,带电体单独在导体空腔内产生的电场是否等于零?静电屏蔽效应是怎样体现的?

答:带电体单独在导体空腔内产生的电场不等于零。它在导体壳近端感应出与带电体异号的电荷,远端感应出与带电体同号的电荷,在静电平衡时,这些感应电荷在空腔内激发的场,与带电体在腔内激发的场等值反向,相互抵消,腔内得以屏蔽。

1－28　万有引力和静电力都服从平方反比律,都存在高斯定理。有人幻想把引力场屏蔽起来,这能否做到?在这方面引力和静电力有什么差别?

答:静电屏蔽能够实现,是因为作为场源的电荷有正有负,在静电感应中能产生相反的场相互抵消;而引力场源——质量,只有正的,另外,也没有与静电感应中的导体相当的物质,故不能把引力场屏蔽起来。

引力场和静电场的主要差别有两点:一是静电场源有正有负,即正、负电荷,而引力场源只有正的,即质量;二是静电相互作用远远大于引力相互作用,且前者约为后者的 10^{39}倍。

1－29　(1) 将一个带正电的导体 A 移近一个不带电的绝缘导体 B 时,导体的电势升高还是降低?为什么?

(2) 试论证:导体 B 上每种符号感应电荷的数量不多于 A 上的电量。

答:(1) 导体 B 的电势 $U_B=\int_B^{\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$,如图 1－13 所示,沿电场线积分,$\theta(\vec{E},\mathrm{d}\vec{l}$ 的夹角$)=0$,而且随着带正电导体 A 的移近,积分路径上的 $\vec{E}$ 增大,所以导体 B 的电势升高。

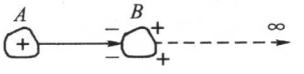


图 1－13　思考题 1－29

(2) 由于原导体 B 不带电,所以导体 B 上两种感应电荷

的数值一定相等。由于导体 B 是等势体，终止于导体 B 上负感应电荷的电力线不能起始于导体 B 上的正感应电荷。如果导体 B 的负感应电荷的数值多于 A 上的电量，则必有终止于导体 B 上负感应电荷的电力线来自于无限远，而沿该电力线积分可得导体 B 的电势一定小于 0，与上述结论(1)矛盾，所以导体 B 上两种感应电荷的数量一定不会多于导体 A 上的正电量。如导体 A 带负电荷也可以类似地证明。

1－30 将一个带正电的导体 A 移近一个接地的导体 B 时，导体 B 是否维持零电势？其上是否带电？

答：导体 B 接地，始终与地等电势，若选地电势为零，则 B 始终维持零电势。导体 B 上由于感应而带负电，正电荷入地。

1－31 一封闭的金属壳内有一个带电量 q 的金属物体，试证明：要想使这金属物体的电势与金属壳的电势相等，唯一的办法是使 $q=0$。这个结论与金属壳是否带电有没有关系？

答：如图 1－14 所示，P、Q 分别为金属物体和金属壳内表面上的两点。$U_{PQ}=\int_P^Q \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}$，若 $q\neq 0$，则 $E_i\neq 0$，沿电场线的积分 $U_{PQ}=\int_P^Q \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}\neq 0$。要 $U_P=U_Q$，即要 $\int_P^Q \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$，而 $\mathrm{d}l\neq 0$，$\theta\neq\frac{\pi}{2}$，所以必须 $E_i=0$，因而，唯一的办法是使 $q=0$。此结论与金属壳是否带电无关。

1－32 有若干个互相绝缘的不带电导体 A、B、C、…，它们的电势都是零，如图 1－15 所示。如果把其中任一个 A 带上正电，证明：

(1) 所有这些导体的电势都高于零；

(2) 其它导体的电势都低于 A 的电势。

证明：(1) 导体 B 的电势

$$U_B=U_B-U_\infty=\int_B^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}>0$$

所以 $U_B>U_\infty=0$，同理

$$U_C>0$$

(2) 例如，导体 A 与 B 的电势差 $U_{AB}=U_A-U_B=\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}>0$。所以 $U_A>U_B$，其余类似。

1－33 两导体上分别带有电量 $-q$ 和 $2q$，且都放在同一个封闭的金属壳内，如图 1－16 所示。试证明：电荷为 $2q$ 的导体的电势高于金属壳的电势。

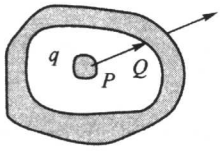


图 1－14 思考题 1－31

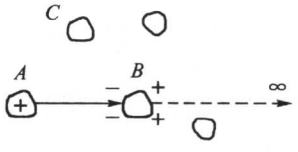


图 1－15 思考题 1－32

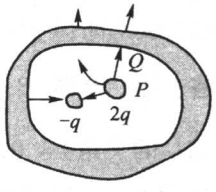


图 1－16 思考题 1－33

证明:由于$2q > |-q|$,金属壳内表面上必有净余负电荷,如图1-16所示,壳内必然有电场线从带电量为$2q$的导体上发出,终止在球壳内表面上。$U_{PQ} = U_P - U_Q = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} > 0$,所以$U_P > U_Q$,即电荷为$+2q$的导体的电势高于金属壳的电势。

1-34 一封闭导体壳C内有一些带电体,所带电量分别为$q_1, q_2, \cdots$;C外也有一些带电体,所带电量分别为$Q_1, Q_2, \cdots$,如图1-17所示。问:

(1) $q_1, q_2, \cdots$的数值对C外的电场强度和电势有无影响?

(2) 当$q_1, q_2, \cdots$的数值不变时,它们在壳内的分布情况对C外的电场强度和电势的影响如何?

(3) $Q_1, Q_2, \cdots$的数值对C内的电场强度和电势有无影响?

(4) 当$Q_1, Q_2, \cdots$的数值不变时,它们在壳外的分布情况对C内的电场强度和电势的影响如何?

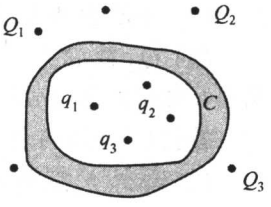


图1-17 思考题1-34

答:(1) $q_1, q_2, \cdots$的大小对C外的电场强度和电势都有影响。

(2) 当$q_1, q_2, \cdots$的大小不变时,它们在壳内的分布形状对C外的电场强度和电势没有影响。因为$\sum q_i$和壳的内表面上的$\sum(-q_i)$在C的内表面以外的合场强始终为零,而壳的外表面上的电荷的分布完全由表面曲率决定。这些电荷在C外激发的电场强度和电势与壳内电荷的分布形状无关。

(3) $Q_1, Q_2, \cdots$的大小对C内的电场强度没有影响,但对电势有影响。

(4) 当$Q_1, Q_2, \cdots$的数值不变时,它们在壳外的分布情况对C内的电场强度没有影响,但对电势有影响。

1-35 若上题中C接地,情况如何?

答:若上题中C接地,C内、外的电场强度和电势彼此都没有影响。

1-36 (1) 一个孤立导体球带电Q,其表面场强沿什么方向?Q在其表面上的分布是否均匀?其表面是否等电势?导体内任意一点P的场强是多少?为什么?

(2) 当我们从外边把另一个带电体移近这个导体球时,球表面场强沿什么方向?其上电荷分布是否均匀?其表面是否等电势?电势有没有变化?导体内任意一点P的场强有无变化?为什么?

答:(1) 表面场强垂直表面沿径向,当$Q>0$时向外,因为导体表面是个等势面,电场线处处与等势面正交。Q在其表面上均匀分布,因为导体球面曲率和球面上E的大小处处一样。根据静电平衡条件,其表面是个等势面。导体内任意一点P的场强是零,若某处场强不为零,则该处的自由电子将在电场力的作用下运动,亦即导体没有达到静电平衡。

(2) 另一个带电体移近这个导体球时,其表面场强仍然垂直表面沿径向。这时,由于$E_{外}$的作用,球面上的电荷分布不均匀了,但其表面仍然是个等势面。不过,由于球外空间电场的变化,导体球表面电势的数值变化了。根据静电平衡条件,导体内任意一点P的场强无变化,仍是零。

1-37 (1) 在两个同心导体球B、C的内球上带电Q,Q在其表面上的分布是否均匀?

(2) 当我们从外边把另一个带电体A移近这一对同心球时,内球C上的电荷分布是

否均匀？为什么？

答：(1) Q 在内球表面上均匀分布。

(2) 当我们从外边把另一个带电体 A 移近这一对同心球时，由于导体球 B 的屏蔽作用，内球 C 上的电荷仍然是均匀分布。

1－38 两个同心球状导体，内球带电 Q，外球不带电，试问：

(1) 外球内表面电量 $Q_1=?$ 外球外表面电量 $Q_2=?$

(2) 球外 P 点总场强是多少？

(3) Q_2 在 P 点产生的场强是多少？Q 是否在 P 点产生场强？Q_1 是否在 P 点产生场强？如果外面球壳接地，情况有何变化？

答：(1) 外球内表面电量 $Q_1=-Q$；外球外表面电量 $Q_2=+Q$

(2) 球外 P 点总场强

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}$$

(3) Q_2 在 P 点产生的场强

$$E_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}$$

Q_1 在 P 点产生的场强

$$E_1=\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}$$

Q 在 P 点产生的场强

$$E_3=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}$$

如果外面球壳接地，$Q_2=0$，$E_2=0$，E_1、E_3 不变。

1－39 在上题中当外球接地时，从远处移来一个带负电的物体，内、外两球的电势增高还降低？两球间的电场分布有无变化？

答：若外球接地，内外两球的电势不变，外球始终与地等电势。由于外球的屏蔽作用，两球间的电场分布无变化。

1－40 在上题中若外球不接地，从远处移来一个带负电的物体，内、外两球的电势增高还降低？两球间的电场和电势有无变化？两球间的电势差有无变化？

答：若外球不接地，从远处移来一个带负电的物体，根据叠加原理，内、外两球的电势要降低。

由于外球的屏蔽作用，两球间的电场不变，而电势要变化。但两球间的电势差不变。

1－41 如图 1－18 所示，在金属球 A 内有两个球形空腔，且此金属球整体上不带电。在两空腔中心各放置一点电荷 q_1 和 q_2。此外在金属球 A 之外远处放置一点电荷 q（q 至 A 的中心距离 $r\gg$ 球 A 的半径 R）。作用在 A、q_1、q_2、q 这 4 个物体上的静电力各多少？

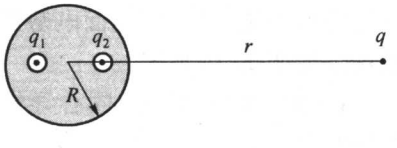


图 1－18 思考题 1－41

答：q_1、q_2 分别在两个球形空腔表面上感应出

$-q_1$ 和 $-q_2$ 的电量，在金属球 A 的外表面上感应出净电荷(q_1+q_2)。$\pm q_1$ 在空腔外各点的场相互抵消，$\pm q_2$ 在空腔外任一点的场也相互抵消。q 和(q_1+q_2)的电场只分布在 A 球之外的空间，它们在 A 球内的电场为零。又因 $r \gg R$，所以 A 球外表面上的电荷(q_1+q_2)和 q 的作用，可以把(q_1+q_2)看成集中在 A 球心的点电荷和q 的作用。

根据以上分析，作用在 A、q_1、q_2、q 这 4 个物体上的静电力大小分别为 $F_A=F_q=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q(q_1+q_2)}{r^2}$；$F_{q_1}=F_{q_2}=0$。

1-42 在上题中取消 $r \gg R$ 的条件，并设两空腔中心的间距为 a，试写出：

(1) q 给 q_1 的力；

(2) q_2 给 q 的力；

(3) q_1 给 A 的力；

(4) A 给 q_2 的力；

(5) q_1 受到的合力。

答：(1) q 给 q_1 的力

$$F_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_1}{(r+a)^2}$$

(2) q_2 给 q 的力

$$F_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_2}{(r-a)^2}$$

(3) 根据牛顿第三定律，q_1 给 A 的力是 A 给 q_1 的反作用力，而 A 给 q_1 的力包括 $-q_1$，$-q_2$，(q_1+q_2)这 3 处电荷的作用力：q_1 在球形空腔中心，所以 $-q_1$ 的作用力为 0；q_2 也在球形空腔中心，所以 $-q_2$ 的作用力正好与 q_2 作用力相反；(q_1+q_2)对球内电荷的作用力正好与 q 的作用力相反。所以 q_1 给 A 的力(向左为正)为

$$F_1=0+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{a^2}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q}{(r+a/2)^2}$$

(4) A 给 q_2 的力也包括 $-q_1$，$-q_2$，(q_1+q_2)这 3 处电荷的作用力，根据(3)的分析该力(向左为正)应为

$$F_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_1}{a^2}+0-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q}{(r-a/2)^2}$$

(5) q_1 的合力包括 $-q_1$，q_2，$-q_2$，(q_1+q_2)，q 这 5 处电荷的作用力：由于 $-q_1$ 对称分布作用力为 0，q_2，$-q_2$ 作用力相互抵消，(q_1+q_2)，q 作用力也相互抵消，所以合力为 0。

1-43 如图 1-19 所示，

(1) 若将一个带正电的金属小球移近一个绝缘的不带电导体时(见图 1-19(a))，小球受到吸引还是排斥力？

(2) 若小球带负电(见图 1-19(b))情况将如何？

(3) 若当小球在导体近旁(但未接触)时，将导体远端接地(见图 1-19(c))，情况

如何?

(4) 若将导体近端接地(见图 1－19(d)),情况如何?

(5) 若导体在未接地前与小球接触一下(见图 1－19(e)),将发生什么情况?

(6) 若将导体接地,小球与导体接触一下后(见图 1－19(f))将发生什么情况?

答:(1) 由于静电感应,靠近小球的导体端产生了异号的电荷,所以是吸引力。

(2) 同(1)。

(3) 同样,还是吸引力,但比(1)稍大。

(4) 同样,还是吸引力,且与(3)相同。

(5) 若导体在未接地前与小球接触一下,则导体此时带正电,所以小球受到排斥力。(但若此后导体再接地后,由于静电感应,靠近小球的导体端又产生了与小球异号的电荷,所以变为吸引力。)

(6) 若将导体接地,小球与导体接触一下后,小球与导体都将不带电。所以两物体间不再有电的相互作用力。

1－44 如图 1－20 所示,

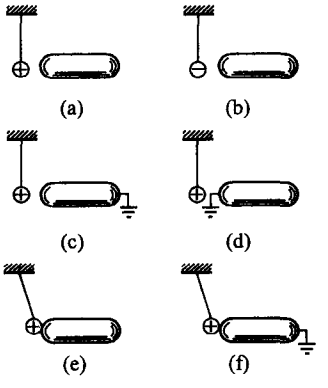


图 1－19 思考题 1－43

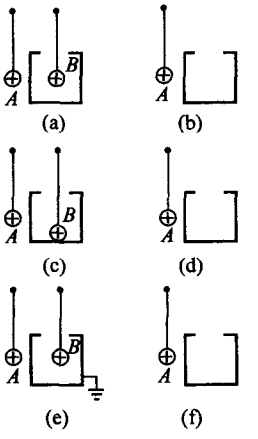


图 1－20 思考题 1－44

(1) 将一个带正电的金属小球 B 放在一个开有小孔的绝缘金属壳内,但不与其接触。将另一个带正电的试探电荷 A 移近时(见图 1－20(a)),A 将受到吸引力还是排斥力? 若将小球 B 从壳内移去后(见图 1－20(b)),A 将受到什么力?

(2) 若使小球 B 与金属壳内部接触(见图 1－20(c)),A 受什么力? 这时再将小球 B 从壳内移去后(见图 1－20(d)),情况如何?

(3) 如情形(1),使小球不与壳接触,但金属壳接地(见图 1－20(e)),A 将受到什么力? 将接地线拆除后,又将小球 B 从壳内移去(见图 1－20(f)),情况如何?

(4) 如情形(3),但先将小球从壳内移去后再拆接地线,情况与(3)相比有何不同?

答:(1) 由于静电感应,金属壳外表面上有净余正电荷,所以带正电的试探电荷 A 移近时将受到排斥力。若将小球 B 从壳内移去后,A 在金属壳上靠近 A 的外表面上感应出负电荷,远端感应出正电荷,所以 A 受到的合力为吸引力。

(2) B 与金属壳内部接触,B 所带正电荷全部分布在壳的外表面上。所以外表面上

有净余正电荷，A 受排斥力。这时再将小球 B 从壳内移去后，A 仍受斥力。

(3) 金属壳接地，感应出的正电荷入地，在金属壳靠近 A 的外表面上有负的感应电荷，所以，A 受吸引力。拆掉地线，移去小球 B，金属壳内表面上的负电荷迁移到外表面上，A 受到更大的吸引力。

(4) 先移去小球 B 再拆接地线，A 受吸引力。与(3)相比，上问中拆地线后 A 受到的吸引力大于拆地线前受到的吸引力，而本问中，拆地线前后 A 受到的吸引力不变。

1－45 在一个孤立导体球壳的中心放一个点电荷，球壳内、外表面上的电荷分布是否均匀？如果点电荷偏离球心，情况如何？

答：点电荷放在孤立导体球壳的中心时，球壳内、外表面上的电荷都均匀分布。因为，这时不仅球壳内、外表面上的曲率处处一样，而且场强成球对称分布。如果点电荷偏离球心，则球壳内表面上的电荷分布不均匀，因为内表面上的场强不成球对称分布了。壳中和壳的内表面上的电荷在球壳外表面上激发的场强之和为零，所以球壳外表面上的电荷仍均匀分布。

1－46 两导体球 A、B 相距很远(因此它们都可看成是孤立的)，其中 A 原来带电，B 不带电。现用一根细长导线将两球连接，电荷将按怎样的比例在两球上分配。

答：两孤立导体球相连接后，电位相同，即 $\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}=\dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$ 所以 $\dfrac{q_1}{q_2}=\dfrac{R_1}{R_2}$ 可见两导体球上电量与两球半径成正比。

1－47 用一个带电的小球与一个不带电的绝缘大金属球接触，小球上的电荷会全部传到大球上去吗？为什么？

答：若附近没有其它带电体，静电平衡时，两相接触的导体球为一等势体。由于电荷间的相互作用，其表面突出部分(小球的表面)电荷密度较其它部分大。所以小球中电荷不会全部跑到大球中去。

1－48 将一个带电导体接地后，其上是否还会有电荷？为什么？分别就此导体附近有无其它带电体的不同情况讨论之。

答：当没有其它带电体在附近时，导体接地后由于电势相同，电荷将在地球与导体间重新分配。因为地球带负电，且其带电量远大于导体上的电量，所以导体接地后，其上带负电。在要求不严的情况下，通常不考虑地球所带的负电。

当导体附近有带电体时，接地后，由于静电感应，导体中与带电体电荷相同的电荷将流入地，异种电荷留在导体上。所以导体接地后，其上将保留与带电体相异的电荷。

1－49 如图 1－21 所示是用静电计测量电容器两极板间电压的装置。试说明，为什么电容器上电压大时，静电计的指针偏转也大？

答：静电计相当于一个电容器，其指针和外壳相当于电容器两极。图 1－21 系统可视为两电容器并联，当电容器上电压增大，静电计对地的电势也升高。由 $q=CU$，显然指针所带电量增多，两针间静电斥力及指针与外壳间引力都增大，指针偏转也增大。

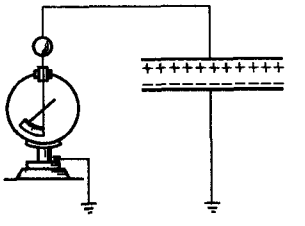


图 1－21 思考题 1－49

1－50 将一个接地的导体 B 移近一个带正电的孤立导体 A 时，A 的电势升高还是降低？

答:将一个接地的导体 B 移近一个带正电的孤立导体 A 时,由于静电感应,两导体将相互吸引,所以外力做负功,系统对外做正功,系统的电势能减少,由 $W_e=\frac{1}{2}q_AU_A+\frac{1}{2}q_BU_B=\frac{1}{2}q_AU_A(U_B=0)$ 知:因为 q_A 不变而 W_e 减少,所以 U_A 减少。

1-51 两绝缘导体 A、B 分别带等量异号电荷。现将第三个不带电的导体 C 插入 A、B 之间(不与它们接触),U_{AB} 增大还是减少?

答:当 C 插入 A、B 之间,由于 C 上的感应电荷,与板上电荷的相互作用,C 将自动吸入。所以插入过程外力做负功,系统对外做正功,系统电能减少。由关系式 $W_e=\frac{1}{2}C_{AB}U_{AB}^2=\frac{1}{2}QU_{AB}$ 知:因为 Q 不变,而 W_e 减少,所以 U_{AB} 减少。

1-52 详见本章典型例题例 1-5。

1-53 在偶极子的势能公式 $W=-\vec{P}\cdot\vec{E}$ 中是否包含偶极子的正、负电荷之间的相互作用能?

答:不包括。它只是组成偶极子的正负电荷在外电场中电势能的叠加,即 $W=q[U(P_+)-U(P_-)]$,而计算外场的电势时并不包含构成偶极子的电荷的场在内。

1-54 试用唯一性定理论证电容器中的电量 q 与电压 U 成正比。

证明:假设电容器的电量为 q 时,电压为 $U=U_2-U_1$,而空间的电场为 E。当电容器的电压增加 K 倍,$U'=U'_2-U'_1=KU$,根据唯一性定理能满足两极板电位为 U'_1 和 U'_2 的电荷分布是唯一的。

假设电容器的电量也增加 K 倍,$q''=Kq$,由库仑定律可知空间的电场也增加为 K 倍,即 $E''=KE$,所以电容器的电压也增加为 K 倍,即 $U''=KU=U'$。如果选择低电位极板的电位为 $U''_1=U'_1$,则高电位极板的电位为 $U''_2=U''_1+U''=U'_2$,两极板电位为 U''_1 和 U''_2 满足唯一性定理的边界条件,所以当电容器的电压增加 K 倍时,电容器的电量也增加 K 倍是唯一正确的解,即电容器的电量与电容器的电压成正比。

1-55 一平行板电容器两极板的面积都是 S,相距为 d,电容值为 $C=\frac{\varepsilon_0S}{d}$。当两极板加上电压 U 时,略去边缘效应,两板间的电场强度为 $E=\frac{U}{d}$,其中一板所带电量为 $Q=CU$,故它所受的力为 $F=QE=CU\left(\frac{U}{d}\right)=\frac{CU^2}{d}$ 这个结果对不对?为什么?

答:不对。它所受的力应为 $F=Q\frac{1}{2}E=\frac{CU^2}{2d}$。因为它所处位置处的电场为 $\frac{E}{2}=\frac{U}{2d}$,而不是 $E=\frac{U}{d}$。

1.4 习题详解

1-1 氢原子由一个质子(即氢原子核)和一个电子组成。根据经典模型,在正常状态下,电子绕核做圆周运动,轨道半径是 5.29×10^{-11}m;已知质子质量 $m_P=1.67\times10^{-27}$kg,

电子质量 $m_e=9.11\times10^{-31}\text{kg}$,电荷分别为 $\pm e=\pm1.60\times10^{-19}\text{C}$,万有引力常量 $G=6.67\times10^{-11}\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$。

(1) 求电子所受质子的库仑力和引力;

(2) 库仑力是万有引力的多少倍?

(3) 求电子的速度。

解:(1) 设电子所受的库仑力为 F,根据库仑定律,其大小

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1q_2}{r^2}=8.99\times10^9\times\frac{(1.60\times10^{-19})^2}{(5.29\times10^{-11})^2}=8.23\times10^{-8}\text{N}$$

设电子所受的万有引力为 f,根据万有引力定律,其大小

$$f=G\cdot\frac{mM}{r^2}=6.67\times10^{-11}\times\frac{9.11\times10^{-31}\times1.67\times10^{-27}}{(5.29\times10^{-11})^2}=3.63\times10^{-47}\text{N}$$

(2)
$$\frac{F}{f}=\frac{8.23\times10^{-8}}{3.63\times10^{-47}}=2.27\times10^{39}$$

即库仑力是万有引力的 2.27×10^{39} 倍。

(3) 设电子绕核做圆周运动的速度为 v,因为 $f\ll F$,所以可认为向心力就是库仑力 F,根据 $F_{向}=m\frac{v^2}{R}$ 得

$$v=\sqrt{\frac{F_{向}R}{m}}=\sqrt{\frac{8.23\times10^{-8}\times5.29\times10^{-11}}{9.11\times10^{-31}}}=2.19\times10^6\text{m/s}。$$

1-2 卢瑟福实验证明:当两个原子核之间的距离小到 10^{-15}m 时,它们之间的排斥力仍遵守库仑定律。金的原子核中有 79 个质子,氦的原子核(即 α 粒子)中有 2 个质子。已知每个质子带电为 $e=1.60\times10^{-19}\text{C}$,α 粒子的质量为 $6.68\times10^{-27}\text{kg}$。当 α 粒子与金核相距为 $6.9\times10^{-15}\text{m}$ 时(设这时它们都仍可当作点电荷),求:(1)α 粒子所受的力;(2)α 粒子的加速度。

解:(1) 设 α 粒子所受的力为 $\vec{F}$,因为 α 粒子所受的库仑力远大于万有引力,所以 $\vec{F}$ 可视为库仑力。其大小

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1q_2}{r^2}$$

代入数据计算得

$$F=7.64\times10^2\text{N}$$

F 的方向在金原子核与氦原子核的连线上,背离金原子核。

(2) 设 α 粒子的加速度为 $\vec{a}$,其大小

$$a=\frac{F}{m}=\frac{7.64\times10^2}{6.68\times10^{-27}}=1.14\times10^{29}\text{m/s}^2。$$

$\vec{a}$ 的方向与 $\vec{F}$ 相同。

1-3 铁原子核里两个质子相距 $4.0\times10^{-15}\text{m}$,每个质子带电 $e=1.60\times10^{-19}\text{C}$。

(1) 求它们之间的库仑力;

(2) 比较这力与每个质子所受重力的大小。

解:(1) 它们之间的库仑力

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{r^2} = 8.99\times10^9\times\frac{(1.60\times10^{-19})^2}{(4.0\times10^{-15})^2} = 14.4\text{N}$$

(2) 每个质子受的重力

$$P = Mg = 1.67\times10^{-27}\times9.8 = 1.64\times10^{-26}\text{N}$$

$$\frac{F}{P} = \frac{14.4}{1.64\times10^{-26}} = 8.8\times10^{26}$$

所以 $F \gg P$。

1-4 两小球质量都是 m,都用长为 l 的细线挂在同一点;若它们带上相同的电量,平衡时两线夹角为 2θ(见图 1-22)。设小球的半径都可略去不计,求每个小球上的电量。

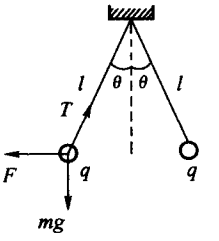


图 1-22 习题 1-4

解:设每个小球的带电量为 q,根据平衡条件

$$\begin{cases} T\sin\theta = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{(2l\sin\theta)^2} \\ T\cos\theta = mg \end{cases}$$

解方程组得

$$q = \pm 4l\sin\theta\left(\pi\varepsilon_0 mg\tan\theta\right)^{1/2}$$

1-5 电子所带的电荷量(元电荷 $-e$)最先是由密立根通过油滴实验测出的。密立根设计的实验装置如图 1-23 所示。一个很小的带电油滴在电场 $\vec{E}$ 内。调节 $\vec{E}$,使作用在油滴上的电场力与油滴所受的重力平衡,如果油滴的半径为 1.64×10^{-4}cm,在平衡时 $E = 1.92\times10^5$N/C。求油滴上的电荷(已知油滴的密度为 0.851g/cm^3)。

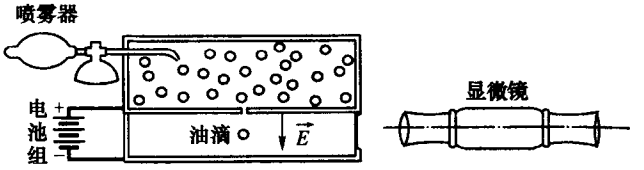


图 1-23 习题 1-5

解:设油滴的电量为 q,它受的电场力和重力分别为 F 和 P,由 $F = P$,即 $Eq = mg$,得

$$q = \frac{mg}{E} = \frac{\frac{4}{3}\times3.14\times(1.64\times10^{-6})^3\times0.851\times10^{-3}\times10^6\times9.8}{1.92\times10^5}$$

$$= 8.02\times10^{-19}\text{C}$$

考虑到电荷的正负,$q = -8.02\times10^{-19}$(C)

1-6 在早期(1911 年)的一连串实验中,密立根在不同时刻观察单个油滴上呈现的电荷,其测量结果(绝对值)如下:

6.568×10^{-19}C　　13.13×10^{-19}C　　19.71×10^{-19}C

8.204×10^{-19}C　　16.48×10^{-19}C　　22.89×10^{-19}C

11.50×10^{-19}C　　18.08×10^{-19}C　　26.13×10^{-19}C

根据这些数据，可以推得基元电荷 e 的数值为多少？

解：把测量结果依次两两相减：

(1) $8.204\times10^{-19}-6.568\times10^{-19}=1.636\times10^{-19}$

(2) $11.50\times10^{-19}-8.204\times10^{-19}=3.296\times10^{-19}$

(3) $13.13\times10^{-19}-11.50\times10^{-19}=1.63\times10^{-19}$

(4) $16.48\times10^{-19}-13.13\times10^{-19}=3.35\times10^{-19}$

(5) $18.08\times10^{-19}-16.48\times10^{-19}=1.60\times10^{-19}$

(6) $19.71\times10^{-19}-18.08\times10^{-19}=1.63\times10^{-19}$

(7) $22.89\times10^{-19}-19.71\times10^{-19}=3.18\times10^{-19}$

(8) $26.13\times10^{-19}-22.89\times10^{-19}=3.24\times10^{-19}$

对以上数据进行分析，可知(1)、(3)、(5)、(6)组代表一个基本电荷的量值，(2)、(4)、(7)、(8)组代表两个基本电荷的量值。对上面 8 组数据取平均值，即可得到 e 的量值。

$$e=\frac{1.636+3.296+1.63+3.35+1.60+1.63+3.18+3.24}{12}\times10^{-19}$$

$$=1.630\times10^{-19}\text{C}$$

1－7　根据经典理论，在正常状态下，氢原子中电子绕核做圆周运动，其轨道半径为 5.29×10^{-11}m，已知质子电荷为 $e=1.60\times10^{-19}$C，求电子所在处原子核(即质子)的电场强度。

解：根据点电荷的场强公式 $E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}$，电子所在处原子核(即质子)的电场强度的大小

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}=8.99\times10^9\times\frac{1.60\times10^9}{(5.29\times10^{-11})^2}=5.14\times10^{11}\text{N/C}$$

1－8　如图 1－24 所示，一电偶极子的电偶极矩 $\vec{P}=q\vec{l}$，P 点至偶极子中心的距离为 r，$\vec{r}$ 与 $\vec{l}$ 的夹角为 θ。设 $r\gg l$，求 P 点的电场强度 $\vec{E}$ 在 $\vec{r}=\overrightarrow{OP}$ 方向的分量 E_r 和垂直于 $\vec{r}$ 方向上的分量 E_θ。

解：电偶极矩 $\vec{P}$ 沿 $\vec{r}$ 方向的分量 $P_r=P\cos\theta$；沿垂直于 $\vec{r}$ 方向的分量 $P_\theta=P\sin\theta$。

P 点可视为在 P_r 的延长线上，所以

$$E_r=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2P_r}{r^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2P\cos\theta}{r^3}(P_\theta\text{ 对 }E_r\text{ 无贡献})$$

P 点又可视为在 P_θ 的中垂线上，所以

$$E_\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{P_\theta}{r^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{P\sin\theta}{r^3}(P_r\text{ 对 }E_\theta\text{ 无贡献})$$

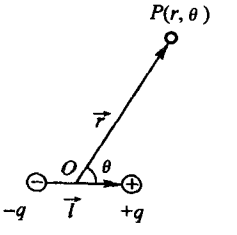


图 1－24　习题 1－8

1－9　把电偶极矩为 $\vec{P}=q\vec{l}$ 的电偶极子放在点电荷 Q 的电场内，$\vec{P}$ 的中心 O 到 Q 的距离为 $r(r\gg l)$。分别求

(1) $\vec{P} \parallel \overrightarrow{QO}$(见图 1－25(a))；

(2) $\vec{P} \perp \overrightarrow{QO}$时(见图 1－25(b)偶极子所受的力 $\vec{F}$ 和力矩 $\vec{L}$。

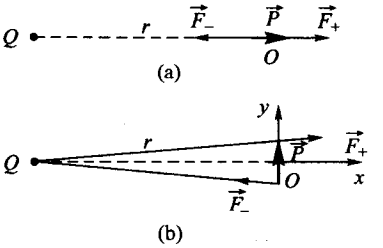


图 1－25　习题 1－9

解:(1)当 $\vec{P} \parallel \overrightarrow{QO}$时,设 $\vec{P}$的方向为正,则作用在 $\pm q$ 上的力分别为

$$F_- = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2};F_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}$$

整个偶极子受的力

$$F = F_- + F_+ \approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qQl}{r^3}(\text{其中应用了 } r >> l)$$

或

$$F \approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2QP}{r^3}$$

因为 F_+与 F_-对 O 点的力臂为零,故偶极子受的力矩为零。

(2) 当 $\vec{P} \perp \overrightarrow{QO}$时,$Q$ 作用在 $\pm q$ 上的力的大小分别为

$$F_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2+\frac{l^2}{4}};F_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2+\frac{l^2}{4}}$$

方向如图 1－25(b)所示。

合力

$$F = F_{+y} + F_{-y} = 2F_+ \sin\alpha \approx \frac{QP}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

或

$$\vec{F} \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\vec{P}$$

由于 $F_+ = F_-$,且不共线,所以偶极子受到力矩的作用

$$L = 2F_{+x}\cdot\frac{l}{2} = F_+ l\cos\alpha \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{P}{r^2}$$

方向:垂直于纸面向内。

1－10　如图 1－26 所示是一种电四极子,它是由两个相同的电偶极子 $\vec{P} = q\vec{l}$ 组成,这两个电偶极子在一直线上,但方向相反,它们的负电荷重合在一起。试证明:在它们的延长线上离中心(即负电荷)为 $r(r \gg l)$处时

(1) 场强为 $E = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 r^4}$;

(2) 电势为 $U(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$;式中 $Q = 2ql^2$ 叫做它的电四极矩。

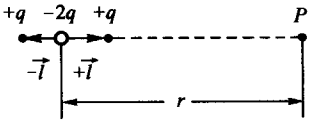


图 1－26　习题 1－10

证明:(1) 根据电场强度的叠加原理,取向右为正,P 点场强

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(r+l)^2}+\frac{1}{(r-l)^2}-\frac{2}{r^2}\right]$$

化简得

$$E=\frac{3(2ql^2)}{4\pi\varepsilon_0 r^4}=\frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 r^4}$$

(2) 根据电势的叠加原理,P 点电势

$$U(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r+l}+\frac{1}{r-l}-\frac{2}{r}\right]=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2l^2}{r^3}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

1-11 如图 1-27 所示是另一种电四极子,设 q 和 l 都已知,图中 P 点到电四极子中心 O 的距离为 $x(x\gg l)$,$\vec{OP}$ 与正方形的一对边平行,求 P 点的电场强度 $\vec{E}$。

解:电四极子在 P 点产生的场强,为偶极子 AB 和 CD 在其中垂面上的 P 点产生的场强之和,其大小

$$E=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left(x-\frac{l}{2}\right)^3}-\frac{1}{\left(x+\frac{l}{2}\right)^3}\right]$$

$$=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3x^2l+\frac{l^3}{4}}{\left(x^2-\frac{l^2}{4}\right)^3}\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Pl}{x^4}$$

方向垂直 OP 向上。(式中 $P=ql$)

1-12 两条平行的无限长直均匀带电线,相距为 a,电荷线密度分别为 $\pm\eta_e$。

(1) 求这两线构成的平面上任一点(设这点到其中一线的垂直距离为 x)的场强;

(2) 求每线单位长度上所受的相互吸引力。

解:(1) 如图 1-28 所示,x 轴垂直两导线,根据场强的叠加原理,应用公式 $E=\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0 r}$ 得 P 点场强

$$E=|\vec{E}_1+\vec{E}_2|=\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x}\right)=\frac{a\eta_e}{2\pi\varepsilon_0 x(x-a)}$$

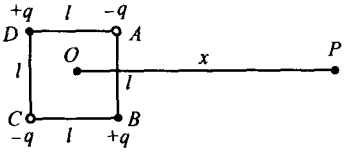


图 1-27 习题 1-11

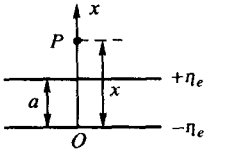


图 1-28 习题 1-12

(2) 两均匀带电的直线中任意一条都在另一条的电场中,所以两线单位长度间的吸引力

$$F = E\eta_e = \frac{\eta_e^2}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

1－13 均匀电场与半径为 a 的半球面的轴线平行，试用面积分计算通过此半球面的电通量，如图 1－29 所示。

解：面积分法

球面元面积 $$dS = a^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

设场强与 z 轴同向，则通过半球面的电通量

$$\Phi_e = \iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_S E\cos\theta dS = Ea^2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta = \pi a^2 E$$

若场强与 z 轴反向，则通过半球面的电通量

$$\Phi_e = \iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = -\iint_S E\cos\theta dS = -Ea^2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta = -\pi a^2 E$$

1－14 详见本章典型例题例 1－1。

1－15 实验表明：在靠近地面处有相当强的电场，$\vec{E}$ 垂直于地面向下，大小约为 100V/m；在离地面 1.5km 高的地方，$\vec{E}$ 也是垂直于地面向下的，大小约为 25V/m（见图 1－30）。

（1）试计算从地面到此高度大气中电荷的平均体密度。

（2）如果地球上的电荷全部均匀分布在表面，求地面上电荷的面密度。

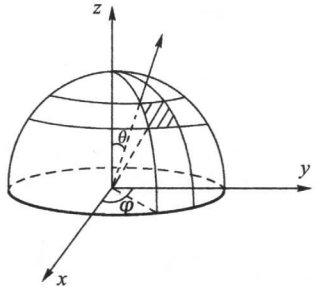


图 1－29 习题 1－13

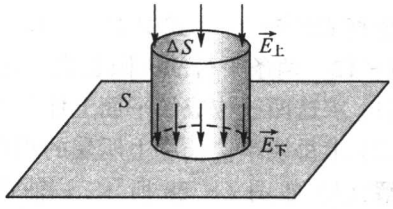


图 1－30 习题 1－15

解：(1)设从地面到离地面 1.5km 高度的大气中电荷的平均体密度为 ρ_e。取侧面垂直于地面，底面积为 ΔS 的圆柱面 S 为高斯面，S 的上、下底面分别在高度为 1.5km 处和靠近地面处，上、下底面上的场强分别为 $E_{上}$、$E_{下}$，则通过 S 面的电通量为

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = (E_{下} - E_{上})\Delta S$$

S 面内的电量

$$\sum_{S内} q_i = \Delta S\cdot h\cdot\rho_e$$

据高斯定理得

$$(E_{下} - E_{上})\Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0}\Delta S\cdot h\cdot\rho_e$$

$$\rho_e = \frac{(E_{下} - E_{上})\varepsilon_0}{h} = \frac{(100 - 25) \times 8.85 \times 10^{-12}}{1500} = 4.43 \times 10^{-13}\text{C/m}^3$$

(2) 设地面的面电荷密度为 σ_e。由于电荷只分布在地球表面，所以地表下的场为零。取侧面垂直于地面，上、下底面分别在地面上(靠近地面处)和地面下的圆柱面 S 为高斯面，底面积为 ΔS。根据高斯定理

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i$$

得

$$-E_{地} \cdot \Delta S = \frac{\sigma_e \Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma_e = -\varepsilon_0 E_{地} = -8.85 \times 10^{-12} \times 100 = -8.9 \times 10^{-10}\text{C/m}^2$$

1-16 半径为 R 的无穷长直圆筒面上均匀带电，沿轴线单位长度的电量为 λ，求场强分布，并画出 $E-r$ 关系曲线。

解：圆筒面周围的场强具有圆柱对称性，距轴线为 r 处的场强大小相等，方向垂直于轴线呈辐射状。取一长为 l 与圆筒共轴的封闭圆柱面为高斯面，其半径为 r 的底面与轴线垂直。根据高斯定理 $\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_i$，得

$$E 2\pi r l = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \sum q_i$$

所以，距轴线 r 处的场强的大小

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sum q_i}{lr}$$

(1) 当 $r > R$ 时，$\sum q_i = \lambda l$ 所以

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

(2) 当 $r < R$ 时，$\sum q_i = 0$ 所以 $E = 0$

$E-r$ 关系曲线如图 1-31 所示。

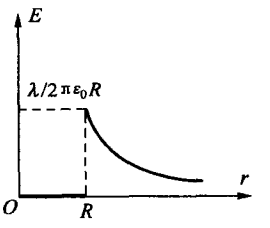


图 1-31 $E-r$ 曲线

1-17 两无限大的平行平面均匀带电，电荷的面密度分别为 $\pm\sigma_e$，求各区域的场强分布。

解：如图 1-32 所示，规定场强向右为正，向左为负。应用无限大均匀带电板的场强公式 $E = \sigma_e/2\varepsilon_0$ 和场强叠加原理，则

$$E_A = \sigma_e/2\varepsilon_0 + \sigma_e/2\varepsilon_0 = \sigma_e/\varepsilon_0$$

$$E_B = E_C = \sigma_e/2\varepsilon_0 - \sigma_e/2\varepsilon_0 = 0$$

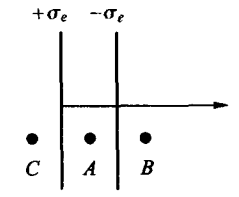


图 1-32 习题 1-17

1-18 两无限大的平行平面均匀带电，电荷的面密度都是 σ_e，求各区域的场强分布。

解：如图 1-33 所示，规定场强向右为正，向左为负。应用无限大均匀带电板的场强公式 $E = \sigma_e/2\varepsilon_0$ 和场强叠加原理，则

$$E_A = \sigma_e/2\varepsilon_0 - \sigma_e/2\varepsilon_0 = 0$$

$$E_B = \sigma_e/2\varepsilon_0 + \sigma_e/2\varepsilon_0 = \sigma_e/\varepsilon_0$$

$$E_C = -\sigma_e/2\varepsilon_0 - \sigma_e/2\varepsilon_0 = -\sigma_e/\varepsilon_0$$

1-19 三个无限大的平行平面都均匀带电，电荷的面密度分别为 σ_{e1}、σ_{e2}、σ_{e3}，求下列情况各处的场强。

(1) $\sigma_{e1}=\sigma_{e2}=\sigma_{e3}=\sigma_e$；

(2) $\sigma_{e1}=\sigma_{e3}=\sigma_e$，$\sigma_{e2}=-\sigma_e$；

(3) $\sigma_{e1}=\sigma_{e3}=-\sigma_e$，$\sigma_{e2}=\sigma_e$；

(4) $\sigma_{e1}=\sigma_e$，$\sigma_{e2}=\sigma_{e3}=-\sigma_e$。

解：(1) 如图 1-34 所示，规定场强向右为正，向左为负。应用无限大均匀带电板的场强公式 $E=\sigma_e/2\varepsilon_0$ 和场强叠加原理，则

$$E_A = -\sigma_{e1}/2\varepsilon_0 - \sigma_{e2}/2\varepsilon_0 - \sigma_{e3}/2\varepsilon_0 = -3\sigma_e/2\varepsilon_0$$

$$E_B = \sigma_{e1}/2\varepsilon_0 - \sigma_{e2}/2\varepsilon_0 - \sigma_{e3}/2\varepsilon_0 = -\sigma_e/2\varepsilon_0$$

$$E_C = \sigma_{e1}/2\varepsilon_0 + \sigma_{e2}/2\varepsilon_0 - \sigma_{e3}/2\varepsilon_0 = +\sigma_e/2\varepsilon_0$$

$$E_D = \sigma_{e1}/2\varepsilon_0 + \sigma_{e2}/2\varepsilon_0 + \sigma_{e3}/2\varepsilon_0 = +3\sigma_e/2\varepsilon_0$$

(2)、(3)、(4)与(1)类似，从略。

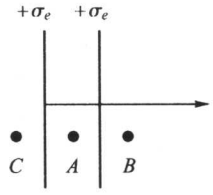


图 1-33 习题 1-18

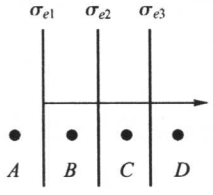


图 1-34 习题 1-19

1-20 一厚度为 d 的无限大平板，平板体内均匀带电，电荷的体密度为 ρ_0，求板内外场强的分布。

解：如图 1-35 所示，OO' 为该平板截面的轴线，由对称性分布可知，OO' 两侧距 OO' 轴等距离 x 处的场强大小相等，方向垂直于 OO' 轴指向两侧。

在板内、外分别做一被平板的中面垂直平分的封闭圆柱面 S_1、S_2 作为高斯面，它们的底面积为 ΔS，ΔS 与中面的距离是 x，根据高斯定理 $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_S q_i$ 得

$$E_x \cdot 2\Delta S = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

所以

$$E_x = \frac{\sum q_i}{2\varepsilon_0 \Delta S}$$

(1) 板内 $\left(x < \frac{d}{2}\right)$ $\sum q_i = 2x\Delta S\rho_0$，场强分布

$$E_x = \frac{x\rho_0}{\varepsilon_0}$$

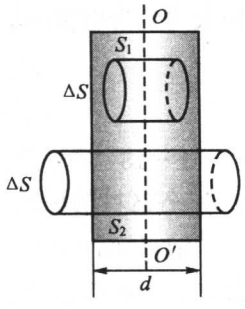


图 1-35 习题 1-20

(2) 板外$\left(x > \frac{d}{2}\right)\sum q_i = d\Delta S\rho_0$,场强分布

$$E_x = \frac{\rho_0 d}{2\varepsilon_0}$$

1-21 在夏季雷雨中,通常一次闪电里两点间的电势差约为100MV,通过的电量约为30C。问一次闪电消耗的能量是多少?如果用这些能量来烧水,能把多少水从0℃加热到100℃?

解:(1) 消耗的能量:$W = qU = 30 \times 10^8 = 3.0 \times 10^9$(J)

(2) 设能把 m 千克的水从0℃加热到100℃,由 $Q = cm(t_2 - t_1)$得

$$m = \frac{Q}{c(t_2 - t_1)} = \frac{3 \times 10^9 \times 0.24}{10^3 \times 100} = 7.2 \times 10^3 \text{kg}$$

1-22 已知空气的击穿场强为2×10^6V/m,测得某次闪电的火花长100m,求发生这次闪电时两端的电势差。

解:闪电时两端的电势差

$$U_{PQ} = Ed = 2 \times 10^6 \times 100 = 2 \times 10^8 \text{V}$$

1-23 求一对等量同号点电荷连线中点的场强和电势,设电荷都是 q,两者之间的距离为$2l$。

解:根据场强和电势的叠加原理,在中点 O 处

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{l^2} - \frac{q}{l^2}\right) = 0$$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{l} + \frac{q}{l}\right) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}$$

1-24 求一对等量异号点电荷连线中点的场强和电势,设电荷分别为$\pm q$,两者之间的距离为$2l$。

解:根据场强和电势的叠加原理,在中点 O 处

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{l^2} + \frac{q}{l^2}\right) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l^2}$$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{l} + \frac{-q}{l}\right) = 0$$

1-25 如图1-36所示,一半径为 R 的均匀带电圆环,电荷总量为 $q(q>0)$。

(1) 求轴线上离环中心 O 为 x 处的场强 $\vec{E}$;

(2) 画出 $E-x$ 曲线;

(3) 轴线上什么地方场强最大?其值多少?

(4) 求轴线上电势 $U(x)$的分布;

(5) 画出 $U-x$ 曲线;

(6) 轴线上什么地方电势最高?其值多少?

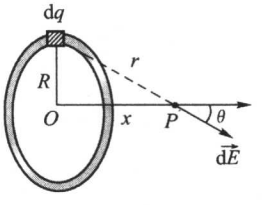


图1-36 习题1-25

解:(1) 如图 1－36 所示,环上任一电荷元 dq 在 P 点产生的场强大小

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}$$

方向如图 1－36 所示。

根据对称性分析,整个圆环在 P 点产生的场强的大小

$$E = \oint dE \cdot \cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint \frac{dq}{r^2}\cdot\frac{x}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

考虑到方向,场强可表示为

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{i}$$

(2) $E-x$ 曲线如图 1－37 所示。

(3) 令 $\frac{dE}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(x^2+R^2)^{3/2}}\right] = 0$ 得

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}R$$

即环心左右两边 $\frac{\sqrt{2}}{2}R$ 处的场强最大。

$$E_{max} = \frac{q}{6\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 R^2}$$

(4) 如图 1－36 所示,环上任一电荷元 dq 在 P 点产生的电势

$$dU = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$

整个圆环在 P 点产生的电势

$$U = \oint dU = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\oint dq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

(5) $U-x$ 曲线如图 1－38 所示。

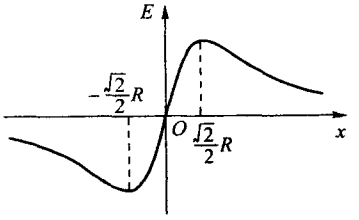


图 1－37　$E-x$ 曲线

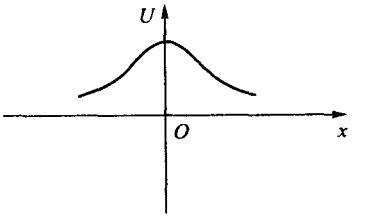


图 1－38　$U-x$ 曲线

(6) 由 $U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{x^2+R^2}}$ 可知:$x=0$,即环心处电势最大

$$U_{max} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$$

1－26 详见本章典型例题例 1－2。

1－27 如图 1－39 所示，一示波管偏转电极长度 $l=1.5\text{cm}$，两极电压 120V，间隔 $d=1.0\text{cm}$，一个电子以初速 $v_0=2.6\times10^7\text{m/s}$ 沿管轴注入。已知电子质量 $m=9.1\times10^{-31}\text{kg}$，电荷为 $-e=-1.6\times10^{-19}\text{C}$。

(1) 求电子经过电极后所发生的偏转 y；

(2) 若可以认为一出偏转电极的区域后，电场立即为零，设偏转电极的边缘到荧光屏的距离 $D=10\text{cm}$，求电子打在荧光屏上产生的光点偏离中心 O 的距离 y'。

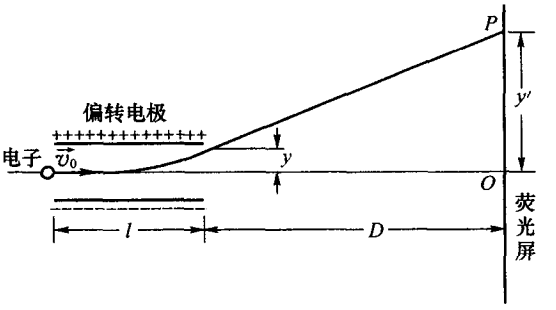


图 1－39 习题 1－27

解：(1) 忽略重力的影响，按照运动的独立性原理，电子在偏转电极中的运动，可视为水平方向上的匀速直线运动与竖直方向上的匀加速直线运动的合成。因此电子通过电极所用的时间 $t=l/v_0$，在电极中竖直方向上的加速度 $a=\dfrac{Ee}{m}$，所以

$$y=\frac{1}{2}at^2=\frac{Eel^2}{2mv_0^2}=\frac{1.2\times10^4\times1.6\times10^{-19}\times(1.5\times10^{-2})^2}{2\times9.1\times10^{-31}\times(2.6\times10^7)^2}$$

$$=3.5\times10^{-4}\text{m}$$

(2) 设电子出电极后经过路程 D 所用的时间为 t'，则电子运动方程为

$$\begin{cases}D=v_0t'\\ y'-y=v_yt'=\dfrac{eE}{m}\cdot\dfrac{l}{v_0}t'\end{cases}$$

解方程得

$$y'=y+\frac{eElD}{mv_0^2}=5.0\text{mm}$$

1－28 有两个异号点电荷 ne 和 $-e(n>1)$，相距为 a。

(1) 证明电势为零的等电势面是一个球面。

(2) 证明球心在这两个点电荷的延长线上，且在 $-e$ 点电荷的外面。

(3) 这球的半径为多少？

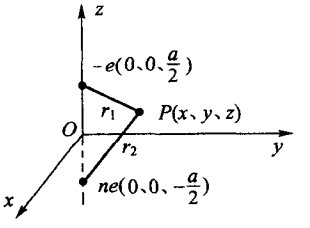


图 1－40 习题 1－28

证明：(1) 以 ne 和 $-e$ 的连线的中点为原点，取直角坐标系 $Oxyz$(见图 1－40)。设 P 点是电势为零的等势面上的任意一点，则

$$U_P = \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{ne}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = 0$$

即

$$\frac{r_2}{r_1} = n$$

而

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2}; r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + \left(z + \frac{a}{2}\right)^2}$$

所以

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + \left(z + \frac{a}{2}\right)^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2}} = n \qquad ①$$

化简得

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{a(n^2+1)}{2(n^2-1)}\right)^2 = \left(\frac{na}{n^2-1}\right)^2 \qquad ②$$

显然,此式为一球面方程,故得证。

(2) 由式②可知:球心的坐标为$\left[0,0,\frac{a(n^2+1)}{2(n^2-1)}\right]$,即球心在 z 轴上,且

$$z = \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right) > \frac{a}{2}$$

所以,球心在这两个点电荷的延长线上,且在 $-e$ 点电荷的外面。

(3) 由式②可知:球面半径 $R = \frac{na}{n^2-1}$

1-29 (1) 金原子核可当作均匀带电球,其半径约为 6.9×10^{-15}m,电荷为 $Ze = 79\times1.60\times10^{-19}\text{C} = 1.26\times10^{-17}\text{C}$。求它表面上的电势。

(2) 一质子(电荷为 $e = 1.60\times10^{-19}$C,质量为 1.67×10^{-27}kg)以 1.2×10^7m/s 的初速度从很远的地方射向金原子核,求它能达到金原子核的最近距离。

(3) α 粒子的电荷为 $2e$,质量为 6.7×10^{-27}kg,以 1.6×10^7m/s 的初速度从很远的地方射向金原子核,求它能达到金原子核的最近距离。

解:(1) 根据高斯定理可得均匀带电球外部空间的电场

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}\hat{r}$$

所以球面处的电势

$$U = \int_R^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{4\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times6.9\times10^{-15}}$$
$$= 1.6\times10^7\text{V}$$

(2) 设质子能达到金原子核的最近距离为距核心 r 处,此处的电势

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

质子具有的电势能

$$W = eU$$

根据能量守恒原理：$eU = \frac{1}{2}mv^2$ 得

$$\frac{qe}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2}mv^2$$

所以

$$r = \frac{2qe}{4\pi\varepsilon_0 mv^2} = 1.5 \times 10^{-13}\text{m}$$

(3) 设 α 粒子能达到金原子核的最近距离为距核心 r' 处与(2)同法可得

$$r' = 4.2 \times 10^{-14}\text{m}$$

1－30 在氢原子中，正常状态下电子到质子的距离为 5.29×10^{-11}m，已知氢原子核(质子)和电子带电各为 $\pm e$($e = 1.60 \times 10^{-19}$C)。把氢原子中的电子从正常状态下拉开到无穷远处所需的能量，叫做氢原子的电离能。求此电离能是多少 eV?

解：设电子在正常状态下所在处为 P 点，其电势 $U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e}{r}$ 与无穷远处的电势差 $\Delta U_{P\infty} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e}{r}$。电离能等于将电子由 P 点移到无穷远处，外力反抗电场力作的功为

$$W = -A = -(-e\Delta U_{P\infty}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$$

$$= 8.99 \times 10^9 \times \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{5.29 \times 10^{-11}} = 4.35 \times 10^{-18}\text{J} = 27.2\text{eV}$$

1－31 轻原子核(如氢及其同位素氘、氚的原子核)结合成为较重原子核的过程，叫做核聚变。核聚变过程可以释放出大量的能量。例如，4 个氢原子核(质子)结合成一个氦原子核(α 粒子)时，可释放出 28MeV 的能量。这类核聚变就是太阳发光、发热的能量来源。如果我们能在地球上实现核聚变，就可以得到非常丰富的能源。实现核聚变的困难在于原子核都带正电，互相排斥，在一般情况下不能互相靠近而发生结合。只有在温度非常高时，热运动的速度非常大，才能冲破库仑排斥力的壁垒，碰到一起发生结合，这叫做热核反应。根据统计物理学，热力学温度为 T 时，粒子的平均平动动能为 $\overline{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{3}{2}kT$ 式中 $k = 1.38 \times 10^{-23}$J/K 叫做玻耳兹曼常量。已知质子质量 $m_P = 1.67 \times 10^{-27}$kg，电荷 $e = 1.6 \times 10^{-19}$C，半径的数量级为 10^{-15}m。试计算：

(1) 一个质子以怎样的动能(以 eV 表示)才能从很远的地方达到与另一个质子接触的距离?

(2) 平均热运动动能达到此数值时，温度(以 K 表示)需高到多少?

解：(1) 质子表面的电势

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e}{r}$$

另一质子到达该质子表面时具有的电势能

$$W = eU = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{r} = 8.99\times10^9\times\frac{(1.6\times10^{-19})^2}{1\times10^{-15}} = 1.4\times10^6\text{eV}$$

根据能量守恒原理，质子要有 1.4×10^6eV 的动能才能从很远的地方达到与另一个质子接触的距离。

(2) 由 $\overline{\frac{1}{2}mv^2}=\frac{3}{2}kT$ 得所求温度

$$T = \frac{\overline{\frac{1}{2}mv^2}}{\frac{3}{2}k} = \frac{1.4\times10^6\times1.6\times10^{-19}}{\frac{3}{2}\times1.38\times10^{-23}} = 10^{10}\text{K}$$

1－32 在绝对热力学温度为 T 时，微观粒子热运动能量具有 kT 的数量级(玻耳兹曼常量 $k=1.38\times10^{-23}$J/K)。有时人们把能量 kT 折合成 eV，就说温度 T 为若干 eV，问：

(1) $T=1$eV 相当于多少 K?

(2) $T=50$keV 相当于多少 K?

(3) 室温($T\approx300$K)相当于多少 eV?

解：(1) 由 $kT=1$eV 得 $T=\frac{1\text{eV}}{k}=\frac{1.6\times10^{-19}}{1.38\times10^{-23}}=1.16\times10^4\text{K}$

(2) $T=\frac{50\text{keV}}{k}=\frac{50\times10^3\times1.6\times10^{-19}}{1.38\times10^{-23}}=5.8\times10^8\text{K}$

(3) $kT=1.38\times10^{-23}\times300=2.6\times10^{-2}$eV

1－33 如图 1－41 所示，两条均匀带电的无限长平行直线(与图纸垂直)，电荷的线密度为 $\pm\eta_e$ 相距为 $2a$。

(1) 求空间任一点 $P(x,y)$处的电势。

(2) 证明电势为 U 的等势面是半径为 $r=\frac{2ka}{k^2-1}$ 的圆筒面，筒的轴线与两直线共面，位置在 $x=\frac{k^2+1}{k^2-1}a$ 处，其中 $k=\exp(2\pi\varepsilon_0U/\eta_e)$。

(3) $U=0$ 的等势面是什么形状?

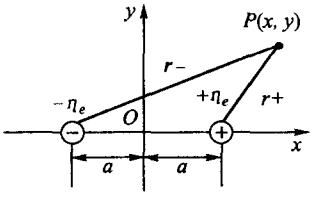


图 1－41 习题 1－33

解：(1)如图 1－41 所示，选择 O 点的电势为零。带正电的导线在 P 点产生的电势

$$U_+=\int_{r_+}^{a}\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0}(\ln a-\ln r_+)$$

带负电的导线在 P 点产生的电势

$$U_-=\int_{r_-}^{a}\frac{-\eta_e}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0}(\ln r_--\ln a)$$

所以

$$U(P)=U_++U_-=\int_{r_+}^{a}\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r+\int_{r_-}^{a}\frac{-\eta_e}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_-}{r_+}$$

$$= \frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} = \frac{\eta_e}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$$

(2) 根据

$$U(P) = \frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$$

得

$$e^{2\pi\varepsilon_0 U/\eta_e} = \frac{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$$

令

$$e^{2\pi\varepsilon_0 U/\eta_e} = k$$

则得

$$\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} = k^2$$

整理后

$$\left[x - \frac{a(k^2+1)}{k^2-1}\right]^2 + y^2 = \left(\frac{2ka}{k^2-1}\right)^2$$

这就是空间直角坐标系中的圆柱面(圆筒面)方程。该圆柱面的半径 $r=\frac{2ka}{k^2-1}$,轴线在 $x=\frac{k^2+1}{k^2-1}a$ 处且与两直线共面。

(3) 设 $U=0$,则得

$$\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} = 0$$

即

$$\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} = 1$$

化简得

$$x = 0$$

此方程在空间直角坐标系中是 YOZ 平面,它与两带电导线平行。

1-34 电视显像管的第二阳极和第三阳极是两个直径相同的同轴金属圆筒。两电极间的电场即为显像管中的主聚焦电场。如图 1-42 所示,其是主聚焦电场中的等势面。数字表示电势值(单位为 V),试用直尺量出管轴上各等势面间的距离,并求出相应的电场强度。

解:用直尺量出管轴上各等势面间的距离(Δn),应用 $E=\frac{\Delta U}{\Delta n}$的关系,算出相应的电场强度的数值见表 1-1。

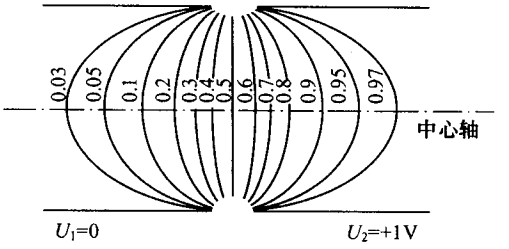


图 1－42　习题 1－34

表 1－1　主聚焦电场数值表

U/V	0.03	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.97
ΔU/V		0.02	0.05	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.05	0.02
Δn/mm		4.0	4.5	3.6	2.5	2.0	2.5	2.0	2.2	4.0	4.0	4.2	4.0
E/(V/m)		5.0	11	28	40	50	40	40	50	46	25	12	5.0

1－35　带电粒子经过加速电压加速后，速度增大。已知电子质量 $m=9.11\times10^{-31}$kg，电荷的绝对值 $e=1.60\times10^{-19}$C。

(1) 设电子的质量与速度无关，把静止电子加速到光速 $c=3\times10^{8}$m/s 要多高的电压 ΔU?

(2) 对于高速运动的物体来说，上面的算法不对，因为根据相对论，物体的动能不是 $\frac{1}{2}mv^2$，而是 $mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)$，按照这公式，静止电子经过上述电压 ΔU 加速后，速度 v 是多少？它是光速 c 的百分之几?

(3) 按照相对论，要把带电粒子从静止加速到光速，需要多高的电压？这可能吗?

解：(1) 根据能量守恒关系 $e\Delta U=\frac{1}{2}mv^2$，得

$$\Delta U=\frac{mc^2}{2e}=\frac{9.11\times10^{-31}\times(3\times10^{8})^2}{2\times1.60\times10^{-19}}=2.56\times10^{5}\text{V}$$

(2) 根据 $e\Delta U=mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)$，得

$$v=c\sqrt{1-\frac{m^2c^4}{(mc^2+e\Delta U)^2}}$$

代入数据计算得 $v=2.24\times10^{8}$m/s，所以

$$\frac{v}{c}=\frac{2.24\times10^{8}}{3\times10^{8}}=74.5\%$$

(3) 根据 $e\Delta U=mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)$，得

$$\Delta U = \frac{mc^2}{e}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)$$

当 $v\to c$，则 $\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\to\infty$，即 $\Delta U\to\infty$，因此是不可能的。

1－36 如图 1－43 所示，在半径为 R_1 和 R_2 的两个同心球面上，分别均匀地分布着电荷 Q_1 和 Q_2。

(1) 求Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ这 3 个区域内的场强分布。

(2) 若 $Q_1=-Q_2$，情况如何？画出此情形下的 $E-r$ 曲线。

(3) 按情形(2)求Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ这 3 个区域内的电势分布，画出 $U-r$ 曲线。

解：(1) 由对称性分析可知，在半径为 r 的同心球面上的场强的大小相等，方向沿径向。根据高斯定理 $\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=E\cdot 4\pi r^2=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内}q_i$ 得

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sum_{S内}q_i$$

当 $0<r<R_1$ 时，$\sum_{S内}q_i=0$，所以

$$E_{Ⅰ}=0$$

当 $R_1<r<R_2$ 时，$\sum_{S内}q_i=Q_1$，所以

$$E_{Ⅱ}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1}{r^2}$$

当 $r>R_2$ 时，$\sum_{S内}q_i=Q_1+Q_2$，所以

$$E_{Ⅲ}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1+Q_2}{r^2}$$

(2) 若 $Q_1=-Q_2$，同理可知 $E_{Ⅰ}$ 和 $E_{Ⅱ}$ 同前，但在第Ⅲ区域内，由于 $Q_1+Q_2=0$，所以 $E_{Ⅲ}=0$。$E-r$ 曲线如图 1－44 所示。

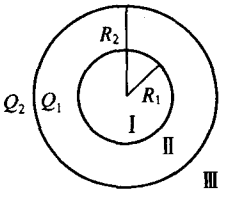


图 1－43 习题 1－36

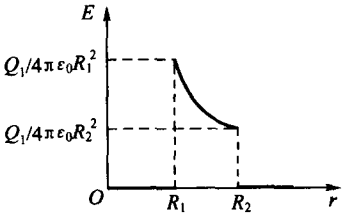


图 1－44 $E-r$ 曲线

(3) 设 $P_{Ⅰ}$、$P_{Ⅱ}$、$P_{Ⅲ}$ 分别为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ区域内的任意一点。

当 $0<r<R_1$ 时，

$$U_{Ⅰ}=\int_{P_{Ⅰ}}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_r^{R_1}E_{Ⅰ}\cdot dr+\int_{R_1}^{R_2}E_{Ⅱ}\cdot dr+\int_{R_2}^{\infty}E_{Ⅲ}\cdot dr$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \mathrm{d}r = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

当 $R_1 < r < R_2$ 时，

$$U_{\mathrm{II}} = \int_{P_{\mathrm{II}}}^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{r}^{R_2} E_{\mathrm{II}} \cdot \mathrm{d}r + \int_{R_2}^{\infty} E_{\mathrm{III}} \cdot \mathrm{d}r$$

$$= \int_{r}^{R_2} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \mathrm{d}r = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right)$$

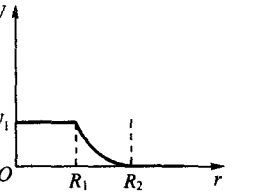


图 1－45　$U-r$ 曲线

当 $r > R_2$ 时，

$$U_{\mathrm{III}} = \int_{P_{\mathrm{III}}}^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{r}^{\infty} E_{\mathrm{III}} \cdot \mathrm{d}r = 0$$

$U-r$ 曲线如图 1－45 所示。

1－37　一对无限长的共轴圆筒，半径分别为 R_1 和 R_2，筒面上都均匀带电。沿轴线单位长度的电量分别为 λ_1 和 λ_2。

(1) 求各区域的场强分布。

(2) 若 $\lambda_1 = -\lambda_2$，情况如何？画出此情形下的 $E-r$ 曲线。

(3) 按情形(2)求两筒间的电势差和电势分布。

解：(1) 在空间任取一点 P(距圆柱轴 r)，过 P 做与圆柱同轴高为 h 的圆柱面 S 为高斯面。根据对称性 $\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E2\pi rh$，又根据高斯定理

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E2\pi rh = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S\text{内}} q_i$$

所以当 $r < R_1$ 时，

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E_1 2\pi rh = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S\text{内}} q_i = 0$$

$$E_1 = 0$$

当 $R_1 < r < R_2$ 时，

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E_2 2\pi rh = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \lambda_1 h$$

$$E_2 = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

当 $r > R_2$ 时，

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E}_3 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E_3 2\pi rh = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S\text{内}} q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} h \cdot (\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$E_3 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

(2) 若 $\lambda_1 = -\lambda_2$，则 E_1、E_2 不变，$E_3 = 0$。$E-r$ 曲线如图 1－46 所示。

(3) 两筒间的电势差

$$\Delta U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} E_2 \cdot \mathrm{d}r = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r} \cdot \mathrm{d}r = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

电势分布：若选 R_2 处为零势点，

则 $r<R_1$ 区域为等势体，其电势

$$U_1=\int_r^{R_2}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{R_1}^{R_2}E_2\cdot\mathrm{d}r=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

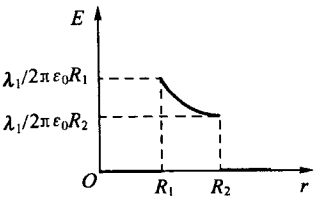


图 1－46　$E-r$ 曲线

$R_1<r<R_2$ 区域

$$U_2=\int_r^{R_2}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_r^{R_2}E_2\cdot\mathrm{d}r=\int_r^{R_2}\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\mathrm{d}r=\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{r}$$

$r>R_2$ 区域

$$U_3=\int_r^{R_2}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_r^{R_2}E_3\cdot\mathrm{d}r=0$$

1－38　半径为 R 的无限长直圆柱体内均匀带电，电荷的体密度为 ρ_e。

(1) 求场强分布，并画出 $E-r$ 曲线；

(2) 以轴线为电势零点求电势分布。

解：(1) 在空间任取一点 P(距圆柱轴 r)，过 P 做与圆柱同轴高为 h 的圆柱面 S 为高斯面。根据对称性 $\Phi_e=\oiint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=E2\pi rh$，又根据高斯定理

$$\Phi_e=\oiint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=E2\pi rh=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内}q_i$$

当 $r<R$ 时，

$$\Phi_e=\oiint_S\vec{E}_1\cdot\mathrm{d}\vec{S}=E_1 2\pi rh=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内}q_i=\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\pi r^2h\rho_e$$

$$E_1=\frac{\rho_e}{2\varepsilon_0}\cdot r$$

当 $r>R$ 时，

$$\Phi_e=\oiint_S\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{S}=E_2 2\pi rh=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内}q_i=\frac{1}{\varepsilon_0}\pi R^2h\rho_e$$

$$E_2=\frac{\rho_e R^2}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$$

$E-r$ 曲线如图 1－47 所示。

(2) 根据 $U=\int_P^{"0"}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ 得

当 $r<R$ 时，

$$U=\int_r^0\vec{E}_1\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_r^0\frac{\rho_e}{2\varepsilon_0}r\cdot\mathrm{d}r=-\frac{\rho_e}{4\varepsilon_0}r^2$$

当 $r>R$ 时，

$$U=\int_r^0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_R^0E_1\cdot\mathrm{d}r+\int_r^RE_2\cdot\mathrm{d}r$$

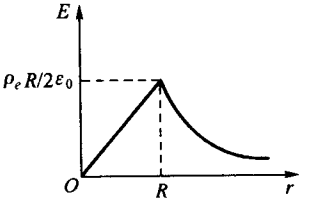


图 1－47　$E-r$ 曲线

$$= \int_R^0 \frac{\rho_e}{2\varepsilon_0} r \cdot \mathrm{d}r + \int_r^R \frac{\rho_e R^2}{2\varepsilon_0} \frac{1}{r} \cdot \mathrm{d}r = -\frac{\rho_e}{4\varepsilon_0} R^2 + \frac{\rho_e R^2}{2\varepsilon_0} \ln \frac{R}{r}$$

1－39 设气体放电形成的等离子体圆柱内的体电荷分布可用下式表示：$\rho_e(r) = \frac{\rho_0}{\left[1+\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^2}$，式中 r 是到轴线的距离，ρ_0 是轴线上的 ρ_e 值，a 是个常量(它是 ρ_e 减少到 $\rho_0/4$ 处的半径)。

(1) 求场强分布。

(2) 以轴线为电势零点求电势分布。

解：(1) 设距轴 r 处的场强为 E，取一与等离子圆柱体同轴，且底面垂直于轴，半径为 r，长为 l 的封闭圆柱面 S 作为高斯面。此面内的电量

$$\sum_{S内} q_i = \int_0^r (2\pi r' l \mathrm{d}r') \rho_e(r') = 2\pi l \rho_0 \int_0^r \frac{r'}{\left[1+\left(\frac{r'}{a}\right)^2\right]^2} \mathrm{d}r' = \frac{\pi \rho_0 l a^2 r^2}{a^2 + r^2}$$

通过 S 的电通量

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E \cdot 2\pi r l$$

根据高斯定理得

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\pi \rho_0 l a^2 r^2}{a^2 + r^2}$$

所以

$$E = \frac{\rho_0 a^2 r}{2\varepsilon_0 (a^2 + r^2)}$$

方向垂直于轴线 OO' 指向等离子圆柱体外。

(2) 以轴线为电势零点求电势分布

$$U = \int_r^0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}\,' = \frac{a^2 \rho_0}{2\varepsilon_0} \int_r^0 \frac{r'}{(a^2 + r'^2)} \mathrm{d}r' = \frac{a^2 \rho_0}{2\varepsilon_0} \ln \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

1－40 一电子二极管由半径 $r = 0.50\mathrm{mm}$ 的圆柱形阴极 K 和套在阴极外同轴圆筒形的阳极 A 构成，阳极的半径 $R = 0.45\mathrm{cm}$，且阳极电势比阴极高 300V。设电子从阴极发射出来时速度很小，可忽略不计。求：

(1) 电子从 K 向 A 走过 2.0mm 时的速度。

(2) 电子到达 A 时的速度。

解：设电子二极管同轴阴极和阳极的横截面如图 1－48 所示。P 点到轴线的距离 $r' = 2.0\mathrm{mm}$。

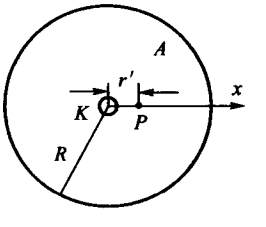


图 1－48 习题 1－40

(1) 两极间电场的分布 $E = \frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0 x}$ 方向沿半径指向阴极轴线。

阴极 K 与 P 点之间的电势差

$$U_{KP}=\int_K^P \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=-\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0}\int_r^{r'}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r'}{r}$$

阴极 K 与阳极 A 之间的电势差

$$U_{KA}=\int_K^A \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=-\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0}\int_r^R \frac{1}{x}\cdot \mathrm{d}x=-\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r}$$

两式相比得

$$U_{KP}=U_{KA}\left(\frac{\ln\frac{r'}{r}}{\ln\frac{R}{r}}\right)$$

电子在电场力作用下，由 K 到 P 增加的动能，等于电场力所做之功，即

$$\frac{1}{2}mv_P^2=eU_{KP}$$

所以电子在 P 点的速度大小

$$v_P=\sqrt{\frac{2eU_{KP}}{m}}=\sqrt{\frac{2eU_{KA}}{m}\left(\frac{\ln\frac{r'}{r}}{\ln\frac{R}{r}}\right)}$$

代入数据计算得 $v_P=8.8\times10^6\mathrm{m/s}$

(2) 同理可得

$$v_A=\sqrt{\frac{2eU_{KA}}{m}}=1.03\times10^7\mathrm{m/s}$$

1-41 如图 1-49 所示，一对均匀、等量异号的平行带电平面。若其间距离 d 远小于带电平面的限度时，这对带电面可看成是无限大的。这样的模型可叫做电偶极层。求场强和电势沿垂直两平面的方向 x 的分布，并画出 $E-x$ 和 $U-x$ 曲线(取离两平面等距的 O 点为参考点，令该处电势为零)。

解：(1) 场强的分布。如图 1-49 所示，设场强 $\vec{E}$ 的方向沿 x 轴正向为正，反之为负。

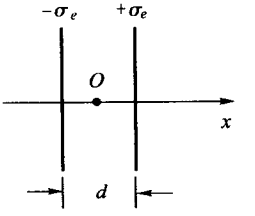


图 1-49 习题 1-41

两面之外

$$E_{外}=-\sigma_e/2\varepsilon_0+\sigma_e/2\varepsilon_0=0$$

两面之内

$$E_{内}=-\sigma_e/2\varepsilon_0-\sigma_e/2\varepsilon_0=-\sigma_e/\varepsilon_0$$

(2) 电势的分布。取距两平面等距的 O 点电势为零。

当 $x<-\frac{d}{2}$ 时，

$$U=\int_x^0 \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{x}=\int_x^{-\frac{d}{2}}E_{外}\,\mathrm{d}x+\int_{-\frac{d}{2}}^0 E_{内}\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{d}{2}}^0\frac{-\sigma_e}{\varepsilon_0}\mathrm{d}x=-\frac{\sigma_e d}{2\varepsilon_0}$$

当 $-\frac{d}{2}<x<\frac{d}{2}$ 时，

$$U=\int_x^0 \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{x}=\int_x^0 \frac{-\sigma_e}{\varepsilon_0}\mathrm{d}x=\frac{\sigma_e x}{\varepsilon_0}$$

当 $x>\frac{d}{2}$ 时，

$$U=\int_x^0 \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{x}=\int_x^{\frac{d}{2}} E_{外}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{d}{2}}^0 E_{内}\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{d}{2}}^0 \frac{-\sigma_e}{\varepsilon_0}\mathrm{d}x=\frac{\sigma_e d}{2\varepsilon_0}$$

$E-x$ 和 $U-x$ 曲线如图 1-50 和图 1-51 所示。

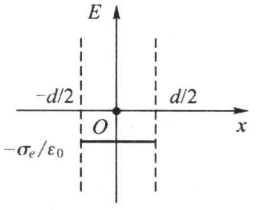


图 1-50　$E-x$ 曲线

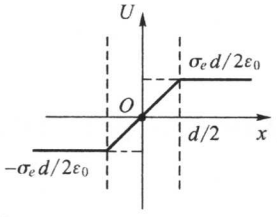


图 1-51　$U-x$ 曲线

1-42　在半导体 PN 结附近总是堆积着正、负电荷，在 N 区内有正电荷，P 区内有负电荷，两区电荷的代数和为零。我们把 PN 结看成是一对带正、负电的无限大平板，它们相互接触(见图 1-52)。取坐标 x 的原点在 P、N 区的交接面上，N 区的范围是 $-x_N\leqslant x\leqslant 0$，P 区的范围是 $0\leqslant x\leqslant x_P$，设两区内电荷分布都是均匀的，N 区：$\rho_e(x)=n_N e$，P 区：$\rho_e(x)=-n_P e$，这里 n_N、n_P 是常量，且 $n_N x_N=n_P x_P$(两区电荷数量相等)。试证明：

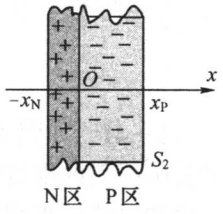


图 1-52　习题 1-42

(1) 电场的分布为

$$\begin{cases}\text{N 区：}E(x)=\dfrac{n_N e}{\varepsilon_0}(x_N+x)\\ \text{P 区：}E(x)=\dfrac{n_P e}{\varepsilon_0}(x_P-x)\end{cases}$$

并画出 $\rho_e(x)$ 和 $E(x)$ 随 x 变化的曲线来。

(2) PN 结内的电势分布为 $\begin{cases}\text{N 区：}U(x)=-\dfrac{n_N e}{\varepsilon_0}\left(x_N x+\dfrac{1}{2}x^2\right)\\ \text{P 区：}U(x)=-\dfrac{n_P e}{\varepsilon_0}\left(x_P x-\dfrac{1}{2}x^2\right)\end{cases}$ 这公式是以何处为电势零点的？PN 结两侧的电势差多少？

证明：(1)因两区域电荷代数和为零，所以区域外场强为零。两区域内的总场强均从左指向右，且垂直于两带电平板。

如图 1-53 所示，做底面垂直于 x 轴大小为 ΔS、侧面平行于 x 轴的封闭圆柱面 S_1 和 S_2 为高斯面，根据高斯定理，在 N 区有

$$E_1(x)\Delta S=\frac{\Delta S(x_N-|x|)\rho_e}{\varepsilon_0}$$

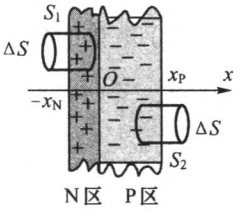


图 1-53　习题 1-42

所以

$$E_1(x) = \frac{n_N e}{\varepsilon_0}(x_N + x)(\text{注意:}x\text{ 为负值})$$

在 P 区有

$$E_2(x)\Delta S\cos\pi = -\frac{\Delta S(x_P - x)\rho_e}{\varepsilon_0}$$

所以

$$E_2(x) = \frac{n_P e}{\varepsilon_0}(x_P - x)$$

$\rho_e(x)$和$E(x)$随x变化的曲线如图 1－54 所示。

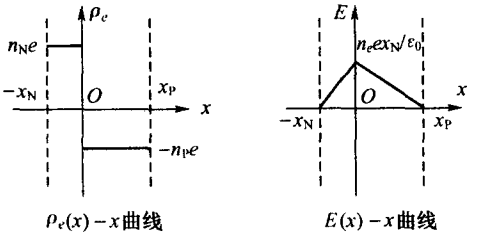


图 1－54　习题 1－42

(2) 令 PN 结的交界面的电势为零

则在 N 区的电势分布为

$$U_1 = \int_P^{"0"} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_x^0 E_1 \cdot dx = -\frac{n_N e}{\varepsilon_0}\left(x_N x + \frac{1}{2}x^2\right)$$

在 P 区的电势分布为

$$U_2 = \int_P^{"0"} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_x^0 E_2 \cdot dx = -\frac{n_P e}{\varepsilon_0}\left(x_P x - \frac{1}{2}x^2\right)$$

以上证明是以 PN 结的交界面作为电势零点的。

1－43　如果在上题中电荷的体分布为

$$\begin{cases}\text{PN 外:} & \rho_e(x) = 0\\ -x_N \leqslant x \leqslant x_P: & \rho_e(x) = -eax\end{cases}$$

这里 a 是常量，$x_N = x_P$(为什么?)统一用 $x_m/2$ 表示。试证明:

(1) 电场的分布为:$E(x) = \frac{ae}{8\varepsilon_0}(x_m^2 - 4x^2)$，并画出 $\rho_e(x)$和$E(x)$随x变化的曲线来。

(2) PN 结内的电势分布为 $U(x) = \frac{ae}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x_m^2 x}{4}\right)$，这公式是以何处为电势零点的? PN 结两侧的电势差多少?

证明:(1) 分析与上题相同，取上题图中的圆柱面 S_2 为高斯面，注意此时 $\rho_e(x) = -eax$，通过 S_2 的电通量为

$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -E(x)\Delta S$$

S_2 内的电量为

$$\sum_{S内} q_i = \int_V \rho_e \mathrm{d}V = \int_x^{x_P} (-eax)\Delta S \mathrm{d}x = -ea\Delta S\left(\frac{x_P^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right)$$

根据高斯定理得

$$-E(x)\Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[-ea\Delta S\left(\frac{x_P^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right)\right]$$

所以

$$E(x) = \frac{ea}{\varepsilon_0}\left(\frac{x_P^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{ea}{8\varepsilon_0}(x_m^2 - 4x^2)$$

$\rho_e(x)$和$E(x)$随x 变化的曲线如图 1－55 所示。

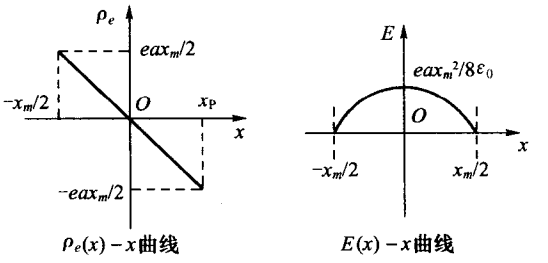


图 1－55　习题 1－43

(2) 令 PN 结的交界面的电势为零,则在 PN 结内的电势分布为

$$U = \int_P^{"0"} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_x^0 E(x)\cdot \mathrm{d}x$$

$$= \int_x^0 \frac{ae}{8\varepsilon_0}(x_m^2 - 4x^2)\mathrm{d}x = \frac{ae}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x_m^2 x}{4}\right)$$

将 $x = \frac{x_m}{2}$和 $x = -\frac{x_m}{2}$分别代入上式,可得

PN 结右侧面的电势

$$U_P = -\frac{aex_m^3}{24\varepsilon_0}$$

PN 结左侧面的电势

$$U_N = \frac{aex_m^3}{24\varepsilon_0}$$

所以,PN 结两侧的电势差

$$U_{PN} = U_P - U_N = -\frac{aex_m^3}{12\varepsilon_0}$$

1－44　证明:在真空静电场中凡是电场线都是平行直线的地方,电场强度的大小必定处处相等;或者换句话说,凡是电场强度的方向处处相同的地方,电场强度的大小必定

处处相等。(提示:利用高斯定理和做功与路径无关的性质,分别证明沿同一电场线和沿同一等势面上两点的场强相等。)

证明:如图 1-56 所示设 A、C 是静电场中的任意两点,过 C 做平面 $CB \perp AB$。因 $\vec{E}$ 处处平行,故 BC 平面是等势面。

取底面 ΔS 垂直于电力线,侧面平行于电力线的圆柱面 S 为高斯面,由高斯定理,可得

$$-E_A\Delta S + E_B\Delta S = 0$$

所以

$$E_A = E_B$$

又因

$$U_B = U_C$$

但

$$E_B = -\frac{\partial U_B}{\partial Z} = -\frac{\partial U_C}{\partial Z} = E_C$$

所以

$$E_A = E_C$$

得证。

1-45 如图 1-57 所示,一平行板电容器充电后,A、B 两极板上的面密度分别为 σ_e 和 $-\sigma_e$。设 P 为两极板间任意一点,略去边缘效应(即可把两板当做无限大)。

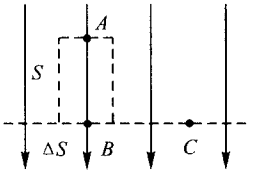


图 1-56 习题 1-44

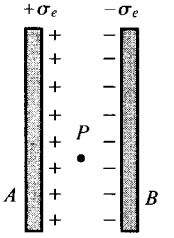


图 1-57 习题 1-45

(1) 求 A 板上的电荷在 P 点产生的电场强度 $\vec{E}_A$;

(2) 求 B 板上的电荷在 P 点产生的电场强度 $\vec{E}_B$;

(3) 求 A、B 两板上的电荷在 P 点产生的电场强度 $\vec{E}$;

(4) 若把 B 板拿走,A 板上的电荷如何分布? A 板上的电荷在 P 点产生的电场强度为多少?

解:(1) 根据无限大均匀带电平板的场强公式,A 板上的电荷在 P 点产生的电场强度 $E_A = \sigma_e/2\varepsilon_0$,方向指向 B。

(2) 同理,B 板上的电荷在 P 点产生的电场强度 $E_B = \sigma_e/2\varepsilon_0$,方向指向 B。

(3) 根据场强叠加原理,$E = E_A + E_B = \sigma_e/\varepsilon_0$,方向由 P 指向 B。

(4) 拿走 B 板,A 板表面的电荷将在两侧面上均匀分布,设面电荷密度为 σ'_e,则 $2\sigma'_e = \sigma_e$,两侧面电荷在 P 点的场强 $E_P = \sigma'_e/2\varepsilon_0 + \sigma'_e/2\varepsilon_0 = \sigma_e/2\varepsilon_0$,方向指向 B。

1－46 对于两个无限大的平行平面带电导体板来说，

(1) 证明：相向的两面(见图 1－58 中 2 和 3)上，电荷的面密度总是大小相等而符号相反；

(2) 证明：相背的两面(见图 1－58 中 1 和 4)上，电荷的面密度总是大小相等而符号相同；

(3) 若左导体板带电 $+3\mu C/m^2$，右导体板带电 $+7\mu C/m^2$，求 4 个表面上的电荷。

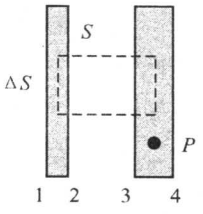


图 1－58 习题 1－46

证明：(1) 设 1、2、3、4 面的面电荷密度分别为 σ_1、σ_2、σ_3、σ_4。作圆柱高斯面 S 如图 1－58 所示，则

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i=\frac{1}{\varepsilon_0}(\Delta S\sigma_2+\Delta S\sigma_3)$$

因为静电平衡时，导体板内 $E=0$，所以 S 的两底通量为零。又侧面电通量也为零，所以

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=0$$

则

$$\sigma_2=-\sigma_3$$

(2) 设 P 为导体内任一点，由于静电平衡，所以 $E_P=0$，即 1、2、3、4 面的面电荷在 P 点的合场强 $\vec{E}_P=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3+\vec{E}_4=0$。由于 $\sigma_2=-\sigma_3$，$\vec{E}_2=-\vec{E}_3$，这就要求 $\vec{E}_1+\vec{E}_4=0$，即 $\vec{E}_1$、$\vec{E}_4$ 等值反向。另因 P 点在 1、4 两面之间，所以要求 σ_1 与 σ_4 为同号电荷。即 $E_1=E_4=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}$，所以 $\sigma_1=\sigma_4$。

(3) 根据已知条件及(1)和(2)的结果可得

$$\sigma_1+\sigma_2=3;\sigma_3+\sigma_4=7;\sigma_1=\sigma_4;\sigma_2=-\sigma_3$$

解方程组得

$$\sigma_1=\sigma_4=5\mu C/m^2;\sigma_2=-2\mu C/m^2;\sigma_3=2\mu C/m^2$$

1－47 两平行金属板分别带有等量的正负电荷。两板的电势差为 120V，两板的面积都是 $3.6cm^2$，两板相距 1.6mm。略去边缘效应，求两板间的电场强度和各板上所带的电量。

解：两板间的电场

$$E=\frac{\Delta U}{d}=\frac{120\,V}{1.6\times10^{-3}m}=7.5\times10^4V/m$$

因为

$$E=\frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

所以各板上的带电量

$$Q=E\varepsilon_0 S=7.5\times10^4\times8.85\times10^{-12}\times3.6\times10^{-4}=2.4\times10^{-10}C$$

1－48 两块带有等量的异号电荷的金属板 a 和 b 相距 5.0mm，两板的面积都是

150cm^2,电量的数值都是2.66×10^{-8}C,a板带正电并接地(见图1-59)。以地为电势零点,略去边缘效应,问:

(1) b板的电势是多少?

(2) a、b间离a板1.0mm处的电势是多少?

解:(1) 极板间场强E的大小为

$$E=\frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

b板上的电势

$$U_b=\int_b^a\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_b^a E\cos\pi\mathrm{d}l=-\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\int_b^a\mathrm{d}l=-\frac{Q\overline{ab}}{\varepsilon_0 S}$$

代入数据计算得:$U_b=-1.0\times10^3$V

(2) $U=-Ed=-\frac{Qd}{\varepsilon_0 S}=-2.0\times10^2$(V)

1-49 三平行金属板A、B和C,面积都是200cm^2,A、B相距4.0mm,A、C相距2.0mm,B、C两板都接地(见图1-60)。如果使A板带正电3.0×10^{-7}C,在略去边缘效应时,问B板和C板上的感应电荷各是多少?以地为电势零点,问A板的电势是多少?

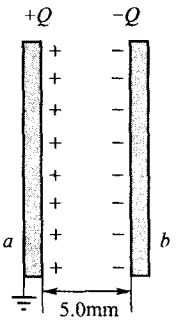


图1-59 习题1-48

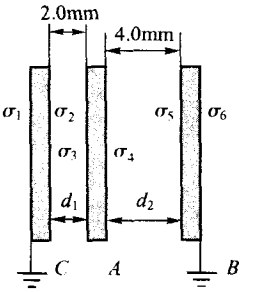


图1-60 习题1-49

解:设达到静电平衡时各导体上的电荷分布如图1-60所示。因静电平衡时各导体内电场均为零,所以根据高斯定理可得$\sigma_2=-\sigma_3$;$\sigma_4=-\sigma_5$

又因为B、C接地,所以:$\sigma_1=\sigma_6=0$

则A、C间的电场$E_1=\frac{\sigma_3}{\varepsilon_0}$;电压$U_1=E_1\cdot d_1=\frac{\sigma_3\cdot d_1}{\varepsilon_0}$

A、B间的电场$E_2=\frac{\sigma_4}{\varepsilon_0}$;电压$U_2=E_2\cdot d_2=\frac{\sigma_4\cdot d_2}{\varepsilon_0}$

因为$U_1=U_2$,所以

$$\frac{\sigma_3}{\varepsilon_0}\cdot d_1=\frac{\sigma_4}{\varepsilon_0}\cdot d_2 \qquad ①$$

据电荷守恒得

$$(\sigma_3+\sigma_4)\cdot s=Q_A \qquad ②$$

联立式①、式②可得

$$\sigma_4 = \frac{Q_A}{3S} = 5 \times 10^{-6}\text{C/m}^2$$

$$\sigma_3 = \frac{2Q_A}{3S} = 1.0 \times 10^{-5}\text{C/m}^2$$

所以

$$Q_B = S \cdot \sigma_5 = -S \cdot \sigma_4 = -1.0 \times 10^{-7}\text{C}$$

$$Q_C = S \cdot \sigma_2 = -S \cdot \sigma_3 = -2.0 \times 10^{-7}\text{C}$$

$$U_A = E_1 \cdot d_1 = \frac{\sigma_3}{\varepsilon_0} \cdot d_1 = 2.3 \times 10^3\text{V}$$

1-50 点电荷 q 处在导体球壳的中心，壳的内、外半径分别为 R_1 和 R_2，如图 1-61 所示。求场强和电势的分布，并画出 $E-r$ 和 $U-r$ 曲线。

解：(1) 场强分布。根据对称性可知，场强分布具有球对称性，即同一球面上大小相等，方向沿径向。

取与球壳同心，半径为 r 的球面为高斯面。则根据高斯定理可得

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon_0} q & (r < R_1) \\ 0 & (R_1 < r < R_2) \\ \dfrac{1}{\varepsilon_0} q & (r > R_2) \end{cases}$$

所以，场强分布

$$E = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r < R_1) \\ 0 & (R_1 < r < R_2) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > R_2) \end{cases}$$

(2) 电势分布。取无穷远处为电势零点，则

$$U(r) = \int_r^\infty \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$r > R_2$ 时，

$$U(r) = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$R_1 < r < R_2$ 时，

$$U(r) = \int_{R_2}^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$0 < r < R_1$ 时，

$$U(r) = \int_{R_2}^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \mathrm{d}r + \int_r^{R_1} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$E-r$ 和 $U-r$ 曲线如图 1-62 和图 1-63 所示。

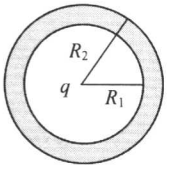


图 1－61　习题 1－50

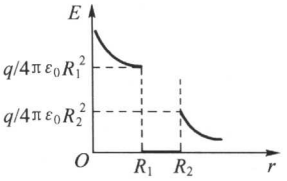


图 1－62　$E-r$ 关系曲线

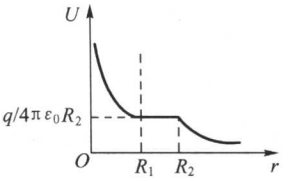


图 1－63　$U-r$ 关系曲线

1－51　在上题中，若 $q=4.0\times10^{-10}\text{C}$，$R_1=2.0\text{cm}$，$R_2=3.0\text{cm}$，

(1) 求导体球壳的电势；

(2) 求离球心 $r=1.0\text{cm}$ 处的电势；

(3) 把点电荷移开球心 1.0cm，求导体球壳的电势。

解：(1)由上题结果，导体球壳的电势

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=120\text{V}$$

(2) 离球心 $r=1.0\text{cm}$ 处的电势

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=300\text{V}$$

(3) 把点电荷移开球心 1.0cm，只影响球壳内表面上的电荷分布，不会影响球壳外表面上的电荷分布，因而球壳外的场强和电势分布不会因此而改变，球壳上的电势也不变，所以导体球壳的电势为

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=120\text{V}$$

1－52　详见本章典型例题例 1－3。

1－53　在上题中设 $q=1.0\times10^{-10}\text{C}$，$Q=11\times10^{-10}\text{C}$，$R_1=1.0\text{cm}$，$R_2=3.0\text{cm}$，$R_3=4.0\text{cm}$，试计算各情形中的 U_1、U_2 和 ΔU。

解：(1) $U_1=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q}{R_1}-\dfrac{q}{R_2}+\dfrac{Q+q}{R_3}\right)=330\text{V}$；$U_2=\dfrac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}=270\text{V}$

(2) $\Delta U=U_1-U_2=60\text{V}$

(3) $U_1=U_2=\dfrac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}=270\text{V}$；$\Delta U=0$

(4) $U_2=0$；$U_1=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)=60\text{V}$

(5) $U_1=0$；$U_2=\dfrac{Q(R_2-R_1)}{4\pi\varepsilon_0(R_2R_3-R_1R_3+R_1R_2)}=180\text{V}$

$\Delta U=U_1-U_2=-180\text{V}$

1－54　假设范德格拉夫起电机的球壳与传送带上喷射电荷的尖针之间的电势差为 $3.0\times10^6\text{V}$，如果传送带迁移电荷到球壳上的速率为 $3.0\times10^{-3}\text{C/s}$，则在仅考虑电力的情况下，必须用多大的功率来开动传送带？

解:所求功率

$$P = \frac{A}{t} = \frac{q}{t}\Delta U = 3.0 \times 10^{-3} \times 3.0 \times 10^{6} = 9.0 \times 10^{3}\text{W} = 9.0\text{kW}$$

1－55 范德格拉夫起电机的球壳直径为 1.0m,空气的击穿场强为 30kV/cm(即球表面的场强超过此值,电荷就会从空气中漏掉)。这起电机最高能达到多高的电势?

解:导体球带电后,在球面附近产生的电场最强。起电机球壳的最高电势是以球面电场达击穿场强为限,即

$$E_{\max} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{U_{\max}}{R}$$

所以

$$U_{\max} = RE_{\max} = 50 \times 30 \times 10^{3} = 1.5 \times 10^{6}\text{V}$$

1－56 地球的半径为 6370km,把地球当作真空中的导体球,求它的电容。

解:设其带电量为 Q,则其电势为

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

所以,其电容为

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

代入数据计算得 $C = 7.08 \times 10^{-4}\text{F}$

1－57 如图 1－64 所示,平行板电容器两极板的面积都是 S,相距为 d,其间有一厚为 t 的金属片。略去边缘效应

(1) 求电容 C;

(2) 金属片离极板的远近有无影响?

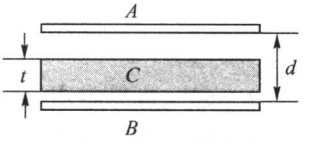


图 1－64 习题 1－57

解:(1) AB 间电容为 AC 间电容与 BC 间电容的串联,设 A、C 板间的距离为 x。则

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{AC}} + \frac{1}{C_{BC}} = \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 S}{x}} + \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 S}{d-t-x}} = \frac{d-t}{\varepsilon_0 S}$$

所以

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d-t}$$

(2) 因为 $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d-t}$ 与 x 无关,所以金属片离极板的远近对 C 无影响。

1－58 如图 1－65 所示,一电容器两极板都是边长为 a 的正方形金属平板,两板不严格平行,其间有一夹角 θ。证明:当 $\theta \ll d/a$ 时,略去边缘效应,它的电容为

$$C = \varepsilon_0 \frac{a^2}{d}\left(1 - \frac{a\theta}{2d}\right)$$

证明:将电容器看成由无限多个极板为细狭条的元电容并联组成,元电容

$$dC = \frac{\varepsilon_0 ds}{d'} = \frac{\varepsilon_0 a\,dx}{d + x\sin\theta} \approx \frac{\varepsilon_0 a\,dx}{d + x\theta}$$

总电容

$$C = \int dC = \int_0^a \frac{\varepsilon_0 a\,dx}{d + x\theta} = \frac{\varepsilon_0 a}{\theta}\ln\left(1 + \frac{\theta}{d/a}\right)$$

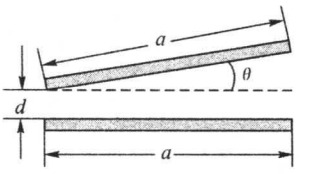


图 1-65　习题 1-58

因为 $\theta \ll d/a$ 所以上式按泰勒级数展开后只取前两项 $\left(\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}\right)$

则

$$C = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d}\left(1 - \frac{a\theta}{2d}\right)$$

1-59　半径都是 a 的两根平行长直导线相距为 $d(d \gg a)$ 如图 1-66 所示，求单位长度的电容。

解：设两导线的带电密度分别为 $+\lambda$、$-\lambda$，则垂直截面 OO' 连线上 P 点场强(方向沿 x 轴)

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\lambda}{x} + \frac{\lambda}{d - x}\right)$$

两导线间的电势差

$$U = \int_a^{d-a} E\,dx = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}[\ln x - \ln(d - x)]_d^{d-a} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d - a}{a}$$

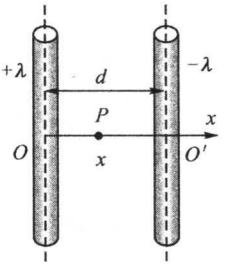


图 1-66　习题 1-59

两导线单位长度的电容

$$C = \frac{\lambda}{U} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{d - a}{a}}$$

1-60　证明：同轴圆柱形电容器两极板的半径相差很小(即 $R_B - R_A \ll R_A$)时，它的电容公式 $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\dfrac{R_B}{R_A}\right)}$，趋于平行板电容公式 $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$。

证明：因为同轴圆柱形电容器的电容 $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\dfrac{R_B}{R_A}\right)}$

令 $R_B - R_A = d$，则 $R_B = R_A + d$

所以

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(1 + \dfrac{d}{R_A}\right)}$$

由于 $d \ll R_A$，分母展成泰勒级数只取第一项，即 $\ln(1 + d/R_A) \approx d/R_A$

所以 $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 l}{d/R_A} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 l R_A}{d} = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$　$(S = 2\pi R_A l)$，即趋于平行板电容公式。

1-61　证明：同心球形电容器两极板的半径相差很小(即 $R_B - R_A \ll R_A$)时，它的

电容公式 $C=\dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_A R_B}{R_B-R_A}$，趋于平行板电容公式 $C=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$。

证明：因为同心球形电容器的电容 $C=\dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_A R_B}{R_B-R_A}$

令 $R_B-R_A=d$，因 R_B、R_A 相差很小，则 $R_B\approx R_A=R$

所以 $C=\dfrac{4\pi\varepsilon_0 R^2}{R_B-R_A}=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$，即趋于平行板电容公式。

1－62 一球形电容器内外两壳的半径分别为 R_1 和 R_4，今在两壳之间放一个内外半径分别为 R_2 和 R_3 的同心导体球壳（见图 1－67）。

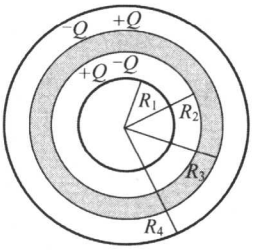


图 1－67 习题 1－62

（1）给内壳（R_1）以电量 Q，求 R_1 和 R_4 两壳的电势差；

（2）求以 R_1 和 R_4 为两极的电容。

解：（1）当给内壳（R_1）以电量 Q 时，因静电感应，各球面带电情况如图 1－67 所示，R_2 和 R_3 间（导体球壳内）无电场，故

$$U_{14}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r+\int_{R_3}^{R_4}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_4}\right)$$

（2）$C=\dfrac{Q}{U_{14}}=\dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_1R_2R_3R_4}{R_2R_3R_4-R_1R_3R_4+R_1R_2R_4-R_1R_2R_3}$

1－63 半径为 2.0cm 的导体球外套有一个与它同心的导体球壳，壳的内外半径分别为 4.0cm 和 5.0cm，球与壳间是空气，壳外也是空气。当内球的电量为 3.0×10^{-8}C 时，

（1）这个系统储存了多少电能？

（2）如果用导线把球与壳连在一起，结果如何？

解：（1）设内球所带电量为 q，因静电感应，球壳内层带 $-q$，外层带 $+q$，令内球半径、球壳内、外半径分别为 R_1、R_2、R_3，则导体球的电势

$$U_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)$$

导体球壳的电势

$$U_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_3}$$

此系统储存的电能

$$W_e=\frac{1}{2}(qU_1-qU_2+qU_2)=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)$$

代入数据计算得 $W_e=1.8\times10^{-4}$J

（2）此时电荷全分布在球壳外表面，且导体球壳的电势 $U_3=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R_3}$

此系统储存的电能

$$W_e=\frac{1}{2}qU_3=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_3}$$

代入数据计算得 $W_e = 8.1 \times 10^{-5}\text{J}$

1－64 激光闪光灯的电源线路如图 1－68 所示，由电容器 C 储存的能量通过闪光灯放电，给闪光灯提供能量。电容 $C = 6000\mu\text{F}$，火花间隙击穿电压为 2000V，问 C 在一次放电过程中，能放出多少能量？

解：电容 C 充电的最高电压为间隙击穿电压，所以电容 C 储存的能量最大值

$$W_{\text{m}} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \times 6000 \times 10^{-6} \times (2000)^2 = 1.2 \times 10^4\text{J}$$

1－65 地面可看成是无限大的导体平面，一均匀带电无限长直导线平行地面放置（垂直于本题图 1－69），求空间的电场强度、电势分布和地表上的电荷分布。

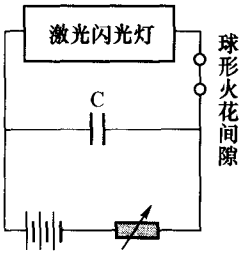


图 1－68 习题 1－64

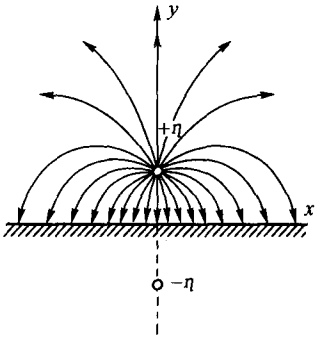


图 1－69 习题 1－65

解：设导线上的电荷线密度为 η，距地面高度为 h，则可以在高度为 $-h$ 处设置一个电荷线密度为 $-\eta$ 的镜像导线。

地面上方的电场强度分布为

$$E_x(x,y) = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x}{x^2+(y-h)^2} - \frac{x}{x^2+(y+h)^2}\right]$$

$$E_y(x,y) = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{y-h}{x^2+(y-h)^2} - \frac{y+h}{x^2+(y+h)^2}\right]$$

选取地平面为电势零点，则地面上方的电势分布为

$$U(x,y) = -\int_{y=0}^{y} E_y(x,y)\mathrm{d}y = \frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{x^2+(y+h)^2}{x^2+(y-h)^2}\right]$$

地表的电荷面密度为

$$\sigma = D_n = \varepsilon_0 E_y(x,0) = \frac{\eta}{2\pi}\frac{-2h}{x^2+h^2} = -\frac{\eta h}{\pi(x^2+h^2)}$$

地表面单位长度的电荷量

$$\eta' = \int_{-\infty}^{+\infty}\sigma\mathrm{d}x = -\frac{\eta}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h}{x^2+h^2}\mathrm{d}x = -\eta$$

1－66 图 1－70 中两边为电导率很大的导体，中间两层是电导率分别为 σ_1、σ_2 的均

匀导电介质，其厚度分别为 d_1、d_2，导体的截面积为 S，通过导体的恒定电流为 I，求：

(1) 两层导电介质中的场强 E_1 和 E_2；

(2) 电势差 U_{AB} 和 U_{BC}。

解：(1) $E_1 = j_1/\sigma_1 = I/(\sigma_1 S)$；$E_2 = j_2/\sigma_2 = I/(\sigma_2 S)$

(2)

$$U_{AB} = E_1 d_1 = \frac{Id_1}{\sigma_1 S}$$

$$U_{BC} = E_2 d_2 = \frac{Id_2}{\sigma_2 S}$$

1-67 同轴电缆内、外半径分别为 a 和 b，其间电介质有漏电阻，电导率为 σ，如图 1-71 所示。求长度为 l 的一段电缆内的漏阻。

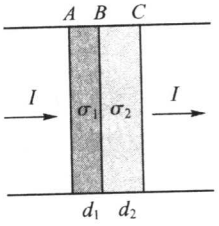


图 1-70 习题 1-66

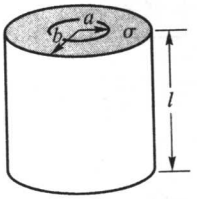


图 1-71 习题 1-67

解：考虑离轴 r 厚 $\mathrm{d}r$ 的一层薄圆筒的元电阻

$$\mathrm{d}R = \frac{\mathrm{d}r}{\sigma 2\pi r l}$$

则长度为 l 的一段电缆内的漏阻

$$R = \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{\sigma 2\pi r l} = \frac{1}{\sigma 2\pi l} \ln \frac{b}{a}$$

第2章　恒磁场

2.1　基本要求与教学难点

1. 基本概念的要求

理解磁感应强度的定义;理解毕奥—萨伐尔定律及其物理意义;理解磁通量的概念;理解恒磁场的高斯定理和安培环路定律的物理意义;理解磁矢势的概念;理解磁矩的定义;理解洛伦兹力和安培力的定义,并能熟练运用。

2. 基本方法的要求

(1) 掌握利用毕奥—萨伐尔定律求解载流导体规则分布时,所产生的磁感应强度的方法;

(2) 能熟练运用叠加原理计算简单、典型载流导线及其组合体的磁场分布;

(3) 掌握应用安培环路定律计算磁感应强度的条件和方法,并能熟练求解具有一定对称性的电流的磁场分布问题;

(4) 会计算非均匀磁场中通过几何形状平面的磁通量;

(5) 会计算平面载流线圈在磁场中所受的磁力矩。

3. 教学难点

(1) 磁场的基本概念的理解;毕奥—萨伐尔定律的应用;磁场的两条基本定理的把握及应用。

(2) 磁矢势概念的理解。

2.2　典型例题

例 2-1: 电流均匀地流过宽为 $2a$ 的无穷长平面导体薄板。电流大小为 I,通过板的中线并与板面垂直的平面上有一点 P,P 到板的垂直距离为 x(见图 2-1),设板厚可略去不计,(1)求 P 点的磁感应强度 $\vec{B}$;(2)当 $a\to\infty$,但 $i=\dfrac{I}{2a}$ (单位宽度上的电流,叫做面电流密度)为一常量时,P 点的磁感应强度。

解: (1)把薄板分成宽为 $\mathrm{d}y$ 的无限长细条,每根细条可视为载流为 $\mathrm{d}i=\dfrac{I\mathrm{d}y}{2a}$ 的无限长导线。如图 2-1 所示,$\mathrm{d}i$ 在 P 点激发的磁感应强度大小

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mathrm{d}i}{r}=\frac{\mu_0 I\mathrm{d}y}{4\pi a x\sec\theta}$$

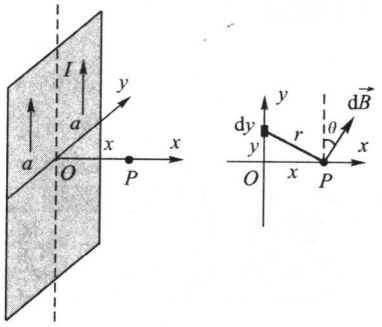


图 2-1　例 2-1

$d\vec{B}$的方向与 r 垂直。由对称性可知，$d\vec{B}$的 x 分量与原点它侧对称位置处细条的贡献相抵消，只有 y 分量 $dB\cos\theta$ 才有贡献。因此，P 点的磁感应强度的大小

$$B = \int dB\cos\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a x}\int \frac{dy}{\sec^2\theta}$$

因为 $y = x\tan\theta$　所以 $dy = x\sec^2\theta d\theta$

故

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a x}\int_{-\arctan\frac{a}{x}}^{+\arctan\frac{a}{x}} \frac{x\sec^2\theta d\theta}{\sec^2\theta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\tan^{-1}\frac{a}{x}$$

方向沿 y 轴正向。

(2) 当 $a\to\infty$，但维持 $i = \frac{I}{2a}$时

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4a} = \frac{\mu_0}{2}i$$

例 2-2：一对同轴无穷长直的空心导体圆筒，内、外筒半径分别为 R_1 和 R_2（筒壁厚度可以忽略）。电流 I 沿内筒流去，沿外筒流回（见图 2-2），

(1) 计算两筒间的磁感应强度 B；

(2) 通过长度为 L 的一段截面（图中阴影区）的磁通量 Φ_B；

(3) 计算磁矢势 A 在两筒间的分布。

解：在轴上任意取一点，以它为圆心，以 r 为半径做圆为闭合回路 l，回路方向与内筒电流方向成右手螺旋关系。则由安培环路定理和对称性得

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\cdot 2\pi r = \mu_0 I'$$

所以

$$B = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r}$$

(1) 两筒间 $R_1 < r < R_2$；$I' = I$；所以

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

(2) 设图中阴影面法线方向垂直纸面向外为正，如图 2-3 所示，r 为阴影中元面 $dS = Ldr$ 到轴线的垂直距离，ds 内的 B 可视为均匀，于是

$$d\Phi_B = \vec{B}\cdot d\vec{S} = Bds = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot Ldr$$

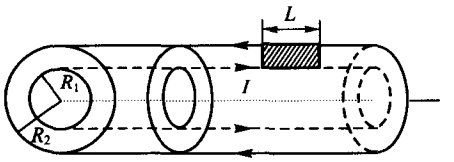


图 2-2　例 2-2

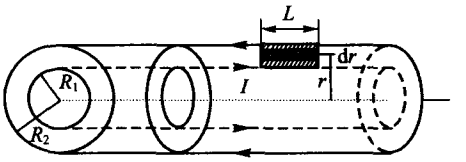


图 2-3　例 2-2 附图

所以

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 IL}{2\pi} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 IL}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

(3) 由于电流沿水平方向，所以磁矢势也沿水平方向，以向右为其正方向。取图中阴影区域的内半径为 r_1，外半径为 r_2，逆时针方向为边界正方向，则由磁矢势的定义 $\oint_l \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$，可得

$$[A(r_1) - A(r_2)]L = L \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

取 $r_1 = R_1$ 处为磁矢势的零点，则两筒间任意点 r 处的磁矢势

$$A(r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{R_1}\right)$$

例 2-3：一段导线弯成如图 2-4 所示的形状，它的质量为 m，上面水平一段的长度为 l，处在均匀磁场中，磁感应强度为 $\vec{B}$，$\vec{B}$ 与导线垂直；导线下面两端分别插在两个浅水银槽里，两槽水银与一带开关 K 的外电源连接。当 K 一接通，导线便从水银槽里跳起来。

(1) 当跳起来的高度为 h 时，求通过导线的电量 q；

(2) 当 $m = 10\mathrm{g}$，$l = 20\mathrm{cm}$，$h = 3.0\mathrm{m}$，$B = 0.10\mathrm{T}$ 时，求 q 的量值。

解：(1) 当 K 接通后，设导线经 Δt 时间跳出水银槽，跳出时的速率为 v_0，由冲量定理得

$$(IlB - mg)\Delta t = mv_0$$

设导线重力远小于安培力，即 $mg \ll IlB$ 则

$$IlB\Delta t = mv_0 \qquad ①$$

又由机械能守恒得

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = mgh \qquad ②$$

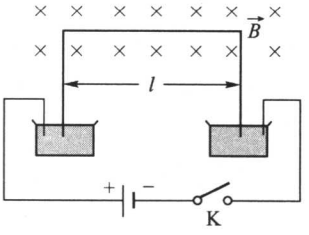


图 2-4　例 2-3

又

$$I = \frac{q}{\Delta t} \qquad ③$$

联立式①、式②、式③得

$$q = \frac{m\sqrt{2gh}}{Bl}$$

(2) 代入 $m = 10\mathrm{g}$，$l = 20\mathrm{cm}$，$h = 3.0\mathrm{m}$，$B = 0.10\mathrm{T}$，$g = 9.8$ 计算得

$$q = 3.8\mathrm{C}$$

例 2-4：载有电流 I_1 的长直导线旁有一平面圆形线圈，线圈的半径为 r，中心到导线的垂直距离为 l，线圈载有电流 I_2，线圈和直导线在同一平面内(见图 2-5)。求 I_1 作用在圆

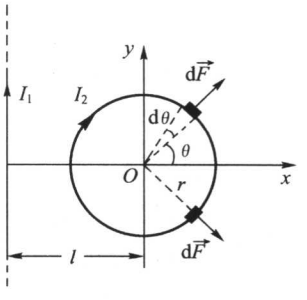


图 2-5　例 2-4

形线圈上的力。

解:如图 2－5 所示,圆上任一电流元 $I_2\mathrm{d}\vec{l}$ 处,由 I_1 产生的磁感应强度的大小为

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{(l + r\cos\theta)}$$

方向垂直纸面向内。

根据 $\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$,得电流元 $I_2\mathrm{d}\vec{l}$ 受到的安培力的大小

$$\mathrm{d}F = BI_2\mathrm{d}l = BI_2r\mathrm{d}\theta$$

其方向沿径向垂直 $\mathrm{d}l$。

由对称性可知:上半圆所受的力与下半圆所受的力的竖直分量相互抵消。故作用在整个圆上的力的大小

$$F = \int_{圆} \mathrm{d}F_x = \int_{圆} \cos\theta \mathrm{d}F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta \mathrm{d}\theta}{(l + r\cos\theta)} = \mu_0 I_1 I_2\left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 - r^2}}\right)$$

其方向垂直指向 I_1。

例 2－5:在空间有互相垂直的均匀电场 $\vec{E}$ 和均匀磁场 $\vec{B}$,$\vec{B}$ 沿 x 方向,$\vec{E}$ 沿 z 方向,一电子开始时以速度 $\vec{v}$ 沿 y 方向前进(见图 2－6),问电子运动的轨迹如何?

解:根据:$-\vec{eE} - e(\vec{v} \times \vec{B}) = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ 得

$$m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -eE + ev_yB \qquad ①$$

$$m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -ev_zB \qquad ②$$

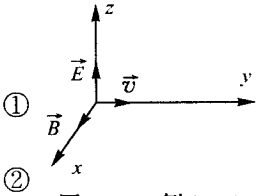


图 2－6　例 2－5

对式①微商将式②代入得

$$\frac{\mathrm{d}^2v_z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{e^2B^2}{m^2}v_z = 0 \qquad ③$$

解式③并代入初始条件 $t=0$ 时,$v_z=0$ 得

$$v_z = A\sin\omega t = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \qquad ④$$

其中 $\omega = \frac{eB}{m}$,积分式④并代入初始条件 $t=0$ 时,$z=0$ 得

$$z = \frac{A}{\omega}(1 - \cos\omega t) \qquad ⑤$$

式④微商后代入式①得

$$v_y = \frac{mA\omega\cos\omega t + eE}{eB} = A\cos\omega t + \frac{E}{B} \qquad ⑥$$

根据初始条件 $t=0$ 时,$v_y = v$ 可定出 $A = v - \frac{E}{B}$

积分式⑥并代入初始条件 $t=0$ 时,$y=0$ 得

$$y = \frac{mA\sin\omega t + eEt}{eB} = \frac{A}{\omega}\sin\omega t + \frac{E}{B}t \qquad ⑦$$

由式⑤和式⑦可知:电子的轨迹一般是 yz 平面内的次摆线。

2.3 思考题详解

2-1 地磁场的主要分量是从南到北,还是从北到南的?

答:地磁场的主要分量是从南到北的。

2-2 如图 2-7 所示,取直角坐标系,电流元 $I_1\mathrm{d}\vec{l}_1$ 放在 x 轴上指向原点 O,电流元 $I_2\mathrm{d}\vec{l}_2$ 放在原点 O 指向 z 轴。试根据安培定律 $\mathrm{d}\vec{F}_{12}=k\dfrac{I_1I_2\mathrm{d}\vec{l}_2\times(\mathrm{d}\vec{l}_1\times\hat{r}_{12})}{r_{12}^2}$ 或 $\mathrm{d}\vec{F}_{12}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I_2\mathrm{d}\vec{l}_2\times(I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\hat{r}_{12})}{r_{12}^2}$ 来回答,在下列各情形里电流元 1 给电流元 2 的作用力 $\mathrm{d}\vec{F}_{12}$,以及电流元 2 给电流元 1 的作用力 $\mathrm{d}\vec{F}_{21}$,大小和方向各有什么变化?

(1) 电流元 2 在 zx 平面内转过角度 θ;

(2) 电流元 2 在 yz 平面内转过角度 θ;

(3) 电流元 1 在 xy 平面内转过角度 θ;

(4) 电流元 1 在 zx 平面内转过角度 θ。

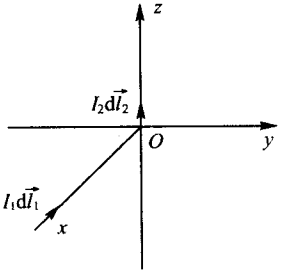


图 2-7 思考题 2-2

答:电流元 $I_1\mathrm{d}\vec{l}_1$ 和 $I_2\mathrm{d}\vec{l}_2$ 在图示位置时,其相互作用力为 $\mathrm{d}F_{12}=0;\mathrm{d}F_{21}=K\dfrac{I_1I_2\mathrm{d}l_1\mathrm{d}l_2}{r_{21}^2}$ 方向在负 z 轴方向。

(1) 电流元 2 在 zx 平面内转过角度 θ

$$\mathrm{d}F_{12}=0;\mathrm{d}F_{21}=K\frac{I_1I_2\mathrm{d}l_1\mathrm{d}l_2|\cos\theta|}{r_{21}^2}\text{ 变小;}$$

当 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 时,方向沿负 z 轴方向;

当 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 时,方向沿正 z 轴方向;

当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时,力等于零;

$\theta>\pi$ 的情形可由 $-\theta$ 来讨论。(下同)

(2) 电流元 2 在 yz 平面内转过角度 θ

$\mathrm{d}F_{12}=0;\mathrm{d}F_{21}=K\dfrac{I_1I_2\mathrm{d}l_1\mathrm{d}l_2}{r_{21}^2}$ 大小没变,方向和 $I_2\mathrm{d}\vec{l}_2$ 的方向反平行。

(3) 电流元 1 在 xy 平面内转过角度 θ

$$\mathrm{d}F_{12}=0;\mathrm{d}F_{21}=K\frac{I_1I_2\mathrm{d}l_1\mathrm{d}l_2|\cos\theta|}{r_{21}^2}\text{ 变小;}$$

当 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 时,方向沿负 z 轴方向;

当 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 时,方向沿正 z 轴方向;

当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时,力等于零。

(4) 电流元 1 在 zx 平面内转过角度 θ

$$dF_{12} = K\frac{I_1 I_2 dl_1 dl_2 |\sin\theta|}{r_{21}^2}$$ 变大。

当电流元 $I_1 d\vec{l}_1$ 在 zx 平面内向上转过角度 θ 时，$d\vec{F}_{12}$的方向在 x 轴负方向；当电流元 $I_1 d\vec{l}_1$ 在 zx 平面内向下转过角度 θ 时，$d\vec{F}_{12}$的方向在 x 轴正方向；当 $\theta=0$ 时，力 $dF_{12}=0$。

$dF_{21}=K\frac{I_1 I_2 dl_1 dl_2}{r_{21}^2}$不变；方向在与 xz 平面平行的平面内和 $d\vec{l}_1$ 方向正交。

2－3 根据安培定律 $d\vec{F}_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2 d\vec{l}_2\times(I_1 d\vec{l}_1\times\hat{r}_{12})}{r_{12}^2}$，任意两个闭合载流回路 L_1 和 L_2 之间的相互作用力为

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{L_1}\oint_{L_2}\frac{I_1 I_2 d\vec{l}_2\times(d\vec{l}_1\times\hat{r}_{12})}{r_{12}^2}$$

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{L_2}\oint_{L_1}\frac{I_2 I_1 d\vec{l}_1\times(d\vec{l}_2\times\hat{r}_{21})}{r_{21}^2}$$

试证明它们满足牛顿第三定律 $\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$

[提示：对于任意 3 个矢量 $\vec{A}$、$\vec{B}$、$\vec{C}$ 组成的双重矢积 $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$有一个很有用的恒等式：$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$，利用此式把上述两式展开，并注意到对任意闭合回路 L 有$\oint_L\frac{\hat{r}\cdot d\vec{l}}{r^2}=0$ 即可证明。]

证明：因为

$$\vec{F}_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{L_1}\oint_{L_2}\frac{I_1 I_2 d\vec{l}_2\times(d\vec{l}_1\times\hat{r}_{12})}{r_{12}^2}$$

$$=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{L_1}\oint_{L_2}\frac{(d\vec{l}_2\cdot\hat{r}_{12})d\vec{l}_1-(d\vec{l}_2\cdot d\vec{l}_1)\hat{r}_{12}}{r_{12}^2}$$

$$=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{L_1}\oint_{L_2}\left(\frac{\hat{r}_{12}\cdot d\vec{l}_2}{r_{12}^2}\right)d\vec{l}_1-\oint_{L_1}\oint_{L_2}\frac{(d\vec{l}_2\cdot d\vec{l}_1)\hat{r}_{12}}{r_{12}^2}$$

又因为

$$\oint_L\frac{\hat{r}\cdot d\vec{l}}{r^2}=\oint_L\frac{dl\cos(\hat{r},d\vec{l})}{r^2}=\oint_L\frac{dr}{r^2}=0$$

所以

$$\oint_{L_2}\frac{\hat{r}_{12}\cdot d\vec{l}_2}{r_{12}^2}=-\oint_{L_2}\frac{\hat{r}_{21}\cdot d\vec{l}_1}{r_{12}^2}=0$$

故

$$\vec{F}_{12}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\left(\oint_{L_1}\oint_{L_2}-\frac{(d\vec{l}_2\cdot d\vec{l}_1)\hat{r}_{12}}{r_{12}^2}\right)$$

同理

$$\vec{F}_{21}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\left(\oint_{L_1}\oint_{L_2}-\frac{(\mathrm{d}\vec{l}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2)\hat{r}_{21}}{r_{12}^2}\right)$$

因为 $\hat{r}_{12}=-\hat{r}_{21}$，所以 $\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$。

2-4 试探电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$ 在磁场中某处沿直角坐标系的 x 轴方向放置时不受力，把这电流元转到 $+y$ 轴方向时受到的力沿 $-z$ 轴方向，此处磁感应强度 $\vec{B}$ 指向何方？

答：此处磁感应强度 $\vec{B}$ 指向正 x 轴的方向。

2-5 试根据毕奥—萨伐尔定律证明：一对镜像对称的电流元在对称面上产生的合磁场必与此面垂直。

答：如图 2-8 所示假设电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$ 位于 x 轴的正半轴(距离原点为 d)，以 yz 平面作镜像的电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}'$ 位于 x 轴的负半轴，则有

$$I\mathrm{d}\vec{l}\cdot\hat{x}=-I\mathrm{d}\vec{l}'\cdot\hat{x},\ I\mathrm{d}\vec{l}\cdot\hat{y}=I\mathrm{d}\vec{l}'\cdot\hat{y},$$

$$I\mathrm{d}\vec{l}\cdot\hat{z}=I\mathrm{d}\vec{l}'\cdot\hat{z}$$

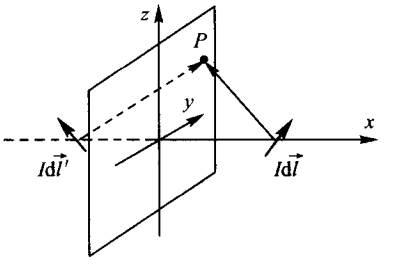


图 2-8 思考题 2-5

根据毕奥—萨伐尔定律，这一对镜像对称的电流元在对称面上 P 点产生的合磁场为

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}(I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r})+\frac{\mu_0}{4\pi(r')^3}(I\mathrm{d}\vec{l}'\times\vec{r}')$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}[I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}+I\mathrm{d}\vec{l}'\times\vec{r}']$$

所以

$$B_y=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\{[(I\mathrm{d}\vec{l}\cdot\hat{z})(-d)-(I\mathrm{d}\vec{l}\cdot\hat{x})z_P]$$
$$+[(I\mathrm{d}\vec{l}'\cdot\hat{z})(d)-(I\mathrm{d}\vec{l}'\cdot\hat{x})z_P]\}=0$$

$$B_z=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\{[(I\mathrm{d}\vec{l}\cdot\hat{x})y_P-(I\mathrm{d}\vec{l}\cdot\hat{y})(-d)]$$
$$+[(I\mathrm{d}\vec{l}'\cdot\hat{x})y_P-(I\mathrm{d}\vec{l}'\cdot\hat{y})(-d)]\}=0$$

即，这一对镜像电流元在对称面上产生的合磁场必与此面垂直。

2-6 (1) 在没有电流的空间区域内，如果磁感应线是平行直线，磁感应强度的大小 B 在沿磁感应线和垂直它的方向上是否可能变化(即磁场是否一定是均匀的)？

(2) 若存在电流，上述结论是否还对？

答：(1) 根据磁场的“高斯定理” $\oiint_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$，可知，磁感应线连续，故在沿磁感应线的方向上，磁场均匀。又根据环路定理 $\oint_L\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$，因空间区域没有电流，所以，$\oint_L\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$。故在垂直磁感应线的方向上磁场亦均匀。

(2) 在沿磁感应线的方向上，磁场均匀，原因和(1)同。根据题设，空间区域存在电流，所以对任意积分回路 $\oint_L\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}\neq0$，故在垂直磁感应线的方向上磁场不再均匀，故上述结论不对。

2-7 根据环路定理，沿围绕载流导线一周的环路积分为 $\oint_L\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$，现利用

圆形载流轴线上的磁场公式 $B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2 I}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，($z$ 是轴线上一点到圆心的距离)，验算一下沿轴线的积分$\int_{-\infty}^{\infty}\vec{B}\cdot d\vec{l}=\int_{-\infty}^{\infty}B\cdot dz=\mu_0 I$，为什么这积分路线虽未绕电流一周，但与闭合环路积分的结果一样？

答：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\vec{B}\cdot d\vec{l}=\int_{-\infty}^{\infty}B\cdot dz=\frac{\mu_0 R^2 I}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\mu_0 R^2 I\int_0^{\infty}\frac{dz}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\mu_0 R^2 I\frac{z}{R^2(R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\Bigg|_0^{\infty}=\mu_0 I$$

如果将积分路线闭合，可以在 $z=-\infty$ 到 $z=\infty$ 之间远离圆形电流处增加一段积分路线。(例如，$R=\infty$ 的半径，圆心在原点的圆弧)。因为在∞处，$B=0$。所以，$\vec{B}$ 沿此段路线的积分为零。故沿圆形载流线圈轴线的积分与闭合环路的积分结果一样。

2－8 利用无限长螺线管内部磁场 $B=\mu_0 nI$ 和安培环路定理，证明无限长螺线管外部磁场处处为零。这个结论成立的近似条件是什么？仅仅“密绕”的条件够不够？

答：根据 $B=\mu_0 nI$ 无限长螺线管产生的磁场与螺线管长度方向平行，在内部磁感强度为 $B=\mu_0 nI$。假设螺线管外部磁场为 B_1，对如图 2－9 所示的回路，根据安培环路定理可得

$$(B-B_1)l=\mu_0 I(nl)$$

所以，$B_1=0$ 与 h 无关。即：对于无限长螺线管，外部磁场处处为零。

上述结论采用了“磁场与螺线管长度方向平行”的近似条件，所以螺线管必须“密绕”且“长度远大于半径”才能在其中部近似成立。

2－9 在一个可视为无穷长密绕的载流螺线管外面环绕一周(见图 2－10)，环路积分$\oint_L\vec{B}\cdot d\vec{l}$ 等于多少？

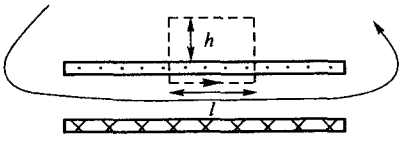


图 2－9　思考题 2－8

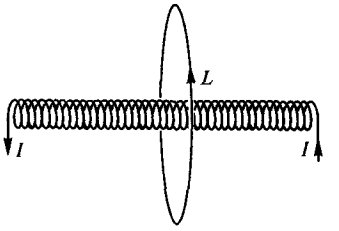


图 2－10　思考题 2－9

答：对于无穷长密绕的载流螺线管，由于磁场被束缚在螺线管内，螺线管外磁场为零。所以$\oint_L\vec{B}\cdot d\vec{l}=0$。

如果是非密绕，则$\oint_L\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I$

2－10 如图 2－11 所示中的载流导线与纸面垂直，确定图 2－11(a)和图 2－11(b)中电流的方向，以及图 2－11(c)和图 2－11(d)中导线受力的方向。

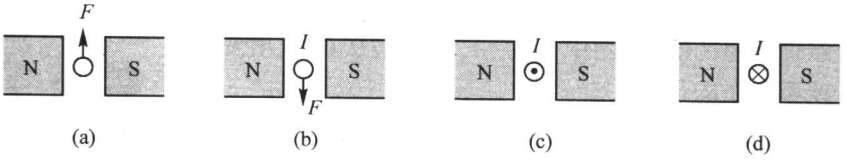


图 2－11　思考题 2－10

答:图 2－11(a)中电流垂直纸面向外;图 2－11(b)中电流垂直纸面向里;图 2－11(c)中电流受力向上;图 2－11(d)中电流受力向下。

2－11　指出图 2－12 中各情形里带电粒子的受力方向。

答:图 2－12(a)向右;图 2－12(b)垂直纸面向外;图 2－12(c)垂直纸面向里;图 2－12(d)不受力;图 2－12(e)向左;图 2－12(f)垂直向下。

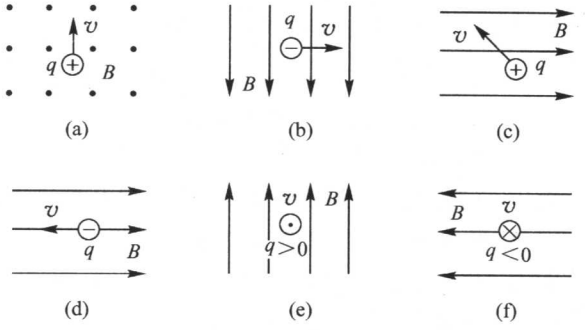


图 2－12　思考题 2－11

2－12　如图 2－13 所示,在阴极射线管上平行管轴放置一根载流直导线,电流方向如图 2－13 所示,射线朝什么方向偏转?电流反向后情况怎样?

答:射线向下偏转。电流反向后,则射线向上偏转。

2－13　如图 2－14 所示,两个电子同时由电子枪射出,它们的初速与匀磁场垂直,速率分别是 v 和 $2v$。经磁场偏转后,哪个电子先回到出发点?

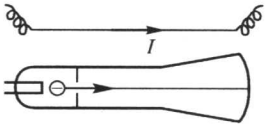


图 2－13　思考题 2－12

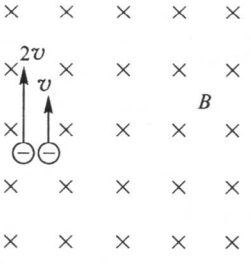


图 2－14　思考题 2－13

答:带电粒子回绕一周所需要的时间为 $T=\dfrac{2\pi m}{qB}$,它与粒子速率无关。故两个电子同时回到出发点。

2－14　云室是借助于过饱和水蒸气在离子上凝结,来显示通过它的带电粒子径迹的

装置。这里有一张云室中拍摄的照片，如图 2－15 所示。云室中加了垂直纸面向里的磁场，图中 a、b、c、d、e 是从 O 点出发的一些正电子或负电子的径迹。

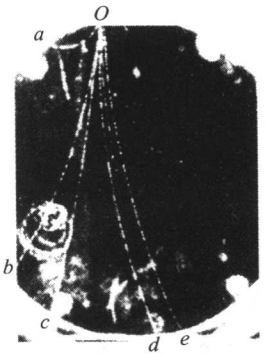


图 2－15　思考题 2－14

(1) 哪些径迹属于正电子的，哪些属于负电子的？

(2) a、b、c 这 3 条径迹中哪个粒子的能量(速率)最大，哪个最小？

答：(1) 径迹 a、b、c 属于负电子；径迹 d、e 属于正电子。

(2) 电子的圆轨道半径 $R=\dfrac{mv}{qB}$。当 m、q、B 一定时，R 愈大，所对应的能量(速率)也愈大。因此，径迹 c 的能量(速率)最大；径迹 a 的能量(速率)最小。

2－15　如图 2－16 所示，是磁流体发电机的示意图。将气体加热到很高温度(比如 2500K 以上)使之电离(这样一种高度电离的气体叫做等离子体)，并让它通过平行板电极 1、2 之间，在这里有一垂直于纸面向里的磁场 $\vec{B}$，试说明这时两电极间会产生一个大小为 vBd 的电压(v 为气体流速，d 为电极间距)，哪个电极是正极？

答：等离子体通过平行板电极 1、2 之间时，受到其中磁场的洛伦兹力 $f=qvB$ 的作用。正离子偏向电极板 1；负离子偏向电极板 2。随着 1、2 极板上正负离子的堆积，在两极板间建立起相应的电场，其方向由极板 1 指向极板 2。此电场，将使正负离子受到一个与洛伦兹力方向相反的力 qE。最后达到稳定状态时，二力平衡，此时极板上电荷不再增多。由 $qvB=qE$，得 $E=vB$，所以，两极间的电压为 $U=Ed=vBd$。极板 1 堆积正电荷，是正极。

2－16　有一非均匀磁场呈轴对称分布，磁感应线由左至右逐渐收缩(见图 2－17)。将一圆形载流线圈共轴地放置其中，线圈的磁矩与磁场方向相反，试定性分析此线圈受力的方向。

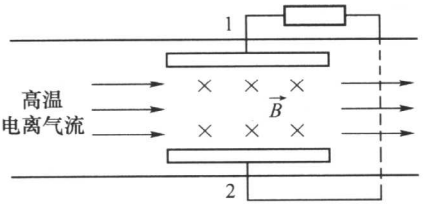


图 2－16　思考题 2－15

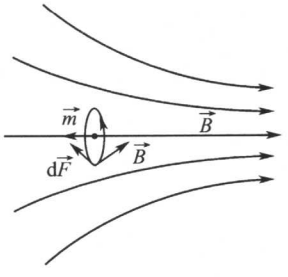


图 2－17　思考题 2－16

答：根据 $d\vec{F}=Id\vec{l}\times\vec{B}$ 可得，线圈上电流元的受力如图 2－17 所示，由对称性可知，此线圈所受合力将沿轴线指向磁场减弱的方向。

2－17　试用上题定性地说明磁镜两端对作回旋运动的带电粒子能起反射作用。

答：与上题同理，磁镜两端的非均匀磁场，对作回旋运动的带电粒子的作用力，在磁镜的轴线上的分力沿轴线指向磁场较减弱的方向，即指向磁镜的中心，所以磁镜两端对作回旋运动的带电粒子能起反射作用。

2－18　设氢原子中的电子沿半径为 r 的圆轨道绕原子核运动。若把氢原子放在磁

感应强度为 $\vec{B}$的磁场中，使电子的轨道平面与 $\vec{B}$垂直，假定 r 不因 $\vec{B}$ 而改变，则当观察者顺着 $\vec{B}$的方向看时，

(1)若电子沿顺时针方向旋转，问电子的角频率(或角速率)是增大还是减小?

(2)若电子沿反时针方向旋转，问电子的角频率(或角速率)是增大还是减小?

答：未加磁场前，电子在库仑力的作用下作圆周运动。向心力为

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = mr\omega_0^2 \qquad ①$$

(1) 依题意，将氢原子放在外磁场中后，电子顺时针方向旋转，则电子受一指向圆心的洛伦兹力。此时向心力为

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + evB = mr\omega'^2 \qquad ②$$

因半径 r 不变，向心力后者大于前者，显然 $\omega' > \omega_0$，所以，电子角频率增大。

(2) 若电子反时针方向旋转，则电子受一背离圆心的洛伦兹力。此时有：

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - evB = mr\omega''^2 \qquad ③$$

因半径 r 不变，比较式①和式③，显然 $\omega'' < \omega_0$，所以，电子角频率减小。

2－19 设电子质量为 m，电荷为 e，以角速度 ω 绕带正电的质子作圆周运动。当加上外磁场 $\vec{B}$，而 $\vec{B}$的方向与电子轨道平面垂直时，设电子轨道半径不变，而角速度变为 ω'。证明：电子角速度的变化近似等于 $\Delta\omega = \omega' - \omega = \pm\frac{1}{2}\frac{e}{m}B$。

证明：未加磁场前

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = mr\omega_0^2 \qquad ①$$

加外磁场后

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \pm e\omega' rB = mr\omega'^2 \qquad ②$$

式②－式①得

$$\pm e\omega' rB = mr(\omega' - \omega)(\omega' + \omega)$$

由于洛伦兹力≪库仑力，则 ω'与 ω 的值相差甚微。

所以，

$$\omega' + \omega = 2\omega$$

$$\Delta\omega = \omega' - \omega = \pm\frac{erB\omega'}{mr(\omega' + \omega)} \approx \pm\frac{1}{2}\frac{e}{m}B$$

2.4 习题详解

2－1 如图 2－18 所示，一条无穷长直导线在一处弯折成$\frac{1}{4}$圆弧，圆弧的半径为 R，圆心在 O，直线的延长线都通过圆心。已知导线中的电流为 I，求 O 点的磁感应强度。

解：径向上的电流对 O 点磁场无贡献，所以

$$B = \frac{1}{4} \cdot \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{8R}$$

方向垂直纸面向里。

2-2 如图 2-19 所示，两条无穷长的平行直导线相距为 $2a$，分别载有方向相同的电流 I_1 和 I_2。空间任一点 P 到 I_1 的垂直距离为 x_1，到 I_2 的垂直距离为 x_2，求 P 点的磁感应强度 $\vec{B}$。

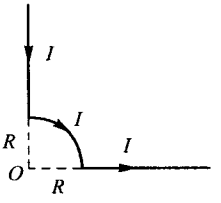


图 2-18 习题 2-1

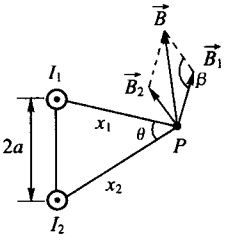


图 2-19 习题 2-2

解：设 I_1 和 I_2 激发的磁场分别为 $\vec{B}_1$ 和 $\vec{B}_2$，则

$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{x_1}$；方向如图 2-19 所示。

$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_2}{x_2}$；方向如图 2-19 所示。

P 点的总磁场为 $\vec{B}_1$ 和 $\vec{B}_2$ 的矢量和，即

$$B^2 = B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2\cos\beta$$

而 $\cos\beta = -\cos\theta = \frac{4a^2 - x_1^2 - x_2^2}{2x_1x_2}$，所以

$$B = (B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2\cos\beta)^{\frac{1}{2}} = \frac{\mu_0}{2\pi x_1 x_2}\sqrt{(I_1 + I_2)(I_1x_2^2 + I_2x_1^2) - 4a^2I_1I_2}$$

方向如图 2-19 所示。

2-3 如图 2-20 所示，两条无穷长的平行直导线相距为 $2a$，载有大小相等而方向相反的电流 I。空间任一点 P 到两导线的垂直距离分别为 x_1 和 x_2，求 P 点的磁感应强度 $\vec{B}$。

解：设两导线所激发的磁场分别为 $\vec{B}_1$ 和 $\vec{B}_2$，则

$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{x_1}$；方向如图 2-20 所示。

$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{x_2}$；方向如图 2-20 所示。

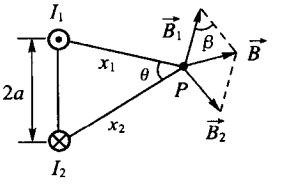


图 2-20 习题 2-3

P 点的总磁场为 $\vec{B}_1$ 和 $\vec{B}_2$ 的矢量和

$$B^2 = B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2\cos\beta$$

而 $\cos\beta = \cos\theta = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 4a^2}{2x_1x_2}$，所以

$$B = (B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2\cos\beta)^{\frac{1}{2}} = \frac{\mu_0 Ia}{\pi x_1 x_2}$$

方向如图 2－20 所示。

2－4 如图 2－21 所示，两条无限长载流直导线垂直而不相交，其间最近距离为 $d=2.0\text{cm}$，电流分别为 $I_1=4.0\text{A}$ 和 $I_2=6.0\text{A}$，P 点到两导线的距离都是 d，求 P 点的磁感应强度 $\vec{B}$。

解：I_1 和 I_2 在 P 点产生的磁场如图 2－21 所示，P 点的磁感应强度

$$B=\sqrt{B_1^2+B_2^2}=\frac{\mu_0}{2\pi d}\sqrt{I_1^2+I_2^2}=\frac{4\pi\times10^{-7}\times\sqrt{4.0^2+6.0^2}}{2\pi\times2.0\times10^{-2}}=0.72\text{Gs}^{①}$$

方向如图 2－21 所示。

2－5 载流等边三角形线圈边长为 $2a$，电流为 I，(1)求轴线上距中心为 r_0 处的磁感应强度。

(2) 证明：当 $r_0 \gg a$ 时轴线上磁感应强度具有如下形式：$B=\frac{\mu_0 m}{2\pi r_0^3}$，式中 $m=IS$ 为三角形线圈的磁矩。

解：(1)如图 2－22 所示，AC 边上的各电流元在轴线上的 P 点产生的元磁场 $\mathrm{d}\vec{B}_1$ 方向相同，根据毕奥—萨伐尔定律得

$$\mathrm{d}B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}x\sin\theta}{r^2}$$

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-a}^{a}\frac{I\mathrm{d}x}{r^2}\cdot\frac{l}{r}$$

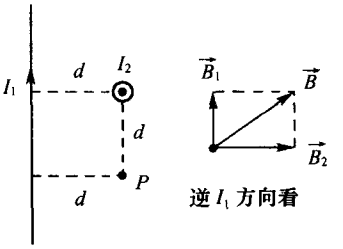


图 2－21 习题 2－4

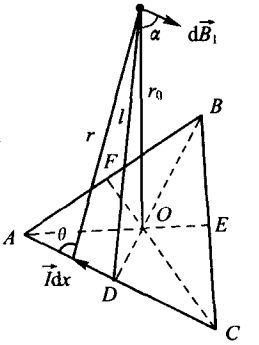


图 2－22 习题 2－5

$\vec{B}_1$ 在过 P 点平行于△ABC 的 π 平面内的投影沿 DB 方向，同理 AB、BC 边上的电流在 P 点产生的 $\vec{B}_2$、$\vec{B}_3$ 的方向，在 π 平面内的投影分别沿 FC 和 EA，大小与 $\vec{B}_1$ 相同。由对称性可知，它们沿 r_0 的分量等大同向，另一分量相互抵消，合磁场沿 r_0 指向 O 点。

$$B=3B_1\cos\alpha=\frac{3\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{a/\sqrt{3}}{l}\int_{-a}^{a}\frac{I\mathrm{d}x}{r^2}\cdot\frac{l}{r}=\frac{\sqrt{3}\mu_0 Ia}{4\pi}\cdot\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{(r_0^2+a^2/3+x^2)^{3/2}}$$

① $1\text{Gs}\approx10^{-4}\text{T}$

$$= \frac{9\mu_0 Ia^2}{2\pi(3r_0^2 + a^2)(3r_0^2 + 4a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

(2)当 $r_0 \gg a$ 时,

$$B = \frac{9\mu_0 Ia^2}{2\pi \cdot 3r_0^3\sqrt{3}} = \frac{\mu_0 \cdot \sqrt{3}Ia^2}{2\pi r_0^3} = \frac{\mu_0 \cdot m}{2\pi r_0^3}$$

2-6 详见本章典型例题 2-1。

2-7 如图 2-23 所示,两无穷大平行平面上都有均匀分布的面电流,面电流密度(见上题)分别为 i_1 和 i_2,两电流平行。求:

(1) 两面之间的磁感应强度;

(2) 两面之外空间的磁感应强度;

(3) $i_1 = i_2 = i$ 时结果如何?

(4) 在情形(3)中电流反平行,情形如何?

(5) 在情形(3)中电流方向垂直,情形如何?

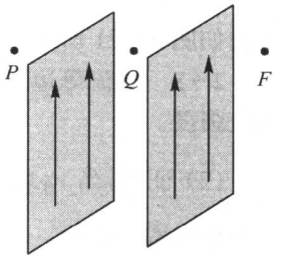


图 2-23 习题 2-7

解:根据上题结果,i_1 和 i_2 产生的磁感应强度分别为

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2}i_1; B_2 = \frac{\mu_0}{2}i_2$$

(1) 两面之间 $\vec{B}_1$ 与 $\vec{B}_2$ 方向相反 $B_Q = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0}{2}(i_2 - i_1)$

(2) 两面之外 $\vec{B}_1$ 与 $\vec{B}_2$ 方向相同 $B_P = B_F = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0}{2}(i_1 + i_2)$

(3) $i_1 = i_2 = i$ 时,$B_Q = 0$,$B_P = B_F = \mu_0 i$

(4) 在情形(3)中若电流反平行:

$$B_Q = B_2 + B_1 = \mu_0 i, B_P = B_F = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0}{2}(i_2 - i_1) = 0$$

(5) 在情形(3)中若电流方向垂直,则 $\vec{B}_1 \perp \vec{B}_2$

$$B_Q = B_P = B_F = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \frac{\mu_0}{2}\sqrt{i_1^2 + i_2^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mu_0 i$$

不同区域,方向不同。

2-8 半径为 R 的无限长直圆筒上有一层均匀分布的面电流,电流都环绕着轴线流动并与轴线方向成一角度 θ,即电流在筒面上沿螺旋线向前流动(见图 2-24)。设面电流密度为 I,求轴线上的磁感应强度。

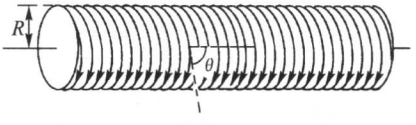


图 2-24 习题 2-8

解:把 i 分解为平行于轴线的 $i_{//}$ 和垂直于轴线的 $i_{\perp}$,而 $i_{//}$ 对轴线上的磁场无贡献,所以

$$B = \mu_0 i_{\perp} = \mu_0 i \sin\alpha$$

方向沿轴线向右。

2-9 一很长的螺线管，由外皮绝缘的细导线密绕而成，每厘米有 35 匝。当导线中通过的电流为 2.0A 时，求这螺线管轴线上中心和端点的磁感应强度。

解：轴线上中心处：$B=\mu_0 nI=88(\mathrm{Gs})$；

轴线上端点处：$B=\frac{1}{2}\mu_0 nI=44(\mathrm{Gs})$

2-10 一螺线管长 1.0m，平均直径为 3.0cm，它有五层绕组，每层有 850 匝，通过电流 5.0A，求管中心的磁感应强度是多少 Gs。

解：由于 $\cos\beta_1=\dfrac{0.5}{\sqrt{0.5^2+(1.5\times10^{-2})^2}}\approx1$，同理 $\cos\beta_2\approx-1$，所以，管中心的磁感应强度

$$B=\frac{1}{2}\mu_0 nI(\cos\beta_1-\cos\beta_2)=\mu_0 nI=2.7\times10^2\mathrm{Gs}。$$

2-11 用直径 0.163cm 的铜线绕在 6.0cm 直径的圆筒上，做成一个单层螺线管。管长 30cm，每厘米绕 5 匝。铜线在 75℃（假设通电后导线将达此温度）时每米电阻 0.010Ω。将此螺线管接在 2.0V 的蓄电池上，其中心的磁感应强度和功率消耗各多少？

解：中心处的磁感应强度

$$B=\frac{1}{2}\mu_0 nI(\cos\beta_1-\cos\beta_2)=\mu_0 nI\cos\beta_1$$

$$=4\pi\times10^{-7}\times5\times10^2\times\frac{2}{2\pi\times3\times10^{-2}\times150\times0.010}\times\frac{15}{15.3}=44\mathrm{Gs}$$

消耗的功率

$$P=\frac{\varepsilon^2}{R}=\frac{2^2}{2\pi\times3\times10^{-2}\times150\times0.010}=14\mathrm{W}$$

2-12 球形线圈由表面绝缘的细导线在半径为 R 的球面上密绕而成，线圈的中心都在同一直径上，沿这直径单位长度内的匝数为 n，并且各处的 n 都相同，通过线圈的电流为 I。设该直径上一点 P 到球心的距离为 x，求下列各处的磁感应强度 B。

（1）$x=0$（球心）；

（2）$x=R$（该直径与球面的交点）；

（3）$x<R$（球内该直径上任一点）；

（4）$x>R$（球外该直径上任一点）。

解：球形线圈可看做是由许多半径不同的圆线圈组成。它们在 P 点的磁场大小各异、方向相同。

（1）如图 2-25 所示 $x=0$，场点 P 到任一载流圆的距离为 y

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{2}\cdot\frac{r^2\mathrm{d}I}{[r^2+y^2]^{3/2}}=\frac{\mu_0 nI}{2R^3}(R^2-y^2)\mathrm{d}y$$

所以

$$B=\frac{\mu_0 nI}{2R^3}\int_{-R}^{R}(R^2-y^2)\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\mu_0 nI$$

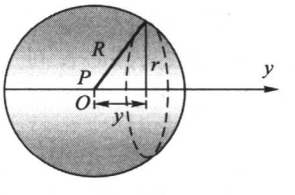


图 2-25 习题 2-12 附图

(2) $x=R$,场点 P 到任一载流圆的距离为$(R-y)$

$$dB=\frac{\mu_0 nI}{2}\frac{(R^2-y^2)dy}{[(R^2-y^2)+(R-y)^2]^{3/2}}=\frac{\mu_0 nI}{4R\sqrt{2R}}\cdot\frac{(R+y)}{(R-y)^{1/2}}dy$$

所以

$$B=\frac{\mu_0 nI}{4R\sqrt{2R}}\int_{-R}^{R}\frac{(R+y)}{(R-y)^{1/2}}dy=\frac{2}{3}\mu_0 nI$$

(3) $x<R$,场点 P 到任一载流圆的距离为$(y-x)$

$$dB=\frac{\mu_0 nI}{2}\frac{(R^2-y^2)dy}{[(R^2-y^2)+(y-x)^2]^{3/2}}=\frac{\mu_0 nI}{2}\cdot\frac{(R^2-y^2)}{(R^2+x^2-2xy)^{3/2}}dy$$

令 $t^2=R^2+x^2-2xy$,则 $y=\frac{-1}{2x}[t^2-(R^2+x^2)]$

$$y^2=\frac{1}{4x^2}[t^4+(R^2+x^2)^2-2t^2(R^2+x^2)]$$

$$dy=\frac{-tdt}{x}$$

$$(R^2-y^2)=\frac{1}{4x^2}[-(R^2-x^2)^2+2t^2(R^2+x^2)-t^4]$$

所以

$$dB=\frac{\mu_0 nI}{8x^3}\cdot\frac{1}{t^2}[(R^2-x^2)^2+t^4-2t^2(R^2+x^2)]dt$$

$$B=\frac{\mu_0 nI}{8x^3}\cdot\int_{R+x}^{R-x}\frac{1}{t^2}[(R^2-x^2)^2+t^4-2t^2(R^2+x^2)]dt$$

$$=\frac{\mu_0 nI}{8x^3}\left[\frac{-(R^2-x^2)^2}{t}+\frac{t^5}{5}-\frac{2}{3}t^3(R^2+x^2)\right]_{R+x}^{R-x}=\frac{2}{3}\mu_0 nI$$

(4) $x>R$,场点 P 到任一载流圆的距离为$(x-y)$。dB 和变量代换与(3)相同,但需注意这时的积分限是从$(x+R)$到$(x-R)$

$$B=\frac{\mu_0 nI}{8x^3}\cdot\int_{x+R}^{x-R}\frac{1}{t^2}[(R^2-x^2)^2+t^4-2t^2(R^2+x^2)]dt=\frac{2}{3}\mu_0 nI\cdot\frac{R^3}{x^3}$$

2-13 半径为 R 的球面上均匀分布着电荷,面密度为 σ_e。当这球面以角速度 ω 绕它的直径旋转时,求轴线上球内和球外任一点的磁感应强度分布。

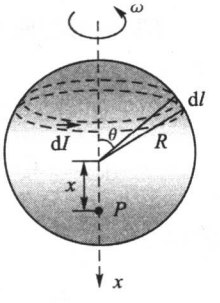


图 2-26 习题 2-13

解:球面以 ω 绕它的直径旋转时,面上电荷作定向运动,在空间激发磁场,与圆心在同一直线上半径不同的一系列圆形电流等效。如图 2-26 所示,取一宽为 dl 的细圆环面,环上电流

$$dI=\sigma_e dl\cdot\omega r=\sigma_e\omega R^2\sin\theta d\theta$$

利用圆电流在其轴线上产生磁场的公式

(1) $x<R$,

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{r^2 dI}{[r^2 + (x + R\cos\theta)^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 \sigma_e \omega R^4}{2} \cdot \frac{\sin^3\theta d\theta}{[R^2 + x^2 + 2Rx\cos\theta]^{3/2}}$$

令 $u = R^2 + x^2 + 2Rx\cos\theta$，则

$$dB = \frac{-\mu_0 \sigma_e \omega R}{16x^3} \cdot \frac{[4x^2R^2 - (u - R^2 - x^2)^2]}{u^{3/2}} du$$

$$= \frac{-\mu_0 \sigma_e \omega R}{16x^3} \cdot [-(R^2 - x^2)^2 u^{-\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}} + 2u^{-\frac{1}{2}}(R^2 + x^2)] du$$

$$B = \frac{-\mu_0 \sigma_e \omega R}{16x^3} \cdot \int_{(R+x)^2}^{(R-x)^2} [-(R^2 - x^2)^2 u^{-\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}} + 2u^{-\frac{1}{2}}(R^2 + x^2)] du$$

$$= \frac{2}{3}\mu_0 \sigma_e \omega R$$

方向沿 x 轴负方向。

(2) $x > R$，元磁场表达式与上面一样，但这时 P 点在圆外，积分限从 $(x+R)^2$ 到 $(x-R)^2$，

$$B = \frac{-\mu_0 \sigma_e \omega R}{16x^3} \cdot \int_{(x+R)^2}^{(x-R)^2} [-(R^2 - x^2)^2 u^{-\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}} + 2u^{-\frac{1}{2}}(R^2 + x^2)] du$$

$$= \frac{2}{3}\mu_0 \sigma_e \omega \cdot \frac{R^4}{x^3}$$

方向沿 x 轴负方向。

2－14 半径为 R 的圆片上均匀分布着电荷，面密度为 σ_e。令该片以角速度 ω 绕它的轴旋转，求轴线上距圆片中心 O 为 x 处的磁场(见图 2－27)。

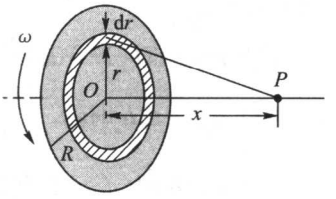


图 2－27　习题 2－14

解：带电圆片绕轴旋转产生的磁场，与半径不同的一系列同心载流元等效。如图 2－27 所示，取半径为 r 宽度为 dr 的圆环，环上等效电流 $dI = \sigma_e \omega r dr$ 在 P 点激发的磁感应强度

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{r^2 dI}{[r^2 + x^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{\sigma_e r^3 \omega dr}{[r^2 + x^2]^{3/2}}$$

所以

$$B = \frac{\mu_0 \sigma_e \omega}{2} \cdot \int_0^R \frac{r^3 dr}{[r^2 + x^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 \sigma_e \omega}{8} \cdot \int_0^R \frac{dr^4}{[r^2 + x^2]^{3/2}}$$

令 $t^2 = r^2 + x^2$，则 $r = 0$ 时，$t = x$；$r = R$ 时，$t = \sqrt{x^2 + R^2}$

$$B = \frac{\mu_0 \sigma_e \omega}{2} \cdot \int_x^{\sqrt{x^2+R^2}} (1 - x^2 t^{-2}) dt = \frac{\mu_0 \sigma_e \omega}{2} \cdot \left[\frac{R^2 + 2x^2}{\sqrt{x^2 + R^2}} - 2x\right]$$

2－15 氢原子处在正常状态(基态)时，它的电子可看做是在半径为 $a_B = 0.53 \times 10^{-8}$cm 的轨道(叫做玻尔轨道)上做匀速圆周运动，速率为 $v = 2.2 \times 10^8$cm/s。已知电子电荷的大小为 $e = 1.6 \times 10^{-19}$C，求电子的这种运动在轨道中心产生的磁感应强度 B 的值。

解:电子绕核旋转,可看成一个环形电流,其电流 $I=\frac{ev}{2\pi a_B}$,所以轨道中心的磁感应强度

$$B=\frac{\mu_0}{2}\cdot\frac{I}{a_B}=\frac{\mu_0 ev}{4\pi a_B^2}=1.25\times10^5\text{Gs}$$

2-16 一载有电流 I 的无穷长直空心圆筒,半径为 R(筒壁厚度可以忽略),电流沿它的轴线方向流动,并且是均匀分布的,分别求离轴线为 $r<R$ 和 $r>R$ 处的磁场。

解:根据安培环路定理和轴对称性

$r<R$ 时,$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=B2\pi r=0$;所以,$B_{内}=0$

$r>R$ 时,$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=B2\pi r=\mu_0 I$;所以,$B_{外}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

2-17 有一很长的载流导体直圆筒。内半径为 a,外半径为 b,电流为 I,电流沿轴线方向流动,并且均匀分布在管壁的横截面上(见图2-28)。空间某一点到管轴的垂直距离为 r,求(1)$r<a$;(2)$a<r<b$;(3)$r>b$ 等处的磁感应强度。

解:把很长的直圆筒管视为无限长。如图 2-28 所示,根据轴对称性,圆心在轴线上、半径为 r 的圆形回路 L 上的 B 大小相等,方向沿着切线。于是

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=B2\pi r=\mu_0 I'$$

所以,$B=\frac{\mu_0 I'}{2\pi r}$

(1) $r<a$ 时,$I'=0$;所以,$B=0$

(2) $a<r<b$ 时,$I'=\frac{I(r^2-a^2)}{(b^2-a^2)}$;所以,$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot\frac{(r^2-a^2)}{(b^2-a^2)}$

(3) $r>b$ 时,$I'=I$;所以,$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

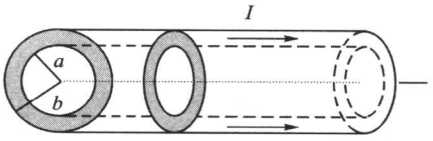


图 2-28 习题 2-17

2-18 一很长的导体直圆筒,管厚为 5.0mm,外直径为 50mm,载有 50A 的直流电,电流沿轴线流动,并且均匀分布在管的横截面上。求下列几处磁感应强度的大小 B,

(1)管外靠近外壁;

(2) 管内靠近内壁;

(3) 内外壁之间的中点。

解:把很长的直圆筒管视为无限长。根据轴对称性,圆心在轴线上,半径为 r 的圆形回路 L 上的 B 大小相等,方向沿着切线。于是,$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=B2\pi r=\mu_0\sum I$;所以,$B=\frac{\mu_0\sum I}{2\pi r}$

(1) 管外靠近外壁处，$\sum I = I$；所以 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R_2} = \dfrac{4\pi \times 10^{-7} \times 50}{2\pi \times 25 \times 10^{-3}} = 4.0\text{Gs}$

(2) 管内靠近内壁处，$\sum I = 0$；所以 $B = 0$

(3) 内外壁之间的中点处，$r = \dfrac{50 + 40}{4} = 22.5\text{mm}$ 而 $\sum I = \dfrac{I(r^2 - R_1^2)}{(R_2^2 - R_1^2)}$，所以，

$$B = \frac{\mu_0 I(r^2 - R_1^2)}{2\pi r(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 50 \times [(22.5 \times 10^{-3})^2 - (20 \times 10^{-3})^2]}{2\pi \times 25 \times 10^{-3}[(25 \times 10^{-3})^2 - (20 \times 10^{-3})^2]} = 2.1\text{Gs}$$

2－19 电缆由一导体圆柱和一同轴的导体圆筒构成。使用时，电流 I 从一导体流去，从另一导体流回，电流都均匀分布在横截面上。设圆柱的半径为 r_1，圆筒的内外半径分别为 r_2 和 r_3（见图 2－29）r 为到轴线的垂直距离，求 r 从 0 到∞的范围内各处的磁感应强度 B。

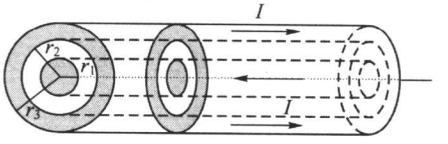


图 2－29　习题 2－19

解：在轴上任意取一点，以它为圆心，以 r 为半径做圆为闭合回路 L。由安培环路定理和对称性得

$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I'$；所以，$B = \dfrac{\mu_0 I'}{2\pi r}$

$0 < r < r_1$ 时，$I' = \dfrac{\pi r^2}{\pi r_1^2} I$；所以，$B = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi r_1^2}$

$r_1 < r < r_2$ 时，$I' = I$；所以，$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$r_2 < r < r_3$ 时，$I' = I - \dfrac{\pi(r^2 - r_2^2)}{\pi(r_3^2 - r_2^2)} I$；所以，$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \dfrac{(r_3^2 - r^2)}{(r_3^2 - r_2^2)}$

$r > r_3$ 时，$I' = I - I = 0$；所以，$B = 0$

2－20 详见本章典型例题例 2－2。

2－21 矩形截面的螺绕环，尺寸见图 2－30(a)，

(1) 求环内磁感应强度的分布；

(2) 证明通过螺绕环截面（图 2－30(a)中阴影区）的磁通量为

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi} \ln \frac{D_1}{D_2}$$

其中 N 为螺绕环总匝数，I 为其中电流的大小。

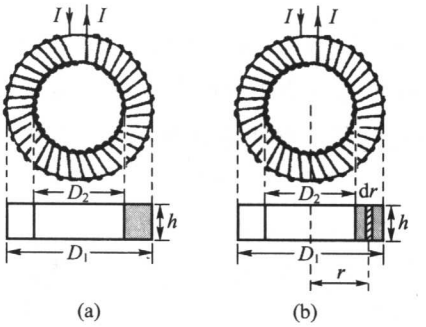


图 2－30　习题 2－21

解：(1)以 r 为半径做与环同心的圆为闭合回路 L。由安培环路定理和对称性得

$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI$；所以，$B = \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}$

(2) 取如图 2－30(b)所示的面元 $dS = h \cdot dr$，$d\Phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{S} = \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r} h\,dr$

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi} \int_{\frac{D_2}{2}}^{\frac{D_1}{2}} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi} \ln \frac{D_1}{D_2}$$

2－22 用安培环路定理重新计算习题 2－6(2)中无限大均匀载流平面外的磁感应强度。

解：由对称性分析可知，无限大平面两侧距平面等远的点 $\vec{B}$ 的大小相等方向相反，它们均平行于平面且与电流方向垂直。取如图 2－31 所示闭合回路 L，则

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\int_{AD} B \cdot \cos 0° \cdot dl + 2\int_{DC} B \cdot \cos 90° \cdot dl = 2Bl$$

又 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 li$，所以，$B = \dfrac{\mu_0}{2} i$

2－23 如图 2－32 所示，有一根长为 l 的直导线，质量为 m，用细绳子平挂在外磁场 B 中，导线中通有电流 I，I 的方向与 $\vec{B}$ 垂直。

(1) 求绳子张力为零时的电流 I，当 $l = 50\text{cm}$，$m = 10\text{g}$，$B = 1.0\text{T}$ 时，$I = ?$

(2) 在什么条件下导线会向上运动?

解：(1) 直导线所受安培力向上；重力向下。当 $mg = IBl$ 时，绳子张力正好为零，故 $I = \dfrac{mg}{Bl} = 0.2\text{A}$。

(2) 当 $IBl > mg$ 时，即 $I > \dfrac{mg}{lB} = 0.2\text{A}$ 时，导线向上运动。

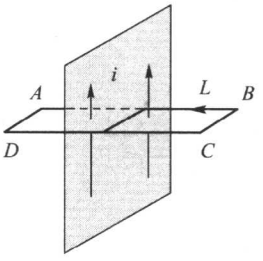


图 2－31 习题 2－22

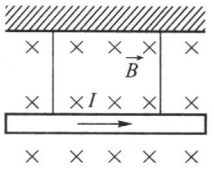


图 2－32 习题 2－23

2－24 横截面积 $S = 2.0\text{mm}^2$ 的铜导线弯成如图 2－33 所示形状，其中 OA 和 DO' 段固定在水平方向不动，$ABCD$ 段是边长为 a 的正方形的三边，可以绕 OO' 转动；整个导线放在均匀磁场 $\vec{B}$ 中，$\vec{B}$ 的方向竖直向上。已知铜的密度 $\rho = 8.9\text{g/cm}^3$，当这铜线中的 $I = 10\text{A}$ 时，在平衡情况下，AB 段和 CD 段与竖直方向的夹角 $\alpha = 15°$，求磁感应强度 $\vec{B}$ 的大小。

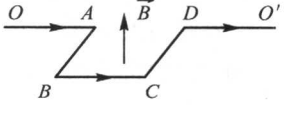


图 2－33 习题 2－24

解：AB、BC、CD 三段所受重力都为 $\rho a S g$，它们对 OO' 轴的合力矩 $L_G = 2a^2 \rho S g \sin\alpha$，方向沿 OO' 轴。三段所受安培力为 $F_{AB} = -F_{CD} = IaB\sin\alpha$ 方向与 OO' 轴平行；所以对 OO' 轴的力

矩为零。$F_{BC}=IaB$，它对 OO' 轴的力矩 $L_B=Ia^2B\cos\alpha$，方向沿 $O'O$ 轴。线圈平衡时，$L_G=L_B$，所以

$$2a^2\rho Sg\sin\alpha = Ia^2B\cos\alpha$$

$$B=\frac{2\rho Sg}{I}\tan\alpha = 93\times10^{-4}\mathrm{T} = 93\mathrm{Gs}$$

2－25 详见本章典型例题例 2－3。

2－26 安培秤如图 2－34 所示，它的一臂下面挂有一个矩形线圈，线圈共有 N 匝，线圈的下部悬挂在均匀磁场 $\vec{B}$ 内，下边一段长为 l，它与 $\vec{B}$ 垂直。当线圈的导线中通有电流 I 时，调节砝码使两臂达到平衡；然后使电流反向，这时需要在一臂上加质量为 m 的砝码，才能使两臂再达到平衡。

(1) 求磁感应强度 $\vec{B}$ 的大小；

(2) 当 $N=9$，$l=10.0\mathrm{cm}$，$I=0.100\mathrm{A}$，$m=8.78\mathrm{g}$ 时，设 $g=9.8\mathrm{m/s^2}$，$B=?$

解：(1) 设安培秤的臂长为 d，通有电流 I 时，线圈所在一边砝码的质量为 m_2；另一端砝码的质量为 m_1。秤平衡时

$$(m_2g-NBlI)d = m_1gd \qquad ①$$

电流反向后平衡时

$$(m_2g+NBlI)d = (m_1+m)gd \qquad ②$$

式②－式①得 $mg=2NBlI$

所以，$B=\dfrac{mg}{2Nl I}$

(2) 代入数据计算得 $B=0.478\mathrm{T}$

2－27 一矩形载流线圈由 20 匝互相绝缘的细导线绕成，矩形边长为 10.0cm 和 5.0cm，导线中的电流为 0.10A，这线圈可以绕它的一边 OO' 转动(见图 2－35)。当加上 $B=0.50\mathrm{T}$ 的均匀外磁场，$\vec{B}$ 与线圈平面成 30°角时，求这线圈受到的力矩。

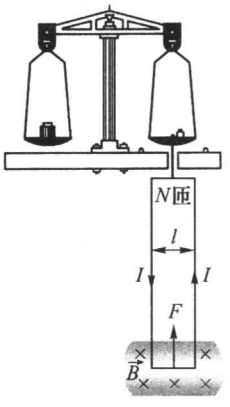


图 2－34 习题 2－26

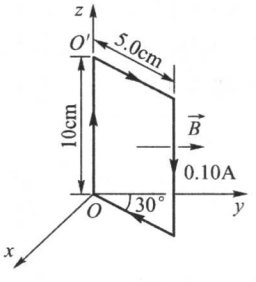


图 2－35 习题 2－27

解：由 $\vec{L}=\vec{m}\times\vec{B}$ 得所受力矩的大小为

$$L = mB\sin\frac{\pi}{3} = nIsB\sin\frac{\pi}{3} = 4.3\times10^{-3}\text{N}\cdot\text{m}$$

方向沿 $-z$ 轴。

2-28 一边长为 a 的正方形线圈载有电流 I，处在均匀外磁场 $\vec{B}$ 中，$\vec{B}$ 沿水平方向，线圈可以绕通过中心的竖直轴 OO' 转动（见图 2-36），转动惯量为 J。求线圈在平衡位置附近做微小摆动的周期 T。

解：当线圈右旋法线方向偏离磁场 $\vec{B}$ 的方向 θ 角后，受到力矩 $L=Ia^2B\sin\theta$。微小摆动，θ 很小，$\sin\theta\approx\theta$，所以 $L=Ia^2B\theta$，由于 L 与 θ 方向相反，所以上式应写成 $L=-Ia^2B\theta$

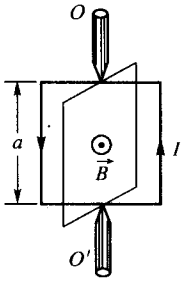


图 2-36 习题 2-28

由转动定律 $L=J\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$ 得

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{Ia^2B}{J}\theta=0$$

所以摆动周期

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{J}{Ia^2B}}$$

2-29 一螺线管长 30cm，横截面的直径为 15mm，由表面绝缘的细导线密绕而成，每厘米绕有 100 匝。当导线中通有 2.0A 的电流后，把这螺线管放到 $B=4.0$T 的均匀磁场中，求：

(1) 螺线管的磁矩；

(2) 螺线管所受力矩的最大值。

解：(1) 螺线管的磁矩：$m=NIS\approx1.1\text{A}\cdot\text{m}^2$

(2) 螺线管所受力矩的最大值：$L_\text{m}=mB=4.2\text{N}\cdot\text{m}$

2-30 两条很长的平行输电线相距 20mm，都载有 100A 的电流，分别求电流方向相同和相反时，其中两段 1m 长的输电线之间的相互作用力。

解：设两导线相距为 d，电流为 I，则两段 1m 长的输电线之间的相互作用力：

$$F_0=Il_0\frac{\mu_0I}{2\pi d}=\frac{\mu_0l_0I^2}{2\pi d}=0.1\text{N}$$

两电流同向时为吸引力，反向时为排斥力。

2-31 发电厂的汇流条是两条 3m 长的平行铜棒，相距 50cm，当向外输电时，每条棒中的电流都是 10000A。作为近似，把两棒当成无限长的细棒，试计算它们之间的相互作用力。

解：$F=IlB=Il\dfrac{\mu_0I}{2\pi d}=\dfrac{\mu_0lI^2}{2\pi d}=120\text{N}$

相互吸引。

2-32 载有电流 I_1 的长直导线旁有一正方形线圈，边长为 $2a$，载有电流 I_2，线圈中心到导线的垂直距离为 b，电流方向如图 2-37 所示。线圈可以绕平行与导线的轴

O_1O_2 转动。求：

(1) 线圈在 θ 角度位置时所受的合力 $\vec{F}$ 和合力矩 $\vec{L}$；

(2) 线圈平衡时 θ 的值；

(3) 线圈从平衡位置转到 $\theta=\pi/2$ 时，I_1 作用在线圈上的力做了多少功？

解：(1) 取 x 轴沿 r 过转轴的方向，y 轴垂直于电流 I_1 和 x 轴。

如图 2－37 所示，I_1 在导线 AD 处产生的 $\vec{B}_1$，方向沿着以 r_1 为半径的圆周在 A 点的切线方向，其大小

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1}{r_1}。$$

导线 AD 受到的力 $\vec{F}_1$ 方向如图 2－38 所示，大小为

$$F_1 = I_2 \cdot 2aB_1 = \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{\pi r_1}$$

同理，导线 BC 受的力

$$F_2 = I_2 \cdot 2aB_2 = \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{\pi r_2}$$

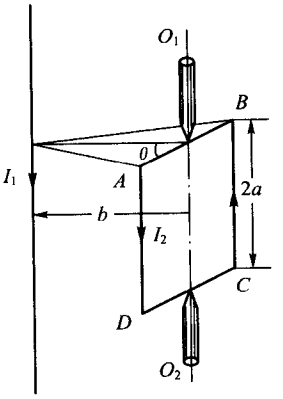


图 2－37　习题 2－32

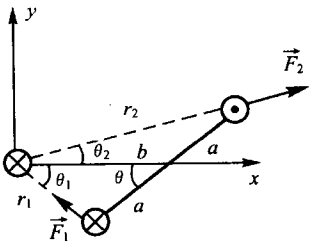


图 2－38　习题 2－32 附图

导线 AB 和导线 DC 受的力等大、反向、共线，故相互抵消。

线圈所受合 $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$，其垂直分量

$$F_x = F_{2x} - F_{1x} = F_2\cos\theta_2 - F_1\cos\theta_1 = \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{\pi}\left(\frac{b + a\cos\theta}{r_2^2} - \frac{b - a\cos\theta}{r_1^2}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{\pi}\left(\frac{b + a\cos\theta}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta} - \frac{b - a\cos\theta}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}\right)$$

$$F_y = F_{2y} + F_{1y} = F_2\sin\theta_2 + F_1\sin\theta_1 = \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{\pi}\left(\frac{a\sin\theta}{r_2^2} + \frac{a\sin\theta}{r_1^2}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 a^2 I_1 I_2}{\pi}\left(\frac{\sin\theta}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}\right)$$

图 2－38 中设使线圈顺时针方向旋转的力矩为正。因此合力矩的大小

$$L=(F_{1x}+F_{2x})a\sin\theta+(F_{1y}-F_{2y})a\cos\theta$$

$$=\frac{\mu_0 a^2 I_1 I_2 b\sin\theta}{\pi}\left(\frac{1}{a^2+b^2+2ab\cos\theta}+\frac{1}{a^2+b^2-2ab\cos\theta}\right)$$

$$=\frac{2\mu_0 a^2 I_1 I_2 b(a^2+b^2)\sin\theta}{\pi[(a^2+b^2)^2-4a^2b^2\cos^2\theta]}$$

(2) 根据平衡条件 $L=0$，所以，$\theta=0$，稳定平衡；$\theta=\pi$，不稳定平衡。

(3) I_1 作用在线圈上的力所做的功

$$A=\int_0^{\pi/2}L\mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0 a^2 I_1 I_2 b}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{a^2+b^2+2ab\cos\theta}+\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{a^2+b^2-2ab\cos\theta}\right]$$

$$=-\frac{\mu_0 a I_1 I_2}{\pi}\ln\frac{b-a}{b+a}$$

2－33 详见本章典型例题例 2－4。

2－34 试证明电子绕原子核沿圆形轨道运行时磁矩与角动量大小之比为 $\gamma=\frac{-e}{2m}$（经典回旋磁比率），式中 $-e$ 和 m 分别是电子的电荷与质量，负号表示磁矩与角动量的方向相反，如图 2－39 所示。（它们各沿什么方向？）

[提示：计算磁矩时，可把在圆周上运动的电子看成是电流环。]

证明：磁矩（取垂直纸面向外为正方向）

$$P_m=IS=\frac{-ve}{2\pi r}\cdot\pi r^2=\frac{-ver}{2}$$

角动量

$$J\omega=mr^2\omega=mrv$$

所以

$$\gamma=\frac{P_m}{J\omega}=\frac{-ver}{2mrv}=-\frac{e}{2m}$$

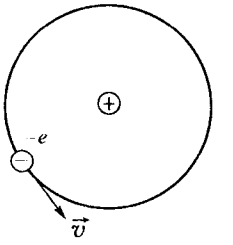


图 2－39 习题 2－34

2－35 一电磁式电流计线圈长 $a=2.0\mathrm{cm}$，宽 $b=1.0\mathrm{cm}$，$N=250$ 匝，磁极间隙内的磁感应强度 $B=2000\mathrm{Gs}$。当通入电流 $I=0.10\mathrm{mA}$ 时，偏转角 $\theta=30°$，求，

(1) 作用在线圈上的磁偏转力矩 $L_{磁}$；

(2) 游丝的扭转常数 D。

解：因磁极间隙内的磁感应强度 $\vec{B}$ 沿径向分布，所以处于间隙磁场内的电流计线圈两个长边的取向总是与 $\vec{B}$ 垂直的，根据 $\vec{F}=\vec{Il}\times\vec{B}$ 可知

(1) $L_{磁}=Fb=NIaBb=NISB=1.0\times10^{-6}\mathrm{N\cdot m}$

(2) 游丝的弹性力矩 $L_{弹}=-D\theta$，平衡时 $L_{磁}+L_{弹}=0$

即：$D\theta=NISB$，所以，游丝的扭转常数

$$D=\frac{NISB}{\theta}=\frac{1.0\times10^{-6}}{30°}=3.3\times10^{-8}\mathrm{N\cdot m/(°)}$$

2－36 带电粒子穿过饱和蒸汽时，在它走过的路径上，过饱和蒸汽便凝结成小液滴，

从而使它运动的轨迹(径迹)显示出来,这就是云室的原理。今在云室中有 $B=10000\text{Gs}$ 的均匀磁场,观测到一个质子的径迹是圆弧,半径 $r=20\text{cm}$,已知这粒子的电荷为 $1.6\times10^{-19}\text{C}$,质量为 $1.67\times10^{-27}\text{kg}$,求它的动能。

解:根据 $evB=m\frac{v^2}{r}$ 得 $v=\frac{eBr}{m}$,所以

$$E_k=\frac{1}{2}m\left(\frac{eBr}{m}\right)^2=\frac{e^2B^2r^2}{2m}=1.92\text{MeV}$$

2-37 测得一太阳黑子的磁场为 $B=4000\text{Gs}$,问其中电子以(1)$5.0\times10^7\text{cm/s}$;

(2) $5.0\times10^8\text{cm/s}$ 的速度垂直于 $\vec{B}$ 运动时,受到的洛伦兹力各有多大?回旋半径各有多大?已知电子的电荷大小为 $1.6\times10^{-19}\text{C}$,质量为 $9.1\times10^{-31}\text{kg}$。

解:(1) 洛伦兹力

$$f_1=ev_1B=3.2\times10^{-14}\text{N}$$

由 $ev_1B=m\frac{v_1^2}{r_1}$ 得

$$r_1=\frac{mv_1}{eB}=7.1\times10^{-6}\text{m}$$

(2) 同理 $f_2=ev_2B=3.2\times10^{-13}\text{N}$;$r_2=\frac{mv_2}{eB}=7.1\times10^{-5}\text{m}$

2-38 一电子以 $v=3.0\times10^7\text{m/s}$ 的速率射入匀强磁场 $\vec{B}$ 内,它的速度与 $\vec{B}$ 垂直,$B=10\text{T}$。已知电子电荷 $-e=-1.6\times10^{-19}\text{C}$,质量 $m=9.1\times10^{-31}\text{kg}$,求这电子所受的洛伦兹力,并与它在地面所受的重力加以比较。

解:洛伦兹力

$$f_B=evB=4.8\times10^{-11}\text{N}$$

重力

$$f_G=mg=8.9\times10^{-30}\text{N}$$

两力比

$$\frac{f_B}{f_G}=5.4\times10^{18}$$

2-39 已知质子质量 $m=1.67\times10^{-27}\text{kg}$,电荷 $e=1.6\times10^{-19}\text{C}$,地球半径 6370km,地球赤道上地面的磁场 $B=0.32\text{Gs}$。

(1) 要使质子绕赤道表面作圆周运动,其动量 P 和能量 E 应有多大?

(2) 若要使质子以速率 $v=1.0\times10^7\text{m/s}$ 环绕赤道表面作圆周运动,问地磁场应该有多大?

[提示:相对论中粒子的动量 P 和能量 E 的公式如下:$\vec{P}=m\vec{v}$;$E=mc^2=c\sqrt{P^2+m_0^2c^2}$,$m$ 和 m_0 的关系 $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$。]

解:根据 $evB=m\frac{v^2}{R}$ 知

(1) 动量 $P = mv = eBR = 3.3\times10^{-17}\text{kg}\cdot\text{m/s}$

能量 $E = mc^2 = c\sqrt{P^2 + m_0^2c^2} = 9.784\times10^{-9}\text{J} = 62\text{GeV}$

(2) $B = \dfrac{mv}{eR} = \dfrac{m_0 v}{eR\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1.64\times10^{-8}\text{T} = 1.64\times10^{-4}\text{Gs}$

2-40 在一个显像管里,电子沿水平方向从南到北运动,动能是 $1.2\times10^4\text{eV}$。该处地球磁场在竖直方向的分量向下,$\vec{B}$的大小是 0.55Gs。已知电子电荷 $-e = -1.6\times10^{-19}$ C,质量为 $m = 9.1\times10^{-31}\text{kg}$,

(1) 电子受地磁的影响往哪个方向偏转?

(2) 电子的加速度有多大?

(3) 电子在显像管内走 20cm 时,偏转有多大?

(4) 地磁对看电视有没有影响?

解:(1) 如图 2-40 所示,根据 $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$可知,向东偏转。

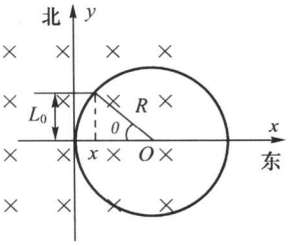


图 2-40 习题 2-40

(2) 因为 $E_k = \dfrac{1}{2}mv^2$,所以 $v = \sqrt{\dfrac{2E_k}{m}} = 6.5\times10^7\text{m/s}$

又由:$evB = ma$,可得 $a = \dfrac{evB}{m} = 6.3\times10^{14}\text{m/s}^2$

(3) 如图 2-40 所示,令电子沿 y 方向走 $l_0 = 20\text{cm}$ 时,在 x 轴方向的偏转为 x。由图知

$$x = R - R\cos\theta = R - \sqrt{R^2 - l_0^2}$$

又 $R = \dfrac{v^2}{a} = 6.7\text{m}$;所以

$$x = R - R\cos\theta = R - \sqrt{R^2 - l_0^2} = 0.003\text{m} = 3\text{mm}$$

(4) 由于在固定阳极电压下加速,电子获得的动能相同,即电子在射向荧光屏经过的时间相同,因而在地磁场影响下发生的偏离也相同。结果电视图像只发生了微小的平移(向东),对收看没有影响。

2-41 如图 2-41 所示,一质量为 m 的粒子带有电量 q,以速度 v 射入磁感应强度

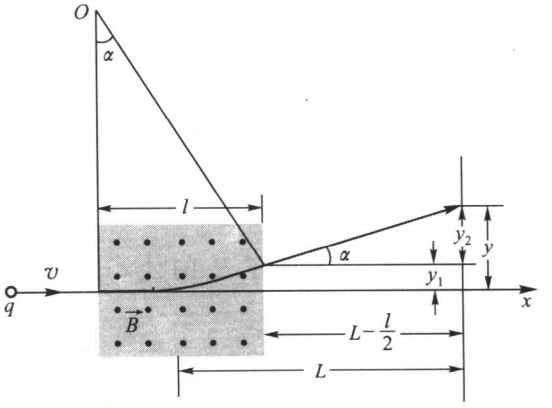


图 2-41 习题 2-41

为 B 的均匀磁场，$\vec{v}$ 与 $\vec{B}$ 垂直；粒子从磁场出来后继续前进。已知磁场区域在 $\vec{v}$ 方向（即 x 方向）上的宽度为 l，当粒子从磁场出来后在 x 方向前进的距离为 $L-l/2$ 时，求它的偏转 y。

解：粒子在磁场区域中沿圆弧运动，圆半径为 $R=\dfrac{mv}{qB}$

由上题知：$y_1=R-\sqrt{R^2-l^2}$

粒子离开磁场后作匀速直线运动，如图 2－41 所示

$$\tan\alpha=\frac{y_2}{L-\frac{l}{2}}=\frac{l}{\sqrt{R^2-l^2}}$$

$$y_2=\frac{l}{\sqrt{R^2-l^2}}\cdot\left(L-\frac{l}{2}\right)$$

所以

$$y=y_1+y_2=R-\sqrt{R^2-l^2}+\frac{l}{\sqrt{R^2-l^2}}\cdot\left(L-\frac{l}{2}\right)$$

当 $R\gg l$ 时，上式简化为 $y\approx\dfrac{lL}{R}=\dfrac{qlLB}{mv}$

2－42 一氘核在 $B=1.5\mathrm{T}$ 的均匀磁场中运动，轨迹是半径为 40cm 的圆周。已知氘核的质量为 $3.34\times10^{-27}\mathrm{kg}$，电荷为 $1.6\times10^{-19}\mathrm{C}$。

(1) 求氘核的速度和走半圈所需的时间；

(2) 需要多高的电压才能把氘核从静止加速到这个速度？

解：(1) 根据 $evB=m\dfrac{v^2}{R}$ 得

$$v=\frac{eBR}{m}=2.9\times10^7\mathrm{m/s}$$

$$t=\frac{T}{2}=\frac{\pi R}{v}=4.3\times10^{-8}\mathrm{s}$$

(2) 根据 $eU=\dfrac{1}{2}mv^2$ 得

$$U=\frac{mv^2}{2e}=8.6\times10^6\mathrm{V}$$

2－43 一质谱仪的构造原理如图 2－42 所示，离子源 S 产生质量为 m、电荷为 q 的离子，离子产生出来时速度很小，可以看做是静止的；经过电压 U 加速，进入磁感应强度为 B 的均匀磁场，沿着半圆周运动而达到记录它的照相底片 P 上，测得它在 P 上的位置到入口处的距离为 x。证明这离子的质量为 $m=\dfrac{qB^2}{8U}x^2$。

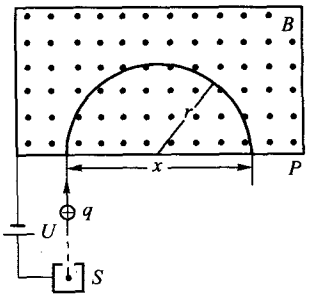


图 2－42　习题 2－43

证明：根据 $qU=\dfrac{1}{2}Mv^2$ 得 $v=\sqrt{\dfrac{2qU}{M}}$

又由：$qvB = M\frac{v^2}{R}$得$v = \frac{qBR}{M} = \frac{\frac{qBx}{2}}{M}$

所以，$\frac{qBx}{2M} = \sqrt{\frac{2qU}{M}}$；即，$M = \frac{qB^2}{8U}x^2$

2－44 如上题，以钠离子做实验，得到数据如下：加速电压 $U = 705\text{V}$，磁感应强度 $B = 3580\text{Gs}$，$x = 10\text{cm}$。求钠离子的荷质比。

解：根据上题结果 $M = \frac{qB^2}{8U}x^2$ 得$\frac{q}{M} = \frac{8U}{B^2x^2}$

代入数据计算得$\frac{q}{M} = 4.4 \times 10^6\text{C/kg}$

2－45 一回旋加速器D形电极周围的最大半径 $R = 60\text{cm}$，用它来加速质量为 $1.67 \times 10^{-27}\text{kg}$、电荷为 $1.6 \times 10^{-19}\text{C}$ 的质子，要把质子从静止加速到 4.0MeV 的能量，

(1) 求所需的磁感应强度 B；

(2) 设两 D 形电极间的距离为 1.0cm，电压为 $2.0 \times 10^4\text{V}$，其间电场是均匀的，求加速到上述能量所需的时间。

解：(1) 根据回旋加速器的工作原理知

$$B = \frac{mv}{qR} = \frac{m}{qR}\sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \frac{\sqrt{2mE_k}}{eR}$$

代入数据计算得 $B = 0.48\text{T}$

(2) 设质子回旋 n 转后达到所需能量 W，经历时间为下面两部分之和，在D形盒内旋转 n 圈的时间 t_1；通过电极间缝隙 $2n$ 次所需时间 t_2。

$$t_1 = 2n \cdot \frac{T}{2} = nT \qquad ①$$

$$T = \frac{2\pi m}{qB} \qquad ②$$

$$2nqU = W \qquad ③$$

质子在缝隙中受力

$$q\frac{U}{d} = ma \qquad ④$$

通过 $2n$ 次缝隙总路程

$$2nd = \frac{1}{2}at_2^2 \qquad ⑤$$

联立求解得

$$t_1 = \frac{\pi Wm}{q^2BU} = 1.37 \times 10^{-5}\text{s}$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{2Wm}}{qU}d = 0.014 \times 10^{-5}\text{s}$$

所以

$$t = t_1 + t_2 = 1.384 \times 10^{-5}\text{s}$$

2－46 一电子在 $B = 20\text{Gs}$ 的磁场里沿半径 $R = 20\text{cm}$ 的螺旋线运动。螺距 $h = 5.0\text{cm}$，如图 2－43 所示，已知电子的荷质比 $e/m = 1.76 \times 10^{11}\text{C/kg}$。求这电子的速度。

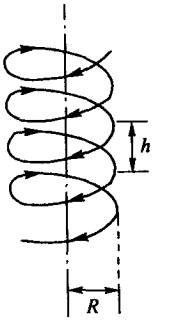


图 2－43 习题 2－46

解：因为 $h = v_{//} \cdot T = v_{//} \cdot \dfrac{2\pi m}{eB}$；所以，$v_{//} = \dfrac{eBh}{2\pi m}$；因为 $R = \dfrac{mv_{\perp}}{eB}$，所以，$v_{\perp} = \dfrac{eBR}{m}$，故

$$v = \sqrt{v_{//}^2 + v_{\perp}^2} = \frac{eB}{m}\sqrt{\frac{h^2}{4\pi^2} + R^2}$$

代入数据计算得 $v = 7.04 \times 10^7\text{m/s}$

2－47 图 2－44 是微波技术中用的一种磁控管的示意图。一群电子在垂直于磁场 B 的平面内作圆周运动，在运行过程中它们时而接近电极 1，时而接近电极 2，从而使两电极间的电势差作周期性变化。试证明电压变化的频率为 $\dfrac{eB}{2\pi m}$，电压的幅度为 $U_0 = \dfrac{Ne}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_1 + D}\right)$，式中 e 是电子电荷的绝对值，m 是电子的质量，D 是圆形轨道的直径，r_1 是电子群最靠近某一电极时的距离，N 是这群电子的数目。

证明：电子运动一周，电压也变化一周，因此，电子作圆周运动的频率也就是电压变化的频率

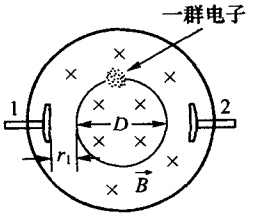


图 2－44 习题 2－47

$$f = \frac{1}{T} = \frac{eB}{2\pi m}$$

电子群接近电极 1 时，电极 1 的电位为

$$U_1 = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Ne}{r_1}$$

电极 2 的电位为

$$U_2 = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Ne}{r_1 + D}$$

这时两极间的电势差是最大电势差

$$U_0 = U_2 - U_1 = \frac{Ne}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + D}\right)$$

得证。

2－48 详见本章典型例题例 2－5。

2－49 一铜片厚为 $d = 1.0\text{mm}$，放在 $B = 1.5\text{T}$ 的磁场中，磁场方向与铜片表面垂直（见图 2－45），已知铜片里每立方厘米有 8.4×10^{22} 个自由电子，每个电子电荷的大小为 $e = 1.6 \times 10^{-19}\text{C}$，当铜片中有 $I = 200\text{A}$ 的电流时，

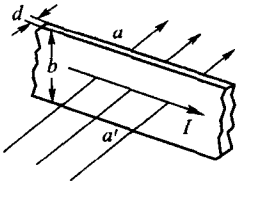


图 2－45 习题 2－49

(1) 求铜片两侧的电势差 $U_{aa'}$；

(2) 铜片宽度 b 对 $U_{aa'}$ 有无影响？为什么？

解：(1) $U_{aa'}=\dfrac{1}{n(-e)}\cdot\dfrac{IB}{d}=-22\text{V}$

(2) 无影响。虽然 $U_{aa'}=E\cdot b$；似乎 $U_{aa'}\propto b$，但在 I 固定的条件下，当 b 增大后，电流密度 j 将减小。由 $j=neu$ 知，铜片中电子的定向漂移速率 u 将减小（n 不变）。这样铜片中载流子（电子）受的洛伦兹力 euB 也随之减小。因为平衡时霍耳电场 $E=uB$，所以 E 也将减小。结果 b 增大，E 减小，$U_{aa'}$ 不变。

2－50 一块半导体样品的体积为 $a\times b\times c$，如图 2－46 所示，沿 x 方向有电流 I，在 z 轴方向加有均匀磁场 $\vec{B}$。实验数据为 $a=0.10\text{cm}$，$b=0.35\text{cm}$，$c=1.0\text{cm}$，$I=1.0\text{mA}$，$B=3000\text{Gs}$，片两侧的电势差 $U_{AA'}=6.55\text{mV}$。

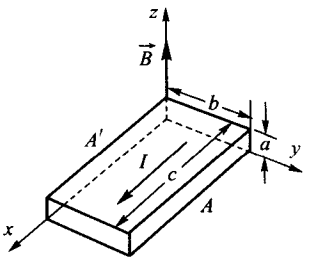


图 2－46 习题 2－50

(1) 问这半导体是正电荷导电（P 型）还是负电荷导电（N 型）？

(2) 求载流子浓度（即单位体积内参与导电的带电粒子数）。

解：(1) 因为 $U_{AA'}=6.55\times10^{-3}\text{V}>0$

即 $U_A>U_{A'}$ 所以，其是负电荷导电（N 型）。

(2) 因为 $U_{AA'}=\dfrac{1}{nq}\cdot\dfrac{IB}{a}$

所以 $n=\dfrac{IB}{qaU_{AA'}}=2.9\times10^{14}\text{cm}^{-3}$

第 3 章　电磁感应　电磁场的相对论变换

3.1　基本要求与教学难点

1. 基本概念的要求

理解动生、感生电动势的产生，理解感生电场的物理意义、感生电场的性质，感生电场与静电场的区别；理解自感、互感的物理意义，自感磁能和互感磁能的物理意义；了解电磁场的相对论变换。

2. 基本方法的要求

(1) 掌握法拉第电磁感应定律和楞次定律，并能熟练运用。

(2) 掌握感生电动势、动生电动势的计算。

(3) 会计算自感系数和互感系数。

(4) 会计算自感磁能和互感磁能。

3. 教学难点

(1) 感生电动势的理解。

(2) 电磁场的相对论变换。

3.2　典 型 例 题

例 3-1：一长直导线与边长为 l_1 和 l_2 的矩形导线框共面，且与它的一边平行。线框以恒定速率 v 沿与长直导线垂直的方向向右运动，如图 3-1 所示。

(1) 若长直导线中的电流为 I，求线框与直导线相距 x 时穿过线框的磁通量、线框中感应电动势的大小和方向；

(2) 若长直导线中通以交变电流 $I = I_0\sin\omega t$，求任意时刻线框中的感应电动势。

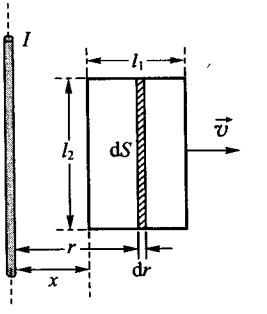


图 3-1　例 3-1

解：(1) 电流 I 产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

设 I 的方向由下向上，则直导线右边的磁感应强度方向垂直纸面向内。设线框回路的绕行方向为顺时针方向，则穿过线框的磁通量为

$$\Phi = \iint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_x^{x+l_1} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l_2 \cdot \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I l_2}{2\pi}\ln\frac{x+l_1}{x}$$

根据法拉第电磁感应定律，线框中感应电动势为

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -v\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} = \frac{\mu_0 I l_2}{2\pi}v\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+l_1}\right)$$

因为 $\varepsilon>0$，所以其方向与回路的绕行方向一致，为顺时针绕向。

(2) t 时刻线框与导线相距 x，则

$$\Phi = \frac{\mu_0 l_2}{2\pi}I_0\ln\frac{x+l_1}{x}\sin\omega t$$

则在任意时刻线框中的感应电动势为

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 l_2}{2\pi}I_0\left[v\left(\frac{1}{x+l_1}-\frac{1}{x}\right)\sin\omega t + \omega\ln\frac{x+l_1}{x}\cos\omega t\right]$$

若 $\varepsilon>0$，其方向与回路的绕行方向一致，为顺时针绕向。若 $\varepsilon<0$，其方向与回路的绕行方向相反，为逆时针绕向。

注意：该题目(1)中的感应电动势也可利用动生电动势求解，其结果为 $\varepsilon = B_x l_2 v - B_{x+l_1} l_2 v = \frac{\mu_0 I l_2}{2\pi}v\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+l_1}\right)$。但(2)中的感应电动势不可简单地用此方法求解，因为此时其中既有动生电动势又有感生电动势，其中

$$\varepsilon_{动} = B_x l_2 v - B_{x+l_1} l_2 v = \frac{\mu_0 I l_2}{2\pi}v\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+l_1}\right)$$

$$\varepsilon_{感} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 l_2}{2\pi}I_0\omega\ln\frac{x+l_1}{x}\cos\omega t$$

所以感应电动势应为

$$\varepsilon = \varepsilon_{动} + \varepsilon_{感} = -\frac{\mu_0 l_2}{2\pi}I_0\left[v\left(\frac{1}{x+l_1}-\frac{1}{x}\right)\sin\omega t + \omega\ln\frac{x+l_1}{x}\cos\omega t\right]$$

例 3-2：只有一根辐条的轮子在均匀外磁场 $\vec{B}$ 中转动，轮轴与 $\vec{B}$ 平行，如图 3-2 所示。轮子和辐条都是导体，辐条长为 R，轮子每秒转 N 圈。两根导线 a 和 b 通过各自的刷子分别与轮轴和轮边接触。

(1) 求 a、b 间的感应电动势 ε；

(2) 若在 a、b 间接一个电阻，使辐条中的电流为 I，问 I 的方向如何？

(3) 求这时磁场作用在辐条上的力矩的大小和方向；

(4) 当轮反转时，I 是否也会反向；

(5) 若轮子的辐条是对称的两根或更多根，结果如何？

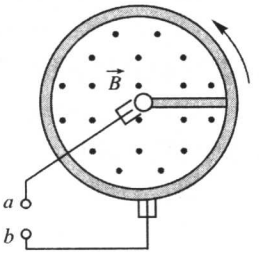


图 3-2　例 3-2

解：(1) a、b 间的感应电动势

$$\varepsilon = \int_L \mathrm{d}\varepsilon = \int_a^b (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_0^R B\omega l\,\mathrm{d}l = \frac{1}{2}B\omega R^2$$

$$= \frac{1}{2}B\cdot 2\pi N\cdot R^2 = \pi NBR^2$$

(2) 因 ε 的方向从轮心指向边缘，故在外电路上，I 的方向为 b 指向 a。

(3) 考虑距轮心 r，长为 $\mathrm{d}r$ 段上受到的电磁力矩。

根据安培定律：$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{r}\times\vec{B}$ 及 $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{F}$，得 $\mathrm{d}r$ 段上受到的电磁力矩

$$\mathrm{d}\vec{L}=\vec{r}\times\mathrm{d}\vec{F}=\vec{r}\times(I\mathrm{d}\vec{r}\times\vec{B})$$

所以整个辐条受到的力矩为

$$\vec{L}=\int_0^R\mathrm{d}\vec{L}=\int_0^R\vec{r}\times(I\mathrm{d}\vec{r}\times\vec{B})=-I\vec{B}\int_0^R r\mathrm{d}r=-\frac{1}{2}\vec{B}\,IR^2$$

即力矩大小为$\frac{1}{2}BIR^2$，方向与$\vec{B}$的方向相反。

(4) 反转时，感应电动势反向，故电流 I 也会反向。

(5) 在此情况下相当于两个或更多个电源的并联，所以感应电动势 ε 相同。

例 3-3：如图 3-3 所示，一对同轴圆柱形导体，半径分别为 a 和 b，内柱载有沿柱轴 z 方向的电流 I，电流沿外圆柱流回。

(1) 求两柱之间区域内的磁矢势表达式；

(2) 一电子从内柱以速率 v_0 垂直柱轴出发，这电子能达到外柱的最小值 v_0 为多少？

解：(1) 由安培环路定律可知，在两柱之间区域内的磁感应强度为

$$B_\varphi=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

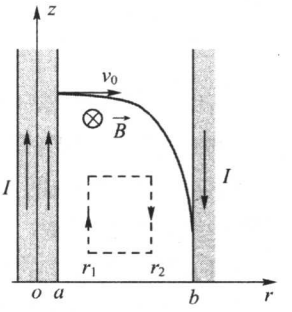


图 3-3　例 3-3

由于电流沿 z 方向，所以磁矢势也仅存在 z 分量，对图中的虚线回路有

$$A_z(r_1)-A_z(r_2)=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

如取 $r=a$ 处为磁矢势的零点，则

$$A_z(r)=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

即

$$\vec{A}(r)=-\hat{z}\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

(2) 若电子速率取为最小值 v_0，则到达外柱时电子的水平速度为 0，仅存在垂直速度 ($v_z<0$)。

由于广义势在 z 方向的梯度为零，所以正则动量 $m\vec{v}+q\vec{A}$ 的 z 分量守恒

$$0+(-e)\left[-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{a}{a}\right)\right]=mv_z+(-e)\left[-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right]$$

再由能量守恒可得

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv_z^2$$

由上两式消去 v_z 可以解得

$$v_0=\frac{e}{m}\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

例 3-4：两个正的点电荷 q，相距为 r，并排平行运动，速度为 $\vec{v}$，求它们之间的相互作用力。这里是斥力还是吸引力？

解:以点电荷 1 为坐标原点,以速度方向为 x 轴正方向,点电荷 2 位于 z 轴正半轴。

在参考系 K' 中,电荷无运动,点电荷 1 在点电荷 2 处产生的磁场为 0,而电场沿 z 轴方向

$$E'_z = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

电荷相对于参考系 K 以速度 v 沿 x 轴方向匀速运动,记 $\gamma = 1/\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$,则点电荷 1 在点电荷 2 处产生的电场沿 z 轴方向、磁场沿 y 轴方向

$$E_z = \gamma E'_z = \frac{\gamma q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}; B_y = -\gamma \frac{v}{c^2} E'_z = -\frac{v}{c^2}\frac{\gamma q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

所以,在参考系 K 中,点电荷 2 受到的电磁力为

$$\vec{F} = (q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}) = \left(\frac{\gamma q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \frac{v^2}{c^2}\frac{\gamma q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)\hat{z} = \frac{1}{\gamma}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{z}$$

所以,在参考系 K 中相互作用力仍为斥力,但小于电荷相对静止的参考系 K' 中的斥力。

例 3-5:一圆形线圈由 50 匝表面绝缘的细导线绕成,圆面积为 $S = 4.0\text{cm}^2$。放在另一个半径 $R = 20\text{cm}$ 的大圆形线圈中心,两者同轴,如图 3-4 所示,大圆形线圈由 100 匝表面绝缘的导线绕成。

(1) 求这两线圈的互感 M;

(2) 当大圆形导线中的电流每秒减少 50A 时,求小线圈中的感应电动势。

解:(1) 令大线圈为 1 线圈,小线圈为 2 线圈,且设大线圈中通以电流 I_1。每一匝大线圈在圆心产生的 $B = \frac{\mu_0 I_1}{2R}$,整个大线圈在圆心处产生的 $B_1 = N_1 B = N_1 \frac{\mu_0 I_1}{2R}$。因小圆圈半径 $\ll R$,所以其范围内的磁场可看做均匀磁场,大小为 B_1。则穿过小线圈的磁通匝链数

$$\Psi_{12} = N_2 B_1 S_2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 I_1 S_2}{2R}$$

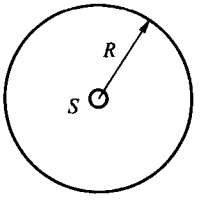


图 3-4　例 3-5

两线圈的互感

$$M = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2}{2R}$$

代入数据 $N_1 = 100, N_2 = 50, S_2 = 4.0\text{cm}^2 = 4.0\times10^{-4}\text{m}^2, R = 20\text{cm} = 0.2\text{m}$ 计算得

$$M = 6.3\times10^{-6}\text{H}$$

(2) 小线圈中感应电动势的量值

$$\varepsilon = \left|-M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}\right|$$

代入数据 $M = 6.3\times10^{-6}\text{H}, \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = -50\text{A}\cdot\text{S}^{-1}$ 计算得

$$\varepsilon = 3.2\times10^{-4}\text{V}$$

3.3 思考题详解

3-1 一导体圆线圈在均匀磁场中运动，在下列各种情况下哪些会产生感应电流？为什么？

(1) 线圈沿磁场方向平移；

(2) 线圈沿垂直磁场方向平移；

(3) 线圈以自身的直径为轴转动，轴与磁场方向平行；

(4) 线圈以自身的直径为轴转动，轴与磁场方向垂直。

答：(1) 不产生感应电流。因磁通 $\Phi=\vec{B}\cdot\vec{S}=BS\cos\theta$，此时，$B$，$S$ 和 θ 都不变，故 Φ 亦不变，则 $\dfrac{d\Phi}{dt}=0$ 所以感应电流 $I=\dfrac{1}{R}\dfrac{d\Phi}{dt}=0$。

(2) 不产生感应电流，理由同(1)。

(3) 不产生感应电流，理由同(1)。

(4) 产生感应电流。因此时 θ 随时间变化(B，S 仍不变)，则 $\dfrac{d\Phi}{dt}\neq0$，所以 $I=\dfrac{1}{R}\dfrac{d\Phi}{dt}\neq0$

3-2 感应电动势的大小由什么因素决定？如图 3-5 所示，一个矩形线圈在均匀磁场中以匀角速 ω 旋转，试比较，当它转到位置 a 和 b 时感应电动势的大小。

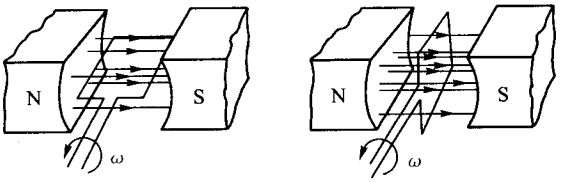


图 3-5 思考题 3-2

答：根据

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d}{dt}(BS\cos\theta)=-S\cos\theta\frac{\partial B}{\partial t}-B\cos\theta\frac{\partial S}{\partial t}+BS\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial t}$$

可知，感应电动势与 B、S、θ 及它们对时间的变化率有关。图中的情况是 B、S 不变，故 $\varepsilon=BS\omega\sin\theta$。当线圈转到 a 位置时，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\varepsilon_a=BS\omega$；当线圈转到 b 位置时，$\theta=\pi$，$\varepsilon_b=0$。

3-3 怎样判断感应电动势的方向？

(1) 判断上题图中感应电动势的方向；

(2) 在本题图 3-6 所示的变压器(一种有铁芯的互感装置)中，当原线圈的电流减少时，判断副线圈中的感应电动势的方向。

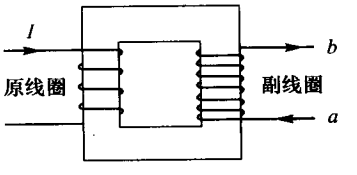


图 3-6 思考题 3-3

答：根据楞次定律判断感应电动势的方向。

(1) 根据楞次定律，图 3-5(a)中的感应电动势的方向为：从上方俯视为逆时针方向；图 3-5(b)中的感应电动势

的方向不定，因 $\varepsilon_b=0$。

(2) 当原线圈中的电流减少时，通过副线圈的磁通减少，则在副线圈中产生感应电动势，根据楞次定律，b 为高电位端，a 为低电位端。

3-4 在图 3-7 中，下列各情况里是否有电流通过电阻器 R？如果有，则电流的方向如何？

(1) 开关 K 接通的瞬时；

(2) 开关 K 接通一些时间之后；

(3) 开关 K 断开的瞬间。

当开关 K 保持接通时，线圈的哪一端起磁北极的作用？

答：(1) 有。电流从右向左通过 R。

(2) 开关 K 接通一些时间之后，可认为稳态建立，故无电流通过 R。

(3) 有。电流从左向右通过 R。

当开关 K 保持接通时，线圈的左端起磁北极的作用。

3-5 如果我们使图 3-8 中左边电路中的电阻 R 增加，则在右边电路中的感应电流的方向如何？

答：当电阻增大时，左边电路中电流减小，它在空间激发的磁场减弱，引起右边电路中磁通减小，则在其中产生感应电流。根据楞次定律，其方向沿顺时针方向。(如图 3-8 所示)。

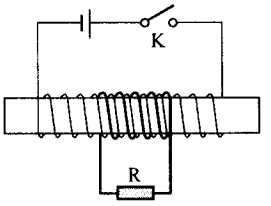


图 3-7 思考题 3-4

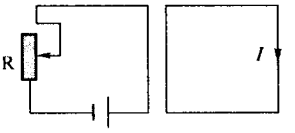


图 3-8 思考题 3-5

3-6 在图 3-9 中，我们使哪根可以移动的导线向右移动，因而引起一个如图 3-9 所示的感应电流。试问：在区域 A 中的磁感应强度 B 的方向如何？

答：区域 A 中的磁感应强度 $\vec{B}$ 的方向为垂直纸面向里，如图 3-10 所示。

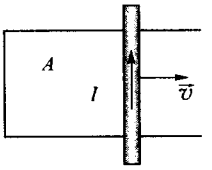


图 3-9 思考题 3-6

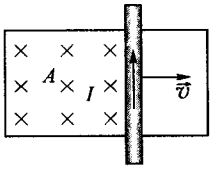


图 3-10 思考题 3-6 附图

3-7 图 3-11 所示为一观察电磁感应现象的装置。左边 a 为闭合导体圆环，右边 b 为有缺口的导体圆环，两环用细杆连接支在 O 点，且可绕 O 在水平面内转动。用足够强的磁铁的任何一极插入圆环，当插入环 a 时，可观察到环向后退；插入环 b 时，环不动，试解释所观察到的现象。当用 S 极插入环 a 时，环中的感应电流方向如何？

答：当磁铁插入环 a 时，在 a 环上产生感应电流，根据楞次定律可以判定：感应电流

的磁场方向与磁铁的磁场方向相反，相互作用结果使 a 环后退。因为 b 环开路，当磁铁插入时，不产生感应电流，故不动。当用S极插入环 a 时，环中的感应电流沿顺时针方向流动，如图 3－11 所示。

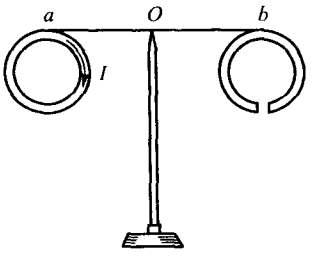


图 3－11　思考题 3－7

3－8　试说明思考题 3－4 和思考题 3－6 中感应电流的能量是哪里来的。

答：思考题 3－6 中感应电流的能量由反抗电磁力的外力作功而获得；思考题 3－4 中感应电流的能量由电池的化学能获得。

3－9　一块金属在均匀磁场中平移，金属中是否会有涡流？

答：可把金属块看做由许多大小不同的线圈紧套并排一起所组成。引用思考题 3－1 的(1)、(2)结论可知，金属块中不会有涡流。

3－10　一块金属在均匀磁场中旋转，金属中是否会有涡流？

答：分析与上题同，并引用思考题 3－1 的(3)、(4)结论可知：当转轴与磁场方向平行时，金属块中无涡流；当转轴与磁场方向不平行时，金属块中有涡流。

3－11　一段直导线在均匀磁场中作如图 3－12 所示的 4 种运动。在哪种情况下导线中有感应电动势？为什么？感应电动势的方向是怎样的？

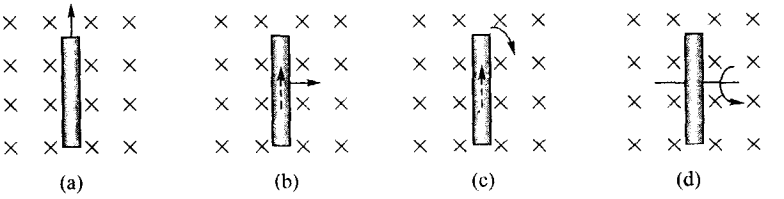


图 3－12　思考题 3－11

答：按图 3－12(c)中的转轴通过导线下端垂直纸面，故图 3－12(b)、3－12(c)情形下，导线运动切割了磁力线，所以导线中有感应电动势，其方向如图中虚线所示；在图 3－12(a)、3－12(d)情形下，导线运动不切割磁力线，故导线中无感应电动势。

3－12　在电子感应加速器中，电子加速所得到的能量是哪里来的？试定性解释之。

答：电子在感应加速器的环形室中，被涡旋电场加速而获得能量。能量的传递过程如下：电子在加速过程中，随着其速度的增大，对其轨道内的总磁通的去磁作用也增强。所以在励磁绕组内的感应电动势(它起着反抗外电压的作用)就有下降的趋势，因而励磁电流就必然要增大。这就是说励磁电流的输出功率随着电子能量的增加而不断增大，所以，电子加速所得到的能量由励磁电流源提供。

3－13　运动电荷周围电场的环路积分是否为零？试从如图 3－13 所示的电场线图分析之。

答：静止电荷产生的静电场的环路积分恒为零，而运动电荷周围电场的环路积分不一定为零。

运动电荷周围电场的电场线如图 3－13 所示，对于虚线的 90°扇形回路 oab，oa 段电

场小于 ob 段电场，而 ab 弧线电场的线积分为零，所以沿扇形回路 oab 的环路积分小于零。由电场的对称性可知，对 180°的扇形回路电场的环路积分为零。

3－14 如何绕制才能使两个线圈之间的互感最大？

答：为了使两个线圈之间的互感最大，必须使其无漏磁，故应采用密排重绕法。

3－15 有两个相隔距离不太远的线圈，如何放置可使其互感系数为零？

答：两线圈的中心轴相互垂直放置，且一个线圈的中心轴要通过另一个线圈的中心。因在这种情况下，它们各自激发的磁场通过另一线圈的磁通匝链数为零。

3－16 3 个线圈中心在一条直线上，相隔的距离都不太远，如何放置可使它们两两之间的互感系数为零？

答：使通过每个线圈中心与线圈平面垂直的轴线两两相互垂直。这样它们各自激发的磁场通过其它线圈的磁通匝链数为零。

3－17 在如图 3－14 所示的电路中，S_1、S_2 是两个相同的小灯泡，L 是一个自感系数相当大的线圈，其电阻数值上与电阻 R 相同。由于存在自感现象，试推想开关 K 接通和断开时，灯泡 S_1、S_2 先后亮暗的顺序如何？

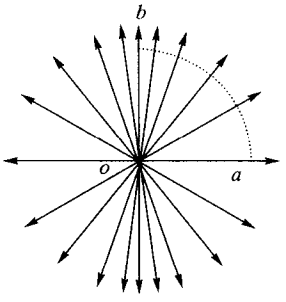


图 3－13 思考题 3－13

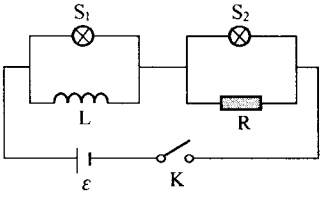


图 3－14 思考题 3－17

答：接通开关 K 时，小灯泡 S_1、S_2 同时亮，但由于自感 L 存在，开始瞬间 S_1 比 S_2 亮，过些时间，稳态建立，S_1 和 S_2 一样亮。

断开开关 K 时，由于 L 的自感电动势的影响，S_1 回路的电流比 S_2 回路的电流消失的慢些，故 S_1 比 S_2 暗的慢些。

3－18 一个线圈自感系数的大小决定于哪些因素？

答：在不存在磁介质的情况下，自感 L 仅由线圈的大小、几何形状及匝数决定；若存在磁介质，L 还与介质的性质有关；若磁介质是铁磁质，L 还与线圈中的电流有关。

3－19 用金属丝绕制的标准电阻要求是无自感的，怎样绕制自感系数为零的线圈？

答：用双线并绕法，如图 3－15 所示。这种绕法的线圈通电流后，保证总匝数中，各有一半电流反向流动，因此总磁通匝链数为零，故 $L=0$。

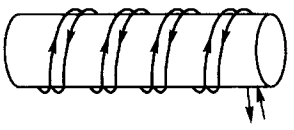


图 3－15 思考题 3－19

3.4 习题详解

3-1 一横截面积为 $S=20\text{cm}^2$ 的空心螺绕环，每厘米长度上绕有 50 匝，环外绕有 5 匝的副线圈，副线圈与电流计串联，构成一个电阻为 $R=2.0\Omega$ 的闭合回路。今使螺绕环中的电流每秒减少 20A，求副线圈中的感应电动势 ε 和感应电流。

解：因螺绕环内的磁感应强度 $B=\mu_0 nI$，所以副线圈中的感应电动势为

$$\varepsilon = \left| -N_{副}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right| = N_{副}S\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = N_{副}S\mu_0 n\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 1.3\times 10^{-3}\text{V}$$

感应电流为

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = 6.3\times 10^{-4}\text{A}$$

3-2 一正方形线圈每边长 100mm，在地磁场中转动，每秒转 30 圈；转轴通过中心并与一边平行，且与地磁场 $\vec{B}$ 垂直。

(1) 线圈法线与地磁场 $\vec{B}$ 的夹角为什么值时，线圈中产生的感应电动势最大？

(2) 设地磁场的 $B=0.55\text{Gs}$，这时要在线圈中最大产生 10mV 的感应电动势，求线圈的匝数 N。

解：(1) 设线圈法线 $\vec{n}$ 与 $\vec{B}$ 的夹角为零度时作为计时的起点，则 t 时刻线圈中的感应电动势为

$$\varepsilon = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -N\frac{\mathrm{d}(BS\cos\omega t)}{\mathrm{d}t} = NBS\omega\sin\omega t$$

由此可以看出，当 $\omega t=\frac{\pi}{2}$ 或 $\omega t=\frac{3\pi}{2}$ 时，即线圈法线与地磁场 $\vec{B}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$ 时，感应电动势的值最大，此时 $\varepsilon_m = NBS\omega$

(2) $N=\frac{\varepsilon_m}{BS\omega}=97$ 匝

3-3 如图 3-16 所示，一很长的直导线有交变电流 $i(t)=I_0\sin\omega t$，它旁边有一长方形线圈 $ABCD$，长为 l，宽为 $(b-a)$，线圈和导线在同一平面内。求：

(1) 穿过回路 $ABCD$ 的磁通量 Φ；

(2) 回路 $ABCD$ 中的感应电动势 ε。

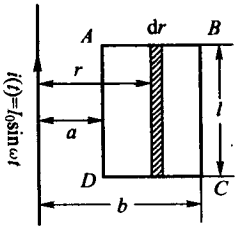


图 3-16 习题 3-3

解：因距直导线为 r 处的 $B=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}$，所以

(1) 穿过回路 $ABCD$ 的磁通量

$$\Phi = \iint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_a^b \frac{\mu_0 i}{2\pi r}l\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\ln\frac{b}{a}\right)I_0\sin\omega t$$

(2) 回路 $ABCD$ 中的感应电动势

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 l\omega}{2\pi}\left(\ln\frac{b}{a}\right)I_0\cos\omega t$$

3-4 一长直导线载有 5.0A 的直流电流，旁边有一个与它共面的矩形线圈，长 $l=20\text{cm}$，如图 3-17 所示，$a=10\text{cm}$，$b=20\text{cm}$；线圈共有 $N=1000$ 匝，以 $v=3.0\text{m/s}$ 的速度

离开直导线。求图示位置的感应电动势的大小和方向。

解:根据长直载流导线磁感应强度公式 $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ 知,t 时刻穿过线圈的磁通量(选顺时针方向为正)

$$\Phi=\iint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_{a+vt}^{b+vt}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}l\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\left(\ln\frac{b+vt}{a+vt}\right)$$

所以

$$\varepsilon=-N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\frac{Nl\mu_0 Iv(b-a)}{2\pi(a+vt)(b+vt)}$$

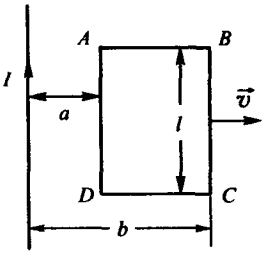


图 3-17 习题 3-4

令 $t=0$,并代入数据,则线圈刚离开直导线时的感应电动势

$$\varepsilon_0=\frac{Nl\mu_0 Iv(b-a)}{2\pi ab}=3.0\times10^{-3}\mathrm{V}$$

因为 $\varepsilon_0>0$,所以其方向为图中顺时针方向。

3-5 如图 3-18 所示,电流为 I 的长直导线附近有正方形线圈绕中心轴$\overline{OO'}$以匀角速度 ω 旋转,求线圈中的感应电动势。已知正方形边长为 $2a$,$\overline{OO'}$轴与长直导线平行,相距为 b。

解:设 $t=0$ 时,线圈与直导线处于同一平面内。t 时刻俯视线圈与导线的相对位置如图 3-19 所示。此时,线圈的有效面积是宽为 AB 长为 $2a$ 的与长直导线共面的矩形面积。穿过此有效面积的磁通量

$$\Phi(t)=\frac{\mu_0 Ia}{\pi}\ln\left(\frac{r_B}{r_A}\right)$$

其中:

$$r_A^2=a^2+b^2-2ab\cos\omega t$$
$$r_B^2=a^2+b^2+2ab\cos\omega t$$

所以

$$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu_0 Ia^2b\omega}{\pi}\left(\frac{1}{a^2+b^2+2ab\cos\omega t}+\frac{1}{a^2+b^2-2ab\cos\omega t}\right)\sin\omega t$$

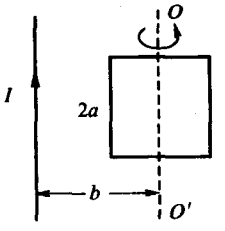


图 3-18 习题 3-5

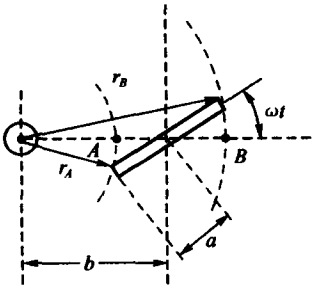


图 3-19 习题 3-5 附图

3-6 图 3-20 中导体棒 AB 与金属轨道 CA 和 DB 接触,整个线框放在 $B=0.50\mathrm{T}$ 的均匀磁场中,磁场方向与图画垂直。

(1) 若导体棒以 4.0m/s 的速度向右运动，求棒内感应电动势的大小和方向。

(2) 若导体棒运动到某一位置时，电路的电阻为 0.20Ω，求此时棒所受的力。摩擦力可不计。

(3) 比较外力作功的功率和电路中所消耗的热功率。

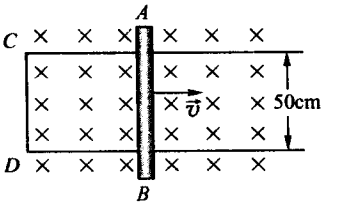


图 3-20　习题 3-6

解：(1) 令 $CD=l$，并设 t 时刻 AB 距 CD 为 x，此时通过回路 $ABDCA$ 的磁通量 $\Phi=BS=Blx$，所以，感应电动势的大小

$$\varepsilon=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=Bl\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Blv$$
$$=0.50\times0.50\times4.0=1.0\mathrm{V}$$

因导体 AB 向右运动时，增加了回路中穿过纸面向内的磁通量。所以，根据楞次定律 ε 的方向为图中逆时针方向。

(2) 根据 $\mathrm{d}\vec{F}=I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$，导体受到的电磁力的大小

$$F=BlI=Bl\frac{\varepsilon}{R}=0.50\times0.50\times\frac{1.0}{0.20}=1.3\mathrm{N}$$

并与运动方向相反。

(3) 因为导体作匀速运动，故外力与电磁力等大反向，所以

$$P_{外}=Fv=Bl\frac{\varepsilon}{R}v=5.0\mathrm{W}$$

消耗的热功率

$$P_{热}=I^2R=\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2R=\frac{\varepsilon^2}{R}=5.0\mathrm{W}$$

即：$P_{外}=P_{热}$

3-7　闭合线圈共有 N 匝，电阻为 R。证明：当通过这线圈的磁通量改变 $\Delta\Phi$ 时，线圈内流过的电量为 $\Delta q=\frac{N\Delta\Phi}{R}$。

证明：感应电动势的大小

$$\varepsilon=N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

感应电流

$$i=\frac{\varepsilon}{R}=\frac{N}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

感应电量

$$\mathrm{d}q=i\mathrm{d}t=\frac{N}{R}\mathrm{d}\Phi$$

所以

$$\Delta q=\frac{N}{R}\int\mathrm{d}\Phi=\frac{N}{R}\Delta\Phi$$

3-8 如图 3-21 所示为测量螺线管中磁场的一种装置。把一个很小的测量线圈放在待测处，这线圈与测量电量的冲击电流计 G 串联。冲击电流计是一种可测量迁移过它的电量的仪器。当用反向开关 K 使螺线管的电流反向时，测量线圈中就产生感应电动势，从而产生电量 Δq 的迁移；由 G 测出 Δq 就可以算出测量线圈所在处的 B。已知测量线圈有 2000 匝，它的直径为 2.5cm，它和 G 串联回路的电阻为 1000Ω，在 K 反向时测得 $\Delta q = 2.5 \times 10^{-7}$C。求被测处的磁感应强度。

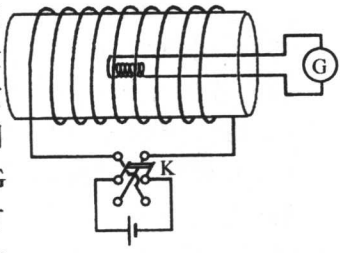


图 3-21 习题 3-8

解：设被测磁感应强度为 B，则穿过测量线圈的磁通量的改变量 $\Delta\Phi = 2SB$

根据 $\Delta q = \dfrac{N\Delta\Phi}{R}$ 得

$$B = \frac{R\Delta q}{2NS} = \frac{1000 \times 2.5 \times 10^{-7}}{2 \times 2000 \times 3.14 \times (1.25 \times 10^{-2})^{-2}} = 1.3\text{Gs}$$

3-9 如图 3-22 所示，线圈 $abcd$ 放在 $B = 6.0 \times 10^3$Gs 的均匀磁场中，磁场方向与线圈平面法线的夹角 $\alpha = 60°$，ab 长 1.0m，可左右运动。今使 ab 以 $v = 5.0$m/s 的速度向右运动，求感应电动势的大小及感应电流的方向。

解：设 l 正方向从 $b \to a$，则感应电动势

$$\varepsilon = \int_b^a (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_b^a vB\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\mathrm{d}l = vB\cos\alpha\,\overline{ba}$$

代入数据计算得 $\varepsilon = 1.5$V

故感应电动势及其产生的电流方向为 $b \to a$。

3-10 两段导线 $ab = bc = 10$cm，在 b 处相接而成 30°角。若使导线在匀强磁场中以速率 $v = 1.5$m/s 运动，方向如图 3-23 所示，磁场方向垂直图面向内，$B = 2.5 \times 10^2$Gs，问 ac 间的电势差是多少？哪一端的电势高？

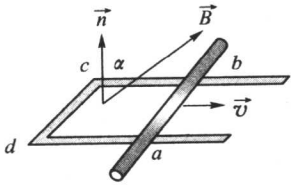


图 3-22 习题 3-9

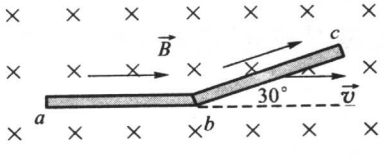


图 3-23 习题 3-10

解：设 l 正方向如图 3-23 所示，则 $\overline{ac}$ 段产生的感应电动势

$$\varepsilon = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_b^c (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 + vB\,\overline{bc}\cos 60° = 1.9 \times 10^{-3}\text{V}$$

故感应电动势的方向为 $a \to c$，即 c 点的电位高。所以

$$U_{ac} = -1.9 \times 10^{-3}\text{V}$$

3-11 如图 3-24 所示，金属棒 ab 以 $v = 2.0$m/s 的速率平行于一长直导线运动，

此导线内有电流 $I=40\text{A}$。求棒中感应电动势的大小。哪一端的电势高?

解:在 r 处取如图 3-24 所示的微元 $\mathrm{d}r$,

该点处的磁感应强度为 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$,方向垂直纸面向里。

所以,根据 $\mathrm{d}\varepsilon=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ 得

$$\varepsilon=\int_L \mathrm{d}\varepsilon=\int_a^b(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\int_a^b v\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\frac{b}{a}=-3.7\times10^{-5}\text{V}$$

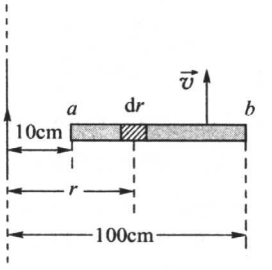


图 3-24　习题 3-11

负号表示电动势的方向是从 b 到 a,所以 a 点电势高。

3-12　如图 3-25 所示,一金属棒长为 0.50m,水平放置,以长度的 $\dfrac{1}{5}$ 处为轴,在水平面内旋转。已知该处地磁场在竖直方向上的分量 $B_\perp=0.50\text{Gs}$,求 a、b 两端的电势差。

解:设距离转轴为 r,长为 $\mathrm{d}r$ 的导体段上的感应电动势为 $\mathrm{d}\varepsilon$

$\mathrm{d}\varepsilon=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{r}=B\omega r\mathrm{d}r$;这表示其方向指向 $\mathrm{d}r$ 的正方向。

所以,l_1 上产生的电动势

$$\varepsilon_1=\int\mathrm{d}\varepsilon=\int_0^{l_1}B\omega r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}B\omega l_1^2$$

方向为 $c\to b$。

同理 l_2 上产生的电动势

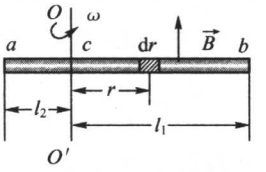


图 3-25　习题 3-12

$$\varepsilon_2=\frac{1}{2}B\omega l_2^2$$

方向为 $c\to a$。

令 $U_c=0$,则 $U_a=\varepsilon_2=\dfrac{1}{2}B\omega l_2^2$;$U_b=\varepsilon_1=\dfrac{1}{2}B\omega l_1^2$;故

$$U_{ab}=U_a-U_b=\frac{1}{2}B\omega(l_2^2-l_1^2)=-4.7\times10^{-5}\text{V}$$

3-13　详见本章典型例题例 3-2。

3-14　法拉第圆盘发电机是一个在磁场中转动的导体圆盘。设圆盘的半径为 R,它的轴线与均匀外磁场 $\vec{B}$ 平行,它以角速度 ω 绕轴线转动,如图 3-26 所示。

(1) 求盘边与盘心间的电势差 U;

(2) 当 $R=15\text{cm}$,$B=0.60\text{T}$,转速为每秒 30 圈时,U 等于多少?

(3) 盘边与盘心哪处电势高?当盘反转时,它们电势的高低是否也会反过来?

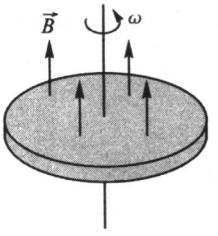


图 3-26　习题 3-14

解:(1) 法拉第圆盘发电机工作状况相当于上题(5)之中许多辐条并联的情况,故所求电位差

$$U=\varepsilon=\frac{1}{2}B\omega R^2。$$

(2) $U=\frac{1}{2}B\omega R^2=\frac{1}{2}\times 0.60\times 2\pi\times 30\times 0.15^2=1.3(\mathrm{V})$

(3) 根据题设条件可知,感应电动势的方向从盘心指向盘边,故盘边电位高。当盘反转时,盘心的电位高。

3-15 已知在电子感应加速器中,电子加速的时间是 4.2ms,电子轨道内最大磁通量为 1.8Wb,试求电子沿轨道绕行一周平均获得的能量。若电子最终获得的能量为 100MeV,电子绕了多少周? 若轨道半径为 84cm,电子绕行的路程有多少?

解法一:根据电子感应加速器的工作原理可知,电子轨道内的磁通量 Φ 随时间做正弦变化,并且电子仅在励磁交变电流的第一个 1/4 周期内获得加速,因此可设:$\Phi=\Phi_{\mathrm{m}}\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$所以沿电子轨道的感应电动势的大小

$$\varepsilon=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\Phi_{\mathrm{m}}\left(\frac{2\pi}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$$

式中:Φ_{m} 为电子轨道内的最大磁通量;T 为励磁交变电流的周期。

又由于与 T 比较,电子轨道绕行一周所需的时间很短,以致可以认为在此期间内感应电动势不变。在此情况下,电子沿轨道绕行一周获得的能量为 $W=e\varepsilon$。故在整个加速时间内(即励磁交变电流的第一个 1/4 周期内),电子沿轨道绕行一周平均获得的能量为

$$\overline{W}=\frac{1}{T/4}\int_0^{T/4}e\varepsilon\,\mathrm{d}t=\frac{e}{T/4}\int_{\Phi(0)}^{\Phi(T/4)}\mathrm{d}\Phi=\frac{e}{T/4}[\Phi(T/4)-\Phi(0)]=\frac{e}{T/4}\Phi(T/4)$$

根据题设条件 $\Phi(T/4)=\Phi_{\mathrm{m}}=1.8\mathrm{Wb}$;$T/4=$加速时间$=4.2\times10^{-3}\mathrm{s}$;所以

$$\overline{W}=\frac{1.8e}{4.2\times10^{-3}}\approx 430e\mathrm{V}$$

由以上的结果知,若电子最终要获得 100MeV 能量,它需绕轨道运行的周数为

$$n=\frac{100\mathrm{MeV}}{\overline{W}}=\frac{100\times10^6}{430}\approx 2.3\times10^5\ \text{周}$$

绕行的路程为

$$S=2\pi Rn\approx 1.2\times10^3\mathrm{km}$$

解法二:电子运动的速率

$$v=\frac{e}{2\pi Rm}\Phi=\frac{e}{2\pi Rm}\Phi_{\mathrm{m}}\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$$

在 $0\sim\frac{T}{4}$ 的加速过程中,电子所通过的路程

$$L=\int_0^{\frac{T}{4}}v\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{T}{4}}\frac{e}{2\pi Rm}\Phi_{\mathrm{m}}\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\mathrm{d}t=\frac{eT\Phi_{\mathrm{m}}}{4\pi^2Rm}$$

所转过的圈数

$$n=\frac{L}{2\pi R}=\frac{eT\Phi_{\mathrm{m}}}{8\pi^3R^2m}$$

在 $0\sim\frac{T}{4}$ 的加速过程中电子所获得的能量,即在 $\frac{T}{4}$ 时刻电子所具有的动能

$$W = E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{e^2\Phi_m^2}{8\pi^2R^2m}$$

电子沿轨道绕行一周平均获得的能量

$$\overline{W} = \frac{W}{n} = \frac{e^2\Phi_m^2}{8\pi^2R^2m} \cdot \frac{8\pi^3R^2m}{eT\Phi_m} = \frac{e\Phi_m}{T/\pi}$$

说明：两种解法的结果稍有差异，解法二为精确解法，解法一为近似解法。

3－16 详见本章典型例题例 3－3。

3－17 柱形磁控管如图 3－27 所示。设内外柱半径分别为 a 和 b，两极间加电压 U_0，处于轴向均匀磁场 $\vec{B}$ 中。电子以可以忽略的初速从阴极 K 出发，它一方面在径向电场的作用下加速，同时在磁场的作用下偏转，电子将沿心脏线轨迹运动。当磁场超过某一临界值 B_c 时，电子不能到达阳极 A。因 B_c 与荷质比 e/m 有关，1921 年 A.W.Hull 首先用此法测量了电子的荷质比。试证明电子的荷质比与临界磁场的关系为

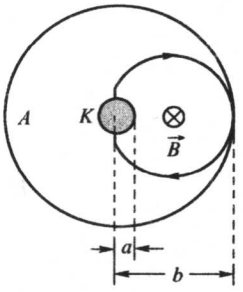


图 3－27 习题 3－17

$$\frac{e}{m} = \frac{8U_0}{b^2B_c^2} \frac{1}{(1 - a^2/b^2)^2}$$

证明：对于轴向均匀磁场，磁矢势仅存在 φ 分量。如取 $r = a$ 处为磁矢势的零点，则

$$A_\varphi = \frac{1}{2\pi r}B(\pi r^2 - \pi a^2) = \frac{1}{2r}B(r^2 - a^2) = \frac{1}{2}Br(1 - a^2/r^2)$$

当磁场为临界值时，电子到达外柱时电子的径向速度为 0，仅存在速度 v_φ。由于广义势在 φ 方向的梯度为零，所以正则动量的 φ 分量守恒

$$0 + (-e)\frac{1}{2}Ba(1 - a^2/a^2) = mv_\varphi + (-e)\frac{1}{2}B_c^2b(1 - a^2/b^2)$$

再由能量守恒可得

$$0 + 0 = \frac{1}{2}mv_\varphi^2 + (-e)U_0$$

由上两式消去 v_φ 可得

$$\frac{e}{m} = \frac{8U_0}{b^2B_c^2} \frac{1}{(1 - a^2/b^2)^2}$$

3－18 证明 $E^2 - c^2B^2$ 和 $\vec{E} \cdot \vec{B}$ 是洛伦兹变换下的不变量。由此可以推论：

(1) 如果在一个参考系中 $E > cB$，则在任意其它参考系中也有 $E > cB$；

(2) 如果在一个参考系中 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 正交，则在任意其它参考系中，它们也正交；

(3) 如果在一个参考系中 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 之间的夹角为锐角(或钝角)，则在任意其它参考系中，它们之间的夹角也是锐角(或钝角)。

证明：设 K' 参考系相对于 K 参考系在 x 方向以速度 v 运动，并记 $\gamma = 1/\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}$。

如果在 K 参考系电磁场各分量为 $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$，则在 K' 参考系中

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma(E_y - vB_z); \\ E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \end{cases} \begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma(B_y + vE_z/c^2) \\ B'_z = \gamma(B_z - vE_y/c^2) \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} (E')^2 - c^2(B')^2 &= (E'_x)^2 + (E'_y)^2 + (E'_z)^2 - c^2(B'_x)^2 - \\ &\quad c^2(B'_y)^2 - c^2(B'_z)^2 \\ &= (E_x)^2 + \gamma^2(E_y - vB_z)^2 + \gamma^2(E_z + vB_y)^2 - \\ &\quad c^2(B_x)^2 - c^2\gamma^2(B_y + vE_z/c^2)^2 - c^2\gamma^2(B_z - vE_y/c^2)^2 \\ &= (E_x)^2 + (E_y)^2 + (E_z)^2 - c^2(B_x)^2 - c^2(B_y)^2 - c^2(B_z)^2 \\ &= E^2 - c^2B^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}' \cdot \vec{B}'^2 &= E'_xB'_x + E'_yB'_y + E'_zB'_z \\ &= E_xB_x + \gamma^2(E_y - vB_z)(B_y + vE_z/c^2) + \\ &\quad \gamma^2(E_z + vB_y)(B_z - vE_y/c^2) \\ &= E_xB_x + E_yB_y + E_zB_z \\ &= \vec{E} \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

即，$E^2 - c^2B^2$ 和 $\vec{E} \cdot \vec{B}$ 是洛伦兹变换下的不变量。

(1) 如果在一个参考系 K 中 $E > cB$，即 $E^2 - c^2B^2 > 0$；

则在任意其它参考系 K' 中也有 $E'^2 - c^2B'^2 = E^2 - c^2B^2 > 0$，即 $E' > cB'$。

(2) 如果在一个参考系 K 中 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 正交，即 $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$；

则在任意其它参考系 K' 中，$\vec{E}' \cdot \vec{B}' = \vec{E} \cdot \vec{B} = 0$，即 $\vec{E}'$ 和 $\vec{B}'$ 也正交。

(3) 如果在一个参考系 K 中 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 之间的夹角为锐角，即 $\vec{E} \cdot \vec{B} > 0$；

则在任意其它参考系 K' 中，$\vec{E}' \cdot \vec{B}' = \vec{E} \cdot \vec{B} > 0$，即它们之间的夹角也是锐角。

反之如果在一个参考系 K 中 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 之间的夹角为钝角，即 $\vec{E} \cdot \vec{B} < 0$；则在任意其它参考系 K' 中，$\vec{E}' \cdot \vec{B}' = \vec{E} \cdot \vec{B} < 0$，即它们之间的夹角也是钝角。

3-19 在某一参考系 K 中有电场和磁场分别为 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$，它们之间满足什么条件时，可以找到另外的参考系 K'，使得(1) $\vec{E}'$ 和 $\vec{B}'$ 垂直；(2) $\vec{B}' = 0$；(3) $\vec{E}' = 0$。

解：假设参考系 K' 相对于参考系 K 以速度 v 运动，由上题的分析，

(1) 如果 $\vec{E}'$ 和 $\vec{B}'$ 垂直，则 $\vec{E} \cdot \vec{B} = \vec{E}' \cdot \vec{B}' = 0$，即必须 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 正交或有一个为 0。

(2) 如果 $\vec{B}' = 0$，则 $\vec{E} \cdot \vec{B} = \vec{E}' \cdot \vec{B}' = 0$ 且 $E^2 - c^2B^2 = E'^2 - c^2B'^2 = E'^2 > 0$，即必须 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 正交，且 $E > cB$。

(3) 如果 $\vec{E}' = 0$，则 $\vec{E} \cdot \vec{B} = \vec{E}' \cdot \vec{B}' = 0$ 且 $E^2 - c^2B^2 = E'^2 - c^2B'^2 = -c^2B'^2 < 0$，即必须 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 正交，且 $E < cB$。

3-20 已知在 K' 系中有一根无限长直带正电的细棒静止，且沿 x' 轴放置。其电荷线密度为 η'_e 均匀。设 K' 系相对于 K 系以速度 v 沿 x 轴正向匀速运动。

(1) 求在 K 系中空间的电场;

(2) 求在 K 系中空间的磁场;

(3) 在 K 系中看来,运动的带电细棒相当于无限长直电流,它所产生的磁场服从毕奥—萨伐尔定律,由此证明 $\varepsilon_0\mu_0=1/c^2$。

解:在 K' 系中静止无限长直带正电细棒不产生磁场,而产生的静电场垂直于 x' 轴呈放射状

$$E' = \frac{\eta_e'}{2\pi\varepsilon_0 r'}, r' = \sqrt{(y')^2 + (z')^2}$$

记 $\gamma=1/\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$,则在 K 参考系电磁场各分量满足

$$\begin{cases} E_x = E_x' \\ E_y = \gamma(E_y' + vB_z'); \\ E_z = \gamma(E_z' - vB_y') \end{cases} \begin{cases} B_x = B_x' \\ B_y = \gamma(B_y' - vE_z'/c^2) \\ B_z = \gamma(B_z' + vE_y'/c^2) \end{cases}$$

(1) 在 K 系中空间电场仍垂直于 x 轴且呈放射状

$$E = \gamma E' = \frac{\gamma\eta_e'}{2\pi\varepsilon_0 r'} = \frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0 r}, r = \sqrt{y^2 + z^2}, \eta_e = \gamma\eta_e'$$

(2) 在 K 系中空间磁场方向与 x 轴呈右手螺旋关系

$$B = \gamma\frac{v}{c^2}E' = \frac{v}{c^2}\frac{\gamma\eta_e'}{2\pi\varepsilon_0 r'} = \frac{v}{c^2}\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

(3) 在 K 系中运动细棒的长度缩短,其线电荷密度为 $\eta_e=\gamma\eta_e'$,运动带电细棒对应的电流 $I=\eta_e v$,产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r}I = \frac{\mu_0}{2\pi r}\eta_e v$$

由 $B=\frac{v}{c^2}\frac{\eta_e}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\mu_0}{2\pi r}\eta_e v$,可得 $\varepsilon_0\mu_0=\frac{1}{c^2}$。

3-21 在无限大带正电的平面为静止的参考系中,观测到该平面的电荷面密度为 σ_e',当此带电平面平行于 xz 平面,且以速度 v 沿 x 轴方向匀速运动时,求空间的电场和磁场。

解:在相对于带电平面静止的参考系 K' 中,磁场为 0,而电场在平面两侧呈放射状

$$E_y' = \begin{cases} \sigma_e'/(2\varepsilon_0), & y > 0 \\ -\sigma_e'/(2\varepsilon_0), & y < 0 \end{cases}$$

带电平面相对于参考系 K 以速度 v 沿 x 轴方向匀速运动时,记 $\gamma=1/\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$,则在参考系 K 中的电场只有 y 分量,磁场只有 z 分量

$$E_y = \gamma E_y' = \begin{cases} \gamma\sigma_e'/(2\varepsilon_0), & y > 0 \\ -\gamma\sigma_e'/(2\varepsilon_0), & y < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sigma_e/(2\varepsilon_0), & y > 0 \\ -\sigma_e/(2\varepsilon_0), & y < 0 \end{cases}$$

$$B_z = \gamma\frac{v}{c^2}E_y' = \begin{cases} \gamma\sigma_e' v/(2\varepsilon_0 c^2), & y > 0 \\ -\gamma\sigma_e' v/(2\varepsilon_0 c^2), & y < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sigma_e v/(2\varepsilon_0 c^2), & y > 0 \\ -\sigma_e v/(2\varepsilon_0 c^2), & y < 0 \end{cases}$$

其中，$\sigma_e = \gamma\sigma_e'$ 为在参考系 K 中带电平面的面电荷密度。

3-22 在一个充电电容器为静止的参考系中观测到电容器极板上电荷面密度分别为 $+\sigma_e'$ 和 $-\sigma_e'$，设此电容器极板平行于 xz 平面，且以速度 v 沿 x 轴方向匀速运动，求空间的电场和磁场。

解：在相对于带电平面静止的参考系 K' 中，磁场为 0，而电场仅存在于电容器两极板中间

$$E_y' = \sigma_e'/\varepsilon_0$$

其中，σ_e' 为在参考系 K' 中电容器极板上的面电荷密度。

电容器相对于参考系 K 以速度 v 沿 x 轴方向匀速运动时，记 $\gamma = 1/\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$，则在参考系 K 中的电场和磁场也只存在于电容器两极板中间

$$E_y = \gamma E_y' = \gamma\sigma_e'/\varepsilon_0, B_z = \gamma\frac{v}{c^2}E_y' = \gamma\sigma_e' v/(\varepsilon_0 c^2)$$

3-23 详见本章典型例题例 3-4。

3-24 如图 3-28 所示，一对正负电荷以速度 $\vec{v}$ 沿 x 轴方向运动。试论证这对电荷的相互作用力虽不沿连线，但两个电荷的加速度却沿它们之间的连线。

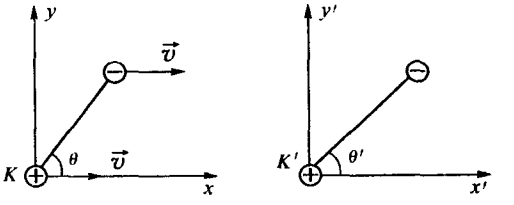


图 3-28 习题 3-24

解：静止电荷的参考系 K' 相对于参考系 K 以速度 $\vec{v}$ 沿 x 轴方向运动。设两个参考系中，电荷连线与电荷运动方向的夹角分别为 θ 和 θ'，记 $\gamma = 1/\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$，则有

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'/\gamma} = \gamma\tan(\theta')$$

(1) 在参考系 K' 中，电荷静止不动，只存在静电场，负电荷在正电荷处产生电场强度

$$\vec{E}' = \frac{q\cos(\theta')}{4\pi\varepsilon_0(r')^2}\hat{x}' + \frac{q\sin(\theta')}{4\pi\varepsilon_0(r')^2}\hat{y}'$$

则正电荷的受力沿电荷的连线方向

$$\vec{F}' = \frac{q^2\cos(\theta')}{4\pi\varepsilon_0(r')^2}\hat{x}' + \frac{q^2\sin(\theta')}{4\pi\varepsilon_0(r')^2}\hat{y}', r' = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$$

由于不存在磁场，电磁动量为零，所以正电荷的加速度为

$$\vec{a}' = \frac{\vec{F}'}{m_0} = \frac{\cos(\theta')}{4\pi\varepsilon_0 m_0(r')^2}\hat{x}' + \frac{\sin(\theta')}{4\pi\varepsilon_0 m_0(r')^2}\hat{y}'$$

沿电荷的连线方向。

(2) 在参考系 K 中,负电荷在正电荷处产生电场和磁场为

$$\vec{E}=\frac{q\cos(\theta')}{4\pi\varepsilon_0(r')^2}\hat{x}'+\gamma\frac{q\sin(\theta')}{4\pi\varepsilon_0(r')^2}\hat{y}',\vec{B}=\gamma\frac{v}{c^2}\frac{q\sin(\theta')}{4\pi\varepsilon_0(r')^2}\hat{z}'$$

则正电荷的受力为

$$\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}=\frac{q^2\cos(\theta')}{4\pi\varepsilon_0(r')^2}\hat{x}'+\left[\gamma\frac{q^2\sin(\theta')}{4\pi\varepsilon_0(r')^2}+\gamma\frac{v^2}{c^2}\frac{q^2\sin(\theta')}{4\pi\varepsilon_0(r')^2}\right]\hat{y}'$$

即

$$\frac{F_y}{F_x}=\gamma\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\tan(\theta')=\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\tan(\theta)>\tan(\theta)$$

所以,这对电荷的相互作用力不沿电荷的连线方向。

由洛伦兹变换

$$\begin{cases}x=\gamma(x'+vt')\\ y=y',z=z'\\ t=\gamma(t'+vx'/c^2)\end{cases}$$

所以,正电荷速度为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{x}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\hat{y}=\frac{\mathrm{d}(x'+vt')}{\mathrm{d}(t'+vx'/c^2)}\hat{x}+\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}\gamma(t'+vx'/c^2)}\hat{y}\\&=\frac{\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t'+v}{1+(v/c^2)\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t'}\hat{x}+\frac{\mathrm{d}y'/\mathrm{d}t'}{\gamma[1+(v/c^2)(\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t')]}\hat{y}\end{aligned}$$

正电荷的加速度为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t'+v}{1+(v/c^2)\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t'}\hat{x}+\frac{\mathrm{d}y'/\mathrm{d}t'}{\gamma[1+(v/c^2)(\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t')]}\hat{y}\right]\\&=\frac{1}{\gamma[1+(v/c^2)(\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t')]}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left[\frac{\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t'+v}{1+(v/c^2)\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t'}\hat{x}+\right.\\&\left.\frac{\mathrm{d}y'/\mathrm{d}t'}{\gamma[1+(v/c^2)(\mathrm{d}x'/\mathrm{d}t')]}\hat{y}\right]\\&=\frac{1}{\gamma}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t'^2}\hat{x}+\frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t'^2}\hat{y}\right]\\&=\frac{1}{\gamma}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\cos(\theta')}{4\pi\varepsilon_0m_0(r')^2}\hat{x}+\frac{1}{\gamma}\frac{\sin(\theta')}{4\pi\varepsilon_0m_0(r')^2}\hat{y}\right]\\&=\frac{1}{\gamma^2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0m_0(r')^2}\left[\frac{1}{\gamma}\cos(\theta')\hat{x}+\sin(\theta')\hat{y}\right]\end{aligned}$$

而$\frac{\sin(\theta')}{\cos(\theta')/\gamma}=\gamma\tan(\theta')=\tan(\theta)$,所以加速度沿电荷的连线方向。

由于在参考系 K 中,运动电荷会产生磁场,电荷系统不仅有动力动量,而且有磁势动量,电荷的受力方向沿正则动量的变化方向;而加速度的方向仅反映动力动量的变化方向;所以存在磁势动量时,电荷受力的方向与电荷加速度的方向可能不同,这并不与基本

物理定律相违背。

3-25 一螺绕环横截面的半径为 a，中心环线的半径为 R，$R \gg a$，其上由表面绝缘的导线均匀地密绕两个线圈，一个 N_1 匝，另一个 N_2 匝，求两线圈的互感 M。

解：设线圈 1 中的电流强度为 I_1，它在螺线管中产生的磁感应强度 $B_1 = \mu_0 n_1 I_1$；通过线圈 2 的磁通匝链数为

$$\Psi_{12} = N_2 B_1 S = N_2 \mu_0 n_1 I_1 S$$

两线圈的互感

$$M = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{N_2 \mu_0 n_1 I_1 S}{I_1}$$

$$= \mu_0 N_2 \cdot \left(\frac{N_1}{2\pi R}\right) \cdot \pi a^2 = \mu_0 N_1 N_2 \frac{a^2}{2R}$$

3-26 详见本章典型例题例 3-5。

3-27 如图 3-29，一矩形线圈长 $a = 20\text{cm}$，宽 $b = 10\text{cm}$，由 100 匝表面绝缘的导线绕成，放在一个很长的直导线旁边并与之共面，这长直导线是一个闭合回路的一部分，其它部分离线圈都很远，影响可略去不计。求图中(a)和(b)两种情况下，线圈与长直导线的互感。

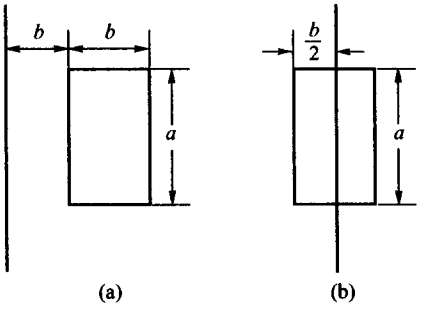


图 3-29 习题 3-27

解：(1) 对图 3-29(a)，设在直导线中通过的电流为 I_1，则通过线圈中的磁通匝链数为

$$\Psi_{12} = N\Phi_{12} = N\iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = N\int_b^{2b} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \cdot a\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 N I_1 a}{2\pi} \ln 2$$

所以互感

$$M = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln 2 \approx 2.8 \times 10^{6}\text{H}$$

(2) 对图 3-29(b)，设在直导线中通过的电流仍为 I_1，由对称性知穿过整个线圈的磁通匝链数为零，故互感为零。

3-28 如图 3-30 所示，两长螺线管同轴，半径分别为 R_1 和 R_2 ($R_1 > R_2$)，长度为 l ($l \gg R_1$ 和 R_2)，匝数分别为 N_1 和 N_2，求互感系数 M_{12} 和 M_{21}，由此验证 $M_{12} = M_{21}$。

证明：设螺线管 1 中通过的电流为 I_1。它在螺线管 2 中的磁通匝链数

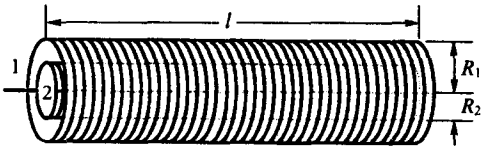


图 3－30　习题 3－28

$$\Psi_{12}=N_2\Phi_{12}=N_2B_1S_2=N_2\cdot\mu_0n_1I_1\cdot\pi R_2^2$$
$$=N_2\cdot\mu_0\frac{N_1}{l}I_1\cdot\pi R_2^2=\mu_0N_1N_2I_1\frac{\pi R_2^2}{l}$$

所以

$$M_{12}=\frac{\Psi_{12}}{I_1}=\mu_0N_1N_2\frac{\pi R_2^2}{l}$$

同理：当螺线管 2 中通过的电流为 I_2。它在螺线管 1 中的磁通匝链数

$$\Psi_{21}=N_1\Phi_{21}=N_1B_2S_2=N_1\cdot\mu_0\frac{N_2}{l}I_2\cdot\pi R_2^2=\mu_0N_1N_2I_2\frac{\pi R_2^2}{l}$$

所以

$$M_{21}=\frac{\Psi_{21}}{I_2}=\mu_0N_1N_2\frac{\pi R_2^2}{l}$$

故 $M_{12}=M_{21}$

3－29　在长 60cm，直径为 5.0cm 的空心纸筒上绕多少匝导线，才能得到自感为 6.0×10^{-3}H 的线圈？

解：设需绕 N 匝，根据 $L=\mu_0n^2V=\mu_0\left(\frac{N}{l}\right)^2V=\mu_0\left(\frac{N}{l}\right)^2\pi R^2l$ 得

$$N=\sqrt{\frac{lL}{\mu_0\pi R^2}}=1200\text{ 匝}$$

3－30　矩形截面螺绕环的尺寸如图 3－31 所示，总匝数为 N。

(1) 求它的自感系数；

(2) 当 $N=1000$ 匝，$D_1=20$cm，$D_2=10$cm，$h=1.0$cm 时，自感为多少？

解：(1) 设螺绕环中电流为 I，它在环内的磁感应线都是同心圆，将安培环路定理应用到一个半径为 r 的同心圆周路径上得

$$2\pi rB=\mu_0NI$$

故

$$B=\frac{\mu_0NI}{2\pi r}$$

则

$$L=\frac{\psi}{I}=\frac{N}{I}\iint_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{N}{I}\int_{\frac{D_2}{2}}^{\frac{D_1}{2}}\mu_0\frac{NI}{2\pi r}h\,\mathrm{d}r=\frac{\mu_0N^2h}{2\pi}\ln\frac{D_1}{D_2}$$

(2) 将数据代入上式得 $L=1.4\times10^{-3}\text{H}$

3-31 两根平行导线，横截面的半径都是 a，中心相距为 d，载有大小相等而方向相反的电流。设 $d\gg a$，且两导线内部的磁通量都可略去不计。证明：这样一对导线长为 l 的一段的自感为 $L=\dfrac{\mu_0 l}{\pi}\ln\dfrac{d}{a}$

证明：如图 3-32 所示，设在两导线上流有等值反向电流 I，则穿过 $ABCD$ 的磁通量为

$$\Phi=\iint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_d^{d-a}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}+\frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}\right)\cdot l\,\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 Il}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

所以

$$L=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}\approx\frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d}{a}$$

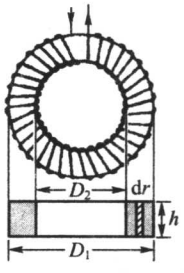


图 3-31 习题 3-30

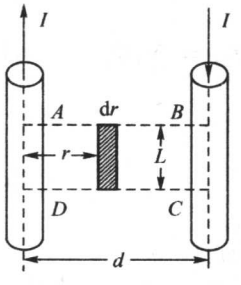


图 3-32 习题 3-31

3-32 在一纸筒上绕有两个相同的线圈 ab 和 $a'b'$，每个线圈的自感都是 0.050H，如图 3-33 所示。求：

(1) a 和 a' 相接时，b 和 b' 间的自感；

(2) a' 和 b 相接时，a 和 b' 间的自感。

解：(1) 此种连接为两个线圈的反串，且完全耦合，所以总自感

$$L=L_1+L_2-2\sqrt{L_1L_2}=0$$

(2) 此种连接为两个线圈的顺串，且完全耦合，所以总自感

$$L=L_1+L_2+2\sqrt{L_1L_2}=4L=0.20\text{H}$$

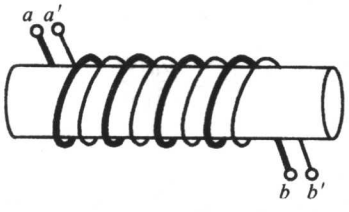


图 3-33 习题 3-32

3-33 两线圈的自感分别为 $L_1=5.0\text{mH}$，$L_2=3.0\text{mH}$，当它们顺接串联时，总自感为 $L=11.0\text{mH}$，

(1) 求它们之间的互感；

(2) 这两线圈的形状和位置都不改变，只把它们反接串联，求它们反接后的总自感。

解：(1) 根据 $L=L_1+L_2+2M$ 得

$$M=\frac{L-L_1-L_2}{2}=1.5\text{mH}$$

(2) 两线圈反接串联时的总自感

$$L=L_1+L_2-2M=5.0\text{mH}$$

3-34 两线圈顺接后总自感为 1.00H，在它们的形状和位置都不变的情况下，反接后的总自感为 0.40H，求它们之间的互感。

解：设两线圈的互感为 M，自感系数分别为 L_1、L_2；根据题意得

$$L_1+L_2+2M=1.00$$
$$L_1+L_2-2M=0.40$$

解方程组得

$$M=0.15\text{H}$$

3-35 两根足够长的平行导线间的距离为 20cm，在导线中保持一大小为 20A 而方向相反的恒定电流。

(1) 求两导线间每单位长度的自感系数，设导线的半径为 1.0mm；

(2) 若将两导线分开到相距 40cm，求磁场对导线单位长度所做的功；

(3) 位移时，单位长度的磁能改变了多少？是增加还是减少？说明能量的来源。

解：(1) 根据习题 3-31 结果可知：长为 l 的两导线间的自感系数为 $L=\frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d}{a}$，则单位长度的自感系数为

$$L=\frac{L}{l}=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a}=2.1\times10^{-6}\text{H}$$

(2) 两等值反向直线电流间的作用力为排斥力，将导线沿它的受力方向移动 $\mathrm{d}r$ 时，磁场力对单位长导线作功 $\mathrm{d}A=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi r}\mathrm{d}r$；所以

$$A=\int_{0.20}^{0.40}\frac{\mu_0 I^2}{2\pi r}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln2=5.5\times10^{-5}\text{J}$$

(3) 磁能的改变量

$$\Delta W=W-W_0=\frac{1}{2}LI^2-\frac{1}{2}L_0I^2$$
$$=\frac{1}{2}I^2\left(\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a}-\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d_0}{a}\right)=5.5\times10^{-5}\text{J}$$

即磁能增加了。磁场对外所做的功和磁能的增加均来源于电源所做的功。

第 4 章　电磁介质

4.1　基本要求与教学难点

1. 基本概念的要求

(1) 了解电介质极化的微观解释、理解极化强度矢量的物理意义；理解电位移矢量、电场强度和极化率之间的关系；极化强度与极化电荷面密度的关系；理解有介质时的高斯定理。

(2) 了解磁介质磁化的微观解释、理解磁化强度的定义及其与磁化电流的关系；理解有介质时安培环路定律。

(3) 了解铁磁质的特性，磁滞效应、磁滞曲线、磁畴的概念；了解电磁场的边界条件，磁路的有关概念和磁路定理；理解电场、磁场的能量及电磁场能量密度的概念；了解磁荷观点及其与之有关的物理量。

2. 基本方法的要求

(1) 能应用有介质时的高斯定理，求解有介质存在时具有一定对称性的电场的分布问题。

(2) 能应用有介质时的安培环路定律，求解具有一定对称性的磁场分布。

(3) 会计算简单的磁路问题。

(4) 会计算具有对称性的非均匀电场、磁场的能量。

3. 教学难点

(1) 极化强度、磁化强度的引入，电位移矢量、磁场强度的引入。

(2) 各种磁介质特性的微观解释；磁荷法的理解与掌握。

4.2　典 型 例 题

例 4－1：平行板电容器的面积为 S，间距为 d，其间充满电介质，介质的介电常数是变化的，在一极板处为 ε_1，在另一极板处为 ε_2，其它处的介电常数与到 ε_1 处的距离成线性关系，略去边缘效应，

(1) 求这电容器的 C；

(2) 当两极板上的电荷分别为 Q 和 $-Q$ 时，求介质内的极化电荷体密度 ρ_e' 和表面上的极化电荷面密度 σ_e'。

解：(1) 设 A 板处的介电常数为 ε_1，则距 A 板为 x 的任意一点处的介电常数

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + Kx \qquad ①$$

而

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + Kd \qquad ②$$

由式②得

$$K = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d}$$

代入式①得

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d}x = \frac{\varepsilon_1 d + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)x}{d}$$

若极板 A、B 分别带 $\pm Q$，则距 A 板为 x 的任意一点处的场强

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S[(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)x + \varepsilon_1 d]}$$

$$U_{AB} = \int_0^d \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

所以

$$C = \frac{Q}{U_{AB}} = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\varepsilon_0 S}{d\ln(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1})}$$

(2) 距 A 板为 x 的任意一点处的极化强度

$$P = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E = \frac{Q}{S}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{Q}{S}\left[1 - \frac{d}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)x + \varepsilon_1 d}\right]$$

依题意，如图 4－1 所示，$\vec{P}$ 的方向与 x 轴正向同。在 x 处取一底面积为 ΔS，高为 Δx 的小体积元 ΔV。根据公式 $\oint_S \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\sum q'$ 有

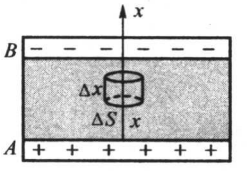


图 4－1　例 4－1

$$-P_x \Delta S + (P_x + \Delta P_x)\Delta S = -\rho_e' \Delta S \Delta x$$

所以

$$\rho_e' = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta x} = -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = -\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)Qd}{[\varepsilon_1 d + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)x]^2 S}$$

令靠近 A、B 板表面上的极化电荷面密度分别为 σ_{e1}' 和 σ_{e2}'，则

$$\sigma_{e1}' = -P_1 = -\frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1}\sigma_{e0} = -\frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1} \cdot \frac{Q}{S}$$

$$\sigma_{e2}' = P_2 = \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2}\sigma_{e0} = \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{Q}{S}$$

例 4－2：求垂直轴线均匀极化的无限长圆柱形电介质轴线上的退极化场，已知极化强度为 $\vec{P}$。

解：以轴线上一点 O 为原点，建立直角坐标系，且使 x 轴的正向与 $\vec{P}$ 方向相反。由于介质极化，圆柱表面出现了束缚电荷，如图 4－2 所示。为了求束缚电荷在 O 点产生的场强，可将其分为无限多带电细长条。每个细长条在 O 点产生的场强的方向均在通过 O 点垂直细长条的直线上。其大小为

$$dE = \frac{d\eta_e}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

方向如图 4－2 所示，其中

$$d\eta_e = \frac{dq}{l} = P\cos\theta R d\theta$$

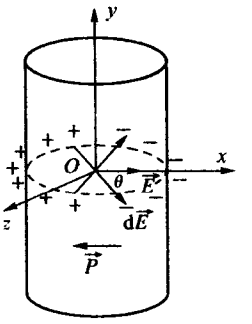


图 4－2　例 4－2

根据束缚电荷分布的对称性，O 点的退极化场沿 x 轴正向（与极化强度 $\vec{P}$ 反向）。大小为

$$E = 4\int dE\cos\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{P\cos^2\theta}{2\pi\varepsilon_0} d\theta = \frac{P}{2\varepsilon_0}$$

例 4－3：两共轴的导体圆筒，内筒外半径为 R_1，外筒内半径为 $R_2(R_2<2R_1)$，其间有两层均匀介质，分界面的半径为 r，内层介电常数为 ε_1，外层介电常数为 $\varepsilon_2=\varepsilon_1/2$，两介质的介电强度都是 E_{max}。

(1) 当电压升高时，哪层介质先击穿？

(2) 证明：两筒最大的电势差为 $U_{max}=\frac{E_{max}r}{2}\ln\frac{R_2^2}{rR_1}$

解：设沿轴线单位长度上内筒带电量为 $+\lambda$，外筒带电量为 $-\lambda$。则介质中的场强

$$E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 r_1} \quad (R_1 < r_1 < r) \qquad ①$$

$$E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 r_2} \quad (r < r_2 < R_2) \qquad ②$$

据题意：$\varepsilon_2=\varepsilon_1/2$，$R_2<2R_1$；故有：$r_2<R_2<2R_1<2r_1$

式①/式②得

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\varepsilon_2 r_2}{\varepsilon_1 r_1} = \frac{(\varepsilon_1/2)r_2}{\varepsilon_1 r_1} = \frac{r_2}{2r_1} < 1$$

所以 $E_1<E_2$，故外层介质最先达到介电强度 E_{max}，因此随着电压的升高，外层介质先击穿。此时

$$E_{max} = \frac{\lambda_{max}}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 r}$$

即

$$\lambda_{max} = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 r E_{max}$$

相应的电压即为两筒间的最大电势差

$$U_{max} = \int_{R_1}^{r}\vec{E}_1\cdot d\vec{r} + \int_{r}^{R_2}\vec{E}_2\cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{r}\frac{\lambda_{max}}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 r_1}dr_1 + \int_{r}^{R_2}\frac{\lambda_{max}}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 r_2}dr_2$$

$$= \frac{\varepsilon_2 r E_{max}}{\varepsilon_1}\ln\frac{r}{R_1} + rE_{max}\ln\frac{R_2}{r} = \frac{E_{max}r}{2}\ln\frac{R_2^2}{rR_1}$$

例 4－4：一铁环中心线的周长为 30cm，横截面积为 $1.0cm^2$，在环上紧密地绕有 300 匝表面绝缘的导线，当导线中通有电流 32mA 时，通过环的横截面的磁通量为 2.0×10^{-6}

Wb,求:

(1) 铁环内部磁感应强度 B 的大小;

(2) 铁环内部磁场强度 H 的大小;

(3) 铁的磁化率 χ_m 和磁导率 μ;

(4) 铁环磁化强度 M 的大小。

解:(1) 铁环内部磁感应强度 B 的大小

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{2.0 \times 10^{-6}\text{Wb}}{1.0 \times 10^{-4}\text{m}^2} = 2.0 \times 10^{-2}\text{T}$$

(2) 与铁芯同心在铁芯内取一半径为 r 的圆为环路 L,其方向与内环电流成右螺旋关系,则由安培环路定理得

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi r H = NI$$

铁环内部磁场强度 H 的大小

$$H = \frac{NI}{2\pi r} \approx \frac{NI}{l} = \frac{300 \times 32 \times 10^{-3}\text{A}}{30 \times 10^{-2}\text{m}} = 32\text{A/m}$$

(3) 铁的磁化率 χ_m 和磁导率 μ 分别为

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{2 \times 10^{-2}\text{T}}{4\pi \times 10^{-7} \times 32\text{A/m}} = 500$$

$$\chi_m = \mu - 1 \approx 500$$

(4) 铁环磁化强度 M 的大小

$$M = \chi_m H = 500 \times 32\text{A/m} = 1.6 \times 10^4\text{A/m}$$

例 4-5:(1) 一圆磁片半径为 R,厚为 l,片的两面均匀分布着磁荷,面密度分别为 σ_m 和 $-\sigma_m$(见图 4-3)。求轴线上离圆心为 x 处的磁场强度 H。

(2) 此磁片的磁偶极矩 P_m 和磁矩 m 为多少?

(3) 试证明,当 $l \ll R$(磁片很薄)时,磁片外轴线上的磁场分布与一个磁矩和半径相同的电流环所产生的磁场一样。

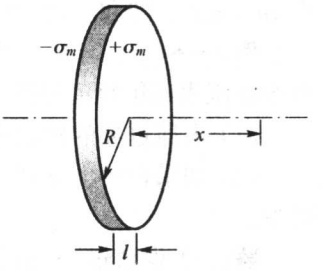


图 4-3 例 4-5

解:(1) 由电场的知识可得均匀带电圆面在轴线上一点的电场强度为

$$E = \frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right)$$

将 $\sigma_e \to \sigma_m$,$E \to H$ 即得本题结果,在 P 点处(取圆板中心为坐标原点)

$$H_+ = \frac{\sigma_m}{2\mu_0}\left(1 - \frac{x - \frac{l}{2}}{\sqrt{R^2 + (x - \frac{l}{2})^2}}\right)$$

$$H_- = \frac{-\sigma_m}{2\mu_0}\left(1 - \frac{x + \frac{l}{2}}{\sqrt{R^2 + (x + \frac{l}{2})^2}}\right)$$

所以

$$H = H_+ + H_- = \frac{\sigma_m}{2\mu_0}\left(\frac{x + l/2}{\sqrt{R^2 + (x + l/2)^2}} - \frac{x - l/2}{\sqrt{R^2 + (x - l/2)^2}}\right)$$

(2) 磁偶极矩为

$$P_m = \sigma_m \pi R^2 l$$

磁矩

$$m = \frac{P_m}{\mu_0} = \frac{\sigma_m \pi R^2 l}{\mu_0}$$

(3)当 $l \ll R$ 时,按二项式展开,略去高次项得

$$\frac{x \pm \frac{l}{2}}{\sqrt{R^2 + (x \pm \frac{l}{2})^2}} \approx \frac{x \pm \frac{l}{2}}{\sqrt{R^2 + x^2}}\left(1 \mp \frac{xl}{2(R^2 + x^2)}\right)$$

所以

$$H = \frac{\sigma_m}{2\mu_0} \cdot \frac{R^2 l}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{m}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

其中

$$m = \frac{\sigma_m \pi R^2 l}{\mu_0}$$

已知半径为 R 载有电流 I 的圆环在其轴线上一点

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{R^2 I}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

令 $m = \pi R^2 I$ 即和上面的结果一致。

例 4-6:一铁环中心线的半径 $R = 20\text{cm}$,横截面是边长为 4.0cm 的正方形。环上绕有 500 匝表面绝缘的导线。导线中载有电流 1.0A,这时铁的磁导率 $\mu = 400$。

(1) 求通过环的横截面的磁通量;

(2) 如果在环上锯开一个宽为 1.0mm 的空气隙,求这时通过环的横截面的磁通量的减少。

解:(1) 设通过环的横截面的磁通量为 Φ_B,根据磁路定理:$NI = \Phi_B R_m$ 和 $R_m = l/\mu\mu_0 S$ 得

$$\Phi_B = NI/R_m = NI\mu\mu_0 S/l$$

代入数据 $N = 500$, $I = 1.0\text{A}$, $\mu = 400$, $S = 16 \times 10^{-4}\text{m}^2$, $l = 2\pi \times 0.2\text{m}$ 计算得

$$\Phi_B = 3.2 \times 10^{-4}\text{Wb}$$

(2) 当环上有一气隙时,磁路的磁阻增大为

$$R'_m \approx \left(\frac{l}{\mu\mu_0 S} + \frac{\Delta l}{\mu_0 S}\right)$$

磁通减为 Φ'_B 但两种情况下的安匝数相等,即

$$\frac{\Phi_B l}{\mu\mu_0 S} = \Phi'_B\left(\frac{l}{\mu\mu_0 S} + \frac{\Delta l}{\mu_0 S}\right)$$

所以

$$\frac{\Phi'_B}{\Phi_B} = \frac{l}{l + \mu\Delta l}$$

磁通的减少量

$$\Phi_B - \Phi'_B = \Phi_B \cdot \frac{\mu\Delta l}{l + \mu\Delta l}$$

代入数据 $\Phi_B = 3.2\times10^{-4}\text{Wb}$，$\mu = 400$，$\Delta l = 10^{-3}\text{m}$，$l = 2\pi\times0.2\text{m}$ 计算得

$$\Phi_B - \Phi'_B = 7.75\times10^{-5}\text{Wb}$$

例 4-7：一平行板电容器极板面积为 S，间距为 d，接在电源上以维持其电压为 U。将一块厚度为 d、介电常数为 ε 的均匀电介质板插入极板间空隙。计算：

(1) 静电能的改变；

(2) 电场对电源所做的功；

(3) 电场对介质板做的功。

解：(1) 静电能的改变

$$\Delta W_e = \frac{1}{2}CU^2 - \frac{1}{2}C_0U^2 = \frac{U^2}{2}\left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} - \frac{\varepsilon_0 S}{d}\right) = \frac{(\varepsilon-1)\varepsilon_0 SU^2}{2d}$$

(2) 在插入介质板的过程中，设电源对电场做的功为 A，则电场对电源做的功为

$$A' = -A = -\Delta qU = -(q - q_0)U = -(UC - UC_0)U = U^2(C_0 - C)$$

$$= U^2\left(\frac{\varepsilon_0 S}{d} - \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}\right) = \frac{(1-\varepsilon)\varepsilon_0 SU^2}{d}$$

(3) 电场对介质板做的功等于电源对电场作的功减去静电能的增量

$$A = -\frac{(1-\varepsilon)\varepsilon_0 SU^2}{d} - \frac{(\varepsilon-1)\varepsilon_0 SU^2}{2d} = \frac{(\varepsilon-1)\varepsilon_0 SU^2}{2d}$$

4.3 思考题详解

4-1 (1) 将平行板电容器两极板接在电源上以维持其间电压不变。用介电常数为 ε 的均匀电介质将它充满，极板上的电荷量为原来的几倍？电场为原来的几倍？

(2) 若充电后拆掉电源，然后再加入电介质，情况如何？

答：(1) 电容器未充介质前，极板上的电量 $Q_0 = C_0U$；充满介质后，极板上的电量 $Q = CU$，因极板间电压 U 不变，而 $C = \varepsilon C_0$，所以 $Q = \varepsilon Q_0$。

充介质前，电容器中电场 $E_0 = \frac{U}{d}$；充满介质后，电容器中电场 $E = \frac{U}{d}$。因电压 U 和两极板间的距离 d 均不变，故 $E = E_0$。

(2) 拆掉电源，极板上电量恒定。因此，充介质前后，电量相同。设其面电荷密度为 σ_{e0}，

则充介质前，电容器中的场强 $E_0=\frac{\sigma_{e0}}{\varepsilon_0}$；充满介质后，电容器中的场强 $E=\frac{\sigma_{e0}}{\varepsilon\varepsilon_0}$，所以 $E=\frac{E_0}{\varepsilon}$。

4－2 如图 4－4 所示，平行板电容器的极板面积为 S，间距为 d。试问：

(1) 将电容器接在电源上，插入厚度为 $\frac{d}{2}$ 的均匀电介质板(见图 4－4(a))，介质内、外电场之比为多少？它们和未插入介质之前电场之比为多少？

(2) 在问题(1)中，若充电后拆去电源，再插入电介质板，情况如何？

(3) 将电容器接在电源上，插入面积为 $\frac{S}{2}$ 的均匀电介质板(见图 4－4(b))，介质内、外电场之比为多少？它们和未插入介质之前电场之比为多少？

(4) 在问题(3)中，若充电后拆去电源，再插入电介质板，情况如何？

(5) 图 4－4(a)、(b)中电容器的电容各为真空时的几倍？

在以上各问中都设电介质的介电常数为 ε。

答：(1)插入厚度为 $\frac{d}{2}$ 的均匀电介质后，设极板上的面电荷密度为 σ'_{e0}，有介质部分的场强 $E=\sigma'_{e0}/\varepsilon\varepsilon_0$；无介质部分的场强 $E'_0=\sigma'_{e0}/\varepsilon_0$。所以

$$\frac{E}{E'_0}=\frac{1}{\varepsilon}$$

设插入介质前，电容器中的场强为 E_0，则两极板间的电压为 $U=E_0d$；插入介质后，两极板间的电压为 $U=E\frac{d}{2}+E'_0\frac{d}{2}$。因电压 U 不变，所以有

$$E_0d=E\frac{d}{2}+E'_0\frac{d}{2}$$

将 $\frac{E}{E'_0}=\frac{1}{\varepsilon}$ 代入可得

$$\frac{E}{E_0}=\frac{2}{1+\varepsilon},\ \frac{E'_0}{E_0}=\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

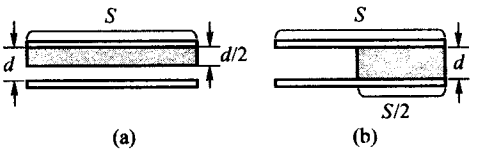


图 4－4 思考题 4－2

(2) 拆掉电源，极板上电量恒定，设极板上的面电荷密度为 σ_{e0}，介质内场强 $E=\sigma_{e0}/\varepsilon\varepsilon_0$；介质外场强 $E'_0=\sigma_{e0}/\varepsilon_0$；插介质前电容器内场强 $E_0=\sigma_{e0}/\varepsilon_0$；所以

$$\frac{E}{E'_0}=\frac{1}{\varepsilon},\ \frac{E'_0}{E_0}=1$$

(3) 设插入面积为 $S/2$ 的均匀电介质前电容器中的场强为 E_0。两极板间电压 $U_0=E_0d$；插入介质后，介质内、外场强分别为 E 和 E'_0；两极板电压 $U_0=Ed$，$U_0=E'_0d$；因电压不变，所以 $E_0d=E'_0d=Ed$；故

$$E_0=E'_0=E$$

因此

$$\frac{E}{E_0'}=1,\ \frac{E}{E_0}=1,\ \frac{E_0'}{E_0}=1$$

(4) 设插入面积为$\frac{S}{2}$的均匀电介质后，充介质部分和未充介质部分的极板上的面电荷密度分别为 σ 和σ_{e0}'，极板间场强分别为 E 和E_0'。

因为 $Ed=E_0'd$，所以 $E_0=E_0'$，即 $\sigma/\varepsilon\varepsilon_0=\sigma_{e0}'/\varepsilon$，$\sigma=\varepsilon\sigma_{e0}'$

令未充介质前极板上的面电荷密度为 σ_{e0}，极板间场强为 E_0。因为拆掉电源后极板上电量恒定，所以 $\sigma_{e0}S=\sigma\frac{S}{2}+\sigma_{e0}'\frac{S}{2}$；则

$$\sigma_{e0}'=\frac{2}{\varepsilon+1}\sigma_{e0}$$

又因为 $E_0'=\frac{\sigma_{e0}'}{\varepsilon_0}=\frac{2}{(\varepsilon+1)\varepsilon_0}\sigma_{e0}=\frac{2}{(\varepsilon+1)}E_0$

所以$\frac{E_0'}{E_0}=\frac{2}{\varepsilon+1}$；根据 $E=E_0'$，同样得$\frac{E}{E_0}=\frac{2}{\varepsilon+1}$

(5) 图 4－4(a)可看成厚度为 $d/2$ 的两个分别充以介质和空气的电容器的串联。所以，电容

$$C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{2\varepsilon_0\varepsilon S}{(1+\varepsilon)d}$$

未插入介质前的电容：$C_0=\varepsilon_0S/d$，所以$\frac{C}{C_0}=\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}$

图 4－4(b)可看成面积各为 $S/2$ 的两个分别充以介质和空气的电容器的并联。所以，电容

$$C=C_1+C_2=\frac{\varepsilon_0(1+\varepsilon)S}{2d}$$

未插入介质前的电容：$C_0=\varepsilon_0\frac{S}{d}$，所以$\frac{C}{C_0}=\frac{1+\varepsilon}{2}$

4－3 平行板电容器两板上自由电荷密度分别为 $+\sigma_{e0}$、$-\sigma_{e0}$。今在其中放一半径为 r，高度为 h 的圆柱形介质(介电常数为 ε)，其轴与板面垂直。求在下列两种情况下圆柱介质中点的场强 $\vec{E}$和电位移矢量 $\vec{D}$。

(1) 细长圆柱，$h\gg r$；

(2) 扁平圆柱，$h\ll r$。

答：(1) 设平行板电容器中的场强为 E_0；处于其中的细长柱形介质因极化两底面上出现束缚电荷(见图 4－5(a))，它在介质中产生场强 E'；根据叠加原理，可得介质中的场强 $E=E_0-E'$；因 $h\gg r$，所以 $E'\ll E_0$ 故 $E=E_0=\frac{\sigma_{e0}}{\varepsilon_0}$，$D=\varepsilon\varepsilon_0E=\varepsilon\sigma_{e0}$方向均与 $\vec{E}_0$ 同。

(2) 由于扁平圆柱 $h\ll r$，可认为圆柱两底面分别出现分布均匀的束缚电荷，且极板上的面电荷密度 σ_{e0}不因介质底面出现束缚电荷而改变(见图 4－5(b))。因此，根据介质中的高斯定理 $\oint\vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q_{e0}$，易得 $D=\sigma_{e0}$；$E=D/\varepsilon\varepsilon_0=\sigma_{e0}/\varepsilon\varepsilon_0$ 方向均与 $\vec{E}_0$ 同。

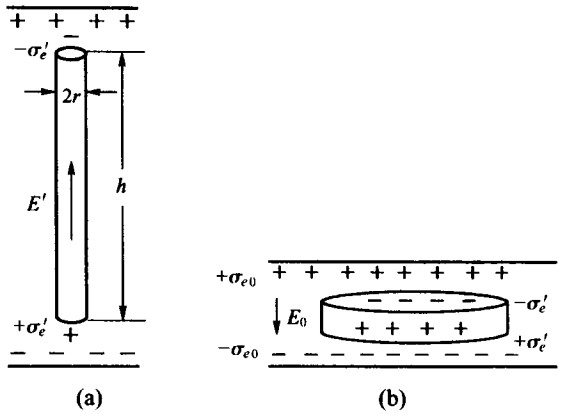


图 4-5　思考题 4-3

4-4　在均匀极化的电介质中挖去一半径为 r，高度为 h 的圆柱形空穴，其轴平行于极化强度矢量 $\vec{P}$，求下列两情形下空穴中点 A 处的场强 $\vec{E}_A$ 和电位移矢量 $\vec{D}_A$ 与介质中的 $\vec{E}$、$\vec{D}$ 的关系。

(1) 细长空穴，$h \gg r$（见图 4-6(a)）；

(2) 扁平空穴，$h \ll r$（见图 4-6(b)）。

答：(1) 因介质均匀极化，设介质中场强为 $\vec{E}$；细长空穴两底面上出现的束缚电荷在空穴中点产生的场强 $\vec{E}'$（见图 4-7）。根据叠加原理，空穴中点的总场强 $\vec{E}_A = \vec{E} + \vec{E}'$；因 $h \gg r$，所以 $\vec{E}' \ll \vec{E}$，故

$$\vec{E}_A = \vec{E} = \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)};\quad \vec{D}_A = \varepsilon_0 \vec{E}_A = \frac{\vec{P}}{\varepsilon - 1}$$

介质中的场强和电位移矢量

$$\vec{E} = \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)};\quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} = \varepsilon \frac{\vec{P}}{(\varepsilon - 1)}$$

可见：$\vec{E}_A = \vec{E}$；$\vec{D}_A = \vec{D}/\varepsilon$

(2) 设介质中的场强为 $\vec{E}$，扁平空穴的两底面上出现束缚电荷，令其面密度为 σ'_e。因 $h \ll r$，所以束缚电荷在空穴中产生的场强为 $E' = \sigma'_e/\varepsilon_0$（见图 4-8）；空穴中的总场强

$$\vec{E}_A = \vec{E} + \vec{E}' = \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)} + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon \vec{P}}{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}$$

$$\vec{D}_A = \varepsilon_0 \vec{E}_A = \frac{\varepsilon \vec{P}}{\varepsilon - 1}$$

介质中的场强和电位移矢量

$$\vec{E} = \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)};\quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} = \frac{\varepsilon \vec{P}}{\varepsilon - 1}$$

可见：$\vec{E}_A = \varepsilon \vec{E}$；$\vec{D}_A = \vec{D}$

$\vec{E}_A$、$\vec{E}$、$\vec{D}_A$、$\vec{D}$ 的指向均与 $\vec{P}$ 的指向同。

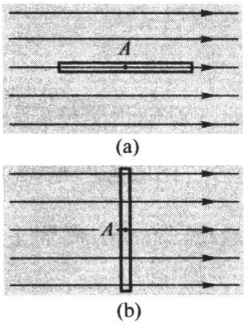


图 4－6　思考题 4－4

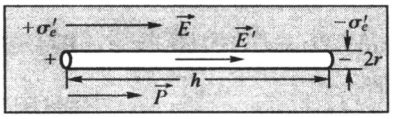


图 4－7　思考题 4－4 附图 1

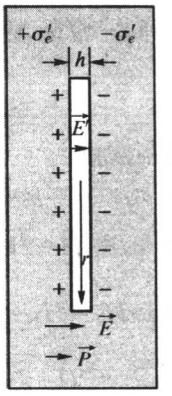


图 4－8　思考题 4－4 附图 2

4－5　在均匀磁化的无限大磁介质中挖去一半径为 r，高度为 h 的圆柱形空穴，其轴平行于磁化强度矢量 $\vec{M}$。试证明：

(1) 对于细长空穴($h \gg r$)，空穴中点的 $\vec{H}$ 与磁介质中的 $\vec{H}$ 相等；

(2) 对于扁平空穴($h \ll r$)，空穴中点的 $\vec{B}$ 与磁介质中的 $\vec{B}$ 相等。

证明： (1) 在介质内作细长圆柱形空腔如图 4－9(a)所示。

在空腔端面上 $\vec{i}' = \vec{M} \times \vec{n} = 0$，在侧面上，$\vec{n}$ 的方向指向腔内，$\vec{i}' = \vec{M} \times \vec{n}$ 的方向如图。此束缚电流在空腔中点处产生的 $\vec{B}' = -\mu_0 \vec{M}$，所以在空腔中点处

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_0 + \vec{B}' = \vec{B}_0 - \mu_0 \vec{M}; \vec{H}_1 = \frac{\vec{B}_1}{\mu_0} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} - \vec{M}$$

在空腔外的均匀介质中，$\vec{B}' = 0; \vec{B} = \vec{B}_0; \vec{H} = \dfrac{\vec{B}_0}{\mu_0} - \vec{M}$

所以 $\vec{H}_1 = \vec{H}$

(2) 在介质内作扁平空腔如图 4－9(b)所示。在空腔侧壁上的束缚电流如图所示。因 $r \gg h$，在空腔中点处，$\vec{B}' \approx 0$，所以 $\vec{B}_2 = \vec{B}_0$

4－6　如图 4－10 所示是一根沿轴均匀磁化的细长永磁棒，磁化强度为 $\vec{M}$，试分别用分子电流与磁荷的观点求图中标出各点的 $\vec{B}$ 和 $\vec{H}$。

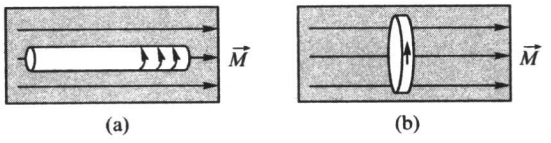


图 4－9　思考题 4－5

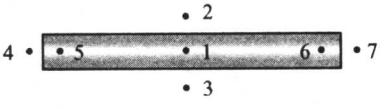


图 4－10　思考题 4－6

解：分子电流观点

$$B = \frac{\mu_0}{2} \cdot i(\cos\beta_1 - \cos\beta_2) = \frac{\mu_0}{2} \cdot M(\cos\beta_1 - \cos\beta_2)$$

对细长棒 $\vec{B}_1 = \mu_0 \vec{M}$；$B_2 = B_3 = 0$；$\vec{B}_4 = \vec{B}_5 = \vec{B}_6 = \vec{B}_7 = \dfrac{1}{2}\mu_0 \vec{M}$

磁棒内 $\vec{M}=$常量，磁棒外 $M=0$，根据 $\vec{H}=\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$ 得

$$H_1=H_2=H_3=0;\vec{H}_4=\vec{H}_7=\frac{1}{2}\vec{M};\vec{H}_5=\vec{H}_6=-\frac{1}{2}\vec{M}$$

磁荷观点：

由 $\sigma_m=J_n=\mu_0 M_n$，在细棒侧面上 $\sigma_m=0$，在端面上 $\sigma_m=\pm\mu_0 M$。对细长磁棒，退磁因子 $N_D\approx 0$，由 $\vec{H}=\vec{H}_0-\vec{H}'$ 及 $\vec{B}=\mu_0\vec{H}+\mu_0\vec{M}$，其中 $H_0=0$，$H'=N_D\dfrac{J}{\mu}$，在远离两端的 1、2、3 点 $H_1=H_2=H_3=0;\vec{B}_1=\mu_0\vec{M};B_2=B_3=0$；在两端，由 $H=\dfrac{\sigma_m}{2\mu_0}$，故得(取 $\vec{M}$ 方向为正)

$$H_7=\frac{\sigma_m}{2\mu_0}=\frac{1}{2}M;\ H_6=\frac{-\sigma_m}{2\mu_0}=-\frac{1}{2}M(\text{因为 }\sigma_m=\mu_0 M)$$

$$H_5=\frac{\sigma_m}{2\mu_0}=-\frac{1}{2}M;H_4=\frac{-\sigma_m}{2\mu_0}=\frac{1}{2}M(\text{因为 }\sigma_m=-\mu_0 M)$$

$$B_5=B_6=-\frac{1}{2}\mu_0 M+\mu_0 M=\frac{1}{2}\mu_0 M$$

$$B_4=B_7=\frac{1}{2}\mu_0 M+0=\frac{1}{2}\mu_0 M$$

4-7 如图 4-11 所示是一个带有很窄细缝的永磁环，磁化强度为 $\vec{M}$，试分别用分子电流与磁荷两种观点求图中标出各点的 $\vec{B}$ 和 $\vec{H}$。

解：分子电流的观点(取 $\vec{M}$ 方向为正)：

因缝很窄，所以 $B_1=B_2=B_3=\mu_0 i'=\mu_0 M$；

环内 $M=$常量，缝中 $M=0$，根据 $\vec{H}=\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$

得 $H_1=M;H_2=H_3=0$

磁荷的观点：

缝隙左、右磁环端面上分布有 $\sigma_m=J=\mu_0 M$ 的正、负磁荷，在 1、2、3 点处 $H_1=\dfrac{\sigma_m}{\mu_0}=M$(方向和 $\vec{M}$ 方向一致)，$H_2=H_3=0$。

由 $\vec{B}=\mu_0\vec{H}+\mu_0\vec{M}$ 得 $B_1=B_2=B_3=\mu_0 M$(在缝隙中 $M=0$，在 2、3 点 $H=0$)。

4-8 试证明任何长度的沿轴向磁化的磁棒中垂面上侧表面内、外两点 1、2(见图 4-12) 的磁场强度 H 相等(这提供了一种测量磁棒内部磁场强度 H 的方法)，这两点的磁感应强度相等吗？为什么？

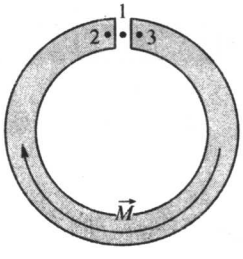


图 4-11 思考题 4-7

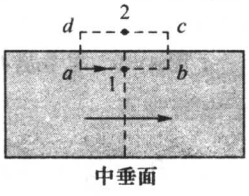


图 4-12 思考题 4-8

证明：由对称性，在1、2点处，磁力线和表面平行。过1、2点作图示矩形回路 $abcd$，使 $ab=cd=\Delta l$ 很小。设 ab 方向单位矢量为 $\hat{l}$，应用安培回路定理，注意到传导电流 $I_0=0$，并且在 bc 和 da 上 $\vec{H}\cdot d\vec{l}=0$，则

$$\oint_{abcd}\vec{H}\cdot d\vec{l}=(\vec{H}_1-\vec{H}_2)\cdot\hat{l}\Delta l=0$$

所以，$\vec{H}_1=\vec{H}_2$

又由 $\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$，因在磁棒内 $\vec{M}$ 为常矢量，在磁棒外 $M=0$，故 $\vec{B}_1\neq\vec{B}_2$。

4-9 试证明：从一均匀磁化球体外部空间的磁场分布看，它就好像全部磁偶极矩集中于球心上的一个磁偶极子一样。

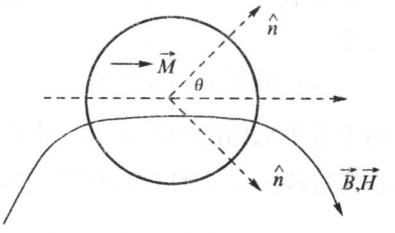


图4-13 思考题4-9

证明：如图4-13所示，均匀磁化球体内部无磁化电流，而表面磁化电流的面密度为

$$\vec{i}\,'=\vec{M}\times\hat{n}$$

所以，在 θ 角度上的面电流密度与转轴呈右手螺旋，大小为 $i'=M\sin(\theta)$。整个磁化球体的等效磁矩方向向右为

$$m=\int_0^{\pi}(i'r\,d\theta)S=\int_0^{\pi}[M\sin(\theta)r\,d\theta][\pi r^2\sin^2(\theta)]=\frac{4}{3}M\pi r^3=MV$$

其外部磁场相当于一个球心处的磁偶极子（磁荷分布左负、右正）：$\vec{p}=\vec{m}$。

4-10 证明在真空中1Gs的磁感应强度相当于1Oe的磁场强度。

证明：在真空中 $H=\frac{B}{\mu_0}$，命 $B=1\text{Gs}=10^{-4}\text{T}$ 则有

$$H=\frac{10^{-4}}{4\pi\times10^{-7}}=\frac{10^3}{4\pi}\text{A/m}=1\text{Oe}$$

4-11 证明两磁路并联时的磁阻服从下列公式：$\frac{1}{R_m}=\frac{1}{R_{m1}}+\frac{1}{R_{m2}}$。

证明：参见图4-14，设总磁通为 Φ_{B0}，并联支路的磁通为 Φ_{B1} 和 Φ_{B2}；并联磁路的磁阻分别为 R_{m1} 和 R_{m2}，总磁阻为 R_m。根据磁路定理，得

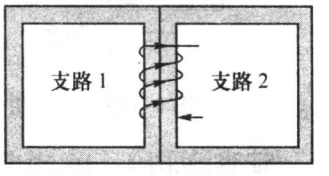


图4-14 思考题4-11

$$\varepsilon_m=\Phi_{B1}R_{m1};\ \varepsilon_m=\Phi_{B2}R_{m2}$$

所以

$$\Phi_{B1}=\varepsilon_m/R_{m1};\ \Phi_{B2}=\varepsilon_m/R_{m2}$$

又

$$\Phi_{B1}+\Phi_{B2}=\Phi_{B0}$$

所以

$$\varepsilon_m/R_{m1}+\varepsilon_m/R_{m2}=\Phi_{B0}=\varepsilon_m/R_m$$

故

$$\frac{1}{R_m}=\frac{1}{R_{m1}}+\frac{1}{R_{m2}}$$

4-12 (1) 借助磁路的概念定性地解释一下为什么电流计中永磁铁两极间加了软铁芯之后，磁感应线会向铁芯内集中？(见图 4-15)

(2) 在本题图中设电流计永磁铁和软铁芯之间气隙内线圈竖边所在位置(图中虚线圆弧上)的磁感应强度数值为 B，电流计线圈的面积为 S，匝数为 N，偏转角为 φ，试证明通过线圈的磁通匝链数 $\psi = NBS\varphi$。

答：(1) 见图 4-15，电流计磁路的磁感应线在气隙中是以辐射状方式向铁芯内集中。这是因为磁轭和铁芯的磁导率 $\mu \gg 1$，磁路的磁阻绝大部分是由空气隙提供，所以对于偏离以上方式的任何路径，磁阻都会大大地增加。此外，对于软铁芯和周围的空气可看做磁路的并联，但空气的磁阻比铁芯的大很多，故磁感应线就集中地“流”向磁阻小的软铁芯之中。

(2) 如图 4-15 所示，选以 $abca$ 为截口的封闭柱面为高斯面，柱面的长度即为线圈的垂直于纸面的边长 l，由 $\oint\!\!\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$ 可知，凡进入由 $\overset{\frown}{ab}$ 弧界定的柱面的磁感应线都将穿过线圈 ac，所以穿过线圈的磁通匝链数为

$$\psi = N\Phi = NB(\overset{\frown}{ab} \times l) = NB(R \cdot 2\varphi \times l) = NB(2Rl)\varphi = NBS\varphi$$

式中：$S = 2Rl$ 为线圈面积。

4-13 一种磁势计的结构如图 4-16 所示，它是均匀密绕在一条非磁性材料做的软带 L 上的线圈，两端接在冲击电流计上。把它放在某磁场中，突然把产生磁场的电流切断，使 H 变到 0，若此时测得在冲击电流计中迁移的电量为 q，试证明：原来磁场中从 a 沿软带 L 到 b 的磁势降落为 $\int_a^b \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \dfrac{Rq}{\mu_0 Sn}$，其中 S 为软带截面积，n 为单位长度上线圈的匝数，R 为电路的总电阻(包括线圈的电阻和冲击电流计线圈中的电阻)。

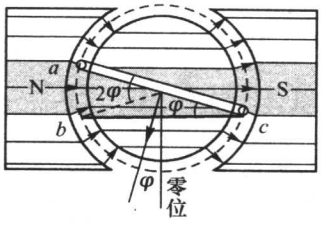


图 4-15 思考题 4-12

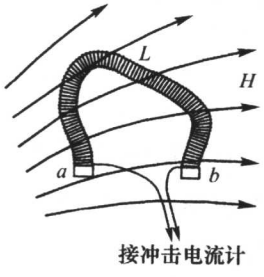


图 4-16 思考题 4-13

证明：见图 4-16，考虑磁势计上长为 $\mathrm{d}x$ 的一段线圈在外磁场中的磁链 $\mathrm{d}\psi = n\mathrm{d}x \cdot SB_x = \mu_0 nSH_x \mathrm{d}x$，其中 B_x 和 H_x 分别为 $\mathrm{d}x$ 段所在处的 $\vec{B}$ 和 $\vec{H}$ 与这段线圈截面垂直的分量。故总的磁链数

$$\psi = \int_a^b \mathrm{d}\psi = \mu_0 nS\int_a^b H_x \mathrm{d}x = \mu_0 nS\int_a^b \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

当产生磁场的电流突然切断时，与磁势计绕阻交链的总磁链从 ψ 减至零。在此期间，绕阻内产生一感应电动势 $\varepsilon_{感} = -\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$。而 $\varepsilon_{感}$ 又在电流计回路中产生一冲击电流 $i(t) = \dfrac{\varepsilon_{感}}{R} =$

$-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$，所以在冲击电流 $i(t)$ 的持续时间内，电流计中迁移的电量

$$q=\int_0^t i(t)\mathrm{d}t=-\frac{1}{R}\int_0^t\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}t=\frac{\psi}{R}=\frac{\mu_0 nS}{R}\int_a^b\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

所以

$$\int_a^b\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\frac{Rq}{\mu_0 Sn}$$

4-14 仿照第一章 6.3 节例题 21 电偶极子在非均匀电场中的受力公式(1.70)$\vec{F}=\nabla(\vec{P}_e\cdot\vec{E})$导出磁偶极子在非均匀磁场中的受力公式 $\vec{F}=\nabla(\vec{P}_m\cdot\vec{H})$，并由此得出结论：若 $\vec{P}_m$ 与 $\vec{H}$ 平行，力指向磁场强的地方；若与 $\vec{H}$ 反平行(如抗磁质的分子那样)，情况如何？

答：设想磁偶极子有一微小位移 $\delta\vec{l}$，则磁场力 $\vec{F}$ 做功

$$\delta A=\vec{F}\cdot\delta\vec{l}=F_l\delta l$$

式中：F_l 是 $\vec{F}$ 在 $\delta\vec{l}$ 方向上的投影。代入 $\delta A=-\delta W_m$ 得

$$F_l\delta l=-\delta W_m$$

除以 δl，取 $\delta l\to 0$ 的极限，得

$$F_l=-\frac{\partial W_m}{\partial l}$$

写成矢量式，则有

$$\vec{F}=-\nabla W_m$$

对于磁偶极子，$W_m=-\vec{P}_m\cdot\vec{H}$，所以

$$\vec{F}=\nabla(\vec{P}_m\cdot\vec{H})$$

若 $\vec{P}_m$ 与 $\vec{H}$ 平行，则 $\vec{P}_m\cdot\vec{H}=P_mH$ 偶极子受力的方向沿着 P_mH 的梯度方向，亦即指向磁场强度的绝对值 H 较大的区域，即力指向磁场强的地方。若 $\vec{P}_m$ 与 $\vec{H}$ 反平行(如抗磁质的分子那样)，则 $\vec{P}_m\cdot\vec{H}=-P_mH$，偶极子受力的方向沿着 P_mH 的梯度反方向，亦即指向磁场强度的绝对值 H 较小的区域，即力指向磁场弱的地方。

4-15 用电源将平行板电容器充电后断开，然后插入一块电介质板。在此过程中电介质板受到什么样的力？此力做正功还是负功？电容器储能增加还是减少？

答：因电介质板在进入电容器时，两表面出现束缚电荷。根据电容器边缘处的电力线的方向可知，束缚电荷受到如图 4-17 所示的力电场 $\vec{F}'$。其合力 $\vec{F}$ 指向电容器内部。此电场力做正功，外力做负功。

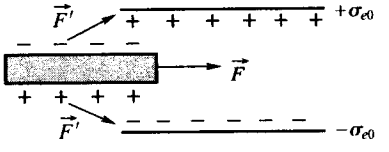


图 4-17 思考题 4-15

根据电容器储能公式 $W=\frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C}$，在插入电介质的过程中，电容 C 增加，电量 Q 不变。故电容器储能减少。

4－16 在上题中如果充电后不断开电源，情况怎样？能量是否守恒？

答：和上题相同的讨论，介质受到指向电容器内部的电场力。此电场力做正功，外力做负功。

但此时根据电容器储能公式 $W=\frac{1}{2}CU^2$，在插入电介质的过程中，电容 C 增加，U 不变，故电容器储能增加。储能增加由电源提供，能量守恒。

4－17 将一个空心螺线管接到恒定电源上通电，然后插入一根软铁棒。在此过程中铁棒受到什么样的力？此力做正功还是负功？螺线管储能增加还是减少？

答：由于软铁棒为顺磁质，所以会产生与螺线管同方向的电流，从而受到线圈的吸引力，该力对软铁棒做正功；同时，螺线管内磁感应强度增加，磁场储能增加；两个能量均来自电源系统。

4－18 将一根顺磁棒或一根抗磁棒悬挂在电磁铁的磁极之间，它们会有什么不同的表现？你能判断图 4－18(a)和 4－18(b)中哪个是顺磁棒，哪个是抗磁棒吗？

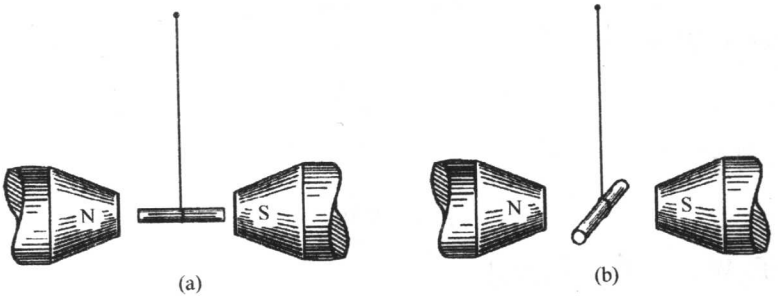


图 4－18 思考题 4－18

答：在电磁铁的电流和磁极中分子电流产生的外磁场作用下，顺磁棒中磁化电流与外部电流方向相同，根据同向电流相互吸引的结论可知，顺磁棒与电磁铁的两极相互吸引，所以图 4－18(a)中是顺磁棒。而在外磁场作用下，抗磁棒中磁化电流与外部电流方向相反，磁棒与电磁铁的两极相互排斥，所以图 4－18(b)中是抗磁棒。



图 4－19 思考题 4－19

4－19 如图 4－19 所示为火焰在一对磁极之间显示的行为。试解释之。

答：火焰中向上运动的带电离子受到洛伦兹力作用偏向垂直磁场的方向。

4－20 如图 4－20 所示，将液态氧倒向一对磁极之间的空隙中，一部分液体凝滞在其中不流下来，试解释此现象。

答：由于液态氧为顺磁性，在磁极的磁场中受到与图 4－18(a)类似的吸引力。

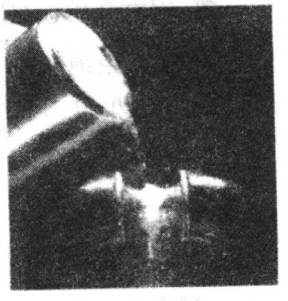


图 4－20 思考题 4－20

4.4 习题详解

4-1 面积为 $1.0m^2$ 的两平行金属板，带有等量异号电荷 $\pm 30\mu C$，其间充满了介电常数 $\varepsilon=2.0$ 的均匀电介质。略去边缘效应，求介质内的电场强度和介质表面上的极化电荷面密度 σ'_e。

解：介质内的电场强度和介质表面上的极化电荷面密度 σ'_e 分别为

$$E=\frac{E_0}{\varepsilon}=\frac{\sigma_{e0}}{\varepsilon\varepsilon_0}=\frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}=1.7\times10^6 V/m$$

$$\sigma'_e=(\varepsilon-1)\varepsilon_0 E=1.5\times10^{-5}C/m^2$$

4-2 平行板电容器（极板面积为 S，间距为 d）中间有两层厚度各为 d_1 和 $d_2(d_1+d_2=d)$，介电常数各为 ε_1 和 ε_2 的电介质层（见图 4-21）。试求：

(1) 电容 C；

(2) 当金属板上带电密度为 $\pm\sigma_{e0}$ 时，两层介质的分界面上的极化电荷面密度 σ'_e；

(3) 极板间电势差 U；

(4) 两层介质中的电位移 D。

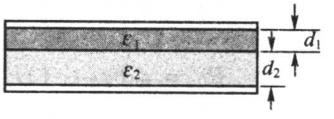


图 4-21 习题 4-2

解：(1) 这个电容器可看成是厚度各为 d_1、d_2 的两个电容器的串联，则

$$C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 S}{\varepsilon_1 d_2+\varepsilon_2 d_1}$$

(2) 分界面处第一层介质的极化电荷面密度（设与 d_1 接触的金属板带正电）

$$\sigma'_{e1}=\vec{P}_1\cdot\vec{n}=P_1=\varepsilon_0(\varepsilon_1-1)E_1=\frac{(\varepsilon_1-1)\sigma_{e0}}{\varepsilon_1}$$

分界面处第二层介质的极化电荷面密度

$$\sigma'_{e2}=\vec{P}_2\cdot\vec{n}=-P_2=-\varepsilon_0(\varepsilon_2-1)E_2=-\frac{(\varepsilon_2-1)\sigma_{e0}}{\varepsilon_2}$$

所以

$$\sigma'_e=\sigma'_{e1}+\sigma'_{e2}=\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\sigma_{e0}}{\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2}$$

若与 d_1 接触的金属板带负电，则

$$\sigma'_e=\sigma'_{e1}+\sigma'_{e2}=-\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\sigma_{e0}}{\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2}$$

(3) $U=E_1d_1+E_2d_2=\dfrac{\sigma_{e0}}{\varepsilon_1\varepsilon_0}d_1+\dfrac{\sigma_{e0}}{\varepsilon_2\varepsilon_0}d_2=\dfrac{(\varepsilon_1d_2+\varepsilon_2d_1)\sigma_{e0}}{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0}$

(4) $D_1=\varepsilon_0\varepsilon_1E_1=\sigma_{e0}$；$D_2=\varepsilon_0\varepsilon_2E_2=\sigma_{e0}$

4-3 一平行板电容器两极板的面积都是 $2.0m^2$，相距为 5.0mm，两板间加上

10000V 电压后，取去电源，再在其间充满两层介质，一层厚 2.0mm、$\varepsilon_1=5.0$，另一层厚 3.0mm、$\varepsilon_2=2.0$。略去边缘效应，求：

(1) 各介质中的电极化强度 P；

(2) 电容器靠近电介质 2 的极板为负极板，将它接地，两介质接触面上的电势是多少？

解：极板上所带电荷面密度为 $\sigma_0=\varepsilon_0 U/d$，取去电源，极板上所带电荷面密度不变。再在其间充满两层介质后，据高斯定理得介质中的电位移矢量 $D=\sigma_0$；据 $\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$ 得介质中的电场强度为

$$E_1=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_1}=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_1};\ E_2=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_2}=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_2}$$

(1) 据 $\vec{P}=\varepsilon_0(\varepsilon-1)\vec{E}$ 得介质中的极化强度

$$P_1=\varepsilon_0(\varepsilon_1-1)E_1=(\varepsilon_1-1)\frac{\sigma_0}{\varepsilon_1}=(\varepsilon_1-1)\frac{\varepsilon_0 U}{\varepsilon_1 d}=1.4\times10^{-5}\mathrm{C/m^2}$$

$$P_2=\varepsilon_0(\varepsilon_2-1)E_2=(\varepsilon_2-1)\frac{\sigma_0}{\varepsilon_2}=(\varepsilon_2-1)\frac{\varepsilon_0 U}{\varepsilon_2 d}=8.9\times10^{-6}\mathrm{C/m^2}$$

(2) 两介质接触面上的电势为

$$U'=E_2 d_2=\frac{E_0}{\varepsilon_2}d_2=\frac{Ud_2}{\varepsilon_2 d}=3\times10^3\mathrm{V}$$

4-4 平行板电容器两极板相距 3.0cm，其间放有一层 $\varepsilon=2.0$ 的电介质，位置和厚度如图 4-22 所示。已知极板上面电荷密度为 $\sigma_{e0}=8.9\times10^{-11}\mathrm{C/m^2}$，略去边缘效应，求：

(1) 极板间各处的 P、E 和 D；

(2) 极板间各处的电势(设正极板处 $U_0=0$)；

(3) 画 $E-x$、$D-x$、$U-x$ 曲线；

(4) 已知极板面积为 $0.11\mathrm{m^2}$，求电容 C，并与不加电介质时的电容 C_0 比较。

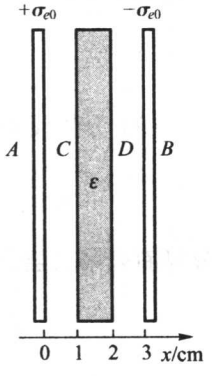


图 4-22 习题 4-4

解：(1) 电介质外的 $P_{外}=0$；电介质内的

$$P_{内}=\chi_e\varepsilon_0 E=\chi_e\varepsilon_0\frac{E_0}{\varepsilon}=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\sigma_{e0}=4.5\times10^{-11}\mathrm{C/m^2}$$

介质外的场强

$$E_{外}=\frac{\sigma_{e0}}{\varepsilon_0}=10\mathrm{V/m}$$

介质内的场强

$$E_{内}=\frac{E_{外}}{\varepsilon}=5.0\mathrm{V/m}$$

根据高斯定理可得

$$D_{内}=D_{外}=\sigma_{e0}=8.9\times10^{-11}\mathrm{C/m^2}$$

(2) 令介质的 C、D 面和 B 板的电势分别为 U_1、U_2、U_3。并设 A 板的电势 $U_A=0$，则

$$U_1 = -E_{外}d_1 = -0.10\text{V}$$
$$U_2 = -(U_1 + E_{内}d_2) = -0.15\text{V}$$
$$U_3 = -(U_2 + E_{外}d_3) = -0.25\text{V}$$

(3) $E-x$、$D-x$、$U-x$ 曲线如图 4-23 所示。

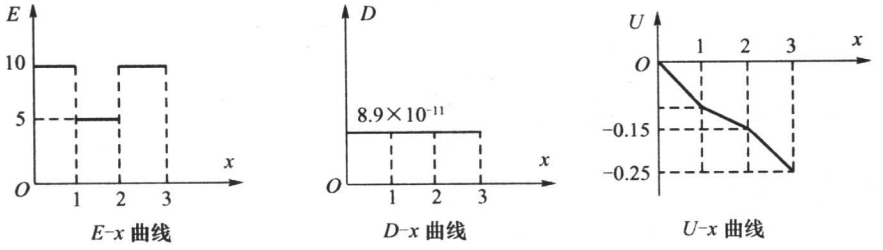


图 4-23　习题 4-4(3)的各曲线

(4) 电容 C

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma_{e0}S}{U} = 39\text{pF}$$

不加电介质时的电容

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = 32\text{pF}$$

两者比值为

$$\frac{C}{C_0} = \frac{39}{32} = 1.2$$

4-5　详见本章典型例题例 4-1。

4-6　一平行板电容器两极板相距为 d，其间充满了两部分介质，介电常数为 ε_1 的介质所占的面积为 S_1，介电常数为 ε_2 的介质所占的面积为 S_2(见图 4-24)。略去边缘效应，求电容 C。

解：C 等效于两个电容器的并联

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 S_1}{d} + \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 S_2}{d} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2)}{d}$$

4-7　如图 4-25 所示，一平行板电容器两极板的面积都是 S，相距为 d，今在其间

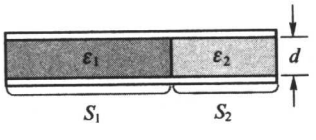


图 4-24　习题 4-6

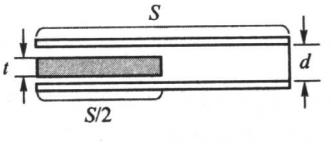


图 4-25　习题 4-7

平行地插入厚度为 t、介电常数为 ε 的均匀电介质，其面积为 $\frac{S}{2}$，设两板分别带电荷 Q 和 $-Q$，略去边缘效应，求

(1) 两板电势差 U；

(2) 电容 C；

(3) 介质的极化电荷面密度 σ_e'。

解：(1) 插入介质后极板上的电荷不可能再均匀分布，设左半部为 σ_{01}，右半部为 σ_{02}，则据高斯定理得

$$D_1 = \sigma_{01};\ D_2 = \sigma_{02}$$

据 $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ 得

$$E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{02}}{\varepsilon_0};\ E_{1介质} = \frac{D_1}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\sigma_{01}}{\varepsilon_0 \varepsilon};\ E_{1空气} = \frac{D_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{01}}{\varepsilon_0}$$

两极板间的电势差

$$U = E_{1介质} t + E_{1空气}(d - t) = E_2 d$$

所以

$$\frac{\sigma_{01}}{\varepsilon_0 \varepsilon} t + \frac{\sigma_{01}}{\varepsilon_0}(d - t) = \frac{\sigma_{02}}{\varepsilon_0} d \qquad ①$$

又

$$(\sigma_{01} + \sigma_{02}) \frac{S}{2} = Q \qquad ②$$

联立式①、式②解得

$$\sigma_{01} = \frac{2\varepsilon Q d}{S[2\varepsilon d + (1 - \varepsilon)t]};\ \sigma_{02} = \frac{2[\varepsilon d + (1 - \varepsilon)t]Q}{S[2\varepsilon d + (1 - \varepsilon)t]}$$

所以两极板间的电势差

$$U = E_2 d = \frac{\sigma_{02}}{\varepsilon_0} d = \frac{2[\varepsilon d + (1 - \varepsilon)t]Q d}{\varepsilon_0 S[2\varepsilon d + (1 - \varepsilon)t]}$$

(2) 电容 C 为

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S[2\varepsilon d + (1 - \varepsilon)t]}{2[\varepsilon d + (1 - \varepsilon)t]d}$$

(3) 介质的极化强度

$$P = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_{1介质} = (\varepsilon - 1)\frac{2Qd}{S[2\varepsilon d + (1 - \varepsilon)t]}$$

介质的极化面电荷

$$\sigma_e' = P = (\varepsilon - 1)\frac{2Qd}{S[2\varepsilon d + (1 - \varepsilon)t]}$$

4-8 同心球形电容器内外半径分别为 R_1 和 R_2，两球间充满介电常数为 ε 的均匀电介质，内球的电荷量为 Q，求：

(1) 电容器内各处的电场强度 E 的分布和电势差 U；

(2) 介质表面的极化电荷面密度 σ_e';

(3) 电容 C(它是真空时电容 C_0 的多少倍?)。

解: (1) 电容器内的电场强度

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{Q/4\pi\varepsilon_0 r^2}{\varepsilon} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$$

电势差

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

(2) 靠近内、外球的介质表面的极化电荷面密度

$$\sigma_{e1}' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma_{e01} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \frac{Q}{4\pi R_1^2} = -\frac{(\varepsilon - 1)Q}{4\pi\varepsilon R_1^2}$$

$$\sigma_{e2}' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma_{e02} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \frac{Q}{4\pi R_2^2} = \frac{(\varepsilon - 1)Q}{4\pi\varepsilon R_2^2}$$

(3) $C = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{Q}{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)} = \dfrac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

而真空中的电容 $C_0 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$,故 C 是 C_0 的 ε 倍。

4-9 在半径为 R 的金属球之外有一层半径为 R' 的均匀电介质层(见图 4-26)。设电介质的介电常数为 ε,金属球带电荷量为 Q,求:

(1) 介质层内、外的场强分布;

(2) 介质层内、外的电势分布;

(3) 金属球的电势。

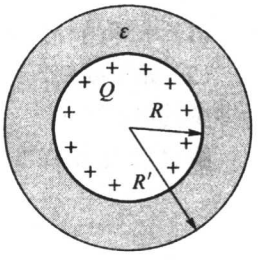


图 4-26 习题 4-9

解:(1) 当 $r < R$ 时,

$$E = 0$$

当 $R < r < R'$ 时,

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$$

当 $r > R'$ 时,

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

(2) 介质层内($R < r < R'$)的电势

$$U_{内} = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_r^{R'} \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r + \int_{R'}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{\varepsilon - 1}{R'}\right)$$

介质球外($r > R'$)的电势

$$U_{外} = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

(3) 金属球的电势

$$U_{\text{金属球}} = \int_R^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_R^{R'} \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r + \int_{R'}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} + \frac{\varepsilon - 1}{R'}\right)$$

4-10 一半径为 R 的导体球带电荷 Q，处在介电常数为 ε 的无限大均匀电介质中。求：

(1) 介质中的电场强度 $\vec{E}$、电位移 $\vec{D}$ 和极化强度 $\vec{P}$ 的分布；

(2) 极化电荷面密度 σ'_e。

解：(1) 在介质中取与导体球同心的半径为 r 的球面为高斯面 S，则

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = D4\pi r^2 = Q$$

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E} = \frac{(\varepsilon - 1)Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}$$

(2) 极化电荷面密度

$$\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{n} = -P = -\frac{(\varepsilon - 1)Q}{4\pi\varepsilon R^2}$$

4-11 半径为 R、介电常数为 ε 的均匀介质球中心放有点电荷 Q，球外是空气。

(1) 求球内外的电场强度 E 和电势 U 的分布；

(2) 如果要使球外的电场强度为零且球内的电场强度不变，则球面上需要有面密度为多少的电荷？

解：(1) 电场强度分布

$$E_{\text{内}} = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2},\quad E_{\text{外}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

电势分布

$$U_{\text{内}} = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_r^{R} \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r + \int_R^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{\varepsilon - 1}{R}\right)(r < R)$$

$$U_{\text{外}} = \int_r^{\infty} \vec{E}_{\text{外}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}(r > R)$$

(2) 设球面上所带电荷为 Q'，据题要求，要使球内场强不变，则球面上电荷分布均匀。又据题要求，要使球外电场为零，则由高斯定理 $\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q' + Q}{\varepsilon}$ 可得 $Q' = -Q$，故球面上需要有面密度为 $\sigma'_e = -\frac{Q}{4\pi R^2}$ 的电量。

4-12 球形电容器由半径为 R_1 的导体球和与它同心的导体球壳构成，壳的内半径为 R_2，其间有两层均匀电介质，分界面的半径为 r，介电常数分别为 ε_1 和 ε_2（见图 4-27）。

(1) 求电容 C;

(2) 当内球带电 $-Q$ 时,求各介质表面上极化电荷的面密度 σ'_e。

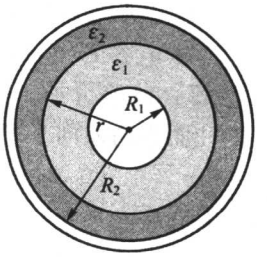


图 4-27　习题 4-12

解:(1) 设导体球和导体球壳分别带电 $\pm Q$,则它们之间的电势差

$$U_{12}=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{R_1}^{r}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r+\int_{r}^{R_2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{Q[\varepsilon_2R_2(r-R_1)+\varepsilon_1R_1(R_2-r)]}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 rR_1R_2}$$

所以

$$C=\frac{Q}{U_{12}}=\frac{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 rR_1R_2}{\varepsilon_2R_2(r-R_1)+\varepsilon_1R_1(R_2-r)}$$

(2) 第一层介质的内表面上束缚电荷面密度

$$\sigma'_e(R_1)=\chi_{e1}\varepsilon_0E_1=(\varepsilon_1-1)\varepsilon_0\frac{Q}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0R_1^2}=\frac{(\varepsilon_1-1)Q}{4\pi\varepsilon_1R_1^2}$$

介质分界面上束缚电荷面密度

$$\sigma'_e(r)=-\frac{(\varepsilon_1-1)Q}{4\pi\varepsilon_1r^2}+\frac{(\varepsilon_2-1)Q}{4\pi\varepsilon_2r^2}=\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)Q}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_2r^2}$$

第二层介质的外表面上束缚电荷面密度

$$\sigma'_e(R_2)=-\chi_{e2}\varepsilon_0E_2=-\frac{(\varepsilon_2-1)Q}{4\pi\varepsilon_2R_2^2}$$

4-13　球形电容器由半径为 R_1 的导体球和与它同心的导体球壳构成,壳的内半径为 R_2,其间一半充满介电常数为 ε 的均匀介质(见图 4-28),求电容 C。

解:这个电容器可看成是两个半球形电容器 C_1、C_2 的并联。其中

$$C_1=\frac{1}{2}C_0=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi\varepsilon_0R_1R_2}{R_2-R_1}$$

$$C_2=\varepsilon C_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0R_1R_2}{R_2-R_1}$$

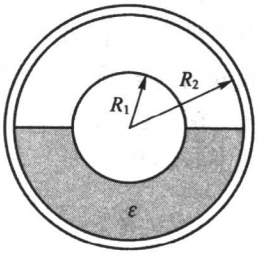


图 4-28　习题 4-13

所以

$$C=C_1+C_2=\frac{2\pi(\varepsilon+1)\varepsilon_0R_1R_2}{R_2-R_1}$$

4-14　圆柱形电容器是由半径为 R_1 的导线和与它同轴的导体圆筒构成的,圆筒的内半径为 R_2,其间充满介电常数为 ε 的均匀介质(见图 4-29)。设沿轴线单位长度上导线的电荷为 λ,圆筒的电荷为 $-\lambda$,略去边缘效应,求:

(1) 两极的电势差 U;

(2) 介质中的电场强度 $\vec{E}$、电位移 $\vec{D}$、极化强度 $\vec{P}$;

(3) 介质表面的极化电荷面密度 σ'_e；

(4) 电容 C(它是真空时电容 C_0 的多少倍?)

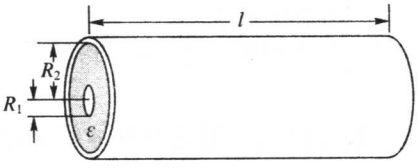


图 4－29　习题 4－14

解:(1) 在介质中取与导体同轴的半径为 r,长为 l 的柱面为高斯面 S,则

$$\oiint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = D2\pi rl = \lambda l$$

$$\vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi r}\hat{r};\ \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\hat{r}$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

(2) 由(1)已得出 $\vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi r}\hat{r};\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\hat{r}$,则

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E} = (\varepsilon - 1)\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\hat{r}$$

(3) 介质表面的束缚电荷面密度

内表面

$$\sigma'(R_1) = \vec{P}\cdot\vec{n} = -P_1 = -\frac{(\varepsilon - 1)\lambda}{2\pi\varepsilon R_1}$$

外表面

$$\sigma'(R_2) = \vec{P}\cdot\vec{n} = P_2 = \frac{(\varepsilon - 1)\lambda}{2\pi\varepsilon R_2}$$

(4) $C = \frac{Q}{U} = \frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln\frac{R_2}{R_1}} = \varepsilon C_0$

4－15　圆柱形电容器是由半径为 a 的导线和与它同轴的导体圆筒构成的,圆筒的内半径为 b,长为 l,其间充满了两层同轴圆筒形的均匀电介质,分界面半径为 r,介电常数分别为 ε_1 和 ε_2(见图 4－30)。略去边缘效应,求电容 C。

解:这个电容器可看成是两个柱形电容器 C_1、C_2 的串联。其中

$$C_1 = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 l}{\ln r/a},\ C_2 = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 l}{\ln b/r}$$

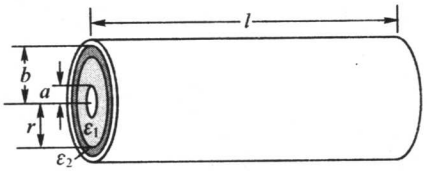


图 4－30　习题 4－15

所以

$$C = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 l}{\varepsilon_1\ln(b/r) + \varepsilon_2\ln(r/a)}$$

4－16　一长直导线半径为 1.5cm,外面套有半径为 3.0cm 的导体圆筒,两者共轴。当两者电势差为 5000V 时,何处电场强度最大?其值是多少?与其间介质有无关系?

解:由习题 4－14 可知:导线和圆筒间的场强

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} \qquad ①$$

电势差

$$\Delta U = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1} \qquad ②$$

由式②得 $\lambda = \dfrac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0\Delta U}{\ln(R_2/R_1)}$，代入式①，则

$$E = \frac{\Delta U}{r\ln(R_2/R_1)} \qquad ③$$

由式③可知，当 $r = R_1$ 时，场强最大，将数据代入计算可得其值

$$E_{R1} = 4.8 \times 10^5 \text{V/m}$$

与其间介质无关

4－17 详见本章典型例题例 4－2。

4－18 在介电常数为 ε 的无限大均匀电介质中存在均匀电场 $\vec{E}_0$，今设想以其中某点 O 为中心作一球面，把介质分为内、外两部分。求球面外全部电荷在 O 点产生的场强 $\vec{E}$（$\vec{E}$ 比 $\vec{E}_0$ 大还是小？）

解：球形区域内介质表面的极化电荷分布如图 4－31 所示，此极化电荷（即球面内全部电荷）在球中心 O 点产生的场强 $\vec{E}'$ 与 $\vec{E}_0$ 反向。其大小为

$$E' = \frac{P}{3\varepsilon_0} = \frac{\chi_e\varepsilon_0 E_0}{3\varepsilon_0} = \frac{(\varepsilon-1)E_0}{3}$$

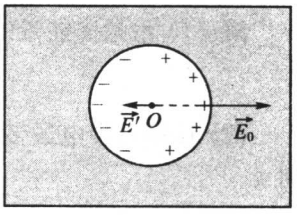


图 4－31 习题 4－18

根据题意，球面外全部电荷与球面内全部电荷在 O 点产生的场强为 $\vec{E}_0$，所以球面外全部电荷在 O 点产生的场强

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{E}'$$

其大小

$$E = E_0 + E' = E_0 + \frac{(\varepsilon-1)E_0}{3} = \frac{\varepsilon+2}{3}E_0$$

因为 $\varepsilon > 1$，所以 $E = \dfrac{\varepsilon+2}{3}E_0 > E_0$

4－19 在介电常数为 ε 的无限大均匀电介质中存在均匀场强 $\vec{E}_0$，今设想在其中作一轴线与 $\vec{E}_0$ 垂直的无限长圆柱面，把介质分为内、外两部分。求柱面外全部电荷在柱轴上产生的场强 $\vec{E}$。（如果真把圆柱面内的介质挖去，本题的结论还适用吗？）

解：柱形区域内介质表面的极化电荷分布如图 4－32 所示，此极化电荷（即柱面内全部电荷）在柱轴上产生的场强 $\vec{E}'$ 与 $\vec{E}_0$ 反向。其大小为

$$E' = \frac{P}{2\varepsilon_0} = \frac{\chi_e\varepsilon_0 E_0}{2\varepsilon_0} = \frac{(\varepsilon-1)E_0}{2}$$

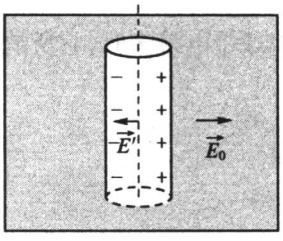


图 4－32 习题 4－19

根据题意，柱面外全部电荷与柱面内全部电荷在柱轴上产生的场强为 $\vec{E}_0$，所以柱面外全部电荷在柱轴上产生的场强

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{E}'$$

其大小

$$E = E_0 + E' = E_0 + \frac{(\varepsilon - 1)E_0}{2} = \frac{\varepsilon + 1}{2}E_0 > E_0$$

如果把圆柱面内的介质挖去，剩余介质的极化情况不发生变化则上述结论仍适用。但实际上挖去圆柱面内的介质后，圆柱外表面的极化电荷一般会发生变化，所以上述结论并不适用。

4-20 空气的介电强度为 3.0×10^6V/m，铜的密度为 8.9g/cm^3，铜的原子量为 63.75g/mol，阿伏加德罗常数 $N_A=6.022\times10^{23}$mol^{-1}，金属铜里每个铜原子有一个自由电子，每个电子的电量为 1.60×10^{-19}C。

(1) 问半径为 1.0cm 的铜球在空气中最多能带多少电？

(2) 这铜球所带电量达到最多时，求它所缺少或多出的电子数与自由电子总数之比；

(3) 因导体带电时电荷都在外表面上，当铜球所带电达到最多时，求它所缺少或多出的电子数与表面一层铜原子所具有的自由电子数之比。

[提示：可认为表面层的厚度为 $n^{-1/3}$，n 为原子数密度。]

解：(1) 设最多能带的电量为 Q，由 $E=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0R^2}$ 得

$$Q = 4\pi\varepsilon_0R^2E = 3.3\times10^{-8}\text{C}$$

(2) 设铜球带电最多时，它所缺少或多出的电子数为 P，而铜球内自由电子数为 N，则

$$\frac{P}{N} = \frac{\dfrac{3.3\times10^{-8}}{1.60\times10^{-19}}}{\dfrac{(4/3)\times3.14\times(1.0)^3\times8.9}{63.75}\times6.022\times10^{23}} = 6.0\times10^{-13}$$

(3) 设表面一层铜原子具有的自由电子数为 K，表面层的体积

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi(R - n^{-1/3})^3 \approx \frac{4\pi R^2}{\sqrt[3]{n}} \qquad ①$$

而原子数密度

$$n = \frac{8.9}{63.75}\times6.022\times10^{23} = 8.4\times10^{22}\text{cm}^{-3}$$

将 n 代入式①得 $\Delta V=2.9\times10^{-7}$cm^3，所以

$$K = \frac{2.9\times10^{-7}\times8.9}{63.75}\times6.022\times10^{23} = 2.4\times10^{16}\text{ 个}$$

铜球带电最多时，它所缺少或多出的电子数

$$P = \frac{3.3\times10^{-8}}{1.60\times10^{-19}} = 2.1\times10^{11}\text{ 个}$$

故

$$\frac{P}{K} = 8.7\times10^{-6}$$

4-21 空气的介电强度为 30kV/cm，今有一平行板电容器，两极板相距 0.50cm，板间是空气，问它能耐多高的电压。

解:空气的介电强度为两极板间的最强电场强度 E,所以两极板间的最高电压即能耐的最高电压为

$$U = Ed = 1.5 \times 10^4 \text{V}$$

4-22 一圆柱形电容器,由直径为 5.0cm 的直圆筒和与它共轴的直导线构成,导线的直径为 5.0mm,铜与导线间是空气,已知空气的击穿场强为 30000V/cm,问这电容器能耐多高的电压?

解:设导线和圆筒的半径分别为 R_1 和 R_2;令沿轴线单位长度上所带电量分别为 λ 和 $-\lambda$。由高斯定理,易求出其间的场强 $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$。在导线表面处($r = R_1$)场强最大。当表面处场强 E_{R1} 等于空气的介电强度 E_M 时,对应导线和圆筒所带的最大电量

$$\lambda_M = 2\pi\varepsilon_0 R_1 E_M \qquad ①$$

电容器能承受的最大电压

$$U_M = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda_M}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r = \frac{\lambda_M}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1} \qquad ②$$

将式①代入式②得

$$U_M = R_1 E_M \ln(R_2/R_1) = 1.7 \times 10^4 \text{V}$$

4-23 详见本章典型例题例 4-3。

4-24 设一同轴电缆里面导体的半径是 R_1,外面的半径是 R_3,两导体间充满了两层均匀电介质,它们的分界面的半径是 R_2,设内外两层电介质的介电常数分别为 ε_1 和 ε_2(横截面见图 4-33),它们的介电强度分别为 E_1 和 E_2,证明当两极(即两导体)间的电压逐渐升高时,在 $\varepsilon_1 E_1 R_1 > \varepsilon_2 E_2 R_2$ 的条件下,首先被击穿的是外层电介质。

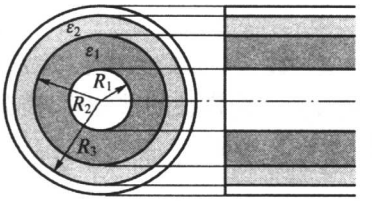


图 4-33 习题 4-24

证明:设内外导体的单位长度上分别带电 $+\lambda$ 和 $-\lambda$,电压为 U。由于 λ 与 U 成正比,故随着 U 的增加 λ 也相应增大。两层介质均分别在其内径处,场强最大,其值分别为

$$E_1' = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 R_1} \qquad ①$$

$$E_2' = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 R_2} \qquad ②$$

式②/式①得

$$\frac{E_2'}{E_1'} = \frac{\varepsilon_1 R_1}{\varepsilon_2 R_2} \qquad ③$$

又题设:

$$\varepsilon_1 E_1 R_1 > \varepsilon_2 E_2 R_2, \text{即} \frac{E_2}{E_1} < \frac{\varepsilon_1 R_1}{\varepsilon_2 R_2} \qquad ④$$

由式③和式④得

$$\frac{E_2'}{E_1'} > \frac{E_2}{E_1}。$$

故当两极(即两导体)间的电压逐渐升高时，E_2' 首先达到其介电强度，外层介质首先击穿。

4－25 一均匀磁化的磁棒，直径为 25mm，长为 75mm，磁矩为 12000A·m^2，求棒侧表面上的面磁化电流密度。

解：由 $\vec{i}' = \vec{M} \times \vec{n}$，得侧面上

$$i' = M = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 l} = 3.3 \times 10^8 \text{A/m}$$

4－26 一均匀磁化棒，体积为 0.01m^3，磁矩为 500A·m^2，棒内的磁感应强度 B = 5.0Gs；

(1) 求磁场强度为多少 Oe；

(2) 按照磁荷观点，磁棒端面上磁荷密度和磁极化强度为多少？

解：(1) 在均匀磁化棒内，$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$，但 $\vec{M} = \frac{\vec{m}}{V}$，所以

$$H = \frac{B}{\mu_0} - \frac{m}{V} = \frac{5 \times 10^{-4}}{4\pi \times 10^{-7}} - \frac{500}{0.01} = -6.2 \times 10^2 \text{Oe}$$

(2) 由 $\sigma_m = J_n = \mu_0 M_n$ 得在磁棒端面上磁荷密度

$$\sigma_m = \pm \mu_0 M = \pm \mu_0 \frac{m}{V} = \pm 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{500}{0.01} = \pm 6.28 \times 10^{-2} \text{Wb/m}^2$$

磁棒端面上磁极化强度

$$q_m = \sigma_m S$$

4－27 一长螺线管长为 l，由表面绝缘的导线密绕而成，共绕有 N 匝，导线中通有电流 I。一同样长的铁磁棒，横截面也和上述螺线管相同，棒是均匀磁化的，磁化强度为 $\vec{M}$，且 $M = \frac{NI}{l}$。在同一坐标纸上分别以该螺线管和铁磁棒的轴线为横坐标 x，以它们的轴线上的 B、$\mu_0 M$ 和 $\mu_0 H$ 为纵坐标，画出包括螺线管和铁磁棒在内两倍长度区间的 $B-x$、$\mu_0 M - x$ 和 $\mu_0 H - x$ 曲线。

解：螺线管

$$B = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{NI}{l}(\cos\beta_1 - \cos\beta_2)$$

$$\mu_0 M = 0$$

$$\mu_0 H = B$$

铁磁棒

$$B = B' = \frac{\mu_0}{2} \cdot M(\cos\beta_1 - \cos\beta_2)$$

$$\mu_0 M = \text{常量}$$

$$\mu_0 H = B - \mu_0 M$$

螺线管和铁磁棒在内两倍长度区间的 $B-x$、$\mu_0 M - x$ 和 $\mu_0 H - x$ 曲线图见图 4－34 和图 4－35。

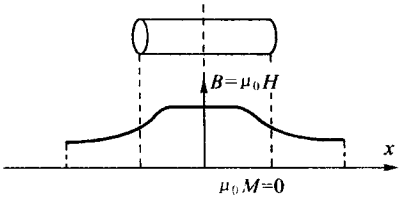


图 4－34　习题 4－27 螺线管

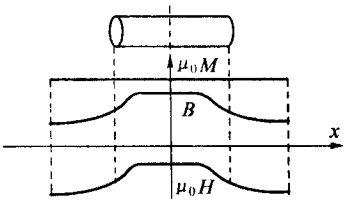


图 4－35　习题 4－27 磁棒

4－28　一圆柱形永磁铁，直径 10mm，长 100mm，均匀磁化后磁极化强度 $J=1.20\text{Wb/m}^2$，求：

(1) 它两端的磁荷密度；

(2) 它的磁矩；

(3) 其中心的磁场强度 H 和磁感强度 B。此外 $\vec{H}$ 和 $\vec{B}$ 的方向关系如何？

解：(1) 两端的磁荷密度

$$\sigma_m = J = 1.20\text{Wb/m}^2$$

(2) 设永磁铁长度为 l，则磁矩

$$m = \frac{P_m}{\mu_0} = \frac{|\sigma_m S| l}{\mu_0} = \frac{9.4\times10^{-5}\times0.1}{4\pi\times10^{-7}} = 7.5\text{A}\cdot\text{m}^2$$

方向和磁极化强度 $\vec{J}$ 的方向一致。

(3) 在永磁铁内 $H=H_0-H'=H_0-N_D\dfrac{J}{\mu_0}$，$B=\mu_0 H+J$，其中退磁因子按 $\dfrac{l}{d}=10$ 查表得 $N_D=0.020286$，$H_0=0$。代入数据得

$$H = -N_D\frac{J}{\mu_0} = -1.94\times10^4\text{A/m}$$

$$B = \mu_0 H + J = 1.18\text{T}$$

$\vec{H}$ 的方向和 $\vec{J}$ 相反，$\vec{B}$ 的方向和 $\vec{J}$ 相同。

4－29　详见本章典型例题例 4－4。

4－30　地磁场可以近似地看做是位于地心的一个磁偶极子产生的，在地磁纬度 45° 处，地磁的水平分量平均为 0.23Oe，地球的平均半径为 6370km，求上述磁偶极子的磁矩。

解：如图 4－36 所示，取从地磁南极到北极的方向为 z 轴，极角 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\varphi$，$\varphi$ 为纬度角，则 $H_{水平}$ 就是 $-H_\theta$，由磁偶极子在远处磁场的公式得

$$H_\theta = \frac{1}{4\pi\mu_0}\cdot\frac{P_m\sin\theta}{r^3} = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{m\sin\theta}{r^3}$$

令 $r=R=$ 地球半径，$|H_\theta|=H_{水平}$，则得

$$m = \frac{4\pi R^3 H_{水平}}{\sin\theta} = 8.4\times10^{22}\text{A}\cdot\text{m}^2$$

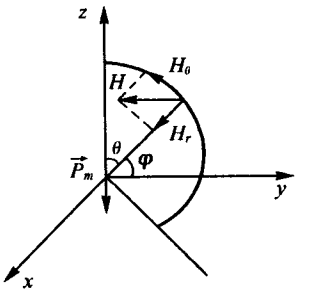


图 4－36　习题 4－30

4－31　地磁场可以近似地看做是位于地心的一个磁偶

极子产生的，证明：磁倾角（地磁场的方向与当地水平面之间的夹角）i 与地磁纬度 φ 的关系为 $\tan i = 2\tan\varphi$（见图 4－37）

证明：如图 4－36 所示，由磁偶极子的磁场公式可得

$$H_r = -\frac{1}{4\pi\mu_0}\cdot\frac{2P_m\cos(\pi/2-\varphi)}{R^3}$$

$$H_\theta = -\frac{1}{4\pi\mu_0}\cdot\frac{P_m\sin(\pi/2-\varphi)}{R^3}$$

所以

$$\tan i = \frac{H_r}{H_\theta} = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)} = 2\tan\varphi$$

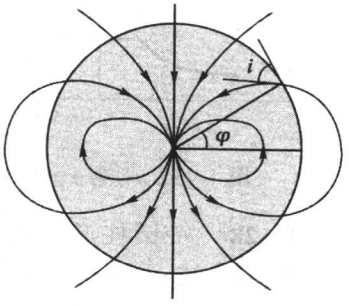


图 4－37　习题 4－31

4－32　根据测量得出，地球的磁矩为 $8.4\times10^{22}\text{A}\cdot\text{m}^2$。

（1）如果在地磁赤道上套一个铜环，在铜环中通以电流 I，使它的磁矩等于地球的磁矩，求 I 的值（已知地球半径为 6370km）；

（2）如果这电流的磁矩正好与地磁矩的方向相反，这样能不能抵消地球表面的磁场？

解：（1）由 $\vec{m} = I\vec{S}$ 得

$$I = \frac{m}{S} = \frac{8.4\times10^{22}\text{A}\cdot\text{m}^2}{\pi\times(6.37\times10^6\text{m})^2} = 6.6\times10^8\text{A}$$

（2）因电流环所产生的磁场和地球的磁场都只在 $r \gg R$ 处才和一个磁偶极子的场等效，在地面附近这一条件不满足，故不能抵消。

4－33　一环形铁芯横截面的直径为 4.0mm，环的平均半径 $R = 15\text{mm}$，环上密绕着 200 匝线圈（见图 4－38），当线圈导线通有 25mA 的电流时，铁芯的磁导率 $\mu = 300$，求通过铁芯横截面的磁通量 Φ。

解：与铁芯同心在铁芯内取一半径为 r 的圆为环路 L，方向逆时针，则

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = 2\pi rH = NI$$

$$H = \frac{NI}{2\pi r} \approx \frac{NI}{2\pi R}$$

$$B = \mu\mu_0 H = \frac{\mu\mu_0 NI}{2\pi R}$$

$$\Phi = BS = \frac{\mu\mu_0 NI}{2\pi R}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\mu\mu_0 NId^2}{8R} = 2.5\times10^{-7}\text{Wb}$$

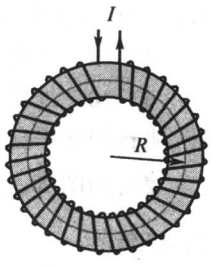


图 4－38　习题 4－33

4－34　详见本章典型例题例 4－5。

4－35　一无穷长圆柱形直导线外包一层磁导率为 μ 的圆筒形磁介质，导线半径为 R_1，磁介质的外半径为 R_2（见图 4－39），导线内有电流 I 通过。

（1）求介质内、外的磁场强度和磁感应强度的分布，并画 $H-r$ 和 $B-r$ 曲线；

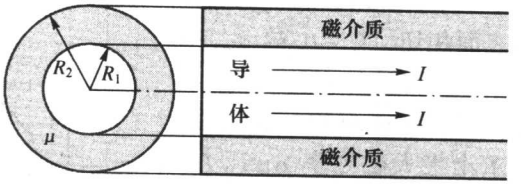


图 4－39　习题 4－35

(2) 求介质内、外表面的磁化面电流密度 i'；

(3) 从磁荷观点来看，磁介质表面有无磁荷？

解：(1) 在横截面内分别在导线内外取以导线轴线为中心的圆形回路，应用安培回路定理可得

$$H = \frac{Ir}{2\pi R_1^2};\ (r < R_1)$$

$$H = \frac{I}{2\pi r};\ (R_1 < r < R_2)$$

$$H = \frac{I}{2\pi r};\ (r > R_2)$$

再由 $B = \mu\mu_0 H$ 得

$$B = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi R_1^2};\ (r < R_1)$$

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r};\ (R_1 < r < R_2)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r};\ (r > R_2)$$

$H - r$ 和 $B - r$ 曲线如图 4－40 和图 4－41 所示。

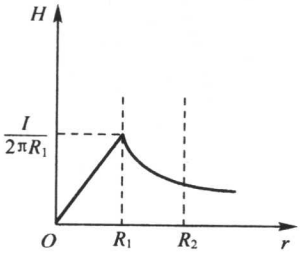


图 4－40　$H - r$ 曲线

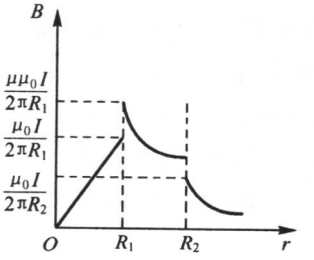


图 4－41　$B - r$ 曲线

(2) 由 $\vec{i}' = \vec{M} \times \vec{n}$ 得

$r = R_1$ 处

$$i' = M = \chi_m H = \frac{(\mu - 1)I}{2\pi R_1}$$

$r = R_2$ 处

$$i' = -M = -\chi_m H = \frac{(1 - \mu)I}{2\pi R_2}$$

(3) 按磁荷观点，$\sigma_m = J_n = \mu_0 M_n = \mu_0 \chi_m H_n$，在介质内外表面，$H$ 和表面相切，$H_n = 0$，故 $\sigma_m = 0$。

4-36 图 4-42 是某种铁磁材料的起始磁化曲线，试根据这曲线求出最大磁导率 $\mu_{最大}$，并绘制相应的 $\mu - H$ 曲线。

解：过坐标原点作起始磁化曲线的切线（如图 4-42 中虚线），可得最大磁导率出现在 $H = 180 \mathrm{A \cdot m^{-1}}$，$B = 1.1\mathrm{T}$ 处

$$\mu_{最大} \approx 1.1/(180\mu_0) = 4.86 \times 10^3$$

由图中磁化曲线可得，不同磁场强度对应的磁感应强度和磁导率见表 4-1，相应的 $\mu - H$ 曲线如图 4-42 中点线所示。

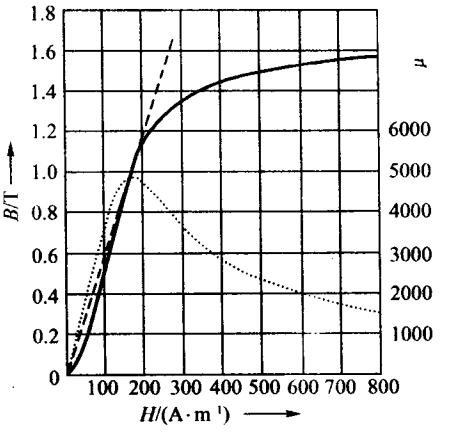


图 4-42 习题 4-36

表 4-1 不同磁场强度对应的磁感应强度和磁导率

磁场强度/(A·m^{-1})	100	200	300	400	500	600	700	800
磁感应强度/T	0.42	1.15	1.35	1.45	1.50	1.52	1.55	1.58
磁导率 μ	3342	4576	3581	2885	2387	2016	1762	1572

4-37 表 4-2 中列出某种磁性材料的 H 和 B 的实验数据。

(1) 画出此材料的起始磁化曲线；

(2) 求表中所列各点材料的磁导率 μ；

(3) 求最大磁导率 $\mu_{最大}$。

解：(1) 根据磁性材料的实验数据可以画出如图 4-43 所示的起始磁化曲线（实线）。

(2) 根据 $\mu = B/\mu_0 H$ 可得表 4-2 中所列各点材料的磁导率 μ。

(3) 从图 4-43 中切线可得，最大磁导率发生在 $H = 86\mathrm{Am^{-1}}$，$B = 0.96\mathrm{T}$ 处

$$\mu_{最大} \approx 0.96/(86\mu_0) = 8883$$

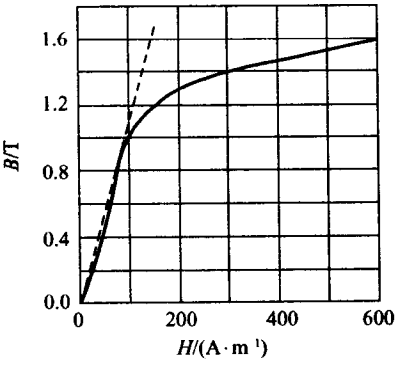


图 4-43 习题 4-37

表 4-2 各点材料的磁导率

H/(A·m^{-1})	0	33	50	61	72	93	155	290	600
B/T	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
μ	—	4823	6366	7827	8842	8557	6161	3842	2122

4-38 中心线周长为 20cm，截面积为 4cm^2 的闭合环形磁芯，其材料的磁化曲线如图 4-44 所示。

(1) 若需要在该磁芯中产生磁感强度为 0.1Wb/m^2、0.6Wb/m^2、1.2Wb/m^2、1.8Wb/

m^2 的磁场时，绕组的安匝数 NI 要多大？

(2) 若绕组的匝数 $N=1000$，上述各种情况下通过绕组的电流 I 应多大？

(3) 若固定绕组中的电流，使它恒为 $I=0.1A$，绕组的匝数各为多少？

(4) 求上述各工作状态下材料的磁导率 μ。

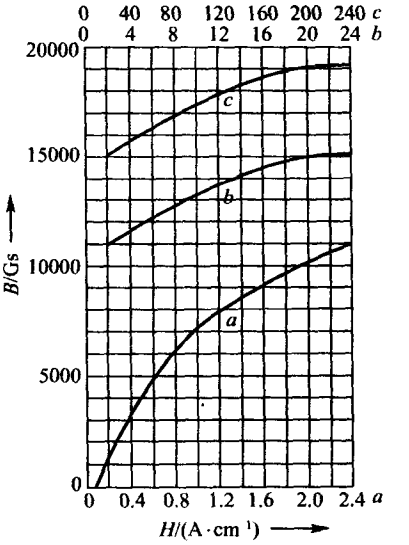


图 4－44　习题 4－38

解：(1) 查图示的磁化曲线，与 $B=0.1Wb/m^2$、$0.6Wb/m^2$、$1.2Wb/m^2$ 和 $1.8Wb/m^2$ 对应的 H 值分别为 18A/m、75A/m、550A/m 和 12500A/m，根据 $NI=2\pi RH=0.2H$，得绕组的安匝分别为 3.6 安·匝、15 安·匝、1.1×10^2 安·匝和 2.5×10^3 安·匝。

(2) 若 $N=1000$，对应的电流分别为 3.6mA、15mA、110mA 和 2500mA。

(3) 若 $I=0.1A$，则 $N=36$ 匝、150 匝、1100 匝和 25000 匝。

(4) $\mu=\dfrac{B}{\mu_0 H}=4.4\times10^3$、$6.2\times10^3$、$1.7\times10^3$、$1.1\times10^2$。

4－39　矩磁材料具有矩形磁滞回线(见图 4－45(a))，反向场一超过矫顽力，磁化方向就立即反转。矩磁材料的用途是制作电子计算机中存储元件的环形铁芯。如图 4－45(b)所示为一种这样的铁芯，其外直径为 0.5mm，高为 0.3mm，这类材料由矩磁铁氧体材料制成。若铁芯原来已被磁化，其方向如图所示。现需使铁芯中自内到外的磁化方向全部反转，导线中脉冲电流 I 的峰值至少需多大？设铁芯矩磁材料的矫顽力 $H_c=2Oe$。

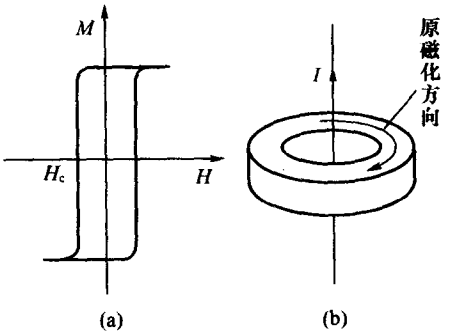


图 4－45　习题 4－39

解：由于磁芯具有很高的磁导率，故其内的磁感应线完全可视为与其共轴的圆线族。对外环面内侧的磁力线所构成的回路，应用安培环路定理可得：使全部磁芯翻转所需的最小峰值电流

$$i_m=2\pi RH_c=0.4A$$

4－40　在空气($\mu=1$)和软铁($\mu=7000$)的交界面上，软铁内的磁感强度 $\vec{B}$ 与交界面法线的夹角为 85°，求空气中磁感强度与交界面法线的夹角。

解:设空气中的磁感应线与交界面法线的夹角为 $\theta_{气}$。根据磁感应线在交界面上的折射规律可得 $\frac{\tan\theta_{气}}{\tan\theta_{铁}}=\frac{\mu_{气}}{\mu_{铁}}$

$$\tan\theta_{气}=\frac{\mu_{气}}{\mu_{铁}}\tan\theta_{铁}=1.63\times10^{-3}$$

$$\theta_{气}=0.1^{\circ}$$

4-41 一铁芯螺绕环由表面绝缘的导线在铁环上密绕而成,环的中心线长 500mm,横截面积为 1000mm^2。现在要在环内产生 $B=1.0$T 的磁感应强度,由铁的 $B-H$ 曲线得这时铁的 $\mu=796$,求所需的安匝数 NI。如果铁环上有一个 2.0mm 宽的空气间隙,所需的安匝数 NI 又是多少?

解:设所需的安匝数为 NI,根据磁路定理得

$$NI=\Phi_B R_m=\frac{BSl}{\mu\mu_0 S}=\frac{Bl}{\mu\mu_0}=5\times10^2\ 安\cdot 匝$$

(2) 当铁环上有 2.0mm 宽的气隙时,所需的安匝数为

$$NI=\Phi_B\sum R_{mi}=BS\left[\frac{l-\Delta l}{\mu\mu_0 S}+\frac{\Delta l}{\mu_0 S}\right]\approx\frac{B}{\mu_0}\left[\frac{l}{\mu}+\Delta l\right]=2.1\times10^3\ 安\cdot 匝$$

4-42 一铁环中心线的半径 $R=200$mm,横截面积为 150mm^2,在它上面绕有表面绝缘的导线 N 匝,导线中通有电流 I,环上有一个 1.0mm 宽的空气气隙。现在要在空气气隙内产生 $B=0.50$T 的磁感应强度,由铁的 $B-H$ 曲线得这时铁的 $\mu=250$,求所需的安匝数 NI。

解:根据磁路定理,所需的安匝数

$$NI=B\left[\frac{(l-\Delta l)}{\mu\mu_0}+\frac{\Delta l}{\mu_0}\right]\approx\frac{B}{\mu_0}\left[\frac{2\pi R}{\mu}+\Delta l\right]=2.4\times10^3\ 安\cdot 匝$$

4-43 一铁环中心线的直径 $D=40$cm,环上均匀地绕有一层表面绝缘的导线,导线中通有一定电流。若在这环上锯一个宽为 1.0mm 的空气隙,则通过环的横截面的磁通量为 3.0×10^{-4}Wb;若空气隙的宽度为 2.0mm,则通过环的横截面的磁通量为 2.5×10^{-4}Wb,忽略漏磁不计,求这铁环的磁导率。

解:设铁环的磁导率为 μ,根据磁路定理有

$$\varepsilon_m=\Phi_{B1}R_{m1}=\Phi_{B2}R_{m2}$$

又

$$R_{m1}\approx\frac{\pi D}{\mu\mu_0 S}+\frac{\Delta l_1}{\mu_0 S};\ R_{m2}\approx\frac{\pi D}{\mu\mu_0 S}+\frac{\Delta l_2}{\mu_0 S}$$

所以

$$\Phi_{B1}\left(\frac{\pi D}{\mu\mu_0 S}+\frac{\Delta l_1}{\mu_0 S}\right)=\Phi_{B2}\left(\frac{\pi D}{\mu\mu_0 S}+\frac{\Delta l_2}{\mu_0 S}\right)$$

$$\mu=\frac{\pi D(\Phi_{B2}-\Phi_{B1})}{\Phi_{B1}\Delta l_1-\Phi_{B2}\Delta l_2}\approx314$$

4-44 详见本章典型例题例 4-6。

4－45 一个利用空气间隙获得强磁场的电磁铁如图 4－46 所示，铁芯中心线的长度 $l_1=500\text{mm}$，空气隙长度 $l_2=20\text{mm}$，铁芯是磁导率 $\mu=5000$ 的硅钢。要在空气隙中得到 $B=3000\text{Gs}$ 的磁场，求绕在铁芯上的线圈的安匝数 NI。

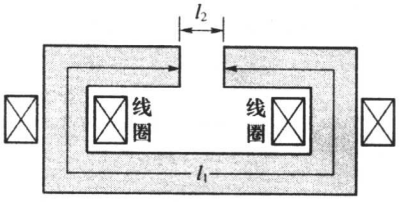


图 4－46 习题 4－45

解：设所需的安匝数为 NI，根据磁路定理得

$$NI = \Phi_B \sum R_{mi} = \Phi_B \left[\frac{l_{铁}}{\mu\mu_0 S_{铁}} + \frac{l_{气}}{\mu_0 S_{气}} \right]$$

忽略气隙处磁场的边缘效应后，可认为 $S_{气}=S_{铁}$，所以

$$NI = \frac{\Phi_B}{S_{气}} \left[\frac{l_{铁}}{\mu\mu_0} + \frac{l_{气}}{\mu_0} \right] = \frac{B}{\mu_0} \left[\frac{l_{铁}}{\mu} + l_{气} \right] = 4.8\times10^3 \text{ 安·匝}$$

4－46 某电钟里有一铁芯线圈，已知铁芯磁路长 14.4cm，空气隙宽 2.0mm，铁芯横截面积为 0.60cm^2，铁芯的磁导率 $\mu=1600$。现在要使通过空气隙的磁通量为 $4.8\times10^{-6}\text{Wb}$，求线圈电流的安匝数 NI。若线圈两端电压为 220V，线圈消耗的功率为 2.0W，求线圈的匝数 N。

解：设线圈电流的安匝数为 NI，根据磁路定理得

$$NI = \Phi_B \left[\frac{l-\Delta l}{\mu\mu_0 S} + \frac{\Delta l}{\mu_0 S} \right] = 1.33\times10^2 \text{ 安·匝}$$

因 $P=UI$，所以 $I=\dfrac{P}{U}=9.1\times10^{-3}(\text{A})$

$$N = \frac{NI}{I} = 1.46\times10^4 \text{ 匝}$$

4－47 图 4－47 是某日光灯所用镇流器铁芯尺寸（单位为 mm），材料的磁化曲线见习题 4－38 图。在铁芯上共绕 $N=1280$ 匝线圈，现要求线圈中通过电流 $I=0.41\text{A}$ 时铁芯中的磁通量 $\Phi=5.8\times10^{-4}\text{Wb}$。

（1）求此时气隙中的磁感应强度和磁场强度；

（2）求铁芯中的磁感应强度 B 和磁场强度 H；

（3）应留多大的气隙才能满足上述的要求？

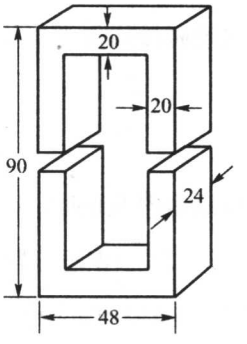


图 4－47 习题 4－47

解：（1）忽略气隙处磁场的边缘效应后，可认为 $S_{气}=S_{铁}$，又 $\Phi_{B气}=\Phi_{B铁}$，所以

$$B_{气} = \frac{\Phi_{B铁}}{S_{铁}} = B_{铁} \approx 1.2\text{Wb/m}^2;\quad H_{气} = \frac{B_{气}}{\mu_0} \approx 9.6\times10^5\text{A/m}$$

(2) 由(1)可知：$B_{铁}=B_{气}\approx 1.2\text{Wb/m}^2$

查表可知：$H_{铁}=5.5\times 10^2\text{A/m}$

(3) 设应留的气隙为 Δl，根据磁路定理可得

$$NI=\sum H_i l_i=H_{铁}(l-2\Delta l)+H_{气}\cdot 2\Delta l\approx H_{铁}\cdot l+2H_{气}\cdot \Delta l$$

所以

$$2\Delta l=\frac{(NI-H_{铁}\cdot l)}{H_{气}}$$

由图 4－47 的尺寸可得 $l=19.6\times 10^{-2}\text{m}$，所以 $2\Delta l=0.45\text{mm}$。

4－48 为了测量某一硬磁材料的磁棒的磁滞回线，需要测量其中磁场强度 H 的变化。为此将磁棒夹在电磁铁的两极之间，用平均直径为 D 的半球形有机玻璃为芯做一磁势计，放在硬磁棒侧面上(见图 4－48)。

(1) 磁势计测得的磁势降落与磁棒内的磁场强度 H 有什么关系？

(2) 先增加电磁铁绕阻中的电流 I 使硬磁棒的磁化达到饱和，然后将励磁电流突然切断，由冲击电流计测得的电量 $q=25\mu\text{C}$，已知半圆磁势计的平均直径 $D=1.6\text{cm}$，横截面积 $S=0.16\text{cm}^2$，磁势计线圈共有 3725 匝，电路的总电阻 $R=4100\Omega$，求硬磁棒中的磁场强度 H 的改变量。切断励磁电流后，硬磁棒内的磁场强度是否为 0？为什么？

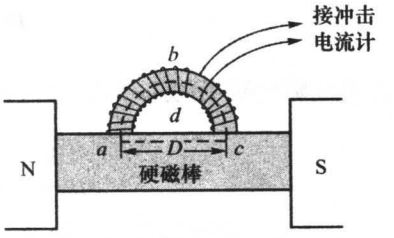


图 4－48 习题 4－48

解：(1) 如图 4－48 所示，在磁化电流作用下，硬磁棒内的 $\vec{B}$、$\vec{H}$ 和 $\vec{M}$ 方向一致。L 回路按 $abcda$ 路径，根据安培环路定理得

$$\int_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_{abc}\vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_{cda}\vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$

即

$$\int_{abc}\vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-\int_{cda}\vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_{adc}\vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

在硬磁棒均匀磁化的情况下，$\int_{adc}\vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=H_i D$ 其中 H_i 为棒内磁场强度。所以

$$H_i=\frac{\int_{abc}\vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}{D}$$

即磁棒内的磁场强度 H 为磁势计测得的磁势降落与磁势计直径的比值。

(2) 根据思考题 4－13 结果可知，磁势计两端的磁势降等于 $\frac{\psi}{(\mu_0 nS)}$。所以切断电流时，硬磁棒内磁场强度的变化为

$$\Delta H=\frac{\Delta\psi}{\mu_0 nSD}=\frac{qR}{\mu_0 nSD}=\frac{\pi qR}{2\mu_0 NS}=2.1\times 10^6\text{A/m}$$

切断磁化电流后，棒内磁场强度 H 的值严格来讲不为零，但可以近似为零。因为，当磁化电流为零时，虽然由于磁棒内的剩磁作用，仍有一磁通在电磁铁的磁路内闭合，但是，由于铁轭部分的磁阻很低，所以磁棒两端的磁势降很小，可以近似为零。根据安培环路定理，磁棒内的磁势降 $H \cdot l$ 和磁场强度也近似为零。

4－49 电视显像管的磁偏转线圈套在管颈上，在管颈中间产生一个均匀磁场。磁偏转线圈的结构如图 4－49(a)所示，用磁性材料做一个空心磁环，把线圈绕在上面，A、A' 处绕得较稀，B、B' 处绕得较密，而且 ABA' 与 $AB'A'$ 两半边绕的方向相反(图 4－49(a)中只画了一个象限内的绕组)。于是磁感应线就会形成如图 4－49(b)的分布。设磁芯的磁导率很大，从而其中磁阻可以忽略。试证明，为了在管颈中得到均匀磁场，磁环单位长度上线圈的匝数应服从下列规律：

$$n(\theta) \propto \cos\theta$$

式中：θ 是从 B 点算起的方位角。

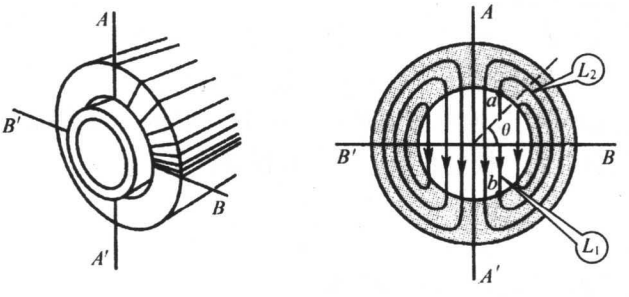


图 4－49　习题 4－49

解：设磁环单位长度上线圈的匝数随 θ 的变化规律为 $n(\theta)$。如图 4－49 所示，对 L 回路应用安培环路定理

$$\int_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum I_0 = \int_{\cap ab} In(\theta')R\mathrm{d}\theta' = RI\int_{-\theta}^{\theta} n(\theta')\mathrm{d}\theta'$$

又

$$\int_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{a(L_1)}^{b} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{b(L_2)}^{a} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

由于磁环的磁导率很高，故右边第二项积分近似为零，又

$$\int_{a(L_1)}^{b} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = Hl_1 = 2HR\sin\theta$$

所以

$$\int_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = RI\int_{-\theta}^{\theta} n(\theta')\mathrm{d}\theta' = 2HR\sin\theta$$

这就是 $n(\theta)$ 应满足的积分方程，满足这一方程的解不只一个，但其中以 $n(\theta) = \dfrac{H\cos\theta}{I}$ 最为简单。

这就是符合题设条件(A、A'处绕得较稀,B、B'处绕得较密)的一个解,故 $n(\theta)\propto\cos\theta$。

4-50 (1) 证明电磁铁吸引衔铁的起重力 F(见图 4-50)为

$$F=\frac{SB^2}{2\mu_0}$$

式中:S 为两磁极与衔铁相接触的总面积;B 为电磁铁内的磁感应强度(设磁铁内的 $H\ll M$)。

(2) 起重力与磁极、衔铁间的距离 x 有无关系?

[提示:先假设衔铁与磁极间有长度为 x 的小气隙,则磁铁和衔铁的表面带有正、负号相反的磁荷,起重力,即它们之间的吸引力为

$$F=\frac{1}{2}S\sigma_m H$$

式中:H 为气隙中的磁场强度。(为什么有因子 1/2?)进一步用磁铁内的 B 将 σ_m、H 表示出来,即可得到上述公式。令 $x\to 0$,可以计算衔铁与磁极直接接触时的相互作用力,即最大的起重力。]

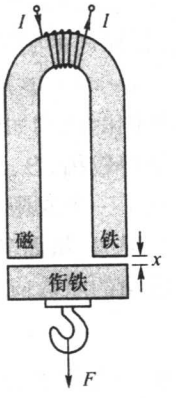


图 4-50 习题 4-50

解:(1) 当气隙很小时,气隙中磁通截面积和磁极相同,在磁极和衔铁表面带有等值异号磁荷,类似静电学中的平板电容器。而电容器极板受力

$$F=\frac{1}{2}\frac{CU^2}{d}=\frac{1}{2}QE=\frac{1}{2}S\sigma_e E$$

将 $\sigma_e\to\sigma_m$,$E\to H$,即得磁极和衔铁间的作用力

$$F=\frac{1}{2}S\sigma_m H=\frac{1}{2\mu_0}S\sigma_m B$$

在磁铁内,按题意 $H\ll M$,由 $\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$ 知 $\vec{M}\approx\frac{\vec{B}}{\mu_0}$,$\sigma_m=\mu_0 M=B$,所以

$$F=\frac{SB^2}{2\mu_0}$$

(2) 只要 x 很小,上面结果均适用。式中虽未显含 x,但 x 变化将改变气隙磁阻,从而改变 B,故 F 仍和 x 有关。

4-51 在上题中已知电磁铁的每个磁极的面积都是 $1.5\times10^{-2}\mathrm{m}^2$。在磁极与衔铁间夹有薄铜片,以免铁与铁直接接触。设这时的磁通量为 $1.5\times10^{-2}\mathrm{Wb}$,求这电磁铁的起重力。

解: 按上题结果代入数据,考虑到

$$B=\frac{\Phi_B}{S}=\frac{1.5\times10^{-2}\mathrm{Wb}}{1.5\times10^{-2}\mathrm{m}^2}=1\mathrm{Wb/m}^2$$

故得

$$F=\frac{SB^2}{2\mu_0}=1.2\times10^4\mathrm{N}$$

4-52 (1) 一起重用的马蹄形电磁铁形状如图 4-51 所示,两极的横截面都是边长

为 a 的正方形，磁铁的磁导率 $\mu=200$，上面绕有 $N=200$ 匝的线圈，电流 $I=2.0\text{A}$，已知 $R=a=x=5.0\text{cm}$，$l=d=10\text{cm}$，衔铁与磁极直接接触。求这电磁铁的起重力（包括衔铁在内）。

（2）若磁铁与衔铁间垫有厚 1.0mm 的铜片，当负重（包括衔铁自重）20kg 时，需要多大电流？

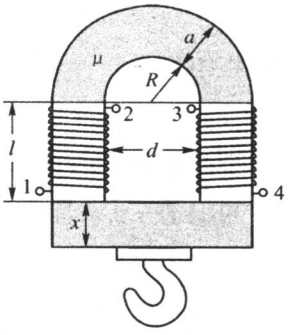


图 4－51　习题 4－52

解：（1）设所求的起重力为 F，根据习题 4－50，磁铁最大起重力（令 $\Delta x\to 0$）

$$F = SB^2/2\mu_0$$

式中：$S=2a^2=5\times10^{-3}\text{m}^2$；$B=\mu\mu_0H=\dfrac{\mu\mu_0NI}{L}$（$L$ 为磁路中心长度，按图尺寸算得 $L=0.635\text{m}$），所以

$$F=\frac{a^2}{\mu_0}\left(\frac{\mu\mu_0NI}{L}\right)^2=\frac{a^2\mu^2\mu_0N^2I^2}{L^2}=50\text{N}$$

（2）设所需的最大电流为 I，此时最大起重力为 F'。由 $F=SB^2/2\mu_0$ 得 $B=\sqrt{2\mu_0F'/S}$，再由磁路定理得

$$I=\frac{NI}{N}=\frac{B}{N\mu_0}\left[\frac{l}{\mu}+2\Delta l\right]=\frac{1}{N}\sqrt{\frac{2F'}{\mu_0S}}\left[\frac{l}{\mu}+2\Delta l\right]=6.5\text{A}$$

4－53　（1）在上题中两绕组串联和并联时，1、2、3、4 各接头该如何接？

（2）若两绕组完全相同，在同样电压的条件下，哪种连接方法使电磁铁的起重力较大？大几倍？

（3）在同样电流的条件下比较，结论如何？

（4）在同样功率的条件下比较，结论如何？

解：（1）无论哪种形式连接，两绕组的电流所产生的磁通应该相互加强。为此，串联时应将 2、4 接头绞合，1、3 接到外电源正、负极上；并联时将 1、2 接头分别与 4、3 接头绞合，然后分别接至外电源正负极。

（2）设每一绕组的电阻为 r，则 $R_{串}=2r$，$R_{并}=\dfrac{r}{2}$。所以，在同样电压条件下，并联时每个绕组中的电流为串联时的 2 倍。由于绕组总匝数不变，所以并联时的 H 和 B 值为串联时的 2 倍。根据 $F=\dfrac{SB^2}{2\mu_0}$ 可知并联时的起重力为串联时的 4 倍。

（3）若从电源流出的总电流相同，串联时绕组内的电流就为并联时每个绕组内电流的 2 倍。串联时的 B 值就为并联时 B 值的 2 倍，故串联时的起重力为并联时的 4 倍。

（4）设串、并联时每个绕组中流过的电流分别为 $I_{串}$ 和 $I_{并}$。因电源供给的功率相同，所以它们应满足以下等式：$I_{串}^2\times2r=2I_{并}^2\cdot r$，所以 $I_{串}=I_{并}$，$B_{串}=B_{并}$ 故二者的起重力相同。

4－54　一磁铁棒长 5.0cm，横截面积为 1.0cm^2，设棒内所有铁原子的磁矩都沿棒长方向整齐排列，每个铁原子的磁矩为 $1.8\times10^{-23}\text{A}\cdot\text{m}^2$。

（1）求这磁铁棒的磁矩 m 和磁偶极矩 P_m；

（2）当这磁铁棒在 $B=1.5\text{Gs}$ 的外磁场中并与之垂直时，$\vec{B}$ 使它转动的力矩有多大？

解:(1) 铁磁棒内的铁原子数 $N=\frac{\rho Sl}{A}N_0$,其中密度 $\rho=7.8\text{g/cm}^3$,原子量 $A=55.85$,阿佛加德罗常量 $N_0=6.023\times10^{23}$;所以磁矩

$$m = Nm_i = \frac{7.8\times5\times1}{55.85}\times6.023\times10^{23}\times1.8\times10^{-23} = 7.6\text{A}\cdot\text{m}^2$$

磁偶极矩

$$P_m = \mu_0 m = 9.5\times10^{-6}\text{Wb}\cdot\text{m}$$

(2) 磁棒所受力矩:

根据 $\vec{L}=\vec{m}\times\vec{B}$ 得 $L=mB$;代入数据得

$$L = 1.1\times10^{-3}\text{N}\cdot\text{m}$$

4-55 一磁针的磁矩为 $20\text{A}\cdot\text{m}^2$,处在 $B=5.0\times10^{-2}\text{Gs}$ 的均匀外磁场中。求 $\vec{B}$ 作用在这磁针上的力矩的最大值。

解:由 $\vec{L}=\vec{m}\times\vec{B}$ 得

$$L_{最大} = mB = 1.0\times10^{-4}\text{N}\cdot\text{m}$$

4-56 一小磁针的磁矩为 $\vec{m}$,处在磁场强度为 $\vec{H}$ 的均匀外磁场中;这磁针可以绕它的中心转动,转动惯量为 J_0。当它在平衡位置附近做小振动时,求振动周期和频率。

解:如图 4-52 所示,设 $\vec{m}$ 和 $\vec{B}$ 的夹角为 θ,则磁针受力矩

$$L = -mB\sin\theta$$

据题意 θ 很小,故 $\sin\theta\approx\theta$,所以

$$L \approx -mB\theta = -K\theta$$

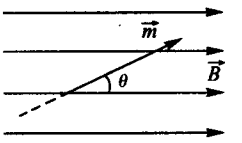


图 4-52 习题 4-56

又 $L=J_0\ddot{\theta}$ 故 $\ddot{\theta}=-\frac{K}{J_0}\theta$,这是谐振动方程,其振动周期 T 和频率 f 为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{\mu_0 mH}} = \frac{1}{f}$$

4-57 两磁偶极子排列在同一条直线上,它们的磁偶极矩分别为 $\vec{P}_{m1}$ 和 $\vec{P}_{m2}$,中心的距离为 r,它们各自的长度都比 r 小很多,如图 4-53 所示。

(1) 证明:它们之间相互作用力是 $F=\frac{3P_{m1}P_{m2}}{2\pi\mu_0 r^4}$。

(2) 在什么情况下它们相互吸引?在什么情况下它们相互排斥?

解:(1) $\vec{P}_{m1}$ 在 $\vec{P}_{m2}$ 处的磁场

$$H_1 = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{2P_{m1}}{r^3}$$

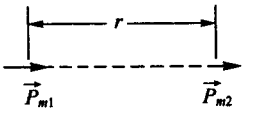


图 4-53 习题 4-57

$\vec{P}_{m2}$ 受 H_1 的作用力为

$$F = \left| p_{m2} \frac{\partial H_1}{\partial r} \right| = \frac{3P_{m1}P_{m2}}{2\pi\mu_0 r^4}$$

同理，$\vec{P}_{m1}$受 $\vec{P}_{m2}$的作用力为

$$F = \left| p_{m1} \frac{\partial H_2}{\partial r} \right| = \frac{3P_{m1}P_{m2}}{2\pi\mu_0 r^4}$$

(2) 当 $\vec{P}_{m1}$和 $\vec{P}_{m2}$方向相反时，$\vec{P}_{m2}$和 H_1 反平行，F 指向磁场减弱的方向，即排斥力；反之，当 $\vec{P}_{m1}$和 $\vec{P}_{m2}$平行时，为吸引力。

4－58 一抗磁质小球的质量为 0.10g，密度 $\rho = 9.8\text{g/cm}^3$，磁化率 $\chi_m = -1.82 \times 10^{-4}$，放在一个半径 $R = 10\text{cm}$ 的圆线圈的轴线上距圆心 $l = 10\text{cm}$ 处(见图 4－54)，线圈中载有电流 $I = 1\text{mA}$。求电流作用在这抗磁质小球上的力的大小和方向。

解：圆电流在轴线上离圆心 l 处的磁场强度 $H = \frac{R^2 I}{2(R^2 + l^2)^{3/2}}$，因小球线度很小，可看做均匀磁化，其磁化强度

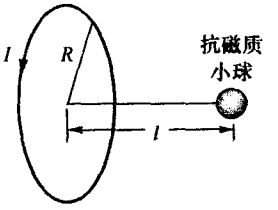


图 4－54 习题 4－58

$$M = \chi_m H = \frac{\chi_m R^2 I}{2(R^2 + l^2)^{3/2}}$$

磁矩

$$m = M\Delta V = M \frac{1 \times 10^{-4}}{9.8 \times 10^3} = \frac{M}{98} \times 10^{-6}$$

电流作用在这抗磁质小球上的力的大小

$$F = \left| p_m \frac{\partial H}{\partial l} \right| = \left| \mu_0 m \frac{\partial H}{\partial l} \right| = \left| -\frac{3\mu_0 \chi_m I^2 R^4 l}{392(R^2 + l^2)^4} \times 10^{-6} \right| = 1.1 \times 10^{-22}\text{N}$$

考虑到小球是抗磁质，P_m 方向和 H 方向反平行，F 指向磁场较弱处，即和线圈互相排斥。

4－59 一平行板电容器极板面积为 S，间距为 d，电荷为 $\pm Q$。将一块厚度为 d、介电常数为 ε 的均匀电介质板插入极板间空隙。计算：

(1) 静电能的改变；

(2) 电场力对介质板做的功。

解：(1) 静电能的改变

$$\Delta W_e = \frac{Q^2}{2C} - \frac{Q^2}{2C_0} = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{C_0}\right) = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0 S/d} - \frac{1}{\varepsilon_0 S/d}\right) = -\frac{(\varepsilon - 1)Q^2 d}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}$$

即静电能减少 $\frac{(\varepsilon - 1)Q^2 d}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}$；

(2) 电场力对介质板做的功等于静电能的减少，即为 $\frac{(\varepsilon - 1)Q^2 d}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}$。

4－60 详见本章典型例题例 4－7。

4－61 一平行板电容器极板是边长为 a 的正方形，间距为 d，电荷 $\pm Q$。将一块厚度为 d、介电常数为 ε 的均匀电介质板插入一半，它受力多少？什么方向？

解：设介质板受到电场力 F 的作用。当介质板插入 x 时，系统的电容

$$C_x = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 ax}{d} + \frac{\varepsilon_0 a(a-x)}{d} = \frac{\varepsilon_0 a[a + x(\varepsilon - 1)]}{d}$$

相应的静电能

$$W_e(x) = \frac{Q^2}{2C_x} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 a[a + x(\varepsilon - 1)]}$$

当介质板在 F 的作用下移动 $\mathrm{d}x$ 时，电场力做的功 $\mathrm{d}A = F(x)\mathrm{d}x$ 等于系统静电能的减少 $-\mathrm{d}W_e(x)$，即 $F(x)\mathrm{d}x = -\mathrm{d}W_e(x)$；所以

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}W_e(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 a[a + x(\varepsilon - 1)]}\right\} = \frac{Q^2 d(\varepsilon - 1)}{2\varepsilon_0 a[a + x(\varepsilon - 1)]^2}$$

当介质插入一半，即将 $x = \frac{a}{2}$ 代入上式，得

$$F = \frac{2(\varepsilon - 1)Q^2 d}{(\varepsilon + 1)^2 \varepsilon_0 a^3}$$

沿吸入介质板的方向。

4－62 两个相同的平行板电容器，它们的极板都是圆形，半径 10cm，极板间隔 1.0mm。两电容器中一个两板间是空气，另一个两板间是 $\varepsilon = 26$ 的酒精。把这两个电容器并联后充电到 120V，求它们所蓄的总电能；再断开电源，把它们带异号电荷的两极分别连在一起，求这时两者所蓄的总电能。少的能量哪里去了？

解：(1) 并联时的总电容

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} + \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon_0 S(1 + \varepsilon)}{d}$$

所蓄的总电能

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_0 S(1 + \varepsilon)}{d}U^2 \approx 5.4 \times 10^{-5}\mathrm{J}$$

(2) 未断开电源时 $Q_2 = C_2 U = \varepsilon C_1 U = \varepsilon Q_1 = 26Q_1$

断开电源，把带异号电荷的两极连在一起，总电容仍相当于 C_1、C_2 并联，异号电荷部分中和，则极板上的总电量

$$Q = Q_2 - Q_1 = 25Q_1$$

此时的总静电能

$$W_e' = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(25Q_1)^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(25 \times C_1 U)^2}{C} = \frac{(25)^2 \varepsilon_0 S U^2}{2d(1 + \varepsilon)} \approx 4.7 \times 10^{-5}\mathrm{J}$$

在异号电荷中和的过程中，所减少的静电能最终大部分转换成热能了，还有极少部分转换成其它形式的能量。

4－63 球形电容器的内外半径分别为 R_1 和 R_2，电势差为 U。

(1) 求电容器所储的静电能；

(2) 求电场的能量；比较两个结果。

解：(1) 电容器所储的静电能

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \cdot U^2 = \frac{2\pi\varepsilon_0 R_1 R_2 U^2}{R_2 - R_1}$$

(2) 电场的能量

$$W'_e = \iiint_V \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \mathrm{d}V = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

$$= \frac{C^2U^2}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{R_2-R_1}{R_2R_1} = \frac{U^2}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{4\pi\varepsilon_0 R_1R_2}{R_2-R_1}\right)^2\cdot\frac{R_2-R_1}{R_2R_1} = \frac{2\pi\varepsilon_0 R_1R_2U^2}{R_2-R_1}$$

计算结果一样,表明储存于电容器中的静电能分布在两极间的电场内。

4-64 半径为 a 的导体圆柱外面套有一半径为 b 的同轴导体圆筒,长度都是 l,其间充满介电常数为 ε 的均匀介质。圆柱带电为 Q,圆筒带电为 $-Q$,略去边缘效应。

(1) 整个介质内的电场总能量 W_e 是多少?

(2) 证明:$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

式中:C 是圆柱和圆筒间的电容。

解:(1)圆柱与圆筒间的场强分布为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 lr}$$

总能量

$$W_e = \iiint_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}\mathrm{d}V = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\int_a^b\left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 lr}\right)^2 2\pi rl\cdot\mathrm{d}r = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a}$$

(2) 上式可写为

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 lr}{\ln(b/a)}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C}$$

式中:$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 lr}{\ln(b/a)}$,即是圆柱和圆筒间的电容。

4-65 圆柱电容器由一长直导线和套在它外面的共轴导体圆筒构成。设导线的半径为 a,圆筒的内半径为 b。证明:这电容器所储藏的能量有一半是在半径 $r=\sqrt{ab}$ 的圆柱体内。

证明:设电容器的长度为 l,圆柱带电为 Q,圆筒带电 $-Q$,则它储存的总能量

$$W_e = \iiint_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}\mathrm{d}V = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\int_a^b\left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 lr}\right)^2 2\pi rl\cdot\mathrm{d}r = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a}$$

在 $r=\sqrt{ab}$ 的圆柱体内储存的能量

$$W'_e = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\int_a^{\sqrt{ab}}\left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 lr}\right)^2 2\pi rl\cdot\mathrm{d}r = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a} = \frac{1}{2}W_e$$

故得证。

4-66 目前在实验室里产生 $E=10^5\mathrm{V/m}$ 的电场和 $B=10^4\mathrm{Gs}$ 的磁场是不难做到的。今在边长为 10cm 的立方体空间里产生上述两种均匀场,问所需的能量各为多少?

解:所需的能量分别为

$$W_e = \frac{1}{2}DE\cdot V = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\cdot V = 4.4\times10^{-5}\mathrm{J}$$

$$W_m = \frac{1}{2}BH \cdot V = \frac{1}{2\mu_0}B^2 \cdot V = 4.0 \times 10^2 \text{J}$$

4-67 利用高磁导率的铁磁体，在实验室里产生 $B = 5000\text{Gs}$ 的磁场并不困难。

(1) 求这磁场的能量密度 w_m；

(2) 要想产生能量密度等于这个值的电场，问电场强度 E 的值应为多少？这在实验室中容易做到吗？

解：(1) 根据 $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$ 得

$$w_m = \frac{0.5^2}{(8\pi \times 10^{-7})} = 1 \times 10^5 \text{J/m}^3$$

(2) 根据 $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = w_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ 得

$$E = \frac{B}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 1.5 \times 10^8 \text{V/m}$$

显然这个场强在实验室中是较难实现的。

4-68 一同轴线由很长的直导线和套在它外面的同轴圆筒构成，导线的半径为 a，圆筒的内半径为 b，外半径为 c，电流 I 沿圆筒流去，沿导线流回；在它们的横截面上电流都是均匀分布的。

(1) 求下列 4 处每米长度内所储磁能 W_m 的表达式：导线内，导线和圆筒之间，圆筒内，圆筒外；

(2) 当 $a = 1.0\text{mm}$，$b = 4.0\text{mm}$，$c = 5.0\text{mm}$，$I = 10\text{A}$ 时，每米长度的同轴线中储存磁能多少？

解：(1) 由场分布的对称性和安培环路定理得磁感应强度 B 的分布

$$B_1 = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2}(r < a);\ B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(a < r < b)$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I(c^2 - r^2)}{2\pi r(c^2 - b^2)}(b < r < c);\ B_4 = 0(r > c)$$

所以

$$W_{m1} = \int_0^a \frac{B_1^2}{2\mu_0} \cdot 2\pi r\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

$$W_{m2} = \int_a^b \frac{B_2^2}{2\mu_0} \cdot 2\pi r\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$W_{m3} = \int_b^c \frac{B_3^2}{2\mu_0} \cdot 2\pi r\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi(c^2 - b^2)^2}\left(4c^4\ln\frac{c}{b} - 3c^4 + 4b^2c^2 - b^4\right)$$

$$W_{m4} = 0$$

(2) 每米长度的同轴线中储存磁能

$$W_m = \sum_{i=1}^{4} W_{mi} = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}\left\{1 + 4\ln\frac{b}{a} + \frac{1}{(c^2 - b^2)^2}\left[4c^4\ln\frac{c}{b} - 3c^4 + 4b^2c^2 - b^4\right]\right\}$$

代入数据计算得 $W_m = 1.7 \times 10^{-5}\text{J/m}$。

4-69 试验算一下，用7.2节所述两种平均磁链法计算例题18的结果，都与磁能法一致。

解：当电流 I 均匀分布在内导体的横截面，内导体($r<R_1$)中的磁场为

$$B=\frac{\mu'\mu_0 r}{2\pi R_1^2}I$$

仅与电流 $i=\frac{r^2}{R_1^2}I$ 相链接；而两导体间($R_1<r<R_2$)的磁场为

$$B=\frac{\mu\mu_0}{2\pi r}I$$

与总电流 I 相链接；再同轴电缆外($r>R_2$)无磁场。所以，不同位置处的磁链分别为

当 $r<R_1$ 时，$\Phi_1=\int_0^r\frac{\mu'\mu_0 r}{2\pi R_1^2}I(l\mathrm{d}r)=l\frac{\mu'\mu_0 r^2 I}{4\pi R_1^2}=l\frac{\mu'\mu_0}{4\pi}i$

当 $R_1<r<R_2$ 时，$\Phi_2=\int_0^{R_1}\frac{\mu'\mu_0 r}{2\pi R_1^2}I(l\mathrm{d}r)+\int_{R_1}^r\frac{\mu\mu_0}{2\pi r}I(l\mathrm{d}r)=l\frac{\mu'\mu_0 I}{4\pi}+l\frac{\mu\mu_0 I}{2\pi}\ln(\frac{r}{R_1})$

(1) 平均磁链法一：

$$\Psi=\frac{1}{I}\int_0^{\Phi_{\max}}i\mathrm{d}\Phi=\frac{1}{I}\int_0^{\Phi_{1\text{-}\max}}\left(\frac{4\pi\Phi}{l\mu'\mu_0}\right)\mathrm{d}\Phi_1+\frac{1}{I}\int_{\Phi_{1\text{-}\max}}^{\Phi_{2\text{-}\max}}I\mathrm{d}\Phi_2$$

$$=\frac{1}{I}\frac{2\pi}{l\mu'\mu_0}\left(l\frac{\mu'\mu_0 I}{4\pi}\right)^2+\frac{1}{I}I\left[l\frac{\mu'\mu_0 I}{4\pi}+l\frac{\mu\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)-l\frac{\mu'\mu_0 I}{4\pi}\right]$$

$$=l\frac{\mu'\mu_0 I}{8\pi}+l\frac{\mu\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

所以，同轴电感单位长度的自感为

$$L=\frac{\Psi}{lI}=\frac{\mu'\mu_0}{8\pi}+\frac{\mu\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

(2) 平均磁链法二：

$$\Psi=\frac{1}{I}\int_0^I\Phi\mathrm{d}i=\frac{1}{I}\int_0^I\left(l\frac{\mu'\mu_0}{4\pi}i\right)\mathrm{d}i+\frac{1}{I}(\Phi_{2\text{-}\max}-\Phi_{1\text{-}\max})$$

$$=\frac{1}{I}\left(l\frac{\mu'\mu_0}{8\pi}I^2\right)+\frac{1}{I}\left[l\frac{\mu'\mu_0 I}{4\pi}+l\frac{\mu\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)-l\frac{\mu'\mu_0 I}{4\pi}\right]$$

$$=l\frac{\mu'\mu_0 I}{8\pi}+l\frac{\mu\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

所以，同轴电感单位长度的自感为

$$L=\frac{\Psi}{lI}=\frac{\mu'\mu_0}{8\pi}+\frac{\mu\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

即，两种平均磁链法计算结果都与磁能法一致。

第5章　电　路

5.1　基本要求与教学难点

1．基本概念的要求

理解电动势的基本概念；理解金属导电的经典物理图像和理论；理解 RL、RC、RLC 电路的暂态过程；了解提高功率因子的意义；三相感应电动机的运行原理、结构和使用。

2．基本方法的要求

(1) 掌握欧姆定律的微分、积分形式，掌握一段含源电路和闭合电路的欧姆定律，会用基尔霍夫定律求解多网孔直流线性电路的方法。

(2) 掌握 3 种理想元件电压与电流的关系，会用复数形式和矢量图法求解简单的交流电，会把瞬时量表达式写成复瞬时值和复有效值的形式。

(3) 理解交流电路中的欧姆定律，基尔霍夫定律，能求解复杂的交流电路。

(4) 理解交流电路瞬时功率、平均功率和功率因子的概念，串联谐振和并联谐振的特点，产生谐振的条件，品质因数；三相交流电的产生、联接以及功率。

3．教学难点

(1) 几种描述方法的等效性与关联。

(2) 相位、复阻抗的理解。

(3) 几种功率的关系。

(4) 谐振条件及谐振的应用。

5.2　典型例题

例 5－1：如图 5－1 所示电路，$U=12\text{V}$，$R_1=30\text{k}\Omega$，$R_2=6.0\text{k}\Omega$，$R_3=100\text{k}\Omega$，$R_4=10\text{k}\Omega$，$R_5=100\text{k}\Omega$，$R_6=1.0\text{k}\Omega$，$R_7=2.0\text{k}\Omega$，求电压 U_{ab}、U_{ac}、U_{ad}。

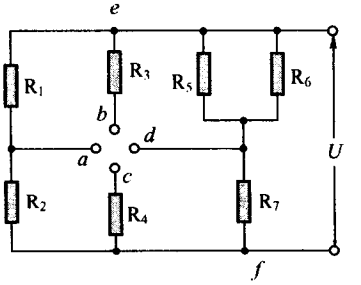


图 5－1　例 5－1

解：从图可以看出：

$$U_{ab}=U_{ae}=-U_{ea}=-U\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

代入数据：$U=12\text{V}$，$R_1=30\text{k}\Omega$，$R_2=6.0\text{k}\Omega$ 计算得 $U_{ab}=-10\text{V}$

$$U_{ac}=U_{af}=U\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

代入数据：$U=12\text{V}, R_1=30\text{k}\Omega, R_2=6.0\text{k}\Omega$ 计算得 $U_{ac}=2.0\text{V}$

$$U_{ad} = U_{ae} + U_{ed} = -U_{ea} + U_{ed} = -U_{ea} + U\frac{R_5R_6}{R_7(R_5+R_6)+R_5R_6}$$

代入数据：$U=12\text{V}, U_{ea}=10\text{V}, R_5=100\text{k}\Omega, R_6=1.0\text{k}\Omega, R_7=2.0\text{k}\Omega$ 得

$$U_{ad} = -6.0\text{V}$$

例 5-2：两线圈之间的互感为 M，电阻分别为 R_1 和 R_2，第一个线圈接在电动势为 ε 的电源上，第二个线圈接在电阻为 R_G 的电流计 G 上，如图 5-2 所示。设开关 K 原先是接通的，第二个线圈内无电流，然后把 K 断开。

(1) 求通过 G 的电量 q；

(2) q 与两线圈的自感有什么关系？

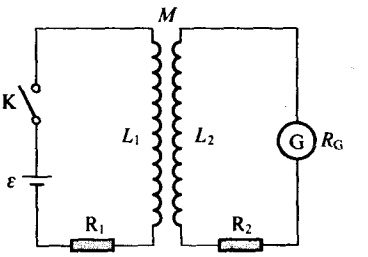


图 5-2 例 5-2

解法一：

(1) K 断开时($t=0^-$)，第二个线圈所在电路满足的微分方程如下：

$$L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + (R_2+R_g)i_2 = 0$$

即

$$L_2\mathrm{d}i_2 + M\mathrm{d}i_1 + (R_2+R_g)i_2\mathrm{d}t = 0$$

因为 $t=0^-$ 时，$i_1=\frac{\varepsilon}{R_1}$，$i_2=0$；$t=\infty$ 时，$i_1=0$，$i_2=0$ 而 $\int_0^\infty i_2\mathrm{d}t = q$；所以对上式两边积分得

$$L_2 i_2\Big|_0^0 + Mi_1\Big|_{\frac{\varepsilon}{R_1}}^0 + (R_2+R_g)q = 0$$

$$q = \frac{M\varepsilon}{(R_2+R_g)R_1}$$

(2) 因式中不含 L，所以与自感无关。

解法二：

K 断开后($t=0^+$)，第二个线圈所在电路满足的微分方程如下：

$$L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + (R_2+R_g)i_2 = 0$$

即

$$L_2\mathrm{d}i_2 + (R_2+R_g)i_2\mathrm{d}t = 0 \qquad ①$$

因为 $t=0^-$ 时 $\psi_{12}=Mi_1=M\frac{\varepsilon}{R_1}$；$t=0^+$ 时 $\psi_{12}=0$ 所以为了保证磁通连续必须使 $t=0^+$ 时，$\psi_2=L_2i_2=M\frac{\varepsilon}{R_1}$；即 $t=0^+$ 时，$i_2=\frac{M\varepsilon}{R_1L_2}$；又 $t=\infty$ 时，$i_2=0$ 且 $\int_0^\infty i_2\mathrm{d}t = q$，所以对式①两边积分得

$$L_2 i_2\Big|_{\frac{M\varepsilon}{R_1L_2}}^0 + (R_2+R_g)q = 0$$

$$q = \frac{M\varepsilon}{(R_2 + R_g)R_1}$$

解法三：

K 未断开时，第一个线圈中的电流为 $i_1 = \frac{\varepsilon}{R_1}$；其在第二个线圈中产生的磁通链 $\psi_{12} = Mi_1 = M\frac{\varepsilon}{R_1}$ 就是第二个线圈在 $t=0$ 时的磁通链，即 $\psi_2|_{t=0} = \psi_{12} = M\frac{\varepsilon}{R_1}$；当 $t=\infty$ 时 $\psi_2|_{t=\infty}=0$ 所以第二个线圈中的感应电量为

$$q = \frac{|\Delta\psi_2|}{R_2 + R_g} = \frac{M\varepsilon}{R_1(R_2 + R_g)}$$

例 5－3： 在图 5－3 中已知 $Z_L : Z_C : R = 2:1:1$，求：

(1) I_1 与 I_2 间的相位差；

(2) U 与 U_C 间的相位差，并用矢量图说明之。

解：以 $\vec{I}_2$ 为参考方向绘 I_2 支路矢量图，如图 5－4(左)。其中因 $Z_C = R$，故 $\varphi = \frac{\pi}{4}$。再以 $\vec{U}$ 为参考方向绘全电路矢量图，如图 5－4(右)，因

$$Z_L : Z_{RC} = Z_L : \sqrt{R^2 + Z_C^2} = 2 : \sqrt{2}$$

所以

$$I_1 : I_2 = \sqrt{2} : 2$$

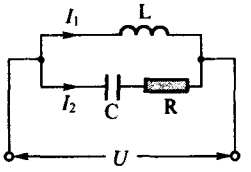


图 5－3　例 5－3

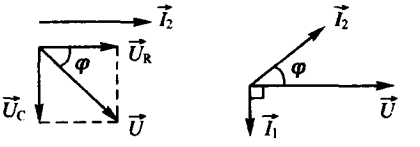


图 5－4　例 5－3 附图

根据图得

(1) $\varphi_{i1} - \varphi_{i2} = -3\pi/4$；(2) $\varphi_u - \varphi_{uc} = \frac{\pi}{4}$

例 5－4：如图 5－5 所示，从 AO 输入的信号中，有直流电压 6V，交流成分 400kHz，现在要信号到达 BO 两端没有直流压降，而交流成分要有 90% 以上，为此在 AB 路上安置一个电容 C，电容 C 在这里起什么作用？它的容量至少该取多大？

解：电容的作用是隔直流、通交流。

对交流，电路为 RC 串联，其中 R 为 R_1、R_2 并联，即

$$R = R_1R_2/(R_1 + R_2)$$

B、O 两端电压

$$U_R = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}} \cdot R$$

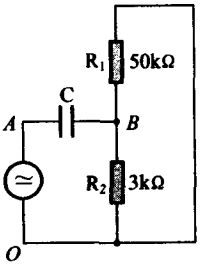


图 5－5　例 5－4

再据题意要求 $U_R/U=0.9$,可得

$$C=\sqrt{\frac{0.81}{0.19\omega^2R^2}}$$

代入 $R=\frac{3\times50}{3+50}\times10^3\Omega=2.83\times10^3\Omega$, $\omega=2\pi\times4\times10^5\text{Hz}$,计算得

$$C\approx2.9\times10^{-10}\text{F}=2.9\times10^{-4}\mu\text{F}$$

即电容至少应在 $2.9\times10^{-4}\mu$F 以上。

例 5-5: 一个 RLC 串联电路如图 5-6 所示,已知 $R=300\Omega$, $L=250\text{mH}$, $C=8.00\mu\text{F}$, A 是交流安培计, V_1、V_2、V_3、V_4 和 V 都是交流伏特计。现在把 a、b 两端分别接到市电(220V、50Hz)电源的两极上。

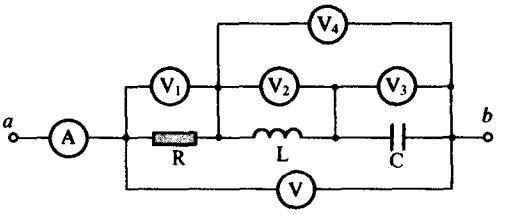


图 5-6 例 5-5

(1) 问 A、V_1、V_2、V_3、V_4 和 V 的读数各多少?

(2) 求 a、b 间消耗的功率。

解:(1) 因串联电路的总阻抗 Z 及其电抗分量 x_L 和 x_C 分别为

$$x_L=\omega L=2\pi\times50\text{Hz}\times0.25\text{H}=78.5\Omega$$

$$x_C=\frac{1}{(\omega C)}=\frac{1}{2\pi\times50\text{Hz}\times8.00\times10^{-6}\text{F}}=398\Omega$$

$$Z=\sqrt{R^2+(x_L-x_C)^2}$$

代入数据: $R=300\Omega$, $x_L=78.5\Omega$, $x_C=398\Omega$ 计算得 $Z=438.3\Omega$。

所以,各个电表的读数分别为

$$I=\frac{U}{Z}=\frac{220\text{V}}{438.2\Omega}=0.502\text{A}$$

$$V_1=IR=0.502\text{A}\times300\Omega=151\text{V}$$

$$V_2=Ix_L=0.502\text{A}\times78.5\Omega=39.4\text{V}$$

$$V_3=Ix_C=0.502\text{A}\times398\Omega=200\text{V}$$

$V_4=V_3-V_2\approx161\text{V}$($\tilde{V}_2$, $\tilde{V}_3$ 相差 180°)

$$V=\sqrt{V_1^2+V_4^2}=\sqrt{(151\text{V})^2+(161\text{V})^2}=220\text{V}$$

(2) a、b 间消耗的功率

$$P=I^2R=(0.502\text{A})^2\times300\Omega=75.6\text{W}$$

例 5-6: 串联谐振电路中 $L=0.10\text{H}$, $C=25.0\text{pF}$, $R=10\Omega$。

(1) 求谐振频率;

(2) 若总电压为 50mV,求谐振时电感元件上的电压。

解:(1) 根据串联谐振条件得谐振频率

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

代入数据:$L = 0.10\text{H}$, $C = 25.0\text{pF}$,计算得 $\nu_0 = 1.0 \times 10^5\text{Hz}$。

(2) 串联谐振时电流

$$I = \frac{U}{R} = \frac{50 \times 10^{-3}\text{V}}{10\Omega} = 5 \times 10^{-3}\text{A}$$

所以,电感元件上的电压

$$U_L = I \cdot \omega_0 L = 5 \times 10^{-3}\text{A} \times (2\pi \times 1.0 \times 10^5\text{Hz}) \times 0.10\text{H} = 3.1 \times 10^2\text{V}$$

例 5-7:有一星形连接的三相对称负载(电动机),每相的电阻为 $R = 6.0\Omega$,电抗为 $X = 8.0\Omega$;电源的线电压为 380V,求:

(1) 线电流;

(2) 负载所消耗的功率;

(3) 如果改接成三角形,求线电流和负载所消耗的功率。

解:(1) 因每相阻抗

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{(6.0\Omega)^2 + (8.0\Omega)^2} = 10\Omega$$

相电压

$$U_\varphi = \frac{U_l}{\sqrt{3}} = 380\text{V}/\sqrt{3} = 220\text{V}$$

所以

$$I_l = I_\varphi = \frac{U_\varphi}{Z} = \frac{220\text{V}}{10\Omega} = 22\text{A}$$

(2) 负载所消耗的功率

$$P = 3I_\varphi^2 R = 3 \times (22\text{A})^2 \times 6.0\Omega = 8.7\text{kW}$$

(3) 若改接成三角形时,线电流和负载所消耗的功率分别为

$$I_l = \sqrt{3}I'_\varphi = \sqrt{3} \times 380\text{V}/10\Omega = 66\text{A}$$

$$P = 3I'^2_\varphi R = 3 \times (38\text{A})^2 \times 6.0\Omega = 26\text{kW}$$

5.3 思考题详解

5-1 有两个相同的电源和两个相同的电阻如图 5-7(a)所示电路联结起来,电路中是否有电流?a、b 两点是否有电压?若将它们按图 5-7(b)所示联结起来,电路中是否有电流?a、b 两点是否有电压?解释所有的结论。

答:因为图 5-7(a)中整个回路的电动势

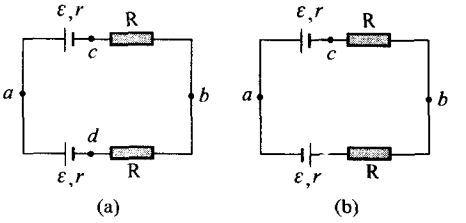


图 5-7　思考题 5-1

$$\oint \vec{K}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_c^a \vec{K}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_a^d \vec{K}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \varepsilon - \varepsilon = 0$$

所以回路电流 $I=0$，$U_{ab}=\varepsilon - I(R+r)=\varepsilon$

图 5-7(b)中

$$I = 2\varepsilon/[2(R+r)] = \varepsilon/(R+r)$$

所以

$$U_{ab} = U_{ac} + U_{cb} = \varepsilon - I(R+r) = \varepsilon - \varepsilon = 0$$

5-2　当一盏 25W、110V 的电灯泡连接在一个电源上时，发出正常明亮的光。而一盏 500W、110V 的电灯泡连接在同一个电源上时，只发出暗淡的光。这可能吗？说明原因。

答：当电源容量较小，内阻 r 较高时，所述情况是可能的。因为在额定电压相同的情况下，500W 灯泡的阻值较 25W 的小很多。所以把 25W 灯泡接至这种电源时，由于灯泡电阻大，电源供给的电流小，路端电压下降不大，基本上接近其额定工作电压，故能正常发光。但把阻值低得多的 500W 灯泡接入时，就会因从电源吸取很大的电流而使路端电压显著下降，这样在它上面消耗的实际功率远小于其额定功率，故灯泡会暗淡无光。此时尽管电源消耗的功率较大，但绝大部分是消耗在电源内部。

5-3　在图 5-8 中 $\varepsilon=6.0\mathrm{V}$，$r=2.0\Omega$，$R=10.0\Omega$。

(1) 当开关 K 闭合时 U_{AB}、U_{AC}和U_{BC}分别是多少？当 K 断开时，又各为多少？

(2) 当 K 闭合时，电源的输出功率为多少？

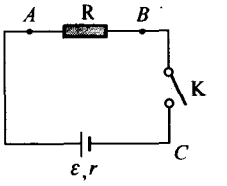


图 5-8　思考题 5-3

答：(1) 当 K 闭合时，$I=\varepsilon/(r+R)=0.50\mathrm{A}$，所以

$$U_{AB} = IR = 5.0\mathrm{V},\ U_{BC} = 0,\ U_{AC} = U_{AB} + 0 = 5.0\mathrm{V}$$

当 K 断开时，$I=0$，所以

$$U_{AB} = 0,\ U_{AC} = \varepsilon - Ir = 6.0\mathrm{V},\ U_{BC} = \varepsilon = 6.0\mathrm{V}$$

(2) 当 K 闭合时，电源的输出功率

$$P_0 = \frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2} = \frac{6^2\times 10}{(10+2)^2} = 2.5\mathrm{W}$$

5-4　如图 5-8 所示，对于给定的 ε 和 r，外阻 R 为多少时，电源输出到其中的功率最大？

答:电源输出的功率为 $P=\dfrac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}$,令

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R}=\frac{\varepsilon^2(R+r)^2-\varepsilon^2 R2(R+r)}{(R+r)^4}=0$$

得 $R=r$ 即当 $R=r$ 时电源输出到其中的功率最大。

5-5 如图 5-9 所示的温差电偶中,$T_2>T_1$,试根据热力学第二定律分析一下,除了导体上产生的焦耳热外,在哪儿吸收热,在哪儿放出热?若 $n_A>n_B$,试分析电偶中温差电流的方向。

答:若电流方向与电动势方向一致,则金属中的自由电子将不断从低电位能处向高电位能处扩散,电子的电位能增加,所增加的电位能由电子从外界获得的热能转换而来,故这时就要吸热;反之,则要放热。

如图 5-9 所示,电偶中温差电流的方向即电路中净电动势的方向。而电路中净电动势等于两个汤姆逊电动势和两个珀耳帖电动势代数之和。从理论上可以证明,由电子数密度不同而引起的珀耳帖电动势为 $\prod_{AB}=\left(\dfrac{KT}{e}\right)\ln\left(\dfrac{n_A}{n_B}\right)$。由 $T_2>T_1$ 知,在两个接触点处的珀耳帖电动势有 $\prod_{AB}(T_2)>\prod_{AB}(T_1)$,因 $\prod_{AB}(T_2)$ 的方向是由 B 指向 A,故净珀耳帖电动势的方向是沿电路的逆时针方向。通常由于温差电偶中珀耳帖电动势比汤姆逊电动势大得多,电流方向主要取决于珀耳帖电动势。所以电偶中温差电流的方向是沿逆时针方向的。

5-6 试论证:如图 5-10 所示,在 A、B 两种金属之间插入任何一种金属 C,只要维持它和 A、B 的连接点在同一温度 T_2,其中的温差电动势与仅由 A、B 两种金属组成的温差电动势一样。

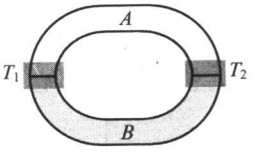


图 5-9 思考题 5-5

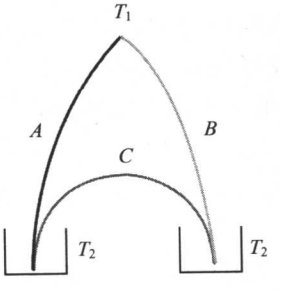


图 5-10 思考题 5-6

证:因在同一温度下有

$$\prod_{AC}(T)+\prod_{CB}(T)=\prod_{AB}(T)$$

而在图 5-10 中温差电动势为

$$\varepsilon_{ABC}=\prod_{AB}(T_1)+\prod_{BC}(T_2)+\prod_{CA}(T_2)+\int_{T_2}^{T_1}\sigma_A(T)\mathrm{d}T+\int_{T_1}^{T_2}\sigma_B(T)\mathrm{d}T$$

将前式代入,则得

$$\varepsilon_{ABC}=\prod_{AB}(T_1)+\prod_{BA}(T_2)+\int_{T_2}^{T_1}\sigma_A(T)\mathrm{d}T+\int_{T_1}^{T_2}\sigma_B(T)\mathrm{d}T=\varepsilon_{AB}$$

5-7 实际的温差电偶测量电路如图 5-11 所示，右边两导线 C 接电势差计。电势差计中的导线和电阻可能由其它金属材料制成。试论证：只要接到电势差计的两根导线相同，并且电势差计中各接触点维持同一温度（例如，室温），则温差电偶整个回路中的温差电动势仅由金属 A、B 和 T、T_0 决定。

证：因电势差计中各接触点维持同一温度，所以，在电势差计中没有汤姆逊电动势，至于图中右边两导线 C 的汤姆逊电动势，则因两端温度相同，导线 C 的材料又一样，故在电路中相互抵消。再考虑到电势差计中，虽有不同金属材料的导线和电阻的连接，但各接触处的珀耳帖电动势之和为零，故图中整个回路的温差电动势为

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ABCA}&=\prod_{AB}(T)+\prod_{BC}(T_0)+\prod_{CA}(T_0)+\int_{T}^{T_0}\sigma_B(T)\mathrm{d}T+\int_{T_0}^{T}\sigma_A(T)\mathrm{d}T\\&=\prod_{AB}(T)+\prod_{BA}(T_0)+\int_{T}^{T_0}\sigma_B(T)\mathrm{d}T+\int_{T_0}^{T}\sigma_A(T)\mathrm{d}T\end{aligned}$$

5-8 试论证图 5-12 所示的温差电堆的电动势是各温差电偶的电动势之和。

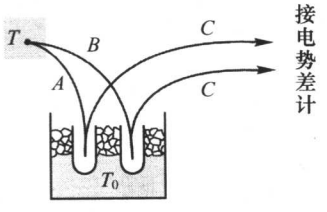


图 5-11 思考题 5-7

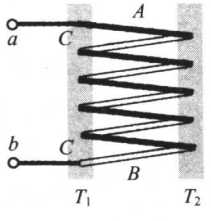


图 5-12 思考题 5-8

证：设温差电偶堆由 n 个温差电偶串联而成，则

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ab}&=\prod_{CA}(T_1)+n\prod_{AB}(T_2)+(n-1)\prod_{BA}(T_1)+\prod_{BC}(T_1)\\&\quad+n\int_{T_1}^{T_2}\sigma_A(T)\mathrm{d}T+n\int_{T_2}^{T_1}\sigma_B(T)\mathrm{d}T\\&=\prod_{CC}(T_1)+n\Big[\prod_{AB}(T_2)+\prod_{BA}(T_1)\\&\quad+\int_{T_1}^{T_2}\sigma_A(T)\mathrm{d}T+\int_{T_2}^{T_1}\sigma_B(T)\mathrm{d}T\Big]\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\prod_{CC}(T)&=\prod_{CA}(T_1)-\prod_{BA}(T_1)+\prod_{BC}(T_1)\\&=\prod_{CA}(T_1)+\prod_{AB}(T_1)+\prod_{BC}(T_1)=0\end{aligned}$$

所以 $\varepsilon_{ab}=n\varepsilon_{AB}$。

5-9 将电压 U 加在一根导线的两端，设导线截面的直径为 d，长度为 L。试分别讨论下列情况对自由电子漂移速率的影响：

（1）U 增至 2 倍；

(2) d 增至 2 倍;

(3) L 增至 2 倍。

答:(1) 当 U 增至 2 倍时,电流强度和电流密度都增至 2 倍,根据 $\vec{j} = -ne\vec{\bar{u}}$,可知漂移速率 $\bar{u}$ 增至 2 倍。

(2) 当 d 增至 2 倍,电阻 R 减少到原来的 1/4,电流强度增至 4 倍,电流密度 j 不变,故漂移速率 $\bar{u}$ 也不变。

(3) 当 L 增至 2 倍,电阻 R 增至 2 倍,因 U 不变,所以电流强度减少到原来的 1/2,电流密度 j 也减少到原来的 1/2,故根据 $\vec{j} = -ne\vec{\bar{u}}$ 得漂移速率 $\bar{u}$ 减少到原来的 1/2。

5-10 在真空中电子运动的轨迹并不总逆着电场线,为什么在金属导体内电流线总与电场线符合?

答:真空中,电子可以自由运动。受电场作用后,电子在逆电场方向有加速度。但其运动轨迹与电子的初状态有关,一般说来电子并不逆着电力线运动。在金属导体内,自由电子在原子实的点阵中做不规则热运动。没有外加电场时,这种热运动并不产生宏观电流。加上外电场时,自由电子全体除做无规则运动外,还逆着电力线方向漂移而形成宏观电流。因电子带负电,所以漂移速度$\vec{\bar{u}}$和电场方向相反,而电流密度 $\vec{j} = -ne\vec{\bar{u}}$ 与电场方向一致,即电流线与电场线重合。

5-11 在两层楼道之间安装一盏电灯,试设计一个线路,使得在楼上和楼下都能开关这盏电灯。[提示:开关是单刀双掷开关]

答:如图 5-13 所示电路,L 为灯,K_1 为楼下的开关,K_2 为楼上的开关,就能满足要求。

5-12 图 5-14 中 R_0 为高电阻元件,R 为可变电阻($R \ll R_0$),试论证,当 R 改变时,BC 间的电压几乎与 R 成正比。

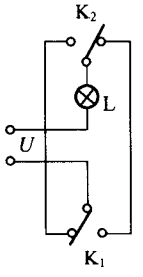


图 5-13 思考题 5-11

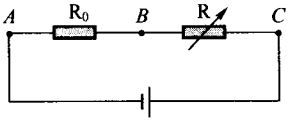


图 5-14 思考题 5-12

答:因为 $R \ll R_0$,所以

$$I = \frac{\varepsilon}{R_0 + R} \approx \frac{\varepsilon}{R_0}; U_{BC} = IR \approx \frac{\varepsilon}{R_0} R$$

即 $U_{BC} \propto R$。

5-13 试论证,在图 5-15 所示的电路中,当数量级为几百欧的负载电阻 R 变化时,通过 R_2 的电流 I 以及负载两端的电压 U_{ab} 几乎不变。

答:如图 5－15 所示,因在 R 的变化范围内 $R \gg R_2$,R 和 R_2 的并联电阻 $R_{ab} = \dfrac{RR_2}{(R+R_2)} \approx R_2$,所以 $I' \approx \dfrac{U}{R_1+R_2}$ 几乎不随 R 改变。但 $I' = I + I''$,由于 $R \gg R_2$,所以 $I'' \ll I$,即 $I' \approx I$,所以 I 不随 R 改变。故在此情况下 $U_{ab} = IR_2$ 也几乎不随 R 改变。

5－14 (1) 如图 5－16 所示中接触电阻不稳定使得 AB 间的电压不稳定。为什么对于一定的电源电动势,在大电流的情况下这种不稳定性更为严重?

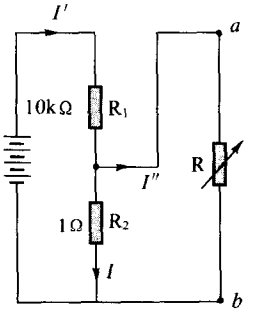


图 5－15 思考题 5－13

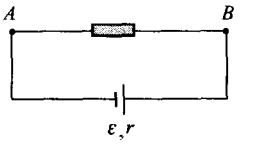


图 5－16 思考题 5－14

(2) 由于电池电阻 r 不稳定,也会使得 AB 间的电压不稳定。如果这时我们并联一个相同的电池,是否能将情况改善? 为什么?

答:(1) 实际包括 3 部分电阻:电源内阻 r,负载电阻 R 和 A、B 处的接触电阻 R'。在小电流时,$R \gg R'$。所以 R' 的不稳定对回路总电阻的影响很小,电流 I 可视为基本不变,从而 $U_{AB} = I(R+R')$ 因 R' 的不稳定产生的起伏不甚严重。但对于一定的电源电动势,大电流的情况下,意味着负载电阻 R 较小,这时回路总电阻也较小,R' 在回路电阻中所占的比例上升,所以 R' 的不稳定对回路电流 I 的稳定性影响较大。根据全电路欧姆定律,A、B 间的电压 $U_{AB} = I(R+R') = \varepsilon - Ir$ 的不稳定性更为严重。

(2) 因为 $U_{AB} = IR = \dfrac{\varepsilon R}{(R+r)}$,可见 r 的变化将引起 U_{AB} 不稳定。并联相同电池后,总内阻减小。任一电池内阻的波动对回路电流影响将减小。所以电池端电压由于内阻波动引起的不稳将有所改善。

5－15 实验室或仪器中常用可变电阻作为调节电阻串在电路中构成制流电路,用以调节电路的电流。有时用一个可变电阻调节不便,需用两个阻值不同的可变电阻,一个进行粗调(改变电流大),一个进行细调(改变电流小),这两个变阻器可以如图 5－17(a)串联起来或如图 5－17(b)并联起来,再串入电路。已知 R_1 较大,R_2 较小,问在这两种联接中哪一个电阻是粗调,哪一个是细调。

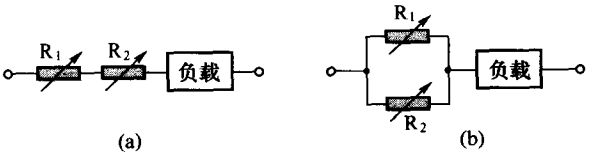


图 5－17 思考题 5－15

答:图 5－17(a)中,改变 R_1,电路总电阻变化大,对负载电流影响也大。所以 R_1 是粗调,R_2 是细调。图 5－17(b)中,R_1 与 R_2 并联,R_2 中电流大于 R_1 中电流,改变 R_2 对总电流(即负载电流)影响大。所以 R_2 是粗调,R_1 是细调。

5－16 为了测量电路两点之间的电压,必须把伏特计并联在电路上所要测量的两点,如图 5－18 所示。伏特计有内阻,问:

(1) 将伏特计并入电路后,是否会改变原来电路中的电流和电压分配?

(2) 这样读出的电压值是不是原来要测量的值?

(3) 在什么条件下测量较为准确?

答:(1) R_2 的两端接上伏特计后,由于伏特计有内阻 R_V,A、B 间电阻变成 $R_2R_V/(R_2+R_V)$。电路总电阻由 R_1+R_2 变为 $R_1+\dfrac{R_2R_V}{R_2+R_V}$,所以电流和电压的分配将改变。

(2) 读得的电压值较原来要测量的值为低。

(3) 当 $R_V \gg R_2$ 时,$R_2R_V/(R_2+R_V)\approx R_2$,伏特计并入影响可忽略,测量较为准确。

5－17 为了测量电路中的电流,必须把电路断开,将安培计接入,如图 5－19 所示。安培计有一定的内阻,问:

(1) 将安培计接入电路后,是否会改变原来电路中的电流?

(2) 这样读出的电流值是不是原来要测量的值?

(3) 在什么条件下测量较为准确?

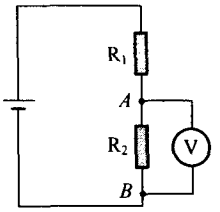


图 5－18 思考题 5－16

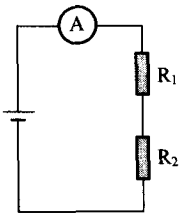


图 5－19 思考题 5－17

答:(1)因为安培计有内阻 R_A,接入电路后,相当电路中串入电阻 R_A,必然会改变电路中电流。

(2) 读出值较要测量的值略低。

(3) $R_A \ll R_1+R_2$ 时,串入安培计对电路电流影响可以忽略,测量较为准确。

5－18 考虑一个具体的电路,如电桥电路,验算 n 个节点列出的基尔霍夫第一方程组中只有 $n-1$ 个是独立的。

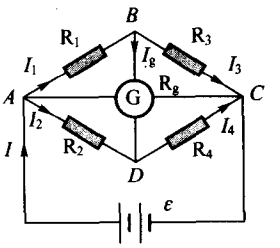


图 5－20 思考题 5－18

答:如图 5－20 所示的电桥电路,共有节点 4 个。对应的基尔霍夫第一方程组如下:

节点 A:$I_1+I_2-I=0$;节点 B:$I_g+I_3-I_1=0$;节点 C:$I-I_3-I_4=0$;节点 D:$I_4-I_2-I_g=0$。上述 4 个方程中只有 3 个是独立的,因其中的任一个方程都可由其余 3 个方程导出来。例如,前 3 个方程相加,即得第 4 个方程。

5－19 已知复杂电路中一段电路的几种情况如图 5－21 所示，分别写出这段电路的 $U_{AB}=U_A-U_B$。

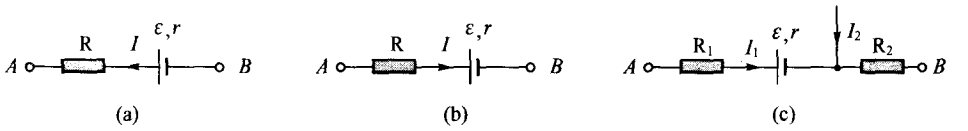


图 5－21 思考题 5－19

答：按图示的电流方向及电池的连接情况，这几段电路的电势差 U_{AB} 分别为

(1) $U_{AB}=-I(R+r)+\varepsilon$

(2) $U_{AB}=I(R+r)+\varepsilon$

(3) $U_{AB}=I_1(R_1+r)+\varepsilon+(I_1+I_2)R_2$

5－20 理想的电压源内阻是多大？理想的电流源内阻是多大？理想电压源和理想的电流源可以等效吗？

答：理想的电压源的内阻是无穷大，理想的电流源的内阻是零。二者不可以等效。

5－21 写出图 5－22 所示的 LR 电路在接通电源和短路两种情况下电感以及电阻上的电势差 u_L 和 u_R 的表达式，并定性地绘出 u_L 和 u_R 的时间变化曲线。

答：接通电源时

$$u_L=L\frac{di}{dt}=L\frac{d}{dt}\left[\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})\right]=\varepsilon e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$u_R=iR=\varepsilon(1-e^{-\frac{R}{L}t})$$

短路时

$$u_L=L\frac{di}{dt}=L\frac{d}{dt}\left[\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t}\right]=-\varepsilon e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$u_R=iR=\varepsilon e^{-\frac{R}{L}t}$$

u_L 和 u_R 的时间变化曲线如图 5－23 所示。

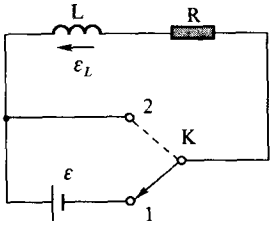


图 5－22 思考题 5－21

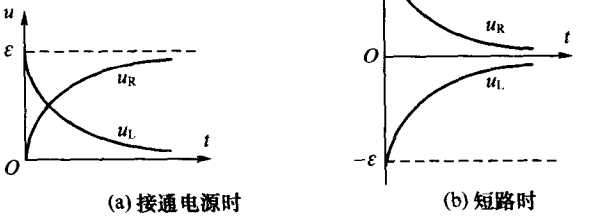


图 5－23 u_L 和 u_R 的时间变化曲线

5－22 写出图 5－24 所示的 RC 电路在充电和放电两种情形下电路中的电流 i、电容以及电阻上的电势差 u_C 和 u_R 的表达式，并定性地绘出它们的时间变化曲线。

答：充电

$$i_{充} = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$u_C = \frac{q}{C} = \varepsilon(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$u_R = iR = R\frac{dq}{dt} = \varepsilon e^{-\frac{t}{RC}}$$

放电

$$i_{放} = -\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$u_C = \frac{q}{C} = \varepsilon e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$u_R = iR = R\frac{dq}{dt} = -\varepsilon e^{-\frac{t}{RC}}$$

它们的时间变化曲线如图 5－25 所示。

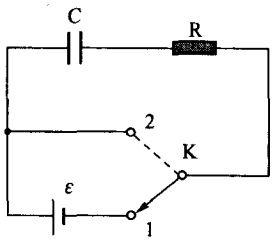


图 5－24　思考题 5－22

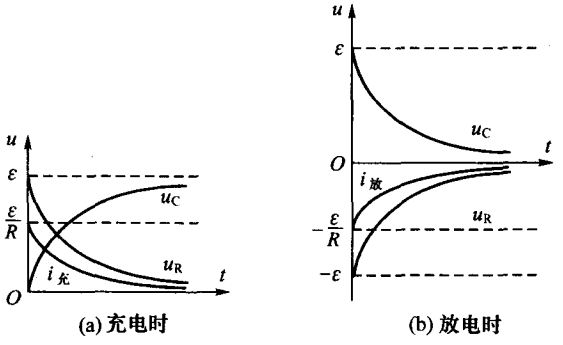


图 5－25　u_C 和 u_R 的时间变化曲线

5－23　如图 5－26 所示电路中 3 个电阻相等，令 i_1、i_2 和 i_3 分别为 R_1、R_2、R_3 中的电流，u_1、u_2、u_3 与 u_C 为该 3 个电阻与电容上的电势差。

(1) 试定性地绘出开关 K 接通后上列各量随时间变化的曲线；

(2) K 接通较长时间后把它断开，试定性地绘出开关断开后，上列各量随时间变化的曲线。

答：设电源电动势为 E，$R_1 = R_2 = R_3 = R$

(1) 开关 K 接通后：

$t = 0$ 时，电容可视为短路，故

$$i_1 = 2i_2 = 2i_3 = \frac{E}{R + R/2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{E}{R}$$

$$u_C = 0,\ u_1 = i_1R = \frac{2}{3}E;\ u_2 = u_3 = i_2R = \frac{E}{3}$$

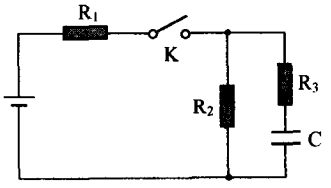


图 5－26　思考题 5－23

$t = \infty$ 时，稳态建立，电容 C 可视为开路，故

$$i_3 = 0;\ i_1 = i_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{E}{2R}$$

$$u_3 = i_3R_3 = 0,\ u_C = u_2 = u_1 = \frac{E}{2}$$

根据上列电流、电压的始末态值并考虑到它们按指数变化的规律，可定性绘出它们随时间变化的曲线图，如图 5－27 所示。

(2) 开关 K 断开后，电容器放电。由于电容器两端的电压不能突变，故

$t=0$ 时，$u_C=\frac{E}{2}$

$$i_1=0;\ i_2=i_3=\frac{u_C}{2R}=\frac{E}{4R}$$

$$u_1=0;\ u_2=u_3=\frac{E}{4}$$

$t=\infty$ 时，电容器放电结束

$$i_1=i_2=i_3=0$$

$$u_1=u_2=u_3=u_C=0$$

根据电流、电压的始末态值并考虑到它们按指数变化的规律，可定性绘出它们随时间变化的曲线图，如图 5－28 所示。

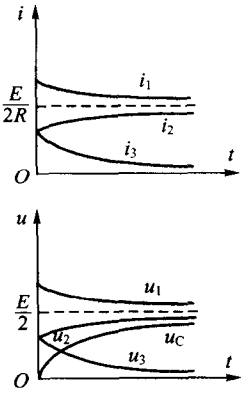


图 5－27　K 接通后电流和电压随时间变化的曲线

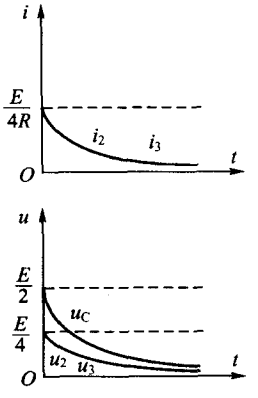


图 5－28　K 断开后电流和电压随时间变化的曲线

5－24　我们知道，两个理想电容器 C_1、C_2 串联起来接在电源上，电压分配 $U_1:U_2=C_2:C_1$。但实际电容都有一定的漏电阻，漏阻相当于并联在理想电容器 C_1、C_2 上的电阻 R_1、R_2(见图 5－29)，漏阻趋于无穷时，电容器趋于理想电容器。将两个实际电容接在电源上，根据恒定条件，电压分配应为 $U_1:U_2=R_1:R_2$。设 $C_1:C_2=R_1:R_2=1:2$。并设 R_1 和 R_2 按此比例趋于无穷。问这时电压分配 $U_1:U_2=$？一种说法认为这时两电容都是理想的，故 $U_1:U_2=C_2:C_1=2:1$；另一种说法认为电压的分配只与 R_1 和 R_2 的比值有关，而这比值未变，故当 $R_1\to\infty$，$R_2\to\infty$ 时，电压分配仍为 $U_1:U_2=R_1:R_2=1:2$。两种说法有矛盾，问题出在哪里？如果实际去测量的话，你将看到什么结果？

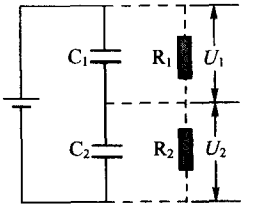


图 5－29　思考题 5－24

答：后一种说法正确。对于理想电容开始不带电，当它接上电源后，由于电容器各极板的电量相等，故电压分配为 $U_1:U_2=C_2:$

C_1;对于实际电容,稳态条件下的电压分配为 $U_1:U_2=R_1:R_2$,此时 C_1 和 C_2 带上了不同的电量,对于理想电源(内阻 $r=0$),在 R_1、R_2 按比例增至无穷过程中,C_1、C_2 上的电量不发生重新分配,故电压分配仍为 $U_1:U_2=R_1:R_2=1:2$。

5-25 对于非简谐交流电,能否按§6(交流电路中的元件)所讲的方式引入阻抗的概念?

答:对于非简谐交流电,其电压和电流都可视为一系列不同频率、不同振幅的简谐分量的叠加,由于阻抗与频率有关,电路对各简谐分量的作用并不相同。虽然电压和电流的每一简谐分量之间都存在简单的比例关系(其峰值之比即为相应谐波的阻抗),但总的电压和电流之间却不存在这样的比例关系,因而不能按本节的方法引入电路阻抗的概念。

5-26 如图 5-30 所示,信号源为锯齿波发生器,电路中仅有电阻元件。已知电压峰值为 100V,电阻值为 200Ω,试画出电路中电流的波形图及其峰值。假如元件为电容元件或电感元件,能简单地定出电流的波形图吗?试考虑问题的困难在哪里?

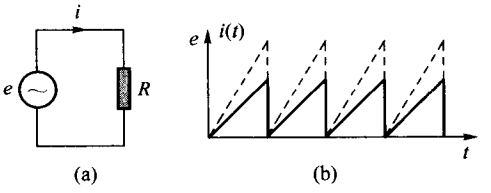


图 5-30 思考题 5-26

答:根据题意 $e(t)$ 是非简谐交流电,由上题可将它展开为简谐分量的叠加,即 $e(t)=\sum e_K(t)$,其中 $e_K(t)=\varepsilon_{0K}\cos(\omega_K t+\varphi_{eK})$。当电路中只有电阻时,对每一简谐分量,阻抗 R 和频率无关,并且电压和电流没有位相差。所以总电流波形和电压波形完全相同,如图 5-30(b)虚线所示。显然,电流峰值为 $I_0=\dfrac{\varepsilon_0}{R}=0.5\text{A}$。

当电路中存在电感或电容时,对每一谐波分量有 $I_{0K}=\dfrac{\varepsilon_{0K}}{Z_K}$,$\varphi_{eK}-\varphi_{iK}=\Delta\varphi_K$,但因 Z_K 和 $\Delta\varphi_K$ 都和频率有关,于是电流各简谐分量间振幅之比 $\dfrac{I_{0K}}{I_{0j}}=\dfrac{\varepsilon_{0K}}{\varepsilon_{0j}}\cdot\dfrac{Z_j}{Z_K}\neq\dfrac{\varepsilon_{0K}}{\varepsilon_{0j}}$,并且位相差 $\Delta\varphi_K\neq\Delta\varphi_j$,于是,总电流 $i(t)=\sum i_K(t)=\sum\dfrac{\varepsilon_{0K}}{Z_K}\cos(\omega_K t+\varphi_{eK}-\Delta\varphi_K)\neq C_e(t)$,即电流和电压之间已没有简单的比例关系,因此不再能简单地由电压波形确定电流波形了。

5-27 电容和电感在直流电路中起什么作用?它们的阻抗分别是多少?

答:对直流电,$\omega=0$,$Z_C=\dfrac{1}{\omega_C}=\infty$,$Z_L=\omega L=0$,因此,直流电路中电容相当于断路,电感相当于短路。在现代技术中常使用电容和电感储存电磁能。当电容充电时,电源克服静电力做功并将电能储存在电场内;电感充磁时,电源克服感应电动势做功并将磁能储存在磁场中。电容特别是电感可达到很高的储能密度,若使它在很短的时间内释放出来,则能得到极大的瞬时功率,这在激光和热核反应中都得到重要的应用。

5-28 做出图 5-31 所示各电路的阻抗随频率变化的曲线(频率响应曲线),并定性地分析一下,在高频($\omega\to\infty$)和低频($\omega\to0$)的极限下频率响应的特点。

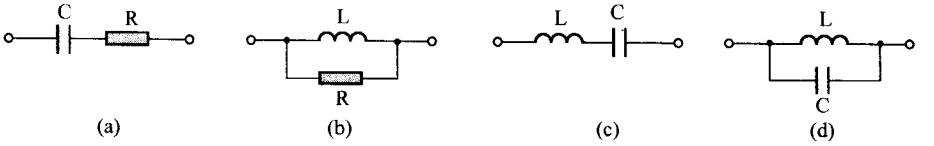


图 5－31　思考题 5－28

答：(a) 由 $Z=\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$ 当 $\omega\to\infty, Z=R$；当 $\omega\to 0, Z\to\infty$；$Z-\omega$ 曲线如图 5－32(a)所示。

(b) 由 $Z=\left[\frac{1}{R^2}+\frac{1}{(\omega L)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$ 当 $\omega\to\infty, Z=R$；当 $\omega\to 0, Z\to 0$；$Z-\omega$ 曲线如图 5－32(b)所示。

(c) 由 $Z=Z_L-Z_C=\left|\omega L-\frac{1}{\omega C}\right|$ 当 $\omega\to\infty, Z\to\infty$；当 $\omega\to 0, Z\to\infty$；当 $\omega L=\frac{1}{\omega C}$，$\omega=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ 时，$Z=0$；$Z-\omega$ 曲线如图 5－32(c)所示。

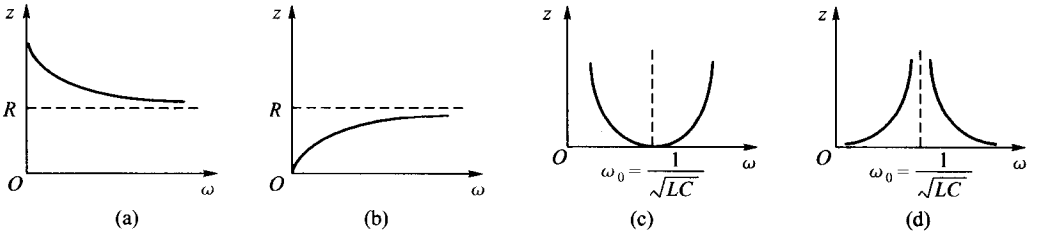


图 5－32　各电路的阻抗随频率变化的曲线图

(d) 由 $Z=\left|\left[\frac{1}{\omega L}-\omega C\right]^{-1}\right|$ 当 $\omega\to\infty, Z\to 0$；当 $\omega\to 0, Z\to 0$；当 $\omega L=\frac{1}{\omega C}$，即 $\omega=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ 时，$Z\to\infty$；$Z-\omega$ 曲线如图 5－32(d)所示。图 5－32(c)、图 5－32(d)中的 ω_0 称为电路的谐振频率。

5－29　如图 5－33 所示电路中，当 R_1 或 R_2 改变时，两分支中的电流之间的相位差是否改变？

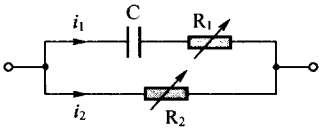


图 5－33　思考题 5－29

答：并联电路端电压是 u，I_2 支路，i_2 和 u 同位相；I_1 支路，是 RC 串联，电流和电压位相差 $\varphi_u-\varphi_{i1}=\arctan\frac{-1}{\omega cR_1}$，也就是 i_1 和 i_2 的位相差。R_2 改变时，相差不受影响，而 R_1 的改变则使位相差改变。

5－30　如图 5－34 所示的电路中 ao 和 oc 间的电阻 R 相等，ab 间的电阻 R' 可调，bc 间是一个电容(这电路叫做 RC 相移电桥)。试用矢量图证明：当 R' 的阻值由 0 变到∞的过程中，ao 间的电压 U_1 和 bo 间的电压 U_2 总是相等的，但它们之间的相位差由 0 变到 π。

答：取 $\dot{U}_{ac}$ 作参考方向。对 I_1 支路，$\dot{I}_1$ 和 $\dot{U}_{ac}$ 位相相同，$\dot{U}_{ao}=\dot{I}_1R=\dot{U}_1=\frac{1}{2}\dot{U}_{ac}$ 对

I_2 支路，是 R′C 串联，$\dot{I}_2$ 比 $\dot{U}_{ac}$ 超前位相 α。$\dot{U}_{ab}=\dot{U}_{R'}=\dot{I}_1R'$ 和 $\dot{I}_2$ 位相相同，$\dot{U}_c=\left(\frac{-j}{\omega c}\right)\dot{I}_2$ 比 $\dot{I}_2$ 落后 $\frac{\pi}{2}$，但 $U_{ac}=\sqrt{U_{R'}^2+U_c^2}$，故 $\dot{U}_{R'}$、$\dot{U}_c$ 和 $\dot{U}_{ac}$ 构成一直角三角形 abc 如图 5－35 所示。由图可见，bo 间电压 $\dot{U}_{bo}=\dot{U}_2$ 在数值上和 $\dot{U}_1$ 相同，并和 $\dot{U}_1$ 有一位相差 $\varphi=\pi-2\alpha$。注意到 $\tan\alpha=\frac{U_c}{U_{R'}}=\frac{1}{\omega cR'}$ 所以 $\varphi=\pi-2\arctan\frac{1}{\omega cR'}$。

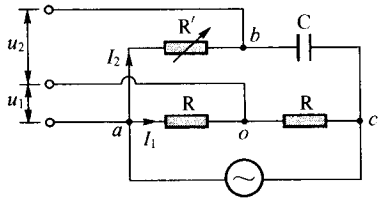


图 5－34　思考题 5－30

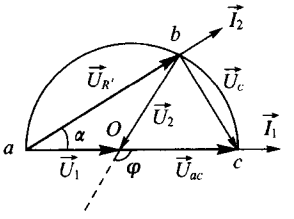


图 5－35　思考题 5－30 矢量图

调节 R' 时，对 I_1 支路无影响，$\dot{U}_1$ 不改变，O 点不动，但对 I_2 支路有影响。R' 增加时，α 减小，b 点右移；R' 减小时，α 增大，b 点左移；但 abc 始终构成直角三角形，b 点在半圆弧上运动，$ao=bo$，因而 $U_1=U_2$ 恒成立，但 $\dot{U}_1$ 和 $\dot{U}_2$ 间位相差则不断变化。显然，当 $R'=0$ 时 $\varphi=0$；$R'\to\infty$ 时 $\varphi=\pi$，即位相差在 $0\to\pi$ 间变化。

5－31　(1) 试根据简谐量与矢量的对应关系，分别确定图 5－36 中两种情况下 3 个同频简谐电压 $u_1(t)$、$u_2(t)$、$u_3(t)$ 之间的位相差，并写出相应的简谐表示式(各矢量的长度都等于 U_0)。

(2) 试根据同频简谐量的叠加与矢量合成的对应关系，分别求出上述两种情况下的合成电压 $u(t)=u_1(t)+u_2(t)+u_3(t)$。

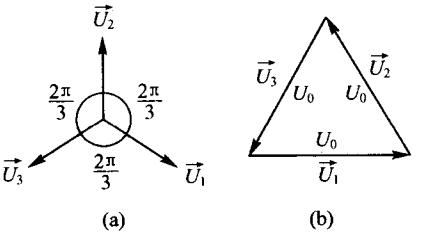


图 5－36　思考题 5－31

答：(1) 对图 5－36(a)，设取 $\varphi_{u1}=0$，则 $u_1=U_0\cos\omega t$；$u_2=U_0\cos(\omega t+2\pi/3)$；$u_3=U_0\cos(\omega t+4\pi/3)$

于是

$$\varphi_{u2}-\varphi_{u1}=\varphi_{u3}-\varphi_{u2}=\frac{2}{3}\pi$$

$$\varphi_{u1}-\varphi_{u3}=-\frac{4}{3}\pi \text{ 或 } \varphi_{u1}-\varphi_{u3}=2\pi-\frac{4}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi$$

即相邻两电压间的位相差是相同的。

对图 5－36(b)，仍取 $\varphi_{u1}=0$，并将 $\dot{U}_2$、$\dot{U}_3$ 起点移到 $\dot{U}_1$ 起点后立刻得出和图 5－36(a)完全相同的结果。

(2) 对图 5－36 中的(a)、(b)都有 $\dot{U}_1+\dot{U}_2+\dot{U}_3=0$ 所以 $u=u_1+u_2+u_3=0$。

5－32　如图 5－37，在无线电电路中为了消除前后两级Ⅰ、Ⅱ之间的互相关联，往往加 RC 组合来起“退耦”作用。试分析，后一级Ⅱ的电压波动或电流波动对前一级Ⅰ的影响将因 RC 组合的作用而大大削弱。

答:在无线电电路中,各级电路常共用一个电源,电源具有一定的内阻,因此后级电压波动或电流波动都会在电源电压上叠加一个交流信号,它通过电源回路和前级耦合,造成不良影响。为了减小这种影响,常使用图 5-37 中的 RC 退耦电路。这时,后级Ⅱ的交流波动信号将在 RC 分压后再加在前级Ⅰ的输入端上。因电路输入阻抗常比 RC 电路容抗$\frac{1}{\omega C}$大的多,分压比大致为 $U_R : U_C = R : (1/\omega C)$,当频率足够高时,后级Ⅱ对前级Ⅰ的影响将大大削弱。

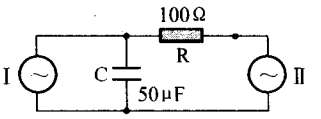


图 5-37 思考题 5-32

5-33 复阻抗 $\tilde{Z}$(或复导纳 $\tilde{Y}$)是否对应一个简谐量?

答:复阻抗 $\tilde{Z}$(或复导纳 $\tilde{Y}$)都和时间无关,对给定频率的简谐交流电 $\tilde{Z}$(或 $\tilde{Y}$)是一个复常数,因此不是一个简谐量。

5-34 两个同频简谐量的乘积(例如功率)是否对应于两个复数的乘积?

答:同频简谐量和复数的对应关系只在线性运算中保持,对于像乘积这类非线性运算,并不存在对应关系。例如,功率 $P = i(t)u(t)$;设

$$i(t) = I_0\cos\omega t;\ u(t) = U_0\cos(\omega t + \varphi)$$

则

$$P(t) = U_0 I_0\cos\omega t\cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}U_0 I_0\cos\varphi + \frac{1}{2}U_0 I_0\cos(2\omega t + \varphi)$$

但

$$\tilde{I}\tilde{U} = I_0 e^{j\omega t} \cdot U_0 e^{j(\omega t+\varphi)} = I_0 U_0 e^{j(2\omega t+\varphi)}$$

它的实数部分为 $I_0 U_0\cos(2\omega t + \varphi)$,和简谐量的直接运算结果并不一致。

5-35 判断一下如图 5-38 所示各交流电桥中。哪些是根本不能平衡的?

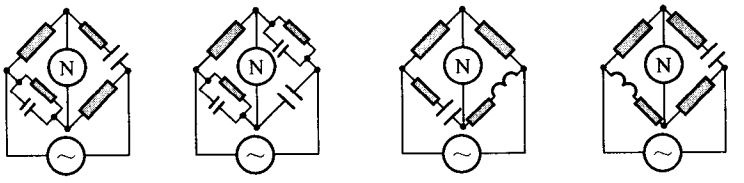


图 5-38 思考题 5-35

答:因交流电桥平衡的必要条件之一是两相对臂复阻抗的幅角和相等。据此,可以判定图 5-38 中(a)、(c)所示的电桥,根本不能平衡。因对图 5-38(a),有两个相对臂为纯电阻,故幅角和为零,而另一相对臂,为容性阻抗,幅角和只能为负值,故无论选哪两个作可调参数,均不能满足上述幅角和相等的原则。对图 5-38(c),有类似分析。

5-36 日光灯中镇流器起什么作用?在一个电感性的电路中串联或并联一个电容器,都可提高其功率因数。为什么在日光灯电路中电容器必须并联而不能串联?

答:镇流器的作用有二:一是由于它的电感很大,配合启动器,在接通电源时,可产生一个日光灯管放电所需的高压。其二是当日光灯管放电后,阻值突然下降时,镇流器还起着限流和降压的作用。

对一电感性负载,虽然用串电容的办法也可提高电路的功率因数,但这种办法要改变

原有负载上的工作电压，尤其是当功率因数提高至近于 1 时，整个电路接近串联谐振状态，总阻抗很小，整个电路要从电源吸取很大电流，对电源和用电器（比如日光灯）都有被烧坏的危险。而并联电容，保证了日光灯工作电压不变。当 $\cos\varphi=1$ 时，整个电路处于并联谐振状态，阻抗最大，电源供给的电流最小，减少了沿线的电能损耗，真正达到了改变功率因数的目的。

5－37 能够使某一频带内的信号顺利通过而将这频带以外的信号阻挡住的电路，叫做带通滤波电路；能够使某一频带内的信号阻挡住而使这频带以外的信号顺利通过的电路，叫做带阻滤波电路。试定性分析图 5－39 中的两个滤波电路，哪一个属于带通，哪一个属于带阻？

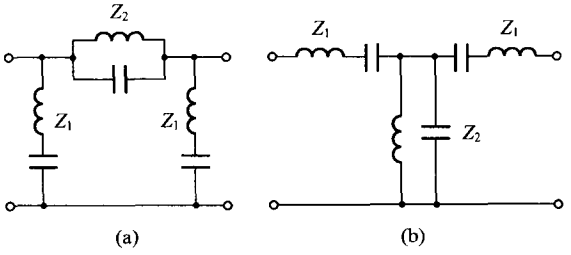


图 5－39 思考题 5－37

答：图 5－39(a)所示的电路为带阻。因为只要参数选的适当，能使串联阻抗 Z_1 和 Z_2 具有同样的谐振频率 f_0；对此频率，Z_2 的阻抗等于无限大，Z_1 的阻抗为零。此时，信号完全不能通过滤波电路。若 $f<f_0$，则 Z_1 为容性电抗、Z_2 为感性电抗，所以随着 f 的继续下降，它相当于一低通滤波器；若 $f>f_0$，Z_1 为感性电抗、Z_2 为容性电抗，故随着 f 的增高，Z_1 亦增大，Z_2 亦减小，整个电路的阻塞能力亦下降，它相当于一高通滤波器。所以，该电路只是对谐振频率 f_0 附近的频带才有阻塞作用，而对这一频带以外的高、低频信号，均能让其顺利通过。故属带阻电路。

图 5－39(b)属于带通电路。因在谐振频率时，Z_1 为零，Z_2 为无限大。信号能完全顺利传通。与前面的分析类似，随着 f 对 f_0 的偏离程度的增加，阻抗 Z_1 都要增大，阻抗 Z_2 要变小，整个电路的传通能力下降，阻塞能力增强，故为带通滤波电路。

5－38 按照变压器的变化公式，只要 $N_2=\dfrac{N_1}{2}$，就可把 220V 的交流电压变为 110V，同时把电流增大 1 倍。那么匝数很少（比如 $N_2=2$ 匝，$N_1=1$ 匝）为什么不行呢？

答：主要原因如下：从铁芯内磁势平衡的角度考虑，对于实际的变压器，为了在铁芯中激励一定的磁通量 $\tilde{\Phi}$，需要一定的磁动势，即要一定的安匝数 I_0N_1。其值应等于磁通 $\tilde{\Phi}$ 与磁阻的乘积。但是随着变压器原、副绕组匝数 N_1 和 N_2 按比例地减小，按原绕组电压平衡关系 $\tilde{U}_1\approx-\tilde{\varepsilon}_1=\mathrm{j}\omega N_1\tilde{\Phi}$（忽略原绕组电阻压降及漏磁影响）知，对于输入电压 U_1 不变的情况下，磁通量 $\tilde{\Phi}$ 必然增加，从而要求磁动势 I_0N_1 比 N_1 未减少时要大（若铁芯尺寸不变的话），这就使得激磁电流 I_0 随绕组匝数的减小迅速增加。若匝数过少，比如只有一、两匝，则激磁电流 I_0 将达到很高的值。这样，一方面将在绕组中产生很大的焦耳损耗，使变压器温升超过允许值，甚至烧坏变压器；另一方面，由于 I_0 很大，即使副绕组开路，原绕组的铜电阻上也有很大的电压降，此时感应电动势 E_1 已不再近似等于 U_1。所

以尽管副绕组中 $E_2=E_1/2$，但已不再是 110V 了。在此情况下，变压器的变压比（即 U_1/U_2）不再等于匝数比了。

故为了把激磁电流限制在一定的范围内（一般为额定电流的 5% ～10%），设计变压器时，要求每伏电压对应一定的匝数。

5－39 变压器中原线圈中的电流 $\tilde{I}_1$（包括励磁电流）和副线圈中的电流 $\tilde{I}_2$ 相位差在什么范围内？若如图 5－40 所示将两线圈绕在同一磁棒上，它们之间有吸引力还是排斥力？

答：按 $\tilde{U}_1 \approx -\tilde{\varepsilon}_1 = j\omega N_1 \tilde{\Phi}$ 知，当 $\tilde{U}_1$ 恒定时，变压器铁芯中的磁通量 $\tilde{\Phi}$ 基本上不随负载变化。所以激励这一磁通需要的磁动势也基本不变。空载时（即副绕组开路时），这一磁动势就是原绕组的安匝数 $\tilde{I}_0 N_1$。负载运行时，这一磁动势是由原、副绕组的安匝数 $\tilde{I}_1 N_1$ 和 $\tilde{I}_2 N_2$ 共同作用的结果，即 $\tilde{\varepsilon}_m = \tilde{I}_1 N_1 + \tilde{I}_2 N_2$。其值应与空载时的磁动势相等。故 $\tilde{I}_1 N_1 + \tilde{I}_2 N_2 = \tilde{I}_0 N_1$。在满载运行时，$I_0$ 比 I_1 和 $I_2\left(\frac{N_2}{N_1}\right)$ 小很多，可以忽略不计，则 $\tilde{I}_1$ 和 $\tilde{I}_2$ 的位相差为 180°。轻负载运行时，两者的位相差要比 180°小，但又由于在通常情况下 $\tilde{I}_1 N_1$ 对 $\tilde{\Phi}$ 起助磁作用，$\tilde{I}_2 N_2$ 起去磁作用，所以两者的位相差必须大于 90°，即位相差变化的范围为 90°～180°。

对于图示的情况，考虑原、副绕组的相互作用力时，可把铁芯总磁通 $\tilde{\Phi}$ 视为与 $\tilde{I}_1$、$\tilde{I}_2$ 对应的磁通 $\tilde{\Phi}_1$ 和 $\tilde{\Phi}_2$ 的矢量和，两绕组的相互作用即为 $\tilde{\Phi}_1$ 和 $\tilde{\Phi}_2$ 间的相互作用。由于 $\tilde{\Phi}_1$、$\tilde{\Phi}_2$ 分别与 $\tilde{I}_1$、$\tilde{I}_2$ 同位相，所以 $\tilde{\Phi}_1$ 和 $\tilde{\Phi}_2$ 之间的位相差的变化也在 90°～180°范围内，故这两个交变磁通相互作用力在一个周期内的平均效应是使两绕组相互排斥。

5－40 在竖立的铁芯上绕有线圈，在它上面套一个铝环，如图 5－41 所示。当把线圈两端接到适当的交流电源上时，铝圈便立刻跳将起来。试说明这一现象。

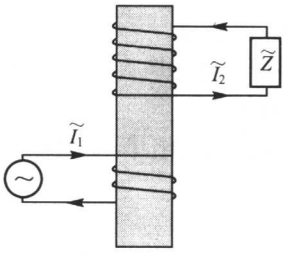


图 5－40 思考题 5－39

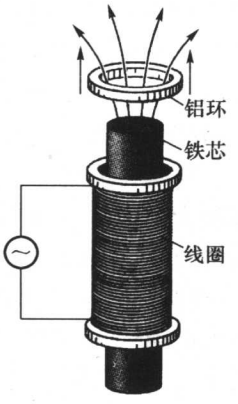


图 5－41 思考题 5－40

答：由于线圈和铝环之间，通过铁芯存在着磁耦合。若把线圈、铁芯和铝环三者视为一变压器，则铝环就相当于短路的单匝副线圈，当铁芯线圈接至适当的交流电源上时，原、副绕组中便有电流 $\tilde{I}_1$ 和 $\tilde{I}_2$ 流过，由上题知，它们之间的位相差处于 90°～180°的范围内，相互间产生一排斥力，故铝环立刻跳起。

5－41 书中已有详细解答，从略。

5－42 如果三相对称负载采用星形接法，当线电压为 220V 时，相电压为多少？当

相电压为 380V 时，线电压为多少？

答：因负载对称，负载中点与电源中点等电位，故负载相电压即为电源相电压，按 $U_\varphi = U_l/\sqrt{3}$ 知，当 $U_l = 220\text{V}$ 时，$U_\varphi = 127\text{V}$；当 $U_\varphi = 380\text{V}$ 时，$U_l = \sqrt{3}U_\varphi = 660\text{V}$。

5－43 如果三相线电压为 380V，对称负载采用星形接法，未接中线，此时若某一相负载突然断了，各相电压变为多少？

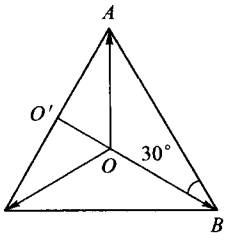


图 5－42 思考题 5－43

答：假设 B 相负载突然断掉，线电压 $\dot{U}_{AC}$ 直接加在 A、C 两相负载上，此时 A、C 两相负载中流过同一电流。所以负载中点如图 5－42 所示的电压位形图中，从三角形中心 O 跳至 AC 边的中点 O'。由此可知，此时各相负载的相电压为 $U_{O'A} = U_{O'C} = \dfrac{U_{AC}}{2} = 190\text{V}$，$U_{O'B} = U_{AB} \cdot \cos 30° = 329\text{V}$。

5－44 在三相电炉中有 12 根硅碳棒，若采用星形对称连接，每相 4 根，这时是否应接中线？若在中线和某一相火线上各接一个安培计，当中线上的安培计指零时，火线上的安培计读数是否可以代表另外两相里的电流？

答：应该接中线，因为硅碳棒在使用过程中，不可能随时随刻使各负载保持对称。接了中线，并在中线上接一安培计之后，不仅可以使负载不对称时能维持各项负载的相电压不变，而且还能监视负载不对称的情况，因为，当中线安培计指零时，就表明负载对称。此时，某相火线上的安培计读数也可以代表另外两相中的电流。

5－45 为什么电动机启动时电流很大？为了避免启动电流太大，大功率的电动机有时采用 Y－Δ 起动法。如图 5－43 所示的方式将三相绕组 ax、by、cz 分别接在三相双掷开关上，向下合闸是 Y 连接，向上闸是 Δ 连接。起动时先向下合闸，待电动机开始运转后将闸刀搬向上去。用这种 Y－Δ 启动法为什么可以减少起动电流？

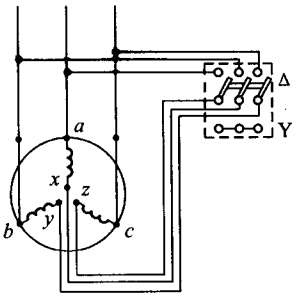


图 5－43 思考题 5－45

答：因为起动时，电动机转子转速很小，而旋转磁场相对于定子以同步转速旋转，故在转子中产生的感应电动势，在起动时刻具有较大的值。在这感应电动势作用下，电阻很小的转子绕组必将产生很大的电流。由于这电流对旋转磁通起去磁作用，为了维持旋转磁场的磁通量近似不变，这就要求定子绕组中的电流 $\dot{I}_1$ 相应地增加很大。所以启动时，电动机要从电网吸取很大的电流。

对于正常工作时采用 Δ 连接的电动机，才适合采用 Y－Δ 启动法。这种方法之所以能减少启动电流，是因为启动时采用了 Y 连接，把每个定子绕组上的电压，降为原来的 $1/\sqrt{3}$ 倍，从而减少了启动时流经每个绕组的电流。因为是 Y 连接，这时线电流即为相电流。但是，若对 Δ 连接的电动机直接启动，不仅每个绕组中流过的启动电流，较 Y－Δ 启动法时大许多，而且因为是 Δ 连接，按 $I_l = \sqrt{3}I_\varphi$ 可知，在此情况下，电源火线上将流过更大的电流。

5.4 习题详解

5－1 电动势为 12V 的汽车电池的内阻为 0.05Ω，问：

(1) 它的短路电流多大?

(2) 若启动电流为 100A,则启动电动机的内阻多大?

解:(1) 短路电流

$$I = \frac{\varepsilon}{r} = \frac{12}{0.05} = 240\text{A}$$

(2) 由 $\varepsilon = I(R + r)$,电动机的内阻

$$R = \frac{\varepsilon}{I} - r = \frac{12}{100} - 0.05 = 0.07\Omega$$

5-2 如图 5-44 所示,在电动势为 ε、内阻为 r 的电池上连接一个 $R_1 = 10.0\Omega$ 的电阻时,测出 R_1 的端电压为 8.0V,若将 R_1 换成 $R_2 = 5.0\Omega$ 的电阻时,其端电压为 6.0V。求此时电池的 ε 和 r。

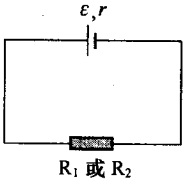


图 5-44 习题 5-2

解:因电源端电压 $U = \varepsilon \frac{R}{R + r}$,所以分别代入已知条件后得

$$8.0 = \varepsilon \frac{10.0}{10.0 + r} \quad ①$$

$$6.0 = \varepsilon \frac{5.0}{5.0 + r} \quad ②$$

联立求解式①、式②得 $r = 5.0\Omega$;$\varepsilon = 12.0\text{V}$。

5-3 试推导当气体中有正负两种离子参与导电时,电流密度的公式为 $\vec{j} = n_+ q_+ \vec{u}_+ + n_- q_- \vec{u}_-$,式中 n_+、q_+、$\vec{u}_+$ 分别代表正离子的数密度、所带电量和漂移速度,n_-、q_-、$\vec{u}_-$ 分别代表负离子的相应量。

解:对于气体中有正负两种离子参与导电的情形,在外场作用下,正负离子沿相反方向漂移,但由于它们带异号电荷,故形成的电流方向相同。在气体中垂直于电流方向任意取一面元 $\mathrm{d}S$,则在 $\mathrm{d}t$ 时间内通过此面的电量

$$\mathrm{d}q = n_+ q_+ \bar{u}_+ \mathrm{d}t \cdot \mathrm{d}s - n_- q_- \bar{u}_- \mathrm{d}t \cdot \mathrm{d}s$$

注意:其中 $q_- < 0$,再考虑到方向,电流密度为

$$\vec{j} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t\mathrm{d}s}\vec{n}_0 = n_+ q_+ \vec{u}_+ + n_- q_- \vec{u}_-$$

5-4 在地面附近的大气里,由于土壤的放射性和宇宙线的作用,平均每 1cm^3 的大气里约有 5 对离子。离子的漂移速度正比于场强,比例系数称为"迁移率"。已知大气中正离子的迁移率为 $1.37 \times 10^{-4}\text{m}^2/(\text{s}\cdot\text{V})$,负离子的迁移率为 $1.91 \times 10^{-4}\text{m}^2/(\text{s}\cdot\text{V})$,正负离子所带的电量数值都是 $1.6 \times 10^{-19}\text{C}$。求地面大气的电导率 σ。

解:由 $j = \sigma E$ 及 $j = ne(u_+ + u_-)$得

$$\sigma = ne\left(\frac{u_+}{E} + \frac{u_-}{E}\right) \approx 2.6 \times 10^{-16}\text{S/m}$$

5-5 空气中有一对平行放着的极板,相距 2.00cm,面积都是 300cm^2。在两板上加 150V 的电压,这个值远小于使电流达到饱和所需的电压。今用 X 射线照射板间的空气,使其电离,于是两板间便有 $4.00\mu\text{A}$ 的电流通过。设正负离子的电量都是 $1.6 \times 10^{-19}\text{C}$,

已知其中正离子的迁移率为 $1.37\times10^{-4}\text{m}^2/(\text{s}\cdot\text{V})$，负离子的迁移率为 $1.91\times10^{-4}\text{m}^2/(\text{s}\cdot\text{V})$，求这时板间离子的浓度。

解：由 $u'=\frac{u}{E}=\frac{u\cdot d}{U}$ 及 $j=ne(u_+ + u_-)$ 得

$$n=\frac{j}{e(u_+ + u_-)}=\frac{I}{Se\left(\frac{u'_+\cdot U}{d}+\frac{u'_-\cdot U}{d}\right)}\approx 3.39\times10^{14}\text{cm}^{-3}$$

5-6 4 个电阻均为 6.0Ω 的灯泡，工作电压为 12V，把它们并联起来接到一个电动势为 12V、内阻为 0.20Ω 的电源上，问：

(1) 开 1 盏灯时，此灯两端的电压多大？

(2) 4 盏灯全开，灯两端的电压多大？

解：(1) 开 1 盏灯时，端电压

$$U=\varepsilon\frac{R}{R+r}=12\times\frac{6.0}{6.2}=11.6\text{V}$$

(2) 开 4 盏灯时，端电压

$$U=\varepsilon\frac{R/4}{R/4+r}=12\times\frac{1.5}{1.7}=10.6\text{V}$$

5-7 图 5-45 中伏特计的内阻为 300Ω，在开关 K 未合上时其电压读数为 1.49V，开关合上时其读数为 1.46V，求电源的电动势和内阻。

解：电源端电压：$U=\frac{\varepsilon R}{R+r}$

K 未合：$R=300\Omega$，所以

$$1.49=\frac{\varepsilon\cdot 300}{300+r} \qquad ①$$

K 合上：$R=300\times\frac{100}{400}\Omega=75\Omega$，所以

$$1.46=\frac{\varepsilon\cdot 75}{75+r} \qquad ②$$

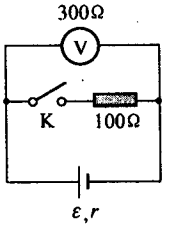


图 5-45 习题 5-7

联立式①、式②解得 $r=2.07\Omega$；$\varepsilon=1.50\text{V}$。

5-8 变阻器可用做分压器，用法如图 5-46 所示。U 是输入电压，R 是变阻器的全电阻，r 是负载电阻，c 是 R 上的滑动接头。滑动 c，就可以在负载上得到 0 到 U 之间的任何电压 U_r。设 R 的长度 $ab=l$，R 上各处单位长度的电阻都相同，a、c 之间的长度 $ac=x$，求加到 r 上的电压 U_r 与 x 的关系。用方格纸画出当 $r=0.1R$ 和 $r=10R$ 时的 U_r-x 曲线。

解：a、b 两端电阻

$$R_{ab}=\frac{l-x}{l}R+\frac{Rrx/l}{r+Rx/l}=\frac{l-x}{l}R+\frac{xRr}{xR+lr} \qquad ①$$

总电流

$$I=\frac{U}{R_{ab}} \qquad ②$$

r 支路电流

$$I_r = I \cdot \frac{Rx/l}{r + Rx/l} \qquad ③$$

联立式①、式②、式③解得 $I_r = \dfrac{xlU}{l^2 r + x(l-x)R}$

电阻 r 上电压

$$U_r = I_r r = \frac{rxlU}{l^2 r + x(l-x)R}$$

(1) $r = 0.1R$, $U_r = \dfrac{U}{\dfrac{l}{x} + 10\left(1 - \dfrac{x}{l}\right)}$

x/l	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
U_r/U	0.053	0.077	0.097	0.118	0.143	0.175	0.227	0.303	0.476	1.0

(2) $r = 10R$, $U_r = \dfrac{U}{\dfrac{l}{x} + 0.1\left(1 - \dfrac{x}{l}\right)}$

x/l	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
U_r/U	0.092	0.197	0.294	0.39	0.488	0.59	0.69	0.79	0.89	1

$U_r - x$ 曲线如图 5-47 所示。

由所得 $U_r - x$ 曲线看出，当 $\dfrac{r}{R}$ 较大(例如 10)，U_r 几乎与 x 呈线性关系。当 r 比 R 小时，U_r 与 x 是非线性关系。

5-9 在如图 5-48 所示的电路中，求

(1) R_{CD}；(2) R_{BC}；(3) R_{AB}。

解：(1) $\dfrac{1}{R_{CD}} = \dfrac{1}{10+20} + \dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{10+5} = \dfrac{33}{300}$

所以

$$R_{CD} = 9.1\Omega$$

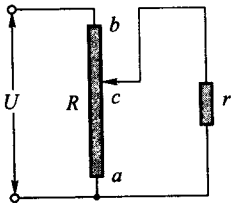


图 5-46 习题 5-8

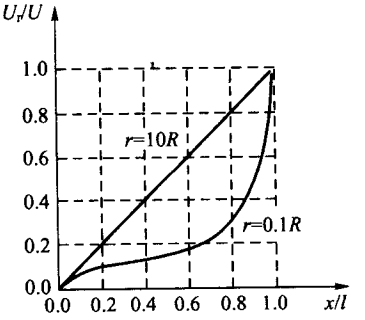


图 5-47 $U_r - x$ 曲线

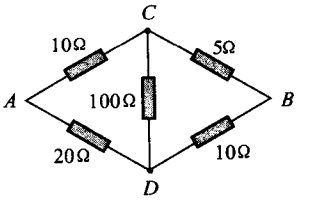


图 5-48 习题 5-9

(2) $\frac{1}{R_{BC}}=\frac{1}{5}+\frac{1}{10+\frac{[100(10+20)]}{(100+10+20)}}=\frac{990}{4300}$

所以

$$R_{BC}=4.3\Omega$$

(3) 因为 $R_{AC}\cdot R_{DB}=R_{AD}\cdot R_{CB}$，所以图 5－48 所示的电路相当于一个平衡电桥，在 A、B 两点间加上电压时，C、D 两点电位相同，可以视为短路。所以

$$R_{AB}=\frac{10\times 20}{10+20}+\frac{5\times 10}{5+10}=10\Omega$$

5－10 判断一下，在图 5－49 所示各电路中哪些可以化为串、并联电路的组合，哪些不能。如果可以，就利用串、并联公式写出它们总的等效电阻。

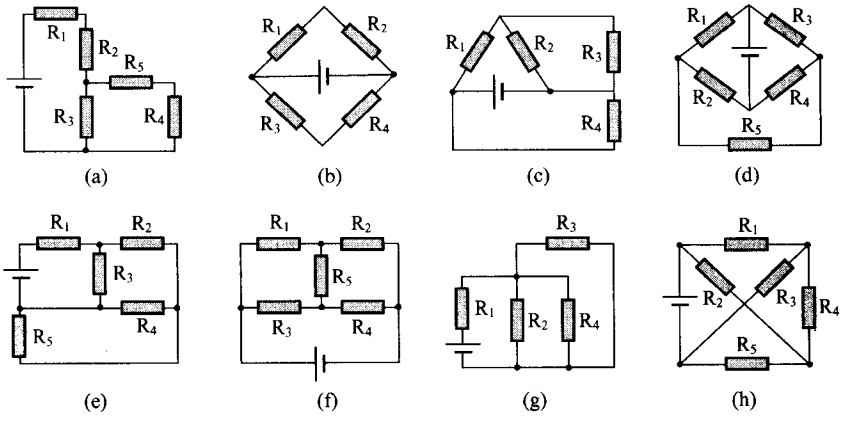


图 5－49 习题 5－10

解：图 5－49(a)可化为串、并联电路组合(下称可化)，等效电阻

$$R_{a等}=R_1+R_2+\frac{R_3(R_4+R_5)}{R_3+R_4+R_5}$$

图 5－49(b) 可化

$$R_{b等}=\frac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}{R_1+R_2+R_3+R_4}$$

图 5－49(c)可化

$$R_{c等}=\frac{R_4[R_1(R_2+R_3)+R_2R_3]}{(R_1+R_4)(R_2+R_3)+R_2R_3}$$

图 5－49(d)不可化

图 5－49(e)可化

$$R_{e等}=R_1+\frac{R_3[R_2(R_4+R_5)+R_4R_5]}{(R_3+R_2)(R_4+R_5)+R_4R_5}$$

图 5－49(f)不可化

图 5－49(g)可化

$$R_{g等} = R_1 + \frac{R_2R_3R_4}{R_3R_4 + R_2R_4 + R_2R_3}$$

图 5－49(h)不可化

5－11 无轨电车速度的调节，是依靠在直流电动机的回路中串入不同数值的电阻，以改变通过电动机的电流，使电动机的转速发生变化。例如，可以在回路中串接 4 个电阻 R_1、R_2、R_3 和 R_4，再利用一些开关 K_1、K_2、K_3、K_4 和 K_5，使电阻分别串联或并联，以改变总电阻的数值，如图 5－50 所示。设 $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1.0\Omega$，求下列 4 种情况下的等效电阻 R_{ab}。

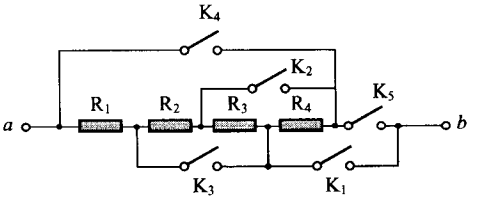


图 5－50 习题 5－11

(1) K_1、K_5 合上，K_2、K_3、K_4 断开；

(2) K_2、K_3、K_5 合上，K_1、K_4 断开；

(3) K_1、K_3、K_4 合上，K_2、K_5 断开；

(4) K_1、K_2、K_3、K_4 合上，K_5 断开。

解：(1) 依题意，这时 R_4 短路，相当于 R_1、R_2、R_3 串联

$$R_{ab} = R_1 + R_2 + R_3 = 3\Omega$$

(2) 按题意得等效电路如图 5－51(a) 所示。

$$R_{ab} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = 1.33\Omega$$

(3) 等效电路如图 5－51(b)所示。

$$R_{ab} = \frac{R_1R_4}{R_1 + R_4} = 0.5\Omega$$

(4) 等效电路如图 5－51(c)所示。

$$R_{ab} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = 0.25\Omega$$

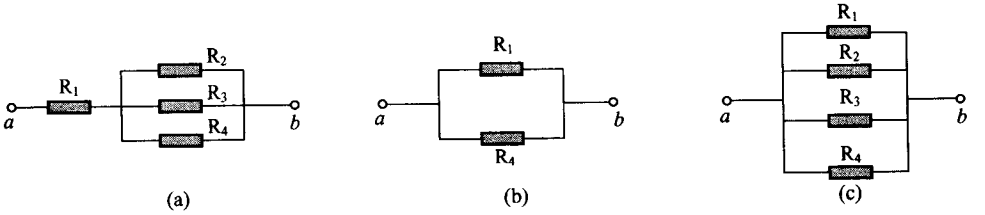


图 5－51 等效电路

5－12 详见本章典型例题例 5－1。

5－13 MF－5 型万用电表的电流档为闭路抽头式的，如图 5－52 所示。表头的内阻 $R_G=2333\Omega$，满度电流 $I_G=150\mu A$，将其改装为量程是 $I_1=500\mu A$、$I_2=10mA$、$I_3=100mA$，试算出 R_1、R_2、R_3 的阻值，并标出 3 个接头的量程。

解：由 $R_1+R_2+R_3=\dfrac{I_G}{I_1}(R_1+R_2+R_3+R_G)=0.3(R_1+R_2+R_3+2333)$

解得 $R_1+R_2+R_3=1k\Omega$；所以

$$\sum = R_1+R_2+R_3+R_G = 3333\Omega$$

又由 $R_2+R_3=\dfrac{I_G}{I_2}\sum=50\Omega$ 及 $R_3=\dfrac{I_G}{I_3}\sum=5.0\Omega$ 得

$$R_2 = 45.0\Omega;\ R_1 = 950\Omega$$

3 个接头的量程如图 5－52 所示。

5－14 MF－5 型万用电表的电压挡如图 5－53 所示，表头满度电流 $I_G=0.5mA$，内阻 $R_G=700\Omega$，改装为多量程伏特计的量程分别为 $U_1=10V$，$U_2=50V$，$U_3=250V$，求各挡的降压电阻 R_1、R_2、R_3。若再增加两个量程 $U_4=500V$，$U_5=1000V$，又该如何？

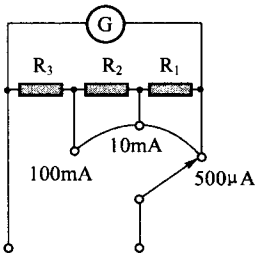


图 5－52 习题 5－13

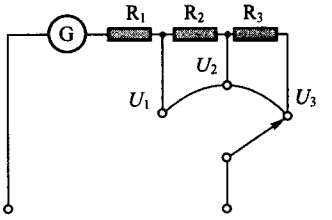


图 5－53 习题 5－14

解：由题图可知

$$R_1 = \frac{U_1}{I_G} - R_G = 19.3k\Omega$$

$$R_2 = \frac{U_2}{I_G} - (R_1+R_G) = \frac{U_2-U_1}{I_G} = 80k\Omega$$

$$R_3 = \frac{U_3-U_2}{I_G} = 400k\Omega$$

增加 U_4、U_5 后

$$R_4 = \frac{U_4-U_3}{I_G} = 500k\Omega;\ R_5 = \frac{U_5-U_4}{I_G} = 1M\Omega$$

5－15 甲、乙两站相距 50km，其间有两条相同的电话线，有一条因在某处触地而发生故障，甲站的检修人员用如图 5－54 所示的办法找出触地到甲站的距离 x，让乙站把两条电话线短路，调节 r 使通过检流计 G 的电流为 0。已知电话线每千米长的电阻为 6.0Ω，测得 $r=360\Omega$，求 x。

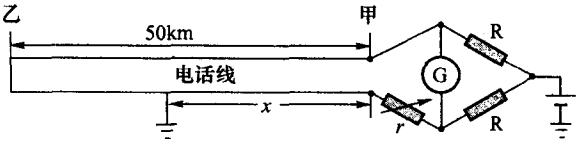


图 5－54　习题 5－15

解:图示为电桥电路,设电缆每千米欧数为 r_0,平衡时

$$(l + l - x)r_0 = xr_0 + r$$

即 $2l - 2x = \frac{r}{r_0}$,所以

$$x = l - \frac{r}{2r_0} = 20\text{km}$$

5－16　为了找出电缆在某处由于损坏而通地的地方,也可以用如图 5－55 所示的装置。AB 是一条长为 100cm 的均匀电阻线,接触点 S 可在它上面滑动。已知电缆长 7.8km,设当 S 滑到 $SB = 41\text{cm}$ 时,通过电流计 G 的电流为 0。求电缆损坏处到 B 的距离 x。

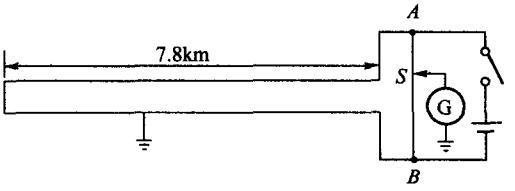


图 5－55　习题 5－16

解:图示为一电桥,平衡时

$$\frac{l + l - x}{x} = \frac{AS}{SB} = \frac{59}{41}$$

解得

$$x = 0.82l = 6.4\text{km}$$

5－17　一电路如图 5－56 所示,已知 $\varepsilon_1 = 1.5\text{V}$, $\varepsilon_2 = 1.0\text{V}$, $R_1 = 50\Omega$, $R_2 = 80\Omega$, $R = 10\Omega$,电池的内阻都可忽略不计。求通过 R 的电流。

解:设各支路中的电流如图 5－56 所示

对于回路 $ABCA$

$$I_1R_1 + IR - \varepsilon = 0$$

对于回路 $BDCB$

$$I_2R_2 + \varepsilon - IR = 0$$

对于 B 点

$$I_1 = I_2 + I$$

联立三方程解得

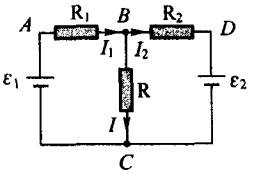


图 5－56　习题 5－17

$$I = 32\text{mA}$$

5-18 一电路如图 5-57 所示，已知 $\varepsilon_1 = 12\text{V}, \varepsilon_2 = 9\text{V}, \varepsilon_3 = 8\text{V}, r_1 = r_2 = r_3 = 1\Omega, R_1 = R_3 = R_4 = R_5 = 2\Omega, R_2 = 3\Omega$。求：

(1) a、b 断开时的 U_{ab}。

(2) a、b 短路时通过 ε_2 的电流的大小和方向。

解：(1)如图 5-58(a)所示，当 a、b 断开时，设回路 $acdea$ 中流过的电流为 I，按回路电压方程得

$$I = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{R_1 + R_3 + R_4 + R_5 + r_1 + r_3} = \frac{4}{10} = 0.4\text{A}$$

对于 $acdba$ 回路有

$$U_{ab} = I(R_3 + r_3 + R_4) + \varepsilon_3 - \varepsilon_2 = 1\text{V}$$

(2) 设 a、b 短路时，各支路电流的正方向如图 5-58(b)所示。

对回路 $adea$

$$I_2(r_2 + R_2) + \varepsilon_2 + I_1(R_5 + r_1 + R_1) - \varepsilon_1 = 0$$

对回路 $acda$

$$(I_1 - I_2)(R_3 + r_3 + R_4) + \varepsilon_3 - I_2(R_2 + r_2) - \varepsilon_2 = 0$$

代入数据，联立解上述两方程可得 $I_2 = \frac{2}{13}\text{A}$，方向见图。

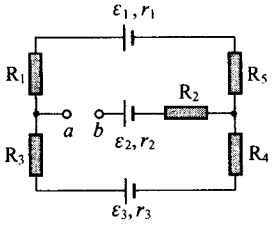
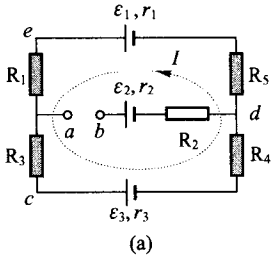


图 5-57 习题 5-18



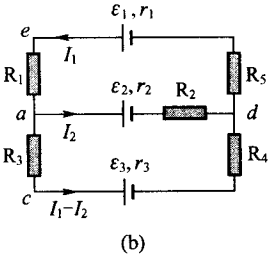


图 5-58 习题 5-18

5-19 一电路如图 5-59 所示，已知 $\varepsilon_1 = 1.0\text{V}, \varepsilon_2 = 2.0\text{V}, \varepsilon_3 = 3.0\text{V}, r_1 = r_2 = r_3 = 1.0\Omega$，$R_1 = 1.0\Omega, R_2 = 3.0\Omega$，求：

(1) 通过电源 3 的电流。

(2) R_2 消耗的功率。

(3) 电源 3 对外供给的功率。

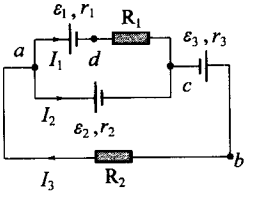


图 5-59 习题 5-19

解：(1) 设各支路中的电流及回路方向如图 5-59 所示，对于回路 $abcda$

$$-I_3(R_2 + r_3) + \varepsilon_3 - I_1(R_1 + r_1) - \varepsilon_1 = 0$$

对于回路 $abca$

$$-I_3(R_2 + r_3) + \varepsilon_3 - I_2 r_2 - \varepsilon_2 = 0$$

对于 a 点

$$I_3 = I_2 + I_1$$

联立三方程解得：$I_3 = 0.29\text{A}$

（2）R_2 上消耗的功率

$$P_2 = I_3^2 R_2 = 0.24\text{W}$$

（3）ε_3 对外供给的功率

$$P_3 = \varepsilon_3 I_3 - I_3^2 r_3 = 0.78\text{W}$$

5－20 分别求出如图 5－60(a)、(b)、(c)所示中 a、b 间的电阻。

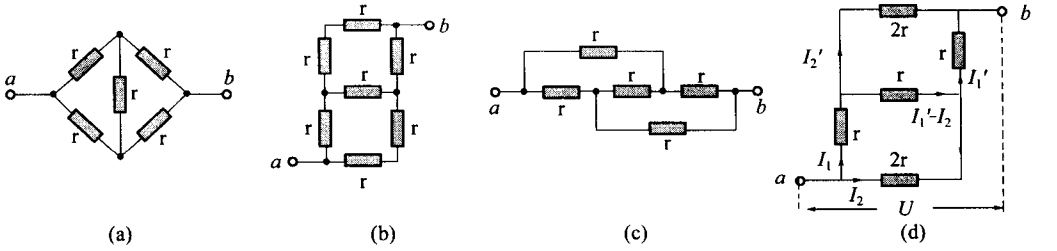


图 5－60　习题 5－20

解：因图 5－60(a)所示的电路为一平衡桥式电路，所以当 a、b 两端加上电压时，通过“桥”电阻的电流为零。在此情况下，“桥”电阻的阻值对 a、b 两点间的等值电阻的大小无影响。故令“桥”电阻为无限大(或为零)时得

$$R_{ab} = \frac{2r \cdot 2r}{2r + 2r} = r$$

对于图 5－60(b)所示的电路，可当作图 5－60(d)所示的情况处理。由电路的对称性知：$I_1 = I'_1$，$I_2 = I'_2$；所以

$$U = I_1 r + I'_2 2r = I_1 r + I_2 2r$$

$$U = I_1 r + (I'_1 - I_2) r + I' r = 3I_1 r - I_2 r$$

故

$$I_2 = \frac{2}{3} I_1$$

$$R_{ab} = \frac{U}{I_1 + I_2} = \frac{I_1 r\left(1 + \frac{4}{3}\right)}{I_1\left(1 + \frac{2}{3}\right)} = 1.4r$$

对于图 5－60(c)所示，则是一个与图 5－60(a)完全相同的电路，故 $R_{ab} = r$。

5－21 如图 5－61 所示，将图中的电压源变换成等效的电流源。

解：设等效电流源如图 5－62 所示，按等效条件 $I_0 = \frac{\varepsilon}{r}$ 和 $r_0 = r$ 可直接写出图 5－61(a)、(b)所示电压源的等效电流源的参数：

图 5－61(a)：$I_0 = \frac{10}{2} = 5(\text{A})$，$r_0 = 2\Omega$

图 5－61(b)：$I_0 = \frac{6}{3} = 2(A)$，$r_0 = 3\Omega$

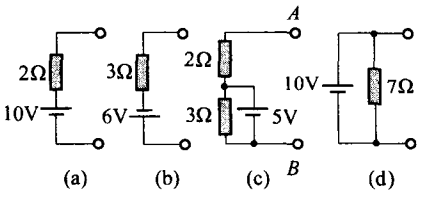


图 5－61　习题 5－21

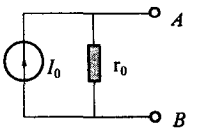


图 5－62　习题 5－21 附图

对于图 5－61(c)，考虑一负载电阻 R 接在 A、B 两端，则负载电流为 $I=[\frac{5}{(2+R)}]$A

另一方面，同一负载从电流源吸取的电流 $I'=\frac{I_0 r_0}{(R+r_0)}$。按两种电源等效的条件：$I=I'$可得 $I_0=\frac{5}{2}=2.5\text{A}$，$r_0=2\Omega$

对于以上 3 种情况，电流源中 I_0 的方向请读者自行判定。

对于图 5－61(d)，由于 $r=0$，故不能变换成等效电流源。

5－22　将图 5－63 中的电流源变换成等效的电压源。

解：除图 5－63(d)因 $r_0=\infty$，故不可能换成等效的电压源外，其它 3 个电流源都可按等效条件 $\varepsilon=I_0 r_0$ 和 $r_0=r$ 变换成图 5－64 所示的等效电压源(电动势的方向，希望读者分别判断)，其中：

图 5－63(a)：$\varepsilon=I_0 r_0=10\text{V}$，$r=r_0=2\Omega$

图 5－63(b)：$\varepsilon=I_0 r_0=15\text{V}$，$r=r_0=3\Omega$

图 5－63(c)：$\varepsilon=I_0 r_0=12\text{V}$，$r=r_0=2\Omega$(为什么？参考前图 5－61(c)解法)

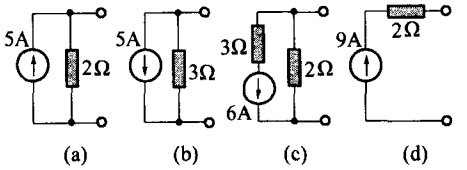


图 5－63　习题 5－22

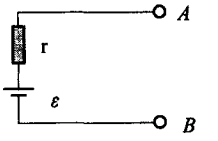


图 5－64　习题 5－22 附图

5－23　用等效电源定理解习题 5－18 的(2)。

解：用等效电压源定理求解，原题电路可换成如图 5－65 所示的等效电路。

由原题解知，当 a、d 间开路时，回路电流 $I=0.4\text{A}$，故有

$$\varepsilon_d = U_{ad} = 10\text{V}$$

又由原图知，从 a、d 两端向上、下看去的除源网络的电阻为

$$r_d = \frac{(R_1+R_5+r_1)(R_3+R_4+r_3)}{R_1+R_5+R_3+R_4+r_1+r_3} = 2.5\Omega$$

故由图 5－65 所示的等效电路图知：

$$I_2 = \frac{\varepsilon_d - \varepsilon_2}{R_2+r_2+r_d} \approx 0.15\text{A}$$

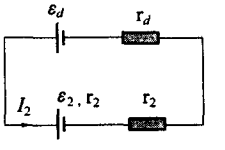


图 5－65　习题 5－23

5－24 用等效电源定理解图 5－66 中电桥电路的 I_G。

解：用等效电压源定理求解，若视“桥上”B、D 两点为网络两端，则可换成如图 5－67 所示的等效电路。图中等效电压源的电动势和内阻分别为

$$\varepsilon_d = \frac{R_3}{R_1 + R_3}\varepsilon - \frac{R_4}{R_2 + R_4}\varepsilon = \frac{\varepsilon(R_2R_3 - R_1R_4)}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}$$

$$r_d = \frac{R_1R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2R_4}{R_2 + R_4}$$

故有

$$I_G = \frac{\varepsilon_d}{r_d + R_g} = \frac{\varepsilon(R_2R_3 - R_1R_4)}{R_1R_2R_3 + R_2R_3R_4 + R_3R_4R_1 + R_4R_1R_2 + R_g(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}$$

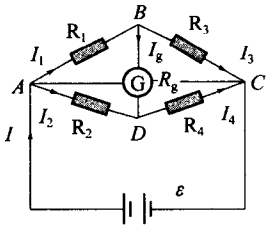


图 5－66 习题 5－24

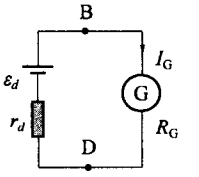


图 5－67 习题 5－24 附图

5－25 求图 5－68 中 ab 支路中的电流。

解：如图 5－68 所示，若用 R_{cb}、R_{db}、R_{eb} 分别表示脚码上相应两点右面网络的电阻，则

$$R_{cb} = \frac{25 \times 75}{25 + 75} = 19(\Omega);\ R_{db} = \frac{195}{17} = 11.5(\Omega);\ R_{eb} = \frac{535}{124} = 4.3\Omega$$

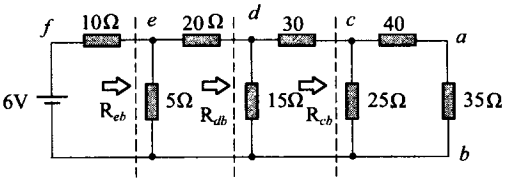


图 5－68 习题 5－25

再用 I_{fe}、I_{ed}、I_{dc}、I_{ab} 分别表示流经脚码上相应两点间的电流，则

$$I_{fe} = \frac{6}{10 + R_{eb}} = 0.42\text{A}$$

$$I_{ed} = I_{fe} \cdot \frac{5}{5 + 20 + R_{db}} = 0.058\text{A}$$

$$I_{dc} = I_{ed} \cdot \frac{15}{45 + R_{cb}} = 13.6\text{mA}$$

所以

$$I_{ab} = I_{dc} \cdot \frac{25}{25 + 75} = 3.4\text{mA}$$

5－26 证明$\frac{L}{R}$和RC具有时间的量纲，并且1H/1Ω=1s，1Ω·1F=1s。

证明：因为：$[L]=L^2MT^{-2}I^{-2}$，$[R]=L^2MT^{-3}I^{-2}$，$[C]=L^{-2}M^{-1}T^4I^2$

所以，$\left[\frac{L}{R}\right]=\frac{L^2MT^{-2}I^{-2}}{L^2MT^{-3}I^{-2}}=T$，$[RC]=L^2MT^{-3}I^{-2}\cdot L^{-2}M^{-1}T^4I^2=T$

$$1\text{H}/1\Omega=\frac{1\text{V}\cdot 1\text{s}}{1\text{A}}\Big/\frac{1\text{V}}{1\text{A}}=1\text{s},\ 1\Omega\cdot 1\text{F}=\frac{1\text{V}}{1\text{A}}\cdot\frac{1\text{C}}{1\text{V}}=\frac{1\text{C}}{1\text{C}/1\text{s}}=1\text{s}$$

5－27 一个自感为0.50mH、电阻为0.01Ω的线圈连接到内阻可忽略、电动势为12V的电源上。开关接通多长时间，电流达到终值的90%？到此时线圈中储存了多少能量？电源消耗了多少能量？

解：(1) 设开关接通t秒后，电流达到终值的90%，由$i(t)=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-\frac{Rt}{L}})$得

$$90\%\ \frac{\varepsilon}{R}=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-\frac{Rt}{L}})$$

即

$$0.9=1-e^{-\frac{Rt}{L}}$$

所以

$$t=\frac{L\cdot\ln 10}{R}=0.12\text{s}$$

(2) 此时线圈储存的能量

$$W=\frac{1}{2}LI^2=2.9\times 10^2\text{J}$$

(3) 电源消耗的能量

$$W=\int_0^t\varepsilon i\,\mathrm{d}t=\frac{\varepsilon^2}{R}\int_0^{0.12}(1-e^{-\frac{Rt}{L}})\,\mathrm{d}t=1.1\times 10^3\text{J}$$

5－28 一自感为L、电阻为R的线圈与一无自感的电阻R_0串联地接于电源上，如图5－69所示。

(1) 求开关K_1闭合t时间后，线圈两端的电势差U_{bc}；

(2) 若$\varepsilon=20\text{V}$，$R_0=50\Omega$，$R=150\Omega$，$L=5.0\text{H}$，求$t=0.5\tau$时(τ为电路的时间常数)线圈两端的电势差U_{bc}和U_{ab}；

(3) 待电路中电流达到稳定值，闭和开关K_2，求闭和0.01s后，通过K_2中电流的大小和方向。

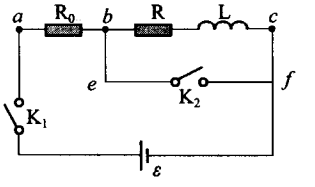


图5－69 习题5－28

解：(1) 因为

$$i=\frac{\varepsilon}{R+R_0}[1-e^{-(R+R_0)t/L}]$$

所以

$$U_{bc}=\varepsilon-iR_0=\varepsilon-\frac{\varepsilon R_0}{R+R_0}[1-e^{-(R+R_0)t/L}]=\frac{\varepsilon}{R+R_0}[R+R_0e^{-(R+R_0)t/L}]$$

(2) 将数据代入上式得

$$U_{bc} = \frac{\varepsilon}{R + R_0}\left[R + R_0 e^{-\frac{(R+R_0)t}{L}}\right] = 18\text{V}$$

$$U_{ab} = \varepsilon - U_{bc} = 2.0\text{V}$$

(3) 当开关 K_2 闭和时,对于回路 *cfebc* 可列出微分方程

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

解方程得

$$i = ce^{-Rt/L}$$

当 $t=0$ 时,$i_0=\frac{\varepsilon}{R+R_0}$,则 $c=\frac{\varepsilon}{R+R_0}$,即

$$i = \frac{\varepsilon}{R + R_0}e^{-Rt/L}$$

代入 $t=0.01$s 及其它数据,得 $i=0.07$A,方向 $f\to e$

而此时由电源提供的电流 $I=\frac{\varepsilon}{R_0}=0.4$A,方向 $e\to f$

所以通过 K_2 中电流的大小:$I_{K_2}=I-i=0.33$A,方向 $e\to f$

5-29 一电路如图 5-70 所示,R_1、R_2、L 和 ε 都已知,电源 ε 和线圈 L 的内阻都可略去不计。

(1) 求 K 接通后,a、b 间的电压与时间的关系;

(2) 在电流达到最后稳定值的情况下,求 K 断开后 a、b 间的电压与时间的关系。

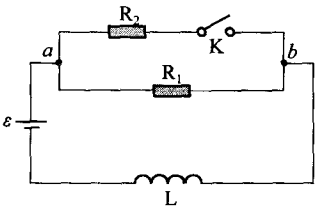


图 5-70 习题 5-29

解:(1) K 接通后,电路满足微分方程如下:

$$L\frac{di}{dt} + \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}i = \varepsilon$$

解方程(当 $t=0$ 时,$i=\frac{\varepsilon}{R_1}$)得

$$i = \frac{\varepsilon}{R_2}\left[\frac{R_1 + R_2}{R_1} - e^{-R_1R_2t/L(R_1+R_2)}\right]$$

故

$$U_{ab} = iR_{ab} = \varepsilon\left[1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2}e^{-R_1R_2t/L(R_1+R_2)}\right]$$

(2) K 断开后,电路满足微分方程如下:

$$L\frac{di}{dt} + R_1i = \varepsilon$$

解方程(当 $t=0$ 时,$i=\frac{\varepsilon(R_1+R_2)}{R_1R_2}$)得

$$i = \frac{\varepsilon}{R_1}\left[1 + \frac{R_1}{R_2}e^{-R_1t/L}\right]$$

故

$$U_{ab} = iR_1 = \varepsilon\left[1 + \frac{R_1}{R_2}e^{-R_1 t/L}\right]$$

5-30 详见本章典型例题例 5-2。

5-31 如图 5-71 所示为一对互感耦合的 LR 电路。证明在无漏磁的条件下两回路充放电的时间常数都是 $\tau = \frac{L_1}{R_1} + \frac{L_2}{R_2}$。由此定性地解释，为什么当电感元件的铁芯中若有涡流时，电路充放电的时间常数要增大？

解：充电时

$$L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} + R_1 i_1 = \varepsilon \qquad ①$$

$$L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 = 0 \qquad ②$$

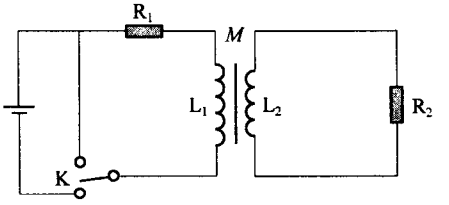


图 5-71 习题 5-31

由式②解得

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{R_2 i_2}{L_2} - \frac{M}{L_2}\frac{di_1}{dt} \qquad ③$$

把式③代入式①

$$(L_1L_2 - M^2)\frac{di_1}{dt} + L_2R_1 i_1 - MR_2 i_2 = \varepsilon L_2 \qquad ④$$

因无漏磁，则 $L_1L_2 = M^2$，即 $L_1L_2 - M^2 = 0$ 代入式④得

$$L_2R_1 i_1 - MR_2 i_2 = \varepsilon L_2 \qquad ⑤$$

由式⑤解得

$$i_2 = \frac{L_2R_1 i_1 - \varepsilon L_2}{MR_2}$$

所以

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{L_2R_1 i_1 - \varepsilon L_2}{MR_2}\right) = \frac{L_2R_1}{MR_2}\cdot\frac{di_1}{dt}$$

再代入式①得

$$\left(L_1 + \frac{L_2R_1}{R_2}\right)\frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 = \varepsilon \qquad ⑥$$

解方程式⑥（当 $t = 0$ 时，$i_1 = 0$）得

$$i_1 = \frac{\varepsilon}{R_1}[1 - e^{-R_1 t/(L_1 + L_2R_1/R_2)}]$$

所以

$$\tau = \frac{L_1 + \frac{L_2R_1}{R_2}}{R_1} = \frac{L_1}{R_1} + \frac{L_2}{R_2}$$

同样可解得回路 2 的时间常数，故得证。

当电感元件的铁芯中若有涡流时，线圈与铁芯中涡流回路构成一对互感耦合的 LR

电路，如不考虑漏磁，则两回路充放电的时间常数都是 $\tau=\frac{L_1}{R_1}+\frac{L_2}{R_2}$。由于增加了涡流回路的$\frac{L_2}{R_2}$这一量，所以此电路充放电的时间常数要增大。

5－32 在LC振荡电路中，设开始时 C 上的电量为 Q，L 中的电流为0。

(1) 求第一次达到 L 中磁能等于 C 中电能所需的时间；

(2) 求这时 C 上的电量 q。

解： (1) 电容器极板上 q 满足

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+\frac{q}{C}=0$$

且 $q|_{t=0}=Q$，$i=\left.\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0$，所以

$$q=Q\cos\omega t$$

其中：$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

第一次达到 L 中磁能等于 C 中电能，相当于电容器内能减为充电时的一半，所以根据 $W_C=\frac{q^2}{2C}$及题意得

$$\frac{q^2}{2C}=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{2C}$$

即

$$\frac{Q^2}{2C}\cos^2\omega t=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{2C}$$

解得

$$t=\frac{\pi}{4\omega}=\frac{T}{8}=\frac{\pi}{4}\sqrt{LC}$$

(2) 此时，电容器上的电量 $q=Q\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}Q$

5－33 两个 $C=2.0\mu$F 的电容器已充有相同的电量，经过一线圈（$L=1.0$mH、$R=50\Omega$）放电。问当这两个电容器

(1) 并联时，能不能发生振荡。

(2) 串联时，能不能发生振荡。

解：(1)两个电容器并联时，总电容 $C=4\mu$F，阻尼度 $\lambda_1=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}=1.6$

因为 $\lambda_1>1$，过阻尼，所以不会发生振荡。

(2) 两个电容器串联时，总电容 $C=1\mu$F，阻尼度 $\lambda_2=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}=0.8$

因为 $\lambda_2<1$，欠阻尼，所以会发生振荡。

5－34 在同一时间坐标轴上画出简谐交流电压 $u_1(t)=311\cos(314t-2\pi/3)$和 $u_2(t)=311\sin(314t-5\pi/6)$的曲线，式中 u_1 和 u_2 的单位为V，t 的单位为s。它们的峰值、有效值、频率和相位各多少？哪个超前？

解:简谐交流电压的曲线如图 5－72 所示。

峰值:$U_{01}=U_{02}=311\text{V}$;

有效值:$U_1=U_2=\dfrac{311}{\sqrt{2}}=220\text{V}$;

频率:$\nu=\dfrac{314}{2\pi}=50\text{Hz}$;

位相差:$\varphi_{u2}-\varphi_{u1}=-\dfrac{2}{3}\pi$,$u_1$ 超前。

5－35 两个简谐交流电 $i_1(t)$和 $i_2(t)$的波形如图 5－73 所示;

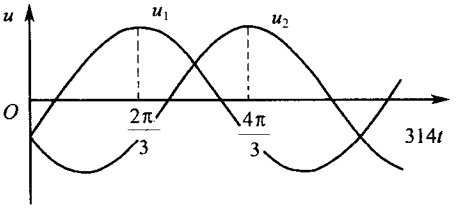


图 5－72 习题 3－34 简谐交流电压曲线

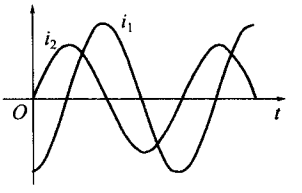


图 5－73 习题 5－35

(1) 写出它们的三角函数(余弦)表达式;

(2) 它们之间的相位差为多少? 哪个超前?

解:(1) 设 $i(t)=I_0\cos(\omega t+\varphi)$,则

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=-\omega I_0\sin(\omega t+\varphi)$$

对 $i_1(t)$:$t=0$ 时 $i_1(0)=-I_0$,$\dfrac{\mathrm{d}i_1(0)}{\mathrm{d}t}=0$ 即 $\cos\varphi_1=-1$,$\sin\varphi_1=0$;于是 $\varphi_1=\pi$;所以

$$i_1(t)=I_{10}\cos(\omega t+\pi)$$

同理可得

$$i_2(t)=I_{20}\cos(\omega t+3\pi/2)$$

(2) $\varphi_2-\varphi_1=\pi/2$;$i_2(t)$比 $i_1(t)$超前 $\pi/2$。

5－36 电阻 R 的单位为 Ω,自感 L 的单位为 H,电容 C 的单位为 F,频率 ν 的单位为 Hz,角频率 $\omega=2\pi\nu$。证明 ωL、$1/\omega C$ 的单位为 Ω。

证明:ωL:$1\text{Hz}\cdot1\text{H}=\dfrac{1}{1\text{s}}\cdot\dfrac{1\text{V}\cdot1\text{s}}{1\text{A}}=\dfrac{1\text{V}}{1\text{A}}=1\Omega$;

$$\frac{1}{\omega C}:\frac{1}{1\text{Hz}\cdot1\text{F}}=\frac{1}{\frac{1}{\text{s}}\cdot\frac{1\text{C}}{1\text{V}}}=\frac{1}{\frac{1\text{C}/1\text{s}}{1\text{V}}}=\frac{1}{\frac{1\text{A}}{1\text{V}}}=\frac{1\text{V}}{1\text{A}}=1\Omega$$

5－37 (1) 分别求频率为 50Hz 和 500Hz 时 10H 电感的阻抗。

(2) 分别求频率为 50Hz 和 500Hz 时 10μF 电容的阻抗。

(3) 在哪一个频率时,10H 电感器的阻抗等于 10μF 电容器的阻抗。

解:(1) 由 $Z=Z_L=\omega L$

当 $\nu=50\text{Hz}$ 时,

$$Z=2\pi\nu L=3.1\text{k}\Omega$$

当 $\nu=500\text{Hz}$ 时,

$$Z = 2\pi\nu L = 31\text{k}\Omega$$

(2) 由 $Z = Z_C = 1/(\omega C)$

当 $\nu = 50\text{Hz}$ 时，

$$Z = 1/(2\pi\nu C) = 320\Omega$$

当 $\nu = 500\text{Hz}$ 时，

$$Z = \frac{1}{2\pi\nu C} = 32\Omega$$

(3) 由 $\frac{1}{\omega C} = \omega L$ 和 $\omega = 2\pi\nu$ 得

$$\nu = \frac{1}{(2\pi\sqrt{LC})} \approx 16\text{Hz}$$

5－38 已知在某频率下图 5－74 中电容、电阻的阻抗数值之比为 $Z_C : Z_R = 3:4$ 若在串联电路两端加总电压 $U = 100\text{V}$，

(1) 电容和电阻元件上的电压 U_C、U_R 为多少？

(2) 电阻元件中的电流与总电压之间有无相位差？

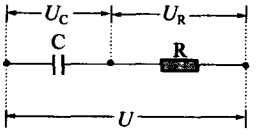


图 5－74 习题 5－38

解：(1) 由 $U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = 100\text{V}$ 和 $U_C : U_R = Z_C : Z_R = 3:4$ 解得

$$U_C = 60\text{V};\ U_R = 80\text{V}$$

(2) I_R 和 I 的位相相同，所以 I_R 和 U 的位相差

$$\varphi_u - \varphi_{iR} = \varphi_u - \varphi_i = -\arctan\frac{Z_C}{Z_R} = -\arctan\frac{3}{4} = -36°52'$$

5－39 已知在某频率下图 5－75 中电感和电容元件阻抗数值之比为 $Z_L : Z_C = 2:1$，总电流 $I = 1\text{mA}$，问通过 L 和 C 的电流 I_L 和 I_C 各多少？

解：取 $\dot{U}$ 为参考方向，由图 5－76 得

$$I = I_C - I_L = 1\text{mA}$$

再与

$$I_C : I_L = Z_L : Z_C = 2:1$$

联立解得

$$I_C = 2\text{mA};\ I_L = 1\text{mA}$$

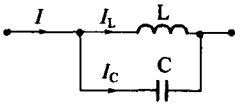


图 5－75 习题 5－39

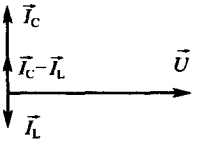


图 5－76 习题 5－39 附图

5－40 如图 5－77 中 $U_1 = U_2 = 20\text{V}$，$Z_C = R_2$，求总电压 U。

解:取 $\dot{U}_2$ 为参考方向绘 R_2C 并联电路矢量图,如图 5-78(左)。因 $Z_C = R_2$,故 $I_C = I_{R_2}$,所以

$$\varphi = \varphi_i - \varphi_{u_2} = 45°$$

再以 $\dot{I}$ 为参考方向,考虑到 $U_1 = U_2$,U_1 和 I 同位相,得矢量图(见图 5-78 右),由图可得

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 - 2U_1U_2\cos 135°} = 37\text{V}$$

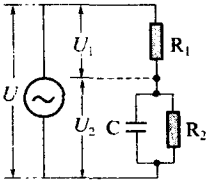
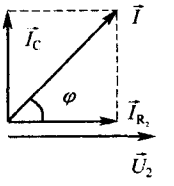


图 5-77 习题 5-40



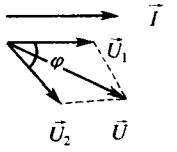


图 5-78 习题 5-40 附图

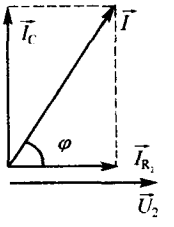
5-41 在上题图 5-77 中已知 $U_1 = U_2$,$Z_C : R_2 = 1 : \sqrt{3}$用矢量图解法求总电压与总电流的相位差。

解:仿上题可作矢量图,如图 5-79 所示。

根据题意,$Z_C : R_2 = 1 : \sqrt{3}$,则 $I_C : I_{R_2} = \sqrt{3} : 1$,图中

$$\varphi = \arctan\frac{I_C}{I_{R_2}} = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

所以 $\varphi_u - \varphi_i = -\varphi/2 = -\pi/6$



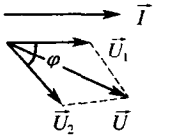


图 5-79 习题 5-41

5-42 详见本章典型例题例 5-3。

5-43 如图 5-80 中 $Z_L = Z_C = R$,求下列各量间的相位差,并用矢量图说明之。

(1) U_C 与 U_R;(2) I_C 与 I_R;

(3) U_R 与 U_L;(4) U 与 I。

解:以 $\dot{U}_{RC}$ 为参考方向绘 RC 并联电路矢量图,如图 5-81(左)。因 $Z_C = R$,故 $\dot{I}$ 和 $\dot{I}_R$ 夹角为 $\frac{\pi}{4}$。再以 $\dot{I}$ 为参考方向绘出全电路矢量图,如图 5-81(右)由题意得

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = \sqrt{2}I_R$$

$$U_L = IZ_L = \sqrt{2}I_R R = \sqrt{2}U_{RC}$$

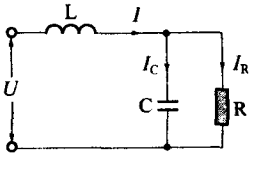
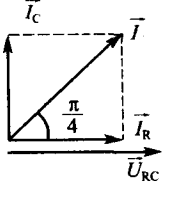


图 5-80 习题 5-43



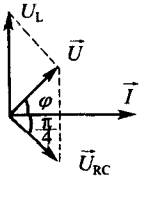


图 5-81 习题 5-43 附图

所以

$$U=\sqrt{U_{RC}^2+2U_{RC}^2-2\sqrt{2}U_{RC}^2\cos\frac{\pi}{4}}=U_{RC}$$

由图可知 $\dot{U}$ 和 $\dot{I}$ 间夹角 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，于是

(1) $\varphi_{uC}-\varphi_{iR}=\varphi_{uRC}-\varphi_{iR}=0$；(2) $\varphi_{iC}-\varphi_{iR}=\frac{\pi}{2}$；

(3) $\varphi_{uR}-\varphi_{uL}=\varphi_{uRC}-\varphi_{uL}=-\frac{3\pi}{4}$；(4) $\varphi_u-\varphi_i=\frac{\pi}{4}$。

5-44 用复数法推导表 5-1 中各阻抗、相位差公式。

表 5-1 习题 5-44

电 路	Z	$\tan\varphi$
(1) R L	$\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$	$\frac{\omega L}{R}$
(2) R C	$\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$	$\frac{1}{\omega CR}$
(3) R L C	$\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$	$\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}$
(4) R 并 L	$\frac{R\omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$	$\frac{R}{\omega L}$
(5) R 并 C	$\frac{R}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}$	$-\omega CR$
(6) R 并 L 再串 C	$\sqrt{\frac{R^2+(\omega L)^2}{(\omega CR)^2+(1-\omega^2LC)^2}}$	$\frac{\omega L-\omega C(R^2+(\omega L)^2)}{R}$
(7) R 并 C 再串 L	$\sqrt{\frac{(\omega L)^2[1+(\omega CR)^2]}{(\omega CR)^2+(1-\omega^2LC)^2}}$	$\frac{(\omega CR)^2+1-\omega^2LC}{\omega^3RLC^2}$
(8) R 串 L 并 C	$\frac{\omega LR}{\sqrt{R^2(1-\omega^2LC)^2+(\omega L)^2}}$	$\frac{R(1-\omega^2LC)}{\omega L}$

解：由 $\tilde{Z}_R=R$，$\tilde{Z}_C=-\mathrm{j}/\omega C$，$\tilde{Z}_L=\mathrm{j}\omega L$，$\tilde{Y}_R=1/R$，$\tilde{Y}_C=\mathrm{j}\omega C$，$\tilde{Y}_L=-\mathrm{j}/\omega L$，对串联电路，总复阻抗 $\tilde{Z}=\sum\tilde{Z}_i$，对并联电路，总复导纳 $\tilde{Y}=\sum\tilde{Y}_i$，并且 $\tilde{Y}=1/\tilde{Z}$。由以上结果可得表中各电路阻抗和相位差。下面以(3)、(6)、(8)为例，其余从略。

(3) $\tilde{Z}=R+\mathrm{j}\omega L-\mathrm{j}/\omega C=R+\mathrm{j}(\omega L-1/\omega C)$

所以 $Z=\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}$；$\tan\varphi=(\omega L-1/\omega C)/R$

(6) $\tilde{Y}=\frac{1}{R+\mathrm{j}\omega L}+\mathrm{j}\omega C=\frac{(1-\omega^2LC)+\mathrm{j}\omega CR}{R+\mathrm{j}\omega L}$

所以

$$Z = \frac{1}{Y} = \{[R^2 + (\omega L)^2]/[(\omega CR)^2 + (1 - \omega^2 LC)^2]\}^{1/2}$$

$$\arg\tilde{Z} = \arg(1/\tilde{Y}) = \arctan\frac{\omega L}{R} - \arctan\frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC}$$

利用三角恒等式 $\arctan A - \arctan B = \arctan\frac{A - B}{1 + AB}$ 化简上式得

$$\arg\tilde{Z} = \arctan\frac{\omega L - \omega C(R^2 + \omega^2 L^2)}{R}$$

所以

$$\tan\varphi = \frac{\omega L - \omega C(R^2 + \omega^2 L^2)}{R}$$

(8) $\tilde{Y} = \frac{1}{R} - \mathrm{j}\frac{1}{\omega L} + \mathrm{j}\omega C = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$

所以

$$Z = \left[\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{\omega LR}{\sqrt{R^2(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega L)^2}}$$

$$\tan\varphi = -\frac{(\omega C - 1/\omega L)}{1/R} = \frac{R(1 - \omega^2 LC)}{\omega L}$$

5-45 图 5-82 中 a、b 两点接到一个交流电源上，两点间的电压为 130V，$R_1 = 6.0\Omega$，$R_2 = R_3 = 3.0\Omega$，$Z_L = 8.0\Omega$，$Z_C = 3.0\Omega$，求：

(1) 电路中的电流；

(2) a、c 两点间的电压；

(3) c、d 两点间的电压。

解：由图 5-83 的矢量图得

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{(R_1 + R_2 + R_3)^2 + (Z_L - Z_C)^2} = 13\Omega$$

于是

(1) $I = \frac{U}{Z} = 10\mathrm{A}$；

(2) $U_{ac} = I\sqrt{R_1^2 + Z_L^2} = 100\mathrm{V}$；

(3) $U_{cd} = I\sqrt{R_2^2 + Z_C^2} = 42\mathrm{V}$。

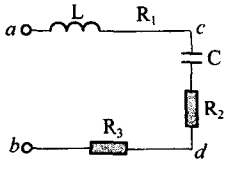


图 5-82 习题 5-45

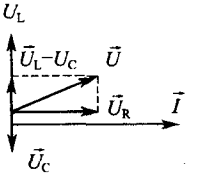


图 5-83 习题 5-45 附图

5-46 一直流电阻为 120Ω 的抗流圈与一电容为 10μF 的电容器串联。当电源频率为 50Hz、总电压为 120V、电流为 1.0A 时，求抗流圈的自感。

解:由上题结果可得串联电路总阻抗

$Z=\sqrt{R^2+(Z_L-Z_C)^2}$即 $Z_L=\sqrt{Z^2-R^2}+Z_C$;其中 $Z=\frac{120}{1}=120\Omega$, $R=120\Omega$, $Z_C=\frac{1}{\omega C}$ $=3.18\times10^2\Omega$,代入即得 $Z_L=\omega L=Z_C$,所以

$$L=\frac{Z_L}{\omega}=\frac{Z_C}{\omega}=\frac{3.18\times10^2}{2\pi\times50}\approx1.0\text{H}$$

5-47 (1) 一个电阻与一个电感串联在100V的交流电源上,一个交流伏特计不论接在电阻或电感上时,读数都相等。这个读数应为多少?

(2) 改变(1)中电阻及电感的大小,使接于电感上的伏特计读数为50V。这时若把伏特计接于电阻上,其读数是多少?

解:(1) 由 $U=\sqrt{U_R^2+U_L^2}$,及题意 $U_R=U_L$,得

$$U_R=U_L=\frac{U}{\sqrt{2}}=\frac{100\text{V}}{\sqrt{2}}\approx71\text{V}$$

(2) 当 $U_L=50\text{V}$ 时, $U_R=\sqrt{U^2-U_L^2}=\sqrt{100^2-50^2}\approx87\text{V}$

5-48 详见本章典型例题例5-4。

5-49 如图5-84,输入信号中包含直流成分6V,交流成分500Hz、1V,要求在 AB 两端获得直流电压1V,而交流电压小于1mV,问电阻 R_2 该取多大,旁路电容 C 至少该取多大?

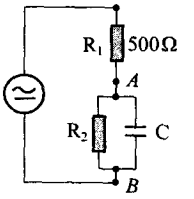


图5-84 习题5-49

解:对直流,电容 C 断路,据题意$\frac{R_2U_{直}}{R_1+R_2}=1\text{V}$,所以

$$R_2=\frac{R_1}{U_{直}-1}=100\Omega$$

对交流,并联电路中当 $R_2\gg\frac{1}{\omega C}$时阻抗主要由 $Z_C=\frac{1}{\omega C}$确定,据题意

$$U_{AB}=\frac{\frac{U_{交}}{\omega C}}{\sqrt{R_1^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}=\frac{U_{交}}{\sqrt{R_1^2\omega^2C^2+1}}=10^{-3}\text{V}$$

因为要求交流电压小于1mV所以

$$C\geqslant\sqrt{\frac{10^6-1}{\omega^2R_1^2}}\approx\frac{10^3}{\omega R_1}\approx637\mu\text{F}$$

即电容至少应在637μF以上。

5-50 图5-85为测量线圈的电感量及其损耗电阻而采用的一种电桥电路。R_s 和 C_s 为已知的固定电阻和电容,调节 R_1、R_2 使电桥达到平衡。

(1) 求 L_x、r_x。

(2) 试比较这个电桥和如图5-86所示的麦克斯韦LC电桥,哪个计算起来比较方便?如果待测电感的等效电路采用并联式的,情况怎样?

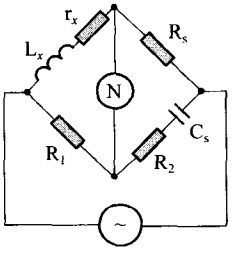


图 5－85　习题 5－50

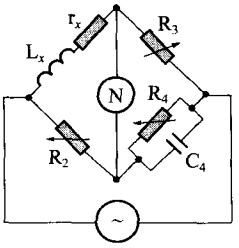


图 5－86　习题 5－50 附图

解：参看题图，平衡时各桥臂参数应满足

$$R_1 \cdot R_s = (r_x + j\omega L_x)(R_2 - j/\omega C_s) = (r_x R_2 + L_x/C_s) + j(R_2\omega L_x - r_x/\omega C_s)$$

所以

$$R_2\omega L_x = r_x/\omega C_s$$

$$R_1 \cdot R_s = r_x R_2 + L_x/C_s$$

联立以上两式求解得

$$r_x = \frac{R_1 R_2 R_s \omega^2 C_s^2}{\omega^2 C_s^2 R_2^2 + 1};\ L_x = \frac{R_1 R_s C_s}{\omega^2 C_s^2 R_2^2 + 1}$$

与麦克斯韦 LC 电桥（如图 5－86 所示）的平衡条件

$$r_x = \frac{R_2 R_3}{R_4};\ L_x = C_4 R_2 R_3$$

相比可见。被测参数与已知参数间具有较复杂的关系。所以在此情况下宜用麦克斯韦 LC 电桥进行测量，但是在题图所示的电桥线路中，当待测电感线圈采用并联等效电路（即图中 L_x、r_x 改为并联）时，平衡条件就变为

$$R_1 \cdot R_s = [R_2 - j/(\omega C_s)] \cdot [r_x \cdot (j\omega L_x)]/[r_x + j\omega L_x]$$

经过适当运算后便可获得以下简单关系

$$L_x = R_1 R_s C_s;\ r_x = R_1 R_s / R_2$$

由此可得出结论：平衡时为了使被测参数与已知参数具有简单明确的关系，当被测臂与比较臂处于相对臂位置时，它们应具有不同的连接方式，即一个臂采用并联结构，另一臂就应采用串联结构，反之亦然。

5－51　图 5－87 是为消除分布电容的影响而设计的一种脉冲分压器。C_1、C_2、R_1、R_2 满足一定条件时，这分压器就能和直流电路一样，使输入电压 U_1 与输出电压 U_2 之比等于电阻之比：$\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$，而和频率无关。试求电容、电阻应满足的条件。

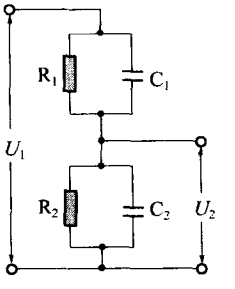


图 5－87　习题 5－51

解：本题要求分压器两段阻抗之比 $Z_1/Z_2 = R_1/R_2$，其中

$$Z_1 = R_1/\sqrt{1 + (\omega C_1 R_1)^2},\ Z_2 = R_2/\sqrt{1 + (\omega C_2 R_2)^2}$$

即

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{R_1/\sqrt{1+(\omega C_1R_1)^2}}{R_2/\sqrt{1+(\omega C_2R_2)^2}}=\frac{R_1}{R_2}$$

所以,由此可得

$$1+(\omega C_1R_1)^2=1+(\omega C_2R_2)^2$$

故

$$C_1R_1=C_2R_2$$

这就是分压器与频率无关的条件。

5-52 在环形铁芯上绕有两个线圈,一个匝数为 N,接在电动势为 ε 的交流电源上;另一个是均匀圆环,电阻为 R,自感很小,可略去不计。在这环上有等距离的 3 点:a、b 和 c。G 是内阻为 r 的交流电流计。

(1) 如图 5-88(a)连接,求通过 G 的电流;

(2) 如图 5-88(b)连接,求通过 G 的电流。

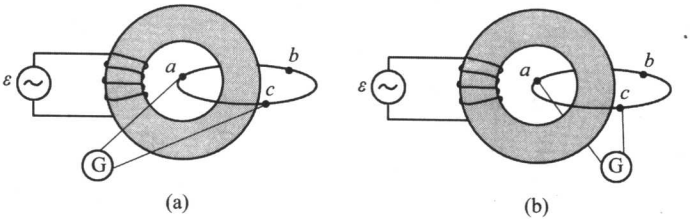


图 5-88 习题 5-52

解:在外电源 ε 的作用下,原线圈在铁芯中产生变化的磁通,此磁通全部通过另一圆环,在略去原线圈电阻的情况下,$\varepsilon=N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$,即$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\frac{\varepsilon}{N}$。圆环内的感应电动势由电磁感应定律得$|\varepsilon_i|=|-\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t|=\frac{\varepsilon}{N}$。

(1) 如图 5-88(a)所示,在 a、c 两点连上电流计后,感应电动势不变,因此圆环中的感应电流为

$$I=\frac{\varepsilon_i}{\left[\frac{2}{3}R+\frac{rR/3}{r+R/3}\right]}=\frac{3(3r+R)\varepsilon}{NR(9r+2R)}$$

再由 $I_Gr=\frac{rR/3}{r+R/3}\cdot I$ 得电流计的电流

$$I_G=\frac{R/3}{r+R/3}\cdot I=\frac{3\varepsilon}{N(9r+2R)}$$

(2) 同理,如图 5-88(b)所示中的感应电流和流过电流计的电流分别为

$$I=\frac{\varepsilon_i}{\left[\frac{R}{3}+\frac{2rR/3}{r+2R/3}\right]}=\frac{3(3r+2R)\varepsilon}{NR(9r+2R)}$$

$$I_G=\frac{2R/3}{r+2R/3}\cdot I=\frac{6\varepsilon}{N(9r+2R)}$$

5-53 在图 5-89 的滤波电路中,在 $\nu=100\mathrm{Hz}$ 的频率下欲使输出电压 U_2 为输入

电压 U_1 的 1/10，求此时抗流圈自感 L，已知 $C_1=C_2=10\mu F$。

解：如图 5－89 所示，U_2 是在 LC_2 串联电路中 C_2 上取出，故

$$\frac{\tilde{U}_2}{\tilde{U}_1}=\frac{\tilde{Z}_{C_2}}{\tilde{Z}_L+\tilde{Z}_{C_2}}=-\frac{j\frac{1}{\omega C_2}}{\left[j\omega L-j\frac{1}{\omega C_2}\right]}=\frac{1}{\omega^2LC_2-1}e^{j\pi}$$

所以

$$\frac{U_2}{U_1}=\frac{1}{\omega^2LC_2-1}$$

又根据题意 $U_2/U_1=1/10$，所以

$$L=11/\omega^2C_2=11/[(2\pi\times100)^2\times10^{-5}]\approx2.8H$$

5－54 图 5－90 为电流高通型三级 RC 相移电路。设输入信号电流为 $i(t)=I\cos\omega t$，输出信号电流为 $i_3(t)=I_3\cos(\omega t+\varphi_3)$，$\varphi_3$ 值为电流相移量，电流传输系数 $\eta=I_3/I$。

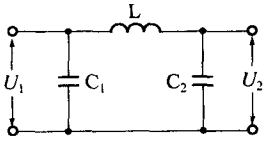


图 5－89 习题 5－53

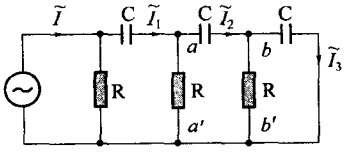


图 5－90 习题 5－54

(1) 相移量 φ_3 应该是正值还是负值？

(2) 证明：$\tilde{I}_3=\dfrac{(\omega CR)^3}{\omega CR[(\omega CR)^2-5]+j[1-6(\omega CR)^2]}\tilde{I}$

(3) 算出当 $\omega CR=1$ 时的相移量 φ_3 值及传输系数 η；

(4) 证明：相移量达到 π 值的频率条件为 $\nu_0=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{6}RC}$，此时 $\eta=\dfrac{1}{29}$；

(5) 已知 $R=10k\Omega$，$C=0.01\mu F$，算出振荡频率 ν_0。

解：(1) 题图电路中 $\tilde{I}_2$ 和 $\tilde{I}_3$ 的关系是并联电路的总电流和支路电流之间的关系，于是

$$\tilde{I}_3=\frac{R}{R+\tilde{Z}_C}\tilde{I}_2=\frac{R}{R-jZ_C}\tilde{I}_2=\frac{R(R+jZ_C)}{R^2+Z_C^2}\tilde{I}_2$$

所以

$$\varphi_{i3}-\varphi_{i2}=\arctan\left(+\frac{Z_C}{R}\right)=\arctan\left(+\frac{1}{R\omega C}\right)$$

即 i_3 的位相超前于 i_2。以此类推，i_2 超前于 i_1，i_1 超前于 i，即 i_3 对 i 的相移量 φ_3 是正值。

(2) 根据等效电流源定理，图 5－90 中 $a-a'$ 左端等效电流源如图 5－91 所示，其中

$$\tilde{I}_{01}=\frac{R}{R-jZ_C}\tilde{I},\ \tilde{Z}_1=\frac{R(R-jZ_C)}{2R-jZ_C}\qquad①$$

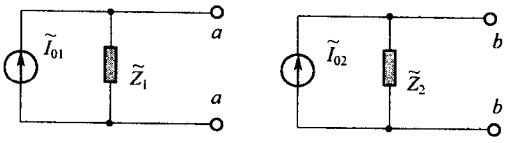


图 5－91　习题 5－54 附图

图 5－90 中 $b-b'$左端等效电流源如图 5－91 所示，其中

$$\tilde{I}_{02}=\frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_1-\mathrm{j}Z_C}\tilde{I}_{01},\ \tilde{Z}_2=\frac{R(\tilde{Z}_1-\mathrm{j}Z_C)}{R+\tilde{Z}_1-\mathrm{j}Z_C} \qquad ②$$

将式①代入式②整理即得

$$\tilde{I}_{02}=\frac{R^2}{R^2-Z_C^2-\mathrm{j}3RZ_C}\tilde{I},\ \tilde{Z}_2=\frac{R^3-RZ_C^2-\mathrm{j}3R^2Z_C}{3R^2-Z_C^2-\mathrm{j}4RZ_C}$$

由此可得

$$\tilde{I}_3=\frac{\tilde{Z}_2}{\tilde{Z}_2-\mathrm{j}Z_C}\tilde{I}_{02}=\frac{(\omega CR)^3}{(\omega CR)[(\omega CR)^2-5]+\mathrm{j}[1-6(\omega CR)^2]}\tilde{I}$$

(3) 当 $\omega CR=1$ 时，由上式立得

$$\tilde{I}_3/\tilde{I}=\frac{1}{-4-5\mathrm{j}}=\frac{-4+5\mathrm{j}}{41}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi-\arctan 5/4)}}{41\mathrm{e}^{\mathrm{j}0}}$$

所以

$$\eta_i=\frac{I_3}{I}=\sqrt{\left(\frac{-4}{41}\right)^2+\left(\frac{5}{41}\right)^2}=15.6\%$$

相移量

$$\varphi_3=\pi-\arctan\frac{5}{4}=128°40'$$

(4) 由(2)可得

$$\tan\varphi_3=-\frac{1-6(\omega CR)^2}{(\omega CR)[(\omega CR)^2-5]}$$

根据题意，令 $\varphi_3=\pi$，$\tan\varphi_3=0$，由上式可得频率条件

$$1-6(\omega CR)^2=0\ \text{即}\ \nu=\nu_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{6}RC}$$

将 $\omega CR=1/\sqrt{6}$ 代入(2)的结果得

$$\tilde{I}_3/\tilde{I}=\frac{(1/\sqrt{6})^3}{1/\sqrt{6}\left[\frac{1}{6}-5\right]+\mathrm{j}[1-1]}=\frac{1}{29}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi}$$

所以

$$\eta=1/29$$

(5) 将 $R=10\mathrm{k}\Omega$，$C=0.01\mu\mathrm{F}$，代入 $\nu_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{6}RC}$，得 $\nu_0=6.5\times10^2\mathrm{Hz}$。

5－55 一单相电动机的铭牌告诉我们 $U=220\text{V}$，$I=3.0\text{A}$，$\cos\varphi=0.8$，试求电动机的视在功率、有功功率和绕阻的电阻。

解：视在功率

$$S = UI = 220 \times 3 = 660\text{W}$$

有功功率

$$P_{有功} = UI\cos\varphi = 660 \times 0.8 = 528\text{W}$$

绕阻电阻

$$Z = U/I = 220/3 = 73.3\Omega$$

5－56 一个 110V、50Hz 的交流电源供给一电路 330W 的功率，功率因数为 0.6，且电流相位落后于电压。

(1) 若在电路中并联一电容器使功率因数增到 1，求电容器的电容；

(2) 这时电源供给多少功率？

解：(1) 原电路的电流

$$I = \bar{P}/U\cos\varphi = 330/110 \times 0.6 = 5\text{A}$$

为使功率因数增到 1，并联电容中的电流 I_C 应与用电器电流的无功分量相等，即

$$I_C = U \cdot \omega \cdot C = I\sin\varphi = 5 \times \sqrt{1-0.6^2} = 4\text{A}$$

所以

$$C = \frac{4}{U\omega} = \frac{4}{110 \times 314} = 1.2 \times 10^2 \mu\text{F}$$

(2) 因并联电容中不消耗功率，所以电源供给的功率不变，仍为 330W。

5－57 一电路感抗 $x_L=8.0\Omega$，电阻 $R=6.0\Omega$，串接在 220V、50Hz 的市电上，问：

(1) 要使功率因数提高到 95%，应在 LR 上并联多大的电容？

(2) 这时流过电容的电流是多少？

(3) 若串联电容，情况如何？

解：(1) 参看并联电路的电流电压矢量图 5－92，从图中可以看出

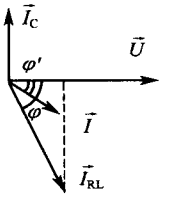


图 5－92 习题 5－57

$$I_C = I_{RL}\sin\varphi - I\sin\varphi' = U \cdot \omega C$$

所以

$$\dot{C} = (I_{RL}\sin\varphi - I\sin\varphi')/(\omega U)$$

又因并联电容前后，电路消耗的功率不变，故

$$P = UI_{RL}\cos\varphi = UI\cos\varphi' \text{ 即 } I = I_{RL}\cos\varphi/\cos\varphi'$$

所以

$$C = I_{RL}(\sin\varphi - \cos\varphi \cdot \tan\varphi')/(\omega U)$$

其中

$$I_{RL} = U/\sqrt{R^2 + x_L^2} = 220/\sqrt{6^2 + 8^2} = 22\text{A}$$

$$\sin\varphi = x_L/\sqrt{R^2 + x_L^2} = 0.8$$

$$\tan\varphi' = \pm 0.33(\because \cos\varphi' = 0.95)$$

所以

$$C = 22(0.8 \mp 0.6 \times 0.33)/(314 \times 220) = 192\mu F \text{ 或 } 320\mu F$$

(2) 电容器中的电流

$$I_C = U\omega C = 13A \text{ 或 } 22A$$

(3) 串联情况下 $\cos\varphi' = 0.95$ 时，C 值由以下关系确定：$x_L - x_C = R\tan\varphi'$ 即 $x_C = 1/(\omega C) = x_L - R\tan\varphi'$，所以

$$C = 1/[\omega \cdot (x_L - R\tan\varphi')] = 1/[314 \times (8 \mp 6 \times 0.33)] = 525\mu F \text{ 或 } 320\mu F$$

5-58 一发电机沿干线输送电能给用户，此发电机电动势为 ε，角频率为 ω，干线及发电机的电阻和电感各为 R_0 和 L_0，用户电路中的电阻和电感各为 R 和 L，求：

(1) 电源所供给的全部功率 P；

(2) 用户得到的功率 P'；

(3) 整个装置的效率 $\eta = P'/P$。

解：(1) 电源所供给的全部功率

$$P = I^2(R_0 + R) = \varepsilon^2(R_0 + R)/[(R_0 + R)^2 + \omega^2(L_0 + L)^2]$$

(2) 用户得到的功率

$$P' = I^2R = \varepsilon^2R/[(R_0 + R)^2 + \omega^2(L_0 + L)^2]$$

(3) 整个装置的效率

$$\eta = P'/P = R/(R_0 + R)$$

5-59 输电干线的电压 $U = 120V$，频率为 50.0Hz。用户照明电路与抗流圈串联后接于干线间，抗流圈的自感 $L = 0.0500H$，电阻 $R = 1.00\Omega$(见图 5-93)，问：

(1) 当用户共用电 $I_0 = 2.00A$ 时，他们电灯两端的电压 U' 等于多少？

(2) 用户电路(包括抗流圈在内)能得到最大的功率是多少？

(3) 当用户电路中发生短路时，抗流圈中消耗功率多少？

解：(1) 如图 5-93 所示，设用户电路的总阻值为 R'，则电阻($R_0 = R + R'$)上的压降

$$U_{R0} = \sqrt{U^2 - I^2x_L^2}$$

$$= \sqrt{120^2 - 2^2 \times (314 \times 0.05)^2} = 116V$$

所以

$$U' = U_{R0} - IR = 114V$$

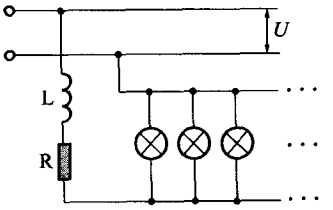


图 5-93 习题 5-59

(2) 因用户电路(包括抗流圈在内)能得到的功率

$$P' = I^2R_0 = U^2R_0/Z^2 = U^2R_0/(x_L^2 + R_0^2)$$

是 $R_0 = R + R'$ 的函数，令 $dP'/dR_0 = U^2(Z^2 - 2R_0^2)/Z^4 = 0$ 得

$$R_0 = R + R' = x_L = \omega L = 15.5\Omega$$

故用户电路(包括抗流圈在内)能得到最大的功率

$$P_{max} = U^2/2R_0 = 120^2/(2\times 15.5) = 464\text{W}$$

(3) 当用户电路中发生短路时,抗流圈中消耗的功率

$$P = U^2R/(x_L^2 + R^2) = 120^2/(1 + 15.5^2) = 59.6\text{W}$$

5-60 图 5-94 中已知电阻 $R=20\Omega$,3 个伏特计 V_1、V_2、V 的读数分别为 $U_1=91\text{V}$,$U_2=44\text{V}$,$U=120\text{V}$,求元件 Z 中的功率。

解:作电流电压矢量图如图 5-95。因 $\dot{I}=\dot{U}_2/R$ 与 $\dot{U}_2$ 同相位,故阻抗 $\dot{Z}$ 的幅角 φ 就是 $\dot{U}_1$ 和 $\dot{U}_2$ 之间的夹角 $\varphi=\pi-\alpha$。

根据余弦定理:$U^2=U_1^2+U_2^2-2U_1U_2\cos\alpha$ 得

$$\cos\alpha = [(U_1^2 + U_2^2) - U^2]/2U_1U_2 = -\cos\varphi$$

所以元件 Z 中消耗的功率

$$P_Z = U_1I\cos\varphi = U_1(U_2/R)\cos\varphi = [U^2 - (U_1^2 + U_2^2)]/2R = 105\text{W}$$

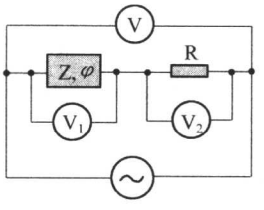


图 5-94 习题 5-60

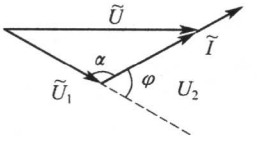


图 5-95 习题 5-60 附图

5-61 图 5-96 中已知电阻 $R=50\Omega$,3 个电流计 A_1、A_2、A 的读数分别为 $I_1=2.8\text{A}$,$I_2=2.5\text{A}$,$I=4.5\text{A}$,求元件 Z 中的功率。

解:作电流电压矢量图如图 5-97。因 $\dot{I}_2$ 与电源电压 $\dot{U}$ 同相位,所以 $\dot{I}_1$ 与 $\dot{I}_2$ 的夹角 φ 就是阻抗 $\dot{Z}$ 的幅角,即 $\varphi=\pi-\alpha$。

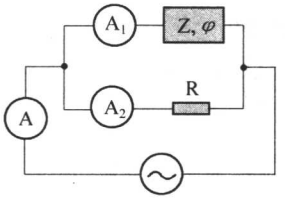


图 5-96 习题 5-61

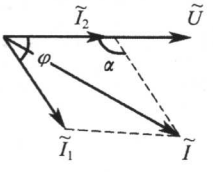


图 5-97 习题 5-61 附图

根据余弦定理:$I^2=I_1^2+I_2^2-2I_1I_2\cos\alpha$ 得

$$\cos\alpha = [(I_1^2 + I_2^2) - I^2]/2I_1I_2 = -\cos\varphi$$

所以元件 Z 中消耗的功率

$$P_Z = UI_1\cos\varphi = I_1I_2R\cos\varphi = R[I^2 - (I_1^2 + I_2^2)]/2 = 154\text{W}$$

5-62 详见本章典型例题例 5-5。

5－63 计算 LR 并联电路的有功电阻 r。

解：根据阻抗并联公式得

$$\tilde{Z}_{并}=\frac{R\cdot(j\omega L)}{R+j\omega L}=\frac{R(\omega L)^2+jR^2\omega L}{R^2+(\omega L)^2}=r+jx$$

所以

$$r=R(\omega L)^2/[R^2+(\omega L)^2]$$

5－64 平行板电容器中的电介质介电常数 $\varepsilon=2.8$，因电介质漏电而使电容器在 50Hz 的频率下有损耗角 $\delta=1°$，求电介质的电阻率。

解：如图 5－98 所示，采用并联等值电路，其复导纳

$$\tilde{Y}=g-jb=1/R+j\omega C$$

根据定义

$$\tan\delta=g/b=1/(R\omega C)$$

所以

$$R=1/(\omega C\cdot\tan\delta)$$

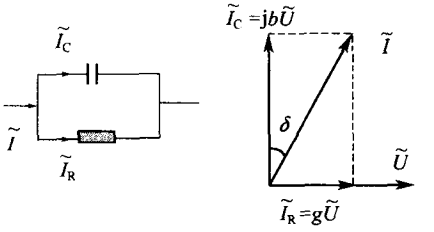


图 5－98 习题 5－64

又因为平行板电容器电容量 $C=\varepsilon\varepsilon_0 S/d$，所以

$$R=\frac{1}{2\pi\nu\varepsilon\varepsilon_0\tan\delta}\cdot\frac{d}{S}=\rho\frac{d}{S}$$

其中 ρ 为所求的电阻率，其值为

$$\rho=\frac{1}{2\pi\nu\varepsilon\varepsilon_0\tan\delta}=7.4\times10^9\Omega\cdot m$$

5－65 在一电感线圈的相邻匝与匝间，不相邻匝与匝间，接线端间，与地间都存在小的“分布电容”。这许多小电容的总效应可以用一个适当大小的电容 C_0 并联在线圈两端来表示(见图 5－99(a))。分布电容的数值取决于线圈的尺寸及绕法。分布电容的效应在频率愈高时愈显著（根据图 5－99（a）分析一下，为什么?），试证明：如果我们仍把电感线圈看成纯电感 L′和有功电阻 r′串联的话（见图 5－99（b)），由于存在分布电容 C_0，则

$$L'=\frac{L}{1-\omega^2LC_0},\quad r'=\frac{r}{(1-\omega^2LC_0)^2}$$

从而

$$Q'=\frac{\omega L'}{r'}=Q(1-\omega^2LC_0)$$

即线圈的表观电感 L′增加，而表观 Q 值下降(设 $Q\gg1$)。

解：见图 5－99，因两者等效，所以在同样电压作用下，流过它们的总电流 $\tilde{I}$ 应大小相等、位相相同。图 5－100 中同时绘出了两等效电路的电流电压矢量图。由该图知，对于图 5－99(b)所示的电路

$$\tan\varphi'=U'_L/U'_r=\omega L'/r'$$

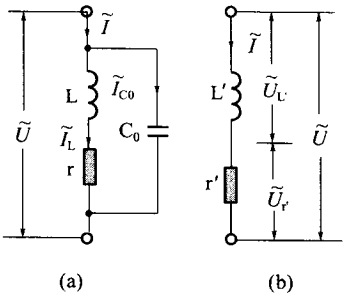


图 5－99　习题 5－65

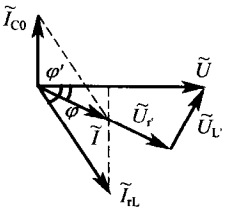


图 5－100　习题 5－65

而对于图 5－100(a)所示的电路

$$\tan\varphi' = (I_{rL}\sin\varphi - I_{C0})/I_{rL}\cos\varphi$$

其中

$$I_{rL} = U/Z_{rL},\ \sin\varphi = \omega L/Z_{rL},\ \cos\varphi = r/Z_{rL},\ I_{C0} = U\omega C_0$$

所以

$$\tan\varphi' = (\omega L - Z_{rL}^2 \cdot \omega C_0)/r = \omega L'/r' \qquad ①$$

另外，两等效电路消耗的功率应相等，即

$$UI_{rL}\cos\varphi = UI\cos\varphi'$$

所以

$$r/(r^2 + \omega^2 L^2) = r'/(r'^2 + \omega^2 L'^2) \qquad ②$$

联立求解式①、式②两式，考虑到 $Q = \omega L/r \gg 1$，得

$$L' = \frac{L}{1 - \omega^2 LC_0},\ r' = \frac{r}{(1 - \omega^2 LC_0)^2}$$

$$Q' = \frac{\omega L'}{r'} = \frac{\omega L}{r}(1 - \omega^2 LC_0) = Q(1 - \omega^2 LC_0)$$

5－66　详见本章典型例题例 5－6。

5－67　串联谐振电路接在 $\varepsilon = 5.0\text{V}$ 的电源上，谐振时电容器上的电压等于 150V，求 Q 值。

解：在电容器内损耗很小的情况下，串联谐振电路的品质因数 Q_r 与电感元件的 Q_L 近似相等，即

$$Q_r \approx Q_L = \omega_0 L/R = U_L/U_R$$

又谐振时，$U_L = U_C = 150\text{V}$，$U_R = \varepsilon = 5.0\text{V}$，所以

$$Q_r = U_L/U_R = 150/5.0 = 30$$

5－68　串联谐振电路的谐振频率 $\nu_0 = 600\text{kHz}$，电容 $C = 370\text{pF}$，这频率下电路的有功电阻 $r = 15\Omega$，求电路的 Q 值。

解：串联谐振时电路的容抗

$$x_{0C} = 1/(2\pi\nu_0 C) = 720\Omega$$

所以，电路的 Q 值

$$Q_r = \omega_0 L/r = x_{0C}/r = 720/15 = 48$$

5－69 将一个输入 220V、输出 6.3V 的变压器改绕成输入 220V、输出 30V 的变压器，现拆出次级线圈，数出圈数是 38 匝，应该绕成多少匝？

解：设 N_2 和 N_2' 分别为输出电压 $\varepsilon_2 = 6.3\text{V}$ 和 $\varepsilon_2' = 30\text{V}$ 的次级绕组匝数，按 $N_1/N_2 = \varepsilon_1/\varepsilon_2$ 和 $N_1/N_2' = \varepsilon_1/\varepsilon_2'$ 得

$$N_2' = N_2 \frac{\varepsilon_2'}{\varepsilon_2} = 38 \times \frac{30}{6.3} = 181 \text{ 匝}$$

5－70 有一变压器能将 100V 升高到 3300V，将一导线绕过其铁芯，两端接在伏特计上（见图 5－101）。此伏特计的读数为 0.5V，问变压器二绕组的匝数（设变压器是理想的）。

解：因伏特计读数表示每匝线圈中感应的电势值。所以对于图示的理想变压器，原、副绕组的匝数分别为

$$N_1 = 100/0.5 = 200 \text{ 匝}$$

$$N_2 = 3300/0.5 = 6600 \text{ 匝}$$

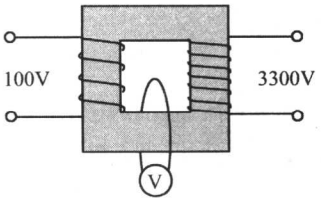


图 5－101　习题 5－70

5－71 理想变压器匝数比为 $N_2/N_1 = 10$，交流电源电压为 110V，负载 1.0kΩ，求两线圈中的电流。

解：对于理想变压器，有 $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = N_2/N_1 = 10$，$I_2/I_1 = N_1/N_2 = 0.1$

所以

$$\varepsilon_2 = 10\varepsilon_1 = 10 \times 110 = 1100(\text{V})$$

$$I_2 = \varepsilon_2/R_2 = 1100/10^3 = 1.1\text{A};\ I_1 = I_2/0.1 = 11\text{A}$$

5－72 某电源变压器的原线圈是 660 匝，接在电压为 220V 的电源上，问：

（1）要在 3 个副线圈上分别得到 5.0V、6.3V 和 350V 的电压，3 个副线圈各应绕多少匝？

（2）设通过 3 个副线圈的电流分别为 3.0A、3.0A 和 280mA，通过原线圈的电流是多少？

解：（1）在理想变压器的假设条件下，各绕组中每伏感应电动势所对应的匝数为 660/220＝3 匝/V。所以对于 3 个要得到 5.0V、6.3V 和 350V 的电压的副线圈应绕的匝数分别为

$N_2 = 5.0 \times 3 = 15$（匝），$N_2' = 6.3 \times 3 = 19$（匝），$N_2'' = 350 \times 3 = 1050$（匝）。

（2）根据理想变压器的磁势平衡关系

$$\tilde{I}_1 N_1 = -(\tilde{I}_2 N_2 + \tilde{I}_2' N_2' + \tilde{I}_2'' N_2'')$$

在各副线圈的负载为纯电阻的情况下，$\tilde{I}_2$、$\tilde{I}_2'$ 和 $\tilde{I}_2''$ 的位相相同，且与原线圈电流 $\tilde{I}_1$ 的相位差为 π。所以通过原线圈的电流值为

$$\tilde{I}_1 = (\tilde{I}_2 N_2 + \tilde{I}_2' N_2' + \tilde{I}_2'' N_2'')/N_1 = 0.6\text{A}$$

5－73 如图 5－102 所示，输出变压器的次级有中间抽头，以便接 3.5Ω 的扬声器或接 8Ω 的扬声器都能使阻抗匹配，次级线圈两部分匝数之比$\frac{N_1}{N_2}$应为多少？

解：设输出变压器信号源的内阻为 r。根据定义，阻抗匹配时，负载电阻与变压器原、副线圈的匝数有以下关系

$$r = 8[N/(N_1)]^2 = 3.5(N/N_2)^2$$

所以

$$N_1/N_2 = 1.51$$

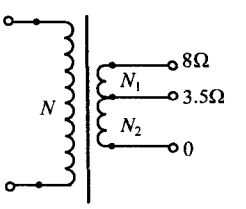


图 5－102 习题 5－73

5－74 若需绕制一个电源变压器，接 220V、50Hz 的输入电压，要求有 40V 和 6V 的两组输出电压，试问原线圈及两组副线圈的匝数。已知铁芯的截面积为 8.0cm^2，最大磁感应强度 B_{max}选取 12000Gs。

解：对于理想变压器，可设铁芯磁通 $\Phi = \Phi_m \sin\omega t$，$\Phi$ 在各绕组中产生的感应电动势：$\varepsilon_i = N_i\omega\Phi_m \cos\omega t$，其中 $i = 1,2,3$。所以

$$\varepsilon_{im} = N_i\omega\Phi_m = N_i \cdot \omega B_m \cdot S$$

考虑到交流电路中电压的给定值通常是指有效值。故原线圈的匝数 N_1 为

$$N_1 = \sqrt{2}\varepsilon_1/(2\pi\nu B_m S) = 1032 \text{ 匝}$$

所以

$$N_2 = \varepsilon_2 \cdot (N_1/\varepsilon_1) = 188 \text{ 匝}$$

$$N_3 = \varepsilon_3 \cdot (N_1/\varepsilon_1) = 28 \text{ 匝}$$

5－75 在可控硅的控制系统中常用到 RC 移相电桥电路（见图 5－103），电桥的输入电压由变压器次级提供，输出电压从变压器中心抽头 O 和 D 之间得到。试证明输出电压 $\tilde{U}_{OD}$的相位随 R 改变，但其大小保持不变。

解：作桥式移相电路的电流电压矢量图，如图 5－104 所示。由于无论电阻 R 如何改变，R 和 C 上的电压矢量 $\tilde{U}_{AD}$和 $\tilde{U}_{DB}$始终相互垂直，且 $\tilde{U}_{AD} + \tilde{U}_{DB} = \tilde{U}_{AB}$为常量。所以当 R 变化时，D 点的轨迹是图 5－104 中的半圆。故输出电压 $\tilde{U}_{OD}$只是相位随 R 变化，而大小不变。

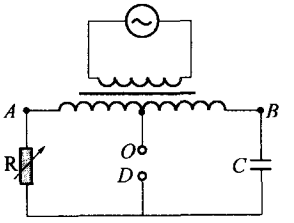


图 5－103 习题 5－75

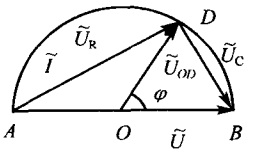


图 5－104 习题 5－75 附图

5－76 导纳电桥的原理性电路如图 5－105 所示，其中两个臂 1 和 2 是有抽头的变压器副线圈，电源通过这变压器耦合起来。另外两个臂一个是电阻 R，一个是电容 C 和待测电感元件（其等效电路示于右旁阴影区内）的并联，R 和 C 都是可调的。试证明：电桥

达到平衡时，待测元件的 Q 值可通过下式算出：$Q=\dfrac{N_2}{N_1}\omega CR$，其中 N_1、N_2 分别是 1、2 两臂的匝数。

证明：如图示，电桥平衡时，可调参数 C 应使被测臂的各参数满足并联谐振条件，使其等效电阻为一纯电阻，即其复导纳 $\widetilde{Y}=(1/R_x)+\mathrm{j}[\omega C-1/(\omega L_x)]$ 的虚部为零。所以

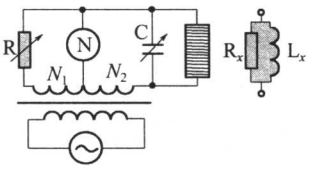


图 5－105　习题 5－76

$$\omega L_x = 1/(\omega C) \qquad ①$$

此外，电桥平衡时，另一可调参数 R 应满足以下条件：

$$R_x = R\cdot(N_2/N_1) \qquad ②$$

由于被测电感采用并联等效电路，所以根据定义其 Q 值为

$$Q = b_x/g_x \qquad ③$$

将式①、式②代入式③得　　$Q=b_x/g_x=R_x/(\omega L_x)=(N_2/N_1)\cdot R\omega C$

5－77　详见本章典型例题例 5－7。

5－78　三相交流电的线电压为 380V，负载是不对称的纯电阻，$R_A=R_B=22\Omega$，$R_C=27.5\Omega$，做星形连接。

(1) 求中线电流；

(2) 求各相的相电压；

(3) 若中线断开，各相电压将变为多少？

解：(1) 因为 $I_A=U_\varphi/R_A=10\mathrm{A}$，$I_B=10\mathrm{A}$，$I_C=8\mathrm{A}$，又由于各相负载是纯电阻，故电流电压矢量图如图 5－106(a)所示。由该图知，中线电流

$$I_0 = 10-8 = 2\mathrm{A}$$

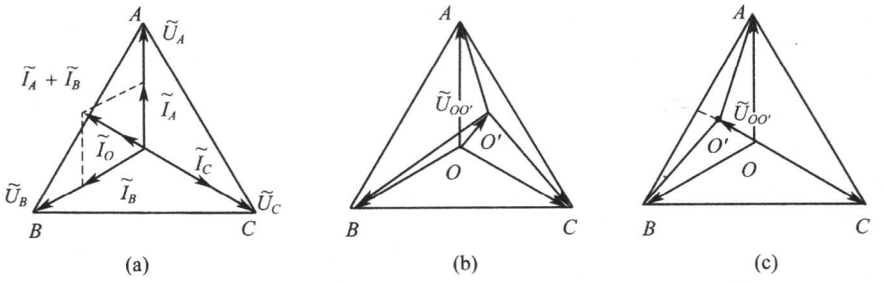


图 5－106　习题 5－78

(2) 接有中线时，各相负载上的电压仍是对称三相电压，其值为 220V。

(3) 因中线断开时，负载中点 O' 在电流电压矢量图中对电源中点 O 必有一定的偏离，如图 5－106(b)所示。由该图知，各项负载电压

$$\widetilde{U}_{O'A} = \widetilde{U}_{OA} - \widetilde{U}_{OO'} \qquad ①$$

$$\widetilde{U}_{O'B} = \widetilde{U}_{OB} - \widetilde{U}_{OO'} \qquad ②$$

$$\widetilde{U}_{O'C} = \widetilde{U}_{OC} - \widetilde{U}_{OO'} \qquad ③$$

考虑到各相负载电流之矢量和为零，即

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = \widetilde{U}_{O'A}/R_A + \widetilde{U}_{O'B}/R_B + \widetilde{U}_{O'C}/R_C = 0$$

的条件可得

$$\widetilde{U}_{OO'} = \frac{\left[\dfrac{\widetilde{U}_{OA}}{R_A} + \dfrac{\widetilde{U}_{OB}}{R_B} + \dfrac{\widetilde{U}_{OC}}{R_C}\right]}{\left[\dfrac{1}{R_A} + \dfrac{1}{R_B} + \dfrac{1}{R_C}\right]}$$

式中：$\widetilde{U}_{OA}$、$\widetilde{U}_{OB}$和$\widetilde{U}_{OC}$是电源的相电压，且是对称三相电压，有效值为220V。把它们及R_A、R_B、R_C的值代入$\widetilde{U}_{OO'}$的表示式中可算出：$\widetilde{U}_{OO'}$的大小等于15.8V，位相上与$\widetilde{U}_{OC}$差180°。所以，对于题设的具体条件，各相负载电压的矢量图如图5－106(c)所示，参考图所给的几何关系，根据式①、式②、式③可算出各相负载电压分别为

$$\widetilde{U}_{O'A} = \sqrt{(U_{OA} \cdot \cos 30°)^2 + (U_{OA} \cdot \sin 30° - U_{OO'})^2} = 212\text{V}$$

$$\widetilde{U}_{O'B} = 212\text{V}$$

$$\widetilde{U}_{O'C} = U_{OC} + U_{OO'} = 236\text{V}$$

第 6 章　麦克斯韦电磁理论
电磁波　电磁单位制

6.1　基本要求与教学难点

1. 基本概念的要求

了解麦克斯韦的两个基本假设，理解位移电流的概念；了解麦克斯韦方程组的应用和物理意义；了解平面电磁波的基本性质；理解能流密度，坡印廷矢量的概念；了解偶极振子辐射电磁波的物理过程和物理图像，了解电磁波谱；了解能量在电路里的传播形式；理解准恒电路和迅变电磁场的概念。

2. 基本方法的要求

(1) 会求位移电流；能求解简单的电磁场问题。

(2) 能应用能流密度的概念解决能量传播的问题。

3. 教学难点

理解麦克斯韦方程的对称性问题；电磁场的动量。

6.2　典 型 例 题

例 6－1：如图 6－1 所示，同心球形电容器中有介电常数为 ε 和导电率为 σ 的漏电介质。电容器充电后遂即缓慢放电，这时在介质中有径向衰减电流通过。求此过程中位移电流密度与传导电流密度的关系，以及磁场的分布。

解：令极板带电量为 $q(t)$(内板为正)，则由高斯定理可得极板间的电位移矢量

$$\vec{D}=\frac{q(t)}{4\pi r^2}\hat{r}$$

则位移电流密度

$$\vec{j}_{\mathrm{d}}=\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}=\frac{1}{4\pi r^2}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\hat{r}$$

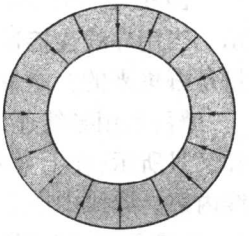


图 6－1　例 6－1

设传导电流为 I_0，则传导电流密度

$$\vec{j}_0=\frac{I_0}{4\pi r^2}\hat{r}=-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\frac{1}{4\pi r^2}\hat{r}$$

(其中因电荷在减少，所以 $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}<0$)

可以看出传导电流密度与位移电流密度大小相等而方向相反，所以极板间无磁场。

附：由传导电流密度：

$$\vec{j}_0 = \sigma\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}\vec{D} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q(t)}{4\pi r^2}\hat{r}$$

及

$$\vec{j}_0 = \frac{I_0}{4\pi r^2}\hat{r} = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\frac{1}{4\pi r^2}\hat{r}$$

联立，可进一步求出 $q(t)$

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}t}$$

例 6－2：如图 6－2 所示，圆柱形导线长为 l，电阻为 R，载有电流 I。求证：电磁场通过表面 Σ 输入导线的功率 $\iint \vec{E}\times\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{\Sigma}$ 等于焦耳热功率 I^2R。

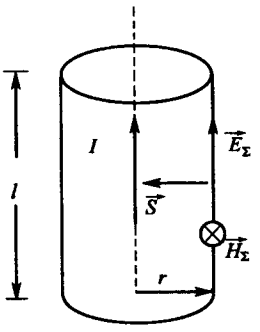


图 6－2　例 6－2

证明：根据边界条件 $E_{1t}=E_{2t}$，$H_{1t}=H_{2t}$得在圆柱形导体表面电场强度与磁场强度的切线分量应连续

$$E_\Sigma = E_{1t} = E_{2t} = \frac{U}{l}$$

$$H_\Sigma = H_{1t} = H_{2t} = \frac{I}{2\pi r}$$

（方向如图 6－2 所示，式中足标“1”代表柱形导线，足标“2”代表导线周围电介质。）由于电场的法线分量只产生沿柱体表面的能流密度，所以输入导线的功率为

$$\iint_\Sigma(\vec{E}\times\vec{H})\cdot\mathrm{d}\vec{\Sigma} = \iint_\Sigma E_\Sigma H_\Sigma\cdot\mathrm{d}\Sigma = \frac{U}{l}\cdot\frac{I}{2\pi r}\cdot 2\pi rl = UI = I^2R$$

例 6－3：考虑两个等量异号电荷组成的系统，它们在空间形成静电场如图 6－3 所示。当用导线连接这两个电荷，使之放电，导线上将产生焦耳热。试定性说明，这部分能量是哪里来的？能量是通过什么途径传递到放电导线中去的？

解：当用导线连接这两个电荷使之放电，放电电流产生的磁场方向如图 6－4 中圆点和叉号所示（在上方向外，在下方向内），所以空间的电磁能流方向如图中虚线所示流向导线内部。导线中产生的焦耳热的能量来源于两个电荷系统存储在空间电场中的电场能量，能量是通过电磁能流的方式从空间进入导线内部，转化为导线中的焦耳热能。

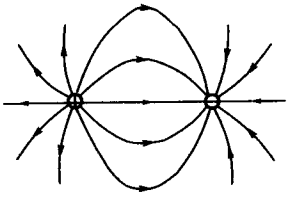


图 6－3　例 6－3

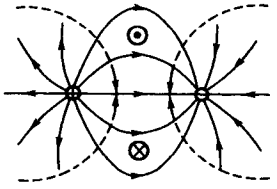


图 6－4　例 6－3 附图

6.3 思考题详解

6-1 对于镜像反射变换来说，电矢量 $\vec{E}$ 是极矢量，磁矢量 $\vec{B}$ 是轴矢量，

(1) 它们的旋度各属于哪类矢量？

(2) 它们的散度在镜像反射中的变化如何？

答：设以 xy 平面作镜像，由极矢量和轴矢量特性可知，镜像电矢量的各分量分别为 $\bar{E}_x = E_x$，$\bar{E}_y = E_y$，$\bar{E}_z = -E_z$ 和镜像磁矢量的各分量分别为 $\bar{B}_x = -B_x$，$\bar{B}_y = -B_y$，$\bar{B}_z = B_z$。

(1) 镜像电矢量的旋度各分量为

$$\overline{(\nabla \times \vec{E})_x} = \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial \bar{z}} = \frac{-\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{-\partial z} = -\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) = -(\nabla \times \vec{E})_x$$

$$\overline{(\nabla \times \vec{E})_y} = \frac{\partial \bar{E}_x}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial E_x}{-\partial z} - \frac{-\partial E_z}{\partial y} = -\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}\right) = -(\nabla \times \vec{E})_y$$

$$\overline{(\nabla \times \vec{E})_z} = \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \bar{E}_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = +(\nabla \times \vec{E})_z$$

而镜像磁矢量的旋度各分量为

$$\overline{(\nabla \times \vec{B})_x} = \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{B}_y}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{-\partial B_y}{-\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = (\nabla \times \vec{B})_x$$

$$\overline{(\nabla \times \vec{B})_y} = \frac{\partial \bar{B}_x}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial \bar{y}} = \frac{-\partial B_x}{-\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} = (\nabla \times \vec{B})_y$$

$$\overline{(\nabla \times \vec{B})_z} = \frac{\partial \bar{B}_y}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{B}_x}{\partial \bar{y}} = \frac{-\partial B_y}{\partial x} - \frac{-\partial B_x}{\partial y} = -\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) = -(\nabla \times \vec{B})_z$$

所以，电矢量的旋度是轴矢量，磁矢量 $\vec{B}$ 的旋度是极矢量。

(2) 镜像电矢量的散度为

$$\overline{(\nabla \cdot \vec{E})} = \frac{\partial \bar{E}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{-\partial E_z}{-\partial z} = (\nabla \cdot \vec{E})$$

镜像磁矢量的散度为

$$\overline{(\nabla \cdot \vec{B})} = \frac{\partial \bar{B}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{B}_y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial \bar{z}} = \frac{-\partial B_x}{\partial x} + \frac{-\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{-\partial z} = -(\nabla \cdot \vec{B})$$

所以，在镜像反射中，电矢量的散度保持不变，磁矢量的散度正负反号。

6-2 在时间反演变换($t \to -t$)中，电矢量 $\vec{E}$、电偶极矩 $\vec{P}$ 不变，磁矢量 $\vec{B}$、磁矩 $\vec{m}$ 呢？

答：在时间反演变换中，电荷不变，所以电矢量 $\vec{E}$、电偶极矩 $\vec{P}$ 不变；在时间反演变换中，电荷运动方向相反(电流方向相反)，所以磁矢量 $\vec{B}$ 和磁矩 $\vec{m}$ 均会反向。

6-3 检验一下，麦克斯韦方程组中同一方程里各项对于镜像反射变换和时间反演变换的行为都是一样的。

答：麦克斯韦方程组的 4 个方程如下

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},\ \nabla \cdot \vec{B} = 0,\ \nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}$$

根据上面的分析，对于镜像反射变换第 1 个方程两边均不变，第 2 个方程两边均为轴矢量，第 3 个方程左边正负反号、而右边 0 反号仍为 0，第 4 个方程两边均为极矢量；而对于时间反演变换第 1 个方程两边均不变，第 2 个方程左边不变，右边矢量 $\vec{B}$ 反向和标量 t 正负反号也保持不变，第 3 个方程左边正负反号、而右边 0 反号仍为 0，第 4 个方程两边矢量均反向；所以，同一方程里各项对于镜像反射变换和时间反演变换的行为都是一样的，麦克斯韦方程组具有镜像反射变换和时间反演变换对称性。

6－4 磁荷 q_m 对于镜像反射变换和时间反演变换的行为应如何？

答：以磁场强度为基本量，则磁感应强度 $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$，麦克斯韦方程组的第 3 个方程的积分形式 $\oiint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$ 变换为

$$\oiint_S \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \oiint_S (-\mu_0 \vec{M}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \iiint_V (-\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}) \mathrm{d}V$$

有

$$q_m = \oiint_S (-\mu_0 \vec{M}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V (-\mu_\nabla \cdot \vec{M}) \mathrm{d}V$$

所以，磁荷 q_m 对于镜像反射变换和时间反演变换均会正负反号。

6－5 电磁波的能量中电能和磁能各占多少？

答：电磁波中电能密度为 $w_e = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2$，而磁能密度为 $w_m = \frac{1}{2}\mu\mu_0 H^2$。对于平面电磁波，电场强度和磁场强度的大小满足 $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H$，所以，电磁波的能量中电能和磁能相等 $w_e = w_m$，各占 50%。

6－6 设有一列平面电磁波正入射到理想导体（$\sigma = \infty$）的镜面上发生反射，

（1）电场和磁场在界面上应满足的边界条件分别是什么？

（2）反射时电矢量有无半波损失？磁矢量呢？

（3）入射波与反射波叠加形成驻波，反射面是电振荡的波腹还是波节？是磁振荡的波腹还是波节？

（4）在行波中电振荡和磁振荡是同相位的，在驻波中呢？

（5）设想一下，在电磁驻波中能流是怎样分布的？

答：（1）对于理想导体内部电磁场均为 0，但存在表面电荷和表面电流，所以电场的边界条件为 $\vec{E}_\mathrm{t} = 0$，$D_\mathrm{n} = \sigma_\mathrm{s}$，而磁场的边界条件为 $\vec{H}_\mathrm{t} = \vec{J}_\mathrm{s} \times \hat{n}$，$B_\mathrm{n} = 0$。

（2）对于正入射的平面电磁波，由于合成电场满足 $\vec{E}_\mathrm{t} = 0$，所以反射时电矢量反向，有半波损失。而平面电磁波中磁矢量满足 $\vec{B} = (\hat{k} \times \vec{E})/c$，由于电矢量和传播方向均反向，所以反射时磁矢量方向不变，无半波损失。

（3）由于电矢量有半波损失，反射面是电振荡的波节；而磁矢量无半波损失，所以反射面是磁振荡的波腹。

（4）设在 $x = 0$ 处反射，入射波的电振荡和磁振荡分别为

$$E_i = E_0\cos(\omega t - kx) \text{ 和 } B_i = B_0\cos(\omega t - kx)$$

而反射波中的电振荡和磁振荡分别为

$$E_r = -E_0\cos(\omega t + kx) \text{ 和 } B_r = B_0\cos(\omega t + kx)$$

合成的电振荡和磁振荡分别为

$$E = E_i + E_r = 2E_0\sin(kx)\sin(\omega t) \text{ 和 } B = B_i + B_r = 2B_0\cos(kx)\cos(\omega t)$$

所以,在合成的驻波,电振荡和磁振荡不再是同相位的。当电振荡达到峰值时磁振荡为零,当电振荡为零时磁振荡达到峰值。

(5) 由电磁驻波中的电振荡和磁振荡可得能流为

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \hat{k}\frac{E_0E_0}{\mu\mu_0}\sin(2kx)\sin(2\omega t)$$

所以,在电磁驻波中电场能量与磁场能量相互转化,电磁能流仅在波节与波腹之间来回流动,平均能流为零,不存在行波中的定向能量流动。

6-7 如图 6-5 所示,设在垂直纸面向内的均匀磁场中放置一平行板电容器,两极板上分别带有等量异号电荷。用一根导线连接两极板,使之放电。设导线与极板的电接触不妨碍它在极板间做无摩擦平行移动。问:

(1) 放电前两极板间的能流方向如何?

(2) 放电时,放电导线的运动方向如何?

(3) 就整个系统来考虑,放电导线的动量是哪里来的?

答:(1) 根据能流密度 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$,放电前两极板间的能流指向右边。

(2) 放电时导线中电流方向向下,导线所受安培力 $\vec{F} = \vec{Il} \times \vec{B}$ 的方向也向右。

(3) 由于在放电前整个系统存在向右能流,所以存在向右的动量;而放电结束后,整个系统中不再存在电场,原系统中的电磁动量转化为放电导线的动量。

6-8 如图 6-6 所示,可绕竖直轴自由旋转的圆柱形电容器放置在均匀磁场中;电容器已充电,内筒带正电,外筒带负电。在电容器内外筒之间用放射性射线照射,引起放电,圆柱形电容器是否会绕竖直轴旋转?试根据电磁场能流和动量概念说明旋转角动量的来源。

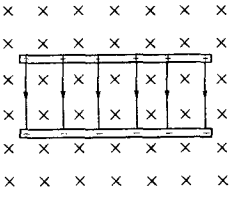


图 6-5 思考题 6-7

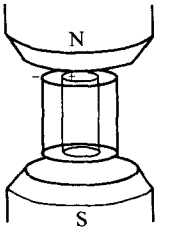


图 6-6 思考题 6-8

答:电容器中磁场方向向下,所以放电前两极板间的能流为逆时针,具有向上的角动量。放电过程中,圆柱间的放电电流会受到逆时针的作用力,由于介质与圆桶的摩擦,圆柱形电容器也会绕竖直轴逆时针旋转。圆柱形电容器旋转角动量来源于放电前两极板间的电磁能流的动量和旋转角动量。

6-9 如图6-7所示,在一个可自由转动的塑料圆盘中部有一通电线圈,电流的方向如图6-7所示。在圆盘的边缘镶有一些金属小球,小球均带正电。切断线圈的电流,圆盘是否会转动起来?转动的方向如何?转动的角动量是哪里来的?

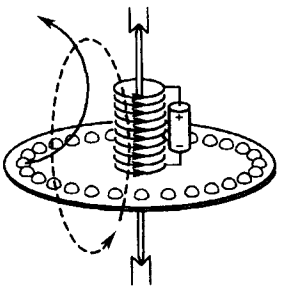


图6-7 思考题6-9

答:切断线圈电流前的电磁场分布如图6-7所示(实线为电场,虚线为磁场),可以看出在圆盘上表面附近电磁能流沿逆时针方向,而在圆盘上方电磁能流沿顺时针方向,由于圆盘附近电场较强所以总的电磁能流逆时针方向,存在逆时针方向的电磁角动量。

切断线圈电流的过程中,由于磁场减小,在圆盘边沿会感应出逆时针方向的涡旋电场,带正电的金属小球会沿逆时针方向转动起来。转动的角动量来源于切断线圈电流前电磁能流的角动量。

6-10 详见本章典型例题例6-3。

6.4 习题详解

6-1 一平行板电容器的两极板都是半径为5.0cm的圆导体片,在充电时,其中电场强度的变化率为$\frac{dE}{dt}=1.0\times10^{12}\text{V/(m·S)}$求:

(1) 两极板间的位移电流;

(2) 极板边缘的磁感应强度。

解:(1) $I_D=\varepsilon_0\iint_S\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}=\varepsilon_0\frac{dE}{dt}S=\varepsilon_0\frac{dE}{dt}\pi r^2=7.0\times10^{-2}\text{A}$

(2) 磁场强度沿极板边缘线积分

$$\oint_L\vec{H}\cdot d\vec{l}=H\cdot2\pi r=\frac{B}{\mu_0}\cdot2\pi r=I_D$$

所以

$$B=\frac{\mu_0 I_D}{2\pi r}=2.8\times10^{-7}\text{T}$$

6-2 设电荷在半径为R的圆形平行板电容器极板上均匀分布,且边缘效应可以忽略。把电容器接在角频率为ω的简谐交流电路中,电路中的传导电流为I_0(峰值),求电容器极板间磁场强度(峰值)的分布。

解:极板间位移电流

$$I_D=\iint_S\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}=\iint_S\frac{\partial\sigma_e}{\partial t}\cdot dS=\frac{dq}{dt}=i=I_0\sin(\omega t+\varphi)$$

极板间磁场强度沿半径为r的圆周(其圆心与极板圆心在同一轴线上)线积分

$$\oint_L\vec{H}\cdot d\vec{l}=H\cdot2\pi r=I_D\frac{\pi r^2}{\pi R^2}=I_0\sin(\omega t+\varphi)\cdot\frac{r^2}{R^2}$$

极板间H的峰值

$$H_0 = \frac{I_0 r}{2\pi R^2}$$

6-3 详见本章典型例题例6-1。

6-4 太阳每分钟垂直射于地球表面上每平方厘米的能量约为2cal(1cal=4.2J),求地面上日光中电场强度 E 和磁场强度 H 的方均根值。

解: 日光是多种频率简谐平面波的叠加,在空气中 $\varepsilon=\mu=1$,能流密度的平均值为

$$\bar{S} = \frac{1}{2}\sum_n E_{0n}H_{0n} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\sum_n E_{0n}^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\sum_n H_{0n}^2$$

又由 $E^2=\left[\sum E_{0n}\cos(\omega_n t+\varphi_n)\right]^2$; $H^2=\left[\sum H_{0n}\cos(\omega_n t+\varphi_n)\right]^2$ 得

$$\overline{E^2} = \frac{1}{2}\sum E_{0n}^2;\ \overline{H^2} = \frac{1}{2}\sum H_{0n}^2$$

所以

$$\bar{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\overline{E^2} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\overline{H^2} = \sqrt{\overline{E^2}}\cdot\sqrt{\overline{H^2}}$$

电场强度的方均根值

$$\sqrt{\overline{E^2}} = \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\bar{S}} = \left(\frac{4\pi\times10^{-7}}{8.85\times10^{-12}}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{8.4\times10^4}{60}} = 7.3\times10^2\text{V/m}$$

磁场强度的方均根值

$$\sqrt{\overline{H^2}} = \bar{S}/\sqrt{\overline{E^2}} = 1.9\text{A/m}$$

6-5 (1) 作为典型的原子内部电场强度,试计算氢原子核在玻尔轨道处产生电场强度的数量级。(玻尔半径 $a_B=0.053$nm)

(2) 若要激光束中的电场强度达到此数量级,其能流密度应为多少?

解: (1) 氢原子核在玻尔轨道处产生电场强度的大小

$$E = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{1.6\times10^{-19}}{4\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times5.3^2\times10^{-22}} = 5.1\times10^{11}\text{V/m}$$

(2) 若要激光束中的电场强度达到此数量级,其能流密度应为

$$\bar{S} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8.85\times10^{-12}}{4\pi\times10^{-7}}}\times5.1^2\times10^{22} = 3.5\times10^{20}(\text{W/m}^2)$$

6-6 图6-8所示为太阳的结构模型,中心核约占 $0.25R_\odot$,是聚变反应区,密度为 160g/cm^3(太阳平均密度的114倍),温度为 1.5×10^7K。日核外面$(0.25\sim0.86)R_\odot$是辐射转移区,能量靠辐射和扩散向外传输。再外面是对流层、光球、色球和日冕。各层的辐射光压可用斯特藩—玻耳兹曼定律算出:$P=\frac{1}{3}aT^4$,式中斯特藩—玻耳兹曼常量 $a=7.566\times10^{-16}$J/(m$^3\cdot$K^4)。

(1) 估算太阳中心的光压和电磁辐射中电场强度;

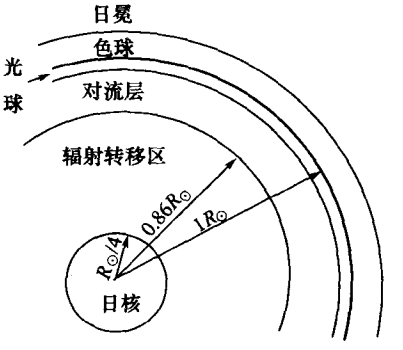


图6-8 习题6-6

(2) 在辐射转移区内取半径为 0.4 $R_{\odot}$ 处的温度为 4.8×10^{6}K,求该处的光压和电磁辐射中电场强度;

(3) 将以上两问的电场强度与原子内部电场强度作数量上的比较。

解:斯特藩—玻耳兹曼常量应改为 $a=5.67\times10^{-16}\text{N}/(\text{m}^2\cdot\text{K}^4)$

(1) 太阳中心的光压

$$P=\frac{1}{3}aT^4=\frac{1}{3}\times5.67\times10^{-16}\times1.5^4\times10^{28}=9.6\times10^{12}\text{N}/\text{m}^2$$

由

$$P=\frac{1}{c}EH=\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}E\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E=\varepsilon_0E^2$$

得

$$E=\sqrt{\frac{P}{\varepsilon_0}}=\sqrt{\frac{9.57\times10^{12}}{8.85\times10^{-12}}}=1.0\times10^{12}\text{V}/\text{m}$$

(2) 该处的光压

$$P=\frac{1}{3}aT^4=\frac{1}{3}\times5.67\times10^{-16}\times4.8^4\times10^{24}=1.0\times10^{11}\text{N}/\text{m}^2$$

该处的电磁辐射中电场强度

$$E=\sqrt{\frac{P}{\varepsilon_0}}=\sqrt{\frac{1.3\times10^{11}}{8.85\times10^{-12}}}=1.1\times10^{11}\text{V}/\text{m}$$

(3) 由上题知氢原子玻尔半径的电场强度 $E=5.1\times10^{11}\text{V}/\text{m}$,太阳中电磁辐射的电场强度与原子内部电场强度为同一数量级。

6-7 设 100W 的电灯泡将所有能量以电磁波的形式沿各方向均匀地辐射出去,求:

(1) 20m 以外的地方电场强度和磁场强度的方均根值;

(2) 在该处对理想反射面产生的光压。

解:(1) 由 $P=\overline{E^2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cdot4\pi R^2$,得

$$\sqrt{\overline{E^2}}=\sqrt{\frac{P}{4\pi R^2}}\cdot\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{4}}=2.7\text{V}/\text{m}$$

$$\sqrt{\overline{H^2}}=\sqrt{\overline{E^2}}\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}=7.3\times10^{-3}\text{A}/\text{m}$$

(2) 因为 $P_{功率}=S_{入}\cdot4\pi R^2$,所以光压

$$P_{光}=\frac{1}{c}(|S_{入}|+|S_{反}|)=\frac{2}{c}|S_{入}|=\frac{2}{c}\frac{P_{功率}}{4\pi R^2}=1.3\times10^{-10}\text{N}/\text{m}^2$$

6-8 详见本章典型例题例 6-2。

6-9 图 6-9 是一个正在充电的圆形平行板电容器,设边缘效应可以忽略,且电路是准恒的,求证:

(1) 坡印廷矢量 $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ 处处与两极板间圆柱形空间的侧面垂直;

(2) 电磁场输入的功率 $\iint \vec{E}\times\vec{H}\cdot \mathrm{d}\Sigma$ 等于电容器内静电能的增加率，即 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{q^2}{2c})$ 式中 C 是电容量；q 是极板上的电量。

证明：(1) 如图 6－10 所示，当导线中充电电流由纸面外流入纸面内时，极板间电场方向也指向纸内；板间磁场强度方向如图中虚线所示。所以对板间任意点都有 $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$，$\vec{S}$的方向与圆柱形空间的侧面垂直。

(2) 圆柱形空间的侧面处场强(忽略边缘效应)

$$E_\Sigma=\frac{U}{d}=\frac{q}{Cd};\ H_\Sigma=\frac{i}{2\pi r}=\frac{1}{2\pi r}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

电磁场输给电容器的功率＝输入柱形空间的能流

$$P_i=\iint_\Sigma(\vec{E}\times\vec{H})\cdot\mathrm{d}\vec{\Sigma}=\iint_\Sigma E_\Sigma H_\Sigma\cdot\mathrm{d}\Sigma=\frac{q}{Cd}\cdot\frac{1}{2\pi r}\cdot\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\cdot 2\pi r d=\frac{q}{C}\cdot\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{1}{2C}\frac{\mathrm{d}(q^2)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{q^2}{2C}\right)$$

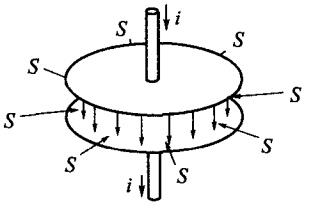


图 6－9　习题 6－9

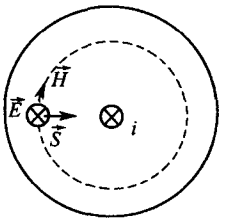


图 6－10　习题 6－9 附图

6－10　利用第 1 章习题 1－59 和第 3 章习题 3－31 的结果证明：在真空中沿平行双线传输线传播的电磁波速度为 c。

解：已知沿传输线(平行双线)传播的电磁波波速 $v=1/\sqrt{L^*C^*}$ 式中 L^*、C^* 为传输线单位长度的分布电感和分布电容，由习题 1－59 得

$$C^*=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{d}{a}\right)}$$

由习题 3－31 得

$$L^*=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}\approx\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a}(\text{当 } d>>a)$$

代入得

$$v=1/\sqrt{L^*C^*}=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}=c$$

6－11　利用电报方程证明：长度为 l 的平行双线(损耗可以忽略)两端开启时电压和电流分别形成如下形式的驻波：

$$\left.\begin{aligned}\tilde{U}&=U_0\cos\frac{P\pi x}{l}\exp(j\omega_p t)\\ \tilde{I}&=I_0\sin\frac{P\pi x}{l}\exp(j\omega_p t)\end{aligned}\right\}(P=1,2,3,\cdots)$$

其中谐振角频率为 $\omega_P=\dfrac{P\pi}{l\sqrt{L^*C^*}}$。指出电压、电流的波腹和波节的位置，以及波长的大小。

[提示：假设电报方程的解是入射波和反射波的叠加，利用两端的边界条件确定驻波的谐振频率。]

解：由电报方程经偏微商可得电流满足的波动方程：

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}-L^*C^*\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}=0 \qquad ①$$

分离变量 $I(x,t)=I_1(x)f(t)$ 代入式①可得方程：

$$L^*C^*\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2}=-K^2 f(t) \qquad ②$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 I_1(x)}{\mathrm{d}x^2}=-K^2 I_1(x) \qquad ③$$

式②解为 $f(t)=A\sin(\omega t+\varphi_0)$，其中 $\omega=\dfrac{K}{\sqrt{L^*C^*}}$，即

$$\tilde{f}(t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_0)}=\tilde{A}'\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \qquad ④$$

式③解为 $$I_1(x)=B\sin(Kx+\varphi_0')$$

边界处 $x=0, I_1(0)=0$，所以 $\varphi_0'=0$；$x=l, I_1(l)=0$，所以 $Kl=P\pi$ 即 $K=\dfrac{P\pi}{l}$。故

$$I_1(x)=B\sin\frac{P\pi}{l}x \qquad ⑤$$

式④×式⑤得方程式①的特解为

$$\tilde{I}=\tilde{f}(t)I_1(x)=\tilde{I}_0\sin\frac{P\pi}{l}x\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \qquad ⑥$$

式中：$P=1,2,3,\cdots$。

由式⑥可知，电流的形式是驻波。

谐振角频率：$\omega_P=\dfrac{P\pi}{l\sqrt{L^*C^*}}$；驻波波长：$\lambda=\dfrac{2\pi}{K}=\dfrac{2l}{P}$

电流波节：$\sin\dfrac{P\pi}{l}x=0$ 即 $x=\dfrac{nl}{P}=\dfrac{n}{2}\lambda\ (n=0,1,2,\cdots)$

电流波腹：$\sin\dfrac{P\pi}{l}x=1$ 即 $x=(2n+1)\dfrac{l}{2P}=(2n+1)\dfrac{\lambda}{4}\quad(n=0,1,2,\cdots)$

将式⑥代入电报方程 $\dfrac{\partial U}{\partial x}=-L^*\dfrac{\partial I}{\partial t}=-\mathrm{j}\omega L^*\tilde{I}$ 积分得

$$\tilde{U}=\tilde{I}_0L^*\mathrm{j}\omega\frac{l}{P\pi}\cos\frac{P\pi}{l}x\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}=\tilde{U}_0\cos\frac{P\pi}{l}x\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \qquad ⑦$$

由式⑦可知，电压的形式是驻波。

电压波节：$\cos\dfrac{P\pi}{l}x=0$ 即 $x=\dfrac{(2n+1)l}{2P}=(2n+1)\dfrac{\lambda}{4}\quad(n=0,1,2,\cdots)$

电压波腹：$\cos\dfrac{P\pi}{l}x=1$ 即 $x=\dfrac{nl}{P}=\dfrac{n}{2}\lambda\quad(n=0,1,2,\cdots)$

6-12 上题中若传输双线两端短路，情况如何？

解：电压满足波动方程：

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - L^* C^* \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \qquad ①$$

分离变量 $U(x,t) = U_1(x)\phi(t)$ 代入式①可得方程：

$$L^* C^* \frac{\mathrm{d}^2 \phi(t)}{\mathrm{d}t^2} = -K^2 \phi(t) \qquad ②$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 U_1(x)}{\mathrm{d}x^2} = -K^2 U_1(x) \qquad ③$$

式②解为 $\phi(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$，其中 $\omega = \frac{K}{\sqrt{L^* C^*}}$ 即

$$\tilde{\phi}(t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_0)} = \tilde{A}'\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \qquad ④$$

式③解为 $U_1(x) = B\sin(Kx + \varphi_0')$

边界处 $x=0, U_1(0)=0$ 所以 $\varphi_0'=0$；$x=l, U_1(l)=0$ 所以 $Kl = P\pi$ 即 $K = \frac{P\pi}{l}$

故

$$U_1(x) = B\sin\frac{P\pi}{l}x \qquad ⑤$$

式④×式⑤得方程式①的特解为

$$\tilde{U} = \tilde{\phi}(t)U_1(x) = \tilde{U}_0 \sin\frac{P\pi}{l}x\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \qquad ⑥$$

式中：$P = 1,2,3,\cdots$。

由式⑥可知，电压的形式是驻波。

谐振角频率：$\omega_P = \frac{P\pi}{l\sqrt{L^* C^*}}$；驻波波长：$\lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2l}{P}$

电压波节：$\sin\frac{P\pi}{l}x = 0$ 即 $x = \frac{nl}{P}$ $(n = 0,1,2,\cdots)$

电压波腹：$\sin\frac{P\pi}{l}x = 1$ 即 $x = (2n+1)\frac{l}{2P}$ $(n = 0,1,2,\cdots)$

将式⑥代入电报方程 $\frac{\partial I}{\partial x} = -C^* \frac{\partial U}{\partial t}$ 得

$$\tilde{I} = \tilde{I}_0 \cos\frac{P\pi}{l}x\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \qquad ⑦$$

由式⑦可知，电流的形式是驻波。

电流波节：$\cos\frac{P\pi}{l}x = 0$ 即 $x = \frac{(2n+1)l}{2P} = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$ $(n = 0,1,2,\cdots)$

电流波腹：$\cos\frac{P\pi}{l}x = 1$ 即 $x = \frac{nl}{P} = \frac{n}{2}\lambda$ $(n = 0,1,2,\cdots)$

6-13 上题中若传输双线一端开启、一端短路，情况如何？

解：由电报方程经微商得电流满足的波动方程为

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - L^* C^* \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0 \qquad ①$$

和习题 6－11 相同的讨论可得

$$f(t)=A'e^{j\omega t};\ I_1(x)=B\sin(Kx+\varphi_0')$$

边界处 $x=0, I_1(0)=0$ 所以 $\varphi_0'=0$。故方程式①的解为

$$\tilde{I}(x,t)=f(t)I_1(x)=I_0\sin Kx e^{j\omega t} \qquad ②$$

将式②代入电报方程 $\frac{\partial U}{\partial x}=-L^*\frac{\partial I}{\partial t}$ 得

$$\tilde{U}(x,t)=\tilde{U}_0\cos Kx e^{j\omega t} \qquad ③$$

边界处 $x=l, U(l)=0$，即 $\cos Kl=0$ 所以 $K=\frac{(2P+1)\pi}{2l}$。故式②为

$$\tilde{I}(x,t)=I_0\sin\frac{(2P+1)}{2l}\pi x e^{j\omega t} \qquad ④$$

式③为

$$\tilde{U}(x,t)=\tilde{U}_0\cos\frac{(2P+1)}{2l}\pi x e^{j\omega t} \qquad ⑤$$

驻波角频率：$\omega=\frac{K}{\sqrt{L^*C^*}}=\frac{(2P+1)\pi}{2l\sqrt{L^*C^*}}$

驻波波长：$\lambda=\frac{2\pi}{K}=\frac{4l}{2P+1}$

电流波节：$\sin\frac{(2P+1)}{2l}\pi x=0, x=\frac{2nl}{2P+1}\quad(n=0,1,2,\cdots)$

电流波腹：$\sin\frac{(2P+1)}{2l}\pi x=1,\ x=\frac{(2n+1)l}{2P+1}\quad(n=0,1,2,\cdots)$

电压波节：$\cos\frac{(2P+1)}{2l}\pi x=0,\ x=\frac{(2n+1)l}{2P+1}\quad(n=0,1,2,\cdots)$

电压波腹：$\cos\frac{(2P+1)}{2l}\pi x=1,\ x=\frac{2nl}{2P+1}\quad(n=0,1,2,\cdots)$

6－14 推导高斯单位制中电能密度 w_e、磁能密度 w_m、坡印廷矢量 $\vec{S}$ 和电磁动量密度 $\vec{g}$ 的表达式。

答：设平板电容器的面积为 S，间距为 d，体积为 $V=Sd$。当两极板的带电量分别为 $\pm q$ 时，根据高斯单位制中的高斯定律 $\oint_S\vec{D}\cdot d\vec{S}=4\pi q$，可得极板间的电位移、电场强度和电压分别为

$$D=\frac{4\pi q}{S}, E=\frac{D}{\epsilon_0\epsilon}=\frac{4\pi q}{\epsilon_0\epsilon S}, U=Ed=\frac{4\pi q}{\epsilon_0\epsilon S}d$$

则电容器储存的电场能量为

$$W_e=\frac{1}{2}qU=\frac{1}{2}\frac{4\pi q^2}{\epsilon_0\epsilon S}d=\frac{1}{8\pi}\frac{4\pi q}{S}\frac{4\pi q}{\epsilon_0\epsilon S}Sd=(\frac{1}{8\pi}\vec{D}\cdot\vec{E})V$$

所以，电场能量密度的表达式为

$$w_e=\frac{W_e}{V}=\frac{1}{8\pi}\vec{D}\cdot\vec{E}$$

对于匝数为 N,长度为 l,截面积为 S,体积 $V=Sl$ 的长直螺线管,如果电流强度为 I,根据高斯单位制中的环流定律 $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=4\pi I/c$,可得螺线管中的磁场强度、磁感应强度和磁通匝链分别为

$$H=\frac{4\pi NI}{cl},B=\mu_0\mu H=\frac{4\pi\mu_0\mu NI}{cl},\psi=NBS=\frac{4\pi\mu_0\mu N^2I}{cl}S$$

则螺线管储存的磁场能量为

$$W_m=\frac{1}{2}I\psi=\frac{2\pi\mu_0\mu N^2I^2S}{cl}=\frac{1}{8\pi}\frac{4\pi\mu_0\mu NI}{cl}\frac{4\pi NI}{cl}Sl=(\frac{1}{8\pi}\vec{B}\cdot\vec{H})V$$

所以,磁场能量密度的表达式为

$$w_m=\frac{W_m}{V}=\frac{1}{8\pi}\vec{B}\cdot\vec{H}$$

由电磁场能量密度随时间的减小,有

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial t}(w_e+w_m)&=\frac{-1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\cdot\vec{E}+\vec{B}\cdot\vec{H})=\frac{-1}{4\pi}\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{H}\right)\\&=\frac{-1}{4\pi}\{[c(\nabla\times\vec{H})-4\pi\vec{j}_0]\cdot\vec{E}+[-c(\nabla\times\vec{E})]\cdot\vec{H}\}\\&=\frac{c}{4\pi}[\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})]+\vec{j}_0\cdot\vec{E}\end{aligned}$$

可见,一部分转化为焦耳热 $\vec{j}_0\cdot\vec{E}$,而另一部分则为电磁能流。所以,在高斯单位制中,坡印廷矢量 $\vec{S}$和电磁动量密度 $\vec{g}$的表达式分别为

$$\vec{S}=\frac{c}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{H}),\vec{g}=\frac{\vec{S}}{c^2}=\frac{1}{4\pi c}(\vec{E}\times\vec{H})$$

6-15 推导高斯单位制中平行板电容器电容和螺线管自感的表达式。

解:根据上题的分析,在高斯单位制中,平板电容器电容的表达式为

$$C=\frac{q}{U}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{4\pi d}$$

则长直螺线管自感的表达式为

$$L=\frac{\psi}{I/c}=\frac{4\pi\mu_0\mu N^2}{l}S=4\pi\mu_0\mu n^2V$$

6-16 实用中磁场强度的单位往往用 Oe,而电流的单位用 A,长度的单位用 cm(这是 MKSA 制和高斯制的混合)。试证明,在这种情况下螺线管磁场强度的公式为 $H=0.4\pi nI$。

证明:在 MKSA 有理制中 $H_{\mathrm{MKSA}}=n_{\mathrm{MKSA}}I_{\mathrm{MKSA}}$,又

$$H_{\mathrm{MKSA}}=\frac{1}{4\pi\times10^{-3}}H_{\mathrm{G}};\ n_{\mathrm{MKSA}}=10^2n_{\mathrm{G}}$$

代入原式得

$$\frac{10^3}{4\pi}H_G = 10^2 n_G I_{MKSA}$$

即

$$H_G = \frac{4\pi}{10} n_G I_{MKSA}$$

去掉下标得

$$H = 0.4\pi nI$$

6-17 实用中磁通量的单位常常用 Mx，电动势的单位用 V。试证明：在这种情况下法拉第电磁感应定律的表达式为 $\varepsilon = -10^{-8}\frac{d\Phi_B}{dt}$

证明：在 MKSA 有理制中 $\varepsilon_{MKSA} = -\frac{d\Phi_{BMKSA}}{dt_{MKSA}}$，又

$$\Phi_{BMKSA} = 10^{-8}\Phi_{BG}$$

所以

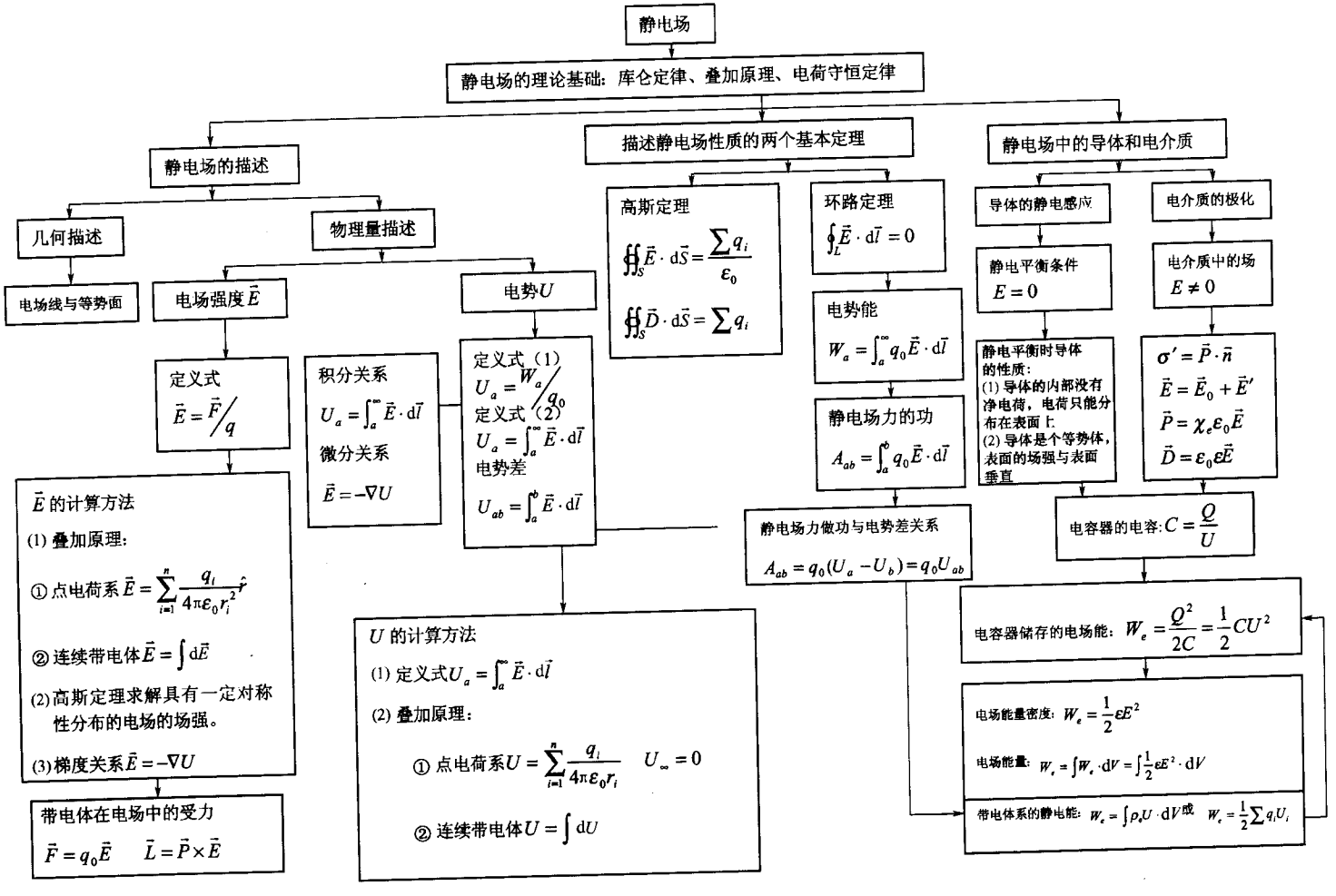
$$\varepsilon_{MKSA} = -10^{-8}\frac{d\Phi_{BG}}{dt_{MKSA}}$$

去掉下标得

$$\varepsilon = -10^{-8}\frac{d\Phi_B}{dt}$$

附录　知识框架图

一、静电场



二、恒磁场

恒磁场

真空中的恒磁场

磁场中的磁介质

边界条件 磁路定理

磁场的描述

(1)磁感应强度 $\vec{B}$

$\vec{B}$ 的大小：$B=\dfrac{F_{max}}{q_0 v}$

$\vec{B}$ 的方向：$\vec{F}_m\times\vec{v}$ 的方向

(2)几何描述：磁感应线

磁通量：$\Phi_m=\iint_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

基本规律

毕奥—萨伐尔定律

(1) 电流元激发的磁场

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$

(2) 有限长的载流导线

$$\vec{B}=\int_L\mathrm{d}\vec{B}=\int_L\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$

(3) 运动电荷激发的磁场

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}$$

安培定律

(1) 两电流元间的作用力

$$\mathrm{d}\vec{F}_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2\mathrm{d}\vec{l}_2\times\left(I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\hat{r}_{12}^2\right)}{r_{12}^2}$$

(2) 电流元在外场中的受力

$$\mathrm{d}\vec{F}=I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$$

(3)有限长载流线在外场中的受力

$$\vec{F}=\int_L I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$$

(4) 载流线圈在外场中所受力矩

$$\vec{L}=\vec{m}\times\vec{B}$$

(5) 运动电荷在外场中的受力

$$\vec{f}=q\vec{v}\times\vec{B}$$

(6) 电磁场对运动电荷的作用力

$$\vec{f}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}$$

几种典型载流导线所产生的磁感应强度

(1) 一段载流直导线外一点的磁感应强度 $B=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$

无限长时 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$

(2) 载流圆线圈轴线上一点的磁感应强度 $B=\dfrac{\mu_0 IR^2}{4\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$

圆心处：$B=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$

(3) 有限长载流螺线管内的磁感应强度 $B=\dfrac{\mu_0 nI}{2}(\cos\beta_2-\cos\beta_1)$

无限长时 $B=\mu_0 nI$

磁场的性质

(1) 磁场的高斯定理

$\oiint_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$ 无源性

(2) 安培环路定理

$\oint_L\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0\sum_i I_i$

由安培环路定理求几种典型载流体的磁感应强度分布

(1) 无限长均匀载流圆柱体（半径为 R）

$$B=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}(r<R)$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}(r>R)$$

(2) 载流螺绕环内任一点处

$$B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

(3) 无限大载流平面外一点（电流密度为 I）

$$B=\frac{\mu_0 i}{2}$$

磁场中的磁介质

(1) 3种磁介质

抗磁质（$\mu<1$）

顺磁质（$\mu>1$）

铁磁质（$\mu\gg1$、非线性、多值）

(2) 有关物理量

① 磁化强度

$$\vec{M}=\frac{\sum\vec{m}}{\Delta V}=n\vec{I}\vec{a}$$

② 磁场强度矢量（是辅助物理量）

$$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$$

(3) 基本定律

① 对于介质中的总场，高斯定理仍然成立

$$\oiint_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$$

② 有磁介质时的环路定理

$$\oint_L\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\sum_i I_i$$

边界条件 磁路定理

(1) 边界条件

$j_{n1}=j_{n2}$；$E_{t1}=E_{t2}$

$D_{n1}=D_{n2}$；$E_{t1}=E_{t2}$

$B_{n1}=B_{n2}$；$H_{t1}=H_{t2}$

(2) 电流线的折射

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

磁感应线的折射

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{\mu_1}{\mu_2}$$

(3) 磁路定理

$\varepsilon_m=\Phi_B\sum R_{mi}$

磁动势：

$\varepsilon_m=NI_0$

磁阻：

$$R_m=\frac{l_i}{\mu_0\mu_i S_i}$$

磁位降：

$\Phi_B R_{mi}=H_i l_i$

三、电磁感应、电磁场

电磁感应、电磁场

- **电磁感应**
  - 理论基础：法拉第电磁感应定律 $\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$，式中负号为楞次定律的表示
    - **动生电动势**
      $\varepsilon_{ab}=\int_a^b(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}$
      引起动生电动势的非静电力是洛伦兹力
      $\vec{f}=e\vec{v}\times\vec{B}$
      相应的非静电场
      $\vec{K}=\frac{\vec{f}}{e}=\vec{v}\times\vec{B}$
      洛伦兹力不做功，但起能量转换作用
    - **感生电动势和感生电场**
      $\varepsilon=\oint_L\vec{E}_i\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$
      $=-\iint_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$
      电流元在外场中的受力
      $\mathrm{d}\vec{F}=I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$
      感生电场是由变化的磁场激发的，是涡旋场（非保守场）
      无限长螺线管内部磁场随时间做线性变化时
      $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=$常量
      管内外感生电场的大小
      $E_{i内}=\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$；$E_{i外}=\frac{R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$
    - **自感和互感**
      (1) 自感
      自感系数 $L=\frac{\Psi}{I}$
      自感电动势（L一定时）
      $\varepsilon_L=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
      (2) 互感
      互感系数
      $M=\frac{\Psi_{12}}{I_1}=\frac{\Psi_{21}}{I_2}$
      互感电动势
      $\varepsilon_{12}=-\frac{\mathrm{d}\Psi_{12}}{\mathrm{d}t}=-M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$
      $\varepsilon_{21}=-\frac{\mathrm{d}\Psi_{21}}{\mathrm{d}t}=-M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$
      (3) 两线圈串联
      顺串 $L=L_1+L_2+2M$
      反串 $L=L_1+L_2-2M$
    - **磁场的能量**
      (1) 载流自感线圈的磁能
      $W_m=\frac{1}{2}LI^2$
      互感磁能
      $W_m=MI_1I_2$
      (2) 磁场的能量密度
      $w_m=\frac{B^2}{2\mu_0\mu}=\frac{1}{2}BH$
      (3) 磁场的能量
      $W_m=\iiint_V w_m\mathrm{d}V$
      $=\frac{1}{2}\iiint_V\frac{B^2}{\mu_0\varpi}\mathrm{d}V$
      $=\frac{1}{2}\iiint_V BH\,\mathrm{d}V$
- **暂态电路**
  (1) RL电路 $\tau=\frac{L}{R}$
  接通电源
  $i(t)=I_0\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$
  短路 $i(t)=I_0\mathrm{e}^{-t/\tau}$
  (2) RC 电路 $\tau=\frac{1}{RC}$
  接通电源充电
  $q(t)=Q\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$
  放电 $q(t)=Q\mathrm{e}^{-t/\tau}$
  (3) RLC 电路
  阻尼系数 $\lambda=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$
  (4) 积分电路
  $u_{出}=u_C\approx\frac{1}{RC}\int u_{入}\mathrm{d}t$
  (5) 微分电路
  $u_{出}=u_R=\begin{cases}\varepsilon\mathrm{e}^{-t/\tau}\\-\varepsilon\mathrm{e}^{-t/\tau}\end{cases}$
- **电磁场**
  (1) 位移电流
  $I_d=\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}\iint_S\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$
  位移电流密度 $\vec{j}_d=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$
  $B_{n1}=B_{n2}$；$H_{t1}=H_{t2}$
  (2) 麦克斯韦方程组
  $\oiint_S\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iiint_V\rho\,\mathrm{d}V$
  $\oint_L\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\iint_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$
  $\oiint_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$
  $\oint_L\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$
  $=\iint_S\vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}+\iint_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$
  (3) 电磁场的能量
  能量密度
  $w_m=\frac{1}{2}(DE+BH)$
  能流密度：$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$
  (4) 准恒电路的条件
  $\lambda\gg l$；$\nu\ll\frac{c}{l}$；$T\gg\frac{l}{c}$

参考文献

[1] 赵凯华、陈熙谋.新概念物理教程《电磁学》.[M]北京:高等教育出版社,2006.

[2] 赵凯华,等.电磁学[M](上、下册).北京:高等教育出版社,1985.

[3] 梁灿彬,等.电磁学[M].北京:人民教育出版社,1980.

[4] 贾起民,等.电磁学[M](上、下册).上海:复旦大学出版社,1987.

[5] 周岳明,张瑞明.大学物理解题方法[M].北京:电子工业出版社,1984.

[6] 周岳明,等.电磁学习题选解[M].北京:北京大学出版社,1980.

[7] 张茂柏,封小超,等.电磁学思考题分析与解答[M].上海:上海科学技术出版社,1984.

[8] (美)哈里德·瑞斯尼克著.物理学[M](第二卷第一分册).北京:科学出版社.

[9] 四川大学物理系电学教研室、成都大学物理教研室合编.电磁学题解[M].成都:四川大学出版社,1980.

封面
书名
版权
前言
目录
第1章　静电场　恒定电流场
　　1.1　基本要求与教学难点
　　1.2　典型例题
　　1.3　思考题详解
　　1.4　习题详解
第2章　恒磁场
　　2.1　基本要求与教学难点
　　2.2　典型例题
　　2.3　思考题详解
　　2.4　习题详解
第3章　电磁感应　电磁场的相对论变换
　　3.1　基本要求与教学难点
　　3.2　典型例题
　　3.3　思考题详解
　　3.4　习题详解
第4章　电磁介质
　　4.1　基本要求与教学难点
　　4.2　典型例题
　　4.3　思考题详解
　　4.4　习题详解
第5章　电路
　　5.1　基本要求与教学难点
　　5.2　典型例题
　　5.3　思考题详解
　　5.4　习题详解
第6章　麦克斯韦电磁理论　电磁波　电磁单位制
　　6.1　基本要求与教学难点
　　6.2　典型例题
　　6.3　思考题详解
　　6.4　习题详解
附录　知识框架图
参考文献