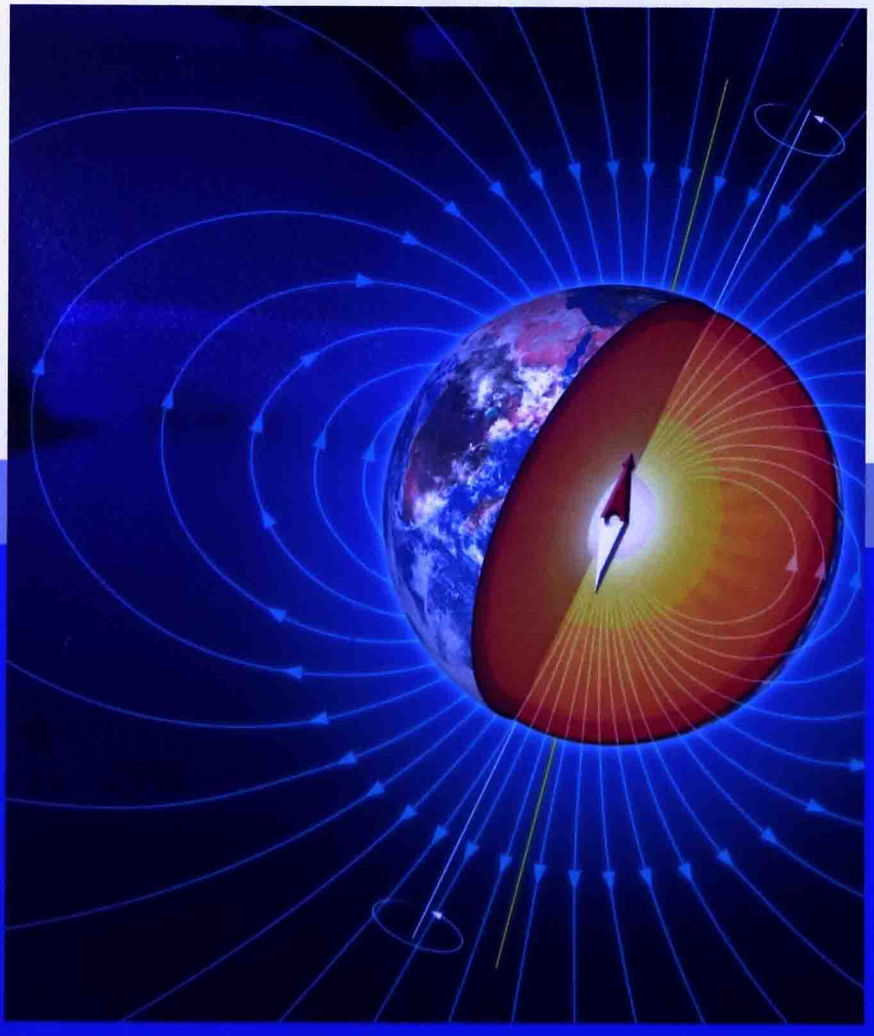
Electromagnetism

电磁学方法论

◎ 童国平 著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

电磁学方法论

童国平 著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

电磁学方法论 / 童国平著. —杭州:浙江大学出版社,2014.12

ISBN 978-7-308-14146-8

Ⅰ.①电… Ⅱ.①童… Ⅲ.①电磁学—方法论 Ⅳ.①O441

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 284764 号

电磁学方法论

童国平 著

责任编辑 石国华

封面设计 刘依群

出版发行 浙江大学出版社

(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)

(网址:http://www.zjupress.com)

排 版 杭州星云光电图文制作有限公司

印 刷 杭州日报报业集团盛元印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 16.5

字 数 420 千

版 印 次 2014 年 12 月第 1 版 2014 年 12 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308-14146-8

定 价 37.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部联系方式:0571-88925591;http://zjdxcbs.tmall.com



童国平　教授，1955年11月28日生于浙江临安，浙江师范大学数理信息学院理论物理硕士点负责人，硕士生导师。1978年浙江师范学院物理教育专业毕业，1982年中山大学进修理论物理，1985年至1987年苏州大学核物理专业研究生班，1989年至1990年复旦大学访问学者，师从孙鑫院士从事导电高聚物的研究工作。长期从事低维凝聚态物理理论的研究工作，已在国内外学术期刊发表学术论文50余篇，其中SCI收录20篇，EI收录7篇。国内外发表教学研究论文19篇。国际合著学术专著3部：*Physics and Applications of Graphene – Theory, New Progress on Graphene Research*，*Computational Studies New Materials II*；主编《当今物理学前沿问题选讲》教材1部，获得实用新型专利4项。

内容提要

本书根据作者在浙江师范大学多年从教电磁学的教学经验撰写而成。全书选取了22种基本科学方法，分成基本原理、问题构建、问题求解、问题研究以及知识盘点五个模块；每个模块由若干种方法组成，每种方法都给以界定，又以若干范例说明之，易学易懂。本书集实用性、逻辑性、创新性、研究性和能力培养于一体，内容基本涵盖了电磁学的各个方面。

本书可作为理工科大学的本科生自主学习电磁学或普通物理学（电磁学部分）或大学物理（电磁学部分）的参考书，也可供讲授电磁学或普通物理学的教师参考。

前 言

电磁学是物理学专业的基础课程，在物理学中占有重要的地位。随着现代科学技术的飞速发展，它与我们的日常生活之关系也越来越密切。对于物理学专业的学生来说，学好电磁学是必需的。而学生普遍反映，电磁学不大容易学，其困难主要体现在做习题上。从客观而言，学生从力学和热学的直觉或可感知的课程马上转入抽象的课程有些不适应。而从主观来说，由于电磁学的内容与高中学习的内容大致相近，容易造成学习的一种错觉。怎样才能学好电磁学一直是学生关心的一个问题，也是教师时常思考或较为困惑的问题。作者从事电磁学和电动力学的教学30余年，逐渐积累了一些教学资料，多年在脑海中形成了这样一种想法，即为物理学专业的本科学生撰写一本电磁学方法论方面的书，以助学生的自主学习之用。然而，电磁学是一门古老而经典的课程，方法和内容博大精深，选取哪些题材、哪些方法作为支撑却又使作者犯难。经过长期的反复思考与酝酿，决定分模块进行撰写，这才形成了本书的框架。首先，对于基本原理与理论体系中的方法，比如，演绎法、归纳法、例证法、反证法、类比法、模型法、假设法等，这些古老而经典的科学方法在教科书中“隐隐约约”可见，不大容易吸引初学者的眼球，能够注意到其中的只是寥寥无几。其次，与课程内容相配套的习题是为巩固所学原理而设计的“问题”，初学者通过这些“问题”的训练，可以检验自己所学知识点是否已经掌握。实际上，在这些问题的构建与设计中也隐藏着某些方法，例如，形变法、组合法、切割法、旋转法等，这些方法隐藏较深不易引起读者的注意，只有通过收集大量的习题，并给予归纳整理才能初显端倪。再次，习题的求解是初学者最关注的问题，也是教师所注重的问题。通过做习题不仅可以温习课程中的基本概念和规律，而且能够扩大知识面，灵活运用初等数学和高等数学，从而达到培养自己解决实际问题的能力。这部分内容中出现的方法相对来说是比较显现的，读者比较熟悉，作者收集了若干经常使用且具有代表性的方法，如叠加法、对称法、镜像法、能量法、等效法、补偿法、排除法等，作为第三模块加以论述。除了这些模块以外，作者考虑到对初学者研究能力的培养需要，设计了问题研究方法模块。在这一模块中，作者着重表述怎样以研究问题的眼光去发现电磁学中的问题并加以研究，其中的范例是以论文形式书写的。作者的目的是让初学者通过电磁学的学习尽快学会或掌握问题的研究方法和写作方法，为今后的毕业论文撰写打下一个良好的基础。另一方面，也让初学者知道，电磁学虽是一门经典的课程，但是仍有许多问题等待大家去发现和解决。最后一个板块，涉及的是电磁学知识点的盘点问题。因为初学者不大善于对所学知识的总结与归纳，学完电磁学以后，总觉得知识点一大堆，无从下手复习。在这一模块中，根据电场和磁场的性质和特点，作者采用列表对比法的手段，循着场的概念、场的性质、场的定义、场的规律、场的功和能以及场与物质的相互作用等这样一条路线加以归纳总结。实践表明，这种方法容易被初学者接受，教学中收到了较好的效果。

这本书取名为电磁学方法论，读者乍一看觉得理论性特强，好像不是为初学者而写的，

这也是作者所困惑的地方。作者觉得理论性太强不适合初学者阅读，因此，只注重实用性的一面，主要以范例的形式进行阐述，从而避免理论化。另一方面，以方法论为题的电磁学方面的书籍几乎没有，出版这本书心里有些忐忑不安。这主要是作者学识浅薄很难把握其中的分寸，肯定存在不少不妥或者错误之处，恳请读者提出批评意见。

最后，想说明一下，书中有不少范例中的问题是选自作者多年教学中设计的例题、习题或考试题；也有的范例没有经过教学实践的检验，是首次与大家见面，也有待于读者的检验；还有一些范例是选自作者在国内外发表的教学研究论文。此外，在书后附上了电磁学中较为常用的积分公式、级数和最新的物理常数表以便初学者备查。

童国平

2012 年秋于浙江师范大学丽泽花园

目 录

第Ⅰ部分 基本原理方法模块

第1章 演绎法 …… (3)

1.1 演绎法界定 …… (3)

1.2 演绎法范例 …… (4)

1.2.1 电场强度 …… (4)

1.2.2 介质中的高斯定理 …… (7)

1.2.3 填充有 n 层同心介质的球形电容器 …… (9)

1.2.4 电源两端的电压(路端电压) …… (11)

1.2.5 有限长直均匀带电细线的电场 …… (12)

1.2.6 磁感应强度 …… (14)

1.2.7 电动势 …… (16)

第2章 归纳法 …… (20)

2.1 归纳法界定 …… (20)

2.2 归纳法范例 …… (20)

2.2.1 连续电荷分布的电场 …… (20)

2.2.2 连续电荷分布的静电能 …… (21)

2.2.3 静电场的高斯定理 …… (23)

2.2.4 稳恒磁场的安培环路定理 …… (24)

第3章 例证法 …… (26)

3.1 例证法界定 …… (26)

3.2 例证法范例 …… (26)

3.2.1 电容器的电容 …… (26)

3.2.2 互感 …… (29)

3.2.3 自感 …… (31)

第4章 反证法 …… (34)

4.1 反证法界定 …… (34)

4.2 反证法范例 …… (34)

4.2.1 无限长直螺线管的磁场 …… (34)

4.2.2 无穷大均匀带电平面的电场 …… (35)

4.2.3 无限长直空心载流圆柱面 …… (36)

4.2.4 静电势的极值问题 …… (38)
4.2.5 静电场的唯一性定理 …… (38)
4.2.6 静电场的电力线不能构成闭合曲线 …… (39)
4.2.7 均匀带电半球面及其底面是等电势的 …… (40)
4.2.8 球形螺线管内的磁场是均匀的 …… (40)
第5章 类比法 …… (43)
5.1 类比法界定 …… (43)
5.2 类比法范例 …… (43)
5.2.1 螺线管中变化磁场所产生的感生电场(涡旋电场) …… (43)
5.2.2 静电场的电势 …… (45)
5.2.3 电容器的充电与电感器的充磁暂态过程 …… (46)
5.2.4 电路与磁路 …… (47)
5.2.5 铁电体与铁磁体的类比 …… (48)
5.2.6 能流密度与电流密度的类比 …… (49)
5.2.7 旋转带电圆柱面与螺线管的类比 …… (51)
5.2.8 均匀极化介质球的电场与电偶极子的电场类比 …… (54)
第6章 模型法 …… (58)
6.1 模型法界定 …… (58)
6.2 模型法范例 …… (59)
6.2.1 电偶极子模型及其应用 …… (59)
6.2.2 磁偶极子模型及其应用 …… (62)
第7章 假设法 …… (64)
7.1 假设法界定 …… (64)
7.2 假设法范例 …… (65)
7.2.1 安培的分子电流假设 …… (65)
7.2.2 麦克斯韦的位移电流假设 …… (66)

第Ⅱ部分 问题构建方法模块

第8章 形变法 …… (71)
8.1 形变法界定 …… (71)
8.2 形变法范例 …… (71)
8.2.1 长直载流导线的形变 …… (71)
8.2.2 圆形导线回路的形变 …… (73)
8.2.3 “飞机型”圆形载流回路的变形 …… (77)
8.2.4 与长直载流导线共面的圆形回路的变形 …… (78)
8.2.5 两根平行长直线的变形 …… (81)
8.2.6 矩形平面的变形 …… (82)

8.2.7 一根带电细棒的变形 …… (84)
第 9 章 组合法 …… (87)
9.1 组合法界定 …… (87)
9.2 组合法范例 …… (87)
9.2.1 点电荷的组合 …… (87)
9.2.2 长直细线的组合 …… (88)
9.2.3 导体平板的组合和平面的组合 …… (90)
9.2.4 导体球(或球面)的组合 …… (93)
9.2.5 直导线段与导线圆弧的组合 …… (94)
9.2.6 带电线段与其他带电体的组合 …… (96)
9.2.7 带电圆环与其他带电体的组合 …… (98)
9.2.8 载流圆环的组合 …… (101)
9.2.9 螺线管线圈的组合 …… (104)
9.2.10 电场与磁场的组合 …… (106)
9.2.11 电介质的组合 …… (110)
第 10 章 切割法 …… (113)
10.1 切割法界定 …… (113)
10.2 切割法范例 …… (113)
10.2.1 球面切割 …… (113)
10.2.2 圆环切割 …… (118)
10.2.3 圆锥的切割 …… (120)
10.2.4 平板的切割 …… (123)
10.2.5 圆平面与正方平面的切割 …… (126)
第 11 章 旋转法 …… (127)
11.1 旋转法界定 …… (127)
11.2 旋转法范例 …… (127)
11.2.1 点电荷的定点转动 …… (127)
11.2.2 均匀带电体的定轴转动 …… (128)
11.2.3 导体棒的定点或定轴转动 …… (131)
11.2.4 线圈的定轴转动 …… (133)

第Ⅲ部分 问题求解方法模块

第 12 章 叠加法 …… (139)
12.1 叠加法界定 …… (139)
12.2 叠加法范例 …… (140)
12.2.1 一根带电细棒的电场 …… (140)
12.2.2 两块平行带电导体平板 …… (141)

12.2.3 内导体球接地的情况 …… (142)
12.2.4 有源网络的电流 …… (143)
第 13 章 等效法 …… (145)
13.1 等效法界定 …… (145)
13.2 等效法范例 …… (145)
13.2.1 接地导体平面前的点电荷 …… (145)
13.2.2 均匀磁场中旋转的金属棒 …… (146)
13.2.3 磁场中金属棒的电动势 …… (148)
13.2.4 磁场中弧形载流导线的安培力 …… (149)
13.2.5 等效电压源与等效电流源 …… (149)
13.2.6 电阻、电容、电感三种网络的 Δ－Y 形等效变换 …… (151)
第 14 章 对称法 …… (155)
14.1 对称法界定 …… (155)
14.2 对称法范例 …… (156)
14.2.1 无穷正方网络的电阻 …… (156)
14.2.2 桥式电阻网络 …… (159)
14.2.3 立方电阻网络 …… (160)
14.2.4 带电正方形与载流正方形的场分布 …… (161)
14.2.5 直线电流与圆电流共面的安培力 …… (164)
14.2.6 圆形线圈在均匀磁场中转动所产生的电动势 …… (165)
第 15 章 镜像法 …… (167)
15.1 镜像法界定 …… (167)
15.2 镜像法范例 …… (168)
15.2.1 接地导体球外的点电荷 …… (168)
15.2.2 内导体球接地的同心导体球系统 …… (169)
15.2.3 两个相交导体球的电容 …… (170)
15.2.4 两个接触导体球 …… (171)
15.2.5 一对点电荷电场中的两个接触导体球 …… (175)
第 16 章 补偿法 …… (178)
16.1 补偿法界定 …… (178)
16.2 补偿法范例 …… (178)
16.2.1 均匀带电球的球形缺损(阴阳法) …… (178)
16.2.2 均匀带电长直圆柱的柱形缺损(阴阳法) …… (180)
16.2.3 均匀载流长直线中的柱形空腔(正反法) …… (181)
16.2.4 无限大均匀带电平面上的圆孔 …… (183)
16.2.5 长直载流导线的中间缺损 …… (185)
16.2.6 充有两种介质的电容器的电容 …… (186)
16.2.7 电位差计 …… (189)

16.2.8 有小缺口的均匀带电圆环 …… (189)
第 17 章 电容系数与电势系数法 …… (191)
17.1 电容系数法与电势系数法界定 …… (191)
17.2 电容系数与电势系数法范例 …… (191)
17.2.1 内导体球被球壳同心包围的情况 …… (191)
17.2.2 两块带电的平行导体板 …… (192)
17.2.3 用导线连接的两个导体球 …… (194)
第 18 章 能量法 …… (197)
18.1 能量法界定 …… (197)
18.2 能量法范例 …… (197)
18.2.1 内导体球接地的同心导体球组 …… (197)
18.2.2 电容器的电容 …… (198)
18.2.3 同轴电缆的自感 …… (200)
18.2.4 导体的静电平衡 …… (201)
第 19 章 排除法 …… (203)
19.1 排除法界定 …… (203)
19.2 排除法范例 …… (203)
19.2.1 确定无穷大载流平面的磁场方向 …… (203)
19.2.2 确定无限长均匀带电线的电场方向 …… (204)
19.2.3 导体上的感应电荷绝对值小于施感电荷 …… (205)
19.2.4 确定无限长直螺线管感生电场的方向 …… (206)

第Ⅳ部分 问题研究方法模块

第 20 章 研究法 …… (211)
20.1 研究法界定 …… (211)
20.2 研究法范例 …… (212)
20.2.1 长直螺线管轴线上的磁场与其截面形状是否有关 …… (212)
20.2.2 螺线管轴线上磁场的离散模型与连续模型的比较 …… (214)
第 21 章 实验法 …… (218)
21.1 实验法界定 …… (218)
21.2 实验法范例 …… (218)
21.2.1 利用平板电容器测量海水的电导率 …… (218)
21.2.2 通过导线电量的测量 …… (219)
21.2.3 螺线管中磁场的测量 …… (220)
21.2.4 平行载流导线间的相互作用力测量 …… (221)
21.2.5 同轴电缆自感的测量 …… (223)

第Ⅴ部分　知识盘点方法模块

第 22 章　对比法 …… (227)
22.1　对比法界定 …… (227)
22.2　静电场与静磁场的对比 …… (227)
22.2.1　电场和磁场的特点对比 …… (227)
22.2.2　电场和磁场定义对比 …… (228)
22.2.3　库仑力与安培力的对比 …… (228)
22.2.4　电荷与电流激发场之规律的对比 …… (229)
22.2.5　电场和磁场的方程对比 …… (231)
22.2.6　电场和磁场的标势描绘对比 …… (231)
22.2.7　电场和磁场的功和能对比 …… (232)
22.2.8　静止电荷与匀速运动电荷的对比 …… (233)
22.3　电场和磁场与物质相互作用的对比 …… (234)
22.3.1　电场和磁场与导体的相互作用 …… (234)
22.3.2　电容和电感(自感或互感)的对比 …… (234)
22.3.3　电介质与磁介质的对比 …… (236)
22.3.4　电路与磁路对比 …… (238)
22.3.5　电源电动势与感应电动势的对比 …… (239)
22.4　非静态场 …… (240)
22.4.1　与时间有关的电场与磁场对比 …… (240)
22.4.2　电流密度与能流密度的对比 …… (242)

参考文献 …… (243)
附录 A　电磁学中常用积分公式 …… (244)
附录 B　常用函数的级数展开式 …… (248)
附录 C　基本物理常量表(2006) …… (250)

第Ⅰ部分

基本原理方法模块

电磁学的基本原理与理论体系是经过长期的科学实验检验和科学逻辑演绎所得到的，它是前人集体智慧的结晶。电磁学的内容丰富、逻辑性强并与现代科学技术和日常生活息息相关。在这一理论体系中，逻辑演绎过程始终贯穿全过程，其中演绎法、归纳法、例证法、反证法、类比法、模型法等是课程中常用的一些科学方法。初学者往往只注意知识点的理解和运用的学习，而忽视或不清楚这些论述的方法，其后果是所学到的知识是肤浅的或“一知半解的”。另一方面，电磁学是一门基础性很强的课程，物理专业或非物理专业的学生都应该牢固掌握，就像游泳运动员一样，要想获得好的游泳成绩，就要平时进行各项体能训练。在这一部分中论述这些较为古老的方法，其动机之一是将这些“古老”的科学方法从“后台”走向“前台”，凸现这些方法在电磁学的地位和作用；其动机之二是使读者对这些科学方法引起足够的重视或注意，丰富学习内容，并能在实际中加以运用，提高电磁学学习的“附加值”。初学者不要忽视这些逻辑的论述过程，因为这些内容是电磁学理论不可或缺的一部分。

值得指出的是，由于电磁学的基本原理部分蕴涵着众多的科学方法，除了本模块中列举的几种方法以外，还有平移法、数学方法等都是常见的科学方法，在此不再一一论述。

第1章 演绎法

电磁学的基本理论体系是建立在库仑定律、毕奥－萨伐尔定律和法拉第电磁感应定律这三大实验定律基础上的。整个理论体系逻辑推理严密，演绎过程遵循一般到特殊或特殊到一般的原则。逻辑是一种思维规律，而逻辑学是关于思维规律的学说，它由亚里士多德创立。逻辑学的发展经历了传统逻辑（形式逻辑）和辩证逻辑两大阶段。辩证逻辑又发展为矛盾逻辑和对称逻辑两大分支。对称逻辑是逻辑学发展的最新成果，是辩证逻辑发展的高级阶段，也是逻辑学发展的最高阶段。对称逻辑学就是对称逻辑的概念、范畴与范畴体系，由我国著名学者陈世清创立。在这一章中，我们通过几个范例来阐明这种演绎的逻辑推理过程，以便读者加深对电磁学概念和规律的认识和理解。

1.1 演绎法界定

演绎（deduce）这个词作名词其基本意思是：一种推理方法，由一般原理推出关于特殊情况下的结论。

三段论（syllogism）就是演绎的一种形式，是传统逻辑中的一类主要推理，又称直言三段论。古希腊哲学家亚里士多德首先提出了关于三段论的系统理论。

三段论包含大前提、小前提和结论。大前提是一般事理；小前提是论证的个别事物；结论就是论点。对三段论推理过程的表述可以灵活处理，有时省略大前提，有时省略小前提。一个正确的三段论仅有三个词项，其中联系大小前提的词项叫中项；出现在大前提中，又在结论中做谓项的词项叫大项；出现在小前提中，又在结论中做主项的词项叫小项。

所谓演绎法（deduction）或称演绎推理（deductive reasoning）是指人们以一定的反映客观规律的理论认识为依据，从服从该认识的已知部分推知事物的未知部分的逻辑推理方法，由一般原理推出关于特殊情况下的结论，即从一般到特殊的思想推理方法。因此，演绎法也可称之为认识“隐性”知识的方法。

演绎法的特点是：（1）前提的一般性知识和结论的个别性知识之间具有必然的联系，结论蕴含在前提中，没超出前提知识范围；（2）结论是否正确，既取决于作为出发点的一般性知识是否正确反映客观事物的本质，又取决于前提和结论之间是否正确地反映事物之间的联系。如果前提是经过实践检验的正确反映事物本质的普遍原理或公理，演绎过程中又遵循了逻辑规则，那得出的结论可靠；（3）思维运动方向是由一般到个别，由抽象到具体，即演绎的前提是一般性知识，是抽象性的，而它的结论却是个别性知识，是具体的。

演绎法可分为公理演绎法、假设演绎法、定律演绎法和理论演绎法。公理演绎法的特点是大前提是依据公理（或公设）进行推理；假说演绎的特点是以假说作为推理的大前提；定律演绎是以某个定律或某种规律作为大前提的演绎法，而作为演绎推理前提的规律包括有两类：一类是经验规律，另一类是普遍规律；理论演绎法是以某一理论作为大前提，以在该理论范围内的确切事实为小前提的演绎。

演绎推理方法是一种最基本的逻辑推理方法，几乎贯穿整个电磁学中，它不仅适用于电

磁学规律的演绎推理，而且也适用于物理学其他各分支学科以及非物理学科。

1.2 演绎法范例

1.2.1 电场强度

由库仑定律演绎出电场强度的过程是属于实验定律演绎过程。大前提是两个点电荷之间的作用力即库仑定律(一般性)，小前提是单位电荷受到的力(特殊性)，结论是电场强度。这个演绎过程是从实验定律出发而获得电场强度的结论，可谓之定律演绎法。三段论的框架结构如图 1-1 所示。

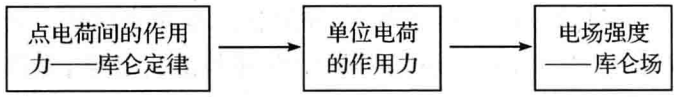


图 1-1 三段论的框架

所有的静电学都基于两个基本原理：库仑定律(Coulomb's law) 和叠加原理(principle of superposition)。库仑定律直接建立于实验基础上，是描写两个点电荷(point charge) 相互作用力的表达式。点电荷 q_2 对 q_1 的作用力为(参见图 1-2(a))

$$\boldsymbol{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{1.1}$$

式中，r 是两个点电荷之间的距离，$\hat{\boldsymbol{r}}$ 是由 q_2 指向 q_1 的单位矢量。两电荷同号为排斥力，异号为吸引力。如果 q_1 是一个单位点电荷($q_1 = 1$)，即作用于单位点电荷的力是

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{F}_1(q_1 = 1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{1.2}$$

这里用符号 $\boldsymbol{E}_1$ 来表示单位电荷的力(特殊)，以示区别于一般情况的库仑力。上式表明，作用于单位电荷 q_1 的力是由电荷 q_2 实施的。此式等价于

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{\boldsymbol{F}_1}{q_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{1.3}$$

因此，电荷 q_0(试探电荷) 受到的“单位电量的力”可表示为

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q_0} \tag{1.4}$$

我们把这个“单位电量力”称之为电场强度(electric field intensity)，这就是电场强度的定义式。由于力 $\boldsymbol{F}$ 是一个矢量，因而 $\boldsymbol{E}$ 也是个矢量，且是空间位置的函数，故又称为矢量场(vector field)，它完全保留了力 $\boldsymbol{F}$ 的所有特征(比如：矢量性、叠加性等)。电场强度的方向与该点正电荷的受力方向相同，电场强度的单位是 $\mathrm{N \cdot C^{-1}}$。

据此，一个点电荷 q 的电场强度为

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{1.5}$$

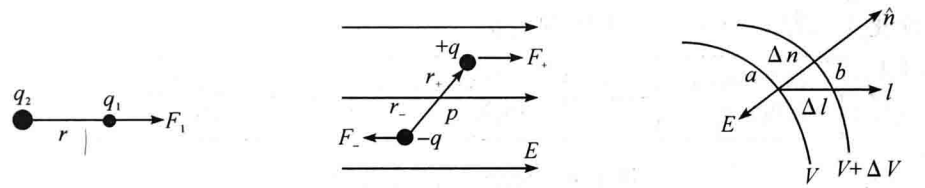
如果许多电荷集中在一个非常小的空间区域内(比如，原子核中的质子)，可视为这些电荷产生的电场强度是相同的，于是，上式可改写为微分式

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{1.6}$$

上式是库仑定律在特殊情况下得到的，因此，(1.6) 或(1.5) 式常称之为库仑场(Coulomb field)，也可叫作“库仑定律”。原则上，由(1.6) 式可计算任意带电体的电场强度，因而在这里

也可体现“特殊性(导出)”中呈现“一般性(应用)”。这就是电场强度的演绎推理过程,遵循从一般到特殊的逻辑演绎过程。前提是个实验定律,由此而逻辑推理得到的结论一定是可靠的,因此,(1.6)式也可以称为电场强度的“实验定律”。

这个定义的优点是:电荷激发电场的物理图像十分清晰,便于电场强度的计算;不足是实验测量电场强度不是很方便,因为测量仪器一般只显示大小而不能同时显示方向。



(a)点电荷的相互作用　(b)在电场中的电偶极子　(c)电场强度与电势梯度

图 1-2　电荷之间的作用力

从上面的演绎推理过程可知,电场强度对电荷有力的作用。据此,一对等量异号正负点电荷组成的系统(电偶极子)在电场中会引起转动,由此可以演绎推理出电场强度的第二种定义。这一演绎过程的大前提是电偶极子的力矩(库仑定律),小前提是单位电偶极矩的最大力矩,结论是单位电偶极矩受到的最大力矩 —— 电场强度(见图 1-3),这里的小前提就是最后的结论。

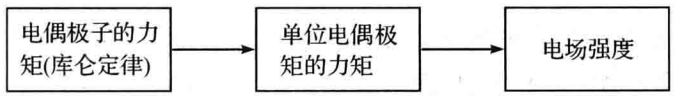


图 1-3　电场强度的演绎推理过程

设一对等量异号点电荷组成的电偶极子处在外电场中(参见图 1-2(b)),正、负电荷受到的电场力为

$$\boldsymbol{F}_+ = q\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{F}_- = -q\boldsymbol{E}$$

这对力的大小相等而方向相反,因此形成一力偶使得电偶极子转动,选偶极子的中心为固定转动轴,其转动力矩为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}_+ \times \boldsymbol{F}_+ + \boldsymbol{r}_- \times \boldsymbol{F}_- = q(\boldsymbol{r}_+ - \boldsymbol{r}_-) \times \boldsymbol{E} = 2q\boldsymbol{r}_+ \times \boldsymbol{E} = 2q\frac{\boldsymbol{l}}{2} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E} \tag{1.7}$$

其中 $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$ 是电偶极子的电偶极矩,$\boldsymbol{l}$ 是正负电荷间的距离,方向由负电荷指向正电荷。电偶极子受到的最大力矩是电偶极矩方向与电场强度方向垂直,即

$$M_{\max} = pE$$

由此可知,单位电偶极矩的力矩是

$$E = M_{\max}(p = 1)$$

或者

$$E = \frac{M_{\max}}{p} \tag{1.8}$$

此式即为电场强度大小的定义,也可以用矢量式表示为

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{M}_{\max} \times \boldsymbol{p}}{p^2} \tag{1.9}$$

这就意味着,电场强度的方向由最大力矩方向与电偶极矩方向的右手法则决定。由此定义的电场强度的单位仍然是 N/C。这种定义的实质仍然是库仑定律,但不是很实用,形式上也不如前面的定义直观,不能直接反映电荷激发电场的这一特征,这也就是电磁学中不作常用定

义的原因所在。

在电磁学中，还可以用另一种方法来定义电场强度，它的大前提完全不同于前面两种定义，即由电场的性质来定义的。静电场移动场中电荷要做功，但做功与所经过的路径无关。这一点与重力场极为相似，于是可以借助重力场引入电势能的概念（参见第 5 章类比法）。大前提是空间任意两点间的电势差（即单位电荷的电势能差），小前提是单位长度的电势差（或电势的空间变化率），结论就是电势梯度的负值，即电场强度。

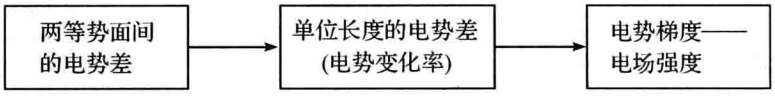


图 1-4　电场强度演绎推理过程

考虑电势 V 和 $V+\Delta V$ 的两个等势面，由于 ΔV 很小，两个等势面相距很近，如图1-2(c)所示。设一单位正电荷从等势面 V 上 a 点沿着任一方向 $\boldsymbol{l}$ 移到等势面 $V+\Delta V$ 上的 b 点，产生的位移为 $\Delta \boldsymbol{l}$，电场力的功为

$$V_a - V_b = V - (V+\Delta V) = -\Delta V = \boldsymbol{E}\cdot\Delta\boldsymbol{l} = E_l \Delta l$$

于是

$$E_l = -\frac{\Delta V}{\Delta l}$$

上式表明，在 l 方向上单位长度的电势增量的负值，即表示电场强度在 l 方向上的分量。因为两等势面间的电势增量 ΔV 是不变的，而沿着不同的方向，Δl 不一样，故电势的空间变化率不相同。最小的距离是两等势面相交的法线方向距离 Δn，即法线方向上电势的空间变化率最大。于是，我们有

$$E_n = -\frac{\Delta V}{\Delta n} \tag{1.10}$$

这就是用单位长度的电势差（或单位长度电势增量的负值），可以表示电场强度的大小。当两等势面间的距离 $\Delta n \to 0$ 时，上式可表示为

$$\boldsymbol{E} = E_n \hat{\boldsymbol{n}} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}\hat{\boldsymbol{n}} \tag{1.11}$$

此式也可以视为电场强度的定义，可见电场强度的另一单位是 V/m。上式即为电场强度与电势梯度的关系。这个定义的优点是：由于电势是标量，实验测量比较方便；如果已知电势分布，对其求导数即可得电场强度，而求导数比积分要容易得多；便于应用于电路中，较为实用。不足是：场与电荷间的关系不够明确。

实际上，从理论的角度来说，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 是矢量场，而矢量场垂直通过某一个面积 ΔS 时，就会形成电场的通量 $\Delta\Phi$（电通量）。当面积 ΔS 固定时，通过 ΔS 的通量越大，电场强度越强。因此可用单位面积的电通量（electric flux）来定义电场强度，即

$$\boldsymbol{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S}\hat{\boldsymbol{n}} \tag{1.12}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是面积 ΔS 的法线单位矢量。由于实验测量电通量有较大困难，所以实际中不作电场强度的定义，故(1.12) 式只有理论意义，而无实际意义。

值得一提的是，根据演绎法，力学中的牛顿第二定律 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$，其中加速度 $\boldsymbol{a}$ 可理解为单位质量的力，这个特殊的力就是加速度；另外，根据压强的定义，物体单位面积所受的力称为压强，这种单位面积的压力就是一个特殊的力，即压强 $p = \dfrac{F}{S}$。这些都是大家熟悉的例子，据

此就不难理解电场强度的定义(1.4)式了。

1.2.2 介质中的高斯定理

极化强度 所谓电介质是指导电性能极差或根本不导电的介质，因而电介质是绝缘体。处于外电场中的电介质会产生极化，即介质内部出现许多有序排列的分子电偶极矩。分子偶极矩的有序程度越高，极化越强；分子偶极矩密度越大，极化也越强。也就是说，介质极化时分子偶极子的有序度和分子偶极子的密度与极化强度有着必然的联系。这样极化的强度与分子偶极矩之间就有必然的逻辑联系，可以建立起响应数学关系。根据演绎推理的三段论，我们可以给出电介质极化强度与分子电偶极矩的推理框图如下：

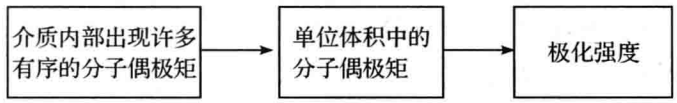


图 1-5 极化强度演绎推理过程

这里大前提是电介质极化出现分子偶极矩(一般性)，小前提是单位体积中分子偶极矩(特殊性)，结论就是极化强度，即小前提。

大家知道，一个原子(或无极分子)被加上外电场时，原子中的核被推向外场方向，电子被拉向电场的反方向，这时原子被电场诱导出一个电偶极矩，这种电偶极矩称为诱导电偶极矩(induced dipole moment)(见图 1-6(a))，并与电场成正比

$$\boldsymbol{p} = \alpha \boldsymbol{E} \tag{1.13}$$

比例常数 α 称为原子的极化率，它必须由实验来测量，但是我们可以估算它的大小数量级。设原子是一半径为 $R \approx 0.1\text{nm}$ 的导体球，外电场中的导体球内诱导出的偶极矩为

$$\boldsymbol{p} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \boldsymbol{E} = \alpha \boldsymbol{E} \tag{1.14}$$

可见，模拟的极化率与球的体积成正比，即 $\alpha \approx 10^{-40}\text{C} \cdot \text{m}^2/\text{V}$。由量子力学可算得外电场中的氢原子的电偶极矩为

$$\boldsymbol{p} = \frac{9}{2}(4\pi\varepsilon_0 a_0^3)\boldsymbol{E} = (0.667 \times 10^{-40}\text{C} \cdot \text{m}^2/\text{V})\boldsymbol{E} \tag{1.15}$$

这里 a_0 是玻尔半径，量子力学计算结果与实验测量结果符合得相当好。

对于有极分子，由于热运动(thermal agitation)，即使加以外电场，分子的电偶极矩也不完全转向电场 $\boldsymbol{E}$ 的方向。若不考虑分子之间的相互作用，则平均(统计平均)电偶极矩 $\langle \boldsymbol{p} \rangle$ 是电场 $\boldsymbol{E}$ 的线性函数，即

$$\langle \boldsymbol{p} \rangle = \alpha \boldsymbol{E} = \left(\alpha_0 + \frac{p^2}{3kT}\right)\boldsymbol{E} \tag{1.16}$$

式中 p 是分子的固有偶极矩(permanent dipole moment)，k 是玻尔兹曼常数，T 是绝对温度。由于取向极化中有微小的位移极化产生，故 α_0 代表位移极化率。上式括号中的这个极化率称之为朗之万－德拜(Langevin-Debye)公式。因此，电介质极化时，无论诱导分子偶极矩还是固有分子偶极矩，对极化的贡献是相同的。于是，介质中总的分子电偶极矩的矢量和为

$$\boldsymbol{p}_t = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \cdots + \boldsymbol{p}_N = \sum_i \boldsymbol{p}_i \tag{1.17}$$

对于均匀介质的理想极化情况，即 N 个分子电偶极矩都沿同一方向排列起来，上式化简为

$$\boldsymbol{p}_t = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \cdots + \boldsymbol{p}_N = N\boldsymbol{p} \tag{1.18}$$

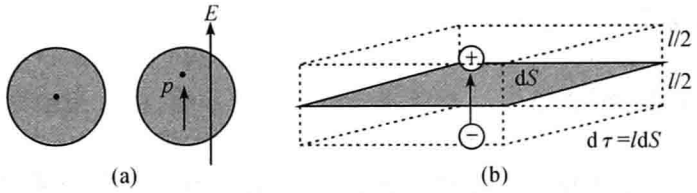


图 1-6　介质的极化模型

怎样定义极化强度呢?若单位体积中的电偶极矩数量越多,则极化越强;若单位体积中的偶极矩指向外场方向的数量越多,极化也越强。为此,定义极化强度如下:

$$\boldsymbol{P}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\sum \boldsymbol{p}_i}{\Delta\tau} \tag{1.19}$$

此式的意义是:电介质单位体积中分子偶极矩的矢量和。它是空间位置的函数,是一个描写介质极化程度的物理量。对于均匀极化,将(1.18)代入(1.19)得

$$\boldsymbol{P}=\frac{\boldsymbol{p}_t}{\Delta\tau}=\frac{N\boldsymbol{p}}{\Delta\tau}=n\boldsymbol{p} \tag{1.20}$$

其中 n 是分子数密度。这就是极化强度的演绎推理过程。

极化电荷　介质极化后,内部和表面会出现束缚(bound charge)或极化电荷(polarized charge),那么,极化强度 $\boldsymbol{P}$ 与束缚电荷有何联系呢?通过演绎推理可以构建束缚电荷与极化强度的响应关系。这里的大前提是介质极化时表面出现束缚电荷,极化越强,束缚电荷越多;小前提是单位面积的束缚电荷越多,极化越强;结论是束缚电荷面密度与极化强度成正比。演绎推理框架如图 1-7 所示。

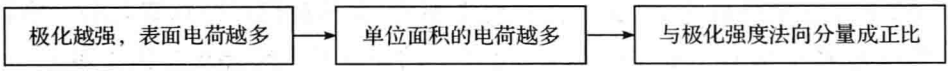


图 1-7　极化电荷演绎推理过程

设想在介质的表面取一 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 面元,让电偶极子的正电荷穿出该面元,而负电荷留在该面元之内,即电偶极子位于一个底面积为 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$,高为 l 的体积元 $\mathrm{d}\tau$ 内,如图 1-6(b)所示。露出 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 面元的正电荷为

$$\mathrm{d}Q_b=q(nl\mathrm{d}\tau)=qn\boldsymbol{l}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.21}$$

这里已经利用了(1.20)式。整个介质表面的总束缚电荷为

$$Q_b=\oint_S \mathrm{d}Q_b=\oint_S \boldsymbol{P}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S$$

这里 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是 $\mathrm{d}S$ 面元的外法线单位矢量。因为露出表面的正电荷与留在面内的负电荷数值相等(电荷守恒),所以,上式可以写成更一般的形式

$$Q_b=-\oint_S \boldsymbol{P}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S \tag{1.22}$$

上式即为介质表面极化电荷的一般式。单位面积上的极化电荷为

$$\sigma_b=\frac{\mathrm{d}Q_b}{\mathrm{d}S}=\boldsymbol{P}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} \tag{1.23}$$

可见极化面电荷密度与表面极化强度的法向分量成正比。(1.22)式表明:极化电荷能够激发极化场(矢量场 $\boldsymbol{P}$),极化电荷(闭合面 S 所包围的电荷)就是极化场的通量。因而,(1.22)式也可称为"极化强度矢量的高斯定理"。由于极化强度一般不能事先知道,因而求极化电荷是很困难的。然而,能否找到一个摆脱暂不求极化电荷的途径?

介质中的高斯定理 介质中的高斯定理演绎推理的大前提是所有的电荷会激发电场；小前提是极化电荷同属于电荷也会激发电场；结论是极化场与电场是可以叠加的。这个过程的演绎推理框架如图 1-8 所示。

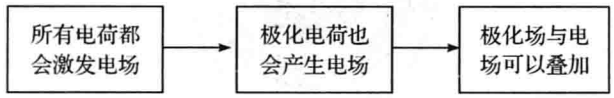


图 1-8 电位移场的演绎推理过程

根据静电场的高斯定理，如果高斯面内同时存在自由电荷 Q_0 和极化电荷 Q_b，那么，通过闭合曲面的电场强度通量可表达为

$$\oint_S \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}S = (Q_0 + Q_b) \tag{1.24}$$

将(1.22)式代入得

$$\oint_S \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}S = Q_0 - \oint_S \boldsymbol{P} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}S \tag{1.25}$$

由于闭合面是任意的，上式中的两积分可以合并，移项后整理得

$$\oint_S (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}S = Q_0 \tag{1.26}$$

定义电位移矢量 $\boldsymbol{D}$：

$$\boldsymbol{D} \equiv \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{1.27}$$

于是

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}S = Q_0 \tag{1.28}$$

上式称为介质中的高斯定理。(1.24)式暗示所有电荷都会激发电场(一般性)，而(1.28)只包含了自由电荷的信息(特殊性)，这就是从一般到特殊的演绎推理过程。这里电位移矢量起到了融合电场与极化强度的作用，表明极化强度与电场强度有必然的联系，这个关系只能由实验来确定。

将上述结果应用于一个特殊的情况，即考虑电介质是各向同性的而且是线性的。各向同性的意思是，电介质的极化过程与电场强度所加的方向无关，也就是当把介质放入电场中时无需考虑方向性；线性是指极化强度与电场强度成正比关系，而这个关系只能由实验确定：

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E} \tag{1.29}$$

式中 χ_e 表示介质的极化率，而电场强度 $\boldsymbol{E}$ 应理解为总电场(外加场与极化场之和)。将此式代入(1.27)式得

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E} \tag{1.30}$$

其中

$$\varepsilon_r = (1 + \chi_e)$$

表示介质的相对介电常数。

1.2.3 填充有 n 层同心介质的球形电容器

设球形电容器内导体球的半径为 R_1，外导体球的半径为 R_{n+1}。今在两导体球面间同心地填充 n 层不同电介质，它们的相对介电常数分别为 $\varepsilon_{r1}, \varepsilon_{r2}, \cdots, \varepsilon_m$，如图 1-9 所示。

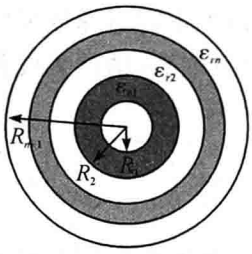


图 1-9　填充有 n 层同心介质的球形电容器

求该电容器的电容，就是相当于给出球形电容器充有多种不同介质时电容的一般结果。再从一般结果推出一些大家熟悉的特殊结果。这一过程可以分为前半和后半两个部分来演绎：前半部分的大前提是介质中的高斯定理（高斯面的一般性），小前提是球形高斯面（特殊性），结论是 n 层同心介质的球形电容；后半部分的大前提是 n 层不同介质的电容（一般性），单层或双层的电容（特殊性）是小前提，结论是充有单层或双层的电容。这种演绎推理应属于定律演绎推理，大框架演绎过程如图 1-10 所示.

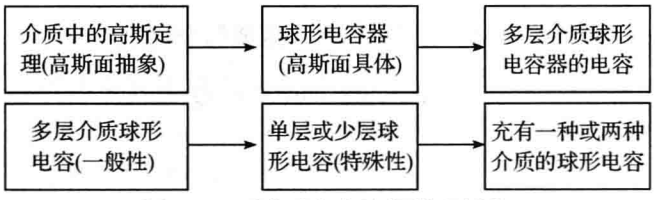


图 1-10　球形电容演绎推理过程

实际上，在大框架下还有小框架也都是符合演绎逻辑推理的。比如，电位移 → 电场强度 → 电势的演绎过程等。

设内导体球带 $+Q$，外导体球带 $-Q$ 的电量。由介质中的高斯定理可得电位移的大小为

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \tag{1.31}$$

对于各向同性的线性介质，第 k 层中的电场强度的大小为

$$E_k = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_{rk}} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_{rk} 4\pi r^2} \tag{1.32}$$

此式表明，由于相对介电常数的不同，导致各层介质中电场强度不相等，因而计算电势差时要分区进行，于是两导体板之间的电势差为

$$\begin{aligned} V &= \int_{R_1}^{R_{n+1}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{R_1}^{R_2} E_1 \mathrm{d}r + \int_{R_2}^{R_3} E_2 \mathrm{d}r + \cdots + \int_{R_n}^{R_{n+1}} E_n \mathrm{d}r \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_{R_k}^{R_{k+1}} E_k \mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{n} \frac{(R_{k+1} - R_k)}{\varepsilon_{rk} R_k R_{k+1}} \end{aligned} \tag{1.33}$$

根据电容的定义得

$$C_n = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(R_{k+1} - R_k)}{\varepsilon_{rk} R_k R_{k+1}}} \tag{1.34}$$

由此式可以得到如下几种特殊情况的电容：

当 $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2} = \cdots = \varepsilon_m = 1$ 时，(1.34) 式约化为

$$C_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{R_k} - \dfrac{1}{R_{k+1}} \right)} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_{n+1}}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_{n+1}}{(R_{n+1} - R_1)} \tag{1.35}$$

此式即为球形电容器未充介质时的电容。

当 $n=1$ 时，只有一种电介质填充其中，(1.34) 式简化为

$$C_1 = \frac{4\pi\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 R_1 R_{n+1}}{(R_{n+1}-R_1)} \tag{1.36}$$

此式即为充有一种介质时的球形电容器的电容。

当 $n=2$ 时，有两种介质填充在电容器中，(1.34) 式变为

$$C_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\dfrac{(R_2-R_1)}{\varepsilon_{r1}R_1R_2}+\dfrac{(R_{n+1}-R_2)}{\varepsilon_{r2}R_2R_{n+1}}} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}R_1R_2R_{n+1}}{\varepsilon_{r2}(R_2-R_1)R_{n+1}+\varepsilon_{r1}(R_{n+1}-R_2)R_1} \tag{1.37}$$

这个结果就是大家熟知的相当于两个充有不同介质球形电容器的串联。

1.2.4　电源两端的电压(路端电压)

前面两个范例是属于“场”的问题，电源两端的电压是属于“路”的问题。当电源接入电路时，一般都会有电流流过(一个例外请见补偿法)。流过电源的电流可以是充电式的(电流的流动方向向着电源的正极)，也可以是放电式的(电流的流动方向背离电源正极)。这两种情况无论在简单电路还是复杂电路中都有可能发生。下面根据演绎法的逻辑思维来讨论这个问题。“电压”一词是“路”理论中通常的术语，而“电位差(电势差)”是“场”理论中的常用术语。由于稳恒电路的电场与静电场性质相同，因此两者并无多大差别。这样一来，电源路端电压的大前提就是电场中任意两点之间的电势差(一般性)，小前提是电源两端的电势差(特殊性)，结论就是电源的路端电压。三段论的推理框架如图 1-11 所示。

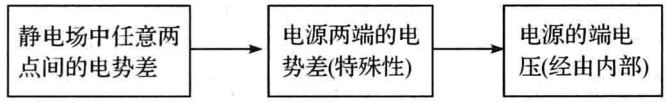


图 1-11　电源端电压演绎过程

电源是一种提供非静电力的装置，因而非静电力只存在于电源的内部。如果用 E_k 表示作用于单位正电荷上的非静电力，那么，当电源向外供给电能时，电源内部的电流密度可以写成

$$\boldsymbol{j} = \gamma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_k) \tag{1.38}$$

此式表明，非静电力 $\boldsymbol{E}_k$ 与静电场 $\boldsymbol{E}$ 都对电流有贡献。实际上，非静电力的方向是从电源的负极指向正极的，而静电场是从正极指向负极的，如图 1-12(a) 所示。上式是矢量的一般表达式，如果选定非静电力 $\boldsymbol{E}_k$ 为正方向，则静电场为负，即

$$\boldsymbol{j} = \gamma(E_k - E)\hat{\boldsymbol{e}}_k \tag{1.39}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{e}}_k$ 是非静电力的单位矢量。可见，当非静电力大于静电力时，电流从电源的负极流向正极，这时电源在放电；当非静电力小于静电力时，电流从正极流向负极，这时电源在充电。因此，无论是(1.38) 式还是(1.39) 式都蕴含着充放电的信息。

将静电场中的电势差公式运用到电源的正负极上，电源两端的电势差为

$$V_{+-} = \int_+^- \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_+^- (-E\hat{\boldsymbol{e}}_k)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_-^+ E\hat{\boldsymbol{e}}_k\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.40}$$

将(1.39) 式整理后代入上式，并选择积路径从负极(经由电源内部) 到正极，因此我们有

$$V_{+-} = \int_-^+ \left(E_k\hat{\boldsymbol{e}}_k - \frac{\boldsymbol{j}}{\gamma}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_-^+ E_k\hat{\boldsymbol{e}}_k\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} - \int_-^+ \frac{\boldsymbol{j}}{\gamma}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \varepsilon - \int_-^+ (\pm 1)\frac{j\,\mathrm{d}l}{\gamma} \tag{1.41}$$

由于电流密度的方向有两种可能：充电时与积分路径方向相反；放电时与积分方向相同。这就是上式第二项中“± 1”的含义。上式中的第一项 ε 为电源的电动势，定义为

$$\varepsilon = \int_-^+ E_k\hat{\boldsymbol{e}}_k\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.42}$$

其意义是，把单位正电荷从电源负极经电源内部移到正极非静电力所作之功。设电源两极之间 dl 长度处的横截面积为 S，电流密度 j 可用电流强度 I 表示。定义电源的内电阻为

$$r = \int_{-}^{+} \frac{dl}{\gamma S}$$

这样，(1.41) 式的第二项即为电源内电阻上的电压降，于是有

$$V_{+-} = \varepsilon \mp Ir \tag{1.43}$$

我们通常把电源正极与负极之间的电势差称为路端电压。它的意义为静电场力把单位正电荷从正极（经电源内部）移到负极所做的功。当电源放电时，(1.43) 式取“−”，路端电压小于电源电动势；当电源充电时，(1.43) 式取“+”，路端电压大于电动势。

从(1.43)式还可以看出，当通过电源中的电流 $I = 0$ 时，要么电路断开状态，要么电路处于补偿状态，这时路端电压等于电动势；当电源的内阻 $r = 0$ 时，电源即使有电流通过，其路端电压也等于电动势，这种电源常称为理想电压源。因此，一个实际的电源总可以看作为一个电动势为 ε 的理想电压源与一个电阻等于内阻 r 的串联，如图 1-12(b) 所示。

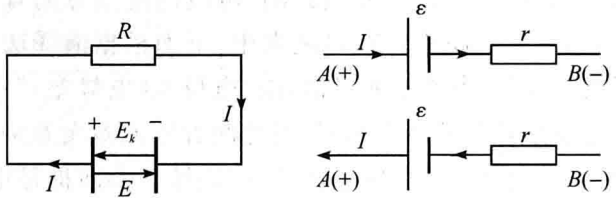


图 1-12　电源路端电压与等效电源

从(1.43)式和图 1-12(b) 出发，可以演绎出一个电势差计算的重要公式。在一段含电源的电路中，如果包含有若干个电源电动势 ε 和电阻 R 的串联，并且该段电路中有电流 I 通过，则该段电路两端的电势差为

$$V_{AB} = \sum(\pm IR) - \sum(\pm \varepsilon) \tag{1.44}$$

式中的正负号“±”是这样约定的：如果电流方向与计算电势差的顺序（$A \to B$）相同时取“+”，反之取“−”；当电动势的参考方向（负极 → 正极）与计算顺序方向相同时取“+”，否则取“−”。由图 1-12(b) 可以验证，这个公式与(1.43) 式是一致的。从式(1.43) 得出式(1.44) 是由特殊到一般的方法，这是与演绎法相反的推理过程，即归纳法。

1.2.5　有限长直均匀带电细线的电场

一根长度为 L 的细直带电线，单位长度的电量为 λ。计算这根带电线所激发的电场强度的过程中，实际上我们运用的是定律演绎法。对这个问题而言，大前提可以认为是电荷元 dq 所激发的电场（库仑场），小前提是线电荷元 λdl 的电场，结论是有限长直带电细线的电场强度表达式。定律演绎推理框图（文字与数学）如图 1-13 所示。

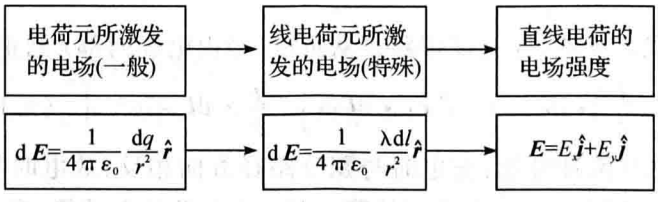


图 1-13　带电长直线的电场

在实际的计算电场过程中，大前提往往可以省去，即根据问题，直接写出线电荷元的表

达式。下面计算有限长直带电线的电场强度 $\boldsymbol{E}$。为此，设 x 轴与带电线垂直，y 轴与带电线重合，坐标原点在带电线上，如图 1-14 所示。在带电线上取一长度元 $\mathrm{d}l$，其电荷为

$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l$$

这个电荷元 $\mathrm{d}q$ 在 x 轴上任一点 P 所激发的电场强度为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}l}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{1.45}$$

其方向与 x 轴成 α 角，$\hat{\boldsymbol{r}}$ 是电荷元 $\mathrm{d}q$ 到 P 点的距离 r 的单位矢量。将电场分解为 x 和 y 方向的分量

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E_x &= \mathrm{d}E\cos\alpha = \mathrm{d}E\sin\theta \\ \mathrm{d}E_y &= -\mathrm{d}E\sin\alpha = \mathrm{d}E\cos\theta \end{aligned} \tag{1.46}$$

式中 θ 是 y 轴方向与 $\boldsymbol{r}$ 矢量的夹角。将积分变量进行变换之，我们有

$$\begin{aligned} l &= a\tan\alpha = -a\cot\theta \\ \mathrm{d}l &= a\csc^2\theta \mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{1.47}$$

再考虑到

$$r^2 = l^2 + a^2 = a^2(\cot^2\theta + 1) = a^2\csc^2\theta$$

于是，(1.46) 式的第一式化为

$$\mathrm{d}E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta \mathrm{d}\theta \tag{1.48}$$

积分得

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta \mathrm{d}\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \tag{1.49}$$

同理可得电场的 y 分量

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta \mathrm{d}\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \tag{1.50}$$

其中 θ_1，θ_2 分别是带电线右端和左端与 P 点之连线与 y 轴方向的夹角(见图 1-14)。

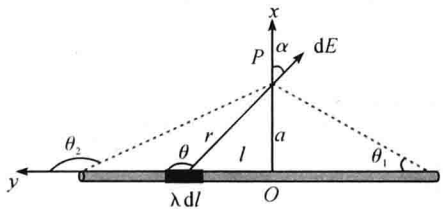


图 1-14 有限长带电细线的电场

接下来，我们再运用演绎法给出无限长带电细线的电场强度公式。为此，先考察(1.49)式和(1.50)式，由于坐标原点在轴线上选取是任意的，因而角度 θ_1 和 θ_2 一般不相等；另一方面，带电线是有限长的，但长短可以不一。也就是说，上述给出的电场强度公式具有一般性。从这个一般性结果出发可以演绎出一些特殊结果，其演绎框架如图 1-15 所示。

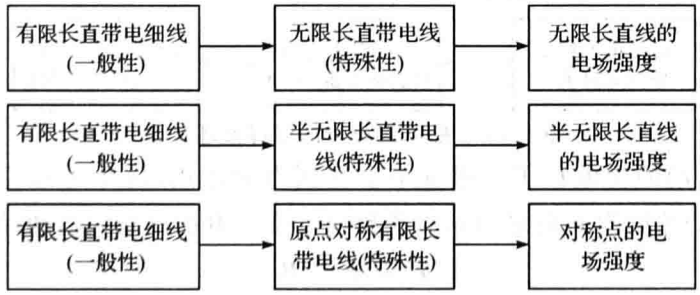


图 1-15 无限长、半无限长以及对称点的电场演绎过程

当(1.49)式和(1.50)式中的$\theta_1=0$，$\theta_2=\pi$时，有限带电线变成无限长带电线，我们有

$$\boldsymbol{E}=E_x\hat{\boldsymbol{i}}+E_y\hat{\boldsymbol{j}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\hat{\boldsymbol{i}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{1.51}$$

这就是无限长带电线的电场强度，电场的方向与带电线垂直，即沿着径向。

当$\theta_1=\frac{\pi}{2}$，$\theta_2=\pi$时，有限长带电线便成了半无限长带电线，于是有

$$\boldsymbol{E}=E_x\hat{\boldsymbol{i}}+E_y\hat{\boldsymbol{j}}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\hat{\boldsymbol{i}}-\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\hat{\boldsymbol{j}} \tag{1.52}$$

当$\theta_2=\pi-\theta_1$时，坐标原点位于带电线的中点，即带电线上下长度相等，P点位于带电线的垂直平分线上。这时P点的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=E_x\hat{\boldsymbol{i}}+E_y\hat{\boldsymbol{j}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{a^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}}\hat{\boldsymbol{i}} \tag{1.53}$$

以上就是从一般到特殊的演绎推理过程。顺便指出，如果P点有一点电荷q，则电荷q受到的作用力可表示为$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}$。

1.2.6 磁感应强度

我们知道，库仑定律就是两个点电荷之间的相互作用规律，由库仑定律可以演绎出电场强度，而且知道电场是由电荷激发的。因此，两个带电体之间的作用力可以视作许多点电荷之间作用力的矢量叠加。同样，两个载流回路之间也有作用力，这就是安培定律。仿照带电体的做法，把两个载流回路分割成许多小的电流元Idl(电流线段)，只要知道任意一对电流元之间的作用力就可通过求矢量和而得到。但是，电流元是不能单独存在的，实验无法给出两电流元之间的相互作用力，只能通过间接的方法从闭合回路的实验中倒推出来。为此，我们从洛仑兹力出发来演绎磁感应强度B的定义以及安培力。

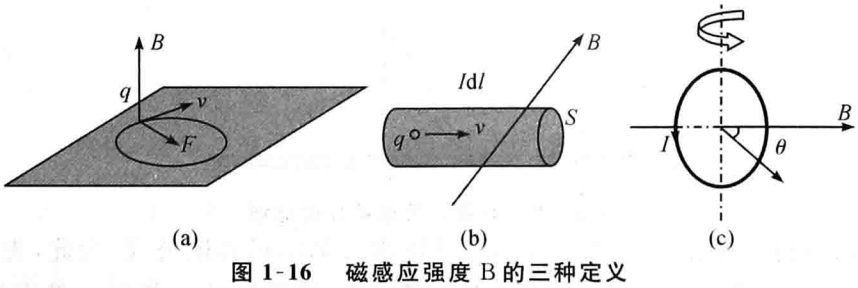


图 1-16 磁感应强度B的三种定义

首先，由洛仑力演绎出磁感应强度B的定义。这种演绎过程的大前提是带电粒子在磁场中的运动，受到的磁力是一般性的；小前提是运动带电粒子受到的最大磁力，即具有特殊性；结论是“单位电荷流”的磁力，即磁感应强度。演绎推理过程框架如图1-17所示。

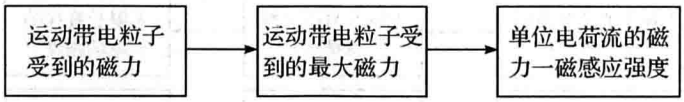


图 1-17 磁感应强度的演绎推理过程

一般情况下，运动的带电粒子在磁场中会受到力的作用，这个力称为洛仑兹力(Lorentz force)。设带电粒子的速度为$\boldsymbol{v}$，电量为q，在磁感应强度为$\boldsymbol{B}$的磁场中运动，洛仑兹力可表示为

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{1.54}$$

如果磁场是均匀的，则当电荷q的速度与磁场平行(或反平行)时，不受力，保持直线运动；当

速度与磁场垂直时，受力最大，为圆周运动；当速度与磁场有一定的夹角时，为螺旋运动。也就是说，(1.54) 式是一般表示式。电荷受的最大力为

$$F_{\max} = qvB \tag{1.55}$$

此式就是(1.54) 式的特殊情况，由上式可得“单位电荷流”的力是

$$B = \frac{F_{\max}}{qv} \tag{1.56}$$

该式就是磁感应强度 B 大小的定义式，也即演绎过程的结论。对比(1.4) 式可知，这里的电荷 q 是“运动”的。因而我们把“qv”称之为“电荷流”，它的单位是 Am(或 Cm/s)。“单位电荷流”是指 1 库仑的电量每秒流动 1 米的距离，即 $qv = 1$。因此，磁感应强 B 的单位是 $\mathrm{N \cdot A^{-1} \cdot m^{-1}}$ 或者 T(tesla)。(1.56) 可表示成矢量式

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{F}_{\max} \times \boldsymbol{v}}{qv^2} \tag{1.57}$$

即 $\boldsymbol{B}$ 的方向由最大力与速度的右手法则决定。以上就是磁感应强度的定义式从一般到特殊的演绎推理过程。

下面通过安培力(安培定律) 来定义磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。这里的大前提是载流导线在磁场中会受到安培力；小前提是电流元受到最大安培力；结论是单位电流元的安培力即为磁感应强度。演绎过程框架如图 1-18 所示。

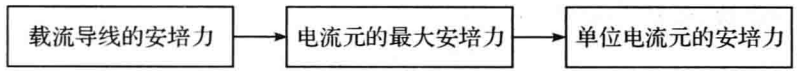


图 1-18 由安培力推演磁感应强度

设“电荷流”是在导线中进行的，且导线中的载流子密度为 n，于是，当该导线处在磁场中时，这些载流子受到的洛仑兹力是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}' = \mathrm{d}q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = nq\,\mathrm{d}\tau\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = nqvS\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} \tag{1.58}$$

式中 S 为导线的横截面积，q 为载流子的电量，v 为载流子的定向漂移速度，$\mathrm{d}\tau$ 是导线段 $\mathrm{d}l$ 的体积。利用电流强度的公式

$$I = nqvS$$

因为电荷是限制在导线中流动，这些载流子受到洛仑力作用后把动量转移给导线。根据动量守恒定律可得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{F}' = I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} \tag{1.59}$$

式中 $I\mathrm{d}l$ 称为电流元，方向指向电流流动方向，我们把这个力称为电流元的安培力(Ampère force)。电流元受到的最大安培力为

$$\mathrm{d}F_{\max} = I\mathrm{d}lB$$

于是，单位电流元受到的力是

$$B = \frac{\mathrm{d}F_{\max}}{I\mathrm{d}l} \tag{1.60}$$

此式即为磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的另一种定义，单位是特斯拉 T(tesla)。仿照(1.57) 式，上式的矢量式可表示为

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\max} \times I\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{(I\mathrm{d}l)^2} \tag{1.61}$$

也即 $\boldsymbol{B}$ 的方向由最大安培力与电流元的右手法则来确定。

还有一种定义是基于一个载流线圈在磁场中会受到力矩的作用，这就是演绎的大前提。

小前提是磁偶极矩受到的最大力矩，结论是单位磁偶极矩的最大力矩。演绎框架如图 1-19 所示。

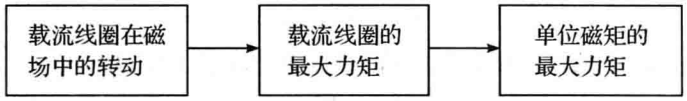


图 1-19　由磁矩受力推演磁感强度

设有一个线圈（圆形或矩形）位于均匀磁场中，今使该线圈通以稳恒的电流 I。由于磁场对线圈的作用其安培力之合力为零，线圈只有转动而无平动。当保持电流不变时，磁力矩 M 使线圈转过 $\mathrm{d}\theta$ 角度所做的功应等于通过线圈的磁链增加与电流 I 的乘积，即

$$M(-\mathrm{d}\theta) = I\mathrm{d}\Psi \tag{1.62}$$

其中 θ 表示线圈法线 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 与磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的夹角，负号表示磁力矩做功使 θ 减小。于是，磁力矩 M 的大小可表示为

$$M = -I\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\theta} = NIBS\sin\theta = mB\sin\theta \tag{1.63}$$

其中

$$\Psi = N\Phi = N\boldsymbol{B}\cdot S\hat{\boldsymbol{n}} = NBS\cos\theta$$

$$m = NIS$$

这里 N 是线圈的匝数，$\boldsymbol{m}$ 称为磁矩，其方向为线圈的法线方向。上式写成矢量式

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B} \tag{1.64}$$

此式即为磁矩在磁场中受到的力矩（一般式）。当线圈的磁矩方向与磁场垂直时，受力矩最大，即

$$M_{\max} = mB$$

由此可得单位磁矩的力矩为

$$B = \frac{M_{\max}}{m} \tag{1.65}$$

这也是磁感应强度 B 的定义式，它的单位是 N/Am，即特斯拉 T。用矢量表示

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{M}_{\max}\times\boldsymbol{m}}{m^2} \tag{1.66}$$

还有一种定义也值得一提：由于近年来量子霍尔效应的发展，磁通量呈现量子化，即

$$\Phi = n\Phi_0$$

式中 $\Phi_0 = \dfrac{h}{e}$ 是磁通量子，h 是普朗克常数，e 为电量的基本单元。于是

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{n\Phi_0}{S} \tag{1.67}$$

这里 $n = 0,1,2,\cdots$ 是磁通量子数，S 是磁通穿过的面积。如果处于某种状态的磁通量子数可以测量，那么这种定义也是有意义的。

1.2.7　电动势

众所周知，位于静电场中的点电荷会受到电场力的作用，而电场力从 P 点移动该点电荷到无穷远就要做功

$$A = \int_P^{\infty} q\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.68}$$

由此可知，移动单位电荷所做的功是

$$V = \frac{A}{q} = \int_P^{\infty} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.69}$$

V 称为“电势”，$\boldsymbol{E}$ 是电场强度或“单位电荷的静电力”。

如果静电力移动电荷绕闭合路径一周，这一过程中静电力所做的功应为零，这是静电力的保守性所决定的，用公式表示为

$$A = \oint_L q\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

由于积分回路 L 是任意的，因此，上式表明静电力做功与路径无关。实际中，还存在一种非静电力，它也能移动电荷做功，通常把“单位电荷的非静电力”所做的功称之为“电动势”，以示区别于静电力的电势。两者虽一字之差，但存在物理本质的差别。下面对一般形式电动势的定义作一演绎推理。大前提是非静电力移动电荷做功，小前提是移动单位正电荷非静电力所做的功，结论是电动势，演绎过程框架如图 1-20 所示。

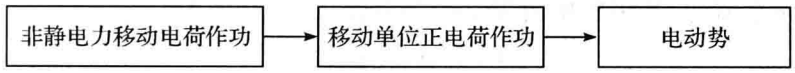


图 1-20 电动势的演绎过程

电动势 设有一闭合回路 L，在该回路上处处存在非静电力

$$\boldsymbol{F}_k = q\boldsymbol{E}_k$$

在该回路上移动点电荷 q 一小的位移所做的功是

$$\mathrm{d}A = \boldsymbol{F}_k \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = q\boldsymbol{E}_k \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

移动电荷一周所做的总功是

$$A = \oint_L \mathrm{d}A = \oint_L q\boldsymbol{E}_k \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

由于是非静电力，因而这个功不等于零。我们把移动单位正电荷一周，非静电力所做的功定义为电动势，即

$$\varepsilon = \frac{A}{q} = \oint_L \boldsymbol{E}_k \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.70}$$

式中符号 ε 代表电动势，$\boldsymbol{E}_k$ 表示“单位电荷的非静电力”，简称“非静电力”。这个式子是普遍适用的，不同的非静电力有不同的电动势。

电源电动势 如果一个闭合电路中，只有局部区域内有非静电力，这个局部非静电力是维持电路中电流稳定流动的重要装置，我们常称之为电源。原理上最简单的电源是丹聂耳电池，电池中的化学反应充当电池的非静电力。将(1.70)式应用于具单个电源的简单电路中，这时的大前提是任意闭合回路的电动势(一般性)或非静电力(一般性)，小前提是电源内部的电动势(特殊性)或化学非静电力(特殊性)，结论就是电源电动势。用框架表示如图 1-21 所示。

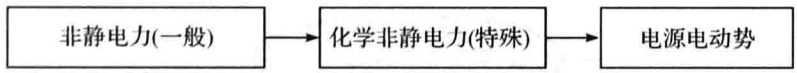


图 1-21 电源电动势的演绎过程

将(1.70)式应用到有电源的闭合电路中可得

$$\varepsilon = \oint_L \boldsymbol{E}_k \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{P\text{电源内}}^{Q} \boldsymbol{E}_k \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{Q\text{电源外}}^{P} \boldsymbol{E}_k \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{P\text{电源内}}^{Q} \boldsymbol{E}_k \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.71}$$

由于非静电力只存在于电源内部，因而电源之外路径的积分为零。上式中的最后的积分规定从电源的负极（P 点）经电源内部积到正极（Q 点），因此，这就是电源电动势的定义，也用符号 ε 表示之，其意义为把单位正电荷从电源负极（经由电源内部）移到正极非静电力所做的功。这个演绎推理过程是从电动势的一般形式出发演绎出特殊情况的电动势，或者说从一般的非静电力（分布于整个回路上）演绎到特殊非静电力（局域在电源内），大前提与小前提都十分清晰。

动生电动势　当一根导线在磁场中切割磁力线运动时，导线中的电荷要受到洛仑兹力的作用，从而导线产生电动势；另外，当一个导线回路在非均匀磁场（不随时间变化）中运动时，回路中也会有电动势。这时洛仑兹力充当了非静电力的角色，演绎过程如图 1-22 所示。

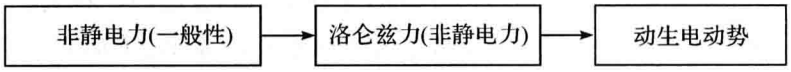


图 1-22　动生电动势的演绎过程

导线在磁场中运动，其中的电荷受到的洛仑兹力为

$$\boldsymbol{F}_k = \boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{1.72}$$

于是，单位电荷的非静电力是

$$\boldsymbol{E}_k = \frac{\boldsymbol{F}_k}{q} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{1.73}$$

将此式代入(1.70)式得

$$\varepsilon = \oint_L \boldsymbol{E}_k \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_L (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.74}$$

上式即为导线回路运动时的动生电动势的一般形式。比如，一个闭合导线回路的扩张或收缩过程就会产生动生电动势。如果导线回路只有部分运动，(1.74)式可写成

$$\varepsilon = \int_l (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.75}$$

这就是一根长为 l 的导线切割磁力线所产生的动生电动势。由此可见，动生电动势的演绎推理的大前提是非静电力（一般性），小前提是洛仑兹力充当非静电力（特殊性），结论是动生电动势。

需要说明的是，我们平时所说的“洛仑兹力不做功”是指洛仑兹力在真空中单独移动电荷不做功。但是在导线中，借助于晶格点阵或其他载流子的影响，移动电荷是要做功的，实际上，“功劳”不能完全归功于洛仑兹力。

可以证明，(1.74)式与法拉第定律是一致的。利用矢量积恒等式

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a}$$

(1.74)式可改写成

$$\varepsilon = \oint_L (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_L \boldsymbol{B} \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{v})$$

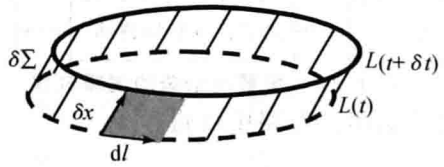


图 1-23　动生电动势

现在考虑一个导线回路 L 在磁场中的运动，假设磁场不随时间变化，但有空间的变化率（即非均匀的）。在时刻 $t \to t+\delta t$，回路所产生的位移为 δx，回路运动时所扫过的面积为 $\delta\Sigma$（斜线所表示的环带），该回路变化为 $L(t) \to L(t+\delta t)$，如图 1-23 所示。设以 $L(t)$ 所围的面积为 $S(t)$，以 $L(t+\delta t)$ 所围的面积为 $S(t+\delta t)$。由于通过这个斜柱所围的闭合面的磁通量为零，因此

$$\begin{aligned}\Phi &= \oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\ &= \int_{\delta\Sigma} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{S(t+\delta t)} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{S(t)} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\ &= \delta\Phi + \int_{S(t+\delta t)} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \int_{S(t)} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0\end{aligned}$$

这里回路的法线与回路积分的绕行方向符合右手规则，因而虚线所示回路的法线是指向斜柱面的内部的，故最后一项取负号。于是，上式可改写为

$$-\delta\Phi = \int_{S(t+\delta t)} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \int_{S(t)} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_L \boldsymbol{B}\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\delta\boldsymbol{x})$$

因为

$$\varepsilon = -\frac{\delta\Phi}{\delta t} = \oint_L \boldsymbol{B}\cdot\left(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\frac{\delta\boldsymbol{x}}{\delta t}\right) = \oint_L \boldsymbol{B}\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{v}) = \oint_L (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

于是(1.74) 式得证。

感生电动势　如果导线回路不动而磁场随时间变化，这时回路的电动势称为感生电动势。感生电动势的非静电力是什么？显然，这与磁场的时间变化率有关。一般情况下，非静电力 $\boldsymbol{E}_k$ 不能像动生电动势那样直接写出来，而是非静电力的旋度与磁场的变化率联系起来，即

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_k = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

为此，从(1.70) 式出发，运用斯托克斯定理得

$$\varepsilon = \oint_L \boldsymbol{E}_k\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{E}_k)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \left(-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

此式即为回路不动时，由于磁场随时间变化引起的电动势。这时的演绎框架如图 1-24 所示。

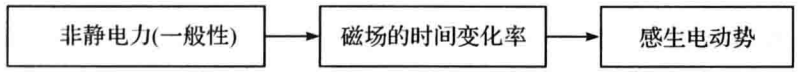


图 1-24　感生电动势的演绎过程

由此可见，在这个例子中，大前提是一般形式的非静电力电动势，小前提是磁场的时间变化率作为特殊非静电力（间接），结论是磁场的时间变化率引起感生电动势。从上面几个电动势的具体实例可以看出，非静电力可分为直接非静电力和间接非静电力两种，电源电动势、动生电动势是属于直接型的，而感生电动势则是属于间接型的。

第2章 归纳法

在电磁学中，许多物理定理或规律的得出都充满着归纳法的思想，即借用归纳法来证明定理或定律。比如，静电能、静磁能、电荷元的电场、高斯定理、法拉第定律等都可视为利用归纳法证明的例子。在这一章中，我们将通过几个范例来阐明归纳法的运用。

2.1 归纳法界定

归纳是指一种推理方法，由一系列具体的事实概括出一般原理（与“演绎”相对）。归纳法（induction）是一种由个别到一般的论证方法。它通过许多个别的事例或分论点，然后归纳出它们所共有的特性，从而得出一个一般性的结论。归纳法可以先举事例再归纳结论，也可以先提出结论再举例加以证明。前者即我们通常所说之归纳法，后者我们称为例证法（请见第3章）。例证法就是一种用个别、典型的具体事例来证明论点的论证方法。归纳法是从个别性知识，引出一般性知识的推理，是由已知真的前提，引出可能真的结论。

归纳法可分为古典归纳法和现代归纳法。古典归纳逻辑是由英国哲学家弗兰西斯·培根创立，经约翰·穆勒发展的归纳理论。它主要研究完全归纳推理，不完全归纳推理（简单枚举归纳和科学归纳），求因果五法等。现代归纳逻辑，也称概率逻辑，它是由英国经济学家梅纳德·凯恩斯创立，由莱辛巴哈、卡尔纳普科恩等发展，运用概率论以及形式化的公理方法等工具，探索归纳问题所取得的成果。

归纳法更适用于定义条件下的高度抽象事物的假设理论的推理表达与证明。而演绎法则更适用于属性自然条件下的必然推理与证明的表达。

2.2 归纳法范例

2.2.1 连续电荷分布的电场

借用点电荷的电场来推理出连续电荷分布的电场可采用归纳法。一个孤立点电荷在空间激发的电场可表示为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{2.1}$$

如果空间有多个点电荷存在，根据场的叠加原理，空间某一点的总场强为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\cdots+\boldsymbol{E}_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i\hat{\boldsymbol{r}}_i}{r_i^2} \tag{2.2}$$

一个电荷连续分布的带电体可以划分成 n 块小带电体（见图2-1），而每一小块带电体又可视为点电荷 Δq，相应的电场可写成

$$\Delta\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{2.3}$$

带电体的总电场由 n 块小带电体的电场叠加而成

$$\boldsymbol{E}=\sum_{i=1}^{n}\Delta\boldsymbol{E}_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta q_i}{r_i^2}\hat{\boldsymbol{r}}_i \tag{2.4}$$

当 $n\to\infty$ 时，上述求和可转换为积分，即

$$\boldsymbol{E}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta\boldsymbol{E}_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta q_i}{r_i^2}\hat{\boldsymbol{r}}_i=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{2.5}$$

上式的微分式

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

由于电荷是量子化的，原则上可对带电体中所有基本电荷单元所激发的场进行矢量叠加来求得总电场。但是，这是做不到的，因为电荷的数量巨大！电荷元 $\mathrm{d}q$ 可认为数学上是无穷小量，但物理上仍然代表着众多的点电荷（电荷基本单元），这些电荷的平均效果用电荷元 $\mathrm{d}q$ 来表示。

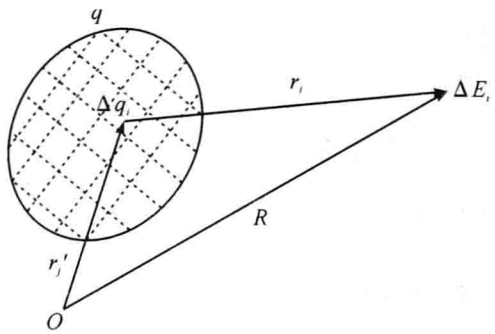


图 2-1　连续电荷分布的点荷模型

原则上，这个积分表达式代表了任意带电体所激发的电场，因而具有一般性。这就是从特殊性（点电荷）到一般性（带电体）的归纳论证。

2.2.2　连续电荷分布的静电能

两个点电荷　设两个点电荷的电量分别为 q_1 和 q_2，先将 q_1 移到空间某一点 P_1，并将其固定之。由于搬运第 1 个电荷时周围空间还没有别的电荷和电场，因而无需做功

$$A_1=0 \tag{2.6}$$

当移动第 2 个电荷 q_2 到空间某点 P_2 时，它已处于 q_1 的电场中，因而要克服电场力做功：

$$A_2=-\int_{\infty}^{P_2}q_2\boldsymbol{E}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=q_2V_2 \tag{2.7}$$

其中

$$V_2=\int_{P_2}^{\infty}\boldsymbol{E}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}} \tag{2.8}$$

是 q_1 在 P_2 处产生的电势，即电荷 q_2 所在位置的电势。同理，将移动次序颠倒，我们有

$$A_2=q_1V_1 \tag{2.9}$$

其中 V_1 是 q_2 在 q_1 所在处激发的电势，这个功就是两电荷之间的相互作用能 W_i，写成对称形式

$$W_i=A_2=\frac{1}{2}(q_1V_1+q_2V_2)=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} \tag{2.10}$$

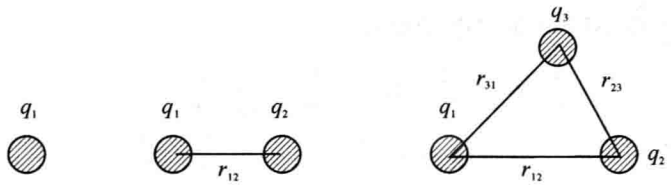


图 2-2　点电荷相互作用模型

三个点电荷　设三个点电荷的电量分别为 q_1, q_2, q_3。根据两个点电荷的情况，可以将三个电荷分为三对，每一对之间都有相互作用，仿照(2.10)式可以写出如下关系：

$$\begin{aligned} A_{12} &= \frac{1}{2}(q_1V_{12} + q_2V_{21}) \\ A_{23} &= \frac{1}{2}(q_2V_{23} + q_3V_{32}) \\ A_{31} &= \frac{1}{2}(q_3V_{31} + q_1V_{13}) \end{aligned} \tag{2.11}$$

相互作用能等于这三项功之和

$$\begin{aligned} W_i &= A_{12} + A_{23} + A_{31} \\ &= \frac{1}{2}[(q_1V_{12} + q_2V_{21}) + (q_2V_{23} + q_3V_{32}) + (q_3V_{31} + q_1V_{13})] \\ &= \frac{1}{2}[q_1(V_{12} + V_{13}) + q_2(V_{21} + V_{23}) + q_3(V_{32} + V_{31})] \\ &= \frac{1}{2}(q_1V_1 + q_2V_2 + q_3V_3) \end{aligned} \tag{2.12}$$

式中 V_1 是电荷 q_2 和 q_3 在 q_1 所在位置产生的电势，V_2 和 V_3 由此类推。

n 个点电荷　由(2.12)式可知，如果有 n 个点电荷 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 依次从无限远移到各自相应的位置，该点电荷系的相互作用能可以表示为

$$W_i = \frac{1}{2}(q_1V_1 + q_2V_2 + \ldots + q_nV_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_iV_i \tag{2.13}$$

同理，这里的 V_i 表示除 q_i 外所有 $n-1$ 个电荷在 q_i 所在位置产生的电势。根据(2.10)，(2.13)还可以写成如下形式：

$$W_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j-1}\frac{q_jq_k}{r_{jk}} \tag{2.14}$$

该式表明：系统的静电相互作用能是 n 个电荷中所有独立电荷配对的相互作用能量之和。

连续电荷分布　设带电体的体积为 V，电荷密度为 ρ，把带电体划分成许多小体积元 $\Delta\tau$，每块体积元的电荷为

$$\Delta q = \rho\Delta\tau$$

按照式(2.13)，我们有

$$W_i = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Delta q_kV_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\rho\Delta\tau_kV_k$$

当 $\Delta\tau \to 0$ 时，对上式取极限就可过渡到体积分，这时除了 Δq 之间的相互作用能外还包含 Δq 的自能，这是无限被分割之故。因此，能量符号改用 W_e 表示：

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint \rho V \mathrm{d}\tau \tag{2.15}$$

如果带电体是孤立的，此式表示带电体的自能。这就是从特殊到一般的归纳法处理过程。

2.2.3　静电场的高斯定理

以点电荷 q 激发的电场为例来论证高斯定理。选择点电荷作为研究对象具有特殊性和简单性的特点。另一方面，考虑点电荷被闭合面 S 包围与不包围的特殊情况作为论证过程的分论点，最后推广到多个点电荷的情况。这样的程序完全符合归纳论证的特征。

首先，考虑点电荷 q 被闭合面包围的情况。设闭合面 S 为一简单的球面，且点电荷位于球心，如图 2-3(a) 所示。注意到电场的径向单位矢量 $\hat{r}$ 与闭合面的外法线 $\hat{n}$ 方向一致以及 S 面上的电场大小相等，沿着闭合面对点电荷的电场(2.1) 积分可得

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \mathrm{d}\Omega=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi=\frac{q}{\varepsilon_0} \tag{2.16}$$

其中

$$\mathrm{d}\Omega=\frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{r^2}$$

为 $\mathrm{d}S$ 面元对球心所张的立体角(solid angle)。再设闭合面 S' 为任意曲面，且点电荷位于该曲面内。以点电荷为中心在 S' 面内作一半径为 r 的小球面 S 包围着该点电荷，如图 2-3(b) 所示。在 S' 面上取一小面元 $\mathrm{d}S'$，该面元与相应球面上的小面元 $\mathrm{d}S$ 有相同的立体角，即

$$\mathrm{d}\Omega=\frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}'}{r'^2}=\frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{r^2}$$

因此，我们有

$$\oint_{S'} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}'=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S'} \frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}'}{r'^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \mathrm{d}\Omega=\frac{q}{\varepsilon_0} \tag{2.17}$$

其次，考虑点电荷 q 没有在闭合曲面内的情况。设点电荷 q 位于闭合曲面 S 的外面，在 S 面上分别取两个面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2$，并让它们属于同一立体角 $\mathrm{d}\Omega$，如图 2-3(c) 所示。于是，我们有

$$\mathrm{d}\Omega=-\frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1}{r_1^2}=\frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_2}{r_2^2} \tag{2.18}$$

式中的负号“−”考虑到这两个面元与单位矢量 $\hat{r}$ 的夹角 $\theta_1>\frac{\pi}{2}$ 以及 $\theta_2<\frac{\pi}{2}$。因此，对电场沿闭合面 S 的积分为

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_{S_1}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1+\int_{S_2}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_1}\mathrm{d}\Omega-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_2}\mathrm{d}\Omega=0 \tag{2.19}$$

再次，考虑 n 个点电荷 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 的情况。若全部这些点电荷被包围在 S 面里，则由电场的叠加原理

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum_{i=1}^{n}\oint_S \boldsymbol{E}_i\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}q_i \tag{2.20}$$

若 n 个电荷中只有 $k(k<n)$ 个被包围在 S 面里，其余 $n-k$ 个在 S 面外。根据上面的结果，我们有

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum_{i=1}^{k}\oint_S \boldsymbol{E}_i\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\sum_{i=k+1}^{n}\oint_S \boldsymbol{E}_i\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{k}q_i \tag{2.21}$$

式中第二项对积分无贡献。

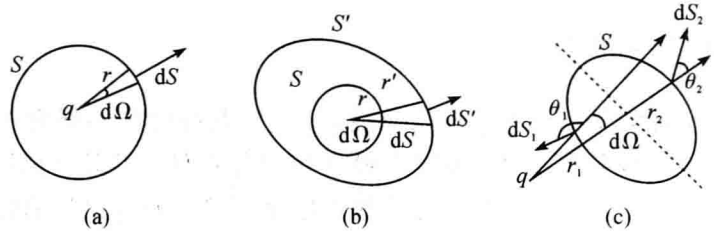


图 2-3　高斯定理的证明

最后，考虑有限连续电荷分布的情况。这种情况可以把带电体视为许多点电荷 $\mathrm{d}q$ 的集合，上述的求和改为积分，于是有

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,\mathrm{d}\tau \tag{2.22}$$

式中 ρ 是体电荷密度，这就是静电场的高斯定理的一般形式。

2.2.4　稳恒磁场的安培环路定理

稳恒磁场的安培环路定理可以表述为：磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 沿任意闭合路径 L 的线积分等于穿过该环路所有电流强度的代数和的 μ_0 倍，即

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\sum_k I_k\,(L\text{ 所包围的电流}) \tag{2.23}$$

在电磁学中，这一定理的证明通常利用长直载流导线作为特例来加以论证，然后将其结果推广到一般情况，即运用了归纳论证法。下面将对这一问题的归纳论证过程作一陈述。事实上，论证过程与静电场的高斯定理相似，即先考虑长直电流被圆形回路包围的情况，接着考虑被任意回路包围的情况，再次考虑没有包围电流的情形，最后推广到回路围着若干电流的情况。

首先，考虑一种特殊情况，即回路 L 是圆形的，并且包围着长直电流 I，如图 2-4(a) 所示。设回路 L 是在与长直电流 I 垂直的平面上，沿着该回路对磁感应强度 $\mathbf{B}$ 进行线积分

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\oint_L \mathrm{d}l=\mu_0 I \tag{2.24}$$

这里我们已运用了长直电流的磁感应强度公式，$\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi$ 是方位角方向的单位矢，此即 $\boldsymbol{B}$ 的单位矢。由于回路的绕行方向与方位角方向一致，故有 $\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}l$。从这个特例可见，(2.23) 式是成立的，也就是说，电流的流向与回路的绕行方向符合右手螺旋关系时成立，$I>0$；当电流的流向与右手螺旋相反时，$I<0$。

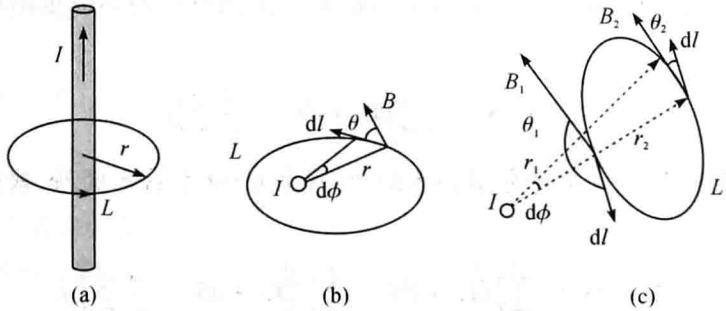


图 2-4　安培环路定理的证明

其次，考虑回路非圆形的情况，即任意闭合回路，如图 2-4(b) 所示。为了方便，同样设 L

在与长直导线垂直的平面上(不在平面的情况,可取回路在平面上的投影),这时 $\mathrm{d}l$ 的方向与 $\boldsymbol{B}$ 的方向有一夹角 θ,于是

$$\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathrm{d}l\cos\theta=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}r\mathrm{d}\varphi \tag{2.25}$$

对此式积分得

$$\oint_L\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\int_0^{2\pi}r\mathrm{d}\varphi=\mu_0 I \tag{2.26}$$

很显然,非圆形回路也是正确的。

再次,考虑回路 L 没有包围着电流的情形,如图 2-4(c) 所示。从电流 I 出发作两条与回路相切的切线,切点 A,B 将回路分成两部分 L_1 和 L_2。从图 2-4(c) 可知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}&=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}\mathrm{d}l\cos\theta_1=-\frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}r_1\mathrm{d}\varphi=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\mathrm{d}\varphi\\ \boldsymbol{B}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}&=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}\mathrm{d}l\cos\theta_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}r_2\mathrm{d}\varphi=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\mathrm{d}\varphi\end{aligned} \tag{2.27}$$

此式表明,两条路径上积分值大小相同,但相差一个负号。因此,沿整个闭合回路 L 的积分应为零,即

$$\oint_L\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{L_1}\boldsymbol{B}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{L_2}\boldsymbol{B}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0 \tag{2.28}$$

由此可见,对整个环路积分为零意味着环路没有包围着电流。值得注意的是,就环路上的部分积分而言,积分不为零。

最后,考虑回路包围着若干条长直电流的情形。设空间有 n 条长直电流,有 k 条被回路包围着。由于每一条长直电流都要在回路上激发磁场,根据磁场的叠加原理可得:

$$\oint_L\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_L\sum_{m=1}^{n}\boldsymbol{B}_m\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_L\sum_{m=1}^{k}\boldsymbol{B}_m\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\oint_L\sum_{m=k+1}^{n}\boldsymbol{B}_m\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\sum_{m=1}^{k}I_m(L\text{ 所围的电流}) \tag{2.29}$$

对于一根具有电流密度 j 的圆柱形长直电流,可以分解成许多条长直电流线,因此,我们有

$$\oint_L\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\lim_{\Delta S\to 0}\sum_m\boldsymbol{j}\cdot\Delta\boldsymbol{S}_m=\mu_0\int_S\boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}(L\text{ 所围的电流}) \tag{2.30}$$

这个结果虽然从长直电流和回路与电流垂直的特殊情况得出,但对任意稳恒电流与任意回路都是成立的。以上过程就是归纳论证的过程,在电动力学中可以证明,以上从特例得到的结论是正确的。

第3章　例证法

在电磁学中，许多物理规律的证明是通过举例加以证明的。实际上这也是归纳法的一种形式。比如，电容的定义、自感和互感的定义等都是通过举例来加以证明的，而所列举的例子之间不必有先后次序的逻辑关系。在这一章中，我们将通过几个范例来阐明例证法的运用。

3.1　例证法界定

所谓“例证”是指用来证明一个事实或理论的例子。例证法就是举例论证法(method of example illustration)。这是运用归纳推理的逻辑方法来论证，也叫归纳论证法，就是从个别事例的正确归纳出一般的正确，简称从个别到一般的方法。在新闻评论写作中常用的“摆事实、讲道理”就是这种方法。举例论证的具体做法，通常是举出几个个别的典型事例，综合它们的共同特点来阐明一个具有普遍意义的重要论点。例证法在议论文中用得最多最广，它也是卓有成效的一种推理方法。因为任何观点不能孤立存在，而事实胜于雄辩，用确凿、典型的事例来证明观点，会增强文章的说服力，所以例证法是一般议论文都要用到的。

在电磁学中，例证法是一种通过列举一些简单的、典型的物理实例来论证定律的推理论证法。例证法中所举的例子相互之间不一定要求有逻辑关系，可以各自相对独立。但是，归纳法中所列举的事例是从简单到一般，前后事例是有严密的逻辑关系的，比如讨论点电荷之间的相互作用能时，遵循1个电荷、2个电荷、3个电荷直到n个电荷为止。这就是我们为什么把它单独列章的原因。

运用例证法要注意以下几个问题：(1) 不能只把例子摆在论点后，而不去揭示论点论据之间的内在联系。摆出事实后，需要讲道理；(2) 例证法中所选的例子，一定要真实而有典型性，否则就无法说明问题；(3) 这是一种从个别到一般的论证方法，是从对许多个别事物的分析和研究中归纳出一个共同的结论的推理形式。使用这种方法，一般是先分论后结论，即开门见山提出论题，然后围绕论题逐层运用材料证明论点，最后归纳出结论。这种结构的方法，比较符合人们的思维认识规律。

3.2　例证法范例

3.2.1　电容器的电容

所谓电容器是一个由两个导体组成的系统。也就是说，任意两个导体无论它们的形状如何，只要它们之间的距离有限，都可以构成电容器。但是，在实际中，为了便于应用，常常将一个导体被另一个导体“包围”着来构建电容器。这样做的目的，其一是充分提高电容器的储存“电能”的能力；其二是便于加工制作。典型的电容器有平行板电容器、圆柱形电容器以及球形电容器(用得不多)。为了进一步提高电容器的储“电能”能力以及实用性，往往在两导体之间填充非导电的绝缘介质。电容器的这种储存“电能”的能力除了与充填的介质有关外还与

两导体的几何形状、尺寸及相对位置有关。一般来说，对于一个确定的电容器，两导体之间的电势差 V 越大，两导体上所带的电荷 Q（异号电荷）就越多，即电量与电势差成正比：

$$Q = CV \tag{3.1}$$

式中 C 是一个比例常数，它仅仅与电容器的结构（形状、尺寸、相对位置等）有关，通常称之为电容器的电容。式中的电荷 Q 是两导体相对面上任意一个面上电量的绝对值，也可以看作用一根导线连接两导体时互相交换而中和的那部分电荷。下面通过列举几个典型例子来阐明这个关系的正确性，即运用例证法证明之。

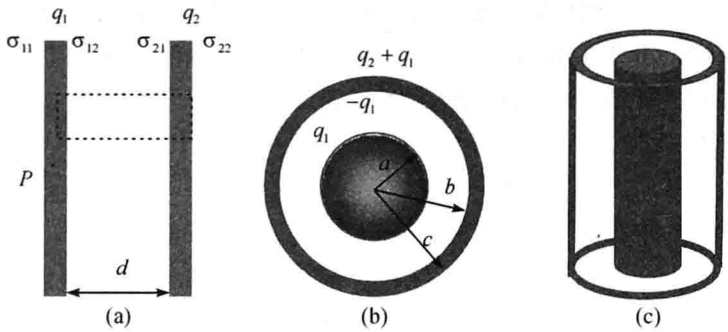


图 3-1 平行板、球形和圆柱形电容器

平行导体板 设两块面积均为 S 的导体板互相平行放置，且相距为 $d(d \ll \sqrt{S})$，如图 3-1(a) 所示。假定两块导体板分别带有电荷 q_1 和 q_2，静电平衡后电荷分布于导体板的表面，且是均匀分布的，其面电荷密度分别为 σ_{11}，σ_{12}，σ_{21} 和 σ_{22}（其实电荷面密度有正、有负，在求解时先都设为正，列方程时都遵循这一规则，这样不会失去一般性）。根据电荷守恒，我们有

$$\begin{aligned} \sigma_{11}S + \sigma_{12}S &= q_1 \\ \sigma_{21}S + \sigma_{22}S &= q_2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

由于静电平衡时，导体板内电场为零，为此在第一块板中任取一点 P，然后将两块导体板的四个面视为带电平面，在 P 点的合场强应为零，即

$$\boldsymbol{E}_P = \frac{\sigma_{11}}{2\varepsilon_0}\hat{n} - \frac{\sigma_{12}}{2\varepsilon_0}\hat{n} - \frac{\sigma_{21}}{2\varepsilon_0}\hat{n} - \frac{\sigma_{22}}{2\varepsilon_0}\hat{n} = 0$$

式中 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 表示 σ_{11} 带电平面向右的法向单位矢量，此式可改写为

$$\sigma_{11} - \sigma_{12} - \sigma_{21} - \sigma_{22} = 0 \tag{3.3}$$

运用高斯定理可得（高斯面为圆柱面，两个底面分别位于导体板中）：

$$\sigma_{12} + \sigma_{21} = 0 \tag{3.4}$$

联立求解方程(3.2)，(3.3) 和(3.4) 得：

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{22} = \frac{q_1 + q_2}{2S} \\ \sigma_{12} &= -\sigma_{21} = \frac{q_1 - q_2}{2S} \end{aligned} \tag{3.5}$$

由此可见，两导体板相对面上的电荷是等量异号的，而相“背离”的两个面上的电荷是等量同号的。设相对面电荷的数值大小为 Q，则

$$Q = \frac{|q_1 - q_2|}{2} = |\sigma_{12}|S = \varepsilon_0 ES = \frac{\varepsilon_0 S}{d}Ed = \frac{\varepsilon_0 S}{d}V \tag{3.6}$$

式中我们已运用了公式 $\sigma_{12} = \varepsilon_0 E$ 以及电势差 $V = Ed$。

这个式子告诉我们，平行导体板相对面上的电荷与两板间的电势差成正比，比例常数仅

仅与导体板的大小以及相对距离有关。这个例子论证了(3.1)式是成立的。比较(3.1)可得平行板电容器的电容为

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \tag{3.7}$$

式(3.6)还表明,不管两导体板带电与否,计算电容时只要假定两导体板相对面带电等量异号即可。这就是平时我们在计算电容器的电容时假设两导体带等量异号电荷的道理。

球形电容器 设半径为 a 的导体球被一个内外半径分别为 b 和 c 的同心导体球壳所包围着,内导体球带电为 q_1,导体壳带电为 q_2,如图 3-1(b) 所示。静电平衡时,电荷分布于两个球的表面上;再由高斯定理可知,球壳的内表面带电为 $-q_1$,外表面带电为 q_1+q_2,总的电荷仍为 q_2,这是电荷守恒所要求的。由于两导体球面之间的电场强度不是均匀的,因而利用积分来计算电势差,即

$$V = \int_a^b E\,\mathrm{d}r = \int_a^b \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

由此可得

$$Q = q_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}V = CV \tag{3.8}$$

其中

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a} \tag{3.9}$$

由(3.8)式可见,内导体球所带电荷与两球之间的电势差成比例关系,因此,式(3.9)就是两球面之间的电容。这个结果告诉我们,当我们计算两球面之间的电容时,只要假定内导体球带正电荷而球壳带等量的负电荷即可,与球壳原先是否带电无关。据此,如果要计算球壳外表面与无穷远处球面之间的电容,则只要将(3.8)式中的半径 a 和 b,电荷 q_1 作如下代换:

$$a \to c$$

$$b \to \infty$$

$$q_1 \to q_1 + q_2$$

便可得到

$$Q = q_1 + q_2 = 4\pi\varepsilon_0 cV \tag{3.10}$$

式中 V 是球壳与无穷远球面之间的电势差,也即球壳相对于无穷远处的电势。由此式不难得到

$$C = 4\pi\varepsilon_0 c = 2\pi\varepsilon_0 d \tag{3.11}$$

此电容即为半径为 c(或直径为 $d=2c$)的孤立导体球的电容,此式暗示孤立导体电容与其线度成正比。由此可以推断,(3.1)式不仅适用于两个导体的电容器而且还适用于孤立导体。

值得指出的是:(1) 对于球形电容器计算电容时,必须事先说清楚是计算两球面之间的电容还是球壳与无穷远面间的电容,因为两者结果不一样;(2) 如果球壳接地,则计算电容是十分明确的,即为两球面之间的电容;(3) 如果球壳带电,把内球接地,这时计算电容应考虑有效电容,即两球面之间的电容与球壳的孤立电容的并联电容。由此可见,对球形电容器的电容计算与前提条件有关。

圆柱形电容器 设内金属圆柱的半径为 a,同轴的外金属圆柱壳的内外半径分别是 b 和 c,如图 3-1(c) 所示。根据前面两个例子,我们只要假定内圆柱带正电荷 $+Q$,外圆柱壳带负电荷 $-Q$,内圆柱与外圆柱壳之间的电势差为

$$V=\int_a^b E\mathrm{d}r=\int_a^b\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

由此可得

$$Q=\lambda L=\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}V=CV \tag{3.12}$$

其中 L 是圆柱的长度，由此可见，电荷与电势的比例关系仍然成立，比例系数 C 只与长度 L、半径 a 和 b 有关。这里 C 即为圆柱形电容器的电容：

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \tag{3.13}$$

如果考虑外圆柱壳的外表面与无穷远处柱面之间的电容，可将上式中的 a 和 b 作如下代换：

$$a\to c,b\to\infty,L\to\infty$$

将此式代入(3.13)式可知，这时外圆柱面与无穷远圆柱面之间的电容是不定式。不妨令 $L=Nc$，$b=Nc$，同时利用罗彼塔法则可得

$$C=\lim_{N\to\infty}\frac{2\pi\varepsilon_0 Nc}{\ln N}=2\pi\varepsilon_0 c\lim_{N\to\infty}N=2\pi\varepsilon_0 L,\quad L\gg c$$

可见，理想孤立长直圆柱导体的电容与其线(长)度 L 成正比，形式上与孤立导体球结果相一致。

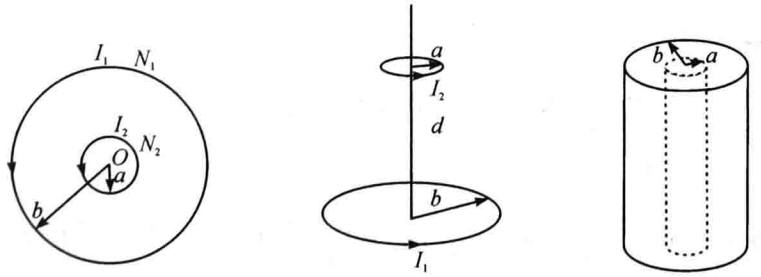
通过以上三个典型例子的例证可知，对于一个确定的电容器，电荷与电势成正比关系成立。由此可推广到一般形状导体组合，这个关系也是成立的，上述过程就是例证归纳法。

3.2.2 互感

互感在电磁学中既是个重点也是个难点。它定义如下：

$$M_{12}=\frac{\Psi_{12}}{I_2}\text{ 或 }\Psi_{12}=M_{12}I_2$$

式中 Ψ_{12} 是第2个线圈产生的磁场通过第1个线圈的总磁通(磁通匝链数)，I_2 是第2个线圈中的电流。互感 M 与两线圈的大小、形状以及相对位等有关，而与电流无关。下面通过几个典型的特例子来论证这个关系式。



(a)两个同心线圈　(b)两个同轴线圈　(c)两个同轴线圈

图 3-2　互感的两种特例

先看一个简单例子。一个半径为 a 的小圆形线圈，被同心地放置在一个半径为 b 的大圆形线圈内，而且小线圈的半径 a 远小于大线圈的半径 b。设大线圈通以电流 I_1，小线圈通以电流 I_2，两者的电流都是逆时针方向流动，如图 3-2(a) 所示。从图 3-2(a) 不难看出，大线圈的电流所产生的磁感应强度只有部分通过小线圈，只要小线圈的半径足够小，通过小线圈的磁

感应强度可以看作是均匀的，即视为与大线圈圆心处的磁感应强度相同。大线圈在圆心处所产生的磁感应强度为

$$B_{10} = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2b} \tag{3.14}$$

式中 N_1 是大线圈的匝数。穿过小线圈的磁链（或磁通匝链数或全磁通）为

$$\Psi_{21} = N_2 \Phi_{21} = N_2 B_{10} S_2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi a^2}{2b} I_1 \tag{3.15}$$

式中 N_2 是小线圈的匝数。此式表明，当两个线圈的形状大小确定后，穿过小线圈的磁通量与大线圈的电流成正比。如果将小线圈沿着同心轴与大线圈分开一定的距离，这个结论是否还成立？

为此再看一个同轴平行线圈组的例子。设上述两个线圈的参数不变，将两圆心分开一个距离 d，如图 3-2(b) 所示。同理，将小线圈中的磁感应强度视为均匀的，大线圈电流在轴线上产生的磁感应强度为

$$B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1 b^2}{2(b^2 + d^2)^{3/2}} \tag{3.16}$$

因而，穿过小线圈的磁链为

$$\Psi_{21} = N_2 \Phi_{21} = N_2 B_1 S_2 = \frac{\mu_0 N_2 N_1 b^2 \pi a^2}{2(b^2 + d^2)^{3/2}} I_1 \tag{3.17}$$

将这个结果与(3.15) 式比较可知，除了两线圈的大小形状外，它们的相对位置对比例常也有影响。也就是说，两线圈的放置方式不同，其比例系数也不同。尽管如此，通过小线圈的磁通量与大线圈的电流成正比的关系仍然不变。从以上两个简单的例子所考虑的线圈是“集中”式的，即多匝线圈集中在一个环内。如果多匝线圈是“分布”式的，即线圈随空间分布（比如螺线管），那么，上述结论是否还成立？

再考虑两个相同长度而不同半径的长直螺线管。设小螺线管的半径为 a，密绕有 N_2 匝线圈，通以电流 I_2；大螺线管的半径为 b，密绕 N_1 匝线圈，其电流为 I_1。现将该小螺线管同轴地放置于大螺线管的内部，且使两个端口对齐，如图 3-2(c) 所示。大螺线管内的磁感应强度为（理想情况）

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1$$

穿过小螺线管的磁链是

$$\Psi_{21} = N_2 \Phi_{21} = N_2 B_1 S_2 = \mu_0 \frac{N_2 N_1 S_2}{l} I_1 \tag{3.18}$$

将上式改写成

$$\Psi_{21} = \mu_0 \frac{N_2 N_1 S_2}{l} I_1 = \sqrt{\left(\mu_0 \frac{N_2 N_1 S_2}{l}\right)^2} I_1 = \frac{a}{b} \sqrt{L_1 L_2}\, I_1 \tag{3.19}$$

其中

$$\begin{aligned} L_1 &= \mu_0 \frac{N_1 N_1 \pi b^2}{l} \\ L_2 &= \mu_0 \frac{N_2 N_2 \pi a^2}{l} \end{aligned} \tag{3.20}$$

从(3.18) 式或(3.19) 式可见，通过小螺线管的磁链仍然与大螺线管的电流成正比。由于螺线管中的磁感应强度是均匀的，因此，可以反过来求小螺线管的磁感应强度穿过大螺线管的

磁链。这里只要注意到小螺线管的磁感应强度只通过大螺线管一部分面积(实际为小螺线管的横截面积),于是有

$$\Psi_{12} = N_1\Phi_{12} = N_1 B_2 S_2 = \mu_0 \frac{N_2 N_1 S_2}{l} I_2 \tag{3.21}$$

此式表明,小螺线管通以电流 I_2 时所产生的磁感应强度通过大螺线管的磁链与电流 I_2 成正比。将(3.21)式与(3.18)式比较可知,两个比例系数是相等的。这意味着,两个线圈之间的相互作用是对等的。根据上述几个典型的特殊例子所得到的结果,充分论证了互感的定义式。由此可见,互感的定义式推广到一般情况也是成立的。

3.2.3 自感

当一个线圈通以电流时,其磁力线将穿过线圈自身而产生磁通量(自感磁通量)。电流越强,自感磁通量越大,即自感磁通量与电流成正比。如果线圈的匝数为 N,则磁链(或全磁通)也与电流成正比。自感系数定义:

$$L = \frac{\Psi}{I} \text{ 或 } \Psi = LI \tag{3.22}$$

式中 L 表示线圈的自感系数,I 表示通过线圈的电流,Ψ 表示通过线圈的总磁通。自感系数只与线圈的大小、形状等因素有关,与电流无关。下面通过列举几个特例来论证这一关系。

首先,考虑一个长度为 l 的长直螺线管,其半径为 R,单位长度的匝数为 n,通以稳定电流 I。由安培环路定理可知,螺线管内的磁感应强度为

$$B = \mu_0 nI$$

通过每一匝线圈的磁通量为

$$\Phi = BS = \mu_0 nI\pi R^2$$

假设每匝线圈的磁通量是相同的,故全磁通(磁链)为

$$\Psi = N\Phi = nl\Phi = \mu_0 n^2 l\pi R^2 I = LI \tag{3.23}$$

其中

$$L = \mu_0 n^2 l\pi R^2 \tag{3.24}$$

上式表明通过螺线管的全磁通与自身电流成正比,比例系数 L 只依赖于螺线管的大小、形状、匝数等。(3.24)式是一个十分理想的结果,实际情况是由于边缘效应,比例常数 L 的形式要复杂些。为此,考虑一个稍微实际一点的情况,即利用螺线管中轴线上的磁感应强度分布:

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 nI\left[\frac{z+\frac{l}{2}}{\sqrt{\left(z+\frac{l}{2}\right)^2+R^2}} - \frac{z-\frac{l}{2}}{\sqrt{\left(z-\frac{l}{2}\right)^2+R^2}}\right] \tag{3.25}$$

这里 z 轴的原点在螺线管的中心,离原点为 z 处的 $\mathrm{d}z$ 长度的匝数为 $\mathrm{d}N = n\mathrm{d}z$,相应的磁链是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Psi &= \mathrm{d}N\Phi = n\mathrm{d}zB\pi R^2 \\ &= \frac{1}{2}\mu_0 n^2\pi R^2 I\left[\frac{z+\frac{l}{2}}{\sqrt{\left(z+\frac{l}{2}\right)^2+R^2}} - \frac{z-\frac{l}{2}}{\sqrt{\left(z-\frac{l}{2}\right)^2+R^2}}\right]\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{3.26}$$

对上式积分得

$$\Psi = \frac{1}{2}\mu_0 n^2\pi R^2 I\int_{-l/2}^{l/2}\left[\frac{z+\frac{l}{2}}{\sqrt{\left(z+\frac{l}{2}\right)^2+R^2}} - \frac{z-\frac{l}{2}}{\sqrt{\left(z-\frac{l}{2}\right)^2+R^2}}\right]\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 n^2 \pi R^2 I\left[\sqrt{\left(z+\frac{l}{2}\right)^2+R^2}-\sqrt{\left(z-\frac{l}{2}\right)^2+R^2}\right]_{-l/2}^{l/2}$$

$$\Psi = \mu_0 n^2 l\pi R^2\left(\sqrt{1+\left(\frac{R}{l}\right)^2}-\frac{R}{l}\right)I = L'I \tag{3.27}$$

其中

$$L' = \mu_0 n^2 l\pi R^2\left(\sqrt{1+\left(\frac{R}{l}\right)^2}-\frac{R}{l}\right) \tag{3.28}$$

这个式子与(3.24)式比较要稍许好一些。实际上，要严格给出螺线管的磁链必须计入螺线管中 $\boldsymbol{B}$ 的径向分布、螺线管的电流螺旋度以及电流非连续性。但要全部解决这些问题不是一件容易的事。

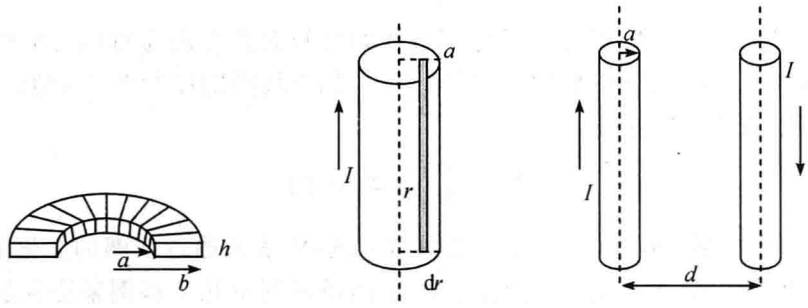


图 3-3　自感的例子

其次，考虑一个密绕有 N 匝线圈的螺绕环，环的内外半径分别为 a 和 b，环的横截面是个矩形，长为 $(b-a)$，宽为 h，如图 3-3(a) 所示。设线圈中通以电流 I，利用安培环路定理可得该环中任一点的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \tag{3.29}$$

单匝线圈的磁通量为

$$\Phi = \iint B\mathrm{d}S = \int_a^b \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}h\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 NhI}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{3.30}$$

于是 N 匝线圈的磁链为

$$\Psi = N\Phi = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)I = LI \tag{3.31}$$

其中

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{3.32}$$

由(3.31)式可知，螺绕环的磁链也与所通电流成正比，比例系数 L 仅取决于螺绕环的尺寸、截面形状以及线圈匝数等。必须指出的是，在这个例子的计算中，我们默认了螺绕环中的磁感应强度与截面的宽度无关。

再次，考虑一根长直载流导线的内部磁链。设载流导线长为 l，半径为 a，通以稳恒电流 I。为了求出磁链，将电流 I 视为由 N 条小电流管组成，每一条电流管的电流为 i，即 $I = Ni$。这样导线单位横截面积的电流管条数为

$$n = \frac{N}{\pi a^2}$$

在导线中沿长度方向，距轴线为 r 处取一小面积元在 $\mathrm{d}S = l\mathrm{d}r$，如图 3-3(b) 所示。通过该面

元的磁通量为

$$\mathrm{d}\Phi = B\mathrm{d}S = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2} l\mathrm{d}r \tag{3.33}$$

设总电流管(每根电流管视为一匝线圈)的磁链为 Ψ,由于该磁通量 $\mathrm{d}\Phi$ 的磁力线只围住了部分电流管,其条数为 $n\pi r^2$,因此,与该部分磁通相应的磁链是

$$\mathrm{d}\Psi = \frac{n\pi r^2}{N}\mathrm{d}\Phi = \frac{r^2}{a^2}\frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2} l\mathrm{d}r \tag{3.34}$$

积分得

$$\Psi = \int_0^a \frac{\mu_0 lIr^3}{2\pi a^4}\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 l}{8\pi} I = LI \tag{3.35}$$

其中

$$L = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$$

可见,对单根导线来说,穿过导线自身的磁链与自身电流成正比,比例系数与导线的尺寸等因素有关。

最后,考虑两根平行的长直导线,其导线半径均为 a(半径不相同留给读者自考虑),两导线的轴线距离为 d。设两导线中通以相反的电流 I(属于同一回路),如图 3-3(c) 所示。当导线的半径不能忽略时,通过两导线轴线之间所围面积的磁链应由三部分组成:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 = \Psi_1 + 2\Psi_2 \tag{3.36}$$

Ψ_1 表示两导线表面之间的磁链,Ψ_2 和 Ψ_3 分别代表导线内部(轴线至表面)区域的磁链,这两部分是相等的。下面先计算两导线面之间的磁链,其长度为 l 一段间的磁链为

$$\Psi_1 = \Phi = \iint_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_a^{d-a} Bl\mathrm{d}r = \int_a^{d-a}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}\right) l\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 Il}{\pi}\ln\left(\frac{d-a}{a}\right) \tag{3.37}$$

对于导线内部的磁链,要注意也有两部分磁感应强度的贡献,即

$$\Psi_2 = \iint_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_0^a \frac{r^2}{a^2}\frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2} l\mathrm{d}r + \int_{d-a}^{d}\frac{\mu_0 I}{2\pi r} l\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 Il}{8\pi} + \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\left(\frac{d}{d-a}\right) \tag{3.38}$$

将(3.37)和(3.38)代入(3.36)得

$$\Psi = \Psi_1 + 2\Psi_2 = \frac{\mu_0 Il}{\pi}\ln\left(\frac{d-a}{a}\right) + \frac{\mu_0 Il}{4\pi} + \frac{\mu_0 Il}{\pi}\ln\left(\frac{d}{d-a}\right) = \left[\frac{\mu_0 l}{4\pi} + \frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\left(\frac{d}{a}\right)\right] I = LI \tag{3.39}$$

其中

$$L = \frac{\mu_0 l}{4\pi} + \frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\left(\frac{d}{a}\right) \tag{3.40}$$

实际上,两根导线的电流对轴线所围面积的磁链是相同的,因此,总磁链可表示为

$$\Psi = 2\Phi = 2\iint_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 2\int_0^a \frac{r^2}{a^2}\frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2} l\mathrm{d}r + 2\int_a^d \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 Il}{4\pi} + \frac{\mu_0 Il}{\pi}\ln\left(\frac{d}{a}\right) = LI \tag{3.41}$$

显然,这个过程要比前面的过程简单得多。这个例子也表明,通过两直导线所围面积的总磁通与电流成正比,其比例系数 L 只与导线的粗细、相对位置等因素有关。

通过以上几个实例充分证明了自感的定义式是正确的,由此可以推广到一般情况。

第4章 反证法

对电磁学中的有些问题而言，我们是无法从定律出发通过直接证明给出其结论的，只能通过“间接的证明(反证法)”来获得其结论。还有一类问题虽然可以直接从定律出发经过演绎论证而得到所需的结论，但是运用反证法来得更简洁。反证法是一种物理学和数学中常用的证明方法。在这一章中，我们先给出反证法的定义，再通过范例(exemplification)加以说明之。

4.1 反证法界定

“反证”一词有两种意思：一是可以驳倒原论证的证据；二是由证明与论题相矛盾的判断是不真实的来证明论题的真实性，是一种间接论证。

何谓反证法？反证法是指通过确定与论题相矛盾的判断(即反论题)的虚假来确定论题的真实性的一种证明方法(中国百科大辞典)。它是间接论证的一种方法。所谓间接论证法是指通过确定其他有关判断的虚假来确定论题的真实性的论证方法。法国数学家阿达玛(Hadamard)对反证法的实质作过概括：“若肯定定理的假设而否定其结论，就会导致矛盾”。具体地讲，反证法就是从反论题入手，把命题结论的否定当作条件，使之得到与条件相矛盾，肯定了命题的结论，从而使命题获得了证明。

反证法是证明物理定理或概念的一种常用方法，先提出和定理或概念中的结论相反的假定，然后从这个假定中得出和已知条件相矛盾的结果来，这样就否定了原来的假定而肯定了定理或概念。比如，在稳恒电路中，流进节点的电流等于流出节点的电流，这一结论可以利用反证法证明之。假设流进的电流不等于流出的电流，那么，在节点处就会有电荷不断地累积起来，这一结论与稳恒电流条件下的连续性方程所给结果(电荷没有累积)相矛盾，因此假设不成立。当然，我们也可以直接从连续性方程出发利用稳恒电流的条件而得到结论。再比如，导体静电平衡时内部电场强度为零，也可以用反证法来证明。

4.2 反证法范例

4.2.1 无限长直螺线管的磁场

在一个圆柱面上均匀地绕上螺旋形线圈称之为螺线管。设螺线管的长度为 L，半径为 R，通以稳恒电流 I，其单位长度的匝数为 n。只要 n 足够大，就可以忽略每一圈的螺距，即把螺旋状电流视为圆电流。借用圆电流在其轴线上产生的磁场公式，就可以求得无限长螺线管轴线上的磁场

$$B = \mu_0 nI \tag{4.1}$$

这似乎是一个特殊的结果，而不是一般结果。由于圆电流在空间任一点的磁场比较复杂，因而无法直接利用毕奥－萨伐尔定律求出螺线管内外任一点的磁场。但是，通过安培环路定理可以给出管内外任一点的磁场分布，即管内各点均有与轴线相同的磁场 $\boldsymbol{B}$，而管

外$\boldsymbol{B}=0$。

首先，证明螺线管内任一点的$\boldsymbol{B}$的方向平行于轴线。我们利用反证法来证明。设P为螺线管内任一点，P点的磁场方向偏离轴线方向，如图4-1所示。由于螺线管为无限长，任选的P点不会失去一般性。过P点作直线MN垂直于轴线，以MN为轴将螺线管转动180°，则P点的磁感应强必为与$\boldsymbol{B}$对称的矢量$\boldsymbol{B}'$。接着，再使螺线管电流反向。按照毕澳－萨伐尔定律，电流反向，磁感应强度$\boldsymbol{B}$的方向必反向，因此这时P点的磁场必为$-\boldsymbol{B}'$。注意此时螺线管的状态完全等同于螺线管未绕MN转动前的状态，因而$-\boldsymbol{B}'$应与$\boldsymbol{B}$重合。但实际操作结果与此结果不相一致，即相互矛盾，故P点的$\boldsymbol{B}$只能取与轴线平行的方向，两者才不会出现矛盾。

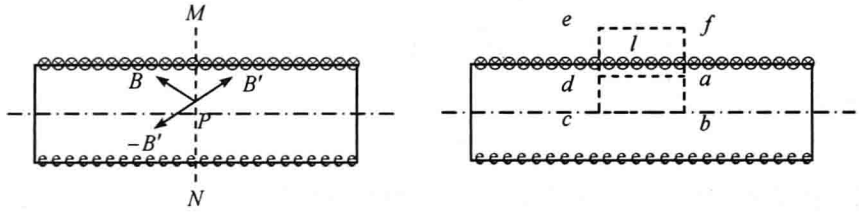


图4-1 螺线管内B的方向和均匀性的证明

其次，将用反证法证明螺线管内的磁场是均匀的。设管内的$\boldsymbol{B}$是不均匀的，将安培环路定理应用到矩形闭合回路$abcda$，其中bc段与轴线重合，长度为l。由于该回路所包围的电流为零，所以

$$\oint_{abcda}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_a^b\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_b^c\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_c^d\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_d^a\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$

在ab和cd段上$\boldsymbol{B}$与$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$垂直，因此

$$\int_a^b\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_c^d\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$

对回路$abcda$的积分可写为

$$\oint_{abcda}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_b^c\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_d^a\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=(B_{bc}-B_{da})l=0$$

由此可得

$$B_{da}=B_{bc}=\mu_0 nI$$

此式表明管内磁场是均匀的，结果与假设有矛盾，假设不能成立。

最后，证明管外的磁场为零。同样用反证法，设管外的磁场不为零。将安培环路定律应用于回路$defad$可得

$$\oint_{defad}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_d^e\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_e^f\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_f^a\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_a^d\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-B_{ef}l+B_{ad}l=\mu_0 nIl$$

由此可得管外的磁场

$$B_{ef}=B_{ad}-\mu_0 nI=B_{bc}-\mu_0 nI=0$$

这个结果也与假设相矛盾，表明假设不成立。

4.2.2 无穷大均匀带电平面的电场

根据对称性和高斯定理，可以求得一块面电荷密度为σ的无穷大均匀带电平面的电场为

$$\boldsymbol{E}=\begin{cases}\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{k}}, & z>0\\[2ex] -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{k}}, & z<0\end{cases}\tag{4.2}$$

我们求电场时主要依据问题的对称性，判断出电场的方向垂直于带电平面。这个问题可以通过反证法加以证明。设 z 轴与平面垂直，带电平面为 xy 平面。假设电场与平面不垂直，则电场强度为

$$\boldsymbol{E} = E_x\hat{\boldsymbol{i}} + E_y\hat{\boldsymbol{j}} + E_z\hat{\boldsymbol{k}}$$

由于平面无限大，故上式可采用柱坐标表示

$$\boldsymbol{E} = E_r\hat{\boldsymbol{r}} + E_\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}} + E_z\hat{\boldsymbol{k}} \tag{4.3}$$

这里 $\hat{\boldsymbol{r}}$、$\hat{\boldsymbol{\varphi}}$、$\hat{\boldsymbol{k}}$ 分别是径向单位矢、方位角方向单位矢和 z 轴方向单位矢。环绕 z 轴取一圆形回路 L，沿该回路对电场进行积分

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}l\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \oint_L E_\varphi \mathrm{d}l = 0$$

由于 L 是任意的，故有

$$E_\varphi = 0$$

另一方面，在带电平面上方，环绕 z 轴作一圆柱形高斯面，如图 4-2(a) 所示。运用高斯定理可得

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\text{side}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{\text{up}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{\text{down}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

考虑到圆柱面的侧面法线 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 与径向单位矢 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 一致，圆柱面上底法线 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 与 z 轴正方向一致，而下底法线 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 与 z 轴正方向相反，因而有

$$\begin{aligned}\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_{\text{side}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}S\hat{\boldsymbol{r}} + \int_{\text{up}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}S\hat{\boldsymbol{k}} + \int_{\text{down}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}S(-\hat{\boldsymbol{k}}) \\ &= \int_{\text{side}} E_r \mathrm{d}S + \int_{\text{up}} E_z \mathrm{d}S - \int_{\text{down}} E_z \mathrm{d}S = \int_{\text{side}} E_r \mathrm{d}S = 0\end{aligned}$$

由于圆柱面上底和下底的通量正好抵消，电场的通量只有侧面的积分。又因为高斯面中没有电荷，故电场的通量为零。由于 S 面是任意的，故电场的径向分量应为零，即

$$E_r = 0$$

因此，电场只有 z 分量：

$$\boldsymbol{E} = E_z\hat{\boldsymbol{k}} \tag{4.4}$$

这个结果与假设矛盾，故假设不成立。

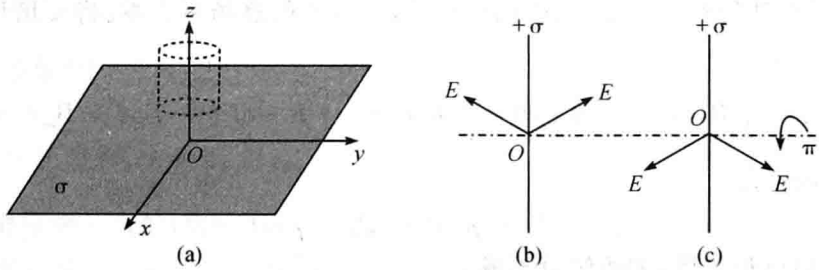


图 4-2　无限大带电平面的电场方向与平面垂直的证明

也可以假设电场不与平面垂直，如图 4-2(b) 所示。将平面绕通过 O 点的轴转动 π 角度，电场方向应为如图 4-2(c) 所示的方向。由于平面带电是均匀的且为无限大，转动 π 角度后电荷分布应不变，图(c) 的方向与图(b) 相矛盾，故假设不成立，电场的方向只能与平面垂直。

4.2.3　无限长直空心载流圆柱面

一半径为 R，面电流密度为 α 的载流空心长圆柱面，要求柱面内外的磁感应强度，通常利

用对称性和安培环路定理求解。圆柱面内外的磁场为

$$\boldsymbol{B}=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\varphi}}=\dfrac{\mu_0 R\alpha}{r}\hat{\boldsymbol{\varphi}}, & r>R\\ 0, & r<R\end{cases} \tag{4.5}$$

这个式子表明，柱面外的磁场是沿方位角方向的，磁力线是以柱轴为中心的同心圆。另一方面，柱面内的磁场为零。

现在利用反证法来证明柱面内的磁场确实是零。假设柱面内的磁场不为零，在柱坐标中磁场可以写成分量式

$$\boldsymbol{B}=B_r\hat{\boldsymbol{r}}+B_\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}}+B_z\hat{\boldsymbol{k}} \tag{4.6}$$

取圆心在对称轴上，并作一半径为 r 的圆形回路 L，沿回路对 B 积分得：

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}l\hat{\boldsymbol{\varphi}}=\oint_L B_\varphi \mathrm{d}l=0$$

由于回路 L 是任意的，故

$$B_\varphi=0$$

其次，在圆柱面内作一个以半径为 r 的柱形高斯面 S，如图 4-3(a) 所示。将磁场的高斯定理应用于该高斯面可得：

$$\begin{aligned}\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}&=\int_{\text{side}}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_{\text{up}}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_{\text{down}}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\int_{\text{side}}B_r\mathrm{d}S+\int_{\text{up}}B_z\mathrm{d}S-\int_{\text{down}}B_z\mathrm{d}S=\int_{\text{side}}B_r\mathrm{d}S=0\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{d}S$ 是任意的，故

$$B_r=0$$

再考虑磁场的 z 分量，取一与轴平行的积分路径，对 B 的 z 分量进行积分得：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}B_z\mathrm{d}z=\oint_{L=\infty}B_z\mathrm{d}z=0$$

因为环路 L 没有包围着电流，因而上述积分为零，这就意味着

$$B_z=0$$

综上所述，在柱面内磁场的三个分量均为零，所以

$$\boldsymbol{B}=0$$

这一结果与假设矛盾，原假设不成立。

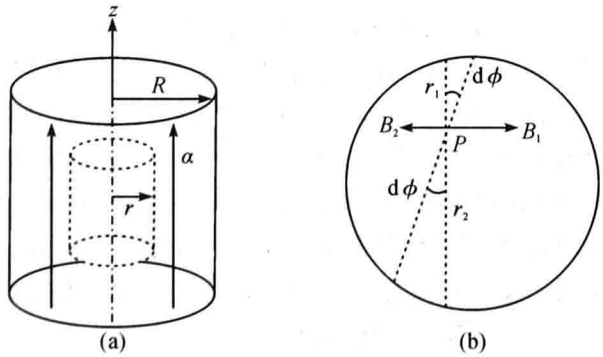


图 4-3 载流空心圆柱面内磁场为零的证明

我们也可以通过磁场的叠加性来证明柱面内的磁场为零。设柱面内的磁场不为零，在柱面内任意取一点 P，过 P 点在面内作一直线，然后让该直线绕 P 点转动一无限小方位角 $\mathrm{d}\varphi$，

如图 4-3(b) 所示。两条虚线在柱面上所截的部分可视为两条细载流导线，在 P 点所激发的磁场为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}B_1 &= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} = \frac{\mu_0 \alpha r_1 \mathrm{d}\varphi}{2\pi r_1} = \frac{\mu_0 \alpha \mathrm{d}\varphi}{2\pi} \\ \mathrm{d}B_2 &= \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} = \frac{\mu_0 \alpha r_2 \mathrm{d}\varphi}{2\pi r_2} = \frac{\mu_0 \alpha \mathrm{d}\varphi}{2\pi} \end{aligned} \tag{4.7}$$

由于这两部分电流在 P 点所产生的磁场方向正好相反，故有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \mathrm{d}\boldsymbol{B}_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{B}_2 = 0$$

对上式积分得：

$$\boldsymbol{B} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{B} = \int_0^{2\pi} (\mathrm{d}\boldsymbol{B}_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{B}_2) = 0$$

这与假设相矛盾，故假设不成立。

4.2.4 静电势的极值问题

由于静电场是保守场，因而可引入电势来描述静电场。电势具有如下特点：除了电荷分布区域、无限远处以及电场分布区域的边界上之外，电势既不存在极大值，也没有极小值。

要证明这一特点的最简单方法是反证法。假设在二维空间中有静电势的分布，场中某点 P 处没有电荷，而电势具有极大值，如图 4-4 所示。由于电场强度指向电势降落最快的方向，故 P 附近的电场强度都顺着顶点向下指向周围各个方向。为此，作一包围 P 点的闭合曲面 S，则电场强度通过该高斯面 S 的电通量是

$$\Phi_e = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} > 0$$

由高斯定理可知，该电势极大点有净的正电荷存在。这一结论显然与没有电荷的假设相矛盾，所以 P 点的电势不可能有极大值。

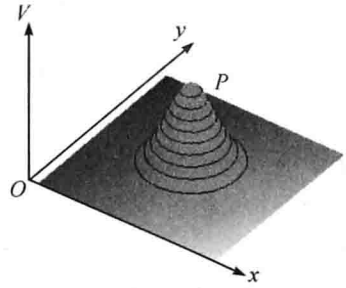


图 4-4 有极值点(P 点)的二维电势分布

另一方面，可以利用电力线的概念和静电平衡理论来论证。假设导体带正电荷时电势比周围各点都要高，即有极大值，这时电力线从正电荷发出；同理，假设导体带负电荷时电势比周围各点都要低，即电势有极小值，电力线汇聚到导体。当一个中性导体处于静电场中时，该导体表面会出现等量异号的感应电荷。根据假设，电力线发出的地方电势有极大值，而电力线汇聚的地方电势有极小值，表明该导体存在电势差，即为非等势体。但是，由导体静电平衡可知，整个导体是个等势体，这结果明显与静电平衡理论矛盾。表明导体无论带正电还是带负电，其电势既不能是极大值，也不能是极小值。

4.2.5 静电场的唯一性定理

如果已知电荷分布，我们就可以利用库仑定律和电场的叠加原理直接计算出空间的电

场分布，显然这样得到的电场分布是唯一的。但是，实际中有时不能事先知道电荷的分布或无法确定电荷的分布，这样也就不能直接计算出电场的分布。但是，由静电场的性质告诉我们，如果给定一些附加条件，根据电场的高斯定理和环路定理可以唯一地确定电场。这就需要有一个定理来保证电场之解的唯一性，这个定理就是静电场的唯一性定理。那么，什么是唯一性定理呢？我们以导体为例来阐述唯一性定理。当空间只有导体存在时，确定电场有两种类型的条件：一类是给定每个导体上的电势 V_i；另一类是给定每个导体上的电荷 q_i。

下面利用反证法来证明第一类边值问题的唯一性定理。设空间有 n 个导体，它们的大小、形状和位置都完全确定，导体的电势分别为 $V_1, V_2, \cdots, V_n$，由于导体是有限大的，故取无穷远处的电势为零（$V_\infty = 0$）。

证明：假定电势存在两个解 V 和 V'，它们都满足以上条件，即导体上有两种电荷面密度分布 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 和 $\sigma'_1, \sigma'_2, \cdots, \sigma'_n$。当每个导体上的电荷改变符号时，空间各点的电势也改变符号，而数值大小不变。为此，设 $V'' = V - V'$，则相应各个导体上的电荷分布为 $\sigma''_i = \sigma_i - \sigma'_i$。在导体上，两个解都满足边值条件，即 $V = V' = V_i$。在无穷远处的边界上 $V_\infty = V'_\infty = 0$。这就意味着，当每个导体上的电荷面密度为 σ''_i 时，相应的电势分布 V'' 在导体上和无穷远处都等于零。因此，对于电势分布区域中的某一点来说，如果 $V'' \neq 0$，即表明该点就是电势 V'' 的极值点（极大值或极小值）。由静电势的特性（参见图 4-4）可知，电势 V'' 不可能有极值，因而不可能大于零或小于零，只能是 $V'' = 0$。这就要求电势的两个解相等，即 $V = V'$，因此这两个解是同一个解。由于 $V'' = 0$，表明整个空间是等势的，即有电场强度处处为零，因而电荷面密度分布 $\sigma'' = 0$，也即 $\sigma_i = \sigma'_i$。显然，这个结果与假设矛盾。因此满足第一类边值条件的电场的解是唯一的。

同理，我们利用反证法来证明第二类边值条件的唯一性定理。设空间存在 n 个导体，每个导体的大小、形状和位置是确定的。现在给定每个导体上的电荷，分别表示为 $q_1, q_2, \cdots, q_n$。假定电势存在两个解 V 和 V'，则每个导体上与之对应的电荷面密度分别为 σ_i 和 σ'_i，即有两种可能的电荷分布，两者都是空间位置的函数。但是，每个导体的总电量是不变的，即

$$q_i = \int_{S_i} \sigma_i \mathrm{d}S = \int_{S_i} \sigma'_i \mathrm{d}S$$

设 $V'' = V - V'$，则与之相应的各个导体上的电荷面密度为 $\sigma''_i = \sigma_i - \sigma'_i$。这时导体上的电量为

$$q''_i = \int_{S_i} \sigma''_i \mathrm{d}S = \int_{S_i} (\sigma_i - \sigma'_i) \mathrm{d}S = q_i - q_i = 0$$

即为每个导体上的总电量为零。由于面元 dS 是任意的，因此只有上式被积函数 $\sigma''_i = 0$。这个结果表明，要么电荷面密度为零，要么电荷分布有正有负，否则 q''_i 不为零。对于没有电荷分布（或有异号电荷分布）的导体，其电势都不可能有极值。因此，唯一可能的是每个导体上的电势都与无穷远处的电势相同，即为零。由于空间不存在电荷，整个空间的电势分布 $V'' = 0$，因此，电势 V 和 V' 是相同的。这个结果与假设矛盾，因而，当每个导体上的电荷给定时，电势的解是唯一的，对应的电场是唯一的，面电荷密度分布也是唯一的。

静电场的唯一性定理的一般表述和证明要用到较多的数学知识，在电动力学中有更一般的严格证明。静电场的唯一性定理对于解决实际问题有着重要的意义。有唯一性定理作保证，我们根据边值条件可以提出尝试解，如果尝试解满足全部的边值条件，则该解就是唯一正确的解。

4.2.6 静电场的电力线不能构成闭合曲线

为了形象地描绘电场的分布，使得我们对电场的分布有一个直观的了解，通常引入电力

线的概念，并规定电场的方向为电力线的切线方向。于是，静电场的电力线具有如下两个重要的性质：(1) 电力线起始于正电荷(或无限远)，终止于负电荷(或无限远)，在无电荷处不会中断；(2) 电力线不构成闭合曲线(或电力线上各点的电势沿着电力线方向逐渐减小)。

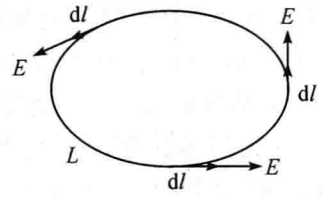


图 4-5　假设静电场的电力线是闭合曲线

第一条性质可用高斯定理直接来证明(略)。第二条性质可用反证法来证明。假设有一条电力线构成闭合曲线，那么，沿着这一条电力对电场强度进行积分。由于电场强度规定为电力线的切线方向，这与积分方向相同，因此，沿着电力线的积分为

$$\oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_L E\,\mathrm{d}l > 0$$

显然这一结果与静电场的环路定理矛盾，故假设不成立，即电力线不能构成闭合曲线。

4.2.7　均匀带电半球面及其底面是等电势的

设电荷 Q 均匀分布在半径为 R 的半球面上，则球面及球面底部圆面上各点的电势均为

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

大家知道，一个半径为 R，带电为 Q 的球面，在球面上和球面内的电势都是相同的，即等于球面的电势。如果把这个球面切成两半，由于电荷分布不变，球面电场仍与球面垂直，球面底面的电势应与球心处的电势相等，其电场垂直于底面向外，两半球合起的过程中，电场相互抵消，但电势不变。我们可以用反证法来证明这一结论。假设半球面底面上的各点电势不相等，为此在底面上任取 A、B 两点，各自到球心的距离相同。设 A 点的电势高于 B 点电势，即 $V_A > V_B$，如图 4-6 所示。将图 4-6(a) 顺时针转动 π 后变为图 4-6(b)，然后将两个半球合起来，原来的 A 点与 B 点重合，而原 B 点与 A 点重合。在这两半球合起来的过程中，根据假设，$V_A > V_B$，即两者有电势差，这与合起来过程中球内是等势体相矛盾，故假设不成立。另一方面，我们也可以将图(a) 绕对称轴旋转 π，A 点到 B 点位置，而 B 点到 A 点位置，即有 $V_B > V_A$，这与假设 $V_A > V_B$ 矛盾，故原假设不成立。也就是说，均匀带电半球面的底部平面的电势是与球心电势或球面电势相等的。

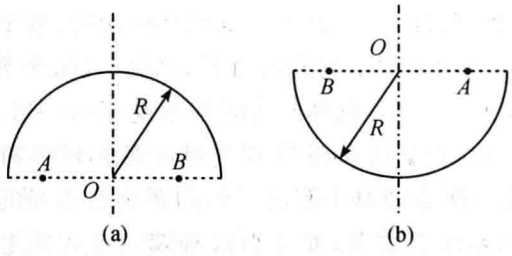


图 4-6　均匀带电半球面及底面是等势的

4.2.8　球形螺线管内的磁场是均匀的

设球形螺线管的半径为 R，沿直径方向单位长度的匝数为 n。当该球形线圈通上电流 I

时，利用毕奥－萨伐尔定律可以证明，对称轴上每一点的磁场大小均为(参见范例 9-8)

$$B = \frac{2}{3}\mu_0 nI \tag{4.8}$$

此结果只反映轴线上的信息，而不能反映球内其他各点的场信息。证明球内的磁场是均匀的可以仿照范例 4-1 的做法。下面将利用反证法来证明。在球形线圈内的对称轴上分别取 a,b,c,d,O 各点，其中 O 是球心。于是，我们有

$$B_a = B_b = B_c = B_d = B_O = \frac{2}{3}\mu_0 nI \tag{4.9}$$

情况 1：假设球内的磁场是非均匀的，磁力线分布如图 4-7(a) 所示。根据磁力线的特点，磁力线密集处磁场较强，稀疏处磁场较弱。因此，我们有

$$B_a > B_b > B_O < B_c < B_d$$

显然，这个结果与轴线上各点是相同的矛盾，故图 4-7(a) 的磁力线分布不可能。

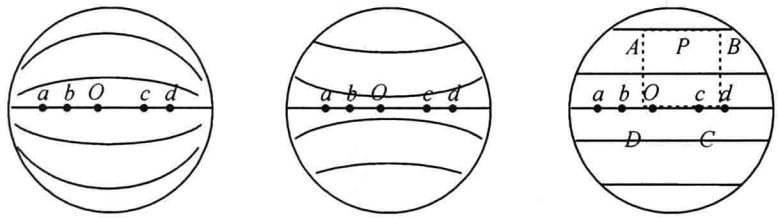


图 4-7　几种假定的球形线圈中的磁场分布

情况 2：假设球内的磁场是非均匀的，磁力线分布如图 4-7(b) 所示。同理，依据磁力线的特点，于是有

$$B_a < B_b < B_O > B_c > B_d$$

显然，这个结果也与轴线上各点磁场是相等的矛盾，故图(b) 的磁场分布也不可能。

情况 3：假设磁场分布是非均匀的，磁力线平行于轴线，靠近轴线处较密，远离轴线较疏，即平行线不等间距，在远离轴线的一根磁力线上取一点 P，由磁力线的性质可知，磁场 $B_O = B_a = B_b = B_c = B_d > B_P$，如图 4-7(c) 所示。证明：在球内取一矩形回路，并让其中一条边与轴线重合，另一条边与一根磁力线重合。对此回路运用安培环路定理

$$\oint_L \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I$$

可得

$$\oint_L \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_A^B \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_B^C \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_C^D \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_D^A \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -B_O\,\overline{CD} + 0 + B_P\,\overline{AB} + 0 = 0$$

因为 $\overline{AB} = \overline{CD}$，所以我们有

$$B_P = B_O$$

由于 P 点是任意的，故此结果与假设有矛盾，故假设不成立，磁场线是平行线且等间距。综合以上三种情况，我们可以确定，球形螺线管的内部磁场是均匀的，磁力线平行且间隔相等。

顺便指出，球形螺线管内磁场是均匀的这种证明方法，也适合于一个半径为 R 的极化强度为 $\boldsymbol{P}$ 的均匀极化介质球和磁化强度为 $\boldsymbol{M}$ 的均匀磁化介质球的情况。可以证明，均匀极化介质球内的电场强度为(参见范例 5-8)

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0} \tag{4.10}$$

对于均匀磁化球，其内部的磁场为

$$\boldsymbol{B} = \frac{2}{3}\mu_0 \boldsymbol{M} \tag{4.11}$$

注意：球形线圈沿着圆弧方向单位长度的电流（面电流密度）为

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}l} = n'I$$

而磁化球沿着圆弧方向单位长度的电流（面电流密度）为

$$\alpha' = \frac{\mathrm{d}I'}{\mathrm{d}l} = M\sin\theta$$

式中，θ 是 $\boldsymbol{M}$ 与球面外法线 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 之间的夹角。虽然两者都可视为面电流，但是前者与角度无关，这就会造成计算的结果有较大区别。

第5章 类比法

物理学中有许多物理现象或规律是相似的，知道其中之一就可以通过类比推理得到另一种物理现象的规律，也可以通过类比推理来加以证明之。比如光是一种电磁波动，将其量子化后的粒子称为“光子”；声也是一种波动，可以类比推理出其量子化后的粒子为“声子”。由两个物体间的万有引力定律可类比推理出点电荷间的静电（库仑）作用力定律。从电磁学理论的发展历史看，麦克斯韦运用了大量的类比方法。在这一章中，我们通过几个范例来阐明类比法在电磁学中的运用。

5.1 类比法界定

“类比（analogy）”一词源于古希腊，其意为“按比例”。比如，两个大小不同的三角形，若三条边的比例关系相同，则可得出这两个三角形相似。这就是古希腊数学家给出的最早意义上的类比。现代词典中解释为“一种推理方法”。根据两种事物在某些特征上的相似或相同，做出它们在其他特征上也可能相似或相同的结论。比如，由光的直线传播、反射、折射、衍射等可类比推理出声也有类似特点。类比是一种或然性（probability）的推理，其结论是否正确还有待实践证明。因此，要提高类比结论的可靠程度，就要尽可能地确认对象间的相同点。相同点越多，结论的可靠性程度就越高。反之，结论的可靠性程度就会越低。美国学者戈登把类比分为四类：直接类比、拟人类比、象征类比和幻想类比。

类比法（method of analogy）就是通过对两个对象之间某些方面的相同或相似之点进行比较分析，从而推理出这两个对象在其他方面的相同或相似的方法。类比法的基础是比较，它的运用原理包含异质同化和同质异化两个方面。异质同化是指在创造发明新事物中，借助于现有事物的知识进行分析研究，找出待创造事物和现有事物之间的相同点或相似点的过程；同质异化是将决定现有事物和待发明事物的相同点或相似点的原理、结构、形状或其结合运用于发明创造，从而创造出具有相同或相似点的新事物。电磁学中的许多问题可以运用类比推理的方法来解决，比如，决定螺线管中的感生电场的方向（磁感强度的时间变化率与长直导线中电流密度类比）、静电场的电势（重力场与静电场类比）、永久磁铁的磁场（磁荷与电荷类比）等。

值得注意的是，由于类比法不是万能的，我们不能期望类比来给出所有物理规律，结果的正确性需要经得起实验的检验才是可靠的。

5.2 类比法范例

5.2.1 螺线管中变化磁场所产生的感生电场（涡旋电场）

我们知道，无限长直螺线管内的磁场是均匀的。当螺线管通以稳恒电流时，磁场是稳恒场。当螺线管通以变化电流时，管内的磁场仍为均匀场，但磁场随时间变化。根据麦克斯韦理论，变化的磁场会激发感生电场，而这种电场又不同于静电场。静电场的场线是非闭合

的，而感生电场的场线是闭合的。那么，这种闭合场线应该是什么样的形状？是圆形的还是其他形状？在教科书中几乎都从对称性加以考虑，也就是说，这是对称性所要求的。尽管理由很充分，但是回答不够直观。下面通过与载流长直导线的类比来阐述这一问题，会有更加清晰的物理图像。

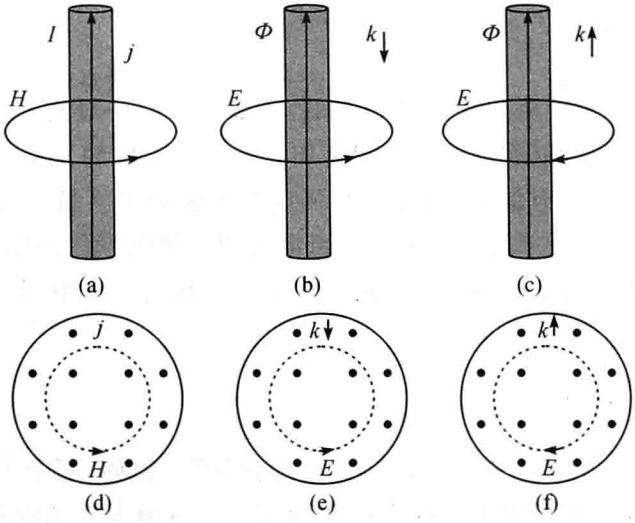


图 5-1　螺线管中磁感强度变化率 k 与导线中电流密度 j 的类比

根据前述反证法的讨论，载流长直导线周围的磁场是环绕导线的同心圆，即磁场是以导线为轴线的圆形闭合曲线。由电流密度的定义，安培环路定理可写成

$$\oint_L \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.1}$$

对于一根无限长直螺线管来说，当电流随时间变化时，管内的磁场也随时间变化。根据法拉第电磁感应定律，我们有

$$\oint_L \boldsymbol{E}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\iint_S \boldsymbol{k} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.2}$$

其中

$$\boldsymbol{k} = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

将(5.2)式与(5.1)式类比，两者的数学表达式极为相似，由于电流密度 j 线在导线中是均匀的，而螺线管中的磁感强度变化率 k 线在管中也是均匀的。根据类比法可以推测螺线管内外的感生电场是以螺线管轴线为同心圆的圆形闭合曲线，如图 5-1(b)，(c)，(e) 和(f) 所示。

根据安培环路定律，导线内外的磁场分布为

$$\boldsymbol{H} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{r} = \dfrac{1}{2} jr\hat{\boldsymbol{\varphi}}, & r < R \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{R^2}{r^2}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{r} = \dfrac{1}{2}\dfrac{R^2}{r} j\hat{\boldsymbol{\varphi}}, & r > R \end{cases} \tag{5.3}$$

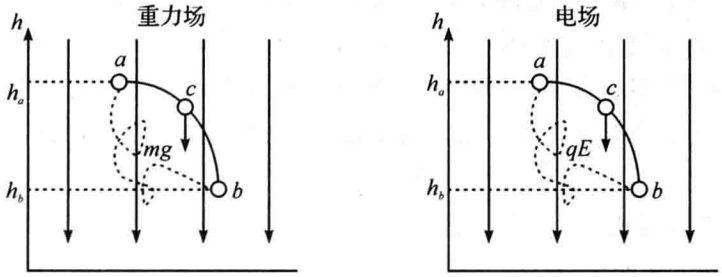
其中 j 是导线的电流密度，R 是导线的半径，$\hat{\varphi}$ 为方位角方向的单位矢。如果取螺线管的半径与导线半径相同，则由类比可得螺线管内外感生电场分布为

$$\boldsymbol{E}_i = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r} = -\dfrac{1}{2} kr\hat{\boldsymbol{\varphi}}, & r < R \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{R^2}{r^2}\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{R^2}{r} k\hat{\boldsymbol{\varphi}}, & r > R \end{cases} \tag{5.4}$$

由此可见，感生电场的方向是方位角的方向，与范例 19-4 是一致的。由于电流与磁场的方向符合右手法则，因而磁场是“右手螺旋”关系。感生电场与磁场数学表达形式上只相差一个负号，因此，感生电场与 k 矢量的方向（非 $\boldsymbol{B}$ 的方向）成“左手螺旋”关系，如图 5-1(b)，(c)，(e) 和(f) 所示。

5.2.2 静电场的电势

静电场是一个矢量场，实验上直接测量它既要测量大小又要测量方向，操作起来比较麻烦。能否找到一个简便的测量方法？大家知道，标量的测量是最简单的，如果能将矢量场化为标量场，测量过程可大大简化。那么，如何用标量场来描述矢量场呢？要回答这个问题，必须从静电场的特点出发才能给予圆满回答。因为静电场移动电荷要做功，而做功与移动的路径无关，这一特点与重力做功极为相似，所以可以与重力场进行类比。



(a) 地面　　(b) 负电平面

图 5-2　重力场与静电场的类比

在重力场中，沿任一闭合路径 L，重力所做的功为零：

$$\oint_L m\boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \tag{5.5}$$

式中 m 为物体的质量，$\boldsymbol{g}$ 为重力加速度。在重力场中将物体从 a 移到 b 重力场做功等于重力势能的减少

$$A_{ab} = -\Delta W_g \tag{5.6}$$

式中 A_{ab} 表示功，W_g 表示重力势能。如果以地面为势能的参考点，则移动单位质量重力场所做的功为

$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{A_{ab}}{m} = \int_a^b \boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{5.7}$$

V_a 表示“重力势”，V_{ab} 称为“重力势差”。

在静电场中，沿任一闭合路径 L 移动点电荷 q，静电场力所做的功也为零

$$\oint_L q\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \tag{5.8}$$

将此式与重力场(5.5) 式类比，将点电荷 q 从 a 移到 b 静电场力所做的功等于静电势能的减少

$$A_{ab} = -\Delta W_e \tag{5.9}$$

其中 A_{ab} 表示静电场的功，We 表示静电势能。从 a 点到 b 点移动单位正电荷电场力所做的功为

$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{A_{ab}}{q} = \int_a^b \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{5.10}$$

这里 V_a 称为电势，V_{ab} 称为电势差。

5.2.3 电容器的充电与电感器的充磁暂态过程

电容器的充放电过程与电感器的充放磁过程是两个较为典型的似稳电路例子。何谓似稳电路?设电路仅包含电源与电阻,稳恒电源以及由它产生的电荷分布和电场分布是在这种电路中维持稳恒电流的充分必要条件。当电源的电动势因某种原因而改变时,电路各部分的电荷分布和电场分布随之变化,从而导致电流的变化。在真空中,这一变化过程是以光速 c 传播的。如果电路的线度(或尺寸)l 与电源变化时的波长 λ 相比满足如下关系

$$l \ll \lambda \text{ 或} \frac{l}{c} \ll \frac{1}{f} \tag{5.11}$$

则可视作电路对电源变化的响应不需要时间,电流随电源电动势同步变化,两者与稳定电路情形相同,这种电路称为似稳电路,相应的关系式称为似稳条件。

考虑一个包含电容、电阻和电源的简单回路(简称 RC 电路),如图 5-3(a) 所示。当电路接通时,电容开始充电。由于电容的电压不能突变,因而充电过程电路中有持续的电流。充电结束时,电路中电流回到零,即电容从初态的无电荷状态到充满电荷的状态需要一个过程。这种电流从一个稳态到另一个稳态的过程称之为暂态过程。电容的充电过程可列出如下方程

$$iR + u_c = \varepsilon \tag{5.12}$$

用电荷 q 表示,上式可写成

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}q = \frac{\varepsilon}{R} \tag{5.13}$$

利用初始条件($t = 0, q = 0$),可得到如下解

$$q = q_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}}) \tag{5.14}$$

其中

$$q_0 = C\varepsilon, \tau_c = RC$$

q_0 为充电结束时电容器极板上的电荷,τ_c 为弛豫时间(特征时间)反映充电的快慢程度。

考虑一个电感、电阻和电源的简单回路(简称 RL 电路),如图 5-3(b) 所示。当电路接通时,电感相当于一个具有电动势 ε_L 的电源,回路电压方程可写为

$$iR = \varepsilon + \varepsilon_L \tag{5.15}$$

利用自感电动势的表达式,上式可改写成

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i\frac{R}{L} = \frac{\varepsilon}{L} \tag{5.16}$$

将此式与(5.13) 式电容的情况类比,两者相似,其解为

$$i = I_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}) \tag{5.17}$$

其中

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R}, \quad \tau_L = \frac{L}{R}$$

I_0 表示稳态的电流,τ_L 称为特征时间。

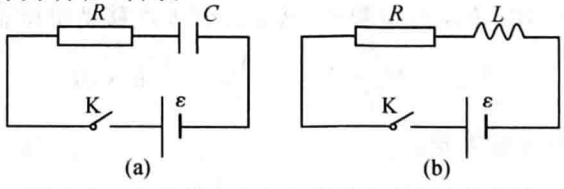


图 5-3 电容的充电与电感的充磁电路的类比

电容的充电过程中，从负极板到正极板移动元电荷外力克服电场力所做的功转化为电能

$$\mathrm{d}W_e = \mathrm{d}A = u_c \mathrm{d}q = \frac{q}{C}\mathrm{d}q \tag{5.18}$$

电容中储存的电能为

$$W_e = \int \mathrm{d}W_e = \int_0^{q_0} \frac{q}{C}\mathrm{d}q = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C} \tag{5.19}$$

与此类似，电感器中改变一个元电流 $\mathrm{d}i$，电源克服自感电动势所做的功转化为磁能

$$\mathrm{d}W_m = \mathrm{d}A = Li\,\mathrm{d}i \tag{5.20}$$

电感器中的磁量为

$$W_m = \int \mathrm{d}W_m = \int_0^I Li\,\mathrm{d}i = \frac{1}{2}LI^2 \tag{5.21}$$

由此可见，RC 电路与 RL 电路极为相似，因而运用类比法显得处理问题更简洁明了。

5.2.4 电路与磁路

在稳恒电路中，最简单的电路是由电源电动势和电阻（导线电阻）组成的无分支回路，如图 5-4(a) 所示。引进电流密度 j 后，导线中的电流 I 可表示为

$$I = \iint_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.22}$$

上式中的电流 I 可理解为电流密度 j 线通过导线截面的电流密度线通量。电阻 R 可写成

$$R = \oint_L \frac{\mathrm{d}l}{\gamma S} \tag{5.23}$$

式中 γ 是导电材料的电导率，S 为长度元 $\mathrm{d}l$ 的横截面积。电源电动势定义为

$$\varepsilon = \oint_L \boldsymbol{E}_k \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{5.24}$$

在稳恒磁路中，最简单的无分支磁路是由励磁线圈和铁心回路组成，如图 5-4(b) 所示。由于磁感应 B 线主要集中在铁心内部（证明略），故通过铁心横截面的磁通量为

$$\Phi_m = \iint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{5.25}$$

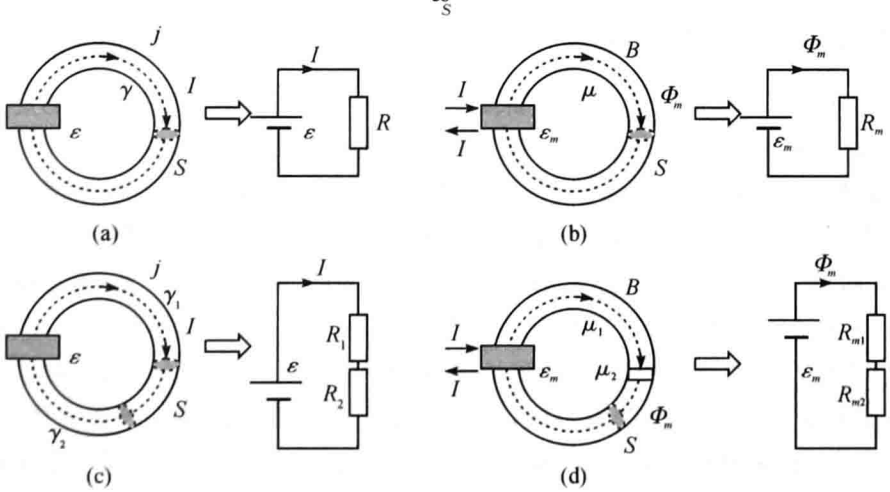


图 5-4 导线回路与铁心磁路的类比

将(5.25)式与(5.22)式类比，磁感应线(或磁通密度线 B 线)与导线中的电流密度线(j 线)相当，而磁通量(磁感应线通量)与电流(电流密度线通量)地位相当，故铁心的磁阻可表示为

$$R_m = \oint_L \frac{\mathrm{d}l}{\mu S} \tag{5.26}$$

由此可见，磁导率 μ 与电导率 γ 地位相当。同理，与电路的电动势(5.24)式类比，磁动势可表示为

$$\varepsilon_m = \oint_L \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{5.27}$$

由图 5-4(a) 可得全电路欧姆定律

$$\varepsilon = IR \tag{5.28}$$

将图 5-4(b) 与(a) 类比可得

$$\varepsilon_m = \Phi_m R_m \tag{5.29}$$

此式称为无分支闭合磁路的欧姆定律。将图 5-4(d) 和(c) 类比可得

$$\begin{aligned} R &= R_1 + R_2 \\ R_m &= R_{m1} + R_{m2} \end{aligned} \tag{5.30}$$

由此可见，磁路中磁阻的串联与电路中电阻的串联相同。同理，由于电路的并联其电流和电阻满足如下关系

$$I = I_1 + I_2 \tag{5.31}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{5.32}$$

与此类比，在并联磁路中磁通量与磁阻的关系为

$$\Phi_m = \Phi_{m1} + \Phi_{m2} \tag{5.33}$$

$$\frac{1}{R_m} = \frac{1}{R_{m1}} + \frac{1}{R_{m2}} \tag{5.34}$$

磁通量的相加式实际上是磁路的基尔霍夫第一定律。值得指出的是：仿照上面的类比方法，还可以推出磁路的基尔霍夫第二定律，且可以证明，基尔霍夫第一、二定律对较为复杂的磁路也近似成立。

5.2.5 铁电体与铁磁体的类比

何谓铁磁体?我们把具有铁磁性的物质称之为铁磁体。历史上，铁磁体的定义与今天有所不同，过去认为铁磁体包括所有能自发磁化的物质，在没有外界磁场的情况下，铁磁体也能够展现出磁性。但是近来随着科学家对自发磁化方式的更多理解，发现永磁体的单位晶胞内的自旋种类可能会多于一种，这时候磁体被称为铁氧磁体。铁磁体特指一种自发磁化方式，即晶胞里面的每一个磁子的方向都是相同的，都对磁性起增强作用。通常在教科书中把电子自旋磁矩同向平行排列的自发磁化小区域称为“磁畴”。很多材料都表现出铁磁性，包括铁、钴、镍等。它们在居里温度之下表现出铁磁性，在居里温度之上则显示顺磁性。

按照磁场对介质磁化的机制的不同，磁介质可分为抗磁体、顺磁体、铁磁体、反铁磁体和亚铁磁体五大类。在无外磁场时抗磁体分子的固有磁矩为零，外加磁场后，由于电磁感应每个分子感应出与外磁场方向相反的磁矩，所产生的附加磁场在介质内部与外磁场方向相反，此性质称为抗磁性。顺磁体分子的固有磁矩不为零，在无外磁场时，由于热运动而使分子磁

矩的取向作无规分布，宏观上不显示磁性。在外磁场作用下，分子磁矩趋向于与外磁场方向一致的排列，所产生的附加磁场在介质内部与外磁场方向一致，此性质称为顺磁性。介质磁化后的特点是在宏观体积中总磁矩不为零，单位体积中的总磁矩称为磁化强度。

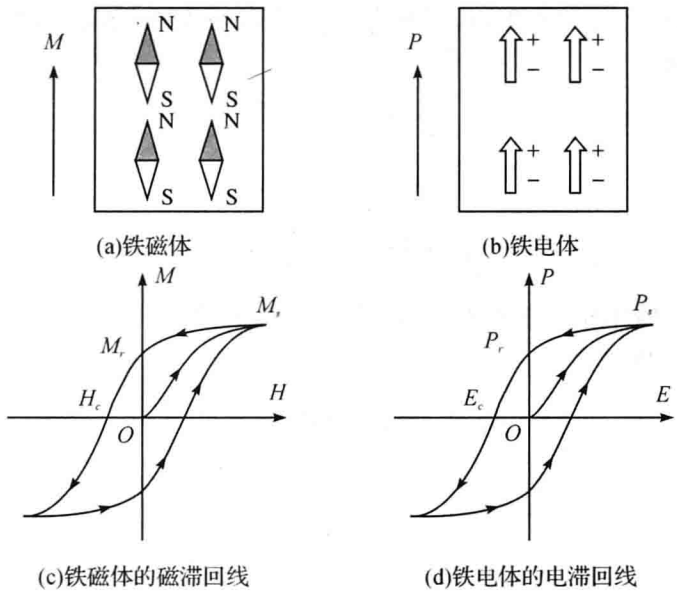


图 5-5 铁磁体与铁电体的类比

铁磁质具有以下一些特性：(1) 有特别强的附加磁场 $\boldsymbol{B}'$；(2) 磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 与磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 不再是常矢量，两者之间没有简单的线性关系；(3) 磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 的变化滞后于外磁场 H 的变化，外磁场为零时，铁磁质仍有磁性；(4) 存在临界温度(居里温度)。铁磁质的磁滞回线如图 5-5(c) 所示。

铁电体(Ferroelectrics) 与铁磁体(Ferromagnetics) 具有十分相似的特点：(1) 有较强的附加电场 $\boldsymbol{E}'$；(2) 极化强度 $\boldsymbol{P}$ 与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 没有简单的线性关系；(3) 极化强度的变化状态滞后于电场强度的变化，外场为零时，有剩余极化；(4) 存在临界温度($t < 120°$)。铁电体的电滞回线如图 5-5(d) 所示。

5.2.6 能流密度与电流密度的类比

当导线有粗细时，用电流强度 I 无法反映电流的分布情况，因此，引进电流密度 j 就能知道电流分布的细节。设导线中载流子的密度为 n，则电荷密度可表示为

$$\rho = nq \tag{5.35}$$

式中 q 为载流子的电量。如果在导线中取一横截面积为 $\mathrm{d}S$，电流为 $\mathrm{d}I$ 的电流管，电流密度定义为

$$j = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S} = \frac{nqv\mathrm{d}S}{\mathrm{d}S} = nqv = \rho v \tag{5.36}$$

或写成矢量式

$$\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v} \tag{5.37}$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 是载流子的定向漂移速度，也就是说，电流密度的方向与载流子的运动方向一致。对 $\mathrm{d}l$ 长度的电流管运用欧姆定律得

$$\mathrm{d}I = \frac{-\mathrm{d}V}{\mathrm{d}R} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l}\gamma \mathrm{d}S = \gamma E \mathrm{d}S \tag{5.38}$$

式中 $\mathrm{d}V$ 表示电势的增量，在其前面加一负号即为电势差。利用(5.36) 和(5.38)，电流密度 j

还可表示为

$$\boldsymbol{j} = \gamma \boldsymbol{E} \tag{5.39}$$

这个式子称为欧姆定律的微分形式(local form or differential form),电流密度的方向也与电场的方向一致。根据连续性方程,如果从某个闭合面 S 有电流流出,则一定等于该闭合面内的电荷 Q 的减少率:

$$\oint_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{5.40}$$

或表示为

$$\oint_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \mathrm{d}V \tag{5.41}$$

式中 V 是 S 面所包围的体积,ρ 是电荷密度。利用高斯定理(Gauss's theorem),将(5.41)式左边的闭合面积分化为体积分

$$\oint_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{j} \mathrm{d}V = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}V \tag{5.42}$$

比较之得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{5.43}$$

此式即为连续性方程的微分形式,也称电荷守恒定律的微分形式。$\nabla \cdot \boldsymbol{j}$ 表示电流密度的散度。这个式子告诉我们,当空间某一点有电流密度流出时,则该点一定有电荷密度的减少。

下面通过与电流密度类比的方式来给出电磁场的能流密度相应所满足的规律。根据麦克斯韦电磁理论,电磁波就是光,光即为电磁波,而电磁波的量子即为光子。设光子能量为 ε,单位体积中光子数为 n,则与电荷密度(5.35)式类比可得电磁场的能量密度 w

$$w = n\varepsilon \tag{5.44}$$

与(5.37)式类比可得

$$\boldsymbol{S} = w\boldsymbol{v} \tag{5.45}$$

式(5.37)式表明:电荷密度 ρ 以速度 $\boldsymbol{v}$ 流动引起了"电荷流"密度。因而,上式意味着能量密度的流动会引起"能量流"密度。由于电流密度的意义是单位时间通过与电荷运动方向垂直的单位面积的电量,因此,(5.45)式的物理意义为单位时间通过与能量传播方向垂直的单位面积的能量,即 $\boldsymbol{S}$ 表示的是能量流密度(energy flux),也称为玻印廷矢量(Poynting vector)。

接下来,我们讨论电磁场能量守恒定律。由于 $\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{j}$,w 与 ρ 地位相当,因此,仿照(5.41)式可以得到如下表达式

$$\oint_A \boldsymbol{S} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V w \mathrm{d}V \tag{5.46}$$

为了避免与能流密度的符号混淆,式中用 A 表示体积 V 的面积。上式的左边表示单位时间从闭合面内向外流出的电磁场能量(默认闭合面的外法线为正方向),右边应为体积 V 内电磁场能量的减少率,这就是在无电荷、电流存在的空间,电磁场能量守恒定律的积分形式。与(5.43)式类比得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \tag{5.47}$$

该式称为电磁场能量守恒定律的微分形式。对于真空中的静电场,能量密度可表示为

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \tag{5.48}$$

同理，真空中的静磁场能量密度为

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{5.49}$$

如果空间既有电场又有磁场存在，则电磁场能量密度应为两者之和

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{5.50}$$

上式不仅适用于静态场，而且对非静态场也成立。体积 V 中电磁场的总能量为

$$W = \int_V w\mathrm{d}V = \int_V \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)\mathrm{d}V \tag{5.51}$$

现在考虑能流密度 S 的另一种形式。在真空中，利用(5.50)式，(5.45)式可写为

$$\boldsymbol{S} = w\boldsymbol{v} = \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)c\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{2}(c\varepsilon_0 E^2 + c\mu_0 H^2)\hat{\boldsymbol{n}} = EH\hat{\boldsymbol{n}} \tag{5.52}$$

其中我们已经利用了如下两个关系式

$$B = \mu_0 H \tag{5.53}$$

$$E = cB = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\mu_0 H = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}H \tag{5.54}$$

这里 c 是真空中的光速。(5.52)式中的 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 表示能量传播方向的单位矢量。由于电场 $\boldsymbol{E}$ 与磁场 $\boldsymbol{H}$ 互相垂直，因而式(5.52)式可表示为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{5.55}$$

值得指出的是：借助于能流密度 $\boldsymbol{S}$ 还可表示出电磁场的动量密度 $\boldsymbol{g}$

$$\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{S}}{c^2} \tag{5.56}$$

以及动量流密度，由于动量密度是矢量，仿照(5.45)式动量流密度一定是张量，在此不再讨论。

另一方面，如果电磁场中有电荷电流，那么场对电荷有力的作用，这就会产生机械能。也就是说，当电磁场能量流入闭合面 $\boldsymbol{A}$ 中时，一方面电磁场使电荷系统的机械能增加，另一方面使面内的电磁场能量增加。因此，只要将(5.47)式中的电磁场能量密度视为电磁场能量密度 w_{em} 与机械能密度 w_{mech} 之和即可

$$w = w_{em} + w_{mech} \tag{5.57}$$

其中机械能密度可由下式给出

$$w_{mech} = \int \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}\mathrm{d}t = \int \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}\mathrm{d}t \tag{5.58}$$

式中 f 表示场对电荷作用力密度，由洛仑兹力公式有

$$\boldsymbol{f} = \rho\boldsymbol{E} + \rho\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{5.59}$$

ρ 代表电荷密度。这样(5.47)式就可以推广到有电荷电流的情形。

5.2.7 旋转带电圆柱面与螺线管的类比

一根长为 L，半径为 R 的螺线管通以稳恒电流 I，在其轴线任一点 P 的磁感强度可表示为

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 nI(\cos\beta_1 - \cos\beta_2) \tag{5.60}$$

其中 n 是单位长度的匝数，角度 β_1 和 β_2 表示场点到两端口的连线与轴线(z 轴)的夹角，如图5-7所示。B 的值与 P 点位置及螺线管的长度有关，其方向由右手螺旋法则确定。

设螺线管是紧密绕制而成，共有 N 匝线圈。单位长度的电流(面电流密度)定义为

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}l} = \frac{NI}{L} = nI$$

其方向与线圈电流的流向相同，即沿着方位角方向，即

$$\boldsymbol{\alpha} = nI(\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{n}}) \tag{5.61}$$

因此，(5.60) 可改写成矢量式

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}\mu_0(\cos\beta_1 - \cos\beta_2)(\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{\alpha}) \tag{5.62}$$

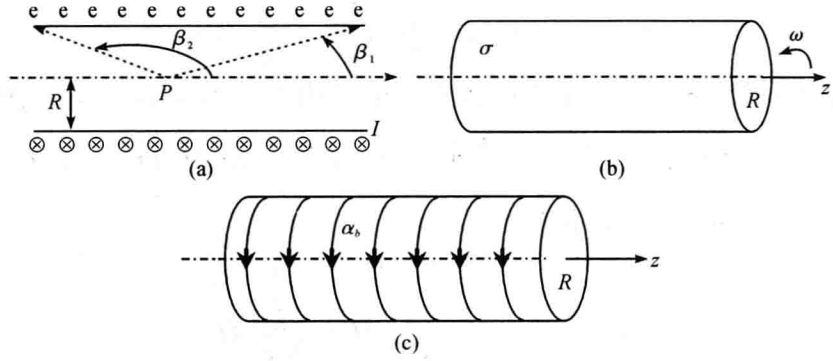


图 5-6　旋转带电圆柱面、磁化圆柱与螺线管的类比

式中 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是螺线管圆柱面的外法线。当 P 点位于螺线管的中间时，上式可简化成

$$\boldsymbol{B} = \mu_0\cos\beta_1(\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\mu_0 L}{\sqrt{L^2 + 4R^2}}(\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{\alpha}) \tag{5.63}$$

由此可见，螺线管轴线上的磁感应强度不但与长度有关，而且与其半径也有关。当 $L \to \infty$ 时，上式简化为

$$\boldsymbol{B} = \lim_{L\to\infty} \frac{\mu_0 L}{\sqrt{L^2 + 4R^2}}(\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{\alpha}) = \hat{\boldsymbol{n}} \times \mu_0\boldsymbol{\alpha} \tag{5.64}$$

当 $L \to 0$ 时($L\alpha = NI$)，(5.63) 可化简为

$$\boldsymbol{B} = \lim_{L\to 0} \frac{\mu_0}{\sqrt{L^2 + 4R^2}}(\hat{\boldsymbol{n}} \times L\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\mu_0 NI}{2R}(\hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{\varphi}}) \tag{5.65}$$

这相当于一个有 N 匝线圈的圆环中心处的磁场。$\hat{\boldsymbol{r}}$ 表示圆环的径向单位矢量，它与 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 方向相同，$\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ 是绕轴线的方位角单位矢量。

当 P 点位于螺线管的任一端口时，(5.62) 式可化为

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 L}{\sqrt{R^2 + L^2}}(\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{\alpha}) \tag{5.66}$$

当 $L \to \infty$ 时，上式可简化成

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{n}} \times \mu_0\boldsymbol{\alpha}) \tag{5.67}$$

同理，当(5.66) 式中的 $L \to 0$ 时，直接可回到(5.65) 式的结果。

为了给出螺线管中磁感应强度与 z 轴的关系，设管子的中点为坐标的原点 O，场点 P 距原点 O 为 z，则(5.62) 式可写成

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}\mu_0\left[\frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} - z\right)^2 + R^2}} + \frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} + z\right)^2 + R^2}}\right](\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{\alpha}), \left(z \leqslant \frac{L}{2}\right) \tag{5.68}$$

该式表明，有限长直螺线管内轴线上任上点的磁场除了与长度、半径有关外，还与场点的位置有关。

对于管外轴线上任一点磁感应强度，只要注意到(5.62)式中的角度 $\beta_1,\beta_2>\frac{\pi}{2}$，容易得到如下表达式

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}\mu_0\left[-\frac{\left(z-\frac{L}{2}\right)}{\sqrt{\left(z-\frac{L}{2}\right)^2+R^2}}+\frac{\left(z+\frac{L}{2}\right)}{\sqrt{\left(z+\frac{L}{2}\right)^2+R^2}}\right](\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{\alpha}),\left(z>\frac{L}{2}\right) \tag{5.69}$$

转动带电圆柱面 设圆柱面均匀带电，面电荷密度为 σ，半径为 R，长度为 L，该圆柱面以匀角速度 ω 绕对称轴 z 轴旋转。圆柱面的旋转相当于在其面上产生面电流分布，这个面电流密度可以表示为

$$\alpha_q=\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}l}=\frac{\omega\mathrm{d}q}{2\pi\mathrm{d}l}=\frac{\omega\sigma 2\pi R\mathrm{d}l}{2\pi\mathrm{d}l}=\omega\sigma R \tag{5.70}$$

写成矢量式

$$\boldsymbol{\alpha}_q=\sigma R\omega(\hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{n}}) \tag{5.71}$$

这里 $\hat{\boldsymbol{k}}$ 为 z 轴方向单位矢量，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 为柱面的法线。实际上，也可仿照电流密度 $\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}$ 来给出上式，即

$$\boldsymbol{\alpha}_q=\sigma\boldsymbol{v}=\sigma\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}=\sigma R\omega(\hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{n}})$$

将(5.71)式与(5.61)式类比，我们有

$$nI\leftrightarrow\sigma R\omega$$

因此，只要将(5.68)中的 α 换成 α_q 即可得到旋转带电圆柱面内部轴线上任一点的磁场

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega R\left[\frac{\frac{L}{2}-z}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}-z\right)^2+R^2}}+\frac{\frac{L}{2}+z}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}+z\right)^2+R^2}}\right]\hat{\boldsymbol{n}}\times(\hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{n}}),\quad z\leqslant\frac{L}{2} \tag{5.72}$$

利用三矢量双叉积恒等式

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

再注意到 $(\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})=0$ 以及 $(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})=1$，(5.72)式可改写成

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega R\left[\frac{\frac{L}{2}-z}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}-z\right)^2+R^2}}+\frac{\frac{L}{2}+z}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}+z\right)^2+R^2}}\right]\hat{\boldsymbol{k}},\quad z\leqslant\frac{L}{2} \tag{5.73}$$

当圆柱面的长度 $L\to\infty$ 时，由(5.66)可得圆柱面中心处的磁感应强度

$$\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{n}}\times\mu_0\boldsymbol{\alpha}_q=\mu_0\sigma\omega R\hat{\boldsymbol{k}} \tag{5.74}$$

由(5.67)式可以给出圆柱面端口的磁场

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{n}}\times\mu_0\boldsymbol{\alpha}_q=\frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega R\hat{\boldsymbol{k}} \tag{5.75}$$

如果场点 P 位于管外，磁感应强度可表示为

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega R\left[-\frac{z-\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(z-\frac{L}{2}\right)^2+R^2}}+\frac{z+\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(z+\frac{L}{2}\right)^2+R^2}}\right]\hat{\boldsymbol{k}},\quad z>\frac{L}{2} \tag{5.76}$$

磁化圆柱体 一个半径为 R，长度为 L 的均匀磁化介质圆柱体，在其轴线的磁场可以与

螺线管的结果类比。设圆柱体内的磁化强度为 $\boldsymbol{M}$，圆柱面上的束缚磁化面电流密度为

$$\boldsymbol{\alpha}_b = \boldsymbol{M} \times \hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{M}(\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{n}}) \tag{5.77}$$

将此式与(5.61)式类比，可得

$$nI \leftrightarrow M$$

因而，由(5.68)式可得磁化束缚面电流，在其内部轴线上产生的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}' = \frac{1}{2}\mu_0 \left(\frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} - z\right)^2 + R^2}} + \frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{\left(\frac{L}{2} + z\right)^2 + R^2}} \right) M\hat{\boldsymbol{k}}, \quad z \leqslant \frac{L}{2} \tag{5.78}$$

当磁介质圆柱为无限长时，中心的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}' = \hat{\boldsymbol{n}} \times \mu_0 \boldsymbol{\alpha}_b = \mu_0 M\hat{\boldsymbol{k}} \tag{5.79}$$

当 $L \to 0, z \to 0$。(5.78)式可退化为

$$\boldsymbol{B}' = \frac{\mu_0 LM}{2R}\hat{\boldsymbol{k}} \tag{5.80}$$

如果场点 P 位于磁介质圆柱外部轴线上，则磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}' = \frac{1}{2}\mu_0 \left(-\frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2}} + \frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^2 + R^2}} \right) M\hat{\boldsymbol{k}}, \quad z > \frac{L}{2} \tag{5.81}$$

5.2.8 均匀极化介质球的电场与电偶极子的电场类比

电偶极子 电偶极子是由相距为 l 的一对等量异号电荷系统组成的。该电偶极子的电偶极矩定义为电荷的大小 q 与相互之间的距离 l 的乘积，其方向由负电荷指向正电荷，即

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$$

物理学中电偶极子是一个十分重要的模型，许多电荷系统都可视为电偶极子。比如，一个原子或分子，内部正电和负电，而系统的总电量为零。当原子或分子处于外电场中，正负电荷发生相反方向位移，于是原子或分子的电性与电偶极子相同。

首先，计算电偶极子内部中心的电场强度。由电场强度的叠加原理可得

$$E_0 = E_- + E_+ = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 (\frac{l}{2})^2} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 (\frac{l}{2})^3}$$

或写成矢量式

$$\boldsymbol{E}_0 = -\frac{\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 (\frac{l}{2})^3} \tag{5.82}$$

因为 l 很小，所以电偶极子内部连线上的电场强度可认为是均匀的，电场方向与电偶极矩方向相反。

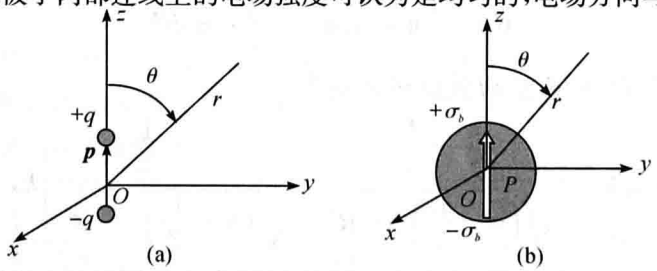


图 5-7 极化介质球与电偶极子类比

其次，计算电偶极子延长线上任一点的电场强度。设电偶极子的中心为坐标原点，z 轴与偶极子间连线重合，并让电偶极矩的方向与 z 轴方向一致。由电场的叠加原理可得

$$E_a = E_+ + E_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (r-\frac{l}{2})^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (r+\frac{l}{2})^2} \approx \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

写成矢量式

$$\boldsymbol{E}_a = \frac{2\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{5.83}$$

可见，在延长线上电场方向与电偶极矩方向相同。

再次，考虑电偶极子垂直平分线上的电场强度，由电场的叠加原理可得

$$\boldsymbol{E}_b = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+^3}\boldsymbol{r}_+ + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_-^3}\boldsymbol{r}_- \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(\boldsymbol{r}_+ - \boldsymbol{r}_-) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(-\boldsymbol{l}) \approx -\frac{\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{5.84}$$

式中负号表示电场强度方向与电偶极矩的方向相反。

对于空间任意一点的电场强度，可通过电势求偏导数来得到。设电偶极子位于 z 轴的原点，方向与 z 轴正方向相同。空间任一点的电势为

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-l/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+l/2)^2}}\right)$$

因为坐标原点到场点的距离 $r \gg l$，则有

$$V \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left[\left(1+\frac{zl}{2r^2}\right) - \left(1-\frac{zl}{2r^2}\right)\right]$$

再考虑到 $z = r\cos\theta$，则上式化为

$$V = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r\cos\theta}{r^3} = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{5.85}$$

这就是电偶极子空间任一点的电势。有了电势可以通过对电势求梯度来获得电场强度，为此，采用球坐标，电场强度的径向分量与极角分量为

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3}$$

写成矢量式

$$\boldsymbol{E} = E_r\boldsymbol{e}_r + E_\theta\boldsymbol{e}_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2p\cos\theta\boldsymbol{e}_r + p\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r)\boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{p}) \tag{5.86}$$

得出上式我们已经利用了如下关系：

$$\boldsymbol{p} = p\cos\theta\boldsymbol{e}_r - p\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

均匀极化介质球 一个半径为 R 的均匀极化介质球，极化强度为 $\boldsymbol{P}$，并沿着 z 轴方向。介质球的相对介电常数为 ε_r，上半球表面分布着非均匀的正极化电荷，下半球面分布着非均匀的负极化电荷，如图 5-7(b) 所示。由于均匀极化，球中所有分子电偶极矩都沿着相同方向，即沿着 z 方。因此，这些分子偶极矩的矢量和即为总的电偶极矩，可认为总偶极矩位于坐标原点，于是可以与单个电偶极子作类比。

介质球的中心电场强度(球心处)与电偶极子(5.82)式类比得：

$$\boldsymbol{E}_0 = -\frac{\sum \boldsymbol{p}_i}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{d}{2}\right)^3} = -\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\boldsymbol{P}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = -\frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0} \tag{5.87}$$

式中 d 是球的直径，相当于单个偶极子的线度 l。(5.87) 式表明，在球心处极化场强与极化强度 P 方向相反。根据电偶极子两电荷连线上电场是均匀的，可以推则球内 z 轴上的电场是均匀的。下面对上式的正确性作一论证：

一个半径为 R 的介质球沿极轴 z 均匀极化，其极化强度为 $\boldsymbol{P}$，球面上极化(束缚)电荷面密度可表示为

$$\sigma_b = \boldsymbol{P}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = p\cos\theta \tag{5.88}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是球面的外法线，由于 P 的方向沿 z 轴方向，所以角度 θ 是极角，如图 5-7 所示。在球面上取一小面元 $\mathrm{d}S$

$$\mathrm{d}S = R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

相应的电荷元是

$$\mathrm{d}q = \sigma_b\mathrm{d}S = \sigma_b R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

电荷元在球心处所产生的电场为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{R^2}\hat{\boldsymbol{n}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma_b\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\hat{\boldsymbol{n}}$$

由于该问题具有旋转轴对性，上式与 z 轴垂直的分量全部抵消，只有 z 方向的分量。因此，我们有

$$\mathrm{d}E_z = \mathrm{d}\boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{k}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma_b\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}} = -\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

积分得

$$\boldsymbol{E} = \int \mathrm{d}E_z\hat{\boldsymbol{k}} = -\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\hat{\boldsymbol{k}} = -\frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0} \tag{5.89}$$

此式与(5.87)式一致。

再证球面内 z 轴线上任一点的电场是常矢量。为此，设 P 点距球心 O 为 r，在球面上取一圆环电荷 $\mathrm{d}q$，该电荷在轴线上 P 点所产生的电场大小为

$$\mathrm{d}E_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q(r-R\cos\theta)}{((R\sin\theta)^2+(r-R\cos\theta)^2)^{3/2}} = \frac{P}{2\varepsilon_0}\frac{R^2\cos\theta\sin\theta(r-R\cos\theta)}{(R^2+r^2-2rR\cos\theta)^{3/2}}\mathrm{d}\theta$$

对此式积分

$$E_P = \frac{PR^2}{2\varepsilon_0}\left\{r\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta\sin\theta}{(R^2+r^2-2rR\cos\theta)^{3/2}}\mathrm{d}\theta - R\int_0^{\pi}\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{(R^2+r^2-2rR\cos\theta)^{3/2}}\mathrm{d}\theta\right\}$$

括号中的第一项积分

$$r\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta\sin\theta}{(R^2+r^2-2rR\cos\theta)^{3/2}}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2rR^2}\left[\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\theta} + \frac{r^2+R^2}{\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\theta}}\right]_0^{\pi} = \frac{2r^2}{R^2(R^2-r^2)}$$

括号中的第二项积分

$$R\int_0^{\pi}\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{(R^2+r^2-2rR\cos\theta)^{3/2}}\mathrm{d}\theta$$

$$= R\left[\frac{r^2R^2\cos^2\theta + 2rR(R^2+r^2)\cos\theta - 2(R^2+r^2)^2}{3r^3R^3\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos\theta}}\right]_0^{\pi} = \frac{2R^2+4r^2}{3R^2(R^2-r^2)}$$

将两项积分代入得

$$E_P = \frac{PR^2}{2\varepsilon_0}\left\{\frac{2r^2}{R^2(R^2-r^2)} - \frac{2R^2+4r^2}{3R^2(R^2-r^2)}\right\} = -\frac{P}{3\varepsilon_0}$$

这里负号表示电场方向与极化强度方向相反。由此可知，前面的推断是正确的。

对于球面内任一点的电场是否为常矢量？只要利用静电场的环路定理便可证明。为此，取一矩形回路，让其中一条边与轴线重合，另一条边与轴线平行。由静电场的环量为零便可知，与轴线平行的边其电场强度与轴线的场强相等。

介质球外远处的电场强度也可以与电偶极子强度类比。当 $r \gg R$ 时，在极化强度 P 的延长线上（即 z 轴上）任一点的电场强度为（与(5.83)类比）

$$\boldsymbol{E}_a = \frac{2\sum \boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{2\,\frac{4}{3}\pi R^3 \boldsymbol{P}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{2R^3\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0 r^3} \tag{5.90}$$

介质球极化强度 P 的垂直平分线上的电场强度（与(5.84)式类比）

$$\boldsymbol{E}_b = -\frac{\sum \boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = -\frac{R^3\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0 r^3} \tag{5.91}$$

球外远处任一点的电场强度（与(5.87)式类比）

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\frac{4}{3}\pi R^3[3(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_r)\boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{P}] = \frac{R^3}{3\varepsilon_0 r^3}[3(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_r)\boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{P}] \tag{5.92}$$

显然，(5.90)式和(5.91)式是(5.92)式的两种特殊情况。

第6章 模型法

物理学是一门实验科学，电磁学当然也不例外。在电磁学的实验定律和基本理论的建立过程中，物理模型的建立是非常重要的。对同一个物理问题而言，实验模型与理论模型之间有着较大的差别。例如，实验模型的平行板电容器一定有边缘效应，而理论模型的平行板电容器是没有边缘效应的，因为把平行板视为无限大。前者反映的是物理问题较为“真实”的写照，而后者是“理想化”的抽象描述，但是这两者都是实体模型，即物理模型。在这一章中，先给出模型法的定义，再以范例说明之。

6.1 模型法界定

模型(model)一词源自于拉丁文的 modulus，其含意是尺度、样本、标准。在新华字典中，模型一词有两种解释：其一为按实物比例和结构制成的物品；其二为铸造或压制物品用的型器，俗称“模子”。在科学技术名词中，模型的定义是：用以分析问题的概念、数学关系、逻辑关系和算法序列的表示体系。意即所研究的系统、过程、事物或概念的一种表达形式，这种模型的概念具有广义性。而通过实验、图样放大或缩小而制作的样品(或仿制品)，一般用于展览或实验或铸造机器零件等用的模子，这种模型的概念具有狭义性。

模型可以取各种不同的形式，但没有统一的分类原则。一般来说，按照其表现形式可分为四种类型：物理模型、数学模型、结构模型和仿真模型。物理模型也称实体模型，又可分为实物模型和类比模型。而实物模型是根据相似性理论制造的，按原系统比例缩小或放大或相同尺寸的实体。例如，风洞实验中的飞机模型、建筑模型、船舶模型等；电磁学中的点电荷、电偶极子、磁偶极子等都是实体模型。对于类比模型而言，是指在不同的物理学分支学科的系统中各自的变量有时服从相同的规律，根据这个共同规律可以创制出物理意义完全不同的比拟和类推的模型。例如，在一定条件下由节流阀和气容构成的气动系统的压力响应与一个由电阻和电容所构成的电路的输出电压特性具有相似的规律，因此可以用比较容易进行实验的电路来模拟气动系统。数学模型是用数学语言描述的模型，描述的是系统的行为和特征，而不是系统的实际结构。在科技名词中表述为：根据对研究对象所观察到的现象及实践经验，归结成的一套反映其内部因素数量关系的数学公式、逻辑准则和具体算法，用以描述和研究客观现象的运动规律。结构模型主要反映的是系统的结构特点和因果关系，是研究复杂系统的有效手段。比如，图模型、生物系统分析中的房室模型等。仿真模型是通过电子计算机上运行的程序表达的模型。物理模型、数学模型和结构模型一般都能转变为仿真模型。

在物理学中，模型可分为实验模型和理论模型。比如，实验测试与分析的样品(如电容器、螺线管、磁性材料等)，可以视为实验模型；点电荷、电流元、一个量子系统的哈密顿量等都是理论模型。模型的建立是科学研究中的重要一环，模型的好坏直接影响研究的结果。

物理模型还可以按维度来分：“零维”模型、一维模型、二维模型及三维模型。比如点电荷可视为“零维”模型；无限长带电线可视为“一维模型”；无限大载流平面可视为“二维模

型";均匀带电球体可视为"三维模型"。

模型也可以分为物质模型和思想模型两大类。物质模型是以某种程度、形式相似的模型实体去再现原型。它既可以是人工构造的(如地球仪等),也可以是从自然界获取的(如动、植物标本等)。当选择某种物质模型作为研究时,它不仅可以显示原型的外形或某些特点,而且可以用它进行模拟实验。因此,物质模型是模拟实验赖以进行的物质手段。

所谓模型法是指通过研究模型来揭示原型或被模拟对象的形态、特征和本质的一种方法。模型法借助于与原型相似的物质模型或抽象反映原型本质的思想模型,间接地研究客体原形的性质和规律。随着模型法的发展,模型已超越了作为客体的模写和样本这个范围,它是对客观事物的特征和变化规律的一种科学抽象。通过建立模型而达到的这种科学抽象,反映了人们对客体认识的深化,是认识过程中的一次能动的飞跃。

模型法具有悠久的使用历史,古代的中国和西方都有运用这种方法的历史记载。近代伽利略研究了造船中放大的问题,成为相似理论的发端。20世纪初,相似理论已经形成一门新的学科,为模型法的运用奠定了科学基础。随着电子计算机的产生和广泛应用,对模型法尤其是数学模型的运用是极大的推动。

6.2 模型法范例

6.2.1 电偶极子模型及其应用

理想电偶极子 理想电偶极子是一种由带等量异号电荷$\pm q$的点电荷组成的中性电结构系统。为了便于定量描述这种系统,将正负电荷间的微小距离用一矢量线段l表示,其方向规定从负电荷指向正电荷,并以电荷的大小q与该矢量线段l的乘积来定义电偶极子的电偶极矩,即$p=ql$。这种中性的电结构模型就构成了电偶极子,电偶极矩就成了定量描写这种电偶极子模型的物理量。因此,只要两个静止点电荷间的距离不为零,系统一定有电偶极矩存在。假设电偶极子是由静止的正电子和负电子组成的,当两者间的距离足够小时,它们之间有很强的库仑吸引力,如果不加以外力固定,两者很容易发生湮灭反应,并放出光子。因此,自由的正、负电荷组成一个理想电偶极子是困难的或者是不可能的。但是,我们可以利用外加电场来操控,即把正、负电子放于稳定的均匀电场中,通过调节电场强度(或电压)的大小就可以控制正负电荷之间的距离。

分子电偶极子 电偶极子中的正、负电荷靠什么因素束缚在一起,而不会受到库仑吸引力的塌缩?在力学中,当一个质点系上一根绳子并使其作圆周运动时,绳子的拉力充当了质点圆周运动的向心力。当一个带负电的电子围绕原子核旋转时,库仑吸引力充当了向心力,因而电子可以束缚在原子核的周围运动。这就靠电子的"圆周轨道"运动来实现正、负电荷的束缚。然而,这种束缚的正、负电荷能否形成电偶极子呢?例如氢原子是由电子和质子组成的中性电结构系统,在玻尔模型下,电子高速绕质子作圆周运动,以库仑吸引力作为圆周运动的向心力,形成束缚态正、负电荷系统。由于电偶极矩是由电子指向质子(视质子为静止)的,且高速转动,故其有效(或平均)电偶极矩为零。这相当于高速运动的电子把质子给屏蔽起来,使其对外不显电性,这是系统较高的对称性(中心对称)所造成的。这一结果只对处于基态的自由氢原子成立,因为处于激发态(第一激发态)的氢原子是一种椭圆轨道,有一定的电偶极矩。对一个分子来说也一样,这种有效电偶极矩为零的分子称为无极分子。由此可见,如果分子的这种对称性稍有降低,有效电偶极子就会显现出来。比如将H原子置

于外电场中，电场将破坏系统的对称性，使得正电和负电的“中心”不再重合，就会形成一个电偶极子。只要外电场一取消，电偶极子立即消失。那么，不靠外力而靠分子自身能否形成电偶极子呢？回答是肯定的，比如，水分子 H_2O 就存在固有的电偶极矩。这种固有电偶极矩的来源可以这么来理解，当两个 H 原子与 O 原子组成水分子时，环绕氢原子核的电子有较大的概率跑到氧原子核的周围，这就造成了 H 原子“缺少”部分电子而带正电荷，同时 O 原子得到“多余”部分电子而带负电荷，这样就形成了一个束缚的电偶极子。这是由于 H 原子外的电子不能完全屏蔽 H 原子核的正电所造成的，我们把这种分子的有效电偶极矩称为固有（本来有的）电偶极矩，而这类分子也称为有极分子。图 6-1 给出了理想电偶极子和真实的水分子电偶极子的模型。

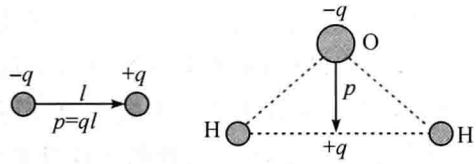


图 6-1　理想的和真实的分子电偶极子模型

电子的电偶极矩　电子除了带电荷 q 的属性之外，它还有内禀自旋 S。传统的电子学器件只利用了电子的带电属性，而它的自旋自由度并未被利用。研究发现，利用电子与电场的自旋轨道耦合相互作用可以控制电子的自旋。当电子在电场中运动时，根据相对论变换，在电子的坐标系中将产生一个有效的磁场。而这个磁场与电子的自旋磁矩作用，就会发生自旋轨道耦合相互作用。再从电场的坐标系角度看来，运动着的电子磁矩，经过相对论变换可得到电子的电偶极矩，而该电偶极矩与电场的相互作用即为自旋轨道耦合相互作用。反过来，自旋轨道耦合相互作用将会导致与运动磁偶极矩相联系的电偶极矩，而这种电偶极矩与自旋流张量的反对称部分直接相关。这样通过电子电偶极矩的探测就有可能测得电子的自旋流。

电偶极子模型的应用　电偶极子模型在物理学中应用非常广泛。(1)电偶极子模型可应用于描述介质的极化。电介质在外电场中的极化机理可以运用电偶极子的模型加以解释。对于无极分子电介质，当加外电场时，分子正、负电荷“中心”分开形成电偶极子，这时分子的电偶极矩沿着电场方向排列起来（不考虑热运动的影响），这就是介质的极化（常称为位移极化）。由于每个电偶极子要激发微观电场，这些电偶极子的微观电场的统计平均即为介质极化引起的宏观电场。我们通常所讲的极化电场就是指这个宏观电场。对于有极分子电介质而言，外加电场能使分子电偶极子发生转动，如果外电场的作用能够克服分子的热运动影响，则分子电偶极子将向着电场方向转动，形成排列较为有序的结构，这就是有极分子的极化机理（常称为取向极化）。这两种介质的微观极化机制虽不相同，但就宏观而言，其物理效果是一样的。可以想象，如果电场是交变的，且频率很高，分子电偶极子的这种高频反复取向的机械运动，就会产生热效应，微波炉就是根据这一原理制成的。

(2)电偶极子模型可以应用于原子核的研究。由前面的讨论可知，氢原子处于基态时，电子的玻尔轨道是圆形轨道，对外不显电偶极矩。由量子力学理论可知，氢原子核外电子的概率分布（常称为“电子云”）是球对称的或中心对称的，这种球对称的或中心对称的电荷系统没有电偶极矩。因此，可以根据系统的电偶极矩是否为零来判断带电体系的形状是否偏离中心对称。电偶极矩越大，偏离中心对称的程度越大。实验测量发现，原子核没有电偶极矩，这表明原子核有多种可能形状：球形、椭球形、扁椭球形、三轴不对称形、梨形、香蕉形和

纺锤形等。但是通过原子光谱的精细结构测量排除了球形结构，其他形状都是有可能的。实验还发现原子核的电四极形变是主要的，这种电四极矩对原子光谱的精细结构会产生影响。电四极矩可简单地看成由两个等大而反向的电偶极矩平行排列而成(非常靠近)。现在实验上已检测到原子核存在十六极矩或称为十六极形变。原子核的形变是原子核结构理论研究方面的一个重要问题，这是因为原子核的形状和原子核的组成成分以及两种运动形态(集体运动和单粒子运动)密切相关。

(3)电偶极子模型可应用于电磁波的产生。由实验可知，真空中匀速运动的带电粒子不会激发电磁波，只有当带电粒子作加速运动时，才会产生电磁波。根据电偶极矩的定义，当电荷 q 随时间变化并保持两电荷间的距离不变时，电偶极矩 p 也随时间变化；当两电荷间的距离 l 随时间变化并保持电荷不变时，电偶极矩 p 也随时间变化。这种系统称为振荡电偶极子，以上两种形式的振荡，其物理效果是相同的，即都会产生电偶极辐射。偶极子天线用来发射和接收固定频率的信号。虽然在平时的测量中都使用宽带天线，但在场地衰减和天线系数的测量中都需要使用偶极子天线。垂直天线实际上是一种偶极子天线。偶极子天线由两根导体组成，每根为 1/4 波长，即天线总长度为半波长，所以偶极子天线叫半波振子。偶极天线的振子可以水平位置，也可垂直位，它的方向图以馈电点为对称。馈电点在半波振子的中心，馈电点的阻抗为纯电阻，近似 75Ω。如果把两个 1/4 波长的振子延长再折回到中心，并连接在一起，则成了一个折叠偶极子天线，简称折叠振子。折叠偶极子天线的阻抗也是纯电阻约 290Ω，显示出较高的输入阻抗，与平行馈线构成的高阻传输天线在很多场合得到运用。把偶极子天线竖起来，垂直于地面，则成垂直天线。

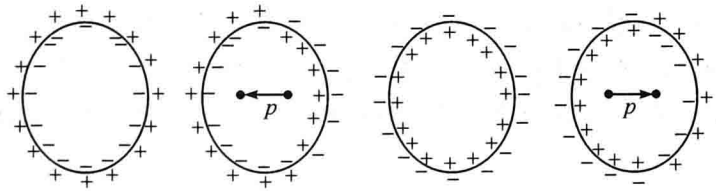


图 6-2 人体心脏的电活动过程

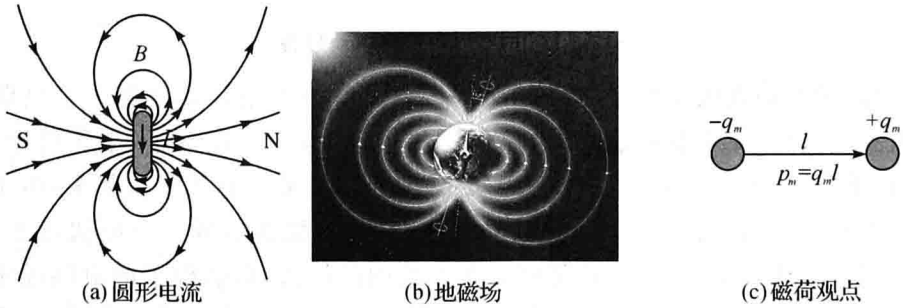
(4)电偶极子模型在医学及研究上的应用。人体心脏的电活动就是一个电偶极子产生与去除的四步骤过程：①平息状态，心肌细胞膜内外带等量异号的离子，电偶极矩为零(正电与负电“中心重合”)，心肌细胞呈电中性；②心肌细胞受到某种刺激兴奋起来，由于细胞膜对离子通透性的改变，使膜两侧局部离子的电性改变，心肌细胞形成一个电偶极子(正负电荷“中心不重合”)，对外显出电性；③伴随刺激在细胞内的传播，电偶极子的电偶极矩逐渐向前延伸，直至刺激扩展到整个细胞，这时不显电性；④心肌细胞接受刺激完毕后，细胞膜对离子的通透性立即复原，先接受刺激的部位先复原，直至整个细胞完全恢复到平息状态。复原的过程又形成一个与过程②中方向相反的、电偶极矩逐渐增大的电偶极子，显出电性，如图 6-2 所示。近期研究发现，脑电偶极子定位在癫痫外科中也有重要应用。它是利用头皮脑电推算颅内异常放电位置的一种技术。结合病人的薄层 MRI(Magnetic Resonance Imaging，磁共振成像或核磁共振成像)扫描及计算机的影像融合技术，脑电偶极子能精确定位癫痫性病灶的解剖位置。在脑神经的研究方面，电偶极子模型还可以用于探索脑神经的空间耦合形式及相邻脑神经元的电磁耦合与人类大脑活动的关系。

6.2.2 磁偶极子模型及其应用

理想磁偶极子 在电磁学中，通常把一个载有稳定电流的圆形导线回路称为磁偶极子。这个载流圆形回路中没有电源、电阻、电感等电器元件，只有电流 I 和回路半径（或圆面积 S）作为磁偶极子模型的两个特征参量。这种磁偶极子模型是从实际回路中抽象出来的理想化模型，因此，不妨称为理想磁偶极子（perfect magnetic dipole）。从对称性的角度看，圆形电流产生的磁感应强度的分布（相对于垂直通过回路中心的轴）是旋转对称的，这种对称性与回路的半径大小无关，或者说改变回路的半径不会破坏这种对称性。因而，从这个意义上来说，圆电流回路是一个理想的磁偶极子模型。为了定量描述磁偶极子，定义电流 I 与回路面积 S 的乘积为磁偶极矩（简称磁矩）的大小，而方向规定为回路面积的法线方向 $\hat{n}$，即与电流流动方向成右手规则，用数学表示为 $\boldsymbol{p}_m = IS\hat{\boldsymbol{n}}$。如果圆形导线回路是一个处于超导状态的超导环，当环中加上磁场时，环中就会有电流产生。由于环的电阻为零，电流可以维持很长时间。这就相当于一个无电源和电阻的载流回路。从这个意义上来说，也可称为理想磁偶极子。

实际上，电流的回路可以是非圆形的，因而磁场的分布也不一定有旋转对称性。为此，全国科学技术名词审定委员会给出了磁偶极子模型的一般性定义：一个实体，它在距离充分大于本身几何尺寸的一切点处产生的磁感应强度都和一个有向平面电流回路所产生的磁感应强度相同。这个定义的意思是说，任意形状的闭合回路电流在远大于自身线度的场点上所产生的磁场与圆形电流在该处的磁场相同。

磁荷观点认为，磁场是由磁荷产生的，磁针的 N 极带正磁荷，S 极带负磁荷，磁荷的多少用磁极强度 $\boldsymbol{q}_m$ 来表示。相距 $\boldsymbol{l}$、磁极强度为 $\pm\boldsymbol{q}_m$ 的一对点磁荷，当 $\boldsymbol{l}$ 远小于场点到它们的距离时，$\pm\boldsymbol{q}_m$ 构成的系统叫磁偶极子，相应的磁偶极矩（简称为磁矩）为 $\boldsymbol{p}_m = q_m\boldsymbol{l}$，如图 6-2 所示。



(a) 圆形电流　　(b) 地磁场　　(c) 磁荷观点

图 6-2 磁偶极子模型

分子磁偶极子 安培认为在原子、分子等物质微粒的内部，存在着一种环形电流，即分子电流，使每个分子成为微小的磁体，分子的两侧相当于两个磁极，这种磁性体称之为分子磁偶极子。无外加磁场时，由于分子热运动，磁性分子的分子电流取向是杂乱无章的，分子的微观磁场的统计平均值为零，对外不显宏观磁性。当外界磁场作用后，分子电流的取向大致相同，分子间相邻的电流作用抵消，而表面部分未抵消，它们的效果显示出宏观磁性。

在当时物质结构知识甚少的情况下，安培分子电流假说无法证实，它带有相当大的臆测成分。而今已经了解到物质由分子组成，而分子由原子组成，原子中有绕核运动的电子，安培的分子电流假说才有了实在的内容，这已成为认识物质磁性的重要依据。

电子磁偶极矩 在量子力学和粒子物理学中已经阐明，电子的磁偶极矩是电子的自旋所引起的。自旋是基本粒子的非经典（即量子）性质，例如，电子是自旋－1/2 的费米子（Fermion），电子具有反常磁矩这一特点，得到了量子电动力学理论的准确预言和实验的证实。电子的自旋磁偶极矩（μ_s）可表示为

$$\boldsymbol{\mu}_s = g\frac{-e}{2m_e}\boldsymbol{S}$$

其中，$\boldsymbol{S}$ 是自旋角动量，$g=-2.0023$ 称为电子的 g－因子。自旋磁偶极矩的大小近似为

$$\mu_s = g\frac{-e}{2m_e}\frac{\hbar}{2} \approx \frac{e\hbar}{2m_e} = \mu_B$$

由此可见，电子自旋磁矩（μ_s）与玻尔磁子（Bohr magnetonμ_B）之间有一个微小差别，故称为反常电子磁矩。由于电子具有磁矩，即相当于一个磁偶极子，因而在外加磁场中，自旋磁矩受到外磁场力矩的作用，其方向将会指向外磁场的方向，常把这种现象称为电子的“极化”。

磁偶极子模型的应用 磁偶极子模型与电偶极子模型一样有着广泛的应用。（1）磁偶极子模型可用于描述弱磁质的磁化。由于顺磁质中的分子存在固有分子磁矩，当加外磁场时，分子磁矩受到磁力矩的作用转向外磁场方向，这就形成了顺磁质的磁化；对于抗磁质而言，没有固有分子磁矩。但是，当外磁场加上时，分子中的电子受到洛仑兹力的作用诱导出诱导分子磁矩（在 1900 年代，J. J. Larmor 利用法拉第电磁感应定律来解释这一现象），这一磁矩的方向与外磁场方向相反，表现为抗磁性。（2）在磁性目标探测领域的应用。例如，水中磁性目标（如沉船、水中航行体等）的探测定位、地下或水下未爆炸的军火（UXO）探测、海洋工程中的磁性物体探测、海洋磁力测量工作等都要用到磁偶极子模型。另外，在磁偶极子源的被动测距及跟踪、磁偶极子源航空瞬变电磁对飞行高度的响应、潜艇和舰船信号检测与目标定位、管道机器人定位技术等方面也有重要应用。（3）在磁性无损检测中的应用。主要对磁性材料的内部缺陷、磁化规律、漏磁场的检测。（4）在电磁辐射方面的应用。随时间变化的磁偶极子可以激发电磁波，但辐射强度要比电偶极辐射小得多。例如，在天体物理学中，研究脉冲星的电磁波辐射就要用到磁偶极子辐射模型。

第7章 假设法

假设法是科学研究的重要方法之一。它与科学研究的创新思维及成果的获得有着非常密切的关系。在电磁学中，假设对实验定律和理论体系的建立有着十分重要的作用和地位。第4章中的反证法也运用了假设这一逻辑思维方法，但假设法与反证法有着本质的不同。假设法指的是先假设一种情况，但这种情况不一定和结论相反。而反证法是一种特殊的假设，且假设刚好与结论相反，最后得出矛盾的结论，进而证明结论正确。因此，我们把假设法单独设为一章论述之就是出于这一考虑。

7.1 假设法界定

“假设”(hypothesis)一词在字典中解释为：①姑且认定；②虚构；③科学研究上对客观事物的假定的说明，假设要根据事实提出，经过实践证明是正确的，就成为理论。在科学技术名词中解释为：约定的模型建立的前提条件，它们来自经验观察。假设在逻辑学上即假说，因而是一个逻辑名词。根据一定的事实材料和理论知识，对于研究对象的未知性质及其原因或规律的某种推测性的说明。它是一种将认识由已知推向未知，进而变未知为已知的一种思维方法。在古代，人们为了解释燃烧现象提出了燃素假说，其依据是：通过对燃烧现象的观察，发现燃烧时似乎总有某种东西从物质中跑掉而剩下灰渣。于是推测所有可燃物都含有一种共同的物质称为燃素。可燃物由燃素和灰渣两部分组成，燃烧时燃素逸去，留下灰渣。假说具有科学性和假定性，要经受实践的检验。如经过实践检验是正确的，则发展为规律和理论；若得到否定的结论，则被放弃。以燃素说为例，后来人们发现金属煅烧时重量反而增加，这是燃素说所不能解释的。氧气发现后，拉瓦锡提出了氧化说解释燃烧现象。从化学中排除了燃素这种虚幻的东西。在化学发展过程中，道尔顿的原子假说、阿佛伽德罗的分子假说等，除了解释作用以外，也启发人们在某一定方向上去思考，深化人们对化学现象的认识。例如，在分子假说的启发下，利用气体密度法测定了一些物质的分子量。围绕着化合物是否有固定组成的两种假说间的论争，最后确立了定组成定律(定比定律)，也促进了原子论的普及，科学地区分了化合物和混合物的概念。

因此，假设是运用思维、想象，对所研究的事物本质或规律的初步设想或推测，是对所研究的课题提出的可能的答案或尝试性理解。假设并不是单纯主观思辨的产物，也不是以荒诞地臆造为基础的虚妄、任意、离奇地猜想。而是依据事实和科学知识的基础，对未知领域做有规律的推测。假设是一种预见，产生于日常观察和已有的研究成果中，或产生于研究者的联想或直观推测。在电磁学理论的创建过程中，人们提出了许多假设。例如，安培的分子电流假设、麦克斯韦的位移电流假设等。

假设的形成途径：①日常观察；②直觉或灵感；③对实地调查资料的分析；④从一个现有的理论认识中推导出来等。

假设的作用：首先，假设可指导科研沿着一定方向行动。假设是科研设计的主要依据之一，一个良好的假设可以提示哪一种研究设计才能够配合研究的需要。其次，假设可指导资

料的收集。假设是研究问题和解决问题所需证据的桥梁，它指导研究者收集解决问题所需要的证据和资料，使研究者对有用的重要的材料更加敏感。

假设的特征是：(1)假设具有事实和科学基础，它与神话、幻想、迷信有原则区别。(2)假设具有一定的猜测性、假定性和或然性。(3)假设具有多样性。由于假设所依据的事实材料和科学知识有限，又要以此为基础进行预见，所以，以不同的事实材料和科学知识为依据，必然会出现不同的假说。

何谓假设法？假设法就是根据已知的理论或科学事实对未知事物及其规律作出假定性或推测性解释，并预告可能出现的某些物理现象或规律性。将其运用到物理学中，假设法可表示为依据已知的物理概念和物理规律或物理实验数据对研究的物理问题及其规律作出假定性或推测性的预测的一种科学方法。它是物理研究中的重要思想方法，是一种创造性的思维活动。

7.2 假设法范例

7.2.1 安培的分子电流假设

在电磁学中，安培(A. M. Ampere)的“分子电流假设”是一个重要的教学内容。弄清安培当时提出这一假设的历史背景以及思想的形成过程，对培养学生的科学思维和创新能力具有十分重要的意义。下面依据假设法的定义和物理学史的记载，循着安培当时的历史背景和物理基础，简要阐述安培“分子电流假设”的由来。

大家知道，爱因斯坦(A. Einstein)提出的相对性假设和光速不变假设，是狭义相对论的两条重要假设，后来这两条假设被实验所证实，并称之为相对性原理。根据电磁学史方面对“分子电流假设”的论述，对这一“假设”提出的历史过程，可以从如下三个逻辑过程进行阐述：

(1)“假设”思想的萌芽状态。1820年9月上旬，法国物理学家阿拉果(F. Arago)从瑞士带回了丹麦物理学家奥斯特(H. C. Oersted)发现电流磁效应的消息，并立即引起法国科学界的巨大反响。但是，只有安培的思想反应最强烈，他于第二天就重复了奥斯特电流对磁针作用的实验。在实验过程中，安培逐步认识到，磁并不是与电分开的孤立现象，而是电的许多特性的一个方面。于是，他试图从电的角度为已发现的电磁现象作出解释。一周以后即9月18日他向法国科学院提交了第一篇论文，报告了他重复奥斯特实验的结果，提出了圆形电流有起到磁铁作用的可能性。这为“假设”的形成迈出了重要的一大步。

(2)“假设”思想初现端倪。根据奥斯特实验，安培创造性地发展了实验的内容，研究电流与电流之间的相互作用。迅速完成了第二篇论文的工作，并于9月25日提交给法国科学院，他在报告中阐述了两条平行直导线之间的相互作用力的实验验证的结果。当电流方向相同时两者相互吸引，电流方向相反时互相排斥。随后，他又选用各种形状的载流导线作进一步的研究，并于10月9日完成了第三篇论文，创新性地提出了磁体中存在一种绕磁轴旋转的宏观电流。论文中说：“现在来考虑一个电流和一个磁体的相互作用以及两个磁体的相互作用，我们将会发现，这两种情况将受同样的定律支配。只要假设在磁体表面上从一极到另一极划出的直线上的每一点都建立了一种在垂直于磁轴的平面内(旋转)的电流。经过对所有事实的思考，我们可不能再怀疑这种围绕磁轴的电流的存在”。这两项工作对“假设”思想的形成又着实前进了至关重要的一步。

(3)“假设”思想的成熟与提出。一个成熟的物理思想的提出是要经过反复酝酿或与他人反复交流才能完成的。安培是个唯分子论者。他对磁体中存在宏观电流的假设是根据当时伏打(A. Volta)电堆的原理来解释的。认为伏打电池之所以能产生电流,是因为不同金属接触的之故。类似地,磁体中的铁分子的接触也会产生电流,即把磁体看作是一连串的伏打电,它们的电流都环绕磁体的轴作同心圆流动。当菲涅耳(A. J. Fresnel)拜读了安培的论文之后,向他诚恳地指出,这个假设不能成立。因为磁体不可能存在这个宏观电流,否则,由于宏观电流的存在将会使磁体生热。但实际上磁体不可能自行地比周围的环境更热一些。由于菲涅耳是安培的好友,在给安培的一封信中建议:为什么不把假定的宏观电流改为环绕着每一个分子的电流呢?这样,如果这些分子可以排成行,这些微观的电流将会合成所需要的同心电流。这封信触动了安培的思想,立即修改了原来的假定,而采用了菲涅耳的建议。于是,在1821年1月左右,提出了著名的“分子电流假说”。他的解释是:“物体内部每个分子中的以太和两种电流质的分解,会产生环绕分子的圆电流,形成一个个小磁体;当它们在外磁场的作用下呈规则排列时,就使物体呈现出宏观磁性”。这样,他从经典物理的范畴内深刻地阐述了物体磁性的本质。这在当时人们对原子概念和结构还不大了解的情况下,是一项大胆的、原创性的工作。后来,卢瑟福(E. Rutherford)的 α 粒子散射实验确立了原子核式结构模型(1911);斯特恩(O. Stern)和盖拉赫(W. Gerlach)实验发现了原子具有非轨道概念的磁矩(1922);乌伦贝克(G. E. Uhlenbeek)和高德斯密特(S. A. Goudsmit)用电子自旋假设解释了这一实验结果(1925)。这样,安培分子电流假设得到了实验的间接证实,假设上升到物理理论的高度。现在我们知道,正是原子或分子内电子的运动形成了“分子电流”。

由此可见,“分子电流假设”思想的形成与成熟过程历经了三个阶段。实际上,任何一个科学思想的提出都要经历这三个过程,就像种子的“发芽—生长—结果”的三个自然过程,也像婴儿的“爬行—站立—行走”的三个发展过程。这对我们从事科学研究是有参考意义的,这正是我们写作这一范例的真实意图。

7.2.2 麦克斯韦的位移电流假设

麦克斯韦(J. C. Maxwell)的经典电磁场理论与牛顿(I. Newton)的经典力学理论构建了物理学的两大基础理论,两者在现代科学技术中的地位同等、作用重大、影响深远。在电磁场理论中,麦克斯韦最重要的贡献是提出了位移电流假说。那么,这一假设是怎样提出来的呢?实际上,麦克斯韦不是凭空想象拍拍脑门拍出来的,而是经历了如下一个三部曲的发展过程:

(1)“假设”的萌芽期。麦克斯韦诞生在法拉第发现电磁感应的那一年。在麦克斯韦以前,解释电磁相互作用有两种截然不同的学术观点:超距作用观点和媒递作用观点。持前者观点的有库仑(C. A. Coulomb)、韦伯(W. E. Weber)、安培等人,认为电荷作用可以超越空间,并有一定的数学基础;以法拉第(M. Faraday)、汤姆孙(W. Thomson)等为代表的学派持后者观点。认为空间存在着一种能传递电力的媒质(以太),电荷间的相互作用是通过媒质进行的。法拉第通过实验揭示了空间媒质的重要性,媒质中充满了电力线(场)。但是,这种观点没有数学基础,不易被人们所接受。麦克斯韦在中学学习阶段就显露了他的数学才华和丰富的想象力。年轻时曾读过法拉第的《电学实验研究》,对法拉第的物理思想(力线和场)十分推崇,表示“不能接受即时传播的思想”。麦克斯韦说:“依赖于粒子速度的力超距作用于粒子的假设中包含着机制上的困难,阻止我认为这一理论是最终的理论……”。“所以,

我宁愿从另一方面寻找对事实的解释，假设它们是被周围媒质以及激发物体中发生的作用所产生，而无须假定可能存在直接作用，尽力解释远距离物体的作用……”。

麦克斯韦撰写的第一篇论文是《论法拉第力线》(1855)。法拉第给麦克斯韦的信中这样写道：“我亲爱的先生，我接到你的论文，为此深为感谢。我并不是说我要感谢你是因为你谈论‘力线’，因为我知道你已经在哲学真理的意义上处理了它。但你必然以为这项工作使我感到愉快，并给予我很大的鼓励去进一步思考。起初当我看到你用这样的数学威力来针对这样的主题，我几乎吓坏了。后来我才惊讶地看到这个主题居然处理得如此之好”。实际上，麦克斯韦受到了汤姆孙的静电现象与热现象类比(1841)和电现象与弹性现象的类似性(1846)等思想启发，根据流体、热现象与法拉第力线相似性，运用类比方法给予法拉第电流状态以数学表述。提出了源和旋的概念，把流体中的通量和环流移植到电磁学。他在这篇文章的第三部分中论述了变化磁场产生“涡旋电场”的概念。这样为法拉第的“场概念”奠定了数学基础，也为日后的位移电流假设的提出播下了种子。

(2)“假设”的雏形期。麦克斯韦后来发现法拉第力线与流体不能简单作类比。原因之一是力线有纵向收缩和横向扩张趋势，力线越密，应力越大；原因之二是流体力学中流线越密处压力越小，流速越快。他还发现电的运动和磁的运动也不能作简单的类比。因为从电介质现象中得知电的运动是平移的。另外，从偏振光在透明晶体中旋转现象看，磁的运动好像是介质分子的旋转运动。因此，他感到有必要对力线的分布和力线的应力性质，从机理上给予重新的考虑和论证。

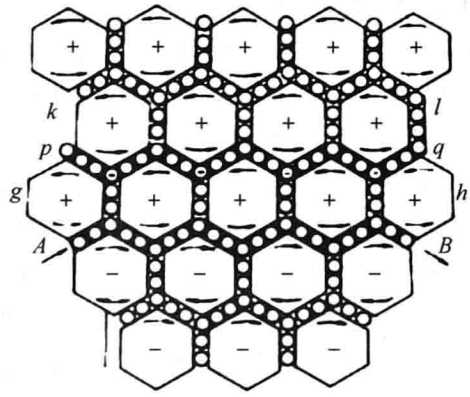


图 7-1 麦克斯韦的分子涡旋模型

在《论物理力线》的第二篇论文中，麦克斯韦转向运用模型来建立假说。他借用兰金(W. J. M. Rankine)的“分子涡流”假设，提出自己的模型。他假设在磁场作用下的介质中，有规则地排列着许多分子涡旋，绕磁力线旋转，旋转角速度与磁场强度成正比，涡旋物质的密度正比于介质的磁导率。这个模型很容易解释电荷间或磁场间的相互作用，并清晰地体现了近距作用。但是在进一步解释变化电场或变化磁场之间的关系时又遇到了困难。分子涡旋在旋转中相邻的边界沿相反的方向运动，这怎么可能呢？麦克斯韦从一种惰轮机构中想出了解决方案。他假设在涡旋之间有一层细微的粒子，将各涡旋隔开，粒子非常小，可在原地滚动(图 7-1)，电流就相当于粒子的移动。图中六角形代表分子涡旋，小圆圈代表粒子。当电流流过 AB 时，AB 上面一排涡旋 gh 按逆时针方向旋转，通过中间粒子的啮合作用，逐一地传到各层涡旋，使它们都按逆时针方向旋转。AB 下面的涡旋则按顺时针方向旋转。当 AB 中电流发生变化，例如突然停止时，gh 中的涡旋旋转受到障碍。如果这时 kl 排的涡旋仍维持原来的运转速度，则 pq 中的粒子层就会从 p 向 q 运动，也就是在 pq 中产生同向感应

电流。这样就很好地解释了电磁感应。

就在讨论“应用于静电的分子涡旋理论”这个问题时，麦克斯韦抓住了要害，假设分子涡旋具有弹性。当分子涡旋之间的粒子受电力作用产生位移时，给涡旋以切向力，使涡旋发生形变，反过来涡旋又给粒子以弹性力。当激发粒子的力撤去后，涡旋恢复原来的形状，粒子也返回原位。这样，带电体之间的力就归结为弹性形变在介质中储存的位能，而磁力则归结为储存的转动能。粒子受电力作用引起的位移变化形成了电流，麦克斯韦称之为“位移电流”。

麦克斯韦以 r 表示由于位移产生的电流值（现在用 j_d 表示），h 表示位移值（现在用 D 表示），麦克斯韦得出：

$$r=\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

麦克斯韦在此提出的“位移电流”的假设，是建立在“分子涡旋模型”基础上的，观点比较机械。

（3）“假设”的形成期。1865 年麦克斯韦发表了《电磁场的动力学理论》的第三篇论文。在这篇文章中他完全抛弃了分子涡旋模型，而把近距作用理论引向深入。在引言中，他再次强调超距作用理论的困难，坚持假设电磁作用是由物体周围介质引起的。他说：“我提出的理论可以称为电磁场理论，因为它必须涉及电体和磁体附近的空间，它也可以称为动力理论，因为它假设在这一空间存在着运动的物质，观测到的电磁现象正是这一运动物质引起的。”接着，麦克斯韦全面阐述了电磁场的含意，并指出：“电磁场是包含和围绕着处于电或磁状态的物体的那部分空间，它可能充有任何一种物质”，“介质可以接收和贮存两类能量，即由于各部分运动的‘实际能’（即动能）和介质因弹性从位移恢复时要做功的‘位能’。”

麦克韦斯原文采用分量形式，共计 20 个方程，分成八组。在第四组方程中，他论述了电动力和电位移之间的关系。由于这一关系是根据动力学中弹性固体方程以及电介质在电动力作用下产生极化的实验事实，麦克斯韦称为电弹性方程。在第三组方程中，麦克斯韦再次给出了前面的电位移方程，重新建立起位移电流的概念。直到 1890 年，赫兹（H. R. Hertz）才给出简化的对称形式，整个方程组只包括四个矢量方程，一直沿用至今。

从上述位移电流概念建立的过程看到，位移电流概念的提出绝非偶然，它是麦克斯韦先进的物理思想和科学方法的产物。

对麦克斯韦的功绩，爱因斯坦作了很高的评价。他在纪念麦克斯韦 100 周年的文集中写道：“自从牛顿奠定理论物理学的基础以来，物理学的公理基础的最伟大的变革，是由法拉第和麦克斯韦在电磁现象方面的工作所引起的”。“这样一次伟大的变革是同法拉第、麦克斯韦和赫兹的名字永远连在一起的。这次革命的最大部分出自麦克斯韦。”

第Ⅱ部分

问题构建方法模块

在漫长的科学历史长河中，经过人们的不懈努力，积累了丰富的电磁学知识点。这些知识点具体反映在基本概念、基本规律以及问题的构建这些环节中。这里的“问题”是指与课程内容相关的提供给初学者训练用的“练习问题”，而这类问题的构建也“隐藏”着某些方法，比如，形变法、组合法、切割法、旋转法等。这一部分的目的主要是使初学者学会怎样去构建电磁学问题，因为构建的过程就是一种创新能力的培养过程。由于电磁学是一个巨大的知识宝库，问题的构建不可能只用上述几种方法来概括，我们在此只想起一点“抛砖引玉”的作用，以此来引导初学者更多的联想。

第8章 形变法

在电磁学中，我们常常选择一些最基本、最简单的物体图形作为研究对象来阐述物理定律的应用。通过这些简单的基本图形的形变又可以催生出稍为复杂一些的图形，从而达到巩固物理概念和物理规律、提高解决实际问题的能力。在这一章中，我们通过一些范例来说明形变法的基本思想。

8.1 形变法界定

形变是指固体受到外力的作用时所发生的形状或体积的改变。这种改变是相对于物体原有形体或形貌而言的，物体偏离原来形体就会使问题增加复杂性，并可能造成与原有形体完全不同的形貌出现。基本的形变有拉伸形变、扭转形变、弯曲形变和剪切形变。也就是说，形变是客观物体形状的变化，而变形可以是客观物体也可以是非客观物体。

形变法是指通过一定的方式、手段和程序来改变物体形状，以达到设计所需要的形状或图形的一种方法。将这一方法引申到电磁学中，即表示通过一定的方式或手段来改变基本物理图形的形状，使之形成一个以基本图形为序列的形变图集，以此来反映同一物理概念下物理规律与图形变化的内在联系。实际上可视为同一物理规律在不同物理模型形态下的运用，其结果体现与形态的响应关系。比如，长直载流导线可以弯曲成抛物线形、U字型、V字型、Ω型等；圆电流可以变为椭圆形、矩形、多边形等；带电直线可以变成圆弧形、圆形、直角形等。

8.2 形变法范例

8.2.1 长直载流导线的形变

研究一根长直载流导线在其周围激发磁场的规律是毕奥－萨伐尔定律应用的一个简单实例。由于不同的导线形状，其磁场的规律也不相同。我们可以把长直导线视为基本形状单元，然后将其弯曲或弯折变形，使之偏离原来形状并获得所需要的一系列形变图集，每一种形状就是该图集中的一个元素。在图8-1中，我们给出了抛物线形(b)、U字型(c)、V字型(d)、Ω型(h)和(i)、M型(o)和(p)、Γ型(e)、陀螺型(n)等一系列形状。这些图形虽各不相同，但其求解思想基本一致，即可视为直导线磁场与圆弧、三角形、矩形的磁场进行叠加(除了直线型和抛物型外)。有些图形的求解可用补偿法(参见第16章)，比如图(s)的梯形可视为图(d)与电流反向的倒三角形进行补偿，图(t)和图(u)可视为长直线与矩形的叠加，如此等等。实际上，如果导线是绝缘的，还可绕成盘状、环带状、螺旋状等。

下面以图8-1(b)和(i)的抛物线形和Ω形电流为例来讨论磁场。设一根无限长导线弯成抛物线形并通以电流 I，焦点到顶点的距离为 a。由毕奥－萨伐尔定律，可得抛物线上电流元 $Id\boldsymbol{l}$ 在焦点 F 处激发的磁感应强度 $d\boldsymbol{B}$ 为

$$d\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 Id\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi r^2}=\frac{\mu_0 Idl\sin\varphi}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_F=\frac{\mu_0 Ird\theta}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_F=\frac{\mu_0 Id\theta}{4\pi r}\boldsymbol{e}_F \tag{8.1}$$

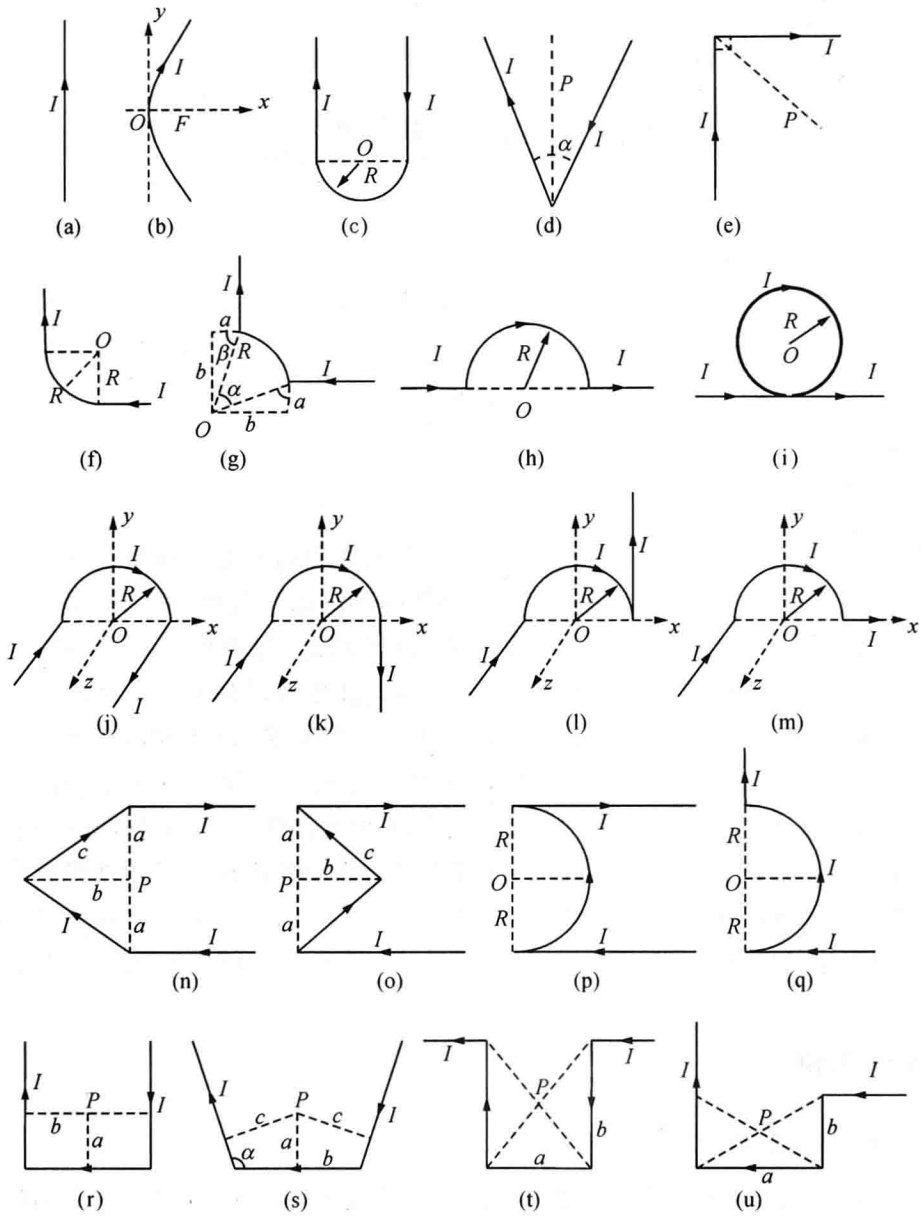


图 8-1　一根长直载流导线的变形

式中，$\boldsymbol{e}_F$ 是电流 I 的右手螺旋方向上的单位矢量。在平面极坐标下，以焦点 F 为极点的抛物线方程为

$$r = \frac{2a}{1-\cos\theta} \tag{8.2}$$

将上式代入(8.1)式得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I(1-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta}{4\pi 2a}\boldsymbol{e}_F = \frac{\mu_0 I}{8\pi a}(1-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_F$$

积分得

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{8\pi a}\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_F = \frac{\mu_0 I}{4a}\boldsymbol{e}_F \tag{8.3}$$

这就是抛物线电流在焦点处的磁感应强度。显然，如果只有半支抛物线，焦点处的磁感应强度只有上式的一半。

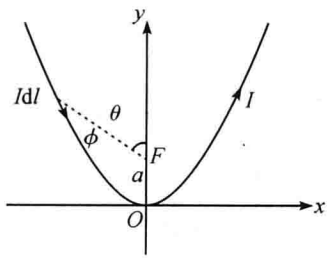


图 8-2 抛物形载流导线在焦点 F 处的磁场

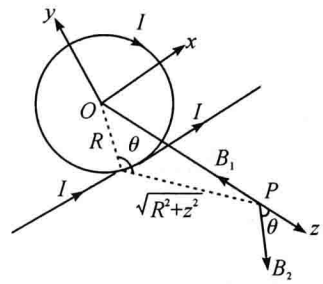


图 8-3 Ω 型的载流导线的磁场

图 8-1(i) 是一种 Ω 型的载流导线，它可视为圆电流与长直导线电流的叠加。为了讨论图 8-1(i) 的解，将坐标原点建立在圆心 O，如图 8-3 所示。设圆电流在 z 轴上产生的磁感应强度为 B_1，长直导线在 z 轴上所产生的磁感应强度为 B_2，于是

$$B_1 = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}} \tag{8.4}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R^2+z^2)^{1/2}} \tag{8.5}$$

P 点的总磁感应强度为

$$\boldsymbol{B} = (B_2\cos\theta - B_1)\hat{\boldsymbol{k}} + B_2\sin\theta(-\hat{\boldsymbol{j}}) = \frac{\mu_0 IR}{2(R^2+z^2)}\left(\frac{1}{\pi} - \frac{R}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right)\hat{\boldsymbol{k}} - \frac{\mu_0 Iz}{2\pi(R^2+z^2)}\hat{\boldsymbol{j}} \tag{8.6}$$

当 $z=0$ 时，上式化简为

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\frac{1}{\pi} - 1\right)\hat{\boldsymbol{k}} \tag{8.7}$$

这个结果就是圆电流与长直载流导线共面时在圆心处的磁感应强度。

8.2.2 圆形导线回路的形变

一个半径为 R 的圆形载流环是毕奥－萨伐尔定律应用的基本例子之一。通过变形法可以将其变为椭圆形、正方形、正多边形、矩形、三角形等，如图 8-4 所示。这里我们把圆电流作为“单位元素”，其他闭合形状都可以看作单位元素的变形所得。每个图形可以视为一种元素，这些图形元素构成了图形“集合”。在电磁学大纲的范围内，求这些图形对称中心和回路对称轴线上的磁场是常见的几个主要问题。对于圆电流和矩形回路电流来说，对称中心和对称轴上的磁场是大家较为熟悉的。多边形对称中心和对称轴上的磁场的求解类似于矩形。下面着重对椭圆形和正三角形电流回路进行磁场的计算。

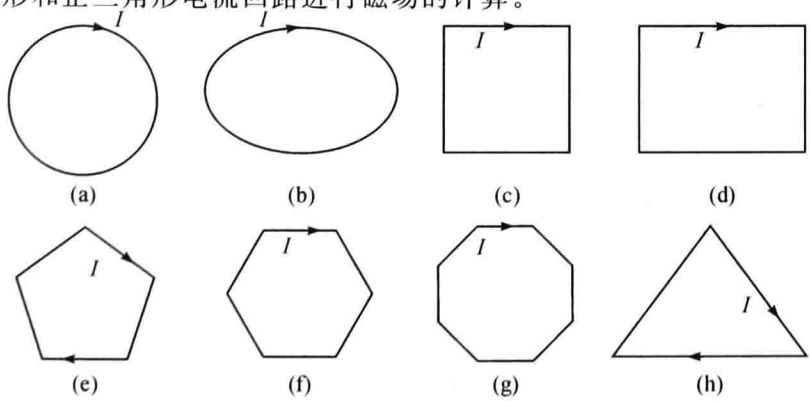


图 8-4 圆形载流回路的变形

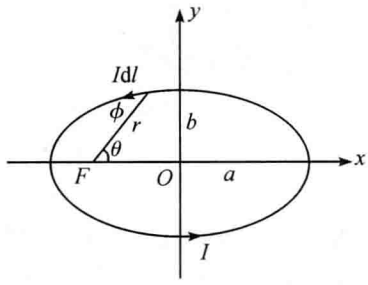


图 8-5　椭圆形回路焦点 F 上的磁场

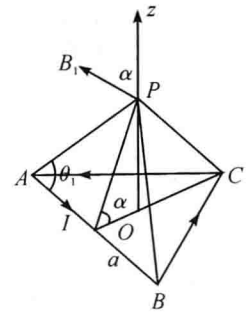


图 8-6　等边三角形的磁场

椭圆形电流回路　设图 8-4(b) 椭圆形回路的长轴和短轴分别为 a 和 b，回路通以电流 I。坐标原点建立在椭圆的中心，如图 8-5 所示。计算椭圆回路焦点 F 点的磁感应强度 B。为了求解方便，采用平面极坐标，以焦点 F 为极点，x 轴为极轴。在直角坐标中，椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{8.8}$$

将此方程用平面极坐标表示为

$$r=\frac{ep}{1-e\cos\theta} \tag{8.9}$$

其中 e 和 p 与长、短轴的关系为

$$\begin{aligned} e&=\frac{c}{a}\\ p&=\frac{b^2}{c}\\ c&=\sqrt{a^2-b^2} \end{aligned} \tag{8.10}$$

e 称为离心率，焦距为 $2c$。将(8.10) 式代入(8.9) 式得

$$r=\frac{b^2}{a-c\cos\theta} \tag{8.11}$$

由于 F 点的磁感应强度垂直于纸面向外，因此由毕奥－萨伐尔定律得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi r^2}=\frac{\mu_0 I(\mathrm{d}l\sin\varphi)}{4\pi r^2}\hat{\boldsymbol{k}}=\frac{\mu_0 I(r\mathrm{d}\theta)}{4\pi r^2}\hat{\boldsymbol{k}}=\frac{\mu_0 I}{4\pi b^2}(a-c\cos\theta)\mathrm{d}\theta\hat{\boldsymbol{k}} \tag{8.12}$$

对上式积分得

$$\boldsymbol{B}=\int\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{k}}\,\frac{\mu_0 I}{4\pi b^2}\int_0^{2\pi}(a-c\cos\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0 Ia}{2b^2}\hat{\boldsymbol{k}} \tag{8.13}$$

当 $a=b$ 时，椭圆变为圆，而焦点 F 成为圆心。上式变为圆电流在圆心处的磁场。

当场点位于椭圆中心 O 时，以 x 轴为极轴，将椭圆方程(8.8) 换成极坐标表示为

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{ab}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta} \tag{8.14}$$

根据毕奥－萨伐尔定律，并结合(8.14) 式得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi r^2}=\frac{\mu_0 I(\mathrm{d}l\sin\varphi)}{4\pi r^2}\hat{\boldsymbol{k}}=\frac{\mu_0 I\mathrm{d}\theta}{4\pi r}\hat{\boldsymbol{k}}=\frac{\mu_0 I}{4\pi ab}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\hat{\boldsymbol{k}} \tag{8.15}$$

对上式积分

$$\boldsymbol{B}=\int\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{k}}\,\frac{\mu_0 I}{4\pi ab}\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \tag{8.16}$$

对积分变量作变换 $\theta \to \alpha - \frac{\pi}{2}$，于是上式可化为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \hat{\boldsymbol{k}} \frac{\mu_0 I}{4\pi ab}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi+\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - c^2\sin^2\alpha}\,\mathrm{d}\alpha \\ &= \hat{\boldsymbol{k}} \frac{\mu_0 I}{4\pi ab}\int_{0}^{2\pi} \sqrt{a^2 - c^2\sin^2\alpha}\,\mathrm{d}\alpha \\ &= \hat{\boldsymbol{k}} \frac{\mu_0 I}{\pi b}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2\sin^2\alpha}\,\mathrm{d}\alpha \\ &= \hat{\boldsymbol{k}} \frac{\mu_0 I}{\pi b} E \end{aligned} \tag{8.17}$$

其中

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2\sin^2\alpha}\,\mathrm{d}\alpha = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \cdots\right]$$

称为第二类完全椭圆积分。显然，当 $a = b$ 时，$e = 0$，椭圆化为圆，而椭圆积分 $E = \frac{\pi}{2}$，于是(8.17)式变为

$$\boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{k}} \frac{\mu_0 I}{\pi b} \frac{\pi}{2} = \hat{\boldsymbol{k}} \frac{\mu_0 I}{2a}$$

实际上，借助于椭圆的面积 $S = \pi ab$ 和周长 $L = 4aE$，(8.17)可表示为

$$\boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{k}} \frac{\mu_0 I}{4S} L$$

这个式子对圆电流和椭圆电流都成立。

等边三角形载流回路 设等边三角形的边长为 a，通以电流 I。选取三角形的中心作为坐标原点，z 轴与三角形平面垂直，如图 8-6 所示。

设 AB 边的磁感应强度为 B_1，在 z 轴上产生的磁场与 z 轴成 α 角，由对称性知，总磁感应强度沿着 z 的正方向。

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} 2\cos\theta_1 \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{a}{2\sqrt{r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi \sqrt{z^2 + \left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2}} \frac{a}{\sqrt{z^2 + \left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} \end{aligned} \tag{8.18}$$

总磁感应强度为

$$\boldsymbol{B} = 3B_1\cos\alpha\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{9\mu_0 I a^2}{2\pi(12z^2 + a^2)\sqrt{3z^2 + a^2}}\hat{\boldsymbol{k}} \tag{8.19}$$

当场点 P 位于三角形正四面体的顶点时，由几何关系可得

$$z = \sqrt{\frac{2}{3}}a$$

代入(8.19)式并化简得

$$\boldsymbol{B} = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{6\pi a}\hat{\boldsymbol{k}} \tag{8.20}$$

当 P 点位于 O 点时，$z=0$，即正三角形中心点的磁场。(8.19) 式简化为

$$\boldsymbol{B}_o = \frac{9\mu_0 I}{2\pi a}\hat{\boldsymbol{k}}$$

值得指出的是：(1) 将上述回路置于均匀外磁场中，并让磁场垂直穿过回路。在这种情况下，可以利用安培力计算导线回路的张力；(2) 当回路在均匀磁场中旋转时，可以计算动生电动势；(3) 当回路不动而磁场随时间变化时，可以计算回路中的感生电动势。

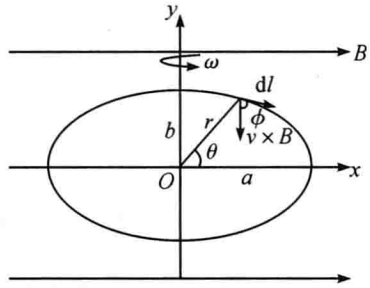


图 8-7　椭圆形回路在磁场中旋转的电动势

椭圆形回路的电动势　下面以椭圆形回路为例计算其在均匀磁场中转动所产生的电动势。设椭圆形回路处于均匀磁场 B 中，并以角速度 ω 绕其短轴匀速转动。当回路转动至其法线与磁场垂直时，回路中电动势最大，如图 8-7 所示。这个最大电动势可利用动生电动势的公式计算。为此，在椭圆形回路上取一小段 $\mathrm{d}l$，该小段所产生的电动势为

$$\mathrm{d}\varepsilon = (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = vB\cos\varphi\mathrm{d}l \tag{8.21}$$

由于

$$-\mathrm{d}y = \cos\varphi\mathrm{d}l$$

$$v = \omega r\cos\theta = \omega x$$

将此关系式代入(8.21) 式并积分得

$$\varepsilon = \int \mathrm{d}\varepsilon = -\int_{-b}^{b}\omega Bx\,\mathrm{d}y = -2\int_{0}^{b}\omega Bx\,\mathrm{d}y \tag{8.22}$$

再利用椭圆方程可得

$$\mathrm{d}y = -\frac{bx\,\mathrm{d}x}{a^2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}}$$

将此式代入(8.22) 式得

$$\varepsilon = 2\omega Bb\int_{-a}^{a}\frac{\dfrac{x^2}{a^2}}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}}\mathrm{d}x = 2\omega Bab\int_{-1}^{1}\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u$$

$$= 2\omega Bab\left[-\frac{u}{2}\sqrt{1-u^2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}u\right]_{-1}^{1}$$

$$= \omega B\pi ab \tag{8.23}$$

上述结果可以利用法拉第电磁感应定律直接验证。任一时刻 t 通过椭圆回路的磁通量为

$$\Phi_m = BS\cos\omega t = B\pi ab\cos\omega t$$

由此可得

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} = B\pi ab\omega\sin\omega t = \varepsilon_0\sin\omega t$$

其中

$$\varepsilon_0 = \omega B \pi a b$$

是电动势的最大值，可见两者是一致的。

8.2.3 “飞机型”圆形载流回路的变形

一个半径为 R 的圆形回路将其增加“翅膀”就成为一种“飞机型”结构，通常的问题是求解回路中心处的磁场。通过变形“机身(回路部分)”可以变成正方形、矩形、正多边形、三角形等，如图 8-8 所示。同样，这里的圆形回路部分可视为“单位元素”，从单位元素的形变而引申出来的各图形构成“图形元素”的“集合”。其实这些图形也可以看作直导线与基本几何图形的组合(参见第 9 章组合法)。在电磁学中最常见的是图 8-8(a)，其他几种是新构建出来的。对于图 8-8(a) 和(b)，很容易证明，中心 O 点的磁感应强度为零，而图 8-8(c) 的中心 O 点磁感应强度不再为零，其他图形读者自己证明。

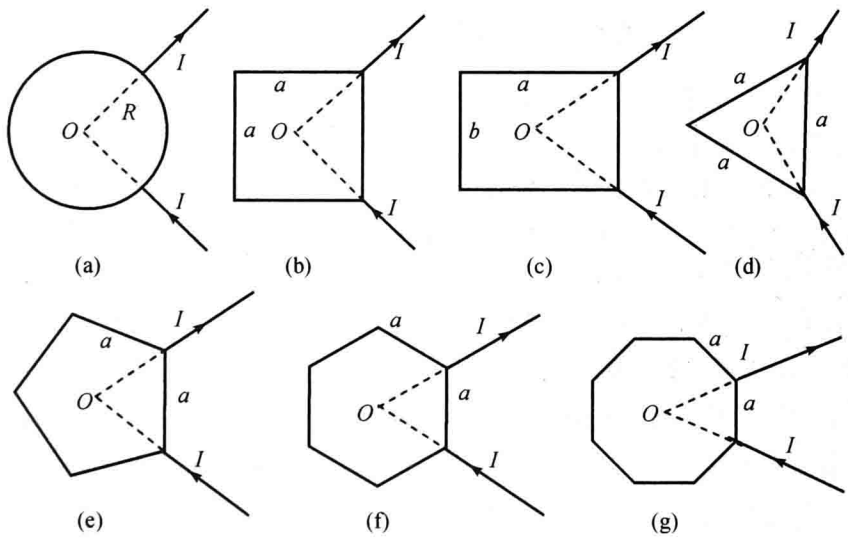


图 8-8　“飞机型”圆形载流回路的变形

下面以图 8-8(c) 为例来讨论 O 点的磁场。设矩形导线回路的长为 a，宽为 b，电流 I 从其一个顶点沿矩形对角线方向流入，并分两路流过矩形回路，然后从相邻的一个顶点流出。由于两根引线对 O 点的磁场没有贡献，只需考虑矩形回路对磁场的贡献。设流经矩形 aba 三条边的电流为 I_1，流经 b 边的电流为 $I_2 = I - I_1$。由有限长载流导线激发的磁感应强度公式

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

可得矩形的长边(a 边) 激发的磁感应强度为

$$B_{a1} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi\left(\frac{b}{2}\right)} 2 \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\mu_0 I_1 a}{\pi b \sqrt{a^2 + b^2}} \tag{8.24}$$

同理，对于短边(b 边)，可得

$$B_{b1} = \frac{\mu_0 I_1 b}{\pi a \sqrt{a^2 + b^2}} \tag{8.25}$$

对于矩形的另一条 b 边，其电流为 $I_2 = I - I_1$，产生的磁感应强度为

$$B_{b2} = \frac{\mu_0 I_2 b}{\pi a \sqrt{a^2 + b^2}} \tag{8.26}$$

O 点的总磁感应强度由四条边电流所共同激发，于是有

$$B_o = 2B_{a1} + B_{b1} - B_{b2} = \frac{\mu_0(2a^2+b^2)I_1 - \mu_0 b^2 I_2}{\pi ab\sqrt{a^2+b^2}} \tag{8.27}$$

又因为电流与电阻成反比或与导线长度成反比，即

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{2a+b}{b} \tag{8.28}$$

将(8.28)式代入(8.27)式，整理后得 O 点的磁感应强度为

$$B_o = \frac{\mu_0 I(a-b)}{\pi(a+b)\sqrt{a^2+b^2}} \tag{8.29}$$

由此式可见，当电流 I 一定时，O 点的磁场由矩形的尺寸决定。显然，当 $a=b$ 时，回路成为正方形，O 点的磁场为零，这就是图 8-8(b) 的情形。当 $a>b$ 时，磁感强度的方向垂直于纸面向外；当 $a<b$ 时，方向垂直于纸面向内。

8.2.4 与长直载流导线共面的圆形回路的变形

一个半径为 R 的圆形导线回路与一根无限长直载流导线共面，圆心与导线间的距离为 d。这个问题通常涉及磁通量、互感、电动势、安培力等物理量的求解。如果把圆形回路作为基本回路单元，通过变形可将其变成半圆形、正方形、矩形、三角形、梯形、扇形等“回路元素”，如图 8-9(a)，(b)，…，(h) 所示。图 8-9(i)，(j)，(k)，(l) 这几种图形，主要是求长直线电流作用于回路上的安培力以及通过回路中心轴线上的磁场。实际上，这部分图形也可视为直导线与几何图形的组合(参见第 9 章)。下面以图 8-9(d) 为例来计算互感、电动势和安培力。

等腰三角形与长直导线间的互感 设 x 轴与长直导线垂直，y 轴与长直线电流方向一致，坐标原点 O 位于长直线上，如图 8-10(a) 所示。由于直线电流产生的磁场是空间位置的函数，即在三角形中的磁场是非均匀的，因此，在此三角形中取一宽度为 $\mathrm{d}x$ 的矩形小面积 $\mathrm{d}S$，在这一面积中磁场可视为均匀的。于是，通过该小面元的磁通量为

$$\mathrm{d}\Phi_m = \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = B\mathrm{d}S = \frac{\mu_0 I}{\pi x}\left(d + b\cos\frac{\alpha}{2} - x\right)\tan\frac{\alpha}{2}\mathrm{d}x$$

对上式积分得

$$\begin{aligned}\Phi_m &= \int_d^{d+b\cos\frac{\alpha}{2}} \mathrm{d}\Phi_m \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi}\tan\frac{\alpha}{2}\int_d^{d+b\cos\frac{\alpha}{2}}\left(d + b\cos\frac{\alpha}{2} - x\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi}\tan\frac{\alpha}{2}\left(d+b\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left[\ln\left(d+b\cos\frac{\alpha}{2}\right) - \ln d\right] - \frac{\mu_0 I}{\pi} b\cos\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\alpha}{2}\end{aligned} \tag{8.30}$$

再由互感的定义可得

$$M = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0}{\pi}\tan\frac{\alpha}{2}\left(d+b\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left[\ln\left(d+b\cos\frac{\alpha}{2}\right) - \ln d\right] - \frac{\mu_0}{\pi} b\cos\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\alpha}{2} \tag{8.31}$$

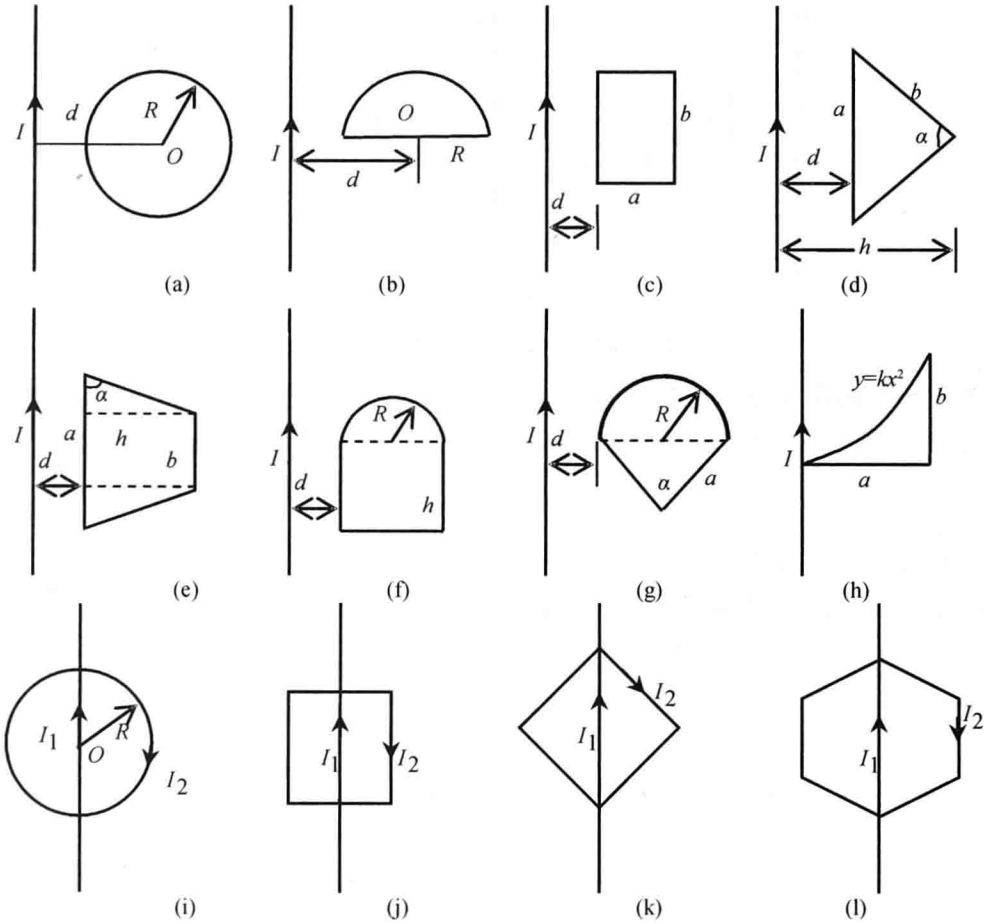


图 8-9　与长直导线共面的圆形回路的变形

下面对此结果作一些讨论。当 $\alpha = 0$ 时，这时三角形变为一直线，显然互感为零；当 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 时，等腰三角形变成等边三角形，上式化简为

$$M = \frac{\mu_0}{\pi\sqrt{3}}\left(d + \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)\left[\ln\left(d + \frac{b\sqrt{3}}{2}\right) - \ln d\right] - \frac{\mu_0}{2\pi}b \tag{8.32}$$

此结果即为等边三角形的互感；当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时，该三角形变成直角三角形，其斜边与直导线平行，(8.31) 式化为

$$M = \frac{\mu_0}{\pi}\left(d + b\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left[\ln\left(d + b\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \ln d\right] - \frac{\mu_0}{\pi}b\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{8.33}$$

当一个斜边为 b 的直角三角形其中一条直角边与长直导线平行时(见图 8-10(b))，由(8.31)式可得

$$M_{\triangle} = \frac{1}{2}M = \frac{\mu_0}{2\pi}\tan\beta(d + b\cos\beta)[\ln(d + b\cos\beta) - \ln d] - \frac{\mu_0}{2\pi}b\cos\beta\tan\beta \tag{8.34}$$

式中 $\beta\left(=\frac{\alpha}{2}\right)$ 是直角三角形的斜边与 x 轴的夹角。

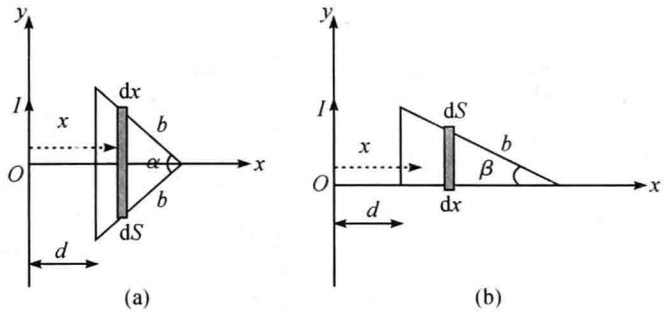


图 8-10　三角形与长直线的互感

等腰三角形的电动势　当三角形回路固定时，若长直导线中的电流随时间作正弦变化，即 $I(t) = I_0 \sin\omega t$，则回路中就会产生感生电动势。由互感电动势的公式可得

$$\varepsilon = -M\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -M\omega I_0 \cos\omega t \tag{8.35}$$

其中互感 M 由(8.31)式决定。

当长直导线电流固定时，若三角形回路以恒定速度 v 沿 x 轴正方向运动(参见图8-11(a))，由(8.11)式可得回路中的电动势

$$\begin{aligned}\varepsilon &= -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\mu_0 I}{\pi}\tan\frac{\alpha}{2}\left(d+b\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left[\ln\left(d+b\cos\frac{\alpha}{2}\right)-\ln d\right]\right\} \\ &= -\frac{\mu_0 Iv}{\pi}\tan\frac{\alpha}{2}\left(d+b\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left[\left(d+b\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{-1}-d^{-1}\right] \\ &\quad -\frac{\mu_0 Iv}{\pi}\tan\frac{\alpha}{2}\left[\ln\left(d+b\cos\frac{\alpha}{2}\right)-\ln d\right]\end{aligned} \tag{8.36}$$

等腰三角形的安培力　设三角形回路中的电流为 I'，其方向为顺时针方向，如图8-11(b)所示。对于三角形的 AB 边受到的磁力而言，由于该段导线与长直导线平行，根据安培力公式可得

$$\boldsymbol{F}_{AB} = \int_0^{2b\sin\frac{\alpha}{2}} I'\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B} = -\hat{i}\frac{\mu_0 II'}{2\pi\mathrm{d}}2b\sin\frac{\alpha}{2} \tag{8.37}$$

由于 BC 段与 CA 段所受的力相对于 x 轴是对称的，其大小应相等，即

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{F}_{BC}| &= |\boldsymbol{F}_{CA}| \\ &= \int_0^b |\, I'\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}\,| = \frac{\mu_0 II'}{2\pi}\int_0^b \frac{\mathrm{d}l}{\left[d+l\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]} \\ &= \frac{\mu_0 II'}{2\pi\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\ln\left[1+\frac{b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{d}\right]\end{aligned} \tag{8.38}$$

式中变量 l 是从 B 点到电流元 $I'\mathrm{d}l$ 的距离。根据对称性，BC 段和 CA 段的 y 分量相互抵消，而 x 方向的分量相加，于是有

$$\boldsymbol{F}_{BC}+\boldsymbol{F}_{CA} = 2F_{BC}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{\boldsymbol{i}} = \frac{\mu_0 II'\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\pi}\ln\left[1+\frac{b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{d}\right]\hat{\boldsymbol{i}} \tag{8.39}$$

三角形所受到的总磁场力为

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_{AB}+\boldsymbol{F}_{BC}+\boldsymbol{F}_{CA}=\hat{\boldsymbol{i}}\frac{\mu_0 II'}{\pi}\left\{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\ln\left[1+\frac{b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{d}\right]-\frac{b\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{d}\right\} \tag{8.40}$$

当(8.40)式中的 $\alpha=0$ 时，等腰三角形变为垂直于长直导线的一折叠的双导线线段，电流 I' 沿 x 方向流去又返回，故合力为零；当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时，等腰三角形变为等边三角形，合力指向长直导线；当 $\alpha\to\pi$ 时，等腰三角形变为平行于直导线的折叠线段，电流沿 y 方向流去又流回，故合力也为零(对(8.40)运用罗毕塔法则)。

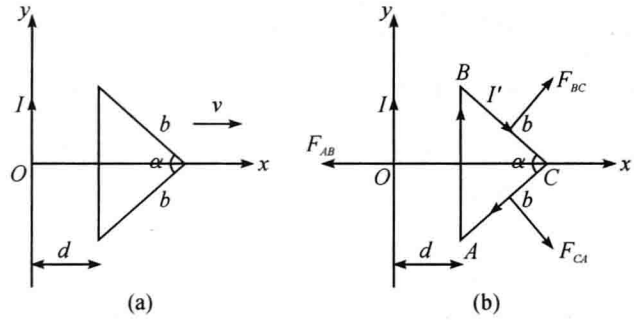


图 8-11　等腰三角形回路的电动势与安培力

8.2.5　两根平行长直线的变形

在电磁学中，我们经常会遇到两根相距为 d 的平行长直线问题。若平行线为导线，则通上电流后，两者间就有磁力的相互作用。同向电流为吸引力，而异向电流为排斥力。这种模型可用于电流强度单位的定义；若平行双线为带电线，则可计算两者的电场分布。如果把平行双线视为基本“单元”，则通过变形可获得一系列“图形元素”的“集合”。图 8-12(b) 和(c) 给出了其中一根导线的变形，图 8-12(d) 给出了两根导线同时变形的情况。图 8-12(c) 的形状像“K 字”故称为“K 型(抛物线形)”。图 8-12(d) 的形状像“X”，故称为“X 型(双曲线形)”。这几种是常见的可解变形类型。除此之外还可以构建出其他形状的图形，在此不再一一列出。

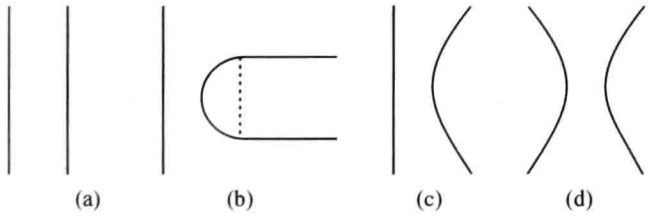


图 8-12　两根平行双线的变形

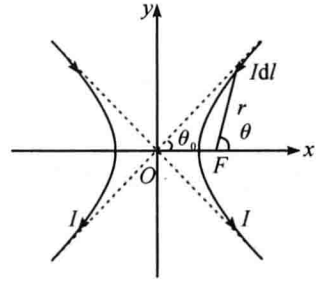


图 8-13　双曲线形载流导线

下面以“X 型”为例来计算磁场。设电流 I 沿着双曲线流动，且流向一致，如图 8-13 所示。两电流线的双曲线方程可写成

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

式中 a 和 b 是双曲线的两个参数。为了便于求解，将此双曲线方程改成以焦点 F 为极点的平面极坐标方程

$$r=\frac{ep}{1-e\cos\theta} \tag{8.41}$$

其中

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

$$p = \frac{b^2}{c} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

根据毕奥－萨伐尔定律

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi r^2}$$

再由图 8-13 可知，F 点的磁场方向为垂直于纸面向外，于是我们有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}_F = \frac{\mu_0 I \mathrm{d}l \sin\varphi}{4\pi r^2}\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\mu_0 I r \mathrm{d}\theta}{4\pi r^2}\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi e p}(1 - e\cos\theta)\mathrm{d}\theta\hat{\boldsymbol{k}} \tag{8.42}$$

式中 φ 为 $I\mathrm{d}l$ 与 r 之间的夹角，$r\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}l\sin\varphi$，$\hat{\boldsymbol{k}}$ 为 z 轴方向的单位矢量（即垂直于纸面方向的单位矢量），得出上式我们已经利用了(8.41) 式。对上式积分得

$$\boldsymbol{B}_F = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\boldsymbol{B}_F = \frac{\mu_0 I}{4\pi e p}\int_0^{2\pi}(1 - e\cos\theta)\mathrm{d}\theta\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi e p}2\pi\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\mu_0 I a}{2b^2}\hat{\boldsymbol{k}} \tag{8.43}$$

上式是双曲线的两支电流在焦点 F 处产生的磁场，因为对 θ 的积分是从 $0 \to 2\pi$ 进行的。

如果分为左支和右支曲线，则这两支的 θ 积分范围是不相同的。右支曲线对 F 点的贡献为

$$\boldsymbol{B}_R = \frac{\mu_0 I}{4\pi e p}\int_{\theta_0}^{2\pi-\theta_0}(1 - e\cos\theta)\mathrm{d}\theta\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi e p}[\theta - e\sin\theta]_{\theta_0}^{2\pi-\theta_0}\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b^2}[a(\pi - \theta_0) + b]\hat{\boldsymbol{k}} \tag{8.44}$$

对于左支曲线，我们有

$$\boldsymbol{B}_L = \frac{\mu_0 I}{4\pi e p}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}(1 - e\cos\theta)\mathrm{d}\theta\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi e p}(\theta - e\sin\theta)_{-\theta_0}^{\theta_0}\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b^2}(a\theta_0 - b)\hat{\boldsymbol{k}} \tag{8.45}$$

于是焦点 F 的总磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}_F = \boldsymbol{B}_R + \boldsymbol{B}_L = \frac{\mu_0 I}{2\pi b^2}[a(\pi - \theta_0) + b]\hat{\boldsymbol{k}} + \frac{\mu_0 I}{2\pi b^2}(a\theta_0 - b)\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\mu_0 I a}{2b^2}\hat{\boldsymbol{k}} \tag{8.46}$$

其中

$$\theta_0 = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \arctan\frac{b}{a}$$

是从 x 轴到右支曲线的渐近线之间的夹角。

8.2.6 矩形平面的变形

一块尺寸为 $a \times b$ 的矩形平面，通过不同半径的卷曲变形可以获得半圆柱面、有小狭缝的圆柱面和圆柱面等多种形式。同样，这里把矩形作为“基本图形元素”，其他变形后生成的形状即为“图形集的元素”，如图 8-14 所示。给这些不同的“元素”赋予不同的物理内容，就会生成新的物理问题。比如给平面带上均匀的电荷，就成了均匀带电平面，卷起来就可生成均匀带电的圆柱面。如果

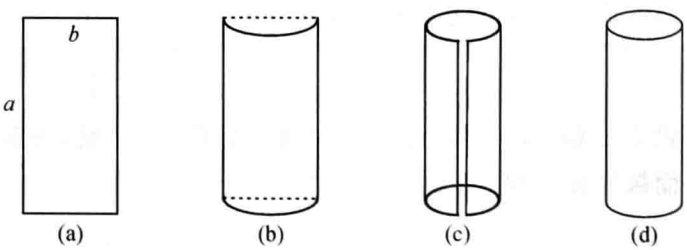


图 8-14 矩形平面的变形

让平面通上面电流，就是个均匀载流平面，卷起来就是一个空心圆柱面导线。通常的问题是求解这些图形的电场或磁场。下面以半圆柱面为例讨论这一问题。

半圆柱面的电场　设长直半圆柱面的半径为 R，电荷面密度为 σ。由于从平面变为半圆柱面时，其对称性降低，因此，选场点 P 在半圆柱面的轴线上。由于电荷是均匀分布的，因此将半圆柱面分成许多小窄条，每一窄条相当于一无限长带电线，然后把每条带电线激发的电场矢量相加就可得到总的电场。为此，将图 8-14(b) 改画成俯视图，如图 8-15(a) 所示。

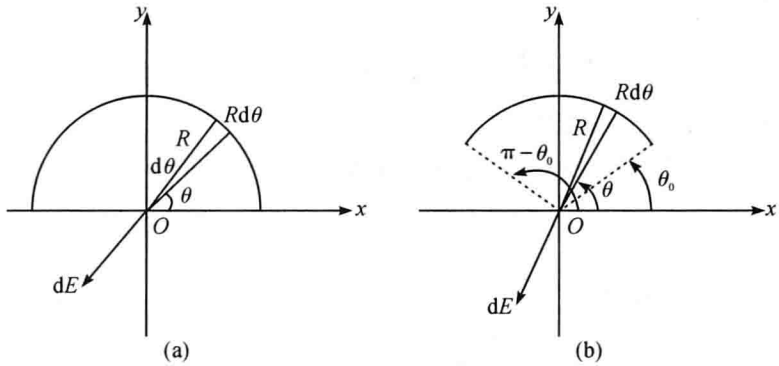


图 8-15　半圆柱面以及部分圆柱面在其轴线上的电场

由长直带电线的电场公式可得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{\boldsymbol{r}}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}q}{a}}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{\boldsymbol{r}}=\frac{\dfrac{\sigma a R\,\mathrm{d}\theta}{a}}{2\pi\varepsilon_0 R}\hat{\boldsymbol{r}}=\frac{\sigma\mathrm{d}\theta}{2\pi\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{8.47}$$

根据对称性，x 方向的电场分量相互抵消，于是

$$\mathrm{d}E_y=-\,\mathrm{d}E\sin\theta=-\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

对上式积分得

$$\boldsymbol{E}=E_y\hat{\boldsymbol{j}}=-\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\hat{\boldsymbol{j}}=-\frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{j}} \tag{8.48}$$

可见轴线上的电场与半圆柱面的半径 R 无关。

如果改变(8.48) 式中的积分限，则电场可表达为较一般的式子：

$$\boldsymbol{E}=E_y\hat{\boldsymbol{j}}=-\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0}\sin\theta\mathrm{d}\theta\hat{\boldsymbol{j}}=-\frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\cos\theta_0\hat{\boldsymbol{j}} \tag{8.49}$$

其中 θ_0 如图 8-15(b) 所示，它表示部分圆柱面的起点与 x 轴的夹角。

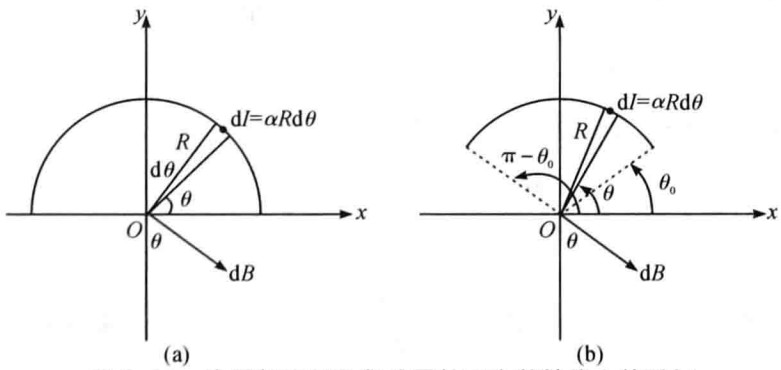


图 8-16　半圆柱面以及部分圆柱面在其轴线上的磁场

半圆柱面轴线上的磁场　设半圆柱面的半径为 R，沿轴向通以均匀的面电流密度 α，俯视图如图 8-16 所示，面电流的方向垂直于纸面向外。同样，场点 P 选在轴线上，将半圆柱面

分成许多窄条，每一条窄条相当于一长直电流。于是，根据长直电流的磁场公式，我们有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0\mathrm{d}I}{2\pi r}(\hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{r}})=\frac{\mu_0\alpha R\,\mathrm{d}\theta}{2\pi R}(\hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{r}})=\frac{\mu_0\alpha\mathrm{d}\theta}{2\pi}(\hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{r}}) \tag{8.50}$$

根据对称性，磁感应强度的 y 分量相互抵消，而 x 分量为

$$\mathrm{d}B_x=\mathrm{d}B\sin\theta=\frac{\mu_0\alpha\mathrm{d}\theta}{2\pi}\sin\theta \tag{8.51}$$

对上式积分得

$$\boldsymbol{B}=B_x\hat{\boldsymbol{i}}=\frac{\mu_0\alpha}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\hat{\boldsymbol{i}}=\frac{\mu_0\alpha}{\pi}\hat{\boldsymbol{i}} \tag{8.52}$$

显然，(8.52) 式与(8.48) 式非常相似。

同样，应用于部分圆柱面，(8.52) 式可改写成

$$\boldsymbol{B}=B_x\hat{\boldsymbol{i}}=\frac{\mu_0\alpha}{2\pi}\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0}\sin\theta\mathrm{d}\theta\hat{\boldsymbol{i}}=\frac{\mu_0\alpha}{\pi}\cos\theta_0\hat{\boldsymbol{i}} \tag{8.53}$$

式中 θ_0 的意义与(8.49) 相同。

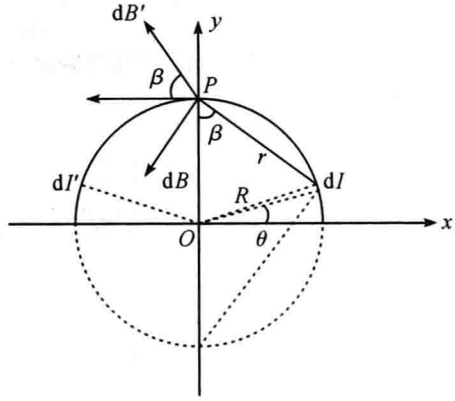


图 8-17　载流半圆柱面上对称中心 P 点的磁场

半圆柱面上对称点的磁场　设半圆柱面上通以电流 I，电流流向与轴线平行，并均匀分布在半圆柱面上，面电流 α 的方向沿着 z 轴方向。设场点 P 位于半圆柱面的对称点 $(0,R)$ 上，将半圆柱面电流分成无穷多条平行于轴线流动的直线电流，即

$$\mathrm{d}I=\alpha R\,\mathrm{d}\theta=\frac{I}{\pi}\mathrm{d}\theta$$

该电流在 P 点激发的磁场为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\mathrm{d}I}{2\pi r}=\frac{\mu_0 I}{2\pi^2(2R\cos\beta)}\mathrm{d}\theta \tag{8.54}$$

由于对称性，合磁场是沿 x 轴反方向的，于是

$$\mathrm{d}B_P=2\mathrm{d}B\cos\beta=\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\mathrm{d}\theta$$

对此式积分得

$$\boldsymbol{B}_P=-\hat{\boldsymbol{i}}\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta=-\hat{\boldsymbol{i}}\frac{\mu_0 I}{4\pi R}=-\hat{\boldsymbol{i}}\frac{\mu_0\alpha}{4}=\frac{1}{4}\mu_0(\alpha\hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{j}}) \tag{8.55}$$

8.2.7　一根带电细棒的变形

一根长为 L 的均匀带电细棒，通过变形可得半圆环形、圆环形、L 型等，如图 8-18 所示。

这里把带电棒或线视为图形的基本单元，其他变形系列视为图形元素。实际上，变形可以很多种，有些图形对问题的求解有一定困难。比如图8-18(c)还可以包含四分之圆环、四分之三圆环以及圆环有一个小小缺口的情况，这些情况都是可解的，在此，不再一一列出。求解这些图形激发的电场或电势，也是常用的例子。如果将带电情况改为载流情况，就变为求解特殊点的磁场问题。下面以图8-18(b)为例讨论之。

角平分线上的电场 设两段带电线的长度相同，均为 a，单位长度的电荷为 λ。这个问题可以视为两段带电线电场的叠加，如图8-19所示。对于位于 y 轴上的一段，其电场为

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \\ E_y &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \end{aligned} \tag{8.56}$$

对于位于 x 轴上的一段，只要将上式中的 $x \leftrightarrow y$ 互换，其电场为

$$\begin{aligned} E'_x &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \\ E'_y &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \end{aligned} \tag{8.57}$$

于是，P 点的合场强是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= (E_x + E'_x)\hat{\boldsymbol{i}} + (E_y + E'_y)\hat{\boldsymbol{j}} \\ &= \left[\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) + \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\right](\hat{\boldsymbol{i}} + \hat{\boldsymbol{j}}) \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\sin\theta_2 - \cos\theta_2)(\hat{\boldsymbol{i}} + \hat{\boldsymbol{j}}) \end{aligned} \tag{8.58}$$

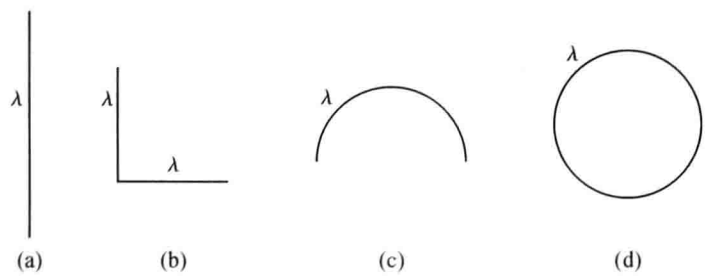


图 8-18 一根带电细棒的变形

下面对此结果作一点讨论。当 $\theta_2 = \pi - \theta_1$ 时，(8.58)式化简为

$$\boldsymbol{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\sin\theta_1 + \cos\theta_1)(\hat{\boldsymbol{i}} + \hat{\boldsymbol{j}}) = \frac{\lambda\sqrt{2}}{2\pi\varepsilon_0 a}(\hat{\boldsymbol{i}} + \hat{\boldsymbol{j}})$$

即合场强沿着角平分线。当 $\theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$ 时，(8.58)式化简为

$$\boldsymbol{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\hat{\boldsymbol{i}} + \hat{\boldsymbol{j}})$$

当 $\theta_2 \to \pi$ 时，$r \to 0$，(8.58)式可写成

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \lim_{\theta_2 \to \pi} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\sin\theta_2 - \cos\theta_2)(\hat{\boldsymbol{i}} + \hat{\boldsymbol{j}}) \\ &= \lim_{r \to 0} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{r}{\sqrt{(a-r)^2 + r^2}} + \frac{(a-r)}{\sqrt{(a-r)^2 + r^2}}\right)(\hat{\boldsymbol{i}} + \hat{\boldsymbol{j}}) \end{aligned}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)(\hat{\boldsymbol{i}}+\hat{\boldsymbol{j}}) = \infty$$

即坐标原点 O 的电场强度是发散的。这与点电荷的电场在原点是发散的类似，即(8.58)式除了原点 O 以外，其余都是有限的。

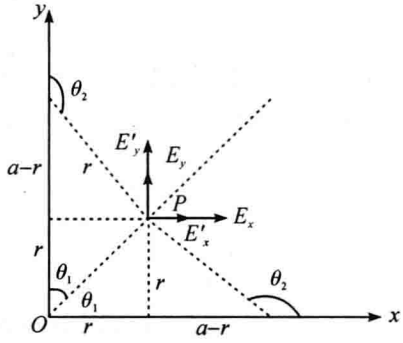


图 8-19　角平分线上的电场

角平分线上的电势　电荷元 $\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l$ 的电势为

$$\mathrm{d}V_P = \frac{\lambda \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+l^2}}$$

由电势的叠加原理，并考虑到两段带电线有相同贡献，积分得

$$\begin{aligned} V_P &= 2\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-r}^{a-r}\frac{\mathrm{d}l}{\sqrt{r^2+l^2}} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(l+\sqrt{r^2+l^2}\right)_{-r}^{a-r} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{a-r+\sqrt{r^2+(a-r)^2}}{\sqrt{2}r-r}\right] \end{aligned}$$

同样上式中 $r \neq 0$。

第9章 组合法

在电磁学中，有许多物理问题的图形是由相同或不同基本单元的图形通过一种逻辑顺序或规则组合而成的。这种基本单元的物理规律一般是已知的，而组合后的规律一般是未知的，其规律要比基本单元复杂一些。比如两块带等量异号电荷的导体平面以平行方式组合成电容器；两带电导体圆柱面以同轴方式构建成圆柱形电容器；相同大小圆电流圈以电流同向流动而构成同轴的螺线管等。在这一章中，我们先给出组合法的定义，再列举范例说明之。

9.1 组合法界定

组合(combination)的名词词义是由几个部分或个体结合成整体，组合起来构成一个整体。数学上，从 m 个不同的元素里，每次取出 n 个元素，不管以怎样的顺序拼成一组，均称为组合。实际上，物理学中的组合事例是很多的，可以在各个地方找到它的影子。比如带电粒子在电场和磁场中的运动，电场和磁场可以视为一种组合，组合的方式可以是平行的，也可以是互相垂直的，甚至于可以是既非平行也非垂直的情形；再比如两个等量异号点电荷组成电偶极子，两个圆电流线圈组合成亥姆霍兹线圈等。

所谓组合法是指将若干个独立单体按照一定的逻辑思维和规则结合成一个整体的一种拼凑方法。拼凑方法不同，得到的整体形态也不同。比如，三个相同大小的球可以有三种组合形式：一字形、三角形和直角形。若要求对称性最高，则三个球的组合就必须以三角形式摆放。因为这里遵循了一种摆放方式或方法，所以体现了组合法，而不是一般的组合。在电磁学中，我们把相同或不同的物理“图形”按照一定的逻辑程序和以一定的方式或方法让其结合在一起组成一个新的物理“图形”的方法称为组合法。这样组合起来物理图形一般都有较好的对称性。例如，电偶极子的物理图形具有平面镜像对称(或左右对称)，亥姆霍兹线圈具有中心空间反演对称性等。

9.2 组合法范例

9.2.1 点电荷的组合

将若干个点电荷以某种方式组合成一定的几何形状，求这个组合系统所激发的电场。把两个等量异号的点电荷组成“一字形”就构成了电偶极子；如果将点电荷固定于正三角形、正方形、正六边形等的顶点上，就构成了具有一定对称性的二维点电荷系统；若把点电荷置于正立方体和正四面体的顶点上，就构成了一个三维点电荷系统。图 9-1 给出了几种常见的点电荷组合形态。实际上，三个点电荷一字排开的形态也是常见的，多见于电四极矩的求解。由此可见，这里点电荷就成了组合的基本单元或单体，不妨称之为“单位元素”，而其他的组合图形可称之为“组合元素”，它们的全体构成了一个“集合”。通常的物理问题是求解这些图形“元素”的电场强度、电势以及静电力(库仑力)等。下面以正方形为例讨论之。

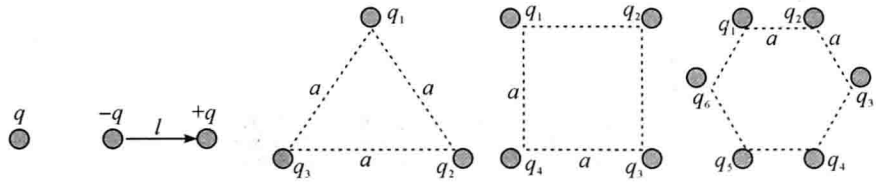


图 9-1　点电荷的组合

设正方形四个顶点的电荷均为正电荷，且电量相等，即 $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$。今在正方形中心放一个电荷 Q，使得每个顶点上的电荷受到的合力为零，Q 与 q 的关系如何？为此，选 q_4 作为研究对象，根据库仑定律，q_1，q_2 和 q_3 对 q_4 的作用力分别为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{14} &= k\frac{q_1 q_4}{a^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{14} = k\frac{q^2}{a^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{14} \\
\boldsymbol{F}_{24} &= k\frac{q_2 q_4}{(\sqrt{2}a)^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{24} = k\frac{q^2}{2a^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{24} = k\frac{\sqrt{2}q^2}{4a^2}(\hat{\boldsymbol{r}}_{14} + \hat{\boldsymbol{r}}_{34}) \\
\boldsymbol{F}_{34} &= k\frac{q_3 q_4}{a^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{34} = k\frac{q^2}{a^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{34}
\end{aligned} \tag{9.1}$$

式中 $k = \dfrac{1}{(4\pi\varepsilon_0)}$。正方形中心电荷 Q 对 q_4 的作用力是

$$\boldsymbol{F}_Q = k\frac{Qq}{\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2}\hat{\boldsymbol{r}}_Q = k\frac{2Qq}{a^2}(\hat{\boldsymbol{r}}_{14} + \hat{\boldsymbol{r}}_{34}) \tag{9.2}$$

点电荷 q_4 所受的合力应为零，即

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \boldsymbol{F}_{14} + \boldsymbol{F}_{24} + \boldsymbol{F}_{34} + \boldsymbol{F}_Q \\
&= k\frac{q^2}{a^2}(\hat{\boldsymbol{r}}_{14} + \hat{\boldsymbol{r}}_{34}) + k\frac{\sqrt{2}q^2}{4a^2}(\hat{\boldsymbol{r}}_{14} + \hat{\mathrm{r}}_{34}) + k\frac{\sqrt{2}q^2}{a^2}(\hat{\boldsymbol{r}}_{14} + \hat{\mathrm{r}}_{34}) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{9.3}$$

由此可解得

$$Q = -\frac{1}{4}(1 + 2\sqrt{2})q \tag{9.4}$$

即电荷 Q 满足以上条件时，它们才“相安无事”地待在正方形的顶点上。

9.2.2　长直细线的组合

将两条或若干条无限长直细线以平行方式进行组合，就能构成无限长直细线阵列。排列的方式主要有“一字”排列（细线位于同一平面内）、三角形和矩形排列等。细线间的距离可以是等间距的也可以为不等间距的。显然，这里的单根细线就是组合的基本单元，组合后的图形就是“元素”，这些“元素”构成了问题研究对象的“集合”。通常遇到的问题是求解这些“元素”激发的电场、磁场、相互作用力等。在图 9-2 中我们给出了几种常见的组合形式，图中的基本单元（或称单位元素）既可以是均匀带电细线也可以是载流导线。如果是带电线，其线电荷密度可以正（或负）或正负组合。如果是载流导线，电流可以是同向的也可以是异向的。下面以图 9-2(c) 为例讨论之。

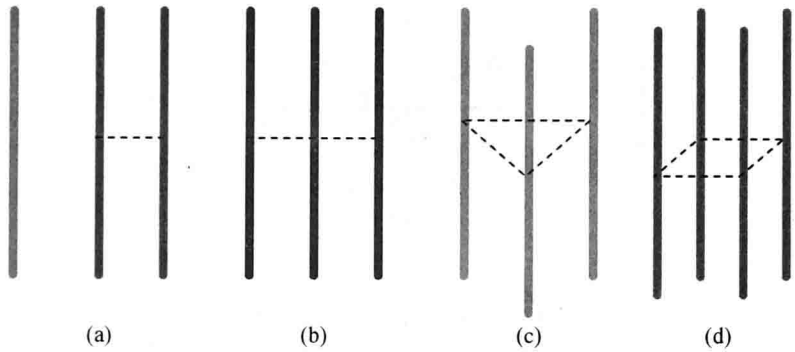


图 9-2　长直细导线的组合

安培力　设三根载流导线在同一平面内，从左到右标上符号 A、B、C，AB 间的距离与 BC 间的距离相等，均为 a。A、B 导线通以同向电流 I，C 导线通以反向电流，其值为 $2I$。求 A、B、C 三根导线单位长度的安培力。由长直导线的磁场公式，A、B、C 导线处的磁场分别为

$$\begin{aligned} B_A &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} - \frac{\mu_0 2I}{2\pi(2a)} = 0 \\ B_B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} + \frac{\mu_0 2I}{2\pi a} = \frac{3\mu_0 I}{2\pi a} \\ B_C &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} + \frac{\mu_0 I}{2\pi 2a} = \frac{3\mu_0 I}{4\pi a} \end{aligned} \tag{9.5}$$

再由安培力公式，可得三根导线单位长度的作用力分别为

$$\begin{aligned} \frac{F_A}{l} &= IB_A = 0 \\ \frac{F_B}{l} &= IB_B = \frac{3\mu_0 I^2}{2\pi a} \\ \frac{F_C}{l} &= -2IB_C = -\frac{3\mu_0 I^2}{2\pi a} \end{aligned} \tag{9.6}$$

可见，B、C 两根导线受力大小相等，方向相反，而 A 导线不受力。

合磁场为零的线　设磁场为零的位置 P 在 A、B、C 的连线上，距 A 导线的距离为 x。同样，设 A、B 导线的电流向上，C 导线的电流向下。于是

$$B_{Ax} + B_{Bx} + B_{Cx} = 0$$

即

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi x} + \frac{\mu_0 2I}{2\pi(2a - x)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(a - x)} \tag{9.7}$$

整理得

$$(2a + x)(a - x) = x(2a - x)$$

由此关系可解得

$$x = \frac{2}{3}a$$

即合磁场为零的位置是在 AB 导线之间，距离导线 A 为 $\frac{2a}{3}$。实际上，从(9.5)式可知，A 导线所在位置的磁场也为零。

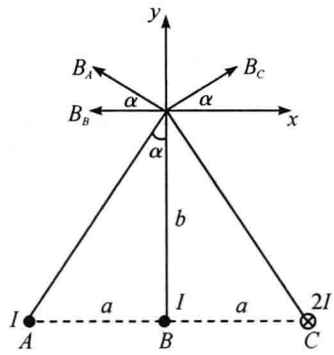


图 9-3　导线中垂线上的磁场

***B* 导线中垂线上的磁场**　取中垂线上一点为 P，该点到 B 导线的距离为 b。利用磁场的叠加原理计算 P 点的合磁场。由长直载流导线的磁场公式，可得 A、B、C 在 P 点产生的磁场分别为

$$B_A = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$B_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$$

$$B_C = \frac{\mu_0 2I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{\pi\sqrt{a^2+b^2}}$$

它们各自的方向如图 9-3 所示。由图 9-3 可得

$$B_x = (B_C - B_A)\cos\alpha - B_B = \left(\frac{\mu_0 I}{\pi\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}}\right)\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$$

$$B_y = (B_C + B_A)\sin\alpha = \left(\frac{\mu_0 I}{\pi\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}}\right)\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

于是，合磁场为

$$\boldsymbol{B} = B_x\hat{\boldsymbol{i}} + B_y\hat{\boldsymbol{j}} = \left[\frac{\mu_0 Ib}{2\pi(a^2+b^2)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi b}\right]\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{3\mu_0 Ia}{2\pi(a^2+b^2)}\hat{\boldsymbol{j}} \tag{9.8}$$

由此式可知，合磁场的方向与 y 轴的夹角为 $\theta = \arctan\left(\frac{-a}{3b}\right)$。

9.2.3　导体平板的组合和平面的组合

将若干块大导体平板（有一定的厚度）以平行方式和一定的间距组合在一起，就构成了导体板的组合系统，最常见的是两块导体板组合和三块的组合，如图 9-4(a)(b)(c) 所示。这里单块导体板，就是组合单元。组合过程要求板间距离要远远小于平板的线度，也就是说，不计及边缘效应。这类问题主要涉及导体平板上的电荷分布、电势差、电场强度的计算。有时还要考虑导体板接地的情况。求解时往往要运用高斯定理、电荷守恒、导体的静电平衡特点。同样，将若干块平面（没有厚度）以平行方式和一定的间距组合起来便成了平面的组合系统，如图 9-4(d)(e)(f) 所示。若平面带上电荷，就生成带电平面的组合。这种情况主要是利用电场的叠加原理求各区域的电场；若平面载有面电流密度，就生成载流平面。这种情况主要是利用磁场的叠加原理求解各区域的磁场。这些问题都是电磁学中最常见的问题。此外，带电平面与导体平板还可以相互组合，这也是常见的问题。下面以图 9-4(c)(d) 和(e) 为例讨论之。

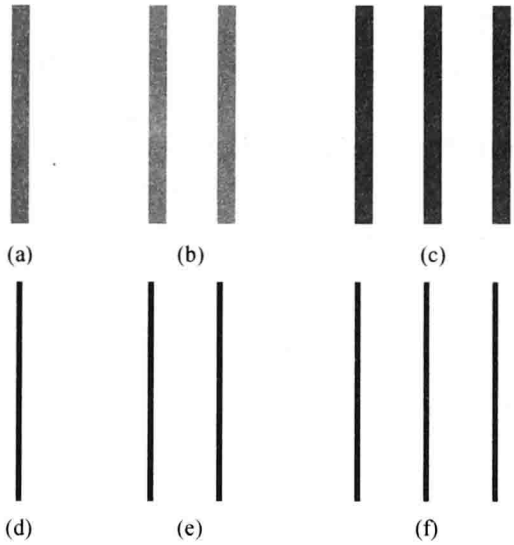


图 9-4　导体平板的组合和平面的组合

三块平行导体板　设图9-4(c)的三块导体板分别为A、B、C，面积均为S，AB间距为a，BC间距为b，A板和C板接地。当B板带电为Q时，求B板相对于地的电势V_B。因为A、C两板接地，故只有面向B板一侧有感应电荷，而B板两面都有感应电荷。于是有

$$\sigma_{AB}+\sigma_{BA}=0$$

$$\sigma_{BC}+\sigma_{CB}=0$$

$$\sigma_{BC}S+\sigma_{BA}S=Q_B$$

由此可得

$$Q_A+Q_C=-Q_B \tag{9.9}$$

BC和BA间的电场强度分别为

$$E_{BC}=\frac{\sigma_{BC}}{\varepsilon_0}$$

$$E_{BA}=-\frac{\sigma_{BA}}{\varepsilon_0}$$

相应的电势差分别为

$$V_{BA}=V_B-V_A=E_{BA}a=-\frac{\sigma_{BA}}{\varepsilon_0}a$$

$$V_{BC}=V_B-V_C=E_{BC}b=\frac{\sigma_{BC}}{\varepsilon_0}b$$

根据电势差相等$V_{BA}=V_{BC}$，可得

$$\sigma_{CB}=\frac{a}{b}\sigma_{AB}$$

也即

$$Q_C=\sigma_{CB}S=\frac{a}{b}\sigma_{AB}S=\frac{a}{b}Q_A \tag{9.10}$$

由(9.9)和(9.10)式可解得

$$Q_A=\frac{-bQ}{a+b}$$

$$Q_C=\frac{-aQ}{a+b}$$

于是，B 板相对于地的电势为

$$V_B = V_{BC} + V_C = \frac{-\sigma_{CB}}{\varepsilon_0} b + 0 = \frac{abQ}{(a+b)\varepsilon_0 S} \tag{9.11}$$

正方形带电平面中心的电势 设图 9-4(d) 平面为正方形平面，其边长为 $2a$，面电荷密度 σ，在这个意义下平面变为带电平面。设坐标原点 O 在正方形的中心，平面位于 xy 平面内，并使 x、y 轴与其边相平行。在正方形平面上取一面元 $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$[参见图 9-5(a)]，相应的电荷元

$$\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}S = \sigma \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

此电荷在 O 点激发的电势为

$$\mathrm{d}V_O = \frac{\sigma \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2+y^2}} \tag{9.12}$$

对此式积分得

$$V_O = \int \mathrm{d}V_O = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

上述积分变为对边长为 a 的小正方形进行，根据对称性，该小正方形又可分成二个三角形的积分，最后只要对图 9-5(a) 所示的三角形积分即可。于是

$$\begin{aligned} V_O &= 2\frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= 2\frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\int_0^a \mathrm{d}x\left[\ln\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right) - \frac{1}{2}\ln x^2\right]_0^x \\ &= 2\frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\ln(1+\sqrt{2})\int_0^a \mathrm{d}x \\ &= \frac{2\sigma a}{\pi\varepsilon_0}\ln(1+\sqrt{2}) \end{aligned} \tag{9.13}$$

根据上述结果，我们可以推广到求一个正方形顶点处的电势。边长为 $2a$ 的正方形其顶点的电势为

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_0^{2a}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_0^{x}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sigma a}{\pi\varepsilon_0}\ln(1+\sqrt{2})$$

此式表明正方形四个顶点的电势要比其中心低且是中心值的一半。由此还可以推得一个边长为 $2a \times a$ 的长方形其长边中点的电势与上式相同。

平行载流平面的自感 设图 9-4(e) 为两块载有相反面电流的平面，其尺寸为 $a \times b$，面电流密度为 α，间距为 d。先计算单块载流平面的磁场。设平面位于 xy 平面内，z 轴与平面垂直，面电流密度的方向沿着 y 轴方向。将平面分成许多小窄条，每一条视为一根长直导线，如图 9-5(b) 所示。由长直载流导线的磁场公式可得

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 \alpha \mathrm{d}x}{2\pi\sqrt{x^2+z^2}} \tag{9.14}$$

由对称性可知，磁场的 z 分量相互抵消，只有 x 分量。于是

$$\mathrm{d}B_x = \mathrm{d}B\cos\theta = \frac{\mu_0 \alpha \mathrm{d}x}{2\pi\sqrt{x^2+z^2}}\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} = \frac{\mu_0 z\alpha \mathrm{d}x}{2\pi(x^2+z^2)} \tag{9.15}$$

对 x 积分得

$$B=\frac{\mu_0 z\alpha}{2\pi}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+z^2}=\frac{\mu_0 z\alpha}{\pi}\int_0^{\frac{b}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+z^2}=\frac{\mu_0 z\alpha}{\pi}\frac{1}{z}\arctan\left(\frac{x}{z}\right)_0^{\frac{b}{2}}=\frac{\mu_0\alpha}{\pi}\arctan\left(\frac{b}{2z}\right) \tag{9.16}$$

当 $b\to\infty$ 或 $z\to 0$ 时，平面为无穷大载流平面，由此可得(参见范例 19.2.1)

$$B=\frac{1}{2}\mu_0\alpha \tag{9.17}$$

当平面的面积线度远大于间距时，由场的叠加原理，两平面之间的磁场是均匀的，两平面的外侧磁场为零。于是

$$B=2\frac{1}{2}\mu_0\alpha=\mu_0\alpha \tag{9.18}$$

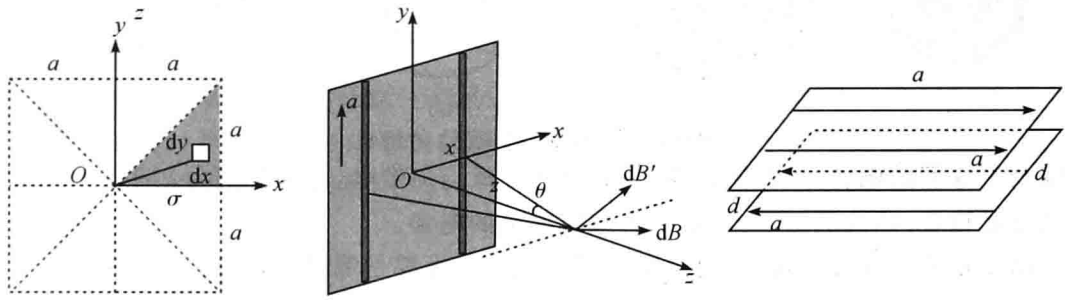
通过平面间的磁通量[参见图 9-5(c)]为

$$\Phi_m=BS=\mu_0\alpha ad \tag{9.19}$$

由自感的定义得

$$L=\frac{\Phi_m}{I}=\frac{\mu_0\alpha ad}{\alpha b}=\frac{\mu_0 ad}{b} \tag{9.20}$$

这个式子形式上与平行板电容器的电容非常相似，不同的是面积 $S=ad$ 表示两块载流平面缝隙的面积而不是载流平面的面积。这里 d 是平板的宽度而不是平板间的间距。



(a)正方形带电平面　　(b)载流平面　　(c)两块载有相反面电流的平面

图 9-5　带电平面与载流平面

9.2.4　导体球(或球面)的组合

众所周知，对于单个导体球来说，由于电荷分布具有球对称性，电势和电容比较容易得到。但是对于多个导体球的组合系统来说，求解电势或电容就比较复杂，组合方式不同其难易程度也不同。导体球的组合大致可分为四种：第一种是球面以相交、相切(外切)和相距很远的距离而组合在一起，如图 9-6(b)(c)和(d)；第二种是导体球面的同心组合，即一个小的导体球面被另外几个较大一些的球面同心地包围着，具有球对称性，如图 9-6(e)和(f)所示；第三种情况是，球面间组合是非同心的，即球心不重合在一起，如图(g)；第四种情况较为特殊，两个大小不一的半球面，以同一球心组合在一起，如图 9-6(h)所示的“蘑菇形状”。这类问题所涉及的物理量计算有球面的电荷、电势、电容等。图 9-6(b)和(e)的情况请见第 15 章。下面以图 9-6(c)和(h)为例讨论之。

两个导体球之间的电容　设图 9-6(c)的两个导体球的半径分别为 a 和 b，相应的电荷为 $+Q$ 和 $-Q$。两者相距为 d，且远大于两球的半径。在此条件下，两个球上的电荷分布视为均匀，于是，每个球的电势为

$$V_a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$
$$V_b = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b} \tag{9.21}$$

两者之间的电势差为

$$V_a - V_b = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} - \left(-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

由电容的定义可得

$$C = \frac{Q}{V_a - V_b} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{a + b} \tag{9.22}$$

显然，这个结果要比两个同心球之间的电容为小。

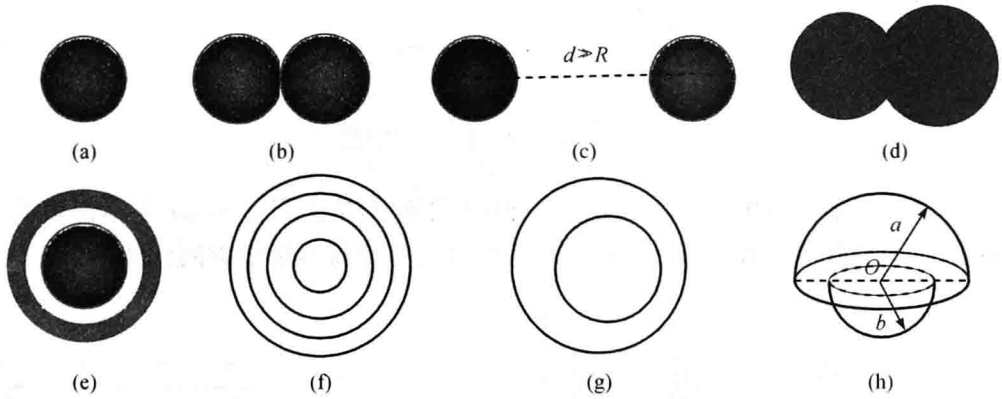


图 9-6　导体球(或球面)的组合

组合半球面的电势　设图 9-6(h) 的两个半球均匀带电，电荷分别为 q_a 和 q_b。这两个半球面的球心重合，即两底面重合，试求公共底面上的电势。

由第 4 章范例 4.2.7 可知，每个带电半球面的底面都是等势面，其电势分别为

$$V_a = \frac{q_a}{4\pi\varepsilon_0 a}$$
$$V_b = \frac{q_b}{4\pi\varepsilon_0 b} \tag{9.23}$$

根据电势的叠加原理，在两半球的公共面上距球心 O 为 R 处的电势是

$$V(R) = V_a + V_b = \frac{q_a}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q_b}{4\pi\varepsilon_0 b}, \quad R < b \tag{9.24}$$

在($b < R < a$) 的区域里，两个半球所产生的电势分别为

$$V_a(R) = \frac{q_a}{4\pi\varepsilon_0 a}$$
$$V_b(R) = \frac{q_b}{4\pi\varepsilon_0 R} \tag{9.25}$$

两者的总电势为

$$V(R) = V_a(R) + V_b(R) = \frac{q_a}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q_b}{4\pi\varepsilon_0 R}, \quad b < R < a \tag{9.26}$$

不难看出，这两个结果与内外半径分别为 b 和 a 的同心带电球面的电势其形式是相同的。

9.2.5　直导线段与导线圆弧的组合

有限长载流直导线和圆形电流是毕奥－萨伐尔定律应用的两个具体实例，得到的结果

往往作为具体规律来运用，即直线电流激发的磁场和圆电流在圆心激发的磁场是已知的。将若干直导线与圆弧导线进行有序的逻辑组合，并构成一个闭合的电流回路。这样构建出来的图形可以视为直导线与圆弧导线的组合。按照直导线段的条数和圆弧的数目可以分为如下几种组合类型：单线段 — 单圆弧、双线段 — 单圆弧、多线段 — 单圆弧、双线段 — 双圆弧等，如图 9-7 所示。除了这些图形以外，读者还可以充分发挥自己的想象，构建出更多的组合形状。这类问题往往求解圆弧之圆心 O 的磁场。这里要注意的是图 9-7(h) 不能求 O 点的磁场，因为直线电流的磁场在该点是发散的，但是垂直于回路且过 O 点的轴线上的磁场是可解的。下面以图 9-7(h) 为例讨论之。

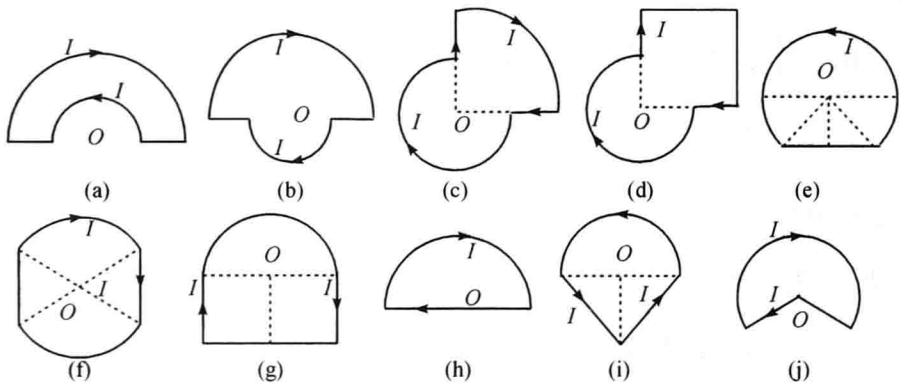


图 9-7　线段与圆弧的组合

对于图 9-7(h) 来说，空间任意一点的磁场是由半圆弧电流和直线电流共同激发的。因此，可以分两部分计算，然后，再由磁场的叠加原理求得总磁场。将直角坐标的原点选取在圆心 O，即在直导线的中点，并使回路位于 xy 平面内，如图 9-8 所示。对于半圆部分，由毕奥 — 萨伐尔定律可得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}_1 = \frac{\mu_0 I \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I \mathrm{d}l}{4\pi(R^2+z^2)}(\hat{\boldsymbol{\varphi}} \times \hat{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0 IR\,\mathrm{d}\varphi}{4\pi(R^2+z^2)}(\hat{\boldsymbol{\varphi}} \times \hat{\boldsymbol{r}}) \tag{9.27}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ 是绕 z 轴的方位角单位矢量。当电流元 $I\mathrm{d}l$ 沿着圆弧积分时，垂直于 z 轴的磁场分量扫过一半圆的面积，因此，上式可分解为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}_1 = \mathrm{d}B_{1x}\hat{\boldsymbol{i}} + \mathrm{d}B_{1y}\hat{\boldsymbol{j}} + \mathrm{d}B_{1z}\hat{\boldsymbol{k}} = \mathrm{d}B_1\cos\alpha\sin\varphi\hat{\boldsymbol{i}} + \mathrm{d}B_1\cos\alpha\cos\varphi\hat{\boldsymbol{j}} + \mathrm{d}B_1\sin\alpha\hat{\boldsymbol{k}} \tag{9.28}$$

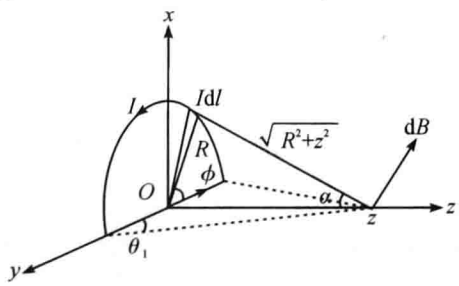


图 9-8　半圆形载流回路轴线上的磁场

根据对称性，y 分量在积分过程中相互抵消，只有 x 和 z 分量不为零。于是有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_1 &= \int_0^{\pi}\mathrm{d}B_1\cos\alpha\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{i}} + \int_0^{\pi}\mathrm{d}B_1\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{k}} \\ &= \frac{\mu_0 IRz}{4\pi(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\,\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{\mu_0 IR^2}{4\pi(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\,\hat{\boldsymbol{k}}\end{aligned}$$

$$= \frac{\mu_0 IR}{4\pi(R^2+z^2)^{3/2}}[z(-\cos\varphi)\hat{\boldsymbol{i}} + R\varphi\hat{\boldsymbol{k}}]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\mu_0 IR}{4\pi(R^2+z^2)^{3/2}}(2z\hat{\boldsymbol{i}} + \pi R\hat{\boldsymbol{k}}) \tag{9.29}$$

对于直线电流所激发的磁场，由毕奥－萨伐尔定律可得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}_2 = \frac{\mu_0 I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I\mathrm{d}l\sin\theta}{4\pi(l^2+z^2)}(-\hat{\boldsymbol{i}}) = \frac{\mu_0 Iz\csc^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi z^2\csc^2\theta}(-\hat{\boldsymbol{i}}) = \frac{\mu_0 I\sin\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi z}(-\hat{\boldsymbol{i}}) \tag{9.30}$$

对此式积分得

$$\boldsymbol{B}_2 = \int \mathrm{d}\boldsymbol{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi z}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\mathrm{d}\theta(-\hat{\boldsymbol{i}}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi z}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\hat{\boldsymbol{i}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi z}2\cos\theta_1(-\hat{\boldsymbol{i}}) = \frac{\mu_0 IR}{2\pi z\sqrt{R^2+z^2}}(-\hat{\boldsymbol{i}}) \tag{9.31}$$

由磁场的叠加原理可得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 = \frac{\mu_0 IR}{2\pi\sqrt{R^2+z^2}}\left[\frac{z}{(R^2+z^2)} - \frac{1}{z}\right]\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{\mu_0 IR^2}{4(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{k}} \tag{9.32}$$

由上式可见，当 $z\to 0$ 时，式中第一项是发散的，这是直线电流造成的，而第二项正是半圆电流在圆心处的结果。

9.2.6 带电线段与其他带电体的组合

在静电场、静电势和静电力(库仑力) 的计算中，点电荷、均匀带电线、均匀带电圆环、均匀带电平面(或圆平面) 和带电球常作为具体例子，而这些例子的电场和电势比较容易计算，我们常把它们当作已知的规律来运用。现把这些带电体有机地组合起来，就构成了新的带电体系，如图 9-9 所示。从图 9-9 不难看出，构建时带电细棒作为一带电体置于其他带电体的电场中，因而与电场方向平行放置，这就体现了组合法的思想逻辑。除了这些构型以外，还可以构建其他的形态，比如空心圆平面与带电线的组合等，请读者可以自己构思。对图 9-9 的图形计算主要涉及两带电体之间的库仑力、电场强度和电势。下面将以图 9-9(c) 为例来计算静电力。

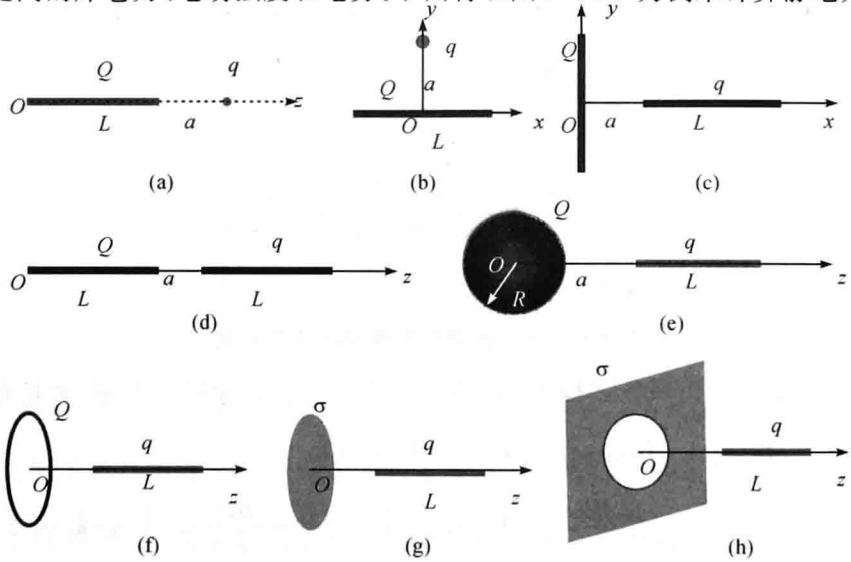


图 9-9 带电线段与其他带电体的组合

相互作用力　设图 9-9(c) 中的两根带电线的长度均为 L，单位长度的电荷均为 λ，两者互相垂直放置。一根与 y 轴重合，另一根与 x 轴重合，且左端距坐标原点 O 为 a。由对称性可知，位于 y 轴的带电线所激发的电场强度绕 y 轴是旋转对称的。另一方面，如果坐标原点选在垂直带电线的中点，则其电场相对于 x 轴也是对称的。因此，为了计算方便起见，选取坐标原点在垂直带电线的中点，这样，垂直带电线在 x 轴上激发的电场只有 x 分量而没有 y 分量。于是，垂直带电线上的电荷元 dq 在 x 轴上激发的电场为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}l}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\csc^2\theta \mathrm{d}\theta}{x^2\csc^2\theta}\hat{\boldsymbol{r}}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}\theta}{x}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{9.33}$$

式中的 θ 是 y 轴的单位矢量 $\hat{\boldsymbol{j}}$ 与 $\mathrm{d}q$ 到场点的位置单位矢量 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 之间的夹角，如图 9-10(a) 所示。由于对称性，电场在对称轴（x 轴）上只有 x 分量对积分有贡献，于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(x)&=E_x\hat{\boldsymbol{i}}=\int \mathrm{d}E\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{i}}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta \mathrm{d}\theta\,\hat{\boldsymbol{i}}\\&=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)\hat{\boldsymbol{i}}\\&=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}2\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+x^2}}\hat{\boldsymbol{i}}\end{aligned} \tag{9.34}$$

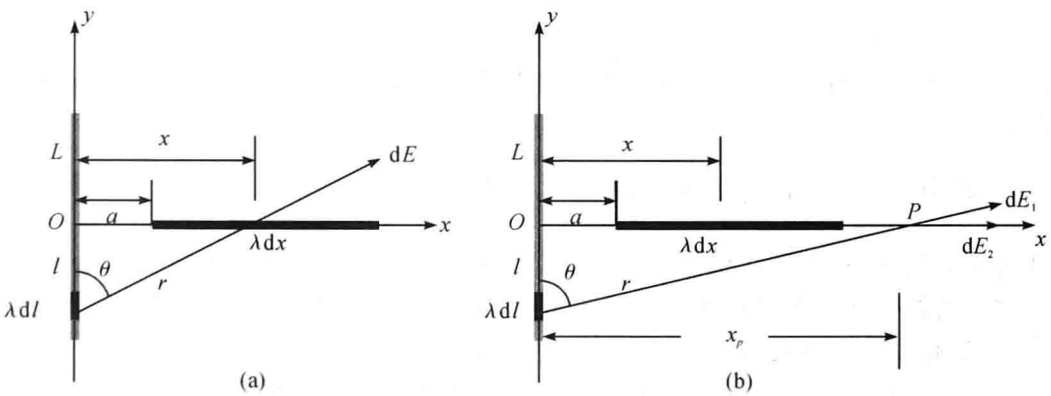


图 9-10　两根互相垂直带电线的电场强度

再在 x 轴上的带电线上任取 $\mathrm{d}x$ 长度，其电量为 $\mathrm{d}q$，这个元电荷所受的力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\mathrm{d}q\boldsymbol{E}=\frac{\lambda^2 L}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+x^2}}\hat{\boldsymbol{i}} \tag{9.35}$$

积分得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}&=\frac{\lambda^2 L}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^{a+L}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+x^2}}\hat{\boldsymbol{i}}\\&=\frac{\lambda^2 L}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\frac{L}{2}}\ln\left(\frac{\frac{L}{2}+\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+x^2}}{x}\right)\right]_a^{a+L}\hat{\boldsymbol{i}}\\&=\frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\ln\left(\frac{\frac{L}{2}+\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+a^2}}{a}\right)-\ln\left(\frac{\frac{L}{2}+\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+(a+L)^2}}{a+L}\right)\right\}\hat{\boldsymbol{i}}\end{aligned} \tag{9.36}$$

当 $a=L$ 时，上式可化简为

$$\boldsymbol{F}=\frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{2(1+\sqrt{5})}{1+\sqrt{17}}\right]\hat{\boldsymbol{i}}$$

可见两者之间是一种排斥力。

总电场强度 设场点 P 位于 x 轴上，其坐标为 $(x_P,0)$，计算 x_P 点的电场强度（奇点除外）。在各自带电线上取一电荷元 $\mathrm{d}q$，所激发的电场分别为 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_1$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_2$。由电场的叠加原理得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}_P=\mathrm{d}\boldsymbol{E}_1+\mathrm{d}\boldsymbol{E}_2$$

考虑到对称性，合电场只有 x 分量，于是有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}_P=(\mathrm{d}E_1\sin\theta+\mathrm{d}E_2)\hat{\boldsymbol{i}} \tag{9.37}$$

上式第一项的积分结果已经由(9.34)式给出，只要将式中的 $x\to x_P$ 即可。第二项的积分为

$$E_2=\int\mathrm{d}E_2=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^{a+L}\frac{\mathrm{d}x}{(x_P-x)^2}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x_P-a-L}-\frac{1}{x_P-a}\right) \tag{9.38}$$

于是，P 点的总电场为

$$\boldsymbol{E}_P=(E_1+E_2)\hat{\boldsymbol{i}}=\frac{\lambda L}{2\pi\varepsilon_0 x_P\sqrt{L^2+4x_P^2}}\hat{\boldsymbol{i}}+\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x_P-a-L}-\frac{1}{x_P-a}\right)\hat{\boldsymbol{i}},\quad\begin{pmatrix}0<x_P<a\\ a<x_P<a+L\\ x_P>a+L\end{pmatrix} \tag{9.39}$$

因为除了 $(0,0)$，$(a,0)$ 和 $(a+L,0)$ 这些点电场存在奇点以外，在 x 轴上其余各点的电场都是有限的。

9.2.7 带电圆环与其他带电体的组合

在研究静电场时，由于带电圆环有较好的轴对称性，常选作计算电场强度的典型例子。而且又把所得结果作为一种已知规律应用于其他带电体。比如应用于带电圆盘、无限大带电平面等。如果把带电圆环作为一特定单元，可以与其他带电体进行组合，从而构建出另一种复合带电系统，其构建基础是电场的可叠加性。在构建复合体系的过程中，应该考虑到问题的可解性和对称性。因为圆环的对称中心在圆心，因此垂直于圆环平面且过圆心的轴线是转动对称的。这样，其他带电体的对称中心也一定要放在对称轴上，即共用一条对称轴。图 9-11 给出了圆环与点电荷、带电细棒（与轴平行或垂直）、带电圆环、带电圆盘（或环状薄带）、带电正方形平面（或矩形平面）、带电球（或导体球）、带电正方形回路等一些常见且较为典型的组合体系。求这些组合带电体系统所激发的电场、电势等也是经常涉及的问题。下面选取图 9-11(i) 为例讨论之。

圆环与带电导体球的组合 设导体球的半径为 a，带电为 Q；圆环的半径为 b，带电为 q。圆环的轴线通过球心，环心到球心的距离为 R，试求导体球的电势和两者连线上距球心为 d 的电势。

首先，计算导体球的电势。根据静电平衡理论，导体球处在带电圆环的电场中，静电平衡后导体球是个等势体，因此，球心的电势就是球的电势。又根据电势的叠加原理，球心的电势是由圆环上的电荷和球面上的电荷共同产生的，而球面上的电荷应该由感应电荷 q' 和 Q 组成。

设球面上感应电荷面密度为 σ'（它与空间位置有关），电荷 Q 形成的面密度为 σ_0。于是，球面上总的电荷面密度为 $\sigma=\sigma'+\sigma_0$。在球面上取一面元 $\mathrm{d}S$，对应的电荷元为 dq。这个电荷对球心的电势贡献为

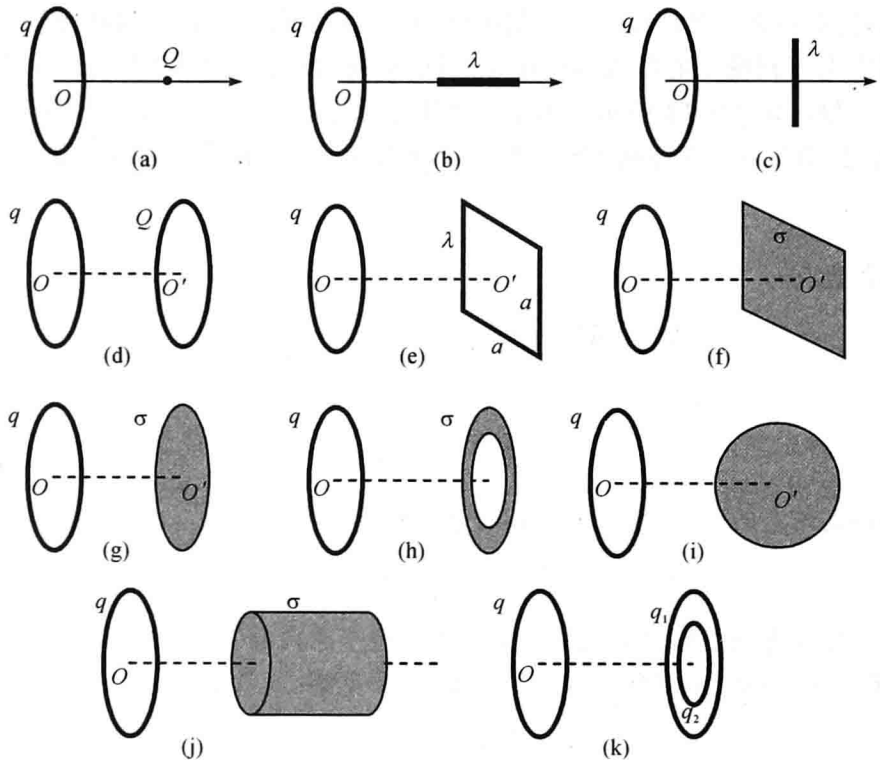


图 9-11　带电圆环与其他带电体的组合

$$dV_{O1} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{(\sigma' + \sigma_0)dS}{4\pi\varepsilon_0 a} \tag{9.40}$$

对整个球面积分得

$$V_{O_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\oiint_S dq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\oiint_S \sigma' dS + \oiint_S \sigma_0 dS\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}(q' + Q) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} \tag{9.41}$$

由于球面上正负感应电荷数量相等，到球心距离相同，故上式中的 $q' = 0$。另一方面，在圆环上取一电荷元 dq，这个电荷元在球心产生的电势为

$$dV_{O_2} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + b^2}} \tag{9.42}$$

式中 r 是圆环到球心的距离。对圆环电荷积分得

$$V_{O2} = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + b^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + b^2}} \tag{9.43}$$

于是，我们有

$$V = V_O = V_{O_1} + V_{O_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + b^2}} \tag{9.44}$$

由导体的静电平衡理论可知，上式即为导体球的电势。

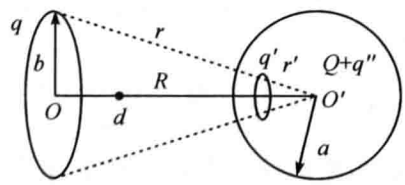


图 9-12　带电圆环与带电导体球在距球心为 d 的电势

接下来，计算圆环与导体球连线上的电势。由于场点不在球内，故问题要复杂一些。由于球面正负感应电荷到场点的距离不再相等，对电势的贡献也就不相同。为了求出感应电荷，假设导体球接地，如图 9-12 所示。在圆环上取电荷元 $\mathrm{d}q$，该电荷元在球心产生的电势由(9.42)式决定，而该电荷在球面上产生的感应电荷为 $\mathrm{d}q'$，相应在球心处产生的电势为

$$\mathrm{d}V'_O = \frac{\mathrm{d}q'}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

由电势的叠加性得

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}V_O + \mathrm{d}V'_O = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\mathrm{d}q'}{4\pi\varepsilon_0 a} = 0$$

由此可得

$$\mathrm{d}q' = -\frac{a}{r}\mathrm{d}q \tag{9.45}$$

式中 r 是圆环到球心的距离。对整个圆环的电荷积分得

$$q' = -\frac{a}{r}q \tag{9.46}$$

球面上的这个感应电荷在球外激发的电势相当于位于球内的一个带电为 q' 的小圆环所产生的电势，如图 9-12 所示。小圆环到球心的距离是(参见第 15 章镜像法)

$$r' = \frac{a^2}{r} \tag{9.47}$$

于是，由图 9-12 可知，小圆环的半径为

$$b' = \frac{r'}{r}b = \frac{a^2}{r^2}b = \frac{a^2}{R^2 + b^2}b \tag{9.48}$$

小圆环圆心到球心的距离为

$$R' = \frac{b'}{b}R \tag{9.49}$$

当导体球不接地时，球面上除了负感应电荷 q' 外还分布有正感应电荷 q''。由电荷守恒可得

$$q'' = -q' = \frac{a}{r}q = \frac{a}{\sqrt{R^2 + b^2}}q \tag{9.50}$$

q'' 均匀分布在球面上，相当于位于球心的一个点电荷的作用，而 q' 在球面上的分布是非均匀的，靠近圆环一侧电荷密度大一些。当导体球带上电荷 Q 时，这个电荷对球的电势贡献也相当于位于球心的点电荷。因此，在轴线上 d 点所产生的电势可视为 q，q' 和 $q''+Q$ 共同产生。大圆环所激发的电势为

$$V_q = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(R-d)^2 + b^2}} \tag{9.51}$$

小圆环在 d 处所产生的电势为

$$V_{q'} = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(d-R')^2 + b'^2}} = \frac{-aq}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{(d-R')^2 + b'^2}} \tag{9.52}$$

电荷 $q''+Q$ 在场点产生的电势为

$$V_{q''+Q} = \frac{q''+Q}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{aq + rQ}{4\pi\varepsilon_0 rd} \tag{9.53}$$

于是，在圆环中心与球心的连线上，距离球心为 d 的总电势是

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(R-d)^2 + b^2}} - \frac{aq}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{(d-R')^2 + b'^2}} + \frac{aq + rQ}{4\pi\varepsilon_0 rd} \tag{9.54}$$

9.2.8 载流圆环的组合

我们在研究电流激发的磁场时，圆电流轴线上的磁场计算就是一个典型的例子。由于圆电流具有较好的轴对称性，圆心和轴线（z 轴）上的磁场很容易由毕奥 — 萨伐尔定律求得

$$B_o = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

式中 R 为圆电流的半径。圆电流激发磁场的这些规律常常把它应用于旋转均匀带电圆盘和圆柱面、圆柱形螺线管、球形螺线管等。实际上，这些载流系统都可以视为圆电流的组合。因此，把圆电流作为基本单元，按照一定的逻辑思维和组合程序可以构建出若干个载流系统。图 9-13 给出了几种大家常见的圆电流的组合例子。这些例子所涉及的物理问题主要是磁场、磁通量、互感、自感等。除了这些例子外，大家还可以构建出其他的组合，比如圆电流与小正方形回路的组合等，在此不再一一列出。图 9-13(b) 是由两个圆电流组合成的亥姆霍兹线圈，主要求解圆电流之间的磁场；图 9-13(c) 是两个圆电流同心组合，图 9-13(d) 是同轴组合，目的是求互感；图 9-13(e) 是两个互相垂直放置的共圆心线圈，串接后求系统的自感；图 9-13(f) 是一个由许多不同半径的同心圆电流组成的平面圆环，主要是求对称轴上和圆心的磁场；图 9-13(g) 是一个由圆电流组成的载流圆平面；图 9-13(h)(i) 和(j) 是柱形、半球形和球形螺线管，主要是求对称轴上或圆心处的磁场分布等。下面以图 9-13(g) 和(j) 为例讨论之。

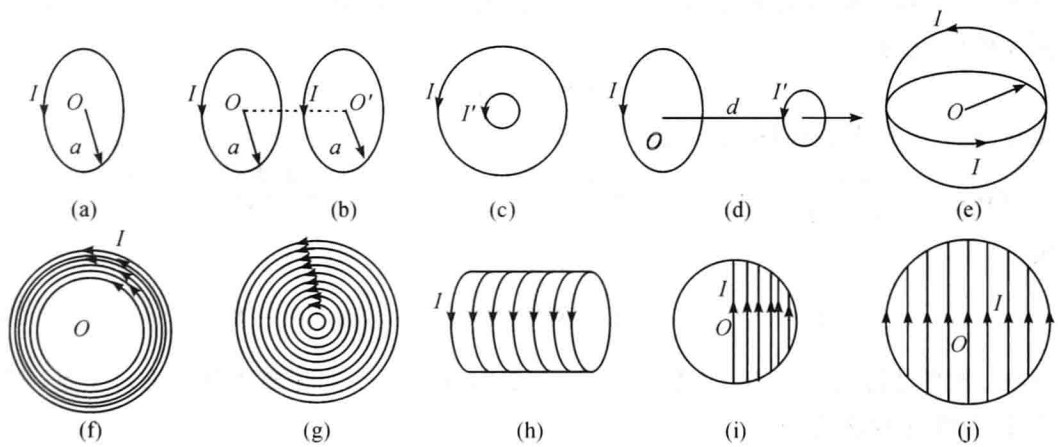


图 9-13 载流圆环的组合

载流圆平面轴线上的磁场 设平面圆盘电流的半径为 R，每个电流圈的电流为 I，其方向与圆盘半径垂直，电流圈之间是紧密接触的（绝缘导线很细），总的电流圈个数为 N。于是，沿着圆盘半径方向单位长度的电流为

$$\alpha = \frac{N}{R}I = \frac{N}{(N-1)l}I = \frac{N}{(N-1)}n_\infty I \tag{9.55}$$

式中 $n_\infty = \frac{1}{l}$，l 导线的直径。设平面圆盘电流位于 xy 平面内，z 轴垂直通过盘心。在平面圆盘电流上取一半径为 r 宽度为 $\mathrm{d}r$ 的电流环，运用单个圆电流在轴线上的磁场公式可得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 r^2 \mathrm{d}I}{2(r^2 + z^2)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\mu_0 r^2 \alpha \mathrm{d}r}{2(r^2 + z^2)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{k}} \tag{9.56}$$

对此式积分得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \frac{\mu_0 \alpha}{2}\hat{\boldsymbol{k}}\int_0^R \frac{r^2\,\mathrm{d}r}{(r^2+z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 \alpha}{2}\hat{\boldsymbol{k}}\left[\ln\left(\frac{r+\sqrt{r^2+z^2}}{z}\right)-\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]_0^R \\ &= \frac{\mu_0 NI}{2R}\hat{\boldsymbol{k}}\left[\ln\left(\frac{R+\sqrt{R^2+z^2}}{z}\right)-\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] \end{aligned} \tag{9.57}$$

球形螺线管的磁场 设球形螺线管的半径为R,沿直径方向紧密绕有N匝单层线圈,且沿该直径单位长度的匝为$n=\dfrac{N}{2R}$。当线圈通以电流I时,试计算球形螺线管轴线上的磁场分布。

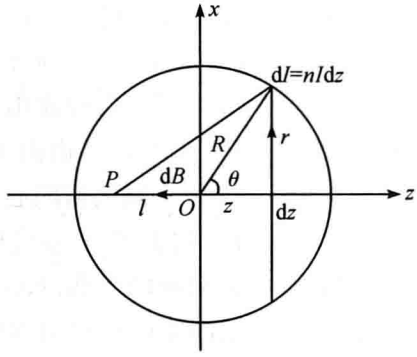


图 9-14 球形螺线管轴线上的磁场

首先,计算球形螺线管球心O的磁场。设对称轴为z轴,如图9-14所示。轴线上z处$\mathrm{d}z$宽度线圈中的电流为

$$\mathrm{d}I = nI\,\mathrm{d}z$$

此电流在球心O激发的磁场大小为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}_O = \frac{\mu_0 r^2\,\mathrm{d}I}{2(r^2+z^2)^{3/2}}(-\hat{\boldsymbol{k}}) = \frac{\mu_0 r^2 nI\,\mathrm{d}z}{2(r^2+z^2)^{3/2}}(-\hat{\boldsymbol{k}}) = \frac{\mu_0 nI(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z}{2R^3}(-\hat{\boldsymbol{k}}) \tag{9.58}$$

积分得

$$\boldsymbol{B}_O = \frac{\mu_0 nI}{2R^3}(-\hat{\boldsymbol{k}})\int_{-R}^{R}(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z = \frac{2}{3}\mu_0 nI(-\hat{\boldsymbol{k}}) \tag{9.59}$$

其次,计算对称轴上(z轴)P点的磁场。设P点到原点O的距离为$l(<R)$,于是,$\mathrm{d}I$的电流圈在P点激发的磁场为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}_P = \frac{\mu_0 r^2 nI\,\mathrm{d}z}{2(r^2+z^2)^{3/2}}(-\hat{\boldsymbol{k}}) = \frac{\mu_0 nI(R\sin\theta)^2\,\mathrm{d}z}{2[(R\sin\theta)^2+(l+z)^2]^{3/2}}(-\hat{\boldsymbol{k}}) \tag{9.60}$$

对此式积分

$$\boldsymbol{B}_P = \frac{\mu_0 nIR^2}{2}(-\hat{\boldsymbol{k}})\int_{-R}^{R}\frac{\sin^2\theta\,\mathrm{d}z}{[(R\sin\theta)^2+(l+z)^2]^{3/2}} \tag{9.61}$$

因为$z=R\cos\theta$,所以$\mathrm{d}z=R\mathrm{d}\cos\theta$,于是,上式变为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_P &= \frac{\mu_0 nIR^3}{2}(-\hat{\boldsymbol{k}})\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2\theta\mathrm{d}\cos\theta}{[l^2+R^2+2lR\cos\theta]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 nIR^3}{2}(-\hat{\boldsymbol{k}})\,\frac{1}{4l^3R^3}\big[2(l^2+R^2)(l^2+R^2+2lR\cos\theta)^{1/2} \\ &\quad -\frac{1}{3}(l^2+R^2+2lR\cos\theta)^{3/2}+(R^2-l^2)^2(l^2+R^2+2lR\cos\theta)^{-1/2}\big]_{\pi}^{0}\end{aligned}$$

$$= \frac{\mu_0 nI}{8l^3}(-\hat{\boldsymbol{k}})\left[2(l^2+R^2)(l+R) - \frac{1}{3}(l+R)^3 + (R^2-l^2)^2(R+l)^{-1}\right.$$

$$\left. - 2(l^2+R^2)(R-l) + \frac{1}{3}(R-l)^3 - (R^2-l^2)^2(R-l)^{-1}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\mu_0 nI(-\hat{\boldsymbol{k}}) \tag{9.62}$$

此式表明，球内对称轴上各点的磁感应强度均相同，方向指向 z 轴的反方向。

再次，当场点 P 位于球面上时，这时 $l = R$，P 到 $\mathrm{d}I$ 的距离为 $2R\cos(\theta/2)$，于是(9.61)式变为

$$\boldsymbol{B}_P = \frac{\mu_0 nI}{2}(-\hat{\boldsymbol{k}})\int_{-R}^{R}\frac{R^2\sin^2\theta\mathrm{d}z}{[(R\sin\theta)^2+(R+z)^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 nI}{2}(-\hat{\boldsymbol{k}})\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^2\theta\mathrm{d}\cos\theta}{8\cos^3(\theta/2)}$$

$$= -\mu_0 nI(-\hat{\boldsymbol{k}})\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^3(\theta/2)\mathrm{d}(\theta/2)$$

$$= \frac{2}{3}\mu_0 nI(-\hat{\boldsymbol{k}}) \tag{9.63}$$

此式表明，线圈的边缘一点的磁场也与球内相同。

最后，考虑 P 点位于球外的情形，即 $l > R$。此时，只要注意到(9.62)式中的第二步 $l > R$ 即可，于是得

$$\boldsymbol{B}_P = \frac{\mu_0 nI}{8l^3}(-\hat{\boldsymbol{k}})\left[2(l^2+R^2)(l+R) - \frac{1}{3}(l+R)^3 + (R^2-l^2)^2(R+l)^{-1}\right.$$

$$\left. - 2(l^2+R^2)(l-R) + \frac{1}{3}(l-R)^3 - (R^2-l^2)^2(l-R)^{-1}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\mu_0 nI\left(\frac{R}{l}\right)^3(-\hat{\boldsymbol{k}}) \tag{9.64}$$

根据以上的计算表明，球形螺线管内对称轴上各点的磁场大小是相同的。球外轴线上的磁场随 l^{-3} 减少。利用反证法可以证明(参见第4章)，球内任一点磁场与轴线相同，是一个均匀场。

以上讨论的结果是球形线圈沿直径方向单位长度的匝数 n。如果单位长度的匝数 n 换成单位弧长的匝数 n'，即

$$n' = \frac{N}{\pi R}$$

$\mathrm{d}l$ 弧长的电流为

$$\mathrm{d}I' = n'I\,\mathrm{d}l = n'IR\,\mathrm{d}\theta$$

球心 O 处的磁场为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}'_O = \frac{\mu_0 r^2\,\mathrm{d}I'}{2(r^2+z^2)^{3/2}}(-\hat{\boldsymbol{k}}) = \frac{\mu_0 R^2\sin^2\theta n'IR\,\mathrm{d}\theta}{2R^3}(-\hat{\boldsymbol{k}}) = \frac{\mu_0 n'I}{2}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta(-\hat{\boldsymbol{k}})$$

积分得

$$\boldsymbol{B}'_O = \frac{\mu_0 n'I}{2}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta(-\hat{\boldsymbol{k}}) = \frac{\mu_0 n'I}{2}\frac{\pi}{2}(-\hat{\boldsymbol{k}}) = \frac{\pi}{4}\mu_0 n'I(-\hat{\boldsymbol{k}}) \tag{9.65}$$

很显然，(9.65)与(9.59)式是不相同的，这是采用不同单位长度的匝数造成的。那么，何时采用单位弧长的匝数呢？笔者认为，如果已知细导线在球面上紧紧密绕，且相邻线圈相互平行，则可用单位弧长的匝数求解；如果已知细导线沿着球的直径方向密绕，并没有强调相邻导线间的平行，但已明确告知沿直径单位长度的匝数，则可按照前面的计算程序。

9.2.9 螺线管线圈的组合

实际的螺线管是由漆包线(绝缘导线)连续密绕制成的,只要导线足够细,螺旋度就可以忽略不计,即可视为由许多圆形电流组合而成。这里的"密绕"应理解为相邻圆电流间没有空隙,当螺线管较长($L \gg R$)时,这样能保证管中的磁场是均匀的。理论上,往往把螺线管视为无限长,这是一种理想模型。由于圆柱形长直螺线管是磁场计算的典型例子,其管中磁场的表达式也比较简洁。如果把长直螺线管作为基本单元,可以构建出多种螺线管的组合。比如,圆柱形与圆柱形同轴组合,圆柱形与圆台(或圆锥)形同轴组合,圆柱形与球形组合,圆柱形与矩形的组合等,如图 9-15(a)(b)(c) 和(d) 所示。例如,柱形与柱形连接的组合可以有顺串联和反串联,还可以有顺并联和反并联,如图 9-15(h)(i)(j) 和(k) 所示。此外,我们也可以把球形螺线管作为基本单元,也可以构建出多种组合。例如,球形与球形的同心组合,球形与柱形的同轴组合,球形与矩形的同轴组合等,图 9-15(e)(f) 和(g) 给出了这几种组合。对于图 9-15(a)(b)(c)(d)(e)(f)(g) 这些组合,主要是求互感,而图 9-15(h)(i)(j) 和(k) 这些组合主要是求等效自感。下面以图 9-15(b) 和(e) 为例计算互感。

长直螺线管与圆台形螺线管的组合 设长直螺线管的半径为 R,单位长度的线圈匝数为 n_1,圆台形螺线管的上底和下底半径分别为 a 和 b,长度为 l,线圈沿着轴线单位长度的匝数为 n_2。试计算组合系统的互感。

设对称轴为 z 轴,在圆台形螺线管上取 $\mathrm{d}z$ 的长度,该长度内线圈的匝数是

$$\mathrm{d}N_2 = n_2 \mathrm{d}z$$

长直螺线管的磁场穿过该线圈的磁通匝链数为

$$\mathrm{d}\Psi_{21} = \mathrm{d}N_2 \Phi_{21} = n_2 \mathrm{d}z (B_1 S_2) = n_2 (\mu_0 n_1 I_1 \pi r^2) \mathrm{d}z \tag{9.66}$$

式中 r 是 $\mathrm{d}z$ 位置圆台形线圈的半径,I_1 是长直螺线管中的电流。由图 9-16(a) 的几何关系可以将 $\mathrm{d}z$ 变换为 $\mathrm{d}r$,即

$$\mathrm{d}z = \frac{l}{b-a}\mathrm{d}r \tag{9.67}$$

将此式代入(9.66) 式得

$$\mathrm{d}\Psi_{21} = \mu_0 \pi n_2 n_1 I_1 \frac{l}{b-a} r^2 \mathrm{d}r$$

对此式积分得

$$\begin{aligned}\Psi_{21} &= \mu_0 \pi n_2 n_1 I_1 \frac{l}{b-a}\int_a^b r^2 \mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{3}\mu_0 \pi n_2 n_1 I_1 \frac{l}{b-a}(b^3 - a^3) \\ &= \frac{1}{3}\mu_0 \pi n_2 n_1 I_1 l (b^2 + ab + a^2)\end{aligned} \tag{9.68}$$

由互感的定义得

$$M = M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{1}{3}\mu_0 \pi n_2 n_1 l (b^2 + ab + a^2) \tag{9.69}$$

这就是长直圆柱形螺线管与圆台形螺线管同轴组合的互感。由此式不难看出,当 $b = a$ 时,此式化简为两个同轴圆柱形螺线管的互感:

$$M = M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \mu_0 \pi n_2 n_1 l b^2$$

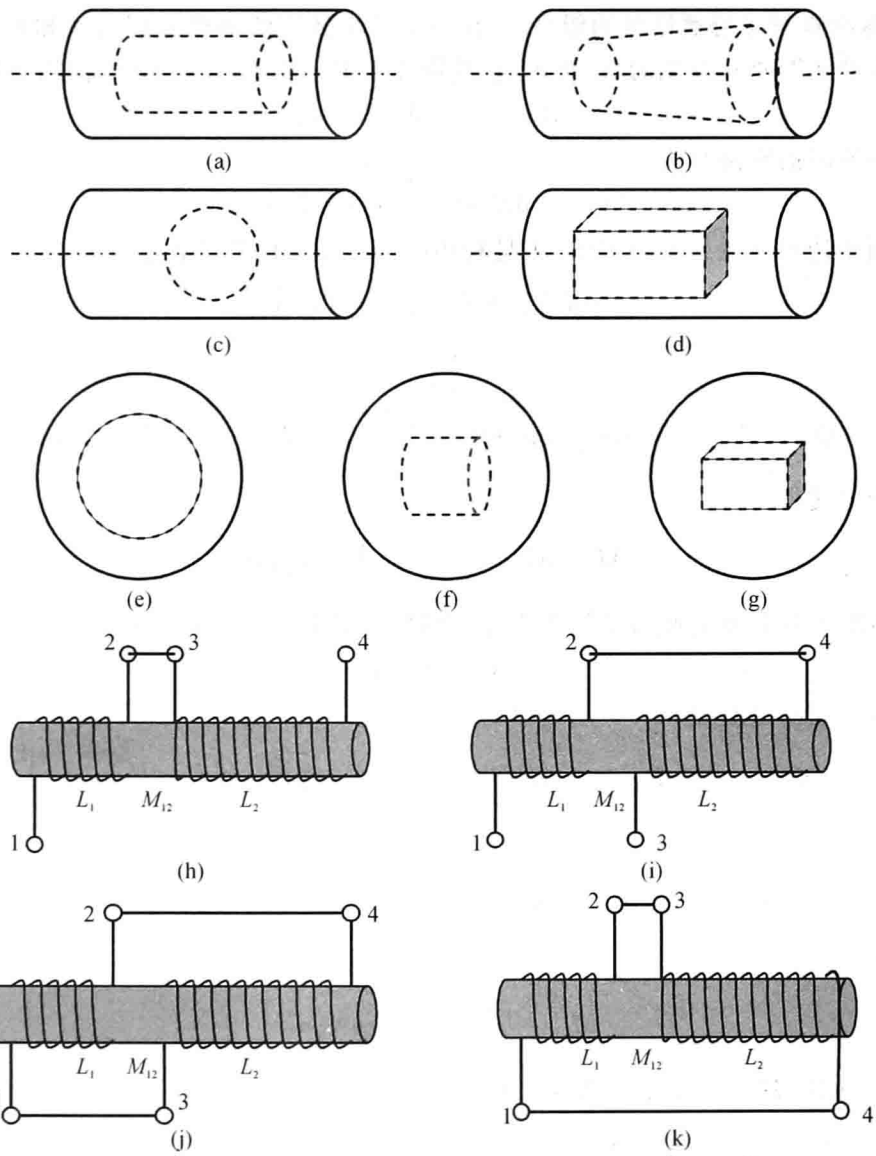
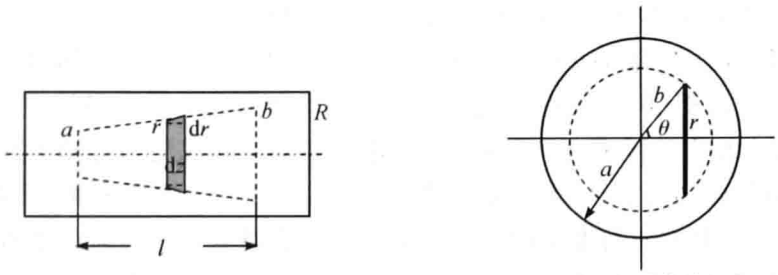


图 9-15　螺线管的组合

当 $a = 0$ 时，(9.69) 式简化为

$$M = M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{1}{3}\mu_0 \pi n_2 n_1 l b^2$$

此式即为圆柱形与圆锥形螺线管之间的互感。



(a) 柱形与圆台形螺线管的组合　　(b) 球形螺线管的组合

图 9-16　特殊螺线管的组合

球形螺线管与球形螺线管的组合 设两个球形线圈的半径分别为 a 和 b，沿着弧长方向单位长度的线圈匝数分别为 n_a 和 n_b。在线圈 b 上取一弧长 $\mathrm{d}l = b\mathrm{d}\theta$，相应的线圈匝数为

$$\mathrm{d}N_2 = n_b\mathrm{d}l = n_b b\,\mathrm{d}\theta \tag{9.70}$$

穿过该线圈的磁通匝链数为

$$\mathrm{d}\Psi_{21} = \mathrm{d}N_2\Phi_{21} = n_b b\,\mathrm{d}\theta(B_1\pi r^2)$$

由于 a 线圈中的磁场是处处均匀的，于是利用(9.65)式，上式可化为

$$\mathrm{d}\Psi_{21} = \frac{\pi^2 I_1}{4}\mu_0 n_a n_b b^3\sin^2\theta\mathrm{d}\theta \tag{9.71}$$

积分得

$$\Psi_{21} = \frac{\pi^2 I_1}{4}\mu_0 n_a n_b b^3\int_0^{\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\pi^2 I_1}{4}\mu_0 n_a n_b b^3\ \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^3 I_1}{8}\mu_0 n_a n_b b^3 \tag{9.72}$$

根据互感的定义得

$$M = M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\pi^3}{8}\mu_0 n_a n_b b^3 \tag{9.73}$$

如果已知线圈单位长度的匝数是沿着直径方向所取，则(9.70)式改为

$$\mathrm{d}N_2 = n_b'\mathrm{d}z \tag{9.74}$$

与此对应的磁通匝链数是

$$\mathrm{d}\Psi_{21} = \mathrm{d}N_2\Phi_{21} = n_b'\mathrm{d}z(B_1\pi r^2) = n'_b\mathrm{d}z\left[\frac{2}{3}\mu_0 n_a' I_1\pi(b^2 - z^2)\right] \tag{9.75}$$

积分得

$$\Psi_{21} = \frac{2}{3}\mu_0 n_a' n_b' I_1\pi\int_{-b}^{b}(b^2 - z^2)\mathrm{d}z = \frac{2}{3}\mu_0 n_a' n_b' I_1\pi\ \frac{4}{3}b^3 \tag{9.76}$$

于是互感为

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{8}{9}\pi\mu_0 n_a' n_b' b^3 \tag{9.77}$$

与(9.73)式相比，这两个结果是明显不相同的。

9.2.10 电场与磁场的组合

在静电场中放入或入射一个点电荷，电场就会对电荷有力的作用，从而导致电荷的运动或运动轨迹的改变。比如，稳恒电流中载流子的漂移运动；电子在示波管中的偏转运动，原子中电子的绕核轨道运动等。类似地，对于进入均匀磁场中的运动电荷也会受到洛仑兹力的作用(沿着磁力线方向运动除外)，运动轨迹可以是圆也可以是螺旋线。例如，电子回旋加速器、磁聚焦、磁约束、质谱仪和磁流体发电等。此外，电场和磁场的组合问题也非常典型。比如，霍尔效应、粒子速度选择器(particle velocity selector)、原子受外磁场作用电子角速度或磁矩的变化等。因此，可以把电场(或磁场)作为基本单元，然后将电场和磁场进行组合，从而构建出若干物理问题，如图 9-17 所示。因为这时带电粒子将会同时受到电场力和磁场力，所以其运动轨迹与电场和磁场的方向、粒子的带电符号、运动初始状态等有关。当电场和磁场方向一致时，电子初始速度方向与电场同向导致电子运动轨迹类似于物体的竖直向上的“抛体运动”；电子初始速度与电场相反导致电子运动轨迹为一直线，类似于物体的“下抛运动”；电子初始速度与电场垂直导致螺旋运动，其螺距越来越大。当电场、磁场和电子的初速度三者互相垂直时，电子的运动轨迹是一条摆线(旋轮线)。下面以图 9-17(c)为例讨论之。

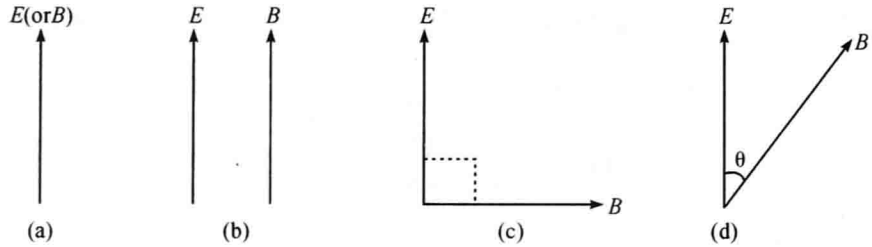


图 9-17 电场和磁场的组合

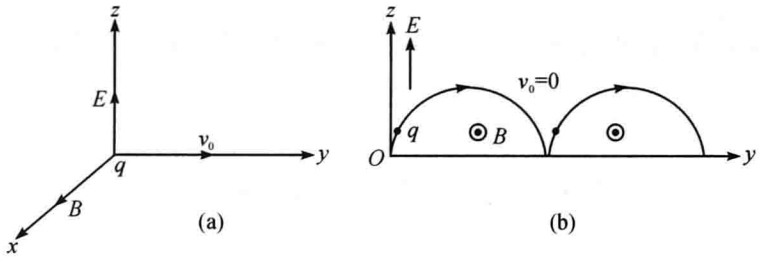


图 9-18 带电粒子在互相垂直均匀电场和磁场中的运动

带电粒子在交叉电场和磁场中的运动轨迹 设磁场沿着 x 轴方向 $\boldsymbol{B}=B\hat{\boldsymbol{i}}$，带电粒子以初速度 v_0 从坐标原点出发，并沿着 y 轴运动，电场沿着 z 轴方向 $\boldsymbol{E}=E\hat{\boldsymbol{k}}$，如图 9-18 所示。试求带电粒子的运动轨迹。

该问题的初始条件为

$$\begin{cases} x(t=0)=0 \\ y(t=0)=0 \\ z(t=0)=0 \end{cases} \tag{9.78}$$

以及

$$\begin{cases} v_x(t=0)=0 \\ v_y(t=0)=v_0 \\ v_z(t=0)=0 \end{cases} \tag{9.79}$$

根据洛仑兹力公式，带电粒子的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}+q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{9.80}$$

或写成

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=q\boldsymbol{E}+q\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{B}$$

将上式用分量表示

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=qE_x+q\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{B}\right)_x=qE_x+q\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}B_z-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}B_y\right)=0 \tag{9.81}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=qE_y+q\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{B}\right)_y=qE_y+q\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}B_x-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}B_z\right)=qB\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{9.82}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=qE_z+q\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{B}\right)_z=qE_z+q\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}B_y-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}B_x\right)=qE-qB\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{9.83}$$

解此方程组，并利用初始条件可得

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = \left(\dfrac{v_0}{\omega} - \dfrac{E}{\omega B}\right)\sin\omega t + \dfrac{E}{B}t \\ z(t) = \left(\dfrac{v_0}{\omega} - \dfrac{E}{\omega B}\right)(\cos\omega t - 1) \end{cases} \tag{9.84}$$

其中

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

上式表明，带电粒子在 yz 平面内运动，轨迹是一条摆线。当粒子的初速度 $v_0 = 0$ 时，上式化简为

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = \dfrac{E}{\omega B}(\omega t - \sin\omega t) \\ z(t) = \dfrac{E}{\omega B}(1 - \cos\omega t) \end{cases} \tag{9.85}$$

此方程就是关于摆线的参数方程(parametric equations for a cycloid curve)，如图 9-18 所示。带电粒子 q 的运动在 y 和 z 方向是简谐振动的合成，并在 y 方向有一个恒定的漂移(constant drift)，其速度(一个振动周期或多个振动周期的平均速度)为

$$\boldsymbol{v}_D = \frac{E}{B}\hat{\boldsymbol{j}} = \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2} \tag{9.86}$$

这个速度在等离子物理中具有重要意义。对于正负电荷来说，漂移速度是相同的，因为它与电荷 q 无关。因此，当正交磁场存在时，在稀薄(比如无碰撞)中性等离子体中，恒定电场不会产生静电流，这是由于正负电荷一起漂移之故。

粒子速度选择器 粒子速度选择器是由相互正交的均匀电场和均匀磁场组成的，如图 9-19 所示。如果有一束具有不同速度的负电粒子，垂直于电场和磁场的方向进入速度选择器。试计算穿过速度选择器的粒子之速度。

由洛仑兹关系式

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

及电场和磁场的方向可得

$$F = qE - qvB \tag{9.87}$$

由此可见，带电粒子受力有如下三种情况：

$$\begin{aligned} F > 0 &\rightarrow qE > qvB \rightarrow v < \frac{E}{B} \\ F < 0 &\rightarrow qE < qvB \rightarrow v > \frac{E}{B} \\ F = 0 &\rightarrow qE = qvB \rightarrow v = \frac{E}{B} \end{aligned} \tag{9.88}$$

这三种情况中，只有粒子受力为零时，才能通过速度选择器到达磁偏转器。因此，被选择的粒子速度依赖于电场和磁场的大小，通过调节电场或磁场可以获得不同速度的带电粒子。实际应用中，电场 E 通常用极板间的电势差 V 表示，于是

$$v = \frac{E}{B} = \frac{Ed}{Bd} = \frac{V}{Bd} \tag{9.89}$$

式中 d 是选择器极板间的距离。因此，当磁场固定时，调节电压 V 即可选择粒子的速度。上式也表明，粒子带何种电荷以及质量大小都不影响其速度的选择。

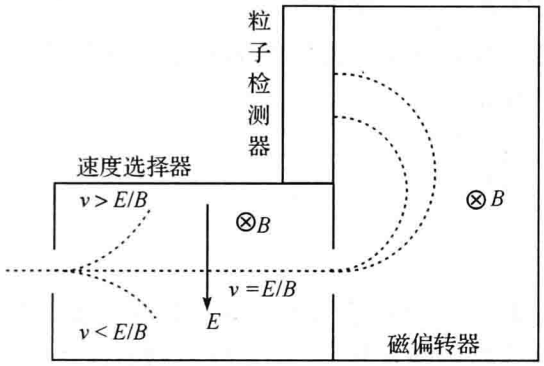


图 9-19 速度选择器(质谱仪)

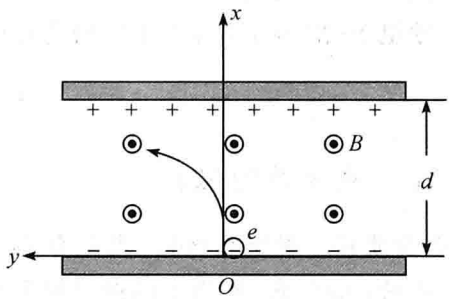


图 9-20 电子(静止开始)在交叉电场和磁场中的运动

电子不能到达正极板的条件 设平行板电容器两极板间的距离为 d，充电后撤去电源，这时极板间的电场强度为 E。现加上与电场垂直的磁场 B，如图 9-20 所示。如果一个静止电子从负极板出发，能够到达正极板的条件是什么?设负极板位于 yz 平面内，电子出发点为坐标原点。电子在这个交叉电场和磁场中的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=e\boldsymbol{E}+e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{9.90}$$

分量式为

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}&=-eE+eBv_y\\ m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}&=-eBv_x\\ m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}&=0 \end{aligned} \tag{9.91}$$

该问题的初始条件是：

$$\begin{cases} x(t=0)=0\\ y(t=0)=0,\\ z(t=0)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_x(t=0)=0\\ v_y(t=0)=0\\ v_z(t=0)=0 \end{cases} \tag{9.92}$$

由(9.91)式得

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}v_y}=\frac{E-Bv_y}{Bv_x} \tag{9.93}$$

对此式整理后积分并运用初始条件得

$$\frac{1}{2}Bv_x^2=Ev_y-\frac{1}{2}Bv_y^2 \tag{9.94}$$

当电子“返回”时，$v_x=0$，由此可得

$$v_y=\frac{2E}{B} \tag{9.95}$$

这时电子具有的动能为

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv_y^2=eEx_{\max} \tag{9.96}$$

于是

$$x_{\max}=\frac{m}{2eE}v_y^2=\frac{m}{2eE}\left(\frac{2E}{B}\right)^2=\frac{2mE}{eB^2} \tag{9.97}$$

这是电子在 x 方向上的最大距离，如果这个距离小于平行板间的距离 d，即电子不能到达正极板，即电子(由静止开始)不能到达正极板的条件是

$$d>x_{\max}=\frac{2mE}{eB^2} \tag{9.98}$$

9.2.11 电介质的组合

电介质是一种绝缘材料。当电介质置于静电场中就会产生极化，其表面出现极化电荷(束缚电荷)的分布。利用电偶极子模型可以解释介质的极化机理。由于介质的绝缘性质，它往往被用作导电体之间的填充物，以达到导体间的绝缘。一个典型的例子就是电容器中的应用，如果没有电介质的填充，要制作一个容量大、体积又小的电容器是很困难的。在电磁学中，有三种典型的电容器：平行板电容器、球形电容器和圆柱形电容器。理论上，电介质可以进行“组合”，然后填入电容器中。不同的组合方式，其电容也不同。最常见的两种方式是：两块介质重叠放置和并列放置。重叠放置的称为“重叠式”，并列放置的称为“并列式”。除此之外，还有这两种方式的混合组合，也可称为“混合式”。图 9-21 给出了几种电介质的组合方式。图 9-21(a) 的组合代表“重叠式”，图 9-21(b) 的组合表示“并列式”，图 9-21(c) 和(d) 是这两种情况的混合组合，它们适用平行板电容器的介质填充；图 9-21(e)(f)(g) 和(h) 适用于球形电容器，如果把它们视为圆柱的横截面，也适用于圆柱形电容器。当其中一种介质为真空或空气时，这些图形同样适用。对于介质的“重叠式”组合，计算电容时可视为两个电容的串联，而介质的“并列式”组合可视为两电容的并联。

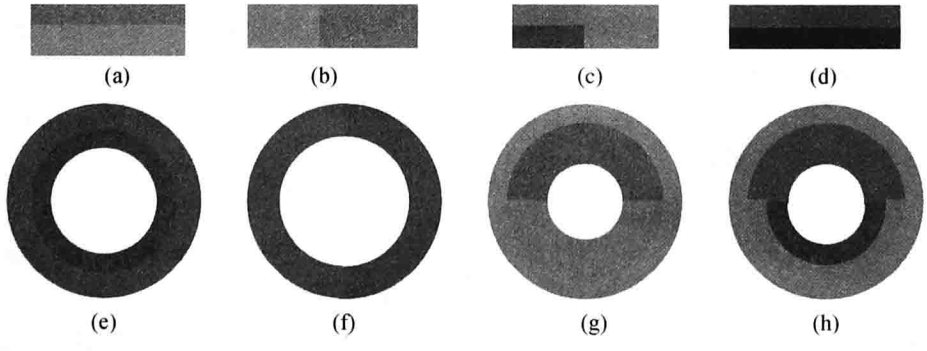


图 9-21 电容器中电介质的组合

计算这些图形的电容器电容可直接利用介质中的高斯定理求出电位移，然后由各向同性介质中电场与电位移的关系求出电场，从而得出电势差，再由电容的定义得到电容器的电容。另外，也可以根据电容器的串联和并联的特点求解。串联时各极板上的电荷相等，总电势差为各个电容器电势差之和。并联时各个电容器的电势差相等，同极性极板上电荷相加。下面以图 9-21(d) 为例来计算电容器的电容、介质表面的极化电荷面密度和导体板上的电荷面密度。

设平行板电容器的极板面积为 S，两极板间的距离为 d，极板上分别带上电荷 Q 和 $-Q$，忽略边缘效应。设介质 1 与介质 2 以“并列式”放置，相应的介电常数分别为 ε_1 和 ε_2，然后再与介质 3 重叠放置，其介电常数为 ε_3。

由于介质1和2的并列放置，使得极板的电荷不再均匀分布在整个 S 上，而是电荷分布分成两部分，与介质1相对应的导体板面积上的电荷为 Q_1，与介质2对应的极板面积上的电荷为 Q_2，由电荷守恒定律得

$$Q_1 + Q_2 = Q \tag{9.99}$$

或者用面电荷密度表示为

$$\sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 = Q$$

两导体极板间的电势差为

$$V_1 = \int_+^- \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = E_1 d_1 + E_3 d_3 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} d_1 + \frac{\sigma_1}{\varepsilon_3} d_3 = \frac{Q_1}{\varepsilon_1 S_1} d_1 + \frac{Q_1}{\varepsilon_3 S_1} d_3 \tag{9.100}$$

或者

$$V_2 = \int_+^- \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = E_2 d_1 + E_3 d_3 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} d_1 + \frac{\sigma_2}{\varepsilon_3} d_3 = \frac{Q_2}{\varepsilon_2 S_2} d_1 + \frac{Q_2}{\varepsilon_3 S_2} d_3 \tag{9.101}$$

其中 $\boldsymbol{d}_1$ 为介质1的厚度，$\boldsymbol{d}_3$ 为介质3的厚度，且有 $\boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_3 = \boldsymbol{d}$。由于 $V_1 = V_2 = V$，所以

$$\frac{Q_1}{\varepsilon_1 S_1} d_1 + \frac{Q_1}{\varepsilon_3 S_1} d_3 = \frac{Q_2}{\varepsilon_2 S_2} d_1 + \frac{Q_2}{\varepsilon_3 S_2} d_3 \tag{9.102}$$

由(9.99)和(9.102)式可得

$$Q_1 = Q\left(\frac{d_1}{\varepsilon_2 S_2} + \frac{d_3}{\varepsilon_3 S_2}\right)\left(\frac{d_1}{\varepsilon_2 S_2} + \frac{d_3}{\varepsilon_3 S_2} + \frac{d_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{d_3}{\varepsilon_3 S_1}\right)^{-1} \tag{9.103}$$

将上式代入(9.100)式得

$$V_1 = Q\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{d_3}{\varepsilon_3 S_1}\right)\left(\frac{d_1}{\varepsilon_2 S_2} + \frac{d_3}{\varepsilon_3 S_2}\right)\left(\frac{d_1}{\varepsilon_2 S_2} + \frac{d_3}{\varepsilon_3 S_2} + \frac{d_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{d_3}{\varepsilon_3 S_1}\right)^{-1} \tag{9.104}$$

电容器的电容为

$$C = \frac{Q}{V_1} = \left(\frac{d_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{d_3}{\varepsilon_3 S_1}\right)^{-1} + \left(\frac{d_1}{\varepsilon_2 S_2} + \frac{d_3}{\varepsilon_3 S_2}\right)^{-1} \tag{9.105}$$

当 $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_0$，$d_3 = d - d_1$，$S_1 = S_2 = \dfrac{S}{2}$ 时，上式化简为

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{2d} \frac{\varepsilon_1 (2d - d_1) + \varepsilon_0 d_1}{\varepsilon_1 (d - d_1) + \varepsilon_0 d_1}$$

介质1表面的极化电荷面密度为

$$\sigma'_1 = \boldsymbol{P}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_1 = -P_1 = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) E_1 = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = -\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)\sigma_1 \tag{9.106}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{n}}_1$ 是介质1的外法线，它指向带正电荷的导体板，与介质1中的极化强度方向相反。类似地，对介质2表面的极化面电荷密度可表示为

$$\sigma'_2 = \boldsymbol{P}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_2 = -P_2 = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_0) E_2 = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} = -\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right)\sigma_2 \tag{9.107}$$

介质3表面的极化面电荷密度为

$$\sigma'_{31} = \boldsymbol{P}_{31} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_3 = P_{31} = (\varepsilon_3 - \varepsilon_0) E_{31} = (\varepsilon_3 - \varepsilon_0) \frac{\sigma_1}{\varepsilon_3} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_3}\right)\sigma_1 \tag{9.108}$$

$$\sigma'_{32} = \boldsymbol{P}_{32} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_3 = P_{32} = (\varepsilon_3 - \varepsilon_0) E_{32} = (\varepsilon_3 - \varepsilon_0) \frac{\sigma_2}{\varepsilon_3} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_3}\right)\sigma_2 \tag{9.109}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{n}}_3$ 与极化强度方向相同。在介质1和3的交界面上，极化电荷面密度为

$$\sigma'_{1,3} = \sigma'_1 + \sigma'_{31} = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_3}\right)\sigma_1 \tag{9.110}$$

$$\sigma'_{2,3}=\sigma'_{2}+\sigma'_{32}=\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_3}\right)\sigma_2 \tag{9.111}$$

其中

$$\sigma_1=\frac{Q_1}{S_1}$$

$$\sigma_2=\frac{Q_2}{S_2}=\frac{Q-Q_1}{S_2}$$

就是极板表面的电荷面密度。可见，介质并列放置时，导体板上的电荷分布是不同的。

如果问题中只求电容或电势差，可以先把 1 和 3 两种介质的重叠部分视为串联，其有效电容的倒数为

$$\frac{1}{C_{13}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_{31}}=\frac{d_1}{\varepsilon_1 S_1}+\frac{d_3}{\varepsilon_3 S_1} \tag{9.112}$$

同理，2 和 3 介质的重叠部分其有效电容的倒数为

$$\frac{1}{C_{23}}=\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_{32}}=\frac{d_1}{\varepsilon_2 S_2}+\frac{d_3}{\varepsilon_3 S_2} \tag{9.113}$$

C_{13} 和 C_{23} 可以视为并联，即总有效电容为

$$C=C_{13}+C_{23}=\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1 S_1}+\frac{d_3}{\varepsilon_3 S_1}\right)^{-1}+\left(\frac{d_1}{\varepsilon_2 S_2}+\frac{d_3}{\varepsilon_3 S_2}\right)^{-1} \tag{9.114}$$

可见，上式与(9.105) 式是一致的。在此，要特别提醒的是：这个问题不能简单地把它视为 1 和 2 介质相应电容的并联，再与介质 3 相应的电容串联。这是因为介质 1 中的电场与介质 2 中的电场不相等，电势差也不相同，由此造成了介质 3 中的电场左右不相同。

第 10 章　切割法

物理图形在电磁学的理论阐述和学习中起着十分重要的作用。它能够使抽象的物理问题变得较为直观化，有助于我们对物理问题的理解和分析，从而对问题的解决起到了关键辅助作用。除了从基本物理图形的形变和组合出发构建物理问题外，还可以通过截取完整图形的一部分或被截图形的剩余部分作为物理问题的研究对象，这种通过一定的“切割手段”获得的物理图形仍然保留着整体的一些特点。从而达到由“部分”了解“整体”或从“整体”探索“部分”，使我们对物理问题有一个更加系统的、更加全面的理解。在这一章中，我们介绍物理图形的“切割”法，并通过几个范例来说明之。

10.1　切割法界定

切，是指利用工具在同一水平面，同一作用力方向的作用下，改变物体形状。割，是利用工具多方向作用改变物体形状。工程上，把板材或型材等切成所需形状和尺寸的坯料或工件的过程。

切割是一种物理动作。狭义的切割是指用刀等利器将物体（如食物、木料等硬度较低的物体）切开；广义的切割是指利用工具，如机床、火焰等使物体在压力或高温的作用下断开。数学中也有引申出的“切割线”，是指能将一个平面分成几个部分的直线。切割在人们的生产、生活中有着重要的作用。

所谓“切割法”是将固形物体采用一定的工具与手段，按照科学程序将其切割成所需的形状和尺寸的一种方法。将其引申到电磁学中，就是指将一个完整的物理几何图形以一定的方式“切割”出所需形状的一种方法。切割出的这部分图形仍然保留着整体的部分特征。也就是说，在一个完整的物理图形中截取其中的一部分，让切下的部分或余下的部分作为研究对象，这就是电磁学中的所谓“切割法”。根据这一逻辑思维方法，半无限长直带电线可以看作无限长直线的平分切割而成；半球面可以视为球面的一分为二的等分方式切割而成；半圆环可以视为圆环的对半方式切割而成；圆柱面可以沿着轴线以二等分、四等分等方式进行切割或横向切成细圆环；矩形可以截去一条边（即线段）或对角切开作为研究对象；均匀极化的电介质中“挖去”一个球形介质或圆柱形介质；均匀磁化的介质中“挖去”一个球形介质，余下的球形空腔或球介质均可作为研究对象；如此等等。

10.2　切割法范例

10.2.1　球面切割

在电磁学中，球面或实心球是一个十分重要的物理图形，因为它有很好的对称性。比如均匀带电球面的电场是高斯定理运用的主要例子；当该带电球面以匀角速度旋转或密绕线圈时可求球面内外的磁场；当球面上以余弦规律分布非均匀的电荷密度时，可以计算球面内外的电场等。将球面视为完整物理图形，可以切割出半球面、球冠（球缺）和球台等图形，如

图 10-1 所示。这些图形也常作为计算电场通量的图形。当一个点电荷位于球心 O 时，可以计算通过球面、半球面、球冠和球台侧面的电场通量。有时也将这些图形应用于均匀电场或磁场的通量计算。显然，这种切割的部分仍然保留着整体的某些信息，但其对称性降低了，这对问题的求解稍增加了难度。下面以这些图形的带电情况作一系统的讨论。

均匀带电球面 均匀的电荷分布在半径为 R 的球面上，其面电荷密度为 σ。已知电荷分布或带的总电荷，就可以求得电场强度或电势。

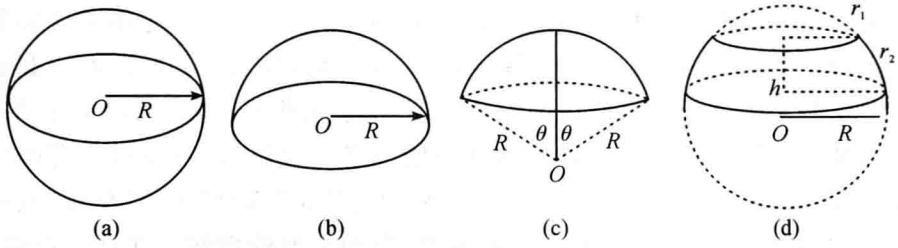


图 10-1 球面、半球面、球冠(球缺)和球台

对于图 10-1(a) 的情况，我们可以利用高斯定理求出球面内外的电场强度：

$$\boldsymbol{E}=\begin{cases}0, & r<R \qquad (10.1)\\ \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}, & r>R \qquad (10.2)\end{cases}$$

在已知电场强度的情况下，球内外的电势可以由电势的定义式来求解，为此，我们有

$$V_P=\int_P^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\begin{cases}\displaystyle\int_P^R\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_R^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}, & r<R\\ \displaystyle\int_r^{\infty}\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r>R\end{cases} \qquad (10.3)$$

其中

$$q=\sigma 4\pi R^2$$

由此可知，球面内的电势与球面上的电势相同；球面外的电势相当于位于球心的点电荷的电势。实际上，球面内外的电场强度和电势，还可以利用电场和电势的叠加原理直接积分加以计算(从略)。

均匀带电半球面 将球面沿赤道线切开就形成半球面的带电体，如图 10-1(b) 所示。由于半球面的对称性没有球面时高，不能运用高斯定理求电场，但可以利用电场的叠加原理求解。我们先考虑球心处的电场计算，因为这点的电场计算是最简单的。选取半球面的对称轴为 z 轴，在球坐标下，球面面积元可表示为

$$\mathrm{d}S=R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

相应的电荷元为

$$\mathrm{d}q=\sigma\mathrm{d}S=\sigma R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \qquad (10.4)$$

电荷元在球心处的电场为

$$\mathrm{d}E_0=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{R^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

由于对称性，电荷元所产生的电场只有 z 分量对球心合场强才有贡献，因此，我们有

$$\mathrm{d}E_{0z}=-\mathrm{d}E_0\cos\theta=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

对此积分得

$$E_{0z}=\frac{-\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=-\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\tag{10.5}$$

写成矢量式

$$\boldsymbol{E}_0=E_{0z}\hat{\boldsymbol{k}}=-\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{k}}$$

另一方面，我们也可以利用带电圆环轴线上的电场公式求解，即在半球面上取绕 z 轴的电荷圆环带，该环带在球心处产生的电场为（注意“—”号）

$$\mathrm{d}E_{0z}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\mathrm{d}q}{(z^2+r^2)^{3/2}}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R\cos\theta\mathrm{d}q}{(R^2\cos^2\theta+R^2\sin^2\theta)^{3/2}}=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\tag{10.6}$$

积分可得

$$E_{0z}=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=-\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

其次，计算球心处的电势。半球面上电荷元 $\mathrm{d}q$ 在球心处产生的电势为

$$\mathrm{d}V_0=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}R\sigma\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

对此式积分得

$$V_0=\frac{R\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=\frac{R\sigma}{2\varepsilon_0}\tag{10.7}$$

均匀带电球冠　设电荷均匀分布在半径为 R 的球冠面上，球冠边缘对球心 O 的张角为 2θ，如图 10-1(c) 所示。以球冠的轴线为对称轴（z 轴），在其上取宽度为 $R\mathrm{d}\theta'$ 的环带，该环带上的电荷 $\mathrm{d}q$ 在球心处所产生的电势为

$$\mathrm{d}V_0=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{R}=\frac{R\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\tag{10.8}$$

积分得

$$V_0=\frac{R\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\theta}\sin\theta'\mathrm{d}\theta'=\frac{R\sigma}{2\varepsilon_0}(1-\cos\theta)\tag{10.9}$$

如果令 $\theta=\dfrac{\pi}{n}$，则上式可以写成如下一般形式：

$$V_0=\frac{R\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\cos\frac{\pi}{n}\right],\quad n=1,2,\cdots\tag{10.10}$$

显然，$n=1$ 为带电球面；$n=2$ 为半球面；$n=3,4,\cdots$ 就是球冠。

同理，上述环带上的电荷 $\mathrm{d}q$ 在球心处激发的电场强度为（见式(10.6)）

$$\mathrm{d}E_{0z}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\mathrm{d}q}{(z^2+r^2)^{3/2}}=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cos\theta'\sin\theta'\mathrm{d}\theta'$$

对上式积分可得球心处的电场强度：

$$E_{0z}=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\theta}\cos\theta'\sin\theta'\mathrm{d}\theta'=-\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\sin^2\theta\tag{10.11}$$

同理，若令 $\theta=\dfrac{\pi}{n}$，则(10.11) 写成

$$E_{0z}=-\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\sin^2\theta=-\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\sin^2\frac{\pi}{n},(n=1,2,\cdots)\tag{10.12}$$

不难看出，$n=1$，$E_{0z}=0$ 即为整个球面的结果；$n=2$ 即为半球面；$n=3,4,\cdots$ 即为球冠。

均匀带电球台 设半径为 R 的整个球面切成上下截面，半径分别为 r_1 和 r_2 的球台。仍然取球台的对称轴为 z 轴，则只要将球冠的情形(10.9) 式和(10.11) 式的积分限作如下代换：

$$0 \to \theta_1 = \arcsin\frac{r_1}{R}, \theta \to \theta_2 = \arcsin\frac{r_2}{R} \tag{10.13}$$

就可以求得球心处的电势和电场强度：

$$V_0 = \frac{R\sigma}{2\varepsilon_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta'\mathrm{d}\theta' = \frac{R\sigma}{2\varepsilon_0}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \tag{10.14}$$

$$E_{0z} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta'\sin\theta'\mathrm{d}\theta' = -\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}(\sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_1) \tag{10.15}$$

当 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \theta < \frac{\pi}{2}$ 时，即为球冠；当 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ 时，即为半球面。由此可见，球台的结果更具一般性，也就是说，球面、半球面和球冠的电势和电场强度都可以从球台的结果演绎出来。因此，从演绎法的角度来说，可以把球台视为一般情况，角度 θ_1, θ_2 的不同取值就相当于特殊情况，演绎过程留给读者自己进行。

旋转带电球台 当图 10-1(d) 所示的球台以角速度 ω 绕其对称轴(z 轴) 旋转时，球面上形成面电流分布 α。这种面电流分布会激发磁场，该问题主要是求磁场与磁矩。从上面的分析和讨论可知，球面、半球面和球冠都可以视为球台的特例，为此，我们将从球台出发来演绎磁场与磁矩。

首先计算磁矩 m。在球台环带面上取一宽度为 $R\mathrm{d}\theta$ 小环带，该小环带的电荷是

$$\mathrm{d}q = \sigma\mathrm{d}S = \sigma 2\pi R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

此电荷转动形成的电流为

$$\mathrm{d}I = \frac{\omega\mathrm{d}q}{2\pi} = \omega\sigma R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta \tag{10.16}$$

相应的磁矩大小为

$$\mathrm{d}m = S\mathrm{d}I = \pi(R\sin\theta)^2\mathrm{d}I = \omega\sigma\pi R^4\sin^3\theta\mathrm{d}\theta$$

积分得

$$m = \int\mathrm{d}m = \omega\sigma\pi R^4\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta = \omega\sigma\pi R^4\left[\frac{1}{3}(\cos^3\theta_2 - \cos^3\theta_1) - (\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\right] \tag{10.17}$$

其中

$$\theta_1 = \arcsin\frac{r_1}{R}, \quad \theta_2 = \arcsin\frac{r_2}{R}$$

当(10.17) 式中的 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$ 时，球台变为整个球面，磁矩为

$$\boldsymbol{m} = \frac{4}{3}\pi\sigma R^4\boldsymbol{\omega}$$

当 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ 时，球台变为半球面，磁矩是

$$\boldsymbol{m} = \frac{2}{3}\pi\sigma R^4\boldsymbol{\omega}$$

当 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \theta$ 时，球台变成球冠，磁矩为

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{\omega}\sigma\pi R^4\left[\frac{1}{3}(\cos^3\theta - 1) - (\cos\theta - 1)\right]$$

磁矩 $\boldsymbol{m}$ 的方向与角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 方向一致。

接下来计算球心处的磁感应强度。同理，在球台的侧面上取一宽度为 $R\mathrm{d}\theta$ 的小环带，该小环带的电流与(10.16)式相同，运用圆环轴线上的磁感应强度公式，它在球心 O 处激发的磁感应强度为

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}Ir^2}{2(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I(R\sin\theta)^2}{2(R^2\sin^2\theta+R^2\cos^2\theta)^{3/2}} = \frac{1}{2}\mu_0 R\omega\sigma\sin^3\theta\mathrm{d}\theta \tag{10.18}$$

积分得

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 R\omega\sigma\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\mu_0 R\omega\sigma\left[\frac{1}{3}(\cos^3\theta_2-\cos^3\theta_1)-(\cos\theta_2-\cos\theta_1)\right] \tag{10.19}$$

其中

$$\theta_1 = \arcsin\frac{r_1}{R}, \quad \theta_2 = \arcsin\frac{r_2}{R}$$

式(10.19)就是球台以角速度 ω 绕 z 轴旋转时在球心处的磁感应强度。若取(10.19)式中 $\theta_1 = 0$ 和 $\theta_2 = \pi$，则球台演变为整个球面，在球心处的磁感应强度是

$$B = \frac{2}{3}\mu_0 R\omega\sigma$$

若取 $\theta_1 = 0$ 和 $\theta_2 = \pi/2$，则球台变成半球面，球心处的磁感应强度为

$$B = \frac{1}{3}\mu_0 R\omega\sigma$$

当 $\theta_1 = 0$ 和 $\theta_2 = \theta$ 时，球台变成球冠，这时球心处 B 的大小是

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 R\omega\sigma\left[\frac{1}{3}(\cos^3\theta-1)-(\cos\theta-1)\right]$$

这个问题还可拓展为求球台面内外在 z 轴上任一点的磁感应强度 B。为此，将(10.18)式改写成

$$\begin{aligned}\mathrm{d}B &= \frac{\mu_0 \mathrm{d}Ir^2}{2[r^2+(z-l)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 \mathrm{d}I(R\sin\theta)^2}{2[R^2\sin^2\theta+(z-R\cos\theta)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2}\mu_0 R^4\omega\sigma\frac{\sin^3\theta\mathrm{d}\theta}{[z^2+R^2-2zR\cos\theta]^{3/2}}\end{aligned} \tag{10.20}$$

这里 z 是位于 z 轴上任一点 P 离球心 O 的距离，而 $l = R\cos\theta, r = R\sin\theta$。对此式积分得

$$\begin{aligned}B &= \frac{1}{2}\mu_0 R^4\omega\sigma\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\sin^3\theta\mathrm{d}\theta}{[z^2+R^2-2zR\cos\theta]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 R\omega\sigma}{6z^3}\left[\frac{2(z^2+R^2)^2-3z^2R^2}{(z^2+R^2-2zR\cos\theta)^{1/2}}-\frac{z^2R^2\cos^2\theta+2(z^2+R^2)zR\cos\theta}{(z^2+R^2-2zR\cos\theta)^{1/2}}\right]_{\theta_1}^{\theta_2} \\ &= \frac{\mu_0 R\omega\sigma}{6z^3}\left[\frac{2(z^2+R^2)^2-3z^2R^2}{(z^2+R^2-2zR\cos\theta_2)^{1/2}}-\frac{z^2R^2\cos^2\theta_2+2(z^2+R^2)zR\cos\theta_2}{(z^2+R^2-2zR\cos\theta_2)^{1/2}}\right] \\ &\quad -\frac{\mu_0 R\omega\sigma}{6z^3}\left[\frac{2(z^2+R^2)^2-3z^2R^2}{(z^2+R^2-2zR\cos\theta_1)^{1/2}}-\frac{z^2R^2\cos^2\theta_1+2(z^2+R^2)zR\cos\theta_1}{(z^2+R^2-2zR\cos\theta_1)^{1/2}}\right]\end{aligned} \tag{10.21}$$

若取 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$，则球台变成闭合球面。这时对于 $z < R$ 的情况，注意到公式中的根号

$\sqrt{z^2+R^2-2zR}=R-z$，则球内的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 为

$$\boldsymbol{B}=\frac{2}{3}\mu_0\sigma R\boldsymbol{\omega},\quad z<R \tag{10.22}$$

对于 $z>R$ 的情况，只要注意到 $\sqrt{z^2+R^2-2zR}=z-R$，则球外的 $\boldsymbol{B}$ 为

$$\boldsymbol{B}=\frac{2}{3}\mu_0\sigma\boldsymbol{\omega}R\frac{R^3}{z^3},\quad z>R \tag{10.23}$$

若取 $\theta_1=0,\theta_2=\pi/2$，则球台变成半球面。这时要注意 $z<0$ 和 $z>0$ 空间的 $\boldsymbol{B}$ 大小不再对称，由(10.21)式可得

$$B=B_0\frac{1}{z^3}\left[\frac{2(z^2+R^2)^2-3z^2R^2}{(z^2+R^2)^{1/2}}+\frac{4z^2R^2+2(z^2+R^2)zR-2(z^2+R^2)^2}{(z^2+R^2-2zR)^{1/2}}\right] \tag{10.24}$$

其中

$$B_0=\frac{1}{6}\mu_0R\omega\sigma$$

图 10-2 给出了均匀带电旋转半球面轴线上的磁感应强度 B 的分布，变量 z 以球半径 R 为单位，B 以 B_0 为单位。从图中不难看出，$z=R$ 处(半球面的“顶点”)磁感应强度最大。

根据上面的分析与讨论可知，(10.21)式还可以演绎出旋转带电球面、半球面以及球冠的结果(略)。

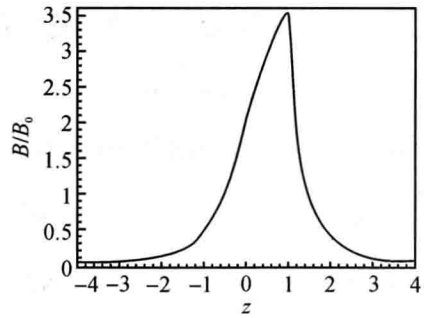


图 10-2　带有均匀面电荷密度的旋转半球面轴线上的磁感应强度的分布

对于一个半径为 R 的实心球体而言，实施“特殊的切割”可以获得球壳、球面、多层同心球面、非同心空心球等的形体，如图 10-3 所示。当实心球体是带电体时，“切割”所获得的球壳是带电球壳、球面便是带电球面等。如果实心球体是导体，则“切割”所得的是导体球壳、导体球面等。实际中，往往计算这些形态带电体的电势或电场强度(请读者自己考虑)。

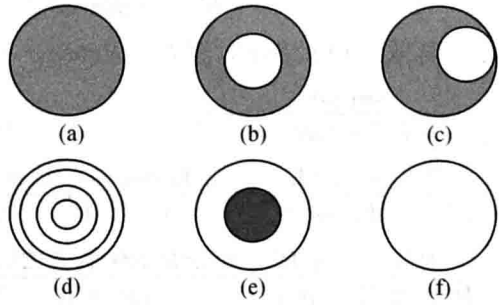


图 10-3　球体的部分切割

10.2.2　圆环切割

一个半径为 R 的胶木细圆环，根据切去部分弓形的不同弧长或剩余部分长度，可以获得

所需要的不同弧长的图形。设圆心角为 α，弓形的弦长 b 可用圆心角表示为

$$b = 2R\sin\frac{\alpha}{2} = 2R\sin\theta$$

弓形的高为

$$h = 2R\sin^2\frac{\alpha}{4} = 2R\sin^2\frac{\theta}{2}$$

而弧长 l 为

$$l = R\alpha = 2R\theta, \quad 0 < \theta < \pi$$

取不同的 θ 值，就可以得到不同弧长的圆弧图形。当 θ 很小时，圆环的切除部分非常小，如图 10-4(b) 所示。当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，这时的弓形就是半圆环，如图 10-4(c) 所示。一般情况的弓形图为图(d) 所表示。

当已知圆环或圆弧单位长度的电荷 λ，就可以求出这些图形圆心处和通过圆心的轴线上(轴线与圆环平面垂直) 的电势和电场强度。如果圆环绕轴转动还可以求解磁场分布等。

值得指出的是：如果把图 10-4(a) 看作圆柱面的横截面，则图 10-4 可推广到圆柱面的情况。当圆柱面带上电荷面密度 σ 时，可以计算轴线上(即 O 点) 电场强度；当圆柱面通以轴向的面电流时，可以计算轴线上的磁场(参见范例 7-6)。下面以图 10-4(d) 的弓形圆弧为例来计算电势和电场。

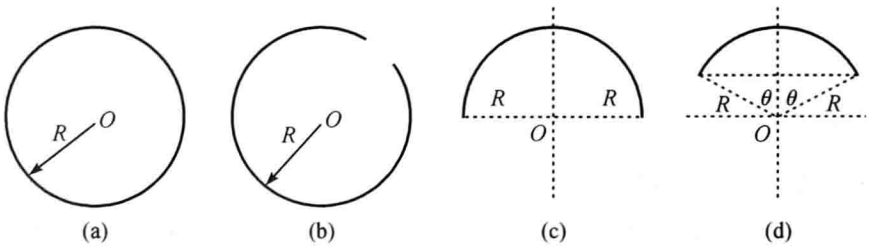


图 10-4　圆环的切割

圆心处的电势(图 10-4(d))　设圆弧单位长度的电荷为 λ，在圆弧上取一电荷元

$$\mathrm{d}q = \lambda\mathrm{d}l$$

该电荷元在环心处 O 所激发的电势为

$$\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\mathrm{d}l}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\,\mathrm{d}\theta'}{R} \tag{10.25}$$

对上式积分得：

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\theta}^{\theta}\mathrm{d}\theta' = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}2\theta = \frac{\lambda\theta}{2\pi\varepsilon_0} \tag{10.26}$$

由此可见，当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，圆弧变成了半圆环，在半圆环中心的电势是

$$V = \frac{\lambda}{4\varepsilon_0}$$

当 $\theta = \pi$ 时，圆弧变成了圆环，由(10.26) 可得环心处的电势为

$$V = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}$$

圆心处的电场(图 10-4(d))　设图(d) 圆弧的圆心角之平分线为 x 轴(对称轴)，其方向向下。圆弧上电荷元 $\mathrm{d}q$ 在 O 点激发的电场为

$$d\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2}\hat{\boldsymbol{R}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\,d\theta'}{R^2}\hat{\boldsymbol{R}}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 为单位矢量。根据对称性，电场只有 x 方向的分量，即

$$dE_x=dE\cos\theta'=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\theta'\,d\theta'$$

式中的角度 θ' 是 $\hat{R}$ 与 x 轴的夹角，对此式积分得

$$\boldsymbol{E}=E_x\hat{\boldsymbol{i}}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{-\theta}^{\theta}\cos\theta'\,d\theta'\hat{\boldsymbol{i}}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}2\sin\theta\hat{\boldsymbol{i}}=\frac{\lambda\sin\theta}{2\pi\varepsilon_0 R}\hat{\boldsymbol{i}}\tag{10.27}$$

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，由上式可得

$$\boldsymbol{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\hat{\boldsymbol{i}}$$

这就是半圆环(图 10-4(c))在环心处的电场。当 $\theta=\pi$ 时，$\boldsymbol{E}=0$，这就是完整圆环中心处的电场。对于通过圆心 O 的轴线上(z 轴)的电势和电场，在此不再讨论，请读者自己计算。

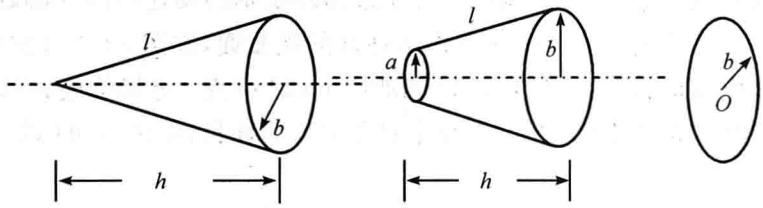


图 10-5　圆锥的切割

10.2.3　圆锥的切割

一个高为 h，底半径为 b 的实心圆锥可以切割成圆台和圆盘，如图 10-5 所示。如果把实心圆锥视为导体，则切割下来的圆台即为导体圆台，圆盘即为导体圆平面。对于圆台而言，可以计算其轴向电阻。对于圆盘面言，均匀带电后可计算电势和电场。如果圆锥是空心的，即为圆锥面，这时切割后的圆台为空心圆台，圆盘变为圆环。给圆锥面带上均匀面电荷密度就可以计算轴线上的电场。若以匀角速度 ω 绕轴转动，还可以计算轴线上的磁场。当圆锥面上密绕导线时，圆锥面或圆台变为螺线管，圆环变为圆电流。我们可以计算这些图形轴线上的磁场等。当圆锥面内的轴线上放置点电荷 q 时，可计算通过圆锥侧面的电通量。下面以图 10-5(b)为例讨论之。

视圆台为实心导体　当圆台为导体时，我们可以计算其轴向电阻。设轴线为 z 轴，坐标原点 O 选取在圆台的上底面圆心处。在圆台上距 O 为 z 处取一高度为 dz 的薄圆台，由电阻的定义得

$$dR=\rho\frac{dz}{S}=\rho\frac{dz}{\pi r^2}\tag{10.28}$$

式中 ρ 为导体的电阻率，r 为薄圆台的半径。再由几何关系可得

$$dz=\frac{h\,dr}{b-a}$$

将上式代入(10.28)式，并积分得

$$R=\rho\frac{h}{\pi(b-a)}\int_a^b\frac{dr}{r^2}=\rho\frac{h}{\pi ab}\tag{10.29}$$

很显然，当 $a=b$ 时，圆台变成圆柱，其电阻为

$$R=\rho\frac{h}{\pi b^2}$$

当 $a\to 0$ 时，(10.29) 式趋于无穷大，即表明圆锥体的轴向电阻是发散。

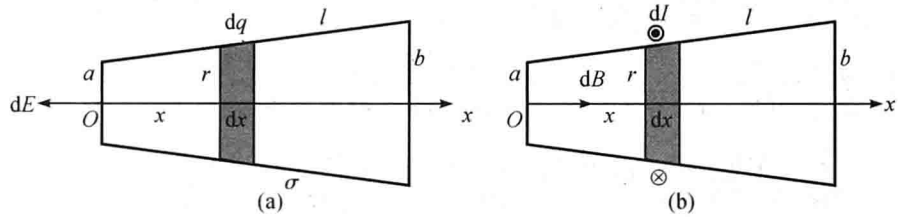


图 10-6　(a) 侧面均匀带电圆台坐标原点的电场，(b) 圆台形螺线管坐标原点的磁场

视圆台为空心带电面　设圆台的侧面带有均匀的面电荷密度 σ，坐标原点 O 在圆台上底面的圆心。选取对称轴为 x 轴，计算坐标原点 O 的电场强度，如图 10-6(a) 所示。圆台的侧面积为

$$S=\pi(a+b)l \tag{10.30}$$

在圆台上取一高度为 $\mathrm{d}x$ 的薄圆台，其侧面的电荷为

$$\mathrm{d}q=\sigma\mathrm{d}S=\sigma\pi(2r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}l=\frac{2\sigma\pi\sqrt{h^2+(b-a)^2}}{b-a}r\mathrm{d}r \tag{10.31}$$

式中 r 表示薄圆台的半径。把这个带电侧面视为一个带电圆环，于是由带电圆环的电场公式得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}=(-\hat{\boldsymbol{i}})\frac{x\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(r^2+x^2)^{3/2}}=(-\hat{\boldsymbol{i}})\frac{\sigma\sqrt{h^2+(b-a)^2}\,x r\mathrm{d}r}{2(b-a)\varepsilon_0(r^2+x^2)^{3/2}} \tag{10.32}$$

由圆台的几何关系得

$$x=(r-a)\frac{h}{(b-a)}$$

代入上式并整理得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}=(-\hat{\boldsymbol{i}})\frac{\sigma h(b-a)\sqrt{h^2+(b-a)^2}}{2\varepsilon_0}\frac{(r-a)r\mathrm{d}r}{\left[r^2((b-a)^2+h^2)-2ah^2r+h^2a^2\right]^{3/2}} \tag{10.33}$$

作变换，令

$$r=u+\frac{2ah^2}{2(b-a)^2+2h^2}=u+a'$$

$$k=\frac{4a^2h^4-4a^2h^2[(b-a)^2+h^2]}{4[(b-a)^2+h^2]^2}=-\frac{a^2h^2(b-a)^2}{[(b-a)^2+h^2]^2}=-\frac{a'^2(b-a)^2}{h^2}$$

其中

$$a'=\frac{ah^2}{(b-a)^2+h^2}$$

于是，(10.33) 式成为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{E}&=(-\hat{\boldsymbol{i}})\frac{\sigma h(b-a)}{2\varepsilon_0[(b-a)^2+h^2]}\frac{[u+a'-a][u+a']\mathrm{d}u}{(u^2-k)^{3/2}}\\&=(-\hat{\boldsymbol{i}})\frac{\sigma h(b-a)}{2\varepsilon_0[(b-a)^2+h^2]}\frac{[u^2+(2a'-a)u+a'(a'-a)]\mathrm{d}u}{(u^2-k)^{3/2}}\end{aligned} \tag{10.34}$$

对(10.34) 式积分得

$$\boldsymbol{E}=(-\hat{\boldsymbol{i}})\frac{\sigma h(b-a)}{2\varepsilon_0[(b-a)^2+h^2]}\int_{a-a'}^{b-a'}\frac{[u^2+(2a'-a)u+a'(a'-a)]\mathrm{d}u}{(u^2-k)^{3/2}}$$

$$=(-\hat{\boldsymbol{i}})\frac{\sigma h(b-a)}{2\varepsilon_0[(b-a)^2+h^2]}\left[\frac{1}{\sqrt{u^2-k}}\left(\frac{a'(a-a')-k}{k}u-(2a'-a)\right)+\ln(u+\sqrt{u^2-k})\right]_{a-a'}^{b-a'}$$

$$=(-\hat{\boldsymbol{i}})\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left\{\frac{h}{\sqrt{(b-a)^2+h^2}}-\frac{h(2b-a)}{\sqrt{[b(b-a)+h^2]^2+h^2a^2}}\right\}$$

$$+(-\hat{\boldsymbol{i}})\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{h(b-a)}{(b-a)^2+h^2}\ln\left\{\frac{b(b-a)+h^2+\sqrt{[b(b-a)+h^2]^2+h^2a^2}}{a(b-a)+a\sqrt{(b-a)^2+h^2}}\right\}\tag{10.35}$$

此式即为圆台上底面中心的电场强度。当 $a=b$ 时，上式简化成

$$\boldsymbol{E}=(-\hat{\boldsymbol{i}})\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left\{1-\frac{b}{\sqrt{h^2+b^2}}\right\}\tag{10.36}$$

这就是均匀带电圆柱面在其一个底面中心的电场强度。

视圆台为密绕的螺线管　设坐标原点 O 建立在圆台的上底面(即半径为 a 处)中点，对称轴为 x 轴，如图 10-6(b) 所示。线圈沿着高度单位长度的匝数为 n，在距离原点为 x 处取一环形电流 $\mathrm{d}I=nI\mathrm{d}x$，该环形电流在原点 O 所激发的磁场为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{i}}\frac{\mu_0\mathrm{d}Ir^2}{2(r^2+x^2)^{3/2}}=\hat{\boldsymbol{i}}\frac{\mu_0nI\mathrm{d}xr^2}{2(r^2+x^2)^{3/2}}=\hat{\boldsymbol{i}}\frac{1}{2}\mu_0nIg\frac{r^2\mathrm{d}r}{[r^2(1+g^2)-2ag^2r+g^2a^2]^{3/2}}\tag{10.37}$$

将变量 r 作如下变换：

$$r=u-\frac{-2ag^2}{2(1+g^2)}=u+a_0$$

$$k'=\frac{(-2ag^2)-4(1+g^2)a^2g^2}{4(1+g^2)^2}=-\frac{ag}{(1+g^2)}=-k$$

$$\mathrm{d}x=\mathrm{d}r\frac{h}{(b-a)}=g\mathrm{d}r$$

其中

$$k=\frac{ga}{1+g^2},\quad a_0=\frac{ag^2}{1+g^2}$$

$$g=\frac{h}{b-a}$$

于是，(10.37) 式可写成

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{i}}\frac{1}{2}\mu_0nI\frac{g}{(1+g^2)^{3/2}}\frac{(u^2+2a_0u+a_0^2)\mathrm{d}u}{(u^2+k^2)^{3/2}}\tag{10.38}$$

对上式积分得

$$\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{i}}\frac{1}{2}\mu_0nI\frac{g}{(1+g^2)^{3/2}}\int_{a-a_0}^{b-a_0}\frac{(u^2+2a_0u+a_0^2)}{(u^2+k^2)^{3/2}}\mathrm{d}u$$

$$=\hat{\boldsymbol{i}}\frac{1}{2}\mu_0nI\frac{g}{(1+g^2)^{3/2}}\left[(g^2-1)\frac{u}{\sqrt{u^2+k^2}}+\ln(u+\sqrt{u^2+k^2})-\frac{2a_0}{\sqrt{u^2+k^2}}\right]_{a-a_0}^{b-a_0}$$

$$=\hat{\boldsymbol{i}}\frac{1}{2}\mu_0nI\left\{\frac{h}{\sqrt{(b-a)^2+h^2}}\frac{[h^2-b(b-a)]}{\sqrt{[b(b-a)+h^2]^2+h^2a^2}}+\frac{h(b-a)}{(b-a)^2+h^2}\right\}$$

$$+\hat{\boldsymbol{i}}\frac{1}{2}\mu_0nI\frac{h(b-a)^2}{[(b-a)^2+h^2]^{3/2}}\ln\left[\frac{b(b-a)+h^2+\sqrt{[b(b-a)+h^2]^2+h^2a^2}}{a(b-a)+a\sqrt{(b-a)^2+h^2}}\right]\tag{10.39}$$

当 $a=b$ 时，圆台形线圈变成圆柱形线圈，上式化简为

$$\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{i}}\frac{1}{2}\mu_0 nI\frac{h}{\sqrt{h^2+b^2}}=\hat{\boldsymbol{i}}\frac{1}{2}\mu_0 nI\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{b^2}{h^2}}}$$

很明显，当 $h\gg b$ 时，此结果就是长直螺线管一端点的磁场。

10.2.4　平板的切割

一块厚度为 d 的均质大平板，通过垂直于平板的法线方向切割，可以得到大的平面；与平板法线平行的方向切割，可以获得平面窄条，如图 10-7 所示。若将平板带上均匀的电荷密度 ρ，平面带上均匀的面电荷密度 σ，就成为带电体。这些带电体是我们常见的物理模型，主要是求解空间的电场分布。如果将平板通以稳恒电流密度（单位面积的电流）j，平面通以面电流密度（单位长度的电流）α，则这些图形就成为载流系统。求解这些系统的磁场分布也是我们的主要任务。下面以图 10-7(a) 的平板为例讨论之。

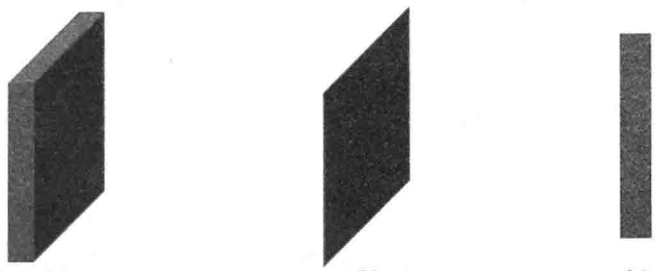


图 10-7　平板的切割

带电平板　设平板的厚度为 d，且带有均匀的电荷密度 ρ，在 y 和 z 方向是无限的。求该带电平板的电场分布。将坐标原点建立在平板厚度的对称中心线上，x 轴与平板法线平行，y 轴与平板中心线重合。由对称性可知，在对称面两侧等距离 x 处的场强大小相等，方向垂直于该对称面且指向两侧。当 $x<\dfrac{d}{2}$ 时，场点位于平板内，跨过对称面作一圆柱形高斯面，其底面积为 ΔS，底面与对称面的距离为 x，如图 10-8(a) 所示。由高斯定理得

$$\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{\text{side}} E\cos\theta \mathrm{d}S+2\iint_{\text{bottom}} E\cos\theta \mathrm{d}S=0+2E\Delta S=\rho(2x\Delta S)/\varepsilon_0$$

由此可得

$$\boldsymbol{E}=\frac{\rho x}{\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{i}},\quad x<\frac{d}{2} \tag{10.40}$$

当 $x>\dfrac{d}{2}$ 时，场点位于平板之外。同样，跨过对称面作一圆柱形高斯面，这时两个底面在平板外，由高斯定理得

$$2E\Delta S=\rho(d\Delta S)/\varepsilon_0$$

即

$$\boldsymbol{E}=\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{i}},\quad x>\frac{d}{2} \tag{10.41}$$

若平板的电荷密度 ρ 随距离 x 线性增加（见图 10-8(b)），即

$$\rho(x)=ax,\quad 0\leqslant x\leqslant d$$

其中 a 是常数。这时平板没有对称面，坐标原点已移至电荷密度为零的平面处。尽管电荷分布不均匀，但是，板外的电场仍然与平板垂直且两侧大小相等。作一柱形高斯面，让其跨过板的两侧。由高斯定理得

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 2E_1\Delta S = \frac{\int_0^d \rho \mathrm{d}\tau}{\varepsilon_0} = \frac{\Delta S\int_0^d ax\,\mathrm{d}x}{\varepsilon_0} = \frac{ad^2}{2\varepsilon_0}\Delta S$$

由此可得板两侧电场的大小为

$$E_1 = \begin{cases} \dfrac{ad^2}{4\varepsilon_0}, & x \geqslant d \\ -\dfrac{ad^2}{4\varepsilon_0}, & x < 0 \end{cases} \tag{10.42}$$

对于板内的电场来说，让柱形高斯面跨过 $x=0$ 的平面，由高斯定理得

$$E_1\Delta S + E_2\Delta S = \frac{\Delta S\int_0^x ax\,\mathrm{d}x}{\varepsilon_0} = \frac{ax^2}{2\varepsilon_0}\Delta S$$

于是

$$E_2 = \frac{ax^2}{2\varepsilon_0} - E_1 = \frac{a}{4\varepsilon_0}(2x^2 - d^2), \quad 0 < x < d \tag{10.43}$$

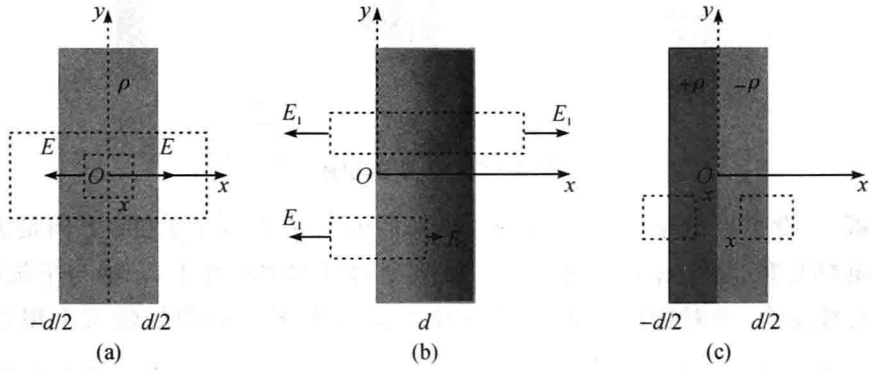


图 10-8　平板的三种电荷分布

若平板厚度的一半电荷密度为 $+\rho$，另一半的电荷密度为 $-\rho$，即电荷分布为（见图 10-8(c)）

$$\rho(x) = \begin{cases} +\rho, & -\dfrac{d}{2} < x < 0 \\ -\rho, & \dfrac{d}{2} > x > 0 \end{cases}$$

选取正负电荷交界面为 $x=0$ 的平面。在平板之外，由高斯定理得

$$E_1 = 0, \quad \frac{d}{2} < x < -\frac{d}{2} \tag{10.44}$$

在正电荷区，高斯面的一个底面在板外，另一个在正电荷区距坐标原点为 x，于是有

$$E_+ = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{-\frac{d}{2}}^{x}\rho(x)\mathrm{d}x = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(x + \frac{d}{2}\right), \quad -\frac{d}{2} \leqslant x \leqslant 0 \tag{10.45}$$

在负电荷区，电场强度为

$$E_- = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{x}^{\frac{d}{2}}\rho(x)\mathrm{d}x = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{d}{2} - x\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{d}{2} \tag{10.46}$$

由此可见，在 $x=0$ 的电荷分界面上，其电场为 $E(x=0)=\frac{\rho d}{(2\varepsilon_0)}$。

载流平板　设载流平板的厚度为 d，在 y 和 z 方向是无限的，载有均匀的体电流密度(volume current density) $\boldsymbol{j}=-j_0\hat{\boldsymbol{k}}$，如图 10-9(a) 所示。由于这个问题有很好的对称性，可以利用安培环路定理求解磁场的分布。

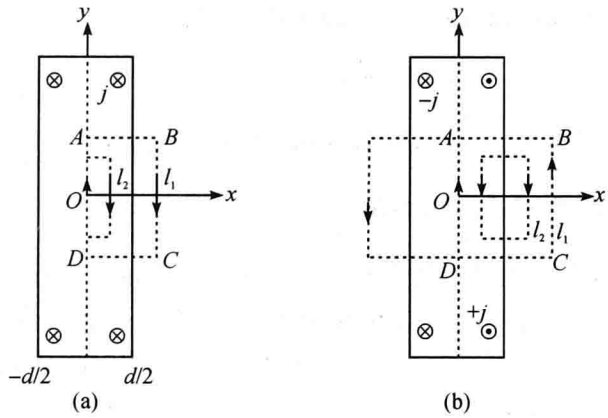


图 10-9　平板的两种载流形式

求解平板外部的磁场时，作一顺时针的矩形回路 $ABCDA$。由于对称性，$x=0$ 的平面上磁场为零。又因为磁场的方向沿着 y 轴的反方向，所以回路的 AB 和 CD 段对积分无贡献。根据安培环路定理，我们有

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=Bl_1=\mu_0 j_0\frac{d}{2}l_1$$

由此可得

$$\boldsymbol{B}=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\mu_0 j_0 d\hat{\boldsymbol{j}}, & x\geqslant\dfrac{d}{2}\\[2ex] \dfrac{1}{2}\mu_0 j_0 d\hat{\boldsymbol{j}}, & x\leqslant\dfrac{d}{2}\end{cases}\tag{10.47}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{j}}$ 是 y 轴方向的单位矢量。同理，在平板的内部，作一类似的矩形回路，运用安培环路定理得

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=Bl_2=\mu_0 j_0 x l_2$$

于是有

$$\boldsymbol{B}=\mu_0 j_0 x(-\hat{\boldsymbol{j}}),\quad -\frac{d}{2}<x<\frac{d}{2}\tag{10.48}$$

如果将两块厚度均匀为 $\frac{d}{2}$，相互绝缘且载有反电流的平板叠合在一起就构成了图 10-9(b) 的情况。在平板之外，运用安培环路定理得

$$B_1=0,\quad |x|>\frac{d}{2}$$

在平板的内部的正电流区(设 z 轴方向的电流为正)，由安培环路定理得

$$B_+ l_2=\mu_0 j_0\left(\frac{d}{2}-x\right)l_2$$

由此可得

$$B_+ = \mu_0 j_0 \left(\frac{d}{2} - x\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{d}{2} \tag{10.49}$$

同理，在平板内的负电流区磁场为

$$B_- = \mu_0 j_0 \left(\frac{x+d}{2}\right), \quad \frac{-d}{2} \leqslant x \leqslant 0 \tag{10.50}$$

由(10.49)式或(10.50)式可知，在 $x = 0$ 的平面上，磁场为

$$B_0 = \frac{1}{2}\mu_0 j_0 d, \quad x = 0$$

上述结果也可以运用图 10-9(a) 的结果求得，请读者自己验证。

10.2.5 圆平面与正方平面的切割

一个半径为 R 的圆平面也是电磁学中常用的模型。通常计算均匀带电圆平面轴线上的电势或电场强度，还可以计算圆心和圆边缘的电势。我们可以把圆平面作为一个基本图形，通过切割构建出如图 10-10(b)、(c)、(d) 和(e) 所示的空心环带、半圆形、部分环带、扇形等面带电图形。对于图10-10(b)(c)和(d)来说，可以计算中心O和垂直通过圆心之轴线上的电场和电势；而图 10-10(e) 只能求解 O 点的电势，不能求 O 点电场，因为 O 点的电场是发散的，但是垂直通过 O 点之轴线上的电场和电势可以求解。

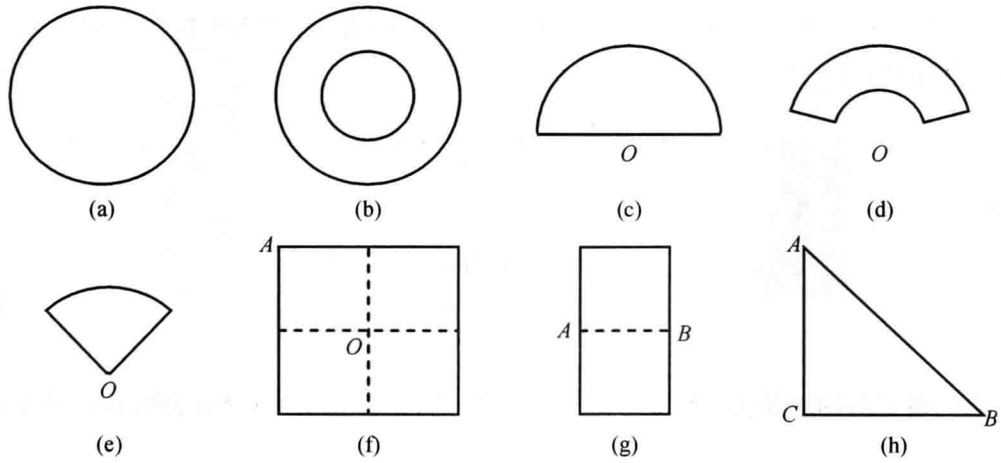


图 10-10　圆平面和正方形平面的切割

同理，一个边长为 a 的均匀带电正方形平面，也是经常遇到的问题(见图 10-10(f))。通常计算与正方形平面垂直的对称轴上、正方形中心及四个顶点的电势(参见 9.2.3)。我们也可以把它作为一个基本图形进行切割，构建出长方形、等腰三角形等，如图 10-10(g) 和(h)所示。将这些平面带上均匀的面电荷，就成为特殊的带电面。对于图 10-10(g) 来说，可以利用正方形顶点的电势来求解长方形 A 或 B 点的电势。而图 10-10(h) 也可以利用 9.2.3 正方形带电平面的计算方法求出 A、B 和 C 点的电势。这一部分也留给读者自己考虑。

第11章 旋转法

在力学中，物体的运动状态改变所产生的物理效应是不相同的。比如，静止物体虽有能量，但没有动能；物体的平动具有平动动能，通过运动状态的变化可以获得更大的动能、动量和冲量；物体的转动可以获得转动动能等。同样，在电磁学中，在一定的条件下改变带电体的运动形态或物体的状态也会产生新的物理效应。例如，带电粒子在磁场中的运动除了运动形态外还有磁效应的产生；在玻尔模型中，原子中电子绕核作轨道运动可以产生磁效应等。在这一章中，我们主要涉及物体转动所产生的电、磁物理效应。

11.1 旋转法界定

旋转，是指物体围绕一个点或一个轴做圆周运动，如地球绕地轴旋转，同时也围绕太阳旋转。物体的旋转运动是自然界的一种常见也是十分重要的物体运动形态。日常生活中通过旋转物体来获取能量的事例不胜枚举，如切割机、车床、直升机等。在电磁学中，带电体的定点或定轴转动会形成电流；导体棒在磁场中的定点转动会出现电动势；线圈在磁场中的定轴转动会产生电动势等都是旋转所带来的物理效应。因此，通过旋转可以构建电磁学的某些问题。

何谓旋转法？旋转法是指处于一定物理状态下或处在一定物理环境中的物体围绕一个点或一个轴做旋转运动而形成新的物理效应的一种方法。这里所强调的是要产生新的物理效应，比如一个塑料圆环作定轴转动只有转动动能，而没有电场能和磁场能。当一个塑料环带上均匀的电荷时绕轴转动除了转动动能外还有电场和磁场的产生，这就是新的物理效应。再比如，当一个线圈在均匀磁场中作定轴转动时会产生电动势或电流；一个金属圆盘在磁场中作定轴转动会产生电动势；一个载流线圈在磁场中会发生转动，这个模型可应用于介质的磁化；一个电偶极子在电场中也会发生转动，这是电介质极化的一个模型。因此，物体以一定的方式旋转起来在电磁学中是一个十分常见的问题，利用旋转法可以构建出新的物理问题。下面通过几个范例来阐明这一方法的运用。

11.2 旋转法范例

11.2.1 点电荷的定点转动

一个处于静止状态的点电荷只能激发静电场，但当点电荷运动起来就可以产生“新”的场 — 磁场。一个带电粒子在均匀磁场中作匀速圆周运动就相当于一个电流圈；一个电子绕原子核的旋转也相当于一个电流圈，分子的磁矩可等效看成电子的轨道运动和自旋运动形成的。这些电荷的转动都有一个固定的转动中心，电荷是相对于这个中心点转动的。电子绕核做圆周运动是以库仑力作为向心力的，磁场中作圆周运动的带电粒子是靠洛仑兹力作为向心力的。如果将一小球带上电荷并系上绝缘绳子旋转起来，这时也相当于一个电流圈，给小球提供向心力的是绳子的张力。图 11-1 给出了以上这几种情形的点电荷定点转动的例子，图 11-1(a) 表示带电粒子在均匀外磁场 B_0 中作匀速圆周运动，图 11-1(b) 表示电子绕原

子核的运动，图 11-1(c) 代表带电粒子受到拉力作用下作圆周运动。这三种电荷的运动在空间产生相似的磁场分布。下面以图 11-1(a) 为例计算圆心处的磁场。

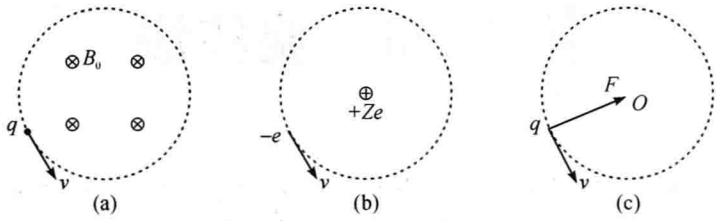


图 11-1　带电粒子的圆周运动

设带电粒子的电荷为 q，质量为 m，圆周运动的角速度为 ω，半径为 R。带电粒子受磁场的作用以洛仑兹力充当相向心力：

$$qvB_0 = m\frac{v^2}{R}$$

由此可得

$$R = \frac{mv}{qB_0} = \frac{v}{\omega} \tag{11.1}$$

其中

$$\omega = \frac{qB_0}{m}$$

电荷 q 的圆周运动相当于一个圆形电流，其值可表示为

$$I = \frac{\omega}{2\pi}q = nq \tag{11.2}$$

这里 n 是转速。该电流在圆心处所产生的磁场是

$$B'_O = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 nq}{2R} = \frac{\mu_0 q^2 B_0}{4\pi mR}$$

因此，圆心处的合磁场为

$$B_O = B_0 - B'_O = B_0 - \frac{\mu_0 q^2 B_0}{4\pi mR} = B_0\left(1 - \frac{\mu_0 q^2}{4\pi mR}\right) \tag{11.3}$$

此式表明，带电粒子做圆周运动所产生的磁场是与外场方向相反的，表现出抗磁性的特点。圆电流的磁矩为

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{2\pi}q\pi R^2 = \frac{q}{2m}\boldsymbol{L} \tag{11.4}$$

其中 L 是轨道角动量。

11.2.2　均匀带电体的定轴转动

一个半径为 R，均匀带电为 Q 的圆环，其静止时只有电场。当其绕对称轴以一定转速 n 旋转起来时，形成一个圆形电流，除了电场外还有磁场的产生，这是一个带电体定轴转动最为典型、最为简单的例子。带电圆盘、带电球面或球体、带电圆柱面或圆柱体绕其对称轴的定轴转动也为大家所熟悉的例子，这些带电体旋转所产生的磁效应，可以借助圆电流的磁效应规律加以解决。另外，一根长为 l 的均匀带电细棒定点或定轴转动也可视为一个载流圆盘；一个半径为 R 的均匀带电细圆环绕其直径的旋转，相当于一个载流球面。图 11-2 给出了几种常见的旋转带电体，图 11-2(a)(b)(c)(d) 和(e) 分别是旋转带电圆环、旋转带电圆盘、旋转带电球、旋转带电圆柱面、旋转半圆环。图 11-2(f) 和(g) 是不同半径的同心半圆环的组合，可以绕垂直于环平面过圆

心的轴旋转，也可以绕其直径轴旋转。图 11-2(h) 是半圆环与线段的组合，旋转方法也可有三种。除此之外，还可以构建出旋转棒、旋转球冠、旋转薄圆盘带以及与转轴成一定角度的旋转带电线(图形是旋转圆台) 等。下面分别讨论旋转带电圆盘和带电球的问题。

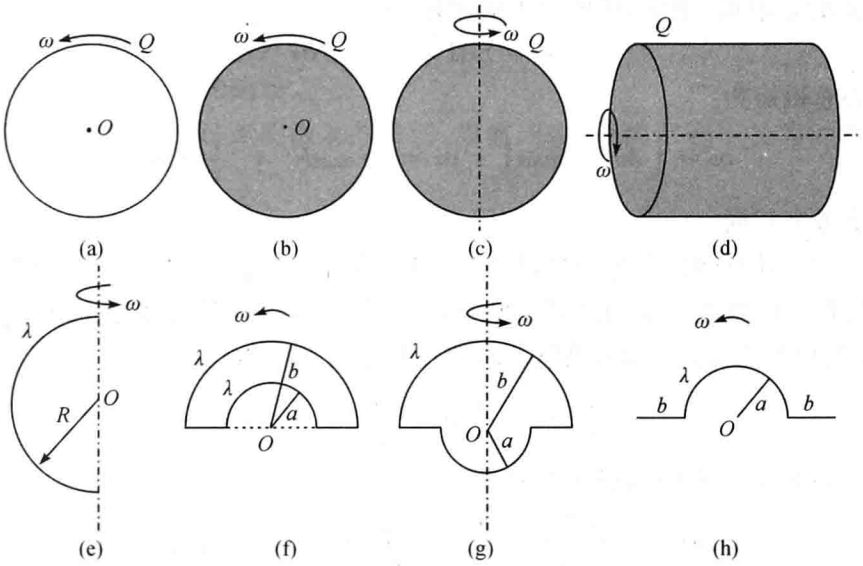


图 11-2　均匀带电体的定轴转动

旋转圆盘　设圆盘的半径为 R，带有均匀的面电荷密度 σ，今圆盘以恒定的角速度 ω 绕自身的中心对称轴旋转。盘的旋转带动电荷的流动形成一个载有面电流的载流圆盘，这个载流圆盘在轴线上激发的磁场可以视为许多环形电流所产生磁场的叠加。一个半径为 r 环形电流在轴线上(z 轴) 所产生的磁场为

$$B = \frac{\mu_0 I r^2}{2(r^2 + z^2)^{3/2}} \tag{11.5}$$

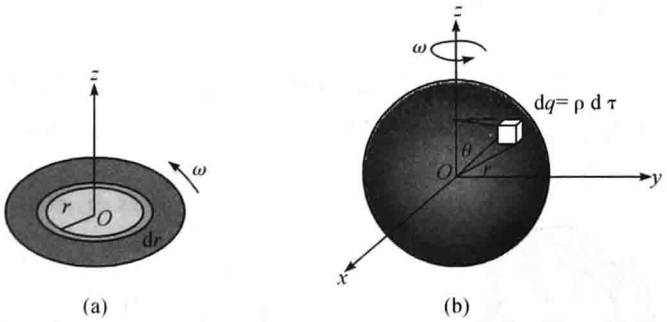


图 11-3　(a) 旋转圆盘，(b) 旋转球

为了应用上式，把旋转圆盘分成许多小环形电流，如图 11-3(a) 所示。在半径为 r，宽度为 dr 的圆形环带上所形成的等效电流为

$$\mathrm{d}I = \frac{\omega}{2\pi}\mathrm{d}q = \frac{\omega}{2\pi}\sigma 2\pi r \mathrm{d}r = \omega\sigma r\,\mathrm{d}r \tag{11.6}$$

该电流在轴线上所产生的磁感强度为

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 r^2 \omega\sigma r\,\mathrm{d}r}{2(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

方向沿着角速度的方向，即 z 轴的方向。整个旋转圆盘的磁感强度是

$$B = \frac{\mu_0\omega\sigma}{2}\int_0^R \frac{r^3\,\mathrm{d}r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0\omega\sigma}{2}\left(\frac{R^2 + 2z^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 2z\right) \tag{11.7}$$

这里的积分运用了附录 A 中的第(22)式。令上式中的 $z=0$，即可得到盘心处的磁感强度

$$B=\frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega R=\frac{1}{2}\frac{\mu_0 Q}{\pi R}\omega \tag{11.8}$$

式中 Q 为圆盘的总电荷。电流 $\mathrm{d}I$ 所产生的磁矩是

$$\mathrm{d}m=S\mathrm{d}I=\pi r^2\omega\sigma r\,\mathrm{d}r$$

整个旋转盘的总磁矩为

$$m=\int \mathrm{d}m=\pi\omega\sigma\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\pi\omega\sigma R^4=\frac{1}{4}\omega QR^2 \tag{11.9}$$

方向与角速度方向相同。

旋转球 (1) 计算磁矩和球心处的磁感强度。设球的半径为 R，带有均匀的体电荷密度 ρ。当球绕自身直径以角速度 ω 匀速转动时，带电球体变成一个载流球体。在球体内取一小体积元 $\mathrm{d}\tau$，相应的电荷为 $\mathrm{d}q=\rho\mathrm{d}\tau$，该电荷环绕 z 轴旋转所产生的电流是

$$\mathrm{d}I=\frac{\omega}{2\pi}\mathrm{d}q=\frac{\omega}{2\pi}\rho\mathrm{d}\tau=\frac{\omega}{2\pi}\rho r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r \tag{11.10}$$

此电流在球心 O 处所产生的磁感强度为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\,\mathrm{d}I r^2\sin^2\theta}{2r^3}=\frac{\mu_0\omega\rho}{4\pi}r\mathrm{d}r\sin^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

积分得

$$B=\int \mathrm{d}B=\frac{\mu_0\omega\rho}{4\pi}\int_0^R r\mathrm{d}r\int_0^\pi\sin^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{3}\mu_0\omega\rho R^2 \tag{11.11}$$

方向与角速度方向一致。旋转轴上其他各点的磁感强度不再讨论(请读者自己计算)。类似地，旋转球体的磁矩是

$$m=\int S\mathrm{d}I=\int_0^R\mathrm{d}r\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\quad\pi r^2\sin^2\theta\,\frac{\omega}{2\pi}\rho r^2\sin\theta=\frac{4}{15}\pi\omega\rho R^5 \tag{11.12}$$

方向与 ω 方向一致。

(2) 计算球内外的磁感强度 B 的分布。设球内任一点 P 到球心的距离为 $r(r<R)$，该点的磁感强度由半径为 r 的小球在小球外所产生的 B_1 和内半径为 r、外半径为 R 的球壳在该点所产生的磁感强度 B_2 的叠加而成，如图 11-4 所示。

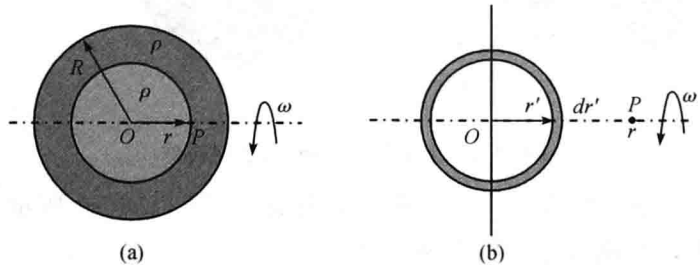


图 11-4 均匀带有体电荷密度的球划分成半径为 r 的小球和$(R-r)$的球壳

先计算小球在 P 点的磁感强度。在小球内取一半径为 r'、厚度为 $\mathrm{d}r'$ 的薄球壳，该球壳的电量为

$$\mathrm{d}q=\rho\mathrm{d}\tau=\rho 4\pi r'^2\mathrm{d}r'$$

由(10.23)式旋转带电球面外的磁感强度为

$$\boldsymbol{B}=\frac{2\mu_0\sigma\omega R}{3}\frac{R^3}{r^3}=\frac{\mu_0 q\omega}{6\pi R}\frac{R^3}{r^3},\quad r>R \tag{11.13}$$

将此结果应用于带电球壳(参见图 11-4(b))得

$$dB_1 = \frac{\mu_0 dq}{6\pi r'}\left(\frac{r'}{r}\right)^3 \omega = \frac{2\mu_0 \rho\omega}{3r^3} r'^4 dr'$$

积分得

$$B_1 = \frac{2\mu_0 \rho\omega}{3r^3}\int_0^r r'^4 dr' = \frac{2\mu_0 \rho\omega}{3r^3}\frac{r^5}{5} = \frac{2}{15}\mu_0 \rho\omega r^2 \tag{11.14}$$

这就是小球在 P 点所产生的磁场。

再计算带电薄球壳在 P 点所激发的磁场。为此，在球壳内取一半径为 l、厚度为 dl 的球壳，其电荷为

$$dq = \rho d\tau = \rho 4\pi l^2 dl$$

同理，应用(10.22) 式得

$$dB_2 = \frac{\mu_0 dq}{6\pi l}\omega = \frac{2}{3}\mu_0 \rho\omega l\, dl$$

积分得

$$B_2 = \frac{2}{3}\mu_0 \rho\omega\int_r^R l\, dl = \frac{1}{3}\mu_0 \rho\omega(R^2 - r^2) \tag{11.15}$$

因此，P 点的总磁感强度为

$$B_P = B_1 + B_2 = \frac{2}{15}\mu_0 \rho r^2 \omega + \frac{1}{3}\mu_0 \rho(R^2 - r^2)\omega = \frac{1}{15}\mu_0 \rho(5R^2 - 3r^2)\omega, \quad r < R \tag{11.16}$$

方向与角速度 ω 方向一致。显然，当 $r = 0$ 时，上式约化到(11.11) 的结果。

接下来考虑球外的磁感强度。为此，运用式(11.13) 得

$$dB = \frac{\mu_0 (dq)\omega}{6\pi r'}\frac{r'^3}{r^3} = \frac{\mu_0 (\rho 4\pi r'^2 dr')\omega}{6\pi r'}\frac{r'^3}{r^3} = \frac{2\mu_0 \rho\omega}{3r^3} r'^4 dr'$$

积分得

$$B = \frac{2\mu_0 \rho\omega}{3r^3}\int_0^R r'^4 dr' = \frac{2}{15}\mu_0 \rho\omega\left(\frac{R^5}{r^3}\right), \quad r > R \tag{11.17}$$

方向与角速度方向相同。

11.2.3　导体棒的定点或定轴转动

一根长为 L 的导体细棒在磁场中作定点转动是计算动生电动势的典型例子。在这个例子中，棒、磁场和转动线速度三者互相垂直。如果选择与磁场方向平行的轴作为转轴，棒绕定轴转动可以有三种形式，如图 11-5(a)、(b)、(c) 所示。另一方面，一个导体薄圆盘在垂直磁场中旋转可以视为许多导体棒的旋转，这种旋转金属圆盘常称为法拉第圆盘发电机(Faraday disk generator) 如图 11-5(d) 所示。下面以图 11-5(a) 和(d) 为例讨论之。

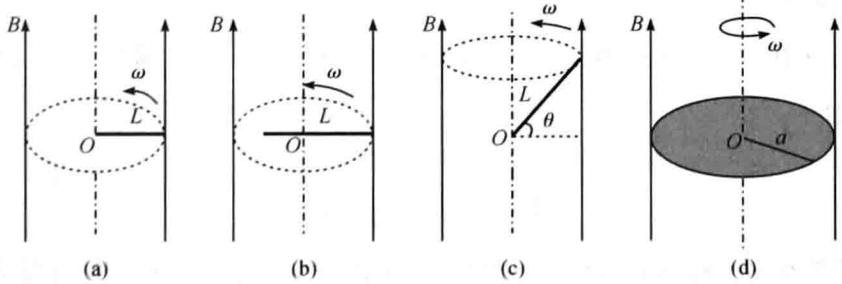


图 11-5　导体棒及金属圆盘在磁场中的旋转

金属棒在磁场中的定点转动 设图 11-5(a) 中金属棒长为 L，与磁场 B 垂直，且以角速度 ω 匀速绕 O 点作定点旋转。根据动生电动势的定义，在 L 上取一小段 $\mathrm{d}l$，该小段上的电动势为

$$\mathrm{d}\varepsilon = (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = vB\,\mathrm{d}l = l\omega B\,\mathrm{d}l$$

棒上的总电动势为

$$\varepsilon = \int \mathrm{d}\varepsilon = \omega B\int_0^L l\,\mathrm{d}l = \frac{1}{2}\omega BL^2 \tag{11.18}$$

转动端的电势高于 O 点(定点) 的电势。

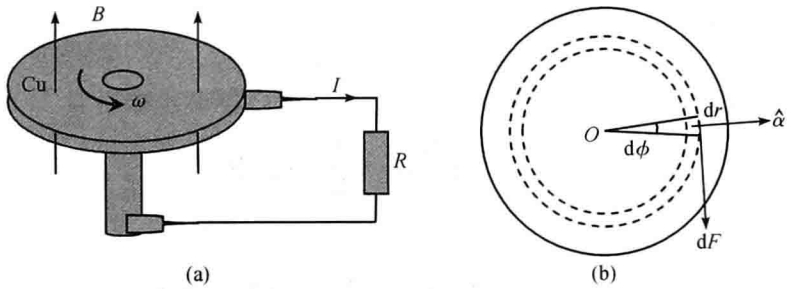


图 11-6 (a) 法拉第圆盘发电机，(b) $\mathrm{d}r$ 长度电流所受的安培力 $\mathrm{d}F$

法拉第圆盘发电机 设图 11-5(d) 金属圆盘的半径为 a，以匀角速度 ω 绕通过盘心的对称轴旋转，而对称轴与磁场 B 平行。圆盘的电动势与一电阻 R 相连，形成闭合电路，如图 11-6(a) 所示。圆盘旋转所产生的电动势为

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\omega Ba^2 \tag{11.19}$$

由欧姆定律，通过电阻 R 的电流为

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{1}{2R}\omega Ba^2 \tag{11.20}$$

这个电流 I 以面电流密度 $\boldsymbol{\alpha}$(单位长度的电流) 的形式分布在圆盘表面上。沿着圆盘半径方向 $\mathrm{d}r$ 长度的电流为

$$\mathrm{d}I = \alpha\mathrm{d}l = \alpha r\,\mathrm{d}\varphi$$

由安培力公式，该元电流所受到的安培力为(见图 11-6(b))

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \mathrm{d}I\mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\alpha}r\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\alpha}\mathrm{d}S\times\boldsymbol{B}$$

其中面积元

$$\mathrm{d}S = r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$$

作用于圆盘上的力矩为

$$\boldsymbol{M} = \int\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \int\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\alpha}\mathrm{d}S\times\boldsymbol{B})$$

利用三个矢量的叉积公式

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

(11.21) 式可写为

$$\boldsymbol{M} = \int[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{\alpha} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{B}]\mathrm{d}S = -\boldsymbol{B}\int_0^a\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\alpha})r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = -B\hat{\boldsymbol{k}}\int_0^{2\pi}\alpha_r(r,\varphi)r\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\mathrm{d}r$$

$$= -\frac{IBa^2}{2}\hat{\boldsymbol{k}} \tag{11.21}$$

其中

$$I = \int_0^{2\pi}\alpha_r(r,\varphi)r\mathrm{d}\varphi$$

是圆盘上通过半径为 r 的圆的总电流，也即通过电阻 R 的电流。力矩的方向与 B 的方向相反(选取 z 轴方向与 B 相同)。

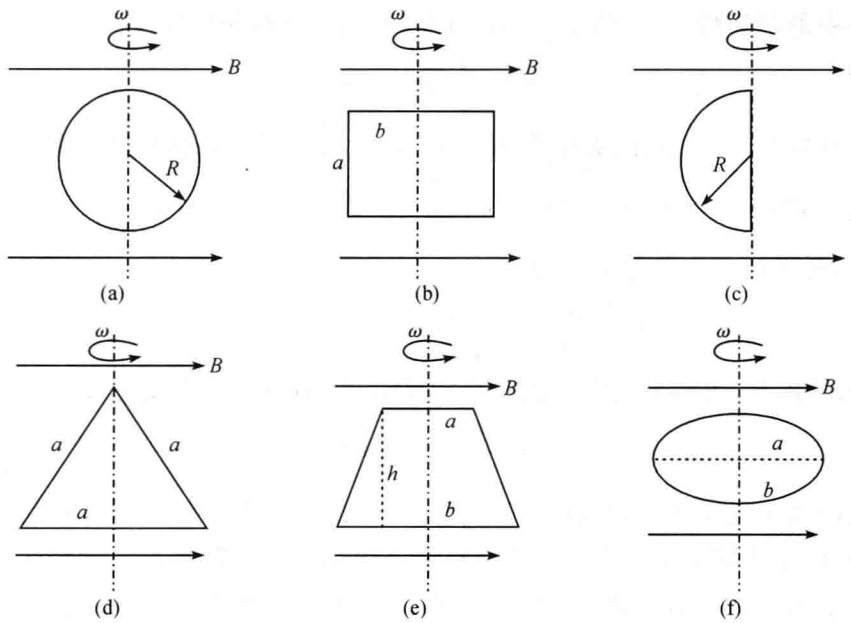


图 11-7　导线回路或线圈在磁场中的转动

11.2.4　线圈的定轴转动

一个导线回路或线圈在磁场中绕自身对称轴(或非对称轴)旋转,只要旋转轴与磁场方向不一致或者穿过回路的磁通量发生变化,就会在回路中产生电动势和电流。比如,矩形线圈在均匀磁场中的转动、圆形线圈在磁场中的转动等。图 11-7(a)、(b)、(c)、(d)、(e)和(f)分别表示圆形线圈、矩形线圈、半圆形线圈、三角形线圈、梯形线圈和椭圆形线圈绕固定轴旋转的情况。除了这几种形状外,还可以构建出菱形、正五边形、正六边形、扇形等线圈回路。这些图形可以看成圆形回路的变形,从这个意义来说,也可属于形变法范畴(参见第 8 章)。比如,将图 11-7(c)的形状变为等边三角形,并让其中一条边与转轴重合,可求三个顶点间的电势差。通常对这些旋转问题是求解回路的电动势、电势差或电流。另一方面,如果一个线圈或导线回路中通以电流,将其放置于磁场中也可能发生定轴转动,如图 11-8 所示。对于这种情况来说,主要是求解线圈转动的力矩、磁场对线圈所做的功(假定线圈中的电流不变)、磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 或线圈中的电流等。下面以图 11-7(e)和图 11-8(b)为例讨论之。

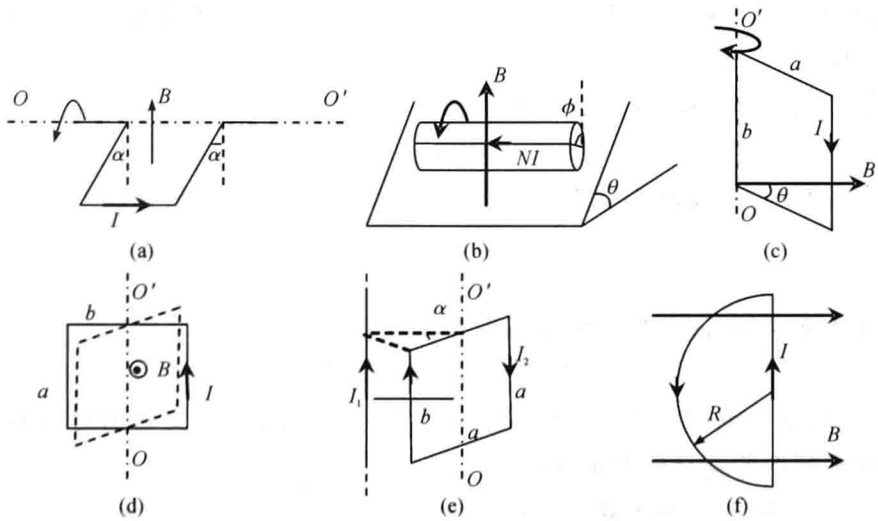


图 11-8　在磁场中的载流线圈

旋转梯形中的电动势 由图 11-7(e) 可知，梯形回路的面积为

$$S = \frac{1}{2}(a+b)h$$

设某一时刻 t 回路法线与磁场的夹角为 $\theta(t) = \omega t$，此时穿过回路的总磁通量为

$$\Psi(t) = N\Phi(t) = N\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S} = BS\cos\omega t = \frac{1}{2}(a+b)hB\cos\omega t$$

由法拉第定律，梯形回路中的电动势为

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Psi(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}(a+b)hNB\omega\sin\omega t \tag{11.22}$$

式中 N 为线圈的匝数。当梯形线圈的法线与 B 垂直时，回路中的电动势最大，即

$$\varepsilon_{\max} = \frac{1}{2}(a+b)hNB\omega \tag{11.23}$$

此结果可以利用动生电动势公式进行验证。由于梯形的上底和下底与 $\boldsymbol{B}$ 没有切割，因此两底边没有电动势，回路中的电动势完全由两斜边所产生。但是，问题具有轴对称性，两条斜边所产生的电动势是相等的。为此，设图 11-7(e) 的回路法线与 $\boldsymbol{B}$ 垂直。在斜边上任取一小长度 $\mathrm{d}l$，由动生电动势的公式可得

$$\mathrm{d}\varepsilon_1 = N(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = Nv B\cos\alpha\,\mathrm{d}l = N\omega\left(\frac{a}{2}+\frac{(b-a)}{2h}y\right)B\,\mathrm{d}y \tag{11.24}$$

其中 α 是梯形斜边与其高 h 间的夹角，y 是上底边 a 到 $\mathrm{d}l$ 所在处的轴向距离，而 $\mathrm{d}y = \mathrm{d}l\cos\alpha$。对上式积分得

$$\varepsilon_1 = N\omega B\int_0^h\left(\frac{a}{2}+\frac{(b-a)}{2h}y\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{4}(a+b)hNB\omega$$

总电动势为

$$\varepsilon = 2\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(a+b)hNB\omega \tag{11.25}$$

可见，上式与(11.24) 式相同。

斜面上的载流线圈 如图 11-8(b) 所示，在一个质量为 m、半径为 R、长为 l 的均匀圆柱体上绕有 N 匝细导线(不计导线质量)，导线与圆柱体轴线共面。将圆柱放在倾角为 θ 的斜面上，其轴线是水平的，导线中通以电流 I，整个系统处在垂直向上的均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中。当圆柱体静止时，线圈平面与斜面的夹角为 φ。若已知 B，可以通过力矩平衡来求电流 I 或者已知电流 I 求磁感强度 $\boldsymbol{B}$。

根据力学知识，圆柱体的重力沿斜面向下的分量为

$$F = mg\sin\theta$$

当圆柱静止于斜面时，它受的力和力矩均为零。因此，斜面对圆柱的作用力沿斜面向上的分量大小为

$$F_\mu = F = mg\sin\theta$$

选圆柱的轴线为旋转轴，该力对转轴的力矩为

$$M_\mu = F_\mu R = mgR\sin\theta$$

另一方面，由于线圈中通以电流，它在磁场的作用下产生安培力，安培力对转轴的力矩就是线圈的磁矩在磁场中所受到的力矩，即

$$M_A = |\,\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}\,| = mB\sin(\theta+\varphi) = NISB\sin(\theta+\varphi)$$

其中 S 为线圈的面积，角度 $\theta+\varphi$ 正是磁矩与磁场的夹角。为了能使圆柱静止于斜面上，电流

应顺时针方向流动，即磁矩的方向$(\theta+\varphi)<\pi$。根据力矩平衡可得

$$mgR\sin\theta = NISB\sin(\theta+\varphi)$$

由此可得线圈中的电流为

$$I=\frac{mgR\sin\theta}{NSB\sin(\theta+\varphi)}=\frac{mgR\sin\theta}{2Rl NB\sin(\theta+\varphi)} \tag{11.26}$$

或已知电流求磁场时

$$B=\frac{mgR\sin\theta}{2Rl NI\sin(\theta+\varphi)}$$

第Ⅲ部分

问题求解方法模块

电磁学中的基本概念和基本规律的掌握是要靠对所构建问题的训练来达到的。而构建的问题往往具有针对性强、目的性明确以及与日常生活密切相关等特征。因此运用所学知识来解决一些自然界或日常生活中的实际问题是能力培养的重要一环，而这一能力只有通过问题的反复训练才能培养起来。不同的问题可以用不同的方法去解决，由于解决问题的方法很多，在这一模块中我们仅仅涉及叠加法、对称法、等效法、补偿法、能量法等几种常见方法。实际上，这些方法的运用不是完全独立的，它们可以同时出现在某一个物理问题中。问题求解一般要经过如下的逻辑过程：思考酝酿阶段—基本概念和规律的运用阶段—方法和数学运用阶段—结果与讨论阶段。对于理科学生来说，这种逻辑过程的训练是十分重要的。

第 12 章　叠加法

静态的电场、磁场以及时变电磁场都遵循叠加原理。这里的叠加是指同一种场或同一类场(如电或磁)的叠加,它们的性质可能有所不同,但满足叠加原理。比如,静电场与静电场的叠加、静电场与非静电场(由化学反应、洛仑兹力、变化磁场引起的场等)的叠加。不同种类的场一般没有叠加性,比如,直接的静电场和静磁场叠加无多大意义;电势与电场强度的直接叠加也是如此。但是,如果它们同时作用于某个特定对象(如电荷),其产生的效果是可以叠加的,因为这种效果是属于同一类的。在这一章中,我们先给出叠加法的界定,然后以范例来阐述叠加法的思想。

12.1　叠加法界定

"叠加(superposition)"一词意指一层又一层地重复堆积。一般指将同一种的对象或物体反复累积起来形成一种堆积物或堆积体。比如堆积木、叠衣服、叠罗汉等。但也可以将它引伸到比较抽象的对象或物质的累加。比如,在物理学中力的合成、场的叠加、电流的叠加、波动的叠加等;再比如,数学中的级数展开、积分等都是体现叠加性的一些例子。实际上,叠加性是一种自然的现象,并不是物理或数学所特有的。由于物理学是一门自然科学,因而将叠加性运用于物理学是一种自然反映。

所谓叠加法(superposition method)是指将同一种或同一类的对象以一定的逻辑顺序或规则进行累积的一种方法。叠加与叠加法最大的不同是:叠加不一定讲逻辑顺序和规则,而叠加法讲究逻辑顺序和叠加的方式和方法。比如,砖块运用"叠加法"可以累积成房子或一堵墙,其结果往往是可以预见的,而叠加则不然。

在电磁学中,叠加原理(superposition principles)是一个十分重要的原理。这一原理可表示为:点电荷 q_0 与 N 个静止点电荷($q_1, q_2, \cdots, q_N$)各自相互作用力(库仑力)的矢量和,即 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_N$。而单位电荷的力就是电场强度,因此,静电场满足叠加原理。在实际运用上,这一原理的内涵可以进行拓展,比如空间同时存在静电场、非静电场、感应电场等,电荷 q_0 所受到的力为 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{F}_i$,其中 $\boldsymbol{F}_e$ 为静电力,$\boldsymbol{F}_k$ 为非静电力(洛仑兹力、化学作用力等),$\boldsymbol{F}_i$ 为感生电场力(也是非静电力),因此,广义电场的叠加是 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_e + \boldsymbol{E}_k + \boldsymbol{E}_i$。将静电叠加原理推广到磁力的叠加:如果一个运动点电荷同时受到多种静磁场的作用力,则合力为 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_N = q_0 \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 + \cdots + \boldsymbol{B}_N)$,表示静磁场也满足叠加原理。因此,广义的磁场叠加原理可表示为:$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_f + \boldsymbol{B}_M + \boldsymbol{B}_P + \boldsymbol{B}_E$,其中 $\boldsymbol{B}_f$ 表示自由电流(传导电流、运流电流)的磁场,$\boldsymbol{B}_M$ 为磁化电流的磁场,$\boldsymbol{B}_P$ 为极化电流的磁场,$\boldsymbol{B}_E$ 是变化电场引起的磁场。也可以表示为:$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_m + \boldsymbol{B}_d$,$\boldsymbol{B}_m$ 为静磁场,$\boldsymbol{B}_d$ 为位移电流的磁场。这一原理贯穿整个电磁学和电动力学中。

电磁学中的叠加法是以电场和磁场的叠加原理为基础的,离开叠加原理讲叠加法没有多大实际意义。另一方面,叠加原理没有指明场如何进行叠加,不同的问题叠加方法不一定相同,这就是解决实际问题的难点所在。

12.2 叠加法范例

12.2.1 一根带电细棒的电场

带电细棒是属于有限带电体，求解有限带电体的方法是将该带电体分成很多小段，每一小段可等同于一个点电荷，这样棒所激发的电场就转换为求许多点电荷电场的矢量和。这就要求计算矢量和的过程必须遵循一定的逻辑规则，否则不能获得所需要的结果。为了简单起见，我们讨论棒的延长线上任一点的电场强度和电势。

设棒的长度为 L，带电为 Q，且电荷均匀分布在棒上。现使该棒平放在 x 轴上，一端位于坐标原点 O，另一端距场点 P 为 a，如图 12-1 所示。在棒上任取一小段 $\mathrm{d}l$，相应的电荷为

$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l = \frac{Q}{L}\mathrm{d}l = \frac{Q}{L}\mathrm{d}x$$

该电荷所激发的电场强度为

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\frac{\mathrm{d}x}{(L+a-x)^2} \tag{12.1}$$

对场点 P 而言，每一无穷小段的电荷所激发的电场强度方向都相同，将其累加起来就可得到棒的总电场。于是，这种累加数学上便是积分，即

$$E = \int \mathrm{d}E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{(L+a-x)^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{L+a}\right) \tag{12.2}$$

电场的方向沿着 x 轴的正方向。这里的积分限不是随意取的，是按照一定的逻辑顺序取的，即要求这种累加必需从左到右进行，因为被积函数中的 x 变量是相对于原点所取的。

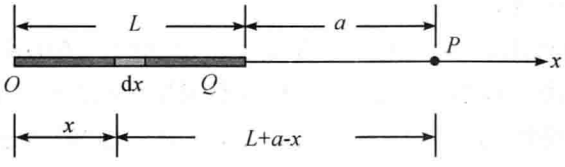


图 12-1 位于 x 轴上的带电细棒

如果将坐标原点 O 移至场点 P，则 $\mathrm{d}x$ 距 O（或 P）的位置为 x，则

$$E = \int \mathrm{d}E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\int_{-(L+a)}^{-a} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{L+a}\right) \tag{12.2a}$$

显然，积分的累加顺序应从左到右进行，因为这里的 $\mathrm{d}x$ 表示沿 x 轴正方向的增量，棒的左端坐标 $x_1 = -(L+a)$，右端为 $x_2 = -a$。上式也可表示为

$$E = \int \mathrm{d}E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\int_a^{L+a} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{L+a}\right)$$

不同的是，这里视 x 为离 P 的距离，$\mathrm{d}x$ 即为这一距离的增量（向着 x 轴反方向），因而积分的逻辑顺序应从棒的右端到左端。如果坐标原点取在棒的右端（靠近 P 点一侧），则

$$E = \int \mathrm{d}E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{(a+x)^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{L+a}\right) \tag{12.2b}$$

这里的 x 也理解为 $\mathrm{d}x$ 到 O 的距离，因此积分顺序从右到左进行。假如坐标原点取在棒的中点，则有

$$E = \int \mathrm{d}E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{L}{2}+a-x\right)^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{L+a}\right) \tag{12.2c}$$

由此可见，不管坐标原点如何选取，对积分的结果并无影响。也就是说，积分的结果与坐标原点的选取无关。但是，被积函数和积分限与坐标原点的选取是有关的，而且两者是相互关联的，这就是积分累加的逻辑规则，即叠加法。只有遵循这种逻辑规则的叠加方法才能获得正确的结果。能够进行这种逻辑叠加的基础是“叠加原理”。电势的计算留给读者自己进行。

12.2.2　两块平行带电导体平板

在静电场中导体处于平衡状态的一个重要特征是：导体中处处没有电场强度，电场与导体表面垂直。也就是说，导体中没有净电荷，电荷只分布于导体的表面。利用电势的概念，可表达为：导体是个等势体，表面是个等势面。将这些特征与电荷守恒定律和高斯定理结合就构成了电磁学中处理导体问题的基础。由于带电导体板上每个面都有电荷面密度分布，因此，空间各点的电场强度可以视为 4 块“单独带电平面”电场的叠加。

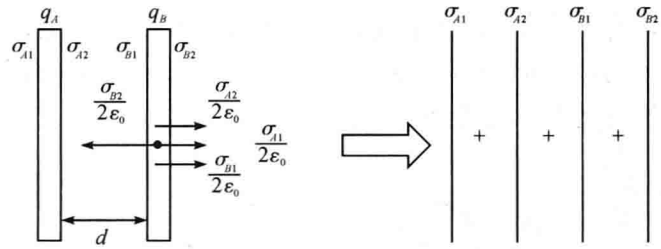


图 12-2　两块带电的平行导体板的电场可视为 4 块平行带电平面的叠加

设有两块相互平行、相距为 d 的导体平板 A 和 B，它们分别带有电荷 q_A 和 q_B，如图 12-2 所示。静电平衡后，电荷重新分布，即各导体板上每个面上都有电荷分布。设导体板表面上的电荷分别为 q_{A1}、q_{A2}、q_{B1}、q_{B2}，由电荷守恒定律可得

$$q_{A1}+q_{A2}=(\sigma_{A1}+\sigma_{A2})S=q_A \tag{12.3}$$

$$q_{B1}+q_{B2}=(\sigma_{B1}+\sigma_{B2})S=q_B \tag{12.4}$$

这里 σ 表示电荷面密度，相加是指代数相加，即电荷面密度可以包含正、负号。根据高斯定理，我们可以在两块平板的相对面间作一圆柱形高斯面，并且让两个底面位于导体板内。由于导体板内的电场为零，两底面对电通量无贡献。另一方面，由于静电平衡时导体表面的电场与其表面垂直，再说导体平板是无限大的，故高斯面的侧面也没有电通量（电场与高斯面的法线垂直），于是有如下电荷约束条件：

$$\sigma_{A2}+\sigma_{B1}=0 \tag{12.5}$$

我们把导体板中的电场为零视为 4 块带电平面（无厚度）电场的叠加所得。为了与(12.3) 式和(12.4) 式一致，把每一块平面的电荷面密度也视为“正”的。这样就每一块平面来说，电场的方向都是垂直于平面向外。设场点位于导体板 B 中，向右的电场为正，向左的电场为负，则有

$$\frac{\sigma_{A1}}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_{A2}}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_{B1}}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_{B2}}{2\varepsilon_0}=0 \tag{12.6}$$

这是表面电荷的又一约束条件。实际上，(12.6) 式是按照事先约定“每个平面都带正电荷”而得出的电场叠加公式，不同的约定其公式不尽相同。这就是按照一定逻辑规律进行电场叠加的方法。联立求解(12.3) 式、(12.4) 式、(12.5) 式和(12.6) 式得

$$\begin{aligned} q_{B2}&=q_{A1}=\frac{1}{2}(q_A+q_B)\\ q_{B1}&=-q_{A2}=\frac{1}{2}(q_B-q_A) \end{aligned} \tag{12.7}$$

由此可见，两个相对面电荷等量而异号，两个相背面等量而同号。

在这一范例中，设定每块导体板表面上的面电荷密度都是“正”的（实际情况有正有负），这样不会失去一般性。在这一约定下导体面的场强方向与面的法向相同。场强的叠加都要遵循这一逻辑规则，否则得不到正确的结果，这就是导体平面的叠加法。

12.2.3 内导体球接地的情况

一个半径为 a 的导体球被另一个内外半径分别为 b 和 c 的导体球壳同心地包围着，将导体球壳带上电荷 Q。根据导体静电平衡时导体是一个等势体可知，这时内导体球的电势与导体壳的电势相等，即

$$V_a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c} \tag{12.8}$$

虽然内导体有电势，但它不带电荷。这个电势是相对于无穷远或大地而言的，一旦内导体球接地（即强迫内导体球的电势回到零），立即就会带上电荷。与此同时，外导体球壳上的电荷随之重新分布，即内外表面都有电荷，但球壳的总电荷不变。

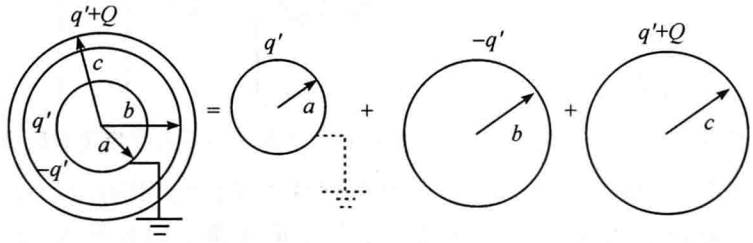


图 12-3 带电球壳同心地包围着一个接地的导体球

内导体球接地为什么就会立即带上电荷呢？原因是未接地前，内导体与大地的电势差（也是球壳与大地的电势差）为

$$V_a - V_{\text{Earth}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c} \tag{12.9}$$

受这一电势差的作用（相当于电源的放电），大地中的电荷移向内导体上，直到电势差完全消失为止。那么这部分能量到哪儿去了呢？一部分在接地过程中以焦耳热消耗掉，另一部分以场的形式辐射出去了，同时还有一小部分用于导体球壳的电荷重新分布。因此，只要内导体与大地之间存在电势差，接地过程就会有电荷的流动。

接下来，我们可以运用叠加方法给出这个导体球系统的电势空间分布。基本思想是：把每个导体球面视为“单独的带电球面”，然后将各自激发的电势进行叠加，如图 12-3 所示。这里关键的问题是要理解单个带电球面的电势分布，即球面内的电势与球面上的电势相等，球面外的电势与位于球心的点电荷形式相同。

图 12-3 每个球的电势分布分别为

$$V_a = \begin{cases} \dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0 a}, & r < a \\ \dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r > a \end{cases} \tag{12.10}$$

$$V_b = \begin{cases} \dfrac{-q'}{4\pi\varepsilon_0 b}, & r < b \\ \dfrac{-q'}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r > b \end{cases} \tag{12.11}$$

$$V_c = \begin{cases} \dfrac{q'+Q}{4\pi\varepsilon_0 c}, & r < c \\ \dfrac{q'+Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r > c \end{cases} \tag{12.12}$$

根据叠加法，内导体球中的电势为(接地)

$$V_a(\text{in}) = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{-q'}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{q'+Q}{4\pi\varepsilon_0 c} = 0 \tag{12.13}$$

这里的“in”表示内导体球。由此可得

$$q' = \frac{-Qab}{ab+bc-ac} \tag{12.14}$$

再一次利用电势叠加法，可以给出导体球系统的电势分布，即

$$V = \begin{cases} 0, & r < a \\ \dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r} + \dfrac{-q'}{4\pi\varepsilon_0 b} + \dfrac{q'+Q}{4\pi\varepsilon_0 c}, & a < r < b \\ \dfrac{q'+Q}{4\pi\varepsilon_0 c}, & b < r < c \\ \dfrac{q'+Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r > c \end{cases} \tag{12.15}$$

显然，这里遵循的逻辑规则是假定接地导体球上的电荷是“正”的，则球壳内外表面的电荷相应也要遵循这一规则，否则结果出错！这种电势叠加的逻辑规则就是叠加法，其基础也是场的叠加原理。

12.2.4　有源网络的电流

对于复杂的有源网络来说，如果只求某一条支路的电流，可以利用等效电源方法求解。但是，对于不是十分复杂的网络，可以利用简单电路的欧姆定律求出电流，再运用叠加法对电流进行叠加。基本思想仍然是复杂的问题可以分解为许多简单问题的叠加。

所谓的电流叠加法(或叠加定理)，是指电路中如果有多个电源电动势，则通过电路中任一条支路的电流等于各个电动势单独存在时，在该支路产生的电流之和。

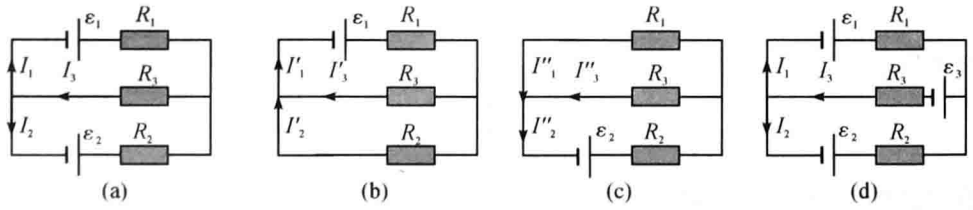


图 12-4　三条支路的复杂有源网络的电流叠加

图 12-4(a) 是一种具有三条支路的较为简单的有源网络。假设图中各电阻、电动势是已知的，r_1、r_2 分别表示电源的内阻，求通过每条支路的电流。设图 12-4(a) 各支路的电流为 I_1、I_2、I_3。如果把 ε_2 短接(或视为不存在)，各支路中的电流由电动势 ε_1 决定，可设为 I'_1、I'_2、I'_3，如图 12-4(b) 所示。如果 ε_1 短接而 ε_2 留下，则各支路的电流为 I''_1、I''_2、I''_3，如图 12-4(c) 所示。由图可知，ε_1 和 ε_2 都存在时通过各支路的电流为

$$\begin{aligned} I_1 &= I'_1 - I''_1 \\ I_2 &= -I'_2 + I''_2 \\ I_3 &= I'_3 + I''_3 \end{aligned} \tag{12.16}$$

其中

$$I'_1 = \frac{\varepsilon_1}{R_1 + R_2 \,||\, R_3}, \quad I'_2 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} I'_1$$

$$I''_1 = \frac{R_3}{R_1 + R_3} \frac{\varepsilon_2}{(R_2 + R_1 \,||\, R_3)}, \quad I''_2 = \frac{\varepsilon_2}{R_2 + R_1 \,||\, R_3}$$

$$I'_3 = I'_1 - I'_2, \quad I''_3 = I''_2 - I''_1$$

式中符号"||"表示并联之意。如果在第 3 条支路中增加电动势 ε_3(见图 12-4(d)),则各支路的电流可表示为

$$\begin{aligned} I_1 &\to I_1 + I'''_1 \\ I_2 &\to I_2 + I'''_2 \\ I_3 &\to I_3 + I'''_3 \end{aligned} \tag{12.17}$$

如果 ε_3 的极性左边负右边正,则只要将上式中的"+"号改为"−"号即可。

电流叠加定理告诉我们,一个多电源网络电路的电流计算可以分别考虑各电动势的单独作用,然后将各个单独电流叠加起来。这种方法对于能运用简单串并联的电路是方便的。其实质是用简单电路的欧姆定律解决复杂的电路网络问题。

由此可见,对电流的叠加,要事先设定电流的"流动正方向",随后的叠加都要遵循这一设定方向,不能任意更改,这就是电流叠加法。

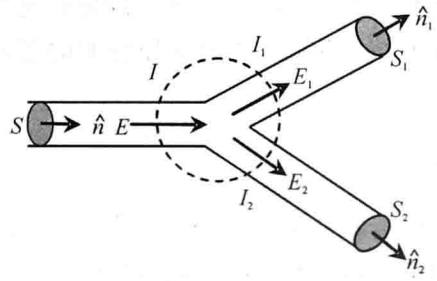


图 12-5　节点电流与电场

值得指出的是,电流的可叠加性源自电场强度的可叠加性。我们知道,在稳恒电流的情况下,流过某一节点的电流(参见图 12-5)可表示为

$$I = I_1 + I_2 \tag{12.18}$$

或用电流密度表示为

$$\iint_S \boldsymbol{j} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}S = \iint_{S_1} \boldsymbol{j}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_1 \mathrm{d}S_1 + \iint_{S_2} \boldsymbol{j}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_2 \mathrm{d}S_2 \tag{12.19}$$

利用欧姆定律的微分式 $\boldsymbol{j} = \gamma \boldsymbol{E}$,上式可改写成

$$\iint_S \gamma \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}S = \iint_{S_1} \gamma_1 \boldsymbol{E}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_1 \mathrm{d}S_1 + \iint_{S_2} \gamma_2 \boldsymbol{E}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_2 \mathrm{d}S_2 \tag{12.20}$$

现在考虑一种特殊情况,当导线为同一种材料且导线粗细相同时,即 $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$,$S = S_1 = S_2$。这时上式可简化为

$$\boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{E}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_1 + \boldsymbol{E}_2 \cdot \hat{n}_2 \tag{12.21}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是导线横截面的法线。由此可见,电流的叠加性是与电场的叠加性为基础的,它只不过是电场叠加性的另一种表现形式罢了。或者说"电路"是"电场"的另一种"存在形式"。对于这一点而言,初学者往往容易被忽视。

第13章 等效法

在电磁学中乃至整个物理学中等效思维方法是一种常用的、普遍的科学思维方法。利用等效思维方法可以使复杂物理问题简单化，从而达到解决问题的目的。在这一章中，我们先给出等效法的定义，然后以某些范例的形式来阐述该方法的运用。

13.1 等效法界定

等效(equivalent)意指“效用相同或效果相同”。从物理上来说，等效(或称等价)是指不同的物理现象、模型、过程等在物理意义、作用效果或物理规律方面是相同的。它们之间可以相互替代，而保证结论不变。

等效法就是在保证效果相同的前提下，将复杂的或难处理的问题转换成简单的或容易的问题的一种等价思维方法。因此，等效思维的实质是在效果相同的情况下，将较为复杂的实际问题变换为简单的熟悉问题，以便突出主要因素，抓住它的本质，找出其中规律。也就是说，运用等效法时往往是用较简单的因素代替较复杂的因素，以使问题得到简化。等效法是常用的科学思维方法。

在物理学中等效思维的运用是比较普遍的。比如在经典力学中，可将一个力视为任意两个力的合成；平抛运动可等效为水平匀速直线运动和垂直自由下落运动这两个分运动的合成，也即把一个复杂的运动看成是几个简单运动的合成。在电磁学中这样的问题也屡见不鲜，比如，带电粒子在均匀磁场中的螺旋运动可等效成匀速直线运动和匀速圆周运动的合运动；一个带电球体在球外的电场强度可等效为一个位于球心处的点电荷的电场强度；复杂的电磁波可视为许多简单正弦波的叠加。物理学中有许多分析问题和处理问题的巧妙方法，等效法就是其中之一。下面通过几个范例来阐述这一方法的运用。

13.2 等效法范例

13.2.1 接地导体平面前的点电荷

在一块无限大接地导体平面附近，距平面为 h 处放置一个点电荷 q。由于静电感应，导体面上将出现与施感电荷 q 异号的电荷。在点电荷 q 所在空间的电场强度应为这两者激发的电场之矢量和。原则上，可以把该带导体面视为许多点电荷，并与施感电荷 q 一起求合场强。但是，导体面的电荷分布不能事先知道，因而给求解带来了困难。通过等效思维方法可以化难为易。首先，考察一个电偶极子的场分布情况。在电偶极子的中垂面上电势为零，而电场强度与该平面垂直，如图 13-1(a) 所示。设想在电偶极子的中垂面上插入一块无穷大导体平面，并将该导体平面接地(可以证明不接地该导体平面的电势也为零)。这种情况就相当于无穷大导体平面前有一个点电荷的情况，如图 13-1(b) 所示。由于导体面是无限大的，q 所激发的电力线全部终止在导体面上。

选取 z 轴与平面垂直，则 q 所在区域($z>0$) 的电场强度即可等效成正负电荷之电场的

叠加：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_+^2}\hat{\boldsymbol{r}}_+ + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{r_-^2}\hat{\boldsymbol{r}}_- \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{[x^2+y^2+(z-h)^2]}\hat{\boldsymbol{r}}_+ + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{[x^2+y^2+(z+h)^2]}\hat{\boldsymbol{r}}_- \end{aligned} \tag{13.1}$$

这里 $\hat{\boldsymbol{r}}_+$ ($\hat{\boldsymbol{r}}_-$) 表示点电荷 $+q$($-q$) 到场点的单位矢量。从图 13-1(b) 可知，导体面上的感应电荷可用一个位于导体面另一侧的点电荷 $-q$ 来代替。这意味着导体面相当于一面平面镜，$-q$ 即为 q 的像。因此，可用一个求解区域之外的虚(像) 电荷来代替导体面的感应电荷，这种方法也称为镜像法(或电像法)。

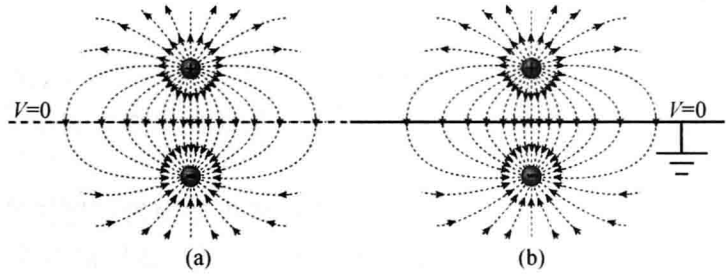


图 13-1　接地导体平面前的点电荷的电场分布与电偶极子电场分布的比较

在 $z>0$ 区域的电势为

$$\begin{aligned}V &= V_+ + V_- \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_+} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{r_-} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}} \end{aligned} \tag{13.2}$$

不难检验，当 $z=0$ 时，(13.2) 式能满足导体面电势为零($V=0$) 的条件。从(13.1) 式可得：

$$\boldsymbol{E}_{z=0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q}{4\pi[x^2+y^2+h^2]}(\hat{\boldsymbol{r}}_+ - \hat{\boldsymbol{r}}_-) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{-qh}{2\pi[r^2+h^2]^{\frac{3}{2}}}\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\sigma(r)}{\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{k}} \tag{13.3}$$

其中

$$\sigma(r) = \frac{-qh}{2\pi[r^2+h^2]^{\frac{3}{2}}} \tag{13.4}$$

表示导体面上的电荷分布。对整个导体面积分得

$$q' = \int_0^\infty \sigma(r)2\pi r\mathrm{d}r = -q \tag{13.5}$$

此式表明感应电荷与像电荷相等，这就是为什么导体平面上的感应电荷可用一个像电荷来等效替代的道理。在这一范例中，将复杂的带电导体平面作用等效为一个“假想点电荷”的作用，使问题得以简化，这一等效的逻辑思维过程就是等效法。

13.2.2　均匀磁场中旋转的金属棒

一根长为 L 的金属棒在匀强磁场中以匀角速度 ω 绕固定点 O 转动，磁场垂直于纸面向内，而且与金属棒互相垂直，如图 13-2(a) 所示。金属棒的运动将导致动生电动势的产生，那么，如何计算该动生电动势呢？我们可以运用等效思维方法来求解棒中的电动势。大家知道，

磁感应强度 B 可以理解为磁通密度，即通过单位面积的磁力线条数。这样通过某一面积的磁通量可理解为磁力线的数目。

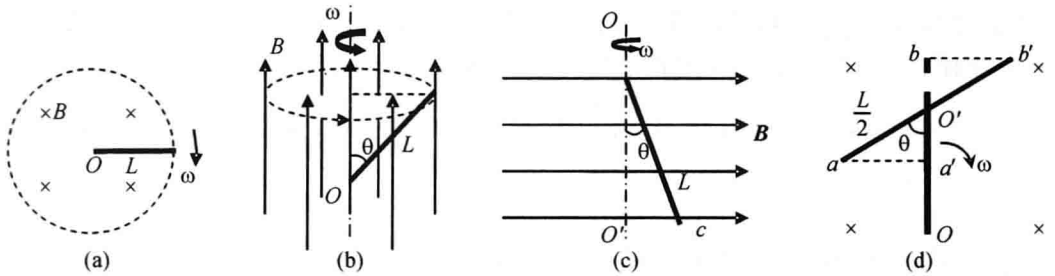


图 13-2　均匀磁场中匀角速度转动的金属棒

考察在 $t \to t + \mathrm{d}t$ 时间内，棒所扫过的磁力线条数是

$$\mathrm{d}\Phi = B\mathrm{d}S = B\left(\frac{1}{2}LL\,\mathrm{d}\theta\right)$$

按照法拉第电磁感应定律，金属棒中的电动势为

$$\varepsilon = \left|-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{1}{2}L^2B\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}B\omega L^2 \tag{13.6}$$

下面利用等效思维来讨论这一问题。由于棒是匀速转动的，转动一个周期 T，棒所扫过的磁力线条数（即通过虚线所围圆面积的磁通量）是

$$\Phi = BS = B\pi L^2$$

相应的电动势为

$$\varepsilon = \left|-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \frac{\Phi}{T} = \frac{\omega}{2\pi}B\pi L^2 = \frac{1}{2}BL^2\omega \tag{13.7}$$

(13.6) 式与(13.7) 式显然是等效的，因为单位时间内棒所扫过的磁通量是相等的。

另一方面，我们也可以利用动生电动势的概念来讨论。均匀磁场中长为 l 的导线以速度 v 运动切割磁力线所产生的电动势为

$$\varepsilon = Blv \tag{13.8}$$

由于金属棒的转动，棒上每一点的线速度不相等。把棒分成 N 段，每一段的长度为 Δl_i，与此相对应的平均线速度为 $\bar{v}_i$。这时每一小段可等效为在均匀磁场中的平动，由(13.8) 式得

$$\Delta\varepsilon_i = B\Delta l_i\bar{v}_i = B\Delta l_i\omega\bar{l}_i$$

其中 $\bar{l}_i$ 为第 i 段距转动中心 O 的距离。当 $N \to \infty$，求和用积分表示，棒中的总电动势为

$$\varepsilon = B\omega\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Delta l_i\bar{l}_i = B\omega\int_0^L l\,\mathrm{d}l = \frac{1}{2}B\omega L^2 \tag{13.9}$$

实际上，这也是一种等效思维方法，即把棒的转动问题转换为棒的平动问题，从而达到化难为易的目的。

图 13-2(b) 可等效成图 13-2(a)，棒的有效长度为 $L\sin\theta$，有效电动势为

$$\varepsilon = \frac{1}{2}B\omega L^2\sin^2\theta \tag{13.10}$$

在图 13-2(c) 中的棒是绕垂直于磁场的轴转动，而图 13-2(b) 则是绕平行于磁场的轴转动，这两者是不相同的，即不能与图 13-2(a) 等效。但是，这个问题可以等效成一个绕 OO' 轴转动的三角形线圈，线圈中的瞬时电动势为

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}) = BS\omega\sin\omega t = \frac{1}{2}\omega BL^2\cos\theta\sin\theta\sin\omega t \tag{13.11}$$

式中 θ 是金属棒与转动轴的夹角，S 是三角形 $OO'c$ 的面积。

图 13-2(d) 所表示的是一根金属棒 ab 以角度 θ 固定于一根绝缘棒 OO' 上，即 O' 点不能转动。当绝缘棒绕 O 点以角速度 ω 转动时，金属棒产生电动势的有效长度为 $a'b'$。设绝缘棒的长度与金属棒相等，则(13.9) 式可得金属棒的电动势为

$$\varepsilon_{ab} = \varepsilon_{a'b'} = B\omega\int_{\left(L-\frac{1}{2}L\cos\theta\right)}^{\left(L+\frac{1}{2}L\cos\theta\right)} l\,\mathrm{d}l = \frac{1}{2}B\omega\left[\left(L+\frac{1}{2}L\cos\theta\right)^2 - \left(L-\frac{1}{2}L\cos\theta\right)^2\right] = B\omega L^2\cos\theta \tag{13.12}$$

显然，$\theta = 0$，金属棒中的电动势最大，$\theta = \frac{\pi}{2}$，电动势为零。

13.2.3 磁场中金属棒的电动势

一根长为 L 的金属棒以速度 v 垂直于均匀磁场 B 做切割磁力线的运动，其电动势为

$$\varepsilon = BLv \tag{13.13}$$

这个结果要求 B、L、v 三者互相垂直。这就是大家熟知的最简单的导线动生电动势表达式。这个式子可以应用于如图 13-3(a) 所示的运动导线的电动势问题。由于长直电流 I 激发的磁场是不均匀的，离电流 I 越远，磁场越弱。将以速度 v 运动的导线 L 分成 N 段，当 N 趋于无穷时，每一小段所在的磁场可以视为均匀的，且满足三者互相垂直的要求，于是有

$$\mathrm{d}\varepsilon = vB\,\mathrm{d}l$$

金属棒中的总电动势为

$$\varepsilon = \int \mathrm{d}\varepsilon = \int_a^{a+L} vB\,\mathrm{d}l = \int_a^{a+L} v\frac{\mu_0 I}{2\pi l}\mathrm{d}l = \frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right) \tag{13.14}$$

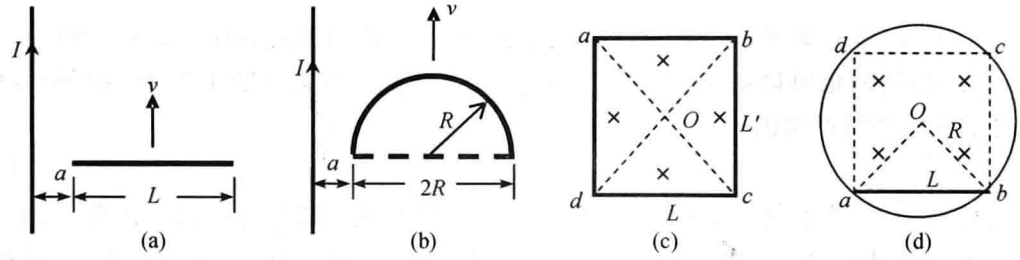


图 13-3　磁场中金属棒的电动势

利用动生电动势的公式很容易证明，对于图 13-3(b) 所示的半圆弧导线来说，其电动势表达式与图 13-3(a) 是等效的。将(13.14) 式中的 L 换成半圆的直径 $2R$ 即可得到半圆弧导线的电动势为

$$\varepsilon = \frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln\left(\frac{a+2R}{a}\right)$$

据此类推，可以得到任意形状导线的电动势。设 x 轴与载流导线垂直，y 轴沿着电流方向。运动导线的左端坐标 $(x_1, 0)$，右端坐标 $(x_2, 0)$，由(13.14) 式得

$$\varepsilon = \frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln\left(\frac{x_1+\Delta x}{x_1}\right) \tag{13.15}$$

式中 $\Delta x = x_2 - x_1$。

图 13-3(d) 所示的是通以变化电流的无限长螺线管，管中的磁场随时间变化。当一根长为 L 的金属棒垂直于磁场放置，其电动势也可以运用等效思维方法来求解。为此，设想图 13-3(c) 的矩形金属回路中磁场随时间变化，其电动势为

$$\varepsilon = \left|\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right| = S\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = 2\varepsilon_{ab} + 2\varepsilon_{bc} = 4\varepsilon_{ab}$$

其中 $\varepsilon_{ab} = \varepsilon_{bc}$，且有

$$\varepsilon_{ab} = S_{\Delta oab}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4}LL'\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \tag{13.16}$$

这样，图 13-3(d) 中金属棒 ab 的电动势可与图 13-3(c) 的矩形 ab 边的电动势等效，即

$$\varepsilon_{ab} = S_{\Delta oab}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}Lh\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4}LL'\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

不难看出，只要金属棒 ab 在圆内，当 $L \to 2R$ 时，$L' \to 0$，则 $\varepsilon_{ab} \to 0$。这表明长为 $2R$ 的金属棒中是无电动势的，这是因为感生电场与棒垂直之故。

13.2.4　磁场中弧形载流导线的安培力

均匀磁场中有一根半径为 R 的半圆形导线，该导线通以电流 I，如图 13-4 所示。根据安培力的计算公式可以证明，半圆形导线受到的安培力为

$$F = 2RIB \tag{13.17}$$

这个结果与均匀磁场中的一根长为 $2R$ 的直导线等效(见图 13-4)。由此可见，如果将半圆导线换成任意形状的弯曲导线，其安培力可等效为导线电流的起点(x_1, y_1) 与终点(x_2, y_2) 之间的长度与电流和磁场的乘积，即

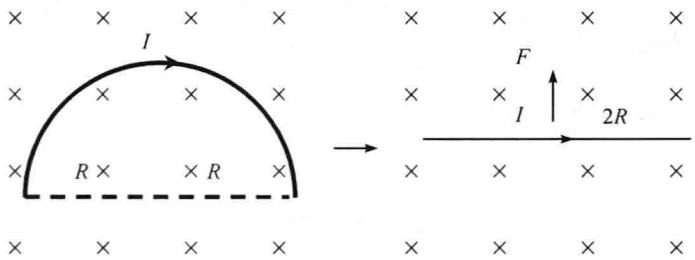


图 13-4　均匀磁场中弧形载流导线的安培力与直导线等效

$$F = \Delta l IB \tag{13.18}$$

其中 Δl 是载流导线的等效长度，在直角坐标中可表示为

$$\Delta l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

因此，这里的等效是指弯曲导线受到的安培力与一根直导线所受的安培力是等效的。这个问题也可以从补偿法(参见第 16 章)的角度来考虑，即将图 13-4 中的虚线用向左和向右等长度导线的电流加以补偿。由于“闭合半圆形导线”受到的合力为零，因而受力的效果只相当于电流向右流动导线上的作用力。

13.2.5　等效电压源与等效电流源

一个实际的电源存在内电阻，但是我们可以把这个实际电源等效为一个理想电源 ε(恒压源)与一个内电阻 r 的串联，如图 13-5(a) 所示。我们常把虚线框中的这个等效电源称为电压源。当电压源接上外电阻 R 时，该电阻上就有电流和电压。此外，我们也可以设想另一种理想电源，即无论外电阻怎样变化，它总是提供不变的电流 I_0，这种理想的电源叫作恒流源。比如，一个电池与一个大电阻串联就可以等效为一个恒流源。对于非理想的情况来说，它有一定的内阻，这样的电源就是一个电流源。我们可以把它等效为一个恒流源与一个内阻的并联，如图 13-5(b) 所示。

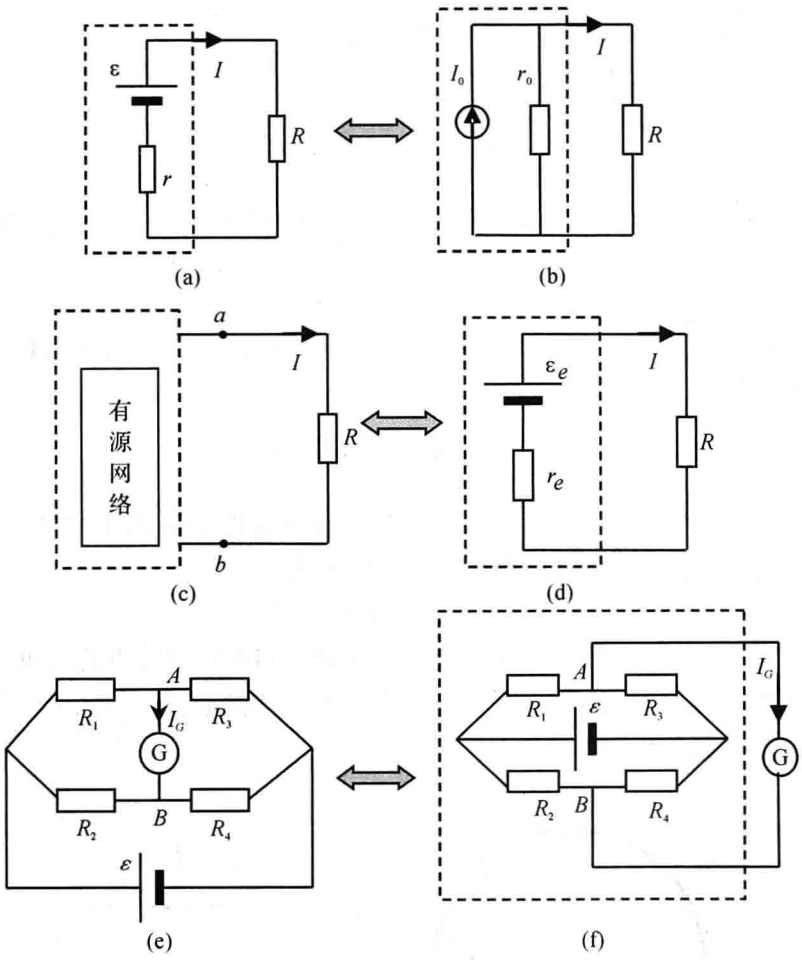


图 13-5　等效电源

实际的电源既可以等效为电压源也可以等效为电流源，即图 13-5(a) 与图 13-5(b) 是等效的。图 13-5(a) 中的电流为

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r} = \frac{\varepsilon}{r}\frac{r}{R+r} \tag{13.19}$$

而图 13-5(b) 中的电流 I 和 I_0 两者满足如下关系

$$I(R+r_0) = I_0 r_0$$

或者

$$I = I_0 \frac{r_0}{R+r_0} \tag{13.20}$$

通过比较这两个式子可得

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{r}, \quad r_0 = r$$

即当电流源的电流等于电压源的短路电流和电流源的内阻等于电压源的内阻时，这两个电源是等效的。

实际中，一个复杂的有源网络可以等效为一个电压源，如图 13-5(c) 和(d) 所示。这种等效电压源常称为等效电压源定理或戴维宁定理。它可表述为：一个有源网络可等效为一个电压源，其电动势 ε_e 等于网络的开路端电压，内阻 r_e 等于从网络两端 ab 看进去所有电源短路时的网络电阻。外电阻 R 中通过的电流是

$$I = \frac{\varepsilon_e}{R + r_e}$$

根据电压源与电流源的等效条件，很容易得到等效电流源定理（诺尔顿定理）。等效电源定理在实际中很有用。下面通过一个实例来体现这种等效思想的运用。

已知不平衡电桥四个臂的电阻分别为 R_1、R_2、R_3 和 R_4，电源电动势为 ε，其内阻可忽略。当电桥处于非平衡状态时，检流计 G 中有电流通过。设检流计的内阻为 R_G，求检流计中通过的电流 I_G，如图 13-5(e) 所示。

为了使问题更直观些，我们把图 13-5(e) 改成图 13-5(f) 的形式，这就是比较典型的有源两端网络，图中虚线框可等效为一电压源。当电源短路时，从检流计两端 A、B 看网络（除源）的电阻，R_1 和 R_3 并联，R_2 和 R_4 并联，然后两者再串联，等效电源内阻为

$$r_e = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$$

当检流计 A、B 两端开路时，通过电阻 R_1 和 R_2 的电流分别是

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_3}, \quad I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2 + R_4}$$

这时 A、B 两点间的电位差即为等效电动势

$$V_{AB} = -I_1 R_1 + I_2 R_2 = \frac{(R_2 R_3 - R_1 R_4)\varepsilon}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)} = \varepsilon_e$$

于是，通过检流计的电流为

$$I_G = \frac{\varepsilon_e}{R_G + r_e} = \frac{(R_2 R_3 - R_1 R_4)\varepsilon}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)(R_G + r_e)}$$

由此可见，当电桥平衡时，检流计中无电流通过，即电桥四个臂的电阻之间应满足如下关系

$$R_2 R_3 = R_1 R_4$$

或者

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

这就是电桥的平衡条件。当 $R_2 R_3 > R_1 R_4$ 时，$I_G > 0$，通过检流计的电流方向与图中标定方向相同；当 $R_2 R_3 < R_1 R_4$ 时，$I_G < 0$，表明实际电流与图中标定方向相反。

13.2.6 电阻、电容、电感三种网络的 Δ－Y 形等效变换

网络系统的电路往往比较复杂，有时要对纯电阻、电容、电感的电路作等效变换才能计算出等效电阻、电容、电感。在这一节中简要介绍这三种电子元件的 Δ 与 Y 形联接间的等效变换。

电阻网络的Δ－Y形等效变换 这里的所谓等效，就是指这两种电阻联接之间的代换，仍保持电路中其余各部分的电压和电流不变，即要求 Δ 形的三个端子的电位 V_1、V_2、V_3 以及流过的电流 I_1、I_2、I_3 与 Y 形的三个端子相同。假设图 13-6(a) 和(b) 的端子 2 与外电路不相联接（断开），此时两电路等效的条件为：两电路的总电阻相同，两电路的分压情况相同。这两项等效条件用电阻可分别表示为

$$R_1 + R_3 = \frac{(R_{12} + R_{23})R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \tag{13.21}$$

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_{12}}{R_{23}} \tag{13.22}$$

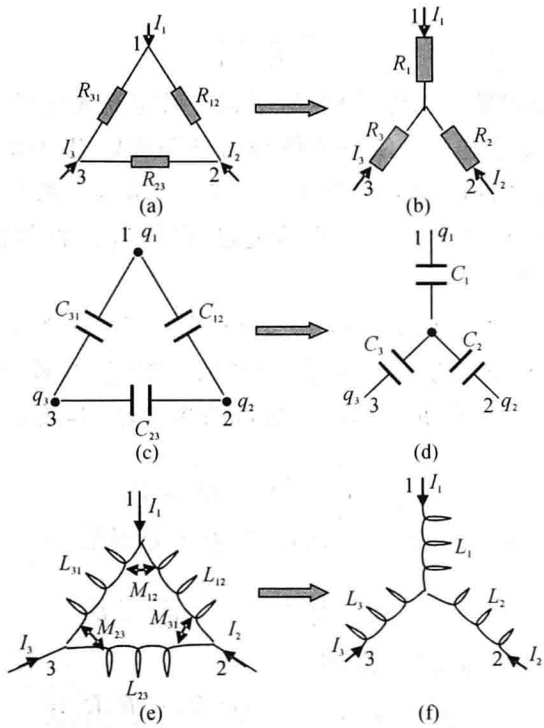


图 13-6　电阻、电容、电感网络的 Δ－Y 形等效变换

由这两式可解得

$$R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \tag{13.23}$$

将(13.23)式代入(13.22)式可得

$$R_1 = \frac{R_{31}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \tag{13.24}$$

同理可得

$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \tag{13.25}$$

(13.23)式、(13.24)式和(13.25)式构成了 Δ 形向 Y 形的电阻网络等效变换。可以证明，其逆变换(Y → Δ)各电阻之间的关系为

$$\begin{cases} R_{12} = \dfrac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_3} \\ R_{23} = \dfrac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_1} \\ R_{31} = \dfrac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_2} \end{cases} \tag{13.26}$$

从上面的等效变换关系不难发现，每一条支路上的电阻比满足以下规律：

$$R_1 : R_2 : R_3 = R_{23}^{-1} : R_{31}^{-1} : R_{12}^{-1} \tag{13.27}$$

利用(13.27)式，可以很方便地求解图 13-5 所示的电阻桥式网络 AB 间的等效电阻。将 ACD 的 Δ 形转换为 Y 形，为此设 A 为 1 端子、C 为 2 端子、D 为 3 端子。由(13.27)式得

$$R_1 : R_2 : R_3 = R_{23}^{-1} : R_{31}^{-1} : R_{12}^{-1} = \frac{1}{r} : \frac{1}{r} : \frac{1}{2r}$$

令

$$R_1 = R_2 = \frac{1}{r}g, R_3 = \frac{1}{2r}g$$

AC 间的电阻(当 D 点与外电路断开时)

$$R_{AC}(\mathbf{Y}) = R_1 + R_2 = 2\frac{g}{r}$$

$$R_{AC}(\mathbf{\Delta}) = \frac{R_{12}(R_{23}+R_{31})}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} = \frac{2r(r+r)}{2r+r+r} = r$$

由于两电阻等效 $R_{AC}(\mathbf{Y}) = R_{AC}(\mathbf{\Delta})$,可求得

$$g = \frac{1}{2}r^2$$

于是,AB 间的电阻为

$$R_{AB} = R_1 + \frac{(R_2+r)(R_3+2r)}{R_2+r+R_3+2r} = \frac{1}{2}r + \frac{9}{10}r = \frac{7}{5}r$$

这个结果与对称法所得结果(14.27)式一致。

电容网络的 Δ－Y 等效变换 对于电容电路,在两个网络的任意两个对应端钮之间加相同的电压时,则对应两端钮间所带电量都相同,这就是电容网络的等效变换条件。图13-6(c)和(d)给出了 **Δ** 形与 **Y** 形的电容网络。设每个端钮的电量分别为 q_1、q_2、q_3,端钮间的电位差分别为 V_{12}、V_{23}、V_{31}。对 **Δ** 形网络 1、2 端子的电量为

$$q_1 = q_{12} + q_{31} = V_{12}C_{12} - V_{31}C_{31} \tag{13.28}$$

$$q_2 = q_{23} + q_{12} = V_{23}C_{23} - V_{12}C_{12} \tag{13.29}$$

Δ 形回路的电位差满足关系

$$V_{12} + V_{23} + V_{31} = 0 \tag{13.30}$$

将以上三式联立可解得

$$\begin{cases} V_{12} = \dfrac{C_{23}q_1}{C_{12}C_{23}+C_{23}C_{31}+C_{31}C_{12}} - \dfrac{C_{31}q_2}{C_{12}C_{23}+C_{23}C_{31}+C_{31}C_{12}} \\ V_{23} = \dfrac{C_{31}q_2}{C_{12}C_{23}+C_{23}C_{31}+C_{31}C_{12}} - \dfrac{C_{12}q_3}{C_{12}C_{23}+C_{23}C_{31}+C_{31}C_{12}} \\ V_{31} = \dfrac{C_{12}q_3}{C_{12}C_{23}+C_{23}C_{31}+C_{31}C_{12}} - \dfrac{C_{23}q_1}{C_{12}C_{23}+C_{23}C_{31}+C_{31}C_{12}} \end{cases} \tag{13.31}$$

对于 Y 形网络有

$$\begin{cases} V_{12} = \dfrac{q_1}{C_1} - \dfrac{q_2}{C_2} \\ V_{23} = \dfrac{q_2}{C_2} - \dfrac{q_3}{C_3} \\ V_{31} = \dfrac{q_3}{C_3} - \dfrac{q_1}{C_1} \end{cases} \tag{13.32}$$

比较(13.31)式和(13.32)式可得

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{C_{12}C_{23}+C_{23}C_{31}+C_{31}C_{12}}{C_{23}} \\ C_2 = \dfrac{C_{12}C_{23}+C_{23}C_{31}+C_{31}C_{12}}{C_{31}} \\ C_3 = \dfrac{C_{12}C_{23}+C_{23}C_{31}+C_{31}C_{12}}{C_{12}} \end{cases} \tag{13.33}$$

这就是电容 **Δ** 形网络等效变换为 **Y** 形的关系式。上式的逆变换(**Y** → **Δ**)是

$$\begin{cases} C_{12} = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3} \\ C_{23} = \dfrac{C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3} \\ C_{31} = \dfrac{C_3 C_1}{C_1 + C_2 + C_3} \end{cases} \tag{13.34}$$

由此可见，电容网络与电阻网络正好互为“逆”关系，这一点在电阻的串并联和电容的串并联中已经为大家所熟知。

纯电感网络的 Δ－Y 等效变换　对于纯电感线圈的网络电路来说，由于线圈之间存在互感，因而情况要比纯电阻、电容网络电路复杂一些。为了与前两者比较以及简单起见，讨论 Δ 形与 Y 形之间的等效变换时，先略去互感。这里的等效变换条件是：在两个对应端钮之间各加相同的电压时，其对应端钮之间通过的电流应相等，电路图如图 13-6(e) 和(f) 所示。

设 Δ 形 3 个线圈的自感分别用 L_{12}、L_{23}、L_{31} 表示，相应通过线圈的电流分别为 I_{12}、I_{23}、I_{31}，而 Y 形线圈的 3 个自感分别为 L_1、L_2、L_3，相应通过的电流分别为 I_1、I_2、I_3。对 Δ 形网络，假定各线圈中的电流以顺时针方向流动，于是我们可以列出节点电流方程和线圈端电压方程如下：

$$I_{12} - I_1 - I_{31} = 0 \tag{13.35}$$

$$I_{23} - I_2 - I_{12} = 0 \tag{13.36}$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \tag{13.37}$$

$$V_{12} + V_{23} + V_{31} = L_{12}\frac{\mathrm{d}I_{12}}{\mathrm{d}t} + L_{23}\frac{\mathrm{d}I_{23}}{\mathrm{d}t} + L_{31}\frac{\mathrm{d}I_{31}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{13.38}$$

解之得

$$V_{12} = \frac{L_{12}L_{31}}{L_{12}+L_{23}+L_{31}}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} - \frac{L_{12}L_{23}}{L_{12}+L_{23}+L_{31}}\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \tag{13.39}$$

$$V_{23} = \frac{L_{23}L_{12}}{L_{12}+L_{23}+L_{31}}\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} - \frac{L_{23}L_{31}}{L_{12}+L_{23}+L_{31}}\frac{\mathrm{d}I_3}{\mathrm{d}t} \tag{13.40}$$

$$V_{31} = \frac{L_{31}L_{23}}{L_{12}+L_{23}+L_{31}}\frac{\mathrm{d}I_3}{\mathrm{d}t} - \frac{L_{31}L_{12}}{L_{12}+L_{23}+L_{31}}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \tag{13.41}$$

对于 Y 形，我们有

$$\begin{cases} V_{12} = L_1\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} - L_2\dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \\ V_{23} = L_2\dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} - L_3\dfrac{\mathrm{d}I_3}{\mathrm{d}t} \\ V_{31} = L_3\dfrac{\mathrm{d}I_3}{\mathrm{d}t} - L_1\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \end{cases} \tag{13.42}$$

通过比较可得变换关系如下：

$$\begin{cases} L_1 = \dfrac{L_{12}L_{31}}{L_{12}+L_{23}+L_{31}} \\ L_2 = \dfrac{L_{23}L_{12}}{L_{12}+L_{23}+L_{31}} \\ L_3 = \dfrac{L_{31}L_{23}}{L_{12}+L_{23}+L_{31}} \end{cases} \tag{13.43}$$

由此式可知，无互感的情况下，纯电感网络与纯电阻网络的变换关系相同，因此，只要将 (13.26) 式中的电阻 R 换成电感 L 即可。据此不难写出 Y → Δ 的反变换关系(略)。

第 14 章　对称法

我们可以毫不夸张地说，物理学离不开对称性。这里的对称性包含两重意思：研究问题的对称性和对称破缺（或非对称）。从这个意义上来说，我们平时涉及的问题几乎都包含着对称性的思想。比如，均匀带电圆环、均匀带电圆盘、均匀带电球等，其电荷分布具有中心对称性，即旋转操作下或空间反演操作下不变；无限长直带电线的电场分布、无限长直载流导线的磁场分布都具有对称性等，正是具备了这种对称性才使得结果有更简洁的表达式。又比如，带电半圆环、半圆形电流等（相对于带电圆环和圆电流来说）属于对称破缺的情况。在这一章中，我们将运用对称性来解决某些物理问题。

14.1　对称法界定

对称（symmetry）一词在词典中解释为：指图形或物体对某个点、直线或平面而言，在大小、形状和排列上具有一一对应的关系。

所谓对称性是指物体中各等同部分在空间排列的特殊规律性。例如，具有对称性的分子就是经过某些对称动作后，能完全复原的分子。对称性是指对物体或图形作某种操作（或变换）时不变的性质，比如：平移操作、旋转操作、反演操作等。通常有两类不同性质的对称性：一类是某个系统或某件具体事物的对称性；另一类是物理规律的对称性。物理规律的对称性是指经过一定的操作后，物理规律的形式保持不变。因此，物理规律的对称性又称为不变性。

对称性是现代物理学中的一个核心概念，它泛指规范对称性（gauge symmetry），或局域对称性（local symmetry）和整体对称性（global symmetry）。它是指一个理论的拉格朗日量或运动方程在某些变数的变化下的不变性。如果这些变数随时空变化，这个不变性被称为局域对称性，反之则被称为整体对称性。物理学中较典型的对称性例子是牛顿运动方程的伽利略变换不变性和麦克斯韦方程的洛伦兹变换不变性和相位不变性。

1918 年，德国数学家艾米·诺特（A. E. Noether）提出了著名诺特定理（Noether theorem）：作用量的每一种对称性都对应一个守恒定律，即有一个守恒量。从而，将对称性和守恒量这两个概念紧密地联系在一起。

从数学上来说，对称性可由群论来表述。比如：牛顿运动方程的伽利略变换不变性对应着伽利略群；麦克斯韦方程的洛伦兹变换不变性对应着洛伦兹群和 U(1)群。对称群为连续群和分立群的情形分别被称为连续对称性（continuous symmetry）和分立对称性（discrete symmetry）。德国数学家外尔（Hermann Weyl）是把这套数学方法运用于物理学中，并意识到规范对称重要性的第一人。

由于物质世界存在某些对称性，使得物理学理论也具有相应的对称性，从而使对称现象普遍存在于各种物理现象和物理规律中。应用这种对称性它不仅能帮助我们认识和探索物质世界的某些基本规律，而且也能帮助我们去求解某些具体的物理问题。

对称法是指运用物质世界的对称性去分析和处理物理问题的一种逻辑思维方法。恰当

地运用对称法可使复杂的问题变为简单问题，这一过程往往可以避免复杂的数学运算和推导，直接抓住问题的实质，快速简便地求解问题。物理问题中有的对称性一目了然，也有的对称性较为“隐蔽”，即不是很直观。比如，计算与长直载流导线共面（一边与该导线平行）的矩形载流回路的安培力时，运用对称性分析可以避免复杂的数学积分运算，这是比较“直观”的或者“显性”的对称性。再比如，桥式电阻网络（参见范例 14-2）的对称性较为“隐蔽”，要通过仔细地分析才能“察觉”到。

14.2 对称法范例

14.2.1 无穷正方网络的电阻

设有一无穷正方格子电阻网络，每个正方格子的每一条边均有相同的电阻 r，如图 14-1 所示。现在有一稳恒电流 I 从网络 A 节点流入，然后再从其最近邻节点 B 流出，这时节点 AB 间的等效电阻如何计算？显然，这个问题只能利用对称性来求解比较方便。

首先，设节点 B 没有电流流出，只有 A 点有电流 I 流入。由于网络是无穷的，经 A 点流入的电流 I 经由 4 条路（十字路）流向无穷远处。根据对称性，每一条支路都是等价的，因而电流是相同的，即为总电流的四分之一（$I/4$）。同理，考虑 B 点时，设 A 点不存在，这时电流 I 从无穷远处汇流到 B 点而流出，由对称性知，汇到 B 点又要经过十字路口，因而每条边的电流也是总电流的四分之一。再把 A 和 B 点同时考虑，将两种单独情况叠加起来，只有 AB 相连的这个电阻其电流流向是相同的，于是我们有：

$$I_{AB} = \frac{I}{4} + \frac{I}{4} = \frac{I}{2} \tag{14.1}$$

因此，AB 间的电阻为

$$R_{AB} = \frac{V_{AB}}{I} = \frac{rI_{AB}}{I} = \frac{r}{2} \tag{14.2}$$

得出这个结果的关键点是对 AB 之间电位差的理解，即 AB 间的电位差可用分支路电流 I_{AB} 与电阻 r 的乘积来表示。

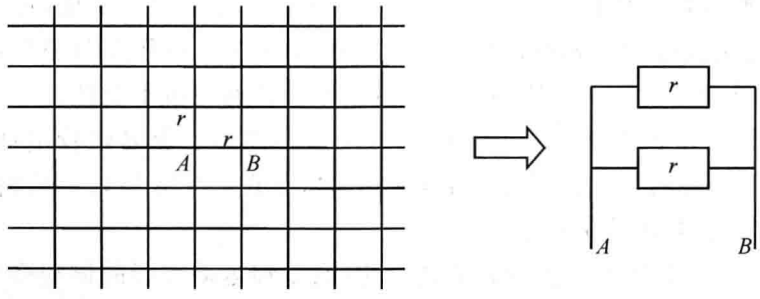


图 14-1 每条边电阻为 r 的无穷正方网络

根据以上得到的电阻值以及相同电阻并联的关系不难看出，该无穷电阻网络可等效为两个电阻都为 r 的并联。据此，如果去掉 A 和 B 之间的网格连线，则 AB 间的电阻为 r；如果把最近邻的连线电阻换成 nr（其中 n 为正整数），则 AB 间的等效电阻为 $\frac{nr}{(n+1)}$。

接下来，由二维正方格子电阻网络的结果推广到一维、二维及三维电阻网络。设节点 A 有 Z 个最近邻节点 B，每根最近邻节点间的连接电阻为 r，由对称性知，通过连接电阻 r 的电流为

$$I_Z = \frac{2I}{Z} \tag{14.3}$$

节点 A、B 间的电位差为

$$V_{AB} = I_Z r = \frac{2I}{Z} r \tag{14.4}$$

由欧姆定律得

$$R_{AB} = \frac{V_{AB}}{I} = \frac{2r}{Z} \tag{14.5}$$

这里 Z 可称之为“配位数(coordination number)”。如果 $Z=2$,即一维无限电阻网络,$R_{AB}=r$;$Z=3$,即正六边格子,$R_{AB}=2r/3$;$Z=6$,即正三角格子,$R_{AB}=r/3$。

到此,一个自然的问题是:如果节点 A 和 B 是正方格子的任意两点,这时的电阻为多少?应该说这是一个难题,令人惊讶的是,这个难题竟然被波兰一中学生利用二维傅里叶级数破解。下面对这一问题利用对称性作一论述。

设二维正方格子两个节点 A、B 的坐标分别为 $A(0,0)$、$B(m,n)$,其中 m,n 均为整数。设 $I(k,l)$ 为流入节点 A 的电流,其后从 B 点流出,则有

$$I(k,l) = \begin{cases} I, & k=l=0 \\ -I, & k=m, l=n \\ 0 & k\neq 0,m;l\neq 0,n \end{cases} \tag{14.6}$$

引入任意节点的电位 $V(k,l)$ 后,节点电流方程可表示为

$$\begin{aligned} I(k,l) = {} & \frac{1}{r}[V(k,l)-V(k-1,l)] + \frac{1}{r}[V(k,l)-V(k+1,l)] \\ & + \frac{1}{r}[V(k,l)-V(k,l-1)] + \frac{1}{r}[V(k,l)-V(k,l+1)] \end{aligned} \tag{14.7}$$

因此,只要求出 $V(k,l)$ 的线性非齐次无穷方程组的解,则任意两节点间的等效电阻可表示为

$$R_{mn} = \frac{V(0,0)-V(m,n)}{I} \tag{14.8}$$

方程(14.7)的解可表示为齐次方程的通解 $V^{(g)}$ 与非齐次方程的特解 $V^{(s)}$ 之和,即

$$V(k,l) = V^{(g)}(k,l) + V^{(s)}(k,l) \tag{14.9}$$

如果网络没有电流接入(也无其他电源),各节点的电位相同,因而对于齐次方程的通解可表示为

$$V^{(g)}(k,l) = V_0 \tag{14.10}$$

下面求(14.9)式中的特解。为此改写方程(14.7),并设特解为

$$V^{(s)}(k,l) = \frac{r}{4} I(k,l) + \frac{a}{4}[V(k-1,l)+V(k+1,l)+V(k,l-1)+V(k,l+1)] \tag{14.11}$$

这里 a 是个不定乘子,当 $a\to 1$ 时,此式即为(14.7)式。设函数 $F(x,y)$ 的傅里叶展开式为

$$F(x,y) = \sum_{kl} V^{(s)}(k,l) e^{i(kx+ly)} \tag{14.12}$$

将(14.11)式代入上式得

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \sum_{kl} \left\{ \frac{r}{4} I(k,l) + \frac{a}{4}[V(k-1,l)+V(k+1,l)+V(k,l-1)+V(k,l+1)] \right\} e^{i(kx+ly)} \\ &= \frac{r}{4} \sum_{kl} I(k,l) e^{i(kx+ly)} + \frac{a}{4} \sum_{kl} [V(k-1,l)+V(k+1,l)+V(k,l-1)+V(k,l+1)] e^{i(kx+ly)} \end{aligned} \tag{14.13}$$

利用(14.6)式,上式成为

$$F(x,y)=\frac{rI}{4}(1-e^{i(mx+ny)})+\frac{a}{4}\sum_{kl}V(k-1,l)e^{i[(k-1)x+ly]}e^{ix}+\frac{a}{4}\sum_{kl}V(k+1,l)e^{i[(k+1)x+ly]}e^{-ix}$$
$$+\frac{a}{4}\sum_{kl}V(k,l-1)e^{i[kx+(l-1)y]}e^{iy}+\frac{a}{4}\sum_{kl}V(k,l+1)e^{i[kx+(l+1)y]}e^{-iy} \tag{14.14}$$

由于对 k,l 的求和遍及 $-\infty$ 到 $+\infty$,因此,利用对称性上式中的四项求和实质是相同的,于是可以简化为

$$\begin{aligned}F(x,y)&=\frac{rI}{4}(1-e^{i(mx+ny)})+\frac{a}{4}\sum_{kl}V(k,l)e^{i(kx+ly)}(e^{ix}+e^{-ix})+\frac{a}{4}\sum_{kl}V(k,l)e^{i(kx+ly)}(e^{iy}+e^{-iy})\\&=\frac{rI}{4}(1-e^{i(mx+ny)})+\frac{a}{2}(\cos x+\cos y)\sum_{kl}V(k,l)e^{i(kx+ly)}\\&=\frac{rI}{4}(1-e^{i(mx+ny)})+\frac{a}{2}(\cos x+\cos y)F(x,y)\end{aligned} \tag{14.15}$$

由此可求得

$$F(x,y)=\frac{rI}{2}\frac{(1-e^{i(mx+ny)})}{[2-a(\cos x+\cos y)]} \tag{14.16}$$

由(14.12)式得电位的特解为

$$\begin{aligned}V^{(s)}(k,l)&=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{4\pi^2}\mathrm{Re}\left[\lim_{a\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{rI}{2}\frac{(1-e^{i(mx+ny)})}{[2-a(\cos x+\cos y)]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\\&=\lim_{a\to 1}\frac{rI}{8\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(mx+ny)}{[2-a(\cos x+\cos y)]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{14.17}$$

式中符号"Re"表示取实部。对于 A 点(电流流入),上式可表示为

$$V^{(s)}(0,0)=\lim_{a\to 1}\frac{rI}{8\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(mx+ny)}{[2-a(\cos x+\cos y)]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{14.18}$$

对于 B 点(电流流出),我们有

$$V^{(s)}(m,n)=-\lim_{a\to 1}\frac{rI}{8\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(mx+ny)}{[2-a(\cos x+\cos y)]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{14.19}$$

将(14.18)式、(14.19)式和(14.10)式代入(14.9)式,并利用(14.8)式得

$$R_{mn}=\frac{V(0,0)-V(m,n)}{I}=\frac{V^{(s)}(0,0)-V^{(s)}(m,n)}{I}=\frac{r}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(mx+ny)}{[2-(\cos x+\cos y)]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{14.20}$$

此式即为二维正方格子网络任意两个节点间的有效电阻解析表达式。考虑两个最近邻节点,上式成为

$$R_{01}=\frac{r}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos y}{[2-(\cos x+\cos y)]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

或者

$$R_{10}=\frac{r}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos x}{[2-(\cos x+\cos y)]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

两式相加得:

$$R_{01}+R_{10}=\frac{r}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=r$$

于是

$$R_{01} = R_{10} = \frac{r}{2}$$

这个结果与前面(14.2)式一致。

14.2.2　桥式电阻网络

一个桥式电阻网络由 5 个电阻组成，其电阻值有 r 和 $2r$ 两种类型，如图 14-2 所示。设电流 I 从 A 点流入，然后从 B 点流出，各支路的电流流向(假设)已标注在图上。原则上，这个电路可以通过基尔霍夫定律求出 AB 间的等效电阻。由于该电路有一定的对称性，即上下臂之间电阻交错对称，由此可推得电流的交错对称性。于是，我们有

$$I_1 = I_3, I_2 = I_4 \tag{14.21}$$

一段含源电路电位差的计算公式是：

$$V_{AB} = \sum(\pm IR) - \sum(\pm \varepsilon) \tag{14.22}$$

我们首先选择桥式网络的路径 ACB 来计算 AB 间的电位差，考虑到电路中无电动势，而且支路中的电流 I_1 和 I_4 的方向均与计算方向 AB 一致，因此求和时取正号。于是，由(14.22)式和(14.21)式可得：

$$V_{AB} = 2rI_1 + rI_4 = 2rI_1 + rI_2 \tag{14.23}$$

再选择路径 $ACDB$，由(14.22)和(14.21)可得：

$$V_{AB} = 2rI_1 + rI_5 + 2rI_3 = 2rI_1 + r(I_1 - I_4) + 2rI_3 = 5rI_1 - rI_2 \tag{14.24}$$

将(14.23)式与(14.24)式相加得：

$$2V_{AB} = 7rI_1 \tag{14.25}$$

再将(14.23)式两边乘以 5，(14.24)式两边乘以 2，然后前者减去后者得：

$$3V_{AB} = 7rI_2 \tag{14.26}$$

再把(14.25)式和(14.26)式相加，并注意到 $I = I_1 + I_2$，于是得到有效电阻为

$$R_{AB} = \frac{V_{AB}}{I} = \frac{7}{5}r \tag{14.27}$$

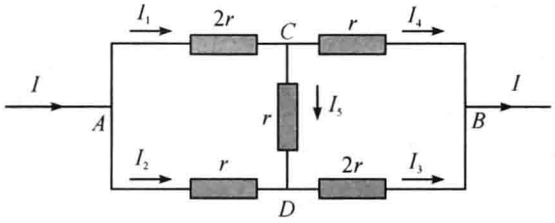


图 14-2　桥式电阻网络

值得指出的是，我们在计算有效电阻 R_{AB} 时，电流 I_5 的具体流向对结果不会产生影响。设该电流从 D 流到 C，则(14.24)式变为

$$V_{AB} = 2rI_1 - rI_5 + 2rI_3 = 2rI_1 - r(I_4 - I_1) + 2rI_3 = 5rI_1 - rI_2$$

即两式相同，因此，对电流 I_5 的流向可以随意假定。从以上的计算过程可以看出，考虑了对称性，使得问题的求解大大简化。

最后，我们将给出图 14-2 的桥式电阻网络等效电阻的一般表达式。为此，将图中的 $2r$ 电阻换成 nr，即 $2r \to nr$，其中 n 为正整数。仿照上述计算过程，不难得到 AB 间等效电阻的如下一般形式：

$$R_n = \frac{3n+1}{n+3}r, \quad n = 1,2,3,\cdots \tag{14.28}$$

显然，当 $n=1$ 时，$R_1=r$，这时电桥平衡，即 CD 间的连接电阻 r 不起作用；当 $n=2$ 时，$R_2=7r/5$；当 $n=3$ 时，$R_3=5r/3$。由(14.28)式还可以看出，当 $n=0$ 时，$R_0=r/3$，这时图 14-2 的桥式网络退化成三个相同电阻 r 的并联。

14.2.3 立方电阻网络

立方电阻网络是一个由 12 个等值电阻 r 组成的无源三维电阻网络，其电流节点数等于立方的顶点数，支路数与立方边数目相同，如图 14-3 所示。当电流 I 从一个顶点流入，而从另一顶点流出时，等效电阻 R 的计算是一个常见的问题。原则上，这类问题可以通过基尔霍夫定律求解，但是，由于节点数和回路数较多，运用基氏定律求解比较复杂，通常运用对称性来求解。这个问题通常会涉及电流流进和流出的三种情况：最近邻节点之间的电流进出、次近邻节点之间的电流进出以及三近邻节点间电流进出。下面对上述三种情况运用对称性逐个进行研究。

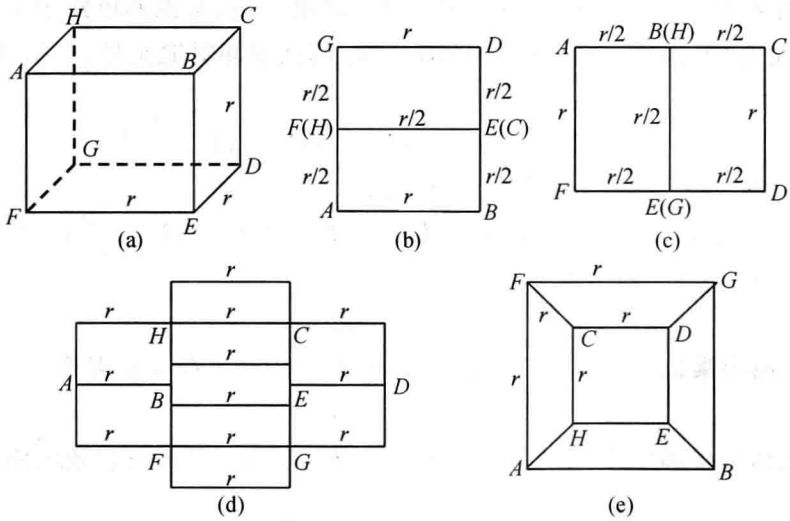


图 14-3 立方电阻网络

首先，考虑最近邻节点间(AB 间)电流的流进与流出问题，即图 14-3(a) 中 A 点进，B 点出。由对称性可知，这时 AH 支路的电流与 AF 支路电流相等，CB 支路与 EB 支路电流相同，因此，$V_H=V_F$ 及 $V_C=V_E$。这就意味着，H 点与 F 点可以合在一起，C 点与 E 点也可以合在一起。这相当于把立方压成一个平面电阻网络，如图 14-3(b) 所示。这个电路是一个简单电路，可以利用串联和并联求解，不难得到等效电阻为

$$R_{AB}=\frac{7}{12}r \tag{14.29}$$

其次，考虑次近邻节点间(AC 间)的电流进和出，即图 14-3(a) 中 A 点进，C 点出。根据对称性，这时 AH 与 AB 支路电流相等以及 HC 和 BC 支路电流相同，于是有 $V_H=V_B$ 和 $V_G=V_E$。这样 H 点与 B 点合并，G 点与 E 点合并，这也相当于把立方压成一个平面电阻网络，如图 14-3(c) 所示。从图 14-3(c) 不难看出这是一个桥式电阻网络，幸运的是，中间充当“桥”的电阻 $r/2$ 不起作用，即 HB 与 GE 同电位，因为电桥臂的电阻交叉相乘而值相等。因此，我们得到 AC 间的有效电阻为

$$R_{AC}=\frac{3}{4}r \tag{14.30}$$

最后，考虑三近邻节点之间(AD 间)电流的进和出，即 A 点进，D 点出。当 A 点流进电流

I 时，由对称性可知，AB、AH 和 AF 支路电流均相同，故 $V_H = V_F = V_B$，即这三个点可以连在一起。同理，CD、ED 和 GD 支路电流相等，故 $V_C = V_G = V_E$，这三个点也可以连接在一起，等效电路如图 14-3(d) 所示。于是，等效电阻为

$$R_{AD} = \frac{r}{3} + \frac{r}{6} + \frac{r}{3} = \frac{5}{6}r \tag{14.31}$$

实际上，当 AD 间加上电压 V 时，电流 I 从 A 点流入分成三路，每一路的电流为 $I/3$；再当 $I/3$ 电流流入 B 时又分成相等的两路，每一路的电流为 $I/6$。由对称性可得

$$V = \frac{I}{3}r + \frac{I}{6}r + \frac{I}{3}r = \frac{5I}{6}r$$

所有

$$R_{AD} = \frac{V}{I} = \frac{5}{6}r$$

值得一提的是：

(1) 如果将图 14-3(a) 压成二维图形(见图 14-3(e))，以上三种情况所计算的结果仍然相同；

(2) 当计算最近邻节点 A 和 B 间的等效电阻时，把 AB 边和 GD 边的电阻 r 换成 nr，其中 n 为正整数，对称性不会被破坏(就计算 AB 间等效电阻而言)。这时 AB 间的等效电阻(参见图 14-3(b)) 可表示为

$$R'_{AB} = \frac{(3n+4)}{(5n+7)}r, \quad n = 1,2,3,\cdots \tag{14.32}$$

显然，$n = 1$，上式与(14.29) 相同；

(3) 当计算次近邻节点 AC 间的等效电阻时，把 AF 和 CD 边的电阻 r 换成 nr，其中 n 为正整数，对称性也不会破坏(就计算 AC 间等效电阻而言)。因此，AC 间有等效电阻变为

$$R'_{AC} = \frac{(2n+1)}{(2n+2)}r, \quad n = 1,2,3,\cdots \tag{14.33}$$

(4) 当计算 AD 间的等效电阻时，由图 14.2.3(d) 可知，把 AB、AF 和 AH 边的电阻 r 更换成 nr，或将 CD、ED 和 GD 边更换电阻，或将 BC、BE、HC、HG、FE 和 FG 更换同值电阻，其对称性仍然保持。于是

$$R'_{AD} = \frac{2n+3}{6}r, \quad n = 1,2,3,\cdots \tag{14.34}$$

很显然，当 $n = 1$ 时，上式结果与(14.31) 相同。

14.2.4　带电正方形与载流正方形的场分布

带电正方形　设正方形的边长为 $2a$，总电量为 q，电荷均匀分布在正方形的每一条边上，如图 14-4(a) 所示。该正方形对称轴线上任一点的电势，可用每条边在轴线上所产生的电势的叠加来得到。由于问题有对称性，只要计算任一条边在轴线上的电势即可解决。

由带电体电势的表达式

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\mathrm{d}q}{r}$$

每一条边在 P 点的电势为

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\lambda \mathrm{d}l}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{8a}\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}l}{\sqrt{a^2+z^2+l^2}} \tag{14.35}$$

由于对称性，4 条边有相同的贡献，即总电势为

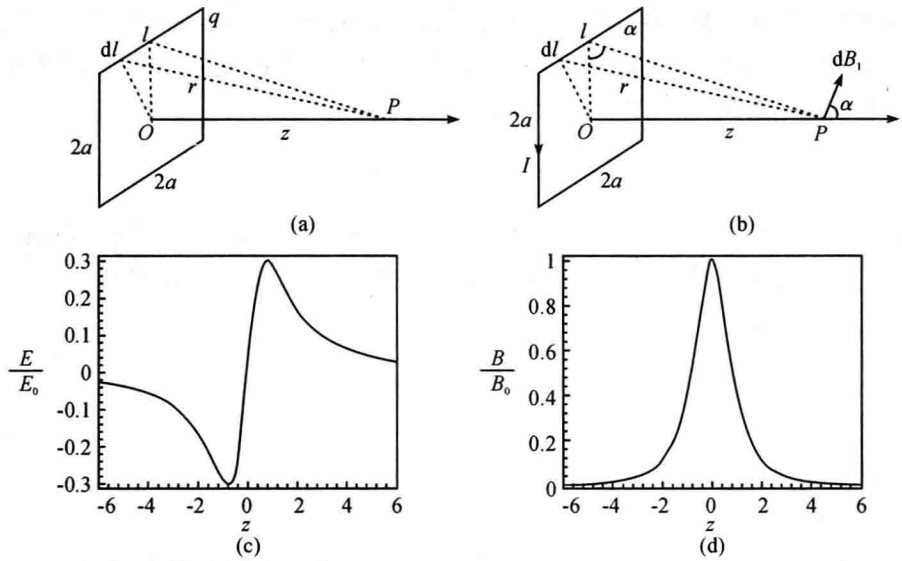


图 14-4　正方形回路的电荷与电流

$$
\begin{aligned}
V = 4V_1 &= 4\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{8a}\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}l}{\sqrt{a^2+z^2+l^2}} \\
&= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}\ln\left[\sqrt{a^2+z^2+l^2}+l\right]_{l=-a}^{l=a} \\
&= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}\ln\left(\frac{\sqrt{2a^2+z^2}+a}{\sqrt{2a^2+z^2}-a}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\ln\left(\frac{\sqrt{2a^2+z^2}+a}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)
\end{aligned}
\tag{14.36}
$$

当 $z=0$ 时，上式变为正方形对称中心的势：

$$V_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\ln(\sqrt{2}+1)$$

当 $z \gg a$ 时，上式简化为

$$
\begin{aligned}
V &\approx \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}\ln\left(\frac{z+a}{z-a}\right) \\
&= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}\ln\left(\frac{1+\dfrac{a}{z}}{1-\dfrac{a}{z}}\right) \\
&= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}2\left[\frac{a}{z}+\frac{1}{3}\left(\frac{a}{z}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{a}{z}\right)^5+\cdots\right], \quad \left|\frac{a}{z}\right|<1
\end{aligned}
$$

取方括号中级数的第一项可得

$$V \approx \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}2\,\frac{a}{z} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z}$$

相当于位于坐标原点的点电荷的电势。

对于轴线上任一点 P 的电场强度，可以通过(14.36)式对变量 z 求导数得到，于是

$$
\begin{aligned}
E_z &= -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} = -\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\ln\left(\sqrt{2a^2+z^2}+a\right)-\ln\left(\sqrt{2a^2+z^2}-a\right)\right] \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{z}{(a^2+z^2)\sqrt{2a^2+z^2}} = E_0\,\frac{za^2}{(a^2+z^2)\sqrt{2a^2+z^2}}
\end{aligned}
\tag{14.37}
$$

其中

$$E_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

显然，当 $z = 0$ 时，$E_z = 0$，这是对称性所造成的；当 $z \gg a$ 时，即有

$$E_z \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$$

这时正方形带电体相当于一个位于坐标原点的点电荷。从(14.37) 可知，电场强度在 z 轴上有极大值，于是将(14.37) 式对 z 求导数，并令其为零，可求得极值所在的位置，即由

$$\frac{\mathrm{d}E_z}{\mathrm{d}z} = 0$$

可得

$$z = \pm a\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \tag{14.38}$$

因此，带电正方形回路的电场强度与带电圆环的电场强度有相同的特点。图 14-4(c) 给出了电场强度(14.37) 式随 z 变化的曲线，其中 z 以 a 为单位。

顺便指出，若将该正方形改为 $2a \times 2b$ 长方形，由(14.35) 式不难得到 P 点的电势

$$\begin{aligned} V &= 2V_{a1} + 2V_{b2} \\ &= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0(a+b)}\left\{\ln\left[\frac{\sqrt{2a^2+z^2}+a}{\sqrt{2a^2+z^2}-a}\right] + \ln\left[\frac{\sqrt{2b^2+z^2}+b}{\sqrt{2b^2+z^2}-b}\right]\right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(a+b)}\left\{\ln\left[\frac{\sqrt{2a^2+z^2}+a}{\sqrt{a^2+z^2}}\right] + \ln\left[\frac{\sqrt{2b^2+z^2}+b}{\sqrt{b^2+z^2}}\right]\right\} \end{aligned}$$

与此电势相应的电场强度为

$$E_z = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(a+b)}\left[\frac{az}{(a^2+z^2)\sqrt{2a^2+z^2}} + \frac{bz}{(b^2+z^2)\sqrt{2b^2+z^2}}\right]$$

当 $a = b$ 时，以上两式即退化为正方形的结果。

载流正方形回路　设正方形回路的边长为 $2a$，电流 I 逆时针方向流动，即与 z 轴构成右手螺旋法则，如图 14-4(b) 所示。由于对称性，轴线上任一点的磁感应强度应是正方形每一边所产生磁感应强度的叠加。因此，计算时只要先计算出任一边的磁感应强度即可。

在一条边上任意取一小电流元，由毕奥－萨伐尔定律

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$$

可知，这段电流元在 P 点产生的 $\mathrm{d}B$ 与 z 轴的夹角为 α，于是

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}l}{z^2+a^2+l^2}\sin\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}l}{z^2+a^2+l^2}\frac{\sqrt{z^2+a^2}}{\sqrt{z^2+a^2+l^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{l}{\sqrt{z^2+a^2+l^2}}\right]_{-a}^{a} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{z^2+a^2}}\frac{a}{\sqrt{z^2+2a^2}} \end{aligned} \tag{14.39}$$

此式在 z 轴方向的分量为

$$B_{1z}=B_1\cos\alpha=\frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{z^2+a^2}}\frac{a}{\sqrt{z^2+2a^2}}\frac{a}{\sqrt{z^2+a^2}}=\frac{\mu_0 Ia^2}{2\pi(z^2+a^2)\sqrt{z^2+2a^2}} \tag{14.40}$$

由对称性，P 点的磁感应强度大小为

$$B_z=4B_{1z}=\frac{2\mu_0 Ia^2}{\pi(z^2+a^2)\sqrt{z^2+2a^2}}=B_0\frac{\sqrt{2}a^3}{(z^2+a^2)\sqrt{z^2+2a^2}} \tag{14.41}$$

其中

$$B_0=\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}$$

是正方形对称中心的磁感应强度。图 14-4(d) 给出了磁感应强度与 z 的关系曲线，其中 z 以 a 为单位。

当 $z\gg a$ 时，(14.41) 式简化为

$$B_z\approx\frac{\mu_0 m}{2\pi z^3}$$

其中

$$m=4a^2 I$$

这就是一个位于坐标原点的磁偶极子的磁感应强度。

顺便说明一下，如将上述的正方形改为 $2a\times 2b$ 的长方形，问题仍有对称性，轴线上任一点的磁感应强度是(过程略)

$$B_z=\frac{\mu_0 Iab(2z^2+a^2+b^2)}{\pi(z^2+a^2)(z^2+b^2)\sqrt{z^2+a^2+b^2}}$$

当 $a=b$ 时，上式即退化到(14.41) 式。

14.2.5 直线电流与圆电流共面的安培力

一根无限长直导线与圆形导线回路共面，圆心 O 与直导线的距离为 d。长直导线通以电流 I_1，圆形回路通以电流 I_2，如图 14-5 所示。由安培定律知，两电流间存在安培力(磁力) 的作用。又由牛顿定律可知，长直导线作用于圆形导线的力与圆导线作用于长直导线的力大小相等而方向相反。理论上，可以用两种思路来解决这一问题：一是把圆电流视为处在直线电流的磁场中；二是视直线电流位于圆电流的磁场中。由于圆电流在直线电流处激发的磁场比较复杂，给问题的解决造成困难，而直线电流在圆电流各处的磁场是已知的并且关系比较简单。因此，我们采用前者来计算安培力。

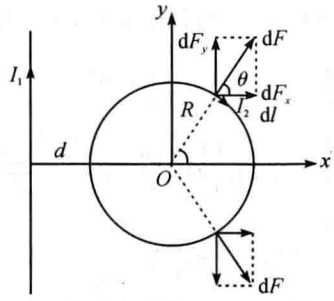


图 14-5 直线电流与圆电流间的安培力

根据对称性，圆电流以 x 轴为对称轴的上半部分和下半部分相应电流元 $I_2\mathrm{d}l$ 所受到的力 $\mathrm{d}F$ 的 y 分量大小相等而方向相反，故相加后两者相互抵消，对整个圆积分没有贡献。对于

平行于 x 轴方向的分量方向相同，积分有贡献。因此，圆电流受到的安培力为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= F_x\hat{\boldsymbol{i}} = \int \mathrm{d}F_x\hat{\boldsymbol{i}} \\
&= 2\int_0^{\pi} \mathrm{d}F\cos\theta\hat{\boldsymbol{i}} \\
&= 2\int_0^{\pi} |\, I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}\,|\cos\theta\hat{\boldsymbol{i}} \\
&= 2\int_0^{\pi} I_2R\mathrm{d}\theta\,\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+R\cos\theta)}\cos\theta\hat{\boldsymbol{i}} \\
&= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d+R\cos\theta}{d+R\cos\theta}\mathrm{d}\theta\hat{i} - \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d}{d+R\cos\theta}\mathrm{d}\theta\hat{\boldsymbol{i}} \\
&= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\left[\theta - \frac{2d}{\sqrt{d^2-R^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{d-R}{d+R}}\tan\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{\pi}\hat{\boldsymbol{i}} \\
&= \mu_0 I_1 I_2\left(1-\frac{d}{\sqrt{d^2-R^2}}\right)\hat{\boldsymbol{i}}
\end{aligned}$$

因为 $d > \sqrt{d^2-R^2}$，所以圆电流所受的力沿着 x 的反方向，即指向直导线。这个力是一个吸引力。实际上，由两根平行且电流流向相同的导线是吸引力以及电流相反的是排斥力这一结果，很容易判断载流导线与圆电流之间的力是吸引力。由上式可知，当 $d\to\infty$ 时，$F\to 0$；当 $d\to R$ 时，$F\to\infty$。考虑到导线和圆形回路的粗细，式中的 $d = l+2a+R$，其中 l 为两载流导线表面之间的距离，a 是两导线的半径（这里设为相同）。当 $l=0$ 时，$d=2a+R$，于是

$$\begin{aligned}
F &= \mu_0 I_1 I_2\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-\left[\dfrac{R}{(2a+R)}\right]^2}}\right]\hat{i} \\
&= \mu_0 I_1 I_2\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-[1+(2a/R)]^{-2}}}\right)\hat{i} \\
&\approx \mu_0 I_1 I_2\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{a}}\right)\hat{i}
\end{aligned}$$

可见，当计入导线粗细时，两者的吸引力不会无限大。

14.2.6　圆形线圈在均匀磁场中转动所产生的电动势

设半径为 R 的圆形回路处于均匀磁场 B 中，并以角速度 ω 绕其直径匀速转动，转动轴与磁场垂直。当回路转动至其法线与磁场垂直时，求如图 14-6 所示回路 ab 圆弧的电动势。这个问题可以直接运用动生电动势的公式求解，但不如运用对称性来得便捷。由于圆形回路相对于原点 O 有很好的空间反演对称性，ab 圆弧上的电动势即为整个回路的电动势的 1/4，于是，我们只要求出整个回路的电动势即可解决。

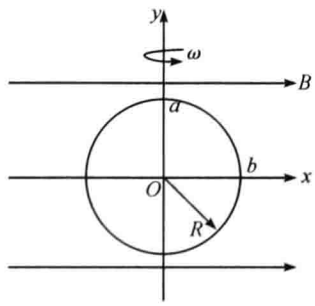


图 14-6　圆形线圈在均匀磁场中转动所产生的电动势

设时刻 t 通过圆形回路的磁通量为

$$\Phi_m(t) = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{S} = B\pi R^2 \cos\omega t$$

根据法拉第电磁感应定律，可得回路中的瞬时电动势是

$$\varepsilon(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m(t)}{\mathrm{d}t} = B\pi R^2 \omega \sin\omega t$$

又根据对称性，这时 ab 圆弧上的电动势为

$$\varepsilon_{ab}(t) = \frac{1}{4}\varepsilon(t) = \frac{1}{4}B\pi R^2 \omega \sin\omega t$$

于是，当回路转动至其法线方向与磁场垂直时，其电动势为最大，即

$$\varepsilon_{\mathrm{abmax}} = \frac{1}{4}B\pi R^2 \omega$$

读者自己可以验证，利用对称性计算要比利用动生电动势公式来得便捷。

第 15 章　镜像法

静电场中的导体静电平衡后，导体(conductor)表面出现感应电荷(induced charge)。如果导体原先是中性(不带电)的，则导体与施感电荷(inducing charge or donor charge)相对面出现与施感电荷异号的感应电荷。这种感应电荷如何计算，则是静电学中的一个比较棘手的问题。但是，假如导体形状比较规则，感应电荷的计算就比较容易，比如，导体球壳内或外的点电荷所引起的感应电荷分布、点电荷在接地导体平面上感应的面电荷分布等。这些都可以运用镜像法来求解。在这一章中，我们将运用镜像法(或电像法)来计算平板导体和导体球处在点电荷电场的情况。

15.1　镜像法界定

“镜”通常称镜子，是一种具有光滑平面的、能照见形象的器具。通常的镜子是平面玻璃镀银或铝做成的。也可以指用光学原理制成的帮助视力或做光学实验用的器具，如镜片。大家知道，镜中的“像”与实际形象正好成“左”与“右”的关系。比如，你的右手在镜中出现的“像”却是左手。这种现象是一种对称性，称之为镜像对称或左右对称或手性对称(chirality)。由此可见，镜中的“像”与实际形象正好相反，这种“像”也称为“虚像”。这种现象可以用于研究某些特定形状导体的表面感应电荷。比如，一块无限大导体平面上方放置一个点电荷的情况，该导体平面对于这个施感电荷来说相当于一面“镜子”，即导体面上的感应电荷可用一个位于施感电荷异侧的、等距离的“虚拟像电荷”来代替。

所谓镜像法(或电像法)是在考察电场的区域外部放置一个或多个虚拟电荷(常称为像电荷)来代替导体表面的感应电荷或介质边界面上的极化电荷对电场所产生的贡献的一种求解静电问题的方法。这里所强调的是，这些“虚拟像电荷(fictitious image charge)”必需放在求解区域的外部，因为它们是用来等效替代导体表面上的感应电荷或介质分界面上的极化电荷对电场的贡献的。只有找到全部的像电荷，才能保证电场的边界条件(狄利克雷或诺伊曼边界条件)得到满足。根据静电唯一性定理(请参见第 4 章)，满足边界条件的解就是该问题唯一正确的解。然而，寻找像电荷是一件十分困难的事情，只有少数极为简单的问题可以采用电像法求解。镜像法是 Lord Kelvin(即 William Thomson)于 1848 年提出，最先用于计算一定形状导体面附近的电荷所产生的静电场，后来发展到可以计算某些稳定电磁场。下面通过一些实例来阐述这一静电问题的求解方法。

电像法的实质是依据定解问题来猜想问题的解，即假设一个解然后代入方程及边界条件，看其是否满足定解问题，如果不满足可以继续猜解，直到找到真正的解为止。这种猜解的方法，实际上是假设法的一种情况。一个实际的物理定解问题能否较准确地猜出其解的形式，这决定于你从事这项工作的经验积累和对问题的敏锐性和洞察能力。

15.2 镜像法范例

15.2.1 接地导体球外的点电荷

当点电荷位于导体球壳内时，球面上的感应电荷是比较容易计算的。但是，当点电荷位于导体球（球壳）的外部时，球面上的感应电荷如何计算？运用镜像法很容易解决这个问题。设导体球的半径为 R，并将该球接地。我们将坐标原点建立在球心，把点电荷 q 放置在 z 轴上，其坐标为 $(0,0,a)$，其中 $a>R$，如图 15-1 所示。由于静电平衡，球内电场为零，而在球外空间存在电场的分布。该空间的电场是点电荷 q 与导体球面上的异号感应电荷共同产生的。根据镜像法，感应电荷可以用一个位于球内的“虚拟像电荷”来代替。对于电荷 q 来说，接地导体球面好似一面凸起的“哈哈镜”，它的“像”要比自身小一些，用 q' 表示。根据成像原理，像电荷 q' 也位于 z 轴上 $(0,0,b)$，且在球的内部。

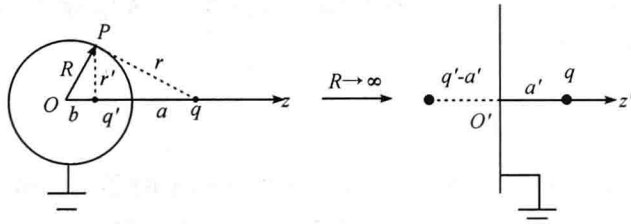


图 15-1 接地导体球外的点电荷

由于导体球接地，这两个电荷在球面上产生的总电势应零，即

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r'}=0$$

于是有

$$\frac{q'}{q}=-\frac{r'}{r} \tag{15.1}$$

再根据三角形 $\Delta opqo$ 和 $\Delta opq'o$ 相似可得

$$\frac{r'}{r}=\frac{R}{a},\quad \frac{b}{R}=\frac{R}{a} \tag{15.2}$$

由(15.1)式和(15.2)式可解得

$$q'=-\frac{R}{a}q,\quad b=\frac{R^2}{a} \tag{15.3}$$

球外空间任意一点的电势为

$$V_{\text{Earth}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}-\frac{\dfrac{Rq}{a}}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+(z-\dfrac{R^2}{a})^2}} \tag{15.4}$$

显然，当场点 P 位于球面上时，上式为零，即满足接地的条件。当场点 P 位于无穷远处时，上式也为零，即满足有限电荷无穷远处电势为零的条件。

当球的半径 R 趋于无穷时，这时导体球面可视为无穷大导体平面。为此，把坐标原点移动至球面上，即相当于坐标作如下变换

$$\begin{cases} x\to x'=x \\ y\to y'=y \\ z\to z'=z-R \end{cases} \tag{15.5}$$

这时(15.3)式成为

$$\begin{aligned} q' &= -\frac{R}{a'+R}q \\ b' &= (b-R) = -\frac{a'R}{a'+R} \end{aligned} \tag{15.6}$$

其中 a' 和 b' 分别表示 q 和 q' 在新坐标系中 z 轴上的位置。(15.4)式变换为

$$V'_{\text{Earth}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x'^2+y'^2+(z'-a')^2}} - \frac{\dfrac{Rq}{(a'+R)}}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x'^2+y'^2+(z'-b')^2}} \tag{15.7}$$

当 $R\to\infty$ 时,(15.6)式和(15.7)式简化为

$$q' = -q, \quad b' = -a' \tag{15.8}$$

$$V'_{\text{Earth}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x'^2+y'^2+(z'-a')^2}} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x'^2+y'^2+(z'+a')^2}} \tag{15.9}$$

(15.8)式和(15.9)式即为接地导体平面与点电荷的结果。由此可见,接地导体平面是球面的特殊情况。

值得指出的是:当导体球不接地(中性)时,该导体球相对地有一定的电势,q 和 q' 只能保证球面电势为零,而不能保证使球有一定的电势,因此,在导体球的球心还必须放上一个与 q' 等量而异号的电荷 q''。这种情况下,(15.4)式被改写为

$$V = V_0 + V_{\text{Earth}} = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_0 R} + V_{\text{Earth}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} + V_{\text{Earth}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(a'+R)} + V_{\text{Earth}} \tag{15.10}$$

当 $R\to\infty$ 时,球面变为平面,上式的电势为零。这表明无穷大导体平面接地与不接地没有区别,即电势分布与导体平面是否接地无关。

15.2.2　内导体球接地的同心导体球系统

设一个内外半径分别为 b 和 c 的导体球壳同心地包围着半径为 a 的导体球。给球壳带上电荷 Q 后,接着将内导体球接地。内导体球上的电荷是多少?这个问题可以利用范例 15-1 的镜像法来讨论。为此,设内导体球带电荷为 q_1,球壳内外表面上的电荷分别为 q_2 和 q_3。在球壳上取小面元 $\mathrm{d}S_2$ 和 $\mathrm{d}S_3$,对应的电荷元分别为 $\mathrm{d}q_2$ 和 $\mathrm{d}q_3$。这两个电荷相当于位于内导体球的外部为 b 和 c 处,如图 15-2 所示。由(15.3)式得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}q'_2 &= -\frac{a}{b}\mathrm{d}q_2, \quad b'_2 = \frac{a^2}{b} \\ \mathrm{d}q'_3 &= -\frac{a}{c}\mathrm{d}q_3, \quad b'_3 = \frac{a^2}{c} \end{aligned} \tag{15.11}$$

对球壳内外表面的电荷积分得

$$\begin{aligned} q'_2 &= \int \mathrm{d}q'_2 = -\frac{a}{b}q_2 \\ q'_3 &= \int \mathrm{d}q'_3 = -\frac{a}{b}q_3 \end{aligned} \tag{15.12}$$

由于内导体球接地,球内的总电荷为

$$q'_1 = q'_2 + q'_3 = -\frac{a}{b}q_2 - \frac{a}{c}q_3$$

电荷 q'_1 即为内导体球面上的电荷 q_1,于是

$$q_1 = q'_1 = -\frac{a}{b}q_2 - \frac{a}{c}q_3 = \frac{-abQ}{ab+bc-ca} \tag{15.13}$$

得出此式已考虑到$q_2 = -q_1$和$q_3 = q_1 + Q$。这个结果与叠加法(参见范例12-3)和能量法(参见范例18-2)是一致的。

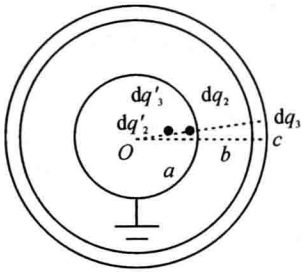


图 15-2　镜像法运用于内导体球接地的同心导体球系统

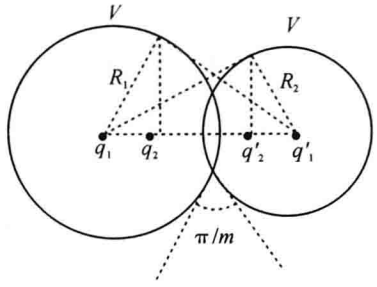


图 15-3　两个以任意角度π/m(m为整数)相交的导体球

15.2.3　两个相交导体球的电容

两个半径分别为R_1和R_2的导体球以任意角度(相交处两条切线之间的夹角)相交在一起,组成一个相交球孤立导体系统,如图15-3所示。设该导体带有总电荷Q,相应的电势为V。

这个孤立导体系统的电容可以利用镜像法求解。对于具有电势V的单个孤立导体球(半径为R)来说,电荷是均匀分布在球面上的,球面电荷可表示为

$$q = 4\pi\varepsilon_0 RV \tag{15.14}$$

这相当于一个位于球心的点电荷所起的作用。对于两个相交球来说,静电平衡后两者具有相同的电势V,但是电荷分布不再均匀,电量也不相等。

根据(15.14)式,设在R_1的球心放上点电荷q_1,在R_2的球心放上q'_1,这样可以保证各自的球具有电势V。但是,$q_1(q'_1)$的放置破坏了球2(球1)的等势性,这样必须在球2(球1)内再放置电荷$q'_2(q_2)$,而$q'_2(q_2)$的放置再一次破坏球1(球2)的等电势性。由于两个球相交,在两球心的连线上所放置的电荷数是有限的。各球心上的电荷及离球心的位置可表示为

$$q_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 V, \quad b_1 = 0,$$
$$q'_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_2 V, \quad b'_1 = 0$$

第2个电荷及位置是

$$q_2 = -\frac{R_1}{d}q'_1, \quad b_2 = \frac{R_1^2}{d}$$
$$q'_2 = -\frac{R_2}{d}q_1, \quad b'_2 = \frac{R_2^2}{d}$$

其中d代表球心间的距离,可写成

$$d = \left[R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\right]^{1/2}$$

如果两个球的交角较小,则意味着上式中的m较大,像电荷的个数也较多。因此,对于较大的m,可以写出像电荷的一般式:

$$q_n = -\frac{R_1}{(d-b'_{n-1})}q'_{n-1}, \quad b_n = \frac{R_1^2}{(d-b'_{n-1})}$$
$$q'_n = -\frac{R_2}{(d-b_{n-1})}q_{n-1}, \quad b'_n = \frac{R_2^2}{(d-b_{n-1})} \quad ,2 < n < m-1 \tag{15.15}$$

第 m 个像电荷正好位于两个球的相交区域内，两导体球中像电荷的总数为

$$N = \frac{2\pi}{(\frac{\pi}{m})} - 1 = 2m - 1, \quad m = 1,2,\cdots,\infty$$

这里 N 是奇数，且是有限的。把两个球内 N 个电荷加起来就是相交球导体上的总电荷，即

$$Q = \sum_{n=1}^{m} q_n + \sum_{n=1}^{m-1} q'_n = V\Big[\sum_{n=1}^{m} c_n + \sum_{n=1}^{m-1} c'_n\Big]$$

由孤立导体电容的定义得

$$C = \frac{Q}{V} = \Big[\sum_{n=1}^{m} c_n + \sum_{n=1}^{m-1} c'_n\Big] = C_\infty + \sum_{n=2}^{m} c_n + \sum_{n=2}^{m-1} c'_n \tag{15.16}$$

其中 c_n、c'_n 称为电容系数，而

$$C_\infty = 4\pi\varepsilon_0(R_1 + R_2)$$

接下来，我们讨论几种 m 值较小的情况。当 $m = 1$ 时，两个球相交 π 角，此即表示一个球是在另一个球的内部，这相当于一个孤立球。设 $R_2 < R_1$，这时(15.16) 式中只有一项，即

$$C = c_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1$$

当 $m = 2$ 时，两个球相交 $\frac{\pi}{2}$ 角，这时像电荷数是 3 个，由(15.16) 得

$$C = C_\infty - 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}$$

当 $m = 3$ 时，相交 $\frac{\pi}{3}$，共有 5 个像电荷，由(15.16) 得

$$C = C_\infty - \frac{8\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2}} + \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1^2 R_2}{R_1^2 + R_1 R_2}$$

由此可见，m 越大，交角越小，则像电荷的数目也就越多。当 m 趋于无穷时，两个球的相交状态变为相切状态，像电荷的数目为无穷多个，这种情况在范例 15-4 中讨论。

15.2.4　两个接触导体球

两个接触导体球的电容　设半径分别为 R_1 和 R_2 的两个金属导体球互相接触组成一个孤立导体，如图 15-4 所示。现将该导体带上电荷 Q，静电平衡后，电荷分布于各个球面上，两球的电势相等。设球 1 的电荷为 Q_1、球 2 的电荷为 Q_2 以及电势为 V。利用电像法可以求出每个球上所带的电荷。首先，在球 1 的球心放上电荷 q_1，在球 2 的球心放上 q'_1。由于 $q_1(q'_1)$ 会破坏球 2(球 1) 的等势性，为此，再在球 2(球 1) 放上 $q'_2(q_2)$，这样一直放置下去直到等势为止。

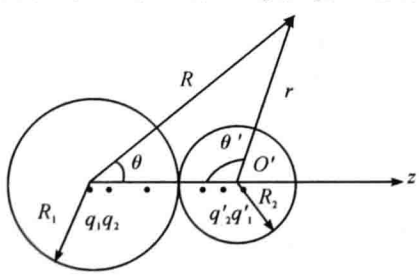


图 15-4　两个接触球孤立导体

第 1 个放置的电荷及位置可表达为

$$q_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 V = cR_1, \quad b_1 = 0$$

$$q'_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_2 V = cR_2, \quad b'_1 = 0$$

其中 $c = 4\pi\epsilon_0 V$。第 2 个电荷及位置是

$$q_2 = -\frac{R_1}{d}q'_1, \quad b_2 = \frac{R_1^2}{d}$$

$$q'_2 = -\frac{R_2}{d}q_1, \quad b'_2 = \frac{R_2^2}{d}$$

第 n 个电荷及位置为

$$q_n = -\frac{R_1}{d - b'_{n-1}}q'_{n-1}, \quad b_n = \frac{R_1^2}{d - b'_{n-1}} \tag{15.17}$$

$$q'_n = -\frac{R_2}{d - b_{n-1}}q_{n-1}, \quad b'_n = \frac{R_2^2}{d - b_{n-1}} \tag{15.18}$$

由以上两式消去 q'_n 可得

$$\frac{q_n}{q_{n+2}} + \frac{q_n}{q_{n-2}} = 2 \tag{15.19}$$

再令 $P_n = q_n^{-1}$，则上式简化为齐次的线性差分方程

$$P_{n+1} - 2P_n + P_{n-2} = 0 \tag{15.20}$$

设 $P_n = A\alpha^n$，代入(15.20)式得

$$\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 = 0$$

不难看出，α 的特征值是 ± 1，而其倒数也是它的解。于是

$$P_n = (A + nB)(+1)^n + (A' + nB')(-1)^n \tag{15.21}$$

式中 A、B、A'、B' 是待定系数。当 $n = 1,2,3,4$ 时，由(15.17)式、(15.18)式和(15.21)式可列出如下方程：

$$A + B - A' - B' = \frac{R_2}{cR_1R_2}$$

$$A + 2B + A' + 2B' = -\frac{R_1 + R_2}{cR_1R_2}$$

$$A + 3B - A' - 3B' = \frac{R_1 + 2R_2}{cR_1R_2}$$

$$A + 4B + A' + 4B' = -\frac{2(R_1 + R_2)}{cR_1R_2}$$

联立解之得

$$A = -\frac{(R_1 - R_2)}{4cR_1R_2}, B = 0, A' = -A, B' = -\frac{(R_1 + R_2)}{2cR_1R_2}$$

将此结果代入(15.21)式可求得球 1 内电荷的通式为

$$q_n = \frac{16\pi\epsilon_0 VR_1R_2}{(-1)^{n+1}(2nd - \Delta R) - \Delta R}, b_n = \frac{1}{d}(R_1^2 + R_1R_2g_n) \tag{15.22}$$

其中

$$g_n = \frac{(-1)^{n+1}[2(n-2)d - \Delta R] - \Delta R}{(-1)^{n+1}(2nd - \Delta R) - \Delta R}$$

上式中的 $\Delta R = R_1 - R_2$，$d = R_1 + R_2$。对(15.22)式作 $R_1 \leftrightarrow R_2$ 互换，可得球 2 内电荷的通式

$$q'_n = \frac{16\pi\epsilon_0 VR_1R_2}{(-1)^{n+1}(2nd + \Delta R) + \Delta R}, b'_n = \frac{1}{d}(R_2^2 + R_1R_2g'_n) \tag{15.23}$$

其中

$$g'_n = \frac{(-1)^{n+1}[2(n-2)d + \Delta R] + \Delta R}{(-1)^{n+1}(2nd + \Delta R) + \Delta R}$$

由(15.22)式和(15.23)式可得两个球内的总电荷为

$$Q = Q_1 + Q_2 = \sum_{n=1}^{\infty} q_n + \sum_{n=1}^{\infty} q'_n$$

该孤立导体的电容是

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q_1 + Q_2}{V}$$

$$= 4\pi\varepsilon_0 R_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4R_2}{(-1)^{n+1}(2nd - \Delta R) - \Delta R} + 4\pi\varepsilon_0 R_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4R_1}{(-1)^{n+1}(2nd + \Delta R) + \Delta R} \tag{15.24}$$

上式中的每一项求和都可以写成两项，于是

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R_1 \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2R_2}{(2m+1)\mathrm{d} - \Delta R} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\frac{R_2}{md} \right) \right\}$$

$$+ 4\pi\varepsilon_0 R_2 \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2R_1}{(2m+1)d + \Delta R} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\frac{R_1}{md} \right) \right\}$$

$$= C_{11} + C_{12} + C_{22} + C_{21} \tag{15.25}$$

其中

$$C_{11} = 4\pi\varepsilon_0 \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2R_1 R_2}{(2m+1)d - \Delta R} \right)$$

$$C_{12} = C_{21} = -4\pi\varepsilon_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\frac{R_1 R_2}{md} \right) \tag{15.26}$$

$$C_{22} = 4\pi\varepsilon_0 \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2R_1 R_2}{(2m+1)d + \Delta R} \right)$$

称为电容系数。若 $R_1 = R_2 = R$，则 $\Delta R = 0$，(15.25)式可简化为

$$C = \frac{Q}{V} = 8\pi\varepsilon_0 R \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 8\pi\varepsilon_0 R \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right) = 8\pi\varepsilon_0 R \ln 2 \tag{15.27}$$

可见，两个相切球其电容要比单个球的电容大一些，但不是单个球的两倍。

导体的尖端效应　由两个球内放置的点电荷数可以看出，两个导体球面上的电荷分布是不均匀的。如何得到球面的电荷分布？我们知道，导体静电平衡时，电场强度与导体表面垂直，与电荷面密度的关系为

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

由于电场强度可以表示为电势 V 梯度的负值，而该导体系统的电势分布可表示为

$$V(R, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{r_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q'_n}{r'_n} \right)$$

式中 r_n 和 r'_n 分别表示电荷 q_n 和 q'_n 到场点的距离。设坐标原点在球 1 的中心，z 轴与 oo' 的连线重合。由于问题具有轴对称性，因而电势 V 与方位角 φ 无关。在这种情况下，r_n 和 r'_n 可表达为

$$r_n = (R^2 + b_n^2 - 2Rb_n\cos\theta)^{1/2}$$

$$r'_n = [R^2 + (d - b'_n)^2 - 2R(d - b'_n)\cos\theta]^{1/2}$$

于是，球 1 表面的电荷分布为

$$\sigma_1(R_1,R_2,\theta)=\varepsilon_0(-\nabla V)_{R=R_1}=-\varepsilon_0\left.\frac{\partial V}{\partial R}\right|_{R=R_1}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{q_n(R_1-b_n\cos\theta)}{(R_1^2+b_n^2-2R_1b_n\cos\theta)^{3/2}}+\frac{q'_n[R_1-(d-b'_n)\cos\theta]}{[R_1^2+(d-b'_n)^2-2R_1(d-b'_n)\cos\theta]^{3/2}}\right\}$$

$$=\sigma_{10}+\frac{1}{4\pi R_1^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q'_n[R_1^2-(d-b'_n)^2]}{[R_1^2+(d-b'_n)^2-2R_1(d-b'_n)\cos\theta]^{3/2}}\tag{15.28}$$

其中

$$\sigma_{10}=\varepsilon_0V(R=R_1)R_1^{-1}$$

对上式互换两球的半径可得

$$\sigma_2(R_2,R_1,\theta)=\varepsilon_0(-\nabla V)_{R=R_2}=-\varepsilon_0\left.\frac{\partial V}{\partial R}\right|_{R=R_2}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{q'_n(R_2-b'_n\cos\theta')}{(R_2^2+b'^2_n-2R_2b'_n\cos\theta')^{3/2}}+\frac{q_n[R_2-(d-b_n)\cos\theta']}{[R_2^2+(d-b_n)^2-2R_2(d-b_n)\cos\theta']^{3/2}}\right\}$$

$$=\sigma_{20}+\frac{1}{4\pi R_2^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n[R_2^2-(d-b_n)^2]}{[R_2^2+(d-b_n)^2-2R_2(d-b_n)\cos\theta']^{3/2}}\tag{15.29}$$

其中

$$\sigma_{20}=\varepsilon_0V(R=R_2)R_2^{-1}$$

以 $\sigma_{10}(\sigma_{20})$ 为单位，对不同的 $\theta(\theta')$ 进行数值计算，其结果列于表 15-1 中。由表 15-1 可以看出，在两个球的最远端($\theta=\theta'=\pi$)，电荷密度最大，两个球的接触点电荷密度最小。静电感应起电机的电极是由两个接触金属球组成的，半径比大约是 2∶1，与我们的模型接近。一般情况下，空气的电击穿强度约 $3\times10^6\,\mathrm{V/m}$，当电极相距 2cm 时发生火花放电，据此可以估算出电极放电时的电荷面密度 $\sigma_2(\pi)\approx4.3\times10^{-5}\,\mathrm{C/cm^2}$。另一方面，比较两球的电荷分布可知，$\sigma_2(\pi)>\sigma_1(\pi)$，表明半径小的球的最远端相当于导体的“尖端”，其电场强度比较强，即 $E_2(\pi)>E_1(\pi)$。当 $R_1\gg R_2$ 时，利用(15.28)式和(15.29)式可以得到

$$\sigma_1(\pi)\approx\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\sigma_2(\pi)\approx4\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}$$

这时球 1 相当于导体“平面”，而球 2 相当于导体“尖端”。两端点的电荷面密度随半径比的关系列于表 15-2 中。

表 15-1　当 $R_1=2R_2$ 时球面上面电荷密度与 θ 角的关系

θ(度)	σ_1	σ_2
180	0.48831	0.78130
150	0.48711	0.76434
120	0.48247	0.70496
90	0.46940	0.57277
60	0.42524	0.31567
30	0.22185	0.02481
20	0.07701	0.00116
10	0.00104	0.00002

表 15-2　两端点电荷面密度随半径比(R_1/R_2)的变化

$\frac{R_1}{R_2}$	$\sigma_2(\pi)$	$\sigma_1(\pi)$	$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$
5	0.51390	0.19944	2.5767
10	0.32115	0.09995	3.2131
100	0.04085	0.01000	4.0850
200	0.02073	0.00500	4.1460
500	0.00837	0.00200	4.1850

两个球之间的相互作用力　从上面的计算可知，两个球所带的电荷是同号的，两个球之间存在库仑排斥力。如果不把球固定起来，受库仑力的作用两者会分离开来，这个过程中力的性质也不会发生改变，分离中始终是排斥力。对于任意带电的两个导体球来说，如果两者互为异号(或其中一个不带电)，则相互间是吸引力。一般的情况会有“排斥－为零－吸引”的复杂过程。那么，在什么情况下两带电球会是完全排斥力呢?不管两球带电荷多少或符号如何，只要将它们接触(保持总电荷不为零)，电荷重新分配后，两球间就会是纯排斥力。于是，两个球上的电荷应满足如下关系：

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 V\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4R_2}{(-1)^{n+1}(2nd-\Delta R)-\Delta R}}{4\pi\varepsilon_0 R_2 V\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4R_1}{(-1)^{n+1}(2nd+\Delta R)+\Delta R}}=\frac{C_{11}+C_{12}}{C_{22}+C_{21}}=K(R_1,R_2) \tag{15.30}$$

其中

$$K(R_1,R_2)=\frac{[R_2^{-1}-d^{-1}+(d+R_2)^{-1}-(2d)^{-1}+\cdots]}{[R_1^{-1}-d^{-1}+(d+R_1)^{-1}-(2d)^{-1}+\cdots]}$$

当 $R_1\geqslant R_2$ 时，$K\geqslant 1$。对于一定的(R_1,R_2)值，K 一定。对于一定的 K 值，电势不同，(Q_1,Q_2)的值不同。可以证明，满足上述关系的两个同性球分离过程始终是排斥力，电荷分布从不均匀状态(非稳定态)到最终的均匀状态(稳定态)。不满足上述关系的两个同性带电导体球在靠近过程中会出现“排斥－为零－吸引”的复杂过程。

15.2.5　一对点电荷电场中的两个接触导体球

设半径均为 R 的两个中性金属球相互接触后处于一对点电荷的电场中，正负点电荷距邻近球心的距离均为 d，如图 15-5 所示。由于两个球大小相同且是中性的，与 $+q$ 相邻的导体球上出现负的感应电荷分布，而与 $-q$ 相邻的球面出现正的感应电荷，两者具有镜像对称性(左右对称性)。运用电像法可以求出导体球上的电荷分布。

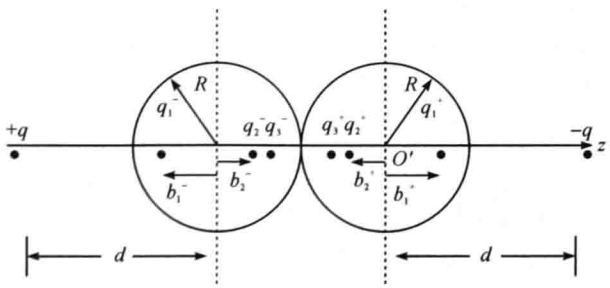


图 15-5　一对点电荷电场中的两个等大外切导体球

为了让左球面等势，离左球心 b_1^- 和 b_2^- 处分别放置 $+q$ 和 $-q$ 的像电荷 q_1^- 和 q_2^-，反之，为使右球等势，在距右球心 b_1^+ 和 b_2^+ 处分别放置 $-q$ 和 $+q$ 的像电荷 q_1^+ 和 q_2^+。由于左球内放置电荷又会破坏右的等势性，反之也如此，这样在两个球内可放置无穷多个电荷，直到两个球完全等势为止。第 1、2、3 个像电荷及位置的关系是

$$q_1^{\pm} = -\frac{R}{d}(\mp q), \quad b_1^{\pm} = \frac{R^2}{d}$$

$$q_2^{\pm} = -\frac{R}{d+l}(\pm q), \quad b_2^{\pm} = \frac{R^2}{d+l} \tag{15.31}$$

$$q_3^{\pm} = -\frac{R}{l-b_1^{\mp}}q_1^{\mp}, \quad b_3^{\pm} = \frac{R^2}{l-b_1^{\mp}}$$

据第 3 个电荷可以写出第 n 个像电荷及位置，即

$$q_n^{\pm} = -\frac{R}{l-b_{n-2}^{\mp}}q_{n-2}^{\mp}, \quad b_n^{\pm} = \frac{R^2}{l-b_{n-2}^{\mp}}, \quad n>3 \tag{15.32}$$

式中 $l=2R$ 是两球心间的距离。由于对称性 $|b_n^+| = |b_n^-|$，$q_n^- = -q_n^+$。设 $P_n = \dfrac{1}{q_n^-}$，由(15.32)式可得下列差分方程：

$$P_{n+2} - 2P_n + P_{n-2} = 0 \tag{15.33}$$

结合(15.31)式可解得第 n 个像电荷的通式为

$$q_n^{\pm} = (\mp q)\frac{(-1)^n 4R}{(2n+1)(d+R)+(-1)^n(3R-d)} \tag{15.34}$$

相应像电荷的位置是

$$b_n^{\pm} = b_n = R\frac{(2n-3)(d+R)+(-1)^n(3R-d)}{(2n+1)(d+R)+(-1)^n(3R-d)} \tag{15.35}$$

球面上的感应电荷是

$$\begin{aligned} Q^{\pm} &= \sum_{n=1}^{\infty} q_n^{\pm} \\ &= (\mp q)4R\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(d+R)+(-1)^n(3R-d)} \\ &= (\mp q)\left[-\frac{R}{d}+\frac{R}{d+2R}-\frac{R}{2d+R}+\cdots\right] \end{aligned} \tag{15.36}$$

该级数是交错级数，当 n 趋于无穷时，一般项 $q_n^{\pm}$ 趋于零，级数收敛。

球外空间的电势由施感电荷($\pm q$)和两组无穷多个像电荷的电势叠加所得，于是

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_0^-}{R_0^-}+\frac{q_0^+}{R_0^+}\right)+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{q_n^-}{R_n^-}+\frac{q_n^+}{R_n^+}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{q_n^-}{R_n^-}+\frac{q_n^+}{R_n^+}\right) \tag{15.37}$$

为了书写方便，这里定义了 $q_0^{\pm} = (\mp q)$，$b_0^{\pm} = -\mathrm{d}$。同时，选坐标原点在两球的切点上，于是有

$$R_n^{\pm} = [r^2 + (R-b_n)^2 \mp 2r(R-b_n)\cos\theta]^{1/2}$$

此式是第 n 个像电荷到场点的距离，r 是坐标原点到场点的距离，θ 是 r 与 z 轴的夹角。当 $r = 2R\cos\theta$ 时，球面上的电势 $V_s = 0$，即(15.37)式是一个满足边界条件的解。

设从球心到场点的位置矢量为 r'，则导体球面上的电荷分布为

$$\begin{aligned} \sigma^+ &= -\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial r'}\bigg|_{r'=R} \\ &= \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}q_n^-\left[\frac{1}{(R_n^-)^2}\frac{\partial R_n^-}{\partial r'}-\frac{1}{(R_n^+)^2}\frac{\partial R_n^+}{\partial r'}\right]_{r'=R} \\ &= (\sigma_0^+ + \Delta\sigma^+)\cos^2\theta \end{aligned} \tag{15.38}$$

其中

$$\sigma_0^+ = \frac{q}{4\pi R}\frac{(d^2-R^2)}{[(d+R)^2-4R\mathrm{d}\cos^2\theta]^{3/2}}$$

$$\Delta\sigma^+ = \frac{1}{4\pi R}\sum_{n=0}^{\infty}q_n^+\frac{(R-b_n)(3R-b_n)}{[(R-b_n)^2+(8R^2-4Rb_n)\cos^2\theta]^{3/2}}$$

这里θ的取值范围是$0\sim\frac{\pi}{2}$。当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，$\sigma^{+}=0$，即两球的接触点电荷密度为零。当$\theta=0$时，电荷面密度最大，即

$$\sigma_{\max}^{+}=\frac{q}{4\pi R}\frac{(d+R)}{(d-R)^{2}}-\frac{q}{4\pi R}\frac{(d+R)}{(3R+d)^{2}}+\frac{1}{4\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_{n}^{+}(R-b_{n})}{(3R-b_{n})^{2}}$$

接下来，我们讨论一种极限情况，即当$d\gg r,r\gg R$时，并要求点电荷的电量很大，这时可视为两个接触球处在均匀电场中的情况。于是，电场强度是

$$\boldsymbol{E}_{0}\approx\frac{2q}{4\pi\varepsilon_{0}(\mathrm{d}+R)^{2}}\hat{k}\tag{15.39}$$

式中$\hat{\boldsymbol{k}}$是z轴方向的单位矢量。球外空间的电势为

$$V(r)=-E_{0}r\cos\theta+\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{q_{n}^{-}}{R_{n}^{-}}+\frac{q_{n}^{+}}{R_{n}^{+}}\right)$$

当$d\gg r,r\gg R$时，上式可化简为

$$V(r)=-E_{0}r\cos\theta+\frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_{0}r^{3}}\tag{15.40}$$

式中$\boldsymbol{P}$是电偶极矩矢量，可表示为电偶极子的矢量和：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}&=\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{p}_{n}=\sum_{n=1}^{\infty}q_{n}^{+}2(R-b_{n})\hat{\boldsymbol{k}}\\&=32(d+R)qR^{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}[(2n+1)(d+R)+(3R-d)(-1)^{n}]^{-2}\hat{\boldsymbol{k}}\\&\approx 8q(d+R)\frac{R^{3}}{d^{3}}\left(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots\right)\hat{\boldsymbol{k}}\\&\approx\left(4\sum_{m=1}^{\infty}m^{-3}\right)\boldsymbol{p}\end{aligned}$$

其中

$$\boldsymbol{p}=4\pi\varepsilon_{0}R^{3}\boldsymbol{E}_{0}$$

是单个球在均匀电场中的电偶极矩。在$d\gg R$的条件下，球面上的电荷分布为

$$\sigma^{+}=\varepsilon_{0}E_{0}\left[2-\frac{(6d^{2}+18R^{2}+12dR)}{(d+R)^{2}}\cos^{2}\theta+\cdots\right]\cos^{2}\theta+\Delta\sigma^{+}\cos^{2}\theta\tag{15.41}$$

其中

$$\Delta\sigma^{+}=\frac{1}{4\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}q_{n}^{+}\frac{(R-b_{n})(3R-b_{n})}{[(R-b_{n})^{2}+(8R^{2}-4Rb_{n})\cos^{2}\theta]^{3/2}}$$

各个球面上的总感应电荷的大小是

$$\begin{aligned}Q&=\sum_{n=1}^{\infty}q_{n}^{+}\\&=Rq[d^{-1}-(d+2R)^{-1}+(2d+R)^{-1}-\cdots]\approx 4\pi\varepsilon_{0}E_{0}R^{2}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}\\&=4\pi\varepsilon_{0}E_{0}R^{2}\frac{\pi^{2}}{6}\end{aligned}\tag{15.42}$$

电场强度的空间分布为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_{0}+\left[\frac{3(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r})}{r^{5}}-\frac{\boldsymbol{P}}{r^{3}}\right],\quad R\ll r\ll d\tag{15.43}$$

应该注意的是，在接触球的附近，要用点电荷场强的叠加式。

第16章 补偿法

在电磁学中有许多物理问题会偏离理想的或者大家熟知的情况，即物理研究对象的形状存在某些缺陷或不完整性。乍一看来，这些问题似乎难以找到解决的途径。还有些问题就其本身而言并没有缺陷，但也要靠逆向思维来解决问题。在这一章中，我们通过逆向思维来解决某些物理问题，即利用补偿原理来达到解决问题的目的。

16.1 补偿法界定

“补偿”这个词可解释为抵消，比如，抵消损失、抵消消耗等；也可解释成补足，比如，补足缺欠和差额。将这种补偿的含意引申到电磁学中可以解决一些特定的物理问题。例如，一个均匀带电球在其中挖去一部分，而挖去的这一部分仍然具有原有带电体的形状；一块无穷大均匀带电平面挖去一个圆平面，这一部分也可以看作与原带电平面（半径为无限大的平面）有相同的形状；一根长直载流导线挖去一与轴线平行的小圆柱。这些问题的一个共同特征是，移去部分的形状完全与原物体形状一致，因此，可以通过补偿使其恢复到原状。另一个问题是，问题本身不存在缺陷，比如，电源的电动势的测量。如果直接用伏特表去量会产生误差，因为测量电路中有电流，电源内阻上就会降落一部分电压，补偿原理可以消除电流的影响。

补偿法（compensation）定义为：运用以与客观实体相同形状或相同规律的相反方式和途径去弥补原客观物体的缺陷或抵消某些因素造成的影响，这样一种处理问题的方法称之为补偿法。在实际应用中，按照问题的性质，补偿法又可分为阴阳（或中性）补偿法，正反（或抵消）补偿法以及同向（或补足）补偿法等。补偿法的基础是电场、磁场的可叠加性，因此，该方法可视为叠加法的特殊方法。

16.2 补偿法范例

16.2.1 均匀带电球的球形缺损（阴阳法）

实心球 设实心球的半径为R，让其均匀带上确定的体电荷密度ρ，如图16-1(a)所示。利用高斯定理

$$\oiint_S \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint \rho \mathrm{d}\tau \tag{16.1}$$

可以求得球内外的电场分布：

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho \boldsymbol{r}}{3\varepsilon_0}, \quad r < R \tag{16.2}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}, \quad r > R \tag{16.3}$$

由此可见，球内的电场随径向距离r线性增加，而球心处的电场为零。球外的电场相当于集中

于球心的点电荷之电场。在球面处电场是连续的，这表明均匀带电球体的表面没有面电荷存在，即

$$\sigma = \lim_{l\to 0}(\rho l) = 0 \tag{16.4}$$

式中 l 为球面处一薄层的厚度，由于电荷密度是有限的，当 $l \to 0$ 时，面电荷密度为零。因此，均匀带电体的表面没有电荷面密度，例如均匀带电圆柱体表面也没有面电荷密度。另外，从球内外的电场分布可见，公式中的数字“3”反映了球对称性，即三个坐标 x, y, z 是等价的。

同心球形空腔 设球形空腔的内半径为 b，外半径为 R，带有均匀的电荷密度 ρ，如图 16-1(b) 所示。利用补偿法(阴阳法) 可以求出球内外的电场分布。设想在空腔内同时填上 $+\rho$ 和 $-\rho$ 的电荷，这样就可看作带正电荷的大球(半径为 R) 与带负电荷的(半径为 b) 小球两者电场的叠加。设空腔内有一场点 P，由(16.2) 直接可以写出大球和小球在空腔内 P 点的电场表达式

$$\boldsymbol{E}_+ = \frac{\rho \boldsymbol{r}_P}{3\varepsilon_0}, \quad \boldsymbol{E}_- = -\frac{\rho \boldsymbol{r}_P}{3\varepsilon_0}$$

式中 $\boldsymbol{r}_P$ 是球心到场点 P 的位置矢量。P 点的电场为两者的叠加：

$$\boldsymbol{E}_P = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- = \frac{\rho \boldsymbol{r}_P}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho \boldsymbol{r}_P}{3\varepsilon_0} = 0, \quad r < b \tag{16.5}$$

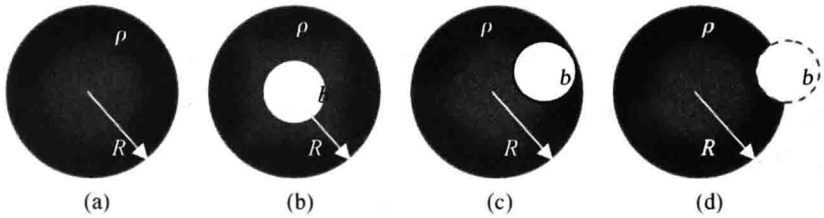


图 16-1 均匀带电实心球与球形缺损

如果 P 点位于大球内而在小球外，即在带电空腔层内。根据(16.2) 式和(16.3) 式，各球的电场可表达为

$$\boldsymbol{E}_+ = \frac{\rho \boldsymbol{r}_P}{3\varepsilon_0}, \quad \boldsymbol{E}_- = -\frac{b^3 \rho \boldsymbol{r}_P}{3\varepsilon_0 r_P^3}$$

总电场为

$$\boldsymbol{E}_P = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- = \frac{\rho \boldsymbol{r}_P}{3\varepsilon_0} - \frac{b^3 \rho \boldsymbol{r}_P}{3\varepsilon_0 r_P^3} = \frac{\rho \boldsymbol{r}_P}{3\varepsilon_0}\left(1 - \frac{b^3}{r_P^3}\right), \quad b < r < R \tag{16.6}$$

如果 P 点在大球的外部，则由(16.3) 式可得

$$\boldsymbol{E}_P = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- = \frac{R^3 \rho \boldsymbol{r}_P}{3\varepsilon_0 r_P^3} - \frac{b^3 \rho \boldsymbol{r}_P}{3\varepsilon_0 r_P^3} = \frac{\rho \boldsymbol{r}_P}{3\varepsilon_0 r_P^3}(R^3 - b^3), \quad r > R \tag{16.7}$$

偏心球形空腔 如果空心球的球心 o' 偏离大球的球心 o 有一距离 a，如图 16-1(c) 所示。这个问题同样可以利用补偿法来求解电场的分布。首先考虑场点 P 在偏心空腔内，大球和小球各自的电场分别为

$$\boldsymbol{E}_+ = \frac{\rho \boldsymbol{r}_P}{3\varepsilon_0}, \quad \boldsymbol{E}_- = -\frac{\rho \boldsymbol{r}'_P}{3\varepsilon_0}$$

式中 $\boldsymbol{r}_P$ 和 $\boldsymbol{r}'_P$ 分别为相对球心 o 和 o' 的位置矢量。腔内的总电场为

$$\boldsymbol{E}_P = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}'_P) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{a}, \quad r' < b \tag{16.8}$$

式中 a 为从 o 指向 o' 的常矢量。由于 P 点是任意取的，所以空腔内的电场为均匀电场。如果场

点 P 位于大球的内部而且在小球的外部，仿照(16.6)式，我们有

$$\boldsymbol{E}_P = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- = \frac{\rho \boldsymbol{r}_P}{3\varepsilon_0} - \frac{b^3 \rho \boldsymbol{r}'_P}{3\varepsilon_0 r'^3_P} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\boldsymbol{r}_P - \frac{b^3}{r'^3_P}\boldsymbol{r}'_P\right), \quad b < r', r < R \tag{16.9}$$

对于场点 P 位于大球外的情况，可以仿照(16.7)式得出球外的场分布：

$$\boldsymbol{E}_P = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- = \frac{R^3 \rho \boldsymbol{r}_P}{3\varepsilon_0 r_P^3} - \frac{b^3 \rho \boldsymbol{r}'_P}{3\varepsilon_0 r'^3_P} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R^3 \boldsymbol{r}_P}{r_P^3} - \frac{b^3 \boldsymbol{r}'}{r'^3_P}\right), \quad r > R \tag{16.10}$$

部分球形缺损 根据以上两种情况的电场分布计算，我们很容易把它推广到大球边缘.有部分小球缺损的情况[见图 16-1(d)]。首先考虑大球内的小球空腔与大球内表面相切的极端情况，这时(16.8)式可改写为

$$\boldsymbol{E}_P = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}'_P) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{a} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(R-b)\boldsymbol{e}_{oo'}, \quad r < R, r' < b \tag{16.11}$$

另一极端情况是，当小球空腔移到大球外而与大球外切时，两球的“相交区”就是外切点，该点的实际电场是

$$\boldsymbol{E}_P = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} R\boldsymbol{e}_{oo'} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(R+b-b)\boldsymbol{e}_{oo'} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(d-b)\boldsymbol{e}_{oo'} \tag{16.12}$$

其中 $d = R+b$，$\boldsymbol{e}_{oo'}$ 是两球心连线方向的单位矢量。据此，两球相交区(即缺损部分)的电场强度可表示为

$$\boldsymbol{E}_P = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(x-b)\boldsymbol{e}_{oo'}, \quad R < x < d, r < R, r' < b \tag{16.13}$$

应该指出的是：(1) 以上结果都是假定已知电荷密度 ρ 的结果；(2) 如果已知实心球的总电量 Q，则体电荷密度为

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} \tag{16.14}$$

此时对实心球挖去一小球，则补偿的电荷密度应取(16.14)式的负值；(3) 如果给定同心球壳的总电荷 Q，则同心球壳的体电荷密度为

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi(R^3 - b^3)} \tag{16.15}$$

这时补偿的电荷密度应取(16.15)式的负值。

16.2.2 均匀带电长直圆柱的柱形缺损(阴阳法)

实心圆柱 设已知实心长直圆柱的半径为 R，均匀体电荷密度为 ρ，则由高斯定理可得柱内外的电场强度为

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho \boldsymbol{r}}{2\varepsilon_0}, & r < R \\ \dfrac{R^2 \rho \boldsymbol{r}}{2\varepsilon_0 r^2}, & r > R \end{cases} \tag{16.16}$$

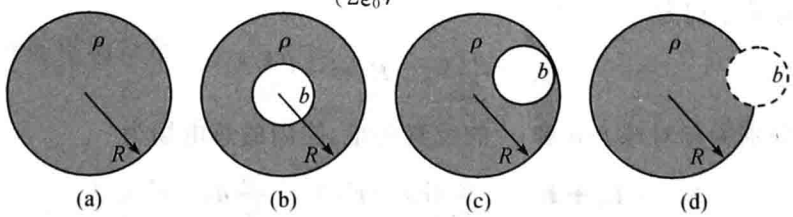


图 16-2 长直均匀带电圆柱与柱形缺损

将此式与半径为 R 的带电球之结果比较可见，柱的对称性要比球形低一些(请注意上式分母中的数字“2”以及 R 与 r 的幂次)。这里的 r 矢量是与柱轴线垂直的径向矢量，在直角坐标中它是一个二维矢量。

同轴空心圆柱 设电荷密度为 ρ 的实心均匀带电圆柱同轴地挖去半径为 $b(b<R)$ 的小圆柱，如图 16-2(b) 所示。与球的情况相似，我们可以利用补偿法来求柱内外的电场强度分布。挖去部分可视为 $+\rho$ 的小圆柱与 $-\rho$ 的小圆柱两者的叠加而成，也可看成一个完整的 $+\rho$ 大圆柱补上一个带是为 $-\rho$ 的同轴小圆柱而成。因而，在小圆柱内任一点 P 的电场强度是

$$\boldsymbol{E}_P=\frac{\rho \boldsymbol{r}_P}{2\varepsilon_0}-\frac{\rho \boldsymbol{r}_P}{2\varepsilon_0}=0,\quad r<b \tag{16.17}$$

当场点 P 位于大圆柱之内而在小圆柱之外时，电场的表达式为

$$\boldsymbol{E}_P=\frac{\rho \boldsymbol{r}_P}{2\varepsilon_0}-\frac{b^2\rho \boldsymbol{r}_P}{2\varepsilon_0 r_P^2}=\frac{\rho \boldsymbol{r}_P}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{b^2}{r_P^2}\right),\quad b<r<R \tag{16.18}$$

若 P 点在大圆柱之外，我们有

$$\boldsymbol{E}_P=\frac{R^2\rho \boldsymbol{r}_P}{2\varepsilon_0 r_P^2}-\frac{b^2\rho \boldsymbol{r}_P}{2\varepsilon_0 r_P^2}=\frac{\rho \boldsymbol{r}_P}{2\varepsilon_0 r_P^2}(R^2-b^2),\quad r>R \tag{16.19}$$

实际上，上述结果也可以直接运用高斯定理得出，因为问题的轴对称性的特点没有被破坏。如果空心圆柱与实心圆柱的轴不重合，则对称性被破坏，不能直接运用高斯定理求解。

非共轴空心圆柱 设空心小圆柱的轴线偏离大圆柱的轴线之距离为 a，如图 16-2(c) 所示。利用补偿法，将空心部分视为 $+\rho$ 和 $-\rho$ 的叠加。利用(16.16) 式，各区域内的电场分布为

$$\boldsymbol{E}_P=\boldsymbol{E}_+ +\boldsymbol{E}_-=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(\boldsymbol{r}_P-\boldsymbol{r}'_P)=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{a},\quad r<R,r'<b \tag{16.20}$$

$$\boldsymbol{E}_P=\boldsymbol{E}_+ +\boldsymbol{E}_-=\frac{\rho \boldsymbol{r}_P}{2\varepsilon_0}-\frac{b^2\rho \boldsymbol{r}'_P}{2\varepsilon_0 r'^2_P}=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\boldsymbol{r}_P-\frac{b^2}{\boldsymbol{r}'^2_P}\boldsymbol{r}'_P\right),\quad b<r',r<R \tag{16.21}$$

$$\boldsymbol{E}_P=\boldsymbol{E}_+ +\boldsymbol{E}_-=\frac{R^2\rho \boldsymbol{r}_P}{2\varepsilon_0 r_P^2}-\frac{b^2\rho \boldsymbol{r}'_P}{2\varepsilon_0 r'^2_P}=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{R^2\boldsymbol{r}_P}{r_P^2}-\frac{b^2\boldsymbol{r}'_P}{r'^2_P}\right),\quad r>R \tag{16.22}$$

由此可知，空心圆柱内的电场是匀强电场。

圆柱的缺损 对于圆柱缺损的情况(见图 16-2(d)) 可仿照球形缺损的做法。当空心圆柱与大圆柱内切时，空心柱中的电场强度可表示为

$$\boldsymbol{E}_P=\boldsymbol{E}_+ +\boldsymbol{E}_-=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(\boldsymbol{r}_P-\boldsymbol{r}'_P)=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{a}=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R-b)\boldsymbol{e}_{oo'},\quad r<R,r'<b \tag{16.23}$$

当空心圆柱与大圆柱外切时，“相交区”(即切点) 的电场是

$$\boldsymbol{E}_P=\frac{\rho R}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_{oo'}=\frac{\rho(R+b-b)}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_{oo'}=\frac{\rho(d-b)}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_{oo'} \tag{16.24}$$

由(16.23) 式和(16.24) 式可给出圆柱缺损区的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_P=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(x-b)\boldsymbol{e}_{oo'},\quad R<x<d,r<R,r'<b \tag{16.25}$$

很明显，缺损区的电场强度也是均匀的。

16.2.3 均匀载流长直线中的柱形空腔(正反法)

载流实心圆柱线 一根半径为 R 的长直圆柱导线，通以均匀的电流密度 j。由安培环路定理

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\iint_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{16.26}$$

可得导线内外的磁感应强度的分布为

$$\boldsymbol{B}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}, & r<R\\ \dfrac{\mu_0R^2}{2r^2}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}, & r>R\end{cases} \tag{16.27}$$

载流同轴空心圆柱线 设同轴空心圆柱线的电流密度为 $\boldsymbol{j}$，空心圆柱的内半径为 b，外半径为 R，如图 16-3(b) 所示。欲求该载流圆柱各区的磁感应强度，可以利用补偿法求解。设空心部分可视为 $+\boldsymbol{j}$ 和 $-\boldsymbol{j}$ 两种相反电流叠加结果，这就是所谓正反补偿法。空间各处的磁感应强度可由实心的 $+\boldsymbol{j}$ 粗导线和电流为 $-\boldsymbol{j}$ 的细导线叠加而成。如果场点 P 在空心圆柱线内，则有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_+ +\boldsymbol{B}_-=\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}-\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}=0,\quad r<b \tag{16.28}$$

对于场点 P 位于圆柱壳层内时，运用(16.27) 式得：

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}-\frac{\mu_0b^2}{2r^2}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right),\quad b<r<R \tag{16.29}$$

载流圆柱壳的外部，其磁感应强度是

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0R^2}{2r^2}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}-\frac{\mu_0b^2}{2r^2}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}\left(\frac{R^2-b^2}{r^2}\right),\quad r>R \tag{16.30}$$

从上式可知，若保持电流密度 j 不变，当 $b\to R$ 时，$\boldsymbol{B}\to 0$；若保持电流不变，则当 $b\to R$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=\lim_{j\to\infty b\to R}\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}\left(\frac{(R+b)(R-b)}{r^2}\right)\\&=\frac{\mu_0R}{r^2}\lim_{j\to\infty b\to R}[(R-b)\boldsymbol{j}]\times\boldsymbol{r}\\&=\frac{\mu_0R}{r^2}\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r},\quad r>R\end{aligned} \tag{16.31}$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}=\lim_{j\to\infty b\to R}[(R-b)\boldsymbol{j}]$$

是圆柱面的面电流密度，表明电流只沿着圆柱面的表面流动。从这个结果可知，若要形成面电流密度 $\boldsymbol{\alpha}$(单位：A/m)，体电流密度 $\boldsymbol{j}$(单位：A/m²) 一定要趋于无穷，有限体电流密度不可能有面电流密度。

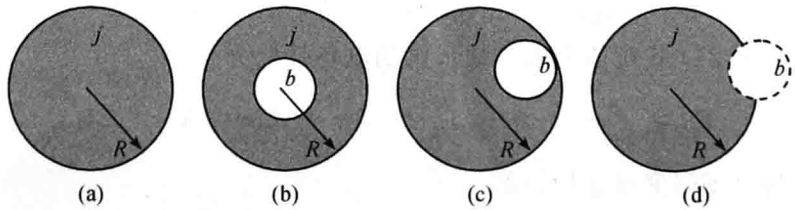


图 16-3 载流圆柱(横截面) 与圆柱缺损

非共轴空心载流圆柱 图 16-3(c) 给出了实心载流圆柱挖掉一个半径为 b 的小圆柱，该圆柱的轴线与实心圆柱的轴线平行，但不共轴。两轴线平行，相距为 a。设实心圆柱的电流密

度为 j，挖去小圆柱后大圆柱的电流密度仍为 j，但通过导线的总电流 I 已不相同。运用补偿法，将空心部分视为 $+j$ 和 $-j$ 的叠加，也就是说，先用 $+j$ 补齐缺损部分，以便使用实心圆柱的磁场分布，再用 $-j$ 去掉弥补的部分，$-j$ 就可以视为一个完整的小圆柱。空间的磁场分布就可以视为这两根载流导线磁场的叠加。设场点 P 在小圆柱内，则磁场分布为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_{+}+\boldsymbol{B}_{-}=\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}-\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}'=\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{j}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{a} \tag{16.32}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 分别为大圆柱轴线到小圆柱内场点 P 的位矢以及小圆柱轴线到 P 点的位矢。矢量 a 是由大圆柱轴线指向小圆柱轴线的矢量，上式中我们已经利用了关系 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{a}$，可见小圆柱内是均匀场。如果 P 点是在小圆柱之外，但又在大圆柱之内，则磁场分布为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_{+}+\boldsymbol{B}_{-}=\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}-\frac{\mu_0 b^2}{2r'^2}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}',\quad r<R,r'>b \tag{16.33}$$

在大圆柱之外，磁场分布为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_{+}+\boldsymbol{B}_{-}=\frac{\mu_0 R^2}{2r^2}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}-\frac{\mu_0 b^2}{2r'^2}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}',\quad r>R,r'>b \tag{16.34}$$

其中

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}$$

圆柱电流的柱形缺损 这种情况(见图 16-3(d))可仿照带电圆柱的做法。当空心圆柱与大圆柱内切时，空心圆柱中的磁场为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_{+}+\boldsymbol{B}_{-}=\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{j}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{j}\times(R-b)\boldsymbol{e}_{oo'} \tag{16.35}$$

当空心圆柱与大圆柱外切时，相交区(即外切点)的磁场为

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{j}\times R\boldsymbol{e}_{oo'}=\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{j}\times(R+b-b)\boldsymbol{e}_{oo'}=\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{j}\times(d-b)\boldsymbol{e}_{oo'}$$

因此，两圆柱相交区的磁感应强度是

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{j}\times(x-b)\boldsymbol{e}_{oo'},\quad R<x<d,r<R,r'<b$$

在此应该说明一下，如果已知电流密度 j 的实心圆柱导线，挖去小圆柱后剩余部分的电流密度仍然不变，但总电流减少了，即

$$j=\frac{I}{\pi R^2}=\frac{I'}{\pi(R^2-b^2)} \tag{16.36}$$

式中 I 为未挖去小圆柱时的电流，I' 为挖去后的电流，且 $I'<I$。

16.2.4 无限大均匀带电平面上的圆孔

一块面电荷密度为 σ 的无限大均匀带电平面，挖去一半径为 R 的圆。设坐标原点 o 在圆心处，z 轴过圆心且与平面垂直，如图 16-4 所示。求 z 轴上任一点的电场强度可用补偿法。先以 $+\sigma$ 的圆补齐无限平面，再以 $-\sigma$ 的圆还原。这样，原问题就可以看成带正电的无限大平面与带负电的圆盘之电场的叠加。

面电荷密度为 $+\sigma$ 的无限大平面激发的电场可由高斯定理求得

$$\boldsymbol{E}_{+}=\begin{cases}\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\boldsymbol{k}}, & z>0\\[2ex] -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\boldsymbol{k}}, & z<0\end{cases} \tag{16.37}$$

式中 $\hat{k}$ 为 z 轴方向的单位矢量。另一方面，半径为 R、面电荷密度为 $-\sigma$ 的圆平面而言，在其轴线上产生的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_{-}=\begin{cases}\dfrac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\hat{k}, & z>0\\ \dfrac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1+\dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\hat{k}, & z<0\end{cases} \tag{16.38}$$

在 z 轴上任一点的电场可视为这两种异号带电面的电场叠加而成

$$\boldsymbol{E}_z=\boldsymbol{E}_{+}+\boldsymbol{E}_{-}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\hat{k}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\hat{k} \tag{16.39}$$

此式对 $z>0$ 和 $z<0$ 的情况均成立。当 $z\to\infty$ 时，(16.39) 式成为完整无限平面的电场，即

$$\boldsymbol{E}=\lim_{z\to\infty}\boldsymbol{E}_z=\lim_{z\to\infty}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\hat{k}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} \tag{16.40}$$

在图 16-4 中给出了电场 E(以完整无限平面电场为单位) 随 z(以圆半径 R 为单位) 的变化情况。由图可见，当 $z=10R$ 时，圆孔对电场的影响可以忽略，有缺损平面可视为完整平面。

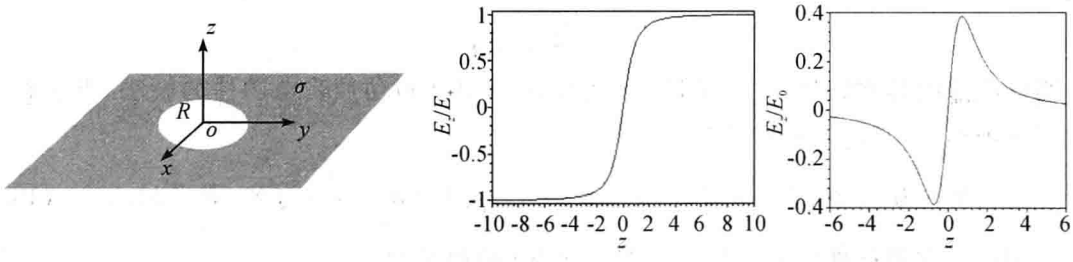


图 16-4　无限大均匀带电平面有一圆孔缺损与电场随 z(以 R 为单位) 的变化曲线

实际上，上述补偿法可以推广到有限圆平面有圆孔缺损的情况。设半径为 R 的均匀带电薄圆盘的面电荷密度为 σ，现在同心地挖去一个半径为 $r(r<R)$ 的小圆孔。设 z 轴与圆盘垂直且过圆心，该轴线上任一点的电场可以视为带 $+\sigma$ 的大圆盘和带 $-\sigma$ 的小圆盘电场的叠加，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_z&=\boldsymbol{E}_{+}+\boldsymbol{E}_{-}\\&=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\hat{k}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]\hat{k}\\&=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\hat{k}\end{aligned} \tag{16.41}$$

当 $r\to 0$ 时，上式成为完整圆盘的结果。当 $r\to R$ 时，上式可改写为

$$\boldsymbol{E}_z=\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\left(1-\frac{2R\Delta R}{R^2+z^2}\right)^{-1/2}-\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\hat{k} \tag{16.42}$$

其中

$$\Delta R=R-r$$

运用二项式展开式，并取前两项得

$$\boldsymbol{E}_z\approx\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\frac{R\Delta R}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}=E_0\frac{\dfrac{z}{R}}{\left(1+\left(\dfrac{z}{R}\right)^2\right)^{3/2}}\hat{k} \tag{16.43}$$

其中

$$E_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}, q = \sigma 2\pi R\Delta R$$

不难看出，(16.43) 式就是大家熟知的带电圆环轴线上的电场。由上式对 z 的一阶导数为零可得电场的极大值坐标为

$$z = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}$$

相应的电场为

$$\boldsymbol{E}_{z\max} = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}E_0\hat{\boldsymbol{k}}$$

16.2.5　长直载流导线的中间缺损

两根半无限长直载流导线通以相同大小的电流 I，两导线位于同一轴线上，电流的流向相同。在两导线的头尾之间有一长度为 $2a$ 的空缺(用虚线表示)，如图 16-5 所示。求虚线中垂线上任一点 P 的磁感应强度，可以运用补偿法来求解。虚线部分可视为 $+I$ 和 $-I$ 的叠加，这样原问题转化为无限长导线电流的磁场与短导线相反电流磁场在 P 点的叠加。

一根无限长直载流导线在其周围激发的磁场是

$$\boldsymbol{B}_+ = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{16.44}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ 是环绕电流方向的方位角。然而，一根有限长直载流导线在其垂直平分线上产生的磁场为

$$\boldsymbol{B}_- = \frac{-\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}2\cos\theta_1\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{-\mu_0 I}{2\pi r}\frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{16.45}$$

式中 θ_1 和 θ_2 分别是场点 P 到虚线两端点的连线与长直电流流向的夹角。P 点的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_+ + \boldsymbol{B}_- = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\varphi}} - \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{16.46}$$

可见，当 $a = 0$ 时，缺损消失，此结果回到无限长直线电流的结果。当 $a \ll r$ 时，第二项趋于零，相当于长直电流的结果。然而，当 $a \gg r$ 时，上式成为

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_+ + \boldsymbol{B}_- = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left[1 - \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2}\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}} \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left[1 - \left(1 - \frac{r^2}{2a^2}\right)\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{r}{a^2}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{16.47}$$

这时磁场随 r 的变化规律成为线性关系。

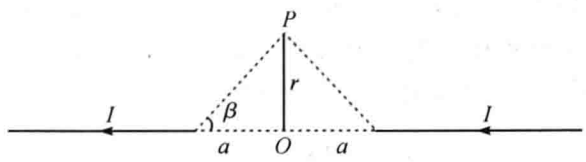


图 16-5　无限长直载流导线的缺损

实际上，这个问题可以直接运用有限长载流导线的公式，求得两根半无限长载流导线在 P 点产生的磁场。设中垂线的左段电流在 P 点所产生的磁场为

$$\boldsymbol{B}_L = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}[\cos(\pi-\beta) - \cos\pi]\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left[1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{16.48}$$

对于右段电流在 P 点产生的磁场为

$$\boldsymbol{B}_R = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}[\cos 0 - \cos\beta]\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left[1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{16.49}$$

由于两者的磁场方向相同，总的磁场为

$$\boldsymbol{B}_P = \boldsymbol{B}_L + \boldsymbol{B}_R = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left[1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{16.50}$$

16.2.6 充有两种介质的电容器的电容

球形电容器 一个内半径为 b 的大导体球壳同心地包围着一个半径为 a 的小导体球，从而形成一个空气球形电容器。设内导体球带 $+q$，外导体带电 $-q$。由电容的定义可以求得该电容器的电容为

$$C_0 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a} \tag{16.51}$$

当电容器内充满相对介电常数为 ε_r 的介质时，其电容变为

$$C = \varepsilon_r C_0 = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{ab}{b-a} \tag{16.52}$$

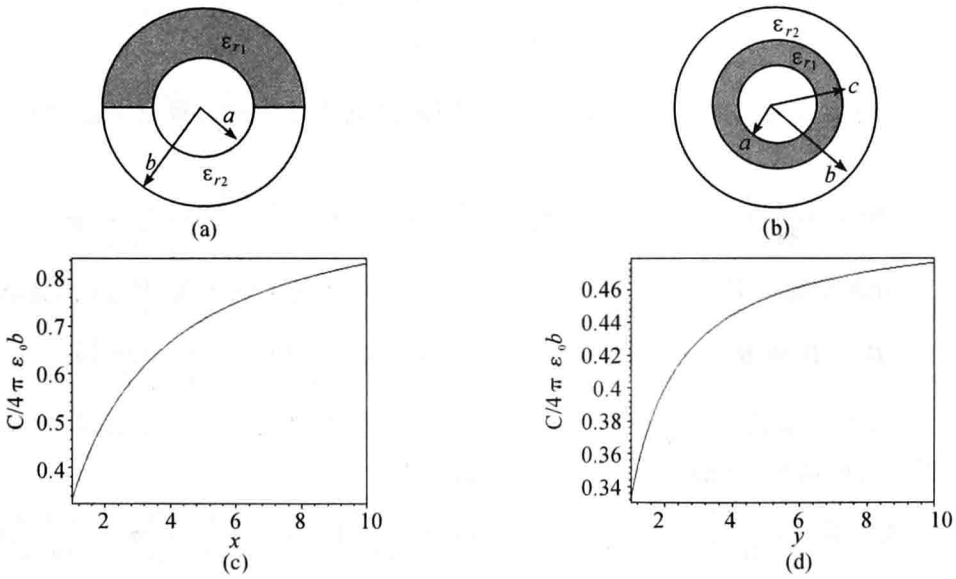


图 16-6 充有两种介质的球形电容器

如果球形电容器中同时充有两种不同电介质 ε_{r1} 和 ε_{r2}，而每一种介质各自填满半个电容器，如图 16-6(a) 所示。该球形电容器的电容可以利用补偿法来求解。由于两种介质只填满一半的空间，先假设介质 2 不存在，用介质 1 补足另一半空间。由(16.52) 式得

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1} \frac{ab}{b-a} \tag{16.53}$$

但是，介质 1 实际只填充 1/2 的空间，相应电容是上式的 1/2，即

$$C'_1 = \frac{1}{2}C_1 = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1} \frac{ab}{b-a} \tag{16.54}$$

对介质 2 而言，可设想介质 1 不存在，以介质 2 补足另一半空间，同理可得

$$C'_2 = \frac{1}{2}C_2 = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2} \frac{ab}{b-a} \tag{16.55}$$

根据导体的静电平衡性质，导体是个等势体，表面是一个等势面，因此，两球面间的电势差相同。这与两个电容的并联特征相同，因此总电容应为两者之和：

$$C = C'_1 + C'_2 = 2\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}) \tag{16.56}$$

不难看出，当 $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2} = 1$ 时，上式与(16.51)式相同。

实际上，对这种部分填充介质的情况，可以给出电容的更一般形式。为此，设介质1填充球内空间比例为 n/m($n < m$，其中 m，n 均为正整数)，则介质2所占比例为 $(1-n/m)$。总的电容可写成

$$C = \frac{n}{m}C_1 + \left(1-\frac{n}{m}\right)C_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}\left[\frac{n}{m}\varepsilon_{r1} + \left(1-\frac{n}{m}\right)\varepsilon_{r2}\right] \tag{16.57}$$

或者

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}\left[\left(1-\frac{n}{m}\right)\varepsilon_{r1} + \frac{n}{m}\varepsilon_{r2}\right] \tag{16.58}$$

显然，当 $m = 1$ 时，有 $n = 0$，则电容器中只有一种介质填充；当 $m = 2$，$n = 1$ 时，即为(16.56)式。

若两种介质以同心方式填充球形电容器的空间，如图16-6(b)所示。在这种情况下，两介质的交界面是一个同心球面，设该界面的半径为 c。根据补偿法的思想，设想介质2以导体填补，这样介质1的电容为

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\frac{ac}{c-a} \tag{16.59}$$

再设想介质1用导体填补，这时介质2的电容为

$$C_2 = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}\frac{cb}{b-c} \tag{16.60}$$

又因为两导体面之间的电势差为

$$V_{ab} = V_{ac} + V_{cb} \tag{16.61}$$

所以，实际的电容应该是这两个电容的串联，于是我们有

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{c-a}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}ac} + \frac{b-c}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}cb}$$

由此可得

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 abc\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{a(b-c)\varepsilon_{r1} + b(c-a)\varepsilon_{r2}} \tag{16.62}$$

显然，当两种介质相同时，即可回到(16.52)式的形式。当 $a = b/4$，$c = b/2$ 时，令 $x = \dfrac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$，电容 C(以 $4\pi\varepsilon_0 b$ 为单位)随 x 的变化关系如图16-6(c)所示。保持半径 a 和 c 的取值不变，再令 $y = \dfrac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}$，可得电容 C 随 y 的变化关系如图16-6(d)所示。比较可知：当固定介质2不变时，电容 C 随介质1的增加比较快；当固定介质1时，电容 C 随介质2的增加较缓慢；电容随介电常数的变化是非线的。

仿照(16.57)式，(16.62)式也可表达成一般式。为此，设介质分界面的半径与内球的半径差满足

$$c - a = \frac{n}{m}(b-a)$$

由此可解得

$$c=\frac{n}{m}b+a\left(1-\frac{n}{m}\right)$$

将此式代入(16.62)式可得

$$C=\frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}\frac{\left[\frac{n}{m}(b-a)+a\right]\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{a\left(1-\frac{n}{m}\right)\varepsilon_{r1}+b\frac{n}{m}\varepsilon_{r2}} \tag{16.63}$$

其中 $n<m$(n,m 为正整数)。

值得指出的是:对于两种同心介质填充的情况,还可采用另一种补偿思想来研究这一问题,即在两种介质的分界面上补上半径为 c 的中性导体球面,这就构成了两个电容器的串联。

圆柱形电容器 设内圆柱的半径为 a,单位长度带电为 $+\lambda$,外圆柱面的半径为 b,单位长度电荷为 $-\lambda$。当两圆柱面之间不充介质时,由电容的定义可得单位长度的电容为

$$C_0=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \tag{16.64}$$

当电容器充满同一种介质时,其电容为

$$C=\varepsilon_r C_0=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \tag{16.65}$$

当两种介质类似于球形电容器(见图 16-6(a))方式填充时,仿照(16.57)式可得

$$C=\frac{n}{m}C_1+\left(1-\frac{n}{m}\right)C_2=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\left[\frac{n}{m}\varepsilon_{r1}+\left(1-\frac{n}{m}\right)\varepsilon_{r2}\right] \tag{16.66}$$

或者

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\left[\left(1-\frac{n}{m}\right)\varepsilon_{r1}+\frac{n}{m}\varepsilon_{r2}\right] \tag{16.67}$$

同理,对于类似于图 16-6(b) 的介质填充方式,视为两个电容的串联,其电容为

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}\ln\left(\frac{b}{a}\right)+(\varepsilon_{r2}-\varepsilon_{r1})\ln\left[\frac{n}{m}\left(\frac{b}{a}-1\right)+1\right]} \tag{16.68}$$

其中 n,m 的意义与前述相同。

平行板电容器 设平行板电容器极板面积为 S,两板相距为 d,真空时的电容为

$$C_0=\frac{\varepsilon_0 S}{d} \tag{16.69}$$

充满介质时,其电容为

$$C=\varepsilon_r C_0=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d} \tag{16.70}$$

如果两种介质填充后的分界面与平行板垂直时,这时可视为并联

$$C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}S_1}{d}+\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}S_2}{d}=\frac{\varepsilon_0 S}{d}\left[\frac{n}{m}\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2}\left(1-\frac{n}{m}\right)\right] \tag{16.71}$$

如果两种介质的分界面与导体板平行,则视为两者的串联,总电容为

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}\frac{\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\frac{n}{m}\varepsilon_{r2}+\left(1-\frac{n}{m}\right)\varepsilon_{r1}} \tag{16.72}$$

16.2.7　电位差计

电位差计是用来测量电源电动势、内阻等物理量的一种小型仪器，它的设计原理是以补偿法为基础的，其原理如图 16-7(a) 所示。当检流计中没有电流时，相当于两个电源流出的电流互相抵消，这时两个电源的电动势应该相等

$$\varepsilon_x=\varepsilon_0$$

这里 ε_0 是已知的，ε_x 是未知的。图 16-7(b) 给出了测量电动势的原理图，其中 ε 称为工作电源，ε_s 表示标准电源(已知)，ε_x 表示待测电源电动势，R 是可调电阻。测量未知电源电动势前，要先根据实验室温度校正好标准电源的电动势，然后将开关 K 打向标准电源端(触点 2)。固定触点 C 并调节 R，使得检流计中无电流通过，这时回路 $ABR\varepsilon A$ 中的电流不变，这一步称为调节工作电源回路的工作电流 I_0。接着，将 K 打向触点 1(待测)，移动触点 C(即改变电阻) 到某一点 C' 使得检流计中无电流通过。这时要注意工作电流不能变化，为了测量的准确性，要时常打向 2 侧检验。K 打向 2(标准) 时，我们有

$$V_{AC}=I_0R_{AC}=\varepsilon_s \tag{16.73}$$

然后，K 打向 1(待测) 时，可以得到

$$V_{AC'}=I_0R_{AC'}=\varepsilon_x \tag{16.74}$$

由于测量过程保持工作电流不变，因此我们有

$$\varepsilon_x=\frac{R_{AC'}}{R_{AC}}\varepsilon_s \tag{16.75}$$

这样根据两次测量的电阻值就可以得到待测电源的电动势。R_{AC} 为调工作电流时 A 与触点 C 之间的电阻，$R_{AC'}$ 是测量待测电动势时 A 与触点 C' 之间的电阻。

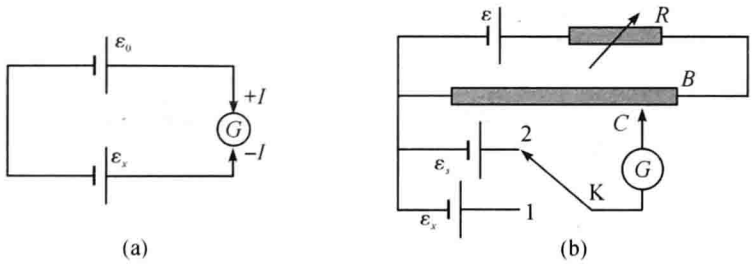


图 16-7　电位差计补偿原理

16.2.8　有小缺口的均匀带电圆环

在真空中有一半径为 R 的均匀带电圆环，单位长度的电荷为 λ。现将该圆环切开一个长度为 Δl 的小口子，假设切开后并不改变原电荷分布。求环中心与轴线上任一点的电场强度与电势分布。这个问题同样可以用补偿法来求解，即把切去的部分视为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$ 的叠加。因此，在环心和轴线的电场可以视为一个完整带电环和一个点电荷电场的叠加。

环心处的场　根据对称性，一个完整环在环心处的电场是

$$\boldsymbol{E}_+=0 \tag{16.76}$$

圆环上带负电荷的一个小口子(视为点电荷) 在圆心处产生的电场为

$$\boldsymbol{E}_{-}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-\lambda\Delta l}{R^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{16.77}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 表示从缺口处(点电荷处)指向环心的单位矢量。由电场的叠加原理,环心处的电场为

$$\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{E}_{+}+\boldsymbol{E}_{-}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\Delta l}{R^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{16.78}$$

由此可见,环心处的电场方向是指向缺口处的。同理,环心处的电势为

$$V_0=V_{+}+V_{-}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda 2\pi R}{R}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\Delta l}{R}=\frac{\lambda}{2\varepsilon_0}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\Delta l}{R} \tag{16.79}$$

轴线上的场 轴线上的电场可以看作点电荷与圆环电荷两者的叠加。设场点 P 距环心为 z,完整圆环在轴线上的电场为

$$\boldsymbol{E}_{+}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\lambda 2\pi R}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{16.80}$$

带负电的小缺口在 P 点所产生的电场为

$$\boldsymbol{E}_{-}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R\lambda\Delta l}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\perp}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\lambda\Delta l}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{16.81}$$

轴线上 P 点的总电场为

$$\boldsymbol{E}_P=\boldsymbol{E}_{+}+\boldsymbol{E}_{-}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{(R^2+z^2)^{3/2}}[R\Delta l\hat{\boldsymbol{e}}_{\perp}+z(2\pi R-\Delta l)\hat{\boldsymbol{e}}_z] \tag{16.82}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{e}}_{\perp}$ 和 $\hat{\boldsymbol{e}}_z$ 分别是与 z 轴垂直的单位矢量和 z 方向的单位矢量。而 P 点的电势可表示为

$$V_P=V_{P+}+V_{P-}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}(2\pi R-\Delta l) \tag{16.83}$$

很明显,当 $\Delta l=0$ 时,式(16.78)式,(16.79)式,(16.82)和(16.83)式即回到完整圆环的情况。值得指出的是,这个问题也可以推广到均匀带电球面有一小面元缺口的情况,在此不再讨论。

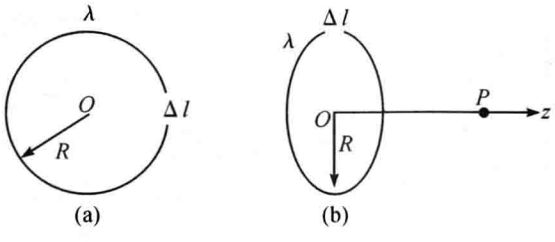


图 16-8 有一小缺口的带电圆环

第 17 章　电容系数与电势系数法

在静电学中，孤立导体是一种理想化的情况。实际情况可能存在若干个带电导体，而导体之间互相制约、互相影响。但是，当每个导体的电荷给定时，各个导体的电势随之确定；反过来，如果给定每个导体的电势，各个导体的电荷也完全确定。因此，静电平衡后，求解导体系统的电荷或电势是电磁学中一个重要问题。在这一章中，我们将运用电容系数法或电势系数法来处理导体静电平衡时的一些物理问题。

17.1　电容系数法与电势系数法界定

在静电学中，一个孤立导体带上电荷 Q 后，其电势 V 一定与电荷 Q 成正比，可以写成 $V = pQ$。反之，该孤立导体的电势 V 越高，其电荷 Q 也越多，用公式可表示为 $Q = CV$。这里比例系数 p 与 C 是倒数关系，两者都与导体的自身形状、大小等有关。如果系统存在 n 个导体，它们各自所带的电量分别为 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$，相应的电势为 $V_1, V_2, \cdots, V_n$。由于电荷之间存在相互作用，每个导体的电势不再只与自身的电荷有关，还与其他电荷有关。于是，第 i 个导体的电势可表示为

$$V_i = p_{i1}Q_1 + p_{i2}Q_2 + \cdots + p_{ii}Q_i + \cdots + p_{in}Q_n = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}Q_j \tag{17.1}$$

式中 p_{ij} 称之为电势系数，电势系数交换指标是对称的，即 $p_{ij} = p_{ji}$。反之，每个导体的电荷可用各个导体的电势来表示，第 i 个导体的电荷为

$$Q_i = C_{i1}V_1 + C_{i2}V_2 + \cdots + C_{ii}V_i + \cdots + C_{in}V_n = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}V_j \tag{17.2}$$

式中系数 C_{ij} 称为电容系数，且有 $C_{ij} = C_{ji}$。由此可见，电势系数矩阵 $[p_{ij}]$ 与电容系数矩阵 $[C_{ij}]$ 互为倒易关系。当 $j = i$ 时，C_{ii} 有时称为自电容系数；对于 $j \neq i$ 情况，C_{ij} 称为互电容系数。

何谓电容系数或电势系数法？利用电容系数或电势系数的定义去研究或处理导体系统静电问题的方法称之为电容系数法或电势系数法。

17.2　电容系数与电势系数法范例

17.2.1　内导体球被球壳同心包围的情况

一个内外半径分别为 b 和 c 的导体球壳，带有电荷 Q，同心地包围着半径为 $a(<b)$ 的导体球，使该导体球接地，求这个导体球上的电荷（请参见范例 12-3 和 18-1）。这是一个典型的静电学问题，静电平衡后，各个导体的电荷和电势都是确定的，因此，可以利用电容系数或电势系数来处理问题。

电容系数法　设内导体球为 1，电荷为 q_1，电势为 V_1；球壳为 2，内表面感应出 $-q_1$，外表面电荷为 $q_1 + Q$，球壳带的总电荷为 q_2，电势为 V_2。利用电容系数的定义式，我们有

$$q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \tag{17.3}$$

$$q_2 = -q_1 + q_1 + Q = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \tag{17.4}$$

两式相加得

$$q_1 + q_2 = q_1 + Q = (C_{11} + C_{21})V_1 + (C_{12} + C_{22})V_2 \tag{17.5}$$

此电荷正是外表面所带的电荷。当内球带电为 q_1 时，不论接地与否，都不会改变球壳外表面的电荷，因此，我们有

$$C_{11} + C_{21} = 0 \tag{17.6}$$

于是，(17.5) 式化为

$$q_1 + Q = (C_{12} + C_{22})V_2 = 4\pi\varepsilon_0 cV_2 \tag{17.7}$$

利用 $C_{21} = C_{12}$，并将(17.6) 式代入(17.3) 式得

$$q_1 = C_{11}(V_1 - V_2) = \frac{4\pi\varepsilon_0}{b^{-1} - a^{-1}}(V_1 - V_2) \tag{17.8}$$

此式与(17.7) 式的比是

$$\frac{q_1}{q_1 + Q} = -\frac{C_{11}}{C_{12} + C_{22}} = \frac{ab}{(b-a)c} \tag{17.9}$$

由此式可解得

$$q_1 = \frac{-abQ}{ab + bc - ca} \tag{17.10}$$

电势系数法　每一个导体的电势不仅与自身的电荷有关，还决定于其它导体的电荷。由(17.1) 式得

$$\begin{aligned} V_1 &= p_{11}q_1 + p_{12}q_2 = p_{11}q_1 + p_{12}Q \\ V_2 &= p_{21}q_1 + p_{22}q_2 = p_{21}q_1 + p_{22}Q \end{aligned} \tag{17.11}$$

由于电势系数与电容系数互为逆矩阵，即电势系数可用电容系数表示：

$$p_{11} = \frac{C_{22}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} = \frac{C_{22}}{C_{11}(C_{22} + C_{12})}$$

$$p_{21} = p_{12} = p_{22} = -\frac{C_{21}}{C_{11}(C_{22} + C_{12})} = \frac{1}{C_{22} + C_{12}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}$$

而且，

$$p_{11} - p_{12} = \frac{1}{C_{11}} = \frac{b-a}{4\pi\varepsilon_0 ab}$$

于是，代入(17.11) 式可得

$$q_1 = \frac{-abQ}{ab + bc - ca} \tag{17.12}$$

由此可见，利用电容系数法或电势系数法的关键是要已知电容系数或电势系数，否则问题得不到解决。

17.2.2　两块带电的平行导体板

两块平行导体板分别带有电荷 q_1 和 q_2，极板面积为 S，两板相距为 d。静电平衡后，每块板的两个面上都有电荷，运用电容系数法可以求解出每个面上的电荷。设 q_{11} 和 q_{12} 分别表示板 1 的两个面上的电荷，q_{21} 和 q_{22} 分别表示板 2 两个面上的电荷，如图 17-1 所示。

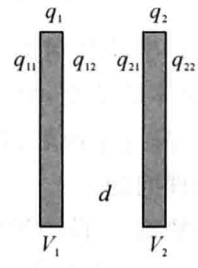


图 17-1　两块带电平行导体板

电容系数法　根据电荷守恒，我们有

$$\begin{aligned} q_1 &= q_{11} + q_{12} \\ q_2 &= q_{21} + q_{22} \end{aligned} \tag{17.13}$$

运用高斯定理可得：

$$q_{12} = -q_{21} \tag{17.14}$$

再由电容系数法可列出如下方程：

$$\begin{aligned} q_1 &= C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \\ q_2 &= C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \end{aligned} \tag{17.15}$$

由于两块导体板是等价的，因而有 $C_{22} = C_{11}$。又因为电容系数与电荷和电势无关，为此设两导体板带等量异号电荷，由(17.15) 式和电容的定义式得

$$C_{11} - C_{12} = 2C \tag{17.16}$$

再假定两板带等量同号电荷，于是，我们有

$$C_{11} + C_{12} = C \tag{17.17}$$

其中 C 是两导体板间的电容。将(17.15) 式中的电荷相减并利用(17.16) 得

$$q_1 - q_2 = (C_{11} - C_{12})(V_1 - V_2) = 2C(V_1 - V_2) = 2q_{12}$$

由此式可得

$$q_{12} = -q_{21} = \frac{1}{2}(q_1 - q_2) \tag{17.18}$$

将(17.13) 式和(17.14) 式代入(17.18) 式可得：

$$q_{11} = q_{22} = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$$

由(17.16) 式和(17.17) 式可以解得电容系数为

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{22} = \frac{3}{2}C = \frac{3\varepsilon_0 S}{2d} \\ C_{12} &= C_{21} = -\frac{1}{2}C = -\frac{\varepsilon_0 S}{2d} \end{aligned} \tag{17.19}$$

这个问题通常的解决办法是：电荷守恒、高斯定理、静电平衡时导体中的电场为零(或电场叠加原理)。显然，电容系数法与通常的解决办法略有不同。

电势系数法　对于两块导体板来说，电势系数为

$$\begin{aligned} p_{11} &= p_{22} = \frac{C_{11}}{C_{11}^2 - C_{12}^2} = \frac{3}{4C} \\ p_{12} &= p_{21} = -\frac{C_{12}}{C_{11}^2 - C_{12}^2} = \frac{1}{4C} \end{aligned} \tag{17.20}$$

这里已经利用了(17.19) 式，将此式代入(17.1) 式得

$$\begin{aligned} 4CV_1 &= 3q_1 + q_2 \\ 4CV_2 &= q_1 + 3q_2 \end{aligned}$$

两式相减得

$$2C(V_1 - V_2) = 2q_{12} = q_1 - q_2$$

于是

$$q_{12} = -q_{21} = \frac{1}{2}(q_1 - q_2)$$

$$q_{11} = q_{22} = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$$

17.2.3 用导线连接的两个导体球

两个金属球的半径分别为 a 和 b，带有电荷 Q_{10} 和 Q_{20}，它们相距甚远。现用一根细导线连接它们，达到静电平衡时，两金属球上的电荷比和电荷面密度比是多少？

不计连接导线电荷情况 由于两个球相距很远，相互影响可以忽略，即把各自都视为孤立导体。当用细导线连接时，两球上的电荷重新分布。设平衡时的球上电荷分别为 Q_1 和 Q_2，细导线的电荷为零。由于连接后，两球电势相等，因此，我们有

$$p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 \tag{17.21}$$

因为相距很远，所以 $p_{12} = p_{21} = 0$。于是电荷比为

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{p_{22}}{p_{11}} = \frac{(4\pi\varepsilon_0 R_2)^{-1}}{(4\pi\varepsilon_0 R_1)^{-1}} = \frac{R_1}{R_2} \tag{17.22}$$

此式表明，大的球带电荷多，小的球带电荷少。根据电荷守恒可得

$$Q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}(Q_{10} + Q_{20}), \quad Q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}(Q_{10} + Q_{20})$$

由于两者没有影响，电荷均匀分布在各个球面上，于是，面电荷密度的比为

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\dfrac{Q_1}{4\pi R_1^2}}{\dfrac{Q_2}{4\pi R_2^2}} = \frac{R_2}{R_1} \tag{17.23}$$

此式表明，面电荷密度与曲率半径成反比。用导线连接后的两球可视为孤立导体，由此可以推断，孤立带电导体曲率大处，电荷密度大，相应的电场强度也强。如果利用电容系数，等势性要求

$$\frac{Q_1}{C_{11} + C_{12}} = \frac{Q_2}{C_{22} + C_{12}}$$

电荷之比为

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C_{11} + C_{12}}{C_{22} + C_{12}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{R_1}{R_2} \tag{17.24}$$

以上所得结果是忽略了连接导线的影响。然而，导线是系统的一部分，无论多么细，由于它很长，总会带上一部分电荷。那么，考虑连接导线的影响时，结果又如何？下面还是通过电容系数法来讨论这一有趣的问题。

计入连接导线的影响 我们知道，连接导线的作用是使两金属球等势，起到传导电荷的作用。导线的粗细、长短只对电荷的分配上有影响。为了使这个问题有解，我们用相互接触的导体球链来代替导线，如图 17-2 所示。

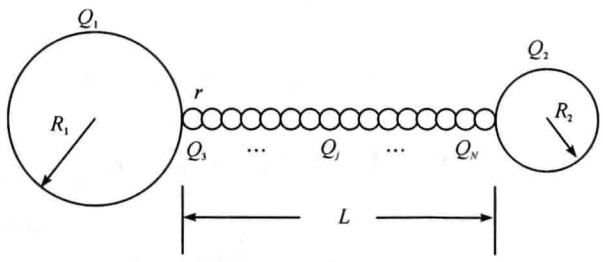


图 17-2 用导体球链连接的两个金属球

我们把这 N 个相继接触的导体球视为一个孤立导体，两个大球的电荷 Q_1 和 Q_2，$N-2$ 个

小球的电荷分别为 $Q_3, Q_4, \cdots, Q_N$。由电容系数的定义可得

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij} V_j, \quad i = 1,2,\cdots,N \tag{17.25}$$

由于每个球电势都相等，$V_1 = V_2 = \cdots = V_N = V$，因此，上式简化为

$$Q_i = V \sum_{j=1}^{N} C_{ij}, \quad i = 1,2,\cdots,N \tag{17.26}$$

对于两个大球来说，其电荷比是

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\sum_{j=1}^{N} C_{1j}}{\sum_{j=1}^{N} C_{2j}} = K_{12}(R_1, R_2, r) \tag{17.27}$$

比例系数是 R_1、R_2 和 r 的函数，显然要比(17.24) 复杂得多。连接导线上的总电荷为

$$Q_w = \sum_{k=3}^{N} Q_k = V \sum_{k=3}^{N} \sum_{m=1}^{N} C_{km} = VC_w \tag{17.28}$$

其中

$$C_w = \sum_{k=3}^{N} (C_{k1} + C_{k2}) + \sum_{k=3}^{N} \sum_{m=3}^{N} C_{km} = (C_{w1} + C_{w2}) + C_{ww} \tag{17.29}$$

上式右边第一项是大球与导线间的互电容系数，第二项是导线本身的电容系数，它们都是大球半径和小球半径的函数。系统的总电荷是

$$Q_t = Q_1 + Q_2 + Q_w \tag{17.30}$$

于是，该孤立导体的电容是

$$C = \frac{Q_t}{V} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} C_{km} = C_{11} + C_{22} + 2C_{12} + C_{ww} + 2C_{w1} + 2C_{w2} \tag{17.31}$$

因为系统的总电荷是可以给定的，而系统等势后电荷也不会丢失，所以我们给出大球上的电荷和导线上的电荷与总电荷的比值关系如下：

$$\frac{Q_w}{Q_t} = \frac{C_w}{C} \tag{17.32}$$

$$\frac{Q_1}{Q_t} = \frac{K_{12}(1 - \frac{C_w}{C})}{(1 + K_{12})} \tag{17.33}$$

$$\frac{Q_2}{Q_t} = \frac{(1 - \frac{C_w}{C})}{(1 + K_{12})} \tag{17.34}$$

由此可见，只要导线与大球间存在电容以及导线自身存在电容，则导线上的电荷就不可能为零。在导线连接前后，两个大球的电量改变为

$$\Delta Q_1 = Q_{10} - Q_1 = \frac{(Q_{10} - K_{12}Q_{20} + K_{12}Q_w)}{1 + K_{12}}$$

$$\Delta Q_2 = Q_2 - Q_{20} = \frac{(Q_{10} - K_{12}Q_{20} - Q_w)}{1 + K_{12}}$$

由此可得如下关系：

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2 + Q_w \tag{17.35}$$

这就意味着，如果 $\Delta Q_1 > 0, \Delta Q_2 > 0$，则表明球 1 向球 2 和导线转移电荷；如果 $\Delta Q_1 > 0, \Delta Q_2 < 0$，表明两个大球同时向导线提供电荷。实际上，要求出这些电容系数是十分困难的，即以

上关系式只是个形式解，不能反映导线长度与导线上电量的关系。下面利用近似方法对导线电荷作一估算。

当两个大球半径相等时，即 $R_1 = R_2 = R$，导线上电荷与总电荷的比为

$$\frac{Q_w}{Q_t} = \frac{N-2}{(N-2+2K_{13})} \approx \left(1+\frac{4RS_1}{LS_3}\right)^{-1} \tag{17.36}$$

其中

$$L = 2(N-2)r$$

$$K_{13} \approx \frac{C_{11}+C_{13}}{C_{33}+C_{13}} = \frac{RS_1}{rS_3}$$

式中 L 是导线的长度，S_1 和 S_3 是两个无穷级数，即

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{r}{mr+(m-1)R} - \frac{r}{m(r+R)}\right] \\ S_3 &= \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{R}{mR+(m-1)r} - \frac{R}{m(r+R)}\right] \end{aligned} \tag{17.37}$$

从(17.36)式不难看出，当导线长度 L 趋于无穷时，导线上的电荷接近总电荷。当两个大球的半径不相等时，导线上的电荷与总电荷的比是

$$\frac{Q_w}{Q_t} = \frac{(N-2)(K_{12}K_{2N}+K_{13})}{[(2K_{13}+N-2)K_{12}K_{2N}+(2K_{2N}+N-2)K_{13}]} \tag{17.38}$$

其中

$$K_{13} \approx \frac{R_1S_1}{rS_3}$$

$$K_{2N} \approx \frac{R_2S_2}{rS_N}$$

$$K_{12} \approx \frac{C_{11}+C_{12}}{C_{22}+C_{12}} = \frac{\sum_{m=1}^{\infty}[R_2\sinh m\alpha + R_1\sinh(m-1)\alpha]^{-1} - d^{-1}\sum_{m=1}^{\infty}(\sinh m\alpha)^{-1}}{\sum_{m=1}^{\infty}[R_1\sinh m\alpha + R_2\sinh(m-1)\alpha]^{-1} - d^{-1}\sum_{m=1}^{\infty}(\sinh m\alpha)^{-1}}$$

$$\alpha = \cosh^{-1}\left[\frac{d^2-R_1^2-R_2^2}{2R_1R_2}\right], d = L+R_2+R_2$$

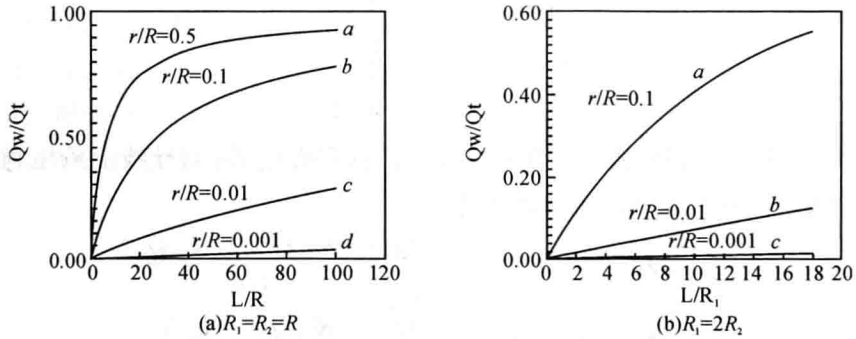


图 17-3　导线电荷与总电荷之比作为导线长度的函数

第 18 章　能量法

众所周知，任何物质都有能量，电场和磁场也不例外。除了具有能量外，还有质量、动量、角动量等。由于电磁场在形态方面与通常物质不一样，也不能直接触摸到，我们常称之为“特殊的物质”。既然它们是物质，那么，在力学中的功和能的概念可以直接运用到电磁学中。实际上，电磁学是研究电场和磁场物质性的一门学科。它们遵循能量守恒及转换定律，很多的物理现象都可以从能量的角度加以解释。在这一章中，我们将以能量的方法来处理电磁学中的一些实际问题。

18.1　能量法界定

能量是度量物质运动的一种物理量，一般解释为物质做功的能力或本领。能量的基本类型有：位(势)能、动能、热能、电能、磁能、光能、化学能和原子能(核能)等。能量是可以相互转化的。能量守恒定律是自然界中最重要的定律，所有的物质都必须遵循这一定律。电场和磁场是一种“无形”的特殊物质，它们同样也遵守这一定律。由于静电场对电荷有力的作用，并且移动电荷要做功。静磁场也一样，对磁场中的电流存在力的作用，移动电流也要做功。在电磁学中，对电场和磁场能量的研究是一个十分重要的内容。我们可以说，能量问题贯穿整个电磁学中，处处可以看到它的“身影”。因此，运用能量原理来解决一些实际问题是很自然的事。

何谓能量法？能量法就是一种运用能量原理或定律去处理物理问题的方法。换言之，以能量的角度去审视物理问题和研究问题。在研究过程中能量原理或定律的运用是至关重要的。但在运用过程中，可以有“隐性”的和“显性”的运用之分。比如，利用电场的能量公式计算电容器的电容、利用磁场的能量公式计算线圈的自感等，这些都是“显性”的例子。下面通过几个范例来说明这一方法的运用。

18.2　能量法范例

18.2.1　内导体球接地的同心导体球组

一个带电为 Q，内外半径分别为 b 和 c 的导体球壳同心地包围着一个半径为 a 的接地导体球的问题，已在第 12 章中运用叠加法讨论过(参见范例 12-3)。这里运用能量法重新审视这一物理问题。n 个带电体的静电能表达式为

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i \tag{18.1}$$

由于这个导体球系统只有两个带电导体，因此，上式可化简为

$$W_e = \frac{1}{2}(q_1 V_1 + q_2 V_2) \tag{18.2}$$

其中 V 表示电荷 q 所在处的电势。设内导体球上的电荷为 q'，外导体(球壳)电荷(净电荷)为

Q。q' 所在处的电势为零(接地),Q 所在处的电势为

$$V_Q = \frac{Q+q'}{4\pi\varepsilon_0 c} \tag{18.3}$$

将这些结果代入(18.2)式得

$$W_e = \frac{1}{2}\left(q' \cdot 0 + Q\frac{Q+q'}{4\pi\varepsilon_0 c}\right) = Q\frac{(Q+q')}{8\pi\varepsilon_0 c} \tag{18.4}$$

另一方面,这个导体球系统相当于两个电容器的并联,因而总能量为

$$W'_e = \frac{1}{2}q'V_{ab} + \frac{1}{2}(q'+Q)V_{c\infty} = \frac{1}{2}q'\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) + \frac{1}{2}(q'+Q)\frac{(q'+Q)}{4\pi\varepsilon_0 c} \tag{18.5}$$

上式第一项是导体壳与内导体之间的能量,第二项是球壳外表面与无穷远处之间的能量(因为无穷远球面电势为零,接地内导体球电势也为零,两个电容电势差相等可视为并联)。根据能量相等,即

$$W_e = W'_e$$

可以解得

$$q' = \frac{-Qab}{ab+bc-ac} \tag{18.6}$$

这个结果与叠加法所得结果是一致的。

从这个范例可以看出,我们是运用了静电能量的不同表达式来解决问题的。因为不同的表达式中的物理量其意义是不相同的,这正是能解决问题的原因所在。也就是说,我们抓住了不同能量表达形式是相等这一重要特点。这就是"显性"使用能量法的一个范例。

18.2.2 电容器的电容

我们知道,任意两个导体之间都有电容,这种电容在电器设备中常称分布电容。电容器是两个导体间的一种特殊组合,比如一个导体被另一个包围着或两个导体非常靠近。电容器既能储存电场能量也能释放电场能量。储存能量的本领与它的几何形状、大小、两导体的相对距离以及周围的介质有关,我们把这种储能"本领"称之为电容。因此,计算电容器的电容是电磁学中的一个重要内容。通常的计算是利用电容的定义式进行的,在这里我们将运用能量法来计算电容,这种方法是最可靠的。

这里运用能量法的思想与范例 18-1 相似,由于能量是储存在电场中的,因此有

$$W_e = \frac{1}{2}\int \varepsilon_0 E^2 \mathrm{d}\tau \tag{18.7}$$

其中积分遍及全部电场分布。另一方面,电容器的能量公式为

$$W'_e = \frac{q^2}{2C} \tag{18.8}$$

由两者相等可得

$$C = \frac{q^2}{\int \varepsilon_0 E^2 \mathrm{d}\tau} \tag{18.9}$$

此式即为由电场能量计算电容的表达式。不难看出,运用上式的关键是要事先知道电场的分布,同时还要保证是可积的,这样才能运用上式求出电容。大家比较熟悉的几个例子是平行板电容器、球形电容器和圆柱形电容器。这几种电容器在已知电荷分布时,电场分布可由高

斯定理得到。但是，如果两平行板稍有偏离，其电场的分布就不能利用高斯定理求得。下面利用能量法来讨论这一问题。

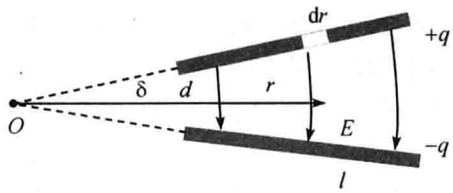


图 18-1　有一小偏角的非平行的平板电容器

设平行板电容器两极板不再平行，而以一个小角度 δ 偏离，如图 18-1 所示。这时极板间的电场也不再平行，电场与离 O 点的距离 r 有关。如何求出电场呢?严格来说，要求解拉普拉斯方程的边值问题。由于两块平板构成一扇形区，因而可以设想电场线是圆弧状的。为此，选取柱坐标(r,φ,z) 来研究问题是比较方便的。设电场强度(只是 r 的函数) 为

$$E=\frac{A}{r} \tag{18.10}$$

其中 A 为待定常数，可以用电荷 q 表示。由于电场不均匀，因而电荷面密度也不均匀，但极板的总电荷是不变的即为 q。为此有

$$q=\int \sigma \mathrm{d}S=\int \varepsilon_0 E\mathrm{d}S=\varepsilon_0 A\int_{r_0}^{r_0+l}\frac{l\mathrm{d}r}{r}=\varepsilon_0 Al\ln\left(\frac{r_0+l}{r_0}\right) \tag{18.11}$$

式中 l 是平板的边长(设为正方形)，其中

$$r_0=\frac{d}{\delta}$$

这里 d 是两板间的最小距离。于是

$$E=\frac{A}{r}=\frac{q}{r\varepsilon_0 l\ln\left(1+\dfrac{l\delta}{d}\right)}$$

极板间的电场能量为

$$W_e=\frac{1}{2}\int \varepsilon_0 E^2\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\varepsilon_0 A^2\int_{r_0}^{r_0+l}\frac{l\delta r\mathrm{d}r}{r^2}=\frac{q^2\delta}{2\varepsilon_0 l\ln\left(1+\dfrac{l\delta}{d}\right)}$$

将此式代入(18.9) 式得

$$C=\frac{\varepsilon_0 l\ln\left(1+\dfrac{l\delta}{d}\right)}{\delta} \tag{18.12}$$

此式就是非平行时的电容。当偏角 δ 很小时，电容可用级数表示，并取前二项得

$$C=\frac{\varepsilon_0 l\ln\left(1+\dfrac{l\delta}{d}\right)}{\delta}=\frac{\varepsilon_0 l}{\delta}\left[\frac{l\delta}{d}-\frac{1}{2}\left(\frac{l\delta}{d}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{l\delta}{d}\right)^3+\cdots\right]\approx\frac{\varepsilon_0 l^2}{d}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{l\delta}{d}\right)\right] \tag{18.13}$$

当然，偏角很小时可应用平行板电容器的电容公式，取两板间的平均距离，然后作级数展开也能得到上式结果(请读者自己验证)。

由此可见，运用能量法求电容时，关键问题是找出电场强度的分布，然后要求电场是平方可积的函数，否则不能积分。从这个角度来说，利用定义式求电容也存在类似问题。对不能求积分的问题可以利用实验法进行直接测量而得到。

18.2.3 同轴电缆的自感

同轴电缆是由内导线和外导体圆柱面构成的，通常外圆柱用细金属丝编织而成，使它比较柔软。而内导线可以是空心的，也可以是实心的。在这里，我们只讨论实心内导线的情况。设内导线的半径为a，电流I流进，外导体圆柱面的半径为b，电流I流出，如图18-2所示。求同轴电缆的自感，通常运用定义式。但是，利用定义式往往要用到平均磁链概念或分数匝数的概念，使得这个问题不易理解。运用能量法能够避开这些概念，而且也是最可靠的计算方法。

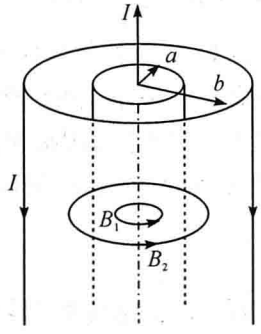


图 18-2 同轴电缆的自感计算

对于一个通以电流I，自感为L的线圈，其能量可表达为

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 \tag{18.14}$$

由于能量是储存在磁场中的，故可用磁场表达能量

$$W_m = \int \frac{B^2}{2\mu_0}\mathrm{d}\tau \tag{18.15}$$

于是，电感L用能量可表示为

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{1}{I^2}\int \frac{B^2}{\mu_0}\mathrm{d}\tau \tag{18.16}$$

因此，只要知道磁场分布，就可以求得自感。根据安培环路定律，同轴电缆的磁场分布是

$$B_1 = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2}, \quad r < a$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad a < r < b$$

$$B_3 = 0, \quad r > b$$

将上述磁场分布代入(18.16)式可得单位长度的自感为

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{lI^2}\left[\int_0^a \frac{B_1^2}{\mu_0}\mathrm{d}\tau + \int_a^b \frac{B_2^2}{\mu_0}\mathrm{d}\tau + \int_b^\infty \frac{B_3^2}{\mu_0}\mathrm{d}\tau\right] \\ &= \int_0^a \frac{\mu_0 r^2}{4\pi^2 a^4} r\mathrm{d}r + \int_a^b \frac{\mu_0}{4\pi^2 r^2} r\mathrm{d}r = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a}\right) \end{aligned} \tag{18.17}$$

如果同轴电缆的内导线是空心的，则上式第一项为零，单位长度的自感为

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

在这个问题中，利用能量法求自感的优点是明显的，即不必计算磁通匝链数(或总磁通)，也就避免了内导线的匝数问题，而计算过程物理图像清晰。值得注意的是：能量法有其局限性，主要受到磁场分布的二次方限制，体积分不一定都能保持有限。比如，两根通以反向

电流的平行导线的自感。

18.2.4　导体的静电平衡

静电平衡理论中所说的“导体”是指金属导体。金属导体可以视为固定在晶格点阵上的正离子和无规运动自由电子的集合体。现已证明，金属中的自由电子平均速度非常大，即使在绝对零度，内部自由电子的平均速度可达 $10^6\,\mathrm{m/s}$。尽管电子的速度很大，但是它们几乎不会跑到金属外面去，表明金属存在一种阻止自由电子外逸的“能力”，这种能力常称为逸出功（功函数），即自由电子跑到外面是要做功的。

处于静电场中（可以自身场）的导体，在静电平衡状态下，内部电场处处为零，电荷只分布于导体表面，这是为什么？要回答这个问题，我们必须运用能量原理才能解释清楚。为此，先看一个均匀带电导体球的例子。设导体球的半径为 R，电荷密度为 ρ，如图 18-2(a) 所示。我们假定电荷均匀分布在导体球内，并且每个电荷都被固定住。由高斯定理可得到球内外电场的分布

$$E_1 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}, \quad r < R \tag{18.18}$$

$$E_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}, \quad r > R \tag{18.19}$$

再由电势的定义式

$$V_P = \int_P^{\infty} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

可以求得球内外的电势分布：

$$V = \int_r^R E_1 \mathrm{d}r + \int_R^{\infty} E_2 \mathrm{d}r = \frac{\rho R^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{6R^2}\right), \quad r < R \tag{18.20}$$

$$V = \int_r^{\infty} E_2 \mathrm{d}r = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}, \quad r > R \tag{18.21}$$

电势 V 分布曲线如图 18-3(b) 所示。由图 18-3(b) 可见，球心的电势最高，随着 r 的增大，电势逐渐减小。球内任一点的电势都要高于球面的势，而球心与球面间的电势差为

$$V_{OR} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} \tag{18.22}$$

再假设从某一时刻 t_0 开始解除电荷固定，那么球内的电荷受球内电场的作用就会移动至球面，经过一个短暂的过程，电荷全部转移到球面上。也就是说，只要导体球内存在电场，这个电荷的迁移过程就不会停止。当球内电荷全部转移到球面时，球内电场为零，电荷迁移停止，这就是导体的静电平衡理论。

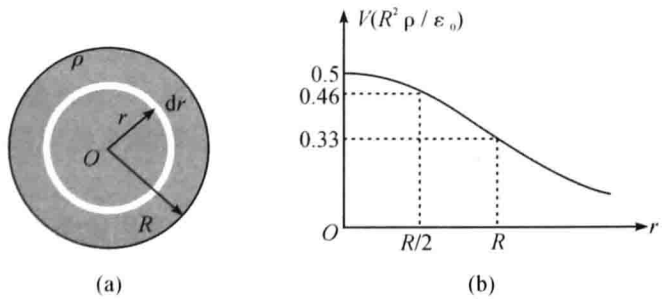


图 18-3　均匀带电球的电势分布

当电荷 q 均匀分布在球内时，球面处的电势为

$$V_1(R) = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \tag{18.23}$$

当电荷 q 均匀分布在球面时，其电势为

$$V_2(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \tag{18.24}$$

从能量的角度来看，电势高处，表明电荷的电势能大，电势低，电势能小。因此，球面是能量最低处，电荷在电场的作用下一定会“涌”向球面，在球面上形成电荷的积累，这就形成了面电荷密度分布。由于球面是一个等能面（等势面），电荷分布是均匀的。(18.23) 和(18.24)式表明，从电荷的球体分布到电荷的球面分布，球面的电势是不变的。电荷从电势能高处向低势能处运动会在导体中产生焦耳热以及向外辐射场。电荷分布于球面上相当于电荷处于能量最低态（基态），这与一个原子被激发后回到基态而辐射光子非常相似。实际上，导体处于静电平衡状态其能量是最低的，这早就由汤姆孙定理（Thomson's theorem）所描述。

第 19 章　排除法

在电磁学中，时常会遇到判别某种特定带电体或载流导体所激发场的方向问题。比如，利用安培环路定理确定长直螺线管中的磁场时，就要事先知道磁场的方向。在第 4 章中我们介绍了运用反证法来判定磁场的方向。在这一章中，我们将运用排除法去研究电磁学中常见的一些问题，如确定无限大载流平面的磁场方向、螺线管中感生电场的方向等。

19.1　排除法界定

“排除”一词的基本词义是消除或除掉。在科学研究中，由于研究对象的复杂性，往往给我们的研究工作带来很大的困难。为了使研究的问题得到简化，必须抓住问题的主要因素而除掉次要因素，即保留问题的主要信息而忽略次要信息。这样得到的研究结果与实际的真实结果不会有很大的偏离。这里的关键问题是要弄清楚什么是主要因素，什么是次要因素。在电磁学中运用物理概念和规律来解决问题时，也经常用到“排除”的逻辑思维方法。比如研究长直螺线管的磁场时，首先要排除线圈的漏磁和螺旋度，因为只要线圈的导线足够细而且绕制足够紧密，这两个因素给问题造成的影响就会很小。

排除法(exclusion approach)是指在研究问题或寻找问题的过程中，针对多个可能因素，利用所掌握的物理概念和规律去除部分不可能因素或次要因素的一种逻辑分析推理方法。这种方法依据的是所知的物理(或客观)规律和概念(或事实)在众多因素(或对象)中去除与问题(或主题)无关的因素(或对象)，是一种逆向思维方法。排除法在电子仪器检修中也是一种常用的方法，利用这种方法可以快速确定故障所在位置。在电磁学中，排除法是指利用电磁学中已知的电磁学概念和规律来排除问题的不可能因素，从而达到确定问题真实结果的一种逻辑思维方法。

19.2　排除法范例

19.2.1　确定无穷大载流平面的磁场方向

有一块无限大平面，通以均匀面电流密度 α。设 x 轴正方向沿着面电流流动的方向，y 轴与该平面垂直，如图 19-1 所示。怎样求解该载流平面的磁场?一种方法将平面划分成许多无限长直导线，然后进行叠加即可，这种方法的优点是不必事先知道平面的磁场方向。另一种方法可以利用安培环路定理来求解，但必须事先确定磁场的方向。下面以后者为例阐明排除法的运用。

在直角坐标系中，假设载流平面上方的磁感强度为

$$\boldsymbol{B} = B_x\hat{\boldsymbol{i}} + B_y\hat{\boldsymbol{j}} + B_z\hat{\boldsymbol{k}} \tag{19.1}$$

式中 $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ 分别表示 x,y,z 轴方向的单位矢量。首先考虑 x 分量，把无限大平面沿着电流流动方向划分成无穷多小窄条，每一窄条电流可视为无限长直载流导线。根据无限长导线的磁场分布特点，沿着导线方向磁场为零，因而沿 x 方向的合场强也为零，即 $B_x = 0$。这在(19.1)

式中首先排除了 x 分量，即磁感强度的方向被限止在 yz 平面内。

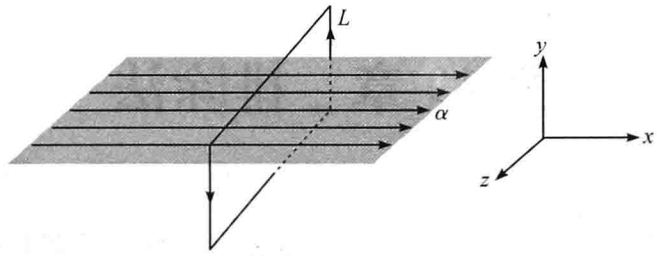


图 19-1　无限大载流平面磁场方向的确定

其次考虑 y 分。为了确定 y 分量，我们把磁场的“高斯定理”应用到这里来。关键是如何取高斯面？我们知道，一个半径为无穷大的球面相当于无限大平面。根据这一点，我们取一与载流平面平行的无穷大平面为高斯面，高斯面的法线与 y 轴正方向一致，因此，我们有

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}S\hat{\boldsymbol{n}}=\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}S\hat{\boldsymbol{j}}=\iint_{\infty} B_y \mathrm{d}S=0$$

由于 $\mathrm{d}S$ 是任意的，而且不为零，因而只能是磁场的 y 分量等于零，即

$$B_y=0 \tag{19.2}$$

这样就排除了磁场的 y 分。三个分量有两个为零，即载流平面上方的磁感强度的方向只能是沿着 z 轴方向，且与载流平面平行。确定了磁场的方向后，就可以利用安培环路定理求磁场的大小了。根据磁场的方向可以选取如图 19-1 所示的矩形回路，回路的绕行方向顺着磁场方向，应用安培环路定理

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0 I$$

可得

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=Bl+0+Bl+0=2Bl=\mu_0 \alpha l$$

$$B=\frac{1}{2}\mu_0\alpha \tag{19.3}$$

式中的 l 是矩形的长边（与平面平行），对于与平面垂直的边而言，由于磁场方向与积分路径垂直，故积分为零。写成矢量式

$$\boldsymbol{B}=B_z\hat{\boldsymbol{k}}=\frac{1}{2}\mu_0\alpha\hat{\boldsymbol{k}}=\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{\alpha}\times\hat{\boldsymbol{j}} \tag{19.4}$$

值得指出的是：物理上无穷大平面的概念与数学上的无穷大平面有本质的差别，只要平面的线度 l 远大于场点（考察点）的距离 r，即

$$l=\sqrt{S}\gg r$$

例如，面积 100 平方厘米的平面，距平面 1 厘米处的场点，物理上即可认为该平面“无限大”。因而，物理上的无限大是一个相对概念。

由此可见，在这个例子中我们运用了无限长直载流导线的磁场规律和磁场“高斯定理”来排除了假设磁场的 x 和 y 分量，余下的假设 z 分量即为磁场的真实方向。

19.2.2　确定无限长均匀带电线的电场方向

大家知道，求解均匀带电长直细线激发的电场，可直接利用电场的叠加原理来完成。这种方法的优点是，无需事先知道电场的方向，只要知道长直线上任一电荷元在场点的电场方

向就行。利用静电场的高斯定理求一根长直均匀带电细线激发的电场，高斯面的选取是关键。我们通常选取同轴圆柱面作为高斯面，这实际上已依据对称性默认了电场的方向。我们通过排除法来确定这一特殊带电体的电场强度的方向。

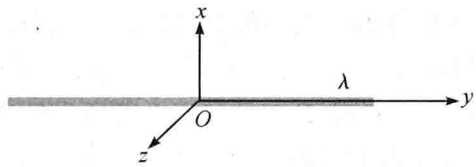


图 19-2　均匀带电无限长直细线

设长直带电线位于 z 轴上，单位长度的电荷（线电荷密度）为 λ，如图 19-2 所示。在直角坐标系中，设该带电线周围空间任一点的电场为

$$\boldsymbol{E} = E_x\hat{\boldsymbol{i}} + E_y\hat{\boldsymbol{j}} + E_z\hat{\boldsymbol{k}} \tag{19.5}$$

由于带电线是无限长的，因而 x 和 y 轴是等价的。这意味着电场的 x 分量与 y 分量是等价的，据此，与带电线垂直的电场分量可用径向分量来表示，上式可简化为

$$\boldsymbol{E} = E_r\hat{\boldsymbol{r}} + E_z\hat{\boldsymbol{k}} \tag{19.6}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 是径向单位矢量。另一方面，取一与带电细线平行的无限长直线，该长直线可视为半径为无限大的圆，我们把这个圆作为静电场的环路 L，由此可得

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}z\hat{\boldsymbol{k}} = \int_{-\infty}^{+\infty}E_z\mathrm{d}z = 0$$

由于 $\mathrm{d}z$ 是任意的，而且不为零，因而只有电场的 z 分量为零，即

$$E_z = 0$$

这就排除了 z 轴分量，剩下的分量即为与带电线垂直的径向分量。因此，我们有

$$\boldsymbol{E} = E_r\hat{\boldsymbol{r}} \tag{19.7}$$

这一例子中，我们运用了静电场的环路积分为零这一定理来排除 z 轴的电场分量。仿照上述例子，运用同样的思维方法可以确定无限大带电平面的电场方向一定与平面垂直，请读者自己思考，在此不再赘述。另外，也可以利用反证法来论证上述两个问题，请见反证法这一章。

19.2.3　导体上的感应电荷绝对值小于施感电荷

一个导体 B 处于点电荷 q 的电场中，由于静电感应，导体 B 上出现感应电荷。与施感电荷 q 相近的一侧出现与 q 异号的电荷，远离一侧出现与 q 同号的感应电荷，如图 19-3 所示。由于导体 B 周围只存在施感电荷 q，因而导体 B 左端的负感应电荷绝对值 q' 应小于等于施感电荷 q。

我们利用电力线的性质可以证明以上的结论。由于电力线发自于正电荷（或无限远），而终止于负电荷（或无限远），在无电荷处电力线连续。因此，导体 B 左端一定有电力线终止，这些电力线不能从没有电荷的地方出发，它们的来源只有三种可能途经：(1) 来自施感电荷 q；(2) 来自导体 B 右端的感应正电荷；(3) 来自无限远处的正电荷。下面利用电力线的性质来排除不可能的项。

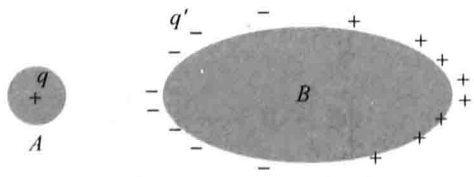


图 19-3　导体 B 处于点电荷 q 的电场中出现感应电荷

首先，设终止于 B 左端的电力线来自于 B 右端的正电荷。根据电力线的性质，电力线是不闭合的，即电力线上各点的电势沿电力线方向不断减小。如果电力线从 B 的右端发出而终止于 B 的左端，则同一条电力线上的电势应不相等，即 B 的左端电势低于 B 的右端，这显然与导体静电平衡时导体是个等势体的特点不符合，情况(2) 应排除。

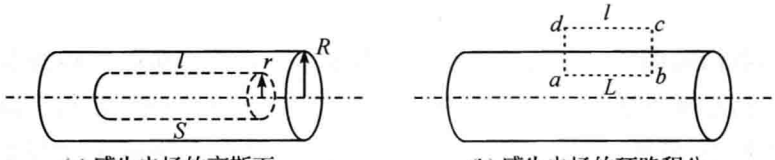
其次，设终止于 B 左端的电力线发自无限远处的正电荷。根据电力线的性质，无限远处的电势高于 B 处左端的电势。另一方面，B 右端的正电荷所发的电力线既然不能终止于 B 的左端，那只能终止于无限远，则有 B 右端的电势高于无限远处的电势。由于导体是个等势体，两者出现矛盾的结果，显然情况(3) 应排除。这样只剩下情况(1)，于是可以肯定，B 左端的电力线全部来自施感电荷 q。

最后，由电力线的特点，终止于 B 左端的电力线条数为 q'/ε_0，而电荷 q 发出的电力线总条数为 $\frac{q}{\varepsilon_0}$，因此，我们有 $q' \leqslant q$。

19.2.4 确定无限长直螺线管感生电场的方向

如果无限长直螺线管中通以变化的电流 $\frac{\partial I}{\partial t}$，则管中的磁感应强度随时间变化，其变化率为 $\frac{\partial B}{\partial t}$。这时管内外就会产生感生电场，而感生电场的电场线是与螺线管同轴的同心圆，其方向为对称轴方位角的方向，即同心圆的切线方向，这个结果可以运用类比法给出(参见范例 5-1)。实际上，确定感生电场的方向可以运用排除法。设长直螺线管的截面是圆形的，且半径为 R。在柱坐标系 (r,φ,z) 中，感生电场可表示为

$$\boldsymbol{E}_i = E_{ir}\hat{\boldsymbol{r}} + E_{i\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + E_{iz}\hat{\boldsymbol{k}} \tag{19.8}$$



(a) 感生电场的高斯面　　(b) 感生电场的环路积分

图 19-4　无限长直螺线管感生电场方向的确定

式中 $\boldsymbol{E}_{ir}$、$\boldsymbol{E}_{i\varphi}$ 和 $\boldsymbol{E}_{iz}$ 分别是柱坐标下电场的径向、方位角和轴线方向的分量，$\hat{\boldsymbol{r}}$、$\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{k}}$ 是相应的单位矢量。由此式可知，只要排除掉径向和轴向的场分量，剩下的就是方位角方向的分量。

为此，应用电场的两个积分方程，即高斯定理和环路定理：

$$\begin{aligned} \oiint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \frac{q(t)}{\varepsilon_0} \\ \oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} &= -\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \end{aligned} \tag{19.9}$$

而感生电场满足如下场方程：

$$\begin{aligned} \oiint_S \boldsymbol{E}_i\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= 0 \\ \oint_L \boldsymbol{E}_i\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} &= -\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \end{aligned} \tag{19.10}$$

由于无限长直螺线管中的磁场是均匀的，且沿着轴线方向。因此，在管内作一与螺线管

同轴的柱形高斯面 S，圆柱面的半径为 r，如图 19-4(a) 所示。于是

$$0 = \oiint_S \boldsymbol{E}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\text{side}} \boldsymbol{E}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{\text{top}} \boldsymbol{E}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{\text{bottom}} \boldsymbol{E}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

因为高斯面的上底和下底的法线方向相反，因此，上底(top) 和下底(bottom) 的积分相互抵消。而侧面(side) 的 E_{ir} 积分为

$$0 = \int_{\text{side}} E_{ir}\,\mathrm{d}S_r = E_{ir} 2\pi r l$$

由于高斯面的半径 r 和圆柱面的高度 l 是任意的，因而有

$$E_{ir} = 0$$

表明感生电场没有径向分量。这样，应用了感生电场的高斯定理就排除了径向分量。

我们在螺线管的内外作一矩形闭合回路 $abcda$，并让 ab 和 cd 边平行于轴线，ab 边在管内，cd 边在管外，如图 19-4(b) 所示。再运用感生电场的环路定理得

$$-\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_L E_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_a^b \boldsymbol{E}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_b^c \boldsymbol{E}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_c^{\mathrm{d}} \boldsymbol{E}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{\mathrm{d}}^a \boldsymbol{E}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

根据前面的讨论，感生电场没有径向分量，故沿 bc 和 da 的积分为零。于是

$$-\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_a^b E_{iz}\,\mathrm{d}z - \int_c^d E_{iz}\,\mathrm{d}z = E_{iz}(ab)l - E_{iz}(cd)l$$

当 bc 和 da 边趋于零时，上式成为

$$E_{iz}(ab)l - E_{iz}(cd)l = 0$$

即

$$E_{iz}(ab) = E_{iz}(cd)$$

由无穷远处 $E_i(\infty) = 0$，则有 $E_{iz} = 0$，于是排除了 z 分。因此，感生电场只有方位角方向的分量：

$$\boldsymbol{E}_i = E_{i\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{19.11}$$

上式表明，螺线管内外的感生电场是环绕轴线的同心圆。在这一例子中，我们运用了感生电场的“高斯定理”和环路定理排除了电场的径向和轴向分量，剩下的方位角方向即为感生电场的实际方向。

第Ⅳ部分

问题研究方法模块

尽管电磁学是一门古老而经典的课程，但仍然存在某些有趣的问题值得人们去研究。在这一模块中，我们将以研究的眼光去看待电磁学中的问题，主要以研究法和实验法加以论述。我们的动机是让初学者从基础课程中初步掌握或学会研究的思想方法，为今后科学研究极早地奠定基础。

第 20 章　研究法

经典电磁学虽然是一门古老而成熟的基础课程，但仍然存在一些有趣的问题等待我们去解决和完善。比如，螺线管的磁场问题，其管的截面形状、线圈的离散性对轴线磁场有何影响等都是值得研究的。因此，在这一章中，我们将以研究的眼光去看待电磁学中的一些问题，其目的是使初学者学会以科学研究的思维方法去看待和处理问题。理论研究的思维方法其逻辑过程一般可表现为：研究动机—模型与方法—结果与讨论—结论。

20.1　研究法界定

研究一词有两种解释，其一意指探求事物的真相、性质、规律等；其二意指考虑或商讨（意见、问题）。在科技领域，研究常常指应用科学方法探求问题答案的一种过程。这种过程一般具有与他人的工作过程不相同，带有一定的创新性，因而得到的结果或使用的方法有新意。对于物理科学研究来说，首先要通过查阅资料发现或提出问题，其次建立模型和给出解决问题的方法，再次是演绎出研究结果，最后是对结果进行分析和讨论。现在，几乎所有的研究工作（包括原创性的）都是建立在前人工作的基础上的，因此，文献资料的搜集、阅读、整理、分析等过程显得非常重要。这一过程就是为了发现或提出新问题，为研究奠定基础。

文献是用文字、图形、符号、声频、视频等技术手段记录人类知识的一种载体，或理解为固化在一定物质载体上的知识。也可以理解为古今一切社会史料的总称。现在通常理解为图书、期刊等各种出版物的总和。文献是记录、积累、传播和继承知识的最有效手段，是人类社会活动中获取情报的最基本、最主要的来源，也是交流传播情报的最基本手段。正因为如此，人们把文献称为情报工作的物质基础。

研究法是指在研究中发现新现象、新事物，或提出新理论、新观点，揭示事物内在规律的工具和手段。这是运用智慧进行科学思维的技巧，一般包括文献调查法、观察法、思辨法、行为研究法、历史研究法、概念分析法、比较研究法等。研究法是人们在从事科学研究过程中不断总结、提炼出来的。由于人们认识问题的角度、研究对象的复杂性等因素，而且研究方法本身处于一个在不断地相互影响、相互结合、相互转化的动态发展过程中，所以对于研究方法的分类目前很难有一个完全统一的认识。

理论研究法是指在统计分析的基础上，对调查资料进一步进行有系统的思维加工的方法。它是多种思维方法的综合运用。理论研究法的直接目的在于从调查资料中引出理论、观点来，并对研究假设进行检验。在本章中所提及的“研究法”指的是“理论研究法”，将以科学研究的思维观点或眼光来论述电磁学问题的一种研究的处理方法。这里着重强调以研究的眼光来处理电磁学中出现的问题，其目的是让初学者尽快从经典的基础课程中掌握现代科学研究的方法，这就是我们写这一章的主要动机。

20.2 研究法范例

20.2.1 长直螺线管轴线上的磁场与其截面形状是否有关

问题的提出 圆形截面长直螺线管激发的磁场是毕奥—萨伐尔定律应用的最常见的例子。通常的做法是把圆电流在其轴线上所激发的磁场公式应用于该螺线管轴线上的磁场计算。这就默认了螺线管是密绕的，即不考虑螺旋度的影响，因此是一个理想化的模型。在这一模型下，管内外的磁场大小为

$$B=\begin{cases}0, & r>R\\ \mu_0 nI, & r<R\end{cases} \tag{20.1}$$

式中 n 是单位长度的线圈匝数，I 是螺线管中的电流。利用圆电流模型得出的这一结果只能表示其轴线上的磁场，利用对称性和安培环路定理可以证明，无限长直螺线管其内部磁场与轴线上相同。一个自然的问题是，如果螺线管不是圆形截面的，轴线上的磁场还具有上述形式吗？或者螺线管的截面形状对轴线磁场有何影响？1985 年，Victor Namias 利用毕奥－萨伐尔定律证明了磁场的分布与截面无关[①]。紧接着，Keith Fillmore[②]、Frank Munley[③] 和 N. Gauthier[④] 也研究了非圆截面的磁场这一问题。2003 年，Olivier Espinosa and Viktor Slusarenko 利用无限长直载流条的磁场研究了任意截面无限长螺线管的磁场[⑤]。然而，国内只有少数学者涉及这一问题[⑥]。在这些研究工作中，没有涉及管子横截面的具体形状。如果设定管子横截面具有几种固定的形状，再利用毕奥－萨伐尔定律计算，将其结果与圆截面的结果比较，这样会更直观一些，便于初学者的理解，这就是我们的动机(motivation)。

模型与方法 设螺线管为无限长，且是密绕的，即不考虑螺旋度的影响。它的横截面分别取为等边三角形和矩形，如图 20-1 所示。这两种管子单位长度的线圈匝数均为 n，管子中没有填充磁介质。研究的方法主要采用解析法和比较法，其思路是将三角形和矩形载流回路在轴线上产生的磁场规律分别应用于这两种螺线管，通过直接积分得到有限长轴线上的结果，然后再过渡到无限的情况。最后将两种结果与圆截面结果比较之，然后得出结论。

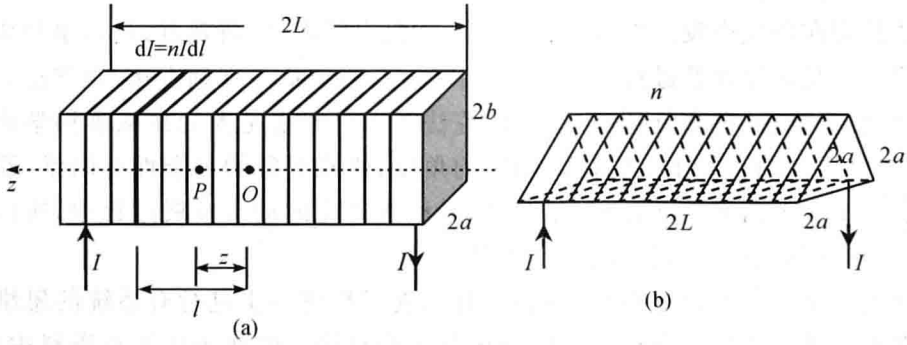


图 20-1 密绕的三角形和矩形截面螺线管

① Victor N. On the magnetic field due to a solenoid of arbitrary cross section [J]. Am. J. Phys.,1985,53:588.

② Keith F. Magnetic field of a noncircular solenoid [J]. Am. J. Phys.,1985,53:782.

③ Frank M. Magnetic field of a solenoid of arbitrary cross－sectional shape [J]. Am. J. Phys.,1985,53:779.

④ Gauthier N. Field due to a noncircular solenoid: A further generalization [J]. Am. J. Phys.,1986,54:296.

⑤ Olivier E, Viktor S. The magnetic field of an infinite solenoid [J]. Am. J. Phys.,2003,71:953.

⑥ 常同钦. 截面为任意形状无限长螺线管的磁场[J]. 大学物理,2001,20(6):22.

先计算矩形截面的螺线管轴线上的磁场。为了给出螺线管轴线上的磁场，先考虑一个矩形($2a\times 2b$)载流回路在轴线上的磁场。选坐标原点在矩形的对称中心，由毕奥－萨伐尔定律可得磁场表达式为

$$B=\frac{\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2+z^2}}\left[\frac{1}{(a^2+z^2)}+\frac{1}{(b^2+z^2)}\right] \tag{20.2}$$

设矩形截面螺线管的中点为坐标原点 O，且场点 P 在距 O 为 z 处。在图 20-1(a) 中取一小段 $\mathrm{d}l$，该小段距原点为 l，相应的电流为

$$\mathrm{d}I=nI\,\mathrm{d}l$$

运用(20.2)式得

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 nI\,\mathrm{d}l}{\pi}\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2+(l-z)^2}}\left[\frac{1}{a^2+(l-z)^2}+\frac{1}{b^2+(l-z)^2}\right] \tag{20.3}$$

积分得轴线上的磁感强度为

$$\begin{aligned}B&=B_0\frac{ab}{\pi}\int_{-L}^{L}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+(l-z)^2}}\left[\frac{1}{a^2+(l-z)^2}+\frac{1}{b^2+(l-z)^2}\right]\mathrm{d}l\\&=\frac{B_0}{\pi}\arctan\left(\frac{b}{a}\frac{z+L}{\sqrt{a^2+b^2+(z+L)^2}}\right)-\frac{B_0}{\pi}\arctan\left(\frac{b}{a}\frac{z-L}{\sqrt{a^2+b^2+(z-L)^2}}\right)\\&\quad+\frac{B_0}{\pi}\arctan\left(\frac{a}{b}\frac{z+L}{\sqrt{a^2+b^2+(z+L)^2}}\right)-\frac{B_0}{\pi}\arctan\left(\frac{a}{b}\frac{z-L}{\sqrt{a^2+b^2+(z-L)^2}}\right)\\&=\frac{B_0}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{ab}(z+L)\sqrt{a^2+b^2+(z+L)^2}\right)\\&\quad-\frac{B_0}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{ab}(z-L)\sqrt{a^2+b^2+(z-L)^2}\right)\end{aligned} \tag{20.4}$$

其中

$$B_0=\mu_0 nI$$

磁感强度的方向与 z 轴方向相同。

对于一个边长为 $2a$ 的等边三角形截面的螺线管而言，可以借助于等边($2a$)三角形载流回路在其轴线上的磁场公式来计算。根据毕奥－萨伐尔定律可得

$$B=\frac{9\mu_0 Ia^2}{2\pi(3z^2+a^2)\sqrt{3z^2+4a^2}} \tag{20.5}$$

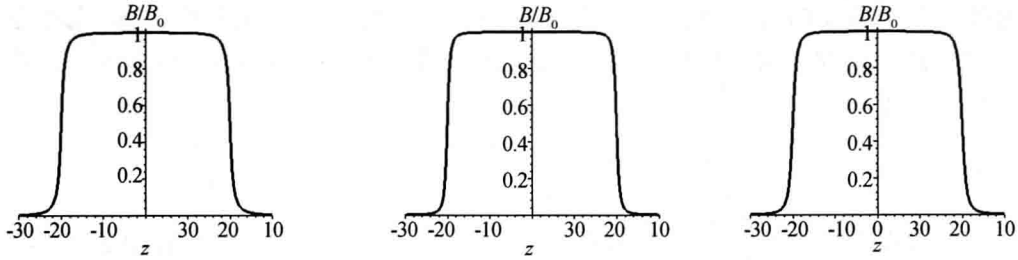
其中 z 是三角形中心到场点的距离。设等边三角形截面螺线管中心为坐标原点，长为 dl 一段电流圈在场点 z 所激发的磁场为

$$\mathrm{d}B=\frac{9\mu_0 a^2 nI\,\mathrm{d}l}{2\pi[3(z-l)^2+a^2]\sqrt{3(z-l)^2+4a^2}}$$

积分得

$$\begin{aligned}B&=\frac{9B_0 a^2}{2\pi}\int_{-L}^{L}\frac{\mathrm{d}l}{[3(z-l)^2+a^2]\sqrt{3(z-l)^2+4a^2}}\\&=\frac{3B_0}{2\pi}\left[\arcsin\left(\frac{3}{2}\frac{z+L}{\sqrt{a^2+3(z+L)^2}}\right)+\arcsin\left(\frac{3}{2}\frac{L-z}{\sqrt{a^2+3(L-z)^2}}\right)\right]\end{aligned} \tag{20.6}$$

结果与讨论　现在讨论几种特殊情况。当场点选在螺线管的对称中心时，$z=0$，这时(20.4)式化简为



(a) 矩形截面螺线管的轴线磁场分布　(b) 三角形截面的轴线磁场分布　(c) 圆形截面的轴线磁场分布

图 20-2　三种螺线管截面轴线磁场分布比较

$$B_{\text{rectangle}}=\frac{B_0}{\pi}\arctan\left(\frac{L\sqrt{a^2+b^2+L^2}}{ab}\right)-\frac{B_0}{\pi}\arctan\left(\frac{-L\sqrt{a^2+b^2+L^2}}{ab}\right)\tag{20.7}$$

当 $a=b$ 时，矩形截面变为正方形截面，上式又可简化成

$$B_{\text{square}}=\frac{B_0}{\pi}\arctan\left(\frac{L\sqrt{2a^2+L^2}}{a^2}\right)-\frac{B_0}{\pi}\arctan\left(\frac{-L\sqrt{2a^2+L^2}}{a^2}\right)\tag{20.8}$$

当 $z=0$ 时，(20.6) 式可简化成

$$B_{\text{triangle}}=\frac{3B_0}{\pi}\arcsin\left(\frac{3}{2}\frac{L}{\sqrt{a^2+3L^2}}\right)\tag{20.9}$$

而圆截面螺线管(长为 $2L$) 管内距中心为 z 磁场为

$$B_{\text{circle}}=\frac{B_0}{2}\left[\frac{z+L}{\sqrt{(z+L)^2+R^2}}-\frac{z-L}{\sqrt{(z-L)^2+R^2}}\right]\tag{20.10}$$

当 $z=0$ 时，上式成为

$$B_{\text{circle}}=B_0\frac{L}{\sqrt{L^2+R^2}}\tag{20.11}$$

当 $L\to\infty$ 时，比较(20.4) 式，(20.6) 式和(20.10) 式可知，矩形和三角形截面的螺线管与圆形截面的结果是一致的，即

$$B=\lim_{L\to\infty}B_{\text{triangle}}=\lim_{L\to\infty}B_{\text{rectangle}}=\lim_{L\to\infty}B_{\text{circle}}=\mu_0 nI$$

因此，对于无限长直螺线管来说，轴线上的磁场与截面形状无关。图 20-2 分别给出了矩形、三角形和圆形截面的轴线磁场分布。从图 20-2 可见，当螺线管的半长 $L=20$(无量纲) 时，三种情况的磁场分布几乎是相同的。

结论　利用矩形回路电流和三角形回路电流模型计算了长直螺线管轴线上的磁场分布，并与圆形回路模型的结果进行了比较，其结果表明轴线上的磁场分布与螺线管的截面形状无关。

20.2.2　螺线管轴线上磁场的离散模型与连续模型的比较

问题的提出　在理想情况下，讨论长直螺线管的磁场分布是不考虑螺旋性的，这样的模型下得出的结果是螺线管外没有磁场分布，磁场只分布于管内。实际上，螺线管的外部是有磁场的[①②]，也就是说，用圆电流的磁场规律来研究螺线管的磁场是不能反映真实情况的。有关圆柱形螺线管的螺旋性问题，国内也有若干学者涉及过[③④⑤⑥]。在不计螺旋度的情况下，

---

① Brick D B, Snyder A W. External dc field of a long solenoid [J]. Am. J. Phys., 1965, 33: 905.

② Farley J, Price R H. Field just outside a long solenoid [J]. Am. J. Phys., 2001, 69: 751.

③ 苏昭生，杨懋沧. 无限长载流螺线管磁场的初等计算[J]. 大学物理，1984，(8)：30.

④ 蔡子勇. 长直螺线管磁场的全空间解[J]. 大学物理，1986，(1)：15.

⑤ 赵晋保. 载流螺线管周围的磁场[J]. 大学物理，1985，(1)：13.

⑥ 张之翔. 电磁学千题解[M]. 北京：科学出版社，2002，408.

计算密绕长直螺线管轴线上的磁场分布，通常利用圆形电流的模型。而圆电流是自成回路，即每匝线圈的圆电流相互之间是独立的或者圆电流是离散的(不连续)。在理论计算中，往往抹去这种离散性而视为连续的，导线越细且绕制越紧密这种近似程度越好。那么，在理论计算中为什么可以运用连续模型?连续模型与离散模型两者究竟有多大的差别?这些问题在现有的电磁学教科书中似乎没有论及过，因而有必要弄清这些细节问题，这对我们选取物理模型是有意义的。

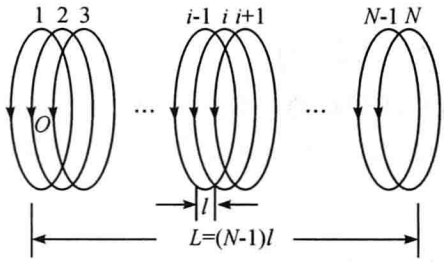


图 20-3　离散的直螺线管模型

模型与方法　设半径为 R 的圆截面长直螺线管是由一匝匝的圆形线圈紧密拼接而成的，且将每一匝线圈通以相同大小的电流，如图 20-3 所示。这样，管中轴线上的磁场可以看作由每个圆电流轴线磁场叠加而成。设两个圆电流之圆心距离为 l，则螺线管的长度为 $L=(N-1)l$，其中 N 是匝数。由此可得螺线管单位长度的匝数为

$$n=\frac{N}{L}=\frac{N}{(N-1)l}=\frac{N}{(N-1)}n_{\infty} \tag{20.12}$$

其中 $n_{\infty}=\dfrac{1}{l}$ 是无限长直螺线管单位长度的匝数。由此可见，有限长螺线管其单位长度的线圈匝数与线圈的总匝数有关。只有当螺线管为无限长时，单位长度的匝数才与总匝数无关。由于圆电流在其圆心处和轴线上的磁场都是已知的，因此，可以利用归纳法和场的叠加法来研究螺线管轴线上的磁场。设坐标原点在第 1 个线圈的圆心 O，则有

第 1 个线圈的电流在圆心 O 处的磁场为

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{2R}=\frac{1}{2}\mu_0 I\frac{R^2}{[R^2+(1-1)^2l^2]^{3/2}} \tag{20.13}$$

第 2 个线圈在第 1 个线圈的圆心 O 所产生的磁场为

$$B_2=\frac{1}{2}\mu_0 I\frac{R^2}{[R^2+(2-1)^2l^2]^{3/2}} \tag{20.14}$$

其中 l 是第 2 个线圈的圆心与第 1 个线圈的圆心之间的距离。由于线圈是密绕的，故 l 就是绝缘导线的直径(非裸导线的直径)。

第 3 个线圈在第 1 个线圈的圆心 O 所激发的磁场为

$$B_3=\frac{1}{2}\mu_0 I\frac{R^2}{[R^2+(3-1)^2l^2]^{3/2}} \tag{20.15}$$

据此类推，第 k 个线圈在 O 处激发的磁场为

$$B_k=\frac{1}{2}\mu_0 I\frac{R^2}{[R^2+(k-1)^2l^2]^{3/2}} \tag{20.16}$$

由于每个圆电流所产生的磁场在 O 点是同方向的，因此，N 匝线圈的螺线管其端口轴线上的磁场为

$$B_{\mathrm{end}}(1)=\sum_{k=1}^{N}B_k=\frac{1}{2}\mu_0 I\sum_{k=1}^{N}\frac{R^2}{[R^2+(k-1)^2l^2]^{3/2}} \tag{20.17}$$

利用(20.12)式,上式可表示为

$$B_{\text{end}}(1)=\frac{1}{2}\mu_0 n_\infty I\sum_{k=1}^{N}\frac{R^2 l}{[R^2+(k-1)^2 l^2]^{3/2}} \tag{20.18}$$

其中

$$n_\infty l=1$$

将坐标原点平移至第 i 个线圈,则由(20.18)式不难得到螺线管内任一点的磁感应强度为

$$B_{\text{in}}(i)=\frac{1}{2}\mu_0 n_\infty I\sum_{k=1}^{N}\frac{R^2 l}{[R^2+(k-i)^2 l^2]^{3/2}},\quad 1<i<N \tag{20.19}$$

式(20.18)和(20.19)就是直螺线管在端口和内部轴线上的磁感应强度,显然它是离散的。

结果与讨论 当导线很细或 $R\gg l$,且密绕时,可令 $l=\mathrm{d}x$,$(k-1)l=x$,于是,(20.18)式的求和可改写成积分

$$\begin{aligned}B'_{\text{end}}&=\frac{1}{2}\mu_0 n_\infty I\int_0^L\frac{R^2\,\mathrm{d}x}{[R^2+x^2]^{3/2}}\\&=\frac{1}{2}\mu_0 n_\infty IR^2\left(\frac{x}{R^2\sqrt{R^2+x^2}}\right)_0^L\\&=\frac{1}{2}\mu_0 n_\infty I\frac{(N-1)l}{\sqrt{R^2+(N-1)l^2}}\end{aligned} \tag{20.20}$$

上式就是连续模型给出的螺线管端口轴线上的磁感应强度。显然,当 $L\to\infty$ 时,上式成为

$$B'_{\text{end}}=\frac{1}{2}\mu_0 n_\infty I\lim_{L\to\infty}\frac{L}{\sqrt{R^2+L^2}}=\frac{1}{2}\mu_0 n_\infty I \tag{20.21}$$

这个结果与教科书中的结果是一致的。将(20.19)式连续化并积分得

$$\begin{aligned}B'_{\text{in}}(i)&=\frac{1}{2}\mu_0 n_\infty I\int_{-L_{(i-1)}}^{L_{(N-i)}}\frac{R^2\,\mathrm{d}x}{[R^2+x^2]^{3/2}}=\frac{1}{2}\mu_0 n_\infty I\left(\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)_{-L_{(i-1)}}^{L_{(N-i)}}\\&=\frac{1}{2}\mu_0 n_\infty I\left(\frac{(N-i)l}{\sqrt{R^2+(N-i)^2 l^2}}+\frac{(i-1)l}{\sqrt{R^2+(i-1)^2 l^2}}\right)\end{aligned} \tag{20.22}$$

当 $i=\dfrac{N}{2}$ 时,坐标原点移到了螺线管的中间。当 $N\to\infty$ 时,(20.22)式成为

$$B'_{\text{in}}=2\,\frac{1}{2}\mu_0 n_\infty I=\mu_0 n_\infty I \tag{20.23}$$

这就是无限长直螺线管内部轴线上的磁感应强度。为了比较直观地了解这两种模型的差别,我们将(20.18)和(20.20)进行数值计算,得到的结果列于表 20-1 和表 20-2 中。

表 20-1 螺线管端口磁场的离散和连续模型的比较($R=3\text{cm}$,$l=0.83\text{mm}$(22# 线))

N	$\dfrac{B_{\text{end}}}{(\frac{1}{2}\mu_0 n_\infty I)}$	$\dfrac{B'_{\text{end}}}{(\frac{1}{2}\mu_0 n_\infty I)}$	$B_{\text{end}}-B'_{\text{end}}$
10	0.26805	0.24162	0.02643
50	0.82146	0.80475	0.01671
100	0.95374	0.93935	0.01439
200	0.99781	0.98390	0.01391

表 20-2　螺线管端口磁场的离散和连续模型的比较($R = 3\text{cm}, l = 1.83\text{mm}$(16# 线))

N	$\frac{B_{\text{end}}}{(\frac{1}{2}\mu_0 n_\infty I)}$	$\frac{B'_{\text{end}}}{(\frac{1}{2}\mu_0 n_\infty I)}$	$B_{\text{end}} - B'_{\text{end}}$
10	0.53203	0.48125	0.05178
50	0.97980	0.94833	0.03147
100	0.99997	0.98656	0.01341

表 20-1 和 20-2 中，螺线管的半径 R 取为 3cm，而绕制漆包线的型号分别取为 22# 线和 16# 线。从计算结果来看，对于同一型号的导线，在相同的线圈匝数下，离散模型的结果要略大于连续模型的结果，匝数越少两者的差别越大；随着匝数的增加，两者的差别逐渐缩小；可以推知，当 N 趋于无穷时，两者将趋向一致。另外，比较表 20-1 和 20-2 可知，在相同匝数下，导线越粗，两种模型的差别越大。因此，连续模型不大适合匝数少的螺线管，而比较适合较长的螺线管。

结论　计算螺线管的磁场时，连续模型只适用于无限长直螺线管，而对有限长螺线管有较大的误差，导线越细误差越小，其优点是磁场有简洁的表达式。离散模型计算结果虽然准确，但磁场的表达式是级数式的，其规律不够直观。如果导线足够地细或者螺线管的半径远大于导线的半径，连续模型还是一个较好的近似。

第21章　实验法

电磁学理论是建立在库仑定律、毕奥－萨伐尔定律和法拉第电磁感应定律三大实验基础上的，因此，电磁学是一门实验科学。原则上，电荷、电流激发电场、磁场的规律都可以通过实验来检验。在这一章中，我们通过几个范例来论述之。

21.1　实验法界定

“实验”一词在字典中解释为：为了检验某种科学理论或假设而进行某种操作或从事某种活动。物理学的理论是通过观察、实验、抽象、假设等研究方法建立起来的。观察和实验既是理论的基础又是检验理论的唯一标准。观察是对自然界中所发生的物理现象，在不改变自然条件的情况下，按照它原来的样子加以观测研究。实验则是在人工控制的条件下，使现象反复重演，进行观察研究。在实验中，常把复杂的条件加以简化，以突出主要因素，排除或减少次要因素的作用，因而在现代物理学的研究中物理实验具有重大的意义。电磁学理论是通过实验建立起来的，反过来它的理论或规律经得起实验的检验。因此，原则上来说，所有的电磁学理论中出现的物理量都可以利用实验测量手段来获得。

所谓实验法是通过主动变革、控制研究对象来发现与确认事物间的因果联系的一种科研方法。其主要特点是：(1)主动变革性。观察与调查都是在不干预研究对象的前提下去认识研究对象，发现其中的问题。而实验却要求主动操纵实验条件，人为地改变对象的存在方式、变化过程，使它服从于科学认识的需要。(2)控制性。科学实验要求根据研究的需要，借助各种方法技术，减少或消除各种可能影响科学的无关因素的干扰，在简化、纯化的状态下认识研究对象。(3)因果性。实验是发现、确认事物之间的因果联系的有效工具和必要途径。

我们这里所强调的是物理实验法，物理实验法是指在实验室里利用一定的科学仪器设备，在人工控制的条件下，探索物理自变量和因变量之间关系的一种方法。也可说，实验法是人们带着一定的研究目的，利用一定的仪器、设备等物质手段，人为地控制条件，突出主要因素，排除或降低次要因素的影响，使现象反复重现，进行观测研究的一种特殊的研究方法。自变量一词源自数学，比如，$y = f(x)$，这里 x 为自变量，y 为因变量。自变量是由实验者操纵、掌握的变量。例如伏安法测电阻的实验中，可以改变通过待测电阻的电流(自变量)，来获得电阻两端不同的电压测量值(因变量)。反之，也可以改变电阻两端的电压(自变量)来获得不同的电流(因变量)。测量电阻的过程中，实验环境的温度对电阻的测量有较大影响，应加以人工控制。

事实上，由于仪器设备、测量方法、实验环境的变化，以及实验者的水平和感官的灵敏度的限制等多种原因，所有的测量结果不可能绝对准确，总是与真值有一定的误差。测量结果的误差大小直接反映了测量工作的价值，即测量结果的可靠性和测量的技术水平。

21.2　实验法范例

21.2.1　利用平板电容器测量海水的电导率

在一个大的非金属容器中装满导电液体，然后将面积为 S 的圆形平行板电容器放入液

体中，两平板间的距离为 d。当电容器两端加上电压 V 时，就有电流 I 流过两平板间的导电液体。调节电压 V（自变量），就可以改变电流 I（因变量），实验原理图如图 21-1 所示。

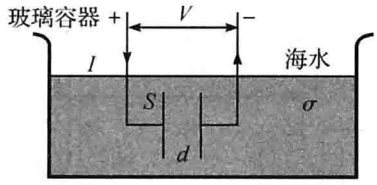


图 21-1　海水电导率的测量

设容器中装有海水（或盐水），其电导率为 σ。当电容器两极板间加上电压 V 时，通过极板间的电流为 I，由欧姆定律得（不计边缘效应）

$$R = \frac{V}{I} = \frac{d}{\sigma S} \tag{21.1}$$

由此可得

$$I = \frac{\sigma S}{d} V \tag{21.2}$$

或者

$$\sigma = \frac{Id}{VS} \tag{21.3}$$

由（21.3）式可知，通过测量电压和电流就能测得海水或盐水的电导率。由于在一定的温度和压力下，海水的含盐量（salinity）或盐度与其电导率成正比。

关于海水盐度的定义，不同历史时期定义有所不同。1902 年的定义是：1 千克海水中的溴和碘全部被当量的氯置换，而且所有的碳酸盐都转换成氧化物之后，其所含的无机盐的克数，以符号 $S‰$ 表示之，单位为克 / 千克。后来，从北海、波罗的海、红海等海区采集了 9 个表层水样，测定了它们的盐度和氯度，从这些数据归纳出盐度和氯度（Cl）的关系式

$$S‰ = 0.030 + 1.8050\mathrm{Cl}‰$$

这样就可以通过测定海水样品的氯度，按上式计算盐度，此法使用了大约 65 年。1950 年以后，电导盐度计的研究和发展，使盐度的测定方法得到简化，精密度也提高，比测定氯度后计算盐度的方法，更加准确和方便。1963 年，将盐度公式改为

$$S‰ = 1.80655\mathrm{Cl}‰$$

后来，R. A. 考克斯等对采自各大洋和海区的 135 个水样（深度在 100 米以内）的氯度值进行了准确的测定，按上述公式换算成盐度，并测定了电导比 R_{15}，得到 $S‰$ 与 R_{15} 关系的多项式

$$S‰ = -0.08996 + 28.2970R_{15} + 12.80832R_{15} - 10.67869R_{15} + 5.98624R_{15} - 1.32311R_{15}$$

式中 R_{15} 为一个标准大气压和 15℃ 条件下海水样品与 $S = 35.000$ 的标准海水电导率的比值。1966 年，海洋用表与标准联合专家小组（JPOTS）推荐这一多项式为海水盐度定义。

21.2.2　通过导线电量的测量

一根质量为 m 的导线弯成“Π”形，两端分别插入两个水银杯里，水银杯与带开关的电源相连接，如图 21-2 所示。导线处在均匀磁场 B 中，并与磁场垂直。当开关 K 接通的瞬间，导线会从水银杯中跳起来。通过测量导线跳起的高度 h，就可以测得通过导线的电量 q。当磁场 B 一定时，导线跳得越高，通过的电量越多。

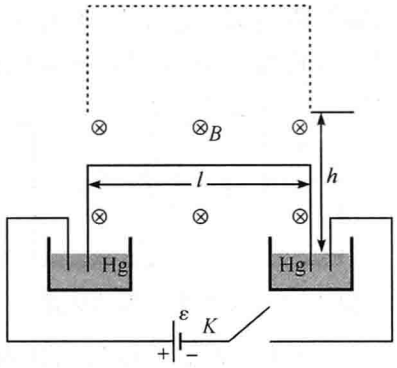


图 21-2　通过导线电量的测量装置

当开关 K 合上时的瞬间，导线中通以电流 I，水平段导线受到的安培力为

$$F = IlB$$

由于电流的流动方向是从左到右，因此，安培力的方向向上。导线受到这一安培力的作用会垂直跳起。导线的竖直部分受力正好相互抵消，对导线的运动没有影响。当开关 K 合上的短暂时间内，受短暂安培力的作用，导线由静止变为运动。由牛顿第二定律得

$$m\mathrm{d}v = F\mathrm{d}t$$

积分得

$$\int_0^{v_0} m\mathrm{d}v = mv_0 = \int_0^t IlB\,\mathrm{d}t = lB\int_0^t \mathrm{d}q = lBq$$

于是

$$q = \frac{m}{lB}v_0 = \frac{m}{lB}\sqrt{2gh} \tag{21.4}$$

式中 $v_0 = \sqrt{2gh}$ 是导线跳起时的速度。由(21.4)式可知，只要测量出导线跳起后离水银面的高度 h，就能间接测得通过导线的电量 q。这个实验要成功，在保证导线为均质的前提下，导线的竖起部分长度要相同，且要平行。另一方面，导线跳起的高度测量也是关键。这个实验可以作为学生的趣味性实验或设计性实验。

21.2.3　螺线管中磁场的测量

一根长为 L、半径为 a 的长直螺线管，共绕有 N 匝线圈。当螺线管通以电流时，管内就会有磁场分布。为了测量管中的磁场，现将一个很小的线圈放在管内待测处，而该小线圈与一测量电荷的冲击电流计 G 串联。已知小线圈的匝数为 N_b，线圈的直径为 d，与冲击电流计 G 串联回路的电阻为 R。将长直螺线管通过反向开关 K 与电源相接，当改变螺线管中的电流流向时，待测小线圈中就会有电动势，从而导致电荷 q 的迁移。只要由 G 测出 q，就能确定长直螺线管中的磁场 B，测量电路如图 21-3(a) 所示。

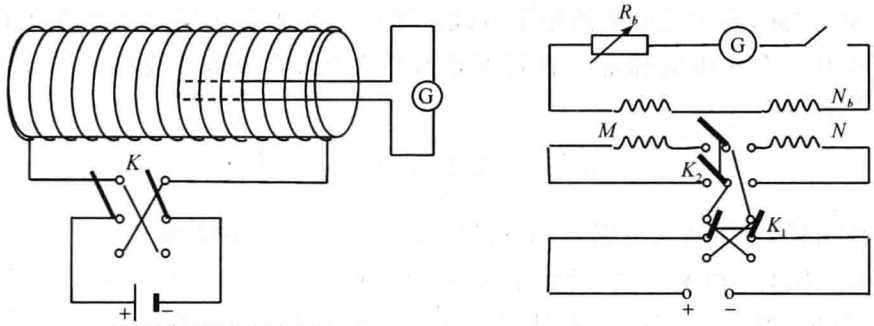
设测量的小线圈的横截面积为 S。由反向开关改变螺线管电流的过程中，测量小线圈中会出现电动势，于是，电流为

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{N_b}{R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{N_b}{R}\frac{\mathrm{d}(BS)}{\mathrm{d}t} = -\frac{N_bS}{R}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

根据电流的定义，我们有

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

由以上两式可得



(a) 螺线管中磁场的测量装置　　(b) 比较法实验测量线路

图 21-3　螺线管中磁场测量原理

$$\mathrm{d}q = -\frac{N_b S}{R}\mathrm{d}B$$

积分得

$$q = \int_0^q \mathrm{d}q = -\frac{N_b S}{R}\int_{B_1}^{B_2}\mathrm{d}B = -\frac{N_b S}{R}(-2B) = \frac{2N_b S B}{R}$$

于是有

$$B = \frac{qR}{2N_b S} \tag{21.5}$$

这样由测量线圈的参数和冲击电流计测得的电量就可以获得长直螺线管内的磁场。如果引入冲击电流计的冲击常数 β 和偏转示数 m，则上式可改写成

$$B = \frac{R}{2N_b S}m\beta \tag{21.6}$$

式中的冲击常数 β 可以利用比较法来确定，测量线路如图 21-3(b) 所示。图中 M 为标准互感器的互感系数，R_h 是电阻箱，是用于调节电流计回路的临界状态的，而 R_b 是次级回路中的总电阻。

如果初级线圈中有电流变化时，次级线圈中的互感电动势。当通过初级线圈的电流从 $+I_b$ 变为 $-I_b$ 时，则通过冲击电流计的电量为

$$q = \int_0^\tau i\mathrm{d}t = \int_0^\tau \frac{\varepsilon}{R_b}\mathrm{d}t = \int_{+I_b}^{-I_b} -\frac{M}{R_b}\mathrm{d}i = \frac{2MI_b}{R_b} = m_b\beta$$

由此可得

$$\beta = \frac{2MI_b}{m_b R_b} \tag{21.7}$$

将此式代入(21.6) 式得

$$B = \frac{Rm}{N_b S}\frac{MI_b}{m_b R_b} \tag{21.8}$$

式中 m_b 是由标准互感器比较时测得的电流计偏转示数。当标准互感器的次级回路与探测线圈的回路串联成一个回路时，则有 $R = R_b$，(21.8) 式可简化成

$$B = \frac{MI_b}{N_b S}\frac{m}{m_b} \tag{21.9}$$

式中 m 是探测线圈测得的电流计偏转示数。值得一提的是，测量螺线管中的磁场分布，除了冲击电流计的方法外，还可以利用霍尔元件、磁通传感器等手段来测量。

21.2.4　平行载流导线间的相互作用力测量

早在 20 世纪 80 年代，国际计量委员会就把长直平行载流导线系统选作电流强度单位

“安培”的定义，因此，利用实验来测量平行载流导线间的相互作用力是有意义的。设两导线间的垂直距离为 a，其中电流都是 I。根据安培力公式及长直载流导线的磁场分布，可得导线单位长度的安培力为

$$f = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}l} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} = 2 \times 10^{-7} \frac{I^2}{a} \tag{21.10}$$

当电流流向相同时，导线间是吸引力；电流反向时，是排斥力。如果取 $I = 10A$，$a = 1.0\mathrm{mm}$，则 $f = 2 \times 10^{-2}\mathrm{Nm^{-1}}$。由此可见，导线之间的作用力是很小的。当 I 一定时，只有减少距离 a 才能增加力。但是，当 $a < 0.1\mathrm{mm}$ 时，测量两导线间的距离比较困难。这时可以改用光学方法来测量 a，即把导线间的间距视为狭缝，这样可以利用单缝衍射的原理来测出 a 的值，原理图如图 21-4 所示。

单缝所在的平面与凸透镜及显示屏相互平行，且显示屏处于凸透镜的焦平面上。当平行单色光垂直照射单缝时，满足夫琅和费衍射，在光屏上形成稳定的衍射花样，则其光强分布为

$$I = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}} \right]^2$$

式中 a 为单缝的宽度，θ 为衍射角，λ 为照射光束的波长。由上式可知，光屏上产生暗斑的位置满足

$$a\sin\theta = k\lambda$$

又因为

$$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{x_k}{f_0} = \frac{k\lambda}{a}$$

这里 x_k 为 k 级暗纹到中央明纹的距离，f_0 为透镜的焦距。于是有

$$x_k = \frac{k\lambda f_0}{a}$$

$+k$ 与 $-k$ 级暗条纹之间的距离为

$$\Delta x_k = \frac{2k\lambda f_0}{a}$$

或表示为

$$a = \frac{2k\lambda f_0}{\Delta x_k}$$

将此式代入(21.10)式得

$$f = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}l} = 1 \times 10^{-7} \frac{\Delta x_k I^2}{k\lambda f_0} \tag{21.11}$$

由于入射波的波长 λ 和透镜焦距 f_0 是已知的，因此只要在给定电流下测出 Δx_k 即可。

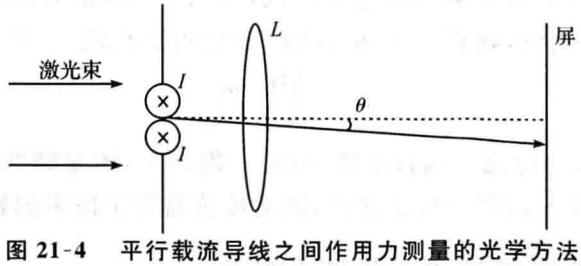


图 21-4　平行载流导线之间作用力测量的光学方法

值得指出的是：这个实验成功的关键是两平行导线必需很直，间距要小，设计这一狭缝是一大难点。

21.2.5　同轴电缆自感的测量

一个长度为 l、半径为 a 的长直金属圆柱面，被一个同样长度、半径为 b 的稍大一些的金属圆柱面同轴地包围着。将两圆柱面轴向通以反向的电流 I，构成一个空气同轴电缆，如图 21-5 所示。

由安培环路定理可知，磁场只分布于两圆柱面之间，其大小为

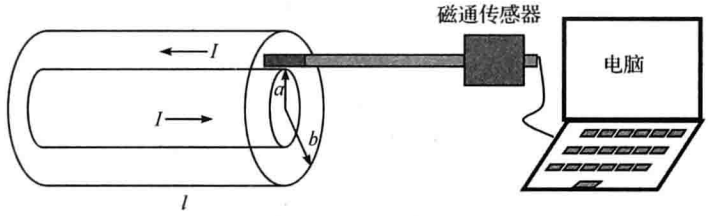


图 21-5　能量法测量同轴传输线的自感

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r},\quad a<r<b$$

再由自感的定义可得

$$L=\frac{\Phi}{I}=\frac{\int_a^b Bl\,\mathrm{d}r}{I}=\frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \tag{21.12}$$

相应的磁能为

$$W_m=\frac{1}{2}LI^2=\frac{\mu_0 lI^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a} \tag{21.13}$$

又因这一能量是储存在磁场中，因此，我们有

$$W_m=\int\frac{B^2}{2\mu_0}\mathrm{d}\tau \tag{21.14}$$

结合(21.13)式和(21.14)式得

$$L=\frac{1}{I^2}\int\frac{B^2}{\mu_0}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\mu_0 I^2}\lim_{\Delta r\to 0}\sum_i\bar{B}_i^2\Delta\tau_i=\frac{2\pi l}{\mu_0 I^2}\lim_{\Delta r\to 0}\sum_i\bar{B}_i^2 r_i\Delta r_i \tag{21.15}$$

式中 $\bar{B}_i$ 是第 i 个同心圆柱面(厚度为 Δr_i)薄层中的磁感强度的平均值。由此可见，只要将两圆柱面之间的空间划分得足够小，就可以由实验测得同轴传输线的自感。如果两圆柱面的半径 a 与 b 相近，两圆柱面间的磁场近似均匀场。这时令

$$2\pi r\approx\frac{1}{2}(2\pi a+2\pi b)=\pi(a+b)$$

于是(21.15)式变成

$$L=\frac{2\pi l}{\mu_0 I^2}\lim_{\Delta r\to 0}\sum_i\bar{B}_i^2 r_i\Delta r_i=\frac{\pi(a+b)l}{\mu_0 I^2}\bar{B}^2(b-a)=\frac{\pi l(b^2-a^2)}{\mu_0 I^2}\bar{B}^2 \tag{21.16}$$

由此可见，只要测出两柱面间的磁感强度的平均值，就可以测得同轴传输线的自感。实际上，当 $a\sim b$ 时，两柱面相当于平行载流平面，而平行载流平面间的磁场是均匀的。测磁场可以利用磁通传感器，这样测量的值直接可以在电脑上显示出来。这个实验可以作为学生课外设计性实验，所有环节由学生自己独立完成。

顺便指出，当 $a\sim b$ 时，由(21.12)得

$$L=\frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\left(1+\frac{b-a}{a}\right)\approx\frac{\mu_0 l}{2\pi}\frac{(b-a)}{a}=\frac{\mu_0 Il}{2\pi a}\frac{(b-a)}{I}=Bl\frac{(b-a)}{I^2}\frac{2\pi aB}{\mu_0}\approx\frac{\pi l(b^2-a^2)}{\mu_0 I^2}B^2 \tag{21.17}$$

其中利用了 $2a\approx(a+b)$ 和 $\mu_0 I=2\pi aB$。显然，(21.17)与(21.16)相同。

第V部分

知识盘点方法模块

要学好一门课程，经常盘点所学知识是不可或缺的，这也是提高学习效率的一种较好的方法。因为电磁学知识点较多，初学者往往觉得难以理出一条清晰的主线。在这一模块中，我们尝试用列表对比法进行知识点的盘点，其盘点的主线是：场的概念、场的性质、场的定义、场的规律、场的功和能以及与物质的相互作用。我们写这一模块的目的是想让初学者站在目的地的顶端回眸走过的路，构建起电磁学完整的知识体系。

第 22 章　对比法

电磁学的知识点较多且比较抽象，往往给初学者带来一定的学习困难。尽管如此，根据电场和磁场的相似性，通过对比我们还是可以找到一些规律。这一章的任务是对电磁学的主要知识点进行盘点和归类，理顺相互关系，便于初学者掌握。涉及的内容有静电场、静磁场、静态场与物质的相互作用、稳恒电路与磁路、非静态场等。为了使初学者有更清晰的知识链、构建完整的知识体系和提高学习效率，我们将对电磁学的知识点进行盘点，盘点方法采用对比法(contrastive approach)。通过对比，一来可以领略到“一览众山小”的感觉，二来回眸“走过的路，体验一下成就感”。

22.1　对比法界定

“对比”一词的意思是指两种事物的相对比较。比如新与旧的对比，古与今的对比。而“比较”一词是指就两种或两种以上同类的事物辨别异同或高下。比如两种发光材料发光颜色和发光效率的比较，两种金属材料导电性能的比较等。我们通常所讲的“有比较才能有鉴别”就是指的辨别异同。“比较”所强调的是“同类事物”，而“对比”的条件就没有“比较”那么“苛刻”，它不一定是指“同类事物”的比较，也可是不同类的两种事物的比较。此外，“对比”所强调的是两种事物的相对比较，而事物的数量只有两种。从矢量场的角度来说，电场和磁场同属于矢量场，它们是“同类事物”。但从“电”和“磁”来说，这是两种“完全不同的事物”。因此，对电场和磁场运用对比法较为合适。

所谓“对比法”是指将两种同类或具有一定相似性的异类事物安排在一起进行对照比较与分析，找出它们的异同点，并分析造成这种异同原因的一种比较分析方法。将其引申到电磁学中，即把电场和磁场这两种物质放在一起，比较场的性质和激发场的规律，指出它们之间差异的一种比较分析方法。

由于电场和磁场同属于场，既有相对独立性，又有整体相关性。但它们之间的差异十分明显，因此，用对比法来进行盘点知识是较为合适的。

22.2　静电场与静磁场的对比

22.2.1　电场和磁场的特点对比

何谓场？如果一个标量 f 是空间位置的函数，即 $f=f(x,y,z)$，则称 f 为标量场；如果一个矢量 $\boldsymbol{F}$ 是空间位置的函数，即 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(x,y,z)$，则称 $\boldsymbol{F}$ 为矢量场。由于这种场与时间无关，故又称之为静止场(静态场)或稳定场(稳态场)。比如：电势 $V(x)$ 是标量场；电场强度 $\boldsymbol{E}(x)$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}(x)$ 都是矢量场。当场量与时间 t 有关时，则可称为非稳定场或时变场。假如交变场随时间变化的频率很低，即波长远大于交变电荷、电流系统线度时，则可称为似稳场；如果变化很快，常叫作迅变场。为了便于读者对比，把两者的基本特点列于表 22-1 中。

表 22-1 静电场与静磁场特点对比

静电场	静磁场
矢量场	矢量场
保守场	非保守场
有源场	无源场
无旋场	有旋场
对电荷有力的作用	对电流有力的作用
移动电荷要做功	移动电流要做功

通过对比不难看出，静电场和静磁场虽然都是矢量场，但是它们的特点是各不相同的。静电场的保守性表现在移动电荷做功与路径无关，而静磁场没有这一特点。静电场对置于其中的电荷（无论运动还是静止）将会受力，而静磁场只对运动电荷有力的作用。静止的正电荷是静电场的源头，负电荷是静电场的尾闾，而静磁场则没有这一特点。

22.2.2 电场和磁场定义对比

静止电荷激发静电场，而稳恒流动的电荷激发静磁场。如何定义这两种场？最有效也是最常用的方法是在场中引入“探针”，使其与之发生相互作用。通过这种相互作用就能确定电场或磁场的性质。为此，我们可以通过电场（或磁场）与电荷（或电流）的相互作用力来定义。表 22-2 给出了电场和磁场的定义对比。

表 22-2 电场和磁场的定义对比

静电场	静磁场
探针：静止电荷	探针：运动电荷
定义：单位电荷所受的库仑力	定义：单位运动电荷所受的洛仑兹力
数学表达式（大小）：$E=\dfrac{F}{q}$	数学表达式（大小）：$B=\dfrac{F_{\max}}{qv}$
方向：正电荷受力方向	方向：$\boldsymbol{F}_{\max}\times\boldsymbol{v}$ 的方向（右手法则）
国际单位：$\mathrm{N\cdot C^{-1}}$（或 $\mathrm{V\cdot m^{-1}}$）	国际单位：T（或 $\mathrm{Wb\cdot m^{-2}}$）
量纲：$[E]=LMT^{-3}I^{-1}$	量纲：$[B]=MT^{-2}I^{-1}$
场的叠加原理：$\boldsymbol{E}=\dfrac{\sum\boldsymbol{F}_i}{q}=\sum\boldsymbol{E}_i$	场的叠加原理：$\boldsymbol{B}=\sum\dfrac{\lvert\boldsymbol{F}_{i\max}\rvert}{q\lvert\boldsymbol{v}_i\rvert}\hat{\boldsymbol{e}}_i=\sum\boldsymbol{B}_i$

电场强度和磁感应强度可以有多种定义（请参见第 1 章），但是这种定义两者之间的关系比较紧密，既有相似之处，也有明显的差异。它们的优点主要体现在电荷的“静”与“动”上，“qv”表示一种电荷的“流动”，而暗示这种电荷的流动能激发磁场，物理意义十分清晰，这就是为何课本采用这种定义的原因所在。

在国际单位制（MKSA）中，两者的量纲是不相同的。但是在高斯单位制中它们具有相同的量纲。因为在高斯单位制中，电量 q 的量纲为 $\mathrm{L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}}$，电场强度（单位：CGSE）的量纲为 $\mathrm{L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}}$，磁感应强度（单位：高斯）的量纲为 $\mathrm{L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}}$，两者是相同的。

22.2.3 库仑力与安培力的对比

相距为 r 的两个静止点电荷之间存在静电相互作用力，这种力称之为库仑力（Coulomb force）。

它与两个点电荷的乘积成正比，与距离的平方成反比。点电荷间的相互作用是通过电场进行的。类似地，两个电流元之间存在磁相互作用力，这个力称为安培力。电流元间的相互作用也是通过磁场来实现的。磁场对运动电荷的作用称为洛仑兹力，磁铁与磁铁（磁场与磁场）之间的力称为磁力。通过磁场相互作用来实现的这些力统称为磁力（magnetic force）。

表 22-3　库仑力与安培力的对比

库仑力	安培力
物理模型：点电荷 q（标量）	物理模型：电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$（矢量）
相互作用的场：电场	相互作用的场：磁场
与点电荷的乘积成正比	与元电流大小的乘积成正比
力的性质取决于电荷的符号	力的性质取决于元电流的取向
作用力符合牛顿第三定律	作用力符合牛顿第三定律（全电流）
数学表达式：$\boldsymbol{F}_{12}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1q_2}{r_{12}^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{12}=q_1\boldsymbol{E}_2$	数学表达式：$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times(I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times\hat{\boldsymbol{r}}_{12})}{r_{12}^2}=I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times\mathrm{d}\boldsymbol{B}_2$
方向：在两点电荷的连线上	方向：与 $I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times\mathrm{d}\boldsymbol{B}_2$ 组成的平面垂直（右手法则）
叠加原理：$\boldsymbol{F}=\sum\boldsymbol{F}_i$	叠加原理：$\boldsymbol{F}=\sum\boldsymbol{F}_i$

如果把表格中的电流元改写成如下形式

$$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}q\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t}=\mathrm{d}q\boldsymbol{v}$$

式中 v 表示电荷元 dq 的运动速度。通过比较很容易发现，电流元实质上是一种“点电荷”的流动，两种流动“点电荷”之间就会有力的作用。因此，安培力是描述“动点电荷”之间的相互作用，而库仑力是描述“静止点电荷”间的作用。这一点正好与磁场的定义式（“动点电荷”的效应）相一致。由于同性静止电荷间是排斥力，而异性电荷间是吸引力，它们之间满足牛顿第三定律。因此，对于“动点电荷”来说，它们之间的作用力除了与“点电荷”的大小有关外，还与“点电荷”的流动方向有关。这就是“动”与“静”之间的差别。正是由于这种“差别”才导致安培力与库仑力的不同。

此外，从表格中还可以看到，当电荷元 $\mathrm{d}q$ 换成点电荷 q 时，安培力就变成洛仑兹力

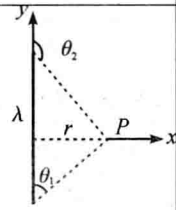
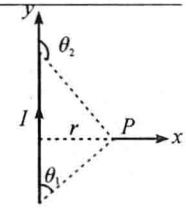
$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\mathrm{d}q\boldsymbol{v}\times\mathrm{d}\boldsymbol{B}\rightarrow\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

此式表明，安培力是“一群流动电荷”受磁场作用的“集体效应”，而洛仑兹力则是“单个流动电荷”受磁场作用的“单体效应”。这种特征有点像量子霍尔效应中的整数量子霍尔效应是一种“单电子行为”，而分数量子霍尔效应是一种“电子的集体行为”。正如原子的激发是一种“单电子行为”，而元激发是一种“电子的集体行为”一样。总之，在物理学中，有很多物理现象是相互类似的。

22.2.4　电荷与电流激发场之规律的对比

根据电场强度的定义，单位电荷所受的库仑力就是电场强度。最简单的电荷系统有：点电荷、带电球、带电环、带电平面、带电圆盘以及带电线等。这些带电系统所激发电场的规律又可以用于更为复杂的带电体系。因此，牢固掌握基本带电体系激发电场的规律就显得十分重要。表 22-4 给出了简单电荷和电流系统所激发的场规律。

表 22-4　电荷与电流激发场之规律的对比

静止电荷	电流(运动电荷)
点电荷 q：$\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$	运动点电荷：$\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\boldsymbol{v}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$
电荷元：$\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathrm{d}q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$	电流元：$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\mathrm{d}q\boldsymbol{v}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$
长直带电线：$\boldsymbol{E}=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{\boldsymbol{r}}$	长直载流导线：$\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}(\hat{\boldsymbol{e}}_l\times\hat{\boldsymbol{r}})$
短直带电线： $E_x=\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$ $E_y=\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}(\sin\theta_2-\sin\theta_1)$ 	短直载流线： $B=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$ 
带电圆环(轴线上)：$\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{2\varepsilon_0}\dfrac{\lambda R z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{k}}$	载流圆环(轴线上)：$\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0}{2}\dfrac{IR^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{k}}$
带电平面：$\boldsymbol{E}=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{n}}$ $\hat{\boldsymbol{n}}$ 表示平面法线单位矢量。	载流平面：$\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0}{2}\boldsymbol{\alpha}\times\hat{\boldsymbol{n}}$ $\hat{\boldsymbol{n}}$ 表示平面法线单位矢量。
带电球面：$\boldsymbol{E}=\begin{cases}0, & r<R\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}=\dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}, & r\geqslant R\end{cases}$	旋转带电球面：$\boldsymbol{B}=\begin{cases}\dfrac{2}{3}\mu_0\sigma R\omega\hat{\boldsymbol{k}}, & z<R\\ \dfrac{2}{3}\mu_0\sigma\omega R\dfrac{R^3}{z^3}\hat{\boldsymbol{k}}, & z>R\end{cases}$
带电球：$\boldsymbol{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho\boldsymbol{r}}{3\varepsilon_0}, & r<R\\ \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}, & r>R\end{cases}$	载流球体(旋转带电球体)： $\boldsymbol{B}=\begin{cases}\dfrac{\mu_0\rho\boldsymbol{\omega}}{3}\left(1-\dfrac{3r^2}{5R^2}\right), & r<R\\ \dfrac{2\mu_0\rho R^5\boldsymbol{\omega}}{15r^3}, & r>R\end{cases}$
长带电圆柱面：$\boldsymbol{E}=\begin{cases}0, & r<R\\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{\boldsymbol{r}}=\dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}\hat{\boldsymbol{r}}, & r\geqslant R\end{cases}$	长载流圆柱面：$\boldsymbol{B}=\begin{cases}\mu_0\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{\alpha}, & r<R\\ 0, & r>R\end{cases}$ 其中 $\alpha=nI$ or $\alpha\omega R$
长带电圆柱体：$\boldsymbol{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho\boldsymbol{r}}{2\varepsilon_0}, & r\leqslant R\\ \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{\boldsymbol{r}}, & r\geqslant R\end{cases}$	长载流圆柱体：$\boldsymbol{B}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}, & r<R\\ \dfrac{\mu_0 R^2}{2r}\boldsymbol{j}\times\hat{\boldsymbol{r}}, & r>R\end{cases}$
带电圆盘(轴线上)单位面积的电荷 σ： $\boldsymbol{E}=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\dfrac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\hat{\boldsymbol{k}}$	载流圆盘(轴线上)沿半径单位长度的电流 α： $\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0\alpha}{2}\left[\ln\left(\dfrac{R+\sqrt{z^2+R^2}}{z}\right)-\dfrac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]\hat{\boldsymbol{k}}$

由表 22-4 可见，电场由电荷所激发，磁场由电流(或运动电荷)所激发。静止的点电荷 $q(\mathrm{d}q)$ 激发的为静电场，匀速运动的点电荷 $q\boldsymbol{v}(\mathrm{d}q\boldsymbol{v})$ 激发静磁场。单位长度的电荷(线电荷密度)λ 与“单位时间的电荷”(电流强度)I 地位相对应。单位面积的电荷(面电荷密度)σ 与单位长度的电流(面电流密度)$\boldsymbol{\alpha}(\sigma\boldsymbol{v})$ 地位相当。单位体积的电荷(体电荷密度)ρ 与单位面积的电流(体电流密度)$\boldsymbol{j}(\rho\boldsymbol{v})$ 地位相当。于是，我们可以将上述对应关系归纳如下：

$$
\begin{aligned}
&\text{静} \rightarrow \text{动}\\
&q \rightarrow qv\\
&\mathrm{d}q \rightarrow \mathrm{d}q\boldsymbol{v}\\
&\lambda \rightarrow I(\text{or}\quad \lambda\boldsymbol{v})\\
&\sigma \rightarrow \alpha(\text{or}\quad \sigma\boldsymbol{v})\\
&\rho \rightarrow j(\text{or}\quad \rho\boldsymbol{v})
\end{aligned}
$$

这就是电场和磁场的本质差别。通过对比，我们可以加深对电场与磁场之间的关联度的认识以及对电荷和电流系统激发场规律的认识。(注：电子、质子和中子具有自旋磁矩)

22.2.5　电场和磁场的方程对比

在上一节中，我们只给出了一些具有简单几何形状的带电体和与之相应的载流系统。这些电荷、电流系统已经初步展示了电荷、电流与电场、磁场之间的内在联系。但是，对一般的电荷、电流系统而言，也可以给出一般的关系，这种关系由场方程来描述。从数学上来说，要完全确定一个矢量场，矢量场必须同时满足两个方程：场的闭合面积分和环路积分。表 22-5 给出了电场和磁场方程的对比。

表 22-5　电场和磁场方程的对比

静电场	静磁场
高斯定理： $\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\mathrm{d}V$ 或 $\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_V \rho_f\mathrm{d}V$	高斯定理： $\oint_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$
环路定理： $\oint_L \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$	环路定理： $\oint_L \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\int_S \boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 或 $\oint_L \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S \boldsymbol{j}_f\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$
微分式(散度)：$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ 或 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_f$	微分式(散度)：$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$
微分式(旋度)：$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$	微分式(旋度)：$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}$ 或 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}_f$

对照电场和磁场的高斯定理，我们知道，闭合面 S 中无论有没有电流，磁感应强度的闭合面积分总是为零，这就意味着“没有磁单极子”。而电场强度的闭合面积分只有当闭合面没有包围电荷或包围的电荷代数和为零时，其积分才为零。这就告诉我们，正负电荷是可以分开的，也可“待在一起”，而正负磁单极子是不能分开的，只能“待在一起”。从电场的环路积分等于零，我们可以看出，无论环路是否包围电荷，其电场的环量均为零，表明静电场没有“旋涡”。用数学的语言来说，无论回路是单连通的还是多连通的(没有电荷包围是单连通的，即回路可以缩回到一点)，其电场的环量均为零。而磁场只对单连通区才有环路积分为零，表明磁场是有“旋涡”的，电流就是“旋涡”的中心。这就是大家熟悉的磁场线是闭合曲线，而电场线是不闭合的原因。从这一点来看，电场和磁场有着本质的差别。(注：2009 年，德国和英国的学者在自旋冰(钛酸镝单晶体 $Dy_2Ti_2O_7$) 中找到了磁单极子)。

22.2.6　电场和磁场的标势描绘对比

对于矢量场来说，实验测量是比较麻烦的，因为我们既要测量它的大小又要同时测量它的方向，这在实验测量中是难以做到的。实际测量时，我们总是把矢量转换成标量进行测量，

表 22-6　电场和磁场的标势描绘对比

电场	磁场
引进条件：电场移动电荷做功与路径无关，即$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$	引进条件：自由电流为零的单连通区，即$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$
电势能的定义式：$W_{P\infty}=q\int_P^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$	无对应
电势定义式：$V_P=\dfrac{W_{P\infty}}{q}=\int_P^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$	无对应
电势能和电势的参考点： 无穷远（有限带电体）；非无限远（无限带电体）； 大地（接地）	无对应
电势差：$V_{PQ}=V_P-V_Q=\int_P^{Q}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$	无对应
电势与电场的梯度关系：$\boldsymbol{E}=-\nabla V$ 或 $\boldsymbol{E}=-\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}\hat{\boldsymbol{n}}$	标势与磁场的梯度关系：$\boldsymbol{H}=-\nabla\varphi$
$\rho=\rho_f+\rho_b=\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}$（超出电磁学大纲） $\rho_b=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$ ρ_f 和 ρ_b 为自由和极化电荷密度	$\rho_m=\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{H}$（超出电磁学大纲） $\rho_m=-\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{M}$ ρ_m 为磁荷密度
点电荷 q：$V=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r}$	无对应
电荷元：$\mathrm{d}V=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathrm{d}q}{r}$	无对应
电偶极子：$V=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$ $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$	磁偶极子：$\varphi=\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$ $\boldsymbol{m}=I\boldsymbol{S}$
带电球面：$V=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}, & r<R\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r\geqslant R\end{cases}$	无对应
带电球：$V=\begin{cases}\dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2-r^2), & r\leqslant R\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r\geqslant R\end{cases}$	无对应

这样便于仪器的数值显示。另一方面，矢量场有三个分量，理论求解也比较复杂，而标量场只有一个量，求解时不需要考虑方向问题。那么，电场和磁场能否转换成标量场呢？回答是肯定的。根据上一节中电场的环路积分为零，我们可以引进标量场 — 即电势场。对于磁场来说，由于磁场的环量只有在无自由电流的单连通区域才为零，因此，引入标势的条件要苛刻一些。但这种标势没有势能的概念，因为它是非保守场。这种标势常称为磁标势，只是计算磁场的一种等效手段而已，并没有实质性的物理意义。两者的对比关系列于表 22-6 中。对于电势而言，不同的参考点，电势不相同，因此，光讲某一点电势多少是没有多大实际意义的。有意义的是两点间的电势差，这是可以实际测量的，而且，电势差与电势的参考点选择无关。

22.2.7　电场和磁场的功和能对比

电场和磁场虽然“看不见摸不着”，可是它们时刻伴随在我们的身边，占有“自己的一席之地”。它们与有形物质一样，同样具有质量、能量、动量、角动量等。将物体放于场中，会与物体发生相互作用，并移动物体做功，这些特征都是有形物质所具备的。下面就电场和磁场的功和能作一对比，结果列于表 22-7 中。

表 22-7　电场和磁场的功和能对比

电场	磁场
移动电荷做功：$\mathrm{d}A = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = q\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$	移动电流做功：$\mathrm{d}A = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\int I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$
电偶极矩：$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$	磁偶极矩（磁矩）：$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{S}$
均匀电场中电偶极子受的合力：$\sum \boldsymbol{F}_i = 0$	均匀磁场中磁偶极子受的合力：$\sum \boldsymbol{F}_i = 0$
力矩：$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$	力矩：$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$
稳定平衡：$\boldsymbol{p} \uparrow \uparrow \boldsymbol{E}$	稳定平衡：$\boldsymbol{m} \uparrow \uparrow \boldsymbol{B}$
非稳定平衡：$\boldsymbol{p} \uparrow \downarrow \boldsymbol{E}$	非稳定平衡：$\boldsymbol{m} \uparrow \downarrow \boldsymbol{B}$
电偶极子的势能：$U = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}$	磁偶极子的势能：$U = -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}$
力矩做功：$\mathrm{d}A = M(-\mathrm{d}\theta)$	力矩做功：$\mathrm{d}A = M(-\mathrm{d}\theta)$
电场力的功：$A_{12} = q(V_1 - V_2) = -q\Delta V$ 保持电荷 q 不变	磁力的功：$A_{12} = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi$ 保持电流 I 不变
电场的能量密度：真空中 $w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ 介质中 $w_e = \frac{1}{2}\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}$	磁场的能量密度：真空中 $w_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$ 介质中 $w_m = \frac{1}{2}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}$
电场的能量（真空）：$W_e = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \mathrm{d}\tau$	磁场的能量（真空）：$W_m = \int_V \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\mathrm{d}\tau$
两点电荷间的相互作用能：$W_i = q_1 V_1(q_2)$	两电流圈之间的相互作用能：$W_i = I_1 \Phi_{12}(I_2)$
带电体的静电能：$W_e = \frac{1}{2}\int \rho V \mathrm{d}\tau$ 其中 V 是 ρ 所在处的电势	载流体的静磁能：$W_m = \frac{1}{2}\int \rho\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}\mathrm{d}\tau$ 其中 $\boldsymbol{A}$ 是 $\rho\boldsymbol{v}$（或 $\boldsymbol{j}$）所在处的矢势（超出大纲）
ρ 与外场的相互作用能：$W_i = \int \rho V_e \mathrm{d}\tau$ 其中 V_e 是外场在 ρ 处的电势（超出大纲）	$\boldsymbol{j}$ 与外场的相互作用能：$W_i = \int \rho\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}_e \mathrm{d}\tau$ 其中 $\boldsymbol{A}_e$ 是外场在 $\boldsymbol{j}$ 处的矢势（超出大纲）

从表 22-7 可见，电场和磁场的功、能有相互对应关系，而功、能是物质的基本物理量，这充分表明电场和磁场都具备物质的特征，因此，电场和磁场都是物质。也就是说，物质所具备的各种属性，电场和磁场也具备的。研究电场和磁场的其他属性已超出大纲范围。

22.2.8　静止电荷与匀速运动电荷的对比

如果一个电荷相对于观察者静止，则观察者只能测到电场 E；如果一个电荷相对于观察者运动，那么，观察者不仅可以测得电场，而且可以测得磁场。

表 22-8　电场和磁场相对性的对比

静止电荷（惯性系）	匀速运动电荷（惯性系）
电荷相对于惯性系静止： ① 电量不变 ② 只有电场，而无磁场 ③ 电荷间的相互作用力服从库仑定律	电荷相对于惯性系匀速运动： ① 电量不变 ② 既有电场又有磁场 ③ 静止于惯性系的电荷对运动电荷的作用力可由库仑定律求得
电场与电荷到场点距离 r 的平方成反比	电场与电荷到场点瞬时距离 r 的平方成反比
电场的环路积分为零	匀速运动电荷电场的环路积分不为零
电场服从高斯定理	匀速运动电荷的电场服从高斯定理
电场与磁场两者无关系式	磁场与电场的关系为 $\boldsymbol{B} = c^{-2}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}$

表 22-8 表明，电场和磁场之间有密切的联系，它们属于同一实体，这个实体就是电磁场。比如，载流导线的内外均有电场和磁场，其实体为电磁场。要注意的是：导线中这种稳恒流动电荷（定向运动速度很小）所激发的电场仍然具备静电场的特点。

22.3 电场和磁场与物质相互作用的对比

22.3.1 电场和磁场与导体的相互作用

表 22-9 电场和磁场与导体相互作用的对比

静电场	静磁场
导体中电场强度为零	铁磁金属中的磁场不为零
电荷分布于导体表面	无对应（不考虑磁荷概念）
电场与导体表面垂直	磁场与铁磁金属表面几乎垂直（软磁材料）
导体处于能量最低状态（Thomson theorem）	?
导体有静电屏蔽效应	铁磁金属有静磁屏蔽效应
导体平衡过程有焦耳热（不显著）	铁磁质磁化过程有热效应（显著）
导体有尖端效应	条形磁针有“尖端效应”

（注：表格中的“问号”留给读者自己思考）

导体置于电场中时，电场与导体立即发生相互作用，其结果是导体表面出现感应电荷，导体内部不出现电场，或者导体处于一个等电势的状态。如果一个孤立导体自身带上电荷，则导体自身电荷所激发的电场也会反过来对电荷有作用，相互制约处得平衡状态。因此，电场对导体的作用所表现的结果是一致的。而磁场则不同，不同的金属有不同的作用效果。表 22-9 给出了电场和磁场与导体相互作用的对比。从表 22-9 可见，静电屏蔽与静磁屏蔽、静电平衡过程与磁化过程有热效应、尖端处电力与磁力线较为密集等有相似之处。电场对所有金属导体都有相同作用，而磁场只对铁磁金属有明显的磁化作用效果，反铁磁和抗磁性的金属不在对比之列。

22.3.2 电容和电感（自感或互感）的对比

电容器在电子电路、交流电路、脉冲电路、模拟电路以及微电子电路中都有着重要的广泛应用。同样，电感线圈应用也十分广泛，尤其在交流电路（强电或弱电）中的应用。另外，电容和电感组合也非常多见，如 LC 振荡电路、LC 滤波电路等。因此，掌握电容器和电感器的基本理论和它们的特点是十分重要的。表 22-10 给出了电容器和电感线圈的对比。

表 22-10 电容和电感（自感或互感）的对比

电容	电感（自感或互感）
单个（孤立）导体电容的定义：$C=\frac{q}{V}$	单个线圈（或直导线）的自感定义：$L=\frac{\Psi}{I}$
半径为 R 的孤立导体球的电容：$C=4\pi\varepsilon_0 R$	半径为 R 的球形线圈的自感 $L=\frac{8}{9}\pi\mu_0 n^2 R^3$?
长度为 l 的单根圆柱导体的电容：$C=2\pi\varepsilon_0 l$?	长度为 l 的单根直导线的（内）自感：$L=\frac{\mu_0 l}{8\pi}$
无对应	单个长直螺线管的自感：$L=\mu_0 n^2 V$
两个导体间（电容器）电容的定义：$C_{12}=\frac{q}{V_{12}}$	两个线圈间互感的定义：$M_{12}=\frac{\Psi_{12}}{I_2}$

续表

电容	电感(自感或互感)
平行板电容器的电容：$C_{12}=\frac{\varepsilon_0 ab}{d}$ $S=ab$	平行载流平面间的自感：$L=\frac{\mu_0 ad}{b}$ $S=ab$
球形电容器的电容：$C=\frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$	球形线圈间互感：$M_{ab}=\frac{8}{9}\pi\mu_0 n_b n_a a^3$，$a<b$
圆柱形电容器的电容：$C=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(\frac{b}{a})}$ (内线空心与实心电容相同)	同轴电缆的自感(内线空心)：$L=\frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ $L=\frac{\mu_0 l}{8\pi}+\frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$(内线实心) 同轴长直螺线管间的互感：$M_{21}=N_1 N_2\frac{\mu_0 S_2}{l}$
两个同心导体圆环间的电容：?	同心圆线圈间互感：$M_{ab}=\mu_0 N_a N_b\frac{\pi b^2}{2a}$　$a<b$
电容器充电过程外力克服电场力做功 $A=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$	线圈充磁过程电源克服自感电动势做功 $A=\frac{1}{2}LI^2$ (克服互感电动势做功 $A_i=MI_1 I_2$)
电容器的电能：$W=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}qV$	线圈的自感磁能：$W_m=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\frac{\Psi^2}{L}=\frac{1}{2}I\Psi$
平板电容器中储存的电场能量：$W=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Sd$ $\left(\text{圆柱形电容器中的电场能量：}W=\frac{\lambda^2 l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}\right)$	平行载流平面间储存的磁场能量：$W_m=\frac{B^2}{2\mu_0}Sd$ (长直螺线管中的磁场能量：$W_m=\frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 Sl$)
平行极板间的电场：$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ 球形极板间的电场：$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ 圆柱形极板间的电场：$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$	平行载流板间的磁场：$B=\mu_0\alpha$ 无对应？ 两载流柱面间的磁场：$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
平行板电容器极板上的电荷面密度 $\pm\sigma$ 球形电容面电荷密度：$\sigma_a=\frac{q}{4\pi a^2}$，$\sigma_b=-\frac{q}{4\pi b^2}$ 圆柱形电容面电荷密度：$\sigma_a=\frac{\lambda}{2\pi a}$，$\sigma_b=\frac{-\lambda}{2\pi b}$	平行载流导体板上的面电流密度 $\pm\alpha$ 两个带等量异号电荷的同心球面同方向旋转： $\alpha_a=\sigma_a\omega a\sin\theta$，$\alpha_b=-\sigma_b\omega b\sin\theta$ 同轴圆柱面：$\alpha_a=\frac{I}{2\pi a}$，$\alpha_b=-\frac{I}{2\pi b}$
平行板间的电势差：$V=\frac{q}{\varepsilon_0 S}\mathrm{d}$ 球面间的电势差：$V_{ab}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$ 柱面间的电势差：$V_{ab}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$	无对应
电容器的充电：$CR\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+q=\varepsilon C$ $q=\varepsilon C(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$　$(\tau=RC)$ 放电：$CR\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+q=0$　$q=\varepsilon Ce^{-\frac{t}{\tau}}$ 特点：电压(或电荷)不能突变	电感线圈的充磁：$LG\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+i=\varepsilon G$　$(G=R^{-1})$ $i=\varepsilon G(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$　$(\tau=LG)$ 放磁：$LG\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+i=0$　$i=\varepsilon Ge^{-\frac{t}{\tau}}$ 特点：电流不能突变

续表

电容	电感(自感或互感)
电容器的串联:$C^{-1}=C_1^{-1}+C_2^{-1}$ 并联:$C=C_1+C_2$	电感的串联:$L=L_1+L_2\pm 2M$ 并联:$L=\dfrac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2\mp 2M}$
平行板单位面积的电力: $f=\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S}=\dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$	平行载流板单位面积的磁力: $f=\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S}=\dfrac{1}{2}\mu_0\alpha^2=\dfrac{1}{2}\dfrac{B^2}{\mu_0}$

通过以上的对比不难发现,电容和电感(或互感)的定义式有相似之处,它们都能储存能量,也能释放能量,在储存能量的变化过程十分相同。平板电容器和平板电感器的物理规律十分相似,而且也有一一对应关系。电容器和电感器的串联和并联有相当大的差异,如果没有互感,两者正好互为倒数关系。(注:表中问号"?"处留给读者思考)

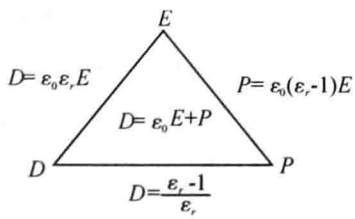
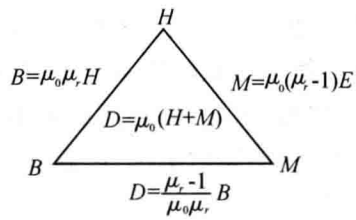
22.3.3 电介质与磁介质的对比

电磁学中所指的电介质就是无导电能力的绝缘体,即没有可移动的自由电荷。这里的电荷移动是指在绝缘体内部从一处到另一处的电荷转移现象,或者说,电荷只能局限在很小的范围内(原子或分子)运动。电介质可分为有极分子电介质、无极分子电介质和驻极体(或永电体)。电介质的概念是相对于电场的作用而言的。当电场较弱时,介质发生极化;当电场较强时,介质可能被击穿,绝缘体会转变为导电体。一般来说,电场强度 $E\leqslant 10^4\,\mathrm{V/m}$ 称为弱电场,$E>10^4\,\mathrm{V/m}$ 称为强电场。对于磁介质而言,受磁场的作用会"磁化"。这种磁化的最直接表现是介质的磁场产生,而磁化场的强弱与介质性质有关。对于磁介质而言,也与电介质有类似的分类,后者可分为顺磁质、抗磁质和铁磁质(包括亚铁磁和反铁磁)三大类。地球的磁场为 0.00004T,冰箱运行时产生的磁场为 0.05T 左右,医院用的磁共振仪(MRI)所产生的磁场为 0.2 ~ 0.3T。2011 年,我国已获得 83T 的超强磁场,达到国际一流水平。目前,世界最高的非破坏性磁场强度纪录为美国洛斯阿拉莫斯国家高磁场实验室创造,为 97T;排名第二的为德国的德累斯顿强磁场实验室,纪录为 91T。

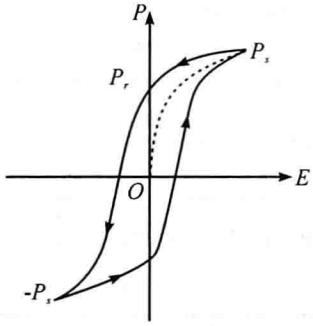
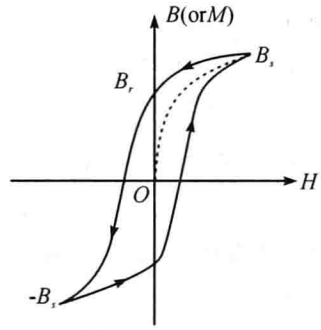
表 22-11 电介质与磁介质的对比

电介质	磁介质
分类:有极分子、无极分子、铁电体和驻极体	分类:顺磁质、抗磁质、铁磁质和永磁体
极化:有极分子取向极化;无极分子位移极化;取向极化中伴随微小的位移极化。	磁化:分子固有磁矩的取向磁化;无磁性分子的诱导磁化;取向磁化中伴随微小的诱导磁化。
分子等效电偶极矩:$\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$	分子等效磁偶极矩:$\boldsymbol{m}=i\boldsymbol{S}$ $(\boldsymbol{m}_{分子}=\boldsymbol{m}_l+\boldsymbol{m}_s)$
极化强度:$\boldsymbol{P}=\dfrac{\sum_k(\boldsymbol{p}_{kp}+\boldsymbol{p}_{kd})}{\Delta\tau}$ 其中 $\boldsymbol{p}_p$ 为分子固有偶极矩;$\boldsymbol{p}_d$ 是位移偶极矩;$\Delta\tau$ 是极化介质中所取的体积	磁化强度:$M=\dfrac{\sum_k(\boldsymbol{m}_{kp}+\boldsymbol{m}_{ki})}{\Delta\tau}$ 其中 m_p 为分子固有磁矩;m_i 是分子诱导磁矩;$\Delta\tau$ 是磁化介质中所取的体积

续表

电介质	磁介质
均匀完全极化：$\boldsymbol{P}=\frac{N}{\Delta\tau}\boldsymbol{p}=n\boldsymbol{p}$	均匀完全磁化：$\boldsymbol{M}=\frac{N}{\Delta\tau}\boldsymbol{m}=n\boldsymbol{m}$
有多种不同分子的情况： $\boldsymbol{P}=n_1\boldsymbol{p}_1+n_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+n_N\boldsymbol{p}_N$	有多种不同分子的情况： $\boldsymbol{M}=n_1\boldsymbol{m}_1+n_2\boldsymbol{m}_2+\cdots+n_N\boldsymbol{m}_N$
介质中的电场：$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}'$	介质中的磁场：$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}'$
电介质极化表面出现极化(束缚)电荷： $\sigma'=P_n=\boldsymbol{P}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$	磁介质磁化表面出现磁化(束缚)电流： $\boldsymbol{\alpha}'=\boldsymbol{M}\times\hat{\boldsymbol{n}}$
极化电荷体密度：$\rho'=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$	磁化体电流密度：$\boldsymbol{j}_m=\nabla\times\boldsymbol{M}$
极化电荷与极化强度的关系： $Q'=-\oint_S\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$	磁化电流与磁化强度的关系： $I_m=\oint_L\boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$
极化强度与电场的关系： $\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\chi_e\boldsymbol{E}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\boldsymbol{E}$	磁化强度与磁场的关系： $\boldsymbol{M}=\chi_m\boldsymbol{H}=(\mu_r-1)\boldsymbol{H}$
电介质中的高斯定理：$\oint_S\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=q_f$	磁介质中的高斯定理：$\oint_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$
环路定理：$\oint_L\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$	环路定理：$\oint_L\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=I_f$
$\boldsymbol{D},\boldsymbol{E},\boldsymbol{P}$ 三者之间的关系：  	$\boldsymbol{H},\boldsymbol{B},\boldsymbol{M}$ 三者之间的关系： 
各向同性电介质：极化与外场的方向无关；极化强度与介质中的电场成正比，呈线性关系。	各向同性磁介质：磁化与外场的方向无关；磁化强度与介质中的磁场成正比，呈线性关系。
各向异性电介质：极化与外场的方向有关；极化强度与介质中电场呈非线性关系。	各向异性磁介质：磁化与外场的方向有关；磁化强度与介质中磁场呈非线性关系。

续表

电介质	磁介质
铁电体：钛酸钡陶瓷（$BaTiO_3$）、酒石酸钾钠单晶（$NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$）等；各向异性；极化过程呈现电滞现象；极化强度 P 状态滞后电场 E 的状态；电滞回线  	铁磁体：铁、钴、镍及其合金等；各向异性；磁化过程呈现磁滞现象；磁化强度 M（磁感应强度 B）状态滞后磁场 H 的状态；磁滞回线。 
铁电体的电性来源：电畴（自发极化小区域）；电畴中电偶极矩平行排列。	铁磁体的磁性来源：磁畴（自发磁化的小区域）；磁畴中电子自旋磁矩平行排列。
永电体（驻极体）：有机材料（蜡、碳氢化合物、固体酸）和无机材料（钛酸钡、钛酸钙）；极化状态不受外电场影响；能长期保持极化状态。	永磁体：碳钢、钨钢、铝钢等；磁化状态不受外磁场影响；能长期保持磁化状态。

由表 22-11 不难看出，电介质与磁介质有十分相似之处，电介质有的现象，磁介质也有。这些现象的出现都可归结为电子的“运动行为”所造成的。

22.3.4 电路与磁路对比

在稳恒电路中，由于电荷的流动，电荷不会在某处累积起来，电流满足连续性方程。如果把电流 I 视为由许多微小电流管组成，则每一根电流管就是一条电流线，电流线的方向与场强方向相同或与电荷密度的运动方向一致。同样，在稳恒的磁路中，磁通是连续的，磁通线就是磁感应线。由于铁磁材料的磁导率 μ 不是常数，严格来说，B 和 H 不能表达为 $B=\mu H$ 的形式。如果我们约定初始磁化曲线作为磁导率的定义，$B=\mu H$ 的关系仍然成立，不过要理解为 μ 不是一个常数。这一点与导体的电导率（对于给定的材料而言）是确定的有很大的不同。另一方面，由于铁磁质的磁导率与真空的磁导率比 $\mu \gg \mu_0$，而铁磁质外的磁场 H 与其内部的 H 几乎为同一量级，因此，铁磁质内的 B 远大于外部的 B，即 B 线主要集中在铁磁质内。

从表 22-12 中可以看出，电路和磁路几乎存在一一对应关系，即

$$I \leftrightarrow \Phi$$

$$j \leftrightarrow B$$

$$\gamma \leftrightarrow \mu$$

$$\varepsilon \leftrightarrow \varepsilon_m$$

$$V \leftrightarrow V_m$$

$$R \leftrightarrow R_m$$

因此，掌握了电路的计算问题，磁路问题也就迎刃而解。

表 22-12　电路与磁路的对比

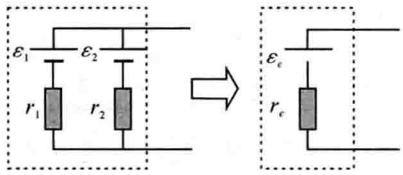
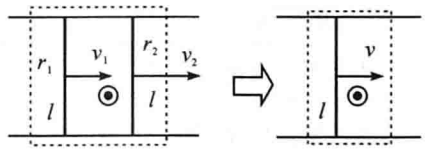
电路	磁路
电流线集中在电路中	磁感应线集中在磁路中
电流强度：$I=\int_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$	磁通量：$\Phi=\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$
电流线的连续性：$\oint_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$	磁感应线的连续性：$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$
电流密度的定义：$j=\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}$	磁通密度的定义：$B=\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}S}$
电导率：γ	磁导率：μ（初始磁化曲线作为定义 $\mu=\dfrac{B}{H}$）
电流密度与电场：$\boldsymbol{j}=\gamma\boldsymbol{E}$	磁通密度与磁场：$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$
两导线的界面：$j_{1n}=j_{2n}\rightarrow\dfrac{E_{1n}}{E_{2n}}=\dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}$	两铁磁质的界面：$B_{1n}=B_{2n}\rightarrow\dfrac{H_{1n}}{H_{2n}}=\dfrac{\mu_2}{\mu_1}$
电阻：$R=\dfrac{l}{\gamma S}$	磁阻：$R_m=\dfrac{l}{\mu S}$
电位降落：$V=IR$	磁位降落：$V_m=\Phi R_m$
电动势：$\varepsilon=\oint_L \boldsymbol{E}_k\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$	磁动势：$\varepsilon_m=\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$
无分支电路：$\varepsilon=IR$	无分支磁路：$\varepsilon_m=\Phi R_m=NI$
电阻串联：$R=R_1+R_2$	磁阻串联：$R_m=R_{m1}+R_{m2}$
电阻并联：$R=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$	磁阻并联：$R_m=\dfrac{R_{m1}R_{m2}}{R_{m1}+R_{m2}}$
电路的基尔霍夫第一定律：$I=I_1+I_2$	磁路的基尔霍夫第一定律：$\Phi=\Phi_1+\Phi_2$
电路的基尔霍夫第二定律：$\sum\varepsilon=\sum IR$	磁路的基尔霍夫第二定律：$\sum\varepsilon_m=\sum\Phi_mR_m$
电路中任意两点 a、b 间的电势差：$V_{ab}=\sum IR-\sum\varepsilon$	可以给出相对应的关系（超出大纲）

22.3.5　电源电动势与感应电动势的对比

在稳恒电路中，电流线是闭合的。因此，电场力沿闭合回路移动电荷所做的功为零。实际上，电场力将正电荷从电源的正极板（经外电路）移到负极板是要做功的，这个功转化为焦耳热而消耗掉。因而，要维持电流的稳恒流动，光有静电场是不够的。非静电力能够使处于电位能较低的电荷返回到较高的电位能处，这样，电流线就形成了闭合线。因此，电源是一种提供非静电力的装置。对于干电池和蓄电池而言，非静电力是一种化学作用；对于温差电动势来说，由于电子浓度差而引起的扩散作用导致非静电力的产生。

在电磁感应中，按照非静电力来分，电动势可分为动生和感生两种类型。动生电动势的非静电力起源于洛仑兹力，而感生电动势的非静电力源自磁场的时间变化率。这两者的非静电力虽不相同，但都与磁场有关联，即离开了磁场就没有这两种非静电力。由表 22-13 的对比可见，两者相同点是都是提供非静电力的装置，不同处是非静电力的产生机制不同。另一方面，如果外界不提供能量，无论是电源电动势还是感应电动势都不能维持电路的电流恒定不变。

表 22-13　电源电动势与感应电动势的对比

电源电动势	感应电动势
电源：提供非静电力的装置	电源：提供非静电力的装置
类型：干电池、蓄电池、温差电源等	类型：普通发电机(动生和感生)
非静电力：化学作用、扩散作用等	非静电力：电磁感应作用(洛仑兹力、磁场变化率)
定义：将单位正电荷从电源的负极(经电源内部)移到正极非静电力所做的功。 $\varepsilon=\frac{A}{q}=\int_{-}^{+}\boldsymbol{E}_k\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$	定义：磁通变化率的负值。 $\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}$
单位：伏特(V)	单位：伏特(V)
整个回路都有非静电力：温差电动势 $\varepsilon=\oint_L\boldsymbol{E}_k\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 起因：电子浓度差 存在于导体的空间内	整个回路都有非静电力：感生电动势 $\varepsilon=\oint_L\boldsymbol{E}_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\iint_S\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$(回路静止) 起因：磁场的时间变化率 存在于导体或无导体的空间内
干电池、蓄电池：$\varepsilon=\int_{-}^{+}\boldsymbol{E}_k\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 起因：离子的溶解和沉积过程 端电压：$V_{+-}=\varepsilon\pm Ir$(“+”充电，“−”放电) 特例：电源开路 $V_{+-}=\varepsilon$	导体运动：动生电动势 $\varepsilon=\int_0^l(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 起因：洛仑兹力(俗称导体切割磁力线) 导线两端的电势差：$V_{+-}=\varepsilon\pm Ir$(r 是导线电阻) 特例：开路 B,l,v 三者垂直 $V_{+-}=\varepsilon=Blv$
等效电源：特例  $\varepsilon_e=\frac{\varepsilon_1 r_2+\varepsilon_2 r_1}{r_1+r_2}$，$r_e=\frac{r_1 r_2}{r_1+r_2}$ 回路中的电动势：$\varepsilon=\varepsilon_2-\varepsilon_1$	等效动生电动势：特例  $\varepsilon_e=Bl\frac{v_1 r_2+v_2 r_1}{r_1+r_2}$，$r_e=\frac{r_1 r_2}{r_1+r_2}$ 回路中的电动势：$\varepsilon=Bl(v_2-v_1)$

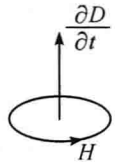
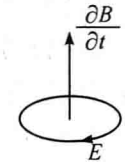
22.4　非静态场

22.4.1　与时间有关的电场与磁场对比

当电场和磁场都随时间变化时，两者互相关联而形成电磁场，电磁场的运动伴随着能量的传送。电磁场的运动形态由麦克斯韦方程组描述，最简单的电磁场运动形态是无界空间的平面电磁波。对于随时间变化的场来说，它与静态场完全不同。比如，变化的磁场不仅能激发电场，而且能产生电动势；变化的电场既能激发磁场，也能产生电流(位移电流)。

在静态场的情况不，电场和磁场相对独立，因此，我们可以分开论述它们各自的基本原理。在这一节中，我们主要涉及电场和磁场作为一个整体(电磁场)的情形，两者形式上仍然可以分开表达，但其关联程度已经非常高，“我中有你，你中有我”，谁也离不开谁。表 22-14 给出了与时间有关的电场和磁场的对比。

22-14　与时间有关的电场与磁场对比

电场变化	磁场变化
回路面积不变，而电位移随时间变化产生位移电流： $I_D=\dfrac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}t}=\int_S\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$	回路不动，磁感应强度随时间变化产生电动势： $\varepsilon_i=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}=-\int_S\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$
回路面积不变，电位移随时间变化产生磁场： $\oint_L\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$（自由电流为零）	回路面积不动，磁场随时间变化产生电场： $\oint_L\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_S\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$
变化的电场产生的磁场是右旋的：  	变化的磁场产生的电场是左旋的： 
圆形极板电容器充电过程中极板间的电场变化： $E(t)=\dfrac{q}{\varepsilon_0\pi R^2}=\dfrac{q_0}{\varepsilon_0\pi R^2}(1-e^{\frac{-t}{\tau}})$ 极板间的位移电流密度： $j_d=\varepsilon_0\dfrac{\partial E}{\partial t}=\dfrac{q_0}{\pi R^2\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}$ 导线（横截面半径为 a）中的电场变化： $E'(t)=\dfrac{j(t)}{\gamma}=\dfrac{q_0}{\pi a^2\gamma\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$ 导线中的位移电流密度： $j'_d=\varepsilon_0\dfrac{\partial E'}{\partial t}=-\dfrac{\varepsilon_0 q_0}{\pi a^2\gamma\tau^2}e^{\frac{-t}{\tau}}=-\dfrac{\varepsilon_0 R^2}{a^2\gamma\tau}j_d$ （$\lvert j'_d\rvert\ll\lvert j_d\rvert$）	圆形极板电容器充电过程中极板内外的磁场变化： $H(t)$ $=\begin{cases}\dfrac{1}{2}r\varepsilon_0\dfrac{\partial E(t)}{\partial t}=\dfrac{rq_0}{2\pi R^2\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}=\dfrac{rI(t)}{2\pi R^2}, & r<R\\ \dfrac{R^2}{2r}\varepsilon_0\dfrac{\partial E(t)}{\partial t}=\dfrac{1}{2\pi r}\dfrac{q_0}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}=\dfrac{I(t)}{2\pi r}, & r>R\end{cases}$ 导线内、外（视为长直线）的磁场变化 $H'(t)=\begin{cases}\dfrac{rq_0}{2\pi a^2\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}=\dfrac{rI(t)}{2\pi a^2}, & r<a\\ \dfrac{1}{2\pi r}\dfrac{q_0}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}=\dfrac{I(t)}{2\pi r}, & r>a\end{cases}$
电子感应加速器：电场变化 $E=-\dfrac{1}{2\pi r}\dfrac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}$	电子感应加速器：磁场变化 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(t)$
长直螺线管内、外的电场变化： $E(t)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}r\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}, & r<R\\ -\dfrac{R^2}{2r}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}, & r>R\end{cases}$	长直螺线管内、外的磁场变化： $B=\begin{cases}B(t), & r<R\\ 0, & r>R\end{cases}$
同轴电缆（内芯线空心）：电流随时间变化 $I=I(t)$ 内芯线中的变化电场与轴线平行： $E(t)=-\dfrac{1}{l}\dfrac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{l}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b B(r,t)l\mathrm{d}r$	同轴电缆：电流随时间变化 $I=I(t)$ $B(t)=\dfrac{\mu_0 I(t)}{2\pi r}$
振荡电偶极子：$p(t)=p_0\cos\omega t$ $E=\dfrac{\omega^2 p_0\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\cos\omega\left(t-\dfrac{r}{c}\right)\quad(l\ll\lambda\ll r)$	振荡电偶极子：$p(t)=p_0\cos\omega t$ $H=\dfrac{\omega^2 p_0\sin\theta}{4\pi cr}\cos\omega\left(t-\dfrac{r}{c}\right)\quad(l\ll\lambda\ll r)$
平面波电磁波的电场： $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\cos\omega\left(t-\dfrac{r}{c}\right)$	平面电磁波的磁场： $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0\cos\omega\left(t-\dfrac{r}{c}\right)$

通过表 22-14 的对比，我们可以清楚地看到，变化的电场和磁场是一个整体，两者不能各自单独描述。电通量的时间变化率就是位移电流，磁通量的时间变化率的负值就是电动势，两者数学表达式十分相似。在没有电荷电流的自由空间，磁场和电场的环路积分也很相似，只差一个负号，但这个负号是至关重要的，它指出了这两种场的差别。

22.4.2 电流密度与能流密度的对比

在稳恒电路中，电场和磁场是有关联的，不过两者相对独立。因为稳恒电路中的电场仍然具有静电场的特征，因此，我们在研究稳恒电流激发磁场时，可以不考虑电场。但是，如果考虑到能量传输问题时，两者就不能分开，要作为一个相互关联的整体来对待。在这一节中，我们将能流密度与电流密度相对比，它们有诸多相似之处。电流密度定义为垂直通过单位横截面的电流或表述为单位时间垂直通过单位横截面的电量，而电磁场的能流密度定义为垂直通过单位横截面的电磁场功率或单位时间垂直通过单位横截面积的电磁场能量。由此可见，两者非常相似。表 22-15 给出了电流密度与能流密度的对比。由于电流密度比较容易理解，因此，通过对比，能流密度的概念也就不难理解了。

表 22-15 电流密度与能流密度的对比

电流密度	能流密度
定义：$j=\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}A}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t\mathrm{d}A}$ （A 为面积） 意义：垂直流过单位横截面的电流或单位时间垂直流过单位横截面的电量。	定义：$S=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}A}=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t\mathrm{d}A}$ （A 为面积） 意义：垂直流过单位横截面的电磁场功率或单位时间垂直流过单位横截面的电磁场能量。
单位：Am^{-2}	单位：Wm^{-2}
与电荷密度 ρ 的关系： $j=\frac{\rho\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t\mathrm{d}A}=\frac{\rho\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\rho v$ 其中 $\rho=\frac{\mathrm{d}q}{d\tau}$	与能量密度 w 的关系： $S=\frac{w\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t\mathrm{d}A}=\frac{w\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=wv$ 其中 $w=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau}=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$
与电场的关系：$\boldsymbol{j}=\gamma\boldsymbol{E}$	与电磁场的关系：$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$
电流场的连续性方程：$\oint_A\boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\rho\mathrm{d}\tau$ 即为电荷守恒定律的数学表述。	能流场的连续性方程：$\oint_A\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V w\mathrm{d}\tau$ 即为能量守恒定律的数学表述（自由空间）。
微分式：$\nabla\cdot\boldsymbol{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$	微分式：$\nabla\cdot\boldsymbol{S}+\frac{\partial w}{\partial t}=0$（自由空间）
元功率：$\mathrm{d}P=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}\tau$	元功率：$\mathrm{d}P=\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}$

参考文献

[1][德]黑格尔. 逻辑学. 北京:商务印书馆,1966.
[2]胡友秋,程福臻,叶邦角. 电磁学与电动力学(上). 北京:科学出版社,2008.
[3]贾起民,郑永令,陈暨耀. 电磁学(第二版). 北京:高等教育出版社,2001.
[4]赵凯华,陈熙谋. 电磁学(第三版). 北京:高等教育出版社,2011.
[5]张之翔. 电磁学千题解. 北京:科学出版社,2002.
[6]童国平. 两相互接触的同性带电导体球表现为斥力的条件. 大学物理,1990,9(1):25.
[7]童国平. 静电问题一例的多种解法. 大学物理,1990,9(7):47.
[8]童国平. 电象法教学探讨. 大学物理,1990,9(12):15.
[9]童国平. 两个接触球孤立导体. 大学物理,1991,10(8):13.
[10]童国平. 螺线管离散模型与连续模型的比较. 大学物理,2014,33(7):15.
[11]Tong Guoping. Charge distributions of two conducting spheres. Eur. J. Phys., 1992,13(4):186.
[12]Tong Guoping. Electric charge on the wire connecting two spheres. Am. J. Phys., 1994,62(8):709;SCI(1994).
[13]Tong Guoping. Electrostatics of two conducting spheres intersecting at angles. Eur. J. Phys., 1996,17(4):244.
[14]童国平. 两个接触球孤立带电导体. 浙江师范大学学报(自然科学版),1989,12(2):45.
[15]童国平. 均匀电场中的等大外切的两个中性导体球. 浙江师范大学学报(自然科学版),1990,13(2):51.
[16]童国平,郑盼盼. 大学物理课程报告论坛文集 2007:测量载流平行导线相互作用力的一种新方法. 北京:高等教育出版社,2008.
[17]童国平. 点电荷和两个接触导体球系统的场分布. 广西物理,1989,10(3):13.
[18]童国平. 关于两个带电金属球的相互作用力. 广西物理,1992,13(1):7.
[19]黄接辉,杜为民. 氢原子的固有电偶极矩. 量子光学学报,2004,10(2):47.
[20]Frenkel J. Zur theorie der elastizitätsgrenze und der festigkeit kristallinischer körper. Z. Phys,1926,37:243.
[21]王永. 自旋轨道耦合引起的电偶极矩. 物理,2006,35(11):917.
[22]Krzysztof Giaro. A Network of Resistors in Young Physicists Research Paper. Warszawa:Instytut Fizyki pan,1998.

附录 A　电磁学中常用积分公式

一、不定积分

$$(1)\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}+C$$

$$(2)\int \frac{\mathrm{d}u}{u(u+a)}=\frac{1}{a}\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{(u+a)}\right)\mathrm{d}u$$

$$(3)\int \arccos u\mathrm{d}u=u\arccos u-\sqrt{1-u^2}+C$$

$$(4)\int \arcsin u\mathrm{d}u=u\arcsin u+\sqrt{1-u^2}+C$$

$$(5)\int \arctan u\mathrm{d}u=u\arctan u-\ln\sqrt{1+u^2}+C$$

$$(6)\int \frac{\mathrm{d}u}{a+b\cos u}=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{\sqrt{b^2-a^2}\tan\frac{u}{2}+b+a}{\sqrt{b^2-a^2}\tan\frac{u}{2}-b-a}+C$$

$$(7)\int \frac{\mathrm{d}u}{a+b\cos u}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{u}{2}\right)+C$$

$$(8)\int \frac{\mathrm{d}u}{a+b\sin u}=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{a\tan\frac{u}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\tan\frac{u}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}}+C$$

$$(9)\int \frac{\mathrm{d}u}{a+b\sin u}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left[\frac{a\tan\frac{u}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right]+C$$

$$(10)\int \frac{\mathrm{d}u}{a+bu}=\frac{1}{b}\ln(a+bu)+C$$

$$(11)\int \frac{\mathrm{d}u}{(a+bu)^2}=-\frac{1}{b}\frac{1}{(a+bu)}+C$$

$$(12)\int \frac{\mathrm{d}u}{a+bu+cu^2}=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\frac{2cu+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C,\quad c>0$$

$$(13)\int \frac{\mathrm{d}u}{a+bu+cu^2}=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\frac{2cu+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cu+b+\sqrt{b^2-4ac}}+C,\quad c>0$$

$$(14)\int \frac{\mathrm{d}u}{a+bu-cu^2}=\frac{1}{\sqrt{b^2+4ac}}\ln\frac{\sqrt{b^2+4ac}+2cu-b}{\sqrt{b^2+4ac}-2cu+b}+C,\quad c>0$$

$$(15)\int \frac{(a+bu)\mathrm{d}u}{(a^2+b^2+2abu)^{3/2}} = \frac{b+au}{a^2(a^2+b^2+2abu)^{1/2}} + C$$

$$(16)\int \frac{u\mathrm{d}u}{a^2 \pm b^2u^2} = \frac{1}{\pm 2b^2}\ln(a^2 \pm b^2u^2) + C$$

$$(17)\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2 \pm a^2)^{1/2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C$$

$$(18)\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{u}{\pm a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$$

$$(19)\int \frac{u\mathrm{d}u}{(u^2 \pm a^2)^{n/2}} = \frac{(u^2 \pm a^2)^{1-\frac{n}{2}}}{2-n} + C$$

$$(20)\int \frac{u^2\mathrm{d}u}{(u^2 \pm a^2)^{1/2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{\pm a^2}{2}\ln(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C$$

$$(21)\int \frac{u^2\mathrm{d}u}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} + \ln(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C$$

$$(22)\int \frac{u^m\mathrm{d}u}{(u^2 \pm a^2)^{n/2}} = \frac{u^{m-1}}{(m-n+1)(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}} - \frac{\pm a^2(m-1)}{(m-n+1)}\int \frac{u^{m-2}\mathrm{d}u}{(u^2 \pm a^2)^{n/2}}$$

$$(23)\int \frac{u^m\mathrm{d}u}{(u^2 \pm a^2)^{n/2}} = \frac{u^{m+1}}{\pm a^2(n-2)(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}} - \frac{(m-n+3)}{\pm a^2(n-2)}\int \frac{u^m\mathrm{d}u}{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}}$$

$$(24)\int \frac{\mathrm{d}u}{u(u^2+a^2)^{1/2}} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u} + C$$

$$(25)\int \frac{\mathrm{d}u}{u(u^2-a^2)^{1/2}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{u} + C$$

$$(26)\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2(u^2 \pm a^2)^{1/2}} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{\pm a^2u} + C$$

$$(27)\int \frac{\mathrm{d}u}{u^3(u^2+a^2)^{1/2}} = -\frac{\sqrt{u^2+a^2}}{2a^2u^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u} + C$$

$$(28)\int \frac{\mathrm{d}u}{u^3(u^2-a^2)^{1/2}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{2a^2u^2} + \frac{1}{2a^3}\arccos\frac{a}{u} + C$$

$$(29)\int \frac{\mathrm{d}u}{u^m(u^2 \pm a^2)^{n/2}} = -\frac{1}{\pm a^2(m-1)u^{m-1}(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}} - \frac{m+n-3}{\pm a^2(m-1)}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^{m-2}(u^2 \pm a^2)^{n/2}}$$

$$(30)\int \frac{(u^2+a^2)^{1/2}\mathrm{d}u}{u} = \sqrt{u^2+a^2} - a\ln\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u} + C$$

$$(31)\int \ln[a^2+(b-u)^2]\mathrm{d}u = -(b-u)\ln[a^2+(b-u)^2] + 2(b-u) - 2a\arctan\left(\frac{b-u}{a}\right) + C$$

$$(32)\int \frac{\sqrt{au^2+bu+c}}{u}\mathrm{d}u = \sqrt{au^2+bu+c} + \frac{b}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{au^2+bu+c}} + c\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{au^2+bu+c}} + C$$

$$(33)\int e^{au}\sin bu\mathrm{d}u = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\sin bu - b\cos bu) + C$$

$$(34)\int e^{au}\cos bu\mathrm{d}u = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(b\sin bu + a\cos bu) + C$$

二、定积分

$$(35)\int_0^{\pi}\frac{\sin u\mathrm{d}u}{\sqrt{1+\cos u}}=-\sqrt{1+\cos u}\ \Big|_0^{\pi}=\sqrt{2}$$

$$(36)\int_0^{\pi}\frac{\cos u\sin u\mathrm{d}u}{(a^2+r^2-2a\cos u)^{3/2}}=\int_{-1}^{+1}\frac{x\mathrm{d}x}{(a^2+r^2-2arx)^{3/2}}$$

$$=\frac{2}{(-2ar)^2}\left[\sqrt{a^2+r^2-2arx}+\frac{a^2+r^2}{\sqrt{a^2+r^2-2arx}}\right]_{-1}^{+1}$$

$$=\frac{2r}{a^2(a^2-r^2)},\quad a>r$$

$$(37)\int_0^{\pi}\frac{r\sin u\mathrm{d}u}{(a^2+r^2-2a\cos u)^{3/2}}=r\int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+r^2-2arx)^{3/2}}$$

$$=-\frac{2r}{2ar}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2-2arx}}\right]_{-1}^{+1}$$

$$=\frac{2r}{a(a^2-r^2)},\quad a>r$$

$$(38)\int_0^{\pi}\frac{\sin^3\theta\mathrm{d}\theta}{(a^2+r^2-2ar\cos\theta)^{3/2}}=\int_{-1}^{+1}\frac{(1-u^2)\mathrm{d}u}{(a^2+r^2-2aru)^{3/2}}$$

$$=\frac{2}{3r^3a^3}[(a^2+r^2)(|r+a|-|r-a|)-ar(|r+a|+|r-a|)]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{3r^3a^3}2a^3=\dfrac{4}{3r^3}, & r>a,\ |r-a|=r-a\\[2ex] \dfrac{2}{3r^3a^3}2r^3=\dfrac{4}{3a^3}, & r<a,\ |r-a|=a-r\end{cases}$$

$$(39)\int_0^{\pi}\frac{\sin^3\theta\mathrm{d}\theta}{(a^2+r^2+2ar\cos\theta)^{3/2}}=\frac{1}{4a^3r^3}\left[\frac{1}{3}(a^2+r^2+2ar\cos\theta)^{3/2}\right.$$

$$\left.-2(a^2+r^2)(a^2+r^2+2ar\cos\theta)^{1/2}-\frac{(a^2-r^2)^2}{(a^2+r^2+2ar\cos\theta)^{1/2}}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{4a^3r^3}\frac{16}{3}r^3=\frac{4}{3a^3},\quad r<a$$

$$(40)\int_0^{\pi}\frac{\sin u\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos u}}=\frac{1}{ar}\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos u}\ \Big|_0^{\pi}=\begin{cases}\dfrac{1}{ar}(2a)=\dfrac{2}{r}, & a<r\\[2ex] \dfrac{1}{ar}(2r)=\dfrac{2}{a}, & a>r\end{cases}$$

$$(41)\int_0^{\pi}\frac{\cos u\mathrm{d}u}{(a+b\cos u)}=\frac{1}{b}\int_0^{\pi}\frac{(a+b\cos u-a)\mathrm{d}u}{(a+b\cos u)}$$

$$=\frac{1}{b}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{a}{a+b\cos u}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{b}\left[u-\left(\frac{2a}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{u}{2}\right)\right)\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{b}\left[\pi-\frac{2a}{\sqrt{a^2-b^2}}\frac{\pi}{2}\right]$$

$$(42)\int_a^b\sqrt{\frac{au}{a-u}}\,\mathrm{d}u=\sqrt{a}\left[a\arcsin\sqrt{\frac{u}{a}}-\sqrt{u(a-u)}\right]_a^b$$

$$=\sqrt{a}\left[-\frac{\pi}{2}a+a\arcsin\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{b(a-b)}\right],\quad a>b$$

$$(43)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u\mathrm{d}u}{(a^2+b^2)^2-4a^2b^2\cos^2u}=\frac{1}{4a^2b^2}\int_1^0\frac{\mathrm{d}\cos u}{\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}\right)^2-\cos^2u}$$

$$=\frac{1}{4a^2b^2}\left\{\frac{2ab}{2(a^2+b^2)}\ln\frac{a^2+b^2+2ab\cos u}{a^2+b^2-2ab\cos u}\right\}_1^0$$

$$=\frac{1}{2ab(a^2+b^2)}\ln\left(\frac{a+b}{a-b}\right)$$

$$(44)\int_0^{\pi}\frac{\sin^3u\mathrm{d}u}{(1-\cos u)^{3/2}}=-\int_1^{-1}\frac{(1-x^2)\mathrm{d}x}{(1-x)^{3/2}}=\int_{-1}^1\frac{(1+x)\mathrm{d}x}{(1-x)^{1/2}}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

三、分部积分

$$(45)\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$$

四、积分变量置换

$$(46)\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t$$

① 被积函数含 $\sqrt{a^2-x^2}$ 者，可设 $x=a\sin t$

② 被积函数含 $\sqrt{a^2+x^2}$ 者，可设 $x=a\tan t$

③ 被积函数含 $\sqrt{x^2-a^2}$ 者，可设 $x=a\sec t$

④ $\int R(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x$，$R(\quad)$ 表示有理函数，

可设 $\tan\frac{x}{2}=t,\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$

⑤ $\int R(\cos^2x,\sin^2x)\mathrm{d}x$，$R(\quad)$ 表示有理函数，

可设 $\tan x=t,\sin^2x=\frac{t^2}{1+t^2},\cos^2x=\frac{1}{1+t^2},\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$

五、二重积分

$$(47)\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=2\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=2\int_0^a\mathrm{d}x\ln(y+\sqrt{x^2+y^2})\Big|_0^x$$

$$=2\int_0^a\mathrm{d}x[\ln(x+x\sqrt{2})-\ln x]$$

附录 B　常用函数的级数展开式

一、幂级数展开式

(1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad -\infty < x < +\infty$

(2) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \quad -1 < x \leqslant 1$

$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots, \quad x = 1$

(3) $\ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots\right), \quad -1 \leqslant x < 1$

(4) $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots\right), \quad |x| < 1$

(5) $\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots, \quad 0 < x \leqslant 2$

(6) $\ln(a+x) = \ln a + 2\left[\frac{x}{2a+x} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^5 + \cdots\right], \quad a > 0, x > -a$

(7) $\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \quad -\infty < x < +\infty$

(8) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \quad -\infty < x < +\infty$

(9) $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots, \quad -\infty < x < +\infty$

(10) $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots, \quad -\infty < x < +\infty$

(11) $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \cdots, \quad |x| < 1$

(12) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \quad |x| < 1$

(13) $\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots, \quad |x| > 1$

(14) $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \cdots, \quad |x| \leqslant 1$

(15) $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots, \quad -1 < x \leqslant 1$

(16) $(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}x^2 + \cdots, \quad |x| < 1$

二、台劳级数展开式

(17) $f(x)=f(x_0)+\dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$

当 $x_0=0$ 时，上式叫马克劳林级数。

附录 C　基本物理常量表(2006)

基本物理常数表

量	符号	数值	单位	相对标准不确定度
真空中光速	c	299792458	ms^{-1}	(准确)
真空磁导率	μ_0	$4\pi\times10^{-7}$	NA^{-2}	(准确)
真空电容率$(\mu_0 c^2)^{-1}$	ϵ_0	$8.854187817\cdots\times10^{-12}$	Fm^{-1}	(准确)
真空特征阻抗$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$	Z_0	376.730313461…	Ω	(准确)
万有引力常数	G	$6.67428(67)\times10^{-11}$	m^3kgs^{-2}	$1.\times10^{-4}$
万有引力常数$(\frac{G}{\hbar c})$	$\frac{G}{\hbar c}$	$6.70881(67)\times10^{-39}$	$(\frac{GeV}{c^2})^{-2}$	1.0×10^{-4}
普朗克常数	h	$6.62606896(33)\times10^{-34}$	Js	5.0×10^{-8}
$\frac{h}{2\pi}$	$\hbar$	$1.054571628(53)\times10^{-34}$	Js	5.0×10^{-8}
基本电荷	e	$1.602176487(40)\times10^{-19}$	C	2.5×10^{-8}
基本电荷$(\frac{e}{h})$	$\frac{e}{h}$	$2.417989454(60)\times10^{14}$	AJ^{-1}	2.5×10^{-8}
电子质量	m_e	$9.10938215(45)\times10^{-31}$	kg	5.0×10^{-8}
电子质量(u)		$5.4857990943(23)\times10^{-4}$	u	4.2×10^{-10}
电子质量(J)	$m_e c^2$	$8.18710438(41)\times10^{-14}$	J	5.0×10^{-8}
电子质量(MeV)		0.510998910(13)	MeV	2.5×10^{-8}
电子荷质比	$-\frac{e}{m_e}$	$-1.758820150(44)\times10^{11}$	Ckg^{-1}	2.5×10^{-8}
电子磁矩	μ_e	$-928.476377(23)\times10^{-26}$	JT^{-1}	2.5×10^{-8}
电子磁矩反常	a_e	$1.15965218111(74)\times10^{-3}$		6.4×10^{-10}
电子 g 因子	g_e	$-2.0023193043622(15)$		7.4×10^{-13}
经典电子半径	r_e	$2.8179402894(58)\times10^{-15}$	m	2.1×10^{-9}
质子质量	m_p	$1.672621637(83)\times10^{-27}$	kg	5.0×10^{-8}
质子质量(u)		1.00727646677(10)	u	1.0×10^{-10}
质子质量(J)	$m_p c^2$	$1.503277359(75)\times10^{-10}$	J	5.0×10^{-8}
质子质量(MeV)		938.272013(23)	MeV	2.5×10^{-8}
质子－电子质量比	$\frac{m_p}{m_e}$	1836.15267247(80)		4.3×10^{-10}
质子－中子质量比	$\frac{m_p}{m_n}$	0.99862347824(46)		4.6×10^{-10}
质子荷质比	$\frac{e}{m_p}$	$9.57883392(24)\times10^{7}$	Ckg^{-1}	2.5×10^{-8}
质子均方根电荷半径	R_p	$0.8768(69)\times10^{-15}$	m	7.8×10^{-3}
质子磁矩	μ_p	$1.410606662(37)\times10^{-26}$	JT^{-1}	2.6×10^{-8}
质子 g 因子	g_p	5.585694713(46)		8.2×10^{-9}

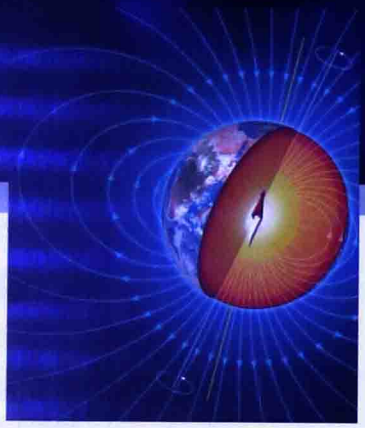
续表

量	符号	数值	单位	相对标准不确定度
质子－中子磁矩比	$\frac{\mu_p}{\mu_n}$	$-1.45989806(34)$		2.4×10^{-7}
中子质量	m_n	$1.674927211(84)\times10^{-27}$	kg	5.0×10^{-8}
中子质量(u)		$1.00866491597(43)$	u	4.3×10^{-10}
中子质量(J)	m_nc^2	$1.505349505(75)\times10^{-10}$	J	5.0×10^{-8}
中子质量(MeV)		$939.565346(23)$	MeV	2.5×10^{-8}
中子－电子质量比	$\frac{m_n}{m_e}$	$1838.6836605(11)$		6.0×10^{-10}
中子磁矩	μ_n	$-0.96623641(23)\times10^{-26}$	JT^{-1}	2.4×10^{-7}
中子 g 因子	g_n	$-3.82608545(90)$		2.4×10^{-7}
中子－电子磁矩比	$\frac{\mu_n}{\mu_e}$	$1.04066882(25)\times10^{-3}$		2.4×10^{-7}
μ 子质量	m_μ	$1.88353130(11)\times10^{-28}$	kg	5.6×10^{-8}
μ 子磁矩	μ_μ	$-4.49044786(16)\times10^{-26}$	JT^{-1}	3.6×10^{-8}
α 粒子质量	m_α	$6.64465620(33)\times10^{-27}$	kg	5.0×10^{-8}
电子康普顿波长	λ_C	$2.4263102175(33)\times10^{-12}$	m	1.4×10^{-9}
质子康普顿波长	$\lambda_{C,p}$	$1.3214098446(19)\times10^{-15}$	m	1.4×10^{-9}
中子康普顿波长	$\lambda_{C,n}$	$1.3195908951(20)\times10^{-15}$	m	1.5×10^{-9}
μ 子康普顿波长	$\lambda_{C,\mu}$	$11.73444104(30)\times10^{-15}$	m	2.5×10^{-8}
精细结构常数	α	$7.2973525376(50)\times10^{-3}$		6.8×10^{-10}
精细结构常数的倒数	α^{-1}	$137.035999679(94)$		6.8×10^{-10}
里德堡常数$\frac{\alpha^2m_ec}{2h}$	R_∞	$10973731.568527(73)$	m^{-1}	6.6×10^{-12}
里德堡常数($R_\infty c$)	$R_\infty c$	$3.289841960361(22)\times10^{15}$	Hz	6.6×10^{-12}
阿伏伽德罗常数	N_A	$6.02214179(30)\times10^{23}$	mol^{-1}	5.0×10^{-8}
原子质量常数 $m_u=\frac{1}{12}m(^{12}C)=1u$	m_u	$1.660538782(83)\times10^{-27}$	kg	5.0×10^{-8}
法拉第常数 N_Ae	F	$96485.3399(24)$	$Cmol^{-1}$	2.5×10^{-8}
摩尔气体常数	R	$8.314472(15)$	$Jmol^{-1}K^{-1}$	1.7×10^{-6}
玻尔兹曼常数$\frac{R}{N_A}$	k	$1.3806504(24)\times10^{-23}$	JK^{-1}	1.7×10^{-6}
斯蒂芬－玻耳兹曼常数	σ	$5.670400(40)\times10^{-8}$	$Wm^{-2}K^{-4}$	7.0×10^{-6}
冯·克利青常数$\frac{h}{e^2}$	R_K	$25812.807557(18)$	Ω	6.8×10^{-10}
电导量子$\frac{2e^2}{h}$	G_0	$7.7480917004(53)\times10^{-5}$	S	6.8×10^{-10}
电导量子倒数	G_0^{-1}	$12906.4037787(88)$	Ω	6.8×10^{-10}
磁通量子$\frac{h}{2e}$	Φ_0	$2.067833667(52)\times10^{-15}$	Wb	2.5×10^{-8}
约瑟夫森常数$\frac{2e}{h}$	K_J	$483597.891(12)\times10^9$	HzV^{-1}	2.5×10^{-8}
玻尔半径	a_0	$0.52917720859(36)\times10^{-10}$	m	6.8×10^{-10}
玻尔磁子$\frac{e\hbar}{2m_e}$	μ_B	$927.400915(23)\times10^{-26}$	JT^{-1}	2.5×10^{-8}
核磁子$\frac{e\hbar}{2m_p}$	μ_N	$5.05078324(13)\times10^{-27}$	JT^{-1}	2.5×10^{-8}

续表

量	符号	数值	单位	相对标准不确定度
电子伏特	eV	$1.602176487(40)\times10^{-19}$	J	2.5×10^{-8}
哈特里能量	E_h	$4.35974394(22)\times10^{-18}$	J	5.0×10^{-8}
哈特里能量(eV)		27.21138386(68)	eV	2.5×10^{-8}
$^{12}CA_r(^{12}C)M_u$ 摩尔质量	$M(^{12}C)$	12×10^{-3}	$kgmol^{-1}$	
摩尔质量常数	M_u	10^{-3}	$kgmol^{-1}$	
^{12}C 相对原子质量	$A_r(^{12}C)$	12		
标准大气压		101325	Pa	(准确)
摩尔气体常数	R	8.314472(15)	$Jmol^{-1}K^{-1}$	1.7×10^{-6}
理想气体的摩尔体积 $\frac{RT}{p}$ $T=273.15K$ $p=101.325kPa$	V_m	$22.710981(40)\times10^{-3}$	m^3mol^{-1}	1.7×10^{-6}
第一辐射常数 (first radiation constant)	c_1	$3.74177118(19)\times10^{-16}$	Wm^2	5.0×10^{-8}
第一辐射常数 (second radiation constant)	c_2	$1.4387752(25)\times10^{-2}$	mK	1.7×10^{-6}

注:基本物理常数表摘自:Mohr P J, Taylor B N, Newell D B. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2006. Reviews of Modern Physics, 2008, 80: 633.



Electromagnetism

电磁学方法论

ISBN 978-7-308-14146-8

9 787308 141468 >

定价：37.00元