(PDF压缩器 - 未注册版)

21世纪高等教育规划教材——学习指导与考研系列
普通物理学同步辅导系列

电磁学释疑

Electromagnetism

谭金凤 王凤翔 李鲁艳◎编著

0441-43
09

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

(PDF压缩器 - 未注册版)

Electromagnetism

地址：北京市百万庄大街22号
邮政编码：100037
电话服务
社服务中心：010-88361066
销售一部：010-68326294
销售二部：010-88379649
读者购书热线：010-88379203
网络服务
教材网：http://www.cmpedu.com
机工官网：http://www.cmpbook.com
机工官博：http://weibo.com/cmp1952
封面无防伪标均为盗版

ISBN 978-7-111-43967-7
策划编辑◎张金奎
封面设计◎张　静

ISBN 978-7-111-43967-7
9 787111 439677
定价：12.80元

(PDF压缩器 - 未注册版)

电磁学释疑

Electromagnetism

(PDF压缩器 - 未注册版)

014010854

0441-43
09

21 世纪高等教育规划教材——学习
普通物理学同步辅导系列

电磁学释疑

谭金凤　王凤翔　李鲁艳　编著

北京航空航天大学 藏书 图书馆

北航　C1697110

机 械 工 业 出 版 社

0441-43
09

(PDF压缩器 - 未注册版)

作者把长期学习、讲授、研究电磁学积累的知识和体会以及多年指导学生考研复习的经验进行整理和总结，以“释疑”的形式写出来，编成本书。全书共分五章，其内容包括真空中的静电场、静电场中的导体和电介质、真空中的稳恒磁场、磁场中的磁介质、变化的电磁场。每章又由内容导读、问题释疑和典型题析三部分组成。特别需要指出的是：“典型题析”是从国内外的优秀教材和近几年来国内多所知名大学研究生入学考试试题中精选出的具有代表性的例题，不仅能够给学习电磁学的同学以很好的启迪和帮助，而且对准备考研的同学更是难得的电磁学复习资料。

本书可作为高等理工科院校、师范院校各相关专业师生电磁学教学或学习的参考书，也可作为考研复习的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

电磁学释疑/谭金凤等编著. —北京：机械工业出版社，2013.11
21世纪高等教育规划教材. 学习指导与考研系列
ISBN 978-7-111-43967-7

Ⅰ.①电… Ⅱ.①谭… Ⅲ.①电磁学—高等学校—教材
Ⅳ.①O441

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第212017号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：张金奎 责任编辑：张金奎 贺 纬
版式设计：霍永明 责任校对：刘秀芝
封面设计：张 静 责任印制：杨 曦
北京中兴印刷有限公司印刷
2013年10月第1版第1次印刷
140mm×203mm · 4印张 · 103千字
标准书号：ISBN 978-7-111-43967-7
定价：12.80元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务		网络服务	
社服务中心：	(010)88361066	教材网：	http://www.cmpedu.com
销售一部：	(010)68326294	机工官网：	http://www.cmpbook.com
销售二部：	(010)88379649	机工官博：	http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：	(010)88379203	封面无防伪标均为盗版	

(PDF压缩器 - 未注册版)

序

电磁学是理工科学生学习的重要基础课，因为课程中的概念、定理、原理等都比较抽象，很多学生在理解和应用时感到迷惘和困难；作者长期从事电磁学课程的教学和研究工作，积累了丰富的教学和指导学生学习的经验，本书即是对这些经验的总结和概括；“内容导读”“问题释疑”“典型题析”等是全面系统的学习指导，使读者不仅可以提纲挈领地掌握电磁学主要内容和知识结构，而且可以获得疑难问题的准确解答，有效掌握电磁学典型问题的解题方法；“方法点击”“拓展思考”“错解分析”是本书的特色和亮点，使读者在掌握电磁学主要内容和基本解题方法的基础上，进一步拓展思路，开阔视野，对在解题过程中容易出错的关键点有更深刻的认识；特别需要指出的是：作者精选了大量近几年国内多所知名大学的研究生入学考试试题作为本书的例题，不仅能够给学习电磁学的同学以很好的启迪和帮助，而且对准备考研的同学更是可贵的电磁学复习资料。毫无疑问，这是一本内容广泛、颇具特色的电磁学学习指导书，也是一本优秀的考研复习资料。

张玉峰

2013年5月20日

(PDF压缩器 - 未注册版)

前　言

电磁学是高等院校物理类各相关专业“普通物理”以及理工科非物理专业“大学物理”课程的重要内容，一般在大一讲授。电磁学课程中的很多概念、定理和定律虽然学生在中学时都有所接触，但对概念和规律的理解还是初步的，随着课程内容的扩展和加深，尤其当必须使用高等数学知识来分析、解决问题时，很多学生感觉到听课时似乎明白了，而一旦面对具体问题时总觉得似是而非，不知从何着手。针对这一状况，作者把长期学习、讲授、研究电磁学积累的知识和体会以及多年指导学生考研复习的经验进行整理和总结，以“释疑”的形式写出来，编成本书，希望有助于大家对电磁学的学习和理解。

全书共分五章，每章由内容导读、问题释疑和典型题析三部分组成。“内容导读”呈现给读者的是简明扼要、层次分明的知识结构和内容要点，便于读者快速复习、高效掌握，形成稳固、扎实的知识网，为提高解题能力和物理思维水平夯实基础。“问题释疑”所列出的问题绝大多数是从学生中来的，精选了一些难以理解、容易混淆、必须掌握和某些似是而非的问题作了详细的剖析，某些问题还采用了正误对比的方式进行解惑，使读者对问题理解得更加透彻。“典型题析”是从国内外的优秀教材和近几年来国内多所知名大学研究生入学考试试题中精选出的具有代表性的例题，由“思路探索”来引导读者尽快找到解决问题的思路和方法，用“方法点击”来帮助读者归纳解决问题的关键、技巧与规律。对部分例题还增加了“错解分析”和“拓展思考”。“错解分析”是针对学生经常会出现的错误（学习中的错误往往是教学的一笔“财富”）而设计的；“拓展思考”是为了引导学生学会“举一反三，融会贯通”进行更深入的思考而设计的。

(PDF压缩器 - 未注册版)

本书可作为高等理工科院校、师范院校各相关专业师生电磁学教学或学习的参考书，也可作为考研复习的参考书。

由于编者水平所限，书中的不妥和错误在所难免，敬请广大读者提出宝贵意见。

编　者

(PDF压缩器 - 未注册版)

目　录

序
前言
第一章　真空中的静电场 …… 1
一、内容导读 …… 2
二、问题释疑 …… 5
三、典型题析 …… 8
第二章　静电场中的导体和电介质 …… 23
一、内容导读 …… 24
二、问题释疑 …… 26
三、典型题析 …… 30
第三章　真空中的稳恒磁场 …… 51
一、内容导读 …… 52
二、问题释疑 …… 55
三、典型题析 …… 57
第四章　磁场中的磁介质 …… 71
一、内容导读 …… 72
二、问题释疑 …… 74
三、典型题析 …… 80
第五章　变化的电磁场 …… 87
一、内容导读 …… 88
二、问题释疑 …… 91
三、典型题析 …… 97
参考文献 …… 119

(PDF压缩器 - 未注册版)

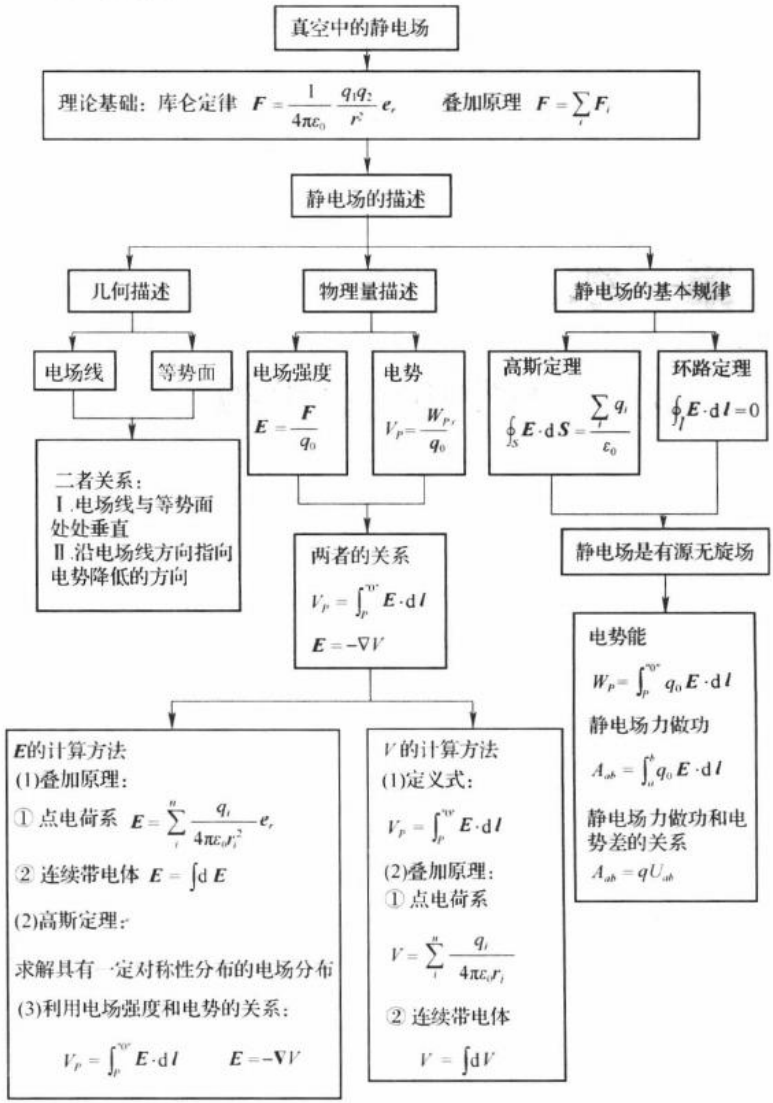
第一章

真空中的静电场

(PDF压缩器 - 未注册版)

一、内容导读

【知识结构】



(PDF压缩器 - 未注册版)

【内容要点】

1. 库仑定律及静电力叠加原理

名 称	内 容	说 明
库仑定律	$\boldsymbol{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r$（$\boldsymbol{e}_r$ 为单位矢量）	适用于点电荷
静电力叠加原理	$\boldsymbol{F}=\sum_i\boldsymbol{F}_i=\sum_i\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0q_i}{r_i^2}\boldsymbol{e}_r$	适用于点电荷系

2. 电场强度及电场强度叠加原理

名 称	内 容	说 明
电场强度	$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q_0}$ 电场中某点电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的大小等于单位正电荷 q_0 在该点受力大小，其方向为正电荷在该点受力的方向	电荷在电场中受力——从该点性质出发，引入了描述静电场性质的基本物理量——电场强度矢量
电场强度叠加原理	$\boldsymbol{E}=\sum_i\boldsymbol{E}_i=\sum_i\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\boldsymbol{e}_r$（点电荷系） $\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\boldsymbol{e}_r$（电荷连续分布带电体）	电荷线分布 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}l$ 电荷面分布 $\mathrm{d}q=\sigma\mathrm{d}S$ 电荷体分布 $\mathrm{d}q=\rho\mathrm{d}V$

3. 几种典型带电体的电场强度分布

名 称	内 容
点电荷	$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{e}_r$
无限长均匀带电直线	$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\boldsymbol{e}_r$（$\lambda$ 为电荷线密度）
半径为 R 的均匀带电球面	$\boldsymbol{E}_{内}=0$　　$\boldsymbol{E}_{外}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{e}_r$
半径为 R 的均匀带电球体	$\boldsymbol{E}_{内}=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r$　　$\boldsymbol{E}_{外}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{e}_r$

(PDF压缩器 - 未注册版)

（续）

名　称	内　容
半径为 R 的无限长均匀带电圆柱面	$\boldsymbol{E}_{内}=0$　　$\boldsymbol{E}_{外}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\boldsymbol{e}_r$
半径为 R 的无限长均匀带电圆柱体	$\boldsymbol{E}_{内}=\frac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{e}_r$　　$\boldsymbol{E}_{外}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\boldsymbol{e}_r$
无限大均匀带电平面	$\boldsymbol{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{i}$（$\sigma$ 为电荷面密度）
半径为 R 的均匀带电细圆环	$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(x^2+R^2)^{3/2}}\boldsymbol{i}$（轴线上）
半径为 R 的均匀带电薄圆盘	$\boldsymbol{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\boldsymbol{i}$（轴线上）

4. 电势能和电势

名　称	内　容	说　明
电势能	$W_P=q_0\int_P^{"0"}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 电荷在电场中某点的电势能在数值上等于将电荷 q_0 从该点移到电势能为零的点的过程中电场力所做的功	
电势	$V_P=\frac{W_P}{q_0}=\int_P^{"0"}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 电场中某点的电势在数值上等于单位正电荷 q_0 在该点具有的电势能	电荷在电场中具有势能——从该点性质出发，引入了描述静电场性质的另一个基本物理量——电势
电势叠加原理	$V=\sum_i V_i=\sum_i\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i}$（点电荷系） $V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}q}{r}$（电荷连续分布带电体）	
电势差	$U_{ab}=V_a-V_b=\int_a^b E\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$	
电场强度与电势的关系	$\boldsymbol{E}=-\mathbf{grad}V$ 在直角坐标系中 $\boldsymbol{E}=-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$	电场中某点的电场强度取决于该点处电势的空间变化率，而与该点电势值本身无直接的关系

注：若源电荷为有限分布，可取无限远处为电势零点；若源电荷为无限分布，电势零点选取将视具体问题而定。

(PDF压缩器 - 未注册版)

5. 静电场的基本定律

名 称	内 容	说 明
静电场的高斯定理	$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$ 在真空中通过任一闭合曲面的电场强度通量，等于该闭合曲面内包围的电荷量的代数和除以真空电容率 ε_0	静电场的高斯定理表明静电场是有源场
静电场的环路定理	$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$ 在静电场中，电场强度沿任一闭合路径的线积分恒为零	静电场的环路定理表明静电场是无旋场（保守场）

注：高斯定理和环路定理反映了静电场的两个不同侧面，只有将两者有机结合，才能客观地描述静电场的性质。

6. 电场强度和电势的计算方法

名 称	内 容	说 明
电场强度的计算方法	Ⅰ. 利用点电荷电场强度公式及电场强度叠加原理 Ⅱ. 利用高斯定理 Ⅲ. 利用电势和电场强度的微分关系	前提是已知场源电荷的分布
电势的计算方法	Ⅰ. 利用点电荷电势公式及电势叠加原理 Ⅱ. 利用电场强度和电势的积分关系	

注：当电荷分布具有特殊对称性时，电场分布也具有某种对称性，可用高斯定理求解电场分布。

二、问题释疑

1-1 点电荷是什么？一个点电荷在它所在处产生的电场强度是多大？

【答】 点电荷是理想模型。当带电体的几何线度远小于带电体到观察点的距离时，将实际的带电体简化为一个带一定电荷量的几何点（实际上它本身的线度不一定很小）。

当观察点逼近点电荷时，它的形状、大小就不能忽略了，即

(PDF压缩器 - 未注册版)

不能看做点电荷了。此时要讨论它在所在处产生的电场强度，就需要把它看做具有一定电荷分布的带电体来计算，若还根据点电荷的电场强度公式 $\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{e}_r$ 求该点的电场强度，显然没有物理意义。

1-2 什么样的电荷可作为试验电荷（检验电荷）？

【答】 试验电荷是为了测定电场的性质而引入电场中的带电体。试验电荷必须满足两个条件：

（1）所带电荷量要足够小，以不至于影响原来的电场分布。

（2）其线度要足够小，以至于所得的结果能精确反映电场各“点”的性质。

1-3 电场强度的物理意义是单位正电荷量所受的力。因为电荷量的单位是库仑，故某点的电场强度等于在该点放一个电荷量为 1C 的点电荷所受的力。你认为对吗？

【答】 不对。因为电场强度的定义式 $\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q}$ 中，要求试验电荷的电荷量 q 必须足够小，以便使它所产生的电场对原来电场分布影响很小，可以略去不计。而库仑是一个非常大的单位，需要 6.242×10^{18} 个质子的电荷加在一起，才够 1C 的电荷量。这样大的电荷量必然引起原来电场发生很大的变化，因此不符合试验电荷的要求。

1-4 库仑定律与高斯定理和环路定理的关系如何？

【答】 高斯定理和环路定理都是在库仑定律和电场叠加原理基础上推导出来的。库仑定律和叠加原理都是实验定律，原则上，应用库仑定律和叠加原理可以解决静电学的所有问题。应用高斯定理和环路定理也可以解决静电学的所有问题，并且可以推导出库仑定律。在静电学中高斯定理和环路定理与库仑定律和叠加原理等价，但库仑定律没有涉及场的概念，而高斯定理和环路定理是以电场为基本概念来描述矢量场结构特征的，所以高斯定理和环路定理包含的内容远比库仑定律和叠加原理丰富。正是由

(PDF压缩器 - 未注册版)

于引入了电磁场的概念，电磁理论才得到了迅速发展和完善。

1-5 场与实物有何异同点？

【答】共同点：它们都是一种客观存在的物质。

（1）场与实物一样，存在的形式多种多样，如电场、磁场、引力场和核力场等。

（2）具有与实物相同的属性，如具有质量、能量、动量和角动量等。

（3）在场内进行的物理过程遵循质量守恒定律、能量守恒定律、动量守恒定律、角动量守恒定律等。

（4）场不能被创造，也不能消灭，只能由一种形式转变为另一种形式。

不同点：

（1）实物是由分子、原子等微粒组成的，这些微粒占据的空间不能被其他微粒所占据。场是分布在空间中的一种看不见摸不着的特殊物质，它遵循叠加性。一种场所占据的空间，同时可被其他场占据，且互不影响。

（2）一般情况下，场以光速传播（运动），而实物的速度不能达到光速。

（3）场不能作为参考系。

1-6 静电场电势零点选取原则是什么？

【答】（1）电势零点选取的任意性。

由静电场的安培环路定理，引入了电势的概念，**电场中任一点的电势等于把单位正电荷从该点移到电势零点过程中电场力所做的功**。可见，静电场中某一点的电势与电势零点选取有关，即电势具有相对值。那么，电势零点位置究竟选在哪里才合适呢？原则上，只要使电场中某一点的电势具有相对确定的值，使描述的静电场能够反映其在空间的分布就可以。即原则上电势零点的选取是任意的。

（2）若源电荷为有限分布，可取无限远处为电势零点。

在涉及静电场的实际问题中，尽管带电体系的电荷量不同，

(PDF压缩器 - 未注册版)

电荷分布各异，但带电体的电荷量总是有限的，带电体的线度也是有限的。一般来讲，带电体附近的场较强，电势变化较快；距离带电体较远处的场较弱，电势变化缓慢，即距离带电体足够远处的电场强度趋于零，电势恒定。所以，对有限大小的实际带电体的电场，通常取无限远处为电势零点。

（3）若源电荷为无限分布，电势零点选取将视具体问题而定。

在理论研究中，通常遇到很多理想的带电模型，如无限大均匀带电平面、无限长均匀带电直线、无限长均匀带电圆柱面等。若选择无限远处为电势零点，在电场中任一点的电势便无确定的值（可能出现矛盾或电势发散等问题），即对电场的描述无确定的物理含义。可见，此时电势零点的位置不能选择在无限远处，即除无限远处及带电体本身的任一点外，其他点均可作为电势零点。

（4）实际工程技术中，通常取大地为电势零点。

三、典型题析

例 1-1 如图 1-1 所示，在$z=0$所对应的 x、y 平面上放置四个点电荷，求在原点（0，0）处的电势和电场强度。
（北京理工大学 2003 年硕士学位研究生入学考试试题）

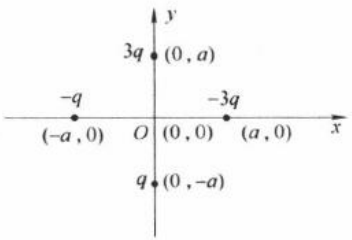


图 1-1

【思路探索】 可应用电势叠加原理、电场强度叠加原理，计算原点（0，0）处的电势和电场强度。

解：根据电势叠加原理，原点（0，0）处的电势为

$$V=\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}-\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 a}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}=0$$

根据电场强度叠加原理，原点（0，0）处的电场强度为

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$\boldsymbol{E}=\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\boldsymbol{i}-\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\boldsymbol{j}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\boldsymbol{i}-\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\boldsymbol{j}$$

【方法点击】在点电荷系的电场中，某一点的电场强度、电势等于各点电荷单独存在时在该点产生的电场强度、电势的叠加。但要注意：求点电荷系的电场强度时，是求每个点电荷电场强度 $\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$ 的矢量和；而求点电荷系的电势时，是求每个点电荷电势 $V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ 的代数和。

例 1-2 如图 1-2 所示，真空中两个点电荷 q_1、q_2，相距为 $2r$，以 q_1 为球心，以 r 为半径作高斯面 S，若 $q_1=q_2$，则通过高斯面 S 的电通量为多少？高斯面 S 上的 P 点的电场强度又为多大？

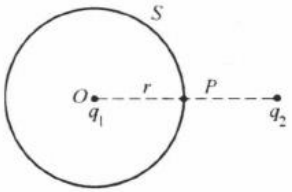


图 1-2

（浙江大学 2005 年硕士学位研究生入学考试试题）

【思路探索】可先由高斯定理求得通过高斯面 S 的电通量，再由电场强度叠加原理，求得 P 点电场强度。

解：根据高斯定理 $\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$ 求得通过高斯面 S 的电通量为

$$\Phi=\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

而高斯面 S 上的 P 点的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_P=\boldsymbol{E}_{q_1}+\boldsymbol{E}_{q_2}$$

$$E_P=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}-\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

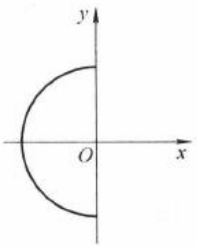
式中，若 q_1、q_2 同号，$E_P=0$；若 q_1、q_2 异号，$E_P=\frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{q_2}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$。

(PDF压缩器 - 未注册版)

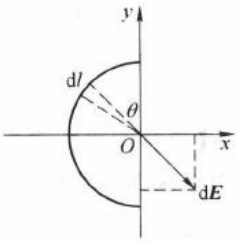
【方法点击】该题可以由高斯定理求得电通量，但不能直接用高斯定理求得高斯面 S 上的 P 点的电场强度，因为高斯面 S 上的任一点的电场强度是由 q_1、q_2 共同产生的。当电场强度分布不具有对称性时，不能用高斯定理直接求 E_P，必须用电场强度叠加原理来计算。

例 1-3 如图 1-3a 所示，用绝缘细线弯成的半圆环，半径为 R，其上均匀带有总电荷 Q，试求圆心 O 点处的电场强度。

（湖南大学 2007 年硕士学位研究生入学考试试题）



a)



b)

图 1-3

【思路探索】根据带电体电荷的分布，利用点电荷形成电场的电场强度公式写出所取电荷元在圆心 O 点处产生的电场强度 $d\boldsymbol{E}$，然后积分求圆心 O 点处的电场强度。

解：选取圆心 O 为坐标原点，建立如图 1-3b 所示的坐标系，其中 Ox 轴沿半圆环的对称轴。

在环上任取一小段圆弧 $dl=Rd\theta$，其上带电量

$$dq=\frac{Q}{\pi R}dl=\frac{Q}{\pi R}Rd\theta=\frac{Q}{\pi}d\theta$$

它在 O 点处产生的电场强度大小为

$$dE=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}d\theta$$

在 x、y 方向的两个分量为

$$dE_x=dE\sin\theta=\frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}\sin\theta d\theta$$

$$dE_y=dE\cos\theta=\frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}\cos\theta d\theta$$

对以上两式分别积分得

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$E_x=\int \mathrm{d}E_x=\frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}\int_0^{\pi}\sin\theta \mathrm{d}\theta=\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$

$$E_y=\int \mathrm{d}E_y=\frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}\int_0^{\pi}\cos\theta \mathrm{d}\theta=0$$

由此得

$$\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{i}+E_y\boldsymbol{j}=\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{i}$$

【方法点击】运用电场强度叠加原理求带电系统的电场强度，关键在于适当地选取电荷元，正确写出 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 的表达式。如果每个电荷元激发的电场强度方向不相同，需建立合适的坐标系，先求分量积分，再求合电场强度。

例 1-4 如图 1-4 所示，一个均匀带电的厚球壳，其电荷体密度为 ρ，球壳内表面的半径为 R_1，外表面的半径为 R_2，设无穷远处为电势零点，球壳及其周围空间的电容率（介电常数）均为 ε_0，求球壳内部半径为 $r(R_1<r<R_2)$ 处的（1）电场强度；（2）电势。

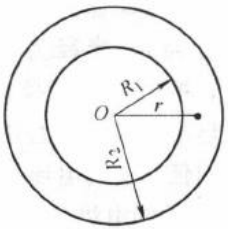


图 1-4

（南京航空航天大学 2008 年硕士学位研究生入学考试试题）

【思路探索】由于电荷呈球对称分布，因而电场分布也具有球对称性，可根据高斯定理求电场强度 $\boldsymbol{E}$，然后根据电势的定义式求电势。

解：（1）根据高斯定理 $\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$ 则有

当 $R_1<r<R_2$ 时

$$E\cdot 4\pi r^2=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\cdot\frac{4}{3}\pi(r^3-R_1^3)$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\rho}{3}\left(r-\frac{R_1^3}{r^2}\right)\boldsymbol{e}_r$$

当 $r>R_2$ 时

$$E\cdot 4\pi r^2=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi(R_2^3-R_1^3)$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\rho}{3}\left(\frac{R_2^3}{r^2}-\frac{R_1^3}{r^2}\right)\boldsymbol{e}_r$$

（2）根据电势的定义式 $V_P=\int_P^{\infty_0}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 则有

$$V_P=\int_r^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_r^{R_2}\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\rho}{3}\left(r-\frac{R_1^3}{r^2}\right)\mathrm{d}r+\int_{R_2}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\rho}{3}\left(\frac{R_2^3}{r^2}-\frac{R_1^3}{r^2}\right)\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(3R_2^2-r^2-\frac{2R_1^3}{r}\right)$$

【方法点击】利用高斯定理求电场强度分布时，正确确定高斯面内的净电荷 $\sum_{(S内)}q_i$ 是关键。

例 1-5 如图 1-5 所示，在一电荷体密度为 ρ，半径为 R_1 的均匀带电球体中，挖去一个半径为 R_2 的球体，形成一球形空腔，偏心距为 a。求：（1）空腔内任一点的电场强度；（2）空腔中心点 O' 处的电势。

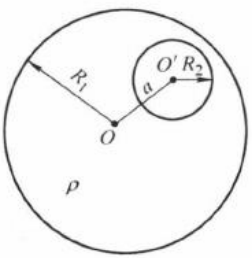


图 1-5

【思路探索】因为球体内存在空腔，使带电体失去了球对称性，所以不能直接用高斯定理求解。若用 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$ 通过积分求解，会相当复杂。但通过补偿法，可恢复球体的球对称性，将高斯定理和叠加原理并用，可顺利求解。

解：由题意，可以设想不带电的空腔等效于腔内有电荷体密度相同的等值异号的两种电荷。这样本题就可归结为，求一个电荷体密度为 ρ 的均匀带电大球体和一个电荷体密度为 $-\rho$ 的均匀带电小球体在空腔内产生的电场强度和电势的叠加。

（1）设 P 点为空腔内任一点，电荷体密度为 ρ 的均匀带电大球和电荷体密度为 $-\rho$ 的均匀带电小球的电场强度分布具有球对称性，于是分别以 O 和 O' 为球心，以 r 和 r' 为半径（均通过 P 点）作高斯面 S 和 S'。

(PDF压缩器 - 未注册版)

根据高斯定理可求得大球在 P 点产生的电场强度为

$$E_1 \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r$$

同理可求得小球在 P 点产生的电场强度为

$$E_2 \cdot 4\pi r'^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{4}{3}\pi r'^3\right)$$

$$\boldsymbol{E}_2 = -\frac{\rho r'}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_{r'}$$

由电场叠加原理可知，P 点的总电场强度为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(r\boldsymbol{e}_r - r'\boldsymbol{e}_{r'}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{a} = \text{常矢量}$$

结果表明，空腔内的电场强度是均匀的，其大小为 $\frac{\rho a}{3\varepsilon_0}$，方向平行于两球心的连线，由 O 指向 O'。

（2）由补偿法分析可知，空腔内任一点 P 的电势是电荷体密度为 ρ 的带电大球和电荷体密度为 $-\rho$ 的带电小球产生的电势叠加。即

$$V_P = V_1 + V_2$$

根据高斯定理求得，电荷体密度为 ρ 的均匀带电大球的电场强度分布为

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r & (r < R_1) \\ \dfrac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r & (r > R_1) \end{cases}$$

根据电势的定义，可求得电荷体密度为 ρ 的带电大球在大球内任一点产生的电势为

$$V_1 = \int_r^{R_1} \boldsymbol{E}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{R_1}^{\infty} \boldsymbol{E}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R_1^2 - r^2)$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

其在空腔中心 $O'(r=a)$ 处产生的电势为

$$V_1=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R_1^2-a^2)$$

同理，可求得电荷体密度为 $-\rho$ 的带电小球在空腔中心 O' 处产生的电势为

$$V_2=-\frac{3\rho R_2^2}{6\varepsilon_0}=-\frac{\rho R_2^2}{2\varepsilon_0}$$

由电势叠加原理，空腔中心点 O' 处的电势为

$$V_{O'}=V_1+V_2=\frac{\rho(3R_1^2-a^2)}{6\varepsilon_0}-\frac{\rho R_2^2}{2\varepsilon_0}=\frac{\rho[3(R_1^2-R_2^2)-a^2]}{6\varepsilon_0}$$

【方法点击】“补偿法”是一种常用的简化运算方法。补偿法不仅在求解静电场问题时用，在求解稳恒磁场有关问题时也经常采用。

例 1-6 如图 1-6a 所示，求均匀带电细杆延长线上一点 P 的电势。

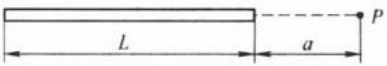


图 1-6a

【思路探索】对于有限带电体，其在空间产生的电势是带电体上各电荷元产生电势的叠加，因而 P 点的电势可用叠加法求解。

解：如图 1-6b 所示，在细杆上任取一线元 $\mathrm{d}x$，其电荷为 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$，它在 P 点产生的电势为

$$\mathrm{d}V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{(L+a-x)}$$

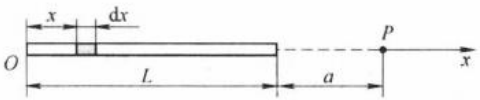


图 1-6b

均匀带电细杆在 P 点的电势为

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$V=\int \mathrm{d}V=\int_0^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}x}{(L+a-x)}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a+L}{a}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{a+L}{a}$$

【错解分析】有一种解法是利用电势定义法 $V=\int_P^{\infty_0} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 来计算电势。

电荷元 $\mathrm{d}q$ 在 P 点产生的电场强度大小为

$$\mathrm{d}E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{(L+a-x)^2}$$

均匀带电细杆在 P 点的电场强度大小为

$$E=\int_0^L \mathrm{d}E=\int_0^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}x}{(L+a-x)^2}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{L+a}\right)$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a(L+a)}$$

电场强度的方向沿 x 轴。

根据电势的定义，均匀带电细杆在 P 点的电势为

$$V=\int_P^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{L+a}^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a(L+a)}\mathrm{d}x=\infty$$

显然，这个结果是错误的。错误的主要原因在于，以上解法没有完整地理解电场强度和电势作为电场本身性质而具有的空间延展性和分布连续性的意义。用定义法由电场强度求电势时，其中的电场强度必须是空间的连续分布函数。即使需要求出的是某一点的电势，在积分号下的被积函数也不是该点的电场强度，而是电场强度的一个空间分布。本题如果要用定义法求解，则应先求出带电细杆在空间产生的电场分布，再沿一定的路径积分。

如图 1-6c 所示，在均匀带电细杆上任取一线元 $\mathrm{d}l$，其电荷

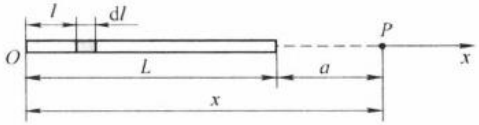


图 1-6c

(PDF压缩器 - 未注册版)

为 $dq=\lambda dl$，它在 P 点产生的电场强度大小为

$$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{(x-l)^2}$$

均匀带电细杆在 P 点的电场强度为

$$E=\int_0^L dE=\int_0^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{(x-l)^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x(x-L)}$$

电场强度的方向沿 x 轴。

根据电势的定义，均匀带电细杆在 P 点的电势为

$$V=\int_P^\infty \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{L+a}^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x(x-L)}dx=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{a+L}{a}$$

【拓展思考】 1. 如果所求 P 点不在细杆的延长线上，而是在距离细杆垂直距离为 a 处，如图 1-6d 所示，求 P 点的电势。

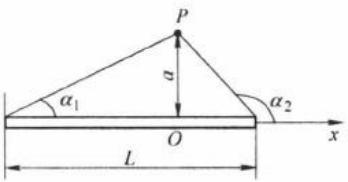


图 1-6d

提示：如果按电势定义式求解，则需首先求出整个细杆在空间产生的电场强度的分布，然后选定积分路径进行积分。但在本题中计算电场强度的分布比较复杂，即使求出了电场强度，当选取从 P 点趋于无穷远处的一条直线路径为积分路径时，由于在该路径上每一点电场强度的方向与积分路径的方向夹角的变化，难以完成积分，因此，此题不宜用电势定义式求解。

不妨采用叠加法求解。如图 1-6e 所示，以 P 点的垂线与杆的交点为原点 O，在直导线上任取一线元 dl，其电荷为 $dq=\lambda dl$，它在 P 点产生的电势为

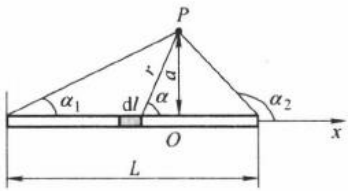


图 1-6e

$$dV=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r}$$

其中，$a=r\sin\alpha$，$l=a\cot\alpha$，$dl=a\csc^2\alpha d\alpha$，由此得

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$dV=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\csc\alpha d\alpha$$

均匀带电细杆在 P 点的电势为

$$V=\int dV=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\csc\alpha d\alpha=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln\left|\tan\frac{\alpha_2}{2}\right|-\ln\left|\tan\frac{\alpha_1}{2}\right|\right)$$

2. 如果所求均匀带电细杆是无限长的，则离细杆垂直距离为 r 的 P 点的电势是多少？

提示：通常对于电荷分布在有限区域的带电体，可以选无限远处为电势零点，然后用叠加法求电势分布。对于无限长均匀带电细杆，因电荷的分布延伸到无限远，不能用叠加法求电势，否则会得出无限大的结果，显然是无意义的。只能从电势的定义出发，选取适当的点为电势零点，根据电势定义法进行计算。

选离细杆垂直距离为 r_0 的 P_0 点作为电势零点。根据高斯定理可求得无限长均匀带电细杆在 P 点的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{e}_r$$

根据电势的定义，离细杆垂直距离为 r 的 P 点电势为

$$V=\int_P^{P_0}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_r^{r_0}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$$

显然，除无限远处及带电体本身上的任一点外，其他点均可作为电势零点。

【方法点击】对于无限长均匀带电细杆的电势分布，不能选取无限远处为电势零点，也不能选取细杆上某点为电势零点。对于这类系统的电势零点选取，要根据具体问题在场中选某点为电势零点，并使电势表达式最为简捷。

例 1-7 一个半径为 R 的圆盘，其上均匀带有面密度为 σ 的电荷，求：

(1) 轴线上任一点的电势（用该点与盘心的距离 x 表示）；

(2) 从电场强度和电势的关系，求该点的电场强度。

【思路探索】将圆盘看成许多半径不同的细圆环组成，写出每个细圆环在轴线上任一点的电势，然后根据电势叠加原理，积

(PDF压缩器 - 未注册版)

分可求得圆盘在轴线上任一点的电势；然后利用电场强度与电势的微分关系，求电场强度。

解：（1）设 P 点到圆盘中心距离为 x，取半径为 r，宽为 $\mathrm{d}r$ 的窄圆环，如图 1-7a 所示。细窄圆环的电荷量为

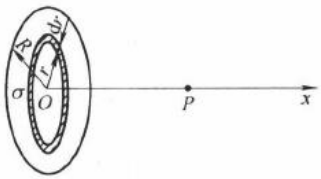


图 1-7a

$$\mathrm{d}q=\sigma\cdot 2\pi r\cdot \mathrm{d}r$$

在 P 点产生的电势为

$$\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}}$$

整个圆盘在 P 点产生的电势为

$$V=\int \mathrm{d}V=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}2\pi\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+x^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2+x^2}-x)$$

（2）整个圆盘在 P 点产生的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{i}=-\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i}=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}-1\right)\boldsymbol{i}$$

【方法点击】运用电势叠加原理求带电系统的电势，关键在于适当地选取电荷元，可利用已有的结果写出 $\mathrm{d}V$ 的表达式，然后积分求 V，注意积分区间应遍及整个带电体。

【拓展思考】1. 底面半径为 R，高为 H 的正圆柱体，其上均匀带电，单位体积内所带电荷量为 ρ，求其轴线上任一点的电势和电场强度？

提示：借助半径为 R 的均匀带电圆盘在其轴线产生的电势，利用电势叠加原理求出高为 H 的正圆柱体在其轴线产生的电势。然后利用电场强度与电势的微分关系，求电场强度。

2. 底面半径为 R，高为 H 的正圆锥体，其上均匀带电，单位体积内所带电荷量为 ρ，求其顶点的电势和电场强度？

提示：借助半径为 R 的均匀带电圆盘在其轴线产生的电势，利用电势叠加原理求出高为 H 的圆锥体在顶点的电势。然后利用电场强度与电势的微分关系，求电场强度。

(PDF压缩器 - 未注册版)

半径为 R 的均匀带电圆盘在其轴线产生的电势为

$$V=\int \mathrm{d}V=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}2\pi\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+x^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2+x^2}-x)$$

如图 1-7b 所示，在正圆锥体上距 O 点为 x 处取一半径为 r，厚度为 $\mathrm{d}x$ 的薄圆盘，由图中几何关系知

$$\frac{x}{H}=\frac{r}{R}$$

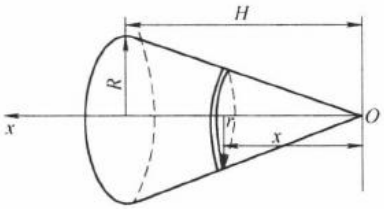


图 1-7b

半径为 r，厚度为 $\mathrm{d}x$ 的薄圆盘带电量为

$$\mathrm{d}q=\rho\cdot\pi r^2\mathrm{d}x$$

其电荷面密度为

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{\mathrm{d}q}{\pi r^2}=\rho\mathrm{d}x$$

半径为 r，厚度为 $\mathrm{d}x$ 的薄圆盘在正圆锥体顶点处产生的电势为

$$\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{d}\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{r^2+x^2}-x)=\frac{\rho\mathrm{d}x}{2\varepsilon_0}(\sqrt{r^2+x^2}-x)$$
$$=\frac{\rho\mathrm{d}x}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{\left[\left(\frac{R}{H}\right)^2+1\right]x^2}-x\right)$$

对上式积分，可求得正圆锥体在其顶点处产生的电势。

例 1-8 两个同心球面的半径分别为 R_1 和 $R_2(R_2>R_1)$，各自带有电荷 Q_1 和 Q_2，求：(1) 各区域电势的分布；(2) 两球面上的电势差为多少？

【思路探索】 先根据高斯定理求出电场强度的分布，然后根据电势的定义式求出电势的分布。也可根据电势叠加原理，求电势的分布。

解 1：根据电势与电场强度的积分关系求电势。

取同心球面为高斯面，利用高斯定理求得电场强度的分布

$$\boldsymbol{E}_1=0 \qquad (r<R_1)$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$\boldsymbol{E}_2=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad (R_1<r<R_2)$$

$$\boldsymbol{E}_3=\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad (r>R_2)$$

由电势 $V_P=\int_P^{"0"}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，可求得各区域的电势分布：

当 $r\leqslant R_1$ 时，有

$$V_1=\int_r^{R_1}\boldsymbol{E}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{R_1}^{R_2}\boldsymbol{E}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{R_2}^{\infty}\boldsymbol{E}_3\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$=0+\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

当 $R_1\leqslant r\leqslant R_2$ 时，有

$$V_2=\int_r^{R_2}\boldsymbol{E}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{R_2}^{\infty}\boldsymbol{E}_3\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

当 $r\geqslant R_2$ 时，有

$$V_3=\int_r^{\infty}\boldsymbol{E}_3\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

两个球面之间的电势差

$$U_{12}=\int_{R_1}^{R_2}\boldsymbol{E}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

解 2：由电势叠加原理计算电势分布。

若该点在两个球面内，即 $r<R_1$，则

$$V_1=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \qquad ①$$

若该点在两个球面之间，即 $R_1\leqslant r\leqslant R_2$，则

$$V_2=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \qquad ②$$

若该点在两个球面之外，即 $r\geqslant R_2$，则

$$V_3=\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

联立解式①和式②，并取 $r=R_2$，可得两个球面之间的电势差为

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$U_{12}=(V_1-V_2)=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

【方法点击】首先根据高斯定理求电场强度分布，再根据电势与电场强度的积分关系求电势。由于求电势时电场强度的线积分与路径无关，所以可以选取最简单的积分路径，如本题中选取沿径向方向为积分路径。

(PDF压缩器 - 未注册版)

(PDF压缩器 - 未注册版)

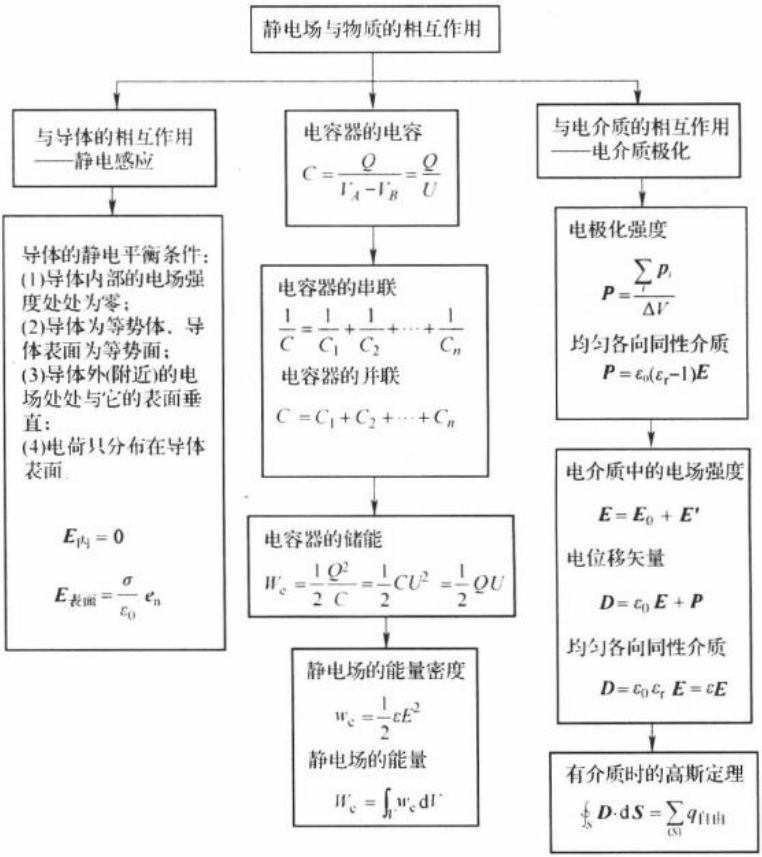
第二章

静电场中的导体和电介质

(PDF压缩器 - 未注册版)

一、内容导读

【知识结构】



(PDF压缩器 - 未注册版)

【内容要点】

1. 静电场中的导体

名 称	内 容	说 明
导体和静电场的相互作用规律	导体的静电平衡条件 (1) 导体内部电场强度处处为零； (2) 导体是等势体，导体表面是等势面； (3) 导体表面的电场强度处处与导体表面垂直； (4) 电荷只分布在导体表面	$\boldsymbol{E}_{内}=\boldsymbol{0}$ $\boldsymbol{E}_{表面}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_n$

2. 静电场中的电介质

名 称	内 容	说 明
电介质和静电场的相互作用规律	电极化强度 $\boldsymbol{P}=\frac{\sum_i \boldsymbol{p}_i}{\Delta V}$ 对于各向同性的电介质 $\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\chi_e\boldsymbol{E}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\boldsymbol{E}$ 电介质中的高斯定理 $\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\sum_{(S)} q_{自由}$ 对于各向同性的电介质 电位移矢量 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{E}_{内}\neq\boldsymbol{0}$

3. 电容和电容器

名 称	内 容	说 明
孤立导体的电容	$C=\frac{Q}{U}$	孤立导体球的电容 $C=4\pi\varepsilon_0 R$
电容器的电容	$C=\frac{Q}{V_A-V_B}$	电容是描述电容器本身性质的物理量，它只与电容器的几何形状、极板的相对距离、极板间的介质有关

(PDF压缩器 - 未注册版)

（续）

名　称	内　容	说　明
几种常见电容器的电容	（1）平行板电容器 $C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}$ （2）球形电容器 $C=4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{R_A R_B}{R_B-R_A}$ （3）圆柱形电容器 $C=2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{l}{\ln\frac{R_B}{R_A}}$	电容器两极板间充满相对介电常数为 ε_r 的电介质后，其电容是真空时的电容的 ε_r 倍 $C=\varepsilon_r C_0$
电容器的串、并联	电容器串联 $\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}$ 电容器并联 $C=C_1+C_2+\cdots+C_n$	电容器串联：提高耐压 电容器并联：增大容量

4. 静电场的能量

名　称	内　容	说　明
静电场的能量密度	$w_e=\frac{dW_e}{dV}$	对于各向同性的电介质 $w_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}DE$
静电场的能量	$W_e=\int_V w_e dV$	$W_e=\int_V\frac{1}{2}\varepsilon E^2 dV$

二、问题释疑

2-1 一个物体的带电荷量可以是无限大吗？

【答】物体带电是指得到电子（带负电）或失去电子（带正电）的过程。物体带电以后，在其周围激发了电场，且电场强度随着电荷量的增大而增强，空间的电场（尤其是带电体附近的电场）对空气中存在着的少量游离离子和电子存在作用力，当此作用力足够大时，使这些游离离子和电子与空气分子碰撞，使空气分子电离，新的离子运动又会产生更新的离子，即导致带电体附近的大气被击穿。这些电离出的与带电体电荷异号的电荷与带电

(PDF压缩器 - 未注册版)

体电荷中和，使带电体电荷量减少，所以一个物体带电荷量不会无穷大。

2-2 导体的静电感应与电介质的极化两者的微观过程有何不同？

【答】从微观来看，金属中有大量的自由电子，自由电子在电场的作用下可在导体内作宏观的定向移动。电子的移动使导体中的电荷重新分布，结果在导体表面出现感应电荷。感应电荷产生的电场在导体内与外场的方向相反，达到静电平衡时导体内部的合电场强度为零，导体为等势体。对于电介质，因分子中的电子与原子核结合得非常紧密，电子处于束缚状态，在外电场的作用下，电子与原子核间只能作微观相对位移（数量级约为10^{-10}m），或者是稍微改变它们之间的连线方向，有时两种情况都存在。结果在电介质表面出现了所谓的束缚电荷，束缚电荷产生的电场在电介质内只能部分地抵消外电场，达到平衡以后，电介质内部的电场强度不为零。

导体的静电感应与电介质的极化两者都是由于电荷的重新分布产生了附加电场，静电场中的静电感应可视为完全极化，其介电常数视为无限大。

2-3 接地后的带电导体上是否还会有电荷？为什么？

【答】当带电体附近没有其他带电体或导体时，由于带电体与大地之间存在着电势差，使可移动的电子从低电势处流向高电势处，瞬间达到静电平衡，即带电导体与大地成为等电势。电子流动的结果使导体上没有多余的电荷。设带电体和地球为两个半径分别为r和R的导体球。并设想两球相距很远，其上的电荷分布认为是均匀的。当带电体接地后，两者的电势相等，静电平衡后，带电体和地球分布的电荷分别为q和Q，则

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

即

$$\frac{q}{Q}=\frac{r}{R}$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

由于带电体的线度远小于地球半径，即$\frac{r}{R}\to 0$，所以$\frac{q}{Q}\to 0$。可见，不论带电体和地球连接前带电如何，两者连接后，带电体上的电荷量都是零。

当带电体附近有其他带电体或导体时，由于静电感应，其他带电体在接地带电体上产生感应异号电荷，接地后的带电体上将保留部分电荷，其电荷量的数值和符号取决于其他带电体的形状、带电荷量的数值和符号及两者相对位置，与接地带电体本身带电无关。

2-4 在一个孤立导体球壳的中心放一点电荷，球壳内外表面上的电荷分布是否均匀？如果点电荷偏离球心，情况又如何？

【答】 当点电荷放在球心时，根据球对称性，球壳内外表面上的电荷分布都是均匀的。如果点电荷偏离球心，则球壳内表面对点电荷不再具有球对称性，其上感应出的异号电荷的分布将不再均匀分布，靠近点电荷的地方电荷面密度会大些。至于球壳的外表面上的电荷分布，由于导体球壳的静电屏蔽作用，壳外电场分布不受壳内点电荷的位置变化的影响，依然是均匀的。

2-5 任意一个导体都有一定的厚度，试解释平行板电容器的两个极板为什么可以用理想的带电平面代替？

【答】 两个原来不带电的平行金属板，充电后正对的两面带等量异号电荷，相背的两面均不带电荷。分析如下：

如图 2-1a 所示，当 A、B 两板与电源连接后，A 板带正电，B 板带负电。

如图 2-1b 所示，若 A 板所带电荷均匀分布，即 A 板两面均有正电荷分布；同理 B 板两面也均有负电荷分布。静电平衡以后，A、B 两板内任意一点的电场强度不可能为零，这与导体达到静电平衡时导体

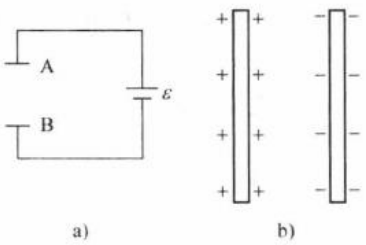


图 2-1

(PDF压缩器 - 未注册版)

内部电场强度处处为零矛盾。另外，为了保证静电平衡时导体内部电场强度处处为零，相背的两面也不可能带有其他性质的电荷。所以 A、B 两板充电后只有相对的两面带等量异号电荷，相背的两面均不带电荷，与理想的带电平面一样。

2-6 公式 $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ 和 $E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ 有何不同?

【答】 公式 $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ 是电荷面密度为 σ 的无限大均匀带电薄平面在其附近任一点的电场强度大小，是由带电平面上所有电荷激发产生的。$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ 与点的位置无关，即无限大均匀带电薄平面附近的电场为一均匀的电场。如图 2-2 所示，当 $\sigma>0$ 时，电场强度的方向垂直带电平面指向外；当 $\sigma<0$ 时，电场强度的方向垂直带电平面指向里。

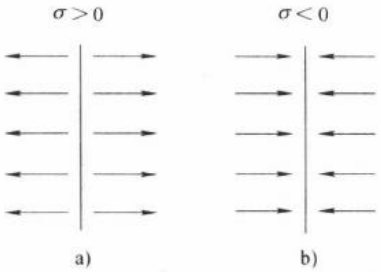


图 2-2

而公式 $E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ 为静电平衡时带电导体表面附近的电场强度大小，是由空间所有电荷激发产生的，$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ 与点的位置有关，即导体表面不同处对应的电荷面密度 σ 不同，因此其附近的电场强度大小不同，由于其方向垂直导体表面，所以导体表面不同处电场强度的方向一般也不相同。

2-7 均匀介质的极化与均匀极化的介质这两个概念是否有区别？哪种情况可能出现体分布的极化电荷?

【答】 均匀介质的极化是指电介质内各点极化性质相同的电介质在外电场中被极化。均匀介质放在不均匀电场中也会产生非均匀极化。均匀极化的介质是指介质内部被外电场均匀极化了，电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 为常数。这时的介质并非一定为均匀介质，但介质

(PDF压缩器 - 未注册版)

内部是均匀极化。

对于均匀介质，如果介质内有体分布的自由电荷，则极化后会出现体分布的极化电荷。

2-8 在有固定分布的自由电荷的电场中放有一块电介质，当移动此电介质的位置后，电场中 $\boldsymbol{D}$ 的分布是否改变？$\boldsymbol{E}$ 的分布是否改变？通过某一特定封闭曲面的 $\boldsymbol{D}$ 通量是否改变？通过某一特定封闭曲面的 $\boldsymbol{E}$ 通量是否改变？

【答】 移动电介质的位置后，其上的束缚电荷分布会改变。由于电场 $\boldsymbol{E}$ 的分布是所有电荷（包括自由电荷和束缚电荷）的分布所决定，因此 $\boldsymbol{E}$ 的分布会改变；根据 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ 可知，$\boldsymbol{E}$ 的分布改变将导致 $\boldsymbol{D}$ 的分布改变。对那个特定封闭曲面，由于通过它的 $\boldsymbol{E}$ 通量是由它包围的所有电荷（包括自由电荷和束缚电荷）所决定，束缚电荷分布的改变将导致 $\boldsymbol{E}$ 通量的改变；通过该封闭曲面的 $\boldsymbol{D}$ 通量只由它包围的自由电荷所决定，自由电荷分布固定，电介质的位置移动不会改变该特定封闭曲面内自由电荷的多少，因而通过该封闭曲面的 $\boldsymbol{D}$ 通量不会改变。

三、典型题析

例 2-1 一带有电荷为 q、质量为 m 的小球，悬于一不带电绝缘细丝线的一端。线的另一端与一无穷大竖直带电导体平板相连，当处于平衡状态时细线与平板成 30° 角，如图 2-3a 所示，试问此时带电平板的表面电荷密度 σ 是多少？

（中国科学院 2006 年硕士学位研究生入学考试试题（甲）A 卷）

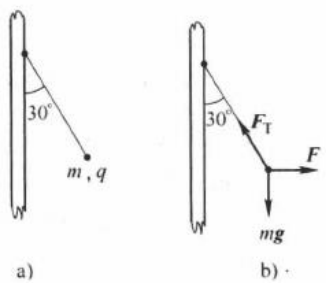


图 2-3

【思路探索】 这是一道力学与电磁学相结合的综合题。首先分析小球此时的受力，然后根据力的平衡条件，求出带电平板的表面电荷密度 σ。

(PDF压缩器 - 未注册版)

解：小球受力如图 2-3b 所示。由于小球受力平衡，故有

$$F_T \sin 30^\circ = qE \quad ①$$

$$F_T \cos 30^\circ = mg \quad ②$$

式①中 $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$，①、②两式相比，有

$$q \cdot \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 mg} = \tan 30^\circ$$

所以

$$\sigma = \frac{2\varepsilon_0 mg}{q} \tan 30^\circ$$

【方法点击】无限大带电平面在其周围所产生的场，由高斯定理求得 $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$。

例 2-2 如图 2-4 所示，半径为 R 的空心导体球壳（球壳内壁形状不规则）带电量为 Q，球壳外有一个点电荷 q。试求球壳上所有电荷在球壳内任意一点 P 所激发的电场强度。设点电荷 q 与 P 点的距离为 d。

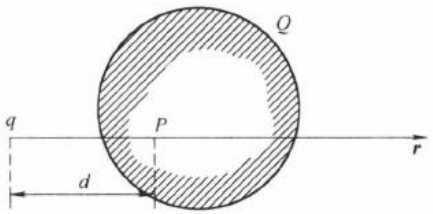


图 2-4

【思路探索】如果根据静电平衡以后球壳上的电荷分布，求它在 P 点的电场强度，将是非常复杂的。我们可以利用空腔导体的基本性质和电场强度叠加原理来求解。

解：设点电荷 q 在 P 点产生的电场强度为 $\boldsymbol{E}_1$，球壳上所有电荷在 P 点产生的电场强度为 $\boldsymbol{E}_2$，根据电场强度叠加原理，腔内任一点的总电场强度是点电荷 q 和球壳上所有电荷共同激发产生的。则有

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$\boldsymbol{E}_P=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{E}_2$$

根据空腔导体的基本性质：腔内无带电体时，空腔内电场强度处处为零，与腔外电荷分布无关。则有

$$\boldsymbol{E}_P=\boldsymbol{0}$$

即
$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\boldsymbol{e}_r+\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{0}$$

所以，球壳上所有电荷在球壳内任意一点 P 所激发的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_2=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\boldsymbol{e}_r \quad (\boldsymbol{e}_r \text{ 为图中 } \boldsymbol{r} \text{ 方向的单位矢量})$$

【方法点击】对于空腔导体，当腔内无带电体时，空腔内电场强度处处为零，与腔外电荷分布无关。这样可以不考虑空腔外表面上电荷的具体分布，就能求出球壳上所有电荷在球壳内任意一点 P 所激发的电场强度。

例 2-3 任意形状的带电导体，其电荷面密度为 $\sigma(x, y, z)$，则在导体表面外附近任意点处的电场强度的大小 $E(x, y, z)$ 的表达式如何？

（浙江大学 2006 年硕士学位研究生入学考试试题）

【思路探索】根据高斯定理可求得导体表面外附近任意点处的电场强度的大小 $E(x, y, z)$。

解：在导体表面附近处取一点 P，过 P 点取小面积 ΔS，如图 2-5 所示。以小面积 ΔS 为圆柱体的底面作一个圆柱形封闭高斯面，由高斯定理 $\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i$ 得

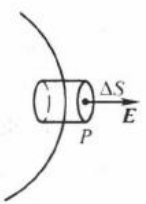


图 2-5

$$E\cdot\Delta S=\frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}$$

则有
$$E(x, y, z)=\frac{\sigma(x, y, z)}{\varepsilon_0}$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

【方法点击】导体表面外附近的电场强度大小与导体表面附近的电荷面密度成正比，σ 越大，E 越大。如果另外有其他导体存在，σ 与 E 的值均将变化，但 E 与 σ 之间仍满足关系 $E=\sigma/\varepsilon_0$，即 E 是导体表面上的电荷及其他带电体共同产生的。

例 2-4 如图 2-6 所示，一内半径为 a、外半径为 b 的金属球壳，带有电荷 Q，在球壳空腔内距离球心 r 处有一点电荷 q，设无限远处为电势零点，试求：

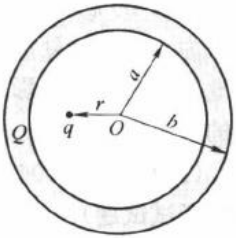


图 2-6

（1）球壳内外表面上的电荷；

（2）球心 O 点处，由球壳内表面上电荷产生的电势；

（3）球心 O 点处的总电势。

（湖南大学 2007 年硕士学位研究生入学考试试题）

【思路探索】根据电荷守恒定律和静电平衡条件，求出电荷的分布。然后根据电势叠加原理求出由球壳内表面上电荷在球心 O 处产生的电势和球心 O 点处的总电势。

解：（1）导体达到静电平衡时，金属球壳的内表面上有感应电荷 $-q$，外表面上有感应电荷 $q+Q$。

（2）球壳内表面上的感应电荷分布是不均匀的。球心 O 点是一个对称点，对这个特殊点，所有感应电荷到 O 点距离相同，因而不论球壳内表面上的感应电荷如何分布，球壳内表面的感应电荷在球心 O 点处产生的电势为

$$V_{-q}=\oint_S \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 a}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

（3）根据电势叠加原理，球心 O 点处的总电势为分布在球壳内外表面上的电荷和点电荷 q 在球心 O 点处产生的电势的叠加，即

$$V_O=V_q+V_{-q}+V_{q+Q}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

【方法点击】球壳内表面上的感应电荷分布是不均匀的。但

(PDF压缩器 - 未注册版)

根据球面上非均匀分布的各处感应电荷与球心距离都等于球半径的特点，从而使电势积分可以不考虑感应电荷的具体分布就很容易求出。

例 2-5 如图 2-7 所示，在真空中将半径为 R 的金属球接地，在与球心 O 相距为 $r(r>R)$ 处放置点电荷 q，不计接地导线上电荷的影响，求金属球表面上的感应电荷总量。

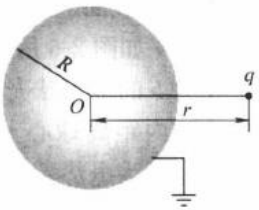


图 2-7

（郑州大学 2006 年硕士学位研究生入学考试试题）

【思路探索】 根据静电平衡条件，金属球为一个等势体。因导体球接地，导体球电势为零，球心 O 点处电势也为零。接地后导体球表面的感应电荷 q' 在球面上的分布是不均匀的，球心 O 点是一个对称点，对这个特殊点，所有感应电荷到其距离相同，导体球表面的感应电荷 q' 在球心 O 点处的电势就很容易求出。

解：金属球为等势体，其上任意点的电势为点电荷 q 和金属球表面感应电荷 q' 在球心 O 处激发的电势之和。

点电荷 q 在球心 O 点处激发的电势为

$$V_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

由于金属球表面感应电荷分布不均匀其在球心 O 激发的电势为

$$V_2=\oint_S\frac{\sigma'\mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\oint_S\sigma'\mathrm{d}S=\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

接地金属球电势为零，所以球心 O 总电势为

$$V_O=V_1+V_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R}=0$$

则有

$$q'=-\frac{Rq}{r}$$

【拓展思考】 当有 n 个点电荷 q_1，q_2，…，q_n 排列在半径为 r，中心在球心 O 的圆弧上或圆周上时，则感应电荷是多少？

(PDF压缩器 - 未注册版)

显然，感应电荷应该是 $q' = -\frac{R}{r}\sum_{i=1}^{n} q_i$。由此可知，一个接地导体球外放上带有净电荷 Q 的同心球面时，其内部的接地导体球面的感应电荷不等于零，而是由 $q' = -\frac{R}{r}Q$ 决定。

导体接地表示导体与大地等电势，即电势为零，但绝不能认为导体一接地，其上的电荷就全部流入大地而不带电，这种情况只有孤立导体才是如此。对于非孤立导体（如本题）接地时，其上常带有感应电荷，正是由于接地导体上存在感应电荷，才使导体的电势为零。不要有“接地导体电势为零，其上就没有电荷”的错误认识。

【方法点击】此题选取一个特殊的电势零点，根据球面上非均匀分布的各处感应电荷与球心距离都等于球半径的特点，从而使电势积分可以不考虑感应电荷的具体分布计算出来，这是一个巧妙的方法。

例 2-6 如图 2-8 所示，半径为 R_1 的导体球带有正电荷 q，球外有一内、外壁半径分别为 R_2 与 R_3 的同心导体外壳，球壳上带有正电荷 Q。试求：

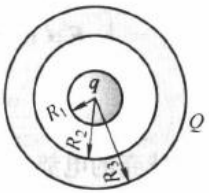


图 2-8

（1）球表面和球壳内、外表面各分布有多少电荷？

（2）球与球壳的电势各为多大？

（3）若用导线把球与球壳连接起来，则球与球壳的电势又各为多大？

（4）在（1）、（2）情形下（即球与球壳间无导线连接），把球壳接地，则球与球壳的电势差为多大？

（5）同样在（1）、（2）情形下（即球与球壳间无导线连接），把球接地，则球与球壳的电势差又为多大？

（复旦大学 2003 年硕士学位研究生入学考试试题）

【思路探索】根据导体的静电平衡条件和电荷守恒定律，确

(PDF压缩器 - 未注册版)

定电荷分布情况，当导体之间用导线连接或接地后，确定出电荷分布变化。由于电荷分布具有球对称性，可先用高斯定理求空间电场强度的分布，再由电势的定义 $V=\int_P^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 求电势。

解：(1) 因静电感应电荷重新分布，达到静电平衡后，导体球和球壳内、外表面电荷的分布分别为 q、$-q$、$q+Q$。

(2) 根据高斯定理可求得各区域内电场强度的分布

$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{0} \qquad (r<R_1)$$

$$\boldsymbol{E}_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad (R_1<r<R_2)$$

$$\boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{0} \qquad (R_2<r<R_3)$$

$$\boldsymbol{E}_4=\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad (r>R_3)$$

根据电势的定义 $V=\int_P^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，可求得

球的电势为

$$V_1=\int_P^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_r^{R_1}E_1\mathrm{d}r+\int_{R_1}^{R_2}E_2\mathrm{d}r+\int_{R_2}^{R_3}E_3\mathrm{d}r+\int_{R_3}^{\infty}E_4\mathrm{d}r$$
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

球壳的电势为

$$V_2=\int_P^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{R_3}^{\infty}E_4\mathrm{d}r=\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

(3) 若用导线把球与球壳连接，当达到静电平衡时，电荷 $q+Q$ 全部分布在球壳的外表面上，此时电场只分布在 $r>R_3$ 的空间区域，即 $\boldsymbol{E}=\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$。同时球与球壳为等势体，故

$$V_1=V_2=\int_P^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{R_3}^{\infty}E_4\mathrm{d}r=\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

(4) 在 (1)、(2) 情形下（即球与球壳间无导线连接），若球壳接地，球壳外表面的电荷为零，球壳电势 $V_2=0$，则球与球壳的电势差为

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$U=\int_{R_1}^{R_2}E_2\mathrm{d}r+\int_{R_2}^{R_3}E_3\mathrm{d}r=\int_{R_1}^{R_2}E_2\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

(5) 在 (1)、(2) 情形下 (即球与球壳间无导线连接)，当内球接地时，内球电势 $V_1=0$。但无穷远处的电势也为零，这就要求外球壳所带电荷量在内外表面上重新分布，使球壳的电场沿着径向指向无穷远处，球壳内的电场沿着径向指向球心处。因此，内球必然带负电荷。当达到静电平衡时，设内球带电量为 $-q'$，则球壳内表面带电量为 q'，球壳外表面上带电量为 $Q-q'$，根据高斯定理可求得各区域内的电场强度分布为

$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{0} \qquad (r<R_1)$$

$$\boldsymbol{E}_2=-\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad (R_1<r<R_2)$$

$$\boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{0} \qquad (R_2<r<R_3)$$

$$\boldsymbol{E}_4=\frac{Q-q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad (r>R_3)$$

根据电势的定义，则球壳的电势为

$$V_2=\int_r^{R_3}E_3\mathrm{d}r+\int_{R_3}^{\infty}E_4\mathrm{d}r=\int_{R_3}^{\infty}E_4\mathrm{d}r=\frac{Q-q'}{4\pi\varepsilon_0 R_3} \qquad ①$$

或 $$V_2=\int_r^{R_2}E_3\mathrm{d}r+\int_{R_2}^{R_1}E_2\mathrm{d}r=\int_{R_2}^{R_1}E_2\mathrm{d}r=\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \qquad ②$$

由式①、式②解得 $q'=\dfrac{R_1R_2Q}{R_1R_2+R_2R_3-R_1R_3}$

球壳的电势为

$$V_2=\int_{R_3}^{\infty}E_4\mathrm{d}r=\int_{R_3}^{\infty}\frac{Q-q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2-R_1}{R_1R_2+R_2R_3-R_1R_3}$$

则球与球壳的电势差为

$$U=V_2-V_1=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2-R_1}{R_1R_2+R_2R_3-R_1R_3}$$

【方法点击】 球壳接地，并不影响球与球壳之间的电场分布，接地后，外球壳电势为零。若内球接地，内球电势为零，内球所带电荷量要发生变化，由内球电势为零，可求出内球所带电荷量。

(PDF压缩器 - 未注册版)

例 2-7 将两块平薄导体板 C 和 D，插入一平行板电容器的极板 A、B 的电场中，如图 2-9 所示。这 4 块平板的间距为 AC＝CD＝DB＝$d/3$，已知 C、D 板未插入时，A、B 两板带等量异号电荷，其间的电势差为 U。试问：

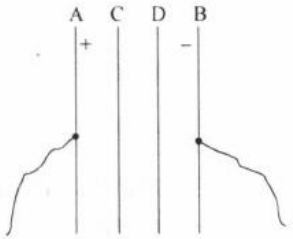


图 2-9

（1）A 与 C，C 与 D，D 与 B 间的电场强度各多少？

（2）若 C 和 D 板用导线相连然后将导线取去，（1）中结果又如何？

（3）在（2）中所述的步骤之后，再用导线将 A 与 B 板连接，然后再去掉连接导线，则（1）中结果又如何？设 d 很小，可以忽略边缘效应。

【思路探索】 首先根据静电平衡条件和电荷守恒定律，求出电荷的分布，然后再根据 $E=\sigma/\varepsilon_0$ 求电场强度的分布。

解：因可以忽略边缘效应，A、B 两板所带电荷均匀分布于内表面，两板外表面带电量很小可忽略，A、B 两板间电场强度大小为 $E=U/d$，方向垂直于板面。当 C、D 两板未插入时，A、B 两板内侧的电荷面密度分别为 $\pm\sigma$，

$$\sigma=\varepsilon_0 E=\varepsilon_0\frac{U}{d}$$

（1）当 C、D 两板插入后，根据静电平衡条件，C、D 两板的两个侧面分别感应出等量异号电荷，电荷面密度分别为 $\pm\sigma$，A 与 C，C 与 D，D 与 B 间的电场强度均为 $E=U/d$。

（2）若用导线将 C 和 D 相连，然后再将导线取去，这时 C、D 两板相对两面上的电荷将中和掉。但 C 板和 A 板相对的那个面的面电荷密度保持 $-\sigma$ 不变，D 板和 B 板相对的那个面的面电荷密度保持 $+\sigma$ 不变。因此 A 与 C，D 与 B 间的电场强度均为 $E=U/d$，C 与 D 板间的电场强度 $E=0$。

【错解分析】 这里有一种错误的认识，用导线将 C 和 D 相

(PDF压缩器 - 未注册版)

连，C、D两板上的电荷将完全中和掉。为何不完全中和掉？如果完全中和掉C、D板上不带电，那么A、B两板上的电荷都必须分布在外侧，这样它们产生的电场在各个导体内部都不为零，不满足静电平衡条件。容易验证，只有上面所讲的电荷分布才能够满足静电平衡条件。

(3) 在(2)中所述的步骤之后，再用导线将A与B板连接，这时各板上的电荷如何分布呢？各板上的电荷分布必须满足静电平衡条件。如图2-10所示，A、B两板外表面不带电，设D板与B板相对的那个面电荷面密度为σ_1，与C板相对的那个面电荷面密度为σ_2，则C板两个表面的面电荷面密度显然为$-\sigma_2$与$-\sigma_1$。

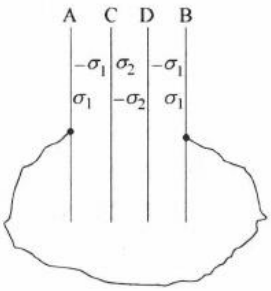


图 2-10

根据电荷守恒定律，有

$$\sigma_1+\sigma_2=\sigma \qquad ①$$

由于A、B两板等电势，有

$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\frac{d}{3}-\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}\frac{d}{3}+\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\frac{d}{3}=0 \qquad ②$$

由①、②两式可得

$$\sigma_1=\frac{1}{3}\sigma$$

$$\sigma_2=\frac{2}{3}\sigma$$

则有，A与C板间的电场强度大小$E_{AC}=\frac{\sigma}{3\varepsilon_0}$，C与D间的电场强度大小$E_{CD}=\frac{2\sigma}{3\varepsilon_0}$。D与B板间的电场强度大小$E_{DB}=\frac{\sigma}{3\varepsilon_0}$。如果再将连接导线去掉，电场强度分布不会发生变化。

【错解分析】这里有一种错误的认识，用导线将A与B板连接时，A、B两板上正负电荷完全中和掉，C、D两板上的电荷

(PDF压缩器 - 未注册版)

将跑到它们相对的面上，所以A与C，D与B板间的电场强度均为$E=0$，C与D板间的电场强度$E=U/d$。很显然，A、B两板的电势差为$U/3$，违反静电平衡条件，这答案是错误的。

【拓展思考】在上述计算中，我们均忽略了边缘效应。电荷均匀分布于A、B两板内表面及C、D两板上，A、B两板外部电场强度为零。既然A、B两板外部电场强度为零，那么，当用导线将A与B板连接时，是什么力驱使导线中的电荷流动呢？

提示：事实上，边缘效应总是存在的，A、B两板外侧存在微弱电场，正是这微弱的电场驱使导线中的电荷流动，达到新的平衡状态。在计算达到平衡后的电荷分布及电场的能量等问题中，可以忽略边缘效应。但在考虑电荷为什么能够流动时，就不能忽略边缘效应。

【方法点击】不要主观猜测，要根据静电平衡条件和电荷守恒定律，利用代数方法求出电荷的分布。

例2-8 一半径为R的带电介质球体，其相对电容率为ε_r，电荷体密度$\rho=Ar$，A为一常量。试求：(1) 球体内外电场强度的分布；(2) 球体内外电势。

(南京航空航天大学2006年硕士学位研究生入学考试试题)

【思路探索】由于电荷呈球对称分布，因而电场分布也具有球对称性，可根据有介质的高斯定理先求出$\boldsymbol{D}$的分布，再根据$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$求出电场强度$\boldsymbol{E}$的分布，然后根据电势的定义式求电势的分布。

解：(1) 根据有介质的高斯定理$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum_i q_i$有

球体内$(0<r<R)$

$$D_1\cdot 4\pi r^2=\int_0^r Ar\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r=\pi Ar^4$$

$$D_1=\frac{Ar^2}{4}$$

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{Ar^2}{4\varepsilon_0\varepsilon_r}\boldsymbol{e}_r$$

球体外$(r>R)$

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$D_2 \cdot 4\pi r^2 = \int_0^R Ar \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \pi A R^4$$

$$D_2 = \frac{AR^4}{4r^2}$$

$$\boldsymbol{E}_2 = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$$

（2）球体内（$0<r<R$）

$$V_1 = \int_r^\infty \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_r^R \frac{Ar^2}{4\varepsilon_0\varepsilon_r}\mathrm{d}r + \int_R^\infty \frac{AR^4}{4\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{A}{12\varepsilon_0\varepsilon_r}(R^3 - r^3) + \frac{AR^3}{4\varepsilon_0}$$

球体外（$r>R$）

$$V_2 = \int_r^\infty \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_r^\infty \frac{AR^4}{4\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{AR^3}{4\varepsilon_0}$$

【方法点击】由于电荷是非均匀连续分布的，确定高斯面内的净电荷 $\sum\limits_{(S内)} q_i$ 时应积分求得。

例 2-9 如图 2-11 所示，两个不带电的同心导体球壳，两球壳之间填以相对电容率为 ε_r 的介质。在内球壳偏心的位置放置一个固定的点电荷 q，其到球心的距离为 r_1，在两球壳外也放置一个点电荷 Q，到球心的距离为 r_2，且 O、q 和 Q 在同一条直线上。求：

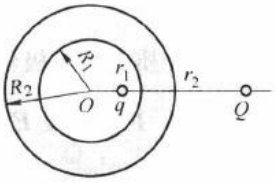


图 2-11

（1）两球壳的四个层面上的感应电荷各是多少？

（2）两球壳的四个层面上的感应电荷是否均匀分布？

（3）介质中的电场强度为多大？

（4）介质表面的极化电荷面密度是多少？

（5）外球壳外表面感应电荷对 q 的作用力为多大？

（复旦大学 2006 年硕士学位研究生入学考试试题）

【思路探索】由导体的静电平衡条件可以确定两球壳的四个层面上的感应电荷分布情况；介质中的电场强度可根据高斯定理 $\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum\limits_i q_i$ 先求 $\boldsymbol{D}$，再求电场强度 $\boldsymbol{E}$。介质表面的极化电荷

(PDF压缩器 - 未注册版)

面密度 $\sigma'=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_n=P_n$，而 $\boldsymbol{P}=\chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E}$，式中 χ_e 表示电极化率。

解：(1) 半径为 R_1 的导体球壳内表面感应电荷为 $-q$，外表面感应电荷为 $+q$；半径为 R_2 的导体球壳内表面感应电荷为 $-q$，外表面感应电荷为 $+q$。

(2) 根据图示 q、Q 的位置分布可知，半径为 R_1 的导体球壳内表面感应电荷分布不均匀，外表面感应电荷分布均匀；半径为 R_2 的导体球壳内表面感应电荷分布均匀，外表面感应电荷分布不均匀。

(3) 由介质中的高斯定理 $\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum_i q_i$，可得

$$\boldsymbol{D}=\frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r$$

而 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E}$，则有

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\boldsymbol{e}_r \quad (R_1<r<R_2)$$

(4) 介质中的电极化强度为

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}-\varepsilon_0\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi r^2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\boldsymbol{e}_r=\frac{\varepsilon_r-1}{4\pi\varepsilon_r r^2}q\boldsymbol{e}_r$$

介质内表面的极化电荷面密度为

$$\sigma'_1=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_n=-\frac{\varepsilon_r-1}{4\pi\varepsilon_r R_1^2}q$$

介质外表面的极化电荷面密度为

$$\sigma'_2=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_n=\frac{\varepsilon_r-1}{4\pi\varepsilon_r R_2^2}q$$

(5) 由于静电屏蔽的原因，外球壳外表面感应电荷在 q 处的合电场强度 $\boldsymbol{E}_{合}=0$，故外球壳外表面感应电荷对 q 的作用力为

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}_{合}=0$$

【方法点击】由于外球壳的屏蔽作用，电荷 q 不受外球壳外表面感应电荷的作用。

例 2-10 柱形电容器有两个同轴的导体圆柱面，长度均为 l，半径分别为 a 和 b，两圆柱面之间充有电容率为 ε 的均匀电介质，

(PDF压缩器 - 未注册版)

当这两个圆柱面带有等量异号电荷 Q 时，求：

（1）柱形电容器的电容；

（2）电容器介质层中的电场能量密度以及电场的总能量。

（南京大学 2006 年硕士学位研究生入学考试试题）

【思路探索】 可根据高斯定理 $\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum_i q_i$ 先求 $\boldsymbol{D}$，再求电场强度 $\boldsymbol{E}$。然后求出两圆柱面间的电势差 U_{ab}，根据电容器电容的定义式可求出电容。要求电容器所储存的能量，必须先求介质层中电场的能量密度 w_e，再取积分元 $\mathrm{d}W=w_e\cdot 2\pi rl\mathrm{d}r$ 积分求得。

解： 由高斯定理 $\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum_i q_i$ 可得

$$\boldsymbol{D}=\frac{Q}{2\pi rl}\boldsymbol{e}_r \quad (a<r<b)$$

则有

$$\boldsymbol{E}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon rl}\boldsymbol{e}_r$$

（1）两圆柱面间的电势差为

$$U_{ab}=\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}r=\int_a^b \frac{Q}{2\pi\varepsilon lr}\mathrm{d}r=\frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{b}{a}$$

根据 $C=\frac{Q}{U}$ 得

$$C=\frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{b}{a}}$$

（2）电场能量密度为

$$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{\left(\frac{Q}{l}\right)^2}{8\pi^2\varepsilon r^2}$$

电场的总能量为

$$W=\int_V w_e\mathrm{d}V=\int_a^b \frac{\left(\frac{Q}{l}\right)^2}{8\pi^2\varepsilon r^2}2\pi rl\,\mathrm{d}r=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon l}\ln\frac{b}{a}$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

【方法点击】由于已知电容器两个柱面分别带电荷为$+Q$、$-Q$，所以电容器储存的能量也可由公式$W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$求得。

例 2-11 一长直圆柱形电容器内、外半径分别为a和b，板间充满电容率为ε的均匀电介质。今在两极板间加以电压U（外圆柱电势高），试求两极单位长度上的电荷和两极间的电场强度。若极间介质的电导率为σ，试求单位长度上的电流。

（哈尔滨工业大学 2005 年硕士学位研究生入学考试试题）

【思路探索】可根据高斯定理$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum_i q_i$先求$\boldsymbol{D}$，再求电场强度$\boldsymbol{E}$。要求两极间的电流，应先求两极间的电阻，再由$I=\frac{U}{R}$求得电流。

解：假设单位长度电荷量为λ，则两圆柱间的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\boldsymbol{e}_r$$

则两极板间的电势差为

$$U=\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}r=\int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b}{a}$$

所以

$$E=\frac{U}{r\ln\frac{b}{a}}$$

由电阻定律，两极间的电阻为

$$R=\int_l \mathrm{d}R=\int_a^b \frac{1}{\sigma}\frac{\mathrm{d}r}{2\pi rl}=\frac{1}{\sigma}\frac{1}{2\pi l}\ln\frac{b}{a}$$

由$I=\frac{U}{R}$求得单位长度上的电流为

$$I'=\frac{I}{l}=\frac{2\pi U\sigma}{\ln\frac{b}{a}}$$

【方法点击】对于粗细不均匀导体的电阻不能用$R=\rho\frac{l}{S}$来计

(PDF压缩器 - 未注册版)

算，它只能用 $R=\dfrac{U}{I}$ 来定义，要采用微元积分法积分求解。

例 2-12 一单芯同轴电缆的构造是中间为半径 R_1 的金属导线，其外包着两层同轴圆筒状均匀电介质，两层电介质的分界面半径为 R，内、外圆筒半径分别为 R_1、R_2（$R_2<2R_1$）。其间两层介质相对介电常数分别为 ε_{r_1} 和 ε_{r_2}，$\varepsilon_{r_2}=\varepsilon_{r_1}/2$，如图 2-12 所示。假设两层介质的击穿场强均为 E_M。试求：（1）当电压逐渐升高时，哪层电介质先被击穿？（2）此电缆能承受的最大电压是多少？（3）单位长度电缆上的电容。

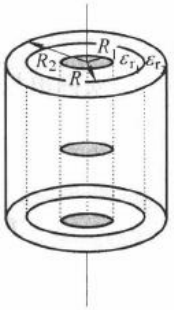


图 2-12

【思路探索】 可由电介质的击穿场强计算电容器的耐压问题。要确定耐压，首先要根据系统的带电情况计算电介质内的电场强度分布，并确定出最大电场强度所处的位置，令最大电场强度等于电介质的击穿场强，就可计算出电容器所能承受的最大电压。

解：（1）设同轴电缆的导线及外圆筒上电荷线密度分别是 $+\lambda$、$-\lambda$。由高斯定理可计算出内层介质和外层介质中的电场强度大小分别为

$$E_1=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}r}\quad(R_1<r<R)$$

$$E_2=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}r}=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}r}\quad(R<r<R_2)$$

内层介质中 $r=R_1$ 处电场强度最大

$$E_{R_1}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}R_1}$$

外层介质中 $r=R$ 处电场强度最大

$$E_R=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}R}$$

因为有 $R_2<2R_1$，$R<R_2$，所以有 $R<2R_1$。因此有 $E_R>E_{R_1}$。当电压升高时，E_R 和 E_{R_1} 相应增大，当 $E_M=E_{R_1}$ 时，外层

(PDF压缩器 - 未注册版)

介质先被击穿。

（2）两筒间加最大电压 U_M 时，

$$E_R=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}R}=E_M,\quad \lambda=\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}RE_M$$

此时介质内电场分布为

$$E=\frac{\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}RE_M}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}r}=\frac{R}{2r}E_M\quad (R_1<r<R)$$

$$E=\frac{\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}RE_M}{\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}r}=\frac{R}{r}E_M\quad (R<r<R_2)$$

电缆能承受的最大电压为

$$U_M=\int_{R_1}^{R}\frac{R}{2r}E_M dr+\int_{R}^{R_2}\frac{R}{r}E_M dr=\frac{RE_M}{2}\ln\frac{R}{R_1}+RE_M\ln\frac{R_2}{R}$$

$$=\frac{RE_M}{2}\ln\frac{R_2^2}{R_1R}$$

（3）单位长度电缆的电容为

$$C=\frac{\lambda}{U}=\frac{\lambda}{\frac{RE_M}{2}\ln\frac{R_2^2}{R_1R}}=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}}{\ln\frac{R_2^2}{R_1R}}$$

【方法点击】本题的关键是确定出最大电场强度所处的位置，最大电场强度等于电介质的击穿场强，由击穿场强计算出电压即为电容器所能承受的最大电压。

例 2-13 如图 2-13 所示，一球形电容器，在外球壳的半径为 b 及内外导体间的电势差 U 维持恒定的条件下，内球半径 a 为多大时才能使内球表面附近的电场强度最小？并求出这个最小的电场强度。

（电子科技大学 2006 年硕士学位研究生入学考试试题）

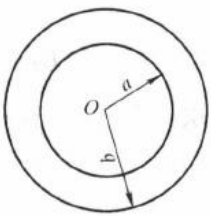


图 2-13

【思路探索】由球形电容器的电容和导体系统的电势差 U，根据电容器的电容的定义式求出电容器极板所带电荷量 q，然后再求系统内部电场强度的分布。

(PDF压缩器 - 未注册版)

解：球形电容器的电容为

$$C=\frac{4\pi\varepsilon ab}{b-a}$$

电容器极板所带电荷量为

$$q=CU=\frac{4\pi\varepsilon abU}{b-a}$$

根据高斯定理可求得球形电容器内部电场强度为

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}=\frac{abU}{r^2(b-a)}$$

内球表面附近的电场强度为

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon a^2}=\frac{bU}{a(b-a)}$$

对上式求导，并令$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}a}=0$得

$$a=\frac{b}{2}$$

所以，内球半径$a=\frac{b}{2}$时才能使内球表面附近的电场强度最小，其最小值为

$$E=\frac{bU}{a(b-a)}=\frac{4U}{b}$$

【方法点击】a的值需满足$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}a}=0$的条件，才能使内球表面附近的电场强度最小。先求出内球表面附近的电场强度，令$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}a}=0$求出内球半径$a=b/2$，再求电场强度的最小值。

例 2-14 一空气平行板电容器的电容是C_0，极板面积为S，充电时两极板间的电势差为U_0，而后断开电源。今将相对介电常数$\varepsilon_r=5$的介质插入电容器中，其填充宽度刚好为电容器空间的一半，如图 2-14 所示，忽略边缘效应，试求：

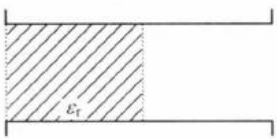


图 2-14

(PDF压缩器 - 未注册版)

(1) 电容器的电容；

(2) 电容器的能量；

(3) 极板上自由电荷的面密度；

(4) 电介质表面上束缚电荷面密度。

【思路探索】 本题属于电介质中静电场规律的综合应用题。插入电介质后，系统相当于两个电容器的并联，此时两电容器极板间的电势差始终是相等的。由于充入的电介质的介电常数不同，因此两部分极板上所带电荷量不同，但整个极板上的总电量不变。因此可由已知电压求电荷量，最后求解电容和其他物理量。

解：(1) 此时平行板电容器的电容 C 可以看成是空气、介质两个电容器的并联，所以

$$C=\frac{C_0}{2}+\frac{\varepsilon_r C_0}{2}=\frac{C_0}{2}(1+\varepsilon_r)=3C_0$$

(2) 插入电介质后，电容器极板上总电荷 Q 不变，即 $Q=Q_0=C_0U_0$，所以电容器的能量为

$$W=\frac{Q^2}{2C}=\frac{(C_0U_0)^2}{2\times 3C_0}=\frac{1}{6}C_0U_0^2$$

(3) 图 2-14 中的空气和介质两个电容器是并联的，故两电容器极板间电势差始终相等。又由于两极板间距 d 不变，所以左、右两个区域的电场强度也相同，即

$$E_1=E_2=\frac{U}{d}$$

而

$$E_1=\frac{D_1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0\varepsilon_r},\quad E_2=\frac{D_2}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} \qquad ①$$

因此，有介质部分极板上自由电荷的面密度 σ_1 要大于无介质部分极板上自由电荷的面密度 σ_2。插入介质前后，极板上总电荷 Q 不变，即

$$\frac{1}{2}S\sigma_1+\frac{1}{2}S\sigma_2=Q=C_0U_0 \qquad ②$$

由式②得

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$\sigma_1+\sigma_2=\frac{2C_0U_0}{S} \tag{3}$$

由式①得

$$\sigma_1=\varepsilon_r\sigma_2 \tag{4}$$

联立求解式③和式④可得

$$\sigma_1=\frac{2C_0U_0\varepsilon_r}{(1+\varepsilon_r)S}=\frac{5C_0U_0}{3S}$$

$$\sigma_2=\frac{2C_0U_0}{(1+\varepsilon_r)S}=\frac{C_0U_0}{3S}$$

(4) 介质表面上束缚电荷面密度为

$$\sigma'=P_n=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)E=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{(\varepsilon_r-1)}{\varepsilon_r}\frac{5C_0U_0}{3S}$$

将 $\varepsilon_r=5$ 代入得

$$\sigma'=\frac{4C_0U_0}{3S}$$

【方法点击】当涉及的电容器中有多种介质构成一个带电系统时，相当于不同电容器的并联或串联，利用电容器串、并联的特点，可求得相应的物理量。

(PDF压缩器 - 未注册版)

(PDF压缩器 - 未注册版)

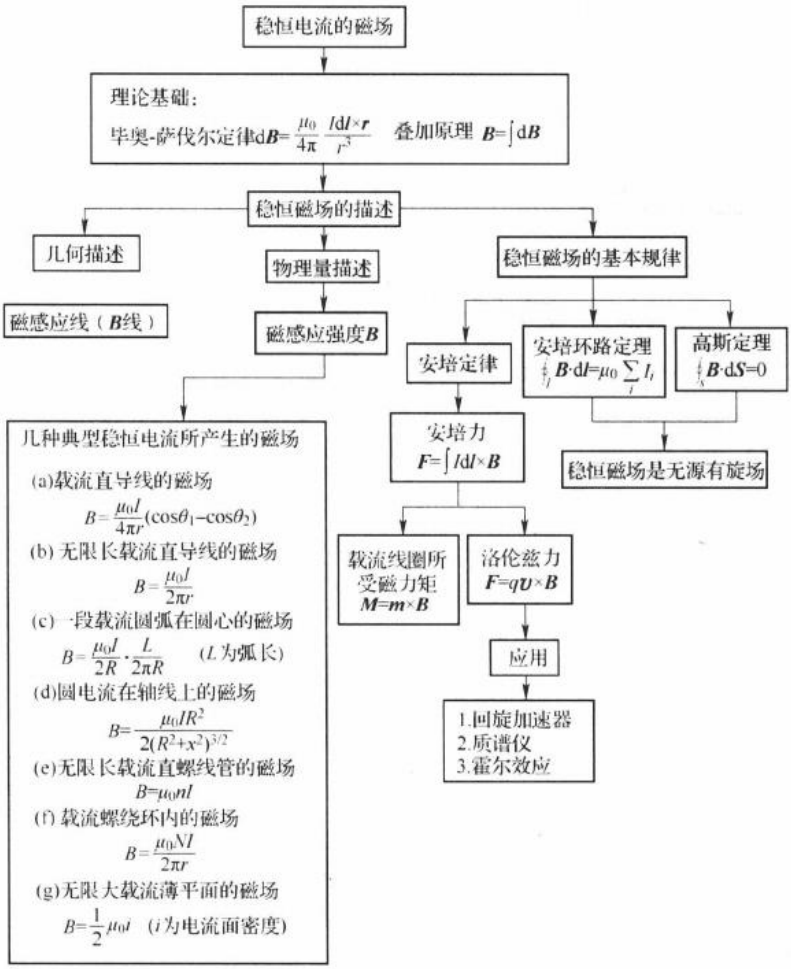
第二章

真空中的稳恒磁场

(PDF压缩器 - 未注册版)

一、内容导读

【知识结构】



(PDF压缩器 - 未注册版)

【内容要点】

1. 磁感应强度 B

名 称	内 容	说 明
B 的大小	$B=\frac{F_{max}}{qv}$	磁场中每一点的磁场的方向就是小磁针在该点静止时 N 极的指向
B 的方向	$F_{max}\times v$的方向	

2. 毕奥-萨伐尔定律及其应用

名 称	内 容	说 明
毕奥-萨伐尔定律	$d\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$	$d\boldsymbol{B}$ 的方向为 $Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}$ 的方向，即 $d\boldsymbol{B}$ 的方向垂直于 $Id\boldsymbol{l}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 所决定的平面，遵循右手螺旋定则
磁场叠加原理	$\boldsymbol{B}=\int d\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{Id\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$	任意形状的稳恒电流在空间某点处激发的磁场
毕奥-萨伐尔定律的应用	几种典型稳恒电流产生的磁场 (a) 载流直导线的磁场 $B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$ (b) 无限长载流直导线的磁场 $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ (c) 一段载流圆弧在圆心的磁场 $B=\frac{\mu_0 I}{2R}\cdot\frac{L}{2\pi R}$ (L 为圆弧长) (d) 圆电流在轴线上的磁场 $B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$ (e) 有限长载流直螺线管轴线上的磁场 $B=\frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\beta_2-\cos\beta_1)$ (f) 无限长载流直螺线管的磁场 $B=\mu_0 nI$ (f) 载流螺绕环内的磁场 $B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$ (g) 无限大载流薄平面的磁场 $B=\frac{1}{2}\mu_0 i$ (i 为电流面密度)	根据毕奥-萨伐尔定律计算出来的一些特殊形状载流导体的磁场。据此并根据磁场叠加原理，还可进一步计算一些其他形状载流导体激发的磁场

注：毕奥-萨伐尔定律是关于电流元在空间激发磁场的基本规律。利用毕奥-萨伐尔定律求电流的磁场时，如果整段电流上各电流元激发的磁感应强度 $d\boldsymbol{B}$ 的方向都相同，可直接积分 $B=\int dB$，否则，需建立直角坐标系，分别计算 $B_x=\int dB_x, B_y=\int dB_y, B_z=\int dB_z$，再求 $\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k}$。

(PDF压缩器 - 未注册版)

3. 运动电荷的磁场

名　称	内　容	说　明
运动电荷的磁场	$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$	当 $q>0$ 时，$\boldsymbol{B}$ 的方向为 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}$ 的方向； 当 $q<0$ 时，$\boldsymbol{B}$ 的方向为 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}$ 的相反方向

4. 磁通量和磁场的高斯定理

名　称	内　容	说　明
磁通量	$\Phi=\int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$	
磁场的高斯定理	$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$	通过任意闭合曲面的磁通量恒等于零，反映了稳恒磁场是无源场

5. 磁场的安培环路定理及应用

名　称	内　容	说　明
安培环路定理	$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\sum_i I_i$	若电流的流向与积分回路的绕行方向满足右手螺旋关系电流取正，反之取负
安培环路定理的应用	几种典型稳恒电流产生的磁场 (a) 无限长载流直导线的磁场 $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ (b) 无限长载流圆柱体的磁场 $B=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}$ $(r\leqslant R)$　$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ $(r>R)$ (c) 无限长载流圆柱面的磁场 $B=0$ $(r<R)$ $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ $(r>R)$ (d) 载流螺绕环内的磁场 $B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$ (e) 无限长载流直螺线管的磁场 $B_{内}=\mu_0 nI$，　$B_{外}=0$ (f) 无限大载流薄平板的磁场 $B=\frac{1}{2}\mu_0 i$　(i 为电流面密度)	对具有对称性的磁场，可应用安培环路定理来求解 $\boldsymbol{B}$

(PDF压缩器 - 未注册版)

6. 磁场对运动电荷、电流的作用

名 称	内 容	说 明
洛伦兹力	$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$	当 $q>0$ 时，$\boldsymbol{F}$ 的方向为 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 的方向； 当 $q<0$ 时，$\boldsymbol{F}$ 的方向为 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 的相反方向
安培力	$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$ 任意一段载流导线所受安培力 $\boldsymbol{F}=\int\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\int I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$	$\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 的方向为 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$ 的方向，即 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 的方向垂直于 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 所决定的平面，遵循右手螺旋定则
载流线圈所受磁力矩	$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{m}=IS\boldsymbol{e}_n$ 是线圈磁矩，$\boldsymbol{e}_n$ 为线圈平面的法线正方向的单位矢量，$\boldsymbol{e}_n$ 的方向与电流的流向满足右手螺旋关系

二、问题释疑

3-1 磁铁产生的磁场与电流产生的磁场本质上是否相同？有何区别？

【答】 磁铁产生的磁场与电流产生的磁场都源于电荷的运动，两者激发的磁场均可用磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$ 来描写，且磁场的性质也相同，即描述磁场的性质方程：磁场的高斯定理和安培环路定理都适用，两者产生的磁场本质是相同的。

区别是：磁铁产生的磁场源于电荷的微观运动，电流产生的磁场源于电荷的宏观运动。

对电流产生的磁场不难理解，电荷的定向运动（宏观的定向运动）形成电流，电流在空间激发磁场；按分子电流的观点，磁铁的磁性源于这种磁性材料具有剩磁化强度，而剩磁化强度是由于保留下来的磁畴定向排列造成的，磁畴的形成又主要源于电子的自旋磁矩，它构成分子电流磁矩的一部分。因此，磁铁的磁场是分子电流产生的，即电荷的微观运动产生的。

3-2 在无线电或电子仪器里，通常都把来回线（即载有大小相等而方向相反的电流的外表绝缘线）并在一起或缠扭成一条，

(PDF压缩器 - 未注册版)

以减小它们在周围产生的磁场，这样做有何道理？

【答】根据毕奥-萨伐尔定律，靠得很近而方向相反的两条平行线电流，在它们外面任一点产生的磁感应强度近乎大小相等而方向相反，故合成的磁感应强度几乎为零。

3-3 在下面三种情况下，能否用安培环路定理来求磁感应强度？为什么？（1）有限长载流直导线产生的磁场；（2）圆电流产生的磁场；（3）两无限长同轴载流圆柱面之间的磁场。

【答】（1）安培环路定理$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\sum_i I_i$只对闭合的稳恒电流适用，对于有限长载流直导线，不能用安培环路定理来求解，因为有限长载流直导线激发的磁场无对称性，此种情况只能用毕奥-萨伐尔定律求解。如果有限长载流直导线可以构成闭合回路，此情形下安培环路定理虽然适用，但这一闭合电流的磁场无对称性，由安培环路定理只能求出 $\boldsymbol{B}$ 的环流，而很难求出 $\boldsymbol{B}$ 的分布。

（2）圆电流产生的磁场，不能用安培环路定理来求解，因为其磁场的空间分布不具备应用安培环路定理求解所要求的对称性，所以找不到合适的积分回路。

（3）因无限长同轴载流圆柱面的磁场具有轴对称性，磁感应线是在垂直于圆柱面轴线平面内且以轴线为中心的同心圆，可选磁感应线作积分回路。该回路上各点 $\boldsymbol{B}$ 的量值相等，方向与该点的 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向一致，$\boldsymbol{B}$ 可以从安培环路定理的积分号内提出来，应用安培环路定理很容易求出 $\boldsymbol{B}$ 的分布。

3-4 在无限长的载流直导线附近取两点 A 和 B，A 和 B 到导线的垂直距离均相等。若将一电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 先后放置在这两点上，试问此电流元所受到的磁力是否一定相同？

【答】由 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$ 可知，电流元所受安培力的大小 $\mathrm{d}F=BI\mathrm{d}l\sin\theta$。将一电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 先后放置在这两点上，因 A、B 两点磁感应强度的大小相等，若 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 与 A、B 两点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的夹角 θ 相同，则 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_A$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_B$ 大小相等；否则两者不等。

(PDF压缩器 - 未注册版)

3-5 在均匀磁场中，有两个面积相等、通过电流相同的线圈，一个是三角形，另一个是矩形。这两个线圈所受的最大磁力矩是否相等？磁力的合力是否相等？

【答】 载流线圈在均匀磁场所受磁力矩 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{m}=IS\boldsymbol{e}_n$，最大磁力矩 $M=ISB$。可见，对于面积相等、通过电流相同的两个线圈，在均匀磁场中所受的最大磁力矩相等。

在均匀外磁场中，任何形状的载流平面线圈作为整体都不受力，即均匀磁场作用于线圈的合力都等于零，与线圈的方位无关。

3-6 为什么装指南针的盒子不是用铁，而是用胶木等材料做成的？

【答】 铁盒对磁场可以起到磁屏蔽作用，如果用铁盒装指南针，指南针将失去它利用地磁场指方向的作用，所以通常用胶木等材料做指南针的盒子。

三、典型题析

例 3-1 在真空中，电流由长直导线 1 沿垂直于底边 bc 的方向经 a 点流入一由电阻均匀的导线构成的正三角形金属框，再由 b 点从三角形框流出，经长直导线 2 沿 cb 延长线方向返回电源，如图 3-1 所示。已知长直导线上的电流强度为 I，三角形框的每一边长为 l，求 ab 段电流和整个电路在三角形的中心点 O 处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。

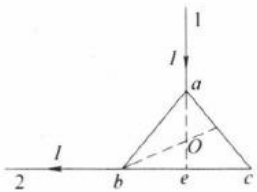


图 3-1

（北京航空航天大学 2005 年硕士学位研究生入学考试试题）

【思路探索】 可将整个电路分成 1—a，a—b，a—c，c—b，b—2 五段，对每一段分别应用 $B=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$ 公式计算磁感应强度的大小，再分别判断其方向，整个电路在中心点 O 处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_{ab}+\boldsymbol{B}_{ac}+\boldsymbol{B}_{cb}+\boldsymbol{B}_2$。

(PDF压缩器 - 未注册版)

解：设流经 ab 的电流为 I_{ab}，流经 acb 的电流为 I_{acb}，由于导线的电阻均匀，所以 $I_{ab}=2I_{acb}$，而 $I_{ab}+I_{acb}=I$，则 $I_{ab}=\frac{2}{3}I$，$I_{acb}=\frac{1}{3}I$。

$1-a$ 段电流在 O 点产生的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{0}$。

$a-b$ 段电流在 O 点产生的磁感应强度大小为

$$B_{ab}=\frac{\mu_0 I_{ab}}{4\pi\frac{\sqrt{3}}{6}l}(\cos 30^\circ-\cos 150^\circ)=\frac{\mu_0 I}{\pi l}$$

方向：垂直纸面向外。

同理，$a-c$ 段电流在 O 点产生的磁感应强度大小为

$$B_{ac}=\frac{\mu_0 I}{2\pi l}$$

方向：垂直纸面向内。

$c-b$ 段电流在 O 点产生的磁感应强度大小为

$$B_{cb}=\frac{\mu_0 I}{2\pi l}$$

方向：垂直纸面向内。

$b-2$ 段电流在 O 点产生的磁感应强度大小为

$$B_2=\frac{\mu_0 I}{4\pi\frac{\sqrt{3}}{6}l}(\cos 150^\circ-\cos 180^\circ)=\frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{4\pi l}(2-\sqrt{3})$$

方向：垂直纸面向内。

整个电路在中心 O 点产生的磁感应强度大小为

$$\begin{aligned}B&=B_1+B_{ab}+B_{ac}+B_{cb}+B_2\\&=0+\left(-\frac{\mu_0 I}{\pi l}\right)+\frac{\mu_0 I}{2\pi l}+\frac{\mu_0 I}{2\pi l}+\frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{4\pi l}(2-\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{4\pi l}(2-\sqrt{3})\end{aligned}$$

方向：垂直纸面向内。

【方法点击】对于有限长载流直导线，可直接应用公式 $B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$ 求 B，但要注意式中 r 是场点到载流直导线

(PDF压缩器 - 未注册版)

的距离，θ_1 是起点处电流的方向与起点到场点连线间的夹角，θ_2 是终点处电流的方向与终点到场点连线间的夹角。

例 3-2 电流 I 均匀地流过宽为 a 的无限长平面导体薄板，电流沿板长方向流动，求：

（1）在薄板平面内，距板的一边为 b 的 P 点处的磁感应强度，如图 3-2a 所示。

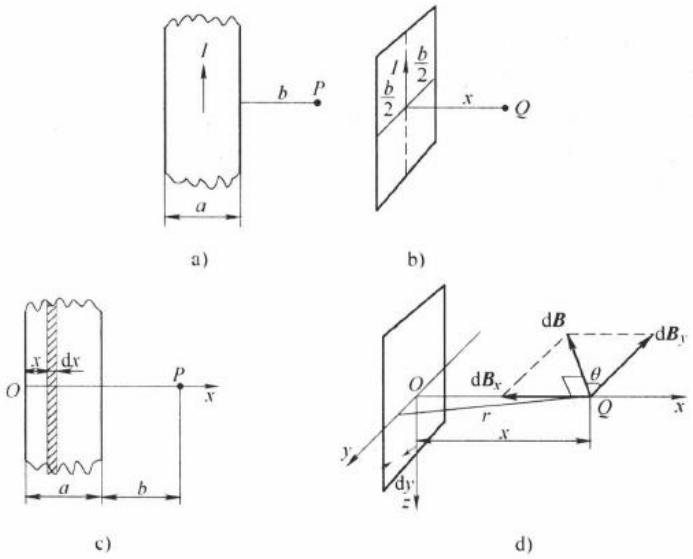


图 3-2

（电子科技大学 2007 年硕士学位研究生入学考试试题）

（2）通过板的中线并与板面垂直的直线上一点 Q 处的磁感应强度，Q 点到板面的距离为 x，如图 3-2b 所示 。

【思路探索】 宽为 a 的无限长载流薄板可看成由许多平行的无限长载流直导线组成，利用无限长载流直导线所激发磁场，由磁场叠加原理可求得 P 点和 Q 点处的磁场。

解：（1）宽为 a 的无限长载流薄板可看成由许多平行的无限长载流直导线组成。建立如图 3-2c 所示坐标系，距原点 O 为 x 处任取一宽度为 $\mathrm{d}x$ 的无限长直导线，其上通过的电流为 $\mathrm{d}I=$

(PDF压缩器 - 未注册版)

$I\mathrm{d}x/a$，$\mathrm{d}I$ 在 P 点激发的磁感应强度大小为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mathrm{d}I}{(a+b-x)}$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 方向垂直纸面向里。因各载流直导线在 P 点激发的磁感应强度方向都相同，所以 P 点的磁感应强度大小为

$$B_P=\int\mathrm{d}B=\int_0^a\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I\mathrm{d}x}{a(a+b-x)}=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\ln\frac{a+b}{b}$$

$\boldsymbol{B}_P$ 方向垂直纸面向里。

（2）取无限长载流薄板中心为坐标原点 O，如图 3-2d 所示。距 O 点为 y 处取宽为 $\mathrm{d}y$ 的无限长直导线，其上通过的电流为 $\mathrm{d}I=I\mathrm{d}y/a$，$\mathrm{d}I$ 在 Q 点激发的磁感应强度大小为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mathrm{d}I}{r}$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 方向垂直 r。$\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 沿 x、y 轴的分量分别为

$$\mathrm{d}B_x=\mathrm{d}B\sin\theta$$

$$\mathrm{d}B_y=\mathrm{d}B\cos\theta$$

由对称性可得

$$B_x=0$$

$$B_Q=\int\mathrm{d}B_y=\int\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mathrm{d}I}{r}\cos\theta=\int_{-a/2}^{a/2}\frac{\mu_0 Ix}{2\pi a}\frac{\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)}=\frac{\mu_0 I}{\pi a}\arctan\frac{a}{2x}$$

其方向沿 y 轴负方向。所以 Q 点处的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}_Q=-B_y\boldsymbol{j}=-\frac{\mu_0 I}{\pi a}\arctan\frac{a}{2x}\boldsymbol{j}$$

即 x 轴上任一点的磁场与该点到薄板的距离有关。

【错解分析】有一种解法是用安培环路定理求 Q 点处的磁感应强度，对于有限宽无限长的载流薄板，在空间所激发的磁场不具有对称性，因此不能用安培环路定理求解。

【拓展思考】如果薄板是无限宽的，Q 点处的磁感应强度如何？

当 $a\to\infty$ 时，$\arctan\frac{a}{2x}=\frac{\pi}{2}$，则有

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$B_Q=\frac{\mu_0 I}{2a}=\frac{1}{2}\mu_0 i$$

提示：无限大的载流导体板产生的磁场是均匀磁场，与考察点的位置无关。磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 与载流平面平行，其方向与板中的电流方向垂直，板两侧的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的方向相反。无限大的导体载流薄板，在空间所激发的磁场具有对称性，因此可用安培环路定理求解。

【方法点击】将电流分割为若干电流元或典型电流（如本题中的无限长载流直导线等），借助于典型电流的磁场公式求出 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 是一种常用方法。建立适当的坐标系，将矢量积分变为标量积分。如果所有电流元产生的 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 方向相同，则矢量积分就可简化为标量积分。

例 3-3 如图 3-3 所示，一段弯曲形状的导线通有电流为 I，放在磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的匀强磁场中，求该导线所受安培力。

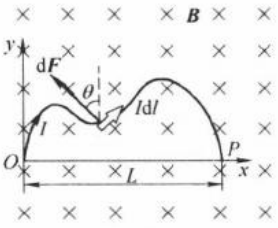


图 3-3

【思路探索】载流导线上各电流元所受安培力大小和方向各不相同，应根据安培定律，然后按照“先分割，后分解，再叠加”的步骤求出导线所受安培力。

解：建立如图 3-3 所示的坐标系，在载流导线上任取一电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 受到的安培力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 的方向如图 3-3 所示。因导线上各电流元所受安培力的方向各不相同，所以需将电流元所受安培力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 沿 x 方向和 y 方向分解为

$$\mathrm{d}F_x=\mathrm{d}F\sin\theta$$

$$\mathrm{d}F_y=\mathrm{d}F\cos\theta$$

整个载流导线在均匀磁场中受到的安培力为

$$F_x=\int\mathrm{d}F_x=BI\int_0^0\mathrm{d}l\sin\theta=BI\int_0^0\mathrm{d}y=0$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$F_y = \int dF_y = BI\int_0^L dl\cos\theta = BI\int_0^L dx = BIL$$

写成矢量形式 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_y=BIL\boldsymbol{j}$

从本例题所得结果可以推断：当导线放在和均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 垂直的平面内，任意形状的平面载流导线在均匀磁场中所受磁场力就等于从起点到终点之间通有相同电流的直导线所受的磁场力。

【拓展思考】当导线放在和均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 平行的平面内，任意形状的平面载流导线在均匀磁场中所受磁场力，还等于从起点到终点之间通有相同电流的直导线所受的磁场力吗？

1. 如图 3-4 所示，有一个半径为 R，流过稳恒电流的四分之一圆弧形载流导线 ab，按图示方式置于匀强磁场 $\boldsymbol{B}$ 中（$\boldsymbol{B}$ 平行于圆弧导线所在平面），则该圆弧形载流导线 ab 所受的安培力为（　　）。

A. $F=IRB$，方向垂直纸面向里

B. $F=IRB$，方向垂直纸面向外

C. $F=\sqrt{2}IRB$，方向向上

D. $F=\sqrt{2}IRB$，方向向下

（电子科技大学 2007 年硕士学位研究生入学考试试题）

答案：B

2. 均匀磁场中有一段载流导线（如图 3-5 中实线所示），电流强度为 I，若外磁场的磁感应强度大小为 B，该段载流导线所受安培力的大小及方向如何？

（北京工业大学 2004 年硕士学位研究生入学考试试题）

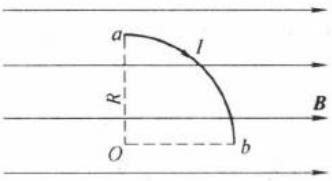


图 3-4

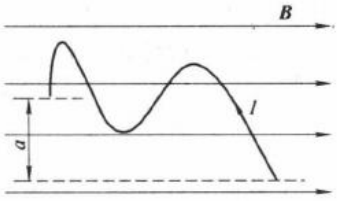


图 3-5

(PDF压缩器 - 未注册版)

答案：在载流导线上任取一电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 受到的安培力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$$

整个载流导线受到的安培力为

$$\boldsymbol{F}=\int_L I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}=I(\int_L \mathrm{d}\boldsymbol{l})\times\boldsymbol{B}=I\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{B}$$

即整个载流导线受到的安培力大小为 $F=IaB$，其方向垂直纸面向里。

提示：当导线放在和均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 平行的平面内时，任意形状的平面载流导线在均匀磁场中所受磁场力不等于从起点到终点之间通有相同电流的直导线所受的磁场力。

可以证明：任意闭合的载流回路在均匀磁场中所受的磁场力为零，与载流回路的方位无关。

【方法点击】只有当载流导线放在和均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 垂直的平面内时，“任意形状的平面载流导线在均匀磁场中所受磁场力，就等于从起点到终点之间通有相同电流的直导线所受的磁场力”这一结论才成立。

例 3-4 半径为 R 的薄圆盘均匀带电，电荷面密度为 σ，若圆盘以角速度 ω 绕通过圆心 O，且垂直于盘面的轴匀速转动，试求：

（1）轴线上离盘心 O 为 x 处的磁感应强度和圆盘的磁矩。

（中国科学技术大学 2004 年硕士学位研究生入学考试试题）

（2）若在垂直圆盘的轴线方向加一磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的均匀磁场，求磁场作用于圆盘力矩的大小。

（吉林大学 2009 年硕士学位研究生入学考试试题）

【思路探索】圆盘转动产生的电流可看成由许多同心的圆电流组成。转动圆盘在轴线上距离盘心 O 为 x 处所产生的磁场，就是所有圆电流在 x 处所产生的磁场叠加。根据磁场叠加原理可求得转动圆盘的磁矩和磁场作用于圆盘的力矩。

解：如图 3-6 所示，设圆盘带正电，且按图示方向转动。在

(PDF压缩器 - 未注册版)

半径为 r 处，取宽度为 $\mathrm{d}r$ 的圆形环带。环带上所带电荷量 $\mathrm{d}q=\sigma\cdot 2\pi r\mathrm{d}r$，当圆盘以角速度 ω 旋转时，环带上所形成的等效圆电流为

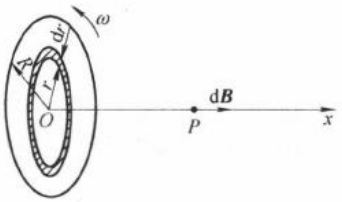


图 3-6

$$\mathrm{d}I=n\mathrm{d}q=\frac{\omega}{2\pi}\sigma\cdot 2\pi r\mathrm{d}r=\sigma\omega r\mathrm{d}r$$

(1) 根据圆电流在轴线上一点产生的磁感应强度公式，$\mathrm{d}I$ 在轴线上的 P 点处激发的磁感应强度大小为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\mathrm{d}I}{2}\frac{r^2}{(r^2+x^2)^{3/2}}$$

由于各圆电流在 P 点处激发的磁感应强度方向都相同，所以整个旋转圆盘在 P 点处产生的磁感应强度大小为

$$B=\int\mathrm{d}B=\int_0^R\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\frac{r^3\mathrm{d}r}{(r^2+x^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\left(\frac{R^2+2x^2}{\sqrt{R^2+x^2}}-2x\right)$$

磁感应强度方向沿 x 轴正方向。

转动圆盘的磁矩等于所有圆电流磁矩的叠加。每个圆电流的磁矩大小为

$$\mathrm{d}m=S\mathrm{d}I=\pi r^2\sigma\omega r\mathrm{d}r$$

由于所有圆电流磁矩的方向都相同，因此转动圆盘的磁矩为

$$m=\int\mathrm{d}m=\int_0^R\pi r^3\sigma\omega\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\pi\sigma\omega R^4$$

磁矩 $\boldsymbol{m}$ 的方向沿 x 轴正方向。

(2) 转动圆盘所受力矩等于所有圆电流所受力矩的叠加。每个圆电流所受力矩大小为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{M}=\mathrm{d}\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$$

由于所有圆电流所受力矩的方向都相同，因此磁场作用于圆盘的力矩大小为

$$M=\int\mathrm{d}M=\int_0^R\pi r^3\sigma\omega B\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\pi\sigma\omega R^4B$$

【方法点击】解这道题借助了圆电流在轴线上一点处所产生

(PDF压缩器 - 未注册版)

的磁感应强度 $\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}\boldsymbol{i}$，并把它作为积分元 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0 \mathrm{d}Ir^2}{2(r^2+x^2)^{3/2}}\boldsymbol{i}$ 对整个圆盘积分。由于每个细圆环电流的磁矩大小不同，每个细圆环电流所受力矩的大小也不同，必须采用微元分割法积分求圆盘的磁矩和所受的力矩。

例 3-5 在半径为 r 的无限长圆柱导体内挖去一个直径为 $\dfrac{r}{2}$ 的圆柱空腔，圆柱空腔的轴线与圆柱导体的轴线 OO' 平行，且圆柱空腔的侧面与 OO' 相切，如图 3-7所示。在圆柱导体的截面上通有均匀分布沿 OO' 向下的电流 I，在距圆柱导体轴线 $3r$ 处有一电子，在轴线 OO' 和空腔轴线所确定的平面内，沿平行于轴线 OO' 方向，以速度 $\boldsymbol{v}$ 向下飞经 P 点，求电子经过 P 点时所受的磁场力。

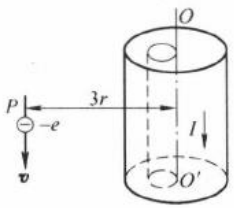


图 3-7

【思路探索】 先利用补偿法使系统恢复轴对称性，然后用安培环路定理求解磁感应强度，再通过磁场叠加原理即可求得空腔载流圆柱导体在 P 处激发的磁感应强度，最后根据洛伦兹力公式求出电子经 P 点时所受的磁场力。

解：带有空腔的载流圆柱导体，可看做实心载流圆柱导体与载有相反方向电流的圆柱空腔所构成，空间任一点的磁场由上述两部分电流产生。

由题意知，圆柱导体中的电流密度为

$$j=\frac{I}{\pi r^2-\pi(r/4)^2}=\frac{16I}{15\pi r^2}$$

设实心载流圆柱导体在 P 处激发的磁感应强度为 $\boldsymbol{B}_1$，以 OO' 为轴线，过 P 点取半径为 $3r$ 的磁感应线作积分回路，由安培环路定理得

$$\oint_l \boldsymbol{B}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=B_1 \cdot 2\pi(3r)=\mu_0 j\pi r^2$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$B_1=\frac{\mu_0 rj}{6}$$

方向垂直于纸面向里。

设载流圆柱空腔在 P 处激发的磁感应强度为 $\boldsymbol{B}_2$，以圆柱空腔轴为轴线，过 P 点取半径为 $\left(3r-\frac{r}{4}\right)$ 的磁感应线作积分回路，由安培环路定理得

$$\oint_l \boldsymbol{B}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = B_2 \cdot 2\pi\left(3r-\frac{r}{4}\right)=\mu_0 j\pi\left(\frac{r}{4}\right)^2$$

$$B_2=\frac{\mu_0 rj}{88}$$

方向垂直于纸面向外。

带有空腔的载流圆柱导体在 P 点激发的磁感应强度为

$$B=B_1-B_2=\frac{41\mu_0 rj}{264}$$

$\boldsymbol{B}$ 的方向垂直于纸面向里。

因为 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{B}$，所以电子经过 P 点时受到的洛伦兹力的大小为

$$F_m=evB=\frac{82\mu_0 Iev}{495\pi r}$$

$\boldsymbol{F}_m$ 的方向向左。

【方法点击】“补偿法”是一种常用的简化运算方法。通过补偿法使系统恢复轴对称性，可用安培环路定理和磁场叠加原理求得空腔中的磁感应强度。

例 3-6 在载有电流 I_1 的长直导线旁，与其共面地放置一长为 a，载有电流 I_2 的直导线 CD，CD 与水平方向成 30°角，导线 C 端与长直导线相距 $\frac{a}{2}$，求导线 CD 受到的安培力。

【思路探索】由于导线 CD 上各点处磁场不同，要在导线 CD 上取一电流元 $I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，先根据安培定律求出电流元 $I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 所受到的安培力，然后积分求导线 CD 受到的安培力。

解：如图 3-8 所示，离长直导线 r 处在 CD 上任取一电流元 $I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，$I_1$ 在 $I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 处产生的磁感应强度大小为

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$B=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

方向垂直纸面向里。

电流元所受安培力大小为

$$\mathrm{d}F=I_2 B\mathrm{d}l=I_2\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\mathrm{d}l$$

方向垂直导线 CD 斜向上。因 $\mathrm{d}l\cos 30^\circ=\mathrm{d}r$，所以

$$\mathrm{d}F=I_2 B\mathrm{d}l=I_2\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\frac{\mathrm{d}r}{\cos 30^\circ}$$

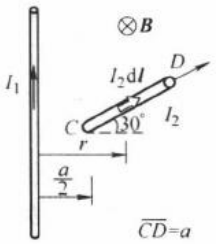


图 3-8

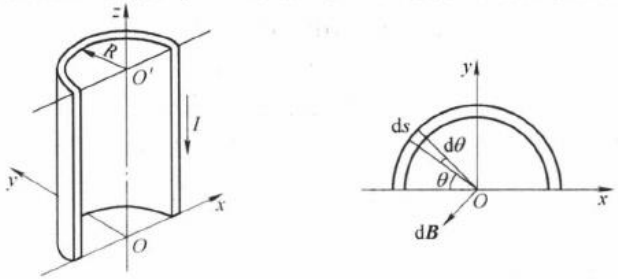
CD 上各电流元受力方向都相同，故 CD 受到的安培力大小为

$$F=\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+a\cos 30^\circ} I_2\frac{\mu_0 I_1}{2\pi\cos 30^\circ}\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\cos 30^\circ}\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+a\cos 30^\circ}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

$$=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\sqrt{3}\pi}\ln(1+\sqrt{3})$$

【方法点击】无限长载流直导线在空间激发的场是非均匀磁场，因此求载流直导线 CD 的受力时，要根据安培定律积分求解。

例 3-7 如图 3-9a 所示，一个半径为 R 的无限长半圆柱面导体，其电流与其轴线上一无限长直导线的电流等值反向，电流 I 在半圆柱面上均匀分布，试求轴线上导线单位长度所受的力。



a) b)

图 3-9

(PDF压缩器 - 未注册版)

（北京航空航天大学 2004 年硕士学位研究生入学考试试题）

【思路探索】载流半圆柱面可看做由许多无限长载流直导线组成。应用无限长载流直导线在空间所产生的磁场公式，根据磁场叠加原理先求出轴线上磁感应强度，然后根据安培定律积分求出轴线上导线单位长度所受的力。

解：载流半圆柱面可看做由许多无限长载流直导线组成。在半圆柱面上取一与轴线平行、宽为 $\mathrm{d}s=R\mathrm{d}\theta$ 的无限长载流窄条，如图 3-9b 所示，其上载有电流 $\mathrm{d}I=\dfrac{I}{\pi R}\mathrm{d}s$，$\mathrm{d}I$ 在轴线上激发的磁感应强度大小为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\mathrm{d}I}{2\pi R}$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的方向如图 3-9b 所示。$\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 沿 x、y 轴的分量为

$$\mathrm{d}B_x=-\mathrm{d}B\sin\theta \qquad \mathrm{d}B_y=-\mathrm{d}B\cos\theta$$

由对称性可知

$$B_y=\int-\mathrm{d}B\cos\theta=0$$

无限长半圆柱面在轴线上激发的磁感应强度大小为

$$B=B_x=\int_0^{\pi}-\mathrm{d}B\sin\theta=\int_0^{\pi}-\frac{\mu_0}{2\pi R}\frac{I}{\pi}\mathrm{d}\theta\cdot\sin\theta=-\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

$\boldsymbol{B}$ 的方向沿 x 轴负方向。

则导线单位长度所受的力

$$\boldsymbol{f}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}l}=\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}l}=\frac{\mu_0 I^2}{\pi^2 R}\boldsymbol{j}$$

方向沿 y 轴正方向，$\boldsymbol{j}$ 为 y 轴方向单位矢量。

【方法点击】正确写出 $\mathrm{d}I$，进一步写出 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 是求解本题的关键。由对称性分析可知，$B_y=0$，只需求出 B_x 即可。对于有些题目，进行对称性分析可使计算简化。

【拓展思考】若将另一无限长直线（通有大小、方向与半圆柱面相同的电流 I）代替半圆柱面，产生同样的作用力，该导线应放在何处？

(PDF压缩器 - 未注册版)

（郑州大学 2008 年硕士学位研究生入学考试试题）

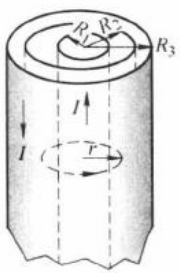
提示：设导线距轴线距离为 x，则其在轴线处产生的磁感应强度满足

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi x}=\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

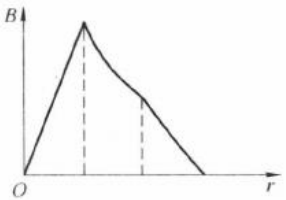
解得

$$x=\frac{\pi}{2}R$$

例 3-8 有一同轴电缆，其尺寸如图 3-10a 所示。两导体中的电流均为 I，但电流的流向相反，导体的磁性可不考虑。试计算以下各处的磁感应强度。



a)



b)

图 3-10

(1) $r<R_1$；(2) $R_1<r<R_2$；(3) $R_2<r<R_3$；(4) $r>R_3$。画出 B-r 曲线。

【思路探索】 由于电流分布呈轴对称，因此同轴电缆的磁场分布具有轴对称性。在不同的区域分别应用安培环路定理，求出磁场的分布。

解：取半径为 r 的磁感线作积分环路 L，由安培环路定理 $\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\sum_i I_i$ 得

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=B\cdot 2\pi r=\mu_0\sum_i I_i$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

(1) 当 $r < R_1$ 时，$\sum_i I_i = \frac{I}{\pi R_1^2}\pi r^2 = \frac{Ir^2}{R_1^2}$，则

$$B_1 \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{Ir^2}{R_1^2}, \quad B_1 = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi R_1^2}$$

(2) 当 $R_1 < r < R_2$ 时，$\sum_i I_i = I$，则

$$B_2 \cdot 2\pi r = \mu_0 I, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

(3) 当 $R_2 < r < R_3$ 时，$\sum_i I_i = I - \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)}\pi(r^2 - R_2^2)$，则

$$B_3 \cdot 2\pi r = \mu_0\left[I - \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)}\pi(r^2 - R_2^2)\right]$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

(4) 当 $r > R_3$ 时，$\sum_i I_i = 0$，则

$$B_4 \cdot 2\pi r = 0, \quad B_4 = 0$$

磁感应强度的分布曲线（B-r）如图 3-10b 所示。

【方法点击】 应用磁场的安培环路定理时，正确求出被环路包围的电流的代数和 $\sum_i I_i$ 是解题的关键。

(PDF压缩器 - 未注册版)

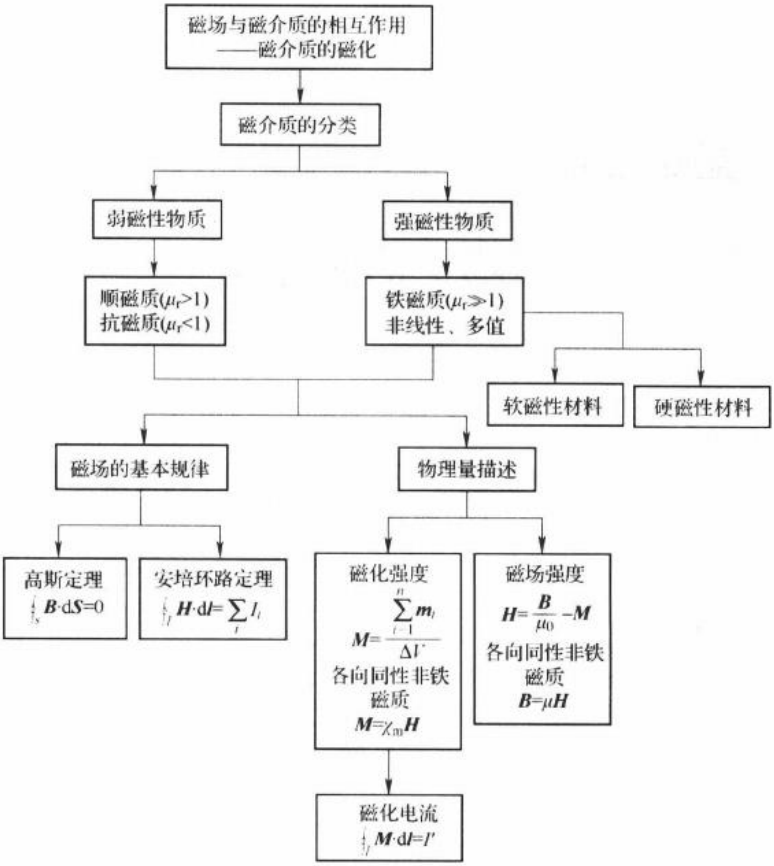
第四章

磁场中的磁介质

(PDF压缩器 - 未注册版)

一、内容导读

【知识结构】



(PDF压缩器 - 未注册版)

【内容要点】

1. 磁介质中的磁场

名 称	内 容	说 明
磁介质中的磁场	$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}'$	$\boldsymbol{B}'$为磁化电流产生的附加场，$\boldsymbol{B}_0$为外磁场

2. 磁化强度

名 称	内 容	说 明
磁化强度 $\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{M}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{m}_i}{\Delta V}$ 单位体积内所有分子磁矩的矢量和	描述磁介质的磁化状态而引入的物理量

3. 磁化电流

名 称	内 容	说 明
磁化电流 I'	$\oint_l \boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=I'$ 通过磁介质内任一面积的磁化电流等于磁化强度沿该面周界 l 的线积分，即磁化强度的环流	磁介质在外磁场中表现出来的附加磁感应强度 $\boldsymbol{B}'$正是磁化电流 I'产生的

4. 磁场强度

名 称	内 容	说 明
磁场强度 $\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{H}=\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}$ 对于各向同性的非铁磁质 $\boldsymbol{M}=\chi_m\boldsymbol{H}$ $\boldsymbol{H}=\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu}$	$\boldsymbol{H}$是为了简化磁介质中磁化电流受磁场作用的问题而引入描述磁场的辅助物理量，$\boldsymbol{B}$是才是描述磁场性质的基本物理量

注：顺磁质 $\chi_m>0$，$\boldsymbol{H}$与$\boldsymbol{M}$同向；抗磁质 $\chi_m<0$，$\boldsymbol{H}$与$\boldsymbol{M}$反向。不论顺磁质还是抗磁质 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ 总是成立，即不论顺磁质还是抗磁质 $\boldsymbol{H}$与$\boldsymbol{B}$总是同向。

5. 磁介质中的高斯定理

名 称	内 容	说 明
磁介质中的高斯定理	$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$	通过任意闭合曲面的磁通量恒等于零，反映了有介质时稳恒磁场仍是有旋场

(PDF压缩器 - 未注册版)

6. 磁介质中的安培环路定理

名　称	内　容	说　明
磁介质中的安培环路定理	$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum_i I_i$	对具有对称性的磁场，可应用磁介质中的安培环路定理先求解 $\boldsymbol{H}$，然后根据 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ 求 $\boldsymbol{B}$

7. 铁磁质

名　称	内　容	说　明
铁磁质的磁性	铁磁质具有明显而特殊的磁化规律，它们的相对磁导率 μ_r 比较大，而且随磁场强弱而发生变化；铁磁质在反复磁化时要发热，引起能量损耗，称为磁滞损耗；铁磁质中存在着磁滞现象，要退掉铁磁质中的剩磁需要矫顽力。正是基于这些特征，铁磁质成为最重要的磁介质并得到广泛应用	硬磁性材料矫顽力大；软磁性材料矫顽力小

二、问题释疑

4-1 为什么在讨论静电场中的电介质时，把电介质分子看做电偶极子模型？而在讨论稳恒磁场中的磁介质时，把磁介质分子看成分子电流模型？

【答】静电场的基本性质之一就是电场对处在场中的电荷有力的作用。电介质是电阻率很大、导电能力很差的物质，即绝缘体。在讨论电介质与静电场的相互作用时，需将电介质分子看成是某种形式的带电模型。一方面，静电场对这种带电模型有作用力，从而使这种带电模型处于一种特殊的状态。另一方面，处于特殊状态的这种带电模型能反作用于静电场，使静电场的空间分布发生改变。

根据物质的电结构理论，电介质分子中的电子被原子核紧紧束缚，不能自由移动，但在外电场的作用下，这些电子可在分子大小的范围内发生微观的位移，达到静电平衡后，介质表面或介质内部出现极化电荷，极化电荷产生附加电场，对原来的电场产生影响。当场点与分子的距离远大于分子本身的线度时，可认为

(PDF压缩器 - 未注册版)

分子中所有正电荷集中一点，称为正电荷的重心；分子中所有负电荷集中一点，称为负电荷的重心。电介质分子在远处空间激发的电场可以近似采用“重心模型”计算，即近似看做是相距很近的正负电荷各自激发电场的叠加。将这样两个重心的正负电荷组成的带电系统看做一个电偶极子模型。

同理，稳恒磁场的基本性质之一就是对其中的电流有力的作用。磁介质是指在磁场作用下能发生变化并反过来影响原磁场的物质。在讨论磁介质与稳恒磁场的相互作用时，根据物质的电结构理论，应着重分析带电粒子在其中的运动情况，如核外电子绕核的轨道运动、电子的自旋运动以及原子核的自旋运动等，因磁介质发生磁化的宏观特征在微观上是与原子和分子的磁矩相联系的。可见，在磁介质分子中存在着无数等效的环形电流，叫做分子电流，其磁矩叫做分子磁矩。无外磁场作用时，大量分子磁矩方向杂乱无章，宏观上介质并不显示磁性。当磁介质处在外磁场中时，磁场对分子磁矩有力的作用，使分子磁矩有转向外磁场的趋势。磁介质被磁化，出现磁化电流，产生附加磁场，并反作用于外磁场，使外磁场的空间分布发生改变。

4-2 由传导电流激发的磁场中存在有磁介质时，磁场仅由传导电流产生吗？

【答】 此时磁场不仅由自由电流产生，还应考虑磁介质在磁场中要发生磁化，产生磁化电流。磁化电流也要激发磁场，所以磁场是由传导电流（又称自由电流）和介质中的磁化电流共同激发产生。

4-3 磁介质是如何分类的？顺磁质、抗磁质和铁磁质的磁化过程有何不同？

【答】 按照磁化的不同宏观性质，可把磁介质分为三类：顺磁质、抗磁质和铁磁质。顺磁质是指以这种磁介质为螺线管磁心，测得的管内磁感应强度大于在无铁心真空或空气时测得的磁感应强度；抗磁质是指以这种磁介质为螺线管磁心，测得的管内磁感应强度小于在无铁心真空或空气时测得的磁感应强度；铁磁

(PDF压缩器 - 未注册版)

质是指以这种磁介质为螺线管磁心，测得的管内磁感应强度远大于在无铁心真空或空气时测得的磁感应强度。

磁介质发生的宏观特征在微观上是与原子和分子的磁矩相联系。

顺磁质和抗磁质的分子结构是不同的，因此它们对磁场的影响存在差异。顺磁质分子的固有分子磁矩 $\boldsymbol{m}\neq 0$，而抗磁质分子的固有分子磁矩 $\boldsymbol{m}=0$，在外磁场作用下，无论是顺磁质还是抗磁质都要产生附加磁矩，而附加磁矩 $\Delta\boldsymbol{m}$ 的方向总是与外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 方向相反。

对于顺磁质来说，$\boldsymbol{m}\neq 0$，但 $\Delta\boldsymbol{m}\ll\boldsymbol{m}$，所以 $\Delta\boldsymbol{m}$ 可忽略。在外磁场作用下，所有分子磁矩 $\boldsymbol{m}$ 都力图转到外磁场方向，这样附加磁感应强度 $\boldsymbol{B}'$ 的方向就与 $\boldsymbol{B}_0$ 相同，从而使磁介质中磁感应强度 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}'$ 有所增加，所以顺磁质内的总磁感应强度大于外磁场的磁感应强度。

对于抗磁质来说，$\boldsymbol{m}=0$，所以 $\Delta\boldsymbol{m}$ 不能忽略。在外磁场作用下，$\Delta\boldsymbol{m}$ 的方向总是与 $\boldsymbol{B}_0$ 相反，这样附加磁感应强度 $\boldsymbol{B}'$ 的方向就与 $\boldsymbol{B}_0$ 相反，从而使磁介质中磁感应强度 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}'$ 有所减小，所以抗磁质内的总磁感应强度小于外磁场的磁感应强度。

对于铁磁质来说，在低于一定温度时，内部存在许多自发磁化的小区域，称为磁畴。磁畴具有磁有序结构，同一磁畴内分子磁矩同向。无外磁场时不同磁畴的取向作无规分布，分子磁矩矢量和为零，宏观上不显示磁性；在外磁场作用下磁畴的磁矩方向转向沿外磁场方向的取向排列。宏观体积内的总磁矩不为零，内部可产生与外磁场方向一致的、比外磁场要强得多的附加磁场。所以铁磁质内的总磁感应强度远大于外磁场的磁感应强度。

4-4 有人说，“对于顺磁质，$\boldsymbol{H}$ 矢量与 $\boldsymbol{B}$ 矢量同向；对于抗磁质，$\boldsymbol{H}$ 矢量与 $\boldsymbol{B}$ 矢量则相反”。这种说法对吗？

【答】 不对。

顺磁质 $\chi_m>0$，$\mu_r>1$；抗磁质 $\chi_m<0$，$\mu_r<1$，但 $\mu_r>0$。无论是顺磁质还是抗磁质，都有 $|\chi_m|<1$，$\mu_r=1+\chi_m$，及 $\mu=$

(PDF压缩器 - 未注册版)

$\mu_0\mu_r$。由 $\boldsymbol{H}=\chi_m\boldsymbol{M}$ 可知，顺磁质 $\boldsymbol{H}$ 矢量与 $\boldsymbol{M}$ 矢量是同向的，抗磁质 $\boldsymbol{H}$ 矢量与 $\boldsymbol{M}$ 矢量是反向的。由 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ 可知，无论是顺磁质还是抗磁质，$\boldsymbol{H}$ 矢量与 $\boldsymbol{B}$ 矢量总是同向的。

4-5 讨论放在磁场中的介质磁化并计算磁感应强度时，为什么引入磁场强度矢量 $\boldsymbol{H}$?

【答】 磁介质在外磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 的作用下，引起磁介质的磁化，产生磁化电流，而磁化电流在空间产生附加磁场 $\boldsymbol{B}'$，介质中任一点的总磁感应强度 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}'$。因此要求有磁介质存在时各点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，就要求出磁化电流在空间产生附加磁场 $\boldsymbol{B}'$，那就必须知道磁化电流的分布。磁化电流的分布依赖于磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 和磁介质的形状，而磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 又依赖于总磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，这样相互依存的关系给求解 $\boldsymbol{B}$ 造成困难。为此引入新的辅助物理量——磁场强度 $\boldsymbol{H}$，磁场强度的定义式

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}$$

对于各向同性的非铁磁质，磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 成正比，即

$$\boldsymbol{M}=\chi_m\boldsymbol{H}$$

则有

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu}$$

也就是说，对于各向同性的非铁磁质，空间各点的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 与磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 成正比，且方向相同。

这样，对于某些具有特殊对称性的磁场，可应用磁介质中的安培环路定理 $\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\sum_i I_i$ 首先求出 $\boldsymbol{H}$ 的分布，然后根据 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ 求出磁介质中 $\boldsymbol{B}$ 的分布。

但是要注意，由磁介质中的安培环路定理 $\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\sum_i I_i$ 知，磁场强度的环流只与传导电流有关，与磁化电流无关，这并不说明磁场强度本身与传导电流无关。

4-6 铁磁性材料如何分类的？电磁铁和永久磁铁在特性和应

(PDF压缩器 - 未注册版)

用上有哪些不同?

【答】在技术上，根据矫顽力的大小把铁磁性材料分为软磁材料和硬磁材料两类。矫顽力很小的铁磁性材料称为软磁材料，一旦通以电流被磁化以后，如果再切断电流能尽快消除磁性；矫顽力较大的铁磁性材料称为硬磁材料，一旦通以电流被磁化以后，能比较长久地保持磁性。

电磁铁是由矫顽力很小的软磁性材料制作而成的，电磁铁的磁场是通过电磁铁线圈的电流作用，使铁心磁化获得强磁场。因此，通过调节、控制电流就可达到调节和控制磁场的目的。电磁铁广泛应用在需要强磁场、可变磁场的场合，如磁力起重机，继电器电路中等。

永久磁铁是由矫顽力较大的硬磁性材料制作而成的，它的磁场是由剩余磁化强度产生的，一般情况下磁场不强，且为恒定值。根据这一特点，它广泛应用在需要不强的稳恒磁场的场合，如各种电表、扬声器、微音器、拾音器、耳机、电话机、录音机等。

4-7 在工厂里搬运烧到赤红的钢锭，为什么不能用电磁铁的起重机?

【答】电磁铁的铁心是铁磁质，铁磁质的磁性主要来源于磁畴的磁矩方向沿外磁场方向的取向排列。当温度升高时，各磁畴的磁矩方向易趋向混乱而使铁磁质的磁性减小，因而铁磁质的磁导率会明显依赖于温度。当铁磁质的温度超过居里点时，其磁性会完全消失。一般磁铁被加热到 800℃就会失去磁性，所以不能用电磁铁起重机搬运烧到赤红的钢锭。

4-8 如果把介质放在磁场中的磁化看成磁场对介质的相互作用，那么这样的相互作用与介质放在电场中的极化的相互作用之间有何不同?

【答】磁介质在磁场中被磁化，磁化后的介质又影响原来的磁场的分布。这种磁介质和磁场相互作用的规律与电介质和电场相互作用的情况相似，因此，两者研究的思路和方法可以进行

(PDF压缩器 - 未注册版)

类比。

磁介质和电介质比较

磁 介 质	电 介 质
分子磁矩 $\boldsymbol{m}=I S \boldsymbol{e}_n$	分子电偶极矩 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$
描述磁化状态量：磁化强度 $\boldsymbol{M}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{m}_i}{\Delta V}$	描述极化状态量：极化强度 $\boldsymbol{P}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{p}_i}{\Delta V}$
磁化电流 $\oint_l \boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=I'$ 磁化电流与磁化强度的关系 $\boldsymbol{j}_s=\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{e}_n$	极化电荷 $\oint_S \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\sum_i q'_i$ 极化电荷与极化强度的关系 $\sigma'=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_n$
总磁场 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}'$	总电场 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}'$
磁介质与外磁场相互作用过程图 $\boldsymbol{B}_0\rightarrow\boldsymbol{M}\rightarrow I'(j_s)\rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}'$	电介质与外电场相互作用过程图 $\boldsymbol{E}_0\rightarrow\boldsymbol{P}\rightarrow q'(\sigma')\rightarrow\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}'$
$\boldsymbol{H}$ 的定义 $\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{D}$ 的定义 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$
环路定理 $\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum_i I_i$	高斯定理 $\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum_i q_i$
磁化规律： 对于各向同性的非铁磁质 $\boldsymbol{M}=\chi_m\boldsymbol{H}$ $\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu}$	极化规律： 对于各向同性电介质 $\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\chi_e\boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$
磁导率： $\mu_r=1+\chi_m$ （反映了磁介质对磁场的影响） $\mu=\mu_0\mu_r$	电容率（介电常数）： $\varepsilon_r=1+\chi_e$ （反映了电介质对电场的影响） $\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$

另外，磁介质的磁化过程及其规律要比电介质复杂：① 源于电流产生的磁场图像不像电荷产生电场那样简单；② 源于磁介质的分类比电介质的分类复杂，且在实际中广泛使用的铁磁质的磁化规律就更复杂；③ 在处理问题的手段上，因为解释磁介质的磁化机理时我们使用的是分子电流观点，具体解决问题时，会遇到一些困难，处理起来比较麻烦。

(PDF压缩器 - 未注册版)

三、典型题析

例 4-1 一绝对磁导率为 μ_1 的无限长圆柱形导线，半径为 R_1，其中均匀通有电流 I，导线外包一层绝对磁导率为 μ_2 的圆筒形不导电磁介质，外半径为 R_2，如图 4-1 所示。试求：（1）磁场强度和磁感应强度的分布；（2）半径为 R_1 及半径为 R_2 的表面上磁化电流密度是多少？

（北京师范大学 2006 年硕士学位研究生入学考试试题）

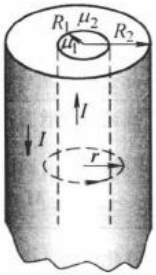


图 4-1

【思路探索】 可先根据有磁介质时的安培环路定理求出 $\boldsymbol{H}$，然后利用 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ 的关系求出 $\boldsymbol{B}$，再根据 $\boldsymbol{H}=\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}$。求出 $\boldsymbol{M}$，最后由 $\boldsymbol{j}=\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{e}_n$ 求出半径为 R_1 及半径为 R_2 的表面上磁化电流密度。

解：（1）无限长的载流导线所激发的磁场是轴对称分布的，而磁介质亦呈轴对称分布，因而不会改变场的这种对称分布。

当 $r<R_1$ 时，由磁介质中的安培环路定理可得

$$\oint_l \boldsymbol{H}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = H_1 \int_0^{2\pi r} \mathrm{d}l = I\frac{\pi r^2}{\pi R_1^2}$$

则有

$$H_1 = \frac{Ir}{2\pi R_1^2}$$

当 $r>R_1$ 时，由磁介质中的安培环路定理可得

$$\oint_l \boldsymbol{H}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = H_2 \int_0^{2\pi r} \mathrm{d}l = I$$

则有

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r}$$

由 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ 得

$$B_1 = \mu_1 H_1 = \frac{\mu_1}{2\pi}\frac{Ir}{R_1^2} \qquad (0<r<R_1)$$

$$B_2 = \mu_2 H_2 = \frac{\mu_2 I}{2\pi r} \qquad (R_1<r<R_2)$$

$$B_3 = \mu_0 H_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (r>R_2)$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

(2) 由 $\boldsymbol{H}=\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}$ 得

$$M_1=\frac{B_1}{\mu_0}-H_1=\frac{Ir}{2\pi R_1^2}\left(\frac{\mu_1}{\mu_0}-1\right) \qquad (0<r<R_1)$$

$$M_2=\frac{B_2}{\mu_0}-H_2=\frac{I}{2\pi r}\left(\frac{\mu_2}{\mu_0}-1\right) \qquad (R_1<r<R_2)$$

$$M_3=0 \qquad (r>R_2)$$

由 $\boldsymbol{j}_s=\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{e}_n$ 得

在半径为 R_1 的表面上磁化电流密度为

$$j_{s1}=M_2\mid_{r=R_1}-M_1\mid_{r=R_1}=\frac{I}{2\pi R_1}\left(\frac{\mu_1}{\mu_0}-1\right)-\frac{I}{2\pi R_1}\left(\frac{\mu_2}{\mu_0}-1\right)$$

$$=\frac{I}{2\pi R_1\mu_0}(\mu_1-\mu_2)$$

在半径为 R_2 的表面上磁化电流密度为

$$j_{s2}=M_2\mid_{r=R_2}-M_3\mid_{r=R_2}=\frac{I}{2\pi R_2}\left(\frac{\mu_2}{\mu_0}-1\right)$$

【错解分析】 有一种解法得出了如下结果：

$$H_1=\frac{I}{2\pi r},\quad B_1=\mu_1 H_1=\frac{\mu_1 I}{2\pi r} \qquad (0<r<R_1)$$

$$H_2=\frac{I}{2\pi r},\quad B_2=\mu_2 H_2=\frac{\mu_2 I}{2\pi r} \qquad (R_1<r<R_2)$$

$$H_3=\frac{I}{2\pi r},\quad B_3=\mu_0 H_3=\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (r>R_2)$$

显然，这个解法得出的导线内磁场的结论是错误的。按照题目给出的条件“导线上均匀通有电流 I”，在导线内部应用安培环路定理时，导线内部被环路包围的电流只是 I 的一部分，电流沿轴线流动并均匀分布在导线的横截面上，因此这部分电流应为 $\sum i=\dfrac{\pi r^2}{\pi R_1^2}I$。如果把内部环路包围的电流看成是 I，就会得出错误的结果。

【拓展思考】 本题已经求出了磁场强度、磁感应强度以及磁化电流密度，那又如何求磁介质表面上的磁化电流？

(PDF压缩器 - 未注册版)

提示：根据$\oint_l \boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=I'$或$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\left(\sum_i I_i+I'\right)$可求得磁介质表面上磁化电流为$I'|_{r=R_1}=\dfrac{I}{\mu_0}(\mu_1-\mu_2)$和$I'|_{r=R_2}=\left(\dfrac{\mu_2}{\mu_0}-1\right)I$。

【方法点击】有磁介质时的安培环路定理的应用，关键是正确计算所取积分回路所包围的传导电流。对抗磁质（$\mu_r<1$），在磁介质内表面（$r=R_1$），磁化电流与内导体传导电流方向相反。对顺磁质（$\mu_r>1$），在磁介质内表面（$r=R_1$），磁化电流与内导体传导电流方向相同。

例 4-2 证明：在均匀磁介质内部没有传导电流的地方必定不存在磁化电流。

（山东大学 1997 年硕士学位研究生入学考试试题）

【思路探索】根据有磁介质时的安培环路定理证明。

证明：根据有磁介质时的安培环路定理$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum_i I_i$得

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S \boldsymbol{j}_0\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad ①$$

有磁介质时的安培环路定理也可改写成

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\left(\sum_i I_i+I'\right)$$

由此得

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\int_S (\boldsymbol{j}_0+\boldsymbol{j}')\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad ②$$

因$\boldsymbol{B}=\mu_0\mu_r\boldsymbol{H}$，由式②得

$$\mu_r\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S (\boldsymbol{j}_0+\boldsymbol{j}')\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad ③$$

由式①和式③得

$$\mu_r\boldsymbol{j}_0=\boldsymbol{j}_0+\boldsymbol{j}'$$

即

$$\boldsymbol{j}'=\boldsymbol{j}_0(\mu_r-1)$$

故均匀磁介质内部若没有传导电流，必定不存在磁化电流。

【方法点击】正确理解有磁介质时的安培环路定理所包含的物理内涵，$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum_i I_i$和$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\left(\sum_i I_i+I'\right)$两种表示形式是等

(PDF压缩器 - 未注册版)

价的，有磁介质时的安培环路定理也可以写成$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu\sum_i I'$的形式。

例 4-3 如图 4-2 所示，在实验室，为了测试某种磁性材料的相对磁导率μ_r，常将这种材料做成截面为矩形的环形样品，然后用漆包线绕成一螺绕环。设圆环的平均周长为 0.10m，横截面积为$0.50\times10^{-4}\,\mathrm{m}^2$，线圈的匝数为 200 匝。当线圈通以 0.10A 的电流时，测得穿过圆环横截面积的磁通为$6.0\times10^{-5}\,\mathrm{Wb}$，求此时该材料的相对磁导率$\mu_r$。

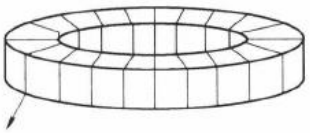


图 4-2

【思路探索】 可先根据有磁介质时的安培环路定理求出 $\boldsymbol{H}$，然后利用$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$的关系求出$\boldsymbol{B}$，再根据$\Phi=\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$即可求出相对磁导率$\mu_r$。

解：由磁介质中的安培环路定理$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum_i I_i$得螺绕环中磁介质内部的磁感应强度大小为

$$B=\mu nI=\mu_0\mu_r\frac{N}{L}I$$

由题意可知，穿过圆环横截面积的磁通量$\Phi=BS$，则有$B=\dfrac{\Phi}{S}$，所以

$$\frac{\Phi}{S}=\mu_0\mu_r\frac{N}{L}I$$

由此得该材料的相对磁导率为

$$\mu_r=\frac{\Phi L}{\mu_0 NIS}=4.78\times10^3$$

【方法点击】 本题属于有磁介质时的安培环路定理的应用。螺绕环截面直径远远小于圆环的平均周长时，螺绕环中磁场可近似认为是均匀场。

例 4-4 如图 4-3 所示，是一沿轴向磁化的介质棒。试用磁场

(PDF压缩器 - 未注册版)

的安培环路定理和高斯定理证明：

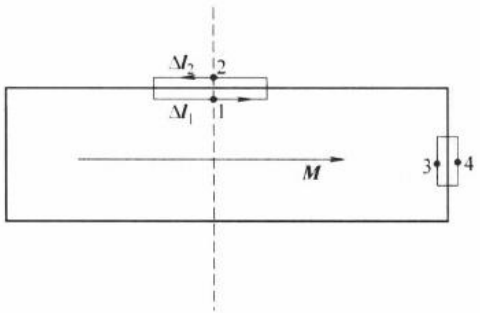


图 4-3

（1）介质棒中垂面的上侧表面内外两点 1 和 2 的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 相等。这两点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 是否相等？

（2）介质棒轴线上端面附近内外两点 3 和 4 的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 相等。这两点的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 是否相等？

【思路探索】根据有磁介质时的安培环路定理和高斯定理证明，关键是选取合适的积分路径和作合适的高斯面。

证明：（1）从对称性分析可知，在中垂面附近，$\boldsymbol{H}$ 的方向是平行于轴线的。过 1 和 2 两点做一扁平矩形环路，如图 4-3 所示，矩形的长度比宽度大得多，根据磁介质中的安培环路定理 $\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum_i I_i$ 有

$$\boldsymbol{H}_1\cdot\Delta\boldsymbol{l}_1+\boldsymbol{H}_2\cdot\Delta\boldsymbol{l}_2=0$$

因为 $$\Delta\boldsymbol{l}_1=-\Delta\boldsymbol{l}_2$$

所以有 $$\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{H}_2$$

即介质棒中垂面的上侧表面内外两点 1 和 2 的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 相等（这提供了一种测量磁棒内部磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的方法）。

再根据 $\boldsymbol{H}=\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}$ 可得

$$\boldsymbol{B}_1=\mu_0\boldsymbol{H}_1+\mu_0\boldsymbol{M}$$

$$\boldsymbol{B}_2=\mu_0\boldsymbol{H}_2=\mu_0\boldsymbol{H}_1$$

可见 $$\boldsymbol{B}_1\neq\boldsymbol{B}_2$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

即介质棒中垂面的上侧表面内外两点 1 和 2 的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 不相等。

(2) 同样从对称性分析可知，在轴线附近的磁场是沿轴线方向。过端面内外的 3 和 4 两点做一扁盒状高斯面，其高度远小于底面半径，根据磁场的高斯定理 $\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$ 有

$$\boldsymbol{B}_3\cdot\Delta\boldsymbol{S}_3+\boldsymbol{B}_4\cdot\Delta\boldsymbol{S}_4=0$$

因为

$$\Delta\boldsymbol{S}_3=-\Delta\boldsymbol{S}_4$$

所以有

$$\boldsymbol{B}_3=\boldsymbol{B}_4$$

即介质棒轴线上端面附近内外 3 和 4 两点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 相等。

再根据 $\boldsymbol{H}=\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}$ 可得

$$\boldsymbol{H}_3=\frac{\boldsymbol{B}_3}{\mu_0}-\boldsymbol{M}$$

$$\boldsymbol{H}_4=\frac{\boldsymbol{B}_4}{\mu_0}=\frac{\boldsymbol{B}_3}{\mu_0}$$

可见

$$\boldsymbol{H}_3\neq\boldsymbol{H}_4$$

即介质棒轴线上端面附近内外 3 和 4 两点的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 不相等。

【方法点击】 磁场的安培环路定理的意义不仅仅是在某些情况下可以用来求磁场的分布，它的根本意义在于它和高斯定理一起能够客观、全面地反映磁场的性质。

(PDF压缩器 - 未注册版)

(PDF压缩器 - 未注册版)

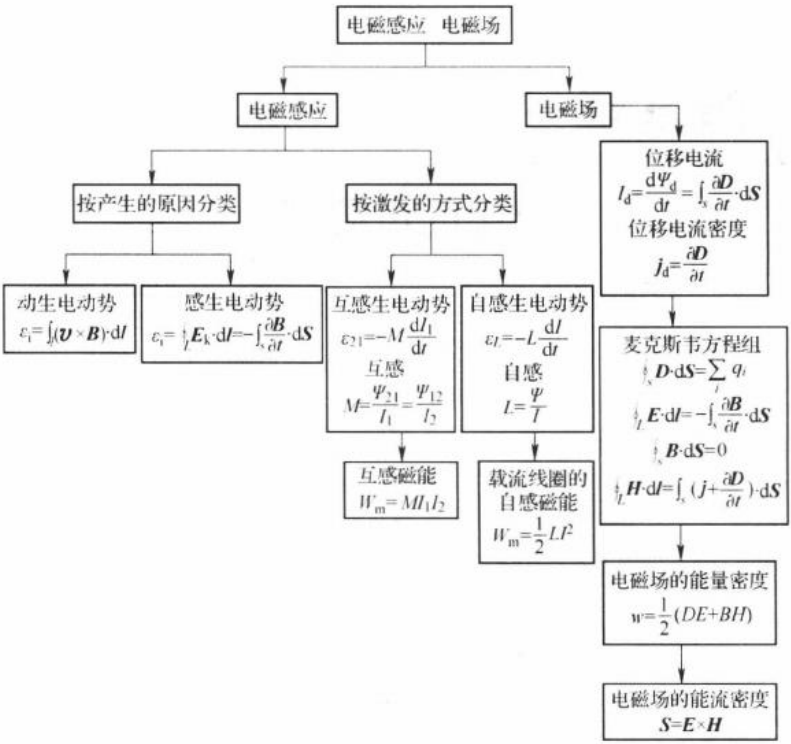
第五章

变化的电磁场

(PDF压缩器 - 未注册版)

一、内容导读

【知识结构】



(PDF压缩器 - 未注册版)

【内容要点】

1. 法拉第电磁感应定律

名 称	内 容	说 明
感应电动势	$\varepsilon_i=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$	负号为楞次定律在法拉第电磁感应定律中的数学表示
感应电流	$I_i=\dfrac{\varepsilon_i}{R}=-\dfrac{1}{R}\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$	
感应电量	$q=\int_{t_1}^{t_2}I\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{R}\int_{\Psi_1}^{\Psi_2}\dfrac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$ $=\dfrac{1}{R}\lvert\Psi_1-\Psi_2\rvert$	感应电量仅与回路中磁通量的变化量成正比，而与磁通量的变化快慢无关

2. 动生电动势

名 称	内 容	说 明
动生电动势	$\varepsilon_i=\int_l(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$	洛伦兹力是产生动生电动势的根本原因
计算动生电动势的一般步骤	① 运动导体上任选有向线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向可任意选定，并确定 $(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ 的方向。 ② 写出 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 上产生的动生电动势 $\mathrm{d}\varepsilon_i=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ ③ 求运动导体上产生的动生电动势 $\varepsilon_i=\int_l(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$	若 $\varepsilon_i>0$，ε_i 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 方向相同；若 $\varepsilon_i<0$，ε_i 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 方向相反

3. 感生电动势感生电场

名 称	内 容	说 明
感生电动势	$\varepsilon_i=\oint_L\boldsymbol{E}_k\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_S\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$	感生电场力是产生感生电动势的根本原因
感生电场	感生电场的电场线闭合，其环流不为零，感生电场是非保守力场	只要存在变化的磁场，整个空间（不管该处是否存在磁场，是否有导体或介质）就有感生电场

(PDF压缩器 - 未注册版)

4. 自感和互感

名　称	内　容	说　明
自感电动势	$\varepsilon_L=-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$	负号表示自感电动势将反抗回路中电流的变化
自感（自感系数）	$L=\frac{\Psi}{I}$	自感 L 与回路的形状、大小、位置、匝数以及周围磁介质（设介质是非铁磁性的）及其分布有关，而与回路中的电流无关
互感电动势	$\varepsilon_{21}=-M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$ $\varepsilon_{12}=-M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$	负号表示，在一个回路中所引起的互感电动势，要反抗另一个回路中电流的变化
互感（互感系数）	$M=\frac{\Psi_{21}}{I_1}=\frac{\Psi_{12}}{I_2}$	互感 M 与两个回路的大小、形状、匝数、相对位置以及周围的磁介质有关，而与回路中的电流无关

5. 磁场的能量

名　称	内　容	说　明
载流线圈的自感磁能	$W_\mathrm{m}=\frac{1}{2}LI^2$	通过计算磁场的能量就可以求得回路的自感，这是计算自感很重要的一种方法
磁场的能量密度	$w_\mathrm{m}=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}=\frac{1}{2}\mu H^2=\frac{1}{2}BH$	单位体积内磁场的能量
磁场的能量	$W_\mathrm{m}=\int_V w_\mathrm{m}\mathrm{d}V$	

6. 位移电流

名　称	内　容	说　明
位移电流	$I_\mathrm{d}=\frac{\mathrm{d}\Psi_\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\int_S\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$	电位移通量对时间的变化率等效于一种电流，称为位移电流
位移电流密度	$\boldsymbol{j}_\mathrm{d}=\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$	电位移 $\boldsymbol{D}$ 对时间的变化率，称为位移电流密度

(PDF压缩器 - 未注册版)

（续）

名 称	内 容	说 明
全电流安培环路定理	$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_S\left(\boldsymbol{j}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$	变化的电场将在周围空间激发磁场

7. 麦克斯韦电磁场方程组的积分形式

名 称	内 容	说 明
麦克斯韦方程组	$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\sum_i q_i$ $\oint_L \boldsymbol{E}_k\cdot d\boldsymbol{l}=-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$ $\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0$ $\oint_L \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_S\left(\boldsymbol{j}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$	变化的磁场可以激发涡旋电场，变化的电场可以激发涡旋磁场，变化的磁场和变化的电场相互依存、相互激发组成一个统一的电磁场

8. 电磁场的能量

名 称	内 容	说 明
电磁场的能量密度	$w=\frac{1}{2}(DE+BH)$	电磁场的能量密度就等于电场的能量密度和磁场的能量密度之和
电磁场的能量	$W=\int_V w\mathrm{d}V$	
电磁场的能流密度（坡印廷矢量）	$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 单位时间内通过垂直能量传播方向的单位面积的能量	能流密度方向与电磁波传播方向相同

二、问题释疑

5-1 在电磁感应定律 $\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ 中，负号的意义是什么？你是如何根据负号来确定感应电动势的方向？

【答】 在电磁感应定律 $\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ 中，负号是楞次定律在电磁感应定律中的数学表示。感应电动势的方向确定如下：

（1）在导体回路上任选一个方向为回路绕行的正方向，再用

(PDF压缩器 - 未注册版)

右手螺旋法则确定回路所围面积的正法线 $\boldsymbol{e}_n$ 的方向。

（2）确定通过回路磁通量的正负：$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{e}_n$ 方向成锐角时，穿过回路的磁通量 Φ 为正；$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{e}_n$ 方向成钝角时，穿过回路的磁通量 Φ 为负。

（3）根据磁通量的变化，确定 $\frac{d\Phi}{dt}$ 的正负。

（4）由 $\varepsilon_i=-\frac{d\Phi}{dt}$ 确定 ε_i 的正负。当 $\varepsilon_i>0$ 时，ε_i 的方向与回路绕行正方向相同；当 $\varepsilon_i<0$ 时，ε_i 的方向与回路绕行正方向相反。

5-2 一个线圈自感的大小决定于哪些因素？如果要设计一个自感较大的线圈，应该从哪些方面去考虑？

【答】 在不存在磁介质的情况下，线圈的自感仅由线圈的大小、几何形状及线圈的匝数决定。若存在磁介质，线圈的自感还与磁介质的性质有关；若磁介质是铁磁质，线圈的自感还与线圈中的电流有关。由于线圈的自感取决于线圈自身的性质，要设计一个自感较大的线圈一般应从线圈的大小、匝数和介质的磁导率三个方面来考虑：（1）线圈的截面、长度在许可的条件下尽可能大；（2）单位长度上的匝数尽可能多，而且导线应向一个方向绕制；（3）螺线管内放置磁导率较大的磁介质。

5-3 将一个空心螺线管接到恒定电源上通电，然后插入一根软铁棒。在此过程中铁棒受到什么样的力？此力做正功还是负功？螺线管储能增加还是减少？

【答】 由于软铁棒为顺磁质，所以会产生与螺线管同方向的电流，从而受到线圈的吸引力，该力对软铁棒做正功。同时，螺线管内磁感应强度增加，磁场储能增加。两个能量均来自电源系统。

5-4 磁能的两种表达式 $W_m=\frac{1}{2}LI^2$ 和 $W_m=\int_V\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}dV$ 的物理意义有何不同？

【答】 $W_m=\frac{1}{2}LI^2$ 表明磁能依赖于电流。

(PDF压缩器 - 未注册版)

任何导体回路，总有一定的自感 L，当它通过一定电流 I 时，便对应存在一定的自感磁能。电流越大，自感磁能越大；电流消失，磁能不复存在。也就是说，磁能储存在电流中。

$W_m = \int_V \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} dV$ 表明磁能依赖于磁场。

任何空间体积 V 中，只要有磁场，便有相应的磁能。磁场愈强，磁能愈大；磁场消失，磁能不复存在。即磁能分布在磁场存在的空间，存在于磁场这种特殊形态的物质中。

在稳恒磁场范围内，这两种表达形式是等效的，即可以由一种表达形式导出另一种表达形式，具体问题中任意选择便捷的方法处理问题，可得到相同结果。因为稳恒磁场范围内，磁场与电流总是不可分割的、同时存在的，无法区分磁能到底是取决于磁场还是取决于电流。

但是，在非稳定的情况下，磁场可以脱离电流单独存在，即在没有电流只有磁场的情况下，仍然存在相应的磁能，这说明磁能分布在磁场中的观点更能正确地反映客观事物的本质。

5-5 感生电场与静电场有何异同？

【答】 感生电场与静电场的异同见下表。

		静 电 场	感 生 电 场
不同点	起源	由静止电荷激发	由变化的磁场激发
	场的性质	① 有源场（电场线起始于正电荷终止于负电荷，是不闭合曲线） ② 保守场	① 无源场（电场线为闭合曲线） ② 非保守场
	描述场的方程	① $\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = \sum_i q_i$ ② $\oint_L \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = 0$	① $\oint_S \boldsymbol{E}_k \cdot d\boldsymbol{S} = 0$ ② $\oint_L \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$
	场对导体的作用	① 导体产生静电感应现象 ② 导体内的电场强度为零	① 导体产生感应电动势 ② 导体内的电场强度不为零
相同点		对放入其中的电荷存在作用力	

(PDF压缩器 - 未注册版)

5-6 你是怎样理解麦克斯韦电磁场四个方程是电磁场的基本方程？麦克斯韦方程组为什么有积分和微分两种形式？

【答】 麦克斯韦电磁场四个积分方程

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho \mathrm{d}V = \sum_i q_i \qquad ①$$

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad ②$$

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \qquad ③$$

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I_c + I_d = -\int_S \left(\boldsymbol{j}_c + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad ④$$

式①是电场中的高斯定理。它说明 $\boldsymbol{D}$ 通量只和自由电荷有关，但式中的电场是电荷和变化的磁场共同激发的。

式②是法拉第电磁感应定律，也是推广后的电场的环路定理。它说明变化的磁场产生涡旋电场。式中的 $\boldsymbol{E}$ 是由静电荷和变化的磁场共同激发的，由于静电场的环流为零，所以总电场的环流仅与变化的磁场有关。

式③是磁场中的高斯定理。它说明磁感应线总是闭合的曲线。式中 $\boldsymbol{B}$ 是由位移电流与传导电流共同激发的。

式④是全电流安培环路定理。它说明传导电流和位移电流都能激发磁场。

麦克斯韦方程组是在一定的科学假设（感生电场理论、位移电流）的前提下直接从实验定律（库仑定律、毕奥－萨伐尔定律、法拉第电磁感应定律）归纳、总结出来的一组完整方程，它能客观地描述电磁场的性质及其运动规律。麦克斯韦方程组可以表示为积分形式，也可表示为微分形式，两种形式是等效的。因为无论从积分形式到微分形式，还是从微分形式到积分形式，都不需要新的物理假设和实验基础，只需要运用数学手段，根据矢量分析中的高斯定理和斯托克斯定理就可以互相推导，且它们描述的电磁学规律是相同的。一般来说，积分形式描写的是电磁场在某一区域内的特性，在对称系统中有较多的应用，有助于初学

(PDF压缩器 - 未注册版)

者对物理概念和定律的理解。然而，对大多数工程电磁场及时变电磁场问题的研究中，更重要的是需要知道电磁场中某些点处电磁场的特性，积分形式的场方程往往显得无能为力，而必须应用微分形式的场方程。

5-7 互感电动势与哪些因素有关？要在两个线圈间获得较大的互感，应该用什么办法？

【答】 两个线圈中的互感电动势 $\varepsilon_{12}=-M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$，$\varepsilon_{21}=-M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$，由此可知，互感电动势与两线圈的互感系数有关，与对方线圈中电流的变化率有关。两线圈的互感取决于两线圈的大小、形状、匝数、介质的磁导率和相对位置。要在两个线圈中获得较大的互感，通常使线圈的体积尽可能大，匝数尽可能多，磁导率一般说来越大越好，两个线圈尽可能相互重叠、套在一起，从而使每个线圈中电流产生的磁通最大限度地穿过另一线圈。

5-8 介质是如何分类的，通常使用的介质分类方法有哪些？

【答】 传导、极化和磁化是物质对电磁场的三种响应，它们分别用物质的电导率 γ、电容率（介电常数）ε 和磁导率 μ 来表征。ε、μ、γ 三个量反映了物质的电磁特性，ε、μ、γ 统称为物质的电磁参数。一般来说，物质的三种电磁性能是同时存在的，但对不同的物质有很大的差异。将物质按三种电磁性能的表现分类，以传导为主的的物质称为导体，以极化为主的物质称为电介质，以磁化为主的物质称为磁介质，三类物质统称为介质。

介质分类的标准是其本构关系和参数。通常使用的介质分类方法如下：

（1）如果 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{j}$ 分别随 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{E}$ 线性变化，则 ε、μ、γ 与场强无关，这样的介质被称为线性介质，否则就是非线性介质。

（2）如果 ε、μ、γ 与空间坐标无关，这样的介质被称为均匀介质，否则就是非均匀介质。

（3）如果 $\boldsymbol{D}$ 平行于 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ 平行于 $\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{j}$ 平行于 $\boldsymbol{E}$，这样的介

(PDF压缩器 - 未注册版)

质被称为各向同性的介质，否则就是各向异性介质。

对于均匀、线性、各向同性的介质，其 ε、μ、γ 不随时间和空间变化。任何均匀、线性、各向同性的介质，其本构关系如下：

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$$

$$\boldsymbol{j}=\gamma\boldsymbol{E}$$

式中，ε、μ 和 γ 是常数。

5-9 静电屏蔽、磁屏蔽和电磁屏蔽有何不同？

【答】 用场的观点分析静电屏蔽、磁屏蔽和电磁屏蔽。

静电屏蔽是利用导体在静电场中达到平衡状态时具有的下列性质：(1) 导体内的电场为零；(2) 导体是等势体；(3) 电荷只分布在导体表面上。因而把导体空腔接地，就可以把导体内、外的场分割为两个互不影响的独立系统，达到屏蔽的目的。

磁屏蔽主要利用高磁导率材料具有低磁阻的特性，将其制成有一定厚度的外壳，起到磁分路作用，使壳内设备少受干扰，达到磁屏蔽的作用。

电磁屏蔽一是利用电磁波在金属表面产生涡流，从而抵消原来的磁场；二是利用电磁波在金属表面产生反射损耗和透射波在金属内的传播过程中衰减产生吸收损耗，达到屏蔽的作用。

5-10 什么叫位移电流？位移电流与传导电流有什么异同？

【答】 通过某一截面的位移电流等于通过该截面的电位移通量 Ψ_d 对时间变化率，即 $I_d=\dfrac{d\Psi_d}{dt}$。

(1) 位移电流与传导电流虽都称为电流，但二者的起因不同。传导电流是由电荷的宏观定向移动引起的；而位移电流是由变化的电场引起的。

(2) 传导电流只能在导体中通过，因为导体中有足够的可以自由移动的电荷；而位移电流不依赖自由电荷，哪里有变化的电场，哪里就有相应的位移电流，位移电流在导体中、介质中和真

(PDF压缩器 - 未注册版)

空中都可以通过。

(3) 传导电流在导体中通过要引起热效应，它遵从焦耳-楞次定律；位移电流在真空中没有热效应。在介质中，伴随着介质的极化，位移电流也会产生热效应，不过它不服从焦耳-楞次定律。

(4) 位移电流与传导电流都可以激发磁场，都可以根据安培环路定理$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\boldsymbol{I}$求解磁场分布。如果磁场是由传导电流激发的，$I=\int_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}$；如果磁场是由位移电流激发的，则$I=\int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$。如果磁场是由传导电流和位移电流共同激发，则$I=\int_S\left(\boldsymbol{j}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$。

三、典型题析

例 5-1 如图 5-1 所示，在马蹄形磁铁的中间 A 点处放置一半径 $r=1\text{cm}$、匝数 $N=10$ 匝的线圈，且线圈平面法线平行于 A 点处的磁感应强度。现将此线圈移到足够远处，在这期间若线圈中流过的总电荷量 $Q=\pi\times10^{-6}\text{C}$，试求 A 点处磁感应强度是多少？（已知线圈的电阻 $R=10\Omega$，线圈的自感忽略不计）

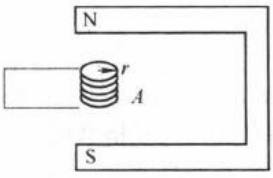


图 5-1

【思路探索】 线圈由 A 点移到足够远处时，由于穿过线圈的磁通量由最大减小到零，线圈中有感应电流，所以有感应电荷量。由感应电荷量与磁通量之间的关系式，可以求出磁感应强度 B。

解：由法拉第电磁感应定律可知

$$\varepsilon_i=-\frac{d\Psi}{dt}$$

$$I_i=\frac{\varepsilon_i}{R}=-\frac{1}{R}\frac{d\Psi}{dt}$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

而由 $I=-\frac{dq}{dt}$ 可得

$$dq=Idt=-\frac{1}{R}d\Psi$$

$$\int_0^Q dq=-\frac{1}{R}\int_0^{\Psi}d\Psi$$

由此得

$$Q=\frac{1}{R}\Psi$$

所以 $$\Psi=RQ=\pi\times10^{-5}\text{Wb}$$

又因 $$\Psi=\pi r^2BN$$

所以 $$B=\frac{\Psi}{\pi r^2N}=10^{-2}\text{T}$$

【方法点击】 通过纯电阻电路中的感应电流 $I_i=-\frac{1}{R}\frac{d\Psi}{dt}$，感应电荷量 $q=\frac{1}{R}(\Psi_1-\Psi_2)$，$R$ 为回路的电阻，Ψ_1、Ψ_2 分别为 t_1、t_2 时刻通过线圈的磁链数。感应电流与磁链数随时间的变化率有关，与磁链数的大小无关。而感应电荷量则与穿过线圈磁链数的改变量有关，而与穿过线圈磁通量的变化快慢无关。

例 5-2 如图 5-2 所示，长直导线中通有恒定电流 5A，另一矩形线圈共 1000 匝，宽为 $a=10\text{cm}$，长为 $L=20\text{cm}$。试求：(1) 线圈以 $v=2.0\text{m/s}$ 的速度向右平动，当 $d=10\text{cm}$ 时线圈中的感应电动势；(2) 若线圈不动，而长直导线中通有交变电流 $i=5\sin(100\pi t)\text{A}$，线圈中的感生电动势为多大？

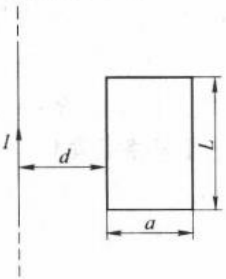


图 5-2

(郑州大学 2008 年硕士学位研究生入学考试试题)

【思路探索】 由于线圈处在长直导线激发的非均匀磁场中，线圈以 $v=2.0\text{m/s}$ 的速度向右平动时，线圈左右两边动生电动

(PDF压缩器 - 未注册版)

势不能相互抵消，可由 $\varepsilon=\int_l(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}l$ 求出。若线圈不动，而长直导线中通有交变电流 $i=5\sin(100\pi t)$A 时，可先用积分的方法求出穿过线圈的磁通量，然后由法拉第电磁感应定律求出线圈中的感生电动势。

解：长直载流导线在空间任意一点激发的磁感应强度的大小为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\sin\omega t$$

（1）当 $d=10\mathrm{cm}$ 时线圈中的感应电动势为

$$\varepsilon=\varepsilon_1-\varepsilon_2=N(B_1Lv-B_2Lv)=NLv\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{d+a}\right)$$

$$=\frac{1\times10^3\times0.2\times2\times4\pi\times10^{-7}\times5.0\times0.1}{2\pi\times0.1\times0.2}\mathrm{V}=2\times10^{-3}\mathrm{V}$$

（2）穿过线圈的磁通量为

$$\Phi=\int\mathrm{d}\Phi=\int\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_d^{d+a}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}L\,\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 IL}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}$$

线圈中的感应电动势为

$$\varepsilon=-N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{N\mu_0 L}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$$=-\frac{10^3\times4\pi\times10^{-7}\times0.2}{2\pi}\ln\frac{0.1+0.1}{0.1}\times500\pi\cos(100\pi t)\mathrm{V}$$

$$=-0.04\cos(100\pi t)\mathrm{V}$$

其方向作周期性变化。

【方法点击】线圈中的感生电动势，可由法拉第电磁感应定律求出。线圈中的感应电动势实际上是互感电动势，还可由 $\varepsilon=M\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ 求出互感 M。

【拓展思考】1. 如果是两条载有同方向电流的平行长直导线和矩形线圈共面，（1）和（2）情形下，线圈中的感生电动势为多大？

提示：这时空间任意一点的磁感应强度应为两条载流长直导线在空间分别产生的磁场叠加。

(PDF压缩器 - 未注册版)

2. 两根平行放置相距为 $2a$ 的无限长载流直导线，其中一根通以稳恒电流 I_0，另一根通以交变电流 $i=I_0\sin\omega t$。两导线间有一与其共面的矩形线圈，线圈的边长分别为 l 和 $2b$，l 与长直导线平行，且线圈以速度 v 垂直于直导线向右运动，如图 5-3 所示。当线圈运动到两导线的中心位置（即线圈中心线与矩形导线均为 a 的中心线重合）时，两导线中的电流方向恰好相反，且 $i=I_0$，求此时刻线圈中的动生电动势、感生电动势和总的感应电动势。

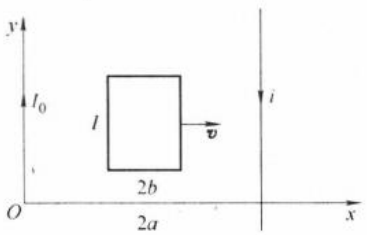


图 5-3

（浙江大学 2008 年硕士学位研究生入学考试试题）

提示：由于线圈处在两长直导线激发的非均匀磁场中，当线圈运动到两导线的中心位置时，线圈左右两边动生电动势相互抵消，因此动生电动势为零。总的感应电动势可以先用积分的方法求出穿过线圈的磁通量，然后由法拉第电磁感应定律求出，$\varepsilon_{总}=\varepsilon_{感}+\varepsilon_{动}=\varepsilon_{感}$。

例 5-3 如图 5-4 所示，导线回路 $abcd$ 垂直于均匀磁场 $\boldsymbol{B}$，其中 ab 边长为 L，质量为 m，可以铅直地上下滑动，滑动时可认为回路总电阻为 R，如果开始时 ab 边静止，求 ab 边任意时刻的速度。

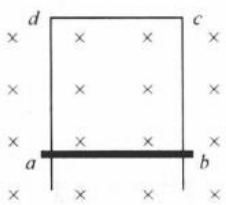


图 5-4

（中国科学院 2007 年硕士学位研究生入学考试试题）

【思路探索】 ab 边向下滑时会切割磁感线产生动生电动势，在回路 $abcd$ 中有感应电流。ab 边受到重力、安培力的作用。可用牛顿定律列动力学方程，求解任意时刻的速度。

解：当 ab 边以速度 v 向下滑动时，导线回路 $abcd$ 的感应电流为

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$I=\frac{\varepsilon}{R}=\frac{BLv}{R}$$

ab 边所受的安培力为

$$F=IBL=\frac{B^2L^2v}{R}$$

由牛顿定律有

$$mg-\frac{B^2L^2v}{R}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

对上式分离变量，两边同时积分得

$$\int_0^v\frac{\mathrm{d}v}{g-\frac{B^2L^2}{mR}v}=\int_0^t\mathrm{d}t$$

即

$$v=\frac{mgR}{B^2L^2}(1-\mathrm{e}^{-\frac{B^2L^2}{mR}t})$$

【方法点击】已知动力学方程，要求任意时刻的速度 v，属于动力学中的第二类问题，可先分离变量，然后积分求解。

例 5-4 如图 5-5 所示，在一载有电流 I 的无限长直导线旁放一直角三角形导体框 ABC 以速度 $\boldsymbol{v}$ 水平向右运动，长直导线与三角形导体框在同一平面内，AB 与长直导线平行，$BC=a$，$\angle ACB=60°$，三角形导体框的电阻为 R，当三角形导体框运动到图示位置时，求：

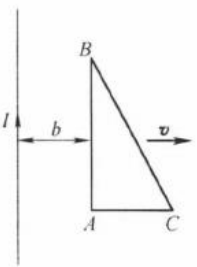


图 5-5

（1）三角形导体框内的电动势；

（2）三角形导体框 AC 边所受长直电流的作用力。

（南京航空航天大学 2007 年硕士学位研究生入学考试试题）

【思路探索】三角形导体框 AB 边和 BC 边以速率 v 切割磁感线，可由动生电动势公式 $\varepsilon=\int_L(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 求得三角形导体框内的电动势。AC 边上有感应电流，AC 边所受长直电流的作用力可由安培定律 $\boldsymbol{F}=\int_L I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$ 计算。

(PDF压缩器 - 未注册版)

解：(1) 长直载流导线在距长直导线为 r 处激发的磁感应强度大小为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

导体框 AB 边中的感应电动势为

$$\varepsilon_{AB}=BL_{AB}v=\frac{\sqrt{3}a\mu_0 Iv}{4\pi b}$$

方向 $A\to B$。

$$\varepsilon_{BC}=\int_B^C|(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}|=\int_b^{b+a/2}\frac{\sqrt{3}\mu_0 Iv}{2\pi r}\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{3}\mu_0 Iv}{2\pi}\ln\frac{2b+a}{2b}$$

方向 $C\to B$。

三角形导体框内的电动势为

$$\varepsilon=\varepsilon_{AB}-\varepsilon_{BC}=\frac{\sqrt{3}a\mu_0 Iv}{4\pi b}-\frac{\sqrt{3}\mu_0 Iv}{2\pi}\ln\frac{2b+a}{2b}$$

方向沿顺时针方向。

(2) 三角形导体框内的感应电流为

$$I_{感}=\frac{\varepsilon}{R}=\frac{\sqrt{3}\mu_0 Iv}{2\pi R}\left(\frac{a}{2b}-\ln\frac{2b+a}{2b}\right)$$

方向沿顺时针方向。

由安培定律 $\boldsymbol{F}=\int_L I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$ 可得，导体框 AC 边所受长直电流的作用力大小为

$$F=\int_A^C|I_{感}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}|=\int_b^{b+a/2}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}I_{感}\,\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I}{2\pi}I_{感}\ln\frac{2b+a}{2b}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\mu_0^2 I^2 v}{4\pi^2 R}\left(\frac{a}{2b}-\ln\frac{2b+a}{2b}\right)\ln\left(\frac{2b+a}{2b}\right)$$

方向垂直 AC 边与 $I_{感}$ 方向相反。

【方法点击】 一般情况下，$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{v}$、$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 三者方向相互不垂直，应用 $\varepsilon=\int_L(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 计算动生电动势时，注意正确判断 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{v}$、$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向。计算导体框 AC 边所受长直电流的作用力时，因 AC

(PDF压缩器 - 未注册版)

边处在非均匀磁场中，其上每一点处的磁感应强度大小不同，所以要采用微元积分法求所受长直电流的作用力。

例 5-5 金属杆 AB 以匀速率 $v=2.0\text{m/s}$ 平行于长直导线运动，导线与 AB 共面且相互垂直，如图 5-6 所示，已知导线载有电流 $I=40\text{A}$。则此金属杆的感应电动势为多大？

（浙江大学 2003 年硕士学位研究生入学考试试题）

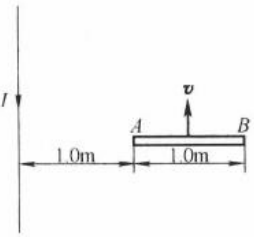


图 5-6

【思路探索】 金属杆 AB 在一个非均匀磁场中以速率 v 切割磁感线，可由动生电动势 $\varepsilon=\int_L(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 求解。

解：在金属杆 AB 上距长直导线为 x 处取有向线元 $\mathrm{d}x$，选 $\mathrm{d}x$ 的方向由 A 指向 B。由安培环路定理可求得长直载流导线在 x 处激发的磁感应强度大小为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

方向垂直纸面向外。

线元 $\mathrm{d}x$ 上产生的动生电动势为

$$\mathrm{d}\varepsilon=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=vB\sin 90^\circ\mathrm{d}x=vB\mathrm{d}x$$

金属杆 AB 上产生的动生电动势

$$\varepsilon_{AB}=\int_{AB}\mathrm{d}\varepsilon=\int_1^2 vB\mathrm{d}x=\int_1^2 v\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln 2=1.1\times10^{-5}\text{V}$$

【方法点击】 该题 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{v}$、$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 三者方向相互垂直，计算较简单。本题也可构建一个合适的闭合回路，用法拉第电磁感应定律 $\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ 来求解。

【错解分析】 有一种解法是直接套用公式 $\varepsilon_i=BLv$ 求金属杆 AB 上产生的动生电动势，所得结果是错误的，因为金属棒上每

(PDF压缩器 - 未注册版)

一点的运动速度虽然相同，但每一点处的磁感应强度大小不同，因此不能直接套用公式 $\varepsilon=BLv$。

【拓展思考】 1. 该题如果用法拉第电磁感应定律 $\varepsilon=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ 来求解，该如何着手呢？

提示：由于应用法拉第电磁感应定律时必须考虑通过闭合线圈磁通量的变化，而本题中运动的是一金属杆 AB，本身不是一个回路，因此，为了应用法拉第电磁感应定律，必须设法构造一个合适的闭合回路，并使金属杆 AB 成为这个闭合回路的一部分。由法拉第电磁感应定律先求出整个闭合回路中的感应电动势，即为金属杆 AB 上的感应电动势。

设想金属杆 AB 在一个静止的 U 形导轨上滑动，在 t 时刻，金属杆 AB 距导轨下端的距离为 y。设顺时针方向为回路绕行正方向，在距长直导线为 x 处取一宽为 $\mathrm{d}x$、高为 y 的面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，则穿过该面元的磁通量为

$$\mathrm{d}\Phi=\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}y\mathrm{d}x$$

穿过回路的总磁通量为

$$\Phi=\oint_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}y\ln 2$$

于是回路中产生的感应电动势为

$$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}v\ln 2=1.1\times10^{-5}\mathrm{V}$$

2. 如图 5-7 所示，$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{v}$、$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 三者方向相互不垂直，金属杆的动生电动势如何计算？M 和 N 哪端电势高？

提示：应用 $\varepsilon=\int_L(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 计算动生电动势。本题的关键是正确确定 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 的大小和方向，找出 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 之间的夹角 θ。

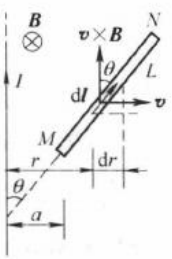


图 5-7

MN 中的动生电动势为

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$\varepsilon=\int_L(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_L v\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cos\theta\mathrm{d}l$$

$$=\int_a^{a+L\sin\theta}\frac{\mu_0 Iv}{2\pi r}\cos\theta\frac{\mathrm{d}r}{\sin\theta}=\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\cot\theta\ln\frac{L\sin\theta+a}{a}$$

因 $\varepsilon>0$，所以 ε 方向由 M 指向 N，N 端电势高。

例 5-6 如图 5-8 所示，一长为 L 的金属棒 OA 与载有电流 I 的无限长直导线共面，金属棒可绕端点 O 在竖直平面内以角速度 ω 匀速转动，O 端到长直导线的距离为 b。试求当金属棒转至图示位置时（即棒垂直于长直导线），棒内的感应电动势。

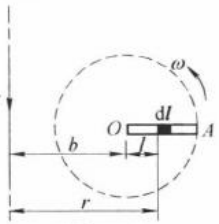


图 5-8

【思路探索】 金属棒在非均匀磁场中，绕棒的一端 O 作定点转动，金属棒切割磁感线，可用动生电动势公式 $\varepsilon=\int_L(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 求解。解题时应注意，金属棒上每一线元处的磁感应强度都不相同，每一线元的角速度相同而线速度不同。

解：在金属棒上距 O 点 l 处、距长直导线 r 处取一有向线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向由 O 指向 A。$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 所在处的磁感应强度大小为 $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$，方向垂直纸面向外。当金属棒转至图示位置时，金属棒 OA 上各线元的速度方向均垂直于棒 OA 沿平面向上，$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 的方向沿 OA 方向，$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 间夹角为零。线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 速度的大小为 $v=l\omega$，所以 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 上动生电动势为

$$\mathrm{d}\varepsilon=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=vB\sin\frac{\pi}{2}\cos 0^\circ\mathrm{d}l=l\omega B\mathrm{d}l$$

金属棒 OA 上的动生电动势为

$$\varepsilon_{OA}=\int_L\mathrm{d}\varepsilon=\int_0^L l\omega B\,\mathrm{d}l=\int_0^L\omega\frac{\mu_0 I}{2\pi r}l\,\mathrm{d}l$$

由图 5-8 可知，$l=r-b$，$\mathrm{d}l=\mathrm{d}r$，代入上式得

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$\varepsilon_{OA}=\int_b^{b+L}\frac{\omega\mu_0 I}{2\pi r}(r-b)\mathrm{d}r=\frac{\omega\mu_0 I}{2\pi}\left(L-b\ln\frac{b+L}{b}\right)$$

由 $\varepsilon_{OA}>0$ 可知，ε_{OA} 的方向从 O 指向 A，即 A 点电势高。

【方法点击】该题也可构建一个合适的闭合回路，并使金属棒 OA 成为这个闭合回路的一部分。利用法拉第电磁感应定律 $\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ 来求解。由法拉第电磁感应定律先求出整个闭合回路中的感应电动势，即为金属棒 OA 上的感应电动势。

【拓展思考】1. 当金属棒转至其他任意位置时，金属棒 OA 上的动生电动势又是多少？方向如何？

2. 该题如何用法拉第电磁感应定律 $\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ 求解？

提示：设法构造一个合适的闭合回路，并使金属棒 OA 成为这个闭合回路的一部分。由法拉第电磁感应定律先求出整个闭合回路中的感应电动势，即为金属棒 OA 上的感应电动势。

例 5-7 在无限长螺线管中，均匀分布变化的磁场。设磁场大小以速率 $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=k$ 变化（$k>0$，且为常量），方向与螺线管轴线平行，如图 5-9 所示。现在其中放置一直角形导线 abc。若已知螺线管截面半径为 R，$\overline{ab}=l$，求（1）：螺线管中的感生电场；（2）$\overline{ab}$、$\overline{bc}$ 两段导线中的感生电动势。

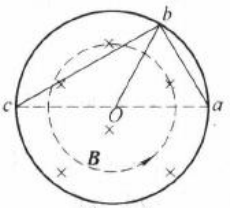


图 5-9

【思路探索】本题是求解变化磁场产生感生电场和处在变化磁场中的导线内产生感生电动势的问题。当无限长螺线管中的磁场变化时，在管内部和外部都产生感生电场。根据 $\oint_L \boldsymbol{E}_k\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_S\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 可求出螺线管中的感生电场。当管内放有导体时，导体中的自由电荷在感生电场力作用下移动，使导体两端形成电荷的积累，而出现感应电动势，可用法拉第电磁感应定律求解。

解：（1）设螺线管内的磁场垂直于纸面向里，由于管内的磁

(PDF压缩器 - 未注册版)

场具有轴对称性，所以可在管中任取半径为 $r(r<R)$ 的感生电场线做积分回路，根据感生电场与变化磁场之间的关系 $\oint_L \boldsymbol{E}_k \cdot d\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S}$ 和 $\frac{dB}{dt}=k>0$ 可知，感生电场线的方向沿逆时针方向，所以

$$2\pi r E_k = -\left(-\pi r^2 \frac{dB}{dt}\right) = \pi r^2 k$$

$$E_k = \frac{r}{2}k \quad (r<R)$$

（2）用法拉第电磁感应定律求解。作辅助线 $\overline{cO}$、$\overline{Oa}$、$\overline{Ob}$，在回路 $OabO$ 中，穿过回路所围面积的磁通量为

$$\Phi = BS = \frac{1}{2}lBh = \frac{1}{2}lB\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}$$

在回路 $OabO$ 中产生的感生电动势为

$$\varepsilon_{OabO} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2}l\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}\frac{dB}{dt} = \frac{k}{2}l\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}$$

又因 $\varepsilon_{OabO}=\varepsilon_{ab}+\varepsilon_{bO}+\varepsilon_{Oa}$，而感生电场强度 $\boldsymbol{E}_k$ 与 $\overline{Oa}$ 和 $\overline{Ob}$ 都垂直，所以在 $\overline{Oa}$ 和 $\overline{Ob}$ 中感生电动势为

$$\varepsilon_{Oa} = \int_O^a \boldsymbol{E}_k \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

$$\varepsilon_{Ob} = \int_O^b \boldsymbol{E}_k \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

导线 $\overline{ab}$ 中的感生电动势为

$$\varepsilon_{ab} = \varepsilon_{OabO} = \frac{k}{2}l\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}$$

ε_{ab} 的方向由 a 指向 b。

同理可得穿过回路 abc 所围面积的磁通量为

$$\Phi' = BS' = \frac{1}{2}lBh' = \frac{1}{2}lB\sqrt{4R^2-l^2}$$

在回路 abc 中产生的感生电动势为

$$\varepsilon_{abc} = \frac{d\Phi'}{dt} = \frac{1}{2}l\sqrt{4R^2-l^2}\frac{dB}{dt} = \frac{k}{2}l\sqrt{4R^2-l^2}$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

又因 $\varepsilon_{abc}=\varepsilon_{ab}+\varepsilon_{bc}+\varepsilon_{ca}$，而感生电场强度 $\boldsymbol{E}_k$ 与 $\overline{ca}$ 垂直，所以在 $\overline{ca}$ 中感生电动势

$$\varepsilon_{ca}=\int_c^a \boldsymbol{E}_k\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$

导线 $\overline{bc}$ 的感生电动势为

$$\varepsilon_{bc}=\varepsilon_{abc}-\varepsilon_{ab}=\frac{k}{2}l\sqrt{4R^2-l^2}-\frac{k}{2}l\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}=\frac{k}{2}l\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}$$

ε_{bc} 方向由 b 指向 c。

【方法点击】本题用法拉第电磁感应定律求解感生电动势比较方便，求解时要正确选择闭合回路，求出穿过闭合回路的磁通量，即可由法拉第电磁感应定律求得感生电动势。感生电动势也可用 $\varepsilon_L=\int_L \boldsymbol{E}_k\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 来计算，但要注意积分路径上各处感生电场强度 $\boldsymbol{E}_k$ 的大小、方向均不相同。

例 5-8 如图 5-10 所示，一根半径为 R 的无限长圆柱形载流直导线，电流 I 沿其截面均匀流过。求长为 l 的一段导线所储存的磁场能量和自感。

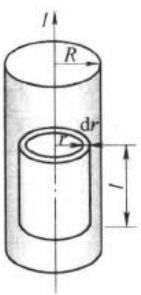


图 5-10

【思路探索】本题可用微元积分法求出长为 l 的导线所储存的磁场能量，然后根据 $W_m=\frac{1}{2}LI^2$ 求出长为 l 的导线的自感。

解：根据安培环路定理，在距轴线为 r 处的磁感应强度大小为

$$B=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}\quad (r<R)$$

该处的磁场能量密度为

$$w_m=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}=\frac{1}{2}\frac{\mu_0 I^2 r^2}{4\pi^2 R^4}$$

取一长为 l，半径为 r，厚度为 $\mathrm{d}r$ 的圆筒形体积元 $\mathrm{d}V=l\cdot 2\pi r\mathrm{d}r$，该体积元内的磁场能量为

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$dW_m = w_m dV = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R^4} l \cdot 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi R^4} r^3 dr$$

则长为 l 的导线所储存的磁场能量为

$$W_m = \int_V w_m dV = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi R^4} \int_0^R r^3 dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi}$$

根据 $W_m = \frac{1}{2} L I^2$ 可得长为 l 的导线的自感为

$$L = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$$

【方法点击】对于载有电流的导体或回路，产生的磁感应强度是对称性分布时，磁场能量密度这时也呈对称性，通过积分很容易求得整个磁场的能量，然后用能量公式计算自感既简便又准确。

讨论：关于自感计算公式的应用

在《电磁学》和《大学物理》教学中经常遇到计算同轴电缆的自感问题，将许多教材的处理方法总结，可归纳为三种：一是忽略芯线的大小或将芯线考虑为与外壁在同轴上的圆筒形状的导体，应用公式 $\Psi = LI$ 或 $W_m = \frac{1}{2} L I^2$ 计算自感都可以得到同一结果；二是只忽略外壁厚度；三是芯线的大小和外壁厚度都不忽略。后两种情况用能量公式 $W_m = \frac{1}{2} L I^2$ 计算自感比较简便，且更为可靠准确。下面借助典型的例题，解惑自感计算中常易混淆的问题。

例如，一半径为 R_1，磁导率为 μ_1 的导体圆柱与一半径为 R_2 的无限长导体薄壁圆筒同轴地套着，其间充满磁导率为 μ 的磁介质，电缆中沿内圆柱和外圆筒流过的电流 I 大小相等而方向相反，如图 5-11 所示。求电缆单位长度的自感。

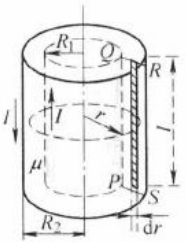


图 5-11

由于电流分布和介质分布具有轴对称性，故其磁场分布也具有轴对称性，由有磁介质的安培环路定理和 $B = \mu H$ 可求得

(PDF压缩器 - 未注册版)

磁场的分布情况：
$$\begin{cases} B_1=\dfrac{\mu_1 Ir}{2\pi R_1^2} & (0<r<R_1) \\ B_2=\dfrac{\mu I}{2\pi r} & (R_1<r<R_2) \\ B_3=0 & (r>R_2) \end{cases}$$

方法 1：利用磁场的能量公式求解

由磁能公式 $W_m=\dfrac{1}{2}\int_V w_m \mathrm{d}V$ 可求得单位长电缆所具有的磁场能量为

$$W_m=\frac{1}{2}\int_V w_m \mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int_V \frac{B^2}{\mu}\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int_0^{R_1}\frac{\left(\dfrac{\mu_1 Ir}{2\pi R_1^2}\right)^2}{\mu_1}2\pi r\mathrm{d}r+\frac{1}{2}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\left(\dfrac{\mu I}{2\pi r}\right)}{\mu}2\pi r\mathrm{d}r$$
$$=\frac{\mu_1 I^2}{16\pi}+\frac{\mu I^2}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

由公式 $W_m=\dfrac{1}{2}LI^2$ 可求得电缆单位长度的自感为

$$L=\frac{\mu_1}{8\pi}+\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1} \qquad ①$$

方法 2：利用定义式 $L=\dfrac{\Psi}{I}$ 求解

用这种方法求解的关键就是如何计算磁链数 Ψ，由于对 Ψ 理解得不准确，导致了不同的结果。多数初学者理解为本题中的 Ψ 就是单位长度圆柱与圆筒之间面积上的磁通量，或单位长度圆柱轴线与圆筒之间面积上的磁通量。

第一种理解求得

$$\Psi=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu I}{2\pi r}\mathrm{d}r=\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

于是有
$$L=\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

第二种理解求得

$$\Psi=\int_0^{R_1}\frac{\mu Ir}{2\pi R_1^2}\mathrm{d}r+\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu I}{2\pi r}\mathrm{d}r=\frac{\mu_1 I}{4\pi}+\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

于是有 $$L=\frac{\mu_1}{4\pi}+\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

显然这两种结果都与方法 1 计算的结果不同，那么这似是而非的解法又错在哪里？应用公式 $\Psi=LI$ 要注意 Ψ 与 I 的物理意义。错误的原因就在于对导体内部磁通量理解不够准确。在计算导体内部磁通量时，必须注意到在同轴电缆的截面上沿半径 r 不同的面积上的磁通量与不同的电流相联系。在 $R_1<r<R_2$ 处，磁感应强度 $\boldsymbol{B}_2$ 与内导体中的全部电流 I 交链，其匝数为 1；而在 $r<R_1$ 处，磁感应强度 $\boldsymbol{B}_1$ 只与内导体中的部分电流 I' 交链，与 I' 交相联系的电流只有 $\frac{I'}{I}$ 匝，因 $\frac{I'}{I}<1$，便把 $\frac{I'}{I}$ 称为“分数匝数”。

$\boldsymbol{B}_1$ 对磁链数的贡献为

$$\Psi_1=\int\frac{I'}{I}B_1\mathrm{d}S=\int_0^{R_1}\frac{r^2}{R_1^2}\frac{\mu_1 Ir}{2\pi R_1^2}\mathrm{d}r=\frac{\mu_1 I}{8\pi}$$

$\boldsymbol{B}_2$ 对磁链数的贡献为

$$\Psi_2=\int B_2\mathrm{d}S=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu I}{2\pi r}dr=\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

总的磁链数为

$$\Psi=\Psi_1+\Psi_2=\frac{\mu_1 I}{8\pi}+\frac{\mu I}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

电缆单位长度的自感为

$$L=\frac{\Psi}{I}=\frac{\mu_1}{8\pi}+\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}\qquad②$$

式②的结果与式①的结果完全相同，说明以上分析和处理方法是合理的。

由此可见，在利用定义式 $L=\frac{\Psi}{I}$ 计算自感时，必须准确地理解和计算 Ψ，否则就易出错。利用磁场的能量公式计算自感时，就不会出现上述情况。

综上所述，自感的定义式 $L=\frac{\Psi}{I}$ 是一个静态定义式，它是对线

(PDF压缩器 - 未注册版)

性回路而言的。对于一个闭合回路，计算其他电流的磁场对它所围面积的磁通量一般并不发生困难，因此利用定义式 $L=\frac{\Psi}{I}$ 计算自感较方便，但这种方法只适合有规则简单的线圈回路。自感的定义式 $\varepsilon_L=-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ 是动态定义式，它存在一定的局限性。当回路中通有已知变化率的电流，且能准确测出回路中的感应电动势时，应用公式 $\varepsilon_L=-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ 计算自感较方便，这一方法一般适用于工程中。自感的定义式 $W_m=\frac{1}{2}LI^2$ 是能量定义式，它是严格的定义，因而具有普适意义。对于载有电流的导体或回路，产生的磁感应强度是对称性分布时，磁场能量密度这时也呈对称性，通过积分很容易求得整个磁场的能量，这时用能量公式计算自感既简便又准确。

例 5-9 如图 5-12 所示，半径为 r 的长直密绕空心螺线管，单位长度上绕线圈匝数为 n，所加交变电流为 $I=I_0\sin\omega t$。今在管的垂直平面上放置一个半径为 $2r$，电阻为 R 的导线环，其圆心恰好在螺线管的轴线上。求：

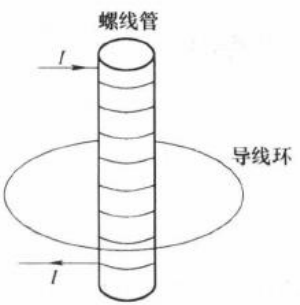


图 5-12

（1）导线环上涡旋电场 E_k 的值；

（2）导线环上感应电流 I_i；

（3）导线环与螺线管之间的互感 M。

（北京航空航天大学 2000 年硕士学位研究生入学考试试题）

【思路探索】 由于穿过半径为 $2r$ 的导线环的磁通量 Φ 随时间 t 而改变，所以导线环上有感生电动势和感应电流 I_i，可先由 $\oint_L \boldsymbol{E}_k\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ 求出 E_k 和感生电动势，然后再求出感应电流 I_i 和导线环与螺线管之间的互感 M。

解：（1）长直螺线管内的磁感应强度大小为

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$B=\mu_0 nI=\mu_0 nI_0 \sin \omega t$$

穿过长直螺线管的磁通量为

$$\Phi=BS=\mu_0 \pi r^2 nI_0 \sin \omega t$$

导线环上的感生电动势为

$$\varepsilon=\oint_L \boldsymbol{E}_k \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

则有

$$E_k \cdot 2\pi \cdot 2r=-\pi r^2 \mu_0 nI_0 \omega \cos \omega t$$

即

$$E_k=-\frac{1}{4}\mu_0 nrI_0 \omega \cos \omega t$$

(2) 导线环上感应电流为

$$I_i=\frac{\varepsilon}{R}=\frac{\mu_0 \pi r^2 nI_0 \omega \cos \omega t}{R}$$

(3) 导线环与螺线管之间的互感为

$$M=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0 nI\pi r^2}{I}=\mu_0 n\pi r^2$$

【方法点击】 当长直螺线管内的磁场变化时，在管的内部和外部都产生感生电场。只要通过某一闭合回路的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 发生变化，那么感生电场沿此闭合回路的环流就总是满足 $\oint_L \boldsymbol{E}_k \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，这表明产生感生电动势的非静电力是感生电场力。

例 5-10 如图 5-13 所示，两同轴单匝圆线圈 A、C 的半径分别为 R 和 r，两线圈相距为 d。若 r 很小，可认为线圈 A 在线圈 C 处所产生的磁场是均匀的，求两线圈的互感。若线圈 C 的匝数为 N，则互感又为

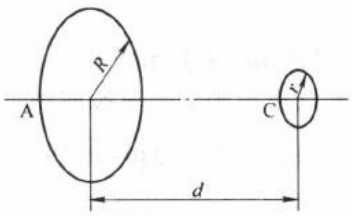


图 5-13

(PDF压缩器 - 未注册版)

多少?

【思路探索】 先求出线圈 A 在线圈 C 处所产生的磁场，然后求出穿过线圈 C 的磁通量，最后根据 $M=\frac{\Phi}{I}$ 求出互感 M。

解：设线圈 A 中有电流 I 通过，它在线圈 C 处所激发的磁感应强度近似为

$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+d^2)^{3/2}}$$

穿过线圈 C 的磁通量为

$$\Phi=BS_C=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+d^2)^{3/2}}\pi r^2$$

两线圈的互感为

$$M=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0 R^2}{2(R^2+d^2)^{3/2}}\pi r^2$$

若线圈 C 的匝数为 N，则互感为

$$M_N=\frac{\Psi}{I}=\frac{N\Phi}{I}=\frac{N\mu_0 R^2}{2(R^2+d^2)^{3/2}}\pi r^2$$

【方法点击】 由于互感 $M_{12}=M_{21}=M$，所以可以通过计算 Ψ_{12} 求 M，也可通过计算 Ψ_{21} 求 M。计算互感时，应选方便的计算途径，即使 $\boldsymbol{B}$ 的计算和 Ψ 的计算都比较容易进行。

例 5-11 如图 5-14 所示，有两个长度均为 l，半径分别为 r_1 和 r_2（且 $r_2<r_1$），匝数分别为 N_1 和 N_2 的同轴长直密绕螺线管。试求：(1) 两螺线管的互感；(2) 互感与两螺线管的自感之间的关系。

【思路探索】 本题可用微元积分法求出长为 l 的导线所储存的磁场能量，然后根据 $W_m=\frac{1}{2}LI^2$ 求出长为 l 的导线的自感。

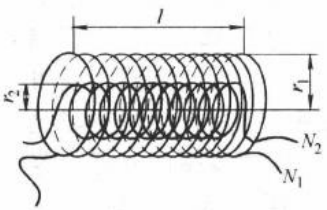


图 5-14

解：(1) 设半径为 r_1 的大螺线管中通有电流 I_1，则 I_1 在此螺

(PDF压缩器 - 未注册版)

线管内产生的磁感应强度大小为

$$B_1=\mu_0\frac{N_1}{l}I_1$$

而穿过半径为 r_2 的小螺线管的磁链数为

$$\Psi_{21}=N_2\Phi_{21}=N_2B_1(\pi r_2^2)=N_2\mu_0\frac{N_1}{l}I_1(\pi r_2^2)$$

由 $M=\frac{\Phi}{I}$ 可得互感为

$$M=\frac{\Psi_{21}}{I_1}=\mu_0\frac{N_1N_2}{l}(\pi r_2^2)$$

(2) 半径为 r_1 和 r_2 的螺线管的自感分别为

$$L_1=\frac{\Psi_1}{I_1}=\mu_0\frac{N_1^2}{l}\pi r_1^2$$

$$L_2=\frac{\Psi_2}{I_2}=\mu_0\frac{N_2^2}{l}\pi r_2^2$$

比较 M 和 L_1、L_2，则有

$$M=\frac{r_2}{r_1}\sqrt{L_1L_2}$$

一般情况下，可把互感表示为

$$M=k\sqrt{L_1L_2}\quad(0\leqslant k\leqslant 1)$$

式中，k 称为耦合系数。只有当 $r_1=r_2$，并且一个回路中电流所产生的磁感应线全部穿过另一回路时，才有 $k=1$，此时称为无漏磁。在有漏磁的情况下，即使 $r_1=r_2$，也总存在 $k<1$，即 $M<\sqrt{L_1L_2}$，耦合系数 k 反映了线圈的耦合程度。

【方法点击】 在两个回路形状大小、相对位置给定和周围无铁磁性介质的情况下，互感 $M_{12}=M_{21}=M$，所以可以通过计算 Ψ_{12} 求 M，也可通过计算 Ψ_{21} 求 M。此题也可假设半径为 r_2 的小螺线管中通有电流而求互感。

例 5-12 用圆平板电容器证明：充电时每单位时间从电容器侧面输入的电磁能正好为电容器所储能量随时间的增加率（设平板电容器的边缘效应可以忽略）。

(PDF压缩器 - 未注册版)

（北京航空航天大学 2005 年硕士学位研究生入学考试试题）

【思路探索】 在两板间任意点都满足 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$，坡印亭矢量 $\boldsymbol{S}$ 的方向垂直于圆柱形空间侧面指向电容器的内部，即电磁场的能量由空间通过柱形侧面进入电容器。

证明：如图 5-15b 所示，当充电电流流入纸面内时，极板间的 $\boldsymbol{H}$ 线为一系列同心圆，如图中的虚线所示，两板间的电场强度方向垂直纸面向内。圆柱形空间侧表面处的电场强度、磁场强度分别为

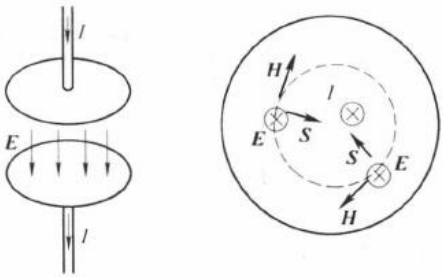


图 5-15

$$E=\frac{U}{d}=\frac{q}{dC}$$

$$H=\frac{I}{2\pi r}=\frac{1}{2\pi r}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

则电磁场单位时间从电容器侧面输入的电磁能，即电磁场输入电容器的功率为

$$P=\int_a \boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\int_a(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\frac{q}{Cd}\frac{1}{2\pi r}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\cdot 2\pi rd=$$

$$\frac{q}{C}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right)$$

式中，$\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 为面积元，$\frac{q^2}{2C}$为电容器中储存的静电能，而$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right]$则为静电能随时间的增加率。

(PDF压缩器 - 未注册版)

【方法点击】电容器充电过程中，能量并非通过导线流入电容器，而是通过电容器边缘的间隙流进去的。电磁场单位时间从电容器侧面输入的电磁能等于电磁场输入电容器的功率。

例 5-13 半径为 $R=5.0\text{cm}$ 的平行圆板空气电容器，充电时两极板间的电场强度随时间的变化率 $\frac{dE}{dt}=1.0\times10^{5}\text{V}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$，求：(1) 两极板间的位移电流；(2) 两板边缘处的磁感应强度。

【思路探索】由于电容器上的电场强度随时间变化，因而在电容器内产生变化的磁场。先根据位移电流的定义 $I_d=\int_S\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$，可求出两极板间的位移电流；然后根据全电流安培环路定理 $\oint_L \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=I+I_d$，求出两极板边缘处的磁感应强度。

解：(1) 根据位移电流的定义 $I_d=\int_S\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$，而平行圆板空气电容器间的电位移 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$，所以两极板间的位移电流

$$I_d=\int_S\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}=\varepsilon_0\frac{dE}{dt}S=\varepsilon_0\frac{dE}{dt}\pi R^2$$

$$=8.85\times10^{-12}\times1.0\times10^{5}\times3.14\times5^2\times10^{-4}\text{A}=6.9\times10^{-9}\text{A}$$

(2) 由于电容器两极板间没有传导电流，即 $I=0$。若忽略边缘效应，可以认为极板间为均匀电场，因此位移电流分布均匀。位移电流激发的磁场分布对于两板中心连线具有对称性，磁感线是以电容器两板中心连线为轴的一系列同心圆，方向与位移电流之间符合右手螺旋法则。取半径为 r 的圆形积分回路，如图 5-16所示。

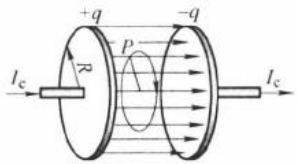


图 5-16

(PDF压缩器 - 未注册版)

根据全电流安培环路定理$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=I+I_\mathrm{d}$，则有

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=H\cdot 2\pi R=I_\mathrm{d}$$

$$H=\frac{I_\mathrm{d}}{2\pi R}$$

两板边缘处的磁感应强度为

$$B=\mu_0 H=\frac{\mu_0 I_\mathrm{d}}{2\pi R}=\frac{4\pi\times 10^{-7}\times 6.9\times 10^{-9}}{2\pi\times 5\times 10^{-2}}\mathrm{T}=2.8\times 10^{-14}\mathrm{T}$$

【方法点击】对于正在充电的电容器来说，两极板之外有传导电流，两极板之间有位移电流。“位移电流”在数值上就等于通过某一面的电位移通量对时间变化率。

(PDF压缩器 - 未注册版)

参考文献

[1] 赵凯华，陈熙谋．新概念物理教程——电磁学［M］．2版．北京：高等教育出版社，2006.

[2] 赵凯华，陈熙谋．电磁学［M］．3版．北京：高等教育出版社，2011.

[3] 马文蔚，等．物理学［M］．5版．北京：高等教育出版社，2006.

[4] 程守洙，江之永．普通物理学：上册［M］．6版．北京：高等教育出版社，2006.

[5] 贾起民，郑永令，陈暨耀．电磁学［M］．2版．北京：高等教育出版社，2001.

[6] 王丽军，王小平．电磁学同步导读 ABC［M］．北京：机械工业出版社，2011.

[7] 史祥蓉，韩仙华．电磁学同步学习指导［M］．北京：国防工业出版社，2007.

[8] 孙敏，孙亲锡，叶齐政．工程电磁场基础［M］．北京：科学出版社，2001.

[9] 张三慧．大学物理学——电磁学［M］．3版．北京：清华大学出版社，2008.

[10] 王仲奕，刘补生，邱捷．工程电磁场导论习题详解［M］．西安：西安交通大学出版社，2001.

[11] 朱鎡雄．大学物理学习导引——导读，导思，导解［M］．北京：清华大学出版社，2010.

[12] 张淳民，等．普通物理、大学物理经典题、考研题解析［M］．西安：西安交通大学出版社，2008.

[13] 王小力，张孝林，徐忠锋．大学物理典型题解题思路与技巧［M］．西安：西安交通大学出版社，2000.

(PDF压缩器 - 未注册版)