(PDF压缩器 - 未注册版)

# 电磁学题解中常见的错误及其分析

王开富
高锦英 编

44

兰州大学出版社

(PDF压缩器 - 未注册版)

责任编辑：雷鸿昌
封面设计：张小卉
责任校对：张昭益

ISBN7-311-00387-3
O·59 定价：6.00元

(PDF压缩器 - 未注册版)

# 电磁学题解中常见的错误及其分析

王开富　高锦英　编

兰州大学出版社

(PDF压缩器 - 未注册版)

# 电磁学题解中常见的错误及其分析

王开富　高锦英　编

兰州大学出版社出版
（兰州大学校内）

甘肃省静宁印刷厂印刷　　甘肃省新华书店发行

开本：850×1168毫米1/32　印张：10

1991年5月第1版　　1991年5月第1次印刷

字数：244千字　　印数：1—2000册

ISBN7-311-00387-3/O·59　定价：6.00元

(PDF压缩器 - 未注册版)

# 内容简介

本书按照流行《电磁学》教材的结构，分八章给出了300个命题的错误解答。这些命题一部分是选自当前国内外一些教材和参考书的习题，一部分是作者积多年之教学经验，总结和分析了历届学生在电磁学习题中和考试中最易出现的概念错误，有目的自拟的。命题的错误解答很具有典型性和代表性。

本书的特色是：先对每个命题给出一种或几种错误解答，然后分析其错误原因，最后给出正确解答。每题后面还配有练习题，并附有答案。本书对加深理解物理概念和物理规律、启迪学生的思维和提高学生分析问题和解决问题的能力有一定的指导意义。

本书可供大专院校理工科有关专业的学生及辅导教师参考，也可供中等学校物理教师及自修《普通物理学》的读者参考。

(PDF压缩器 - 未注册版)

# 前　言

在物理教学中，经常听到学生反映最大的问题就是解题困难。究其原因，问题还是出在对基本概念的理解和对基本定律、定理和公式的掌握上。特别是由于物理概念的错误而导致了解答错误。

习题课是教学的基本环节之一。为了弥补课堂教学的不足，我们编写了这本《电磁学题解中常见错误及分析》。其中总结分析了历届学生在电磁学习题中和考试中最易出现的典型错误，有目的地给出一些命题的错误解答，然后分析其错误原因，最后给出正确解答。作为习题课辅导教材，本书的初稿笔者曾先后在历届学生的习题课中试用，普遍反映对启迪学生的思维和提高学生分析问题和解决问题的能力有一定的指导意义。

我系副教授曾维扬老师在百忙中仔细审阅了本书的初稿，并提出了宝贵的修改意见。在此我们致以诚挚的谢意！

由于作者水平有限，错误和疏漏之处在所难免，恳请广大读者和同行专家不吝指正。

编　者

1990年10月于兰州

(PDF压缩器 - 未注册版)

# 目　录

第一章　静电场……（1）
第二章　静电场中的导体和电介质……（26）
第三章　稳恒电流……（74）
第四章　稳恒磁场……（107）
第五章　磁介质……（134）
第六章　电磁感应和暂态过程……（161）
第七章　简谐交流电……（222）
第八章　电磁场和电磁波……（283）

(PDF压缩器 - 未注册版)

# 第一章 静电场

## 一 错误的解法

1—1. 有一无限长直线均匀带电，电荷线密度为$\eta$. 试求电势分布。

错解一：无限长均匀带电直线的场强分布为

$$\vec{E}=\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{r_0},$$

代入公式$U_p=\int_p^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$，可得距直线为$r_p$的$p$点的电势为

$$U_p=\int_p^{\infty}\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{r_0}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln r\Big|_{r_p}^{\infty}=\infty.$$

分析：公式$U_p=\int_p^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$是选无穷远处为电势零点时的电势计算公式。对于无限大均匀带电体系，不能选无穷远处为电势零点，只能选有限远处为电势零点。因此本题不能选用公式$U_p=\int_p^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$，而要用公式$U_p=\int_p^{Q}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$，其中$Q$点为有限远点。

错解二：选有限远点——直线上某一点为电势零点，则距直线为$r_p$的$p$点的电势为

$$U_p=\int_p^{Q}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{r_p}^{0}\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{r_0}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-\infty.$$

分析：对本题也不能选$r=0$的点为电势零点。因为$r=0$的点$E=\infty$，选场强等于无穷的点为电势零点，会导致场中各点电势均为无穷的无意义情况。

(PDF压缩器 - 未注册版)

本题中的电势零点应选择除$r=0$和$r=\infty$外的任意一点。

错解三：选距直线为$r_Q$的$Q$点为电势零点，则距直线为$r_p$的$p$点的电势为

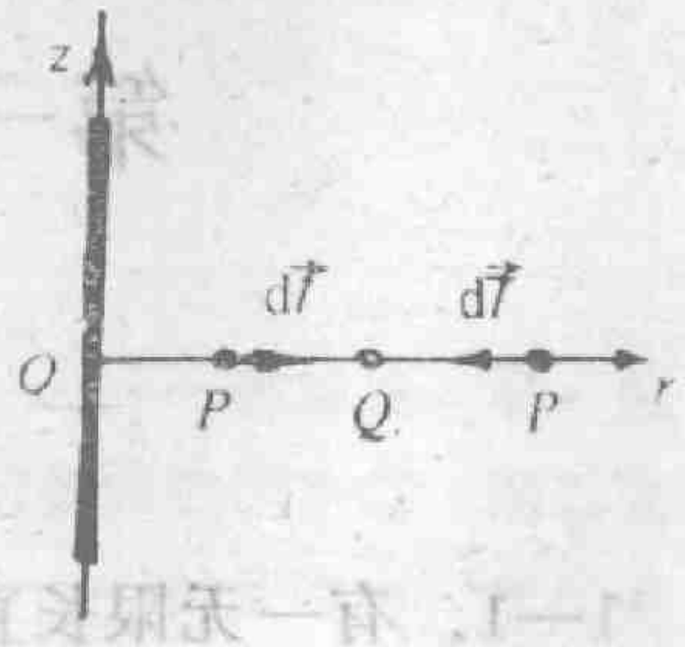



图 1—1

$$U_p=\int_p^Q \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_{r_p}^{r_Q}\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{r_0}\cdot \mathrm{d}\vec{l}\ .$$

如图 1—1 所示，当$r_p<r_Q$时，$\mathrm{d}\vec{l}=\mathrm{d}\vec{r}$；当$r_p>r_Q$时，$\mathrm{d}\vec{l}=-\mathrm{d}\vec{r}$。

所以，当$r_p<r_Q$时，

$$U_p=\int_{r_p}^{r_Q}\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{r_0}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_{r_p}^{r_Q}\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_Q}{r_p};$$

当$r_p>r_Q$时，

$$U_p=-\int_{r_p}^{r_Q}\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{r_0}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=-\int_{r_p}^{r_Q}\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_Q}{r_p}.$$

即
$$U_p=\begin{cases}\dfrac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r_Q}{r_p} & (r_p<r_Q),\\ -\dfrac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r_Q}{r_p} & (r_p>r_Q).\end{cases}$$

分析：我们知道$\triangle\vec{r}=\vec{r_2}-\vec{r_1}$的方向是由$\vec{r_1}$指向$\vec{r_2}$，由此可得，当$r_p>r_Q$时，$\mathrm{d}\vec{l}\neq-\mathrm{d}\vec{r}$，而是$\mathrm{d}\vec{l}=\mathrm{d}\vec{r}$。因此不论是$r_p<r_Q$，还是$r_p>r_Q$，等式$\mathrm{d}\vec{l}=\mathrm{d}\vec{r}$总是成立。而上述解法中，在$r_p>r_Q$时，应用了$\mathrm{d}\vec{l}=-\mathrm{d}\vec{r}$，所以解法是错误的。

错解四：选有限远点$Q$为电势零点，再考虑到$\mathrm{d}\vec{l}=\mathrm{d}\vec{r}$，则$p$点的电势为

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$U_p=\int_p^Q \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_{r_p}^{r_Q}\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_o r}\vec{r}_o\cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$

当$r_p<r_Q$时，$\mathrm{d}\vec{r}$的方向与$\vec{r}_o$的方向相同，$\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}r\,\vec{r}_o$；当$r_p>r_Q$时，$\mathrm{d}\vec{r}$的方向与$\vec{r}_o$的方向相反，$\mathrm{d}\vec{r}=-\mathrm{d}r\,\vec{r}_o$。所以，当$r_p<r_Q$时，

$$U_p=\int_{r_p}^{r_Q}\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_o r}\vec{r}_o\cdot \mathrm{d}r\,\vec{r}_o=\int_{r_p}^{r_Q}\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_o r}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{r_Q}{r_p};$$

当$r_p>r_Q$时，

$$U_p=-\int_{r_p}^{r_Q}\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_o r}\vec{r}_o\cdot \mathrm{d}r\,\vec{r}_o=-\int_{r_p}^{r_Q}\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_o r}\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{r_Q}{r_p}.$$

即
$$U_p=\begin{cases}\dfrac{\eta}{2\pi\varepsilon_o}\ln\dfrac{r_Q}{r_p} & (r_p<r_Q),\\[2ex] -\dfrac{\eta}{2\pi\varepsilon_o}\ln\dfrac{r_Q}{r_p} & (r_p>r_Q).\end{cases}$$

分析：本解法的错误之处是：当$r_p>r_Q$时，$\mathrm{d}\vec{r}\neq-\mathrm{d}r\,\vec{r}_o$，而是$\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}r\,\vec{r}_o$。因为$r$从$r_p$到$r_Q$变化时，$\mathrm{d}r$本身是负值。所以$\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}r\,\vec{r}_o$，本身反应了$\mathrm{d}\vec{r}$与$\vec{r}_o$反向。可见，不论是$r_p<r_Q$，还是$r_p>r_Q$，等式$\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}r\,\vec{r}_o$均成立。

正确解法：选距直导线为$r_Q$的$Q$点为电势零点，则距直导线为$r_p$的$p$点的电势为

$$U_p=\int_p^Q \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_{r_p}^{r_Q}|\vec{E}|\cdot|\mathrm{d}\vec{l}|\cdot\cos(\vec{E}\overset{\wedge}{,}\mathrm{d}\vec{l}).$$

当$r_p<r_Q$时

$$\cos(\vec{E}\overset{\wedge}{,}\mathrm{d}\vec{l})=1,\ |\mathrm{d}\vec{l}|=|\mathrm{d}\vec{r}|=\mathrm{d}r;$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

当$r_p > r_Q$时

$$\cos(\vec{E}\overset{\wedge}{,}\mathrm{d}\vec{l}) = -1, \quad |\mathrm{d}\vec{l}| = |\mathrm{d}\vec{r}| = -\mathrm{d}r(\text{因为}\mathrm{d}r\text{本身为负}).$$

所以，不论是$r_p < r_Q$，还是$r_p > r_Q$，总有

$$U_p = \int_{r_p}^{r_Q} |\vec{E}|\,\mathrm{d}r = \int_{r_p}^{r_Q} \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\mathrm{d}r = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_Q}{r_p}.$$

错解五：如图1—2所示，将直导线无限分割，每一线元都可看成点电荷，线元$\mathrm{d}z$在$p$点产生的电势为

$$\mathrm{d}U_p = \frac{\eta\mathrm{d}z}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\eta\mathrm{d}z}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+r_p^2}}.$$

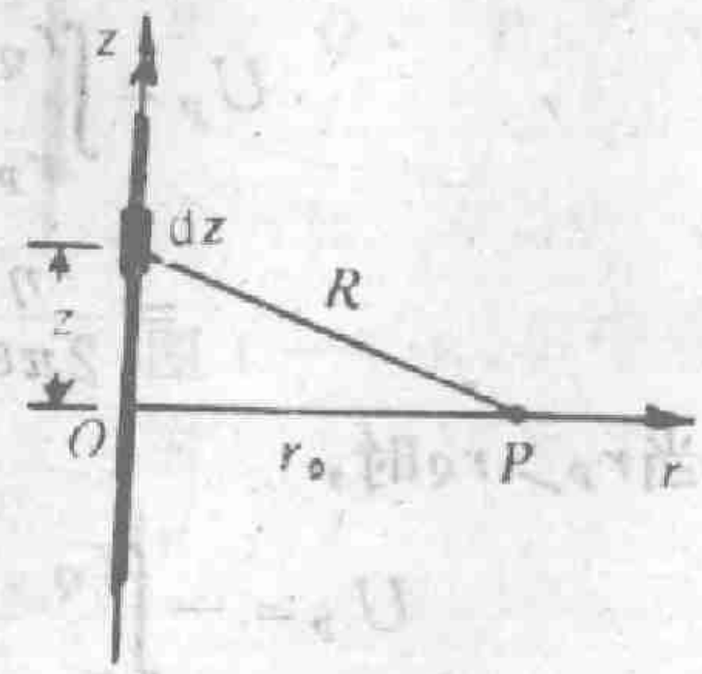



图 1—2

根据电势迭加原理可得，$p$点的电势为

$$U_p = \lim_{L\to\infty}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\eta\mathrm{d}z}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2+r_p^2}}$$

$$= \lim_{L\to\infty}\frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{L+\sqrt{L^2+4r_p^2}}{-L+\sqrt{L^2+4r_p^2}} = \infty.$$

分析：点电荷的电势公式$U_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_p}$是选无穷远处为电势零点的前提条件下推出的结论。上面选用了此式，就等于选用了无穷远处为电势零点，而本题不能选无穷远点为电势零点，所以得到了上面的错误结论。

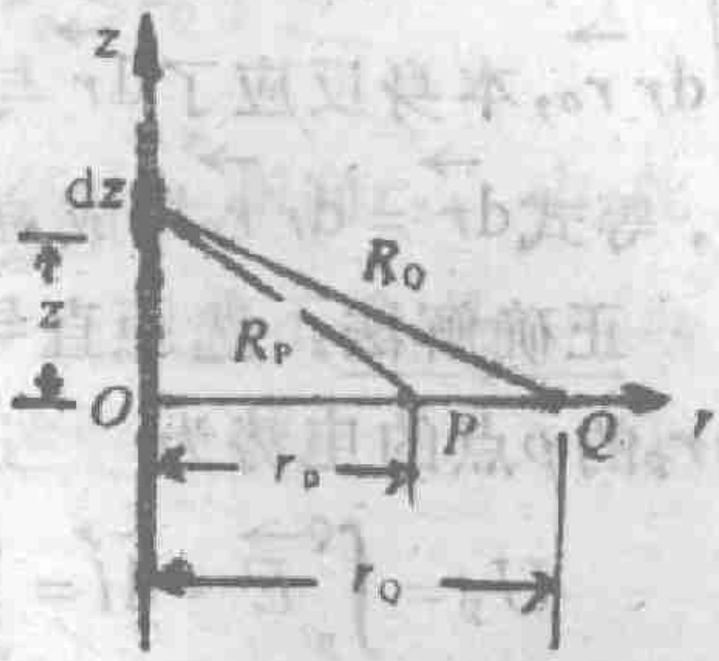



图 1—3

如果用电势迭加原理来解此题，正确解法如下：

正确解法：因为选距点电荷为$R_Q$的点为电势零点时，点电荷的电势为

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$U_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_y} - \frac{1}{R_Q}\right).$$

所以在图1—3中，线元$\mathrm{d}z$在$p$点产生的电势为

$$\mathrm{d}U_p = \frac{\eta \mathrm{d}z}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + r_p^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + r_Q^2}}\right).$$

则总电势为

$$U_p = \lim_{L\to\infty} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\eta}{1\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + r_p^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + r_Q^2}}\right)\mathrm{d}z$$

$$= \lim_{L\to\infty} \frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{\sqrt{L^2 + 4r_p^2} + L}{\sqrt{L^2 + 4r_p^2} - L} - \ln\frac{\sqrt{L^2 + 4r_Q^2} + L}{\sqrt{L^2 + 4r_Q^2} - L}\right)$$

$$= \lim_{L\to\infty} \frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{r^2 + 4r_p^2} + L}{2r_p}\right)^2 - \ln\left(\frac{\sqrt{r^2 + r_Q^2} + L}{2r_Q}\right)^2\right)$$

$$= \lim_{L\to\infty} \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_Q}{r_p}\cdot\frac{\sqrt{L^2 + 4r_p^2} + L}{\sqrt{L^2 + 4r_Q^2} + L}\right)$$

$$= \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_Q}{r_p} + \lim_{L\to\infty} \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{L^2 + 4r_p^2} + L}{\sqrt{L^2 + 4r_Q^2} + L}$$

$$= \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_Q}{r_p} + \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln 1 = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_Q}{r_p}.$$

可见与前面的结论一样。

练习题：

(PDF压缩器 - 未注册版)

1．一均匀带电的无限长直线，旁边放一点 电荷$q$，求空间电势分布。（直线的带电线密度为$\eta$）。

提示：①本题用电势迭加原理来求，但在电势迭加原理中，各分电势的电势零点应选为同一点；②选取的电势零点不能在无穷远处，也不能在直线上和点电荷所在之点。

答案：$U=\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_{Q1}}{r_1}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_{Q2}}\right)$。其中，$r_1$、$r_{Q1}$分别是直线距所求点和电势零点的距离；$r_2$、$r_{Q2}$分别是点电荷距所求点和电势零点的距离。

2．一无限大均匀带电平面板，旁边有一与它平行的无限长均匀带电直线，试求空间的电势分布。设二者相距为$a$，平面板的电荷面密度为$\sigma$，直线的电荷线密度为$\eta$。

答案：选平面板的电势为零，则空间电势分布为

$$U=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x+\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{r}.$$

其中$x$是平面板距所求点的距离，$r$是直线距所求点的距离。

1—2．二平行金属板面积均为$S$，相距$l$，且$S\gg l^2$。现给二板分别带电$+q$和$-q$，问它们之间的互作用力为多少？

错解一：由$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$得二板之间的互作用力为

$$F=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{l^2}.$$

负号表示相互吸引。

分析：公式$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$是二点电荷之间的互作用力的公式，仅对点电荷适用。对任意带电体之间的互作用力不能直接利用此式，而要先将带电体无限分割，使每一个电荷元均可视为点电荷（对任意两电荷元之间的互作用力满足公式 $F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

(PDF压缩器 - 未注册版)

$\frac{dq_1 dq_2}{r^2}$），然后利用力的迭加原理来求整个带电体之间的互作用力。

错解二：由题中条件$S \gg l^2$可知，二平行板之间的场可视为二无限大平行板产生的场，

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 S}.$$

代入公式$F = qE$，可得二板之间的互作用力为

$$F = (-q) \cdot \frac{q}{\varepsilon_0 S} = -\frac{q^2}{\varepsilon_0 S}.$$

分析：在公式$F = qE$中，$E$一定是除$q$本身以外其它电荷在它所在处产生的场。在本题中，$E$一定是一板在另一板所在处产生的场，而上面用了二板共同在其之间产生的场强$E = q/\varepsilon_0 S$，所以上面的解法是错误的。

正确解法：带$q$的一板在带$-q$的一板所在处产生的场为

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{q}{2\varepsilon_0 S},$$

则带$-q$的一板上某一电荷元$dq$受到的静电力为

$$dF = E\,dq = \frac{q}{2\varepsilon_0 S} dq.$$

因为各电荷元受力的方向一致，均垂直于板面，所以整个板所受到的作用力为

$$F = \int_{s-} dF = \int_{s-} \frac{q}{2q_0 S} dq = \frac{q}{2\varepsilon_0 S} \int_{s-} dq = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}.$$

本题也可以用虚功原理来求解。解法如下：

二带电平行板的静电能为

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 l}{2\varepsilon_0 S},$$

代入$F = -\left.\frac{\partial W_e}{\partial l}\right|_{q=c}$得二极板之间的互作用力为

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$F=-\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}.$$

负号表示相互吸引。

注意，由$F=-\left.\frac{\partial W_e}{\partial l}\right|_{q=c}$求电场力时，一定要保证$q=c$，即带电体电量不变，否则将得出错误的结论。

练习题：

1．如果上题中的二平行板带有等量同号电荷$q$，二板之间的互作用力为多少？

答案：二板间的互作用力为

$$F=\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}.$$

2．二互相平行的均匀带电细棒，长度均为$2a$，相距为$b$，带电线密度均为$\eta$．试求二者之间的互作用力。

提示：①不能直接用点电荷的公式$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$。

②应用公式$\mathrm{d}F=E\mathrm{d}q$时，$E$不能用无限长带电直线的场强公式，也不能用有限长带电细棒中垂面上的场强公式，而要用有限长带电细棒在空间产生场强的一般公式①

$$\vec{E}=E_r\vec{r}_0+E_z\vec{k}$$

$$=\frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[(\cos\beta_1-\cos\beta_2)\vec{r}_0-(\sin\beta_1-\sin\beta_2)\vec{k}\right]$$

其中$r$、$\beta_1$、$\beta_2$的几何意义如图1—4所示。

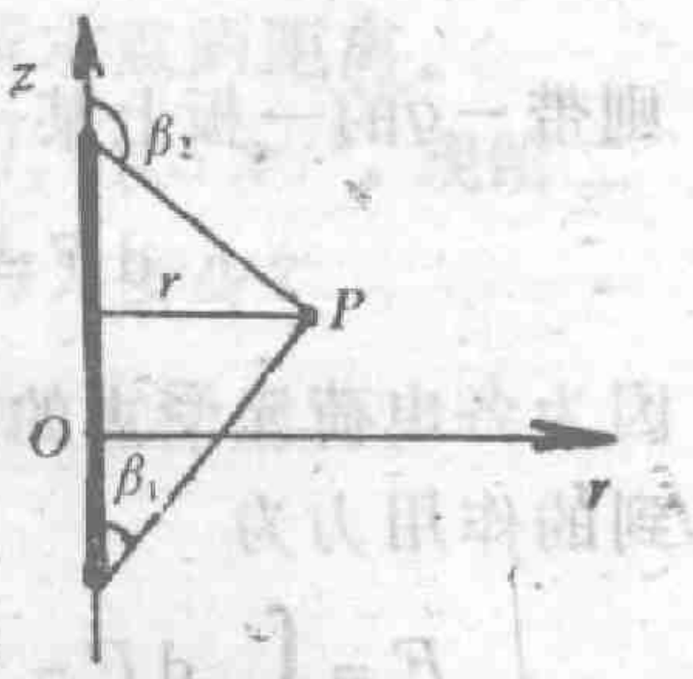


图 1—4

答案：$\vec{F}=F_r\vec{r}_0=\int_L \mathrm{d}F_r\vec{r}_0=\int_L E_r\mathrm{d}q\vec{r}_0$。

①见冯慈璋编《电磁场》P9(1979)．

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$=\frac{\eta^2}{2\pi\varepsilon_0}\left[\sqrt{1+\left(\frac{2a}{b}\right)^2}-1\right]\vec{r}_0。$$

1—3．如图1—5所示，等量异号电荷$\pm q$相距$l$。求中垂面上各点的场强。

错解一：由电势迭加原理得，中垂面上$p$点的电势为

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(l/2)^2+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{(l/2)^2+x^2}}\right)=0。$$

则由$\vec{E}=-\nabla U$得中垂面上$p$点的场强为

$$\vec{E}=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)=0。$$

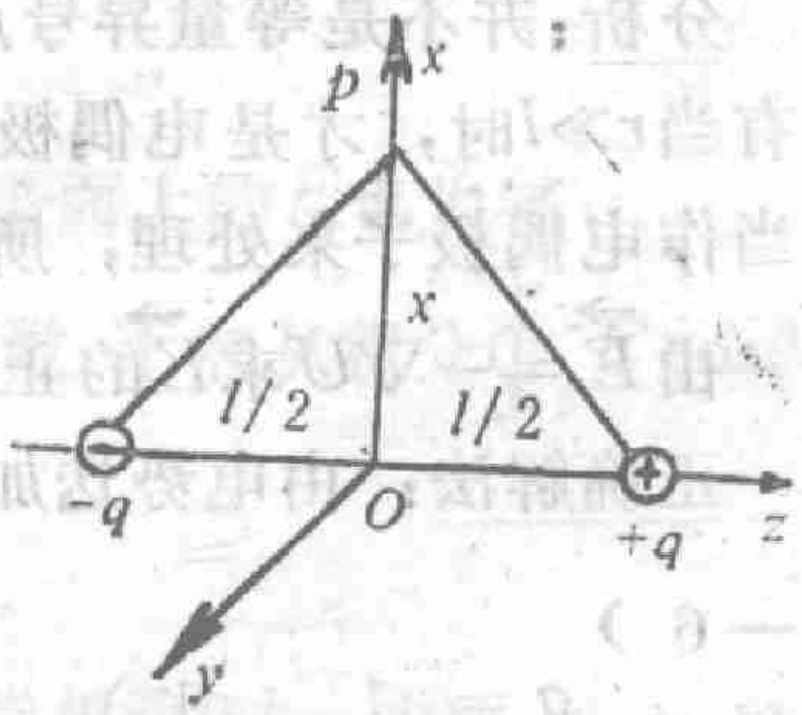


图1—5

分析：求函数在空间某一点的导数(值)，必须先求出导函数，然后再将该点坐标代入、求这点的导数(值)，而不能先求出函数值，然后再求导数(若这样作，结果肯定为零，因为它是对常数求导数)。在上述解法中，先求出了中垂面上的电势值，然后由$\vec{E}=-\nabla U$求中垂面上的$\vec{E}$(即$U$的导数)，这样作当然是错误的。

错解二：因带电体系是一电偶极子，所以空间各点的电势为

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql\cos\theta}{r^2}。$$

其中，$r$、$\theta$的几何意义见图1—6所示。

则由$\vec{E}=-\nabla U$得空间各点的电场强度为

$$\vec{E}=-\left(\frac{\partial U}{\partial r}\vec{r}_0+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\vec{\theta}_0+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\vec{\varphi}_0\right)$$

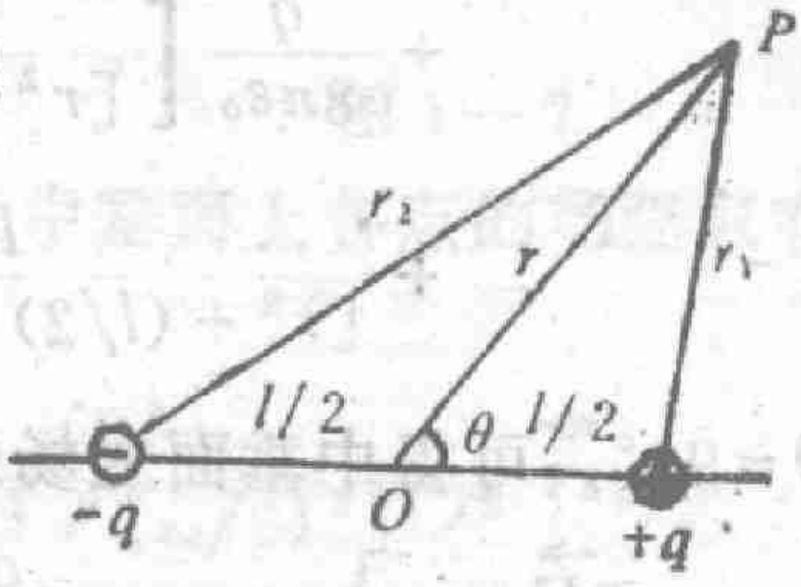


图1—6

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$= \frac{ql}{4\pi\varepsilon_o r^3}(2\cos\theta \vec{r}_o + \sin\theta\vec{\theta}_o).$$

令$\theta = 90°$，可得中垂面上的场强为

$$\vec{E} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_o r^3}\vec{\theta}_o.$$

分析：并不是等量异号点电荷构成的带电体系就为电偶极子，只有当$r \gg l$时，才是电偶极子，在上面将等量异号点电荷带电体系当作电偶极子来处理，所以解法是错误的。

由$\vec{E} = -\nabla U$求$\vec{E}$的正确解法如下：

正确解法：由电势迭加原理得空间$p$点的电势为（参见图1—6）

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{[r^2 + (l/2)^2 - rl\cos\theta]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{[r^2 + (l/2)^2 + rl\cos\theta]^{\frac{1}{2}}}\right).$$

则由$\vec{E} = -\nabla U$得$p$点的场强为

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial U}{\partial r}\vec{r}_o + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\vec{\theta}_o + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\vec{\varphi}_o\right)$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_o}\left[\frac{2r - l\cos\theta}{[r^2 + (l/2)^2 - rl\cos\theta]^{3/2}} - \frac{2r + l\cos\theta}{[r^2 + (l/2)^2 + rl\cos\theta]^{3/2}}\right]\vec{r}_o$$

$$+ \frac{q}{8\pi\varepsilon_o}\left[\frac{l\sin\theta}{[r^2 + (l/2)^2 - rl\cos\theta]^{3/2}} + \frac{l\sin\theta}{[r^2 + (l/2)^2 + rl\cos\theta]^{3/2}}\right]\vec{\theta}_o.$$

令$\theta = 90°$，可得中垂面上场强为

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{ql}{[r^2 + (l/2)^2]^{3/2}}\vec{\theta}_o.$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

错解三：以正负电荷中心为球心，$r$为半径作一球面，不论此球面是否包围二电荷，球面内的净电荷总为零，则由高斯定理 $\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}$ 可得

$$\oint_s E\cos\theta\, dS = E\oint_s \cos\theta dS = 0.$$

所以

$$E=0.$$

即球面上任一点的场强为零，当然中垂面上的$E$也为零。

分析：在上述高斯面上$E$不等于常数，不能从积分$\oint_s E\cos\theta dS$中提出，所以得不到$E=0$的结论。

练习题：

1．用$\vec{E}=-\nabla U$求等量同号电荷相距$l$时，中垂面上的场强。

提示：参考图1—7所示，中垂面上每一点$\vec{E}$的方向为$x$方向，所以$\vec{E}=\vec{E}_x$，则

$$\vec{E}=-\nabla U=-\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}$$

$$=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{ql}{[x^2+(l/2)^2]^{3/2}}\vec{i}.$$

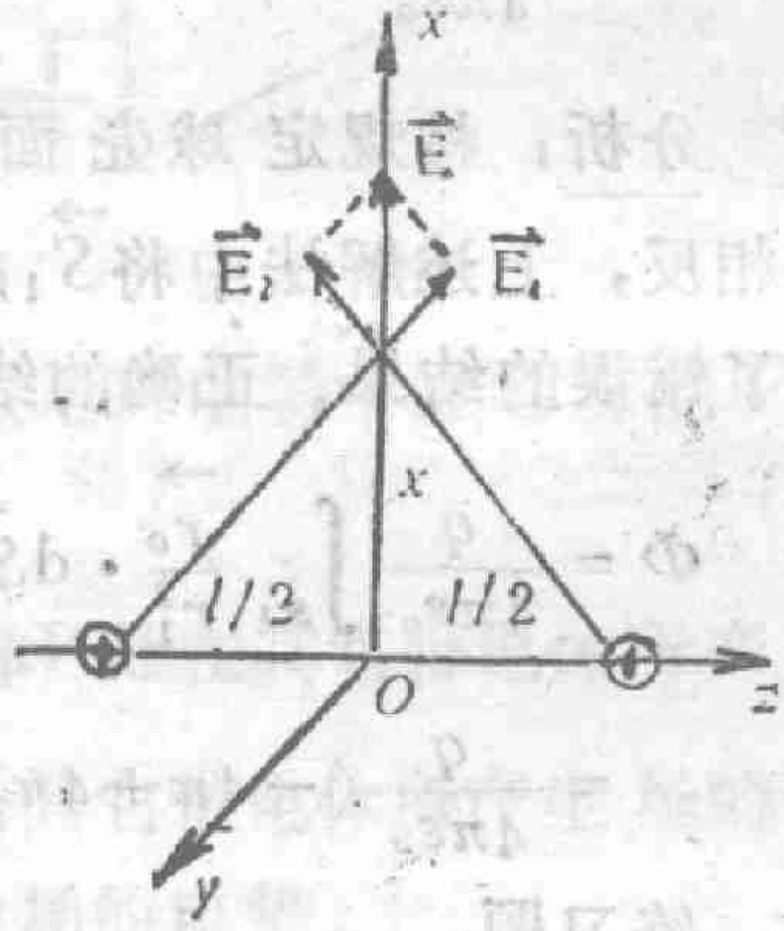



图1—7

2．用$\vec{E}=-\nabla U$求带电细棒中垂面上的场强分布。细棒长为$L$，电荷线密度为$\eta$。

提示：由于电荷分布的对称性，中垂面上各点的场强只有径向分量。所以

$$\vec{E}=\vec{E}_r=-\frac{\partial U}{\partial r}\vec{r}_0=\frac{\eta L}{4\pi\varepsilon_0 r[r^2+(L/2)^2]^{1/2}}\vec{r}_0.$$

注意：本题不能用高斯定理来求解。

(PDF压缩器 - 未注册版)

1—4．如图1—8所示，空间有一点电荷$q$，求通过以点电荷为球心，内外半径为$r_1$、$r_2$的球壳所组成的封闭曲面的电通量。




图1—8

错解：设内表面为$S_1$，外表面为$S_2$，通过球壳面的电通量等于通过$S_1$、$S_2$的通量之和，即

$$\Phi=\int_{S_1+S_2}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\int_{S_1}\vec{E}_1\cdot d\vec{S}_1+\int_{S_2}\vec{E}_2\cdot d\vec{S}_2.$$

将点电荷的场强$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0$代入上式得

$$\Phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_1}\frac{\vec{r}_0}{r_1^2}\cdot d\vec{S}_1+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_2}\frac{\vec{r}_0}{r_2^2}\cdot d\vec{S}_2$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(4\pi+4\pi)=\frac{2q}{\varepsilon_0}.$$

分析：按规定球壳面$S_1+S_2$中$\vec{S}_1$的外法线方向与$\vec{E}_1$的方向相反，上述解法中将$\vec{S}_1$的外法线方向取与$\vec{E}_1$的方向相同，导致了错误的结果。正确的结果为：

$$\Phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_1}\frac{\vec{r}_0}{r_1^2}\cdot d\vec{S}_1+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_2}\frac{\vec{r}_0}{r_2^2}\cdot d\vec{S}_2$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(-4\pi+4\pi)=0.$$

练习题：

1．有一金属壳内外半径各为$r_1$、$r_2$，带电$q$，在球壳中心放一点电荷$-q$，试求刚包围金属壳的壳形封闭面的电通量。

提示：电通量为$\Phi=q/\varepsilon_0$。

2．半径为$R$的半球面，置于均匀场强$\vec{E}$中，见图1—9所示。试求穿过它的电通量。

(PDF压缩器 - 未注册版)

提示：对于非闭合曲面，法线矢量的取法有两个方向。取法不同，通量不同（但只差一负号）。对本题，若取凸的方向为正方向，通量为$\Phi=\pi R^2E$，若取凹的 方向为正方向，通量为$\Phi=-\pi R^2E$。

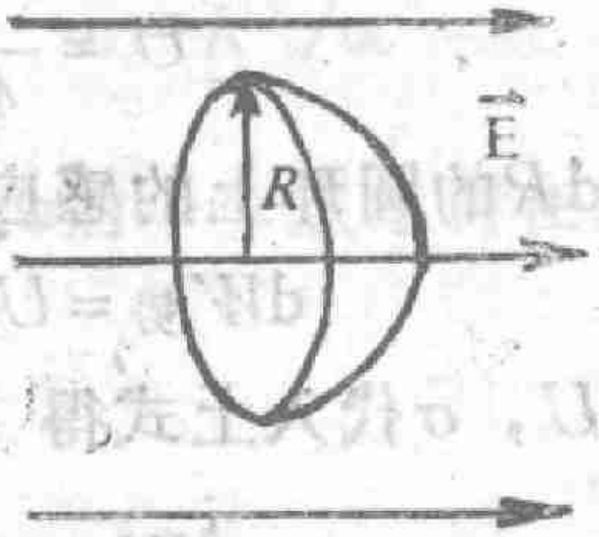


图 1－9

1－5．如图 1－10所示，一块很大的金属板接地，旁边放一点电荷$q$，试求 金属板上感应电荷在点电荷电场中的电势能。（点电荷距金属 板 为$a$，金属板上感应电荷的面密度为

$$\sigma=-\frac{aq}{2\pi(a^2+R^2)^{3/2}}).$$

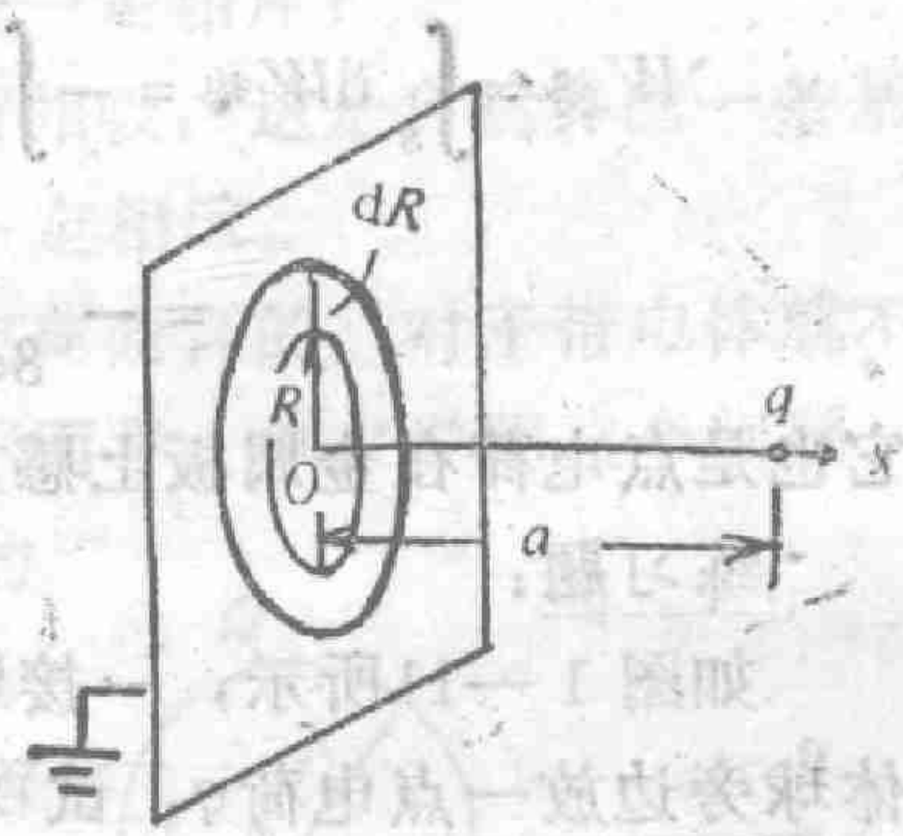


图 1—10

错解：我们知 道 带 电 体$V$在电场中某一处的 电 势 能 为$W_{势}=\int_V dW_{势}=\int_V U\,dq$，又 因 金 属板的电势为零，即感应电荷所在处的电势为零，所以金属板上感应电荷在点电荷电场中的电 势能$W_{势}=0$。

分析：公式$W_{势}=\int_V U\,dq$是带电体$V$处在其它带电体所产生的场中时、电势能的计算公式，其中$U$是其它带电体所产生 场的电势，并不包括被讨论带电体$V$本身产生场的电势。

对本题，$U$应是点电荷在金属板所在处产生的电势，不包括金属板上感应电荷产生场的电势，而上述解法中，应用的$U=0$，是点电荷和金属板上感应电荷共同产生场的电势。可见，包括了金属板上感应电荷产生场的电势。所以解法是错误的。

正确解法：参考图 1—10，点电荷$q$在距$O$点 为$R$的圆周上产生的电势为

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{a^2+R^2}}.$$

则d$R$的圆环上的感应电荷在点电荷电场中的电势能为

$$dW_{势}=U\,dq=U\sigma 2\pi R\,dR,$$

将$U$，$\sigma$代入上式得

$$dW_{势}=-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{aR}{(a^2+R)^2}dR,$$

所以整个金属板在点电荷场中的电势能为

$$W_{势}=\int_s dW_{势}=-\int_0^{\infty}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{aR}{(a^2+R^2)^2}dR$$

$$=-\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}.$$

它也是点电荷在金属板上感应电荷产生的电场中的电势能。

练习题：

如图 1—11所示，一接地的导体球旁边放一点电荷$q$，试求导体球上感应电荷在点电荷电场中的电势能（也就是接地球与点电荷体系的电势能）。[感应电荷的面密度为

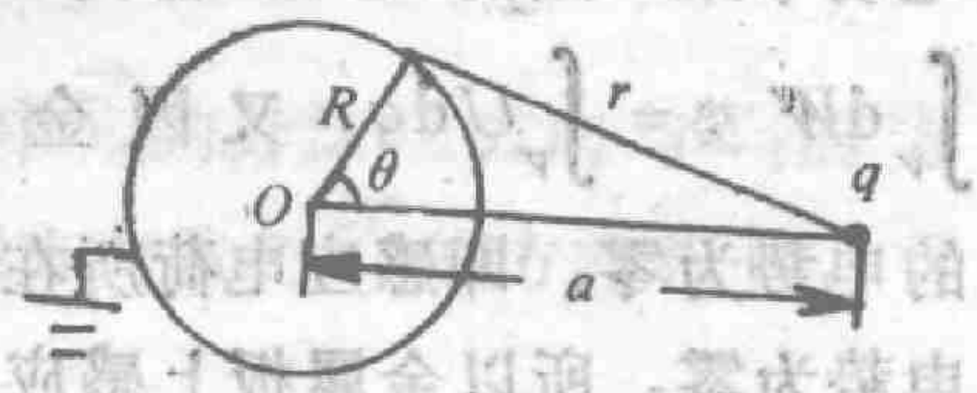


图 1—11

$\sigma=-\dfrac{q(a^2-R^2)}{4\pi R(R^2+a^2-2Ra\cos\theta)^{3/2}}$，$R$、$a$、$\theta$的几何意义见图所示]。

提示：导体球在点电荷单独产生的场中并非为等势体，所以它在点电荷场中的电势能

$$W_{势}=\int_s U\,dq\neq U\int_s dq.$$

应该是

$$W_{势}=\int_s U\,dq=\int_s\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\cdot\sigma\,dS.$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

答案：$W_{势}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Rq^2}{a^2-R^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(-Rq/a)}{a-R^2/a}$.

可见，它等于距球心为$R^2/a$，电量为$-Rq/a$的一个点电荷在点电荷$q$电场中的电势能。

## 二 错误的回答

1—6。两个同号带电体之间是否一定相斥？

错答：同号电荷相斥，异号电荷相吸，这是自然界的一条基本规律。因此两个同号带电体之间一定相斥。

分析：同号电荷相斥这是对点电荷而言的，对于带电体就不一定了，在一定条件下可能相吸。下面举一例来说明这个问题。

如图1—12所示，$A$是半径为$R$的导体球，带电$Q$，$B$是距导体球中心为$a$的点电荷$q$。由镜像法可得$AB$两带电体之间的互作用力为①

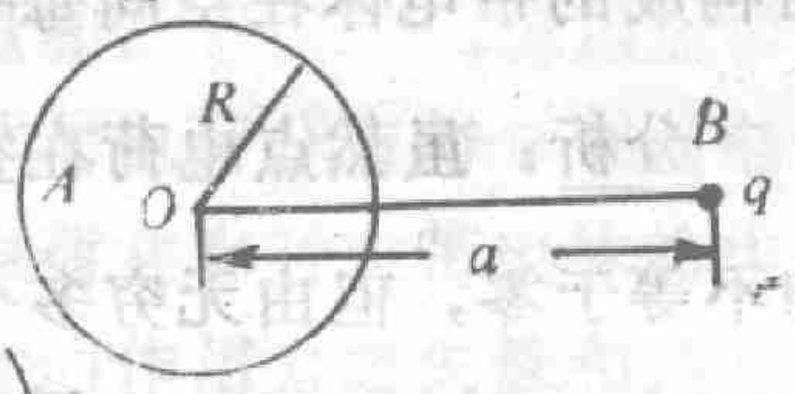


图 1—12

$$F=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q+Rq/a}{a^2}-\frac{Rq/a}{(a-R^2/a)^2}\right)$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{a^2}-\frac{qR^3(2a^2-R^2)}{a^3(a^2-R^2)^2}\right)$$

$$=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a^2}-\frac{q^2R^3(2a^2-R^2)}{4\pi\varepsilon_0 a^3(a^2-R^2)^2},$$

式中第一项为斥力，第二项为引力。当$a\to R$时（如$a=1.1R$时），引力大于斥力，$AB$之间的互作用力为吸引力。可见，即使$Q$与$q$同号，只要$q$距球面足够近，它们之间的互作用力也可能为吸引力。

---

①见郭硕鸿编《电动力学》$P75$（1979）.

(PDF压缩器 - 未注册版)

由上式还可知，当$q$与$Q$异号时，第一项也为引力，因此对于两个异号带电体之间，一定相吸，不可能相斥。

当$Q=0$时，第一项等于零，只有第二项（它是感应电荷与电荷$q$之间的互作用力），由此可得，带电体对非带电体一定相吸，不可能相斥。由于作用力是相互的，所以非带电体对带电体一定有作用力，且一定为吸引力。

练习题：

二带电体之间是否一定存在静电力？

提示：不一定。例如图1—12所示的二带电体，当$a$较大时为斥力，当$a$较小时为引力，则必定有一值无作用力，即$a$等于某一值时二带电体之间不存在静电力。

1—7．带电体是否一定在空间每一点均产生电场？

错答：点电荷在空间每一点均产生电场，则由无穷多个点电荷构成的带电体在空间每一点也均产生电场。

分析：虽然点电荷在空间每一点产生的电场$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}$均不等于零，但由无穷多个点电荷构成的带电体在空间某一点或某一区域内产生的电场$\vec{E}=\int_V d\vec{E}$可能为零。例如，均匀带电球面在球内任一点产生的电场均为零。

练习题：

一带电体产生的场强是否与旁边点电荷的电量和位置有关？

提示：带电体旁边点电荷的电量和位置不同，带电体上的电荷分布不同，它在空间产生的场强就不同。可见带电体产生的场强与旁边点电荷的电量和位置有关。

1—8．两个带电体共存时的电场是否等于单独存在时各自产生的电场的矢量和？

错答：由场强迭加原理可知，共存时的电场等于单独存在

(PDF压缩器 - 未注册版)

时各自产生的电场的矢量和。

分析：场强迭加原理是对点电荷而言的。对于任意带电体应修改为：两个带电体共存时的电场等于共存时各带电体单独产生的电场的矢量和。

练习题：

1．真空中两个带电体共存时对一点电荷的作用力是否等于它们单独存在时对这一点电荷的作用力之矢量和？

提示：两个点电荷共存时对另一点电荷的作用力等于它们单独存在时对这一点电荷的作用力之矢量和，但两个带电体共存时对另一点电荷的作用力不等于它们单独存在时对这一点电荷的作用力之矢量和，而是等于它们共存时各自对这一点电荷的作用力之矢量和，

2．两个点电荷共存时对另一带电体的作用力是否等于它们单独存在时对这一带电体的作用力之矢量和？

提示：由于两个点电荷共存时带电体的电荷分布与一个点电荷单独存在时的分布不同，所以两个点电荷共存时对带电体的作用力不等于它们单独存在时对这一带电体的作用力之矢量和。

1—9．有一带电体在$p$点产生的场强为$\vec{E}$，那么点电荷$q$放在$p$点时，受到的静电力是否为$q\vec{E}$。

错答：由$\vec{E}=\vec{F}/q$可知，点电荷受到的静电力就是$q\vec{E}$。

分析：点电荷$q$放到$p$点后，场强一般要发生改变，不再等于$\vec{E}$，所以静电力不是$q\vec{E}$，而应是$q$乘以点电荷放在$p$点后带电体在$p$点产生的场强$\vec{E'}$，即$\vec{F}=q\vec{E'}$。

练习题：

1．有一带电体$A$，在其空间某一点放一同号点电荷$q$时，测它对$q$的静电力为$\vec{F}$，那么$\vec{F}/q$是大于、等于、还是小于此时带电体在该点产生的场强？

(PDF压缩器 - 未注册版)

提示：等于此时——点电荷存在时，带电体在该点产生的场强，但小于点电荷不存在时带电体在该点产生的场强。

2。在空间某点放一点电荷$q$时，该点的场强不为零，将点电荷$q$取掉后，该点场强为零。这种情况是否存在？

提示：存在。如空间存在的物体是非带电体时，就出现这种情况。

1—10。一点电荷以某速度射入一原来均匀带电的球壳内部，问点电荷在球壳内部是否作匀速运动？

错答：由于均匀带电球壳内部的场强$\vec{E}=0$，所以点电荷在球壳内部不受力，则它作匀速运动。

分析：点电荷射入带电球壳内部后，由于静电感应，在球壳内表面出现异号电荷，该电荷在球壳内部产生的场不为零（除电荷在球心外），这样点电荷就要受到电场力，因此点电荷不是作匀速运动，而是作变速运动。

练习题：

二无限大平行导体板，带有等量同号电荷。有一点电荷放在平行板之间后，点电荷的运动情况如何？

提示：点电荷放在平行板之间后，二板上的电荷分布要发生变化，二板之间产生的电场不再为零。当点电荷放在二板正中间时，二板上电荷对它施加的合力为零，点电荷静止不动；当点电荷不在正中间时，二板上电荷对它施加的合力不为零，点电荷将加速运动，运动方向与所受的合力方向相同。

1—11。一带电球其电荷体密度随半径按$a/r$变化，那么半径为$r$的球面上的电力线根数随半径如何变化？

错答：证明可得半径为$r$的球面上场强$E=a/2\varepsilon_0$，可见场强随$r$不变，所以半径为$r$的球面上的电力线根数随$r$不变。

分析：场强$E$表示单位面积上的电力线根数，$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$

(PDF压缩器 - 未注册版)

$=q_{内}/\varepsilon_0$表示半径为$r$的球面上的电力线根数。由于$\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}$
$=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_v \rho dV=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \frac{a}{r}\cdot 4\pi r^2 dr=\frac{2\pi a}{\varepsilon_0}r^2$，可见半径为$r$的球面上的电力线根数随$r$的平方而增加。

练习题：

一带电球其电荷体密度随半径按$a/r^2$变化，那么半径为$r$的球面上的电力线根数随其半径如何变化？

提示：半径为$r$的球面上的场强（单位面积上电力线根数）$E=a/\varepsilon_0 r$，与$r$成反比，但球面上的电力线根数$\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}=q_{内}/\varepsilon_0$
$=4\pi a\cdot r/\varepsilon_0$随$r$的一次方增加。

1—12.在电场某区域内场强方向处处相同时，场强大小是否一定处处相等？

错答：由赵凯华等编《电磁学》上册$P71(1978)$习题3可知，在电场某区域内场强方向处处相同时，其大小一定处处相等。

分析：“在电场某区域内场强方向处处相同时，其大小一定处处相等”这一结论是有条件的。其条件是：所讨论的区域内无电荷分布。若有电荷分布时，这一结论不再成立。例如，有一个半导体$P—N$结，设$N$区内和$P$区内均匀地分布有正、负电荷，且两区内电荷的代数和为零（$P—N$结的突变结模型），在该$P—N$结内场强方向处处相同，但大小不等，沿场强方向变化。

练习题：

在通过无限长均匀带电直线的平面内，各点场强方向相同，其大小是否相同？

提示：“在电场某区域内不存在电荷分布，且各点场强方向处处相同时，其大小一定处处相等”这一结论中所指的区域是空间立体区域，而不是平面区域。而本题中的区域是平面区域，所

(PDF压缩器 - 未注册版)

以不能引用上述结论。

由无限长均匀带电直线产生场强的公式$\vec{E}=\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{r_0}$可知，其大小并非处处相等。

1—13。一面元$d\vec{S}$放在场中$a$、$b$两点，放在$a$点时穿过它的通量大于放在$b$点时穿过它的通量，那么$a$、$b$两点哪点的场强大？

错答：$a$点场强大。

分析：面元$d\vec{S}$在场中穿过它的通量$d\Phi=\vec{E}\cdot d\vec{S}$，不仅与$\vec{E}$、$d\vec{S}$大小有关，而且与二者的夹角有关，所以不能确定哪一点的场强大。

练习题：

在一均匀场中，有一大面，有一小面，穿过哪一个的通量大？

提示：穿过面积$S$的通量$\Phi=\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$，不仅与$\vec{E}$和$S$的大小有关，还与其夹角有关，所以无法确定。

1—14。空间有一带电体，它的位置变化时，旁边高斯面上的通量是否变化？

错答：带电体位置变化时，空间场强要发生变化，则带电体旁边高斯面上的场强也要变化，由$\Phi=\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$可知，高斯面上的通量要发生变化。

分析：穿过高斯面的电通量仅与高斯面内的电荷$q_{内}$有关。因带电体始终在高斯面外，高斯面内$q_{内}$未变，所以高斯面上的通量$\Phi=\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=q_{内}/\varepsilon_0$未变。

练习题：

空间有一带电体，其位置变化时，旁边非闭合面上的通量是否变化？

(PDF压缩器 - 未注册版)

提示：一般要变化。

1—15.无限长带电直线，无限大带电平面和球形带电体在空间产生的电场、是否一定可用高斯定理来求？

错答：由于这些带电体都具有对称性，所以它们在空间产生的电场一定可用高斯定理来求。

分析：当电荷分布具有高度对称性时，可用高斯定理来求其电场分布，当带电体的几何形状具有对称性，而电荷分布不具有高度对称性时，不可用高斯定理来求其电场分布。因此，无限长带电直线，无限大带电平面和球形带电体，其电荷分布不均匀时，其电场分布不具有高度对称性，这时不可用高斯定理来求它们在空间产生的电场。

练习题：

有一椭球带电体，电荷分布均匀。能否用高斯定理求其电场分布？

提示：不能用高斯定理求其电场分布，因为其电场分布不具有高度对称性。

1—16.带电体所带的电荷及其分布一定时，其场中各点的场强和电势是否一定？

错答：带电体所带的电荷及其分布一定时，其激发的电场就一定，则描述电场的两个物理量——场强和电势也一定。

分析：场强一定，但电势不一定。因为电势与电势零点的选择有关。

练习题：

$A$、$B$两均匀带电球体，带有同号电荷，但$A$的电量比$B$的大，问哪个球面上的场强大？哪个球面上的电势高？

提示：对于带电球产生的场强不仅与其带电量有关，还与带电球本身半径有关。在此二球半径不知，所以无法确定哪个球面上的场强大；对于电势除与电量和半径有关，还与电荷正负和电

(PDF压缩器 - 未注册版)

势零点选择有关，而这些都未给出，所以更不能确定哪个球面上的电势高。

1—17.对于无限大带电体，是否一定不能取无穷远点为零势点？

错答：是。如果选无穷远点为零势点，将得到空间各点电势均为无穷的无意义值。

分析：当带电体产生的电场强度$E\propto\frac{1}{r^n}$（$n>1$）时，积分$U=\int_r^\infty \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$收敛，就可选择无穷远点为零势点，否则不可选无穷远点为零势点。

对于无限大均匀带电体（如无限长均匀带电直线，无限长均匀带电柱、壳，无限大均匀带电平面），对应的$n$均小于或等于1，所以不可选无穷远点为零势点，但是对于1—5题中图1—10所示的无限大带电体，对应的$n$大于1，所以可以选无穷远点为零势点。（对于有限大带电体，对应的$n$均大于1，所以均可选无穷远点为零势点。）

练习题：

能否选择带电体本身为电势零点？

提示：对于实际带电体均可选择带电体本身为电势零点，但是，对于理想化处理的带电体，如将它点化或线化时，不能选择带电体本身为电势零点。具体地说，只有点电荷和线带电体不能选择本身为电势零点，其它带电体均可选择本身为零势点。

1—18.孤立带电体带正电时，其空间每一点的电势是否均为正？带负电时，其空间每一点的电势是否均为负？

错答：由电势公式$U=\int_V\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r}$可知，带正电时，空间每一点电势均为正；带负电时，空间每一点电势均为负。

(PDF压缩器 - 未注册版)

分析：公式$U=\int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r}$仅适用于选无穷远点为电势零点的情况。如选有限远点为电势零点时，公式应为$U=\int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)\mathrm{d}q$，此时，上面的结论是错误的。

练习题：

1．“如果选无穷远点为电势零点，带正电的物体其电势一定为正，带负电的物体其电势一定为负”。这个结论是否正确？

提示：不一定正确，与带电体所处的外场的性质有关。例如，带有少量正电荷的导体，当置于较强的负电荷场中时，其电势为负；带有少量负电荷的导体，当置于较强的正电荷场中时，其电势为正。

2．在几个带电体组成的系统中，异号带电体的电势是否可能相等？

提示：可能。例如，有四带电板、带电情况如图1—13所示，$B$、$C$两板上带有异号电荷，但电势相等（因$B$、$C$两板间合场强为零）。

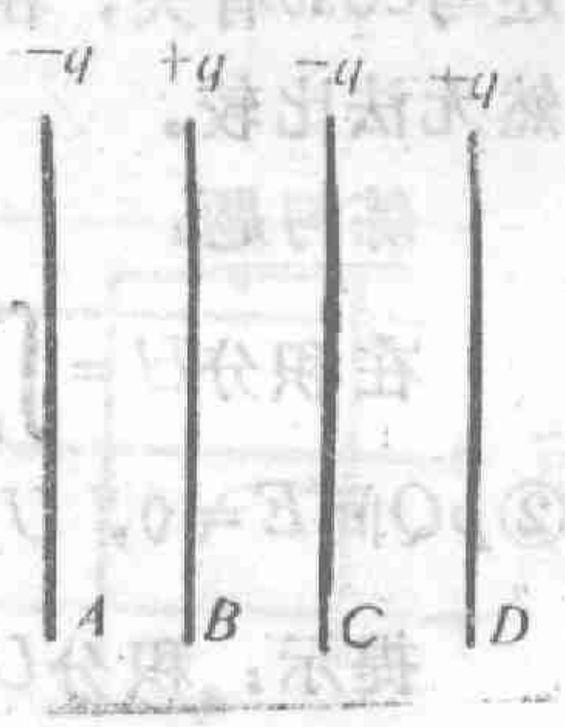


图 1—13

1—19.在均匀带电圆环的轴线上，哪一点电势最大？

错答：均匀带电圆环轴线上的场强大小为$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$，由此可得，$x=R/\sqrt{2}$时，$E$最大。则由$U=\int_p^Q \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$可知，$x=R/\sqrt{2}$时，$U$也最大。

分析：由$U=\int_p^Q \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$得不到场强大的地方电势大。（也得不到电势大的地方场强大）。由均匀带电圆环轴线上的电势公式$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(R^2+x^2)^{1/2}}$可知，$x=0$时，$U$最大。

(PDF压缩器 - 未注册版)

练习题：

等量同号电荷中垂面上哪一点场强最大？哪一点电势最大？

提示：当$x=l/\sqrt{2}$时，$E$最大；当$x=0$时，$U$最大。其中$x$是场点到等量同号电荷中心的距离，$l$是等量同号电荷之间距离的一半。

1—20.在某一带电体的场中，有$a$、$b$、$c$、$d$四点，$\overline{ab}=\overline{cd}$，即$a$、$b$两点之间的距离等于$c$、$d$两点之间的距离，并且$a$、$b$两点连线上的场强处处大于$c$、$d$两点连线上的场强，那么$a$、$b$两点之间的电势差$U_{ab}$是否大于$c$、$d$两点之间的电势差$U_{cd}$？

错答：当然大于。

分析：不一定。由$U_{mn}=U_m-U_n=\int_m^n \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_m^n E\cos\theta dl$

可知，空间两点之间的电势差不仅与场强大小、间距有关，而且还与$\cos\theta$有关，在此$\cos\theta$没有给定，所以二电势差都不确定，当然无法比较。

练习题：

在积分$U=\int_p^Q \vec{E}\cdot d\vec{l}$中，①$pQ$间$E$大时，$U$是否一定大？②$pQ$间$E\neq 0$，$U$是否一定不为零？

提示：积分$U=\int_p^Q \vec{E}\cdot d\vec{l}$不仅与$pQ$间$\vec{E}$的大小有关，而且与$\vec{E}$和$\vec{l}$的夹角有关，所以二者答案都是：不一定。

1—21.如图1—14所示，点电荷$q$旁边有一接地的无限大导体板，如果选$A$点为电势零点，导体板与$A$点之间的电势差为多少？

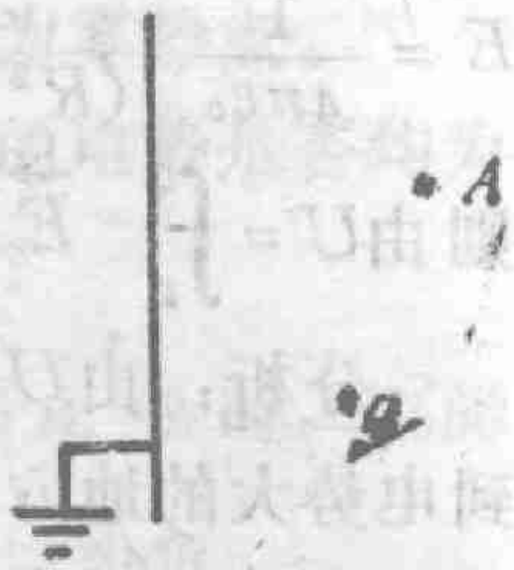


图 1—14

错答：接地物体电势为零，$A$点电势也为零，所以二者间的电势差为零。

分析：电场中只能选择一处作为电势零

(PDF压缩器 - 未注册版)

点，如果选择了$A$点为电势零点，那么接地导体板电势就不为零，而是$U_{导}=U_{导}-U_A=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$。其中$r_1$、$r_2$的几何意义见图1—15所示。

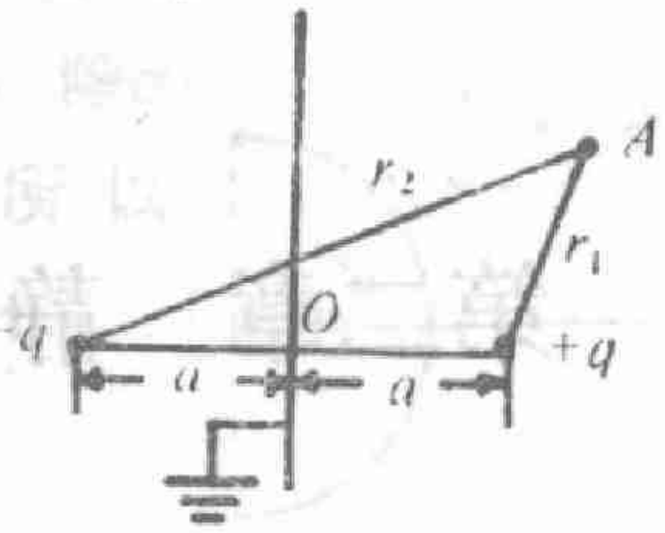



图 1—15

练习题：

在地面上方很远的地方有一半径为$R$、带电量为$q$的导体球，若选导体球面为零势点，那么它与地面之间的电势差为多少？

提示：此时地面的电势不再为零。带电球与地面之间的电势差为$U_{球}-U_{地}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$。

## 三 错误的推论

1—22.假设空间某区域内各点场强方向相同，大小沿垂直场强的方向递增（如图1—16所示）。在这一场中取一闭合环路$abcd$，则$\oint_{abcd}\vec{E}\cdot d\vec{l}\neq 0$，可见静电场的闭合环路积分不一定为零，即静电场不一定为无旋场。

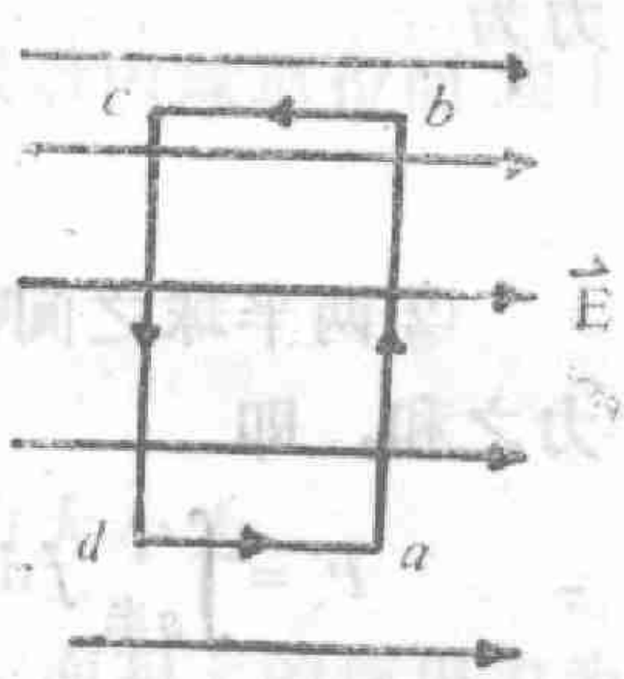



图 1—16

分析：本题的前提是错误的，不可能存在如图1—16所示的静电场，当然推论也是错误的。

(PDF压缩器 - 未注册版)

# 第二章　静电场中的导体和电介质

## 一　错误的解法

2—1。有一孤立导体球，半径为$R$、带电$q$，试求：

①球表面单位面积上受到的静电力；

②两半球之间的静电互作用力。

错解：①由于导体球是孤立的，电荷均匀地分布在球表面，面密度为$\sigma = q/4\pi R^2$，所以导体球外表面的场强为$E = \sigma/\varepsilon_0 = q/4\pi\varepsilon_0 R^2$。则由$F = qE$得球表面单位面积上受到的静电力为

$$f = \sigma E = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 R^4}。$$

②两半球之间的静电互作用力等于每半球上各点受到的静电力之和，即

$$F = \int_{S半} f\,\mathrm{d}S = f\int_{S半}\mathrm{d}S = fS_{半} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 R^4}\cdot 2\pi R^2$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}。$$

分析：①在公式$F = qE$中，$E$一定要是除$q$外其它电荷在$q$所在处产生的场强。因此，在导体表面单位面积上受到的静电力的计算公式$f = \sigma E$中，$E$一定要是除$\sigma$外其它电荷在$\sigma$所在处产生的场强。而在公式$E = \sigma/\varepsilon_0$中，$E$是导体表面外附近点的场强，并不是其它电荷在导体表面上$\sigma$所在处的场强，因此不可将$E = \sigma/\varepsilon_0$代入$f = \sigma E$来求导体表面上单位面积上受到的静电力，

(PDF压缩器 - 未注册版)

而上述解法中就这样作了，所以结果是错误的。

可以证明①，导体表面上$\sigma$所在处，除$\sigma$外其它电荷产生的场强为$E=\sigma/2\varepsilon_0$。所以球表面单位面积上受到的静电力为

$$f=\sigma E=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}=\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0R^4}.$$

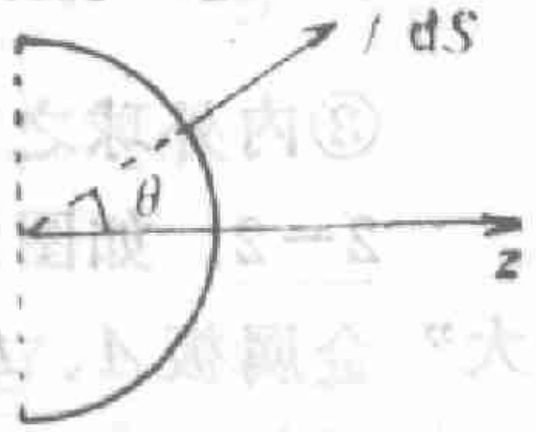



图 2—1

②静电力是矢量，因此求合力时应考虑方向。参考图2—1所示，两半球之间的静电互作用力为

$$F=\int_{S半}f\cos\theta\mathrm{d}S=\int_{S半}\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}R^2\cos\theta\ \sin\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}R^2\cos\theta\ \sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi R^2\sigma^2}{2\varepsilon_0}=\frac{q^2}{32\pi\varepsilon_0R^2}.$$

练习题：

两个同心球壳，内外半径分别为$R_1$、$R_2$，各带电$+q$和$-q$，试求：

①内球对外球单位面积上的作用力，外球对内球单位面积上的作用力；

②外球和内球单位面积上各受到的作用力；

③内外球之间的互作用力。

提示：①内球对外球单位面积上的作用力大小为$f_1=\frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0R_2^4}$，方向向里。外球对内球单位面积上的作用力为$f_2=0$。

②外球单位面积上受到的作用力大小为$f_1'=\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0R_2^4}\neq f_1$，方向向里。内球单位面积上受到的作用力大小为

---

①见2—15题的分析。

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$f'_2 = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R_1^4} \neq f_2$$，方向向外。

③内外球之间的互作用力为$F=0$。

2—2。如图2—2所示，四块“无限大”金属板$A$、$B$、$C$、$D$，大小相等，互相平行，且间距相等都为$l$，其中$A$、$D$接地，当$B$、$C$接在电源两端充电到$U$时，各板之间的电场为多少？

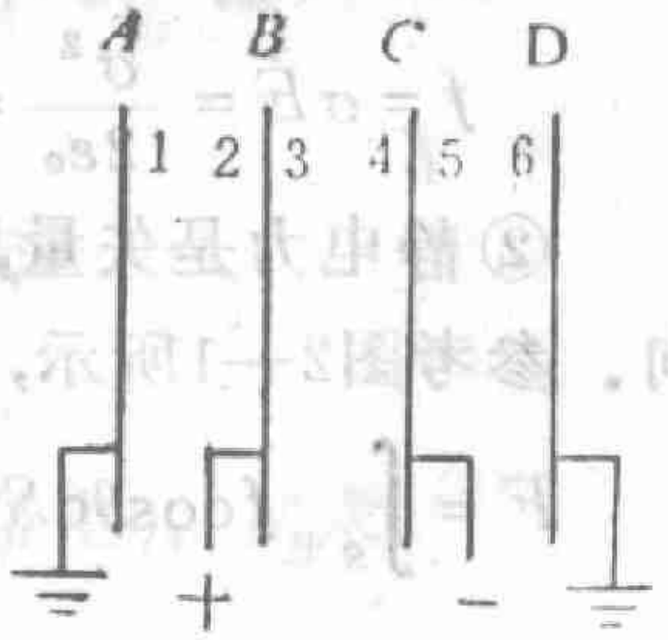


图 2—2

错解：当$B$、$C$接在电源两端充电到$U$时，$B$、$C$之间的电场为$E_{BC}=U/l$，$A$、$B$之间，$C$、$D$之间的电场为零。

分析：当$B$、$C$接在电源两端充电时，为了保证$A$、$D$等电势（均为大地的电势），不仅在$B$、$C$间有电场，在$A$、$B$与$C$、$D$间也有电场。但是，当$A$、$D$两板有一板或者都不接地时，只有$B$、$C$间有电场。

正确解法：当$B$、$C$接在电源两端充电到$U$时，

$$U_{BC}=U。$$

又因$A$、$D$板接地，所以

$$U_{AD}=0。$$

即
$$U_{AB}+U_{BC}+U_{CD}=0。$$

可见，
$$U_{AB}+U_{CD}=-U_{BC}=-U。$$

由高斯定理 $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=q/\varepsilon_0$和导体内部场强为零可得（参见图2—2）

$$q_1+q_2=0,\ q_3+q_4=0,\ q_5+q_6=0。$$

再由电荷守恒定律可得

$$q_2+q_3+q_4+q_5=0。$$

联立可得
$$q_1=q_5,\ q_2=q_6。$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

可见，$U_{AB}=U_{CD}$。

将此代入$U_{AB}+U_{CD}=-U_{BC}$可得，

$$U_{AB}=U_{CD}=-\frac{U_{BC}}{2}=-\frac{U}{2}。$$

所以各极之间的电场为

$$E_{BC}=\frac{U}{l},\quad E_{AB}=E_{CD}=-\frac{E_{BC}}{2}=-\frac{U}{2l}。$$

练习题：

四块很大的金属板$A$、$B$、$C$、$D$，大小相等，互相平行，且间距相等，都为$d/3$，（如图2—3所示）。

①现将$A$、$B$接到电源上面充电到$U_0$之后撤去电源，这时$A$、$C$间，$C$、$D$间，$D$、$B$间的电势差各为多少？场强各为多少？$C$、$D$上有无电荷，分布如何？②若用导线将$C$、$D$两板连接起来，随即撤去导线，再回答上述问题。③若再用导线将$A$、$B$两板连接起来，随即撤去导线，请再回答上述问题。

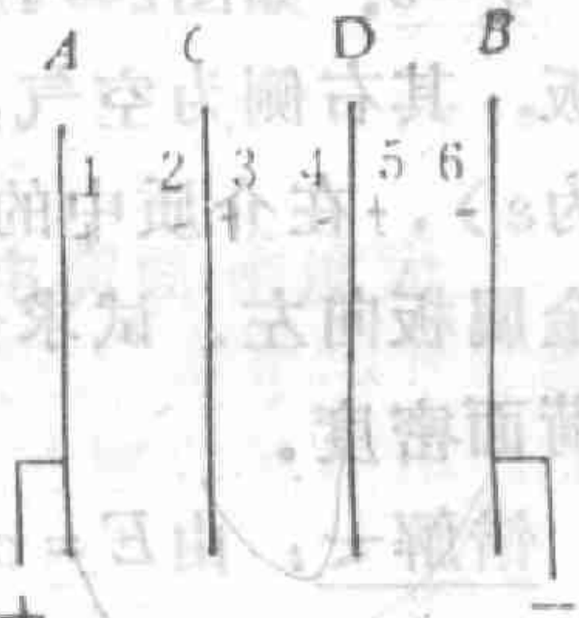


图 2—3

答案：① $U_{AC}=U_{CD}=U_{DB}=U_0/3$。

$$E_{AC}=E_{CD}=E_{DB}=U_0/d。$$

$C$、$D$两板的两面上出现等量异号电荷，电量各为

$$q_2=q_4=q_6=-\varepsilon_0\frac{S}{d}U_0,\quad q_3=q_5=q_1=\varepsilon_0\frac{S}{d}U_0。$$

② $U'_{AC}=U'_{DB}=U_0/3$，$U'_{CD}=0$。

$$E'_{AC}=E'_{DB}=U_0/d,\quad E'_{CD}=0。$$

$C$、$D$两板相对面上的电荷全中和了，相背面上的电荷等量异号，其值为$\varepsilon_0\frac{S}{d}U_0$。

(PDF压缩器 - 未注册版)

③ $U''_{AC}=U''_{BD}=-U''_{CD}/2=U_0/9$（注意，此时$U_{CD}$不再等于零）。

$$E''_{AC}=E''_{DB}=-\frac{E''_{CD}}{2}=-\frac{U_0}{3d}.$$

$C$、$D$相对面和相背面上电荷均等量异号，各为

$$q'_2{}'=-q'_5{}'=\frac{\varepsilon_0U_0S}{3d},$$

$$q'_3{}'=-q'_4{}'=\frac{2\varepsilon_0U_0S}{3d}.$$

2—3. 如图2—4所示，一无限大带电平面金属板，其右侧为空气，左侧为均匀介质（介电常数为$\varepsilon$），在介质中的场强大小为$E$，方向为垂直金属板向左。试求金属板左右两表面上的自由电荷面密度。

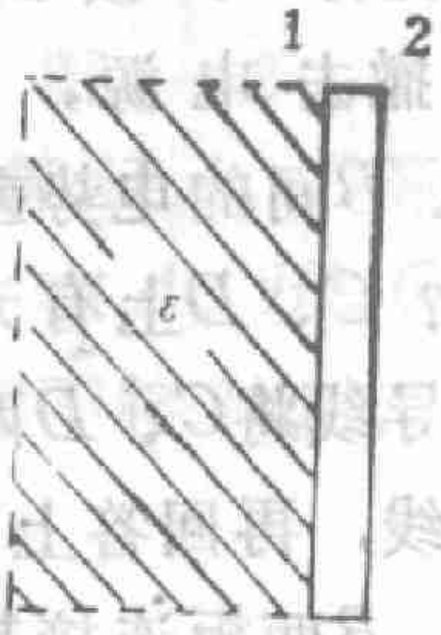


图 2—4

错解一：由$E=\sigma/\varepsilon_0$得，1面上的自由电荷面密度为

$$\sigma_1=\varepsilon_0E.$$

由于导体中场强等于零，所以有

$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}=0.$$

由此可得，2面上的自由电荷面密度为

$$\sigma_2=\sigma_1=\varepsilon_0E.$$

分析：由高斯定理$\oint_s\vec{E}\cdot d\vec{S}=q/\varepsilon_0$可得，不论导体外面是真空还是介质，导体表面外附近的场强总满足等式$E=\sigma/\varepsilon_0$，其中$\sigma$是总电荷面密度。当导体外面是真空时，导体表面只有自由电荷，$\sigma=\sigma_0$；当导体外面是介质时，表面（应该说交界面）不仅有自由电荷，还有束缚电荷，$\sigma=\sigma_0+\sigma'$。

(PDF压缩器 - 未注册版)

本题中，导体左边是介质，所以，1面上既有自由电荷，又有束缚电荷，因此由$E=\sigma/\varepsilon_0$求得的$\sigma=\varepsilon_0 E$是自由电荷面密度和束缚电荷面密度的代数和，而不是自由电荷的面密度。在上述解法中，认为它是自由电荷面密度，当然是错误的。

顺便再说几句：由高斯定理$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=q_0$可得，在导体外面不论是真空还是介质，导体表面外附近的电位移矢量$D=\sigma_0$，则由$D=\varepsilon E$可知，导体表面外附近的场强为$E=\sigma_0/\varepsilon$，其中$\sigma_0$是自由电荷面密度，$\varepsilon$是导体外面介质的介电常数。当导体外面是真空时，$\varepsilon=\varepsilon_0$。

由$E=\sigma/\varepsilon_0$和$E=\sigma_0/\varepsilon$可得，在导体表面$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma_0}{\varepsilon}$，或

$$\frac{\sigma}{\sigma_0}=\frac{1}{\varepsilon_r}。$$

错解二：由$E=\sigma_0/\varepsilon$，可得1面上的自由电荷面密度为

$$\sigma_{01}=\varepsilon E。$$

再根据导体内电场为零得

$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}=0,$$

即
$$\frac{\sigma_{01}+\sigma_1'}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_{02}}{2\varepsilon_0}=0。$$

可见，
$$\sigma_{02}=\sigma_{01}+\sigma_1'=\sigma_1。$$

再由$E=\sigma/\varepsilon_0$可得，$\sigma_1=\varepsilon_0 E$。

所以，2面上的自由电荷面密度为

$$\sigma_{02}=\varepsilon_0 E。$$

分析：此解法的错误在于忽略了介质的另一表面上（无穷远处）存在的束缚电荷。

根据电荷守恒定律可知，介质的另一表面上束缚电荷面密度与$\sigma_1'$等量异号，所以导体内的场强应为

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$\frac{\sigma_{o1}+\sigma'_1}{2\varepsilon_o}+\frac{-\sigma'_1}{2\varepsilon_o}-\frac{\sigma_{o2}}{2\varepsilon_o}=0.$$

其中第一项是1面上电荷（自由电荷+束缚电荷）产生的，第二项是无穷远处的介质表面上电荷（束缚电荷）产生的，第三项是2面上电荷（自由电荷）产生的。由此得：$\sigma_{o1}=\sigma_{o2}$，再由$E=\frac{\sigma_o}{\varepsilon}$得：$\sigma_{o1}=\varepsilon E$，所以$\sigma_{o1}=\sigma_{o2}=\varepsilon E$。由此可见，两表面上的自由电荷面密度相等。这表明，介质充满无限大导体板的一侧时，不影响导体表面的自由电荷分布。但是，介质不是充满一侧而是部分充满时，要影响导体表面的自由电荷分布。

练习题：

如图2—5所示，一很大的平面导体板，面积为$S$，带有自由电荷$q_o$。将其一半插入介电常数为$\varepsilon$的液体中，试求导体板上自由电荷的面密度分布。

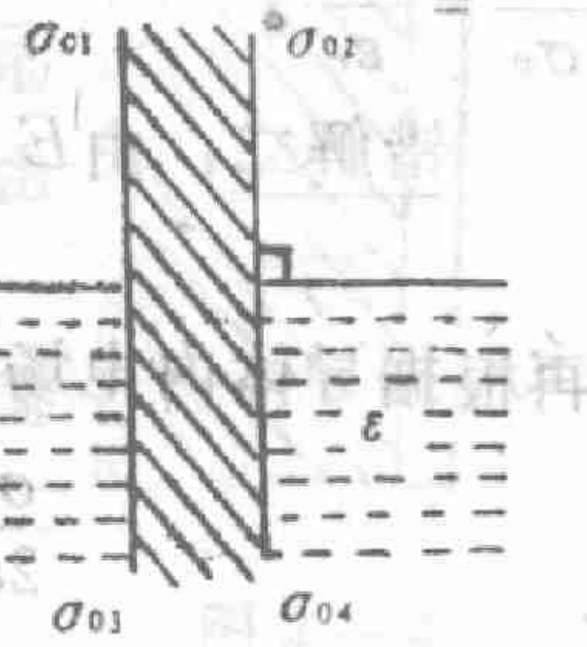



图 2—5

答案：$\sigma_{o1}=\sigma_{o2}=\frac{\varepsilon_o q_o}{(\varepsilon_o+\varepsilon)S}$，

$$\sigma_{o3}=\sigma_{o4}=\frac{\varepsilon q_o}{(\varepsilon_o+\varepsilon)S}.$$

由此可知，上下二表面的自由电荷面密度不等，并且介质中的自由电荷面密度大，其比值为$\frac{\sigma_{o1}}{\sigma_{o3}}=\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon_r}$。

2—4。如图2—6所示，一导体球带电$q_o$，半径为$R_1$，球外有两种均匀电介质，一种介质外半径为$R_2$，相对介电常数为$\varepsilon_{r1}$，另一种介质充满其余整个空间，相对介电常数为$\varepsilon_{r2}$。试求两个交界面上的束缚电荷面密度。

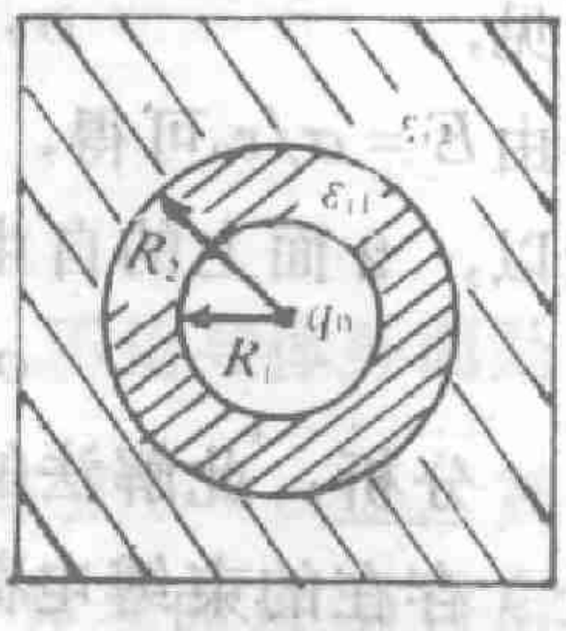



图 2—6

(PDF压缩器 - 未注册版)

错解：由$\oint_s \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=q_0$可得介质中的电位移矢量为

$$\vec{D}=\frac{q_0}{4\pi r^2}\vec{r}_0.$$

再由$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$，$\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}$可得介质1和介质2中的极化强度矢量分别为

$$\vec{P}_1=\left(1-\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right)\frac{q_0}{4\pi r^2}\vec{r}_0,$$

$$\vec{P}_2=\left(1-\frac{1}{\varepsilon_{r2}}\right)\frac{q_0}{4\pi r^2}\vec{r}_0.$$

则由$\sigma'=\vec{P}\cdot\vec{n}=P_n$得两个交界面上的束缚电荷面密度分别为

$$\sigma'_1=\vec{P}_1\cdot\vec{n}=\left(1-\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right)\frac{q_0}{4\pi R_1^2},$$

$$\sigma'_2=\vec{P}_2\cdot\vec{n}=\left(1-\frac{1}{\varepsilon_{r2}}\right)\frac{q_0}{4\pi R_2^2}.$$

分析：公式$\sigma'=\vec{P}\cdot\vec{n}=P_n$仅适用于介质与导体或者介质与真空的交界面（式中$\vec{n}$是交界面上的单位法向矢量，其方向由介质指向导体或真空）。在两种介质的交界面上，$\sigma'=\vec{P}_1\cdot\vec{n}-\vec{P}_2\cdot\vec{n}=P_{1n}-P_{2n}$。（式中$\vec{n}$的方向是由介质1指向介质2）。

对本题，只有导体球与介质1的交界面上，公式$\sigma'=\vec{P}\cdot\vec{n}$成立。在介质1与介质2的交界面上，$\sigma'=\vec{P}\cdot\vec{n}$不成立，应该用$\sigma'=P_1\cdot n-P_2\cdot n$。在上述解法中，在导体球与介质1的交界面上用了$\sigma'=\vec{P}\cdot\vec{n}$，虽然用的公式是正确的，但将$\vec{n}$的方向搞错了（$\vec{n}$的方向本应由介质1指向导体，而上面用的$\vec{n}$、其方向是从导体指向介质），所以，求的$\sigma'_1$是错误

(PDF压缩器 - 未注册版)

的（不过与正确值只差一负号）；在介质1与介质2的交界面上应用了公式$\sigma'_2=\vec{P}_2\cdot\vec{n}$，公式用错了，所以求的$\sigma'_2$也是错误的。

如果在导体球与介质1的交界面上用公式$\sigma'=\vec{P}_1\cdot\vec{n}$，在介质1与介质2的交界面上用公式$\sigma'=\vec{P}_1\cdot\vec{n}-\vec{P}_2\cdot\vec{n}$，并注意$\vec{n}$的方向，可得两个交界面上的束缚电荷面密度分别为

$$\sigma'_1=-\left(1-\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right)\frac{q_0}{4\pi R_1^2},$$

$$\sigma'_2=\left(\frac{1}{\varepsilon_{r2}}-\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right)\frac{q_0}{4\pi R_2^2}.$$

注：将$\oint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}=\frac{q_0+q'}{\varepsilon_0}$，$\oint_S\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=q_0$，$\oint_S\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=-q'$应用到二介质的交界面上可得

$$(\vec{E}_2-\vec{E}_1)\cdot\vec{n}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_0+\sigma'),$$

$$(\vec{D}_2-\vec{D}_1)\cdot\vec{n}=\sigma_0,\quad(\vec{P}_2-\vec{P}_1)\cdot\vec{n}=-\sigma'.$$

即

$$E_{2n}-E_{1n}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_0+\sigma'),$$

$$D_{2n}-D_{1n}=\sigma_0,\ P_{2n}-P_{1n}=-\sigma'.$$

其中，$\vec{n}$是二介质交界面上的单位法向矢量，方向由介质1指向介质2。$\sigma$、$\sigma_0$、$\sigma'$分别为二介质交界面上的总电荷面密度、自由电荷面密度和束缚电荷面密度。上面的几式分别称为$E$、$D$、$P$的边界条件。

当介质1是导体，介质2是介质或真空时，

$$E_1=0,\ E_2=E_{2n}=E,$$

$$D_1=0,\ D_2=D_{2n}=D,$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

$P_1=0$，$P_2=P_{2n}=P$，（真空中$P=0$）。

将它们代入上面几式得，导体外表附近（介质或真空中的）$E$、$D$、$P$分别为

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_0+\sigma')，$$

$$D=\sigma_0，\quad P=-\sigma'。$$

注意，$\vec{E}$、$\vec{D}$、$\vec{P}$的方向为导体指向介质或真空。

练习题：

如图2—7所示，在平行板电容器中间充有两层介质，其相对介质常数分别为$\varepsilon_{r1}$、$\varepsilon_{r2}$；当电容器两极板充电$\pm q_0$时，几个边界面上的自由电荷、束缚电荷和总电荷各为多少？

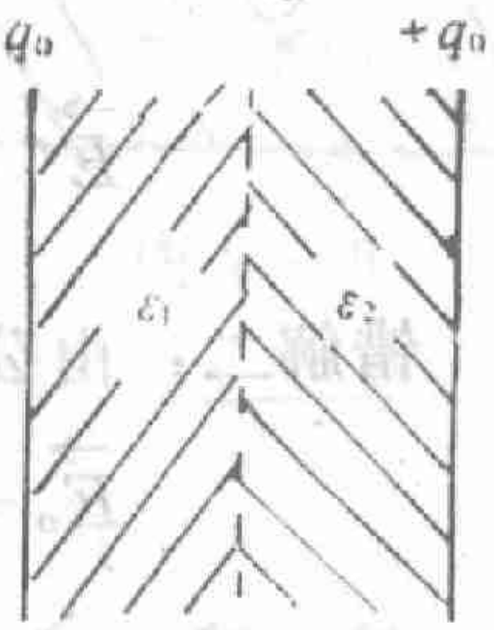


图 2—7

答案：$q_{01}=-q_0$，$q_{02}=q_0$，$q_{03}=0$；

$$q'_1=\left(1-\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right)q_0，\quad q'_2=-\left(1-\frac{1}{\varepsilon_{r2}}\right)q_0，q'_3=\left(\frac{1}{\varepsilon_{r1}}-\frac{1}{\varepsilon_{r2}}\right)q_0；$$

$$q_1=-\frac{q_0}{\varepsilon_{r1}}，\quad q_2=\frac{q_0}{\varepsilon_{r2}}，\quad q_3=\left(\frac{1}{\varepsilon_{r1}}-\frac{1}{\varepsilon_{r2}}\right)q_0。$$

2—5. 如图2—8所示，一细棒截面为$S$长为$l$，（$S\ll l^2$）。现将它沿轴均匀极化，极化强度为$\vec{P}$，试求棒中点的退极化场。

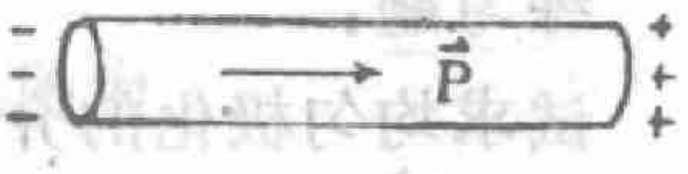


图 2—8

错解一：细棒左右两端的束缚电荷为

$$q'=\sigma' S=\begin{cases}-PS & \text{（左端面），}\\ PS & \text{（右端面）。}\end{cases}$$

由于$S\ll l^2$，即端面很小，$l$很大，所以对于细棒中点，二端面上的束缚电荷均可看成点电荷，则在中点的退极化场为（选$\vec{P}$的方向为$\vec{E}$的正方向）

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$E' = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{PS}{(l/2)^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{PS}{(l/2)^2} = -\frac{2PS}{\pi\varepsilon l^2}.$$

负号表示$\vec{E}'$的方向与$\vec{P}$的方向相反。

分析：束缚点电荷$q'$不论是在真空中，还是介质内，产生的电场都是$\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{r^2}\vec{r}_0$。因此正确的答案是

$$\vec{E}' = -\frac{2\vec{P}S}{\pi\varepsilon_0 l^2}.$$

错解二：由公式$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$和$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}_0$①可得

$$\vec{E}_0 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\vec{E} = \varepsilon_r\vec{E}.$$

又因$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$，所以退极化场为

$$\vec{E}' = \vec{E} - \vec{E}_0 = (1-\varepsilon_r)\vec{E}.$$

再利用$\vec{P} = \varepsilon_0\chi\vec{E}$得

$$\vec{E}' = (1-\varepsilon_r)\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0\chi} = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}.$$

分析：公式$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}_0$只有在均匀介质充满电场的全部空间或均匀介质表面是等势面时成立，在此不满足这一条件，所以$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}_0$不成立，当然上面的解法是错误的。

练习题：

试求均匀极化的介质球，在球心产生的退极化场$\vec{E}'$。设极化强度为$\vec{P}$。

答案：$\vec{E}' = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$。

2—6. 如图2—9所示，在无限大均匀极化的电介质中挖出一

①见赵凯华等编《电磁学》上册$P_{152}$(1978)。

(PDF压缩器 - 未注册版)

半径为$r$，高度为$h$（$h \ll r$）的圆柱形空腔，试求束缚电荷在空腔中产生的电场。

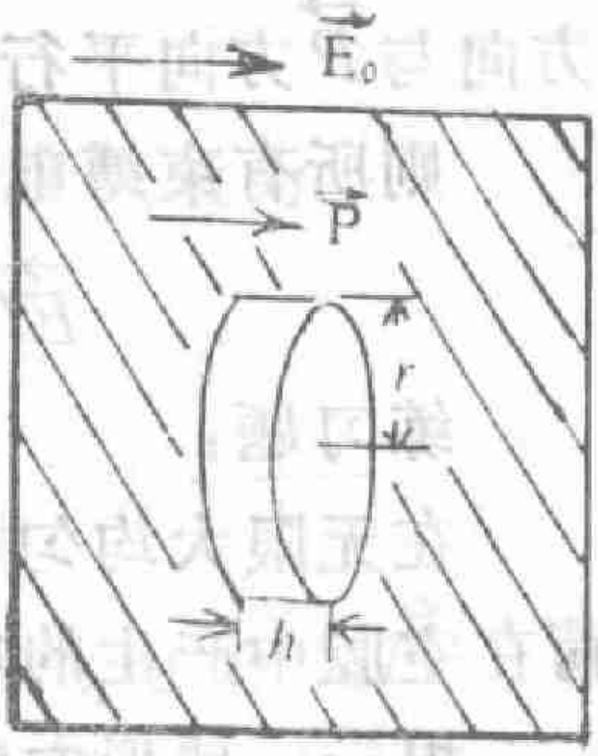



图 2—9

错解：由$\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{n}$，并注意$n$的方向是由介质指向空腔，可得空腔左右表面的束缚电荷面密度分别为（侧表面无束缚电荷）。

$$\sigma'_{左} = P, \quad \sigma'_{右} = -P.$$

由于空腔半径远大于高度，所以对空腔内各点、左右二表面可视为无限大平面板，则左右二表面上束缚电荷在空腔中产生的电场为

$$E' = \frac{\sigma'_{左}}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma'_{右}}{2\varepsilon_0} = \frac{P}{\varepsilon_0}.$$

方向与$\vec{P}$的方向平行。

分析：对图2—9所示的电介质，不仅在空腔内表面上存在束缚电荷，在无限大介质的外表面上也存在束缚电荷。而上面只考虑了空腔内表面上的束缚电荷，遗漏了无限大介质外表面上的束缚电荷，所以解法是错误的。

正确解法：由$\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{n}$可得，无限大介质左右两表面上的束缚电荷面密度各为

$$\sigma'_{左} = -P, \quad \sigma'_{右} = P.$$

则它们在介质中（包括空腔中）产生的电场为

$$E'_1 = \frac{\sigma'_{左}}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma'_{右}}{2\varepsilon_0} = -\frac{P}{\varepsilon_0}.$$

方向与$\vec{P}$的方向反平行。

由上知，空腔内表面上的束缚电荷在空腔中产生的电场为

$$E'_2 = \frac{P}{\varepsilon_0}.$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

方向与$\vec{P}$方向平行。

则所有束缚电荷在空腔中产生的电场为

$$\vec{E}' = \vec{E}'_1 + \vec{E}'_2 = 0。$$

练习题：

在无限大均匀极化的电介质中挖出一球形空腔，试求束缚电荷在空腔中产生的电场（介质中的极化强度为$\vec{P}$）。

提示：球形空腔内表面上的束缚电荷在空腔中产生的电场为$\vec{E}'_1 = \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$，无限大电介质外表上的束缚电荷在空腔中产生的电场为$\vec{E}'_2 = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$，所以

$$\vec{E}' = \vec{E}'_1 + \vec{E}'_2 = \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} = -\frac{2\vec{P}}{3\varepsilon_0}。$$

2—7。在二无限大平行板之间充有介电常数为$\varepsilon$的均匀介质，二平行板上自由电荷在介质中产生的场强为$\vec{E}_0$，求介质中的$\vec{P}$、$\vec{D}$。

错解：由$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$和$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$得介质中$\vec{P}$和$\vec{D}$各为

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}_0 = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}_0,$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}_0。$$

分析：在公式$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$和$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$中，$\vec{E}$为介质中的总场强，它等于自由电荷和束缚电荷共同产生的场强。而题中$\vec{E}_0$是平行板上自由电荷产生的，所以不能直接代入求解。

正确解法：因为本题中，均匀介质的表面为等势面，所以$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_0$成立。由此可直接求得介质中的电位移矢量为

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}_0.$$

再由$\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}$，$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$得介质中极化强度矢量为

$$\vec{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\frac{\vec{D}}{\varepsilon}=(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\varepsilon_0\vec{E}_0.$$

练习题：

一带电导体球，当外面是真空时，它产生的电场为$\vec{E}_0$，若给外界充满均匀介质时，它本身产生的电场为多少？介质中的电场为多少？

答案：给外面充满均匀介质时，带电球本身产生的电场仍为$\vec{E}_0$，介质中的电场为$\vec{E}_0=\vec{E}/\varepsilon_r$（它是带电球与极化电荷共同产生的电场）。

2—8。一不良介质球，半径为$R$，相对介电常数为$\varepsilon_r$。假设其内部有自由电荷，自由电荷体密度为$\rho_0$，试求空间各点的$\vec{D}$、$\vec{P}$。

错解：由第一章可知，体密度为$\rho_0$的带电球在空间产生的场强为

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}r\,\vec{r}_0 & (r<R),\\ \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\dfrac{R^3}{r^2}\vec{r}_0 & (r>R).\end{cases}$$

所以空间各点的$\vec{D}$和$\vec{P}$为

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho_0}{3}\varepsilon_r r\,\vec{r}_0 & (r<R),\\ \dfrac{\rho_0}{3}\dfrac{R^3}{r^2}\vec{r}_0 & (r>R),\end{cases}$$

$$\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho_0}{3}(\varepsilon_r-1)r\,\vec{r}_0 & (r<R),\\ 0 & (r>R).\end{cases}$$

分析：在第一章中讨论带电球场强分布时，未分自由电荷和

(PDF压缩器 - 未注册版)

束缚电荷，那里的$\rho$指总电荷体密度，而在此$\rho_0$是自由电荷的体密度，它不等于总电荷的体密度（因为介质中还有束缚电荷体密度）。在上述解法中，错将$\rho_0$看作$\rho$，所以解法是错误的。

正确解法：取半径为$r$并与带电球同心的球面为高斯面，由于自由电荷分布具有球对称性，所以在此面上$\vec{D}$处处相等，方向都垂直球面向外。由高斯定理可得

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = D\cdot 4\pi r^2 = q_{0内}.$$

所以
$$D = \frac{q_{0内}}{4\pi r^2}.$$

当$r<R$时，$q_{0内}=\frac{4}{3}\pi r^3\rho_0$；当$r>R$时，$q_{0内}=\frac{4}{3}\pi R^3\rho_0$，

代入上式，并考虑到方向可得

$$\vec{D}=\begin{cases}\dfrac{\rho_0}{3}r\,\vec{r}_0 & (r<R),\\[2ex] \dfrac{\rho_0}{\varepsilon}\dfrac{R^3}{r^2}\vec{r}_0 & (r>R).\end{cases}$$

由$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$得

$$\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon}=\begin{cases}\dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0\varepsilon_r}r\,\vec{r}_0 & (r<R),\\[2ex] \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\dfrac{R^3}{r^2}\vec{r}_0 & (r>R).\end{cases}$$

再由$\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}$得

$$\vec{P}=\begin{cases}\dfrac{\rho_0}{\varepsilon}\left(1-\dfrac{1}{\varepsilon_r}\right)r\,\vec{r}_0 & (r<R),\\[2ex] 0 & (r>R).\end{cases}$$

练习题：

有一空心不良介质球壳，内半径为$R_1$、外半径为$R_2$，相对介电常数为$\varepsilon_r$，假设其总电荷体密度为$\rho$，试求空间各点$\vec{D}$、$\vec{E}$。

(PDF压缩器 - 未注册版)

答案：

$$\vec{E}=\begin{cases}0 & (r<R_1),\\ \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{r^3-R_1^3}{r^2}\vec{r}_0 & (R_1<r<R_2),\\ \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{R_2^3-R_1^3}{r^2}\vec{r}_0 & (r>R_2).\end{cases}$$

$$\vec{D}=\begin{cases}0 & (r<R_1),\\ \dfrac{\varepsilon_r\rho}{3}\dfrac{r^3-R_1^3}{r^2}\vec{r}_0 & (R_1<r<R_2),\\ \dfrac{\rho}{3}\dfrac{R_2^3-R_1^3}{r^2}\vec{r}_0 & (r>R_2).\end{cases}$$

注：在$\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}=q/\varepsilon_0$中，$q$是闭合面内包围的总电荷，即自由电荷与束缚电荷的代数和；在$\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{S}=q_0$中，$q_0$是闭合面内包围的自由电荷，不包括束缚电荷；在$\oint_s \vec{P}\cdot d\vec{S}=-q'$中，$q'$是闭合面包围的束缚电荷。由这几式可求解电荷分布具有高度对称性的问题。

如果题中告诉了总电荷或总电荷体密度，先用$\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}=q/\varepsilon_0$求出$\vec{E}$，再由$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$和$\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}$求$\vec{D}$、$\vec{P}$较方便；如果题中告诉了自由电荷或自由电荷体密度，先用$\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{S}=q_0$求出$\vec{D}$，再由$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$和$\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}$求$\vec{E}$、$\vec{P}$较方便；如果题中告诉了束缚电荷或束缚电荷体密度，先用$\oint_s \vec{P}\cdot d\vec{S}=-q'$求出$\vec{P}$，再由$\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}$和$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$求$\vec{E}$、$\vec{D}$较方便。

(PDF压缩器 - 未注册版)

另外，由$\oint_s \vec{E}_o \cdot d\vec{S} = q_o/\varepsilon_o$，$\oint_s \vec{E}' \cdot d\vec{S} = q'/\varepsilon_o$，可在已知$q_o$、$q'$的情况下，直接求$\vec{E}_o$、$\vec{E}'$，（当然，此时的$q_o$、$q'$要具有高度对称性）。

2—9。如图2—10所示，二平行导体板面积均为$S$，相对距离为$l$，中间充满介电常数为$\varepsilon$的均匀介质，求其电容。

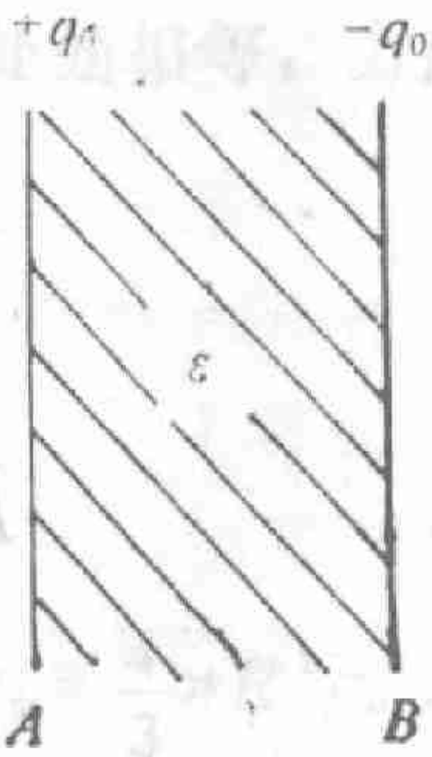


图 2—10

错解：设$AB$二板各带自由电荷$\pm q_o$，则在二平行板之间的场强为

$$E = \frac{q_o}{\varepsilon S}.$$

二平行板之间的电势差为

$$U = El = \frac{q_o l}{\varepsilon S},$$

由于极化，在$AB$两面的介面上出现束缚电荷，各为

$$\pm q'① = \pm \frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r} q_o.$$

这样，在$AB$两面上的总电荷分别为

$$\pm q = \pm (q_o + q') = \pm \frac{q_o}{\varepsilon_r}.$$

将$U$、$q$代入电容的定义式$C = q/U$中可得

$$C = \varepsilon_o \frac{S}{l}.$$

分析：在定义式$C = q/U$中，$q$为自由电荷，不包含束缚电荷，（而在$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$中，$\vec{E}$是总场，包含束缚电荷产生的场）。因此正确的结果为$C = q_o/U = \frac{q_o}{q_o l/\varepsilon S} = \varepsilon \frac{S}{l}$.

---

①注意$q'$本身为负。

(PDF压缩器 - 未注册版)

练习题：

一球形电容器，内外半径各为$R_1$、$R_2$，中间是介电常数为$\varepsilon$的液态介质，现将它接在电压$U$两端，每一板面上的总电荷为多少？

提示：由$C=q/U$求出的$q$仅是每个板面上的自由电荷，而不是总电荷。

答案：
$$q_{总}=\frac{q_0}{\varepsilon_r}=\frac{4\pi\varepsilon_0 R_1R_2}{R_2-R_1}U.$$

2—10．面积均为$S$，相距为$l$的二平行金属板构成一电容器，现给其中一板带电$+q_0$，此时它的电容为多少？

错解：当一板带电$q_0$时，两板之间的场强为
$$E=\frac{q_0}{2\varepsilon_0 S},$$
两极之间的电势差为
$$U=El=\frac{q_0 l}{2\varepsilon_0 S}.$$
所以电容为
$$C=\frac{q_0}{U}=\frac{2\varepsilon_0 S}{l}.$$

分析：平行板电容器的电容与各板是否带电无关，只与两板的相对面积、相对距离和两极间的介质有关。充电后用公式$C=q/U$求解电容，只是一种手段，这时，$q$必须是相对面上所带自由电荷的电量①，$U$是两极间的电势差。上述解法中，应用公式$C=q/U$时，$q$并非是相对面上的电量，所以解法是错误的。

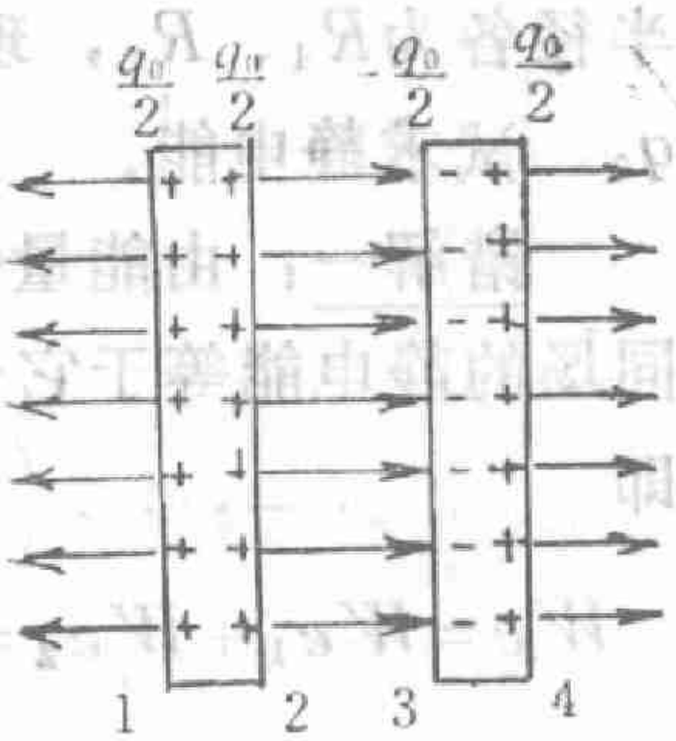


图 2—11

正确解法：如图2—11所示，当给平

①严格地叙述应为：$q$是任一板相对面上所带自由电荷电量的绝对值。

(PDF压缩器 - 未注册版)

行板电容器的一板带电$q_0$，各板面上的电荷分布分别为

$$q_1 = q_2 = q_4 = \frac{q_0}{2},$$

$$q_3 = -\frac{q_0}{2}.$$

可见相对面上所带的电量为$q_0/2$，又因二板间的电势差为

$$U = El = \frac{q_0 l}{2\varepsilon_0 S}.$$

则由公式$C = q/U$可得平行板的电容为

$$C = \frac{q_0/2}{q_0 l/2\varepsilon_0 S} = \frac{\varepsilon_0 S}{l}.$$

与我们知道的结果一致。

练习题：

如图2—12所示，一电容器是由一导体包围另一导体构成的。内导体上带电$Q_1$，电势为$U_1$，外导体内表面带电$-Q_1$，外表面电荷$Q_2$，外导体的电势为$U_2$，求此电容器的电容。

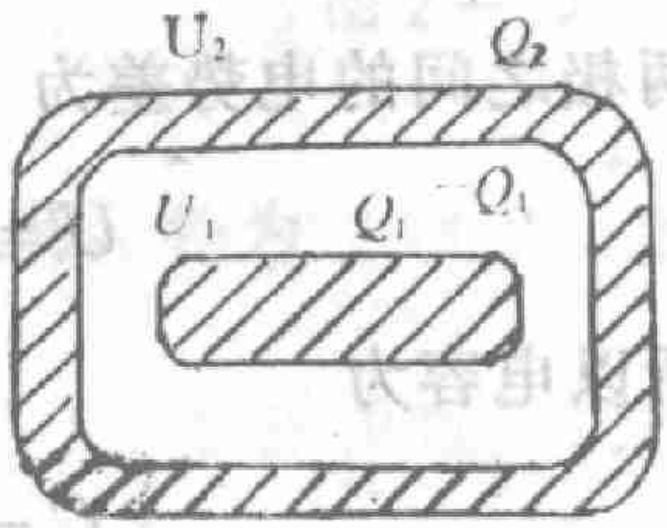


图 2—12

答案：$C = \dfrac{Q_1}{U_1 - U_2}$。

2—11。如图2—13所示，球形电容器内外半径各为$R_1$、$R_2$，现给内外球面各带电$q_1$、$q_2$，试求静电能。

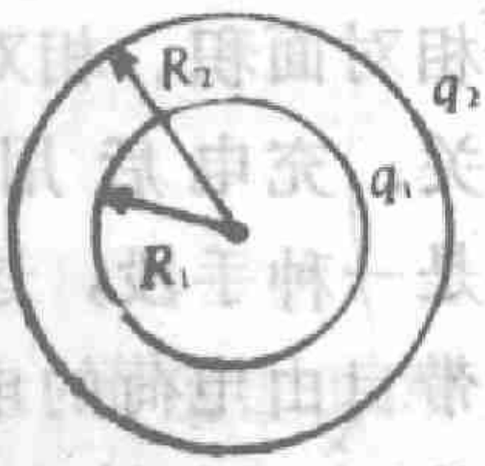


图 2—13

错解一：由能量守恒定律可知，内外球共同场的静电能等于它们各自场的静电能之和，即

$$We = We_1 + We_2 = \frac{1}{2}\int_{V_1} \varepsilon_0 E_1^2 \mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int_{V_2} \varepsilon_0 E_2^2 \mathrm{d}V$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{R_1}^{\infty}\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{R_2}^{\infty}\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1^2}{R_1}+\frac{q_2^2}{R_2}\right).$$

分析：二带电体共同产生的场等于二带电体各自产生的场的矢量和，但二带电体共同的静电能不等于各自静电能之和。证明如下：

$$We=\int_V \frac{1}{2}\varepsilon E^2\,\mathrm{d}V=\int_V \frac{1}{2}\varepsilon\,(\vec{E}_1+\vec{E}_2)^2\mathrm{d}V$$

$$=\int_V \frac{1}{2}\varepsilon E_1^2\mathrm{d}V+\int_V \frac{1}{2}\varepsilon E_2^2\mathrm{d}V+\int_V \varepsilon\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2\,dV$$

$$=We_1+We_2+\int_V \varepsilon\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2\mathrm{d}V\neq We_1+We_2.$$

上述解法中认为$We=We_1+We_2$，当然是错误的。

由$We=\frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0 E^2\mathrm{d}V$可求得

$$We=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1^2}{R_1}+\frac{q_2^2}{R_2}+\frac{2q_1q_2}{R_2}\right].$$

错解二：由公式$We=\frac{1}{2}\int_s \sigma U\,\mathrm{d}S$可得

$$We=\frac{1}{2}\int_{s_1}\sigma_1U_1\,\mathrm{d}S_1+\frac{1}{2}\int_{s_2}\sigma_2U_2\mathrm{d}S_2$$

$$=\frac{1}{2}q_1U_1+\frac{1}{2}q_2U_2.$$

选外球壳表面为电势零点，则

$$U_1=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right),\quad U_2=0.$$

所以静电能

$$We=\frac{q_1^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right).$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

分析：在电荷连续分布时，静电能公式为

$$We=\frac{1}{2}\int_V \rho U\,\mathrm{d}V \qquad \text{(体电荷分布)},$$

$$We=\frac{1}{2}\int_S \sigma U\,\mathrm{d}S \qquad \text{(面电荷分布)},$$

$$We=\frac{1}{2}\int_L \eta U\,\mathrm{d}l \qquad \text{(线电荷分布)}.$$

注意上面几式中，$U$的电势零点要选在无穷远点，不能选择有限远点。上述解法中，选了外球壳为电势零点，所以解法是错误的。

对本题，若选无穷远点为电势零点，则

$$U_1=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2},\quad U_2=\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}.$$

所以静电能为

$$We=\frac{1}{2}\int_{S_1}\sigma_1 U_1\,\mathrm{d}S_1+\frac{1}{2}\int_{S_2}\sigma_2 U_2\,\mathrm{d}S_2=\frac{1}{2}q_1U_1+\frac{1}{2}q_2U_2$$

$$=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1^2}{R_1}+\frac{q_2^2}{R_2}+\frac{2q_1q_2}{R_2}\right].$$

可见与前面的结果一致。

练习题：

1．有一球壳，内外半径分别为$R_1$、$R_2$，假设它均匀带电，总电荷体密度为$\rho$，试求电场的能量。

提示：可由$We=\frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0 E^2\,\mathrm{d}V$来求，也可由$We=\frac{1}{2}\int_V \rho U\,\mathrm{d}V$来求（注意该式中$U$的电势零点为无穷远点，不能为有限远点）。但是不能用挖补法来求，即带电球壳的电场能量不等于半径为$R_2$、体密度为$\rho$的带电球的电场能量减去半径为$R_1$、体密度为$\rho$的带电球的电场能量。

(PDF压缩器 - 未注册版)

答案：$We=\frac{2\pi\rho^2}{15}\left(3R_1^5+2R_2^5-5R_1^3R_2^2\right)$。

2。一球形电容器，内外半径分别为$R_1$、$R_2$，内球壳带电$q$，外球壳不带电，试求电场的能量。

提示：① $We=\frac{1}{2}\int_V\varepsilon_0E^2\mathrm{d}V$，因为外球壳在整个空间产生的电场$\vec{E}_2=0$，所以

$$We=\frac{1}{2}\int_V\varepsilon_0E^2\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int_V\varepsilon_0(\vec{E}_1+\vec{E}_2)^2\mathrm{d}V$$

$$=\frac{1}{2}\int_V\varepsilon_0E_1^2\mathrm{d}V=We_1=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0R_1}。$$

② 由公式$We=\frac{q^2}{2C}$求的是电容器内部电场的能量。在电容器两极板所带电量不是等量异号时，由于板外也存在电场，所以$We=\frac{q^2}{2C}$不等于整个电场的能量。这时不能用$We=\frac{q^2}{2C}$来求整个电场的能量。对本题，由于球形电容器二极板上所带电量不是等量异号，所以不能用$We=\frac{q^2}{2C}$来求解。

2—12。如图2—14所示，一平行板电容器之间充有介电常数为$\varepsilon$的固态介质，介质与极板之间有缝隙。现给电容器充电$q_0$，试求每一极板受到的静电力。

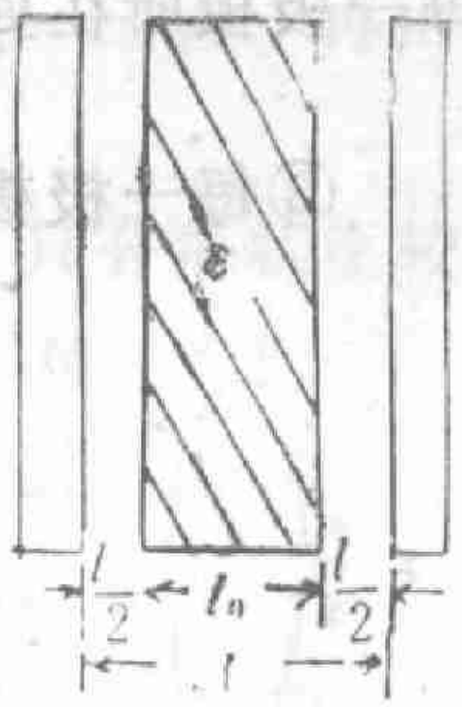


图 2—14

错解：由于电容器的静电能为

$$We=\frac{q_0^2}{2C}=\frac{q_0^2l}{2\varepsilon S}。$$

则由虚功原理可得，每一极板受到的静电力为

$$F=-\left.\frac{\partial We}{\partial l}\right|_{q_0=c}=-\frac{q_0^2}{2\varepsilon S}。$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

分析：由于介质并非充满电容器的两极板之间，而是存在狭缝，所以其电容并不是$C=\frac{\varepsilon S}{l}$，是$C=\left(\frac{l'}{\varepsilon_0 S}+\frac{l_0}{\varepsilon S}\right)^{-1}$。（它可以等效为图2—14中三个电容器的串联）。

则电容器的静电能不是$We=\frac{q_0^2}{2C}=\frac{q_0^2 l}{2\varepsilon S}$，而是$We=\frac{q_0^2}{2}\left(\frac{l'}{\varepsilon_0 S}+\frac{l_0}{\varepsilon S}\right)$。所以每一极板受到的静电力为

$$F=-\frac{\partial We}{\partial l}\Big|_{q_0=c}=-\frac{\partial We}{\partial l'}\Big|_{q_0=c}=-\frac{q_0^2}{2\varepsilon_0 S}.$$

练习题：

当图2—14所示的电容器中间充满介电常数为$\varepsilon$的液态介质时，每一极板上自由电荷受到的静电力为多少？每一极板上的总电荷受到的静电力为多少？

提示：①每一极板上自由电荷受到的静电力为$F=\frac{q_0^2}{2\varepsilon S}$。注意，由公式$F=qE$求力时，$q$为每一极板上的自由电荷$q_0$，$E$为每一极板所在处的电场，它为$E=q_0/2\varepsilon S$，并不是$E=q_0/2\varepsilon_0 S$。

②每一极板上总电荷受到的静电力为$F=\frac{q_0^2}{2\varepsilon_0\varepsilon_r^2 S}$。

## 二 错误的回答

2—13。有一密度均匀的导体各处温度不同，当它处于静电场中达到静电平衡后，内部场强是否处处为零？该导体是否为等势体？

错答：由静电平衡条件可知，导体内场强处处为零，导体是

(PDF压缩器 - 未注册版)

一等势体。

分析：静电平衡条件——导体内部场强处处为零，即$E=0$，是不存在非静电力时的情况。当存在非静电力时，静电平衡条件为$\vec{E}+\vec{E}_{非}=0$，可见在存在非静电力时，导体达到静电平衡后，$\vec{E}=-\vec{E}_{非}\neq 0$。①

对于本题由于导体各处温度不同，存在由温度差引起的非静电力，所以导体内部$\vec{E}\neq 0$，当然导体不是等势体。

练习题：

二不同的金属焊接在一起，然后放在静电场中，当其达到静电平衡后，内部电荷密度是否处处为零？

提示：在二不同金属焊接而成的导体内部，由于存在由密度不均匀引起的非静电力，所以导体内部$\vec{E}\neq 0$。此时，由$\vec{E}=0$推出的“导体内部电荷体密度处处为零”的结论不再成立。

2—14。对于一个孤立带电体，表面曲率大的地方是否面电荷密度一定大？场强一定强？

错答：对于孤立带电体，电荷的分布有如下的定性规律：面电荷密度的大小与表面的曲率有关，表面曲率大的地方面电荷密度大。由此可知，表面曲率大的地方，面电荷密度一定大。再由$E=\sigma/\varepsilon_0$可知，场强一定强。

分析：面电荷密度与表面形状的关系很复杂。只有形状比较简单的孤立带电体，曲率大的地方面电荷密度大。对于形状复杂的独立导体，就不一定了。例如，对图2—15所示的孤立带电体，$A$、$B$两处的曲率相同，但它们在整个导体中的位置不同，面电荷密度不同，$\sigma_A>\sigma_B$。甚至出现曲率大的地方（如$B$点）面电荷密



图 2—15

①均匀导体是电导率处处相等的导体，密度均匀的导体不一定是均匀导体。例如密度均匀但有温度差的导体就不是均匀导体。

(PDF压缩器 - 未注册版)

度反而比曲率小的地方(如$C$点)的面电荷密度小，即$\sigma_B < \sigma_C$。

练习题：

图2—16所示的是一孤立带电导体，在其表面$A$、$B$两处、哪一处的面电荷密度大？

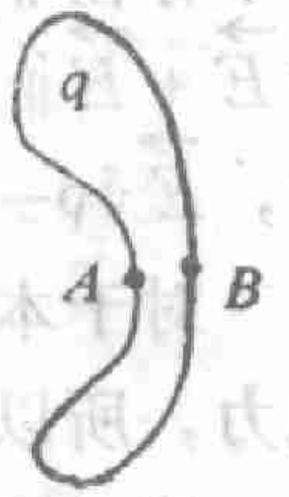


图 2—16

提示：由于导体表面电荷的相互作用，$B$处的面电荷密度比$A$处的大。

2—15. 如图2—17所示，二平行无限大均匀带电平面板，上面的面电荷密度分别$\sigma_1$和$\sigma_2$，在两板之间有一导体$A$（假设导体$A$的存在不影响带电平面板上电荷的均匀分布），在静电平衡时，$A$上$dS$处的面电荷密度为$\sigma$，问$dS$面元所受电场力的大小为多少？

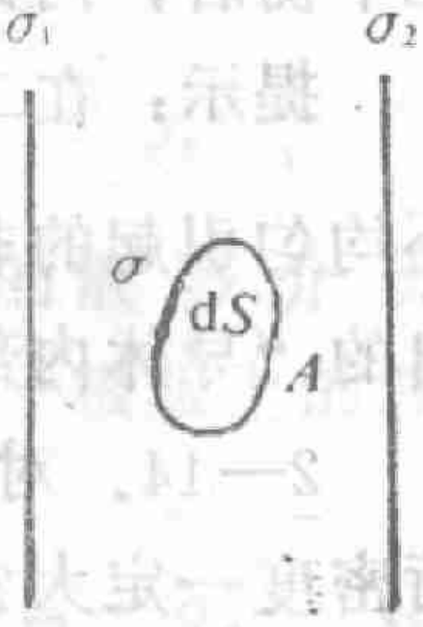


图 2—17

错答一：由无限大均匀带电板产生的场强公式和场强迭加原理可知，$dS$处的场强大小为$E = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2\varepsilon_0}$，所以$dS$面元所受电场力的大小为$dF = E|dq| = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2\varepsilon_0}|\sigma|dS$。

错答二：由静电平衡的性质可知，$dS$附近处的场强大小为$E = |\sigma|/\varepsilon_0$，所以$dS$面元所受电场力的大小为$d\vec{F} = E|dq| = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0} \cdot |\sigma| dS = \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0} dS$。

分析：在公式$dF = E dq$中，$E$必须是除$dq$外其它电荷在$dq$所在处产生的场强。对本题，在$dS$面元受力的计算公式$dF = E\sigma dS$中，$E$必须是除$\sigma dS$外其它电荷在它所在处产生的场强。而上面的两个回答中，$E$都不是除$\sigma dS$外其它电荷在它所在处产生的场强，〔错答一中，$E$是二无限大带电板上电荷产生的场强，少了导体$A$上除$\sigma dS$外其它电荷产生的场强；错答二中，$E$

(PDF压缩器 - 未注册版)

是所有电荷在d$S$面元附近（不是d$S$面元所在处）产生的场强]，所以上面两种回答都是错误的。

正确回答：当考虑点无限接近d$S$面元时，d$S$面元就可看成无限大带电平面板，若用$\vec{E}_1$表示d$S$面上的电荷单独在d$S$附近产生的场，$\vec{E}_1$的大小为$E_1 = |\sigma|/2\varepsilon_0$，方向见图2—18中的实线所示。在导体表面内外两侧，$\vec{E}_1$的方向相反。若用$\vec{E}_2$表示其它电荷单独在d$S$附近产生的电场，则由静电平衡条件可知，在导体内部，$\vec{E}_1$与$\vec{E}_2$必等大反向，以保证合场强为零。由于其它电荷在d$S$处产生的场必是连续场，所以在导体外部$\vec{E}_1$必与$\vec{E}_2$等大同向（见图2—18中虚线所示），所以$\vec{E}_2$的大小为$E_2 = |\sigma|/2\varepsilon_0$，则d$S$面元所受的电场力的大小为$dF = E_2|\sigma|\,dS = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}dS$。

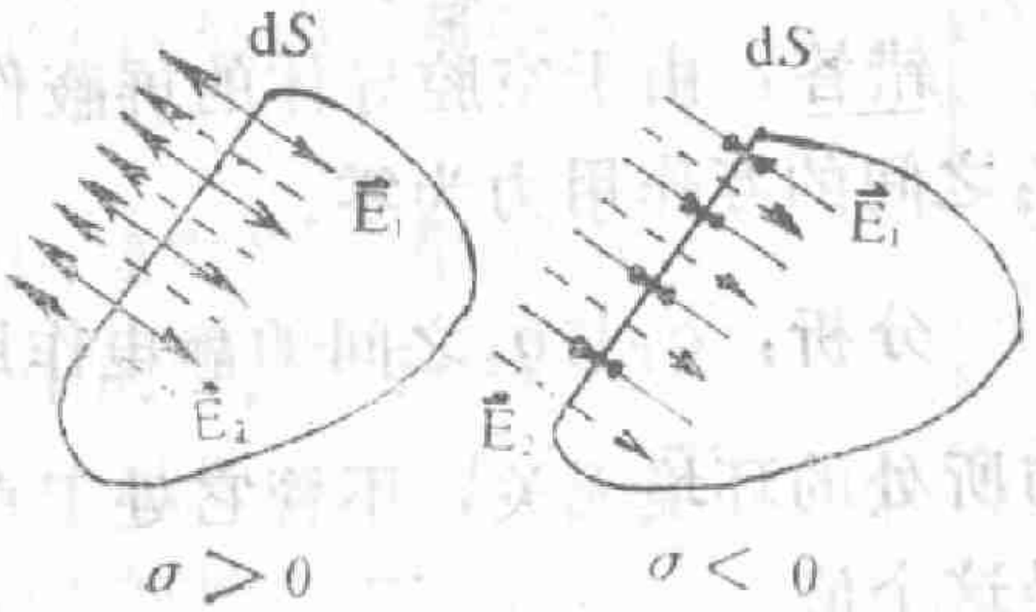


图 2—18

练习题：

若一带电导体表面某一面元d$S$上的电荷面密度为$\sigma$，这时，该面元受到的电场力大小为$dF = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}dS$。如果将另一带电体移近时，该面元上受到的电场力是否改变？电场力的计算公式$dF = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}dS$是否仍成立？

提示：当另一带电体的移动，面元d$S$上的电荷面密度$\sigma$改变，d$S$所在处的电场改变，所以电场力$dF = E\,dq = E\sigma dS$改变。但是公式$dF = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}dS$仍成立（因为此时$E = \sigma/2\varepsilon_0$仍成立，

(PDF压缩器 - 未注册版)

所以$dF = E\sigma dS$仍等于$\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}dS$）。不过此时的$\sigma$不是原来的值，而是改变后的新值。

2—16。参见图2—19，空腔导体内有一点电荷$q_1$，外有一点电荷$q_2$，它们两个之间的互作用力为多少？

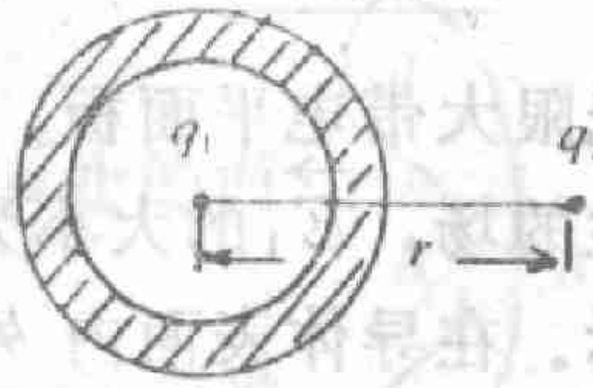


图 2—19

错答：由于空腔导体的屏蔽作用，$q_1$与$q_2$之间的互作用力为零。

分析：$q_1$与$q_2$之间的静电作用力永远是$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{r}_o$，与所处的环境无关，不管它处于真空中、导体中、还是介质中总是这个值。

练习题：

如图2—20所示，在金属球$A$内有两个球形空腔，此金属球整体上不带电，在两空腔中心各放置一个点电荷$q_1$和$q_2$，在金属球$A$之外很远处放置一点电荷$q$（$q$到$A$的距离为$r$，球$A$的半径为$R$，$r \gg R$），问$A$、$q_1$、$q_2$和$q$四个物体上受到的静电力各为多少？

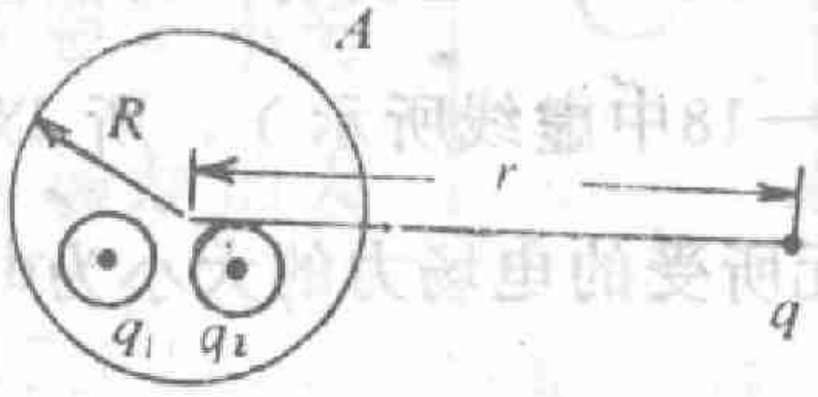


图 2—20

提示：$F_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(q_1+q_2)}{r^2}$；$F_q = -F_A$（负号表示与$F_A$的方向相反）；$F_{q1} = F_{q2} = 0$。

2—17。接地的封闭导体壳，壳内电荷是否在壳外激发电场？

错答：因为导体壳内电荷所发出的电力线都中止在壳上了，所以壳内电荷激发的电场是不能达到壳外的。

分析：接地的封闭导体壳，壳内电荷在壳外激发电场，只是由于在壳的内表面上感应出了与壳内等量异号的电荷，而这些电

(PDF压缩器 - 未注册版)

荷也在壳外产生电场，并且处处与壳内电荷产生的电场相互抵消，所以壳外总电场为零。

练习题：

如图2—21所示，$A$、$B$导体板带等量异号电荷。问$A$板上的电荷在$A$的左侧，$A$导体内，$A$、$B$之间，$B$导体内和$B$的右侧这几个区域内，哪些区域内产生电场？

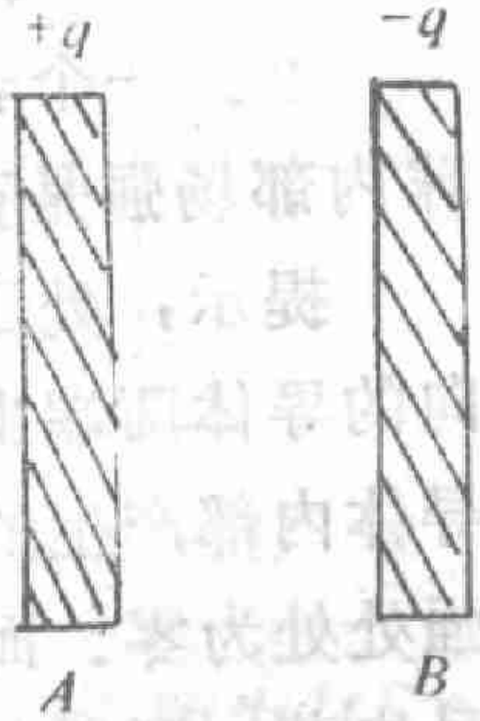


图 2—21

提示：$A$板上的电荷在每一区域内都产生电场。但是，由于$A$板上的电荷产生的电场与$B$板上的电荷产生的电场的迭加，结果只有在$A$、$B$之间的总场不为零，其它区域内的场均为零。

2—18．一带电导体$A$单独存在时，在空间产生的场为$\vec{E}_0$，若一不带电的导体$B$放入它的场中后，在表面将感应出电荷，感应电荷在其内部产生的附加电场是否等于$-\vec{E}_0$？

错答：导体$B$达到静电平衡后，内部总场强$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'=0$，由此可得，感应电荷在其内部产生的附加场$\vec{E}'=-\vec{E}_0$。

分析：导体$B$达到静电平衡后，内部总场强$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'=0$，其中$\vec{E}'_0$是不带电导体放入带电导体的场中后，带电导体单独产生的场，该场一般并不等于不带电导体放入前带电导体产生的场$\vec{E}_0$，即一般不等于带电导体单独存在时产生的场$\vec{E}_0$。所以一般$\vec{E}'\neq-\vec{E}_0$。

练习题：

1．一带电导体单独存在时在空间产生的场为$\vec{E}_0$，将介质放入它的场中后，介质将极化，极化电荷产生的附加场为$\vec{E}'$，那么空间的总场$\vec{E}$是否等于$\vec{E}_0+\vec{E}'$？

(PDF压缩器 - 未注册版)

提示：介质引入带电导体的场中后，一般要影响带电导体上的电荷分布，从而影响带电导体产生的场，即介质引入后带电导体产生的电场不等于介质引入前的电场。因此，一般来说，$\vec{E} \neq \vec{E}_0 + \vec{E}'$。

2．一个表面带有自由电荷的气球，处于均匀外场中时，气球内部场强是否为零？

提示：处于外场中的导体，由于静电感应，使得在沿场强方向的导体两端出现正、负电荷的积累，到一定程度，感应电荷在导体内部产生的附加场强足以抵消外场，最后使得导休内部的场强处处为零。而这里的气球，只带一种自由电荷，不可能出现异号电荷，所以气球内场强一般不为零。

3．如图2—22所示，半径为$R$的金属球放在不变的均匀外场$\vec{E}_0$中，试求金属球面上感应电荷在球面上产生的电势。（选球心为零势点）。

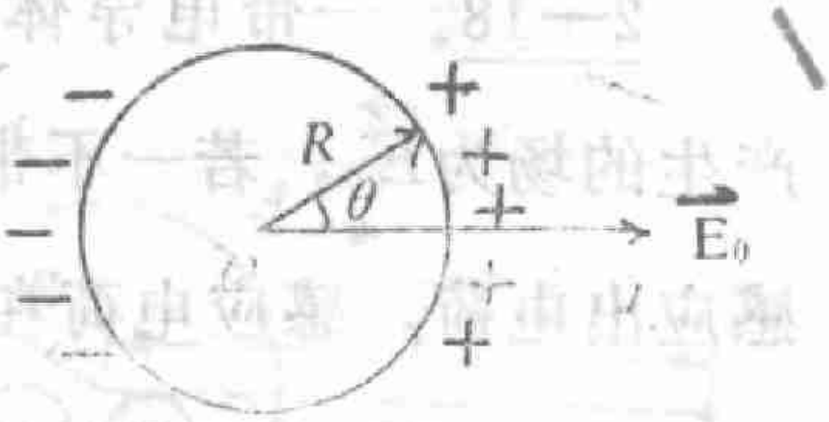



图 2—22

提示：金属球面在总场中为等势面，且为零，但在球面上感应电荷的场中并不为等势面。

由于金属球放入外场后，外场不变，仍为$\vec{E}_0$，则由静电平衡条件可得，$\vec{E}_0 + \vec{E}' = 0$，所以，球面上感应电荷在球内产生的场为$\vec{E}' = -\vec{E}_0$，再根据$U = \int_P^Q \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$可得，金属球面在其表面感应电荷的场中的电势为$U = E_0 R\cos\theta$。

2—19．一无限大金属板接地，距它为$a$的地方放一点电荷$q$，问金属板对点电荷的静电作用力为多少？

错答：因为金属板接地，它上面不带电，所以它对点电荷无静电作用力。

分析：接地导体旁边无带电体时，它不带电；若旁边有其它

(PDF压缩器 - 未注册版)

带电体时，由于静电感应，导体上产生了感应电荷，如本题，金属板上的感应电荷为$-q$，因此金属板对点电荷有静电作用力。

根据镜像法可知，感应电荷在点电荷所在一侧产生的效果等价于在金属板的另一侧、距金属板$a$处有一像电荷$-q$，如图2—23所示。则感应电荷对点电荷的作用力就等于像电荷对点电荷的作用力，即为

$$F=-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2a)^2}=-\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0a^2}.$$

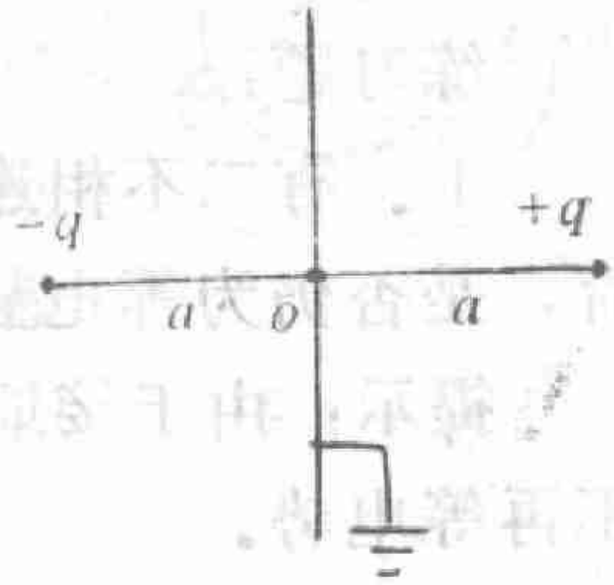


图 2—23

练习题：

二很大的金属板相互平行放置，面积均为$S$，间距为$l(S\gg l^2)$，开始各自带电$q$、$q'$，然后将带$q'$的板接地，试求二板之间的互作用力。

提示：接地导体具有下列两条性质：①．与大地同电势（如果选大地为零电势，则它也为零电势）。②．接地后，它上面的电荷分布和电量一般要发生变化，以保证性质①的满足。

对本题，将带$q'$的金属板接地后，二平行板的电荷分布改变为：相对的两面各带电$q$和$-q$（$-q$对应于接地的板），另两面（相背的两面）电荷为零。则二板之间的互作用力为$F=-\frac{q^2}{2\varepsilon_0S}$，负号表示相互吸引。

2—20。现有二带电导体，它们之间的电势差为$U$，如将其中一个接地，二者之间的电势差是否改变？

错答：一导体接地，相当于选择该导体为电势零点，我们知道电势差与电势零点的选择无关，所以如将其中一导体接地，二导体之间的电势差不会改变。

分析：导体在接地前一般与大地不是等电势，所以在接地的瞬间，由于导体与大地之间一般存在电势差，电荷将沿接地导线发生移动，直到导体与大地等电势为止。

(PDF压缩器 - 未注册版)

由此可见，导体接地后，导体表面电荷一般要重新分布，而电荷的重新分布又要影响电场的分布。因此，二导体之间的电势差一般要改变。

练习题：

1．有二不相连的带电导体，开始等电势。将其中一个接地后，是否仍为等电势？

提示：由于接地后，电荷分布一般要发生变化，二导体一般不再等电势。

2．两个有限大导体$A$、$B$，各带电$q_A$、$q_B$，先将$A$接地后，$AB$之间的电势差为$U_{AB}$，然后将$A$的地线断开，再将$B$接地，此时$AB$之间的电势差为$U'_{AB}$，试比较$U_{AB}$与$U'_{AB}$的大小。

提示：$U_{AB}>U'_{AB}$，如果这样重复多次，$U_{AB}$将趋于零。

3．两块相互平行、面积均为无限大的金属板$A$与$B$，各带电$\pm q$，它们之间的电压为$U_{AB}$，先将$B$接地，再断开地线，然后将$A$接地。这时，$A$与$B$的电势各为多少？电势差为多少？有无电荷流入大地？

提示：由高斯定理可知，$A$接地后，$AB$两板上的电荷分布不变，即无电荷流入大地，二极板电势差也不变，仍为$U_{AB}$。由于$A$接地，所以$U_A=0$，则$U_B=-U_{AB}$。

顺便说几句：当$B$板接地时，有$U_A>U_B=0$。拆去地线，情况不变，即$U_A$仍高于0，则$A$板接地时，由于一开始$U_A>0$，$A$板应有电荷流入大地。但上面的分析的结果是无电荷流入大地，这显然是矛盾的。注意，这个矛盾来源于将金属板$A$与$B$视为无限大。对于实际金属板，总是有限大，存在边缘效应。考虑边缘效应后，不再存在这一矛盾。

2—21．半径为$a$的导体球$A$，不带电，在外面有一半径为$b$的同心导体球壳$B$，带电$q$，现将$A$接地，此时$A$球带电多少？

(PDF压缩器 - 未注册版)

错答：由于导体$B$在内部产生的电场为零，所以$A$球上不会感应出电荷，当然$A$球不带电。

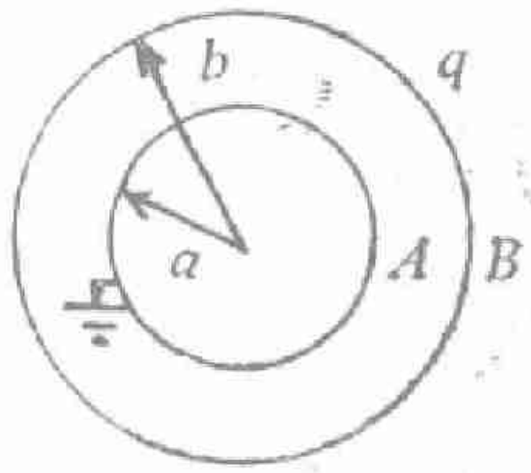


图 2—24

分析：在$A$球接地前，$A$球的电势与$B$球相等，比大地的电势（也就是无穷远处的电势）高，因此刚接地的瞬间，$A$球与大地之间有电势差，于是电荷通过接地导线从大地流向$A$球，直到二者的电势都相等为止。

因为 $U_A=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_A}{a}+\frac{q}{b}\right)=0$，所以$q_A=-\frac{a}{b}q$。

练习题：

如图2—25所示，一带电体$A$移近一绝缘导体$B$时，在$B$的左端感应出异号电荷，右端感应出同号电荷。若将$B$的右端接地，导体$B$上只带异号电荷，若将$B$的左端接地，导体上只带何种电荷？

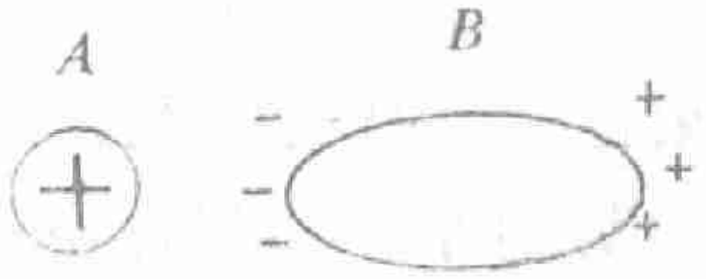


图 2—25

提示：接地导体旁边存在带电体时，在导体上感应出异号电荷（电量小于或等于带电体的电量），这与导体接地的位置无关。

2—22。如图2—26所示，一带正电的绝缘空腔导体$A$，旁边有一验电器$B$，用一导线将空腔导体的内部与验电器的小球连接，验电器的金箔是否张开？

错答：由于导体静电平衡后，电荷分布在空腔导体的外表面，内表面无净电荷，所以，用导线将空腔导体的内表面与验电器的小球相连时，不会有电荷转移到验电器上，因此，验电器的金箔不会张开。

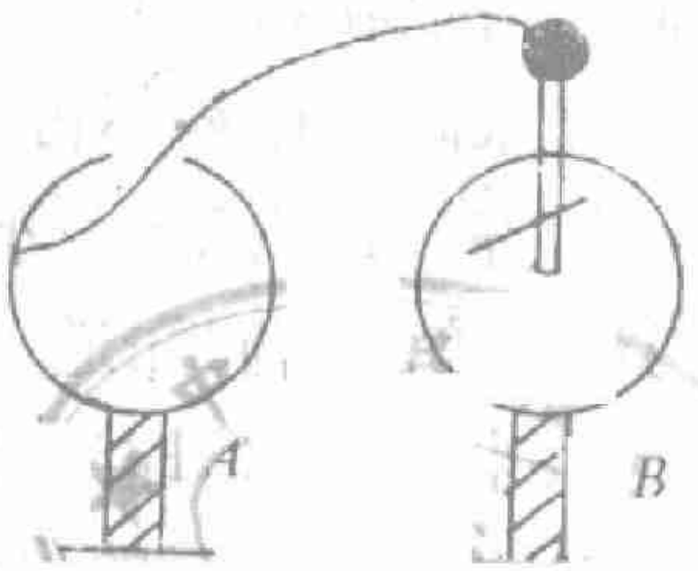


图 2—26

(PDF压缩器 - 未注册版)

分析：由于空腔导体带正电，它的电势比不带电的验电器的电势高，因此用导线将两者连接时（不论是内壁还是外部），电荷都要发生移动，直到两者电势相等为止。所以验电器的金箔要张开（并且无论与内壁还是外部相连，验电器张开的角度都一样）。实际上，当$A$导体移近验电器$B$时，即使不用导线连接，金箔由于感应也要张开。

练习题：

带正电的金属小球，电势为1伏，带正电有开口的金属球壳电势为1000伏，把小球移到球壳中，然后将小球和球壳用导线连接起来，这时正电荷从小球移到球壳上，还是从球壳移到小球上？

提示：当小球移到球壳中之后，小球的电压不再是1伏，而要比1000伏还要高。这时，将小球与球壳连接后，正电荷将从高电势的小球移到低电势的球壳上，最后达到电势相等。

2—23。$n$个半径相同的小水银滴，带有等量同号电荷，并且无限远离，它们的电势均为$U_0$，当这些水银滴汇合成一个较大的水银滴时（认为都是球形），其电势为多少？

错答一：因为原来的小水银滴电势相同，无电势差，所以小水银滴在移近时，电场力不做功，则小水银滴汇合在一起时，电势不变，仍为$V_0$。

分析：虽然$n$个小水银滴电势相同，但由于它们带等量同号电荷，所以在移近时，外力要克服电场力作功。这样，汇合在一起的水银滴的电势不再是$U_0$，而要比$U_0$大。

错答二：由于$n$个小水银滴汇合在一起后，带电量为原来每一个的$n$倍。我们知道，带电球的电势与带电量成正比，所以电势为原来的$n$倍，即为$nU_0$。

分析：带电球的电势不仅与带电量有关，还与其半径有关。$n$个小水银滴汇合后，虽然电量为原来的$n$倍，但半径不再是原

(PDF压缩器 - 未注册版)

来的半径，所以电势不是原来的$n$倍，而是$\sqrt[3]{n^2}$倍。证明如下：

设每个小水银滴的半径为$r_o$，带电量为$q_o$，电势为$U_o$，则$U_o=\frac{q_o}{4\pi\varepsilon_o r_o}$；汇合后的半径为$r$，电量为$q=nq_o$，电势为$U$，$U=\frac{nq_o}{4\pi\varepsilon_o r}$，根据前后水银点总体积不变可得$\frac{r^3}{r_o^3}=n$，因此汇合后的电势为$U=\frac{nq_o}{4\pi\varepsilon_o\sqrt[3]{n}r_o}=\sqrt[3]{n^2}U_o$。

练习题：

两个相距很远的带电导体球，电势分别为$U_1$、$U_2$，半径分别为$R_1$、$R_2$，若用长导线将它们连接起来后，电势为多少？

提示：用导线连接起来后，两球变为等势体，但总电量不变。由此可得，二导体球最后的电势为$U=\frac{U_1R_1+U_2R_2}{R_1+R_2}$。可见，当$U_1=U_2$时，$U=U_1=U_2$；当$R_1=R_2$时，$U=\frac{U_1+U_2}{2}$。

2—24。一个点电荷$q$放在介电常数为$\varepsilon$的无限大均匀介质中，点电荷在介质中产生的场强和电势各为多少？

错答：点电荷在介质中产生的场强和电势各为

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}\vec{r}_o,\quad U=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r}。$$

分析：我们要注意此题问的是点电荷的场强和电势，而不是总电荷的场强和电势。点电荷在任意空间产生的场强和电势都是

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}\vec{r}_o,\quad U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r},$$

不因环境而变。

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}\vec{r}_o,\quad U=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r},$$

是无限大均匀介质中的场强和电势，它是点电荷和束缚电荷共同产生的，即总电荷产生的场强和电势。

(PDF压缩器 - 未注册版)

练习题：

如2—27所示，二点电荷$q_1$和$q_2$，位于无限大均匀介质中，相距为$r$，介质的介电常数为$\varepsilon$。试求$q_1$对$q_2$的静电作用力和$q_2$受到的总静电作用力。

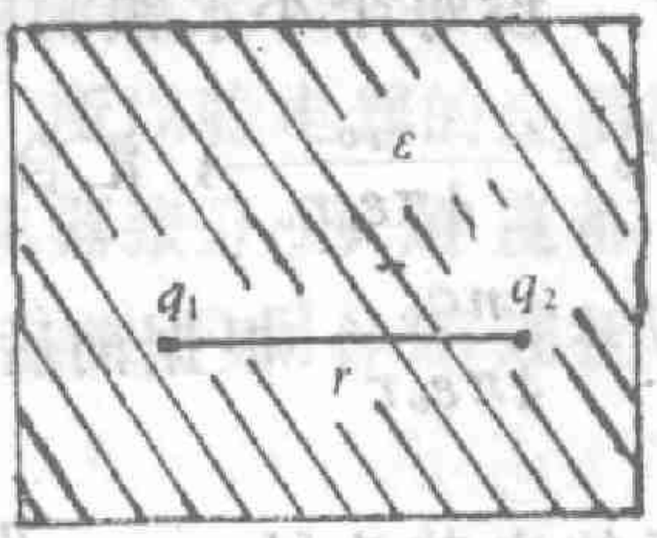


图 2—27

提示：$q_1$对$q_2$的作用力与真空中的相同，为

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{r}_0,$$

$q_2$受到的总静电力为

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{r}_0.$$

它等于$q_1$对它的作用力与束缚电荷对它的作用力之矢量和。

2—25。一点电荷$q$旁边有一块介电常数为$\varepsilon$的电介质，其内部场强和电势各为多少？

错答：介质中的场强为$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}\vec{r}_0$，电势为$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r}$。

分析：公式$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}\vec{r}_0$只有在均匀介质充满点电荷所在的无限空间或者介质表面是等势面时才成立，否则不成立。对于任意情况，介质内部某一点的场强为

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}+\int_V\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho'\,dV}{r_1^3}\vec{r}_1+\int_S\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma'\,dS}{r_2^3}\vec{r}_2.$$

其中第一项是点电荷产生的场，第二项是体束缚电荷产生的场，第三项是面束缚电荷产生的场。对于均匀介质，由于不存在体束缚电荷，第二项为零。

公式$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r}$的适用范围变小，只适用于介质充满无限

(PDF压缩器 - 未注册版)

大空间的情况，对任意情况，介质内部某一点的电势为

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}+\int_V\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho'\,\mathrm{d}V}{r_1}+\int_S\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma'\,\mathrm{d}S}{r_2}.$$

练习题：

一点电荷位于半径为$R$、介电常数为$\varepsilon$的均匀介质球的中心，试写出以无穷远点为电势零点和以有限远点为电势零点时，介质内某一点的电势公式。

提示：选无限远点为电势零点时，介质内某一点的电势公式为

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R};$$

选有限远点为电势零点时，介质内某一点的电势公式为

$$U=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{R_0}\right) & (R_0<R),\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{R}\right)+\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{R_0}\right) & (R_0>R).\end{cases}$$

其中$R_0$是电势零点到球心的距离，$r$是场点到球心的距离。

2—26。一球形带电导体，周围充满均匀介质，问在介质内是否存在体束缚电荷？

错答：当球形带电导体带电$q$时，介质中的极化强度为

$$\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}=\frac{\varepsilon_r-1}{4\pi\varepsilon_r}\frac{q}{r^2}\vec{r}_0.$$

由于$\vec{P}\neq\vec{c}$，所以$\rho'=-\nabla\cdot\vec{P}\neq0$，即介质内存在体束缚电荷。

分析：因为 $\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}=\dfrac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\vec{D}$，

所以 $q'=-\oint_S\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=-\oint_S\dfrac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$。

当介质均匀时，

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$q' = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r} q_0 .$$

给等式两边同除$\triangle V$，并使$\triangle V \to 0$，则有

$$\lim_{\triangle V \to 0} \frac{q'}{\triangle V} = \frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r} \lim_{\triangle V \to 0} \frac{q_0}{\triangle V},$$

即 $$\rho' = \frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r} \rho_0 .$$

由此可见：当$\rho_0 = 0$时，$\rho' = 0$；$\rho_0 \neq 0$时，$\rho' \neq 0$，即只要均匀介质中无自由电荷，其中必定也无束缚电荷（当然，如果有自由电荷时，则必定有束缚电荷）。

对本题，介质中无体自由电荷，所以无体束缚电荷。可以证明，这与$\rho' = -\nabla \cdot \vec{P}$所求结论一致。

练习题：

1。有一不良的均匀介质平面板，当外界传输给它的电荷$q_0$均匀地分布在体内时，介质板内有无体束缚电荷？介质板面上有无面束缚电荷？

提示：由于介质板内存在体自由电荷$q_0$，由$\rho' = \frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r}\rho_0$可知，介质内也存在体束缚电荷。再由电荷守恒定律可知，也有等量异号的面束缚电荷。体束缚电荷密度和面束缚电荷密度各为

$$\rho' = \frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r} \frac{q_0}{Sl}, \quad \sigma' = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{q_0}{2S} .$$

其中，$S$、$l$各为平面板的面积和厚度。

2。非均匀理想介质处于外场中时，内部有无体束缚电荷？

提示：理想介质不可能传输电荷，体内不会出现体自由电荷。但要注意公式$\rho' = -\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\rho_0$是在$\varepsilon_r = c$（均匀介质）的

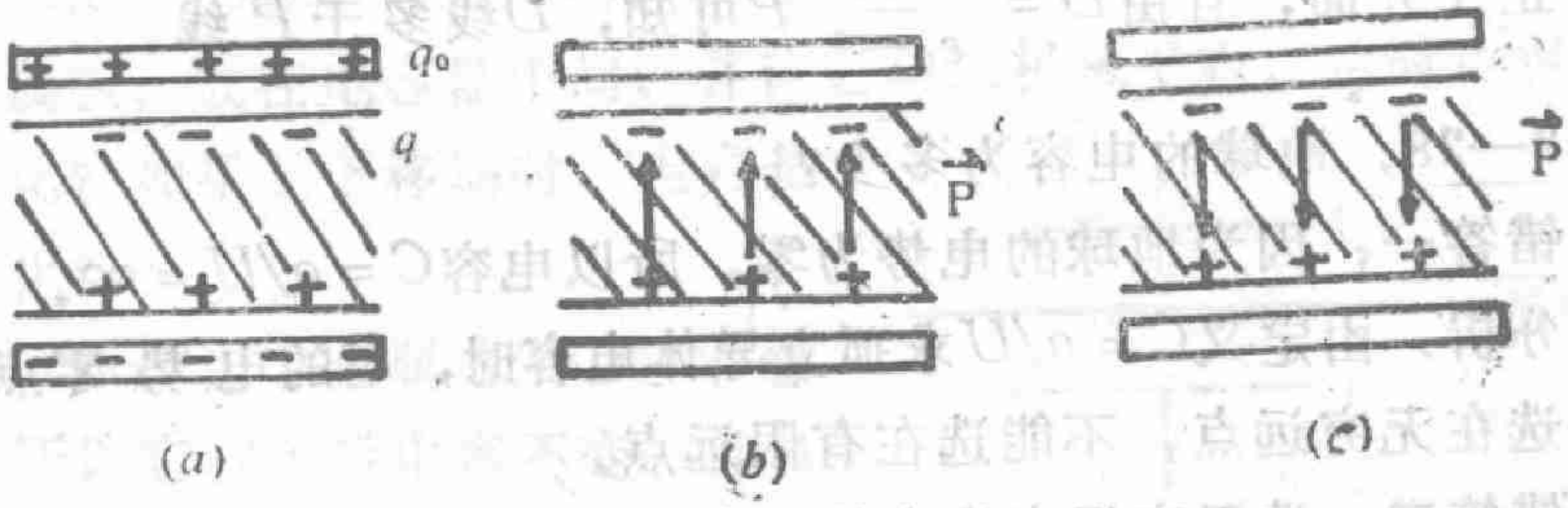
(PDF压缩器 - 未注册版)

条件下推出的，对于非均匀介质，不再成立。可以证明①，对于非均匀介质，

$$\rho' = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_r}\nabla\varepsilon_r \cdot \vec{E} - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\rho_0 .$$

由此可见，$\rho_0 = 0$时，$\rho'$可能不为零。

2—27. 如图2—28（$a$）所示，平行板电容器中充有均匀电介质，试作出$\vec{P}$线。




($a$)　　($b$)　　($c$)

图 2—28

错答：作出的$\vec{P}$线如图2—28（$b$）所示。

分析：由$\oint_s \vec{P}\cdot d\vec{S} = -q'$可知，$\vec{P}$线从负束缚电荷出发，终止于正束缚电荷。所以$\vec{P}$线应为图（$c$）所示。

顺便说明：由$\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_0$可知，$\vec{D}$线从正自由电荷出发，

---

① 证明如下：

$$\rho' = -\nabla\cdot\vec{P} = -\nabla\cdot(\varepsilon_0\chi\vec{E})$$

$$= -\varepsilon_0\nabla\chi\cdot\vec{E} - \varepsilon_0\chi\nabla\cdot\vec{E}$$

$$= -\varepsilon_0\nabla\varepsilon_r\cdot\vec{E} - \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\rho/\varepsilon_0$$

$$= -\varepsilon_0\nabla\varepsilon_r\cdot\vec{E} - (\varepsilon_r - 1)\ (\rho_0 + \rho').$$

移项整理得：$\rho' = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_r}\nabla\varepsilon_r\cdot\vec{E} - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\rho_0$.

(PDF压缩器 - 未注册版)

终止于负自由电荷。

练习题：

试作出2—26题中，介质内的$\vec{D}$线和$\vec{P}$线。

提示：由于介质中无体自由电荷和体束缚电荷，所以$\vec{D}$线和$\vec{P}$线在介质中不会断线。若带电球带正电，$\vec{D}$线和$\vec{P}$线均从介面发出终止于无穷远；若带电球带负电，$\vec{D}$线和$\vec{P}$线从无穷远发出终止于介面，且由$\vec{D}=\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r-1}\vec{P}$可知，$\vec{D}$线多于$\vec{P}$线。

2—28．地球的电容为多少？

错答一：因为地球的电势为零，所以电容$C=q/U=\infty$。

分析：由定义$C=q/U$求孤立导体电容时，$U$的电势零点一定要选在无穷远点，不能选在有限远点。

错答二：选无穷远点为电势零点，由于大地与无穷远点的电势相同，都为零，所以地球的电容$C=q/U$为无穷大。

分析：在选离地球无穷远处为电势零点时，地球的电势不再是零，而是$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$，所以地球的电容不是无穷大，而是$4\pi\varepsilon_0 R$。

练习题：

计算半径为$R$的孤立导体球壳的电容。

提示：半径为$R$的孤立导体球壳的电容和同半径的孤立导体球的电容一样，均为$4\pi\varepsilon_0 R$。

2—29．如图2—29所示，平行板电容器$AB$接在电路中后，再用金属盒$RK$罩起来，此时在电路中的电容是否变化？

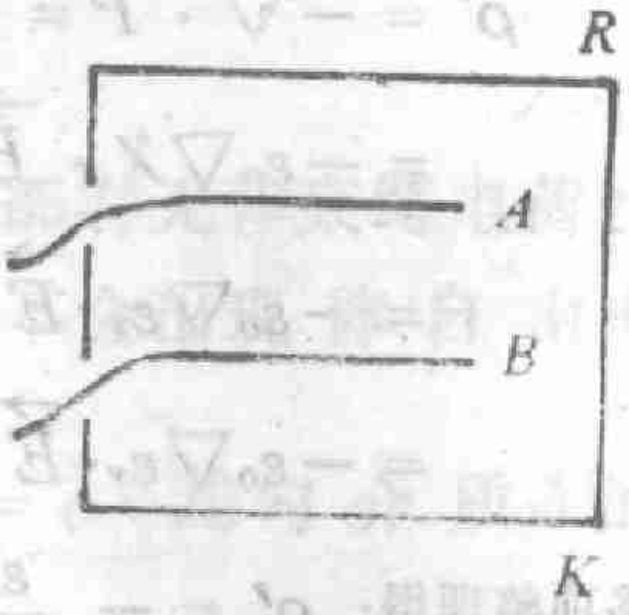


图 2—29

错答：由于平行板电容器的电容仅与两板的相对面积、相对距离和两板间的介质有关，而与两板外部无关。所以用金属盒$RK$

(PDF压缩器 - 未注册版)

罩起来后，电容不变。

分析：金属盒罩起来后，$AB$两板与金属盒上下壁构成两个新的电容。这时，电容器的电容可等效为图2—30所示。可见罩起来后的电路中电容要变化，它比罩前大。

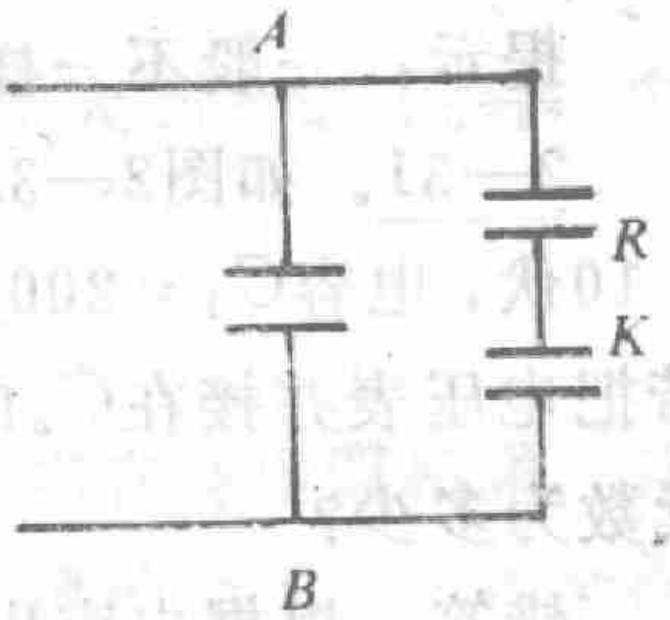



图 2—30

练习题：

如图2—31所示，一块厚度可以忽略的金属板，放在电容器中间，并让它与二极板平行，这时电容是否变化？如果上下移动时，电容是否变化？

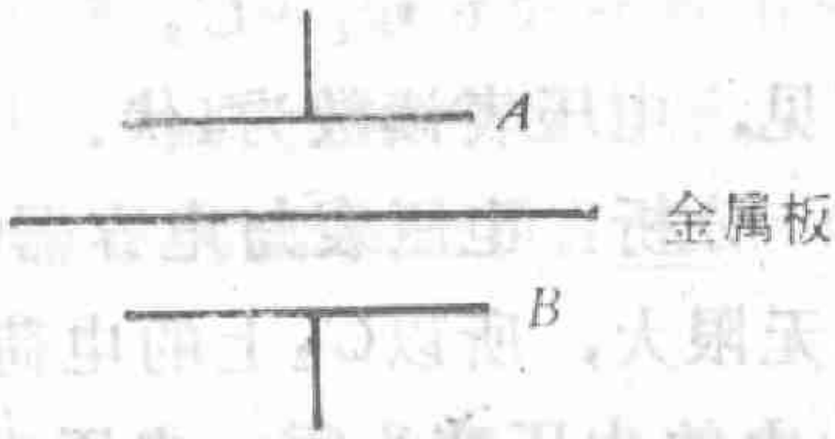



图 2—31

提示：由于金属板厚度可忽略，所以它放入后电容不变、并且当它上下移动时也不变。但要注意：当金属板与二极板不平行时，就没有上面的结论。

2—30。有一球形电容器，，一次把它的外壳接地，一次把内球接地，这两种情况下的电容是否一样？

错答：一样。因为在两种情况下，球形电容器的形状、大小，介质以及相对位置都没有发生变化，只是外壳和内球的电势不同，但这不影响电容器的电容。

分析：在外壳接地、且电容器带电时，外壳上的电荷全部分布在壳的内表面，其电容就等于球形电容器的电容（不接地时的电容）。而在内球接地、且电容器带电时，外壳上的电荷不仅分布在壳的内表面，也分布在壳的外表面，这样外壳的外表面就和地面之间又构成了另一新电容，这时总的电容就等于球形电容和外壳与大地构成新电容的并联。可见内球接地时的电容大。

练习题：

(PDF压缩器 - 未注册版)

一个电容器，它的极板接地与不接地，电容是否一样？

提示：一般不一样。并且接地的极板不同，电容一般不同。

2—31。如图2—32所示，电池电动势$\varepsilon$=10伏，电容$C_1=200$皮法，$C_2=300$皮法。若把电压表并接在$C_2$的两端，问电压表的读数为多少？

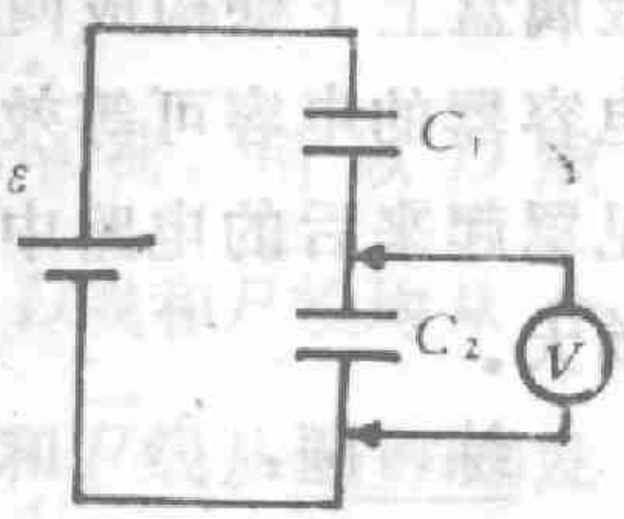



图 2—32

错答：根据电容串并联知识可得，$C_2$两端的电压降为

$$U_2=\frac{C_1}{C_1+C_2}\cdot\varepsilon=\frac{200}{200+300}\times 10=4(\text{伏}).$$

可见，电压表读数为4伏。

分析：电压表与电容器$C_2$并联后，由于电压表内阻不可能为无限大，所以$C_2$上的电荷通过电压表内阻泄放中和，电容器$C_2$上的电压变为零。电压表的读数当然为零，而不是4伏。

由此可知，电容器两板间的电压不能用电压表来测，而要用静电计来测量。

练习题：

在地面附近，大气的电场约为130伏/米，有人用直流电压表测量房顶与房底之间的由于大气电场引起的电压，读数为多少？

提示：静电压不能用交直仪表测量，若用它们来测量，读数定为零。

2—32。一个带电球周围存在均匀介质，当带电球的电量增加到一定量后，靠近带电球的介质就要先被击穿。问带电球外的介质是否全被击穿？

错答：是。因为第一层击穿后，靠近它的跟着击穿，接二连三，全部被击穿。

分析：当带电球电量一定时，只能击穿一定厚度的介质，其它的就不能被击穿。这是因为当靠近带电球的介质被击穿后，被

(PDF压缩器 - 未注册版)

击穿的介质就会变成导体，电荷就分布在一个较大的球面上，由$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}$可知，当介质被击穿的半径增大到一定值后，电场就小于介质的$E_{击}$，这时就不再击穿了。

练习题：

一个球形电容器，中间充有均匀介质，当它与电源相联，且电源电压大于它的击穿电压时，电容器内部的介质是否全部击穿？

提示：此题与上题不同。上题是带电量一定时的击穿，只能击穿一定厚度。而此题是电压一定的击穿，当一部分介质被击穿之后，加在未击穿的介质上的电场更大，因此介质全被击穿。

2—33。一个电容器中间充有有极分子构成的介质，这个电容器的电容是否随温度变化？

错答：电容器的电容与二极板的几何形状、体积、大小和中间介质有关，而与温度无关，所以它不会随温度变化。

分析：有极分子的介电常数与温度有关，其关系为$\varepsilon_r=1+\frac{K}{T}$[①]，所以该电容器的电容$C=\varepsilon_r C_o$也与温度有关，而且随温度增加而减小。

练习题：

有极分子构成的介质处于外场中，当它的温度升高时，介质内的场强是增强还是减弱？

提示：由于温度升高时，$\varepsilon_r$减小，所以束缚电荷减少，退极化场减弱，则总场增强。

2—34。一平行板电容器充以等量异号电荷后，将一板浸入煤油中，另一板放在空气中，二板受到的静电力是否相等？

错答：由牛顿第三定律可知，二板受到的静电力相等。

---

①见蔡圣善等编《经典电动力学》$P_{107}$（1985）.

(PDF压缩器 - 未注册版)

分析：①二板受到的静电力不是一对相互作用力，其中包含第三者——束缚电荷的作用力。

②空气中一板所在处的电场为$E_{空}=\frac{q_o}{2\varepsilon_o S}$，所以空气中一板受到的静电力为$F_{空}=q_oE_{空}=\frac{q_o^2}{2\varepsilon_o S}$；煤油中一板所在处的场强为$E_{煤}=\frac{q_o}{2\varepsilon S}$，所以煤油中一板受到的静电力为$F_{煤}=\frac{q_o^2}{2\varepsilon S}$。可见煤油中的小。

练习题：

如图2—33所示，$q_1$、$q_2$两点电荷电量相同，但处于不同的介质中，各自受到的静电力是否相等？

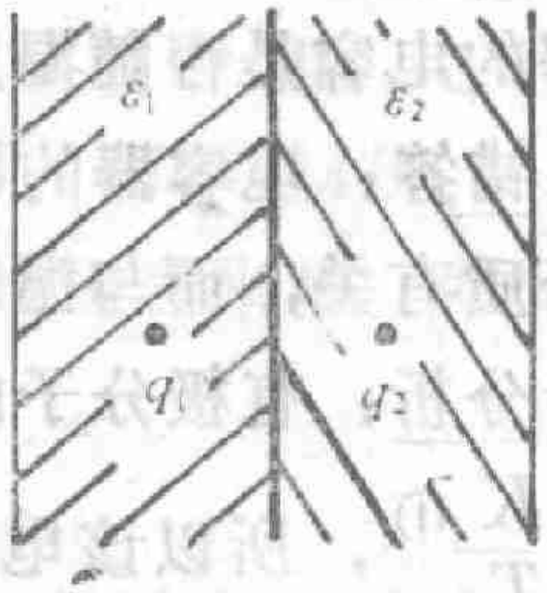


图 2—33

提示：不等。

2—35。有一带电的气球，在吹大的过程中，电场能如何变化？

错答：因为吹大时外力作功，由能量守恒定律可知，电场能增大。

分析：①由带电球壳的电场能公式$We=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_o R}$可知，在吹大的过程中电场能减小。

②吹大时外力作的功和电场能的减小一部分转变成了气球的弹性能，另一部分对气球内部和外界大气作了功。

练习题：

一个带电的球形电容器，中间灌入煤油后，电容器的能量变为原来的$1/\varepsilon_r$，减小的能量到哪里去了？

提示：减小的能量转变成了介质的内能。

(PDF压缩器 - 未注册版)

2—36. 在图2—34中，两个平行板电容器的面积均为$S$，板间距离均为$l$，右边的充满了介电常数为$\varepsilon$的固态介质，用电池给它充电后，再将开关断开。问如将$C_2$中的介质抽出，$C_2$的能量是增加还是减小？

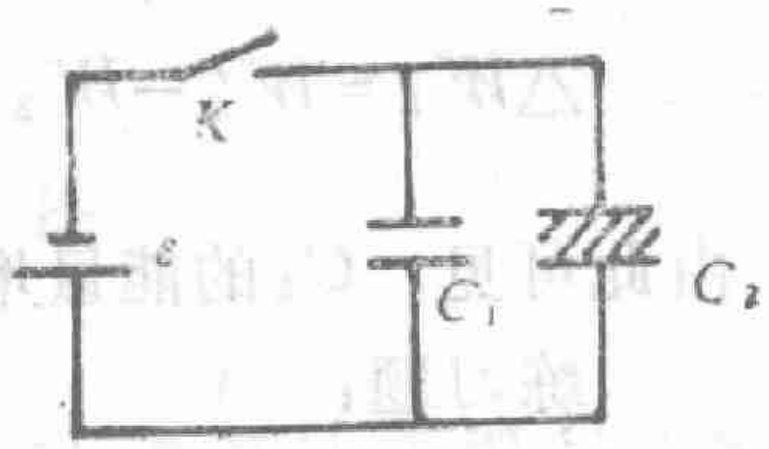


图 2—34

错答一：平行板电容器的能量$We=\int_V \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\mathrm{d}V$

$=\frac{1}{2}\int_V \varepsilon E^2\mathrm{d}V$，如将$C_2$中介质抽出，$C_2$中的介电常数$\varepsilon$要减小，所以$C_2$的能量要减小。

分析：将介质从电容器中抽出，$\vec{E}$也要改变，且要增加。所以不能仅从$\varepsilon$减小来判定电容器的能量减小。

错答二：如将介质从$C_2$中抽出，$C_2$两极板上电量要减小，则由$We=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$可知，$C_2$的能量要减小。

分析：如将介质从$C_2$中抽出，不仅$C_2$上的带电量要减小，$C_2$本身的电容也要减小。所以不能仅从$C_2$上的带电量$q$减小来断定$C_2$的能量减小。

正确回答：由于$C_1$、$C_2$并联，所以$C_1$、$C_2$的电压保持相等，即

抽出介质前　　$q_1/C_1=q_2/C_2$，

抽出介质后　　$q'_1/C_1=q'_2/C'_2$。

又因　　$C_2=\varepsilon_r C_1$，$C'_2=C_1$。

$q_1+q_2=q'_1+q'_2$（电荷守恒定律），

联立得　　$q_2=\varepsilon_r q_1$，　$q'_2=q'_1=\frac{1+\varepsilon_r}{2}q_1$。

因此，将介质抽出后，$C_2$中的能量改变为

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$\triangle W_2 = W'_2 - W_2 = \frac{q'^2_2}{2C'_2} - \frac{q^2_2}{2C_2} = \frac{\varepsilon^2 S}{8l}\varepsilon_o(\varepsilon_r - 1)^2.$$

由此可见，$C_2$的能量增加。

练习题：

如图2—35所示，一平行板电容器中间充有固态介质，并且与电源相连，如将介质抽出，电容器的能量是增加还是减小？

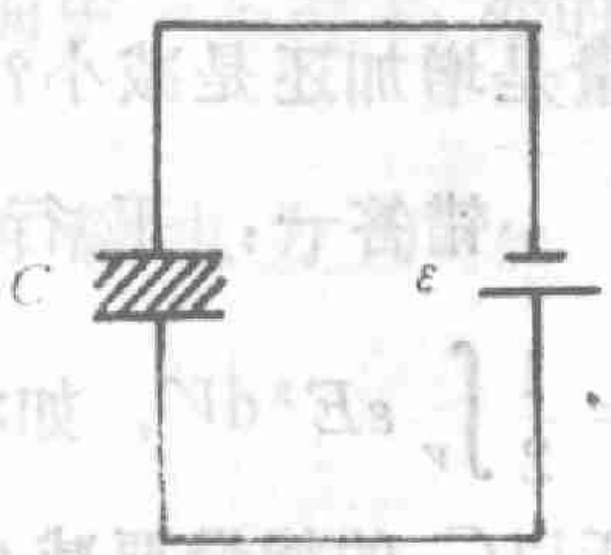


图 2—35

提示：如将介质抽出，电容器的能量改变为 $\triangle We = \frac{\varepsilon^2 S}{2l}(\varepsilon_o - \varepsilon)$，可见能量减小。

2—37. 有一平行板电容器与电源相接，如将两极板分开时，电容器中的能量是增加还是减小？

错答：将平行板电容器的两极板分开时，外力克服电场力作正功，所以电容器的能量增加。

分析：由 $We = \frac{1}{2}CU^2$ 得在平行板电容器两极板分开时，电容器的能量改变为 $\triangle We = \frac{1}{2}U^2\triangle C$，由于 $\triangle C < 0$，所以 $\triangle We < 0$。即电容器的能量减小。

那么外力作的功与电容器减小的能量哪里去了呢？一部分转换成电源的能量，另一部分在导线上变成了焦耳热。

练习题：

有一平行板电容器，充电后与电源断开。如将电容器两极板分开时，电容器的能量是增加还是减少？

提示：将电容器两极板分开时，电容器的能量改变为 $\triangle We = \frac{1}{2}q^2\triangle\left(\frac{1}{C}\right)$，因 $\triangle\left(\frac{1}{C}\right) > 0$，所以 $\triangle We > 0$，即电容器的能量增加。

(PDF压缩器 - 未注册版)

# 三 错误的推论

2—38。带有等量异号电荷的二平行平面板在外面用导线连接起来。由于平行板外面的场强为零，所以电荷不能沿导线移动，各板上带电情况与未接时一样。

但是，用导线连接后，二平行板变成了一导体，因此可得：①一个孤立导体的不同部位可带异号电荷；②电力线可以从导体的一个部位出发，终止于另一部位；③静电平衡的导体可为非等势体。

分析：对于实际平行板，外面场强并非为零，在这个场强作用下，二板上电荷很快就中和了，所以无上面的结论。

对理想化后的无限大平行板，当然无法在外面用导线连接起来，所以也没有上面的结论。

2—39。若在无限介质中放一点电荷时，介质中的场强为 $\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}\vec{r_o}$。由 $\vec{P}=\varepsilon_o\chi\vec{E}$ 知，介质中的极化强度矢量为 $\vec{P}=\frac{\varepsilon_r-1}{4\pi\varepsilon_r}\frac{q}{r^2}\vec{r_o}$。再由 $\sigma'=P_n$ 可得，在点电荷与介质交界面上的束缚电荷面密度为 $\sigma'=\infty$。

分析：在交界面上，“点电荷”不能视为点电荷，而应看成一个实际带电体，这时，交界面上的 $\vec{E}$、$\vec{P}$、$\sigma'$ 均不是无穷大。

2—40。在 $\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{S}=q_o$ 中，$q_o$ 是自由电荷，不包括束缚电荷，可见 $\vec{D}$ 只与自由电荷有关，与束缚电荷无关。

分析：由 $\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{S}=q_o$ 只能说明 $\vec{D}$ 通过闭合面的通量

(PDF压缩器 - 未注册版)

$\oint_s \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$仅与自由电荷有关，而推不出$\vec{D}$只与自由电荷有关。由例可以说明，一般来说$\vec{D}$不仅与自由电荷有关，还与束缚电荷有关。例如，如图2—36所示，在点电荷$q_0$的场中置入一电介质，场中任一点$A$的场强$\vec{E}$不仅与$q_0$有关，而且与$q'$有关，则该点的$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$与束缚电荷$q'$有关。

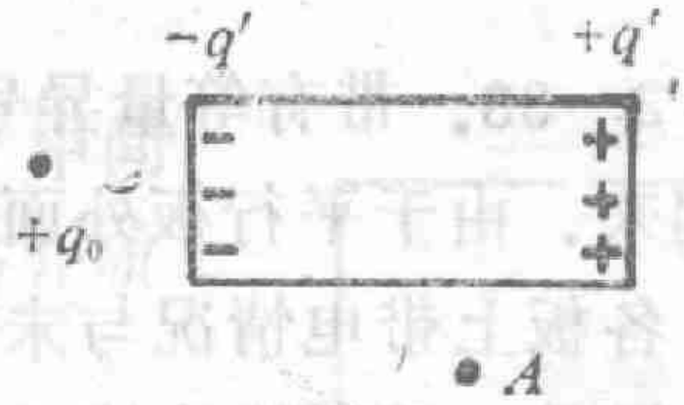


图 2—36

只有当电介质充满场存在的空间或电介质表面为等势面时，才有$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}_0$，由于$\vec{E}_0$与$q'$无关，所以$\vec{D}$也与$q'$无关。

2—41. 在有介质时，高斯定理为$\oint_s \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=q_0$，$q_0$是高斯面内包围的自由电荷.如果把所有介质去掉,而让自由电荷的分布和数量不变，这时便有$\varepsilon_0\oint_s \vec{E}_0\cdot \mathrm{d}\vec{S}=q_0$。由此可得

$$\oint_s \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\varepsilon_0\oint_s \vec{E}_0\cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

则有 $$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}_0=\vec{D}_0.$$

可见空间有介质时，电位移矢量等于无介质时的电位移矢量。

分析：由积分相等推不出被积函数相等。所以，由积分$\oint_s \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\varepsilon_0\oint_s \vec{E}_0\cdot \mathrm{d}\vec{S}$，推不出$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}_0$。不过，在介质充满整个空间或介质表面为等势面时，$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}_0=\vec{D}_0$。

2—42. 设极化电荷产生的场强为$\vec{E}'$，在介质中取高斯面，便有$\oint_s \vec{E}'\cdot \mathrm{d}\vec{S}=q'/\varepsilon_0$，又因极化强度的通量$\oint_s \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=-q'$。所以有$\varepsilon_0\oint_s \vec{E}'\cdot \mathrm{d}\vec{S}=-\oint_s \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$。所以$\vec{E}'=-\vec{P}/\varepsilon_0$。

(PDF压缩器 - 未注册版)

分析：本题所犯错误与上题一样，虽然$\varepsilon_0\oint_s \vec{E}' \cdot d\vec{S} = -\oint_s \vec{P} \cdot d\vec{S}$成立，但由此推不出$\varepsilon_0\vec{E}' = -\vec{P}$。不过可以证明，当$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}_0$成立时，$\vec{E}' = -\vec{P}/\varepsilon_0$（证明见2—5题错解二）。

2—43。由$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$，$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$可得，$\oint_L \vec{D} \cdot d\vec{l} = \oint_L \varepsilon\vec{E} \cdot d\vec{l} = \varepsilon\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$。可见$\vec{D}$的环量等于零。

分析：当电场存在的空间$\varepsilon = c$时，$\varepsilon$可从$\oint_L \varepsilon\vec{E} \cdot d\vec{l}$的积分号中提出，才有$\oint_L \vec{D} \cdot d\vec{l} = 0$，否则没有$\oint_L \vec{D} \cdot d\vec{l} = 0$。可见，$\oint_L \vec{D} \cdot d\vec{l} = 0$并非是一个普遍公式。

2—44。连续带电体的静电能为$We = \frac{1}{2}\int_V \rho U dV$，由此可得，静电能的能量密度为$We = \frac{1}{2}\rho U$。

分析：积分$\int_V \rho U dV$的积分区域是带电体，而静电能的分布区域是整个场所在空间，因此，$\frac{1}{2}\rho U$并不代表静电能密度。

(PDF压缩器 - 未注册版)

# 第三章 稳恒电流

## 一 错误的解法

3—1. 在图3—1所示的电路中，电压表读数为$U$，电流表读数为$I$.电阻$R$及其消耗的功率各为多少？

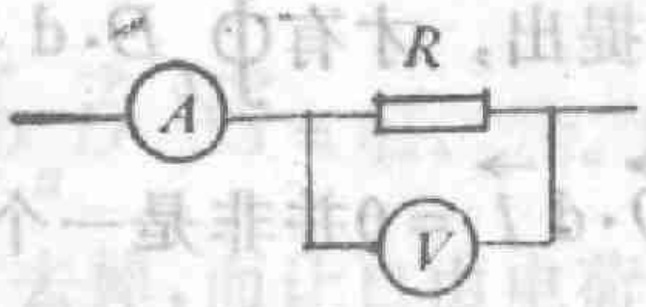


图 3—1

错解：电阻$R$及其消耗的功率各为

$$R=\frac{U}{I},\quad P=UI.$$

分析：在公式$R=U/I$，$P=UI$中，$U$一定是电阻$R$两端的电压，$I$一定是当$R$两端的电压为$U$时通过$R$的电流。在此，由于电压表的内阻$R_V$不是无穷大，电流表上的读数不是通过$R$的电流，而是通过$R$与电压表的电流之和。因此上面计算出的电阻和功率并不是$R$的阻值和功率，而是$R$与电压表并联电阻的阻值和功率。

正确解法：当电阻$R$两端的电压为$U$时，通过它的电流为

$$I_R=I-I_V=I-U/R_V,$$

所以电阻$R$及其消耗的功率各为

$$R=\frac{U_R}{I_R}=\frac{U}{I-U/R_V},$$

$$P=U_RI_R=U\left(I-\frac{U}{R_V}\right)=UI-\frac{U^2}{R_V}.$$

同理，在图3—2所示的电路中，当电压表读数为$U$，电流表

(PDF压缩器 - 未注册版)

读数为$I$时，电阻$R$和它的功率不是$R=U/I$，$P=UI$。原因是由于电流表的内阻$R_A\neq 0$，所以电压表的读数不是电阻$R$两端的电压，而是$R$和电流表两端的电压。电阻$R$两端的电压为

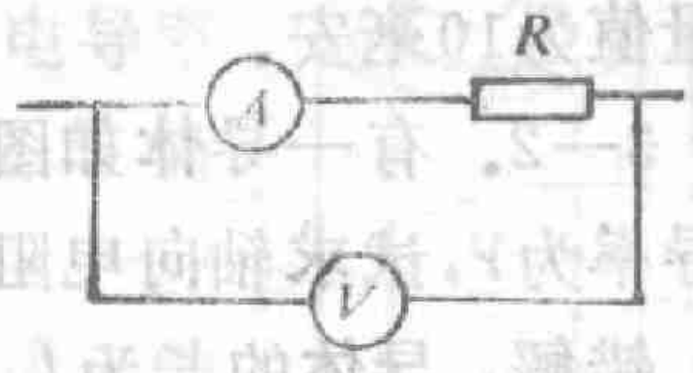


图3—2

$$U_R=U-U_A=U-IR_A,$$

则电阻$R$和它的功率各为

$$R=\frac{U_R}{I_R}=\frac{U-IR_A}{I}=\frac{U}{I}-R_A,$$

$$P=U_RI_R=(U-IR_A)I=IU-I^2R_A.$$

由上可见，当$R_V\gg R$(对图3—1)，$R_A\ll R$(对图3—2)时，

$$R=\frac{U}{I},\quad P=UI.$$

练习题：

在图3—3所示的电路中，二电源内阻很小，可忽略不计。用一内阻为3千欧的电压表测得$ab$两端的电压$V_{ab}$为10伏，那么$ab$两端的实际电压（即不接电压表时，$ab$两端的电压）为多少？电路中实际电流为多少？若用内阻为500欧的电流表测量时读数又是多少（设测电流时不接电压表）？

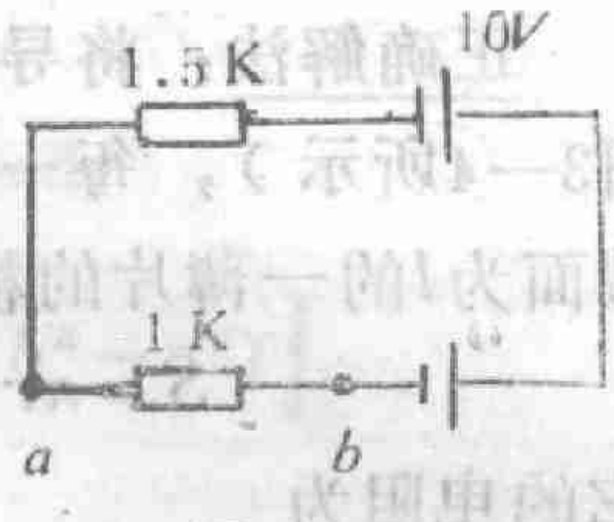


图3—3

提示：由于电压表的内阻不为无穷大，电压表接在其支路两端时测得的值并不是未接时这两端的电压值，而是接上时这两端的电压值。这一值要比未接时的电压值小，但随着$R_V$的增大，这一差别减少。

同样，由于电流表的内阻不为0，电流表接入某支路时测得的值并不是未接时该支路上的电流，而是电流表接入时该支路上电流。这一值要比未接入时的小，但随着电流表内阻$R_A$的减小，这一差别减小。

(PDF压缩器 - 未注册版)

答案：$ab$两端实际电压为12伏；回路中实际电流为12毫安；测量值为10毫安。

3—2. 有一导体如图3—4所示，电导率为$\gamma$，试求轴向电阻。

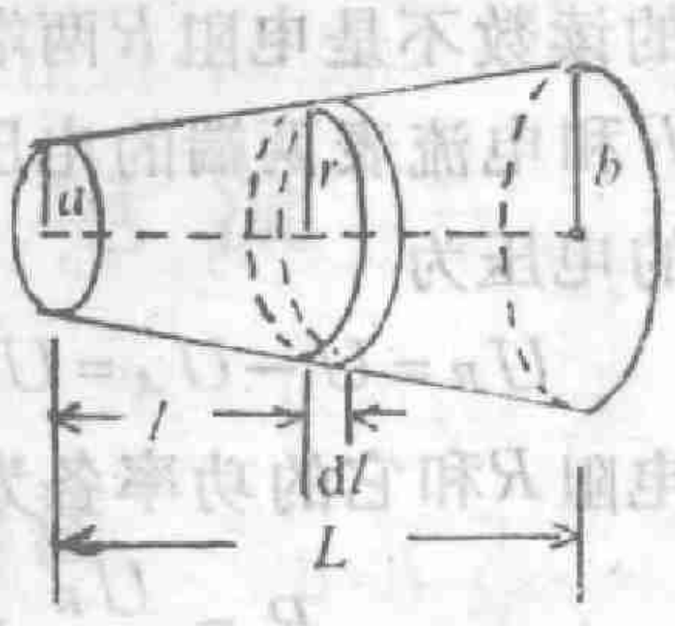



图 3 — 4

错解：导体的长为$L$，平均面积为

$$\overline{S}=\frac{1}{2}(\pi a^2+\pi b^2),$$

则由电阻公式$R=\frac{1}{\gamma}\frac{l}{S}$可得它的轴向电阻

$$R=\frac{1}{\gamma}\frac{L}{(\pi a^2+\pi b^2)/2}=\frac{2L}{\pi\gamma(a^2+b^2)}.$$

分析：公式$R=\frac{1}{\gamma}\frac{l}{S}$只适用于横截面和电导率均匀的导体。

对于横截面或电导率不均匀的导体，应利用公式$R=\int dR=\int\frac{dl}{\gamma S}$来计算电阻。

正确解法：将导体在垂直轴线方向分割成无穷多个薄片（见图3—4所示），每一薄片都可看成横载面均匀的导体元。则距左端面为$l$的一薄片的横截面积为

$$S=\pi r^2=\pi[a+(b-a)l/L]^2,$$

它的电阻为

$$dR=\frac{1}{\gamma}\frac{dl}{S}=\frac{dl}{\pi\gamma[a+(b-a)l/L]^2},$$

则导体的电阻为

$$R=\int dR=\frac{1}{\pi\gamma}\int_0^L\frac{dl}{[a+(b-a)l/L]^2}=\frac{L}{\pi\gamma ab}.$$

当$a=b$时，$R=\frac{L}{\gamma S}$。

它就是横截面均匀导体的电阻公式。

练习题：

如图3—5所示，一铜圆柱半径为$a$，长为$L$。外面套一个与

(PDF压缩器 - 未注册版)

它共轴且等长的铜圆筒，筒的内半径为$b$，在柱与筒之间充满不均匀的导电物质，其电导率随半径的变化规律为$\gamma=A+Br$。试求柱与筒之间导电物质的径向和轴向电阻。

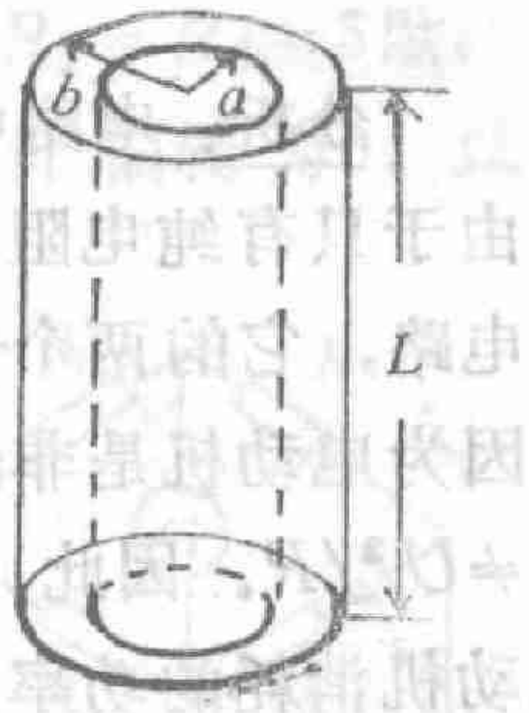


图 3—5

提示：将导电物质沿轴线方向分割成无穷多个与铜柱同轴的圆柱壳。则半径为$r$，厚为$\mathrm{d}r$的圆柱壳的径向电阻为

$$\mathrm{d}R=\frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}r}{2\pi rL}=\frac{\mathrm{d}r}{2\pi L(A+Br)r},$$

于是导体的径向电阻为

$$R=\int\mathrm{d}R=\int_a^b\frac{\mathrm{d}r}{2\pi L(A+Br)r}=\frac{1}{2\pi LA}\ln\frac{b(A+Ba)}{a(A+Bb)}.$$

半径为$r$，厚为$\mathrm{d}r$的柱壳的轴向电导[①]为

$$\mathrm{d}G=\frac{\gamma\mathrm{d}S}{L}=\frac{2\pi(A+Br)r\mathrm{d}r}{L},$$

则导体的轴向电导为

$$G=\int\mathrm{d}G=\int_a^b\frac{2\pi}{L}(A+Br)r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2\pi}{L}\left[\frac{A}{2}(b^2-a^2)+\frac{B}{3}(b^3-a^3)\right],$$

因此，导体的轴向电阻为

$$R=\frac{1}{G}=\frac{3L}{\pi[3A(b^2-a^2)+2B(b^3-a^3)]}.$$

3—3。一台内阻为2欧的直流电动机，工作时两端电压为220伏，通过的电流为4安，试求电动机消耗的功率。

错解一：由$P=I^2R$得电动机消耗的功率为

$$P=4^2\times2=32(\text{瓦}).$$

错解二：由$P=U^2/R$得电动机消耗的功率为

①电导$G=\frac{1}{R}$。对于横截面和电导率均匀的导体，$G=\gamma\frac{S}{l}$。

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$P = 220^2/2 = 24200(瓦)。$$

分析：电路中某支路上消耗的电功率的普适公式为$P=UI$。由于只有纯电阻电路① 公式$U=IR$才成立，所以只有对纯电阻电路，它的两个推论$P=I^2R$和$P=U^2/R$才成立，否则不成立。因为电动机是非纯电阻装置，所以，它消耗的电功率$P \neq I^2R$和$P \neq U^2/R$。因此，上面的解法均错。用公式$P=UI$很容易求得 电动机消耗的功率为

$$P = 220 \times 4 = 880(瓦)。$$

顺便说明：计算某支路中热功率的普适公 式为$P_{热}=I^2R$。只有被讨论的支路为纯电阻电路时，公式$P_{热}=UI$和$P_{热}=U^2/R$才成立，否则不成立。在本题中，电动机支路并非纯电阻电路，所以，对于电动机的热功率不能用后两式计算，而要用前一式来算。由此可得电动机的热功率为$P_{热}=2\times4^2=32(瓦)$。

电动机的机械功率——电动机将电能转化为机械能的功率，既不能用$P_{机}=UI$，也不能用$P_{机}=I^2R$和$P_{机}=U^2/R$来求，而要用公式$P_{机}=P_{电}-P_{热}=UI-I^2R=I(U-IR)$来求。由此式可求得本题中电动机的机械功率为$P_{机}=4\times(220-4\times2)=848(瓦)$。

练习题：

如图3—6所示，有一支路电流方向自左向右，此支路上消耗的功率为10瓦。试求该支路中电流的大小。其中$\varepsilon=10$伏，$r=2$欧，$R=18$欧。




图 3—6

提示：该支路不是纯电阻电路，所以公式$U=IR$，$P=I^2R$，$P=U^2/R$均不成立，但公式$P=UI$成立。由此可得

$$P = UI = [\varepsilon + (R+r)I]I。$$

①纯电阻电路：满足公式$U=IR$的电路，可能是线性的，也可能是非 线 性的，对纯电阻电路，$P=UI=I^2R=U^2/R$.

(PDF压缩器 - 未注册版)

代入已知数据得 $I=0.5$(安)。

3—4。有一桥型电路如图3—7所示。其中$R_1=R_3=5$欧，$R_2=10$欧，$R_0=2$欧，$\varepsilon=3$伏，$\varepsilon_0=12$伏，检流计偏转为0。试求$R_x$。

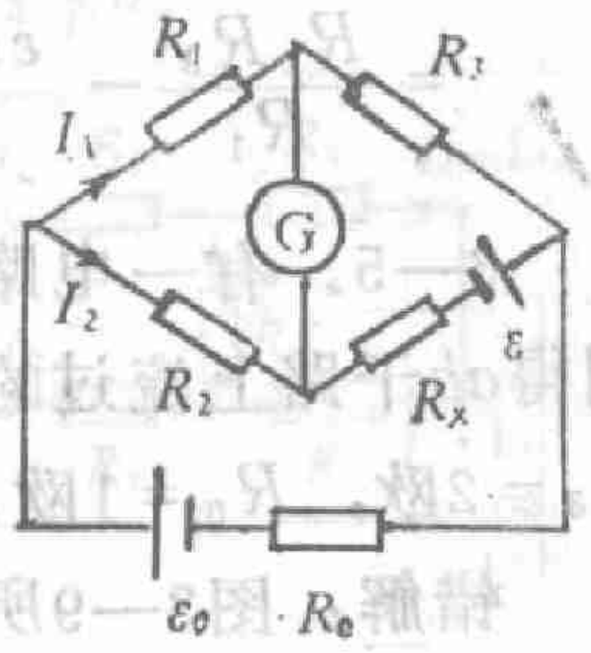


图 3—7

错解：因为检流计偏转为0，电桥处于平衡状态，所以有$R_1R_x=R_2R_3$，即

$$R_x=\frac{R_2R_3}{R_1}=10\text{(欧)}.$$

分析：公式$R_1R_x=R_2R_3$是电桥各臂和桥上元件是纯电阻时的平衡条件。而本题中$R_x$的一臂上含有电源，所以上式不成立。

可以证明，对图3—7所示的电桥，其平衡条件为

$$\frac{R_1}{R_3}=\frac{R_2}{R_x-\varepsilon/I_2},$$

变形得 $$R_x=R_2R_3/R_1+\varepsilon/I_2.$$

求解电路可得

$$I_2=\frac{\varepsilon_0R_1}{R_0(R_1+R_2)+R_2(R_1+R_3)},$$

代入上式有

$$R_x=\frac{R_2R_3}{R_1}+\frac{\varepsilon[R_0(R_1+R_2)+R_2(R_1+R_3)]}{\varepsilon_0R_1}.$$

将已知数据代入得

$$R_x=16.5\text{(欧)}.$$

练习题：

有一电桥如图3—8所示。当$I_g=0$时，$R_x$等于多少？（用电路中其它元件的参数来表示）。

提示：该电桥在“桥”上有电源，所

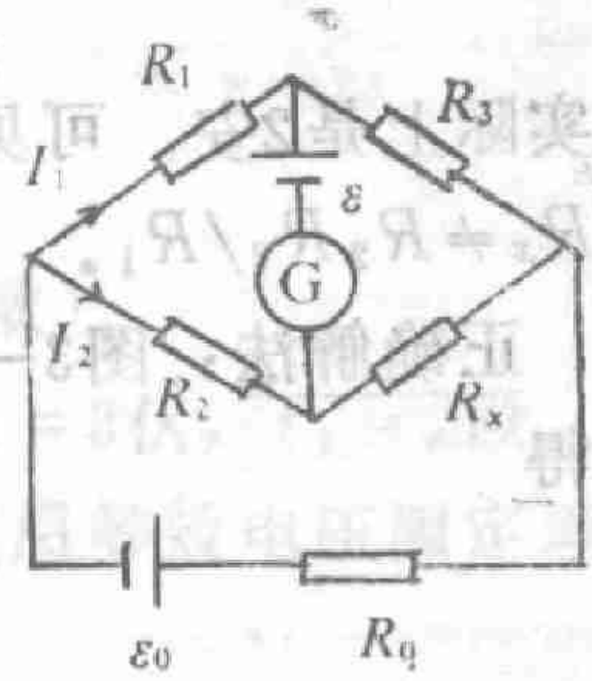


图 3—8

(PDF压缩器 - 未注册版)

以电桥平衡时，等式$R_1R_x=R_2R_3$不成立，即$R_x\neq R_2R_3/R_1$。由基尔霍夫定律得回路方程并解之可得

$$R_x=\frac{R_2R_3}{R_1}-\frac{\varepsilon(R_1+R_3)}{R_1I_2}$$

$$=\frac{R_1R_3}{R_1}-\frac{\varepsilon(R_1+R_3)[R_2(R_1+R_3)+R_0(R_1+R_2)]}{R_1[\varepsilon(R_0+R_1+R_3)-\varepsilon_0R_1]}.$$

3—5．有一电路如图3—9所示，当$ab$两端加6伏的电压时，测得$ab$干路上流过的电流为2安，试求$R_x$。图中$R_1=4$欧，$R_2=R_3=2$欧，$R_0=1$欧。

错解：图3—9所示的电路是$T$型电桥电路。其中$R_0$是“桥”，$R_1$、$R_x$为一对臂，$R_2$、$R_3$为另一对臂。根据电桥的平衡条件可得

$$R_x=R_2R_3/R_1=1(\text{欧}).$$

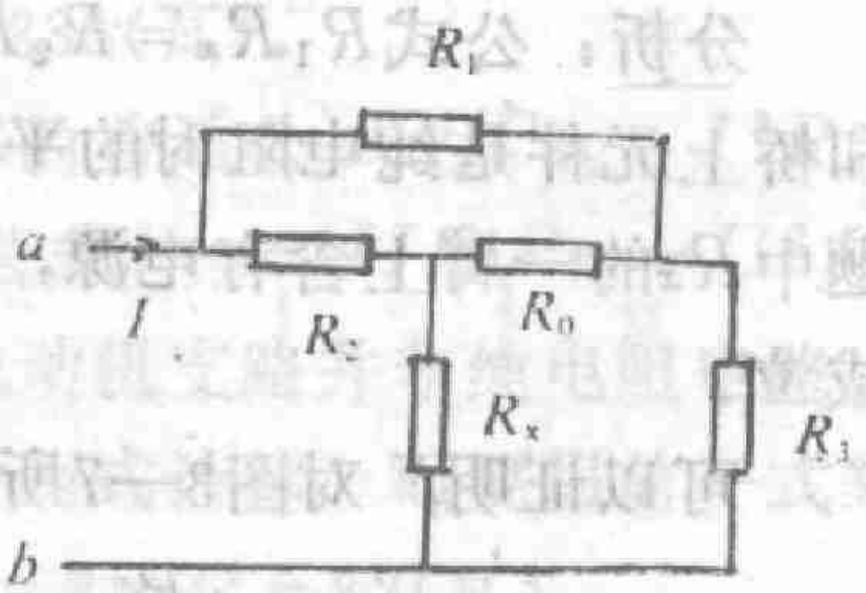



图 3—9

分析：本电桥并非平衡电桥。这可用反证法来证明：假设该电桥是一平衡电桥，则$R_x=1$欧，此时$R_0$不起作用(因电桥平衡时，“桥”上电阻$R_0$无电流通过，与$R_0$断路相同)。因此，$ab$两点间的等效电阻为

$$R_{ab}=\frac{(R_1+R_3)(R_2+R_x)}{R_1+R_2+R_3+R_x}=2(\text{欧}),$$

则$ab$两点流过的电流应为

$$I_{ab}=U_{ab}/R_{ab}=3(\text{安}),$$

而实际上是2安，可见它不是平衡电桥。当然不满足平衡条件，即$R_x\neq R_2R_3/R_1$。

正确解法：图3—9的等效电路为图3—10。由基尔霍夫定律可得

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I, \\ I_1 R_1 + (I_1 - I_0) R_3 = V, \\ I_1 R_1 + I_0 R_0 - I_2 R_2 = 0, \\ I_0 R_0 + (I_2 + I_0) R_x - (I_1 - I_0) R_3 = 0。 \end{cases}$$

将数据代入得

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = 2, \\ 6I_1 - 2I_0 = 6, \\ 4I_1 - 2I_2 + I_0 = 0, \\ (I_2 + I_0) R_x - 2I_1 + 3I_0 = 0。 \end{cases}$$

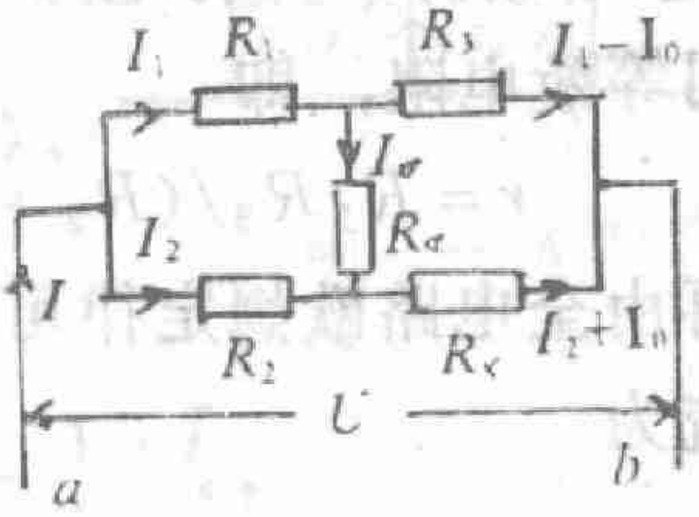



图 3—10

由前三方程可解得

$$I_1 = \frac{7}{9}(安),\quad I_2 = \frac{11}{9}(安),\quad I_0 = -\frac{2}{3}(安)。$$

将它们代入第四个方程可得

$$R_x = \frac{2I_1 - 3I_0}{I_2 + I_0} = 6.4(欧)。$$

练习题：

有一电路如图3—11所示，当电压表读数为0时，$R_x$等于多少？其中$R_1 = 4$欧，$R_2 = 5$欧，$R_3 = 2$欧。

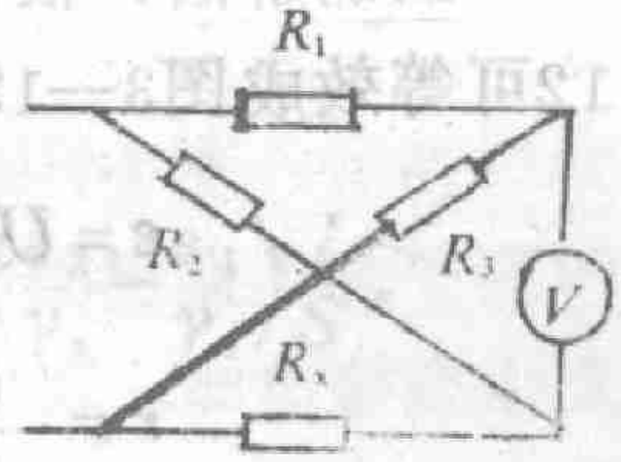



图 3—11

提示：图3—11所示的电路是一$X$型电桥，其中电压表是“桥”，在此的作用是检测电桥是否平衡，$R_1$、$R_x$是一对臂，$R_2$、$R_3$是另一对臂。

由于电压表的读数为0，电桥处于平衡状态。所以，$R_1 R_x = R_2 R_3$，即

$$R_x = R_2 \cdot R_3 / R_1 = 2.5(欧)。$$

3—6．在图3—12电路中，$\varepsilon_1 = 6$伏，$\varepsilon_2 = 3$伏，$r_1 = 2$欧，$r_2 = 1$欧，$R_1 = 4$欧，$R_2 = 3$欧，$R_3 = 6$欧。试用等效电压源定理求$R_1$上的电流。

错解：根据等效电压源定理可知，图3—12可等效成图3—

(PDF压缩器 - 未注册版)

13．其中$\varepsilon$等于 图3—12中，$R_1$断开时，$ab$两点间的电压，即

$$\varepsilon = V_{ab} = \frac{\varepsilon_2}{R_2 + R_3 + r_2} R_3 = 1.8(\text{伏}).$$

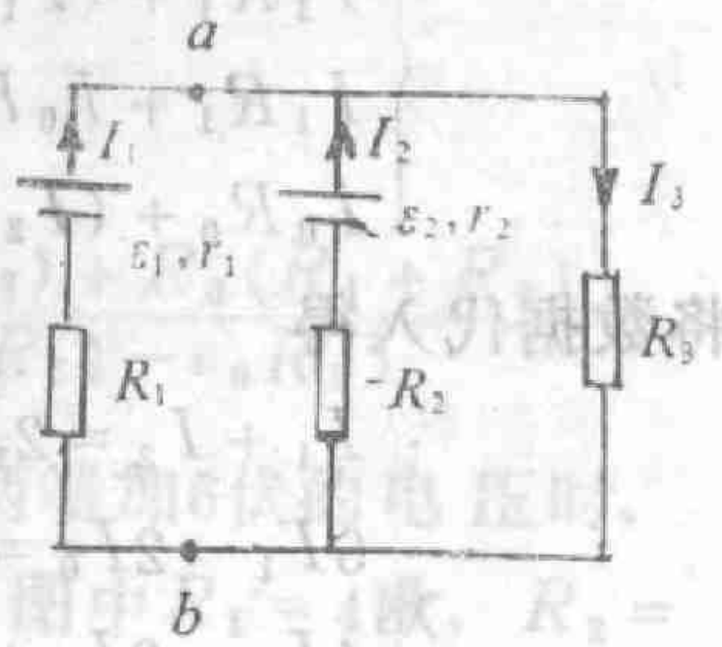



图 3—12

$r$是$R_1$断开，并将电源$\varepsilon_2$去掉后$ab$两点之间等效电阻，即

$$r = R_2 R_3/(R_2 + R_3) = 2(\text{欧}).$$

再由全电路欧姆定律可得，通过$R_1$的电流为

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{R_1 + r_1 + r} = 0.525(\text{安}).$$

分析：等效电压源定理中，等效电阻是除源后，网络内的等效电阻，这里的除源仅指去掉电源的电动势，但内阻还要保留，不可去掉．而上面的解法中，连内阻都去掉了，所以解法是错误的。

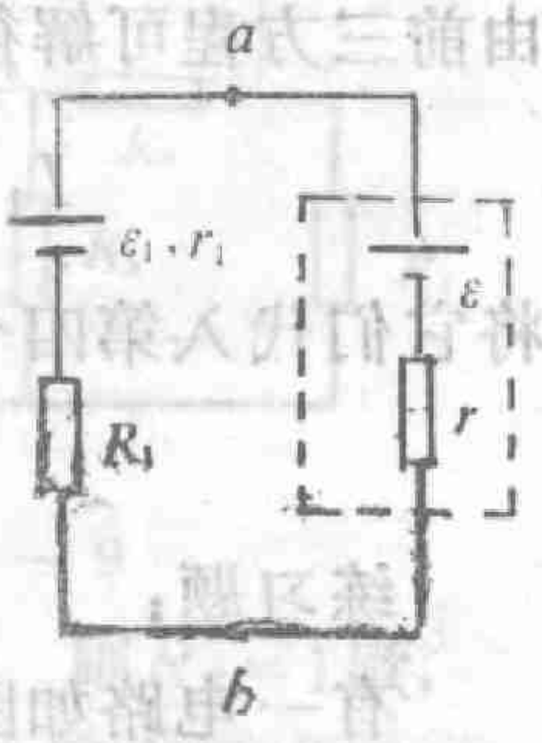



图 3—13

正确解法：根据等效电压源定理，图3—12可等效成图3—13，其中$\varepsilon$和$r$分别为

$$\varepsilon = U_{ab} = \frac{\varepsilon_2 R_3}{R_2 + R_3 + r_2} = 1.8(\text{伏}),$$

$$r = \frac{(R_2 + r_2)R_3}{R_2 + R_3 + r_2} = 2.4(\text{欧}).$$

则$R_1$上通过的电流为

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{R_1 + r_1 + r} = 0.5(\text{安}).$$

练习题：

由迭加原理求3—12所示电路中通过$R_1$的电流。

提示：由迭加原理求各电动势单独存在时通过$R_1$的电流，去电源时，只去掉电动势，应保留内阻。

顺便说明：迭加原理只适用于电压、电流，不适用于功率。

(PDF压缩器 - 未注册版)

3—7。如图3—14所示，两边导体的电导率为无穷大，中间两层导电介质的电导率分别为$\gamma_1$、$\gamma_2$。介电常数分别为$\varepsilon_1$、$\varepsilon_2$。导体的横截面积为$S$。当均匀通过稳恒电流$I$时，$A$、$B$、$C$三个面上的自由电荷面密度各为多少？

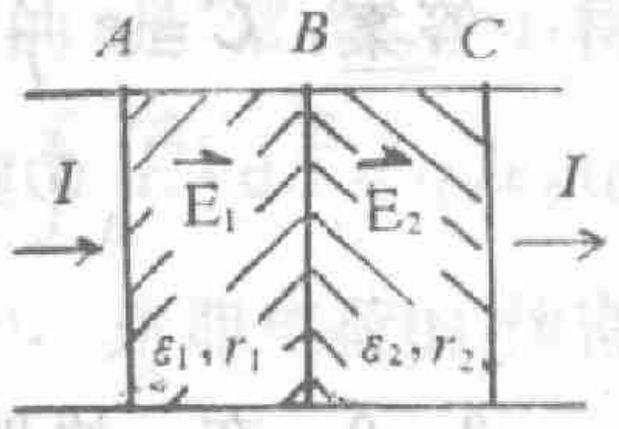



图 3—14

错解：利用边界条件$\sigma=\varepsilon_0(E_{2n}-E_{1n})$，可得三个面上的自由电荷面密度分别为

$$\sigma_A=\varepsilon_0E_1=\varepsilon_0I/\gamma_1S,$$

$$\sigma_B=\varepsilon_0(E_2-E_1)=\varepsilon_0\left(\frac{1}{\gamma_2}-\frac{1}{\gamma_1}\right)\frac{I}{S},$$

$$\sigma_C=-\varepsilon_0E_2=-\frac{\varepsilon_0I}{\gamma_2S}.$$

分析：边界条件$\sigma=\varepsilon_0(E_{2n}-E_{1n})$中的$\sigma$是边界面上的总电荷面密度，不是自由电荷面密度。所以上面求的是三个面上的总电荷面密度，即自由电荷面密度与束缚电荷面密度之和。

边界条件$\sigma_0=D_{2n}-D_{1n}$中的$\sigma_0$是自由电荷面密度。由此可得三个面上的自由电荷面密度各为

$$\sigma_{0A}=D_1=\varepsilon_1E_1=\frac{\varepsilon_1I}{\gamma_1S},$$

$$\sigma_{0B}=D_2-D_1=\varepsilon_2E_2-\varepsilon_1E_1=\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}-\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)\frac{I}{S},$$

$$\sigma_{0C}=-D_2=-\varepsilon_2E_2=-\frac{\varepsilon_2I}{\gamma_2S}.$$

练习题：

图3—15所示的是一段导体的截面，$A$、$B$两边是良导体，中间是不良导体导电介质。其电导率为$\gamma$，介电常数为$\varepsilon$，宽为$l$，横截面积为$S$。当这个导体上通过电流时，由于介质表面出现电荷，相当于一个电容，试求该电容的大小。

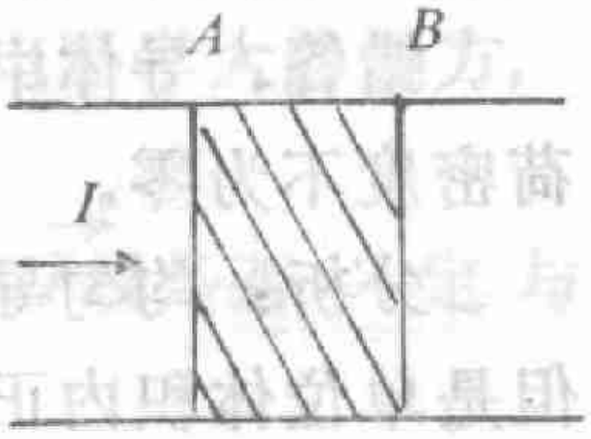



图 3—15

提示：根据电容定义$C=\frac{q}{U}$来求。注意式

(PDF压缩器 - 未注册版)

中$q$是极板上的自由电荷，而不是极板上的总电荷。

答案：$C=\varepsilon\frac{S}{l}$。

## 二 错误的回答

3—9．在一块玻璃中加一任意大小的电场时，玻璃中能否形成电流？

错答：形成电流的条件是：①存在可以自由移动的电荷；②存在电场。缺一不可，在玻璃中没有可以自由移动的电荷，所以不能形成电流。

分析：当玻璃中所加的电场小于玻璃的击穿电场时，玻璃中不存在可以自由移动的电荷，所以不能形成电流。但是当外加电场大于玻璃的击穿电场时，玻璃被击穿，玻璃中存在可以自由移动的电荷，因此，其中能形成电流。

练习题：

气体压强减小时，其击穿电压（发生自激导电所需要的电压）如何变化？

提示：减小．因为气体压强减小时，自由程增大，气体中电子和离子在不太强的电场作用下，就能获得足够大的速度，使气体发生碰撞电离，所以当压强减小时，产生电离所需要的电场强度减小，于是气体的击穿电压减小。

3—10．当均匀导体中通过电流时，导体中的体电荷密度是否为零？

错答：导体中有电流通过，说明导体中有体电荷，当然体电荷密度不为零。

分析：均匀导体中有电流通过，说明导体中肯定有体电荷，但是单位体积内正负电荷数量相等，体密度为零。这可以由电流的稳恒条件和稳恒电场的高斯定理来证明。

(PDF压缩器 - 未注册版)

在导体内任作一封闭曲面$S$，由于电流是稳恒的，所以$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}=0$，将$\vec{J}=\gamma\vec{E}$代入，并注意到均匀导体的$\gamma$是常数，可得$\oint_S \gamma\vec{E}\cdot d\vec{S}=\gamma\oint\vec{E}\cdot d\vec{S}=0$。将此与高斯定理$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=q/\varepsilon_0$比较可知$q=0$，即任意闭合面内包围的电荷为0，亦即电荷的体密度为0。

顺便说明：在非均匀导体中，通过稳恒电流时，或均匀导体中通过非稳恒电流时，电荷的体密度不再等于0。

练习题：

有一导体中各处的$\vec{E}$相等，电流密度$\vec{J}$是否相等？

提示：当导体是均匀导体时，相等；当导体是非均匀导体时，不相等。

3—11．如果一导体中各处的电流密度不相同，那么电流能否是稳恒电流？

错答：因为导体中各处的电流密度不相同，电流当然不能是稳恒电流，是非稳恒电流。

分析：稳恒电流是指导体中各处的电流密度$\vec{J}$不随时间变化，而不是指不随地点变化。所以只要导体中各处$\vec{J}$不随时间变化，电流就是稳恒电流，与各处$\vec{J}$是否相等无关。

练习题：

在一横截面相同的导体中通过一稳恒电流，导体中各处的电流密度是否相同？

提示：如果导体是均匀导体，各处的电流密度相同；如果导体是非均匀导体，各处的电流密度就不相同，电阻率大的地方，电流密度小。

3—12．电流线是否一定与电力线平行，即$\vec{J}$线是否一定与$\vec{E}$线平行？

错答：由$\vec{J}=\gamma\vec{E}$可知，$\vec{J}$线一定与$\vec{E}$线平行。

(PDF压缩器 - 未注册版)

分析：公式$\vec{J}=\gamma\vec{E}$仅适用于只存在静电力的情况，对既存在静电力，又存在非静电力的情况，欧姆定律的微分形式为$\vec{J}=\gamma(\vec{E}+\vec{K})$。例如在电源内部就是这样的情况。

由$\vec{J}=\gamma(\vec{E}+\vec{K})$可知，$\vec{J}$线不一定与$\vec{E}$线平行。如在放电的电池内部，$\vec{J}$线就与$\vec{E}$线反平行。

练习题：

1.在同材料制成的密度均匀的导体中，未通过电流时，是否可能存在静电场？

提示：可能。例如当导体的温度不均匀时，导体内部存在由温度梯度引起的非静电力。则由$\vec{J}=\gamma(\vec{E}+\vec{K})$可知，在$\vec{J}=0$时，$\vec{E}=-\vec{K}$，存在静电场。

2.是否存在无静电场① 而有电流的情况？

提示：由$\vec{J}=\gamma(\vec{E}+\vec{K})$可知，在$\vec{E}=0$，$\vec{K}\neq 0$时，$\vec{J}=\gamma\vec{K}\neq 0$。可见存在无静电场而有电流的情况。题6—5中图6—8就是这样的一个例子。

3—13。一供电站距某用电器为$l$，电荷在输电线上的漂移速度为$u$，那么供电站的电键接通多长时间后，用电器上才通过电流？

错答：在电键接通$t=l/u$后，用电器上才通过电流。

分析：当电键接通后，新建立的电场以光速传递到用电器上，用电器中的电荷在这个新建立的电场作用下开始移动形成电流。可见供电站电键接通$t=l/c$后，用电器上就有电流通过。

练习题：

在稳恒电路中，各处的电荷定向移动的速度是否相同？

提示：导体中电荷定向移动的速度$\vec{u}=q\bar{\lambda}\vec{E}/2m\bar{v}=\gamma\vec{E}/nq$（其中$m$是电荷的质量，$q$为电荷电量，$\bar{v}$是电荷平均热运动速率，$\bar{\lambda}$为

①严格地说，应为稳恒电场。

(PDF压缩器 - 未注册版)

平均自由程，$n$为自由电荷体密度，$\gamma$为导体的电导率）。

由于稳恒电路中，各处的$\gamma$、$n$、$\vec{E}$可能不等，所以$\vec{u}$可能不等。但对于横截面相同的均匀导体，由于各处的$\gamma$、$n$、$\vec{E}$都相等，所以各处的$\vec{u}$相等。

3—14．某人站在220伏的绝缘平台上，是否有生命危险？

错答：人的安全电压约40伏。220伏远大于40伏，所以肯定有生命危险。

分析：危险人生命的是人体上的电压降而不是人体的电势。人站在220伏的绝缘平台上时，人体的电势为220伏，但人体上的电压降为0，所以无生命危险，并且安然无恙。

练习题：

用羊毛摩擦小木梳，可能产生1万伏的电势（相对于地面），站在地面上的人接触它时，有无危险？

提示：当通过人体的电流大于50毫安时，就有生命危险。这里摩擦起电的电势虽然高达万伏，但电量却极小，而且电量固定在木梳被摩擦处的表面，不能自由移动。当人接触时，放电的电流极小，且维持时间极短暂，当然无什么危险。

3—15．对于非线性元件，电压、电流和电阻三者之间的关系仍为$I=U/R$，即$U=IR$，那么它是否满足欧姆定律？

错答：欧姆定律的数学表达式为$I=U/R$，满足此表达式的都满足欧姆定律，所以非线性元件满足欧姆定律。

分析：只有元件上的电流与电压成正比时才满足欧姆定律，否则不满足欧姆定律。对于非线性元件，由于电阻$R$随电压变化，所以电流$I=U/R$不是与电压成正比，因此它不满足欧姆定律。

但是对于非线性元件，其电阻的定义仍用了公式$R=U/I$，所以对于非线性元件，公式$I=U/R$，$U=IR$仍成立。但必须注意，公式中的$R$是变量，所加电压不同，其值不同。

(PDF压缩器 - 未注册版)

练习题：

1.下面给出的导电材料和导电器件，哪些满足欧姆定律，哪些满足公式$U=RI$？

金属导体，电解液，半导体，电子管，晶体管，导电气体，电动机，电解槽。

提示：满足欧姆定律的为：金属导体，电解液。

满足公式$U=IR$的有：金属导体，电解液，半导体，电子管，晶体管，导电气体。

2.图3—16给出的是几种导电器件的伏安特性曲线。哪个曲线满足欧姆定律，哪个曲线满足$U=IR$？

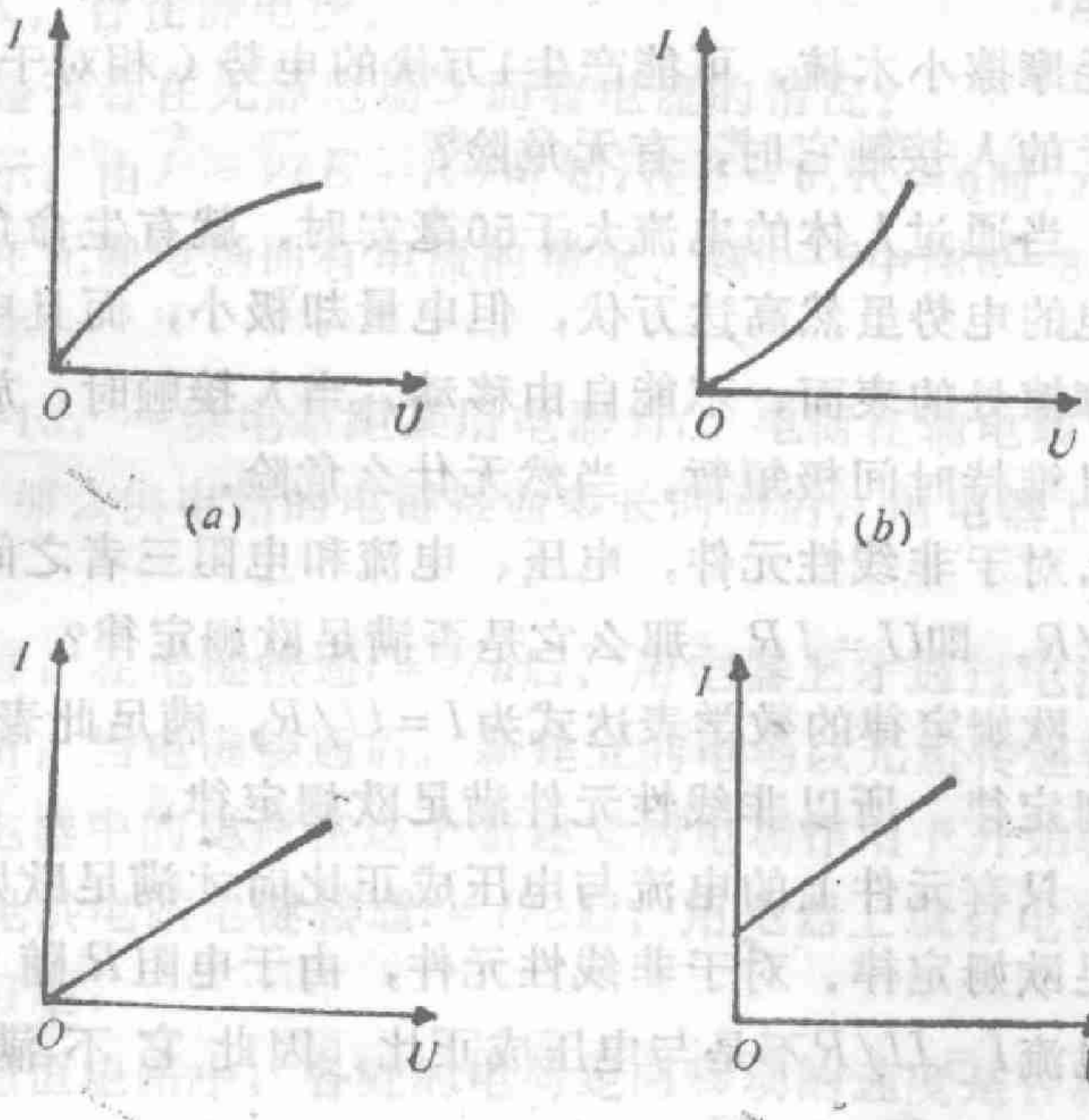



图 3—16

提示：图(c)是通过原点的直线，满足欧姆 定律，对应的元件为线性元件。

(PDF压缩器 - 未注册版)

图(a)、(b)是通过原点的曲线，它们不满足欧姆定律，但满足公式$U=IR$，它们对应的元件为非线性元件。

图(d)是未过原点的直线，它对应的器件不是纯电阻器件（如充电电池的伏安特性曲线就为图(d)所示的曲线），当然它既不满足欧姆定律，又不满足公式$U=IR$。

3—16。在常温下，金和铜哪一个导电性能好？

错答：金的导电性能好。

分析：在常温下(20℃)，金的电阻率为$2.21\times10^{-7}$欧·米，铜的为$1.68\times10^{-7}$欧·米①，可见铜的导电性能好。

顺便说明：①°在常温下，银的导电性能比金的好，且是导电性能最好的金属；

②°在常温下，四种常见金属：银、铜、铝、铁的电阻率大小顺序为

$$\rho_{铁}>\rho_{铝}>\rho_{铜}>\rho_{银}。$$

练习题：

两种金属构成的合金，其电阻率是否一定介于二金属之间？

提示：不一定。例如，黄铜（铜66%＋锌34%），在常温下的电阻率（$6.5\times10^{-7}$欧·米②）大于铜和锌的电阻率（$\rho_{铜}=1.68\times10^{-7}$欧·米，$\rho_{锌}=5.96\times10^{-7}$欧·米）。

3—17。将电炉丝放入一恒温的绝缘液体中，然后将它接在某电源两端，其电阻是否随电源电压的改变而改变？

错答：电炉丝的伏安特性曲线不是直线，而是曲线，由此可知，它的阻值随接在它两端电源电压的改变而改变。

分析：电炉丝的电阻随电压变化的原因是：电压不同，功率不同，产生的热量不同，炉丝温度不同，所以电阻不同。现在已将它放在恒温溶液中，其温度不变，所以其阻值不变。

顺便说一句：此时电炉丝的伏安特性曲线不再是曲线，而是

①、②见上海教育出版社出版的《中学物理教师手册》$P_{238}$（1984）。

(PDF压缩器 - 未注册版)

过原点的直线。

练习题：

将晶体管放在一恒温绝缘液体中，并保证始终与液体同温度，然后接在一电源两端。当加在其两端的电压改变时，其阻值是否变化？

提示：二极管的电阻是$PN$结的阻档层产生的，阻档层宽，阻值大；阻档层窄，阻值小。当二极管两端加不同电压时，阻档层不同（即使在相同的温度下），其电阻不同。可见，二极管的阻值要变化。

由此可见，二极管的阻值随电压改变的原因与电炉丝的不同。前者是改变了$PN$结的阻档层的宽窄，后者是改变了它的温度。

3—18。有二灯炮，一个是钨丝的，一个是碳丝的，都标有“220V 40W”。现将它们串联接在220伏的电压两端，哪个较亮？

错答：由$P=U^2/R$可知，二灯泡的电阻一样，串联后功率都是$P=I^2R$，一样大，可见二者一样亮。

分析：二灯泡并联在220伏的电压两端时，它们的功率一样，电阻一样。但串联后，接在220伏的电压两端时，二灯泡均未达到额定电压，肯定不能正常发光，温度要比并联在220伏时低。由于钨丝的电阻随温度降低而减小，而碳丝的电阻随温度的降低而升高，所以串联后，$R_{碳}>R_{钨}$，则由$P=I^2R$知，碳丝的功率大，因此，碳丝的较亮。

练习题：

有甲乙两个用镍铬合金制成的炉丝，在常温下甲的电阻与乙的电阻之比是3/4，那么并接在220伏电压两端使用时，甲的功率与乙的功率之比是等于、小于还是大于4/3？

提示：由常温下的电阻大小就可知，它们并接在220伏的电压两端使用时，甲的功率比乙的大，当然甲的温度比乙的高。由$R=R_0(1+\alpha t)$可知，甲的电阻增加比乙的多，因此，甲乙两炉

(PDF压缩器 - 未注册版)

丝的电阻之比要大于3/4，则由$P=U^2/R$知，甲乙两炉丝的功率之比小于4/3。

3—19。对电炉，刚通电时的功率和通电一段时间后的功率是否一样大？

错答：电炉的功率与通电时间长短无关，刚通电时的功率和通电一段时间后的功率一样大。

分析：电炉的功率为$P=UI=U^2/R$。由于刚通电时，炉丝电阻小，所以刚通电时的功率大。

同理，电灯泡、电烙铁、电饭锅等纯电阻用电器，刚通电时的功率大。

练习题：

对于大功率电炉的保险丝，在刚通电时容易烧断，还是通电一段时间后容易烧断？

提示：刚通电时，电炉丝电阻小，电路中电流大，所以刚通电时保险丝容易烧断。

3—20。有两根炉丝，材料一样，长度、横截面积都相同，但是一根的横截面是圆形的，另一根是方形的。它们接在同一电压两端时，哪个的功率大？

错答：由$R=\rho l/S$知，二炉丝的电阻相同，再由$P=U^2/R$知，二炉丝的功率相等。

分析：截面面积相同的导体，圆形的侧面较小，与周围的接触面较小，则通电后散热较慢，温度较高，所以电阻较大，则功率$P=U^2/R$较小。

练习题：

把一炉丝放在冷热不同的房中，接在相同的电压两端时，功率是否一样？

提示：不一样。冷房子的功率大，因为冷房子内散热快。

3—21。两个各标有“220V 40W”，“220V 150W”的灯泡串

(PDF压缩器 - 未注册版)

联后，接在380伏的电压两端，二灯泡的总功率为多少？

错答：二灯泡的电阻分别为

$$R_{40}=\frac{U_{220}^2}{P_{40}}=\frac{220^2}{40}=1210(欧),$$

$$R_{150}=\frac{U_{220}^2}{P_{150}}=\frac{220^2}{150}=323(欧).$$

串联后总电阻为

$$R_{总}=R_{40}+R_{150}=1533(欧),$$

因此总功率为

$$P_{总}=\frac{U_{总}^2}{R_{总}}=\frac{380^2}{1533}=94(瓦).$$

分析：计算知，二灯泡刚串接在380伏的电压两端时各自的电压分配为$U_{40}=300$伏，$U_{150}=80$伏。由于“220V40W”灯泡上分配的电压远大于它的额定电压，灯丝被烧断，它烧断后，“220V150W”的灯泡也不能工作，所以总功率为0。

顺便说一句：“220V40W”的灯丝烧断后，二灯泡上的电压分配为$U_{40}=380$伏，$U_{150}=0$伏。

练习题：

两各标有“110V40W”和“110V120W”的灯泡串接在220伏的电压两端，二灯泡中流过的电流为多少？哪一个较亮？

提示：二灯泡中流过的电流为0，一样亮——都是灭的。因为“110V40W”的灯泡的灯丝被烧断了。

3—22．欧姆表能否测量电池的内阻？

错答：欧姆表就是测电阻的仪表，当然可以测电池的内阻。

分析：欧姆表的测量线路图如3—17所示，其中$G$是表头，$\varepsilon$是工作电池，$R_n$是限流电阻，$R_x$是待测电阻。

当待测电阻接在$ab$两端时，流过表头的电流为

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$I_g = \frac{\varepsilon}{R_n + R_g + R_x},$$

则待测电阻为

$$R_x = \frac{\varepsilon}{I_g} - (R_n + R_g).$$

因$\varepsilon$、$R_n$、$R_g$均已知，再根据表头测量的$I_g$，就可算出$R_x$。如果按此关系将电阻刻在表头的刻度盘上，就是一个欧姆表。

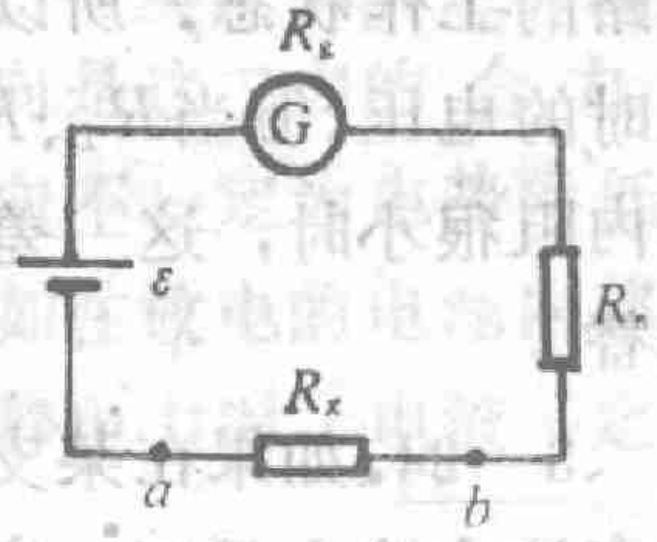


图3—17

知道欧姆表的工作原理后，我们就可知道用它不能测电池内阻。因将电池接在$ab$两端时，工作电路中的电动势不再是$\varepsilon$，这时原来刻度盘上的刻度就失去意义了。所以不能用它来测电池内阻。

练习题：

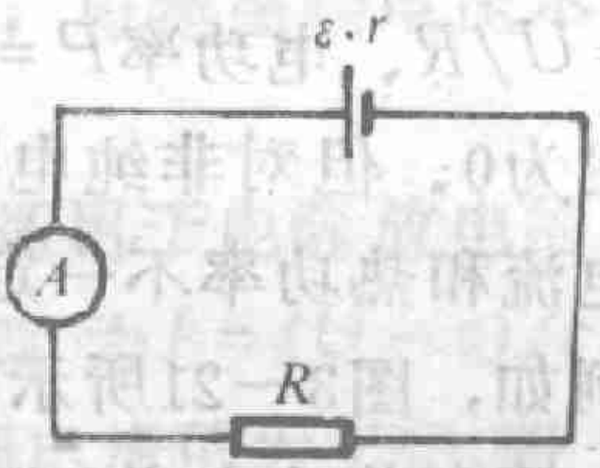
能否用欧姆表测量正在使用的电炉电阻？

提示：不能。

3—23．如图3—18所示，用电流表测量回路中电流时，如果量程改变，测出的电流是否一样？

错答：当然一样。

分析：电流表测出的电流$I_{测} = \varepsilon/(R + r + R_A)$，由于电流表量程不同，内阻不同，所以测出的电流不同。对同一电流表来说，量程大，内阻小，测出的电流值大。但它总小于未接电流表时的实际电流值$I = \varepsilon/(R + r)$。



图—18

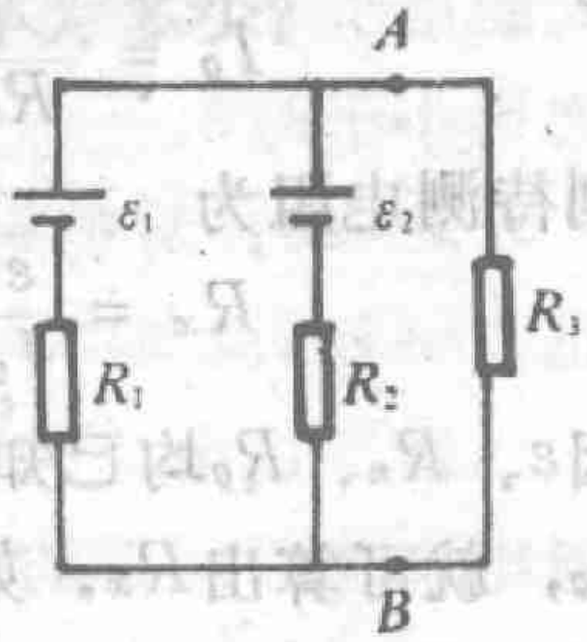
练习题：

根据等效电压源定理，图3—19($a$)所示的线路可等效成图3—19($b$)所示的电路。其中$\varepsilon$为($a$)中$R_3$断路时$AB$两端的电压，如果作实验验证此定理，能否用电压表测得$R_3$断开时$AB$两端的电压来代替$\varepsilon$？

提示：由于电压表的内阻不为无穷大，它的接入要改变原

(PDF压缩器 - 未注册版)

电路的工作状态。所以测出的值不等于未接入时的电压。但当$R_1$、$R_2$的电阻相对于电压表内阻很小时，这一差别很小，可以近似代替。

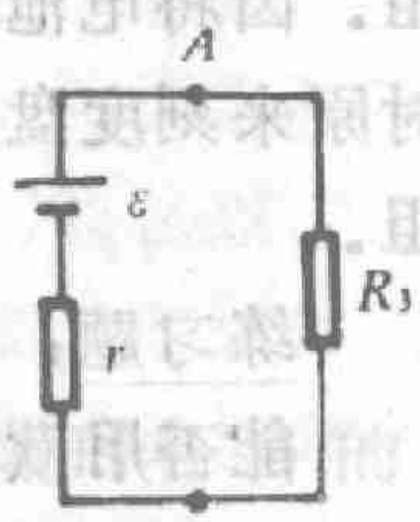


(a)

3—24。如果在某支路两端存在电压，那么在该支路中是否一定存在电流？

错答：由$I=U/R$可知，只要$R\neq\infty$，一定存在电流。

分析：公式$I=U/R$仅对纯电阻支路成立，否则不成立。所以上述结论不是一般结论。如图3—20所示电路中，$ab$两端存在电压，但不存在电流。



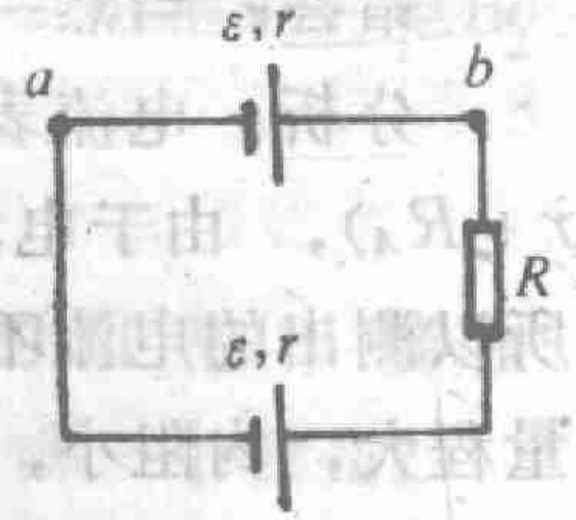
(b)

图—19

练习题：

某支路两端电压为0，该支路中电流是否一定为0？电功率是否一定为0？热功率是否一定为0？

提示：对纯电阻支路，当电压为0时，电流$I=U/R$、电功率$P=UI$、热功率$P_{热}=U^2/R$都一定为0。但对非纯电阻支路，当电压为0时，电流和热功率不一定为0，但电功率一定为0。例如，图3—21所示电路，$ab$两端电压为0，但电流和热功率均不为0，各为$I=\varepsilon/r$，$P_{热}=\varepsilon^2/r$。



图—20

3—25。电流是否一定从高电势流向低电势？

错答：电流的方向为正电荷移动的方向，正电荷移动的方向为电场方向，电场方向又是电势降低的方向，所以电流的方向就是电势降低的方向，即电流一定从高电势流向低电势。

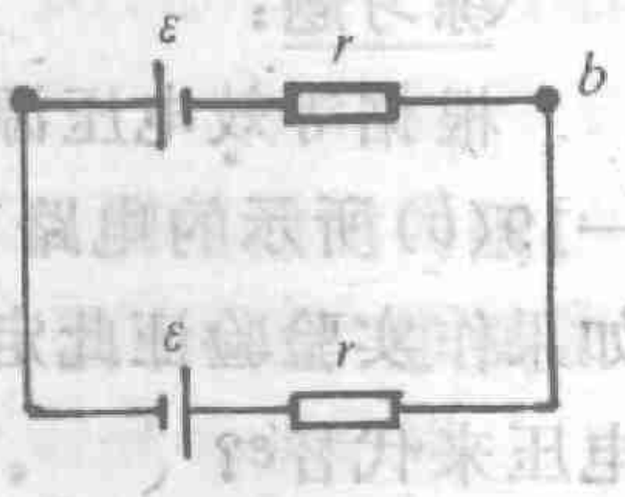


图 3—21

(PDF压缩器 - 未注册版)

分析：使电荷定向移动的场力有两种：一是静电力；二是非静电力。电荷定向移动的方向，即电流方向是这二力的合力方向，即$\vec{J}=\gamma(\vec{E}+\vec{K})$。由此可见电流的方向不一定为电势降低的方向，即不一定从高电势流向低电势。例如在放电的电池内部，电流就是从低电势流向高电势。但是只有静电力时，电流一定从高电势流向低电势。

练习题：

图3—22所示的是一电路中的一条支路，该支路中电流的方向如何？

提示：只从此支路图无法确定电流方向，只有知道全电路后，才能从理论上确定它上面的电流方向。

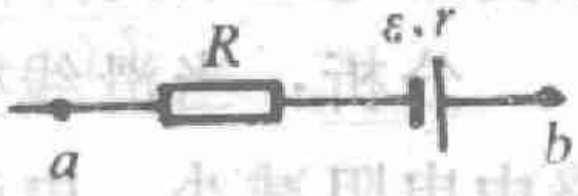


图 3—22

3—26．一个电池内部的电流是否会超过短路电流？电池路端电压是否会超过电动势？

错答：由全电路欧姆定律$I=\varepsilon/(R+r)$知，电池内部的电流不会超过短路电流$I_{短}=\varepsilon/r$；由$\varepsilon=U+Ir$知，电池路端电压不会超过电动势。

分析：公式$I=\varepsilon/(R+r)$，$\varepsilon=U+Ir$仅适用于电源放电的情况。对电源充电时，这两式不再成立。应改为$I=(U-\varepsilon)/r$，$\varepsilon=U-Ir$。由此可知，当充电时，电池内部电流可大于短路电流，路端电压可大于电动势。

练习题：

如图3—23所示，一负载的电源是三个不同的电池并联而成。试给出该电源的电动势和内阻。

提示：用等效电压源定理① 可得，其

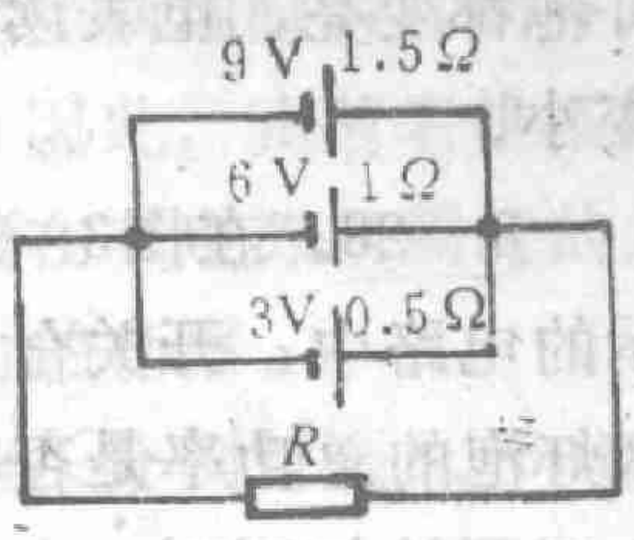


图 3—23

①如果有源网格内部是一复杂电路时，可多次使用等效电压源定理，直到变成一个电压源为止。

(PDF压缩器 - 未注册版)

电动势和电阻各为$\varepsilon=4\frac{10}{11}$伏，$r=\frac{3}{11}$欧。

有人认为“并联电池组构成电源的电动势等于最大者的电动势”，这是错误的概念。

3—27. 如图3—24所示，滑线变阻器向左滑时，电压表上的读数如何变化？

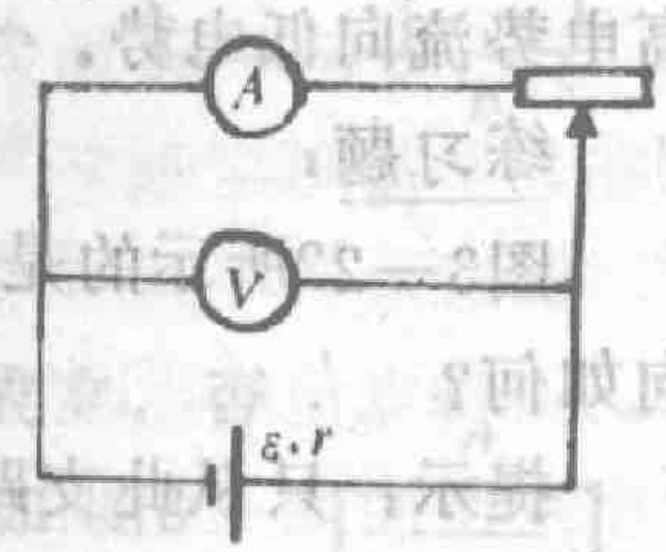


图 3—24

错答：当滑线变阻器向左滑时，电流表上读数增大，即支路中电流增大，所以该支路电压增大，则电压表读数增大。

分析：当滑线变阻器向左滑时，总电路中电阻减小，电流增大，则电源内阻上的电压降增加。因此，路端电压——电压表上的读数减小。

练习题：

1. 在图3—25所示电路中，开关K打开时，灯泡$A$变亮还是变暗？

提示：变亮。

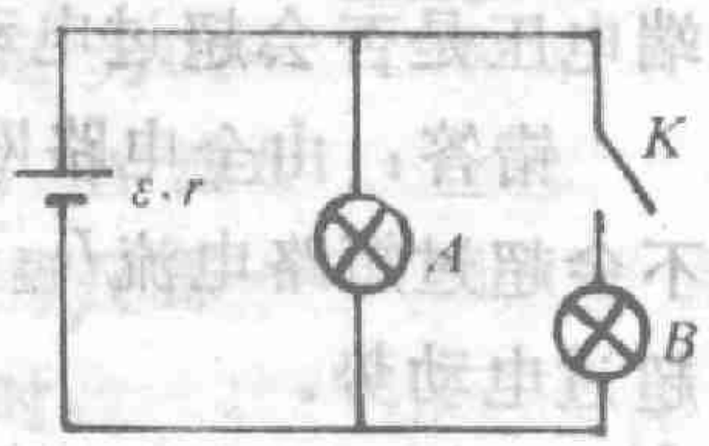


图 3—25

2. 当滑线变阻器向左滑时，图3—26中灯泡的亮度和电表的读数如何变化？

提示：图$(a)$、$(b)$中，灯泡都变亮，电表读数都变小。

3—28. 在图3—25所示的电路中，开关合上时两灯泡的总功率是否一定大于开关打开时一个灯泡的功率？

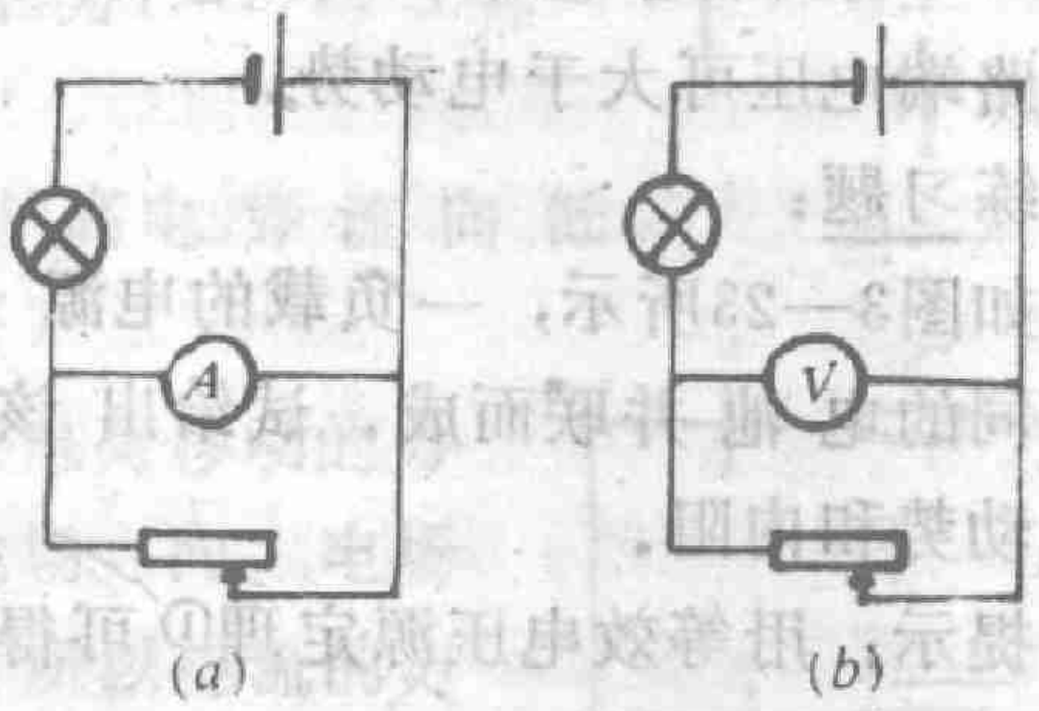


图 3—26

错答：当然两灯泡总

(PDF压缩器 - 未注册版)

功率一定大于一个灯泡的。

分析：设$A$的电阻为$R_1$，$B$的为$R_2$，则$K$合上时的总功率为

$$P_{合}=\left[\frac{\varepsilon}{r+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}\right]^2\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=\frac{\varepsilon^2(R_1+R_2)R_1R_2}{[r(R_1+R_2)+R_1R_2]^2},$$

$K$打开时的功率为

$$P_{开}=\left(\frac{\varepsilon}{R_1+r}\right)^2R_1。$$

假设$P_{合}>P_{开}$，

即 $$\frac{\varepsilon^2(R_1+R_2)R_1R_2}{[r(R_1+R_2)+R_1R_2]^2}>\frac{\varepsilon^2R_1}{(R_1+r)^2}。$$

由此可得 $$R_1^2R_2>r^2(R_1+R_2)。$$

但是此不等式不一定成立，所以假设$P_{合}>P_{开}$不一定成立，即两个灯泡同时工作时的功率不一定大于一个灯泡工作时的功率。例如，$R_1=R_2=r=10$欧时，$P_{合}=\frac{\varepsilon^2}{45}$，$P_{开}=\frac{\varepsilon^2}{40}$，此时$P_{合}<P_{开}$。

练习题：

有人说“串联电路的总功率等于各分功率之和，因此几个用电器同时串接在一电源两端时的总功率一定大于它们单独接在该电源两端时的功率。”这句话是否正确？

提示：不正确。首先要清楚：在“串联电路的总功率等于各分功率之和”中的分功率就是同时串接在电源两端时各自的分功率，而并不是单独接在电源两端时的功率。因此，由前者推不出后者。另外证明可知，几个用电器同时串接在一电源两端时的总功率不一定大于它们单独接在该电源两端时的功率。

3—29.在图3—27中，$R_1>R_2$，当电键$K$分别打到$a$、$b$时，$R_1$和$R_2$哪个上的功率大？

错答一：由$P=I^2R$可知，$R_1$的功率大于$R_2$的功率。

分析：当电源接到$R_1$和$R_2$时，电流不等，所以不能仅从

(PDF压缩器 - 未注册版)

$R_1>R_2$就肯定$I_1^2R_1>I_2^2R_2$。

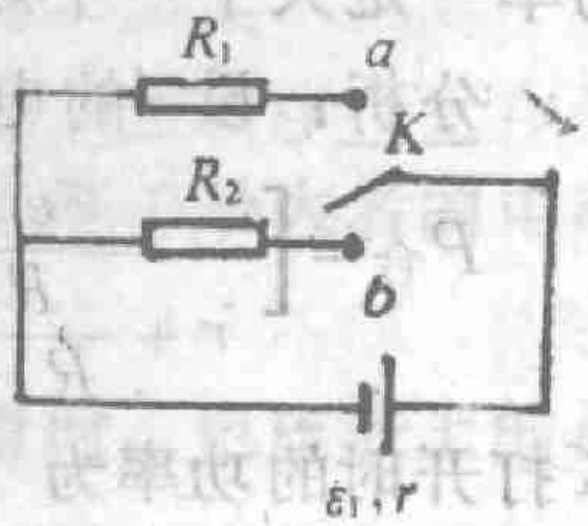



图 3—27

错答二：由$P=U^2/R$可知，$R_2$的功率大于$R_1$的功率。

分析：当电源接到$R_1$、$R_2$时，由于内阻的影响，路端电压不等，即$U_1\neq U_2$，所以也不能由$R_1>R_2$肯定$\dfrac{U_1^2}{R_1}<\dfrac{U_2^2}{R_2}$。

正确的回答如下：当$K$打到$a$、$b$时，$R_1$、$R_2$上的功率各为

$$P_1=I_1^2R_1=\frac{\varepsilon^2R_1}{(R_1+r)^2},\quad P_2=I_2^2R_2=\frac{\varepsilon^2R_2}{(R_2+r)^2}。$$

所以
$$P_1-P_2=\frac{\varepsilon^2R_1}{(R_1+r)^2}-\frac{\varepsilon^2R_2}{(R_2+r)^2}$$
$$=\varepsilon^2\frac{(R_1-R_2)(r^2-R_1R_2)}{(R_1+r)^2(R_2+r)^2}。$$

由此可见，当$r^2=R_1R_2$时，$P_1=P_2$（注意条件$R_1>R_2$）；

当$r^2>R_1R_2$时，$P_1>P_2$；

当$r^2<R_1R_2$时，$P_1<P_2$。

练习题：

在图3—28所示的电路中，$\varepsilon_1>\varepsilon_2$，那么$K$置于$a$时$R$上的功率大，还是置于$b$时$R$上的功率大？

提示：有的同学认为，$\varepsilon_1>\varepsilon_2$，所以由$P=U^2/R$可知，$K$置于$a$时的功率大。这样的回答是错误的。正确的回答是：

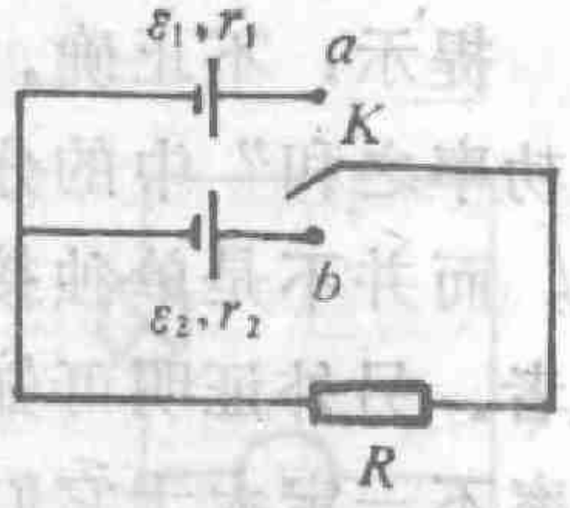



图 3—28

$K$置于$a$、$b$时，$R$上的功率各为

$$P_1=\frac{\varepsilon_1{}^2R}{(R+r_1)^2},\quad P_2=\frac{\varepsilon_2{}^2R}{(R+r_2)^2},$$

所以
$$P_1-P_2=\frac{\varepsilon_1{}^2R}{(R+r_1)^2}-\frac{\varepsilon_2{}^2R}{(R+r_2)^2}$$
$$=\frac{\varepsilon_1{}^2(R+r_2)^2-\varepsilon_2{}^2(R+r_1)^2}{(R+r_1)^2(R+r_2)^2}R。$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

由此可知，当$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}>\frac{R+r_1}{R+r_2}$时，$P_1>P_2$；

当$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}<\frac{R+r_1}{R+r_2}$时，$P_1<P_2$；

当$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}=\frac{R+r_1}{R+r_2}$时，$P_1=P_2$。

3—30。有一灯泡接上一节电池时有微光，接上两节电池时是否一定更亮。

错答：当然一定更亮。

分析：接一节电池时的功率为$P_1=I_1{}^2R=\left(\frac{\varepsilon_1}{R+r_1}\right)^2R$，接两节电池时的功率为$P_2=I_2{}^2R=\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{R+r_1+r_2}\right)^2R$。由于不同的电池电动势和内阻不一样，所以，接两节电池时的功率不一定大于接一节电池时的。但是如果两节电池一样时(即$\varepsilon$，$r$一样)，$P_2$一定大于$P_1$。

练习题：

有两节电池，用同一电压表测得开路时的电压各为$U_1$、$U_2$，且$U_1>U_2$。那么是否可以肯定电压大的对应的电动势大，即是否可肯定$\varepsilon_1>\varepsilon_2$。

提示：参考图3—29可得

$$\varepsilon_1=U_1+I_1r_1=U_1+\frac{\varepsilon_1}{R_V+r_1}r_1;$$

$$\varepsilon_2=U_2+I_2r_2=U_2+\frac{\varepsilon_2}{R_V+r_2}r_2;$$

所以 $\varepsilon_1=\frac{R_V+r_1}{R_V}U_1$，$\varepsilon_2=\frac{R_V+r_2}{R_V}U_2$。

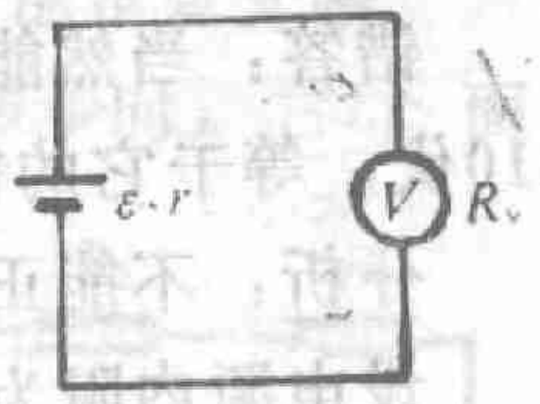


图 3—29

因为不知$r_1$、$r_2$的大小，所以无法肯定$\varepsilon_1$是否大于$\varepsilon_2$。

3—31。一电阻$R$接在电动势为2伏的电池两端产生的热量多，还是接在电动势为1.5伏的电池两端产生的热量多？

(PDF压缩器 - 未注册版)

错答：当然接在电动势为2伏的电池两端产生的热量多。

分析：设电动势为2伏的电池内阻为$r_1$，电动势为1.5伏的电池内阻为$r_2$。则电阻$R$分别接在两个电池两端时产生热量的功率各为

$$P_1=\left(\frac{\varepsilon_1}{R+r_1}\right)^2R=\left(\frac{2}{R+r_1}\right)^2R_1;$$

$$P_2=\left(\frac{\varepsilon_2}{R+r_2}\right)^2R=\left(\frac{1.5}{R+r_2}\right)^2R.$$

则
$$\frac{P_1}{P_2}=\left(\frac{2}{1.5}\,\frac{R+r_2}{R+r_1}\right)^2.$$

由此可得，只有$r_1<\frac{4}{3}r_2+\frac{R}{3}$时，$P_1>P_2$，否则$P_1\leqslant P_2$。

练习题：

一电池外接1欧的电阻时输出的功率大，还是外接4欧时输出的功率大？

提示：当电池的内阻$r<2$欧时，外接1欧的电阻输出的功率大；

当$r>2$欧时，外接4欧的电阻输出的功率大；

当$r=2$欧时，两种情况下输出的功率一样大。

3—32。一个110伏25瓦的灯泡接在一个电源上可以正常发光，那么一个110伏100瓦的灯泡接在该电源上能否正常发光？

错答：当然能。因为只要加在该电源上，灯泡两端电压就是110伏，等于它的额定电压，所以可以正常发光。

分析：不能正常发光。原因如下：

设电源内阻为$r$，电动势为$\varepsilon$，25瓦的灯泡的内阻为$R_1$，100瓦灯泡内阻为$R_2(R_2<R_1)$。当电源接在25瓦灯泡两端时，灯泡上的电压为

$$U_1=I_1R_1=\frac{\varepsilon}{R_1+r}R_1=\frac{\varepsilon}{1+r/R_1}=110(\text{伏}).$$

接在100瓦灯两端时，灯泡上的电压为

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$U_2 = I_2 R_2 = \frac{\varepsilon}{1 + r/R_2} < U_1 = 110(\text{伏}).$$

可见电压小于110伏，故不能正常发光。

练习题：

在图3—30所示的电路中，电压表的内阻是小灯泡的100倍，电源的内阻是小灯泡的1/10，小灯泡的正常工作电压为3伏。当$K$置于1时，电压表的读数为3.1伏，那么当$K$置于2时，小灯泡比正常发光亮还是暗？

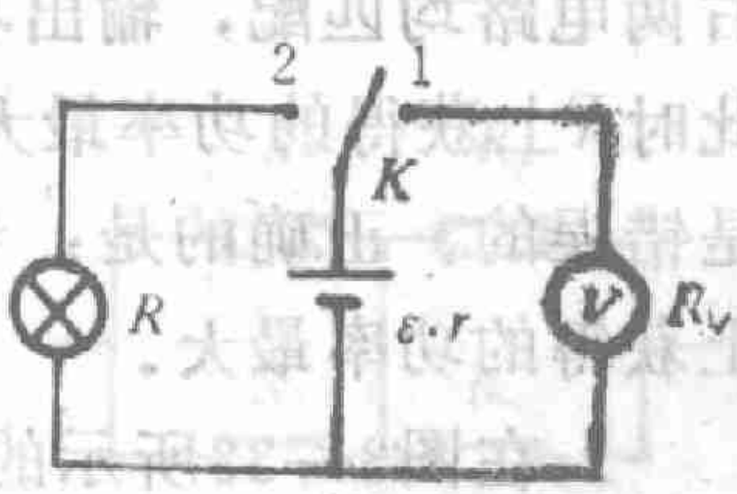


图 3—30

提示：当$K$置于1时，

$$\varepsilon = U_1 + I_1 r = U_1 + \frac{U_1}{R_V} r;$$

当$K$置于2时，

$$\varepsilon = U_2 + I_2 r = U_2 + \frac{\varepsilon}{R + r} r.$$

联立得

$$U_2 = \varepsilon\left(1 - \frac{r}{R+r}\right) = U_1\left(1 + \frac{r}{R_V}\right)\left(1 - \frac{r}{R+r}\right)$$

$$= U_1 \frac{R(R_V + r)}{R_V(R+r)}.$$

由题中条件可得，$U_2 \doteq 2.8$伏。可见，小灯泡比正常发光暗。

3—33。在图3—31所示的电路中，$R_1$等于多少时，它上面获得的功率最大？

错答：当$R_1 + R_2 = r$，即$R_1 = r - R_2$时，电源输给外电路的功率最大，当然此时$R_1$获得的功率最大。



图 3—31

分析：$R_1 + R_2 = r$时，电源给外电路输出的功率最大，但此时，$R_1$上获得的功率并不是最大。可以证明，在$R_1 = R_2 + r$时，

(PDF压缩器 - 未注册版)

$R_1$上获得的功率最大。同理，$R_2=R_1+r$时，$R_2$上获得功率最大。

练习题：

1.在图3—32所示的电路中，何时$R$上获得功率最大？

提示：有人认为："当$R=r$时，左右两电路均匹配，输出功率最大，所以此时$R$上获得的功率最大"。这种回答是错误的。正确的是：当$R=r/2$时，$R$上获得的功率最大。

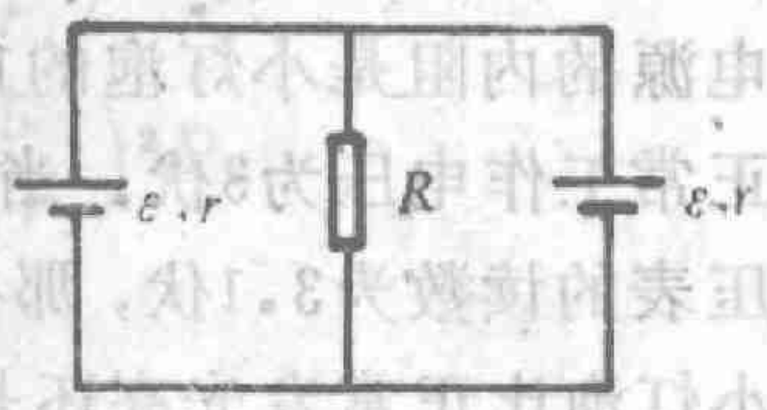


图 3—32

2.在图3—33所示的电路中，$\varepsilon>\varepsilon'$。$R$等于多少时，$aRb$支路上获得的功率最大，即电源$\varepsilon$输出的功率最大？

提示：负载与电源的匹配条件$R=r$仅对负载是纯电阻电路成立，对非纯电阻电路不再成立。

本题的负载是一非纯电阻电路，匹配条件不再成立。即并不是$R+r'=r$，即$R=r-r'$时，电源输出的功率最大。

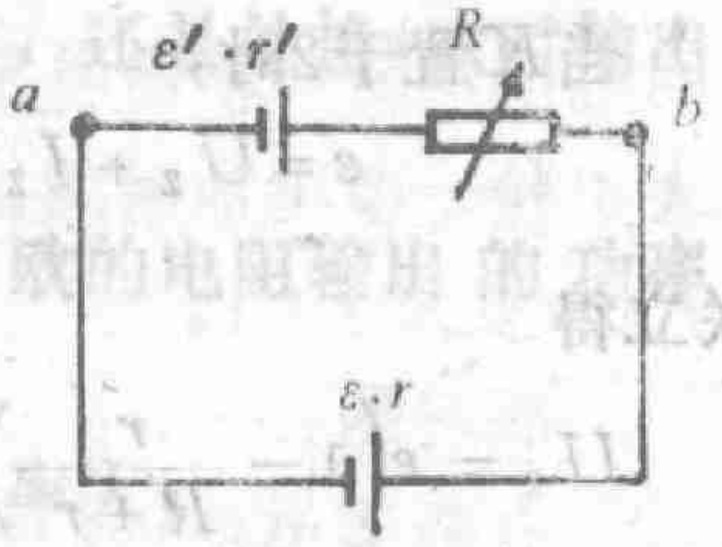


图 3—33

可以证明，$R=r-r'-2r\varepsilon'/\varepsilon$时输出的功率最大。当$\varepsilon'=0$时，就变成了纯电阻电路的结论。

3—34。图3—34给出了几个线路，它们在电路中的作用是否可以等价？

错答：图$(a)$是$R_1$、$R_2$串联，$R_3$、$R_4$串联，然后并联的线路；图$(b)$是$R_1$、$R_3$并联，$R_2$、$R_4$并联，然后再串联；图$(c)$是一复杂电路（电桥电路）。它们三者的结构不同，当然不可等价。

分析：当$R_1R_4=R_2R_3$时，可以等价；当$R_1R_4\neq R_2R_3$时，不可当价。

(PDF压缩器 - 未注册版)

练习题：

在图3—35所示的电路中，将电源与安培表对调后，表上的读数是否相等？（电源内阻不计，安培表内阻忽略不计）。

提示：从表面上看不可能相等，但实际是相等的。这是互易定理的内容之一。

3—35. 对图3—36所示的电路，可否用基尔霍夫定律来求解？

错答：因为基尔霍夫定律适用于一切稳恒电路，所以它可求解一切稳恒电路；当然可求解图3—36所示的电路。

分析：基尔霍夫定律虽然适用于一切稳恒电路，但它只适宜求解线性电路，不宜用于求解非线性电路。图3—36所示的电路中，含有非线性元件二极管，是非线性电路。所以不宜用基尔霍夫定律来求解。详细说明如下：

由基尔霍夫定律可得

$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ I_1 R_1(I_1) - I_2 R_2(I_2) = 0 & \text{（对回路 I）} \\ I_1 R_1(I_1) + Ir = \varepsilon & \text{（对回路 II）} \end{cases}$$

其中$R_1(I_1)$、$R_2(I_2)$分别为二极管$D_1$、$D_2$的电阻，它们是电流的函数①。这样基尔霍

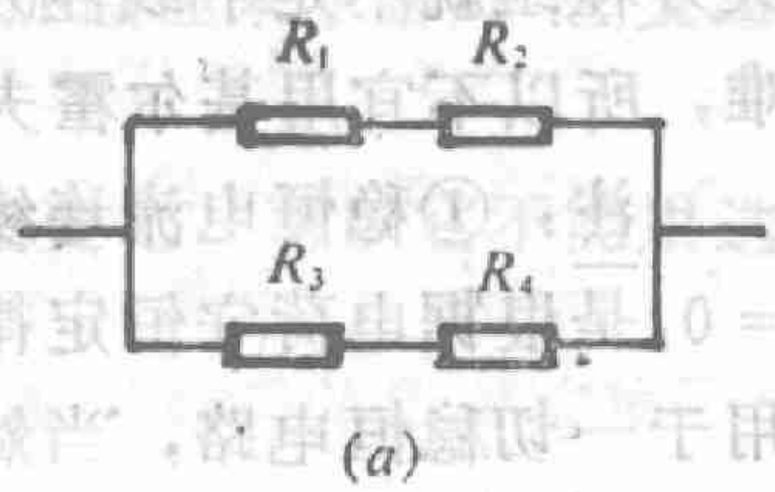



图 3—34

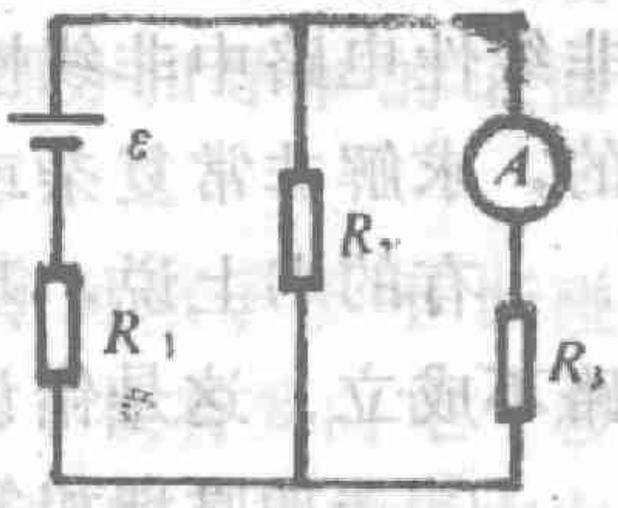



图 3—35

①二极管的伏安特性方程为

$$I = I_S(e^{U/U_T} - 1)$$

〔见应巧琴等编《模拟电子技术基础》$P_{13}$(1985)〕，将此式变形可得

$$U = U_T \ln(I/I_S + 1),$$

则二极管的直流电阻为

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U_T}{I}\ln(I/I_S + 1)$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

夫方程组就不是个线性方程组。求解非常困难，所以不宜用基尔霍夫定律来求。

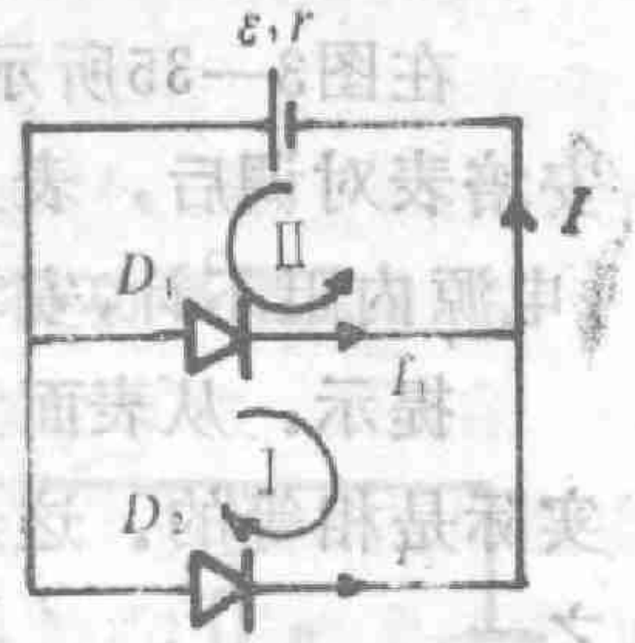


图 3—36

注：①稳恒电流连续性方程$\oint_s \vec{J}\cdot d\vec{S}=0$，是根据电荷守恒定律得到的，所以它适用于一切稳恒电路，当然也适用于非线性电路。

环路定律$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$是根据库仑定律得到的，它也适用于一切稳恒电路，当然也适用于非线性电路。

②基尔霍夫第一定律——节点电流定律，是建立在$\oint_s \vec{J}\cdot d\vec{S}=0$的理论基础上的，所以它也适用于一切稳恒电路，包括非线性电路。基尔霍夫第二定律——回路电压定律是建立在$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$的基础上的，所以它也适用于一切稳恒电路，包括非线性电路。

由此可见，基尔霍夫定律对一切稳恒电路均成立，或者说，方程组

$$\begin{cases}\Sigma(\pm I)=0,\\ \Sigma U=\Sigma(\pm\varepsilon)+\Sigma(\pm IR)=0.\end{cases}$$

对一切稳恒电路均成立。但它只适宜求解线性电路，主要原因是非线性电路中非线性元件的电阻随电流变化。方程组不再是线性的，求解非常复杂或非常困难。

有的书上说，基尔霍夫定律只对线性电路成立，对非线性电路不成立。这是错误的。

③迭加原理和等效电源定理是利用基尔霍夫定律，并假设电路是线性的基础上得出的。所以迭加原理对非线性电路不成立，等效电源定理对有源二端网格中含有非线性元件时不成立。



图 3—37

练习题：

(PDF压缩器 - 未注册版)

对图3—37所示的电路中，可否用迭加原理来求解灯泡支路上的电流？

提示：因为灯泡的阻值随通过的电流变化，所以它不能用迭加原理来求。

## 二　错误的推论

3—36．因为$\vec{E}$线是非闭合曲线，则由$\vec{J}=\gamma\vec{E}$可知$\vec{J}$线也是非闭合曲线。

分析：$\vec{J}=\gamma\vec{E}$只适用于电源外部，所以此结论只适于电源外部。考虑到电源内部$\vec{J}=\gamma(\vec{E}+\vec{K})$，则可得$\vec{J}$线是闭合曲线。

3—37．对稳恒电场$\oint_s \vec{J}\cdot d\vec{S}=0$，在电源外部$\vec{J}=\gamma\vec{E}$，所以在电源外部有$\oint_s \gamma\vec{E}\cdot d\vec{S}=\gamma\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}=0$，即$\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}=q/\varepsilon_0=0$，可见，在电源外部不存在产生稳恒电场的电荷。那么产生稳恒电场的电荷只能分布于电源内部。

分析：只有$\gamma=$常数时，它才能从积分号中提出，才有$\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}=0$，否则没有$\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}=0$。由此可见，产生稳恒电场的电荷位于$\gamma\neq$常数的地方，即导体的非均匀部分和导体的表面或分界面。

3—38．当导体中有电流通过时，自由电子对原子核不断碰撞表现为一作用力。因此，导体在通电时，原子核将要向电子移动的方向移动。则以原子核为骨架的导体将要向电子移动的方向——电流的反向移动。

分析：导体通电时，导体中原子核不仅受电子的碰撞作用力，还要受稳恒电场的作用力，大量电子对原子核碰撞的平均作用力正好与稳恒电场对它的作用力等大反向，所以原子核受到的合作用力为0，当然原子核和以原子核为骨架的导体也不会因通

(PDF压缩器 - 未注册版)

电而开始运动。

3—39。因为电流强度和电动势都是既有大小又有方向的量，所以它们都是矢量。

分析：一个矢量必须遵守矢量的运算法则。由于这两个量都不遵守矢量的运算法则，所以它并不是矢量，而是标量。它们的方向是为了研究问题方便而规定的，这个方向并不具有矢量方向的含义。

3—40。电动势是电源把单位正电荷从负极经电源内部搬到正极非静电力所作的功。当电源断路时，电源不搬动电荷，对电荷作功为0，所以电源断路时，电动势为0。

分析：电源电动势是对电源作功本领的量度，在数值上等于电源把单位正电荷从负极经电源内部搬到正极，非静电力所作的功。不管电源通断，电源中非静电力所具有的作功本领是一样的，只不过在电源接通时，才表现出来而已。因此不管电源通断，电动势的值都相同。

(PDF压缩器 - 未注册版)

# 第四章 稳恒磁场

## 一 错误的解法

4—1. 如图4—1所示，$A_1A_2$是闭合电路中的一段直导线，长为$a$，上面通过稳恒电流$I$，试求这段直导线产生的磁感应强度。

错解一：由毕奥—萨伐尔定律可知，直导线产生的磁场具有轴对称性。因此在图4—1所示的环路$L$上每一点的$\vec{B}$大小相等，方向为环路的切向，且与电流$I$满足右手螺旋关系。则由安培环路定理可得

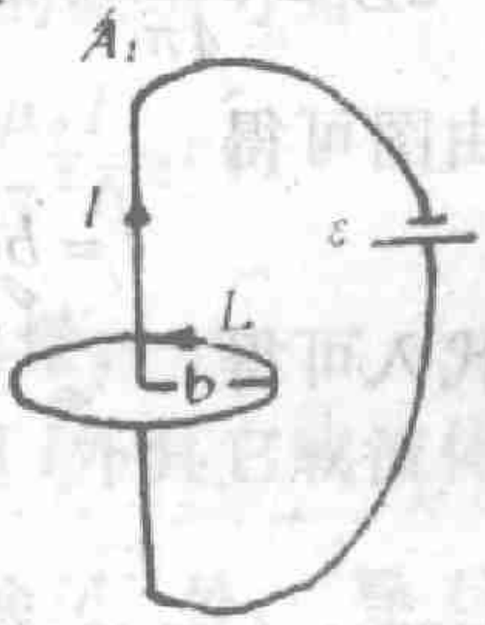


图 4—1

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\cdot 2\pi b = \mu_0 I,$$

所以
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}.$$

考虑到方向后为

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}\vec{\theta}_0.$$

其中$\vec{\theta}_0$是柱坐标系中$\theta$坐标增加方向的单位矢量，也就是图4—1中环路切向的单位矢量。

分析：安培环路定理$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$中，$I$是稳恒电流，$\vec{B}$是空间所有稳恒电流产生的磁场，而不能是部分电流产生的磁场。因此，安培环路定理只适用于通过稳恒电流的闭合电路中全部电流产生的场，对非稳恒电流①和闭合电路中部分稳恒电流产生的场均不适用。但是只要电路中是稳恒电流，不论是电路中的全

①对于非稳恒电流产生的总磁场、沿闭合路经的环量满足全电流定律。

(PDF压缩器 - 未注册版)

部电流产生的场，还是部分电流产生的场都遵守毕奥——萨伐尔定律。

上面的导线$A_1A_2$是闭合电路中的部分导线，所以它产生的场不满足安培环路定理，当然不可用安培环路定理求它产生的场。但可由毕奥——萨伐尔定律求它产生的场。

错解二：如图4—2所示，将载流直导线$A_1A_2$无限分割，使每一段都可被视为一电流元，由毕奥——萨伐尔定律可得，每一电流元$I\vec{dl}$在$P$点产生的磁感应强度为

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\vec{dl}\times\vec{r}}{r^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}\vec{\theta},$$

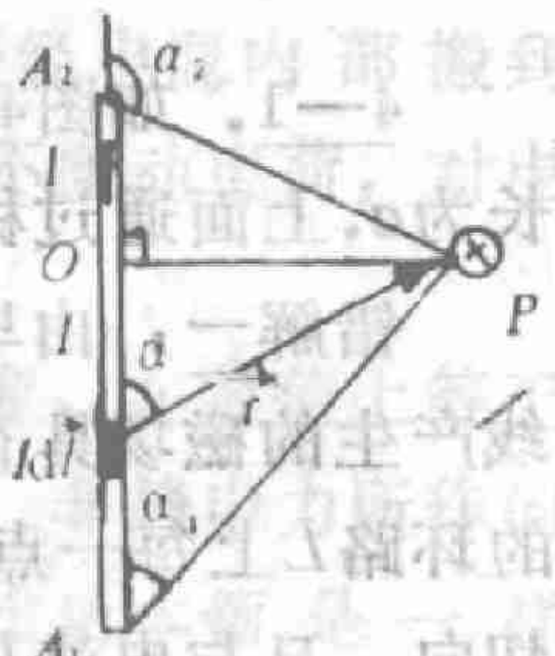


图4—2

由图可得

$$l=b\mathrm{ctg}\alpha,\quad r=b/\sin\alpha.$$

代入可得

$$d\vec{B}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\sin\alpha}{b}d\alpha\vec{\theta}_0,$$

则载流直导线$A_1A_2$在$P$点产生的磁感应强度为

$$\vec{B}=\int_{A_1}^{A_2}d\vec{B}=-\frac{\mu_0 I}{4\pi b}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha d\alpha\vec{\theta}_0$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi b}(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1)\vec{\theta}_0.$$

分析：本解法的错误之处是$l\neq b\mathrm{ctg}\alpha$，而是$l=-b\mathrm{ctg}\alpha$，因为坐标原点取在垂足$o$点，则原点之下的$l<0$，原点之上的$l>0$，所以应为$-l=b\mathrm{ctg}\alpha$，即$l=-b\mathrm{ctg}\alpha$。作此更正之后，可得正确答案：

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi b}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)\vec{\theta}_0.$$

练习题：

一横截面为圆形的螺线管，半径为$R$，长为$L$，单位长度内

(PDF压缩器 - 未注册版)

的匝数为$n$，通过的电流为$I$。试求中心的磁感应强度。

答案：中心的$\vec{B}$大小为

$$B=\mu_0 nI\frac{L}{2\left[R^2+(L/2)^2\right]^{1/2}},$$

方向满足右手螺旋法则。

4—2。有一半径为$R$的无限长圆柱壳均匀地通过电流$I$，试求圆柱壳表面单位面积上受到的磁场力。

错解：圆柱壳外表面的磁感应强度为

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\vec{\theta}_0,$$

由安培公式$\mathrm{d}\vec{f}=I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$可得，单位面积上受到的磁场力为

$$\vec{f}=i\mathrm{d}\vec{l}_0\times\vec{B}=\frac{I}{2\pi R}\vec{k}\times\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\vec{\theta}_0=-\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2R^2}\vec{r}_0。$$

其中$\vec{r}_0$、$\vec{\theta}_0$、$\vec{k}$分别是柱坐标系中的三个单位矢量。

分析：在安培公式$\mathrm{d}\vec{f}=I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$中，$\vec{B}$是除$I\mathrm{d}\vec{l}$外其它载流体在$I\mathrm{d}\vec{l}$所在处产生的磁场。在本题中，$\vec{B}$应该是除$i\mathrm{d}\vec{l}_0$外，导体壳上其它电流在$i\mathrm{d}\vec{l}_0$所在处产生的磁场，而上面所用的$\vec{B}$，却是导体壳外表面的磁场，包含了$i\mathrm{d}\vec{l}_0$本身产生的场，因此所得到的结果是错误的。

可以证明，除$i\mathrm{d}\vec{l}_0$外，其它电流在$i\mathrm{d}\vec{l}_0$所在处产生的磁场为导体壳外表表面磁场的一半，即

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\vec{\theta}_0,$$

所以单位面积上受到的磁场力为

$$\vec{f}=-\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2R^2}\vec{r}_0。$$

练习题：

相距很近、且很大的二导体板相互平行，长宽各为$a$、$b$，沿二板的长度方向均匀地通过等大同向的电流$I$。试求二板之间的

(PDF压缩器 - 未注册版)

安培力（忽略边略效应）。

提示：在公式$\vec{F}=\int I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$中，$\vec{B}$并不是二板之间的总磁场，而是一板在另一板所在处产生的磁场。

答案：二者之间安培力的大小为$F=\mu_0 aI^2/2b$，方向为互相吸引。

4—3．如图4—3所示，在通过电流为$I_1$的无限长载流直导线的同一平面内垂直放置一有限长的通电直导线$CD$（电流为$I_2$），其长度为$b$，近端$C$到无限长直导线的距离为$a$。试求有限长直导线$CD$所受的安培力。

错解：无限长载流直导线在空间产生的磁场大小为

$$B=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}.$$

由此可见磁场不是均匀的。故应取平均值$\overline{B}$，

$$\overline{B}=\frac{1}{2}(B_C+B_D)=\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}+\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a+b)}\right).$$

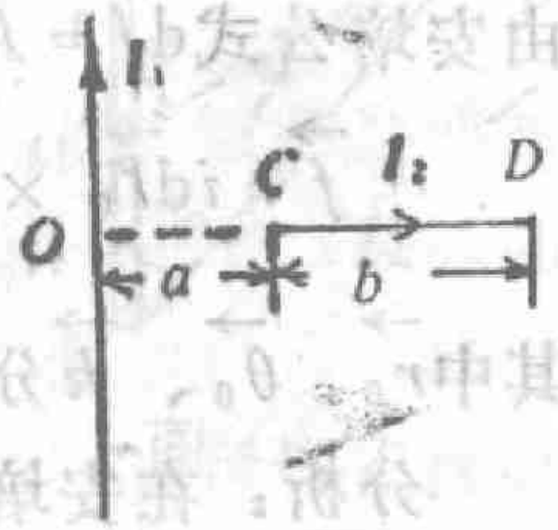


图 4—3

则$CD$直导线所受到的安培力的大小为

$$F=I_2 b\overline{B}=\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{4\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}\right).$$

由右手定则可知，方向向上。

分析：因为无限长载流直导线产生的磁场随$r$不是线性变化，而是随$r^{-1}$变化，所以其平均值$\overline{B}\neq(B_C+B_D)/2$，而是

$$\overline{B}=\frac{1}{b}\int_a^{a+b}B\mathrm{d}r.$$

故上面的解法是错误的。

正确解法：磁感应强度$B$在$CD$上的平均值为

$$\overline{B}=\frac{1}{b}\int_a^{a+b}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi b}\ln\left(1+\frac{b}{a}\right).$$

则由$F=Il\overline{B}$可得$CD$受到的安培力的大小为

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$F = I_2 b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi b} \ln\left(1+\frac{b}{a}\right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(1+\frac{b}{a}\right),$$

方向向上。

或者用力的叠加原理来求安培力：

将$CD$分割成无穷多个电流元，任一电流元受到无限长载流直导线的安培力为

$$\vec{dF} = I_2 \vec{dr} \times \vec{B} = I_2 \vec{dr} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\vec{\theta_0} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} dr\,\vec{k}.$$

其中$\vec{k}$是沿$I_1$方向的单位矢量。

则$CD$受到的安培力为

$$\vec{F} = \int_C^D \vec{dF} = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} dr\,\vec{k}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(1+\frac{b}{a}\right)\vec{k}.$$

练习题：

如图4—4所示，长直导线与正方形线圈在同一平面内，长直导线通过的电流为$I$，正方形的边长为$b$，其近边距直导线为$a$，试求通过正方形线圈所包围平面的磁通量。

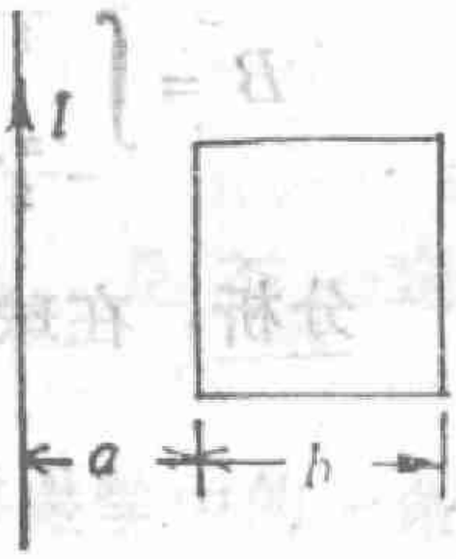



图 4—4

答案：$\Phi = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right) & \text{（取平面的正方向为垂直纸面向里），} \\ -\dfrac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right) & \text{（取平面的正方向为垂直纸面向外）。} \end{cases}$

4—4。半径为$R$的球面上均匀地分布着电荷，面密度为$\sigma$，当这球面以角速度$\omega$绕它的直径旋转时，球心的磁感应强度$B$为多少？

错解：带电球绕它的直径旋转时，形成一球面电流。球面上任意一点$(x,y)$的面电流密度为

$$i = \frac{\sigma\omega y dx}{dx} = \sigma\omega y.$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

现将球面电流分割成无穷多个与转轴垂直的圆电流，则在$x$—$x+\mathrm{d}x$段对应的圆电流在球心产生的磁感应强度为

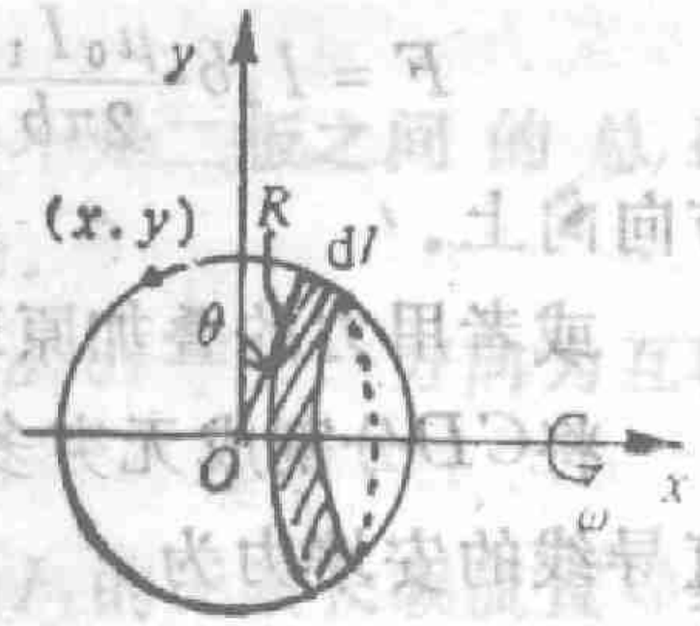



图 4—5

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{2}\frac{y^2\mathrm{d}I}{(y^2+x^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0 y^2 i\mathrm{d}x}{2(y^2+x^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\mu_0\omega\sigma}{2}\frac{y^3\mathrm{d}x}{(y^2+x^2)^{3/2}},$$

则所有圆电流，即球面电流在球心产生的磁感应强度为

$$B=\int_{球面}\mathrm{d}B=\int_{-R}^{R}\frac{\mu_0\omega\sigma}{2}\frac{y^3\mathrm{d}x}{(y^2+x^2)^{3/2}}.$$

令$x=R\sin\theta$，$y=R\cos\theta$，则

$$B=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mu_0\omega\sigma}{2}\frac{R^4\cos^4\theta\mathrm{d}\theta}{R^3}=\frac{3}{16}\mu_0\pi\omega\sigma R.$$

分析：在球面上$(x,y)$点的面电流密度为

$$i=\frac{\sigma\omega y\mathrm{d}l}{\mathrm{d}l}=\sigma\omega y\neq\frac{\sigma\omega y\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}.$$

在$x$—$x+\mathrm{d}x$段对应的圆电流为$\mathrm{d}I=i\mathrm{d}l=iR\mathrm{d}\theta\neq i\mathrm{d}x$，作上面纠正后

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{2}\frac{y^2\mathrm{d}I}{(y^2+x^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0}{2}\frac{y^2iR\mathrm{d}\theta}{(y^2+x^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\mu_0\omega\sigma R}{2}\frac{y^3\mathrm{d}\theta}{(y^2+x^2)^{3/2}}.$$

考虑到$x=R\sin\theta$，$y=R\cos\theta$，有

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{2}\omega\sigma R\cos^3\theta\mathrm{d}\theta,$$

则球心的磁感应强度为

$$B=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mu_0\omega\sigma R}{2}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}\mu_0\omega\sigma R.$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

练习题：

球形线圈是表面绝缘的细导线在半径为$R$的球面上密绕而成，线圈的中心都在同一直径上，沿这直径单位长度的匝数为$n$，并且各处的$n$相同。试求球心的磁感应强度。

提示：将球面无限分割。则在$x$—$x+\mathrm{d}x$段对应的电流环在球心产生的场为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{2}\frac{y^2\mathrm{d}I}{(y^2+x^2)^{3/2}}.$$

注意：$\mathrm{d}I=nI\mathrm{d}x\neq nI\mathrm{d}l$。

答案：$B=\frac{2}{3}\mu_0 nI$。

## 二 错误的回答

4—5。现有两个磁铁。将$NN$或者$SS$相对时，是否一定相斥？

错答：同性磁极相斥，异性磁极相吸，这是静磁学中的一条基本规律，当然将它俩的$NN$或者$SS$相对时一定相斥。

分析：不一定。例如，$A$、$B$两磁铁，$A$的磁性较强，$B$的磁性较弱，且矫顽力较小，将它俩的同性磁极靠近时，$B$磁铁在$A$磁铁的磁场作用下，引起了磁极反转①。结果靠近$A$的那端就变成了与$A$磁铁磁性相反的磁极，这样两磁铁就相互吸引。

但是，将$NS$相对时一定相吸，不会出现相斥的现象。

练习题：

二平行导体，上面通过反向传导电流时，相互作用力是否一定为斥力？

提示：不一定。例如，$A$、$B$二平行导体，$A$导体是任意材料制成的，上面通过的电流很强，$B$导体是铁磁材料（如铁）制

①磁极反转的原理见5—16题。

(PDF压缩器 - 未注册版)

成的，上面通过很弱的反向电流，这种情况下$A$、$B$导体之间就相互吸引。

4—6. 点电荷在空间任一点均产生电场，那么电流元是否在空间任一点均产生磁场？

错答：是！

分析：电流元在空间产生磁场的公式为

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3},$$

由此可见，当$Id\vec{l}$与$\vec{r}$的夹角为0或$\pi$时，$d\vec{B}=0$，即电流元$Id\vec{l}$在它的延长线上各点均不产生磁场。

练习题：

运动电荷在空间每一点均产生电场，那么它是否在空间每一点均产生磁场？

提示：运动电荷① 在空间产生的磁场为

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3},$$

可见它在运动方向的延长线上每一点均不产生磁场。

4—7. 我们知道，处于电场中的电荷一定受到电场的作用。那么处于磁场中的电流元是否一定受到磁场的作用？

错答：磁场这种物质最基本的属性就是对其中的电流产生磁作用，当然对其中的电流元一定有磁作用。

分析：磁场对其中电流元的作用力为$d\vec{f}=Id\vec{l}\times\vec{B}$。由此可见，当电流元方向与磁场方向平行时，磁场对电流元就无磁作用。但在其它情况下一定有磁作用。

顺便说一句，磁场对其中的运动电荷也不一定有磁作用力——洛仑磁力，这可由公式$\vec{f}=q\vec{v}\times\vec{B}$来理解。

①在本章中讨论的运动电荷均指低速运动的电荷，即$v\ll c$。

(PDF压缩器 - 未注册版)

练习题：

用试探电流元检验空间是否存在磁场时，如果把试探电流元放在空间某处，它一动也不动，这一点是否一定无磁场存在？

提示：不一定。当试探电流元的方向与磁场方向平行时，电流元不受力，它就不动，但这一点存在磁场。

同理：用试探线圈检验空间有无磁场存在时，如果把试探线圈放在空间某处，线圈一动也不动，也不能说明该点一定无磁场。

4—8。一磁铁在空间产生的磁场是否与它旁边放置的电流元有关？

错答：磁铁在空间产生的磁场由本身的磁性决定，与外界无关，当然与它旁边放置的电流元无关。

分析：电流元产生的磁场要改变磁铁内部分子电流的分布，从而改变磁铁产生的场。可见磁铁在空间产生的场与它旁边放置的电流元有关。

由于电流元的大小和方向不同，它在空间产生的场不同，影响磁铁内部的分子电流分布的情况不同，所以电流元的大小和方位不同，磁铁产生的场不同，即磁铁产生的磁场与电流元的大小和方位均有关。

不过当电流元$I\mathrm{d}\vec{l}\longrightarrow 0$时，即电流元为试探电流元时，由于它产生的场很微弱，不会改变原来的场，所以原场的分布与试探电流元无关。正因此，我们用试探电流元来检验磁场。

在此顺便要说明几点：

①磁铁的磁场与环境有关，即与周围物体有关：不论周围物体是磁体，还是非磁体；不论是铁磁材料，还是非铁磁材料都将影响磁铁产生的磁场（非磁性材料对磁铁产生的场影响较小）。原因如下，当周围物体是磁体时，它产生的磁场将改变磁铁内部分子电流的分布，从而改变磁铁的磁场；当周围物体是非磁体时，

(PDF压缩器 - 未注册版)

磁铁产生的磁场使非磁体磁化，变成了磁体，这个磁体又反过来影响磁铁的磁场。

由此不难看出，二磁铁共存时在空间某一点产生的磁场不等于它们单独存在时在同一点各自产生的磁场之矢量和；二磁铁对第三者的作用力不等于它两单独存在时各自对第三者的作用力之矢量和。

②磁铁的磁场与本身的温度有关，温度越高磁性越差。因为温度不同，磁铁内部分子电流排列的有序化程度不同，温度越高，排列的越乱，所以它的磁性越差。

③猛烈地撞击磁铁会使磁铁的磁性减弱。因为撞击会减弱磁铁内部的分子电流排列的有序化程度。

练习题：

二平行导体，七面通过同向电流和反向电流时（两种情况下电流大小相同），二导体之间的互作用力的大小是否相等？

提示：任何物体在外场中都要被磁化（不过有的被磁化的强，有的弱），因此，二载流导体一个在另一个磁场中要被磁化，由于两次通过的电流方向不同，产生的磁场不同，被磁化的方向不同，这样二导体各自产生的磁场（传导电流和磁化电流共同产生的场）不同，则二者之间的互作用力的大小不同。

由此可知，载流导体产生的磁场① 与环境有关，不过当载流导体的材料是非铁磁材料的时，环境对它的影响可忽略不计。

4—9。在静电场中，电力线是非闭合曲线，这是静电场中的环路定理$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$所要求的。在稳恒磁场中，磁力线（磁感应线）是闭合曲线，这是稳恒磁场中的哪个定理所要求的？

错答：与静电场中一样，是稳恒磁场中的环路定理$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I$所要求的。

①指载流导体本身产生的磁场，并非空间的磁场。当载流导体周围存在物体时，本身产生的场不等于空间的场（见磁介质一章）

(PDF压缩器 - 未注册版)

分析：电力线的两条基本性质是：*a*．电力线是非闭合曲线；*b*．电力线起于正电荷，终于负电荷，或延伸到无穷远处。第一条是由环路定理所要求；第二条是由高斯定理所要求的。

磁力线也有相对应的两条基本性质：*a*．磁力线是无头无尾的闭合曲线；*b*．磁力线总是与电流互相套合，二者之间遵守右手法则。第一条是由高斯定理所要求，第二条是由环路定理所要求，与静电学中正好相反。

练习题：

在静电场中，若空间某区域内无静电荷，且在该区域内电力线方向处处平行，则在该区域内的电场必为均匀场。在稳恒磁场中，若空间某区域内无电流，且在该区域内磁力线方向处处平行，那么该区域内的磁场是否必为均匀场？

提示：由安培环路定理可以证明，该区域内的磁场必为均匀场。

4—10．在安培环路定理$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I$中，$\vec{B}$一定是空间所有稳恒电流产生的磁场，不能是部分电流产生的磁场，否则定理不成立，那么在高斯定理$\oint_s \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$中，$\vec{B}$是否也一定要是全部电流产生的磁场，不能是部分电流产生的磁场？

错答：当然是。

分析：在高斯定理$\oint_s \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$中，$\vec{B}$可以是部分电流产生的磁场①。这说明：不论是闭合电路中的全部电流产生的磁场的磁力线，还是部分电流产生的磁场的磁力线均是无头无尾的曲线。

练习题：

1．在图4—6中，导体2产生的磁场是否满足安培环路定理？

提示：只要是载有稳恒电流的闭合电路，它产生的场一定满

① 见郭硕鸿编《电动力学》$P_{16}$(1979)的证明。

(PDF压缩器 - 未注册版)

足安培环路定理。因此，图4—6中导体2产生的场满足安培环路定理（当然导线1产生的场也满足安培环路定理）。但是导线2的左右两半部分产生的场不满足安培环路定理。

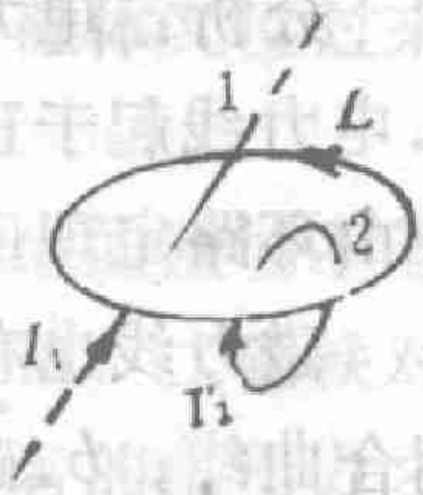


图 4—6

2.磁铁产生的磁场是否满足安培环路定理？

提示：满足。但要知道在磁铁定域的空间，无传导电流，因此，在$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I$中，$I$是稳恒的磁化电流。

4—11。图4—7所示的回路中通过稳恒电流$I$，它在空间产生的磁场可否由安培环路定理来求？

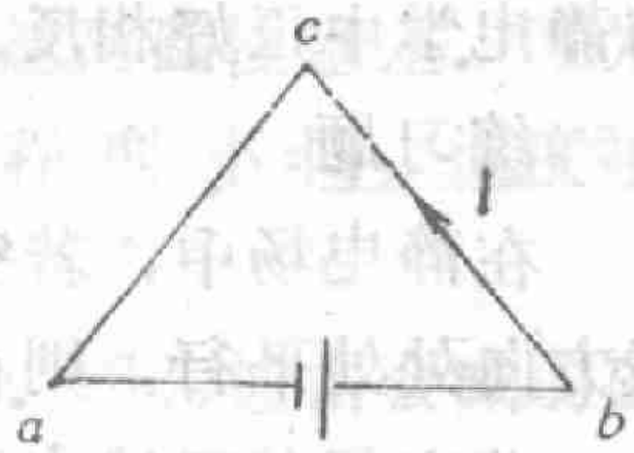


图 4—7

错答：因为图4—7所示的电路是载有稳恒电流的闭合电路，所以它产生的场满足安培环路定理，当然可由安培环路定理来求它产生的磁场。

分析：并不是满足安培环路定理的电路产生的磁场均可由安培环路定理来求。只有在下列情况下才可由安培环路定理求空间的磁场：在任意环路$L$上$\vec{B}$的大小相等（此时$\vec{B}$可以从积分$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}$提出），且能求出以环路$L$为边界的某一曲面$S$上通过的电流$I=\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$。

练习题：

有一长直螺线管，粗细不均，上面通过稳恒电流，问是否可由安培环路定理求出它产生的磁场？

提示：不可。

4—12。在蹄形磁铁的$N$极上取一高斯面，通过这个高斯面的磁通量是正、负，还是零？

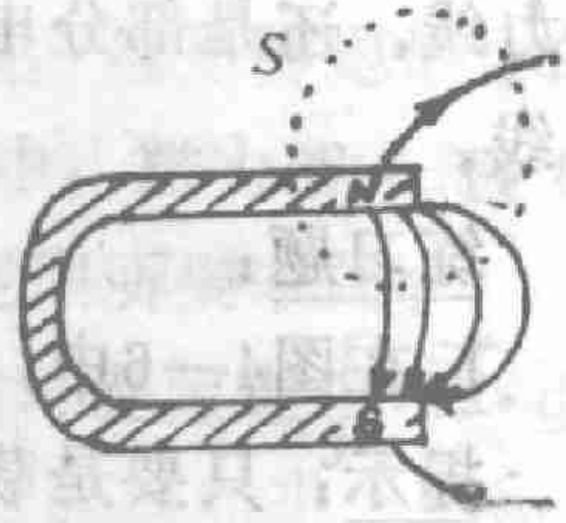


图 4—8

错答：蹄形磁铁的磁力线如图4—8所示，由此可见，通过这个高斯面的磁通量大

(PDF压缩器 - 未注册版)

于零，即为正。

分析：因图中画出的仅是磁铁外部的磁力线，并不是全部的磁力线，所以由此图只能得出错误结论。

由高斯定理可知，通过它的磁通量为零。

练习题：

圆形载流线圈轴线上的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2+x^2)^{3/2}},$$

$R$为线圈的半径，$x$是场点到线圈中心的距离。现沿圆线圈的 轴线取一条无限长的路径，那么沿这条路径的积分$\int_{-\infty}^{\infty}\vec{B}\cdot d\vec{l}$等 于 多少？

提示：$\int_{-\infty}^{\infty}\vec{B}\cdot d\vec{l}=\int_{-\infty}^{\infty}B dx=\mu_0 I$，而不是零。

4—13．①如果环路上$\vec{B}$处处为零，环路内是否一定没 有 电流穿过？

②如果环路上$\vec{B}$处处不为零，环路内是否一定有电流穿过？

错答：由安培环路定理$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I$可知：

①如果环路上$\vec{B}$处处为零，$I$必为零，环路内一定没有 电 流穿过；

②如果环路上$\vec{B}$处处不为零，$I$必不为零，环路内一 定有电流穿过。

分析：①如果环路上$\vec{B}$处处为零，$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I$一 定 为零，这只能说明穿过环路的电流的代数和为0，但是不能 说 明在这个环路中没有穿过电流。例如，在同轴电缆外面作一包围它的环路，在这一环路上$\vec{B}$处处为0，$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=0$，但环路内通 过 了等大反向的两个电流。

②环路定理$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I$中，$\vec{B}$是空间所有的 电 流 产 生的

(PDF压缩器 - 未注册版)

场，并不只是穿过环路的电流产生的场。所以环路内没有穿过电流时，环路上也可能存在处处不为零的场。反过来说，环路上$\vec{B}$处处不为零时，环路内也可能没有穿过电流。例如，在通电导线的旁边取一环路就属这种情况。

练习题：

在一条形磁铁的旁边取一高斯面，当磁铁位置变化时，通过高斯面的磁通量是否变化？

提示：磁铁的位置变化时，高斯面上的$\vec{B}$变化，但磁通量不变，永远为零。

4—14. 如图4—9所示，无限长螺线管上的导线与圆柱面母线方向成一夹角为$\theta$，导线的绕线密度为$n$。当导线上通过的电流为$I$时，螺线管内的磁感应强度为多少？

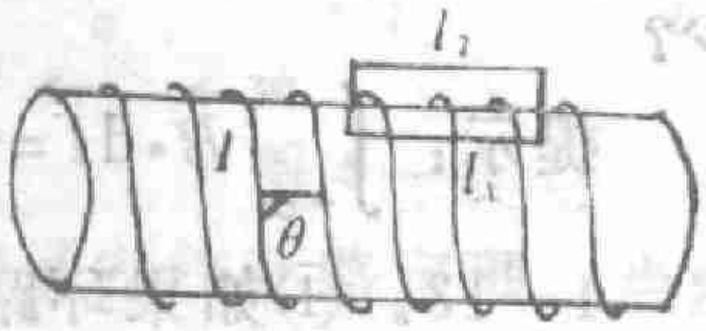



图 4—9

错答：将螺线管导线上的电流分解成平行轴线的电流$I_{/\!/}=I\cos\theta$和垂直轴线的电流$I_{\perp}=I\sin\theta$。螺线管内的场等于$I_{/\!/}$和$I_{\perp}$各自在管内产生场的矢量和。由于$I_{/\!/}$在管内产生的场为0，$I_{\perp}$在管内产生的场为$\mu_0 nI_{\perp}$，所以管内的场为$B_{内}=\mu_0 nI_{\perp}=\mu_0 nI\sin\theta$。

分析：螺线管内的场等于$I_{/\!/}$和$I_{\perp}$产生场的矢量和，$I_{/\!/}$在管内产生的场为零，$I_{\perp}$在管内产生的场的方向沿轴向（但大小不等于$\mu_0 nI_{\perp}$），因此，螺线管内的磁场沿轴向。

取图4—9中所示的环路，由安培环路定理可知，

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=B_{内}l_1{}^{①}=\mu_0 l_1 nI,$$

所以

$$B_{内}=\mu_0 nI.$$

可见螺线管内部的磁场与螺线管上导线的绕线倾角无关。

---

①$l_2$上也存在磁场，但方向与$l_2$垂直，所以$\oint_{L_2}\vec{B}\cdot d\vec{l}=0$.

(PDF压缩器 - 未注册版)

练习题：

1.如图4—10所示，一半径为$R$的无穷长直圆筒上有一层均匀分布的面电流，电流都环绕着轴线流动，并与轴线方向成一角度$\theta$，即电流在筒面上沿螺旋线向前流动，其面电流密度为$\vec{i}$，试给出筒内外的磁感应强度的公式。

提示：圆筒上的电流可分平行母线的电流和垂直母线的电流。二分电流面密度各为$i_{/\!/}=i\cos\theta$，$i_{\perp}=i\sin\theta$。圆筒上的电流在空间产生的磁场当然是这两个分电流产生的磁场之矢量和。



图 4—10

由于平行母线的电流在筒内产生的磁场为零，在筒外产生的磁场为$\frac{\mu_0 R i\cos\theta}{r}\vec{\theta}_0$；垂直母线的电流在筒内产生的磁场为$\mu_0 i\sin\theta\vec{k}$，在筒外产生的磁场为零。所以在筒内的磁场为$\vec{B}=\mu_0 i\sin\theta\vec{k}$，在筒外的磁场为$\vec{B}=\frac{\mu_0 R i\cos\theta}{r}\vec{\theta}_0$。

注：从表面上看，图4—9和图4—10所示的问题完全一样。但实际上不同，关键之处是：图4—9中导线的绕线密度$n$是沿轴线方向单位长度上的导线匝数，而图4—10中电流面密度是垂直电流方向，单位长度上的电流强度。因此图4—9中，$n$匝导线内通过的电流总和并不等价于图4—10中的电流面密度。因此，二者有区别，它们在空间产生的场各不相同，前者与$\theta$无关(不论是管内还是管外)，后者与$\theta$有关。

2.试给出图4—11所示的螺绕环内部磁感应强度的公式。

提示：螺线环内部的磁感应强度为$B=\mu_0 NI/2\pi r$，其中$N$是线圈的总匝数，$r$是螺线环中场点到o点的距离。

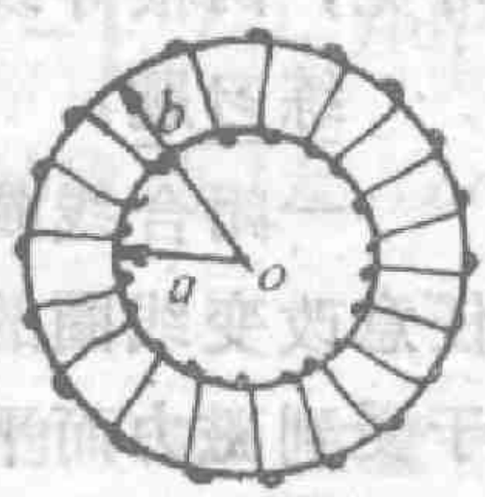


图 4—11

当$a\gg(b-a)$时，$r\doteq a\doteq b$，$B=\mu_0 nI$。可见

$B=\mu_0 nI$只适用于$a\gg(b-a)$的情况。

4—15。如图4—12所示，在均匀磁场中有二导线：直导线$amb$和曲导线$anb$。上面通过的电流大小相同，且都是从$a$流向$b$。问两根导线受到的安培力是否相等？



图 4—12

错答：$amb$和$anb$两根导线受到的安培力分别为

$$\vec{F}_{amb}=\int_{amb} I\vec{\mathrm{d}l}\times\vec{B},\quad \vec{F}_{anb}=\int_{anb} I\vec{\mathrm{d}l}\times\vec{B}.$$

因这两积分中，$\vec{\mathrm{d}l}$的方向和积分路径不同，所以积分结果不等，即两根导线受到的安培力不等。

分析：从表面上看，由于这两积分中$\vec{\mathrm{d}l}$的方向和积分路径不同，积分值不会相同，但实际上它们的积分值是相等的。证明如下：

在$anb$导线上任取一电流元$I\mathrm{d}\vec{l}$，将它分解成平行于$amb$的电流元$I\vec{\mathrm{d}l}_{/\!/}$和垂直于$amb$的电流元$I\vec{\mathrm{d}l}_{\perp}$，则

$$\vec{F}_{anb}=\int_{anb} I\vec{\mathrm{d}l}\times\vec{B}=\int_{anb} I(\vec{\mathrm{d}l}_{/\!/}+\vec{\mathrm{d}l}_{\perp})\times\vec{B}$$

$$=\int_{anb} I\vec{\mathrm{d}l}_{/\!/}\times\vec{B}+\int_{anb} I\vec{\mathrm{d}l}_{\perp}\times\vec{B}.$$

因 $$\int_{anb} I\vec{\mathrm{d}l}_{\perp}\times\vec{B}=0,$$

所以 $$\vec{F}_{anb}=\int_{anb} I\vec{\mathrm{d}l}_{/\!/}\times\vec{B}=\int_{amb} I\vec{\mathrm{d}l}\times\vec{B}=\vec{F}_{amb}.$$

可见，两根导线受到的安培力大小相等，且方向相同。

练习题：

一闭合线圈上面通过稳恒电流，若将它放入均匀磁场中，当任意改变线圈的形状和角度（相对磁场的角度）时，线圈是否由于受到磁力而平动？

提示：闭合载流线圈在均匀磁场中所受到的合力为零，所以

(PDF压缩器 - 未注册版)

它不会平动。

4—16。电荷沿电力线移动时，电场力对它一定做功。那么电流元沿磁力线移动时，磁场力对它是否一定做功？

错答：一定做功。

分析：由$\mathrm{d}\vec{f}=I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$可知，电流元沿磁力线移动时，受到的磁场力$\mathrm{d}\vec{f}$与运动轨迹——磁力线处处垂直，所以磁场力对电流元做的功$A=\int\mathrm{d}A=\int\mathrm{d}\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{l'}=0$。

显然，电流元沿磁力线移动一周，磁场力对它做的功也一定为零。

练习题：

电荷在电场中沿任一闭合路径移动，电场力对它做的功一定为零。那么电流元在磁场中，沿任一闭合路径移动，磁场力对它做的功是否一定为零？

提示：由于磁场是非保守场，因此电流元或载流体在磁场中移动一周，磁场力对它做的功不一定为零。例如，在图4—13中，电流元在非均匀磁场中，沿路径$abcda$移动，磁场力对它作的功为

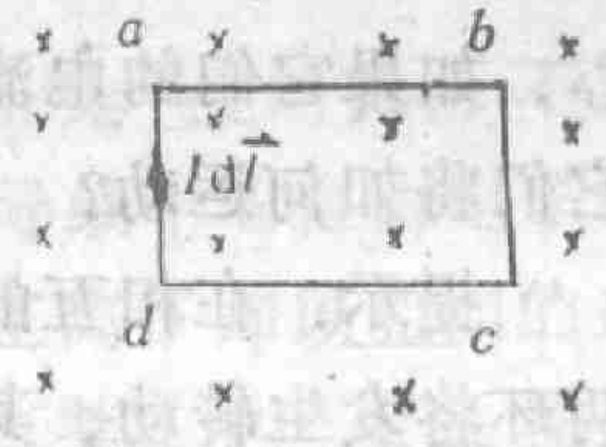


图 4—13

$$A=\oint_{abcda}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l'}=\int_{ab}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l'}+\int_{bc}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l'}+\int_{cd}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l'}+\int_{da}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l'}。$$

由于$\vec{F}=I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$，其方向水平向左，所以$A=-\int_{ab}I\mathrm{d}l\cdot B\mathrm{d}l'+\int_{cd}I\mathrm{d}l\cdot B\mathrm{d}l'=I\,\mathrm{d}l\left[\int_{cd}B\mathrm{d}l'-\int_{ab}B\mathrm{d}l'\right]$。因为$ab$段的$\vec{B}$大，$cd$段的$\vec{B}$小，因此$A\neq0$。

4—17。如图4—14所示，无限长载流直导线的一侧，放置一根有限长可以自由移动的载流直导线$AB$，且它们互相垂直。问

(PDF压缩器 - 未注册版)

导线$AB$将如何运动？

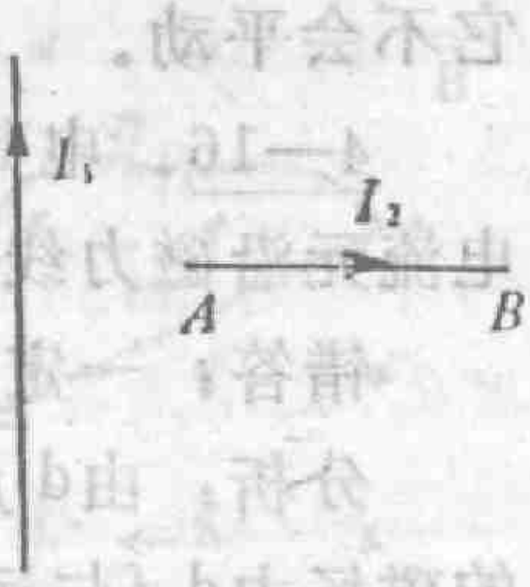


图 4—14

错答：由右手定则可知，$AB$受到一个向上的磁力，所以$AB$导体将向上运动。

分析：由于无限长直导线产生的磁场是非均匀场，随着离无限长直导线的距离增大而减小。所以由$\mathrm{d}\vec{f} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$可知，有限长直导线的$A$端受力大，$B$端受力小。这样$AB$在向上运动的同时，还要旋转。最终状态是$AB$导线离无限长导线很远，且二者电流方向相反。

若图4—14中，$I_1$、$I_2$的方向有一者改变，则最终状态与上相反：$AB$导线靠近无限长直导线，且二者电流方向相同。

练习题：

如图4—15所示，有两个竖直放置的、半径均为$R$的圆环形导线$A$、$B$，$A$环的轴线穿过$B$环的圆心。如果它们的电流方向如图所示，问它们将如何运动？



图 4—15

提示：在相互的磁力作用下，$A$、$B$两环将发生转动。其转动趋势使两环上的电流方向相同，线圈平面相互平行。线圈在转动的同时，还有平动，平动使两环的圆心靠近。因此最终状态是：在两环电流同方向的情况下，紧靠在一起。

4—18．在一磁场中，放入试探线圈以测定磁感应强度的大小，如果该试探线圈放在两个不同的地方，受到的力矩相等，这两点的磁感应强度是否相等？

错答：当然相等。

分析：线圈在磁场中所受到的力矩为$\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B}$。由此可见$\vec{L}$与$\vec{m}$、$\vec{B}$以及二者间的夹角有关，因此只有$\vec{L}$、$\vec{m}$相等，不能确定$\vec{B}$相等。

(PDF压缩器 - 未注册版)

练习题：

在无限长载流直导线的附近有$A$、$B$两点，距直导线同 远。把一个电流元分别放在这两点时，受到的磁力是否一定相等？

提示：磁场对电流元的作用力的 大 小为$\mathrm{d}f = I\mathrm{d}l B\sin\theta$。由此可见，$\mathrm{d}f$不仅与$\vec{B}$，$I\mathrm{d}\vec{l}$的大小有关，还与夹角$\theta$有关。由于电流元在$A$、$B$两点的夹角$\theta$不一定相等，所以$\mathrm{d}f$不一定相等。

4—19。在一长直导线中通过稳恒电流，导线中自由电子的漂移速度为$\vec{u}$。如果有一小磁针以速度$\vec{u}$平行导线移动，小磁针是否偏转？

错答：在以$\vec{u}$运动的$\Sigma$参考系中，导线中的自由电子静止不动，所以通电导线在此参考系中不产生磁场，当然相对于$\Sigma$参考系静止不动的小磁针不受磁场力，小磁针不会偏转，又因$\Sigma$参考系是惯性系，则由伽利略相对性原理可知，在地面参考系中也不会偏转。

分析：在以$\vec{u}$运动的$\Sigma$参考系中，通电导线产生的磁场 不为零，仍等于地面参考系中的磁场，因为虽然导线中的自由电子相对于$\Sigma$参考系静止不动，但是晶格点阵中的正离子却以相同的速度朝自由电子相反的方向运动，因此它在$\Sigma$参考系中产生磁 场。又因为整个导线是中性的，正离子的数目等于自由电子的数目，所以在$\Sigma$参考系中，正离子定向移动形成的电流等于地面参考系中自由电子定向移动形成的电流，则在$\Sigma$参考系中产 生的磁场与地面参考系中产生的磁场相同。

由于在$\Sigma$参考系中，导线产生磁场，小磁针受磁场力，所 以它要偏转，则在地面参考系中也要偏转。

更简单地回答是：由于导线在地面参考系中产生磁场，所以小磁针在地面参考系中受到磁场力，则它要偏转。

练习题：

二电子以相同的速度$\vec{v}$从电 子枪中同时射出后，运动方向会

(PDF压缩器 - 未注册版)

不会偏转？

提示：在以$\vec{v}$运动的参考系中，二电子不受洛仑兹力，但受库仑力。因此在此参考系中的观察者看到：二电子在库仑力作用下将要远离。则在地面参考系中的观察者看到的为：二电子一边前进，一边远离。

有的读者可能认为，“在地面参考系中，二电子均产生磁场，一电子对另一电子的洛仑兹力为吸引力，所以二电子要靠近。”这种看法是错误的，因为二电子除受洛仑兹力（吸引力）外，还要受库仑力（斥力），由于库仑力大于洛仑兹力①，所以二电子不是靠近，而是远离。

4—20．一个电荷放在载流导线的旁边，初速度为零，这个电荷会否开始运动？

错答：不会。因为电荷运动速度为零，不受洛仑兹力，所以它将保持原来的静止状态不动。

分析：在载流导线的周围不仅有磁场，还有电场。在电场作用下，电荷将开始运动（开始运动后，还要受洛仑兹力）。

练习题：

载流导体在所在空间既产生电场，又产生磁场，它们都是形成电流的运动电荷产生的吗？

提示：电场是分布在导体表面和导体不均匀部分的电荷产生的，而磁场是形成电流的运动电荷产生的。虽然每个电荷产生的电场和磁场是随时间变化的非稳恒场，但大量的电荷产生的场却是不随时间变化的稳恒场。

4—21．电荷在均匀磁场中运动时，洛仑兹力对它不做功。在非均匀磁场中运动时，是否也不做功？

错答：电荷在非均匀磁场中运动时，运动轨迹不再是圆，而

---

①见郭硕鸿编《电动力学》$P_{251}$(1979)。

(PDF压缩器 - 未注册版)

是一复杂的曲线，每一点的速率可能不同，则由$A=\frac{1}{2}m\Delta(v^2)$可知，洛仑兹力对它可能做功。

分析：在非均匀磁场中，电荷运动的轨迹虽然很复杂，但洛仑兹力总是垂直于运动方向，所以洛仑兹力对电荷永远不做功（当然电荷在各点的速率相同）。

练习题：

电荷在磁场中的运动轨迹是否可能为抛物线？

提示：只要适当地控制磁场分布和夹角$(\vec{B},\hat{\ }\vec{v_0})$①，电荷在磁场中的运动轨迹可能为抛物线。

同理，如果适当地控制电场分布和夹角$(\vec{E},\hat{\ }\vec{v_0})$，电荷在电场中的运动轨迹可能为圆。

4—22。一电子通过$\vec{B}+\vec{E}$的区域，但未偏转，那么$\vec{B}$，$\vec{E}$的方向可能是怎样的关系？

错答：电子在$\vec{B}+\vec{E}$的区域内受到的力为$\vec{f}=-e(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$。由此得当$\vec{E}=-\vec{v}\times\vec{B}$时，电子不受力，它不偏转。可见，电场和磁场互相垂直。

分析：除$\vec{E}\perp\vec{B}$外，还可能是$\vec{E}\parallel\vec{B}$。在这种情况下，若电子速度沿二场方向，电子也不会偏转。

练习题：

在图4—16中，$K$是电子枪，$A$、$B$是$\vec{B}+\vec{E}$区域内的两个在一条直线上的小孔。要使通过$A$的各种速率的电子都通过$B$，对$\vec{B}$、$\vec{E}$有什么要求？

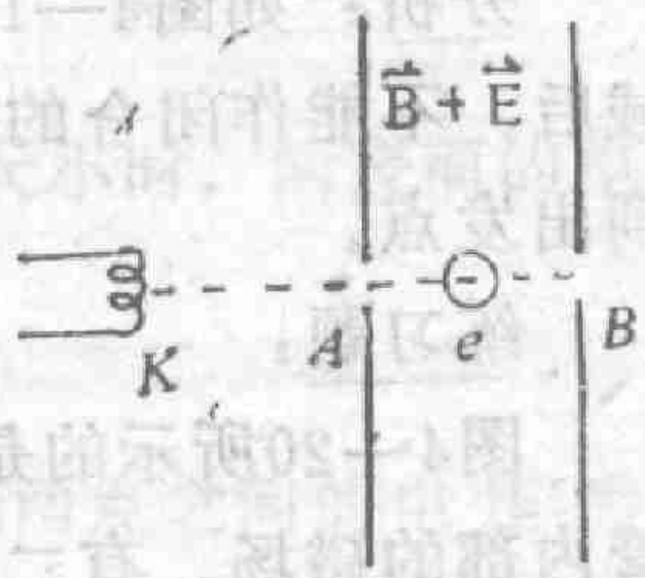


图 4—16

提示：只要保证$\vec{E}\parallel\vec{B}\parallel\vec{v}$即可。

---

①磁场$\vec{B}$与初速度$\vec{v_0}$的夹角。

(PDF压缩器 - 未注册版)

4—23. 如图4—17所示，两个电子由电子枪同时射出，它们的初速度与均匀磁场的方向垂直，速率分别为$v$和$2v$，经磁场旋转一周后哪一个先回到出发点？




图 4—17

错答：当然是速率为$2v$的电子先回到出发点。

分析：运动电荷在均匀磁场中回绕一周的时间为 $T=2\pi m/qB$，由此可见，$T$与运动速率无关，所以同时回到出发点。

练习题：

图4—18所示的是二电子在均匀磁场中运动的轨迹，这两个电子哪一个的回绕周期短？

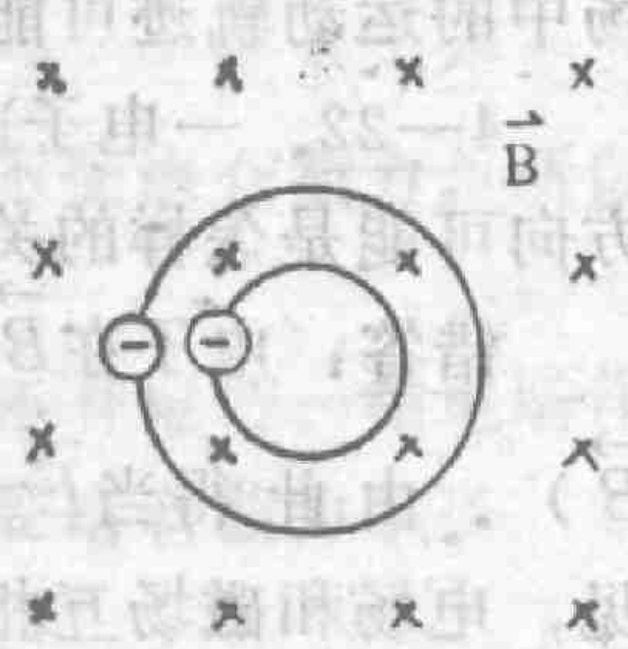



图 4—18

提示：运动电荷在均匀磁场中的回绕周期与$R$无关，所以二者的周期一样。

4—24. 一均匀磁场充满空间某一立方形区域，有一带电粒子从外面垂直磁场方向射入这个立方区域中，粒子能否回到入射点？

错答：带电粒子垂直射入均匀磁场后作圆周运动，当然可回到入射点。

分析：如图4—19所示，粒子射入立方区域后，不能作闭合的圆周围运动，所以不能回到出发点。

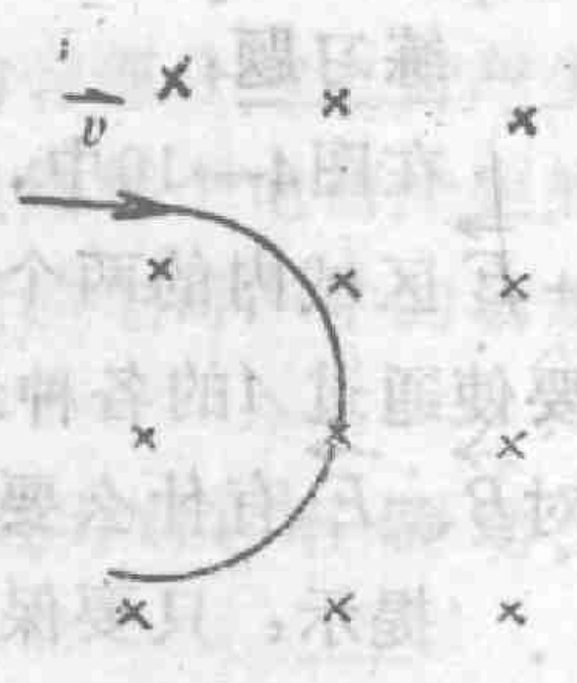



图 4—19

练习题：

图4—20所示的是半径为$R$的无限长螺线管内部的磁场。有二电子在轴线上以$\vec{v}_1$、$\vec{v}_2$同时射入场中，此后，二电子会否相遇？

提示：当$v_2<\dfrac{2\sqrt{3}eBR}{3m}$时，二电子会相遇。

(PDF压缩器 - 未注册版)

4—25. 在存在霍尔效应的导体中，欧姆定律 $\vec{J}=\gamma\vec{E}$ 是否成立？

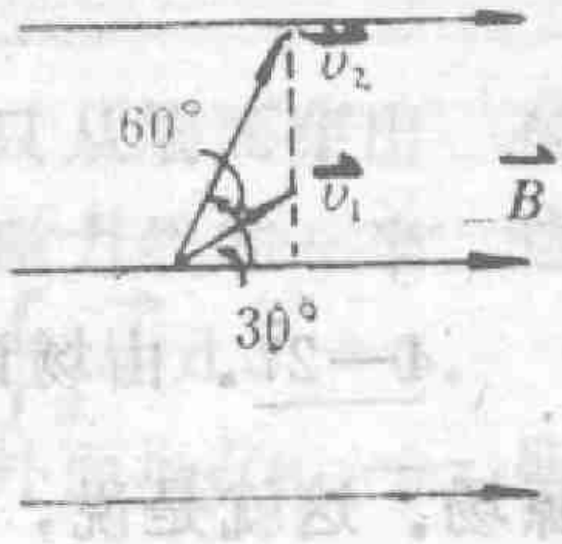



图 4—20

错答：当然成立。

分析：在存在霍尔效应的导体中，存在由洛仑兹力产生的非静电力，所以欧姆定律的形式为 $\vec{J}=\gamma(\vec{E}+\vec{K})$，而不是 $\vec{J}=\gamma\vec{E}$。

练习题：

在导体中形成电流的电荷其正负号不同，霍尔效应不同，即霍尔电压的方向不同，那么导体受到的安培力方向是否相同？

提示：先分析每个载流子的洛仑兹力，再根据安培力是洛仑兹力的宏观表现可知，导体所受的安培力与载流子的正负号无关。

4—26. 在图4—21中，导体上下两面间存在霍尔电压。霍尔电压的大小是否随着通电时间的推移而不断增加？

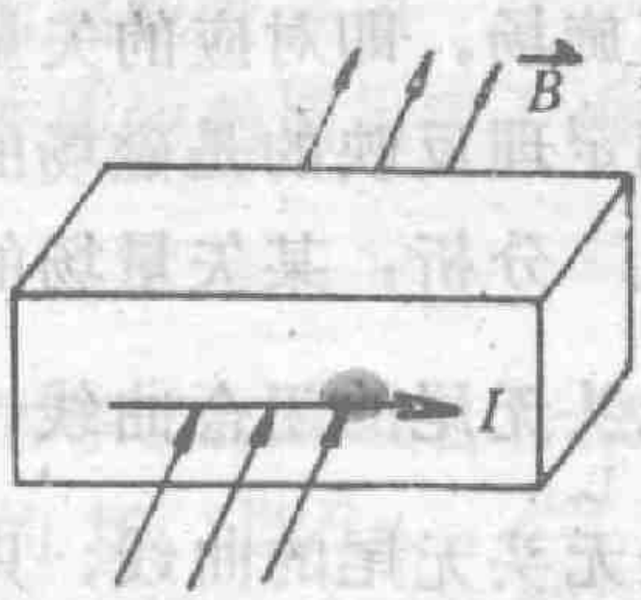



图 4—21

错答：随着通电时间的推移，形成电流的电荷在洛仑兹力的作用下，不断在上下两表面积累，所以其电压不断增加。

分析：随着上下两表面电荷的积累，霍尔电场也不断增大，它对电荷的电场力不断增大。当电场力的大小等于洛仑兹力的大小时，两表面的电荷不再积累，霍尔电压不再增加。

练习题：

在图4—21中，用电压表测得上下表面某两点之间的电压为 $U$，这个电压是否就是霍尔电压？

分析：霍尔电压是上下两面上相对点之间的电压，而不是任意两点之间的电压。

(PDF压缩器 - 未注册版)

## 三 错误的推论

4—27. 由场论知识可知，$\oint_s \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$说明磁场是一无源场。这就是说，磁场是不需要任何“源”产生的一种物质。由此可得，物质可以创生，可以无中生有。

分析：场论中的无“源”是指无“通量源”，并非指物理中的“物质源”。物质是不可能无中生有的，一定要有产生它的源。产生磁场的物质源是运动电荷。

4—28. 由高斯定理$\oint_s \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$可知，磁力线是无头无尾的闭合曲线，由安培环路定理$\oint_L \vec{B}\cdot dl=\mu_0 I$可知，磁场是一种有旋场，即对应的矢量线是有旋涡状的无头无尾的曲线。可见这两定理反映的是磁场的同一性质，说明这两个定理不是独立的。

分析：某矢量场的旋度不等于0，并不是指该场的矢量线是无头无尾的闭合曲线，所以，$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I\neq 0$并不说明磁力线是无头无尾的曲线，只有$\oint_s \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$才说明磁力线是无头无尾的曲线。

高斯定理$\oint_s \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$，说明磁场是无源场，磁力线是无头无尾的曲线。安培环路定理$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I$说明磁场是有旋场，磁力线与产生磁场的电流之间是相互套合的。这是磁场的两个性质，由一个推不出另一个。因此，高斯定理和安培环路定理是两个独立的定理。

4—29. 半无限长螺线管端面上的磁场是中间的一半。现在我们取一高斯面包围其端面，这样从螺线管中穿入的磁通量不等于穿出的磁通量。可见通过该高斯面的磁通量不为0，即

(PDF压缩器 - 未注册版)

$\oint_s \vec{B}\cdot d\vec{S} \neq 0$.

分析：对于半无限长螺线管，磁力线并非只从端面穿出，在管壁侧面也有穿出，且穿出的量正好等于中间磁力线的一半．这样，穿入和穿出高斯面的磁通量恰好相等，即$\oint_s \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$．

4—30．载流长螺线管内部场$B_{内}=\mu_0 nI$，外面场$B_{外}=0$，所以在载流螺线管外面绕一周（见图4—22）的环路积分$\oint_L \vec{B}_{外}\cdot d\vec{l}=0$．但从安培环路定理来看，环路$L$中有电流$I$穿过，环路积分应该为$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I$，可见前后矛盾．

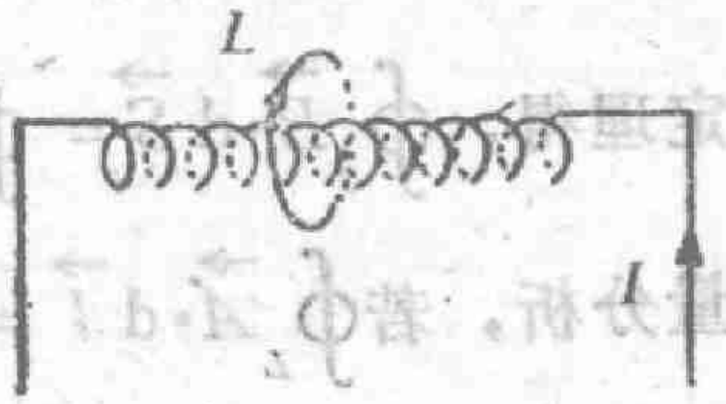


图 4—22

分析：对于长螺线管，我们导出管内外的场各为$B_{内}=\mu_0 nI$，$B_{外}=0$．实际上，已用了理想化模型：认为螺线管是由一个一个圆电流环迭加而成的．对于这样的模型，管外的磁场为零，由此可得$\oint_L \vec{B}_{外}\cdot d\vec{l}=0$．

对于实际螺线管，$\vec{B}_{外}$不等于零，而是等于在螺线管管壁上流过大小为$I$、方向为轴向的电流时所产生的场，即$B_{外}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$，因此$\oint_L \vec{B}_{外}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I$．与安培环路定理得到的结论不矛盾．

4—31．在一个圆形电流旁边取一圆形的闭合曲线，使这两个圆同轴，且相互平行．把安培环路定理应用到这个闭合曲线上，由于对称性，圆电流在此闭合曲线上各点产生的磁场处处相等，又因为闭合曲线内没有电流穿过，因此有下列结果：

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\oint_L B\,dl=B\oint_L dl=\mu_0 I=0,$$

即$B=0$．由此可见，圆电流在空间不产生磁场．

分析：在$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}$变成$\oint_L B\,dl$时，认为$\vec{B}$与$d\vec{l}$的夹角处

(PDF压缩器 - 未注册版)

处为零，这显然是错误的。事实上，$\vec{B}\perp \mathrm{d}\vec{l}$，即$\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$，所以得出的结论只能说明$\vec{B}$沿所选的积分回路上任意点的切线方向上的投影为零，并不能说明在任意一点的$\vec{B}$为零。

4—32。因为$\nabla\cdot\vec{B}=0$，所以必定有矢量$\vec{A}$存在，使得$\vec{B}$可写成矢量$\vec{A}$的旋度，即$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$。又由$\oint_s \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$和斯托克斯定理得，$\oint_s \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\oint_s \nabla\times\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\oint_L \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$。再根据矢量分析，若$\oint_L \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$，则必定有位函数$\varphi$存在，使得$A=\nabla\varphi$。由于$\nabla\times(\nabla\varphi)=0$，所以$\vec{B}=0$，即磁场$\vec{B}$恒为零。

分析：斯托克斯定理$\int_s \nabla\times\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\oint_L \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$中，面积分的面$S$是以$l$为边界的空间连续面，不是封闭曲面。而高斯定理中的高斯面为封闭曲面。因此$\oint_s \nabla\times\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$不能写成$\oint_L \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$。错误之因就在此处。

4—33。无限长带电直导线的场强公式为$E=\dfrac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r}$，无限长载流直导线的磁感应强度公式为$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$；无限大带电导体板产生的场强公式为$E=\sigma/2\varepsilon_0$，无限大载流导体板产生的磁感应强度公式为$B=\mu_0 i/2$。由此可见，只要将$\eta\to I$，$\sigma\to i$，$\varepsilon_0\to\dfrac{1}{\mu_0}$，就可由静电学中的公式变换得稳恒磁场中的公式。

分析：在静电学与稳恒磁场中，有些公式满足这样的对换，而有些不满足。例如，带电圆环在轴线上产生的场强公式为$E=\eta Rx/2\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}$，载流圆环在轴线上产生的磁感应强度公式为 $B=\mu_0 R^2 I/2(R^2+x^2)^{3/2}$。它们之间就不满足上面的对换关系。由此可见，千万不能乱套用。

(PDF压缩器 - 未注册版)

4—34．安培力是洛仑兹力的宏观表现，洛仑兹力不做功，所以安培力也不做功。

分析：当导体运动时，所受的安培力仅是洛仑兹力的一个分力，所以它可以作功。但必然有另一个分力做等量的负功，以使总的洛仑兹力做功等于零①。



---

①见赵凯华等编《电磁学》下册$P_{25}$（1978）。

(PDF压缩器 - 未注册版)

# 第五章 磁 介 质

## 一 错 误 的 解 法

5—1. 如图5—1所示，一无限大的磁介质在均匀磁场$\vec{B}_0$中均匀磁化，磁化强度为$\vec{M}$。若在其中挖出一个半径为$R$、长度为$l$($l \gg R$)的柱形空腔，其轴与$\vec{M}$方向相同(假设挖出空腔不扰乱其余部分的磁化，即其余部分的磁化强度仍为$\vec{M}$)①，试求空腔内的磁感应强度$\vec{B}$。

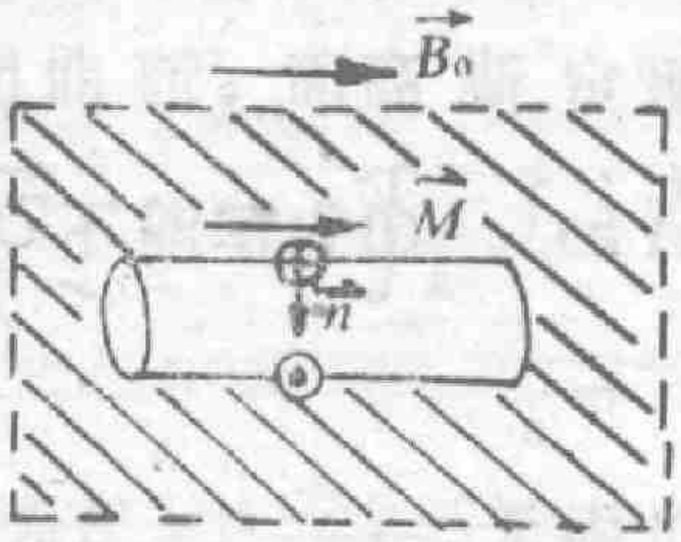


图 5 — 1

错解一：由$\vec{J}' = \nabla \times \vec{M}$可知，磁介质中无束缚电流；由$\vec{i}' = \vec{M} \times \vec{n}$可知，空腔内表面的束缚电流密度的大小为$i' = M$，方向见图5—1所示，则束缚电流在空腔内产生的磁感应强度的大小为

$$B' = \mu_0 i' = \mu_0 M ②,$$

方向与$\vec{i}'$满足右手螺旋关系，与$\vec{B}_0$和$\vec{M}$的方向相反，因此

$$\vec{B}' = -\mu_0 \vec{M}.$$

则由$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$可得，空腔内的磁感应强度为

$$\vec{B} = \vec{B}_0 - \mu_0 \vec{M}.$$

分析：公式$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$中$\vec{B}'$是所有束缚电流产生的附加场。

---

①磁化强度为$\vec{M}$的一块介质分开两块后，$\vec{M}$一般要变化。

②可由$\oint_L \vec{B}' \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I'$求得。

(PDF压缩器 - 未注册版)

在本题中，除空腔内表面上存在束缚电流外，在无穷远处的外表面上也存在束缚电流（可视为半径为无穷大的柱形磁介质，磁化强度为$\vec{M}$时，外表面上的束缚电流）。

空腔内表面上的束缚电流在空腔内产生的附加场为$\vec{B}'_1=-\mu_0\vec{M}$，无穷远处的外表面上的束缚电流在空腔内产生的附加场为$\vec{B}'_2=\mu_0\vec{M}$。则空腔内的附加场为$\vec{B}'=\vec{B}'_1+\vec{B}'_2=0$，所以空腔内的磁感应强度为$\vec{B}=\vec{B}_0$。

错解二：在空腔内$\mu=\mu_0$，所以空腔内的磁感应强度

$$\vec{B}=\mu\vec{H}=\mu_0(\vec{H}_0+\vec{H}')=\vec{B}_0+\mu_0\vec{H}',$$

其中$\vec{H}'$是磁介质中所有磁荷在空腔内产生的附加场。

由$\rho_m=-\mu_0\nabla\cdot\vec{M}$可知，磁介质中无体磁荷密度；由$\sigma_m=\mu_0\vec{M}\cdot\vec{n}$可知，在空腔内的左右表面上和无穷远处的左右表面上存在面磁荷密度。但由于空腔的$l\gg R$，空腔内的左右表面上的磁荷在空腔内产生的附加场为0[①]，所以$\vec{H}'$就等于无穷远处的左右表面上的磁荷在空腔内产生的附加场。

由$\sigma_m=\mu_0\vec{M}\cdot\vec{n}$可知，无穷远处的左右表面上的磁荷面密度为$\sigma_m=\mp\mu_0M$。则这一对无限大表面上的等量异号磁荷在两表面间——介质中（当然包括空腔中）产生的附加场为

$$H'=\frac{\sigma_m}{\mu_0}=M,$$

方向与$\vec{M}$的方向相反，即

$$\vec{H}'=-\vec{M}.$$

因此空腔内的磁感应强度为

$$\vec{B}=\vec{B}_0-\mu_0\vec{M}.$$

分析：对于无限大均匀磁介质被均匀磁化时，介质中的

---

①见赵凯华等编《电磁学》下册$P_{102}$（1978）。

(PDF压缩器 - 未注册版)

$\vec{H}=\vec{H}_0$①，$\vec{H}'=\vec{H}-\vec{H}_0=0$，即无限大的均匀磁介质被均匀磁化时，无穷远表面上的磁荷产生的附加场（退磁场）$H'=0$。这与无限大均匀电介质被均匀极化时，无穷远表面上的极化电荷产生的附加场（退极化场）为$E'=\sigma_e/\varepsilon_0=P/\varepsilon_0$不同，因此以后我们用磁荷观点求磁场，并且均匀磁介质是无限大时，我们就不必考虑无穷远表面上的磁荷产生的磁场。

在上述解法中，认为无穷远表面上的磁荷产生的磁场为$\vec{H}'=-\vec{M}$，所以得到的结果是错误的。

错解三：由前知，空腔内的附加场$\vec{H}'=0$，则由$\vec{B}'=\mu_0(\vec{M}+\vec{H}')$②可得，空腔内的附加场$\vec{B}'$为

$$\vec{B}'=\mu_0\vec{M},$$

所以空腔内的磁感应强度为

$$\vec{B}=\vec{B}_0+\vec{B}'=\vec{B}_0+\mu_0\vec{M}.$$

分析：公式$\vec{B}'=\mu_0(\vec{M}+\vec{H}')$中的$\vec{M}$和$\vec{H}'$是被讨论点的磁化强度和退磁场。在空腔中$\vec{M}=0$（因是真空），$\vec{H}'=0$，所以$\vec{B}'=0$，而并非是$\vec{B}'=\mu\vec{M}$，则$\vec{B}=\vec{B}_0$。

---

①在均匀磁介质充满磁场所在空间时，

$\vec{H}=\vec{B}_0/\mu_0$，即$\vec{B}_0=\mu_0\vec{H}$。

再由公式$\vec{B}_0=\mu_0\vec{H}_0$，$\vec{H}=\vec{H}_0+\vec{H}'$，$\vec{B}=\vec{B}_0+\vec{B}'$，$\vec{B}=\mu_0(\vec{M}+\vec{H})$

可得

$$\vec{H}=\vec{H}_0,\quad \vec{H}'=0,\quad \vec{B}'=\mu_0\vec{M}.$$

再利用$\vec{B}=\mu\vec{H}$，$\vec{M}=\chi_m\vec{H}$（因这两式对磁介质的磁滞状态不成立，所以下面的结论对磁滞状态不成立），可得

$$\vec{B}=\mu_r\vec{B}_0,\quad \vec{B}'=\chi_m\vec{B}_0.$$

②由$\vec{B}=\vec{B}_0+\vec{B}'$，$\vec{H}=\vec{H}_0+\vec{H}'$，$\vec{B}=\mu_0(\vec{M}+\vec{H})$，$\vec{B}_0=\mu_0\vec{H}$得

$$\vec{B}'=\mu_0(\vec{M}+\vec{H}').$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

练习题：

一块无限大的磁介质在磁化场$\vec{H}_o$的作用下均匀磁化，磁化强度为$\vec{M}$。在此介质中有一半径为$R$的球形空腔，试求空腔中心的磁场强度$\vec{H}$和磁感应强度$\vec{B}$。

提示：若用磁荷观点来求，不必考虑无穷远外表面上的磁荷产生的场；若用分子电流观点来求，必须考虑无穷远外表面上的束缚电流产生的场。也就是说在$\vec{H}=\vec{H}_o+\vec{H}'$中，$\vec{H}'$仅是球形空腔内表面上磁荷产生的附加场，在$\vec{B}=\vec{B}_o+\vec{B}'$中，$\vec{B}'$是球形空腔内表面上束缚电流与无穷远外表面上的束缚电流共同产生的场。

答案：$\vec{H}=\vec{H}_o+\dfrac{\vec{M}}{3}$，$\vec{B}=\mu_o\vec{H}=\mu_o\vec{H}_o+\dfrac{1}{3}\mu_o\vec{M}$。

5—2。有一无限长圆柱体，半径为$R$，磁导率为$\mu(\mu=c)$，用安培表测得通过它的电流为$I_A$（假设此电流均匀地通过横截面）。试求空间的磁感应强度$\vec{B}$。

错解：取以轴线上某点为圆心，$r$为半径的圆周为环路，环绕方向与电流之间满足右手螺旋关系，则由$\oint_L\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_oI$可得

$$B\cdot 2\pi r=\mu_oI_{内},$$

所以
$$B=\frac{\mu_oI_{内}}{2\pi r}.$$

由于$r<R$时，$I_{内}=\dfrac{\pi r^2}{\pi R^2}I_A=\dfrac{r^2}{R^2}I_A$；$r>R$时，$I_{内}=I_A$。再考虑到方向可得

$$\vec{B}=\begin{cases}\dfrac{\mu_oI_A}{2\pi R^2}r\vec{\theta}_o & (r<R),\\ \dfrac{\mu_oI_A}{2\pi r}\vec{\theta}_o & (r>R).\end{cases}$$

分析：公式$\oint_L\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_oI$中$I$是总电流——传导电流与束缚电流之和，而用安培表测得的电流为传导电流，所以本题不能

(PDF压缩器 - 未注册版)

用$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\mu_o I$来求解，而要用$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=I_o$来求解。

正确解法：取以轴线上某点为圆心，$r$为半径的圆周为环路，环绕方向与电流满足右手螺旋关系。由$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=I_o$可得

$$H\cdot 2\pi r = I_{o内},$$

所以
$$H=\frac{I_{o内}}{2\pi r}.$$

由于$r<R$时，$I_{o内}=r^2 I_A/R^2$；$r>R$时，$I_{o内}=I_A$，再考虑到方向可得

$$\vec{H}=\begin{cases}\dfrac{I_A}{2\pi R^2} r\,\vec{\theta}_o & (r<R),\\ \dfrac{I_A}{2\pi r}\,\vec{\theta}_o & (r>R).\end{cases}$$

所以

$$\vec{B}=\mu\vec{H}=\begin{cases}\dfrac{\mu I_A}{2\pi R^2} r\,\vec{\theta}_o & (r<R),\\ \dfrac{\mu_o I_A}{2\pi r}\,\vec{\theta}_o & (r>R).\end{cases}$$

注：在$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\mu_o I=\mu_o(I_o+I')$，$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=I_o$，$\oint_L \vec{M}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=I'$，三式中$I$，$I_o$，$I'$分别为总电流、传导电流和束缚电流。由这三个公式可求解电流分布具有对称性的问题。如果已知的是总电流或总电流密度，先由$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\mu_o I$求$\vec{B}$，再由$\vec{B}=\mu\vec{H}$，$\vec{M}=\chi_m\vec{H}$求另外量较方便；如果已知的是传导电流或传导电流密度，先由$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=I_o$求$\vec{H}$，再由$\vec{B}$、$\vec{H}$、$\vec{M}$三者之间的关系求另外的量较方便；如果已知的是束缚电流或束缚电流密度，先由$\oint_L \vec{M}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=I'$求$\vec{M}$，再求其它量较方便。

(PDF压缩器 - 未注册版)

另外，由$\oint_L \vec{B}_o \cdot d\vec{l} = \mu_o I_o$，$\oint_L \vec{B}' \cdot d\vec{l} = \mu_o I'$可直接求$I_o$、$I'$具有对称性分布时产生的$\vec{B}_o$和$\vec{B}'$。

将上面三个积分关系式应用在介质内部，可得相对应的三个微分关系式

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} = \mu_o(\vec{J}_o + \vec{J}'),\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_o,\ \nabla \times \vec{M} = \vec{J}'。$$

其中$\vec{J}$、$\vec{J}_o$和$\vec{J}'$分别为介质中的总电流密度、传导电流密度和束缚电流密度。由这三个关系式，可以在已知$\vec{B}$、$\vec{H}$和$\vec{M}$的情况下，求解总电流、传导电流和束缚电流分布。

将上面三个积分关系式应用到介质表面，可得相应的三个边界条件

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \times \vec{n} = \vec{i},\ (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{n} = \vec{i}_0,$$
$$(\vec{M}_1 - \vec{M}_2) \times \vec{n} = \vec{i}'。$$

其中$\vec{i}_1$、$\vec{i}_o$和$\vec{i}'$分别为二介质交界面上的总电流密度、传导电流密度和束缚电流密度，$\vec{B}_1$、$\vec{B}_2$，$\vec{H}_1$、$\vec{H}_2$和$\vec{M}_1$、$\vec{M}_2$分别为介质1和介质2中的磁感应强度、磁场强度和磁化强度，$\vec{n}$是交界面上由介质1指向介质2的单位法向矢量。

对于介质与真空的交界面，第三式可简化为

$$\vec{M} \times \vec{n} = \vec{i}'。$$

其中$\vec{n}$的方向是介质指向真空。但要注意：第一、二式一般不可简化为下二式

$$\vec{B} \times \vec{n} = \vec{i},\ \vec{H} \times \vec{n} = \vec{i}_o。$$

练习题：

如图5—2所示，一无限长圆柱体体内的总电流密度为零，表面的总电流密度为$\vec{i}$。试求圆柱体内的$\vec{H}$、$\vec{M}$。

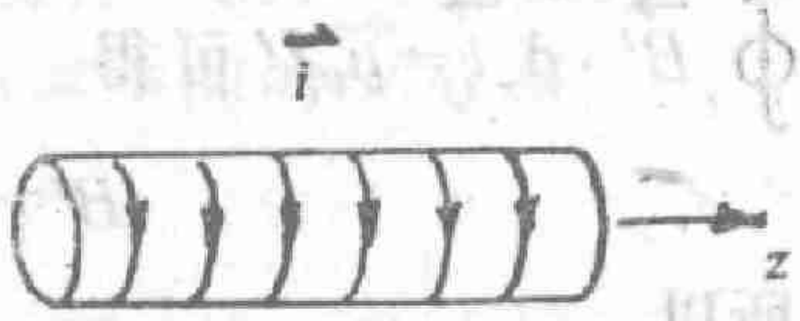



图 5 — 2

提示：因为已知的是总电流密度，

(PDF压缩器 - 未注册版)

所以先由$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$求$\vec{B}$，然后由$\vec{B}=\mu\vec{H}$和$\vec{M}=\chi_m\vec{H}$求$\vec{H}$和$\vec{M}$。

答案：$\vec{H}=\frac{i}{\mu_r}\vec{k}$，$\vec{M}=(1-\frac{1}{\mu_r})i\vec{k}$（$\vec{k}$是$z$方向的单位矢量）。

5—3．求题5—2中束缚电流在空间产生的磁感应强度$\vec{B'}$。

错解：由题5—2知，空间的磁场强度为

$$\vec{H}=\begin{cases}\dfrac{I_A r}{2\pi R^2}\vec{\theta}_0 & (r<R),\\ \dfrac{I_A}{2\pi r}\vec{\theta}_0 & (r>R).\end{cases}$$

所以
$$\vec{M}=\chi_m\vec{H}=\begin{cases}\dfrac{\chi_m I_A}{2\pi R^2}r\vec{\theta}_0 & (r<R),\\ 0 & (r>R).\end{cases}$$

由$\vec{J'}=\nabla\times\vec{M}$可得空间中束缚电流密度为

$$\vec{J'}=\begin{vmatrix}\dfrac{\vec{r}_0}{r} & \vec{\theta}_0 & \dfrac{\vec{k}}{r}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ M_r & rM_\theta & M_z\end{vmatrix}=\begin{cases}\dfrac{\chi_m I_A}{\pi R^2}\vec{k} & (r<R),\\ 0 & (r>R).\end{cases}$$

取以轴线上某点为圆心、$r$为半径的圆周为环路，绕行方向与$\vec{k}$满足右手螺旋关系。由于束缚电流分布具有轴对称性，所以在环路上每一点的$\vec{B'}$大小相等、方向与环路相切，则由$\oint_L \vec{B'}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I'$可得

$$B'\cdot 2\pi r=\mu_0 I'_{\text{内}},$$

所以
$$B'=\frac{\mu_0 I'_{\text{内}}}{2\pi r}.$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

由于$r<R$时，$I'_{内}=J'\cdot\pi r^2=\dfrac{\chi_m I_A}{R^2}r^2$；$r>R$时，$I'_{内}=J'\cdot\pi R^2=\chi_m I_A$，代入上式并考虑到方向得

$$\vec{B}'=\begin{cases}\dfrac{\mu_0\chi_m I_A}{2\pi R^2}r\vec{\theta}_0 & (r<R),\\ \dfrac{\mu_0\chi_m I_A}{2\pi r}\vec{\theta}_0 & (r>R).\end{cases}$$

分析：本题中除了圆柱体内存在束缚电流外，在柱体表面上也存在束缚电流，在上面求解中遗漏了柱体表面上的束缚电流，所以解法是错误的。

考虑到柱体表面上的束缚电流

$$I'=i'\cdot 2\pi R=|\vec{M}\times\vec{n}|\cdot 2\pi R=\frac{\chi_m I_A}{2\pi R}\cdot 2\pi R=\chi_m I_A.$$

方向与柱体内的束缚电流方向相反，安培环路内通过的束缚电流为

$$I'_{内}=\begin{cases}\dfrac{\chi_m I_A}{R^2}r^2 & (r<R),\\ 0① & (r>R).\end{cases}$$

则束缚电流在空间产生的$\vec{B}'$为

$$\vec{B}'=\begin{cases}\dfrac{\mu_0\chi_m I_A}{2\pi R^2}r\vec{\theta}_0 & (r<R),\\ 0 & (r>R).\end{cases}$$

练习题：

一无限长圆柱形铜导体，半径为$R$，磁导率为$\mu_1=\mu_0$，导体外充满均匀线性磁介质，磁导率为$\mu_2$，导体中的传导电流为$I$（假设$I$均匀地分布在导体的横截面上）。试求空间的$\vec{B}'$分布。

---

①由$I'_{内}=\oint_L\vec{M}\cdot d\vec{l}$和$r>R$时$\vec{M}=0$很容易得到$r>R$时，$I'_{内}=0$.

(PDF压缩器 - 未注册版)

答案：
$$\vec{B}'=\begin{cases}0 & (r<R),\\ \dfrac{\mu_0\chi_m I}{2\pi r}\vec{\theta}_0 & (r>R).\end{cases}$$

5—4．如图5—3所示，一永磁环有一很窄的缝隙，磁化强度为$M$．试求图中标出各点的$B$、$H$。

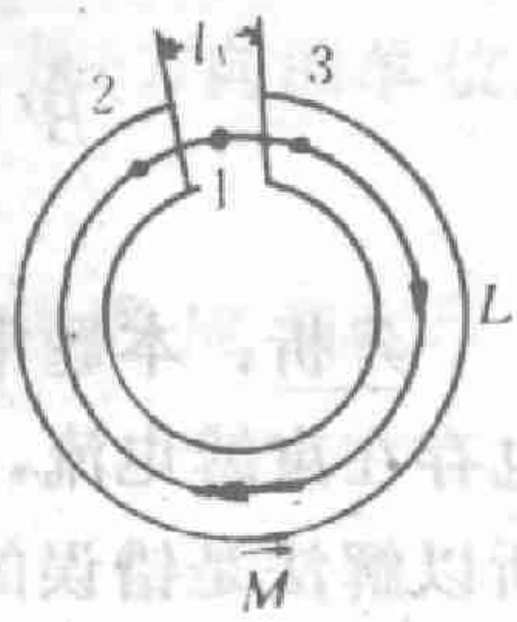


图 5 — 3

错解一：由$\vec{M}=\chi_m\vec{H}$，$\vec{B}=\mu\vec{H}$，再考虑到$M_1=0$，$M_2=M$可得

$$H_1=0, H_2=H_3=\frac{M}{\chi_m}, B_1=\mu_0 H_1=0,$$

$$B_2=B_3=\mu H_2=\mu M/\chi_m.$$

分析：公式$\vec{M}=\chi_m\vec{H}$适用于各向同性的非铁磁材料和铁磁材料磁化曲线上的状态（以后简称磁化状态）（对于铁磁材料$\chi_m$不再等于常数，与$H$有关）。因此，它的推论公式$\vec{B}=\mu\vec{H}$也只适用于上面的情况。这里的介质环处于磁滞回线上的状态（以后简称磁滞状态），所以上两公式不成立，当然上述解法是错误的。

注：永磁材料在磁滞状态下成立和不成立的公式。

成立公式：$\vec{B}=\vec{B}_0+\vec{B}'$，$\vec{H}=\vec{H}_0+\vec{H}'$，

$\vec{B}=\mu_0(\vec{M}+\vec{H})$，$\vec{B}'=\mu_0(\vec{M}+\vec{H}')$，

$\oint_L\vec{M}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=I'$，$\oint_L\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=I_0$，

$\oint_L\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$，$\oint_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$，

$B_{1n}=B_{2n}$，$H_{1t}=H_{2t}$。

不成立公式：$\vec{M}=\chi_m\vec{H}$，$\vec{B}=\mu\vec{H}$。

对于软磁材料，由于磁滞回线与磁化曲线很接近，所以即使在磁滞状态下，后面两式也近似成立。

错解二：在环中取一圆周（见图5—3所示），作安培环路，

(PDF压缩器 - 未注册版)

则由$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_o$得

$$H\cdot L = 0.$$

所以

$$H = 0.$$

即

$$H_1 = H_2 = H_3 = 0.$$

再由$\vec{B} = \mu_o(\vec{M} + \vec{H})$可得

$$B_1 = 0,\ B_2 = B_3 = \mu_o M.$$

分析：由磁场的边界条件可知，$H_1 \neq H_2 = H_3$，而在上述解法中，认为它们是相等的，所以解法是错误的。

正确解法：由于缝隙很小，$\vec{B}$线还未散开，所以$B = \Phi/S$在1、2、3和环路上各点均相等，由$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_o I = \mu_o I'$和$\oint_L \vec{M}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I'$得

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_o \oint_L \vec{M}\cdot \mathrm{d}\vec{l}.$$

即

$$B_1 l_1 + B_2 l_2 = \mu_o(M_1 l_1 + M_2 l_2).$$

由于$B_1 = B_2$，$M_1 = 0$，$M_2 = M$，$l_1 \doteq 0$，所以

$$B_1 = B_2 = B_3 = \mu_o M.$$

再由$\vec{B} = \mu_o(\vec{H} + \vec{M})$，并考虑到$\vec{B}$、$\vec{M}$、$\vec{H}$的方向可得

$$H_1 = M,\ H_2 = H_3 = 0.$$

练习题：

1.如图5—4所示，一根沿轴均匀磁化的细长永磁棒，磁化强度为$M$，试求图中标出各点的$B$、$H$。

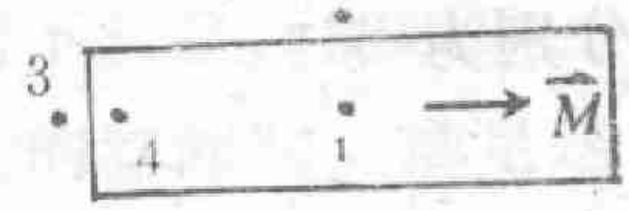



图 5 — 4

提示：永磁棒处于磁滞状态，公式$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$，$\vec{B} = \mu\vec{H}$不成立。

答案：$B_1 = \mu_o M$，$B_2 = 0$，$B_3 = B_4 = \frac{1}{2}R_1 = \frac{1}{2}\mu_o M$，

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$H_1 = H_2 = 0,\ H_3 = -H_4 = \frac{1}{2}M。$$

2.一半径为$R$的永磁介质球被均匀磁化，磁化强度为$\vec{M}$，试求中心处的$\vec{B}$和$\vec{H}$。

答案：$\vec{B} = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}$，$\vec{H} = -\frac{1}{3}\vec{M}$。

5—5．三根在同一平面内的平行长直导线，间距和电流如图5—5所示。它们所在的空间充满一种均匀软磁材料，其磁化曲线的前部分见图5—6所示。试求中间导线单位长度上受到的磁力大小。

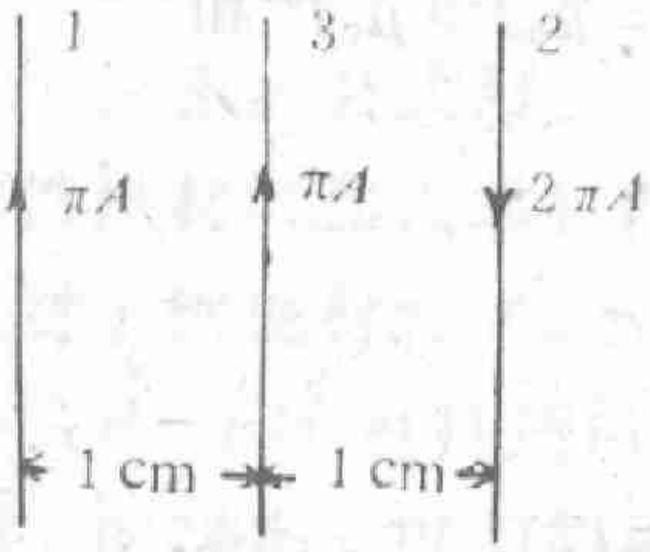



图 5 — 5

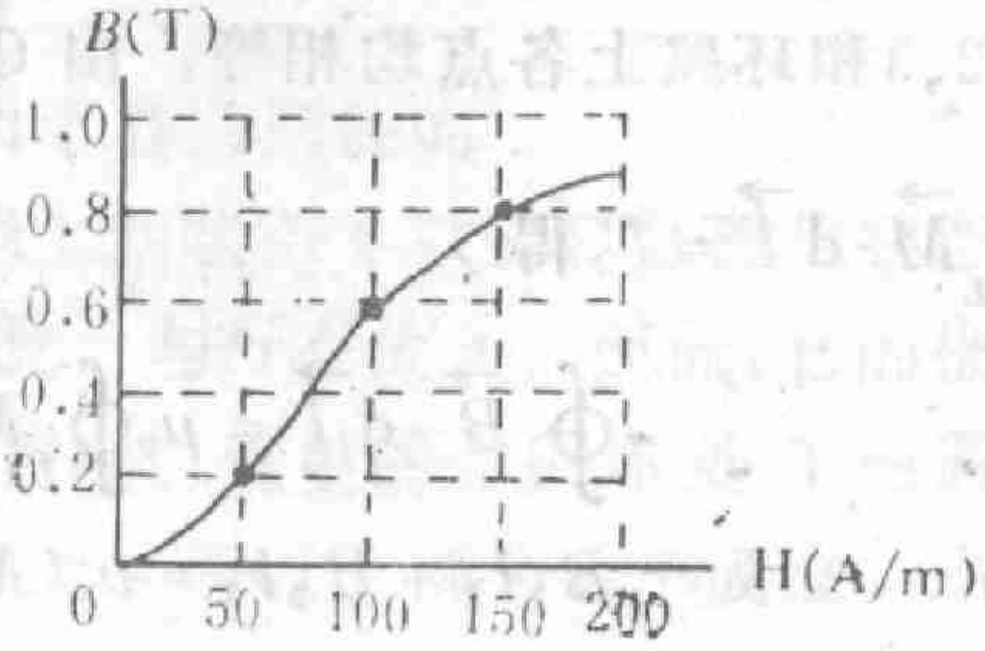



图 5 — 6

错解：1、2导线单独存在时，3导线所在处磁场强度的大小分别为

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi r_1} = 50\text{安/米},\ H_2 = \frac{I_2}{2\pi r_2} = 100\text{安/米}。$$

由磁化曲线查得它们单独存在时3导线所在处磁感应强度的大小分别为

$$B_1 = 0.2\text{特},\quad B_2 = 0.6\text{特}。$$

再由场强迭加原理可得它们共存在时，3导线所在处磁感应强度的大小为

$$B = B_1 + B_2 = 0.8\text{特}。$$

则由安培公式$\mathrm{d}\vec{f} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$可得3导线单位长度上受到的磁力大

(PDF压缩器 - 未注册版)

小为

$$f = IB = 0.8\pi \doteq 2.5\text{牛}.$$

分析：在非线性磁性材料（$\chi_m$和$\mu$随磁化场变化的磁介质）中，$\vec{B}$不满足迭加原理。软磁材料是非线性材料，当然其中$\vec{B}$不满足迭加原理。而上面应用了$\vec{B}$的迭加原理，所以解法是错误的。但结果是正确的，这纯属巧合。

在一般情况下，$\vec{H}$也不满足迭加原理，但是当均匀非线性材料充满场存在的空间时，$\vec{H}$又满足迭加原理（注意：此时$\vec{B}$仍不满足迭加原理）。对本题，由于均匀软磁材料充满了整个空间，所以$\vec{H}$满足迭加原理，因此可由先求总$H$，然后再求总$B$，再由安培公式求磁力的顺序来解题。

正确解法：1、2导线单独存在时，3导线所在处磁场强度的大小分别为

$$H_1 = 50\text{安/米}，\quad H_2 = 100\text{安/米}。$$

由$\vec{H}$的迭加原理可得1、2导线共存时，3导线所在处磁场强度的大小为

$$H = H_1 + H_2 = 150\text{安/米}。$$

再由磁化曲线查得3导线所在处的磁感应强度的大小为

$$B = 0.8\text{特}。$$

所以3导线单位长度上受到的磁力大小为

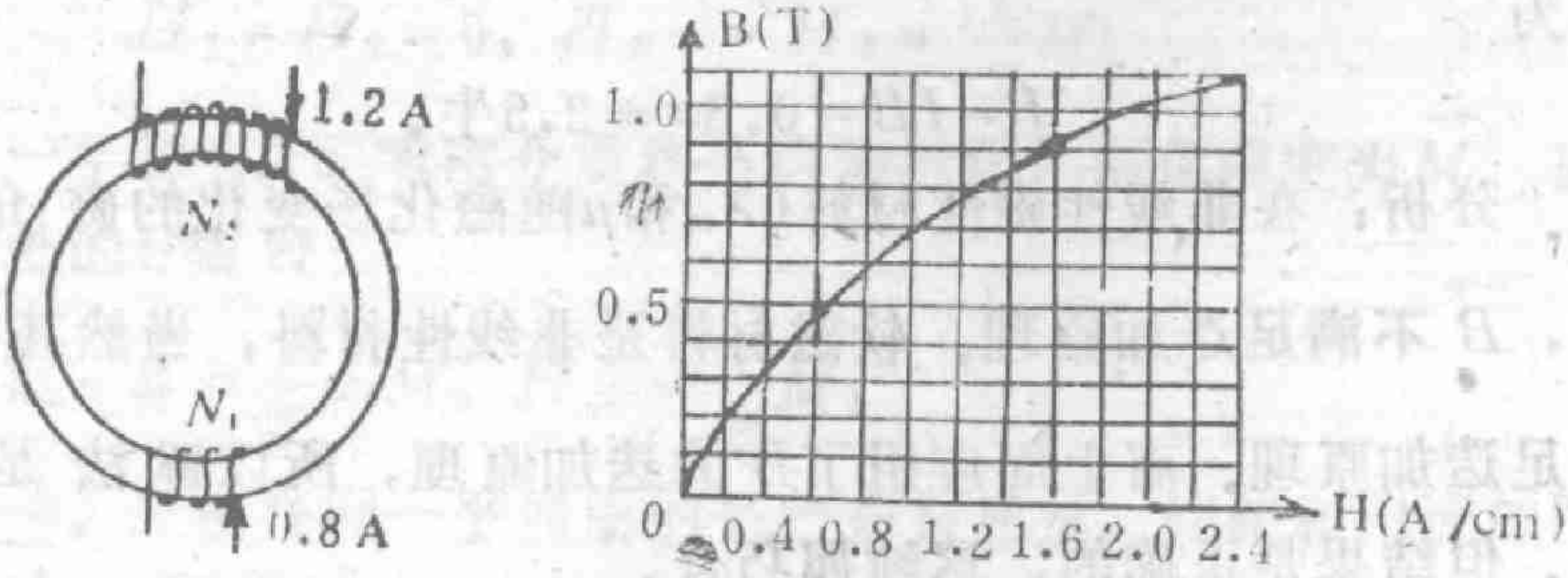
$$F = \pi B = 0.8\pi = 2.5\text{牛}。$$

注：在非线性磁介质中，$\vec{B}$、$\vec{M}$、$\Phi$、$\vec{F}$均不满足迭加原理。对于$\vec{H}$、当非线性磁介质均匀、且充满场存在的空间时，满足迭加原理，否则也不满足。

练习题：

有一软磁圆环，中心线周长为20厘米，截面积为4厘米$^2$，上面绕有两组线圈，$N_1 = 10$匝，$N_2 = 20$匝，绕行方向和上面通过

(PDF压缩器 - 未注册版)




(a) (b)

图 5 — 7

的电流方向见图5—7(a)所示，试求通过磁环截面的磁通量，（磁性材料的磁化曲线见图5—7(b)所示）。

提示：$\vec{B}$、$\Phi$不满足迭加原理，$\vec{H}$满足迭加原理。

答案：$\Phi = 3.6 \times 10^{-4}$韦伯。

## 二 错误的回答

5—6。二平行长直导线处于均匀磁介质中，相距为$a$，上面通过的电流分别为$I_1$、$I_2$，则导线1单位长度上受到的磁力大小为$f_1 = \mu I_1 I_2 / 2\pi a$，导线2单位长度上受到的磁力大小为$f_2 = \mu I_1 I_2 / 2\pi a$，二力方向相反。问这两个力是否为一对作用力和反作用力？

错答：$\vec{f}_1$是$I_2$对$I_1$的作用力，$\vec{f}_2$是$I_1$对$I_2$的作用力，故此是一对作用力和反作用力。再由二力的大小相等、方向相反更能说明它们是一对作用力和反作用力。

分析：虽然$\vec{f}_1$和$\vec{f}_2$大小相等、方向相反，但并非是一对作用力和反作用力。因为$\vec{f}_1$是$I_2$和介质中的束缚电流对$I_1$的作用力，$\vec{f}_2$是$I_1$和介质中的束缚电流对$I_2$的作用力。有第三者——束缚电流的作用力，所以不是一对作用力和反作用力。

练习题：

如图5—8所示，二长直载流导线处于不同的介质中，各自受到的磁力大小是否相等？

(PDF压缩器 - 未注册版)

提示：一般不相等。

5—7。电流元$Id\vec{l}$处于无限大均匀磁介质中，介质的磁导率为$\mu$，问电流元本身在磁介质中产生的磁感应强度为多少？

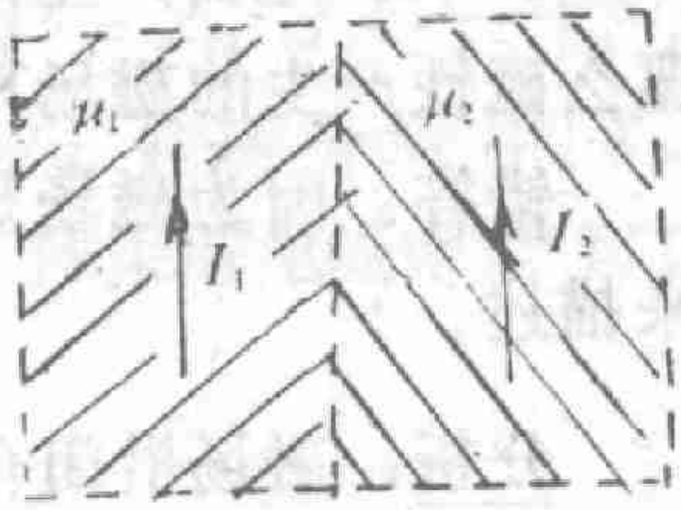



图5—8

错答：$d\vec{B}=\frac{\mu}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$。

分析：电流元在介质中产生的磁感应强度为$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$，与在真空中产生的完全一样。

$d\vec{B}=\frac{\mu}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$是无限大均匀磁介质中的磁感应强度，它是电流元$Id\vec{l}$和束缚电流共同产生的磁感应强度。

练习题：

如图5—9所示，载流导线旁边有一介质，试给出磁感应强度在空间分布的表达式。




图5—9

提示：磁感应强度在空间分布的表达式为

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_L\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}_1}{r_1^3}+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_S\frac{\vec{i}'\times\vec{r}_2}{r_2^3}dS+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}'\times\vec{r}_3}{r_3^3}dV.$$

其中第一项是载流导线产生的场，第二项是介质表面的束缚电流产生的场，第三项是介质内部的束缚电流产生的场。对于均匀介质，内部无体传导电流时也无体束缚电流①，此时第三项为0。

①因$\vec{J}'=\nabla\times\vec{M}$，$\vec{M}=\chi_m\vec{H}$（在磁化状态）。
所以$\vec{J}'=\nabla\times(\chi_m\vec{H})=\nabla\chi_m\times\vec{H}+\chi_m\nabla\times\vec{H}$。
当介质是均匀介质时，$\chi_m=c$。再考虑到$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}$，可得$\vec{J}'=\chi_m\vec{J}$。由此可见，在处于磁化状态的均匀介质中，若无体传导电流，也无体束缚电流；若有体传导电流，也有体束缚电流。

(PDF压缩器 - 未注册版)

5—8. 电荷产生的电场可以用一标量函数——电势来描述，那么磁铁产生的磁场可否用一个标量函数——磁标势来描述？

错答：因为磁场是有旋场，所以不可用标量函数——磁标势来描述。

分析：磁场沿闭合曲线的环量为$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_o$，一般情况下，$I_o$不一定等于0，所以一般不可用标量函数来描述。但对于磁铁，其磁场定域的全空间（包括磁铁内部）$I_o = 0$，$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$（即磁铁产生的磁场为无旋场），所以可以用标量函数——磁标势描述，且$H = -\nabla q_m$①。

练习题：

空间有一通电线圈，在除线圈以外的区域中$I_o = 0$，问在$I_o = 0$的区域内可否引入磁标势？

提示：在某区域内能否引入磁标势的条件是：在该区域内的任何回路上均满足$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$，即在该区域内的任何回路都不被电流所链环。也就是说该区域是没有传导电流分布的单连通区域。对通电线圈，在除去线圈所围着的一个壳形区域后②，剩下的区域内，磁场沿任一闭合回路的环量$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$，所以在该区域内（除壳形后的区域内）可引入磁标势。

5—9. 磁介质中，体束缚电流密度的大小$|\vec{J'}|$是否一定小于体传导电流密度的大小$|\vec{J}_o|$？

错答：束缚电流是由传导电流磁化磁介质产生的，当然它不可能大于产生它的传导电流。因此，体束缚电流密度的大小一定小于体传导电流密度的大小。

①见郭硕鸿编《电动力学》$P_{94}$(1979).

②壳形区域是任意的，只要以线圈为边界即可。

(PDF压缩器 - 未注册版)

分析：均匀磁介质处于磁化状态时，$\vec{J}' = \chi_m \vec{J}_0$①。因为顺、抗磁介质，$|\chi_m| < 1$，所以$|\vec{J}'| < |\vec{J}_0|$；铁磁介质中$|\chi_m| \gg 1$，所以$|\vec{J}'| \gg |\vec{J}_0|$，可见在磁介质中，体束缚电流密度可以大于体传导电流密度。

练习题：

在磁介质中，$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$，$\vec{B}'$是否一定与$\vec{B}_0$方向相反，且$|\vec{B}'| < |\vec{B}_0|$？

提示：若介质是抗磁介质，$\vec{B}'$一定与$\vec{B}_0$反向，且$|\vec{B}'| < |\vec{B}_0|$；若介质是顺磁介质，$\vec{B}'$一定与$\vec{B}_0$同向，且$|\vec{B}'| < |\vec{B}_0|$；若介质是铁磁介质，且处于磁化状态时，$\vec{B}'$一定与$\vec{B}_0$同向，且$|\vec{B}'| \gg |\vec{B}_0|$，当处于磁滞状态时就不一定了，$\vec{B}$与$\vec{B}_0$可能反向，$|\vec{B}'|$也可能小于$|\vec{B}_0|$。

顺便说明：在磁介质中，$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}'$，对于抗、顺和铁磁介质的磁化状态，$\vec{H}'$一定与$\vec{H}_0$反向，且$|\vec{H}'|$一定小于$|\vec{H}_0|$。但在铁磁介质的磁滞状态就不一定了。例如，条形磁铁中，$\vec{H}_0 = 0$，但$\vec{H}' \neq 0$，在此$|\vec{H}'| > |\vec{H}_0|$。

5—10．条形磁介质在均匀外场中可否均匀磁化？

错答：当然可以均匀磁化。

分析：理论上可以证明，只有椭球形的磁介质在均匀外场中才可以均匀磁化。其它形状的磁介质在均匀外场中都不可均匀磁化。当然条形磁介质也不可以。

练习题：

条形磁介质放在均匀外场中磁化时，其内部是否有体束缚电流？

提示：条形磁介质放在均匀外场中时，内部各点$\vec{H}$、$\vec{M}$不是常数，$\chi_m(\vec{H})$也不是常数，则$J' = \nabla \times \vec{M} = \nabla \times (\chi_m \vec{H}) = \nabla \chi_m$

①参考$P_{147}$注①.

(PDF压缩器 - 未注册版)

$\times \vec{H} + \chi_m \vec{J}_o$。

在此虽然$\vec{J}_o = 0$(条形磁介质中无体传导电流)，但是由于$\nabla \chi_m$的方向与$\vec{B}$的方向不可能处处相同，所以介质中存在体束缚电流。

5—11。$\vec{B}$线是闭合曲线，$\vec{H}$线、$\vec{M}$线是否也是闭合曲线？

错答：由$\vec{B} = \mu \vec{H}$，$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$和$\oint_s \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$得

$$\oint_s \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_s \frac{\vec{B}}{\mu} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\mu} \oint_s \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0,$$

$$\oint_s \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_s \frac{\chi_m}{\mu} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\chi_m}{\mu} \oint_s \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0.$$

由于高斯面是任意选取的，因此可得，$\vec{H}$线、$\vec{M}$线也是闭合曲线。

分析：当磁场存在的整个空间中$\mu = c$时，$\mu$、$\chi_m$可从积分号中提出，有$\oint_s \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$，$\oint_s \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$，此时$\vec{H}$线、$\vec{M}$线为闭合曲线。

当磁场存在的空间中$\mu \neq c$时，在$\mu$变化处，没有等式$\oint_s \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$、$\oint_s \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$，因此，在$\mu$变化处(如介质的边界面上)，$\vec{H}$线、$\vec{M}$线可能有增减。但是由于$\oint_s \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \mu_o \oint_s (\vec{M} + \vec{H}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$，可见$\vec{M} + \vec{H}$线是闭合曲线，即在$\mu$变化处，$\vec{H}$线增加几根，$\vec{M}$线就减少几根，或$\vec{H}$线减少几根，$\vec{M}$线就增加几根。

顺便说一句：$\vec{B}'$线是闭合曲线，但$\vec{H}'$线不是闭合曲线。

练习题：

1.试作出真空中载流螺线管产生的磁场的$\vec{B}$线和$\vec{H}$线。

提示：$\vec{B}$线和$\vec{H}$线(注意真空中$\vec{H} = \vec{B}/\mu_o$)都是无头无尾的闭合曲线，在螺线管外都是从$N$极到$S$极，在内部从$S$极到

(PDF压缩器 - 未注册版)

$N$极。

2.有一条形磁铁，假设其磁化强度处处相等，试作出它产生的磁场的$\vec{B}$线、$\vec{H}$线和$\vec{M}$线。

提示：$\vec{B}$线、$\vec{H}$线和$\vec{M}$线见图5—10所示①。

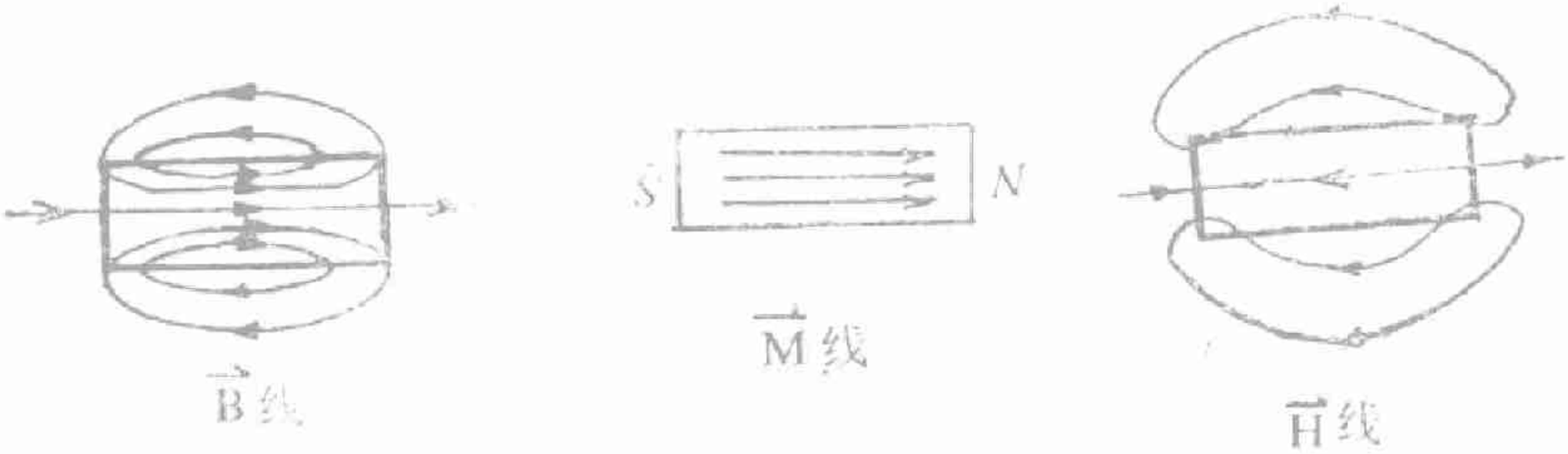



图 5 —10

5—12。在磁介质中，$\vec{H}$是否一定与$\vec{B}$同方向？

错答：因为$\vec{B}=\mu\vec{H}$，$\mu$又恒大于0，所以$\vec{H}$一定与$\vec{B}$同方 向，

分析：公式$\vec{B}=\mu\vec{H}$在铁磁介质的磁滞状态不再成 立，所 以上面的结论在铁磁介质的磁滞状态不再正确。例如，在条形磁铁内部，$\vec{B}$与$\vec{H}$ 的方向就相反。

练习题：

在磁介质中，$\vec{H}=0$时，$\vec{M}$、$\vec{B}$是否一定为零？

提示：不一定。例如永磁环中，$\vec{H}=0$，但$\vec{M}$、$\vec{B}$均不为0。

5—13。图5—11所示的是某铁磁材料的一条磁滞回线，其曲线与$H$轴交点的值为$H_c$，这个值是否 就是这种材 料 的 矫顽力？

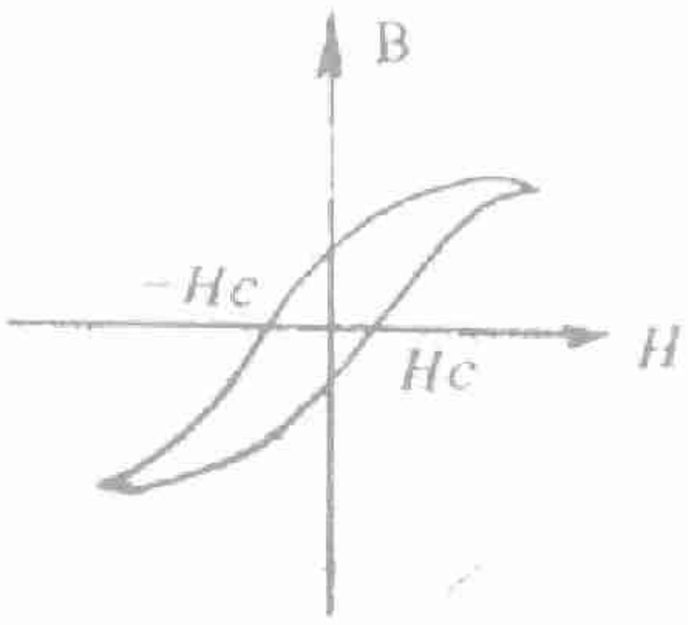



图 5 —11

错答：磁性材料的矫顽力是磁滞回线与$H$轴交点的值，因此$H_c$就是这种 材 料

①对于实际的条形磁铁，由于内部$\vec{M}\neq\vec{c}$，所以在内部$\vec{M}$线就有增减，当然在磁铁内部$\vec{H}$线也有增减。

(PDF压缩器 - 未注册版)

的矫顽力。

分析：磁性材料的矫顽力是最大磁滞回线与$H$轴交点的值，而不是任意一磁滞回线与$H$轴交点的值。因为图5—11所示的磁滞回线不一定是最大磁滞回线，所以$H_c$不一定是这种材料的矫顽力。

注：①软、硬磁性材料不是根据剩余磁感应强度$B_R$的大小来区分的，而是根据矫顽力的大小来区分的，$H_c$小的($H_c$～1安/米)为软磁材料；$H_c$大的($H_c$～$10^4$—$10^6$安/米)为硬磁材料。

②作磁钢的材料必须要$H_c$大，但$H_c$大的不一定就可作磁钢。只有$H_c$、$B_R$和$(BH)_{MAX}$三者都大才是理想的磁钢材料。

③对于磁性材料，有$M-H$曲线和$B-H$曲线。同一材料的二曲线对应的$H_c$并不一样，一般${}_MH_c > {}_BH_c$①。但在材料的$H_c$不大时，二者相差很小。

练习题：

1.有一磁环加某一电流磁化后将电流去掉，这时磁环中有剩余磁感应强度$B_r$，那么此值是否就是这种磁环材料的剩余磁感应强度$B_R$？

提示：磁性材料的剩余磁感应强度$B_R$是最大磁滞回线与$B$轴交点的$B$值，也就是把这种材料作成磁环，磁化到饱和后将磁化场去掉，这时磁环内的$B$值。对于本题中的磁环，加电流磁化时不一定磁化到了饱和，所以电流去掉后，磁环中的$B_r$不一定就是磁环材料的$B_R$。

2.对于铁磁材料，最大磁化率和最大磁导率是否对应于$M-H$起始磁化曲线和$B-H$起始磁化曲线上斜率最大的点？

提示：磁化率和磁导率的定义为$\chi_m = \frac{M}{H}$和$\mu = \frac{B}{H}$，而不

---

①参见5—14题

(PDF压缩器 - 未注册版)

是$\chi_m=\frac{dM}{dH}$和$\mu=\frac{dB}{dH}$①。因此，最大磁化率和最大磁导率并不是对应于$M-H$和$B-H$起始磁化曲线上斜率最大的点。

注：①铁磁材料有磁滞现象，即材料内的$M$、$B$不是$H$的单值函数，具体值与磁化历史有关。在定义$\chi_m=M/H$和$\mu=B/H$中，$M$和$B$是起始磁化曲线上的$M$和$B$。

②铁磁材料内的$M$、$B$、$H$与磁介质的几何形状有关，所以铁磁介质的$M-H$、$B-H$曲线与介质的几何形状有关。对于磁性材料的$M-H$、$B-H$曲线一定要是将这种材料的介质作成磁环后测出的曲线(因这样就消除了几何形状对$M$、$B$、$H$的影响)。当然$\chi_m=M/H$和$\mu=B/H$中的$M$、$B$、$H$也一定要是介质为磁环状时测得的值，而不是介质为任一形状时测得的值。

5—14。当磁性材料的$B-H$磁滞回线与$H$轴相交时，相应的$M-H$磁滞回线②是否也与$H$轴相交？

错答：当$B-H$磁滞回线与$H$轴相交时，相应的$M-H$磁滞回线也与$H$轴相交。

分析：当磁性材料的$B-H$磁滞回线与$H$轴相交时，$B=0$、$H=-{}_BH_C$，则由$\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})$可知，$M=\mu_{0B}H_C>0$，即相应的$M-H$磁滞回线与$H$轴不相交。（但要注意，$B-H$磁滞回线与$B$轴相交时，相应的$M-H$曲线也与$B$轴相交）。

由于$B=0$时，$M=\mu_{0B}H_C>0$，因此要使$M=0$还要增加反向磁化场。由此可知，$M=0$对应的${}_MH_C$和$B=0$对应的${}_BH_C$大（此结论对任意一对相对应的$B-H$磁滞回线和$M-H$磁滞回线都适应，当然对最大磁滞回线也适用）。

练习题：

某磁性材料的$\mu-H$曲线达到峰值时，它的$\chi_m-H$曲线是

---

①$\frac{dM}{dH}$和$\frac{dB}{dH}$分别为微分磁化率和微分磁导率.

②指磁化条件完全一样时对应的曲线。

(PDF压缩器 - 未注册版)

否也达到了峰值？

提示：由$\mu=\mu_0(1+\chi_m)$可知，$\mu$达到峰值时$\chi_m$也达到峰值。

5—15。一条形铁磁介质中心的最大磁滞回线见图5—12所示①，现将该铁磁介质放入螺线管中，给螺线管加电流使介质磁化到饱和状态，然后将电流去掉，问去掉电流后介质中心的磁状态处于曲线上的哪一位置？

错答：去掉电流后，$H=0$，所以磁状态处于曲线上的$a$点。

分析：由于条形磁介质要产生退磁场，所以去掉电流后，介质中的$H=H'\neq 0$，则中心的磁状态不是处于曲线上的$a$点，而是处于$ab$之间退磁曲线上的某一点。

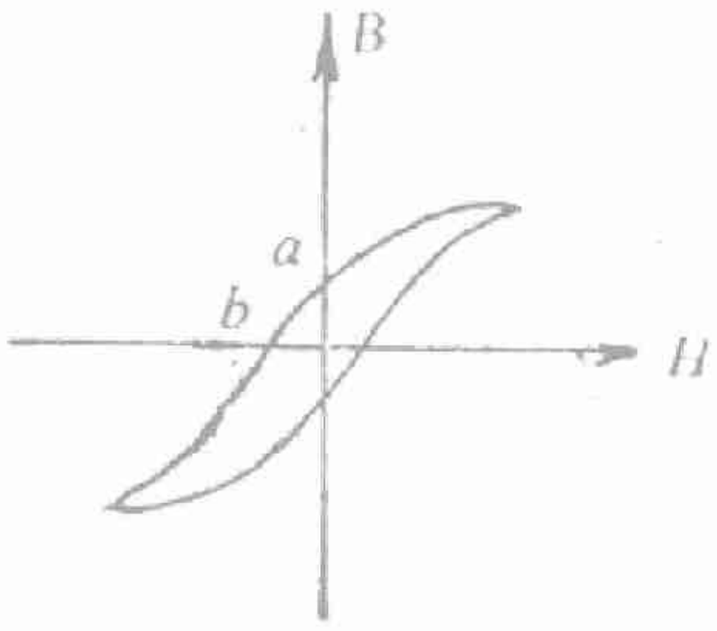


图 5 —12

练习题：

磁铁内部的磁化强度是否就是充磁时的磁化强度？

提示：由$M—H$磁滞回线可知，磁铁内部的磁化强度并不等于充磁时的磁化强度。

5—16。如图5—13所示，一条形磁铁悬挂在很强的均匀外磁场中，开始让$N$极迎向外场的方向，然后将它扭转一个小角度，松手后它的$N$极将指向哪个方向？

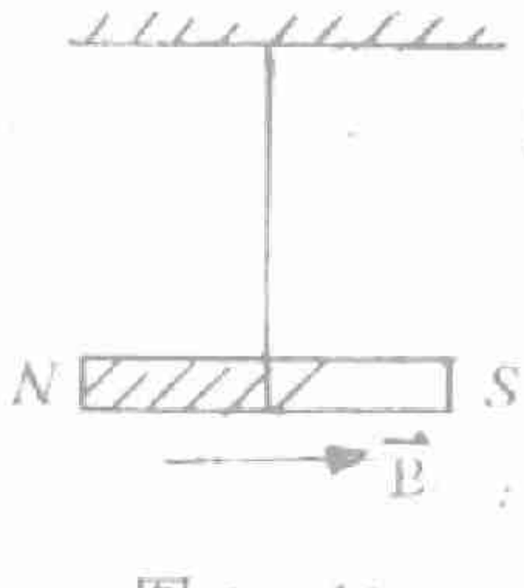


图 5 —13

错答：由于外场的作用磁铁掉向，它的$N$极将指向外场的方向。

分析：磁铁是一种矫顽力较大，并且已被磁化的磁介质，它放入外场后，其内部的$B$、$H$都要变化，不再等于无外场时的$B$、$H$（根据$B—H$磁滞回线很

①条形磁介质放在外场中时，各处的$B$、$H$一般不等，所以每一点的磁滞回线也不相同。

(PDF压缩器 - 未注册版)

易理解）。当反向外场较小，且$H<H_c$时，$B$的方向与无外场时的相同，即磁铁的极性未变；当反向外场较强，且$H>H_c$时，$B$的方向与无外场时的相反，即磁铁的极性发生了反转，这样就变成了一个与原来极性相反的磁铁了。

对图5—13所示的情况，由题意可知，外场强，所以磁铁的极性要发生反转。则它在外场磁力作用下，$N$极（原来的$N$极，亦即反转后的$S$极）要迎向外场方向。

练习题：

如图5—14所示，一条形磁铁放在外场中，让$N$极迎向磁力线，问磁铁内部$a$点的$\vec{B}$是否可为零？磁铁外部$b$点的$\vec{B}$的大小是否可大于$|\vec{B}_0|$？

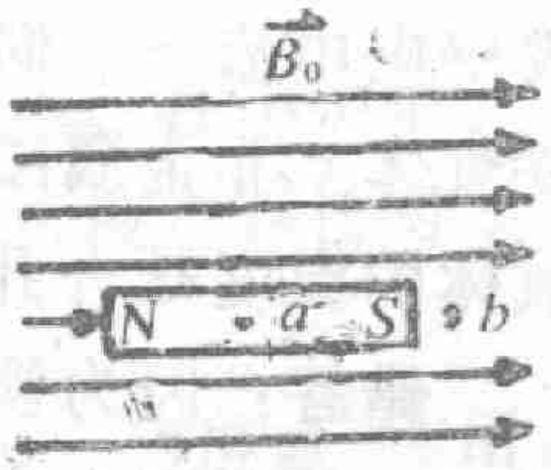


图 5—14

提示：由磁介质的磁滞回线可知，磁铁（已被磁化的磁介质）内部$\vec{B}$随外场要发生变化。当然在外场合适时，内部$a$点的$\vec{B}$可能为零，外场再增加时，$\vec{B}$的方向与无外场时的相反，即磁极发生了反转，此时$b$点的$|\vec{B}|>|\vec{B}_0|$。

顺便说明：在外场和磁铁共存空间的磁场$\vec{B}=\vec{B}_{外}+\vec{B}_{铁}=\vec{B}_0+\vec{B}'$中，$\vec{B}_{铁}$（即$\vec{B}'$）不等于无外场时磁铁产生的磁场，方向也可能与无外场时的相反（即磁极性可能发生反转）。原因是：磁铁在外场中时，它的$\vec{M}$发生了变化，$\vec{J}'=\nabla\times\vec{M}$和$\vec{i}'=\vec{M}\times\vec{n}$发生了变化，所以由束缚电流产生的$\vec{B}'$（磁铁产生的场）就要发生变化。

5—17．大家知道电磁铁可吸引铁，那么能否用它运送刚出炉的铁水？

错答：当然可以。

分析：对于铁磁介质，当温度高于某一温度——居里温度时，它由铁磁介质变成了顺磁介质。

对于铁水，其温度高于铁的居里温度① 所以它并不是铁磁

①纯铁的熔点温度1536℃，居里温度为768℃.

(PDF压缩器 - 未注册版)

介质，而是磁性很弱的顺磁介质，当然不可用电磁铁来运送它。

练习题：

磁电式电流表测量电流时，其读数是否与它的温度有关？

提示：磁电式电流表测电流时，指针的偏转角$\theta = S_\theta I$，其中$S_\theta \propto B$，而$B$是由表内的永磁铁产生的，它与温度有关，所以$\theta$与温度有关，即读数与温度有关。正因此，一切磁电式仪表均有一定的使用温度范围。

5—18。在金属外面绕有通过变化电流的线圈时，金属中形成感应电流——涡流。涡流产生热量，金属的温度升高。那么在铁氧体（非金属磁性材料）外面绕有通过变化电流的线圈时，铁氧体的温度是否升高？

错答：因为铁氧体是绝缘体，在外面绕有通过变化电流的绕圈时，内部不会产生涡流，当然不会产生热量，所以铁氧体的温度不会升高。

分析：在铁氧体外面绕有通过变化电流的线圈时，虽然内部不会产生涡流，没有涡流引起的热量，但是由于变化电流产生的磁场不断变化，铁氧体中发生磁滞效应，产生磁滞损耗，这部分损耗转变成了热量，所以铁氧体的温度要升高。

练习题：

假设有一种金属磁性材料的磁滞回线与一种非金属磁性材料的磁滞回线所包围的面积相同。用这两种磁性材料作变压器的铁芯时，哪一种耗能较大？

提示：由于这两种材料的磁滞回线所包围的面积相同，所以它们的磁滞损耗一样。但是由于金属磁性材料还有涡流损耗，所以金属磁性材料耗能较大。

5—19。实用上可用铁壳作磁屏蔽，把它放在磁场中时，其包围空间的磁场是否是零？

(PDF压缩器 - 未注册版)

错答：由于铁壳的屏蔽作用，铁壳包围空间的磁场为零。

分析：①电屏蔽时，屏蔽壳——金属壳包围空间的电场为零；而磁屏蔽时，屏蔽壳——铁磁介质壳包围空间的磁场不绝对等于零，但数值要大大减小。即电屏蔽可完全屏蔽电场，而磁屏蔽不可完全屏蔽磁场。

②电屏蔽时，屏蔽壳中（材料内部）无电场；而磁屏蔽时，屏蔽壳中（材料内部）有磁场，且有较强的磁场。

练习题：

1.一电荷用铁质球壳包围后，球外是否有电场？一磁铁用铁质壳包围后，壳外是否有磁场？

提示：都有。不过后者的磁场比未包围时小，且小的多。

2.将一玻璃放入一磁铁和铁块之间后，会否减小磁铁对铁块的吸引力？

提示：玻璃是非铁磁材料，对磁场无隔档——“屏蔽”作用，所以它放入磁铁和磁块之间后不会改变磁铁对铁块的吸引力。

3.指南针的外壳是否可用金属壳？

提示：可用，如可用铝壳。只要是非铁磁材料制作的金属壳都可用。

5—20．如图5—15所示，蹄形磁铁对铁块$a$的吸引力与旁边铁片$b$的存在是否有关？

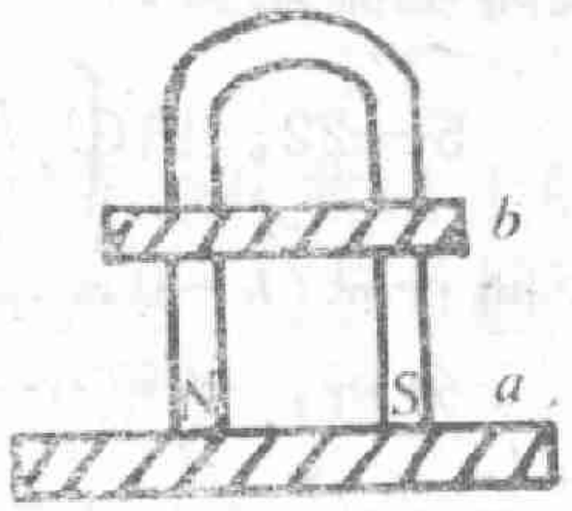



图 5 —15

错答：无关。

分析：$b$存在时，在$b$中要通过一部分磁通，则通过$a$的磁通就要减小（相当于给磁路$a$并联了一个磁路$b$，当然要分掉$a$中的一部分磁通）．这样蹄形磁极表面的磁场$B$就要减小，所以蹄形磁铁对$a$的吸引力 $F = B^2S/2\mu_0$①（$S$为两极与$a$相接触的总面积）减小。

①见赵凯华编《电磁学》下册$P_{112}$(1978)。

(PDF压缩器 - 未注册版)

练习题：

如图5—16所示，$a$是条形磁铁，$b$、$c$是二铁棒，$a$对$b$、$c$的吸引力是否与$b$、$c$下端的距离$l$有关？

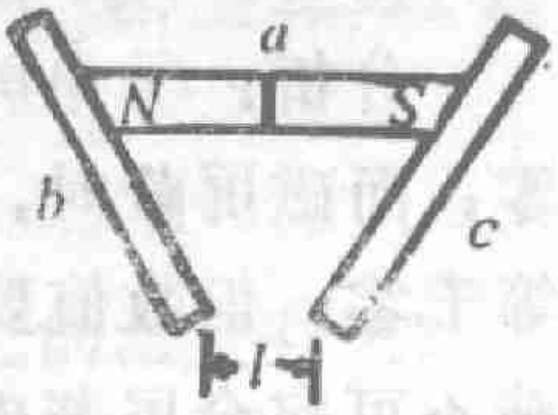


图 5—16

提示：$l$增大，磁路中磁阻增大，磁路中的磁通减小，则$a$与$b$和$a$与$c$接触面上的磁场$B$减小，所以吸引力减小。

## 三 错误的推论

5—21。由$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_o$可知，$\vec{H}$仅与$I_o$有关，与束缚电流无关。

分析：由$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_o$只能说明$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}$与束缚电流无关，但不能说明$\vec{H}$也与束缚电流无关。

由图5—17可以说明$\vec{H}$一般与束缚电流有关。如在介质外$P$点，$\vec{H} = \vec{B}/\mu_o$，因$\vec{B}$与束缚电流有关，所以$\vec{H}$也与束缚电流有关。但当均匀磁介质充满场存在的整个空间时，$\vec{H} = \vec{B}_o/\mu_o$，与束缚电流无关。

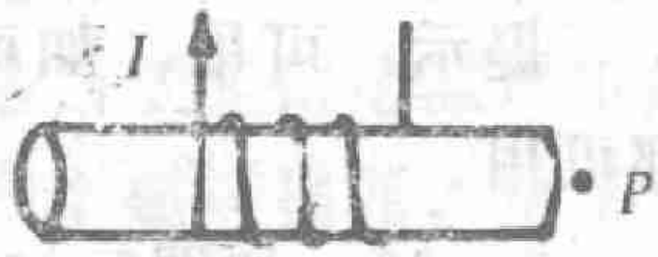


图 5—17

5—22。由$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_o$可知，当整个空间无传导电流时，空间各点$\vec{H} = 0$。

分析：当整个空间无传导电流时，$\vec{H}$在任一环路上的环量$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = 0$，但$\vec{H}$不一定等于0。例如，磁铁存在的空间$I_o = 0$，但$\vec{H} \neq 0$。

5—23。由$\oint_L \vec{B}'\cdot d\vec{l} = \mu_o I'$，$\oint_L \vec{M}\cdot d\vec{l} = I'$得，$\oint_L \vec{B}'\cdot d\vec{l}$

(PDF压缩器 - 未注册版)

$= \mu_o \int_L \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$，所以$\vec{B}' = \mu_o \vec{M}$。

分析：由$\oint_L \vec{B}' \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_o \int_L \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$推不出$\vec{B}' = \mu_o \vec{M}$。

$\vec{B}' = \mu_o \vec{M}$只有在均匀磁介质充满场存在的整个空间时成立①。

5—24。在5—4题中，有缝隙圆环在介质内的$H = 0$，缝隙间的$H = M$，如取图5—3中的环路，则沿环路的积分$\oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_1 M$。而在此无传导电流，所以由安培环路定律可知，$\oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$，显然前后矛盾。

分析：这是由于近似引起的矛盾。原因是我们求$H$时作了$l_1 + l_2 \doteq l_2$的近似处理，如果我们不作近似处理，环内的场分别为

$$H_1 = \frac{l_2}{l_1 + l_2} M, \quad H_2 = -\frac{l_1}{l_1 + l_2} M.$$

所以$\oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = H_1 l_1 + H_2 l_2 = \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} M - \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} M = 0$。

可见与安培环路定理得出的结论一致。矛盾消除。

5—25。磁性材料的磁导率定义为$\mu = B/H$，由此可得$B = \mu H$。由于定义对铁磁材料也成立，所以$B = \mu H$对铁磁材料也成立。

分析：对铁磁材料，在$\mu = B/H$中，$B$、$H$是磁化曲线上的点对应的值，所以$B = \mu H$仅对磁化曲线上的状态成立，对非磁化曲线上的状态不成立。

5—26。在闭合永磁环中，$B$不等于零，$H$等于零。由能量密度公式$w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$可知$w_m = 0$，可见环中磁场没有磁能。

---

①参注$P_{136}$注①.

(PDF压缩器 - 未注册版)

分析：对非线性磁性材料(不论是磁化状态还是磁滞状态)，公式$w_m = \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B}$不成立①，所以上面的推论是错误的。

只要有磁场必有磁能。

5—27. 将一钢球切割成若干锥体，把每一锥体磁化，使锥体的大端成$N$极，尖端成$S$极（或相反）。然后把这些磁化的锥体再合并成球体，这样，磁球便是一个只有$N$极的磁单极，可见磁单极是存在的。

分析：将各磁化的锥体并合成球体后，磁性立即消失，又变成了一个无磁性的钢球，因此用这种方法是作不成磁单极的。

---

①见郭硕鸿编《电动力学》$P_{42}$(1979).

(PDF压缩器 - 未注册版)

# 第六章　电磁感应和暂态过程

## 一　错误的解法

6—1．如图6—1所示，⊏形导体上面放一可以移动的直导体$ab$，并处于变化的均匀磁场$B=kt$中，其平面与磁场方向垂直。当导体$ab$以速度$\vec{v}$向右移动时，$abcd$回路中的感应电动势为多少？（导体回路的自感忽略不计①。$t=0$时导体$ab$距$cd$边为$h$）。

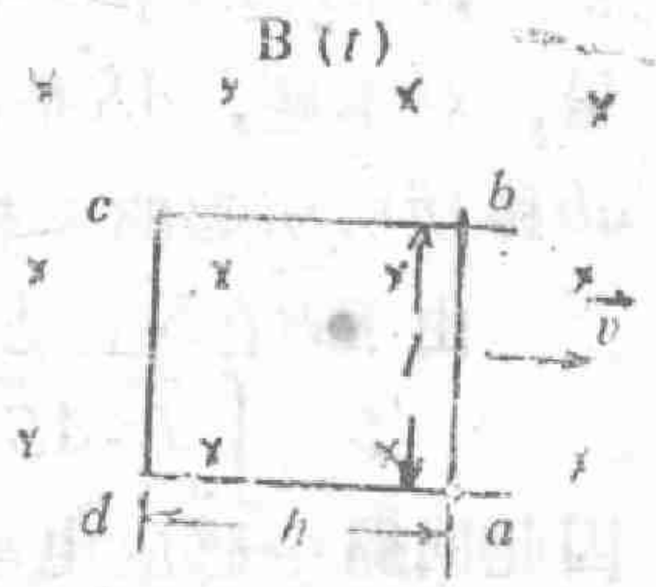



图6—1

错解一：当导体$ab$以$\vec{v}$向右移动时，$abcd$回路的面积增加，穿过它的磁通量改变，改变量为

$$d\Phi = BdS = Blvdt,$$

代入$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$可得回路中的感应电动势为

$$\varepsilon = -Blv = -klvt.$$

分析：由于$B$随时间变化，导体$ab$在移动过程中每时每刻$B$不相等，因此$abcd$回路面积增加$dS$时，回路中的磁通量改变不等于$BdS$，即$d\Phi \neq BdS$，而是$d\Phi = d(\vec{B}\cdot\vec{S}) = d[kt\cdot l(h+vt)]$②$= kl(h+2vt)dt$。因此，回路中的感应电动势为

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -kl(h+2vt).$$

负号表示感应电动势的实际方向与标定方向相反（标定方向与

①只要是闭合导体回路一定存在自感，

②取$S$的正法线方向与$\vec{B}$的方向一致。

(PDF压缩器 - 未注册版)

$\vec{B}$的方向满足右手定则①）。

错解二：由 $\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}$，$\Phi=\int_s \vec{B}\cdot d\vec{S}$可得，回路中感应电动势为

$$\varepsilon=-\frac{d\int \vec{B}\cdot d\vec{S}}{dt}=-\frac{d\int kt\cdot lvdt}{dt}=-\frac{d\left[\frac{1}{2}klvt^2\right]}{dt}=-klvt.$$

分析：$\Phi=\int_s \vec{B}\cdot d\vec{S}$是对面积$S$积分（$S$是$t$时刻回路包围的面积），$d\vec{S}$是$S$中一个面元，而不是由于回路变化、在$t$时刻$S$的增量。对本题，$d\vec{S}$是$t$时刻$abcd$回路包围面积的面元，而不是由于$ab$移动所引起的面积的增量，即 $dS\neq lvdt$

由于$\vec{B}$在$S$上是均匀的，所以

$$\Phi=\int_s \vec{B}\cdot d\vec{S}=B\int_s dS=BS=ktl(h+vt).$$

因此回路中感应电动势为

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d[ktl(h+vt)]}{dt}=-kl(h+2vt).$$

错解三：由$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}$，$\Phi=\int_s \vec{B}\cdot d\vec{S}$可得，回路中感应电动势为

$$\varepsilon=-\frac{d\int_s \vec{B}\cdot d\vec{S}}{dt}=-\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}=-\int_s kdS②=-kl(h+vt).$$

分析：只有积分面$S$的边界线$L$固定不动时，才有

$$\frac{d\int_s \vec{B}\cdot d\vec{S}}{dt}=\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}.$$

在本题中，回路边界$abcd$随时间变化，所以上式不成立，解法当然是错误的。

错解四：由公式$\varepsilon=Blv$得回路$abcd$中的感应电动势为

$$\varepsilon=klvt.$$

---

①将右手四指弯曲，用它代表回路中感应电动势的标定方向，则伸直拇指指向$\vec{B}$的方向。

②取$S$的正法线方向与$\vec{B}$的方向一致。

(PDF压缩器 - 未注册版)

分析：公式$\varepsilon = Blv$求出的仅是动生电动势，在此由于$B$随时间变化，还产生感生电动势，所以总的感应电动势为动生电动势与感生电动势之和，即

$$\varepsilon = \varepsilon_{动} + \varepsilon_{感} = \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

错解五：根据$\varepsilon = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$，

并取积分路径$L$从$a$到$b$，积分面$S$的正法向为$\vec{B}$的方向，得$abcd$回路中的感应电动势为

$$\varepsilon = \int_a^b vB\mathrm{d}l - \int_s \frac{\partial B}{\partial t}\mathrm{d}S = Blv - kS$$

$$= klvt - kl(h + vt) = -klh.$$

分析：用$\varepsilon = \varepsilon_{动} + \varepsilon_{感} = \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$求$\varepsilon$时，二者标定方向应一致，在上述解法中，$\varepsilon_{动}$的标定方向为积分路径$\mathrm{d}\vec{l}$的方向，即为$a$指向$b$，而$\varepsilon_{感}$的标定方向为$\vec{B}$的右手螺旋方向，即$badc$方向，这两个方向不统一，当然不可直接相加。

正确解法：取逆时针方向为感应电动势的标定方向，则回路中的感应电动势为

$$\varepsilon = \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_a^b vB\mathrm{d}l + \int_s \frac{\partial B}{\partial t}\mathrm{d}S$$

$$= vBl + kl(h + vt) = kl(2vt + h).$$

或取顺时针方向为电动势的标定方向，则回路中的感应电动势为

$$\varepsilon = \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\int_b^a Bv\mathrm{d}l - \int_s \frac{\partial B}{\partial t}\mathrm{d}S$$

$$= -kvlt - kl(h + vt) = -kl(2vt + h).$$

负号表示电动势的实际方向与标定方向相反。

练习题：

(PDF压缩器 - 未注册版)

如图6—2所示，在无限长直导线上面通电流$i=I_0\cos\omega t$，其平面内有一$\square$形导体，和一可移动的直导体$ab$($ab$平行于无限长直导线)。当$ab$以$\vec{v}$向右运动时，回路中任意时刻的感应电动势为多少？($t=0$时，$ab$距无限长直导线为$h_2$)。

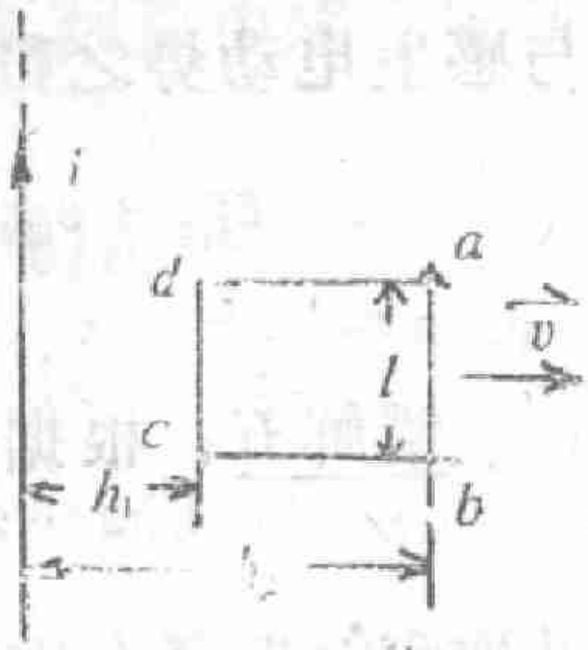


图6—2

答案：由$\varepsilon=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$或$\varepsilon=\oint_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}-\int_s\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$可得

$$\varepsilon=-\frac{\mu_0 lI_0}{2\pi}\left[\frac{v}{h_2+vt}\cos\omega t-\omega\sin\omega t\ln\frac{h_2+vt}{h_1}\right].$$

$\varepsilon$的标定方向为顺时针方向。

6—2。如图6—3所示，一弯曲的导体杆$aob$、绕$a$点在均匀稳恒磁场中以角速度$\omega$顺时针旋转，试求导体杆上产生的动生电动势。

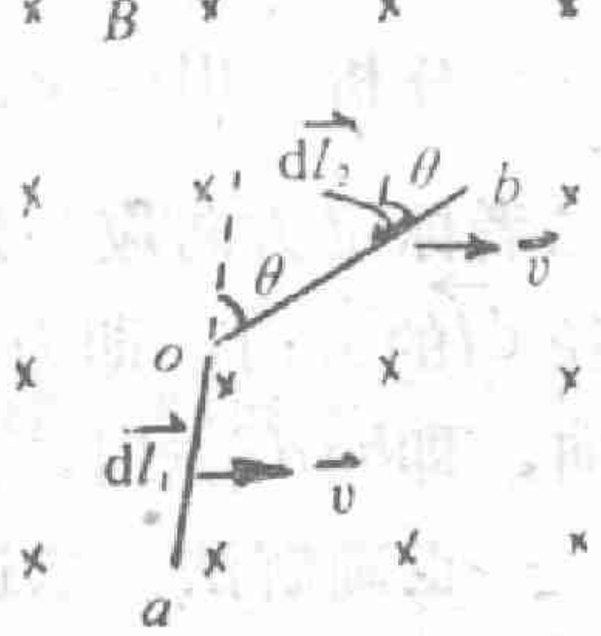


图6—3

错解：导体杆上产生的动生电动势为

$$\varepsilon_{aob}\text{①}=\int_a^b(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_a^o(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}_1+\int_o^b(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2$$

$$=\int_a^o Bv\,\mathrm{d}l_1+\int_o^b Bv\cos\theta\mathrm{d}l_2$$

$$=\int_a^o B\omega l_1\mathrm{d}l_1+\int_o^b B\omega l_2\cos\theta\mathrm{d}l_2$$

$$=\frac{1}{2}B\omega\overline{oa}^2+\frac{1}{2}B\omega\overline{ob}^2\cos\theta=\frac{1}{2}B\omega(\overline{oa}^2+\overline{ob}^2\cos\theta).$$

分析：由于导体杆是绕$a$点转动，不是绕$o$点转动，所以在$ob$段，$v\neq\omega l_2$，即

①注意$\varepsilon_{aob}$表示电动势的标定方向为$a$到$b$.

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$\varepsilon_{ob}=\int_o^b(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}_2=\int_o^b Bv\cos\theta\mathrm{d}l_2\neq\int_o^b B\omega l_2\cos\theta\mathrm{d}l_2.$$

这就是上述解法的错误所在。

本题可以由辅助回路法① 来求解：

假设$ab$之间有一直导体杆，与曲导体杆构成闭合回路。当回路转动时，由于回路中无磁通量变化，所以回路中感应电动势为零。由此可得曲导体杆中的动生电动势等于直导体杆中的动生电动势，即

$$\varepsilon_{aob}=\frac{1}{2}B\omega\overline{ab}^2=\frac{1}{2}B\omega(\overline{oa}^2+\overline{ob}^2+2\overline{oa}\cdot\overline{ob}\cdot\cos\theta).$$

当$\theta=0$时，即导体杆为直导体杆时，$\varepsilon_{aob}=\frac{1}{2}B\omega\overline{ab}^2$。

练习题：

在图6—3中，若弯曲导体杆绕$o$点在均匀稳恒磁场中以角速度$\omega$顺时针旋转，求$ab$两端的动生电动势。

答案：$\varepsilon_{aob}=\frac{1}{2}B\omega(\overline{ob}^2-\overline{oa}^2)$。

由此可见：①$\varepsilon_{aob}$与导体杆弯曲程度无关。

②当$\overline{ob}=\overline{oa}$时，$\varepsilon_{aob}=0$。

6—3。一无限长同轴电缆，内圆筒的半径为$R_1$，外圆筒的半径为$R_2$。在上面通过变化电流$i=bt$时，空间感生电场的分布为何？

错解：取图6—4所示的积分环路$abcd$，并设$\overline{ab}=l$，$\mathrm{d}\vec{S}$的方向与$\vec{B}$的方向一致，则通过此环路所围面积的磁通量为

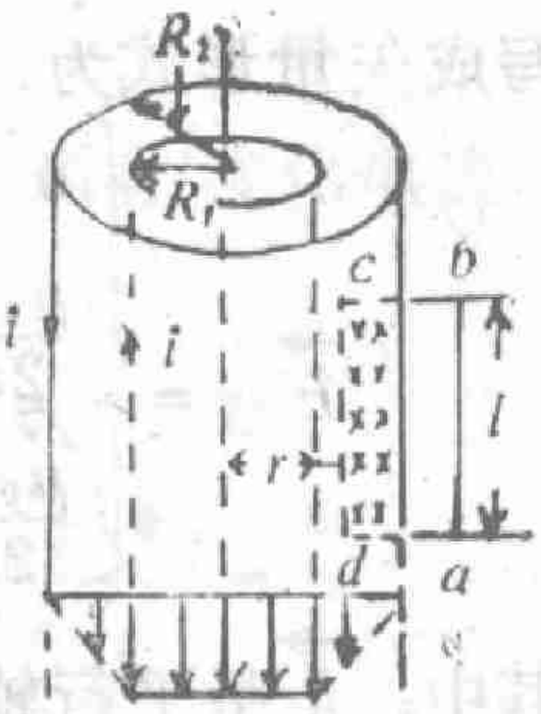



图6—4

①辅助回路法是求非闭合回路中感应电动势的一种较好方法，但要注意，所作的辅助曲线上，其感应电动势或者等于零或者为一易求的数值。

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$\Phi=\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\begin{cases}0 & (r>R_2),\\ \dfrac{\mu_0 i l}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{r} & (R_2>r>R_1),\\ \dfrac{\mu_0 i l}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1} & (r<R_1).\end{cases}$$

感生电场沿环路$abcd$的积分为

$$\oint_{abcd}\vec{E}_{感}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\left(\int_{ab}+\int_{bc}+\int_{cd}+\int_{da}\right)\vec{E}_{感}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$
$$=0^{①}+0+E_{感}\cdot\overline{cd}+0$$
$$=E_{感}\cdot l$$

注意$\vec{E}_{感}$的标定方向为从$c$到$d$。则由$\oint_L \vec{E}_{感}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$，并注意到$i=bt$，可得，

$$E_{感}=\begin{cases}0 & (r>R_2),\\ -\dfrac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{r} & (R_2>r>R_1),\\ -\dfrac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1} & (r<R_1).\end{cases}$$

写成矢量形式为

$$\vec{E}_{感}=\begin{cases}0 & (r>R_2),\\ \dfrac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{r}\vec{k} & (R_2>r>R_1),\\ \dfrac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}\vec{k} & (r<R_1).\end{cases}$$

其中，$\vec{k}$是平行轴线向上的单位矢量。

分析：在$\varepsilon_{感}=-\int_S\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$中，$\varepsilon_{感}$的标定方向为积分面$S$正法向的右手螺旋方向；$\varepsilon_{感}=\oint_L\vec{E}_{感}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$中，$\varepsilon_{感}$的标定方向为积分

①由麦克斯韦方程组可以证明在同轴电缆外面$\vec{E}_{感}=0$.

(PDF压缩器 - 未注册版)

路径$L$的方向。因此$\oint_L \vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}_{感}=-\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$中，$d\vec{l}$的方向与$d\vec{S}$的方向成右手螺旋关系，一者确立后另一者也确立。可在上面的解法中，求$\Phi=\int_s \vec{B}\cdot d\vec{S}$时，$d\vec{S}$的方向取了$\vec{B}$的方向，而求$\oint_L \vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}$时，$d\vec{l}$的方向取了$abcd$的方向，二者方向不成右手螺旋关系，而是左手螺旋关系，所以结果是错误的。不过与正确答案只差一负号。

正确答案为：

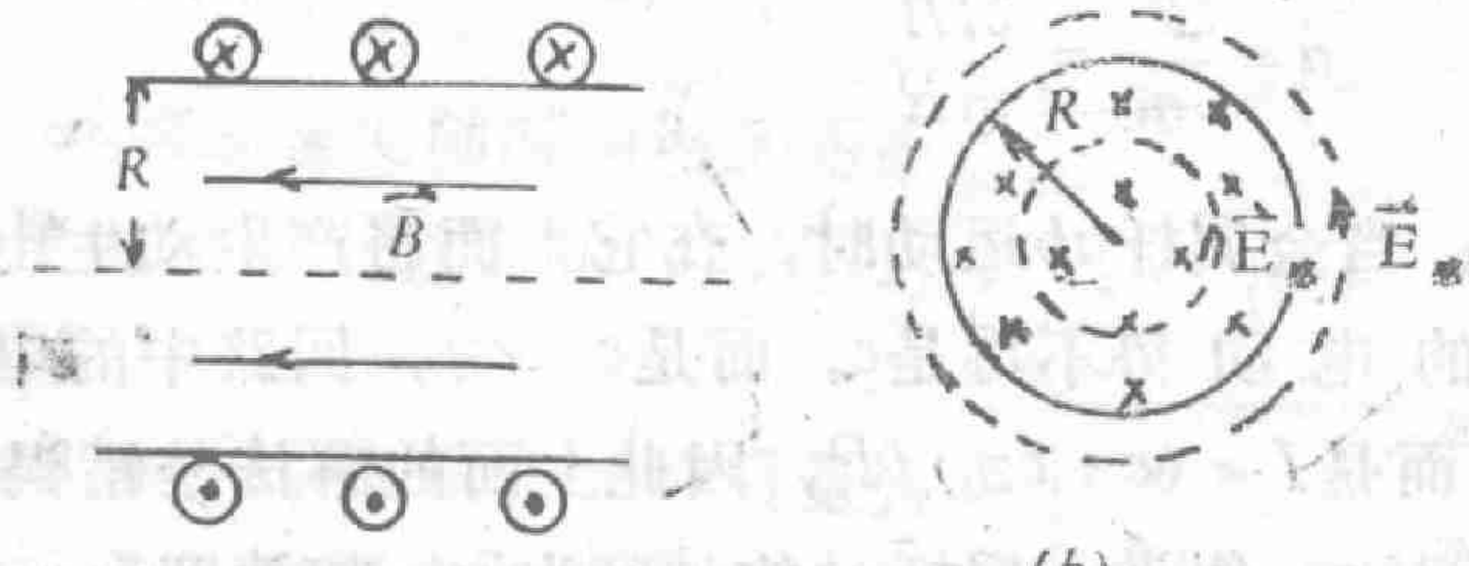
$$\vec{E}_{感}=\begin{cases}0 & (r>R_1),\\ -\frac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\frac{R_2}{r}\vec{k} & (R_2>r>R_1),\\ -\frac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}\vec{k} & (r<R_1).\end{cases}$$

其分布见图6—4所示。

由此可知，同轴电缆的内筒上存在感应电动势，在外筒上无感应电动势。

练习题：

如图6—5所示，半径为$R$的长直螺线管①，通有 变化电流，




(a)　　(b)

图6—5

①假设螺线管的绕线与轴线的夹角为90°。

(PDF压缩器 - 未注册版)

使变化率$\frac{dB}{dt}$为大于零的常数，试求空间感生电场分布。

答案：

$$\vec{E}_{感}=\begin{cases}-\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}\vec{\theta}_0 & (r<R),\\ -\frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt}\vec{\theta}_0 & (r>R).\end{cases}$$

其中$\vec{\theta}_0$是与$\vec{B}$成右手螺旋方向上的单位矢量。

6—4．如图6—6所示，两根平行金属杆相距$l$，上面放置一根可以自由滑动的金属杆$ab$，在二平行杆的同一端接上电动势为$\varepsilon$，内阻为$R$的电源．整个装置．放在均匀稳恒磁场$B$中，由于磁力作用，金属杆$ab$将开始运动．求其加速度（金属杆的电阻和回路的自感忽略不计，$ab$的质量为$m$）．

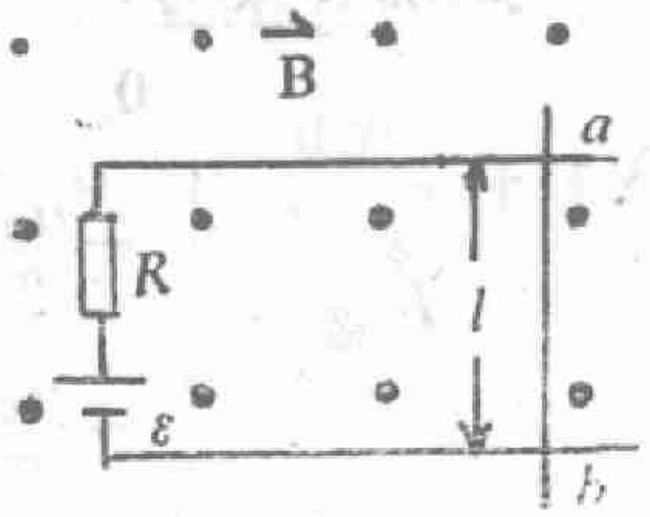


图6－6

错解：回路中的电流为

$$I=\frac{\varepsilon}{R},$$

由$d\vec{F}=Id\vec{l}\times\vec{B}$可得金属杆$ab$受到的安培力的大小为

$$F=BlI=\frac{Bl\varepsilon}{R},$$

因此加速度为

$$a=\frac{F}{m}=\frac{\varepsilon lB}{mR}.$$

分析：当金属杆$ab$运动时，在它上面将产生动生电动势，因此回路中的电动势不再是$\varepsilon$，而是$\varepsilon+\varepsilon_{动}$，回路中的电流不再是$I=\varepsilon/R$，而是$I=(\varepsilon+\varepsilon_{动})/R$，因此上面的解法是错误的。

正确解法：假设金属杆$ab$的速度为$v$，加速度为$a=\dot{v}$，此时动生电动势大小为

$$\varepsilon_{动}=Blv,$$

方向与$\varepsilon$相反．因此回路中电流为

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$I=\frac{\varepsilon-Blv}{R}.$$

由$d\vec{F}=Id\vec{l}\times\vec{B}$可得，金属杆$ab$受到的磁场力的大小为

$$F=IlB=\frac{\varepsilon-Blv}{R}Bl.$$

再由$F=ma$得

$$\frac{\varepsilon-Blv}{R}Bl=m\dot{v},$$

整理得

$$mR\dot{v}+B^2l^2v=Bl\varepsilon.$$

解此方程可得

$$v=\frac{\varepsilon}{Bl}+Ke^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}.$$

由初始条件：$t=0$时，$v=0$可得

$$K=-\frac{\varepsilon}{Bl},$$

所以金属杆$ab$的速度为

$$v=\frac{\varepsilon}{Bl}(1-e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}),$$

则加速度为

$$a=\dot{v}=\frac{Bl\varepsilon}{mR}e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}.$$

由此可见，$ab$的加速度随时间增加而减小，最后加速度为零，速度为$v=\varepsilon/Bl$。

练习题：

1．在图6—7中金属杆$ab$的质量为$m$，固定的匚形金属框架宽为$l$，均匀稳恒磁场为$B$，当用力$F$拉金 属杆$ab$时，其加速度为多少？（假设匚形金属框架是光滑的，回路$abcd$的电阻恒为$R$）。

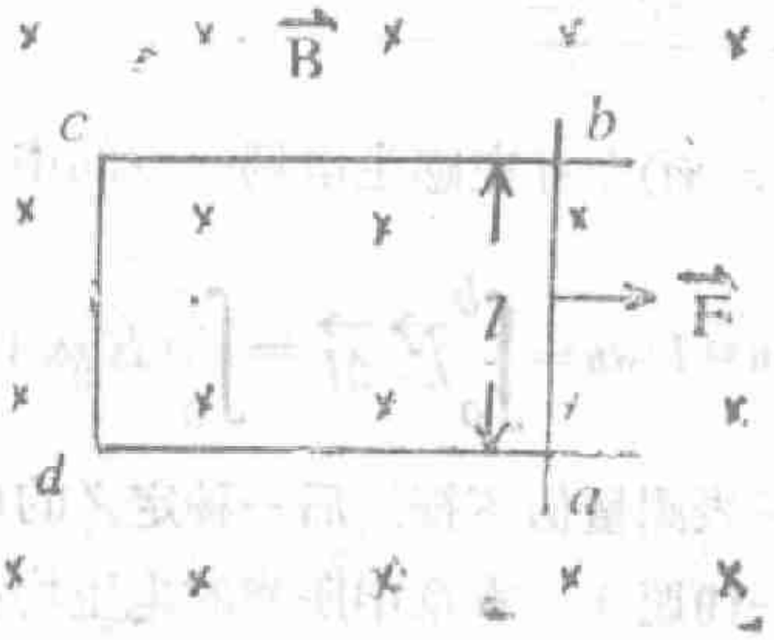



图6—7

(PDF压缩器 - 未注册版)

提示：金属杆$ab$除受外力外，还受安培力，二力方向相反。杆的运动方程为

$$F-\frac{B^2l^2v}{R}=m\dot{v}。$$

初始条件为：$t=0$时，$v=0$。

解之可得

$$v=\frac{FR}{B^2l^2}(1-e^{\frac{B^2l^2}{mR}t})。$$

所以金属杆的加速度为

$$a=\dot{v}=\frac{F}{m}e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}。$$

2．在图6—7中，若$ab$不受外力（即$F=0$），但以初速度$v_0$向右运动。试求$t$秒内运动了多远？

答案：在$t$秒内运动的距离为

$$S=\int_o^t v\mathrm{d}t=\frac{mv_oR}{B^2l^2}(1-e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t})。$$

6—5．在绕线密度为$n$的长直螺线管中，放一半径为$r$、且与螺线管同轴的金属环（见图6—8所示）。当螺线管中通过电流$i=kt$时，金属环$ab$两点之间的电压①为多少？（假设金属环单位长度上的电阻为$R_o$，$\vec{B}$的方向如图所示，环的自感忽略不计）。

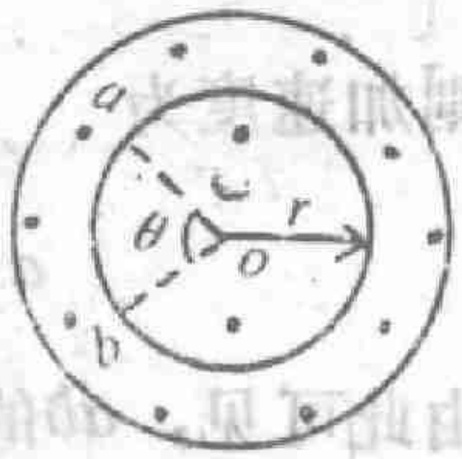


图6—8

错解：电流$i=kt$在螺线管中产生的磁场为

①在存在感生电场的空间中，电压的定义有两种：一种是$U_{ab}=\int_a^b\vec{E}_{静}\mathrm{d}\vec{l}$；另一种是$U_{ab}=\int_a^b\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_a^b(\vec{E}_{静}+\vec{E}_{感})\cdot\mathrm{d}\vec{l}$．前一种定义的电压与路径无关，但与电压表测量值不符．后一种定义的电压一般与路径有关，但与电压表测量值一致（见6—19题）．本章中所指的电压均指第一种定义的，而在下一章中所指的电压均指第二种定义的。

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$B = \mu_0 ni = \mu_0 nkt.$$

由$\vec{E}_{感} = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}\vec{\theta}_0$[①]可得圆环所在处的感生电场为

$$\vec{E}_{感} = -\frac{\mu_0 nr}{2}\frac{di}{dt}\vec{\theta}_0 = -\frac{1}{2}\mu_0 nkr\vec{\theta}_0.$$

由$\varepsilon = \oint_L \vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}$得 金属环中感生电动势为

$$\varepsilon = E_{感}\cdot 2\pi r = -\mu_0 \pi nkr^2.$$

其标定方向为$\vec{\theta}_0$的方向，即逆时针方向。

则金属环中产生的感应电流为

$$I_{感} = \frac{\varepsilon}{2\pi r R_0} = -\frac{\mu_0 nkr}{2R_0}.$$

再由欧姆定律可得，$ab$两点之间的电压为

$$U_{ab} = IR_{ab} = -\frac{\mu_0 nkr}{2R_0}\cdot\theta r R_0 = -\frac{1}{2}\mu_0 nk\theta r^2.$$

分析：公式$U = IR$仅适用于不含非静电力的电路，在此的电路是含非静电力的电路，所以此式不成立，而上述解法中应用了此式，解法当然是错误的。

正确解法：金属环电路可等效成图6—9所示的电路，由此可得

$$U_{ab} = IR_{左} - \varepsilon_{左}$$

$$= \frac{\varepsilon_{左}+\varepsilon_{右}}{R_{左}+R_{右}}R_{左} - \varepsilon_{左}$$

$$= \frac{2\pi r E_{感}}{2\pi r R_0}\cdot\theta r R_0 - \theta r E_{感} = 0.$$

可见，$ab$两点之间的电压为0。

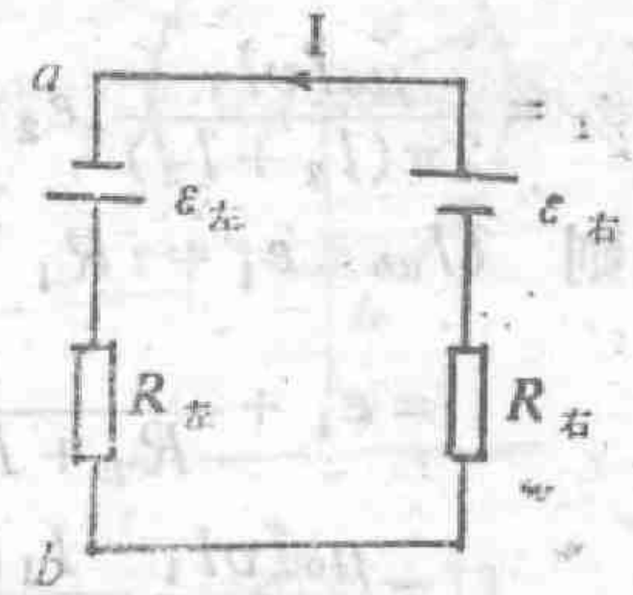


图6—9

另外，由于$U_{ab}$与$R_0$无关，因此，不论是什么材料的圆 环，上面的结论均成立。

由于$ab$两点是任取的，所以 由$U_{ab} = \int_a^b \vec{E}_{静}\cdot d\vec{l}$可知，在 圆

①见6—3题的练习题.

(PDF压缩器 - 未注册版)

环中不存在静电场①。这是一个没有静电场而产生电流的例子。该电流是非静电场——感生电场产生的，其电流密度为

$$\vec{J}=\gamma\vec{E}_{非}=\gamma\vec{E}_{感}$$

顺便说明：$ab$两点之间的电动势是与路径有关的量，因为在$\varepsilon=\int_{-}^{+}\vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}$中，$\vec{E}_{感}$是非位场，它的积分与路径有关。因此我们在不知道路径的情况下，说两点之间的电动势是错误的。

练习题：

如图6—10所示，无限长直导线，上面通过稳恒电流$I$。其平面内有一矩形线圈，线圈的长为$l_1$，宽为$l_2$，$t$时刻左边距直导线为$l_3$。当它以速度$\vec{v}$向右运动时，$ab$两点之间的电势差为多少？(单位长度的线圈电阻为$R_0$，自感忽略不计)。

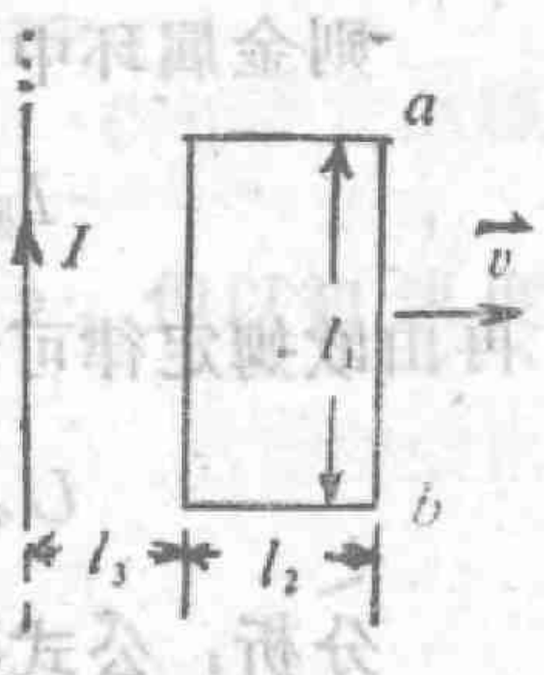


图6—10

提示：矩形线圈电路可等效为图6—11，

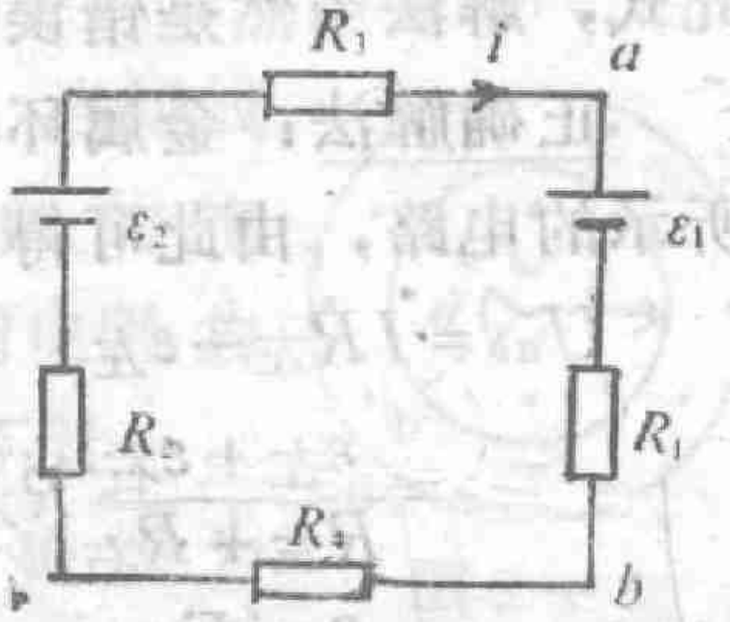


图6—11

其中

$$R_1=R_2=l_1R_0,\quad R_3=R_4=l_2R_0,$$

$$\varepsilon_1=\frac{\mu_0 I v l_1}{2\pi(l_2+l_3)},\varepsilon_2=\frac{\mu_0 I v l_1}{2\pi l_3}.$$

则 $U_{ab}=\varepsilon_1+iR_1$

$$=\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{R_1+R_2+R_3+R_4}R_1$$

$$=\frac{\mu_0 I v l_1}{4\pi}\frac{l_1l_2+2(l_1+l_2)l_3}{(l_1+l_2)(l_2+l_3)l_3}.$$

6—6。如图6—12所示，半径为$a$的圆环导线与无限长直导线在同一平面内，圆心到直导线的距离为$b(b>a)$。试求圆环与无限长直导线之间的互感。

错解：当圆环导线中通过电流$I$时，它产生的磁场在直导线上

①严格地说应为稳恒电场。

(PDF压缩器 - 未注册版)

穿过的通量为零，则由 $M=\Phi/I$ 可知，互感为零.

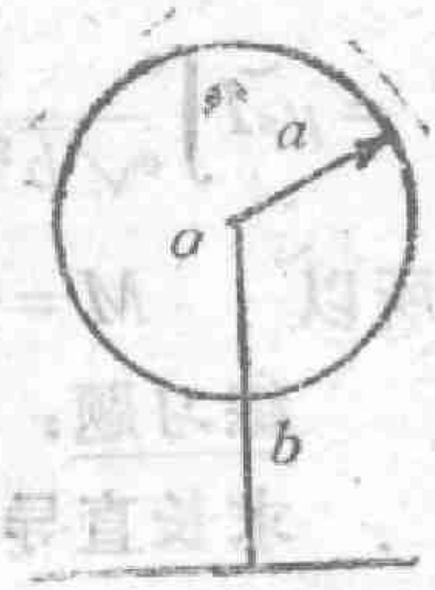


图 6—12

分析：在二回路互感的定义式 $M=\Phi/I$ 中，$\Phi$ 是任一回路中电流 $I$ 产生的磁场穿过另一回路包围面积的磁通量，而不是穿过构成另一回路导线本身的磁通量，对于本题，$\Phi$ 是圆环导线回路中电流产生的磁场穿过无限长直导线回路包围面积(半个平面)的磁通量，而不是穿过直导线本身的磁通量，或者，$\Phi$ 是无限长直导线(回路)中的电流产生的磁场穿过圆环导线回路包围面积的磁通量，而不是穿过圆环导线本身的磁通量. 在上述解法中，将 $\Phi$ 看作穿过无限长直导线本身的磁通量，所以得出了上面的错误结论.

我们知道，当圆环导线回路中通过电流 $I$ 时，它产生的磁场穿过无限长直导线回路包围面积（半个平面）的磁通量不等于零，所以圆环与无限长直导线之间的互感不为零. 但是，由于计算圆环导线中电流产生的磁场穿过无限长直导线回路的磁通量很困难. 所以常常是根据 $M_{12}=M_{21}$，通过计算无限长直导线中电流产生的磁场穿过圆环导线回路的磁通量来求 $M$. 下面看正确解法：

正确解法：设无限长直导线中通过电流 $I$，则它产生的磁场通过圆环导线回路的磁通量（参考图6—13）为

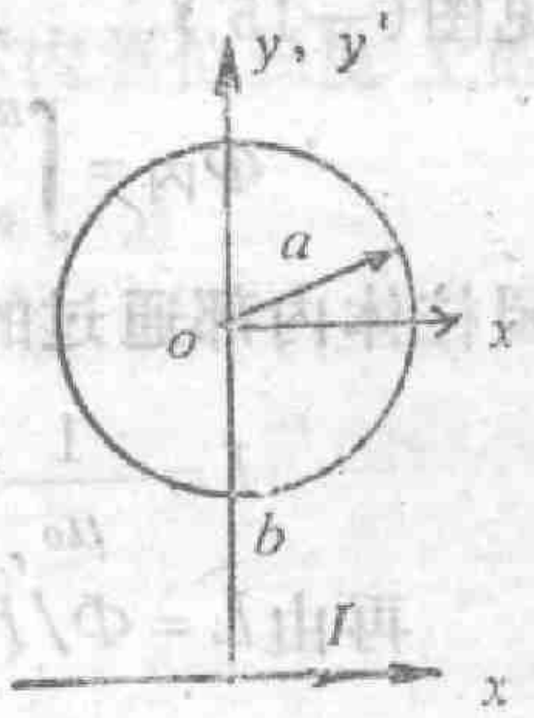


图 6—13

$$\Phi=\int_s \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_{s} \frac{\mu_0 I}{2\pi y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

先令 $x=x'$，$y=y'+b$，

再令 $x'=r\cos\theta$，$y'=r\sin\theta$，

得 $$\Phi=\int_{s} \frac{\mu_0 I}{2\pi(y'+b)}\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'$$

$$=\int_{s} \frac{\mu_0 I}{2\pi(r\sin\theta+b)} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r=\int_0^a \frac{\mu_0 I}{2\pi} r\left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{r\sin\theta+b}\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^a r\left[\frac{2}{\sqrt{b^2-r^2}}\mathrm{tg}^{-1}\frac{b\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}+r}{\sqrt{b^2-r^2}}\right]_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}r$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$= \mu_0 I \int_0^a \frac{r}{\sqrt{b^2-r^2}} \mathrm{d}r = \mu_0 I \left[ -\sqrt{a^2-r^2} \right]_0^a = \mu_0 I \left[ b - \sqrt{b^2-a^2} \right].$$

所以　　$M = \Phi / I = \mu_0 (b - \sqrt{b^2-a^2})$。

练习题：

求长直导线与其共面的等边三角形线圈之间的互感系数。设三角形的高为$h$，平行于直导线的一边到直导线的距离为$b$（见图6—14所示）。

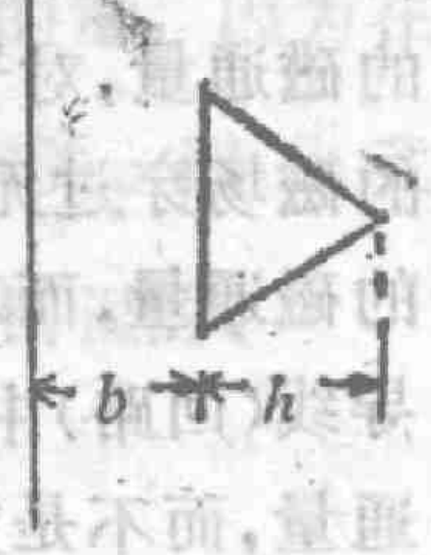


图6—14

答案：$M = \frac{\mu_0}{\sqrt{3}\pi} \left[ (b+h) \ln \frac{b+h}{b} - h \right]$。

6—7. 半径为$R$的圆柱体，磁导率为$\mu$，均匀流过传导电流$I_0$，试求单位长度上的内自感（与圆柱体内部磁通相对应的那部分自感）。

错解一：圆柱体内部的磁场为

$$\vec{B} = \frac{\mu I_0 r}{2\pi R^2} \vec{\theta}_0,$$

则通过圆柱体内部单位长度上的磁通量为（参见图6—15）

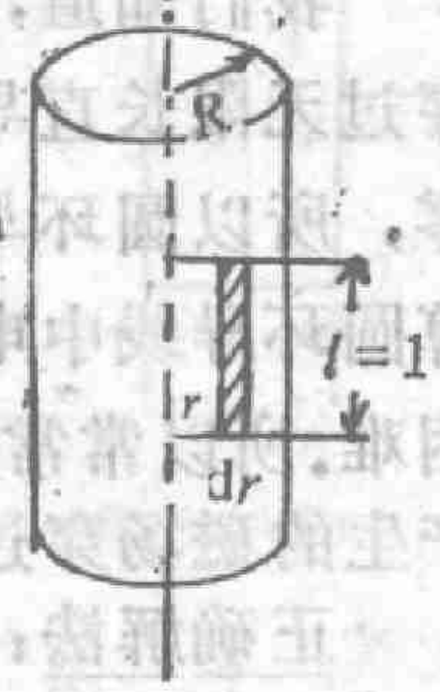


图6—15

$$\Phi_{内} = \int_0^R \frac{\mu I_0}{2\pi R^2} \cdot r \mathrm{d}r = \frac{\mu I_0}{4\pi}.$$

园柱体内部通过的电流为

$$I = \frac{1}{\mu_0} \oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{1}{\mu_0} \int_0^{2\pi} \frac{\mu I_0}{2\pi R} \cdot R \mathrm{d}\theta = \mu_r I_0.$$

再由$L = \Phi / I$可得圆柱体单位长度上的内自感为

$$L_{内} = \frac{\Phi_{内}}{I} = \frac{\mu I_0 / 4\pi}{\mu_r I_0} = \frac{\mu_0}{4\pi}.$$

分析：在定义$L = \Phi / I$中，$I$一定要是传导电流，不能是总电流（即不能包含束缚电流）。在上面的解法中，$I$用了总电流，所以是错误的。

错解二：圆柱体上的电流产生的磁场通过柱体内部单位长度

(PDF压缩器 - 未注册版)

上的磁通量为

$$\Phi_{内}=\frac{\mu I_0}{4\pi}.$$

由$L=\Phi/I_0$可得圆柱体单位长度上的内自感为

$$L_{内}=\frac{\Phi_{内}}{I_0}=\frac{\mu I_0/4\pi}{I_0}=\frac{\mu}{4\pi}.$$

分析：在定义式$L=\frac{\Phi}{I_0}$中，$\Phi$一定是磁匝链，即$\Phi$与$I_0$相互套合。在圆柱体内，磁通$\Phi_{内}=\frac{\mu I_0}{4\pi}$并不与全部电流$I_0$相套合（即$\Phi_{内}$只是磁通，但不是磁匝链），所以$\frac{\Phi_{内}}{I_0}=\frac{\mu}{4\pi}$，不等于圆柱体单位长度上的内自感。

正确解法：参见图6—15，在距轴线$r$处，宽$dr$的距形面元内，磁通为$d\Phi_{内}=\vec{B}\cdot d\vec{S}=\frac{\mu I_0}{2\pi R^2}r dr$，它并不是与全部电流$I_0$相套合，而是与部分电流$\left(\frac{\pi r^2}{\pi R^2}\right)I_0=\frac{r^2}{R^2}I_0$相套合。因此，在计算磁匝链时要乘上一个匝链因子$N=r^2/R^2$。则柱体内单位长度上的总的磁匝链为

$$\Psi_{内}=\int N d\Phi_{内}=\int_0^R \frac{r^2}{R^2}\frac{\mu I_0}{2\pi R^2}r dr$$

$$=\frac{\mu I_0}{2\pi R^4}\int_0^R r^3 dr=\frac{\mu I_0}{8\pi}.$$

所以柱体单位长度上的内自感为

$$L_{内}=\frac{\Psi_{内}}{I_0}=\frac{\mu}{8\pi}.$$

本题还可由磁能法求解。解法如下：

圆柱体内单位长度上的内自能为

$$W_{内}=\int_V \frac{1}{2\mu}B^2 dV=\int_0^R \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\mu I_0 r}{2\pi R^2}\right)^2\cdot 2\pi r dr$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$= \frac{\mu I_0^2}{16\pi}.$$

由$W_{内} = \frac{1}{2} L_{内} I_0^2$可得柱体单位长度上的内自感为

$$L_{内} = \frac{\mu}{8\pi}.$$

与上面的结果一致。从上面的解题过程可知，后一方法简单，且不易出错。

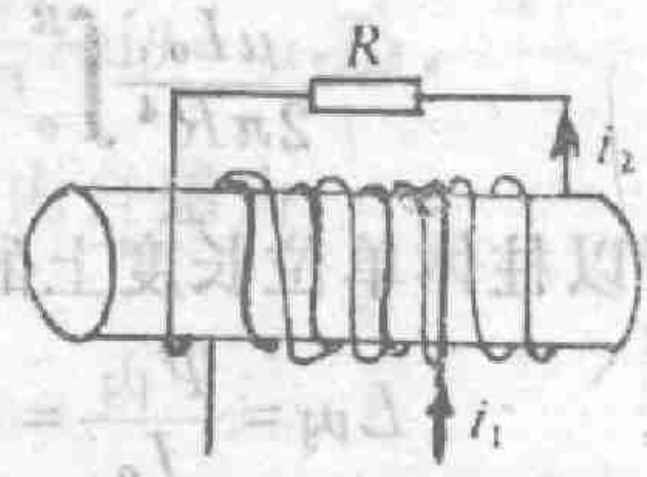
练习题：

一同轴电缆是由半径为$a$、相对磁导率为$\mu_r$的实心圆柱和半径为$b$的同轴圆柱壳组成（中间是真空）。试求单位长度上的自感。

提示：同轴电缆线的自感等于内自感与外自感之和，即$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\Psi_{内}}{I} + \frac{\Psi_{外}}{I} = L_{内} + L_{外}$，其中$\Psi_{内}$是通过实心导体内部单位长度上的磁匝链，$\Psi_{外}$是通过内外导体之间单位长度上的磁匝链。

答案：$L = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{\mu_r}{4} + \ln\frac{b}{a}\right)$.

6—8. 如图6—16所示，一圆形纸筒横截面为$S$，上面绕有两组线圈，内线圈绕线密度为$n_1$，外线圈绕线密度为$n_2$，长均为$l$，外线圈与一电阻$R$构成闭合回路，当内线圈中通过变化电流$i_1$时，外线圈中的感应电流为多少？




6—16

错解一：由于内外线圈之间的互感，当内线圈中通过变化电流$i_1$时，在外线圈中产生的感应电动势为

$$\varepsilon_2 = -M\frac{di_1}{dt} = -\mu_0 n_1 n_2 S l \frac{di_1}{dt}.$$

则由欧姆定律可得外线圈中产生的感应电流为

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$i_2=\frac{\varepsilon_2}{R}=-\frac{1}{R}\mu_0 n_1 n_2 Sl\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}.$$

分析：当外线圈中通过感应电流时，还要产生自感电动势，而上面未考虑，所以解法是错误的。

错解二：外线圈中的自感电动势和互感电动势分别为

$$\varepsilon_{自}=-L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}=-\mu_0 n_2^2 Sl\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t},$$

$$\varepsilon_{互}=-M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=-\mu_0 n_1 n_2 Sl\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}.$$

由基尔霍夫定律可得外线圈中电流满足的方程为

$$-L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}-M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=Ri_2,$$

即

$$L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}+Ri_2=-M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}.$$

解之得

$$i_2=-e^{-\frac{R}{L}t}\left[\int\frac{M}{L}e^{\frac{R}{L}t}\mathrm{d}i_1+K\right].$$

其中$K$是积分常数，若知道$i_1$的变化规律和初始条件，则可求出$i_2$的变化规律。

分析：自感电动势$\varepsilon_{自}=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$的标定方向为$i$的标定方向，即用$\varepsilon_{自}=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$求自感电动势时，它的标定方向与电流的标定方向一致。

互感电动势$\varepsilon_{互2}=-M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$的标定方向为$i_1$产生磁场方向的右手螺旋方向：将右手拇指伸直并指向$i_1$产生的$\vec{B}$的方向，则弯曲四指的方向就是由于$i_1$变化产生的互感电动势$\varepsilon_{互2}$的标定方向。

对本题，当$i_1$、$i_2$的标定方向选图6—16所示的方向时，外线圈中的自感电动势的标定方向与$i_2$的方向一致，互感电动势的

(PDF压缩器 - 未注册版)

标定方向与$i_2$的方向相反①。因此总的感应电动势不是它们二者的直接相加。而上述解法中直接相加了，所以解法是错误的。

正确解法：选$i_1$、$i_2$的标定方向如图6—16所示。

外线圈中的自感电动势和互感电动势分别为

$$\varepsilon_{自}=-L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}=-\mu_0 n_2^2 S\,l\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t},$$

$$\varepsilon_{互}=-M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=-\mu_0 n_1\,n_2 S\,l\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t},$$

其中$\varepsilon_{自}$的标定方向为$i_2$的方向，$\varepsilon_{互}$的标定方向为$i_2$的反方向。

选外线圈中总感应电动势的标定方向为$i_2$的标定方向。则

$$\varepsilon=\varepsilon_{自}-\varepsilon_{互}=-L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}+M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}.$$

由基尔霍夫第二定律可得外线圈中电流满足的方程为

$$-L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}+M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=Ri_2.$$

解之得外线圈中的感应电流为

$$i_2=e^{-\frac{R}{L}t}\left[\int\frac{M}{L}e^{\frac{R}{L}}\mathrm{d}i_1+K\right].$$

练习题：

在图6—17所示的电路中开关合上后，次级线圈中的感应电动势$\varepsilon_{cd}$等于多少？$\left(\text{二线圈中的互感}M=\sqrt{L_1L_2}\right)$。

提示：开关合上后，初级线圈中有电流

$\left[i_1=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-\frac{R}{L_1}t})\right]$，次级线圈中无电流($i_2=0$)，所以初级线圈中有自感电动势，无互感电动势；次级线圈中无自感电动势，有互感电动势。因此次级线圈中的

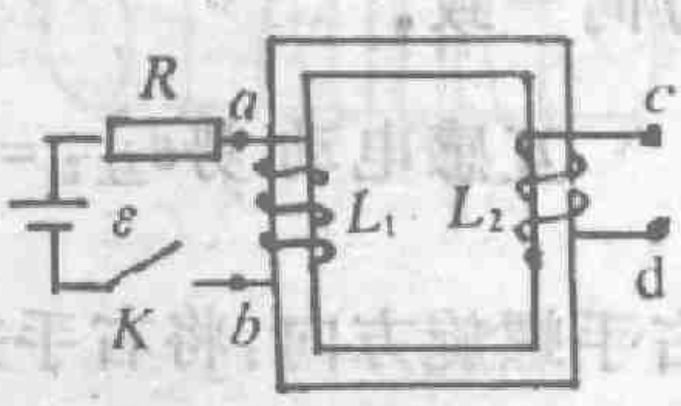


图6—17

①当二线圈中标定电流方向从同名端流入时，在每一线圈中的互感电动势和自感电动势的标定方向相同。

(PDF压缩器 - 未注册版)

感应电动势为

$$\varepsilon_{cd}=-M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=-\varepsilon\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}e^{-\frac{R}{L_1}t}.$$

6—9. 图6—18是$RL$串联电路，开关合上后线圈内磁场能量随时间变化．试求其变化规律．

错解：假设开关合上后电路中电流为$i$，则

电阻上电压降为$u_R=Ri$，

电感上电压降为$u_L=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$，

电感上电动势为$\varepsilon_L=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$，

电源上电动势为$\varepsilon$．

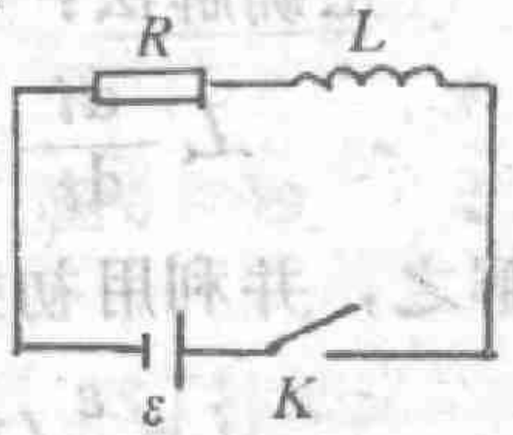


图6—18

由基尔霍夫定律可得回路方程为

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=\varepsilon-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},$$

即

$$2L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=\varepsilon.$$

解之，并利用初始条件$t=0$时，$i=0$得

$$i=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-\frac{R}{2L}t}).$$

则线圈中磁场的能量为

$$W_m=u_Li=Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{\varepsilon^2}{2R}(1-e^{-\frac{R}{2L}t})e^{-\frac{R}{2L}t}.$$

分析：上述解法有两处错误：①对于电感，当考虑了自感电动势后，再不能考虑自感电压，或当考虑自感电压后，再不能考虑自感电动势，否则就重复了．在上述的解法中，既考虑了自感电压，又考虑了自感电动势，所以，解法肯定是错误的．②线圈两端的电压与电流之积$u_Li$是线圈建立磁场消耗的瞬时电功率，并不是线圈中磁场的能量．线圈中磁场的能量为$W_m=\int_0^i u_Li\mathrm{d}t=\int_0^i Li\mathrm{d}i$

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$= \frac{1}{2}Li^2.$$

顺便说一下：对电容器，$u_c i$并不等于电容器中电场的能量，而等于电容器建立电场消耗的瞬时电功率，电容器中电场的能量为$We = \int_o^q u_c \mathrm{d}q = \frac{1}{2}Cu_c^2$。

正确解法：由基尔霍夫定律可得回路方程为

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = \varepsilon.$$

解之，并利用初始条件：$t=0$时，$i=0$得回路中的电流为

$$i = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}).$$

则线圈中磁场的能量为

$$W_m = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{L\varepsilon^2}{2R^2}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})^2.$$

练习题：

试求6—4题中，时间$t$内电源消耗的能量。

提示：电源消耗的能量

$$W = \int_o^t \varepsilon i \mathrm{d}t \fallingdotseq \int_o^t Ri^2 \mathrm{d}t.$$

答案：$W = \frac{m\varepsilon^2}{B^2 l^2}(1 - e^{-\frac{B^2 l^2}{mR}t})$。

## 二 错误的回答

6—10。如图6—19所示，均匀磁场随时间变化，导体$ab$切割磁力线匀速运动。在回路中是否存在感应电动势？

错答：由于磁场随时间变化，回路中存在感生电动势，又因导体切割磁力线运动，回路中存在动生电动势，则由$\varepsilon = \varepsilon_{感} + \varepsilon_{动}$可知，回路中存在感应电动势。

(PDF压缩器 - 未注册版)

分析：虽然回路中存在由磁场变化产生的感生电动势和由导体运动产生的动生电动势，但不一定存在感应电动势。例如，由于磁场减小引起回路中磁通量的减小量，正好等于由于导体向右运动引起回路中磁通量的增加量时，回路中磁通量不变，总的感应电动势$\varepsilon = \varepsilon_{动} + \varepsilon_{感} = 0$。

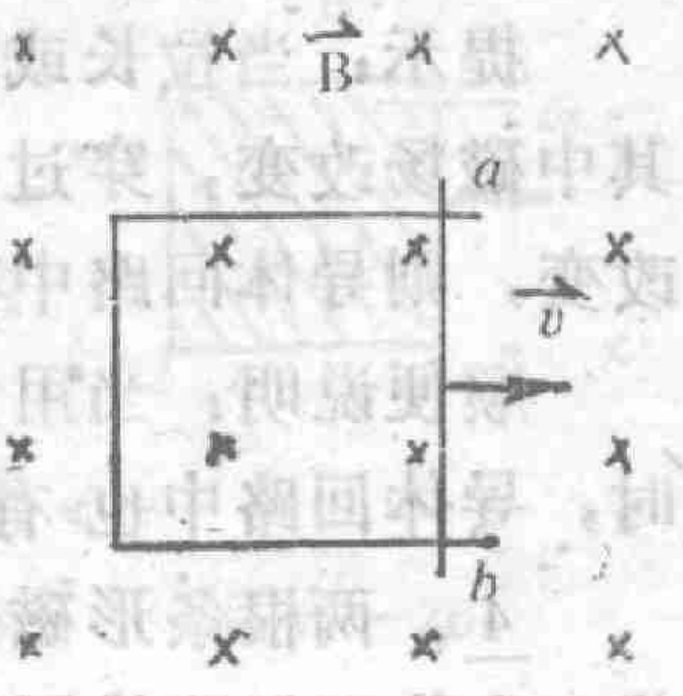



图6—19

练习题：

1．如图6—20所示，磁铁向上运动，它下面有一螺绕环在力的作用下被拉开。问此时螺绕环中是否存在感应电动势？

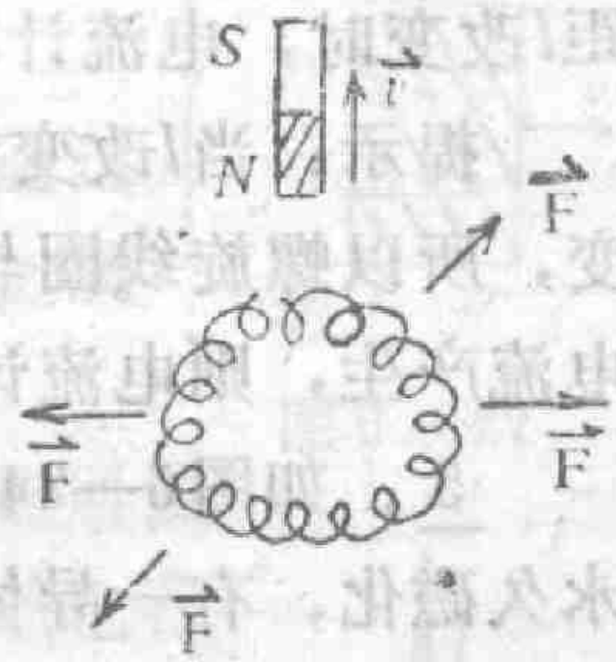



图6—20

提示：螺绕环中存在由于磁场变化产生的感生电动势和由于螺绕环切割磁力线产生的动生电动势，但不一定存在感应电动势。因为，磁铁向上运动的结果，是减小了穿过螺绕环的磁通量，而线圈面积的增大又增加了穿过它的磁通量。当磁铁向上运动减小的磁通量恰好等于线圈面积增大而增加的磁通量时，穿过螺绕环的磁通量不变，此时感应电动势为0。

2．如图6—21所示，一均匀稳恒磁场中有一线圈，若将它压扁时，线圈中有无感应电动势？

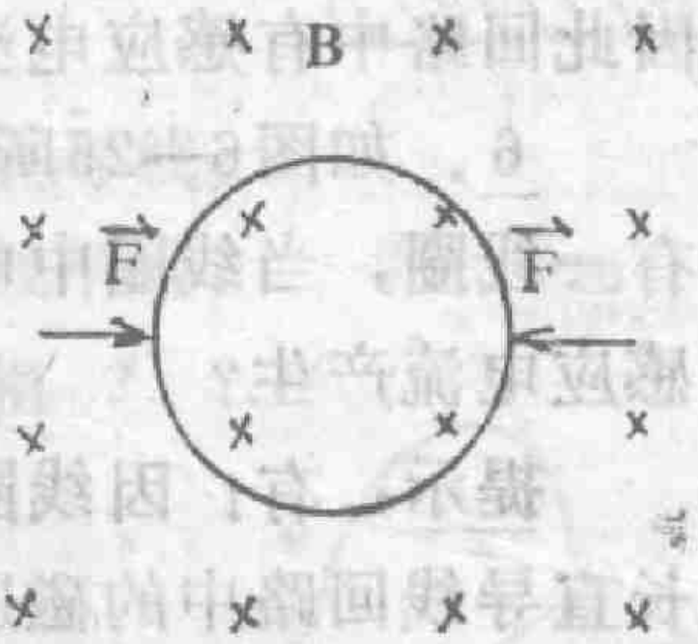



图6—21

提示：对周长一定的线圈，圆形线圈的面积最大，因此当线圈压扁后，线圈面积要减小，通过其中的磁通量要减小，自然在线圈中要产生感应电动势。

3．如图6—22所示，一长直螺旋线圈中通过稳恒电流$I$，导体$A$绕它形成闭合回路，当用力拉长或压缩螺旋线圈时，导体回

(PDF压缩器 - 未注册版)

路中有无感应电流产生?

提示：当拉长或压缩螺旋线圈时，其中磁场改变，穿过导体回路的磁通量改变，则导体回路中有感应电流产生。

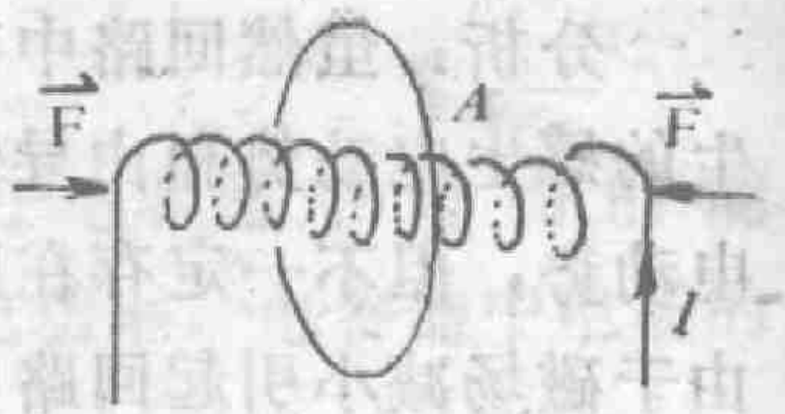


图6—22

顺便说明：当用力弯曲螺旋线圈时，导体回路中也有感应电流。

4。两根条形磁铁放置成图6—23所示，并将一个绕有螺旋线圈的铁质柱体放在$NS$极间，螺旋线圈与一只电流计相连。当二磁铁下端的间距$l$改变时，电流计有无偏转?

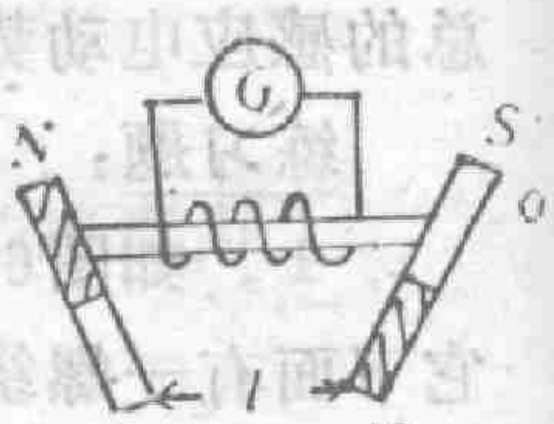


图6—23

提示：当$l$改变时，铁质柱体中的磁通量改变，所以螺旋线圈与电流计构成的回路中有感应电流产生，则电流计有偏转。

5。如图6—24所示，一铁磁环沿环的方向永久磁化，有一导体绕它形成闭合电路。当铁磁环的温度变化时，导体回路中有无感应电流?

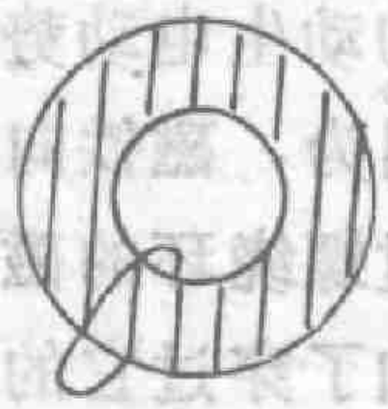


图6,—24

提示：铁磁环的磁状态与温度有关，温度变化时，磁性变化。因此通过铁磁环横截面内的磁通量变化，当然通过导体回路中的磁通量也变化，因此回路中有感应电流。

6。如图6—25所示，一无限长直导线旁边有一线圈，当线圈中电流变化时，直导线上有无感应电流产生?



图6—25

提示：有！因线圈中电流变化时，通过无限长直导线回路中的磁通量发生变化，所以有感应电流产生。

6—11。如图6—26所示，一导体板在均匀磁场中平动，问在导体板上是否产生感应电动势?

(PDF压缩器 - 未注册版)

错答：在导体中任取一回路，当导体运动时，回路中的磁通量不变，则由$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}$可知，在任一回路中不产生感应电动势。当然在整个导体板中不会产生感应电动势。

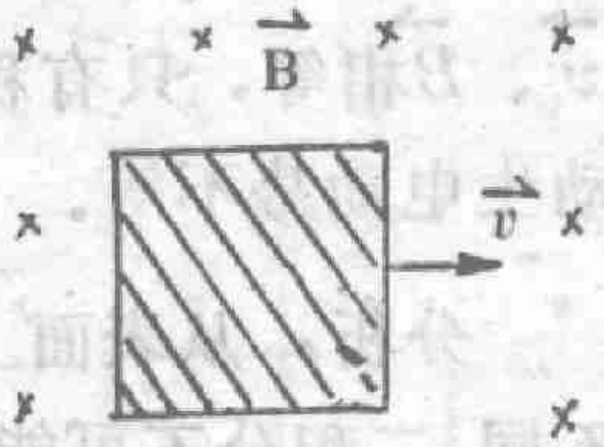


图 6—26

分析：在导体板中任取一回路，其中的确不存在感应电动势（因任一回路中$\Phi$不发生变化）。但是，在导体板中垂直运动方向上存在感应电动势（因导体板切割磁力线运动）。

练习题：

1．如图 6—27所示，一无限长导线上通过稳恒电流$I$，旁边有一金属板向右运动。问金属板中有无感应电流？

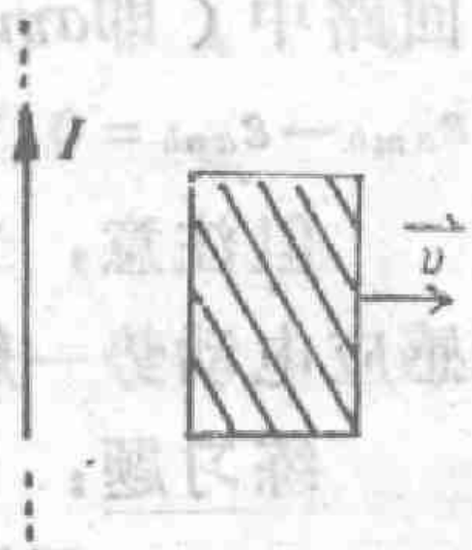


图 6—27

提示：在金属板中任取一回路，其中的磁通量由于运动而变化，所以存在感应电动势，当然也存在感应电流。

2．如图 6—28所示，一平面导体板中间通过一根长直导线，二者相互绝缘。当导线上通过变化电流时，导体板中是否存在感应电流？

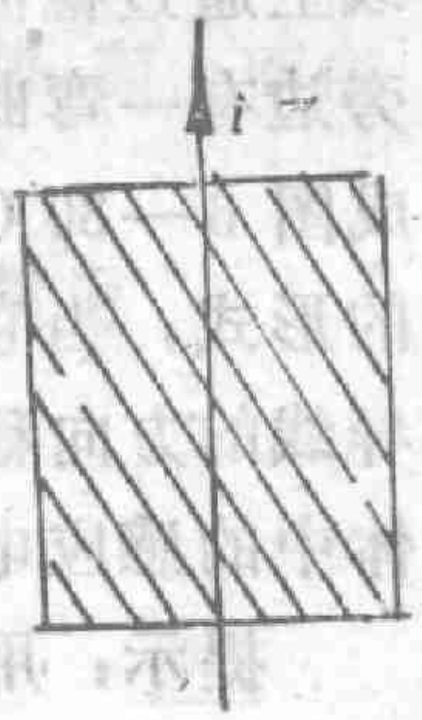


图 6—28

提示：导体板中存在感应电流。

6—12．如图6—29所示，$ab$之间有一直导线，有一曲导线，它们在均匀磁场中切割磁力线平动，速度相同，问二导线上的动生电动势是否相等？

错答：直导线中的动生电动势为$\varepsilon_{ab}=\int_{a\pi b}(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$；曲导线中的动生电动势为$\varepsilon_{ab}=\int_{anb}(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$，在二积分中，

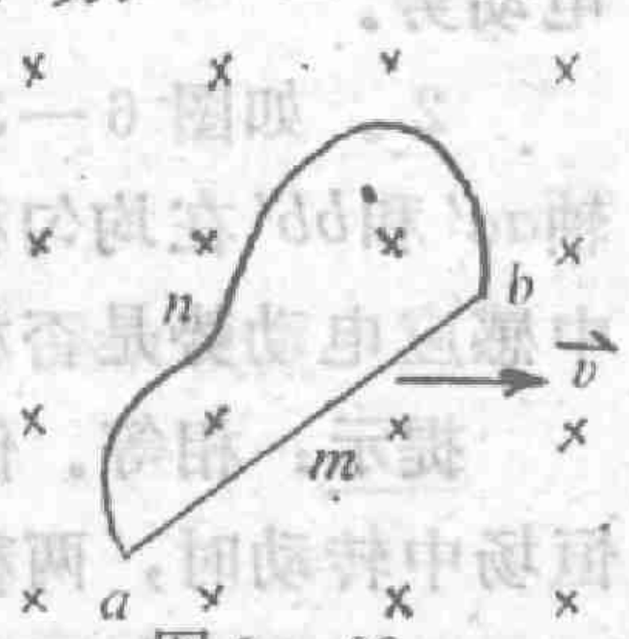


图 6—29

(PDF压缩器 - 未注册版)

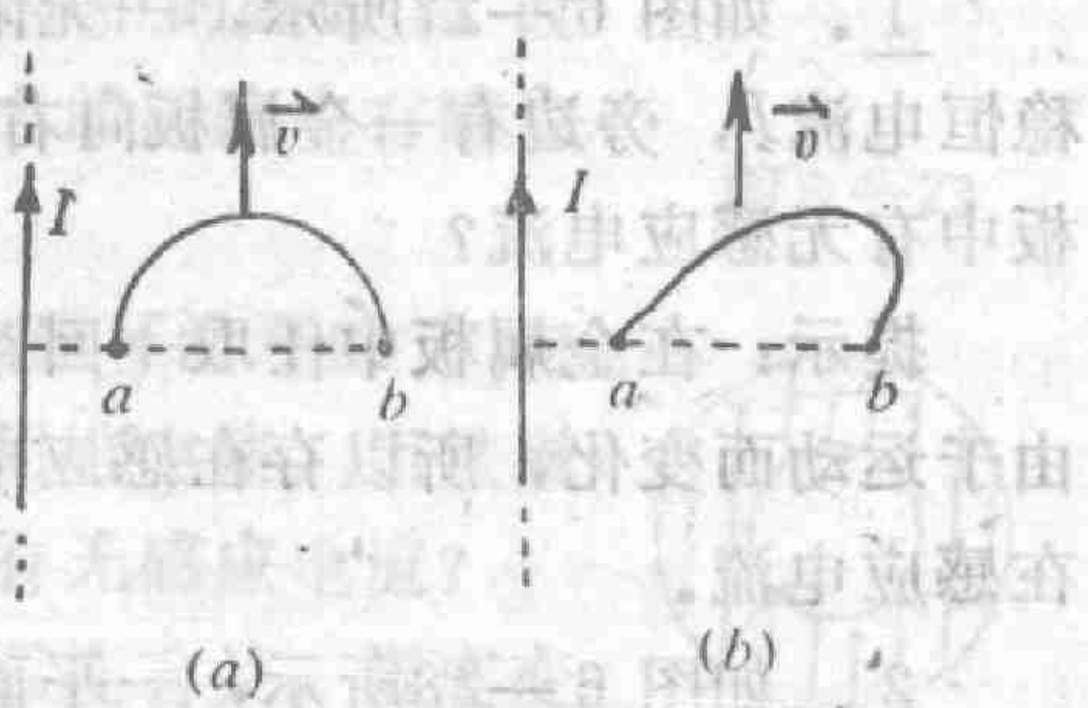
$\vec{v}$、$\vec{B}$相等，只有积分路径不等，所以积分不等，即二导线中的动生电动势不等。

分析：从表面上看，上二积分中$\vec{v}$、$\vec{B}$相等，只有积分路径不同，二积分不可能相等。但实际上是相等的，即二导线中的动生电动势是相等的。这可由$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$来说明：由于二导线构成的回路中（即$ambna$回路中），磁通量不变，所以$\varepsilon_{ambna}=0$，即$\varepsilon_{amb}-\varepsilon_{anb}=0$，可见$\varepsilon_{amb}=\varepsilon_{anb}$，即二导线中的动生电动势相等。

但注意，当磁场为非均匀场或磁场是变化场时，二导线中的感应电动势一般不等。

练习题：

1．一无限长直导线上通过稳恒电流$I$，旁边有一弯曲导体放置成图6—30（$a$）、（$b$）的形式，当它沿平行直导线的方向移动时，导体中的感应电动势为多少？



(a)　　(b)

图6—30

提示：用辅助回路法很易得到，弯曲导体中的感应电动势等于$ab$间直导线中的感应电动势。

2．如图6—31所示，闭合线圈分别绕轴$aa'$和$bb'$在均匀稳恒磁场中转动时，回路中感应电动势是否相等？

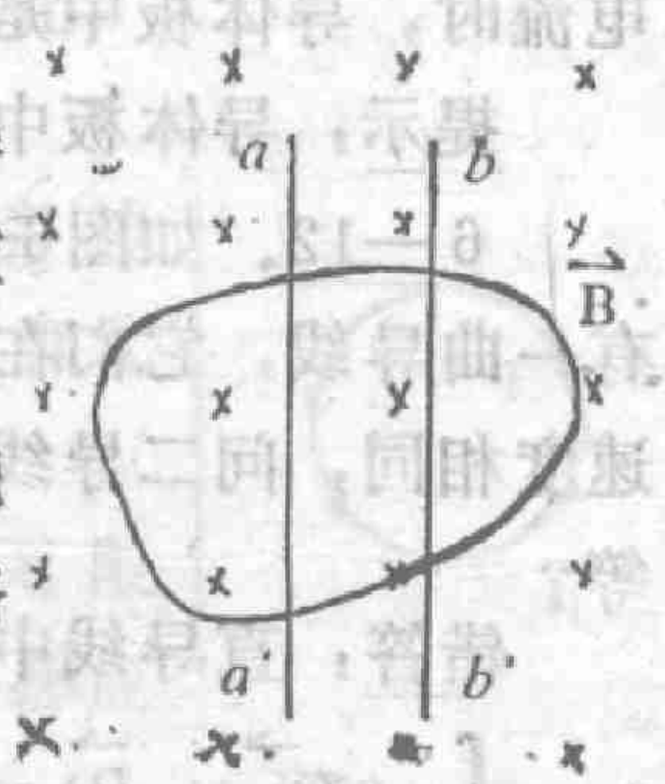



图6—31

提示：相等。但是若在非均匀场或非稳恒场中转动时，两种情况下的感应电动势一般不等。

6—13．如图6—32所示，边长为0.05米的正方形线圈在

(PDF压缩器 - 未注册版)

$B=0.84$特的均匀稳恒磁场中转动，转速为$n=10$圈/秒，初始时刻线圈平面与磁场垂直，在线圈转至30°时感应电动势为多少？

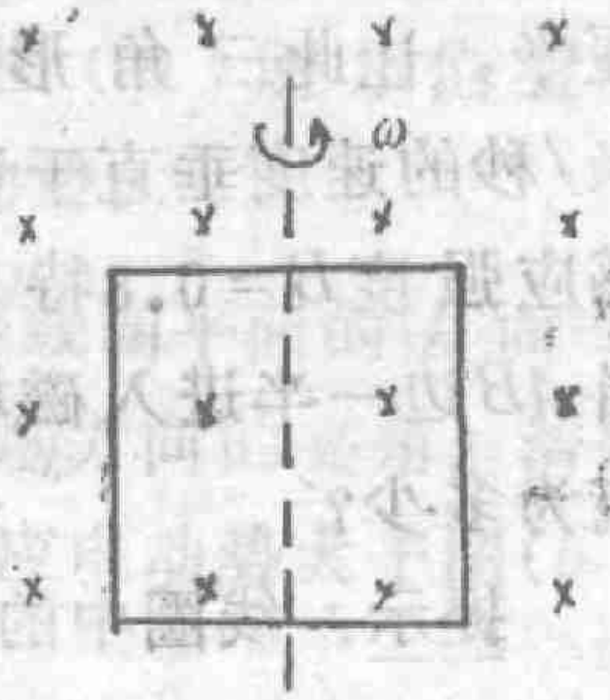


图 6—32

错答：线圈转至30°时穿过线圈的磁通量改变为

$$\Delta\Phi = BS\cos 30° - BS = -BS\cdot$$

$(1-\cos 30°) = -0.134BS$。磁通量变化所需时间为

$$\Delta t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{\pi/6}{2\pi n} = \frac{1}{120}(\text{秒}).$$

所以线圈转至30°时感应电动势为

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 0.134\times 0.84\times 0.05^2\times 120 = 0.034(\text{伏}).$$

分析：题中要求的是线圈转至30°时的瞬时电动势，而上面所求的是线圈从0°到30°之间产生的平均感应电动势。

正确解答：当线圈转到$\theta$角度时，通过它的磁通量为

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = BS\cos\theta = BS\cos\omega t.$$

因此在$\theta$角度时线圈中的感应电动势为

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega\sin\omega t = 2\pi nBS\sin\theta.$$

则在$\theta=30°$时的感应电动势为

$$\varepsilon = 2\times 3.14\times 10\times 0.84\times 0.05^2\times\frac{1}{2} = 0.066(\text{伏}).$$

练习题：

如图 6—33所示，电阻为2欧姆的导线组成一个闭合的

(PDF压缩器 - 未注册版)

直角三角形 $ABC$、$\angle A=30°$，$BC=50$ 厘米，让此三角形线圈沿 $AB$ 方向以2米/秒的速度垂直于磁场方向进入一个磁感应强度 $B=0.8$ 特的有界匀强磁场中。当 $AB$ 边一半进入磁场时，线圈中的感应电流为多少？

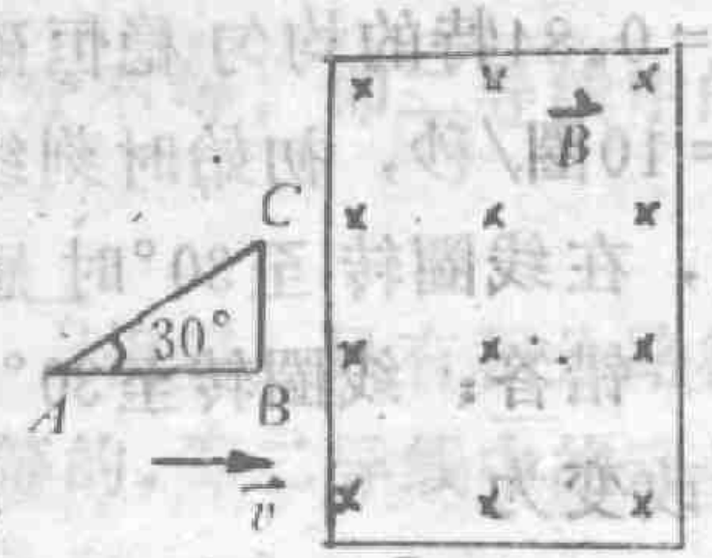



图 6—33

提示：线圈中的感应电流为0.2安。

6—14. 如图 6—34所示，一个矩形线圈在均匀磁场中以角速度 $\omega$ 转动，试比较当它转到图（$a$）和图（$b$）所示的位置时，感应电动势的大小。

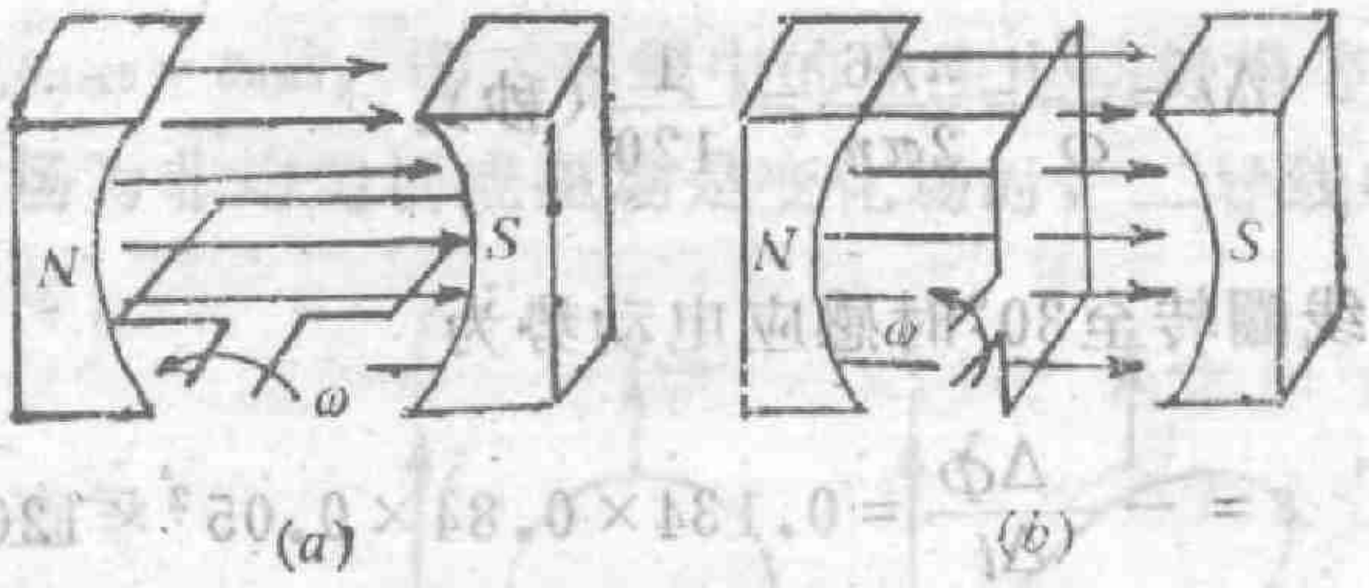



图 6—34

错答一：因为线圈转到图（$b$）所示的位置时，通过它的磁通量大于转到图（$a$）所示的位置时通过它的磁通量，所以在图（$b$）所示的位置时，线圈中的感应电动势大。

分析：由 $\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}$ 可知，回路中的感应电动势的大小决定于穿过回路磁通量的变化率的大小，而不是决定于磁通量本身的大小。在图（$a$）所示的位置时，虽然穿过线圈的磁通量最小（为零），但由于穿过线圈磁通量的变化率大于图（$b$）所示位置时的，所以图（$a$）所示位置中的感应电动势大。

错答二：由 $\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}$，$\Phi=\vec{B}\cdot\vec{S}=BS\cos\theta$ 可得，$\varepsilon=BS\omega\sin\theta$，可见 $\theta=90°$ 时的感应电动势大于 $\theta=0°$ 时的感应电动势，即线圈

(PDF压缩器 - 未注册版)

平面与磁场方向的夹角为90°时的感应电动势大于线圈平面与磁场方向的夹角为0°时的感应电动势，亦即图（$b$）所示位置的感应电动势大于图（$a$）所示位置的感应电动势。

分析：在公式$\Phi=\vec{B}\cdot\vec{S}=BS\cos\theta$中，$\theta$是线圈平面的法向与磁场方向之间的夹角，而不是线圈平面与磁场方向的夹角。清楚这一点后，就可得到，图（$a$)所示位置的感应电动势大于图($b$）所示位置的感应电动势。

练习题：

在图6—35（$a$）中磁铁穿过线圈，使线圈内的磁通量随时间变化如图6—35（$b$）所示。试比较$oa$、$ab$、$bc$、$cd$段回路中感应电流的大小？

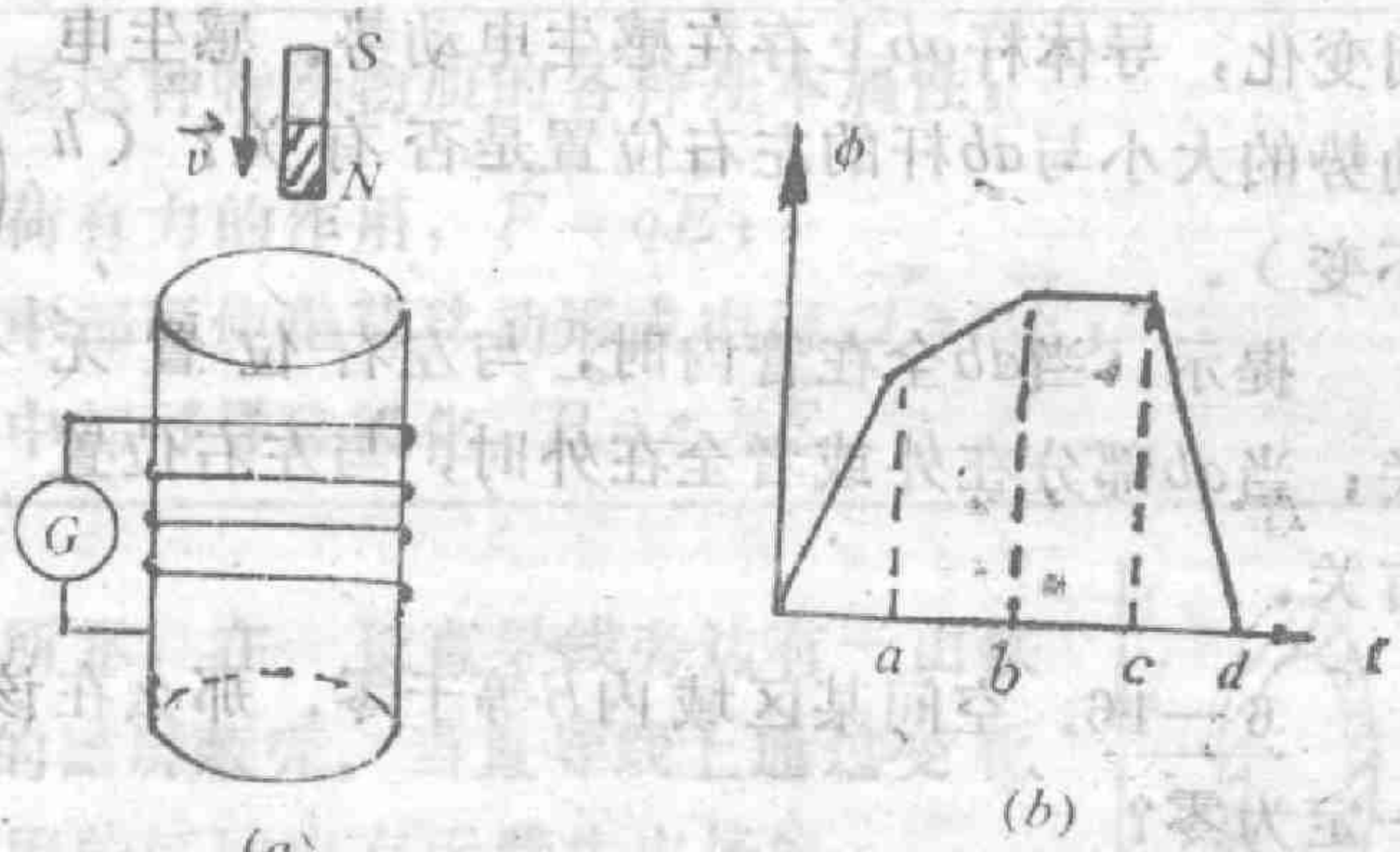



图6—35

提示：$i_{cd}>i_{oa}>i_{ab}>i_{bc}=0$。

6—15。如图6—36所示，长直螺线管内的均匀磁场随时间变化。有一个木环分别放在螺线管内距轴线较近的$a$处和距轴线较远的$b$处时，木环中的感生电动势是否相等？

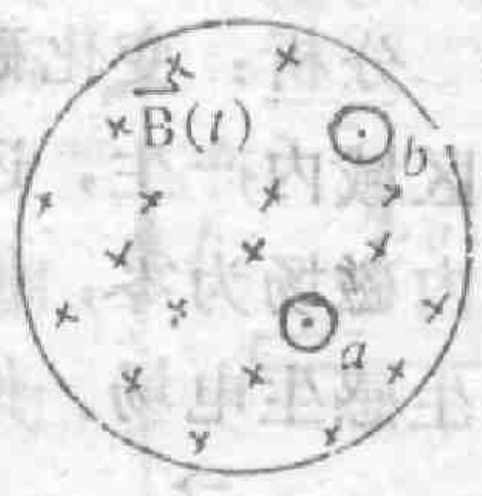



图6—36

错答：因为$a$处附近的感生电场大于$b$处附近的感生电场，则由$\varepsilon_{感}=\oint_L\vec{E}_{感}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$可知，木环放在$a$处时的感生电动势大于放在$b$处时的感生电动势。

(PDF压缩器 - 未注册版)

分析：虽然积分$\varepsilon_{感}=\oint_L \vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}$中的$\vec{E}_{感}$在$a$处比$b$处大，但由于在$a$处的$\vec{E}_{感}$与$d\vec{l}$的夹角和在$b$处的$\vec{E}_{感}$与$d\vec{l}$的夹角不同，最后积分相等，即木环放在$a$、$b$二处时的感生电动势相等。

由$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}$更易得出木环分别放在$a$、$b$二处时的感生电动势相等：由于螺线管中是均匀变化磁场，木环放在$a$、$b$二处时，环中$\Phi$的变化率相等，所以二处的感生电动势相等。

练习题：

如图6—37所示，长直螺线管中磁场随时间变化，导体杆$ab$上存在感生电动势。感生电动势的大小与$ab$杆的左右位置是否有关？（$h$不变）。



图6—37

提示：当$ab$全在管内时，与左右位置无关；当$ab$部分在外或者全在外时，与左右位置有关。

6—16．空间某区域内$\vec{B}$等于零，那么在该区域内$\vec{E}_{感}$是否一定为零？

错答：感生电场是由变化磁场产生的，空间某区域内没有磁场（即$\vec{B}=0$），当然不可能有感生电场。

分析：变化磁场要产生感生电场，且不仅要在变化磁场存在的区域内产生，还要在其周围区域内产生。所以，虽然空间某区域内磁场为零，但周围其它区域内的变化磁场也可能在该区域内产生感生电场。例如，无限长螺线管，当通过变化电流时，管外$\vec{B}=0$，但$\vec{E}_{感}\neq 0$。

为了加深对感生电场的认识，下面对静电场与感生电场作一比较：

(PDF压缩器 - 未注册版)

| | 静　电　场 | 感　生　电　场 |
|---|---|---|
| 不同性质 | ①由电荷激发；<br>②有源场，电力线起于正电荷，终于负电荷，$\oint_S \vec{E}_{静}\cdot d\vec{S} = q/\varepsilon_0$；<br>③无旋场，$\oint_L \vec{E}_{静}\cdot d\vec{l} = 0$，可引入电势。 | ①由变化磁场激发；<br>②无源场，电力线是无头无尾的闭合曲线，$\oint_S \vec{E}_{感}\cdot d\vec{S} = 0$；<br>③有旋场，$\oint_L \vec{E}_{感}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$，不能引入电势。 |
| 相同性质 | ①都具有场这种特殊物质的各种基本属性；<br>③都对电荷有力的作用，$\vec{F} = q\vec{E}$；<br>③在导体中都可使电荷移动形成电流，$\vec{J} = \gamma\vec{E}$；<br>在介质中都可导致极化，$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$。 | |

练习题：

如图 6—38所示，在一长直导线旁边有一由铁氧体①材料制成的磁屏蔽壳，当直导线上通过变化电流时，壳所包围的区域内有无感生电场？



图 6—38

提示：有。

6—17. 如图 6—39所示，长直导线上通过稳恒电流，一木棒切割磁力线运动，在木棒上是否产生动生电动势？

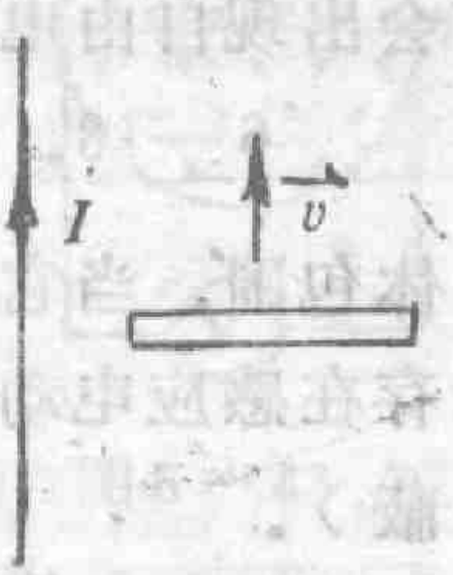


图 6—39

错答：由于木棒是绝缘体，不是导体，它切割磁力线运动时，无洛仑兹力，所以无动生电动势。

分析：不论是导体、还是绝缘体，切割磁力

①铁氧体是一种电阻率和绝缘体一样，磁导率和铁相近的磁性材料。

(PDF压缩器 - 未注册版)

线运动时，均产生动生电动势，且其大小均由$\varepsilon_{动}=\int_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$计算。因此图6—39中木棒切割磁力线运动时，在上面产生动生电动势。

木棒中产生的动生电动势，其非静电力仍是洛仑兹力。不过由于此非静电力小于棒中原子内的原子核对外层电子的束缚力，所以电子不能定向移动，木棒两端不会出现自由电荷的积累。但由于此力的作用，使原子中正负电荷中心拉开一定距离，这样在木棒两端出现束缚电荷的积累（类似于电场力作用下的极化）。这些电荷要产生电场（静电场），当然在木棒两端存在电势差。（但是由于木棒两端的束缚电荷积累很少，它产生的电场很小，所以电势差很小）。

练习题：

如图6—40所示，一无限长直导线上通过变化电流，旁边有一玻璃棒，问玻璃棒两端是否存在电势差？



图6—40

提示：由于变化电流在玻璃棒所在处产生感生电场，感生电场对玻璃棒(电介质)进行极化，使棒两端出现极化电荷的积累，这些极化电荷要激发电场（静电场），因此在玻璃棒两端存在电势差。但注意，由于感生电场小于玻璃的击穿电场，所以玻璃棒中不会出现自由电荷定向移动，玻璃棒两端不会出现自由电荷的积累。

6—18. 如图6—41所示，有一导体被铁氧体包围，当它在均匀磁场中运动时，导体中是否存在感应电动势？（假设铁氧体对磁场完全屏蔽）。



图6—41

错答：由于导体外面铁氧体对磁场的完全屏蔽，导体中无磁场，导体运动时并不切割磁力

(PDF压缩器 - 未注册版)

线，所以导体中无动生电动势。又因空间磁场是均匀场，无感生电场，所以导体中无感生电动势，则由$\varepsilon=\varepsilon_{感}+\varepsilon_{动}$可知，导体中无感应电动势。

分析：导体中不存在动生电动势（因导体所在处无磁场，运动时未切割磁力线）。但存在感生电动势（因为铁氧体放入磁场中后要改变空间磁场分布，当它运动时，空间磁场分布变化，则产生感生电场①。该电场使导体中产生感生电动势），所以导体中存在感应电动势。

顺便指出：在铁氧体中既存在动生电动势，又存在感生电动势。

练习题：

如图6—42所示，一磁铁旁边有一介质（既是电介质，又是磁介质）。当磁铁运动时，由于磁场变化产生感生电场，它使介质中存在感生电动势（但无动生电动势）。当介质运动时，介质中是否存在感生电动势，是否存在动生电动势？

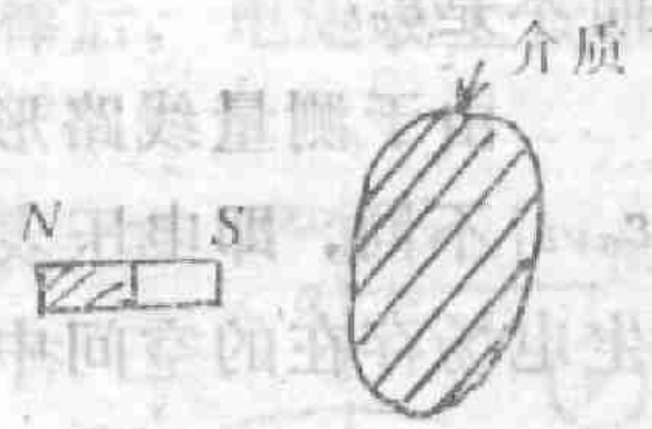


图6—42

提示：因为介质运动要改变空间磁场分布，在介质中产生感生电场，所以介质中存在感生电动势；又因介质运动切割磁力线，所以介质中还存在动生电动势。

6—19。在图6—43中，长直螺线管内的磁场随时间变化，一电压表接在导体杆$ab$两端，其读数为多少？

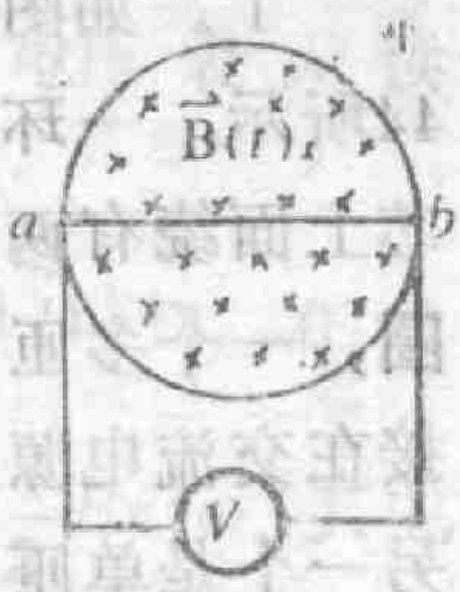


图6—43

错答：电压表与导体杆$ab$构成闭合电路，导体杆相当于电源，电动势为$\varepsilon_{ab}$。由全电流欧姆定律可知，$ab$两端的路端电压为$U_{ab}=I_{ab}R_{ab}$，$-\varepsilon_{ab}$，因$R_{ab}\to 0$，所以$U_{ab}=-\varepsilon_{ab}$，即电压表读数为$\varepsilon_{ab}$。

①见四川师范学院电磁学教研组编《电磁学思考题分析与解答》$P_{245}$(1984).

(PDF压缩器 - 未注册版)

分析：螺线管内的磁场变化时，它要产生感生电场，感生电场不仅存在于螺线管中，也存在于螺线管外。则在电压表与金属杆构成的回路中，不仅在$ab$杆上产生电动势（用$\varepsilon_{ab}$表示），在电压表与$ab$的联线$avb$上也要产生感电动势（用$\varepsilon_{avb}$表示）。因此回路中的电流为①

$$\dot{I}=\frac{\varepsilon_{ab}-\varepsilon_{avb}}{R_{ab}+R_V}.$$

由于$R_{ab}\ll R_V$，则

$$I\doteq\frac{\varepsilon_{ab}-\varepsilon_{avb}}{R_V}.$$

可见，电压表的读数为

$$U=|IR_V|②=|\varepsilon_{ab}-\varepsilon_{avb}|.$$

而不是$\varepsilon_{ab}$。

由于测量线路形状不同，$\varepsilon_{avb}$不同，所以电压表的读数$|\varepsilon_{ab}-\varepsilon_{avb}|$不同，即电压表的读数与测量线路形状有关。由此可见在感生电场存在的空间中，电压表的读数不再是被测两端的电压，（因电压$U_{ab}=\int_a^b\vec{E}_{静}\cdot d\vec{l}$不随路经变化）。或者说，在感生电场存在的空间中，电压再不可用电压表来测量。

练习题：

1．如图6—44所示，一环形铁芯上面绕有两个线圈，一个多匝的，接在交流电源上，另一个是单匝的圆环。有一交流电流

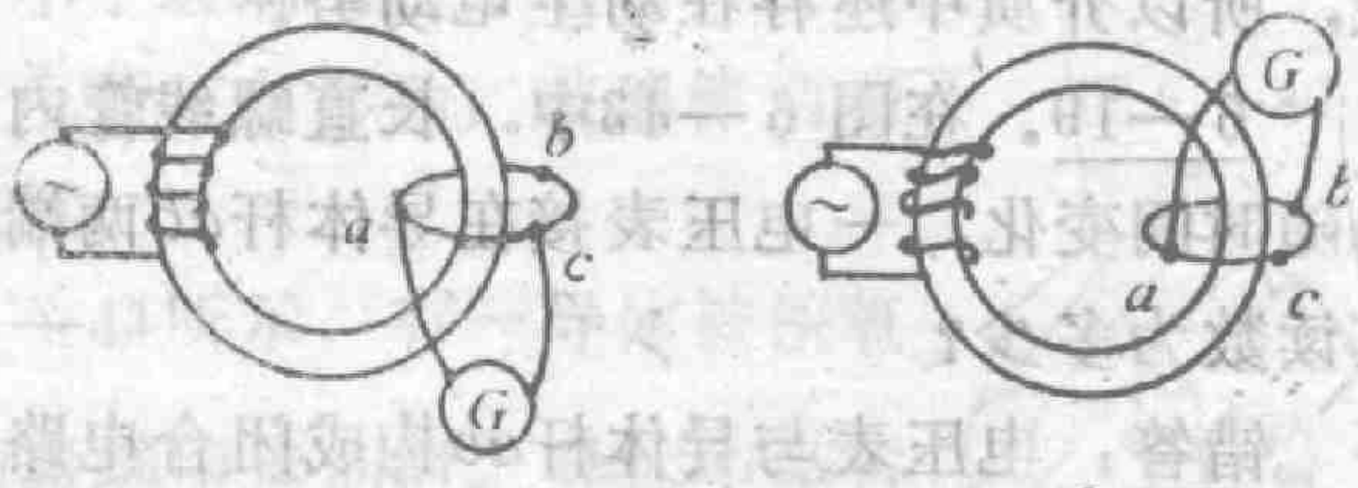



图6—44

①假设电流的方向为顺时针方向.

②电压表的读数等于通过它的电流乘以内阻.

(PDF压缩器 - 未注册版)

计按图（$a$）、（$b$）两种形式接在圆环上，问两种情况下电流计的读数是否相同？

提示：在图（$a$）、（$b$）中，$abc$圆环中的感应电动势相同，但电流计支路中的感应电动势不同（因支路的路经不同），所以两种情况下电流计的读数不同。

2．在图 6—39中，若用电压表测木棒两端的电压时（见图 6—45所示），电压表的读数为多少？（电压表和木棒构成的回路一起移动）。

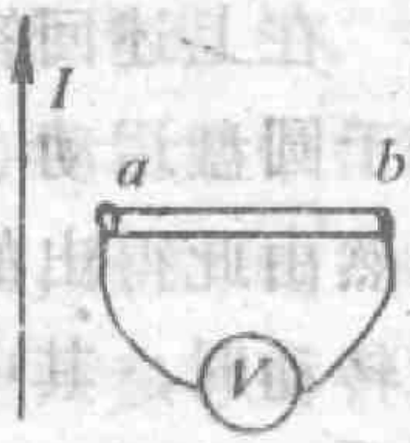


图 6—45

提示：虽然木棒上和电压表连线上均有电动势，但由于回路中电动势为零，回路中无电流，电压表指针当然不偏转，读数为零。

顺便说明：将图 6—45中木棒换成导体棒后，电压表上读数仍为零。

6—20．图 6—46所示的是法拉第圆盘，当金属圆盘以转速$\omega$绕轴转动时，电压表是否有读数？

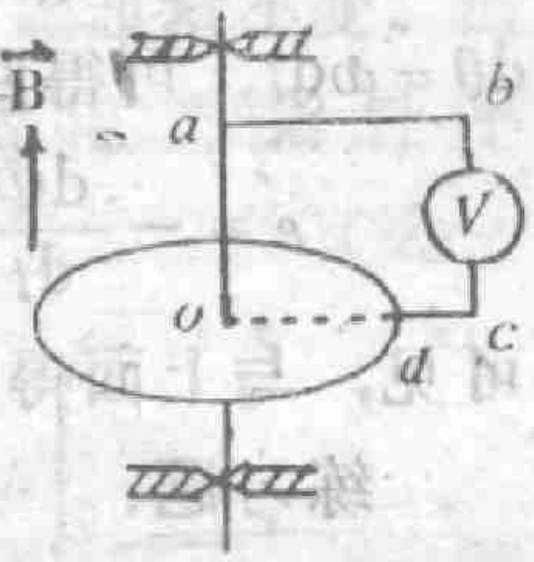


图 6—46

错答：将盘中心$o$到盘边缘的滑动点$d$联接起来（见图 6—46中的$od$），便与电压表构成一闭合回路$abcdo$，在圆盘旋转时，穿过这个回路的磁通量不变，所以不产生感应电动势，当然电压表无读数。

分析：①由动生电动势的公式$\varepsilon_{动}=\oint_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$可知，在盘中心与边缘之间产生动生电动势，且大小为$\varepsilon_{动}=\frac{1}{2}Br^2\omega$（其中$r$为圆盘半径）。因此回路中有感应电流，则电压表有读数。

②本题也可以用法拉第定律$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}$来解答。应用法拉第定

(PDF压缩器 - 未注册版)

律$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_s \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$时，为了使通量$\Phi$有确切的含义，包围积分面的边界线一定要是几何线，即法拉第回路①一定是由几何线构成的回路，所以对于以大块导体为边界构成的实际回路，一定要在导体中取几何线，从而构成法拉第回路，并且该几何线一定要固定在导体上，相对于导体不动。

在上述回答中，没有把圆盘中的一段$od$固定在圆盘上（相对于圆盘运动），所以法拉第回路$abcdo$相对于圆盘是运动的，当然由此得出的结果是错误的。若把$od$段固定在圆盘上，则圆盘转动时，其中法拉第回路（见图6—47所示的$abcdeo$回路）不断变化。穿过回路的磁通也不断变化，并且当圆盘转动一个$\mathrm{d}\theta$角时，穿过回路的磁通量改变量为$\mathrm{d}\Phi=B\cdot\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta$。再考虑到$\mathrm{d}\theta=\omega\mathrm{d}t$，可得回路中的感应电动势为

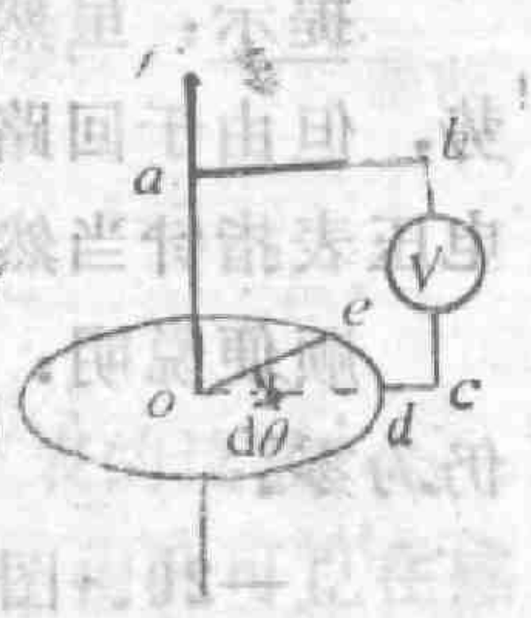


图 6—47

$$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-B\frac{1}{2}r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}Br^2\omega。$$

可见，与上面得到的结果一样。

练习题：

如图6—48所示，$abcd$是一块无限长磁铁棒的截面，它的$N$极在垂直纸面内无穷远的地方。图中标出了磁铁内部的磁力线，用滑动触点$ef$使磁铁与电表构成一个回路。当磁铁以速度$\vec{v}$平动时，电表指针是否偏转？

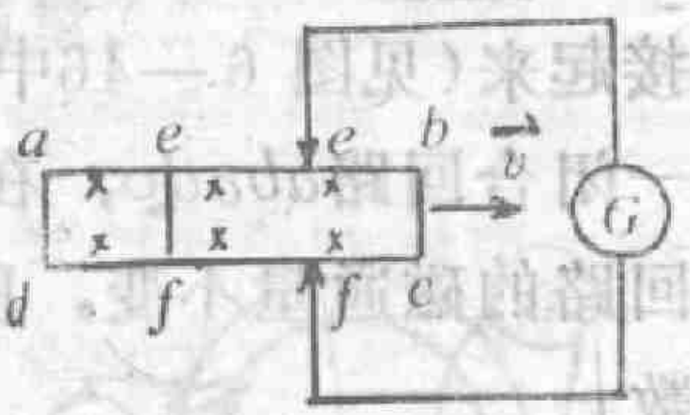


图 6—48

①为了叙述方便，我们把法拉第定律$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_s \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$中，包围积分面$S$的几何线所构成回路叫做法拉第回路，一个实际的回路有无穷多个法拉第回路。对于细导线包围成的实际回路，由于每一个法拉第回路中磁通量基本相等，所以我们就将细导线包围成的回路按几何线构成的回路处理。

(PDF压缩器 - 未注册版)

提示：本题既可用$\varepsilon=\oint_L \vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}+\oint_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$讨论，也可用$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}$讨论。

①用$\varepsilon=\oint_L \vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}+\oint_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$讨论：选磁铁为参考系。这样磁铁不动，$\vec{B}$不变，所以$\varepsilon_{感}=0$。在磁铁参考系中，导线支路以$-\vec{v}$向左滑动，由于磁铁为无穷长，磁力线均集中在磁铁内部，外面无磁力线，故导线支路不切割磁力线，所以$\varepsilon_{动}=0$，则电路中无感应电流，当然电表指针不偏转，在地面参考系中观察时，也肯定无偏转。

②用$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}$讨论：选如图6—48中$ee'f'fGe$回路为法拉第回路，当磁铁以$\vec{v}$向右运动时，回路中穿过的磁通量不变。因此，回路中无感应电动势，也无感应电流。当然电表指针不偏转。

6—21．如图6—49所示，一导体杆$ab$在均匀磁场$\vec{B}$中匀速运动，在导体杆参考系中导体杆上是否存在动生电动势？是否存在感生电动势？

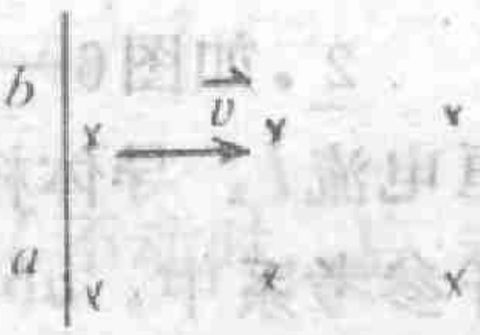


图6—49

错答：在导体杆参考系中，导体虽然不动，但磁场相对于导体以$-\vec{v}$运动，所以导体仍然切割磁力线，因此存在动生电动势。

在导体杆参考系中，由于$\vec{B}$的大小和方向均不变，无感生场，因此不存在感生电动势。

分析：在公式$\varepsilon_{动}=\int_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$中的$\vec{v}$是物体相对于参考系的速度（注意，电磁场不可作参考系）。在导体杆参考系中，

(PDF压缩器 - 未注册版)

导体杆的运动速度$\vec{v}=0$，所以导体杆上无动生电动势，但有感生电势。因为在导体杆参考系中，磁场存在的区域向$-\vec{v}$方向移动，空间磁场分布发生了变化，它要在导体杆所在处产生感生电场，所以在导体杆上产生感生电动势。

由此题可知，动生电动势和感生电动势是与参考系有关的量，在求动生电动势和感生电动势时，要指明是相对于那个参考系的，若不特别声明，一般指相对于地面为参考系的。

练习题：

1：如图6—50所示，磁铁和金属环同时以$\vec{v}$运动。在地面参考系中，金属环中有无动生电动势？有无感生电动势？有无感应电动势？

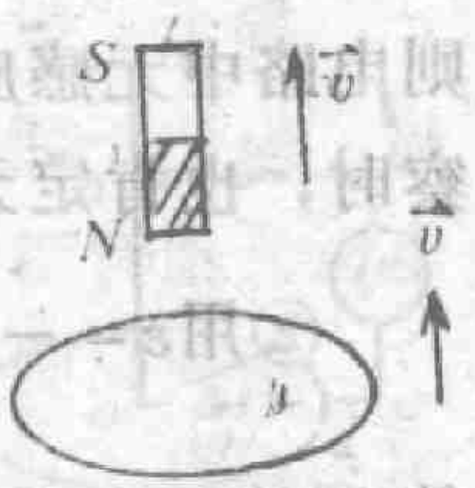


图6—50

提示：在地面参考系中，金属环中切割磁力线，所以有动生电动势。由于磁铁运动，产生变化磁场，所以有感生电动势。但是由于穿过金属环的磁通量的变化为零，所以无感应电动势。这说明，金属环中的动生电动势与感生电动势等大反向。

2.如图6—51所示，长直导线上通过稳恒电流$I$，导体杆$ab$匀速运动。问在$ab$导体杆参考系中，$ab$、$cd$各段中是否存在感生电动势？是否存在动生电动势？

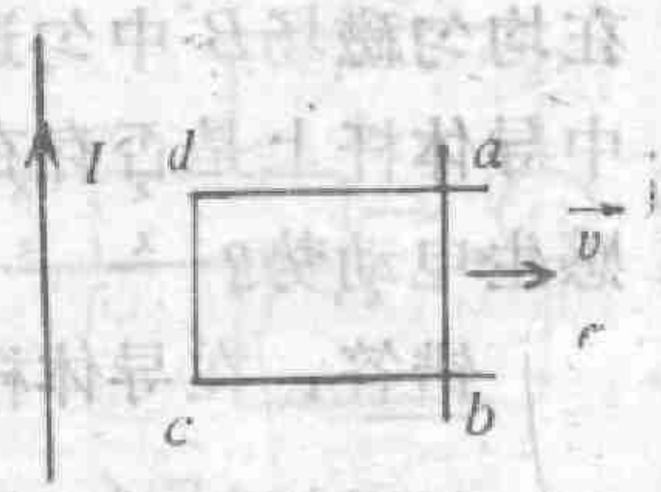


图6—51

提示：$ab$中只存在感生电动势，不存在动生电动势；$cd$中既有感生电动势，又有动生电动势。

6—22．公式$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$何时成立？

错答：在积分面$S$的形状、空间的取向和位置都不变时才成立，有一者变化就不成立。

(PDF压缩器 - 未注册版)

分析：只要包围$S$的边界线在空间的位置固定不动时，上式就成立，对积分面$S$的形状和它在空间的取向都可改变。上述回答对公式的成立条件限制的过窄了。

练习题：

1．下面二公式

$$\oint_L \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S},$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\frac{d}{dt}\int_s \vec{B}\cdot d\vec{S},$$

哪个是普遍成立的公式？

提示：前式是普遍成立的，后式只有在积分回路不动时成立。解释如下：

因
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_s \vec{B}\cdot d\vec{S},$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{动} + \varepsilon_{感} = \oint_L (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{dl} + \oint_L \vec{E}\cdot\vec{dl},$$

所以
$$\oint_L (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} + \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_s \vec{B}\cdot d\vec{S}.$$

可见只有$L$固定不动时，$\varepsilon_{动} = \oint_L (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{dl} = 0$，

$\oint_L \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\frac{d}{dt}\int_s \vec{B}\cdot d\vec{S}$．即只有积分回路$L$不动时，后式才成立，但前式永远成立。

有的书上认为，$\oint_L \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\frac{d}{dt}\int_L \vec{B}\cdot d\vec{S}$是普遍成立的，而$\oint_L \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\int_s \frac{\partial B}{\partial t}\cdot d\vec{S}$只有在$L$固定时才成立。这种观点是错误的。

2．对闭合回路，其中感生电动势为

$$\varepsilon_{感} = \oint_L \vec{E}\cdot\vec{dl} = \oint_L (\vec{E}_{感} + \vec{E}_{静})\cdot\vec{dl},$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

那么，对于非闭合电路，其中感生电动势是否为

$$\varepsilon_{感}=\int_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}\ ?$$

提示：对于闭合回路，$\oint_L \vec{E}_{静}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$，所以，

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\oint_L \vec{E}_{感}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\varepsilon_{感}.$$

对于非闭合回路，$\int_L \vec{E}_{静}\cdot \mathrm{d}\vec{l}\neq 0$，所以，

$$\int_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}\neq\int_L \vec{E}_{感}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\varepsilon_{感}.$$

3．计算感应电动势常用的公式有

$$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S},\qquad ①$$

$$\varepsilon=\oint_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$=\oint_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_L \vec{E}_{感}\cdot \mathrm{d}\vec{l},\qquad ②$$

$$\varepsilon=\int_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_L \vec{E}_{感}\cdot \mathrm{d}\vec{l}.\qquad ③$$

试说明这三式的适用范围。

提示：①式对几何线包围成的一切闭合回路均成立，回路可以是变化的。对由大块导体为边界构成的实际回路，利用它时，为了防止例外，构成回路时要遵守一定的法则①。

②式对几何线构成的一切闭合回路均成立。不过计算$\varepsilon_{动}=\oint_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$时，$\vec{v}$必须是构成回路的体元$\mathrm{d}\vec{l}$的速度，即导体上$\mathrm{d}\vec{l}$的速度；计算$\varepsilon_{感}=\oint_L \vec{E}_{感}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$时，假设$L$暂时不动。

③式对由几何线构成的一切闭合回路或非闭合回路均成立。

①见《大学物理》电磁学专辑$P_{238}$（1988）.

(PDF压缩器 - 未注册版)

由此可见：(1)。①、②式适用于一切由几何线构成的闭合回路，它们二者是等价的①，③式适用于一切电磁感应现象。

(2)。由三个公式求出的电动势都是几何线上的电动势。对于实际问题，若被讨论的物体是由细线构成的，那么每一条几何线上的电动势相差不大，则可由任一条线上的电动势代替物体上的电动势；若被讨论的物体包含大块导体，那么不同几何线上的电动势一般不等，即整个物体上的电动势分布不同。这时就不能由某一几何线上的电动势代替整个物体上的电动势，而要对每一几何线具体分析。

6—23。一个铜环和一个木环，尺寸完全一样，二相同的磁铁以相同的速度同时插入（如图6—52所示），问同一时刻二环中的感应电动势是否一样？



图6—52

错答：由于二环尺寸完全一样，二磁铁及其运动速度完全一样，所以二环中磁通量变化一样，则由$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}$可知，二环中感应电动势一样。

分析：公式$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}$中，$\Phi$是穿过闭合回路的总磁通量，即$\frac{d\Phi}{dt}$是穿过闭合回路总磁通量的变化率。在本题中，由于铜环中存在感应电流，所以穿过它的总磁通量为磁铁磁场穿过它的磁通量与感应电流磁场穿过它的磁通量的代数和。而在木环中无感应

①有许多人认为，二者是不等价的，①式有例外。但也有人认为在构成法拉第回路时若遵守一定的法则，这时①式就无例外，①、②式等价[见《大学物理》电磁学专辑$P_{298}$（1988）]。

(PDF压缩器 - 未注册版)

电流，所以穿过它的总磁通量就是磁铁磁场穿过它的磁通量。我们又知道，感应电流的磁场穿过闭合回路的磁通量总是要偿补、阻碍引起感应电流的磁通量的改变，所以，磁铁运动时，穿过铜环的总磁通量的变化比穿过木环的变化小。当然，铜环中的感应电动势比木环中的小。

练习题：

1．尺寸完全一样的二铝环，一个是闭合的，一个有开口，二相同的磁铁以相同的速度同时插入，在同一时刻二环中产生的感生电场是否一样？

提示：二环中的感生电场不同，在有开口的环中，只有磁铁运动产生的变化磁场激发感生电场，而在闭合环中不仅有磁铁运动产生的变化磁场激发感生电场，还有闭合环中感应电流产生的变化磁场也激发感生电场。

2．两个尺寸完全相同的导线构成的回路，其中一个线路中接有电流计，另一个线路中接有电阻，二线路中的电阻相等，二相同的磁铁以相同的速度同时插入。问二线路中同一时刻的感应电流是否一样？

提示：由于电流计内部线圈的自感作用，与电流计相接的回路中的电流要比与电阻相接的回路中的电流小。

6—24．将一磁铁插入一闭合线圈中，一次迅速插入，一次缓慢插入，通过线圈某截面感应电流的电量是否相同？

错答一：磁铁缓慢插入时，插入时间长，通过线圈电流的时间长，则由$q=\int_0^t i\mathrm{d}t$可知，通过线圈截面的电量多。

错答二：磁铁迅速插入时，线圈中感应电流大，则由$q=\int_0^t i\mathrm{d}t$可知，通过线圈截面的电量多。

分析：在整个过程中，迁移的电量为

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$q=\int_o^t i\mathrm{d}t=\int_o^t\frac{\varepsilon}{R}\mathrm{d}t=-\int_{\Phi_1}^{\Phi_2}\frac{\mathrm{d}\Phi}{R}=\frac{\Phi_2-\Phi_1}{R}.$$

可见只要线圈的电阻$R$一定，插入前后的通量$\Phi_1$、$\Phi_2$相等，迁移的电量相等，与磁铁插入的快慢无关。

练习题：

如图 6—53所示，一个面积为$S$的线圈置于均匀稳恒磁场中，线圈平面与磁场方向垂直，当把线圈转动90°时，线圈某截面上通过的电量与线圈转动快慢是否有关？

提示：无关。电量都为$q=\frac{1}{R}(\Phi_0-\Phi_{90})$

$=\frac{BS}{R}$（其中$R$为线圈的电阻）。

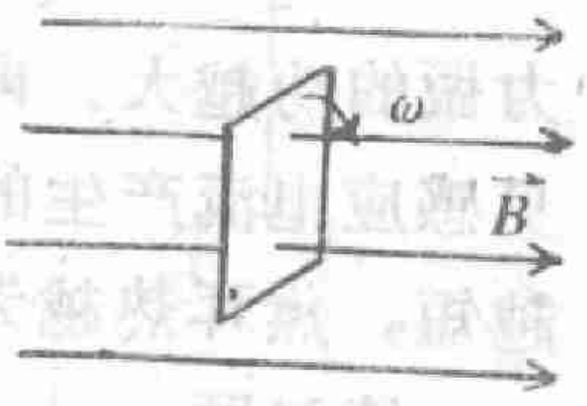


图 6—53

顺便指出：当磁场为变化磁场时，线圈中通过的电量与线圈转动有关。

6—25. 如图 6—54所示，一磁铁沿固定铜环的轴线从右边的很远处运动到左边的很远处。试问磁铁穿过铜环时，感应电流所产生的焦耳热是否与磁铁穿过铜环所花的时间有关？

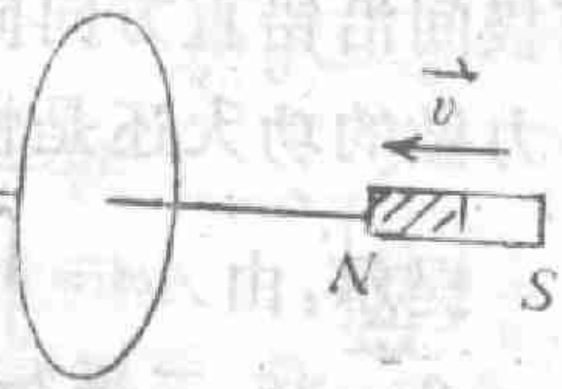


图 6—54

错答：感应电流在铜环中产生的焦耳热为

$$Q=\bar{I}^2R\Delta t=\frac{\bar{\varepsilon}^2}{R}\Delta t=\left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right)^2\frac{\Delta t}{R}=\frac{(\Delta\Phi)^2}{R\Delta t}.$$

因为磁铁从铜环的右边很远处运动到左边很远处时，铜环中的磁通量变化为零，所以$Q=0$，显然感应电流产生的焦耳热与穿过铜环的时间无关，均为零。

分析：感应电流在铜环中产生的焦耳热为

$$Q=\int_0^{\Delta t}i^2R\mathrm{d}t=R\cdot\Delta t\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}i^2\mathrm{d}t=I^2R\Delta t\neq\bar{I}^2R\Delta t.$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

上面认为$Q=\bar{I}^2 R\Delta t$，所以得出了错误的结论。

本题用$Q=\int_0^{\Delta t} i^2 R\mathrm{d}t=\int_0^{\Delta t}\frac{\varepsilon^2}{R}\mathrm{d}t$不易得出结论，下面从功能关系$Q=A_{外}=\int_L \vec{F}_{外}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$来讨论本题。

磁铁穿过铜环的速度越快，磁通量变化越大，铜环中感应电流越大，感应电流所产生的磁场对磁铁的阻力越大，要使磁铁保持原速运动，运动所需的外力越大，则由$A_{外}=\int_L \vec{F}_{外}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$可知，外力做的功越大。再由$Q=A_{外}$可知感应电流产生的焦耳热越大，可见感应电流产生的焦耳热与磁铁穿过铜环所花的时间有关。时间越短，焦耳热越大。

练习题：

如图6—55，一个闭合线圈从磁铁$NS$两极间沿铅直方向向上拉出，快速拉出时，外力做的功大还是慢拉出时外力做的功大？

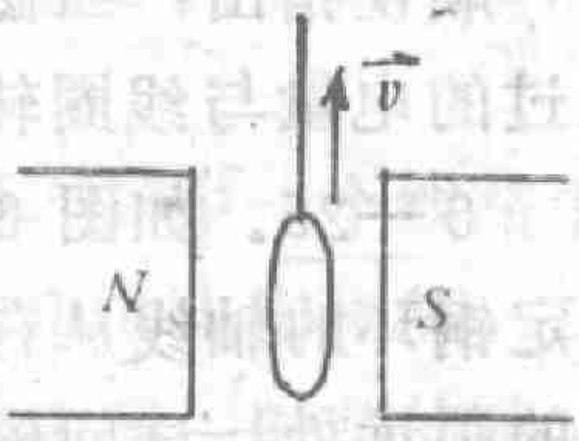


图6—55

提示：由$A_{外}=\int_L \vec{F}_{外}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$可知，快速时大。

6—26. 二平行直导线，一根与交流电源相接，另一根未接。二者之间是否有安培力？

错答：由于一根导线未与电源相接，上面未通过电流，则由安培定律可知，二者之间无安培力。

分析：当一根导线与交流电源相接时，上面通过变化电流，则它在空间产生感生电场。在感生电场作用下另一导线上产生感应电流。这样，二者之间就存在安培作用力。

练习题：

1. 如图6—56所示，二平行线圈$a$、$b$，其中$a$与交流信号源相接。二者之间是否有安培力？

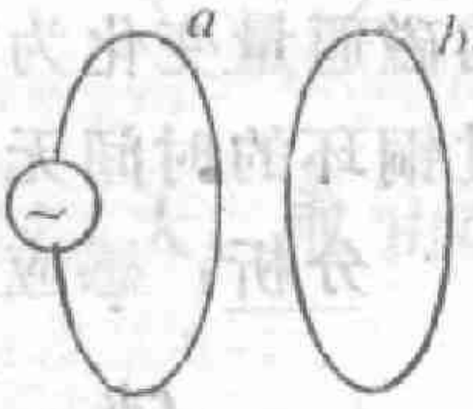


图6—56

(PDF压缩器 - 未注册版)

提示：由于$a$中电流变化，在$b$中产生感应电流，所以$ab$之间存在安培力。

2．如图6—57所示，$a$线圈中通过稳恒电流。当它以角速度$\omega$转动时，$b$是否也转动？

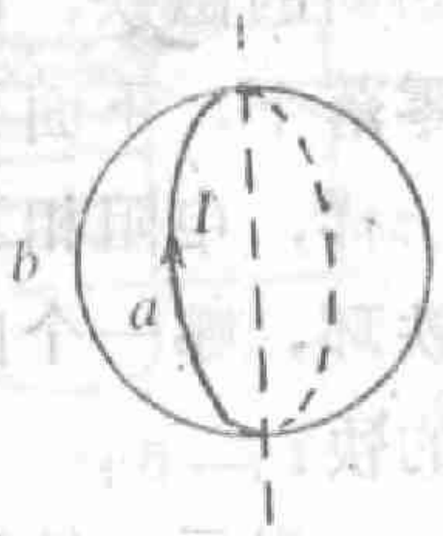


图6—57

提示：由于$a$线圈转动时，通过$b$的磁通量变化，则在$b$线圈中产生感应电流。因此$a$、$b$中的电流有互作用力矩，由于这个互作用力矩，使$b$也转动。

3．如图6—58所示，有一悬挂着的铜片，置于均匀磁场中，若把它拉离平衡位置松手后，它是否为等振辐运动（不考虑空气阻尼）。

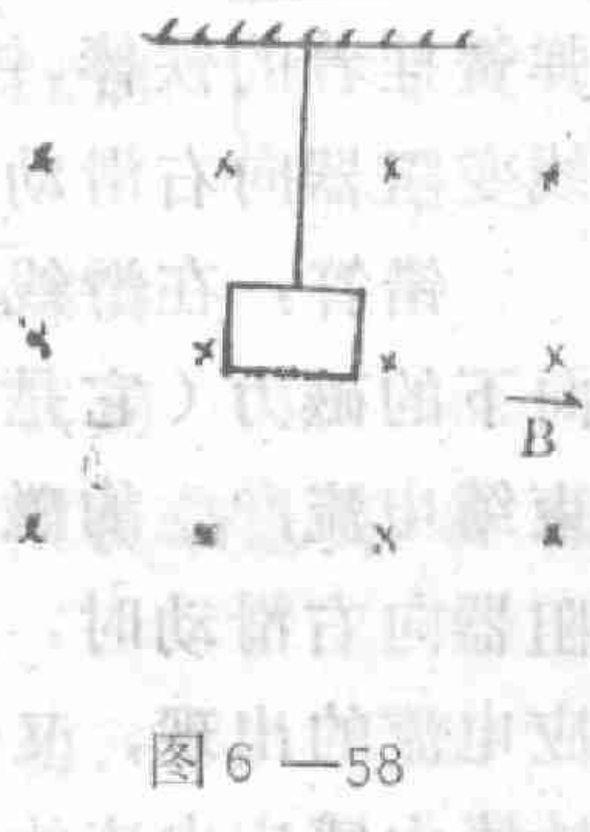


图6—58

提示：是等振辐运动。若置于非均匀磁场中，就是非等振辐运动，振辐不断减小。

6—27．如图6—59所示，一条形磁铁和一铁环（磁铁在铁环的轴线上）同时开始下落。试问二者下落的加速度是否相同？（空气阻力忽略不计）。

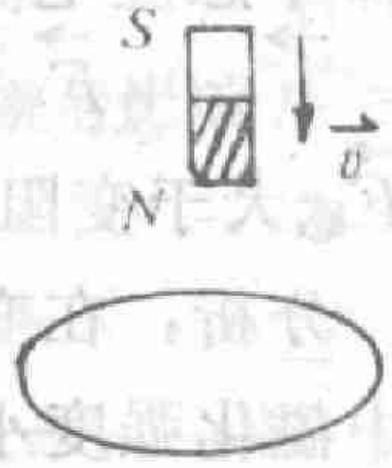


图6—59

错答：由于二者同时开始自由下落，每时每刻运动速度相同，所以铁环中磁通量不变，无感应电流，则铁环与磁铁之间无互作用力。二者均只受重力，它们的加速度都为重力加速度。

分析：磁铁对铁环本身就有吸引力，这样二者之间有互作用力，所以下落加速度不等，磁铁的大于重力加速度，铁环的小于重力加速度。但时间足够长以后，二者加速度变得相同，均为重力加速度。

练习题：

(PDF压缩器 - 未注册版)

如图6—60所示，二相同的磁铁，以初速度为零落下，下面分别是半径一样，电阻相等的铜环和铁环，哪一个向下运动的快？

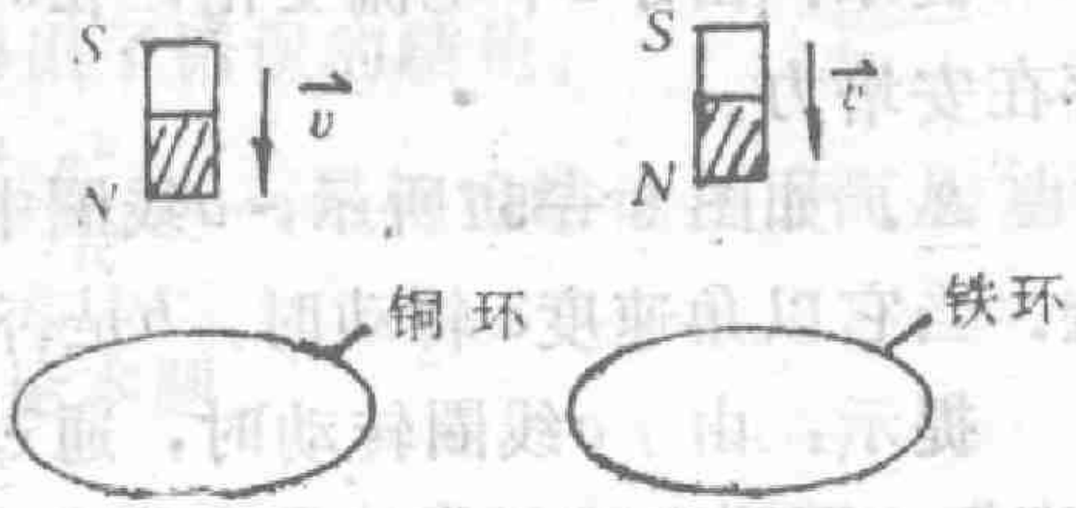


图6—60

提示：铁环上面的磁铁下落得快。

6—28．如图6—61所示，在线圈上面有一用弹簧挂着的铁棒，铁棒的一部分插入线圈中．当滑线变阻器向右滑动时，弹簧的长度是怎样变化？

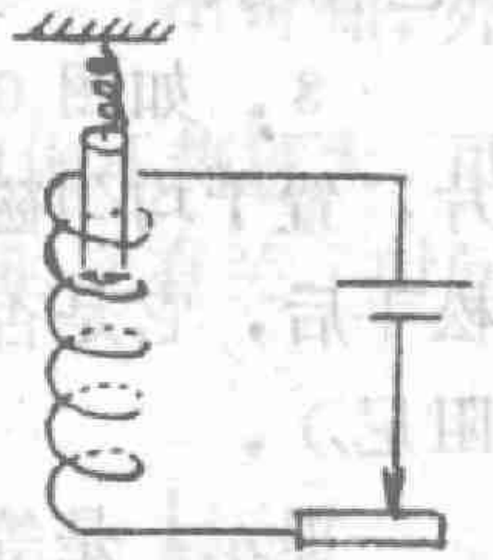


图6—61

错答：在滑线变阻器不滑动时，铁棒受一个向下的磁力（它是螺旋线圈产生的磁场对铁棒中束缚电流产生的磁力，用$\vec{F}_{束}$表示），在滑线变阻器向右滑动时，铁棒中产生感应电流。由于感应电流的出现，又受到一个向下的磁力（它是线圈产生的磁场对铁棒中感应电流的磁力，用$\vec{F}_{感}$表示），则铁棒受到的总磁力为$\vec{F}=\vec{F}_{束}+\vec{F}_{感}$。显然变阻器向右滑动时，铁棒受到的磁力$\vec{F}_{束}+\vec{F}_{感}$大于变阻器不动时，受到的磁力$\vec{F}_{束}$，所以弹簧要伸长。

分析：在变阻器向右滑时，线圈中电流减小，磁场减小，铁棒中磁化强度小，束缚电流减小，则线圈中的磁场对束缚电流的作用力$\vec{F}_{束}$减小。在此，虽然由于变阻器向右运动还产生了一个向下的$\vec{F}_{感}$，但是它小于$\vec{F}_{束}$的减小量，所以总磁力$\vec{F}=\vec{F}_{束}+\vec{F}_{感}$减小，弹簧长度缩短①。

练习题：

如图6—62所示，竖直的铁芯上绕有线圈，它上面套有铁环．在开关合上时，铁环会否向上跳起？

①只要弹簧下面的是铁磁材料，在变阻器向右滑动时，弹簧长度缩短；向左滑动时，弹簧长度升长．

(PDF压缩器 - 未注册版)

提示：不会。但是如果上面套的是由非磁铁材料作成的金属环（如铝、铜环），在开关合上时将向上跳起。

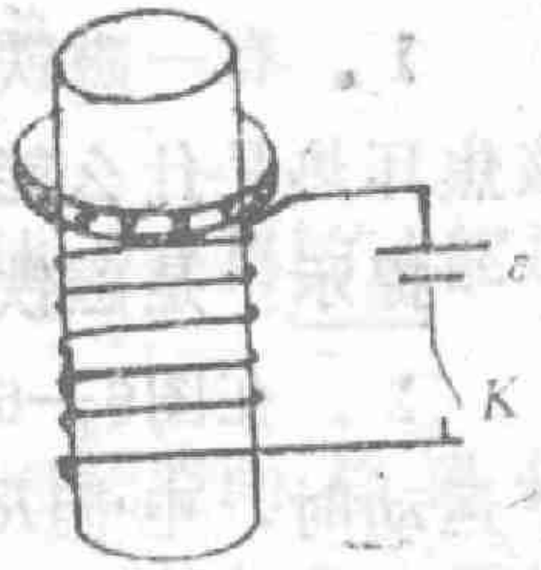


图 6—62

6—29。如图6—63所示，一蹄形磁铁在一个可以自由转动的铜盘上面旋转（蹄形磁铁的转轴是它自己的对称轴，并与铜盘的轴线重合），问铜盘是否转动？

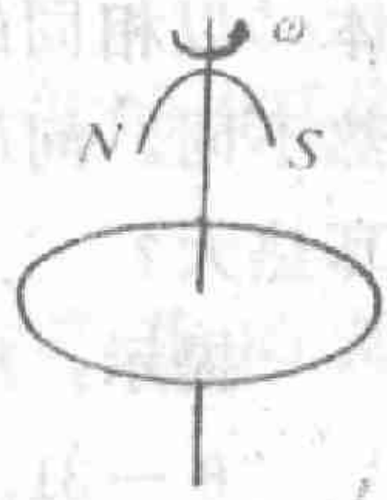


图 6—63

错答：因为磁铁运动时，铜盘中的磁通量不变，无感应电流，磁铁对铜盘无作用力矩，因此铜盘不转动。

分析：虽然整个铜盘中磁通量不变，但局部的磁通量要改变，所以局部还是存在感应电流。其局部感应电流受到磁铁磁场的作用力矩，这一作用使铜盘跟着转动。

同理，当下面铜盘转动时，磁铁也跟着转动。

练习题：

给电度表的上方放一磁铁，对电度表的转速有无影响？

提示：有影响。可使电度表转速减慢。

6—30。在图6—64中，导体从静止开始运动，获得了动能，这个能量是谁提供的？

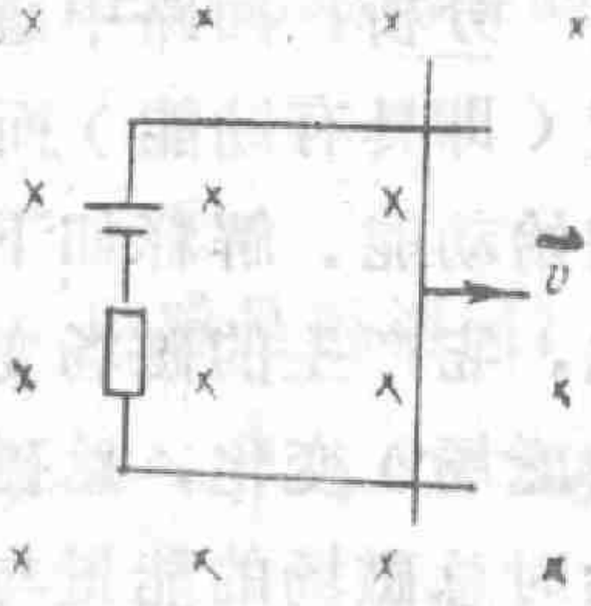


图 6—64

错答：导体移动是由于磁场力的作用下移动的，所以这个能量是磁场提供的。

分析：从表面上看，导体的移动是磁场力作用下移动的，磁场力作了功，消耗了磁场能量转换成导体的动能。实际上并非这样，这个能量是电源提供的，磁场并没有提供能量，它只是把电源提供的电能转换成导体的动能。

练习题：

(PDF压缩器 - 未注册版)

1．有一磁铁沿金属环的轴线下落，此时环中产生焦耳热。该焦耳热是什么能量转换来的？

提示：是磁铁的重力势能（其中一部分）转换来的。

2．在图6—65中，当导体$ab$在外力作用下运动时，电阻$R$上产生焦耳热，此焦耳热是由外力作功转换来的。对于不同的$R$，导体$ab$以相同的速度运动时，$R$上产生的焦耳热不同，问$R$大时焦耳热大，还是$R$小时焦耳热大？

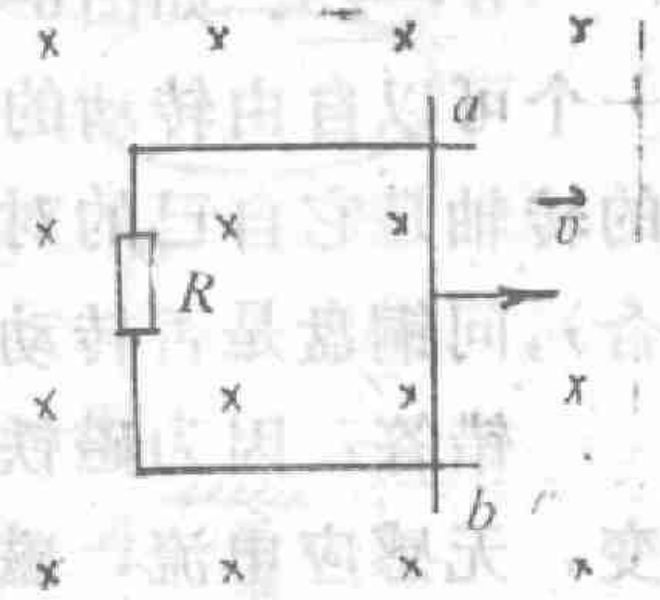


图6—65

提示：$R$小时焦耳热大。

6—31．在图6—66中，导体$ab$不受外力，但有一初速度，运动一段时间后停止了。问回路中感应电流产生的焦耳热是否等于导体$ab$的初始动能？

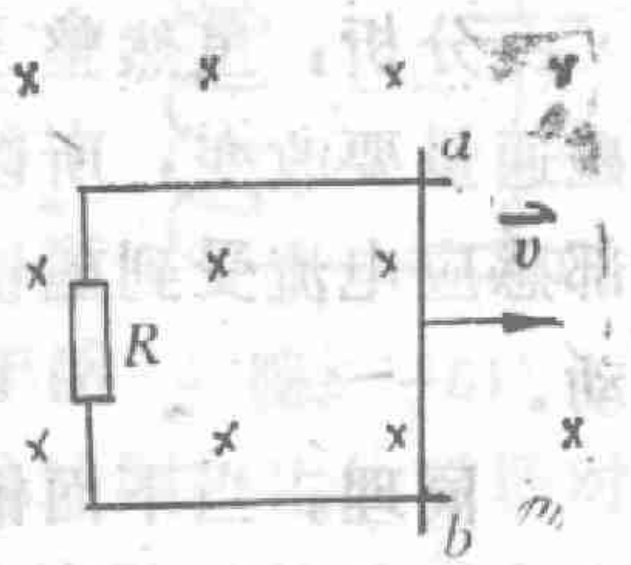


图6—66

错答：回路中感应电流产生的焦耳热是由导体$ab$的动能转换来的。则由能量守恒定律可知，回路中感应电流产生的焦耳热等于导体$ab$的初始动能。

分析：回路中感应电流产生的焦耳热的确是由于导体具有速度（即具有动能）而产生的。但回路中的焦耳热不等于导体$ab$的初始动能。解释如下：因为在导体$ab$运动的过程中，感应电流变化，它产生的磁场变化，则空间的总磁场（外场＋感应电流产生的磁场）变化，总磁场对应的能量变化。因此，导体$ab$以$v_0$运动时总磁场的能量与停止后总磁场的能量不等。则由能量守恒定律可知：

导体$ab$的初始动能＝感应电流产生的焦耳热＋总磁场能量的增量（这个量可能为负值）。

而不是

(PDF压缩器 - 未注册版)

导体$ab$的初始动能＝感应电流产生的焦耳热。

练习题：

在图6—6中，电源输出的电能是否等于导体$ab$获得的动能加上回路中产生的焦耳热？

提示：由于电路中感应电流随时间变化，因此空间总磁场（外场＋感应电流产生的场）随时间变化，总磁场的能量也随时间变化。则由能量守恒定律可知：

电源输出的电能＝导体$ab$获得的动能＋电路中产生的焦耳热＋总磁场能量的增加。

可见，电源输出的电能≒导体$ab$获得的动能＋电路中产生的焦耳热。

6—32．空心螺线管中部10匝的自感与边上10匝的自感是否一样？

错答：由于中部的磁场强，通量大，由$L=\Phi/I$可知，中部10匝的自感大。

分析：在定义$L=\Phi/I$中，$I$是通过线圈的电流，$\Phi$是线圈本身电流产生的场通过本身的通量。在螺线管中，中部场比边上的强，是指所有线圈中电流产生的场而不是被讨论的10匝线圈中的电流产生的场。被讨论的10匝线圈中的电流产生的场是相等的，所以二者的自感是相等的。

练习题：

二空心长直螺线管，其截面、匝数相等，电感是否相同？

提示：长直螺线管的自感为$L=\mu_0 n^2 V=\mu_0 N^2\frac{S}{l}$，可见还与$l$有关，长度大的自感小。

6—33．一螺绕环由$N$匝组成，它的自感是否等于每一匝线圈的自感之和？

错答一：通过螺绕环$N$匝线圈的总磁通量等于通过每一匝的

(PDF压缩器 - 未注册版)

和，即

$$\Phi=\sum_{k=1}^{N}\Phi_k.$$

再考虑到每一匝上通过电流相同，则有

$$L=\frac{\Phi}{I}=\frac{\sum_{k=1}^{N}\Phi_k}{I}=\sum_{k=1}^{N}\frac{\Phi_k}{I}=\sum_{k=1}^{N}L_k.$$

分析：在 $L=\frac{\Phi}{I}=\sum_{k=1}^{N}\frac{\Phi_k}{I}$ 中，$\Phi_k$是$N$匝线圈共同产生的磁场通过第$k$匝的磁通量，它不仅包含第$k$匝线圈本身产生的磁场的通量，还包含其它线圈产生的磁场通过它的通量，所以$\Phi_k/I\neq L_k$，（因为$L_k=\Phi_k/I$中的$\Phi_k$是第$k$匝线圈产生的磁场通过它自身的磁通量，不包含其它线圈产生的磁场通过它的磁通量）。故

$$L\neq\sum_{k=1}^{N}L_k.$$

错答二：螺绕环中的感应电动势

$$\varepsilon=\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k.$$

则有 $$L=\frac{\varepsilon}{\mathrm{d}i/\mathrm{d}t}=\sum_{k=1}^{N}\frac{\varepsilon_k}{\mathrm{d}i/\mathrm{d}t}=\sum_{k=1}^{N}L_k.$$

分析：在$L=\sum_{k=1}^{N}\frac{\varepsilon_k}{\mathrm{d}i/\mathrm{d}t}$中，$\varepsilon_k$是第$k$匝线圈中的感应电动势，它等于第$k$匝线圈的自感电动势加上其它线圈在它上面产生

(PDF压缩器 - 未注册版)

的互感电动势），所以$L \neq \sum_{k=1}^{N} L_k$。

由此可见，由$N$匝线圈构成的螺绕环，其总自感不等于各匝的自感之和，还应考虑每二匝之间的互感。

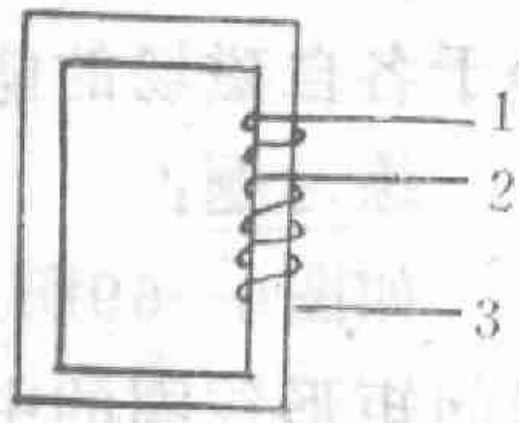


图6—67

练习题：

在图6—67中，$L_{12}=9.6$毫亨，$L_{23}=153.6$毫亨，$L_{13}$等于多少？

提示：$L_{13}=L_{12}+L_{23}+2\sqrt{L_1L_2}=240$毫亨

6—34. 如图6—68所示，二通电线圈互相垂直，它们的共同场的能量是否等于各自磁场的能量之和？

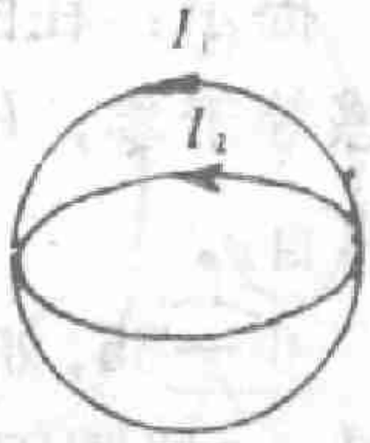


图6—68

错答：假设1、2线圈的各自产生的场为$\vec{H}_1$、$\vec{H}_2$，共同产生的场为$\vec{H}$，则共同场的能量密度为

$$w_m=\frac{\mu}{2}H^2=\frac{\mu}{2}\vec{H}\cdot\vec{H}$$

$$=\frac{\mu}{2}(\vec{H}_1+\vec{H}_2)\cdot(\vec{H}_1+\vec{H}_2)$$

$$=\frac{\mu}{2}(H_1^2+H_2^2+2\vec{H}_1\cdot\vec{H}_2)$$

$$=w_{m1}+w_{m2}+\mu\vec{H}_1\cdot\vec{H}_2。$$

可见，线圈共同场的能量不等于各自场的能量之和。

分析：二载流体共同磁场的能量为

$$w_m=\frac{1}{2}\mu\int_V H_1^2\mathrm{d}V+\frac{1}{2}\mu\int_V H_2^2\mathrm{d}V+\mu\int_V\vec{H}_1\cdot\vec{H}_2\mathrm{d}V \quad ①$$

$$=\frac{1}{2}L_1I_1^2+\frac{1}{2}L_2I_2^2+MI_1I_2。$$

---

①注意，当$M=0$时，$\int_V\vec{H}_1\cdot\vec{H}_2\mathrm{d}V=0$，但$\vec{H}_1\cdot\vec{H}_2$不一定等于零。

(PDF压缩器 - 未注册版)

其中第一、二项分别为1、2载流体各自的自感磁能，第三项为1、2载流体之间的互感磁能。当$M=0$时，第三项等于零，这时，共同磁场的能量就等于各自磁场的能量之和。

由于二通电线圈相互垂直，互感等于0，所以共同磁场的能量等于各自磁场的能量之和。

练习题：

如图6—69所示，一长直导线横放在表面绝缘的矩形线圈的中间，直导线和线圈中各通过电流$I_1$、$I_2$，试问空间磁场的能量是否等于它们各自磁场的能量之和？

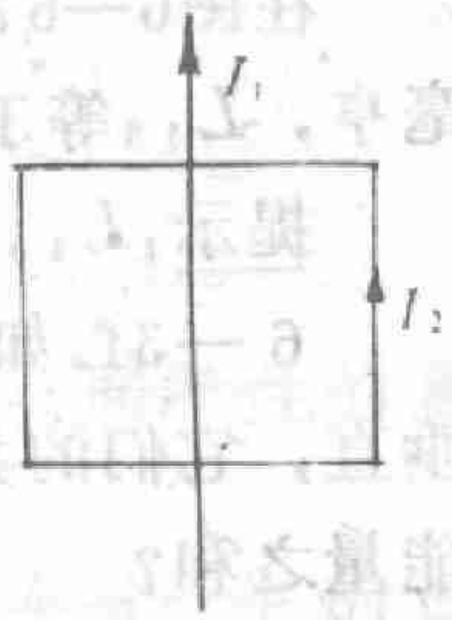


图6—69

提示：在图6—69中，直导线和线圈之间的互感等于零，$W_{互}=MI_1I_2=0$，所以$W_m=W_{自1}+W_{自2}$。

6—35。如图6—70所示，1线圈绕一直线以$\omega$转动，2线圈固定不动，两线圈的互感为$M(\theta)$[$\theta$是二线圈平面之间的夹角]。问当1线圈中通过变化电流$i_1$时，2线圈中的感应电动势为多少？

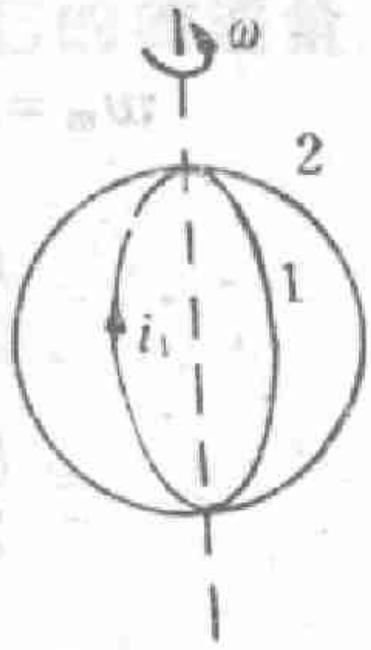


图6—70

错答：2线圈中的感应电动势为

$$\varepsilon_2=-M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}.$$

分析：在此两线圈之间的互感不是定值，随二线圈平面之间的夹角$\theta$变化，因此2线圈中的感应电动势为

$$\varepsilon_2=-\frac{\mathrm{d}\Phi_{12}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}(Mi_1)}{\mathrm{d}t}=-M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}-i_1\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$$

$$\neq -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}.$$

由于它是由磁场变化引起的，所以它是感生电动势。

练习题：

(PDF压缩器 - 未注册版)

如图6—71所示，一螺线管中通过电流为$I$（假设电流不变）。当压缩螺线管时，线圈中的感应电动势等于多少？［假设螺线管自感为$L(l)$，$l$是螺线管的长度］。

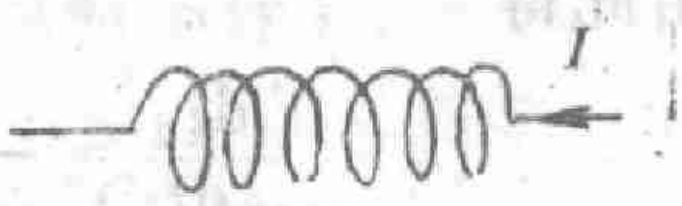


图6—71

提示：线圈中的感应电动势为

$$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}(LI)}{\mathrm{d}t}=-I\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\neq-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}.$$

该电动势既含动生电动势，又含有感生电动势。

6—36．如图6—72所示，1线圈的自感为$L_1$，旁边有一自感为$L_2$，电阻可忽略不计的2线圈，两线圈间的互感为$M$。1线圈与一交流电源相接，在上面通过变化电流$i_1$，2线圈未与电源相接。问1线圈中的感应电动势为多少？

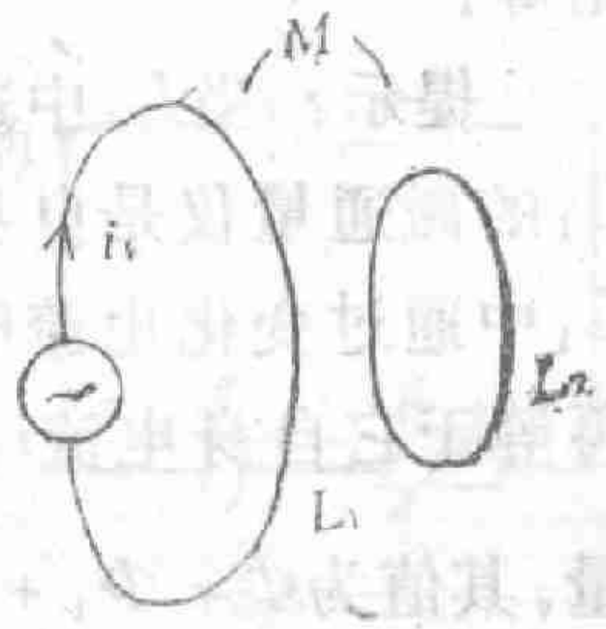


图6—72

错答：1线圈中的感应电动势为

$$\varepsilon_1=-L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}.$$

分析：1线圈中通过变化电流$i_1$时，由于1、2线圈之间的互感作用，在2线圈中产生变化的感应电流$i_2$。感应电流$i_2$反过来又作用在1线圈上，在1线圈中产生互感电动势。因此，1线圈中的感应电动势为1线圈的自感电动势加上2线圈在1线圈中产生的互感电动势，即

$$\varepsilon_1=-L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}-M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}.$$

其中假设了$i_2$的标定方向与$i_1$的标定方向相同。

对于2线圈，由基尔霍夫定律可得

$$-L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}-M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=0,$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

由此得

$$\frac{di_2}{dt}=-\frac{M}{L_2}\frac{di_1}{dt}.$$

代入上式得.

$$\varepsilon_1=-L\frac{di_1}{dt}+\frac{M^2}{L_2}\frac{di_1}{dt}=-(L_1-\frac{M^2}{L_2})\frac{di_1}{dt}.$$

练习题：

在图6—72中，若$L_1$中分别通过稳恒电流和变化电流，在变化电流的瞬时值等于稳恒电流的时刻，穿过它的磁通量是否相等？

提示：当$L_1$中通过稳恒电流时，$L_2$中无感应电流，则穿过$L_1$的磁通量仅是自身电流产生磁场的通量，其值为$\Phi=L_1i_1$。在$L_1$中通过变化电流时，$L_2$中有感应电流，则穿过$L_1$的磁通量不再等于它自身电流$i_1$产生磁场的通量、还包括$i_2$产生磁场的通量。其值为$\Phi=\Phi_1+\Phi_{21}=L_1i_1+Mi_2=(L_1-\frac{M^2}{L_2})i_1$。

可见两种情况下穿过$L_1$的磁通量不等。

6—37.如图6—73所示，一螺绕环外有一线圈，当螺绕环中有一变化电流时，外线圈中有感应电动势。向外线圈中的感应电动势的大小与外线圈断开和接通是否有关？

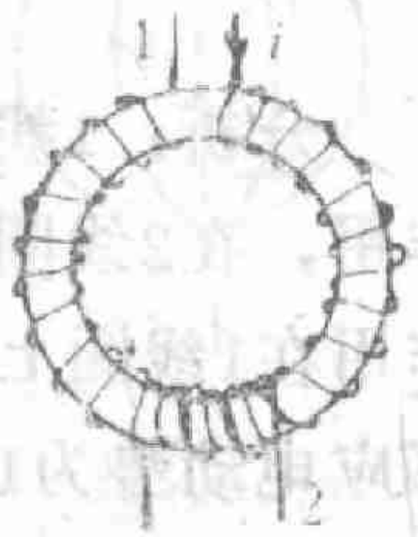


图6—73

错答：无关。

分析：在断开时，外线圈中只有互感电动势；在接通时，既有互感电动势，又有自感电动势。可见两种情况下不同，即外线圈中感应电动势与外线圈的断开和接通有关。

练习题：

如图6—74所示，在左线路中的变阻器改变时，在右线路中1、2两点之间存在感应电动势。若用电压表测量时，测出它的值

(PDF压缩器 - 未注册版)

是否等于未接电压表时的值（右线圈电阻忽略不计）。




图 6 —74

提示：电压表接在1、2两端时，右线圈变成闭合回路，这时右线圈中的感应电动势一般与开路时的不同，所以测出的值一般不等于未接时的值。

6 —38. 在图6—75中，当滑线变阻器滑动时，在$L$上可否产生大于$\varepsilon$的自感电动势？

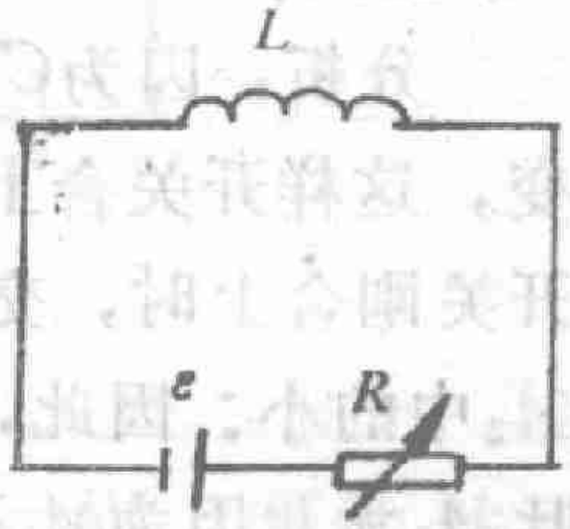



图 6 —75

错答：不可能。

分析：$L$上的自感自动势为

$\varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$。因为$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$可以很大，所以$\varepsilon_L$可大于$\varepsilon$，且可远大于$\varepsilon$。

练习题：

1．在图6—76中，置换开关时，$L$两端的自感电动势会否大于电源电动势？

提示：从1置于2时，$L$两端的自感电动势不会大于电源电动势；从1置于断开状态时，$L$两端的自感电动势会大于电源的电动势。

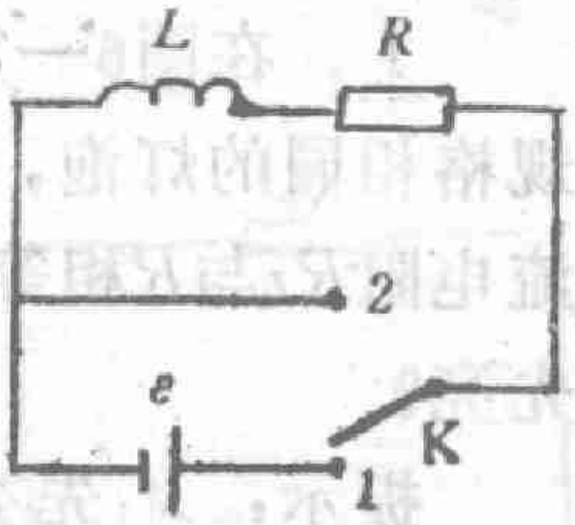



图 6 —76

2．在图 6—77中，当右线路中的滑线变阻器滑动时，左线路中可否产




图 6 —77

(PDF压缩器 - 未注册版)

生大于$\varepsilon$的互感电动势?

提示：可以.用变压器原理很好理解.

6—39.在图6—78中，$A_1$、$A_2$是两个规格相同的灯泡.在开关合上后哪个先亮?

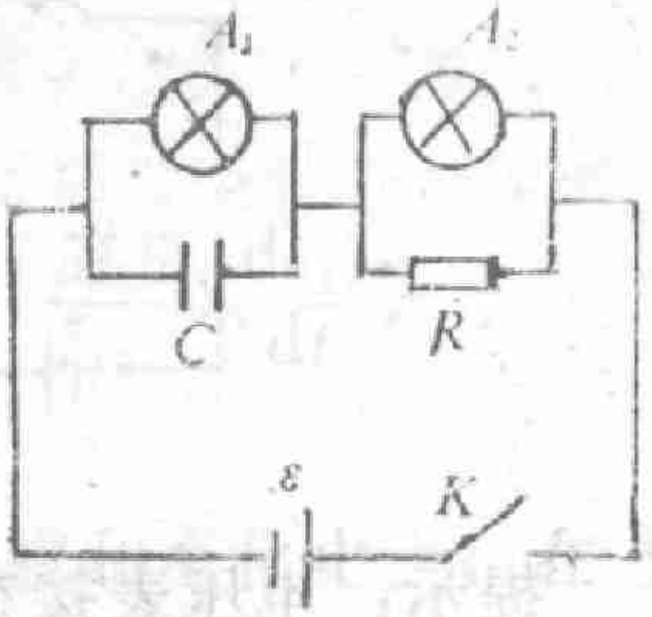


图6—78

错答：由串联电路中电流相等性质可知，$A_1$与$C$中的合电流等于$A_2$与$R$中的合电流，又因$C$中不可通过直流，所以$A_1$中的电流大于$A_2$中的，所以开关合上后$A_1$先亮.

分析：因为$C$两端电压不能突变，所以$A_1$两端电压不能突变，这样开关合上后$A_1$两端电压比$A_2$两端电压上升的慢。又因开关刚合上时，交流成分多，$C$中流过的多，所以$A_1$中的电流比$A_2$中的小.因此，开关合上后$A_2$先亮。但达到稳定后，$A_1$的亮度比$A_2$大。因为$A_1$两端的电压和$A_1$中通过的电流均比$A_2$中的大.

练习题：

1．在图6—79中，$A_1$、$A_2$是两个规格相同的灯泡，线圈的自感$L$很大，直流电阻$R_L$与$R$相等。在开关合上后，哪个先亮?

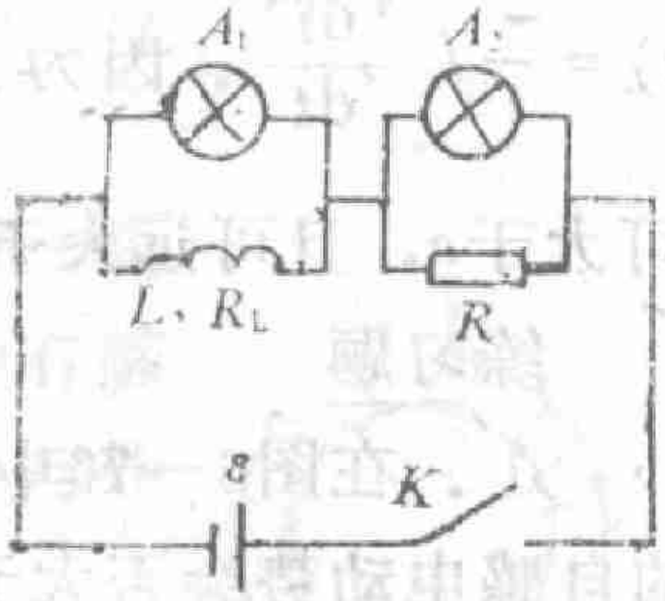


图6—79

提示：$A_1$先亮。因为开关合上时，$A_1$两端的电压和$A_1$中通过的电流增加的均比$A_2$中的快.

2．如图6—80所示，$A_1$、$A_2$是两个规格相同的灯泡，可变电阻$R$的阻值与线圈的直流电阻$R_L$相等，当开关合上时，$A_1$先亮，当开关断开时，哪个先灭?

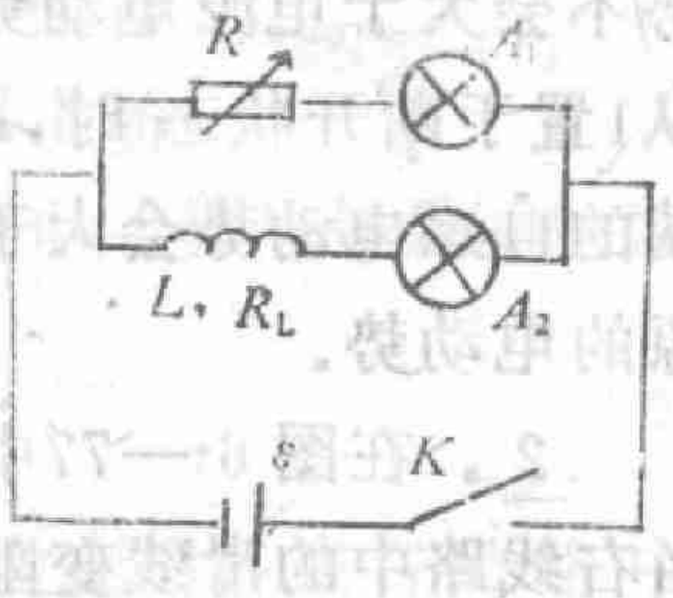


图6—80

提示：有人认为，由于自感的原因$A_1$先灭，$A_2$后灭，这是错误的。因为当

(PDF压缩器 - 未注册版)

$K$打开后，$LRA_1A_2$构成一个回路，$A_1$和$A_2$上的电流同时由大变小，所以二灯泡同时熄灭。

6—40.在图6—81($a$)、($b$)中，$R$、$C$相等，开关合上后，哪个达到稳定状态所需时间长？

错答：电源电动势大的图($b$)所需的时间长。

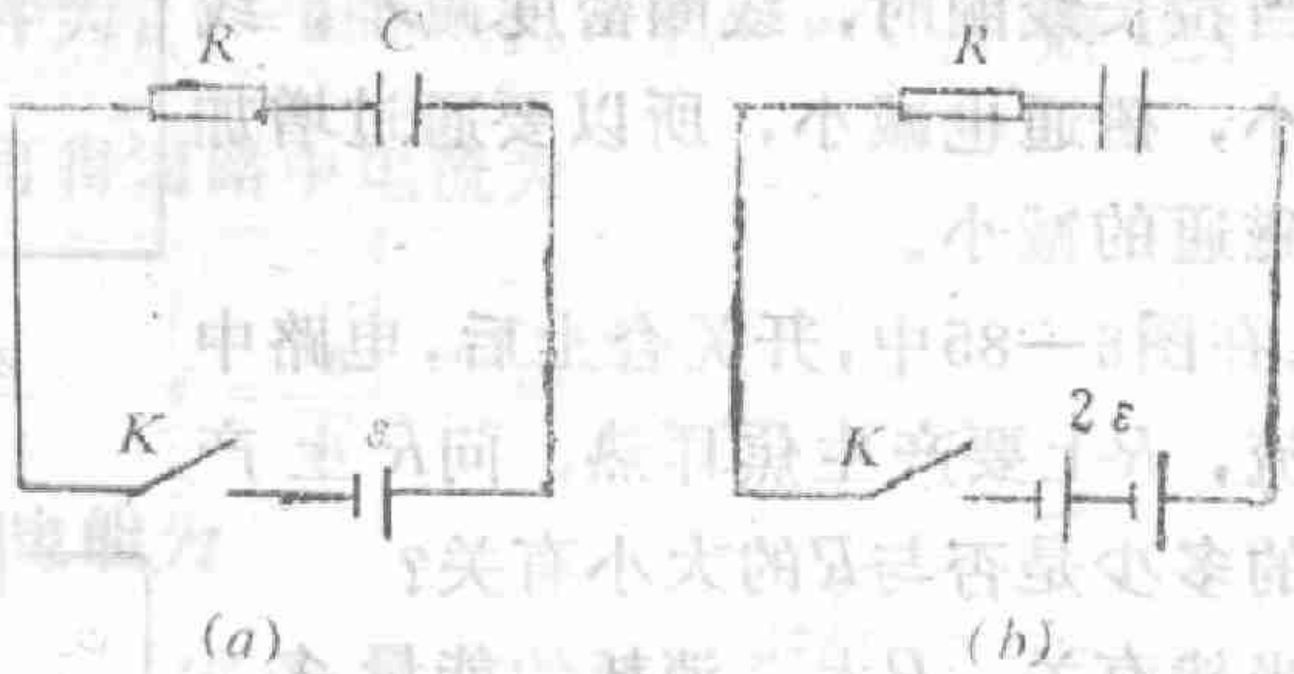



图6—81

分析：二电路暂态过程的时间常数均为$\tau = RC$，可见，达到稳定状态所需的时间相同。

练习题：

对图6—82所示的电路，当开关合上和断开时，是否存在暂态过程？

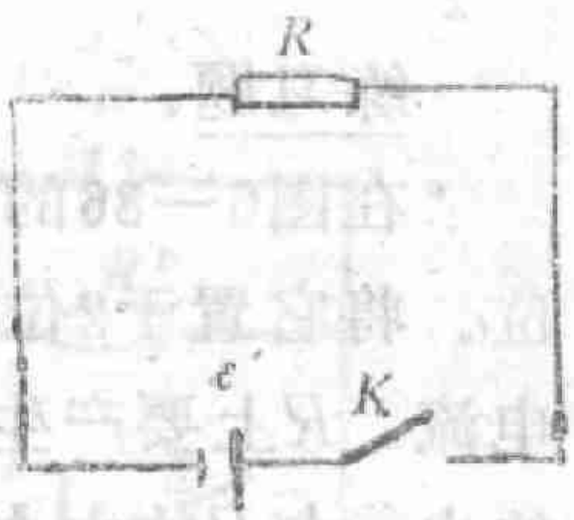



图6—82

提示：任意电路在转换开关时均有暂态过程，只是有的长，有的短。对于图6—82所示的电路，也存在暂态过程，不过其过程很短。

6—41.在图6—83中，电容器两极板间的距离可以改变，当增加极板之间距离时，电流在电池内部的流动方向如何？

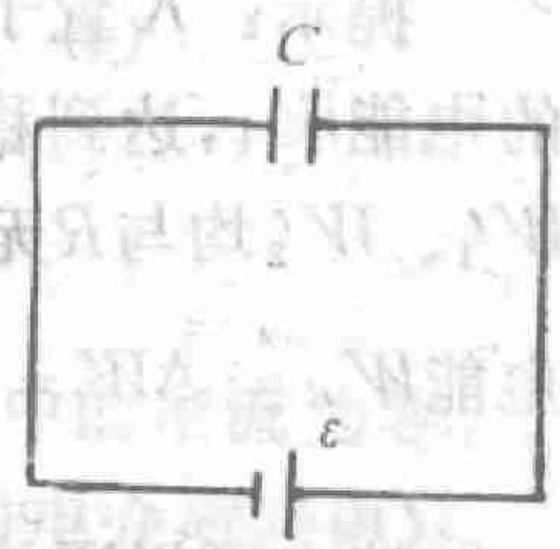



图6—83

错答：在电池外部是从正极流向负极，在电池内部是从负极流向正极。

分析：当增加电容器两极板间的距离时，电容值减小，则由$q = CU$可知，两极板上储存

(PDF压缩器 - 未注册版)

的电荷要减小，则电流在电池外部是从负极流向正极，在电池内部是从正极流向负极。

练习题：

在图6—84中，线圈的长度可以改变，当拉长它时，电路中电流是增加还是减小？

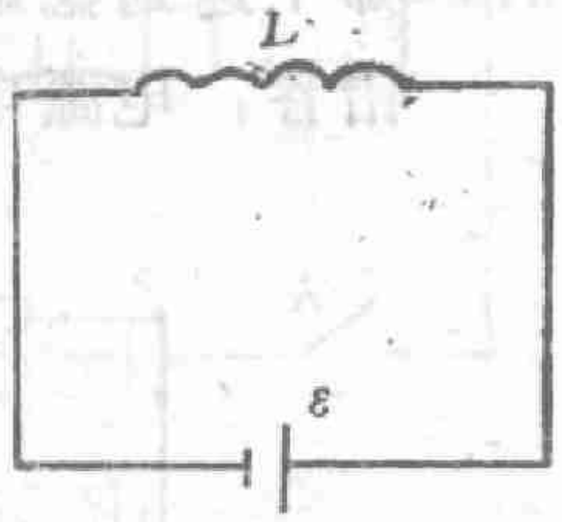


图6—84

提示：当拉长线圈时，线圈密度减小，线圈中磁场减小，磁通也减小，所以要通过增加电流来补偿磁通的减小。

6—42.在图6—85中，开关合上后，电路中通过暂态电流，$R$上要产生焦耳热，问$R$上产生的焦耳热的多少是否与$R$的大小有关？

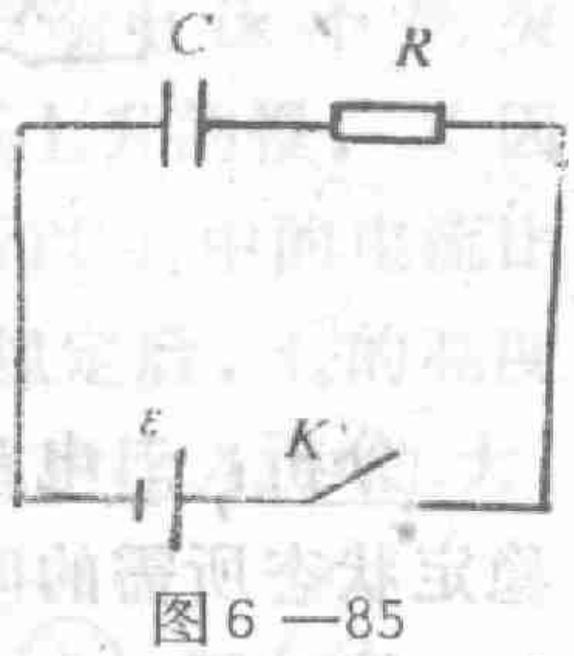


图6—85

错答：当然有关，$R$大，消耗的能量多。

分析：开关合上后电路中电流为$i=\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$，则$R$上消耗的能量为$W_R=\int_0^\infty i^2R\mathrm{d}t$

$=\frac{1}{2}C\varepsilon^2$。可见与$R$的大小无关。

练习题：

在图6—86的电路中，$K$开始置于1位。将它置于2位后，电路中存在暂态电流，$R$上要产生焦耳热。问$R$上消耗的电能与$R$的大小是否有关？

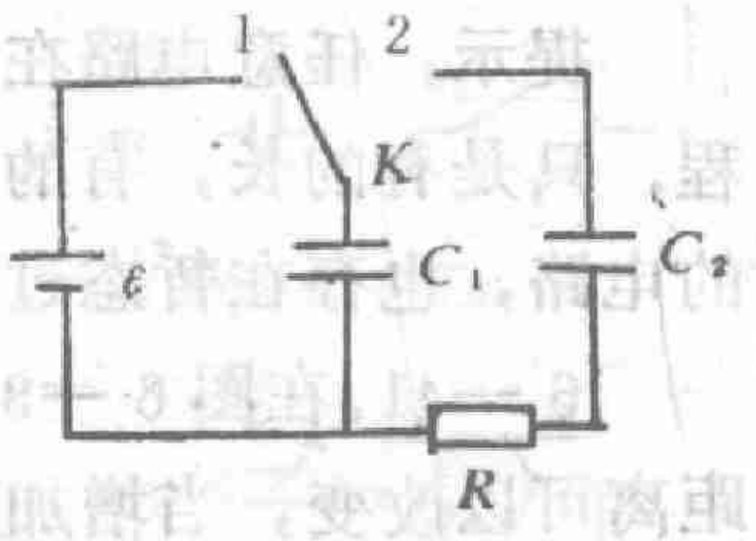


图6—86

提示：$K$置于2后初始时刻、$C_1$中的电能$W_1$，达到稳定后$C_1$、$C_2$中的电能$W'_1$、$W'_2$均与$R$无关，所以$R$上消耗的电能$W_R=\Delta W=W_1-(W'_1+W'_2)$也与$R$无关。

这也可以通过求$W_R=\int_0^\infty i^2R\mathrm{d}t$来证明它与$R$无关。证明如下：

(PDF压缩器 - 未注册版)

$K$从1置于2后，回路方程为

$$-R\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}+\frac{q_0-q_1}{C_2}=\frac{q_1}{C_1},$$

其中，$q_1$是$C_1$上储存的电荷，$q_0$是$K$置于2后、初始时刻$C_1$上储存的电荷。

初始条件为：$t=0$时，$q_1=q_0=\varepsilon/C_1$。解之，并考虑到$i=-\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}$，可得回路中电流为

$$i=\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{C_1+C_2}{RC_1C_2}t}.$$

则$R$上消耗的电能为

$$W_R=\int_0 i^2R\mathrm{d}t=\frac{\varepsilon^2C_1C_2}{C_1+C_2}.$$

可见与$R$无关。

6－43.在图6—87（$a$）中，电容器的电容为$C$。两极板之间不良电介质的漏电电阻为$R$，问图（$a$）所示的线路可否等效成图（$b$）所示的电路？

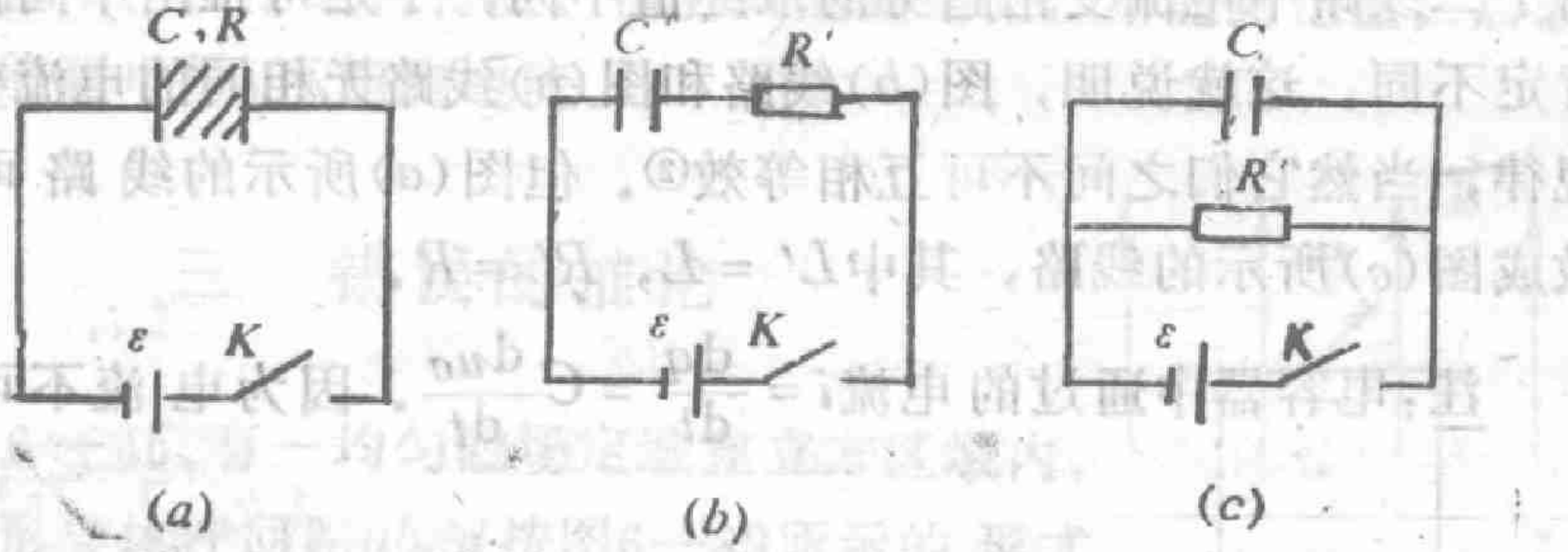



图6—87

错答：当然可等效成图（$b$）所示的线路。

分析：在开关合上后，$t\to\infty$时，图($b$)线路中的电流为零，而在图($a$)线路中，电流为$I=\varepsilon/R$(因为电容器间电介质漏电)。由于二线路中电流变化趋势的最终值不同，其中间值(变

(PDF压缩器 - 未注册版)

化规律）也肯定不同。因此图(*a*)不可等效成图(*b*)所示的电路①，但它可以等效成6—87(*c*)所示的线路，且其中$R'=R$，$C'=C$。

练习题：

在图6—88(*a*)中，实际线圈的自感为$L$，直流电阻为$R$。问图6—88(*a*)所示的线路可否等效成图6—88(*b*)所示的线路。

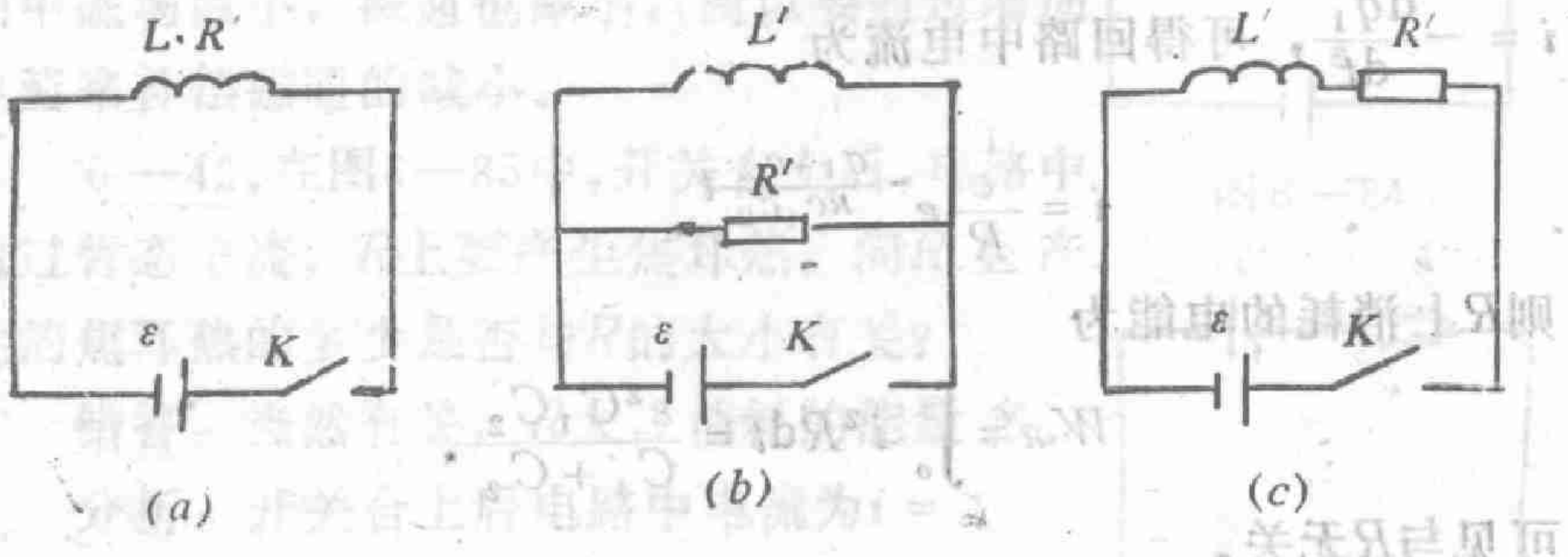



图 6 —88

提示：在开关合上后$t\to\infty$时，图(*b*)线路中的电流为无穷大（因$L$支路无直流电阻），而图(*a*)线路中的电流为$I=\varepsilon/R$。由于二线路中电流变化趋势的最终值不同，于是可推出中间值也肯定不同。这就说明，图(*b*)线路和图(*a*)线路无相同的电流变化规律，当然它们之间不可互相等效②。但图(*a*)所示的线路可等效成图(*c*)所示的线路，其中$L'=L$，$R'=R$。

注：电容器中通过的电流$i=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$。因为电流不可能

---

①当电源是简谐交流电源且电路工作状态达到稳定状态时，图6—87(*a*)可等效成图(*b*)．〔注意图(*a*)中的$C$、$R$不等于图(*c*)中的$C'$、$R'$<见赵凯华等编《电磁学》下册$P_{225}$(1978)>〕。但对于开关刚合上时的暂态过程，二线路也不可等效。

②当电源是简谐交流电源，且电路工作状态达到稳恒态时，图6—88(*a*)可等效成图(*b*)。

(PDF压缩器 - 未注册版)

为无穷大，所以$u_C$不可突变，即电容器两端的电压不可突变①。

线圈中的自感电动势$\varepsilon_L=-L\frac{di}{dt}$，因为自感电动势不可能为无穷大，所以$i$不可突变，即线圈中的电流不可突变②。

6—44。在使用灵敏电流计和冲去电流计时，如果增加回路中的电阻，其阻尼度是增大还是减小？

错答：电阻增大，阻尼度当然增大。

分析：$RLC$振荡回路的阻尼度为$\lambda=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$，由此可知，$R$增大，$\lambda$增大。

电流计电路的阻尼度为$\lambda=\frac{P}{2\sqrt{JD}}=\frac{(NSB)^2}{2\sqrt{JDR}}$③，由此可知，$R$增大，入减小，正好与前者相反。

练习题：

灵敏电流计通常只测微小电流，冲去电流计通常只测电量，那么能否用前者测电量，后者测电流？

提示：由于结构特点，前者只能测电流，不能测电量，后者不仅能测电量，还能测电流。

## 三　错误的推论

6—45.有一均匀磁场定域在立方区域内，一矩形导体杆回路$abcd$按图6—89所示的形式运动.若用$\varepsilon=\oint_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}+\oint_L\vec{E}\cdot d\vec{l}$来分

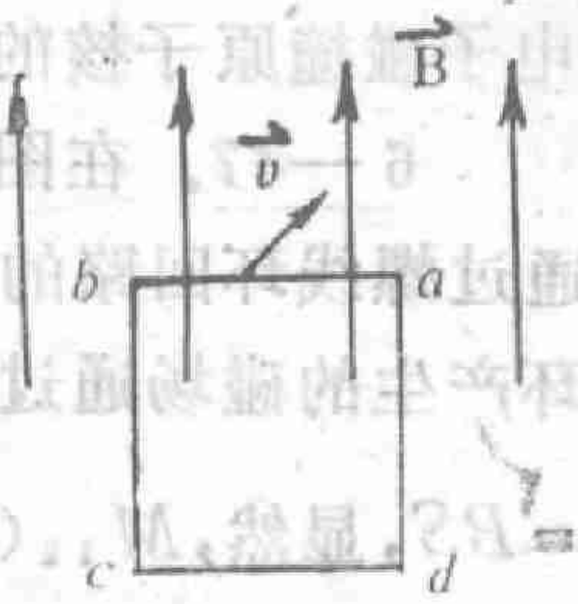


图6—89

①对有漏电的实际电容器，此结论仍成立.

②对有直流电阻的实际线圈，此结论仍成立。

③每一量的物理意义见赵凯华等编《电磁学》下册$P_{69}$(1978).

(PDF压缩器 - 未注册版)

析，导体回路中有感应电动势。若用$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}$来分析，导体杆回路中无感应电动势（因回路中磁通量未变化）。由此例可见，$\varepsilon=\oint_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}+\oint_L\vec{E}\cdot d\vec{l}$与$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}$有矛盾。

分析：$\varepsilon=\oint_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}+\oint_L\vec{E}\cdot d\vec{l}$与$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}$二式没矛盾。出现上面矛盾的原因是由于我们的前提是错误的：不可能出现图6—89所示的定域于立方区域内的均匀磁场。因图6—89所示的磁场对应的磁力线不是无头无尾的曲线，即不满足高斯定理$\oint_s\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$。

6—46。在图6—90中，当金属杆$ab$向右移动时，电子受到洛仑兹力向下运动，电子将不断碰撞原子核，原子核受到一个向下的力，宏观表现为导体受一个向下的力，所以导体要下移。

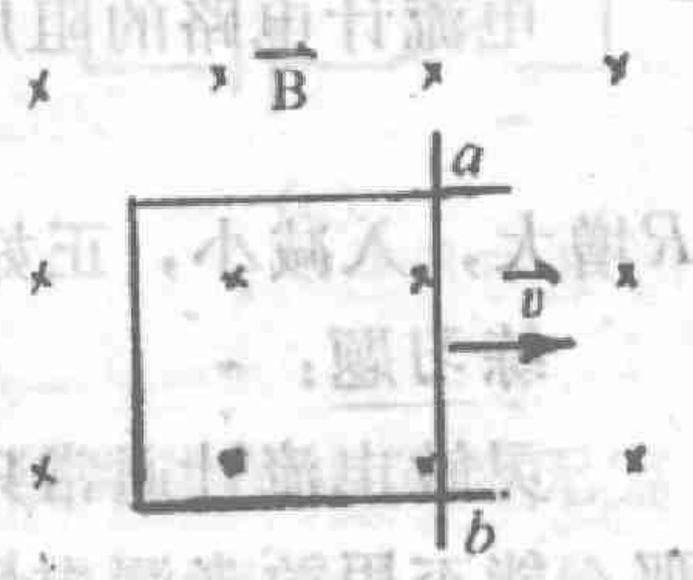


图6—90

分析：在金属杆$ab$向右移动时，原子核也受洛仑兹力，这个力的方向向上，宏观上表现为导体受一向上的力。这个力与电子碰撞原子核的力等大反向，所以导体不会向下移动。

6—47。在图6—91中，直导线产生的磁场通过螺线环回路的通量为$\Phi_{12}=NBS$。而螺绕环产生的碰场通过直导线回路的通量为$\Phi_{21}=BS$，显然，$M_{12}(=\frac{\Phi_{12}}{I_1})$不等于$M_{21}(=\frac{\Phi_{21}}{I_2})$

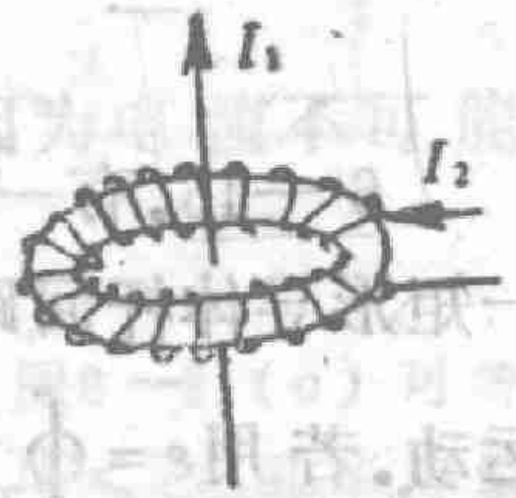


图6—91

分析：$\Phi_{12}=NBS$中的$B$是直导线在螺绕环所在处产生的场，$\Phi_{21}=BS$中的$B$是螺绕环在环内产生的场，二者并不相等。上面错认为相等，导致错误结论$M_{12}\neq M_{21}$。下面来证明$M_{12}=M_{21}$。

(PDF压缩器 - 未注册版)

设螺绕环的半径为$r$，截面积为$S(S \ll r^2)$，则直导线产生的磁场通过螺绕环回路的通量为

$$\Phi_{12} = NB_1S = N\frac{\mu_0 I_1 S}{2\pi r},$$

螺绕环产生的磁场通过直导线回路的通量为

$$\Phi_{21} = B_2S = \frac{\mu_0 N I_2 S}{2\pi r} \text{①}$$

可见，$$\frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\Phi_{21}}{I_2} = \frac{\mu_0 NS}{2\pi r},$$

即 $$M_{12} = M_{21}.$$

6—48.对$RLC$串联电路，在$R^2 > 4L/C$时，其暂态过程为过阻尼状态，$R$越大，暂态过程越长。而我们由$RLC$电路的时间常数$\tau = 2L/R$②可知，$R$越大，暂态过程越短，显然前后是矛盾的。

分析：对$RLC$串联电路的过阻尼状态，$\tau = 2L/R$不再表示时间常数，只不过仍用$\tau$表示$2L/R$而已。

---

①参见$P_{121}$题4—14的练习2。

②见贾玉润等编《大学物理实验》$P_{232}$(1987)。

(PDF压缩器 - 未注册版)

# 第七章 简谐交流电

## 一 错误的解法

7—1。有一交流讯号$u$是$u_1=30\sin 80t$伏和$u_2=70\sin 40t$伏迭加而成，即$u=u_1+u_2=30\sin 80t+70\sin 40t$伏，其有效值是多少？

错解一：$u_1$的有效值为$U_1=\frac{U_{10}}{\sqrt{2}}=\frac{30}{\sqrt{2}}$(伏)；

$u_2$的有效值为$U_2=\frac{U_{20}}{\sqrt{2}}=\frac{70}{\sqrt{2}}$(伏)。

所以$u$的有效值为$U=U_1+U_2=\frac{100}{\sqrt{2}}$(伏)。

分析：两个交流讯号和的有效值一般不等于有效值的和，即对$u=u_1+u_2$一般来说，$U\neq U_1+U_2$。

错解二：由矢量图解法可知 $\vec{U}=\vec{U}_1+\vec{U}_2$，

所以
$$U=[U_1^2+U_2^2+2U_1U_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\left[\left(\frac{U_{10}}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{U_{20}}{\sqrt{2}}\right)^2+2\cdot\frac{U_{10}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{U_{20}}{\sqrt{2}}\cos 0\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{U_{10}+U_{20}}{\sqrt{2}}=\frac{100}{\sqrt{2}}\text{(伏)}.$$

分析：矢量图解法仅适用于同频率的二简谐量迭加，不适用于不同频率的简谐量迭加。在本题中，$u_1$、$u_2$是不同频率的简谐量，所以不能用矢量图解法。

正确解法：由定义式$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2\mathrm{d}t}$，再考虑到$u$的周期为

(PDF压缩器 - 未注册版)

$T=\frac{\pi}{20}$，可得

$$U=\left[\frac{20}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{20}}(30\sin 80t+70\sin 40t)^2\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}\doteq 53.9(\text{伏}).$$

练习题：

1．如图7－1所示，二发电机的电流分别为$i_1=10\sin 100\pi t$安，$i_2=20\cos(100\pi t+\frac{\pi}{6})$安。试求负载$Z$上通过电流的有效值。

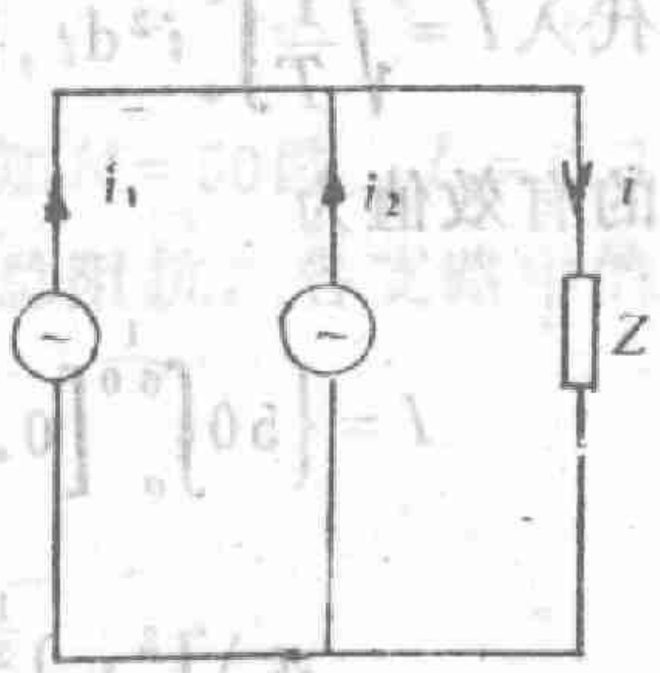


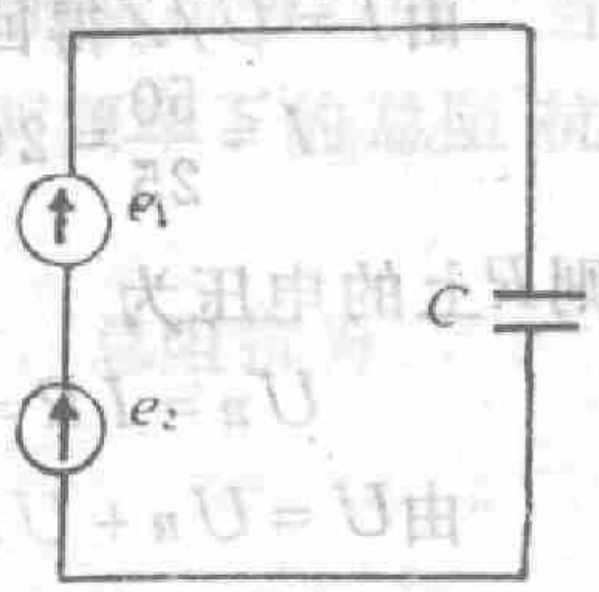
图 7—1

提示：在交流电路中，瞬时值满足基尔霍夫定律，而有效值不满足基尔霍夫定律，即$i=i_1+i_2$，但$I\neq I_1+I_2$。

②本题可由矢量图解法来求解，但要注意$\vec{I}_1$、$\vec{I}_2$二矢量的夹角为$\varphi_{21}=\varphi_2-\varphi_1=120°$，而不是30°。

答案：$$I=\left[\left(\frac{I_{10}}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{I_{20}}{\sqrt{2}}\right)^2+2\cdot\frac{I_{10}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{I_{20}}{\sqrt{2}}\cos 120°\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\doteq 12.2(\text{安}).$$

2．如图7—2所示，二讯号源串联后接在电容$C$两端，$C=20$微法，$e_1=20\sin 314t$伏，$e_2=20\sin 628t$伏(标定方向见图中箭头所示)。试求回路中电流的有效值。



7—2

提示：对于线性交流电路满足迭加原理，但要注意迭加原理中的电流是瞬时值，而不是有效值。

正确解法：只有$e_1$时，回路中的瞬时电流为

$$i_1=I_{10}\sin(\omega_1 t+\frac{\pi}{2})^{①}=\varepsilon_{10}\omega_1 C\sin(\omega_1 t+\frac{\pi}{2})$$
$$=0.1256\sin(314t+\frac{\pi}{2})(\text{安}).$$

①因在纯电容电路中，电流要比电压超前$\frac{\pi}{2}$。

(PDF压缩器 - 未注册版)

只有$e_2$时，回路中的瞬时电流为

$$i_2 = I_{20}\sin\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{2}\right) = 0.2512\sin\left(628t + \frac{\pi}{2}\right)(安).$$

由迭加原理可得，二者共存时电路中瞬时电流为

$$i = i_1 + i_2 = 0.1256\sin\left(314t + \frac{\pi}{2}\right) + 0.2512\sin\left(628t + \frac{\pi}{2}\right)安,$$

代入$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_o^T i^2 dt}$，再考虑到回路中$T = \frac{1}{50}$秒，可得回路中电流的有效值为

$$I = \left\{50\int_o^{\frac{1}{50}}\left[0.1256\sin\left(314t + \frac{\pi}{2}\right) + 0.2512\sin\left(628t + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} = 0.2(安).$$

7—2. 在$RL$串联电路两端加50伏的交流电压，已知电阻$R$=15欧，感抗$Z_L$=10欧，求电路中的总阻抗和$R$、$L$上的电压分配。

错解：由$Z = Z_1 + Z_2$得电路中的总阻抗为。

$$Z = Z_R + Z_L = 15 + 10 = 25(欧).$$

由$I = U/Z$得回路中的电流为

$$I = \frac{50}{25} = 2(安).$$

则$R$上的电压为

$$U_R = IR = 2 \times 15 = 30(伏).$$

由$U = U_R + U_L$得$L$上的电压为

$$U_L = U - U_R = 50 - 30 = 20(伏).$$

分析：在交流电串联电路中，

$\tilde{Z} = \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2$，但$Z \neq Z_1 + Z_2$。

$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$，$\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$，

$u = u_1 + u_2$，但一般$U \neq U_1 + U_2$。

在上面的解法中，应用了$Z = Z_R + Z_L$，$U = U_R + U_L$，所以结果

(PDF压缩器 - 未注册版)

肯定是错误的。

正确解法：$Z=\sqrt{Z_R^2+Z_L^2}=\sqrt{15^2+10^2}\doteq 18$(欧)，

$$U_R=IZ_R=\frac{U}{Z}R=\frac{50}{18}\times 15\doteq 42\text{(伏)},$$

$$U_L=IZ_L=\frac{U}{Z}Z_L=\frac{50}{18}\times 10\doteq 28\text{(伏)}.$$

练习题：

在$RL$并联电路两端加上60伏电压，已知$R=50$欧，$L=0.1$亨，交流电的频率为50赫兹。试求电路中的总阻抗，各支路中的电流和总电流。

提示：在并联电路中

$\frac{1}{Z}=\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}$，但$\frac{1}{Z}\neq\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}$。

$I=I_1+I_2$，$\vec{I}=\vec{I}_1+\vec{I}_2$，

$i=i_1+i_2$，但一般$I\neq I_1+I_2$。

答案：$Z=26.6$欧，$I_R=1.2$安，$I_L=1.9$安，$I=2.3$安。

7—3.一电阻与一空心线圈串联后接入交流电路中，当交流电的频率为50周时，电阻的阻抗为50欧、线圈的阻抗为37欧。当频率为100周时，线圈的阻抗为66欧，试求这两频率下的总阻抗各为多少？

错解：由$Z=\sqrt{Z_R^2+Z_L^2}$得，在$f=50$周时，总阻抗为

$$Z=\sqrt{50^2+37^2}\doteq 62\text{(欧)}.$$

在$f=100$周时，总阻抗为

$$Z=\sqrt{50^2+66^2}\doteq 83\text{(欧)}.$$

分析：由$L=Z_L/\omega$可以发现，两个频率下的$L$不等，这说明线圈并非理想线圈，而是存在有功电阻的线圈。因此，求总阻抗时，不能用上面的公式去求，而要用公式$Z=\sqrt{(R+R_L)^2+(\omega L)^2}$来求。

正确解法：由$Z_L=\sqrt{R_L^2+(\omega L)^2}$得

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$\begin{cases} 37^2 = R_L^2 + (314L)^2, \\ 66^2 = R_L^2 + (628L)^2. \end{cases}$$

解之得

$$L \doteq 0.1\text{亨}, \quad R_L \doteq 20\text{欧}.$$

所以在$f = 50$赫兹时，总阻抗为

$$Z = \sqrt{(R + R_L)^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{(50 + 20)^2 + (314 \times 0.1)^2}$$

$$\doteq 77(\text{欧}).$$

在$f = 100$赫兹时，总阻抗为

$$Z = \sqrt{(50 + 20)^2 + (628 \times 0.1)^2} = 94(\text{欧}).$$

练习题：

如图7—3所示，一电阻与空心线圈串联，当它接在直流电源两端时，电表$V_1$的读数为15伏，$V_2$的读数为5伏；当接在交流电源两端时，$V_1$的读数仍为15伏，$V_2$的读数为20.6伏．试求直流电源和交流电源两端的电压。

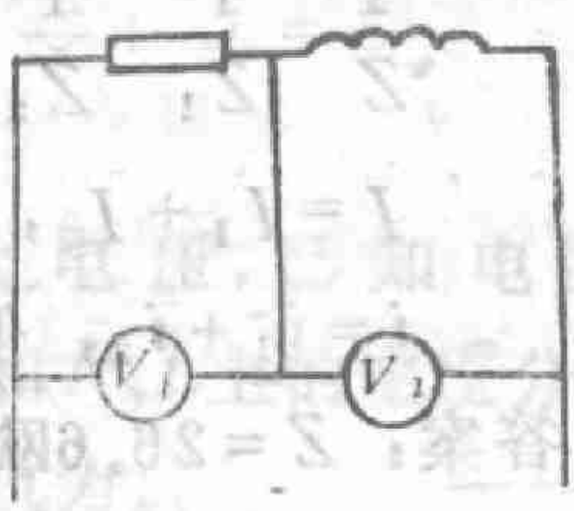



图 7—3

提示：直流电源两端的电压$V_{直} = V_1 + V_2$；交流电源两端的电压

$V_{交} \fallingdotseq \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$（因为线圈不是理想线圈）。

答案：$V_{直} = 20$伏，$V_{交} \doteq 28.3$伏。

7—4．在交流电路的某支路中，电流和电压的复数形式各为$\dot{U} = 100\sqrt{2}e^{j(100\pi t + \pi/3)}$伏，$\dot{I} = 10\sqrt{2}e^{j(100\pi t + \pi/4)}$安，求此支路中的瞬时功率。

错解一：由电压和电流的复数形式可得它们的瞬时值各为

$$u = 100\sqrt{2}\cos(100\pi t + \frac{\pi}{3})\text{伏},$$

$$i = 10\sqrt{2}\cos(100\pi t + \frac{\pi}{4})\text{安}.$$

则 由$p = \frac{1}{2}U_0 I_0[\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi)]$①（其中$\varphi$是电压与电流之

① 见赵凯华等编《电磁学》下册$P_{211}$（1978）.

(PDF压缩器 - 未注册版)

间的相位差，即$\varphi=\varphi_u-\varphi_i$)，可得

$$p=\frac{1}{2}\times 100\sqrt{2}\times 10\sqrt{2}\times\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(200\pi t+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right]=1000\left[\cos\frac{\pi}{12}+\cos\left(200\pi t+\frac{\pi}{12}\right)\right]\text{(瓦)}.$$

分析：由$u=U_o\cos(\omega t+\varphi_u)$，$i=I_o\cos(\omega t+\varphi_i)$可得瞬时功率

$$p=ui=\frac{1}{2}U_oI_o[\cos(\varphi_u-\varphi_i)+\cos(2\omega t+\varphi_u+\varphi_i)]$$

$$\neq\frac{1}{2}U_oI_o[\cos(\varphi_u-\varphi_i)+\cos(2\omega t+\varphi_u-\varphi_i)].$$

只有当$\varphi_i=0$时，$\varphi=\varphi_u$，才有

$$p=\frac{1}{2}U_oI_o[\cos\varphi+\cos(2\omega t+\varphi)]①,$$

因此正确的答案是

$$p=1000\left[\cos\frac{\pi}{12}\cos\left(2\omega t+\frac{7\pi}{12}\right)\right]\text{瓦}.$$

错解二：由复数电压$\dot{U}$和复数电流$\dot{I}$可得复功率为

$$\tilde{P}=\dot{U}\,\dot{I}=2000e^{j(200\pi t+\pi/3+\pi/4}\text{瓦}.$$

取其实部即得瞬时功率为

$$p=2000\cos(200\pi t+\frac{7\pi}{12})\text{瓦}.$$

分析：瞬时电压$u$和瞬时电流$i$等于复数电压$\dot{U}$和复数电流$\dot{I}$的实部，但瞬时功率一般不等于$\dot{U}\,\dot{I}$的实部，（当然$\dot{U}\,\dot{I}$也不称作复功率，实际上无复功率的概念），即$p\neq Re(\dot{U}\,\dot{I})$.

错解三：瞬时功率

$$p=\frac{1}{4}(\dot{U}\,\dot{I}^*+\dot{U}^*\dot{I})$$

$$=\frac{1}{4}\left[100\sqrt{2}\,e^{j(100\pi t+\frac{\pi}{3})}\times 10\sqrt{2}\,e^{-j(100\pi t+\frac{\pi}{4})}\right.$$

①赵凯华等编《电磁学》下册$P_{211}$（1978）的公式是$\varphi_i=0$的特例．并非一般等式.

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$+100\sqrt{2}e^{-j(100\pi t+\frac{\pi}{3})}\times 10\sqrt{2}e^{j(100\pi t+\frac{\pi}{4})}\Big]$$

$$=\frac{2000}{4}(e^{j\frac{\pi}{12}}+e^{-j\frac{\pi}{12}})=1000\cos\frac{\pi}{12}\doteq 966(瓦)。$$

分析：$\frac{1}{4}(\dot{U}\dot{I}^*+\dot{U}^*\dot{I})$是平均功率，而不是瞬时功率。瞬时功率为

$$p=\frac{1}{4}(\tilde{U}\tilde{I}+\tilde{U}^*\tilde{I}+\tilde{U}\tilde{I}^*+\tilde{U}^*\tilde{I}^*)①$$

$$=\frac{1}{4}U_0I_0[\cos(\varphi_u-\varphi_i)+\cos(2\omega t+\varphi_u-\varphi_i)]。$$

练习题：

某支路中的电压为$u=10\cos(\omega t-20°)$伏，电流为$i=20\sin(\omega t+40°)$安，试求该支路中的瞬时功率。

提示：由$p=\frac{1}{2}U_0I_0[\cos(\varphi_u-\varphi_i)+\cos(2\omega t+\varphi_u+\varphi_i)]$求$p$时，$\varphi_u$、$\varphi_i$要将$u$、$i$均化成余弦函数时所对应的初位相。

答案：$p=100[\cos30°+\cos(2\omega t-70°)]$瓦。

7—5．有一电容性电路，两端加220伏电压时，电流为10安，相角关系见图7—4所示。试求电路中的有功功率、无功功率和视在功率。

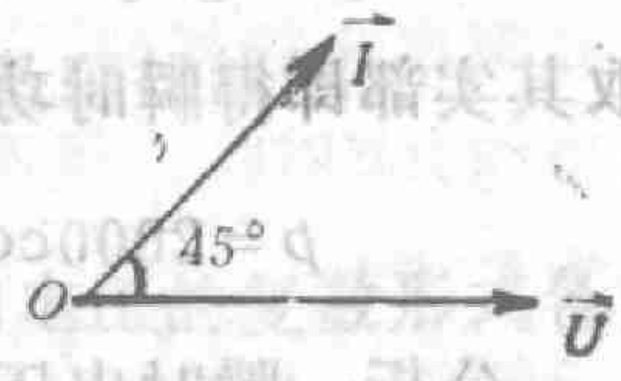



图7—4

错解：有功功率

$$P_{有}=UI\cos\varphi=10\times220\times\cos45°\doteq1556(瓦),$$

无功功率

$$P_{无}=UI\sin\varphi=220\times10\times\sin45°\doteq1556(瓦),$$

视在功率

$$S=P_{有}+P_{无}=3112(瓦)。$$

分析：①公式$P_{有}=UI\cos\varphi$和$P_{无}=UI\sin\varphi$中$\varphi$是电压比电

①见北大物理系等编《物理学习题集》第二册$P_{301}$（1980）

(PDF压缩器 - 未注册版)

流超前的位相，而不是电流比电压超前的位相。若用错，$P$无的值差一负号。②$S \neq P_{有} + P_{无}$，而是$S = \sqrt{P_{有}^2 + P_{无}^2} = UI$。③$P_{有}$的单位是瓦，而$P_{无}$的单位是乏，$S$的单位是(伏安)。

正确解法：$P_{有} = UI\cos\varphi = 220 \times 10 \times \cos 45^\circ \doteq 1556$(瓦)，

$P_{无} = UI\sin\varphi = 220 \times 10 \times \sin(-45^\circ) \doteq -1556$(乏)，

$$S = \sqrt{P_{有}^2 + P_{无}^2} = 1556\sqrt{2} \doteq 2200\text{(伏安)}.$$

练习题：

某支路中的电压为$u = 10\sin(\omega t + 10^\circ)$伏，电流为$i = 5\cos(\omega t - 20^\circ)$安.试求此支路中的有功功率、无功功率和视在功率.

提示：在公式$P_{有} = UI\cos\varphi$，$P_{无} = UI\sin\varphi$，$S = UI$中，$I$、$U$均是有效值，而不是最大值，$\varphi$是电压比电流超前的相位，即$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$，且要注意$\varphi_u$、$\varphi_i$是将$u$，$i$化成同一类三角函数时的初位相。

答案：$P_{有} \doteq 12.5$瓦，$P_{无} \doteq -21.7$乏，$S \doteq 25$伏安。

7—6.有一办公楼上装有$\widetilde{Z} = 303 + j525$欧的日光灯200个，60瓦的白炽灯100个，那么要给该楼配电，所用变压器的容量最小为多少？（照明电路的电压为220伏）.

错解：200个日光灯的功率为

$$P_{日}① = 200UI\cos\varphi_{日} = 200\frac{U^2}{Z^2}r.$$

$$= 200 \times \frac{220^2}{303^2 + 525^2} \times 303 \doteq 7982\text{(瓦)},$$

100个白炽灯的功率为

$$P_{白} = 100 \times 60 = 6000\text{(瓦)}.$$

则该楼上用电总功率为

①为了书写方便，除了容易与无功功率混淆的情况外，常用$P$表示有功功率，不再带下角标“有”。

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$P = P_{日} + P_{白} = 13982(瓦)。$$

因此要给该楼配电所用变压器的容量为13982(瓦)。

分析：上面计算的是办公楼上所有照明负载所消耗的功率。因为日光灯存在无功功率，所以变压器容量要比此值大，应为

$$S = \sqrt{P_{有}^2 + P_{无}^2} = \sqrt{13982^2 + 13831^2} \doteq 19667(伏安)。$$

练习题：

有一台单相发电机额定功率为22千伏安，它可供多少个$\tilde{Z} = 1032.5 + j774.4$欧的日光灯正常照明（照明电压为220伏）？

答案：可供587个日光灯正常照明。

7—7.一个标有“1μf300V”的电容器，和一个标有“220V 100W”的灯泡串联后，接在380伏的火线之间，试求灯泡的功率。

错解：由$P = U^2/R$得灯泡的电阻为

$$R = \frac{U^2}{P} = \frac{220^2}{100} = 484(欧)。$$

由$Z_C = \frac{1}{\omega C}$得电容器的阻抗为

$$Z_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \times 3.14 \times 50 \times 1 \times 10^{-6}} \doteq 3185(欧)。$$

则电路中的总阻抗为

$$Z = \sqrt{R^2 + Z_C^2} = \sqrt{484^2 + 3185^2} \doteq 3222(欧),$$

电路中的电流为

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{380}{3222} \doteq 0.118(安),$$

所以灯泡的功率为

$$P = I^2 R = 0.118^2 \times 484 \doteq 6.7(瓦)。$$

分析：计算可知，电容器两端的电压为376伏，大于电容器的击穿电压，电容器被击穿。它击穿后，380伏的电压几乎全部加在灯泡两端，当然灯泡被烧断，不再发光，所以灯泡上的功率为零。

练习题：

(PDF压缩器 - 未注册版)

两个标有220伏100瓦的灯泡，分别串联484欧的电阻和484欧的电容后，再接在380伏的火线之间，哪个灯泡较亮？

提示：串联电容的灯泡，其两端的电压为269伏，大于220伏额定电压，因而灯丝被烧断，当然不发光；串联电阻的灯泡两端的电压为190伏，虽不能正常发光，但可以发光，所以串联电阻的灯泡较亮。

7—8．在图7—5中，$L=0.01$亨，$R=2$欧，$C=200$微法，讯号源频率$f=100$赫兹，输出电压$U=1$伏，试求电路中储存的电磁能。

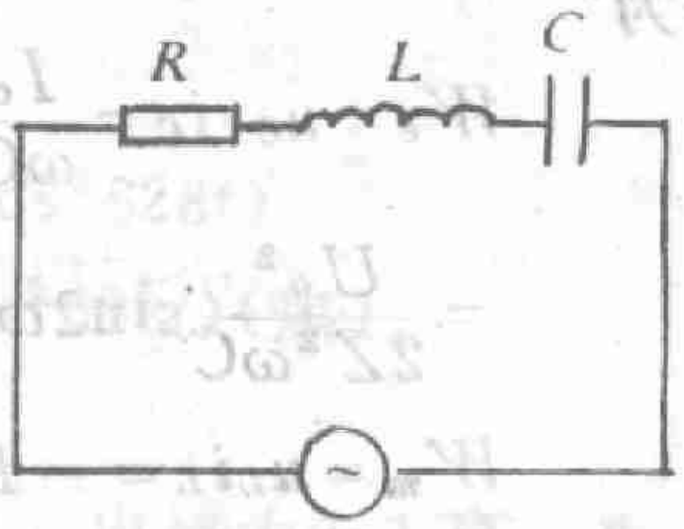


图7—5

错解一：图7—5所示的电路是一$RLC$串联电路，则满足等式$Q=2\pi\frac{W_S}{W_R}$，由此式可得电路中储存的电磁能为

$$W_S=\frac{1}{2}QW_R=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\cdot I^2RT$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\cdot\frac{U^2}{Rf}=\frac{1}{2\pi f}\cdot\frac{U^2}{R^2}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\doteqdot\frac{1}{2\times3.14\times100}\times\frac{1^2}{2^2}\times\sqrt{\frac{0.01}{200\times10^{-6}}}$$

$$=2.8\times10^{-3}\text{(焦)}.$$

分析：在谐振电路品质因数的定义式$Q=2\pi\frac{W_S}{W_R}$中，$W_S$、$W_R$分别是谐振状态下电路中储存的电磁能量和消耗的能量，因图7—5所示的电路未处于谐振状态，所以不能用上式来求电路中储存的电磁能。

错解二：假设电路中电流为

$$i=I_0\cos\omega t,$$

则$C$、$L$两端的电压各为

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$u_C = U_{Co}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{I_o}{\omega C}\sin\omega t,$$

$$u_L = U_{Lo}\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -I_o\omega L\sin\omega t,$$

电路中电容器内部储存的电场能量和电感内部储存的磁场能量各为

$$W_e = u_C \cdot i_C = \frac{I_o}{\omega C}\sin\omega t \cdot I_o\cos\omega t$$

$$= \frac{U_o^2}{2Z^2\omega C}\sin 2\omega t = \frac{U^2}{R^2+(\omega L - 1/\omega C)^2}\cdot\frac{1}{\omega C}\sin 2\omega t,$$

$$W_m = u_L i_L = -I_o\omega L\sin\omega t \cdot I_o\cos\omega t$$

$$= -\frac{U_o^2}{2Z^2}\omega L\sin 2\omega t = \frac{-U^2}{R^2+(\omega L - 1/\omega C)^2}\omega L\sin t2\omega t.$$

所以电路中储存的电磁能为

$$W_S = W_e + W_m = \frac{U^2}{R^2+(\omega L - 1/\omega C)^2}(\frac{1}{\omega C} - \omega L)\sin 2\omega t$$

$$= \frac{1^2}{2^2+\left(628\times 0.01 - \dfrac{1}{628\times 2\times 10^{-4}}\right)^2}(\frac{1}{628\times 2\times 10^{-4}}$$

$$- 628\times 0.01)\cdot\sin(2\times 628t) = 0.25\sin 1256t(\text{焦}).$$

分析：$u_C i_C$、$u_L i_L$分别是$C$、$L$中的瞬时功率（单位时间电源对它做的功），也就是单位时间$C$内电场能量和$L$内磁场能量的增量，而并不是$C$、$L$内的电场能量和磁场能量.

$C$、$L$内的电场能量和磁场能量分别为

$$W_e = \frac{1}{2}Cu_C^2 = \frac{I_o^2}{2\omega^2 C}\sin^2\omega t,$$

$$W_m = \frac{1}{2}Li_L^2 = \frac{I_o^2 L}{2}\cos^2\omega t.$$

所以电路中储存的电磁能为

$$W_S = W_e + W_m = \frac{I_o^2}{2}(\frac{1}{\omega^2 C}\sin^2\omega t + L\cos^2\omega t)$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$= \frac{U^2}{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}\left(\frac{1}{\omega^2 C}\sin^2\omega t + L\cos^2\omega t\right)$$

$$= \frac{1}{2^2+\left(628\times 0.01-\frac{1}{628\times 2\times 10^{-4}}\right)^2}\left(\frac{1}{628^2\times 2\times 10^{-4}}\right.$$

$$\left.\times \sin^2 628t + 0.01\cos^2 628t\right)$$

$$= 0.146(0.013\sin^2 628t + 0.01\cos^2 628t)$$

$$= 1.46\times 10^{-3}(1.3\sin^2 628t + \cos^2 628t)(\text{焦}).$$

练习题：

如图7—6所示，一阻值为15欧的电阻，电感为0.1亨、直流电阻为25欧的实际线圈，容量为50微法的电容串联后，接在内阻为5欧的交流讯号源两端，在保证讯号源输出电压（即加压*RLC*串联电路两端电压）为10伏的条件下，调节频率使电路达到谐振状态。试求谐振状态下，电路中储存的电磁能为多少？

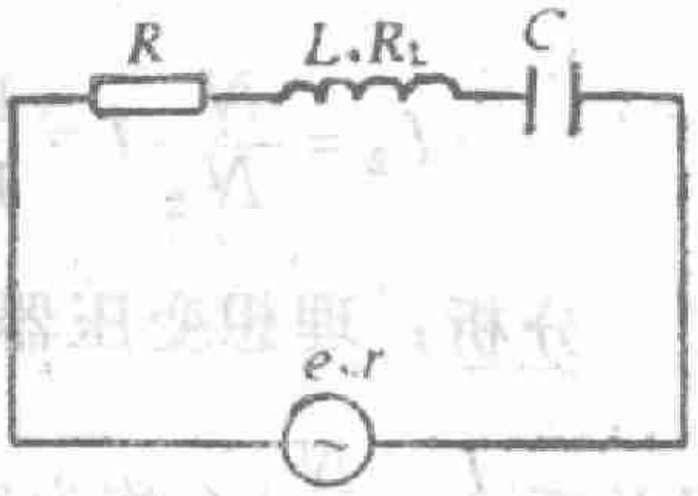



图 7—6

提示：①可用$W_S = W_e + W_m = \frac{1}{2}Li_L^2 + \frac{1}{2}Cu_C^2 = LI^2$

$= \frac{LU^2}{(R+R_L)^2}$来求。

② 也可用$Q = 2\pi\frac{W_S}{W_R}$来求。用此式时要注意，若$Q$为回路的品质因数，即$Q = \frac{1}{R+R_L+r}\sqrt{\frac{L}{C}}$，$W_R$必须为回路中总电阻$R+R_L+r$在一个周期内消耗的能量，即$W_R = (R+R_L+r)\times I^2T$；若$Q$为$RLC$串联电路的品质因数，即$Q = \frac{1}{R+R_L}\sqrt{\frac{L}{C}}$，$W_R$必须是$RLC$串联电路的电阻$R+R_L$在一个周期内消耗的能

(PDF压缩器 - 未注册版)

量，即$W_R=(R+R_L)\cdot I^2T$。

答案：$W_s=6.25\times10^{-3}$焦。

7—9。某收音机中的变压器，原线圈的匝数为$N=1210$匝，两个副线圈的匝数分别为$N_1=35$匝，$N_2=1925$匝。当变压器工作时，原线圈中的电流为$I=0.114$安，副线圈$N_1$中的电流为0.3安。试求另一副线圈$N_2$中的电流（变压器损耗可略不计，负载均为电阻性的）。

错解：由变压器电流变成公式得

$$\frac{I}{I_2}=\frac{N_2}{N},$$

所以副线圈$N_2$中的电流为

$$I_2=\frac{N}{N_2}I=\frac{1210}{1925}\times0.114\doteq0.072(\text{安}).$$

分析：理想变压器只有一个副线圈时，初、次线圈中电流满足关系$\frac{I}{I_1}=\frac{N_1}{N}$（称为电流变比公式）；当有几个副线圈时，初级线圈中的电流与各副线圈中的电流不再满足关系$\frac{I}{I_i}=\frac{N_i}{N}$（$i$表示第$i$个副线圈）。上面用了$\frac{I}{I_2}=\frac{N_2}{N}$来求得$I_2$，所以解法是错误的。

正确解法：由于本变压器的所有负载均为电阻性的，所以有

$$NI=N_1I_1+N_2I_2①.$$

由此得副线圈$N_2$中的电流为

$$I_2=\frac{NI-N_1I_1}{N_2}=\frac{1210\times0.114-35\times0.3}{1925}$$

$$\doteq0.066(\text{安})=66\text{毫安}.$$

①见下页注.

(PDF压缩器 - 未注册版)

注：对如图7—7(a)所示的只有一个副线圈的理想变压器，有公式

$$\frac{\tilde{U}_1}{\tilde{U}_2}=-\frac{N_1}{N_2},$$

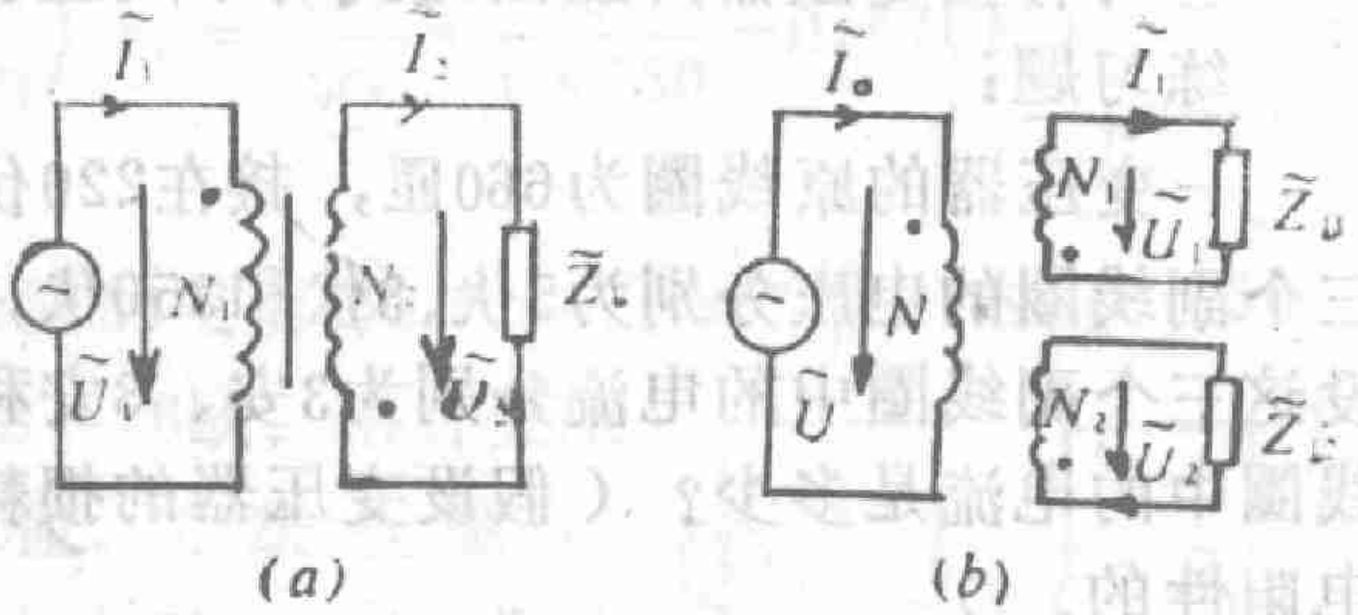



图 7—7

$$\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_2}=-\frac{N_2}{N_1},\ \frac{\tilde{Z}_l'}{\tilde{Z}_l}=\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2,\ P_1=P_2,S_1=S_2.$$

对如图7—7(b)所示的有几个副线圈的理想变压器有公式①

$$\frac{\hat{U}}{\tilde{U}_i}=-\frac{N}{N_i},\ N\hat{I}=-\sum_{i=1}^{n}N_i\hat{I}_i,$$

$$\frac{N^2}{\tilde{Z}_l'}=\sum_{i=1}^{n}\frac{N_i^2}{\tilde{Z}_{li}},\ P=\sum_{i=1}^{n}P_i.$$

但无公式 $N\hat{I}=-N_i\hat{I}_i,\ \frac{N^2}{\tilde{Z}_l'}=\frac{N_i^2}{\tilde{Z}_{li}},$

$$P=P_i,\ S=S_i,\ S=\sum_{i=1}^{n}S_i.$$

说明：①上面几式可由基尔霍夫定律来证明，注意其中应用了各线圈感抗无穷大的条件，若不应用此条件，只有公式

$\frac{U}{\tilde{U}_i}=-\frac{N}{N_i}$，$P=\sum_{i=1}^{n}P_i$成立，其它公式均不成立。

②当所有负载都是电阻性时，有等式

$$NI=\sum_{i=1}^{n}N_iI_i,\ \frac{N^2}{Z_l'}=\sum_{i=1}^{n}\frac{N_i^2}{Z_{li}},\ S=\sum_{i=1}^{n}S_i.$$

---

①通过求解图7—7（b）所示的电路可证明这几个公式。

(PDF压缩器 - 未注册版)

③对有损变压器，上面几式均不成立。

练习题：

一变压器的原线圈为660匝，接在220伏的交流电源上，测得三个副线圈的电压分别为5伏、3伏和350伏，分别求它们的匝数。设这三个副线圈中的电流分别为3安、3安和280毫安，问通过原线圈中的电流是多少？（假设变压器的损耗可略不计，负载均为电阻性的。）

答案：三个付线圈的匝数分别为15、9、和1050匝，通过原线圈中的电流为0.6安。

7—10.如图7—8所示，已知$\tilde{\varepsilon}=20\sqrt{2}e^{j\omega t}$伏，$Z_i=150+j100$欧，$Z$是可以任意调节的阻抗。试求$Z$上获得的最大功率。

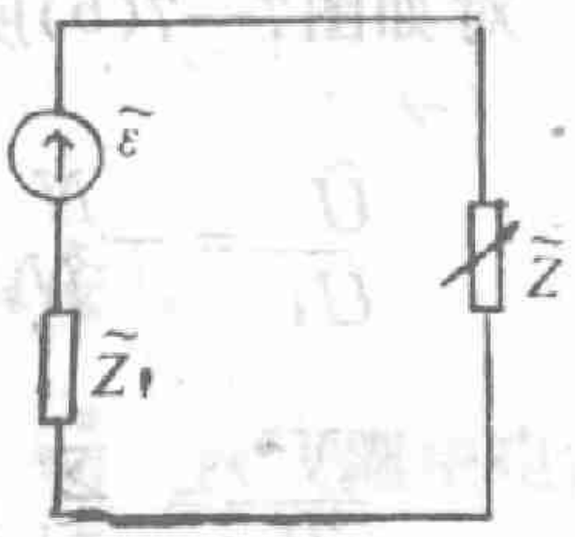



图7—8

错解：同直流电一样，在$Z=Z_i$时负载上获得的功率最大。因此最大功率为

$$P=I^2Z=\left(\frac{\varepsilon}{2Z_i}\right)^2Z_i=\frac{\varepsilon^2}{4Z_i}$$

$$=\frac{20^2}{4\sqrt{150^2+100^2}}\doteq 0.55(瓦).$$

分析：此解有两点错误：①在交流电路中电源与负载的匹配条件是$\tilde{Z}=\hat{Z}_i^*$①，而不是$\tilde{Z}=\tilde{Z}_i$，更不是$Z=Z_i$。②负载$Z$上获得的功率是有功功率，而不是视在功率。

正确解法：由交流电路电源与负载的匹配条件$\tilde{Z}=\hat{Z}_i^*$可知，负载$Z=r_i-jx_i$时，它上面获得的功率最大。因此，负载$\hat{Z}$上获得的最大功率为

---

①证明：负载上获得的功率

$$P=I^2r=\frac{\varepsilon^2}{(r+r_i)^2+(x+x_i)^2}r,$$

由此可见，当$x=-x_i$，$r=r_i$时，即$\hat{Z}=\hat{Z}^*$时，

$$P=P_{max}=\frac{\varepsilon^2}{4r}.$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$P=I^2r=\left(\frac{\varepsilon}{2r_i}\right)^2 r_i=\frac{\varepsilon^2}{4r_i}=\frac{20^2}{4\times150}\doteq0.67(瓦).$$

练习题：

在图7—9中，讯号源的电动势$\tilde{\varepsilon}=6\sqrt{2}e^{j\omega t}$伏，内阻$r=50$欧，扬声器的阻抗$\tilde{Z}=8+j6$欧。耦合变压器的初级线圈$N_1=300$匝，次级线圈$N_2=100$匝。在次级回路中串联一个怎样的阻抗可以使扬声器上获得的功率最大？

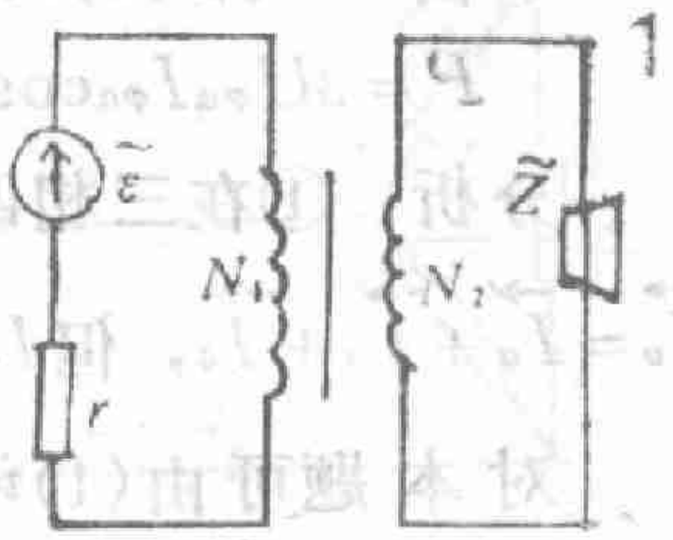



图7—9

提示：对图7—9所示的电路，其次级电路中等效电源的电动势和内阻各为

$$\tilde{\varepsilon}'=-\frac{N_2}{N_1}\tilde{\varepsilon}=-2\sqrt{2}e^{j\omega t}伏,\ r'=\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 r=5.6欧.$$

假设在次级回路中串联一个阻抗$\tilde{Z}'$，并将它看成等效电源内阻的一部分。则由交流电路电源与负载匹配条件$\tilde{Z}=\tilde{Z}_i^*$可得$\tilde{Z}'=2.4-j6$欧时，扬声器上获得的功率最大。

7＝11。在图7—10中，$\tilde{Z}_a=10$欧，$\tilde{Z}_b=-j5$欧，$\tilde{Z}_c=j20$欧，此三相负载是接在对称的三相发电机上的①，发电机三绕组端电压均为110伏。试求①中线电流，②负载上消耗的总功率。

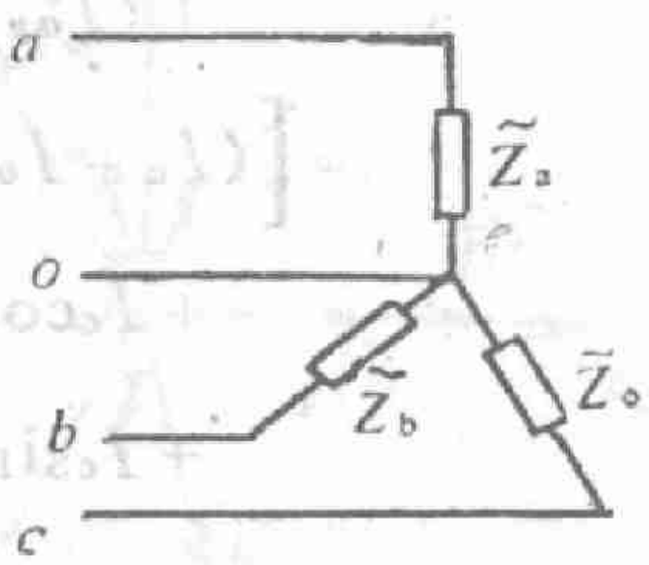



图7—10

错解：①各相的线电流分别为

$$I_a=\frac{U_\varphi}{Z_a}=\frac{110}{10}=11(安),$$

$$I_b=\frac{U_\varphi}{Z_b}=\frac{110}{5}=22(安),$$

①对称的三相发电机是指三相绕组电阻相等，电动势相等，相位差互为120°。

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$I_c=\frac{U_\varphi}{Z_c}=\frac{110}{20}=5.5(安).$$

则中线电流为

$$I_o=I_a+I_b+I_c=11+22+5.5=38.5(安).$$

②由$P=3U_\varphi I_\varphi\cos\varphi$得三相负载消耗的总功率为

$$P=3U_{\varphi a}I_{\varphi a}\cos\varphi_a=3\times110\times11\times\cos0=3630(瓦).$$

分析：①在三相四线制中，$i_o=i_a+i_b+i_c$，$\tilde{I}_o=\tilde{I}_a+\tilde{I}_b+\tilde{I}_c$，$\vec{I}_o=\vec{I}_a+\vec{I}_b+\vec{I}_c$，但$I_o\neq I_a+I_b+I_c$。

对本题可由(1)$i_o=i_a+i_b+i_c$，$I_o=\sqrt{\frac{1}{T}\int_o^T i^2\,dt}$，(2)$\tilde{I}_o=\tilde{I}_a+\tilde{I}_b+I_c$，$I_o=\frac{I_{om}}{\sqrt{2}}$，(3)矢量图解法等多种方法来求解。下面用矢量图解法来求解。

参考图7—10的电压——电流矢量图7—11，可得中线电流

$$\begin{aligned}I_o&=\Big[(I_{ax}+I_{bx}+I_{cx})^2\\&\quad+(I_{ay}+I_{by}+I_{cy})^2\Big]^{\frac{1}{2}}\\&=\Big[(I_a+I_b\cos30^\circ\\&\quad+I_c\cos30^\circ)^2+(-I_b\sin30^\circ\\&\quad+I_c\sin30^\circ)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\\&=\Big[\Big(11+22\times\frac{\sqrt{3}}{2}+5.5\times\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^2\\&\quad+\Big(-22\times\frac{1}{2}+5.5\times\frac{1}{2}\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\\&\doteq35.8(安).\end{aligned}$$

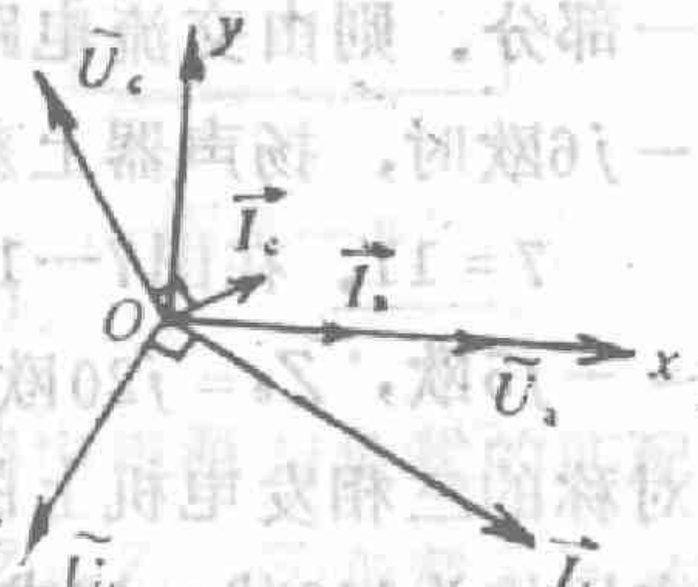



图 7—11

②公式$P=3U_\varphi I_\varphi\cos\varphi=\sqrt{3}U_l I_l\cos\varphi$仅适用于三相发电机与三相负载都对称的情况，在此三相负载不对称，所以不能用此式，而要用$P=P_a+P_b+P_c$来求。其结果为

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$= PU_{\varphi a}I_{\varphi a}\cos\varphi_a + U_{\varphi b}I_{\varphi b}\cos\varphi_b + U_{\varphi c}I_{\varphi c}\cos\varphi_c$$

$= 110\times 11 = 1210$(瓦)。

练习题：

在图7—12中，线电压为220伏，$\tilde{Z}_{ab}=10$欧，$\tilde{Z}_{bc}=3-j4$欧，$\tilde{Z}_{ca}=6+j8$欧。试求①三个线电流，②负载上消耗的总功率。（三相电源是对称电源）。

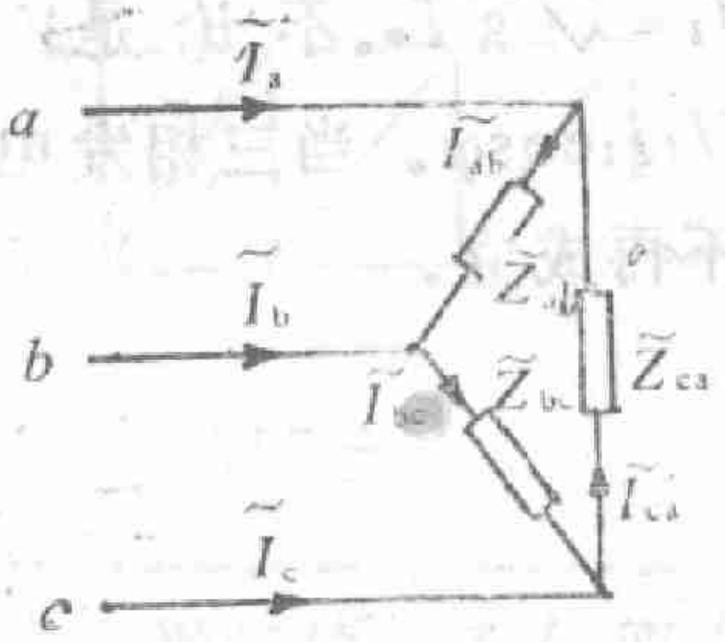



图 7—12

提示：①。$\tilde{I}_a=\tilde{I}_{ab}-\tilde{I}_{ca}$，

$$\tilde{I}_b=\tilde{I}_{bc}-\tilde{I}_{ab},\quad \tilde{I}_c=\tilde{I}_{ca}-\tilde{I}_{bc},$$

$$\tilde{I}_{ab}=\frac{\tilde{U}_{ab}}{\tilde{Z}_{ab}},\quad \tilde{I}_{bc}=\frac{\tilde{U}_{bc}}{\tilde{Z}_{bc}},\quad \tilde{I}_{ca}=\frac{\tilde{U}_{ca}}{\tilde{Z}_{ca}}。$$

参见电压——电流矢量图7—13，可得

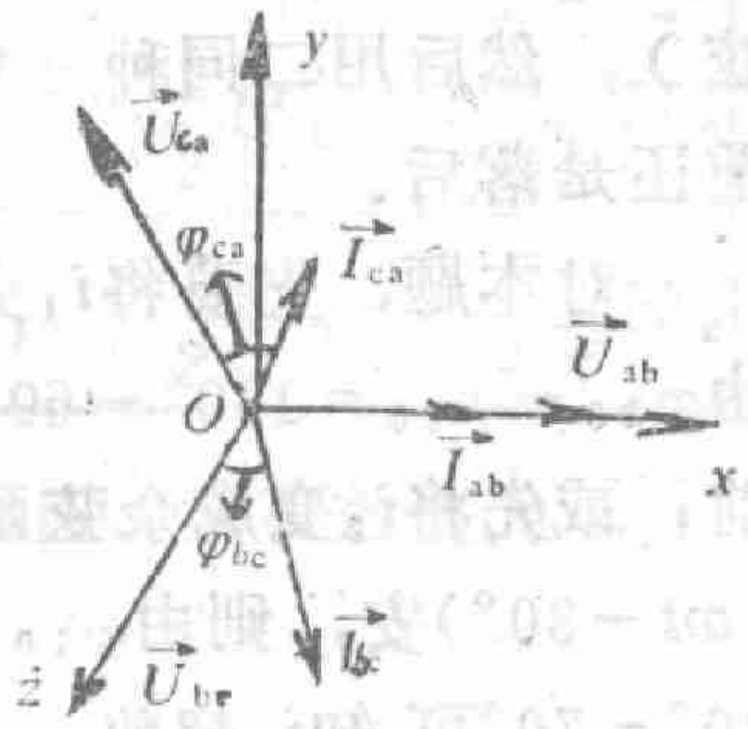



图 7—13

$$I_a=\left[(I_{abx}-I_{cax})^2+(I_{aby}-I_{cay})^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\left(I_{ab}-I_{ca}\cos(120^\circ-\varphi_{ca})\right)^2+\left(I_{ca}\sin(120^\circ-\varphi_{ca})\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\left(\frac{U_{ab}}{Z_{ab}}-\frac{U_{ca}}{Z_{ca}}\cos(120^\circ-\mathrm{tg}^{-1}\frac{x_{ca}}{r_{ca}})\right)^2+\left(\frac{U_{ca}}{Z_{ca}}\sin(120^\circ-\mathrm{tg}^{-1}\frac{x_{ca}}{r_{ca}})\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$\doteq 24.2$(安)。

同理可得 $I_b\doteq 40.7$安，$I_c=32.9$安。

②$P=P_{ab}+P_{bc}+P_{ca}=U_{ab}I_{ab}\cos\varphi_{ab}+U_{bc}I_{bc}\cos\varphi_{bc}$

(PDF压缩器 - 未注册版)

$+U_{ca}I_{ca}\cos\varphi_{ca}=13552$(瓦)。

注：当三相发电机和三相负载均对称时，Y联接时（不论是电源还是负载），$U_l=\sqrt{3}U_\varphi$，$I_l=I_\varphi$；△联接时，$U_l=U_\varphi$，$I_l=\sqrt{3}I_\varphi$。不论是Y联接还是△联接，$P=3U_\varphi I_\varphi\cos\varphi=\sqrt{3}U_lI_l\cos\varphi$。当三相发电机和负载有一者不对称时，上面公式均不再成立。

## 二　错误的回答

7—12。二简谐交流电流分别是$i_1=5\cos(\omega t+40°)$安，$i_2=10\sin(\omega t+60°)$安。哪个超前？

错答：$\varphi_{10}=40°$，$\varphi_{20}=60°$，$\varphi_{20}-\varphi_{10}=20°$。可见$i_2$超前，且超前20°。

分析：用简谐量初位相的大小比较二简谐量超前还是落后时，一定要将二简谐量变成同一种三角函数（同为正弦或同为余弦），然后用二同种三角函数的初位相之差来判断二简谐量的超前还是落后。

对本题，先要将$i_1$变成正弦函数$i_1=5\sin(\omega t+130°)$安，则由$\varphi_{10}-\varphi_{20}=130°-60°=70°$可知$i_1$超前；或先将$i_2$变成余弦函数$i_2=10\cos(\omega t-30°)$安，则由$\varphi_{10}-\varphi_{20}=40°+30°=70°$可知$i_1$超前。

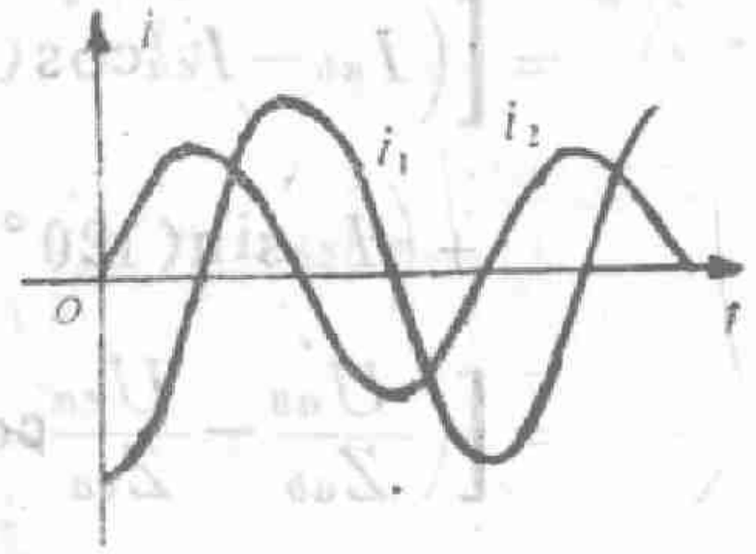


图7—14

练习题：

两个简谐交流电$i_1(t)$和$i_2(t)$的波形如图7—14所示，哪个超前？

提示：由图可得二简谐交流电的三角函数表达式各为

$$i_2=I_{1o}\sin\omega t,\quad i_1=I_{2o}\sin(\omega t-90°)。$$

由此可见$i_2$比$i_1$超前90°。

(PDF压缩器 - 未注册版)

7—13. 对图7—15所示的锯齿电压，其有效值为多少？

错答：有效值为$U=\frac{U_0}{\sqrt{2}}=\frac{10}{\sqrt{2}}$

$=7.1$(伏)。

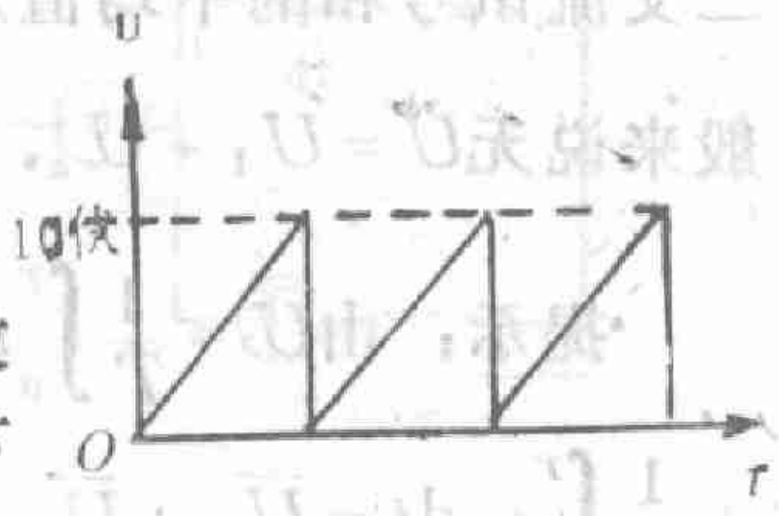
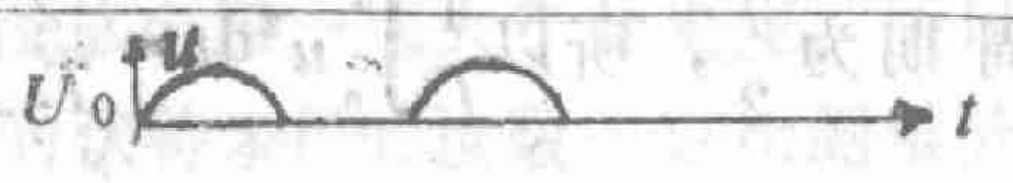
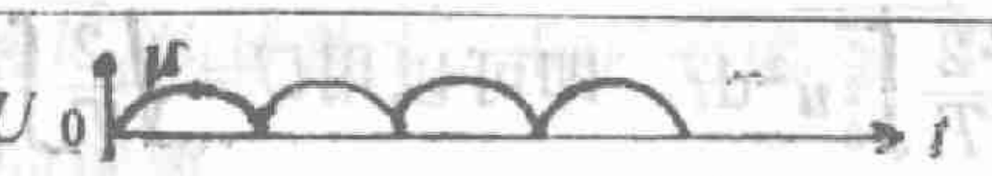
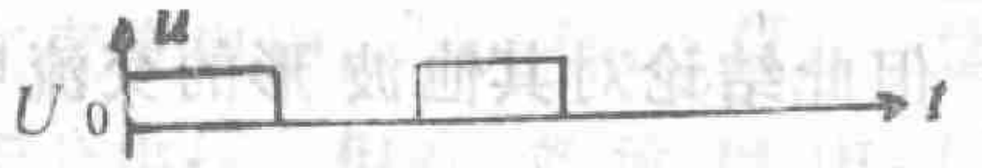
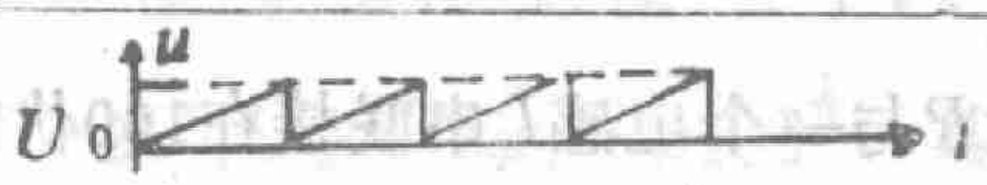



图 7—15

分析：不同的周期波，峰值与有效值，峰值与平均值之间的关系不同（见下表）。

| 名称 | 波形 | 平均值 | 有效值 |
|---|---|---|---|
| 正弦波 |  | 0 | $\frac{1}{\sqrt{2}}U_0$ |
| 正弦半波 |  | $\frac{1}{\pi}U_0$ | $\frac{1}{2}U_0$ |
| 正波全波 |  | $\frac{2}{\pi}U_0$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}U_0$ |
| 方波 |  | $\frac{1}{2}U_0$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}U_0$ |
| 锯齿波 |  | $\frac{1}{2}U_0$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}U_0$ |

由此表可得，对图7—15所示的锯齿电压，其有效值为

$$U=\frac{U_0}{\sqrt{3}}=\frac{10}{\sqrt{3}}\doteq 5.8\text{(伏)}.$$

练习题：

1．有一方波其有效值为5伏，那么其平均值为几伏？

提示：对方波，$U=\frac{U_0}{\sqrt{2}}$，$U=\frac{U_0}{2}$，所以其平均值为

$$U=\frac{U}{\sqrt{2}}=3.5\text{(伏)}.$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

2.对二交流讯号和的有效值，一般不等于有效值的和，那么二交流讯号和的平均值是否等于平均值的和，即对$u=u_1+u_2$，一般来说无$U=U_1+U_2$，那么是否有$\overline{U}=\overline{U}_1+\overline{U}_2$？

提示：由$\overline{U}=\frac{1}{T}\int_0^T u\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T(u_1+u_2)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T u_1\mathrm{d}t+\frac{1}{T}\int_0^T u_2\mathrm{d}t=\overline{U}_1+\overline{U}_2$，可知$\overline{U}=\overline{U}_1+\overline{U}_2$。这一结论对任意波形的信号均成立。

3.对于简谐交流电压，可否用公式$U=\sqrt{\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}u^2\mathrm{d}t}$来计算有效值？

提示：因为$u^2$的周期为$\frac{T}{2}$，所以$\frac{1}{T}\int_0^T u^2\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}u^2\mathrm{d}t$，可见$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}u^2\mathrm{d}t}$。即可以用$U=\sqrt{\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}u^2\mathrm{d}t}$来求简谐交流电压的有效值，但此结论对其他波形的交流电一般不成立。

7—14．一个电阻$R$与一个电感$L$串联接在100伏的交流电压两端。一个交流电压表不论接在$R$上还是$L$上，读数都相等，该读数为多少？

错答：50伏。

分析：在$R$、$L$串联电路中，$U\neq U_R+U_L$，所以无上结论。对本题，$U=\sqrt{U_R{}^2+U_L{}^2}=\sqrt{2U_R{}^2}$。可见$U_R=U_L=\frac{U}{\sqrt{2}}=\frac{100}{\sqrt{2}}\doteq 71$(伏)。

练习题：

在图7—16($a$)中，$V_1$、$V_2$的读数各为10伏，$V$的读数为多

(PDF压缩器 - 未注册版)

少？在图7-16(b)中，$A_1$和$A_2$的读数各为3安和4安。$A$的读数为多少？

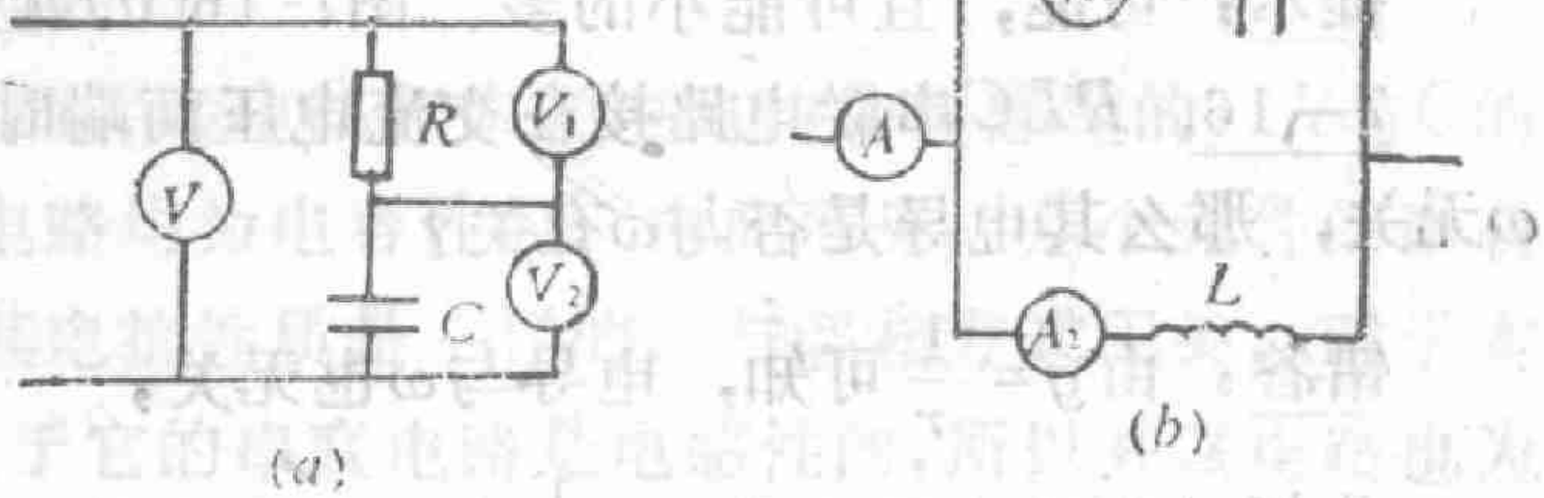



图 7—16

答案：在图(a)中，$V$的读数为$U=14$伏；在图(b)中，$A$的读数为$I=1$安。

7—15. 在图7—17中，测量总电压的伏特表$V$的读数、比测量某一阻抗$Z_1$上电压的伏特表$V_1$的读数小，这可能吗？

错答：因总电压一定大于分电压，所以测量总电压的伏特表$V$的读数一定比测量分电压的伏特表$V_1$的读数大，即$V$的读数不可能小于$V_1$的读数。

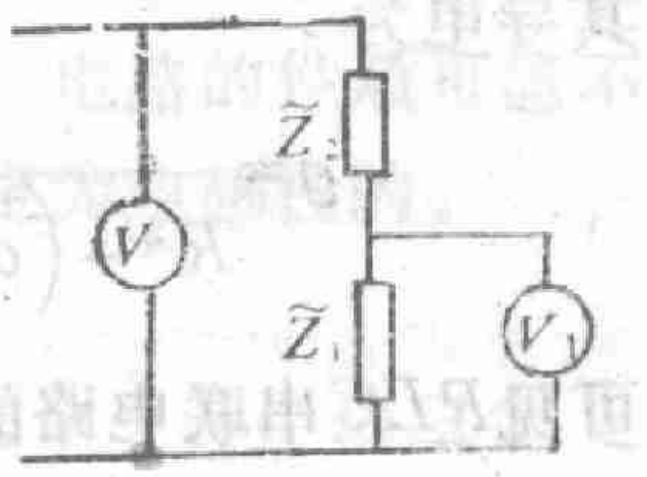



图 7—17

分析：在直流电中，$U=U_1+U_2$，总电压一定大于分电压，但在交流电中，$U$

$=[U_1^2+U_2^2+2U_1U_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)]^{\frac{1}{2}}$（其中，$\varphi_1$、$\varphi_2$分别为$Z_1$与$Z_2$的位相角），可见总电压不一定大于分电压。例如，对$RLC$串联谐振电路，在谐振状态下，$L$、$C$上的电压为$U_L=U_C=QU$，在$Q>1$时，$U_L=U_C>U$，即分电压大于总电压。

因此，在图7—17中，$V$的读数可能小于$V_1$的读数。

练习题：

在图7—18中，测量总电流的安培表$A$的读数比测量$\tilde{Z}_1$中电流的安培表$A_1$的

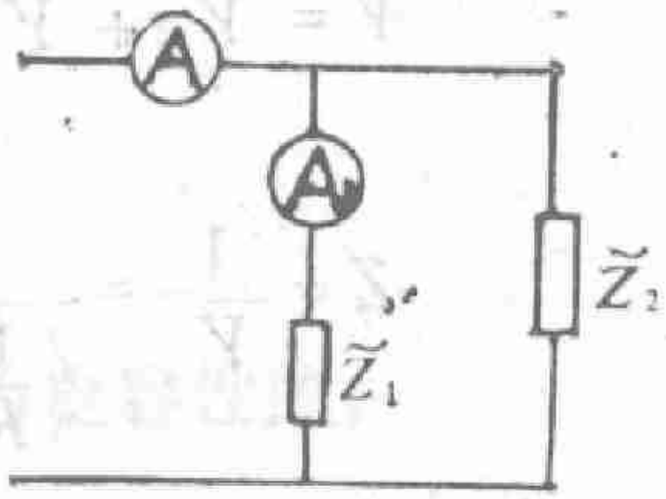



图 7—18

(PDF压缩器 - 未注册版)

读数小，这可能吗？

提示：可能，且可能小的多。图7-16($b$)就是一例。

7—16。$RLC$串联电路接在交流电压两端时，其有功电阻与$\omega$无关，那么其电导是否与$\omega$有关？

错答：由$g=\frac{1}{r}$可知，电导与$\omega$也无关，

分析：除纯电阻电路$g=\frac{1}{r}$外，其它电路$g\neq\frac{1}{r}$。

对$RLC$串联电路，其复导纳为

$$\dot{Y}=\frac{1}{Z}=\frac{1}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}=\frac{R-j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

其导电为

$$g=\frac{R}{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

可见$RLC$串联电路的电导与$\omega$有关。

练习题：

如图7—19所示，$RLC$并联电路接在交流电压两端时，其有功电阻与$\omega$是否有关？电导与$\omega$是否有关？

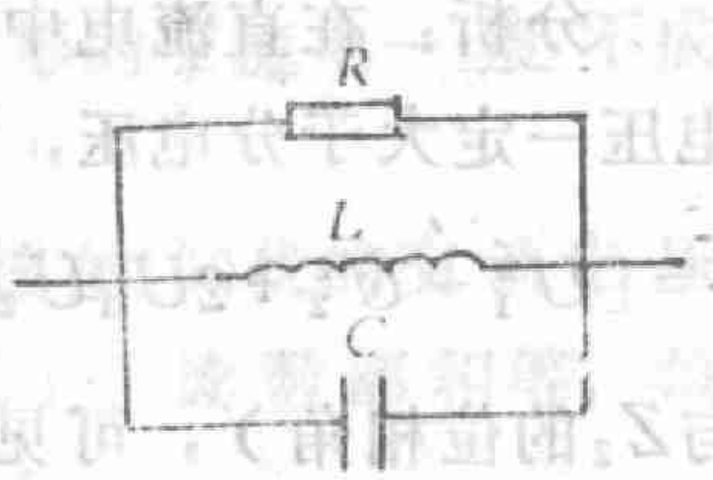


图7—19

提示：并联电路的复导纳和复阻抗分别为

$$\dot{Y}=\dot{Y}_R+\dot{Y}_L+\dot{Y}_C=\frac{1}{R}+j\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right),$$

$$\dot{Z}=\frac{1}{\dot{Y}}=\frac{\frac{1}{R}-j\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)}{\left(\frac{1}{R}\right)^2+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}.$$

由此可知，有功电阻($Z$的实部)与$\omega$有关，而电导（$Y$的实部）与$\omega$无关。

(PDF压缩器 - 未注册版)

7—17。现有二元件，它们的串联电路为电感性的，并联电路是否仍为电感性的？

错答：$R$与$L$的并联电路和串联电路均为电感性的，$R$与$C$的串联电路与并联电路均为电容性的。由此可见，几个元件的串联电路和并联电路其电抗性质是一样的，与联接方式无关。对于本题中的二元件，由于它的串联电路是电感性的，所以并联电路也为电感性的。

分析：对于$R$与$L$、$R$与$C$的串、并联电路，其电抗性质是一样的。但对于任意元件的串、并联电路，其电抗性质一般不一样。例如$L$与$C$的串、并联电路，其电抗性质就不一样，若串联时为电容性的，并联时必为电感性的；若串联时为电感性的，并联时必为电容性的，（如串联时为电阻性的，并联时也为电阻性的）。由此可见，几个元件的联接方式不同，电路的性质可能不同，所以本题的正确回答是：并联电路不一定为电感性的。

练习题：

在图7—20给出的三个电路中，$R$、$L$、$C$完全一样，这三个电路的电抗性质是否一样？

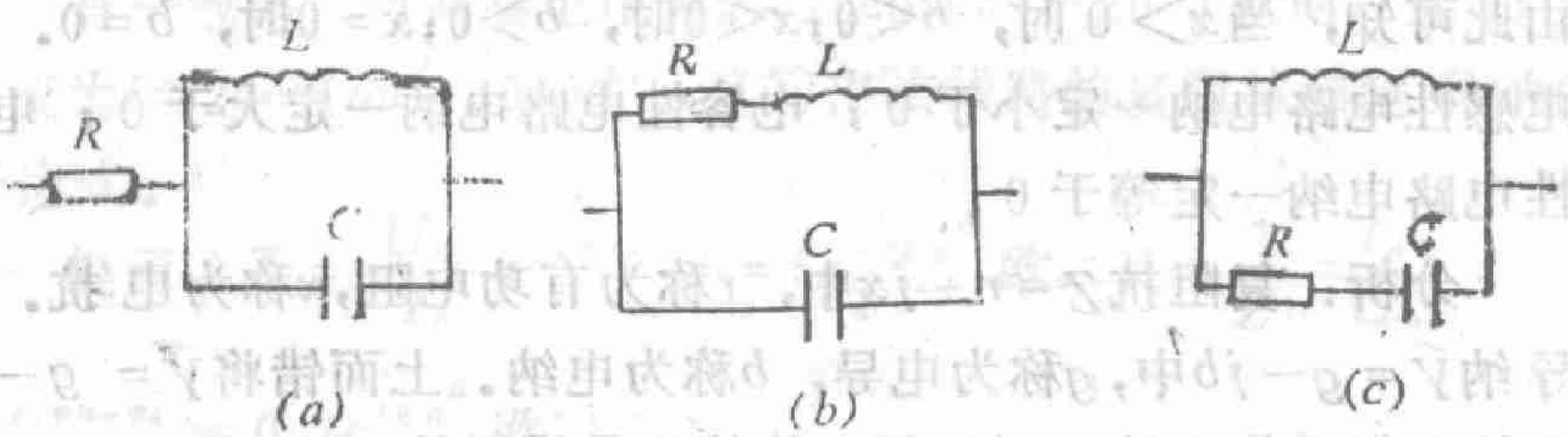



图 7—20

提示：

对图(a)所示的电路 在$\omega>\frac{1}{\sqrt{LC}}$时，为电容性的，

$\omega<\frac{1}{\sqrt{LC}}$时，为电感性的，$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$时，为电阻性的，

(PDF压缩器 - 未注册版)

对图($b$)所示的电路，在$\omega>\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{L}\right)^2}$时为电容性，$\omega<\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{L}\right)^2}$时为电感性，在$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{L}\right)^2}$时为电阻性；

对图($c$)所示的电路，在$\omega>\frac{1}{\sqrt{LC-R^2C^2}}$时为电容性，$\omega<\frac{1}{\sqrt{LC-R^2C^2}}$时为电感性，在$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC-R^2C^2}}$时为电阻性。由此可见，这三个电路的性质在同一频率下可能不同。

7—18。电感性电路的电抗一定是正值，电容性电路的电抗一定是负值，电阻性电路的电抗一定为0，那么各种电路的电纳正负如何？

错答：假设电路的复阻抗为$\tilde{Z}=r+jx$，则其复导纳为

$$\tilde{Y}=\frac{1}{\tilde{Z}}=\frac{1}{r+jx}=\frac{r-jx}{r^2+x^2}=g+jb。$$

可见电路的电纳为

$$b=\frac{-x}{r^2+x^2}。$$

由此可知，当$x>0$时，$b<0$；$x<0$时，$b>0$；$x=0$时，$b=0$。即电感性电路电纳一定小于0；电容性电路电纳一定大于0；电阻性电路电纳一定等于0。

分析：复阻抗$\tilde{Z}=r+jx$中，$r$称为有功电阻，$x$称为电抗。复导纳$\tilde{Y}=g-jb$中，$g$称为电导，$b$称为电纳。上面错将$\tilde{Y}=g-jb$中的虚部看作电纳，可见得出的结论是错误的。

正确的结论是：电感性电路的电纳一定大于0；电容性电路的电纳一定小于0；电阻性电路的电纳一定等于0。这一点与电抗一样。

练习题：

试求图7—21所示的$RL$串联电路的电纳。



图 7—21

(PDF压缩器 - 未注册版)

提示：$b=0.6$(欧$^{-1}$)。

7—19。对图7—22所示的电路，总电压与总电流的位相差为多少？

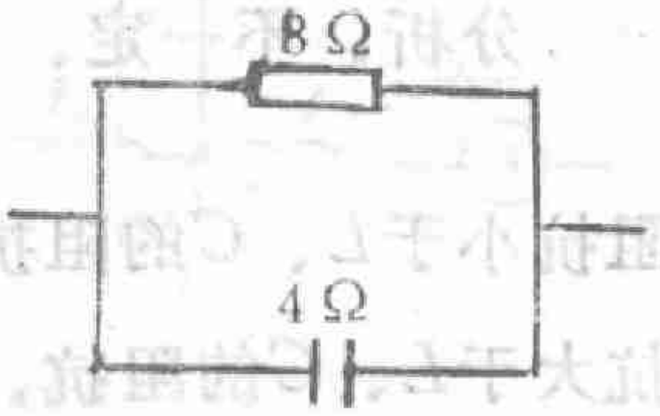


图 7—22

错答：图7—22所示的电路，其复导纳为

$$\tilde{Y}=\frac{1}{\tilde{Z}_R}+\frac{1}{\tilde{Z}_C}=\frac{1}{R}+\frac{1}{-jZ_C}$$ ①

$$=\frac{1}{8}+\frac{j}{4}(\text{欧}^{-1}).$$

则 $$\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{4}\Big/\frac{1}{8}=2.$$

所以电压与电流之间的位相差为

$$\varphi=\operatorname{tg}^{-1}2\doteq 63^\circ.$$

分析：由复导纳$\tilde{Y}=g-jb=Y\cos\varphi-jY\sin\varphi$可得，$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{g}$，

本题$g=\frac{1}{8}$，$b=-\frac{1}{4}$，所以$\varphi=\operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{1}{4}\Big/\frac{1}{8}\right)=\operatorname{tg}^{-1}(-2)$

$\doteq -63^\circ$。上解中将电纳的概念搞错了，所以差了一负号。

练习题：

有一线路，当两端电压为$u=10\cos(\omega t-20^\circ)$伏时，通过的电流为$i=2\cos(\omega t+40^\circ)$安。试写出该线路的复阻抗和复导纳的表达式。

提示：$\tilde{Z}=\frac{U_0}{I_0}e^{j(\varphi u-\varphi i)}=5e^{-j60^\circ}$欧，$\tilde{Y}=\frac{1}{\tilde{Z}}=\frac{I_0}{U_0}$

$e^{-j(\varphi u-\varphi i)}=0.2e^{j60^\circ}$欧$^{-1}$。

7—20。在直流电中，串联电路的总电阻一定大于任一分电阻，并联电路的总电阻一定小于任一分电阻。那么在交流电中，串联电路的总阻抗是否一定大于任一分阻抗？并联电路的总阻抗是否一定小于任一分阻抗？

---

①注意，对于电容的复阻抗$\tilde{Z}_C=-jZ_C\neq jZ_C$。

(PDF压缩器 - 未注册版)

错答：当然是。

分析：不一定。例如，$LC$串联电路，在$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$时，总阻抗小于$L$、$C$的阻抗。再如，$LC$并联电路在$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$时，总阻抗大于$L$、$C$的阻抗。

练习题：

在交流电路中，几个元件串联后总的有功电阻是否大于任一分元件的有功电阻？几个元件并联后，总的有功电阻是否小于等于任一分元件的有功电阻？

提示：对于串联，总的有功电阻大于等于任一分元件的有功电阻。证明如下：在串联电路中，$P_{总}\geqslant P_{分}$，即$I^2r_{总}\geqslant I^2r_{分}$，所以$r_{总}\geqslant r_{分}$。

对于并联电路，总的有功电阻不一定小于等于分元件的有功电阻，这可用图7—23所示的电路来说明。在图7—23中，$L=0.1$亨，$R_L=10$欧，$C=10$微法。对于线圈支路来说，有功电阻$r_{分}=L_L=10$欧，但对于整个并联电路，有功电阻$r_{总}=\frac{R_L}{(1-\omega^2LC)^2+(\omega CR_L)^2}$。当$\omega=2\pi f=628$弧度/秒时，$r_{总}=27$欧。可见$r_{总}$可大于$r_{分}$。

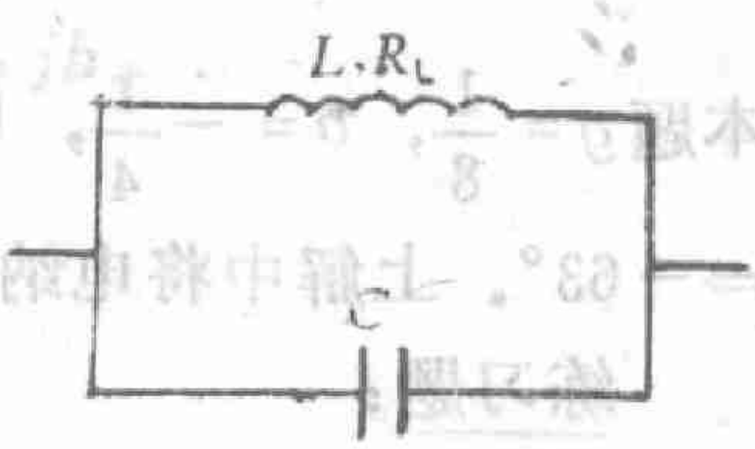


图 7—23

7—21．复阻抗是否为简谐量？

错答：是！其模为$Z$，相角为$\varphi$。

分析：简谐量有三个特征量：模、相角和频率。对于复阻抗无频率，所以它不是简谐量。

练习题：

阻抗有无瞬时值和有效值的概念？

提示：无。

(PDF压缩器 - 未注册版)

7—22. 在图7—24中，电压表的读数为$U$，那么电流表的读数为多少？

（电流的圆频率为$\omega$）。

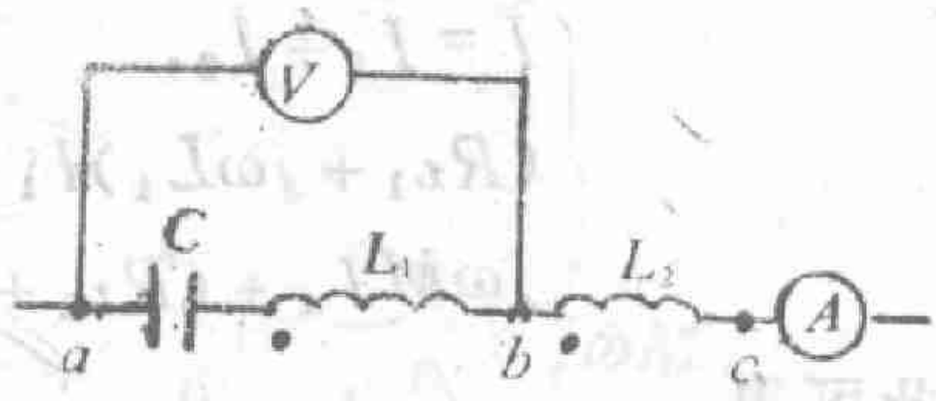



图 7—24

错答：$ab$两点之间的阻抗为

$$Z_{ab}=\left|\omega L_1-\frac{1}{\omega C}\right|,$$

所以电路中电流，即电流表的读数为

$$I=\frac{U_{ab}}{Z_{ab}}=\frac{U}{\left|\omega L_1-\frac{1}{\omega C}\right|}.$$

分析：由于$L_1$、$L_2$之间存在互感，$ab$之间的阻抗不再是

$$Z_{ab}=\left|\omega L_1-\frac{1}{\omega C}\right|,$$

而是

$$Z_{ab}=\frac{U_{ab}}{I_{ab}}=\left|\frac{\frac{1}{j\omega C}\dot{I}+j\omega L_1\dot{I}+j\omega M\dot{I}}{\dot{I}}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{j\omega C}+j(\omega L_1+\omega M)\right|=\left|\omega(L_1+M)-\frac{1}{\omega C}\right|,$$

所以电流表的读数为

$$I=\frac{U_{ab}}{Z_{ab}}=\frac{U}{\left|\omega(L_1+M)-\frac{1}{\omega C}\right|}.$$

练习题：

如图7—25所示，二实际线圈并联后接在圆频率为$\omega$的交流电压两端，其总阻抗为多少？

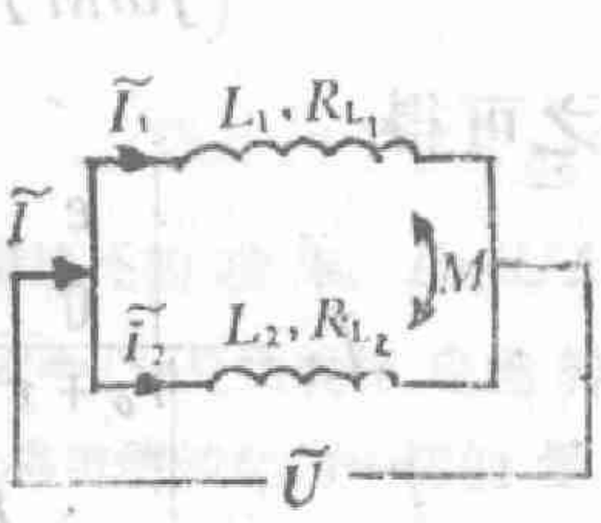



图 7—25

提示：由基尔霍夫定律可得

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$\begin{cases}\tilde{I}=\tilde{I}_1+\tilde{I}_2,\\ (R_{L_1}+j\omega L_1)\tilde{I}_1+j\omega M\tilde{I}_2=\tilde{U},\\ j\omega M\tilde{I}_1+(R_{L_2}+j\omega L_2)\tilde{I}_2=\tilde{U}.\end{cases}$$

由此可得

$$\tilde{I}=\tilde{I}_1+\tilde{I}_2=\frac{[R_{L_1}+R_{L_2}+j\omega(L_1+L_2-2M)]\tilde{U}}{(R_{L_1}+j\omega L_1)(R_{L_2}+j\omega L_2)+(\omega M)^2}.$$

则复阻抗为

$$\tilde{Z}=\frac{\tilde{U}}{\tilde{I}}=\frac{(R_{L_1}+j\omega L_1)(R_{L_2}+j\omega L_2)+(\omega M)^2}{R_{L_1}+R_{L_2}+j\omega(L_1+L_2-2M)}.$$

由此可得图7—25的总阻抗为

$$Z=|\tilde{Z}|=\left[\frac{[R_{L_1}R_{L_2}+\omega^2(M^2-L_1L_2)]^2+\omega^2(R_{L_2}L_1+R_{L_1}L_2)^2}{(R_{L_1}+R_{L_2})^2+\omega^2(L_1+L_2-2M)^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

7—23. 在图7—26所示的电路中，$ab$之间的有功电阻为多少？

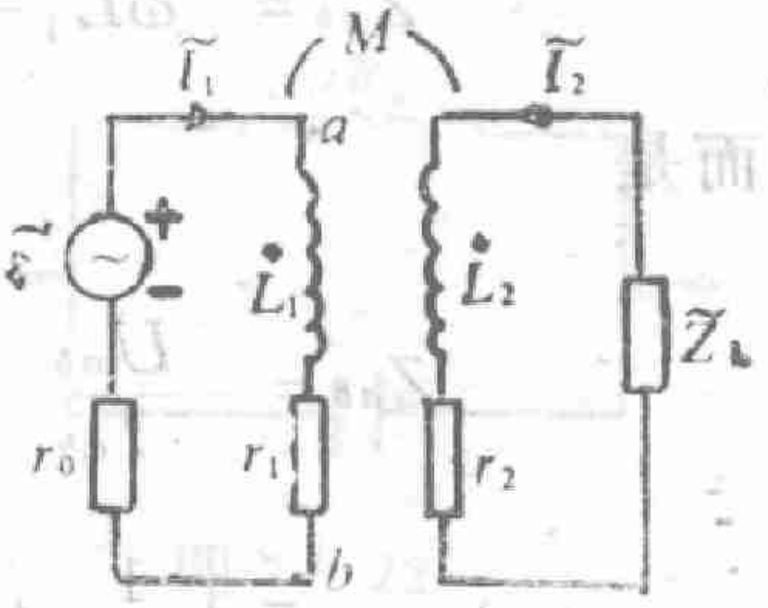


图7—26

错答：$ab$之间的有功电阻为$r_1$。

分析：由于互感的影响，$ab$之间的有功电阻不是$r_1$，而是

$$r=r_1+\frac{\omega^2M^2(r_2+r_l)}{(r_2+r_l)^2+(\omega L_2+x_l)^2}.$$

证明如下：

由基尔霍夫定律可得

$$\begin{cases}(r_0+r_1+j\omega L_1)\tilde{I}_1+j\omega M\tilde{I}_2=\tilde{\varepsilon},\\ j\omega M\tilde{I}_1+(r_2+\tilde{Z}_l+j\omega L_2)\tilde{I}_2=0.\end{cases}$$

解之可得

$$\tilde{I}_1=\frac{\begin{vmatrix}\tilde{\varepsilon} & j\omega M\\ 0 & r_2+\tilde{Z}_l+j\omega L_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}r_0+r_1+j\omega L_1 & j\omega M\\ j\omega M & r_2+\tilde{Z}_l+j\omega L_2\end{vmatrix}}$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$=\frac{1}{\tilde{\Delta}}\tilde{\varepsilon}(r_2+\tilde{Z}_l+j\omega L_2)\,.$$

$$\tilde{I}_2=\frac{1}{\tilde{\Delta}}\begin{vmatrix} r_0+r_1+j\omega L_1 & \tilde{\varepsilon} \\ j\omega M & 0 \end{vmatrix}=-\frac{1}{\tilde{\Delta}}\tilde{\varepsilon}\,j\omega M\,.$$

$ab$之间的复电压为

$$\tilde{U}_{ab}=(r_1+j\omega L_1)\,\tilde{I}_1+j\omega M\tilde{I}_2$$

$$=\frac{1}{\tilde{\Delta}}\left[\tilde{\varepsilon}(r_1+j\omega L_1)(r_2+\tilde{Z}_l+j\omega L_2)+\tilde{\varepsilon}\omega^2M^2\right],$$

则$ab$之间的复阻抗为

$$\tilde{Z}_{ab}=\frac{\tilde{U}_{ab}}{\tilde{I}_1}=r_1+j\omega L_1+\frac{\omega^2M^2}{r_2+\tilde{Z}_l+j\omega L_2}$$

$$=r_1+j\omega L_1+\frac{\omega^2M^2(r_2+r_l-j\omega L_2-jx_l)}{(r_2+r_l)^2+(\omega L_2+x_l)^2}\,.$$

由此得$ab$之间的有功电阻为

$$r=r_1+\frac{\omega^2M^2(r_2+r_l)}{(r_2+r_l)^2+(\omega L_2+x_l)^2}\,.$$

由此可得：①在$r_1=r_2=0$时（理想变压器属于这种情况），

$$r=\frac{\omega^2M^2r_l}{r_l^2+(\omega L_2+x_l)^2}\,.$$

②在$Z_l\to\infty$时(变压器负载断路属于这种情况），

$$r=r_1\,.$$

---

注：在直流电路中，$P=I^2R$是负载将电能转化成热量消耗的功率，$P=UI$是负载将电能转化成一切能量消耗的功率；在交流电路中，$\overline{P}=I^2r$是负载将电能转化为一切能量（不一定是热能）消耗的功率．$S=UI$是负载将电能转化为一切能量最大可消耗的功率（但不是实际消耗的功率）．

(PDF压缩器 - 未注册版)

练习题：

在图7—25中，线圈1支路中的有功电阻多少？

提示：$Z_1=\dfrac{\dot{U}}{I_1}$的实部为线圈1支路中的有功电阻。大小为

$$r_1=\frac{R_{L_1}R_{L_2}^2+\omega^2(M^2R_{L_2}-L_1MR_{L_2}+L_2^2R_{L_1}-L_2MR_{L_1})}{R_{L_2}^2+\omega^2(L_2-M)^2}.$$

当$M=0$时，$r_1=R_{L_1}$。

7—24．在图7—27所示的电路中，$L_1=2$毫亨，$L_2=8$毫亨，$M=1.2$毫亨，$\dfrac{di_1}{dt}=10$安/秒，$\dfrac{di_2}{dt}=-20$安/秒，电流方向和二线圈的同名端见图所示。求初级线圈和次级线圈中的感应电动势？

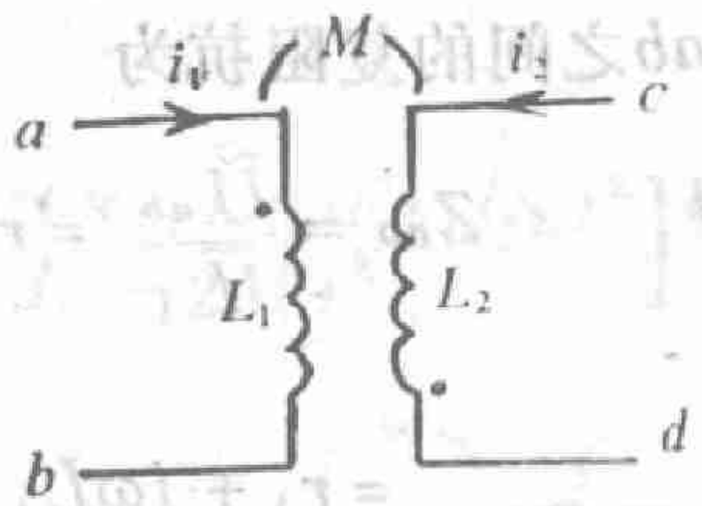



图7—27

错答：$e_{L1}=-L_1\dfrac{di_1}{dt}=-2\times10^{-3}\times10=-0.02$(伏)，

$$e_{L2}=-L_2\frac{di_2}{dt}=-8\times10^{-3}\times(-20)=0.16\text{(伏)},$$

$$e_{M1}=-M\frac{di_2}{dt}=-1.2\times10^{-3}\times(-20)=0.024\text{(伏)},$$

$$e_{M2}=-M\frac{di_1}{dt}=-1.2\times10^{-3}\times10=0.012\text{(伏)}.$$

则初级和次级线圈中的感应电动势分别为

$$e_1=e_{L_1}+e_{M1}=-0.02+0.024=0.004\text{(伏)},$$

$$e_2=e_{L_2}+e_{M2}=0.16-0.012=0.148\text{(伏)}.$$

分析：用$e_L=-L\dfrac{di}{dt}$求自感电动势时，其标定方向为$i$的方

(PDF压缩器 - 未注册版)

向；用$e_{M1}=-M\frac{di_2}{dt}$求互感电动势时，其标定方向为$i_2$流入端的同名端、指向异名端。对图7—27所示的电路，

$e_{L1}=-L_1\frac{di_1}{dt}=-0.02$伏，其标定方向为$i_1$的标定方向，即从$a$到$b$；

$e_{L2}=-L_2\frac{di_2}{dt}=0.16$伏，其标定方向为$i_2$的标定方向，即从$c$到$d$；

$e_{M1}=-M\frac{di_2}{dt}=0.024$伏，其标定方向为$i_2$的流入端的同名端$b$指向异名端$a$；

$e_{M2}=-M\frac{di_1}{dt}=-0.012$伏，其标定方向为$i_1$的流入端的同名端$d$指向异名端$c$。

由此可见，同一线圈中，自感电动势的标定方向与互感电动势的标定方向相反，所以不可直接相加，而上面相加了，所以结果是错误的。

正确回答：若选$i_1$、$i_2$的方向分别为初、次级线圈中的感应电动势的标定方向，则初、次线圈中的感应电动势分别为

$e_1=e_{L1}-e_{M1}=-0.02-0.024=-0.044$(伏)，

$e_2=e_{L2}-e_{M2}=0.16+0.012=0.172$(伏)。

负号表示实际方向与标定方向相反。

练习题：

在图7—28所示的互感电路中，若电流从$a$端流入，且以100安/秒的变化率增加，那么在$cd$端的电压等于多少？（$M=100$毫亨）。

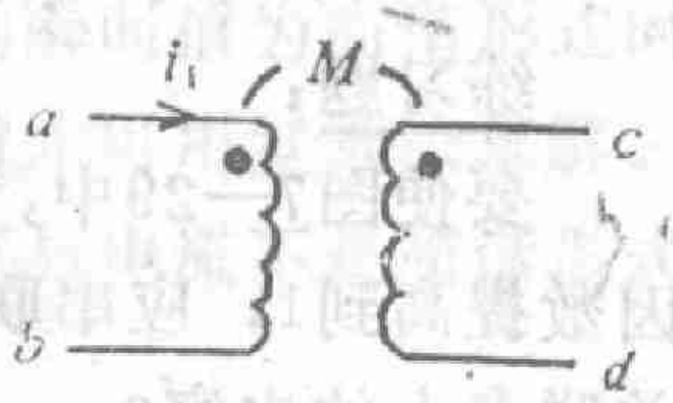



图7—28

提示：$U_{cd}=-10$伏。

(PDF压缩器 - 未注册版)

7—25。电阻与电容串联时的功率因数大还是并联时的功率因数大？

错答：$RC$串联电路的位相差为$\varphi_{串}=-\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{1}{\omega CR}$，$RC$并联电路的位相差为$\varphi_{并}=-\mathrm{tg}^{-1}\omega CR$。因为$\dfrac{1}{\omega CR}<\omega CR$，所以$\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{1}{\omega CR}<\mathrm{tg}^{-1}\omega CR$，$|\varphi_{串}|<|\varphi_{并}|$，则$\cos\varphi_{串}>\cos\varphi_{并}$，即串联时的功率因数大。

分析：$\dfrac{1}{\omega CR}$不一定小于$\omega CR$，所以上面的结论是错误的。

正确的回答为：

$$\cos\varphi_{串}=\cos\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{\omega CR}=\sqrt{1-\sin^2\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{\omega CR}}$$

$$=\sqrt{1-\frac{(\frac{1}{\omega CR})^2}{1+(\frac{1}{\omega CR})^2}}\ ①=\frac{\omega CR}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}},$$

$$\cos\varphi_{并}=\cos\mathrm{tg}^{-1}\omega CR=\sqrt{1-\sin^2\mathrm{tg}^{-1}\omega CR}$$

$$=\sqrt{1-\frac{(\omega CR)^2}{1+(\omega CR)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}.$$

由此可见，当$\omega CR>1$时，串联电路的功率因数大于并联电路的；当$\omega CR<1$时，串联电路的功率因数小于并联电路的；当$\omega CR=1$时，串联电路的功率因数等于并联电路的。

练习题：

要使图7—29中，$ab$两点之间的功率因数提高到1，应串联多大的电容，或应并联多大的电容？

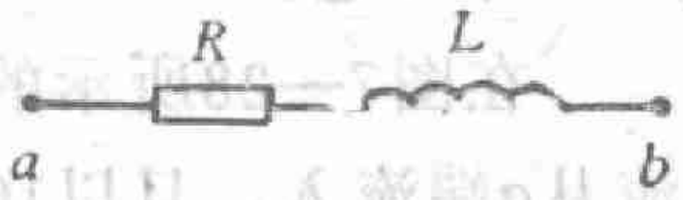


图7—29

①应用了公式$\sin\mathrm{tg}^{-1}x=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$。

(PDF压缩器 - 未注册版)

提示：$C_{串}=\frac{1}{\omega^2 L}$，$C_{并}=\frac{L}{R^2+(\omega L)^2}$。

7—26. 功率因数可否为负值？

错答：功率因数为$\cos\varphi$，其中$\varphi$是电压与电流之间的相位差。由于二简谐量之间的相位差取值范围在$-\pi$至$\pi$之间，所以$\cos\varphi$可正可负。

分析：任一电路（或元件）上的电压与电流之间的位相差肯定在$-\frac{\pi}{2}$至$\frac{\pi}{2}$之间，不可能超过此范围，所以功率因数不可能为负值。它在0至1之间变化。

练习题：

在一线路中会否出现电压为$u=U_0\sin(\omega t+60°)$，电流为$i=I_0\sin(\omega t-50°)$？

提示：在交流电路中电压与电流之间的相位差只能在$-\frac{\pi}{2}$至$\frac{\pi}{2}$之间，不可能超过此值。所以上面给出的情况不会出现（因$\varphi_u-\varphi_i=110°$）。

7—27. 锯齿电压加在某电路两端时，可否用复数法来求解电路中的电流？

错答：对于周期性变化的交流电路均可用复数法求解，所以锯齿波加在某电路两端时，可以用复数法求此电路中的电流。

分析：只有一电路中的电压和电流的瞬时值为简谐形式时，其电压和电流才可用复数形式表示，这时才可用复数法求解。当锯齿电压加在某电路两端时，电路中电压与电流不是简谐形式变化，所以不可用复数法求解此电路。

练习题：

交流电路刚接通时，可否用复数法求电压和电流？

(PDF压缩器 - 未注册版)

提示：交流电路在刚接通开关时，处于暂态过程，① 电路中电压和电流均未达到简谐形式（即未达到稳定状态），所以不可由复数形式求解。只有开关合上一般时间达到稳定状态后，才可用复数法求解。

7—28。在一个电感电路中，用串联或并联电容，都可提高功率因数。日光灯是一个电感性电路，可否用串联电容的方法提高功率因数？

错答：当然可以。

分析：不对。因为串联电容后，电容上的电压与电感上电压相位相反，在$\cos\varphi=1$的情况，相互抵消，电源电压全部加在灯管上，将使灯管烧毁。

练习题：

在日光灯照明时，镇流器肯定有一部分功率损耗。有人为了消除这部分损耗，在日光灯启着后，用导线将镇流器短路，这种使用是否可以？

提示：镇流器有两个作用：一是给日光灯提供一个起辉电压；二是在日光灯起着后，限制通过日光灯的电流（正因此，它又称为限流器）。由此可知，在日光灯起着后不可用导线将镇流器短路，否则会使灯管烧毁。

7—29。某日光灯并联电容后，功率因数提高了，那么其瓦数（有功功率）是否也提高了？（假设电压为220伏）。

错答：因为功率因数提高了，则由$P=UI\cos\varphi$可知，瓦数也提高了。

分析：日光灯并联电容后，功率因数变了，但$I\cos\varphi$不变，即有功电流不变。所以有功功率$P=UI\cos\varphi$不变，即日光灯的瓦数不变。

---

①一切电路在转换开关时，均有暂态过程。一切暂态过程均不可由复数法求解。

(PDF压缩器 - 未注册版)

练习题：

有一台电动机，原功率因数为0.9，若并联电容后使它的功率因数提高到1.0，这台电动机的动力功率（有功功率）是否增大了？

提示：没增大，保持不变。

7—30。给日光灯并联电容（无损电容）后，总的有功电阻是否改变？

错答：因为日光灯并联电容后，有功功率不变，则与它对应的有功电阻也不变。

分析：日光灯并联电容后，阻抗改变了，电路中电流$I=\frac{U}{Z}$改变了，则由$P=UI\cos\varphi=I^2r$可知，有功电阻$r=\frac{P}{I^2}$改变了。且当并联电容功率因数提高时，$I$减小，则$r$增加；当并联电容功率因数降低时，$I$增大，则$r$减小。

练习题：

1。给日光灯串联一个电容后，总电路有功电阻是否改变？有功功率是否改变？（假设日光灯仍可以照明）。

提示：有功电阻不变，但有功功率改变（因总阻抗改变，$I=\frac{U}{Z}$改变，所以$P=I^2r$改变）。

2.一空心线圈接在一电压两端，将它拉直时，线圈上消耗的有功功率是否改变？

提示：在拉直时，虽然有功电阻不变，但是$L$改变，所以$Z$改变，有功电动率$P=I^2r=\frac{U^2}{Z^2}r$改变。

7—31。电阻和电容串联后接在某一电压两端消耗的功率与并联后接在同一电压两端消耗的功率哪个大？

错答一：由于电容不消耗功率，所以由$P_{总}=P_R+P_C$得，串联与并联消耗的功率一样大。

(PDF压缩器 - 未注册版)

分析：不管串联还是并联，电容器上消耗的功率$P_C=0$，但电阻上消耗的功率$P_R=I^2R$不等（因两种情况下的电流$I=\frac{U}{Z}$不等）。则两次的总功率不等，并且并联时消耗的功率大。

错答二：由$P=UI\cos\varphi$可知，$\cos\varphi$大时，消耗的功率大。再由题7—25可知，在$\omega CR>1$时，串联时的功率因数大；$\omega CR<1$时，并联时的功率因数大；$\omega CR=1$时，串、并联的功率因数一样大。因此，在$\omega CR>1$时串联时的功率大；$\omega CR<1$时并联时功率大；$\omega CR=1$时，串、并联的功率一样大。

分析：在$P=UI\cos\varphi$中，当$U$、$I$一定时，$\cos\varphi$大的$P$大。但$RC$串联时，与并联时的$I$不同，所以仅由$\cos\varphi$的大小不能确定$P$的大小。因此上面的回答是错误的。

$$\text{由 } P_{串}=U_{串}I_{串}\cos\varphi_{串}=\frac{U^2}{Z_{串}}\cos\varphi_{串}=\frac{U^2}{\left[R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\omega CR}{\left[1+(\omega CR)^2\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{U^2R(\omega C)^2}{1+(\omega CR)^2}.$$

$$P_{并}=U_{并}I_{并}\cos\varphi_{并}=\frac{U^2}{Z_{并}}\cos\varphi_{并}$$

$$=\frac{U^2\left[\frac{1}{R^2}+(\omega C)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[1+(\omega CR)^2\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{U^2}{R}.$$

可知，$$\frac{P_{串}}{P_{并}}=\frac{(\omega CR)^2}{1+(\omega CR)^2}<1$$

所以$P_{并}>P_{串}$，即并联时消耗的功率大。

练习题：

有一灯泡直接接在电源两端和并一个电容后接在同一电源两端，灯泡的亮度是否一样？

(PDF压缩器 - 未注册版)

提示：由于电源内部阻抗的影响，两种情况下灯泡中电流不同，再由$P_{灯}=I^2R_{灯}$可知，两种情况下灯泡亮度不同。

7—32。在图7—30中，两个灯泡的规格一样，哪一个灯泡亮？

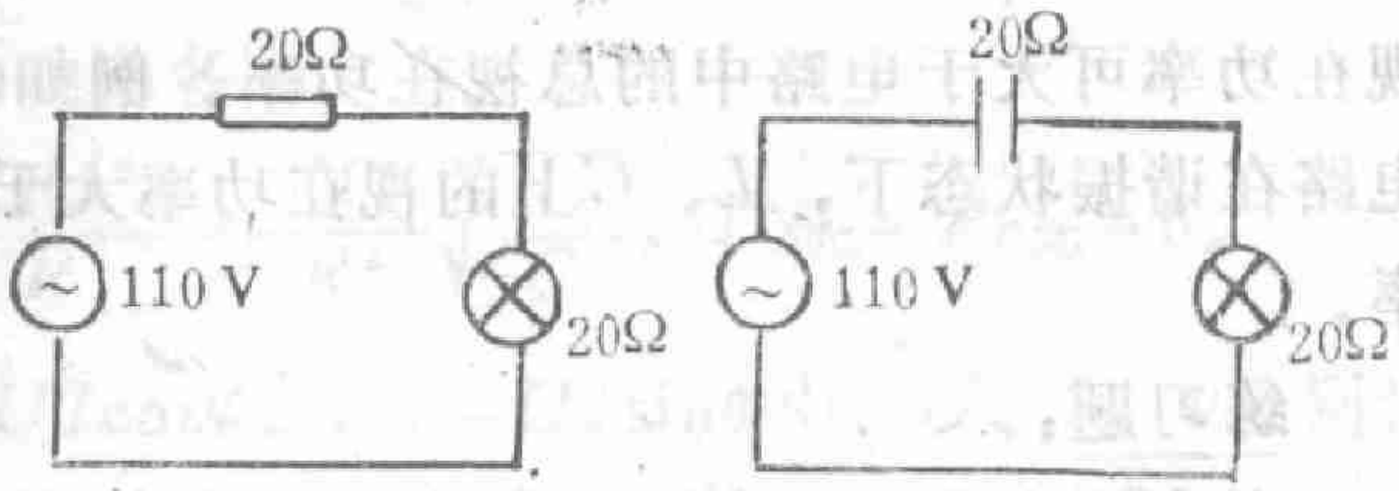



图 7—30

错答：一样亮。

分析：在图(a)和图(b)中的灯泡功率各为

$$P_a=I_a^2R_{灯}=\frac{U^2}{(R_{灯}+R)^2}R_{灯}=\frac{110^2}{(20+20)^2}\times 20$$
$$\doteq 151(瓦),$$

$$P_b=I_b^2R_{灯}=\frac{U^2}{R_{灯}^2+Z_c^2}R_{灯}=\frac{110^2}{20^2+20^2}\times 20$$
$$=303(瓦)。$$

可见图(b)的灯泡亮。

练习题：

一个220伏100瓦的灯泡，如欲接在380伏的电压两端，若串联电阻，阻值要多大？若串联电容，容抗要多大？

提示：$R=352$欧，$Z_c=682$欧。

7—33。有一电路是由若干元件按一定方式联接起来的，问其中某个元件上的视在功率可否大于电路中的总视在功率？

错答：由能量守恒定律可知，$S=\sum_{i=1}S_i$，又因$S_i=U_iI_i$恒大于0，所以电路中某个元件上的视在功率不可能大于电路中的总视在功率。

分析：视在功率不是实际消耗的功率，它不满足能量守恒定

(PDF压缩器 - 未注册版)

律，即不满足$S=\sum_{i=1}^{n}S_i$。由实例可以说明电路中某元件上的视在功率可大于电路中的总视在功率。例如，$Q>1$的$RLC$串联电路在谐振状态下，$L$、$C$上的视在功率大于电路中的总视在功率。

练习题：

在交流电路中，元件上的有功功率和无功功率可否大于元件上的视在功率？

提示：$P_{有}=S\cos\varphi$，$P_{无}=S\sin\varphi$，$S=\sqrt{P_{有}^2+P_{无}^2}$，由此可知，元件上的有功功率和无功功率都不可大于视在功率。

7—34。在电感两端加电压$u=U_o\sin\omega t$时，通过的电流为$i=I_o\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$。问其中的最大瞬时功率为多少？

错答：最大瞬时功率为$P_o=U_oI_o=2UI=2S$。

分析：电感元件上的瞬时功率为$P=ui=U_oI_o\sin\omega t\cos\omega t$

$=\frac{U_oI_o}{2}\sin2\omega t$。由此可见最大瞬时功率为$P_o=\frac{U_oI_o}{2}=UI=S$，而不是$P_o=2S$。

练习题：

标有“220V 100W”的灯泡在正常照明时，最大瞬时功率为多少？

提示：最大瞬时功率为$P_o=U_oI_o=2S$。注意，灯泡上标定的100瓦是平均功率。平均功率与最大瞬时功率之间无$\overline{P}=\frac{P_o}{\sqrt{2}}$的关系。

7—35。对$RLC$串联电路，在谐振状态下，$L$、$C$元件上的有功功率等于多少，无功功率等于多少？

(PDF压缩器 - 未注册版)

错答：$RLC$串联电路在谐振状态下，$\varphi=0$，$\dot{U}_L=\dot{U}_C=Q\dot{U}$，$I_L=I_C=\dfrac{U}{R}$。则由$P_{有}=UI\cos\varphi$，$P_{无}=UI\sin\varphi$可得$L$、$C$元件上的有功功率和无功功率各为

$$P_{L有}=P_{C有}=\frac{QU^2}{R}=\frac{U^2}{R^2}\sqrt{\frac{L}{C}},\quad P_{L无}=P_{C无}=0。$$

分析：在$P_{有}=UI\cos\varphi$，$P_{无}=UI\sin\varphi$中，$U$、$I$、$\varphi$分别为同一元件(或同一线路)上的电压、电流及其位相差.对$RLC$串联电路，在谐振状态下，电路的$\varphi=0$；而对$L$、$C$元件来说，$\varphi\neq0$，$\varphi_L=\dfrac{\pi}{2}$，$\varphi_C=-\dfrac{\pi}{2}$，所以对$L$、$C$元件它们的有功功率和无功功率各为

$$P_{L有}=U_LI_L\cos\varphi_L=0,\quad P_{C有}=U_CI_C\cos\varphi_C=0,$$

$$P_{L无}=U_LI_L\sin\varphi_L=\frac{QU^2}{R}=\frac{U^2}{R^2}\sqrt{\frac{L}{C}},$$

$$P_{C无}=U_CI_C\sin\varphi_C=-\frac{QU^2}{R}=-\frac{U^2}{R^2}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

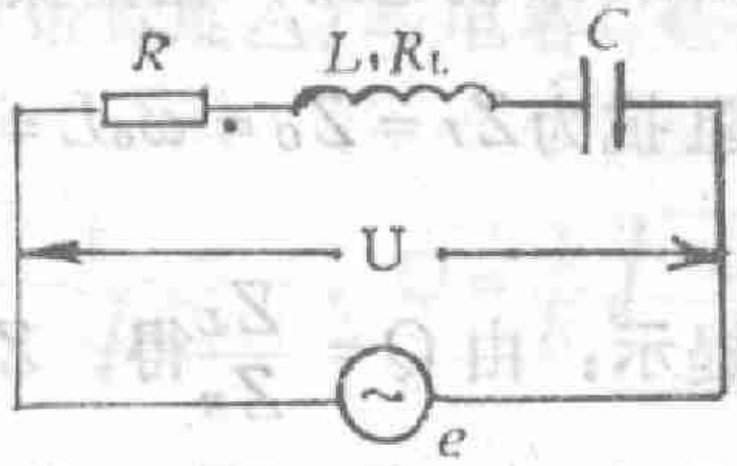


图7—31

练习题：

在图7—31所示的电路中，在谐振状态下，三个元件上的有功功率和无功功率各为多少？

提示：三元件上的有功功率和无功功率各为

$$P_{R有}=I^2R=\frac{U^2}{(R+R_L)^2}R,\quad P_{R无}=0,$$

$$P_{L有}=I^2R_L=\frac{U^2}{(R+R_L)^2}R_L,$$

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$P_{L无}=I^2\omega_0 L=\frac{\dot{U}^2}{(R+R_L)^2}\sqrt{\frac{L}{C}},$$

$$P_{C有}=0,\quad P_{C无}=-I^2\frac{1}{\omega_0 C}=-\frac{U^2}{(R+R_L)^2}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

7—36. $RLC$串联电路在谐振时，电容和电阻哪个上的电压较高？

错答：在谐振时，$U_C=QU$，$U_R=U$，可见电容上的电压比电阻上的电压高。

分析：$Q$并非一定大于1，它可大于1，可小于、等于1。所以正确回答是：当$Q>1$时，电容上的电压高；$Q<1$时，电阻上电压高；$Q=1$时，电容和电阻上电压一样高。

练习题：

$RLC$串联电路，在谐振时，电阻的阻抗为$Z_R=R$，电感和电容的阻抗为$Z_I=Z_C=\omega_0 L=\frac{1}{\omega_0 C}$。问$Z_R$与$Z_L$哪个大？

提示：由$Q=\frac{Z_L}{Z_R}$得，$Z_L=QZ_R$。可见，当$Q>1$时，$Z_L>Z_R$；$Q<1$时，$Z_L<Z_R$；$Q=1$时，$Z_L=Z_R$。

7—37。对于电阻$R$，线圈$L$、$R_L$和电容$C$串联构成的电路接在交流电源两端，当谐振时测得电源输出电压为$U$，电阻两端的电压为$U_R$，线圈两端电压为$U_L$，电容两端电压为$U_C$，那么下面几式哪个等于$Q$值？

$$①\frac{U_L}{U},\ ②\frac{U_L}{U_R},\ ③\frac{U_C}{U},\ ④\frac{U_C}{U_R}.$$

错答：因为谐振时，$U_R=U$，$U_L=U_C=QU$，所以上面四式都等于$Q$值。

分析：只有当电感、电容是理想电感和理想电容时，$U_R=U$，$U_L=U_C=QU$，否则不成立。在此电感为非理想的，电容为理想

(PDF压缩器 - 未注册版)

的，所以$U_R<U$，$U_L>U_C=QU$，可见只有③式等于$Q$值。

练习题：

对图7—6所示的电路，若在谐振时，测得讯号源两端的电压为$U$，电容两端的电压为$U_C$，那么$\frac{U_C}{U}$等于下面哪个值？

①$\frac{1}{R+R_L+r}\sqrt{\frac{L}{C}}$，②$\frac{1}{R+R_L}\sqrt{\frac{L}{C}}$，③$\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$，④$\frac{1}{R_L}\sqrt{\frac{L}{C}}$。

提示：$\frac{U_C}{U}$等于$RLC$串联电路的$Q$值，$\frac{U_C}{\varepsilon}$等于包括电源在内的整个回路的$Q$值；$\frac{1}{R+R_L}\sqrt{\frac{L}{C}}$等于$RLC$串联电路的$Q$值，$\frac{1}{R+R_L+r}\sqrt{\frac{L}{C}}$等于整个回路的$Q$值。所以$\frac{U_C}{U}=\frac{1}{R+R_L}\sqrt{\frac{L}{C}}$。

**7—38.** $RLC$串联谐振电路的通频带宽度$\triangle f$与电容$C$是否有关？

错答：$\triangle f=\frac{f_o}{Q}$，由于$f_o=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$，$Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$均与$C$有关，所以$\triangle f$与$C$有关。

分析：$\triangle f=\frac{f_o}{Q}=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\Big/\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}=\frac{R}{2\pi L}$，可见与$C$无关。

练习题：

在收音机中，对同一波段的调谐电路，高频下选择性好，还是低频下的选择性好？

提示：在收音机中，对同一波段的调谐电路，$R$、$L$一定，频率不同，只是$C$不同。则由调谐电路的频带宽度$\triangle f=\frac{f_o}{Q}=\frac{R}{2\pi L}$可知，不同频率下的选择性好坏一样。

(PDF压缩器 - 未注册版)

7—39. 在图7—32中，给出了两条$RLC$串联电路的$I-f$曲线。已知$f_{20}=3f_{10}$，$\triangle f_2=2\triangle f_1$，哪一条曲线对应的$Q$值大？

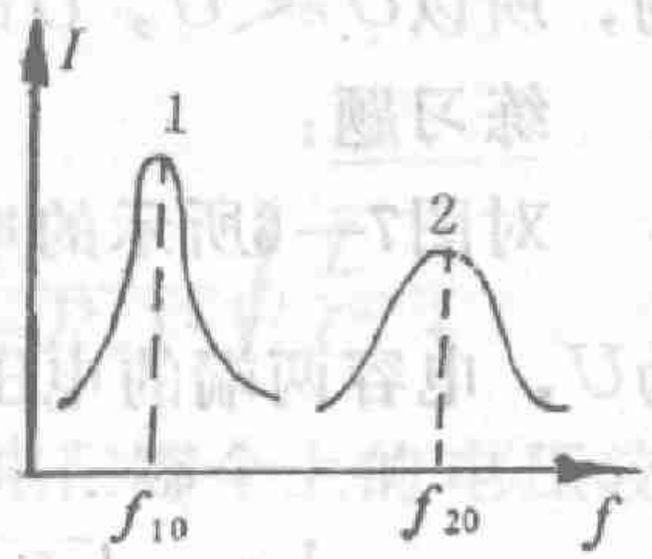


图7—32

错答：由于曲线1的频带宽度$\triangle f_1$小，所以它对应的$Q$值大。

分析：由$Q=f_0/\triangle f$可知，当$f_0$一定时，$\triangle f$小，$Q$大。当$f_0$不一定时，就无此结论。

对图7—32给出的二曲线，由$Q=f_0/\triangle f$可得$Q_2=1.5Q$，。可见曲线2对应的$Q$值大。

练习题：

在图7—33中，给出了两条$RLC$串联谐振电路的谐振特性曲线。哪一条对应的$Q$值大？

提示：由$Q=f_0/\triangle f$可知，曲线2对应的$Q$值大。

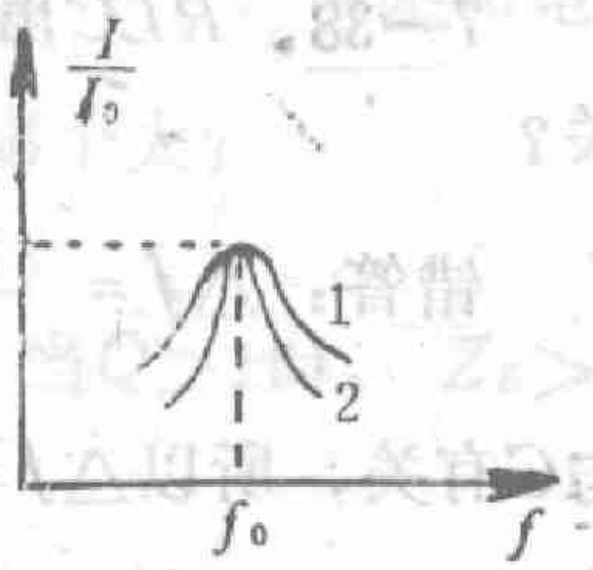


图7—33

7—40. $RLC$串联电路的通频带宽度可由以下方法测量：在保证$RLC$串联电路两端的电压$U$一定的情况下，测量$I—f$曲线，求出$I_{max}/\sqrt{2}$对应的两个频率之差$\triangle f$，它便是通频带宽度。若用$P—f$曲线来测，如何测量呢？

错答：由$P=UI$可知，在$U$一定时，$I—f$曲线上$I_{max}/\sqrt{2}$对应的点为$P—f$曲线上$P_{max}/\sqrt{2}$对应的点，所以只要在保证$U$一定的情况下测出$P—f$曲线，求出$P_{max}/\sqrt{2}$对应的两个频率之差$\triangle f$，它便是通频带宽度。

分析：在$RLC$串联电路中，只有在$f=f_0$时（即谐振状态下），$P=UI$。在$I=I_{max}/\sqrt{2}$的状态下，$P\neq UI$，所以在$I$

(PDF压缩器 - 未注册版)

$=I_{max}/\sqrt{2}$的状态，$P\neq P_{max}/\sqrt{2}$，即在$I-f$曲线上$I_{max}/\sqrt{2}$对应的点并不是$P-f$曲线上$P_{max}/\sqrt{2}$对应的点，亦即在$I-f$曲线上$I_{max}/\sqrt{2}$对应的频率并不是$P-f$曲线上$P_{max}/\sqrt{2}$对应的频率。所以上面测量方法是错误的。正确测量方法为：

由$P=I^2R$可知，当$I=I_{max}/\sqrt{2}$时，$P=I_{max}^2R/2=P_{max}/2$①。可见只要在保证$U$一定的情况下，测出$P-f$曲线，求出$P_{max}/2$对应的两个频率之差，它便是通频带宽度。

练习题：

在$RLC$串联电路中，保证$U$一定时，$Z$等于何值时$P=\frac{1}{2}P_{max}$？

提示：$Z=\sqrt{2}Z_{min}=\sqrt{2}R$时，$P=\frac{1}{2}P_{max}$。

7—41。用图7—34所示的电路，在保证电压表读数不变的情况下测量的$I-f$曲线，其尖锐程度随$r$增加如何变化？

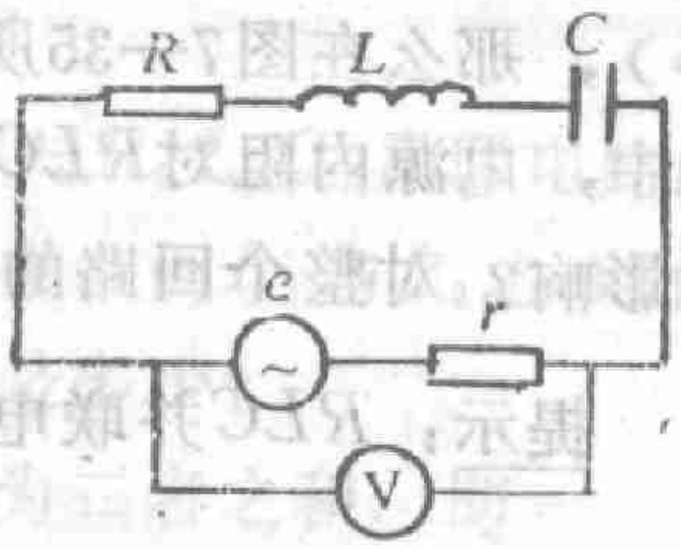


图7—34

错答：$r$增加，回路中电阻增加，则回路中的$Q=\frac{1}{R+r}\sqrt{\frac{L}{C}}$减少，$\triangle f=\frac{f_o}{Q}$增大，所以$I-f$曲线的尖锐程度变差。

分析：①在$RLC$串联电路两端电压一定时，测量的$I-f$曲线为$RLC$串联电路的电流特性曲线；在讯号源电动势一定时，测量的$I-f$曲线为整个回路（包括电源）的电流特性曲线。②$RLC$串联电路的频带宽度为$\triangle f_{RLC}=\frac{f_{RLCO}}{Q_{RLC}}$，其中$f_{RLCO}$是$RLC$串联电路的谐振频率，$f_{RLCO}=$

---

①由此可知，$I=\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$所对应两点的功率等于谐振点功率的一半．因此又称这两点为半功率点。

(PDF压缩器 - 未注册版)

$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$，$Q_{RLC}$是$RLC$串联电路的$Q$值，$Q_{RLC}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$；包括电源在内的整个回路的频带宽度为$\triangle f_{回}=\frac{f_{回0}}{Q_{回}}$，其中$f_{回0}$是总回路的谐振频率，$f_{回0}=\frac{1}{2\pi\sqrt{L_{回}C_{回}}}$（$L_{回}$、$C_{回}$是总回路中的电感和电容），$Q_{回}$是总回路的$Q$值，$Q_{回}=\frac{1}{R_{回}}\sqrt{\frac{L_{回}}{C_{回}}}$。

由上面两点可知，在图7—34中电压表读数一定时，测量的$I-f$曲线的尖锐程度与$r$无关。但$e$一定时，测量的$I-f$曲线的尖锐程度与$r$有关，$r$增大，尖锐程度变差。

练习题：

在图7—34所示的串联谐振电路，电源内阻对$RLC$串联电路的$Q$值无影响，对整个回路的$Q$值有影响（$r$增大，$Q$减小），那么在图7—35所示的并联谐振电路中，电源内阻对$RLC$并联电路的$Q$值有无影响？对整个回路的$Q$值有无影响？

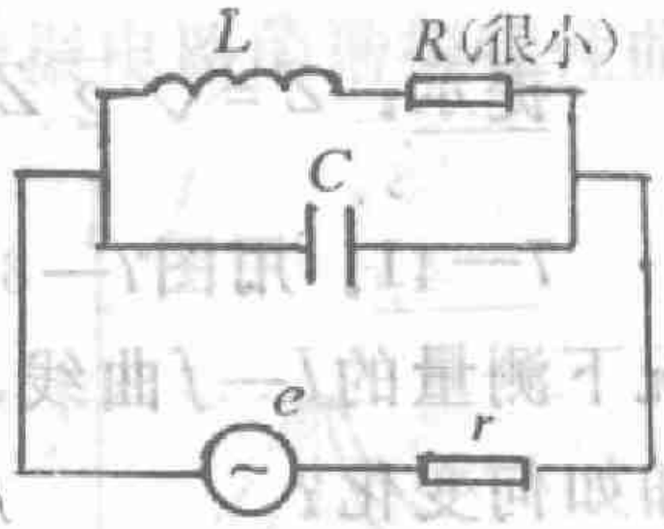


图7—35

提示：$RLC$并联电路的$Q$值为$Q=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}-R^2}$，与$r$无关；整个回路的$Q$值为$Q'=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}-R^2}\cdot\frac{1}{1+R/r}$

$=Q\frac{1}{1+R/r}$①，与$r$有关，且$r$增大，$Q'$增大，这一点恰与串联谐振回路的相反。

7—42．$RLC$串联后接在频率可调的恒压电源上，当$f$等于多少时，$L$、$C$上的电压为最大？

①见长春邮电学校编《电工基础》上册$P_{307}$（1979）。

(PDF压缩器 - 未注册版)

错答：当 $f=f_o=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ 时，$L$、$C$上电压为最大。

分析：当$f=f_o$时，$R$上电压为最大，电路中阻抗为最小，电流为最大，但此时$L$、$C$上电压并非为最大。可以证明①：

当$f_L=\frac{\omega_L}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{(2L-R^2C)C}}$时，电感上电压为最大；

当$f_C=\frac{\omega_C}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2L-R^2C}{2L^2C}}$时，电容上电压为最大。

由此可见，$f_L>f_o>f_C$，且$Q$越大，$f_L$与$f_C$越接近$f_o$。

练习题：

一实际线圈（$L$、$R_L$）与一电容$C$串联后接在一输出电压恒定的讯号源两端，当讯号源频率等于多少时，线圈两端的电压为最大？

提示：当$f=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1+(1+2R_L^2C/L)^{\frac{1}{2}}}{2LC}\right]^{\frac{1}{2}}$时线圈两端的电压为最大。

7—43。$R_1L_1C_1$串联电路的谐振频率与$R_2L_2C_2$串联电路的谐振频率相等。如果把这两个电路串联起来，而$L_1$与$L_2$之间的互感可忽略不计，问整个电路的谐振频率是多少？

错答一：串联后整个电路的谐振频率为二者之和，即

$$f_0=f_{10}+f_{20}=2f_{10}=\frac{1}{\pi\sqrt{L_1C_1}}。$$

分析：二串联谐振电路串联后整个电路的谐振频率不等于它们单独存在时的谐振频率之和，即$f_0\neq f_{10}+f_{20}$。而是

$f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$（其中$L$、$C$为整个电路中的电感和电容）。

错答二：串联后整个电路的谐振频率为

①见王发伯等编《普通物理典型题解》$P_{374}$（1981）。

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$f_o=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{(L_1+L_2)\cdot(C_1+C_2)}}$$

分析：$R_1L_1C_1$与$R_2L_2C_2$串联后整个电路中的$L=L_1+L_2$。（注意，只适用于$L_1$与$L_2$之间的互感可忽略的情况），但$C\neq C_1+C_2$。所以$f_0\neq\frac{1}{2\pi\sqrt{(L_1+L_2)\cdot(C_1+C_2)}}$。因为

$C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$，再考虑到$\omega_{10}=\omega_{20}$，即$L_1C_1=L_2C_2$，代入$f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$可得整个电路的谐振频率为$f_o=f_{1o}$

$=\frac{1}{2\pi\sqrt{L_1C_1}}$。

练习题：

1。试求图7—24所示的电路中，$ab$之间的谐振频率和$ac$之间的谐振频率。

提示：谐振频率是谐振电路的电抗$x=0$时对应的频率。由此可得图7—24所示的电路中$ab$之间的谐振频率为

$\omega_{ab}=\frac{1}{\sqrt{(L_1+M)C}}$，$ac$之间的谐振频率为

$\omega_{ac}=\frac{1}{\sqrt{(L_1+L_2+2M)C}}$。可见$\omega_{ab}>\omega_{ac}$。

2。对图7—36所示的电路，其谐振频率是否与$r$有关？

提示：图7-36所示电路的谐振频率为

$$f_o=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{L}\right)^2}.$$

可见与$r$无关。

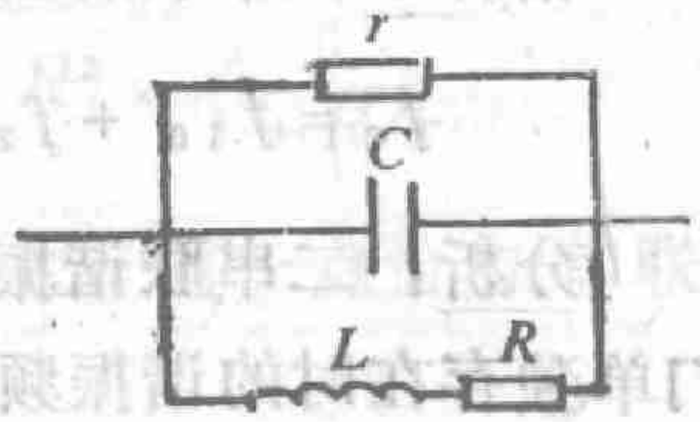


图7—36

7—44。对$RLC$串联谐振电路，当$f>f_o$时，电路显电感性；$f<f_o$时，电路显电容性。对于$RLC$并联电路，当$f>f_o$和$f<f_o$时，电路各显什么性？

(PDF压缩器 - 未注册版)

错答：与$RLC$串联电路一样，当$f>f_0$时显电 感性；$f<f_0$时，电路显电容性。

分析：并联电路的频率特性与串联电路的正好 相反，当$f<f_0$时显电感性；当$f>f_0$时显电容性。

练习题：

对图7—24所示的电路，在$\omega<\omega_{ab}$时，电路显什么性？

提示：在$\omega_{ac}<\omega<\omega_{ab}$时，电路显 电感性；在$\omega<\omega_{ac}$时电 路显电容性。

7—45。在图7—37所示的并联电路发生谐振时，电流表 $A_1$ 的读数$I_1=15$安，$A$的读数$I=12$安，问$A_2$的读数$I_2$等于多少？

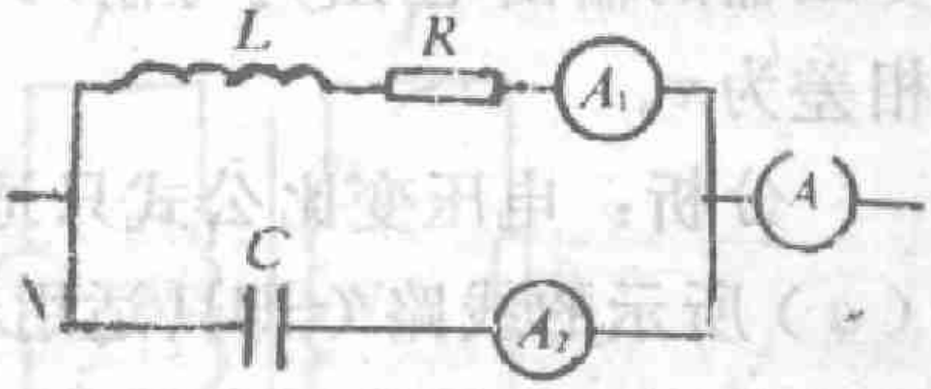


图7—37

错答：在并联电路发生谐 振时，二支路中电流等大反向，所以$A_2$的读数$I_2=15$安。

分析：并联谐振电路只有 在$R=0$时，在谐振状态下三支路中的电流等大反向，总电流$I=0$，而在此总电流$I=12$安$\neq 0$，说明$R\neq 0$。这时$I_1\neq I_2$。

由图7—37的矢量图7—38可得

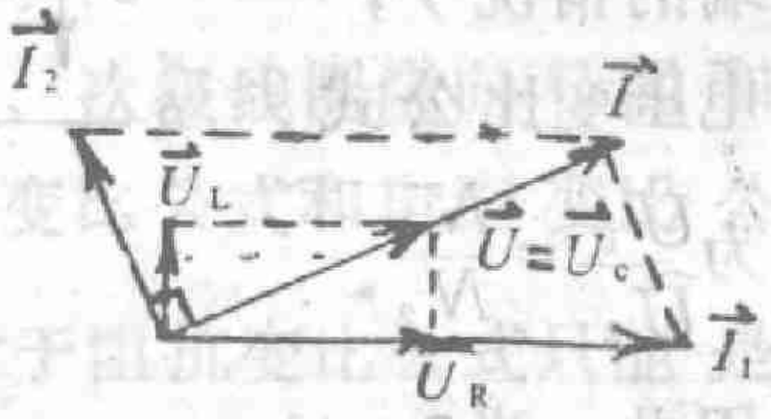


图7—38

$$I_2=\sqrt{I_1^2-I^2}=\sqrt{15^2-12^2}=9(\text{安}).$$

即$A_2$的读数为9安。

练习题：

对图7—39所示的电路，当谐振时，$V$的读数为10伏，$V_2$的读数为20伏，问$V_1$的读数为多少？

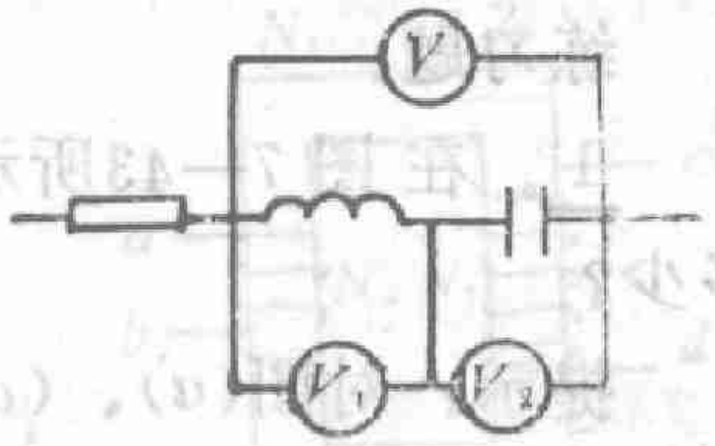


图7—39

提示：只有线圈的直流电 阻$R_L=0$时，$U_1=U_2$，$U=0$。而在此$U\neq 0$，说明$R_L\neq 0$，则$U_1\neq U_2$。

(PDF压缩器 - 未注册版)

由图7—39的矢量图7—40可得

$$U_1=\sqrt{U^2+U_2{}^2}=\sqrt{10^2+20^2}=22\text{伏}.$$

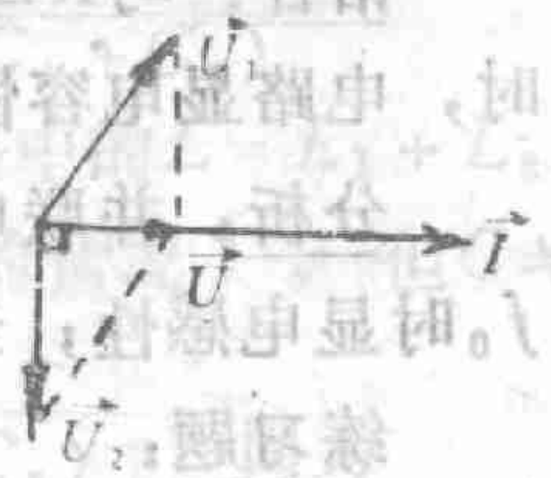


图7—40

7—46。对图7—41所示的理想变压器，其输出电压与输入电压的位相差为多少？

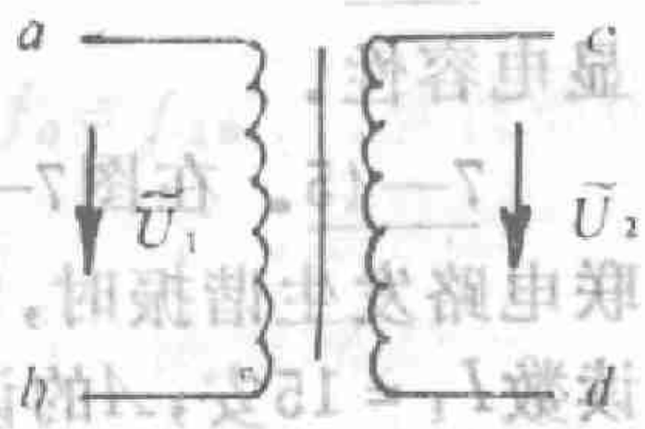


图7—41

错答：由电压变比公式$\frac{\tilde{U}_1}{\tilde{U}_2}=-\frac{N_1}{N_2}$可知，变压器的输出电压$\tilde{U}_2$与输入电压$\tilde{U}_1$的位相差为$\pi$。

分析：电压变比公式只适用于图7-42（$a$）所示的线路（即只适用于变压器初、次二线圈的上端为异名端的情况）。对图42($b$)所示的线路(即变压器初、次线圈的上端为同名端的情况），

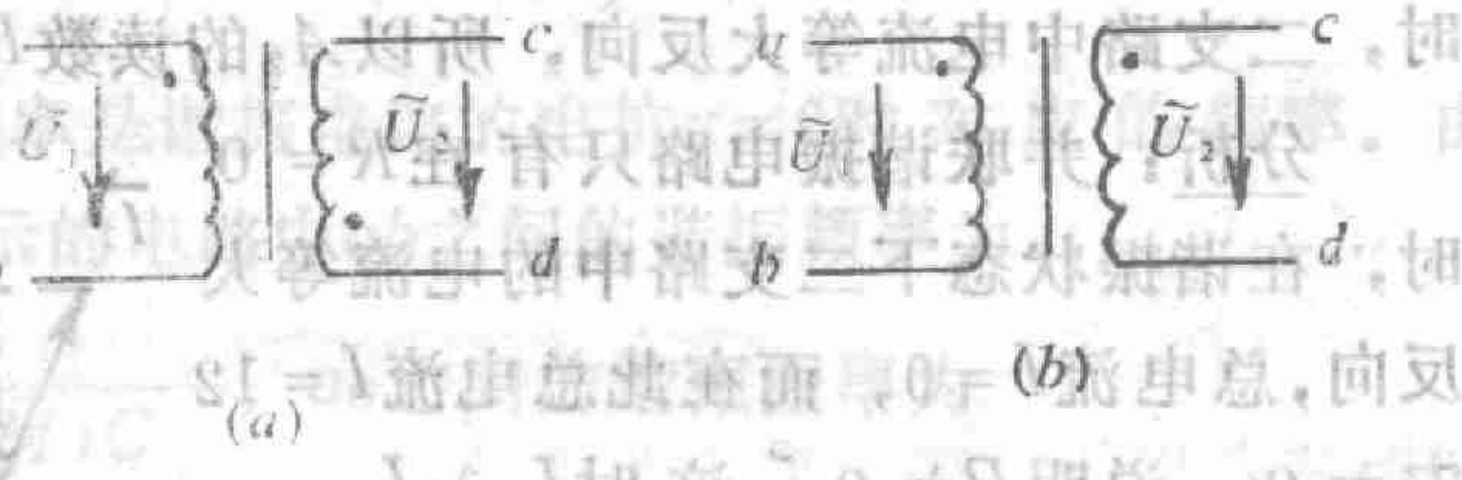


图7—42

电压变比公式为$\frac{\tilde{U}_1}{\tilde{U}_2}=\frac{N_1}{N_2}$.

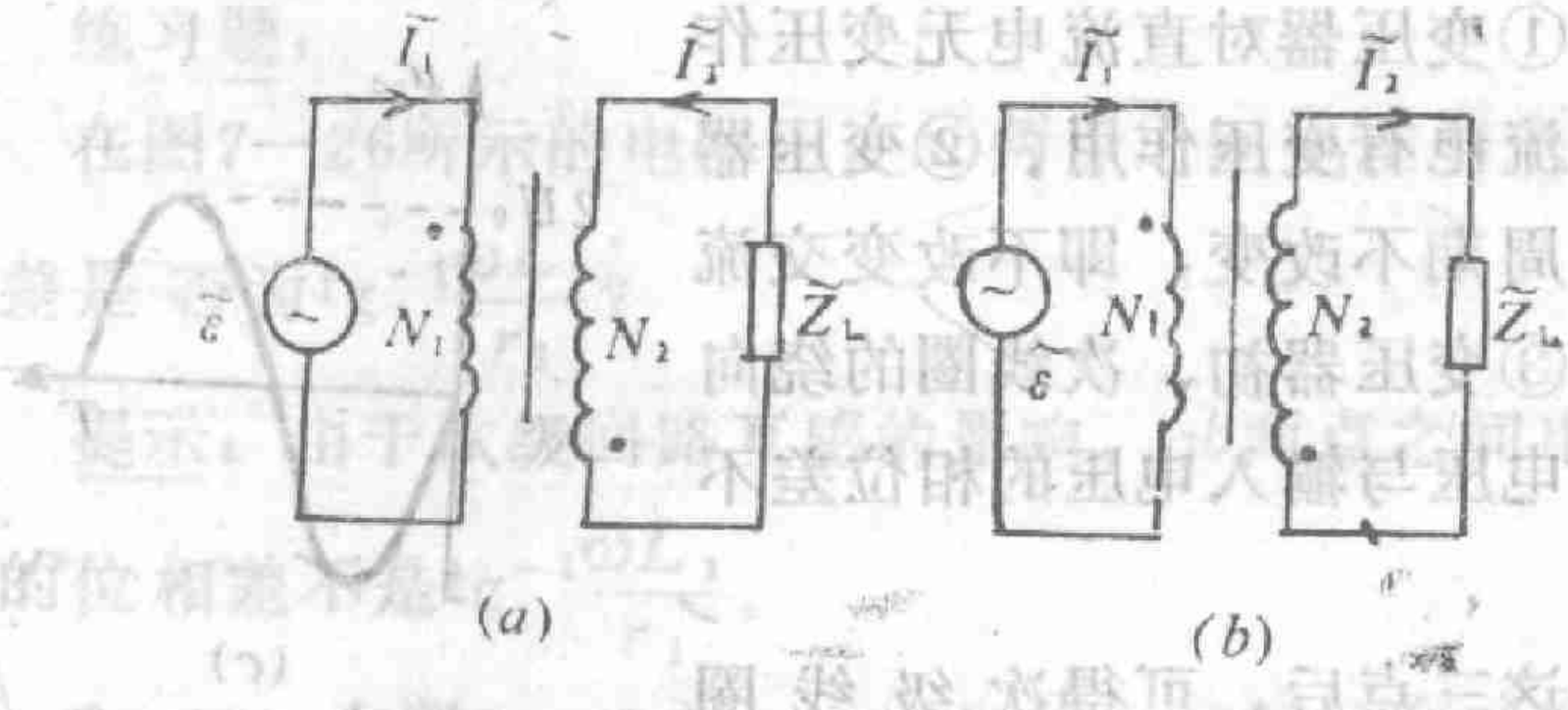
因此，当7—41所示的变压器，当二线圈的上端为异名端时，输出电压与输入电压的相位差为$\pi$（反位相）；当二线圈的上端为同名端时，输出电压与输入电压的相位差为0（同位相）。

练习题：

1．在图7—43所示的理想变压器中，$\tilde{I}_1$与$\tilde{I}_2$的位相差各为多少？

提示：对图($a$)、($d$)，$\frac{I_1}{I_2}=\frac{N_2}{N_1}$，对图（$b$）、（$c$），$\frac{\tilde{I}_1}{\tilde{I}_2}=-\frac{N_2}{N_1}$。可见在图（$a$）、（$d$）中$\tilde{I}_1$与$\tilde{I}_2$同位相，在图($b$)，

(PDF压缩器 - 未注册版)



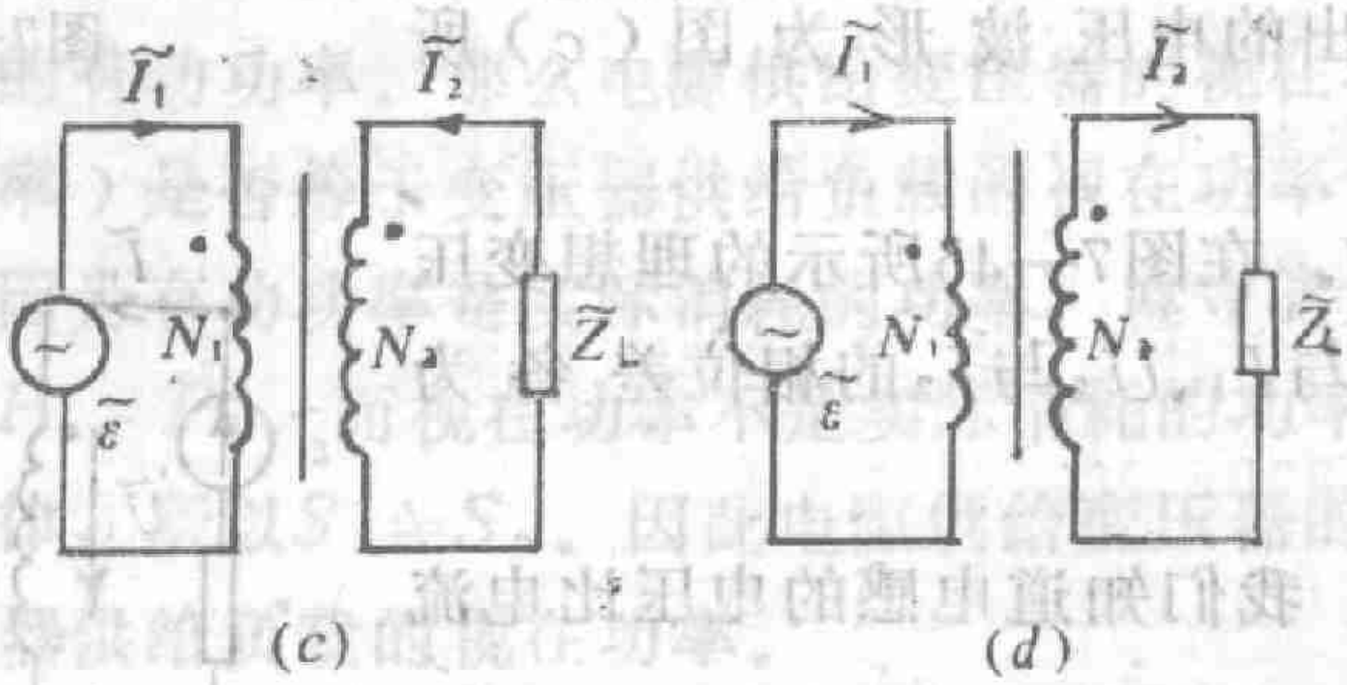




图7—43

（c）中$\tilde{I}_1$与$\tilde{I}_2$反位相。

顺便说明：对于理想变压器，由于初、次级线圈绕向不同和初、次回路中电流的标定方向不同，电压变比公式和电流变比公式可能为$\frac{\tilde{U}_1}{\tilde{U}_2}=\pm\frac{N_1}{N_2}$，$\frac{\tilde{I}_1}{\tilde{I}_2}=\pm\frac{N_2}{N_1}$，但对于阻抗变比公式只能是$\frac{\tilde{Z}_l'}{Z_l}=\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$，不可能为$\frac{\tilde{Z}_l'}{\tilde{Z}_l}=-\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$。

2．在图7—44（b）所示的理想变压器中，当初级线圈$ab$两端输入图$(a)$所示的电压波形时，在次级线圈$cd$两端输出怎样的波形？

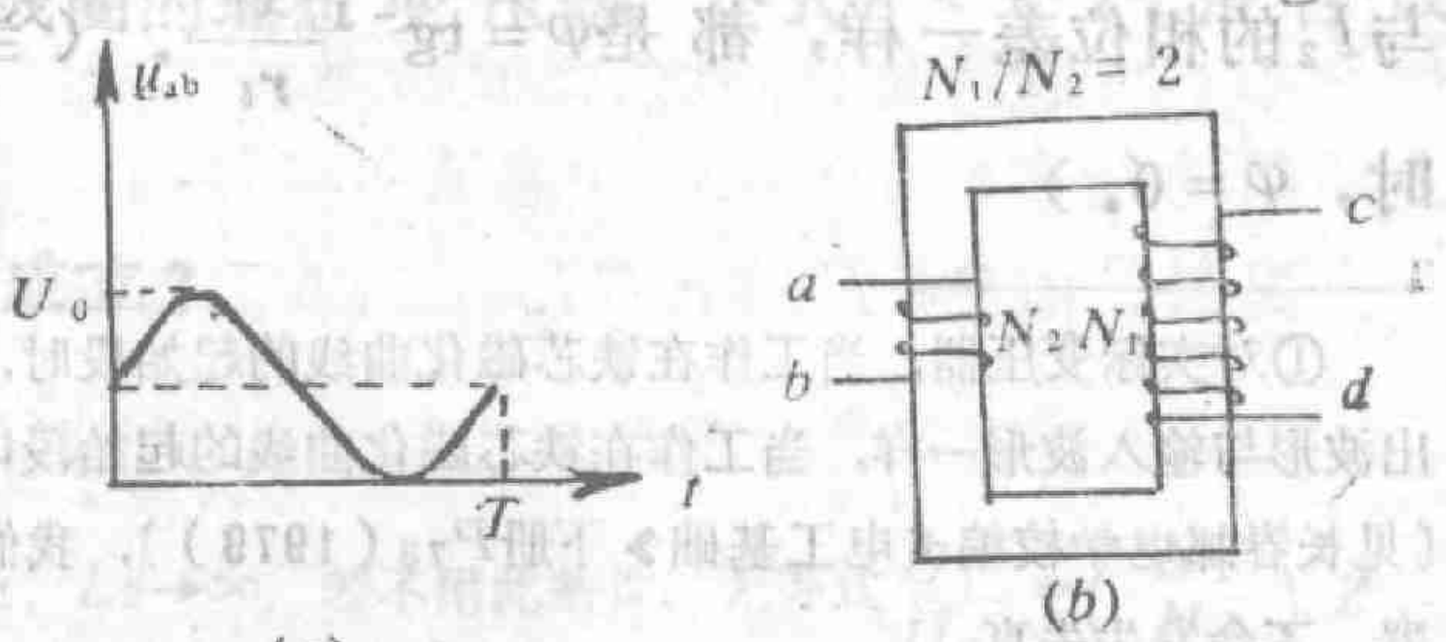
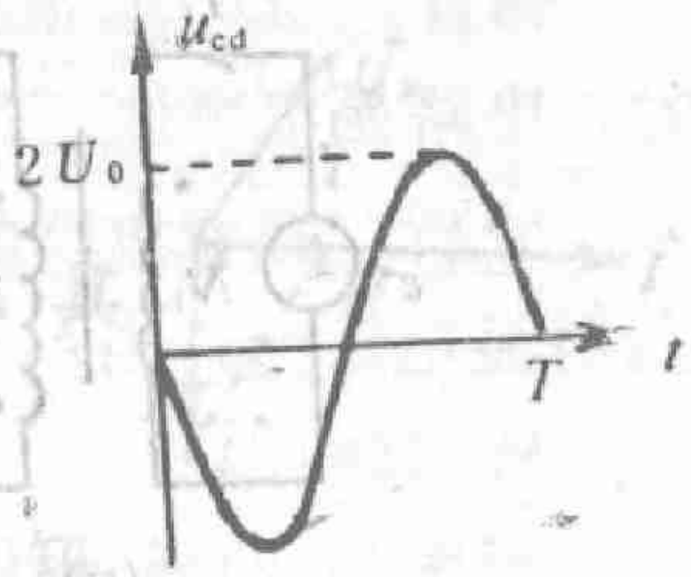



图7—44

(PDF压缩器 - 未注册版)

提示：①变压器对直流电无变压作用，仅对交流电有变压作用。②变压器对交流电的周期不改变，即不改变交流电的频率。③变压器初、次线圈的绕向不同，输出电压与输入电压的相位差不同。

考虑到这三点后，可得次级线圈$cd$两端输出的电压波形为图（$c$）所示①。




（$c$）

图7—44

7—47. 在图7—45所示的理想变压器中，$\dot{U}_1$与$\dot{I}_1$、$\dot{U}_2$与$\dot{I}_2$的相位差各为多少？

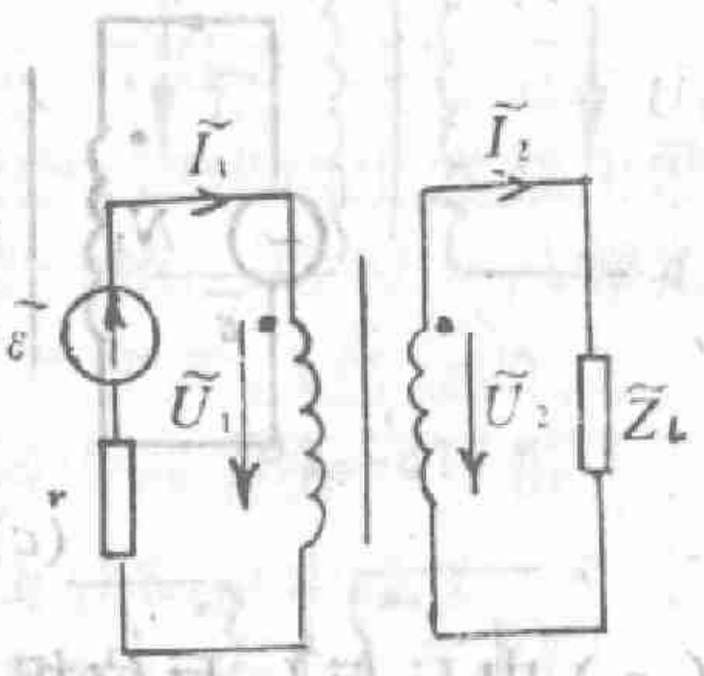



图7—45

错答：我们知道电感的电压比电流超前$\frac{\pi}{2}$，所以$\dot{U}_1$与$\dot{I}_1$、$\dot{U}_2$与$\dot{I}_2$的位相差均为$\frac{\pi}{2}$。

分析：对自感线圈，$U$与$I$之间的位相差为$\pi/2$。在此还含有互感，所以$\dot{U}_1$与$\dot{I}_1$、$\dot{U}_2$与$\dot{I}_2$的位相差都不是$\pi/2$。

因为$\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}=Z_L$，$\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}=\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L$②，可见，$\dot{U}_1$与$\dot{I}_1$、$\dot{U}_2$与$\dot{I}_2$的相位差一样，都是$\varphi=\mathrm{tg}^{-1}\frac{x_L}{r_L}$。（当$Z_L$为电阻性负载时，$\varphi=0$。）

---

①对实际变压器，当工作在铁芯磁化曲线的起始段时，输出电压不会失真，即输出波形与输入波形一样，当工作在铁芯磁化曲线的起始段以上时，一般要发生失真，〔见长春邮电学校编《电工基础》下册$P_{73}$（1979）〕，我们这里的变压器为理想变压器，不会发生失真。

②在此应用了理想变压器的条件：$L_1$、$L_2\to\infty$。

(PDF压缩器 - 未注册版)

练习题：

在图7—26所示的电路中，$ab$两点之间电压与电流之间的位相差是否为$\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{\omega L_1}{r_1}$？

提示：由于次级回路互感的影响，$ab$两点之间电压与电流之间的位相差不是$\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{\omega L_1}{r_1}$。

7—48．在图7—45中，电源供给变压器的有功功率等于变压器供给负载的有功功率。那么电源供给变压器的视在功率（最大可消耗的功率）是否等于变压器供给负载的视在功率？

错答：因为有功功率是实际消耗的功率，遵守能量守恒定律，所以有$P_1=P_2$，而视在功率不是实际消耗的功率，不遵守能量守恒定律，所以$S_1\neq S_2$。因此电源供给变压器的视在功率不等于变压器供给负载的视在功率。

分析：由$\dfrac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}=Z_l$，$\dfrac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}=\left(\dfrac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_l$[①]可知，$\dot{U}_1$与$\dot{I}_1$和$\dot{U}_2$与$\dot{I}_2$的位相差一样。因此，$\cos\varphi_1=\cos\varphi_2$，则由$U_1I_1\cos\varphi_1=U_2I_2\cos\varphi_2$可得，$U_1I_1=U_2I_2$，即$S_1=S_2$。可见，在图7—45中，电源供给变压器的视在功率等于变压器供给负载的视在功率。

练习题：

对于有几个副线圈的理想变压器，公式$P=\sum_{i=1}^{n}P_i$是否成立？$S=\sum_{i=1}^{n}S_i$是否成立？

①在此应用了条件$L_1$、$L_2\to\infty$，若不用此条件，无等式$\dfrac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}=\left(\dfrac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_l$，当然无结论$S_1=S_2$，但$P_1=P_2$仍成立。

(PDF压缩器 - 未注册版)

提示：对于有几个副线圈的理想变压器，公式$P=\sum_{i=1}^{n}P_i$总成立，但$S=\sum_{i=1}^{n}S_i$只有在负载都是电阻性负载时成立，否则不成立①。

7—49. 在图7—46中，$V$的读数为220伏，$A$的读数为20安，负载$Z_l=2+j3$欧。试求负载消耗的功率（$A$的内阻和变压器损耗均可忽略不计）。

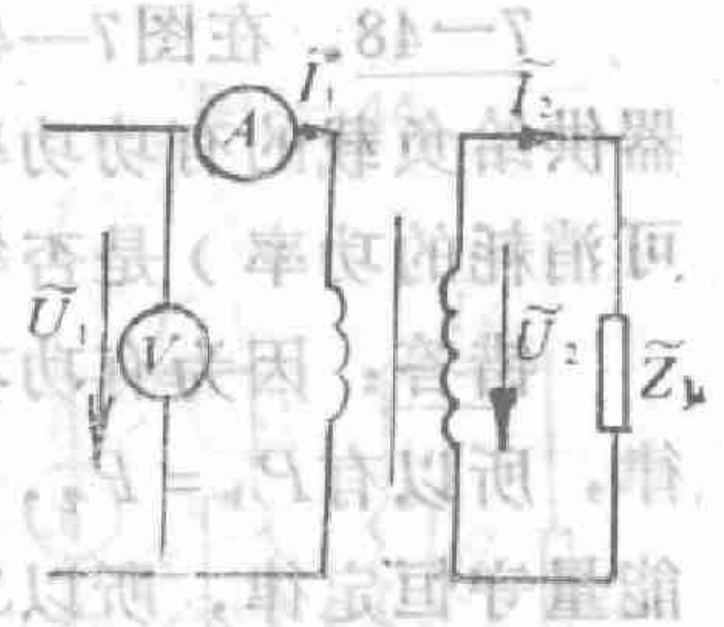


图7—46

错答：由$U_2I_2=U_1I_1$可得负载消耗的功率$P=220\times20=4400$（瓦）。

分析：$U_2I_2$是负载上的视在功率，并非实际消耗的功率。实际消耗的功率为

$$P=U_2I_2\cos\varphi_2=U_1I_1\cos\varphi_1=220\times20\times\frac{2}{\sqrt{2^2+3^2}}\doteq2441(\text{瓦}).$$

（其中应用了$\cos\varphi_2=\cos\varphi_1=\frac{r}{Z}$）。

练习题：

在图7—47所示的理想变压器线路中，当$Z_l=\hat{Z}_1$时，初级回路中电流表$A$的读数为$I_1$，当$Z_l=\tilde{Z}_2$时，$A$的读数为$I_2$。若$I_1>I_2$，能否肯定$Z_1$上消耗的功率大于$Z_2$上消耗的功率？

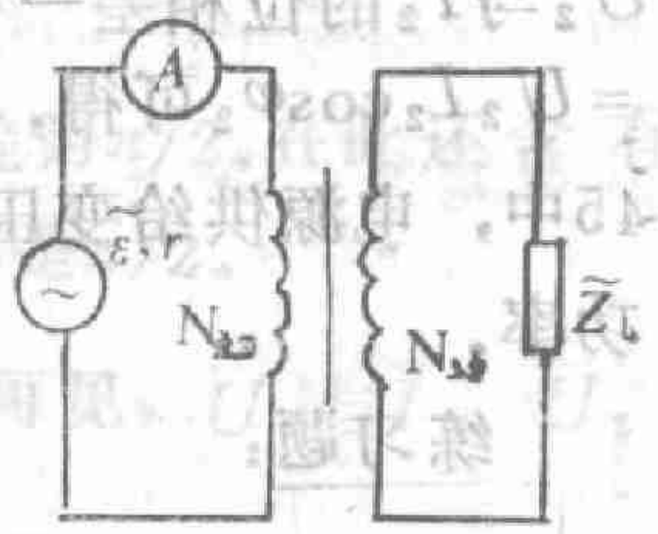


图7—47

提示：由$P=I^2r$和$(NI)_{初}=(NI)_{次}$得

$$P_1=\left(\frac{N_{初}}{N_{次}}\right)^2I_1{}^2r_1,\quad P_2=\left(\frac{N_{初}}{N_{次}}\right)^2I_2{}^2r_2.$$

①见7—9题后面的“注”。

(PDF压缩器 - 未注册版)

所以，$\frac{P_1}{P_2}=\left(\frac{I_1}{I_2}\right)^2\frac{r_1}{r_2}$。

因为不知$r_1$和$r_2$的大小，所以不能确定$P_1$与$P_2$的大小。

7—50。对图7—48所示的电路，当开关$K$合上时，左回路中的灯泡亮，还是$K$断开时亮？

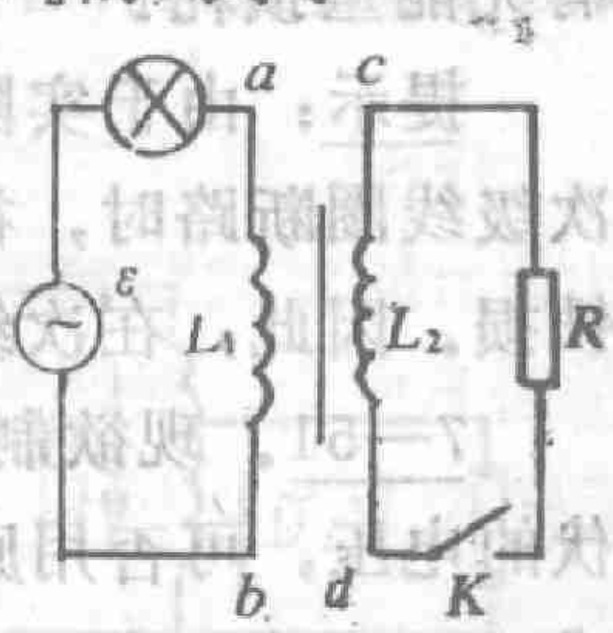



图7—48

错答一：因为$K$断开时，电源输出的电能全部消耗在灯泡上，而$K$合上后，电源输出的电能只有一部分消耗在灯泡上，另一部分消耗在负载上了，所以断开时灯泡亮。

分析：虽然$K$断开时，电源输出的电能全部消耗在灯泡上，$K$合上后只有一部分消耗在灯泡上。但是，$K$断开和合上时电源输出的电能不等，所以由此不能简单地肯定$K$断开时灯泡上获得的功率大、灯泡亮。

错答二：$K$断开时，左回路中$ab$之间的阻抗仅是$L_1$的阻抗，而$K$合上时，左回路中$ab$之间的阻抗是$L_1$的阻抗和负载$R$的反射阻抗之和。所以当$K$断开时，左回路中的总阻抗小，回路中电流大，当然灯泡亮。

分析：负载$R$在左回路中的反射阻抗与$L_1$是并联关系，不是串联关系，所以$K$合上后，左回路中$ab$两点之间的阻抗为$L_1$与负载$R$的反射阻抗$R'$的并联阻抗，当然它要小于$L_1$的阻抗，即小于$K$断开时的阻抗。因此$K$合上时通过灯泡的电流大于$K$断开时的电流，则$K$合上时灯泡比$K$断开时亮。①

---

①注意，在此的负载是电阻性的，若是非电阻性的，则它的反射阻抗$\hat{Z}_i'$也是非电阻性的，$L_1$与$\hat{Z}_i'$的并联阻抗不一定小于$L_1$的阻抗（如$\hat{Z}_i$是电容性的，见7—20题）此时左回路中的电流在$K$合上时的不一定大于$K$断开时的，灯泡的亮度也不一定在$K$合上时亮。

(PDF压缩器 - 未注册版)

练习题：

对于实际变压器，在负载不工作时（即次级回路断开时），有无能量损耗？

提示：由于实际变压器初级线圈的自感不可能为无穷大，在次级线圈断路时，初级回路中也有电流，这个电流要产生铜损或铁损。因此，在次级回路断开时也有能量损耗。

7—51．现欲制作一个变压器，可以使220伏的电压变为110伏的电压，可否用原线圈匝数$N_1=2$，副线圈匝数$N_2=1$绕制而成？

错答：由变压器的变比公式$\frac{\tilde{U}_1}{\tilde{U}_2}=-\frac{N_1}{N_2}$可知，$N_1=2$，$N_2=1$时，可以使220伏的电压变成110伏的电压。当然可以这样绕制。

分析：不可。因为这样绕制，原副线圈匝数太少，电感量太小，在$U_1=220$伏，$U_2=110$伏的情况下，原副线圈中电流很大，将把线圈烧毁，所以不可这样绕制。而且匝数太少时，不符合理想变压器的条件，电压变比公式不再成立。

练习题：

在制作变压器时，原副线圈的匝数之比只要满足等式$\frac{U_1}{U_2}=\frac{N_1}{N_2}$，具体匝数是否可以任意选取？

提示：不可任意选取。可以证明①，当变压器中铁芯的横截面为$S$，最大工作磁感应强度为$B_m$，线圈两端电压为$U$，频率为$f$时，线圈的匝数为$N=\frac{U}{4.44fB_mS}$。例如输入电压为$U_1$时，

①见何汝鑫等编《中学物理解疑》$P_{222}$(1982).

(PDF压缩器 - 未注册版)

初级线圈的匝数为$N_1=\dfrac{U_1}{4.44fB_mS}$，输出电压为$U_2$时，次级线圈的匝数为$N_2=\dfrac{U_2}{4.44fB_mS}$，若考虑到各种损耗，次级线圈的匝数一般多绕5—10%。

7—52. 有一人在使用调压变压器时，按图7—49所示的方式接线的。这种接法是否正确？

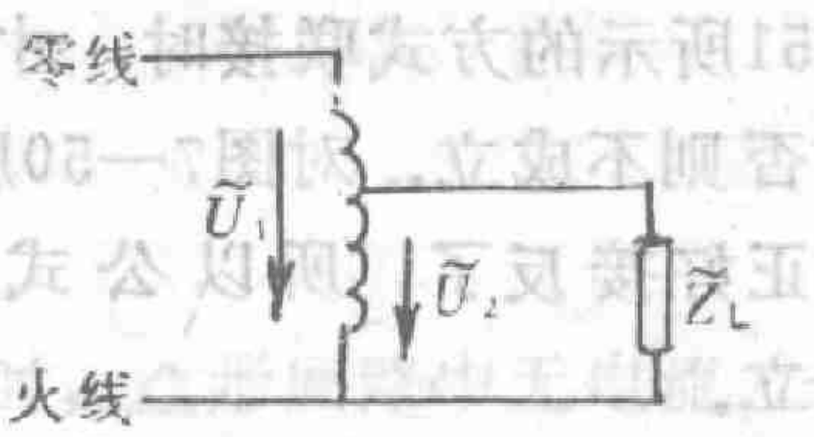


图7—49

错答：这样接线后，调压变压器可以起到调压作用，负载可以正常工作，当然接法是正确的。

分析：这样接线后调压变压器可以起到调压作用，负载也可以正常工作，但从安全用电角度来讲，是不允许的。因为这样接线后，在调压变压器的输出电压$\tilde{U}_2$调到0时，负载仍处于高电势，工作人员容易发生触电事故，所以是不允许的。正确的接法是，输出和输入的公共端接零线，另一端接火线。

练习题：

在交流电路中，保险丝和开关可否接在零线上？

提示：不可。因这样容易出现触电事故（但用电器可以正常工作）。

7—53. 有一三相发电机各相产生的电动势为$e_{Ax}=\varepsilon_0\cos\omega t$，

$e_{By}=\varepsilon_0\cos\left(\omega t-\dfrac{2}{3}\pi\right)$，

$e_{Cz}=\varepsilon_0\left(\cos\omega t+\dfrac{2}{3}\pi\right)$。

现按图7—50所示的联接方式将各相联接成三相四线制，各线电压为多少？（发电机各绕组的电阻可略不计）。

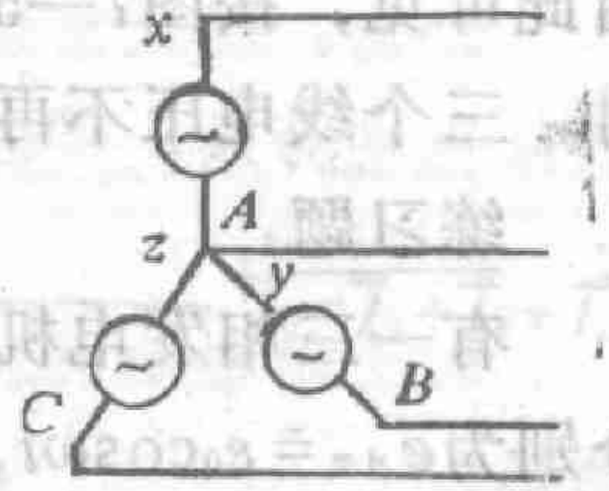


图7—50

(PDF压缩器 - 未注册版)

错答：因为图7—50所示的联接方式为$Y$联接，所以有$U_l = \sqrt{3}U_\varphi$。又因发电机三相绕组的电阻可略不计，$U_\varphi = \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}$。所以各线电压均为$U_l = \sqrt{\frac{3}{2}}\varepsilon_0$。

分析：只有三相发电机的各相按图7—51所示的方式联接时，才有$U_l = \sqrt{3}U_\varphi$，否则不成立。对图7—50所示的联接，$Ax$相正好接反了，所以公式$U_l = \sqrt{3}U_\varphi$不成立。

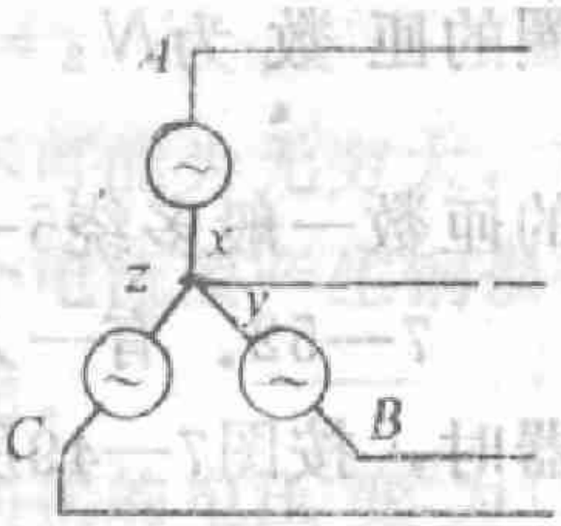


图7—51

由图7—50可知，$u_{xB} = u_{xA} + u_{yB} = u_{xA} - u_{By}$，

$$u_{xC} = u_{xA} + u_{zC} = u_{xA} - u_{Cz},$$

$$u_{BC} = u_{By} + u_{zC} = u_{By} - u_{Cz}.$$

其中，$u_{xA} = -e_{Ax} = -\varepsilon_0\cos\omega t$，

$$u_{By} = e_{By} = \varepsilon_0\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) = -\varepsilon_0\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$u_{Cz} = e_{Cz} = \varepsilon_0\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) = -\varepsilon_0\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right).$$

利用矢量图解法可得（参考电压矢量图7—52），

$$U_{xB} = U_{xC} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}, \quad U_{BC} = \sqrt{\frac{3}{2}}\varepsilon_0$$

由此可见，按图7—50所示的方式联接时，三个线电压不再相等。

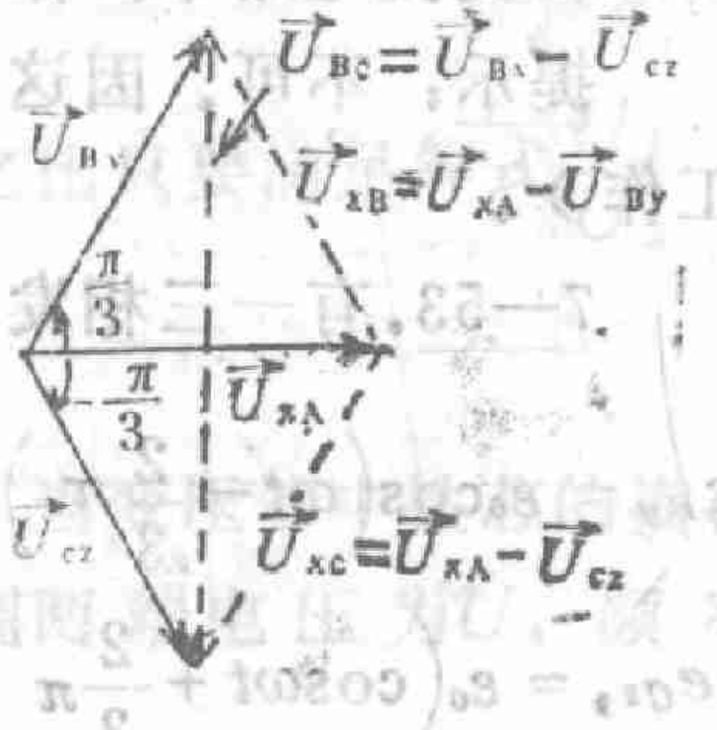


图7—52

练习题：

有一三相发电机各相产生的电动势分别为$e_{Ax} = \varepsilon_0\cos\omega t$，$e_{By} = \varepsilon_0\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$，$e_{Cz} = \varepsilon_0\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$。如果将三相绕组按图7—

(PDF压缩器 - 未注册版)

53(*a*)和(*b*)的方式联接起来，在未接负载时（即负载开路时），△回路中会否产生电流？

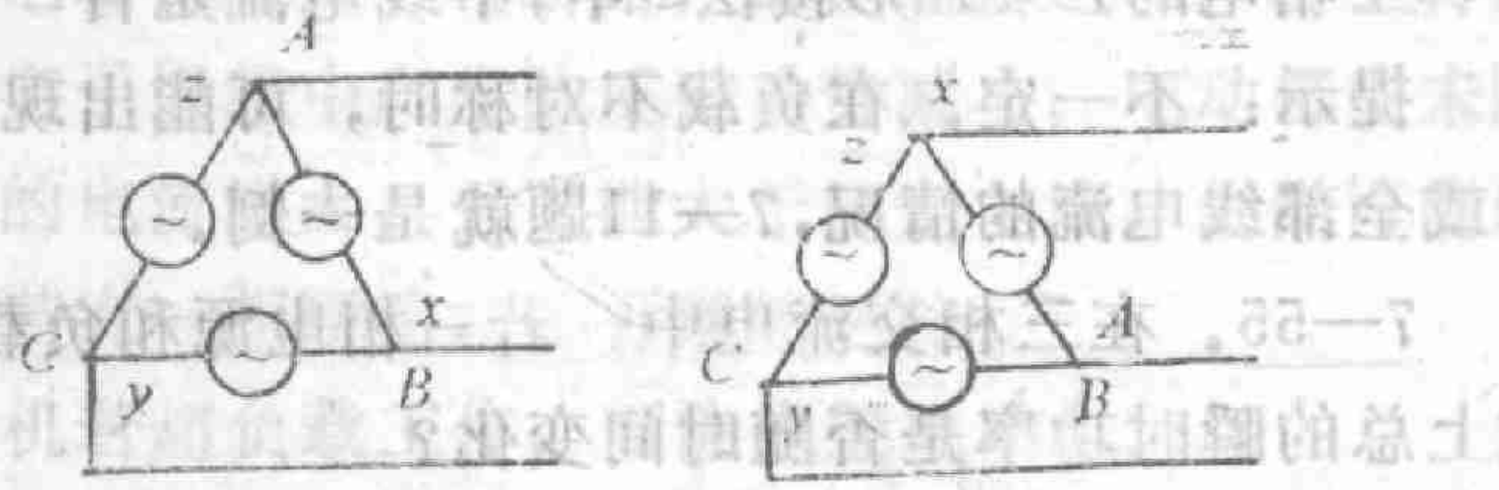



图7—53

提示：按图(*a*)联接时，在未接负载时，△形回路中无电流。按图(*b*)联接时，有电流，且电流很大（因绕组电 阻很小），会使发电机烧毁。所以在联接时，要特别注意，防止出 现图(*b*)所示的联接。

7—54。给图7—50所示的发电机，按*Y*形接连 接上三个对称负载，如图7—54所示，这时中线电流为多少？

错答：因为三个对称负载接成*Y*形接法，所以中线电流为0。

分析：只有三相对称发电机按三相四线制与三个对称负 载 相 接时，中线电流为0。对图7—50所示的发电机，三相绕组所联结构成不对称发电机，所以中线电流不为0。

由矢量图解法（参见图7—54的电流矢量图7—55）可得中 线电流为$I_0 = 2I_a = 2\frac{U_{xA}}{Z} = \sqrt{2}\frac{\varepsilon_0}{Z}$。可见它要比任一线 电 流 都大，是它们的二倍。

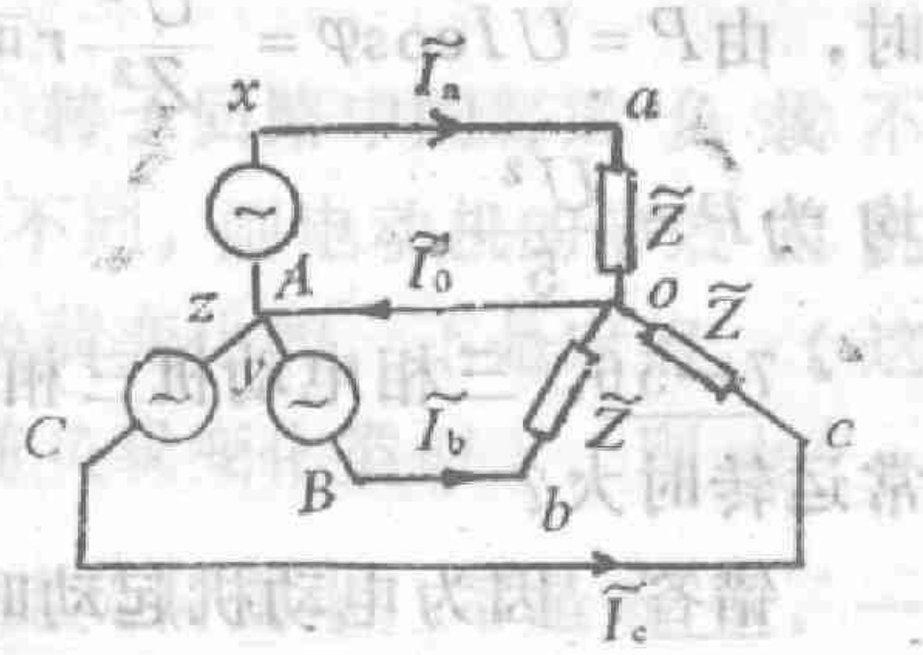



图7—54

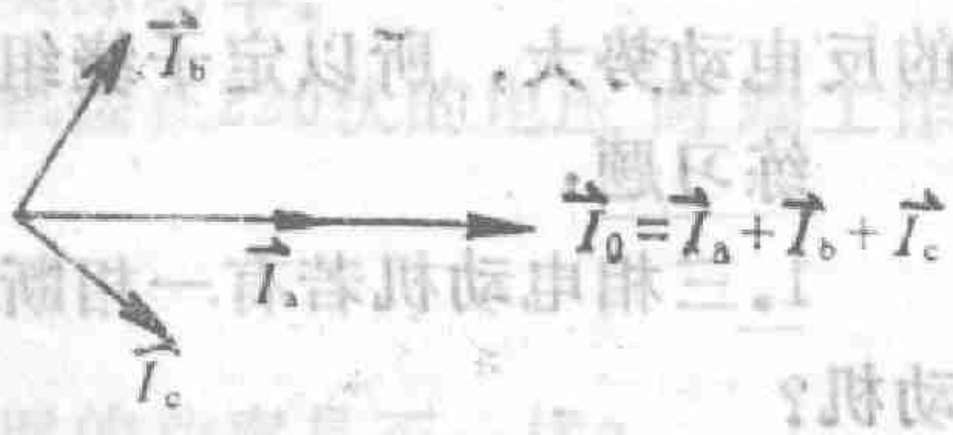



图7—55

练习题：

(PDF压缩器 - 未注册版)

三相电的$Y$—$Y$形接法①中，中线电流是否一定小于线电流？

提示：不一定。在负载不对称时，可能出现中线电流大于某一或全部线电流的情况，7—11题就是一例。

7—55。在三相交流电中，若三相电源和负载均对称，问负载上总的瞬时功率是否随时间变化？

错答：由$p=p_1+p_2+p_3=3p_1=3u_1i_1$可知，总瞬时功率随时间变化。

分析：①$\overline{P}=\overline{P_1}+\overline{P_2}+\overline{P_3}=3\overline{P_1}=3U_1I_1\cos\varphi_1$，但$p=p_1+p_2+p_3\neq 3p_1=3u_1i_1$。②虽然$p=p_1+p_2+p_3$中各项都随时间变化，但三相之和不随时间变化，等于一个常数，且$p=\overline{P}$。

练习题：

在三相交流电路中，三相发电机对称而三相负载不对称，这时三个负载上的有功功率是否可能相等？

提示：可能。例如，当$\tilde{Z}_a=\tilde{Z}_b=1+2j$欧，$\tilde{Z}_c=1-2j$欧时，由$P=UI\cos\varphi=\dfrac{U^2}{Z^2}r$可知，三相负载上的有功功率相等，且均为$P=\dfrac{U^2}{5}$。

7—56。三相电动机三相绕组中的电流在起动时大，还是正常运转时大？

错答：因为电动机起动时和正常运转时，三相绕组上所加电压一样，所以电流一样大。

分析：在正常运转时，转子转速大，转子在定子绕组中产生的反电动势大，所以定子绕组中的电流小。

练习题：

1.三相电动机若有一相断路，如让继续运转是否可能烧毁电动机？

---

①以后除特别说明外，三相发电机均指对称型的。

(PDF压缩器 - 未注册版)

提示：三相电动机若有一相断路，如让继续运转，转子转速将减慢，转子在定子绕组中产生的反电动势减小，电动机中未断路的两相绕组上的电流增大，且可能大于额定电流，当然可能烧毁电动机。所以若有一相断路，不可继续运转。

同理，电动机若超负载工作，可能烧毁电动机。

2.三相电动机接在三相电源中，可产生旋转磁场。问Y联接产生的旋转磁场大还是△联接产生的旋转磁场大？

提示：在三相电源线电压一定时，由$U_\varphi = \frac{U_l}{\sqrt{3}}$（Y联接）和$U_\varphi = U_l$（△联接）可知，△联接时，电动机各绕组上电压大。再由$I = \frac{U}{Z}$可知，△联接时各绕组电流大，则这种联接产生的旋转磁场大。

7—57。有一电动机上面标有220伏200瓦，将此电动机接在220伏的电压两端工作时，其功率是否等于200瓦？

错答：当然等于200瓦。

分析：电动机工作时负荷不同，转子回路中的等效负载不同，它在定子回路中的反射阻抗$Z_{反}$不同，则电动机的等效阻抗不同。可见电动机的等效阻抗是随负荷变化的，不是定值，（这与变压器的初级回路中的等效阻抗随负载变化类似）。则由$P = UI\cos\varphi = \frac{U^2}{Z^2}r$可知，电动机的功率随负荷变化，不是定值，一般不等于电动机上标定的值。电动机上标定的值，表示最大负荷功率，而并不表示电动机工作时的实际功率。

因此，标有220伏200瓦的电动机接在220伏的电压两端工作时，其功率不一定等于200瓦。

练习题：

电动机在空转时和有负荷运转时的功率是否一样？

提示：不一样，有负荷运转时的大。

(PDF压缩器 - 未注册版)

## 三　错误的推论

7—58。我们知道，并联电路接在某电压两端时，$P_{总} \geqslant P_{分}$，再利用$P=\frac{U^2}{r}$可得，$\frac{U^2}{r_{总}} \geqslant \frac{U^2}{r_{分}}$，所以$r_{总} \leqslant r_{分}$。可见，并联电路的有功电阻不会大于任一分电路的有功电阻。

分析：并联电路的有功电阻可能大于、等于或小于任一分电路的有功电阻。出现上面错误结论的原因是，应用了$P=\frac{U^2}{r}$。

在交流电路中，$P=I^2r=\frac{U^2}{Z^2}r \neq \frac{U^2}{r}$。

7—59。在图7—44所示的电路中，由$U_1I_1=U_2I_2$可得$U_2$大时，$I_2$小，而由$U_2=Z_fI_2$可得$U_2$大时，$I_2$大，二者结论矛盾。这说明$U_1I_1=U_2I_2$和$U_2=Z_fI_2$中有一式是不成立的。

分析：$U_1I_1=U_2I_2$和$U_2=Z_fI_2$都成立。问题出在，由$U_1I_1=U_2I_2$推不出$U_2$大时$I_2$小，因为$U_2I_2$和$U_1I_1$不是定值。

(PDF压缩器 - 未注册版)

# 第八章　电磁场和电磁波

## 一　错误的回答

8—1．在真空中和介质中可否存在位移电流？

错答：只有在导体中才可能存在位移电流，在真空中和介质中不可存在位移电流。

分析：位移电流的定义为 $\vec{J}_D = \dfrac{\mathrm{d}\vec{D}}{\mathrm{d}t}$．由此可见，哪里有变化的电场，那里就有相应的位移电流。我们知道，不论是导体中，还是真空中和介质中都可存在变化的电场，所以不论是导体中，还是真空中和介质中都可能存在位移电流。

练习题：

位移电流有无热效应？

提示：位移电流在导体中和真空中无热效应。但在有极分子介质中，由于介质损耗，要产生热效应（在低频时，介质损耗很小，热效应不明显；在高频时，介质损耗较大，热效应较明显）。但是位移电流在介质中的热效应不遵守焦耳——楞次定律。

为了加深对位移电流的理解，我们对位移电流和传导电流作一比较：

| 传导电流 | 位移电流 |
| --- | --- |
| ①由电荷运动产生，与电荷宏观定向运动有关；<br>②存在于导体中，方向始终与电 | ①由变化电场产生，与电荷宏观运动无关；<br>②存在于真空、介质和导体中， |

(PDF压缩器 - 未注册版)

场方向一致，$\vec{J}_C = \gamma\vec{E}$①；

③有热效应，遵守焦耳—楞次定律；

④激发磁场，可由公式

$\vec{B}_C = \int_V \frac{\vec{J}_C \times \vec{r}}{r^3} dV$ 计算；

⑤磁场的通量 $\oint_S \vec{B}_C \cdot d\vec{S} = 0$，

但环量 $\oint_L \vec{H}_C \cdot d\vec{l} \neq I_C$③。

方向与电场方向可能相同，也可能相反，$\vec{J}_D = \frac{d\vec{D}}{dt}$；

③在导体和真空中无热效应，在介质中有热效应，但不遵守焦耳—楞次定律；

④激发磁场，可由公式

$\vec{B}_D = \int_V \frac{\vec{J}_D \times \vec{r}}{r^3} dV$② 计算；

⑤磁场的通量 $\oint_S \vec{B}_D \cdot d\vec{S} = 0$。

但环量 $\oint_L \vec{H}_D \cdot d\vec{l} \neq I_D$④。

8—2．有一真空电容器，两端电压为$U$，通过的位移电流为$I_D$，那么$UI_D$代表什么？

错答：代表位移电流在电容器内部产生的热功率。

分析：在真空中位移电流无热效应，所以$UI_D$不代表位移电流在电容器内部的热功率。

因为 $UI_D = \int E \cdot dl \cdot \int J_D \cdot dS = \int E J_D dS dl$

$$= \int E \frac{dD}{dt} dV = \int \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right) dV = \frac{d}{dt}\int w_e dV = \frac{dW_e}{dt}。$$

①为了区分传导电流，运流电流，磁化电流，极化电流、位移电流和全电流，分别用$I_C$、$I_V$、$I_M$、$I_P$、$I_D$、$I$表示它们；分别用$\vec{J}_C$、$\vec{J}_V$、$\vec{J}_M$、$\vec{J}_P$、$\vec{J}_D$、$\vec{J}$表示它们的体密度。另外用$I_0$表示传导电流与运流电流之和，称自由电流；用$I'$表示磁化电流与极化电流之和，称束缚电流。类似地，$\vec{B}_C$、$\vec{B}_V$、$\vec{B}_M$、$\vec{B}_P$、$\vec{B}_D$分别表示它们各自产生的磁感应强度，但$\vec{B}$表示总磁感应强度。

②、③、④见8—5题的练习题。

(PDF压缩器 - 未注册版)

所以，$UI_D$代表电容器内部电场能量的变化率。

练习题：

有一电容器，中间是不良导体，若在其两端加电压$U$时通过的全电流为$I$，那么$UI$代表什么？

提示：$UI_C$代表电容器内部不良介质消耗的焦耳热功率，$UI_D$代表电容器内部电场能量的变化率，所以$UI=U(I_C+I_D)$代表单位时间内电容器内部消耗的焦耳热与增加的电场能量之和。

8—3。什么是全电流？

错答：传导电流、运流电流、磁化电流、极化电流与位移电流的总和是全电流。

分析：全电流是传导电流、运流电流与位移电流之和，即自由电流与位移电流之和。全电流中不包括磁化电流，但包括极化电流，不过极化电流已包含在位移电流之内了。所以上面回答中，多了磁化电流，重复了极化电流。

注：①传导电流$I_C$：在导体中，自由电荷在电场力作用下作定向移动而形成的电流。传导电流密度$\vec{J}_C=\rho_0\vec{v}=\gamma\vec{E}$。有热效应，且遵守焦耳——楞次定律。

②运流电流$I_V$：在真空中，自由电荷在电场力作用下，作定向移动形成的电流。运流电流密度$\vec{J}_V=\rho_0\vec{v}\neq\gamma\vec{E}$。

传导电流$I_C$与运流电流$I_V$之和称为自由电流$I$。（因为它是自由电荷定向移动形成的）。

③磁化电流$I_M$：在磁介质中，由于被磁化产生的束缚电流称为磁化电流。磁化电流密度$\vec{J}_M=\nabla\times\vec{M}$。

④极化电流$I_P$：在电介质中，电场变化时，介质中极化强度变化，这种变化产生的“等效电流”称为极化电流。极化电流密度$\vec{J}_P=\frac{d\vec{P}}{dt}$，在有极分子介质中有热效应，但不遵守焦耳——楞次定律。

(PDF压缩器 - 未注册版)

磁化电流$I_M$与极化电流$I_P$之和称为束缚电流$I'$（因为它与自由电荷运动无关），又称为诱导电流（因为它是在外场作用下产生的）。

⑤位移电流$I_D$：在空间中(不论是真空中、还是导体中和介质中)，由于电场变化产生的“等效电流”叫做位移电流。位移电流密度为$\vec{J}_D=\frac{\mathrm{d}\vec{D}}{\mathrm{d}t}$

$=\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$，可见位移电流中包含极化电流，但不包含磁化电流．由于极化电流在有极分子介质中有热效应，所以位移电流在有极分子介质中也有热效应.

上面每一种电流均产生磁场，并且产生磁场的规律一样.①。

练习题：

如图8—1所示，一平行板电容器的二极板面积均为$S$，间距为$l$（$S\gg l^2$），其内部充满一种不良导电介质，介电常数为$\varepsilon$，电导率为$\gamma$，现将它接在交流电源$u=U_m\sin\omega t$两端，问通过电容器内部的全电流为多少？（忽略边缘效应）。

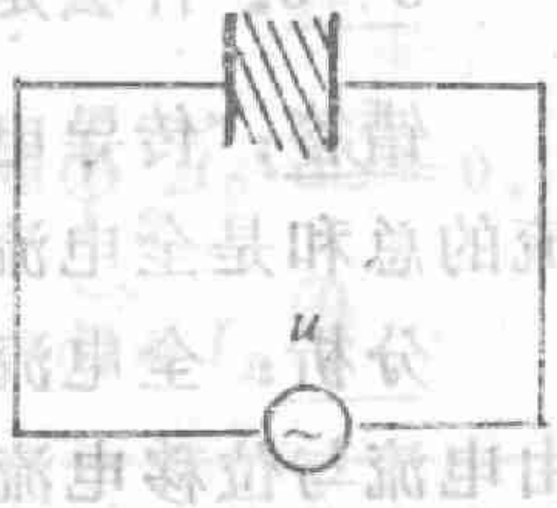


图8—1

提示：当电容器两端加电压$u=U_m\sin\omega t$时，通过电容器的传导电流和位移电流各为

$$I_C=J_CS=\gamma ES=\gamma S\frac{u}{l}=\frac{u}{R}=\frac{U_m}{R}\sin\omega t,$$

$$I_D=J_DS=\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}\cdot S=\varepsilon S\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\varepsilon\frac{S}{l}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\text{②}=C\omega U_m\cos\omega t.$$

所以通过电容器内部的全电流为(在此无运流电流)

---

①见8—5题的练习题。

②对于任意电容器，内部的位移电流$I_D=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$〔见李椿等编《普通物理学讲义》第二册$P_{381}$（1984）〕

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$I = I_C + I_D = \frac{U_m}{R}\sin\omega t + C\omega U_m \cos\omega t .$$

由此可知，电容器两极板之间导电介质中通过的传导电流与位移电流的幅值之比为

$$\frac{I_{Cm}}{I_{Dm}} = \frac{J_{Cm}}{J_{Dm}} = \frac{\gamma}{\varepsilon\omega} \doteq \frac{\gamma}{\varepsilon_0\omega} \text{①} .$$

由此得，在$\gamma/\varepsilon_0\omega \ll 1$时，介质中传导电流相对于位移电流很小，可忽略不计。例如，若介质是石蜡时，$\gamma \sim 10^{-27}(\Omega^{-1}\cdot m^{-1})$，$\varepsilon_0 \sim 10^{-12}(C^2\cdot N^{-1}\cdot m^{-2})$，$\gamma/\varepsilon_0\omega \sim 10^{-15}/\omega$、只要$\omega \gg 10^{-15}$Hz，$\gamma/\varepsilon_0\omega$就远小于1，通过石蜡的传导电流就远小于位移电流。此时，$I = I_C + I_D \doteq I_D$。

在$\gamma/\varepsilon_0\omega \gg 1$时，介质中传导电流远大于位移电流，位移电流可忽略不计。例如，若介质是碳时，$\gamma \sim 10^{-4}(\Omega^{-1}\cdot m^{-1})$，$\varepsilon_0 \sim 10^{-12}(C^2\cdot N^{-1}\cdot m^{-2})$，$\gamma/\varepsilon_0\omega \sim 10^{8}/\omega$，可见只要$\omega \ll 10^{8}$Hz，$\gamma/\varepsilon_0\omega$就远大于1，通过碳的传导电流就远大于位移电流，此时$I = I_C + I_D \doteq I_C$。

注：①在欧姆定律的微分形式$\vec{J}_C = \gamma\vec{E}$ ② 中，$\vec{J}_C$是传导电流，而不是全电流，也不是位移电流，$\vec{E}$是总电场，即它是一切源（电荷和变化磁场）产生的总电场。

②在电荷守恒定律$\int_s \vec{J}\cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt}\int_V \rho dV = 0$中，$\vec{J}$、$\rho$可以是总电流（自由电流＋束缚电流）和总电荷（自由电荷＋束缚电荷）的体密度，也可以是自由电流和自由电荷的体密度。

---

①对于一般电介质，$\varepsilon$与$\varepsilon_0$是同一数量级，所以在估算数量级时，可用$\varepsilon_0$代替$\varepsilon$.

②如果有其它非静电力$\vec{K}$时，欧姆定律的微分形式为$\vec{J}_C = \gamma(\vec{E}+\vec{K})$. 如，当介质以$\vec{v}$运动时，有非静电力——洛仑兹力，则$\vec{J}_C = \gamma(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$.

(PDF压缩器 - 未注册版)

③在洛仑兹力公式$\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}$中，$q$可以是总电荷（自由电荷+束缚电荷），这时$\vec{F}$表示总电荷$q$受到的电磁力；$q$也可以是自由电荷，则$\vec{F}$表示自由电荷受到的电磁力。但是不论$q$是总电荷，还是自由电荷，$\vec{E}$、$\vec{B}$是除$q$外其它电荷在它所在处产生的电场和磁场。

④在$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_0$中，$\rho_0$一定是自由电荷，在$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_0+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$中，$\vec{J}_0$一定是自由电流（传导电流+运流电流），$\vec{D}$、$\vec{H}$一定是总电位移矢量和总磁场强度。

⑤在麦克斯韦方程，边界条件以及电磁性质方程中的$\vec{E}$、$\vec{D}$、$\vec{H}$、$\vec{B}$均为总场，且为总场的瞬时值（而不是峰值和有效值）。

8—4。在图3—15所示的导体，若通过的是变化电流，这时各段导体中通过的传导电流是否相等？

错答：由基尔霍夫第一定理可知，通过每一段导体中的传导电流相等。

分析：由$\nabla\cdot\vec{J}_0+\frac{\partial\rho_0}{\partial t}=0$，$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_0$得

$$\nabla\cdot\vec{J}_0=-\nabla\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\text{。即}\oint_s\vec{J}_0\cdot d\vec{S}=-\oint_s\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\text{。}$$

当电流是稳恒的或似稳恒的时，$\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$等于零或近似等于零，这时，$\oint_s J_0\cdot d\vec{S}=0$，否则$\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\neq 0$，$\oint_s\vec{J}_0\cdot d\vec{S}\neq 0$。由此可知，当导体中所通过的电流是稳恒的或似稳恒的时候，传导电流连续，否则不连

(PDF压缩器 - 未注册版)

续①。因此对于图3—15所示的导体，当通过的变化电流是似稳恒电流时，各段的传导电流相等，否则不等。

另外，因为基尔霍夫定律是在$\oint_S \vec{J}_c \cdot d\vec{S} = 0$的基础上建立起来的，所以只有当导体中通过的电流是稳恒的或似稳恒的电流时，它才成立，否则不成立。

练习题：

运动电荷所在空间的全电流是否连续？

提示：连续。

8—5。在真空中有一导体，上面通过非稳恒电流$I_c$。问能否用公式$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}_c \times \vec{r}}{r^3} dV$求空间磁场分布？

错答：能。

分析：不能。要用公式$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{(\vec{J}_c + \vec{J}_D) \times \vec{r}}{r^3} dV$ ②③ 来求空间磁场分布。

练习题：

---

①对全电流在一切情况下均是连续的，证明如下：

因为 $\nabla \cdot \vec{J}_0 + \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$，$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$，$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$，

所以 $\nabla \cdot \left(\vec{J}_0 + \vec{J}_D\right) = \nabla \cdot \vec{J}_0 + \nabla \cdot \vec{J}_D = -\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{D} = 0.$

即 $\oint_S \left(\vec{J}_0 + \vec{J}_D\right) \cdot d\vec{S} = 0.$

可见全电流是连续的。

②见蔡圣善等编《经典电动力学》$P_{593}$（1985）。

③此式的形式与毕奥—萨伐尔定律的形式完全一样，但严格地讲不叫毕奥—萨伐尔定律（因毕奥—萨伐尔定律给出的是稳恒电流产生电场的计算公式）。不过为了叙述方便，许多书上仍称之为毕奥—萨伐尔定律。

(PDF压缩器 - 未注册版)

写出计算空间磁场的一般表达式。

提示：计算空间磁场的一般表达式为

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{(\vec{J}_C+\vec{J}_V+\vec{J}_M+\vec{J}_D)\times\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}V$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}_C\times\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}V+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}_V\times\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}V+$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}_M\times\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}V+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}_D\times\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}V$$

$$=\vec{B}_C+\vec{B}_V+\vec{B}_M+\vec{B}_D。$$

由此可知：①空间磁场（电磁场中磁场部分），是由传导电流、运流电流、磁化电流、位移电流（注意极化电流也产生磁场，不过它已包含在位移电流中了）共同产生的，而且各自产生磁场的规律一样，即可由相同形式的公式计算。

②由$\vec{B}_C$、$\vec{B}_V$、$\vec{B}_M$、$\vec{B}_D$的计算公式出发，再利用矢量知识可以得到①$\oint_S\vec{B}_C\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$，$\oint_S\vec{B}_V\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$，$\oint_S\vec{B}_M\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$，$\oint_S\vec{B}_D\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$（当然，$\oint_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$）。由此可知，传导电流，运流电流、磁化电流、位移电流各自产生磁场的磁力线均是闭合曲线。

③由$\vec{B}_C$、$\vec{B}_V$、$\vec{B}_D$的计算公式和矢量知识、得不到下面等式②

$$\oint_L\vec{B}_C\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I_C,\quad\oint_L\vec{B}_V\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I_V,\oint_L\vec{B}_D\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I_D。$$

但是

---

①见郭硕鸿编《电动力学》$P_{16}$（1979）.

②见《大学物理》电磁学专辑$P_{265}$（1988）.

(PDF压缩器 - 未注册版)

在$I_C$、$I_V$、$I_D$连续时，上面公式成立①。由于$I_C+I_V+I_M+I_D$总是连续的，所以有等式$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0(I_C+I_V+I_M+I_D)$，即$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=(I_0+I_D)$。

④在似稳条件下，全空间各点的位移电流对磁场的总贡献为零，即$\vec{B}_D=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}_D\times\vec{r}}{r^3}dV=0$②。但要注意，这并不是说，在似稳条件下，全空间无位移电流或全空间各点的位移电流产生的磁场均为零。

8—6。有一无限长圆柱形导体，半径为$R$，在其中均匀地通过传导电流$i_C=I_{Cm}\cos\omega t$，导体的电导率为$\gamma$，介电常数为$\varepsilon$。试求圆柱形导体内部的磁场强度。

错答：由第五章可知，圆柱体上通过稳恒传导电流$I_C$时，柱体内的磁场为$H=\frac{I_C r}{2\pi R^2}$。则当通过变化的传导电流$i_C=I_{Cm}\cos\omega t$时，柱体内的磁场强度为$H=\frac{I_{Cm}r}{2\pi R^2}\cos\omega t$。

分析：当柱体中通过变化的传导电流时，柱体内存在变化电场，即存在位移电流，位移电流也要产生磁场，所以总磁场不再是上面的结果。下面看正确的回答：

柱体内传导电流和位移电流密度各为

$$J_C=\frac{i_C}{\pi R^2}=\frac{I_{Cm}}{\pi R^2}\cos\omega t,$$

$$J_D=\frac{dD}{dt}=\varepsilon\frac{dE}{dt}=\frac{\varepsilon}{\gamma}\frac{dJ_C}{dt}=-\frac{\varepsilon\omega I_{Cm}}{\pi R^2\gamma}\sin\omega t。$$

所以柱体内的全电流密度为

---

①由于磁化电流总是连续的，所以有$\oint_L \vec{B_M}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I_M$.

②见邓飞帆等编《普通物理疑难问答》$P_{197}$（1984）.

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$J = J_C + J_D = \frac{I_{cm}}{\pi R^2}\left(\cos\omega t - \frac{\varepsilon\omega}{\gamma}\sin\omega t\right).$$

由于全电流关于圆柱体的轴线对称分布，所以在以轴线上某点为圆心，$r$为半径的圆周上各点的磁场都相等，则由全电流定律$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I$可得

$$H\cdot 2\pi r = (J_C + J_D)\cdot \pi r^2,$$

所以，在圆柱体内部，距轴线为$r$的地方，磁场强度的大小为

$$H = \frac{I_{cm}r}{2\pi R^2}\left(\cos\omega t - \frac{\varepsilon\omega}{\gamma}\sin\omega t\right).$$

在$\varepsilon\omega/\gamma \ll 1$时，位移电流产生的磁场可忽略不计，这时，可直接由传导电流来计算磁场分布。

练习题：

1．一圆形极板的平行板真空电容器，接在交流电源两端，极板上的电量为$q = q_m\sin\omega t$，极板面积为$S$。试求两极板间距两极板轴线为$r$的$A$点的磁感应强度（忽略边缘效应①）。

提示：由全电流定律可得，两极板间距圆形极板轴线为$r$的$A$点的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 q_m \omega r}{2S}\cos\omega t.$$

2．在长直螺线管中，通过变化的电流时，在管内外产生感生电场，若此感生电场变化时，是否产生感生磁场？

提示：只要有变化的电场，就有位移电流，位移电流在空间就要产生感生磁场。因此当本题中螺线管内外的感生电场是变化的时，要产生感生磁场。不过，通过的电流是似稳电流时，或者说通过的电流是低频电流时，感生电场及其变化率（即位移电

①若不忽略边缘效应，无法求出位移电流，当然无法由全电流定律求电容器内部的电场。

(PDF压缩器 - 未注册版)

流）很小，它产生的感生磁场就很小。在这种情况下，我们求空间电磁场分布时，只考虑一次效应就可以了，也就是认为螺线管内的磁场与直流磁场一样，只不过这里的电流是变化的。然后在此基础上，由法拉第定律$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$来求变化磁场产生的感生电场，此电场也就是空间的电场。例如在6—3题的练习题中就是按这样的方法求空间感生电场的。

同理，在电容器两端加变化电压时，在极板内外存在感生磁场。当此感生磁场变化时，它要产生感生电场。不过，电压是似稳电压时，极板内外的感生磁场及其变化率很小，它产生的感生电场很小。在这种情况下，也只考虑一次效应就可以了，也就是认为电容器极板内外的电场与静电荷的电场一样，然后在此基础上使电场随电荷变化，再由全电流定律来求变化电场产生的感生磁场，此磁场也就是空间的磁场。在本题的练习题1中就是按这种方法求极板间的感生磁场的。

3．以速度$\vec{v}$作匀速运动的电荷，在空间产生哪些场？

提示：以速度$\vec{v}$作匀速运动的电荷在空间产生电场（包括电荷直接产生的库仑电场和变化磁场产生的感生电场），和磁场（包括运流电流$q\vec{v}$直接产生的磁场和变化电场即位移电流产生的感生磁场）。空间一点的电场和磁场都是变化的。

8—7．真空中有一电荷$q$以速度$\vec{v}$作匀速运动时，它在空间产生的电场和磁场可否由公式$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q\vec{r}}{r^3}$和$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$来求？

错答：当然可以。

分析：真空中有一电荷$q$以速度$\vec{v}$作匀速运动时，它在空间产

(PDF压缩器 - 未注册版)

生的电场和磁场各为①

$$\vec{E}=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0[(1-v^2/c^2)r^2+(\vec{v}\cdot\vec{r}/c)^2]^{3/2}},$$

$$\vec{B}=\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}.$$

在$v\ll c$时，上二式可变为

$$\vec{E}\doteq\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{r}}{r^3},\quad \vec{B}\doteq\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}.$$

可见，在一般情况下，运动电荷产生的电场和磁场不可由$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{r}}{r^3}$和$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$来求，但在低速运动的情况下，可由这两式来近似计算。

问题的实质在于：公式$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{r}}{r^3}$是由库仑定律推出的，所以它只适用于电场具有球对称性分布的库仑电场。公式$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$是由毕奥——萨伐尔定律推出的，所以它只适用于稳恒磁场，可是运动电荷产生的电场不具有球对称性，磁场不是稳恒场，所以运动电荷产生的电场和磁场不适用于上二式。但是在$v\ll c$时，感生电场和感应磁场可以忽略不计。这时，运动电荷产生的电场近似具有球对称性，磁场近似为稳恒磁场。上二式近似成立，当然可由它们来求电场和磁场。

顺便说明：对于任意带电体，当其中产生电场的电荷运动速

①见郭硕鸿编《电动力学》$P_{251}$（1978）.

(PDF压缩器 - 未注册版)

度远小于光速时，在空间的电场可由公式$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho}{r^2}\mathrm{d}V\vec{r}_0$来求。

练习题：

是否可由全电流定律来求匀速运动电荷在空间产生的磁场？

提示：如果能证明在某环路$L$上$H$相等（即$H$可以从积分$\oint_L\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$中提出），且能求出以环路$L$为边界的某一曲面$S$上通过的全电流$I_0+I_D$，则可由全电流定律$\oint_L\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=I_0+I_D$来求该环路上的磁场，否则不可。对于匀速运动的电荷，由于全电流分布具有轴对称性（对称轴是电荷运动轨迹线），所以在以轴线上某点为圆心的圆周$L$上各点的磁场都相等（注意，不同圆周$L$上的磁场不等），这样对于任一圆周$L$的磁场$H$都可以积分$\oint_L\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$中提出。另外，根据运动电荷在空间产生的电场可以求出全电流，所以可由全电流定律来求匀速运动电荷在空间产生的磁场①。

8—8. 在麦克斯韦方程组中，方程$\oint_L\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=I_0+I_D$若用$\vec{B}$的环量来表示，表达式为何？

错答：因$\vec{B}=\mu\vec{H}$，所以$\oint_L\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu(I_0+I_D)$。

分析：只有在均匀介质中，才为上式。一般情况下的表达式为

$$\oint_L\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0(I_0+I_M+I_D),$$

或
$$\oint_L\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0\left(I_C+I_V+I_M+I_P+\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}t}\right).$$

① 见贾起民等编《电磁学》下册$P_{307}$（1987）.

(PDF压缩器 - 未注册版)

同理，在麦克斯韦方程组中，方程$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=q_0$，若用$\vec{E}$的通量来表示时，表达式为

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}(q_0+q')。$$

练习题：

在电磁场中，$\oint_L \vec{D}\cdot d\vec{l}=-\varepsilon\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$，$\oint_S \vec{H}\cdot d\vec{S}=0$

是否一定成立？

提示：只有在均匀介质中成立，否则不成立。

8—9. 麦克斯韦方程组中四个方程是否彼此独立？

错答：当然是彼此独立的。

分析：麦克斯韦方程组四个方程中只有两个是独立的。方程$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=q_0$，$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$可由另两个方程来推出①，这两个方程在数学上只起某种补充条件的作用。但要注意在静电、静磁中的四个方程

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=q_0,\qquad \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0,$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0,\qquad \oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=I_0,$$

是彼此独立的（这是因为变化的电场与磁场之间存在相互激发的关系，而在静电、静磁之间不存在这种关系）。

同理，由麦克斯韦方程组得到的四个边界条件也只有两个是独立的。但是在静电、静磁中的四个边界条件是彼此独立的。

顺便还要说明：麦克斯韦方程组的微分形式与积分形式并非完全等价，微分形式一般只适用于介质内部，不适用于介质的边

---

①见王发伯等编《普通物理典型题解》$P_{385}$（1981）。

(PDF压缩器 - 未注册版)

界面，而积分形式适用于一切情况，即不论在介质内部还是在介质的边界面都适用（边界条件就是积分形式应用到介质的边界面上得到的结果）。

练习题：

麦克斯韦方程组中是否隐含电荷守恒定律？

提示：由麦克斯韦方程组可以得出电荷守恒定律①。可见麦克斯韦方程组中隐含电荷守恒定律，但不隐含洛仑兹力公式。

8—10．如果存在磁单极子，麦克斯韦方程组的数学表达式为何？

错答：如果存在磁单极子，麦克斯韦方程组的数学表达式为

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_e,$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_m + \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S},$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_m,$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_e + \int_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

其中$q_e$、$I_e$为自由电荷和自由电流，$q_m$、$I_m$为自由磁荷和自由磁流。

分析：如果存在磁单极子、麦克斯韦方程组的数学表达式为②

$$\oint_L \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_e,$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\left(\mu_0 I_m + \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}\right),$$

---

①见王发伯等编《普通物理典型题解》$P_{384}$（1981）.

②见蔡圣善等编《经典电动力学》$P_{41}$（1985）.

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \mu_0 q_m,$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_e + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}.$$

此方程组中隐含电荷守恒定律和磁荷守恒定律①。

$$\oint_S \vec{J}_e\cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt}\int_V \rho_e dV = 0,$$

$$\oint_S \vec{J}_m\cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt}\int_V \rho_m dV = 0。$$

练习题：

麦克斯韦方程组

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_0, \qquad \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S},$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0, \qquad \oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_0 + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}.$$

对电场和磁场在形式上具有不对称性。这种不对称性说明了什么物理内容？

提示：这种不对称性说明没有与自由电荷和自由电流相当的自由磁荷和自由磁流。

8—11。麦克斯韦方程组对各向异性的介质是否成立？

错答：麦克斯韦方程组只适用于各向同性的线性介质，对各向异性的介质和非线性介质均不成立。

分析：麦克斯韦方程对一切介质均成立，不论它是均匀介质，还是非均匀介质；不论它是线性的还是非线性的；不论它是

---

①见297页注②。

(PDF压缩器 - 未注册版)

各向同性的还是各向异性的均成立①。

顺便指出：洛仑兹力公式$F=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}$，电磁能量守恒定律$\int_V\frac{\partial w}{\partial t}dV=-\int_A\vec{S}\cdot d\vec{A}$②$-\int_V\vec{J}_o\cdot\vec{E}dV$，坡印亭矢量$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$对一切介质均成立。但是介质的电磁性质方程$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$，$\vec{B}=\mu\vec{H}$，$\vec{J}_0=\gamma\vec{E}$只对各向同性的线性介质成立，对各向异性介质和非线性介质不成立。

练习题：

电磁场能量密度公式$w=\frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B}\right)$是否对一切介质均成立？

提示：它只对各向同性的线性介质成立，对各向异性介质、非线性介质均不成立。但$\frac{\partial w}{\partial t}=\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$对一切介质均成立③。

8—12。静电、静磁中的四个边界条件与电磁场中的四个边界条件形式一样吗？

错答：静电、静磁中的边界条件与电磁场中的边界条件都是由它们的积分方程应用到边界面上得到的。由于静电、静磁中的四个积分方程与电磁场的四个积分方程(麦克斯韦方程组)不同，所以静电、静磁中的四个边界条件与电磁场中的四个边界条件的形式不同。

分析：虽然静电、静磁中的四个方程与电磁场中的四个方程

---

①见赵凯华等编《光学》下册$P_{176}$(1984)。

②为了避免用$S$表示面积时与坡印亭矢量$\vec{S}$混淆，在此用$A$表示面积。

③见郭硕鸿编《电动力学》$P_{41}$(1979)

(PDF压缩器 - 未注册版)

的形式不同，但是由于$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$、$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$是有限量，对两介质交界面上 所取的无限小回路来说，积分面积趋近于零，所以$\int_{s\partial t} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$，$\int_s \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$，这样，静电、静磁中的四个方程与电磁场中 的 四个方程的形式完全一样。均为

$$\oint_s \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_0, \qquad \oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0,$$

$$\oint_s \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0, \qquad \oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_0.$$

所以由它们得到的边界条件形式相同，均为

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_0, \qquad E_{2t} - E_{1t} = 0,$$

$$B_{2n} - B_{1n} = 0, \qquad H_{2t} - H_{1t} = i_0.$$

练习题：

推导电磁场的边界条件时未考虑电磁波的反射问题，那么在二介质交界面上存在反射波时，边界条件是否仍成立？

提示：成立。只要把入射介质中的$\vec{D}$、$\vec{E}$、$\vec{B}$、$\vec{H}$均看成入射波与反射波的矢量和，在折射介质中，$\vec{D}$、$\vec{E}$、$\vec{B}$、$\vec{H}$仅是折射波。

8—13。平行板电容器产生的电场是否一定存在边缘 效 应？

错答：不一定。例如：平行板电容器两极板面积$S$远大于 间距的平方时，即$S \gg l^2$时，平行板电容器产生的电场就无边缘 效应。

分析：由电场的边界条件$E_{2t} = E_{1t}$可知，电场的切向 分 量是连续的，不可能突变，将此式应用到平行板电容器的 极 板边缘处，可得，平行板电容器产生的电场一定存在边缘效应，即 不可能出现在两极板间的电场是均匀的，而到二极板边缘处突然变

(PDF压缩器 - 未注册版)

为零（见图8—2所示的情况）。在$S \gg l^2$时不考虑平行板电容器的边缘效应，是我们忽略了，并不是不存在边缘效应。

顺便说明：由磁场的边界条件$H_{2t}-H_{1t}=i_0$和磁铁所在空间$i_0=0$可知，二磁极间的磁场必有边缘效应，即两磁极产生的磁场不可能在两磁极间是均匀的，而在外面突然变为零（如图8—3所示的情况）。

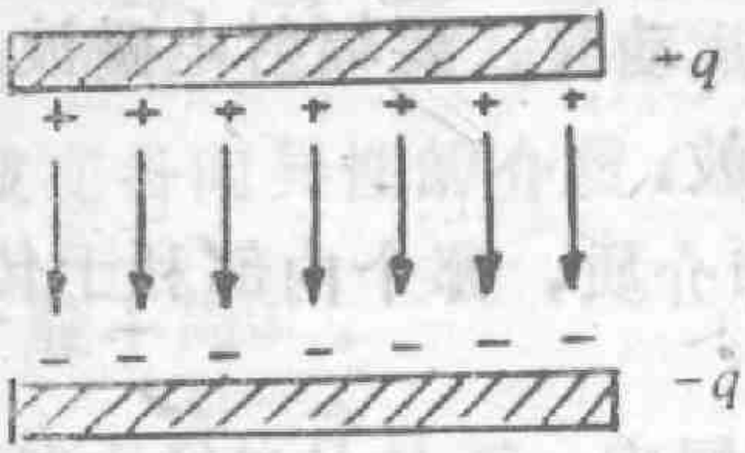



图8—2

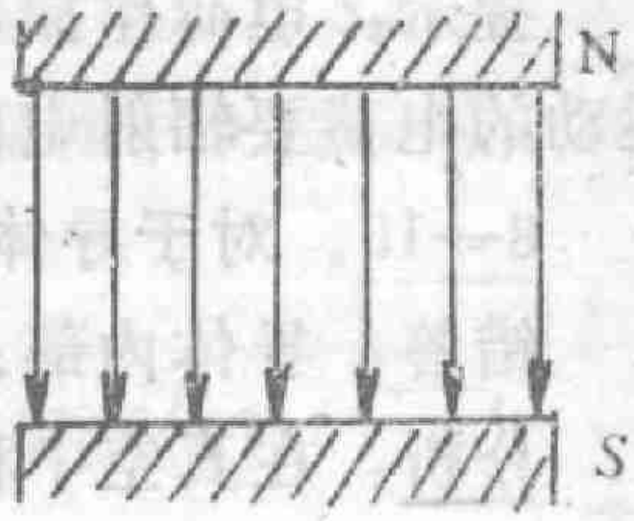



图8—3

练习题：

如图8—4所示，在二带电平行板之间有一金属板，上下两表面与二平行板垂直，问在金属板上下两面上是否会出现面电荷？

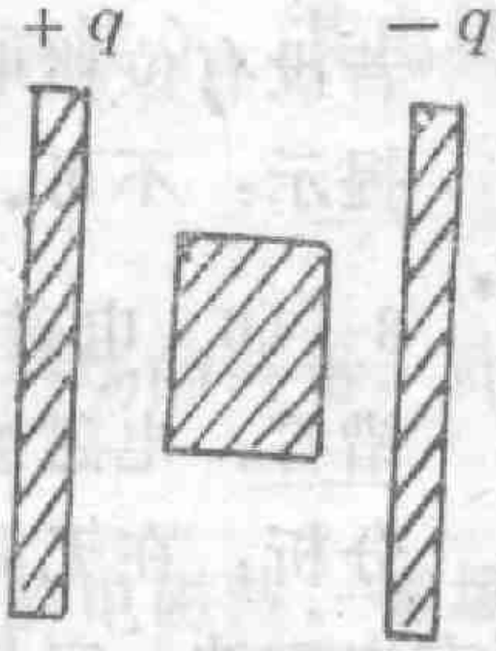



图8—4

提示：由$\vec{E}$的边界条件可知，在上下两面上一定要出现面自由电荷。

8—14．在真空中匀速运动的电荷是否产生电磁波？

错答：在真空中匀速运动的电荷产生的电场和磁场均是随时间变化的，它们之间互相激发，可以形成电磁波。

分析：在真空中作匀速运动的电荷产生的电场和磁场虽然随时间变化，但不能向外辐射能量，只能随电荷一起运动，所以它不产生电磁波①。

①注意，在介质中匀速运动的电荷，其运动速度大于介质中的光速时，要辐射电磁波，这种辐射称切仑科夫辐射。（见郭硕鸿编《电动力学》$P_{290}$（1979）·）.

(PDF压缩器 - 未注册版)

练习题：

作匀速圆周运动的电荷，能否产生电磁波？

提示：电荷作加速运动时，要辐射电磁波。可见作匀速圆周运动的电荷要辐射电磁波。

8—15．对于导体和介质，哪个内部利于传播电磁波？

错答：导体内部。

分析：在真空中和理想绝缘介质内部没有能量损耗，电磁波可以无衰减的传播，而在导体内部，由于存在自由电子，在电磁波中电场作用下形成传导电流，产生焦耳热，使电磁波能量不断损耗，因此在导体内部的电磁波是一种衰减波。可见本题的正确答案是：对于导体和介质，在介质中利于传播电磁波。

练习题：

若没有位移电流或没有感生电动势，可否形成电磁波？

提示：不可。

8—16．电磁波是否一定是横波？

错答：电磁波一定是横波。

分析：在无界空间中传播的平面电磁波一定是横波，但并非所有电磁波一定是横波。例如在矩形波导中，出现的$TM$波和$TE$波就不是横波①。

顺便说一句：在无界空间中传播的平面电磁波，$\vec{E}\perp\vec{B}$，但并不是所有电磁波一定有$\vec{E}\perp\vec{B}$。

练习题：

电磁波的传播方向（$\vec{k}$的方向）是否一定是能量传播的方向（$\vec{S}$的方向）？

---

①见郭硕鸿编《电动力学》$P_{150}$（1979）。

(PDF压缩器 - 未注册版)

提示：在无界空间中的平面电磁波传播方向是能量的传播方向，但对于其它电磁波就不一定了。例如在矩形波导中的$TM$波，$\vec{k}$与$\vec{E}$不垂直，而$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$与$\vec{E}$垂直，可见$\vec{k}$与$\vec{S}$不一定平行。再如，电磁波在各向异性的介质（如晶体中）传播时，$\vec{k}$的方向与$\vec{S}$的方向一般不同①。

8—17。电磁波中$\vec{E}$与$\vec{B}$是否一定同位相变化？

错答：由赵凯华等编《电磁学》下册$P311(1978)$可知，$\vec{E}$与$\vec{B}$一定同位相变化。

分析：赵凯华等编《电磁学》下册$P311(1978)$中所说的$\vec{E}$与$\vec{B}$同位相是指无界空间中传播的平面波的性质。对任意电磁波并无此性质。例如，在导体中的电磁波（衰减波），其电场与磁场就不是同位相②。

练习题：

自由空间传播的电磁波，电场的能量等于磁场的能量，此结论是否对一切电磁波均成立？

提示：不一定。例如，在金属导体中传播的电磁波，磁场能量就大于电场能量③。

8—18。电磁波是否一定以每秒30万公里的速度传播？

错答：光速$c$是一常数，等于30万公里/秒。所以，电磁波一定以每秒30万公里的速度传播。

分析：只有在真空中，光速才是30万公里/秒，即只有在真空中，电磁波才以每秒30万公里的速度传播，在导体和介质中要比此值小。

---

①见赵凯华等编《光学》下册$P_{176}$（1984）。

②见郭硕鸿编《电动力学》$P_{135}$（1979）。

③同②

(PDF压缩器 - 未注册版)

练习题：

电磁波传播的相速是否一定可由公式$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$来求？

提示：在无界均匀介质中传播的电磁波，其相速一定可由公式$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$来求，但对其它情况就不一定了。例如，电磁波在导体中传播时，其相速就不可由上公式来求①。

8—19. 将平行板真空电容器接在交流电源两端时，在二极板之间既有电场又有磁场。问二极板之间的磁场能量密度是否处处相等？（忽略边缘效应）。

错答：在二极板之间的电场处处相等，则由$w_e=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$

$=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$可知，二极板之间的电场能量密度处处相等。由于电磁场中磁场的能量密度等于电场的能量密度，所以二极板之间磁场的能量密度也处处相等。

分析：只有对自由空间的平面电磁波，电场能量密度等于磁场能量密度。对于非平面电磁波和任意电磁场，磁场能量密度一般不等于电场能量密度。所以上面的回答是错误的。

对本题所说的电容器，在只考虑一次效应时，离边缘越近，磁场越大，则由$w_m=\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}=\frac{1}{2}\mu_0 H^2$可知，二极板之间的磁场能量密度随距边缘靠近而增大。但由于两极板间的电场是均匀的，所以电场能量密度处处相等。

练习题：

长直螺线管上面通过变化电流时，螺线管内存在电场。问在轴线附近的电场能量密度大，还是管壁附近的电场能量密度大？

提示：在螺线管内部各点磁场相等，但各点的电场不等，且

---

①见郭硕鸿编《电动力学》$P_{137}$（1979）.

(PDF压缩器 - 未注册版)

随距轴线越远电场越大，则由$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$可知，距轴线越远电场能量密度越大，即管壁附近的电场能量密度大。

8—20. $\int_V \vec{J}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V$代表什么？

错答：代表在体积$V$内的热功率。

分析：$\int_V \vec{J}_o\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V=\int_V(\rho_o\cdot\vec{E}+\rho_o\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}V=\int_V \vec{f}_o\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}V$，

$$\int_V \vec{J}_D\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V=\int_V\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V=\int_V\frac{\partial w_e}{\partial t}\mathrm{d}V,$$

可见，$\int_V \vec{J}_o\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V$代表在体积$V$内电场对自由电荷作功的功率，$\int_V \vec{J}_D\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V$代表体积$V$内电场能量的增加率。

则 $\int_V \vec{J}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V=\int_V(\vec{J}_o+\vec{J}_D)\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V=\int_V \vec{J}_o\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V+\int_V\frac{\partial w_e}{\partial t}\mathrm{d}V$

代表在体积$V$内场对自由电荷作功的功率与电场能量的增加率之和。

练习题：

$\int_V \vec{f}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}V=\int_V(\rho\vec{E}+\rho\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}V$代表什么？

提示：$\int_V \vec{f}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}V$代表场对带电介质作功的功率，即代表场对介质中自由电荷和束缚电荷作功的功率。而$\int_V \vec{f}_o\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}V=\int_V(\rho_o\vec{E}+\rho_o\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}V$代表场对自由电荷作功的功率。

8—21. 在真空中，电磁能量守恒定律的数学表达式为$\int_V\frac{\partial w}{\partial t}\mathrm{d}V=-\int_A\vec{S}\cdot\mathrm{d}\vec{A}-\int_V\vec{J}_o\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V$，那么在介质中电磁能量守恒定律的数学表达式为何？

错答：在介质中，电磁能量守恒定律的数学表达式为

(PDF压缩器 - 未注册版)

$$\int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV = -\int_A \vec{S} \cdot d\vec{A} - \int_V (\vec{J}_o + \vec{J}') \cdot \vec{E} dV .$$

分析：在介质中电磁能量守恒定律的数学表达式仍为①

$$\int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV = -\int_A \vec{S} \cdot d\vec{A} - \int_V \vec{J}_o \cdot \vec{E} dV .$$

不过要注意，在介质中 $\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial D}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial B}{\partial t}$，$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$，而在真空中，$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_o E^2 + \frac{1}{\mu_o} B^2 \right)$，$\vec{S} = \frac{1}{\mu_o} \vec{E} \times \vec{B}$（后者是前者的特例）。

练习题：

在某区域中若存在电源时，电磁能量守恒定律的表达式为何？

提示：仍为 $\int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV = -\int_A \vec{S} \cdot d\vec{A} - \int_V \vec{J}_o \cdot \vec{E} dV$，不过在此 $\vec{J}_0 = \gamma(\vec{E} + \vec{K})$，即 $\vec{E} = \frac{\vec{J}_o}{\gamma} - \vec{K}$，$\int_V \vec{J}_o \cdot \vec{E} dV = Q - P$（在此$Q$表示焦耳热功率，$P$表示电源输出的功率）②。

8—22．有一半径为$a$的圆柱体，介电常数为$\varepsilon$，电导率为$\gamma$，当柱体内通过稳恒电流$I_c$时，柱体内的能流密度为多少？

错答：由于电流是稳恒的，空间产生的电场和磁场都是恒定不变的，空间能量不变，当然无能流，即 $\vec{S} = 0$。

分析：由电磁能量守恒定律 $\int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV = -\int_A \vec{S} \cdot d\vec{A}$

---

①见蔡圣善等编《经典电动力学》$P_{62}$（1985）.

②见赵凯华等编《电磁学》下册$P_{365}$（1978）.

(PDF压缩器 - 未注册版)

$-\int_v \vec{J}_0 \cdot \vec{E}\,dV$可知，当$\int_v \frac{\partial w}{\partial t}dV = 0$时，$\vec{S}$并不一定等于零，所以上面的回答是错误的。

另外，由能流密度$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$可知，只要$\vec{E} \times \vec{H} \neq 0$，就存在能流。对于通过稳恒电流的圆柱体，内部电场和磁场各为

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}_c}{\gamma} = \frac{I_c}{\gamma S}\vec{k} = \frac{I_c}{\pi\gamma a^2}\vec{k}, \quad \vec{H} = \frac{I_c}{2\pi a^2}\,r\vec{\theta}_0.$$

则
$$\vec{E} \times \vec{H} = \frac{I_c}{\pi\gamma a^2}\,\vec{k} \times \frac{I_c}{2\pi a^2} r\vec{\theta}_0 = -\frac{I_c^2 r}{2\pi^2\gamma a^4}\vec{r}_0 \neq 0.$$

所以柱体内的能流密度不为零，为$\vec{S} = -\frac{I_c^2 r}{2\pi^2\gamma a^4}\vec{r}_0$。

由此式可知，柱体内的能流方向是沿径向向里，即由外指向内部，可以证明① 流入的这部分能量正好等于柱体内部产生的热量。这说明柱体内部消耗的电能是由柱体外部靠电磁场传入的，而不是柱体内部靠电流提供的。同样，负载内部消耗的电能是由负载外部靠电磁场传入负载的，而不是在导体内部靠电流传给的，导体在一个线路中只起引导能量定向传播的作用。

练习题：

1．在同一空间中存在静止电荷的电场和磁铁的磁场，问在此空间中是否存在能流？

提示：由于$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \neq 0$，所以在此空间中存在能流。但穿过任一闭合曲面的能流为零，即空间的能量分布并不发生变化。

---

①取长为$L$的一段柱体，单位时间内进入柱体表面的能量为$P = \oint_A \vec{E} \times \vec{H} \cdot d\vec{A} = \frac{I_c^2}{2\gamma\pi^2 a^3} 2\pi a L = \frac{I_c^2 L}{\gamma\pi a^2} = I_c^2 R$．其中$R$表示长为$L$的柱体的电阻，则$I_c^2 R$等于柱体内消耗的热功率。

(PDF压缩器 - 未注册版)

2．一带电的平行板电容器，置于均匀磁场中，见图8—5所示。

试给出电容器所在空间的$\vec{S}$线分布。

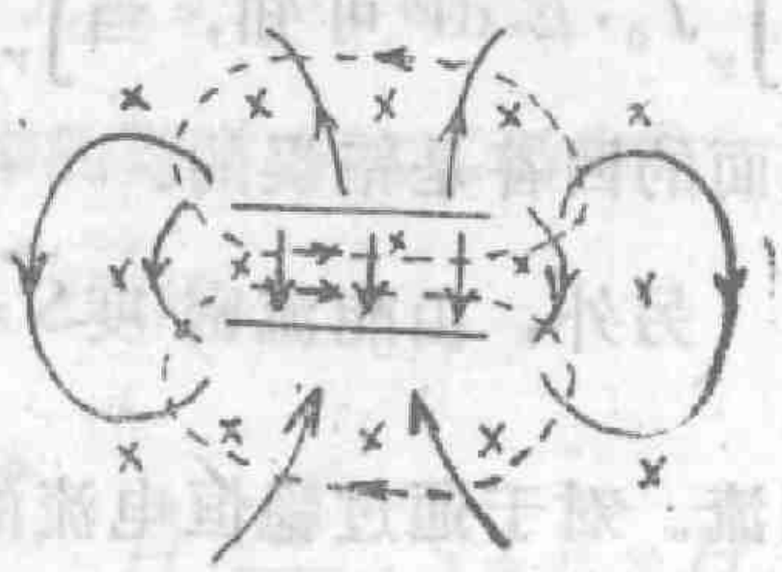


图8—5

提示：带电平行板电容器产生的电场主要集中在两极板间，但极板外电场并不等于零。因此在平行板电容器极板内外均有$\vec{S}$线。再由电磁能量守恒定律$\int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV = -\int_A \vec{S} \cdot d\vec{A} - \int_V \vec{J}_o \cdot \vec{E} dV$，可知，$\oint_A \vec{S} \cdot d\vec{A} = 0$，即$\vec{S}$线是闭合曲线，其分布图见图8—5所示。其中⊗表示$\vec{B}$线，实线表示$\vec{E}$线，虚线表示$\vec{S}$线。

## 二 错误的推论

8—23．在似稳条件下，位移电流产生的磁场为零①，所以在似稳条件下，全电流定律的表达式为$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_o$，它变成了安培环路定律。

分析：在似稳条件下，位移电流产生的磁场为零，但并不等于位移电流为零，所以$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_o + I_D \neq I_o$。例如在似稳交流电路中，有电容器时，位移电流产生的磁场为零②，但在电容器内部的位移电流不等于零，所以在此$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} \neq I_0$。

8—24．由全电流定律$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_0 + I_D$可知，空间的磁场是

---

①指全空间的位移电流在各点产生的总磁场为零.

①见邓凡帆等编《普通物理疑难问答》$P_{105}$(1984).

(PDF压缩器 - 未注册版)

由自由电流和位移电流产生的。

分析：由$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=I_0+I_D$只说明闭合环路$L$上$\vec{H}$的环量仅由$I_0$与$I_D$决定，但不能说明环路上各点的$\vec{H}$值仅由$I_0$与$I_D$决定。由8—5题的练习题可知，空间的磁场是由自由电流、磁化电流与位移电流共同产生。

8—25。假设自由电流$I_0$直接产生的磁场为$\vec{H}_0$，位移电流$I_D$直接产生的磁场为$\vec{H}_D$，

因为 $\oint_L \vec{H}_0\cdot d\vec{l}=I_0$，$\oint_L \vec{H}_D\cdot d\vec{l}=I_D$，

所以 $\oint_L (\vec{H}_0+\vec{H}_D)\cdot d\vec{l}=I_0+I_D$。

即 $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=I_0+I_D$。

分析：这是有些教科书上证明全电流定律的方法。注意，这种证明是不妥的，因为前两式一般是不成立的①。另外，全电流定律是由麦克斯韦分析稳恒电流中磁场的安培环路定律后，直接假设的，它是不能由数学方法证明的②。其正确性是靠由麦克斯韦方程组所得到的一切结论与事实相符来验证的。

8—26。变化的电场产生变化的磁场，变化的磁场可产生变化的电场。由此可知，只要有变化的电场和磁场就一定有电磁波。

分析：不一定。例如，作匀速运动的电荷产生的电场和磁场都是随时间变化的，但它不产生电磁波。

---

①、②见《大学物理》电磁学专辑$P_{265}$(1988)。