第一章　　静电场

§1.1　静电的基本现象和基本规律

思考题：

1、 给你两个金属球，装在可以搬动的绝缘支架上，试指出使这两个球带等量异号电荷的方向。你可以用丝绸摩擦过的玻璃棒，但不使它和两球接触。你所用的方法是否要求两球大小相等？

答：先使两球接地使它们不带电，再绝缘后让两球接触，将用丝绸摩擦后带正电的玻璃棒靠近金属球一侧时，由于静电感应，靠近玻璃棒的球感应负电荷，较远的球感应等量的正电荷。然后两球分开，再移去玻璃棒，两金属球分别带等量异号电荷。本方法不要求两球大小相等。因为它们本来不带电，根据电荷守恒定律，由于静电感应而带电时，无论两球大小是否相等，其总电荷仍应为零，故所带电量必定等量异号。

2、 带电棒吸引干燥软木屑，木屑接触到棒以后，往往又剧烈地跳离此棒。试解释之。

答：在带电棒的非均匀电场中，木屑中的电偶极子极化出现束缚电荷，故受带电棒吸引。但接触棒后往往带上同种电荷而相互排斥。

3、 用手握铜棒与丝绸摩擦，铜棒不能带电。戴上橡皮手套，握着铜棒和丝绸摩擦，铜棒就会带电。为什么两种情况有不同结果？

答：人体是导体。当手直接握铜棒时，摩擦过程中产生的电荷通过人体流入大地，不能保持电荷。戴上橡皮手套，铜棒与人手绝缘，电荷不会流走，所以铜棒带电。

计算题：

1、 真空中两个点电荷 q1=1.0×10-10C，q2=1.0×10-11C，相距 100mm，求 q1 受的力。

解：

2、 真空中两个点电荷 q 与 Q，相距 5.0mm,吸引力为 40 达因。已知 q=1.2×10-6C,求 Q。

解：1 达因=克·厘米/秒=10-5 牛顿

3、 为了得到一库仑电量大小的概念，试计算两个都是一库仑的点电荷在真空中相距一米时的相互作用力和相距一千米时的相互作用力。

解：

4、 氢原子由一个质子（即氢原子核）和一个电子组成。根据经典模型，在正常状态下，电子绕核作圆周运动，轨道半径是 r=5.29×10-11m。已知质子质量 M=1.67×10-27kg，电子质量 m=9.11×10-31kg。电荷分别为 e=±1.6×10-19 C,万有引力常数 G=6.67×10-11N ·m2/kg2。（1）求电子所受的库仑力；（2）库仑力是万有引力的多少倍？（3）求电子的速度。

解：

5、 卢瑟福实验证明：当两个原子核之间的距离小到 10-15 米时，它们之间的排斥力仍遵守库仑定律。金的原子核中有 79 个质子，氦的原子核（即 α 粒子）中有 2 个质子。已知每个质子带电 e=1.6×10-19 C，α 粒子的质量为 6.68×10-27 kg.。当 α 粒子与金核相距为 6.9×10-15m 时（设这时它们仍都可当作点电荷）。求（1）α 粒子所受的力；（2）α 粒子的加速度。

解：

6、 铁原子核里两质子间相距 4.0×10-15m,每个质子带电 e=1.6×10-19 C。（1）求它们之间的库仑力；（2）比较这力与所受重力的大小。

解：

7、 两个点电荷带电 2q 和 q，相距 l，第三个点电荷放在何处所受的合力为零？

解：设所放的点电荷电量为 Q。若 Q 与 q 同号，则三者互相排斥，不可能达到平衡；故 Q

只能与 q 异号。当 Q 在 2q 和 q 联线之外的任何地方，也不可能达到平衡。由此可知，只有 Q 与 q 异号，且处于两点荷之间的联线上，才有可能达到平衡。设 Q 到 q 的距离为 x.

8、 三个相同的点电荷放置在等边三角形的各顶点上。在此三角形的中心应放置怎样的电荷，才能使作用在每一点电荷上的合力为零？
解：设所放电荷为 Q，Q 应与顶点上电荷 q 异号。中心 Q 所受合力总是为零，只需考虑 q 受力平衡。

平衡与三角形边长无关，是不稳定平衡。
9、 电量都是 Q 的两个点电荷相距为 l，联线中点为 O；有另一点电荷 q，在联线的中垂面上距 O 为 r 处。（1）求 q 所受的力；（2）若 q 开始时是静止的，然后让它自己运动，它将如何运动？分别就 q 与 Q 同号和异号两种情况加以讨论。
解：
(1)
(2)q 与 Q 同号时，F 背离 O 点，q 将沿两 Q 的中垂线加速地趋向无穷远处。
q 与 Q 异号时，F 指向 O 点，q 将以 O 为中心作周期性振动，振幅为 r .
<讨论>：设 q 是质量为 m 的粒子，粒子的加速度为

因此，在 r<<l 和 q 与 Q 异号的情况下， m 的运动近似于简谐振动。
10、 两小球质量都是 m，都用长为 l 的细线挂在同一点，若它们带上相同的电量，平衡时两线夹角为 2θ 。设小球的半径都可以略去不计，求每个小球上的电量。
解：小球静止时，作用其上的库仑力和重力在垂直于悬线方向上的分量必定相等。

---

§1.2 电场 电场强度
思考题：
1、 在地球表面上通常有一竖直方向的电场，电子在此电场中受到一个向上的力，电场强度的方向朝上还是朝下？
答：电子受力方向与电场强度方向相反，因此电场强度方向朝下。
2、 在一个带正电的大导体附近 P 点放置一个试探点电荷 q0(q0>0),实际测得它受力 F。若考虑到电荷量 q0 不是足够小的，则 F/ q0 比 P 点的场强 E 大还是小？若大导体带负电，情况如何？
答：q0 不是足够小时，会影响大导体球上电荷的分布。由于静电感应，大导体球上的正电荷受到排斥而远离 P 点，而 F/q0 是导体球上电荷重新分布后测得的 P 点场强，因此比 P 点原来的场强小。若大导体球带负电，情况相反，负电荷受吸引而靠近 P 点，P 点场强增大。
3、 两个点电荷相距一定距离，已知在这两点电荷连线中点处电场强度为零。你对这两个点电荷的电荷量和符号可作什么结论？
答：两电荷电量相等，符号相反。
4、 一半径为 R 的圆环，其上均匀带电，圆环中心的电场强度如何？其轴线上场强方向如何？
答：由对称性可知，圆环中心处电场强度为零。轴线上场强方向沿轴线。当带电为正时，沿轴线向外；当带电为负时，沿轴线向内，

计算题：

1、 在地球表面上某处电子受到的电场力与它本身的重量相等，求该处的电场强度（已知电子质量 m=9.1×10-31kg,电荷为-e=-1.610-19C）.

解：

2、 电子所带的电荷量（基本电荷-e）最先是由密立根通过油滴实验测出的。密立根设计的实验装置如图所示。一个很小的带电油滴在电场 E 内。调节 E，使作用在油滴上的电场力与油滴的重量平衡。如果油滴的半径为 1.64×10-4cm,在平衡时，E=1.92×105N/C。求油滴上的电荷（已知油的密度为 0.851g/cm3）

解：

3、 在早期（1911 年）的一连串实验中，密立根在不同时刻观察单个油滴上呈现的电荷，其测量结果（绝对值）如下：

6.568×10-19 库仑	13.13×10-19 库仑	19.71×10-19 库仑
8.204×10-19 库仑	16.48×10-19 库仑	22.89×10-19 库仑
11.50×10-19 库仑	18.08×10-19 库仑	26.13×10-19 库仑

根据这些数据，可以推得基本电荷 e 的数值为多少？

解：油滴所带电荷为基本电荷的整数倍。则各实验数据可表示为 kie。取各项之差点儿

4、 根据经典理论，在正常状态下，氢原子中电子绕核作圆周运动，其轨道半径为 5.29×10-11 米。已知质子电荷为 e=1.60×10-19 库,求电子所在处原子核（即质子）的电场强度。

解：

5、 两个点电荷，q1=+8 微库仑，q2=-16 微库仑（1 微库仑=10-6 库仑），相距 20 厘米。求离它们都是 20 厘米处的电场强度。

解：

与两电荷相距 20cm 的点在一个圆周上，各点 E 大小相等，方向在圆锥在上。

6、 如图所示,一电偶极子的电偶极矩 P=ql.P 点到偶极子中心 O 的距离为 r ,r 与 l 的夹角为。在 r>>l 时，求 P 点的电场强度 E 在 r=OP 方向的分量 Er 和垂直于 r 方向上的分量 Eθ 。

解：

其中--

7、 把电偶极矩 P= ql 的电偶极子放在点电荷 Q 的电场内,P 的中心 O 到 Q 的距离为 r(r>>l), 分别求：（1）P//QO 和（2）P⊥QO 时偶极子所受的力 F 和力矩 L。

解：（1）

F 的作用线过轴心 O，力矩为零

（2）

8、 附图中所示是一种电四极子，它由两个相同的电偶极子 P=ql 组成，这两偶极子在一直线上，但方向相反，它们的负电荷重合在一起。证明：在它们的延长线上离中心为 r 处，

解：

9、附图中所示为另一种电四极子，设 q 和 l 都已知，图中 P 点到电四极子中心 O 的距离为 x.PO 与正方形的一对边平行。求 P 点的电场强度 E。当 x>>l 时，E=？

解：

10、均匀带电细棒（1）在通过自身端点的垂直面上和（2）在自身的延长线上的场强分布，设棒长为 2l，带电总量为 q .

解：（1）一端的垂直面上任一点 A 处

（2）延长线上任一点 B 处

11、两条平行的无限长直均匀带电线，相距为 a ,电荷线密度分别为± η e,（1）求这两线构成的平面上任一点（设这点到其中一线的垂直距离为 x）的场强；（2）求两线单位长度间的相互吸引力。
解：（1）根据场强叠加原理，任一点场强为两无限长直带电线产生场强的矢量和

（2）
12、 如图所示，一半径为 R 的均匀带电圆环，电荷总量为 q。（1）求轴线上离环中心 O 为 x 处的场强 E；（2）画出 E-x 曲线；（3）轴线上什么地方场强最大？其值是多少？
解：（1）由对称性可知，所求场强 E 的方向平行于圆环的轴线

（2）由场强表达式得到 E-X 曲线如图所示
（3）求极大值：

13、 半径为 R 的圆面上均匀带电，电荷面密度为 σ e，（1）求轴线上离圆心的坐标为 x 处的场强；（2）在保持 σ e 不变的情况下，当 R→0 和 R→∞时结果各如何？（3）在保持总电荷 Q= π R2 σ e 不变的情况下，当 R→0 和 R→∞时结果各如何？
解：（1）由对称性可知，场强 E 沿轴线方向
利用上题结果

（2）保持 σ e 不变时，

（3）保持总电量不变时，

14、 一均匀带电的正方形细框，边长为 l，总电量为 q ,求这正方形轴线上离中心为 x 处的场强。
解：根据对称性，所求场强沿正方形的轴线方向
对于一段长为 l 的均匀带电直线，在中垂面上离中点为 a 处产生的电场强度为

正方形四边在考察点产生的场强为

15、 证明带电粒子在均匀外电场中运动时，它的轨迹一般是抛物线。这抛物线在什么情况下退化为直线？
解：（1）设带电粒子的初速度方向与电场方向夹角为 θ ，其运动方程为
（2）当 E 为均匀电场且粒子的初速度为零时，或初速度平行于电场方向时，初速度没有垂直于场强方向的分量，抛物线退化为直线。

16、 如图所示，示波管偏转电极的长度 l=1.5cm,两极间电场是均匀的，E=1.2×104V/m(E 方向垂直于管轴)，一个电子以初速度 v0=2.6×107m/s 沿管轴注入。已知电子质量 m=9.1×10-31kg, 电荷为 e=-1.6×10-19.C.
（1） 求电子经过电极后所发生的偏转；
（2） 若可以认为一出偏转电极的区域后，电场立即为零。设偏转电极的边缘到荧光屏的距离 D=10 厘米，求电子打在荧光屏上产生的光点偏离中心 O 的距离。

解：（1）电子的运动方程得

(2)

---

§1.3　高斯定理

思考题：

1、 一般地说，电力线代表点电荷在电场中运动的轨迹吗？为什么？

答：一般情况下，电力线不代表点电荷在电场中运动的轨迹。因为电力线一般是曲线，若电荷沿电力线作曲线运动，应有法向力存在；但电力线上各点场强只沿切线方向，运动电荷必定偏离弯曲的电力线。仅当电力线是直线，且不考虑重力影响时，初速度为零的点电荷才能沿着电力线运动。若考虑重力影响时，静止的点电荷只能沿竖直方向电力线运动。

2、 空间里的电力线为什么不相交？

答：电力线上任一点的切线方向即为该点场强方向。如果空间某点有几条电力线相交，过交点对每条电力线都可作一条切线，则交点处的场强方向不唯一，这与电场中任一点场强有确定方向相矛盾。

3、 一个点电荷 q 放在球形高斯面的中心处，试问在下列情况下，穿过这高斯面的电通量是否改变？

（1）　如果第二个点电荷放在高斯球面外附近；

（2）　如果第二个点电荷放在高斯球面内；

（3）　如果将原来的点电荷移离了高斯球面的球心，但仍在高斯球面内。

答：由于穿过高斯面的电通量仅与其内电量的代数和有关，与面内电荷的分布及面外电荷无关，所以

（1）；（2）；（3）

4、（1）如果上题中高斯球面被一个体积减小一半的立方体表面所代替，而点电荷在立方体的中心，则穿过该高斯面的电通量如何变化？（2）通过这立方体六个表面之一的电通量是多少？

答：（1）立方形高斯面内电荷不变，因此电通量不变；

（2）通过立方体六个表面之一的电通量为总通量的 1/6。即

5、 附图所示，在一个绝缘不带电的导体球的周围作一同心高斯面 S。试定性地回答，在将一正点荷 q 移至导体表面的过程中，

（1）　A 点的场强大小和方向怎样变化？

（2）　B 点的场强大小和方向怎样变化？

（3）　通过 S 面的电通量如何变化？

答：由于电荷 q 的作用，导体上靠近 A 点的球面感应电荷-q′，远离 A 点的球面感应等量的+q′,其分布与过电荷 q 所在点和球心 O 的联线成轴对称，故±q′在 A、B 两点的场强 E′沿 AOB 方向。

（1）　E=E0+E′，q 移到 A 点前，E0 和 E′同向，随着 q 的移近不断增大，总场强 EA 也不断增大。q 移过 A 点后，E0 反向，且 E0> E′，EA 方向与前相反。随着 q 的远离 A 点，E0 不断减小，±q′和 E′增大，但因 E′始终小于 E0，所以 EA 不断减小。

（2）　由于 q 及±q′在 B 点的场强始终同向，且随着 q 移近导体球，二者都增大，所以 EB 不断增大。

（3）　q 在 S 面外时，面内电荷代数和为零，故Φ=0；q 在 S 面内时，Φ=q/ε0；当 q 在 S 面上时，它已不能视为点电荷，因高斯面是无厚度的几何面，而实际电荷总有一定大小，

此时Φ=△q/ε0，△q为带电体处于S面内的那部分电量。

6、 有一个球形的橡皮气球，电荷均匀分布在表面上，在此气球被吹大的过程中，下列各处的场强怎样变化？

（1） 始终在气球内部的点；（2）始终在气球外部的点；（3）被气球表面掠过的点。

答：气球在膨胀过程中，电荷始终均匀分布在球面上，即电荷成球对称分布，故场强分布也呈球对称。由高斯定理可知：

始终在气球内部的点，E=0，且不发生变化；

始终在气球外的点，场强相当于点电荷的场强，也不发生变化；

被气球表面掠过的点，当它们位于面外时，相当于点电荷的场强；当位于面内时，E=0，所以场强发生跃变。

7、 求均匀带正电的无限大平面薄板的场强时，高斯面为什么取成两底面与带电面平行且对称的柱体的形状？具体地说，

（1） 为什么柱体的两底面要对于带电面对称？不对称行不行？

（2） 柱体底面是否需要是圆的？面积取多大合适？

（3） 为了求距带电平面为x处的场强，柱面应取多长？

答：（1）对称性分析可知，两侧距带电面等远的点，场强大小相等，方向与带电面垂直。只有当高斯面的两底面对带电面对称时，才有 E1=E2=E，从而求得 E。如果两底在不对称，由于不知E1和E2的关系，不能求出场强。若已先证明场强处处相等，就不必要求两底面对称。

（2） 底面积在运算中被消去，所以不一定要求柱体底面是圆，面积大小也任意。

（3） 求距带电面x处的场强时，柱面的每一底应距带电面为x，柱体长为2x。同样，若已先证明场强处处相等，则柱面的长度可任取。

17、 求一对带等量异号或等量同号电荷的无限大平行平面板之间的场强时，能否只取一个高斯面？

答：如果先用高斯定理求出单个无限大均匀带电平面的场强，再利用叠加原理，可以得到两个无限大均匀带电平面间的场强。在这样的计算过程中，只取了一个高斯面。

18、 已知一高斯面上场强处处为零，在它所包围的空间内任一点都没有电荷吗？

答：不一定。高斯面上E=0，S内电荷的代数和为零，有两种可能：一是面内无电荷，如高斯面取在带电导体内部；二是面内有电荷，只是正负电荷的电量相等，如导体空腔内有电荷q时，将高斯面取在导体中，S包围导体内表面的情况。

19、 要是库仑定律中的指数不恰好是2（譬如为3），高斯定理是否还成立？

答：不成立。设库仑定律中指数为2+δ，

穿过以q为中心的球面上的电通量为 ，此时通量不仅与面内电荷有关，还与球面半径有关，高斯定理不再成立。

－－

习题：

1、 设一半径为5厘米的圆形平面，放在场强为３００Ｎ／Ｃ的匀强电场中，试计算平面法线与场强的夹角θ取下列数值时通过此平面的电通量。（１）θ＝００；（２）θ＝３００；（３）θ＝９００；（４）θ＝１２００；（５）θ＝１８００。

解：

2、 均匀电场与半径为 a 的半球面的轴线平行，试用面积分计算通过此半球面的电通量。

解：通过半球面的电通量与通过半球面在

垂直于场强方向上的投影面积的电通量相等。

３、　　如附图所示，在半径为Ｒ１和Ｒ２的两个同心球面上，分别均匀地分布着电荷Ｑ１和Ｑ２，求：

（１）Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三个区域内的场强分布；

（２）若Ｑ１＝－Ｑ２，情况如何？画出此情形的Ｅ－r 曲线。

解：（１）应用高斯定理可求得三个区域内的场强为

E－r 曲线 (r<R1);　　(R1<r<R2)

(r> R2)

(2) 若Ｑ１＝－Ｑ２，E1=E3=0,

Ｅ－r 曲线如图所示。

４、　　根据量子理论，氢原子中心是一个带正电子 qe 的原子核（可以看成是点电荷），外面是带负电的电子云。在正常状态（核外电子处在Ｓ态）下，电子云的电荷密度分布是球对称的：

式中 a0 为一常数（它相当于经典原子模型中 s 电子圆形轨道的半径，称为玻尔半径）。求原子内电场的分布。

解：电子云是球对称分布，核外电子的总电荷量为

可见核外电荷的总电荷量等于电子的电荷量。

应用高斯定理：核外电荷产生的场强为

原子核与核外电荷产生的总场强为

５、　　实验表明：在靠近地面处有相当强的电场，Ｅ垂直于地面向下，大小约为１００Ｎ／Ｃ；在离地面 1.5 千米高的地方，Ｅ也是垂直地面向下的，大小约为２５Ｎ／Ｃ。

（１）　试计算从地面到此高度大气中电荷的平均密度；

（２）　如果地球上的电荷全部均匀分布在表面，求地面上电荷的面密度。

解：（１）以地心为心作球形高斯面，恰好包住地面，由对称性和高斯定理得

（２）　以地球表面作高斯面

６、　　半径为Ｒ的无穷长直圆筒面上均匀带电，沿轴线单位长度的电量为λ.求场强分布，并画出Ｅ－r 曲线。

解：应用高斯定理，求得场强分布为

Ｅ＝０　　r<R

r>R

E－r 曲线如图所示。

７、　　一对无限长的共轴直圆筒，半径分别为Ｒ１和Ｒ２，筒面上都均匀带电。沿轴线单位长度的电量分别为λ１和λ２，

（１）　求各区域内的场强分布；

（２）　若λ１＝－λ２，情况如何？画出此情形的Ｅ－r 曲线。

解：（１）由高斯定理，求得场强分布为

r<R1　　Ｅ１=0

R1<r<R2

r> R2

（２）若λ１＝－λ２，Ｅ１＝Ｅ３＝０，Ｅ２不变。此情形的Ｅ－r 曲线如图所示。

８、　　半径为Ｒ的无限长直圆柱体内均匀带电，电荷的体密度为ρ，求场强分布，并画出Ｅ-r 曲线。
解：应用高斯定理，求得场强分布为
圆柱体内
圆柱体外
E－r 曲线如图所示
９、　　设气体放电形成的等离子体圆柱内的体电荷分布可用下式表示　　，式中 r 是到轴线的距离，ρ 0 是轴线上的密度值，a 是常数，求场强的分布。
解：应用高斯定理，作同轴圆柱形闭合柱面为高斯面。

Ｅ方向沿矢径 r 方向。
１０、　两无限大的平行平面均匀带电，电荷的面密度分别为±σ，求各区域的场强分布。
解：无限大均匀带电平面所产生的电场强度为

根据场强的叠加原理，各区域场强分别为

可见两面外电场强度为零，两面间电场是均匀电场。平行板电容器充电后，略去边缘效应，其电场就是这样的分布。
１１、　两无限大的平行平面均匀带电，电荷的面密度都是σ，求各区域的场强分布。
解：与上题同理，无限大均匀带电平面所产生的电场强度为
应用场强叠加原理，场强在各区域的分布为

可见两面间电场强度为零，两面外是均匀电场，电场强度大小相等，方向相反。
１２、　三个无限大的平行平面均匀带电，电荷的面密度分别为σ１、σ２、σ３，求下列情况各处的场强：（１）σ１＝σ２＝σ３＝σ；（２）σ１＝σ３＝σ；σ２＝－σ；（３）σ１＝σ３＝－σ；σ２＝σ；（４）σ１＝σ；σ２＝σ３＝－σ。
解：无限大均匀带电平面所产生的电场强度为
各区域场强为各带电面产生场强的叠加
　　Ｅ１　　Ｅ２　　Ｅ３　　Ｅ４
（１）

（２）

（３）

（４）

１３、　一厚度为 d 的无限大平板，平板体内均匀带电，电荷的体密度为ρ，求板内、板外场强的分布。

解：根据对称性，板内外的电场强度方向均垂直于板面，并对中心对称。

应用高斯定理可求得：

板内（r<d/2）

板外（r>d/2）

１４、　在半导体 p-n 结附近总是堆积着正、负电荷，在 n 区内有正电荷，P 区内有负电荷，两区电荷的代数和为零。把 p-n 结看成是一对带正、负电荷的无限大平板，它们相互接触。取坐标 x 的原点在 p、n 区的交界面上，n 区的范围是-xn≤x≤0,p 区的范围是 0 ≤x≤xP.设两区内电荷体密度分布都是均匀的：

n 区　　，

P 区　　(突变结模型)

这里ＮＤ、ＮＡ是常数，且ＮＡxp=NDxn(两区电荷数量相等)。

试证明电场的分布为：

n 区　　，

P 区　　并画出ρ和Ｅ随 x 变化的曲线。

解：将带电层看成无数无限大均匀带电平面的叠加，

由叠加原理可知，在 p-n 结以外区域，E=0

（１）　对高斯面 S1，应用高斯定理

（２）对高斯面 S2，应用高斯定理

（３）ρ和Ｅ随 x 变化的曲线如图所示。

-

１５、　如果在上题中电荷的体分布为

p-n 结外　　ρ（x）=0

-xn≤x≤xp　　ρ（x）=-eax　(线性缓变结模型)

这里 a 是常数，xn= xp（为什么？），统一用 xm/2 表示。试证明电场分布为

并画出ρ和Ｅ随 x 变化的曲线。

解：正负电荷代数和仍为零，p-n 结外 E=0

作高斯面

ρ和Ｅ随 x 变化的曲线如图所示。

---

§1.4　电位及其梯度

思考题：

１、　假如电场力的功与路径有关，定义电位差的公式 还有没有意义？从原则上说，这时还能不能引入电位差、电位的概念？

答：如果电场力的功与路径有关，积分 在未指明积分路径以前就没有意义，路径不同，积分结果也不同，相同的位置，可以有无限多取值，所以 就没有确定的意义，即不能根据它引入电位、电位差的概念来描写电场的性质。

２、　（1）在附图 a 所示的情形里，把一个正电荷从 P 点移动到 Q，电场力的功 APQ 是正还量负？它的电位能是增加还是减少？P、Q 两点的电位哪里高？（2）若移动负电荷，情况怎样？（3）若电力线的方向如附图 b 所示，情况怎样？

答：(1)正电荷在电场中任一点受电场力 F= qE，方向与该点 E 方向相同，在Ｐ Q 路径上取任一微元，　dA>0

P→Q，电场力的功 APQ >0，

APQ=q(UP-UQ)=Wp-WQ>0,所以电位能减少，

q>o ,A>0,所以Ｕ Ｐ>UQ

（２）负电荷受力与电场方向相反，P→Q，电场力的功 APQ<0，电位能增加，但仍有Ｕ Ｐ>UQ

（３）由于场强方向与前述相反，则所有结论与（１）（２）相反。

３、　电场中两点电位的高低是否与试探电荷的正负有关？电位差的数值是否与试探电荷的电量有关？

答：电位高低是电场本身的性质，与试探电荷无关。电位差的数值也与试探电荷的电量无关。

４、　沿着电力线移动负试探电荷时，它的电位能是增加还是减少？

答：沿着电力线移动负试探电荷时，若 dl 与Ｅ同向，电场力作负功，电位能增加；反之电位能减少。

５、　说明电场中各处的电位永远逆着电力线方向升高。

答：在任何情况下，电力线的方向总是正电荷所受电场力的方向，将单位正电荷逆着电力线方向由一点移动到另一点时，必须外力克服电场力作功，电位能增加。电场中某点的电位，在数值上等于单位正电荷在该点所具有的电位能，因此，电位永远逆着电力线方向升高。

６、　（1）将初速度为零的电子放在电场中时，在电场力作用下，这电子是向电场中高电位处跑还是向低电位处跑？为什么？（2）说明无论对正负电荷来说，仅在电场力作用下移动时，电荷总是从电位能高处移向电位能低处。

答：（１）电子带负电，被电场加速，逆着电力线方向运动，而电场中各点的电位永远逆着电力线方向升高--电子向高电位处移动。

（２）若电子初速度为零，无论正负电荷，单在电场力作用下移动，电场力方向与位移方向总是一致的，电场力作正功，电位能减少，所以电荷总是从电位能高处向电位能低处移动。

７、　可否规定地球的电位为+100 伏，而不规定它为零？这样规定后，对测量电位、电位差的数值有什么影响？

答：可以。因为电位零点的选择是任意的，假如选取地球的电位是 100V 而不是 0V，测量

的电位等于以地为零电位的数值加上 100V，而对电位差无影响。

８、　　若甲、乙两导体都带负电，但甲导体比乙导体电位高，当用细导线把二者连接起来后，试分析电荷流动的情况。

答：在电场力作用下，电荷总是从电位能高处向电位能低处移动。负电荷由乙流向甲，直至电位相等。

９、　　在技术工作中有时把整机机壳作为电位零点。若机壳未接地，能不能说因为机壳电位为零，人站在地上就可以任意接触机壳？若机壳接地则如何？

答：把整机机壳作为零电位是对机上其他各点电位而言，并非是对地而言。若机壳未接地，它与地之间可能有一定的电位差，而人站在地上，与地等电位，这时人与机壳接触，就有一定电位差加在人体上。当电压较高时，可能造成危险，所以一般机壳都要接地，这样人与机壳等电位，人站在地上可以接触机壳。

１０、　（1）场强大的地方，是否电位就高？电位高的地方是否场强大？

（２）　带正电的物体的电位是否一定是正的？电位等于零的物体是否一定不带电？

（３）　场强为零的地方，电位是否一定为零？电位为零的地方，场强是否一定为零？

（４）　场强大小相等的地方电位是否相等？等位面上场强的大小是否相等？

以上各问题分别举例说明之。

答：

（１）　不一定。E 仅与电势的变化率有关，场强大仅说明 U 的变化率大，但 U 本身并不一定很大。例如平行板电容器，B 板附近的电场可以很强，但电位可以很低。同样电位高的地方，场强不一定大，因为电位高不一定电位的变化率大。如平行板电容器 A 板的电位远高于 B 板电位，但 A 板附近场强并不比 B 板附近场强大。

（２）　当选取无限远处电位为零或地球电位为零后，孤立的带正电的物体电位恒为正，带负电的物体电位恒为负。但电位的正负与零电位的选取有关。假如有两个电位不同的带正电的物体，将相对于无限远电位高者取作零电位，则另一带电体就为负电位，由引可说明电位为零的物体不一定不带电。

（３）　不一定。场强为零仅说明 U 的变化率为零，但 U 本身并不一定为零。例如两等量同号电荷的连线中点处，E=0 而 U≠0。U 为零时，U 的变化率不一定为零，因此 E 也不一定为零。例如两等量异号电荷的连线中点处，U=0 而 E≠0

（４）　场强相等的地方电位不一定相等。例如平行板电容器内部，E 是均匀的，但 U 并不相等。等位面上场强大小不一定相等。如带电导体表面是等位面，而表面附近的场强与面电荷密度及表面曲率有关。

１１、　两个不同电位的等位面是否可以相交？同一等位面是否可以与自身相交？

答：在零电位选定之后，每一等位面上电位有一确定值，不同等位面 U 值不同，故不能相交。同一等位面可与自身相交。如带电导体内部场强为零，电位为一常量，在导体内任意作两个平面或曲面让它们相交，由于其上各点的电位都相同，等于导体的电位，这种情况就属于同一等位面自身相交。

习题：

１、　　在夏季雷雨中，通常一次闪电里两点间的电位差约为 100MV（十亿伏特），通过的电量约为 30C。问一次闪电消耗的能量是多少？如果用这些能量来烧水，能把多少水从 00C 加热到 1000C？

解：　一次闪电消耗的能量为 W=QU=30×109=3×1010（J）

　　所求的水的质量为 M=W/J=72（t）

２、　　已知空气的击穿场强为 2×106V/m,测得某次闪电的火花长 100 米，求发生这次闪电时两端的电位差。

解：U=2×106×100=2×108（V）

3、　证明：在真空静电场中凡是电力线都是平行直线的地方，电场强度的大小必定处处相等；或者凡是电场强度的方向处处相同的地方，电场强度的大小必定处处相等。

证明：在电场中作任意矩形闭合回路 abcd，

移动电荷 q 一周，电场力作功为

4、　求与点电荷 q=1.0×10-6C 分别相距为 a=1.0m 和 b=2.0m 的两点间的电位差。

解：

5、　一点电荷 q 在离它 10 厘米处产生的电位为 100V，求 q 。

解：

6、　求一对等量同号电荷联线中点的场强和电位，设电荷都是 q ,两者之间距离为 2l.

解：

7、　求一对等量异号电荷联线中点的场强和电位，设电荷分别是±q ,两者之间距离为 2l.

解：

8、　如图所示，AB=2l,OCD 是以 B 为中心，l 为半径的半圆，A 点有正点电荷+q，B 点有负点电荷-q。

（1）　把单位正电荷从 O 点沿 OCD 移到 D 点，电场力对它作了多少功？

（2）　把单位负电荷从 D 点沿 AB 的延长线移到无穷远去，电场力对它作了多少功？

解：电荷在电场中移动时，电场力作功等于电势能减少的值。

（1）

（2）

9、　两个点电荷的电量都是 q，相距为 l，求中垂面上到两者联线中点为 x 处的电位。

解：根据电势的叠加原理

10、　有两个异号点电荷 me 和-e(n>1),相距为 a ,

（1）　证明电位为零的等位面是一个球面；

（2）　证明球心在这两个点电荷的延长线上，且在-e 点电荷的外边；

（3）　这球的半径是多少？

解：以-e 为原点 O，两电荷的联线为 x 轴，取坐标系如图所示。根据电势叠加原理，空间任一点的电势为

11、　求电偶极子 p=ql 电位的直角坐标表达式，并用梯度求出场强的直角分量表达式。

解：（1）取坐标系如图所示，根据电势叠加原理

当 r>>l 时，

（2）由电势梯度求得场强为

12、　证明如图所示电四极子在它的轴线延长线上的电位为 ，并由梯度求场强。

解：取坐标系如图所示，根据电势的叠加原理

13、　一电四极子如图所示，证明：当 r>>l 时，它在 P（r, θ ）点产生的电位为

图中的极轴通过正方形中心 O 点，且与一边平行。

解：（1）根据电势叠加原理

当 r>>l 时，

（2）由电势梯度求场强

此题也可以将平面电四极子当作两个电偶极子，由电偶极子产生的电势叠加求 U 及 E。

１４、 求均匀带电圆环轴线上电位的分布，并画 U-x 曲线。

解：（1）P 点的电势及场强为

（2）由电势表达式得

因此得 U-x 曲线为

１５、 求均匀带电圆面轴线上的电位分布，并画 U-x 曲线。

解：（1）利用上题结果，求得电位及场强分布为

（2）由电势表达式得

U-X 曲线如图所示

１６、 求两个均匀带电的同心球面在三个区域内的电位分布，并画 U-r 曲线。

解：（1）已知均匀带电球面产生的电场中电位的分布为

由电势叠加原理可知：

（2）U-r 曲线如图所示

１７、 在上题中，保持内球上电量 Q1 不变，当外球电量 Q2 改变时，试讨论三个区域内的电位有何变化？两球面之间的电位差有何变化？

解：保持 Q1 不变，当外球电量 Q2 变化时，各区域电位随之变化

１８、 求均匀带电球体的电位分布。并画 U-x 曲线。

解：（1）由高斯定理可求得场强分布为

（2）由场强求得电势为

（3）U-r 曲线如图所示

１９、 金原子核可当作均匀带电球，半径约为 6.9×10-15 米，电荷为 Ze=79×1.6×10-19C，求它表面上的电位。

解：

２０、 （1）一质子（电荷为 e=1.6×10-19C,质量为 1.67×10-27kg）,以 1.2×102m/s 的初速从很远的地方射向金原子核，求它能达到金原子核的最近距离。

（2）α 粒子的电荷为 2e，质量为 6.7×10-27kg,以 1.6×102m/s 的初速度从很远的地方射向

金原子核，求它能达到金原子核的最近距离。

解：由能量守恒定律得

（1）

（2）

2 1 、在氢原子中，正常状态下电子到质子的距离为 5.29×10-11m,已知氢原子核（质子）和电子带电各为±e。把氢原子中的电子从正常状态下离核的最近距离拉开到无穷远处所需的能量，叫做氢原子核的电离能。求此电离能是多少电子伏和多少焦耳。

解：设电子的质量为 m，速度为 v,氢原子基态的能量为

负号是因为，以电子和质子相距无穷远时为电势能的零点，要把基态氢原子的电子和质子分开到相距无穷远处，需要外力做功。这功的最小值便等于氢原子的电离能量 E

E=-W=-13.6eV

一摩尔氢原子的电离能量为

Emol=NAE=8.19eV=1.31×106(J)

2 2、 轻原子核（如氢及其同位素氘、氚的原子核）结合成为较重原子核的过程，叫做核聚变。核聚变过程可以释放出大量能量。例如，四个氢原子核（质子）结合成一个氦原子核（α粒子）时，可释放出 28MeV 的能量。这类核聚变就是太阳发光、发热的能量来源。如果我们能在地球上实现核聚变，就可以得到非常丰富的能源。实现核聚变的困难在于原子核都带正电，互相排斥，在一般情况下不能互相靠近而发生结合。只有在温度非常高时，热运动的速度非常大，才能冲破库仑排斥力的壁垒，碰到一起发生结合。这叫做热核反应。根据统计物理学，绝对温度为 T 时，粒子的平均平动动能为 ，k=1.38×10-23J/K.试计算：

（ 1 ） 一个质子以怎样的动能（以 eV 表示）才能从很远的地方达到与另一个质子接触的距离？

（ 2 ） 平均热运动动能达到此数值时，温度（以 K 表示）需为多少？

解：（1）设两个质子迎头相碰，碰撞时两者中心距离为 2r

(2)

实际上，由于量子力学的隧道效应，使质子不需要那么大的动能就可以穿过静电壁垒而达到互相接触，故发生热核聚变所需的温度可以低一些，据估算，108K 即可。

2 3 、在绝对温度为 T 时，微观粒子热运动能量具有 KT 的数量级。有时人们把能量 KT 折合成电子伏，就说温度 T 为若干电子伏。问：

（ 1 ） T=1eV 相当于多少开？

（ 2 ） T=50keV 相当于多少开？

（ 3 ） 室温（T=300K）相当于多少 eV?

解： （1）

（2）

（3）

又如：

太阳表面温度约为 6000K，T=0.52eV

热核反应时温度高达 108K，T=8.6(keV)

2 4 、电量 q 均匀地分布在长为 2l 的细直线上，求下列各处的电位 U：

（ 1 ） 中垂面上离带电线段中心 O 为 r 处，并利用梯度求 Er;

（ 2 ） 延长线上离中心 O 为 Z 处，并利用梯度求 EZ；

（３）　通过一端的垂面上离该端点为 r 处，并利用梯度求 Er.

解：（１）中垂面上离中心为 r1 处，

（２）延长线上离中心为 r2 处

(3)端垂面上离该端为 r3 处，

２５、如图所示，电量 q 均匀地分布在长为 2l 的细直线上，

（１）　求空间任一点 P（r,z）的电位 U(0<r<+∞,- ∞<z<∞);

（２）　利用梯度求任一点 P（r,z）的场强分量 Er 和 EZ;

（３）　将所得结果与上题中的特殊位置相比较。

解：(1)在图示坐标系中，

（２）由电势梯度求场强

（３）与上题比较：

r＝r1,z=0 时，得中垂面上任一点的电位与场强

r=0,Z=r2 时，得延长线上任一点的电位与场强

r＝r3,Z=|l|时，得端面上任一点的电位与场强

２６、一无限长直线均匀带电，线电荷密度为η，求离这线分别为 r1 和 r±两点的两点之间的电位差。

解：

２７、如附图所示，两条均匀带电的无限长平行直线（与图纸垂直），电荷的线密度分别为±η，相距为 2a。求空间任一点 P（x,y）的电位。

解：取 O 点为电势零点时，空间任一点的电势为两无限长带电线电势的叠加

若以无穷远处为电势零点，一条无限长带电线所产生的电势是无穷大，但两条无限长带等量异号电荷的直线产生的电势是有限值，因为单位长度的电荷量大小相等而符号相反，结果电势在相加时，消去无穷大，而成为有限值。

２８、证明在上题中电位为 U 的等位面是半径为 的圆筒面，筒的轴线与两直线共面，位置在 处，其中 。U＝０的等位面是什么形状？

解：P 点的电势为

由于对称性，U 与 z 无关。

为方便，令 ，

在三维空间，这是一个圆柱同，轴线在 z-x 平面内并与 Z 轴平行，位置在 处，其半径为 。

U=0 的等位面为 X=0 的 Y-Z 平面。

２９、求两无限长共轴圆筒间的电势分布和两筒间的电位差（设 ），并画出 U-r 曲线。

解：根据高斯定理可求得两筒间的电场强度为

３０、求无限长直圆柱体的电位分布（以轴线为参考点，设它电位为零）。

解：由高斯定理可求得圆柱体内的场强分布为

３１、求电荷密度为 的无限长等离子体柱的电势分布（以轴线为参考点，设它的电位为零）
解：由高斯定理可求得场强分布为

以轴线为电势零点，其电位分布为

３２、一电子二极管由半径 a=0.50mm 的圆柱形阴极Ｋ和套在阴极外同轴圆筒形的阳极Ａ构成，阳极半径Ｒ＝0.45cm。阳极电位比阴极电位高３００Ｖ。设电子从阴极发射出来时速度很小，可忽略不计。求：
（１） 电子从Ｋ向Ａ走过 2.0mm 时的速度；
（２） 电子到达Ａ时的速度。
解：设离阴极 K 的轴线为 r 处的电势为 U，则

３３、如图所示，一对均匀、等量异号的平行带电平面。若其间距离 d 远小于带电平面的线度时，这对带电面可看成是无限大的。这样的模型可叫做电偶极层。求场强和电位沿垂直两平面的方向 x 的分布，并画出Ｅ-x 曲线和Ｕ-x 曲线（取离两平面等距的Ｏ点为参考点，令该处的电位为零）。
解：由高斯定理可求得电偶极层内部
电偶极层外部
以 O 点为电势的参考点

Ｅ－x 曲线为　　Ｕ－x 曲线为

３４、证明半导体突变型 p-n 结内的电位分布为
n 区　　，
p 区
这公式是以哪里作为电位参考点的？p-n 结两侧的电位差是多少？
解：n 区
p 区
以交界面处为电势的零点。P-n 结两侧的电势差为

３５、证明半导体线性缓变 p-n 结内的电位分布为
这公式是以哪里作为电位参考点的？p-n 结两侧的电位差是多少？
解：（１）
此电位是以Ｏ点为参考点的。
（２）p-n 结两侧的电位差为

３６、在示波管中，若已知的不是偏转电极间的场强Ｅ，而是两极板间的距离 d=1.0cm 和电压１２０伏，其余尺寸相同。求偏转距离 y 和 y′.
解：示波器内部

（与§ 2 习题1 6 结果相同）

3 7、电视显象管的第二和第三阳极是两个直径相同的同轴金属圆筒。两电极间的电场即为显象管中的主聚焦电场。图中所示为主聚焦电场中的等位面，数字表示电位值。试用直尺量出管轴上各等位面间的距离，并求出相应的电场强度。

解：用直尺量出管轴上各等位
面间的距离

根据

可求出各等位间的电场强度--

场强分布是非均匀电场，但具有对称性。从左至右各等位面间的场强分布为

（单位：伏 / 米）

4.44 9.09 22.22 33.33 50 66 50 33.33 22.22 9.09 4.44

3 8、带电粒子经过加速电压加速后，速度增大。已知电子的质量为 ,电荷绝对值为

（1） 设电子质量与速度无关，把静止电子加速到光速 c=3×108m/s 要多高的电压？

（2） 对于高速运动的物体来说，上面的算法不对，因为根据相对论，物体的动能不是 ，而是 。按照这公式，静止电子经过上述电压加速后，速度 v 是多少？它是光速 c 的百分之几？

（3） 按照相对论，要把电子从静止加速到光速，需要多高的电压？这可能吗？

解：（1）根据能量守恒定律

（2）对于高速运动的物体，根据能量守恒定律

（3）根据

所需电压为

因此，根据狭义相对论，不可能把带电粒子加速到光速。

－－－

２、　　计算上题三角形中心的电荷 q′ = 处在其余顶点上三个电荷产生的外电场中的电位能。

解：

３、　　求均匀带电球体的电位能，设球的半径为Ｒ，带电总量为ｑ。

解：　　根据静电能量公式

４、　　利用虚功概念计算电偶极子放在点电荷Ｑ的电场中时，偶极子所受的力和力矩。

解：（１）P//QO 时

（２）Ｐ⊥QO 时

当ｒ与Ｐ成夹角θ时，

５、　　利用虚功概念证明：均匀带电球壳在单位面积上受到的静电排斥力为σ ２ / ２ ε ０。

解：均匀带电球壳的自能为

第一章　　结　　束

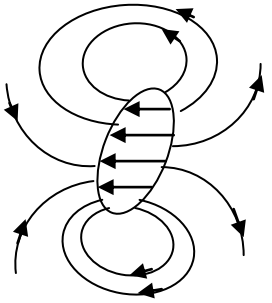
第二章　静电场中的导体和电介质

§2.1　静电场中的导体

思考题：

1、试想放在匀强外电场Ｅ₀中的不带电导体单独产生的电场 E′ 的电力线是什么样子（包括导体内和导体外的空间）。如果撤去外电场Ｅ₀，E′ 的电力线还会维持这个样子吗？

答：电场 **E**′ 的特征有：（1）静电平衡时，在导体内部，$\mathbf{E_0}$ 和 **E**′ 的矢量和处处为零。因此 **E**′ 的电力线在导体内部是与 $\mathbf{E_0}$ 反向的平行直线；（2）导体上的等量异号电荷，在离导体足够远处激发的场，等效于一个电偶极子激发的场，因此其电力线也等效于电偶极子电场的电力线；（3）导体上电荷密度大的地方，电力线的数密度较大；（4）在导体表面附近，$\mathbf{E_0}$ 和 **E**′ 的矢量和的方向一定垂直于导体表面。因此， **E**′ 的方向相对于 $\mathbf{E_0}$ 一定位于表面法线的另一侧。



E′ 的电力线分布如图所示。值得注意的是，单独考虑感应电荷的场 **E**′ 时，导体并非等位体，表面也并非等位面，所以感应电荷激发的场的电力线在外表面上会有一些起于正电荷而止于负电荷。

如果撤去外电场 $\mathbf{E_0}$，静电平衡被破坏，，**E**′ 的电力线不会维持这个样子。最后 **E**′ 将因导体上的正、负电荷中和而消失。

2、 无限大带电面两侧的场强$E=\sigma/2\varepsilon_0$，这个公式对于靠近有限大小带电面的地方也适用。这就是说，根据这个结果，导体表面元△S 上的电荷在紧靠它的地方产生的场强也应是$\sigma/2\varepsilon_0$，它比导体表面处的场强小一半。为什么？

答：可以有两种理解：（1）为了用高斯定理求场强，需作高斯面。在两种情形下，通过此高斯面的电通量都是$\sigma S/\varepsilon_0$，但在前一种情况，由于导体内部场强为零，通过位于导体内部的底面的电通量为零，因而造成两公式不同；（2）如果两种情况面电荷密度相同，无限大带电平面的电力线对称地分布在带电面两侧，而导体表面电力线只分布在导体外侧，因此电力线的密度前者为后者的二分之一，故场强也为后者的二分之一。

3、 根据式$E=\sigma/\varepsilon_0$，若一带电导体面上某点附近电荷面密度为σ，这时该点外侧附近场强为$E=\sigma/\varepsilon_0$，如果将另一带电体移近，该点的场强是否改变？公式$E=\sigma/\varepsilon_0$是否仍成立？

答：场强是所有电荷共同激发的。另一带电体移近时，由于它的影响和导体上电荷分布的变化，该点的场强 E 要发生变化。当达到静电平衡时，因为表面附近的场强总与导体表面垂直，应用高斯定理，可以证明$E=\sigma/\varepsilon_0$仍然成立，不过此时的σ是导体上的电荷重新分布后该点的电荷密度。

4、 把一个带电物体移近一个导体壳，带电体单独在导体空腔内产生的电场是否等于零？静电屏蔽效应是怎样体现的？

答：带电体单独在导体空腔内产生的场强不为零。静电平衡的效应表现在，这个场强与导体外表面感应电荷激发的场强，在空腔内的矢量和处处为零，从而使空腔内的场不受壳外带电体电场的影响。

5、 万有引力和静电力都服从平方反比定律，都存在高斯定理。有人幻想把引力场屏蔽起来，这能否作到？引力场和静电力有什么重要差别？

答：产生静电平衡的关键，在于导体中存在两种电荷，而且负电荷（电子）在电场力作用下能够自由移动，因此在外电场作用下，能够形成一附加电场，使得在导体壳内总场强为零。引力场与此不同，引力场的源只有一种，因此在外部引力场的作用下不可能产生一附加引力场，使得物质壳内部的引力场处处为零，所以屏蔽引力场是不可能的。两种场的重要差别在于：静电场的源有两种，相应的电荷之间的作用力也有两种，引力和斥力；引力场的源只有一种，相应的物质的引力相互作用只有一种引力。

6、 （1）将一个带正电的导体 A 移近一个不带电的绝缘导体 B 时，导体 B 的电位是升高还

是降低？为什么？

（2）试论证：导体 B 上每种符号感应电荷的数量不多于 A 上的电量。

答：（1）A 移近时，B 的电位将升高。因为带电体 A 移近时，B 上将出现感应电荷，靠近 A 的一边感应电荷为负，远离 A 的一边为正。从 A 上正电荷发出的电力线，一部分终止于负的感应电荷上，正的感应电荷发出的电力线延伸至无限远，由于同一电力线其起点的电位总是高于终点的电位，若选取无限远处的电位为零，则正的感应电荷所在处（导体 B）的电位大于零。静电平衡时，导体 B 为等位体，因此整个导体 B 的电位大于零，而在 A 未移近之前，B 的电位为零。可见，当 A 移近时，B 的电位升高了。

（2）从 A 上正电荷发出的电力线，一部分终止于 B 上，其余延伸至无限远处，因此 B 上的负电荷电量小于 A 上的正电荷电量，且 B 上感应电荷总是等量异号的，所以 B 导体上每种电荷的电量均少于 A 上的电荷。

7、 将一个带正电的导体 A 移近一个接地的导体 B 时，导体 B 是否维持零电位？其上是否带电？

答：导体 B 与大地等电位，电位仍为零。不论 B 导体原来是否带电，由于 A 所带电荷的符号、大小和位置的影响，B 将带负电。

8、 一封闭的金属壳内有一个带电量 q 的金属物体。试证明：要想使这金属物体的电位与金属壳的电位相等，唯一的办法是使 q=0 。这个结论与金属壳是否带电有没有关系？

答：若 $q\neq 0$，金属壳的电位与带电金属物体的电位不等。应用高斯定理可证明，金属壳内表面上带负电，电量为-q ,从带电的金属物体上发出的电力线终止于金属壳的内表面上，因此带电金属物体的电位高于金属壳的电位。反之，若 q=0，金属壳和金属物体之间无电场，电荷从它们中的一个移向另一个的过程中，没有电场力做功，所以它们之间无电位差。

由于静电屏蔽效应，金属壳带电与否，不会影响金属壳表面上所包围区域内的场强和电位差，所以，金属壳是否带电对以上证明的结论没有影响。

9、 有若干个互相绝缘的不带电导体 A、B、C、…，它们的电位都是零。如果把其中任一个如 A 带上正电，证明：

（1） 所有这些导体的电位都高于零；

（2） 其他导体的电位都低于 A 的电位。

答：（1）与 6 题解释相同。当选无限远处电位为零时，一个不带电的绝缘导体附近放入一个带正电的物体时，这个导体的电位将升高。因此电位不为零的带正电绝缘导体 A 将使 B、C、…的电位高于零。

（２）由Ａ发出的电力线总有一部分终止在其他各导体的负的感应电荷上，由于电力线指向电位降低的方向，所以其他导体的电位都会低于Ａ的电位。

10、　两导体上分别带有电量-q 和 2q，都放在同一个封闭的金属壳内。证明：电荷为+2q 的导体的电位高于金属壳的电位。

答：应用高斯定理可证明，金属壳内表面的感应电荷为－q。从电荷２q 的导体表面发出的电力线将有一部分终止于金属壳内表面的负电荷上，根据电力线起点电位高于终点电位的性质，电荷为２q 的导体的电位高于金属壳的电位。

11、　一封闭导体壳Ｃ内有一些带电体，所带电量分别为 q_1、q_2、…，Ｃ外也有一些带电体，所带电量分别为Q_1、Q_2、…。问：

（１）q_1、q_2、…的大小对Ｃ外电场强度和电位有无影响？

（２）当 q_1、q_2、…的大小不变时，它们的分布形状对Ｃ外的电场强度和电位影响如何？

（３）Q_1、Q_2、...的大小对Ｃ内的电场强度和电位有无影响？

（４）当Q_1、Q_2、...的大小不变时，它们的分布形状对Ｃ内的电场强度和电位影响如何？

答：（１）有影响。壳内电荷在壳的外表面产生等量同号的感应电荷，这些感应电荷将要影响壳外的电场强度和电位。

（２）没有影响。腔内带电体上发出的电力线全部终止于内表面的等量异号的感应电荷上，空腔内电荷分布发生变化时，内表面上感应电荷的分布也随之发生变化，但力线不穿过导体壳，因此只要腔内带电体的总电量不变，导体壳外表面的电荷量就一定，而这些电荷的分布状态仅取决于外表面的形状。形状一定，电荷分布就一定，壳外电场和相对于壳外任意点的电位也就一定。

（３）对Ｃ内的电场强度无影响，对电位有影响，但对两点之间的电位差无影响。因为外面电荷的场强与导体壳上感应电荷的场强在腔内的矢量和处处为零，因此外部电荷对腔内的电场强度没有影响，因而对Ｃ内两点之间的电位差也无影响。但是导体壳相对于壳外任意点的电位要受壳外电场，即壳外电荷大小的影响，而腔内各点的电位与导体壳的电位有关，所以腔内的电位受外部电荷大小的影响。

（４）对Ｃ内的场强无影响，对电位差也没有影响，但对电位有影响。理由同上。

12、　若上题中Ｃ接地，情况如何？

答：当C接地时，导体壳内和导体壳外将不发生任何互相影响。

13、 （1）一个孤立导体球带电Q，其表面场强沿什么方向？Q在其表面上的分布是否均匀？其表面是否等电位？电位有没有变化？导体内任一点P的场强是多少？为什么？

（2） 当把另一带电体移近这个导体球时，球表面场强沿什么方向？其上的电荷分布是否均匀？其表面是否等电位？电位有没有变化？导体内任一点P的场强有无变化？为什么？

答：（1）一个孤立带电导体球，其表面场强必与表面垂直，即沿半径方向，否则不会处于静电平衡状态。场的分布具有球对称性，球面上各点的电场强度数值相同，根据$E=\sigma/\varepsilon_0$，球面上各点的电荷密度也相同，即电荷分布是均匀的。既然场强总是垂直于球面，所以球面是等位面。导体内任一点P的场强为零。

（2）当把另一带电体移近时，达到静电平衡后，球面的场强仍与表面垂直，否则将不会处于静电平衡状态。这时，场的分布不再具有球对称性，球面附近各点的场强数值不同，因而电荷分布不是均匀的。既然导体表面处的场强仍处处垂直于导体表面，故表面仍为等位面。导体球的电位将升高。导体内任一点P的场强仍为零。

14、（1）在两个同心导体球B、C的内球上带电Q，Q在其表面上的分布是否均匀？

（2）当从外边把另一带电体A移近这一对同心球时，内球C上的电荷分布是否均匀？为什么？

答：（1）具有球对称性，Q在内球的表面上分布是均匀的。

（2）A的移近使外球的外表面上感应出等量异号的感应电荷，但内部的电场不受A的影响，仍具有球对称性，内球上的电荷分布仍是均匀的。

15、两个同心球状导体，内球带电Q，外球不带电，试问：

（1）外球内表面电量Q_1＝？外球外表面电量Q_2＝？

（2）球外P点总场强是多少？

（3） Q_2在P点产生的场强是多少？Q是否在P点产生场强？Q_1是否在P点产生场？如果外面球壳接地，情况有何变化？

答：（1）外球内表面电量Q_1＝－Q；外球外表面电量Q_2＝Q。

（２）设球外Ｐ点到球心的距离为r,则Ｐ点的总场强为$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\vec{r}$。

（３）Q_2在Ｐ点产生的场强是$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\vec{r}$。Ｑ和$Q_1$都要在Ｐ点激发电场，不过，其场强的矢量和为零。如果外面球壳接地，则$Q_2=0$，仍有$Q_1=-Q$，Ｐ点的场强为零。

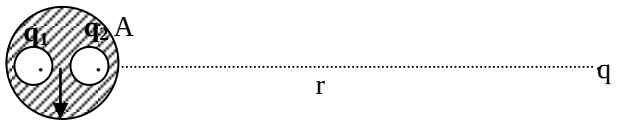
１６、在上题中当外球接地时，从远处移来一个带负电的物体，内、外两球的电位增高还是降低？两球间的电场分布有无变化？

答：这时，内外两球的电位即不增高也不降低，外球仍与大地等电位。由于静电屏蔽效应，两球间的电场分布没有变化。

１７、在上题中若外球不接地，从远处移来一个带负电的物体，内、外两球的电位增高还是降低？两球间的电场分布有无变化？两球间的电位差有无变化？

答：这时，内外两球的电位要降低。由于静电屏蔽效应，两球间的电场无变化，两球间各点相对于地的电位要变化。因为每点的电位与外壳的电位有关。但是，任意两点之间的电位差没有变化，因为两点之间的电位差只由场强分布决定，场强分布不变时，电位差不变。

１８、如图所示，在金属球Ａ内有两个球形空腔。此金属球整体上不带电。在两空腔中心各放置一点电荷 q_1和 q_2。此外在金属球Ａ之外远处放置一点电荷 q(q 至Ａ的中心距离 r>>球Ａ的半径Ｒ)。作用在Ａ、q_1、q_2和 q 四物体上的静电力各多大？



答：电荷 q_1在其所在空腔内壁上感应出$-q_1$的电荷，在Ａ的外表面上感应出$+q_1$的电荷；q_2在其所在空腔内壁上感应出$-q_2$的电荷，在Ａ的外表面上感应出$+q_2$的电荷；因此Ａ的外表面上感应电荷的总电量为q_1+q_2。(r>>R，q 在球面上的感应电荷不计)

q_1和$-q_1$在空腔外产生的场强的矢量和为零，因此，它们对Ａ球面上的电荷 q_1+q_2以及电荷 q、q_2没有作用力。同样，q_2和$-q_2$也是如此。电荷 q 和Ａ球面上的电荷 q_1+q_2由于静电屏蔽效应，对 q_1和 q_2也没有作用力。由于 q 至Ａ球中心的距离 r>>R, 电荷 q 和Ａ球面上的电荷 q_1+q_2的相互作用，可看作两个点电荷之间的相互作用，相互作用力满足库仑定律。力的大小为$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q_1+q_2)q}{r^2}$，方向在沿着 q 和Ａ球心的连线上。

q_1和 q_2之间没有相互作用力，因为它们各自发出的电力线全部终止在自己所在的空腔内表面上。q_1只受其所在腔壁上$-q_1$作用，由于对称性，作用力相互抵消为零。同样 q_2所受到的作用力也为零。

１９、在上题中取消 r>>R 的条件，并设两空腔中心的间距为 a ,试写出：

（１）q 给 q_1 的力；（２）q_2 给 q 的力；（３）q_1 给Ａ的力；（４）q_1 受到的合力。

答：（１）电荷之间的相互作用力与其他物质或电荷是否存在无关，所以点电荷 q 给点电荷 q_1 的作用力为 $F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_1}{(r+a/2)^2}$

（２）同理 q_2 给 q 的力 $F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_1}{(r-a/2)^2}$

（３）q_1 给Ａ的力 Ｆ＝０（Ａ所带总电量为零，等量异号电荷分布具有轴对称性）

（４） q_1 受到的合力为零。因为所受力包括四部分——

一是空腔内表面上与其等量异号的感应电荷对其的作用力，由于感应电荷均匀分布于内球面上，由对称性可知 $F_1=0$；

二是 q_2 及其空腔内表面上的感应电荷 $-q_2$ 对其的作用力，$-q_2$ 在内表面上的分布也是均匀的，q_2 及 $-q_2$ 对 q_1 的作用力 $F_2=0$；

三是Ａ球外表面感应电荷 q_1+q_2 对其作用，q_1+q_2 均匀分布于Ａ球面上，在导体内部产生的场强为零，所以作用力 $F_3=0$

四是 q 及Ａ上感应电荷对其作用。导体外表面上感应电荷在导体内产生的场正好与引起它的电荷在导体内产生的电场互相抵消，使得导体内场强处处为零，所以合力 $F_4=0$。

２０、（１）若将一个带正电的金属小球移近一个绝缘的不带电导体时，小球受到吸引力还是排斥力？

（２）若小球带负电，情况将如何？

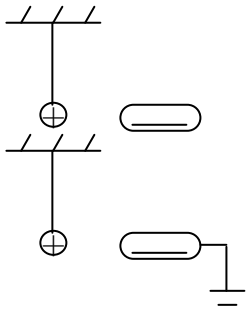
（３）若当小球在导体近旁（但未接触）时，将导体远端接地，情况如何？

（４）若将导体近端接地，情况如何？

（５）若导体在未接地前与小球接触一下，将发生什么变化？

（６）若将导体接地，小球与导体接触一下后，将发生什么变化？

答：



（１）导体在靠近小球一端感应电荷为负电荷，小球受吸引力；

（２）若小球带负电，导体在靠近小球一端感应电荷为正电荷，小球仍受吸引力；

（３）导体远端接地时，导体整体带负电，小球所受力为吸引力；

（４）导体近端接地时，导体仍带负电，小球所受力为吸引力；

（５） 导体在未接地前与小球接触一下，导体也带正电，小球受到排斥力；

（６） 导体接地，小球与导体接触后，所有电荷将通过导体流入大地，小球与导体均不带电，因此小球与导体之间没有相互作用力。

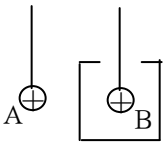
２１、（１）将一个带正电的金属小球Ｂ放在一个开有小孔的绝缘金属壳内，但不与接触。将另一带正电的试探电荷Ａ移近时，Ａ将受到吸引力还是排斥力？若将小球Ｂ从壳内移去后，Ａ将受到什么力？

（２）若使小球Ｂ与金属壳内部接触，Ａ受什么力？这时再将小球Ｂ从壳内移去，情况如何？

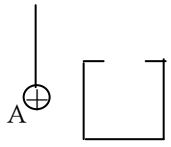
（３）使小球不与壳接触，但金属壳接地，Ａ将受什么力？将接地线拆掉后，又将小球Ｂ从壳内移去，情况如何？

（４）如情形（３），但先将小球从壳内移去后再拆除接地线，情况与（３）相比有何不同？

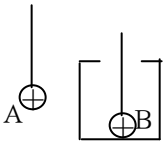
答：（１）在此情形下，带正电的Ｂ球将在金属壳内表面感应出负电荷，在金属壳外表面感应出正电荷，Ｂ球和金属壳组成的体系在金属壳外部的场，只由金属壳外表面的电荷分布决定，由于金属壳外表面带正电，所以处在这个电荷的场中的带正电的试探电荷Ａ将受到排斥力（这里忽略不计Ａ的场对金属壳外表面电荷分布的影响，否则，在一定条件下，它们之间可能出现相互吸引的情况）。



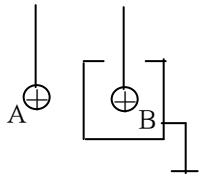
若将Ｂ从壳内移去，带正电的试探电荷Ａ将使金属壳外表面上产生感应电荷，靠近Ａ的一边出现负电荷，远离Ａ的一边出现正电荷。距离不同，吸引力大于排斥力，结果Ａ将受到吸引力作用。



（２）小球Ｂ与金属壳内部接触，Ｂ的正电荷将分布在金属壳的外表面，处于此电场中的Ａ将受到排斥力的作用。这时再将Ｂ从金属壳内移去，情况不变。



（３）Ｂ不与金属壳接触，但金属壳接地时，金属壳外表面由于Ａ的存在而出现的感应电荷消失。但由于带正电的Ａ的存在，将在离Ａ最近的一边出现负的感应电荷，它将使Ａ球受到吸引力作用。



将接地线拆掉后，又将Ｂ从壳内移去，内表面上的负电荷将分布

在外表面上，最后结果是A球所受的吸引力增大。

（４）先将Ｂ移去再拆去地线，与（３）的最后结果相同，但引力大小不同。

在（３）中，由于静电平衡状态下先拆掉地线，各部分电荷分布不变，再将Ｂ从壳内移去，内壁的负电荷转移到外表面后不能入地，Ａ球受到的吸引力增大。

在（４）中，先将Ｂ从壳内移去，内壁的负电荷转移到外表面后，全部从接地线入地，静电平衡后再拆去地线，Ａ球受到的吸引力将不增加。

２２、在一个孤立导体球壳的中心放一个点电荷，球壳内、外表面上的电荷分布是否均匀？如果点电荷偏离球心，情况如何？

答：电荷放在球心，由于球对称性，球壳内、外表面上的电荷分布是均匀的。如果点电荷偏离球心，力线不是从球心出发，但在内表面附近，又必须垂直于球壳的内表面，所以球壳内的场强分布不再具有球对称性，球壳内表面上的电荷分布不再均匀。但是，点电荷发出的电力线终止在内表面上，不影响球壳外部，因此，球壳外表面的电荷仍然按外表面的形状均匀分布。

２３、如图所示，金属球置于两金属板间，板间加以高压，则可看到球与板间放电的火花。若再在下面板上金属球旁放一等高度的尖端金属，问放电火花将如何变化？想一想这现象可有何应用？

答：若在下面板上金属球旁放一等高的尖端金属，则球和上板之间不再出现放电火花，火花只出现在尖端金属与上板之间。这是由于导体尖端处面电荷密度大，附近的场强特别强，使得空气易于在金属尖端和上板之间被击穿而发生火花放电。

上述现象说明，曲率半径小的尖端比曲率半径大的表面易于放电。利用这种现象可以做成避雷针，避免建筑物遭受雷击；让高压输电线表面作得很光滑，其半径不要过小，避免尖端放电而损失能量；高压设备的电极作成光滑球面，避免尖端放电而漏电，以维持高电压等。

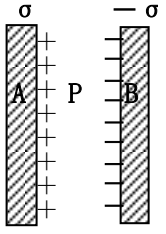
习题：

１、如图所示，一平行板电容器充电后，Ａ、Ｂ两极板上电荷的面密度分别为σ和－σ。设Ｐ为两板间任一点，略去边缘效应，求：

（１）　Ａ板上的电荷在Ｐ点产生的电场强度E_A；

（２）　Ｂ板上的电荷在Ｐ点产生的电场强度E_B；

（３）　Ａ、Ｂ两板上的电荷在Ｐ点产生的电场强度Ｅ；



（4） 若把B板拿走，A板上电荷分布如何？A板上的电荷在P点产生的电场强度为多少？

解：略去边缘效应，两极板上的电荷是均匀分布的电荷，两极板间的电场是均匀电场。由对称性和高斯定理可得

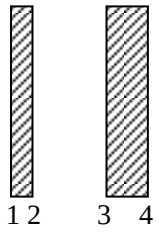
（1）A板上的电荷在P点产生的电场强度 $\vec{E}_A = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}$（A板法线方向上的单位矢量，指向B板）；

（2） B板上的电荷在P点产生的电场强度 $\vec{E}_B = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}$

（3） A、B两板上的电荷在P点产生的电场强度 $\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}$

（4） B板拿走后，A板上电荷将均匀分布在两个表面上，面电荷密度减小为一半。在P点产生的场强为两个表面上电荷产生场强的叠加，$\vec{E}_A = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}$

2、证明：对于两个无限大的平行平面带电导体板来说，

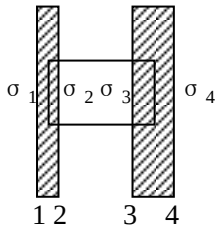


（1） 相向的两面上，电荷的面密度总是大小相等而符号相反；

（2） 相背的两面上，电荷的面密度总是大小相等而符号相同。

（3） 若左导体板带电+3微库/米^2，右导体板带电+7微库/米^2，求四个表面上的电荷。

解：由对称性可知，在每个面上，电荷必定都是均匀分布的，在两板间和两板外的电场必定都是均匀电场，电场强度的方向都与板面垂直。



（1） 作柱形高斯面如图所示，由高斯定理得

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_2 + \sigma_3)S$$

$$\therefore \sigma_2 = -\sigma_3$$

（2） 根据无限大带电平面均匀电荷产生电场强度的公式和电场强度的叠加原理，导体内任一点P的电场强度为

$$\vec{E}_P = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{e} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}(-\vec{e}) + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}(-\vec{e}) + \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}(-\vec{e}) = \frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4)\vec{e} = 0$$

$$\sigma_1 = \sigma_4$$

（3） 应用前述结果及电荷守恒定律

$$\begin{aligned}&\sigma_2=-\sigma_3\\&\sigma_1=\sigma_4\\&Q_1=(\sigma_1+\sigma_2)S\\&Q_2=(\sigma_3+\sigma_4)S\end{aligned}$$

解得：

$$\sigma_2=-\sigma_3=\frac{1}{2}\frac{(Q_1-Q_2)}{S}=-2\mu C/m^2$$

$$\sigma_1=\sigma_4=\frac{1}{2}\frac{(Q_1+Q_2)}{S}=5\mu C/m^2$$

由此可知，当 $Q_1=Q_2$ 时，相向的两面上无电荷分布，相背的两面上电荷等量同号；

当 $Q_1=-Q_2$ 时，相背的两面上无电荷分布，相向的两面上电荷等量异号。

3、两平行金属板分别带有等量的正负电荷。两板的电位差为 120V，两板的面积都是 3.6cm^2，两板相距 1.6mm。略去边缘效应，求两板间的电场强度和各板上所带的电量。

解：（1）两板间电场看作均匀电场，两板的电势差为

$$U_+-U_-=\int_-^+\vec{E}\cdot d\vec{l}=Ed$$

$$E=\frac{U_+-U_-}{d}=7.5\times10^4(V/m)$$

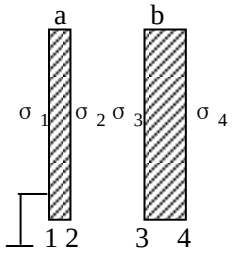
电场强度的方向由电势高的板指向电势低的板。

（2）利用上题结果，相背的两面上没有电荷，相向的两面上电荷面密度大小相等而符号相反。板上的电量为 $Q=\sigma S=\pm\varepsilon_0 ES=\pm2.4\times10^{-10}C$

4、两块带有等量异号电荷的金属板 a 和 b，相距 5.0mm，两板的面积均为 150 cm^2,电量的大小都是 2.66×10^{-8}C,a 板带正电并接地。以地的电位为零，并略去边缘效应，问：

（1） b 板的电位是多少？

（2） a、b 间离 a 板 1.0mm 处的电位是多少？



解：a、b 两板上的电荷都均匀分布在相向的两面上，

(1) 两板间的电场强度为

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\vec{e}$$

b 板的电位为 $U_b=U_a-\int_a^b\vec{E}\cdot d\vec{l}=0-\int_a^b Edl=-\frac{Ql}{\varepsilon_0 S}=-1.0\times10^3V$

（2） 两板之间离 a 板 1.0mm 处的电位是

$$U_b=-\int_a^P\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_a^P Edl=-U_b\frac{l_P}{l}=-2.0\times10^2V$$

5、三平行金属板 A、B 和 C，面积都是 200 cm^2,AB 相距 4.0mm，AC 相距 2.0mm，BC 两板都接地。如果使 A 板带正电 3.0×10^{-7}C，在略去边缘效应时，问 B 板和 C 板上感应电

荷各是多少？以地的电位为零，问 A 板的电位是多少？

解：（1）BC 两板都接地，故两板上只有向着 A 的一面有感应电荷。

由对称性和高斯定理得

$$\sigma_C + \sigma_{AC} = 0$$
$$\sigma_B + \sigma_{AB} = 0$$
$$\therefore \sigma_B + \sigma_C = -\sigma_{AB} - \sigma_{AC}$$

三块板上电荷量的关系为$Q_B + Q_C = -Q_A$

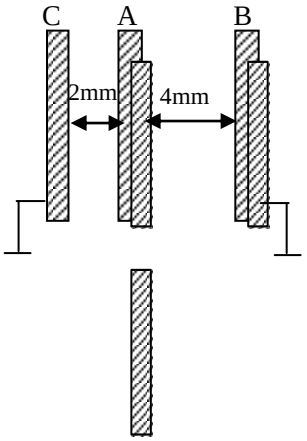
由高斯定理得AB间的电场强度为$\vec{E}_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{\varepsilon_0}\vec{e}$

AC间的电场强度为$\vec{E}_{AC} = \frac{\sigma_{AC}}{\varepsilon_0}(-\vec{e})$

$$U_B = U_C \rightarrow \frac{\sigma_C}{\varepsilon_0} d_{AC} = \frac{\sigma_B}{\varepsilon_0} d_{AB} \rightarrow Q_C = \frac{d_{AB}}{d_{AC}} Q_B$$

联立解得$Q_B = -1.0 \times 10^{-7} C$,

$Q_C = -2.0 \times 10^{-7} C$

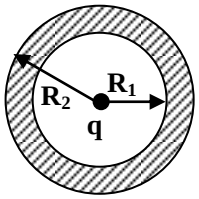


（2）A 板的电位为 $U_A = E_{AB} d_{AB} = -\frac{\sigma_B}{\varepsilon_0} d_{AB} = -\frac{Q_B}{\varepsilon_0 S} d_{AB} = 2.3 \times 10^3 V$

6、点电荷 q 处在导体球壳的中心，壳的内外半径分别为 R_1 和 R_2，求场强和电位的分布，并画出 E—r 和 U—r 曲线。

解：（1）由高斯定理得场强的分布为

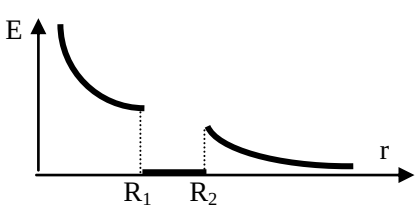
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (r < R_1)$$
$$E = 0 \qquad (R_1 < r < R_2)$$
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (r > R_2)$$

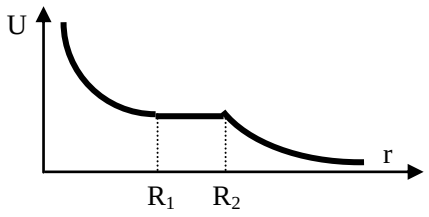


（2）电位分布为

$$U_1 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (r < R_1)$$
$$U_2 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \qquad (R_1 < r < R_2)$$
$$U_3 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}\, E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (r > R_2)$$

（3）E—r 和 U—r 曲线如图所示





球壳内外面上电场强度的值，等于该面两边趋于该面时电场强度极限值的平均值。

7、在上题中，若 q=4.0×10^{-10}C,R_1=2cm，R_2=3cm，求：

（1） 导体球壳的电位；

（2） 离球心 r=1cm 处的电位；

（3） 把点电荷移开球心 1cm，求导体球壳的电位。

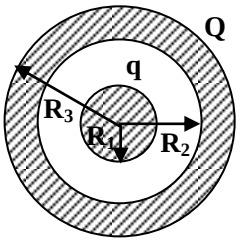
解：（1）导体球壳的电位为 $U=\int_{R_2}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=120V$

（2）离球心为 r 处的电位为

$$U=\int_r^{R_1}\vec{E}\cdot d\vec{l}+\int_{R_2}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1})+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=300V$$

（3）导体球壳的电位取决于球壳外表面电荷分布所激发的电场，与点电荷在球壳内的位置无关。因此导体球壳电位仍为 300V。

8、半径为 R_1 的导体球带有电量 q,球外有一个内、外半径分别 R_2、R_3 的同心导体球壳，壳上带有电荷 Q。



（1） 求两球的电位 U_1 和 U_2；

（2） 两球的电位差△U；

（3） 以导线把球和壳连在一起后，U_1、U_2和△U 分别是多少？

（4） 在情形（1）、（2）中，若外球接地，U_1、U_2和△U 分别是多少？

（5） 设外球离地面很远，若内球接地，情况如何？

解：（1）由对称性和高斯定理求得，各区域的电场强度和电位分别为

$E=0(r<R_1)$

$E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(R_1<r<R_2)$

$E=0(R_2<r<R_3)$

$E=\dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(r>R_3)$

$U_1=\int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}\right)+\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R_3}(r\le R_1)$内球电位

$U_2=\int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}\right)+\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R_3}(R_1\le r\le R_2)$

$U_3=\int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}=\dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}(R_2\le r\le R_3)$外球电位

$U_4=\int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}=\dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r}(r\ge R_3)$

（2）两球的电位差为 $\Delta U=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)$

（3）以导线连接内外球，所有电荷将分布于球壳的外表面上， $U_{内}=U_{外}=\dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$

$\Delta U=0$

（4）若外球接地，则情形（1）（2）中球壳内表面带电-q,外表面不带电

内球电位$U_1=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)$

外球电位$U_2=0\rightarrow\Delta U=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)$

（5）内球电位为零。设其上所带电量为q′，

内球电位$U_1=\int_{R_1}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q'}{R_1}-\dfrac{q'}{R_2}+\dfrac{q'+Q}{R_3}\right)=0\rightarrow q'=\dfrac{QR_1R_2}{R_1R_2+R_2R_3-R_1R_3}$

外球电位$U_2=\int_{R_2}^{R_1}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{R_2}^{R_1}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q'}{r^2}dr=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q(R_1-R_2)}{R_1R_2+R_2R_3-R_1R_3}$

$\Delta U=U_2=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q(R_1-R_2)}{R_1R_2+R_2R_3-R_1R_3}$

9、上题中，设 $q=10^{-10}C$,$Q=11\times10^{-10}C$,$R_1=1cm$，$R_2=3cm$，$R_3=4cm$，试计算各种情形中的U_1、U_2和△U，并画出 U—r 曲线。

解：利用上题结果代入数据得

$$(1)U_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_3}=330V$$

$$U_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_3}=270V$$

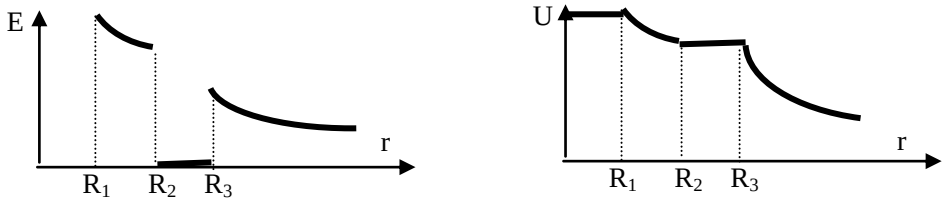
$$(2)\Delta U=U_1-U_2=60V$$

$$(3)U_1=U_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_3}=270V$$

$$(4)U_1=60V,U_2=0,\Delta U=U_1-U_2=60V$$

$$(5)U_1=0,U_2=180V,\Delta U=U_1-U_2=-180V$$

函数曲线如图所示。



１０、 设范德格喇夫起电机的球壳与传送带上喷射电荷的尖针之间的电位差为 3.0×10^6V，如果传送带迁移电荷到球壳上的速率为 3.0×10^{-3}C/s，则在仅考虑电力的情况下，必须用多大的功率来开动传送带？

解：开动传送带的功率至少应等于迁移电荷作功的功率

$$N=\frac{A}{t}=\frac{q\Delta U}{t}=\nu U=9000W$$

１１、 德格喇夫起电机的球壳直径为 1m。空气的击穿场强为 30KV/cm。这起电机最多能达到多高的电位？

解：对空间任一点 P，球壳所带电荷产生的电场的场强和电位分别为

$$\left.\begin{aligned}E&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\\U&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\end{aligned}\right\}\frac{U}{E}=r$$

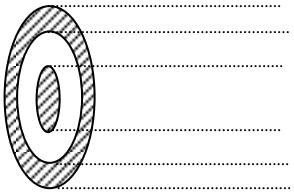
$$U_{\max}=ER=1.5\times10^6V$$

１２、 同轴传输线是由两个很长且彼此绝缘的同轴金属直圆柱体构成。设内圆柱体的电位为 U_1，半径为 R_1，外圆柱体的电位为 U_2，内半径为 R_2，求其间离轴为 r 处（$R_1<r<R_2$）的电位。

解：由高斯定理可解得内圆柱体和外圆柱体之间的电场强度为

$$\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$$

设 r 处的电位为 U，则 $U_1-U=\int_{R_1}^{r}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{R_1}$



$$\because U_1-U_2=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}=\frac{U_1-U_2}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

$$\therefore U=U_1-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{R_1}=U_1-(U_1-U_2)\frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)}$$

1 3、 同轴传输线是由两个很长且彼此绝缘的同轴金属直圆柱体构成。设内圆柱体的半径为 R_1，外圆柱体的内半径为 R_2，两圆柱体的电位差为 U。求其间离轴为 r_1 和 r_2 处（$R_1<r_1<r_2<R_2$）的电位差。

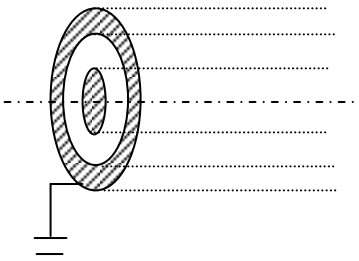
解：利用上题结果，离轴为 r_1 和 r_2 处（$R_1<r_1<r_2<R_2$）的电位差为

$$U_1-U_2=\int_{r_1}^{r_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_2}=U\frac{\ln(r_2/r_1)}{\ln(R_2/R_1)}$$

1 4、 一很长直导线横截面的半径为 a，这线外套有内半径为 b 的同轴导体圆筒，两者互相绝缘，外筒接地，它的电位为零。导线电位为 U，求导线和筒间的电场强度分布。

解：由高斯定理可求得 a<r<b 区域内的电场强度为 $\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$

导线相对于外筒的电位差为



$$U_a-U_b=\int_b^a\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

$$\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}=\frac{U_a-U_b}{\ln(b/a)}=\frac{U}{\ln(b/a)}$$

$$\therefore E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{U}{r\ln(b/a)}$$

---

§2.2 电容和电容器

思考题：

1、两导体 A、B 相距很远（因此它们都可以看成是孤立的），其中 A 原来带电，B 不带电。

现用一根细长导线将两球联接。电荷将按怎样的比例在两球上分配？

答：当用导线联接 A、B 时，$U_A=U_B$，两导体所带电量与电容成正比。如果两导体为球形，则 $\frac{q_A}{q_B}=\frac{C_A}{C_B}=\frac{4\pi\varepsilon_0 R_A}{4\pi\varepsilon_0 R_B}=\frac{R_A}{R_B}$，即电量与导体球的半径成正比。

2、用一个带电的小球与一个不带电的绝缘大金属球接触，小球上的电荷会全部传到大球上去吗？为什么？

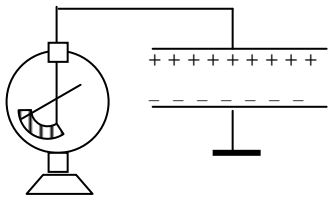
答：只要大球的半径是有限的，小球的电荷就不会全部传到大球上去。因为两球接触后，可看作一个孤立导体，表面的电荷分布与导体表面曲率有关。两球曲率不同，电荷的面密度不同。只要大球的半径与小球半径之比不是充分大，小球上保留的电荷与大球上的电荷相比就不能忽略。

3、将一个带电导体接地后，其上是否还会有电荷？为什么？分别就此导体附近有无其他带电体的不同情况加以讨论。

答：当带电体附近无其他带电体时，将带电体接地后，实验表明带电体上的电荷就会消失，这可以由静电平衡时，导体表面的电荷分布与曲率有关解释。$\frac{q}{Q}=\frac{r}{R}$，由于实际问题中，带电体的线度与地球半径比较可以忽略，即 r/R→0，所以 q/Q→0.可见，不论带电体和地球联接前如何带电，它们连接后，带电体上保留的电荷可以视为零。

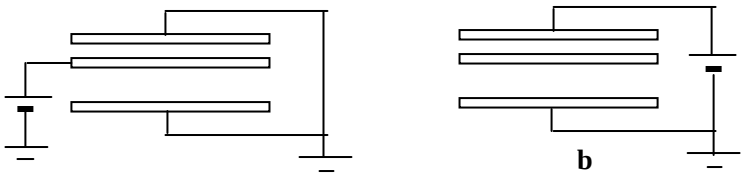
当接地带电体附近有其他带电体时，由于其他带电体在此接地带电体上产生异号感应电荷，接地导体上仍然还会有电荷。不过，这些电荷的符号和大小与原来的带电体情况无关，只取决于附近其他带电体所带的电荷的符号、大小和位置。

4、附图中所示是用静电计测量电容器两极板间电压的装置。试说明，为什么电容器上电压大时，静电计的指针偏转也大？



答：静电计可看作一个电容器，外壳为一极板，指针和支撑刻度盘的杆子为另一极板。平行板电容器与静电计构成的电容器并联。电压相等。电容一定时，电量与电压成正比。当平行板电容器的电压高时，静电计电容器上的电压也高。因而静电计指针和支撑刻度盘的金属杆上的电量也大，从而指针和杆子的排斥作用也大，静电计的指针偏转也就大。

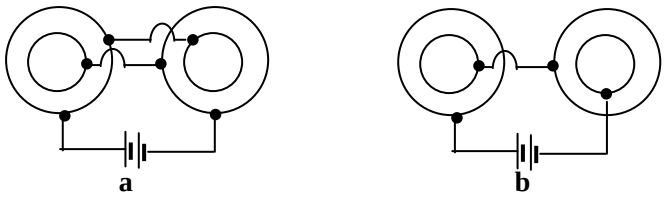
5、附图中三块平行金属板构成两个电容器。试判断图 a、b 中哪种接法是串联，哪种接法是并联。



a

答：a 是并联。b 是串联。

6、判断图 a、b 中两个同心球电容器是串联还是并联。



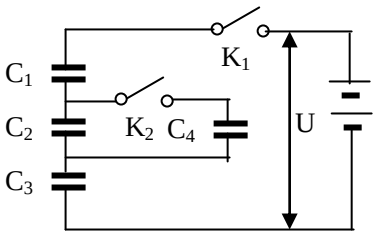
答：a 是并联。b 是串联。

7、附图中四个电容器大小相同（$C_1=C_2=C_3=C_4$），电源电压为 U，下列情况下每个电容器上的电压是多少？

（1） 起先电键 K_2 断开，接通 K_1 再接通 K_2，然后断开 K_1；

（2） 起先电键 K_2 断开，接通 K_1，断开 K_1，然后接通 K_2。

答：（1）K_2 断开，接通 K_1，$U_1=U_2=U_3=U/3$，$U_4=0$；



再接通 K_2，C_2 与 C_4 并联，$C_{24}=2C$

$U_1=U_3=2U_{24}$，$U_1+U_3+U_{24}=U$；

$U_1=U_3=2U/5$　$U_{24}=U/5$

断开 K_1，情况不变。

（总电压为 U 保持不变）

（2 电键 K_2 断开，接通 K_1，$U_1=U_2=U_3=U/3$，$U_4=0$；

断开 K_1，电量保持一定；

接通 K_2，$U_1=U_3=U/3$，$U_{24}=U/6$，$U_2=U_4=U/6$

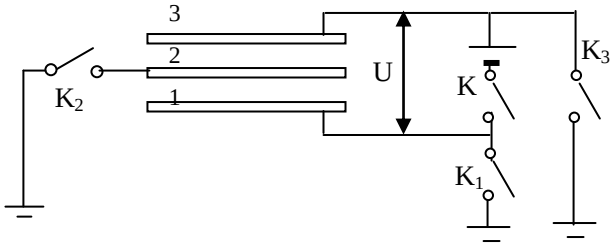
（电量不变，总电容增大，总电压减小）

8、 附图中三平行金属板面积相等，且等距。下列情形下各板的电位是多少？设原来电键 K 和 K_1 已接通，K_2 和 K_3 是断开的。

（1） 断开 K，断开 K_1，接通 K_2；

（２） 断开 K，接通 K_2，断开 K_1；

（３） 断开 K，接通 K_2，断开 K_2，接通 K_3。



解：三平行金属板面积相等，且等距，两相邻板之间构成的电容器电容相等。当最初电键 K 和 K_1 已接通，K_2 和 K_3 断开时，$U_1=0$，$U_2=U/2$，$U_3=U$。

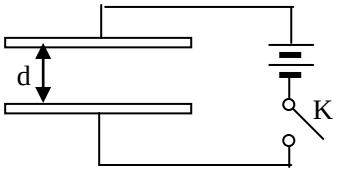
（１） 断开 K，断开 K_1，q_1 和 q_3 不变；接通 K_2，$U_2=0$。各板上电荷分布不变，只是零电位点变动，$U_1=-U/2$，$U_3=U/2$。

（２） 断开 K，q_3 不变；接通 K_2，$U_1= U_2$，其间 E=0，即 2 板下面正感应电荷与 1 板上负感应电荷中和。2 板和 3 板之间 E 不变；再断开 K_1，情况不变。

$U_1= U_2=0$, $U_3=U/2$。

（３） 断开 K，q_3 不变；接通 K_2，q_1 与 q_2 中和；断开 K_2，2 板上剩下的负电荷不变。接通 K_3，$U_3=U_1$；但由于 2 板上负电荷的作用，为保持导体内 E=0，$U_3=U_1$，3 板和 1 板必须有原来一半的电荷，各板间电场为原来一半，而且方向指向 2 板。所以 $U_2=-U/4$。

９、 如附图所示，用电源将平行板电容器充电后即将电键 K 断开。然后移近两极板。在此过程中外力作正功还是作负功？电容器储能增加还是减少？



答：两极板带等量异号电荷，相互吸引。在移近两板的过程中，电场力做正功，外力做负功，能量减少。

电容器充电后 K 断开，两极板上的电荷保持不变。

在移近两极板的过程中，电容器的电容增大，因而电压减小。由电容器储能公式 $W=\frac{1}{2}QU=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ 可知，电容器的储能减少。

１０、 在上题中，如果充电后不断开 K，情况怎样？能量是否守恒？

答：充电后不断开 K 时，在移近两板的过程中，外力仍做负功，但电压保持不变而电容增大，电容器储能增加。增加的能量来自于电源所做的功。

在恒压下增大电容，电源一方面为电容器增加电量，另一方面提供一部分能量对外

作功。能量守恒。

１１、 将一个接地的导体 B 移近一个带正电的孤立导体 A 时，A 的电位是升高还是降低？

答：A 的电位将降低。

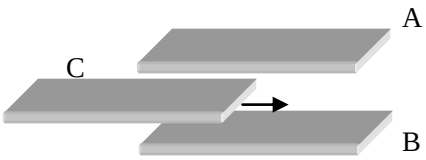
如果 B 不接地，A 带正电，在其电场作用下，附近的导体 B 上出现等量异号的感应电荷。近 A 端为负电荷，远 A 端为正电荷。若取无限远处为电位的零点，则正电荷激发的场中各点电位为正，负电荷激发的电场中各点电位为负。导体 A 上的电位等于本身电荷分布激发的场和 B 上感应电荷激发的场的叠加。B 上感应电荷对 A 的电位的贡献是负值，因而 B 离 A 越近，A 的电位越低。

B 是接地导体时，其上只有负的感应电荷，因此 A 的电位降低。

从能量角度分析，当 B 移近 A 时，受 A 的电场作用，将有负电荷从大地流入导体 B，在此过程中，电场力做正功，A 的电势能减少——电量不变，电位降低。

B 移近 A 的过程中，A 的电容增大，电量不变，电位降低。

１２、 两绝缘导体 A、B 分别带等量异号电荷。现将第三个不带电的导体 C 插入 A、B 之间（不与它们接触），U_{AB} 增大还是减少？



答：U_{AB} 将减少。

A、 B 带等量异号电荷，且保持电量不变。在导体 C 进入 AB 之间的过程中，C 上出现等量异号的感应电荷，C 所受 A、B 的合力方向指向 C 的插入方向，电场力做正功，能量减少。由 $W=\frac{1}{2}QU=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ 可知，U_{AB} 减小。

如果导体 C 有一定厚度 t，插入 A、B 之间时，相当于减小了两极板之间的距离，因 A、B 所带电量不变，两板之间的场强不变，U_{AB}=E（d-t）<Ed.

习题：

１、 地球的半径为 6370km，把地球当作真空中的导体球，求它的电容。

解：$C=4\pi\varepsilon_0 R=7.08\times10^{-4}F$

２、 空气电容器的两平行板相距为 1.0mm，两极板都是正方形，面积相等。要想它的电容分别是（1）100PF；（2）1.1μF；（3）1.0F，正方形的边长需多大？

解：$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}\rightarrow S=\frac{dC}{\varepsilon_0}=a^2\rightarrow a=\sqrt{\frac{dC}{\varepsilon_0}}$

（1）a=10.6cm　　(2) a=10.6m　　(3) a=10.6km

3、 面积都是 2.0m^2 的两平行导体板放在空气中相距 5.0mm，两板电位差为 1000V，略去边缘效应，求：

（1） 电容 C；

（2） 各板上的电量 Q 和电荷的面密度 σ；

（3） 板间的电场强度 E。

解：

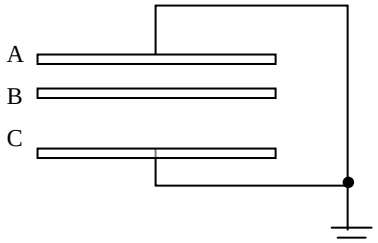
$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}=3.6\times10^{-9}F$$

$$Q=CU=3.6\times10^{-6}C\rightarrow\sigma=Q/S=1.8\times10^{-6}C/m^2$$

$$E=U/d=2.0\times10^{5}V/m$$

4、 如附图所示，三块平面金属板 A、B、C 彼此平行放置，AB 之间的距离是 BC 之间距离的一半。用导线将外侧的两板 A、C 相联并接地，使中间导体板 B 带电 3μC，三个导体板的六个面上的电荷各为多少？

解：相当于两个电容器并联



$$C_{AB}=\frac{\varepsilon_0 S}{d}=\frac{q_1}{U_{AB}}$$

$$C_{BC}=\frac{\varepsilon_0 S}{2d}=\frac{q-q_1}{U_{BC}}$$

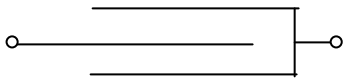
$$U_{AB}=U_{BC}\rightarrow\frac{q_1 d}{\varepsilon_0 S}=\frac{2(q-q_1)d}{\varepsilon_0 S}$$

解得$q_1=\frac{2}{3}q\mu C=2\mu C, q-q_1=1\mu C$

$$\therefore\sigma_1=0,\sigma_2=-2\mu C,\sigma_3=2\mu C,\sigma_4=1\mu C,\sigma_5=-1\mu C,\sigma_6=0$$

5、 如附图所示，一电容器由三片面积都是 6.0cm^2 的锡箔构成，相邻两箔间的距离都是 0.10mm，外边两箔片联在一起成为一极，中间箔片作为另一极。

（1） 求电容 C；



（2） 若在这电容器上加 220V 的电压，问各箔上电荷的面密度分别是多少？

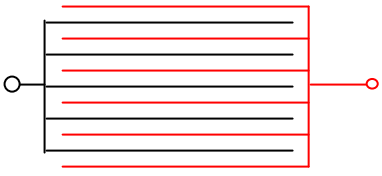
解：

$$C=C_1+C_2=2\varepsilon_0 S/d=1.07\times10^{-10}F$$

$$U_1=U_2\rightarrow Q_1=Q_2=C_1U=\varepsilon_0 SU/d=\sigma S\rightarrow\sigma=Q/S=1.96\times10^{-5}C/m^2$$

6、 如附图所示，面积为 1.0m^2 的金属箔 11 张平行排列，相邻两箔间的距离都是 5.0mm，奇数箔联在一起作为电容器的一极，偶数箔联在一起作为另一极。求电容 C。

解： 相当于十个相同的电容器并联。

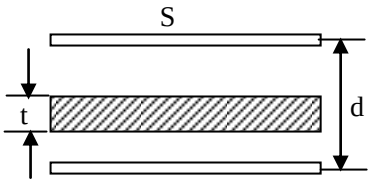


$$C=10C_1=10\frac{\varepsilon_0 S}{d}=1.78\times10^{-8}F$$

7、 如附图所示，平行板电容器两极板的面积都是 S，相距为 d，其间有一厚为 t 的金属片。略去边缘效应，

（1） 求电容 C；

（2） 金属片离极板的远近有无影响？



解：相当于两个电容器串联。设金属板距上板距离为 x

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{x}{\varepsilon_0 S}+\frac{d-(t+x)}{\varepsilon_0 S}=\frac{d-t}{\varepsilon_0 S}$$

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d-t}$$

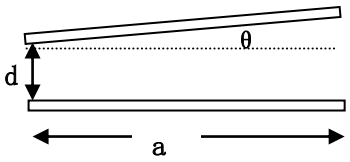
t不变时C亦不变,与金属片离极板的远近无关

当 t →0 时， $C=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$

当 t →d 时， C→∞

或者：$U=\int_0^{d-t} Edl=E(d-t)=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}(d-t)=\dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}(d-t)\rightarrow C=\dfrac{Q}{U}=\dfrac{\varepsilon_0 S}{(d-t)}$

8、 如附图所示，一电容器两极板都是边长为 a 的正方形金属平板，两板不是严格平行，而是有一夹角 θ 。证明：当 θ<<d/a 时，略去边缘效应，它的电容为 $C=\dfrac{\varepsilon_0 a^2}{d}(1-\dfrac{a\theta}{2d})$



解： 将两板同时分割为狭长的细窄条，长为 a，宽为 dx

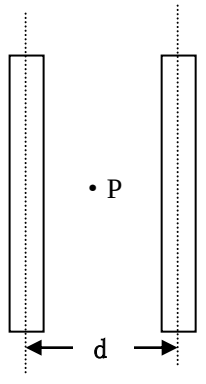
在 dx 宽度内，上下两平面仍近似平行,

$$dC=\frac{\varepsilon_0 dS}{d+x\sin\theta}=\frac{\varepsilon_0 a dx}{d+x\sin\theta}$$

$$C=\int_0^a \frac{\varepsilon_0 a}{d+x\sin\theta}dx=\frac{\varepsilon_0 a}{\theta}\ln(1+\frac{a\theta}{d})$$

9、 半径都是 a 的两根平行长直导线相距为 d(d>>a),求单位长度的电容。

解： 由高斯定理可求得两导线之间垂直连线上任意一点 P 的场强为



$$E = E_+ + E_- = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d-r}\right)$$

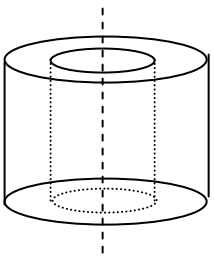
$$U = \int_a^{d-a} E dr = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d-a}{a}\right)$$

单位长度的电容为

$$C = \frac{\lambda}{U} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{d-a}{a}\right)}$$

１０、 证明：同轴柱形电容器两极的半径相差很小（即 R_B-R_A<<R_A）时，它的电容公式趋于平行板电容公式。

证明：同轴柱形电容器的电容公式为 $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\dfrac{R_B}{R_A}}$



令 R_B-R_A=d ,且 d<< R_A

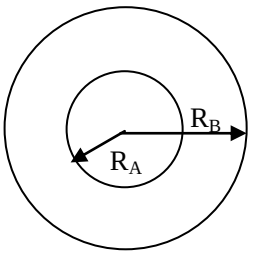
$$\ln\frac{R_B}{R_A} = \ln\frac{R_A + d}{R_A} = \ln(1 + \frac{d}{R_A}) \approx \frac{d}{R_A}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 2\pi R_A L}{d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

——相当于平行板电容器的电容公式

１１、 证明：同心球形电容器两极的半径相差很小（即 R_B-R_A<<R_A）时，它的电容公式趋于平行板电容公式。

证明：同心球形电容器的电容公式为 $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_A R_B}{R_B - R_A}$



当 R_B-R_A<<R_A 时，$R_B R_A \approx R^2$，R_B-R_A=d

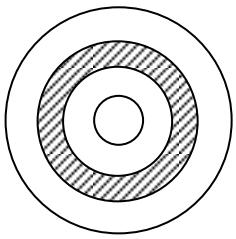
$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_A R_B}{R_B - R_A} \approx \frac{4\pi\varepsilon_0 R^2}{d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

——相当于平行板电容器的电容公式

１２、 一球形电容器内外两壳的半径分别为 R_1 和 R_4，今在两壳之间放一个内外半径分别为 R_2 和 R_3 的同心导体球壳。

（１） 给内壳以电量Q，求 R_1 和 R_4 两壳的电位差；

（２） 求电容。



解：（1）由对称性及高斯定理可得各区域场强分布为

$$E=0\left(r<R_1\right)$$

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(R_1<r<R_2\right)$$

$$E=0\left(R_2<r<R_3\right)$$

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(R_3<r<R_4\right)$$

$$\Delta U=U_1-U_4=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}+\int_{R_3}^{R_4}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_4}\right)$$

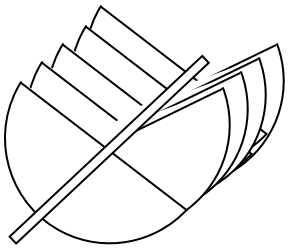
（2）电容为 $$C=\frac{Q}{\Delta U}=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_4}\right)}$$

１３、 收音机里用的可变电容如附图所示，其中共有 n 个面积为 S 的金属片，相邻两片的距离都是 d,奇数片联在一起作为一极，它固定不动（叫做定片），偶数片联在一起作为另一极，它可以绕轴转动（叫做动片）。

（１） 什么动片转动时电容C会改变？转到什么位置时C最大？转到什么位置时C最小？

（２） 证明：略去边缘效应时，C 的最大值为

$$C_M=\frac{(n-1)\varepsilon_0 S}{d}$$



解：（１）电容大小由定片和动片间正对着的那部分面积决定。

当动片转动时，正对面积变化，电容随之变化。

当动片完全转到定片间时，Ｓ达到最大，Ｃ就达到最大；

当动片完全转出定片时，Ｓ＝０，Ｃ达到最小。

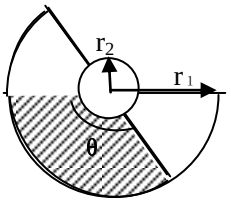
（２）当动片完全转入时，相当于 n-1 个电容器并联，

总电容为 $$C_M=\frac{(n-1)\varepsilon_0 S}{d}$$

１４、 收音机里用的可变电容如上题所示，其中共有 n 个金属片。每片形状如下图所示；相邻两片间的距离都是 d，当动片转到两组片之间夹角为 θ 时，证明：当 θ 较大时，

略去边缘效应，它的电容为 $C=\dfrac{(n-1)\pi\varepsilon_0\left(r_2^2-r_1^2\right)\theta}{360d}$ (θ以度为单位)

解：由扇形面积公式 $A=\dfrac{1}{2}r^2\theta$，得两组片对着的面积为



$$S=\frac{1}{2}r_2^2\theta-\frac{1}{2}r_1^2\theta=\frac{1}{2}\left(r_2^2-r_1^2\right)\theta$$ ———

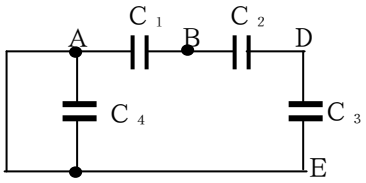
式中θ是以弧度为单位，若以度为单位，

$$S=\frac{1}{2}\left(r_2^2-r_1^2\right)\theta=\frac{1}{2}\left(r_2^2-r_1^2\right)\theta\frac{2\pi}{360}=\frac{\pi\left(r_2^2-r_1^2\right)\theta}{360}$$

整个电容器可视为n-1个电容器并联而成

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}=\frac{(n-1)\pi\varepsilon_0\left(r_2^2-r_1^2\right)\theta}{360d}$$

15、四个电容器的电容分别为C_1、C_2、C_3和C_4，联接如图所示，分别求：



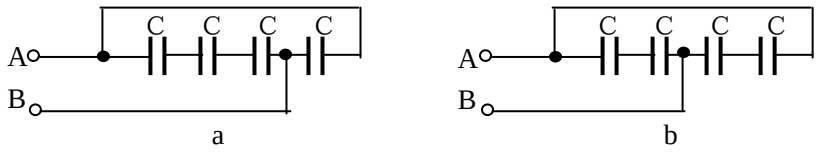
（1） AB间；（2）DE间；（3）AE间的电容。

解：（1）AB间的电容为 $C_{AB}=C_{EB}=C_1+\dfrac{C_2C_3}{C_2+C_3}=\dfrac{C_1C_2+C_2C_3+C_1C_3}{C_2+C_3}$

（2）DE间的电容为 $C_{DE}=C_3+\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\dfrac{C_1C_2+C_2C_3+C_1C_3}{C_1+C_2}$

（3）AE间有导线接通，相当于无穷大的电容。 $C_{AE}\Rightarrow\infty$

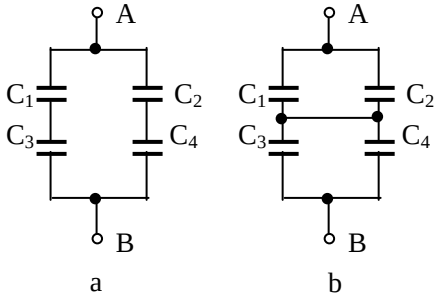
16、四个电容器的电容都是C，分别按图a和图b联接，求A、B间的电容。哪种接法总电容较大？



解： (1) $C_{AB}=C+\dfrac{1}{3}C=\dfrac{4}{3}C$

(2) $C_{AB}=\dfrac{C}{2}+\dfrac{C}{2}=C$ b 接法总电容较大。

17、四个电容C_1、C_2、C_3和C_4都已知，求图a、



b 两种联法时，A B 间的电容。

解：两种联法 A 、B 间的电容分别为

$$C_{AB}=\frac{C_1C_3}{C_1+C_3}+\frac{C_{21}C_4}{C_2+C_4}=\frac{C_1C_3(C_2+C_4)+C_2C_4(C_1+C_3)}{(C_1+C_3)(C_2+C_4)}$$

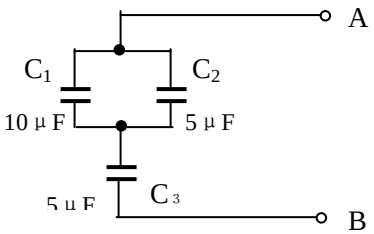
$$C_{AB}=\frac{(C_1+C_2)(C_3+C_4)}{C_1+C_2+C_3+C_4}$$

1 8 、（1）求附图中 A 、B 间的电容；

（2） 在 A 、B 间加上 1 0 0 V 的电压，求 C 2 上的电荷和电压；

（3） 如果这时 C 1 被击穿，问 C 3 上的电荷和电压各是多少？

解： （1） $C_{AB}=\frac{(C_1+C_2)C_3}{C_1+C_2+C_3}=3.75\mu F$



（2） C 2 上的电荷和电压

$$\left.\begin{aligned}Q_1+Q_2=Q=CU\\ \frac{Q_2}{C_2}=\frac{Q_1}{C_1}\end{aligned}\right\}Q_2=CU-Q_1=CU-C_1\frac{Q}{C_2}$$

$$\therefore Q_2=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U=1.25\times10^{-4}C$$

$$U_2=Q_2/C_2=25V$$

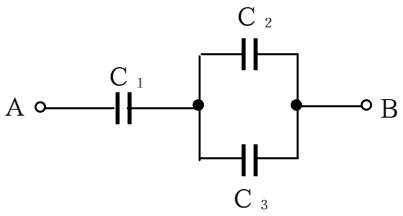
（3） C 1 被击穿时， C 2 短路，全部电压将加在 C 3 上，

U 3 ＝U＝1 0 0 V

Q 3 ＝C 3 U＝5 × 1 0 $^{-4}$ C

1 9 、如附图，已知 C 1 ＝0. 25 μ F， C 2 ＝0. 15 μ F， C 3 ＝0. 20 μ F， C 1 上的电压为 5 0 V 。求 U AB 。

解： C 2 与 C 3 并联后与 C 1 串联。



$$Q=C_1U_1=C_{23}U_{23}$$

$$U_{23}=\frac{C_1}{C_2+C_3}U_1$$

$$U_{AB}=U_1+U_{23}=\left(1+\frac{C_1}{C_2+C_3}\right)U_1=86V$$

2 0 、标准电容的线路如图所示，

（1） 当 K 4 和 K 6 接上边， K 5 和 K 7 接到下边，而其他 K 上下都不接时，A B 之间

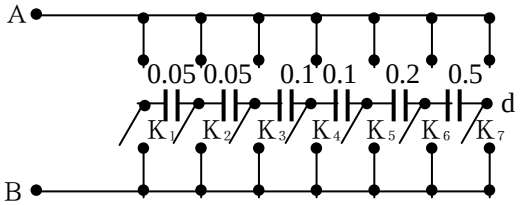
的电容是多少？

（２） 当Ｋ$_1$向上，Ｋ$_3$向下接通，而其他Ｋ上下都不接时，ＡＢ之间的电容是多少？

（３） 要得到0.4μF的电容，各Ｋ如何接？

（４） 能得到最大的电容是多少？怎样接法？

（５） 能得到最小的电容是多少？怎样接法？



解：　（１）$C_{AB}=(0.1+0.2+0.5)=0.8\mu F$

（２）$C_{AB}=0.05/2=0.025\mu F$

（３）应将0.1、0.1、0.2三个电容器并联，Ｋ$_3$、Ｋ$_5$向上，Ｋ$_4$、Ｋ$_6$向下。

（４） 应为各电容器并联的总电容。Ｃ＝１．０μＦ

Ｋ$_1$Ｋ$_3$Ｋ$_5$Ｋ$_7$向下，Ｋ$_2$Ｋ$_4$Ｋ$_6$向上。

（５） 应为各电容器串联的总电容　Ｃ＝０．０１４９μＦ　　Ｋ$_1$向上，Ｋ$_7$向下

２１、有一些相同的电容器，每个电容都是２．０μF，耐压都是２００Ｖ。现在要用它们联接成耐压１０００Ｖ，（１）电容Ｃ＝０．４０μF和（２）Ｃ＝１．２μF的电容器，问各需要这种电容器多少个？怎样联法？

解：　（１）将5个电容为２．０μF，耐压２００Ｖ的电容器串联

Ｃ＝０．４０μF，Ｕ＝５Ｕ$_0$＝１０００Ｖ

（２）将5个电容为２．０μF，耐压２００Ｖ的电容器串联为一组，再并联三组

Ｃ＝１．２μF，　Ｕ＝１０００Ｖ

２２、两个电容器Ｃ$_1$和Ｃ$_2$，分别标明为Ｃ$_1$：２００ＰＦ５００Ｖ，Ｃ$_2$：300ＰＦ900Ｖ.把它们串联后，加上１０００Ｖ电压，是否会被击穿？

解：　串联后总电容为　Ｃ＝１２０ＰＦ，总电量Ｑ＝ＣＵ＝1.2×10^{-7}C,

加在Ｃ$_1$和Ｃ$_2$上的电压分别为Ｕ$_1$＝６００Ｖ，Ｕ$_2$＝４００Ｖ

Ｃ$_1$上的电压超过额定电压，首先被击穿。Ｃ$_1$击穿后，１０００Ｖ电压全部加在Ｃ$_2$上，Ｃ$_2$也被击穿。

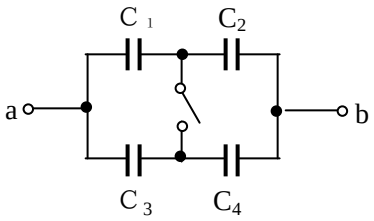
２３、四个电容器$C_1=C_4=$ 0.20μF，$C_2=C_3=$0.60μF，联接如图所示。

（１）　分别求K断开和接通时的Cab;

（２）　当 Uab=100V 时，分别求 K 断开和接通时各电容上的电压。

解　（１）K 断开时　$C_{ab}=2\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}=0.3\mu F$

K 接通时　$C_{ab}=\dfrac{(C_1+C_2)(C_3+C_4)}{C_1+C_2+C_3+C_4}=0.4\mu F$



（２）K 断开时　U＝100Ｖ，Q＝C U＝30μC

每个电容器上 15μC，　$U_1=U_4=Q/C_1=75V$，　$U2=U3=Q/C_2=25V$

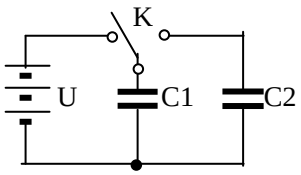
K 接通时　U＝100Ｖ，　C＝0.4μF，　Q＝C U＝40μC

U1=50V，　U2=50V

２４、如图所示，C_1=20μF，C_2=5μF，先用 U=1000V 把 C_1 充电，然后把 K 拨到另一侧使 C_1 与 C_2 联接。求：

（１）　C_1 和 C_2 所带的电量；

（２）　C_1 和 C_2 两端的电压。



解：（１）C_1 和 C_2 所带的电量为

$$\left.\begin{array}{l} Q_{10}=C_1U=Q_1+Q_2 \\ \dfrac{Q_1}{C_1}=\dfrac{Q_2}{C_2} \end{array}\right\}\rightarrow \begin{array}{l} Q_1=\dfrac{C_1^2U}{C_1+C_2}=1.6\times10^{-2}C \\ Q_2=\dfrac{C_2}{C_1}Q_1=0.4\times10^{-2}C \end{array}$$

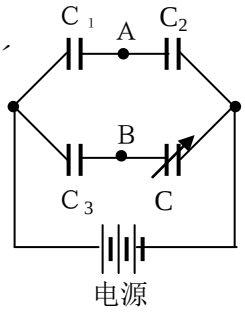
（２）C_1 和 C_2 两端的电压为

$U_2=U_1=Q_1/C_1=800V$

２５、附图中的电容 C_1、C_2、C_3 都是已知的，电容 C 是可以调节的。问当 C 调节到 A、B 两点的电位相等时，C 的值是多少？

解：设串联的电容 C 和 C 3 上的电量为 q，C 1 和 C 2 上的电量为 q´

A、B 两点等电位



$$\left.\begin{array}{l} U_c=U_2\rightarrow\dfrac{q}{C}=\dfrac{q'}{C_2} \\ U_1=U_3\rightarrow\dfrac{q}{C_3}=\dfrac{q'}{C_2} \end{array}\right\}\dfrac{C}{C_3}=\dfrac{C_2}{C_1}\rightarrow C=\dfrac{C_2C_3}{C_1}$$

２６、把 C_1=1.0μF 和 C_2=2.0μF 并联后接到 900V 的直流电源上，

（1） 求每个电容器上的电压和电量；

（2） 去掉电源，并把 C1 和 C2 彼此断开，然后再把它们带异号电荷的极板分别接在一起，求每个电容器上的电压和电量。

解： （1）C_1、C_2并联后接到 900V 的直流电源上，

$$U_1 = U_2 = 900V \begin{cases} Q_1 = C_1 U_1 = 0.9\times10^{-3} C \\ Q_2 = C_2 U_2 = 1.8\times10^{-3} C \end{cases}$$

（2）去掉电源后重新联接，两电容器互相充电，电量重新分配

$$q = Q_2 - Q_1 = 1.8\times10^{-3} - 0.9\times10^{-3} = 0.9\times10^{-3} C$$
$$C = C_1 + C_2 = 3.0\times10^{-6} F$$
$$U = q/C = 300V$$
$$\therefore q_1 = C_1 U_1 = 0.3\times10^{-3} C$$
$$q_2 = C_2 U_2 = 0.6\times10^{-3} C$$

2 7、把 C_1=2.0 μF 和 C_2=8.0 μF 串联后，加上 300V 的直流电压。

（1） 求每个电容器上的电量和电压；

（2） 去掉电源，并把 C1 和 C2 彼此断开，然后再把它们带正电的极板接在一起，带负电的极板也接在一起，求每个电容器上的电压和电量；

（3） 如果去掉电源并彼此断开后，再把它们带异号电荷的极板分别接在一起，求每个电容器上的电压和电量。

解： 串联电容器的总电容及总电量为

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 1.6\times10^{-6} F \qquad Q = CU = 4.8\times10^{-4} C = Q_1 = Q_2$$

（1）每个电容器上的电量和电压为

$$Q_1 = Q_2 = 4.8\times10^{-4} C \begin{cases} U_1 = Q_1 / C_1 = 240V \\ U_2 = Q_2 / C_2 = 60V \end{cases}$$

（2）去掉电源后并接

$$\left.\begin{matrix} Q' = 2Q \\ C = C_1 + C_2 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} U' = Q'/C = 60V \\ q_1 = C_1 U' = 1.9\times10^{-4} C \\ q_2 = C_2 U' = 7.7\times10^{-4} C \end{matrix}$$

（3）去掉电源后串接

$$Q'' = Q_1 - Q_2 = 0 \qquad U'' = 0$$

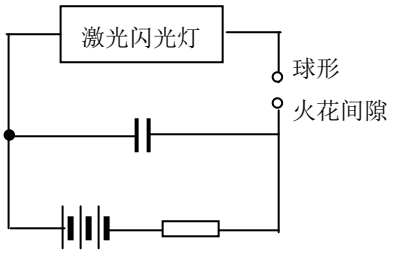
2 8、C_1= 100 μF 充电到 50V 后去掉电源，再把 C_1的两极板分别接到 C_2的两极板上（C_2原

来不带电），测得这时 C_1 上的电位差降低到 3.5V，求 C_2。

解：充电后，C_1 上的电量为 $Q=C_1U=5.0\times10^{-9}C$ ，与 C_2 联接后，

$$Q_1+Q=Q=5.0\times10^{-9}C$$
$$Q_1=C_1U_1=3.5\times10^{-9}C$$
$$\frac{Q_1}{C_1}=U_1=U_2=\frac{Q_2}{C_2}\rightarrow C_2=\frac{Q_2}{U_1}=\frac{Q-Q_1}{U_1}=43\mu F$$

2 9、激光闪光灯的电源线路如图所示，由电容器 C 储存的能量，通过闪光灯线路放电，给闪光灯提供能量。电容 C=6000μF，火花间隙击穿电压为 2000V，问 C 在一次放电过程中，能放出多少能量？



解： $W=\frac{1}{2}CU^2=1.2\times10^4J$

3 0、两电容器的电容之比为 C1：C2=1：2，把它们串联后接到电源上充电，它们的电能之比是多少？如果并联充电，电能之比是多少？

解：（1）串联充电时

$$Q_1=Q_2=Q\rightarrow\frac{W_1}{W_2}=\frac{\frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1}}{\frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2}}=\frac{C_2}{C_1}=\frac{2}{1}$$

（2）并联充电时

$$U_1=U_2=U\rightarrow\frac{W_1}{W_2}=\frac{\frac{1}{2}C_1U_1^2}{\frac{1}{2}C_2U_2^2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{1}{2}$$

3 1、已知两电容器 C_1=10PF，C_2=20PF，把它们串联后充电到 2.0V，问它们各蓄了多少电能？

解： 充电后所带电量为 $Q=CU=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U=Q_1=Q_2$

两电容器各自储存的电能为

$$W_1=\frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1}=8.9\times10^{-12}J$$
$$W_2=\frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2}=4.4\times10^{-12}J$$

3 2、(1) 一平行板电容器两极板的面积都是 S，相距为 d，电容便为 $C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$。当在两板上加上电压 U 时，略去边缘效应，两板间电场强度为 E=U/d。其中一板所带电量为 Q=CU，故它所受的力为 $F=QE=CU\left(\frac{U}{d}\right)=\frac{CU^2}{d}$，这个结果对吗？为什么？

(2) 用虚功原理证明：正确的公式应为 $F=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{Cd}=\frac{1}{2}\frac{CU^2}{d}$

解：（1）这个结果不对。因为 E＝U／d 是两极板之间的电场强度，而不是面电荷 Q 所在处的电场强度。

Q 所在处的场强大小为 $\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}=\frac{1}{2}E=\frac{U}{2d}$

正确的结果应为 $F=QE_Q=\frac{QU}{2d}=\frac{1}{2}\frac{CU^2}{d}$

（2）电容器储存能量为 $W=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d}\left(\frac{E}{d}\right)^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Sd$

当电荷在电场中位移 dr 时，电场作用在它上面的力 F 所作的功 dA 等于电势能减少的值。即 $d\vec{A}=\vec{F}\cdot d\vec{r}=-dW\rightarrow\vec{F}=-\nabla W$

$$\vec{F}=-\nabla\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Sd\right)=-\frac{\partial}{\partial d}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Sd\right)\vec{e}_d=-\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 S\vec{e}_d$$

式中 edo 极板表面法线方向的单位矢量，指向 d 增大的方向，负号表明 F 的方向是指向 d 减小的方向。F 的大小为

$$F=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 S=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d}\frac{E^2 d^2}{d}=\frac{1}{2}C\frac{U^2}{d}$$

3 3、一平行板电容器极板面积为 S，间距为 d，带电±Q，将极板的距离拉开一倍。计算

（1） 静电能改变多少？

（2） 抵抗电场力作了多少功？

解： （1）电量 Q 保持不变，静电能的改变为 $\Delta W=\frac{Q^2}{2C'}-\frac{Q^2}{2C}=\frac{Q^2}{2C}$，增加了一倍。

（2）抵抗电场力所作的功等于静电能的增加。$A=\Delta W=\frac{Q^2}{2C}$

３４、一平行板电容器极板面积为Ｓ，间距为ｄ，接在电源上以保持电压为Ｕ，将极板的距离拉开一倍。计算：

（１）　静电能的改变；

（２）　电场对电源作的功；

（３）　外力对极板作的功；

解：　（１）电压保持不变，静电能的改变为

$$\Delta W=\frac{1}{2}C'U^2-\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}W_0$$　　静电能减小一倍

（２）电场对电源作功是变力作功

$$dA=Udq=Ud(Uc)=U^2dc$$

$$\because c=\frac{\varepsilon_0 S}{x}\rightarrow dc=-\frac{\varepsilon_0 S}{x^2}dx$$

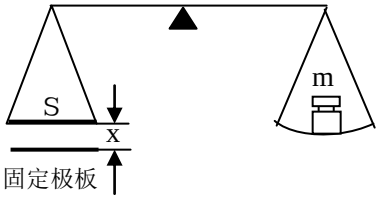
$$\therefore A=\int_d^{2d}dA=\int_d^{2d}-\frac{\varepsilon_0 SU^2}{x^2}dx=-\frac{\varepsilon_0 SU^2}{2d}=-\frac{1}{2}CU^2$$

（３）外力对极板（电场）作功＋电源对电场作功＝静电能的增量

$$\Delta W=A+A_{外}$$

$$A_{外}=\Delta W-A=\frac{\varepsilon_0 SU^2}{4d}$$

３５、静电天平的装置如图所示，一空气平行板电容器两极板的面积都是Ｓ，间距为ｘ，下板固定，上板接到天平的一头。当电容器不带电时，天平正好平衡。然后把电压Ｕ加到电容器的两极上，则天平的另一头须加上质量为ｍ的砝码，才能达到平衡。求所加的电压。



解：加上电压Ｕ后，极板所受的静电力为

$$F=QE_Q=Q\left(\frac{1}{2}E\right)=\frac{1}{2}Q\frac{U}{x}=\frac{1}{2}C\frac{U^2}{x}=\frac{1}{2}\varepsilon_0 S\left(\frac{U}{x}\right)^2$$

当天平平衡时，　Ｆ＝mg

$$\therefore U=\sqrt{\frac{2mgx^2}{\varepsilon_0 S}}$$

---

§2.3　　电介质

思考题：

1、（1）将平行板电容器两极板接在电源上以维持其间电压不变，用介电常数为ε的均匀电介质把它充满，极板上的电荷量为原来的几倍？电场为原来的几倍？

（2）若充电后拆掉电源，然后再加入电介质，情况如何？

答：（1）极板间电压 U_0 保持不变，加入电介质时，电容器的电容 $C=\varepsilon C_0$，极板上电荷 $Q=CU_0=\varepsilon C_0 U_0=\varepsilon Q_0$，可见电量增加为原来的ε倍。$E=U/d$，极板间的场强保持不变，

（2）极板上电荷量 Q_0 保持不变，加入介质后，电容增加为 $C=\varepsilon C_0$。极板间的电压 $U=Q_0/C=U_0/\varepsilon$，极板间的电压降低。介质中的总场强小于原来的场强，$E=U/d=E_0/\varepsilon$，

2、如图所示，平行板电容器的极板面积为S，间距为d，试问：

（1）　将电容器接在电源上，插入厚度为d/2的均匀电介质板，介质内、外电场之比是多少？它们和未插入电介质之前电场之比为多少？(图a)

（2）　在问题（1）中，若充电后拆去电源，插入电介质板，情况如何？

（3）　将电容器接在电源上，插入面积为S / 2的均匀电介质板，介质内、外电场之比是多少？它们和未插入电介质之前电场之比为多少？（图b）

（4）　在问题（3）中，若充电后拆去电源，插入电介质板，情况如何？

（5）　图a、b中电容器的电容各为真空时的几倍？

以上各问题中都设电介质的介电常数为ε。

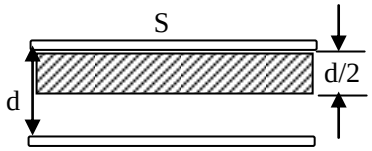


图 a

答：（1）插入厚度为 d/2 的介质板，电压 U_0 保持不变，

$$U_0=U_{内}+U_{外}=\frac{1}{2}E_{内}d+\frac{1}{2}E_{外}d=\frac{1}{2}(\frac{D}{\varepsilon}+\frac{D}{\varepsilon_0})d=\frac{1}{2}(\frac{\varepsilon+\varepsilon_0}{\varepsilon\varepsilon_0})Dd$$

$$D=\frac{2\varepsilon\varepsilon_0U_0}{(\varepsilon+\varepsilon_0)d}=\frac{2\varepsilon\varepsilon_0E_0}{(\varepsilon+\varepsilon_0)}$$

$$\left.\begin{aligned}E_{内}&=\frac{D}{\varepsilon}=\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}E_0\\E_{外}&=\frac{D}{\varepsilon_0}=\frac{2\varepsilon}{\varepsilon+\varepsilon_0}E_0\end{aligned}\right\}\frac{E_{内}}{E_{外}}=\frac{1}{\varepsilon_r}\rightarrow\left\{\begin{aligned}\frac{E_{内}}{E_0}&=\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}=\frac{2}{\varepsilon_r+1}\\\frac{E_{外}}{E_0}&=\frac{2\varepsilon}{\varepsilon+\varepsilon_0}=\frac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r+1}\end{aligned}\right.$$

（2）电量 Q_0 保持不变，则 D 保持不变。

$$\left.\begin{aligned}E_{内}&=\frac{D}{\varepsilon}=\frac{\varepsilon_0E_0}{\varepsilon}=\frac{E_0}{\varepsilon_r}\\E_{外}&=\frac{D}{\varepsilon_0}=E_0\end{aligned}\right\}\frac{E_{内}}{E_{外}}=\frac{1}{\varepsilon_r}\rightarrow\left\{\begin{aligned}\frac{E_{内}}{E_0}&=\frac{1}{\varepsilon_r}\\\frac{E_{外}}{E_0}&=1\end{aligned}\right.$$

（3）插入面积为 S/2 的介质板，电压 U_0 保持不变。虽然有介质部分有退极化场存在，但与电介质相对应的那一部分极板的自由电荷增加，刚好抵消。

$$U_0 = E_{内}d = E_{外}d = E_0 d$$

$$E_{内} = E_{外} = E_0 \begin{cases} \dfrac{E_{内}}{E_0} = 1 \\ \dfrac{E_{外}}{E_0} = 1 \end{cases} \rightarrow \frac{E_{内}}{E_{外}} = 1$$

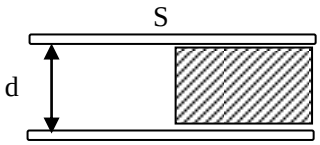


图 b

（4）电容器上总电量 Q_0 保持不变。加入介质后，极板上的电荷分布发生变化，有介质的部分极板上电荷密度增大，无介质部分电荷密度减小，结果电容器极板间的电压降低。设右、左部分电荷密度分别为 σ_1、σ_2。

$$Q_0 = \sigma_0 S = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)S \rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma_0$$

$$\frac{U}{d} = E_{右} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon} = E_{左} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} \rightarrow \sigma_1 = \varepsilon_r \sigma_2 \begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{2\varepsilon_r \sigma_0}{\varepsilon_r + 1} \\ \sigma_2 = \dfrac{2\sigma_0}{\varepsilon_r + 1} \end{cases}$$

$$E_{右} = E_{左} = \frac{2}{\varepsilon_r + 1}\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{2E_0}{\varepsilon_r + 1} \rightarrow \frac{E_{左}}{E_0} = \frac{E_{右}}{E_0} = \frac{2}{\varepsilon_r + 1}$$

（5）由（1）（2）的结果可算出总电容等于两个电容的串联。

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = 2\varepsilon_r C_0 \\ C_2 = 2C_0 \end{array}\right\} C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1} C_0$$

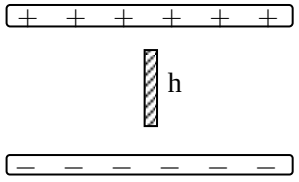
由（3）（4）的结果可算出总电容等于两个电容的并联

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = \dfrac{1}{2} C_0 \\ C_2 = \dfrac{1}{2}\varepsilon_r C_0 \end{array}\right\} C = C_1 + C_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_r + 1) C_0$$

3、平行板电容器两板上自由电荷密度分别为＋σ、－σ。今在其中放一半径为 r、高度为 h 的圆柱形介质（介电常数为 ε），其轴线与板面垂直。求在下列两种情况下圆柱介质中点的场强 E 和电位移矢量 D。

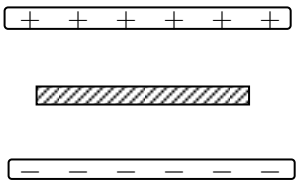
（1） 细长圆柱，h>>r；　　（2）扁平圆柱，h<<r .

解：（1）电场使介质极化，由于 E_0 方向与介质柱的轴线方向平行，只有介质柱的上下两底面出现束缚电荷，因 h>>r，介质柱上下底面很小，束缚电荷 $Q_P = \sigma_P S$ 很小，而且离介质柱的中点较远，所以 Q_P 产生的电场与 E_0 相比很小，可以忽略，因此介质柱中点的场强



$$E = E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}, D = \varepsilon E = \varepsilon_r \sigma_0$$

（２）介质柱上下两底面的束缚电荷不能忽略，可以将其看成无限大平面，束缚电荷在这两个面之间产生的电场为



$$E' = \frac{P}{\varepsilon_0} = (\varepsilon_r - 1)E$$

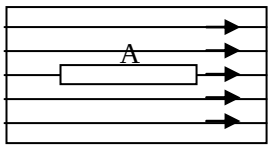
介质中的场强为

$E = E_0 - E' = E_0 - (\varepsilon_r - 1)E \rightarrow E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon}$。介质中的电位移 $D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = \sigma_0$

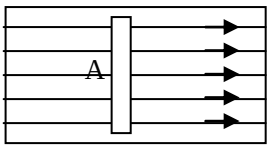
４、在均匀极化的电介质中挖去一个半径为 r、高度为 h 的圆柱形空穴，其轴线平行于极化强度矢量 P。求在下列两种情况下空穴中点 A 处的场强 E 和电位移矢量 D 与介质中 E、D 的关系。

（１） 细长圆柱，h>>r；（图 a）

（２） 扁平圆柱，h<<r。（图 b）



（图 a）



（图 b）

解：（1）中束缚电荷的场可以忽略，

$$E_A = E = \frac{P}{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}, D_A = \varepsilon_0 E_A = \frac{P}{(\varepsilon_r - 1)} \qquad D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = \frac{\varepsilon_r P}{(\varepsilon_r - 1)} = \varepsilon_r D_A$$

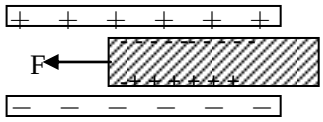
（2）中束缚电荷在 A 点的场，可视为无限大均匀带电平面的场

$$D_A = D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E \qquad E = \frac{P}{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}, E_A = \varepsilon_r E$$

５、用电源将平行板电容器充电后即将电源断开，然后插入一块电介质板。在此过程中电容器储能增加还是减少？介质板受什么方向的力？外力作正功还是作负功？

解：电容器极板电荷保持不变，电介质板在进入带电的平行板电容器的过程中，相当于两个电容器并联，

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = \frac{x}{L} C_0 \\ C_2 = \frac{L-x}{L} \varepsilon_r C_0 \end{array}\right\} C = C_1 + C_2 = \frac{x}{L}(1 - \varepsilon_r) C_0 + \varepsilon_r C_0 > C_0$$



电容器储能减少 $W = \frac{Q^2}{2C} < W_0$

介质由于极化作用产生束缚电荷，电荷受电场力作用，方向指向电容器内部。释放后，介质在电场力作用下加速移进电容器内，电场力作正功，外力作负功，电场能量减少。

６、在上题中，如果充电后不断开电源，情况怎样？能量是否守恒？

答：U 保持不变，电容增大时，有电荷从电源流向电容器，电容器储能增加。电场力作正功，外力作负功。电源所作的功等于克服外力作功与电容器能量增加之和。

习题：

1、一平行板电容器两极板相距为 2.0mm，电位差为４００Ｖ，其间充满了介电常数为ε＝5.0 的玻璃片。略去边缘效应，求玻璃表面上极化电荷的面密度。

解：$\sigma' = P_n = (\varepsilon - \varepsilon_0)E = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \dfrac{U}{d} = 7.08\times10^{-6}(C/m^2)$

2、一平行板电容器由面积都是５０cm^2的两金属薄片贴在石腊纸上构成。已知石腊纸厚为 0.10mm，ε＝２．０，略去边缘效应，问这电容器加上１００Ｖ的电压时，极板上的电荷量Ｑ是多少？

解：由电位移的高斯定理可得介质中的Ｄ与极板上电荷量的面密度之间的关系为

$$D = \sigma$$

$$D = \varepsilon_r\varepsilon_0 E = \varepsilon_r\varepsilon_0 \frac{U}{d} \qquad Q = \sigma S = \varepsilon_r\varepsilon_0 \frac{US}{d} = 8.9\times10^{-6}(C)$$

3、面积为 1.0m^2 的两平行金属板，带有等量异号电荷±３０μＣ，其间充满了介电常数ε＝２的均匀电介质。略去边缘效应，求介质内的电场强度Ｅ和介质表面上的极化电荷面密度。

解：介质内的电场强度为 $E = \dfrac{E_0}{\varepsilon_r\varepsilon_0} = 1.7\times10^6(V/m)$

极板上的极化电荷面密度为 $\sigma' = (\varepsilon - \varepsilon_0)E = 1.5\times10^{-5}(C/m^2)$

4、平行板电容器（极板面积为Ｓ，间距为ｄ）中间有两层厚度各为 d_1 和 d_2($d_1+d_2=d$)，介电常数各为 ε_1 和 ε_2 的电介质层。试求：

（１） 电容Ｃ；

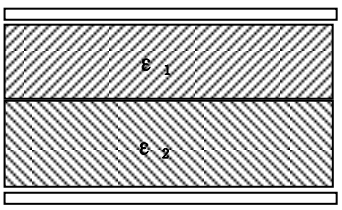
（２） 当金属极板上带电面密度为±σ_0时，两层介质分界面上的极化电荷面密度σ′；

（３） 极板间电位差Ｕ；

（４） 两层介质中的电位移Ｄ。

解：（１）$C = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{\sigma_0 S}{E_1 d_1 + E_2 d_2} = \dfrac{\sigma_0 S}{\dfrac{E_0}{\varepsilon_1}d_1 + \dfrac{E_0}{\varepsilon_2}d_2} = \dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 S}{d_1\varepsilon_2 + d_2\varepsilon_1}$

（２）$\sigma' = \sigma_1' - \sigma_2' = P_1 - P_2 = \dfrac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\sigma_0$



（３）$U = U_1 + U_2 = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\dfrac{d_1\varepsilon_2 + d_2\varepsilon_1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}$

（４）$D = D_1 = D_2 = \sigma_0$

5、两平行导体板相距 5.0mm，带有等量异号电荷，面密度为 20μC/m^2,其间有两片电介质，一片厚 2.0mm，ε_1=3.0;另一片厚 3.0mm，ε_1=4.0。略去边缘效应，求各介质内的E、D和介质表面的σ′。

解：由介质中的高斯定理得，两介质中电位移的大小为

$$D_1 = D_2 = 20(\mu C/m^2) = 2.0\times10^{-5}(C/m^2)$$

由D=εE可知E与D同方向，E的大小分别为

$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_1} = 7.5\times10^5(V/m) \qquad E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_2} = 5.6\times10^5(V/m)$$

两介质表面的极化电荷面密度为

$$\sigma_1' = \pm(1-\frac{1}{\varepsilon_{r1}})\sigma = \pm1.3\times10^{-5}(C/m^2)$$

$$\sigma_2' = \pm(1-\frac{1}{\varepsilon_{r2}})\sigma = \pm1.5\times10^{-5}(C/m^2)$$

6、一平行板电容器两极板的面积都是 2.0m^2，相距为 5.0mm，两极加上10000V电压后，取去电源，再在其间充满两层介质，一层厚 2.0mm，ε_1=5.0;另一层厚 3.0mm，ε_2=2.0。略去边缘效应，求：

（1） 各介质中的电极化强度P；

（2） 电容器靠近电介质 2 的极板为负极板，将它接地，两介质接触面上的电位是多少？

解：（1）未放入介质时，加上电压U后，电容器带电量为$Q = \sigma S = DS = \varepsilon_0 ES = \frac{\varepsilon_0 US}{d}$

断开电源后，Q不变，σ也不变，两介质中的电位移为

$$D_1 = D_2 = \sigma = \frac{\varepsilon_0 U}{d}$$

介质中的电场强度为 $E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{U}{\varepsilon_{r1}d}$ $E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_2} = \frac{U}{\varepsilon_{r2}d}$

介质中的极化强度为 $P_1 = D_1 - \varepsilon_0 E_1 = (1-\frac{1}{\varepsilon_{r1}})\frac{\varepsilon_0 U}{d} = 1.4\times10^{-5}(C/m^2)$

$$P_2 = D_2 - \varepsilon_0 E_2 = (1-\frac{1}{\varepsilon_{r2}})\frac{\varepsilon_0 U}{d} = 8.9\times10^{-6}(C/m^2)$$

（2）两介质接触面上的电位为

$$U = E_2 d_2 = \frac{U d_2}{\varepsilon_{r2} d} = 3.0\times10^3 V$$

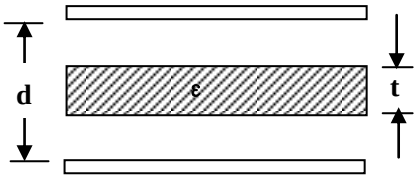
7、如图所示，一平行板电容器两极板相距为 d,面积为S，电位差为U，其中放有一层厚为 t 的介质，介电常数为 ε，介质两边都是空气，略去边缘效应，求：

（1） 介质中的电场强度E、电位移D和极化强度P；

（2） 极板上的电荷量Q；

（3） 极板和介质间隙中的场强E；

（4） 电容。



解：（1）由介质中的高斯定理得 $D_0 = D = \sigma$

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \rightarrow \begin{cases} E_0 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \end{cases}$$

$$U = E_0(d-t) + Et = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d-t) + \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0} t = \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0}\left[\varepsilon_r (d-t) + t\right]$$

$$\therefore \sigma = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 U}{\varepsilon_r (d-t) + t}$$

介质中的极化强度为 $P = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E_0 = \dfrac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 U}{\varepsilon_r (d-t) + t}$

（2）极板上的电荷量为 $Q = \sigma S = \dfrac{\varepsilon_r \varepsilon_0 U S}{\varepsilon_r (d-t) + t}$

（3）各区域的电场强度为 $E_0 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = \dfrac{\varepsilon_r U}{\varepsilon_r (d-t) + t}$

$E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \dfrac{U}{\varepsilon_r (d-t) + t}$

（4）电容为 $C = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{\varepsilon_r (d-t) + t}$

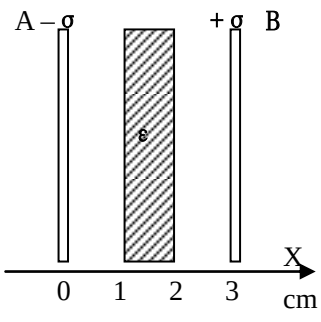
8、平行板电容器两极板相距 3.0cm，其间放有一层 ε ＝ 2 .0 的介质，位置和厚度如图所示，已知极板上面电荷密度为 σ =8.9×10^{-10}C/m^2，略去边缘效应，求：

（1） 极板间各处的 P、E 和 D；

（2） 极板间各处的电位（设 U_A=0）；

（3） 画 E-x、D-x、U-x 曲线；

（4） 已知极板面积为 0.11 m^2，求电容 C，并与不加介质时的电容 C_0 比较。



答：（1）由介质中的高斯定理可得

$$D_0 = D = \sigma = 8.9\times10^{-10}(C/m^2)$$

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 1.0\times10^{2}(V/m)$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0} = 50(V/m), P = D - \varepsilon_0 E = 4.5\times10^{-10}(C/m^2)$$

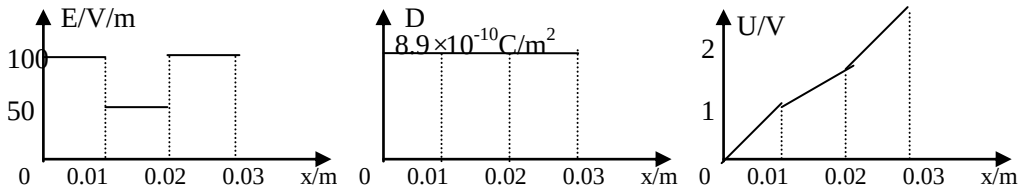
（2）以 A 板电位为零，各点的电位为

$$U_x = \int_x^0 \vec{E}\cdot d\vec{x} = E_0 x = 1.0\times10^2 x \qquad 0 \le x \le 0.01$$

$$U_x = \int_x^{0.01} \vec{E}\cdot d\vec{x} + \int_{0.01}^0 \vec{E}\cdot d\vec{x} = 50x + 0.5 \qquad 0.01 \le x \le 0.02$$

$$U_x = \int_x^{0.02} \vec{E}\cdot d\vec{x} + \int_{0.02}^{0.01} \vec{E}\cdot d\vec{x} + \int_{0.01}^0 \vec{E}\cdot d\vec{x} += 100x - 0.5 \qquad 0.02 \le x \le 0.03$$

（3）E-x、D-x、U-x 曲线分别为



（4）电容为 $C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{\varepsilon_r(d-t)+t}$ =30 μ μ F

与真空时的电容相比较 C/C_0=1.2

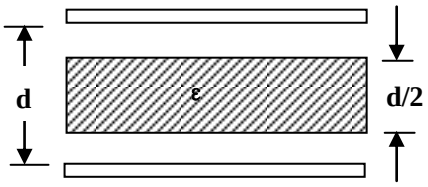
9、两块平行导体板带有同号电荷，面密度分别为 σ_1=3.3×10^{-10}C/m^2，σ_2=6.6×10^{-10}C/m^2，两板相距为 1.0cm。在其间平行地放有一块厚为 5.0mm 的均匀石腊板，ε ＝ 2 .0。略去边缘效应，求：

（1） 石腊内的 $E_{内}$；

（2） 极板间石腊外的 $E_{外}$；

（3） 两极板的电位差；

（4） 石腊表面的极化面电荷密度 σ`。



解：（1）两导体板所带电荷同号，由高斯定理及电荷守恒定律可知

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = 4.95\times10^{-10}(C/m^2)$$

$$\sigma_{12} = -\sigma_{21} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = 1.65\times10^{-10}(C/m^2)$$

但考察两金属板之间的电场时，可以将每一金属板上的电荷看作整体。

$$E_0 = E_2 - E_1 = 18.65(V/m)$$

$$E_{内} = E_0/\varepsilon_r = 9.3(V/m)$$

（3）电位差　$U = Et + E_0(d-t) = 0.14V$

（4）石腊表面的极化面电荷密度σ`为

$$\sigma'_p = (\varepsilon_r - 1)E_0 = 0.82\times10^{-15}(C/m^2)$$

10、平行板电容器的极板面积为S，间距为d，其间充满介质，介质的介电常数是变化的，在一极板处为ε₁，在另一极板处为ε₂，其他处的介电常数与到ε₁处成线性关系。略去边缘效应，求：

（1）　电容器的电容；

（2）　当两极板上的电荷分别为Q和-Q时，求介质内的极化电荷体密度和表面上的极化电荷面密度。

解：（1）介电常数的函数关系为　$\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d}x + \varepsilon_1$

在导体内任一点　$E = \dfrac{E_0}{\varepsilon}$

两极板之间的电位差　$U = \int_0^d Edx = \dfrac{dQ}{S\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}\ln\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$

电容器的电容　$C = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{S\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{d\ln\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$

（2）极化强度为　$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = \dfrac{Q}{S}\left(1 - \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\dfrac{\vec{x}}{x}$

极化电荷的体密度为　$\rho' = -\nabla\cdot\vec{P} = -\dfrac{(\varepsilon_2 - \varepsilon)dQ}{[(\varepsilon_2 - \varepsilon)x + \varepsilon_1 d]^2 s}$

极化电荷的面密度为　$\sigma' = P_n\begin{cases}\sigma'_1 = -\dfrac{(\varepsilon_1 - 1)Q}{\varepsilon_1 S}\\ \sigma'_2 = -\dfrac{(\varepsilon_2 - 1)Q}{\varepsilon_2 S}\end{cases}$

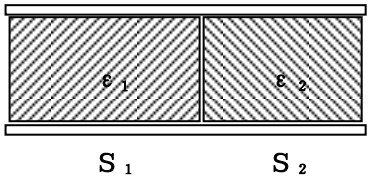
11、一云母电容器是由10张铝箔和9片云母相间平行迭放而成，奇数铝箔接在一起作为一极，偶数铝箔接在一起作为另一极，如图所示。每张铝箔和每片云母的面积都是2.5cm²,每片云母的相对介电常数ε都是7.0，厚度都是0.15mm。略去边缘效应，求电容C。

解：可以看作九个电容器并联而成



$$\left.\begin{aligned} C_0 &= \frac{\varepsilon_0 S}{d} \\ C_i &= \varepsilon C_0 \end{aligned}\right\} C = 9C_i = 9.3\times10^{-10}F$$

１２、一平行板电容器两极板相距为 d，其间充满了两部分介质，介电常数为ε₁的介质所占面积为Ｓ₁，介电常数为ε₂的介质所占面积为Ｓ₂。略去边缘效应，求电容Ｃ。



解：两个电容器并联而成

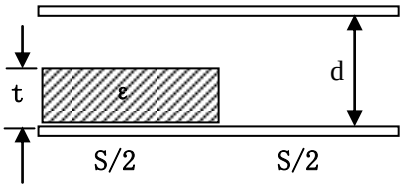
$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \varepsilon_1 C_0 = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 S_1}{d} \\ C_2 &= \varepsilon_2 C_0 = \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 S_2}{d} \end{aligned}\right\} C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2)}{d}$$

１３、如图所示，一平行板电容器两极板的面积都是Ｓ，相距为 d。今在其间平行地插入厚度为 t，介电常数为ε的均匀介质，其面积为Ｓ／２。设两板分别带电荷Ｑ和-Ｑ。略去边缘效应，求：

（１） 两极板电位差Ｕ；

（２） 电容Ｃ；

（３） 介质的极化电荷面密度。



解：（１）设未插入介质一侧极板上电荷的面密度为σ₁，另一侧为σ₂

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}d = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}(d-t) + \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0\varepsilon}t \\ \sigma_1\frac{S}{2} &+ \sigma_2\frac{S}{2} = Q \end{aligned}\right\} U = \frac{2[\varepsilon d + (1-\varepsilon)t]d}{\varepsilon_0[2\varepsilon d + (1-\varepsilon_r)t]}\frac{Q}{S}$$

（２）电容器的电容为 $C = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{\varepsilon_0 S}{2d}\dfrac{[2\varepsilon d + (1-\varepsilon_r)t]}{[\varepsilon d + (1-\varepsilon)t]d}$

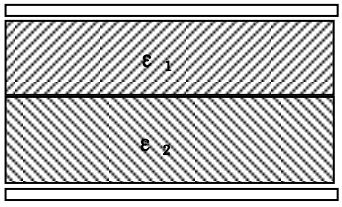
（３）极化电荷面密度为 $\sigma' = P_n = (\varepsilon-1)\varepsilon_0\dfrac{E_0}{\varepsilon} = \dfrac{2(\varepsilon-1)dQ}{S[2\varepsilon d + (1-\varepsilon)t]}$

１４、一平行板电容器两极板的面积都是 2.0㎡，相距为 5.0㎜。当两极板之间是空气时，加上一万伏的电压后，取去电源，再在其间插入两平行介质层，一层厚 2.0mm，ε₁＝５.0;另一层厚３.0mm，ε₂＝２.0。略去边缘效应，求：

（１） 介质内的Ｅ和Ｄ；

（２） 两极板的电位差；

（３） 电容Ｃ。



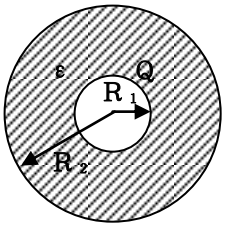
解： $C_0 = \varepsilon_0 S/d$　　$Q = C_0 U$　　电源断开后，Q 保持不变　$D_1 = D_2 = Q/S = 1.78\times10^{-5}(C/m^2)$

（１）$E_0=U/d$　　$E_1=E_0/\varepsilon_1=4\times10^5(V/m)$　　$E_2=E_0/\varepsilon_2=1\times10^6(V/m)$

（２）$U=E_1d+E_2d=3800V$

（３）$C=Q/U=9.4\times10^{-9}F$

１５、同心球形电容器内外半径分别为Ｒ₁和Ｒ₂，两球间充满介电常数为ε的均匀介质，内球的电荷量为Ｑ。求：



（１）　电容器内各处的电场强度Ｅ的分布和电位差Ｕ；

（２）　介质表面的极化电荷面密度；

（３）　电容Ｃ（它是真空时电容的多少倍？）

解：（１）由对称性和高斯定理得，介质内的电场强度为

$$\vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}\qquad R_1<r<R_2$$

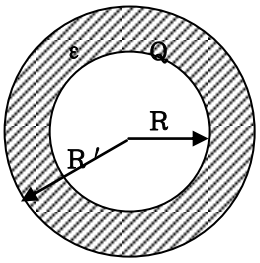
两极板之间的电位差为　　$U=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2})$

（２）介质的极化强度为　　$\vec{P}=(\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E}=\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$

介质的内外两表面上极化电荷的面密度分别为

$$\sigma_1'=P_{1n}=-\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}\qquad \sigma_2'=P_{2n}=\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}$$

１６、在半径为Ｒ的金属球外有一层半径为Ｒ´的均匀介质层（如图所示）。设电介质的介电常数为ε，金属球带电量为Ｑ，求：



（１）介质层内外的场强分布；

（２）介质层内外的电位分布；

（３）金属球的电位。

解：（１）由对称性及高斯定理可求得场强分布为

$$E=0(r<R)$$
$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}(R<r<R')$$
$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(r>R')$$

（２）电位分布为

$$U_{内}=\int_r^{R'}\vec{E}\cdot d\vec{l}+\int_{R'}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon-1}{R'}\right)$$

$$U_{外}=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

（３）金属球的电位为$U_{球}=\int_R^{R'}\vec{E}\cdot d\vec{l}+\int_{R'}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}+\frac{\varepsilon-1}{R'}\right)$

１７、一半径为R的导体球带电荷Q，处在介电常数为ε的无限大均匀介质中。求：

（１） 介质中的电场强度E、电位移D和极化强度P的分布；

（２） 极化电荷面密度。

解：（１）由介质中的高斯定理可求得：

电位移为　　$\vec{D}=\frac{Q}{4\pi r^3}\vec{r}$

电场强度为　　$\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon\varepsilon_0}=\frac{Q}{4\pi\ \varepsilon_0\varepsilon r^3}\vec{r}$

极化强度为　　$\vec{P}=\vec{D}-\varepsilon_0\vec{E}=(\varepsilon-1)\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^3}\vec{r}$

（２）极化电荷面密度为　　$\sigma'=P_n=-(\varepsilon-1)\frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}$

１８、半径为R、介电常数为ε的均匀介质球中心放有点电荷Q，球外是空气。

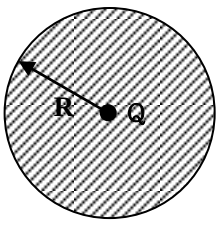
（１） 求球内外的电场强度E和电位U的分布；

（２） 如果要使球外的电场强度为零且球内的电场强度不变，则球面上需要有面密度为多少的电荷？

解：　（１）由高斯定理可求得场强分布为

$$\vec{E}_{内}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon\varepsilon_0}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}\vec{r}(r<R)$$

$$\vec{E}_{外}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}(r>R)$$



电位的分布为

$$U_{内}=\int_r^{R}\vec{E}_{内}\cdot d\vec{r}+\int_R^{\infty}\vec{E}_{外}\cdot d\vec{r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon-1}{R}\right)(r<R)$$

$$\vec{E}_{外}=\int_R^{\infty}\vec{E}_{外}\cdot d\vec{r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}(r>R)$$

（２）要使Ｅ$_{外}$＝０而Ｅ$_{内}$保持不变，应使球面上Ｑ′ ＝－Ｑ

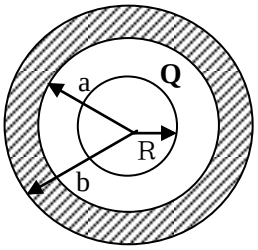
电荷的面密度应为 $\sigma = -\dfrac{Q}{4\pi R}$

１９、一半径为Ｒ的导体球带电荷Ｑ，球外有一层同心球壳的均匀电介质，其内外半径分别为ａ和ｂ，介电常数为ε。求：

（１） 介质内外的电场强度Ｅ和电位移Ｄ；

（２） 介质内的极化强度Ｐ和表面上的极化电荷面密度；

（３） 介质内的极化电荷体密度为多少？



解： （１）由介质中的高斯定理可得

$$\vec{D}_{外} = \vec{D}_{内} = \frac{Q}{4\pi r^3}\vec{r}$$

$$\vec{E}_{外} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}(r<a, r>b)$$

$$\vec{E}_{内} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}\vec{r}(a<r<b)$$

（２）介质内的极化强度Ｐ为 $\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = (\varepsilon - 1)\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^3}\vec{r}$

介质表面的极化电荷面密度为

$$\sigma'_{内} = P_n = -(\varepsilon - 1)\frac{Q}{4\pi\varepsilon a^2}$$

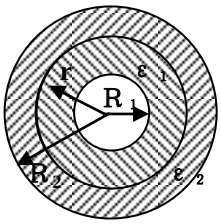
$$\sigma'_{外} = P_n = (\varepsilon - 1)\frac{Q}{4\pi\varepsilon b^2}$$

（３）均匀电介质，介质内极化电荷体密度为０。

２０、球形电容器由半径为Ｒ$_1$的导体球和与它同心的导体球壳构成，壳的内半径为Ｒ$_2$，其间有两层均匀介质，分界面的半径为ｒ，介电常数分别为ε$_1$和ε$_2$。

（１） 求电容Ｃ；

（２） 当内球带电－Ｑ时，求介质表面上的极化电荷的面密度。



解： （１）由介质中的高斯定理可得

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_1\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 r^3}\vec{r}(R_1<r<r_1)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_2\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 r^3}\vec{r}(r_1<r<R_2)$$

电位差为 $U=\int_{R_1}^{r_1}\vec{E}_1\cdot d\vec{r}+\int_{r_1}^{R_2}\vec{E}_2\cdot d\vec{r}=\dfrac{Q\left[\varepsilon_2R_2(r-R_1)+\varepsilon_1R_1(R_2-r)\right]}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2rR_1R_2}$

电容为 $C=\dfrac{Q}{U}=\dfrac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2rR_1R_2}{\left[\varepsilon_2R_2(r-R_1)+\varepsilon_1R_1(R_2-r)\right]}$

（２）当内球带电为－Ｑ时，各介质表面的极化电荷面密度分别为

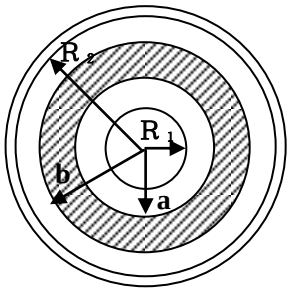
$$\sigma_{内}=\frac{(\varepsilon_1-1)Q}{4\pi\varepsilon_{10}R_1^2}\qquad\sigma_{外}=-\frac{(\varepsilon_2-1)Q}{4\pi\varepsilon_{10}R_2^2}\qquad\sigma_r=\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)Q}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_2r^2}$$

２１、球形电容器由半径为Ｒ₁的导体球和与它同心的导体球壳构成。壳的内半径为Ｒ₂，其间有一层均匀介质球壳，内外半径分别为ａ和ｂ，介电常数为ε。

（１）求电容Ｃ；

（２）当内球带电量为Ｑ时，介质表面上的极化电荷面密度。

解：（１）由介质中的高斯定理可得



$$\vec{E}_1=\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0}=\frac{Q}{4\pi_1\varepsilon_0r^3}\vec{r}(R_1<r<a)$$

$$\vec{E}_2=\frac{\vec{D}}{\varepsilon\varepsilon_0}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0r^3}\vec{r}(a<r<b)$$

$$\vec{E}_3=\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^3}\vec{r}(b<r<R_2)$$

电位差为 $U=\dfrac{Q\left[ab\varepsilon R_2(R_2-R_1)+(1-\varepsilon)(b-a)R_1R_2\right]}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon abR_1R_2}$

电容为 $C=\dfrac{Q}{U}=\dfrac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon abR_1R_2}{\left[ab\varepsilon R_2(R_2-R_1)+(1-\varepsilon)(b-a)R_1R_2\right]}$

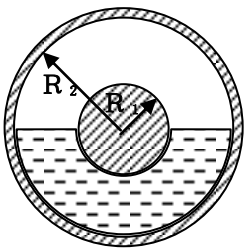
（２）当内球带电为Ｑ时，各介质表面的极化电荷面密度分别为

$$\sigma_{内}=-\frac{(\varepsilon-1)Q}{4\pi\varepsilon a^2}$$

$$\sigma_{外}=\frac{(\varepsilon-1)Q}{4\pi\varepsilon b_2^2}$$

２２、球形电容器由半径为Ｒ₁的导体球和与它同心的导体球壳构成。壳的内半径为Ｒ₂，其间一半充满介电常数为ε的均匀介质。求电容Ｃ。

解：将球形电容器看成是两个半球形电容器并联而成，其中一个是



空气，另一个是介质。

$$C = C_1 + C_2 = \frac{2\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} + \frac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$
$$= \frac{2\pi\varepsilon_0 (\varepsilon + 1) R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

可以证明：

此时电容器的电容等于两壳间充满介电常数为 $\frac{\varepsilon + \varepsilon_0}{2}$ 的均匀介质的电容。

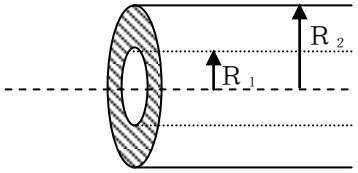
2 3、圆柱形电容器是由半径为 R 1 的导线和与它同轴的导体圆筒构成。圆筒的内半径为 R 2，长为 l，其间充满了介电常数为 ε 的介质（如图所示）。设沿轴线单位长度上，导线的电荷为 λ 0，圆筒的电荷为－ λ 0，略去边缘效应。求：

（1） 介质中的电场强度 E、电位移 D 和极化强度 P；

（2） 两极的电位差 U；

（3） 介质表面的极化电荷面密度；

（4） 电容 C（它是真空时电容的多少倍？）



解：（1）应用介质中的高斯定理可得

$$\vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi r^2}\vec{r}(R_1 < r < R_2)$$
$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\vec{r}(R_1 < r < R_2)$$
$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = \frac{(\varepsilon - 1)\lambda}{2\pi\varepsilon r^2}\vec{r}$$

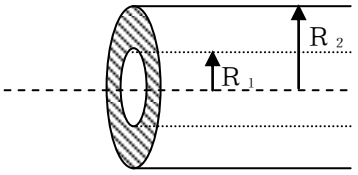
（2）两极间的电位差为 $\Delta U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$

（3）介质表面的极化电荷面密度为

$$\sigma_1' = P_{1n} = -\frac{(\varepsilon - 1)\lambda}{2\pi\varepsilon R_1} \qquad \sigma_2' = P_{2n} = \frac{(\varepsilon - 1)\lambda}{2\pi\varepsilon R_2}$$

（4）电容器的电容为 $C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon l\varepsilon}{\ln(R_2 / R_1)}$

2 4、圆柱形电容器是由半径为 a 的导线和与它同轴的导体圆筒构成。圆筒的内半径为 b，长为 l，其间充满了两层同轴圆筒形的均匀介质，分界面的半径为 r，介电常数分别为 ε 1 和 ε 2（如图所示）。略去边缘效应，求电容 C。



解；由高斯定理可求得场强分布为

$$\vec{E}_1=\frac{\vec{D}_1}{\varepsilon_1\varepsilon_0}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 r^2}\vec{r}(R_1<r<r_1)$$

$$\vec{E}_2=\frac{\vec{D}_2}{\varepsilon_2\varepsilon_0}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 r^2}\vec{r}(r_1<r<R_2)$$

两极间的电位差为 $\Delta U=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0}\left(\varepsilon_2\ln\frac{r}{a}+\varepsilon_1\ln\frac{b}{r}\right)$

电容C为 $C=\frac{Q}{U}=\frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0 l}{\varepsilon_2\ln(r/a)+\varepsilon_1\ln(b/r)}$

2 5、一长直导线半径为 1.5cm，外面套有内半径为 3.0cm 的导体圆筒，两者共轴。当两者电位差为 5 0 0 0 V时，何处的电场强度最大？其值是多少？与其间介质有无关系？]

解：电场强度分布为 $\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}$

导线与导体圆筒之间的电位差为 $\Delta U=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$

即 $E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{U}{r\ln(R_2/R_1)}$

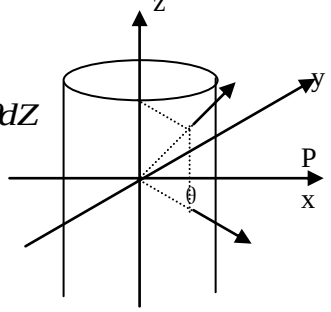
在 r=R₁ 处，电场强度达到最大， Emax=4.8×10⁵(V/m) 与介质无关

2 6、求垂直轴线均匀极化的无限长圆柱形电介质轴线上的退极化场，已知极化强度为P。

解：取柱坐系如图所示，极轴 x 沿极化方向，柱面上任一点处外法线与极轴夹角为 θ 。

在柱面上取面积元 $dS=Rd\theta dZ$

电荷元为 $dq=\sigma' dS=\sigma' Rd\theta dZ=P\cos\theta Rd\theta dZ$



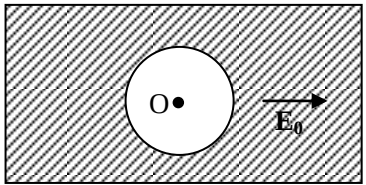
在O点处的场强为 $dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2+z^2}$

由对称性可知，轴线上的电场只有 x 分量

$$dE_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2+z^2}\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}\cos(\pi-\theta)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{PR^2 d\theta dZ}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\cos^2\theta$$

$E=\int dE_x=-\frac{P}{2\varepsilon_0}$ 负号表明轴线处E的方向与P相反。

2 7、在介电常数为 ε 的无限大均匀电介质中存在均匀电场 E₀。今设想以其中某点O为中



心作一球面，把介质分为内、外两部分。求球面外全部电荷在O点产生的场强E。（E比E_0大还是小？）

解：（1）对于均匀极化的球体，表面上的极化电荷在球心处产生的电场强度（退极化场）为 $\vec{E}' = -\dfrac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$

（2）在O点处，总场强E_0等于球面上极化电荷与球面外极化电荷在O点产生场强的叠加　$\vec{E}_0 = \vec{E}_{外} + \vec{E}'_{面}$　$E_{面}$与E_0方向相反，取E_0方向为正方向

$$E_{外} = E_0 + E'_{面} = E_0 + \frac{P}{3\varepsilon_0} = \frac{(\varepsilon+2)E_0}{3} > E_0$$

28、在介电常数为ε的无限大均匀电介质中存在均匀电场E_0。今设想在其中作一轴线与E_0垂直的无限长圆柱面，把介质分为内、外两部分。求柱面外全部电荷在柱轴上产生的场强E。

解：与上题同理，$E_{外} = E_0 + E'_{面} = E_0 + \dfrac{P}{2\varepsilon_0} = \dfrac{(\varepsilon+1)E_0}{2} > E_0$

29、空气的介电强度为30000KV/m，问直径为1.0cm,1.0mm和0.10mm的导体球，在空气中最多各能带多少电荷量？

解：$E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$　$Q = 4\pi\varepsilon_0 E r^2 \begin{cases} Q_1 = 8.3\times10^{-9}C \\ Q_2 = 8.3\times10^{-11}C \\ Q_3 = 8.3\times10^{-13}C \end{cases}$

30、空气的介电强度为3.0×10^6V/m，铜的密度为8.9g/cm^3,铜的原子量为63.75g/mol，阿伏伽德罗常数为$N_0=6.022\times10^{23}$/mol，金属铜里每个铜原子有一个自由电子。

（1）问半径为1.0cm的铜球在空气中最多能带多少电荷量？

（2）这铜球所带电量最多时，求它所缺少或多出的电子数与自由电子总数之比；

（3）因导体带电时电荷都在外表面上，当铜球所带电荷量最多时，求它缺少或多出的电子数与表面一层铜原子所具有的自由电子数之比。

解：（1）$Q = 4\pi\varepsilon_0 E r^2 = 3.36\times10^{-8}C$

（2）铜球带电量最多时，所缺少或多出的电子数 $N_1 = Q/q_0 = 2.1\times10^{11}$个

铜球所带的自由电子的总数　$N_2 = \dfrac{m}{\rho}N_A = \dfrac{4}{3}\pi R^3\rho\dfrac{N_A}{\mu} = 3.5\times10^{23}$个

$N_1/N_2 = 6.0\times10^{-13}$倍

（３）每个铜原子的体积为 $v=\frac{V}{N}=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3\rho N_A/\mu}=\frac{\mu}{\rho N_A}$ 线度为 $l=v^{1/3}=\left(\frac{\mu}{\rho N_A}\right)^{1/3}$

铜球表面一层原子的体积为 $V_S=4\pi R^2 l=4\pi R^2\left(\frac{\mu}{\rho N_A}\right)^{1/3}$

表面一层的铜原子数为 $N_S=\frac{V_S}{v}=\frac{4\pi R^2\left(\frac{\mu}{\rho N_A}\right)^{1/3}}{\left(\frac{\mu}{\rho N_A}\right)}=4\pi R^2\left(\frac{\rho N_A}{\mu}\right)^{2/3}$

N_1与N_S之比为 $\frac{N_1}{N_S}=\frac{Q}{e}/\frac{4\pi R^2\left(\frac{\mu}{\rho N_A}\right)^{1/3}}{\left(\frac{\mu}{\rho N_A}\right)}=\frac{\varepsilon_0 E_{\max}}{e}\left(\frac{\mu}{\rho N_A}\right)^{2/3}=8.7\times10^{-6}$

３１、空气的介电强度为３０００ＫＶ／m，问空气中半径为 1.0cm,1.0mm 和 0.10mm 的长直导线上单位长度最多各能带多少电荷量？

解：$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ $\lambda_{\max}=2\pi\varepsilon_0 Er\begin{cases}\lambda_1=1.7\times10^{-6}C/m\\ \lambda_2=1.7\times10^{-7}C/m\\ \lambda_3=1.7\times10^{-8}C/m\end{cases}$

３２、空气的介电强度为３０kＶ／cm，今有一平行板电容器，两极板相距为 0.50cm，板间是空气，问能耐多高的电压？

解：$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{U}{d}$ $U_{\max}=E_{\max}d=15000V$

３３、空气的介电强度为３０００Ｖ／m，当空气平行板电容器两极板的电位差为５０kV 时，问每平方米面积的电容最大是多少？

解：$d=\frac{U}{E}$ $C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}=\frac{\varepsilon_0 SE}{U}$ $C_0=\frac{\varepsilon_0}{d}=\frac{\varepsilon_0 E}{U}=5.31\times10^{-10}F$

３４、一圆柱形电容器，由直径为５.0cm 的直圆筒和与它共轴的直导线构成，导线的直径为５.0mm，筒与导线间是空气，已知空气的击穿场强是３０kＶ／cm，问这电容器能耐多高的电压？

解：$E_{\max}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_{内}}$ $U=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_{外}}{r_{内}}=E_{\max}r_{离}\ln\frac{r_{外}}{r_{内}}=1.7\times10^4V$

３５、两共轴的导体圆筒，内筒外半径为R_1，外筒内半径为R_2（$R_2<2R_1$），其间有两层均匀介质，分界面的半径为 r,内层介电常数为ε_1，外层介电常数为$\varepsilon_2=2\varepsilon_1/2$，两介质的介电强度都是$E_M$。当电压升高时，哪层介质先击穿？证明：两筒最大的电位

差为 $U_M = \frac{E_{Mr}}{2}\ln\frac{R_2^2}{rR_1}$。

解： $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$ $U = \int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot d\vec{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{r_0}{R_1}+\frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{R_2}{r_0}\right] = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\ln\frac{R_2^2}{R_1r_0}$

$$E_{1max} = \frac{U_M}{R_1\ln(R_2^2/R_1r_0)} \longrightarrow \frac{E_{2M}}{E_{1M}} = \frac{2R_1}{r_0} \xrightarrow{R_2<2R_1} \frac{E_{2M}}{E_{1M}} = \frac{2R_1}{r_0} > \frac{R_2}{r_0} > 1$$
$$E_{2max} = \frac{2U_M}{r_0\ln(R_2^2/R_1r_0)}$$

$E_{2M} > E_{1M}$ 电压逐渐增高时，外层场强首先达到E_M。使介质击穿。

$$U_M = \frac{1}{2}E_M r_0\ln\frac{R_2^2}{R_1r_0}$$

3 6、一圆柱形电容器内充满两层均匀介质，内层是介电常数为 ε_1=4.0 的油纸，其内半径为 2.0cm；外层是介电常数为 ε_2=7.0 的玻璃，其外半径为 2.5cm。已知油纸的介电强度为 120kV /cm，玻璃的介电强度为 100kV /cm。问这电容器能耐多高的电压？当电压逐渐升高时，哪层介质先被击穿？

解： $U = \int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot d\vec{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{r_0}{R_1}+\frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{R_2}{r_0}\right] = E_M\varepsilon r\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{r_0}{R_1}+\frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{R_2}{r_0}\right]$

$$U_{M1} = E_{M1}\varepsilon_1 R_1\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{r_0}{R_1}+\frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{R_2}{r_0}\right] = 45kV$$
$$U_{M2} = E_{M2}\varepsilon_2 r_0\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{r_0}{R_1}+\frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{R_2}{r_0}\right] = 75kV$$

电容器最大耐压为４５ＫＶ。当电压逐渐升高时，内层先被击穿。

3 7、设一同轴电缆里面导体的半径是R_1，外面导体的内半径是R_3，两导体间充满了两层均匀介质，它们的分界面是R_2，设内外两层介质的介电常数分别为 ε_1、和 ε_2，它们的介电强度分别为E_1和E_2，证明：当两极（即两导体）间的电压逐渐升高时，在 $\varepsilon_1E_1R_1 > \varepsilon_2E_2R_2$的条件下，首先被击穿的是外层电介质。

解： $E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_1 r}$ $E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_2 r}$

每层介质能承受的最大带电量为 $\lambda_{1max} = 2\pi\varepsilon_1R_1E_1$ $\lambda_{2max} = 2\pi\varepsilon_2R_2E_2$

若 $\lambda_{2\max} < \lambda_{1\max}$ 则外层介质首先被击穿。

即 $\varepsilon_1 E_1 R_1 > \varepsilon_2 E_2 R_2$

38、一平行板电容器极板面积为S，间距为d，电荷为±Q。将一块厚度为d，介电常数为ε的均匀电介质板插入极板间空隙。计算：

（1） 静电能的改变；

（2） 电场力对介质板作的功。

解：（1）静电能的增量为 $\Delta W = W - W_0 = \frac{Q^2}{2C} - \frac{Q^2}{2C_0} = -\frac{Q^2(\varepsilon-1)d}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}$

（2）将介质板插入电容器的过程中，与电源断开连接，电场力作正功，静电能减少。

电场力所作的功为 $A = \Delta W = \frac{Q^2(\varepsilon-1)d}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}$

39、一平行板电容器极板面积为S，间距为d，接在电源上以维持其电压为U。将一块厚度为d，介电常数为ε的均匀电介质板插入极板间空隙。计算：

（1） 静电能的改变；

（2） 电场对电源所作的功；

（3） 电场对介质板所作的功。

解：（1）静电能的增量为 $\Delta W = W - W_0 = \frac{1}{2}CU^2 - \frac{1}{2}C_0U^2 = \frac{\varepsilon_0 S(\varepsilon-1)U^2}{2d}$

（2）在此过程中，极板上电量的增量为 $\Delta q = q - q_0 = (C - C_0)U = \frac{\varepsilon_0 S(\varepsilon-1)U}{d}$

电量增加，电源对电场作正功，电场力作负功。$A_{电场} = -U\Delta q = -\frac{\varepsilon_0 S(\varepsilon-1)U^2}{d}$

（3）能量守恒。电场对介质板作功为 $A = A_{电源对电场作功} - \Delta W = \frac{\varepsilon_0 S(\varepsilon-1)U^2}{2d}$

40、一平行板电容器是边长为a的正方形，间距为d，电荷为±Q。将一块厚度为d，介电常数为ε的均匀电介质板插入一半，它受力多少？什么方向？

解：设介质板插入部分长为l $W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2(C_1 + C_2)} = \frac{dQ^2}{2\varepsilon_0 a(a - l + \varepsilon l)}$

根据虚功原理 $F=-\frac{\delta W}{\delta l}|_{l=\frac{a}{2}}=\frac{dQ^2(\varepsilon-1)}{2\varepsilon_0 a^3(1+\varepsilon)}$ 方向沿吸入电介质板的方向

4 1、两个相同的平行板电容器，它们的极板面积都是半径为 1 0 cm 的圆形，极板相距都是 1.0mm。其中一个两板间是空气，另一个两板间是 ε ＝ 2 6 的酒精。把这两个电容器并联后充电到 1 2 0 V，求它们所蓄的总电能；再断开电源，把它们带异号电荷的两极板分别联在一起，求这时两者所蓄的总电能。少的能量哪里去了？

解： （1）$W=\frac{1}{2}(C_1+C_2)U^2=5.4\times10^{-5}J$

（2）$Q=Q_2-Q_1=(C_2-C_1)U$ $W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{(C_1+C_2)}=4.7\times10^{-5}J$

减少的能量大部分在导线电阻上转化为热，小部分在电容器放电过程中对外辐射。

－－

§2.4 电场的能量和能量密度

1、 真空中一个均匀带电导体球，半径为R，带电量为 q,求电场能量的一半分布在半径多大的球面内。

解： 半径为R，带电量为 q 的导体球所储存的静电能为 $W=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$

当静电能量为一半时，r=2R

2、 空气中一直径为 1 0 cm 的导体球，电位为 8 0 0 0 V。问它表面处的场能密度（即单位体积内的电场能量）是多少？

解： 导体球带电分布在表面上，$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ $U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$$w=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{U}{R}\right)^2=0.114J/m^2$$

3、 在介电常数为 ε 的无限大均匀介质中，有一半径为R的导体球，带电荷Q。求电场的能量。

解： $E_{外}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$ $W=\int_R^\infty\frac{1}{2}\varepsilon E^2 dV=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R}$

4、 半径为 2.0cm 的导体球外套有一个与它同心的导体球壳，壳的内外半径分别为 4.0cm 和 5.0cm。球与壳间是空气。当内球的电荷量为 3.0×10^{-8}C 时，

（1） 这个系统储藏了多少电能？

（２） 如果用导线把壳与球连在一起，结果如何？

解：　（１）$W=\int_R^{R_1}\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2dV+\int_{R_2}^{\infty}\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2dV=18.2\times10^{-5}J$

（２）导线连接球与壳，成为等位体，电荷将分布在外表面上，内部场强为零。

$$W=\int_{R_2}^{\infty}\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2dV=8.1\times10^{-5}J$$

５、 球形电容器的内外半径分别为Ｒ₁和Ｒ₂，电位差为Ｕ。

（１） 求电位能；　　（２）求电场的能量；　比较两个结果。

解：　（１）电容器储存的静电能量等于外力将电荷Ｑ从外壳移到内壳所作的功。

$$W=\int_0^Q udq=\int_0^U uCdu=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\frac{4\pi\varepsilon_0R_1R_2}{R_2-R_1}U^2=\frac{2\pi\varepsilon_0R_1R_2}{R_2-R_1}U^2$$

（２） 电场的能量$W=\int_{R_2}^{R_2}\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2dV=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}=\frac{2\pi\varepsilon_0R_1R_2}{R_2-R_1}U^2$

结果完全相同。

６、 半径为 a 的导体圆柱外面，套有一半径为 b 的同轴导体圆筒，长度都是 l，其间充满介电常数为 ε 的均匀介质。圆柱带电为Ｑ，圆筒带电为－Ｑ。略去边缘效应，

（１） 整个介质内的电场总能量Ｗ是多少？

（２） 证明：$W=\frac{Q^2}{2C}$

解：（１）介质中的电场强度为　　$\vec{E}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon rl}\vec{e}_r$

r 处的电场能量为　　$w=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon r^2l^2}$

整个介质内的电场总能量为　$W=\int_V wdV=\int_a^b\frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon r^2l^2}2\pi rldr=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon\ l}\ln\frac{b}{a}$

（２）$W=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon\ l}\ln\frac{b}{a}$　　$C=\frac{2\pi\varepsilon\ l}{\ln\frac{b}{a}}$

介质中的总能量为　　$W=\frac{Q^2}{2C}$

７、 半径为 a 的长直导线，外面套有共轴的导体圆筒，筒的内半径为 b，导线与圆筒间充满介电常数为 ε 的均匀介质，沿轴线单位长度上导线带电量为 λ，圆筒带电为－ λ。略去边缘效应，求沿轴线单位长度的电场能量。

解：介质中的电场强度为　$\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\vec{e}_r$

介质中单位长度的电场能量为 $W=\int_0^b \frac{1}{2}\varepsilon E^2 dV=\int_V \frac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon r^2}2\pi r dr=\frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon\ l}\ln\frac{b}{a}$

8、 圆柱电容器由一长直导线和套在它外面的共轴导体圆筒构成，设导线的半径为 a，圆筒的内半径为 b.证明：这电容器所储藏的能量有一半是在半径为 $r=\sqrt{ab}$ 的圆柱体内。

解：电容器储存的总能量为 $W=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon\ l}\ln\frac{b}{a}$

$$W'=\frac{1}{2}W=\frac{1}{2}\int_V wdV=\int_a^r \frac{1}{2}\varepsilon(\frac{Q}{2\pi\varepsilon rl})^2 2\pi rldr$$

$$=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon l}\ln\frac{r}{a}=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon l}\ln\frac{b}{a}=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon l}\ln(\frac{b}{a})^{1/2}=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon l}\ln\frac{\sqrt{ab}}{a}$$

即：能量有一半是在半径为 $r=\sqrt{ab}$ 的圆柱体内。

第二章　　结　　束

第三章　稳 恒 电 流

§3.1　电流的稳恒条件和导电规律

思考题：

1、 电流是电荷的流动，在电流密度 j≠0 的地方，电荷的体密度ρ是否可能等于 0？

答：可能。在导体中，电流密度 j≠0 的地方虽然有电荷流动，但只要能保证该处单位体积内的正、负电荷数值相等（即无净余电荷），就保证了电荷的体密度ρ＝０。在稳恒电流情况下，可以做到这一点，条件是导体要均匀，即电导率为一恒量。

2、 关系式 U=IR 是否适用于非线性电阻？

答：对于非线性电阻，当加在它两端的电位差Ｕ改变时，它的电阻Ｒ要随着Ｕ的改变而变化，不是一个常量，其Ｕ－Ｉ曲线不是直线，欧姆定律不适用。但是仍可以定义导体的电阻为Ｒ＝Ｕ／Ｉ。由此，对非线性电阻来说，仍可得到Ｕ＝ＩＲ的关系，这里Ｒ不是常量，所以它不是欧姆定律表达式的形式的变换。对于非线性电阻，Ｕ、Ｉ、Ｒ三个量是瞬时对应关系。

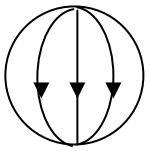
3、 焦耳定律可写成 $P=I^2R$ 和 $P=U^2/R$ 两种形式，从前者看热功率 P 正比于 R，从后式看热功率反比于 R，究竟哪种说法对？

答：两种说法都对，只是各自的条件不同。前式是在Ｉ一定的条件下成立，如串联电路中各电阻上的热功率与阻值Ｒ成正比；后式是在电压Ｕ一定的条件下成立，如并联电路中各电阻上的热功率与Ｒ成反比。因此两式并不矛盾。

4、 两个电炉，其标称功率分别为 W_1、W_2，已知 $W_1>W_2$，哪个电炉的电阻大？

答：设电炉的额定电压相同，在Ｕ一定时，Ｗ与Ｒ成反比。已知 $W_1>W_2$，所以 $R_1<R_2$，

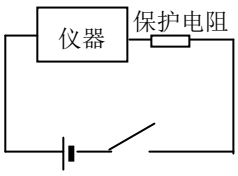
5、 电流从铜球顶上一点流进去，从相对的一点流出来，铜球各部分产生的焦耳热的情况是否相同？



答：沿电流方向，铜球的截面积不同，因此铜球内电流分布是不均匀的。各点的热功率密度 $p=j^2/\sigma$ 不相等。

6、 在电学实验室中为了避免通过某仪器的电流过大，常在电路中串接一个限流的保护电阻。附图中保护电阻的接法是否正确？是否应把仪器和保护电阻的位置对调？

答：可以用图示的方法联接。当调节保护电阻Ｒ时可以改变回路的电流，保护仪器免受大电流的冲击。Ｒ的作用与其在串联电路中的位置无关，因此不必将仪器和保护电阻的位置对调。



7、 将电压 U 加在一根导线的两端，设导线截面的直径为 d，长度为 l。试分别讨论下列情况对自由电子漂移速度的影响：（1）U 增至 2 倍；（2）l 增至 2 倍；（3）d 增至 2 倍。

答：导体中自由电子的漂移速率是 $u=\dfrac{I}{neS}$

（１） 当ｌ、Ｓ不变，Ｕ增至２倍时，由Ｕ＝Ｉ Ｒ可知，Ｉ也增至２倍，故ｕ增至２倍；

（２） 当Ｓ、Ｕ不变，ｌ 增至２倍时，由电阻定律 $R=\rho\dfrac{l}{S}$ 可知Ｒ增至２倍；再由Ｕ＝Ｉ Ｒ可知，Ｉ减小到原来的１／２。故ｕ减小到原来的１／２；

（３） 当Ｕ、ｌ不变，ｄ增至２倍，$S=\dfrac{1}{4}\pi d^2$ 增至４倍时，由电阻定律可知，Ｒ减小到原来的１／４，Ｉ将增至４倍，结果ｕ保持不变。

8、 在真空中电子运动的轨迹并不总是逆着电力线，为什么在金属导体内电流线永远与电力线重合？

答：在真空中，电子的运动轨迹一般说来不是逆着电力线，只在电子的初速度为零，电力线是直线的情况下，电子才逆着电力线运动。在金属导体中，电流密度与电场强度的关系遵从欧姆定律 $\vec{j}=\sigma\vec{E}$，即在金属导体中任一点，ｊ 的方向与Ｅ的方向一致，而某点

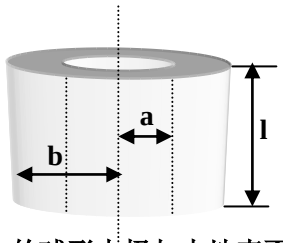
j 的方向就是该点电流线的方向，E 的方向就是该点电力线的方向。所以金属导体内电流与电力线永远重合。

－－－

（2）$U_1 = E_1 d_1 = \frac{Id_1}{\sigma_1 S} = IR_1 \qquad U_2 = E_2 d_2 = \frac{Id_2}{\sigma_2 S} = IR_2$

7、一个铜圆柱体半径为 a，长为 l，外面套有一个与它共轴且等长的圆筒，筒的内半径。在柱与筒之间充满电导率为σ的均匀导电物质。如附图所示。求柱与筒之间的电阻。

解：在柱与筒之间，沿半径方向，横截面积是变化的量



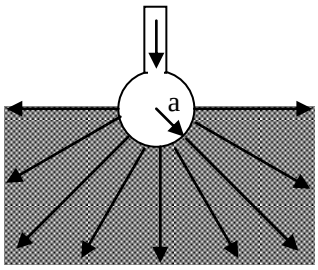
$$dS = 2\pi r l$$

$$R = \int \rho \frac{dr}{dS} = \int_a^b \rho \frac{dr}{2\pi r l} = \frac{1}{2\pi\sigma l} \ln \frac{b}{a}$$

8、把大地可看成均匀的导电介质，其电阻率为ρ。用一半径为 a 的球形电极与大地表面相接，半个球体埋在地面下，电极本身的电阻可以忽略。试证明此电极的接地电阻为

$$R = \frac{\rho}{2\pi a}$$

解： 取与球心相距为 r，厚度为 dr 的半球壳



$$dR = \frac{\rho dr}{2\pi r^2} \rightarrow R = \int_a^\infty \frac{\rho dr}{2\pi r^2} = \frac{\rho}{2\pi a}$$

9、一铂电阻温度计在 0 ⁰C 时的阻值为 200.0Ω。当浸入正在熔解的三氯化锑中时，阻值变为 257.6Ω。求三氯化锑的熔点。已知铂电阻的温度系数α=0.00392 度$^{-1}$。

解：$R = R_0(1+\alpha t) \rightarrow t = 73.5^0 C$

10、电动机未运转时，在 20 ⁰C 时它的铜绕组的电阻是 50Ω。运转几小时后，电阻上升到 58Ω。问这时铜绕组的温度为多高？

解：
$$R_1 = R_0(1+\alpha\ t_1)$$
$$R_2 = R_0(1+\alpha\ t_2) \rightarrow t_2 = 60.9^0 C$$

11、求 220V 15W和 220V 25W灯泡的灯丝电阻和工作电流。

解：灯丝电阻和工作电流分别为

$$R = \frac{U^2}{P} \begin{cases} R_1 = 3.2k\Omega(15W) \\ R_2 = 1.94k\Omega(25W) \end{cases}$$

$$I = \frac{U}{R} \begin{cases} I_1 = 68mA(15W) \\ I_2 = 114mA(25W) \end{cases}$$

12、在 220V电路上，接有 30A允许电流的保险丝，问在此电路上可接多少个 40W的灯泡？

解：nP=IU　　n=165 个

１３、有一个标明１kΩ４０W的电位器，问：

（１） 允许通过这个电位器的最大电流是多少安培？

（２） 允许加在这个电位器上的最大电压是多少伏特？

（３） 在这个电位器上加１０Ｖ的电压时，电功率是多少？

解：　（１）$P=UI=I^2R$　　Imax=0.2A

（２）Ｐ＝Ｕ²／Ｒ　　Ｕmax=２００Ｖ

（３）Ｕ＝１０Ｖ时，　Ｐ＝Ｕ²／Ｒ＝0.1W

１４、室内装有４０W电灯两盏，５０W收音机一台，平均每日用电五小时。问：

（１） 总闸处应装允许多大电流通过的保险丝？

（２） 每月（以３０日计算）共用电多少度？

答：　（１）Ｐ＝ＵＩ　　Ｉ＝0.6A

（２）Ａ＝ＩＵt＝19.5　**度**

１５、某工厂与配电所相距１０００m，其间有两条输电线，每条线的电阻是0.2Ω/㎞。工厂用电为５５㎾。入厂时两输电线间的电压Ｕ＝２２０Ｖ，求配电所所输出的功率。

答：　线路中的电流为　Ｉ＝Ｐ／Ｕ＝２５０Ａ

线路上消耗的功率　Ｐ′＝Ｉ²Ｒ＝２５KW

配电所输出的功率　P_0＝Ｐ＋Ｐ′＝８０ＫＷ

１６、实验室常用的电阻箱中每一电阻的额定功率规定为0.25W。试求其中１００Ω和１０Ω电阻的额定电流。

解：Ｐ＝Ｉ²Ｒ　　I_1＝50mA　　I_2=158mA

１７、推导焦耳定律的微分形式。

解：取一小电流管　　Ｉ＝j△S　　$R=\rho\dfrac{\Delta l}{\Delta S}$

消耗功率为　　$P=I^2R=(j\Delta S)^2\rho\dfrac{\Delta l}{\Delta S}=j^2\rho(\Delta S\Delta l)$

单位体积消耗功率（功率密度）为　　$p=\dfrac{P}{\Delta V}=j^2\rho=\dfrac{(\sigma E)^2}{\sigma}=\sigma E^2$

１８、一铜导线的直径为 1.0cm，载有２００Ａ电流，已知铜内自由电子的数密度为 n=8.5×10^{22}／cm^3,求其中电子的漂移速率。

解：$u=\frac{j}{ne}=\frac{I}{neS}=1.87\times10^{-4}m/s$

１９、已知铜的原子量为 63.75，密度为 8.9g/cm^3,在铜导线里，每一个铜原子都有一个自由电子，电子电荷大小为 e,阿伏伽德罗常数为Ｎ０。

（１） 技术上为了安全，铜线内电流密度不能超过 j_M=6A/mm^2，求电流密度为 j_M时，铜内电子的漂移速度。

（２） 按下列公式求Ｔ＝３００Ｋ时铜内电子热运动的平均速率：$\bar{v}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$。式中 m 是电子的质量，k 是玻耳兹曼常数，Ｔ是绝对温度。平均速率是 u 的多少倍？

解：（１）$u=\frac{j}{ne}=4.5\times10^{-2}cm/s$

（２）$\bar{v}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}=10.8\times10^{6}cm/s$

二者比值为 2.4×10^{8}

２０、一铜棒的横截面积为 20×80mm^2，长为 2.0m，两端电位差为５０mV。已知铜的电导率σ＝5.7×10^7 西门子／米，铜内自由电子的电荷密度为 1.36×10^{10}C/m^3。求：

（１） 它的电阻Ｒ；（２）电流Ｉ；（３）电流密度的大小；（４）棒内电场强度的大小；（５） 消耗的功率Ｐ；（６）一小时所消耗的能量Ｗ；（７）棒内电子的漂移速率 u。

解：（１）电阻为 $R=\rho\frac{l}{S}=2.2\times10^{-5}\Omega$

（２）电流为 Ｉ＝Ｕ／Ｒ＝２３００Ａ

（３）电流密度的大小为 j＝Ｉ／Ｓ＝1.4Ａ／mm^2

（４）电场强度的大小为 Ｅ＝j/σ＝２５mV/m

（５）消耗的功率为 Ｐ＝ＩＵ＝１１５Ｗ

（６）一小时消耗的能量为 Ｗ＝Ｐt＝4.1×10^5J

（７）电子的漂移速率为 u=j/ne=1.05×10^{-2}c/s

－－－

§3.2　　电源及其电动势

思考题：

1、　有两个相同的电源和两个相同的电阻如图 a 所示电路联接起来，电路中是否有电流？a、b 两点是否有电压？若将它们按图 b 所示电路联接起来，电路中是否有电流？a、b 两点是否有电压？解释所有的结论。

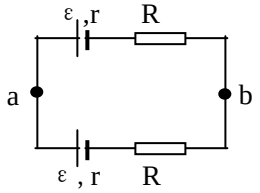


图 a

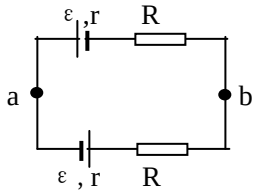


图 b

答：在图 a 中，$I=\dfrac{\varepsilon-\varepsilon}{2(r+R)}=0$，电路中无电流；由于回路中无电流，每个电阻两端的电压为零，电池负极与 b 点等电位，正极与 a 点等电位，电池两端的电位差即是 a、b 两点间的电压。Uab＝ε。

在图 b 中，$I=\dfrac{\varepsilon+\varepsilon}{2(r+R)}=\dfrac{\varepsilon}{r+R}$，电路中有电流。若设 b 点电位为零，则 a 点电位为 $U_a=\varepsilon-\dfrac{\varepsilon}{r+R}(r+R)=0$，Uab＝0。

2、　一个电池内的电流是否会超过其短路电流？电池的路端电压是否可以超过电动势？

答：当R＝0时，电流为最大，I＝ε／r .r一定时，电池内的电流不会超过短路电流。

当电池充电时，电池的路端电压可以超过电动势。U＝ε＋Ir

3、　试想出一个方法来测量电池的电动势和内阻。

答：将待测电池与安培计、电阻箱、电键串联在一个闭合回路中。

取$R=R_1$时，测得电流I_1，$\varepsilon-I_1(r+R_1)=0$

取$R=R_2$时，测得电流I_2，$\varepsilon-I_2(r+R_1)=0$

联立解得　$\varepsilon=I_1\left(\dfrac{I_1R_1-I_2R_2}{I_2-I_1}+R_1\right)$　　$r=\dfrac{I_1R_1-I_2R_2}{I_2-I_1}$

（也可将待测电池与伏特计并联，再与电阻箱和电键串联在一个闭合回路中，测得外电阻不同时的两组路端电压，求得电源电动势和内阻）

4、　当一盏 25W100Ⅴ的电灯泡联接在一个电源上时，发出正常明亮的光。而一盏 500W110Ⅴ的电灯泡接在同一电源上时，只发出暗淡的光。这可能吗？说明原因。

答：阻抗不匹配时可能出现以上情况。如果电源的电动势一定，电源内电阻与R比较不可忽略。当灯泡接上电源时——

25W 的灯泡$U_2=\dfrac{\varepsilon}{1+r/R_2}$正常发光，说明恰好在额定电压１００Ⅴ下工作。

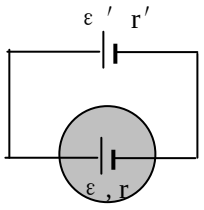
500W 的灯泡 $U_1=\dfrac{\varepsilon}{1+r/R_1}$，实际电压小于其额定电压，所以暗淡。

－－－

（1） 充电电流；

（2） 每秒内电源ε′ 消耗的化学能；

（3） 每秒内电源ε获得的化学能。



解： （1）充电电流为 $I=\dfrac{\varepsilon'-\varepsilon}{r+r'}=10A$

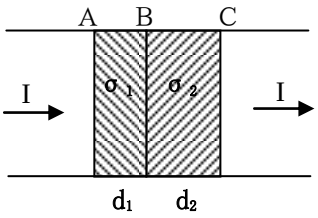
（2）每秒内电源ε′ 消耗的化学能为 $P'=I'\varepsilon=60J$

（3）每秒内电源ε获得的化学能为 $P=I\varepsilon=40J$

（消耗在两电源内电阻上的能量为P＝２０Ｊ）

6、 求图示中A、B、C三界面上的面电荷密度。

解：电流均匀分布在横截面上，设A、B、C三界面上的面电荷密度分别为σ_A、σ_B和σ_C



$$I=jS=\sigma E\Delta S=\sigma\frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}S$$

$$\sigma_e=j\frac{\varepsilon_0}{\sigma}=\frac{I}{S}\frac{\varepsilon_0}{\sigma}$$

$$\sigma_{eA}=\frac{I}{S}\frac{\varepsilon_0}{\sigma_1}\qquad\sigma_{eC}=-\frac{I}{S}\frac{\varepsilon_0}{\sigma_2}\qquad\sigma_{eB}=\frac{I\varepsilon_0}{S}\left(\frac{1}{\sigma_2}-\frac{1}{\sigma_1}\right)$$

---

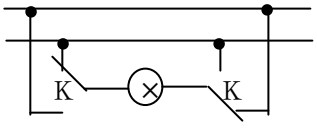
§3.3 简单电路

思考题：

1、 在两层楼道之间安装一盏电灯，试设计一个线路，使得在楼上和楼下都能开关这盏电灯。

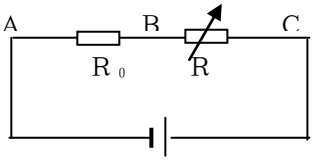
答：可以选用两只单刀双掷开关。

电路图如图所示。



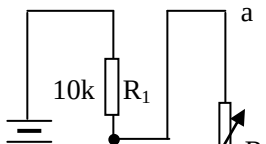
2、 附图中R_0为高电阻元件，R为可变电阻，（$R<<R_0$），试论证，当R改变时，BC间的电压几乎与R成正比。

答：设电源电动势为ε，内电阻可以忽略，



$$U_{BC}=\frac{\varepsilon}{R_0+R}R=\underrightarrow{R<<R_0}\approx\frac{\varepsilon}{R_0}R\propto R$$

3、 试论证在附图所示的电路中，当数量级为几百欧姆的负载电阻R变化时，通过R_2



的电流Ⅰ及负载两端的电压Ｕab 几乎不变。

答：设电源电动势为ε，内电阻为r，总电流为Ⅰ总，

Ｒ2与Ｒ并联，$IR_2=(I_{总}-I)R$

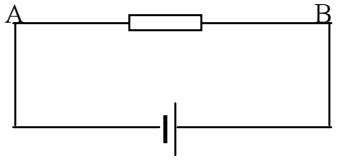
$$I=\frac{R}{R+R_2}I_{总}=\frac{R}{R+R_2}\frac{\varepsilon}{(R_1+r+\frac{RR_2}{R+R_2})}$$

$$U_{ab}=IR_2$$

R>>R2，可见当Ｒ变化时，Ⅰ及Ｕab 几乎不变。当Ｒ2与Ｒ相比小到可以忽略时，

$$I\approx\frac{\varepsilon}{(R_1+r+R_2)}\qquad U_{ab}=IR_2\approx\frac{\varepsilon R_2}{(R_1+r+R_2)}$$ 与Ｒ无关

4、　（1）在附图中由于接触电阻不稳定，使得Ａ Ｂ间的电压不稳定。为什么对于一定的电源电动势，在大电流的情况下这种不稳定性更为严重？（2）由于电池电阻 r 不稳定，也会使得Ａ Ｂ间的电压不稳定。如果这时我们并联一个相同的电池，是否能将情况改善？为什么？

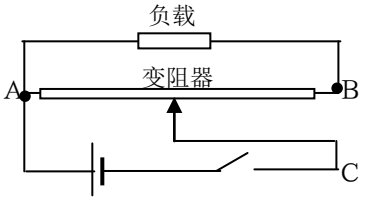


答：（1）设由于接触电阻不稳定而产生的附加电阻为Ｒ′

$U_{AB}=IR+IR'$　　Ⅰ越大，ＵＡＢ受到的影响越大。

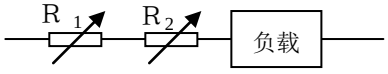
（2）电池并联时，$U_{AB}=\varepsilon-\frac{\varepsilon}{R+r/2}\frac{r}{2}=\frac{\varepsilon R}{R+r/2}$，当ｒ变化时，对ＵＡＢ影响较小，情况能够得到改善。

5、　附图所示的这种变阻器接法有什么不妥之处？

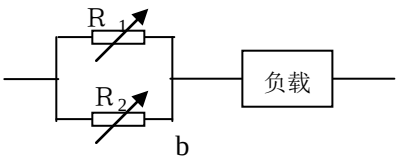


答：在图示电路中，如果滑动变阻器的触点滑到Ａ点时，易造成电源短路，损坏电源。

6、　实验室或仪器中常用可变电阻（电位器）作为调节电阻串在电路中构成制流电路，用以调节电路的电流。有时用一个可变电阻调节不便，须用两个阻值不同的可变电阻，一个作粗调（改变电流大），一个作细调（改变电流小），这两个变阻器可以如图 a 串联起来或如图 b 并联起来，再串入电路。已知Ｒ1较大，Ｒ2较小，问在这两种联接中哪一个电阻是粗调，哪一个是细调？



a



b

答：（1）在串联电路中，Ｒ1较大，对电路中电流影响较大，Ｒ1是粗调，Ｒ2是细调。

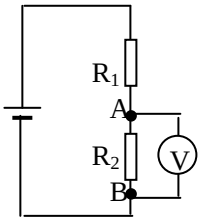
（2）在并联电路中，Ｒ1较大，对电路中电流分流作用较小，Ｒ1是细调，Ｒ2是粗调。

7、 为了测量电路两点之间的电压，必须把伏特计并联在电路上所要测量的两点，如图所示，伏特计有内阻，问：

（1） 将伏特计并入电路后，是否会改变原来电路中的电流和电压分配？

（2） 这样读出的电压值是不是原来要测量的值？

（3） 在什么条件下测量较为准确？



解： 未并伏特计时，通过R_2的电流为 $I_2=\dfrac{\varepsilon}{R_1+R_2+r}$

A、B两点间的电压为 $U_{AB}=I_2R_2=\dfrac{\varepsilon R_2}{R_1+R_2+r}$

并入伏特计后，通过R_2的电流为 $I_2'=\dfrac{\varepsilon}{(r+R_1)+R_2R_V/(R_V+R_2)}$

A、B两点间的电压为

$$U_{AB}'=I_2'R_2=\frac{\varepsilon R_2}{(r+R_1)+R_2R_V/(R_V+R_2)}=\frac{\varepsilon}{(r+R_1)+\left(\dfrac{1}{R_V}+\dfrac{1}{R_2}\right)\dfrac{R_2}{R_V}+1}\frac{1}{}$$

可见并入伏特计后对原电路的电流和电压都有一定的影响。

读出的电压值并不等于原来要测量的值。

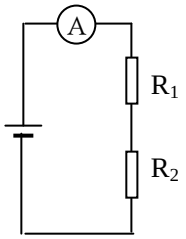
只有当$R_V>>R_2$时，所测值较为准确。

8、 为了测量电路中的电流强度，必须把电路断开，将安培计接入，如图所示，安培计有一定的内阻，问：

（1） 将安培计接入电路后，是否会改变原来电路中的电流？

（2） 这样读出的电流值是不是原来要测量的值？

（3） 在什么条件下测量较为准确？



答：未接入安培计时，电路中的电流为 $I=\dfrac{\varepsilon}{R_1+R_2+r}$

安培计接入电路后，电路中的电流为 $I'=\dfrac{\varepsilon}{R_1+R_2+R_A+r}$，改变原来电路中的电流。

读出的电流值不是原来要测量的值。

只有当$R_A<<R_1+R_2+r$时，才能较准确地测量电路中的电流。

9、 测量电阻的一种方法是在电阻上加上一定的电压，用伏特计测出电阻两端的电压

U_x,同时用安培计测出通过电阻的电流强度I_x，由公式$R=U_x/I_x$算出待测电阻的阻值。这种测量方法叫做伏安法。用伏安法测量电阻时，电路的连接方法有两种，如附图a、b所示。由于安培计、伏特计都有一定的内阻，这样测出的值是准确的吗？如果安培计的内阻$R_A=5.0\Omega$，伏特计的内阻$R_V=2.0k\Omega$，采用哪一种联接方法测量误差较小？若R大约为10Ω，采用哪种联接较好？

图b

答：（1）在图a中，$R_x=\frac{U-I_AR_A}{I_A}$，在图b中，$R_x=\frac{U}{I_A-U/R_V}$。可见Rx并不等于U/I_A，因此用Rx=U/I_A来计算Rx并不准确。

（2）当$R_x>>R_A$时，用图a的联接方法测量误差较小。

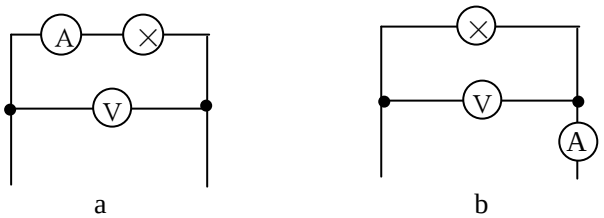
$$U=I_A(R_x+R_A)\approx I_AR_x\rightarrow R_x=\frac{U}{I_A}$$

当$R_x<<R_V$时,用图b的联接方法测量误差较小。

$$I_A=I_x+\frac{U}{R_V}=U(\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_V})\approx\frac{U}{R_x}\rightarrow R_x=\frac{U}{I_A}$$

（3）R=10Ω时，采用图b方法较好。

10、 测量一个灯泡（标称220V50W）在220V电压下所消耗的功率。已知伏特计的灵敏度为1000Ω/V，安培计的内阻为0.1Ω,问安培计和伏特计应按图a还是按图b联接，可使测量的误差较小？



a b

答：灯泡电阻为$R=U^2/P=968\Omega$，$R_A=0.1\Omega$，选用伏特计量程为0～250V，则$R_V=25000\Omega$。

接a电路时，电流表有分压作用，$\Delta P=I_AU_A=I_A^2R_A=0.005W$

接b电路时，电压表有分流作用，$\Delta P=U_A^2/R_V=0.0002W$　　误差较小。

11、 把一个表头改装成安培计，其量程和内阻是加大还是减小？能不能改装出量程比

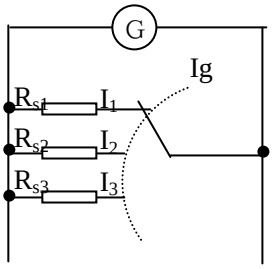
原来的表头更小的安培计？

答：把表头改装成安培计，采用分路分流的办法。用一个比表头电阻低的电阻与表头并联，从而得到一个内阻减小，量程扩大的安培计。由于表头的设计是按通过表头的额定电流值来确定的，将电阻与表头串联或并联都不能改变其内部结构，故不改变其额定电流，因此不能改装出量程比原来更小的安培计。

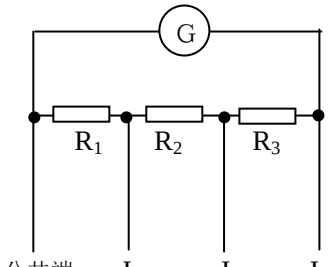
１２、 要把一个表头Ｇ改装成多个量程的安培计，有两种方式：

（１） 如图 a 所示，表头通过波段开关和不同的分流电阻 R_{s1}、R_{s2}…并联。这种电路叫做开路转换式。

（２） 如图 b 所示，电阻 R_1、R_2…与表头联成一个闭合回路，从不同的地方引出抽头。选择联接表头的两个抽头之一为公共端，它和其他任何一个抽头配合，得到一种量程的安培计。这种电路叫做闭路抽头式。



a



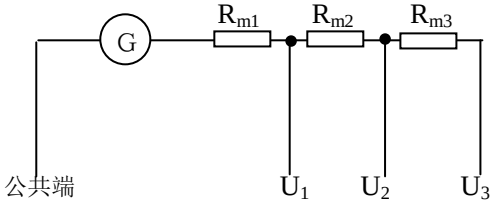
b

试比较这两种电路的优缺点。

答：开路转换式的优点是，各量程的分流电阻是独立的，各量程之间互不影响，便于调整。但电路的误差和阻尼时间随各量程分流电阻阻值改变而变化；同时由于各转换装置的接触电阻包括在测量电路之内，所以仪表误差不稳定。最大缺点是当转换开关 K 接触不良，或者造成分流电阻断路时，将会有很大的电流通过表头而将表头烧毁。使用时不够安全。

闭路抽头式电路的最大优点是使用安全。当转换开关接触不良时，表头仅有极小的电流通过。若转换开关造成分流电阻断路，表头没有电流通过；与仪表测量机构形成闭合回路的电阻值不随量程改变而变化。因此仪表的阻尼时间是不变化的。由于量程转换开关方式引起的接触电阻与分流电阻的阻值无关，只串联在电路中，所以引起的误差极小。闭路抽头式电路的缺点主要是分流电阻中某一电阻阻值的变化，不同程度的影响各量程，因此调整误差有一定的困难。一般要经过几次反复才能将各量程的阻值调整好。

１３、附图中所示是一个由表头Ｇ改装成的多量程伏特计的电路。每个抽头与公共端组成一种量程。U_1、U_2、U_3三个量程中哪个最大？哪个最小？各档的满度电流是否相同？使用各档时，表头上的电压降是否一样？



答：（１）伏特计的电压扩程 $U = I_g(R_m + R_g)$

各量程的大小取决于扩程电阻阻值的大小。

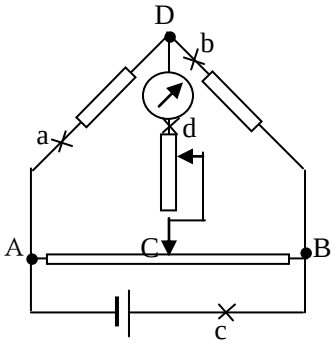
$U_3 > U_2 > U_1$

（２）表头内阻与各量程的扩程电阻串联，各档的满度电流Ｉｇ相同。

（３）使用各档时，Ｉｇ及Ｒｇ一定，Ｕg=ＩｇＲｇ相同

１４、（１）若在附图中所示的电桥电路中分别在a、b、c、d处断了，当滑动头Ｃ在ＡＢ上滑动时，检流计的指针各有何表现？

（２）若当滑动头Ｃ在ＡＢ上无论如何滑动，检流计都不偏转，这时用一伏特计联在ＣＤ间，发现伏特计有偏转，能否判断是哪根导线断了？



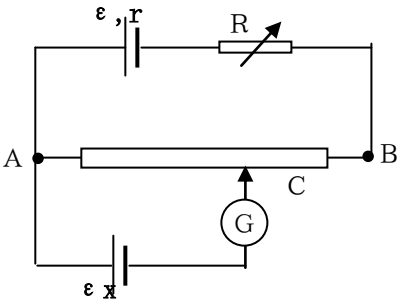
答：（１）若a 处断开，$U_D>U_C$,Ｃ从Ａ→Ｂ时，电流从大→小；

若b 处断开，$U_D<U_C$,Ｃ从Ａ→Ｂ时，电流从小→大；

若c、d 处断开，检流计中无电流，指针不动。

（２）ＣＤ间有电压而无电流，可知是ＣＤ间某处断开。

１５、在电位差计电路中，若电源ε和待测电源εx 的电动势相等，滑动头Ｃ在ＡＢ上能否找到平衡点？



答：设Ｃ点为平衡点。按照平衡条件

$$\varepsilon_x = R_{AC}\frac{\varepsilon}{R_{AB}+R+r}$$ 若εx＝ε

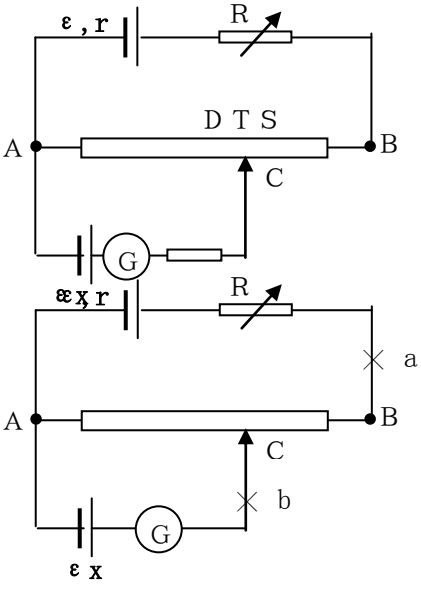
$$\frac{R_{AC}}{R_{AB}+R+r}=1$$ 这是不可能的。所以此时ＡＢ上不能找到平衡点。

１６、在上题中， 若ε和εx的电动势分别为2.0V和1.5V,R_{AB}=10Ω.为了找到平衡点，对Ｒ的数值有什么限制？

答：U_{AB}＝ＩR_{AB}≥εx　　即Ｉ≥εx／R_{AB}＝0.15A

由全电路欧姆定律得　　Ｉ＝ε／（Ｒ＋R_{AB}）　　Ｒ≤3.3Ω

１７、在附图中，Ｔ是平衡点，若将滑动头Ｃ分别与Ｄ或Ｓ点接触，通过检流计的电流方向如何？



答：Ｃ在平衡点Ｔ时检流计中无电流。U_{AT}＝εx

当Ｃ与Ｄ接触时，U_{AD}<εx，通过检流计的电流从左→右；

当Ｃ与Ｓ接触时，U_{AS}>εx，通过检流计的电流从右→左。

１８、若在附图中a处的导线断了，当滑动头Ｃ在ＡＢ间滑动

时，将会观察到检流指针有何表现？若在 b 处的导线断了，情况如何？

答：若在 a 处断开，有电流通过检流计，当 C 从 A →时，

通过检流计的电流由小→大，方向为左→右；

若在 b 处断开，检流计中无电流通过。

１９、用电位差计测量电路中两点之间的电压应如何进行？

答：（１）联接电路。按标记将供电电源、标准电池、检流计、待测电路接好。注意正负标记，供电电源的电动势应大于标准电池的电动势和待测电路的电压值。

（２）校准。将转换开关拨到“标准”，把标准电池接入补偿回路，调整制流电阻，使检流计指针没有偏转，此时工作电流即为标准值。

（３） 测量。固定制流电阻，将开关拨到“未知”，把待测电路接入补偿电路，找到平衡位置，即可从仪器上直接读出待测电路两点间的电压。

－－

习题：

１、 ６Ｖ、２Ω的灯泡用１２Ｖ的直流电源，后者的内阻为 0.5Ω,问应串联多大的电阻？

解：设串联电阻为 R 。由全电路的欧姆定律 $I=\dfrac{U}{R_0+R+r}=\dfrac{U_0}{R_0}$ R＝1.5Ω

２、 四个电阻均为 6.0Ω的灯泡，工作电压为１２Ｖ，把它们并联起来接到一个电动势为１２Ｖ，内阻为 0.20Ω的电源上，问：

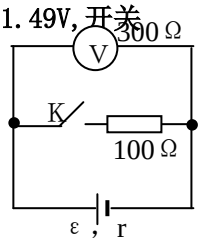
（１） 开一盏灯时，此灯两端的电压多大？

（２） 四盏灯全开时，灯两端的电压多大？

解：（１）开一盏灯时，$I=\dfrac{\varepsilon}{R+r}=1.93A$ $U=IR=11.6V$

（２）开四盏灯时，$I'=\dfrac{\varepsilon}{\dfrac{R}{4}+r}=7.06A$ $U'=I'R=10.6V$ 电压下降

３、 附图中伏特计的内阻为３００Ω，在开关 K 未合上时，其电压读数为 1.49V,开关合上时其读数为 1.46V,求电源的电动势和内阻。



解：K 断开时 $I_1=\dfrac{\varepsilon}{R_V+r}$ $U_1=I_1R_V=\dfrac{\varepsilon}{R_V+r}R_V$

K闭合时 $I_2=\dfrac{\varepsilon}{\dfrac{R_VR}{R_V+R}+r}$ $U_2=I_2\dfrac{R_VR}{R_V+R}=\dfrac{R_VR\varepsilon}{(R_V+R)r+R_VR}$

解得 $\varepsilon=\dfrac{R_VU_1U_2}{(R_V+R)U_2-RU_1}=1.5V$ $r=\dfrac{R_V(\varepsilon-U_1)}{U_1}=2.07\Omega$

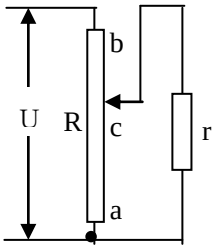
4、 为使一圆柱形长导体棒的电阻不随温度变化，可将两相同截面的碳棒和铁棒串联起来。问两棒长度之比应为若干？

解：若使整个导体电阻不随温度变化，应有 $\rho_{0Fe}\alpha_{Fe}t=\rho_0\alpha_c t$

$$\frac{\rho_{0Fe}}{\rho_0}=\frac{\alpha_c}{\alpha_{Fe}}=\frac{1}{40}\to R=\rho\frac{l}{S}\to\frac{l_{Fe}}{l_c}=\frac{\rho_0}{\rho_{0Fe}}=\frac{40}{1}$$

5、 变阻器可用作分压器，用法如附图所示。U是输入电压，R是变阻器的全电阻，r是负载电阻，c是R上的滑动接头。滑动c，可以在负载上得到从0到U之间的任何电压U_r。设R的长度ab=l，R上各处单位长度的电阻都相同，a、c之间的长度ac=x，求加到r上的电压Ur与x的关系。用方格纸画出当r=0.1R和r=10R时的Ur—x曲线。

解：设总电流为I，流过r的电流为i，则由欧姆定律得



$$U_{ac}=(I-i)\frac{R}{l}x$$

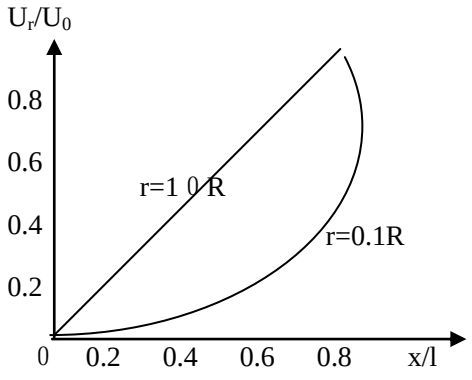
$$U_r=ir$$

$$U=I\frac{R}{l}(l-x)+(I-i)\frac{R}{l}x$$

整理得 $U_r=\dfrac{lrUx}{R(l-x)x+l^2r}$ 只有当r很大时，Ur才近似与x成正比。

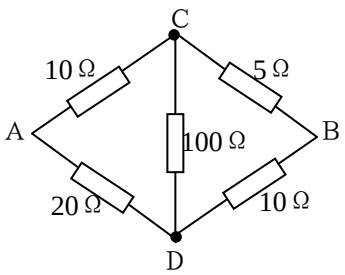
当r=0.1R时， $U_r=\dfrac{0.1\frac{x}{l}U}{\frac{x}{l}(1-\frac{x}{l})+0.1}$

当r=10R时， $U_r=\dfrac{10\frac{x}{l}U}{\frac{x}{l}(1-\frac{x}{l})+10}$



6、 在附图所示的电路中，求：

（1）R_{CD}； （2）R_{BC}； （3）R_{AB}。

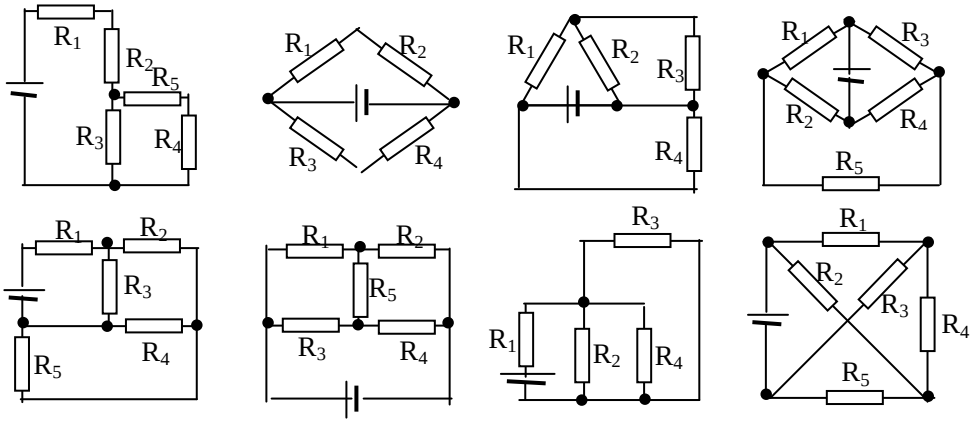


解： （1） $\dfrac{1}{R_{CD}}=\dfrac{1}{100}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{30}$ $R_{CD}=9.09\Omega$

（２） $\frac{1}{R_{BC}}=\frac{1}{5}+\frac{1}{10+\frac{100(10+20)}{100+30}}$　　R_{BC}=4.3Ω

（３）100Ω电阻被短路，$\frac{1}{R_{AB}}=\frac{1}{10+5}+\frac{1}{20+10}$　　R_{AB}=10Ω

7、　判断一下，在附图中所示的各电路中哪些可以化为串、并联电路的组合，哪些不能。如果可以，就利用串、并联公式写出它们总的等效电阻。



a 可以　　$R=R_1+R_2+\frac{R_3(R_4+R_5)}{R_3+R_4+R_5}$

b 可以　　$R=\frac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}{R_1+R_2+R_3+R_4}$

c 可以　　$R=\frac{R_4(R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3)}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3+R_2R_4+R_3R_4}$

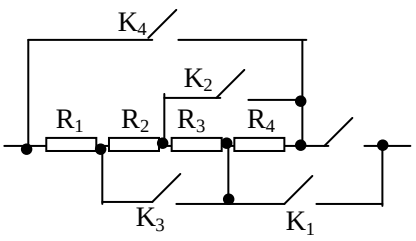
e 可以　　$R=R_1+\frac{R_3(R_2+R_4R_5/(R_4+R_5))}{R_3+(R_2+R_4R_5/(R_4+R_5))}$

g 可以　　$R=\frac{R_4(R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3)}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3+R_2R_4+R_3R_4}$

其余 d、f、h 不能化为电阻的简单串并联。

8、　无轨电车速度的调节，是依靠在直流电动机的回路中串入不同数值的电阻，从而改变通过电动机的电流，使电动机的转速发生变化。　例如，可以在回路中串接四个电阻R_1、R_2、R_3和R_4，再利用一些开关K_1、K_2、K_3、K_4和K_5，使电阻分别串联或并联，以改变总电阻的数值。如附图中所示。设$R_1=R_2=R_3=R_4=1.0\Omega$，求下列四种情况下的等效电阻Rab:

（１）　K_1、K_5合上，K_2、K_3、K_4断开；
（２）　K_2、K_3、K_5合上，K_1、K_4断开；
（３）　K_1、K_3、K_4合上，K_2、K_5断开；
（４）　K_1、K_2、K_3、K_4合上，K_5断开。



解：（1）$R=R_1+R_2+R_3=3.0\Omega$　　（2）$R=R_1+(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4})^{-1}=1.3\Omega$

（3）$R=\frac{R_1R_4}{R_1+R_4}=0.5\Omega$　　（4）$R=(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4})^{-1}=0.25\Omega$

9、　如附图所示的电路中，a、b 两端电压为 9.0V，试求：

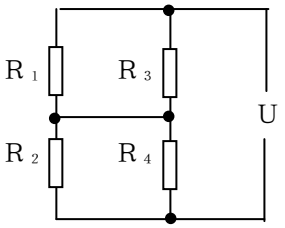
（1） 通过每个电阻的电流强度；

（2） 每个电阻两端的电压。

解：　（1）$I_1=I_5=1.5mA$　　$I_2=I_{10}=0.75mA$

（2）$U_1=1.5V$　$U_5=7.5V$　$U_2=15V$　$U_{10}=7.5V$

10、　如图所示，电路中 R_1=10kΩ，R_2=5.0kΩ，R_3=2.0kΩ，R_3=1.0kΩ，U=6V，求通过R_3的电流。



解：$\frac{R_1}{R_2}=\frac{R_3}{R_4}$，中间联线无电流通过 $I_2=\frac{U}{R_3+R_4}=2.0mA$

11、　有两个电阻，并联时总电阻为 2.4Ω，串联时总电阻是10Ω。问这两个电阻的阻值是多少？

解：$R_1=6\ \Omega$　　$R_2=4\ \Omega$

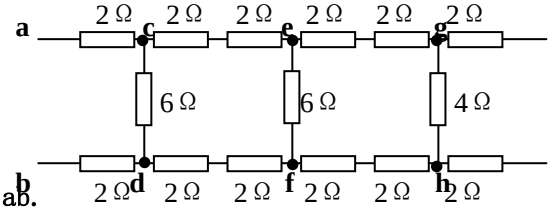
12、　有两个电阻 R_1=3.6kΩ，R_2=6.0kΩ，

（1） 它们串联接入电路中时，测得 R_1 两端的电压为U_1=50V，求 R_2 两端的电压U_2；

（2） 当它们并联接入电路中时，测得通过 R_1 的电流强度I_1=6.0A，求通过 R_2 的电流I_2。

解：（1）$U_2=\frac{R_2}{R_1}U_1=60V$　　（2）$I_2=\frac{R_1}{R_2}I_1=5.0A$

13、　电阻的分布如附图所示。



（1） 求Rab;

（2） 若4Ω电阻中的电流为1A，求Uab.

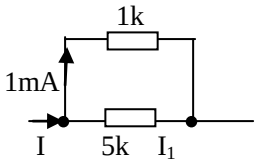
解：　（1）Rab=8 Ω

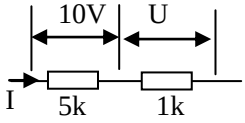
（2）$U_{ef}=12V$　$I_{ef6}=2A$　$I_{ce}=3A$　$U_{cd}=36V$　$I_{cd6}=6A$　$I_{ac}=9A$

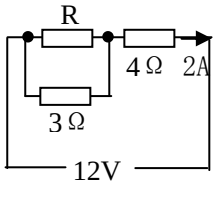
Uab=72V

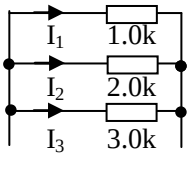
14、　在附图所示的四个电路中，求出所标文字的数值：

（1） 求I，I_1；　（2）求I、U；　（3）求R；　（4）求I_1、I_2、I_3









→

（1）　　（2）　　（3）　　（4）

解：　（1）$I_1 = 0.2mA$　$I = I_1 + 1mA = 1.2mA$

（2）$U = 20V$　　$I = 2mA$

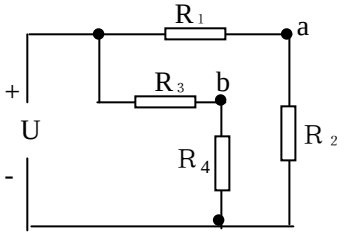
（3）R＝6 Ω

（4）R＝6 k/11　　U=6V/11　$I_1 = 0.54mA$　$I_2 = 0.27mA$　$I_3 = 0.18mA$

15、 附图所示的电路中，已知U=3.0V, R_1=R_2. 试求下列情况下 a 、b 两点的电压。

（1） R_3＝R_4；　（2）R_3＝2 R_4；　（3）R_3＝R_4／2

解：（1）Uab＝0

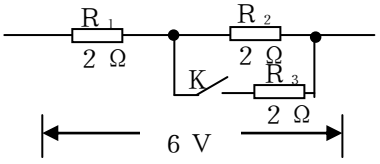


（2）Ua=U/2　　Ub=U/3　　Uab=U/6=0.5V

（3）Ua=U/2　　Ub=2U/3　　Uab=-U/6=-0.5V

16、 附图所示电路中，当开关K断开时，通过 R_1、R_2 的电流各为多少？当开关K接通时，通过 R_1、R_2 的电流又各为多少？

解：（1）K断开时，$I = I_1 = I_2 = 1.5A$

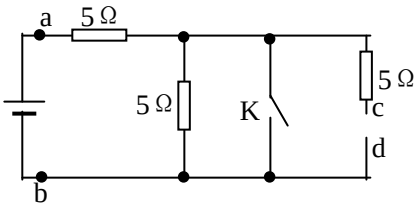


（2）K接通时，$I = 2A$　　$I_1 = I = 2A$

$$I_2 = I_3 = I/2 = 1A$$

17、 附图所示电路，在开关K断开和接通两种情况下，a 、b 两点之间的等效电阻Rab 和 c、d 之间电压Ucd 各为多少？

解：（1）K断开时，$R_{ab} = R_1 + R_2 = 10\Omega$　$U_{cd} = U/2 = 5V$



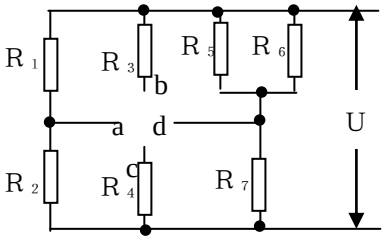
（2）K接通时，$R_{ab} = 5\Omega$　　$U_{cd} = 0$

18、 在附图所示的电路中，U＝12V, R_1=30kΩ，R_2=6.0kΩ，R_3=100kΩ，R_3=10kΩ，R_5=100kΩ，R_6=1.0kΩ，R_7=2.0kΩ。求电压 Uab、Uac 和 Uad

解：

$$U_{ab} = -U_{R_1} = \frac{-R_1}{R_1 + R_2}U = -10V$$

$$U_{ac} = -U_{R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}U = 2V$$



$$U_{ad}=\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}-\frac{R_7}{R_7+\frac{R_5R_6}{R_5+R_6}}\right)U=-6V$$

１９、 有一适用于电压为１１０Ｖ的电烙铁，允许通过的电流为 0.7A，今准备接入电压为２２０Ｖ的电路中，问应串联多大的电阻？

解：$R_x=\frac{U_x}{U_1/R_1}=157\Omega$

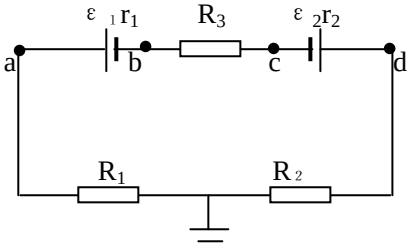
２０、 一简单串联电路中的电流为５Ａ。当把另外一个２Ω的电阻插入时，电流减小为４Ａ。问原来电路中的电阻是多少？

解：Ｒ＝８Ω

２１、 在附图中，ε_1=24Ｖ，r_1=2.0Ω，ε_2=6.0Ｖ，r_2=1.0Ω，R_1=2.0Ω，R_2=1.0Ω，R_3=3.0Ω

（１） 求电路中的电流；　　（２）a、b、c 和 d 各点的电位；

（３）两个电池的路端电压；　　（４）若把 6.0Ｖ的电池反转相接，重复以上计算。



解：（1）$I=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{R_1+R_2+R_3+r_1+r_2}=2A$

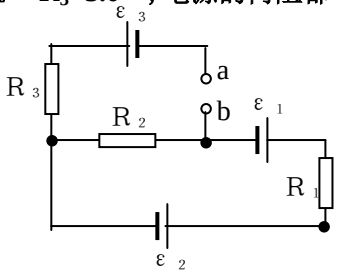
（2）U_a=4V　U_b=-16V　U_c=-10V　U_d=-2V

（3）U_1=20V　　U_2=8V

（4）$I=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{R_1+R_2+R_3+r_1+r_2}=3.3A$　U_a=6.6V　U_b=-10.8V　U_c=-0.6V　U_d=-3.3V

U_1=17.4V　　U_2=2.7V

２２、 在附图的电路中已知 ε_1=12.0Ｖ，$\varepsilon_2=\varepsilon_3$=6.0Ｖ，$R_1=R_2=R_3$=3.0Ω，电源的内阻都可忽略不计。求：（１）Uab；（２）Uac；（３）Ubc.

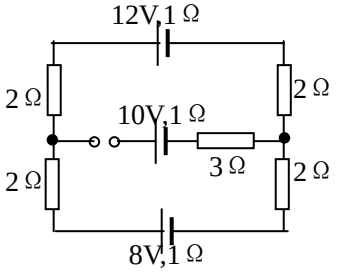


解：（１）$I_{R_2}=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{R_1+R_2}=1.0A$　　Ｕab＝－３０Ｖ

（２）Ｕac＝－１２Ｖ

（３）Ｕbc＝－９Ｖ

２３、 一电路如附图所示，求：（１）Uab；　（２）Ucd.



解：$I=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{R_1+R_2+R_3+R_4+r_1+r_2}=0.4A$

（１）$U_{ab}=I(R_2+R_3)+\varepsilon_2=10V$

（２）$U_{cd}=I(R_2+R_3)+\varepsilon_2-\varepsilon_1=0V$

２４、　一个电阻为 Rg=25Ω 的电流计，当其指针正好到头时，通过的电流 Ig=100mA。问：

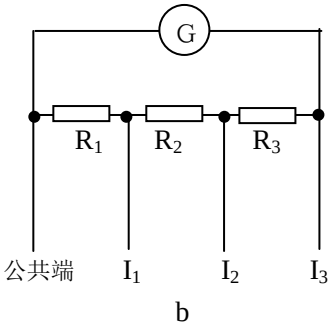
（１） 把它改装成最多能测到 1.00A 的安培计时，应并联多大的电阻？

（２） 把它改装成最多能测到 1.00０Ｖ的伏特计时，应串联多大的电阻？

解：（１）应并联电阻 $R_S=\dfrac{I_gR_g}{I-I_g}=0.025\Omega$

（２）应串联电阻 $R_S=\dfrac{U-U_g}{I_g}=975\Omega$

２５、　闭路抽头式多量程安培计的电路如图所示，设各接头分别与公共端组成的安培计的量程为Ｉ₁、Ｉ₂、Ｉ₃。它们之中哪个量程最大？哪个最小？试证明，Ｒ₁、Ｒ₂、Ｒ₃的数值可以用下式计算： $R_1+R_2+R_3=\dfrac{I_g}{I_3}\sum$ ， $R_1+R_2=\dfrac{I_g}{I_2}\sum$ ， $R_1=\dfrac{I_g}{I_1}\sum$ 。其中 $\sum=R_1+R_2+R_3+R_g$. R_g 为表头内阻， I_g 是满度电流。



b

各档的满度电压是否相同？

解：各档量程比较　　$I_1>I_2>I_3$

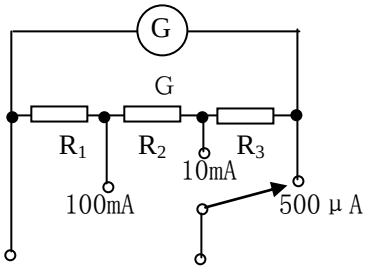
$I_gR_g=(I_3-I_g)(R_1+R_2+R_3)$　　$R_1+R_2+R_3=\dfrac{I_g}{I_3}\sum$

$I_g(R_g+R_3)=(I_2-I_g)(R_1+R_2)$　　$R_1+R_2=\dfrac{I_g}{I_2}\sum$

$I_g(R_2+R_3+R_g)=(I_1-I_g)R_1$　　$R_1=\dfrac{I_g}{I_1}\sum$

满度时Ｕ＝Ｉ$_g$Ｒ$_g$相同，电压Ｕ$_3$＝Ｉ$_g$Ｒ$_g$,Ｕ$_2$＝Ｉ$_g$（Ｒ$_g$＋Ｒ$_3$）,Ｕ$_1$＝Ｉ$_g$（Ｒ$_g$＋Ｒ$_2$＋Ｒ$_3$）

２６、　ＭＦ—１５型万用电表的电流档为闭路抽头式。如附图所示表头的内阻Ｒg=2333Ω，满度电流Ｉg=150μＡ，将其改装成量程是 500μA、10mA、100mA 的多量程安培计。试计算出Ｒ₁、Ｒ₂、Ｒ₃的阻值，并标出三个接头的量程。



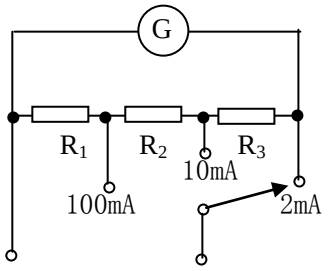
解：利用上题结果

$R_1+R_2+R_3=\dfrac{I_g}{I_3}\sum$ ， $R_1+R_2=\dfrac{I_g}{I_2}\sum$ ， $R_1=\dfrac{I_g}{I_1}\sum$ ， $\sum=R_1+R_2+R_3+R_g$

解得 $$\sum=\left(1+\frac{I_g}{I_3-I_g}\right)R_g \rightarrow \begin{cases} R_1=\frac{I_g}{I_1}\sum=5.00\Omega \\ R_2=(\frac{I_g}{I_2}-\frac{I_g}{I_1})\sum=\frac{I_1-I_2}{I_1I_2}I_g\sum=45.0\Omega \\ R_3=(\frac{I_g}{I_3}-\frac{I_g}{I_2})\sum=\frac{I_2-I_3}{I_2I_3}I_g\sum=950\Omega \end{cases}$$

２７、 多量程安培计为闭路抽头式，表头的满度电流Ｉg＝1.00mA,内阻Ｒg=100Ω,改装为安培计量程为2.0mA、１０mA和１００mA .计算出其中的电阻，画出线路图，并指明各接头的量程。

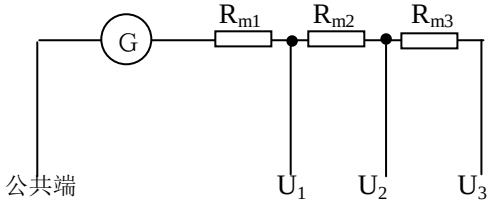
解：与上题同理。电路图如图所示。



$$R_1=\frac{I_g}{I_1}\sum=80\Omega$$
$$R_2=(\frac{I_g}{I_2}-\frac{I_g}{I_1})\sum=\frac{I_1-I_2}{I_1I_2}I_g\sum=18\Omega$$
$$R_3=(\frac{I_g}{I_3}-\frac{I_g}{I_2})\sum=\frac{I_2-I_3}{I_2I_3}I_g\sum=2\Omega$$

２８、 多量程伏特计电路如图所示。试证明：各档的内阻与量程的关系都是：内阻=量程／Ｉg。例如对于量程为Ｕ１、Ｕ２、Ｕ３各档的内阻分别为：

R_g+R_{m1}， $R_g+R_{m1}+R_{m2}$， $R_g+R_{m1}+R_{m2}+R_{m3}$



则 $R_g+R_{m1}=U_1/I_g$，

$R_g+R_{m1}+R_{m2}=U_2/I_g$，

$R_g+R_{m1}+R_{m2}+R_{m3}=U_3/I_g$

（由此可见，只要已知1/Ig，就可算出所需要的各个扩程电阻。）

解：$U_1=I_g(R_g+R_{m1})$

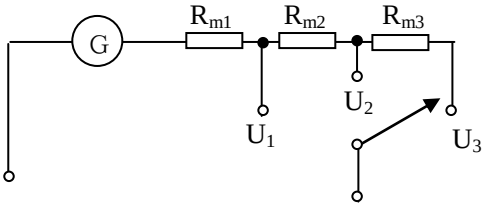
$U_2=I_g(R_g+R_{m1}+R_{m2})$ ——→各档均有 内阻=量程／Ｉg。

$U_3=I_g(R_g+R_{m1}+R_{m2}+R_{m3})$

２９、 ＭＦ－１５型万用电表的电压档如附图所示，表头满度电流Ｉg=0.50mA，内阻Ｒg=700Ω,改装为多量程伏特计的量程分别为Ｕ１=10Ｖ，Ｕ２=50Ｖ，Ｕ３=250Ｖ。求各档的降压电阻Ｒ１、Ｒ２、Ｒ３。若再增加两个量程Ｕ４=500Ｖ，Ｕ５=1000Ｖ，又该如何？

解：$R_{m1}=U_1/I_g-R_g=19.3k\Omega$

$R_{m2}=U_2/I_g-(R_g+R_{m1})=80k\Omega$

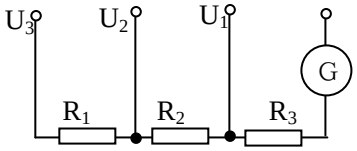


$$R_{m3}=U_3/I_g-(R_g+R_{m1}+R_{m2})=400k\Omega$$

$$R_{m4}=U_4/I_g-(R_g+R_{m1}+R_{m2}+R_{m3})=500k\Omega$$

$$R_{m5}=U_5/I_g-(R_g+R_{m1}+R_{m2}+R_{m3}+R_{m4})=1M\Omega$$

３０、 一伏特计共有四个接头如图所示，量程Ｕ₁=3.0Ｖ，Ｕ₂=15Ｖ，Ｕ₃=150Ｖ。电流计的满度电流Ｉg=3.0mA，内阻为100Ω.问：



（１） 该伏特计的灵敏度（即每伏欧姆数）多大？

（２） 当用不同接头时，伏特计的降压电阻Ｒ₁、Ｒ₂、Ｒ₃各为多大？

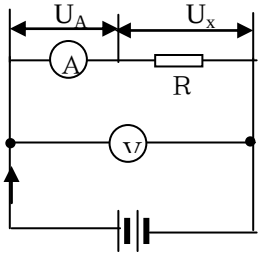
解：（１）１／Ｉg＝３８３Ω／Ｖ

（２）Ｒ₁＝９００Ω，　　Ｒ₂＝４０００Ω，　　Ｒ₃＝４５００Ω

３１、 一个量程为１５０Ｖ的伏特计，它的内阻为２０kΩ.当它与一个高电阻Ｒ串联后接到１１０伏电路上时，它的读数为5.0V.求Ｒ。

解：Ｒ＝４２０ＫΩ，

３２、 用伏安法测电阻Ｒ，由Ｕ／Ｉ＝Ｒ′计算的阻值是近似值。证明：当已知伏特计的内阻Ｒᵥ，安培计的内阻Ｒ$_A$时，对于安培计内接，电阻的精确值为Ｒx＝Ｒ′－Ｒ$_A$；对于安培计外接，电阻的精确值为$\frac{1}{R_x}=\frac{1}{R'}-\frac{1}{R_V}$。

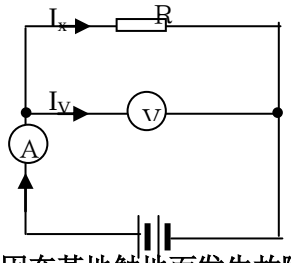


解：（１）当Ｒ$_A$<<R时，安培计内接，

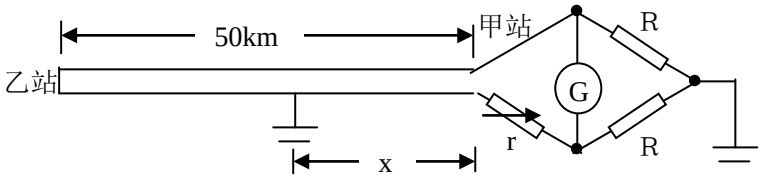
$$I_AR_A+I_AR_x=I_AR'=U \qquad R_x=R'-R_A$$

（２）当R<<Ｒv时，安培计外接，

$$I=\frac{U}{R'}=\frac{U}{R_x}+\frac{U}{R_V} \qquad \frac{1}{R_x}=\frac{1}{R'}-\frac{1}{R_V}$$



３３、 甲乙两站相距５０Ｋm，其间有两条相同的电话线，有一条因在某地触地而发生故障。甲站的检修人员用附图所示的办法找出触地到甲站的距离 x，让乙站把两条电话线短路，调节 r，使通过检流计Ｇ的电流为０。已知电话线的电阻为6.0Ω/Km,测得 r=360Ω.求 x.

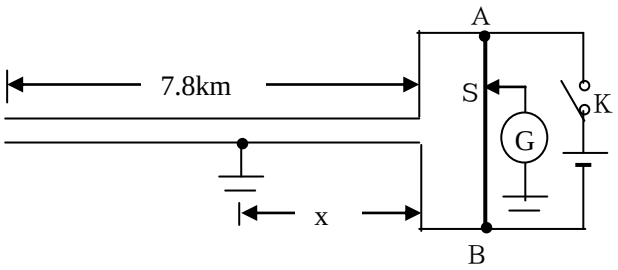


解：通过检流计的电流为零时，A、B两点等电位。

由电桥平衡条件得 $(r+R_i x)I=\left[50+(50-x)\right]R_i I$

x=20km

3 4、 为了找出电缆在某处由于损坏而通地的地方，也可以用附图所示的装置。A B是一条长为 100cm 的均匀电阻线，接触点S可在它上面滑动。已知电缆长 7.8km。设当S滑到SB=41cm 时，通过电流计G的电流为零。求电缆损坏处到B的距离 x。



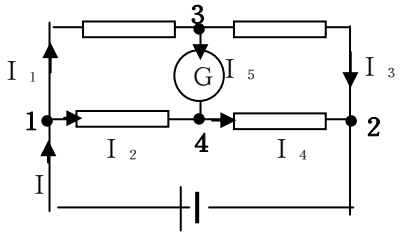
解：通过检流计的电流为零，电桥平衡。

$$SB(2\times 7.8-x)=(100-SB)x=59x \qquad \text{x=6.4km}$$

---

§3.4 复杂电路

1、 考虑一个具体的电路，例如电桥电路，验算 n 个节点列出的基尔霍夫第一方程组中只有 n-1 个是独立的。

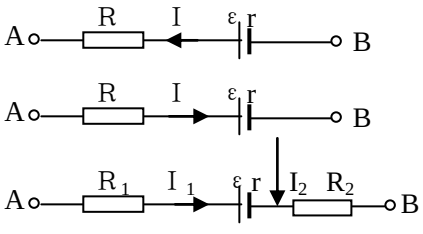


答：四个节点，根据基尔霍夫第一方程可列出四个方程

$$-I+I_1+I_2=0$$
$$I-I_2-I_4=0$$
$$-I_1+I_3+I_5=0$$
$$I_4-I_5-I_2=0$$

任取其中的三个方程，可得到另外一个方程。即只有三个方程是独立的

2、 已知复杂电路中一段电路的几种情况如图所示，分别写出这段电路的$U_{AB}=U_A-U_B$



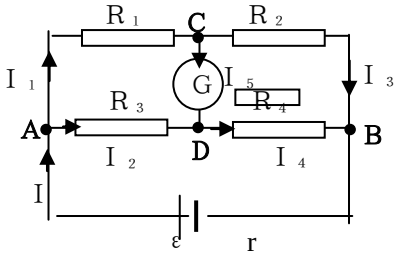
解：（1）$U_{AB}=\varepsilon-I(R+r)$

（2）$U_{AB}=\varepsilon+I(R+r)$

（3）$U_{AB}=\varepsilon-(I_1+I_2)R+I_1(R_1+r)$

3、　考虑一个具体的电路，例如电桥电路，验算对 m 个独立回路列出的基尔霍夫第二方程是相对独立的，而沿其他回路列出的方程可以由这 m 个方程组合得到。

答：根据基尔霍夫第二方程可得



ＡＣＤＡ　　$I_1R_1+I_5R_5-I_2R_2=0$

ＣＢＤＣ　　$I_3R_3-I_4R_4-I_5R_5=0$

ＡＤＢＡ　　$I_2R_2+I_4R_4+Ir-\varepsilon=0$

三个方程彼此独立，其中任何一个方程不能由其余两个方程组合而得到。但另一闭合回路ＡＣＢεａ不是独立回路，其回路方程可由前三式相加得到。

4、　理想的电压源内阻是多大？理想的电流源内阻是多大？理想电压源和理想电流源可以等效吗？

答：理想电压源是外电路所提供的电压为一定值，因此其内阻应为零。理想电流源为外电路所提供的电流为一恒定值，因此理论上理想电流源的内阻为无穷大。实际上只要把一个电池串联一个很大的电阻，就近似组成了一个理想电流源。因为在电流源的Ｉ$_0$等于电压源的短路电流，电压源的内阻等于电流源的内阻时两电源等效，这在理想电流源和理想电压源的情况下是不可能的，故理想电压源和理想电流源不可能等效。

5、　叠加定理可以理解得更广泛一些，包括电路中有电流源情形，即电路中有多个电源时，电路中任一支路的电流等于各个电源单独存在、而其他电源为零值时所产生的电流之和。因此应用叠加定理时，对于“其他电源为零值”的确切理解是重要的。在等效电源定理中要计算除源电路的电阻。“除源”也就是使电源为零值。零值电压源的端点间电压为零，这相当于短路情况。零值电流源相当于什么情况？

答：零值电流源即对外电路提供的电流为零。相当于电路断路。

6、　基尔霍夫方程组对于电流是线性的。叠加定理正是由方程组的线性导出的。考虑在例题 1 中若 ε$_1$增为 2 倍， ε$_2$增为 3 倍，电流Ｉ$_3$为多少？

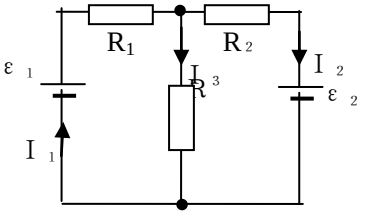
答：在例题 1 中， ε$_1$增为 2 倍， ε$_2$增为 3 倍时，由叠加原理可得

$$I_1'=0.36A\quad I_3'=0.24A\quad I_2''=0.12A\qquad I_3''=0.06A\qquad I=I_3'+I_3''=0.3A$$

习题：

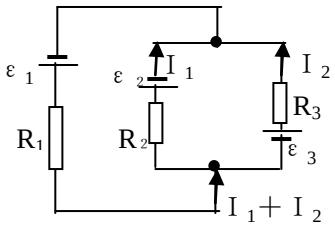
1、　一电路如图所示，已知 ε$_1$=1.5Ｖ， ε$_2$=1.0Ｖ, R$_1$=50Ω， R$_2$=80Ω， R=10Ω, 电池的内阻都可忽略不计。求通过Ｒ的电流。

解：设各支路电流如图所示。根据基尔霍夫方程



$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$
$$R_1 I_1 + R I_3 = \varepsilon_1 \qquad \text{解得} \quad I_3 = 32\text{mA}$$
$$R_2 I_2 - R I_3 = \varepsilon_2$$

2、 一电路如图所示，已知 ε_1=3.0V， ε_2=1.5V， ε_3=2.2V，R_1=1.5Ω，R_2=2.0Ω，R_3=1.4Ω，电池的内阻都已分别算在 R_1、R_2、R_3 内。求Uab.



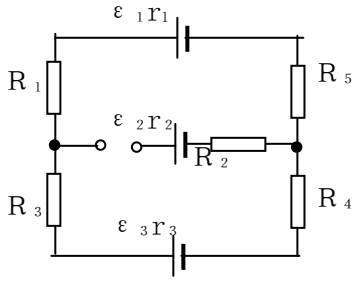
解：设各支路电流如图所示。根据基尔霍夫方程

$$-\varepsilon_1 + (I_1 + I_2)R_1 + I_1 R_2 + \varepsilon_2 = 0$$
$$R_2 I_2 - R I_3 = -\varepsilon_2 - I_1 R_2 - \varepsilon_3 + I_2 R_3 = 0$$

得 $I_1 + I_2 = 1.57A$ $\quad I_1 = -0.43A$ $\quad I_2 = 2A$

Uab=-0.6V

3、 一电路如图所示，已知 ε_1=12V， ε_2=9V， ε_3=8V，r_1= r_2= r_3= r_4=1Ω，R_1= R_3= R_4= R_5=2Ω，R_2=3.0Ω，求：



（1） a、b 断开时的Uab；

（2） a、b 短路时通过 ε_2 的电流大小和方向。

解：（1）a、b 断开时，

$$I = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{r_1 + r_3 + R_1 + R_3 + R_4 + R_5} = 0.4A$$

$$U_{ab} = I(r_3 + R_3 + R_4) + \varepsilon_3 - \varepsilon_2 = 1V$$

（2）a、b 短路时，

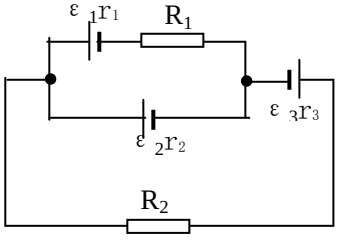
$$I_1(R_3 + r_3 + R_4) + \varepsilon_3 + (I_1 + I_2)(r_1 + R_5 + R_1) - \varepsilon_1 = 0$$
$$I_1(R_3 + r_3 + R_4) + \varepsilon_3 - I_2(r_2 + R_2)\varepsilon_2 = 0$$

解得 $\quad I_2 = \frac{2}{13}A$

如果题中 ε_2=10V，则（1）I＝0.4A　　Uab＝0V

此时若（2）a、b 再联接上，因两点之间电压为零，故短路后无电流，所以通过 ε_1 及 ε_3 的电流仍保持不变。

4、 一电路如图所示，已知 ε_1=1.0V， ε_2=2.0V， ε_3=3.0V，r_1= r_2= r_3= r_4=1.0Ω，R_1=1.0Ω，R_2=3.0Ω，求：



（1） 通过电源 3 的电流；

（2） R_2 消耗的功率；

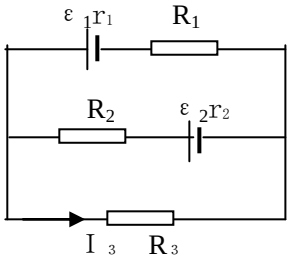
（３） 电源３对外供给的功率。

解：（１）$\begin{matrix}\varepsilon_2-I_2(R_1+r_1)+I_1r_2-\varepsilon_1=0\\(I_1+I_2)R_2+\varepsilon_3-\varepsilon_2-I_1r_2=0\end{matrix}$　　解得　$(I_1+I_2)=0.29\mathrm{A}$

（２）$P_2=I^2R_2=0.24W$

（３）$P=(I_1+I_2)\varepsilon_3-(I_1+I_2)^2r_3=0.78W$

５、　一电路如图所示，已知ε１=12Ｖ，ε２=6.0Ｖ，r₁= r₂= R₁= R₂= 1.0Ω,通过Ｒ３的电流Ｉ３＝3.0A,方向如图所示。求:



（１） 通过Ｒ１和Ｒ２的电流；

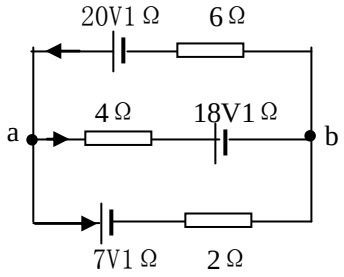
（２） Ｒ３的大小。

解：（１）根据基尔霍夫方程

$$\begin{matrix}I_1-I_2-I_3=0\\I_1(R_1+r_1)+I_3R_3=\varepsilon_1\\I_2(R_2+r_2)-I_3R_3=-\varepsilon_2\end{matrix}$$　　解得　Ｉ１＝３Ａ，　Ｉ２＝０Ａ

（２）Ｒ３＝２Ω

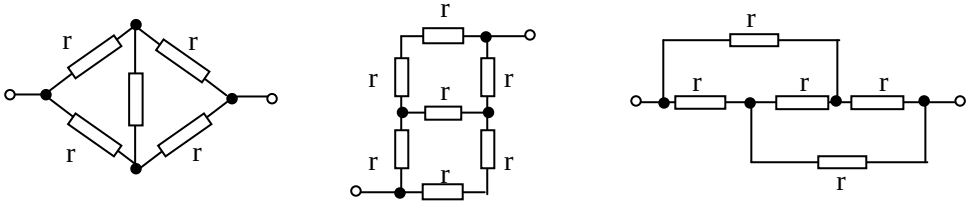
６、　一电路如图所示，求各支路电流及Ｕab。



解：设各支路电流方向如图所示。根据基尔霍夫方程

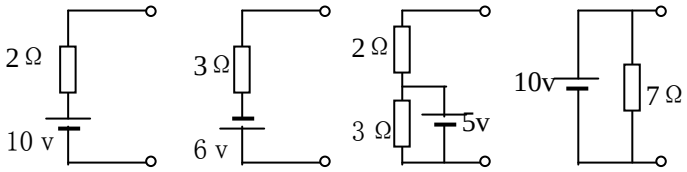
$$\begin{matrix}I_1-I_2-I_3=0\\I_1(R_1+r_1)+I_3R_3=\varepsilon_1\\I_2(R_2+r_2)-I_3R_3=-\varepsilon_2\end{matrix}$$　解得　$\begin{matrix}I_1=1A\\I_2=-1A\\I_3=2A\end{matrix}$　Ｕab=13V

７、　分别求出下列图中 a、b 间电阻。



解：（１）电桥平衡Ｒ＝r　　（２）不平衡电桥　Ｒ＝1.4r　　（３）电桥平衡Ｒ＝r

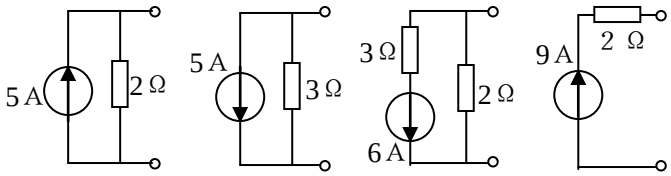
８、　将附图中的电压源变换成等效的电流源。



解：　（1）$I_0=\varepsilon/r=5A \quad r_0=2\Omega$　　（2）$I_0=\varepsilon/r=2A \quad r_0=3\Omega$

（3）$I_0=\varepsilon/r_2=2.5A \quad r_0=2\Omega$　　（4）不可能变换成等效的电流源。

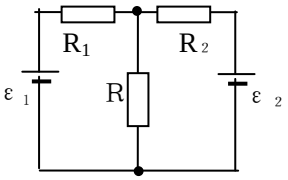
9、　将附图中的电流源转换成等效的电压源。



解：　（1）$\varepsilon=10V \quad r_0=2\Omega$　　（2）$\varepsilon=15V \quad r_0=3\Omega$

（3）$\varepsilon=12V \quad r_0=2\Omega$　　（4）不可能变换成等效的电压源

10、　用等效电源定理解习题1。



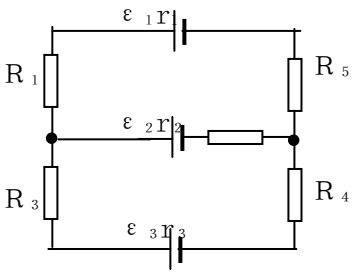
解：　电流源1　$I_{01}=\varepsilon_1/R_1=0.03A \quad r_{01}=50\Omega$

电流源2　$I_{02}=\varepsilon_2/R_2=0.0125A \quad r_{02}=80\Omega$

两个电流源并联　$I_0=I_{01}+I_{02}=0.0425A \quad r_0=30.77\Omega$

变换成等效电压源　$\varepsilon=1.31V \quad r_0=30.77\Omega \quad I=\dfrac{\varepsilon}{R+r_0}=32mA$

11、　用等效电源定理解习题3中的（2）。



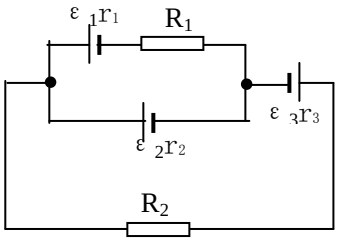
解：　$I_{01}=\varepsilon_1/(R_1+R_5+r_1)=2.4A \quad r_{01}=5\Omega$

$I_{02}=\varepsilon_3/(R_3+R_4+r_3)=1.6A \quad r_{01}=5\Omega$

两个电流源并联　$I_0=I_{01}+I_{02}=4.0A \quad r_0=2.5\Omega$

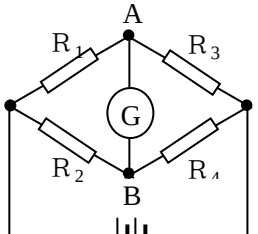
变换成等效电压源　$\varepsilon=1.0V \quad r_0=2.5\Omega \quad I=\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon}{R+r_0+r_2}=\dfrac{2}{13}A$

12、　用等效电源定理解习题4。



解：电压源　$\varepsilon=\varepsilon_2-\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{R_1+r_1+r_2}r_2=\dfrac{5}{3}V \quad r_0=\dfrac{2}{3}\Omega$

通过电源3的电流为　$I=\dfrac{\varepsilon_3-\varepsilon}{R_2+r_0+r_3}=\dfrac{2}{7}A=0.29A$



１３、　用等效电源定理求图３－３４中电桥电路的Ｉg。

解：将电流计两端断开。$I=\dfrac{\varepsilon}{\dfrac{(R_1+R_3)(R_2+R_4)}{R_1+R_2+R_3+R_4}}=\dfrac{\varepsilon(R_1+R_2+R_3+R_4)}{(R_1+R_3)(R_2+R_4)}=I_1+I_2$

等效电源的电动势为$U_{AB}=I_1R_1-I_2R_2=\dfrac{\varepsilon(R_1R_4-R_2R_3)}{(R_1+R_3)(R_2+R_4)}$　内电阻$r_0=\dfrac{R_1R_3}{R_1+R_3}+\dfrac{R_2R_4}{R_2+R_4}$

$$I_g=\frac{U_{AB}}{r_0+R_g}=\frac{-\varepsilon(R_1R_4-R_2R_3)}{R_1R_2R_3+R_2R_3R_4+R_3R_4R_1+R_4R_1R_2+R_g(R_1+R_3)(R_2+R_4)}$$

１４、　电路中某点两端开路时测得的电压为 10V，而此两端短接时，通过短路线上的电流 I_S=2.0A.（１）等效电压源或电流源的内阻为多少？（２）在此两端接上 5.0Ω的电阻时，通过此电阻的电流应为多少？

解：　（１）Ｉ$_0$＝２Ａ　　r_0=5Ω（２）Ｉ＝１Ａ

１５、　附图 a 的电路中每个支路上的电阻均为 1.0Ω,所有电源的电动势未知，但其内阻为０。已知在某一支路上的电流大小及方向如附图中所示。问：

（１）　图 b。在此支路上再串联一个２.0Ω的电阻，则此支路上电流的大小及方向如何？

（２）　图 c。在此支路上再并联一个２.0Ω的电阻，则通过２.0Ω电阻上电流的大小及方向如何？

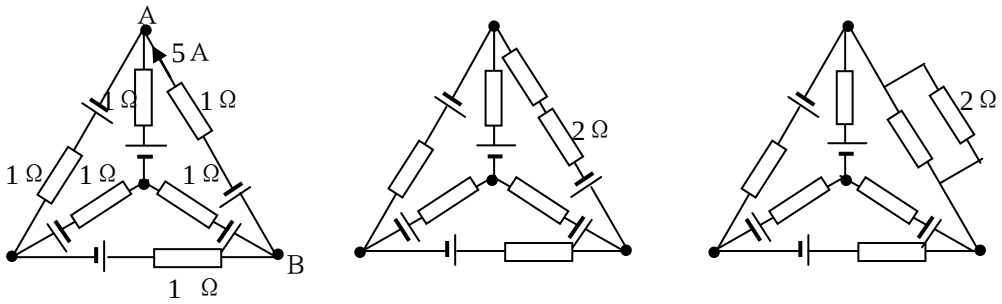


图 a　　图 b　　图 c

解：　（１）ＡＢ支路断开，设其余部分为等效电压源，设其电动势为ε$_0$，内电阻为r_0.

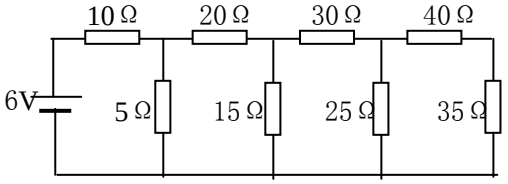
r_0＝１Ω为电桥电路的电阻，

由闭合电路的欧姆定律可得　$\begin{cases}5=\dfrac{\varepsilon_0-\varepsilon}{r_0+1}\\ I=\dfrac{\varepsilon_0-\varepsilon}{r_0+2+1}\end{cases}$　解得Ｉ＝2.5A，方向由下至上。

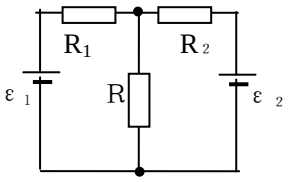
（2）$\begin{cases} 5=\dfrac{\varepsilon_0}{r_0+1} \\ I=\dfrac{\varepsilon_0}{r_0+2/3} \end{cases}$ 支路的总电流Ⅰ＝6A，流过2Ω电阻的电流为2A，方向由下至上。

16、 试求附图中ab支路中的电流。

解：



17、 用叠加定理解习题1。



解：电源1单独存在时 $I_1=\dfrac{\varepsilon_1}{R_1+\dfrac{RR_2}{R+R_2}}=\dfrac{\varepsilon_1(R+R_2)}{R_1R+R_1R_2+RR_2}$

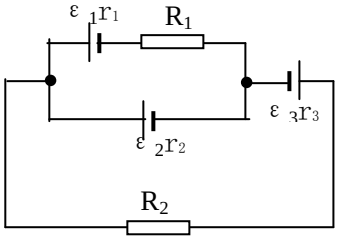
流经R的电流为 $I_{10}=I\dfrac{R_2}{R+R_2}\dfrac{\varepsilon_1(R+R_2)}{R_1R+R_1R_2+RR_2}$

电源2单独存在时 $I_2=\dfrac{\varepsilon_2}{R_2+\dfrac{RR_1}{R+R_1}}=\dfrac{\varepsilon_2(R+R_1)}{R_1R+R_1R_2+RR_2}$

流经R的电流为 $I_{20}=I\dfrac{R_1}{R+R_2}\dfrac{\varepsilon_2(R+R_1)}{R_1R+R_1R_2+RR_2}$

电阻R上的总电流为两电流的叠加 $I=I_{01}+I_{02}=32mA$

18、 用叠加定理解习题4。

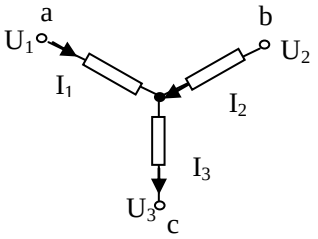


解：， $I_1=\dfrac{\varepsilon_1}{(R_1+r_1)+\dfrac{r_2(R_2r_3)}{r_2+R_2+r_3}}$ $I_{10}=\dfrac{r_2}{r_2+R_2+r_3}I_1$

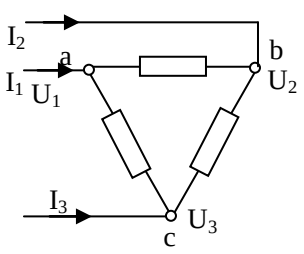
$I_2=\dfrac{\varepsilon_2}{r_2+\dfrac{(R_1+r_1)(r_2+R_2)}{R_1+r_1+r_2+R_2}}$ $I_{20}=\dfrac{r_1+R_1}{r_1+r_2+R_1+R_2}I_2$

两电源同时存在时，总电流为 $I=I_{01}+I_{02}=0.29A$

19、 推导电阻的Y形联接和△形联接的代数公式时，可以用两种联接中任意两对应点之间的总电阻都分别相等作为条件。试推导之。



解：等效变换的条件是，在两种接法中，对应端流入或流出的电流一一相等，对应端间的电压也一一相等。即经过变换后，不影响电路其他部分的电压和电流。当满足上述等效条件后，在两种接法中，对应的任意两端间的等效电阻也必然相等。



设三个端纽的电位分别为 U_1、U_2、U_3，流过的电流分别为 I_1、I_2、I_3。当某一对应端（如 C 端）开路时，其他两对应端（a 和 b）之间的等效电阻为

$$R_a + R_b = \frac{R_{ab}(R_{bc} + R_{ca})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_b + R_c = \frac{R_{bc}(R_{ca} + R_{ab})}{R_{bc} + R_{ca} + R_{ab}}$$

$$R_c + R_a = \frac{R_{ca}(R_{ab} + R_{bc})}{R_{ca} + R_{ab} + R_{bc}}$$

联立三式，可得到两种等效变换的公式为

Y—△

$$R_{12} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3}$$

$$R_{23} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1}$$

$$R_{31} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2}$$

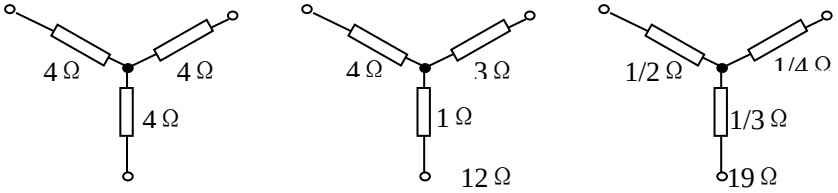
△—Y

$$R_1 = \frac{R_{31}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

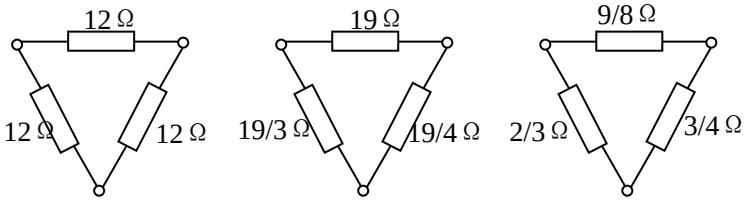
$$R_2 = \frac{R_{32}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

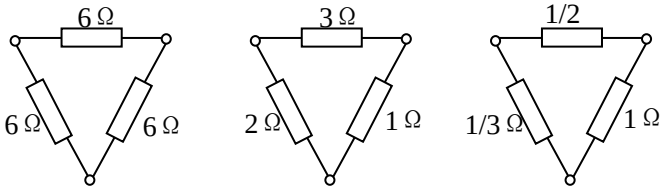
２０、 将附图中所示电阻的Y形联接变换为△形联接。



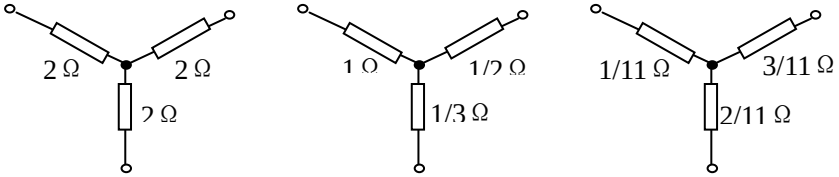
解：



２１、 将附图中所示电阻的△形联接变换为Y形联接。

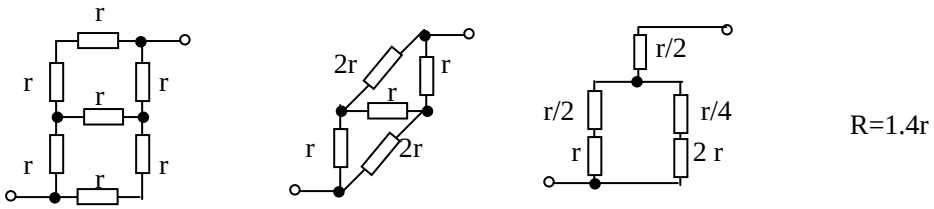


解：



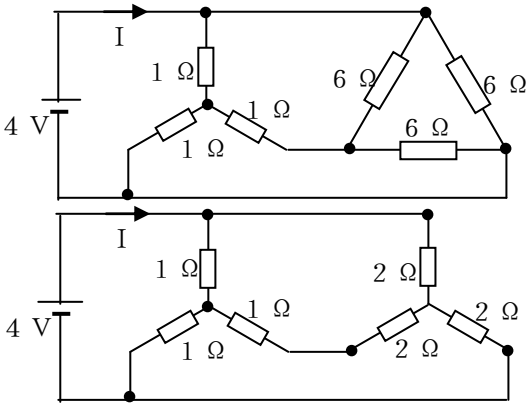
２２、　用Y—△代换求习题７中图ｂ的等效电阻。

解：



R=1.4r

２３、　求附图中所示电路中的电流Ｉ。



解：将图中的△形联接变换成Y形联接

变换后的电路为平衡电桥

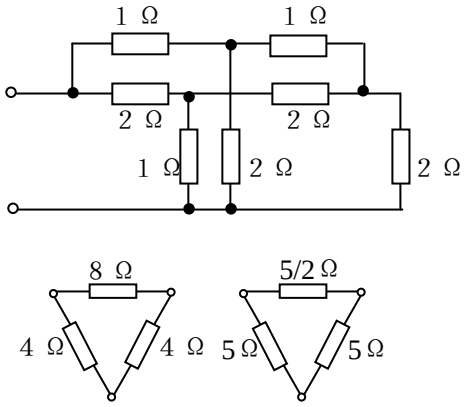
中间支路的两个电阻不起作用

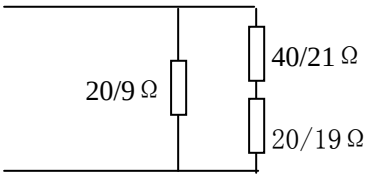
电路的等效电阻为　Ｒ＝４／３Ω

电路中的总电流为　Ｉ＝３Ａ

２４、　求附图中所示双Ｔ桥电路的等效电阻。

解：双Ｔ桥分别变换成两个△形并联，两个△形及最右端的２Ω并联，等效电路如图所示





整个电路的等效电阻为　Ｒ＝118/93Ω

———————————————————————————————

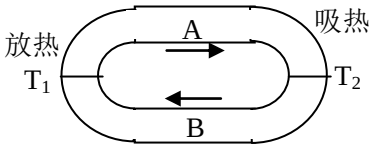
§3.5　　温差电现象

思考题：

１、　如附图所示的温差电偶中，$T_2>T_1$,试根据热力学第二定律分析一下，除了导体上产生的焦耳热外，在哪儿吸收热，在哪儿放出热？若 $n_A>n_B$,试分析电偶中温差电流的方

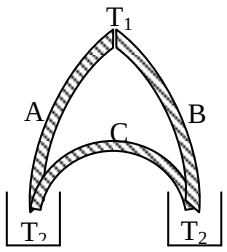
向。

答：温差电偶中，两种不同金属 A 和 B 的两个接触头的温度不同，温差电动势作用下在闭合回路中产生温差电流。在此过程中，热端 T_2 的温度下降，冷端 T_1 的的温度升高。由热力学第二定律可知，热端的一部分内能转化为电磁能（产生温差电流），另一部分则在冷端放热，因此在高温热源处吸收热，在低温热源处放热。



若 $n_A>n_B$，两种不同金属 A 和 B 两个接头处有帕尔帖电动势，金属 A 和 B 中产生两个汤姆逊电动势，整个回路的温差电动势是四个电动势的代数和。由此可知，电偶中温差电流的方向是从高温接触点 T_2 经过金属 A 的内部，通过低温接触点 T_1，经过金属 B 的内部回到高温接触点，如此循环往复，温差电流的方向如图所示。

2、 试论证：如图所示，在A、B两种金属之间插入任何一种金属C，只要维持它和A、B的联接点在同一温度T 2，其中的温差电动势与仅由A、B两种金属组成的温差电动势一样。



答：A、B 两种金属之间插入第三种金属 C 时，组成一闭合回路。回路的总电动势是三个珀尔帖电动势与三个汤姆逊电动势的代数和。

$$\varepsilon_{ABC}(T_1,T_2)=\Pi_{AB}(T_1)+\Pi_{BC}(T_2)+\Pi_{CA}(T_2)+\int_{T_2}^{T_1}\sigma_A(T)dT+\int_{T_2}^{T_1}\sigma_B(T)dT+\int_{T_2}^{T_1}\sigma_C(T)dT$$

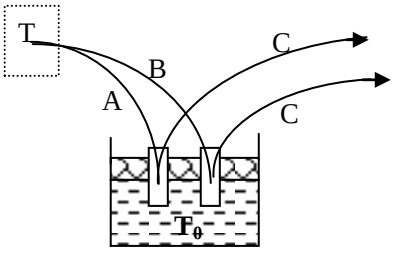
$$\because \Pi_{BC}(T_2)+\Pi_{CA}(T_2)=\frac{kT_2}{e}\ln\frac{n_B}{n_C}\frac{n_c}{n_A}=\frac{kT_2}{e}\ln\frac{n_B}{n_A}=\Pi_{BA}(T_2)=-\Pi_{AB}(T_2)$$

$$\int_{T_2}^{T_1}\sigma_C(T)dT=0$$

$$\therefore \varepsilon_{ABC}(T_1,T_2)=\Pi_{AB}(T_1)-\Pi_{AB}(T_2)+\int_{T_2}^{T_1}[\sigma_A(T)-\sigma_B(T)]dT=\varepsilon_{AC}(T_1,T_2)$$

即中间导体两端温度相同时，不影响总的温差电动势。

3、 实际的温差电偶测量电路如图所示。右边两导线C接电位差计。电位差计中的导线和电阻可能由其他金属材料制成。试论证：只要接到电位差计的两根导线材料相同，并且电位差计中各接触点维持同一温度（例如室温），则温差电偶整个回路中的温差电动势仅由金属A、B和T、T_0决定。



接电位差计

答：设电位差计中导线和电阻由金属 D 制成。电位差计中各接触点维持同一温度 T_0，整个回路 ABCD 的总温差电动势为

$$\varepsilon_{ABDC}(T,T_0,T_n)=\Pi_{AB}(T)+\Pi_{BC}(T_0)+\Pi_{CD}(T_n)+\Pi_{Dc}(T_n)+\Pi_{CA}(T_0)$$

$$+\int_{T_0}^{T_n}\sigma_A(T)dT-\int_{T}^{T_0}\sigma_B(T)dT+\int_{T_0}^{T_n}\sigma_C(T)dT-\int_{T_n}^{T_n}\sigma_D(T)dT$$

其 中 $\Pi_{CD}(T_{n,})+\Pi_{Dc}(T_{n,})=0$ ， $\Pi_{BC}(T_0)+\Pi_{CA}(T_{0,})=\frac{kT}{e}\ln\frac{n_B}{n_C}\frac{n_C}{n_A}=\frac{kT}{e}\ln\frac{n_B}{n_A}=\Pi_{BA}(T_0)=-\Pi_{AB}(T_0)$

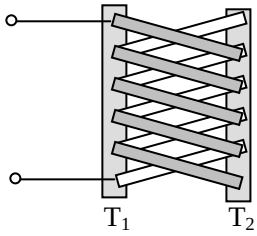
$$\int_{T_n}^{T_n}\sigma_D(T)dT=0$$

即：$\varepsilon_{ABDC}(T,T_0,T_n)=\Pi_{AB}(T)-\Pi_{AB}(T_0)+\int_{T_0}^{T_n}\sigma_A(T)dT-\int_{T}^{T_0}\sigma_B(T)dT$

$$=\Pi_{AB}(T)-\Pi_{AB}(T_0)+\int_{T_0}^{T_n}[\sigma_A(T)-\sigma_B(T)]dT=\varepsilon_{AB}(T,T_0)$$

结果表明：只要接到电位差计的两根导线材料相同，并且电位差计中各接触点保持同一温度，则联接导线和电位差计的插入并不影响总的温差电动势。

4、 试论证：如图所示，温差电堆的电动势是各温差电偶的电动势之和。



答：与上题同理

$$\varepsilon_{ABAB\cdots AB}=\Pi_{AB}(T_2)-\Pi_{BA}(T_1)+\cdots+\Pi_{AB}(T_2)-\Pi_{BA}(T_1)$$
$$+\int_{T_1}^{T_2}\sigma_A(T)dT-\int_{T_1}^{T_2}\sigma_B(T)dT+\cdots\int_{T_1}^{T_2}\sigma_A(T)dT-\int_{T_1}^{T_2}\sigma_B(T)dT$$
$$=\varepsilon_{AB}(T_{2,}T_1)+\varepsilon_{AB}(T_{2,}T_1)\cdots+\varepsilon_{AB}(T_{2,}T_1)$$

---

§3.6 电子发射与气体导电

习题：

1、 试推导当气体中有正负两种离子参与导电时，电流密度的公式为：$\vec{j}=n_+q_+\vec{u}_++n_-q_-\vec{u}_-$。其中 n、q、u 分别为离子的数密度、所带电量和漂移速度。

解：在导体中取面积元△S，在单位时间内通过△S 的正离子所带的电量为$n_+q_+\vec{u}_+\cdot\Delta\vec{S}$，

同时通过的负离子所带电量为$n_-q_-\vec{u}_-\cdot\Delta\vec{S}$，即通过△S 的电流强度为

$$I=(n_+q_+\vec{u}_++n_-q_-\vec{u}_-)\cdot\Delta\vec{S}=\vec{j}\cdot\Delta\vec{S}$$

$$\vec{j}=n_+q_+\vec{u}_++n_-q_-\vec{u}_-$$

2、 若有一个真空二极管，其中阴极和阳极是一对平行导体片，面积都是 2.0cm^2,它们之间的电流 I 完全由电子从阴极飞向阳极形成。若电流 I=50mA，电子到达阳极时的速率是 1.2×10^{7}m/s，求阳极表面外每立方毫米内的电子数。

解：电子的数密度为

$$n=\frac{j}{e\bar{u}}=\frac{I}{e\bar{u}S}=1.3\times10^{14}\text{个}/m^3$$

3、 用 X 射线使空气电离时，在平衡情况下，每立方厘米有 10^8 对离子，已知每个正负离子的电量都是 1.6×10^{-19}C，正离子的漂移速率为 1.27cm/s,负离子的平均定向速率为 1.84cm/s,求这时空气中电流密度的大小。

解：$\vec{j}=ne(\vec{u}_+-\vec{u}_-)=5.0\times10^{-8}A/m^2$

4、 空气中有一对平行放着的极板，相距为 2.00cm，面积都是 300cm^2。在两极板上加 150V 电压，这个值远小于使电流达到饱和所需的电压。今用 X 射线照射板间的空气，使其电离，于是两板间便有 4.00μA 的电流通过。设正负离子的电量都是 1.6×10^{-19}C，已知其中正离子的迁移率（即单位电场强度所产生的漂移速率）为 1.37×10^{-4} m^2/s·V,负离子的迁移率为 1.91×10^{-4} m^2/s·V,求这时板间离子的浓度（即单位体积内的离子数）。

解：因单位体积内正负离子数相等

$$n_+=n_-=\frac{j}{e(\vec{u}_+-\vec{u}_-)}=\frac{I}{e(\vec{u}_+-\vec{u}_-)S}=3.39\times10^{14}\text{个}/m^3$$

5、 在地面附近的大气里，由于土壤的放射性和宇宙线的作用，平均每 1cm^3 的大气里约有 5 对离子，已知其中正离子的迁移率为 1.37×10^{-4} m^2/s·V,负离子的迁移率为 1.91×10^{-4} m^2/s·V, 正负离子的电量都是 1.6×10^{-19}C。求地面大气的电导率。

解：由 $\vec{j}=\sigma\vec{E}=ne(\vec{u}_+-\vec{u}_-)$ 得

$$\sigma=ne\left(\frac{\vec{u}_+}{E}+\frac{\vec{u}_-}{E}\right)=3\times10^{-16}S/m)$$

第三章　　结　　束

第四章　　稳 恒 磁 场

§4.1　磁的基本现象和基本规律

思考题：

1、 地磁场的主要分量是从南到北的，还是从北到南的？

答：地磁场的北极（N极）位于地理南极附近，南极（S极）位于地理北极附近，所以地磁场的主要分量是从地理南极到地理北极。

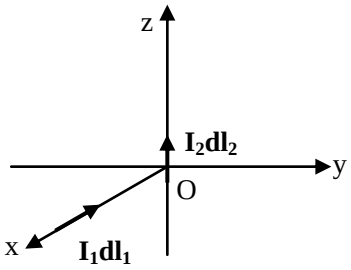
2、 如图取直角坐标系，电流元 I_1dl_1 放在 x 轴上指向原点 O，电流元 I_2dl_2 放在原点 O 处指向 Z 轴。试根据安培定律回答，在下列各情形里电流元 1 给电流元的力 dF_{12}、以及电流元 2 给电流元 1 的力 dF_{21}，大小和方向各有什么变化？

（1） 电流元 2 在 zx 平面内转过角度 θ；

（2） 电流元 2 在 yz 平面内转过角度 θ；

（3） 电流元 1 在 xy 平面内转过角度 θ；

（4） 电流元 1 在 zx 平面内转过角度 θ.



答：根据安培定律

$d\vec{F}_{12}=I_2d\vec{\ell}_2\times d\vec{B}(\vec{r}_{12})=I_2d\vec{\ell}_2\times\frac{I_1d\vec{\ell}_1\times\vec{r}_{12}}{r^3{}_{12}}$ 其中$\vec{r}_{12}$电流元$I_1d\vec{\ell}_1$到$I_2d\vec{\ell}_2$的矢径

$d\vec{F}_{21}=I_1d\vec{\ell}_1\times d\vec{B}(\vec{r}_{21})=I_1d\vec{\ell}_1\times\frac{I_2d\vec{\ell}_2\times\vec{r}_{21}}{r^3{}_{21}}$ 其中$\vec{r}_{21}$电流元$I_2d\vec{\ell}_2$到$I_1d\vec{\ell}_1$的矢径

在图示情况下，$dF_{12}=0$，

$dF_{21}=I_1d\ell_1\frac{I_2d\ell_2}{r^2}$ 方向沿 Z 轴负向。

（1）$dF_{12}=0$，$dF_{21}=I_1d\ell_1\frac{I_2d\ell_2\sin\theta}{r^2}$ 大小变小，且随 θ 不同而变化，最小值为 0 。

方向与 θ 有关，可沿 Z 轴正向或沿 Z 轴负向。

（2）$dF_{12}=0$，$dF_{21}=I_1d\ell_1\frac{I_2d\ell_2}{r^2}$ 大小不变，方向始终与 I_2dl_2 方向相反。

（3）$dF_{12}=0$，$dF_{21}=I_1d\ell_1\frac{I_2d\ell_2\sin\theta}{r^2}$ 大小变小，且随 θ 不同而变化，最小值为 0 。

方向与 θ 有关，可沿 Z 轴正向或沿 Z 轴负向。

（4） $dF_{12}=I_2d\ell_2\frac{I_1d\ell_1\sin\theta}{r^2}$ 大小变小，且随 θ 不同而变化，最小值为 0 。

方向沿 x 轴正向或负向。

$dF_{21}=I_1d\ell_1\frac{I_2d\ell_2}{r^2}$ 大小始终不变，方向是在 xz 平面内，垂直于 dl_1

3、 根据安培定律证明：任意两个闭合载流回路 L_1 和 L_2 之间的相互作用力满足牛顿第三定律。

证明：由安培定律可知，

$$d\vec{F}_{12}=I_2d\vec{\ell}_2\times\vec{B}(\vec{r}_{12})=I_2d\vec{\ell}_2\times\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_L\frac{I_1d\vec{\ell}_1\times\vec{r}_{12}}{r^3{}_{12}}$$

$$\vec{F}_{12}=\int d\vec{F}_{12}=\frac{\mu_0I_1I_2}{4\pi}\oint_{L_1}\oint_{L_2}\frac{d\vec{\ell}_2\times\left(d\vec{\ell}_1\times\vec{r}_{12}\right)}{r^3{}_{12}}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \left[d\vec{\ell}_1 \left(d\vec{\ell}_2 \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r^3_{12}} \right) - \frac{\vec{r}_{12}}{r^3_{12}} \left(d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 \right) \right]$$

$$= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{\vec{r}_{12}}{r^3_{12}} \left(d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 \right)$$

$$(\text{其中} \oint_{L_2} d\vec{\ell}_2 \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r^3_{12}} = \int_S \nabla \times \frac{\vec{r}_{12}}{r^3_{12}} d\vec{s} = 0)$$

同理 $$\vec{F}_{21} = \int d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\vec{\ell}_1 \times \left(d\vec{\ell}_2 \times \vec{r}_{21} \right)}{r^3_{21}} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{\vec{r}_{21}}{r^3_{21}} \left(d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 \right)$$

$$\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$$

$$\therefore \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

（利用矢量分析公式 $\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C} \right) = \left(\vec{A} \cdot \vec{C} \right) \vec{B} - \left(\vec{A} \cdot \vec{B} \right) \vec{C}$ ）

即：两个电流元之间的相互作用力不满足牛顿第三定律，但任意两个闭合载流回路 L_1 和 L_2 之间的相互作用力满足牛顿第三定律。

4、 试探电流元 I dl 在磁场中某处沿直角坐标系的 x 轴方向放置时不受力，把这电流元转到＋y 轴方向时受到的力沿—z 方向，此处的磁感应强度 B 指向何方？

答：由安培定律判断， B 沿 x 轴正向。

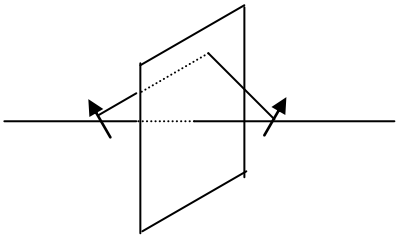
－－

§4.2 载流回路的磁场

思考题：

1、 试根据毕奥—萨伐尔定律证明：一对镜像对称的电流元在对称面上产生的合磁场 B 必与此面垂直。

答：



习题：

1、 一条长的直输电线，载有 100A 的电流，在离它半米远的地方，它产生的磁感应强度 B 有多大？

解： $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}=0.4\times10^{-4}T=0.4$高斯

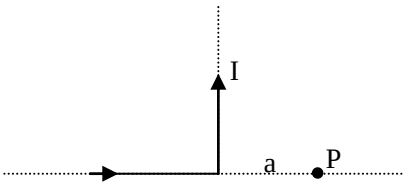
2、 一条很长的直载流导线，在离它 1cm 处产生的磁感应强度是 1 高斯，它所载的电流有多大？

解： $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ I=5A

3、 如图所示，一条无穷长载流直导线在一处折成直角，P 点在折线的延长线上，到折点的距离为 a.

（1） 设所载电流为Ⅰ，求P点的B；

（2） 当Ⅰ＝２０Ａ，a＝2.0cm 时， B＝？



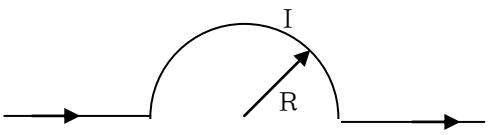
解： （1） $B=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi a}$

$$\theta_1=\frac{\pi}{2},\theta_2=\pi$$

（2） $B=0.4$高斯

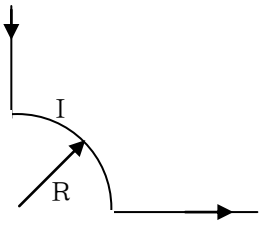
4、 如图所示，一条无穷长直导线在一处弯成半径为 R 的半圆形，已知导线中的电流为 I，求圆心处的磁感应强度 B。

解：圆心处的磁感强度为三部分的叠加，但长直导线部分产生的磁感强度为零。因此只有半圆形载流导线在圆心处产生磁场



$$B=\frac{1}{2}\frac{\mu_0 I}{2R}=\frac{\mu_0 I}{4R}$$

5、 如图所示，一条无穷长直导线在一处弯折成 1/4 圆弧，圆弧的半径为Ｒ，圆心在Ｏ，直线的延长线都通过圆心。已知导线中的电流为Ⅰ，求Ｏ点的磁感应强度。

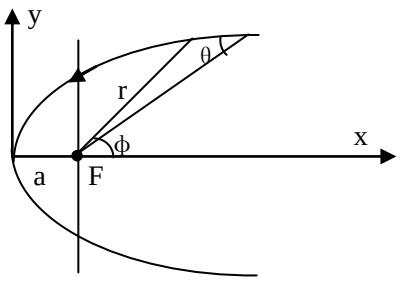


解：与上题同理，只有１／４圆弧在Ｏ点产生磁场

$$B=\frac{1}{4}\frac{\mu_0 I}{2R}=\frac{\mu_0 I}{8R}$$

6、 一条无穷长的导线载有电流Ⅰ，这导线弯成一抛物线形状，焦点到顶点的距离为 a，求焦点的磁感强度Ｂ。

解：抛物线在 x-y 坐标系中的标准方程为



$y^2 = 2px = 4ax$.

线上各电流元在焦点F产生的磁场方向都是垂直纸面向外。大小为 $dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$

将坐标原点移到F， $x = x' + a$,则 $y^2 = 4ax' + 4a^2$

用极坐标表示 $\begin{cases} x' = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$，抛物线方程变为 $r^2 - 4a\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}r - 4a^2\frac{1}{\sin^2\varphi} = 0$

解得 $r = \frac{2a}{1-\cos\varphi}$。由图示可知， $dl\sin\theta = rd\varphi$ ，

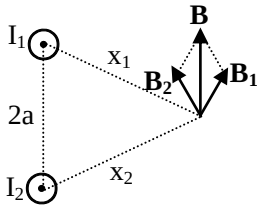
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\varphi}{r} = \frac{\mu_0 I}{8\pi a}(1-\cos\varphi)d\varphi$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{8\pi a}2\int_0^{\pi}(1-\cos\varphi)d\varphi = \frac{\mu_0 I}{4a}$$

（半支抛物线在F点产生的磁感强度为 $B = \frac{\mu_0 I}{8a}$ ）

7、 如图所示，两条无穷长的平行直导线相距为2 a，分别载有方向相同的电流I $_1$和I $_2$。空间任一点P到I $_1$的垂直距离为 x_1,到I $_2$的距离为 x_2,求P点的磁感强度B。

解： $B^2 = B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos\theta$

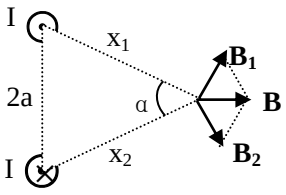


其中 $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x_1}$ $B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x_2}$ $\cos\theta = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 4a^2}{2x_1x_2}$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi x_1 x_2}\sqrt{(I_1+I_2)(I_1x_2^2 + I_2x_1^2) - 4a^2I_1I_2}$$

8、 如图所示，两条无穷长的平行直导线相距为2 a，载有大小相等而方向相反的电流I。空间任一点P到两导线的垂直距离分别为 x_1 和 x_2,求P点的磁感强度B。

解：与上题同理，但

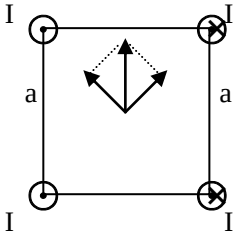


$$\cos\theta = \cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{x_1^2 + x_2^2 - 4a^2}{2x_1x_2}$$

$$B = \frac{a\mu_0 I}{\pi x_1 x_2}$$

9、 四条平行的载流无限长直导线，垂直地通过一边长为 a 的正方形顶点，每条导线中的电流都是I，方向如图所示，

（1） 求正方形中心的磁感应强度B；

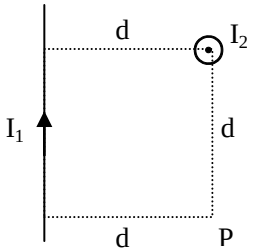


（２） 当 a=20cm,I=20A 时， B＝?

解： （１）B＝B１＋B２＋B３＋B４ $B = 4B_1\cos\alpha = 4\frac{\mu_0 I}{2\sqrt{2}a\pi/2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\mu_0 I}{\pi a}$

（２）B＝0.80 高斯

１０、 如图所示，两条无限长直载流导线垂直而不相交，其间最近距离为 d=2.0cm，电流分别为Ⅰ１＝4.0A，Ⅰ２=6.0A， P 点到两导线的距离都是 d，求 P 点的磁感强度 B。



解： $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$ 方向向里 $B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}$ 方向向右

$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = 0.72$高斯 方向为 B_1 和 B_2 的合矢量方向。

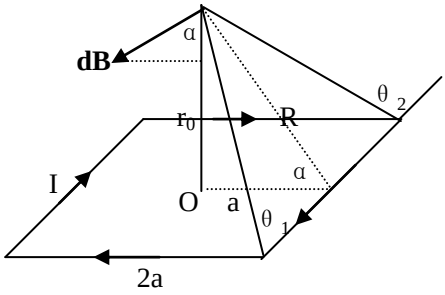
１１、 载流圆线圈半径 R＝１１cm，电流Ⅰ＝１４A，求它轴线上距圆心 r_0=0 和 r_0=10cm 处的磁感应强度 B 等于多少高斯。

解： （１） $B = \frac{\mu_0 I}{2R} = 0.8$高斯 （２） $B = \frac{\mu_0 R^2 I}{2\left(R^2 + r_0^2\right)^{3/2}} = 0.33$高斯

１２、 载流正方形线圈边长为 2 a，电流为Ⅰ。

（１） 求轴线上距中心为 r_0 处的磁感应强度；

（２） 当 a=1.0cm,I=5.0A，r_0=0 和 r_0=10cm 时， B 等于多少高斯？



解： （１）载流正方形的四边在 P 点产生的 B 大小相同，水平分量互相抵消，竖直方向叠加。

$B_t = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\cos\alpha$

其中 $R = \sqrt{r_0^2 + a^2}$ $\cos\theta_1 = \frac{a}{\left(r_0^2 + 2a^2\right)^{1/2}} = -\cos\theta_2$ $\cos\alpha = a/\sqrt{r_0^2 + a^2}$

$B = 4B_t = \frac{2\mu_0 I a^2}{\pi\left(r_0^2 + a^2\right)\left(r_0^2 + 2a^2\right)^{1/2}}$ 方向沿轴线

（２） B_1＝2.8 高斯 B_2＝3.9×10^{-3} 高斯

１３、 载流矩形线圈边长分别为 2a 和 2b，电流为Ⅰ，求轴线上距中心为 r_0 处的磁感强度。

解：利用上题结果，两对边产生的磁感分别叠加，再求总磁感强度

$$2B_1 = \frac{\mu_0 Ia}{\pi\left(r_0^2+a^2\right)^{1/2}\left(r_0^2+a^2+b^2\right)^{1/2}}\frac{b}{\left(r_0^2+a^2\right)^{1/2}}$$

$$2B_2 = \frac{\mu_0 Ib}{\pi\left(r_0^2+b^2\right)^{1/2}\left(r_0^2+a^2+b^2\right)^{1/2}}\frac{a}{\left(r_0^2+b^2\right)^{1/2}}$$

$$B = 2B_1 + 2B_2 = \frac{\mu_0 Iab}{\pi\left(r_0^2+a^2+b^2\right)^{1/2}}\left[\frac{1}{\left(r_0^2+a^2\right)}+\frac{1}{\left(r_0^2+b^2\right)}\right]$$

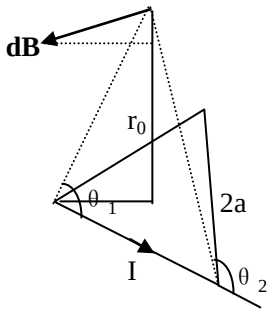
B 的方向沿矩形线圈的轴线

１４、 载流三角形线圈的边长为 2a，电流为Ｉ，求轴线上距中心为 r_0 处的磁感强度。

解：$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi\left(a^2/3+r_0^2\right)^{1/2}}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$

$$= \frac{2\mu_0 Ia}{4\pi\left(a^2/3+r_0^2\right)^{1/2}\left(4a^2/3+r_0^2\right)^{1/2}}$$

$$B = 2B_1\cos\alpha = \frac{9\mu_0 Ia^2}{2\pi\left(a^2+3r_0^2\right)\left(4a^2+3r_0^2\right)^{1/2}}$$



B 的方向沿三角形线圈的轴线

１５、 一个载流线圈的磁距定义为 m=IS。试证明，对于习题１１－１４中各种形状的线圈，当到中心的距离 r_0 远大于线圈线度时，轴线上的磁感应强度都具有如下形式：

$$B = \frac{\mu_0 m}{2\pi r_0^3}$$

解：圆形线圈 $B = \frac{\mu_0 R^2 I}{2\left(R^2+r_0^2\right)^{3/2}}$ $r_0 >> R$ $B = \frac{\mu_0 \pi R^2 I}{2\pi\left(R^2+r_0^2\right)^{3/2}} \approx \frac{\mu_0 IS}{2\pi r_0^3} = \frac{\mu_0 m}{2\pi r_0^3}$

正方形线圈 $B = \frac{2\mu_0 Ia^2}{\pi\left(r_0^2+a^2\right)\left(r_0^2+2a^2\right)^{1/2}}$ $r_0 >> R$ $B = \frac{\mu_0 I(2a)^2}{2\pi\left(r_0^2+a^2\right)\left(r_0^2+2a^2\right)^{1/2}} = \frac{\mu_0 m}{2\pi r_0^3}$

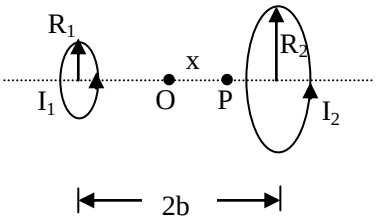
矩形线圈 $B = \frac{\mu_0 Iab}{\pi\left(r_0^2+a^2+b^2\right)^{1/2}}\left[\frac{1}{\left(r_0^2+a^2\right)}+\frac{1}{\left(r_0^2+b^2\right)}\right] \approx \frac{\mu_0 I 2a2b}{2\pi r_0^3} = \frac{\mu_0 m}{2\pi r_0^3}$

三角形线圈 $B = \frac{9\mu_0 Ia^2}{2\pi\left(a^2+3r_0^2\right)\left(4a^2+3r_0^2\right)^{1/2}} \approx \frac{\mu_0 I\left(2a\cdot\sqrt{3}a/3\right)/2}{2\pi r_0^3} = \frac{\mu_0 m}{2\pi r_0^3}$

１６、 如图所示，两圆线圈共轴，半径分别为Ｒ１和Ｒ２，电流分别为Ｉ１和Ｉ２，电流方向相同，两圆心相距为 2b,联线的中点为Ｏ。求轴线上距Ｏ为 x 处Ｐ点的磁感应强度。

解：两线圈在 P 点产生的磁感强度方向一致。

应用叠加原理



$$B_1=\frac{\mu_0 R_1^2 I_1}{2\left(R_1^2+(b+x)^2\right)^{3/2}} \qquad B_2=\frac{\mu_0 R_2^2 I_2}{2\left(R_2^2+(b-x)^2\right)^{3/2}}$$

$$B=B_1+B_2=\frac{\mu_0}{2}\left[\frac{I_1R_1^2}{\left(R_1^2+(b+x)^2\right)^{3/2}}+\frac{I_2R_2^2}{\left(R_2^2+(b-x)^2\right)^{3/2}}\right]$$

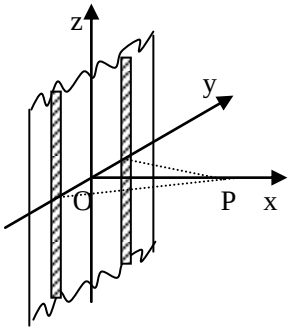
P 点处 B 的方向向左

１７、 上题中如果电流方向相反，情形如何？

解： 当电流方向相反时，

$$B=B_1-B_2=\frac{\mu_0}{2}\left[\frac{I_1R_1^2}{\left(R_1^2+(b+x)^2\right)^{3/2}}-\frac{I_2R_2^2}{\left(R_2^2+(b-x)^2\right)^{3/2}}\right]$$

１８、 电流均匀流过宽为 2a 的无穷长平面导体薄板，电流强度为Ｉ，通过板的中线并与板面垂直的平面上有一点Ｐ，Ｐ到板的垂直距离为 x。设板的厚度可略去不计，求Ｐ点的磁感应强度。

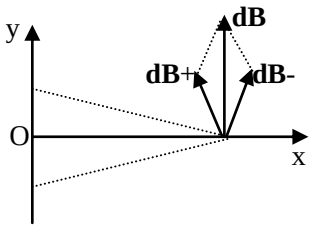


解：在 Z 轴两侧对称地取宽为 dy 的两直长导线，

利用无限长载流直导线的磁场公式可得

$$dB_+=dB_-=\frac{\mu_0 i dy}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}$$

由对称性可知，x 方向分量互相抵消，总场沿 y 方向



$$B=\int_0^a dB\cos\theta_+=\int_0^a\frac{\mu_0 i dy}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

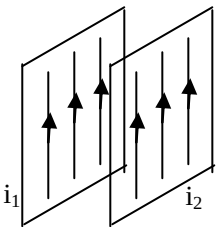
$$=\frac{\mu_0 i}{\pi}arctg\frac{a}{x}=\frac{\mu_0 I}{2a\pi}arctg\frac{a}{x}$$

１９、 求上题当 a→∞,但维持 i=I/2a，（单位宽度上的电流强度，叫做面电流密度）为一常数时Ｐ点的磁感应强度。

解：$B=\frac{\mu_0 i}{\pi}arctg\frac{a}{x}=\frac{\mu_0 I}{2a\pi}arctg\frac{a}{x}$

$$B=\lim_{a\to\infty}\frac{\mu_0 i}{\pi}arctg\frac{a}{x}=\frac{\mu_0 i}{\pi}\frac{\pi}{2}=\frac{\mu_0 i}{2}$$

２０、 如图所示，两无穷大平行平面上都有均匀分布的面电流，面电流密度分别为 i_1 和 i_2，两电流平行，求：



（１） 两面之间的磁感应强度；

（２） 两面之外的磁感应强度；

（３） $i_1=i_2=i$ 时，结果如何？

解：利用上题结果，一块电流均匀分布，面电流密度为 i 的无限大平面，在空间产生的磁感强度的大小为 $\frac{\mu_0 i}{2}$，其方向与电流方向垂直且成右手螺旋关系。若以 **n** 为面法线方向，可以表示为 $\vec{B}=\frac{\mu_0}{2}\vec{i}\times\vec{n}$

（１）两平面之间 $\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2=\frac{\mu_0}{2}\vec{i}_1\times\vec{n}_1+\frac{\mu_0}{2}\vec{i}_2\times\vec{n}_2=\frac{\mu_0}{2}\left(\vec{i}_1-\vec{i}_2\right)\times\vec{n}_1$

（２）两平面之外 $\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2=\frac{\mu_0}{2}\vec{i}_1\times\vec{n}_1+\frac{\mu_0}{2}\vec{i}_2\times\vec{n}_2=\frac{\mu_0}{2}\left(\vec{i}_1+\vec{i}_2\right)\times\vec{n}_1$

（３）$i_1=i_2=i$ 时， $B_{内}=0$ $B_{外}=\mu_0 i$

２１、 上题中若 i_1 和 i_2 反平行，情形如何？

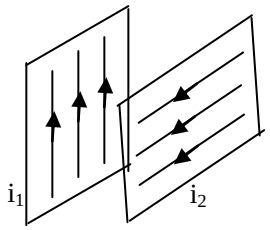
解：i_1 和 i_2 反平行时，

（１）两平面之间 $\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2=\frac{\mu_0}{2}\vec{i}_1\times\vec{n}_1+\frac{\mu_0}{2}\vec{i}_2\times\vec{n}_2=\frac{\mu_0}{2}\left(\vec{i}_1+\vec{i}_2\right)\times\vec{n}_1$

（２）两平面之外 $\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2=\frac{\mu_0}{2}\vec{i}_1\times\vec{n}_1+\frac{\mu_0}{2}\vec{i}_2\times\vec{n}_2=\frac{\mu_0}{2}\left(\vec{i}_1-\vec{i}_2\right)\times\vec{n}_1$

（３）$i_1=i_2=i$ 时， $B_{内}=\mu_0 i$ $B_{外}=0$

２２、 习题２０中若 i_1 和 i_2 方向垂直，情形如何？



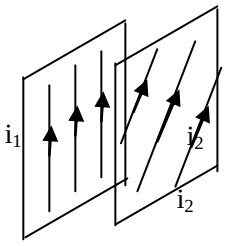
解：i_1 和 i_2 方向垂直时

（１）两平面之间 $\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2$ $B=\frac{1}{2}\mu_0\sqrt{i_1^2+i_2^2}$

（２）两平面之外 $\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2$ $B=\frac{1}{2}\mu_0\sqrt{i_1^2+i_2^2}$

（３）$i_1=i_2=i$ 时， $B_{内}=B_{外}=0.707\mu_0 i$

２３、 习题２０中若 i_1 和 i_2 之间成任意夹角，情形如何？



解：设 i_1 和 i_2 夹角为 θ， B_1 和 B_2 的夹角为 θ 或 $\pi-\theta$。

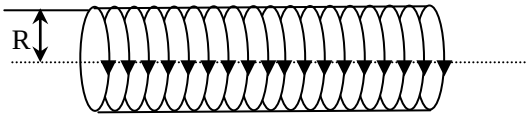
（１）两平面之间 $B=\frac{1}{2}\mu_0\sqrt{i_1^2+i_2^2-2i_1 i_2\cos\theta}$

（２）两平面之外 $B=\frac{1}{2}\mu_0\sqrt{i_1^2+i_2^2+2i_1 i_2\cos\theta}$

（３）$i_1=i_2=i$ 时， $B_{内}=\frac{\sqrt{2}}{2}\mu_0 i\sqrt{1-\cos\theta}$ $B_{qh}=\frac{\sqrt{2}}{2}\mu_0 i\sqrt{1+\cos\theta}$

２４、 半径为R的无限长直圆筒上有一层均匀分布的面电流，电流都绕着轴线流动并与轴线垂直，面电流密度为 i，求轴线上的磁感应强度。

解：半径为R的圆电流 I 在轴线上离圆心为 r 处产生的磁感应强度 B 的方向为 I 的右旋进方向。其大小为



$$B=\oint\frac{\mu_0 Idl\sin 90^0}{4\pi\left(r^2+R^2\right)}\sin\theta=\frac{\mu_0 I\cdot 2\pi R}{4\pi\left(r^2+R^2\right)}\frac{R}{\sqrt{r^2+R^2}}=\frac{\mu_0 IR^2}{2\left(r^2+R^2\right)^{3/2}}$$

将载流螺线管看成是共轴圆电流的集合，由叠加原理得

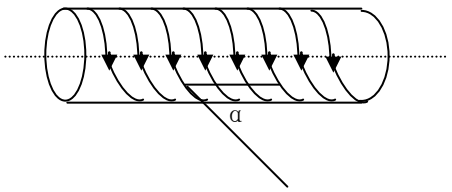
$$B=\frac{\mu_0 nIR^2}{2}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{dx}{\left[(r-x)^2+R^2\right]^{3/2}}=\frac{\mu_0 nI}{2}\left[\frac{r+l/2}{\sqrt{(r+l/2)^2+R^2}}-\frac{r-l/2}{\sqrt{(r-l/2)^2+R^2}}\right]$$

当 l>>R 时，是无限长螺线管

$$B=\frac{\mu_0 nI}{2}\lim_{l\to\infty}\left[\frac{r+l/2}{\sqrt{(r+l/2)^2+R^2}}-\frac{r-l/2}{\sqrt{(r-l/2)^2+R^2}}\right]=\mu_0 nI=\mu_0 i$$

２５、 半径为R的无限长直圆筒上有一层均匀分布的面电流，电流都绕着轴线流动并与轴线方向成一角度α，即电流在筒面上沿螺旋线向前流动。设面电流密度为 i，求轴线上的磁感应强度。

解：将 i 分解成沿圆周和沿轴线两个分量。前者在轴线上产生磁场，后者因均匀分布在整个圆柱面上，在轴线上产生的场为零。因此轴线上的场仅由沿圆周的电流分量产生。



利用上题结果，$B=\mu_0 i\sin\alpha$

２６、 一很长的螺线管，由外皮绝缘的细导线密绕而成，每厘米有 35 匝。当导线中通过的电流为 2.0A 时，求这螺线管轴线上中心和端点的磁感应强度是多少高斯？

解：螺线管中心处　$B_0=\mu_0 nI=8.8\times10^{-3}T=88$高斯

螺线管端点处　$B=\mu_0 nI/2=4.4\times10^{-3}T=44$高斯

（不考虑边缘效应时，$B_{端}=B_0/2$）

２７、 一螺线管长 1.0m，平均直径为 3.0cm，它有五层绕组，每层有 850 匝，通过的电流是 5.0A ,求管中心处的磁感强度为多少高斯？

解：$B=\dfrac{\mu_0 nI}{\sqrt{1+(2R/l)^2}}=2.7\times10^{-2}T$

２８、 用直径 0.163cm 的铜线绕在 6cm 直径的圆筒上，做成一个单层螺线管。管长 30cm，每厘米绕 5 匝。铜线在 75^0C 时每米电阻 0.010Ω (假设通电后导线将达此温度)。将此螺

线管接在 2.0V 的蓄电池上，其中磁感强度和功率消耗各多少？

解：$B=\frac{1}{2}\mu_0 nI(\cos\beta_1-\cos\beta_2)=\frac{1}{2}\mu_0 nI\cdot 2\frac{L/2}{\sqrt{R^2+(L/2)^2}}=43$高斯

电流Ｉ＝Ｅ／Ｒ，　　Ｐ＝Ｉ²Ｒ＝１４Ｗ

２９、球形线圈是由表面绝缘的细导线在半径为 R 的球面上密绕而成，线圈的中心都在同一直径上，沿这直径单位长度的匝数为 n，并且各处的 n 都相同。设该直径上一点 P 到球心的距离为 x，求下列各处的磁感强度 B。（设电流强度为Ｉ）。

（１） x=0　（球心）；

（２） x=R　（该直径与球面的交点）；

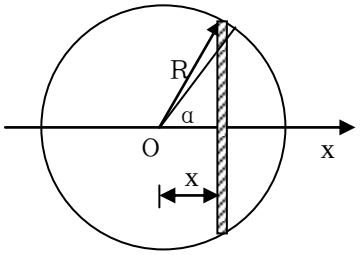
（３） x<R　（球内该直径上任一点）；

（４） x>R　（球外该直径延长线上任一点）。

解：利用圆电流在轴线上离圆心为 x 处产生的磁感强度公式

$$B=\frac{\mu_0 R^2 I}{2\left(R^2+r_0^2\right)^{3/2}}$$

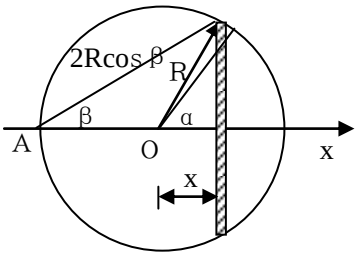
（１）　x＝０处



$$dB_0=\frac{\mu_0(nIdx)(R\sin\alpha)^2}{2\left(x^2+(R\sin\alpha)^2\right)^{3/2}}$$

$$B_0=\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{-R}^{R}\frac{(R\sin\alpha)^2dx}{\left(x^2+(R\sin\alpha)^2\right)^{3/2}}=\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{-1}^{1}\sin^2\alpha d\cos\alpha=\frac{2}{3}\mu_0 nI$$

（２）　x=R 处



$$dB_A=\frac{\mu_0(nIdx)(R\sin\alpha)^2}{2\left[(x+R)^2+(R\sin\alpha)^2\right]^{3/2}}=\frac{\mu_0 nI}{2}\frac{(R\sin\alpha)^2dx}{\left[(x+R)^2+(R\sin\alpha)^2\right]^{3/2}}$$

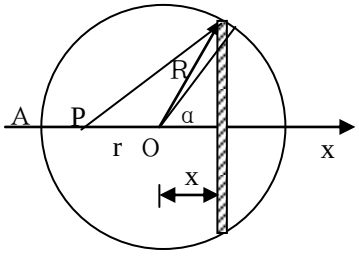
其中　$\alpha=2\beta$　　$x=R\cos\alpha=R\cos 2\beta$

$$(x+R)^2+(R\sin\alpha)^2=(2R\cos\beta)^2$$

$$B_A=\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{-R}^{R}\frac{(R\sin\alpha)^2dx}{\left((x+R)^2+(R\sin\alpha)^2\right)^{3/2}}=\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\pi/2}^{0}\frac{\sin^2 2\beta d(\cos 2\beta)}{8\cos^3\beta}$$

$$=-\mu_0 nI\int_{\pi/2}^{0}\sin^3\beta d\beta=\frac{2}{3}\mu_0 nI$$

（３）　x<R 处



$$dB_P=\frac{\mu_0(nIdx)(R\sin\alpha)^2}{2\left[(x+r)^2+(R\sin\alpha)^2\right]^{3/2}}=\frac{\mu_0 nI}{2}\frac{(R\sin\alpha)^2dx}{\left[(x+r)^2+(R\sin\alpha)^2\right]^{3/2}}$$

$$B_A=\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{-R}^{R}\frac{(R\sin\alpha)^2dx}{\left((x+r)^2+(R\sin\alpha)^2\right)^{3/2}}$$ 因为 $x=R\cos\alpha$

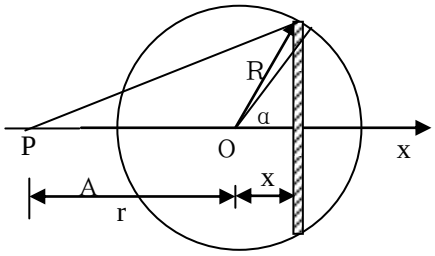
$$B_A=\frac{\mu_0 nIR^2}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2\alpha\ d\cos\alpha}{\left(r^2+R^2+2rR\cos\alpha\right)^{3/2}}$$

$$=\frac{\mu_0 nIR^2}{2}\cdot\frac{1}{4r^3R^3}\left[2\left(r^2+R^2\right)\sqrt{r^2+R^2+2rR\cos\alpha}-\frac{1}{3}\left(r^2+R^2+2rR\cos\alpha\right)^{3/2}+\frac{\left(R^2-r^2\right)^2}{\sqrt{r^2+R^2+2rR\cos\alpha}}\right]_{\theta=\pi}^{\theta=0}$$

$$=\frac{\mu_0 nI}{8r^3}\left[2\left(r^2+R^2\right)(R+r)-\frac{1}{3}(R+r)^3+\frac{\left(R^2-r^2\right)^2}{(R+r)}-2\left(r^2+R^2\right)(R-r)+\frac{1}{3}(R-r)^3-\frac{\left(R^2-r^2\right)^2}{(R-r)}\right]$$

$$=\frac{2}{3}\mu_0 nI$$ 可见 B 与 r 无关，球内轴线上各点的 B 都相同。

（4） x>R 处



$$dB_P=\frac{\mu_0(nIdx)(R\sin\alpha)^2}{2\left[(x+r)^2+(R\sin\alpha)^2\right]^{3/2}}=\frac{\mu_0 nI}{2}\frac{(R\sin\alpha)^2dx}{\left[(x+r)^2+(R\sin\alpha)^2\right]^{3/2}}$$

$$B_A=\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{-R}^{R}\frac{(R\sin\alpha)^2dx}{\left((x+r)^2+(R\sin\alpha)^2\right)^{3/2}}$$ 形式上与（3）相同

利用 $x=R\cos\alpha$

$$B_A=\frac{\mu_0 nIR^2}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2\alpha\ d\cos\alpha}{\left(r^2+R^2+2rR\cos\alpha\right)^{3/2}}$$

$$=\frac{\mu_0 nIR^2}{2}\cdot\frac{1}{4r^3R^3}\left[2\left(r^2+R^2\right)\sqrt{r^2+R^2+2rR\cos\alpha}-\frac{1}{3}\left(r^2+R^2+2rR\cos\alpha\right)^{3/2}+\frac{\left(R^2-r^2\right)^2}{\sqrt{r^2+R^2+2rR\cos\alpha}}\right]_{\theta=\pi}^{\theta=0}$$

$$=\frac{\mu_0 nI}{8r^3}\left[2\left(r^2+R^2\right)(R+r)-\frac{1}{3}(R+r)^3+\frac{\left(R^2-r^2\right)^2}{(R+r)}-2\left(r^2+R^2\right)(r-R)+\frac{1}{3}(r-R)^3-\frac{\left(R^2-r^2\right)^2}{(r-R)}\right]$$

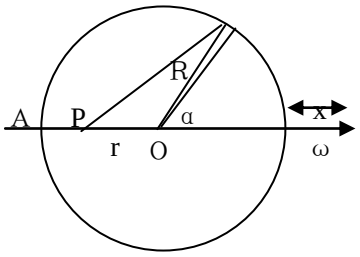
$$=\frac{2}{3}\mu_0 nI\left(\frac{R}{r}\right)^3$$ 球外轴线上的 B 与 P 到球心距离的三次方成反比。

注：（1） $\sqrt{r^2+R^2+2rR\cos\alpha}\geq 0\xrightarrow{\theta=\pi}\sqrt{r^2+R^2-2rR}=\begin{cases}R-r(r<R)\\ r-R(r>R)\end{cases}$

（2） $\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2\alpha\ d\cos\alpha}{\left(r^2+R^2+2rR\cos\alpha\right)^{3/2}}=\int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)dx}{(a+bx)^{3/2}}$

$$=\frac{-2}{3b^3\sqrt{a+bx}}\left[b^2\left(x^2+3\right)-4ax-8a^2\right]_{x=-1}^{x=1}=\begin{cases}\frac{4}{3R^3}(r<R)\\ \frac{4}{3r^3}(r>R)\end{cases}$$

３０、半径为 R 的球面上均匀分布着电荷，面密度为σ，当这球面以角速度ω绕它的直径旋转时，求转轴上球内和球外任一点（该点到球心的距离为 x）的磁感强度Ｂ。



解：球面上θ处宽为 Rdθ 的环带上的电荷量为

$$dQ=\sigma\cdot 2\pi R\sin\theta\cdot Rd\theta=2\pi\sigma R^2\sin\theta d\theta$$

dQ 随球面旋转，形成圆电流

$$dI=\frac{dQ}{T}=\frac{\omega dQ}{2\pi}=\omega\sigma R^2\sin\theta d\theta$$

圆电流 dI 在轴线上离圆心为 r 处产生的磁感强度 B 沿 I 的右旋进方向，大小为

$$dB_P=\frac{\mu_0(R\sin\theta)^2dI}{2\left[(r+R\cos\theta)^2+(R\sin\theta)^2\right]^{3/2}}=\frac{\mu_0\omega\sigma R^2}{2}\frac{\sin^3\theta d\theta}{\left[(r+R\cos\theta)^2+(R\sin\theta)^2\right]^{3/2}}$$

（１） 球内一点

$$B_P=\frac{\mu_0\omega\sigma R^2}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3\theta d\theta}{\left[(r+R\cos\theta)^2+(R\sin\theta)^2\right]^{3/2}}$$

$$=\frac{\mu_0\omega\sigma R^2}{2}\cdot\frac{1}{4r^3R^3}\left[\frac{1}{3}\left(r^2+R^2+2rR\cos\alpha\right)^{3/2}-2\left(r^2+R^2\right)\sqrt{r^2+R^2+2rR\cos\alpha}-\frac{\left(R^2-r^2\right)^2}{\sqrt{r^2+R^2+2rR\cos\alpha}}\right]_{\theta=\pi}^{\theta=0}$$

$$=\frac{\mu_0\omega\sigma R^4}{2}\cdot\frac{1}{4r^3R^3}\frac{16}{3}r^3=\frac{2}{3}\mu_0\omega\sigma R=\frac{\mu_0 Q}{6\pi R}\omega$$

上式表明，Ｐ点的Ｂ与 r 无关，即球面内轴线上任一点的Ｂ都相等。

（２） 球外一点

$$B_P=\frac{\mu_0\omega\sigma R^2}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3\theta d\theta}{\left[(r+R\cos\theta)^2+(R\sin\theta)^2\right]^{3/2}}$$

$$=\frac{\mu_0\omega\sigma R^2}{2}\cdot\frac{1}{4r^3R^3}\left[\frac{1}{3}\left(r^2+R^2+2rR\cos\alpha\right)^{3/2}-2\left(r^2+R^2\right)\sqrt{r^2+R^2+2rR\cos\alpha}-\frac{\left(R^2-r^2\right)^2}{\sqrt{r^2+R^2+2rR\cos\alpha}}\right]_{\theta=\pi}^{\theta=0}$$

$$=\frac{\mu_0\omega\sigma R^4}{2}\cdot\frac{1}{4r^3R^3}\frac{16}{3}R^3=\frac{2}{3}\mu_0\omega\sigma R\left(\frac{R}{r}\right)^3=\frac{\mu_0 Q}{6\pi R}\left(\frac{R}{r}\right)^3\omega$$

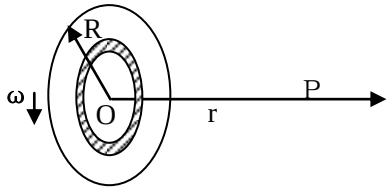
注：（１）$\sqrt{r^2+R^2+2rR\cos\alpha}\geq 0\underrightarrow{\theta=\pi}\sqrt{r^2+R^2-2rR}=\begin{cases}R-r(r<R)\\ r-R(r>R)\end{cases}$

（２）磁矩 $d\vec{m}=dI\vec{S}=\omega\sigma R^2\sin\theta d\theta\cdot\pi\left(R\sin\theta\right)^2\frac{\vec{\omega}}{\omega}=\frac{1}{4}QR^2\vec{\omega}\sin^3\theta d\theta$

$$\vec{m}=\frac{1}{4}QR^2\vec{\omega}\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta=\frac{1}{3}QR^2\vec{\omega}$$

３１、半径为Ｒ的圆片上均匀带电，面密度为σ，令该片以匀角速度ω绕它的轴旋转，求轴线上距圆片中心Ｏ为ｘ处的磁场。

解：在圆片上取半径为ｘ，宽为ｄｘ的环带，



环带所带的电荷量为 $dq=\sigma\cdot 2\pi x dx=2\pi\sigma x dx$

$$d\vec{B}_P=\frac{\mu_0 x^2\vec{\omega}dq}{4\pi\left(r^2+x^2\right)^{3/2}}=\frac{\mu_0 x^2\vec{\omega}\left(2\pi\sigma x dx\right)}{4\pi\left(r^2+x^2\right)^{3/2}}=\frac{1}{2}\mu_0\sigma\vec{\omega}\frac{x^3dx}{\left(r^2+x^2\right)^{3/2}}$$

$$B_P=\frac{1}{2}\mu_0\sigma\vec{\omega}\int_0^R\frac{x^3dx}{\left(r^2+x^2\right)^{3/2}}=\frac{1}{2}\mu_0\sigma\vec{\omega}\left[\sqrt{r^2+x^2}+\frac{r^2}{\sqrt{r^2+x^2}}\right]_{x=0}^{x=R}$$

$$=\frac{1}{2}\mu_0\sigma\left[\frac{r^2+2R^2}{\sqrt{r^2+x^2}}-2r\right]\vec{\omega}$$

对应的磁矩为 $\vec{m}=\int\vec{S}dI=\int_0^R\pi x^2\frac{\vec{\omega}}{\omega}\cdot\frac{\left(2\pi x dx\right)\sigma}{T}=\frac{1}{4}\pi\sigma R^4\vec{\omega}$

３２、氢原子处在正常状态（基态）时，它的电子可看作是在半径为 $a=0.53\times10^{-8}$cm 的轨道（叫做玻尔轨道）上作匀速圆周运动，速率为 $v=2.0\times10^{8}$cm/s。求电子的这种运动在轨道中心产生的磁感强度Ｂ的值。

解：电子的运动相当于半径为Ｒ的圆电流，在圆心处产生的磁感强度大小为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2R}=\frac{\mu_0}{2R}\frac{e}{T}=\frac{\mu_0}{2R}\frac{ev}{2\pi R}=\frac{\mu_0 ev}{4\pi R^2}=12.5T=1.25\times10^5\text{高斯}$$

－－

4 §4.3　　磁场的高斯定理与安培环路定理

思考题：

１、（１）在没有电流的空间区域里，如果磁感应线是平行直线，磁感强度Ｂ的大小在沿磁感应线和垂直它的方向上是否可能变化（即磁场是否一定是均匀的）？

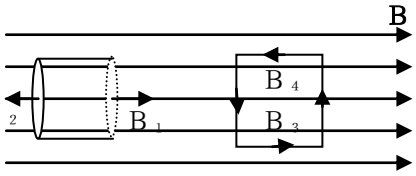
（２）若存在电流，上述结论是否还对？

答：（１）磁场一定是均匀的。（２）存在电流时，磁场不均匀。证明如下——

作圆柱形高斯面，由高斯定理可证明 $B_1=B_2$；

作矩形环路，由环路定理，Ｌ不包围电流时，$B_3=B_4$，

Ｌ包围电流时，$B_3\neq B_4$



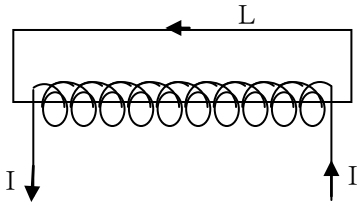
2、　根据安培环路定理，沿围绕载流导线一周的环路积分为 $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I$。现利用圆形电流轴线上一点磁场的公式 $B=\frac{\mu_0 R^2 I}{2\left(R^2+r_0^2\right)^{3/2}}$，验算一下沿圆形载流线圈轴线的积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{B}\cdot d\vec{l}=\int_{-\infty}^{+\infty}Bdx=\mu_0 I$。为什么积分虽未绕电流一周，但与闭合环路积分的结果一样？

答：验算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{B}\cdot d\vec{l}=2\int_0^{+\infty}Bdx=2\int_0^{\infty}\frac{\mu_0 R^2 I}{2\left(R^2+r_0^2\right)^{3/2}}dx=\mu_0 R^2 I\int_0^{\infty}\frac{dx}{\left(R^2+r_0^2\right)^{3/2}}=\mu_0 I$

此结果与闭合环路积分的结果一致。原因是对于有限的电流分布来说，无限远处磁场为零。可以想象在无限远处，从－∞到＋∞连结一条曲线Ｌ´，使积分闭合，但在Ｌ´段，由于Ｂ＝０，对环路积分无贡献。

3、　试利用 $B=\mu_0 nI$ 和安培环路定理，证明无限长螺线管外部磁场处处为零。这个结论成立的近似条件是什么？仅仅“密绕”的条件够不够？

答：由对称性可知，螺线管内外任一点的磁感强度的方向必定都平行于轴线。作矩形安培环路Ｌ，使其长为 l 的一边沿螺线管的轴线，对边在螺线管外，其上各点的磁感强度为Ｂ$_0$



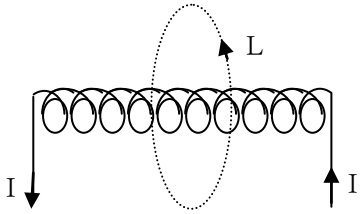
$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 nIL-B_0 L=\mu_0 nI$$

即　Ｂ$_0$＝０

这一结论成立的近似条件是：

密绕螺线管，且螺线管长>>螺线管半径Ｒ。

4、　在一个可视为无穷长密绕的载流螺线管外面环绕一周，环路积分 $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$ 等于多少？



答：$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I$

－－

习题：

1、　一载有电流Ｉ的无穷长直空心圆筒，半径为Ｒ（筒壁厚度可以忽略），电流沿它的轴线方向流动，并且是均匀地分布的。分别求离轴线为 r<R 和 r>R 处的磁场。

解：根据对称性和安培环路定理

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I\rightarrow\begin{cases}B_1=0(r<R)\\ B_2=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}(r>R)\end{cases}$$

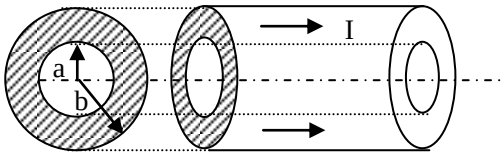
（在 r=R 的面上，Ｂ＝（Ｂ$_1$＋Ｂ$_2$）／２）

2、　有一根长的载流导体直圆管，内半径为 a，外半径为 b，电流强度为Ⅰ，电流沿轴线方向流动，并且均匀地分布在管壁的横截面上。空间某一点到管轴的垂直距离为 r。求：

（1） r<a; （2）a<r<b; （3）r>b 等各处的磁感强度。

解：根据对称性和安培环路定理

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I \rightarrow \begin{cases} B_1=0 (r<a) \\ B_2=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\dfrac{r^2-a^2}{b^2-a^2} (a<r<b) \\ B_2=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} (r>b) \end{cases}$$



3、　一很长的导体直圆管，管厚为 5.0mm，外直径为 50mm，载有 50A 的直流电，电流沿轴向流动，并且均匀地分布在管的横截面上。求下列几处的磁感强度 B 的大小：

（1） 管外靠近外壁；

（2） 管内靠近内壁；

（3） 内外壁之间的中点。

解：　根据对称性和安培环路定理可求得

（1） $B_1=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\Big|_{r\approx R}=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}=4.0$高斯

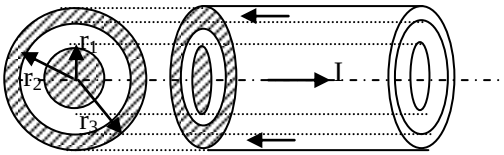
（2） $B_2=0$

（3） $B_3=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\dfrac{r^2-a^2}{b^2-a^2}\Big|_{R=(a+b)/2}=2.1$高斯

4、　电缆由一导体圆柱和一同轴的导体圆筒构成。使用时，电流Ⅰ从一导体流去，从另一导体流回，电流都是均匀地分布在横截面上。设圆柱的半径为 r_1,圆筒的内外半径分别为 r_2 和 r_3。r 为到轴线的垂直距离，求磁感强度的分布。

解：根据对称性和安培环路定理

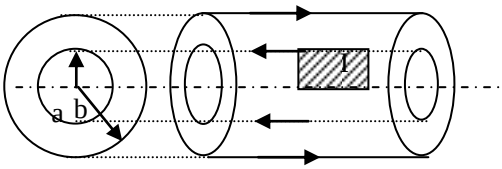
$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I \rightarrow \begin{cases} B_1=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r_1^2}(r<r_1) \\ B_2=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}(r_1<r<r_2) \\ B_2=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\dfrac{r_3^2-r^2}{r_3^2-r_2^2}(r_2<r<r_3) \\ B_2=0 (r>r_3) \end{cases}$$



5、　一对同轴无穷长直的空心导体圆筒，内、外半径分别为R_1和R_2（筒壁厚度可忽略）。电流I沿内筒流去，沿外筒流回。

（1） 计算两筒间的磁感强度B；

（2） 通过长度为L的一段截面的磁通量Φ。



解：　（1）应用安培环路定理可求得

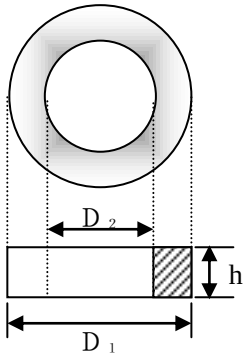
两筒之间　$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

（2）通过长度为L的一段截面的磁通量 $\Phi=\int\vec{B}\cdot d\vec{S}=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\dfrac{Ldr}{r}=\dfrac{\mu_0 IL}{2\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$

6、　矩形截面的螺绕环，尺寸如图所示。

（1） 求环内磁感强度的分布；

（2） 证明通过螺绕环截面的磁通量为　$\Phi=\dfrac{\mu_0 NIh}{2\pi}\ln\dfrac{D_1}{D_2}$



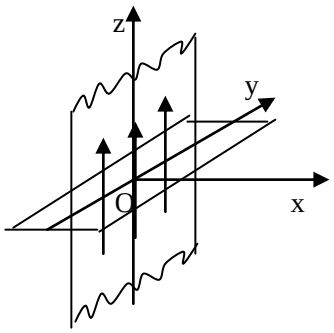
解：　（1）应用安培环路定理可求得，

螺绕环内部　$B=\dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}$

（2）通过螺绕环截面的磁通量

$$\Phi=\int\vec{B}\cdot d\vec{S}=\frac{\mu_0 NI}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{hdr}{r}=\frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\ln\frac{D_1}{D_2}$$

7、　应用安培环路定理，求无限大均匀载流平面外的磁感强度。



解：取安培环路如图所示，矩形回路的两长边与载流平面平行，且与载流平面等距离，

应用安培环路定理

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}=BL+BL=2BL=\mu_0 iL$$

$$B=\frac{1}{2}\mu_0 i$$

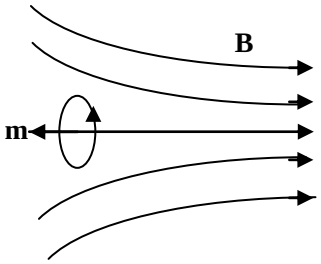
---

§4.4　　磁场对载流导线的作用

思考题：

1、　设有一非均匀磁场呈轴对称分布，磁感应线由左至右逐渐收缩。将一圆形载流线圈共轴地放置其中，线圈的磁矩方向与磁场方向相反。试定性分析此线圈受力的方向。

答：根据安培定律　$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$，线圈上每一段电流元因所在处磁场方向不同而受力方向不同



将磁场分解成为两个分量：一个分量沿半径指向线圈的圆心，另一个分量垂直线圈平面，且与磁矩方向相反。

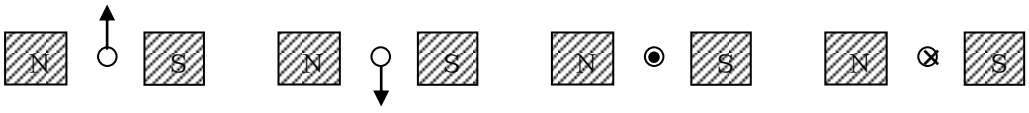
$d\vec{F}_1 = Id\vec{l} \times \vec{B}_1$　　$\vec{F}_1 = \oint Id\vec{l} \times \vec{B}_1$　　方向与 m 方向相同

$d\vec{F}_2 = Id\vec{l} \times \vec{B}_2$　　$\vec{F}_2 = \oint Id\vec{l} \times \vec{B}_2 = 0$

即：线圈所受的合力沿磁矩方向。

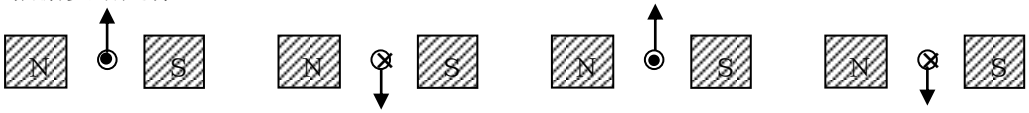
习题：

1、　图中的载流导线与纸面垂直，确定 a 和 b 中电流的方向，以及 c 和 d 中导线受力的方向。



a　　b　　c　　d

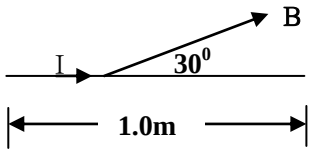
解：根据安培定律　$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$



a 电流向外　　b 电流向里　　c 受力向上　　d 受力向下

2、　载有 10A 电流的一段直导线，长 1.0m，在 B=1.5T 的均匀磁场中，电流与 B 成角。求这段导线所受的力。

解：根据安培定律　$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$



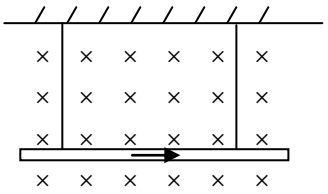
导线受力大小为　$F = IlB\sin\theta = 7.5N$

方向垂直纸面向外。

3、　如图所示，有一根长为 l 的直导线，质量为 m，用细绳子平挂在外磁场 B 中，导线中通有电流 I，I 的方向与 B 垂直。

（1） 求绳子张力为 0 时的电流Ⅰ。当 l=50cm，m=10g,B=1.0T 时，Ⅰ＝？

（2） 在什么条件下导线会向上运动？



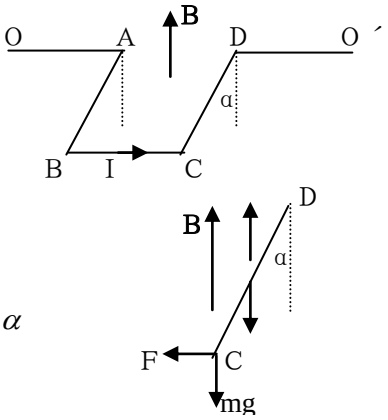
解：（1）绳子中张力为零时，导线所受重力与磁场力平衡

$mg = IlB$　　Ⅰ＝0.2A

（2）$IlB > mg \rightarrow I > \dfrac{mg}{lB}$ 时，导线会向上运动。

4、　横截面积 S＝2.0mm^2 的铜线弯成如图所示形式，其中ＯＡ和ＤＯ´段固定在水平方向不动，ＡＢＣＤ是边长为 a 的正方形的三边，可以绕ＯＯ´转动；整个导线放在均匀磁场Ｂ中，Ｂ的方向竖直向上。已知铜的密度ρ=8.9g/cm^3,当这铜线中的Ⅰ=10A 时，在平衡情况下，ＡＢ段和ＣＤ段与竖直方向的夹角α=15^0,求磁感强度Ｂ的大小。

解：　ＡＢ和ＣＤ两段导线所受安培力大小相等，方向相反，且力的方向都与轴线平行，对偏转不起作用。



ＢＣ所受安培力为　$F = IlB$

对转轴ＯＯ´的力矩 $M = Fl\cos\alpha = IBl^2\cos\alpha$

作用在ＡＢＣＤ上的重力的力矩为

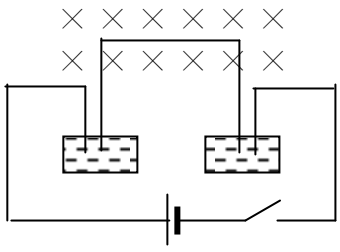
$$M' = mgl\sin\alpha + 2mg\frac{l}{2}\sin\alpha = 2mgl\sin\alpha = 2\rho gSl^2\sin\alpha$$

（4）当Ｍ＝Ｍ´时，$B = \dfrac{2\rho gS}{I}\tan\alpha = 94\times10^{-3}T$

5、　一段导线弯成如图所示的形状，它的质量为 m，上面水平一段长为 l，处在均匀磁场中，磁感强度为Ｂ，Ｂ与导线垂直；导线下面两端分别插在两个浅水银槽里，两槽水银与一带开关Ｋ的外电源联接。当Ｋ一接通，导线便从水银槽里跳出来。

（1） 设跳起来的高度为 h，求通过导线的电量 q;

（2） 当 m=10g ,l=20cm ,h=3.0m ,B=0.10T 时，求 q 的量值。



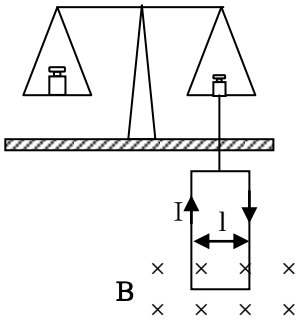
解：（1）导线所受安培力为　$F = IlB$　　$m\ d\nu I\ l\ B$

对时间积分　$m\int_0^{v_0} dv = lB\int_0^t Idt = lB\int_0^q dq = lBq$

$$v_0 = \sqrt{2gh} \quad q = \frac{m}{B}\sqrt{2gh}$$

（2）$q = 3.8C$

6、 安培秤如图所示，它的一臂下面挂有一个矩形线圈，线圈共有九匝，它的下部悬在均匀磁场B内。下边一段长为l，它与B垂直。当线圈的导线中通有电流I时，调节砝码使两臂达到平衡；然后使电流反向，这时需要在一臂上加质量为 m 的砝码，才能使两臂再达到平衡。（设 $g=9.80m/s^2$）



解：线圈水平部分所受安培力方向向下，大小为 $F = nIlB$

电流反向后，安培力大小不变，方向向上。

$$mg = 2nIlB$$

$$B = \frac{mg}{2nIl} = 0.479T$$

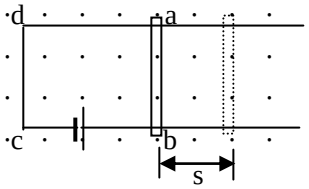
7、 空间某处有互相垂直的两个水平磁场B_1和B_2，B_1向北，B_1=1.73 高斯，B_2向东，B_2=1.00 高斯。现在该处有一段载流直导线，问这导线应如何放置，才能使两磁场作用在它上面的合力为0？

解：设导线与正北方向夹角为α，与正东方向夹角为 $\frac{\pi}{2}-\alpha$

根据安培定律 $IlB_1 \sin\alpha = IlB_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

解得 $tg\alpha = \frac{B_2}{B_1} = \frac{1}{1.73}$ $\alpha = \frac{\pi}{6} = 30^0$

8、 载有电流I的闭合回路 abcd,ab 是一段导体，可以滑动，它在回路上的长为l；一外磁场B与回路平面垂直。求 ab 向右滑动距离 s 时，磁场所作的功。若向左滑动距离 s，磁场所作的功是多少？



解：ab 所受安培力方向向右。

向右滑动时，磁场所作的功为 $A = Fs = BIls$

向左滑动时，磁场所作的功为 $A = -Fs = -BIls$

9、 长 l=10cm，电流 I=10A 的直导线在均匀外磁场B中，B与电流垂直，B=30 高斯。

（1） 求磁场作用在这段导线上的力F；

（2） 当这段线以 v=25cm/s 的速率逆F的方向运动时，求F作功的功率P。

解： （1）磁场的作用力为 $F = IlB = 3.0\times10^{-3}N$

（2）F作功的功率为 $P = \vec{F}\cdot\vec{v} = -Fv = -7.5\times10^{-4}W$

１０、 一正方形线圈由外皮绝缘的细导线绕成，共绕有 200 匝，每边长为 150mm，放在 B=4.0 T 的外磁场中，当导线中通有 I=8.0A 的电流时，求：

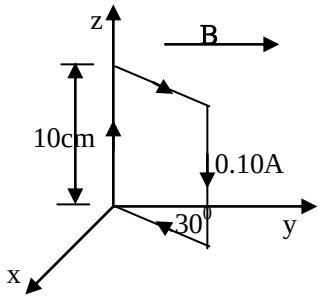
（１） 线圈磁矩 m 的大小；

（２） 作用在线圈上的力矩 L＝m×B 的最大值。

解： （１）线圈磁矩的大小为 $m = NIS = 36(A \cdot m^2)$

（２）线圈上的力矩的最大值 $L_{\max} = NISB = 144(N \cdot m)$

１１、 一矩形线圈由２０匝互相绝缘的细导线绕成，矩形边长为 10.0cm 和 5.0cm,导线中的电流为 0.10A，这线圈可以绕它的一边ＯＯ′转动。当加上 B=0.50T 的均匀外磁场，B 与线圈平面成 30^0 角时，求这线圈受到的力矩。



解：电流元所受的安培力为 $d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$

力对转轴的力矩为 $d\vec{L} = \vec{r} \times d\vec{F} = \vec{r} \times (Id\vec{l} \times \vec{B})$

使线圈转动的力矩是与ＯＯ′平行的一边所受的力矩

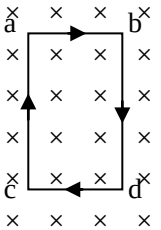
$$L = NISB\sin(\vec{n}, \vec{B}) = NISB\sin 60^0 = 4.3 \times 10^{-3} N \cdot m$$

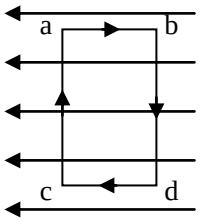
这个力矩将使线圈转向 x 轴。

１２、 一矩形线圈长 20mm，宽 10mm，由外皮绝缘的细导线密绕而成，共绕有 1000 匝，放在 B=1000 高斯的均匀外磁场中，当导线中通有 100mA 的电流时，求附图中两种情况下线圈每边所受的力与整个线圈所受的力和力矩。

（１） B 与线圈平面的法线重合；

（２） B 与线圈平面的法线垂直。





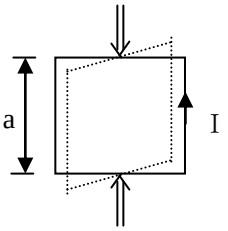
解： （１） $F_{ab} = -F_{cd} = Il_1 B \quad F_{ac} = -F_{bd} = Il_2 B$

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \vec{L} = \vec{m} \times \vec{B} = 0$$

（２） $F_{ab} = -F_{cd} = Il_1 B \quad F_{ac} = -F_{bd} = Il_2 B$

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \vec{L} = \vec{m} \times \vec{B} \to L = NI l_1 l_2 B = 2.0 \times 10^{-3} N \cdot m$$ 方向向上

１３、　一边长为 a 的正方形线圈载有电流Ⅰ，处在均匀磁场Ｂ中，Ｂ沿水平方向，线圈可以绕通过中心的竖直轴ＯＯ′转动，转动惯量为Ｊ。求线圈在平衡位置附近作微小摆动的周期。



解：线圈所受磁场作用的力矩为　$\vec{L}=\vec{m}\times\vec{B}=Ia^2\vec{n}\times\vec{B}$

力矩的大小为　$L=Ia^2B\sin\theta$

当θ＝０时达到平衡；当θ很小时，线圈作微小振动。$\sin\theta\approx\theta$

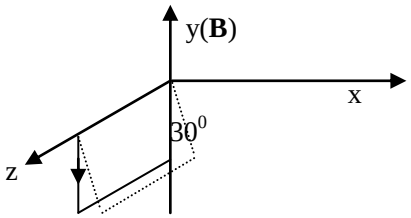
运动方程为　$J\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=-L=-Ia^2B\theta\Rightarrow\dfrac{d^2\theta}{dt^2}+\dfrac{Ia^2B}{J}\theta=0$

这一方程表明，线圈作简谐振动，其振动的周期为　$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{J}{Ia^2B}}$

１４、　一矩形线圈的大小为 8.0×6.0cm^2，每 cm 长的质量为 0.10g，可以绕 ab 边自由转动，外磁场Ｂ沿 y 轴方向。当线圈中载有电流Ⅰ＝10A 时，线圈离开竖直位置，偏转 30^0。

（１）　求磁感强度Ｂ的大小；

（２）　如果Ｂ是沿 x 轴方向，线圈将如何？



解：（１）重力矩的大小为　$L_g=\rho gl_2(l_1+l_2)\sin\theta$

方向是使θ减小；

安培力矩大小为　$L_M=mB\sin(\dfrac{\pi}{2}-\theta)=Il_1l_2B\cos\theta$　方向是使θ增大；

平衡时　$L_g=L_M\Rightarrow B=\dfrac{\rho g(l_1+l_2)}{Il_1}\tan=1.3\times10^{-2}(T)$

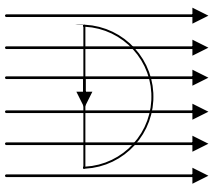
（２）Ｂ沿 x 轴方向时，两力矩方向相同，线圈只有在θ＝０时才能平衡。线圈不偏转。

１５、　一半径为Ｒ=0.10m 的半圆形闭合线圈，载有电流Ⅰ=10A，放在均匀外磁场中，磁场的方向与线圈平面平行。磁感强度的大小 B=5.0×10^3 高斯。

（１）　求线圈所受力矩的大小和方向；

（２）　在这力矩的作用下线圈转 90^0（即转到线圈平面与Ｂ垂直），求力矩所作的功。

解：（１）线圈所受力矩为　$\vec{L}=\vec{m}\times\vec{B}=IS\vec{n}\times\vec{B}$　方向向上

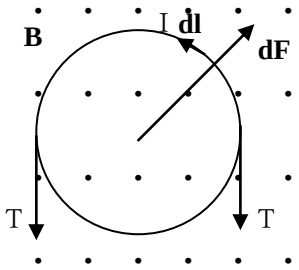


其大小为　$L=ISB=7.9\times10^{-2}N\cdot m$

（２）转动过程中力矩所作的功为　$A=-\int_{\pi/2}^{0}Ld\theta=ISB=\dfrac{1}{2}\pi R^2IB=7.9\times10^{-2}J$

１６、　一圆线圈的半径为Ｒ，载有电流Ｉ，放在均匀外磁场Ｂ中，线圈的右旋法线方向与Ｂ的方向相同，求线圈导线上的张力。

解：考虑Ｂ作用在半圆环上的安培力，$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$



沿半径方向，$dF = IBdl$

由对称性可知，半圆环所受安培力方向向上，其大小为

$$F = \int dF \sin\theta = IBR\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 2IBR$$

所求张力为　$T = \dfrac{F}{2} = IBR$

１７、　半径Ｒ=10cm 的圆线圈由表面绝缘的细导线密绕而成，共绕有 2000 匝；当导线中通有 2.0A 电流时，加上外磁场Ｂ，Ｂ的方向与线圈平面平行，Ｂ的大小为 5.0×10^{-2} Ｔ．求磁场作用在线圈上的力矩。

解：$L = NISB\sin\theta = NISB = 6.3N\cdot m$

１８、　一螺线管长 30cm,横截面的直径为 15mm，由表面绝缘的细导线密绕而成，每厘米绕有 100 匝.当导线中通有 2.0A 的电流后，把这螺线管放到Ｂ=4.0T 的均匀磁场中，求：

（１） 螺线管的磁矩；

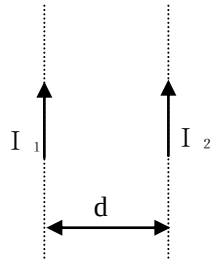
（２） 螺线管所受的力矩的最大值。

解：　（１）磁矩为　$m = NIS = 1.06(A\cdot m^2)$

（２）所受力矩的最大值为　$L = NISB = 4.2N\cdot m$

１９、　两条很长的平行输电线相距 20mm，都载有 100A 的电流，分别求电流方向相同和相反时，其中两段一米长的输电线之间的相互作用力。

解：　由毕—萨定律可知，Ｉ$_1$在Ｉ$_2$处产生的磁感强度为 $B_1 = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$



I_2上的电流元受到的作用力为　$dF_{12} = I_2 dl_2 B_1 = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} dl_2$

单位长度的 I_2 导线受力为　$\dfrac{dF_{12}}{dl_2} = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} = 0.1N$

电流方向相同时，两电线相互吸引；电流方向相反时，两电线相互排斥。

２０、 发电厂的汇流条是两条三米长的平行铜棒，相距 50cm；当向外输电时，每条棒中的电流都是 10000A。作为近似，把两棒当作无穷长的细线，计算它们之间的相互作用力。

解：无限长直线电流在距离为 r 处产生的磁感强度 B 的大小为 $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

两棒之间相互作用力大小为

$$F=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}l=1.2\times10^2\,N$$

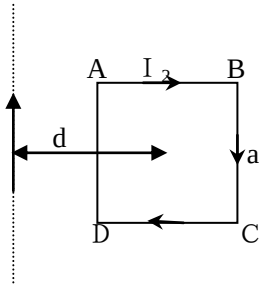
２１、 长直导线与一正方形线圈在同一平面内，分别载有电流Ｉ₁和Ｉ₂，正方形的边长为 a，它的中心到直导线的垂直距离为 d.

（１） 求这正方形载流线圈各边所受Ｉ₁的磁场力以及整个线圈所受的合力；

（２） 当Ｉ₁=3.0A, Ｉ₂=2.0A, a=4.0cm, b=4.0cm 时，求合力的值。

解：（１）无限长直线电流在距离为 r 处产生的磁感强度 B 的大小为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



线圈的各边所受安培力分别为

$$F_{AB}=-F_{CD}=\int_{d-a/2}^{d+a/2}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}dr=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}\ln\frac{2d+a}{2d-a}$$

$$F_{Bc}=I_2 a\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+a/2)}\qquad \text{方向向右}$$

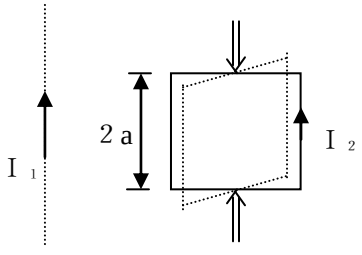
$$F_{DA}=I_2 a\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d-a/2)}\qquad \text{方向向左}$$

线圈所受的磁场力的合力为

$$F=F_{DA}-F_{BC}=\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi(d-a/2)}-\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi(d+a/2)}=\frac{2\mu_0 I_1 I_2 a^2}{\pi(4d^2-a^2)}\qquad \text{方向向左}$$

（２）$F=\frac{2\mu_0 I_1 I_2 a^2}{\pi(4d^2-a^2)}=1.6\times10^{-6}(N)$

２２、 载有电流Ｉ₁的长直导线旁边有一正方形线圈，边长为 2 a，载有电流Ｉ₂，线圈中心到导线的垂直距离为 b，电流方向如图所示。线圈可以绕平行于导线的轴Ｏ₁Ｏ₂转动，求：



（１） 线圈在α角度位置时所受的合力Ｆ和合力矩Ｌ；

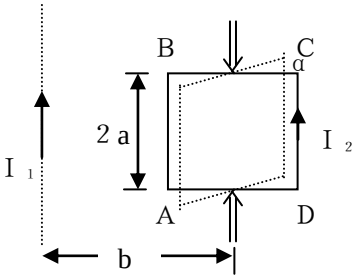
（２） 线圈平衡时α的值；

（3） 线圈从平衡位置转到α=π/2时，I_1作用在线圈上的力作了多少功？

解：（1）I_1作用在各边上的力分别为

$$F_{AB}=2al_2B_1=2aI_2\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_{AB}}=\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{\pi\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}$$

$$F_{CD}=2al_2B_1=2aI_2\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_{CD}}=\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{\pi\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}$$

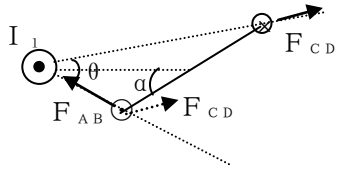


$F_{BC}=-F_{AD}$ 互相抵消。

I_1作用在线圈上的合力为 $\vec{F}=\vec{F}_{AB}+\vec{F}_{CD}$

其大小为 $F=\sqrt{F_{AB}^2+F_{CD}^2-2F_{AB}F_{CD}\cos\theta}$

$$=\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{\pi}\sqrt{\frac{1}{r_{AB}^2}+\frac{1}{r_{CD}^2}-\frac{2}{r_{AB}r_{CD}}\cos\theta}$$

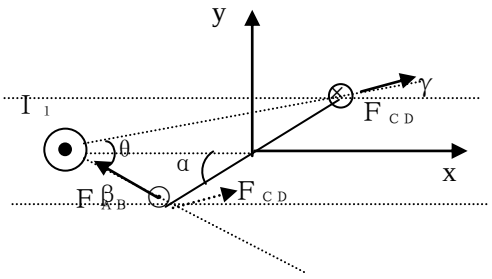


因为 $\cos\theta=\dfrac{r_{AB}^2+r_{CD}^2-(2a)^2}{2\dfrac{2}{r_{AB}r_{CD}}}$

所以 $F=\dfrac{2\mu_0 I_1 I_2 a^2}{\pi r_{AB}r_{CD}}=\dfrac{2\mu_0 I_1 I_2 a^2}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)^2-4a^2b^2\cos^2\alpha}}$

为说明F的方向，取直角坐标系如图所示，

$$F_x=F_{CD}\cos\gamma-F_{AB}\cos\beta$$
$$F_y=F_{CD}\sin\gamma+F_{AB}\sin\beta$$



F与x轴之间的夹角为 $\varphi=\arctan\dfrac{F_y}{F_x}$

由图可见 $\sin\beta=\dfrac{a}{r_{AB}}\sin\alpha$ $\cos\beta=\dfrac{b-a\cos\alpha}{r_{AB}}$

$\sin\gamma=\dfrac{a}{r_{CD}}\sin\alpha$ $\cos\gamma=\dfrac{b+a\cos\alpha}{r_{CD}}$

代入得 $\varphi=\arctan(\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\tan\alpha)$

线圈所受的力矩为AB和CD两边受力对转轴的力矩之和。

$$L=F_{AB}b\sin\beta+F_{CD}b\sin\gamma=\frac{\mu_0 I_1 I_2 ab}{\pi}\left[\frac{\sin\beta}{r_{AB}}+\frac{\sin\gamma}{r_{CD}}\right]$$

$$=\frac{\mu_0 I_1 I_2 a^2 b\sin\alpha}{\pi}\left[\frac{1}{r^2{}_{AB}}+\frac{1}{r^2{}_{CD}}\right]=\frac{2\mu_0 I_1 I_2 a^2 b\left(a^2+b^2\right)\sin\alpha}{\pi\left[\left(a^2+b^2\right)^2-4a^2b^2\cos^2\alpha\right]}$$

L 的方向是使 α 减小的方向。

（2）当 L = 0 时，线圈达到平衡。

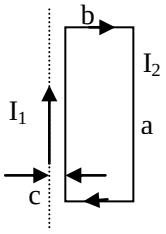
α = 0 （稳定平衡）；　　α = π （不稳定平衡）

（3）线圈从 α = 0 转到 α = π / 2 时，作用在线圈上的力所作的功为

$$A=\int_0^{\pi/2}Ld\alpha=\frac{2\mu_0 I_1 I_2 a^2 b\left(a^2+b^2\right)}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\alpha}{\left(a^2+b^2\right)^2-4a^2b^2\cos^2\alpha}d\alpha$$

$$=-\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi}\ln\frac{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}\Big|_{\alpha=0}^{\alpha=\pi/2}=\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi}\ln\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$$

2 3、 如图所示，一根长直导线载有电流 3 0 A,长方形回路和它在同一平面内，载有电流 2 0 A。回路长 30cm，宽 8.0cm，靠近导线的一边离导线 1.0cm。求直导线电流的磁场作用在这回路上的合力。

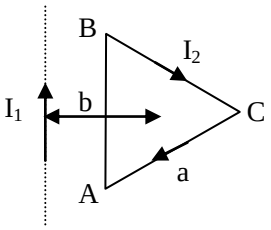


解：$F=-\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi c}+\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi(b+c)}=-\frac{\mu_0 I_1 I_2 ab}{2\pi c(b+c)}=3.2\times10^{-3}N$

F 的方向向左，即指向 I_1。

2 4、 载有电流 I_1 的长直导线旁有一正三角形线圈，边长为 a，载有电流 I_2，一边与直导线平行，中心到直导线的垂直距离为 b ,直导线与线圈都在同一平面内，求 I_1 作用在这三角形线圈上的力。

解：$F_{AB}=I_2 a\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(b-\sqrt{3}a/6)}=\frac{3\mu_0 I_1 I_2 a}{\pi(6b-\sqrt{3}a)}$　方向向左

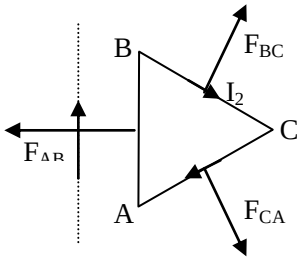


$$F_{BC}=F_{CA}=\int_0^a I_2 dl\left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\right)=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_0^a\frac{dl}{r}$$

$$=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_0^a\frac{dl}{b-\frac{\sqrt{3}a}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}l}$$

$$=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\sqrt{3}\pi}\ln\left(b-\frac{\sqrt{3}a}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)\Big|_0^a=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\sqrt{3}\pi}\ln\frac{6b+2\sqrt{3}a}{6b-\sqrt{3}a}$$

因 F_{BC} 和 F_{CA} 对于三角形的顶角 C 是对称的，平行于 I_1 的分量大小相等而方向相反，所以二者的合力为



$$\vec{F}_{BC}+\vec{F}_{CA}=2F_{BC}\cos60^0\vec{e}_x=F_{BC}\vec{e}_x=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\sqrt{3}\pi}\ln\frac{6b+2\sqrt{3}a}{6b-\sqrt{3}a}\vec{e}_x$$

三角形的线圈的三边所受安培力之和为

$$\vec{F}=\vec{F}_{AB}+\vec{F}_{BC}+\vec{F}_{CA}=-F_{AB}\vec{e}_x+F_{BC}\vec{e}_x$$

$$=-\frac{3\mu_0 I_1 I_2 a}{\pi(6b-\sqrt{3}a)}\vec{e}_x+\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\sqrt{3}\pi}\ln\frac{6b+2\sqrt{3}a}{6b-\sqrt{3}a}\vec{e}_x=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{6b+2\sqrt{3}a}{6b-\sqrt{3}a}-\frac{3a}{6b-\sqrt{3}a}\right]\vec{e}_x$$

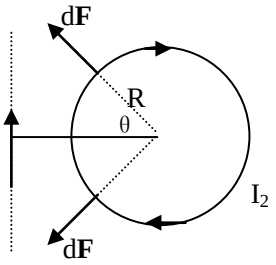
２５、 载有电流Ｉ$_1$的长直导线旁有一平面圆形线圈，线圈半径为 r，边长为 a，载有电流Ｉ$_2$，中心到直导线的垂直距离为 l ,直导线与线圈都在同一平面内，求Ｉ$_1$作用在这圆形线圈上的力。

解：由对称性可知，圆的上下两半相应位置的电流元所受的力平行于直线的分量大小相等而方向相反，互相抵消；垂直于直线的分量大小相等而方向相同，所以整个线圈所受的力大小等于

$$F=2\int_0^{\pi}(dF)\cos\theta=2\int_0^{\pi}(I_2 R d\theta)\left[\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(l-R\cos\theta)}\right]\cos\theta$$

$$=\frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{{}_1\cos\theta d\theta}{(l-R\cos\theta)}=\frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{\pi}\left[-\frac{\theta}{R}+\frac{l}{R}\frac{2}{\sqrt{l^2-R^2}}\arctan(\sqrt{\frac{l-R}{l+R}}\tan\frac{\theta}{2}\right]_{\theta=0}^{\theta_{1\pi}}$$

$$=\mu_0 I_1 I_2\left(\frac{l}{\sqrt{l^2-R^2}}-1\right)$$ 方向向左

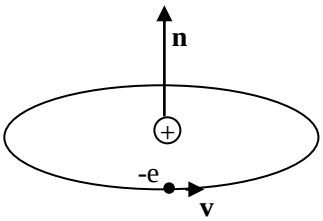


２６、 试证明电子绕原子核沿圆形轨道运动时磁矩与角动量大小之比为 $\gamma=-\frac{e}{2m}$（经典回转磁比率）。磁矩与角动量各沿什么方向？

解：电子绕核运动的磁矩 $\vec{m}=I\vec{S}=\frac{-e}{T}\pi r^2\vec{n}=\frac{-e}{2}\omega r^2\vec{n}=\frac{-e}{2}v r\vec{m}$ 方向与 **n** 方向相反

电子绕核运动的角动量 $\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=m\,v\,\vec{m}$ 方向与 **n** 方向相同

磁矩和角动量之比 $\frac{m}{L}=\frac{\frac{-e}{2}\omega r^2}{mvr}=-\frac{2}{2m}$



２７、 一电磁式电流计线圈长 a=2.0cm，宽 b=1.0cm，N=250 匝，磁极间隙内的磁感强度 B=2000 高斯。当通入电流 I=0.10mA 时，偏转角 θ =30^0。求：

（１） 作用在线圈上的磁偏转力矩Ｌ；

（２） 游丝的扭转常数Ｄ。

解：（１）磁偏转力矩 $L=\left|\vec{m}\times\vec{B}\right|=NIabB=1\times10^{-8}(N\cdot m)$

（２）$K=L/\theta=NIabB/\theta=3.3\times10^{-3}(N\cdot m/\text{度})$

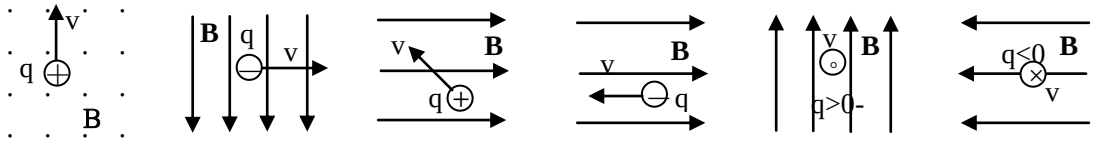
２８、 一电磁式电流计中线圈面积 S=6.0cm^2,由５０匝细导线绕成。磁极间隙Ｂ=100 高斯，游丝的扭转常数Ｄ=0.10 达因厘米／度。求通有 1.0mA 的电流时的偏转角度。

解：$\theta=NIabB/K=30^0$

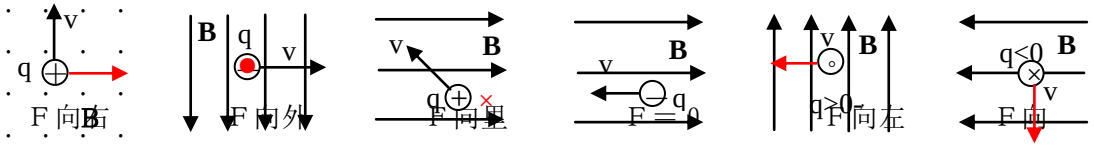
§4.5　　带电粒子在磁场中的运动

思考题：

1、　指出下图中各情形里带电粒子受力的方向

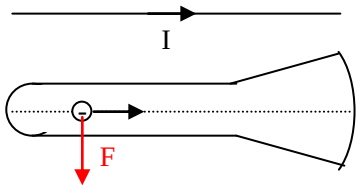


答：根据洛伦兹力公式　$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$ 可知



下

2、　如图所示，在阴极射线管上平行管轴放置一根载流直导线，电流方向如图所示。射线向什么方向偏转？电流反向后情况怎样？

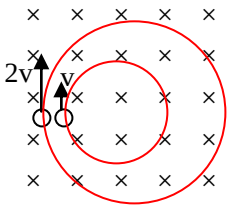


答：电流产生磁场，电子在磁场中运动受到洛伦兹力作用，

射线将向下偏转。

电流反向后，磁场反向，射线将向上偏转。

3、　如图所示，两个电子同时由电子枪射出，它们的初速度与匀磁场垂直，速率分别是 V 和 2V。经磁场偏转后，哪个电子先回到出发点？



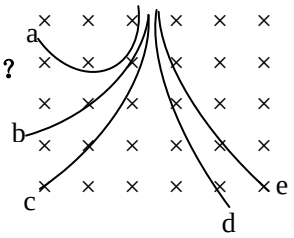
答：电子在磁场中受洛伦兹力作用而作匀速圆周运动 $R=mv/qB$，

$T=2\pi m/qB$，与 V 无关。因此两电子同时回到出发点。

4、　云室是借助于过饱和水蒸汽在离子上凝结，来显示通过它的带电粒子径迹的装置。这里有一张云室中拍摄的照片，云室中加了垂直纸面向里的磁场，图中 a、b、c、d、e 是从 O 出发的一些正电子或负电子的径迹。

（1） 哪些径迹属于正电子的，哪些属于负电子的？

（2） abc 三条径迹中哪个粒子的能量（速率）最大？哪个最小？

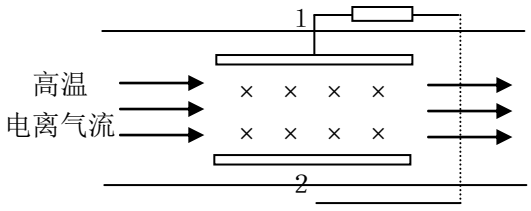


答：（1）向右偏转的 d、e 是正电子，向左偏转的 a、b、c 是负电子。

（2）速率越大的粒子，回转半径越大。 $R=mv/qB$

因此 a、b、c 三条径迹中，c 粒子能量最大，a 粒子能量最小。

5、　图中所示是磁流体发电机的示意图。将气体加热很高的温度（譬如 2500K 以上）使之电离（这样一种高度电离的气体叫做等离子体），并让它通过平行板电极 1、2 之间，在这里有一垂直于纸面向里的磁场 B。试说明这时两电极间会产生一个大小为 vBd 的电压（v 为气体流速，d 为电极间距）。哪个电极是正极？



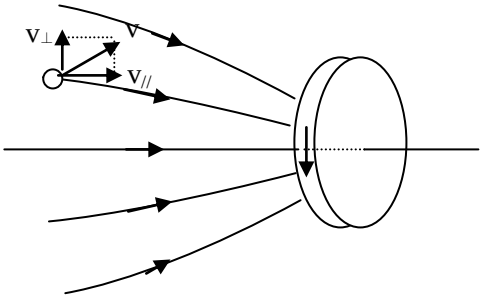
答：设带电粒子的运动速度与气体流速相等。当磁流体发电机中的等离子体（气体流）通过电极 1、2 之间时，正离子受到一个向上的力，偏向上极板，上极板成为正极；负离子受到向下的力偏向下极板，下极板成为负极。设正、负极板的电量分别为+q 和—q，电位分别为 U_1 和 U_2，则两极板的电位能差等于洛伦兹力把+q 电荷从负极板移到正极板所做的功,$qU_1—qU_2=qvBd$, 即 $U_{12}= U_1—U_2=vBd$。

或者：最初，以速度 V 运动的带电粒子在磁场中受到洛伦兹力作用 $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ 而偏转，积累在两极板上的正负电荷形成电场，当离子所受电场力与洛伦兹力平衡时，离子不再偏转而沿前进方向通过两极板之间。

$qvB = q\dfrac{U}{d}$　　**即此时两极板之间的电压为**　$U = vBd$

6、　试定性是说明磁镜两端对作回旋运动的带电粒子能起反射作用。

答：在载流线圈附近，由弱到强的磁场位形，叫做磁镜。



当一个带电粒子沿磁感应线作回旋运动由较弱的磁场区域进入较强的磁场区域时，随着 B 的增加，其横向动能 $mv_\perp^2/2$ 也要增加。（在梯度不是很大的非均匀磁场中，磁矩 M 是不变量，$M = \dfrac{mv_\perp^2/2}{B}$）；但由于洛伦兹力是不作功的，带电粒子的总动能 $mv^2/2 = m(v_\perp^2 + v_{//}^2)/2$ 保持不变，于是纵向动能 $mv_{//}^2/2$ 和纵向速度就要减小。当区域中的磁场变得足够强时，纵向速度 $v_{//}$ 可能变为零，这时引导中心沿磁感应线的运动被抑止，而后沿反方向运动。带电粒子的这种运动方式就象光线遇到镜面发生反射一样。因此磁镜两端对作回旋运动的带电粒子能起反射作用。

例如：地球磁场中心弱，两极强，是一个天然的磁镜。内、外两个环绕地球的辐射带，就是地磁场所俘获的带电粒子组成。

－－－

（3）顺着B的方向看，电子是顺时针回旋吗？

解：　（1）$R=\frac{mv}{eB}=\frac{\sqrt{2mE_k}}{eB}=0.11(m)$　（2）$T=\frac{2\pi m}{eB}=3.6\times10^{-7}(s)=0.36$微秒

（3）是顺时针回旋。

5、　一带电粒子的电荷为 q=3.2×10^{-19}C，质量 m=6.7×10^{-27}kg，速率 v=5.4×10^{4}m/s，在磁场中回旋半径R=4cm，求磁感强度B。

解：　带电粒子的运动方程为　$qvB=m\frac{v^2}{r}$

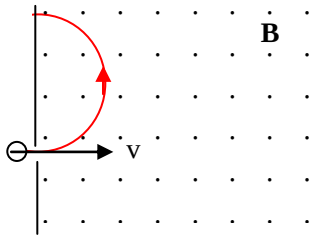
磁感强度为　$B=\frac{mv}{qR}=2.8\times10^{2}$高斯

6、　一电子的初速度为0，经电压U加速后进入均匀磁场，已知磁场的磁感强度为B，电子电荷为－e，质量为 m，电子进入磁场时速度与B垂直，如附图所示，

（1）画出电子的轨道；

（2）求轨道半径R；

（3）电压U=3000V,B=100 高斯时，R＝？



解：　（1）电子轨道如图所示。

（3）轨道半径　$R=\frac{mv}{eB}=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}$

（4）R＝1.85cm

7、　电子以 v=3.0×10^{7}m/s 的速度射入匀强磁场B内，它的速度与B垂直，B=10T。已知电子的质量为 m=9.11×10^{-31}kg，电荷量为 q=1.6×10^{-19}C，求这电子所受的洛伦兹力，并与它在地面所受的重力加以比较。

解：电子所受洛伦兹力大小为　$F=evB=4.8\times10^{-11}(N)$

电子在地面所受重力大小为　$F_G=mg=8.9\times10^{-30}(N)$

两者之比为　$\frac{F}{F_G}=5.4\times10^{18}$

即此时电子所受的洛伦兹力为重力的10^{18}倍。

8、　一电子在匀强磁场中作圆周运动，频率为 f=12MHz,半径为 r=0.535m。已知电子的质量为 m=9.11×10^{-31}kg，电荷量为 q=1.6×10^{-19}C，求：

（1） 磁感强度B；（2）电子动能

解： （1） $B=\dfrac{2\pi mf}{e}=4.29\times10^{-4}(T)=4.29$高斯

（2）$E_K=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{1}{2}evrB=2(\pi rf)^2m=7.41\times10^{-16}(J)=4.63\times10^{3}(eV)=4.63(keV)$

9、 已知质子质量 m=1.67×10^{-27}kg,地球半径 6370km,地球赤道上地面的磁场B=0.32 高斯。

（1） 要使质子绕赤道表面作圆周运动，其动量 p 和能量E应有多大？

（2） 若使质子以速率 v=1.0×10^{7}m/s 环绕地球赤道表面作圆周运动，地磁场应有多大？

解：（1）质子的运动方程为 $evB=m\dfrac{v^2}{r}$

考虑相对论效应，质子的质量和速度的关系为 $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

联立两式得

$$\frac{v}{c}=\frac{1}{\sqrt{1+(m_0c/reB)^2}}\approx1-\frac{1}{2}\left(\frac{m_0c}{reB}\right)^2=1-\frac{1}{2}(1.536\times10^{-2})^2=1-1.2\times10^{-4}$$

$$(\frac{m_0c}{reB}=1.536\times10^{-2}<<1)$$

所以质子的动量为 $p=mv=\dfrac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=3.3\times10^{-17}kg\cdot m/s$

质子的能量为 $E_k=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{p^2}{2m}=62GeV$

（2） $B=\dfrac{mv}{er}=1.6\times10^{-8}(T)$

10、 在一个显象管里，电子沿水平方向从南到北运动，动能是 1.2×10^{4}eV。该处地球磁场在竖直方向上的分量向下，B的大小是 0.55 高斯。

（1） 电子受地磁的影响往哪个方向偏转？

（2） 电子的加速度有多大？

（3） 电子在显象管内走 20cm 时，偏转有多大？

（4） 地磁对于看电视有没有影响？

解：（1）根据洛伦兹力公式可知，电子受地磁场的作用力向东，故电子向东偏转。

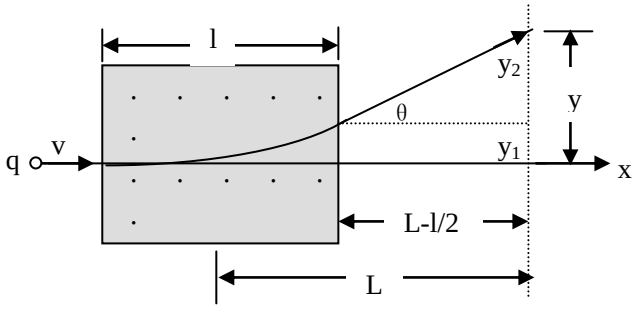
（２）电子的加速度大小为 $a=\frac{F}{m}=\frac{evB_{\perp}}{m}=\frac{eB_{\perp}}{m}\sqrt{\frac{2E_k}{m}}=6.3\times10^{14}m/s^2$

（３）电子的偏转为 $s=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\frac{eB_{\perp}l^2}{\sqrt{2mE_k}}=3.0\times10^{-3}(m)=3.0(mm)$

（４）地磁存在造成的是系统偏转，故对于看电视没有影响。

１１、 一质量为 m 的粒子带有电量 q，以速度 v 射入磁感强度为 B 的均匀磁场，v 与 B 垂直，粒子从磁场出来后继续前进，如图所示。已知磁场区域在 v 方向（即 x 方向）上的宽度为 l，当粒子从磁场出来后在 x 方向前进的距离为 L －l/2 时，求它的偏转。

解：带电粒子进入磁场时，速度 V 与磁场 B 垂直，粒子的轨迹为圆，其半径为 $R=\frac{mv}{qB}$。以粒子进入磁场处为原点，取直角坐标系如图所示。圆的方程为 $x^2+(y-R)^2=R^2$。



当粒子离开磁场时，x=l，这时的偏转为

$$y_1=R-\sqrt{R^2-l^2}=\frac{mv}{qB}-\sqrt{\left(\frac{mv}{qB}\right)^2-l^2}$$

粒子在磁场中因受洛伦兹力作用而偏转，但洛伦兹力不作功，粒子的动能不变，即粒子的速率 v 不变。在射出磁场时，设粒子的速度与 x 轴的夹角为 θ；射出磁场后，沿直线前进。当它沿 x 方向前进的距离为 L-l/2 时，偏转为 $y_2=(L-l/2)tg\theta=\frac{(L-l/2)l}{\sqrt{R^2-l^2}}$

即： $y=y_1+y_2=\frac{mv}{qB}-\sqrt{\left(\frac{mv}{qB}\right)^2-l^2}+\frac{(L-l/2)l}{\sqrt{R^2-l^2}}$

当 $l<<\frac{mv}{qB}$ 时， $y_1=\frac{mv}{qB}-\sqrt{\left(\frac{mv}{qB}\right)^2-l^2}\approx\frac{mv}{qB}-\frac{mv}{qB}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{qBl}{mv}\right)^2\right]=\frac{1}{2}\frac{qBl^2}{mv}$

$$y_2=\frac{(L-l/2)l}{\sqrt{\left(\frac{mv}{qB}\right)^2-l^2}}\approx\frac{qB(L-l/2)l}{mv}$$

$$y=y_1+y_2=\frac{1}{2}\frac{qBl^2}{mv}+\frac{qB(L-l/2)l}{mv}=\frac{qBLl}{mv}$$

１２、 已知 α 粒子的质量 m=6.7×10^{-27}kg，电荷 q=3.2×10^{-19}C。它在 B=1.2T 的均匀磁场中沿半径为 45cm 的圆周运动。

（１） 求它的速率 v，动能 E_K 和回旋周期 T；

（２） 若它原来是静止的，问需经过多大的电压加速，才能达到这个速率？

解：（１）速率为 $v=\dfrac{reB}{m}=2.6\times10^{7}(m/s)$

动能为 $E_k=mv^2/2=2.3\times10^{-12}(J)=14(MeV)$

回旋周期为 $T=\dfrac{2\pi m}{eB}=1.1\times10^{-7}(s)$

（２）加速电压 $U=\dfrac{E_k}{e}=\dfrac{mv^2}{2e}=7.1\times10^{6}(V)=7.1(MV)$

１３、 已知氘核的质量比质子大一倍，电荷与质子相同；α粒子的质量是质子质量的四倍，电荷是质子的二倍。

（１） 问静止的质子、氘核和α粒子经过相同的电压加速后，它们的动能之比是多少？

（２） 当它们经过这样加速后进入同一均匀磁场时，测得质子圆轨道的半径为10cm，问氘核和α粒子轨道的半径各有多大？

解：（１）$E_k=qU$ $E_p:E_d:E_\alpha=q_p:q_d:q_\alpha=1:1:2$

（２）质子的轨道半径为 $R_p=\dfrac{\sqrt{2m_pE_p}}{q_pB}=10cm$ 氘核和α粒子轨道的半径分别为

$R_d=\dfrac{\sqrt{2m_dE_d}}{q_dB}=\sqrt{2}R_p=14cm$ $R_\alpha=\dfrac{\sqrt{2(2m_p)(2E_p)}}{2q_pB}=\sqrt{2}R_p=14cm$

１４、一氘核在B=1.5T的均匀磁场中运动，轨迹是半径为40cm的圆周。已知氘核的质量为3.34×10^{-27}kg，电荷$q=1.6\times10^{-19}$C。

（１）氘核的速度和走半圈所需要的时间；

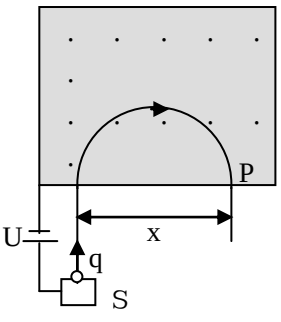
（２）需要多高的电压才能把氘核从静止加速到这个速度？

解：（１）氘核的速度为 $v=\dfrac{reB}{m}=2.9\times10^{7}(m/s)$

走半圈所需要的时间为 $t=\dfrac{T}{2}=\dfrac{\pi m}{eB}=4.4\times10^{-8}(s)$

（２）所需的加速电压为 $U=\dfrac{mv^2}{2q}=8.6\times10^{6}(V)=8.6(MV)$

１５、一质谱仪的构造如图所示，离子源S产生质量为M，电荷为q的离子，离子产生出来时速度很小，可以看作是静止的；离子产生出来后经过电压U加速，进入磁感强度为B的均匀磁场，沿着半圆周运动而达到记录它的照相底片P上，测得它在P上的位置



到入口处的距离为 x。证明这离子的质量为 $M=\frac{qB^2}{8U}x^2$

解：离子走的是半圆周，x 是直径，由运动方程 $m\frac{v^2}{r}=qvB$

和能量关系 $\frac{1}{2}mv^2=qU$

得 $x=2r=\frac{2mv}{qB}=\frac{2m}{qB}\sqrt{\frac{2qU}{m}}==\frac{2}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}\rightarrow M=\frac{qB^2}{8U}x^2$

１６、如上题，以钠离子作实验，得到的数据如下：加速电压Ｕ=705V,磁感强度 B=3580 高斯，x=10cm。求钠离子的荷质比 q/M。

解：钠离子的荷质比为 $\frac{q}{M}=\frac{8U}{B^2x^2}=4.4\times10^6(C/kg)$

１７、已知碘离子所带电荷 $q=1.6\times10^{-19}$C。它在Ｂ=4.510^{-2}T 的均匀磁场中作圆周运动时，回旋七周的时间为 1.29×10^{-3}s，求碘离子的质量。

解：$m=\frac{qBT}{2\pi}=2.1\times10^{-25}kg$

１８、一回旋加速器Ｄ形电极圆周的最大半径Ｒ=60cm，用它来加速质子，要把质子从静止加速到 4.0MeV 的能量，

（１） 所需的磁感强度Ｂ；

（２） 设两Ｄ形电极间的距离为 1.0cm，电压为 2.0×10^{-4}V,其间电场是均匀的，求加速到上述能量所需的时间。

解： （１）$B=\frac{\sqrt{2mE_k}}{Rq}=0.48(T)$

（２）带电粒子在回旋加速器中的运动分为两部分：一是经过Ｄ形电极间的匀加速直线运动，二是在Ｄ形盒内的匀速圆周运动。加速时间应为 $t=t_1+t_2$

从静止开始加速到动能为E_K时，经过两极间加速的次数为

$$n=E_k/qU=300$$

在两极间走过的距离为 $nd=\frac{1}{2}at_1^2=\frac{1}{2}\frac{qE}{m}t_1^2=\frac{1}{2}\frac{qU}{md}t_1^2$

即 $t_1=\sqrt{\frac{2mn}{qU}}d=\frac{\sqrt{2mE_k}}{qU}d=1.4\times10^{-7}(s)$

由于粒子经过两极间 n 次，故它在Ｄ形盒内的半圈匀速运动便有（n-1）次，

$$t_2=(n-1)\frac{T}{2}=\frac{(n-1)\pi m}{qB}=1.4\times10^{-5}(s)$$

$$t=t_1+t_2=1.4\times10^{-5}(s)$$

（２）解法２：因为质子的回旋周期与速度无关，它在每个周期内被加速两次，故每个周期所获得的能量为　$E=2U=4.0\times10^4(eV)$

加速到４MeV 所需的周期为　Ｎ＝１００

因两极间的距离 d 比最大回旋半径 60cm 小得多，所以质子经过两极间的时间可忽略不计，即所求时间为

$$t=NT=1.4\times10^{-5}(s)$$

１９、一电子在Ｂ=20 高斯的磁场里沿着半径Ｒ=20cm 的螺旋线运动，螺距 h=5.0cm，如图所示，已知电子的荷质比为 e/m=1.76×10^{11}C/kg，求这电子的速度。

解：速度分解为 $v_\perp$和 $v_{//}$,

垂直于Ｂ的方向作匀速圆周运动，$v_\perp=\frac{eRB}{m}=7.04\times10^7(m/s)$

平行于Ｂ的方向作匀速直线运动，$v_{//}=\frac{ehB}{2\pi m}=2.80\times10^6(m/s)$

电子速度的大小为　$v=\sqrt{v_\perp^2+v_{//}^2}=7.0\times10^7(m/s)$

２０、正电子的质量与电子相同，都是 9.11×10^{-34}kg,所带电量也和电子相同，但带的是正电。有一个正电子，动能为 2000eV，在 B=1000 高斯的均匀磁场中运动，它的速度 v 与 B 成 80^{0}角，所以它沿一条螺旋线运动。求这螺旋运动的（１）周期Ｔ；（２）半径 r 和（３）螺距 h。

解：将正电子的速度分解为平行于Ｂ的分量 $v_{//}$和垂直于Ｂ的分量 $v_\perp$

电子作回旋运动的周期为　$T=\frac{2\pi R}{v_\perp}=\frac{2\pi m}{eB}=3.6\times10^{-10}(s)$

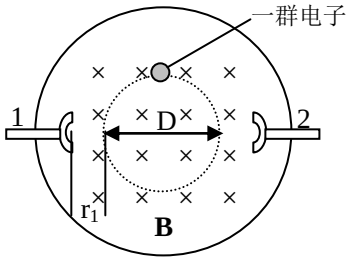
半径为　$R=\frac{mv_\perp}{eB}=\frac{\sin89^0}{eB}\sqrt{2mE_k}=1.5\times10^{-3}(m)$

螺距为　$h=v_{//}T=\sqrt{\frac{2E_k}{m}}T\cos89^0=1.7\times10^{-4}(m)$

２１、附图所示是微波技术中用的一种磁控管的示意图。一群电子在垂直于磁场Ｂ的平面内作圆周运动。在运行过程中它们时而接近电极１，时而接近电极２，从而使两极间的电位差作周期性变化。试证明电压变化的频率为 eB/2πm，电压的幅度为 $U_0=\frac{N_e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_1+D}\right)$式中Ｄ是圆形轨道的直径，$r_1$是电子群最靠近某一电极时的距

离，N是这群电子的数目。

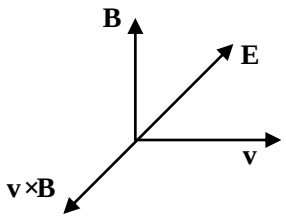
解：



2 2、空间某一区域里有E=1500V/m的电场和B=4000高斯的磁场，这两个场作用在一个运动电子上的合力为0。当电子的速度V⊥B时，

（1） 求这个电子的速率V；

（2） 画出E、B和V三者的相互方向。



解：（1）电子所受的合力为 $\vec{F}=e(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})=0$

$vB\sin\theta=E$ 当v⊥B时，$v=\dfrac{E}{B}=3.75\times10^{3}(m/s)$

（2）E、B和V三者的相互方向如图所示。

2 3、空间某一区域有均匀电场E和均匀磁场B，E和B的方向相同。一电子在这场中运动，分别求下列情况下电子的加速度a 和电子的轨迹：开始时（1）V_0与E方向相同；（2）V_0与E方向相反；（3）V_0与E垂直。

解： 电子所受的合力为 $\vec{F}=e(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$ 加速度为 $\vec{a}=\dfrac{\vec{F}}{m}=\dfrac{e}{m}(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$

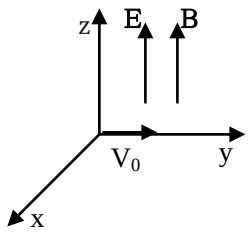
（1） V_0与E方向相同时，也与B方向相同，电子所受洛伦兹力为零，仅在电场力作用下作匀减速直线运动。$\vec{a}=\dfrac{e\vec{E}}{m}$。当$t=-\dfrac{mv_0}{eE}$时速度为零，然后在E的作用下逆着电力线加速运动，其轨迹是一条直线。（有如竖直上抛运动）

（2） V_0与E方向相反时，也与B方向相反，电子所受洛伦兹力仍为零，在电场力作用下作匀加速直线运动。$\vec{a}=-\dfrac{e\vec{E}}{m}$，电子逆着电力线加速运动，轨迹是一条直线。（有如竖直下抛运动）

（3） 当V_0与E垂直时，$\vec{a}=\dfrac{\vec{F}}{m}=\dfrac{e}{m}(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$，

电场力产生加速度与E方向相反，不改变V_0的大小；

磁场的洛伦兹力使电子环绕磁力线作圆周运动，由于洛伦



兹力不作功，电子的动能不因磁场的作用而改变。因此电子一方面在电场力的作用下逆着电力线加速运动，一方面环绕磁力线作圆周运动，合成的结果是一条螺距越来越大的螺旋线。定量结果为：

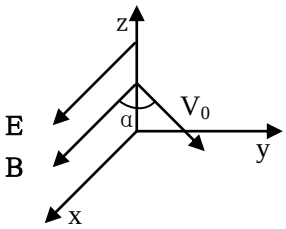
$z=\frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2$　　$x=\frac{mv_0}{eB}(1-\cos\frac{eB}{m}t)$　　$y=\frac{mv_0}{eB}\sin\frac{eB}{m}t$ ——空间螺旋线方程

电子运动的轨迹是一条轴线平行于E（B）的空间螺旋线。

$$\left(x-\frac{mv_0}{eB}\right)^2+y^2=\left(\frac{mv_0}{eB}\right)^2\begin{cases}\text{半径为}R=\dfrac{mv_0}{eB}\\ \text{螺距为}h=2\pi E\dfrac{t}{B}\end{cases}$$

h 与时间成正比，表明螺距越来越大。

2 4、空间某一区域有均匀电场E和均匀磁场B，E和B方向相同，一电子在该场中运动，开始时速度为V_0，V_0与E之间的夹角为α，求这电子的加速度和轨迹。



解：　电子的加速度为 $\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}=\frac{e}{m}(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$

$a_\perp=\frac{evB\sin\alpha}{m}$　　$a_{//}=-\frac{eE}{m}$

将 V_0 分解——

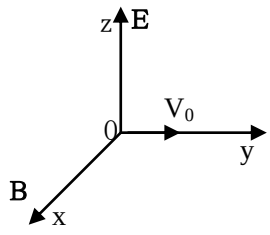
平行于 B 的分量 $v_{//}=v_0\cos\alpha$ 在电场力的作用下不断减小，作减速直线运动

垂直于 B 的分量 $v_\perp=v_0\sin\alpha$ 大小不变，在垂直于 B 的平面内作匀速圆周运动

圆周运动的半径为 $R=\frac{mv_0\sin\alpha}{eB}$

合成轨迹为以 x 轴为轴线的空间螺旋线，其螺距不断减小。

2 5、在空间有互相垂直的均匀电场E和均匀磁场B，B沿 x 方向，E沿 z 方向,一电子开始时从原点出发，以速度V_0沿 y 方向前进。问电子运动的轨迹如何？



解：电场和磁场分别为　**E**=（0，0，E）　**B**=（B，0，0）

初始条件为 t=0 时，$x_0=0$，　$y_0=0$，　$z_0=0$

$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0=0$　　$\left(\frac{dy}{dt}\right)_0=v_0$　　$\left(\frac{dz}{dt}\right)_0=0$

电子的运动方程为 $m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=e\vec{E}+e\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{B}\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2}=0 \\ m\frac{d^2y}{dt^2}=eB\frac{dz}{dt} \\ m\frac{d^2z}{dt^2}=eE-eB\frac{dy}{dt}\end{cases}$

上式对时间积分，并利用初始条件可解得

x=0 表明电子在 yz 平面内运动

$$z=\frac{m}{eB}(v_0-\frac{E}{B})\left[\cos\frac{eB}{m}t-1\right]$$

$$y=\frac{m}{eB}(v_0-\frac{E}{B})\sin\frac{eB}{m}t+\frac{E}{B}t$$

这是 yz 平面里的一条摆线（旋轮线）。

2 6、设氢原子中的电子沿半径为 r 的圆轨道绕原子核运动。若把氢原子放在磁感强度为 B 的磁场中，使电子的轨道平面与 B 垂直，假定 r 不因 B 而改变，则当观测者顺着 B 的方向看时，

（1） 电子是沿顺时针方向旋转，问电子的角频率（或角速率）是增大还是减小？

（2） 若电子是沿反时针方向旋转，问电子的角频率是增大还是减小？

解：电子所受的洛伦兹力为 $\vec{F}=e\vec{v}\times\vec{B}$，因 e<0，$\vec{F}$ 的方向与 $\vec{v}\times\vec{B}$ 方向相反

（1） 当电子沿顺时针方向旋转，F 指向原子核，电子受到的向心力增大，故电子的角频率（角速率）是增大；

（2） 当电子沿逆时针方向旋转，F 背向原子核，电子受到的向心力减小，故电子的角频率（角速率）是减小。

2 7、设电子的质量为 m，电荷为 e，以角速度 ω 绕带正电的质子作圆周运动。当加上外磁场 B，B 的方向与电子轨道平面垂直时，设电子轨道半径不变，而角速度变为 ω′。证明：电子角速度的变化近似等于 $\Delta\omega=\omega'-\omega=\pm\frac{1}{2}\frac{e}{m}B$。

解：无磁场时，电子的角速度 ω 满足 $m\omega^2r=F_e=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$

加上磁场后，电子的角速度 ω′ 满足

$$m\omega'^2r=F_e+F_m=m\omega^2r\pm ev'B=m\omega^2r\pm e\omega' rB$$

因电子电荷量 e<0，故上式右边在洛伦兹力与库仑力同方向时用负号，反方向时用正号

由上式得　　$\omega'^2 \pm \frac{eB}{m}\omega' - \omega^2 = 0$

解得　　$\omega' = \pm\frac{eB}{2m} \pm \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{eB}{2m}\right)^2}$

其中根号内两项之比为　$\frac{eB}{2m}/\omega = B\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 r^3}{m}} = 2.1\times10^{-6}B$

在一般实验中，B很少超过10T，即使B＝100T，上述比值也只有万分之二。因此，

$$\omega' = \pm\frac{eB}{2m} \pm \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{eB}{2m}\right)^2} \approx \pm\frac{eB}{2m} \pm \sqrt{\omega^2}$$

因ω′>0，所以ω只能取正值。

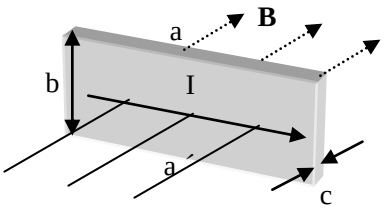
$$\omega' = \omega \pm \frac{eB}{2m}$$

即　　$\Delta\omega = \omega' - \omega = \pm\frac{1}{2}\frac{e}{m}B$

2 8、一铜片厚为 d=1.0mm，放在 B=1.5T 的磁场中，磁场的方向与铜片垂直。已知铜片里每立方厘米有 8.4×10^{22} 个自由电子，当铜片中有Ⅰ=200A 的电流时，

（1） 求铜片两侧的电位差Uaa′；

（2） 铜片宽度 b 对Uaa′有无影响？为什么？



解：（1）设铜片内构成电流的自由电子其平均定向速度为 **u**,则每个参加导电的自由电子所受的洛伦兹力为

$$\vec{f}_m = e\vec{u}\times\vec{B}$$

方向为从a′指向a，电子向a偏转，a边带负电，a′带负电，结果在铜片内产生一个从a′指向a边的电场E。

当电子所受的电场力与洛伦兹力平衡时，电子不再偏转。

E＝uB

电流　$I = jS = neuld$

$$U_{aa'} = \int_a^{a'}\vec{E}\cdot d\vec{l} = -El = -uBl = -\frac{IB}{ned} = -2.2\times10^{-5}(V)$$

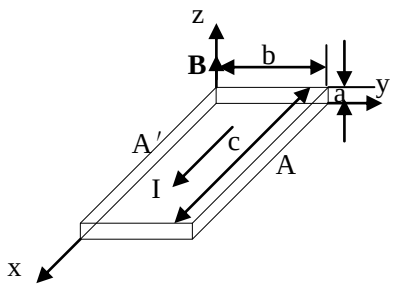
（2）铜片宽度b对Uaa′无影响。

2 9、一块半导体样品的体积为 a×b×c，如图所示，沿 x 方向有电流Ⅰ，在 z 轴方向加有均匀磁场B。这时实验得出的数据为 a=0.10cm，b=0.35cm，c=1.0cm，I=1.0mA，B=3000 高斯，铜片两侧的电位差$U_{AA'}$=6.55mV。

（1） 问这半导体是正电荷导电（p 型）还是负电荷导电（n 型）？

（２） 求载流子浓度（即单位体积内参加导电的带电粒子数）。

解：（１）U_{AB}＝6.55mV>0,可知样品是 n 型（负电荷）导电。



（２）样品中的为　$I = jab = nquab$

磁场使载流子偏转，从而在样品两侧积累正负电荷，在样品中生成一个横向电场Ｅ，作用在载流子上的力为　$\vec{f} = \vec{f}_m + \vec{f}_e = q(\vec{u} \times \vec{B} + \vec{E})$

电场力与磁场力方向相反，当它们大小相等，达到平衡时，载流子不再偏转而达到稳定的定向流动，$E = U_{AA'} / d$

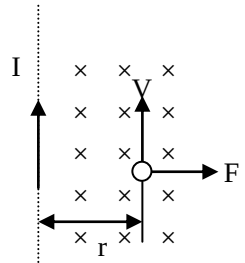
载流子的浓度为　$n = \dfrac{I}{quab} = \dfrac{IB}{qaU_{AB}} = 2.9 \times 10^{19} (个 / m^3)$

３０、一长直导线载有电流 50A,在离它 5.0cm 处有一电子以速率 v=1.0×10^{7}m/s 运动。求下列情况下作用在电子上的洛伦兹力：

（１） Ｖ平行于导线电流；

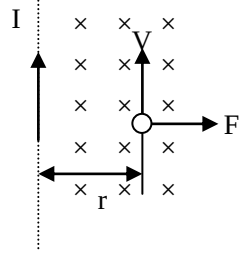
（２） Ｖ垂直于导线并向着导线；

（３） Ｖ垂直于导线和电子所构成的平面。



解：　（１）Ｖ平行于导线电流时，由电流产生磁场Ｂ的规律和洛伦兹力公式，作用在电子上的洛伦兹力为 $\vec{f}_m = -e\vec{v} \times \vec{B}$

方向如图所示，其大小为　$f_m = -evB = 3.2 \times 10^{-16} (N)$



（２）Ｖ垂直于导线并向着导线时，

作用在电子上的洛伦兹力方向向上，

其大小仍为 $f_m = -evB = 3.2 \times 10^{-16} (N)$

（３）Ｖ垂直于导线和电子所构成的平面时，

因 $\vec{v} \times \vec{B} = 0$，所以作用在电子上洛伦兹力为零。

第四章　　结　束

第五章　　电磁感应和暂态过程

§5.1　　电磁感应定律

思考题：

1、 一导体线圈在均匀磁场中运动，在下列几种情况下哪些会产生感应电流？为什么？

（1） 线圈沿磁场方向平移；

（2） 线圈沿垂直磁场方向平移；

（3） 线圈以自身的直径为轴转动，轴与磁场方向平行；

（4） 线圈以自身的直径为轴转动，轴与磁场方向垂直。

答：在（1）、（2）、（3）中，当导体线圈运动时，穿过线圈内的磁通量不发生变化，线圈中的感应电动势为零，所以不产生感应电流；

在（4）中，穿过线圈内的磁通量发生变化，线圈中产生感应电动势，有感应电流。

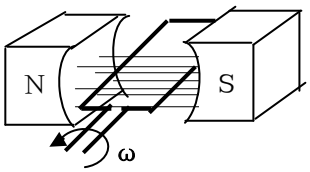
2、 感应电动势的大小由什么因素决定？如图所示，一个矩形线圈在均匀磁场中以匀角速度ω旋转，试比较，当它转到位置 a 和 b 时感应电动势的大小。

答：回路中感应电动势的大小，由穿过回路的磁通量的变化率决定。

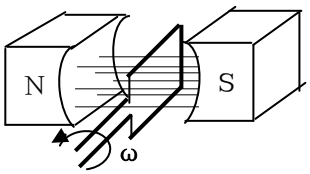
在右图中，如矩形线圈初始时刻（t=0）时法线与均匀磁场的磁感应线平行，则经过时间 t 后，通过线圈的磁通量为 $\phi = BS\cos\omega t$ 。

故感应电动势 $\varepsilon = -d\phi/dt = \omega BS\sin\omega t$ 。

位置 a，感应电动势最大；位置 b 时，感应电动势为零。



a



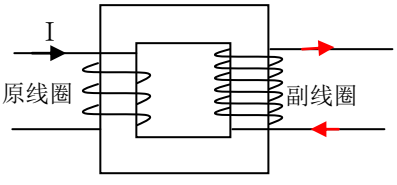
b

3、 怎样判断感应电动势的方向？

（1） 判断上题附图中感应电动势的方向。

（2） 在本题附图所示的变压器（一种有铁芯的互感装置）中，当原线圈的电流减少时，判断副线圈中的感应电动势的方向。

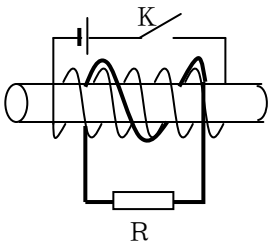
答：感应电动势的方向与穿过回路的磁通量变化率的方向相反。



（1）上题 a、b 中，感应电动势均为逆时针方向；

（２）原线圈中电流减小时，副线圈中向下的磁通量减少，所以感应电流方向为由下端进入，由上端流出。感应电动势方向向上。

4、 在附图中，下列各种情况里，是否有电流通过电阻器Ｒ？如果有，则电流的方向如何？



（１） 开关Ｋ接通的瞬时；

（２） 开关Ｋ接通一些时间之后；

（３） 开关Ｋ断开的瞬间。

当开关Ｋ保持接通时，线圈的哪一端起磁北极的作用？

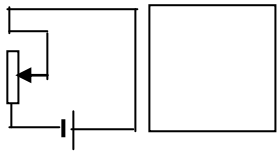
答：　（１）开关Ｋ接通的瞬时，有电流通过电阻Ｒ，方向为从右到左；

（２）开关Ｋ接通一些时间之后，磁通量不变，电阻Ｒ中无电流通过；

（３）开关Ｋ断开的瞬间，有电流通过电阻Ｒ，方向为从左到右。

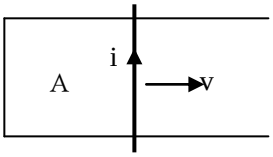
当开关Ｋ保持接通时，线圈的左端起磁北极的作用

5、 如果使附图左边电路中的电阻Ｒ增加，则在右边电路中的感应电流的方向如何？



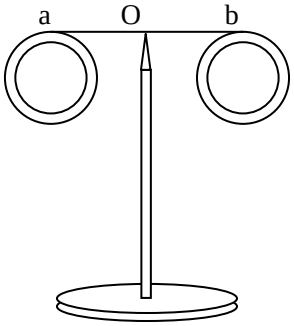
答：当左边电路中的电阻Ｒ增加时，左边回路逆时针方向的电流减小，穿过右边回路的向下的磁通量减少，由楞次定律可知，右边电路中的感应电流方向为顺时针方向。

6、 在附图中，使那根可以移动的导线向右移动，因而引起一个如图所示的感应电流。问：在区域Ａ中的磁感应强度Ｂ的方向如何？



答：感应电流产生的磁场应反抗或补偿原来磁场磁通量的变化。当导线向右移动时，穿过闭合回路的磁通量增加，因此感应电流产生的磁场应与原磁场方向相反。由此可知，区域Ａ中磁感应强度Ｂ的方向为向里。

7、 附图中所示为一观察电磁感应现象的装置。左边 a 为闭合导体圆环，右边 b 为有缺口的导体圆环，两环用细杆联接支在Ｏ点，可绕Ｏ在水平面内自由转动。用足够强的磁铁的任何一极插入圆环。当插入环 a 时，可以观察到环向后退；插入环 b 时，环不动。试解释所观察到的现象。当用Ｓ极插入环 a 时，环中感应电流方向如何？



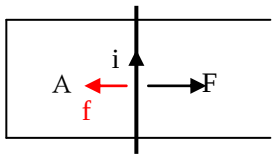
答：磁铁插入环 a 时，穿过 a 环的磁通量增加，环中感应电流的磁场和原磁铁的磁场方向相反，所以磁铁和 a 环中感应电流间的相互作用力是斥力，所以环向后退。而 b 环有缺口，当磁铁插入时，环中只有感应电动势，而没有感应电流，b 环和

磁铁之间没有作用力，所以环不动。

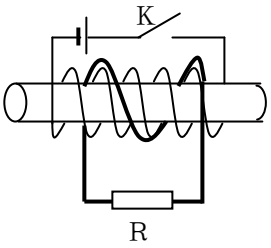
当用 S 极插入环 a 时，环 a 中感应电流的磁场方向向里，因此感应电流的方向为顺时针方向。

8、 试说明思考题 6 和 4 中感应电流的能量是哪里来的。

答：（1）思考题 6 中，感应电流的能量是由外力 F 推动导线作功转换而来。



当导线向右运动时，出现感应电流 i，感应电流受到磁场安培力作用，安培力方向与 F 方向相反，阻碍导线移动。要保持导线继续向右移动，必须施加外力 F 。F 抵抗安培力所作的功转变成了感应电流的能量。



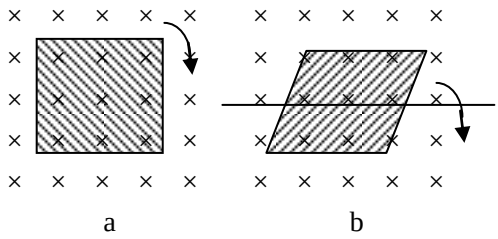
（2）思考题 4 中，感应电流的能量是由电源的电能通过磁场转换而来的。如同变压器的原理。

9、 一块金属在均匀磁场中平移，金属中是否会有涡流？

答：金属中无涡流。因为穿过金属中任何一个闭合回路的磁通量都未发生变化。

10、 一块金属在均匀磁场中旋转，金属中是否会有涡流？

答：一块金属在均匀磁场中旋转，有两种情况：



一是当金属旋转时，穿过金属中任意闭合回路的磁通量不变，这样就不会有涡流，如图 a。

二是当金属旋转时，穿过金属中的磁通量发生变化，金属中将出现涡流，如图 b。

习题：

1、 一横截面积为 S =20cm^2 的空心螺绕环，每厘米长度上绕有 50 匝。环外绕有 N =5 匝的副线圈，副线圈与电流计 G 串联，构成一个电阻为 R =2.0 Ω 的闭合线圈。今使螺绕环中的电流每秒减少 20A，求副线圈中的感应电动势和感应电流。

解：通过副线圈的磁链为 $\Psi = N\Phi = NBS = N\mu_0 niS = (N\mu_0 nS)i$

根据法拉第电磁感应定律，副线圈中的感应电动势为

$$\varepsilon = -\frac{d\Psi}{dt} = N\mu_0 nS(-\frac{di}{dt}) = 1.3\times 10^{-3} V$$

副线圈中的感应电流为

$$I=\frac{\varepsilon}{R}=6.3\times10^{-4}(A)$$

2、 一正方形线圈每边长 100mm，在地磁场中转动，每秒转 30 圈，转轴通过中心并与一边平行，且与地磁场B垂直。

（1） 线圈法线与地磁场B的夹角为什么值时，线圈中产生的感应电动势最大？

（2） 设地磁场的B=0.55 高斯，这时要在线圈中最大产生 10mV 的感应电动势，求线圈的匝数N。

解： （1）转轴与地磁场的B夹角为 90^0 时，磁通量的变化率最大，因此感应电动势最大。

（2）在转轴与地磁场B垂直时，感应电动势为

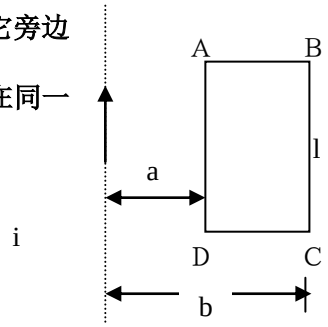
$$\varepsilon=-\frac{d\Psi}{dt}=-N\frac{d\Phi}{dt}=-N\frac{d}{dt}BS\cos\omega t=NBS\omega\sin\omega t$$

$$N=\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{BS\omega}=1.4\times10^2(\text{匝})$$

3、 如图所示，一很长的直导线有交变电流 $i=I_0\sin\omega t$，它旁边有一长方形线圈ABCD，长为 l，宽为（b-a），线圈和导线在同一平面内。求：

（1） 穿过回路ABCD的磁通量Φ；

（2） 回路ABCD中的感应电动势。



解： （1）穿过回路ABCD的磁通量Φ为

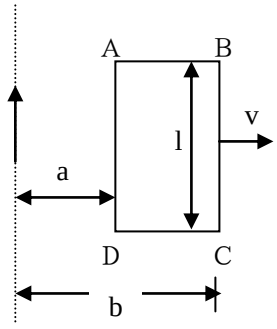
$$\Phi=\int_a^b Bldr=\int_a^b\frac{\mu_0 I}{2\pi r}ldr=\frac{\mu_0 Il\sin\omega t}{2\pi}\int_a^b\frac{dr}{r}=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{b}{a}\sin\omega t$$

（2）回路ABCD中的感应电动势为

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{\mu_0 I_0\omega t}{2\pi}\ln\frac{b}{a}\cos\omega t$$

4、 一长直导线载有 5.0A 直流电流，旁边有一个与它共面的矩形线圈，长 l=20cm，如图所示，a=10cm,b=20cm，线圈共有N=1000 匝，以 v=3.0m/s 的速度离开直导线。求线圈里的感应电动势的大小和方向。

解： $\varepsilon=N\oint\vec{E}_i\cdot d\vec{l}=N\oint\vec{v}\times\vec{B}\cdot d\vec{l}=Nvb_a l-Nvb_b l$



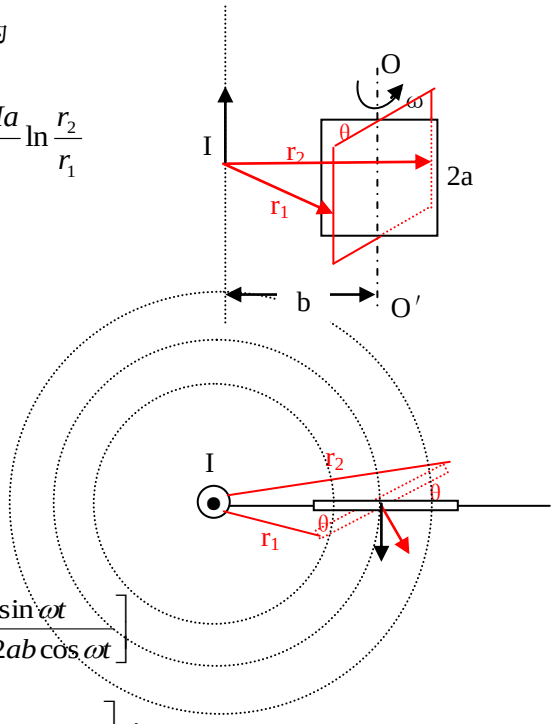
$$= Nvl\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=3.0\times10^{-3}(V)$$

感应电动势的方向为顺时针方向。

5、 如图所示，电流强度为 I 的长直导线的附近有正方形线圈绕中心轴 O O′ 以匀角度 ω 旋转，求线圈中感应电动势。已知正方形边长为 2a，O O′ 轴与长导体平行，相距为 b。

解：设线圈从图示位置转过 θ 角，穿过回路的磁通量为

$$\Phi=\int_{r_1}^{r_2}B(2adl)\cos\theta=\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}2a\frac{dr}{\cos\theta}\cos\theta=\frac{\mu_0 Ia}{\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$



其中 $r_1=\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}$

$r_2=\sqrt{b^2+a^2+2ab\cos\theta}$

$$\Phi=\frac{\mu_0 Ia}{\pi}\ln\frac{\sqrt{b^2+a^2+2ab\cos\theta}}{\sqrt{b^2+a^2-2ab\cos\theta}}\qquad \theta=\omega t$$

感应电动势为

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}=\frac{\mu_0 Ia}{\pi}\left[\frac{ab\omega\sin\omega t}{b^2+a^2+2ab\cos\omega t}-\frac{-ab\omega\sin\omega t}{b^2+a^2-2ab\cos\omega t}\right]$$

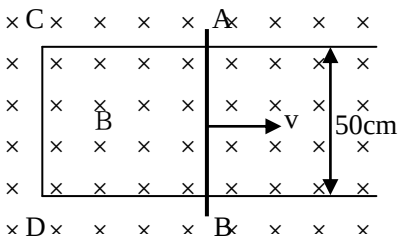
$$=\frac{\mu_0 Ia^2b\omega}{\pi}\left[\frac{1}{b^2+a^2+2ab\cos\omega t}+\frac{1}{b^2+a^2-2ab\cos\omega t}\right]\sin\omega t$$

6、 如图所示，导体棒 A B 与金属轨道 C A 和 D B 接触，整个线框放在 B =0.50T 的均匀磁场中，磁场方向与图面垂直。

（1） 若导体棒以 4.0m/s 的速度向右运动，求棒内感应电动势的大小和方向；

（2） 若导体棒运动到某一位置时，电路的电阻为 0.20Ω，求此时棒所受的力。

（3） 比较外力作功的功率和电路中所消耗的功率。



解： （1）在磁场中运动的导体棒产生的动生电动势为

$\varepsilon=Blv=1.0(V)$ 图中逆时针方向

（2）回路的电流为 $I=\frac{\varepsilon}{R}=5(A)$

棒所受到的安培力为 $F=IlB=1.25(N)$

（3）外力作功的功率为　　$P = Fv = 5.0(W)$

电路中消耗的功率为　　$P = I^2 R = 5.0(W)$　二者相等。即电路中所消耗的能量是由外力作功转化而来。

7、　闭合线圈共有N匝，电阻为R。证明：当通过这线圈的磁通量改变△Φ时，线圈内流过的电量为$\Delta q = \frac{N\Delta\Phi}{R}$。

解：磁通量发生变化时，线圈中的感应电动势为　　$\varepsilon = -\frac{d\Psi}{dt} = -N\frac{d\Phi}{dt}$

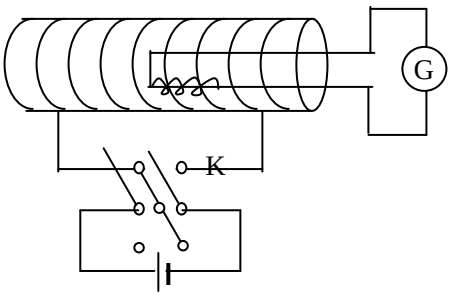
线圈中的电流为　　$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{N}{R}\frac{d\Phi}{dt} \rightarrow dq = -\frac{N}{R}d\Phi \rightarrow \Delta q = -\frac{N}{R}\Delta\Phi$

8、　如图所示，这是测量螺线管中磁场的一种装置。把一个很小的测量线圈放在待测处，这线圈与测量电量的冲击电流计G串联。冲击电流计是一种可测量迁移过它的电量的仪器。当用反向开关K使螺线管的电流反向时，测量线圈中就产生感应电动势，从而产生电量△q 的迁移；由G测出△q 就可以算出测量线圈所在处的B。已知测量线圈有 2000 匝，它的直径为 2.5cm，它和G串联回路的电阻为 1000Ω，在K反向时，测得△q=2.5×10^{-7}C.求被测处的磁感强度B。

解：设测量线圈的横截面积为S，匝数为N，它与G的回路电阻为R，电流为i，

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{N}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{NS}{R}\frac{dB}{dt}$$

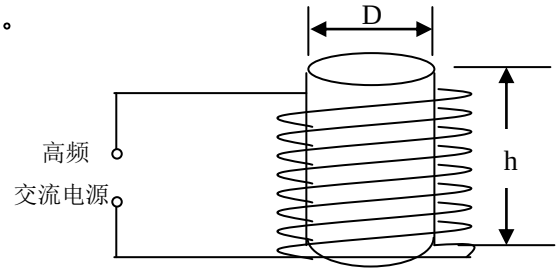
$$dq = -\frac{NS}{R}dB$$



因螺线管的电流反向，B随之反向，由上式得

$$\int_0^{\Delta q} dq = \Delta q = -\frac{NS}{R}(-B - B) = \frac{2NSB}{R} \rightarrow B = 1.3\times10^{-4}(T)$$

9、　如图所示，将一个圆柱形金属块放在高频感应炉中加热。设感应炉的线圈产生的磁场是均匀的，磁感应强度的方均根值为B，频率为 f。金属柱的直径和高分别为D和h，电导率为σ，金属柱的柱平行于磁场。设涡流产生的磁场可以忽略，试证明金属柱内涡电流产生的热功率为$P = \frac{1}{32}\pi^3 f^2 \sigma B^2 D^4 h$。



解：设磁场变化规律为$B = B_0 \cos 2\pi ft$

$$\frac{dB}{dt} = B_0 2\pi f \sin 2\pi ft \rightarrow \overline{\frac{dB}{dt}} = B \cdot 2\pi f$$

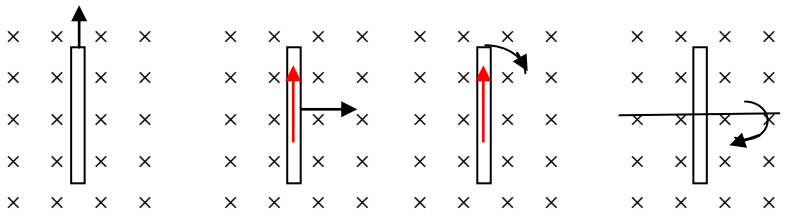
变化磁场所产生的涡旋电场为 $E=\frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial t}r=\pi fBr$，热功率密度为 $p=\sigma E^2$

所以 $P=\int_0^R\sigma(\pi fBr)^2 2\pi rhdr=\pi^3 f^2\sigma B^2 h\int_0^R r^3dr=\frac{1}{32}\pi^3 f^2\sigma B^2 D^4 h$

§5.2 动生电动势和感生电动势

思考题：

1、 一段直导线在均匀磁场中作如图所示的四种运动。在哪种情况下导线中有感应电动势？为什么？感应电动势的方向是怎样的？



答：在图示情况下，导线只有在作（2）（3）两种运动时，导线中有感应电动势。因为导线运动过程中切割磁力线。两种情况的感应电动势方向如图所示。

2、 在电子感应加速器中，电子加速所得到的能量是哪里来的？试定性解释之。

答：电子加速所得到的能量来自发电机。因为发电机对电磁铁的线圈供给能量，使磁铁具有变化着的磁场，从而在环形室内感应出涡旋电场；电子在涡旋电场的作用下被加速，获得足够的动能。即电子加速所得到的能量是通过变化着的磁场这一媒介传递给电子的。

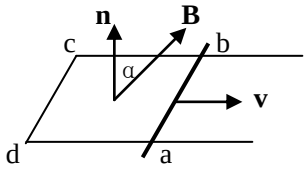
－－

习题：

1、 如图所示，线圈 abcd 放在 B=6.0×10^3 高斯的均匀磁场中，磁场方向与线圈平面法线的夹角 α =60^0，ab=1.0m，可左右滑动。今将 ab 以速率 v=5.0m/s 向右运动，求感应电动势的大小及感应电流的方向。

解： $\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d}{dt}(BS\cos\alpha)=-B\frac{dS}{dt}\cos\alpha$

$=-Blv\cos\alpha=-1.5(V)$

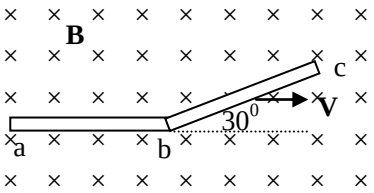


负号表示感应电动势的方向为 d→c→b→a→d,此即感应电流的方向。

2、 两段导线 ab=bc=10cm 在 b 处相接成 30^0 角。若使导线在匀强磁场中以速率 v=1.5m/s 运动，方向如图所示，磁场方向垂直图面向内，B=2.5×10^2 高斯。问 ac 间的电位差是多少？哪一端电位高？

解：$U_{ac}=\int_a^c \vec{E}_s\cdot d\vec{l}=\int_c^a \vec{v}\times\vec{B}\cdot d\vec{l}=\int_c^b \vec{v}\times\vec{B}\cdot d\vec{l}$

$=-vB\frac{l}{2}\sin\alpha=-1.9\times10^{-3}(V)$

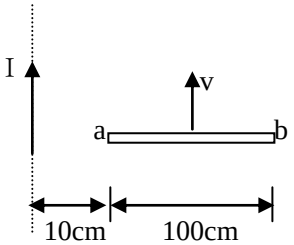


负号表明C端电位高。

3、 如图，金属棒 ab 以 v=2.0m/s 的速率平行于一长直导线运动，此导线的电流 I=40A。求棒中感应电动势的大小。哪一端电位高？

解：$U_{ab}=\int_a^b \vec{E}_s\cdot d\vec{l}=-\int_a^b \vec{v}\times\vec{B}\cdot d\vec{l}$

$=\int_a^b v\frac{\mu_0 I}{2\pi r}dr=v\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{r_b}{r_a}=3.7\times10^{-5}(V)$ a 端电位高。

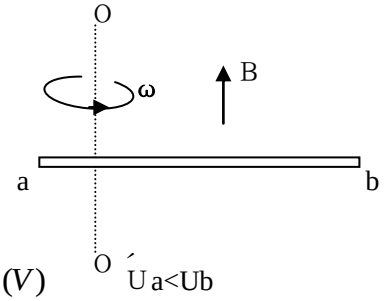


4、 如附图一金属棒长为 0.50m 水平放置，以长度的 1/5 处为轴，在水平面内旋转，每秒转两转。已知该处地磁场在竖直方向上的分量 $B_\perp$=0.50 高斯，求 a、b 两端的电位差。

解：$U_{ab}=\int_a^b \vec{E}_s\cdot d\vec{l}=-\int_a^b \vec{v}\times\vec{B}_\perp\cdot d\vec{l}=-\int_a^b(\vec{\omega}\times\vec{r})\times\vec{B}_\perp\cdot d\vec{l}$

$=-\int_a^0(\vec{\omega}\times\vec{r})\times\vec{B}_\perp\cdot d\vec{l}-\int_o^b(\vec{\omega}\times\vec{r})\times\vec{B}_\perp\cdot d\vec{l}$

$=-\int_a^o\omega B_\perp r dr-\int_o^b\omega B_\perp r dr=-\frac{3}{10}\omega B_\perp l^2=-4.7\times10^{-5}(V)$



5、 只有一根辐条的轮子在均匀外磁场 B 中转动，轮轴与 B 平行，如图所示。轮子和辐条都是导体，辐条长为 R，轮子每秒转 N 圈。两根导线 a 和 b 通过各自的刷子分别与轮轴和轮边接触。

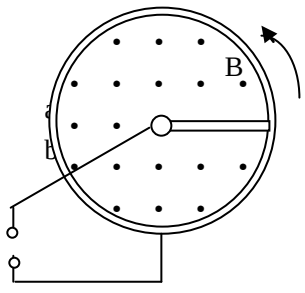
（1） 求 a、b 间的感应电动势；

（2） 若在 a、b 间接一个电阻，使辐条中的电流为 I，问 I 的方向如何？

（3） 求这时磁场作用在辐条上的力矩的大小和方向；

（4） 当轮反转时，I 是否也会反向？

（5） 若轮子的辐条是对称的两根或更多根，结果如何？



解：（1）$U_{ab}=\int_a^b \vec{E}_s\cdot d\vec{l}=\int_0^R \vec{v}\times\vec{B}\cdot d\vec{l}$

$=\frac{1}{2}B\omega R^2=\frac{1}{2}B\cdot2\pi N\cdot R^2=N\pi BR^2$

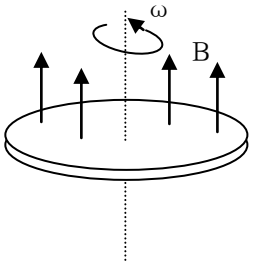
（2）电流 I 沿辐条向外。

（3）$\vec{M}=\int d\vec{M}=\int_0^R \vec{r}\times d\vec{F}=\int_0^R \vec{r}\times(Id\vec{l}\times\vec{B})=-IB\int_0^R rdr\vec{e}_\omega=-\frac{1}{2}IBR^2\vec{e}_\omega$

（4）当轮所转时，I 也会反向。

（5）辐条是对称的两根或更多根时，相当于多个电源的并联，感应电动势大小不变。

6、 法拉第圆盘发电机是一个在磁场中转动的导体圆盘。设圆盘的半径为R，它的轴线与均匀外磁场B平行，它以角速度ω绕轴线转动，如图所示。



（1） 求盘边与盘心间的电位差U；

（2） 当R=15cm,B=0.60T，转速为 30r/s 时，U等于多少？

解：（1）$U_{RO}=\int_R^O \vec{E}_s\cdot d\vec{l}=\int_0^R \vec{v}\times\vec{B}\cdot d\vec{l}=\frac{1}{2}\omega BR^2$　　$U_R>U_O$

（2）$U_{RO}=\frac{1}{2}\omega BR^2=\frac{1}{2}2\pi nBR^2=1.3(V)$

7、 已知在电子感应加速器中，电子加速的时间是 4.2ms，电子轨道内最大磁通量为1.8Wb，试求电子沿轨道绕行一周平均获得的能量。若电子最终所获得的能量为100MeV，电子将绕多少周？若轨道半径为 84cm，电子绕行的路程有多少？

解：（1）电子加速过程中，感应电场强度的平均值为

$$\overline{E_i}=\frac{1}{2\pi R}\frac{\overline{d\Phi}}{dt}=\frac{1}{2\pi R}\frac{\Phi_{\max}}{t}$$

（R为电子轨道半径，$\Phi_{\max}$为电子轨道内磁通量的最大值，t为加速时间）

电子加速时，平均每圈获得的能量为

$$W=e\cdot 2\pi R\overline{E_i}=\frac{e\Phi_{\max}}{t}=6.9\times10^{-17}(J)=4.3\times10^2 eV$$

（2）电子绕行的圈数为　$N=\frac{100\times10^6}{4.3\times10^2}=2.3\times10^5$

（3）电子所走过的路程为　$s=2\pi RN=1.2\times10^3(km)$

---

§5.3　　互感和自感

思考题：

1、 如何绕制才能使两个线圈之间的互感最大？

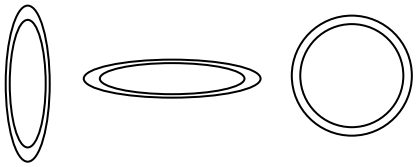
答：根据互感的定义$M=\phi_{12}/I_1$，要使两个线圈的M最大，就要使一个线圈通以一定的电

流Ⅰ$_1$时，在另一个线圈中产生的磁通量尽可能大。为达此目的，应当将两个线圈互相重迭地绕在一起，从而使每个线圈通电时产生的B线尽可能多地穿过另一个线圈。

2、　有两个相隔距离不太远的线圈，如何放置可使其互感系数为零？

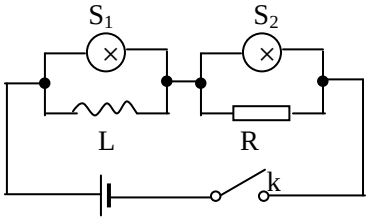
答：与上题同理。将两线圈轴线互相垂直放置时互感系数为零。

3、　三个线圈中心在一条直线上，相隔的距离都不太远，如何放置可使它们两两之间的互感系数为零？



答：可使三个线圈的轴线彼此垂直，同时它们的中心在一条直线上。当每个线圈通电时，其磁力线都不穿过另一个线圈。两两之间的互感系数为零。

4、　在附图所示的电路中，S$_1$、S$_2$是两个相同的小灯泡，L是一个自感系数相当大的线圈，其电阻数值与电阻R相同。由于存在自感现象，试推想开关K接通和断开时，灯泡S$_1$、S$_2$先后亮暗的顺序如何？



解：（1）开关K接通时，两个灯泡同时有电流通过，但S$_1$先达到最亮，S$_2$后达到最亮。因为通过S$_1$的电流分成两部分，一部分通过S$_2$，一部分通过R，在它流过的线路中，没有自感线圈，不受自感电动势的阻碍作用，通电后立即达到最大值。而通过L的电流，由于自感的阻碍作用是逐渐增加的，它也分成两部分，一部分通过S$_2$，一部分通过R。即通过S$_2$和R的电流也是逐渐增加的，通电后不会立刻达到最大值，必须经过一段时间，通过L的电流稳定后，灯泡S$_2$的电流才达到最亮。稳定时，两灯泡亮度相同。

（2）开关K断开时，S$_2$先暗，S$_1$后暗。断开电源后，通过L的电流不能立即消失，在自感电动势的推动下，从原来通过L的电流开始，按指数规律逐渐衰减。此断路时的暂态电流，要通过与L构成闭合回路S$_1$而不会通过S$_2$。因此，断路瞬间，无自感电流通过的S$_2$先暗，有自感电流通过的S$_1$后暗。

5、　一个线圈的自感系数的大小决定哪些因素？

答：线圈自感系数的大小取决于线圈的匝数、几何尺寸和介质的磁导率。

6、　用金属丝绕制的标准电阻要求是无自感的，怎样绕制自感系数为零的线圈？

答：双线紧靠在一起，反方向并排绕制，彼此产生的磁通量互相抵消，自感系数为零。

－－

习题：

1、　一螺绕环横截面积的半径为a，中心线的半径为R，R>>a，其上由表面互相绝缘

的导线均匀地密绕两个线圈，一个N_1匝，另一个N_2匝，求两线圈的互感M。

解：设N_1线圈中通有电流I_1，在N_2线圈中产生的磁链为

$$\Psi_{21}=N_2B_1S=\frac{\mu_0N_1N_2a^2}{2R}I_1\rightarrow M=\frac{\Psi_{21}}{I_1}=\frac{\mu_0N_1N_2a^2}{2R}$$

2、 一圆形线圈由 50 匝表面绝缘的细导线绕成，圆面积为$S=4.0cm^2$,放在另一个半径$R=20cm$ 的大圆形线圈中心，两者共轴，如图所示。大圆形线圈由 100 匝表面绝缘的导线绕成。

（1） 求这两线圈的互感M；

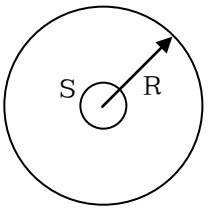
（2） 当大线圈导线中的电流每秒减少 50A时，求小线圈中的感应电动势。

解：（1）设大线圈的电流为I，在中心产生的磁感强度B的方向沿轴线，

大小为$B=\frac{\mu_0NI}{4\pi}\oint\frac{dl}{R^2}=\frac{\mu_0NI}{4\pi}\frac{2\pi R}{R^2}=\frac{\mu_0NI}{2R}$

因小线圈的半径远小于大线圈半径，故在小线圈的平面内，磁场可看作是近似均匀的。通过小线圈的磁链为

$$\Psi_{21}=nBS=n\frac{\mu_0NI}{2R}S$$



所求互感为 $M=\frac{\Psi_{21}}{I}=\frac{\mu_0nNS}{2R}=6.3\times10^{-6}(H)$

（2）小线圈中的感应电动势为 $\varepsilon=-M\frac{dI}{dt}=3.1\times10^{-4}(V)$

3、 如图所示，一矩形线圈长 a=20cm,宽 b=10cm，由 100 匝表面绝缘的导线绕成，放在一很长的直导线旁边并与之共面，这长直导线是一个闭合回路的一部分，其他部分离线圈都很远，影响可略去不计。求图中 a 和 b 两种情况下，线圈与长直导线之间的互感。

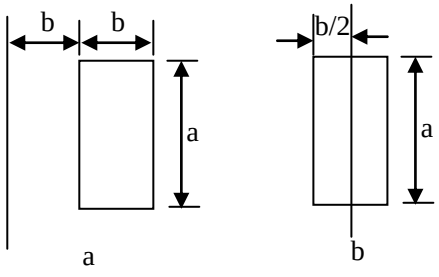
解：在图（a）中，设导线载有电流I，由对称性和安培环路定理，

可得到离它为r处的磁感强度为 $B=\frac{\mu_0I}{2\pi r}$

通过矩形线圈磁链为

$$\Psi=N\Phi=\frac{\mu_0NIa}{2\pi}\int_0^{2b}\frac{dr}{r}=\frac{\mu_0NIa}{2\pi}\ln 2$$

所求互感为

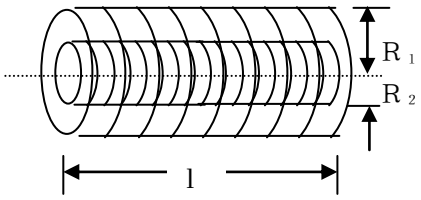


$$M=\frac{\Psi}{I}=\frac{\mu_0 Na}{2\pi}\ln 2=2.8\times10^{-6}(H)$$

在图（b）中，

因矩形线圈的两半对于载流导线对称，经过两半相应处的磁感强度B大小相等而方向相反，所以通过线圈的磁通量为零，磁链亦为零。M＝0 。

4、 如图所示，两长螺线管共轴，半径分别为R_1和R_2（$R_1>R_2$），长度为 l(l<<R_1和R_2)，匝数分别为N_1和N_2。求互感系数M_{12}和M_{21}，由此验证$M_{12}=M_{21}$。



解：略去边缘效应，当里面螺线管载有电流I_2时

$$B_2=\frac{\mu_0 N_2 I_2}{l}$$

通过外面螺线管的磁链为 $\Psi_{21}=N_1B_2S_2=\frac{\mu_0 N_1N_2I_2}{l}\pi R_2^2$

由互感系数的定义 $M_{21}=\frac{\Psi_{21}}{I_2}=\frac{\mu_0 N_1N_2}{l}\pi R_2^2$

同理，当外面螺线管载有电流I_1时，$B_1=\frac{\mu_0 N_1 I_1}{l}$，

通过里面螺线管的磁链为 $\Psi_{12}=N_2B_1S_1=\frac{\mu_0 N_1N_2I_1}{l}\pi R_2^2\rightarrow M_{12}=\frac{\Psi_{12}}{I_1}=\frac{\mu_0 N_1N_2}{l}\pi R_2^2$

即：$M_{12}=M_{21}$

5、 在长 60cm，直径 5.0cm 的空心纸筒上绕多少匝导线，才能得到自感为 6.0×10^{-3}H 的线圈？

解：由长螺线管的自感公式 $L=\mu_0 n^2V=\mu_0\left(\frac{N}{l}\right)^2V=\mu_0\frac{N^2S}{l}$

$$N=\sqrt{\frac{lL}{\mu_0 S}}L=1.2\times10^3(\text{匝})$$

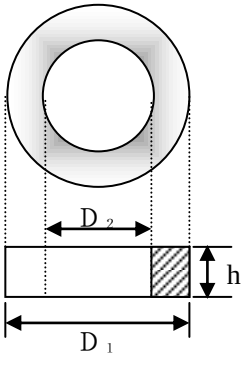
6、 矩形截面螺绕环的尺寸如图所示，总匝数为N。

（1） 求它的自感系数；

（2） 当N=1000 匝，D_1=20cm,D_2=10cm,h=1.0cm 时，自感为多少？

解：（1）以环的中心为圆心，在环内作一圆形安培环路，由对称性和安培环路定理可得

$$B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$



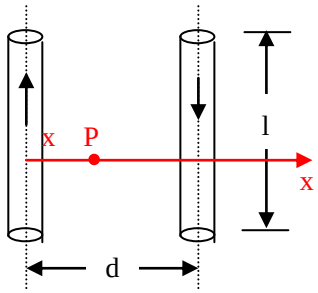
磁通量为 $\Phi=\int BdS=\int_{D_2/2}^{D_1/2}\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}hdr=\frac{\mu_0 NhI}{2\pi}\ln\frac{D_1}{D_2}$

自感系数为 $L=\frac{N\Phi}{I}=\frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{D_1}{D_2}$

（2）代入数据得 $L=\frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{D_1}{D_2}=1.4\times10^{-3}(H)$

7、 两根平行导线，横截面的半径都是 a ,中心相距为 d，载有大小相等方向相反的电流。设 d>>a ,且两导线内部的磁通量都可以略去不计。证明这样一对导线 p 长为 l 的一段自感为 $L=\frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d}{a}$。

解：取坐标如图所示，设 P 点为两导线之间的任意一点，



两导线电流在 P 点产生的磁感强度为

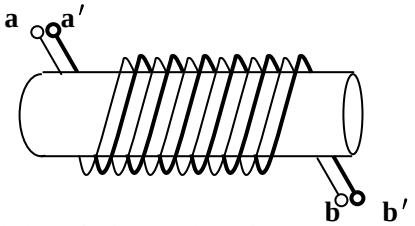
$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}+\frac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)}$$

通过两导线之间宽为 d－2a，长为 l 的面积的磁通量为

$$\Phi=\int BdS=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\int_a^{d-a}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right)dx=\frac{\mu_0 Il}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}\approx\frac{\mu_0 Il}{\pi}\ln\frac{d}{a}(d>>a)$$

所求自感为 $L=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d}{a}$

8、 在一纸筒上绕有两个相同的线圈 ab 和 a′ b′ ，每个线圈的自感都是 0.050H，如图所示，求：



（1）a 和 a′ 相接时，b 和 b′ 间的自感 L；

（2）a′ 和 b 相接时，a 和 b′ 间的自感 L.

解：设两线圈都可以看作是密绕的长螺线管，略去边缘效应，则其中一个线圈载有电流 I 时，

内部的磁感强度为 $B=\frac{\mu_0 N}{l}I$，

磁链为 $\Psi=N\Phi=NBS=\mu_0\frac{N^2}{l}SI$，

其自感为 $L=\frac{N\Phi}{I}=\frac{\mu_0 N^2 S}{l}=0.050(H)$

（1）a 和 a′ 相接时，两线圈中的电流大小相等而方向相反，线圈内 B＝0， L＝0

（２）a′ 和 b 相接时，两线圈中的电流大小相等而方向相同，自感等于匝数为２Ｎ的线圈的自感，$L'=\dfrac{\mu_0(2N)^2S}{l}=4L_0=0.20(H)$

解法２：两线圈相同且绕在一起，　$L_1=L_2=M=0.050(H)$

（１） 两线圈反串联，所求自感为　$L=L_1+L_2-2M=0$

（２） 两线圈顺串联，所求自感为　$L=L_1+L_2+2M=0.20(H)$

９、　两线圈的自感分别为 L_1=5.0mH,L_2=3.0mH,当它们顺接串联时，总自感为 L=11.0mH.

（１） 求它们之间的互感；

（２） 设这两线圈的形状和位置都不改变，只把它们反接串联，求反接后的总自感。

解：（１）两线圈顺接串联时，$L=L_1+L_2+2M\rightarrow M=\dfrac{1}{2}\left(L-L_1-L_2\right)=1.5\times10^{-3}(H)$

（２）两线圈反接串联时，$L=L_1+L_2-2M=5.0\times10^{-3}(H)$

１０、　两线圈顺接后总自感为 1.00H，在它们的形状和位置都不变的情况下，反接后的总自感为 0.40H。求它们之间的互感。

解：两线圈顺接串联时，$L=L_1+L_2+2M=1.00(H)$

两线圈反接串联时，$L=L_1+L_2-2M=0.40(H)$　　所以 $M=\dfrac{1}{4}(1.00-0.40)=0.15(H)$

１１、　两根足够长的平行导线间的距离为 20cm，在导线中保持一强度为 20A 而方向相反的恒定电流。

（１） 求两导线间每单位长度的自感系数，设导线半径为 1.0mm；

（２） 若将导线分开到相距 40cm，磁场对导线单位长度能做的功？

（３） 位移时，单位长度的磁能改变了多少？是增加还是减少？说明能量的来源。

解：（１）$L=\dfrac{\Phi}{I}=\dfrac{\mu_0 l}{\pi}\ln\dfrac{d}{a}=2.1\times10^{-6}(H/m)$

（２）单位长度的导线所受到的安培力为　$f=\dfrac{IlB}{l}=IB=I\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}=\dfrac{\mu_0 I^2}{2\pi r}$（斥力）

移动过程中磁场所作做的功 $A=\int_{r_1}^{r_2}\dfrac{\mu_0 I^2}{2\pi r}dr=\dfrac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln 2=5.5\times10^{-5}(J/m)$

（４） 两导线单位长度的磁能的增量为

$$\Delta W=\frac{1}{2}L_2I^2-\frac{1}{2}L_2I^2=\frac{1}{2}I^2\left[\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{2d}{a}-\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a}\right]=\frac{\mu_0I^2}{2\pi}\ln 2$$ 增加，

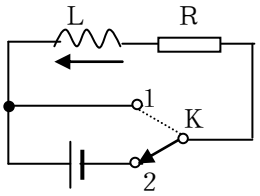
从以上计算可知，在拉开过程中，磁场对载流导线的安培力作了正功，同时磁场能量又增加了相同的量。因此在拉开过程中，电源不仅提供了消耗于焦耳热的能量，而且提供了使磁场能量增加的额外能量。（若所接电源的电动势是稳恒的，不可能提供稳恒电流；若要维持稳恒电流，电源电动势必须是可调的。）

---

§5.4 暂态过程

思考题：

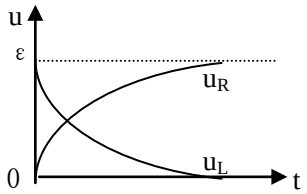
1、 写出图 5-28 所示的L R电路在接通电源和短路两种情况下电感以及电阻上的电位差 u_L 和 u_R 的表达式，并定性绘出 u_L 和 u_R 的时间变化曲线。



答：（1）接通电源时，$L\frac{di}{dt}+iR=\varepsilon$ $i=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$

$$u_L=L\frac{di}{dt}=-L\frac{\varepsilon}{R}\left(-\frac{R}{L}\right)e^{-\frac{R}{L}t}=\varepsilon e^{-\frac{R}{L}t}$$

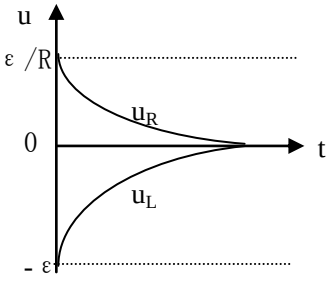
$$u_R=iR=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})R=\varepsilon(1-e^{-\frac{R}{L}t})$$



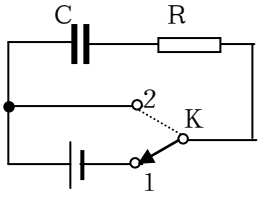
（2）短路时，$L\frac{di}{dt}+iR=0$ $i=\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$

$$u_L=L\frac{di}{dt}=L\frac{\varepsilon}{R}\left(-\frac{R}{L}\right)e^{-\frac{R}{L}t}=-\varepsilon e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$u_R=iR=\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$



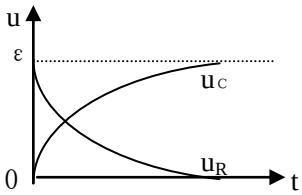
2、 写出图 5-30 所示的RC 电路在充电和放电两种情况下电路中的电流Ⅰ、电容以及电阻上的电位差 u_C和 u_R 的表达式，并定性绘出 u_C和 u_R 的时间变化曲线。



解：（1）充电时，$\frac{q}{C}+iR=\varepsilon$ $q=C\varepsilon(1-e^{-\frac{1}{RC}t})$

$$i=\frac{dq}{dt}=-C\varepsilon\left(-\frac{1}{RC}\right)e^{-\frac{1}{RC}t}=\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$u_C=\frac{q}{C}=\varepsilon(1-e^{-\frac{1}{RC}t})$$



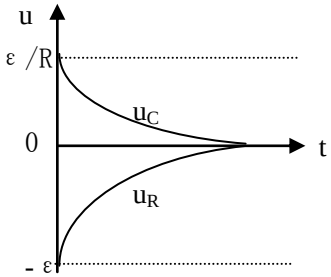
$$u_R = iR = \varepsilon e^{-\frac{1}{RC}t}$$

（2）放电时，$\frac{q}{C} + iR = 0 \quad q = C\varepsilon e^{-\frac{1}{RC}t}$

$$i = \frac{dq}{dt} = C\varepsilon\left(-\frac{1}{RC}\right)e^{-\frac{1}{RC}t} = -\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$u_C = \frac{q}{C} = \varepsilon e^{-\frac{1}{RC}t}$$

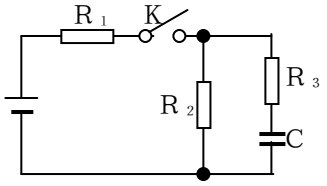
$$u_R = iR = -\varepsilon e^{-\frac{1}{RC}t}$$



3、 附图所示电路的三个电阻相等，令 i_1、i_2 和 i_3 分别为 R_1、R_2 和 R_3 上的电流，u_1、u_2、u_3 和 u_C 为该三个电阻与电容上的电位差。

（1） 试定性地绘出开关K接通后，上列各量随时间变化的曲线；

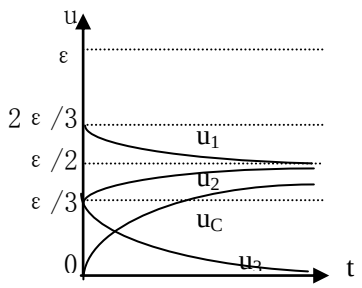
（2） K接通较长时间后把开关K断开，试定性绘出开关断开后，上列各量随时间变化的曲线。

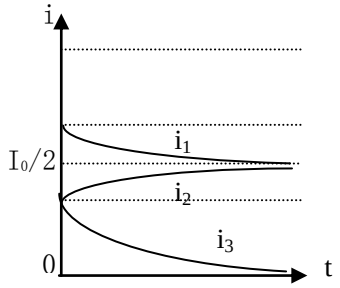


解：（1）开关K接通后，对C充电通过 R_3 的电流 i_3 按指数规律衰减，相应地 $u_3=i_3R_3$ 也按指数规律衰减。当C充电达到最大值时，i_3 减为零，u_3 也为零。随着充电过程的进行，电容器极板上电荷增多，u_C 也越来越高，从0开始，按指数规律增加，它所达到的稳定值，比 u_3 的初始值更大。因为初始时，$u_C=0$，$u_3=u_2$；稳定时，$u_3=0$，$u_C=u_2$。而并联部分两端的电压 u_2 是在不断增加的。所以稳定时的 u_C 大于初始时的 u_3。

对于 R_2，开始时通过它的电流，是由 R_2 和 R_3 组成的并联电路两端的电压决定。随着 i_3 的衰减，相当于并联电阻升高，u_2 和 i_2 也相应升高。稳定时，电容器分路上 $i_3=0$，u_2 和 i_2 仅取决于 R_1 和 R_2 的串联电路。

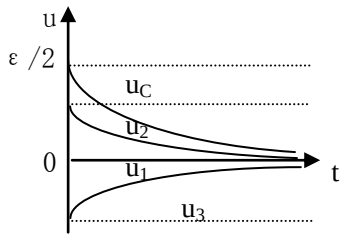
R_1 的电压 u_1 是电源电动势和并联部分电压 u_2 之差，u_2 逐渐增加，u_1 必逐渐减少，相应地 i_1 也逐渐减少。稳定时 $i_1=i_2$。图示如下：

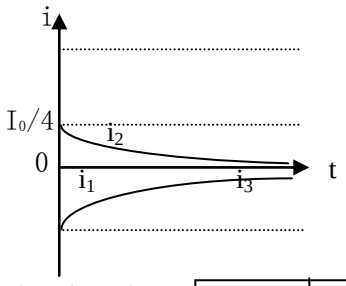




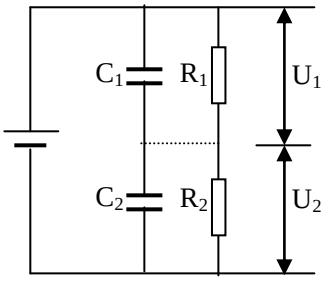
（3） 开关K断开时，R_2 和 R_3 组成的回路中，有电容放电的暂态电流

$i=-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{R_2+R_3}e^{-\frac{t}{(R_2+R_3)U}}=-\frac{1}{4}I_0e^{-\frac{t}{2RC}}$ 通过，相应的电压也按指数规律衰减，只是 R_3 上的电流和电压与通电时方向相反。图示如下：





4、 两个理想电容器C_1、C_2串联起来接在电源上，电压分配U_1：U_2＝C_2：C_1。但实际电容都有一定的漏阻，漏阻相当于并联在理想电容器C_1、C_2上的电阻R_1、R_2，漏阻趋于无穷时，电容器趋于理想电容。将两个实际电容接在电源上，根据稳恒条件，电压分配应为U_1：U_2＝R_1：R_2。设C_1：C_2＝R_1：R_2＝1：2。并设想R_1和R_2按此比例趋于无穷。问这时电压分配U_1：U_2＝？一种说法认为这时两电容都是理想的，故U_1：U_2＝C_2：C_1＝2：1；另一种说法认为电压的分配只与R_1和R_2的比值有关，而这比值未变，故当$R_1\to\infty$，$R_2\to\infty$时，电压分配仍为U_1：U_2＝R_1：R_2＝1：2。两种说法有矛盾，问题出在哪里？如果实际去测量的话，将看到什么结果？



答：问题应具体分析。

开始时，电压按电容分配的说法U_1：U_2＝C_2：C_1＝2：1是正确的。因为在电源和C_1、C_2构成的回路中，R≈0，充电常数τ=RC≈0。即开关一接通，充电过程就完成了。由于静电感应和电荷守恒，各极板上的电量是相等的。$u_1=Q/C_1$, $u_2=Q/C_2$,所以U_1：U_2＝C_2：C_1＝2：1。而此时电压按电阻分配的说法是不对的。因为U_1：U_2＝R_1：R_2是在稳恒条件下，或是在通过R_1和R_2的电流相同的条件下才成立的。而在题设情况下，通过R_1和R_2的电流是不相同的。通过R_1的电流，是在 C_1 充以电压 u_1 时，R_1C_1 回路中的放电电流；而通过 R_2 的电流，是 C_2 充以电压 u_2 时，C_2R_2 回路的放电电流。在电源接通时，C_1 和 C_2 两端的电压立即达到 u_1 和 u_2，由于R_1和R_2两端的电压与 C_1 和 C_2 两端的电压相同，$I_1=u_1/R_1$, $I_2=u_2/R_2$,→$I_1/I_2=4/1$.电流不相同，电压不应按电阻大小成正比分配。

由于 $I_1>I_2$,随着时间的推移，在两个电容器（或两个电阻）之间，将会堆积正电荷，将导致 C_1 两极板间的电压 u_1 降低，同时 C_2 两极板间的电压 u_2 升高，而 u_1 降低使 I_1 减少，u_2 升高使 I_2 增大，直到 $I_1=I_2$，电荷堆积不再继续增加，这个过程才会稳定下来。这时由于通过 R_1 和 R_2 的电流相等，电压分配将由电阻大小决定。而中间的任何时刻，

电压分配既不完全按电容分配，也不完全按电阻分配，而是介于两者之间。

由题意可知，R_1 和 R_2 都是趋于无穷大，因此 I_1 和 I_2 都趋于 0,两电容器之间电荷堆积的过程无限缓慢，而且 I_1 和 I_2 越接近时，堆积过程越慢。实际上，要达到 $I_1=I_2$ 需要一个无限长的时间。所以在通常情况下，电压分配更接近于由电容决定。

如果 R_1 和 R_2 较小，上述过程较短。开始，电压按电容分配，然后将经历一个既不按电容，又不按电阻分配的过程，比较迅速地过渡到按电阻分配。

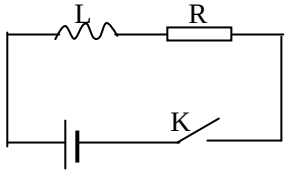
习题：

1、 证明L / R和RC具有时间的量纲式，并且1亨 / 1欧＝1秒，1欧・1法＝1秒。

解：$\varepsilon = -L\dfrac{di}{dt} \rightarrow L = \dfrac{\varepsilon}{di/dt}$　　$\left[\dfrac{L}{R}\right] = \dfrac{[L]}{[R]} = \dfrac{[U/IT^{-1}]}{[R]} = [T]$　　1 亨 / 1 欧＝1 秒

$C = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{it}{U} = \dfrac{it}{iR}$　　$[RC] = [R]\dfrac{[IT]}{[IR]} = [T]$　　1 欧・1 法＝1 秒

2、 一个线圈的自感L=3.0H，电阻R＝6.0Ω,接在 12V 的电源上，电源的内阻略去不计，求：



（1） 刚接通时的 di/dt;

（2） 接通 t=0.20s 时的 di/dt;

（3） 电流 I=1.0A 时的 di/dt。

解：在RL串联电路中，电路方程为　　$L\dfrac{di}{dt} + iR = \varepsilon$

电流变化规律为　　$i = \dfrac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$，

电流对时间的变化率为　　$\dfrac{di}{dt} = -\dfrac{\varepsilon}{R}(-\dfrac{R}{L})e^{-\frac{R}{L}t} = \dfrac{\varepsilon}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$

（1） 刚接通时，$\left.\dfrac{di}{dt} = \dfrac{\varepsilon}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\right|_{t=0} = \dfrac{\varepsilon}{L} = 4.0A/s$

（2） 接通 t=0.20s 时，$\left.\dfrac{di}{dt} = \dfrac{\varepsilon}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\right|_{t=02} = 2.7A/s$

（３） 电流 I=1.0A 时，$\frac{di}{dt}=\frac{\varepsilon}{L}-\frac{R}{L}i=2.0A/s$

3、 在上题中，（１）当电流为 0.50A 时，供给线圈的功率是多少？这时线圈上产生的热功率是多少？线圈的磁能增加率是多少？（２）当电流达到稳定值时，有多少能量储于线圈中？

解：（１）电流为 0.50A 时，供给线圈的功率为 $P=\varepsilon i=6.0(W)$

线圈上产生的热功率为 $P_R=i^2R=1.5(W)$

线圈的磁能增加率为 $P_L=\varepsilon_L i=L\frac{di}{dt}i=4.5(W)$

（２）电流达到稳定值时，$W_m=\frac{1}{2}LI^2=6.0(J)$

4、 一个自感为 0.50mH、电阻为 0.10Ω的线圈联接到内阻可以忽略、电动势为 12V 的电源上。开关接通多长时间，电流达到终值的 90%？此时，线圈中储存了多少焦耳的能量？到此时，电源消耗了多少能量？

解：电路中电流的变化规律为 $i=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$，当$i=0.9\frac{\varepsilon}{R}$时，$e^{-\frac{R}{L}t}=0.1$

解得 $t=0.12s$

此时线圈中储存的能量为 $W_m=\frac{1}{2}Li^2=2.9\times10^2(J)$

5、 一线圈的自感 L=5.0H，电阻 R=20Ω，把 U=100V 的不变电压加到它的两端。

（１） 求电流达到最大值Ｉ₀＝Ｕ／Ｒ时，线圈所储存的能量；

（２） 从Ｕ开始加上起，经过多长时间，线圈所储存的磁能达到Ｗｍ／２？

解： （１）电流达到最大值时， $I_0=\frac{U}{R}=5A$， $W_m=\frac{1}{2}LI_0^2=62.5(J)$

（２）$w=\frac{W_m}{2}$时，$i=\sqrt{\frac{2w}{L}}=\sqrt{\frac{W_m}{L}}=\frac{I_0}{\sqrt{2}}=I_0(1-e^{-\frac{R}{L}t})$

解得 $t=0.31s$

6、 一线圈的自感 L=3.0H，电阻 R=10Ω，把 U=3.0V 的不变电压加到它的两端。在电压加上 0.30 秒后，求：

（１） 此时线圈中的电流Ｉ；

（２） 电源供给的功率；

（３） Ｒ消耗的焦耳热功率；

（４） 磁场能量的增加率。这时能量是否守恒？

解：（１）线圈中的电流Ｉ为 $i=\frac{U}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})=0.19(A)$

（２）电源供给的功率为 $P=Ui=0.57(W)$

（３）Ｒ消耗的焦耳热功率为 $P_R=i^2R=0.36(W)$

（４）磁场能量的增加率为 $P_L=P-P_R=0.21(W)$

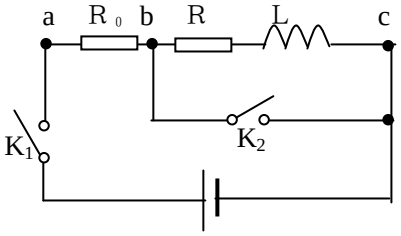
此时能量守恒。电源供给能量＝Ｒ消耗焦耳热＋磁场能量的增加。

７、 爱莫能助 44 一自感为Ｌ，电阻为Ｒ的线圈与一无自感的电阻Ｒ$_0$串联地接于电源上，如图所示。

（１） 求开关Ｋ$_1$闭合 t 时间后，线圈两端的电位差Ｕbc;

（２） 若 ε =20V，R_0=50Ω， R=150Ω，L=5.0H，求 t=0.5τ 时线圈两端的电位差Ubc 和Uab;

（３） 待电路中电流达到稳定值，闭合开关Ｋ２，求闭合 0.01s 后，通过Ｋ$_2$中的电流的大小和方向。



解：（１）Ｋ$_2$断开情况下，接通Ｋ$_1$，电路中的电流为 $i=\frac{\varepsilon}{R_0+R}(1-e^{-\frac{R_0+R}{L}t})$

线圈两端的电位差为 $U_{bc}=\varepsilon-iR_0=\frac{\varepsilon}{R_0+R}(R+R_0e^{-\frac{R_0+R}{L}t})$

（２）$U_{bc}=\varepsilon-iR_0=\frac{\varepsilon}{R_0+R}(R+R_0e^{-\frac{R_0+R}{L}t})=18(V)$ $\quad U_{ab}=iR_0=2.0(V)$

（３）稳定后闭合Ｋ$_2$。通过Ｋ$_2$的电流为 $i=\frac{\varepsilon}{R_0}+\frac{\varepsilon}{R+R_0}e^{-\frac{R}{L}t}=0.33(A)$

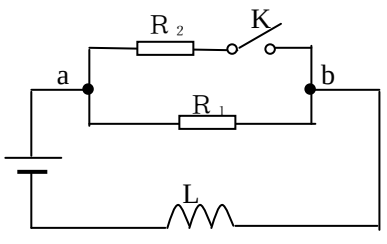
方向为由 b→c.

８、 一电路如图所示，Ｒ$_1$、Ｒ$_2$、Ｌ和 ε 都已知，电源和线圈Ｌ的内阻略去不计。

（１） 求Ｋ接通后，a、b 间的电压与时间的关系；

（２） 在电流达到最后稳定值的情况下，求Ｋ断开后 a、b 间的电压与时间的关系。

解：（１）Ｋ接通后，电路的电阻由Ｒ突变为 $\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$，



电路方程为 $\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}i+\varepsilon_L-\varepsilon=0$

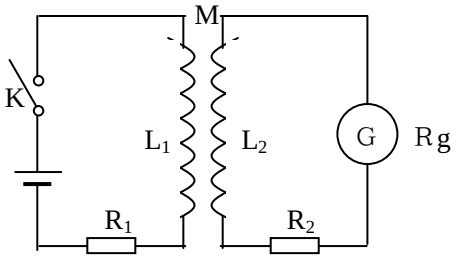
解得电流为 $i=\frac{(R_1+R_2)\varepsilon}{R_1R_2}\left[1-\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}e^{-\frac{R_1R_2t}{(R_1+R_2)L}}\right]$

a、b 间的电压与时间的关系为$U_{ab}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}i=\varepsilon\left[1-\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}e^{-\frac{R_1R_2t}{(R_1+R_2)L}}\right]$

（２）电流达到稳定时断开Ｋ，电路方程为 $R_1i-\varepsilon_L-\varepsilon=0$

解得电流为 $i=\frac{\varepsilon}{R_1}\left[1+\frac{R_1}{R_2}e^{-\frac{R_1t}{L}}\right]$ $U_{ab}=iR_1=\varepsilon\left[1+\frac{R_1}{R_2}e^{-\frac{R_1t}{L}}\right]$

９、 两线圈之间的互感为Ｍ，电阻分别为Ｒ１和Ｒ２，第一个线圈接在电动势为ε的电源上，第二个线圈接在电阻为Ｒg的电流计Ｇ上，如图所示。设开关Ｋ原来是接通的，第二个线圈内无电流，然后把Ｋ断开。



（１） 求通过Ｇ的电量 q;

（２） q 与两线圈的自感有什么关系？

解：（１）Ｋ断开时，第二个线圈中的电动势为

$$\varepsilon_2=-L\frac{dI_2}{dt}-M\frac{dI_1}{dt}$$

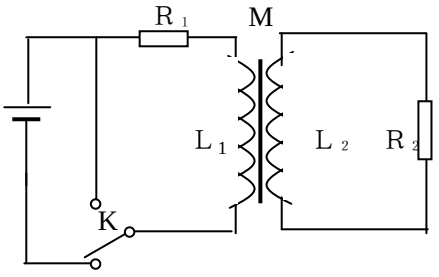
$$\frac{dQ}{dt}=I_2=\frac{\varepsilon_2}{R_2+R_g}=-\frac{L}{R_2+R_g}\frac{dI_2}{dt}-\frac{M}{R_2+R_g}\frac{dI_1}{dt}$$

$$dQ=-\frac{L}{R_2+R_g}dI_2-\frac{M}{R_2+R_g}dI_1$$

积分得 $Q=-\frac{L}{R_2+R_g}\int_0^{\infty}dI_2-\frac{M}{R_2+R_g}\int_{\varepsilon/R_1}^{\infty}dI_1=\frac{M\varepsilon}{(R_2+R_g)R_1}$

（２）Ｑ与两线圈的自感无直接关系。

１０、 图示为一对互感耦合的ＬＲ电路。证明在无漏磁的条件下，两回路充放电的时间常数都是 $\tau=\frac{L_1}{R_1}+\frac{L_2}{R_2}$。



解： （１）充电时，电路方程为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon-L_1\frac{dI_1}{dt}-M\frac{dI_2}{dt}=I_1R_1\\-L_2\frac{dI_2}{dt}-M\frac{dI_1}{dt}=I_2R_2\end{aligned}\right\}\frac{dI_2}{dt}=-\frac{R_2}{L_2}I_2-\frac{M}{L_2}\frac{dI_1}{dt}$$

$$\left(L_1L_2-M^2\right)\frac{dI_1}{dt}+L_2R_1I_1-MI_2R_2=\varepsilon L_2$$

无漏磁即 $M=\sqrt{L_1L_2}$ $\qquad L_2R_1I_1-MI_2R_2=\varepsilon L_2\rightarrow I_2=\dfrac{L_2R_1I_1-L_2}{MR_2}$

对时间求导 $\dfrac{dI_2}{dt}=\dfrac{L_2R_1}{MR_2}\dfrac{dI_1}{dt}$ $\qquad \left(L_1+\dfrac{L_2R_1}{R_2}\right)\dfrac{dI_1}{dt}+I_1R_1=\varepsilon$

利用初始条件 $t=0$ 时 $I_1=0$

解得 $\quad I_1=\dfrac{\varepsilon}{R_1}\left(1-e^{-\frac{R_1R}{L_1R_2+L_2R_1}t}\right)$ $\qquad I_2=-\dfrac{L_2\varepsilon}{MR_2}e^{-\frac{R_1R}{L_1R_2+L_2R_1}t}$

即充电时的时间常数为 $\tau=\dfrac{L_1R_2+L_2R_1}{R_1R_2}=\dfrac{L_1}{R_1}+\dfrac{L_2}{R_2}$

（2） 放电时，电路方程为

$$\left.\begin{aligned}-L_1\frac{dI_1}{dt}-M\frac{dI_2}{dt}&=I_1R_1\\-L_2\frac{dI_2}{dt}-M\frac{dI_1}{dt}&=I_2R_2\end{aligned}\right\}\frac{dI_2}{dt}=-\frac{R_2}{L_2}I_2-\frac{M}{L_2}\frac{dI_1}{dt}$$

同理有 $\left(L_1+\dfrac{L_2R_1}{R_2}\right)\dfrac{dI_1}{dt}+I_1R_1=0$，利用初始条件 $t=0$ 时 $I_1=\dfrac{\varepsilon}{R_1}$

解得 $\quad I_1=-\dfrac{\varepsilon}{R_1}e^{-\frac{R_1R}{L_1R_2+L_2R_1}t}$ $\qquad I_2=-\dfrac{L_2\varepsilon}{MR_2}e^{-\frac{R_1R}{L_1R_2+L_2R_1}t}$

即放电时的时间常数也为 $\tau=\dfrac{L_1R_2+L_2R_1}{R_1R_2}=\dfrac{L_1}{R_1}+\dfrac{L_2}{R_2}$

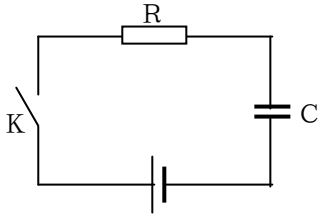
11、 当电感元件的铁芯中有涡流时，为什么由此组成的L R电路充电的时间常数要增大?

解：电感元件的时间常数由其自感系数 L 和电阻 R 的比值确定。

12、 $3.00\times10^6\,\Omega$ 的电阻与 1.00μF 的电容与 ε=4.00V 的电源连接成单回路。试求在电路接通后 1.00s 的时刻，下列各量的变化率：

（1） 电容上电荷增加的速率；

（2） 电容器内储存能量的速率；



（3） 电阻上发生的热功率；

（4） 电源提供的功率。

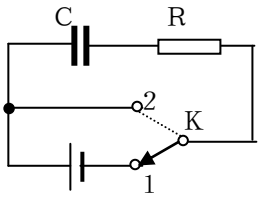
解： （1） $\tau = RC = 3s$ $q = C\varepsilon(1-e^{-\frac{t}{RC}}) \to I = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = 9.55\times10^{-7}(C/s)$

（2）电容器内储存能量的速率 $W_m = \frac{q^2}{2C} \to \frac{dW_m}{dt} = \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = 1.08\times10^{-6}(W)$

（3）电阻上发生的热功率 $P = I^2R = \frac{\varepsilon^2}{R}e^{-\frac{2t}{RC}} = 2.74\times10^{-6}(W)$

（4）电源提供的功率 $P' = \varepsilon I = \frac{\varepsilon^2}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = 3.82\times10^{-6}(W)$

13、 在图 5-30 中开关先接 1 对电容器充电到稳定值，将开关拨向 2 。



（1） 问经过几倍 τ 的时间之后，电容器所储存能量减为一半？

（2） 证明电容器所储存的能量完全转化为电阻上消耗的焦耳热。

解： （1）充电完毕时，电容器储存能量为

$$W_m = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}C\varepsilon^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}|_{t=0} = \frac{1}{2}C\varepsilon^2$$

$W_m' = \frac{W_m}{2}$ 时， 解得 $t = 0.35\tau$

（2） $q = C\varepsilon e^{-\frac{t}{RC}} \to I = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$ 电阻上消耗的焦耳热功率为

$Q = I^2R = \frac{\varepsilon^2}{R}e^{-\frac{2t}{RC}} = \frac{dW_m}{dt}$ 等于电容器储存能量的减少率。

即：电容器所储存的能量完全转化为电阻上消耗的焦耳热

14、 在Ｌ Ｃ振荡回路中，设开始时Ｃ上的电量为Ｑ，Ｌ中的电流为 0。

（1） 求第一次达到Ｌ中磁能等于Ｃ中电能所需的时间 t;

（2） 求这时Ｃ上的电量 q.

解：（1）接通Ｋ后，电路方程为 $-\varepsilon_L - U_C = L\frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0$

因为 $I = -\frac{dQ}{dt}$（放电）， 得 $L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0$

利用初始条件 $t = 0$时 $I = 0$ $Q = Q_0$

解得 $$Q = Q_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \rightarrow I = \frac{Q_0}{\sqrt{LC}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

能量相等 $$\frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \rightarrow \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) = \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

所需时间为 $$t = \frac{\pi}{4}\sqrt{LC}$$

（２）所求时刻，C上的电量为

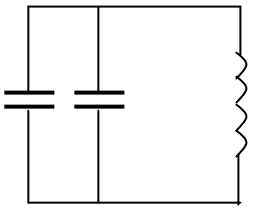
$$Q = Q_0 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}Q_0$$

１５、 两个C=2.0μF的电容器已充有相同的电量，经过一线圈（L=1.0mH,R=50Ω）放电。问当这两个电容器

（１） 并联时；

（２） 串联时，能不能发生振荡？

解：（１）两个电容器并联时，

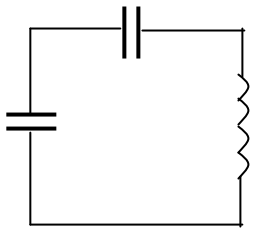


$$C = C_1 + C_2 = 4.0\mu F$$

$$\lambda = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = 1.58 > 1$$

过阻尼情形，不能振荡。

（２）两个电容器串联时，



$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 1.0\mu F$$

$$\lambda = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = 0.79 < 1$$

可以发生阻尼振荡。

第五章　　结　　束