# 电磁理论前沿探索札记

梁昌洪　陈　曦　著

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

# 电磁理论前沿探索札记

梁昌洪　陈　曦　著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

## 内 容 简 介

本书是作者几十年教学实践所总结出的18篇电磁理论系列札记，加上1篇思考和1篇札记教学，共计20篇。

全书内容涵盖广泛，从静电场自作用能、广义电磁惯性到电磁对称，从提出问题、讨论问题到最后提升为电磁理论之美。书中突出了电磁理论的思想、概念、方法和工程应用。

札记代表作者和广大电磁工作者一种平等、推心置腹的交流，坦诚地表白作者遇到的难点、疑点，并对电磁理论的发展提出基本看法；

札记又是作者向广大青年教师坦露的学习体会与教训，其中答问录更是直言心声，互动交底；

札记更是广大研究生、本专科学生的一本很好的学习参考和示范书。

本书适合作为高等学校电子信息、通信专业的广大教师、研究生和本专科学生的教学参考书，也可供工程技术人员参考。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有，侵权必究。

**图书在版编目（CIP）数据**

电磁理论前沿探索札记/梁昌洪，陈曦著. —北京：电子工业出版社，2012.7
ISBN 978-7-121-17705-7

Ⅰ. ①电… Ⅱ. ①梁… ②陈… Ⅲ ①电磁理论－文集 Ⅳ. ①O441-53

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第168081号

策划编辑：王春宁
责任编辑：曲 昕
印 刷：涿州市京南印刷厂
装 订：
出版发行：电子工业出版社
北京市海淀区万寿路173信箱 邮编 100036
开 本：787×980 1/16 印张：20.5 字数：400千字
印 次：2012年7月第1次印刷
定 价：78.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

# 中国科学院院士黄宏嘉为本书题诗

电磁理论　　迅猛发展
涉及领域　　深广无边
大容宇宙　　细至极端
昌洪教授　　学术渊源
新书付梓　　探索前沿
学无止境　　先睹为欢

——为梁昌洪教授所著《电磁理论前沿探索扎记》书此短句

黄宏嘉

2012 年 4 月

# 作者传略

梁昌洪，1943 年 12 月生于上海。1962 年加入中国共产党。1965 年本科毕业于西安军事电信工程学院物理系微波专业。1967 年 7 月于西安军事电信工程学院物理系天线专业研究生肄业，留校任教，1978 年定职为讲师。1980 年 8 月至 1982 年 8 月在美国纽约州 Syracuse 大学做访问学者。

梁昌洪教授是 IEEE senior member，1984 年 9 月被遴选为中国电子学会高级会员（现改为会士），1986 年 5 月破格晋升为教授，1986 年 7 月被批准为博士生指导教师。1989 年成为中国电子学会微波学会副主任委员，1989 年 1 月任西安电子科技大学副校长，1992 年至 2002 年，任西安电子科技大学校长。

梁昌洪教授长期从事微波和电磁领域的系列研究，四十多年来，他在微波和电磁领域取得了一系列创新性的成果，在铁氧体移相器、孔耦合理论、网络系统分析和电磁场数值计算等方面都有独到的研究，特别是在计算微波、非线性电磁学、微波网络理论方面的研究尤为突出。先后获得省部级科技成果奖十余项，在国内外学术期刊上发表主要论文 300 余篇，已出版《微波网络及其应用》、《从测量数据谈起》、《计算微波》及其典藏版、《孤立子理论及其应用》、《简明微波》、《话说极限》、《话说对称》、《矢算场论札记》、《复变函数札记》、《科学随想录》、《科学漫谈录》专著 11 部，《无坐标法》译著 1 部。其中百万字著作《简明微波》，获 2011 年陕西省高校优秀教材一等奖，从使用到出版历时 12 年，在师生中获得了很好的使用效果，为广大学生所接受，现已被多个院校选为教材或专业参考书，如上海交通大学、华南理工大学、杭州电子科技大学等；实地教学录像约 45 小时，在网上广泛使用，并获得师生一致好评。

梁昌洪教授在国内最早提出计算微波概念，初步建立了计算微波理论，建立了微波宽带耦合器定向 CAD 方法，解决了 Landstofer 弯曲天线阵列最优化问题。在国内最早推动了非线性电磁学和有耗电磁学的研究，建立了国内第一套电磁孤子实验系统。

梁昌洪教授承担和完成了多项重大工程项目，许多项目已完成型号鉴定，应用于实

践。其中，孔耦合系列研究获 1984 年电子部科技进步一等奖，舰用 381 相控阵雷达获 1984 年电子部科技成果一等奖，矩量法系列研究获 1987 年机电部科技成果二等奖，计算微波研究获 1989 年国家教委科技进步二等奖。

梁昌洪教授治学严谨，为人师表，在担任校长期间，尽管行政工作繁忙，他仍一直坚持给本科生讲课。他常以鲁迅的话自勉："时间就像海绵里的水，只要愿意挤，总还是有的"。他常说："如果不想讲课，别说当校长，当个学院院长就可以不讲；你要是想讲，当什么都可以讲。做别的事情也是一样的道理！"梁昌洪教授所培养的博士生中已有 10 余位博导和 1 位长江学者奖励计划特聘教授。其本人 1985 年荣获全国人民教师奖章，1987 年获全国电子工业劳动模范，1988 年获国家有突出贡献专家，1991 年获全国优秀留学回国人员，1992 年获陕西省优秀党员专家，2003 年获首届国家级教学名师称号。他所讲授的"微波技术基础"课程被评为首届"国家精品课程"。

梁昌洪教授表示：国内外多位顶级专家的著作，如 R. F. Harrington 的《正弦电磁场》、《矩量法》，R. E. Collin 的《导波场论》，黄宏嘉的《微波原理》（Ⅰ、Ⅱ卷）等，都对他产生极大的影响与鞭策。前辈的工作是带有开创性的，而他则是学生辈，很多工作都是学习和体会前辈著作的结果，而且在今后还要继续学习。

# 前　言

回顾我所写的书，其形成过程大致可分为两类：一类是有意识创作，如 1985 年版《计算微波》就属此种。1982 年留美归来，我特别想把大洋彼岸的新鲜空气——微波与现代计算机和计算技术结合介绍过来，从而使国内在此领域更上高楼，于是全力以赴，写成此书。另一类则是偶有所发，而后则一发不可收拾，从而形成著作，本书当属此例。

2008 年偶见有文献讨论静电场电荷系统的能量问题，认为应该包括两部分，即电荷之间的相互作用能和**电荷系的固有能**。很清楚，这里所述及的固有能即静电场的自作用能。实际上早在 70 年前，即 1940 年秋，著名美国物理学家 Feynman 就注意到电磁理论的主要问题是电子自作用能无限大的困难，这一困难是由于把电子描述成点粒子而造成的。Feynman 自己提出一个假定：**电子不能对自己产生作用**。经过艰苦的思考，以及和他的导师 Wheeler 反复讨论，终于写成了《超距作用的经典理论——作为物体阻尼抵制的吸收体反作用》，并以两人联名发表于 1945 年的《现代物理评论》上。

由此，我采用了极限数学方法证明了静电场的自作用能始终为零。通俗地说，正如“用力抓住自己的头发离开地球是不可能实现的一件事！”遂成一文并投寄《电气电子教学学报》，承蒙编辑的大胆支持，不仅同意发表，而且从 2008 年开始我就成为该刊的“专栏作家”，到 2011 年历时 3 年，其间共发表札记 18 篇。因为说些真话，所以有些地方均已越过界限，甚至达到“胡言乱语”。当然作为问题的另一方面，这也使我能彻底“摘下面具”，提出自己学习和研究过程中的难点与疑点，坐下来与读者平等而推心置腹地讨论。

应该承认，这正是当前国内不可多得的学术民主环境，它的产生与编辑们宽大的胸怀、高超的眼光密不可分。在此基础上进一步写出各篇的问答录，再加上 1 篇思考和 1 篇札记教学，计 20 篇，这就是本书的形成过程。

特别指出，札记所涵盖的内容极为广泛：从静电场自作用能、广义电磁惯性到电磁对称。其中，既有提出问题的 Fermat 原理之谜，又有深入讨论数学方法的电荷多极子和电流多极子，最后还有提炼总结的电磁理论之美。本书突出了电磁理论的思想、概念、

方法和工程应用。

坦率地说，完成一本书后作者最关心的是是否有读者？是否有价值？但是，静下心来反思，这将取决于两方面条件：一是作者的水平和努力程度；二是当前的环境和氛围。如此看来，这个问题还不能用短期的眼光去考察。

回顾从1980年以来30多年的实际情景，十分令人深思：1980年吴万春教授和我完成《微波网络及其应用》，正好遇到文革后1978年拨乱反正，压抑多年的广大青年（有的已应该算做中年）学生，个个摩拳擦掌，对于学习的饥渴性无与伦比。不仅反映在学校教学，而且作为我本人还收到大量要求参加学习和回答问题的信件，特别是当年77班和78班学生的学习动力，至今依然历历在目。

到1988年翻译美国陈惠青名著《电磁波理论——无坐标法》时，情况已有很大不同。我经常说中国的环境大致是10年一个变化。当时学术已成为次要兴趣，加之此书曲高和寡，其情况与《微波网络及其应用》（1980）和《计算微波》（1985）已不能同日而语。

再到2006年出版《简明微波》，这时社会上的经济规则已相当直白。只要做一件事必然有人会问：能否赚钱？赚多少钱？因此，尽管这本书对于宽广的专业均有较好的参考价值，但因为不能与赚钱直接挂钩，于是也只能隅于一角。

根据这一思路推断，显然不能对这本札记的期望值过高，它至多是一件文化商品，正如著名电视主持人白岩松所发现的一个规则——一本《新华字典》的售价在任何时期都与1斤猪肉的价格极为接近。我所能期望的是随着时间的变迁，学术和文化终将又成为人们追踪的热点。

特别指出，优秀的青年学者陈曦为本书作出很多贡献。



# 目录

C O N T E N T S



## 札记一 静电场的自作用能


0 引言 // 1
1 静电场的自作用能 // 2
1.1 $2a\times2a\times2a$ 均匀电荷分布立方体的静电总自作用能 // 3
1.2 体积为$V$的任意形状电荷系统的静电总自作用能 // 4
2 场计算法和源计算法 // 5
2.1 场求解法 // 5
2.2 源计算法 // 6
3 结语 // 8
答问录 // 8
推荐人物 // 10
附录 // 12
参考文献 // 16


## 札记二 时谐场和复数场的对应研究


0 引言 // 17
1 时谐场一次量的复数场表示 // 18
1.1 实部表示准则 // 18
1.2 微积分准则 // 18
1.3 本构算子准则 // 18
2 时谐场的二次量与复数场表示 // 19
3 三个主要定理 // 21
3.1 能量Poynting定理 // 21

3.2 无耗单口系统的Foster定理 // 22
3.3 Lorentz互易定理 // 22
4 结语 // 23
答问录 // 23
推荐人物 // 25
参考文献 // 27

札记三 静电场与恒定电流场的转化与统一

0 引言 // 28
1 两种场的转化和统一 / 29
2 Poynting矢量 $\bar{S}$ 佯谬 / 31
3 结语 / 32
答问录 / 33
推荐人物 / 36
参考文献 / 37

札记四 电荷多极子和电流多极子

0 引言 // 38
1 $f(R)$ 的广义Taylor展开 // 38
2 电荷多极子 // 39
3 多极子的矩阵表示 // 42
4 电流多极子 // 43
5 相对论中四维电流多极子 // 46
6 结语 // 46
答问录 // 46
推荐人物 // 50
参考文献 // 51

## 札记五 电磁波极化及其应用

0 引言 // 52
1 椭圆极化波 // 52
2 极化转换和矩阵表示 // 58
3 极化的工程应用 // 61
4 结语 // 62
答问录 // 62
推荐人物 // 64
参考文献 // 64

## 札记六 电荷守恒和电流守恒

0 引言 // 65
1 电荷守恒 // 66
2 电流守恒 // 68
3 电流——电荷守恒 // 69
4 应用实例 // 69
5 结语 // 70
答问录 // 71
推荐人物 // 75
附录 // 77
参考文献 // 78

## 札记七 电磁互易对称性和无耗对称性

0 引言 // 79
1 Lorentz互易对称性 // 80
2 厄密（Hermite）无耗对称性 // 82
3 网络型Foster定理，广义惯性 // 85
4 电磁互易对称性和无耗对称性 // 86
5 结语 // 88
答问录 // 88

推荐人物 // 92
参考文献 // 94

## 札记八 电磁对称和对称算子

0 引言 // 95
1 二次型对称 // 95
2 一次型对称 // 100
3 辛内积和电磁辛正交 // 101
4 结语 // 102
答问录 // 102
推荐人物 // 104
参考文献 // 106

## 札记九 平面镜像法与有源保角变换

0 引言 // 107
1 平面介质镜像统一模型 // 108
2 导体圆柱的有源保角变换 // 110
3 复杂导体的有源保角变换 // 114
3.1 带裂缝圆柱问题 // 114
3.2 双板之间的线电荷 $\rho_l$ // 115
4 结语 // 117
答问录 // 118
推荐人物 // 123
参考文献 // 124

## 札记十 论电磁损耗

0 引言 // 125
1 三个定理 // 126
2 损耗评价 // 128

3 损耗系统特性 // 132
4 电磁损耗带来的困难 // 133
5 结语 // 133
答问录 // 134
推荐人物 // 141
参考文献 // 142

## 札记十一 电磁理论中的复参量和复定理

0 引言 // 143
1 复频率 $\tilde{\omega}=\omega'-\mathrm{j}\omega''$ // 144
2 复相角 $\tilde{\theta}=\theta'-\mathrm{j}\theta''$ // 144
3 复频率电磁定理 // 147
4 带任意负载的无耗传输线 // 151
5 结语 // 153
答问录 // 154
推荐人物 // 157
参考文献 // 159

## 札记十二 复算子 $\nabla$ 与二维静场

0 引言 // 160
1 复算子 $\nabla$ // 161
2 复算子积分定理 // 162
3 复偏导数 // 164
4 二维静电场的复算子形式 // 165
5 二维稳流磁场的复算子形式 // 167
6 结语 // 168
答问录 // 168
参考文献 // 172

## 札记十三 电磁波多层媒质传播的[$C$]网络新理论

0 引言 // 173
1 基本模型 // 173
2 特殊角度 // 176
3 电磁波传播[$C$]网络 // 177
4 工程实例 // 181
5 能量守恒 // 182
6 结语 // 184
答问录 // 184
推荐人物 // 191
参考文献 // 191

## 札记十四 电磁理论中的矩阵变换

0 引言 // 192
1 二维坐标转动和向极坐标的矩阵变换 // 193
2 三维坐标矩阵变换 // 195
3 算子$\nabla$矩阵变换 // 199
4 纵向场向横向场的矩阵变换 // 201
5 结语 // 203
答问录 // 203
推荐人物 // 207
参考文献 // 207

## 札记十五 电磁辐射的最小方向性挑战

0 引言 // 208
1 Maxwell体系不存在各向同性解 // 208
2 最小方向性天线 // 211
3 最小方向性阵列 // 213
4 结语 // 216
答问录 // 216

推荐人物 // 221
附录 A y方向偶极子参量和电场 $\tilde{E}_\theta$ // 222
附录 B 二维 8 元图的相位 // 224
参考文献 // 225

## 札记十六 Fermat原理之谜

0 引言 // 226
1 自然规律的表述形式 // 227
2 极小值还是极大值 // 228
3 相速 $v_p$ 还是群速 $v_g$ // 230
4 能量 $E$ 和作用量 $S$ // 232
5 物理量还是空间 // 234
6 电磁最小作用量原理 // 234
7 结语 // 235
答问录 // 236
推荐人物 // 245
参考文献 // 246

## 札记十七 论电磁惯性

0 引言 // 247
1 电磁惯性 // 249
2 静电惯性 // 250
3 Green函数与静电惯性 // 252
4 任何天线元都无法构成理想子波源 // 253
5 结语 // 253
答问录 // 254
推荐人物 // 257
参考文献 // 257

## 札记十八 电磁理论之美

0 引言 // 258
1 电磁理论的简单美 // 259
2 电磁理论的对称美 // 260
3 电磁理论的转化美 // 261
3.1 电和磁的相互转化 // 262
3.2 空间变化与时间变化的相互转化 // 262
4 电磁理论的统一美 // 262
5 美的两重性 // 263
6 结语 // 264
答问录 // 264
推荐人物 // 267
参考文献 // 268

## 札记十九 关于电磁理论的若干思考

0 引言 // 269
1 对称性和不对称性 // 270
2 无耗和有耗 // 273
3 四维Minkovski空间和$\overline{\overline{L}}_6$ // 289
4 静场和交变场 // 294
5 学科发展的生命在于创新 // 296
6 结语 // 299
参考文献 // 300

## 札记二十 札记教学

1 基础在“货” // 302
2 关键用“心” // 304
3 贵在创“新” // 306
4 方法在“悟” // 310
5 目标是“道” // 311

札记一

# 静电场的自作用能

静电场能量$W_e$是一个非常重要的基本概念。目前文献大多是从点电荷系$\{q_i\}$做功来讨论$W_e$的。十分明显，由于点电荷的自作用存在发散困难，因而在它的$W_e$中并不包含自作用能。进一步把问题推广到分布电荷系统，这时储能可表示为$W_e=\frac{1}{2}\iiint_v \rho(\vec{r}')\,\varphi(\vec{r}')\mathrm{d}v'$，但对它的理解有不同意见。例如，文献[3]认为，这种情况下"它们不仅包含了电荷之间的相互作用能，同时也包括了电荷系固有能。"本文将严格证明：在$W_e$公式中静电场的自作用能始终为零。值得提出，自作用能的问题还可引申到哲学层面作深入探讨。著名美国物理学家费曼（Feynman）为消除电子点模型的发散困难曾经作过很大的努力。文中还提及，在采用$W_e=\frac{1}{2}\iiint_v \rho(\vec{r}')\varphi(\vec{r}')\mathrm{d}v'$计算储能时必须采用六重积分，否则会产生计算错误。

## 0 引　言

本文是电磁场理论教学札记之一。做功是联络力学、电磁学、热学甚至化学等各种不同领域能量的公共纽带。因此，在讨论静电场储能$W_e$时，现有文献[1,2]大多也是从点电荷系$\{q_i\}$ $(i=1,2,\cdots,N)$做功开始的。

我们考虑由$q_1,q_2,\cdots,q_N$所组成的点电荷系分布于一个有限空间内。首先设想将电荷$q_1$缓慢地（不计动能）移至无穷远处，这时具体电场力做功是

$$W_1=q_1\varphi_1=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(0+\frac{q_2}{r_{12}}+\frac{q_3}{r_{13}}+\cdots+\frac{q_N}{r_{1N}}\right)$$

然后，再把$q_2$移走，有

$$W_2 = q_2\varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(0+0+\frac{q_3}{r_{23}}+\cdots+\frac{q_N}{r_{2N}}\right)$$

最后移走$q_N$，有$W_N = 0$。

电场力所做的全部功恰好等于原电荷系$\{q_i\}$的静电储能

$$W_e = W_1 + W_2 + \cdots + W_N = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\varphi_i \tag{1-1}$$

其中

$$\varphi_i = \sum_{j=i+1}^{N}\frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \tag{1-2}$$

由上述推导明显看出：电荷系$\{q_i\}$的静电储能$W_e$只包含相互作用能。因为电荷$q_i$在本处的电位必然会出现“无穷”的发散结果，这是点电荷模型所存在的固有困难。

现在，若把式（1-1）推广到分布电荷系统，即$\mathrm{d}q = \rho(\vec{r}')\mathrm{d}v'$，于是

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_v \rho(\vec{r}')\,\varphi(\vec{r}')\mathrm{d}v' \tag{1-3}$$

这时产生了不同的理解，例如文献[3]即认为式（1-3）“它们不仅包含了电荷之间的相互作用能，同时也包含了电荷系的固有能”。

本文将严格证明：在储能$W_e$公式中，静电场的自作用能始终为零。要么在电荷或线电荷条件下，由于模型的固有问题会产生发散而无法考虑；要么在分布电荷条件下自作用能依然为零。同时，在采用源方法计算$W_e = \frac{1}{2}\iiint_v \rho(\vec{r}')\varphi(\vec{r}')\mathrm{d}v'$时必须采用六重积分，否则会产生计算错误。

## 1 静电场的自作用能

现在，我们研究分布电荷系统中的静电场自作用能，即式（1-3）中$W_e$的自作用部分。首先要明确：什么是自作用能，即系统的固有能。定义分布系统中任意一点$\vec{r}'$处的电荷在$\vec{r}'$处所具有的能量，累加后即为该系统的自作用能。

可以把上述定义转换成计算一个边长$2\Delta\times2\Delta\times2\Delta$的微分立方体内均匀分布体电荷密度为$\rho$，然后令$\lim_{\Delta\to0}$，如图 1-1 所示，所以只须计算$2\Delta$立方体中心处的电位$\varphi$即可。同时我们提出，微分立方体所用的是本地坐标，而与系统坐标无关。

根据 APPENDIX，三维立方体的不定积分是

$$\iiint \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = xy\ln(z+r)+yz\ln(x+r)+xz\ln(y+r)-\frac{1}{2}x^2\tan^{-1}\left(\frac{yz}{xr}\right) -\frac{1}{2}y^2\tan^{-1}\left(\frac{xz}{yr}\right)-\frac{1}{2}z^2\tan^{-1}\left(\frac{xy}{zr}\right) \tag{1-4}$$

以$[-\Delta,\Delta]$定限后为

$$\int_{-\Delta}^{\Delta}\int_{-\Delta}^{\Delta}\int_{-\Delta}^{\Delta}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 12\Delta\left[2\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right] = 22.086\,694\,76\,\Delta^2 \tag{1-5}$$

于是，微分立方体中心电位为

$$\varphi(\Delta)=\frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 22.086\,694\,76\Delta^2 \tag{1-6}$$

而对应的静电储能为

$$W_{\mathrm{e}}(\Delta)=\frac{1}{2}\varphi(\Delta)\rho\Delta v=\frac{22.086\,694\,76}{\pi\varepsilon_0}\rho^2\Delta^5 \tag{1-7}$$

式（1-7）表示的是微分立方体（严格地说还应令$\lim\limits_{\Delta\to 0}$）的静电储能。下一步要对整个系统作累加，分以下两种情况讨论。

## 1.1　$2a\times 2a\times 2a$ 均匀电荷分布立方体的静电总自作用能

先讨论一种最简单的情况，即 $2a\times 2a\times 2a$ 均匀电荷分布立方体的总自作用能，如图 1-2 所示。

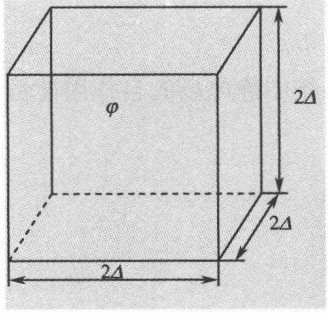



图 1-1　微分立方体电荷的自作用能

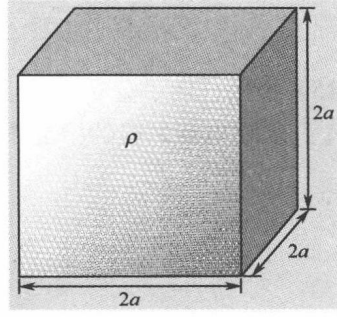



图 1-2　$2a\times 2a\times 2a$ 均匀电荷分布立方体

容易发现这一系统可以用微分立方体累加而成，即

$$W_{\mathrm{e}}^{\mathrm{s}}=W_{\mathrm{e}}(\Delta)\cdot N \tag{1-8}$$

其中，$W_{\mathrm{e}}^{\mathrm{s}}$ 表示系统的自作用能，且

$$N=\left(\frac{2a}{2\Delta}\right)^3=\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 \tag{1-9}$$

将式（1-9）代入式（1-8）可得

$$W_e^s=\frac{22.086\,694\,76}{\pi\varepsilon_0}\rho^2a^3\Delta^2 \tag{1-10}$$

现在使微分立方体中 $\lim\limits_{\Delta\to0}$，即

$$\lim_{\Delta\to0}W_e^s=0 \tag{1-11}$$

可知均匀分布立方体的静电总自作用能为零。

## 1.2 体积为 $V$ 的任意形状电荷系统的静电总自作用能

图 1-3 给出了体积为 $V$ 的任意形状的电荷系统，我们引入 $\rho_{max}$，使 $V$ 内任意一点 $\vec{r}'$ 的电荷密度均满足下列不等式

$$\rho(\vec{r}')\leqslant\rho_{max} \tag{1-12}$$

当 $\Delta$ 充分小时，体积 $V$ 中包含 $N$ 个微分立方体，可知

$$N=\frac{V}{(2\Delta)^3} \tag{1-13}$$

完全与 1.1 节类似，很容易推导出系统 $V$ 总静电自作用能为

$$W_e^s\leqslant\frac{22.086\,694\,76}{8\pi\varepsilon_0}\rho_{max}^2V\Delta^2 \tag{1-14}$$

再一次取 $\lim\limits_{\Delta\to0}$，得到

$$\lim_{\Delta\to0}W_e^s\equiv0 \tag{1-15}$$

式（1-15）严格证明了分布电荷（面分布或体分布）系统中静电场的自作用能恒为零。**储能 $W_e$ 只反映电荷之间的相互作用能。**

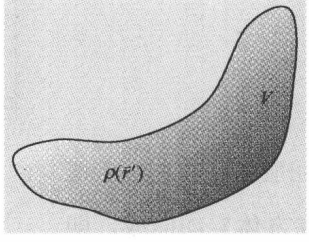



图 1-3 体积为 $V$ 的任意形状电荷系统

## 2　场计算法和源计算法

连续电荷分布系统求解静电储能$W_e$有两种方法：场计算法和源计算法，如表 1-1 所示。

**表 1-1　静电储能的两种计算方法**

| | 场 计 算 法 | 源 计 算 法 |
|---|---|---|
| 求解公式 | $W_e=\frac{1}{2}\iiint_v \varepsilon E^2 \mathrm{d}v$ | $W_e=\frac{1}{2}\iiint_{v'}\iiint_v \rho(\vec{r}')\varphi(\vec{r}-\vec{r}')\mathrm{d}v\mathrm{d}v'$ |
| 优点 | 只需要作一次三重积分 | 只需要求有源 $\rho(\vec{r}')$ 存在的电荷区域 |
| 缺点 | 需要对全空间作积分。因为只要有场 $\vec{E}$ 的地方，即存在储能密度 | 需要作六重积分 |

将表 1-1 中的源计算方法与公式（1-3）对比有

$$\varphi(\vec{r}')=\iiint_v \varphi(\vec{r}-\vec{r}')\mathrm{d}v \tag{1-16}$$

其中，$\vec{r}$ 和 $\vec{r}'$ 分别表示场点和源点的位置矢，因此要作六重积分。

这里，我们以半径为 $R$ 的球，均匀分布体电荷密度为$\rho$的系统作为典型例子，具体说明求解静电储能的两种方法，见图 1-4 所示。

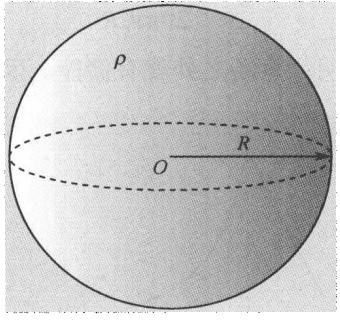



图 1-4　半径为 $R$ 的球，均匀分布体电荷密度为$\rho$的静电系统

### 2.1　场求解法

利用问题的对称性，我们很易由 Gauss 定理分别求解出球内外的电场 $\vec{E}$，有

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r} & (0\leqslant r<R)\\ \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & (r\geqslant R)\end{cases} \tag{1-17}$$

其中，$\hat{r}$ 表示 $\vec{r}$ 方向的单位矢，具体分布如图 1-5 所示。采用场储能密度 $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ 计算系统的总静电储能

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_v \varepsilon_0 E^2 \mathrm{d}v = W_{e1} + W_{e2} \tag{1-18}$$

其中，球内静电储能是

$$W_{e1} = 2\pi \int_0^R \frac{\rho^2 r^4}{9\varepsilon_0}\mathrm{d}r = \frac{2\pi\rho^2}{45\varepsilon_0}R^5 \tag{1-19}$$

而球外静电储能是

$$W_{e2} = 2\pi \int_R^\infty \frac{\rho^2 R^6}{9\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{10\pi\rho^2}{45\varepsilon_0}R^5 \tag{1-20}$$

最后给出总储能为

$$W_e = \frac{4\pi\rho^2}{15\varepsilon_0}R^5 \tag{1-21}$$

若进一步引入球总电荷 $Q$，即

$$Q = \rho V = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \tag{1-22}$$

再次写出

$$W_e = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R} \tag{1-23}$$

需要强调的是这种方法表明：有场之处就有储能。因而此例积分包括全空间。

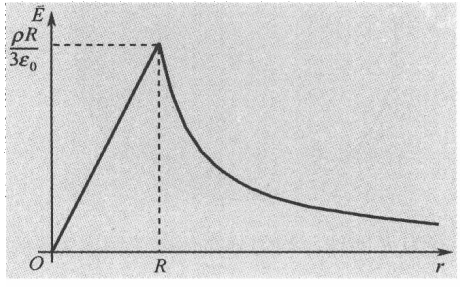



图 1-5　球分布电荷作用下的电场 $\vec{E}$ 分布

## 2.2　源计算法

源计算法采用 $\rho(\vec{r}')$ 与位 $\varphi(\vec{r}')$ 的相互作用，由式（1-3）得出。因此，我们只要考虑有源的区域。其中，位 $\varphi(\vec{r}')$ 的求解采用图 1-6 所示的坐标系。

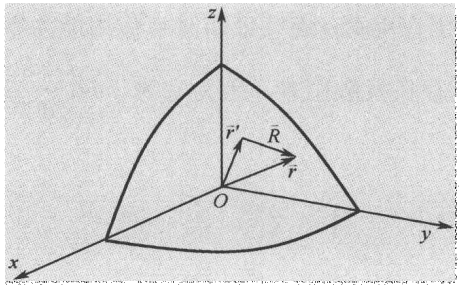



图 1-6　求解位 $\varphi(\vec{r}')$ 的坐标系

利用问题的对称性，设 $\vec{r}'$ 与 z 轴正方向一致，不失一般性，于是可写出

$$\varphi(\vec{r}')=\iiint_{V}\varphi(\vec{r}-\vec{r}')\mathrm{d}V=\iiint_{V}\frac{\rho r^{2}\mathrm{d}r\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon_{0}\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}$$
$$=\frac{\rho}{2\varepsilon_{0}}\int_{0}^{R}\frac{r}{2r'}\mathrm{d}r\int_{0}^{\pi}\frac{\mathrm{d}(r^{2}+r'^{2}-2rr'\cos\theta)}{\sqrt{r^{2}+r'^{2}-2rr'\cos\theta}}=\frac{\rho}{2\varepsilon_{0}}\int_{0}^{R}\frac{r}{r'}\left\{(r+r')+\left|r-r'\right|\right\}\mathrm{d}r \tag{1-24}$$

注意到

$$\begin{cases}\left|r-r'\right|=r-r' & r\geqslant r'\\ \left|r-r'\right|=-(r-r') & r<r'\end{cases} \tag{1-25}$$

可得

$$\varphi(\vec{r}')=\frac{\rho}{2\varepsilon_{0}}\left\{\int_{0}^{r'}\frac{2r^{2}}{r'}\mathrm{d}r+\int_{r'}^{R}2r\mathrm{d}r\right\}=\frac{\rho}{2\varepsilon_{0}}\left(R^{2}-\frac{1}{3}r'^{2}\right) \tag{1-26}$$

最后给出球电荷系统的静电储能

$$W_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\iiint_{V}\rho(\vec{r}')\varphi(\vec{r}')\mathrm{d}V'=\int_{0}^{R}\frac{\pi\rho^{2}}{\varepsilon_{0}}\left(R^{2}r'^{2}-\frac{1}{3}r'^{4}\right)\mathrm{d}r'=\frac{4\pi\rho^{2}}{15\varepsilon_{0}}R^{5} \tag{1-27}$$

当然，同样可写出

$$W_{\mathrm{e}}=\frac{3Q^{2}}{20\pi\varepsilon_{0}R} \tag{1-28}$$

显见，式（1-21）与式（1-27），式（1-23）与式（1-28）完全一致。

讨论上面例子时，我们可以转换看问题的视角，重新求电荷中静电场储能公式（1-21）和式（1-23），且令 $\lim\limits_{R\to 0}$，这时式（1-21）对应

$$W_{\mathrm{e}}=\lim_{R\geqslant 0}\frac{4\pi\rho^{2}}{15\varepsilon_{0}}R^{5}=0 \tag{1-29}$$

而式（1-23）则对应

$$W_{\mathrm{e}}=\lim_{R\to 0}\frac{3Q^{2}}{20\pi\varepsilon_{0}R}\to\infty \tag{1-30}$$

上述不同结果又反映出在电荷$\rho$连续分布时自作用能为零，即属于$O(R^5)$量级；而点电荷模型式（1-30），则存在发散困难，因为它属于$O\left(\frac{1}{R}\right)$量级。

## 3 结　语

本文所讨论的自作用能问题不仅在物理领域受到广泛关注，而且还可以进一步引申到哲学层面。

早在1940年秋，著名美国物理学家费曼（Feynman）就了解到，电磁理论的主要问题是电子自作用能无限大的困难，这一困难是由于把电子描述成点粒子而造成的[5,6]。费曼自己提出一个假定：**电子不能对自己产生作用**。经过艰苦的思考以及和其导师惠勒（Wheeler）反复讨论，终于写成了《超距作用的经典理论——作为物体阻尼抵制的吸收体反作用》，并以两人联名发表于1945年的《现代物理评论》上。

Feynman提出的电磁学理论，辐射阻尼被看作是由吸收体的电荷以超前波的形式对作用源的一种反作用。这种新理论的最大特色是既不出现电磁场，也不存在电荷对自身的作用，从而完美地解决了这个问题。

那么，静场情况该如何呢？根据相对论：静止应该是相对的，必然会提出超前波和推迟波的 Lorenz 四维不变量究竟是什么？围绕自作用能（也即固有能）的种种问题都值得我们进一步思考。

## 答问录

问：老师，《电磁理论》已是一门十分成熟的学科。内容、方法和结论都相对稳定，你为什么还要撰写札记？

答：《电磁理论》的确是非常成熟而稳定的一个领域，已出版的中外著作不下数百本。但是，即便如此，仍需要有札记这种形式给予进一步补充与探索。主要体现是：

（1）补充新思想方法。正规教学和研究著作，碍于各种约束，不可能“放开手脚”去讨论问题背后的思想和方法，而这正是很多学习者希望深入了解的。

（2）补充疑难和问题。毋庸讳言，现在的思潮中有一个很大的误区，以为只要上了著作，成了“铅字”，那就是不能怀疑的“真理”。实则相反，很多新发现，新发展真是从现有理论的疑难和问题开始的。这就说明：任何学习的核心要点都是——独立思考。

（3）补充代表人物推荐。最近“钱学森之问”在知识分子群体中引起了极大的震撼

和不安。中国的第一流人才究竟在哪里？以后怎么产生？深入一想这件事真浮躁不得，它应该是历史上的一次“接力跑”；没有爱因斯坦、哥德尔和外尔，哪里会有美国的今天。尽管我们这一代由于历史的种种原因，没有完成“任务”。但是，我们可以通过教学传递，人物推荐，把我国年轻人一代又一代推向高峰。这就是札记产生的源由，如图 1-7 所示。

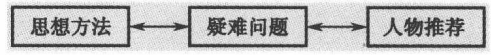



图 1-7　札记的主要安排

**问**：你把《静电场的自作用能》作为首篇，有什么特别意义？

**答**：《静电场的自作用能》一文主题词有两个，一是场；二是作用，而这恰好是电磁理论中的重要思想和概念。

场（field）是物理学发展中的核心一环。人们对于物理学的最初认识是物质与力，作为典型表示就是 Newton 第二定律

$$\bar{F} = m\bar{a}$$

一块铁的重力在人类手掌上是切实感受得到的。

突破上述思想束缚的是电磁安培定律。简单说来即电流 $\bar{I}$ 的周围发生磁针的环形偏转，如图 1-8 所示。

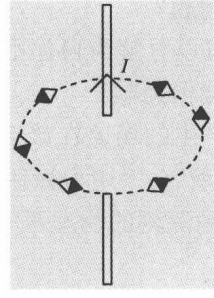



图 1-8　电流 $\bar{I}$ 的周围发生磁针的环形偏转

年轻的 Farady 更细微地用磁粉取代磁针；并企图用硬纸本“隔断”电流 $\bar{I}$ 与磁粉的联系，结果反而发现这个无处不在，无时不在的正是——**场。电流 $\bar{I}$ 的周围产生磁场。**

人类对于物理学的认识第三个阶段便是对称（symmetry）。对称最早的研究是作为研究方法面而出现的。

伺后发展成物理学的核心思想，关于这一点的详细论述，我们将在后边提及。图 1-9 表示物理学发展的三个主要思想。




图 1-9　物理学发展的三个主要思想

而场正是电磁学的核心概念。

第二个思想便是作用（action）。**场是源产生的**，而场反过来又对其他源产生**作用**，电荷 $q$ 放在场 $\vec{E}$ 中会受到电场力 $\vec{F}$，我们用 $\vec{F}=q\vec{E}$ 表示，称为场的一次作用。

同样，研究任意一个场系统，它的二次**作用**体现在系统**蕴藏能量**。图 1-10 给出**作用**的形象表示。

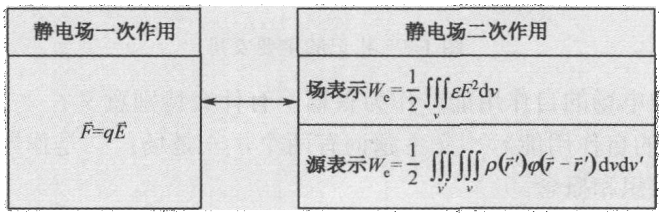



图 1-10　场所体现的作用

概括起来，首篇札记讨论的是两个主题：场和作用，如图 1-11 所示。

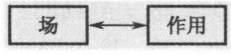



图 1-11　札记一所述及的两个主题

**问：这篇札记讨论了什么疑难问题？**

**答：**众所周知，场系统的作用可以分解为自作用和相互作用。这篇札记深入讨论的集中于一点——即**静电场的自作用能恒为零。**

简单来说，由这一点的电荷 $q$ 产生的场 $\vec{E}$ 在该点处不产生能量，通俗来讲即“自己不对自己产生作用”，或者如老百姓所言：“用力抓住自己的头发离开地球是不可能实现的一件事！”。推而广之，它代表一种深刻的物理哲学：事物的“价值”，只有通过对其他的“互作用”才能反映出来。

这一点，美国诺贝尔奖获得者费曼（Feynman）非常清楚地意识到电子自作用能的发散（无穷大）困难，他明确断言：**电子不能对自己产生作用。**

## 推荐人物

在 1999 年 10 月 13 日《参考消息》上，特意刊登了由尼古拉斯·布斯追忆的一位充满灵感的人物——20 世纪伟大的物理学家理查德·费曼（1918—1988）。

美国著名传记作者 James Gleick 为他所作传记的副题是——1 000 年才出的一个科学鬼才。

作为我们要学的根本，费曼的研究工作有两大特点。



理查德·费曼

**1．不求虚名，只求实学。**

费曼从小就记得父亲教他的一个道理。这就是：**知道某个事物的名称，并不等于真正了解它。**

这几乎是费曼一辈子的座右铭，他在孩提时代，有一次和小伙伴们玩耍之时，因为不知道森林中一种小鸟的名称而遭到大家取笑。他的父亲告诉费曼说，其实他可以知道小鸟在每一种语言中叫什么，但是，知道小鸟的名称绝对不等于了解小鸟的相关知识。

费曼牢记这件事，并且实施一辈子：不求虚名，只求实学。

**2．独立思考。**

费曼是带着与生俱来的创新欲望的天才物理学家，也是美国本土崛起的第一代杰出人才。

费曼始终记住：一是任何地方都要创新；二是不相信任何陈旧理论。他自己说，从上学开始就没有好好看过物理课本——费曼的工作就是把一切人家早已认为对的东西，自己从头推起，这就是独立思考。

在这里，我们简要介绍费曼创立量子力学的第三种形式——量子最小作用量原理——路径积分的一个过程。

物理老师贝德对费曼介绍：最小作用量的思想和概念——一切路径中，只有真实路径的作用量 $S$ 最小。其中 Lagrange 量 $L=T-V$ 且 $S=\min\int_a^b L\mathrm{d}t$ 。

1941 年费曼（23 岁）认为量子力学即微观世界也应满足最小作用量原理，但一直无重大进展。

正当他冥思苦想之时，一天普林斯顿举行啤酒宴会，费曼一个人鬼使神差地在角落里仰望着天花板发呆。此时，一位从德国集中营逃出的欧洲物理学教授耶勒走到他身旁搭讪，问道："你在做什么？"

费曼直接了当地问："你是否知道有采用作用量来做量子力学的吗？"

耶勒回答："不知道，不过好像 Dirac 在 1932 年有一篇把 Lagrange 量 $L$ 引入到量子力学中来的文章，明天我可以找给你看。"可是费曼等不及，非要当天去解决，只是可惜图书馆不开门。

第二天，两人一起到图书馆很快找到了 Dirac 相关论文，由此启发了费曼写出了

$$\varphi(x_b,t_b)=\int\sum \mathrm{e}^{\frac{i}{h}S}\varphi(x_a,t_a)\mathrm{d}x_a\mathrm{d}t_a$$

其中，$\varphi$ 表示量子力学中粒子的波函数，而 $S$ 即作用量。

1942年，费曼以《量子力学中的最小作用量原理》为题完成了自己的博士论文，由此也开创了量子力学的第三种形式——路径积分形式。

注意到量子力学的最小作用量的关键传播因子是复指数，而作用量只出现在指数上。由于指数的无量纲使我们惊讶地发现：原来 Planck 常数 $h$——表示最小的量子作用量（虚数在物理上采用 i，而工程上则习惯用 j），真可谓大开眼界。

费曼的成长过程，费曼的思考方式，给予我们极大的启示。

# 附　录

## 立方体三重积分

$$I_0=\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

我们可以把上述问题分解成两个部分：三重不定积分和三重定积分。

### 1．三重不定积分

定义三重不定积分为

$$\iiint f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=F(x,y,z)+G(x,y)+H(y,z)+I(z,x)+J(x)+K(y)+L(z)+C \tag{A-1}$$

具体对立方体（或长方体）三重积分，可略去 $G(x,y)$，$H(y,z)$，$I(z,x)$，$J(x)$，$K(y)$，$L(z)$ 和 $C$，简单写出：

$$\iiint f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=F(x,y,z) \tag{A-2}$$

现在，我们具体研究

$$I=\iiint\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{A-3}$$

（1）首先对 $x$ 积分，即

$$I_x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{A-4}$$

设

$$\begin{cases}x=\sqrt{y^2+z^2}\,\mathrm{shu}\\ \mathrm{d}x=\sqrt{y^2+z^2}\,\mathrm{chudu}\\ \sqrt{x^2+(y^2+z^2)}=\sqrt{y^2+z^2}\,\mathrm{chu}\end{cases} \tag{A-5}$$

代入式（A-4），且略去只与$y$，$z$有关的$H(y,z)$，可知

$$\begin{cases} I_x = \ln(x+r) \\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{cases} \tag{A-6}$$

（2）对$y$积分将下述积分分为两部分

$$I_y = \int \ln(x+r)\mathrm{d}y = I_{y1} + I_{y2} \tag{A-7}$$

采用分部积分可得

$$\begin{cases} I_{y1} = y\ln(x+r) \\ I_{y2} = -\int y\mathrm{d}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\right] \end{cases} \tag{A-8}$$

进一步写出

$$\begin{aligned} I_{y2} &= -\int \frac{y^2}{x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ &= \int \frac{x-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}y - z^2 x \int \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ &= x\ln(y+r) - z^2 x \int \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{aligned} \tag{A-9}$$

又设

$$\begin{cases} y = \sqrt{x^2+z^2}\tan\nu \\ \mathrm{d}y = \sqrt{x^2+z^2}\sec^2\nu\mathrm{d}\nu \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x^2+z^2}\sec\nu \\ y^2+z^2 = \dfrac{1}{\cos^2\nu}(x^2\sin^2\nu + z^2) \end{cases} \tag{A-10}$$

很易给出

$$-z^2 x \int \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -z\tan^{-1}\left(\frac{xy}{zr}\right) \tag{A-11}$$

于是，我们得到

$$I_y = y\ln(x+r) + x\ln(y+r) - z\tan^{-1}\left(\frac{xy}{zr}\right) \tag{A-12}$$

（3）最后对$z$积分

$$I = \int I_y \mathrm{d}z = I_1 + I_2 + I_3 \tag{A-13}$$

其中

$$\begin{cases} I_1 = \int x\ln(y+r)\mathrm{d}z \\ I_2 = \int y\ln(x+r)\mathrm{d}z \\ I_3 = -\int z\tan^{-1}\left(\dfrac{xy}{zr}\right)\mathrm{d}z \end{cases} \tag{A-14}$$

第 1 项 $I_1$ 再一次采用分部积分，即

$$I_1 = xz\ln(y+r) - \int \frac{xz^2}{\left(y+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{A-15}$$

对于式（A-15）等号右边的第 2 项，有

$$\begin{aligned} &-\int \frac{xz^2}{\left(y+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ &= xy\int\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - x^3y\int\frac{\mathrm{d}z}{(x^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ &= xy\ln(z+r) - x^3y\int\frac{\mathrm{d}z}{(x^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{aligned} \tag{A-16}$$

类似设

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2}\tan w \\ \mathrm{d}z = \sqrt{x^2+y^2}\sec^2 w\mathrm{d}w \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sec w\cdot\sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+z^2 = \dfrac{1}{\cos^2 w}(x^2+y^2\sin^2 w) \end{cases} \tag{A-17}$$

可给出

$$I_1 = xz\ln(y+r) + xy\ln(z+r) - x^2\tan^{-1}\left(\frac{yz}{xr}\right) \tag{A-18}$$

由 $x \Leftrightarrow y$ 的对称性，可直接写出第 2 项 $I_2$ 积分

$$I_2 = yz\ln(x+r) + xy\ln(z+r) - y^2\tan^{-1}\left(\frac{xz}{yr}\right) \tag{A-19}$$

第 3 项 $I_3$ 积分为

$$I_3 = -\int z\tan^{-1}\left(\frac{xy}{zr}\right)\mathrm{d}z = -\frac{1}{2}\int\tan^{-1}\left(\frac{xy}{zr}\right)\mathrm{d}(z^2) \tag{A-20}$$

又一次采用分部积分

$$I_3=-\frac{1}{2}z^2\tan^{-1}\left(\frac{xy}{zr}\right)+\frac{1}{2}\int z^2\mathrm{d}\left[\tan^{-1}\left(\frac{xy}{zr}\right)\right] \tag{A-21}$$

式（A-21）的第 2 项为

$$\frac{1}{2}\int z^2\mathrm{d}\left[\tan^{-1}\left(\frac{xy}{zr}\right)\right]=-\frac{1}{2}xy\int\frac{(zr)^2+z^4}{r[(zr)^2+(xy)^2]}\mathrm{d}z \tag{A-22}$$

由于

$$z^4=(zr)^2-z^2(x^2+y^2) \tag{A-23}$$

进一步有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int z^2\mathrm{d}\left[\tan^{-1}\left(\frac{xy}{zr}\right)\right]&=-xy\int\frac{\mathrm{d}z}{r}+\frac{1}{2}xy\int\frac{z^2(x^2+y^2)+2(xy)^2}{r[(zr)^2+(xy)^2]}\mathrm{d}z\\&=-xy\ln(z+r)+\frac{1}{2}x^2\tan^{-1}\left(\frac{yz}{xr}\right)+\frac{1}{2}y^2\tan^{-1}\left(\frac{xz}{yr}\right)\end{aligned} \tag{A-24}$$

最后得到

$$I_3=-xy\ln(z+r)+\frac{1}{2}x^2\tan^{-1}\left(\frac{yz}{xr}\right)+\frac{1}{2}y^2\tan^{-1}\left(\frac{xz}{yr}\right)-\frac{1}{2}z^2\tan^{-1}\left(\frac{xy}{zr}\right) \tag{A-25}$$

总结归纳给出立方体或长方体的三重不定积分是

$$\begin{aligned}I&=\iiint\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\&=xy\ln(z+r)+yz\ln(x+r)+xz\ln(y+r)-\frac{1}{2}x^2\tan^{-1}\left(\frac{yz}{xr}\right)-\frac{1}{2}y^2\tan^{-1}\left(\frac{xz}{yr}\right)-\frac{1}{2}z^2\tan^{-1}\left(\frac{xy}{zr}\right)\end{aligned} \tag{A-26}$$

可以看出，结果对于 $x$，$y$，$z$ 完全对称。

**2. 三重定积分**

考虑对称性，有

$$I_0=\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=3\left\{yz\ln(x+r)-\frac{1}{2}x^2\tan^{-1}\left(\frac{yz}{xr}\right)\right\}\Bigg|_{-a}^{a}\Bigg|_{-a}^{a}\Bigg|_{-a}^{a} \tag{A-27}$$

最后得到结果

$$I_0=12a^2\left\{2\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}=22.086\,694\,76a^2 \tag{A-28}$$

## 参考文献

[1] 毕德显．电磁场理论．北京：电子工业出版社，1985.

[2] 毕德显，仇平，吴万寿，吕海寰．电磁场理论基础．军事电信工程学院，1964.

[3] 王蔷，李国定，裘克．电磁场论基础．北京：清华大学出版社，2001.

[4] (美)D. K. 郑钧，著，电磁场与波．赵姚同，黎滨洪译．上海：上海交通大学出版社，1985.

[5] James Gleick．费曼传——1000 年才出一个科学鬼才．黄小玲译．北京：高等教育出版社，2004.

[6] R. P. Feynman．物理定律的本性．长沙：湖南科学技术出版社，2005.

札记二

# 时谐场和复数场的对应研究

电磁时谐场的复数表示理论，其基础在于对应，即电磁一次量的实部（或虚部）对应时谐场量。这种方法简单明了，因此获得了广泛的应用。然而必须提出，电磁二次量的复数表示并不能从能量定理的普遍形式导出[6]，于是不少文献[3-5]均避免给出复 Poynting 定理。本文提出了时谐场二次量的复数表示的对应定理，并探讨其中各项的相关意义，从而使复 Poynting 定理，Foster 定理和 Lorentz 定理有了坚实的基础。

## 0 引 言

本文是电磁场理论教学的系列札记之二。对于电磁理论这样一个成熟的领域，其基础内容已随时间变化不大。各式教材，汗牛充栋，并大致有了一个定型。但是，深入研究可以发现，仍有不少问题值得我们去研究和探讨。

这里将重点研究时谐场和复数场之间的相互关系。电磁理论大厦的基础是由时域 Maxwell 方程组成的，如果要转化为频域应该通过 Fourier 变换，这样构成的时域和频域是严格一一对应的。但是，频域的二次量（如功率、能量）处理将变得异常复杂。

于是，几乎所有的电磁理论书籍都把一般性的时域电磁场转化到单频（$\omega$）的时谐场，即

$$\vec{A}\cos(\omega t+\varphi_a) \tag{2-1}$$

并且，进一步采用复数场表示有

$$\vec{A}\cos(\omega t+\varphi_a)=\mathrm{R_e}(\dot{\vec{A}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) \tag{2-2}$$

其中

$$\dot{\vec{A}}=\vec{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_a} \tag{2-3}$$

通常略去 $e^{j\omega t}$ 把 $\dot{A}$ 称为复数场。显然，复数场并不是频域场。它的全部根基仅仅是在式（2-2）的表示中与时谐场等价，这一关系如图 2-1 所示。

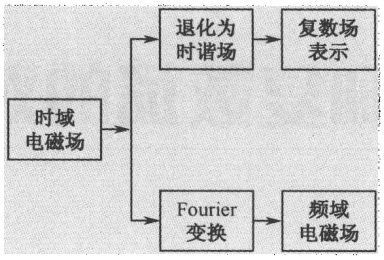



图 2-1　时域电磁场的两种研究方法

## 1　时谐场一次量的复数场表示

时谐场一次量主要指场量（主要是矢量）、微积分运算和本构算子。它可以归结为以下三个准则。

### 1.1　实部表示准则[①]

它即是复数场的基本表示式（2-2），很显然有

$$\mathrm{Re}(\dot{A}e^{j\omega t})=\mathrm{Re}(\dot{A}^{*}e^{-j\omega t}) \tag{2-4}$$

其中 * 表示复共轭。式（2-4）表明共轭复数场与复数场表示**同一时谐场**。

### 1.2　微积分准则

复数场中，与时间有关的函数已全部归结为 $e^{j\omega t}$，于是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\to j\omega\\ \displaystyle\int dt\to\frac{1}{j\omega}\end{cases} \tag{2-5}$$

即把微积分运算转化为代数运算，这也是复数场广泛应用且简单明了的根本原因。

### 1.3　本构算子准则

据文献[1]可知，最一般的情况下，$\hat{\varepsilon}$，$\hat{\mu}$ 和 $\hat{\sigma}$ 均是一个算子，有

$$\hat{\varepsilon}=\varepsilon_1+\varepsilon_2\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon_3\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\cdots \tag{2-6}$$

① 亦有少数文献，如文献[2]采用虚部表示准则。众所周知，只要前后统一，两者将是等价的。

且 $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\sigma}$ 表示类同。由准则式（2-2）可知

$$\dot{\hat{\varepsilon}} = \varepsilon' - \mathrm{j}\varepsilon'' \tag{2-7}$$

式（2-7）中 $\varepsilon'$ 和 $\varepsilon''$ 为正实数（这里暂不讨论左手材料），且虚部中的负号是能量非负之必需。

由此很易写出时谐场 Maxwell 的复数场表示。在下式取实部的意义下，有

$$\begin{cases} \nabla \times \dot{H} = \dot{J} + \mathrm{j}\omega\dot{D} \\ \nabla \times \dot{E} = -\mathrm{j}\omega\dot{B} \\ \nabla \cdot \dot{B} = 0 \\ \nabla \cdot \dot{D} = \dot{\rho} \end{cases} \tag{2-8}$$

对于各向同性无耗媒质，进一步有

$$\begin{cases} \nabla \times \dot{H} = \dot{J} + \mathrm{j}\omega\varepsilon\dot{E} \\ \nabla \times \dot{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\dot{H} \\ \nabla \cdot \dot{B} = 0 \\ \nabla \cdot \dot{D} = \dot{\rho} \end{cases} \tag{2-9}$$

## 2　时谐场的二次量与复数场表示

对于时谐场二次量的复数场表示存在困难，早已被很多学者所关注。文献[2]指出："（时谐场）的法则，只适用于正弦（余弦）电流或电压的加法，微分和积分以及这些运算的线性组合。于是，当电流或电压作高次运算时，例如乘法或开高次幂，这个法则就不适用了。"作为电磁场最重要的二次量能量 Poynting 定理，文献[3-5]都只列出复数形式的 Poynting 矢量 $\dot{S}$，而没有给出 Poynting 定理。文献[6]更明确指出："复能流定理是不能从能量定理的普遍形式（1-46）[①]导出的。"

本文将从如下定理开始研究时谐场的二次量与复数场的对应关系。

【定理】有两对矢量场

$$\begin{cases} \tilde{A}^{(i)} = \bar{A}_i \cos(\omega t + \varphi_{ai}) \\ \tilde{B}^{(i)} = \bar{B}_i \cos(\omega t + \varphi_{bi}) \end{cases} \quad (i = 1,2) \tag{2-10}$$

其对应的复数场分别是

$$\begin{cases} \dot{\bar{A}}_i = \bar{A}_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{ai}} \\ \dot{\bar{B}}_i = \bar{B}_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{bi}} \end{cases} \quad (i = 1,2) \tag{2-11}$$

① 原书有印刷错误，误写为（1-47），此注。

若满足

$$\tilde{A}^{(1)}\times\tilde{B}^{(1)}=\tilde{A}^{(2)}\times\tilde{B}^{(2)}\ ①\tag{2-12}$$

则有

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\dot{\vec{A}}_1\times\dot{\vec{B}}_1^{*})=\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\dot{\vec{A}}_2\times\dot{\vec{B}}_2^{*})\\ \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\dot{\vec{A}}_1\times\dot{\vec{B}}_1)=\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\dot{\vec{A}}_2\times\dot{\vec{B}}_2)\end{cases}\tag{2-13}$$

【证明】由时谐场的一次量复数表示可知

$$\tilde{A}\times\tilde{B}=\mathrm{Re}(\dot{\vec{A}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})\times\mathrm{Re}(\dot{\vec{B}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\dot{\vec{A}}\times\dot{\vec{B}}^{*})+\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\dot{\vec{A}}\times\dot{\vec{B}}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\omega t})\tag{2-14}$$

将式（2-14）两边对时间 $t$ 积分，[0，$T$]为上下限，且 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 表示周期，则有

$$\frac{1}{T}\int_0^T\tilde{A}\times\tilde{B}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\dot{\vec{A}}\times\dot{\vec{B}}^{*})\tag{2-15}$$

可以看出，式（2-15）右端表示时间场中的二次量在一个周期内的时间平均值，也可写为

$$\overline{\tilde{A}\times\tilde{B}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\dot{\vec{A}}\times\dot{\vec{B}}^{*})\tag{2-16}$$

式（2-16）中 $\bar{}$ 表示取一个周期的时间平均，又由于

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\dot{\vec{A}}\times\dot{\vec{B}}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\omega t})&=\frac{1}{2}\vec{A}\times\vec{B}\cos[2\omega t+(\varphi_a+\varphi_b)]\\&=\frac{1}{2}\vec{A}\times\vec{B}\{\cos2\omega t\cos(\varphi_a+\varphi_b)-\sin2\omega t\sin(\varphi_a+\varphi_b)\}\end{aligned}\tag{2-17}$$

则在式（2-14）两边乘 $\cos2\omega t$ 且对 $\int_0^T\mathrm{d}t$ 积分得到

$$\frac{1}{T}\int_0^T\tilde{A}\times\tilde{B}\cos2\omega t\mathrm{d}t=\frac{1}{4}(\vec{A}\times\vec{B})\cos(\varphi_a+\varphi_b)=\frac{1}{4}\mathrm{Re}(\dot{\vec{A}}\times\dot{\vec{B}})\tag{2-18}$$

由此可知，只要满足式（2-12）的条件，则必有式（2-13）的结论。

为了进一步研究【定理】的实质。我们重新写出式（2-14）为

$$\tilde{A}\times\tilde{B}=\vec{f}_0+\vec{f}_1\cos2\omega t+\vec{f}_2\sin2\omega t\tag{2-19}$$

其中

$$\begin{cases}\vec{f}_0=\dfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\dot{\vec{A}}\times\dot{\vec{B}}^{*})\\ \vec{f}_1=\dfrac{1}{2}(\vec{A}\times\vec{B})\cos(\varphi_a+\varphi_b)\\ \vec{f}_2=-\dfrac{1}{2}(\vec{A}\times\vec{B})\sin(\varphi_a+\varphi_b)\end{cases}\tag{2-20}$$

① 式中两矢量之间的叉积亦可换成点积，后述结论同样可获得。

于是可以说【定理】表明矢量函数确定时，它们的对应 Fourier 分量将是唯一的。

在实部表示的意义下，结论式（2-13）可写成

$$\begin{cases}\dot{\vec{A}}_1\times\dot{\vec{B}}_1^{*}=\dot{\vec{A}}_2\times\dot{\vec{B}}_2^{*}\\ \dot{\vec{A}}_1\times\dot{\vec{B}}_1=\dot{\vec{A}}_2\times\dot{\vec{B}}_2\end{cases}\tag{2-21}$$

并且，共轭场乘积的实部$\left(\frac{1}{2}\right)$表示时谐场时间的平均。

## 3　三个主要定理

在电磁场理论中，涉及二次量的主要定理有三个，即能量 Poynting 定理，无耗单口系统的 Foster 定理和 Lorentz 互易定理。

### 3.1　能量 Poynting 定理

写出时谐场 Maxwell 方程组

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{E}=-\mu\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}\end{cases}\tag{2-22}$$

很易给出

$$\begin{cases}\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H})=\vec{E}\cdot\vec{J}+\varepsilon\vec{E}\cdot\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\\ -(\nabla\times\vec{E})\cdot\vec{H}=\mu\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}\cdot\vec{H}\end{cases}\tag{2-23}$$

利用矢量公式和一次量的复数表示，有

$$\begin{aligned}&-\nabla\cdot\left\{\mathrm{Re}(\dot{\vec{E}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})\times\mathrm{Re}(\dot{\vec{H}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t})\right\}\\&=\mathrm{Re}(\dot{\vec{J}}^{*}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t})\cdot\mathrm{Re}(\dot{\vec{E}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})+\varepsilon\mathrm{Re}(\dot{\vec{E}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})\cdot\mathrm{Re}(-\mathrm{j}\omega\dot{\vec{E}}^{*}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t})+\mu\mathrm{Re}(\mathrm{j}\omega\dot{\vec{H}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})\cdot\mathrm{Re}(\dot{\vec{H}}^{*}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t})\end{aligned}\tag{2-24}$$

利用【定理】很易得

$$-\nabla\cdot\dot{\vec{S}}=\frac{1}{2}\dot{\vec{J}}^{*}\cdot\dot{\vec{E}}+2\mathrm{j}\omega\left(\frac{1}{4}\mu|\dot{\vec{H}}|^{2}-\frac{1}{4}\varepsilon|\dot{\vec{E}}|^{2}\right)\tag{2-25}$$

其对应的积分形式为

$$-\oiint_{s}\nabla\cdot\dot{\vec{S}}=\iiint_{v}\frac{1}{2}\dot{\vec{J}}^{*}\cdot\dot{\vec{E}}\mathrm{d}v+2\mathrm{j}\omega\iiint_{v}\left(\frac{1}{4}\mu|\dot{\vec{H}}|^{2}-\frac{1}{4}\varepsilon|\dot{\vec{E}}|^{2}\right)\mathrm{d}v\tag{2-26}$$

式（2-25）和式（2-26）都是在取实部意义下成立，它们表示时平均电磁能量守恒原理。

## 3.2 无耗单口系统的 Foster 定理

利用矢量公式和一次量的复数表示，有

$$\begin{aligned}&-\nabla\cdot\left\{\mathrm{Re}(\dot{\vec{E}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})\times\frac{\partial}{\partial\omega}\mathrm{Re}(\dot{\vec{H}}^{*}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t})+\frac{\partial}{\partial\omega}\mathrm{Re}(\dot{\vec{E}}^{*}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t})\times\mathrm{Re}(\dot{\vec{H}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})\right\}\\&=\mathrm{j}\left[\mathrm{Re}(\dot{\vec{H}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})\cdot\mathrm{Re}(\dot{\vec{H}}^{*}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t})\cdot\frac{\partial\omega\mu}{\partial\omega}+\mathrm{Re}(\dot{\vec{E}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})\cdot\mathrm{Re}(\dot{\vec{E}}^{*}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})\cdot\frac{\partial\omega\varepsilon}{\partial\omega}\right]\end{aligned}\tag{2-27}$$

利用【定理】很易得

$$-\nabla\cdot\left(\dot{\vec{E}}\times\frac{\partial\dot{\vec{H}}^{*}}{\partial\omega}+\dot{\vec{H}}\times\frac{\partial\dot{\vec{E}}^{*}}{\partial\omega}\right)=\mathrm{j}\left(|\dot{\vec{H}}|^{2}\cdot\frac{\partial\omega\mu}{\partial\omega}+|\dot{\vec{E}}|^{2}\cdot\frac{\partial\omega\varepsilon}{\partial\omega}\right)\tag{2-28}$$

其对应的积分形式为

$$\oiint_{s}\left(\dot{\vec{E}}\times\frac{\partial\dot{\vec{H}}^{*}}{\partial\omega}+\frac{\partial\dot{\vec{E}}^{*}}{\partial\omega}\times\dot{\vec{H}}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{s}=-4\mathrm{j}(\omega_{\mathrm{m}}+\omega_{\mathrm{e}})\tag{2-29}$$

其中

$$\begin{cases}\omega_{\mathrm{e}}=\dfrac{1}{4}\varepsilon|\dot{\vec{E}}|^{2}\\\omega_{\mathrm{m}}=\dfrac{1}{4}\mu|\dot{\vec{H}}|^{2}\end{cases}\tag{2-30}$$

分别表示电储能和磁储能的时间平均值。由此可给出

$$\frac{\partial X}{\partial\omega}=\frac{4(\omega_{\mathrm{m}}+\omega_{\mathrm{e}})}{\mathrm{II}^{*}}>0\tag{2-31}$$

即单口无耗网络电抗斜率恒正的结论。

## 3.3 Lorentz 互易定理

再次利用矢量公式和一次量的复数表示，有

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\left\{\mathrm{Re}(\dot{\vec{E}}_{1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})\times\mathrm{Re}(\dot{\vec{H}}_{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})-\mathrm{Re}(\dot{\vec{E}}_{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})\times\mathrm{Re}(\dot{\vec{H}}_{1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})\right\}\\&=\mathrm{Re}(\dot{\vec{J}}_{1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})\cdot\mathrm{Re}(\dot{\vec{E}}_{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})-\mathrm{Re}(\dot{\vec{J}}_{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})\cdot\mathrm{Re}(\dot{\vec{E}}_{1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})\end{aligned}\tag{2-32}$$

即

$$\nabla\cdot\left\{\mathrm{Re}(\dot{\vec{E}}_{1}\times\dot{\vec{H}}_{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\omega t})-\mathrm{Re}(\dot{\vec{E}}_{2}\times\dot{\vec{H}}_{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\omega t})\right\}=\mathrm{Re}(\dot{\vec{J}}_{1}\cdot\dot{\vec{E}}_{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\omega t})-\mathrm{Re}(\dot{\vec{J}}_{2}\cdot\dot{\vec{E}}_{1}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\omega t})\tag{2-33}$$

利用【定理】很易得

$$\nabla\cdot\left\{\dot{\vec{E}}_{1}\times\dot{\vec{H}}_{2}-\dot{\vec{E}}_{2}\times\dot{\vec{H}}_{1}\right\}=\dot{\vec{J}}_{1}\cdot\dot{\vec{E}}_{2}-\dot{\vec{J}}_{2}\cdot\dot{\vec{E}}_{1}\tag{2-34}$$

其对应的积分形式为

$$\oiint_s(\dot{\bar{E}}_1\times\dot{\bar{H}}_2-\dot{\bar{E}}_2\times\dot{\bar{H}}_1)\cdot\hat{n}\mathrm{d}S=\iiint_v(\dot{\bar{E}}_2\cdot\dot{\bar{J}}_1-\dot{\bar{E}}_1\cdot\dot{\bar{J}}_2)\mathrm{d}v \tag{2-35}$$

据文献[7]可知式（2-35）是 Lorentz 互易定理的复数形式。注意到这正是式（2-21）结论的第二式，它不是共轭场乘积，而是直接场乘积——表示 Fourier $\cos 2\omega t$ 的分量。这一点是以前没有指出的，由【定理】很易获得证明。

## 4 结　语

正因为二次量的复数表示有式（2-21）中两个公式，所以在今后，我们可以放心利用 Maxwell 方程组的复数形式直接作矢量运算——不论是共轭积，还是直接积。

本文严格证明：即使二次量也存在时谐与复数的对应原则。凡是电磁二次量的复形式定理都能成立。

## 答问录

**问**：你是否能告诉我这篇札记的研究目标？

**答**：这篇札记还是以场作为研究课题。只是问题从静电场转化成时变场，它可表示为 $\bar{E}=\bar{E}(\bar{r},t)$，其中，矢径 $\bar{r}$ 表示空间变化，而 $t$ 表示时间变化。

**问**：本篇札记是否涉及时变场的研究思想和研究方法？

**答**：这个问题正中要害。从表面看来，本篇札记并未直接提起时变场 $\bar{E}(\bar{r},t)$ 而实际上不论是时谐场还是复变场都是为了解决这个问题。

时变场研究的最大难点是它变化的任意性。因为静止场也有空间变化，所以我们研究的重点进一步指向时间 $t$ 变化的任意性。

解决变化任意的方法是——采用基（Bases）组成的函数系。这一思想表面看来有点深不可测，而实际上却非常简单。

我们在城市和乡村看到各种各样的高楼大厦或民居房舍：他们的大小和样式可以完全不同，但是却都是由砖或板块搭建而成的。建筑上的砖就是我们所说的基，如图 2-2 所示。

基的思想尽管看起来简单，但是它的发展和引申却又十分广泛和深刻。举例说明：大家知道，任何演出都需要舞台有不同的布景，这布景也是**任意变化**的。

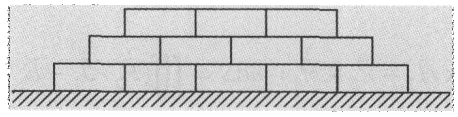


图 2-2 砖块——基的搭建

2012 年中央电视台的春节晚会对于舞美设计做出了革命性的变化——美术总设计师陈岩把整个舞台分解为 304 块“基”构成，它们都可以自由升降变化。加之 6 600 $m^2$ 的 LED 使舞台千变万化，炫目多彩。张明敏唱“我的中国心”时“基”模块组成的“长城”冉冉升起；而当李玉刚上台时则牡丹奔放，金碧辉煌（见图 2-3）。

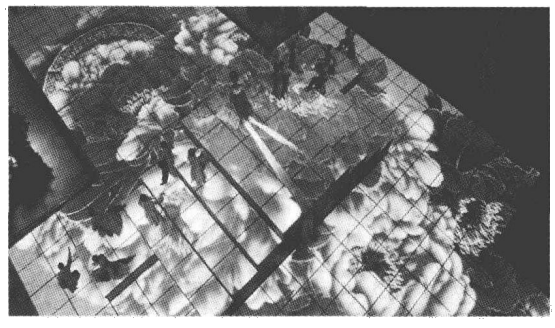


图 2-3 中央电视台 2012 年舞美设计的“基”的思路

当然，从工程和物理的角度对于基思想的开发和基体观的应用还是有严格的理论条件和保障，简单来说，如果有基函数系：

$\{f_i(x)\}$，$i=1,2,\cdots$，由它的线性组合去逼近 $F(x)$

首先，要求研究的对象是**线性世界**。正好，一般情况下的 Newton 力学体系和 Maxwell 电磁体系均满足这一条件。

其次，基体系必须完备，正交（甚至归一）在研究域中定义内积<,>。它可以为积分或迭加。

完备条件可以表示为 $F(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i f_i(x)$，即任意函数 $F(x)$均可由基迭加逼近。

正交条件是 $\langle f_i(x), f_j(x)\rangle = 0 \ (i \neq j)$

如果加上归一条件则有 $\langle f_i(x), f_i(x)\rangle = 1$

概括起来，基和基体系使我们能自如研究任意变化的函数。

**问**：时谐场是不是时变电磁领域的基体系思想？

**答**：正是。时谐场是任意变化的时变场的 Fourier 变换的单频$\omega$表示，有 $\vec{E}=\vec{E}_a\cos(\omega t+\varphi_a)$，其研究推导如图 2-4 所示。

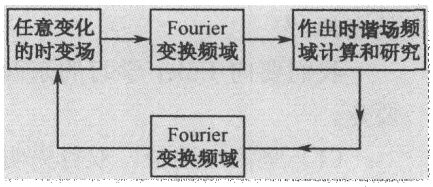



图 2-4　时谐场的研究思想与方法

注意到，这种变换和反变换可以是多样性的。例如，还可采用 Laplace 变换和反变换。

**问**：既然采用时谐场处理问题已经相当完美，那么为什么还要提出复数场对应思想和方法呢？

**答**：讨论至此，才进入本篇札记的核心——复数场对应思想和方法。

首先回答第一个问题，即时谐场处理已经相当完美，为什么还要提出复数场？

在工程理论方面，电磁研究的对象可以分为一次量和二次量（一般再高次量极少涉及）。

一次量主要对应力 $\vec{F}$ 和场 $\vec{E}$；而二次量则对应能量 $W$ 和功率 $P$。

即使在线性系统中，**二次量也构成了非线性**。采用 Fourier 变换和时谐场方法非常困难，这正是引入复数场的起因与缘由。

**问**：复数场如何与时谐场对应？

**答**：对应的根本基础是 Euler 公式，即 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}=\cos x+\mathrm{j}\sin x$

于是 $\vec{E}_a\cos(\omega t+\varphi_a)=R_{\mathrm{e}}\left(\dot{\vec{E}}_a\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right)$，其中 $\dot{\vec{E}}_a=\vec{E}_a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_a}$。

通常情况下，均略去 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 而把 $\dot{\vec{E}}_a$ 称为对应的复数场。

这篇札记详尽讨论了时谐场的二次量与复数场的对应表示，从而在（二次量）取实部的意义下，能量 Poynting 定理表示**平均**电磁能量守恒；无耗 Foster 定理表示电抗斜率额的频率敏感性正比于所存储的**平均**的总能量；而 Loren 场互易定理则表示 Fourier 频域中的 $\cos(2\omega t)$ 分量。从而较妥帖地解决了电磁二次量问题。

## 推荐人物

毫无疑问，这里的推荐人物非 Euler 莫属。

瑞士数学家 Euler 不仅是 18 世纪最多产的数学家，也是有数学史以来最多产的数学家。Euler 全集中包括了 886 种著作与论文。

大数学家 Laplace 不断告诫年轻学者：“读读 Euler，读读 Euler，他是我们每一个人



Euler

的老师。”

我们要向 Euler 学习的东西太多太多，这里只能摘其要点。

（1）坚韧加勤奋。双目失明，依然工作。

不了解数学史的，很可能误以为 Euler 是在十分优越的条件下作出上述工作，其实完全不然。

我们只须提及 Euler 在 28 岁时瞎了一只眼睛，到 59 岁更是双目失明。尽管如此，他依然以高度的毅力，克服难以想象的困难，坚持高水平的数学研究，他凭着超乎寻常的记忆力，请别人笔录下他的研究成果。

（2）大胆联系。发现 Euler 公式 $e^{jx}=\cos x+j\sin x$。由数学史以来，像 Euler 公式那样把三角函数和指数函数在复域条件下统一起来，完全可以说是史无前例的。

Euler 公式是怎么发现的？这始终是一个引人入胜的迷，我们大胆猜测：Euler 在研究复数时

$$\begin{cases}\cos x=1-\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4-\cdots\\ \sin x=x-\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{1}{5!}x^5-\cdots\end{cases}$$

和

$$e^{jx}=1+(jx)+\frac{1}{2!}(jx)^2+\frac{1}{3!}(jx)^3+\cdots$$

于是发现了他们之间无限奇妙的联系，也即 Euler 公式。值得指出：Euler 在复数理论的工作是十分丰厚的。他还发现了 $(j)^{-j}$ 是实数，有

$$(j)^{-j}=e^{-\frac{\pi}{2}}=0.207\,879\,576\,3$$

（3）不断提炼。由哥尼斯堡七桥问题（Seven Bridges Problem）提炼出一门——拓扑学。很多实际问题是众所周知，著名的有哥尼斯堡七桥问题，如图 2-5 所示。而 Euler 接收这一工作却把它提炼出一门崭新的学科——拓扑学。

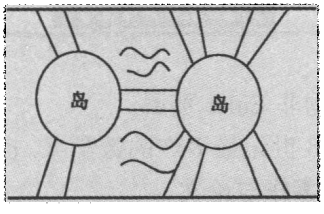



图 2-5　哥尼斯堡七桥问题

（4）超水平归纳。总结出多面体公式$V+F-E\equiv 2$

这是一个关于多面体的公式，其中$V$是多面体顶点数，$F$是多面体的面数，而$E$则是多面的棱数，如图 2-6 所示。

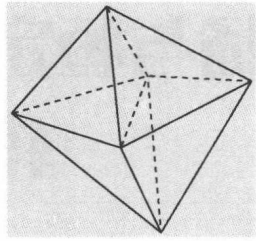


图 2-6　多面体公式

著名美国数学家 Polya 评述："Euler 在以下几点几乎是独特的。他总是下工夫把有关归纳证据细心、详尽地、有条理地写出来……他的讲解能表述那些使他引向发现的思想，而且还有一种特别感人的魅力。"

Euler 的确值得我们学习，他永远是我们的老师。

## 参考文献

[1] R. F. 哈林登，著. 正弦电磁场. 孟侃译. 上海：上海科技出版社，1964.

[2] Andrè Angot. 电工电信工程师数学（上）. 北京：人民邮电出版社，1979.

[3] (美)D. K. 郑钧，著. 电磁场与波. 赵姚同，黎滨洪译. 上海：上海交通大学出版社，1985.

[4] 毕德显. 电磁场理论. 北京：电子工业出版社，1985.

[5] 毕德显，仇平，吴万寿，吕海寰. 电磁场理论基础. 军事电信工程学院，1964.

[6] 黄宏嘉. 微波原理（卷 I）. 北京：科学出版社，1963.

[7] (美)R. E. 柯林，著. 微波工程基础. 吕继尧译. 北京：人民邮电出版社，1981.

札记三

# 静电场与恒定电流场的转化与统一

本文讨论静电场和恒定电流场。目前教材中这两部分完全独立，毫不相关。正是Einstein 的相对论可以把两者统一起来，因为不存在绝对运动，也不存在绝对静止。文中把电流$\vec{j}$和电荷$\rho$看做统一的四维矢量。研究表明：在运动坐标$x'Oy'$系中，电介质内可以存在电流$\vec{j}$；而导电媒质内则可存在电荷$\rho$（尽管极小），这就是静电场与恒定电流的相互转化和统一。文中还涉及 Poynting 矢量$\vec{S}$的佯谬。

## 0 引　言

本文是电磁理论教学系列札记之三，涉及的主题是静电场和恒定电流场。众所周知，以 Faraday 和 Maxwell 为杰出代表首次把电和磁联系起来，并构成著名的 Maxwell 方程组。但是，至此为止，在静电场与恒定电流场领域还完全是相互独立的。

静止电荷产生的场是静电场，而作匀速运动的电荷形成的恒定电流，它所产生的场称为恒定电流（电或磁）场[1]。根据 Einstein 的狭义相对论思想：不存在绝对运动，也不存在绝对静止[2]，正是在这个意义上这两种场不仅可以相互转化，而且也具有统一性。

现有的各种教材，都把研究问题中所处的媒质环境分为两类：电介质和导电媒质。前者是静电场所处的环境，而后者则为恒定电流场环境。具体地说，在电介质内，电流$\vec{j}=0$；而导电媒质内则$\rho=0$，表 3-1 给出了它们之间的比较[3]。

表 3-1　静电场与恒定电流场

| 静电场<br>（环境：电介质） | 恒定电流场<br>（环境：导电媒质） |
|---|---|
| $\vec{J}=0$ | $\rho=0$ |
| $\nabla\cdot\vec{D}=\rho$ | $\nabla\cdot\vec{H}=\vec{J}$ |
| $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ | $\vec{J}=\sigma\vec{E}$ |

本文利用狭义相对论中 Lorentz 变换严格表明：静电场与恒定电流场在运动坐标系 $x'O'y'$ 中可以不再孤立，且相互转化。在相对论的意义下两者是统一的。文中还讨论了 Poynting 矢量 $\vec{S}$ 的佯谬问题。

## 1　两种场的转化和统一

上文已经提及，静电场与恒定电流场是目前电磁学中独立的两大部分，而且所处的媒质环境互不交叉。这里，我们把两者用 Maxwell 方程联系起来，有

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{H}=\vec{J} & (3\text{-}1)\\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho & (3\text{-}2)\end{cases}$$

对于具体的媒质环境将分情况讨论。

本文假设一种既简单，又能抓住问题实质的例子。设 $xOy$ 坐标系上 $z$ 方向上有电流 $J$ 和电荷 $\rho$（事实上只能出现其中之一，见后具体讨论）另有 $x'O'y'$ 运动坐标系，相对 $xOy$ 坐标系以匀速 $\vec{v}$ 向$-z$ 方向运动，见图 3-1 所示。

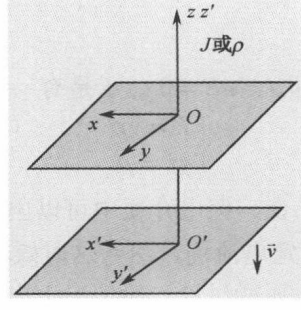



图 3-1　$xOy$ 坐标系和与它作相对运动的 $x'O'y'$ 坐标系

为方便起见，我们把四维问题简化为二维问题，而本质不变。可以写出

$$\begin{cases}(\nabla\times\vec{H})_z=J & (3\text{-}3)\\ \mathrm{j}c(\nabla\cdot\vec{D})=\mathrm{j}c\rho & (3\text{-}4)\end{cases}$$

在式（3-3）中左边取$\nabla\times\vec{H}$的$z$分量，因而右边$J$为标量，而式（3-4）中$c$为光速。把$xOy$坐标系转换成$x'O'y'$坐标系只须乘上二维 Lorentz 变换因子，有[2]

$$\bar{\bar{L}}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\begin{bmatrix}1 & -\mathrm{j}\beta\\ \mathrm{j}\beta & 1\end{bmatrix} \tag{3-5}$$

其中，$\beta=\left(\frac{v}{c}\right)$。且在式（3-5）中已考虑$v$取$-z$方向。方程式（3-3）和式（3-4）的右边，变换可写出

$$\begin{bmatrix}J'\\ \mathrm{j}c\rho'\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\begin{bmatrix}1 & -\mathrm{j}\beta\\ \mathrm{j}\beta & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J\\ \mathrm{j}c\rho\end{bmatrix} \tag{3-6}$$

当考虑$\beta\ll 1$的实际情况，进一步有

$$\begin{cases}J'=J+v\rho & (3\text{-}7)\\ \rho'=\rho+\dfrac{v}{c^2}J & (3\text{-}8)\end{cases}$$

这时，$x'O'y'$运动坐标系的 Maxwell 方程是

$$\begin{cases}(\nabla'\times\vec{H}')_{z'}=J+v\rho & (3\text{-}9)\\ (\nabla'\cdot\vec{D}')=\rho+\dfrac{v}{c^2}J & (3\text{-}10)\end{cases}$$

注意到

$$\begin{cases}(\nabla'\times\vec{H}')_{z'}=(\nabla\times\vec{H})_z+v(\nabla\cdot\vec{D}) & (3\text{-}11)\\ (\nabla'\cdot\vec{D}')=(\nabla\cdot\vec{D})+\dfrac{v}{c^2}(\nabla\times\vec{H})_z & (3\text{-}12)\end{cases}$$

务必记得由于两种场的媒质环境相异。式（3-7）和式（3-8）中不能同时出现$J$和$\rho$，这里进一步分情况讨论。

**1．电介质情况**

这时周围环境中$\sigma=0$，也即$J=\sigma E=0$。于是有

$$\begin{cases}J'=v\rho & (3\text{-}13)\\ \rho'=\rho & (3\text{-}14)\end{cases}$$

在运动坐标系中，电荷密度$\rho'$不变，但电介质中可以出现等效电流密度$J'=v\rho$。

运动可以使静电场转换为恒定电流场，尽管这时媒质对应电介质。

现在，我们超越例子的束缚，还能讨论一般情况下电标位$\varphi$与磁矢位$\vec{A}$之间的关系。因为

$$\begin{cases}\varphi=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_v\dfrac{\rho\mathrm{d}v'}{r} & (3\text{-}15)\\ \vec{A}=\dfrac{\mu}{4\pi}\iiint_v\dfrac{\vec{J}\mathrm{d}v'}{r} & (3\text{-}16)\end{cases}$$

利用一般关系 $\vec{J}=\rho\vec{v}$ 很易导出

$$\vec{\beta}\varphi=c\vec{A} \tag{3-17}$$

其中

$$\vec{\beta}=\frac{\vec{v}}{c} \tag{3-18}$$

另外电场强度 $\vec{E}$ 和磁感应强度 $\vec{B}$ 之间有

$$\begin{cases}\vec{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint\limits_{v}\dfrac{\rho\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}v' & (3\text{-}19)\\ \vec{B}=\dfrac{\mu}{4\pi}\iiint\limits_{v}\dfrac{\vec{J}\times\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}v' & (3\text{-}20)\end{cases}$$

同样可导出

$$\vec{\beta}\times\vec{E}=c\vec{B} \tag{3-21}$$

由上述推导可以十分清楚地看出：$\rho$ 和 $\vec{J}$ 可以相互转化；$\varphi$ 和 $\vec{A}$ 可以相互转化；$\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 也可以相互转化。在这个意义上，静电场和恒定电流场是统一的。

**2. 导电媒质情况**

这种情况下，$\rho=0$ 于是写出

$$\begin{cases}J'=J & (3\text{-}22)\\ \rho'=\dfrac{v}{c^2}J & (3\text{-}23)\end{cases}$$

换句话说，运动坐标系中电流密度 $J'$ 不变，而在导电媒质中出现了等效密度 $\rho'=\dfrac{v}{c^2}J$。

必须指出：对于工程，实际上由于 $\dfrac{v}{c^2}\ll 1$，因而

$$\rho'\approx 0 \tag{3-24}$$

也即两种场的转化是不对称的。在电介质中电荷转换为电流明显。在导电媒质中电流转换为电荷效应极弱。

## 2　Poynting 矢量 $\vec{S}$ 佯谬

这里再深入讨论一下具体的概念：在电介质媒质中运动坐标系有了 $J'$ 和 $\rho'$ 必对应有 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$。

在本章第 1 节的例子中采用柱坐标系可进一步写出

$$\begin{cases} \vec{E}=\dfrac{\rho}{2\pi\varepsilon R}\hat{r} & (3\text{-}25) \\ \vec{H}=\dfrac{\rho v}{2\pi R}\hat{\varphi}=-\dfrac{\rho\vec{v}\times\hat{r}}{2\pi R} & (3\text{-}26) \end{cases}$$

其中，$\hat{r}$ 和 $\hat{\varphi}$ 分别表示柱坐标中 $r$ 和 $\varphi$ 方向的单位矢，且 $\vec{v}$ 处于 $-z$ 方向，如图 3-2 所示。

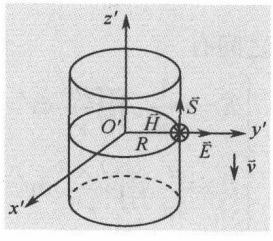



图 3-2　运动坐标系中静电场的 Poynting 矢量 $\vec{S}$

于是给出 Poynting 矢量为

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=-\frac{\rho^2(\hat{r}\times\hat{v}\times\hat{r})}{4\pi^2\varepsilon R^2}=-\frac{\rho^2\vec{v}}{4\pi^2\varepsilon R^2} \tag{3-27}$$

式（3-27）表明：Poynting 矢量 $\vec{S}$ 是 $z'$ 方向。于是我们遇到了一个古怪的命题：即静电场怎么会有 Poynting 矢量 $\vec{S}$？

实际上，深入考虑后发现 Poynting 矢量 $\vec{S}$ 是一个人为定义的间接物理量。真正有意义的应该是 $\vec{S}$ 的封闭面积分 $\oiint_s \vec{S}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S$。

很显然，$\vec{S}$ 与闭合积分侧面法线相互垂直，积分贡献为 0；另一方面，它又与上下底面交成周围曲线面积为 0，也无积分贡献。最后有

$$\oiint_s \vec{S}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S=0 \tag{3-28}$$

可以概括，只要闭合积分式（3-28）为 0，即使有 $\vec{S}$ 也无实在意义。此谓 Poynting 矢量 $\vec{S}$ 佯谬的答案。

## 3　结　　语

本文讨论静电场与恒定电流场。

文中具体给出在运动坐标 $x'O'y'$ 系中电介质情况可以存在电流；而导电媒质情况可以存在电荷（尽管极小）。这就是两种场之间的相互转换和统一性。

文中还讨论了 Poynting 矢量 $\vec{S}$ 佯谬。

## 答问录

**问**：札记三所述及的还是场的问题？

**答**：完全正确，这篇札记所述及依然是场。

只是札记二讨论场从时不变到时变所带来的新思想和新方法；而本篇札记则讨论场由“静止”到“运动”所带来的变化（当然，一切静止都是相对的）。

讨论的焦点是源。众所周知，有两种源：电荷 $\rho$ 和电流 $\vec{j}$——不动的是电荷，而电荷运动即形成电流。

讨论的思想和方法是 Einstein 狭义相对论。在这种观点下，静电场与恒定电流场实现了转化与统一。

**问**：你能否用最简单通俗的语言，介绍一下 Einstein 狭义相对论？

**答**：Einstein 关于狭义相对论研究的起因，源于他少年时代 16 岁的一个思想——“当人骑在‘光’上，他将会看到什么？”

由此深入研究，导出了物理上的两条“公理”，如图 3-3 所示。

Einstein 狭义相对论的两条公理：

（1）广义相对性公理。

物理体系的状态所遵循的变化定律，与描述这些变化所参照的坐标系究竟是静止还是匀速移动无关。

（2）光速不变公理。

任何光线在真空“静止”坐标系中都以光速 $c$ 运动，不管这束光是从静止或运动物体发射出来的。

图 3-3　Einstein 狭义相对论的两条公理

从哲学逻辑上，这两条公理组成的体系十分奇妙：一条是**相对**——由物理定律，人们无法判断自己所处的坐标系在静止亦或运动。换句话说，不存在绝对的静止，也不存在绝对的运动——物理学相对性公理；而另一条则是**绝对**——光速在任何相对匀速运动的坐标系都保持不变——光速不变公理。

这一点对于我们的研究工作有很大的启发。最崇尚事物相对的 Einstein 必须提出和抓住一个绝对标准。相对论的根基是建立在光速 $c$ 不变基础上的。

**问**：上面你所总结的 Einstein 狭义相对论十分深刻，十分严谨也十分完美。给我的一个感觉似乎 Einstein 把这一领域所有工作都做完了，使旁人无法再“插足”。

**答**：你这一点提得很好，任何问题都“怕”遇到高手。Einstein 提出相对论之后，正好出来一个更大的高手——他的老师闵可夫斯基（Minkowski）。

他抓住了一个**关键**——在 Einstein 相对论中，空间 $(x \quad y \quad z)$ 和时间 $(t)$ **不再相互独**

立，相反是紧密相连的。当 Einstein 正处于风光万分时刻，Minkowski 于 1907 年（43 岁）提出了**相对论的另一种结构**。

主要是：

（1）把时间坐标 $t$ 加上 $jc$ 因子，即

$$\begin{cases} t \to jct \\ t' \to jct' \end{cases}$$

（2）Minkowski 提出了**四维世界**

$$\begin{cases} \xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ jct \end{bmatrix} \\ \xi' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ jct' \end{bmatrix} \end{cases}$$

非常清楚，$ct$ 和 $ct'$都归入与**长度有同一量纲**，且四维世界中有光速 $c$ 参加。

（3）Minkowski 进一步把 Lorentz 变换写成矩阵形式。当坐标系沿 $x$ 轴运动。具体有

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ jct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \dfrac{-j\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{j\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ jct \end{bmatrix}$$

其中，$\beta = \left(\dfrac{v}{c}\right)$且

$$L = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \dfrac{-j\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{j\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{bmatrix}$$

成为 Lorentz **复矩阵**。

（4）Minkowski 抓住了狭义相对论体系的**线性特性**。它们**时空合一变换**，且最大的

奇异点是 Minkowski 把**复数**（Complex Number）引入了相对论。

在 Minkowski 的四维世界中，有

$$\begin{cases} \xi^{\mathrm{T}}\xi=\begin{bmatrix} x & y & z & \mathrm{j}ct \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \mathrm{j}ct \end{bmatrix}=x^2+y^2+z^2-c^2t^2 \\ \xi'^{\mathrm{T}}\xi'=\begin{bmatrix} x' & y' & z' & \mathrm{j}ct' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ \mathrm{j}ct' \end{bmatrix}=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2 \end{cases}$$

$$\xi^{\mathrm{T}}\xi=\xi'^{\mathrm{T}}\xi'$$

即它们保持**四维长度不变**，其中 T 表示矩阵转置。很易导出，在 Lorentz 变换中有

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{L}^{-1}$$

其中−1 表示矩阵求逆。

在 Minkowski 理论体系中，Lorentz 复变换矩阵是核心所在。在正文讨论中为了简单，把不运动的 $y$，$z$ 坐标略去，使 $\boldsymbol{L}$ 矩阵简化为

$$\boldsymbol{L}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{j}\beta \\ \mathrm{j}\beta & 1 \end{bmatrix}$$

**问**：Minkowski 利用复数把 Einstein 狭义相对论转换成矩阵形式，在数学上大大跨前了一步。

**答**：你的这种看法，过于形式化。事实上，Minkowski 已提出一种“结构性相对论体系”，如图 3-4 所示与 Einstein“公理性相对论体系”比较，两者思想是**相互独立的**。

Minkowski 结构性相对论体系

（1）世界是四维的；

（2）世界是复 Lorentz 不变的。

图 3-4　Minkowski 结构性相对论体系

据作者很狭窄的视界所见，首先明确提出这一点的是束星北先生。在他的著作[2]中，相对论有两部分：Einstein 相对论和 Minkowski 相对论。

只是束星北先生回国后极悲惨的人生遭遇，至今仍令人惋惜（见《束星北档案》）。

**问**：你能不能深入讨论 Minkowski 结构性相对论的具体应用？

**答**：现在，回过头来再看。静电场源 $\rho$ 和动场源 $\vec{J}$，它们在 Minkowski 的四维空间中，构成——**四维电流电荷矢量**有

$$\begin{bmatrix} J \\ \mathrm{j}c\rho \end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix} J' \\ \mathrm{j}c\rho' \end{bmatrix}$$

两者的转化通过复 Lorentz 变换。如果我们进一步引入

$$\begin{cases}\cos\tilde{\theta}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ \sin\tilde{\theta}=\dfrac{\mathrm{j}\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{cases}$$

其中，$\tilde{\theta}$ 为复幅角，显然，上式满足

$$\cos^2\tilde{\theta}+\sin^2\tilde{\theta}\equiv 1$$

这时写出

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\cos\tilde{\theta} & -\sin\tilde{\theta}\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

有

$$\begin{bmatrix}J'\\ \mathrm{j}c\rho'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\tilde{\theta} & -\sin\tilde{\theta}\\ \sin\tilde{\theta} & \cos\tilde{\theta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J\\ \mathrm{j}c\rho\end{bmatrix}$$

也即，在两个不同的匀速坐标系中，四维电流-电荷矢量所发生的**仅仅是一个复转动**，如图 3-5 所示。

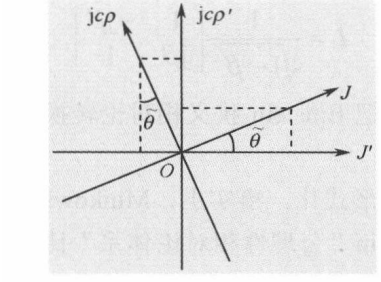



图 3-5　四维电流-电荷矢量的复转动示意图

很易写出

$$\begin{cases}J'=\cos\tilde{\theta}(J)-\sin\tilde{\theta}(\mathrm{j}c\rho)\\ \mathrm{j}c\rho'=\sin\tilde{\theta}(J)+\cos\tilde{\theta}(\mathrm{j}c\rho)\end{cases}$$

在四维矢量中 $J$ 和 $\mathrm{j}c\rho$ 、$J'$ 和 $\mathrm{j}c\rho'$ 都是统一的。它们的大小分配仅由于复转动而分量不同。

## 推荐人物

Einstein 已在各种文献中介绍很多，这里暂不述及，而 Minkowski 值得深入讨论。

（1）Minkowski 用**数学眼光**注视前沿物理值得学习。

1905 年 Einstein 相对论发表后 Minkowski 非常重视。他在哥廷根大学专门组织了一门研究课讨论相对论出现后的新动态。Minkowski 把 Einstein 和彭加勒的工作结合在一起研究。他吃惊地发现，彭加勒在 1906 年就提出了把时间 $t$ 作为第四维的设想（令 Minkowski“幸运”的是，彭加勒没有进一步考虑可视化几何和 $jct$），他开始用心研读这位原先被自己在线性代数课上称作“懒狗”的学生 Einstein 的论文。天才的 Minkowski 对此立即作出强烈的反应：“我真没有想到，Einstein 会这么有能耐！”



德国数学家、医学家和美籍德裔天文学家 Minkowski

这构成了 Minkowski 的主要风格，这也是哥廷根的传统风格。

（2）Minkowski 有抓准方向一“咬”到底的韧劲。

突出例子是希尔伯特（Hilbert）在 1900 年数学大学作报告时不耻下问，“请教”Minkowski 究竟选择哪个主题。Minkowski 毫不含糊地指出：应该在会上提出 20 世纪值得研究的**若干数学问题**，于是就出现了《尚未解决的 20 个数学问题》的历史性报告。值得提及的是 2000 年数学大会上再未重复有这样的“大手笔”报告。

（3）把复数引入相对论，出奇制胜。

在本篇札记中，我们再一次看到**复数的巨大作用**。特别值得一提的是 Minkowski 相对论复数体系中，作为二次量长度平方。不是 Hermite（即 $[^*]^{\mathrm{T}}$ 或 $([]^{\mathrm{T}})^*$），而是直接的**转置复长度平方**，有 $\xi^{\mathrm{T}}\xi$ 或 $\xi'^{\mathrm{T}}\xi'$，这种体系的深层次作用，很值得探讨，而且神奇地克服复数二维空间的缺点，引入真实的三维甚至四维空间，这在数字世界也是前所未有的！同时，为什么取时间 $jct$ 是虚的，这一点不仅有数学意义，而且还有更深刻的哲学意义，可惜的是正值壮年的 Minkowski（45 岁）竟然在阑尾炎的手术台上突然辞世。

当然，所有这些也给我们带来了机会和新的挑战。

## 参考文献

[1] 林为干，电磁场理论．北京：人民邮电出版社，1984.

[2] 束星北，狭义相对论．青岛：青岛出版社，1995.

[3] 王蔷，李国定，龚克．电磁场理论基础．北京：清华大学出版社，2001.

札记四

# 电荷多极子和电流多极子

本文重点研究源区 $V$ 较小且处于远场 $\vec{R}_0$ 时的源（电荷、电流）多极子展开问题。采用统一的三维广义 Taylor 展开，结合矢量∇算子理论，给出了电荷多极子与电流多极子的一系列结论，文中讨论了多极子的具体矩阵表达和相对论四维电流矢的多极展开，概念清晰、推演规范、结论简洁，是多级展开理论的一次新尝试。

## 0 引　言

本文是电磁场理论教学系列札记之四。

多极展开是公认的电磁教学难点之一。同时，它在实际应用中又十分重要。因此，历来受到研究者的关注。

本文采用统一的三维广义 Taylor 结合矢量∇算子理论，给出了电荷多极子与电流多极子的一系列结论。文中讨论了多极子的具体矩阵表达和相对论四维电流矢的多极子展开，概念清晰、推演规范、结论简洁，是多极展开理论的又一次尝试。

## 1 $f(R)$ 的广义 Taylor 展开

电磁理论中的多级展开问题专门适用于源区 $V$ 较小而所求的场又在远区，如图 4-1 所示。

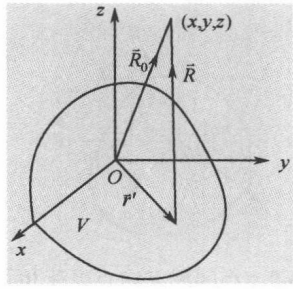



图 4-1　多级展开的小区域 $V$ 在远场问题

在图 4-1 中，有

$$\left.\begin{aligned}\vec{R}&=\vec{R}_0-\vec{r}'\\ \vec{R}_0&=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\\ \vec{r}'&=x'\hat{i}+y'\hat{j}+z'\hat{k}\end{aligned}\right\}\tag{4-1}$$

$$R=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\tag{4-2}$$

我们称 $\vec{R}_0$ 为场矢量，$\vec{r}'$ 为源矢量，于是多级展开的最为重要的约束条件是

$$\left|\vec{R}_0\right|\gg\left|\vec{r}'\right|\tag{4-3}$$

可以将一般标量三维函数 $f(R)$ 作广义 Taylor 展开

$$f(R)=f(R_0)+\vec{r}'\cdot\left[\nabla' f(R)\right]_0+\frac{1}{2!}(\vec{r}'\vec{r}'):\left[\nabla'\nabla' f(R)\right]_0+\cdots\tag{4-4}$$

其中，$\nabla'$ 是对于源起作用的算子，有

$$\nabla'=\hat{i}\frac{\partial}{\partial x'}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y'}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z'}\tag{4-5}$$

而 0 的含义表示 $\lim\limits_{\vec{r}'\to 0}$，也即归为问题模型的原点 0。本节所建立的是多极展开问题的“舞台”，由此我们可以顺利地研究电荷多极子和电流多极子问题。

## 2　电荷多极子

假定小区域 $V$ 内有一组点电荷系 $\{q_i,i=1,2,\cdots,n\}$。坐标原点取在 $V$ 内，如图 4-2 所示。

远场 $(x,y,z)$ 处的电标位为

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{q_i}{R_i}\right)\tag{4-6}$$

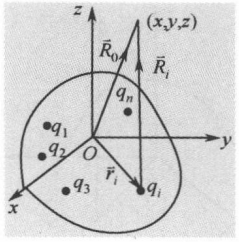



图 4-2 小区域 $V$ 内点电荷 $\{q_i\}$ 系

其中

$$R_i=\sqrt{(x-x_i')^2+(y-y_i')^2+(z-z_i')^2} \tag{4-7}$$

采用广义 Taylor 展开，具体计及 $f(R)=\frac{1}{R}$，有[1]

$$\frac{1}{R_i}=\frac{1}{R_0}+\vec{r}_i'\cdot\left(\nabla'\frac{1}{R}\right)_0+\frac{1}{2}(\vec{r}_i'\vec{r}_i'):\left[\nabla'\nabla'\frac{1}{R}\right]+\cdots \tag{4-8}$$

计及矢量∇算子理论，可得[2]

$$\left(\nabla'\frac{1}{R}\right)_0=\frac{\vec{R}_0}{R_0^3}=\frac{\hat{R}_0}{R_0^2} \tag{4-9}$$

$$\left(\nabla'\nabla'\frac{1}{R}\right)_0=\left[\nabla'\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right)\right]_0=\vec{R}_0\left[\nabla'\left(\frac{1}{R^3}\right)\right]_0+\frac{1}{R_0^3}\left[\nabla'(\vec{R})\right]_0 \tag{4-10}$$

其中

$$\left[\nabla'\left(\frac{1}{R^3}\right)\right]_0=\frac{3\vec{R}_0}{R_0^5} \tag{4-11}$$

而

$$\begin{aligned}\left[\nabla'(\vec{R})\right]_0&=\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x'}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y'}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z'}\right)\left[(x-x')\hat{i}+(y-y')\hat{j}+(z-z')\hat{k}\right]\\&=-(\hat{i}\hat{i}+\hat{j}\hat{j}+\hat{k}\hat{k})=-\bar{\bar{I}}\end{aligned} \tag{4-12}$$

上面推导中，$\hat{R}_0$ 是单位矢。而 $\bar{\bar{I}}$ 是单位张量。最后给出

$$\left(\nabla'\nabla'\frac{1}{R}\right)_0=\frac{3\hat{R}_0\hat{R}_0-\bar{\bar{I}}}{R_0^3} \tag{4-13}$$

代入电标位表示式（4-6），有

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}q_i\left\{\frac{1}{R_0}+\vec{r}_i'\cdot\left(\nabla'\frac{1}{R}\right)_0+\frac{1}{2}(\vec{r}_i'\vec{r}_i'):\left(\nabla'\nabla'\frac{1}{R}\right)_0+\cdots\right\}=\varphi^{(0)}+\varphi^{(1)}+\varphi^{(2)}+\cdots \tag{4-14}$$

十分清楚，广义 Taylor 展开的 0 级项是

$$\left.\begin{aligned}\varphi^{(0)}&=\frac{q}{4\pi\varepsilon R_0}\\ q&=\sum_{i=1}^{n}q_i\end{aligned}\right\}\tag{4-15}$$

其中，$q$ 表示源区域 $V$ 内系统总电荷。它相当于把小区域 $V$ 内全部点电荷之和集中在坐标原点 $O$。进一步考虑 1 级项有

$$\left.\begin{aligned}\varphi^{(1)}&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon}q_i\vec{r}_i'\cdot\left(\nabla'\frac{1}{R}\right)_0=\frac{\vec{p}\cdot\hat{R}_0}{4\pi\varepsilon R_0^2}\\ \vec{p}&=\sum_{i=1}^{n}q_i\vec{r}_i'\end{aligned}\right\}\tag{4-16}$$

其中，$\vec{p}$ 表示源区域 $V$ 内的系统总偶极矩。而这项 $\varphi$ 是由电偶极子所作出的贡献。最后 $\varphi$ 的 2 级项为

$$\varphi^{(2)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}q_i\left(\frac{1}{2}q_i\vec{r}_i'\vec{r}_i'\right):\left(\nabla'\nabla'\frac{1}{R}\right)_0=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\bar{\bar{M}}_0:\left(\frac{3\hat{R}_0\hat{R}_0-\bar{\bar{I}}}{R_0^3}\right)\tag{4-17}$$

其中

$$\bar{\bar{M}}_0=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_i\vec{r}_i'\vec{r}_i'\tag{4-18}$$

由文献[2]可知

$$\nabla'^2\left(\frac{1}{R}\right)=-4\pi\delta(\vec{R}_0-\vec{r}')\tag{4-19}$$

考虑到 $\vec{r}'$ 在源区 $V$ 内而 $\vec{R}_0$ 在远区，即 $\vec{R}_0\neq\vec{r}'$，而 $\delta(\vec{R}_0-\vec{r}')\equiv 0$，于是有

$$\nabla'^2\left(\frac{1}{R}\right)\equiv 0\tag{4-20}$$

可以写出

$$\bar{\bar{I}}:\left(\nabla'\nabla'\frac{1}{R}\right)=\nabla'^2\left(\frac{1}{R}\right)=0\tag{4-21}$$

于是可以把 $\varphi^{(2)}$ 式（4-16）改写为

$$\varphi^{(2)}=\frac{1}{24\pi\varepsilon}\bar{\bar{M}}:\left(\frac{3\hat{R}_0\hat{R}_0-\bar{\bar{I}}}{R_0^3}\right)\tag{4-22}$$

且新的 $\bar{\bar{M}}$ 有

$$\bar{\bar{M}}=\sum_{i=1}^{n}q_i\left(3\vec{r}_i'\vec{r}_i'-r_i^2\bar{\bar{I}}\right)\tag{4-23}$$

称为系统的四极矩。张量 $\vec{\vec{M}}$ 只有五个独立分量，此张量的迹（或对角元素之和）为零，有

$$M_{xx}+M_{yy}+M_{zz}\equiv 0 \tag{4-24}$$

对于源区域内连续电荷分布时，对应

$$\left.\begin{aligned} q&=\iiint_v \rho(x',y',z')\mathrm{d}v' \\ \vec{p}&=\iiint_v \rho\vec{r}'\mathrm{d}v' \\ \vec{\vec{M}}&=\iiint_v \rho\left(3\vec{r}'\vec{r}'-r'^2\vec{\vec{I}}\right)\mathrm{d}v' \end{aligned}\right\} \tag{4-25}$$

## 3 多极子的矩阵表示

设问题中 $(l,m,n)$ 是 $(x,y,z)$ 位置矢量的方向余弦，而 $(x_i',y_i',z_i')$ 则为对应点电荷 $q_i$ 的坐标。

$$\cos\theta_{i'}=\frac{\vec{R}_0\cdot\vec{r}_i'}{R_0r_i'}=\hat{R}_0\cdot\left(\frac{\vec{r}_i'}{r_i'}\right)=\frac{lx_i'+my_i'+nz_i'}{r_i'} \tag{4-26}$$

由文献[3]列出勒让德多项式

$$\left.\begin{aligned} P_0(\cos\theta)&=1 \\ P_1(\cos\theta)&=\cos\theta \\ P_2(\cos\theta)&=\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1) \end{aligned}\right\} \tag{4-27}$$

和第一类连带勒让德多项式

$$\left.\begin{aligned} P_1^0(\cos\theta)&=\cos\theta \\ P_1^1(\cos\theta)&=\sin\theta \\ P_2^0(\cos\theta)&=1-\frac{3}{2}\sin^2\theta \\ P_2^1(\cos\theta)&=3\sin\theta\cos\theta \\ P_2^2(\cos\theta)&=3\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{4-28}$$

可以写出

$$\varphi^{(0)}=\frac{qp_0(\cos\theta)}{4\pi\varepsilon R_0} \tag{4-29}$$

$$\varphi^{(1)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon R_0^2}\left[\sum_{i=1}^{n}q_i x_i' \quad \sum_{i=1}^{n}q_i y_i' \quad \sum_{i=1}^{n}q_i z_i'\right]\begin{bmatrix}P_1^1(\cos\theta)\cos\varphi\\ P_1^1(\cos\theta)\sin\varphi\\ P_1^0(\cos\theta)\end{bmatrix} \tag{4-30}$$

而

$$\varphi^{(2)}=\frac{1}{24\pi\varepsilon R_0^3}[\xi]:[\eta] \tag{4-31}$$

其中

$$[\xi]=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}q_i(3x_i'^2-r_i'^2) & \sum_{i=1}^{n}q_i 3x_i'y_i' & \sum_{i=1}^{n}q_i 3x_i'z_i'\\ \sum_{i=1}^{n}q_i 3x_i'y_i' & \sum_{i=1}^{n}q_i(3y_i'^2-r_i'^2) & \sum_{i=1}^{n}q_i 3y_i'z_i'\\ \sum_{i=1}^{n}q_i 3x_i'z_i' & \sum_{i=1}^{n}q_i 3y_i'z_i' & \sum_{i=1}^{n}q_i(3z_i'^2-r_i'^2)\end{bmatrix} \tag{4-32}$$

$$[\eta]=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\left[P_2^2(\cos\theta)\cos 2\varphi-2P_2^0(\cos\theta)\right] & \frac{1}{2}P_2^2(\cos\theta)\sin 2\varphi & P_2^1(\cos\theta)\cos\varphi\\ \frac{1}{2}P_2^2(\cos\theta)\sin 2\varphi & -\frac{1}{2}\left[P_2^2(\cos\theta)\cos 2\varphi+2P_2^0(\cos\theta)\right] & P_2^1(\cos\theta)\sin\varphi\\ P_2^1(\cos\theta)\cos\varphi & P_2^1(\cos\theta)\sin\varphi & 2P_2^0(\cos\theta)\end{bmatrix} \tag{4-33}$$

$[\xi]:[\eta]$ 表示两个三阶方阵的迹运算，也即把 $[\xi]$ 和 $[\eta]$ 的对应位置元素相乘后求和。

## 4　电流多极子

完全对称地，假定小源区域 $V$ 内有一组电流元素系 $\{I_i\hat{l}_i, i=1,2,\cdots,n\}$，其中 $\hat{l}_i$ 表示单位矢，如图 4-3 所示。

图 4-3　小区域 $V$ 内电流 $\{I_i\hat{l}_i\}$ 系

问题中$(x,y,z)$处的磁矢位为

$$\vec{A}=\frac{\mu}{4\pi}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{I_i\hat{l}_i}{R_i}\right) \tag{4-34}$$

完全一样，采用广义 Taylor 展开，可得

$$\vec{A}=\frac{\mu}{4\pi}\sum_{i=1}^{n}I_i\hat{l}_i\left\{\frac{1}{R_0}+\vec{r}_i'\cdot\left(\nabla'\frac{1}{R}\right)_0+\frac{1}{2}(\vec{r}_i'\vec{r}_i'):\left(\nabla'\nabla'\frac{1}{R}\right)_0+\cdots\right\}=\vec{A}^{(0)}+\vec{A}^{(1)}+\vec{A}^{(2)}+\cdots \tag{4-35}$$

所不同的是

$$\left.\begin{aligned}\vec{A}^{(0)}&=\frac{\mu I\hat{L}}{4\pi R_0}\\ I\hat{L}&=\sum_{i=1}^{n}I_i\hat{l}_i\end{aligned}\right\} \tag{4-36}$$

$I\hat{L}$ 表示放置在坐标原点时总的等效电流元**矢量和**，且 $\hat{L}$ 表示总方向的单位矢。它是**矢量**

$$\left.\begin{aligned}\vec{A}^{(1)}&=\frac{\mu}{4\pi}\sum_{i=1}^{n}(I_i\hat{l}_i\vec{r}_i')\cdot\frac{\hat{R}_0}{R_0^2}=\frac{\mu}{4\pi}\bar{\bar{H}}\frac{\hat{R}_0}{R_0^2}\\ \bar{\bar{H}}&=\sum_{i=1}^{n}I_i\hat{l}_i\vec{r}_i'\end{aligned}\right\} \tag{4-37}$$

十分清楚，在 $\vec{A}^{(1)}$ 的 1 级项中 $\bar{\bar{H}}$ 是二阶张量，最后，对于 $\vec{A}^{(2)}$ 写出

$$\vec{A}^{(2)}=\frac{\mu}{4\pi}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}I_i\hat{l}_i\vec{r}_i'\vec{r}_i'\right):\left(\nabla'\nabla'\frac{1}{R}\right)_0 \tag{4-38}$$

与电标位 $\varphi$ 的处理方法完全相同，令

$$\bar{\bar{\bar{N}}}=\sum_{i=1}^{n}I_i\hat{l}_i\left(3\vec{r}_i'\vec{r}_i'-r_i^2\bar{\bar{I}}\right) \tag{4-39}$$

且

$$\vec{A}^{(2)}=\frac{\mu}{24\pi R_0^3}\bar{\bar{\bar{N}}}:\left(3\hat{R}_0\hat{R}_0-\bar{\bar{I}}\right) \tag{4-40}$$

同样，$\bar{\bar{\bar{N}}}$ 是一个三阶张量。当 $V$ 内电流呈连续分布时，有

$$\left.\begin{aligned}I\hat{L}&=\iiint_V\vec{J}(x',y',z')\mathrm{d}v'\\ \bar{\bar{H}}&=\iiint_V\vec{J}\vec{r}'\mathrm{d}v'\\ \bar{\bar{\bar{N}}}&=\iiint_V\vec{J}\left(3\vec{r}'\vec{r}'-r'^2\bar{\bar{I}}\right)\mathrm{d}v'\end{aligned}\right\} \tag{4-41}$$

对于电流多极子，我们特别要把 $\vec{A}^{(1)}$ 抽出来进行深入探讨，在连续情况时式（4-37）有

$$\vec{A}^{(1)}=\frac{\mu}{4\pi R_0^2}\iiint_v\left(\hat{R}_0\cdot\vec{r}'\right)\vec{J}\mathrm{d}v' \tag{4-42}$$

把 $\vec{A}^{(1)}$ 分为两项，即

把式（4-42）中被积函数分解，有[4]

$$(\hat{R}_0\cdot\vec{r}')\vec{J}=\frac{1}{2}\left[(\hat{R}_0\cdot\vec{r}')\vec{J}-(\hat{R}_0\cdot\vec{J})\vec{r}'\right]+\frac{1}{2}\left[(\hat{R}_0\cdot\vec{r}')\vec{J}+(\hat{R}_0\cdot\vec{J})\vec{r}'\right] \tag{4-43}$$

于是

$$\vec{A}_1^{(1)}=\frac{\mu}{4\pi R_0^2}\iiint_v\frac{1}{2}\left[(\hat{R}_0\cdot\vec{r}')\vec{J}-(\hat{R}_0\cdot\vec{J})\vec{r}'\right]\mathrm{d}v'=\frac{\mu}{4\pi R_0^2}\iiint_v\frac{1}{2}(\vec{r}'\times\vec{J})\times\hat{R}_0\mathrm{d}v' \tag{4-44}$$

我们引入磁偶极矩

$$\vec{m}=\iiint_v\frac{1}{2}(\vec{r}'\times\vec{J})\,\mathrm{d}v' \tag{4-45}$$

这样就能写出

$$\vec{A}_1^{(1)}=\frac{\mu}{4\pi R_0^2}(\vec{m}\times\hat{R}_0) \tag{4-46}$$

再研究 $\vec{A}_2^{(1)}$

$$\vec{A}_2^{(1)}=\frac{\mu}{4\pi R_0^2}\iiint_v\frac{1}{2}\left[(\hat{R}_0\cdot\vec{r}')\vec{J}+(\hat{R}_0\cdot\vec{J})\vec{r}'\right]\mathrm{d}v' \tag{4-47}$$

注意到 $\nabla'\vec{r}'=\vec{\vec{I}}$ 可得

$$\vec{J}=(\vec{J}\cdot\nabla')\vec{r}'=\vec{J}\cdot\vec{\vec{I}} \tag{4-48}$$

和

$$\nabla'(\hat{R}_0\cdot\vec{r}')=\hat{R}_0 \tag{4-49}$$

则在式（4-47）内被积函数为

$$\begin{aligned}(\hat{R}_0\cdot\vec{r}')\vec{J}+(\hat{R}_0\cdot\vec{J})\vec{r}'&=\left[(\hat{R}_0\cdot\vec{r}')(\vec{J}\cdot\nabla')\vec{r}'\right]+\left[\nabla'(\hat{R}_0\cdot\vec{r}')\cdot\vec{J}\right]\vec{r}'\\&=\left[(\hat{R}_0\cdot\vec{r}')(\vec{J}\cdot\nabla')\vec{r}'\right]+\vec{r}'\left\{\nabla'\cdot\left[(\hat{R}_0\cdot\vec{r}')\vec{J}\right]\right\}-\vec{r}'(\hat{R}_0\cdot\vec{r}')\nabla'\cdot\vec{J}\end{aligned} \tag{4-50}$$

式（4-50）右边共有 3 项。由于在恒流条件下 $\nabla'\cdot\vec{J}=0$，可知第 3 项为零，第 2 项由于 $\vec{J}$ 不会穿出小区域 $V$ 而积分为零。最后由[4]

$$\oiint_s\vec{r}'\left(\vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{s}'\right)=\iiint_v\left\{\left[\vec{J}\cdot\nabla'\right]\vec{r}'+\vec{r}'(\nabla'\cdot\vec{J})\right\}\mathrm{d}v' \tag{4-51}$$

可知第 1 项也为零。于是最后得到

$$\vec{A}^{(1)}=\vec{A}_1^{(1)}=\frac{\mu}{4\pi R_0^2}(\vec{m}\times\hat{R}_0) \tag{4-52}$$

现在我们可以说：若 $\varphi^{(1)}$ 是电偶极矩的贡献；那么 $\vec{A}^{(1)}$ 则是磁偶极矩的影响。

## 5 相对论中四维电流多极子

在 Einstein 狭义相对论中 $\vec{J}$ 和 $\mathrm{j}c\rho$ 构成四维电流，很易得到

$$\begin{bmatrix}\vec{A}\\ \mathrm{j}\dfrac{\varphi}{c}\end{bmatrix}=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_{v}\begin{bmatrix}\vec{J}\\ \mathrm{j}c\rho\end{bmatrix}\frac{\mathrm{d}v'}{R} \tag{4-53}$$

同样对应广义 Taylor 展开，可以写出

$$\begin{bmatrix}\vec{A}\\ \mathrm{j}\dfrac{\varphi}{c}\end{bmatrix}=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_{v}\begin{bmatrix}\vec{J}\\ \mathrm{j}c\rho\end{bmatrix}\left\{\frac{1}{R_0}+\vec{r}'\cdot\left(\nabla'\frac{1}{R}\right)_0+\frac{1}{2}(\vec{r}'\vec{r}'):\left(\nabla'\nabla'\frac{1}{R}\right)_0+\cdots\right\}\mathrm{d}v' \tag{4-54}$$

其余一切均相同。

## 6 结　　语

本文述及电荷多极子和电流多极子均为静电和恒流状态。对于高频 $\omega$ 的辐射情况，处理思想和概念完全一样。这里不再赘述。

## 答问录

**问**：恕我直言，对札记四总的印象是数学推导极为烦琐，对于初学者很难推理出清晰的线索，是否可以介绍一下阅读本篇札记的方法。

**答**：这正是撰写现代科学论文的难点之一。由于篇幅所限和逻辑简明等要求，多数论文都言简意赅，没有多余的“废话”；另外，不少初学者对于为什么要写这篇文章的时代背景最难捉摸。于是，不少情况下看完之后都出现似懂非懂的模糊状态。

答问录在这种意义下，也正是作者把心里话的“废话”交给大家，以其达到深入交流的目的。

札记四要说明两个要点：

（1）函数的级数展开是联系数学和实际的重要桥梁。在学习微积分内容之后，大家会学到 Taylor 级数。典型的有

$$\begin{cases} e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \cdots + \dfrac{1}{n!}x^n + \cdots & (-\infty < x < \infty) \\ \ln(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}x^n + \cdots & (-1 < x \leqslant 1) \\ \sin x = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots (-1)^k \dfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \cdots & (-\infty < x < \infty) \\ \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots & (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

它们多由无限项和组成。但是在实际上，满足某种条件时我们便可作出近似。例如当$|x|<1$时，有

$$\begin{cases} e^x \approx 1 + x \\ \ln(1+x) \approx x - \dfrac{1}{2}x^2 \\ \sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6} \\ \cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2} \\ \sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{n} \end{cases}$$

其中关键在于当$|x|<1$时，级数的各项对应。

由于精度不断提高，多取一次精度相应提高一（或若干级）级。因此，可以根据实际需要，取相应的级数项数，于是数学和实际紧密联系了起来，如图 4-4 所示。

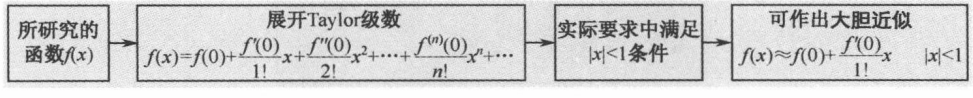



图 4-4　利用 Taylor 级数对于 $f(x)$ 在实际中作出近似

特别是

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x$$

称为函数的**线性近似**。进一步很易推广为

在$|x - x_0|<1$的条件下

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

（2）电荷（流）系的多级展开是联系电磁理论和工程的重要**桥梁**。有了函数的级数

展开作为铺垫，我们讨论电荷（或电流）的多级展开就方便多了。

研究对象：在 $V$ 区域内的任意 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 的点电荷系。

研究目标：远区 $|\vec{R}_0| \gg |\vec{r}'|$ 的电标位。

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{q_i}{R_i}\right)$$

其中

$$\vec{R}_0 = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$
$$\vec{r}' = x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k}$$

类似画出图 4-5。

推而广之，若取

$$\varphi \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{n} q_i \left\{\frac{1}{R_0} + \vec{r}_i' \cdot \left(\nabla' \frac{1}{R}\right)_0 + \frac{1}{2}\vec{r}_i'\vec{r}_i' : \left(\nabla'\nabla' \frac{1}{R}\right)_0\right\} = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}$$

则精度可达到 4 极子水平。十分明显，它是联系电磁理论和工程应用之间重要的桥梁。

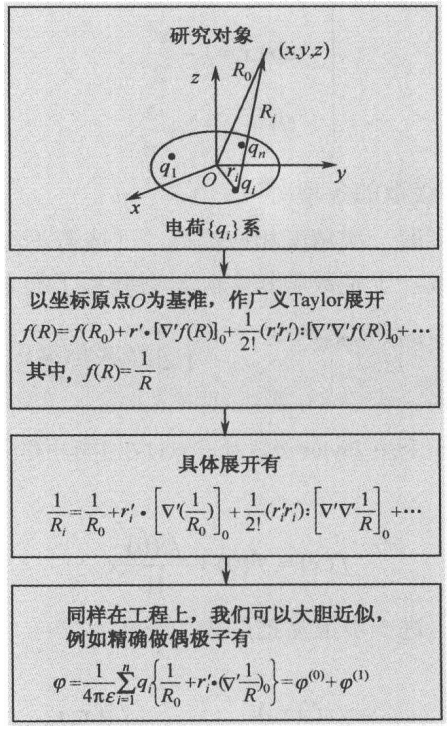



图 4-5　利用多级展开对于 $\{q_i\}$ 电荷系工程应用作出 $\varphi$ 近似

问：多极子逼近和 Taylor 级数函数逼近有什么不同之处？

**答**：尽管它们两者的根据都是 Taylor 展开。但是由于后者对应强烈的物理意义，因而还可作具体的简化。例如，对于图 4-6 在 $xOy$ 平面上有三点 $q$ 的电荷系（该三点构成正三角形）。

由于

$$\begin{cases}\vec{r}_1'=\dfrac{1}{2}\hat{i}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\hat{j}\\ \vec{r}_2'=-\dfrac{1}{2}\hat{i}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\hat{j}\\ \vec{r}_3'=0\hat{i}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\hat{j}\end{cases}$$

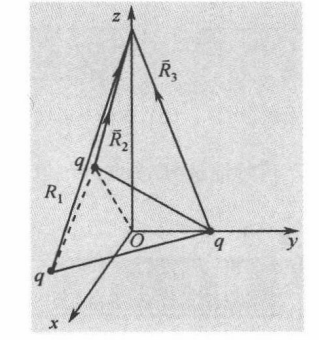



图 4-6　正三角形电荷分布

我们取 $\vec{R}_0$ 在 $z$ 轴的远区，即

$$\vec{R}_0=0\hat{i}+0\hat{j}+R_0\hat{k}$$

这时易得 $R_1=R_2=R_3=R=\sqrt{\dfrac{1}{3}+R_0^2}$

$$\left(\nabla'\frac{1}{R}\right)_0=\left(\frac{-\hat{i}-\hat{j}}{R}\right)$$

于是有

$$\begin{cases}\vec{r}_1'\cdot\left(\nabla'\dfrac{1}{R_1}\right)_0=\dfrac{1}{R}\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)\\ \vec{r}_2'\cdot\left(\nabla'\dfrac{1}{R_2}\right)_0=\dfrac{1}{R}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)\\ \vec{r}_3'\cdot\left(\nabla'\dfrac{1}{R_3}\right)_0=\dfrac{1}{R}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)\end{cases}$$

最后得到

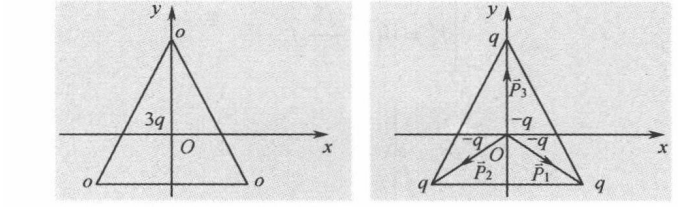
$$\varphi^{(2)}=\vec{r}_1'\cdot\left(\nabla'\frac{1}{R_1}\right)_0+\vec{r}_2'\cdot\left(\nabla'\frac{1}{R_2}\right)+\vec{r}_3'\cdot\left(\nabla'\frac{1}{R_3}\right)_0\equiv 0$$

这种情况下，电荷系 $O$ 点的选取使偶极子项对电位的贡献 $\varphi^{(1)}\equiv 0$。

所以有

$$\varphi=\varphi^{(0)}+\varphi^{(2)}$$

从概念上讲：这时原点可看成由 $3q$ 和 $-3q$ 叠加而成，如图 4-7 所示。




（a）$3q$ 点电荷贡献 $\varphi^{(0)}$　（b）偶极子贡献 $\vec{P}_1,\vec{P}_2,\vec{P}_3$　合成 $\varphi^{(1)}\equiv 0$

图 4-7　很多情况下，巧妙地选择 $O$ 点，可以简化问题，提高精度

## 推荐人物

述及多极子展开，我很容易想到曹昌祺老师。其实，我是没有“资格”介绍的。因为我既不是北大的，又不是曹昌祺老师的学生，甚至连一张曹昌祺老师的照片都未查到。

但是，从我的内心早就想推荐我国电磁理论领域的著名学者——曹昌祺老师和他的名著《电动力学》（人民教育出版社，1962）。

我是曹昌祺教授的“二代”学生。因为 1963 年教我《电动力学》的王一平老师去北大听过曹昌祺老师的课。当我一接触这门课，毫不夸张地说——全身都十分震惊。

众所周知，20 世纪 60 年代初的中国学术界正处于“不折不扣学苏联”的严格要求下，曹昌祺教授的著作犹如一阵春风吹进了中国学术园。这本书的特色非常明显：

（1）书中介绍了 $\delta$ 广义函数理论，把离散和连续统一了起来，系统建立了位置矢 $\vec{r}$ 和算子 $\nabla$ 理论。明确提出算子有函数和运算的两重特性。

（2）提出源和场两种情况，分别对应 $\vec{r}'$，$\nabla'$ 和 $\vec{r}$，$\nabla$。对于任何情况讨论都十分方便。

（3）全书极为简明，极为扼要，几乎找不出半句“废话”，开创了名著和大气的显著特点。据传，当年曹老师主要以此著评为正教授，不知是否是真。



## 参考文献

[1] 曹昌祺．电动力学．北京：人民教育出版社，1962．
[2] 梁昌洪．矢量场论札记．北京：科学出版社，2007．
[3] 叶其孝，沈永欢．实用数学手册．北京：科学出版社，1992．
[4] 王蔷，李国定，龚克．电磁场理论基础．北京：清华大学出版社，2001．

札记五

# 电磁波极化及其应用

电磁波有效接收必须满足三个重要条件：同频（或同频段），较大方向共线和电场 $\vec{E}$ 收发有公共取向部分——最后一点正是本文所要讨论的核心概念：**极化**。从本质上讲，电磁波极化特性是产生波空间各向不同性的根本原因。本文从最一般的椭圆极化波着手进行深入分析，从而得到椭圆参数$\alpha$，$a$ 和 $b$ 的定量关系。线极化和圆极化均为问题的退化情况。文中还讨论了各种极化波的转换与分解，并强调极化的工程应用。

## 0 引　言

本文是电磁场理论教学系列札记之五。

作为电磁发展史的一个重大事件是 Hertz 首创的电磁波通过空间实现（信号）传播实验。由此人们逐渐悟到电磁波的有效接收须具备三个条件：同频（或同频段）、较大方向共线和电场 $\vec{E}$ 的发射和接收有公共取向部分。最后一个条件是本文要讨论的核心——极化概念。

所谓极化即对于某空间固定点电场 $\vec{E}$ 的取向随时间的变化方式。由此可分为线极化波，圆极化波和椭圆极化波。

## 1 椭圆极化波

椭圆极化波属于最一般情况，我们对于 $E_x$ 和 $E_y$ 的振幅和相位不给出特定的约束，即有

$$\left.\begin{aligned} E_x &= E_{xm}\cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_y &= E_{ym}\cos(\omega t - kz + \varphi_y) \end{aligned}\right\} \tag{5-1}$$

现设

$$x_0 = \frac{E_x}{E_{xm}},\quad y_0 = \frac{E_y}{E_{ym}} \tag{5-2}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \omega t - kz + \varphi_x \\ \Delta\varphi &= \varphi_x - \varphi_y \end{aligned}\right\} \tag{5-3}$$

于是由式（5-1）可给出矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\Delta\varphi) & +\sin(\Delta\varphi) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \end{bmatrix} \tag{5-4}$$

及其逆关系

$$\begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin(\Delta\varphi)}\begin{bmatrix} \sin(\Delta\varphi) & 0 \\ \cos(\Delta\varphi) & +1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \tag{5-5}$$

进一步构成其二次型，有

$$\begin{bmatrix} \cos u & \sin u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \end{bmatrix} = \cos^2 u + \sin^2 u = 1 \tag{5-6}$$

根据式（5-5），得到

$$\begin{bmatrix} x_0 & y_0 \end{bmatrix}\left\{\frac{1}{\sin^2(\Delta\varphi)}\begin{bmatrix} \sin(\Delta\varphi) & -\cos\Delta\varphi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sin\Delta\varphi & 0 \\ -\cos\Delta\varphi & 1 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = 1 \tag{5-7}$$

具体为

$$\frac{1}{\sin^2(\Delta\varphi)}[x_0^2 - 2\cos(\Delta\varphi)x_0y_0 + y_0^2] = 1 \tag{5-8}$$

另外，图 5-1 画出了一般椭圆情况，图上给出了两套相互旋转的坐标 $xOy$ 和 $x'Oy'$。

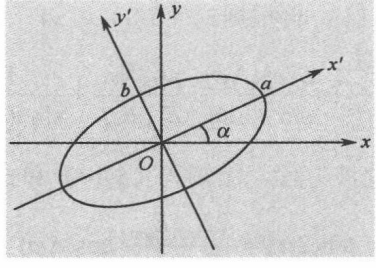



图 5-1　一般椭圆在 $xOy$ 和 $x'Oy'$ 两套坐标系中

对于$x'Oy'$坐标系，我们写出

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \tag{5-9}$$

或对应的矩阵形式

$$[x' \quad y']\begin{bmatrix}\frac{1}{a^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{b^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=1 \tag{5-10}$$

其中，$a$，$b$分别是椭圆的两个半轴，椭圆$x'$和$x$夹角为$\alpha$，也即有

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} \tag{5-11}$$

重新写出式（5-10）

$$[x \quad y]\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{a^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{b^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=1 \tag{5-12}$$

具体展开得

$$[x \quad y]\begin{bmatrix}\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2} & \left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha\\ \left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha & \frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\alpha}{b^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=1 \tag{5-13}$$

或者为

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)x^2-2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\sin\alpha\cos\alpha xy+\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\alpha}{b^2}\right)y^2=1 \tag{5-14}$$

令式（5-14）中$x=E_x$，$y=E_y$，再根据式（5-8）可知

$$\frac{1}{\sin^2(\Delta\varphi)}\cdot\frac{E_x^2}{E_{xm}^2}-\frac{2\cos(\Delta\varphi)}{\sin^2(\Delta\varphi)}\cdot\frac{E_xE_y}{E_{xm}E_{ym}}+\frac{1}{\sin^2(\Delta\varphi)}\cdot\frac{E_y^2}{E_{ym}^2}=1 \tag{5-15}$$

式（5-15）正是一般椭圆极化波方程。比较式（5-14）和式（5-15）易得

$$\tan(2\alpha)=\frac{2E_{xm}E_{ym}}{E_{xm}^2-E_{ym}^2}\cos(\Delta\varphi) \tag{5-16}$$

或直接给出转角 $\alpha$ 有

$$\alpha=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2E_{xm}E_{ym}}{E_{xm}^2-E_{ym}^2}\cdot\cos(\Delta\varphi)\right) \tag{5-17}$$

和椭圆的两个半轴

$$\left.\begin{aligned} a&=2\left|\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\right|\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{E_{xm}^2}+\frac{1}{E_{ym}^2}\right)}}\\ b&=2\left|\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\right|\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{E_{xm}^2}+\frac{1}{E_{ym}^2}\right)}}\end{aligned}\right\} \tag{5-18}$$

有了上述基础，我们可以讨论两种重要的退化情况。

**1．线极化波**

线极化波是椭圆极化的一种退化，退化的约束条件是 $E_x$ 和 $E_y$ 同相或反相，即

$$\Delta\varphi=\varphi_x-\varphi_y=0\text{ or }\pi \tag{5-19}$$

这时有 $\sin(\Delta\varphi)=0$，且椭圆的一个半轴

$$b=0 \tag{5-20}$$

由于

$$\tan(2\alpha)=\pm\frac{2\left(\frac{E_{ym}}{E_{xm}}\right)}{1-\left(\frac{E_{ym}}{E_{xm}}\right)^2} \tag{5-21}$$

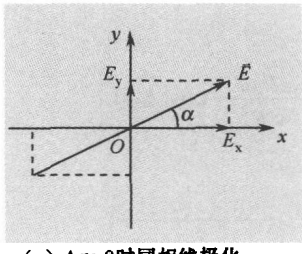
很易得到在线极化时，有

$$\tan(\alpha)=\pm\left(\frac{E_{ym}}{E_{xm}}\right) \tag{5-22}$$

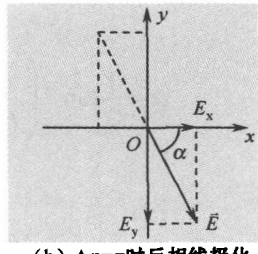
事实上有

$$\left.\begin{aligned} E_x&=E_{xm}\cos(\omega t-kz+\varphi_x)\\ E_y&=E_{ym}\cos(\omega t-kz+\varphi_x)\end{aligned}\right\} \tag{5-23}$$

对于空间中固定的 $z$ 点，电场 $\vec{E}$ 的矢端轨迹为直线，如图 5-2 所示，称为线极化波。




（a）Δφ=0时同相线极化




（b）Δφ=π时反相线极化

图 5-2 线极化波

### 2. 圆极化波

圆极化波是椭圆极化波的另一种退化，对应的约束条件为 $E_x$ 和 $E_y$ 两者振幅相等，相位相差 $\pm\frac{\pi}{2}$，即有

$$\left.\begin{aligned} E_m &= E_{xm} = E_{ym} \\ \Delta\varphi &= \varphi_x - \varphi_y = \pm\frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \tag{5-24}$$

这种情况下，椭圆方程式（5-15）退化成

$$E_x^2 + E_y^2 = E_m^2 \tag{5-25}$$

即圆方程，而两个半轴方程式（5-18）则成为

$$a = b = E_m \tag{5-26}$$

即圆半径，具体写为

$$\left.\begin{aligned} E_x &= E_m\cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_y &= \pm E_m\sin(\omega t - kz + \varphi_x) \end{aligned}\right\} \tag{5-27}$$

它们与坐标 x 轴的夹角 $\alpha$ 为

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{E_y}{E_x}\right) = \pm(\omega t - kz + \varphi_x) \tag{5-28}$$

十分明显，这种情况下，其电场 $\vec{E}$ 矢端转角 $\alpha$ 随时间 $t$ 变化。若 $\alpha = \pm(\omega t - kz + \varphi_x)$，则

$$\frac{d\alpha}{dt} = +\omega \tag{5-29}$$

即 $\vec{E}$ 以角速度 $\omega$ 逆时针旋转。且电场旋转方向（逆时针）与传播方向（$z$）成右手螺旋。因此把它称为**右旋圆极化波**；反之，若 $\alpha = -(\omega t - kz + \varphi_x)$，又有

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\omega \tag{5-30}$$

此时，$\vec{E}$ 以角速度 $\omega$ 顺时针旋转，且电场旋转方向（顺时针）与传播方向（$z$）成左手螺旋。于是称为**左旋圆极化波**，如图 5-3 所示。

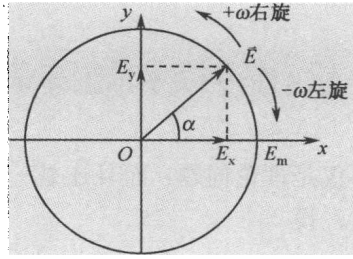



图 5-3　两种旋向的圆极化波

### 3. 两种旋向的椭圆极化波

现在，我们再返回来重新研究椭圆极化波的两种旋向。这里写出旋转夹角 $\alpha'$

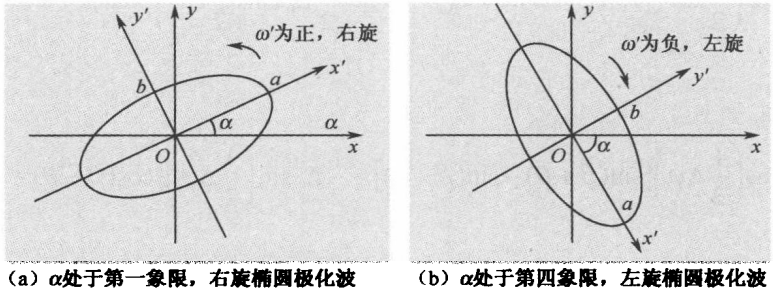
$$\alpha' = \tan^{-1}\left(\frac{E_y}{E_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{E_{ym}\cos(\omega t - kz + \varphi_y)}{E_{xm}\cos(\omega t - kz + \varphi_x)}\right) \tag{5-31}$$

此种情况下，广义地 $\vec{E}$ 旋转角速度 $\omega'$ 有

$$\frac{d\alpha'}{dt} = \omega' = \frac{E_{xm}E_{ym}\omega\sin(\Delta\varphi)}{E_{xm}^2\cos^2(\omega t - kz + \varphi_x) + E_{ym}^2\cos^2(\omega t - kz + \varphi_y)} \tag{5-32}$$

十分明显，式（5-32）中，当 $\pi > \Delta\varphi > 0$，即 $\sin(\Delta\varphi) > 0$，则有 $\frac{d\alpha'}{dt} = \omega' > 0$，这时可称为右旋椭圆极化波；反之，当 $-\pi < \Delta\varphi < 0$，即 $\sin(\Delta\varphi) < 0$，又有 $\frac{d\alpha'}{dt} = \omega' < 0$，这时可称为左旋椭圆极化波。

特别需要指出的是，式（5-31）所表示的椭圆极化波旋转角 $\alpha'$，它与式（5-17）椭圆夹角 $\alpha$ 的物理定义完全不同，后者是一个与时间 $t$ 无关的固定常数。但是令人奇怪的是，$\alpha$ 与 $\frac{d\alpha'}{dt} = \omega'$ 又紧密相关。深入研究式(5-17)表明：当 $\alpha$ 处于第一象限时，$\sin(\Delta\varphi) > 0$ 是右旋转椭圆极化波；当 $\alpha$ 处于第四象限时，$\sin(\Delta\varphi) < 0$ 是左旋转椭圆极化波，具体如图 5-4 所示。




（a）α处于第一象限，右旋椭圆极化波　　（b）α处于第四象限，左旋椭圆极化波

图 5-4　椭圆极化波的两种旋向

## 2 极化转换和矩阵表示

各种极化波的相互转化不仅是理论问题，而且还是一个实际应用问题。这里再一次从椭圆极化波的一般情况出发，设

$$\left.\begin{aligned}\beta&=\left(\omega t-kz+\frac{1}{2}(\varphi_{\mathrm{x}}+\varphi_{\mathrm{y}})\right)\\ E_0&=\sqrt{E_{\mathrm{xm}}^2+E_{\mathrm{ym}}^2}\\ \cos\theta&=\frac{E_{\mathrm{xm}}}{E_0},\sin\theta=\frac{E_{\mathrm{ym}}}{E_0}\end{aligned}\right\}\tag{5-33}$$

这时，本文的最基本公式（5-1）写为

$$\left.\begin{aligned}E_{\mathrm{x}}&=E_0\cos\theta\cos\left(\beta+\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)\\ E_{\mathrm{y}}&=E_0\sin\theta\cos\left(\beta-\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)\end{aligned}\right\}\tag{5-34}$$

由式（5-34）知

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{x}}&=\mathrm{Re}\left(E_0\cos\theta\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\beta+\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}E_0\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\beta+\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)}\right)\\ &=\frac{1}{2}E_0\,\mathrm{Re}\left\{\left(\cos\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)+\mathrm{j}\sin\left(\frac{1}{2}(\Delta\varphi)\right)\right)\left(\cos(\beta+\theta)+\mathrm{j}\sin(\beta+\theta)\right)+\right.\\ &\left.\left(\cos\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)+\mathrm{j}\sin\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)\right)\left(\cos(\beta-\theta)+\mathrm{j}\sin(\beta-\theta)\right)\right\}\end{aligned}\tag{5-35}$$

可以得到

$$E_{\mathrm{x}}=\frac{1}{2}E_0\cos\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)\left[\cos(\beta+\theta)+\cos(\beta-\theta)\right]-\frac{1}{2}E_0\sin\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)\left[\sin(\beta+\theta)+\sin(\beta-\theta)\right]\tag{5-36}$$

完全类似，有

$$E_{\mathrm{y}}=\frac{1}{2}E_0\cos\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)\left[\sin(\beta+\theta)-\sin(\beta-\theta)\right]-\frac{1}{2}E_0\sin\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)\left[\cos(\beta+\theta)-\cos(\beta-\theta)\right]\tag{5-37}$$

式（5-36）和式（5-37）构成我们讨论极化转换的主要基础。

**1．线极化情况**

这时，又可以分成两种情况：

（1）$\varphi_x=\varphi_y$，也就是$\Delta\varphi=0$的同相情况。于是

$$\left.\begin{aligned}E_x&=\frac{1}{2}E_0\cos(\beta+\theta)+\frac{1}{2}E_0\cos(\beta-\theta)\\E_y&=\frac{1}{2}E_0\sin(\beta+\theta)-\frac{1}{2}E_0\sin(\beta-\theta)\end{aligned}\right\}\tag{5-38}$$

十分明显，式（5-38）可看成两部分的叠加，其中一部分为

$$\left.\begin{aligned}E_{x1}&=\frac{1}{2}E_0\cos(\beta+\theta)\\E_{y1}&=\frac{1}{2}E_0\sin(\beta+\theta)\end{aligned}\right\}\tag{5-39}$$

它表示为右旋圆极化波；而另一部分是

$$\left.\begin{aligned}E_{x2}&=\frac{1}{2}E_0\cos(\beta-\theta)\\E_{y2}&=-\frac{1}{2}E_0\sin(\beta-\theta)\end{aligned}\right\}\tag{5-40}$$

则表示为左旋圆极化波。

（2）$\varphi_x-\varphi_y=\pi$，也就是$\Delta\varphi=\pi$的反相情况。这时有

$$\left.\begin{aligned}E_x&=-\frac{1}{2}E_0\sin(\beta+\theta)-\frac{1}{2}E_0\sin(\beta-\theta)\\E_y&=-\frac{1}{2}E_0\cos(\beta+\theta)+\frac{1}{2}E_0\cos(\beta-\theta)\end{aligned}\right\}\tag{5-41}$$

同样有一部分

$$\left.\begin{aligned}E_{x3}&=-\frac{1}{2}E_0\sin(\beta+\theta)\\E_{y3}&=-\frac{1}{2}E_0\cos(\beta+\theta)\end{aligned}\right\}\tag{5-42}$$

表示左旋圆极化波；而另一部分

$$\left.\begin{aligned}E_{x4}&=-\frac{1}{2}E_0\sin(\beta-\theta)\\E_{y4}&=\frac{1}{2}E_0\cos(\beta-\theta)\end{aligned}\right\}\tag{5-43}$$

则表示为右旋圆极化波。

不管是同相情况，还是反相情况均说明：**一个线极化波可以转换分解为振幅相等，旋向相反的两个圆极化波。**

**2．圆极化情况**

这时有 $E_m = E_{xm} = E_{ym}$，$\Delta\varphi = \varphi_x - \varphi_y = \pm\frac{\pi}{2}$。很易写出

$$\left.\begin{aligned} E_x &= E_m \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_y &= E_m \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \end{aligned}\right\}$$

其中，±分别对应右旋和左旋圆极化波，若我们重新写出

$$\left.\begin{aligned} E_x &= E_m \cos\beta \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right) - E_m \sin\beta \sin\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right) \\ E_y &= \pm\left\{E_m \cos\beta \sin\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right) + E_m \sin\beta \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)\right\} \end{aligned}\right\} \tag{5-44}$$

于是，又产生一般性结论：**一个圆极化波可以转换分解成两个线极化波。**

**3．椭圆极化一般情况**

我们又可以把式（5-36）和式（5-37）看成由两部分叠加而成

$$\left.\begin{aligned} E_{x1} &= \frac{1}{2}E_0 \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)\left[\cos(\beta+\theta) + \cos(\beta-\theta)\right] = E_0 \cos\theta \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)\cos\beta \\ E_{y1} &= \frac{1}{2}E_0 \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)\left[\sin(\beta+\theta) - \sin(\beta-\theta)\right] = E_0 \sin\theta \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)\cos\beta \end{aligned}\right\} \tag{5-45}$$

式（5-45）构成一个线极化波，此外

$$\left.\begin{aligned} E_{x2} &= -\frac{1}{2}E_0 \sin\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)\left[\sin(\beta+\theta) + \sin(\beta-\theta)\right] = -E_0 \cos\theta \sin\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)\sin\beta \\ E_{y2} &= \frac{1}{2}E_0 \sin\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)\left[-\cos(\beta+\theta) + \cos(\beta-\theta)\right] = -E_0 \sin\theta \sin\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)\sin\beta \end{aligned}\right\} \tag{5-46}$$

式（5-46）构成另一个线极化波。

于是可得，**一个椭圆极化波可以转换分解成两个线极化波。**一个十分自然的结论是：**一个椭圆极化波可以转换分解为两个相反旋向的四个圆极化波。**文献[1]，[2]中出现了错误的论述。

我们可以把各种不同的极化波采用矩阵形式表示，若用 $E^+$ 和 $E^-$ 表示最基本的右旋和左旋圆极化波，可写出

$$\begin{bmatrix} E^+ \\ E^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{j} \end{bmatrix} E_m \tag{5-47}$$

它用复振表示，又

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{j} \end{bmatrix} E_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta+\theta)} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta+\theta)} \end{bmatrix}\left(\frac{1}{2}E_0\right) \tag{5-48}$$

则有

$$\begin{bmatrix} E^{+} \\ E^{-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta+\theta)} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta+\theta)} \end{bmatrix} \left( \frac{1}{2} E_0 \right) \tag{5-49}$$

可以得到

$$\begin{bmatrix} E^{+} \\ E^{-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta+\theta)} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta+\theta)} \end{bmatrix} \left( \frac{1}{2} E_0 \right) \tag{5-50}$$

对于线极化 $\Delta\varphi = 0$ 的同相情况，有

$$\begin{bmatrix} E_{\mathrm{x1}} \\ \mathrm{j}E_{\mathrm{y1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta+\theta)} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta+\theta)} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta-\theta)} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta-\theta)} \end{bmatrix} \left( \frac{1}{2} E_0 \right) \tag{5-51}$$

而 $\Delta\varphi = \pi$ 的反相情况，又有

$$\begin{bmatrix} E_{\mathrm{x2}} \\ \mathrm{j}E_{\mathrm{y2}} \end{bmatrix} = \mathrm{j} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta+\theta)} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta+\theta)} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta-\theta)} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta-\theta)} \end{bmatrix} \left( \frac{1}{2} E_0 \right) \tag{5-52}$$

最后，对于椭圆极化波的一般情况，有

$$\begin{bmatrix} E_{\mathrm{x1}} \\ E_{\mathrm{x2}} \\ \mathrm{j}E_{\mathrm{y1}} \\ \mathrm{j}E_{\mathrm{y2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right) & \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right) & \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right) & \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right) \\ \mathrm{j}\sin\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right) & -\mathrm{j}\sin\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right) & \mathrm{j}\sin\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right) & -\mathrm{j}\sin\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right) \\ \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right) & -\cos\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right) & -\cos\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right) & \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right) \\ -\mathrm{j}\sin\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right) & -\mathrm{j}\sin\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right) & \mathrm{j}\sin\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right) & \mathrm{j}\sin\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta+\theta)} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta+\theta)} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta-\theta)} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta-\theta)} \end{bmatrix} \left( \frac{1}{2} E_0 \right) \tag{5-53}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} E_{\mathrm{x}} &= E_{\mathrm{x1}} + E_{\mathrm{x2}} \\ E_{\mathrm{y}} &= E_{\mathrm{y1}} + E_{\mathrm{y2}} \end{aligned}\right\} \tag{5-54}$$

## 3　极化的工程应用

从本质上讲，电磁波的极化特性是产生波空间各向不同性的根本原因。

调幅台发射的电磁波是在远区接近垂直于地面的垂直极化波；电视信号则采用水平

极化波。为了使波穿过雨层通信，大多采用圆极化波。同样，不论是遥控火箭还是卫星，只要是运动系统一般均采用圆极化波——因为它可以转换分解成两个线极化波。于是不论何种线极化，总有一部分分量可以接收。

随着电磁与人类各方面的更紧密结合，极化应用会越来越广泛。

## 4 结　　语

本文深入讨论电磁极化概念。从最一般的椭圆极化着手，具体给出了重要参数：夹角$\alpha$和两半轴 $a$ 和 $b$。文中研究了各种极化的转换和分解，并着重强调了极化的工程作用。

## 答问录

问：请教，关于电磁极化问题的讨论中，札记五有什么与其他著作或教材不同之处？

答：札记五讨论电磁极化问题，是一个理论结合实际的领域。

极化——简单来说就是空间一点上电场 $\vec{E}$ 矢量顶点随时间的变化趋向。众所周知，在电磁通信或联络中，收和发的场必须满足有共同取向。这是极化研究中最重要的应用。

本篇札记有两大特色：

（1）讨论极化以椭圆极化为中心，而把其他形式的极化仅仅看做椭圆极化的一个特例，如图 5-5 所示。而椭圆极化波的参数是采用矩阵二次型导出的，其特点是简单、明快。

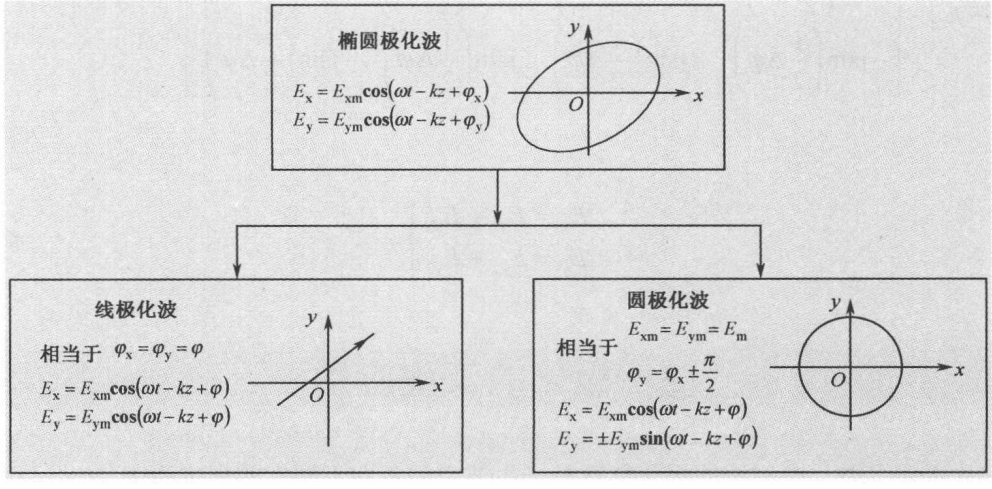



图 5-5　以椭圆极化波为中心

（2）深入讨论极化波之间的分解和组合，分别如图 5-6、图 5-7 和图 5-8 所示。

**问**：如果在通信收发的一方是运动系统，请问还要注意哪些问题?

**答**：上面讨论的 *xOy* 平面均心照不宣地是垂直于传播方向的面，如果一旦通信收发的一方是运动系统，那么 *xOy* 平面也是变化的并且显得更为重要，我们称为**极化面**。正如文中提及运动系统的天线一般采用圆极化波，于是不论处于什么位置，总有一部分量可以接收。

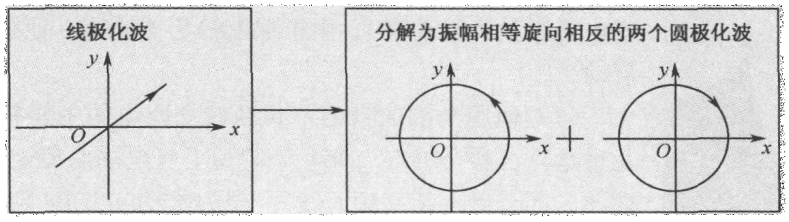



图 5-6　线极化波可以分解为振幅相等旋向相反的两个圆极化波

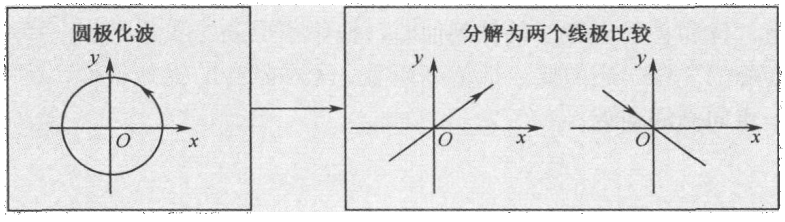



图 5-7　圆极化波可以分解为两个线极化波

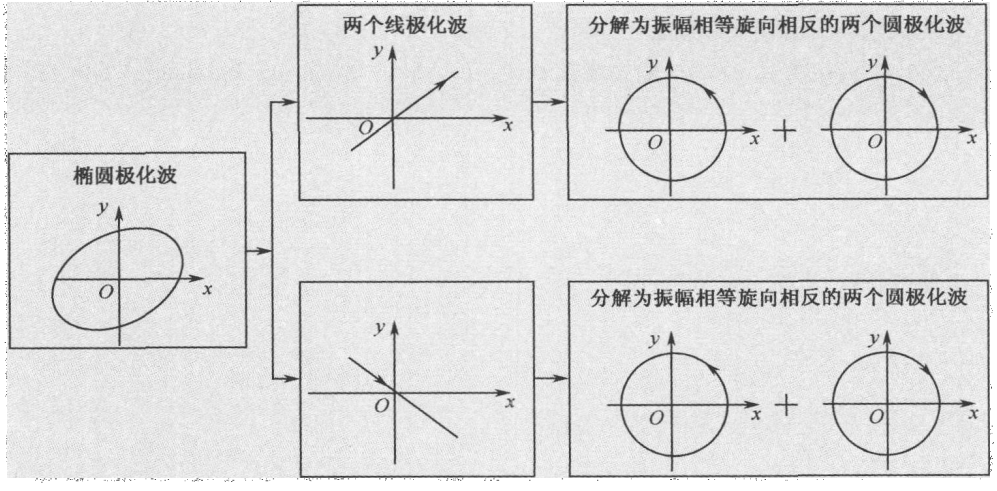



图 5-8　椭圆极化波可以分解为旋向相反的四个圆极化波

## 推荐人物



毕德显老师

这里介绍的不仅是位学者——毕德显，而且他确实是一位伟大的老师。

留美回来后，毕德显就投身于西安军事电讯工程学院（西安电子科技大学前身）。由于保密等历史原因，他很少参加外事活动。

（1）他用全部的身心，帮助建立西电的主要教学体系。他几乎是“百科全书”，1964 年撰写了《电磁场理论基础》；组织翻译了爱金堡《超高频天线》；全力推动和发展《脉冲技术》。

（2）在学校里，人们都称他为“老师的老师”。很多新方向，新苗头，他都事必躬亲，为老师讲课。

（3）他是一位和善的老者（我见到他时，他年事已高）我常常想，当今的中国除了要攀登科学高峰的先锋，还需要一批德高望重、无私献身的优秀教师，让中国的科学技术水平一步一步向高峰逼近。

## 参考文献

[1] 毕德显. 电磁场理论基础. 军事电信工程学院，1964: 213-217.

[2] 牛中奇，朱满座，卢智远，路宏敏等. 电磁场理论基础. 北京：电子工业出版社，2001:182-187.

札记六

# 电荷守恒和电流守恒

守恒定律是构成电磁理论大厦的重要支柱之一。在文中引入了扩展全空间概念，由此得到电荷守恒和电流守恒的一般形式。电荷守恒对应于时间对称性，而电流守恒则对应于空间的对称性。在不同的惯性系中，电流和电荷联合起来，构成四维矢量，它们具有 Lorentz 时间-空间对称性。文中还给出了应用实例。

## 0 引 言

本文是电磁场理论教学系列札记之六。

守恒定律是构成电磁理论大厦的重要支柱之一。这一点在目前不少教材中还没有得到足够的重视。诺贝尔物理学奖获得者 R.P.Feynman（费曼）1965 年在美国康乃尔大学作著名的梅森哲讲座《物理学的本性》系列讲演时，特地把“伟大的守恒定律”作为重要的一章[1]。他是这样来论述自己的观点的：“在学习物理诸定律时，你会发现有许多复杂的具体定律：引力定律、电磁定律、核作用定律，等等，但是在这些具体定律的多样性之上，会浮现出一些所有定律看来都要遵从的普遍原理。”这正是 Feynman 要深入论述的守恒定律。

进一步，很容易产生一个新的问题——为什么会有像守恒定律那样的普遍原理呢？

为了回答这个问题，必须从 1916 年数学泰斗希尔伯特邀请一位杰出的女科学家埃米·诺特到格丁根大学任教说起。按照希尔伯特自己的话：“诺特是我请来解决理论中能量守恒一些问题的。”

果不其然，诺特不负众望，仅仅用两年时间——在 1918 年，她对物理学最重要的

贡献“诺特定理”问世了！她给出了“对称对应守恒。直线运动所产生的对称相当于动量守恒，转动的对称性相当于角动量守恒，而时间对称性则相当于能量守恒。换句话说，大千世界种种运动之所以产生守恒性，是因为事物内部存在着对称性。”[2]

由于诺特的杰出工作，使对称性和守恒性两个领域彻底打通了。本文正是具体讨论电磁领域中的电荷守恒与电流守恒，以及它们与对称性之间的紧密联系。

## 1 电荷守恒

在整个科学的发展中，有一个十分显著的特点即当实验完成之后，思想和概念先行于数学。科学大家往往是从最根本的概念切入问题本质的。

关于电荷概念，Feynman 有着深刻的分析：“我愿意从一条最容易理解的守恒定律开始，那就是电荷守恒。在世界有一个数，世界的总电荷，无论发生了什么事，它总是不变的。如果你在一处地方失去了电荷，你就会在另一处找到它。守恒的是所有电荷的总量。”[1]

著名学者毕德显院士作了更具体的描述：“自然界只有两种电荷：正电荷和负电荷。宏观电荷不能被创造，也不能被消灭，它们只能从一个物体转移到另一个物体，或者从物体的一部分转移到另一部分。也就是说，在任何物理过程中，电荷的代数和是守恒的。这就是已由实验证实的电荷守恒定律。”[3]

从数学上，Maxwell 方程组完整地描述宏观电磁规律，而电荷守恒与其是兼容的。我们可以由 Gauss 定理着手，已经知道

$$\oiint_S \vec{D}\cdot\hat{n}_1 \mathrm{d}s = \iiint_v \rho \mathrm{d}v \tag{6-1}$$

其中，$\hat{n}_1$ 表示闭合 $S$ 面的外法线单位矢，所包围的体积为 $v$，如图 6-1 所示。

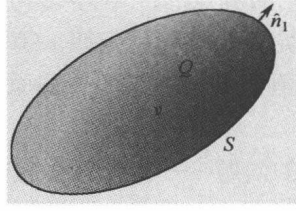



图 6-1　外法线 $\hat{n}_1$ 给出 $S$ 面包围的体积为 $v$

重新写出公式（6-1），有

$$\oiint_S \vec{D}\cdot\hat{n}_1 \mathrm{d}s = Q \tag{6-2}$$

其中

$$Q=\iiint_{v}\rho \mathrm{d}v \tag{6-3}$$

现在，我们再取 $\hat{n}_2$ 表示闭合 $S$ 面的内法线单位矢，这时 $S$ 面包含外部体积为 $v$，如图 6-2 所示。

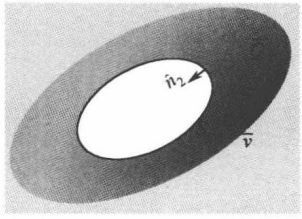



图 6-2　线 $\hat{n}_2$ 给出 $S$ 面包含外部体积为 $\bar{v}$

我们引入扩展全空间 $v_\infty$

$$v_\infty = v \cup \bar{v} \tag{6-4}$$

在 $v_\infty$ 中包含 $\infty$ 点，又可写出

$$\oiint_{s}\vec{D}\cdot\hat{n}_2 \mathrm{d}s=\bar{Q} \tag{6-5}$$

其中

$$Q=\iiint_{\bar{v}}\rho \mathrm{d}v \tag{6-6}$$

由于

$$\hat{n}_2=-\hat{n}_1 \tag{6-7}$$

易得

$$Q+\bar{Q}=0 \tag{6-8}$$

进一步我们扩展全空间 $v_\infty$ 重新写出

$$v_\infty = V \cup \bar{V} \tag{6-9}$$

其中 $V$ 包含了有限空间内的**全部电荷**，而 $\bar{V}$ 则包含 $\infty$ 点。我们定义 $Q_\infty$ 为 $\infty$ 处的（等效）电荷，有

$$Q_\infty=-\iiint_{\bar{V}}\rho \mathrm{d}v \tag{6-10}$$

于是最后得到

$$\iiint_{\bar{V}}\rho \mathrm{d}v+Q_\infty \equiv 0 \tag{6-11}$$

式（6-11）即我们给出的**电荷守恒**，它表示（包括∞点的）扩展全空间电荷总和为零。再在式（6-11）两边取导数$\frac{\partial}{\partial t}$

$$\iiint_{\bar{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}v + \frac{\partial}{\partial t} Q_{\infty} \equiv 0 \tag{6-12}$$

电荷守恒也对应于时间对称性或时间不变性。

## 2 电流守恒

几乎没有什么教材讨论电流的守恒性。而事实上，电流表示电荷的定向流动，因此电荷守恒性必然对于电流这一概念会有所反映。这里，首先写出电流连续性定理

$$\nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{6-13}$$

和电荷情况类似，我们构造封闭面$S$和体积$V$可以写出式（6-13）的积分形式

$$\oiint_{s} \bar{J} \cdot \hat{n} \mathrm{d}s + \iiint_{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}v = 0 \tag{6-14}$$

定义$I_{\infty}$为∞处的（等效）电流，有

$$I_{\infty} = -\frac{\partial Q_{\infty}}{\partial t} \tag{6-15}$$

则可写出

$$\oiint_{S} \bar{J} \cdot \hat{n} \mathrm{d}s + I_{\infty} \equiv 0 \tag{6-16}$$

式（6-16）即表示**电流守恒**。

特别需要指出，对于不随时间$t$变化的恒稳电流情况，式（6-16）可进一步简化为

$$\oiint_{S} \bar{J} \cdot \hat{n} \mathrm{d}s = 0 \tag{6-17}$$

换句话说，任何恒稳电流$\bar{J}$的封闭面积分必为零，类似地，当

$$\iiint_{V} \rho \mathrm{d}v = 0 \tag{6-18}$$

式（6-17）又一次成立。

我们又一次提及，电流守恒对应于空间的对称性或空间的不变性。具体地说，在不同的平移空间坐标中，电流守恒式（6-16）不变。

## 3　电流——电荷守恒

由上述电荷守恒和电流守恒的推导过程可知，必须引入包含 $\infty$ 点的扩展全空间。这一点和复变函数中扩展复平面和广义留数定理十分类似，进一步深究其物理本质是 $\infty$ 点为重要的力线出发点或归宿点。

本节进一步讨论运动坐标系。由 Einstein 狭义相对论可知，在不同的惯性系中，电流 $\vec{J}$ 和电荷 $\rho$ 构成四维向量，有

$$\begin{bmatrix} \vec{J} \\ \mathrm{j}c\rho \end{bmatrix} \tag{6-19}$$

其中，$c$ 表示真空中的光速，而 j 则代表虚数。在这种情况下，电流-电荷向量满足 Lorentz 不变性。假定惯性系在 $x$ 方向以 $v\hat{i}$ 速度运动不失一般性，具体写出

$$\begin{bmatrix} \vec{J}' \\ \mathrm{j}c\rho' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \dfrac{\mathrm{j}\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{-\mathrm{j}\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{J} \\ \mathrm{j}c\rho \end{bmatrix} \tag{6-20}$$

其中 $\beta = \dfrac{v}{c}$。十分清楚，在运动条件下 $\vec{J}$ 和 $\rho$ 不再单独守恒。而电流 $\vec{J}$ 和电荷 $\rho$ 联合起来满足 Lorentz 时空不变，也就是 Lorentz 守恒性。

## 4　应 用 实 例

扩展全空间的概念特别点出，对于最一般情况**不能认为电荷和电流是有限域分布**，否则会出现不必要的错误。

文献[4]是国内电磁场理论的经典著作。在由毕奥-沙伐定律导出安培定律的过程中，其关键一步是要证明磁位 $\vec{A}$ 的散度

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_s \frac{\vec{J}(\vec{r}') \cdot \hat{n} \mathrm{d}s'^{+}}{r} \tag{6-21}$$

为零。作者是这样论述的：**“体积分应包含全部电流存在的区域，**因而，在积分面上，$\vec{J}$ 应为零。”即

$$\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r})=0 \tag{6-22}$$

事实上，在很多情况下这一理由并不能成立，见下例。

【例】无限长电流 $I_l\hat{k}$ 不失一般性，求 $(x,y,0)$ 处 $\nabla\cdot\vec{A}$。如图 6-3 所示。

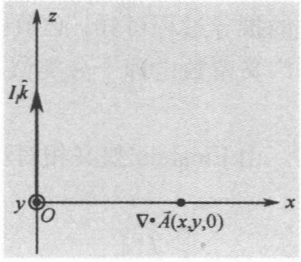



图 6-3 无限长电流 $I_l\hat{k}$ 的 $\nabla\cdot\vec{A}(x,y,0)$ 问题

【解】这是一个电磁理论的典型例题。很容易给出

$$\nabla\cdot\vec{A}(x,y,0)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{I_l z'\mathrm{d}z'}{(x^2+y^2+z'^2)^{3/2}}$$

很明显看出，被积函数是奇函数，对称限积分为 0，即有

$$\nabla\cdot\vec{A}(x,y,0)\equiv 0 \tag{6-23}$$

在本例中，无论多大的闭合 $S$ 面都不可能包含全部的电流。但是，它们仍满足 $\nabla\cdot\vec{A}=0$。

回过头来，我们似乎可以这样论述式（6-22）的理由："在包围电流源 $\vec{J}$ 足够大的曲面 $S$ 时，可以把所求的场点取在球心，$S$ 面取在半径为 $R$ 的球面，并不失一般性，这时有

$$\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r})=-\frac{\mu_0}{4\pi R}\oiint_s\vec{J}(\vec{r}')\cdot\hat{n}\mathrm{d}s'=0 \tag{6-24}$$

还可以指出，在双位（标位和磁位）问题中，式（6-22）相当于 Columb 规范。同时，当不随时间变化时，即为 Lorentz 规范。

## 5 结　语

本文在引入扩展全空间概念下，讨论了电荷守恒和电流守恒。电荷守恒反映时间不变性；电流守恒则反映空间的不变性；而在运动惯性系中，电流-电荷联合起来满足 Lorentz 时间-空间不变性。文中还指出，在实际应用中，务必要考虑 ∞ 处电荷或电流存在的可能性。

## 答问录

问：要理解札记六会遇到不少困难。

“守恒”和“对称”是两个大家熟知的概念。但是把这两者紧密联系起来却不是一件容易的事情，如图 6-4 所示。

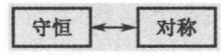



图 6-4 “守恒”和“对称”的紧密联系

特别是，按一般人理解：守恒属于物理（或化学等）领域，而对称却好像归属数学领域。

答：首先，我们要把概念尽量理解得宽泛一些。千万不要人为地把它们限制在某个或某些领域。

我想从最简单的几个问题着手讨论守恒和对称。

（1）数学方面。

在中学我们已经知道下述三角恒等式。

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta\equiv 1$$

上式实际上即我国古代最早发现勾股定理的归一形式。恒为 1 即表示“守恒”。

如果我们用几何表示，则两者“对称”于一个单位圆，如图 6-5 所示。

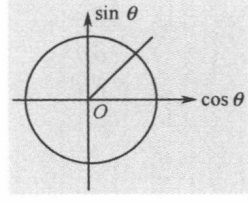



图 6-5　三角函数守恒“对称”于一个单位圆

（2）物理方面。

也是在中学，我们学过当力学系统无耗时，总能量 $W$ 守恒，有

$$W\equiv T+V$$

其中，$T$ 是系统动能，而 $V$ 是位能。

如果我们用几何表示，它们“对称”于一条直线，如图 6-6 所示。

两者比较，明显可知：对称不仅限于一个圆，也可以发展为一条直线。进一步考虑下述方程

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2\equiv 1$$

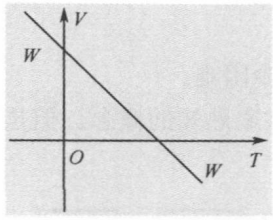



图 6-6 无耗力学系统能量守恒“对称”于一条直线

$x$ 和 $y$ 即对称于一个椭圆，如图 6-7 所示。

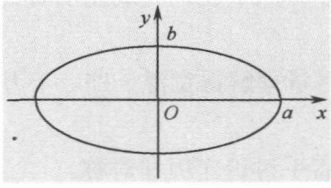



图 6-7 $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2\equiv 1$ 的守恒性对称于一个椭圆

有人会对上述的对称性提出怀疑：直线和椭圆算什么对称性呀！事实上，只要稍作变换它们又可以“转换”成圆。

如我们令

$$\begin{cases} X=\left(\dfrac{x}{a}\right) \\ Y=\left(\dfrac{y}{b}\right) \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} X^2=T \\ Y^2=V \end{cases}$$

则又可写出同样的 $X^2+Y^2\equiv 1$ 的单位圆对称，由上面简单讨论可知：守恒和对称性是早就“潜伏”在我们头脑中的概念，只是没有那么挑明罢了！

（3）复域推广。

我们这里附带提及。引入复数可以更加广义地看出，如一组曲线方程

$$\mathrm{ch}^2u-\mathrm{sh}^2u\equiv 1$$

只须设

$$\begin{cases} z_1 = \mathrm{ch}u \\ z_2 = i\mathrm{sh}u \end{cases}$$

显见

$$z_1^2 + z_2^2 \equiv 1$$

是一个复单位圆。

**问**：关于守恒和对称这样两个重要领域的联系渠道是由德国女科学家诺特彻底打通的，她的思想脉络可否进一步做些介绍？

**答**：确实值得深入介绍。

关于这一点，有三个主题词必须注意：德国、哥廷根大学和诺特。

据科学史专家的定量研究。如果一个国家的科学成果超过全世界总数的 1/4。则成为当时的“世界科学中心”相应持续的时间为科学兴隆期，此即著名的汤成定义。据此，德国在 1830—1920 年约 90 年时间内处于世界科学中心。哥廷根大学又是德国的文化中心、科学中心和学术中心。哥廷根大学有它自己的风格和特色。这是由一代宗师高斯、希尔伯特和 M.玻恩等人建立并倡导的。

关于哥廷根大学的鲜活描述在各类文献中比比皆是。例如当年学校周边的咖啡馆内布满了三五成群的老师和学生。咖啡桌上的台布写了各种数学和物理公式。根据长期不成文的规定：喝完咖啡后可带走桌布留着进一步创新或撰写论文。

埃米·诺特（1882—1935）——20 世纪最优秀的女数学家，她思考并完美解决这一问题并不是偶然的，而是与处于德国哥廷根大学——数学中心漩密切相关的。诺特（如图 6-8 所示）在 1903 年进入哥廷根大学，于 1908 年获得博士学位。



图 6-8　20 世纪最优秀女数学家埃米·诺特

当然，事物都存在两重性。在当年的德国，当年的哥廷根——依然有浓厚的封建意识：不允许女教师为学生开课。只有希尔伯特极力支持，并愤愤不平地说：“先生们，

我不认为性别是选择教师的标准。毕竟，大学评议会不是公众澡堂。”即便如此，结果也无能为力，诺特是“借”希尔伯特的名义讲《不变量理论》这门课的。

另外，德国和哥廷根都有一个十分优秀的传统，即数学物理不分家。注意到诺特的《不变量理论》就是在一顶“大帽子”——数学物理讲座条件下开的，而希尔伯特本人则深入研究过 Einstein 的狭义相对论即见一斑。

为什么要铺垫这些论述呢？因为倘若没有这一传统，1918 年，36 岁的诺特不会去研究物理守恒和对称的普遍关系。一句话：“诺特既懂数学又懂物理，她所建立的诺特定理揭示了物理守恒和数学对称的本质联系：任何一个对称，都有与之相应的守恒定理；反之，任何一个守恒定律也必有一个与之相应的对称性。”如图 6-9 所示。

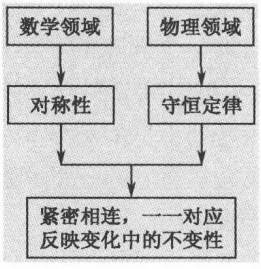



图 6-9　守恒与对称

特别要指出，同在德国的 Einstein 看了诺特寄给她的文献后，立即写信给希尔伯特大加赞赏：“让我很惊讶的是她可以用如此普遍的观点对待这一事物。”

**问**：本篇札记的主题是电荷守恒和电流守恒，在我们现有的大多数教材中，没有把它太当一回事，而你却抽出来作专题讨论，其他还有什么想法？

**答**：现在，大家几乎有一致的看法，即《电磁理论》已属于一个十分成熟的领域。其潜台词是：没有什么可谈的了。

其实，任何一个领域细分起来都包括概念、方法、计算以及应用——而所有各个部分都指向一个关键词：**思想**。随着其他学科的飞速发展，再反过来看“成熟领域”，原先很多不注意，不重视的地方会有一种豁然开朗，拨开云朵见太阳的感觉——电荷守恒和电流守恒即此一例。

这里，我们再把守恒概念深入一步，以期使读者真实感觉到浅薄的思想与深刻的思想相差多么遥远！

Feynman 在美国康奈尔大学做“物理定律的本性”系列演讲时尖锐地指出以下两方面。

（1）关于电荷守恒深入分析后存在两种情况。

- 电荷从盒子的一个地方移动到另一个地方；
- 电荷在某一地方**消失了**，**同时**又在另一个地方出现了，而这两件事是即时关联，所

以电荷的总量永远不会改变。

Feynman 说：上述两种情况是互不相同的，对于 Case 2 我们称之为**定域的电荷守恒**。它的含义比单独说电荷的总量不变要深刻得多。Einstein 已论证，要是守恒必为定域守恒。

（2）电荷守恒是量子离散守恒。

Feynman 告诉我们：关于电荷还有另外一件有趣的事，一件非常奇怪的事，**我们今天还没有得到一种真正的解释**。这件事与守恒定律完全无关，它是完全独立的。另一件事，即**电荷总是一种基本单元的倍数**（用我们的话来说，电荷是离散量子化的）。

问：关于守恒，你还有什么深入思想要讨论的？

答：有。著名的诺贝尔物理学奖获得者杨振宁在作《20 世纪理论物理学发展的主旋律》这一报告时明确提出：由于有电荷守恒的理念，一个正电子如果被消灭掉了，它的电荷就给了另外一个正电子，这个电荷不会从 1 突然变成 0。因为这个关系，有了电磁场，就有了 Maxwell 方程。同样，能量守恒引来了引力场。

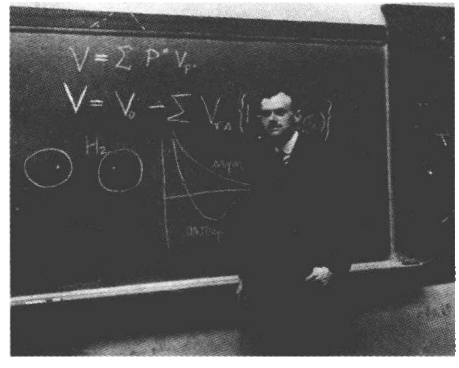
“守恒这个理念跟相位不变之间有密切的关系。”请注意，杨振宁先生提出上述观点时明确指出——这个我不能给大家介绍得更清楚。可见，更深入地考察和研究表明：**守恒与相位不变性相关**。

## 推荐人物

这里想要介绍杰出的物理学家狄拉克。

（1）狄拉克的“神来之笔”。

狄拉克的思想是绝大多数人所跟不上的。当海森堡、薛定谔正研究量子力学时，狄拉克却抛出了以他自己名字命名的 Dirac 方程。此前电子的自旋一直是硬加进去讨论的。而他写出方程后，自然地从±1、±j 得出一个自旋来而且磁矩是完全对的。



杰出物理学家狄拉克

对于磁单极的讨论也是狄拉克的神来之笔。

（2）狄拉克的“秋水文章不染尘”。

这句话是杨振宁对他的最高评价。他具体地说：只要看狄拉克的文章，就会有这种秋水文章不染尘的感觉。他的文章没有一点渣滓。你跟着他走总觉得妙不可言，而且最后得出的是没有人能预先想象得到的东西。

（3）狄拉克的“大数（准守恒）假设”。

之所以把狄拉克放到本篇札记的推荐人物里，就是因为他提出了惊世骇俗的“大数假设”，这是狄拉克守恒思想的巧妙体现。他抓住物理研究最小微观粒子和最大宇宙两头，具体给出最小最大常数比。

1937 年，狄拉克提出大数假设，研究了各种常数，如表 6-1 所示。构造了几个量如表 6-2 所示。

**表 6-1 物理学中各种常数**

| 常 数 | 字母表示 |
|---|---|
| 光速 | $c$ |
| 电子电荷 | $e$ |
| 质子质量 | $m_p$ |
| 电子质量 | $m_e$ |
| Newton 引力常数 | $G$ |
| 哈勃常数 | $H$ |
| 宇宙平均密度 | $\rho$ |

**表 6-2 Dirac 大数假设**

| | |
|---|---|
| 最小/最大力之比<br>（原子静力/万有引力） | $a_1=\dfrac{e^2}{Gm_em_p}=2.3\times10^{39}$ |
| 最小/最大力之比<br>（原子静力/万有引力） | $a_2=\dfrac{m_ec^3}{e^2H}=7\times10^{39}$ |
| 最小/最大力之比<br>（原子静力/万有引力） | $a_3=\dfrac{8\pi\rho e^3}{3m_pH^3}=1.2\times(10^{39})^2$ |

Dirac 提出问题：为什么自然界出现的所有无量纲大数均与 $10^{39}$ 有关。

尽管这一准守恒假设吸引了大量物理学家，但是也引来很多不同的声音，可以说在整个物理学领域掀起阵阵波浪。

而 Dirac 依然认为：这是发展宇宙学和原子理论的有力工具！

在杨振宁的《从历史角度看四种相互作用的统一》演讲中有如下内容，如表 6-3 所示。

**表 6-3 四种相互作用**

| 四种相互作用 | 强 度 |
|---|---|
| 强 | 1 |
| 电磁 | $10^{-2}$ |
| 弱 | $10^{-13}$ |
| 引力 | $10^{-38}$ |

其中，引力/强作用力为$10^{-38}$，值得关注。

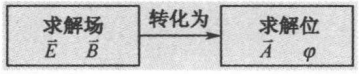
# 附　录

关于恒稳场中$\nabla\cdot\vec{A}=0$上述正文中已经提及磁矢位$\vec{A}$和Lorentz规范、Columb规范，这里进一步讨论它的深刻含义。

我们知道电磁理论中的双位求场是基于

$$\begin{cases}\vec{B}=\nabla\cdot\vec{A}\\ \vec{E}=-\nabla\varphi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\end{cases}\tag{A-1}$$

其中，$\vec{A}$称为磁矢位而$\varphi$称为电标位，于是就把原先求场$(\vec{E},\vec{B})$的问题转化为求位$(\vec{A},\varphi)$的问题，如图A-1所示。




图A-1　采用双位法求解场

所有著作都有如下类似叙述：这时若我们适当选择

$$\nabla\cdot\vec{A}=-\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\tag{A-2}$$

即可把位波动方程大大简化，有

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}\\ \nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}\end{cases}\tag{A-3}$$

式（A-2）**称为Lorentz规范。**

值得注意的是，少有著作提及写出式（A-2）的理由。实际上，选择规范的本质在于：磁矢位的定义是由矢量场$\vec{A}$的旋度给出（见图 A-1），但是，根据著名的矢量场定理，**要确定一个矢量场必须同时知道它的旋度和散度**，于是就产生一个选择的自由度。**Lorentz规范的本质正是通过适当选择确定$\nabla\cdot\vec{A}$，从而确定$\vec{A}$。**

作为对应量，电标位$\varphi$的定义式（A-1）也造成它可以差一个常函数（即位的标准点不同），只不过人们不太注意罢了。

当我们研究恒稳场的特殊情况，即

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \equiv 0 \tag{A-4}$$

则 Lorentz 规范就变成

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \tag{A-5}$$

我们称式（A-5）为 Columb 规范，它也是对 $\nabla \cdot \vec{A}$ 的一种合理选择。

## 参考文献

[1] R.P. Feynman. 物理定律的本性. 关洪译. 长沙：湖南科学技术出版社，2005.
[2] 杨建邺，彭红玲. 与诺贝尔奖镲肩而过的 6 位科学女性. 哈尔滨：哈尔滨出版社，2006.
[3] 毕德显. 电磁场理论. 北京：电子工业出版社，1985.
[4] 曹昌祺. 电动力学. 北京：人民教育出版社，1962.

札记七

# 电磁互易对称性和无耗对称性

本文深入探讨了两种电磁对称性：Lorentz 互易对称性和厄密（Hermite）无耗对称性。给出了它们在多端口网络系统中的表达形式。文中指出，非互易无耗网络的阻抗矩阵可以存在实部，即 $Z=R+\mathrm{j}X$，且 $R^{\mathrm{T}}=-R$ 反对称，而网络型 Foster 定理则深刻地揭示了 $S$ 参数的频率导数 $\partial S^{+}/\partial(\mathrm{j}\omega)S$ 有广义惯性，即 $a^{+}(\partial S^{+}/\partial(\mathrm{j}\omega)S)a$ 不能过大。最后本文得到在辛意义下，电磁互易对称即辛内积正交，而二阶归一化电阻 $\boldsymbol{R}$ 矩阵正好是典型的辛矩阵。

## 0 引　言

本文是电磁场理论教学系列札记之七，专题讨论电磁互易对称性和无耗对称性。

1974 年 5 月 30 日，毛泽东接见李政道博士所问的第一个问题是——“为什么对称是重要的？”[1]对于毛主席当然不仅限于物理层面，而是提高到哲学和社会层面考察这一问题。最简单的回答莫过于杨振宁在《场与对称性》一文中总结的：“今天人们（已）普遍接受这样一个信条：自然界所有的基本力都是由一些对称原理产生的；这也就是说，对称性支配相互作用。”[2]

采用这一观点看问题，可以认为揭示电磁对称性也就是揭示电与磁的内在本质。最简单地，我们把电磁问题归结为如下算子方程[3]

$$\mathcal{L}(u)=g \tag{7-1}$$

其中，$\mathcal{L}$ 表示线性标量或矢量算子，它包括媒质在内的复杂作用，式（7-1）中未提及边界条件（或边界算子）并不失一般性。

对于式（7-1）可以同时存在着两种广义的理解：一种理解是，已知激励 $g$（具体地，例如电荷 $\rho$，电流 $\bar{J}$；或参考磁荷 $\rho_m$，磁流 $\bar{M}$），求出所产生的广义场 $u$（位 $\varphi$ 或场 $\bar{E}$，$\bar{H}$）；另一种理解是已知一种广义场 $g$（如 $\bar{E}$ 或 $\bar{H}$），求出另一种场 $u$（如 $\bar{H}$ 或 $\bar{E}$）。

电磁对称性主要有两大类：电磁媒质的对称性和方程、物理量本身的对称性。本文将重点讨论媒质通过算子 $\mathcal{L}$ 所反映出的对称性。

## 1 Lorentz 互易对称性

Lorentz 互易对称性是十分重要的电磁媒质对称特性，而且在工程实际上所遇到的绝大多数媒质均属此列，即称为互易媒质。研究发现，媒质的特性反映在算子 $\mathcal{L}$ 中，而要表示这种对称性则采用二次量——即内积的方法。

引入 Dirac 内积符号〈，〉反映电磁二次量作用。其标量内积定义为

$$\langle a,b\rangle=\iiint_v ab\,\mathrm{d}\tau' \tag{7-2}$$

现在，让我们研究两个不同的算子 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}^a$，其对应方程是

$$\begin{cases}\mathcal{L}(u)=g\\ \mathcal{L}^a(v)=h\end{cases} \tag{7-3}$$

且令它们的相互内积相等，有

$$\left\langle v^{\mathrm{T}},g\right\rangle=\left\langle u^{\mathrm{T}},h\right\rangle \tag{7-4}$$

也就是

$$\left\langle v^{\mathrm{T}},\mathcal{L}(u)\right\rangle=\left\langle u^{\mathrm{T}},\mathcal{L}^a(v)\right\rangle \tag{7-5}$$

式（7-4）和式（7-5）中的上标 T 表示转置，是为今后扩展成矩阵形式而备用。当满足式（7-5）时，称 $\mathcal{L}^a$ 是 $\mathcal{L}$ 的伴随算子，特别当

$$\mathcal{L}^a=\mathcal{L} \tag{7-6}$$

则进一步称 $\mathcal{L}$ 为**自伴算子**，它满足

$$\left\langle v^{\mathrm{T}},\mathcal{L}(u)\right\rangle=\left\langle u^{\mathrm{T}},\mathcal{L}(v)\right\rangle \tag{7-7}$$

满足式（7-7）的算子 $\mathcal{L}$ 具有 Lorentz 互易对称性。从概念上它揭示这种媒质条件下的源和场之间所存在的奇妙对称性，如图 7-1 所示。

作为例子，设 $\mathcal{L}=-\varepsilon\nabla^2$，则有

$$\iiint_v(\psi\nabla^2\Phi-\Phi\nabla^2\psi)\,\mathrm{d}\tau'=\oiint_s\left(\psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}-\Phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\mathrm{d}s' \tag{7-8}$$

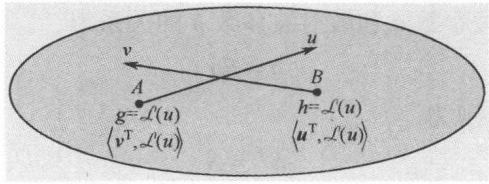



图 7-1　在 $A$ 点上 $g=\mathcal{L}(u)$ 的源，在 $B$ 点产生 $u$ 场；在 $B$ 点上 $h=\mathcal{L}(v)$ 的源，在 $A$ 点产生 $v$ 场，则 $\langle v^{\mathrm{T}},\mathcal{L}(u)\rangle=\langle u^{\mathrm{T}},\mathcal{L}(v)\rangle$

将体积分扩展到全空间时，式（7-8）右边趋于零，即

$$\iiint_{v}\psi\nabla^2\Phi\mathrm{d}\tau'=\iiint_{v}\Phi\nabla^2\psi\mathrm{d}\tau' \tag{7-9}$$

或写成内积形式有

$$\langle\psi,\mathcal{L}(\Phi)\rangle=\langle\Phi,\mathcal{L}(\psi)\rangle \tag{7-10}$$

式（7-10）给出了 $\mathcal{L}=-\varepsilon\nabla^2$ 算子的互易对称性（或算子自伴）。很重要的一点是它反映媒质 $\varepsilon$ 的互易性。对于一般的电磁形式可给出

$$\iiint_{v}(\vec{E}_2\cdot\vec{J}_1+\vec{H}_2\cdot\vec{M}_1)\mathrm{d}\tau'=\iiint_{v}(\vec{E}_1\cdot\vec{J}_2+\vec{H}_1\cdot\vec{M}_2)\mathrm{d}\tau' \tag{7-11}$$

或写成内积形式

$$\langle\vec{E}_2,\vec{J}_1\rangle+\langle\vec{H}_2,\vec{M}_1\rangle=\langle\vec{E}_1,\vec{J}_2\rangle+\langle\vec{H}_1,\vec{M}_2\rangle \tag{7-12}$$

相对于式（7-10）的标量内积，式（7-12）是矢量内积。我们把式（7-11）和式（7-12）称之为电磁 Lorentz 互易定理的一般形式。如果单从媒质角度，互易媒质满足对称性

$$\begin{cases}\varepsilon^{\mathrm{T}}=\varepsilon\\ \mu^{\mathrm{T}}=\mu\end{cases} \tag{7-13}$$

其中，$\varepsilon$ 和 $\mu$ 均为最一般的张量形式。

近年来，电磁计算的研究趋向是把一个复杂系统归结为多端口网络，如图 7-2 所示。

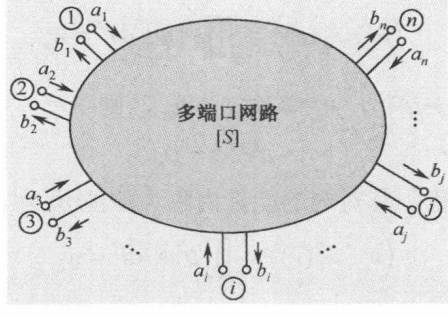



图 7-2　多端口网络[s]

这种情况下，入射波参数 $\boldsymbol{a}$ 和散射波参数 $\boldsymbol{b}$ 的关系为

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{a} \tag{7-14}$$

而 Lorentz 互易对称性表现为

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{S} \tag{7-15}$$

如果把网络看作广义二端口分块矩阵，即

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_{\mathrm{II}} & \boldsymbol{S}_{\mathrm{III}}\\ \boldsymbol{S}_{\mathrm{III}} & \boldsymbol{S}_{\mathrm{IIII}}\end{bmatrix} \tag{7-16}$$

则又有

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{III}}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{S}_{\mathrm{III}} \tag{7-17}$$

## 2 厄密（Hermite）无耗对称性

媒质的能量特性始终是人们关注的焦点之一。通常情况下，工程师们都追求系统无耗。同时，为了方便，还在设计时忽略小损耗而采用无耗近似。本文先引入能量内积，再具体研究厄密无耗对称性。

### 1. 标量能量内积

我们定义

$$\left\langle u^{+},\mathcal{L}_{u}(u)\right\rangle>0 \tag{7-18}$$

为标量能量内积，它可以反映静场能量。其中+表示厄密符号，具体有 $()^{+}=(\ ^{*})^{\mathrm{T}}=[()^{\mathrm{T}}]^{*}$，即转置共轭，而 T 是为向矩阵型过渡。

作为例子，如 $\mathcal{L}_{u}=-\varepsilon\nabla^{2}$，$u=\varphi$ 而 $g=\rho$，则有算子方程

$$-\varepsilon\nabla^{2}\varphi=\rho \tag{7-19}$$

式（7-19）表示静电位方程，其对应的能量内积为储能 $w_{\mathrm{e}}$

$$\left\langle u^{+},\mathcal{L}_{u}(u)\right\rangle=\iiint_{v}\varepsilon|\varphi|^{2}\mathrm{d}\tau'=w_{\mathrm{e}} \tag{7-20}$$

另一方面，我们又令 $\mathcal{L}_{v}=-\mu\nabla^{2}$，$v=\phi$ 而 $g=\rho_{\mathrm{m}}$，则

$$-\mu\nabla^{2}\phi=\rho_{\mathrm{m}} \tag{7-21}$$

式（7-21）表示静磁位方程，其对应的能量内积为储能 $w_{\mathrm{m}}$

$$\left\langle v^{+},\mathcal{L}_{v}(v)\right\rangle=\iiint_{v}\mu|\phi|^{2}\mathrm{d}l'=w_{\mathrm{m}} \tag{7-22}$$

特别注意，在静场条件下，$u$ 表示电能内积和 $v$ 表示磁能内积相互独立，没有关系，还

可指出，能量算子的本征值 $\lambda$ 为正，且存在稳定型的 Rayleigh 商式。

**2．矢量能量（功率）内积**

矢量内积定义为

$$\left\langle \vec{a},\vec{b}\right\rangle = \iint_S \vec{a}\times\vec{b}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S' \tag{7-23}$$

它表示指向端口的截面 $S$ 内积，而能量内积的实质是通过截面 $S$（有方向）的功率内积，有

$$\left\langle \vec{u}^{+},\mathcal{L}_u(\vec{u})\right\rangle > 0 \tag{7-24}$$

采用电场 $\vec{E}$ 表示为

$$P_{\mathrm{e}} = \left\langle \vec{E}^{+},\mathcal{L}_{\mathrm{e}}(\vec{E})\right\rangle \tag{7-25}$$

其中

$$\mathcal{L}_{\mathrm{e}} = \frac{1}{\eta^2\varepsilon}\nabla\times \tag{7-26}$$

且 $\eta=\sqrt{\mu/\varepsilon}$ 表示波阻抗。类似地，采用磁场 $\vec{H}$ 表示有

$$P_{\mathrm{m}} = \left\langle \vec{H}^{+},\mathcal{L}_{\mathrm{m}}(\vec{H})\right\rangle \tag{7-27}$$

其中

$$\mathcal{L}_{\mathrm{m}} = \frac{\eta^2}{\mu}\nabla\times \tag{7-28}$$

我们给出厄密无耗对称性为

$$\left\langle \vec{E}^{+},\mathcal{L}_{\mathrm{e}}(\vec{E})\right\rangle = \left\langle \vec{H}^{+},\mathcal{L}_{\mathrm{m}}(\vec{H})\right\rangle \tag{7-29}$$

写成积分形式为

$$\iint_S \vec{E}^{+}\times\left[-\varepsilon\nabla\times\vec{E}\right]\cdot\hat{\mathrm{n}}\mathrm{d}S' = \iint_S \vec{H}^{+}\times\left[-\mu\nabla\times\vec{H}\right]\cdot\hat{n}\mathrm{d}S' \tag{7-30}$$

从概念上，它可以理解为电矢量内积与磁矢量内积相等。本质是端口的全部输入功率等于全部的输出功率，如图 7-3 所示。

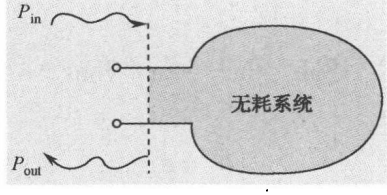



图 7-3　无耗系统的本质 $P_{\mathrm{in}} = P_{\mathrm{out}}$

注意到将式（7-29）转化到式（7-30）时，已经把静场和交变场的算子统一起来。从多端口网络的思路可知式（7-30）等价于

$$\boldsymbol{I}^{+}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{I}=-\boldsymbol{I}^{+}\boldsymbol{Z}^{+}\boldsymbol{I} \tag{7-31}$$

进一步写出功率关系

$$\begin{cases}P_{\text{in}}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}^{+}\boldsymbol{a}\\ P_{\text{out}}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}^{+}\boldsymbol{b}\end{cases} \tag{7-32}$$

无耗条件等价于 $P_{\text{in}}=P_{\text{out}}$，即

$$\boldsymbol{a}^{+}\{\boldsymbol{S}^{+}\boldsymbol{S}-\boldsymbol{I}\}\boldsymbol{a}=0 \tag{7-33}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵，因为式（7-33）与激励 $\boldsymbol{a}$ 无关，于是

$$\boldsymbol{S}^{+}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I} \tag{7-34}$$

式（7-34）是厄密无耗对称性的网络型**矩阵表示**。同样，如果把多端口网络看成广义二端口分块网络，它的无耗条件为

$$|\det \boldsymbol{S}_{\text{II}}|=|\det \boldsymbol{S}_{\Pi\Pi}| \tag{7-35}$$

$$\det(\boldsymbol{S}^{+}{}_{\text{I}\Pi}\boldsymbol{S}_{\text{I}\Pi})=\det(\boldsymbol{S}_{\text{I}\Pi}\boldsymbol{S}^{+}{}_{\Pi\text{I}}) \tag{7-36}$$

式（7-35）和式（7-36）分别为**广义模对称性与广义似互易性**。特别当 $m=\dfrac{1}{2}n$，即 $\boldsymbol{S}_{\text{I}\Pi}$，$\boldsymbol{S}_{\Pi\text{I}}$ 均为方阵时，进一步有[4]

$$|\det \boldsymbol{S}_{\text{I}\Pi}|=|\det \boldsymbol{S}_{\Pi\text{I}}| \tag{7-37}$$

令分块矩阵

$$\begin{cases}\det \boldsymbol{S}_{\text{II}}=|\det \boldsymbol{S}_{\text{II}}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{\Phi}_{\text{II}}}\\ \det \boldsymbol{S}_{\Pi\Pi}=|\det \boldsymbol{S}_{\Pi\Pi}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{\Phi}_{\Pi\Pi}}\\ \det \boldsymbol{S}_{\text{I}\Pi}=|\det \boldsymbol{S}_{\text{I}\Pi}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{\Phi}_{\text{I}\Pi}}\\ \det \boldsymbol{S}_{\Pi\text{I}}=|\det \boldsymbol{S}_{\Pi\text{I}}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{\Phi}_{\Pi\text{I}}}\end{cases} \tag{7-38}$$

还可给出散射矩阵 $\boldsymbol{S}$ 行列式

$$\det \boldsymbol{S}=\exp[\mathrm{j}(\boldsymbol{\Phi}_{\text{II}}+\boldsymbol{\Phi}_{\Pi\Pi})] \tag{7-39}$$

和广义特征相位 $\boldsymbol{\Phi}$ 为

$$\boldsymbol{\Phi}=(\boldsymbol{\Phi}_{\text{I}\Pi}+\boldsymbol{\Phi}_{\Pi\text{I}})-(\boldsymbol{\Phi}_{\text{II}}+\boldsymbol{\Phi}_{\Pi\Pi})=\pm\pi \tag{7-40}$$

单从媒质角度，厄密无耗满足

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}^{+}=\boldsymbol{\varepsilon}\\ \boldsymbol{\mu}^{+}=\boldsymbol{\mu}\end{cases} \tag{7-41}$$

其中，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 都是一般的张量（矩阵）形式。

## 3　网络型 Foster 定理，广义惯性

首先，我们把 Foster 定理拓展到多端口无耗系统，如图 7-4 所示。

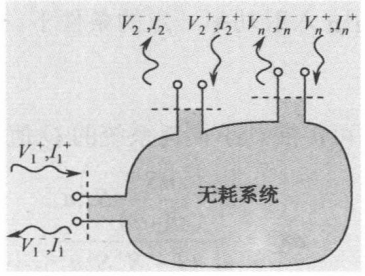



图 7-4　多端口 Foster 定理

在对外 $n$ 个端口写出矩阵型 Maxwell 方程组

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\vec{H}\\ \nabla\times\vec{H}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\vec{E}\end{cases}\tag{7-42}$$

在下节我们将严格证明：对于多端口无耗网络，阻抗 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵有实部 $\boldsymbol{R}$，即

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{R}+\mathrm{j}\boldsymbol{X}\tag{7-43}$$

且

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{R}\tag{7-44}$$

即非互易无耗的 $\boldsymbol{R}$ 满足反对称，于是 $n$ 端口无耗网络的 Foster 定理是

$$\boldsymbol{I}^{+}\frac{\partial\boldsymbol{Z}}{\partial(\mathrm{j}\omega)}\boldsymbol{I}=4(w_{\mathrm{m}}+w_{\mathrm{e}})\tag{7-45}$$

由于 $\boldsymbol{R}$ 的反对称特性有

$$\boldsymbol{I}^{+}\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\omega}\boldsymbol{I}\equiv 0\tag{7-46}$$

从概念上说，无耗 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵中的 $\boldsymbol{R}$ 不产生有功功率，于是仍可归于 Foster 电抗定理，即

$$\boldsymbol{I}^{+}\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial\omega}\boldsymbol{I}=4(w_{\mathrm{m}}+w_{\mathrm{e}})\tag{7-47}$$

式（7-47）右边与储能相关，可知 $\dfrac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial\omega}$ 是**正定矩阵**。进一步采用散射矩阵时，可得

$$\boldsymbol{a}^{+}\left(\frac{\partial\boldsymbol{S}^{+}}{\partial(\mathrm{j}\omega)}\boldsymbol{S}\right)\boldsymbol{a}=2(w_{\mathrm{m}}+w_{\mathrm{e}})\tag{7-48}$$

于是$\frac{\partial \boldsymbol{S}^{+}}{\partial(\mathrm{j}\omega)}\boldsymbol{S}$也是正定矩阵。尽管式（7-47）和式（7-48）均表示频率变化率，但略有不同：对于不同的频率电流$\boldsymbol{I}$可以出现0点，于是$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \omega}$可以趋于无穷；而入射波$\boldsymbol{a}$则只能是非零的，于是方程式（7-48）所给出的Foster定理揭示了算子的频率关系与储能相关，它深刻反映着**广义惯性**：在$\boldsymbol{a}^{+}\boldsymbol{a}$入射功率一定的条件下，$\boldsymbol{a}^{+}\left(\frac{\partial \boldsymbol{S}^{+}}{\partial(\mathrm{j}\omega)}\boldsymbol{S}\right)\boldsymbol{a}$不能太大，它受到$(w_{\mathrm{m}}+w_{\mathrm{e}})$的限制。

特别要指出，Foster定理可扩展到小损耗系统的$Q$值，即有

$$\omega Q=\frac{\boldsymbol{a}^{+}\left(\frac{\partial \boldsymbol{S}^{+}}{\partial(\mathrm{j}\omega)}\boldsymbol{S}\right)\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^{+}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}^{+}\boldsymbol{S})\boldsymbol{a}} \tag{7-49}$$

式（7-49）是典型的Rayleigh商式，其对应的最大（或最小）有

$$\max \omega Q=\lambda \tag{7-50}$$

$$\det\left\{\frac{\partial \boldsymbol{S}^{+}}{\partial(\mathrm{j}\omega)}\boldsymbol{S}-\lambda(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}^{+}\boldsymbol{S})\right\}=0 \tag{7-51}$$

而所对应的$\boldsymbol{a}$即最佳激励矢，其中品质因数$Q$是复杂的多端口系统，可以拓展到开放系统。

## 4 电磁互易对称性和无耗对称性

我们已经讨论了算子$\mathcal{L}$的互易特性来自于媒质：$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\mu}$；而算子$\mathcal{L}$的无耗特性来自于媒质：$\boldsymbol{\varepsilon}^{+}=\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{\mu}^{+}=\boldsymbol{\mu}$。这是完全不同的两个独立渠道。但是，另一方面无耗媒质中呈现某种广义似互易性表明：这两种电磁对称性存在着奇妙的“亲缘关系”，很值得进一步探究，如表7-1所示。

更有甚者，竟然有人直接从无耗特性“证明”[5]了必有互易特性：根据网络无耗$\boldsymbol{S}^{+}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}$即可导出

$$\boldsymbol{Z}^{+}+\boldsymbol{Z}=0 \tag{7-52}$$

对于无耗系统，阻抗矩阵$\boldsymbol{Z}$不应有实部，即$\boldsymbol{Z}=\mathrm{j}\boldsymbol{X}$，同时由式（7-52）得到

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{X} \tag{7-53}$$

和

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{S} \tag{7-54}$$

表 7-1　网络互易性和无耗特性

| 网络参数 | 互易特性 | 无耗特性 |
| --- | --- | --- |
| 散射矩阵[S] | $[S]=[S]^{\mathrm{T}}$<br>$S_{ij}=S_{ji}$ | $[S]^{-1}=[S]^{+}$<br>若把[S]写成分块矩阵形式，即<br>$[S]=\begin{bmatrix} S_{\mathrm{I}} & S_{\mathrm{II}} \\ S_{\mathrm{III}} & S_{\mathrm{IV}} \end{bmatrix}$<br>且各分块矩阵均匀方阵时，有<br>$\lvert\det[S_{\mathrm{I}}]\rvert=\lvert\det[S_{\mathrm{IV}}]\rvert$<br>广义模对称性<br>$\lvert\det[S_{\mathrm{II}}]\rvert=\lvert\det[S_{\mathrm{III}}]\rvert$<br>广义似互易性 |
| 传输矩阵[A] | $\det[A]=1$ | 在 $2n$ 端口网络中，有<br>$\lvert\det[A]\rvert=1$ 似互易性[4] |
| 阻抗矩阵[Z]或<br>导纳矩阵[Y] | $[Z]^{\mathrm{T}}=[Z]$<br>$[Y]^{\mathrm{T}}=[Y]$ | 反对称性 $[R]^{\mathrm{T}}=-[R]$，$[G]^{\mathrm{T}}=-[G]$<br>似互易性 $[X]^{\mathrm{T}}=[X]$，$[B]^{\mathrm{T}}=[B]$ |

这就是所谓根据网络无耗“证明”了网络互易，其中根本的错误在于认为无耗系统的阻抗矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 不存在实部。事实上，对于最简单的双端口无耗网络，即有

$$\frac{\boldsymbol{Z}_{12}}{\boldsymbol{Z}_{21}}=\frac{\boldsymbol{S}_{12}}{\boldsymbol{S}_{21}} \tag{7-55}$$

当媒质非互易时有 $\boldsymbol{S}_{12}\neq\boldsymbol{S}_{21}$，但 $|\boldsymbol{S}_{12}|=|\boldsymbol{S}_{21}|$ 即

$$\frac{\boldsymbol{Z}_{12}}{\boldsymbol{Z}_{21}}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\quad(\theta\neq 0) \tag{7-56}$$

于是证明了 $\boldsymbol{Z}_{12}$ 和 $\boldsymbol{Z}_{21}$ 存在实部，即 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{R}+\mathrm{j}\boldsymbol{X}$，结合无耗条件式（7-52），严格证明了

$$\begin{cases}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{X}\end{cases} \tag{7-57}$$

即阻抗矩阵 $\boldsymbol{R}$ 反对称，而电抗矩阵 $\boldsymbol{X}$ 对称。作为实例，这里讨论理想无耗非互易传输线，其散射矩阵

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} & 0\end{bmatrix}\qquad(\theta\neq\varphi) \tag{7-58}$$

很易导出电阻矩阵 $\boldsymbol{R}$ 为

$$\boldsymbol{R}=\frac{1}{1-\cos(\theta+\varphi)}\begin{bmatrix}0 & (\cos\theta-\cos\varphi)\\ -(\cos\theta-\cos\varphi) & 0\end{bmatrix} \tag{7-59}$$

进一步写成

$$\boldsymbol{R}=R_0\boldsymbol{J}=R_0\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} \tag{7-60}$$

其中 $R_0=\dfrac{(\cos\theta-\cos\varphi)}{1-\cos(\theta+\varphi)}$，而 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ 称为归一化电阻矩阵。

## 5 结　　语

本文所讨论的两种电磁对称性：Lorentz 互易对称性，厄密（Hermite）无耗对称性，其根源均来自媒质。

完全不同的领域，Hamilton 把分析力学改造成为正则系统存在内在奇妙的对称性；普林斯顿研究院著名科学家 Weyl 据此建立了辛（Symplectic）对称和保辛理论。其中，辛内积正交定义为[6]

$$\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{v}_2=0 \tag{7-61}$$

其中

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{I}\\ -\boldsymbol{I} & 0\end{bmatrix} \tag{7-62}$$

令人惊异的是电磁互易定理正是在辛意义下的**辛内积正交**，有

$$\left\langle \begin{bmatrix}E_{1x},E_{1y},E_{1z},J_{1x},J_{1y},J_{1z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_{2x}\\ E_{2y}\\ E_{2z}\\ J_{2x}\\ J_{2y}\\ J_{2z}\end{bmatrix}\right\rangle=\left\langle \bar{E}_1\cdot\bar{J}_2-\bar{E}_2\cdot\bar{J}_1\right\rangle\equiv 0 \tag{7-63}$$

同样，在非互易无耗系统中二阶归一化电阻矩阵 $\boldsymbol{R}$ 满足辛矩阵的定义，即[6]

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{J} \tag{7-64}$$

把电磁对称性和分析力学的辛对称联系起来，是很值得今后深入探讨的课题。

## 答问录

问：你是否先谈一下这篇札记七产生的思想和特点？

**答：对称性**是系列札记的显明主题之一。大家一定要记得札记六已经把守恒和对称这两个概念紧密联系起来，而下一篇札记还要进一步讨论对称性。因此，在这篇札记的答问录中，我们首先来讨论现代电磁计算理论的三个主要方法：网络、算子和内积，如图 7-5 所示。

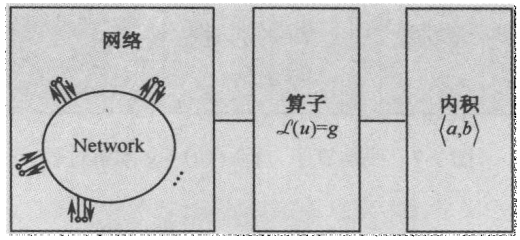



图 7-5　现代电磁计算理论的三个主要方法：网络、算子和内积

### 1．网络 Network 方法

网络的方法源自**网络的思想**。

网络的思想是为了解决一个未知事物或探索一个复杂系统。处理时采用把未知事物内部“包”起来，给它**激励**（Exciting）后看它的反应（Reaction），由此求出它的特性，如图 7-6 所示。

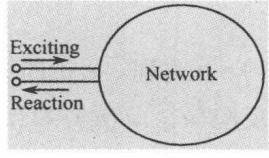



图 7-6　网络思想——采用激励和反应求出未知系统特性

网络思想的具体处理即转换为网络方法，对于大多数线性系统，成为矩阵方程。

$$[s][a]=[b]$$

### 2．算子 Operator 方法

算子方程

$$\mathcal{L}(u)=g$$

其中，$g$ 是广义源——激励；而 $u$ 则是广义场——反应。它正是网络思想的**代数体现**。

于是算子方程十分具体地反映出已知源 $g$ 要求场 $u$ 的过程。其中，$\mathcal{L}$ 表示从源到场的任意复杂过程。字母 $\mathcal{L}$ 反映大多数情况下的线性算子。抽象来说很易解出

$$u=\mathcal{L}^{-1}(g)$$

其中，$\mathcal{L}^{-1}(\ )$ 是相应的逆算子。而事实上具体的电磁问题大多都解不出解析结果。

我们采用的办法如图 7-7 所示，其中关键两个新概念：（准）完备函数系 $\{u_i\}$ 和内积。

又要准完备，又要便于计算，这似乎是摆在我们面前的难题。但是且慢，我们以一维情况为例。如果计算域是 $[x_1 \quad x_2]$。则 $\{u_i\}$ 可取全域基，也可取分域基。作为一个典型我们取脉冲 Pulse 函数如图 7-8 所示。出于精度考虑，必须把 $n$ 取得足够大。

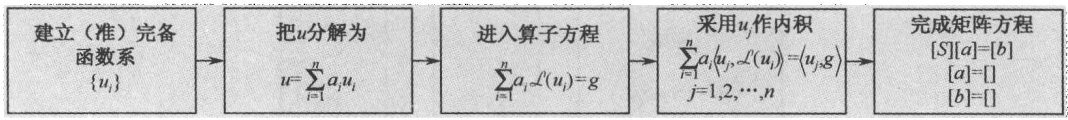



图 7-7　线性算子方程 $\mathcal{L}(u)=g$ 求解过程

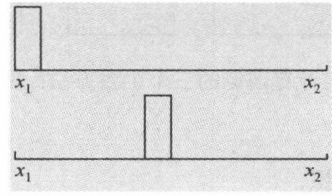



图 7-8　脉冲 Pulse 分域基展开

Pulse 展开能够既简单，又有可计算性，只有对于 $n$ 比较大时，要用计算机求解方程组。

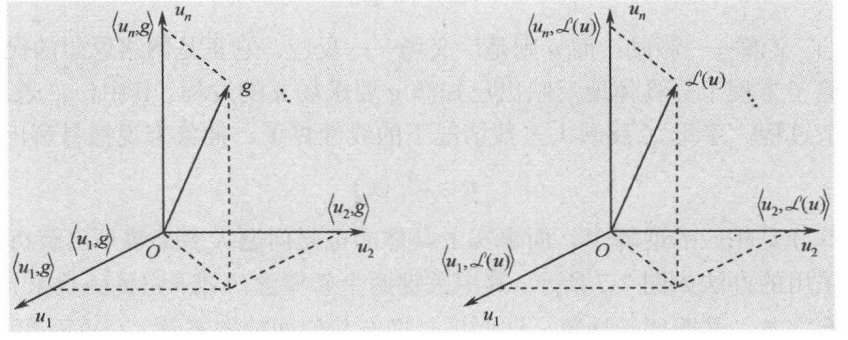
### 3．内积 Inner product 方法

建立函数系 $\{u_i\}$ 后，求解 $\mathcal{L}(u)=g$ 方程。采用的关键方法是内积方法，从物理概念讲即用 $u_j$ 去激励两边。分别构成反应 $\langle u_j \quad \mathcal{L}(u_i)\rangle$ 和 $\langle u_j \quad g\rangle$，从而最后求出 $\{a_i\}$。

如果从最直观的几何意义上考察：内积即表示所求的未知矢量向各坐标的**投影**，当三维情况下有矢径 $\vec{r}$

$$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$$

利用 3 个投影分量（$x$，$y$，$z$）表示出 $\vec{r}$，而目前情况最一般的已知函数矢 $\boldsymbol{g}$ 和未知函数矢 $\mathcal{L}(u)$。这时所谓函数系 $\{u_i\}$，$i$=1，2，…，$n$ 即 $n$ 维坐标系。它们的投影如图 7-9 所示。




（a）已知函数矢 $\boldsymbol{g}$ 的投影
$\langle u_1 \quad g\rangle,\langle u_2 \quad g\rangle,\cdots,\langle u_n \quad g\rangle$

（b）未知函数矢 $\mathcal{L}(u)$ 的投影
$\langle u_1 \quad \mathcal{L}(u)\rangle,\langle u_2 \quad \mathcal{L}(u)\rangle,\cdots,\langle u_n \quad \mathcal{L}(u)\rangle$

图 7-9　内积的几何意义——表示函数矢在设定坐标系 $\{u_i\}$ 上的投影

在设定未知函数 $u=a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_nu_n$［注意：这一设定完全相当于三维情况的 $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$，其中 $(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 对应 $(\hat{i}\quad\hat{j}\quad\hat{k})$ 而 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 则对应 $(x\quad y\quad z)$，即我们所要求的未知函数各投影。

有了上述基础，我们可写出

$$\mathcal{L}(u)=a_1\mathcal{L}(u_1)+a_2\mathcal{L}(u_2)+\cdots+a_n\mathcal{L}(u_n)=\sum_{i=1}^{n}a_i\mathcal{L}(u_i)$$

其中，由于 $\{u_i\}$ 已知，即进一步认为 $\mathcal{L}(u_i)$ 也已知，于是图 7-9（b）的投影为

$$\langle u_j\quad\mathcal{L}(u)\rangle=\sum_{i=1}^{n}a_i\langle u_j\quad\mathcal{L}(u)\rangle$$

对应的线性方程组是

$$\sum_{i=1}^{n}\langle u_j\quad\mathcal{L}(u)\rangle a_i=\langle u_j\quad g\rangle$$

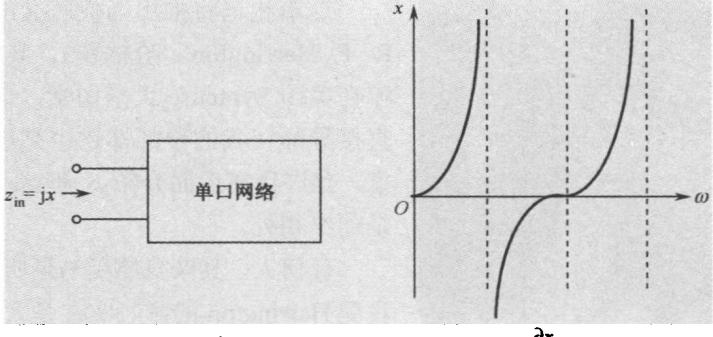
即可求出 $a_i$，也就是（在一定的精度内）求出了未知函数 $u$。上面讨论的网络，算子和内积构成了新的电磁计算方法——**矩量法**（method of the moment）的主要基础。

**问**：札记七讨论了网络型 Foster 定理，有点新意，请进一步加以解释。

**答**：大家都熟悉无耗单口网络系统的 Foster 定理，简单来说即端口的电抗斜率 $\dfrac{\partial x}{\partial w}$ 恒正。

$$\frac{\partial x}{\partial w}>0$$

具体如图 7-10 所示。




（a）单口网络　　（b）$\frac{\partial x}{\partial w}>0$

图 7-10　单口网络的 Foster 定理一端口电抗斜率恒正

而札记七进一步将它推广成多端口网络系统，如图 7-4 所示。

这时导出了两个公式，如图 7-11 所示，它们是相互等价的。

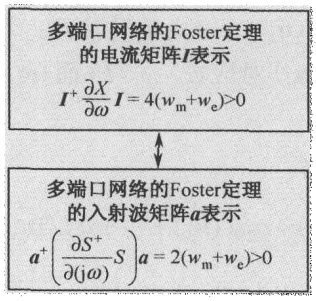



图 7-11　网络型 Foster 定理的两种表示

表面看来，由电流矩阵 $\boldsymbol{I}$ 表示中可知 $\frac{\partial x}{\partial \omega}$ 是**正定矩阵**，而入射波矩阵 $\boldsymbol{a}$ 表示中 $\frac{\partial S^{+}}{\partial(j\omega)}S$ 也是**正定矩阵**。

两者并无不同。实际上并非如此：对于电流矩阵 $\boldsymbol{I}$ 表示，因为不同频率 $\omega$ 的**电流 $\boldsymbol{I}$ 允许出现 0 点**，因此 $\frac{\partial x}{\partial \omega}$ 允许（不一定）出现无穷；而对于入射波矩阵 $\boldsymbol{a}$，考虑到 $\boldsymbol{a}$ **不会出现 0 点**，因此，$\boldsymbol{a}^{+}\left(\frac{\partial S^{+}}{\partial(j\omega)}S\right)\boldsymbol{a}$ 不能太大，其受到储能 $(w_{m}+w_{e})$ 的限制，这就是一种**广义惯性**。

## 推荐人物



Harrington 教授（左）和作者在 Syracuse 大学

这篇札记将推出当代著名的电磁理论专家 R. F. Harrington（哈林登）。我于 1980—1982 年在美国 Syracuse 大学留学，尽管他不是我的直接导师（我的导师郑钧也是极著名的电磁专家，允许我在后面介绍），但毫不夸张地说，也是朝夕相处。

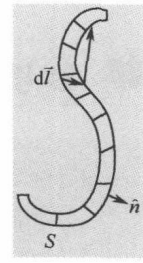
任何人，其亲身感受与道听途说完全不同。我受 Harrington 的影响实在是太大了。

（1）Harrington 做任何事都讲思想、讲方法。

我在 Harrington 身上才体会：什么是科学做事，什么是盲目做事。在很长一段时间内我们认为做事就是为了完成一个任务。但是，看了他的工作，学了他的著作，我终于一下悟出来——要把**事情科学化**。

举一个例子：在 Harrington 之前早就有人实际用计算机计算电磁问题，泛函分析应用也不稀罕。但是，Harrington 总结的网络、算子、内积和他深入浅出的矩量法使我由衷钦佩。

在《矩量法》中，把网络、算子和内积的方法具体运用到线天线和散射体上。问题的一开头就一鸣惊人——Harrington 开门见山地归纳：**线天线和散射体完全是一回事。**



线天线或散射体

他说："天线与散射体的基本区别只在于源点的位置不同而已，如果源点在物体上，则为天线；如果源点是远离物体的，则可看成是散射体。" Harrington 的这种观点，用中国人常说的"欲穷千里目，更上一层楼。"他比我们站得更高一层，因此，比我们看得远得多。

再说到线天线或散射体，通过他分段和简单推导最后写出

$$[Z][I]=[V]$$

这竟然是与 $ZI=V$ 一样的**推广矩阵型的欧姆定律**。在这一刻，说心里话，我被**彻底震慑**了！线天线也满足欧姆定理——只是它是矩阵型的。

我记起，Weil 评价华罗庚："华玩矩阵就像玩数一样。"我终于悟到了："矩阵是数的更上一层推广：凡是数中出现的规律，在矩阵领域必然有所体现，现在我们可以毫不夸张地说：线性世界就是矩阵，矩阵就是线性世界。"（梁昌洪. 话说对称. 北京：科学出版社, 2010:222.）

真所谓：学君一思想，胜读十年书。

（2）Harrington 教我 Group 和 Seminar。

和学生定期团团坐在一起，平等、无拘无束地讨论工作和学习问题。学生讲，教师也讲。这正是美国大学 Group 和 Seminar。它使我十分震慑。Harrington 多次叫我到他的 Group 报告我的工作，使我从心里高兴。我们学美国，学的正是这种较先进的体制。我至今仍受益未尽。

当时，Harrington 有一个主要助手 R.Martz，身高 1.9 m，瘦长条，穿的一件风棉衣可能 10 年未洗（Syracuse 很冷，号称雪城），但是其对计算机极其精通。我们私下都说 Harrington 有一个好运气——他的头脑，Martz 的手。

（3）Harrington 的人格魅力。

Harrington 作为一个学者，他对我的最大影响是人格魅力。有一次因为一个问题我在中午直接闯进他的办公室，只见他佝曲地躺在一张帆布床上。床放在办公室桌边上。他受着严重胃痛的折磨，我被当时的情景彻底震慑了——只好说："I am sorry!"，之后悄悄出去。

事后，我写过多篇日记：作为 Harrington，他不会像在国内可以获得劳模或先进工

作者。他这样忘我地工作，为的是什么？事情已经整整过去了 30 年。

每当我要偷懒时，每当我要求放松时，Harrington 的高大形象便立在我的眼前，我想这就是他说不尽，道不清的人格魅力！



## 参考文献

[1] 李政道．对称与不对称．北京：清华大学出版社，2000.
[2] 杨振宁．场与对称性（近代物理史研究（二））．上海：复旦大学出版社，1986.
[3] R.F.Harrington．矩量法．王尔杰等译．北京：国防工业出版社，1981.
[4] C.H.Liang，Yan.Shi．S Parameter Theory of Lossless Block Network．2009.
[5] 梁昌洪，史小卫．电磁网络的无耗性和互易性．电子科技杂志，1992，NO，1.
[6] 钟万勰．力，功，能量与辛数学．大连：大连理工大学出版社，2007.

札记八

# 电磁对称和对称算子

电磁领域研究中，经常会遇到能量关系中的无耗对称、源点和场点之间的互易对称、几何方面的镜像对称等。本文引入对称算子统一地描述各种电磁对称。特别指出：电磁互易对称即 Weyl 在力学领域中提出著名的辛对称。文中还深入研究了二次型对称形式和一次型对称形式。

## 0 引　言

本文是电磁场理论系列札记之八。

电磁领域研究中，对称性是一个重要课题，经常会遇到能量关系中的无耗对称、源点和场点之间的互易对称、几何方面的镜像对称等。如何采用统一的方式描述这些对称，很值得我们深入研究。

为此，首先要针对具体研究问题，引入相应的电磁矩阵 $\boldsymbol{E}$ 和对应的对称算子 $\boldsymbol{O}$。并由二次型对称或一次型对称统一表示各种规范的电磁对称性。

特别应该指出：电磁互易对称即著名数学家 Weyl 在力学领域中提出的著名辛对称，文中还深入讨论了电磁辛内积和辛正交。

## 1 二次型对称

二次型对称的一般性表示如下：

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{O}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O} \tag{8-1}$$

其中，T 表示矩阵转置。

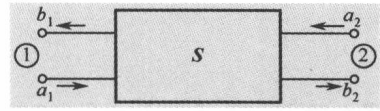



图 8-1　双口散射 $\boldsymbol{S}$ 矩阵

**1．无耗对称**

经常遇到的电磁散射矩阵 $\boldsymbol{S}$ 定义为

$$\boldsymbol{Sa}=\boldsymbol{b} \tag{8-2}$$

其中，$\boldsymbol{b}$ 为散射波矩阵；$\boldsymbol{a}$ 为入射波矩阵。这里研究的双端口散射矩阵如图 8-1 所示。

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

很易得到[1]

$$\text{入射波功率 } P_{\text{in}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^{+}\boldsymbol{a} \tag{8-3}$$

$$\text{散射波功率 } P_{\text{SC}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^{+}\boldsymbol{b} \tag{8-4}$$

其中，$()^{+}=[^{*}]^{\mathrm{T}}=(^{\mathrm{T}})^{*}$，称为 Hermite 符号。由此，我们写出无耗对称

$$\boldsymbol{S}^{+}\boldsymbol{IS}=\boldsymbol{I} \tag{8-5}$$

对比一般表示式（8-1），可知 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{S}$，而对称算子 $\boldsymbol{O}=\boldsymbol{I}$ 即恒等算子。

如果注意到坐标旋转矩阵是

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{8-6}$$

那么，恒等矩阵可看出是 $\theta=0°$ 的旋转矩阵，即

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\boldsymbol{R}(\theta=0°) \tag{8-7}$$

进一步，将式（8-5）两边取行列式易得

$$\left|\det(\boldsymbol{S})\right|=1 \tag{8-8}$$

具体有

$$\det(\boldsymbol{S})=e^{\mathrm{j}(\varphi_{11}+\varphi_{22})} \tag{8-9}$$

其中，$S_{11}=\left|S_{11}\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{11}}$，$S_{22}=\left|S_{22}\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{22}}$。

特别值得指出：对于 $\boldsymbol{S}$ 散射矩阵，无耗对称式（8-5）可进一步推广到 $n$ 端口网络（$n\geqslant 2$），如图 8-2 所示。在这种情况下，有

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn} \end{bmatrix} \tag{8-10}$$

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{8-11}$$

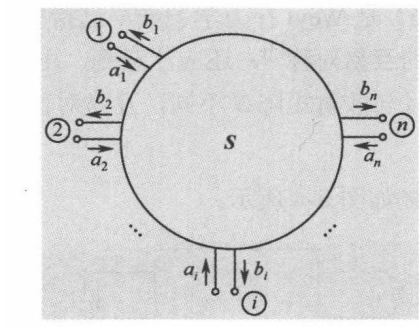



图 8-2　$n$ 端口 $\boldsymbol{S}$ 网络

## 2. 互易对称

双口传输矩阵 $\boldsymbol{A}$，可以采用二次型表示互易对称。图 8-3 给出了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 基本模型。

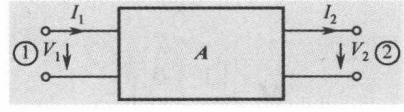



图 8-3　双口传输矩阵 $\boldsymbol{A}$

它的基本定义是

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \tag{8-12}$$

当系统互易时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有性质[1]

$$\det[\boldsymbol{A}]=1 \tag{8-13}$$

具体写出

$$A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}=1 \tag{8-14}$$

我们注意到

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & (A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}) \\ -(A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}) & 0 \end{bmatrix}=\det(A)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{8-15}$$

它可以写成二次型对称形式

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J} \tag{8-16}$$

其中

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} \tag{8-17}$$

从旋转矩阵的角度，$\boldsymbol{J}$ 相当于90°旋转，即

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{R}(\theta=90^{\circ}) \tag{8-18}$$

此处特别指出，式（8-16）是 Weyl 在力学领域早已指出的**辛对称**[2]定义，因此，力学上的辛对称即为电磁领域的**互易对称**[3]，还应注意到，由于电磁领域 $\boldsymbol{A}$ 可以是复数，这一点比力学更为扩展，而且与散射矩阵 $\boldsymbol{S}$ 不同，互易对称不能扩展到 $n$ 端口网络。

### 3. 几何互易对称

我们研究双口阻抗矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 如图 8-4 所示。

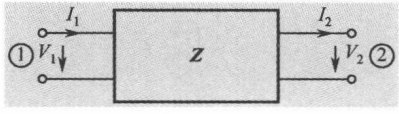



图 8-4　双口阻抗 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵

$$\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{21} & Z_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\ I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix}$$

引入镜像对称算子 $\boldsymbol{M}$

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \tag{8-19}$$

若阻抗 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵满足

$$\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{M} \tag{8-20}$$

具体写出有

$$\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{21}\\ Z_{12} & Z_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{21} & Z_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix}Z_{11}^2-Z_{21}^2 & Z_{11}Z_{12}-Z_{21}Z_{22}\\ Z_{11}Z_{12}-Z_{21}Z_{22} & Z_{12}^2-Z_{22}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \tag{8-21}$$

很容易得到

$$Z_{11}=Z_{22} \tag{8-22}$$

$$Z_{12}=Z_{21} \tag{8-23}$$

已舍弃一组负解，$Z_{11}=Z_{22}$ 表示几何对称；而 $Z_{12}=Z_{21}$ 则表示互易对称，于是称之为几何互易对称。

**4．复合对称**

如果我们还是对传输矩阵 $\boldsymbol{A}$ 引入复合对称算子 $\boldsymbol{L}$，有

$$\boldsymbol{L}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \tag{8-24}$$

复合对称的二次型表示为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L} \tag{8-25}$$

根据坐标旋转的观点，$\boldsymbol{L}$ 是 45° 旋转，即

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{R}(\theta=45^{\circ}) \tag{8-26}$$

具体为

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \tag{8-27}$$

即

$$\begin{bmatrix}A_{11}^2+A_{21}^2 & (A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21})+(A_{11}A_{12}+A_{21}A_{22})\\ -(A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21})+(A_{11}A_{12}+A_{21}A_{22}) & A_{12}^2+A_{22}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \tag{8-28}$$

很易给出

$$\begin{cases}A_{11}^2+A_{21}^2=1\\ A_{12}^2+A_{22}^2=1\\ A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}=1\\ A_{11}A_{12}+A_{21}A_{22}=0\end{cases} \tag{8-29}$$

最后得到

$$\begin{cases}A_{11}=A_{22}\\ A_{12}=-A_{21}\\ \det\boldsymbol{A}=1\end{cases} \tag{8-30}$$

我们把式（8-30）条件称为**复合对称**，且它具体对应哪一种实际网络，值得深入研究。还应该指出，只要对称算子满足

$$\left|\det(\boldsymbol{O})\right|=1 \tag{8-31}$$

则总会有电磁矩阵 $\boldsymbol{E}$

$$\left|\det\boldsymbol{E}\right|=1 \tag{8-32}$$

多数情况下还是 $\det(\boldsymbol{E})=1$

## 2 一次型对称

一次型对称的一般表示如下：

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}\boldsymbol{E} \tag{8-33}$$

**1. 几何对称**

引入几何对称因子 $\boldsymbol{G}$

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \tag{8-34}$$

若这时双口阻抗矩阵满足

$$\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{Z} \tag{8-35}$$

具体有

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{21}\\ Z_{12} & Z_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_{21} & Z_{11}\\ Z_{22} & Z_{12}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{21} & Z_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_{21} & Z_{22}\\ Z_{11} & Z_{12}\end{bmatrix}\end{cases} \tag{8-36}$$

由此得出

$$Z_{11}=Z_{22} \tag{8-37}$$

满足几何对称条件。

**2. 互易对称**

只要把恒等算子 $\boldsymbol{I}$ 作用于阻抗 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵，即得

$$\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}\boldsymbol{Z} \tag{8-38}$$

也就是互易对称

$$\boldsymbol{Z}_{12}=\boldsymbol{Z}_{21} \tag{8-39}$$

**3. 反互易对称**

同样，若引入镜像对称算子 $\boldsymbol{M}$ 与阻抗 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵，即得

$$\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{Z} \tag{8-40}$$

具体为

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{21}\\ Z_{12} & Z_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_{11} & -Z_{21}\\ Z_{12} & -Z_{22}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{21} & Z_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ -Z_{21} & -Z_{22}\end{bmatrix}\end{cases} \tag{8-41}$$

最后得到

$$Z_{12}=-Z_{21} \tag{8-42}$$

我们称之为**反互易条件**，这种电磁网络的具体实现很值得深入研究。

这里我们保留一个容易产生疑问的问题：为什么先讨论二次型对称。实际上，一次型对称通式（8-33）也是**另一种形式的二次对称**，有

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}[O]\boldsymbol{E}^{-1}=[O] \tag{8-43}$$

从这个意义上，只要二次型（不同定义）就可自足了。反之，二次型对称式（8-1）也可写成

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}[O]=[O]\boldsymbol{E}^{-1} \tag{8-44}$$

实际上又变成另一种定义的一次型了。

## 3　辛内积和电磁辛正交

如果我们把普通向量内积作为比较，则辛内积是以 $\boldsymbol{J}$ 矩阵作为核心的。

【定义】已知两个状态向量 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$，则我们把

$$\boldsymbol{v}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{v}_2 \tag{8-45}$$

称为**辛内积**，而

$$\boldsymbol{v}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{v}_2=0 \tag{8-46}$$

称为**辛正交**。具体对于2×2维为

$$[\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2]\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1\\ \boldsymbol{v}_2\end{bmatrix}=0 \tag{8-47}$$

图 8-5 给出一般内积分辛内积，向量正交与辛正交的比较

| 向量内积 $a^{\mathrm{T}}Ib$ | 辛内积 $v_1^{\mathrm{T}}Jv_2$ |
|---|---|
| 向量正交 $a^{\mathrm{T}}Ib=0$ | 辛正交 $v_1^{\mathrm{T}}Jv_2=0$ |

图 8-5　向量内积与辛内积

我们知道了，在电磁互易系统中，有一个著名的 Lorentz 互易定理，源 $\boldsymbol{J}_1$ 在 $\boldsymbol{B}$ 处产生场 $\boldsymbol{E}_1$，与源 $\boldsymbol{J}_2$ 在 $\boldsymbol{A}$ 处产生的场 $\boldsymbol{E}_2$，其互内积相等。即

$$\langle \boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{J}_2\rangle=\langle \boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{J}_1\rangle \tag{8-48}$$

其中，$\boldsymbol{E}_1$ 表示由电源电流 $\boldsymbol{J}_1$ 产生的电场；而 $\boldsymbol{E}_2$ 则表示由另一源电流 $\boldsymbol{J}_2$ 产生的电场；

$\langle,\rangle$ 表示广义内积符号，例如可表示为体积分。换句话说，Lorentz 互易定理反映场与源之间的一种对称，如图 8-6 所示。

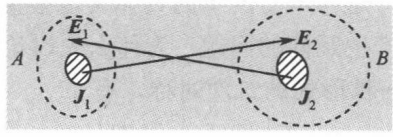



图 8-6 Lorentz 电磁互易定理

如果我们引入状态向量

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_1 \\ \boldsymbol{J}_1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_2 \\ \boldsymbol{J}_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

则可以把互易定理重新表述为[3]

$$\left\langle [\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{J}_1] \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_2 \\ \boldsymbol{J}_2 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \tag{8-49}$$

其中，$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，且上式的简洁形式为

$$\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J} \boldsymbol{v}_2 = 0 \tag{8-50}$$

这里再一次看到，辛正交的物理意义之一是**电磁互易**。

## 4 结　语

采用各种不同的对称算子去研究表述电磁对称性很有普遍意义，它可以给出无耗对称，互易对称和几何对称等典型特征。特别要指出：电磁互易对称即著名数学家 Weyl 在力学领域中提出的**辛对称**。辛正交即对应电磁互易定理。

## 答问录

**问**：在电磁领域中，对称和对称算子之间有什么关系？

**答**：你所提的问题正是这篇札记八所讨论的主题：**采用各种对称算子来定义对称。**正如文中所提的，一般可分为以下两种对称算子：一次型对称算子和二次型对称算

子。我们这里再做归纳。

表 8-1 列出几种典型的一次型对称算子；而表 8-2 则列出几种典型的二次型对称算子。

大多数人认为，对称思想和它的应用主要在数学、力学或电磁学领域。其实不然，现代医学研究表明：追求异性的重要标准和共同点是要求五官“尽量”对称，并且这已找到了生物学根据，有利于后代的成长。

采用算子研究对称应该说是一种比较先进的思想。因为它与所研究的对象和领域无关，所以正是由此发现了 Weyl 在力学中提出的辛对称正是电磁领域的互易对称。

**表 8-1　一次型对称算子**

| 一次型对称算子 $\boldsymbol{O}$ 满足 $\boldsymbol{OE}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{O}$ | |
|---|---|
| 几何对称 | $\boldsymbol{GZ}=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\quad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\quad Z_{11}=Z_{22}$ |
| 互易对称 | $\boldsymbol{IZ}=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\quad \boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\quad Z_{12}=Z_{21}$ |
| 反互易对称 | $\boldsymbol{MZ}=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\quad \boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\quad Z_{12}=-Z_{21}$ |

**表 8-2　二次型对称算子**

| 二次型对称算子 $\boldsymbol{O}$ 满足式 $\begin{cases}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{OE}=0\\ \boldsymbol{E}^{+}\boldsymbol{OE}=0\end{cases}$ | |
|---|---|
| 无耗对称 | $\boldsymbol{S}^{+}\boldsymbol{IS}=\boldsymbol{I}\quad [S]=\begin{bmatrix}S_{11}&\cdots&S_{1n}\\S_{21}&\cdots&S_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots\\S_{n1}&\cdots&S_{nn}\end{bmatrix}\quad [I]=\begin{bmatrix}1&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&1\end{bmatrix}$ |
| 互易对称 | $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{JA}=\boldsymbol{J}\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}\quad [J]=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ |
| 几何互易对称 | $\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{MZ}=\boldsymbol{M}\quad [Z]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_{11}&\boldsymbol{Z}_{12}\\\boldsymbol{Z}_{21}&\boldsymbol{Z}_{22}\end{bmatrix}\quad [M]=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ |
| 复合对称 | $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{LA}=\boldsymbol{L}\quad [A]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}\quad [L]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}$ |

问：你是否在这里进一步介绍辛对称、辛内积和辛正交。

答：众所周知，Weyl 是 20 世纪杰出的数学家，希尔伯特的全才继承人。只是由于德国纳粹主义，希特勒把他拱手“送”给了美国。到达普林斯顿高数研究院，并为世界作出重要贡献。

Weyl 所提出的东西不仅思想清晰，而且形式规范。正是他采用对称算子 $\boldsymbol{J}$ 的方法定义辛对称，有

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{JS}=\boldsymbol{J}$$

其中，$\boldsymbol{S}$ 称为辛矩阵（Symplectic maxtrix），表 8-3 给出辛矩阵的四个主要性质，且 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ 称为纠结算子，有

$$\boldsymbol{J}^2=-\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{J},\quad \boldsymbol{J}^{-1}=-\boldsymbol{J}$$

$$\det(\boldsymbol{J})=1\ （\det 表示行列式）$$

表 8-3　辛矩阵 S 的 4 个主要性质

| | | |
|---|---|---|
| 性质(1) | $\det\boldsymbol{S}=\pm1$，式中 det 表示 $\boldsymbol{S}$ 的行列式 | |
| | 由定义易知 $\det\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\det\boldsymbol{J}\det\boldsymbol{S}=\det\boldsymbol{J}$，一般取 $\det\boldsymbol{S}=1$ | |
| 性质(2) | $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$ 也是辛矩阵 | 由定义取逆 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{S}^{-\mathrm{T}}=\boldsymbol{J}$<br>（左乘 $\boldsymbol{S}$，右乘 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$）$\boldsymbol{S}\boldsymbol{J}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{J}$ |
| 性质(3) | $\boldsymbol{S}_1$，$\boldsymbol{S}_2$ 分别是辛矩阵则 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2$ 还是辛矩阵 | $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2)=\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{S}_1)\boldsymbol{S}_2$<br>$=\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{S}_2=\boldsymbol{J}$ |
| 性质(4) | 辛矩阵存在逆矩阵 $\boldsymbol{S}^{-1}$ | 由性质（2）证明中显示 |

表 8-4 列出辛内积、辛正交和电磁 Lorentz 互易定理。

表 8-4　辛内积、辛正交和电磁 Lorentz 互易定理

| | |
|---|---|
| 辛内积 | 状态向量 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，定义 $\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{v}_2$ 为辛内积 |
| 辛正交 | $\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{v}_2\equiv0$　则 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 辛正交 |
| 电磁 Lorentz 互易定理<br>令 $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_1\\ \boldsymbol{J}_1\end{bmatrix}$ 和 $\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_2\\ \boldsymbol{J}_2\end{bmatrix}$<br>则互易定理是 $[\boldsymbol{E}_1\quad \boldsymbol{J}_1]\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_2\\ \boldsymbol{J}_2\end{bmatrix}\equiv0$<br>辛正交即电磁互易 | |

## 推荐人物

最有资格在对称领域研究站住脚的——非杨振宁莫属。

杨振宁是一代科学巨匠，并非是单纯的电磁理论专家。这里，我们仅介绍两件事说明他如何选择目标，如何搞好科学研究。

**1．半个多世纪以来杨振宁一直挺立在现代物理学的最高峰**

在 2000 年到来之际，杨振宁作了一个非常重要的报告——20 世纪物理学的主旋律。



科学大师杨振宁

20 世纪物理学发生和正在发生着翻天覆地的变化。但是杨振宁归纳出有三个最重要的主旋律：

（1）量子；

（2）对称性；

（3）相位因子。

而杨振宁先生本人的工作正对应这三个主旋律。最值得我们学习的是杨振宁的眼光：一天，一年，一段时间把自己的精力放到哪个目标？这可能是每个青年学者最关心的一件事！当然，它要顾忌两个方面：研究目标的重要性；本人的基础和适应性。

用一句话概括：所谓做工作就是在目标的重要性和自身的适应性之间找最佳切合点！

**2．杨振宁读书教学四十年**

杨振宁在 1983 年 3 月 2 日在香港中文大学 20 年纪念讲座上作了一个极为重要的报告——读书教学四十年。

我只说几件事：首先是标题，按一般人的思路，杨振宁一定是读书**科研**四十年。但，却不！是**教学**。可见，教学不仅与科研不矛盾，而且还有相互的促进作用。对于国内看不起教学，甚至认为教学低科研一等的人们是一次极好的教育。

此外，我想列出这场报告的几个小段标题。

——扎实的根基（西南联大）；

——科学研究与风格；

杨振宁说：我特别佩服的三位是 Einstein，Fermi 和 Dirac。他们都是 20 世纪的大物理学家。他们三个人的风格是不一样的，可是他们风格有一个共同点，就是都能在非常复杂的物理现象之中提出精神，然后把这精神通过很简单但深入的想法，用数学方式表现出来。

他们的文章是单刀直入、正中要害的。其实，这也正是杨振宁的风格。

——有血有肉的物理学（芝加哥大学）。

——科学，特别是工程一定要与实践相结合；

——做实验的经验。

好了，这就是我们要介绍的大师——杨振宁。



## 参考文献

[1] 梁昌洪. 计算微波. 西安：西北电讯工程学院出版社，1985.

[2] 钟万勰. 力，功，能量与辛数学. 大连：大连理工大学出版社，2007.

[3] 梁昌洪. 话说对称. 北京：科学出版社，2010.

札记九

# 平面镜像法与有源保角变换

本文把镜像法与复保角变换有机地结合起来。指出对于实际中的一大类问题，只需采用平面镜像做基本模型，而对复杂形状作有源保角变换，归结为平面镜像。特别有兴趣的是变换后的求解区域可以允许存在原问题∞处的镜像电荷，从而突破了一般镜像法的一个准则。

## 0 引 言

本文是电磁场理论系列札记之九。

处理静场问题的各种解析方法在电磁理论中占有重要的地位。林为干先生在他的著作《电磁场理论》中指出："近代电磁场问题能够精确求解的不多，故多借助于静电方法来得到近似的解。它（也）是进一步解决电动力学问题的基础。"[1]

镜像法和保角变换法正是其中最基本的两种求解方法。表 9-1 列出了两种方法的主要特点。

本文首先提出了把平面介质镜像作为统一模型，即导体问题只是 $\varepsilon_2 \to \infty$ 的特殊情况，而磁体模型则对应 $\varepsilon_2 \to 0$。还可以把保角变换分成两种情况：一种是不带奇异线电荷 $\rho_l$ 的无源保角变换，它可以求取导体间电容 $C$ 和相应传输线的特殊阻抗 $Z_0$；另一种是带有奇异线电荷 $\rho_l$ 的有源保角变换，它可以用来求取源周围空间的电位函数 $\varphi$ 分布。多数专著和教材对于有源保角变换很少述及[2-4]，本文则重点讨论这一情况。

在这篇札记中，我们明确提出对于二维导体情况，只需把平面镜像作为基本模型，其他一切复杂的几何形体有可能采取有源保角变换归结为平面镜像，使一大类问题迎刃

而解。其求解思路如图 9-1 所示。

**表 9-1 镜像法和保角变换法**

| 镜 像 法 | 保角变换法 |
| --- | --- |
| （1）求解问题对称化（即将所有区域采用同一媒质）；<br>（2）添加镜像电荷，求解区域不允许有镜像电荷；<br>（3）分区域求解，边界条件拼接；<br>（4）方法的基础是唯一性定理，即满足支配方程和边界条件的解为唯一正确解 | （1）物理量$\varphi$（如电位）在变换前后的不变性；<br>（2）源$\rho$在变换前后的不变性；<br>（3）位和力线在变换前后的对应性；<br>（4）位和力线在变换前后均保持正交性；<br>（5）媒质边界必须是等位面；<br>（6）思想是从不对称结构变换为对称结构求解位函数$\varphi$ |
| 可解决二维和三维问题 | 只对二维问题有效 |

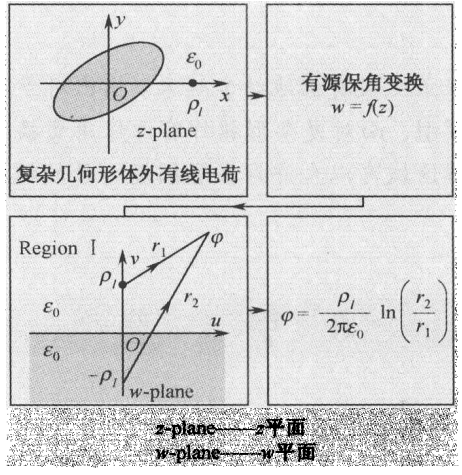



图 9-1 有源保角变换求解思路

在研究中我们发现：采用有源保角变换方法，在变换前后的求解域中可以包含原问题∞处的镜像电荷。也正是这种情况，才能**真正看到**原电荷与镜像电荷**成对**出现的原则——这也是对于一般镜像法的一个突破。

## 1 平面介质镜像统一模型

正如前面所提及，在这篇札记中我们将平面介质镜像作为一类问题的统一模型，如图 9-2 所示。

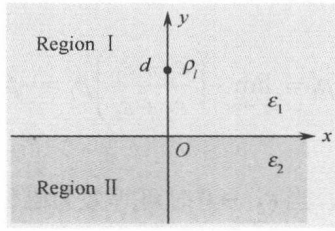



图 9-2　平面介质镜像统一模型

已有文献指出[3]，可以构造对称化，即使两个域均为 $\varepsilon_1$，求解如图 9-3 所示。

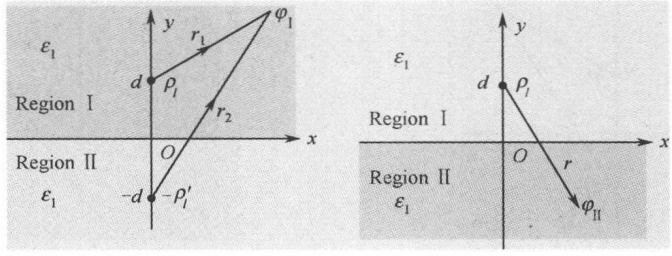



图 9-3　介质镜像法——对称化和区域求解（阴影为求解域）

其镜像电荷为

$$-\rho_l' = -\left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}\right)\rho_l \tag{9-1}$$

且

$$\rho_l - \rho_l' = \left(\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}\right)\rho_l \tag{9-2}$$

两个区域的电位函数 $\varphi$ 分别为

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_1}\left\{\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+(y-d)^2}} - \left(\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\right)\ln\dfrac{1}{\sqrt{x+(y+d)^2}}\right\} & (9\text{-}3) \\ \varphi_{II} = \dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_1}\left\{\left(\dfrac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\right)\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+(y-d)^2}}\right\} & (9\text{-}4) \end{cases}$$

它们满足支配方程和边界条件。

对于一般情况下，当 $y=0$ 的媒质分界面不是等位面。我们特别指出两种重要的等效情况。

**1．$\varepsilon_2 \to \infty$ 等效导体情况**

对于统一的平面介质情况，当 $\varepsilon_2 \to \infty$ 时可等效为导体情况，如图 9-4 所示。

这时其镜像电荷为

$$-\rho_l' = \lim_{\varepsilon_2 \to \infty} -\left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}\right)\rho_l = -\rho_l \tag{9-5}$$

**2. $\varepsilon_2 \to 0$ 等效磁体情况**

对于统一的平面介质情况，当 $\varepsilon_2 \to 0$ 时可等效为磁体情况，如图 9-5 所示。这时其镜像电荷为

$$-\rho_l' = \lim_{\varepsilon_2 \to 0} -\left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}\right)\rho_l = \rho_l \tag{9-6}$$

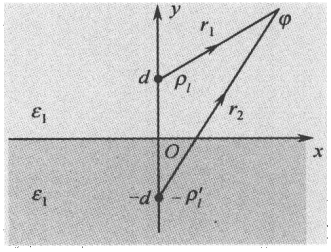



图 9-4 平面导体镜像基本模型

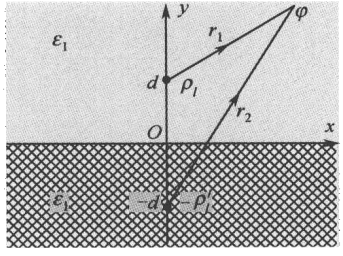



图 9-5 平面磁体镜面基本模型

## 2 导体圆柱的有源保角变换

已经讲过，实际上只需采用导体平面镜像作为基本模型。其他问题均由有源保角变化归结为平面镜像。

圆柱外线电荷是最典型的问题之一。我们分 3 种情况作出讨论。

**1. 接地导体圆柱**

在通常的电磁理论著作中，导体圆柱采用镜像法处理，真实线电荷 $\rho_l$ 和镜像线电荷 $-\rho_l$ 满足反演关系，即如图 9-6 所示。

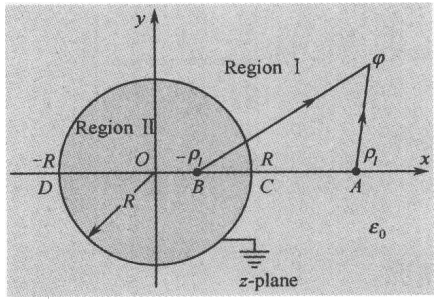



图 9-6 接地导体圆柱外有线电荷 $\rho_l$

$$\begin{cases} OA = r \\ OB = R^2 / r \end{cases} \tag{9-7}$$

于是有

$$OA \cdot OB = R^2 \tag{9-8}$$

满足反演对称。

本文采用有源保角变换将其映射到平面镜像的基本模型，具体为

$$w = \mathrm{j}\left(\frac{z-R}{z+R}\right) \tag{9-9}$$

如图 9-7 所示，很容易求出参数 $k$：

$$k = \frac{r-R}{r+R} \tag{9-10}$$

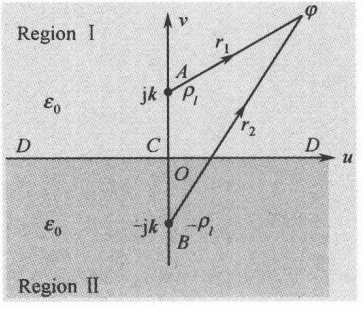



图 9-7　从圆反演对称到平面镜像模型

并直接可由 $w$-plane 获得原 $z$-plane 的圆柱外线电荷在 Region Ⅰ 产生的电位函数 $\varphi$：

$$\varphi = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{r_2}{r_1}\right| = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{w+\mathrm{j}k}{w-\mathrm{j}k}\right| = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{r}{R}\left(\frac{z-\dfrac{R^2}{r}}{z-r}\right)\right| \tag{9-11}$$

若令

$$\varphi_0 = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{R}\right) \tag{9-12}$$

则有

$$\varphi = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{z-\dfrac{R^2}{r}}{z-r}\right) + \varphi_0 \tag{9-13}$$

表面看来，似乎与原问题有一常数差。实际上很容易证明：这正好对应圆柱接地

($\varphi|_{r=R}=0$)的约束条件。我们再一次写出

$$\varphi=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{rz-R^2}{Rz-rR}\right| \tag{9-14}$$

设 $z=R\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ 即处在圆周边界，又导出

$$\varphi=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left\{\left|-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\right|\left|\frac{R\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}-r}{R\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}-r}\right|\right\}\equiv 0 \tag{9-15}$$

即可证得。

**2．不接地导体圆柱**

不接地导体圆柱外有线电荷 $\rho_l$ 的情况，如图 9-8 所示。

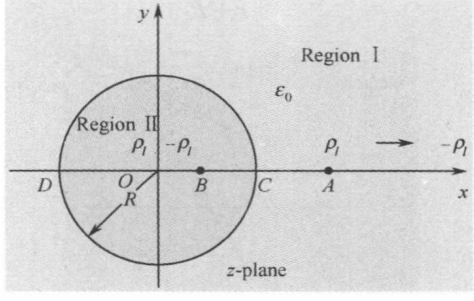



图 9-8　不接地导体圆柱外有线电荷 $\rho_l$

在这种情况下，对应 Region II，$w=-\mathrm{j}(z=0)$ 处再加电荷 $\rho_l$，不接地意味着：

（1）圆柱导体面仍保持等位；

（2）Region II 域内总电荷为 0，同样采用有源保角变换式（9-9）把它映射到 $w$-plane 的平面镜像基本模型，如图 9-9 所示。

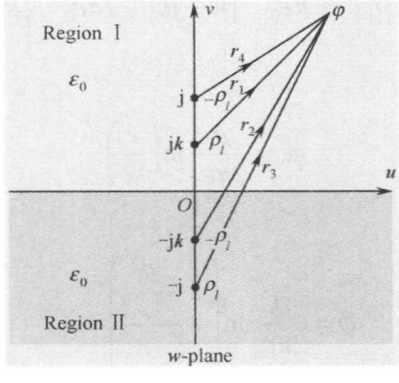



图 9-9　不接地圆柱到平面镜像模型

【有源保角变换新原则】采用有源保角变换求线电荷问题中，变换后的求解区域（$w$-plane）可以存在对应变换前（$z$-plane）$\infty$点的线电荷，它是$z=0$点的镜像。

事实上，只有在这种情况下，我们才体会到电荷与镜像电荷必须**成对**出现的原则。

在我们这个问题中，Region Ⅰ的$w=\mathrm{j}$（对应$z=\infty$）放置镜像电荷$-\rho_l$，于是有

$$\varphi=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{r_2}{r_1}\cdot\frac{r_4}{r_3}\right|=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{w+\mathrm{j}k}{w-\mathrm{j}k}\right|+\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{w-\mathrm{j}}{w+\mathrm{j}}\right| \tag{9-16}$$

进一步导出

$$\varphi=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{r}{R}\left(\frac{z-\dfrac{R^2}{r}}{z-r}\right)\right|+\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{z}{R}\right| \tag{9-17}$$

按原来圆柱问题形式写出，则有

$$\varphi=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{\rho_2}{\rho_1}\right|+\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{z}{R}\right|+\varphi_0 \tag{9-18}$$

与原解完全相同。

### 3. 圆柱的对偶问题

圆柱的对偶问题如图 9-10 所示。

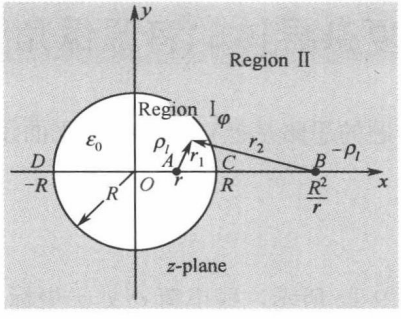



图 9-10　圆柱的对偶问题

这时，我们的有源保角变换为

$$w=-\mathrm{j}\left(\frac{z-R}{z+R}\right) \tag{9-19}$$

把它映射到平面镜像的基本模型，如图 9-11 所示。其中

$$\tilde{k}=\frac{R-r}{R+r} \tag{9-20}$$

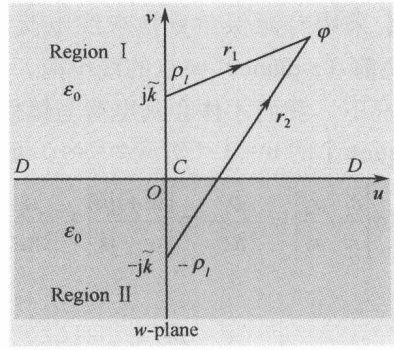



图 9-11 对偶问题的平面镜像模型

同样有

$$\varphi=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{z-\dfrac{R^2}{r}}{z-r}\right|+\varphi_0 \tag{9-21}$$

和

$$\varphi_0=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{R}\right) \tag{9-22}$$

形式上，与原问题一致。

## 3 复杂导体的有源保角变换

复杂导体外有线电荷问题的思路是把它们映射为平面镜像模型。这里讨论两种典型情况。

### 3.1 带裂缝圆柱问题

带裂缝的导体圆柱如图 9-12 所示，线电荷 $\rho_l$ 处于坐标原点。

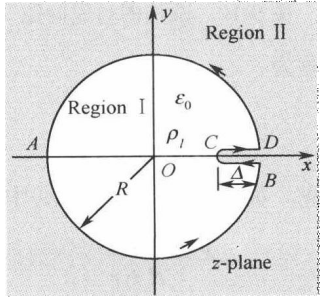



图 9-12 带裂缝的导体圆柱

采用分式线性变换

$$\begin{cases} z_1=-\mathrm{j}\left(\dfrac{z-R}{z+R}\right) & (9\text{-}23) \\ z_2=z_1^{\,2} & (9\text{-}24) \\ z_3=z_2+K^2 & (9\text{-}25) \\ w=\sqrt{z_3} & (9\text{-}26) \end{cases}$$

如图 9-13 所示，其中 $\Delta=|\mathrm{BC}|=|\mathrm{CD}|$

$$K=\left(\frac{\Delta}{2R-\Delta}\right) \tag{9-27}$$

最后得到

$$w=\mathrm{j}\sqrt{\left(\frac{z-R}{z+R}\right)^2-K^2} \tag{9-28}$$

因为 $z=0$ 对应线电荷 $\rho_l$ 位置，映射到 $w$-plane 上 $\mathrm{j}w_0$ 点，且

$$w_0=\sqrt{1-K^2}=\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{2R-\Delta}\right)^2} \tag{9-29}$$

最后得到电位函数

$$\varphi=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{w+\mathrm{j}w_0}{w-\mathrm{j}w_0}\right| \tag{9-30}$$

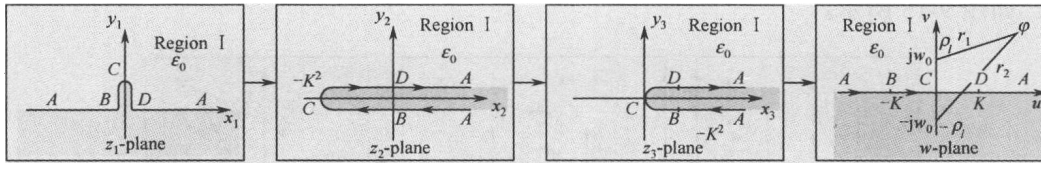



图 9-13　带裂缝圆柱的有源保角变换

## 3.2　双板之间的线电荷 $\rho_l$

这种情况下还可以分两点给出讨论。

### 1．无限双板间的 $h$ 处有电荷

无限双板宽度为 $2a$，在 $h$ 处有线电荷 $\rho_l$，设 $h\leqslant a$ 不失一般性，如图 9-14 所示。

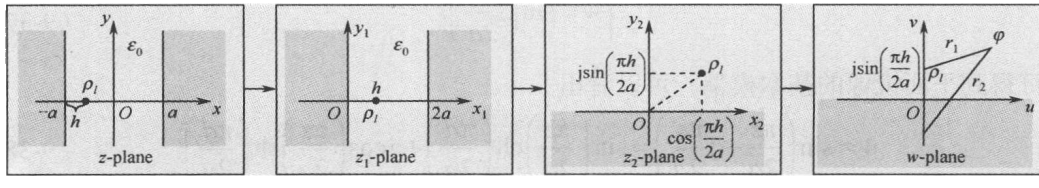



图 9-14　无限双板间线电荷 $\rho_l$

采用有源保角变换

$$\begin{cases} z_1 = z + a & (9\text{-}31) \\ z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi z_1}{2a}} & (9\text{-}32) \\ w = z_2 - \cos\left(\dfrac{\pi z}{2a}\right) & (9\text{-}33) \end{cases}$$

很容易得到电位的 $\varphi$ 分布函数：

$$\varphi = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{w+\mathrm{j}\sin\left(\dfrac{\pi h}{2a}\right)}{w-\mathrm{j}\left(\dfrac{\pi h}{2a}\right)}\right| = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{\mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi z}{2a}\right)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\pi h}{2a}\right)}}{\mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi z}{2a}\right)}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi h}{2a}\right)}}\right| \tag{9-34}$$

进一步当 $h=a$ 的中心线电荷，进一步给出

$$\varphi_0 = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi z}{2a}\right)}+1}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi z}{2a}\right)}-1}\right| = -\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\tan\left(\frac{\pi z}{4a}\right)\right| \tag{9-35}$$

**2．半无限双板间中心处线电荷**

半无限双板间中心处有线电荷 $\rho_l$，即 $\rho_l$ 处于（0，0）位置，且双板在 $y=-\mathrm{j}d$ 处短路，如图 9-15 所示。

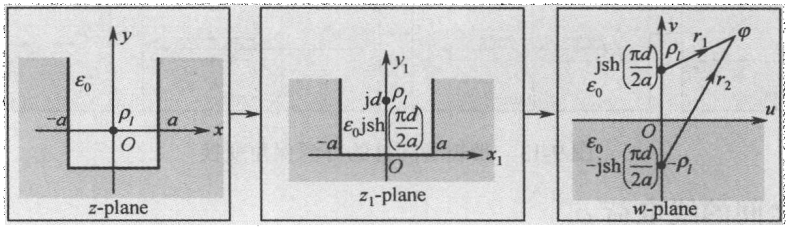



图 9-15　半无限双板中心线电荷 $\rho_l$

采用有源保角变换

$$\begin{cases} z_1 = z + \mathrm{j}d & (9\text{-}36) \\ w = \sin\left(\dfrac{\pi z_1}{2a}\right) & (9\text{-}37) \end{cases}$$

即可得到平面镜像的基本模型。可以看出

$$w = \sin\left(\frac{\pi z}{2a}+\mathrm{j}\frac{\pi d}{2a}\right) = \sin\left(\frac{\pi z}{2a}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\pi d}{2a}\right)+\mathrm{j}\cos\left(\frac{\pi z}{2a}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{\pi d}{2a}\right) \tag{9-38}$$

注意到线电荷 $\rho_l$ 处于 $z=0$ 处，即

$$w_0=\sin\left(\mathrm{j}\frac{\pi d}{2a}\right)=\mathrm{jsh}\left(\frac{\pi d}{2a}\right) \tag{9-39}$$

易得电位分布函数 $\varphi$

$$\varphi=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{r_2}{r_1}\right|=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{w+w_0}{w-w_0}\right|=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{\sin\left(\frac{\pi z}{2a}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\pi d}{2a}\right)+\mathrm{j}\left[1+\cos\left(\frac{\pi z}{2a}\right)\right]\mathrm{sh}\left(\frac{\pi d}{2a}\right)}{\sin\left(\frac{\pi z}{2a}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\pi d}{2a}\right)-\mathrm{j}\left[1-\cos\left(\frac{\pi z}{2a}\right)\right]\mathrm{ch}\left(\frac{\pi d}{2a}\right)}\right| \tag{9-40}$$

最后简化为

$$\varphi=-\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\tan\left(\frac{\pi z}{4a}\right)\right|+\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{\sin\left(\frac{\pi z}{4a}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\pi d}{2a}\right)+\mathrm{j}\cos\left(\frac{\pi z}{4a}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{\pi d}{2a}\right)}{\cos\left(\frac{\pi z}{4a}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\pi d}{2a}\right)-\mathrm{j}\sin\left(\frac{\pi z}{4a}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{\pi d}{2a}\right)}\right| \tag{9-41}$$

特别当 $d\to\infty$，也就是当半无限演变为无限双板情况时，有

$$\mathrm{ch}\left(\frac{\pi d}{2a}\right)\approx\mathrm{sh}\left(\frac{\pi d}{2a}\right)\approx\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi d}{2a}}\to\infty \tag{9-42}$$

容易给出

$$\lim_{d\to\infty}\left|\frac{\sin\left(\frac{\pi z}{4a}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\pi d}{2a}\right)+\mathrm{j}\cos\left(\frac{\pi z}{4a}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{\pi d}{2a}\right)}{\cos\left(\frac{\pi z}{4a}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\pi d}{2a}\right)-\mathrm{j}\sin\left(\frac{\pi z}{4a}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{\pi d}{2a}\right)}\right| \tag{9-43}$$

最后得到

$$\lim_{d\to\infty}\varphi=\varphi_0=-\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\tan\left(\frac{\pi z}{4a}\right)\right| \tag{9-44}$$

结果与式（9-35）完全相同。

## 4 结　语

本文将平面镜像作为基本模型，深入讨论了有源保角变换的各种应用，指出：在变换后，求解区域允许有原问题∞处的镜像电荷。从而突破了一般镜像法的处理原则，也看到镜像电荷与原电荷的成对原则。

## 答问录

**问**：札记九的标题开门见山，讨论两种方法：平面镜像法与有源保角变换。这两者有什么联系？且札记九的主题讨论什么？

**答**：很可能出乎大多数人的意料：札记九还是讨论对称，只不过它讨论的是**复合对称**和**对称变换**。

镜像法是一种**复合对称**，而有源保角变换则涉及**对称变换**。

我们先来看镜像法——本札记给出一种普遍的平面介质镜像统一模型。如果把构造对称化，即全空间都用 $\varepsilon_1$ 填充，则会使问题多出一个镜像电荷，其位置为

$$p(d)=-d$$

而电荷量为

$$\mathcal{L}(\rho)=-\left(\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\right)\rho$$

其中，$\rho$ 和 $\mathcal{L}$ 分别表示位置对称算子和电荷对称算子。这就是在电磁领域中的一种典型复合对称。

特别要注意到：统一模型求解时要**分区域进行**，具体如图 9-3 所示。

再说保角变换，本札记应用保角变换的目的是为了**求解复杂带有源线电荷的电磁问题**。保角变换反映最重要的**变换中的不变性**，即保角变换前后问题等价。其根本基础是**位函数 $\varphi$ 规律 Laplace 方程不变**，如图 9-16 所示。

在这里，要特别提到的是札记九，进一步把理论推广到 Poisson 方程，即求解问题中允许有源，于是就有了**有源保角变换的不变性**。当然，要满足这一**推广**，**边界必须处于等位面**，因此，所述及的均为导体（也可等磁体）问题，也即处理复杂区域的**导体镜像法**。

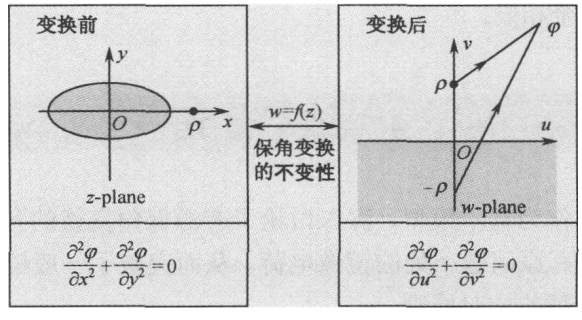



图 9-16　保角变换的不变性——位函数 $\varphi$ 的规律 Laplace 方程不变

**问**：也许是札记九数学太多太深。好像对于其中的思想实质始终有点抓不住的感觉。

**答**：很多人都有同感。因为采用保角变换的不变性处理对称变换，完全是一种新思想和新方法。变换前后位 $\varphi$ 不变，源 $\rho_l$ 不变，深入理解和消化需要一个过程。我们以接地导体圆柱外线电荷问题为例加以说明，如图 9-17 所示。

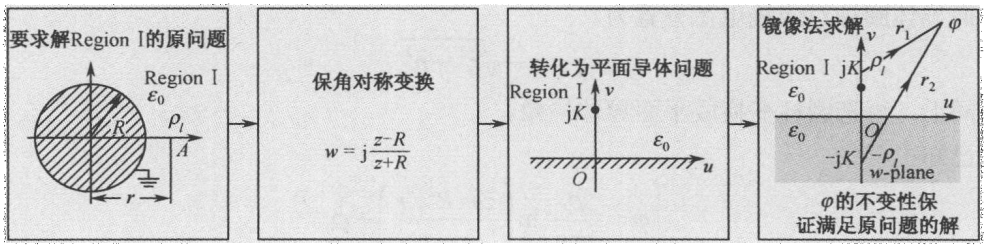



图 9-17　保角对称变换的求解思想

首先，我们要求解复杂（即接地导体圆柱外线电荷）区域 Region I 的问题。既不需要知道柱内镜像电荷 $-\rho'$ 的位置，也不需要知道镜像电荷 $-\rho'$ 的大小。这一点是最重要的。

我们需要的是给出保角对称变换

$$w=\mathrm{j}\left(\frac{z-R}{z+R}\right)$$

把原问题转化为平面导体问题。由此，我们清楚：原问题的复杂边界必须等位。

原问题和平面导体等价。而平面导体可以用镜像法求解——于是，后者求出的电位 $\varphi$，即原问题的电位。

这就是我们采用保角对称变换的求解方法。

**问**：除了接地导体圆柱外线电荷问题之外，是否还可以解决一类复杂的边界问题？

**答**：完全可以。

作为例子，这里举出长、短半轴分别为 $a$ 和 $b$ 的接地导体椭圆柱外 $r_1\ (r_1>a)$ 处线电荷问题，如图 9-18 所示。

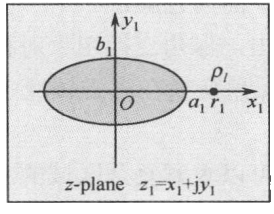



图 9-18　接地导体椭圆柱处的线电荷问题

我们给出保角变换把它变为如图 9-6 所示的接地导体圆柱外的线电荷 $\rho_l$ 问题，有

$$z_1=\frac{1}{2}\left(z+\frac{h^2}{z}\right)$$

很易得到

$$\begin{cases} R=a+b \\ h^2=a^2-b^2 \end{cases}$$

$$z=z_1+\sqrt{z_1^2-h^2} \quad \text{（取+号）}$$

而导体圆柱对应线电荷位置为

$$r=r_1+\sqrt{r_1^2-h^2}$$

完全同上，再把圆柱变换成平面导体镜像。

已知

$$\begin{cases} \varphi=\dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{z-R^2/r}{z-r}\right)+\varphi_0 \\ \varphi_0=\dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{r}{R}\right) \end{cases}$$

最后得到

$$\begin{cases} \varphi=\dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{z_1+\sqrt{z_1^2-h^2}-\dfrac{(a+b)^2}{r_1+\sqrt{r_1^2-h^2}}}{z_1+\sqrt{z_1^2-h^2}-\left(r_1+\sqrt{r_1^2-h^2}\right)}\right)+\varphi_0 \\ \varphi_0=\dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{r_1+\sqrt{r_1^2-h^2}}{a+b}\right) \\ h=\sqrt{a^2-b^2}\text{且已知椭圆参数}a,\ b\text{和线电荷位置}r_1 \end{cases}$$

这个例子可以称为**双层保角对称变换**。

特别要提到，采用保角变换的最巧妙之处在于：**它不需要知道求解导体椭圆柱内的镜像电荷位置与大小**，直接通过平面问题解决。

**问**：从上面这些例子可以看出，保角变换用于对称变换确实有用。

**答**：既然如此，我们再把复保角变换在电磁领域中的应用推广一下。保角变换有两种不变性如图 9-19 所示。

利用第二种保角变换不变性可以求解复杂区域的二维电容 $C$。设

$$\begin{cases} u=\Gamma_1 \\ v=\Gamma_2 \end{cases}$$

若 $\Gamma_1$ 和 $\Gamma_2$ 正交，由 $w=f(z)$ 保角变换，在 z 平面对应的 $C_1$ 和 $C_2$ 曲线也正交，如图 9-20 所示。如果用 $u$ 代表等位线，而 $v$ 代表电力线，则二维电容 $C$ 有

$$C=\frac{q_2-q_1}{v_2-v_1}$$

可以把复杂区域变为平板电容求解。

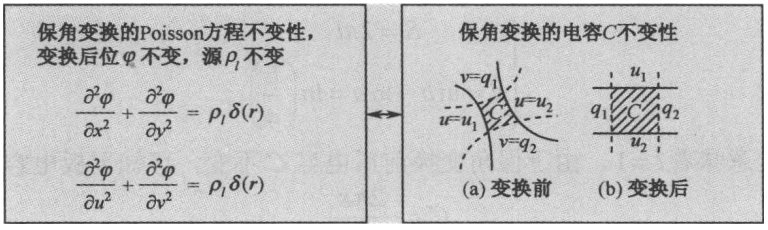



图 9-19　保角变换的两种不变性

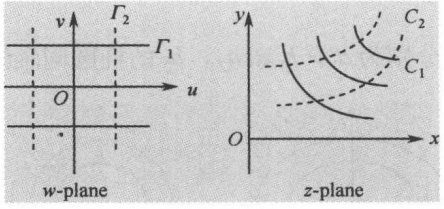



图 9-20　$w$ 平面与 $z$ 平面对应曲线的正交性

**[例 1]**　求解单位单长的圆同轴电容 $C$。

设同轴线处于 $z$ 平面（$z$-plane），作保角变换

$$w=\ln z=\ln r+\mathrm{j}\theta=u+\mathrm{j}v$$

于是有

$$\begin{cases}u=\ln r\\ v=\theta\end{cases}$$

若用 $u$ 表示等位线变换，而 $v$ 表示电力线变换。在 $w$ 平面（$w$-plane）上构成平板电容，等位线由 $\ln a\sim\ln b$，而电力线由 $0\sim2\pi$，如图 9-21 所示。

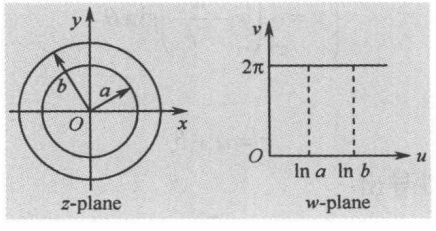



图 9-21　圆同轴线变换为平板电容 $w=\ln z$

已知平板电容

$$C=\frac{\varepsilon S}{d}$$

其中

$$\begin{cases} S=2\pi l \\ d=\ln b-\ln a=\ln\left(\dfrac{b}{a}\right) \end{cases}$$

单位长度意味着 $l=1$。由于保角变换前后电容 $C$ 不变，可知平板电容为

$$C=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}$$

也就是圆同轴电容。

**[例 2]** 求长、短半轴分别为 $a_1$，$b_1$ 和 $a_2$，$b_2$ 的椭圆同轴线电容 $C$，如图 9-22 所示。

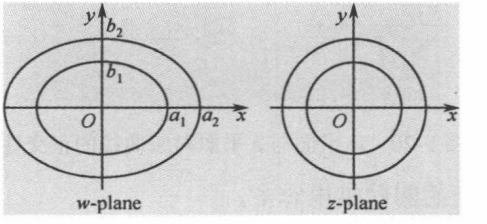



图 9-22 椭圆同轴线

我们给出儒可夫斯基变换把椭圆同轴线转化为圆同轴线，有

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{k^2}{z}\right)=u+\mathrm{j}v$$

设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$，易知

$$\begin{cases} u=\dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{k^2}{r}\right)\cos\theta \\ v=\dfrac{1}{2}\left(r-\dfrac{k^2}{r}\right)\sin\theta \end{cases}$$

求出

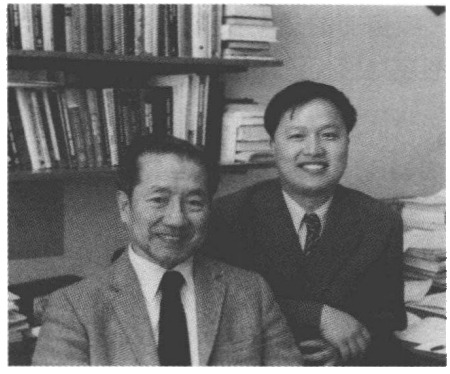
$$r=a+b$$

再根据电容 $C$ 的不变性导出

$$C=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\dfrac{a_2+b_2}{a_1+b_1}\right)}$$

## 推荐人物

这篇札记中我将介绍著名电磁学者，我在美国的导师——恩师郑钧先生（D. K. Cheng），这是我们的合影。



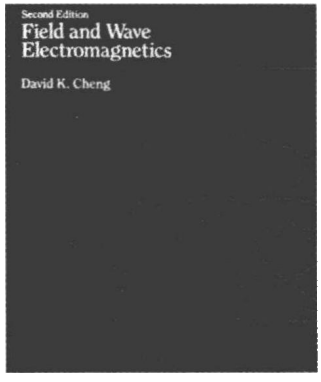
作者与导师郑钧先生（左）

导师郑钧先生是 Syracuse 大学的顶尖教授。在 Syracuse 大学工学院他与 Harrington 待遇最高。此外，一进郑先生的办公室，在白净的墙上，他只挂一个证书，那就是哈佛大学博士证书。郑先生非常重视这一证书，他也时时要求自己体现出哈佛博士的榜样。

在美国留学期间，我和郑先生几乎朝夕相处。他的功底和实力给人以极深的印象。

郑先生还有两个超于常人的特点：

（1）郑先生常常教导我们："把深的问题写深不算稀奇；把深的问题写浅这才是真本事。"深入浅出是他十分显著的特点。郑先生的名著 *Field and Wave Electromagnetics*（《电磁场与波》）是一个典型的例子。




郑钧先生的名著

（2）郑先生平时少言寡语，但是做起事来超乎寻常地严谨和认真；比起导师，我自己常常感到羞不堪言。

这里只说两个例子：①郑师母多次提及在 *Field and Wave Electromagnetics*（《电磁场与波》）出版之前，出版者都会发出 5 份初稿给不同的学者评审。最后收回来的情况令

人大吃一惊——一个字母也没有改；②我把在1980年赴美后做的第一件研究工作，写好后交给导师郑先生。不到一周，郑先生交还给我。态度平和，但我一看惭愧难当。郑先生的意见写满了全部手稿。

从此，我对自己的要求高了一个层次。

留美的最大收获是——我确实了解了什么是美国一流学者，什么是世界一流学者，不亲身感受绝难了解。因此，我知道本人和我国与世界的真实差距。



## 参考文献

[1] 林为干．电磁场理论．北京：人民邮电出版社，1984.

[2] 毕德显．电磁场理论基础．军事电信工程学院，1964.

[3] 谢处方，饶克谨．电磁场与电磁波．北京：高等教育出版社，1979.

[4] (美)D. K. 郑钧，著．电磁场与波．赵姚同，黎滨洪，译．上海：上海交通大学出版社，1985.

札记十

# 论电磁损耗

本文讨论的主题是电磁损耗，重点论及电磁由损耗走向开放所出现的种种问题。文中深入讨论了损耗的条件评价、几何评价和相位评价。研究表明，损耗给一般电磁系统带来了质的变化，如系统的开放性、场量的耦合性、信息的蚕食性和演变的定向性。并指出，克服困难，建立真正意义上的有耗电磁学值得尝试。

## 0 引　言

本文是电磁场理论教学系列札记之十。

众所周知，电磁学属于物理学、化学、材料学等众多领域的一部分。以物理学为例，其所包含的分支，可以包括：力学、电磁学、光学、声学、热学和量子力学等。通常在教学中，我们也以此作为根据使之彼此独立，分课进行，如图 10-1 所示。

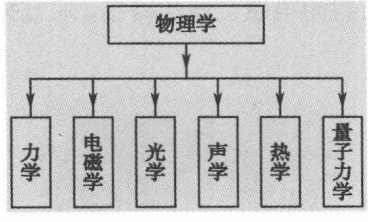



图 10-1　物理学包含众多分支

然而细究起来，物理学（甚至化学）的各个分支实际上是相互关联的。关联的方式大致有两种：转换和损耗。以电磁学为例，电磁可以转换为力学运动（如电动机），电

磁还可以转换为声学振动（如扬声器），此外电磁损耗变为热——它是一种定向退化，如图 10-2 所示。

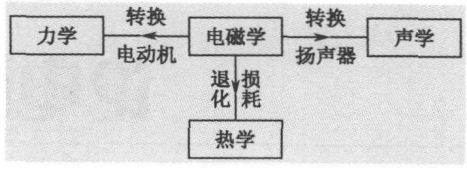



图 10-2　电磁学与其他分支的关联

本文重点讨论电磁和损耗连在一起，构成一个开放的世界，且带来一系列严重的影响。

## 1　三个定理[1-4]

没有损耗的电磁空间是封闭、完备的，且各模式相互独立（即正交）。

电磁损耗的本质是能量，因而它必然在二阶量定理中有所反映。

**定理 1　Poynting 定理**

Poynting 定理是电磁领域中能量守恒和转换定理，其时域形式为

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2+\frac{1}{2}\mu H^2\right)\mathrm{d}V=\oiint_S(\vec{E}\times\vec{H})\cdot\mathrm{d}\vec{S}+\iiint_V\vec{J}\cdot\vec{E}\mathrm{d}V \tag{10-1}$$

图 10-3 给出了对应的物理模型。式（10-1）表明：进入体积 $V$ 内电磁能的时间减少率$\left(-\frac{\partial}{\partial t}\right)$等于通过 $V$ 边界面积 $S$ 向外流出的 Poynting 流功率和在体积 $V$ 内消耗的功率（转化为热能 $\vec{J}=\sigma\vec{E}$）

正是这一定理，明确宣布**封闭电磁空间的终结**，通过损耗电磁能的一部分（定向地）退化为热。

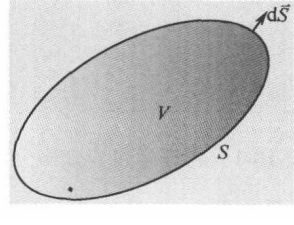



图 10-3　Poynting 定理

**定理 2 Kirchhoff 定理**

Kirchhoff 定理也是频域中的一个二阶量定理。由式（10-1），我们可进一步导出复数 Poynting 定理为

$$\frac{1}{2}\oiint_S(\vec{E}\times\vec{H}^*)\cdot(-\mathrm{d}\vec{S})=\frac{1}{2}\iiint_V\vec{E}\cdot\vec{J}^*\mathrm{d}V+\mathrm{j}2\omega\iiint_V\frac{1}{4}(\vec{B}\cdot\vec{H}^*-\vec{E}\cdot\vec{D}^*)\mathrm{d}V \tag{10-2}$$

引入复数 Poynting 定矢量

$$\vec{S}=\frac{1}{2}(\vec{E}\times\vec{H}^*) \tag{10-3}$$

且有

$$\begin{cases} W_\mathrm{m}=\dfrac{1}{4}\iiint_V\vec{B}\cdot\vec{H}^*\mathrm{d}V & (10\text{-}4)\\ W_\mathrm{e}=\dfrac{1}{4}\iiint_V\vec{E}\cdot\vec{D}^*\mathrm{d}V & (10\text{-}5)\end{cases}$$

分别表示磁储能与电储能，而

$$P_\mathrm{L}=\frac{1}{2}\iiint_V\vec{E}\cdot\vec{J}^*\mathrm{d}V \tag{10-6}$$

表示系统的损耗功率。重新写出式（10-2）为

$$\oiint\vec{S}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S=P_\mathrm{L}+\mathrm{j}2\omega(W_\mathrm{m}-W_\mathrm{e}) \tag{10-7}$$

如图 10-4 所示，Kirchhoff 定理定义广义输入阻抗为

$$z_\mathrm{in}=\frac{P_\mathrm{L}+\mathrm{j}2\omega(W_\mathrm{m}-W_\mathrm{e})}{\frac{1}{2}II^*}=R+\mathrm{j}X \tag{10-8}$$

特别当 $W_\mathrm{m}=W_\mathrm{e}$ 时，系统的电抗 $X\equiv0$ 表示在频率 $\omega$ 上系统**谐振**，而广义电阻 $R$ 正表示电磁空间走向开放，损耗是电磁与热相关联，并由此产生很多特性与问题。

**定理 3 Foster 定理**

Foster 定理比较特殊，它不仅不是损耗定理，相反是频域情况下**无耗系统**的一个二阶量定理，其物理模型如图 10-5 所示。

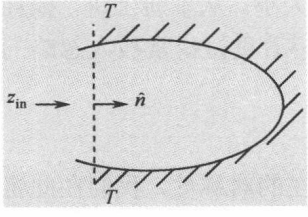



图 10-4 单端口系统的广义输入阻抗

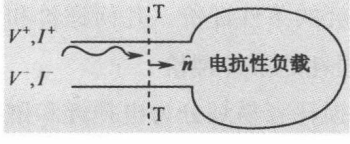



图 10-5 单端口电抗负载的 Foster 定理

$V$ 和 $I$ 定义端面 T-T 上的等效电压和等效电流，它满足

$$\oiint_T \left( \vec{E} \times \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial \omega} + \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial \omega} \times \vec{H} \right) \cdot \hat{n} \mathrm{d}\vec{S} = V \frac{\partial I^*}{\partial \omega} + \frac{\partial V^*}{\partial \omega} I \tag{10-9}$$

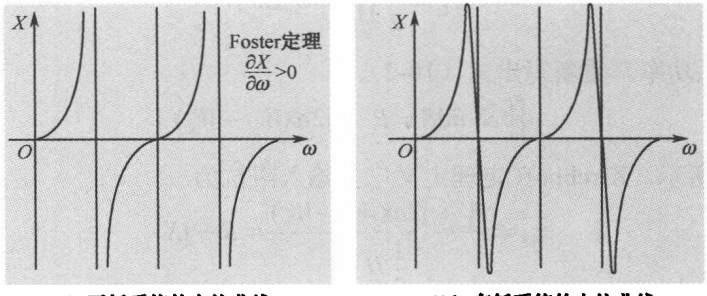
Foster 定理导出

$$\frac{\partial X}{\partial \omega} = \frac{4(W_\mathrm{m} + W_\mathrm{e})}{I I^*} \tag{10-10}$$

它表明：在无耗系统中电抗斜率 $\frac{\partial X}{\partial \omega}$ 正比于终端的总能量，很自然，绝不会为负，即

$$\frac{\partial X}{\partial \omega} > 0 \tag{10-11}$$

事实上，它已经默认了如下的事实：只要 $\frac{\partial X}{\partial \omega}$ 电抗斜率有小于 0 的情况，则系统必有耗，如图 10-6 所示。而这正是我们把 Foster 定理推广应用到有耗系统的主要想法。




（a）无耗系统的电抗曲线　　（b）有耗系统的电抗曲线

图 10-6　Foster 定理与有耗系统

## 2 损耗评价

研究电磁损耗的一个重要问题是如何评价损耗的大小。从本质上讲，损耗与电磁二次量——能量直接相关，是一个典型的幅度量。本文将着重讨论常被人忽略的三个方面问题：损耗的条件评价、几何评价和相位评价。

### 1．损耗的条件评价

电磁损耗容易划分为电损耗和磁损耗。考虑其内在的对称性，我们在此将只提及电损耗。重新写出频域条件下的 Maxwell 第一方程：

$$\nabla\times\vec{H}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\vec{E}+\vec{J}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\vec{E}+\sigma\vec{E}=\mathrm{j}\omega\tilde{\varepsilon}\vec{E} \tag{10-12}$$

其中，$\tilde{\varepsilon}=\varepsilon\left(1-\mathrm{j}\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$称为复介电常数，一般有

$$\begin{cases}\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}>100 & \text{材料为导体}\\ 0.01<\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}<100 & \text{材料为半导体}\\ \dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}<0.01 & \text{材料为绝缘体或介质}\end{cases} \tag{10-13}$$

可以看出，它与三个因素相关：材料导电率$\sigma$、介电常数$\varepsilon$和工作（角）频率$\omega$。对于电磁损耗，最容易进入的一个误区是**材料评价**，把材料划分为损耗大或者损耗小的两类情况。实际上这是不全面的。

首先请看下述问题揭示出来的矛盾：根据对于电路的一般知识，导线（$\sigma$很大）几乎不产生电磁损耗，而电阻 $R$（$\sigma$不是很大）则产生很大的损耗；另一方面，由电磁损耗功率 $P_{\mathrm{L}}$ 的定义式（10-6）得

$$P_{\mathrm{L}}=\frac{1}{2}\iiint_V\vec{E}\cdot\vec{J}^{*}\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\iiint_V\sigma\left|\vec{E}\right|^2\mathrm{d}V \tag{10-14}$$

又可得到$\sigma$越大，则电磁损耗也越大。那么，什么是损耗大的材料呢？为此，我们可以从两个方面作出较深入的讨论。

1）*路的情况*[8]

典型电路大致可以分为两大类：串联电路和并联电路。对于串联电路，见图 10-7（a），电流 $I$（或 $\vec{J}$）是路中的不变量。这时条件评价是$\sigma$越大则损耗功率 $P_{\mathrm{L}}$ 越小，即

$$P_{\mathrm{L}}=\frac{1}{2}\iiint_V\frac{\left|\vec{J}\right|^2}{\sigma}\mathrm{d}V \tag{10-15}$$

我们再讨论并联电路，如图 10-7（b）所示。这种情况下，电压 $V$（或 $\vec{E}$）是电路中的不变量。很显然，条件评价演变成$\sigma$越大则损耗功率 $P_{\mathrm{L}}$ 越大。

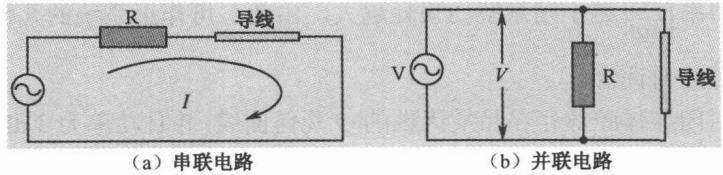



图 10-7　串联电路和并联电路两种情况损耗的条件评价

2）波的情况[7]

波的电磁耗损也对应地存在着一对矛盾：一方面，波传播到$\sigma$很大的良导体界面，会产生极大的反射（$\Gamma \approx -1$），界面上合成电场的切向分量接近为 0。换句话说，波进不到导体内，$\sigma$越大，波进去越少，损耗功率$P_L$也越小，如图 10-8（a）所示。

另一方面，波一旦进入良导体，则很快损耗掉，$\sigma$越大，损耗功率$P_L$也越大，如图 10-8（b）所示。

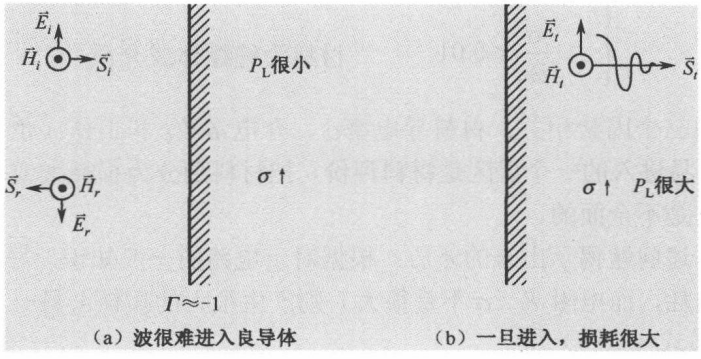



图 10-8 波与良导体的一对矛盾

从这个观点看问题，采用波导（Waveguide）作为传播波的传输线，波导壁$\sigma$极大，它有着潜在波进入后很大损耗的可能性。只是，实际情况中波几乎进入不了波导壁内（$\vec{E} \approx 0$）。波犹如一只美丽的海鸥，划过海面展翅飞翔，而翅膀却几乎不沾水滴。

至此，我们可以简要地归纳。研究电磁损耗不能光着眼于材料，重要的是应用的环境和应用的条件——这就是损耗的条件评价。

**2．损耗的几何评价**

电磁损耗是一种物理机制，然而，我们又可以根据几何曲线去判断损耗的大小。

（1）第 1 种几何评价。

广义传输线在有耗情况下电抗出现负斜率。根据定理 3 和图 10-6 可知，在无耗系统中，电抗曲线斜率$\dfrac{\partial X}{\partial \omega}$恒正。很易推广电磁损耗与出现负斜率紧密相关，如图 10-6（b）所示。而且负斜率$\left|\dfrac{\partial X}{\partial \omega}\right|$越小则系统的损耗越大。由此，可作出系统的几何评价。

（2）第 2 种几何评价。

封闭或准封闭导体腔体存在品质因数的$Q$几何曲线，并且功率为 3 dB 处的宽度$\Delta\omega$与中心频率$\omega_0$构成

$$Q=\frac{\omega}{\Delta\omega} \tag{10-16}$$

如图 10-9 所示。于是，我们可以根据 $Q$ 曲线对腔体系统的损耗作出几何评价。

由几何探讨电磁损耗的物理本质，其中深层次的原因很值得我们进一步探究。

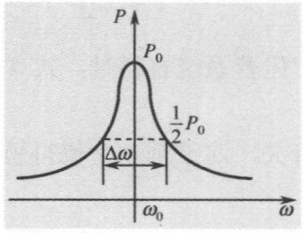



图 10-9　品质因数 $Q$ 曲线对腔体系统电磁损耗的几何评价

### 3. 损耗的相位评价

从电磁学的角度观察，损耗表示信号的振幅平方，它和信号相位是完全不同的两码事。但是，令人奇怪的是在很多情况下，我们可以通过观察相位来对系统的损耗作出评价。

（1）第 1 种双口网络损耗的特征相位评价。

由文献[6]可知，无耗双口网络，如图 10-10 所示，其特征相位 $\Phi$ 满足

$$\Phi=(\varphi_{11}+\varphi_{22})-(\varphi_{12}+\varphi_{21})=\pm\pi \tag{10-17}$$

其中，$s_{11}=|s_{11}|e^{j\varphi_{11}}$，$s_{22}=|s_{22}|e^{j\varphi_{22}}$，$s_{12}=|s_{12}|e^{j\varphi_{12}}$，$s_{21}=|s_{21}|e^{j\varphi_{21}}$。

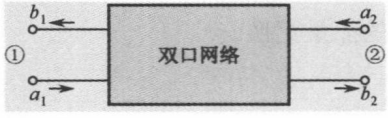



图 10-10　一般双口网络

如果网络有耗则特征相位 $\varphi$ 不再为 $\pm\pi$，而它们与 $\pm\pi$ 的差距可以判断双口网络的损耗情况。

（2）第 2 种定向耦合器损耗的相位评价[9]。

定向耦合器是典型的 4 端口网络，如图 10-11 所示。

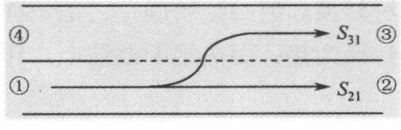



图 10-11　一般定向耦合器

其中，①→②是主端，①→③是耦合端，而端口④隔离。

在无耗定向耦合器情况下，可以证明：

$$\varphi_{31}-\varphi_{21}=\frac{\pi}{2} \tag{10-18}$$

因此，也称为 90° 耦合器。但若系统有耗时，式（10-18）不再等于 π/2，其差值可以评价耦合器的系统损耗。

损耗（振幅）与相位密切有关，这又是一个值得思考的有趣问题。

## 3 损耗系统特性

损耗给一般电磁系统带来了**质的变化**。

**1．系统的开放性**

损耗使电磁空间走向开放。原先电磁和其他物理量不变换的封闭局面被打破了。一方面，由于系统开放带来了丰富多彩的变化，给创新带来了更多机会；另一方面，系统的开放使研究思想、研究方法和研究工具都面临着巨大的挑战，即构成同一问题的两个侧面。

**2．场量的耦合性**

有耗构造重要的电磁媒介。它使原来各自独立的场量($\vec{E}$和$\vec{H}$)产生奇妙的相互耦合；原先各自独立的波发生相互的能量交换。

**3．信息的蚕食性**

电磁探地是当前十分活跃的一个领域。从概念上讲，它是利用波的反射信息获取未知目标特性。但是，一旦考虑地下损耗，进入地面的电磁波有明显的衰减，使反射信息被蚕食，从而会影响目标的析出；而从另一方面，对于目标隐身，则信息的蚕食又会起到正面的效果。

**4．演变的定向性**

前已论述，电磁学和其他领域的关联有两种形式：转换和损耗。广义地说，损耗也是一种转换，电磁向热的一种转换。但必须明确，它是一种**特殊的转换**——电磁损耗是一种退化的转换：电磁可以转换为热；而热绝无办法全部转换成电磁，这就是电磁损耗演变的定向性。

还有必要提及，在日常生活中，有时我们故意要把电磁转换为热。例如烧水的电开水壶，取暖的电炉和烹饪的微波炉等。这种情况下，电磁损耗变成了我们所要追求的目标。

## 4 电磁损耗带来的困难

毋庸置疑，现有美丽的电磁理论大厦主要是建立在“全封闭”无耗基础上的。一旦损耗出现，必须会使研究工作带来各种困难。

**1．边界条件复杂化**

作为典型例子，理想导体所对应的边界条件是

$$\hat{n}\times\vec{E}=0 \tag{10-19}$$

如果我们要考虑有耗的非理想情况，则须计及 Леотович（列奥托维奇）边界条件

$$\hat{n}\times\vec{E}=z_{\mathrm{m}}\vec{H} \tag{10-20}$$

其中，$z_{\mathrm{m}}$ 表示良导体的表面阻抗，有

$$z_{\mathrm{m}}=\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1+\mathrm{j}) \tag{10-21}$$

这时，$\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 耦合了，边界条件出现了复杂的局面。

**2．模式理论困难化**

电磁理论的一个重要的研究方法是把任意复杂的场与波采用完备模体系展开。例如，理想导体波导或理想导体谐振腔中的本征模展开。但是，当波导壁或腔体壁有损耗时，理论遇到了致命的困难——各种模式之间的正交性消失了，完备性很难获得。严格地说，在这种情况下，整个模式体系的基础发生了强烈的“地震”，被动摇了。

**3．传播模式和截止模式之间的界限模糊化**[5]

无耗传输理线论的一个重要特色是存在两种模式：传播模式和截至模式。一旦进入有耗情况，两者之间的界限模糊化了。传播模式的特性阻抗带有电抗成分，而截止模式则具有电阻分量，且两者之间相互耦合，给研究带来很大困难。

系统有耗之后，给我们研究工作带来的问题，远不止上面几条。尽管电磁学的发展早过了百年，但是真正意义上的有耗电磁学尚未出现。目前工程上所做的也只是采用微扰法等迁就的中间道路。

本文讨论的主题是电磁损耗，重点论及电磁由损耗走向开放所出现的种种问题。应该指出：能量转换遵守能量守恒。文中深入讨论了损耗的条件评价、几何评价和相位评价，并指出：我们应当克服各种困难，建立真正意义上的有耗电磁学值得尝试。

## 答问录

**问**：札记十单独把电磁损耗问题抽出来，作深入讨论的主要目的是什么？

**答**：这个问题问得好。因为很多人对电磁理论有一个不小的误解，即认为这是一门纯粹的理论课。其实这种理解是不对的，电磁理论的主要目标之一：必须紧密联系实践。广义地说，一切理工科课程都是如此。

具体对于电磁理论，其核心有两个方面。一方面为了建立理论体系，必须在一开始作出某些合理的简化，如无耗、正交、完备的模式体系。由此，抓住了工程设计和工程应用的主要矛盾。而且，整个体系反映出强烈的对称性。另一方面，考虑到实践需要，必须计及电磁损耗，这时我们不是重新建立体系（说实话，真正严格的有耗体系现在尚难于建立），而是把损耗看成无耗体系中加了微扰（尽管有的情况下这种微扰很大），由此建立了有实用价值的有耗电磁学，如图 10-12 所示。

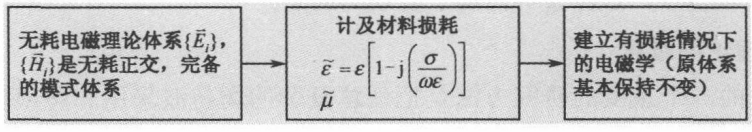



图 10-12　计及损耗后的电磁学

**问**：札记研究电磁损耗在方法上有何独特之处？

**答**：不知你是否注意到札记十所处的位置：在此前几篇我们重点讨论了电磁对称性，而后边的几篇札记则给出复数在电磁学中的应用。十分清楚，《论电磁损耗》放在这里，刚好处于对称和复数的衔接口。

无耗电磁学是对称的。在频域问题中我们引入复数材料表示损耗，它破坏了电磁对称性。但是，却完全保持在**形式上与无耗完全相同**。

在这种情况下，无耗和有耗两者又构成**似对称性**，确实十分奇妙，如图 10-13 所示。

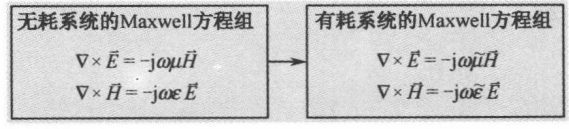



图 10-13　无耗和有耗（频域）系统 Maxwell 方程组的似对称性

**问**：复数引入电磁学，确实是一种十分有用的方法。

**答**：你上面提出的是一般人的普遍看法，事实上，复数对于电磁学是提出一种**思想**，建立一种体系，更重要的是揭示一种**本质**。

大体来说有四个阶段，如图 10-14 所示。

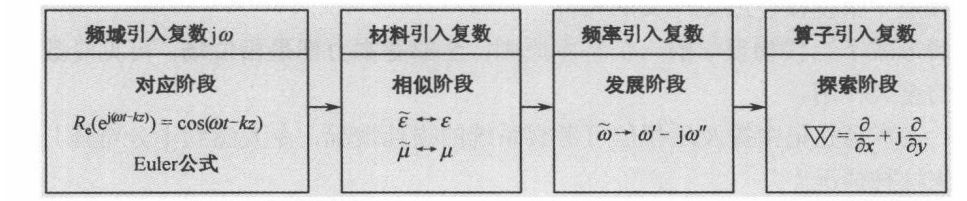



图 10-14　电磁领域引入复数的四个阶段

上面已包括札记十一和札记十二的内容，我们将在后面进一步作深入讨论。

关于复数的认识，我们是一步步开展的，作者在《复变函数札记》的前言中有明确的描述。

最初对于复数的应用完全基于**对应原理**，只要与 $z=x+\mathrm{j}y$ 平面建立一一对应关系，即可获得点时域内的各种重要工程应用，而对于时谐场场强

$$\vec{E}=\vec{E}_0\cos(\omega t-kz)$$

只需采用 Euler 公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}=\cos x+\mathrm{j}\sin x$，我们会再一次进入复域，有

$$\vec{E}=\mathrm{Re}\left[\vec{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kz)}\right]$$

但是，刚刚过去的 21 世纪，作为五彩缤纷的创新年代，事情已经悄悄地发生着本质的变化——复数和复函数开始真正地回归到了实际。现在，我们完全可以明确地说——**复函数属于现实的物理世界**。

随着对微观粒子的规律探索，海森堡矩阵力学和薛定谔波动力学的出现，复数成了物理学上非常基本的概念。它们的基本方程都是复数的，即

$$\begin{cases} pq-q\rho=-\mathrm{j}\hbar \\ \mathrm{j}\hbar\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=H\varphi \end{cases}$$

若去掉 j，而把上面方程写成实部和虚部，则它们的真实意义也就完全丧失了。

费曼给出的第三种量子力学——路径积分形式为

$$\varphi(\vec{r}',\vec{t}')=\int K(\vec{r}',\vec{t}'/\vec{r},\vec{t})\varphi(\vec{r}',\vec{t}')\mathrm{d}\vec{r}\mathrm{d}t$$

其中，积分核 $K(\vec{r}',\vec{t}'/\vec{r},\vec{t})=\sum\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{s}{\hbar}}$，更是把作用量放到负指数的相位因子上。

外尔要建立统一场论，几经反复最终得到复指数

$$\exp\left(-\mathrm{j}\frac{e}{\hbar c}\int_p^q A_u\mathrm{d}x_u\right)$$

规范理论的美妙旋律。

在 20 世纪 70 年代，是伟大的科学家杨振宁等使研究持续产生重大进展，主要包括：

发现所有的相互作用都是某种形式的规范场；而规范场与数学纤维丛概念密切相关；每一根纤维是一个复核位或更广义的相位。

最后形成了当代物理学的一个基本原则：**全部基本力都是相位场**。可见复数对于物理发展的重大作用。

问：在本篇札记中提及用相位可考察系统的损耗情况，令人感到十分奇怪！是什么原因产生这种情况？

**答**：非常明确也非常清楚：损耗反映系统场的振幅关系，但是却在相位上给出反映，如图 10-15 所示。

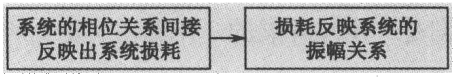



图 10-15　系统的相位关系间接反映出系统损耗

我们分为两种情况具体讨论，如图 10-10 所示。

**1．双口网络情况**

$$\begin{cases}[b]=[s][a] \\ [b]^{+}=[s]^{+}[a]^{+}\end{cases}$$

于是写出

$$[b]^{+}[b]=[a]^{+}([s]^{+}[s])[a]$$

对于无耗情况

$$[b]^{+}[b]=[a]^{+}[a]=[a]^{+}\boldsymbol{I}[a]$$

其中 $\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 表示单位矩阵。

很易写出 $[s]^{+}[s]=\boldsymbol{I}$，也即

$$\begin{bmatrix}s_{11}^{*} & s_{12}^{*}\\ s_{21}^{*} & s_{22}^{*}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_{11} & s_{12}\\ s_{21} & s_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

具体是

$$\begin{bmatrix}|s_{11}|^{2} & s_{11}^{*}s_{12}+s_{21}^{*}s_{22}\\ s_{12}^{*}s_{11}+s_{22}^{*}s_{21} & |s_{22}|^{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

十分清楚

$$s_{11}^{*}s_{12}+s_{21}^{*}s_{22}=0$$

于是双口网络的特征相位 $\boldsymbol{\Phi}$ 满足

$$\boldsymbol{\Phi}=(\varphi_{11}+\varphi_{22})-(\varphi_{12}+\varphi_{21})=\pm\pi$$

为了深入找原因，我们进一步具体考察并写出

$$\left(|s_{11}|^2+|s_{21}|^2\right)|a_1|^2+2\mathrm{Re}\left[\left(s_{11}s_{12}^*+s_{21}s_{22}^*\right)a_1a_2^*\right]+\left(|s_{12}|^2+|s_{22}|^2\right)|a_2|^2=|a_1|^2+|a_2|^2$$

这时终于揭示出 $s_{11}s_{12}^*+s_{21}s_{22}^*=0$ 的本质原因是**阻止 $a_1$ 与 $a_2$ 的耦合功率**。

现在着手讨论双口有耗网络，与双口无耗网络的不同仅在上式的右边，即

$$\left(|s_{11}|^2+|s_{21}|^2\right)|a_1|^2+2\mathrm{Re}\left[\left(s_{11}s_{12}^*+s_{21}s_{22}^*\right)a_1a_2^*\right]+\left(|s_{12}|^2+|s_{22}|^2\right)|a_2|^2=|b_1|^2+|b_2|^2$$

若令

$$\begin{cases}|b_1|^2+|b_2|^2=|a_1|^2(1-\delta_1)+|a_2|^2(1-\delta_2)\\ |s_{11}|^2+|s_{21}|^2=1-\Delta_1\\ |s_{21}|^2+|s_{22}|^2=1-\Delta_2\end{cases}$$

其中，$\delta_1,\delta_2,\Delta_1,\Delta_2$ 均为小于 1 的实数，具体得

$$2\mathrm{Re}\left[(s_{11}s_{12}^*+s_{21}s_{22}^*)a_1a_2^*\right]=(\Delta_1-\delta_1)|a_1|^2+(\Delta_2-\delta_2)|a_2|^2$$

设 $s=s_{11}s_{12}^*+s_{21}s_{22}^*$，写出

$$\begin{cases}\mathrm{Re}(s)\mathrm{Re}(a_1a_2^*)-\mathrm{Im}(s)\mathrm{Im}(a_1a_2^*)=\dfrac{1}{2}\left[(\Delta_1-\delta_1)|a_1|^2+(\Delta_2-\delta_2)|a_2|^2\right]\\ \mathrm{Re}(s)\mathrm{Im}(a_1a_2^*)+\mathrm{Im}(s)\mathrm{Re}(a_1a_2^*)=0\end{cases}$$

由上面第 2 分式得

$$\mathrm{Im}(s)=-\frac{\mathrm{Im}(a_1a_2^*)}{\mathrm{Re}(a_1a_2^*)}\mathrm{Re}(s)$$

代入第 1 分式得出

$$\left[\mathrm{Re}(a_1a_2^*)+\frac{\mathrm{Im}^2(a_1a_2^*)}{\mathrm{Re}(a_1a_2^*)}\right]\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}\left[(\Delta_1-\delta_1)|a_1|^2+(\Delta_2-\delta_2)|a_2|^2\right]$$

也即

$$\frac{|a_1a_2|^2}{\mathrm{Re}(a_1a_2^*)}\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}\left[(\Delta_1-\delta_1)|a_1|^2+(\Delta_2-\delta_2)|a_2|^2\right]$$

对于互易网络有 $|s_{12}|=|s_{21}|$，可得

$$|s_{11}|\cos(\varphi_{11}-\varphi_{12})+|s_{22}|\cos(\varphi_{22}-\varphi_{21})=\frac{\mathrm{Re}(a_1a_2^*)\left[(\Delta_1-\delta_1)|a_1|^2+(\Delta_2-\delta_2)|a_2|^2\right]}{2|a_1a_2|^2}$$

我们得到结论：双口有耗网络的 $S$ 参数相位与振幅密切相关，特别是与 $a_1,a_2$ 耦合功率有关。在这时，我们再一次回顾正文中所提及“有耗形成了重要的电磁媒介。它使

原来各自独立的场量（$\bar{E}$ 和 $\bar{H}$）产生奇妙的相互耦合，原先各自独立的波相互发生能量交换。”真感到这一段话意味深长。

**2. 定向耦合器网络**

对于图 10-11 的一般定向耦合器，在理想情况下，$s_{11}=s_{22}=s_{33}=s_{44}=0$。考虑到对称情况

$$s_{24}=s_{13}$$

$$s_{34}=s_{12}$$

理想定向器的互易网络有

$$s_{14}=s_{23}=s_{32}=s_{41}=0$$

写出

$$\boldsymbol{s}=\begin{bmatrix}0 & s_{12} & s_{13} & 0\\ s_{12} & 0 & 0 & s_{13}\\ s_{13} & 0 & 0 & s_{12}\\ 0 & s_{13} & s_{12} & 0\end{bmatrix}$$

很易得到

$$s_{12}^{*}s_{13}+s_{13}^{*}s_{12}=0$$

即

$$|s_{12}||s_{13}|\cos(\varphi_{13}-\varphi_{12})=0$$

最后有

$$\varphi_{31}-\varphi_{21}=\varphi_{13}-\varphi_{12}=\frac{\pi}{2}$$

此式表示无耗定向耦合器的相位特性。

有耗电磁学领域可以从两个方面发展：有耗场论和有耗网络。

**定理 1** 在双口网络中若 $s_{11}=s_{22}=0$，则将不存在特征相位 $\boldsymbol{\Phi}$ 的约束，即

$$\boldsymbol{s}=\begin{bmatrix}0 & s_{12}\\ s_{21} & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{s}^{+}\boldsymbol{s}=\begin{bmatrix}|s_{12}|^2 & 0\\ 0 & |s_{12}|^2\end{bmatrix}$$

$$[a]^{+}(\boldsymbol{s}^{+}\boldsymbol{s})[a]=[b]^{+}[b]$$

具体是

$$|s_{21}|^2|a_1|^2+|s_{12}|^2|a_2|^2=|b_1|^2+|b_2|^2$$

无 $\boldsymbol{\Phi}$ 约束，即使到有耗网络也是如此。

**定理 2**　在对称型无耗定向耦合器中，$s_{11}$ 和 $s_{14}$ 要么两个都为 0，要么两个都不为 0，否则会引起矛盾。

**证明**　作为例子，这里研究 $s_{11}\neq 0, s_{14}=0$ 的情况，具体写出

$$\boldsymbol{s}^{+}\boldsymbol{s}=\begin{bmatrix} s_{11}^{*} & s_{12}^{*} & s_{13}^{*} & 0 \\ s_{12}^{*} & s_{11}^{*} & 0 & s_{13}^{*} \\ s_{13}^{*} & 0 & s_{11}^{*} & s_{12}^{*} \\ 0 & s_{13}^{*} & s_{12}^{*} & s_{11}^{*} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 \\ s_{12} & s_{11} & 0 & s_{13} \\ s_{13} & 0 & s_{11} & s_{12} \\ 0 & s_{13} & s_{12} & s_{11} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可得如下 3 个方程：

$$\begin{cases} s_{11}^{*}s_{12}+s_{12}^{*}s_{11}=0 \\ s_{11}^{*}s_{13}+s_{13}^{*}s_{11}=0 \\ s_{12}^{*}s_{13}+s_{13}^{*}s_{12}=0 \end{cases}$$

也即

$$\begin{cases} |s_{11}||s_{12}|\cos(\varphi_{11}-\varphi_{12})=0 \\ |s_{11}||s_{13}|\cos(\varphi_{11}-\varphi_{13})=0 \\ |s_{12}||s_{13}|\cos(\varphi_{12}-\varphi_{13})=0 \end{cases}$$

由上述方程知

$$\begin{cases} \varphi_{11}-\varphi_{12}=\dfrac{\pi}{2} \\ \varphi_{11}-\varphi_{13}=\dfrac{\pi}{2} \\ \varphi_{12}-\varphi_{13}=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

将第 2 分式减去第 1 分式为 $\varphi_{12}-\varphi_{13}=0$，显然与第 3 分式矛盾。

现在，我们可以开始研究对称型**有耗**定向耦合器情况。

$$\begin{bmatrix} a_1^{*} & a_2^{*} & a_3^{*} & a_4^{*} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} |s_{12}|^2+|s_{13}|^2 & 0 & 0 & s_{12}^{*}s_{13}+s_{13}^{*}s_{12} \\ 0 & |s_{12}|^2+|s_{13}|^2 & \zeta & 0 \\ 0 & \zeta & |s_{12}|^2+|s_{13}|^2 & 0 \\ \zeta & 0 & 0 & |s_{12}|^2+|s_{13}|^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1^{*}\eta+a_4^{*}\zeta & a_2^{*}\eta+a_3^{*}\zeta & a_3^{*}\eta+a_2^{*}\zeta & a_4^{*}\eta+a_1^{*}\zeta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

$$=\left(|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2+|a_4|^2\right)\eta+2\left[\mathrm{Re}(a_1^{*}a_4)+\mathrm{Re}(a_2^{*}a_3)\right]\zeta$$

$$=|b_1|^2+|b_2|^2+|b_3|^2+|b_4|^2$$

令 $|b_1|^2+|b_2|^2+|b_3|^2+|b_4|^2=|a_1|^2(1-\Delta_1)+|a_2|^2(1-\Delta_2)+|a_3|^2(1-\Delta_3)+|a_4|^2(1-\Delta_4),\eta=1-\delta$

$$
\begin{aligned}
&2\left[\mathrm{Re}(a_1^*a_4)+\mathrm{Re}(a_2^*a_3)\right](s_{12}^*s_{13}+s_{12}s_{13}^*)\\
&=4|s_{12}||s_{13}|\left[\mathrm{Re}(a_1^*a_4)+\mathrm{Re}(a_2^*a_3)\right]\cos(\varphi_{12}-\varphi_{13})\\
&=|a_1|^2(\delta-\Delta_1)+|a_2|^2(\delta-\Delta_2)+|a_3|^2(\delta-\Delta_3)+|a_4|^2(\delta-\Delta_4)
\end{aligned}
$$

最后得到

$$
\cos(\varphi_{12}-\varphi_{13})=\frac{|a_1|^2(\delta-\Delta_1)+|a_2|^2(\delta-\Delta_2)+|a_3|^2(\delta-\Delta_3)+|a_4|^2(\delta-\Delta_4)}{4|s_{12}||s_{13}|\left[\mathrm{Re}(a_1^*a_4)+\mathrm{Re}(a_2^*a_3)\right]}
$$

十分明显，在有耗情况下 $(\varphi_{12}-\varphi_{13})$ 与输入的 $a_1,a_2,a_3$ 和 $a_4$ 密切相关。当然它与损耗因子 $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3,\Delta_4$ 和 $\delta$ 相关。

令

$$
\begin{cases}
\eta=|s_{11}|^2+|s_{12}|^2+|s_{13}|^2+|s_{14}|^2\\
\zeta_{12}=s_{11}^*s_{12}+s_{12}^*s_{11}+s_{13}^*s_{14}+s_{14}^*s_{13}\\
\zeta_{13}=s_{11}^*s_{13}+s_{12}^*s_{14}+s_{13}^*s_{11}+s_{14}^*s_{12}\\
\zeta_{14}=s_{11}^*s_{14}+s_{12}^*s_{13}+s_{13}^*s_{12}+s_{14}^*s_{11}
\end{cases}
$$

则

$$
\boldsymbol{s}^+\boldsymbol{s}=\begin{bmatrix}s_{11}^* & s_{12}^* & s_{13}^* & s_{14}^*\\ s_{12}^* & s_{11}^* & s_{14}^* & s_{13}^*\\ s_{13}^* & s_{14}^* & s_{11}^* & s_{12}^*\\ s_{14}^* & s_{13}^* & s_{12}^* & s_{11}^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14}\\ s_{12} & s_{11} & s_{14} & s_{13}\\ s_{13} & s_{14} & s_{11} & s_{12}\\ s_{14} & s_{13} & s_{12} & s_{11}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta & \zeta_{12} & \zeta_{13} & \zeta_{14}\\ \zeta_{12} & \eta & \zeta_{14} & \zeta_{13}\\ \zeta_{13} & \zeta_{14} & \eta & \zeta_{12}\\ \zeta_{14} & \zeta_{13} & \zeta_{12} & \eta\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}a_1^* & a_2^* & a_3^* & a_4^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta & \zeta_{12} & \zeta_{13} & \zeta_{14}\\ \zeta_{12} & \eta & \zeta_{14} & \zeta_{13}\\ \zeta_{13} & \zeta_{14} & \eta & \zeta_{12}\\ \zeta_{14} & \zeta_{13} & \zeta_{12} & \eta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&=[a_1^*\eta+a_2^*\zeta_{12}+a_3^*\zeta_{13}+a_4^*\zeta_{14}\quad a_1^*\zeta_{12}+a_2^*\eta+a_3^*\zeta_{14}+a_4^*\zeta_{13}\quad a_1^*\zeta_{13}+a_2^*\zeta_{14}+\\
&\quad a_3^*\eta+a_4^*\zeta_{12}\quad a_1^*\zeta_{14}+a_2^*\zeta_{13}+a_3^*\zeta_{12}+a_4^*\eta]\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\end{bmatrix}\\
&=(|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2+|a_4|^2)\eta+a_1a_2^*\zeta_{12}+a_1a_3^*\zeta_{13}+a_1a_4^*\zeta_{14}+a_2a_1^*\zeta_{12}+a_2a_3^*\zeta_{14}+\\
&\quad a_2a_4^*\zeta_{13}+a_3a_1^*\zeta_{13}+a_3a_2^*\zeta_{14}+a_3a_4^*\zeta_{12}+a_4a_1^*\zeta_{14}+a_4a_2^*\zeta_{13}+a_4a_3^*\zeta_{12}\\
&=(|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2+|a_4|^2)\eta+2[\mathrm{Re}(a_1a_2^*)+\mathrm{Re}(a_3a_4^*)]\zeta_{12}+2[\mathrm{Re}(a_1a_3^*)+\\
&\quad \mathrm{Re}(a_2a_4^*)]\zeta_{13}+2\left[\mathrm{Re}(a_1a_4^*)+\mathrm{Re}(a_2a_3^*)\right]\zeta_{14}
\end{aligned}
$$

$$\text{由于}\begin{cases}\zeta_{12}=2\left[|s_{11}||s_{12}|\cos(\varphi_{11}-\varphi_{12})+|s_{13}||s_{14}|\cos(\varphi_{13}-\varphi_{14})\right]\\ \zeta_{13}=2\left[|s_{11}||s_{13}|\cos(\varphi_{11}-\varphi_{13})+|s_{12}||s_{14}|\cos(\varphi_{12}-\varphi_{14})\right]\\ \zeta_{14}=2\left[|s_{11}||s_{14}|\cos(\varphi_{11}-\varphi_{14})+|s_{12}||s_{13}|\cos(\varphi_{12}-\varphi_{13})\right]\end{cases},$$

$$|b_1|^2+|b_2|^2+|b_3|^2+|b_4|^2=|a_1|^2(1-\Delta_1)+|a_2|^2(1-\Delta_2)+|a_3|^2(1-\Delta_3)+|a_4|^2(1-\Delta_4),\eta=1-\delta$$

则简化为

$$\begin{aligned}&4\left\{\left[\mathrm{Re}(a_1a_2^*)+\mathrm{Re}(a_3a_4^*)\right]\left[|s_{11}||s_{12}|\cos(\varphi_{11}-\varphi_{12})+|s_{13}||s_{14}|\cos(\varphi_{13}-\varphi_{14})\right]\right.\\&+\left[\mathrm{Re}(a_1a_3^*)+\mathrm{Re}(a_2a_4^*)\right]\left[|s_{11}||s_{13}|\cos(\varphi_{11}-\varphi_{13})+|s_{12}||s_{14}|\cos(\varphi_{12}-\varphi_{14})\right]\\&\left.+\left[\mathrm{Re}(a_1a_4^*)+\mathrm{Re}(a_2a_3^*)\right]\left[|s_{11}||s_{14}|\cos(\varphi_{11}-\varphi_{14})+|s_{12}||s_{13}|\cos(\varphi_{12}-\varphi_{13})\right]\right\}\\&=|a_1|^2(\delta-\Delta_1)+|a_2|^2(\delta-\Delta_2)+|a_3|^2(\delta-\Delta_3)+|a_4|^2(\delta-\Delta_4)\end{aligned}$$

同样相位是一个与输入 $a_1,a_2,a_3$ 和 $a_4$ 密切相关的复杂关系。当然，它与损耗因子 $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3,\Delta_4$ 和 $\delta$ 相关。

## 推荐人物

本篇将介绍黄宏嘉老师，毫不夸大地说，他是国内电磁微波领域的领袖型人物。



黄宏嘉老师

（1）环境和人相比，人的因素第一。

黄宏嘉老师是西南联大电信专业毕业的，时间是 1940—1944 年。众所周知西南联大这所学校本身就是抗日战争的特殊产物。几经转折，学习和工作环境极差。但正是这所学校为我国培养出了很多大师级的人物。只要提及伟大的物理学家杨振宁即见一斑。

黄宏嘉老师克服种种困难，在西南联大成绩优异。特别要提及的是在大学毕业后，他随即应征入伍，在抗战中任远征军少校翻译官，在滇缅公路上一直服务到抗日战争结束。黄宏嘉老师无时无刻不把祖国放在心中。1949 年他毅然放弃在美攻博机会，冲破阻力于 10 月回国效劳，他的经历充分说明：环境和人相比，人的因素第一。

（2）条件和努力相比，努力第一。

1963—1964 年科学出版社专门出版他的扛鼎之作——近 100 万字的《微波原理》I、II 卷。

由此使这一领域跨入了国际前沿，他也为此获得了 1978 年全国科学大会的重大贡献奖。

但是，很少有人知晓撰写《微波原理》背后的故事。1959—1961 年我国暂时经济困难，一般人肚子都吃不饱。另一方面，当时人们对于业务有很多不正确的偏见。就是在这种种不利的条件下，黄宏嘉先生坚持撰写名著。他亲口对我说："为了抓紧时间，在大操场开会时，他坐在小凳上也不忘准备素材和提纲。"

每当想到黄宏嘉老师当时创作的情景，我们只有感到羞愧和难当。他的努力、他的勤奋不是一般人能所及的。

（3）不断创新，不断向前。

黄宏嘉老师是教学和科研工作结合得非常好的代表之一。几十年来，他从不停步：

1965 年在发表著名的《从微波到光》论文——这是国内光纤可能应用于通信的最早文献；

1981 年在美国纽约理工学院出版《耦合模理论》；

1998 年在美国 John Wiley & Sons 出版《非常不规则纤维光学中的微波方法》；

他还出版了《光波导科学》，创立了"超模式"概念。

黄宏嘉老师确实是不断创新，不断向前！

## 参考文献

[1] Stratton J A. Electromagnetic Theory. New York: McGraw-Hill, 1941.

[2] Harrington R F. Time-Harmonic Electromagnetic Fields. New York: McGraw-Hill, 1961.

[3] Collin R E. 微波工程基础. 北京：人民邮电出版社，1981.

[4] 黄宏嘉. 微波原理 卷Ⅰ，卷Ⅱ. 北京：科学出版社，1964.

[5] 黄志洵. 截止波导理论导论. 北京：中国计量出版社，1991.

[6] 梁昌洪. 计算微波. 西安：西北电讯工程学院出版社，1985.

[7] 梁昌洪，谢拥军，官伯然. 简明微波. 北京：高等教育出版社，2006.

[8] 梁昌洪. 关于电磁理论的若干思考. 电气电子教学学报，2004，26(1): 1-5.

[9] Levy R. Directional coupler. Advances in Microwaves, Vol. Ⅰ. Academic 1966: 115-209.

札记十一

# 电磁理论中的复参量和复定理

本文深入探讨电磁理论中的复参量和复定理。由于复数引入电磁场，使时域中的两个物理概念（传输和损耗，电阻和电抗，谐振频率和品质因数）在更高的层次上统一了起来。文中给出了复频率 Poynting 定理，得到不论是开放空间还是封闭空间都有广义品质因数 $Q=\omega' W / P_{\mathrm{L}}$，而复频率 Foster 定理表明：$\partial \tilde{z}^{*} / \partial \tilde{\omega}=0$。文中指出：对于有耗系统，例如天线辐射系统，输入阻抗中的电抗 $x_{\mathrm{in}}$ 存在负斜率区域。

## 0 引 言

本文是电磁场理论系列札记之十一。

复数的引入对于数学本身是一个革命性的变化，而复数在工程中的出现更带来了崭新的面貌。

法国著名数学家 Jacques Hadamard 则作出了精辟的阐述：**时域中两个真理之间的最短路程是通过复域**[1]。

事实上，Euler 正是通过复数建立了三角函数和指数函数之间的神奇联系，也即著名的 Euler 公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}=\cos x+\mathrm{j}\sin x \tag{11-1}$$

而诺贝尔物理学奖获得者杨振宁博士对复数也有刻骨铭心的感受。1940 年秋，他正在研修陈省身执教的《微分几何》，有一道难题使他感到特别困惑：如何证明每个二维曲面和平面都存在保角（Conformal）变换关系。杨振宁知道如何把度量和张量化成 $A^2\mathrm{d}u^2+B^2\mathrm{d}v^2$ 的形式，却无法再向前进。有一天，陈省身告诉他要用复变数，并写下

$$Cdz = Adu + jBdv \tag{11-2}$$

从这个式子学到了简单的妙诀，杨振宁说这是他毕生难忘的经历[2]。

本文将讨论把复参量和复定理引入电磁理论。从而使传输的损耗、谐振频率$\omega$和品质因数$Q$值等时域中的“两个真理”从本质上联系了起来，使我们以更高的立点去观察和研究问题。

## 1 复频率$\tilde{\omega}=\omega'-j\omega''$

电磁理论发展到今天，已经非常成熟。绝大多数数学工具在这个领域都得到了成功的应用。以复变函数为例：时谐场引入$e^{j\omega t}$因子[3,4]，电磁网络复开拓$s=\sigma+j\omega$和静电场的保角变换等；在研究封闭导体腔时[3-5]又给出了复频率$\omega'\left(1-j\frac{1}{2Q}\right)$，只是这一工作没有进一步被推广和发展。

本文把这一思想拓展到最一般的电磁系统，使系统中的有耗部分均归于复频率$\tilde{\omega}$中，于是可写出如下最一般的复频率 Maxwell 方程组：

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{H}=j\tilde{\omega}\varepsilon\vec{E}\\ \nabla\times\vec{E}=-j\tilde{\omega}\mu\vec{H}\end{cases} \tag{11-3}$$

值得注意，在这种情况下$\varepsilon$和$\mu$均为实参数（这里仅研究各向同性媒质）。式（11-3）复频率 Maxwell 方程在形式上复归为无耗。定义广义品质因数

$$Q=\frac{\omega'}{2\omega''} \tag{11-4}$$

它既可以用于封闭谐振腔，也可进一步推广到开放系统和非谐振的任意情况。

## 2 复相角$\tilde{\theta}=\theta'-j\theta''$

如果说频率$\tilde{\omega}$属于广义谐振系统，那么$\tilde{\theta}$则属于广义传输系统，如图 11-1 所示。

【定理】对于小损耗广义微波传输系统，有

$$\frac{\theta''}{\theta'}=\frac{\omega''}{\omega'}\left(\frac{\lambda_g}{\lambda_0}\right)^2 \tag{11-5}$$

和

$$\tilde{\theta}=\theta'\left[1-j\frac{1}{2Q}\left(\frac{\lambda_g}{\lambda_0}\right)^2\right] \tag{11-6}$$

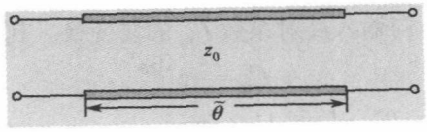



图 11-1　广义微波传输系统

【证明】注意到条件 $\omega''$ 和 $\theta''$ 很小，我们把 $\omega'$ 写成 $\omega$，而 $\theta'$ 写成 $\theta$，于是

$$\frac{\theta''}{\theta'}=\frac{\Delta\theta}{\theta},\quad \frac{\omega''}{\omega'}=\frac{\Delta\omega}{\omega}$$

已知 $\theta=\dfrac{2\pi}{\lambda_g}l$，其中，$\lambda_g$ 是系统的波导波长，而 $l$ 则是系统长度。可知

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda_g}=-\frac{2\pi l}{\lambda_g^{\,2}}$$

再考虑 $\dfrac{1}{\lambda_g^{\,2}}=\dfrac{1}{\lambda_0^{\,2}}-\dfrac{1}{\lambda_c^{\,2}}$，其中，$\lambda_c$ 是传输模式的截止波长，有

$$\frac{\Delta\lambda_g}{\Delta\lambda_0}=\left(\frac{\lambda_g}{\lambda_0}\right)^3$$

又知 $\lambda_0=\dfrac{c}{f}=\dfrac{2\pi c}{\omega}$，给出 $\dfrac{\Delta\lambda_0}{\Delta\omega}=-\dfrac{\lambda_0}{\omega}$。最后可得

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda_g}\frac{\Delta\lambda_g}{\Delta\lambda_0}\frac{\Delta\lambda_0}{\Delta\omega}=\frac{2\pi}{\omega}\left(\frac{\lambda_g}{\lambda_0^{\,2}}\right)l$$

也即

$$\frac{\Delta\theta}{\theta}=\frac{\Delta\omega}{\omega}\left(\frac{\lambda_g}{\lambda_0}\right)^2$$

我们证得了式(11-5)和式(11-6)两个复相角表示式。特别地，对于 TEM 波(即 $\lambda_c=\infty$)情况，因为 $\lambda_g=\lambda_0$，所以有

$$\tilde{\theta}=\theta'\left(1-\mathrm{j}\frac{1}{2Q}\right) \tag{11-7}$$

复相角的应用首先是从传输线开始的，对于图 11-2 所示无耗传输线接 $\Gamma_l$ 负载，有

$$\Gamma_{\mathrm{in}}=\Gamma_l\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta} \tag{11-8}$$

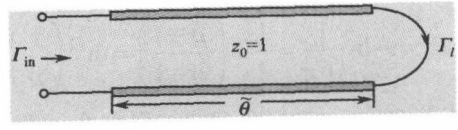



图 11-2　无耗传输线的反射系数变换

它表示有负载反射系数 $\Gamma_l$ 向输入反射系数 $\Gamma_{\text{in}}$ 的复变换。其中，$\Gamma_l=-1$ 时，进一步有

$$\Gamma_{\text{in}}=-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta} \tag{11-9}$$

现在，引入复相角 $\tilde{\theta}=\theta'-\mathrm{j}\theta''$，如图 11-3 所示。

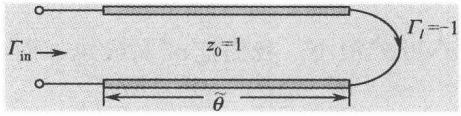



图 11-3　有耗传输线模型

很易写出

$$\Gamma_{\text{in}}=-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\tilde{\theta}}=-\mathrm{e}^{-2\theta''}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta'} \tag{11-10}$$

另外，由于任意反射 $\Gamma_l=|\Gamma_l|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_l}$，对于无耗传输线又可写出

$$\Gamma_{\text{in}}=-|\Gamma_l|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\theta+\Delta\varphi_l)} \tag{11-11}$$

比较式（11-10）和式（11-11）可知

$$\theta'=\theta+\frac{1}{2}\Delta\varphi_l \tag{11-12}$$

$$\Delta\varphi_l=\pi-\varphi_l \tag{11-13}$$

和

$$\mathrm{e}^{-2\theta''}=|\Gamma_l| \tag{11-14}$$

最后结果为

$$\begin{cases}\Gamma_{\text{in}}=-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\tilde{\theta}^*}\\ \theta'=\theta+\dfrac{1}{2}\Delta\varphi_l\\ \theta''=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{|\Gamma_l|}\right)\end{cases} \tag{11-15}$$

在复相角 $\tilde{\theta}$ 传输线模型中，形式上复归无耗，$\Gamma_l$ 始终为短路（即为−1）。在负载上的全部损耗被归到复 $\tilde{\theta}$ 中，进一步归一化输入阻抗是

$$\overline{z}_{\text{in}}=\frac{1+\Gamma_{\text{in}}}{1-\Gamma_{\text{in}}}=\mathrm{j}\tan\tilde{\theta} \tag{11-16}$$

可以视为传输线特性阻抗 $z_0=1$。不失一般性，如图 11-3 所示，注意到

$$\theta''=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{|\Gamma_l|}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\rho+1}{\rho-1}\right)=\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{11-17}$$

式（11-17）中，$\rho$ 为系统驻波比，与文献[6]的结果完全一致。

上面所讨论的情况是反射 $\Gamma_l$ 情况，而传输线无耗，可进一步完全推广到传输线也

有耗情况，这里不再赘述。

## 3　复频率电磁定理

本文将讨论最重要的两个复频率电磁定理。

### 1．复频率 Poynting 定理

一般电磁系统的 Poynting 定理是研究空间某封闭曲面所包围的体积内部储能和损耗与进入 $S$ 内电磁功率的关系，如图 11-4 所示。

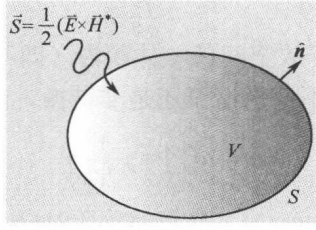



图 11-4　Poynting 定理

很易得出

$$-\oiint_S \vec{S}\cdot\hat{n}\mathrm{d}s = P_\mathrm{L} + \mathrm{j}2\omega'(W_\mathrm{m} - W_\mathrm{e}) \tag{11-18}$$

其中

$$\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{E}\times\vec{H}^*) \tag{11-19}$$

称为 Poynting 矢量。式（11-19）中 $\hat{n}$ 所定义的单位法向矢量指向外，负号表示由外向内注入的电磁功率；$P_\mathrm{L}$ 表示 $V$ 内全部损耗功率，而 $W_\mathrm{m}$ 和 $W_\mathrm{e}$ 分别表示 $V$ 内的磁储能和电储能，有

$$\begin{cases} W_\mathrm{m} = \dfrac{1}{4}\mu\vec{H}\cdot\vec{H}^* \\ W_\mathrm{e} = \dfrac{1}{4}\varepsilon\vec{E}\cdot\vec{E}^* \end{cases} \tag{11-20}$$

现在，让我们考虑式（11-3）复 Maxwell 方程组表示的一般复频率 $\tilde{\omega}$ 电磁系统，完全类似推导可知

$$-\oiint_S \vec{S}\cdot\hat{n}\mathrm{d}s = 2\mathrm{j}(\tilde{\omega}W_\mathrm{m} - \tilde{\omega}^*W_\mathrm{e}) \tag{11-21}$$

式（11-21）即复频率 Poynting 定理，由

$$\tilde{\omega} = \omega' - \mathrm{j}\omega''$$

易知方程式（11-21）的另一个形式

$$-\oiint_s \vec{S}\cdot\hat{n}\mathrm{d}s = 2\omega''(W_\mathrm{m}+W_\mathrm{e}) + \mathrm{j}2\omega'(W_\mathrm{m}-W_\mathrm{e}) \tag{11-22}$$

比较式（11-18）和式（11-22），且引入

$$W = W_\mathrm{m} + W_\mathrm{e} \tag{11-23}$$

表示 $V$ 内总储能，可知

$$\omega'' = \frac{\omega'}{2}\left(\frac{P_\mathrm{L}}{\omega' W}\right) = \frac{\omega'}{2Q} \tag{11-24}$$

其中

$$Q = \frac{\omega' W}{P_\mathrm{L}} \tag{11-25}$$

称为广义品质因数，它表明：开放空间任一体积内（即不一定是封闭导体面 $S$）也可以用广义 $Q$ 反映其损耗程度，且不论是谐振还是非谐振。由此，我们进一步写出

$$\tilde{\omega} = \omega'\left(1-\mathrm{j}\frac{1}{2Q}\right) \tag{11-26}$$

尽管式（11-26）在形式上与导体腔引入的复频率[3-4]类似，但实际意义却推广了。

**2. 复频率 Foster 定理**

Foster 定理是又一个著名的电磁定理，又称 Foster 电抗定理。当图 11-5 的单端口为电抗性负载终端时，可以证明[4]

$$\frac{\partial X}{\partial \omega} > 0 \tag{11-27}$$

也即，无耗系统的电抗斜率恒正。

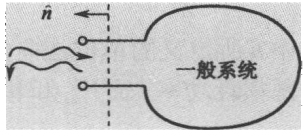



图 11-5 有耗单端口的复频率 Foster 定理

现在，让我们从电磁复频率理论出发，研究一般有耗单端口的复频率 Foster 定理，由

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H}^* = -\mathrm{j}\tilde{\omega}^*\varepsilon\vec{E}^* \\ \nabla\times\vec{E}^* = \mathrm{j}\tilde{\omega}^*\mu\vec{H}^* \end{cases} \tag{11-28}$$

可类似导出

$$\begin{aligned} &\oiint_s\left(\vec{E}\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial\tilde{\omega}} + \vec{H}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial\tilde{\omega}}\right)\cdot\hat{n}\mathrm{d}s \\ &= -\mathrm{j}\iiint_v\left(\vec{H}\cdot\vec{H}^*\frac{\partial\tilde{\omega}^*\mu}{\partial\tilde{\omega}} + \vec{E}\cdot\vec{E}^*\frac{\partial\tilde{\omega}^*\varepsilon}{\partial\tilde{\omega}}\right)\mathrm{d}v + 2\omega''\iiint_v\left(\mu\vec{H}\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\tilde{\omega}} + \varepsilon\vec{E}\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\tilde{\omega}}\right)\mathrm{d}v \end{aligned} \tag{11-29}$$

定义端口处的模式电压 $V$ 和电流 $I$[4]，式（11-29）左边成为

$$V\frac{\partial I^*}{\partial\tilde{\omega}}+I\frac{\partial V^*}{\partial\tilde{\omega}} \tag{11-30}$$

且有

$$V=ZI \tag{11-31}$$

$$Z=R+\mathrm{j}X \tag{11-32}$$

则左边可进一步写出

$$2RI\frac{\partial I^*}{\partial\tilde{\omega}}+II^*\frac{\partial Z^*}{\partial\tilde{\omega}} \tag{11-33}$$

**【复频率 Foster 定理】**一般电磁系统中 Foster 定理可表述为

$$\frac{\partial Z^*}{\partial\tilde{\omega}}=0 \tag{11-34}$$

**【证明】**一般负载的单端口电磁系统阻抗 $Z$ 是解析的，它是 $\mathrm{j}\tilde{\omega}$ 的解析函数，它满足 Cauchy-Riemann 条件，即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial X}{\partial\omega'}=\dfrac{\partial R}{\partial\omega''} & (11\text{-}35)\\[2ex] \dfrac{\partial X}{\partial\omega''}=-\dfrac{\partial R}{\partial\omega'} & (11\text{-}36)\end{cases}$$

而

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{\omega}}=\frac{\partial\omega'}{\partial\tilde{\omega}}\frac{\partial}{\partial\omega'}+\frac{\partial\omega''}{\partial\tilde{\omega}}\frac{\partial}{\partial\omega''} \tag{11-37}$$

由于

$$\begin{cases}\omega'=\dfrac{1}{2}(\tilde{\omega}+\tilde{\omega}^*)\\[2ex] \omega''=\dfrac{1}{2}\mathrm{j}(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}^*)\end{cases} \tag{11-38}$$

于是得到

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{\omega}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\omega'}+\mathrm{j}\frac{\partial}{\partial\omega''}\right) \tag{11-39}$$

注意到

$$\frac{\partial Z^*}{\partial\tilde{\omega}}=\frac{\partial}{\partial\tilde{\omega}}(R-\mathrm{j}X)=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial R}{\partial\omega'}+\frac{\partial X}{\partial\omega''}\right)+\mathrm{j}\left(\frac{\partial R}{\partial\omega''}-\frac{\partial X}{\partial\omega'}\right)\right\} \tag{11-40}$$

考虑到 Cauchy-Riemann 条件式（11-35）和式（11-36），即得证式（11-34）。

【定理】对于一般单端口系统，有

$$\frac{1}{I^*}\frac{\partial I^*}{\partial\tilde{\omega}}=\frac{1}{W}\frac{\partial W}{\partial\tilde{\omega}}+\mathrm{j}\frac{1}{4W}\iiint_v\vartheta_{\mathrm{m}}\left(\mu\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\tilde{\omega}}+\varepsilon\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\tilde{\omega}}\right)\mathrm{d}v \tag{11-41}$$

其中，$\vartheta_{\mathrm{m}}(\ )$表示括号内取虚部，而$W$则表示总的储能。

【证明】由复导数$\dfrac{\partial}{\partial\tilde{\omega}}$的意义易知

$$\frac{\partial\tilde{\omega}^*\mu}{\partial\tilde{\omega}}=0,\quad\frac{\partial\tilde{\omega}^*\varepsilon}{\partial\tilde{\omega}}=0 \tag{11-42}$$

重新根据式（11-29）和式（11-33），可写出

$$RII^*\left(\frac{1}{I^*}\frac{\partial I^*}{\partial\tilde{\omega}}\right)=\omega''\iiint_v\left(\mu\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\tilde{\omega}}+\varepsilon\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\tilde{\omega}}\right)\mathrm{d}v \tag{11-43}$$

由

$$\begin{cases}\omega''=\dfrac{P_{\mathrm{L}}}{2W}\\ RII^*=2P_{\mathrm{L}}\end{cases} \tag{11-44}$$

代入式（11-43），即得式（11-41）。

值得指出，上面 Foster 定理是对$\tilde{\omega}$求导，完全对偶，还可写出对$\tilde{\omega}^*$求导

$$2RI\frac{\partial I^*}{\partial\tilde{\omega}^*}+II^*\frac{\partial Z^*}{\partial\tilde{\omega}^*}=-\mathrm{j}4W+2\omega''\iiint_v\left(\mu\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\tilde{\omega}^*}+\varepsilon\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\tilde{\omega}^*}\right)\mathrm{d}v \tag{11-45}$$

其中

$$\frac{\partial Z^*}{\partial\tilde{\omega}^*}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial Z^*}{\partial\tilde{\omega}'}-\mathrm{j}\frac{\partial Z^*}{\partial\tilde{\omega}''}\right)=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial R}{\partial\omega'}-\frac{\partial X}{\partial\omega''}\right)-\mathrm{j}\left(\frac{\partial X}{\partial\omega'}+\frac{\partial R}{\partial\omega''}\right)\right\} \tag{11-46}$$

再一次考虑到 Cauchy-Riemann 条件，有

$$\frac{\partial Z^*}{\partial\tilde{\omega}^*}=\frac{\partial R}{\partial\omega'}-\mathrm{j}\frac{\partial X}{\partial\omega'} \tag{11-47}$$

最后得到

$$\frac{1}{I^*}\frac{\partial I^*}{\partial\tilde{\omega}^*}+\left(\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial\omega'}-\mathrm{j}\frac{1}{R}\frac{\partial X}{\partial\omega'}\right)=-\mathrm{j}\frac{1}{\omega''}+\frac{\omega''}{P_{\mathrm{L}}}\iiint_v\left(\mu\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{H}^*}{\partial\tilde{\omega}^*}+\varepsilon\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\tilde{\omega}^*}\right)\mathrm{d}v \tag{11-48}$$

特别指出，若一开始即采用无耗条件，则

$$\frac{\partial X}{\partial\omega'}=\frac{4W}{II^*}>0 \tag{11-49}$$

即无耗系统电抗斜率恒正定理，这也相当于

$$\lim_{R\to 0}\frac{\partial R}{\partial \omega''}>0 \tag{11-50}$$

## 4　带任意负载的无耗传输线

作为研究实例，我们讨论长度为 $l$ 的 TEM 波无耗传输线。该特性阻抗 $\overline{z}_0=1$ 不失一般性。且 $l$ 所对应的相角是

$$\theta'=\frac{\omega'}{c}l \tag{11-51}$$

现端接归一化电阻 $\overline{r}_l=\dfrac{1}{\rho}$，且 $\rho$ 表示系统的电压驻波比（VSWR），如图 11-6 所示。

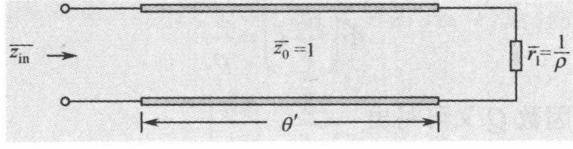



图 11-6　接有耗负载的无耗传输线

这时输入阻抗 $\overline{z}_{in}$ 可写为

$$\overline{z}_{in}=\overline{r}_{in}+\mathrm{j}\overline{x}_{in}=\frac{1+\mathrm{j}\rho\tan\theta'}{\rho+\mathrm{j}\tan\theta'} \tag{11-52}$$

很易得到

$$\begin{cases}\overline{r}_{in}=\dfrac{\rho(1+\tan^2\theta')}{\rho^2+\tan^2\theta'} & (11\text{-}53)\\[2ex] \overline{x}_{in}=\dfrac{(\rho^2-1)\tan\theta'}{\rho^2+\tan^2\theta'} & (11\text{-}54)\end{cases}$$

在此处，再一次运用如图 11-3 所示的复 $\tilde{\theta}$ 传输线

$$\tilde{\theta}=\frac{l}{c}(\omega'-\mathrm{j}\omega'')=\theta'-\mathrm{j}\theta'' \tag{11-55}$$

具体为

$$\begin{cases}\theta'=\dfrac{\omega'}{c}l\\[2ex] \theta''=\dfrac{\theta'}{2Q}\end{cases} \tag{11-56}$$

因为这种模型负载始终为短路 $\overline{z_{\mathrm{L}}}=-1$，有

$$\overline{z_{\mathrm{in}}}=\mathrm{j}\tan\tilde{\theta}^{*}=\overline{r_{\mathrm{in}}}+\mathrm{j}\overline{x_{\mathrm{in}}} \tag{11-57}$$

又写出

$$\begin{cases}\overline{r_{\mathrm{in}}}=\dfrac{\mathrm{cth}\left(\dfrac{\omega''}{c}l\right)\left(1+\tan^{2}\theta'\right)}{\mathrm{cth}^{2}\left(\dfrac{\omega''}{c}l\right)+\tan^{2}\theta'} & (11\text{-}58)\\[2ex] \overline{x_{\mathrm{in}}}=\dfrac{\left(\mathrm{cth}^{2}\left(\dfrac{\omega''}{c}l\right)-1\right)\tan\theta'}{\mathrm{cth}^{2}\left(\dfrac{\omega''}{c}l\right)+\tan^{2}\theta'} & (11\text{-}59)\end{cases}$$

将式（11-58）、式（11-59）和式（11-53）、式（11-54）加以比较，可得

$$\mathrm{th}\left(\frac{\omega''}{c}l\right)=\frac{1}{\rho} \tag{11-60}$$

于是，传输线的品质因数 $Q$ 又可写出

$$Q=\frac{\theta'}{2\mathrm{th}^{-1}\left(\dfrac{1}{\rho}\right)} \tag{11-61}$$

特别由式（11-59）可知：不论 $\rho$ 为何值，传输线的串联和并联谐振点不变。

这里，我们进一步把复频率 $\tilde{\omega}$ 的 Foster 定理应用于接有耗负载的微波传输线，给出

$$\frac{\partial\overline{r_{\mathrm{in}}}}{\partial\omega''}=\frac{\partial\overline{x_{\mathrm{in}}}}{\partial\omega'}=\frac{\mathrm{sech}^{2}\left(\dfrac{\omega''}{c}l\right)\sec^{2}\theta\left[1-\tan^{2}\theta'\mathrm{th}\left(\dfrac{\omega''}{c}l\right)\right]}{\left[1+\tan^{2}\theta'\mathrm{th}^{2}\left(\dfrac{\omega''}{c}l\right)\right]^{2}}\left(\frac{l}{c}\right) \tag{11-62}$$

即确实满足 Cauchy-Riemann 条件式（11-35）。

注意到有耗负载本身即是一个**天线辐射模型**，式（11-62）清楚表明，当

$$\left|\tan^{2}\theta'\mathrm{th}\left(\frac{Q'}{2Q}\right)\right|>1 \tag{11-63}$$

时，在系统中**必出现负斜率**。事实上，任意负载的阻抗分布曲线不仅清楚表明存在负电抗斜率区，而且其物理概念对应由串联谐振转向并联谐振连续曲线条件的必然结果，如图 11-7 所示。请注意本文结果与文献[7]的差别。此外还可得到

$$\frac{\partial \overline{r_{\text{in}}}}{\partial \omega'}=-\frac{\partial \overline{x_{\text{in}}}}{\partial \omega''}=\frac{2\tan\theta'\,\text{th}^2\left(\frac{\omega''}{c}l\right)\sec^2\theta'\,\text{sech}^2\left(\frac{\omega''}{c}l\right)}{\left[1+\tan^2\theta'\,\text{th}^2\left(\frac{\omega''}{c}l\right)\right]^2}\left(\frac{l}{c}\right) \tag{11-64}$$

即满足 Cauchy-Riemann 条件式(11-36)。于是再一次论证了任意系统中 Foster 定理 $\frac{\partial z^*}{\partial \tilde{\omega}}=0$ 的正确性。由式（11-64）还可看出：$\frac{\partial \overline{r_{\text{in}}}}{\partial \omega'}$ 的正负性取决于 $\tan\theta'$ 的符号。这一点在图 11-7 中也可看出。

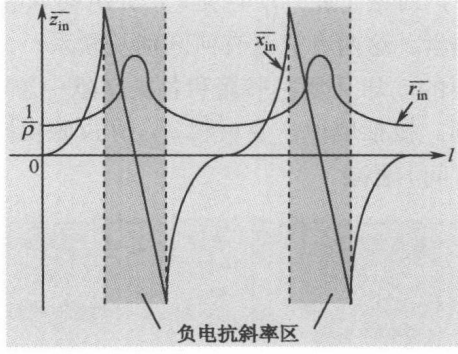



图 11-7　有耗负载传输线的阻抗分布曲线和负电抗斜率区

## 5　结　　语

本文着重讨论电磁理论中复参量和复定理。

应该看到，复变函数理论在电磁学中的应用还有很大的潜力，我们必须有足够的重视。

杨振宁在著名报告《20 世纪理论物理学发展的主旋律》[8]中做过精辟的分析——“我们知道交响乐有所谓的主旋律，整个交响乐就是通过几个不同而又相关的主旋律纠缠和发展出来的。我们以这个眼光分析 20 世纪物理学的发展，就会发现也有三个主要的旋律，那就是量子化、对称和**相位因子**。”

对于相位因子，大家必然会感到奇怪，这个概念最初是由 Weyl 在 1918 年提出的，它为了反映包括广义相对论中场的微观局域变换，归纳为一个实指数因子（有人将它称为拉长因子）。不幸的是 Einstein 当即指出它所存在的严重错误，即不同路径的时间钟表不同。

1925 年左右，Schrödinger 通过反复研究建议它变成为虚指数因子——复相位。它

是后来著名 Young Milles 规范的基础之一，由此复相位因子进入了物理学，Einstein 矛盾克服了，规范对称性真正登上了理论物理的舞台。

对于这段历史的回顾充分说明复数进入物理学不仅是一个方法问题，而且也是哲学问题。

电磁理论中复数应用值得进一步探索。

## 答问录

**问**：在上一篇札记中，讨论了复介质材料 $\tilde{\varepsilon}$，$\tilde{\mu}$ 所构成的频域电磁学；而这篇札记进一步讨论复频率 $\tilde{\omega}$ 电磁学。这两者究竟有何区别及联系？

**答**：这一点是最重要的，却又是在书籍和各类文献中忽略讨论的。我们在图 11-8 反映出两者的关系和不同。概括地说，复材料 $\tilde{\varepsilon}$，$\tilde{\mu}$ 反映电磁波的空间($\vec{r}$)衰减；而复频率 $\tilde{\omega}$ 则反映电磁波的时间 $t$ 衰减。

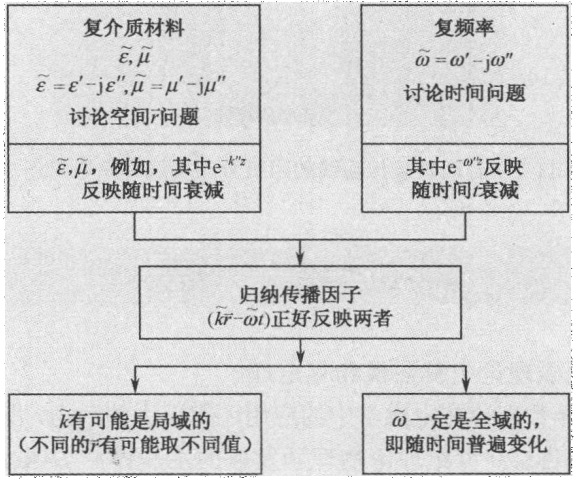



图 11-8　复材料 $\tilde{\varepsilon}$，$\tilde{\mu}$ 和复频率 $\tilde{\omega}$

上面的区别说明了两者有不同的应用场合，而且可以说各有巧妙之处。

更为奇妙的是，在某种场合（如传输线情况），我们可以通过相互转化，相互联系，把复频率也用于空间情况，这一点将在下面作进一步讨论。

同时，它们两者所给出的 Maxwell 方程组**形式上都是一致的**，如图 11-9 所示。

**问**：复频率 $\tilde{\omega}$ 是不是一种处理问题的新思路？

**答**：这个问题可以分以下两个方面来讨论。

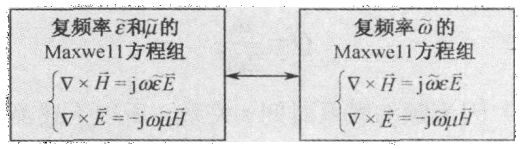



图 11-9　复材料 $\tilde{\varepsilon}$，$\tilde{\mu}$ 和复频率 $\tilde{\omega}$ 各自的 Maxwell 方程组形式完全一样

一方面，复频率在较早电网络综合中已经出现。一般称 $S$ 面网络综合，$s=\sigma+\mathrm{j}\omega$。

因为一般认为 $\mathrm{j}\omega$ 只能代表虚轴，而 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$ 才能表示一复平面。综合时可以利用保角变换给出很具体的几何直观。

如果把这里的复频率 $\tilde{\omega}$ 和 $s$ 联系起来，写出

$$s=\mathrm{j}\tilde{\omega}=\mathrm{j}(\omega'-\mathrm{j}\omega'')=\omega''+\mathrm{j}\omega'=\sigma+\mathrm{j}\omega'$$

两者对比，有 $\sigma=\omega''$，即可作等价联系。

另一方面，$s$ 和 $\mathrm{j}\tilde{\omega}$ 尽管都是复频率，但各自用途完全不同。$s$ 用于综合，而 $\mathrm{j}\tilde{\omega}$ 则是研究电磁的**真实损耗**。

**问**：请再介绍两个重要的复频率 $\tilde{\omega}$ 电磁定理？

**答**：这篇札记介绍的是最重要的两个定理，即复频率 Poynting 定理和复频率 Foster 定理，具体如图 11-10 所示。

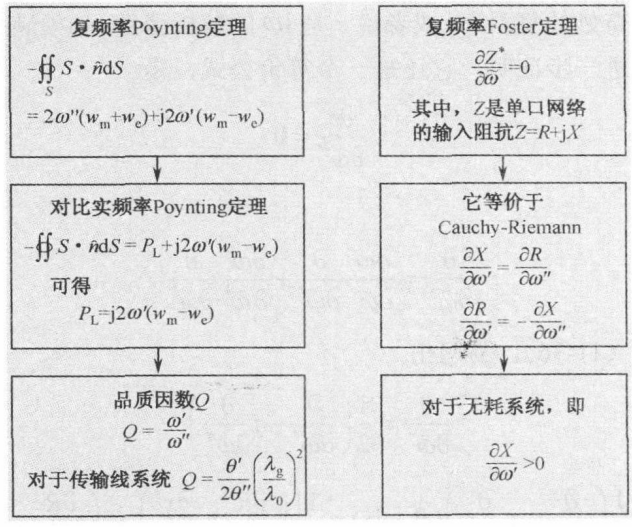



图 11-10　两个重要的复频率 $\tilde{\omega}$ 电磁定理

Poynting 定理即电磁能量守恒定理。输入系统的波能量用途分成两部分：功率损耗和储能。由此很易导出系统的品质因数 $Q$，而复频率 Poynting 定理将品质因数 $Q$ 用 $\omega'$ 和 $\omega''$ 表示，即

$$Q=\frac{\omega'}{2\omega''}$$

这有三个好处：（1）因为频率联系时间 $t$ 关系，所以上述品质因数公式明显反映了**随时间衰减**的特点；（2）由于 $\omega'$ 和 $\omega''$ 不直接与空间发生联系，所以 $Q$ 的定义更加广义，不论是封闭系统还是开放系统，已经摆脱了谐振 $Q$ 值的“阴影”，具体地说，这里的 $\omega'$ 是一般的工作频率。而不专指谐振频率；（3）带来的一个重要推论是复频率也可用 $Q$ 表示，于是有

$$\tilde{\omega}=\omega'\left(1-\mathrm{j}\frac{1}{2Q}\right)$$

Foster 定理在无耗系统中也称电抗斜率定理：即直接表明无耗情况下电抗斜率恒正，有

$$\frac{\partial x}{\partial \omega'}>0$$

但是，在一般的复频率系统中，它转化为阻抗 $z=R+\mathrm{j}x$ 的共轭对复频率斜率为 0，有

$$\frac{\partial z^*}{\partial \tilde{\omega}}=0$$

上面表示一种奇妙的复斜率，或者说 $z$ 是 $\mathrm{j}\omega$ 的解析函数。必须满足 Cauchy-Riemann 条件。在这里我们进一步证明，它还是一个等价公式，是

$$\frac{\partial z}{\partial \tilde{\omega}^*}=0$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}^*}=\frac{\partial \omega'}{\partial \tilde{\omega}^*}\frac{\partial}{\partial \omega'}+\frac{\partial \omega''}{\partial \tilde{\omega}^*}\frac{\partial}{\partial \omega''}$$

考虑到正文式（11-36），易写出

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}^*}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \omega'}-\mathrm{j}\frac{\partial}{\partial \omega''}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \tilde{\omega}^*}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \omega'}-\mathrm{j}\frac{\partial}{\partial \omega''}\right)(R+\mathrm{j}x)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial \omega'}+\frac{\partial x}{\partial \omega''}\right)-\mathrm{j}\left(\frac{\partial R}{\partial \omega''}-\frac{\partial x}{\partial \omega'}\right)\right]$$

由 Cauchy-Riemann 条件式（11-33）和式（11-34）。同样得到 $\frac{\partial z}{\partial \tilde{\omega}^*}\equiv 0$。

特别值得指出：由此，我们可得到《复变函数》中解析函数复导数的一种对偶性。

【**定理**】复函数 $w=u+\mathrm{j}v$ 是 $z=x+\mathrm{j}y$ 的解析函数。即满足 Cauchy-Riemann 条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

则可得**复导数的对偶性**

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial z^*}=0\\[2ex]\dfrac{\partial w^*}{\partial z}=0\end{cases}$$

**问**：复频率 $\tilde{\omega}=\omega'-\mathrm{j}\omega''$ 理论能用到空间问题中去吗？

**答**：在开头我们就说过，复频率 $\tilde{\omega}$ 理论从本质上说是一种时间 $t$ 的衰减理论，它与空间没有关系。但是，从另一方面我们又要不断地拓广它的应用。

在处理有耗传输线或接有耗负载的无耗传输线问题中得到了重要的体现。广义地说，传输线的长度可以用电角度 $\theta$ 表示，又 $\theta'=\dfrac{\omega'}{c}l$ 中，于是对于有耗传输线很自然可以提出复电角度 $\tilde{\theta}=\theta'-\mathrm{j}\theta''$；而对于带有耗负载的无耗传输线有 $\theta''=\mathrm{th}^{-1}\left(\dfrac{1}{\rho}\right)$，其中，$\rho$ 是负驻波比，如图 11-11 所示。

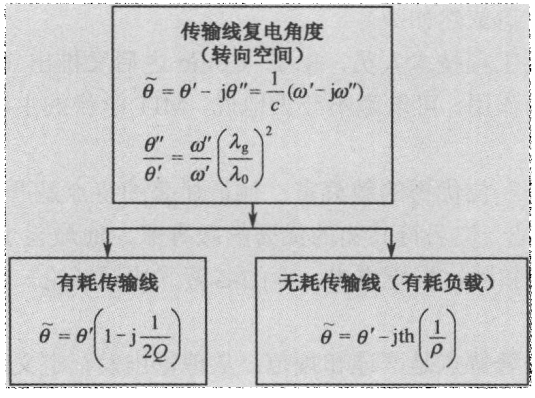


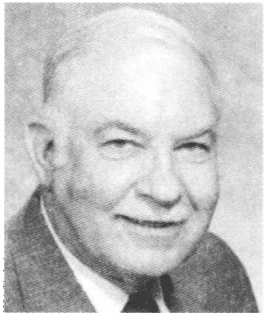

图 11-11　复频率 $\tilde{\omega}$ 用于传输线（空间）定理，提出电角度 $\tilde{\theta}=\theta'-\mathrm{j}\theta''$

## 推荐人物

本篇札记介绍美国的著名微波专家 R. E. Collin。

（1）他是 MIT 学派的理论传承人和主要代表。

在这里，我们向大家介绍 MIT 学派十分合适，现在很多人搞科研，要么由于时间



著名微波专家 R.E.Collin

急迫，需要抓紧做好，做完了事；要么学习理论，但始终觉得理论与实际结合不起来。我们来考察 20 世纪 40 年代。美国为了应对二次世界大战，急需研究雷达，天线，导航等先进设备，而当时的电磁和微波又是全新，几乎空白的领域。另一方面，科学家们几乎要和时间赛跑，紧迫感无可比拟。

当时的 MIT Radiation Laboratory（MIT 辐射实验室）是一个主要的承担单位。它们不仅出色地完成了任务，而且创造出全新的理论，这才是真正的理论与实践，理论与工程的紧密结合和自然融合。作为成果由 N. Marcuvitz 带头在 1951 年推出的《雷达系列丛书》第十卷（《Waveguide Handbook》MIT Radiation Laboratory Series，Vol.10，McGraw-Hill，1951）出版后使人眼前一亮。当然，从理论体系来看，对大多数人来说是既生疏，又深奥。R. E. Collin 作为重要的桥梁，及时出版了《波导场论》系统介绍了 MIT 学派的本征模正交，归一和完备理论；两种元件接口的模式匹配理论；模式的网络表示理论。《波导场论》的出版已近 50 年了，它不仅经受了历史的考验而且还占住了微波领域的一个顶峰。

毋庸置疑，《波导场论》从理论上还是深奥的。回顾我在研究生学习期间接触到 MIT 学派的闪光点，激动之情依然如故。

为了照顾到大多数工程技术人员，R. E. Collin 之后又推出《微波工程基础》。同样起到了更进一步推广的作用。可以毫不夸大地说，MIT 学派的主要灵魂是由 R. E. Collin 宣传与推广的。

（2）R. E. Collin 是一位优秀的教育家，他最显著的特点是严谨和规范。

R. E. Collin 确实是一位名符其实的优秀的教育家。他最善于把 MIT 学派深奥的学问解剖分析，然后切块叙述，娓娓道来，他的名著《波导场论》本身即构成了一个严密完整的理论系统。

R. E. Collin 的最显著特点是严谨和规范：从理论出发，定义、特点和难点在他手下都能一一定位，连字母、逻辑、推导和结论都一丝不苟，令人惊讶！

（3）任何大家都有自己的特色和风格，R. E. Collin 毫不例外。

我们举一个中国书法的例子：同样一个中国字，尽管不同的书法家书写得完全不同，但熟悉的人只要看到一幅字，还是会马上反应出是出自哪位书法家之手。

科学技术也是如此，不同大家都有自己显著的特色和风格。论述同一件事都会大不相同。我在美国时就深有感触：甚至对于一个矢量箭头，R. E. Collin 写在字母上方，而 R. F. Harrington 则写在下方。

他们不同的风格使电磁学这片美丽的绿地更加多姿多彩。



## 参考文献

[1] (美)M. 克莱因，著. 古今数学思想（第三册）. 石伟勋等译. 上海：上海科技出版社，2002.

[2] 杨振宁. 杨振宁文集（上）（下）. 上海：华东师范大学出版社，1998.

[3] 哈林登 R F，著. 正弦电磁场. 孟侃译. 上海：上海科技出版社，1964.

[4] (美)R. E. 柯林，著. 微波工程基础. 吕继尧译. 北京：人民邮电出版社，1981.

[5] Liang C H & Xie Y J. The accurate rariational analysis for measurement of the complex dielectric constant of a sample rod inserted in a cavity. Microwave opt.Technol.lett，vol.5，No.5，pp209-211，1992.

[6] 梁昌洪，等. 简明微波. 北京：高等教育出版社，2006.

[7] Wen Geyi，The Foster Reactance Theorem for Antennas and Radiation Q. IEEE on TRANSACTIONS ON ANTENNAS AND PROPAGATION，VOL. 48，NO. 3，MARCH，pp401-408，2000.

[8] 杨振宁，等. 科学的品格（学术报告厅）. 西安：陕西师范大学出版社，2003.

札记十二

# 复算子$\mathbb{W}$与二维静场

著名数学家 Jacgues Hadamard 给我们提出一个奇怪的命题——实域中两个真理之间的最短路程是通过复域。据此，本文提出复算子$\mathbb{W}$和它的相应理论，把矢量理论中二维散度$\nabla\cdot$与旋度$\nabla\times$，积分理论中 Gauss 定理和 Stokes 定理融合于一个统一的整体。进一步研究了二维静电场与稳流磁场，使其支配的积分方程统一于复变函数论的留数定理，而线电荷与电流则是提供积分贡献的留数源。

## 0 引　言

本文是电磁理论教学札记之十二。

著名数学家Jacgues Hadamard给我们提出一个奇怪的命题——实域中两个真理之间的最短路程是通过复域[1]，也就是把两个实域问题联系起来的最好办法是用**复域表示**。这正是本文所要深入讨论的一个焦点。

首先给出复数和平面矢量的对应，也即把 Gauss 平面和笛卡儿平面一一对应。

$$\begin{array}{ll} \text{复数} & \text{矢量} \\ a=a_x+\mathrm{j}a_y & \vec{a}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j} \\ b=b_x+\mathrm{j}b_y & \vec{b}=b_x\hat{i}+b_y\hat{j} \end{array} \tag{12-1}$$

$\bar{a}$ 表示 $a$ 的复共轭，把 $\bar{a}$ 和 $b$ 作复数乘法，即

$$\bar{a}b=(a_x-\mathrm{j}a_y)(b_x+\mathrm{j}b_y)=(a_xb_x+a_yb_y)+\mathrm{j}(a_xb_y-a_yb_x) \tag{12-2}$$

另外，我们写出对应平面矢量的点积和叉积，有

$$\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y & (12\text{-}3)\\ \vec{a}\times\vec{b}=(a_x b_y-a_y b_x)\hat{k} & (12\text{-}4)\end{cases}$$

其中，$\hat{k}$表示第3维$z$方向的单位矢量。引入记号

$$\{\vec{a}\times\vec{b}\}=(a_x b_y-a_y b_x) \tag{12-5}$$

也即表示平面矢量叉积去掉方向$\hat{k}$而成。注意式（12-5）中仍保留正负，于是写出

$$\bar{a}b=(\vec{a}\cdot\vec{b})+\mathrm{j}\{\vec{a}\times\vec{b}\} \tag{12-6}$$

式（12-6）的左边是复数乘法$\bar{a}b$，而右边的实部给出对立矢量的点积，虚部给出叉积（不计方向），复域包含了实域中两个真理。首先发现这一对应关系的是著名数学家G. polya[2]。

## 1 复算子$\mathbb{W}$

我们知道，矢量理论中的$\nabla$算子为

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j} \tag{12-7}$$

它存在两重性质：矢量性质和算子性质。若引入矢量函数$\vec{w}=u\hat{i}+v\hat{j}$，则可以很快写出$\vec{w}$的散度$\nabla\cdot$和旋度$\nabla\times$分别为

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{w}=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) & (12\text{-}8)\\ \nabla\times\vec{w}=\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k} & (12\text{-}9)\end{cases}$$

在文中，我们进一步发挥G. polya的思想，在复域中对应定义一种新的复算子$\mathbb{W}$，有

$$\mathbb{W}=\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{j}\frac{\partial}{\partial y} \tag{12-10}$$

同样，它也存在两种性质：复性质和算子性质。同样引入对应的复函数$w=u+jv$，且重新记起矢量对应

$$\begin{aligned}&\bar{a}\,b \longleftrightarrow \overline{\mathbb{W}}\,w\\ &\mathbb{W} \longleftrightarrow a\\ &w \longleftrightarrow b\end{aligned} \tag{12-11}$$

于是有

$$\overline{\mathbb{W}}w=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{j}\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+\mathrm{j}v)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\mathrm{j}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{12-12}$$

由此，得到了复算子$\mathbb{W}$和矢量算子$\nabla$的重要对应公式

$$\overline{\mathbb{W}}w=(\nabla\cdot\vec{w})+\mathrm{j}\{\nabla\times\vec{w}\} \tag{12-13}$$

式（12-13）表明：复算子$\mathbb{W}$与矢量算子的$\nabla\cdot$和$\nabla\times$紧密相连，所以$\overline{\mathbb{W}}$反映双$\nabla$的**物理实质**，又是实域中的两个真理。

另外，若引入式（12-13）的对偶形式，即构造

$$\mathbb{W}w=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{j}\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+\mathrm{j}v)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\mathrm{j}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{12-14}$$

可以很有兴趣地指出：这种情况下解析函数的 Cauchy-Riemann 条件可用下面的复算子方程统一表示为

$$\mathbb{W}w=0 \tag{12-15}$$

它等价于

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases} \tag{12-16}$$

并且，算子方程（12-15）的成立**与坐标无关**，对于解析函数，式（12-15）恒成立，若对极坐标又有

$$\mathbb{W}=\left(\frac{\partial}{\partial r}+\mathrm{j}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \tag{12-17}$$

这种情况下，Cauchy-Riemann 条件为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial\theta}\\[2ex]\dfrac{\partial v}{\partial r}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\end{cases} \tag{12-18}$$

## 2 复算子积分定理

对于二维域$D$和正向路程$C$，可定义三个单位矢：切向单位矢$\hat{t}$，法向单位矢$\hat{n}$和$z$向单位矢$\hat{k}$，见图 12-1。

在矢量理论中有两个著名定理:

二维 Gauss 定理

$$\iint_D\nabla\cdot\vec{w}\mathrm{d}S=\oint_C\vec{w}\cdot\hat{n}\mathrm{d}l \tag{12-19}$$

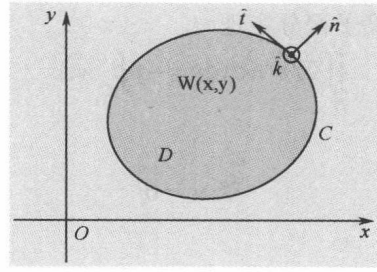



图 12-1　二维积分域 $D(\hat{n}=\hat{i}\times\hat{k})$

也可写成分量形式

$$\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_C u\mathrm{d}y-v\mathrm{d}x \tag{12-20}$$

和二维 Stokes 定理

$$\iint_D\nabla\times\vec{w}\cdot\hat{k}\mathrm{d}S=\oint_C\vec{w}\cdot\hat{t}\mathrm{d}l \tag{12-21}$$

同样分量形式

$$\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_C u\mathrm{d}x+v\mathrm{d}y \tag{12-22}$$

于是，很易导出复算子$\mathbb{W}$积分定理

$$\iint_D\overline{\mathbb{W}}=w\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{j}\oint_C w\mathrm{d}\bar{z} \tag{12-23}$$

其中，$\mathrm{d}\bar{z}$ 表示 $\mathrm{d}z$ 的复共轭，即

$$\mathrm{d}\bar{z}=\mathrm{d}x-\mathrm{j}\mathrm{d}y \tag{12-24}$$

其对应关系如图 12-2 所示。

图 12-2　共轭复算子 $\mathbb{W}$ 和实算子 $\nabla$ 对应积分定理的关系

完全类似地可以给出复对偶算子积分定理

$$\iint_D \mathbb{W} = w\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\mathrm{j}\oint_C w\mathrm{d}z \tag{12-25}$$

特别当 $W$ 为解析函数时，有

$$\mathbb{W}w = 0$$

则式（12-25）即为

$$\oint_C w\mathrm{d}z = 0 \tag{12-26}$$

式（12-26）就是著名的 Cauchy-Goursat 积分定理，它表明解析函数闭路积分为零的根源与复算子作用 $\mathbb{W}w$ 为零。

进一步我们还可把式（12-23）和式（12-25）两种情况统一用**积分算子**表示，有

$$\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\mathbb{W} \leftrightarrow -\mathrm{j}\oint_C \mathrm{d}z \tag{12-27}$$

## 3 复偏导数

已经知道

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(z+\overline{z}) \\ y = \dfrac{1}{2\mathrm{j}}(z-\overline{z}) \end{cases} \tag{12-28}$$

进一步写出

$$w = w(x,y) = w(z,\overline{z}) \tag{12-29}$$

容易给出复偏导数

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{j}\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{12-30}$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{j}\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{12-31}$$

于是，我们可以把复偏导数和复算子 $\mathbb{W}$ 对应起来，有

$$\mathbb{W} = 2\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \tag{12-32}$$

$$\overline{\mathbb{W}} = 2\frac{\partial}{\partial z} \tag{12-33}$$

和 Laplace 算子 $\nabla^2$

$$\nabla^2 = \overline{\mathbb{W}}\mathbb{W} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} \tag{12-34}$$

已经知道解析函数有重要性质

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = 0 \tag{12-35}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial w}{\partial z} = w'(z) = \frac{1}{2}\overline{\mathbb{W}}w \tag{12-36}$$

最后得到

$$w'(z) = \frac{1}{2}\{(\nabla \cdot \vec{w}) + \mathrm{j}\{\nabla \times \vec{w}\}\} \tag{12-37}$$

## 4　二维静电场的复算子形式

本文研究场均匀填充的二维静电场，其微分支配方程是

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \tag{12-38}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon \tag{12-39}$$

且对应的积分方程为

$$\oint_C \vec{E}\hat{t}\mathrm{d}l = 0 \tag{12-40}$$

$$\iint_D \nabla \cdot \vec{E}\mathrm{d}s = \oint_C \vec{E}\hat{n}\mathrm{d}l = \sum_{k=1}^{n} q_k/\varepsilon \tag{12-41}$$

式（12-40）称之为环路积分，而式（12-41）即著名的 Gauss 定理，如图 12-3 所示。

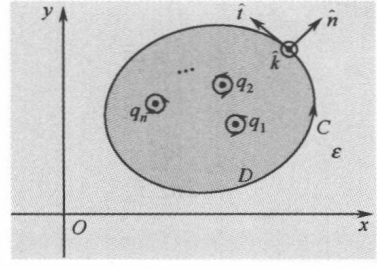



图 12-3　均匀填充二维静电场域 $D$

只要考虑 $E=E_x+\mathrm{j}E_y$，利用复算子 $\mathbb{W}$，很快写出

$$\overline{\mathbb{W}}E=\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{12-42}$$

十分明显，式（12-42）把两个实微分方程全部包括进去，而积分定理若写成习惯的留数定理形式，有

$$\oint_C -\mathrm{j}\bar{E}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{j}\sum_{k=1}^{n}\frac{-\mathrm{j}q_k}{2\pi\varepsilon} \tag{12-43}$$

式（12-43）即二维静电场复积分的留数定理形式，对比复变函数论可知

$$\mathrm{Re}s[-\mathrm{j}E,z_k]=\frac{-\mathrm{j}q_k}{2\pi\varepsilon}(k=1,2,\cdots,n) \tag{12-44}$$

这清楚地表明：静电场的留数与二维线电荷紧密相关。复留数定理的物理背景之一即二维静电场。

为了揭示物理本质，我们给出最简单实例：研究在坐标原点放置线电荷 $q$，如图 12-4 所示。

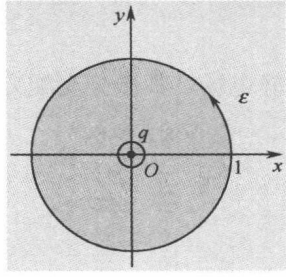



图 12-4　原点 $O$ 放置线电荷 $q$

由矢量理论已知，在这种情况下，有

$$\vec{E}=\frac{q\vec{r}}{2\pi\varepsilon r^2} \tag{12-45}$$

根据复数与矢量的对应关系写出

$$r^2=|z|^2=z\bar{z} \tag{12-46}$$

于是，复电场为

$$E=\frac{q}{2\pi\varepsilon\bar{z}} \tag{12-47}$$

得到二维静电场复积分为

$$\oint_C -\mathrm{j}\bar{E}\mathrm{d}z=\oint_C\frac{-\mathrm{j}q}{2\pi\varepsilon z}\mathrm{d}q \tag{12-48}$$

根据留数定理

$$\mathrm{Re}s[-\mathrm{j}\bar{E},0]=\lim_{z\to 0}z\cdot\frac{-\mathrm{j}q}{2\pi\varepsilon z}=-\frac{\mathrm{j}q}{2\pi\varepsilon} \tag{12-49}$$

而

$$\oint_C-\mathrm{j}\bar{E}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{j}\,\mathrm{Re}s[-\mathrm{j}\bar{E},0]=\frac{q}{\varepsilon} \tag{12-50}$$

即为所求。

## 5　二维稳流磁场的复算子形式

作为对称性，完全可以把上述静电场结果推广到均匀媒质的二维稳流磁场，其微分支配方程为

$$\begin{cases}\nabla\times\bar{H}=\bar{J} & (12\text{-}51)\\ \nabla\cdot\bar{H}=0 & (12\text{-}52)\end{cases}$$

很易给出复算子形式

$$\overline{\mathbb{W}}\,H=\mathrm{j}J \tag{12-53}$$

对于如图 12-5 所示的均匀填充二维稳流磁场域 $D$，同样可写出留数积分定理

$$\oint_C-\mathrm{j}\bar{H}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{j}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-J_k}{2\pi}\right) \tag{12-54}$$

对比可知，留数为

$$\mathrm{Re}s[-\mathrm{j}\bar{H},z_k]=-\frac{J_k}{2\pi}(k=1,2,\cdots,n) \tag{12-55}$$

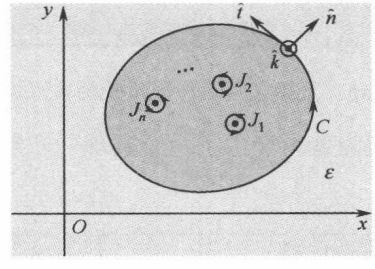



图 12-5　均匀填充二维稳流磁场域 $D$

十分清楚，对于全部二维静场的复积分形式——留数定理，电荷源和电流源是留数的物理根源。

## 6 结　语

复算子$\mathbb{W}$的引入不仅把矢量理论中二维散度$\nabla\cdot$和旋度$\nabla\times$，积分中 Gauss 定理和 Stokes 定理统一于一个整体。而且，使之对于静电场与稳流磁场也有了与复变函数论新的交叉。

二维静场的积分定理与复变函数中留数定理完全一致。对应留数的物理本质即线电荷源或线电流源。

将复算子$\mathbb{W}$作为一种理论值得继续深入研究。

## 答问录

**问**：你已经在两篇札记中给我们同时提到 Jacgues Hadamard 的一句名言。“实域中两个真理之间的最短路程是通过复域”，不知要传达何种深意？

**答**：是的，Hadamard 所提出的表征了复函数的深刻思想。复函数分实部和虚部。这两者并不是相互隔离的。实部和虚部都是实函数而且紧密相连——也就是实域中两个真理的最短路径是通过复域。

这篇札记提出复算子思想

$$\mathbb{W}=\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{j}\frac{\partial}{\partial y}$$

于是它与复函数$w=u+\mathrm{j}v$的作用就产生两个真理，如图 12-6 所示。

| 复算子共轭作用 | | | |
|---|---|---|---|
| $\overline{\mathbb{W}}\,w$ | → | 实部 | 矢量函数$\vec{w}$散度$\nabla\cdot\vec{w}$ |
| | | 虚部 | 矢量函数$\vec{w}$旋度（不计方向）$\{\nabla\times\vec{w}\}$ |

图 12-6　复算子共轭作用反映两个“真理”

特别令人惊异的是复算子作用为零又产生了两个真理——解析函数的 Cauchy-Riemann 条件，如图 12-7 所示。

| 复算子作用 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{W}w=0$ | → | 解析函数的Cauchy-Riemann条件 | 实部 | $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0$ |
| | | | 虚部 | $\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0$ |

图 12-7　复算子作用又反映两个“真理”

我们通过讨论复算子共轭作用和复算子作用，具体印证了 Hadamard 的预言，确实奇妙，进一步，微分和积分互为逆运算。于是又有了共轭，复算子积分定理：实部对应 Gauss 定理，而虚部则对应 Stockes 定理，如图 12-2 所示。

对称地对解析函数 $w$ 由如图 12-8 所示，即著名的 Cauchy-Goursat 定理（见图 12-8）表明，复算子作用对应 Cauchy-Riemann 条件。复闭路积分为零的根源是 $\mathbb{W}w=0$。

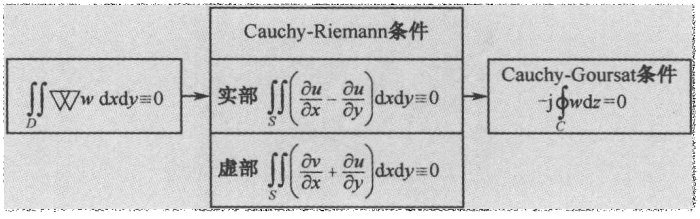



图 12-8　复算子作用积分恒为 0

**问**：从上述情况看来，复算子$\mathbb{W}$的概念很新，很吸引人！

**答**：你说的并不全面，复算子$\mathbb{W}$的概念既新又不新。

| 复算子 | 复偏导数 |
|---|---|
| $\mathbb{W}$ | $2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ |
| $\overline{\mathbb{W}}$ | $2\frac{\partial}{\partial z}$ |
| $\overline{\mathbb{W}}\mathbb{W}$ | $\nabla^2=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar{z}}$ |

图 12-9　复算子$\mathbb{W}$与复偏导数

另外，复算子$\mathbb{W}$把自己看作是二维算子$\nabla\cdot$和$\nabla\times$的结合；把自己看作是 Cauchy-Riemann 两个条件的结合，这一点从思想上看来是有新意的地方。于是，从这个意义上复算子$\mathbb{W}$是新的。

**问**：复算子$\mathbb{W}$与电磁理论有何联系？

**答**：典型地，我们可以把$\mathbb{W}$用于二维静电场与稳流磁场之中，如图 12-10 所示。它们与留数定理思想也完全一致。

**问**：在复数和复函数领域还有什么可创新之处？

| 二维静电场 | 二维稳流磁场 |
|---|---|
| $\overline{\mathbb{W}}E=\frac{\rho}{\varepsilon}$ | $\overline{\mathbb{W}}H=\mathrm{j}J$ |

图 12-10　复算子$\mathbb{W}$与二维静电或磁场

**答**：你这个问题问得好。从本质上去考察，我们完全可以说，处处有创新，时时可创新，关键在于用心。

这里我们只举一个方面：即把**复算子和矩阵结合起来。**

（1）复旋转矩阵。

图 12-11 给出夹角$\theta$的两套坐标系 $xyz$ 和 $x'y'z'$。

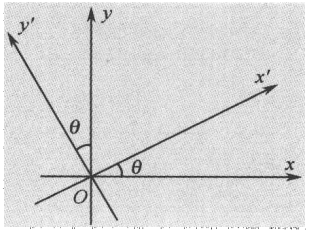



图 12-11　夹角为 $\theta$ 的两套坐标系 $xyz$ 和 $x'y'z'$

已知

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 称为实旋转矩阵，且有 $\det \boldsymbol{T} = 1$。

现在引进复旋转矩阵[$CT$]定义

$$[CT] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{j}\sin\theta \\ -\mathrm{j}\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\det[CT] \equiv 1$$

可写出

$$\begin{bmatrix} x' \\ \mathrm{j}y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{j}\sin\theta \\ -\mathrm{j}\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \mathrm{j}y \end{bmatrix}$$

它等价于

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ \mathrm{j}y' = \mathrm{j}(-x\sin\theta + y\cos\theta) \end{cases}$$

十分奇妙的是实旋转矩阵不对称，而**复旋转矩阵则是对称的**，且逆矩阵

$$[CT]^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \mathrm{j}\sin\theta\\ \mathrm{j}\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

也对称。

（2）复算子∇的矩阵形式。

进一步，我们还可以将复算子引入矩阵形式，先写出$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \mathrm{j}\frac{\partial}{\partial y}\end{bmatrix}$和共轭$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & -\mathrm{j}\frac{\partial}{\partial y}\end{bmatrix}$，这时复算子及共轭为

$$\begin{cases}\overline{\nabla}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \mathrm{j}\frac{\partial}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\\ \overline{\nabla}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & -\mathrm{j}\frac{\partial}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\end{cases}$$

注意到复函数 $w$ 对应矩阵

$$[w]=\begin{bmatrix}u & \mathrm{j}v\\ \mathrm{j}v & u\end{bmatrix}$$

于是

$$\begin{cases}\overline{\nabla}w=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & -\mathrm{j}\frac{\partial}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u & \mathrm{j}v\\ \mathrm{j}v & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\\ \nabla w=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \mathrm{j}\frac{\partial}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u & \mathrm{j}v\\ \mathrm{j}v & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=0\end{cases}$$

（3）复算子∇旋转。

已经知道复算子∇用$(x,y)$表示是$\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{j}\frac{\partial}{\partial y}$，现在要旋转$\theta$后的$(x',y')$表示。

$$\begin{aligned}\nabla&=\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y'}\right)+\mathrm{j}\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'}\right)\\&=\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x'}-\sin\theta\frac{\partial}{\partial y'}\right)+\mathrm{j}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial x'}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial y'}\right)\end{aligned}$$

于是写出矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \mathrm{j}\frac{\partial}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x'} & \mathrm{j}\frac{\partial}{\partial y'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \mathrm{j}\sin\theta\\ \mathrm{j}\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x'} & \mathrm{j}\frac{\partial}{\partial y'}\end{bmatrix}[CT]^{-1}$$

这就是∇的坐标旋转。

**问**：据你所知，是否在其他地方也引出过不同的复算子？

**答**：引出过。作为例子，曹昌祺老师的著作《电动力学》1962 年 7 月版，人民教育出版社。在讨论 Einstein 狭义相对论时，即引出 Lorentz 复算子（P284）。

$$\alpha=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \dfrac{\mathrm{j}\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{-\mathrm{j}\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{bmatrix}$$

这里介绍美国的著名教育家，数学家 G. Polya。如果说，Hadamard 说出来的是预言，那么，G. Polya 给的则是具有强烈说服力的实例，在他的名著《复数函数》中，首次把 $\bar{a},\bar{b}$ 二维矢量与 $a=a_x+\mathrm{j}a_y$ 和 $b=b_x+\mathrm{j}b_y$ 复数作深入比较，并发现了

$$a^*b=(a_xb_x+a_yb_y)+\mathrm{j}(a_xb_y-a_yb_x)=(\bar{a}\cdot\bar{b})=\mathrm{j}\{\bar{a}\times\bar{b}\}$$

看来非常简单的问题包含了 G. Polya 极为深刻的**思想**。他还为普林斯顿丛书撰写了《怎样解决数学题》的名著。

我们在教学上，首先要学习他在简单问题中发现问题；还要学习他把完全不同事物进行对比和比较，从而把平凡的教学工作做到不平凡的地步。

## 参考文献

[1] (美)Morris Kline，著. 古今数学思想（三）. 朱学贤等译. 上海：上海科学技术出版社，2002.

[2] (美)G.polya，著. 复变函数. 路见可等译. 北京：高等教育出版社，1985.

札记十三

# 电磁波多层媒质传播的[C]网络新理论

本文讨论电磁波在多层媒质中传播的反射和折射。将电磁波斜入射到媒质突变的平面边界作为基本模型，推广到垂直入射和导体、磁体边界等多种情况。将电磁波传播和网络理论有机结合，创新地提出多层媒质的[C]网络理论，从而把困难的多层媒质传播转化为[C]矩阵级联，概念简单，结果统一。文中给出了具体实例。

## 0 引 言

本文是电磁场理论教学系列札记之十三。

电磁波传播，特别是多层媒质的入射、反射和折射不仅是一个前沿的理论问题，而且还是一个重要的应用课题。探矿、测地和异物检测都离不开它的基础——电磁波向多层媒质的传播。

本文根据三个原则归纳出电磁波斜入射到媒质突变的平面边界作为基本模型，它可以退化为垂直入射、导体和磁体边界等多种情况。根据电磁波传播和网络理论的有机结合，创新地提出了多层媒质的[C]网络理论，从而把困难的多层媒质传播转化为矩阵[C]级联，由应用实例得到一系列有用统一的结论，很值得作进一步探索和推广。

## 1 基 本 模 型

不论入射、反射和折射，都涉及电磁平面波的传播。首先，本文对基本模型提出如

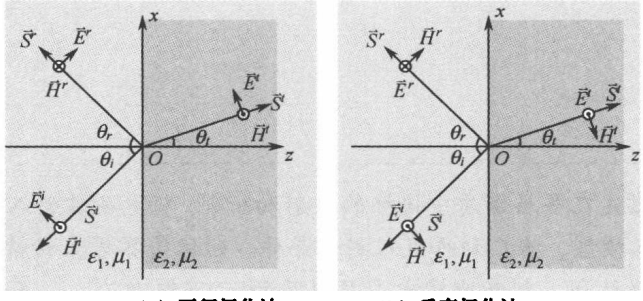
下三个原则：

（1）将媒质突变的平面边界作为最基本单元；

（2）电磁平面波斜入射作为基本模型，并分为电场 $\vec{E}$ 方向与入射面平行的平行极化波和电场 $\vec{E}$ 方向与入射面垂直的垂直极化波两种情况；

（3）当入射角 $\theta_i$，反射角 $\theta_r$ 和折射角 $\theta_t$ 均为 0°，即 $\theta_i=\theta_r=\theta_t=0°$，问题应该退化成垂直入射情况。

必须指出：正因为有原则（3），使本文的结果与大多数著作有所差异[1-12]。图 13-1 给出了基本模型的两种情况。




（a）平行极化波　　（b）垂直极化波

图 13-1　平面波斜入射平面边界作为基本模型

### 1．平行极化波

这种情况下，电磁场在平面边界的匹配条件具体为

$$\left.\begin{aligned} E_0^{\mathrm{i}}\cos\theta_{\mathrm{i}}+E_0^{\mathrm{r}}\cos\theta_{\mathrm{r}}&=E_0^{\mathrm{t}}\cos\theta_{\mathrm{t}}\\ \frac{E_0^{\mathrm{i}}}{\eta_1}-\frac{E_0^{\mathrm{r}}}{\eta_1}&=\frac{E_0^{\mathrm{t}}}{\eta_2}\end{aligned}\right\} \tag{13-1}$$

其中，$\eta_1=\sqrt{\dfrac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$，$\eta_2=\sqrt{\dfrac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$，若进一步定义出反射系数 $\Gamma_{//}$ 和折射系数 $T_{//}$ 分别是

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_{//}&=\frac{E_0^{\mathrm{r}}}{E_0^{\mathrm{i}}}\\ T_{//}&=\frac{E_0^{\mathrm{r}}}{E_0^{\mathrm{j}}}\end{aligned}\right\} \tag{13-2}$$

很易得到

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_{//}&=\frac{\eta_2\cos\theta_{\mathrm{t}}-\eta_1\cos\theta_{\mathrm{i}}}{\eta_2\cos\theta_{\mathrm{t}}+\eta_1\cos\theta_{\mathrm{i}}}\\ T_{//}&=\frac{2\eta_2\cos\theta_{\mathrm{i}}}{\eta_2\cos\theta_{\mathrm{t}}+\eta_1\cos\theta_{\mathrm{i}}}\end{aligned}\right\} \tag{13-3}$$

其中，已考虑 Fermat 原理 $\theta_i=\theta_r$。由式（13-3）很易得到

$$T_{//}=(1-\Gamma_{//})\frac{\eta_2}{\eta_1} \tag{13-4}$$

**2．垂直极化波**

这种情况下，电磁场在平面边界的匹配条件对应为

$$\left.\begin{aligned} E_0^i+E_0^r&=E_0^t \\ \frac{E_0^i\cos\theta_i}{\eta_1}-\frac{E_0^r\cos\theta_r}{\eta_1}&=\frac{E_0^t\cos\theta_t}{\eta_2}\end{aligned}\right\} \tag{13-5}$$

类似可得反射系数 $\Gamma_\perp$ 和折射系数 $T_\perp$ 分别是

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_\perp&=\frac{\eta_2\cos\theta_i-\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i+\eta_1\cos\theta_t} \\ T_\perp&=\frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i+\eta_1\cos\theta_t}\end{aligned}\right\} \tag{13-6}$$

根据确定基本模型的第 3 个原则，考察式（13-3）和式（13-6），在垂直入射，即 $\theta_i=\theta_r=\theta_t=0^\circ$，统一有

$$\left.\begin{aligned} \Gamma&=\Gamma_{//}(0^\circ)=\Gamma_\perp(0^\circ)=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1} \\ T&=T_{//}(0^\circ)=T_\perp(0^\circ)=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}\end{aligned}\right\} \tag{13-7}$$

并且有关系

$$T_\perp=1+\Gamma_\perp \tag{13-8}$$

我们还应该进一步解释把电磁波斜入射平面界面作为基本模型的深层次原因：它不仅可包含垂直入射情况，而且可以概括第二媒质是理想导体，即电壁情况。这时须令 $\eta_2=0$，有

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_e&=\Gamma_{//}(0^\circ)=\Gamma_\perp(0^\circ)=-1 \\ T_e&=T_{//}(0^\circ)=T_\perp(0^\circ)=0\end{aligned}\right\} \tag{13-9}$$

和第二媒质是理想磁体，即磁壁情况，这时 $\eta_2\to\infty$，于是

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_m&=\Gamma_{//}(0^\circ)=\Gamma_\perp(0^\circ)=1 \\ T_m&=T_{//}(0^\circ)=T_\perp(0^\circ)=2\end{aligned}\right\} \tag{13-10}$$

或许读者对于式（13-10）中 $T_m=2$ 有些疑惑不解。实际上只须注意到本文的 $\Gamma$ 和 $T$ 都是针对电场的反射和折射，后边可清楚看出，它们完全满足能量守恒关系。

## 2 特殊角度

平面电磁波入射到界面发生反射和折射时，有两个特殊角度值得重视：无反射 Brewster 角 $\theta_B$ 和全反射临界角 $\theta_c$。

1．无反射 Brewster 角 $\theta_B$

对于平行极化波，由无反射条件给出

$$\eta_1 \cos\theta_i = \eta_2 \cos\theta_t \tag{13-11}$$

由 Fermat 原理

$$\cos\theta_t = \sqrt{1-\sin^2\theta_t} = \sqrt{1-\frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2}\sin^2\theta_i} \tag{13-12}$$

易得 Brewster 角为

$$\theta_B^{//} = \sin^{-1}\left[\sqrt{\frac{1-\left(\dfrac{\varepsilon_1\mu_2}{\varepsilon_2\mu_1}\right)}{1-\left(\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2}}\right] \tag{13-13}$$

而对于垂直极化波，这时的无反射条件是

$$\eta_2 \cos\theta_i = \eta_1 \cos\theta_t \tag{13-14}$$

对应的 Brewster 角为

$$\theta_B^{\perp} = \sin^{-1}\left[\sqrt{\frac{1-\left(\dfrac{\varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_2}\right)}{1-\left(\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2}}\right] \tag{13-15}$$

特别应该指出，对于**电介质**，也即 $\mu_1 = \mu_2$，这时垂直极化波不可能出现 Brewster 角，只有在平行极化波情况下才能出现无反射现象的 Brewster 角。

2．全反射临界角 $\theta_c$

由式（13-3）和式（13-6）很易看出，只要满足

$$\cos\theta_t = 0 \tag{13-16}$$

则必然会出现全反射，即这时有

$$|\Gamma_{//}| = |\Gamma_{\perp}| = 1 \tag{13-17}$$

且由式（13-16）可具体给出

$$\sin^2\theta_i=\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1} \tag{13-18}$$

这时可知

$$\theta_t=90^\circ \tag{13-19}$$

它意味着电磁波只有沿表面才能传播，且不进入第二媒质，具体发生全反射的临界角 $\theta_c$ 与平行极化波还是垂直极化波无关，为

$$\theta_c=\sin^{-1}\sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}} \tag{13-20}$$

因此，产生全反射的条件有

$$\varepsilon_1\mu_1>\varepsilon_2\mu_2 \tag{13-21}$$

特别对于 $\mu_1=\mu_2$ 的电介质，更进一步得到

$$\varepsilon_1>\varepsilon_2 \tag{13-22}$$

换句话说，只有光密媒质入射到光疏媒质界面才会出现全反射现象，正是应用这一原理产生了近代的光导纤维。

## 3　电磁波传播[C]网络

为了研究斜入射多层媒质的复杂情况，本文把电磁波传播与网络理论有机地结合起来，提出[C]网络理论，如图 13-2 所示。

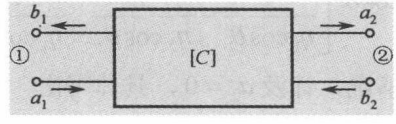



图 13-2　电磁波传播[C]网络

作为一个典型实例，我们研究[C]网络如何表示传播时媒质的突变界面。

从对称端口观点看：$b_1$，$b_2$ 分别表示端口①和端口②的电场反射，而 $a_1$，$a_2$ 则表示相应的电场入射，采用矩阵有

$$\begin{bmatrix}b_1\\a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}\\C_{21}&C_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_2\\b_2\end{bmatrix} \tag{13-23}$$

另外，从端口①→端口②广义传输的角度看，

$a_1$——表示端口①的入射，$a_1=E_0^i$；

$b_1$——表示端口①的反射，$b_1 = E_0^{\mathrm{r}}$；

$b_2$——表示端口②的折射，$b_2 = E_0^{\mathrm{t}}$；

$a_2$——对于如图 13-2 所示的单层媒质突变网络，有

$$a_2 = 0 \tag{13-24}$$

而对于多层网络，则 $a_2$ 表示第二层的反射。

**1．平行极化波斜入射**

由式（13-1）和式（13-2），并考虑各层对称形式，很易得出

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_{\mathrm{i}} & \cos\theta_{\mathrm{i}} \\ -\dfrac{1}{\eta_1} & \dfrac{1}{\eta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{\mathrm{t}} & \cos\theta_{\mathrm{t}} \\ -\dfrac{1}{\eta_2} & \dfrac{1}{\eta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{13-25}$$

进一步写出

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \frac{\eta_1}{2\cos\theta_{\mathrm{i}}} \begin{bmatrix} \dfrac{\cos\theta_{\mathrm{t}}}{\eta_1} + \dfrac{\cos\theta_{\mathrm{i}}}{\eta_2} & \dfrac{\cos\theta_{\mathrm{t}}}{\eta_1} - \dfrac{\cos\theta_{\mathrm{i}}}{\eta_2} \\ \dfrac{\cos\theta_{\mathrm{t}}}{\eta_1} - \dfrac{\cos\theta_{\mathrm{i}}}{\eta_2} & \dfrac{\cos\theta_{\mathrm{t}}}{\eta_1} + \dfrac{\cos\theta_{\mathrm{i}}}{\eta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{13-26}$$

为便于推广，引入

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_{\mathrm{i}} \\ \theta_2 = \theta_{\mathrm{t}} \end{cases} \tag{13-27}$$

即可给出平行极化波的电磁波[$C^{//}$]矩阵，为

$$[C^{//}] = \frac{\eta_1\cos\theta_1}{2}\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\eta_1\cos\theta_1} + \dfrac{1}{\eta_2\cos\theta_2} & \dfrac{1}{\eta_1\cos\theta_1} - \dfrac{1}{\eta_2\cos\theta_2} \\ \dfrac{1}{\eta_1\cos\theta_1} - \dfrac{1}{\eta_2\cos\theta_2} & \dfrac{1}{\eta_1\cos\theta_1} + \dfrac{1}{\eta_2\cos\theta_2} \end{bmatrix} \tag{13-28}$$

特别对于只有单层突变媒质情况，计及 $a_2 = 0$，具体写出

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \frac{\eta_1\cos\theta_{\mathrm{i}}}{2}\frac{\cos\theta_{\mathrm{t}}}{\cos\theta_{\mathrm{i}}}\left(\frac{1}{\eta_1\cos\theta_{\mathrm{i}}} - \frac{1}{\eta_2\cos\theta_{\mathrm{t}}}\right)b_2 \\ a_1 &= \frac{\eta_1\cos\theta_{\mathrm{i}}}{2}\frac{\cos\theta_{\mathrm{t}}}{\cos\theta_{\mathrm{i}}}\left(\frac{1}{\eta_1\cos\theta_{\mathrm{i}}} + \frac{1}{\eta_2\cos\theta_{\mathrm{t}}}\right)b_2 \end{aligned}\right\} \tag{13-29}$$

很易得到

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_{//} &= \frac{b_1}{a_1} = \frac{\eta_2\cos\theta_{\mathrm{t}} - \eta_1\cos\theta_{\mathrm{i}}}{\eta_2\cos\theta_{\mathrm{t}} + \eta_1\cos\theta_{\mathrm{i}}} \\ T_{//} &= \frac{b_2}{a_1} = \frac{2\eta_2\cos\theta_{\mathrm{i}}}{\eta_2\cos\theta_{\mathrm{t}} + \eta_1\cos\theta_{\mathrm{i}}} \end{aligned}\right\} \tag{13-30}$$

完全与式（13-3）结果一致。

**2．垂直极化波斜入射**

同样由式（13-5）及对称性考虑，又得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\cos\theta_i}{\eta_1} & -\dfrac{\cos\theta_i}{\eta_1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\cos\theta_t}{\eta_2} & -\dfrac{\cos\theta_t}{\eta_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{13-31}$$

进一步写出

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix}=\frac{\eta_1}{2\cos\theta_i}\begin{bmatrix} \dfrac{\cos\theta_i}{\eta_1}+\dfrac{\cos\theta_t}{\eta_2} & \dfrac{\cos\theta_i}{\eta_1}-\dfrac{\cos\theta_t}{\eta_2} \\ \dfrac{\cos\theta_i}{\eta_1}-\dfrac{\cos\theta_t}{\eta_2} & \dfrac{\cos\theta_i}{\eta_1}+\dfrac{\cos\theta_t}{\eta_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{13-32}$$

并得到垂直极化波[$C^{\perp}$]网络有

$$[C^{\perp}]=\frac{\eta_1}{2\cos\theta_i}\begin{bmatrix} \dfrac{\cos\theta_1}{\eta_1}+\dfrac{\cos\theta_2}{\eta_2} & \dfrac{\cos\theta_1}{\eta_1}-\dfrac{\cos\theta_2}{\eta_2} \\ \dfrac{\cos\theta_1}{\eta_1}-\dfrac{\cos\theta_2}{\eta_2} & \dfrac{\cos\theta_1}{\eta_1}+\dfrac{\cos\theta_2}{\eta_2} \end{bmatrix} \tag{13-33}$$

特别对于只有单层突变媒质情况，$a_2=0$，具体给出

$$\left.\begin{aligned} b_1&=\frac{\eta_1}{2\cos\theta_i}\left(\frac{\cos\theta_i}{\eta_1}-\frac{\cos\theta_t}{\eta_2}\right)b_2 \\ a_1&=\frac{\eta_1}{2\cos\theta_i}\left(\frac{\cos\theta_i}{\eta_1}+\frac{\cos\theta_t}{\eta_2}\right)b_2 \end{aligned}\right\} \tag{13-34}$$

最后得到

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_{\perp}&=\frac{b_1}{a_1}=\left(\frac{\eta_2\cos\theta_i-\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i+\eta_1\cos\theta_t}\right) \\ T_{\perp}&=\frac{b_2}{a_1}=\left(\frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i+\eta_1\cos\theta_t}\right) \end{aligned}\right\} \tag{13-35}$$

同样与式（13-6）结果完全一致。

**3．垂直入射情况**

只要计及$\theta_1=\theta_2=0°$时，式（13-28）和式（13-33）均成为同一垂直入射网络，为

$$[C]=\frac{\eta_1}{2}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\eta_1}+\dfrac{1}{\eta_2} & \dfrac{1}{\eta_1}-\dfrac{1}{\eta_2} \\ \dfrac{1}{\eta_1}-\dfrac{1}{\eta_2} & \dfrac{1}{\eta_1}+\dfrac{1}{\eta_2} \end{bmatrix} \tag{13-36}$$

**4．统一[C]网络**

本文引入统一阻抗 Z 符号，定义是

$$Z=\begin{cases}\eta & \text{——垂直入射}\\ \eta^{//} & \text{——平行极化波斜入射}\\ \eta^{\perp} & \text{——垂直极化波斜入射}\end{cases} \tag{13-37}$$

且

$$\left.\begin{aligned}&\eta_1^{//}=\eta_1\cos\theta_1,\eta_2^{//}=\eta_2\cos\theta_2\\ &\eta_1^{\perp}=\frac{\eta_1}{\cos\theta_1},\eta_2^{\perp}=\frac{\eta_2}{\cos\theta_2}\end{aligned}\right\} \tag{13-38}$$

于是，可写出统一的[C]网络

$$[C]=\frac{AZ_1}{2}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{Z_1}+\dfrac{1}{Z_2} & \dfrac{1}{Z_1}-\dfrac{1}{Z_2}\\ \dfrac{1}{Z_1}-\dfrac{1}{Z_2} & \dfrac{1}{Z_1}+\dfrac{1}{Z_2}\end{bmatrix} \tag{13-39}$$

且

$$A=\begin{cases}1 & \text{垂直入射和垂直极化斜入射}\\ \dfrac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} & \text{平行极化斜入射}\end{cases} \tag{13-40}$$

特别要指出，对于平行极化波斜入射的情况，因子 $A=\dfrac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$ 并不影响反射系数 $\Gamma$ 的表示形式，只是对于折射系数 $T$ 形式有所不同。

**5．波传输段[$C_l$]**

把波传输段取为媒质（$\varepsilon_2$，$\mu_2$）段 $l$ 不失一般性，如图 13-3 所示。

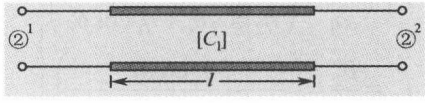



图 13-3　波传输[$C_l$]段网络

由定义写出

$$\begin{bmatrix}b_2^{(1)}\\ a_2^{(1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_2^{(2)}\\ b_2^{(2)}\end{bmatrix} \tag{13-41}$$

其中

$$\varphi=k_2 l\cos\theta_2 \tag{13-42}$$

且 $k_2=\omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$ 。

## 4 工程实例

电磁波传输[C]网络的最大特点是它满足级联条件，如图 13-4 所示 $n$ 个网络 $C_1$，$C_2$，…，$C_n$ 级联，则总网络很易写出

$$[C]=\prod_{i=1}^{n}[C_i] \tag{13-43}$$

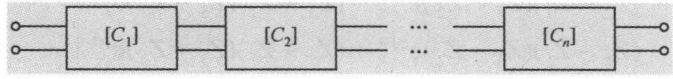



图 13-4　$n$ 个网络 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 级联

十分明显，这一特性十分适合多层媒质的研究课题。

本文将给出工程应用中 3 层无耗媒质情况，如图 13-5 所示，采用[C]矩阵写出

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix}=[C]\begin{bmatrix} 0 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{13-44}$$

有

$$[C]=\frac{A_{12}A_{23}Z_1Z_2}{4}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{Z_1}+\dfrac{1}{Z_2} & \dfrac{1}{Z_1}-\dfrac{1}{Z_2} \\ \dfrac{1}{Z_1}-\dfrac{1}{Z_2} & \dfrac{1}{Z_1}+\dfrac{1}{Z_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{Z_2}+\dfrac{1}{Z_3} & \dfrac{1}{Z_2}-\dfrac{1}{Z_3} \\ \dfrac{1}{Z_2}-\dfrac{1}{Z_3} & \dfrac{1}{Z_2}+\dfrac{1}{Z_3} \end{bmatrix} \tag{13-45}$$

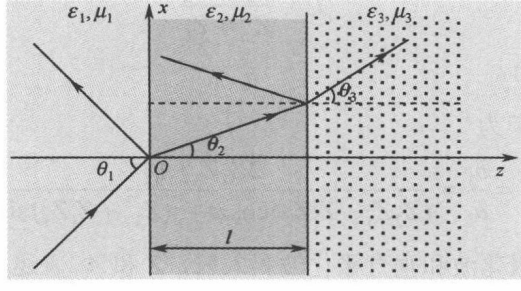



图 13-5　3 层无耗媒质中电磁波传播情况

其中，对于平行极化波，有

$$\left.\begin{aligned} A_{12}&=\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} \\ A_{23}&=\frac{\cos\theta_3}{\cos\theta_2} \end{aligned}\right\} \tag{13-46}$$

于是得到

$$A_{13}=\begin{cases}1 & \text{垂直入射和垂直极化斜入射}\\ A_{12}A_{23}=\dfrac{\cos\theta_3}{\cos\theta_1} & \text{平行极化斜入射}\end{cases} \tag{13-47}$$

很易导出

$$[C]=\frac{A_{13}}{4Z_2Z_3}\begin{bmatrix}(Z_2+Z_1)(Z_3+Z_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}+(Z_2-Z_1)(Z_3-Z_2)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} & \\ (Z_2-Z_1)(Z_3+Z_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}+(Z_2+Z_1)(Z_3-Z_2)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} & \\ (Z_2+Z_1)(Z_3-Z_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}+(Z_2-Z_1)(Z_3+Z_2)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} & \\ (Z_2-Z_1)(Z_3-Z_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}+(Z_2+Z_1)(Z_3+Z_2)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} & \end{bmatrix} \tag{13-48}$$

对于 $a_3=0$，有

$$\Gamma=\frac{b_1}{a_1}=\frac{(Z_2Z_3-Z_1Z_2)\cos\varphi+\mathrm{j}(Z_2^{\,2}-Z_1Z_3)\sin\varphi}{(Z_2Z_3+Z_1Z_2)\cos\varphi+\mathrm{j}(Z_2^{\,2}+Z_1Z_3)\sin\varphi} \tag{13-49}$$

特别需要指出：式（13-49）反射系数 $\Gamma$ 不论对于垂直入射，平行极化波还是垂直极化波的斜入射，形式完全统一，只是 $Z$ 分别对应 $\eta$，$\eta_{/\!/}$，$\eta_{\perp}$。

如果进一步引进输入阻抗 $Z_{\mathrm{in}}$ 形式

$$Z_{\mathrm{in}}=Z_2\left(\frac{Z_3+\mathrm{j}Z_2\tan\varphi}{Z_2+\mathrm{j}Z_3\tan\varphi}\right) \tag{13-50}$$

则式（13-48）可进一步表述为

$$\Gamma=\frac{Z_{\mathrm{in}}-Z_1}{Z_{\mathrm{in}}+Z_1} \tag{13-51}$$

与正确结果完全一致[2]。

另外，折射系数 $T$ 为

$$T=\frac{b_3}{a_1}=\frac{2Z_2Z_3/A_{13}}{(Z_2Z_3+Z_1Z_2)\cos\varphi+\mathrm{j}(Z_2^{\,2}+Z_1Z_3)\sin\varphi} \tag{13-52}$$

对于垂直入射，平行极化波和垂直极化波斜入射，$Z$ 和 $A_{13}$ 表述有所不同。

## 5 能量守恒

由于本文所述仅限于无耗媒质模型，所以在电磁波传播过程中入射波、反射波和折射波的功率之间，必须存在着能量守恒关系。

首先，让我们考察单层无耗媒质突变情况，由式（13-3）、式（13-6）和式（13-7）可统一写出

$$\left.\begin{aligned}\Gamma^2+kT^2&\equiv 1\\ k&=A_{12}^2\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{13-53}$$

具体对于垂直入射情况，$A_{12}=1$有

$$k=\frac{\eta_1}{\eta_2} \tag{13-54}$$

对于垂直极化波斜入射情况，由于$A_{12}=1$依然成立，于是有

$$k=\frac{\eta_1/\cos\theta_1}{\eta_2/\cos\theta_2} \tag{13-55}$$

最后对于水平极化波斜入射情况，这时$A_{12}=\dfrac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$，而$\dfrac{Z_1}{Z_2}=\dfrac{\eta_1\cos\theta_1}{\eta_2\cos\theta_2}$，又可得

$$k=\frac{\eta_1/\cos\theta_1}{\eta_2/\cos\theta_2} \tag{13-56}$$

十分奇妙的是能量关系的结果是唯一且相同的。

现在，让我们进一步观察3层无耗媒质情况。只要注意到式（13-49）和式（13-52），即可知

$$\begin{cases}|\Gamma|^2+k|T|^2\equiv 1\\ k=A_{13}^2\left(\dfrac{Z_1}{Z_3}\right)\end{cases} \tag{13-57}$$

这时的能量守恒关系与第2媒质层$\varphi=k_2l\cos\theta_2$无关。它从概念上讲是十分自然的。

因为$k$也可写成

$$k=(A_{12}A_{23})^2\left(\frac{Z_1}{Z_2}\frac{Z_2}{Z_3}\right) \tag{13-58}$$

这样，我们有理由推广到$n$层无耗媒质情况，一般的能量守恒关系是

$$\begin{cases}|\Gamma|^2+k|T|^2\equiv 1\\ k=A_{1n}^2\left(\dfrac{Z_1}{Z_n}\right)\end{cases} \tag{13-59}$$

## 6 结　语

如果说本文还略有新意，那么可以说是电磁波和网络理论的有机结合，它把多层媒质问题转化为矩阵理论，清晰、简单。

关于有耗媒质或非互易多层媒质拟由另文报道。

## 答问录

**问**：是否从本篇札记开始，要讨论网络问题。

**答**：事实上，广义的电磁理论应该包括两个部分：电磁场论和电磁场网络。我们往往认为电磁理论即电磁场论。

网络理论的基础是**矩阵论**，而矩阵是我们必须掌握的一种重要数学工具。

本篇札记十三所讨论的电磁波多层媒质传播的[C]网络，尚不多见。值得展开研究，它的主要基础点有以下两条：

（1）级联模型。

电磁波在多层媒质中的传播是一层一层进去的，它对应网络一级一级级联，且总网络参数是各级网络的按序乘积，参见图 13-4。

（2）系统是线性的。

要采用矩阵研究的问题，必须是线性的（所以矩阵论也对应线性代数）。恰巧，这也是大多数电磁问题可以满足的条件。

我们在长期教学中发现，不少学习网络理论很久的学生，对于网络的核心思想仍不甚了解。所谓网络，即把我们所研究的对象“包住”，不断地对它输入激励，观察它的输出反应。这种不计较网络内部的“具体情况”，而只用输入-输出来研究的方法即称之为“网络思想”，如图 13-6 所示。

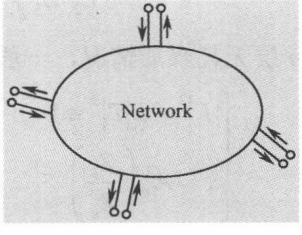



图 13-6　采用输入-输出方法研究未知系统——即网络思想

**网络理论的灵魂在于：对于具体网络，我们只需要研究有限次输入-输出情况，即可得到一切输入-输出的结果。**

具体次数多少，取决于所研究网络的复杂度。

**问：**你能不能具体谈一下[C]网络的主要特点？

**答：**我们一般的微波网络理论研究的是场网络。具体来说即讨论场在波导同轴线、微带及其各种元器件的行为和特点。而札记十三中的[C]网络，纯粹是波网络，它所研究的是波在空间传播的行为和特点。因此，也可称空间网络。且有如图 13-7 所示的三大特点：媒质、角度（入射角，反射角，折射角）和极化。




图 13-7　空间网络的三大特点

很显然，[C]网络要分不同极化作出讨论；并且[C]网络参数中包含角度，我们把它具体列于图 13-8。

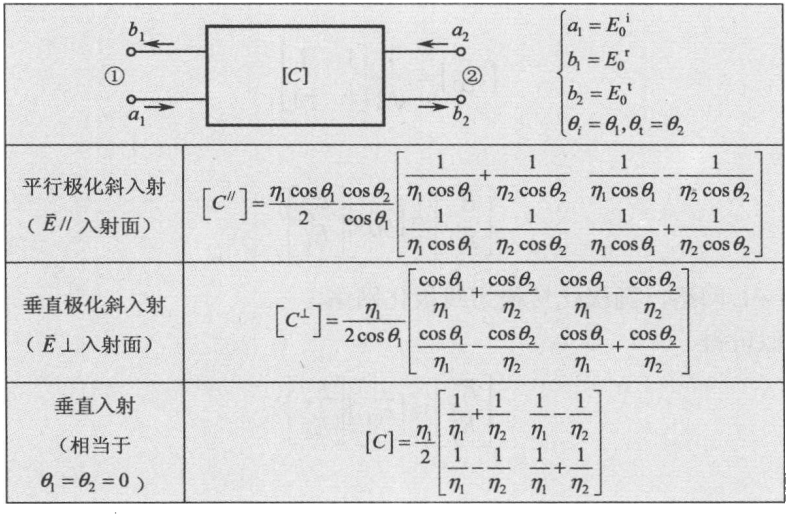



图 13-8　电磁波[C]网络

**问：**能不能在这里再推广一下网络的具体应用？

**答：**确实需要。

网络理论和场论有着截然不同的特点：网络理论原则简单而应用却十分灵活，试举两个例子。

**【例 1】**线极化与圆极化的相互转换网络。

我们平时常用的场是线极化，作为 $z$ 方向传播的波有 $E_x$ 和 $E_y$。但是在实际应用中

某些特定的媒质只对圆极化起作用——也就是正圆极化波传播按 $\theta^{+}=\beta^{+}\ell$，而负圆极化传播则按 $\theta^{-}=\beta^{-}\ell$，此即著名的 Faraday 效应。

这类问题，采用网络研究最为方便，它便要述及线极化与圆极化的相互转换，如图 13-9 所示。

（1）L→C 网络，线极化转换为圆极化网络。

一个线极化波可以分解成两个等幅的圆极化波，很易写出。

$$\begin{bmatrix} E_{+} \\ E_{-} \end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{j} \\ 1 & -\mathrm{j} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{\mathrm{x}} \\ E_{\mathrm{y}} \end{bmatrix}$$

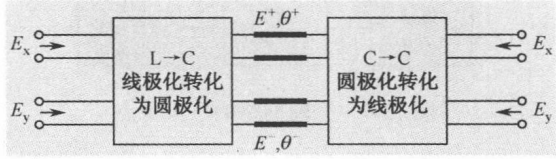



图 13-9　线极化与圆极化的相互转化

若令

$$[T_{\mathrm{LC}}]=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{j} \\ 1 & -\mathrm{j} \end{bmatrix}$$

则有

$$\begin{bmatrix} E_{+} \\ E_{-} \end{bmatrix}=[T_{\mathrm{LC}}]\begin{bmatrix} E_{\mathrm{x}} \\ E_{\mathrm{y}} \end{bmatrix}$$

（2）C→L 网络，圆极化转换为线极化网络。

完全类似可得

$$\begin{bmatrix} E_{\mathrm{x}} \\ E_{\mathrm{y}} \end{bmatrix}=[T_{\mathrm{CL}}]\begin{bmatrix} E_{+} \\ E_{-} \end{bmatrix}$$

其中

$$[T_{\mathrm{CL}}]=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{j} & \mathrm{j} \end{bmatrix}$$

且

$$[T_{\mathrm{CL}}]=[T_{\mathrm{LC}}]^{-1}$$

（3）Faraday 传输网络。

例如，对于纵向磁化的铁氧体导波系统，如图 13-10 所示。

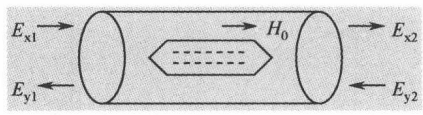



图 13-10　纵向磁化的铁氧体导波系统

这种情况下，正、负圆极化波才是传播系统的本征波，它们有独立的传输角，可以写出

$$\begin{bmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_+} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{bmatrix}$$

进一步令

$$[T_\theta] = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_+} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_-} \end{bmatrix}$$

于是可知

$$\begin{bmatrix} E_{x2} \\ E_{y2} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} E_{x1} \\ E_{y1} \end{bmatrix}$$

其中

$$[T] = [T_{CL}][T_\theta][T_{LC}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{j} & -\mathrm{j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_+} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta_-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -j \end{bmatrix} = e^{-\mathrm{j}\left(\frac{\theta_+ + \theta_-}{2}\right)} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

且

$$\theta = \frac{1}{2}(\theta_- - \theta_+)$$

从数学观点上看

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

是坐标旋转矩阵，而且是右旋变换（条件是 $\theta_- > \theta_+$）。设输入端是 x 方向的线极化波，既有

$$\begin{bmatrix} E_{x1} \\ E_{y1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

这并不失一般性，于是有

$$\begin{bmatrix} E_{x1} \\ E_{y1} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{\theta_+ + \theta_-}{2}\right)} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

等于说：在正向传输时，极化面旋转了 $\theta$ 角——在电磁上称之为 Faraday 旋转，如图 13-11 所示。

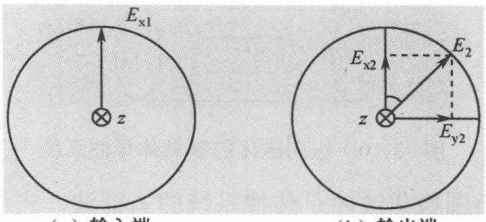



图 13-11 Faraday 极化面旋转

【例 2】研究如图 13-1 的坐标下，一般电场 $\vec{E}=E_x\hat{i}+E_y\hat{j}+E_z\hat{k}$ 与平行极化波 $\vec{E}^{/\!/}$，垂直极化波 $\vec{E}^{\perp}$ 之间的相互转换。很易看出

$$\begin{bmatrix}E_x\\E_y\\E_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta_i & 0\\0 & 1\\-\sin\theta_i & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E^{/\!/}\\E^{\perp}\end{bmatrix}$$

和其逆变换

$$\begin{bmatrix}E^{/\!/}\\E^{\perp}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_x\\E_y\\E_z\end{bmatrix}$$

注意到，对应的变换不是**方阵**，因此相互之间**不存在逆矩阵，但是存在逆变换。**

完全可以看出，采用网络方法简洁、直观。

**问：网络理论除了头尾相接的级联形式，还有什么应用？**

**答：**网络理论应用十分普遍。最一般的情况是[*S*]参数的多端口任意连接，如图 13-12 所示。

已知构成复杂网络的 Net Ⅰ，Net Ⅱ……和对应的[*S*]参数，且 *m*+1 端口与 *m*+2 端口相连，…，*n*−1 端口与 *n* 端口相连。**[*S*]是尚未相互连接时矩阵联合，**因此有

$$S_{i,i+1}=0 \qquad (i=m+1, m+3, \cdots, n-1, n)$$

于是有

$$[S]_C=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1m} & S_{1,m+1} & \cdots & S_{1,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ S_{m1} & S_{m2} & \cdots & S_{mm} & S_{m,m+1} & \cdots & S_{mn}\\ S_{m+1,1} & S_{m+1,2} & \cdots & S_{m+1,m} & S_{m+1,m+1} & \cdots & S_{m+1,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nm} & S_{n,m+1} & \cdots & S_{n,n}\end{bmatrix}$$

$$[b]=[S_C][a]$$

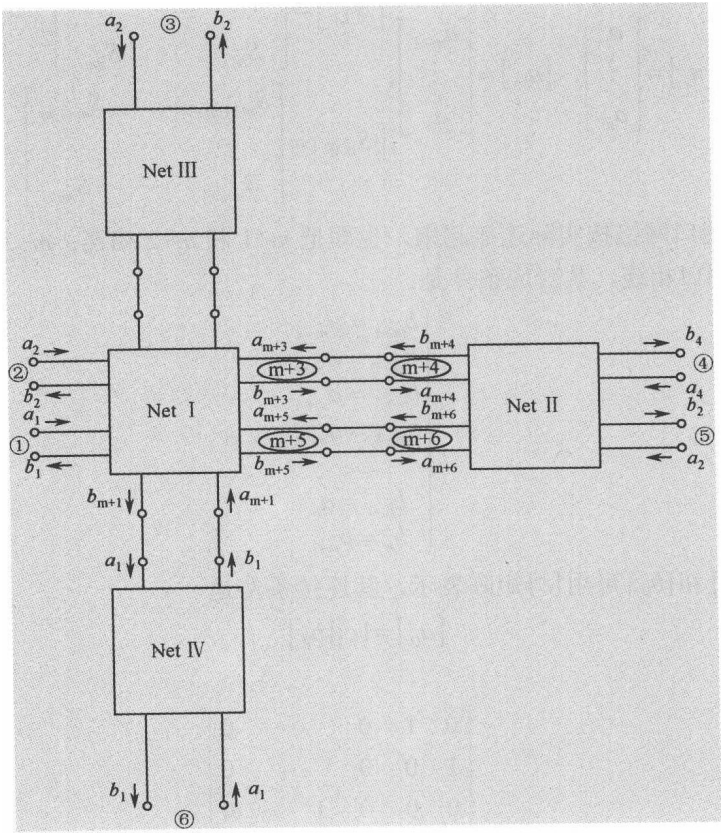



图 13-12　任意级联的复杂网络

我们可以写成分块矩阵形式，既有

$$\begin{bmatrix} b_{\mathrm{I}} \\ b_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_{\mathrm{I,I}} & S_{\mathrm{I,II}} \\ S_{\mathrm{II,I}} & S_{\mathrm{II,II}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{\mathrm{I}} \\ a_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}$$

其中

$$[b_I]=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},\quad [b_{II}]=\begin{bmatrix} b_{m+1} \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} S_{\mathrm{I,I}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{m1} & \cdots & S_{mm} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S_{\mathrm{I,II}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_{1,m+1} & \cdots & S_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{m,m+1} & \cdots & S_{mn} \end{bmatrix}$$

$$[a_I]=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{bmatrix},\quad [a_{II}]=\begin{bmatrix}a_{m+1}\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix},\quad [S_{\mathrm{II,I}}]=\begin{bmatrix}S_{m+1,1} & \cdots & S_{m+1,m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ S_{n1} & \cdots & S_{nm}\end{bmatrix}$$

$$[S_{\mathrm{II,II}}]=\begin{bmatrix}S_{m+1,m+1} & \cdots & S_{m+1,m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ S_{n,m+1} & \cdots & S_{nn}\end{bmatrix}$$

把这假想的 $n$ 端口网络按实际连接起来，也即把 $m$+1 和 $m$+2 相连；$m$+3 和 $m$+4 相连；$n$−1 端口和 $n$ 端口相连，其对应条件是：

$$\begin{cases}b_{m+1}=a_{m+2}\\ b_{m+2}=a_{m+1}\\ b_{m+3}=a_{m+4}\\ b_{m+4}=a_{m+3}\\ \cdots\\ b_{n-1}=a_n\\ b_n=a_{n-1}\end{cases}$$

连接之后的$[a_{\mathrm{II}}]$和$[b_{\mathrm{II}}]$可用$[\varepsilon]$矩阵表示，其连接条件是

$$[a_{\mathrm{II}}]=[\varepsilon][b_{\mathrm{II}}]$$

且

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0\\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}$$

我们完全可以把$[\varepsilon]$看作**广义的负矩阵**$[\Gamma_{\mathrm{L}}]$

很易得出

$$[S_{\mathrm{m}}]=[S_{\mathrm{I,I}}]+[S_{\mathrm{I,II}}][\varepsilon]\{[I]-[S_{\mathrm{II,II}}][\varepsilon]\}^{-1}[S_{\mathrm{II,I}}]$$

它是 $S_{\mathrm{m}}=S_{11}+\dfrac{S_{12}\Gamma_{\mathrm{L}}S_{21}}{1-S_{22}\Gamma_{\mathrm{L}}}$ **的矩阵形式**，由于

$$[\varepsilon]^{-1}=[\varepsilon]$$

最后得到多端口网络任意连接的$[S]_{\mathrm{m}}$矩阵是

$$[S_{\mathrm{m}}]=[S_{\mathrm{I,I}}]+[S_{\mathrm{I,II}}]\{[\varepsilon]-[S_{\mathrm{II,II}}][\varepsilon]\}^{-1}[S_{\mathrm{II,I}}]$$

## 推荐人物

这次将推举著名微波专家林为干教授。

林为干先生的两个特点非常明显：

（1）强有力的数理基础。

作为一名老师，实力第一，基础第一。林先生身上有一流的“武器装备”——数理基础，因此一般的问题和疑难根本挡不住他的“路”。这种数学精彩之处在他的著作中随处可见。当然，带来的一个次要问题是林为干先生著作多为“阳春白雪”，要深刻理解需要下很大的工夫。



林为干教授

（2）讷于言而敏于行。

林先生身上的另一显著特点是平时很少说话，口才也不好。毫不夸张地说，林先生对微波电磁领域之外的问题都不过问，不关心，甚至不了解。

老百姓常言：“有得必有失”。林先生用不关心其他问题的“小失”，换来了在微波电磁领域的“大得”。很值得我们深思，很值得我们学习。

## 参考文献


[1] 毕德显．电磁场理论．北京：电子工业出版社，1985.

[2] 杨儒贵．高等电磁理论．北京：高等教育出版社，2008.

[3] 牛中奇，朱满座，卢智远，路宏敏，等．电磁场理论基础，北京：电子工业出版社，2001.

[4] 谢处方，饶克谨，编．电磁场与电磁波，北京：高等教育出版社，2006.

[5] 王家礼，朱满座，路宏敏．电磁场与电磁波．西安：西安电子科技大学出版社，2000.

[6] 曹伟，徐立勤．电磁波与电磁理论．北京：北京邮电大学出版社．1999.

[7] 陈重，崔正勤．电磁场理论基础．北京：北京理工大学出版社．2003.

[8] 冯恩信．电磁场与波．西安：西安交通大学出版社．1999.

[9] 林为干，等．电磁场理论，北京：人民邮电出版社，1984.

[10] Chew W C. Waves and Fields in Inhomogeneous Media. New York: Van Nostrand Reinhold, 1990.

[11] Wait J R. Electromagnetic Waves in Strarified Media. London Oxford University Press, 1994.

[12] Kong J A. Electromagnetic Waves Thory(1), (2), (3). 影印版。北京：高等教育出版社，2006.

札记十四

# 电磁理论中的矩阵变换

本文深入探讨电磁理论应用中所涉及的各种矩阵变换，主要有坐标矩阵变换，$\nabla$算子矩阵变换和场矩阵变换。文中指出，单位矢、微分和算子在不同坐标中所对应的是不变的变换矩阵。同样，任意柱波导由纵向场向横向场变换的矩阵也是不变的。

## 0 引 言

本文是电磁场理论教学系列札记之十四。

诺贝尔物理学奖获得者李政道博士曾撰写过一本很特殊的书——《物理学中的数学方法》[1]。它有两个显著的特点：一是这本书是李政道教授在美国哥伦比亚大学为博士生讲学的讲稿，不是他本人撰写而是由当时的学生根据听课笔记整理而成的。因此内容鲜活，栩栩如生；二是此书以一个物理学家的独特视角，对于艰深的数学给出精辟的概念剖析和重要的应用实例，很值得学习和推介。

对于矩阵，书中有如下论述——“线性算子与矩阵之间建立了一种关系。这使我们在研究有限维空间中的线性算子时，获得了一个解析工具。”于是，我们把“所有关于矩阵的定理都可转化成关于算子的定理。实质上，矩阵之所以使我们感兴趣，正是因为它是研究算子的一个手段。**矩阵在物理学的应用，主要是同各种线性算子的研究联系在一起的。**”

简言之，在线性系统中矩阵是算子，也是变换。本文正是在这种思想指导下，研究电磁理论中的矩阵变换。

如果把电磁理论比作一部威武雄壮的话剧，那么，必定需要舞台、化装、服装和演

员：舞台要根据剧情构建不同的场景；化装和服装则由剧情包装出不同的造型；而演员须体会剧情创造不同的角色——就像本文所讨论的三个主题：坐标矩阵变换、算子矩阵变换和场矩阵变换。

矩阵是线性系统的最佳数学表述。我们从二维坐标旋转谈起。二维 $x'Oy'$ 在 $xOy$ 基础上，逆时针旋转 $\varphi$ 角，如图 14-1 所示。

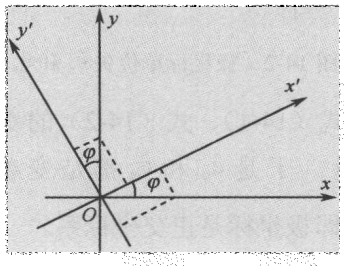



图 14-1　二维坐标转动

很易写出

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{14-1}$$

同样，$x'Oy'$ 和 $xOy$ 两个坐标系的单位矢量之间也是矩阵变换，即

$$\begin{bmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{bmatrix} \tag{14-2}$$

式（14-1）和式（14-2）表示旋转坐标系的矩阵变换。必须注意到，这种情况下，转角 $\varphi$ 是不变参量。

现在来看极坐标与直角坐标之间的变换关系，有

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \tag{14-3}$$

和对应的逆关系

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases} \tag{14-4}$$

极坐标中单位矢 $\hat{e}_\rho$ 和 $\hat{e}_\varphi$ 如图 14-2 所示，很易写出[2]

$$\begin{bmatrix}\hat{e}_\rho\\ \hat{e}_\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{i}\\ \hat{j}\end{bmatrix} \tag{14-5}$$

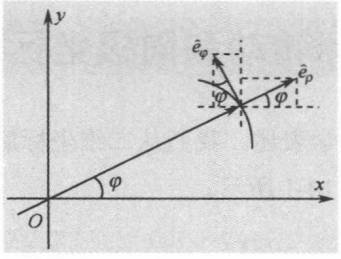



图 14-2 极坐标单位矢 $\hat{e}_\rho$ 和 $\hat{e}_\varphi$

表面看来，式（14-5）与式（14-1）、式（14-2）的变换矩阵相同，但必须注意到，在极坐标系情况下 $\varphi$ 是变量。于是 $\hat{e}_\rho$ 和 $\hat{e}_\varphi$ 都是变单位矢，且 $\hat{e}_\rho\cdot\hat{e}_\rho=\left|\hat{e}_\rho\right|^2=1$，$\hat{e}_\varphi\cdot\hat{e}_\varphi=\left|\hat{e}_\varphi\right|^2=1$ 和 $\hat{e}_\rho\cdot\hat{e}_\varphi=0$，即极坐标是正交坐标系。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\hat{e}_\rho}{\partial\rho}=0,\dfrac{\partial\hat{e}_\rho}{\partial\varphi}=-\sin\varphi\,\hat{i}+\cos\varphi\,\hat{j}=\hat{e}_\varphi\\ \dfrac{\partial\hat{e}_\varphi}{\partial\rho}=0,\dfrac{\partial\hat{e}_\varphi}{\partial\varphi}=-\cos\varphi\,\hat{i}-\sin\varphi\,\hat{j}=-\hat{e}_\rho\end{cases} \tag{14-6}$$

进一步还有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\hat{e}_\rho}{\partial\varphi^2}=-\hat{e}_\rho\\ \dfrac{\partial^2\hat{e}_\varphi}{\partial\varphi^2}=-\hat{e}_\varphi\end{cases} \tag{14-7}$$

采用式（14-3）又可得到极坐标与直角坐标的微分矩阵变换

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{d}\rho\\ \rho\mathrm{d}\varphi\end{bmatrix} \tag{14-8}$$

和逆关系

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}\rho\\ \rho\mathrm{d}\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{bmatrix} \tag{14-9}$$

本节导出的式（14-1），式（14-2），式（14-5）和式（14-9）都明确表明变换矩阵的不变性。

## 2　三维坐标矩阵变换

我们将分三种情况作出讨论。

**1．坐标平面转动和向柱坐标矩阵变换**

直角坐标（$xOy$）的平面转动如图 14-3 所示。

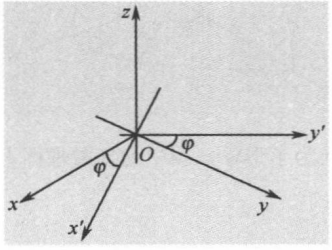



图 14-3　直角坐标的（$xOy$）平面转动

这种情况完全与二维类似，写出

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{14-10}$$

和单位矢变换矩阵

$$\begin{bmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \\ \hat{k}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix} \tag{14-11}$$

同样，由直角坐标系向柱坐标系的单位矢变换矩阵

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_\rho \\ \hat{e}_\varphi \\ \hat{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix} \tag{14-12}$$

和微分量变换矩阵

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}\rho \\ \rho\mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix} \tag{14-13}$$

我们再一次看到存在变换矩阵的不变性。

**2. 坐标球转动和向球坐标矩阵变换**

直角坐标的球转动如图 14-4 所示。

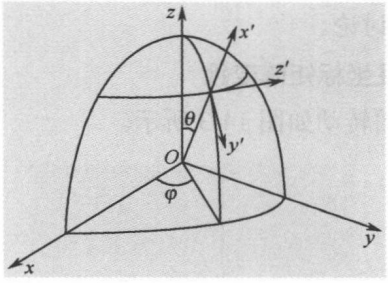



图 14-4 直角坐标的球转动（为了形象，图中的打撇坐标不在 $O$ 点，应该平移到 $O$ 点）

容易写出

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{14-14}$$

和单位变换矩阵

$$\begin{bmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \\ \hat{k}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix} \tag{14-15}$$

在直角坐标球转动情况下，$\theta$ 和 $\varphi$ 是不变的常数参量。现在，再让我们研究由直角坐标向球坐标的变换，有

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{14-16}$$

和逆关系

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{\rho}{z}\right) \\ \varphi = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases} \tag{14-17}$$

其中，$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$，球坐标的单位矢如图 14-5 所示。

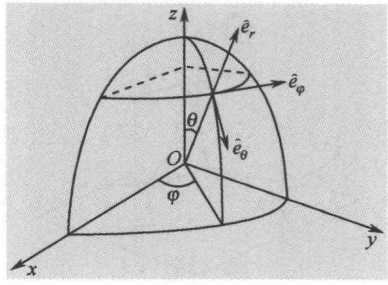



图 14-5　球坐标的单位矢

容易写出

$$\begin{bmatrix}\hat{e}_r\\ \hat{e}_\theta\\ \hat{e}_\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{i}\\ \hat{j}\\ \hat{k}\end{bmatrix} \tag{14-18}$$

由式（14-16）再一次给出微分量的矩阵变换

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}r\\ r\mathrm{d}\theta\\ r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\\ \mathrm{d}z\end{bmatrix} \tag{14-19}$$

必须注意到，在球坐标情况下

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\hat{e}_r}{\partial r}=0,\dfrac{\partial\hat{e}_r}{\partial\theta}=\hat{e}_\theta,\dfrac{\partial\hat{e}_r}{\partial\varphi}=\sin\theta\ \hat{e}_\varphi\\ \dfrac{\partial\hat{e}_\theta}{\partial r}=0,\dfrac{\partial\hat{e}_\theta}{\partial\theta}=-\hat{e}_r,\dfrac{\partial\hat{e}_\theta}{\partial\varphi}=\cos\theta\ \hat{e}_\varphi\\ \dfrac{\partial\hat{e}_\varphi}{\partial r}=0,\dfrac{\partial\hat{e}_\varphi}{\partial\theta}=0,\dfrac{\partial\hat{e}_\varphi}{\partial\varphi}=\hat{e}_z\times\hat{e}_\varphi\end{cases} \tag{14-20}$$

进一步还有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\hat{e}_r}{\partial\theta^2}=-\hat{e}_r\\ \dfrac{\partial^2\hat{e}_\theta}{\partial\theta^2}=-\hat{e}_\theta\\ \dfrac{\partial\hat{e}_r}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial\hat{e}_r}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial\hat{e}_\theta}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial\hat{e}_\theta}{\partial\varphi}=1\end{cases} \tag{14-21}$$

球坐标也是正交坐标系，也有着变换矩阵的不变性。

**3．正交曲线坐标的矩阵变换**

这里，我们把问题拓展到一般的正交曲线坐标系$(q_1,q_2,q_3)$，如图 14-6 所示。

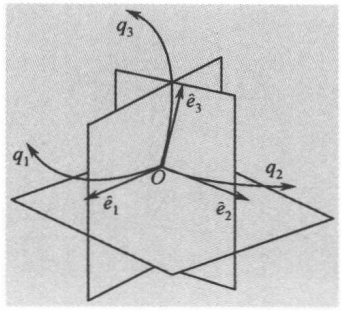



图 14-6 一般正交曲线坐标系 $(q_1,q_2,q_3)$

$$\begin{cases} q_1 = q_1(x,y,z) \\ q_2 = q_2(x,y,z) \\ q_3 = q_3(x,y,z) \end{cases} \tag{14-22}$$

我们可写出单位矢的矩阵变换

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{H_1}\frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{1}{H_1}\frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{1}{H_1}\frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{1}{H_2}\frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{1}{H_2}\frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{1}{H_2}\frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{1}{H_3}\frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{1}{H_3}\frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{1}{H_3}\frac{\partial z}{\partial q_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix} \tag{14-23}$$

其中，$H_1$，$H_2$ 和 $H_3$ 称为 Lamè 系数，具体是

$$\begin{cases} H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} \\ H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2} \\ H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2} \end{cases} \tag{14-24}$$

引入变换矩阵 $[T]$

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{H}_1}\frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{1}{\mathrm{H}_1}\frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{1}{\mathrm{H}_1}\frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{1}{\mathrm{H}_2}\frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{1}{\mathrm{H}_2}\frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{1}{\mathrm{H}_2}\frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{1}{\mathrm{H}_3}\frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{1}{\mathrm{H}_3}\frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{1}{\mathrm{H}_3}\frac{\partial z}{\partial q_3} \end{bmatrix} \tag{14-25}$$

明显可知

$$[T]^{-1}=[T]^{\mathrm{T}} \tag{14-26}$$

其中，[ ]$^{\mathrm{T}}$表示转置矩阵，且

$$[T]^{-1}=\begin{bmatrix} H_1\dfrac{\partial q_1}{\partial x} & H_2\dfrac{\partial q_2}{\partial x} & H_3\dfrac{\partial q_3}{\partial x} \\ H_1\dfrac{\partial q_1}{\partial y} & H_2\dfrac{\partial q_2}{\partial y} & H_3\dfrac{\partial q_3}{\partial y} \\ H_1\dfrac{\partial q_1}{\partial z} & H_2\dfrac{\partial q_2}{\partial z} & H_3\dfrac{\partial q_3}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{14-27}$$

作为例子，我们再一次研究二维极坐标，其中$H_1=1$，$H_2=\rho$于是可知

$$[T]=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \rho} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \tag{14-28}$$

同样，微分量的变换矩阵又有

$$\begin{bmatrix} H_1\mathrm{d}q_1 \\ H_2\mathrm{d}q_2 \\ H_3\mathrm{d}q_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial x}{\partial q_1} & \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial y}{\partial q_1} & \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial z}{\partial q_1} \\ \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial x}{\partial q_2} & \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial y}{\partial q_2} & \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial z}{\partial q_2} \\ \dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial x}{\partial q_3} & \dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial y}{\partial q_3} & \dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial z}{\partial q_3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix} \tag{14-29}$$

可以清楚看出，对于是一般的正交坐标系，**确实存在不变的变换矩阵**$[T]$。

## 3　算子∇矩阵变换

**算子∇**在电磁理论中起到极为重要的作用，作为电磁规律的 Maxwell 方程组正是以∇×和∇·表示的。∇的基本公式是

$$\nabla=\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{14-30}$$

很易写出

$$\begin{aligned}\nabla=&\hat{i}\left(\frac{\partial q_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial q_1}+\frac{\partial q_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial q_2}+\frac{\partial q_3}{\partial x}\frac{\partial}{\partial q_3}\right)+\hat{j}\left(\frac{\partial q_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial q_1}+\frac{\partial q_2}{\partial y}\frac{\partial}{\partial q_2}+\frac{\partial q_3}{\partial y}\frac{\partial}{\partial q_3}\right)\\&+\hat{k}\left(\frac{\partial q_1}{\partial z}\frac{\partial}{\partial q_1}+\frac{\partial q_2}{\partial z}\frac{\partial}{\partial q_2}+\frac{\partial q_3}{\partial z}\frac{\partial}{\partial q_3}\right)\end{aligned} \tag{14-31}$$

于是得到坐标导数矩阵变换

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1\frac{\partial q_1}{\partial x} & H_2\frac{\partial q_2}{\partial x} & H_3\frac{\partial q_3}{\partial x} \\ H_1\frac{\partial q_1}{\partial y} & H_2\frac{\partial q_2}{\partial y} & H_3\frac{\partial q_3}{\partial y} \\ H_1\frac{\partial q_1}{\partial z} & H_2\frac{\partial q_2}{\partial z} & H_3\frac{\partial q_3}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1} \\ \frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2} \\ \frac{1}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3} \end{bmatrix} \tag{14-32}$$

由式（14-27），可知

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1} \\ \frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2} \\ \frac{1}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{14-33}$$

由式（14-23）和式（14-27）写出

$$\begin{cases} \hat{e}_1 = H_1\left(\frac{\partial q_1}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial q_1}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial q_1}{\partial z}\hat{k}\right) \\ \hat{e}_2 = H_2\left(\frac{\partial q_2}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial q_2}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial q_2}{\partial z}\hat{k}\right) \\ \hat{e}_3 = H_3\left(\frac{\partial q_3}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial q_3}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial q_3}{\partial z}\hat{k}\right) \end{cases} \tag{14-34}$$

最后可给出一般正交曲线坐标中算子∇为

$$\nabla = \hat{e}_1\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \hat{e}_2\frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2} + \hat{e}_3\frac{1}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3} \tag{14-35}$$

或者是

$$\nabla = [\hat{i},\hat{j},\hat{k}] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = [\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3] \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{H}_1}\frac{\partial}{\partial q_1} \\ \frac{1}{\mathrm{H}_2}\frac{\partial}{\partial q_2} \\ \frac{1}{\mathrm{H}_3}\frac{\partial}{\partial q_3} \end{bmatrix} \tag{14-36}$$

完全一样，**在算子∇中变换矩阵仍有不变性。**

## 4　纵向场向横向场的矩阵变换

截面不变的电磁波导是 Maxwell 方程组在柱坐标系中的典型应用。并且，波导中存在的场即为物理上的本征模式。

文献[3]中讨论了典型的矩阵波导和圆柱波导。图 14-7 给出了矩形波导，且导出了采用纵向（$z$）场表示横向场（$x,y$）的变换矩阵。

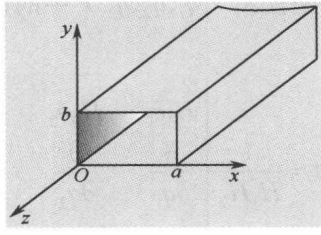



图 14-7　矩形波导

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ H_x \end{bmatrix} = \frac{1}{k_c^2} \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 0 & -j\omega\mu \\ 0 & -\gamma & j\omega\mu & 0 \\ 0 & j\omega\varepsilon & -\gamma & 0 \\ -j\omega\varepsilon & 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial E_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial E_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial H_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial H_z}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{14-37}$$

其中，$k_c = \dfrac{2\pi}{\lambda_c}$ 表示波导的截止波长，且波导中电磁场的 $z$ 方向变化均为 $e^{-\gamma z}$。

圆柱波导如图 14-8 所示，同样文献[3]也导出了纵向场($z$)表示横向场($\rho,\varphi$)的变换矩阵为

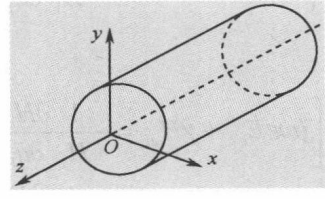



图 14-8　圆柱波导

$$\begin{bmatrix} E_\rho \\ E_\varphi \\ H_\rho \\ H_\varphi \end{bmatrix} = \frac{1}{k_c^2} \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 0 & -j\omega\mu \\ 0 & -\gamma & j\omega\mu & 0 \\ 0 & j\omega\varepsilon & -\gamma & 0 \\ -j\omega\varepsilon & 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial E_z}{\partial \rho} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial E_z}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial H_z}{\partial \rho} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial H_z}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \tag{14-38}$$

本文将推广到最一般正交曲线坐标系（$q_1, q_2, q_3$）中的曲线波导。已知[2]矢量场 $\vec{A}$ 在这种情况下旋度有

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{H_1 H_2} \begin{vmatrix} H_1\hat{e}_1 & H_2\hat{e}_2 & \hat{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & -\gamma \\ H_1 A_{e_1} & H_2 A_{e_2} & H_3 A_{e_3} \end{vmatrix} \tag{14-39}$$

在式（14-39）中，依据柱波导条件

$$H_3 = 1,\ \hat{e}_3 = \hat{e}_z \text{和} \frac{\partial}{\partial q_3} = \frac{\partial}{\partial z} \to -\gamma \tag{14-40}$$

由 Maxwell 方程组

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \end{cases} \tag{14-41}$$

和旋度公式（14-33），很容易得出两组方程

$$\begin{cases} j\omega\varepsilon E_{e1} - \gamma H_{e2} = \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_z}{\partial q_2} \\ -\gamma E_{e1} + j\omega\mu H_{e2} = \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial E_z}{\partial q_1} \end{cases} \tag{14-42}$$

和

$$\begin{cases} j\omega\varepsilon E_{e2} + \gamma H_{e1} = -\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_z}{\partial q_1} \\ \gamma E_{e2} + j\omega\mu H_{e1} = -\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_z}{\partial q_2} \end{cases} \tag{14-43}$$

同样，可给出纵场向横场的矩阵变换

$$\begin{bmatrix} E_{e1} \\ E_{e2} \\ H_{e1} \\ H_{e2} \end{bmatrix} = \frac{1}{k_c^2} \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 0 & -\mathrm{j}\omega\mu \\ 0 & -\gamma & \mathrm{j}\omega\mu & 0 \\ 0 & \mathrm{j}\omega\varepsilon & -\gamma & 0 \\ -\mathrm{j}\omega\varepsilon & 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial E_z}{\partial q_1} \\ \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial E_z}{\partial q_2} \\ \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_z}{\partial q_1} \\ \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_z}{\partial q_2} \end{bmatrix} \tag{14-44}$$

至此，我们清楚看出**对于一切正交曲线柱坐标系，这个变换矩阵始终不变。**

## 5 结　　语

变换和变换中的不变性是科学研究的重要焦点之一。不变性的出现不仅将问题归纳得十分简单，重要的是它反映变化中的特点和本质，值得我们深入探究。

## 答问录

**问**：这一篇札记十四主要讨论矩阵（Matrix）问题。然而，你在引言推荐的是著名的物理学家李政道的著作（不是数学家）。不知在这个方面有何深层次的考虑？

**答**：这个问题问得非常到位，而且也抓住了本篇札记的要害。

粗略地，我们可以把数学分成两大方面：抽象数学和工程（或应用）数学。前一方面是自成体系，自我发展的；而后者则必须依赖工程方面的进展，完全可以说，实践的要求和进展是工程数学的**生命源泉**。当然，说到底抽象数学也需要应用，也需要实践来获得印证。

关于《矩阵论》，我们这里再一次重复李政道先生的原话：“矩阵在物理学的应用，主要是同各种线性算子的研究在一起的。”他的理论联系实际，使我们对于矩阵变换了解更加深刻。

与这一点非常相似的是著名物理学家杨振宁对于《复函数论》的研究。他明确总结出 20 世纪物理发展有三个主旋律：**量子化，对称和相位因子**。而正是第三主旋律，即相位因子完全属于复域，这一思想在哲学上是出奇制胜的，而又是深思熟虑的。

正是杨振宁等物理学家使这方面的研究取得了重大进展，主要是：发现所有的相互

作用都是某种形式的规范场；发现规范场与数学纤维丛概念密切相关，每一根纤维是一个复相位或更广义的相位——最后归纳出当代物理学的一个基本原则：**全部基本力都是相位场**。

前面两个例子突出表明物理学和物理学家对于数学，特别是数学发展的强大反作用。

所以，在札记十四中，我们明确表述了《矩阵论》是鲜活的、发展的，并能获得重要应用。通俗而言，一句话——李政道的《矩阵论》不同于一般数学书。

**问**：这正是我要提出的问题：从哪里看出，李政道的《矩阵论》不同于一般数学描述？

**答**：现在从几个方面做出论述，关于李先生的矩阵思想及其应用。

（1）李政道十分明确地总结出为什么要用矩阵和矩阵理论。

他们关于矢量和矩阵对应物理学研究的情况表述得极为清楚，如图 14-9 所示。

| 矢量 | 有向物理量 |
| --- | --- |
| 矩阵 | 变换 |

图 14-9　矢量和矩阵的物理对立

十分明显，矩阵总是和矢量一起出现的。

- 引入矩阵后可以方便推广到 $n$ 维空间，于是可对应 $n$ 维物理量；
- 引入矩阵后，便于运算。即一整套现代矩阵和计算矩阵理论可全部用到物理领域。

（2）采用**不变性原则定义矢量**，其立点很高。

李政道先生不愧为大手笔，很多问题确实与人不同，一鸣惊人。关于矢量的定义是典型一例，他引入了不变性原则。

- 在坐标系作转动时不变的量，叫做**标量**。
- ［矢量定理］**假定有一法则，使在每一坐标系中都能给出三个数**$(A_1, A_2, A_3)$，**如果此法则对所有矢量** $\vec{B}=(B_1,B_2,B_3)$，都能使 $\sum_{i=1}^{3} A_iB_i$ 为标量（不变性），则量 $\vec{A}=(A_1,A_2,A_3)$ 为矢量。

**【证明】**在坐标系转动下，矢量 $\vec{B}$ **按规则**

$$B_i'=\sum_{j=1}^{3} u_{ij}B_j \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

设在同样转动下，$(A_1, A_2, A_3)$变成 $(A_1', A_2', A_3')$。我们需要证明的是下式须成立

$$A_i'=\sum_{j=1}^{3} u_{ij}A_j \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

已经假设

$$\sum_{i=1}^{3} A_i' B_i' = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i$$

于是可以写出

$$\sum_{i=1}^{3} A_i' B_i' = \sum_{i=1}^{3} A_i' \sum_{j=1}^{3} u_{ij} B_j = \sum_{j=1}^{3} \left( \sum_{i=1}^{3} u_{ij} A_i' \right) B_i$$

基于矢量 $\bar{B}$ 是任意给定的，故

$$A_j = \sum_{k=1}^{3} u_{kj} A_k' \qquad (j=1，2，3)$$

进一步把上式乘以 $u_{ij}$，且对 $j$ 求和，由于

$$A_i' = \sum_{j=1}^{3} u_{ij} A_j$$

得

$$\sum_{j=1}^{3} u_{ij} A_j = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} u_{ij} u_{kj} A_k' = \sum_{k=1}^{3} A_k' \sum_{j=1}^{3} u_{ij} u_{kj} = \sum_{k=1}^{3} \delta_{ik} A_k' = A_i' \qquad (i=1，2，3)$$

这正是我们想要证明的。

由此也可看出，坐标转动（或广义坐标）矩阵的重要性。

（3）李政道深刻讨论了矩阵的本征模理论。

值得一提的是：电磁波导、同轴线和带线等都是本征模分解，如图 14-10 所示。

| | |
|---|---|
| 本征值方程 | $\det \begin{bmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}-\lambda \end{bmatrix} = 0$ |
| 本征值和本征矢 | 本征值系$\{A_i\}$和本征矢（即本征模）$\{\vec{x}_i\}(i=1,2,\cdots,n)$ |
| 完备性 | 任何矢量$\vec{x}$都可采用本征矢$\{\vec{x}_i\}$迭加而成，即$\vec{x}=\sum_{i=1}^{n} k_i \vec{x}_i$ |
| 正交归一性 | $\vec{x}_i \cdot \vec{x}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ |

图 14-10　矩阵的本征模理论

（4）李政道把矩阵[$A$]看做有限（$n$）维的线性算子。这在理论上极为重要，具体如图 14-11 所示。

以上，即李政道先生关于矩阵及物理应用的主要思想。

问：我很想问一下，你对矢量理论还有何想法？

| 线性算子$\mathcal{L}$ | 矩阵$[A]$ |
| --- | --- |
| $\mathcal{L}x=y$<br>$\begin{cases}\mathcal{L}(x_1+x_2)\mathcal{L}x_1+\mathcal{L}x_2\\ \mathcal{L}(\lambda x)=\mathcal{L}(x)\end{cases}$ | $[A][x]=[y]$<br>$\begin{cases}[A]([x_1]+[x_2])=[A][x_1]+[A][x_2]\\ [A]([\lambda x]=\lambda[A][x]\end{cases}$ |
| 恒等算子$Ix=x$ | 恒等（单位）矩阵$[I][x]=[x]$ |
| 当基给定时，每一个线性算子$\mathcal{L}$都与一个矩阵$[A]$对应 | 在固定基下，每个矩阵$[A]$都对应某个线性算子 |
| 逆算子$\mathcal{L}^{-1}y=x$ | 逆矩阵$[x]=[A]^{-1}[y]$ |
| 算子任何定理 | 均对应矩阵相应定理 |

图 14-11　线性算子 $\mathcal{L}$ 和矩阵$[A]$

**答**：矢量理论很成熟，而且在物理和工程方面获得了广泛的应用。但是，仔细考虑它在体系上尚有问题可寻。我们先从比较作为出发点。图 14-12 给出矢量，$n$（$n$>3）维矢量和矩阵的点积比较。

| 矢量 | $\vec{x}\cdot\vec{y}=\lvert\vec{x}\rvert\lvert\vec{y}\rvert\cos\theta$ 是一数量 |
| --- | --- |
| $n$ 维矢量（$n$>3） | 已扩展有点积定义 |
| 矩阵（方阵） | 尚未有点积定义 |

图 14-12　点积与广义点积的情况调查

其中，$n$ 维矢量

$$\vec{a}=a_1\hat{i}_1+a_2\hat{i}_2+\cdots+a_n\hat{i}_n$$

$$\vec{b}=b_1\hat{i}_1+b_2\hat{i}_2+\cdots+b_n\hat{i}_n$$

其广义点积是

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

我们进一步考察叉积，如图 14-13 所示。

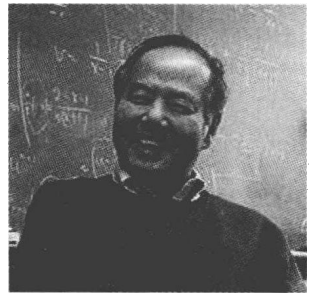
| 矢量 | $\vec{x}\times\vec{y}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ x_1&x_2&x_3\\ y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}$ 是一个矢量 |
| --- | --- |
| $n$ 维矢量（$n$>3） | 没有叉积定义 |
| 矩阵（方阵） | 没有叉积定义 |

图 14-13　叉积与广义叉积的情况调查

上述调查的情况显然不能令人满意，需要继续研究探索。

## 推荐人物

这篇札记介绍诺贝尔奖获得者李政道先生。他被周恩来总理称之为“李精于学”。关于其学问我们不必过多介绍，而重点放在李政道的教学思想。


诺贝尔奖获得者李政道先生

常言道，“当局者迷，旁观者清。”李政道先生长期旅居国外，对于国内的教育问题往往看得更深，更清，简要总结为：

（1）要学，更要悟。

李政道先生认为，中国的基础教育重点是打基础，“学多悟少”；而美国的教育重点是培养创造力，“学少悟多”。对中国“零诺贝尔奖”现象，最重要是要从人才培养的方式上去认真反思。中国乃至整个亚洲，在教育问题上都存在许多共同的不足之处。其中，缺乏创造性教育是最主要的不足。

（2）要“活学”，不要为考试而学习。

国内非常强调分数，把高分作为优秀学生的标志，放松了对学生创造力的培养。现在，中国的教育手段就是考试，题海战术使学生失去了求知的主动性，最危险的是失去了对探索科学的兴趣。

Einstein 说，即使是一头健康的野兽，在不饥饿的情况下，还用鞭子强迫它不断吞食，也一定会丧失它贪吃的天性。知识的强制式教育，只会窒息探索和创造的动能。

（3）教师和家长关键是启发，决不能包办代替。

教师的主要责任是通过自己的授课及和学生的亲密接触，激发学生探索的好奇心。

教师的责任在于通过自己的人格，帮助学生树立正确的人生观。

（4）李政道明确提出了“人才三条件”：

- 人格。他应该有坚定的人生观、价值观，自尊、自立、自强不息，对祖国有深厚的感情，占领人格的制高点。
- 奋斗。不论在何种场所，何种时间都能吃苦耐劳，不管物质文明发展到何种程度。
- 适应。要能够适应千变万化的世界，要经得起各种失败和挫折。

以上就是李政道先生的简要思想和人才观。

## 参考文献

[1] (美)杨振宁. 物理学中的数学方法. 李唐顺译. 南京：江苏科学技术出版社，1998.

[2] 梁昌洪，著. 矢算场论札记. 北京：科学出版社，2007.

[3] 梁昌洪，等. 简明微波. 北京：高等教育出版社，2006.

札记十五

# 电磁辐射的最小方向性挑战

本文标题是——电磁场辐射的最小方向性挑战。为什么以此为题？原因是由于Maxwell体系不存在各向同性解，因此电磁辐射不可能做到无方向性。然而，大量的通信，应用实践又给我们提出希望逼近这样的目标。于是，自然成了必须接受并研究的一个矛盾课题。这就构成了本文的核心内容。

## 0 引 言

本文是电磁理论教学札记之十五。

在新的世纪里，电磁波作为最重要的信息传播媒介之一，已经没有任何疑问了。它无时无刻不与广大人民的生活紧紧地联系在一起：从互联网、手机、电视到汽车定位装置；从各国的国家信息系统到家庭的蓝牙技术都涉及电磁波的传播和信息承载，为了构成各种信息系统，实践中很希望设计出无方向性天线，使电磁波在空间能够平等地对待每一个用户，而不致出现信号死区。但是，另一方面，方向性是天线辐射的最重要特性之一。很多著作和文献均指出这一点，即任何天线都**必须具有方向性，向空间各个方向上均匀辐射能量的无方向性天线实际上是不存在的**[1]。

正是这一矛盾，构成了本篇札记的研究目标：一方面，要探索为什么无方向性不可能存在；另一方面要挑战——研究出最小方向性的思路。

## 1 Maxwell体系不存在各向同性解

首先，本文明确指出：Maxwell所构成的宏观电磁理论体系不存在各向同性解。在

空间任一点电场采用球坐标表示为

$$\vec{E}=E_r\hat{e}_r+E_\theta\hat{e}_\theta+E_\varphi\hat{e}_\varphi \tag{15-1}$$

且有各向同性解，即采用反证法，为

$$\left.\begin{aligned}E_r&=f_1(r)\\E_\theta&=f_2(r)\\E_\varphi&=f_3(r)\end{aligned}\right\} \tag{15-2}$$

在频域中，满足 Helmholtz 波动方程是

$$\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0 \tag{15-3}$$

其中，$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 为波数。

注意到球坐标系统中的 Laplace 算子为

$$\begin{aligned}\nabla^2\vec{E}=&\left(\nabla^2E_r-\frac{2E_r}{r^2}-\frac{2\cot\theta}{r^2}E_\theta-\frac{2}{r^2}\frac{\partial E_\theta}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}\right)\hat{e}_r\\&+\left(\nabla^2E_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial E_r}{\partial\theta}-\frac{E_\theta}{r^2\sin^2\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}\right)\hat{e}_\theta\\&+\left(\nabla^2E_\varphi+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}E_\varphi+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial E_\theta}{\partial\varphi}\right)\hat{e}_\varphi\end{aligned} \tag{15-4}$$

计及各向同性特性有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial E_r}{\partial\theta}=0,\ \frac{\partial E_r}{\partial\varphi}=0\\\frac{\partial E_\theta}{\partial\theta}=0,\ \frac{\partial E_\theta}{\partial\varphi}=0\\\frac{\partial E_\varphi}{\partial\theta}=0,\ \frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}=0\end{aligned}\right\} \tag{15-5}$$

式（15-4）进一步简化为

$$\nabla^2\vec{E}=\left(\nabla^2E_r-\frac{2E_r}{r^2}-\frac{2\cot\theta}{r^2}E_\theta\right)\hat{e}_r+\left(\nabla^2E_\theta-\frac{E_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right)\hat{e}_\theta+\left(\nabla^2E_\varphi-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}E_\varphi\right)\hat{e}_\varphi \tag{15-6}$$

我们仅以 $\hat{e}_\theta$ 分量为例

$$\nabla^2E_\theta+k^2E_\theta=g(r) \tag{15-7}$$

而另一项

$$-\frac{E_\theta}{r^2\sin^2\theta} \tag{15-8}$$

则包含对于$\theta$的变化函数，显然矛盾，从而反证了 Maxwell 体系不存在各向同性解。

进一步，从物理上理解，电磁辐射与两个旋度$\nabla\times$方程密切有关。旋度概念表明，即使再为巨大的龙卷风都不是各向同性，而存在着**台风眼**，如图 15-1 所示。

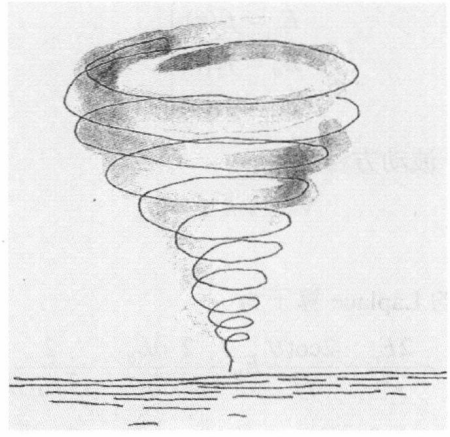


图 15-1　龙卷风中的台风眼

从数学上理解，苏步青的《微分几何》明确指出[2]**球面上任何连续可导的切向矢量场必存在零矢量点**。通俗地说：人的头发或牛毛分布一定会存在“**旋**”，如图 15-2 所示。

事实上，文献[3]早在 1984 年已经对电磁辐射场的各向异性进行了深入的研究。其结论是——假定在矢量各分量大小与球坐标变量$\theta$和$\varphi$无关的条件下，获得满足 Maxwell 方程解是不可能的。电磁场辐射的各向异性不仅可以由场结构所确定，而且也可由球面上切向矢量场的拓扑性质加以确定。



图 15-2　人的发际必存在“旋”

## 2　最小方向性天线

这里，我们从两方面着手研究，即最小方向性天线和最小方向性阵列。

什么是最小方向性天线？这个问题目前尚没有明确的结论。比较务实的做法是先考察大家最为熟识的天线——电偶极子 $\vec{Il}$，如图 15-3 所示。

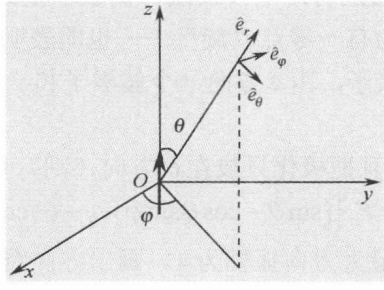



图 15-3　电偶极子 $\vec{Il}$ 的辐射

电偶极子的远区辐射场为

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= \mathrm{j}\frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}Il\sin\theta}{2\lambda r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} \\ H_\varphi &= \mathrm{j}\frac{Il\sin\theta}{2\lambda r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} \end{aligned}\right\} \tag{15-9}$$

其对应方向如图 15-4 所示。

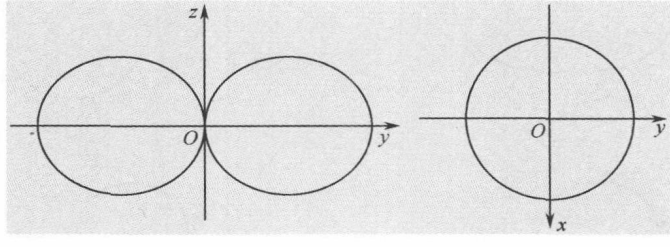



图 15-4　电偶极子 $\vec{Il}$ 方向图

确定空间方向性的一般公式是

$$D = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}F^2(\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta} \tag{15-10}$$

其中，$F(\theta,\varphi)$取自天线辐射场振幅

$$|E|=|E|_{\mathrm{m}}F(\theta,\varphi) \tag{15-11}$$

且$|E|_{\mathrm{m}}$——为最强辐射方向的场强振幅，具体对于电偶极子，$F(\theta,\varphi)=\sin\theta$，于是有

$$D_0=\frac{4\pi}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta}=1.5 \tag{15-12}$$

作为对偶原理，磁偶极子（即圆环天线）完全类似，不再赘述。

如前所述，我们没有办法证明：电（或磁）偶极子是最小方向性天线。由图 15-4 明显看出 $yOz$ 面的方向图恰为有一零点“旋”——也即表明方向图的各向异性。

本文作一个猜测十字偶极子，由 $z$ 方向一个偶极子和 $y$ 方向另一个偶极子组成，是否可以减小方向性。

考虑本篇附录（A-14），且把极化只放在 $\theta$ 方向，则

$$F(\theta,\varphi)=F_0\left\{(\sin\theta-\cos\theta\sin\varphi)\hat{e}_\theta+(-\cos\varphi)\hat{e}_\varphi\right\} \tag{15-13}$$

其中，$F_0$ 为归一化系数，即最大方向振幅为 1，画出方向图如图 15-5 所示。

并算出方向性

$$D_0=\frac{4\pi|F(\theta,\varphi)|^2_{\max}}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}(\sin\theta-\cos\theta\sin\varphi)^2\sin\theta\mathrm{d}\theta+\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta}=1.5 \tag{15-14}$$

上述分析中未考虑天线间互耦的影响。

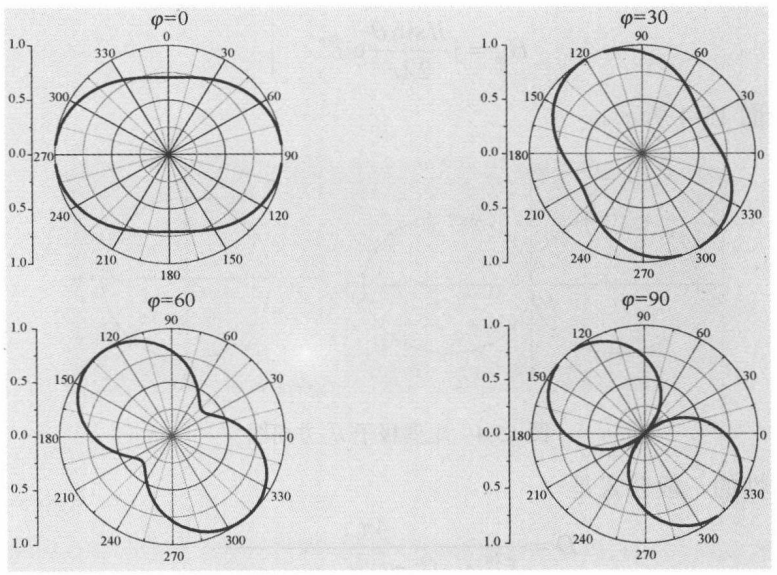



图 15-5　十字交叉偶极子方向图

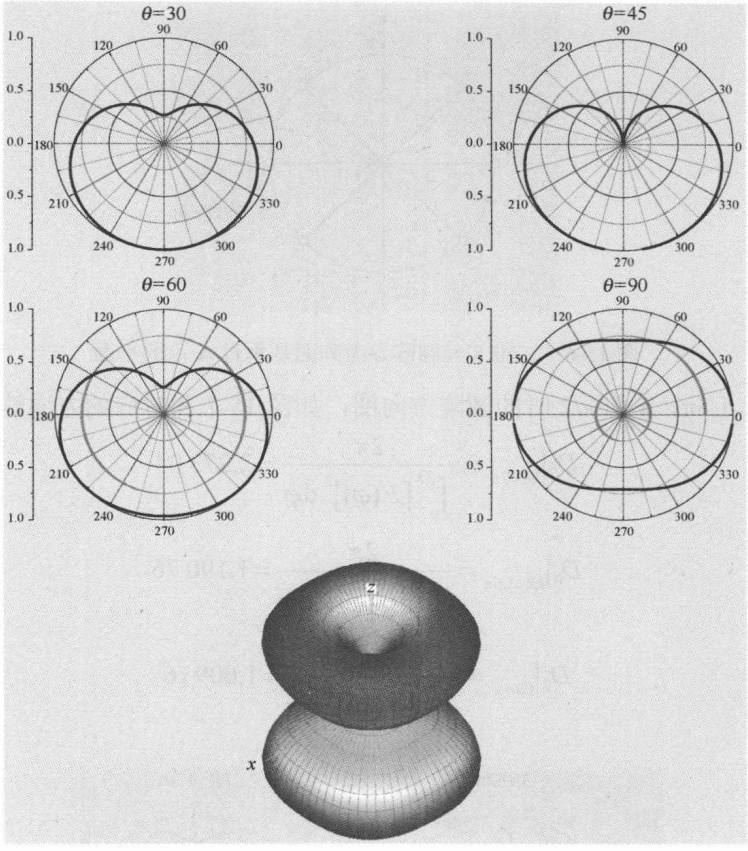



图 15-5　十字交叉偶极子方向图（续）

## 3　最小方向性阵列

最小方向性阵列又是一个需要深入研究的问题。根据

$$F(\theta,\varphi)=F_{\mathrm{A}}(\theta,\varphi)F_{\mathrm{D}}(\theta,\varphi) \tag{15-15}$$

其中，$F_{\mathrm{A}}(\theta,\varphi)$表示阵列方向图，而$F_{\mathrm{D}}(\theta,\varphi)$表示单天线方向图。当然，要满足一定条件才能写出式（15-15）。在研究阵列时我们暂不考虑单天线方向图。这又是一个尚未有明确结论的课题。为了得到简单明了的直观认识，我们考虑如图 15-6 所示的平面二维 8 元圆阵，此时不考虑单个天线的方向性函数，给出讨论，由本篇附录 B 已导出圆阵的方向性函数

$$F(\varphi)=F_0\left\{\cos\left[kR\cos\varphi\right]+\cos\left[kR\sin\varphi\right]+2\cos\left[\frac{\sqrt{2}}{2}kR\cos\varphi\right]\cos\left[\frac{\sqrt{2}}{2}kR\sin\varphi\right]\right\} \tag{15-16}$$

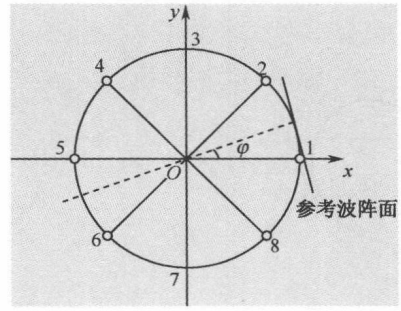



图 15-6　二维 8 元圆阵参考阵面是垂直 A 点的平面

画出 $kR=2\pi$，$1.5\pi$，$\pi$ 和 $\pi/2$ 时的圆阵方向图，如图 15-7 和对应的方向性系数为

$$D_0\big|_{kR=2\pi}=\frac{2\pi}{\int_0^{2\pi}[F(\varphi)]^2\,\mathrm{d}\varphi}=2.273\,04 \tag{15-17}$$

$$D_0\big|_{kR=1.5\pi}=\frac{2\pi}{\int_0^{2\pi}[F(\varphi)]^2\,\mathrm{d}\varphi}=1.190\,76 \tag{15-18}$$

$$D_0\big|_{kR=\pi}=\frac{2\pi}{\int_0^{2\pi}[F(\varphi)]^2\,\mathrm{d}\varphi}=1.009\,16 \tag{15-19}$$

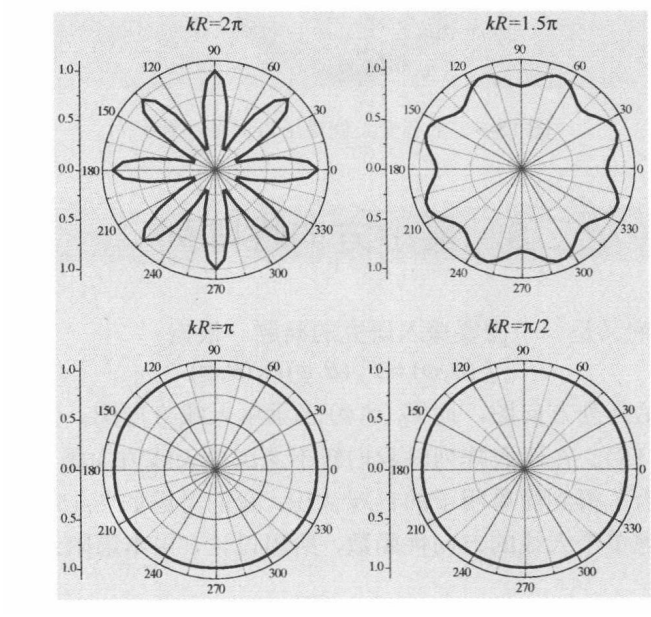



图 15-7　圆阵天线的平面方向图

$$D_0\big|_{kR=\pi/2}=\frac{2\pi}{\int_0^{2\pi}[F(\varphi)]^2\,\mathrm{d}\varphi}=1.000\,06 \tag{15-20}$$

如果我们再考虑单个偶极子天线的方向性函数，则平面二维 8 元偶极子圆阵的方向性函数为

$$F(\theta,\varphi)=F_0\sin\theta\left\{\cos[kR\cos\varphi]+\cos[kR\sin\varphi]+2\cos\left[\frac{\sqrt{2}}{2}kR\cos\varphi\right]\cos\left[\frac{\sqrt{2}}{2}kR\sin\varphi\right]\right\} \tag{15-21}$$

$$D=\frac{4\pi}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}F^2(\theta,\varphi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi}=\frac{4\pi}{\int_0^{2\pi}F^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta}=\frac{3\pi}{\int_0^{2\pi}F^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi} \tag{15-22}$$

对应曲线如图 15-8 所示。

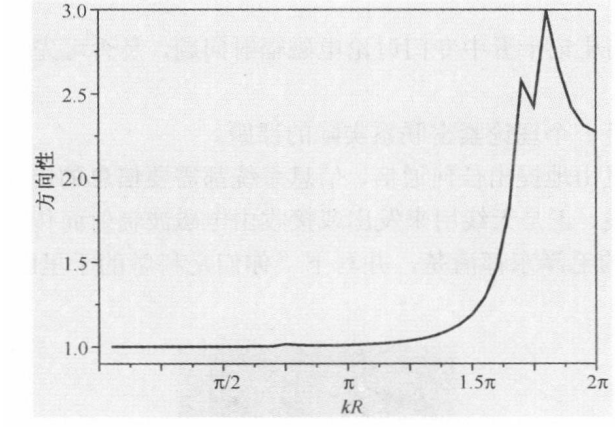



图 15-8　方向性与 $kR$ 的函数关系

对应 $kR=2\pi$，$1.5\pi$，$\pi$ 和 $\pi/2$ 时的 8 元圆形天线阵的方向性系数分别为

$$D_0\big|_{kR=2\pi}=\frac{3\pi}{\int_0^{2\pi}[F(\varphi)]^2\,\mathrm{d}\varphi}=3.409\,56 \tag{15-23}$$

$$D_0\big|_{kR=1.5\pi}=\frac{2\pi}{\int_0^{2\pi}[F(\varphi)]^2\,\mathrm{d}\varphi}=1.786\,14 \tag{15-24}$$

$$D_0\big|_{kR=\pi}=\frac{2\pi}{\int_0^{2\pi}[F(\varphi)]^2\,\mathrm{d}\varphi}=1.513\,74 \tag{15-25}$$

$$D_0\big|_{kR=\frac{\pi}{2}}=\frac{2\pi}{\int_0^{2\pi}[F(\varphi)]^2\,\mathrm{d}\varphi}=1.500\,09 \tag{15-26}$$

至此，我们已算出十字交叉阵列的最小方向性为 1.5。因而，是否可大胆猜测天线的最小方向性即为 1.5。严格证明尚需要进一步思考。天线阵列的方向性与电尺寸相关，电尺寸越小，阵列的方向性越趋近于 1.0，这倒是比较合理的一个结论。

## 4 结　语

电磁波辐射的最小方向性是一个理论紧密联系实际的研究课题，很多方面向我们提出了严峻的挑战，进一步工作正在研究过程中。

## 答问录

**问**：你在这一篇札记十五中专门讨论电磁辐射问题，是否可先介绍一下这一课题的意义？

**答**：电磁辐射是一个理论紧密联系实际的课题。

正如篇首开门见山地提出任何通信、信息系统都需要**信息的传递**，完成这一任务的最重要角色就是天线，正是天线用来发出或接收由电磁波辐射而传递的各种信息。当时在山沟沟里闹革命的毛泽东都清楚，并写下“你们是科学的千里眼，顺风耳”的题词（见图 15-9）。



图 15-9　1941 年 10 月毛主席为《通信战士》杂志题词

辐射是电磁波的一种**运动形式**，它须有两个必要条件：一是接收者必须处于“远区”（请注意这里的“远区”是电磁理论的专用术语——距离 $\ell$ 与波长 $\lambda$ 之比（$\ell/\lambda$），比较大、比较远），对于长波可能要几千米才比较远，而对于毫米波则几米即完全处于“远区”；

二是必定要有功率（能量）的顺利传递，根据电磁研究，这时$\frac{E_\theta}{H_\varphi}=\eta$是实数，也称为实波阻抗。

在很多科普场合，都把电磁波想象成广义的三维水波向外传播，如图 15-10 所示。

**问：**电磁波辐射有什么独特的特性？

**答：**既然已经说：辐射是电磁波的一种运动形式，那么它必须要遵循电磁运动规律即 Maxwell 方程组。

在札记中明确提出：任何天线都必须具有方向性，而向空间各个方向均匀辐射能量的无方向性天线实际上是不可能存在的。

另一方面，任何天线的方向性也存在着“**上限**”——最大方向性。事实上，这一点也是很值得研究的。

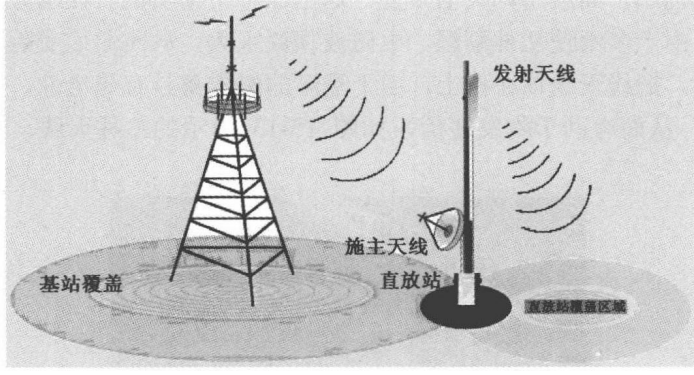



图 15-10　天线和发射的电磁波

**问：**你能不能先给我们介绍一下线天线的最大方向性？

**答：**线天线是最简单的，而实际上也是最重要的天线之一。电影《英雄儿女》中，在王成所背的电台上，如图 15-11 所示，就有一根鞭状天线，粗浅说来，线天线$\varphi$方向是（东、南、西、北）无方向性的，而$\theta$方向则是有方向性的。



图 15-11　在上甘岭王成所背电台和天线

线天线的最大问题是电流呈三角形分布，这样它的增益 $G$ 就很小，而一般我们在线天线顶端都“加载”翼片，使电流接近均匀分布，从而使效率提高，如图 15-12 所示。

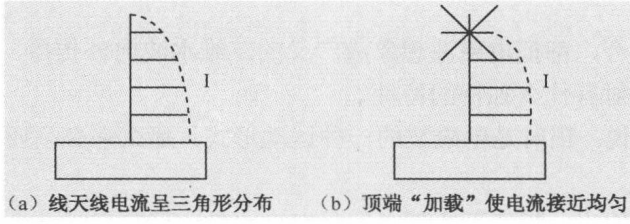



图 15-12 线天线和“加载”

线天线“加载”可以有多种多样的方案。但是道理只有一个——取得较均匀的电流分布。

线天线虽然简单，而应用则灵活多变。这里试举一个实例。在南方丛林地带，不仅树林茂密，而且由于多雨使丛林潮湿，电磁波损耗很大，从而通信受阻，但是如果我们挑一颗较高的树，把线天线顶在树上，由于潮湿的树本身具有导电性，它倒成为一根较高的“线天线”，从而有助于收发通信，如图 15-13 所示的丛林天线。它确实可以获得实际应用。



图 15-13 丛林天线（把潮湿的树当做天线的“延伸”）

**问**：请讨论一下面天线的辐射状况。

**答**：面天线是二次辐射的一种应用，它首先有一个辐射源——例如喇叭，把它放在抛物面的焦点上，通过喇叭初级辐射到抛物面，再由抛物面的二次辐射，投向目标，如图 15-14 所示。

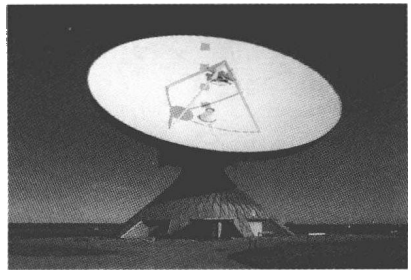


图 15-14 抛物面天线

为了获得最有效的辐射，必须使用喇叭天线的初级方向图和抛物面的大小匹配，从而使漏掉的功率少而抛物面又不大，且抛物面上的振幅分布均匀。

**问**：现在，是否可以谈一下天线阵列的辐射情况？

**答**：对于阵列，这里讨论的重点还是最大方向性。

为了简单方便，我们只局限于线阵。它的关键点只有两个——振幅和相位。结论也比较好记：为了获得线阵的最大方向性，相位必须**同相**，而振幅要**均匀**，这种情况下 3 dB 的波束宽度有

$$2\theta_{3\text{dB}} = 51^\circ\left(\frac{\lambda}{\ell}\right)$$

十分清楚：阵长 $\ell$ 越大则 $\theta_{3\text{dB}}$ 越小，方向性超大，如图 15-15 所示。

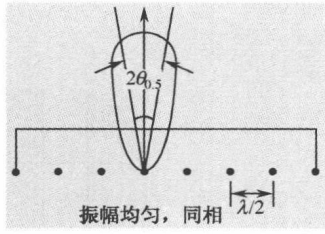



图 15-15　振幅均匀，同相线阵获取最大方向性

而若相位**同相**，振幅按**余弦分布**，则有

$$2\theta_{3\text{dB}} = 68^\circ\left(\frac{\lambda}{\ell}\right)$$

这种阵列称为**边射阵**。

典型的二元等幅同相边射阵如图 15-16 所示。

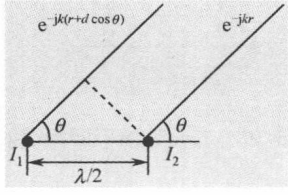



图 15-16　二元等幅同相边射阵

阵列场强为

$$E = e^{-jkr}(e^{-jkd\cos\theta}+1) = e^{-jk\left(r+\frac{\theta}{2}\cos\theta\right)}\left(e^{-j\frac{1}{2}kd\cos\theta}+e^{j\frac{1}{2}kd\cos\theta}\right) = 2e^{-jk\left(r+\frac{d}{2}\cos\theta\right)}\cos\left(\frac{1}{2}kd\cos\theta\right)$$

计及 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$，取 $d=\dfrac{\lambda}{2}$，有

$$E=2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\left(r+\frac{1}{2}d\cos\theta\right)}\cos\left(\frac{\pi}{2}d\cos\theta\right)$$

图 15-17 画出了二元等幅边射阵 $\theta$ 方向图。

另一种著名的就是八木天线——也称为端射阵。如果说上一种阵列是等幅同相，则这一种阵列的最大特点是**不同相**：是行波天线，如图 15-18 所示。

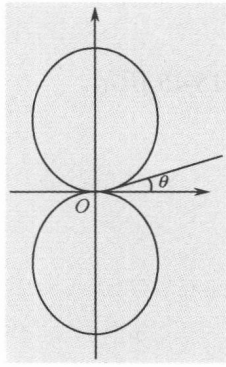



图 15-17　二元等幅边射阵 $\theta$ 方向图

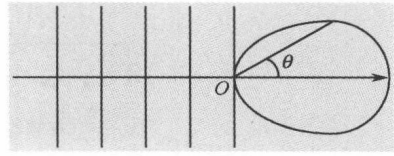



图 15-18　八木行波天线

这里，还是以二元等幅不同相端射阵为例作出分析，电流分布有 $I_2=I_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}$ 即 $I_2$ 相位超前于 $I_1$（两者间距取 $d=\dfrac{\lambda}{4}$），如图 15-19 所示。

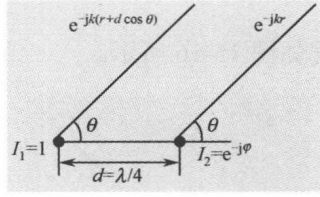



图 15-19　二元等幅不同相端射阵

这时场强 $E$ 可表示为

$$E=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kd\cos\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi}\right)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kr+\psi)}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kd\cos\theta-\psi)}+1\right)=2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(kr-\frac{1}{2}kd\cos\theta+\frac{\psi}{2}\right)}\cos\left(\frac{1}{2}kd\cos\theta-\frac{\psi}{2}\right)$$

计及 $d=\dfrac{\lambda}{4}$，取 $\psi=\dfrac{\pi}{2}$ 则写出

$$E=2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(kr-\frac{1}{2}kd\cos\theta+\frac{\psi}{2}\right)}\cos\left[\frac{\pi}{4}(1-\cos\theta)\right]$$

图 15-20 画出了二元端射阵的$\theta$方向图。

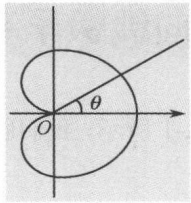



图 15-20　二元端射阵$\theta$方向图

## 推荐人物

本篇将介绍西安交通大学的资深教授黄席椿先生。



黄席椿先生

首先，在这里对于西安交通大学理应大书而特书一笔。20 世纪 50 年代的中国，东西部的差距极大，东部人提起西安都会将其想象成一片荒芜之地。而一批开拓者放弃优厚的条件在西安扎根开花，可敬可佩。

黄席椿先生代表深奥严谨的留德学派，他留下的著作并不多，但字字珠玑，掷地有声。不夸张地说他所留下的《论波速》，我们没有几位可以真正看懂!

1986 年元旦，我因评教授和博士生导师找到黄先生推荐（当时黄老先生是西北地区在此领域唯一的二级教授）。有人陪我到他家，毫不知情的是，他因胃大出血而重病在家。因为已经进门，我们欲进为难，欲退不能。想不到他硬撑着病痛与我这个无名小卒谈了 20 多分钟，丝毫没有大教授的“架子”。更令人痛惜的是在当年 1 月 8 日，他便长逝人间！直至今日，他的人格，他的作品依然清晰地印在我的脑海里。




黄席椿先生代表作《论波速》

# 附录 A　y 方向偶极子参量和电场 $\bar{E}_{\theta'}$

y 方向同样有一个偶极子如图 A-1 所示，我们研究 $\hat{e}_{\theta'}$ 方向采用 $\hat{e}_\theta$，$\hat{e}_\varphi$ 表示和电场 $\bar{E}$ 用 $\theta$，$\varphi$ 参数表示。

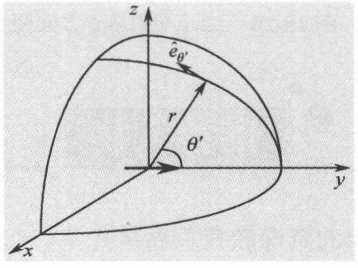



图 A-1　y 方向偶极子用 $\theta'$，$\varphi'$ 参数表示；$r$ 是相同参数

**1．$\hat{e}_{\theta'}$ 的 $\hat{e}_\theta$，$\hat{e}_\varphi$ 表示式**

设 z 方向偶极子坐标 $\hat{e}_r$，$\hat{e}_\theta$，$\hat{e}_\varphi$——$\hat{x}$，$\hat{y}$，$\hat{z}$ 而 y 方向偶极子坐标为 $\hat{e}_{r'}$，$\hat{e}_{\theta'}$，$\hat{e}_{\varphi'}$——$\hat{x}'$，$\hat{y}'$，$\hat{z}'$，上述坐标体系的公共点是

$$\hat{e}_r = \hat{e}_{r'} \tag{A-1}$$

这里首先研究 $\hat{e}_{\theta'}$ 即 y 方向偶极子的远区辐射电场方向，采用 $\hat{e}_\theta$ 和 $\hat{e}_\varphi$ 表示，很易写出

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_{r'} \\ \hat{e}_{\theta'} \\ \hat{e}_{\varphi'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta'\cos\varphi' & \sin\theta'\sin\varphi' & \cos\theta' \\ \cos\theta'\cos\varphi' & \cos\theta'\sin\varphi' & -\sin\theta' \\ -\sin\varphi' & \cos\varphi' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \\ \hat{z}' \end{bmatrix} \tag{A-2}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \\ \hat{z}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} \tag{A-3}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\varphi \end{bmatrix} \tag{A-4}$$

于是得到

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_{r'} \\ \hat{e}_{\theta'} \\ \hat{e}_{\varphi'} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\varphi \end{bmatrix} \tag{A-5}$$

且有

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\sin\theta'\cos\varphi' & \sin\theta'\sin\varphi' & \cos\theta'\\ \cos\theta'\cos\varphi' & \cos\theta'\sin\varphi' & -\sin\theta'\\ -\sin\varphi' & \cos\varphi' & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sin\theta'\sin\varphi'\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta'\sin\theta\sin\varphi+\sin\theta'\cos\varphi'\cos\theta & \sin\theta'\sin\varphi'\cos\theta\cos\varphi+\cos\theta'\cos\theta\sin\varphi-\sin\theta'\cos\varphi'\sin\theta & -\sin\theta'\sin\varphi'\sin\varphi+\cos\theta'\cos\varphi\\ \cos\theta'\sin\varphi'\sin\theta\cos\varphi-\sin\theta'\sin\theta\sin\varphi+\cos\theta'\cos\varphi'\cos\theta & \cos\theta'\sin\varphi'\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta'\cos\theta\sin\varphi-\cos\theta'\cos\varphi'\sin\theta & -\cos\theta'\sin\varphi'\sin\varphi-\sin\theta'\cos\varphi\\ \cos\varphi'\sin\theta\cos\varphi-\sin\varphi'\cos\theta & \cos\varphi'\cos\theta\cos\varphi+\sin\varphi'\sin\theta & -\cos\varphi'\sin\varphi\end{bmatrix} \tag{A-6}$$

根据变换矩阵 $\boldsymbol{T}$，写出 $\hat{e}_{\theta'}$ 单位矢

$$\hat{e}_{\theta'}=(\cos\theta'\sin\varphi'\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta'\cos\theta\sin\varphi-\cos\theta'\cos\varphi'\sin\theta)\hat{e}_{\theta}-(\cos\theta'\sin\varphi'\sin\varphi+\sin\theta'\cos\varphi)\hat{e}_{\varphi} \tag{A-7}$$

**2．$\sin\theta'$，$\cos\theta'$，$\sin\varphi'$ 和 $\cos\varphi'$ 表示式**

已经讲过打撇和不打撇的公共量是 $\hat{e}_r$，即

$$\left.\begin{aligned}\hat{e}_r&=\hat{x}\sin\theta\cos\varphi+\hat{y}\sin\theta\sin\varphi+\hat{z}\cos\theta\\ \hat{e}_r&=\hat{x}'\sin\theta'\cos\varphi'+\hat{y}'\sin\theta'\sin\varphi'+\hat{z}'\cos\theta'\end{aligned}\right\} \tag{A-8}$$

由 z 方向偶极子和 y 方向偶极子的比较可知

$$\hat{x}'=\hat{z}\,,\quad \hat{y}'=\hat{x}\,,\quad \hat{z}'=\hat{y} \tag{A-9}$$

可以写出

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta'\cos\varphi'&=\cos\theta\\ \sin\theta'\sin\varphi'&=\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta'&=\sin\theta\sin\varphi\end{aligned}\right\} \tag{A-10}$$

解出（此处只考虑第一象限）

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta'&=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta\cos^2\varphi}\\ \cos\theta'&=\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\varphi'&=\frac{\sin\theta\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta\cos^2\varphi}}\\ \cos\varphi'&=\frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos\theta+\sin^2\theta\cos^2\varphi}}\end{aligned}\right\} \tag{A-11}$$

**3．y 方向偶极子的电场 $\bar{E}_{\theta'}$**

电场 $\bar{E}_{\theta'}$ 完全与子方向偶极子对称。如果把 y 方向偶极子采用打撇坐标表示，见式（15-9）容易写出

$$\bar{E}_{\theta'}=\hat{e}_{\theta'}\mathrm{j}\frac{\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}Il\sin\theta'}{2\lambda r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} \tag{A-12}$$

根据式（A-7）和式（A-11）给出

$$\bar{E}_{\theta'}=\bar{E}_{\theta}+\bar{E}_{\varphi} \tag{A-13}$$

其中

$$\dot{E}_\theta = \hat{e}_\theta \mathrm{j}\frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}Il}{2\lambda r}[-\cos\theta\sin\varphi] \tag{A-14}$$

$$\dot{E}_\varphi = \hat{e}_\varphi \mathrm{j}\frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}Il}{2\lambda r}(-\cos\varphi) \tag{A-15}$$

## 附录 B　二维 8 元图的相位

8 元图分布，采用 A 作参考平面。

第 1 点相位

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR(1-\cos\varphi)} \tag{B-1}$$

第 2 点相位

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR[1-\cos(45°-\varphi)]} \tag{B-2}$$

第 3 点相位

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR[1-\cos(90°-\varphi)]} \tag{B-3}$$

第 4 点相位

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR[1+\cos(45°+\varphi)]} \tag{B-4}$$

第 5 点相位

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR[1+\cos\varphi]} \tag{B-5}$$

第 6 点相位

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR[1+\cos(45°-\varphi)]} \tag{B-6}$$

第 7 点相位

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR[1+\cos(90°-\varphi)]} \tag{B-7}$$

第 8 点相位

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR[1-\cos(45°+\varphi)]} \tag{B-8}$$

抽出共同因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}$，对于 8 点均为 $I$ 振幅，有

$$\begin{aligned}&2I\{\cos[kR\cos\varphi]+\cos[kR\cos(45°-\varphi)]+\cos[kR\cos(45°+\varphi)]+\cos[kR\cos(90°-\varphi)]\}\\&=2I\left\{\cos(kR\cos\varphi)+\cos(kR\sin\varphi)+2\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}kR\cos\varphi\right)\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}kR\sin\varphi\right)\right\}\end{aligned} \tag{B-9}$$

最后给出圆阵天线的方向性函数

$$F(\varphi)=F_0\left\{\cos\left[kR\cos\varphi\right]+\cos\left[kR\sin\varphi\right]+2\cos\left[\frac{\sqrt{2}}{2}kR\cos\varphi\right]\cos\left[\frac{\sqrt{2}}{2}kR\sin\varphi\right]\right\} \quad \text{(B-10)}$$

同样，$F_0$ 是归一化系数。

## 参考文献

[1] 杨儒贵．电磁场与电磁波．北京：高等教育出版社，2007.

[2] 苏步青，等．微分几何．北京：高等教育出版社，1979.

[3] 王尔杰，黄际英．电磁辐射场各向异性的判定．西北电讯工程学院学报，1984(2).

札记十六

# Fermat 原理之谜

1662 年天才科学家 Fermat 提出了光学上著名的极值原理——Fermat 原理。它给科学界带来了一阵新风，产生了极大的反响。但由此也引发一系列的问题和疑难：如原理的表述是代数的，但结果却是几何的；极值原则中并未提出极小值或极大值出现的准则；相位条件等价于运动方程，而振幅条件却无法还原运动方程等。本文深入揭示种种 Fermat 原理之谜，以期引起各方的进一步关注。

## 0 引　言

本文是电磁场理论教学系列札记之十六。

Maxwell 的伟大功勋之一是建立了光和电磁的统一学说。但是，人们对于这两个领域的认识先后则大相径庭：早在古人类由打火取暖而认识了光，更不用说太阳一直是我们祖先生活的密切伴侣。可以说，光是人类对于自然物理认识的最早现象之一。另一方面，电磁场和电磁波则完全不同，由于看不到、听不见、摸不着，所以对它的认识姗姗来迟，而通信（带信号）的电磁波更完全是“人造”的。

本文讨论的主人公皮埃尔·德·费马（Pierre de Fermat，1601—1665 年）正是在光学方面作出了杰出的贡献。他 1601 年生于法国，公开职务最初是图卢兹议院顾问，伺后又升迁为图卢兹议院最高法庭的大法官。然而令人惊讶的是，在如此繁忙的政务之“余”，他竟频频在数学和物理领域贡献出一流乃至超一流的成果。

不用作过多的介绍。大家都知道的 Fermat 最后定理

$$x^n + y^n = z^n \ (n = 3,4,5\cdots) \tag{16-1}$$

不存在整数解。直到提出问题后的358年（1995年），才被出身英国剑桥的数学家Andrew wiles所攻克[1]。

本文要深入讨论的是Fermat在完全不同的物理光学领域，对于光所行走的路线又做出了巨大的创新成就。1662年，已经61岁的Fermat深刻地认识到**自然界总是以最简单的行为方式来达到其目的**。他具体表述为："当光经过两种介质的界面时，无论是反射还是折射，总是能用时间最短的路径运行。"

这就是闻名于世的Fermat原理。

Fermat始终是一位极具传奇色彩的人物。尽管距此原理提出已过去350年，但是它的精华和亮点，依然对于电磁研究有着极大的启示，而留下的诸多谜团，更能激励我们思考和发展。

## 1　自然规律的表述形式[2]

人类要和自然和谐相处，首要的是认识自然，揭示自然规律。几千年来关于自然规律究竟如何表述？人们经历了一个极其漫长的发展过程，图16-1给出简要的框图。




图16-1　自然规律表述的发展历程

需要指出的是：尽管从时间坐标上，Fermat原理早于Newton《自然哲学的数学原理》(1687)，但是，Fermat原理思想却更先进，在较长时间不为大多数人所理解和接受，其中也包括Newton。

Fermat原理的亮点首先是它并不具体指出光的行走路线（也即方程），然而却给出了光运动所遵循的**极值原则**——按最小时间 $\min\ t$ 进行。这确实是一个原创性的思想。伺后，莫培督（Maupertuis）的发展、欧拉（Euler）的变分，其思想均与Fermat一脉相承。

其次，Fermat原理是一个无坐标原理，它根本不需要具体坐标，而越发显示其普遍性。

第1个吃螃蟹的往往是最难得的，也是最勇敢的探索者。其后，J. J. 汤姆逊在静电学中也类似地提出了导体上电荷分布的极值原则——"导体上的电荷应该是这样分布的：它使静电储能 $W_e$ **保持最小**"。

世称汤姆逊原理，由此开创了自然规律极值表述的一条新路，如图16-2所示。

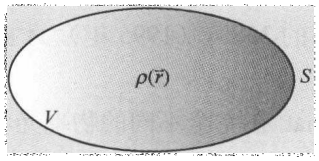



图 16-2　导体上电荷分布 $\rho(\vec{r})$ 的汤姆逊原理

大家知道，在 Fermat 原理提出之前，已经有反射定律和折射定律，即

$$\begin{cases} \theta_i = \theta_r & (16\text{-}2) \\ \dfrac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \dfrac{v_i}{v_t} = \dfrac{n_t}{n_i} & (16\text{-}3) \end{cases}$$

其中，$v$ 表示速度，而 $n$ 表示折射率，如图 16-3 所示。

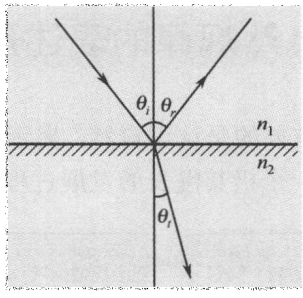



图 16-3　光的反射定律和折射定律

Fermat 原理给我们带来的第一个谜是：**原理的表述是代数的，但结果却是几何的。**尽管推导过程十分严密，然而由代数转入几何深层次的原因值得进一步探索。

## 2　极小值还是极大值

Euler 最推崇极值原则。他说过：“因为宇宙的结构是最完善的而且是最明智的上帝的创造。因此，如果在宇宙里没有某种极大或极小的法则，那就根本不会发生任何事情。”[3]

关于宇宙究竟取极大值还是极小值，科学界几乎也是一边倒的倾向——“大自然基本是懒惰的——它总是争取最小量的路线。”所以，由 Fermat 原理发展而来的也称之为**最小作用量原理**。

不过，事实并不像想象的那么简单，请看下面实例。

【例】椭圆柱凹面镜情况。

为了简单而又能说明问题，让我们来研究如图 16-4 所示的二维椭圆柱凹面镜的光反射情况。

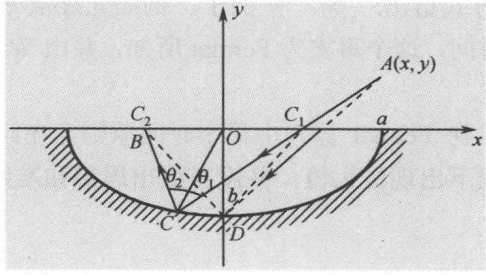



图 16-4　二维椭圆柱凹面镜上的光反射

考虑一个特例：设光从 $A$ 点 $(x,y)$ 入射，其中 $x>c$，$y>0$（$c=\sqrt{a^2-b^2}$ 为焦距）通过反射镜反射到 $B$ 点，而 $B$ 点却正好在椭圆的一个焦点 $C_2$ 上。

在图 16-4 上，长短半轴分别为 $a$ 和 $b$，

$$OC_1=OC_2=c=\sqrt{a^2-b^2} \tag{16-4}$$

其中，$OC_1$ 为焦距，众所周知，椭圆有两个重要性质：

（1）两焦点 $(C_1,C_2)$ 到椭圆任意一点的距离和为 $2a$；

（2）$OC$ 平分 $\angle BCA$，也即

$$\theta_1=\theta_2 \tag{16-5}$$

且 $OC$ 是椭圆 $C$ 处的法线。

显然，$AC_1C\to CB$ 这条光线满足入射角等于反射角，且路径和

$$AC+BC=AC_1+C_1C+CB=\sqrt{(x-c)^2+y^2}+2a \tag{16-6}$$

为了比较，取 $y$ 轴上 $D$ 点，即光线另外沿 $AD\to BD$ 传播。注意到 $BD=C_1D=a$（因为，$BD+CD=2a$ 及对称性），于是

$$AD+BD=a+\sqrt{x^2+(y+b)^2} \tag{16-7}$$

在考虑三角形 $C_1DA$ 中

$$AC_1+C_1D>AD \tag{16-8}$$

我们有

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+a>\sqrt{x^2+(y+b)^2} \tag{16-9}$$

或者写成

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+2a>\sqrt{x^2+(y+b)^2}+a \tag{16-10}$$

也即

$$AC+BC>AD+BD \tag{16-11}$$

在这种凹面镜条件下，光传播的是极大路径！这真是石破天惊的一个结论。我们注意到文献[4]中用脚注的方式给出:“有一些例子，例如光线从凹面镜的反射，这时光线所取的路径需要极长的时间，这个事实为 Fermat 所知，并由 William R.Hamilton 明确叙述过。”

尽管一些大学者认识到 Fermat 原理中最小时间原则存在问题，但是对于**什么情况下出现极小值，什么情况下出现极大值，并没有提出思想和准则，从而构成了 Fermat 原理之谜 2。**

## 3 相速$v_p$还是群速$v_g$[5]

在 Fermat 原理的发展中，有一个重要的关键点必须提及。也就是当时从不同视角同时存在两种不同的极值原理：Fermat 原理和莫培督原理，并且恰好一个与光速成反比，另一个与光速成正比，看来形成显著的矛盾。

时代造就英雄。正是年轻的法国博士研究生德布罗意以极为尖锐的眼光考察了量子力学，深刻揭示了当时存在的两种极值原理中：Fermat 原理与相速$v_p$相联系；而莫培督原理则与群速$v_g$相关联。从而统一了两种不同的表述方式，如图 16-5 所示。图中$n$表示相对折射率，有

$$n=\frac{c}{v_p} \tag{16-12}$$

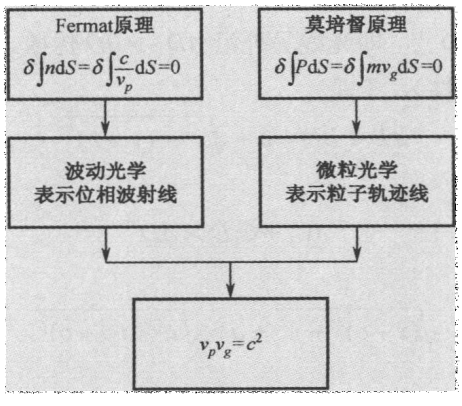



图 16-5 两种极值原理对应两种不同的光速

而 $P$ 表示动量（的大小），有

$$P = mv_g \tag{16-13}$$

德布罗意利用的 Planck 量子论（$E$ 表示能量，$h$ 表示普朗克常数，$v$ 表示辐射电磁波的频率）

$$E = hv \tag{16-14}$$

和 Einstein 相对论（$m_0$ 表示物体静止时的质量，$m$ 表示物体以速度 $v$ 运动的质量）

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{16-15}$$

其中，$\beta = \left(\frac{v}{c}\right)$，且 $c$ 为真空中光速，导出了与 Planck 能量关系完全对应的动量关系。

$$P = mv_g = m_0 v_g \Big/ \sqrt{1-\beta^2} = \frac{Ev_g}{c^2} = \frac{hv}{v_p} = \frac{h}{\lambda} \tag{16-16}$$

其中应用了

$$v\lambda = v_p \tag{16-17}$$

如图 16-6 所示。

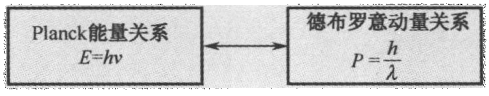



图 16-6　量子的能量关系与动量关系

再计及

$$v\lambda_0 = c \tag{16-18}$$

$$n = \frac{c}{v_p} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \left(\frac{\lambda_0}{h}\right)P \tag{16-19}$$

由于 $\left(\frac{\lambda_0}{h}\right)$ 为常数，可知

$$\delta \int n\mathrm{d}s = \delta \int P\mathrm{d}s = 0 \tag{16-20}$$

确实证明了 Fermat 原理和莫培督原理在光运动中的统一。

由上述讨论清楚地看出，Fermat 原理的物理意义表示**相位波射线**，对应相速为 $v_p$，因此，它和能量守恒不直接相关。换句话说，Fermat 原理不会破坏能量守恒或 Poynting 定理。

近年来提出的双负媒质或左手材料，简单地可以理解为负折射率 $-n$ 或负相位 $-v_p$

（在这种表示中，$n$ 和 $v_p$ 为正）。这时，从空气向 $-n$ 媒质折射时，折射线与入射线处于法线同侧，如图 16-7 所示。

并给出

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t}=-\frac{c}{v_p} \tag{16-21}$$

特别当媒质 1 为 $n$ 而媒质 2 为 $-n$ 时，则有

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t}=-1 \tag{16-22}$$

这种情况下，光从 $A$ 到 $B$ 以群速 $v_g$ 运动时，需要时间，但若 $A$, $B$ 处于上、下对称时，以群速 $v_g$ 运动时总时间（波相位）为 0。

于是，可以有无数条射线从 $A$ 到 $B$。这时似乎“**光找不到北了！**”。这又成为 Fermat 原理谜之 3，如图 16-8 所示。

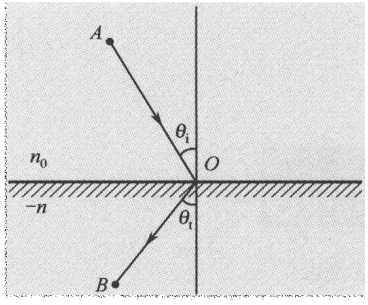



图 16-7　负折射现象

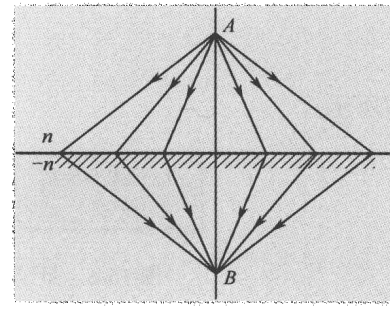



图 16-8　$n$ 与 $-n$ 介质界面，光存在无数条可运行路径

## 4　能量 $E$ 和作用量 $S$[3,6]

从 Fermat 原理发展成为最小作用量原理过程中，很多学者做出了很多贡献，特别是 Lagrange 和 Hamilton 功不可没。

目前，普遍的最小作用量原理可以写为

$$\begin{cases}\delta S=\delta\int_{t_0}^{t_1}L\mathrm{d}t=0 & (16\text{-}23)\\ L=T-V & (16\text{-}24)\end{cases}$$

上式中，$\delta S=0$ 即著名的最小作用量原理，$S$ 表示作用量，而 Lagrange 函数 $L$=$T$−$V$ 是能量中动能 $T$ 与位能 $V$ 之差。特别有意思的是能量 $E$ 恰好是动能 $T$ 与位能 $V$ 之和，也即

$$E=T+V \tag{16-25}$$

人们在了解能量 $E$ 的同时，对于作用量 $S$ 总有一种说不出的陌生。Fermat 原理与相速 $v_p$ 对应，给了我们很大的启示，如图 16-9 所示。

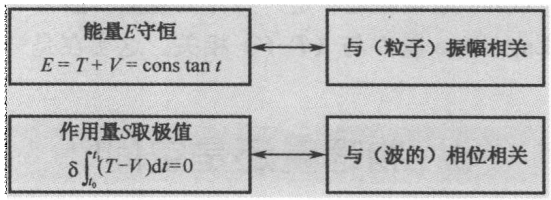



图 16-9　能量 $E$ 和作用量 $S$ 的物理意义

正是年轻的德布罗意深刻指出 Planck 公式

$$E=h\nu=h\left(\frac{v_p}{\lambda}\right) \tag{16-26}$$

式（16-26）从本质上揭示了粒子（能量 $E$）和波（$v_p$ 和 $\lambda$）的有机结合。

待到美国的物理学奇才费曼（R. P. Feynman）在深入探索量子力学最小作用量原理的过程中，终于找到了量子力学独立的第 3 种形式——路径积分，Feynman 给出两个不同时刻 $t_a$ 和 $t_b$ 的波函数 $\Psi$ 的相联系：

$$\psi(x_b,t_b)=\int K(x_b,t_b/x_a,t_a)\psi(x_a,t_a)\mathrm{d}x_a\mathrm{d}t_a \tag{16-27}$$

其中，核函数 $K$ 为

$$K(x_b,t_b/x_a,t_a)=\sum \mathrm{e}^{\mathrm{i}s(b,a)/h} \tag{16-28}$$

Feynman 证明式（16-28）对粒子在沿 $(x_a,t_a)$ 到 $(x_b,t_b)$ 之间的一切路径运动时，求和代入式（16-27），即给出了正确量子力学第 3 种形式——也称为路径积分形式。

我们注意到：

（1）作用量 $S$ 只在相位角上出现，见式（16-28）。相角应是无量纲的，但 $S$ 却有量纲，且为作用量量纲。

（2）在这里，我们才真正发现，Planck 常数 $h$ 也可以称之为作用量子——它正好是作用量的量纲。只有研究进行到此，才能找到 $h$ 的独立含义。当 $h\to 0$，无限路径退化为唯一路径，量子力学复归于经典力学。

Feynman 的导师及著名学者 J. A. wheeler 向 Einstein 介绍弟子时指出："Feynman 已经找到了一种优美的图像来理解一个微观动力学体系从一个态过渡到另一个态时的概率振幅。他所处理的问题准则是把一切可能的过程绝对平权，而不管中间的运动多么不可思议。这些过程的贡献在振幅上没有差别，差别只在相位，而相位上恰好就是经典作用量，二者只差一个因子($h$)，采用这种方法可以重新得到全部标准的量子理论。"

然而，Feynman 理论一开始并没有得到物理学界的普遍接受。确实“有些特殊的天才，人们往往需要几年，几十年，以至更长的时间才能消化和领悟他们的超越时代观点，Feynman 正是属于这种伟大的天才。”

这里，要提出的 Fermat 原理谜之 4 是：**为什么能量（振幅）$E$ 与（$T+V$）相关，而作用量（相位）$S$ 中 Lagrange 量 $L$ 与（$T-V$）相关**。这实在是一个神秘而奇妙的问题。

## 5 物理量还是空间[3]

Einstein 的伟大思想之一是把物理引力作用处理成为质量 $m$，造成空间的弯曲。

很自然地，完全可以把物理量的最小作用量原理转化成为**空间变化的最小作用量原理**——也就是 Hertz 在《力学原理》中提出的**最小曲率原理**。它可以表述为

“任何自由系统均保持其静止或最小曲率轨道的匀速运动状态，即

$$\delta K = 0 \tag{16-29}$$

其中，$K$ 是轨道的曲率。”

这里提出的谜有两条：**谜之 5。在弯曲空间中，诺特原理如何应用？即能量 $E$ 守恒对应时间对称性，而动量 $P$ 守恒则对应直线运动对称性；谜之 6，如何把弯曲空间的曲率与相位联系起来？**

## 6 电磁最小作用量原理

1977 年，由 K. Morishita 和 N. Kumagai 两位日本学者发表了电磁领域中的最小作用量原理[7]。它具体表述为

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L\mathrm{d}t \tag{16-30}$$

其中，Lagrange 函数

$$L = \int_r \left\{ \frac{1}{2}\left[ \vec{E}(\vec{r},t)\cdot\vec{D}(\vec{r},t) - \vec{H}(\vec{r},t)\cdot\vec{B}(\vec{r},t) \right] + \vec{A}(\vec{r},t)\cdot\vec{J}(\vec{r},t) - \rho(\vec{r},t)\cdot\varphi(\vec{r},t) \right\} \mathrm{d}v \tag{16-31}$$

且有关系

$$\begin{cases} \vec{B}(\vec{r},t) = \nabla\times\vec{A}(\vec{r},t) \\ \vec{E}(\vec{r},t) = -\dfrac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} - \nabla\varphi(\vec{r},t) \\ \vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon\vec{E}(\vec{r},t) \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \mu\vec{H}(\vec{r},t) \end{cases} \tag{16-32}$$

电磁最小作用量原理具体表述为："只须知道区域 $V$ 内在起始时间 $t_0$ 和结束时间 $t_1$ 时，$\vec{A}$ 和 $\varphi$ 的正确值，以及包围 $V$ 的封闭表面 $S$ 上在 $[t_0,t_1]$ 期间的 $\vec{A}$ 和 $\varphi$ 的正确值，则在体积 $V$ 内的 $\vec{A}$ 和 $\varphi$ 可以根据 $\delta S=0$ 的变分原则求出，并由此定出整个区域的全部真实场。"如图 16-10 所示。

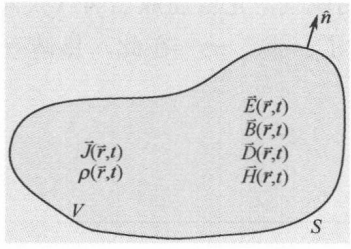



图 16-10　电磁最小作用量问题

对应的频域问题为

$$S=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_{r}\left\{\frac{1}{2}\left[\vec{E}(\vec{r},\omega)\cdot\vec{D}^{*}(\vec{r},\omega)-\vec{H}(\vec{r},\omega)\cdot\vec{B}^{*}(\vec{r},\omega)\right]+\vec{A}(\vec{r},\omega)\cdot\vec{J}^{*}(\vec{r},\omega)-\rho(\vec{r},\omega)\cdot\varphi^{*}(\vec{r},\omega)\right\}\mathrm{d}v \tag{16-33}$$

和

$$\begin{cases}\vec{B}(\vec{r},\omega)=\nabla\times\vec{A}(\vec{r},\omega)\\ \vec{E}(\vec{r},\omega)=-\mathrm{j}\omega\vec{A}(\vec{r},\omega)-\nabla\varphi(\vec{r},\omega)\\ \vec{D}(\vec{r},\omega)=\varepsilon\vec{E}(\vec{r},\omega)\\ \vec{B}(\vec{r},\omega)=\mu\vec{H}(\vec{r},\omega)\end{cases} \tag{16-34}$$

文中严格证明了由 $\delta S=0$ 可导出全部 Maxwell 方程组和边界条件。换句话说，电磁最小作用量原理与 Maxwell 理论完全等价。

由前面讨论表明：能量 $E$ 反映振幅条件而作用量 $S$ 反映相位条件。于是，这里可提出的一个难解之谜 7：**相位条件可等价于运动方程，而振幅条件却无法还原为运动方程，这是为什么？**

## 7　结　　语

行笔至此，我们可以从哲学上探讨这一问题。与作用量 $S$ 密切相关的 Lagrange 量 $L$ 所包含的是两个能量之差。深入研究，读者很易发现：这两种性质不同的能量——动能 $T$ 与位能 $V$，电能 $W_{\mathrm{e}}$ 和磁能 $W_{\mathrm{m}}$ ——的差恰好构成一对矛盾。从这个意义上来看 $L$ 或作

用量 $S$ 求极值——正是一类**广义谐振**问题。

进一步从广义类比上看，极小与极大是网络的串联谐振与并联谐振。这里的思想值得深究。

这篇札记与其说是一篇论文，倒不如说是针对 Fermat 原理提出的一系列疑难问题。

中国自古以来就有提问的风气。先哲屈原名著《天问》即对宇宙发出一串尖锐的提问。“提出问题，意味着解决了一半”——在此，恳请有识之士特别是年轻学者给出关键的另一半。

## 答问录

**问**：你在这一系列札记中，无意地展示了物理学，特别是电磁学的发展史，确实给人以启示。有的事情偶然中可能包含着必然：Newton 从研究力学出发，给出了**方程**（Newton 第二定律 $\vec{F}=m\vec{a}$ 和万有引力定理 $\vec{F}=k\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$）。而 Fermat 从研究光学出发，结果却给出了**不等式——极值原理**。这其中有着深层次的原因吗？

**答**：从这个问题看出你一步一步已经学会思考了。

我们发现：人们为了在实践中运用力学解决问题，给出方程是自然的，也是必须的；而另一方面探索自然必然由低级到高级，由初级层次发展到更高层次，由具体进入到抽象，也是一个合理的过程。Fermat 思想正是根据这一规律应运而生的。

进一步揭开问题的本质：Newton 方程最初出现在于对象直观的“粒子性”；而 Fermat 原理的探索则源于光的“波动性”（尽管光有两重性质）。如图 16-11 所示为 Fermat。



图 16-11　Fermat

**问**：最近 Fermat 原理是否还有进展？

**答**：Fermat 原理确实有新的进展。我们提出一种全新的 Fermat 原理的等价提法：“光

的行走是使光波总的相位保持极值。”有

$$\varphi=\frac{2\pi f}{v}\ell=\omega t$$

其中，$\varphi$表示光波相位；$2\pi f=\omega$，$f$ 是频率，而$\omega$是角频率；$\ell$是行走长度；$v$是光速。$\frac{\ell}{v}=t$（时间）。且

$$v=\frac{C}{n}$$

其中，$C$为真空中光速，而$n$为对应路程中的折射率。

20世纪物理学的一个突出成就是把**相位**这个概念提高到前所未有的高度。杨振宁先生2008年撰写“外尔（Hermann Weyl）对物理学的贡献”一文中明确提出：当前发展形成了当代物理学的一个基本原则：**全部基本力都是相位场。**

杨先生还在2003年演讲中总结了20世纪物理发展的三个主旋律：**量子化、对称和相位因子。**

这里，我们从头再观察Fermat原理。

### 1. Fermat反射定律

图16-12给出证明Fermat反射定律用图，其中$h_1$，$h_2$和$x_0$为已知。问由$A$通过反射边界$O$再到$B$应走何种路程？且$x$为未知量。

据Fermat原理有

$$L=\ell_v(\ell_1+\ell_2)=\ell_v(\sqrt{(x_0-x)^2+h_1^2}+\sqrt{x^2+h_2^2})$$

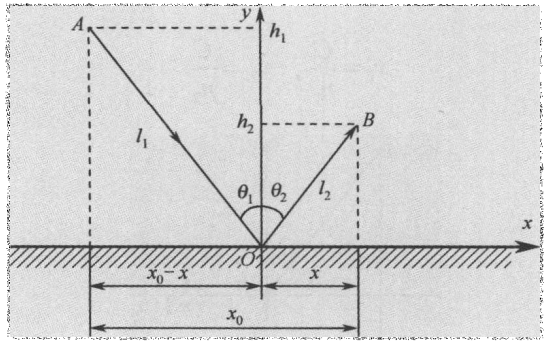



图16-12　证明Fermat反射定律用图

其中，$\ell_v$表示取极值：极小值或极大值。可写出

$$\frac{dL}{dx}=-\frac{(x_0-x)}{\sqrt{(x_0-x)^2+h_1^2}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+h_2^2}}=0$$

也即

$$\frac{(x_0-x)}{\sqrt{(x_0-x)^2+h_1^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+h_2^2}}$$

或

$$\sin\theta_1=\sin\theta_2$$

$$\theta_1=\theta_2$$

路程取极值可知：入射角等于反射角。

如果从波相位角度出发，当 $f$ 和 $v$ 为定值时。由 $\varphi=\frac{2\pi f\ell}{v}$ 可得

$$\ell_v(\ell_1+\ell_2)=\ell_v(\varphi_1+\varphi_2)=\ell_v\left(\frac{2\pi f(\ell_1+\ell_2)}{\varphi}\right)$$

可见对于反射情况，的确等价于 $A\to B$ 光波相位 $\varphi$ 和取极值。

**2. Fermat 折射定律**

图 16-13 给出证明 Fermat 折射定律用图，其中 $h_1,h_2>0$。

由 Fermat 原理：光从 $A\to B$ 行走时间最短。可写出

$$T=\ell_v(t_1+t_2)=\ell_v\left(\frac{\ell_1}{v_1}+\frac{\ell_2}{v_2}\right)$$

注意到处理折射问题中，光传播在两种媒质中进行，$v_1$ 和 $v_2$ 不同，有

$$v_1=\frac{C}{n_1},\quad v_2=\frac{C}{n_2}$$

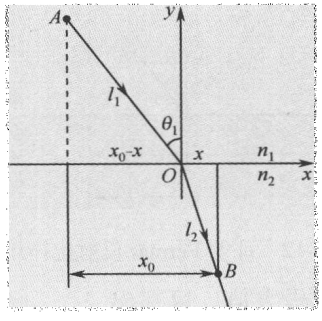



图 16-13　证明 Fermat 折射定律用图

进一步具体化为

$$T=\ell_v\left(\frac{\sqrt{(x_0-x)^2+h_1^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{x^2+h_2^2}}{v_2}\right)$$

和

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{v_1}\frac{-(x_0-x)}{\sqrt{(x_0-x)^2+h_1^2}}+\frac{1}{v_2}\frac{x}{\sqrt{x^2+h_2^2}}=0$$

可得

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{v_2}$$

最后给出

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{n_2}{n_1}$$

也就是最一般的折射定律。

我们再一次回到波相位角度观察，有

$$T=\ell_v(t_1+t_2)=\ell_v\left(\frac{2\pi f\ell_1}{v_1}+\frac{2\pi f\ell_2}{v_2}\right)=\ell_v(\varphi_1+\varphi_2)$$

可见**等价于取波相位和$(\varphi_1+\varphi_2)$的极值**。

取相位和作极值使问题得到完全的统一：不论是反射或折射，不论是一种媒质还是两种媒质，甚至可以是连续可变媒质，也可写出

$$\ell_v\left(\int\varphi(\ell)\mathrm{d}\ell\right)$$

另一方面，原来的物理学，都把振幅提到很高的高度。

因为它是看得见，摸得着的；而这里则是**相位**起决定性作用。事实上，本篇札记所讨论的，Fermat 原理光速$v$对应相速（相位速度）$v_p$，已隐去了目前的发展与推广。形象地说，可以是**“相位物理学”**。然而，其中之奥秘远远没有达到可以解释的地步，仍值得进一步深究。

**问**：关于 Fermat 原理中极值的提法，很有意思。你可否先讨论一下关于极大值和极小值的数学判别方法？

**答**：为了突出概念，我们这里集中讨论光线在平面上的反射情况。有两种判别办法：

（1）代数判别。

采用前面的符号，求目标函数 $T$ 的二阶导数，有

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{\sqrt{(x_0-x)^2+h_1^2}}-\frac{(x_0-x)^2}{\left[(x_0-x)^2+h_1^2\right]^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+h_2^2}}-\frac{x^2}{\left[x^2+h_2^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{h_1^2}{\left[(x_0-x)^2+h_1^2\right]^{\frac{3}{2}}}-\frac{h_2^2}{\left[x^2+h_2^2\right]^{\frac{3}{2}}}>0$$

当二阶导数大于 0 时，可判断出平面发射将出现**极小值**，也即是最短路径。

（2）几何判别。

利用镜像对称画出 $A'$，如图 16-14 所示。

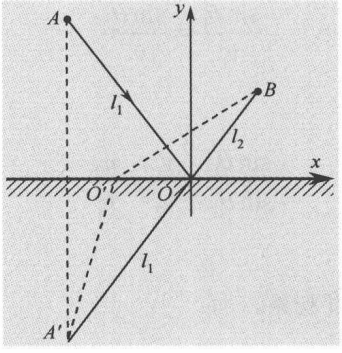



图 16-14　Fermat 原理极值的几何判别

$$AO+OB=A'OB$$

若观察另一点 $O'$，显然有

$$A'O'+O'B>A'OB$$

三角形两边之和大于第三边，或者说，两点 $(A'B)$ 之间，直线最短。

必须注意到采用 $A$ 的镜像点 $A'$ 与采用 $B$ 的镜像点 $B'$ 完全对称，如图 16-15 所示。

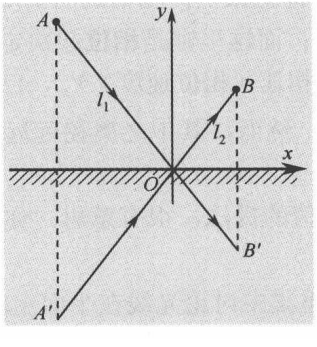



图 16-15　采用两个镜像点 $A'$ 和 $B'$ 完全对称

**问：** Fermat 原理究竟应该取极大值还是极小值？

**答：** 这是一个十分困难的问题，我们在这里分两种情况讨论，为了方便均只考虑 $xOy$ 面二维情况。

**1．圆凹面镜情况**

圆凹面镜如图 16-16 所示。

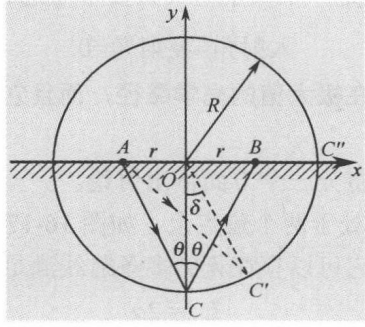



图 16-16　圆凹面镜问题

为方便，设 $A,B$ 两点在圆凹面镜的同一直径上。由于 $AO=OB=r$，它走的光程是 $AC+CB=L_O$，易得

$$L_O = AC + CB = 2\sqrt{R^2 + r^2}$$

现在设 $\angle COC' = \delta$ 是一个偏角，则

$$AC'^2 = AO + OC'^2 - 2AO \cdot OC' \cdot \cos(90^\circ + \delta) = R^2 + r^2 + 2Rr\sin\delta$$

$$C'B^2 = BO + OC'^2 - 2BO \cdot OC' \cdot \cos(90^\circ - \delta) = R^2 + r^2 - 2Rr\sin\delta$$

于是后来在 $C'$ 的光程 $L$ 为

$$L = AC' + C'B = \sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr\sin\delta} + \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\sin\delta}$$

（1）根据 $\delta \to 0$ 的准微分情况。

设 $x = \dfrac{2Rr\sin\delta}{R^2 + r^2}$，易知 $|x| < 1$。当 $\delta \to 0$ 的条件下，$x$ 很小。

$$\begin{cases} (1+x)^{1/2} \approx 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 \\ (1-x)^{1/2} \approx 1 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

于是有

$$L = \sqrt{R^2 + r^2}\sqrt{1+x} + \sqrt{R^2 + r^2}\sqrt{1-x} \approx 2\sqrt{R^2 + r^2} - \frac{R^2 r^2 \sin^2\delta}{(R^2 + r^2)^{3/2}}$$

十分明显，这种情况下，$L<L_O$。原光线 $AC+BC$ 满足：入射角 $\theta$ 等于反射角 $\theta$，且满足**极大值!**

（2）圆凹面镜的全面考察。

但是，如果我们对圆凹面镜作出全面考察，则只需令 $\delta=90°$。

$$L_p=AC''+C''B=(R+r)+(R-r)=2R$$

它不仅满足 $L_p<L_O$ 而且是一个极小值（只要不考虑 $A,B$ 之间的遮挡）。这时

$$\text{入射角=反射角=0°}$$

可见，**圆凹面镜不仅存在极大值的光学路径，而且它也存在极小值的光学路径!**

**2. 椭圆凹面镜情况**

对于椭圆凹面镜，我们将分三个方面作出讨论。

（1）当源 $A$ 和接收点 $B$ 处于两个焦点上，如图 16-17 所示。

根据椭圆的重要性质：它可以存在无穷多条射线满足要求

$$L_O\equiv 2a$$

（2）当源 $A$ 和接收点 $B$ 处于焦距之内，如图 16-18 所示。

也即

$$r<\sqrt{a^2-b^2}=c$$

在这种情况下

$$L_i=2\sqrt{r^2+b^2}<L_O$$

属于极小值情况。

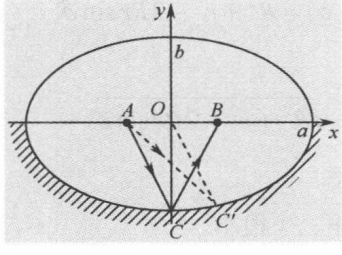



图 16-17 $A,B$ 处于焦点上的椭圆凹面镜

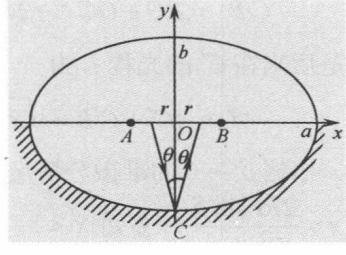



图 16-18 $A,B$ 处于焦距之内的椭圆凹面镜

（3）当源 $A$ 和接收点 $B$ 处于焦距之外，如图 16-19 所示。也就是

$$r>\sqrt{a^2-b^2}=c$$

在这种情况下

$$L_e=2\sqrt{r^2+b^2}>L_O$$

属于极大值情况，但即便如此，仍存在另一条路径

$$\min L' = AC' + C'B \text{（不考虑遮挡）} = 2a = L_0 \text{的极小值}$$

必须指出：在札记原文的[例]中，也可找出另一种情况存在的极小值（只要凹面镜足够**完整**）。由上面讨论可以得到：

（1）正如由历史著名物理学家 Hamilton 明确指出：**凹面镜反射存在极大值**，这一点也为 Fermat 所知。在这里我们也明确提出：**它们存在极大值的同时必定存在极小值**；

（2）现在讨论的问题是当光（如果它也有“人性”的话）面对多个极值，它究竟要做何种选择？非常值得研究。

（3）当源和接收点处于椭圆焦点时，光线将无所适从，这又是一个重要的问题——**也就是到处都是极值。**

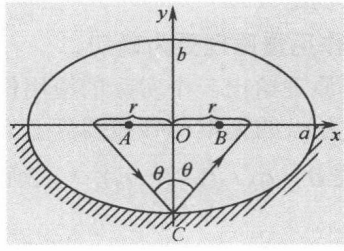



图 16-19　*A*, *B* 处于焦距之外的椭圆凹面镜

由此可见，Fermat 原理还有进一步深化的余地。

**问**：你在这篇札记十六中，还举了一个约瑟夫·约翰·汤姆逊（Joseph John Thomson）原理也就是大家耳熟能详的 J. J. 汤姆逊原理，“导体上的电荷应该是这样分布的：它使静电能 $w_e$ 保持最小。”为电磁领域开创了极值原理的一条新路子。请问在这方面还有什么要深入讨论？

**答**：我的回答是肯定的。在图 16-9 中已经清楚地表明 $E = T + V$，能量和与**振幅**相关；而 $\delta S = \delta \int (T - V)\mathrm{d}t$，能量差与**相位**相关；其中，$T$ 表示动能；$V$ 表示位能。

再考虑电磁情况，如图 16-20 所示。

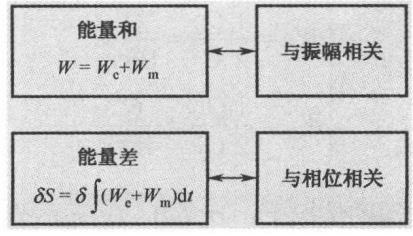



图 16-20　电磁领域中的能量和与能量差

特别要注意到 J. J. 汤姆逊原理中

$$W_{\mathrm{m}}=0$$

这时有

$$W=W_{\mathrm{e}}$$

而 Lagrange 函数

$$L=-W_{\mathrm{e}}$$

可见，能量和与能量差这两种情况几乎趋于统一（仅差一个负号）。因为 J.J.汤姆逊当时还不知道最小作用量原理，因而称为**最小能量原理**，确切地说：**应该是最大作用量原理**（$W_{\mathrm{e}}$越小，$-W_{\mathrm{e}}$最为负数则越大）。

可见，作用量叙述为**极值作用量原理更为确切**。

**问**：能不能对 J. J. 汤姆逊原理给出一个实际的应用例子。

**答**：我们这里来研究半径为$r_0$的无限薄导体圆盘上的电荷分布，如图 16-21 所示。

我们讨论两种分布：一种是$\sigma=\sigma_0/\sqrt{1-(r/r_0)^2}$（正确的）分布；另一种是$\sigma=\sigma_0$（不正确的）均匀分布。

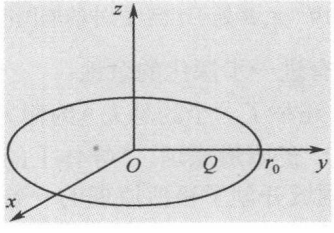



图 16-21　半径为$r_0$的导体圆盘

分别由表 16-1 算出 $Q$ 和 $V$，且由$C=\dfrac{Q}{V}$算出各种情况的电容$C_1$和$C_2$。

于是计算出$W_{\mathrm{e}}$电能有

$$\begin{cases} W_{\mathrm{e1}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C_1}=\dfrac{Q^2}{16\varepsilon r_0} \\ W_{\mathrm{e2}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C_2}=\dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon r_0} \end{cases}$$

也就是说，在电荷 $Q$ 相等的情况下，$\sigma_0/\sqrt{1-(r/r_0)^2}$ 分布的$W_{\mathrm{e1}}<W_{\mathrm{e2}}$。

表 16-1　半径为 $r_0$ 的导体圆盘

| 电荷正确分布 $\sigma=\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^2}}$ | 电荷分布均匀 $\sigma_0$ |
|---|---|
| $Q=\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^2}}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$<br>$=\pi\sigma_0 r_0^2\int_0^{r_0}\dfrac{\mathrm{d}\left[1-\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^2\right]}{\sqrt{1-\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^2}}$<br>$=2\pi\sigma_0 r_0^2$ | $Q=\pi\sigma_0 r_0^2$ |
| 盘中心电位 $r$ | 盘中心电位 $r$ |
| $V=\iint\dfrac{\sigma_0 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon\sqrt{1-\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^2}}$<br>$=\dfrac{\sigma_0 r_0}{2\varepsilon}\sin\left(\dfrac{r}{r_0}\right)\Big\|_0^{r_0}$<br>$=\dfrac{\pi\sigma_0 r_0}{4\varepsilon}$ | $V=\iint\dfrac{\sigma_0 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon}$<br>$=\dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon}r\Big\|_0^{r_0}$<br>$=\dfrac{\sigma_0 r_0}{2\varepsilon}$ |
| $\sqrt{1-\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^2}$ 分布电容 $C_1$ | 均匀分布电容 $C_2$ |
| $C_1=\dfrac{Q}{V}=8\varepsilon r_0$ | $C_2=\dfrac{Q}{V}=2\pi\varepsilon r_0$ |

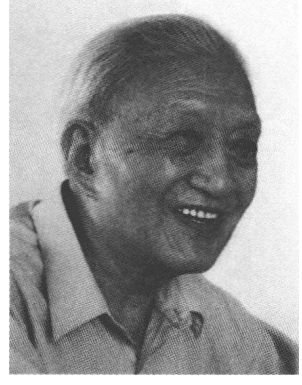
## 推荐人物

在这篇札记里，我要郑重地介绍叶培大先生。

作为第一流的学者，我要着重介绍自己感受到的他的诚心、鼓励和提携。叶先生作为我国第一代电磁微波领域的专家，他把国外先进的如我前边所述及的 MIT 第二次世界大战时发展的理论介绍到国内。他几乎不遗余力地推崇 L.列文所著的《现代波导理论》，特别是其中的本征模展开和网络匹配理论。

当我留美归来的那段时期，撰写习作《计算微波》时，他大力鼓励，认为把微波和计算结合是今后很重要的一个方向，并在 1985 年出版时作序。这种大专家的提携至今仍温暖我心。

我想，一代又一代的提携将是中国科学攀登高峰的最为重



叶培大先生

要的条件。即使我们自己也不再能爬高，也要非常自觉地“甘为人梯”，好好学习叶培大先生！

## 参考文献

[1] 西蒙，辛格．费马大定理[M]．上海：上海译文出版社，1998．

[2] 王福山．近代物理研究史（二）[M]．上海：复旦大学出版社，1986．

[3] 许良．最小作用量原理与物理学发展[M]．成都：四川教育出版社，2001．

[4] 莫里斯，克莱因．古今数学思想（二）[M]．上海：上海科学技术出版社，2002．

[5] 黄席椿．论波速[M]．北京：高等教育出版社，1985．

[6] 约翰，C．泰勒．自然规律中蕴藏的统一性[M]．北京：北京理工大学出版社，2004．

[7] Katsumi Morishita & Nobuaki Kumagai. Unified Approach to the Derivation of Variational Expression for Electromagnetic Fields. IEEE-MTT, 1977，25(1).

札记十七

# 论电磁惯性

伟大的物理学家牛顿首先提出了力学惯性定律——每个物体将继续保持其静止或沿一条直线做匀速运动状态，除非有力加于其上迫使它改变这种状态。本文在电磁领域提出相应的电磁惯性——静电条件下，不论是位 $\varphi$ 还是源 $\sigma$ 都倾向于保持球（三维）或圆（二维）状态，除非有电磁运动或边界迫使它改变这种状态。

## 0 引 言

本文是电磁理论教学札记之十七。

在物理发展史上，电磁波的预言和发现无论如何是一件震惊世界的大事，其中天才的 Maxwell 和伺后的 Hertz 起到了关键作用。

众所周知，在 Maxwell 之前，电磁领域已总结出 Amber 定律和 Faraday 定律

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H}=\vec{J} & \text{(Amber 1825)} \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \text{(Faraday 1831)} \end{cases} \tag{17-1}$$

然而，在包含电容 C 的电路中出现了矛盾（即在频域情况下，外电路存在电流 $\vec{I}$，而电容 C 内部却不存在电流）。经过反复推敲和思考，Maxwell 几乎神奇地引入位移电流

$$\vec{J}_D=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{17-2}$$

从而解决了上述难题，这种情况下，式（17-1）变为

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \end{cases} \tag{17-3}$$

并在真正意义上完成了电和磁双向的相互转化——电场的时间变化（$\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$）可以转化为磁场的空间变化（$\nabla\times\vec{H}$）；另外，磁场的时间变化（$-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$）又可转化为电场的空间变化（$\nabla\times\vec{E}$）。正是这种和谐的双向变化构成了电磁波出现的关键原因。

年轻的 Maxwell 创造性地导出了电磁波的波动方程。对于最简单的一维情况，有

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2}+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0 \tag{17-4}$$

而波的速度正是光速 $c$，即

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{17-5}$$

Maxwell 的预言通过 H. Hertz 实验把这一事件推向了高潮，从而奠定了现代通信最重要的基础。Hertz 在 1888 年 1 月《论电磁作用传播的有限速度》和 1888 年 12 月《论电磁辐射》使电磁波真正走到人类舞台的前面，如图 17-1 所示[1]。

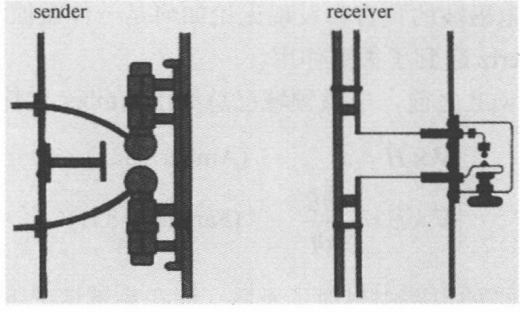



图 17-1　Hertz 实验图

所有这些都使 Maxwell 电磁理论获得了极大的成功。他实现了两大综合：光和电磁的大统一；动场和静场的大统一，如图 17-2 和图 17-3 所示[2]。由此揭开了深入研究电磁波的大幕。

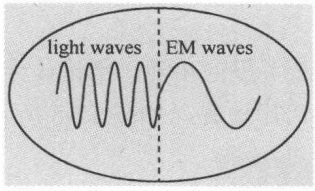



图 17-2　Maxwell 实现光和电磁的大统一

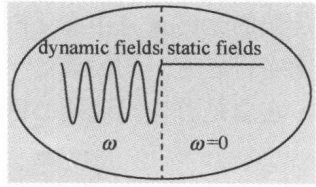



图 17-3　Maxwell 实现动场和静场大统一

## 1　电磁惯性

很少有人注意到：电磁波还具备一个重要的特性，即**电磁惯性**。广义地说，电磁惯性包括动场的波惯性和静场的位惯性与荷惯性。

所谓惯性，指的是在完全没有约束条件下事物的本质特性。

伟大的物理学家牛顿最早揭示：每个物体将继续保持其静止或沿直线作匀速运动状态，除非有**力**加于其上迫使它改变这种状态[3]。

上述特性可称之为**力学惯性**，也即牛顿第一定律。这时约束即力 $\vec{F}$，在零约束时事物的本质状态即匀速直线运动或静止。

与此对应，电磁惯性的最初原理思想首先是由 Huygens 提出的，它深刻揭示了波的形成和波的本质，他指出：“在一个已知波前上的所有点，都可以看做产生次级球面波的子波源，它们仍以在该媒质中的波速向前传播，其包络形成新的波前。”如图 17-4 所示。

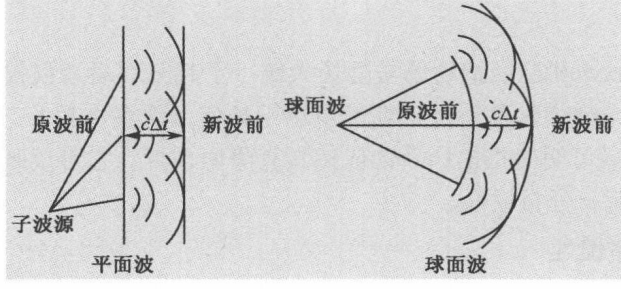



图 17-4　Huygens 原理

十分明显 Huygens 原理有两点非常精彩的思想：

（1）子波思想——在波动的每一点，都可等效一个独立的**理想源**，它为进一步传播波创造条件。

（2）球面波思想——每一子波都向外发出圆（二维）或球（三维）面波，可以认为

球面波是波的无约束自由态（Free State）。

中国老百姓有一句民谚："一石激起千层浪"。一块石头投向小河，不论边界条件如何复杂，它总是首先出现同心圆的层层波纹，直到遇上河岸边界，如图 17-5 所示。

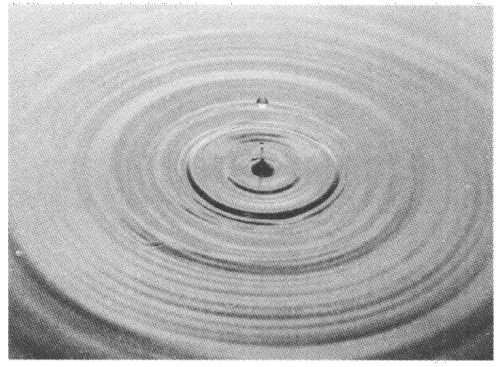


图 17-5　同心圆层层波纹

本文比较牛顿力学惯性，提出**电磁惯性**——"静电条件下，不论是位 $\varphi$ 还是源 $\sigma$ 都倾向于保持**球**（三维）或圆（二维）状态向外传播，除非有电磁运动或边界迫使它改变这种状态。"完全可以这样说，电磁约束即运动或边界，而球和圆正是无约束自由态。

事实上，这一思想还可以进一步扩展到其他如水波、声波，等等。本文不再论述。

## 2　静 电 惯 性

如前所述，Maxwell 已经把动场与静场大统一了起来。后者仅仅是不随时间变化，那么，当动场具有电磁惯性的特性，在静电场中如何体现惯性呢？

通过深入研究后可明确指出：静物依然具有静电惯性。它可反映在两个方面：电位 $\varphi$ 分布惯性和静电荷 $\sigma$ 分布惯性。

### 1．电位 $\varphi$ 分布惯性

十分巧合，我们是从一个典型实例中偶然发现这一重要特性的[2]。众所周知，在电场中，导体边界是一个等位面。问题的研究是由正方形同轴线切入的。根据图 17-6 所示的边界条件，很易想到电位的试探函数也是正方形。但是出人意料的是采用这一思路算出的电容 $C$ 和特性阻抗 $Z_0$ 与精确值相差较大。

上述矛盾给我们提供了深入思考的机会。最后总结出静电位 $\varphi$ 分布惯性原理：在静电场中，一旦离开导体边界的电位 $\varphi$，**它总有构成圆或球的倾向。**

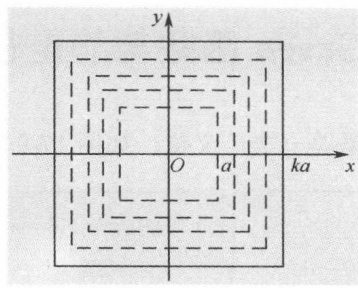



图 17-6　最初设想与正方形导体边界吻合的电位 $\varphi$ 试探函数（$k>1$）

值得指出，在某些情况下，既使因边界所限它也尽可能地在椭圆或椭球之间挣扎，力争获得本身的自由。

简言之，圆或球状静电位 $\varphi$ 分布是事物无约束的自由状态，如图 17-7 所示。数值计算完全证实了这一点[2]。

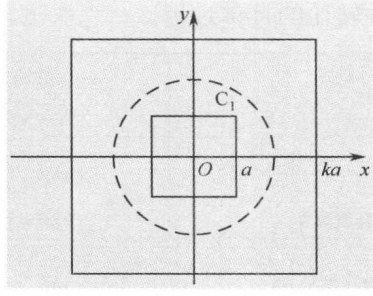



图 17-7　静电惯性——电位 $\varphi$ 分布有逼近图的倾向（$k>1$）

**2. 静电荷 $\sigma$ 分布惯性**

在静电场中，与位 $\varphi$ 对应的物理量是电荷密度 $\sigma$。作为一般形状导体盘的电荷分布也有上述特点，图 17-8 给出的实例表明电荷 $\sigma$ 分布也存在圆的倾向。

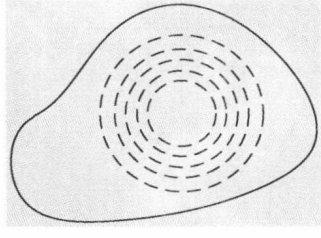


图 17-8　任意导体盘上电荷 σ 也存在圆的倾向

最后，我们又一次总结出**静电荷 $\sigma$ 分布惯性原理**：“在静电场导体上的电荷 $\sigma$ 分布，**总有构成圆的倾向。**”

## 3 Green 函数与静电惯性

在电磁理论中，Green 函数是一类广义位，如图 17-9 所示。

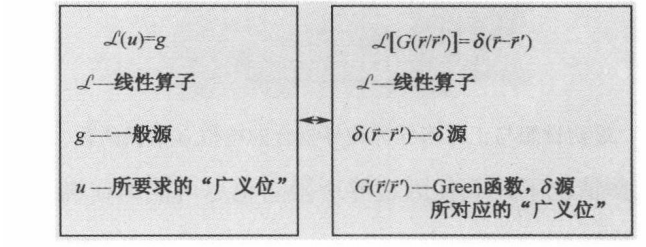



图 17-9 Green 函数和广义位引入

十分清楚，$\delta$ 函数可看做子波源或子源，而 $G$ 则是子波。由图 17-10 可清楚地看出动场电磁惯性向静场电磁惯性转化的具体过程。

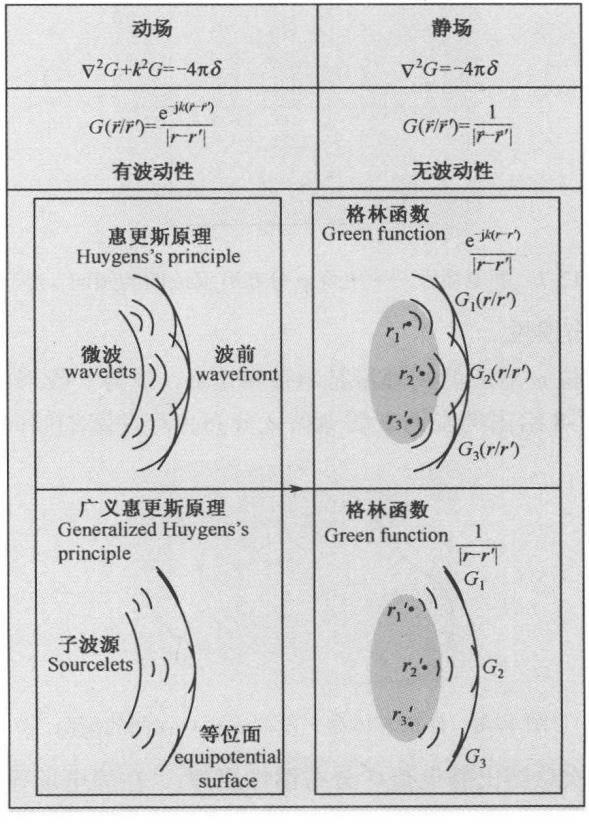



图 17-10 动场电磁惯性和静场电磁惯性

## 4　任何天线元都无法构成理想子波源

在上面讨论中，电磁惯性概念中还有一个要点，即各向同性，不仅表示球面波，而且应该是**均匀**球面波，也就是各个方向传播的振幅相等。这一点在 Green 函数 $G\left(\frac{\vec{r}}{\vec{r}'}\right)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ 中即体现这种思想。

然而，实际上我们所遇到的则完全是另一种情景：即任何天线都无法构成向各个方向均匀辐射的理想子波源，问题的枢纽在于**极化**。

不论是电荷偶极子或电流小圆环，如图 17-11 所示。其本身分布都不是各向同性的，它们所对应的方向性系数最小为 1.5，即

$$\min G=1.5 \tag{17-6}$$

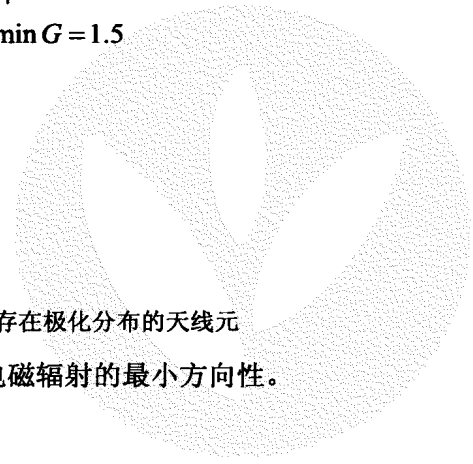


图 17-11　存在极化分布的天线元

完全可以**猜测**：这可能也是任何电磁辐射的最小方向性。

牛顿给人类带来的不仅是万有引力定律和 $\vec{F}=m\vec{a}$。他从力学的观点出发，深刻揭示了物质的一个最重要概念——电磁惯性："在没有外力的条件下，物体保持其静止或匀速运动状态。"它在本质上说明了惯性表示物体力学的自由态，也是物体的一个本质属性。

本文提出的电磁惯性，可以说是事物在电磁领域的对应特性。它可以表述为："静电条件下，不论是位 $\varphi$ 还是源 $\sigma$ 都倾向于以**球**（三维）或圆（二维）状态，除非电磁运动或边界迫使它改变这种状态。"

这里十分有兴趣地指出：力学惯性——匀速直线运动**实际上有可能无限逼近**；与之相反，**运动电磁惯性**——各向同性的球面波是**实际天线（外加源）辐射无法达到的**。这一对比的哲学意义非常值得进一步探索。

和 Newton 力学对比，这里所讨论的即是广义电磁惯性。

## 答问录

**问**：札记十七的题目为“论电磁惯性”，这个问题，你是怎么想出来的？

**答**：很多事情都是从**失败**中获得成功的。现在有一句话称“失败是成功之母”。我对此体会得特别深。

尽管在札记正文中已有简短的叙述，在这里还有必要再啰嗦几句，问题的起始点十分简单，也十分明确——几年前想研究正方形同轴线的单位长度电容 $C$ 和特性阻抗 $Z_0$，如图 17-6 所示。在计算时要假设电位 $\varphi$ 函数。最直接而容易想到的是从里到外都是正方形状，这样既简单，又满足内外边界条件，且“美观”，但是结果竟然失败了！

这件事情对我而言，是一个极大的“打击”。通过很复杂的中间过程，我们终于得到在内（要满足边界条件的）正方形和在外（要满足边界条件）之间的**中间**位函数分布有**圆的倾向**，当然，肯定不是标准的圆。这就明确地表明了：电和磁一旦挣脱束缚，就会倾向圆（二维）或球（三维）。换句话说：**圆和球是电磁的惯性体现。**

**问**：电磁惯性概念与 Maxwell 方程组之间有什么关系？

**答**：你确实很会抓到要害。这一句话恰恰抓住了问题的关键点。我们还是从力学类比开始：图 17-12 给出了 Newton 第一定律惯性定律和 Newton 第二定律 $\bar{F}=m\bar{a}$ 。

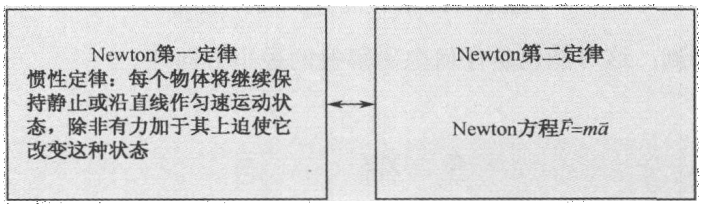



图 17-12　Newton 第一定律和 Newton 第二定律

这里分三个层次做出分析。

第一个层次，Newton 在建立方程之前，很多人存在错误的思想：**有运动必存在力**。Newton 是这种错误的最早揭示者，即没有力也能运动——匀速直线运动。

第二个层次，Newton 第一定律表明**物体的自由态**，就是惯性，**力学的惯性在几何上表示为直线（匀速直线）**。

第三个层次，在实践中，一般很难达到完全无力的情况。因而，第二定律方程主要指明，**惯性直线是一种理想状态、自由状态**，而方程则是（力的）**约束状态**。

在这里还要进一步指出：Newton 一生建立了两个方程。第二定律 $\bar{F}=m\bar{a}$，他把方程中的 $m$ 称为**惯性质量**，缘由是要从匀速直线转化为加速度为 $a$ 的加速运动，必须克服

$m$ 的“阻碍”，$m$ 越大，则“阻碍”就越厉害；Newton 又把万有引力 $\vec{F}=k\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$ 这一方程中的 $m$ 称为**引力质量**。十分明显，引力 $\vec{F}$ 的大小正比于 $m$。在 Einstein 之前很少有人认真对待这两种质量定义。唯 Einstein 在广义相对论中将两者统一起来。

现在，让我们研究电磁对应情况，如图 17-13 所示。

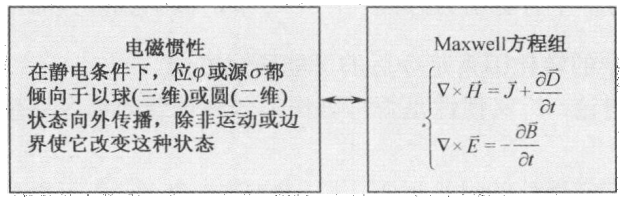



图 17-13　电磁理论和 Maxwell 方程组

对比可知：如果力学的自由态，也即惯性是直线，那么电磁的自由态是圆或者球，也就是电磁惯性。深入研究发现电磁惯性**倾向各向同性**。

力学方程 $\vec{F}=m\vec{a}$ 是约束态，那么 Maxwell 方程组 $\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$，$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ 也是约束态。

但是，最为惊异的是：Maxwell 方程组不存在各向同性解。这也是电磁自由态和电磁约束态的“最大矛盾”。自由态倾向各向同性，而约束态拒绝各向同性。我们应该在这一方面做出进一步的深入挖掘。

这里，很有必要提及克里斯蒂安·惠更斯（Christiaan Huygens）。他作为波科学的创始人功不可没。其最重要的贡献是子波思想和球面波思想，但是，当进入电磁波领域时，出现**新的矛盾——波的极化**。极化是电磁波源的**本质**之一，即使达到最小的偶极子和电流环，依然存在着固有的极化。我们是否可以这样说：**极化是“阻碍”波各向同性的“罪魁祸首”**。正如力 $\vec{F}$ 是“阻碍”物体匀速直线的“罪魁祸首”一样。

这就造成了电磁天线的最小方向性达不到 1。

但是，一旦进入静电领域，不论是电位 $\varphi$ 还是电荷密度 $\sigma$ 分布，它们趋于各向同性的倾向就特别明显。因为这种情况下，不存在极化的概念。

另外，对于 Huygens 的广义波动思想，其他波例如水波、声波都需要依靠媒质才能传播，而 Maxwell 电磁波不需要任何“以太”。尽管这个性质已为各种实验和相对论所证实，但是不同波之间的差异值得研究。

最后，引力至今仍未发现**波**，那么长的距离，它是怎么传播的，是瞬间达到的还是需要一定的时间？

我们又一次考察电磁和力，并探索其中的本质差异。正如札记十七的正文中所述，

Maxwell 的两个旋度方程在真正意义上完成**电和磁的双向相互转化及时间和空间的双向转化**。电场的时间变化 $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 可以转化为磁场的空间变化 $\nabla \times \vec{H}$；而磁场的时间变化 $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 又可以转化为电场的空间变化 $\nabla \times \vec{E}$。正是这种和谐的双向变化构成了电磁波出现的关键原因。

反观 Newton 力学中万有引力方程 $\vec{F} = k\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$，似乎显得“孤单”而缺乏转化，或许，寻找引力问题中的转化因素是今后的可能研究方向。

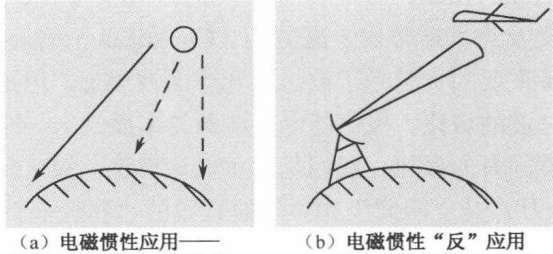
**问**：根据以上讨论，广义惯性是否可以作为一种普遍的物理思想去考察各类物体的自由态？

**答**：实际上，广义惯性的讨论远不止限于物理方面，它还可以从几何上、空间上加以考察。广义电磁惯性有球的倾向本身就说明我们所处的三维空间，并且从根本上来说是各向同性的。**惯性与我们生存的空间密切相关。**

问：请教，电磁惯性有什么应用？

**答**：任何一个问题的研究都有它的两面性。电磁有“趋向各向同性的倾向”，使卫星接收，GPS……少了很多死角，也即无论在全球的哪里都能接收到；另外，极化“破坏”各向同性又使人类研制出方向性很强的天线，便于发射与接收。在军事方面，导弹甚至可以沿着天线波束导向击中目标。

从这个观点看问题，也可以说强方向性天线是“反”电磁惯性的一种重要应用，如图 17-14 所示。



（a）电磁惯性应用——地球上很多地方都能接收到卫星信号（各向同性）

（b）电磁惯性“反”应用——强方向性天线指向目标（各向不同性）

图 17-14　电磁惯性的应用

**问**：在本篇札记中，你讨论了 Green 函数研究“子波”的概念，可否进一步引申一下。

**答**：确实有必要引申。正文札记十七中所说：$\delta$ 函数可看做子波源或子源，而 Green 函数 $G$ 则是子波。

关键在于动场与静场的 Green 函数只差一个相位因子 $\frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

这里又一次出现了**相位因子**。

20 世纪的物理发展中心之一——美国普林斯顿高级研究院，天才的物理学家外尔（Hermann Weyl）一直企图把电磁学与万有引力（广义相对论）结合在一起，从而形成**统一场论**。正是外尔首先指出，关键要给出场的**局域变换性，也称为规范变换性**。他具体写出了一个变换因子，可惜的是，这是一个指数因子。后来经过薛定谔·福克（Schrödinger Fork）和伦敦（London）等人的深入工作，又因外尔本人也认识到了自己的错误，最后给出了正确的**不可积相位因子**：

$$\exp\left(-\mathrm{j}\frac{e}{\hbar c}\int_p^q A_u \mathrm{d}x_u\right)$$

终于得到了规范理论的美妙旋律。

在这里，对比 Green 函数在思想上会受到极大的启发。

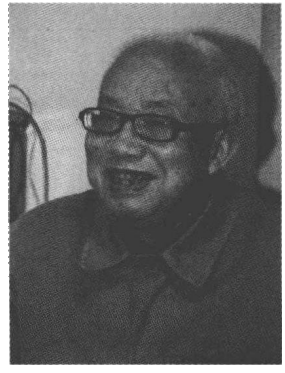
## 推荐人物

这里要介绍的是教育家，西安电子科技大学的吴万春教授。在我刚作为年轻教师时期，他最早推荐我为他的辅导老师班子成员。他在编写《微波网络及其应用》中想到了我，在辅导课程中启用了我。这是一代传递一代的过程，在这里我首先要谢谢老教育家的宽宏和提携。

作为微波专家，吴万春老师一直是勤恳钻研，他的手稿完美、基础扎实，为校内各方面所赞誉。

正是在文革后，他当仁不让，用自己的辛勤劳动在西安电子科技大学开辟出微波网络、微波电路等理论联系实际的崭新方向。

他的功绩永远记在我们心中。



吴万春教授

## 参考文献

[1] 钱长炎. 在物理学与哲学之间——赫兹的物理成就及物理思想[M]. 广州：中山大学出版社，2006.

[2] 梁昌洪. 广义惠更斯原理[D]. 电子学报，2008，36(12): 2439-2444.

[3] 梁昌洪. 话说对称[D]. 北京：科学出版社，2010.

札记十八

# 电磁理论之美

本文的主题是讨论电磁理论之美。我们试图以电磁理论的发展史作为具体的研究对象，从中讨论简单美、对称美、转化美和统一美。正如世界上一切事物都存在两重性。美也不例外——美可以带我们升上“天堂”，但是，若不加注意，美也可以带我们误下“地狱”。这就是在科学研究中美的两重性。

## 0 引　言

本文是电磁场理论教学系列札记之十八。

当前，在各项工作中提倡创新、要求创新之声已不绝于耳。创新的源头显然来自实践。但是，令我们不解的是同样从事实践为什么有的人创新，而另一些人没有创新。

这里，引用著名雕刻大师罗丹的一句话或许是适合的：“生活中并不缺少美，而是缺少对美的**发现**。”[1]可见，人们的思维，人们的品味是何等重要。只有品味提高了，才能从实践中发现和揭示事物的内部本质，才能得到真正的创新。

本文试图以电磁理论发展史作为具体的研究对象。从中讨论简单美、对称美、转换美、统一美。

值得指出，现有述及科学美的大量文献。往往都过度地看到美的思想、美的方法和美的优点。但是，世界上一切事物都存在两重性，当然美也不例外。可以说“科学是美的，但是美并不一定能代表科学。”或者，进一步表述——“美可以带我们升上**天堂**，但是，美也可以带我们误下**地狱**。”这就是美的两重性。

即使如此，过去、现在和未来仍有无数学者“前赴后继”去发现美，追求美。1983 年

诺贝尔物理学奖获得者查德拉塞卡作了概括："我们每个人都可以用自己的方式在追求美，科学美中得到满足。"

## 1　电磁理论的简单美

诺贝尔物理学奖获得者李政道多次说过："最重要的东西往往都是最简单的。"

纵观电磁理论的发展史，情况果真如此。最简单而最重要的概念就是**建立场**（Field）而**摒弃以太**（Ether）。

同样是诺贝尔物理学奖获得者杨振宁在著名演讲《场与对称性》中明确认为场是刚过去的 20 世纪最重要的概念之一。事实上，几乎是同样一个实验：都要证明电流 $I$ 的周围存在**磁**，Oersted 采用小磁针而 Faraday 则**创新地撒**上铁粉，具体如图 18-1 所示。

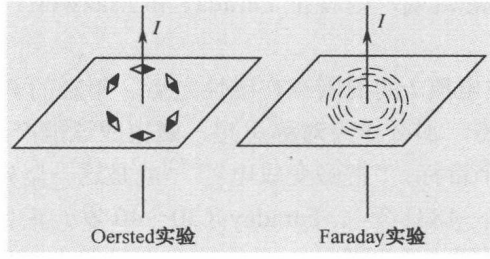



图 18-1　Faraday 发现场和力线

正是这一看来毫不显眼的差别，使 Faraday 庄严宣布：电流 $I$ 周围的空间（Space）**任何一点均存在磁场**，而且形象地采用**力线**表示。

由此，Faraday 建立起了电磁世界的**"空间舞台"**。从而使电磁学从根本上有别于 Newton 超距作用的力学。也正是有了 Faraday 的场才造就了 Maxwell 萌生波的思想，才有了今天全球通信，授时和航天事业。

倘若说，建立一个简单而重要的概念不容易，那么要摒弃习惯上简单而错误的概念更不容易——在电磁理论中，最典型的即以太（Ether）概念。人们在科学中最常用的是比较法，如图 18-2 所示。

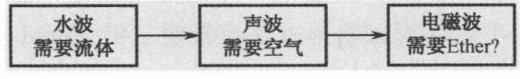



图 18-2　人们的比较法——习惯思维

水波中的流体和声波中的空气都是波传播的**载体**。它们是不动的。波在载体中传播，于是（注意人们的习惯思维），电磁波**必然**（？）也应该有"载体"——我们把它称为

Ether。

Einstein 发现狭义相对论，从根本上彻底否定以太（Ether）。电磁波不需要 Ether，这是它区别于其他波的最重要特征。也是光速不变原理之**本质**。至于整个 Maxwell 体系更是反映五彩缤纷电磁现象中的简单美，具体将由下面详述。

Einstein 对此做了总结——“自然规律的简单性也是一种事实，而且正确的概念体系必须使这种简单性的主观方面和客观方面保持平衡。”

## 2 电磁理论的对称美

首先我们要提及，一个重要的领域和体系的形成，往往会出现一对对称（或互补）人物，后世评价称之为**绝配**。例如 Newton、Kepler 和 Galileo。

在要讨论的电磁理论领域，则首推 Faraday 和 Maxwell。他们两个人正可谓一对绝配。

当 Oersted 发现导线电流 $I$ 的周围存在磁性之后。年轻的 Faraday 为此激动，鼓舞。他想：既然电能够产生磁，那么作为**对称**思想，磁也应该能产生电。1822 年，Faraday 在笔记中给自己提出一个目标：“把磁变成电。”[2]就是这一坚定地追求，花费了他年轻生命的 10 年时间（1821—1831 年）。Faraday（30～40 岁）正处在一个人的黄金时期。

Faraday 最初认为采用强大磁铁接近导线，会在导线中产生电流 $\vec{I}$；或者若在一根导线中存在强大电流，则近旁的另一根导线则会产生新的电流 $\vec{I}'$，其对称思想如图 18-3 所示。令人惋惜的是 10 年无数次实验均以失败告终。

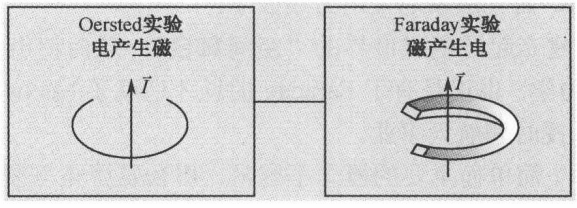



图 18-3 Faraday 对称思想

1831 年 10 月 17 日，Faraday 依然采用导线把电流计和空心线圈连接起来。千百次坎坷涌上心头，他并不对这次试验抱有任何希望。但 Faraday 却“鬼使神差”地把一根磁铁猛地插进线圈，电流计突然发生了偏转。开头几次，他还以为是偶然现象。经过了多次重复终于迎来了 10 年后的“春天”——电磁感应定律产生了：不仅电能产生磁，而且磁（的运动）也能产生电。Faraday 也为对称思想发现这一重大成果而欢欣鼓舞[1,3]。

接着等上历史舞台的正是“对称性”人物——年轻的 Maxwell。当他出场且决心要攻克电磁体系的难关时 Faraday 作为长辈不无担心：他生怕数学形式“淹没”电磁现象的实质。

然而事实恰恰相反，Maxwell 首先发现 Oersted 和 Faraday 的不对称性，如图 18-4 所示。

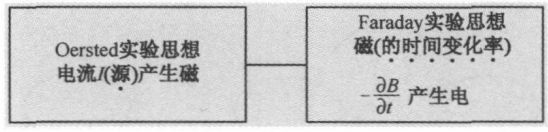



图 18-4　Oersted 和 Faraday 的不对称性

换句话说，Faraday 利用对称性思想发现了一种不对称性，天才的 Maxwell 在条件不成熟的情况下，大胆**补充**了 Faraday 的对称性——即提出了**位移电流** $\vec{J}_D$。

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{18-1}$$

如图 18-5 所示。

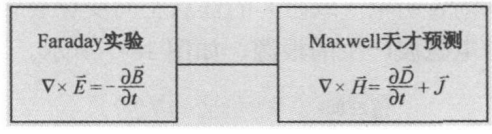



图 18-5　Maxwell 补充对称性

很容易发现，图 18-5 中右边 $\vec{J}$ 在左框没有对称量 $\vec{J}_{\mathrm{m}}$——磁流。事实上很多学者根据对称性思想坚信自然界必定存在——磁荷和磁流对应的电荷和电流。在 2009 年 9 月 14 日的 Science 杂志和 10 月 15 日的 Nature 杂志上，法国 Laue—Langevin 研究院 Tom Fennel 领导的团队和德国 Helmholtz Centre Berlin for Materials and Energy 的 Jonathan Morri 领导的团队均报道已从自旋冰 $Dy_2Ti_2O_7$ 物质中观察到类似磁单极子的粒子和磁流。

人类在电磁理论中追求对称美的过程一直在继续。

## 3　电磁理论的转化美

电磁理论的主要目标是研究电和磁的变化规律。这里写出 Maxwell 两个旋度方程[4]

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} & (18\text{-}2) \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (18\text{-}3) \end{cases}$$

### 3.1 电和磁的相互转化

式（18-2）和式（18-3）的左边是磁（或电），而右边则是电（或磁），中间用等号连接，它深刻揭示了电与磁的相互转化，相互依赖，相互对立，共存在于一个电磁场整体，如图 18-6 所示。

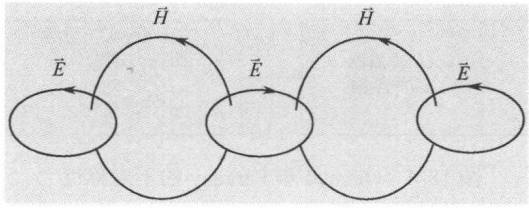



图 18-6 电与磁的相互转化

### 3.2 空间变化与时间变化的相互转化

式（18-2）和式（18-3）的左边是旋度（$\nabla\times$）空间运算，而右边则是导数（$\frac{\partial}{\partial t}$）时间运算，中间等号更深刻表明电（或磁）的任意空间变化会转换为磁（或电）的时间变化，反之亦然，这才是电磁波产生的根源，如图 18-7 所示。

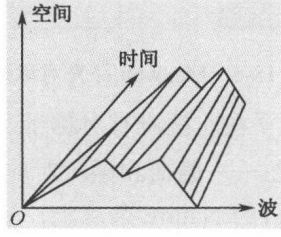



图 18-7 波在空间与时间的变化

事实上，在电磁理论中还存在各种转化。为简化我们把电场 $\vec{E}$ 和磁场 $\vec{H}$ 的求解转换为磁矢位 $\vec{A}$ 和电标位 $\varphi$ 求解（包括 Lorentz 约束条件）；把 Maxwell 方程组等式转化为不等式的变分运算；把电磁散射问题转换为光学计算，如此等等。

所有这些转化都是以它神奇的面孔来显示其强大之美。

## 4 电磁理论的统一美

统一是很多学者在研究工作中的最高追求。作为典型例子，伟大的 Einstein 为了“统一场论”大胆“浪费”（这是外界有些人认为，而不是他认为）了 20 多年生命。

纵观电磁理论发展史，无不渗透着种种统一思想，早期美国的富兰克林在大雷雨中放风筝以此证明**天电与地电的统一性**。

再说电磁理论的带头人 Maxwell 更是如此。1864 年，他向英国皇家学会宣读一篇著名的论文《电磁场的动力理论》。Maxwell 直接提出“我的理论可以称之为电磁场理论，因为这种理论必须处理电或磁体周围的空间问题。”

正是极有胆识的 Maxwell **竟然**从方程组导出了波动方程

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0\\ \nabla^2\vec{H}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0\end{cases}$$

Maxwell 登上了学术顶峰——正式提出了**光电统一理论**。他说，“使我们几乎不可能拒绝下述结论：光是由一种媒质的横波振动组成，这种媒质乃是电和磁现象存在的原因。”最通俗的语言即**光就是波长很短的电磁波**，见图 18-8 所示。

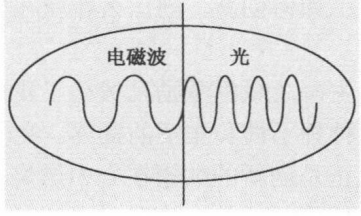



图 18-8　光与电磁波的统一

也正是这一发现，给了我们极大的启示：物理是客观的，但是人类认识物理却有主观的成分。光和电磁波的统一表明两者之间毫无差异。**只是**，光对于人看得见；而电磁波对于人却看不见。

本文想提出一个尖锐的问题：既然光与电磁波是统一的，那么，**光有波粒两重性，电磁波的粒子性在哪里呢？**

统一的追求是美的，统一的追求是极难的。

## 5　美的两重性

事实上，物理学中美的概念不是固定的——物理学中美的含义是不断发展的。它不仅是以简单、对称、统一等为主要标志，而且可能是多样、奇异、崇高和浪漫。

更重要的是美和世间的事物一样，也存在着两重性：不仅美使电磁理论迅猛发展；

而且若一不注意美也会使研究者误入歧途。

1968 年，东海某地掀起一股“发明”小天线的高潮：金鱼天线，荷花天线，青草天线，花篮天线……据说五花八门，美轮美奂，其性能“**很好**”。经过研究和测试所有样品，所有的天线最多仅仅是**线天线加载**，并没有任何新的原理产生，因此，绝对不能为上述“美的热闹”所迷惑。

到 20 世纪 80 年代后期，又掀起“电磁导弹”的研究热，据说可打破 $\frac{1}{r^2}$ 规律。看来理论很美，但时间的考验证明没有出现新的原理。

这些教训非常值得我们汲取，特别是“非学术因素”干扰学术更应坚决制止。

## 6 结　　语

几年前，教育部“创新教学团队”项目给我们带来的与其说是喜悦，倒不如说是沉甸甸的包袱压在心头。在教学上如何创新，创什么新就几乎像一个抓不住的目标，始终在远处游荡。

好像在一个初春的日子，生命之绿色激励且拨动了我们的神经，我们想起了多年教学经历，想起了教学中遇到的种种不懂和难解的疑惑。突然地，有一个大胆的挑战思想涌上心头。我清醒地意识到这正是创新的欲望在心中燃烧。

能不能向陈旧的思想提出明确的挑战。这种教学思想是教师居高临下，传道授业，甚至企图装作是“真理的化身”。而挑战者应提出教学相长，推心置腹，平等讨论的正常教学思想。

这就是第 18 篇电磁理论教学系列札记出现的思想和根源。它代表教师的心声，它是与读者的平等交流。

## 答问录

**问**：我还是搞不懂，既然电磁理论是一门理工结合，应用于实践的学科，为什么还要讨论美？

**答**：这个问题是否可以从两个方面考虑：

第一方面，人活在世界上对任何实践的需求都要升华的。举个最简单的例子，人类最初穿衣是为了防寒取暖和遮蔽隐私。但是现在大量的时装主体是求美；人类吃的食物最初还只是为了填饱肚子，然而，当前的大量食品要求色、香、味，才称之为美食。科学与电磁理论亦为如此。在应用于实践的同时正在不断地追求美！这就是事物的升华。

第二方面，我们考察科研大家对此有什么高明的看法。

——H. Bondi（回忆）Einstein。

我记得最清楚的是，当我提出一个自认为有道理的设想时，Einstein 并不与我争辩，而只是说："啊，多丑！"。只要他觉得这个方程是丑的，就会对此完全失去兴趣，并且不能理解为什么还会有人愿在上面花这么多的时间。Einstein 深信，**美是探求理论物理中重要结果的一个指导原则。**

——Einstein。

他说过：在科学思维中，永远存在诗歌的因素，真正的科学和真正的音乐要求同样的思维过程。

——Weil（法国社会哲学家）。

科学的真正主题是世界之美。

——柯瓦列夫斯卡娅（俄国女数学家）。

不能在心灵上作为一个诗人，就不能成为一位数学家。

——杨振宁（著名美籍华裔科学家）。

如果你能将许多现象简化概括为一些方程式的话，那的确是一种美。诗歌是什么？诗歌是高度浓缩的思想，是思想的精髓。寥寥数行就道出了自己内心的声音，袒露出自己的思想。科学研究的成果，也是一首很美的诗歌。我们所探求的方程式就是大自然给予我们的诗歌。

这是一首很美的诗。当我们遇到这些浓缩精粹的结构时，我们就会有美的感受。当我们发现自然界的一个秘密时，一种敬畏之情油然而生。好像我们正在瞻仰一件不应瞻仰的东西一样。

——哥白尼（波兰天文学家）。

哥白尼在《天体运行论》中的第一句话便是：在哺育人的天赋才智的多种多样的科学和艺术中，我认为首先应该用全部精力来研究那些与最美的事物有关的东西。

——波尔兹曼更把数学、物理与音乐巧妙地联合在一起。

一个音乐家能从头几个音节辨别出莫扎特、贝多芬或舒伯特的作品。同样，一个数学家也可以只读一篇文章的头几页，就能分辨出柯西、高斯、雅克比、基尔霍夫和亥姆霍兹的文章。法国数学家的风度优雅卓群；而英国人，特别是麦克斯韦，则以非凡的判断力让人吃惊。譬如说，有谁还不知道麦克斯韦关于气体动力学理论的论文呢？……速度的变量在一开始就被庄严地展示出来，然而从一边切入了状态方程，从另一边又切入了有心场的运动方程。公式的混乱程度有增无减。突然，定音鼓敲出了四个音节"$n$=5"。不祥的小精灵 $u$（两个分子的相对速度）隐去了；同时，就如像音乐中的旋律，一直很突出的低音突然沉寂了，原先似乎不可超越的东西，如今被魔杖一挥，排除在外……这时，你不必问为什么这样或为什么不那样？如果你不能理解其中天籁之音，就把文章放

到一边去吧。麦克斯韦不写有注释的标题音乐……一个个结论接踵而至，最后，意外的高潮突然降临：热平衡条件和输运系数的表达式出现，接着，落下大幕。

——狄拉克（英国理论物理学家，量子力学的奠基者之一）。

物理学定律必须具有数学之美。

学物理的人用不着对物理方程的意义操心，只要关心物理方程的美就够了。

——康德。

美应当是不可言传的东西。

我们可以归纳出：科学不是艺术，科学又是艺术，它的最高层次是追求一种美！

**问**：科学之美，电磁理论之美究竟是主观的还是客观的？

**答**：这个问题确实很难回答。我只能按自己的理解谈些想法。

美必定存在它的客观性。只是科学之美往往“潜伏”得比较深，很多有待人们去发掘和引申。宇宙“真正”的规律必定是最美的。

另外，美必定存在主观性。最简单的穿衣，在不同民族，不同年龄，不同职业对于什么是美的衣服理解又各有不同。因此，所谓的**审美**或美的**鉴赏力**在科学领域完全是相同的。Einstein 曾说过：“在数学领域里，我的直觉不够，不能辨认哪些是真正重要的研究，那些只是不重要的题目。而在物理学里，我很快学到怎样找到基本问题来下工夫。”

上面关于主观与客观的讨论并不仅仅是在玩文字游戏，而是有重要的现实意义，即人们用主观去判别客观事物的美容易出事故、出错误或者出教训！

从小就听说过：有毒的花往往长得格外艳丽，有毒的食品往往格外香，所有这些都正在引诱着人们“上钩”！

1956 年，年轻的杨振宁和李政道接手“宇称守恒”问题。所有人的一致倾向是宇称守恒。这么美，这么好！但是，世界存在着客观规律，它不以任何人的意志为转移——最后他们下了很大的决心，宣布**宇称不守恒**，并进一步由吴健雄的实验所证实。由此，杨振宁、李政道均获得了诺贝尔物理学奖。特别应该指出：解决这一问题的最大难度在于人们**对于美的先入为主的心理抵触**。事实上“上帝创造的宇宙”中**不完美本身也是一种美**！

Maxwell 方程组中 $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ 位移电流的引入本身就有着对称美的追求，但是，至今磁流 $\bar{J}_m$ 尚未真正发现，说明依然存在着“**对称破缺**”。

**问**：在研究电磁理论之美的时候，有什么需要注意的误区？

**答**：主要有如下三个误区需要提防和注意。

（1）一味地模仿。

正如街上流行的服装，只要演员或名人一穿上身，很多追捧者（Fans）便趋之若鹜，争相效仿。科学的情形也是如此。必须明确科学美的灵魂在于**创新**，只有创新才能出现美，一味模仿只能是越做越差。

（2）凭空想象。

需要知道科学之美的大厦必须建立在牢固的基础之上，它的基础来自实践，从实践出发才能创造出真正的美。不论是前辈大师如 Newton、Maxwell，还是 Einstein 都是如此。开普勒在建立天体运行定律时，一开始从想象出发只能用正多面体相互嵌套，结果实验多次都与自己观察的数据毫不吻合，绕了一个大圈子，才冷静下来从实践出发最后导出名传千世的开普勒三大定律，也构成创造出 Newton 力学的最重要基础。

（3）主观好恶。

研究科学理论，研究电磁理论，十分重要的一点是不能掺入个人的主观好恶，这一规律即便是科学大家 Einstein 也是如此。Einstein 在学生时期对于“矩阵理论”不仅轻视而且十分厌恶。由数学家 Minkowshi 上的课，他根本不去听，只叫他的那位残疾女友记些笔记了事。待到 Einstein 的狭义相对论发表（1905 年），他的老师和学术的另一方 Minkowshi 则十分重视学习。他惊叹被自己斥为“懒狗”的 Einstein 竟然那么有能耐！而正是 Einstein 的老师 Minkowshi 把矩阵理论用到了神奇的地步——引入了时空四维矩阵 $[x \quad y \quad z \quad ict]$ 由此导出了矩阵型 Lorentz 变换，而这一切都是复数域的。

Einstein 看到他的老师的成果，连声叹息。自己对于数学的厌恶竟然把这么好的成果“拱手相让”。他再也不能长此下去了，终于下定决心，学习黎曼几何多年，独立创造出最美的广义相对论。

这个例子给我们启示是很大的。

为了要培养自己对科学的审美能力，必须从多学、多看、多体会入手。我们反对的是一味地模仿，但是要创新就必须从学习、模仿开始。

## 推荐人物

在本篇札记里我想介绍黄志洵老师是最合适的。

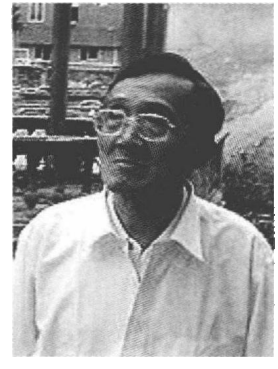
他有两个显著特点非常值得我们学习。

（1）长期钻研和用功。

我不太清楚，也没有经过详细的调查。不过从我个人的感觉，像黄老师那样用功的实在不多见或者毫不夸张地说几乎看不到。

（2）长期关心学科和科学的前沿。

他对于截止衰减器、超光速领域等方面都有自己独到的见解，数十年如一日的勤勤恳恳，其丰硕成果令人钦佩。我有时常在脑海中涌现一个几乎幼稚的问题——如果我们周围像黄志洵老师工作态度的人再多一些，可能科学进展会比现在快得多。



黄志洵老师



## 参考文献

[1] 梁昌洪. 话说对称. 北京：科学出版社，2010.

[2] 夏宗径. 简单对称和谐. 武汉：湖北教育出版社，1989.

[3] 梁昌洪. 矢量场论札记. 北京：科学出版社，2007.

[4] 梁昌洪. 简明微波. 北京：高等教育出版社，2006.

札记十九

# 关于电磁理论的若干思考

本文对电磁理论中的几个基本问题作了较为深入的讨论。我们认为，目前的教学研究领域不仅缺乏先进的教材，而且也缺乏中肯的评论和深入的思考，希望本文对读者有所启发。

## 0 引 言

我们在这里所讨论的电磁理论，是以 Maxwell 大综合作基础的，主要时间表如下：

Maxwell (1864—1865)

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D}=\rho,\ \vec{D}=\varepsilon\vec{E} & \text{(库仑，1785)} \\ \nabla\cdot\vec{B}=0,\ \vec{B}=\mu\vec{H} & \text{(米切尔，1750)} \\ \nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad \vec{J}=\rho\vec{v} & \text{(安培1825+麦克斯韦)} \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \text{(法拉第，1831)} \end{cases}$$

可以这样说：近代电磁理论发展约 200 多年左右时间。

而在近 20 年时间内，由于计算机的飞速发展，我们已拥有解决复杂边值问题的能力，对于经典电磁理论还有什么值得研究、思考和发展的吗？回答是肯定的，而本文仅以几个问题作粗浅的讨论。

# 1 对称性和不对称性

对称性支配相互作用

——杨振宁

不对称性创造物理现象

——Pierre Curie

电磁理论作为一门成熟的学科，它的发展历史、杰出学者所出做的贡献等话题已经有很多文献加以研究和论述。但是，如果我们从科学方法论的角度对其进行考察，则又发现对称性思想作为主线之一贯串于电磁理论发展的历史，并起着重要的作用。

杨振宁博士把场与对称性并列称为“二十世纪物理学中两个非常重要的概念”。本文在简单回顾电磁理论发展历史的同时，对其对称性思想方法作进一步探讨。

**1．电生磁的“第一次握手”**

历史上，电学和磁学的研究，很长一段时间是作为两个独立的分支。人们对于磁的认识似乎远要比电来得早，尽管西文学者总喜欢举出吉尔伯特（William Gilbert）的《论磁》作为这方面的代表，但是，指南针作为古代四大发明之一始终是我们中华民族的骄傲，不论怎么说，地球本身存在着固有的磁场，是磁学初期发展的强大动因。电学的早期研究则可以列出摩擦起电、富兰克林（Benjamin Franklin）天电和地电的统一性实验，以及库仑（Charlce Augustede Coulomb）定律。

真正把电和磁首先联系起来的是丹麦学者奥斯特（Hans Christian Oersted），他在1820年发现电流可以影响邻近的磁针。其所做的实验是直观且朴实的，也就是在电流线周围的小磁针发生了环形的偏转。这一工作的最杰出之处在于它揭示了**电**（或电流 $I$）能够**产生磁**，把两个原先独立的分支联系起来了，从而使电磁发展史揭开了新的一页。奥斯特本人也首创了“电磁学”（electromagnetics）这一名词。

在这一工作中有几个不应忽略的细节：奥斯特实验中所产生的磁实际上是磁场，尽管他本人没有场的概念，奥斯特还用纸片阻隔在电流与磁针之间，磁针依然偏转。然而重要的场概念终于与他擦肩而过。另外，还应该看到奥斯特实验之所以获得成功，除了他敏锐的洞察力而外，还在于当时的条件（即伏打电池堆所能产生的电流 $I$）足以使其产生的磁场远超过地磁物而发生磁针偏转。在物理史上，先进思想由于实验条件不足而无法证实的事例并不罕见。

### 2. Faraday 的对称性思想

关于法拉第（Michael Faraday）发现的电磁感应现象，一直是作为物理史上最优秀的范例之一而被人们津津乐道。自学成才的法拉第具有直观、简明和单刀直入的科学风格。他是物理史上提出**力线和场**观点的第一人，而且贯彻始终。

众多的研究者都注意到：法拉第发现电磁感应的思想是自觉的，即接受了对称性思想的指导，他认为，根据自然法则的对称性，既然奥斯特证明了**电能产生磁**，那么，很有可能**磁能产生电**。如果没有对称性思想的信念，不可能设想经过种种的实验失败，熬过了沮丧的 10 年，法拉第还能锲而不舍朝这一方向努力。

1831 年 8 月 29 日的早晨确实是物理学史值得纪念的一个日子。

由于满足了磁场运动和导线切割磁力线的条件终于促成了电磁感应的发现。10 年的无数次失败换来了丰硕的成果，有意思的是处处坚持场观点的法拉第，所设计的电磁感应实验企图产生的电是**源**（电流 $I$）而不是**场**，即使以现代的观点来看，怎么评价这一伟大发现都不过分。但是，也必须看到有几个不应忽略的环节。

法拉第发现的电磁感应与原来设想并不相同。在原设计方案中法拉第并没有考虑磁铁或线圈的运动。奥斯特设想是电流产生磁，那么对称性思想应该是磁流产生电（图 19-1）。但是，遗憾的是磁铁≠磁流，而且至今仍未发现磁流。

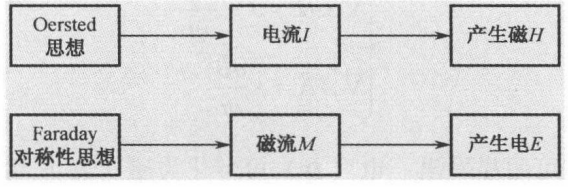



图 19-1　电磁联系的对称性构想

法拉第具备伟大物理学家的最重要品格：实事求是。他特别善于从实验中调整自己的思想，并进一步深入研究，发现产生电的关键是需要磁随时间的变化（$\partial B/\partial t$）。

### 3. 电和磁的“第二次握手”

一般人看来，在法拉第发现电磁感应之后，电与磁的相互联系已经完成。其实并非如此。首先看出其中问题，并深入研究的是比法拉第年幼 40 岁的麦克斯韦本人（James Clerk Maxwell）。一个历史巧合是他恰好出生于电磁感应被发现的 1831 年，麦克斯韦本人也说，他没有做过一个实验，而却潜心研究法拉第的全部实验资料。历史赋予他的重任是完成一项伟大的理论综合。麦克斯韦之所以能完成如此艰巨的使命，除了前述的实验基础作强大支撑而外，他深邃的哲学思考，雄厚的数学基础是最为重要的条件。

麦克斯韦关于电磁理论的最大贡献有两点：

（1）充分发挥法拉第的力线和场的思想，并完成其优美的数学表述。

（2）深入发现和分析了奥斯特电产生磁和法拉第磁产生电的不对称性。并且，进一步运用对称性思想作指导得出结论：既然法拉第发现磁的时间变化（$\partial\vec{B}/\partial t$）可以产生电（$\vec{E}$），那么，很可能电的时间变化（$\partial\vec{D}/\partial t$）可以产生磁（$\vec{H}$）。这就是著名的位移电流思想（见图 19-2）。

值得指出：这是电产生磁的“第二次握手”。它与奥斯特发现的情况不同，而且也只有这时才完成电磁第一次对称性发现。

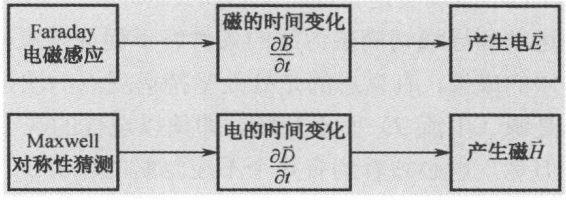



图 19-2　麦克斯韦的对称性猜测

现在，来考察 Maxwell 方程组是很有意义的，如下：

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\end{cases}$$

首先，从方程中可明显看出：电（$\vec{D}$）可转化为磁（$\vec{H}$）；磁（$\vec{B}$）又可以转化为电（$E$）。这种电磁的相互转化产生了电磁振动。

其次，从方程中还可看出：时间的变化$(\partial/\partial t)$可转化为地点的变化$(\nabla X)$；而地点的变化$(\nabla X)$又可转化为时间的变化$(\partial/\partial t)$。正是在对这种变化作出深入研究之后，麦克斯韦才大胆预言了电磁波的存在。

从 Maxwell 方程中可发现电磁不对称性，而$\vec{J}$和$\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$之间比值的不同使我们把媒质从电特性方面划分成导体、半导体和绝缘体。

麦克斯韦所完成的全部理论综合，没有马上获得实验验证。因为在当时的历史条件下位移电流太小而不容易被检出。直到 1887 年和 1888 年才由天才科学家赫兹（Heinrich Rudolf Hertz）先后证实位移电流和电磁波的存在，这时麦克斯韦已去世近 10 年了。

**4．对称性研究没有结束**

从上面叙述非常具体地反映出科学方法论与科学发现之间的相互关系。重大的科学

发现很多都是由正确的哲学，先进的方法论作为信念和前导的。对称性思想在电磁理论发展史上所起的作用就是一个生动的例子。但是，一切哲学，一切先进的方法论都不能代替科学实验和发现。这不仅因为客观世界是丰富的、复杂的，它决不会简单按人们期望的模式来运动，而且，即使现在我们也只能说认识到某一个层次。由对称性思想作指导，获得了不对称的电磁关系可以给我们极多的启示。

科学的认识运动并没有结束，磁单极的探索研究和实验也从未中断过。在本文中也没有涉及爱因斯坦（Albert Einstein）关于狭义相对论中的电磁洛仑兹对称（不变性）。

随着我们对于客观世界研究的深入，了解的事物越多，不了解的事物也越多。然而，应该看到，不了解而能够提出问题本身就意味着认识的深化，并带来科学的进步。

## 2　无耗和有耗

电磁损耗（Electromaguctic Lossy）虽然是司空见惯的概念，但实际上却确有深入讨论的必要。

**1．电磁损耗概念**

1）引子

如图 19-3 所示，有一段金属导线和一只碳膜电阻有相同截面和长度（$S$ 和 $L$），问哪一个损耗功率比较大？

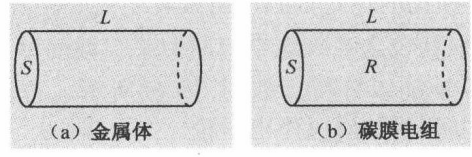



图 19-3　金属体和碳膜电阻

看来这个问题十分简单，很明显：碳膜电阻损耗功率要大，但是且慢！让我们观察如下两个理想实验。

**实验 1**　理想源串联系统，如图 19-4 所示。

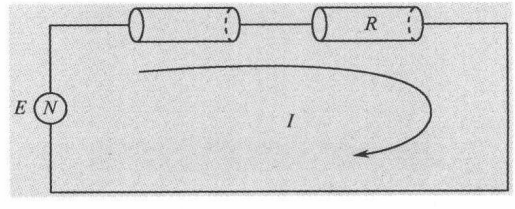



图 19-4　串联系统

在串联系统中，$I$ 相同，碳膜电阻阻值 $R$ 较大

$$p=\frac{1}{2}I^2R \tag{19-1}$$

所以损耗功率比较大。

**实验 2** 理想源并联系统，如图 19-5 所示。

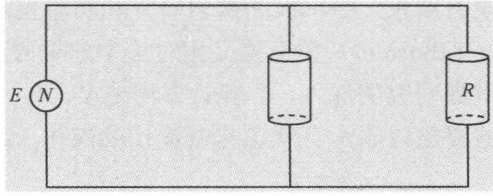



图 19-5 并联系统

在并联系统中情况恰好相反，这时，电压是固定的，即

$$P=\frac{1}{2}\frac{E^2}{R} \tag{19-2}$$

金属体电阻小，当然损耗功率大。

**【结论】**笼统地评论金属体和碳膜电阻，哪个损耗功率较大是不合适的，应该看它们处于什么样的系统之中。

2）电磁损耗和 $\sigma$

这里略去对于磁介质损耗的讨论，则电磁损耗主要是由 $\sigma$ 决定。

那么，什么样的材料损耗较大呢？这个问题似乎又很简单：$\sigma$ 越大则损耗功率越大。但是，我们应该小心谨慎地加以分析。如图 19-6 所示，若有一个电磁波垂直入射到 $\varepsilon_0\varepsilon_r$，$\mu_0$，$\sigma$ 系统，则可以分两种情况作出讨论。

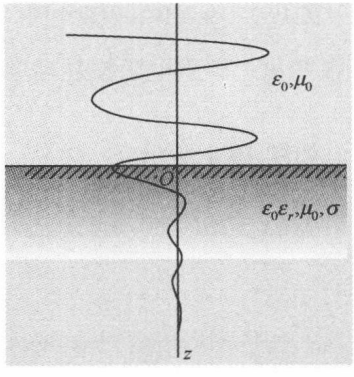



图 19-6 电磁波入射有耗介质

（1）$\sigma$ 大的材料，一旦波进入后必然损耗很大；**但是** $\sigma$ 越大的材料，波越难进入。

（2）$\sigma$ 小的材料，电磁损耗虽小，但又有易让波进入的优点。

概括起来：对于具体的 $\varepsilon_0\varepsilon_r$，$\mu_0$，$\sigma$ 系统，在 $\omega$ 一定时，必存在 Optimum $\sigma$，使它功率达到最大。

特别指出：当 $\sigma$ 极大（理想情况是 $\sigma\to\infty$）不让电磁波进入的特性称为“**电磁屏散**”。

3）*把电磁波放在“屏散体”内*

相传 Einstein 有这样一则故事：一位青年告诉 Einstein，他发明一种液体，任何物质都能被它腐蚀掉，Einstein 幽默地问道：那非常好。不过，先生，你发明的液体放在哪里呢？

看来，大科学家 Einstein 确实非常机警，当然“智者千虑，必有一失”。Einstein 嘲笑的那位青年学者这类事情并不是无法解决，因为它可以“悬空”，什么物体也不接触。例如，磁流体发电中的 Plasma，温度高达几十至上百万摄氏度。应该说，碰到什么物质都会被“消融”。然而，依靠磁场的约束，它可以处在“悬空”状态，如图 19-7 所示。

回到我们的问题来，电磁波在波导中也处于**类似状态**，波一旦进入波导壁内损耗将是很大的，但是由于 $\sigma$ 很大，波几乎不能进入壁内，电磁波在波导中来回反射，相当于海鸥在海面上——擦翼而过，连翅膀都没有弄潮。

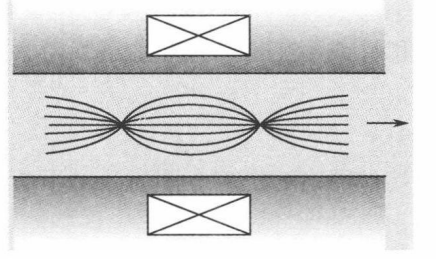


图 19-7　磁流体发电

于是，在波导内要全吸收电磁波（见图 19-8），并不是 $\sigma$ 越大越好，而是要求

$$z=z_0 \tag{19-3}$$

这就是特性阻抗的概念，如图 19-9 所示。

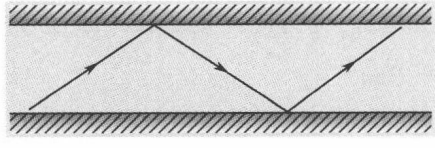


图 19-8　电磁波导

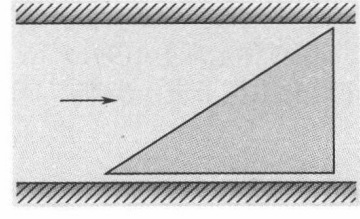


图 19-9　全吸收负载

引入电磁损耗之后，本征模的正交性消失了，微波器件也出现了很多实际问题。“损耗”增加了理论的难度，但是损耗又十分重要。因此，研究“有耗电磁学”是当前较为实际的课题。

**3．无耗对称性**

在电磁问题中，有可能出现下面几种对称性：

（1）几何对称性，也就是称对称或局部对称网络。

若端口 $i$ 和端口 $j$ 处于几何对称，则散射参数有

$$S_{ii}=S_{jj} \tag{19-4}$$

（2）媒质对称性，也称为电磁互易对称性。

若媒质（或网络）互易，则有

$$[S]=[S]^{\mathrm{T}} \tag{19-5}$$

需要再一次强调：这一种对称性来自**电磁特性**。

（3）无耗对称性，是本文讨论的主要性质

$$[S]^{-1}=[S]^{+} \tag{19-6}$$

其中，$[\quad]^{+}=[\quad^{*}]^{\mathrm{T}}=([\quad]^{\mathrm{T}})^{*}$，是 Hermite 符号。

我们把无耗放在一种对称性或不变性的立点上进行考察，就会更好地观察和理解很多问题。

【广义模对称定理】（1991）

这个定理的思想来自二端口网络的推广。因为，对于二端口无耗网络，总有

$$|S_{11}|=|S_{22}| \tag{19-7}$$

如果把任意端口的无耗互易网络写成[S]的分块矩阵，即

$$[S]=\begin{bmatrix} S_{\mathrm{I\,I}} & S_{\mathrm{I\,II}} \\ S_{\mathrm{II\,I}} & S_{\mathrm{II\,II}} \end{bmatrix} \tag{19-8}$$

则有

$$|\det S_{\mathrm{I\,I}}|=|\det S_{\mathrm{II\,II}}| \tag{19-9}$$

【推广模对称定理】（1991）

林守远先生作了进一步推广，认为只需 $S_{\mathrm{I\,II}}$ 和 $S_{\mathrm{II\,I}}$ 为方阵，则还有（似互易性）

$$|\det S_{\mathrm{II\,I}}|=|\det S_{\mathrm{II\,I}}| \tag{19-10}$$

【幅角定理】（1994）

若令

$$\det(S)=\exp(\mathrm{j}\varphi_D)$$

且用定母 $a,b=\mathrm{I},\mathrm{II}$。则对于方阵 $S_{ab}$ 及代数余子式 $M_{ab}$ 有

$$\arg[\det(S_{ab})]+\arg(M_{ab})=\varphi_b \quad (a,b=\mathrm{I},\mathrm{II}) \tag{19-11}$$

幅角定理的重要性之一是它结束了很长时间以来一个不正确的猜测，如表 19-1 所示。

表 19-1　$N$ 口网络 det（$S$）的一个猜测

| | | |
|---|---|---|
| 单口网络 | | $\arg[\det(S)]=\varphi_{11}$ |
| 双口网络 | | $\arg[\det(S)=\varphi_{11}+\varphi_{22}$ |
| 猜测？ | 三口网络 | $\arg[\det(S)]=\varphi_{11}+\varphi_{22}+\varphi_{33}$ |
| | $N$ 口网络 | $\arg[\det(S)]=\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ii}$ |

事实证明上述猜测是不正确的，以三口网络为例，据式（19-11）有

$$\begin{aligned}\arg[\det(S)]&=\varphi_{11}+\arg(S_{22}S_{23}-S_{23}S_{32})\\&=\varphi_{11}+\varphi_{22}+\varphi_{33}+\arg\left(1-\frac{S_{23}S_{32}}{S_{22}S_{33}}\right)\end{aligned} \tag{19-12}$$

【无耗网络全匹配定理】（1991）

定义：对于 $N$ 口网络，若有

$$S_{ii}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{19-13}$$

称此网络全匹配。

无耗网络全匹配定理提出：任何端口无耗网络都有可能实现全匹配，除了 $n$=1 和 3 不匹配。

尽管，我们对于 $n$=3 端口进行了深入的研究，但至今仍不能很好地解释 $n$=3 究竟有什么特殊性？这很值得探索。

【无耗网络伴谬】

近年来，有若干学者企图证明无耗网络必然互易。当然，这个结论显然是不对的。为此，我们专门作文（1992）给予讨论[4]。

互易伴谬

采用无耗特性直接获得网络互易的所谓“证明”很多，这里仅介绍其中较简单的一种。

已知散射矩阵[$S$]与阻抗矩阵[$Z$]的关系[1]

$$[S]=([Z]-[I])([Z]+[I])^{-1} \tag{19-14}$$

其中，[$I$]表示单位矩阵，角标上的−1 表示求逆。若对两边取+（也称 Hermite 符号，表示矩阵的转置共轭），则还有

$$[S]^{+}=([Z]^{+}+[I])^{-1}([Z]^{+}-[I]) \tag{19-15}$$

由网络无耗的么正特性可知

$$[S]^{+}[S]=[I] \tag{19-16}$$

具体是

$$([Z]^{+}+[I])^{-1}([Z]^{+}-[I])([Z]-[I])([Z]+[I])^{-1}=[I] \tag{19-17}$$

等式两边分别左乘$([Z]^{+}+[I])$和右乘$([Z]+[I])$，并展开，可得

$$[Z]+[Z]^{+}=0 \tag{19-18}$$

如果设矩阵第 $i$ 行和第 $j$ 列元素是 $Z_{ij}$，且

$$Z_{ij}=R_{ij}+\mathrm{j}X_{ij} \tag{19-19}$$

则可得

$$\begin{cases} R_{ij}+R_{ji}=0 \\ X_{ij}-X_{ji}=0 \end{cases} \tag{19-20}$$

对于无耗网络，阻抗矩阵不应有实部，即

$$R_{ij}=R_{ji}=0 \tag{19-21}$$

则由 $X_{ij}$=$X_{ji}$得到网络互易，进一步又知

$$[S]^{\mathrm{T}}=[S] \tag{19-22}$$

其中，T 表示矩阵转置。

【无耗阻抗矩阵】

在上述互易伴谬的“证明”中，关键错误是认为无耗阻抗矩阵的元素是纯虚数，即必须有 $R_{ij}=R_{ji}=0$。实际上并非如此，从最简单的双端口网络，有[1]

$$\frac{Z_{12}}{Z_{21}}=\frac{S_{12}}{S_{21}} \tag{19-23}$$

当网络无耗内含各向异性媒质时，即 $S_{12}\neq S_{21}$而 $|S_{12}|=|S_{21}|$时，$Z_{12}$和 $Z_{21}$必定存在实部，事实上，只有 $Z_{11}$和 $Z_{22}$才是纯虚数，所以，阻抗矩阵存在实部有两种可能：一种是确实消耗能量，即有耗网络；另一种是非互易无耗网络。后者的电阻矩阵存在反对称性质，即

$$[R]^{\mathrm{T}}=-[R] \tag{19-24}$$

很容易证明：在这种条件下，网络并不消耗能量，换句话，阻抗矩阵存在实部，并不一定是消耗能量的象征。

【无耗网络与互易网络】

前面已经说过：互易网络反映电磁对称性，而无耗网络则反映能量方面的对称性。十分奇妙的是：无耗网络的对称性确实有某种似互易性（注意，并不是真正的互易性）。而且，对于不同的网络参数，还与几何上的对称或反对称性有着深入的关联，一些最新的研究结果列于表 19-2。

表 19-2　网络的互易特性和无耗特性

| 网络参数 | 互易特性 | 无耗特性 |
|---|---|---|
| 散射矩阵[S] | $[S]=[S]^{T}$<br>$S_{ij}=S_{ji}$<br>$i\neq j$ | $[S]^{-1}=[S]^{*}$<br>若把[S]写成分块矩阵形式，即<br>$[S]=\begin{bmatrix}S_{\mathrm{I\,I}} & S_{\mathrm{I\,II}}\\ S_{\mathrm{II\,I}} & S_{\mathrm{II\,II}}\end{bmatrix}$<br>且各分块矩阵均为方阵，有<br>$\lvert\det(S_{\mathrm{I\,I}})\rvert=\lvert\det(S_{\mathrm{II\,II}})\rvert$<br>广义对称性[2]<br>$\lvert\det(S_{\mathrm{I\,I}})\rvert=\lvert\det(S_{\mathrm{II\,II}})\rvert$<br>似互易性[3] |
| 传输矩阵[A] | det[A]=1 | 在 2n 端口网络中，有<br>$\lvert\det[A]\rvert=1$　似乎易性[4] |
| 阻抗矩阵[Z]<br>或<br>导纳矩阵[Y] | $[Z]^{T}=[Z]$<br>$[Y]^{T}=[Y]$ | $[R]^{T}=-[R]$　反对称性<br>$[G]^{T}=-[G]$<br>$[X]^{T}=[X]$　似互易性<br>$[B]^{T}=[B]$ |

网络的无耗性质是从能量关系出发的，而网络的互易性质，则是从电磁 Maxwell 方程组关系导出的。这是两个完全不同的独立渠道，因此，不可能期望从其中一种性质会导出另一种性质。

但是，应该注意到：无耗性质中呈现某种似互易性。也就是说：这两种对称性有着奇妙的相近“亲缘关系”。这倒是很值得作进一步的深入研究。

值得指出：通过研究，我们得出十分有意思的结论，无耗对称性（幺正性）散射矩阵有

$$[S]^{+}[S]=[I]$$

其中，[I]是单位矩阵。在阻抗矩阵中可表达为

$$[Z]=-[Z]^{+} \tag{19-25}$$

若[Z]=[R]+j[X]，则可知

$$\begin{cases}[R]^{T}=-[R] & \text{反对称性}\\ [X]^{T}=[X] & \text{似互易性}\end{cases} \tag{19-26}$$

作为很难相信而又真实的结论，阻抗矩阵存在实部[R]有两种可能：一种是确实消耗能量，即有耗网络；另一种是非互易无耗网络，后者的电阻矩阵存在反对称性质。例如，对于简单的双口网络，有

$$\frac{Z_{12}}{Z_{21}}=\frac{S_{12}}{S_{21}} \tag{19-27}$$

当 $S_{12}\neq S_{21}$ 而 $|S_{12}|=|S_{21}|$ 时，$Z_{12}$ 和 $Z_{21}$ 必有实部。

【无耗网络约束定理】（1991）

定义互易网络特征相位

$$\Phi_{ij}=2\varphi_{ij}-\varphi_{ii}-\varphi_{jj} \tag{19-28}$$

那么，无耗互易网络的对称性只与散射参数振幅和特征相位有关，具体是

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}|S_{ij}|^2=1 \qquad j=1,2,\cdots,N\\ \sum\limits_{i=1}^{n}|S_{ik}S_{kj}|\exp[\mathrm{j}(\Phi_{ij}+\Phi_{ik}-\Phi_{kj})]=0\end{cases} \tag{19-29}$$

无耗互易网络的独立变量共有 $\dfrac{N(N+1)}{2}$，它可以由 $\dfrac{1}{2}N(N-1)$ 个内禀自由度和 $N$ 个外禀自由度构成，其中内禀的 $|S_{ij}|$ 和 $\Phi_{ij}$ 可互表示，因此有不同组合，具体如表 19-3 所示。

**表 19-3　$n$ 口无耗互易网络的独立变量**

| 独立变理总数 | 内禀自由度 | | 外禀自由度 | |
|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{N(N+1)}{2}$ | $\lvert S_{ij}\rvert$, $\begin{matrix}i=1,\cdots,N\\ j\neq i\end{matrix}$ | $\dfrac{N(N-1)}{2}$ | $\Phi_{ii}$, $i=1,\cdots,N$ | $N$ |
| | $\Phi_{ij}$, $\begin{matrix}i=1,\cdots,N\\ j\neq i\end{matrix}$ | $\dfrac{N(N-1)}{2}$ | $\Phi_{ii}$, $i=1,\cdots,N$ | $N$ |

双口网络约束（见图 19-10）

$$\begin{cases}|S_{11}|=|S_{22}|\\ \Phi_{12}=\pm\pi\end{cases} \tag{19-30}$$

三口网络约束（见图 19-11）

$$\begin{cases}|S_{11}|+|S_{22}|+|S_{33}|\geqslant 1\\ -|S_{11}|+|S_{22}|+|S_{33}|\leqslant 1\\ |S_{11}|-|S_{22}|+|S_{33}|\leqslant 1\\ |S_{11}|+|S_{22}|-|S_{33}|\leqslant 1\end{cases} \tag{19-31}$$

很明显

$$\min|S_{11}|=\min|S_{22}|=\min|S_{33}|=\frac{1}{3} \tag{19-32}$$

可见无耗三口网络的参数振幅不是自由取的，而是相互有约束域。

但是，值得提出，4 口网络（和大于 4 口网络）的参数约束关系至今不确切。是否有约束？很值得深入研究。

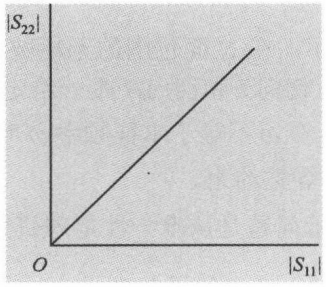



图 19-10　双口网络约束

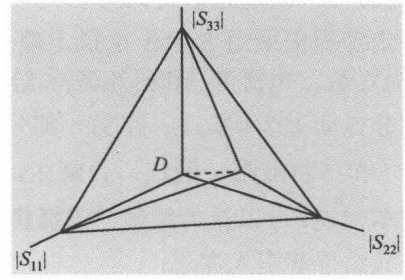



图 19-11　无耗三口网络振幅约束

### 3. 无耗的唯一性定理

唯一性定理是电磁问题的最重要基础。但是，唯一性定理始终存在一个问题，如图 19-12 所示。

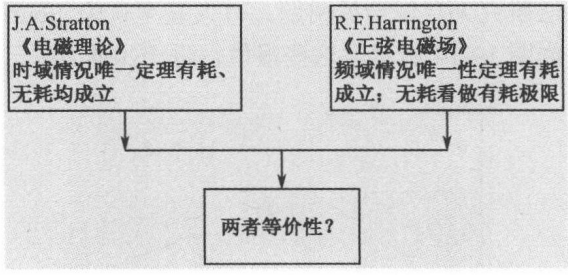



图 19-12　时域和频域的唯一性定理

Harrington 是这么说的："注意，唯一性的证明在无损耗媒质中是不能成立的。在此情况要获得唯一性，**须取有损耗媒质中的耗散趋近于零时相应场的极限**（重点在原著上有）"。

这是一个长期被疏忽的问题。因为逻辑上：趋于零的极限成立，零这一点未必成立，这说明频域情况下，无耗区域的唯一性定理尚未严格证明（见图 19-13）。

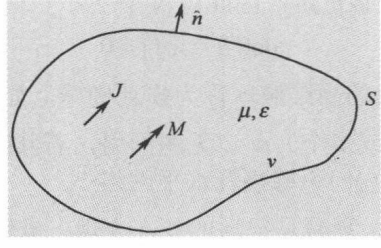



图 19-13　无耗区域的唯一性问题

【无耗唯一性定理】(1993)

本定理提出采用 Foster 电抗定理的差分形式证明了：在 $S$ 面包围的无耗域 $V$ 中，$\mu$和$\varepsilon$ 为实数，电流源 $\bar{J}$和磁流源$\bar{M}$ 给定。则当 $S$ 面上切向 $\bar{E}$和切向$\bar{H}$ 唯一给定，或者在一部分 $S$ 面上为切向 $E$，在另一部分 $S$ 面为切向 $\bar{H}$，在 $\omega$不等于本征频率 $\omega_i$ 时，域 $V$ 内的场 $\bar{E}$和$\bar{H}$ 将被唯一确定；否则在 $\omega=\omega_i$ 时还需加上导数约束。

简单来说，可以认为频域中**谐振情况是个例外**。尽管问题是从唯一性定理研究起的，但是，其结果却引人深思：

- 无耗问题的谐振情况要单独拿出来研究，在微波超导已实现的当前有很大现实意义。
- 谐振无耗情况会产生明显的不稳定，特别是数值计算中已出现，如曹伟的特征模展开法即采用抑制谐振的方法。
- 如何解释时域与频域的等价性？

有人认为时域无法研究无耗域谐振问题。有人甚至认为 Fourier 积分展开中个别分量不唯一是否可能，如图 19-14 所示，这些很值得进一步研究。

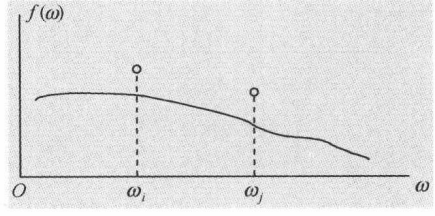



图 19-14　频率谱

**4．损耗和衰减**

从无耗进入有耗的第一个问题是如何定义损耗的大小？网络的损耗与能量相关联。为了从能量研究问题，定义[S]的二次量[E]矩阵

$$[E]=[S]^{+}[S] \tag{19-33}$$

[E]也称为椭球矩阵，它必**正定**，因此可再令

$$\det[E-\lambda_i I]=0 \tag{19-34}$$

$\lambda_1,\lambda_2\cdots$正实本征值组成的高维椭球称为损耗椭球，如图 19-15 所示。

**【定义】**(1994) 两个（或多个）$n$ 口无源网络，若其[E]矩阵所对应的 $n$ 个本征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 完全相等，则称它们为**等损耗**水平网络[9]。

损耗是衰减的内在本质，衰减是损耗的外在表现。虽然一般来说，损耗大的表现出的衰减也大，但在有些特殊情况下，不尽一致。

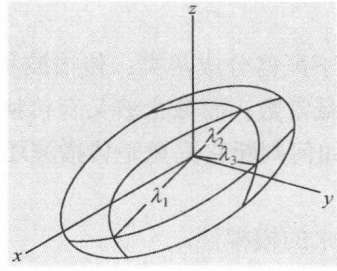



图 19-15　高维损耗椭球

唐家明（1993）首先发现的多端口技术系统中，各端接无耗短路器，而在输入端有反射系统$|\Gamma|$模很小的情况[10]。并称为奇异现象。

仔细研究表明：这种奇异现象正是由于损耗和衰减不一致而造成的，例如，考察一双口**极小**损耗网络，端口 2 短路，即$\Gamma_L=-1$，考察端口 1 的输入反射系数。

$$\Gamma=\frac{S_{11}-S_D\Gamma_L}{1-S_{22}\Gamma_L}=\frac{S_{11}+S_D}{1+S_{22}}$$

假设

$$\begin{cases}|S_{11}|^2+|S_{12}|^2=1-\Delta\\ |S_{22}|^2+|S_{12}|^2=1-\delta\end{cases}$$

易导出

$$\Gamma=\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1+\varphi_{22})}\left[\frac{1+|S_{22}|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_{22}}+\eta}{1+|S_{22}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{22}}|}\right]\tag{19-35}$$

其中，当$|S_{22}|\to 1$，$\varphi_{22}=\pm\pi$时

$$\eta\approx-\Delta\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}\tag{19-36}$$

对于上述情况，有可能使$|\Gamma|$模很小。这相当于吸收式谐振腔。但是，对于损耗小而表现衰减大的条件还有很多深入的问题有待探讨和研究。

5．有耗的模糊性

从信息获取的角度来看，无耗向有耗的转换往往使**损耗“吃掉”了部分信息**。

隐身目标是一个典型的例子，利用对雷达回波的吸收使地面观察不到目标。

我们在研究逆问题时已经发现，深层的地层情况由于损耗的影响，使信息损失很难研究。可以说，损耗是逆散射问题中的一个难关[11-13]。

黄志洵（1998）在研究有损耗截止波导时得出，波不仅有截止造成的雕落，而且也

有传播。他作了量子类比[14]。

现在的问题是在无耗情况下严格分成两类：传播波和截止波。

在有损耗时：传播波有衰减常数；而截止波又有传播常数。当我们发现既有传播常数，又有衰减常数的一个波，如何判断它究竟是传播波还是截止滤？显然问题变得模糊化了。

凡此种种，也就是有耗带来的模糊性。

**6．有耗的稳定性**

稳定性理论表明：损耗机制是稳定的必要条件。有很多情况下无耗问题往往引起强烈的不稳定。最典型的例子是三口网络的广义匹配[15]。

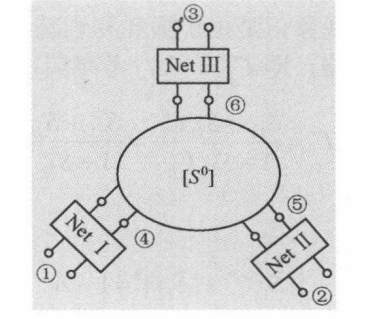



图 19-16　三口网络的广义匹配

得到全匹配的条件是

$$\begin{cases} S_{22}^{(1)*} = \dfrac{(S_{11}^0 - \Delta_{33}^0 S_{22}^{(2)} - \Delta_{22}^0 S_{22}^{(3)} + S_D^0 S_{22}^{(2)} S_{22}^{(3)})}{(1 - S_{22}^0 S_{22}^{(2)} - S_{33}^0 S_{22}^{(3)} + \Delta_{11}^0 S_{22}^{(2)} S_{22}^{(3)})} \\ S_{22}^{(2)*} = \dfrac{(S_{22}^0 - \Delta_{33}^0 S_{22}^{(1)} - \Delta_{11}^0 S_{22}^{(3)} + S_D^0 S_{22}^{(1)} S_{22}^{(3)})}{(1 - S_{22}^0 S_{22}^{(1)} - S_{33}^0 S_{22}^{(3)} + \Delta_{22}^0 S_{22}^{(1)} S_{22}^{(3)})} \\ S_{33}^{(2)*} = \dfrac{(S_{33}^0 - \Delta_{22}^0 S_{22}^{(1)} - \Delta_{11}^0 S_{22}^{(2)} + S_D^0 S_{22}^{(1)} S_{22}^{(2)})}{(1 - S_{22}^0 S_{22}^{(1)} - S_{33}^0 S_{22}^{(2)} + \Delta_{33}^0 S_{22}^{(1)} S_{22}^{(2)})} \end{cases} \tag{19-37}$$

反复计算表明：$[S^0]$在无耗和小损耗时都会产生，但无论如何接近不了最优点，只有损耗到达一定水平时，才使问题变得稳定。

这类问题在实际中经常遇到。例如，理想的功率分配器常常要加损耗电阻（或损耗机制）才能达到。

**7．有耗不等式**

从无耗到有耗以对称的角度来看，是由无耗对称变成**对称破缺**（Symmetrical Broken）。

很自然的，数学上也由等式约束转化为不等式约束。

能量约束规定，在有耗时

$$[a]^{+}\{[I]-[S]^{+}[S]\}[a]>0 \tag{19-38}$$

令　$[H]=[I]-[S]^{+}[S]$

则$[H]$必为正定矩阵，有

$$\begin{aligned}&\det[h_{ij}]_{k\times k}>0\\&k=1,2,\cdots,n\end{aligned} \tag{19-39}$$

【有耗网络相位关系不等式】(1985) [16]

$$\Phi_{12}=\varphi_{12}+\varphi_{21}-\varphi_{11}-\varphi_{22}$$　　为特征相位

则双口有耗网络的$\Phi_{12}$取值范围

$$\Phi_{12}>\pi-\delta \text{ 或 } \Phi_{12}<-(\pi-\delta) \tag{19-40}$$

其中，

$$\cos\delta=\frac{|S_{11}|^2|S_{12}|^2+|S_{21}|^2|S_{22}|^2-[1-(|S_{11}|^2+|S_{21}|^2)][1-(|S_{12}|^2+|S_{22}|^2)]}{2|S_{11}||S_{12}||S_{21}||S_{22}|} \tag{19-41}$$

具体如图 19-17 所示。

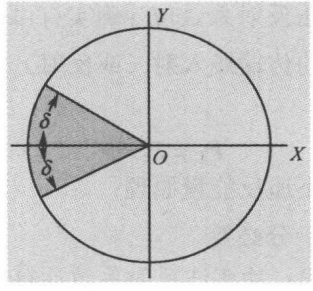


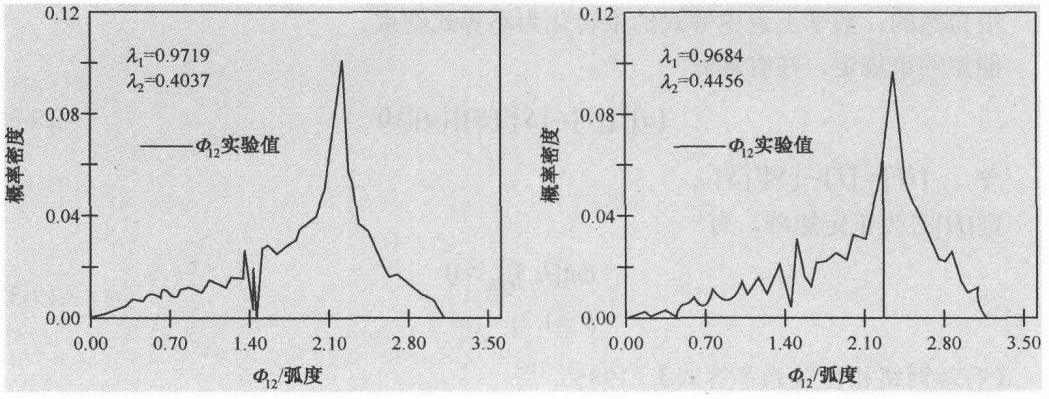

图 19-17　$\Phi_{12}$ 的取值域

【有耗网络 $S$ 参数特征相位的统计约束】(1994)

研究两个有等损耗水平$(\lambda_1,\lambda_2)$的双口网络，可能取域各点的特征相位是[17]：

$$\Phi_{12}=\cos^{-1}\left[-1+\frac{[(\lambda_1+\lambda_2)/2-r^2\sin^2\theta(\cos\varphi\sin\varphi)^2/2]^2-\lambda_1\lambda_2}{[(\lambda_1+\lambda_2)-r^2\sin^2\theta]r^2\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi}\right] \tag{19-42}$$

画出特征相位统计分布有明显的尖峰——这峰处于$\delta$阴影的边沿，可以这样说：特征相位$\Phi_{12}$容易出现在取值域的两侧，如图 19-18 所示实验也支持这一论点。




Moe Wind & Harold Rapaport 实验
网络特征相位 $\Phi_{12}$ 的统计分布

Pieterse & Versnel 实验
网络特征相位 $\Phi_{12}$ 的统计分布

图 19-18 $\Phi_{12}$ 统计分布

**8．有耗伴谬性**

和无耗情况类似，有耗也出现了一种伴谬——即有耗传输线的电压反射系数$|\Gamma|$允许大于 1。

这个问题早在 1953 年，Barllow 和 Cullen 已经提出截止传输线的反射系数有可能大于 1[18]。而后黄志洵先生又作了深入的研究[19]。

我们的工作表明[20]：（1985）

（1）有耗传输线定义的电压反射系数$|\Gamma|$确实有可能大于 1；

（2）原因来自复特性阻抗的传输线入射（或反射）电压波与反射（或入射）电流波之间有实功率交换，即

$$P_L \neq P^+ - P^- \tag{19-43}$$

（3）电压反射系数$|\Gamma|>1$不违反能量原理；

（4）引出功率波反射系数十分必要。

但是，正如黄志洵先生指出：功率波反射系数计算和圆图理论远未成熟，很值得继续研究。

**9．有耗特征量和无耗特征量**

电磁问题中，特征量因为其重要性和计算稳定而备受学者关注。大家往往把特征量配成对在复数域中出现。

$$\begin{cases} Z = R + \mathrm{j}X \\ Y = G + \mathrm{j}B \\ \gamma = \alpha + \mathrm{j}\beta \\ \tilde{\omega} = \omega\left(1 + \mathrm{j}\dfrac{1}{2Q}\right) \end{cases} \tag{19-44}$$

其中，$Z$，$Y$，$\gamma$ 和 $\tilde{\omega}$ 均是复特征量，前三个公式中实部是有耗特征量，虚部是无耗特征量，第四个公式恰好反之。但是它们的共同特点都是把有耗、无耗特征量共处于复特征量之中。

电感增量法首先提出：能否用一个特征量的增量求出另一个特征量的崭新思想。

我们进一步发挥这一思想，作了一系列的推广和研究，其中比较突出的是提出用频率增量法计算开腔镜面 $Q$ 值[21]（1992）。

已知开腔谐振频率（见图 19-19）

$$f=\frac{C}{2D}\left[q+1-\frac{1}{\pi}\cos^{-1}\left(1-\frac{D}{R}\right)-\frac{1}{2\pi kR}\right] \tag{19-45}$$

频率增量法

$$Q_c=-\frac{f}{2\delta_c}\cdot\frac{1}{\partial f/\partial D} \tag{19-46}$$

即可知

$$Q_c=\frac{D}{2\delta_c}\cdot\frac{\left(1-\dfrac{1}{2k^2RD}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{k\sqrt{D(2R-D)}}\right)} \tag{19-47}$$

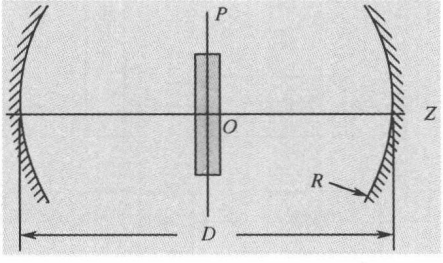



图 19-19　电磁开腔

并且，利用保角变换的复位思想，在求得特征阻抗 $Z_0$ 的同时给出了衰减常数 $\alpha$[22]（1992）。

$$\alpha=\frac{R_s\sqrt{\varepsilon_r}}{119.904\ln(r_2/r_1)} \tag{19-48}$$

由此求出了椭圆同轴线，偏心同轴线和不等径双导线的衰减常数 $\alpha$。

关于对偶特征量的计算方法研究，我们正在作进一步的探索。

**10．两种对称性**

在电磁问题中，内积表示一种广义的作用。它可以是源和源的作用，场和场的作用，也可以是场和源的作用，在 R. F. Harrington《正弦电磁场》中把它称为 Reaction，也译

为反应。我们用 Dirac 内积符号表示

$$\langle a,b\rangle \tag{19-49}$$

这里讨论的是进一步“广义内积”，不受 Hilbert 内积空间定义的限制，即

$$\langle a,a\rangle = \| a \|^2 \tag{19-50}$$

的赋范性质可以不符合，这时有两种对称性：

（1）Hermite 对称

$$\langle u,v\rangle_{\mathrm{h}} = \langle v,u\rangle_{\mathrm{h}}^{*} \tag{19-51}$$

它符合 Hilbert 内积。

（2）一般对称

$$\langle u,v\rangle_{\mathrm{s}} = \langle v,u\rangle_{\mathrm{s}} \tag{19-52}$$

不满足 Hilbert 内积。

当 $u$，$v$ 为实空间时两种对称性完全统一，提出两种对称性是有耗问题之必须，有关系如图 19-20 所示。

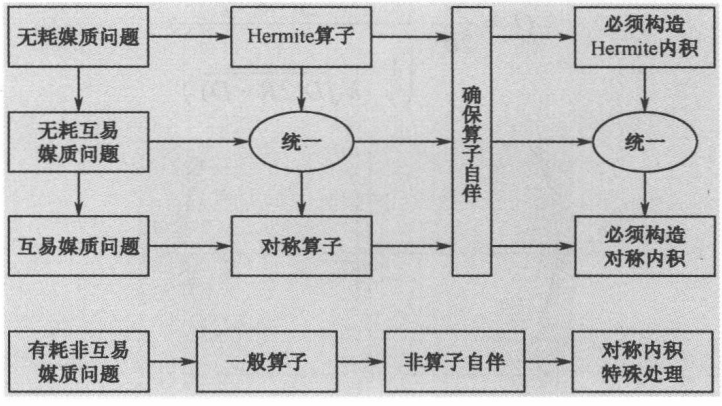



图 19-20　媒质、算子、内积三者之间的关系

现在的问题是当无耗互易时一般对称和 Hermite 对称如何统一？当无耗对称性转化为有耗对称破缺时，出现另一种对称，怎么作物理解释？对称内积的泛函空间数学基础也值得深入研究。

**11．有耗变分的最小作用量原理**

定义电磁场 Lagrange 量为

$$\begin{aligned} L = \int_v \Big( \frac{1}{2} \{ & \vec{E}^a(\vec{r},-t)\cdot\hat{\varepsilon}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{H}^a(\vec{r},-t)\cdot\hat{\mu}(\vec{r},t)\cdot\vec{H}(\vec{r},t) \\ & - \hat{A}^a(\vec{r},-t)\cdot\vec{J}(\vec{t},t)A(\vec{r},t)\cdot\vec{J}^a(\vec{r},t) - \rho^a(\vec{r},-t)\Phi(\vec{r},t) - \rho^a(\vec{r},t)\Phi^a(\vec{r},-t)\} \Big) \mathrm{d}v \end{aligned} \tag{19-53}$$

其中，

$$\vec{H}(\vec{r},t)=\frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}(\vec{r},t)$$

$$E(r,t)=-\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}-\nabla\varphi(\vec{r},t)$$

$$\vec{H}^a(\vec{r},t)=\frac{1}{u^a}\nabla\times\vec{A}^a(\vec{r},t)$$

$$\vec{E}^a(\vec{r},t)=-\frac{\partial\vec{A}^a(\vec{r},t)}{\partial t}-\nabla\varphi^a(\vec{r},t)$$

与日本学者 1980 年的工作不同，这里的 Lagrange 量中出现 a-伴随场，是伴随场的本构参数。

| |
|---|
| 无耗媒质 $\hat{\varepsilon}^+(t)=\hat{\varepsilon}(t)$<br>$\hat{\mu}^+(t)=\hat{\mu}(t)$<br>且不随时间变化 |
| 互易媒质 $\hat{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(t)=\hat{\varepsilon}(-t)$<br>$\hat{\mu}^{\mathrm{T}}(t)=\hat{\mu}(-t)$ |

由达朗倍尔方程对称性，可知在**同一媒质**

$$\begin{cases}\vec{A}(\vec{r},-t)\leftrightarrow-\vec{A}(\vec{r},t)\\ \vec{J}'(\vec{r},-t)\leftrightarrow-\vec{J}'(\vec{r},t)\\ \Phi'(\vec{r},-t)\leftrightarrow-\Phi'(\vec{r},t)\\ \rho(\vec{r},-t)\leftrightarrow-\rho(\vec{r},t)\\ \vec{E}'(\vec{r},-t)\leftrightarrow-\vec{E}(\vec{r},t)\\ \vec{H}'(\vec{r},-t)\leftrightarrow-\vec{H}'(\vec{r},t)\end{cases}\tag{19-54}$$

即可推广到有耗领域，并证明与 Maxwell 方程组相容。

这一工作正在深入进行，对于伴随场的思想与物理意义值得深入研究。

## 3　四维 Minkovski 空间和 $\overline{\overline{L}}_6$

四维 Minkovski 空间是 Einstein 狭义相对论的最大成果之一。

1950 年，Einstein 提出了两条原理。

（1）相对性原理：任何惯性系中物理定律的形式保持不变。

（2）光速不变原理：真空中的光速相对于任何惯性系，任何方向均恒为 $\vec{C}$，且与光

源运动无关。

研究科学哲学的学者，常常把上面第二条称之为**绝对原理**，即 Einstein 的超前思想在于把相对性和绝对性有机地揉合为一体，引出了四维协变条件，而 Minkovski 则具体给出了矩阵协变条件：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ \mathrm{j}ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \dfrac{\mathrm{j}\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \dfrac{-\mathrm{j}\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \mathrm{j}ct \end{bmatrix} \tag{19-55}$$

式（19-56）假定在 $x$ 和 $x'$方向运动并不失一般性，且

$$\beta = \frac{v}{c} \tag{19-56}$$

而变换矩阵，统称为 Lorentz 变换。

Minkovski 不仅给出了矩阵形式，更重要的是指出狭义相对论的空间框架——四维空间框架，若（$x$，$y$，$z$）是通常的三维空间，那么（$x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$）即在三维空间基础上把 $\mathrm{j}ct$ 看做第四坐标，这就是 Minkovski 空间。

空间的主要含义在于：

（1）所有物理量都可以归结为四维空间的标量、向量和张量；

（2）所有物理量在四维空间都是 Lorentz 规范下不变的。

值得指出，有些物理量在原（$x$，$y$，$z$）三维空间是标量，而在四维空间则是向量下的第四分量，如电荷密度$\rho$。

| 四维空间向量 |
| --- |
| $\vec{r}_4 = \begin{bmatrix} \vec{r} \\ \mathrm{j}ct \end{bmatrix}$　$\vec{v} = \begin{bmatrix} \nabla \\ \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{j}ct} \end{bmatrix}$　$\vec{J}_4 = \begin{bmatrix} \vec{J} \\ \mathrm{j}ct \end{bmatrix}$　$\vec{k}_4 = \begin{bmatrix} \vec{k} \\ \mathrm{j}\dfrac{\omega}{c} \end{bmatrix}$ |
| $\vec{r}' = \bar{\bar{L}}\vec{r}_4$　$\nabla'_4 = \bar{\bar{L}}\nabla_4$　$\vec{J}'_4 = \bar{\bar{L}}\vec{J}_4$　$\vec{k}'_4 = \bar{\bar{L}}\vec{k}_4$ |

电荷连续性方程

$$\left[\nabla^{\mathrm{T}}, \frac{\partial}{\partial \mathrm{j}ct}\right]\begin{bmatrix} \vec{J} \\ \mathrm{j}ct \end{bmatrix}$$

$$\nabla_4 \cdot \vec{J}_4 = 0$$

Maxwell 方程

$$\bar{\bar{E}} = \begin{bmatrix} 0 & -E_z & E_y \\ E_z & 0 & -E_x \\ -E_y & E_x & 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{\bar{H}} = \begin{bmatrix} 0 & -H_z & H_y \\ H_z & 0 & -H_x \\ -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{E}}\bar{\bar{B}} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{E}} & \mathrm{j}c\vec{B} \\ \mathrm{j}c\vec{B}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{\bar{H}}\bar{\bar{D}} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{H}} & \mathrm{j}c\vec{D} \\ -\mathrm{j}c\vec{D}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$$

现有

$$\nabla \cdot \bar{\bar{E}} = \nabla \times \vec{E}, \qquad \nabla \cdot \bar{\bar{H}} = \nabla \times \vec{H}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla_4 \cdot \bar{\bar{E}}\bar{\bar{B}} = 0 \\ &\nabla_4 \cdot \bar{\bar{H}}\bar{\bar{D}} = \vec{J}_4 \end{aligned}}$$

能量—动量方程

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{S} + \dfrac{\partial W}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \bar{\bar{\Phi}} + \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

引入

$$\bar{\bar{P}} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{\Phi}} & -\mathrm{j}\dfrac{\vec{S}}{C} \\ \mathrm{j}c\vec{g}^{\mathrm{T}} & W \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\nabla_4 \cdot \bar{\bar{P}} = 0}$$

作为例子，我们可以用四维空间概念导出运动边界（见图 19-21）条件。

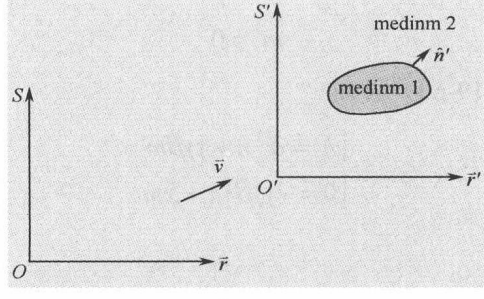



图 19-21　运动边界

在 $S'$系（相对静止座标系），边界条件是

$$\begin{cases}\hat{n}'\times(\bar{E}'_2-\bar{E}'_1)=\hat{n}'\times\Delta\bar{E}'=0\\ \hat{n}'\times(\bar{B}'_2-\bar{B}'_1)=\hat{n}'\times\Delta\bar{B}'=0\end{cases} \tag{19-57}$$

$$\begin{cases}\hat{n}'\times(\bar{H}'_2-\bar{H}'_1)=\hat{n}'\times\Delta\bar{H}'=\bar{J}'_2\\ \hat{n}'\times(\bar{D}'_2-\bar{D}'_1)=\hat{n}'\times\Delta\bar{D}'=\rho'_s\end{cases} \tag{19-58}$$

引入四维向量

$$\tilde{n}'_4=\begin{bmatrix}\hat{n}'\\ m'\end{bmatrix},\qquad \tilde{n}_4=\begin{bmatrix}\hat{n}\\ m\end{bmatrix} \tag{19-59}$$

其中，$m$ 和 $m'$为待定常数，$\tilde{n}_4$和$\tilde{n}'_4$必满足 Lorentz 变换，即

$$\tilde{n}'_4=\bar{\bar{L}}\tilde{n}_4 \tag{19-60}$$

又可写出

$$\boxed{\begin{aligned}&\tilde{n}'^{\mathrm{T}}\Delta\bar{\bar{E}}\bar{\bar{B}}'=0\\ &\tilde{n}'^{\mathrm{T}}\Delta\bar{\bar{H}}\bar{\bar{D}}'=\bar{J}'_{4s}\end{aligned}} \tag{19-61}$$

其中

$$\Delta\bar{\bar{E}}\bar{\bar{B}}'=\begin{bmatrix}\Delta\bar{E}' & -\mathrm{j}c\Delta\bar{B}'\\ \mathrm{j}c\Delta\bar{B}^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix} \tag{19-62}$$

$$\Delta\bar{\bar{H}}\bar{\bar{D}}'=\begin{bmatrix}\Delta\bar{\bar{H}}' & -\mathrm{j}c\Delta\bar{\bar{D}}'\\ \mathrm{j}c\Delta\bar{D}'^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix} \tag{19-63}$$

$$\bar{J}'_{4S}=\begin{bmatrix}\bar{J}'_S\\ \mathrm{j}c\rho_S\end{bmatrix} \tag{19-64}$$

边界条件表明

$$m'=0 \tag{19-65}$$

代入 Lorentz 不变性式（19-60）可知

$$\begin{cases}\hat{n}'=\bar{\bar{\alpha}}^{\mathrm{T}}\hat{n}+\mathrm{j}\gamma\bar{\beta}m\\ 0=-\mathrm{j}\gamma\bar{\beta}^{\mathrm{T}}\hat{n}+\gamma m\end{cases} \tag{19-66}$$

于是有

$$m=\mathrm{j}\bar{\beta}^{\mathrm{T}}\hat{n} \tag{19-67}$$

由相对性原理，在运动 $S$ 系中边界条件应具有相同形式

$$\begin{cases}\tilde{n}_4^{\mathrm{T}}\Delta\bar{\bar{E}}\bar{\bar{B}}=0\\ \tilde{n}_4^{\mathrm{T}}\Delta\bar{\bar{H}}\bar{\bar{D}}=\vec{J}_{4S}\end{cases}\tag{19-68}$$

或写成向量形式

$$\begin{cases}\tilde{n}\cdot(\vec{E}_2-\vec{E}_1)-(\vec{v},\tilde{n})(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0\\ \tilde{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0\\ \tilde{n}\cdot(\vec{H}_2-\vec{H}_1)+(\vec{v},\tilde{n})(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\vec{J}_S\\ \tilde{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\rho_s\end{cases}\tag{19-69}$$

再一次可知

$$\begin{aligned}\tilde{n}&=\bar{\bar{\alpha}}^{\mathrm{T}}\hat{n}'-\mathrm{j}\gamma\vec{\beta}m=\hat{n}'+\frac{\gamma-1}{\beta^2}\vec{\beta}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\hat{n}'\\ |\tilde{n}|^2&=\tilde{n}^{\mathrm{T}}\tilde{n}=|\hat{n}'|^2+\gamma^2(\vec{\beta}^{\mathrm{T}}\hat{n}')^2\geqslant|\tilde{n}'|^2=1\end{aligned}\tag{19-70}$$

明显看出：除非运动方向与 $\hat{n}'$ 垂直，否则运动 $S$ 系中 $\tilde{n}$ 不再是单位法向矢量 $\hat{n}$ 的长度大于 1。

Einstein 发展的是真空中运动电磁学的狭义相对论，一旦进入媒质，本构关系，四维 Minkovski 空间便遇上了极大的困难。

J. A. Kong 提出了 $\bar{\bar{L}}_6$，如图 19-22 所示。

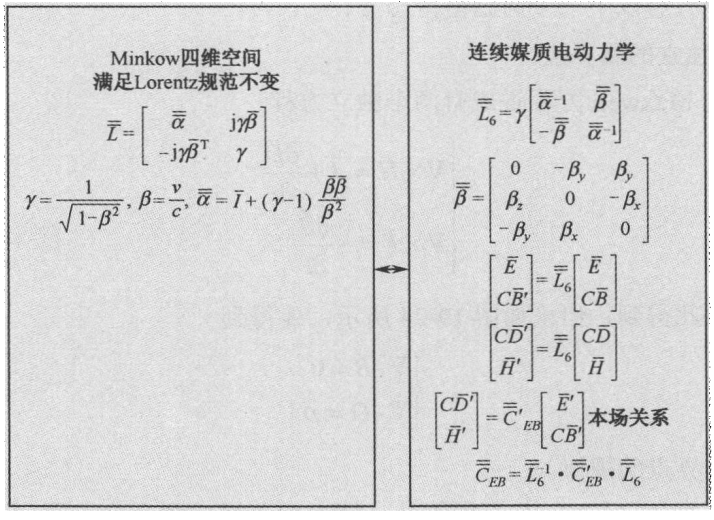



图 19-22　Minkovsui 四维空间和 $\bar{\bar{L}}_6$

$\overline{\overline{L}}_6$ 的引入解决了本构关系的困难，但是带来逻辑上的更大困惑：

- $\overline{\overline{L}}_6$ 究竟是属于四维空间的扩展量？**还是重新定义六维空间？**
- 媒质的引入对于空间的影响？
- 损耗的引入对于空间的影响？

这些问题值得深入研究。

## 4 静场和交变场

这个问题几乎没有人认为是问题，宏观电动力学的规律是 Maxwell 方程组，而静场是变场的极限，换句话说：**静场完全包含**在变场内，如图 19-23 所示。

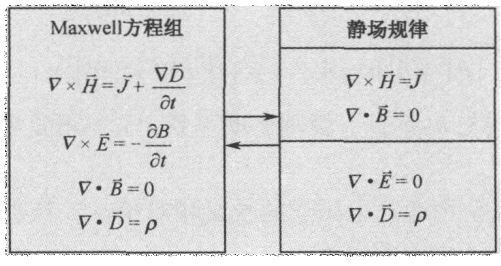



图 19-23 Maxwell 方程组和静场规律

但是深入研究有以下三个问题值得思考。

**1．静场是独立的临界点**

文献中都把 Maxwell 方程说成有两个独立方程

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\end{cases}\tag{19-71}$$

另两个方程可由此得到，但正如图 19-24 所示，要得到

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho\end{cases}\tag{19-72}$$

必须**已知**静场临界点的规律。

由此看来：真正 Maxwell 方程的独立情况应表述成两个独方程+两个初始条件方程，即

$$\begin{cases} \begin{cases} \nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \end{cases} \\ \begin{cases} \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\cdot\vec{D}=r \end{cases} \end{cases}, \quad t=0 \tag{19-73}$$

| 由$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$导出$\nabla\cdot\vec{B}=0$ | 由$\nabla\times\vec{H}=-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$导出$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$ |
|---|---|
| $\nabla\cdot\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{B})=0$<br>$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{B})=0$<br>$\nabla\cdot\vec{B}=f(x,y,z)$ | $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{H})=\nabla\cdot\left(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\equiv 0$<br>$\nabla\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$<br>$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{D}-\rho)=0$<br>$\nabla\cdot\vec{D}-\rho=g(x,y,z)$ |
| 导出结论的前提：<br>已知静态场<br>$\nabla\cdot\vec{B}=0$<br>推广到交变场<br>$\nabla\cdot\vec{B}=0$ | 导出结论的前提：<br>已知静态场<br>$\nabla\cdot\vec{D}-\rho=0$<br>推广到交变场<br>$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$ |

图 19-24　Maxwell 方程组两个独方立程的前提

**2．静电场 $\vec{E}$ 和静磁场 $\vec{H}$ 之间的相互作用？**

所有文献都认为静场的最大特点是电与磁的相对独立，即这种情况下 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 没有相互作用。

但很少有学生注意所导出的 Poynting 定理

$$\oint_S(\vec{E}\times\vec{H})\cdot\hat{n}\mathrm{d}S=-\frac{\partial}{\partial t}\int_v\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2+\frac{1}{2}\mu H^2\right)\mathrm{d}V-\int_v\vec{J}\cdot\vec{E}\mathrm{d}v \tag{19-74}$$

定义

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H} \tag{19-75}$$

Note 到 $\vec{S}$ 的定义与时间无关，即使在静场的条件下 $\vec{E}\times\vec{H}$ 可以构成 $\vec{S}$，即似乎出现了相互作用，如图 19-25 所示。这个观点与实际相悖。

于是我们只能得出结论：**Poynting 定理不适用静场。**

**3．静场与电磁波**

我们知道：交变场产生电磁波，而静场这个临界点没有电磁波。这是量变中的质变。

于是构成两套**并行的**理论体系：

有电磁波存在的——交变场理论；

没有电磁波存在的——静场理论。

这样两套理论的存在，很值得我们深入的研究。

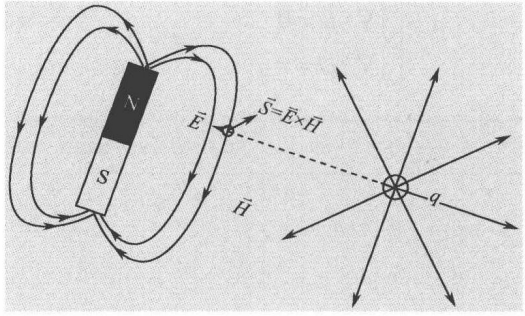



图 19-25　静场情况的 $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ 佯谬

## 5　学科发展的生命在于创新

1980 年，力学界曾出现过关于力学发展的大讨论，有识之士提出：“力学的生命在于创新。”

现在，我们依然可以这样断言：在进入 21 世纪的今天，电磁理论学科发展的生命在于创新。

**1．重视对于电磁理论的特色研究**

很多人喜欢把近年来我国学术界欣欣向荣的局面比喻成“科学的春天”。确实如此，党的“科教兴国”的基本国策吹绿了中华大地，多年来呆滞的思维重新获得了复苏。广大的知识分子和知识界十分珍惜目前民主的形势，为了使我国的科研、教育诸方面有较大、较快的突破，提出了许多新观点。就教材建设而言，大家已不满足于“穿清一色蓝制服”式的统编教材，也不甘心只是步外国后尘的研究方案，而希望逐步创造条件，走自己的路，建立有特色的新教材。在这种情况下，研究国内外学术界的创造性及特点，使之为我服务，发场光大，有着十分重要的现实意义。

另外，应该承认多年来我们忌讳谈学派，事实上也不允许学派的创生和发展。所以，所谓百家争鸣，并不是真正众多学派的百舸争流，充其量也只不过是个别作者、个别观点之间的争论。但是，我国“四化”建设的要求，跨世纪的宏伟规划，都迫切希望有众多的科技流派群或者说学派，出现在共和国的土地上。也唯如此，才能使我们当之无愧地自立于世界之林。

再者，我国学术界的现状是，埋头工作的多，交流的少，评论的则更少。而在文艺界、体育界等领域，评论屡见不鲜。评论者不比演员或导演更高明，而照常可以畅所欲言、评头论足。这种评论无疑促进了文学、艺术和体育的发展。反观学术领域情况则大相径庭，我们又没有或很少创造条件进行思想交流和方法讨论。一般学术会议由于时间仓促，常常只是“成品型的菜肴”往桌上端，宣读论文之后就各奔东西了。这种状况在一定程度上阻碍着我们事业的发展。

综上所述，作为电磁理论工作者开展对国内外电磁理论的特色研究是十分有意义的。这方面工作可以包括：主要著作的特色及作者个性；形成特色的原因探讨及方法论研究；国外电磁理论流派群的形成及活动特点；我们存在的薄弱环节，等等。展开这一领域的研究将使我们从中得到借鉴、对比和启示，由此摸索出一些适合我国的规律。当然，还应看到：我国一些学者在过去困难的条件下，也创出了一些有特色的工作和成果。这些也亟待总结和提高。

很显然，要在一篇短文中概括如此宽广的领域研究是不可能的。加上笔者的见识和水平，很可能挂一漏万。本文的工作仅仅想提出一些问题，探讨几种电磁理论著作的特色形成，以引起共同兴趣的学者注意。

大家知道，国内外电磁理论著作总数不下百种。真可谓千人千面，风格各异。其中有的按电磁学发展历史来阐述（J. D. 克劳斯的《电磁学》（1979），林为干的《电磁场理论》（1984），毕德显的《电磁场理论》（1985），K. H. Ponofsky 的《Classical Electricity and Magnetism》（1995））；有的从普遍的麦克斯韦方程组出发讨论（黄宏嘉的《微波原理》（卷Ⅰ、Ⅱ）（1963），J. A. Stratton 的《Electromagnetic Theory》（1941））；有的循数学坐标系统（直角、柱、球）等来研究（R. F. 哈林登的《正弦电磁场》（1964），W. L. Weeks 的《Electromagneic Theory for Engineering Application》）；有的根据电磁场功能体系（传播，辐射，导波）分类介绍（D. K. Cheng 的《Field and Wave Electromagnetics》（1983），J. A. Kong 的《电磁波理论》（1980））；有的侧重于微观理论（J. D. 杰克逊的《经典电动力学》（上、下）（1976），曹昌祺的《电动力学》（1961））；有的则强调工程应用（Simon 拉姆和 John R. 惠勒的《近代无线电中的场与波》（1958），R. E. 柯林的《导波场论》（1960））。但是，随着时间的推移，始终吸引众多读者兴趣，被广泛应用和学习的为数并不多。研究其原因是多方面的，在这类书的特色形成中，以下几个问题值得注意。

### 2．长期研究与不断实践

很多有特色的名著是作者长期研究反复实践的结晶。以 J. A. Stratton 的《Electromagnetic Theory》为例，出版四十余年而经久不衰，最近我国还要为其出中译本。这本著作不仅立论严谨，内容充实，更重要的是首次构成了工程电磁学的基本框架。伺后大量

书籍竞相效仿，其实不少工作只是它的完善和展开。研究这样一本开创性的著作可以给我们很多启示。容易注意到：本书的一些重要内容，例如，多种坐标系，波动方程的积分解，平面波、柱面波和球面波等重要结构概括了作者很多研究心得。

又如，R. E. 柯林的《导波场论》曾在我国广泛流传。这本出版于 1960 年，其中本征函数论和变分技术等特色脍炙人口。细究起来，此书介绍的各种方法，除了柯林本人的出色工作而外，很大程度上概括了第二次世界大战以来，MIT 的 Lincoln 实验室 Schwinger 和 Macuwitz 等专有的工作。柯林则作了总结。此外，由于柯林长期从事教学，因而此书写得深入浅出，文笔流畅。

**3．求异与创新**

很多代表作均有标新立异的勇气。李政道教授最近曾对中国科大少年班的同学说："最重要的是创造能力，是能带头的，而不是人家带了头，你在后面走。"

J. A. Kong（孔金瓯）的《电磁波理论》首先提出用 KDB 系统来研究各向异性媒质中的电磁波特性，打破了"主系坐标系"的一统天下，使人很受启发，活跃了思路。而 H. C. Chen（陈惠清）的《电磁波理论——无坐标方法》则走得更远，他在研究各种坐标系及并矢、张量线性分析的基础上敢于独辟蹊径，推出一整套无坐标理论，给人耳目一新。他们都有着强烈的创新思想。

林为干新著《电磁场理论》（1984）在论述场与波的基础上，阐述了各种处理方法。在构思上没有把理论问题和计算问题绝然分开，而是有机地结合起来。其中场计算及级数展开等问题颇有新意。

比较各类著作还可发现：对同一类型的问题，各位大师的处理方法往往绝然不同。这里也反映了他们的强烈个性。例如，微波网格在 R. E. 柯林的手中常常是传输型网络，其特点是高阶模的影响归结为电纳 jB，采用的方法是边界模匹配技术；而 R. F. 哈林登则往往应用等效定理构成拼接式的广义网络，求异和创新在这里反映得淋漓尽致。

**4．求同与统一**

一本好的电磁理论著作总有统一的构思，统一的笔法，此外，还常常有统一的方法，若借用文学的语言则是有一条贯串始终的主线。

黄宏嘉所著《微波原理》（卷Ⅰ、Ⅱ）这一特点异常明显。作者在序中既开宗明义地提出用统一的观点，即耦合波理论的观点加以论述。他在全书中不仅教学推导严谨精辟，而且对电磁理论和发展均有立点较高的哲学见解，确属难能可贵。

C. T. Tai（戴振铎）的《并矢格林函数》也是这一方面的典型。作者运用并矢方法和格林函数手段统率全书，前后呼应使其融合成一个整体。反映了作者所追求的统一和完美的目标。

此外，J. A. Kong（孔金瓯）的《电磁波理论》以最一般的媒质——双各向异性媒

质的结构矩阵来统一表述所有媒质，从而大量地采用张量与矩阵运算，显然开辟了另一研究天地。

**5. 发挥与再创造**

对大量司空见惯的概念和方法，著名学者往往“独具慧眼”地加以发挥和再创造，要么深入浅出，要么成了更普遍的工具。

麦克斯韦方程组、库仑定律常常都说是由实验得来的，而 D. K. Cheng（郑钧）的《电磁场与波》却更深地认识到是从感性到理性飞跃的科学假设。作者以库仑定律试问读者：如果真是实验所得，为什么不写 2.000 001 或 1.999 999？这一鞭辟入里的叙述，使大家科学结构体系有了更上一层楼的感觉。值得提出，作者多次强调，一定要把深刻的内容浅显化，而绝不要把浅薄的章节复杂化。这一观点很耐我们深思。

大家熟悉的名著 R. F. 哈林登的《正弦电磁场》，其中反应概念、等效定理和广义网络思想始终贯穿全书。然而我们知道，反应首先是由 Rumsey 提出的，而等效定理则是 Schekunoff 1939 年的论文内容。经哈林登的发挥与再创造，使这两个重要内容发出更耀眼的光辉。值得注意，如果我们寻丝循迹，深入研究，则还能发现反应概念，即相互作用内积<a, b>，对于作者《矩量法》思想的产生和发展有重大的影响。

构成名著特色的原因是多方面的。不过由前面简短讨论可以给我们很多的启示：

- 教学、理论工作不仅需要实践和创造，也需要总结和交流，还需要来自各个方面评论；
- 在电磁理论研究中应特别注意科学方法和科学思想的探讨；
- 应该及时总结我国老一辈科学家的经验和特色；
- 创造适当环境，不定期地讨论国内外学术动向，以及我们自己尚未形成的想法将有助于学术的发展。

## 6 结　　语

基于这样短的篇幅，和本人的学识水平，有不少应该涉及的重要问题这里没有纳入，这是必须指出的，比如黄志洵先生对于“超光速研究”的浓厚兴趣；对于数值分析中的一大类问题，等等。

当前，“春风已绿江南岸”。宽松民主的环境已为我国科技、教育工作者提供了良好的活动舞台。现在已进入新的世纪，我们理应发奋努力，在学术舞台上演出有自己特色的戏剧来。

本文肯定会有很多不妥和谬误之处，也敬请专家学者不吝指正。

# 参考文献

[1] 梁昌洪，邱长兴．无耗网络的几个定理．电子学报，No.3, Vol.19, May. 1991.

[2] 林守远，电子科学学刊，1991，13(6)：637-639.

[3] 史小卫，梁昌洪．无耗网络正性条件的等价表述．电子科学学刊，1994，16(2)：158-162.

[4] 梁昌洪，史小卫．电磁网络的无耗性与互易性．电子科学杂志，1992，19(1)：25-27.

[5] 李润旗．微波网络理论的新进展及其应用．西安电子科技大学博士论文，1991.

[6] Stratton J A, Electromagnetic Theory. New York, Mc Graw-Hill, 1941.

[7] Harrington R F, Time-Harmonic Electromagnetic Fields. New York, Mc Graw-Hill, 1961.

[8] Qingxin Chu & Changhong Liang. The Uniqueness Theorem of Electromagnetic Fields in Lossless Region. IEEE Trans. on AP, Vol. 41, No. 2, Feb. 1993, pp245-246.

[9] 梁昌洪，官伯然．有耗网络 S 参数特征相位的统计约束．电子学报, 1994，22(9).

[10] 唐家明，关于多端口系统中的奇异现象．学术报告，1993.

[11] 崔铁军，梁昌洪．Reconstraction of One Dimensional MultiLayered media by Using a Time Domain Signal Flow Graph Tehnique．Journal of Electronics, 1993，10(2).

[12] 崔铁军，梁昌洪．三维有耗生物体局部逆散射的矩阵摄动理论．通信学报，1994，15(2).

[13] 崔铁军，梁昌洪．Partial Inverse Scatterring Method for Three Dimensional Heterogeneous Biological Bodies by using Matrix perturbation Theory．IEEE Trans. on MTT．1994，42(4).

[14] 黄志洵．截止传输线的量子类比．电子科学学刊，1998.

[15] 梁昌洪，史小卫．多端口网络的广义匹配理论．电子学报，1993，21(12): 17-22.

[16] 梁昌洪．有耗网络 S 参数的相角关系不等式．电子学报，1985，13(1): 1-7.

[17] 梁昌洪，官伯然．有耗网络 S 参数特征相位的统计约束．电子学报，1994，22(9): 88-92.

[18] Barllow & Cullen．微波测量．伍仁 译．北京：科学出版社，1960.

[19] 黄志洵．截止波导理论导论．北京：计量出版社，1981.

[20] 梁昌洪．计算微波．西安：西北电讯工程学院出版社，1985: 80-84.

[21] 夏军，梁昌洪．计算电磁开腔品质因数 Q 的频率增量法．科学通报，1992，3: 278-280.

[22] 梁昌洪，崔铁军．Conformal Transformation Solution for The Attenuation Constant of TEM Transmission Lines．Journal of Electronics, Vol. 9, No. 1, Jan, 1992，9(1): 45-53.

[23] 谢拥军．有耗电磁变分理论及应用．西安电子科技大学硕士论文，1993.

[24] 谢拥军．有耗电磁变分理论及应用．西安电子科技大学博士论文，1996.

札记二十

# 札记教学

只要一提到英国，人们不会不想到牛顿；同样一提到德国（之后又是希特勒“送给”美国），爱因斯坦马上跃进脑海。人才是国家的象征，人才是国家的实力，人才更是国家的宝贝。

我们要办大学教育的主要目的是什么？我们的教师的主要职责是什么？一句话就是要推出人才，推出尖子人才，推出一流人才。我国的伟大学者钱学森晚年依然专注于一个问题：从1949年至今已经过了60多年，为什么我国还没有出现一流人才？

他所提的问题使我们震惊，使我们惭愧，更使我们醒悟。我想：一个国家要出现优秀的一流人才群好比登上珠峰。客观地说，在我们这一代已是不可能。但是，我们可以且应该做的是在周围3 000米，4 000米之处安营扎寨（见图20-1），不管如何，可以使后来的年轻学者的出发点更加靠近顶峰。



图20-1　在珠穆朗玛峰周围安营扎寨

另外，我们必须深入研究先进国家涌现出一流人才群的经验和规律。诚然，人才的出现是可遇不可求的，但是，它又存在可以追踪的线索和特点。作为要向前迈出的第一步或者确实应该把“重视考试”（说得严重一点，已经是“唯考试论”了）彻底改成“重视科学”和“重视人才”。

在20世纪70年代，百事待兴，恢复高考在当时是完全正确的，唯如此才能堵住各种形形色色的“后门”，体现大学的公平与公正。但是，现在30多年已经过去了。我们该重新反思，改进年轻人知识结构，绝不能只培养“考试型人才”了！

这篇札记的讨论焦点直指教师，要完成国家的发展，民族的兴旺，我们教师应该做些什么？能够做些什么？这里简要讨论五条。

## 1 基础在“货”

最近，影视界的一件大事是拍了伟大科学家的传记片《钱学森》。他的子女钱永刚说出了钱学森（见图 20-2）对于科学家提出的最主要两点要求：一是要有**真才实学**；二是要有**献身精神**。

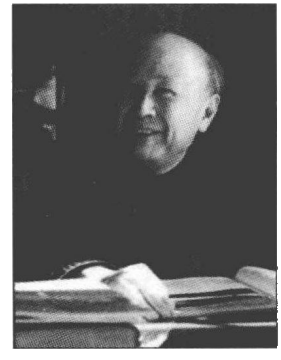


图 20-2 伟大科学家——钱学森

钱学森的话用到这里，就是做一名合格教师最重要的是要有“货”，这个“货”就是真才实学（见图 20-3）。

- “货”——必须**实**，具体地就是务实、踏实和扎实。务实是作风。切记注意不把道听途说、网络流传和凭空想象作为学问的基点。从担任教学任务的一开始就养成一步一个脚印，知之为知之，不知为不知，对于本职工作要有计划，有步骤地认真学习，早日成为行家里手。

踏实是步骤，不放过平时所遇到的一切相关问题。勤思考，做好每一堂课的教案。

扎实是结果，只有肚子里不“虚”了，才可能应付各种不同的场合与人物。作为微

波与电磁场领域，要把 Stratton、R.F.Harrington，R.E.Collin，国内的《微波原理》（黄宏嘉）等名著有计划地学习吸收，补充和改善我们的“学术本质”。市场经济中不可避免的虚实并存绝不要晃花我们的眼神。

- “货”——必须**深**。用老百姓通俗的话就是“人无我有，人有我精，人精我新，人新我变”。做学问中的有和无，深和浅是两种完全不同的质变阶段。当然，深是靠我们努力学习而获得的。举一个简单的例子：同样采用微波网络解决实际问题，R. E. Collin 擅长 MIT 学派，即本征模理论，主模归结为传输线，而高次模则体现为电纳 $j\vec{B}$；而 R. F. Harrington 推出的网络是“边界拼接原则”，即通过有相互作用的边界把不同的两个研究区域结合起来。这两种方法各有千秋且各有特色。那么，我是怎么学习大师的不同理论和不同方法的呢？在实践中我摸索出一种最适用于自己的方法就是找寻一个典型的实际问题，同时采用两种不同特色的网络作出研究，通过自己动手明显感受到慢慢掌握了。对于大师的深度已经是可以看得见，摸得着的。
- “货”——必须**博**。我们对于大师的评价常常用四个字“博大精深”。其中把博放在首位，必有它的含义，要研究和考察一棵树的根部，所挖的“坑”绝对不能太小，否则根本无法看到学术大师盘根错节、根系撒开的壮观局面；同时，要掌握好一种精神，一种思想，一种方法，**比较**是最好的学习手段，而要做到这个比较，必须是博览群书，深刻了解一件事的来龙去脉，发展过程；再者，世界上学科的划分带有强烈的人为干预痕迹。实际上，理、工、文、史、哲，完全是相互交叉，相互渗透的。我常常举克莱因的《古今数学思想（第三册）》单复变函数**眉批**

实域中两个真理之间的最短路程是通过复域。

——Jacques Hadamard

结合美国著名数学家 G. 波尔亚在自己的著作中首次把二维矢量和复数相连

$$(\bar{A}B)=(\vec{A}\cdot\vec{B})+j\{\vec{A}\times\vec{B}\}$$

其中，$\bar{}$ 表示复共轭。也即复数 $A$ 的共轭与复数 $B$ 相乘其实部为 $\vec{A}\cdot\vec{B}$，而虚部则为 $\{\vec{A}\times\vec{B}\}$（不计方向）。十分明显地看出 Hadamard 把复函数上升到了哲学的高度，而且文字之优美不言而喻。

- “货”——在**积累**。前面提及的博大精深，决非一日之功。说到根上去，还是得靠日积月累，一点一滴，不放过任何学习的机会，不错过任何提高的场所。

积累的方式和积累的特点因人而异，但是即便如此，还是有不少共性的东西可以追寻。积累靠脑子记这是不言而喻的，但是千年历史、万里江山绝不是凭脑可以解决问题的。我们可以采用笔记、（书上）眉批、随想札记等形式把看书、学习、科研、教学等

的思想火花，头脑灵现及时捕捉和记录下来，以备后用。有的书由于特别喜好，我不止一次两次反复阅读，反复学习且反复体会。例如，路遥的《早晨从中午开始》，陆健东的《陈寅恪的最后二十年》等都对自己起着不可估量的影响：每当自己疏于要求时，每当自己忙于事务时，每当自己停滞不前时，拿起书就好像这些大师就在自己的对面，惭愧之情不能自已，通过调整马上会使自己精神重新振奋而进入了前进的航道!

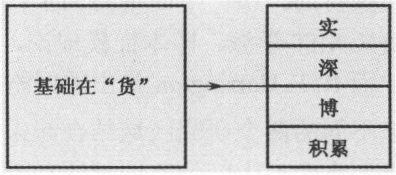



图 20-3 基础在“货”

## 2 关键用“心”

这么多年来，在不同时间、不同场合有不少人问起我的教学体会，我都回答同样一句话——**“用心教学”**。

这四个字看起来十分简单，但是它所包含的内容极为丰富。概括起来，有如下四个方面：

- “心”——**事业心**。

在社会发展的今天，无须违避，每个人工作的目的完全不一样：为工资而工作，为职称而工作，为房子而工作，等等不一而足。但是，只要我们树立起为事业而工作。则每一天的太阳都会显得特别亮，每一天的精神也会更加饱满。因为我们在做一件有益于人类事业的事情。



图 20-4 当代作家路遥

众所周知，路遥是（见图 20-4）我们这个时代不可多得的青年作家。他的名著《人生》和《平凡的世界》，在千千万万读者中引起巨大轰动，并不是因为获得大奖，而是因为触动了各种各样的心灵。

路遥总是把不属于他的沉重担子压在自己肩上。他把写作当成一种神圣而庄严的事业去完成，甚至不惜把自己绑在牺牲的祭坊上，为所生活的时代，为这个时代的人民去讴歌，去呐喊。

他要求自己“对于作家来说，他们的劳动成果不仅要接受当代眼光的评估，还要经受历史眼光的审视。”

路遥在《人生》获得茅盾文学奖的颁奖仪式上，用诗一样的

语言赞美祖国和人民——“我国各民族劳动人民创造的辉煌的历史、壮丽的生活，也用她的乳汁养育了作家艺术家。人民是我们的母亲，生活是艺术的源泉。人民生活的大树万古长青，我们栖息于它的枝头就会情不自禁地为此而歌唱，只有不丧失普通劳动者的感觉，我们才有可能把握社会历史进程的主流，才有可能创造出真正有价值的艺术。”

可以说，任何学派，任何创作方法，都能够产生出不朽的作品——只要作家本人植土民族，思想敏锐且有强烈的事业心，**真正著名作家要靠名著。**

- **“心”——责任心。**

责任是一个十分神圣的名词：家庭责任、单位责任、国家责任。承担责任则意味着即使是千万重担也要一肩扛起。

责任心又是人们跨过艰难险阻的最重要“法宝”。因为有了**责任**，一切困难，一切坎坷，一切不顺和一切冤屈都会用平常心去对待。它是责任的使然，我们要做的就是把所有这些考虑到，所有这些安排好，坚定不移地走向目标。

《西游记》（见图 20-5）是中国家喻户晓的古典文学名著。这里边还是包含很多深刻的哲理。孙悟空辛辛苦苦工作，还经常遭到不少误会甚至是诽谤，但他可以坚持到最后，起主要作用的还是“**责任**”二字。孙悟空在任何时刻都未忘记他的责任是帮助师傅——唐僧去西天取回真经，其他一切都可以忽略和在所不惜。




图 20-5　画本《西游记》和孙悟空

- **“心”——全身心。**

毛泽东说过一句老幼皆知的名言：“**全心全意为人民服务。**”所谓用心教学，一定是全心全意，决不能半心半意，更不能三心二意。简单说来，就是要把整个身心扑上去，尽全力做好这件事。一句话——“对于事业的献身精神。”

前面所说的看似容易，做起来却极为困难，这是因为在我们平常的活动中总有各种各样的因素牵制你，使你不能全身心，不能心无旁骛。办法只有一个，即在整个过程中

保持一颗平常心，正是在这种平常心的状态中，把应该做的事情做得好上加好！

- “心”——最后要落实于“爱心”两字。

爱具有最伟大的力量，它几乎可以起死回生，变废为宝。在爱的感召下，学生们的主观能动性可以获得极大的解放和提升；在爱的关护下，学生们的创造性可爆发出灿烂的火花和耀眼的光芒；在爱的作用下，教和学两个方面相互影响，相互攀升，相互融合，从而跃升到新的高度。爱可以使暂时后进的学生产生新的希望；爱更可以使大部分学生获得学习的内在乐趣；爱可以使优秀的学生释放出无限的创造能力。

用心教学就是要让学生们真切感到事业心、责任心、全身心和对学生的一颗爱心（见图 20-6）。

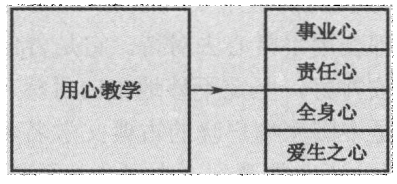



图 20-6 用心教学

## 3 贵在创“新”

当前，在各种不同的场合，不同文献谈创新不可谓不多。很自然我们要问：教学上要不要创新？教学上如何创新？大家所期望的不是抽象的答案，而是要讨论具体的创新。

套用两句常说的话：“创新很重要，但创新很困难。”这是真正的大实话，因为如果真的在不少博士研究生的论文中有四个、五个甚至六个创新点，那么我们国家科学和教学的发展就不会像今天这种局面。研究生所提的创新大多属于小修、小改、小革，这不属于我们的主要讨论范畴。这里的创新自然是要带（哪怕一小部分）**本质的革新**。

- 创新——**思想新**。

创新的第一条是思想新。特别需要提及的是思想新并不意味着复杂，有不少还是在更高的层次上回归“简单”。举一个众所周知的重要例子——笛卡儿（见图 20-7）创立“解析几何”即首次把代数与几何紧密地结合起来。然而，如此高深重大的思想创新却来源于一个最为直观的一个动机——**把几何图形放到坐标系中**（见图 20-8）。

值得我们反思的是：如此“简单”的想法为什么只有笛卡儿想到，而我们绝大多数人都没有想到？

在这种情况下，代数方程 $y=kx+b$ 在几何上表示一条直线。而 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ 在几何上表示一个圆，其中（$x_0, y_0$）是圆心，而 $R$ 是半径。由此代数与几何在真正意义

上实现了**第一次握手**！也是真正的**思想创新**。



图 20-7　伟大的数学家笛卡儿

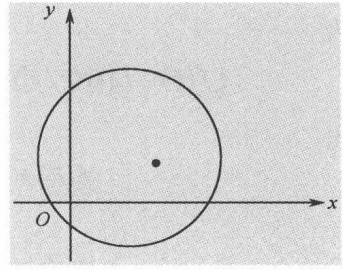



图 20-8　创立解析几何的思想动机——把几何图形放到坐标系中

- 创新——**体系新**。

大家知道，计算机的产生和发展使它迅速和电磁学结合，创立了计算电磁学。这应该是重要的体系创新。由 R. F. Harrington 提倡并完善的“矩量法”（MOM）就是一种典型的体系创新。他根据线性电磁学的关键特点，抓住了把算子方程

$$\mathcal{L}(f)=g \rightarrow [L_{mn}][f]=[g]$$

转化为矩阵方程的过程和理论作为矩量法的核心体系（见图 20-9）。

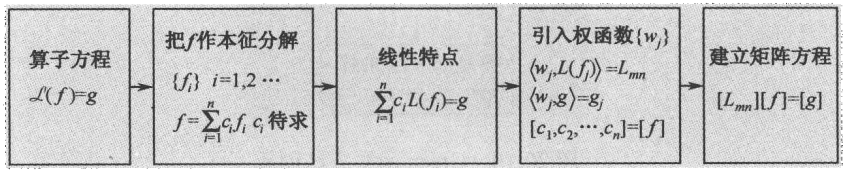



图 20-9　矩量法的核心体系创新

特别重要的是 Harrington 引入 $\delta$ 与函数作为权函数，即点匹配的思想，避开了积分难点而并不影响精度。使 MOM 在务实的道路上大大地迈进了一步。

- 创新——**方法新**。

方法新在创新领域中占很重要的地位。严格说来，方法新与思想新和体系新密不可分，只是比较起来，日常所遇的影响范围不算大的即划为方法新。

我们已经讲述了《矩量法》采用本征展开、权函数点积作出的体系创新。这里再提及 Green 函数法，其对象同样是算子方程 $L(f)=g$，要求出函数 $f(\vec{r})$，我们转化为

$$L\left[G(\vec{r}/\vec{r}')\right]=\delta(\vec{r}/\vec{r}')$$

也称为 Green 方程，它是一种特殊的 $\delta$ 源，满足

$$\left\langle f(\vec{r}')\quad \delta(\vec{r}/\vec{r}')\right\rangle=f(\vec{r})$$

也所谓选择性而 $G(\vec{r}/\vec{r}')$ 即为 Green 函数。

今在原算子方程两边乘 $G(\vec{r}/\vec{r}')$ 并作内积，有

$$\langle G(\vec{r}/\vec{r}') \quad L[f(\vec{r})]\rangle = \langle G(\vec{r}/\vec{r}') \quad g(\vec{r})\rangle$$

进一步为

$$\langle f(\vec{r}) \quad L[G(\vec{r}/\vec{r}')]\rangle = \langle f(\vec{r}) \quad \delta(\vec{r}/\vec{r}')\rangle = f(\vec{r}')$$

于是写出

$$f(\vec{r}') = \langle G(\vec{r}/\vec{r}') \quad g(\vec{r})\rangle$$

或者

$$f(\vec{r}') = \langle G(\vec{r}/\vec{r}') \quad g(\vec{r}')\rangle$$

这就是 Green 函数法求出 $f(\vec{r})$（见图 20-10）。

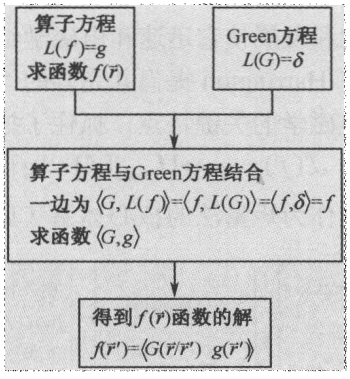



图 20-10 Green 函数方法创新

- 创新——内容新。

内容就是创新中最经常遇到的一种情况，积少成多，集腋成裘，很多学者在研究过程中都可以着力这种创新。

作为典型实例，在《矢算场论札记》中，作者提出了矢量除法——即内容的一种创新。

很容易发现，对于矢量运算中明显缺失乘法的逆运算——矢量除法。

除法的一般提法是：已知两个因子的乘积和其中的一个因子，求另一个因子的运算。例如：

$$uv = w$$

已知积 $w$ 和因子 $u(u \neq 0)$，要求取 $v$ 则可以写出

$$v = \frac{w}{u}$$

（1）矢量叉乘无法定义唯一性除法运算。

矢量的乘法有两种：点乘与叉乘。首先想到的当然是利用叉乘定义除法运算，即

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{d}$$

已知叉积 $\vec{d}$ 和 $\vec{a}$，求 $\vec{b}$。其中，$\vec{a}$、$\vec{b}$ 均为非零矢量，且可写出

$$\begin{cases} a=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k} \\ b=b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k} \\ d=d_x\hat{i}+d_y\hat{j}+d_z\hat{k} \end{cases}$$

利用叉乘法则很易得到——线性方程组

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_x & 0 & a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix}$$

上述方程系数行列式为零，因此无法求出矢量 $\vec{b}$。换句话说，光有叉乘运算还不够。现在，让我们再来看一下这个问题的几何意义。令矢量场 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 处于 $xoy$ 平面，且夹角 $\theta<\pi$，这不失一般性。于是 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向是 z 方向。进一步为了方便。把 $\vec{a}$ 处于和 $x$ 轴正方向一致。由图 20-11 可知，存在无数个 $\vec{b}_i$ 均能得到同样的叉积值。

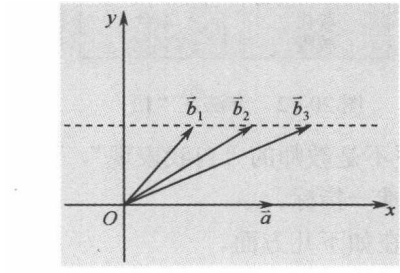



图 20-11　有无数个 $\vec{b}_i$ 可得相同的 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{d}$

（2）由 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 和 $\vec{a}\times\vec{b}$ 获得矢量除法运算。

现在，可以把矢量除法定义如下：

$$\begin{cases} \vec{a}\cdot\vec{b}=c \\ \vec{a}\times\vec{b}=\vec{d} \end{cases}$$

已知点积 $c$ 和叉积 $\vec{d}$ 及非零矢量 $\vec{a}$，求矢量 $\vec{b}$ 的运算可称之为**矢量除法**。

构造

$$\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{b})-\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{a})$$

很易得到

$$\vec{b}=\frac{\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{b})-\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})}{(\vec{a}\cdot\vec{a})}=\frac{\vec{a}c-\vec{a}\times\vec{d}}{(\vec{a}\cdot\vec{a})}$$

这就是矢量除法的内容创新，它不算一件大事，但却证明了：**教学也可以创新。**

## 4 方法在“悟”

历来存在着两种教育思想：一种是老师在上，惟命是从。学老师，听老师，不能超过老师；另一种是把学生作为教学的主要对象，启发学生，引导学生，实现教育平等，教学相长。

这一节标题的“悟”道出了问题的实质，道出了先进教育思想的核心（见图 20-12）。十分清楚，悟是由“忄”旁加“吾”。简单来说就是要求每个学生用自己（吾）的心（忄）在悟教学内容和教学实质。这里把学生作为教学主体，主要矛盾的一方，教师必须也应该“围着学生转”，把主体对象升华到最大高度。

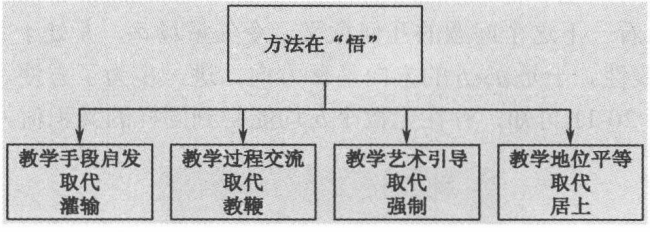



图 20-12 方法在“悟”

教学不是作“大报告”，更不是教师的“自我表现”，而是要把学生凸显出来，他们的学习质量是衡量教学好坏的唯一指标。

这种教学思想可具体表现在如下几方面。

- **用启发取代灌输。**

启发和灌输是两种完全不同的**教学手段**。启发时时刻刻注意学生群体的**内因**。“内因是根据，外因是条件。”形象地说，教学就是要把**“鸡蛋转化为鸡子”**。而另一方面，灌输则是无限突出外因的作用，不论你听不听，听懂听不懂，一定要把你“灌成一根香肠”。看来肠子里边全是肉，实际上根本没有“消化”，过不了多久，就一股脑地还给老师。

- **交流取代教鞭。**

交流和教鞭又是两种完全不同的**教学过程**。交流是一个十分明确的**双向过程**。教师与学生，学生与教师通过频繁的双向交流，相互碰撞，相互提高，擦出闪亮的思想火花；除了老师启发学生而外，学生也反过来启发老师，共同上了学术的新高度；相反以教鞭作为形象的教学，老师把握着教学的指向。这完全是一个**单向过程**，我教你学，我教什么，你就学什么，这样的教学过程必然是一个长期的衰减的过程。用一句通俗的话来说

即“一代不如一代”。

- **引导取代强制。**

文行至此，必然会有人问：难道教师的作用就没有了吗？难道教师就没有主观能动性了吗？否。教师仍有着强有力的作用。引导取代强制正表现出两种完全不同的**教学艺术。**

引导确实属于一种高超的教学艺术。教师在“神不知，鬼不觉”的情况下把学生引导到正确的方向，前沿的方向和发展前景的方向。这里教师起着主导的作用，这个主导不是人为的、行政的或是命令的。而是完全取决于教师的自身学术实力，驾驭能力以及人格魅力；相反对应的另一种强制，它则是“军事的”，命令的和非做不可的。“考，考，考，教师的宝”，年轻人的逆反心理使之最讨厌这种强制手段，且非要“反其道而行之”。

- **平等取代居上。**

平等和居上是两种完全不同的**教学地位**。马克思早就说过：“你们之所以觉得巨人伟大，是因为你们跪着，站起来吧！”但是，一旦学生们都站起来，似乎对于教师确实是一种无形的“威胁”——他们可以议论教师，挑剔教师，否定教师，一句话对于教师提出了更高的要求。这才是最先进的平等教育。

尽管教师的“居上”地位从此失去了，但是只要是一名有为的教师，**他们得到的是全世界。**

## 5　目标是“道”

这里所提出的问题，大家一定感到很奇怪，实际上任何事情都应该提出可操作的明确目标。要求有先进的教学思想，优秀的教学艺术，突出的教学效果，究竟为了什么？这是本节提出的根本目的。

首先讲一个历史故事，话说 51 岁的孔子已是闻名国内的著名学者，门下桃李三千，且“诗，书，礼，乐”，还注“易经”，作“春秋”，确实是学冠天下，但依然郁郁不乐，原因是**还没有得道。**

孔子亲自到“国家图书馆”去求教“馆长”——老子，要求得道**秘诀。**

老子说：“你来了，你的名声已传到我的耳边，人家说你是北国大儒，当代名贤。你应该得道了，是吗？”

孔子答：“没影的事儿，特来请教。”

老子说：“你如何求道的？”

孔子说：“先是从天文数学，探索五年，算日月交合，研五星冲犯，依然未得道。”

老子说：“后来又如何求？”

孔子说："我又从阴阳两学，深入钻研二十年，依然未果。"

老子说："我相信你说的是实情，道——如果能进贡，民间早把它贡给君王了；如果可奉献，儿女早奉给父母了；如果能传播，祖辈早传给子孙了。原因是能够说出的就不是道。"

孔子只好回去，三月不出家门，后再访老子，非常高兴地说："我得道了——喜鹊孵卵，卵生雏鹊。鱼用口孵卵，喷出小鱼……"

事实上，道既复杂，而又十分简单——天然才是道，自然才是道。道就是规律。得道就是符合规律，符合自然。

老子颔首做出了肯定的答案。

我们说教学的目标也是——得道。教学也要符合自然，符合规律。教学先进，教学优秀不是为了评奖，不是为了出名，更不是为刻意挣钱，而是放开胸襟，捂着良心大声宣言——教学应该得道，符合自然，符合规律。

"得道多助，失道寡助"——"得道者得天下。"

以上便是札记教学的全部内容。

# 电磁理论前沿探索札记

## 作者简介



**梁昌洪**，男，1943年12月生于上海，1962年加入中国共产党，1965年本科毕业于西安军事电信工程学院物理系微波专业，1980年8月至1982年8月在美国纽约州Syracuse大学做访问学者，1992年至2002年，任西安电子科技大学校长，2003年获首届高等学校“教学名师”奖。

梁昌洪现为教授、博士生导师，IEEE高级会员，长期从事微波和电磁领域的前沿科学研究，取得了一系列创新性的成果，特别是在计算微波、非线性电磁学、微波网络理论方面的研究尤为突出。梁教授讲授的“微波技术基础”在2003年被评为首届“国家精品课程”，其本人先后获得省部级科技成果奖十余项，在国内外学术期刊上发表主要论文300余篇，已出版《微波网络及其应用》、《从测量数据谈起》、《计算微波》及其典藏版、《孤立子理论及其应用》、《简明微波》、《话说极限》、《话说对称》、《矢算场论札记》、《复变函数札记》、《科学随想录》《科学漫谈录》专著11部，《无坐标法》译著1部。其中百万字著作《简明微波》，获2011年陕西省高校优秀教材一等奖，从使用到出版历时12年，在师生中获得了很好的使用效果，为广大学生所接受，现已被多个院校选为教材或专业参考书，如上海交通大学，华南理工大学，杭州电子科技大学等。实地教学录像约45小时在网上广泛使用，并获得师生一致好评。



**陈曦**(1982–),女,博士，西安电子科技大学讲师。主要研究方向为电磁场理论和电磁新材料及其在天线上的应用研究。

策划编辑：王春宁
责任编辑：曲　昕
封面设计：一克米工作室

ISBN 978-7-121-17705-7
9 787121 177057 >
定价：78.00元