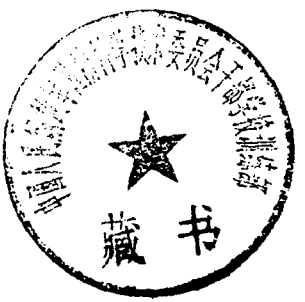
010201

经典电动力学

上


科工委学院802 2 0037390 9

〔美〕J. D. 杰克逊著
朱 培 豫 译



人民教育出版社

内 容 提 要

本书是根据美国 John Wiley & Sons 图书公司 1976 年出版的 J.D. 杰克逊(Jackson)著《经典电动力学》(Classical Electrodynamics)1975 年第二版译出的. 译本分上、下两册出版. 上册主要内容是传统的电磁理论, 包括静电学、静磁学、随时间变化的电磁场、麦克斯韦方程组等, 并应用麦克斯韦方程组讨论了各种宏观电磁现象. 上册第四、六、八等三章曾由戴勉根据原书第一版译出, 后经上海铁道学院朱培豫按原书第二版进行了修改. 其余各章均由朱培豫译出. 全书经河北大学汪镇藩校订加工. 本书责任编辑为汤发宇.

本书可供综合大学和理工科大学物理系高年级学生、研究生和教师以及有关的科学研究工作者参考.

经典电动力学

上 册

(美) J.D. 杰克逊著

朱 培 豫 译

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

武汉市江汉印刷厂印装

开本787×1092 1/32 印张 17.25 字数 445,000

1978年6月第1版 1979年7月湖北第1次印刷

印数00001—20,000

书号 13012·0191 定价 1.40 元

矢量公式

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$

$$\nabla\times\nabla\psi=0$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{a})=0$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{a})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{a})-\nabla^2\mathbf{a}$$

$$\nabla\cdot(\psi\mathbf{a})=\mathbf{a}\cdot\nabla\psi+\psi\nabla\cdot\mathbf{a}$$

$$\nabla\times(\psi\mathbf{a})=\nabla\psi\times\mathbf{a}+\psi\nabla\times\mathbf{a}$$

$$\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}+(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}+\mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{b})+\mathbf{b}\times(\nabla\times\mathbf{a})$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}\cdot(\nabla\times\mathbf{a})-\mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{b})$$

$$\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{b})-\mathbf{b}(\nabla\cdot\mathbf{a})+(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$$

如果 $\mathbf{x}$ 是一点相对于某原点的坐标，其量值为 $r=|\mathbf{x}|$，而 $\mathbf{n}=\mathbf{x}/r$ 为单位矢径，则

$$\nabla\cdot\mathbf{x}=3 \qquad \nabla\times\mathbf{x}=0$$

$$\nabla\cdot\mathbf{n}=\frac{2}{r} \qquad \nabla\times\mathbf{n}=0$$

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{n}=\frac{1}{r}[\mathbf{a}-\mathbf{n}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})]\equiv\frac{\mathbf{a}_\perp}{r}$$

矢 算 定 理

在下列定理中，ϕ、ψ 和 $\mathbf{A}$ 是连续可微标量函数或连续可微矢量函数，V 是三维体积，其体积元为 d^3x，S 是 V 的二维闭合边界曲面，其面积元为 da，da 处的外法线单位矢量为 $\mathbf{n}$.

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,d^3x=\int_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,da \qquad \text{（散度定理）}$$

$$\int_V \nabla\psi\,d^3x=\int_S \psi\mathbf{n}\,da$$

$$\int_V \nabla\times\mathbf{A}\,d^3x=\int_S \mathbf{n}\times\mathbf{A}\,da$$

$$\int_V (\phi\nabla^2\psi+\nabla\phi\cdot\nabla\psi)\,d^3x=\int_S \phi\mathbf{n}\cdot\nabla\psi\,da \qquad \text{（格临第一恒等式）}$$

$$\int_V (\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi)\,d^3x=\int_S (\phi\nabla\psi-\psi\nabla\phi)\cdot\mathbf{n}\,da \qquad \text{（格临定理）}$$

在下列定理中，S 是开曲面，C 是 S 的周边，其线元为 $d\mathbf{l}$. S 的单位法线矢量 $\mathbf{n}$ 是按右手法则由绕 C 的线积分的方向确定的.

$$\int_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}da=\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} \qquad \text{（斯托克斯定理）}$$

$$\int_S \mathbf{n}\times\nabla\psi da=\oint_C \psi d\mathbf{l}$$

序

第一版问世以来的十三年中，我对经典电磁学的兴趣，时而增加，时而减少，但从未降为零．这门学科一直是有生气的，总是有一些重要的新的应用和例证．这一版反映了我在以下两方面的努力：精练和改进第一版中已经阐述过的题材；增加新的课题（并删掉一些课题）．

主要的目的和重点仍如第一版，然而在内容上有广泛的变动和增加．主要增加的内容之一是开头的"绪论"，其中论述了诸如光子质量的目前实验极限值和线性叠加的现状等课题．目的是要概括介绍一些基本知识，这些知识，在人们写下麦克斯韦方程并着手解一些特例时，往往假定已经熟知．本书前半部中其它主要变动包括如下：介绍了一种根据微观描写来推导宏观电磁学方程的新的处理方法；讨论了力学量和电磁学量的对称性；增加了关于磁单极和狄喇克量子化条件这两节；讨论了斯托克斯极化参数；统一地讨论了电介质、导体和等离子体的频率色散特性；讨论了因果性和克喇末-克朗尼格色散关系；论述了信号在色散媒质中传播的经典索末菲-布里渊问题的一种简化而更广泛的方案（最近已从实验上证实）；讨论了谐振腔的一种不常见的例子；论述了波导中任意场按简正模的展开；并且讨论了波导或共振腔中的源所产生的场，以及波导中平面障碍物的透射和反射系数．

把论述简单辐射系统和衍射的第九章加以扩充，使其包括了长波长的散射（例如，蓝天）和光学定理．改进了关于标量衍射和矢量衍射的那几节．

论述狭义相对论的第十一和十二两章几乎完全重写．将含有 $x_4=ict$ 的旧的赝欧几里德度规代之以 $g^{\mu\nu}$（其中 $g^{00}=+1, g^{ii}=-1$，

$i=1,2,3$). 度规的改变，必须使内容全部加以修订，这样就允许用近代实验代替历史悠久的星光光行差和迈克耳孙-莫雷实验，并把这些近代实验看作狭义相对论的实验基础. 其它方面的内容也加以现代化. 把第一版的相对论性运动学的广泛论述改为习题. 代之以讨论电磁场的拉格朗日函数、规范的和对称的胁强-能量张量，以及有质光子的普罗卡-拉格朗日函数.

其余几章中重要的改变包括：增加新的一节论述跃迁辐射；论述了完全修改过的(和非常满意的)关于碰撞中的辐射的半经典处理，重点放在动量转移而不放在碰撞参数；更完善地推导了多极场和它们的源的耦合. 应许多读者要求，在前后衬页上增加了公式汇编和特殊函数的页数索引. 二百七十八道习题中有一百十七道(百分之四十以上)是新的.

论述磁流体动力学和等离子体物理学的那一章内容几乎完全不变. 对此我感到遗憾. 盖因本书篇幅已明显地猛增，又有许多专门论述等离子体或磁流体动力学这门学科的书可供阅读.……

据我看来，这本书比之过去更为完善，但愿每位读者受益和喜爱.

J. D. 杰克逊

1974 年于加利福尼亚州贝克莱城

第一版序

经典电磁理论与经典力学、量子力学共同构成物理专业大学生和研究生受现代理论训练的核心内容．更高等的或更专门化的训练都要求这些课程有充分的基础．

按典型的大学电磁学课程计划，在初等物理学之外，要有两个或三个学期的课程，着重于讲授基本定律、实验室验证及其结果的推敲、电路分析、简单波动现象以及辐射．利用的数学工具包括矢量计算、常系数常微分方程、傅里叶级数、或许还包括傅里叶或拉普拉斯变换、偏微分方程、勒让德多项式以及贝塞耳函数．

通常对低年级研究生讲授两学期的电磁理论课程．我的这本书就是为这门课程而编写的．我讲授研究生电磁学课程至少有三个目的．第一个目的是把基本题材作为统一的整体来阐述，强调电现象和磁现象既在物理基础上也在数学描写形式上的统一．第二个并立的目的是，发展和利用数学物理中对电磁理论和波动力学都很有用的许多论题．这些论题包括格临定理、格临函数、正交归一展开、球谐函数、柱与球的贝塞耳函数．第三个也许是最重要的一个目的是，阐述新的题材，特别是关于相对论性带电粒子与电磁场的相互作用．在最后这个目的的范围里，掺杂了许多个人的嗜好和偏见．我选择论题是以我认为对热心于理论物理、实验原子核物理、高能物理以及尚未定形的等离子体物理的那些学生说来，是重要而且有用的题材为依据的．

本书按传统方式从静电学开始．前六章专门阐述麦克斯韦电磁理论的发展．在阐述过程中，特别在第二章和第三章中，建立了许多必要的数学工具，充分地讨论了边界问题．最初是用电场强度E和磁感应

强度B来讨论的，然后通过对原子或分子系综的适当平均，引进宏观导出量D和H．在讨论电介质时，阐述了原子极化率的简单经典模型，但对于磁性物质没有这样做．之所以这样，部分地是由于篇幅限制，但实际上还是由于磁化率的经典模型是不可能的．况且，要阐明有趣的铁磁现象，本来就需要几乎一整本书才行．

随后三章（第七章至第九章）阐明各种电磁现象，主要是宏观现象．第七章讨论在不同媒质（包括等离子体）中的平面波，以及色散和脉冲的传播．第八章对一系列任意截面的波导管和谐振腔展开了讨论，并以非常普遍的方法处理了波导管中的衰减问题和谐振腔的Q值，这种处理方法强调所涉及的物理过程．第九章叙述定域源产生的多极辐射的基本理论和衍射理论．由于许多光学教科书和大学电磁学书籍中都讲述了简单的标量衍射理论，所以我介绍一种改进了的、但仍然是近似的衍射理论，它是以矢量格临定理为基础的，而不是以标量格临定理为基础的．

磁流体动力学和等离子体的论题愈来愈受到物理学家和天体物理学家的注意．第十章阐述了这个复杂领域的概况，介绍了所涉及的主要物理概念．

前九章或前十章构成了经典电磁学的基本题材．可以料想一个物理研究生已经学过这些题材的大部分，或者在他当大学生时已在稍低的水平上学习过．可是当他在本书的水平上学习这一课题时，他可以获得更完善的见解和更深刻的理解，并获得分析解法的相当技能．然后，他就为攻读更高深的课题做了准备．本书所叙述的高深课题主要包括带电粒子间的相互作用、带电粒子与电磁场的相互作用，特别是当带电粒子作相对论性运动时的情况．

狭义相对论起源于经典电动力学．即使在它出现将近六十年后的今天，人们仍然乐于把经典电动力学当作在洛仑兹变换下物理定律协变性的一个出色的例子．第十一章讨论了狭义相对论．在这一章里，

阐述了一切必要的数学工具，探讨了各种运动学的结果，建立了电动力学的协变性．第十二章专门阐述相对论性粒子的运动学与动力学．虽然电磁场中带电粒子的动力学完全可以归入电动力学，但读者也许不知道能否把诸如碰撞问题的运动学变换之类的内容归入电动力学．我的回答是：人们一旦确立了粒子的动量和能量的四维矢量性质，便自然会想到这些例子，这些例子又可以当作运用洛仑兹变换的有用练习，并且所得到的结果也有价值，这些结果在别处往往很难找到．

第十三章论述带电粒子间的碰撞，着重讨论能量的损失和散射，并且阐述了对后面几章有用的概念．在这一章里，我第一次在本书中应用了以测不准原理为基础的半经典论证，以便从经典结果求得能量损失等的近似的量子力学表式．玻尔与威廉斯（E.J.Williams）所用的这一如此有效的方法，使人们清楚地知道，量子力学效应在什么时候开始怎样修正经典性概念．

第十四章与第十五章详细地讨论了关于加速运动点电荷的辐射这一重要论题；着重阐述了相对论性效应，并将辐射的频率与角分布的表式推导成最通用的形式．例子所论及的范围是从同步加速器辐射直到轫致辐射和β辐射过程．还讨论了契仑科夫辐射与魏次扎克（Weizsäcker）-威廉斯虚量子法．在讨论原子和原子核的碰撞过程时，再次利用半经典论证以获得近似的量子力学结果．我特别着重于这一点，因为我觉得，重要的在于使学生了解到，像轫致辐射这样的辐射效应尽管所涉及的是小尺度的碰撞，但本质上几乎完全是经典的．当学生第一次遇到作为量子场论中的计算例子而出现的轫致辐射时，是不会懂得它的物理基础的．

多极场构成了第十六章的主题．从最基本的原理出发，并对源和波长的相对尺度不加限制，导出了球面波的标量场和矢量场展开式．然后讨论了电多极辐射场与磁多极辐射场的性质．一旦求得辐射场与源的多极矩的关系，便着手讨论原子多极辐射和原子核多极辐射的实例，

以及其尺度跟波长可相比拟的宏观源．为了说明含有矢量球面波的边值问题，而相当详细地讨论了球形物体对平面电磁波的散射．

在最后一章中，讨论了关于辐射反作用这一难题．其处理方式与其说是数学的，倒不如说是物理的；它着重于划出辐射修正近似表式适用的区域，并指明目前的理论在哪里失败以及为什么失败．阐述了早期的阿伯拉罕(Abraham)-洛仑兹的自力理论和较近代的经典性的考虑．

本书末，有单位与量纲的附录和参考书目．在附录里，我试图说明在建立单位制时所包含的逻辑步骤，而不是向读者夸耀我的单位选择的显著优点．我提供两种表，希望这两种表对读者是有用的．其中一种是诸方程和符号从一种单位制到另一种单位制的变换表；另一种是给定各个物理量的数值从高斯单位制变换到米·千克·秒单位制（或相反）的变换表．在参考书目中列出了许多书名．我想读者将会发现，以这些书作为参考和课外阅读是恰当的和有用的．在每章末所推荐的读物目录，均用作者的名字来开列．

本书是我过去十一年中，在伊利诺斯大学和麦克吉耳大学，断断续续地为研究生讲授经典电动力学课程的成果．在写作过程中，承蒙两校中我的同事与学生给我无数有益的指教和讨论，谨致谢意．……

J. D. 杰克逊

1962年1月写于伊利诺斯州乌尔巴那城

上 册 目 录

绪论

I.1 真空中的麦克斯韦方程组、场和源 ……2

I.2 平方反比律或光子质量 ……6

I.3 线性叠加 ……10

I.4 媒质中的宏观麦克斯韦方程组 ……14

I.5 不同媒质分界面上的边界条件 ……19

I.6 对电磁学中一些理想化的评论 ……24

参考书和推荐读物 ……27

第一章 静电学导论 ……30

1.1 库仑定律 ……30

1.2 电场强度 ……31

1.3 高斯定律 ……34

1.4 高斯定律的微分形式 ……36

1.5 另一个静电学方程和标势 ……36

1.6 电荷和电偶极子的面分布；电场强度和电势的突变 ……39

1.7 泊松方程和拉普拉斯方程 ……42

1.8 格临定理 ……44

1.9 狄利克莱边界条件或诺埃曼边界条件下解的唯一性 ……46

1.10 用格临函数求静电学边值问题的形式解 ……47

1.11 静电势能与能量密度；电容 ……50

参考书和推荐读物 ……54

习题 ……55

第二章 静电学中的边值问题(I) ……60

2.1 电像法 ……60

2.2 在接地导电球前面的点电荷 ……61

2.3 在带电的孤立导电球前面的点电荷 ……64

2.4 在电势不变的导电球附近的点电荷 ……66

2.5 用电像法解均匀电场中的导电球 ……67
2.6 球的格临函数;势的通解……68
2.7 两半球有不同电势的导电球 ……70
2.8 正交函数和正交展开 ……72
2.9 分离变数法; 直角坐标中的拉普拉斯方程 ……76
2.10 二维势问题;傅里叶级数的累加……78
2.11 二维拐角内和沿棱边的电场与电荷密度 ……83
参考书和推荐读物 ……87
习题 ……88
第三章 静电学中的边值问题(II) ……93
3.1 球坐标中的拉普拉斯方程 ……93
3.2 勒让德方程与勒让德多项式 ……94
3.3 轴对称的边值问题 ……100
3.4 锥形孔内或尖端附近的场的特性 ……103
3.5 缔合勒让德函数和球谐函数 $Y_{lm}(\theta,\phi)$……108
3.6 球谐函数的加法定理 ……111
3.7 柱坐标中的拉普拉斯方程,贝塞耳函数……113
3.8 柱坐标中的边值问题 ……119
3.9 球坐标中的格临函数展开 ……122
3.10 用球格临函数展开的势问题的解 ……126
3.11 柱坐标中的格临函数展开 ……129
3.12 格临函数的本征函数展开 ……132
3.13 混合边界条件,带一圆孔的导电平板……135
参考书和推荐读物 ……142
习题 ……143
第四章 多极子,宏观媒质的静电学,电介质 ……151
4.1 多极子展开 ……151
4.2 外电场中电荷分布的能量的多极子展开 ……157
4.3 有质媒质静电学的初步处理 ……159
4.4 带有电介质的边值问题 ……163
4.5 分子极化率和电极化率 ……168

4.6 分子极化率的模型 ……172
4.7 介电媒质中的静电能 ……175
参考书和推荐读物 ……180
习题 ……181
第五章 静磁学 ……186
5.1 引言和定义 ……186
5.2 毕奥-萨伐尔定律 ……187
5.3 静磁学的微分方程和安培定律 ……191
5.4 矢势 ……193
5.5 圆形电流回路的矢势和磁感应强度 ……195
5.6 定域电流分布的磁场;磁矩 ……199
5.7 定域电流分布在外磁场中所受的力、力矩和所具有的能量 ……203
5.8 宏观方程组;B 和 H 的边界条件 ……206
5.9 静磁学边值问题的解法 ……210
5.10 均匀磁化球 ……214
5.11 外磁场中的磁化球;永久磁铁 ……217
5.12 磁屏蔽;放在均匀磁场中的用导磁材料做成的球壳 ……218
5.13 在一侧有渐近均匀切向磁场时理想导电平面上的一个圆孔的效应 ……221
参考书和推荐读物 ……224
习题 ……225
第六章 随时间变化的场,麦克斯韦方程组,守恒定律 ……230
6.1 法拉第感应定律 ……230
6.2 磁场的能量 ……234
6.3 麦克斯韦位移电流,麦克斯韦方程组 ……238
6.4 矢势和标势 ……240
6.5 规范变换,洛仑兹规范,库仑规范 ……242
6.6 波动方程的格临函数 ……245
6.7 宏观电磁学方程组的推导 ……249
6.8 坡印廷定理,带电粒子和电磁场的联合系统的能量和动量守恒定律 ……260

6.9 宏观媒质的守恒定律 ……264
6.10 谐振场的坡印廷定理；根据场的概念定义的阻抗和导纳 ……266
6.11 在转动、空间反射和时间反转下电磁场和源的变换性质 ……270
6.12 关于磁单极问题 ……278
6.13 关于狄喇克量子化条件的讨论 ……281
参考书和推荐读物 ……287
习题 ……

第七章 平面电磁波和波的传播 ……297

7.1 非导电媒质中的平面波 ……297
7.2 线偏振和圆偏振；斯托克斯参数 ……301
7.3 电磁波在电介质的平面分界面上的反射和折射 ……306
7.4 反射引起的偏振和全内反射 ……311
7.5 电介质、导体和等离子体的频率色散特性 ……313
7.6 在电离层和磁层中传播的简化模型 ……322
7.7 导电媒质或耗散媒质中的波 ……326
7.8 一维波的叠加；群速度 ……329
7.9 脉冲在色散媒质中传播时扩展的例证 ……333
7.10 D 和 E 的关系中的因果性；克喇末-克朗尼格关系 ……337
7.11 信号通过色散媒质的传播过程 ……344
参考书和推荐读物 ……359
习题 ……361

第八章 波导和谐振腔 ……369

8.1 导体表面和导体内的场 ……370
8.2 柱形空腔和波导 ……375
8.3 波导 ……378
8.4 矩形波导中的波模 ……380
8.5 波导中的能流和衰减 ……382
8.6 边界条件微扰法 ……386
8.7 谐振腔 ……389
8.8 谐振腔的功率损失；谐振腔的 Q 值 ……392
8.9 当作谐振腔处理的地球和电离层：舒曼谐振 ……397

8.10 电介质波导 ……401
8.11 简正模的展开；波导中定域源产生的场 ……407
8.12 平面隔膜的反射和透射；变分近似法 ……413
8.13 矩形波导中一块平行于电场的平薄板条的阻抗 ……419
参考书和推荐读物 ……423
习题 ……425
第九章 简单辐射系统；散射和衍射 ……431
9.1 定域振荡源的场和辐射 ……431
9.2 电偶极场和电偶极辐射 ……435
9.3 磁偶极场和电四极场 ……438
9.4 中央馈电的平直天线 ……442
9.5 波导中定域源或孔的多极子展开 ……446
9.6 长波长情形下的散射 ……454
9.7 散射的微扰论；瑞利对蓝天的解释；气体和液体引起的散射 ……461
9.8 标量衍射理论 ……471
9.9 基尔霍夫积分的等效矢量形式 ……476
9.10 矢量衍射理论 ……481
9.11 互补屏的巴俾涅原理 ……484
9.12 圆孔衍射；关于小孔的评述 ……487
9.13 短波长极限下的散射 ……493
9.14 光学定理和有关问题 ……499
参考书和推荐读物 ……506
习题 ……509
参考书目
有关特殊函数的主要题材索引

绪　论

虽然古希腊人已经知道琥珀和天然磁石，可是电动力学作为一门定量学科而发展起来，还不到一百年．卡文迪许(Cavendish)著名的静电学实验是从1771年开始，到1773年完成的．库仑的有纪念意义的研究开始发表于1785年．这标志了世界上电学和磁学定量研究的开始．五十年后，法拉第研究了随时间变化的电流和磁场的效应．麦克斯韦，在1864年以前，就发表了他论述电磁场的动力学理论的著名论文．

当然我们所了解的电学、磁学和光学的发展历史，比起举出一百年来的几个人名，远为悠久和丰富．关于这动人的历史的详细叙述，读者应该参看 *Whittaker*[①]写的那套权威性丛书．在 *Born* 和 *Wolf* 写的那本书的开头，有一段较短的叙述，其重点放在光学现象．

本书内容齐备，从静电学开始，把电动力学这门学科作了详细的阐述，而且假定读者已具备某些数学基础(矢量计算、微分方程)．大多数读者并非初次学习这门学科．因此本绪论的目的不在于讨论库仑定律和其它基本定律，而在于对经典电磁学作一评论和综述．这里讨论了如下一些问题：力的平方反比律(光子质量)的通常准确度、线性叠加原理的有效范围、电荷和能量差的分立效应．也论述了一些普通而必要的论题，诸如不同媒质界面上和导体上的宏观场的边界条件．目的是要把经典电磁学前后连贯起来，指出其有效范围，并阐述它所包含的一些理想化了的东西．在讨论的过程中，要用到本书以后阐述的某些

① 用斜体字姓氏表示参考书目中援引的书籍．

结果，以及某些非经典概念．当然，初学电磁学的读者会跟不上所有的论证，或看不出这些论证的重大意义．但是对其它读者来说，本绪论将成为本书以后各部分（第五章以后）的跳板，并使他们回想起这门学科作为实验科学建立的过程．

I.1 真空中的麦克斯韦方程组、场和源

支配电磁现象的方程组是麦克斯韦方程组．对真空中的源，麦克斯韦方程组为

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{E}&=4\pi\rho\\ \nabla\times\mathbf{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}&=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}\\ \nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}&=0\\ \nabla\cdot\mathbf{B}&=0\end{aligned}\tag{I.1}$$

麦克斯韦方程组蕴含了电荷密度和电流密度的连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{J}=0\tag{I.2}$$

把(I.1)的第一个方程对时间取导数，第二个方程取散度，相加，即得上式．在考虑带电粒子运动时，还有一个基本方程，即洛仑兹力方程：

$$\mathbf{F}=q\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\right)\tag{I.3}$$

上式给出电磁场作用在点电荷 q 上的力．

这些方程是按高斯单位写出的，本书采用电磁单位制（单位和量纲在附录中讨论）．附录表 2，按较普通的几种单位制列出了麦克斯韦方程组．除场 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$、源 ρ 和 $\mathbf{J}$ 外，这方程组中还包含一个参量 c．这个量具有速度量纲，是真空中的光速．对所有电磁现象和相对论现象来说，它是一个基本物理量．正如附录中讨论的，目前用两种不同原子的跃迁分别规定长度和时间的单位，根据这样定出的单位，此参量具有如

下实验值：

$$c=299,792,456.2\pm1.1 \text{ 米/秒}^{①}$$

这个结果来自采用高度稳定的氦-氖激光器的实验，该实验测定了频率和波长(3.39 微米的甲烷-稳定线)．我们顺便提醒一下，上述实验的精确性，使得有可能以 c 和秒规定的米取代目前规定的米．其它证据[参看 11.2(c)节]指出，从极低频率到至少 $\nu\simeq10^{24}$ 赫（4 千兆电子伏光子)的范围内，真空中的光速与频率无关．这是高度精确的．就大多数实际用途而言，我们可以大致认为 $c\simeq3\times10^{8}$ 米/秒，或者更精确地认为 $c\simeq2.998\times10^{8}$ 米/秒．

(I.1)中的电场强度 **E** 和磁感应强度 **B**，原先是通过力方程(I.3)引进的．在库仑的实验中，观测了定域电荷分布之间的作用力．发现引进电场强度 **E** 作为每单位电荷所受的力是有用的(参看 1.2 节)．同样，在安培的实验中，研究了载流回路的相互作用力(参看 5.2 节)．令 $NAq\mathbf{v}$ 等于横截面为 A、每单位体积内以速度 **v** 运动的、载荷子数为 N 的导体中的电流，我们就看出，(I.3)中的 **B** 在数值上被规定为每单位电流所受的力．这样出现的 **E** 和 **B**，很恰当地取代了电荷和电流分布产生的力，而且还有别的重要性质．首先，它们的引进从概念上把源与感受电磁力的试验体分开．如果两个源分布在空间一给定点上产生的场 **E** 和 **B** 相同，那末不管源分布如何不同，该点上试验电荷或试验电流所受作用力将是相同的．这就给予(I.3)中的 **E** 和 **B** 以与源无关的应有含义．其次，电磁场可以在无源的空间区域存在．电磁场具有能量、动量和角动量，所以电磁场的存在完全与电荷和电流无关．虽然重新出现一些企图，想要放弃这种明确的场的概念，这种概念是有利于带电粒子相互作用的超距描写．事实上，无论在经典力学上，还是在量子力学上，电磁场的概念仍然是最有成效的物理概念之一．

把 **E** 和 **B** 当作普通的场，这是一种经典的概念．可以把这种概念

① K. Evenson et al., *Phys. Rev. Letters* 29, 1346(1972).

看作用实光子或虚光子进行的量子力学描写的经典极限（大量子数的极限）．在宏观现象甚至某些原子现象的范畴内，电磁场的分立的光子性质通常可以被忽略，或至少可以被掩盖．例如：离100瓦灯泡一米远处，方均根电场的数量级为0.5伏/厘米，可见光子的数量级为10^{15}个光子/厘米^2·秒．同样，功率100瓦、频率10^8赫的各向同性调频天线，在相距100千米的地点，只产生5微伏/厘米的方均根电场，但是这还相当于10^{12}个光子/厘米^2·秒的流量，或在那个距离的地点，每波长立方的体积（27米^3）内大约有10^9个光子．仪器对单个光子通常是觉察不出来的；发射或吸收许多光子的累积效应，将作为连续的、宏观的、可观测到的反应而显示出来．这时，一种用麦克斯韦方程组的完全经典的描写，是允许的和适当的．

人们如何事先判定，电磁场的经典描写在什么时候是适当的呢？有时需要采用一些高深的方法，但通常用的充足判据如下：当涉及的光子数很大，而各个光子所携带的动量小于物质系统的动量时，那末用电磁场的经典描写就完全可以确定物质系统的反应．例如：由上述调频天线发射的每个10^8赫光子，给予天线的冲量仅为2.2×10^{-34}牛顿·秒．经典的处理完全足够．还有，自由电子对光的散射，在低频时遵守经典的汤姆孙公式（14.7节）．但当入射光子的动量$\hbar\omega/c$与mc可以相比时，则遵守康普顿效应诸定律．光电效应对物质系统来说是非经典的，因为金属中各个准自由电子的能量发生改变，其改变值等于所吸收光子的能量，但是这些电子用经典电磁场描写时，光电流可以根据量子力学算出．

另一方面，在原子的自发辐射或任何其它系统的自发辐射中，电磁场的量子性质必须加以考虑，在这些自发辐射的过程中，原子或任何其它系统最初没有光子出现，而最后只有少量光子出现．平均特性仍可用主要的经典项来描写，从根本上说，这是由于能量和动量的守恒．用经典方法处理带电粒子通过吸引力势轨道的级联辐射（17.2节），便是

一个实例。当粒子具有大的量子数时，粒子运动采用经典描写就够了，且因连续放出的诸光子的能量小于轨道运行粒子的动能或势能，能量和角动量的长期变化可按经典方法从辐射反作用算出。

(I.1) 中的源是电荷密度 $\rho(\mathbf{x},t)$ 和电流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{x},t)$。在经典电磁学中，假定 ρ 和 $\mathbf{J}$ 是按 $\mathbf{x}$ 连续分布的，虽然有时我们也考虑定域分布，近似地用一些点来表示。我们假定这些点电荷的大小是完全任意的，但是在实际上我们知道电荷只限于取一些分立值。电荷的基本单位是电子所带电荷的大小，

$$|q_e| = 4.803250(21)\times 10^{-10} \text{ 静电系单位}$$
$$= 1.6021917(70)\times 10^{-19} \text{ 库仑}$$

这里括号中的数字表示末两位小数的误差。质子以及目前所知的一切粒子或粒子系统，所带的电荷是这个基本单位的整数倍。实验证实，倍数恰为整数的精确度是惊人的(超过 10^{20} 分之一)。这些实验将在 11.9 节中讨论，该节也论证了电荷的洛仑兹不变性问题。

在大多数宏观应用中，毋需考虑电荷的分立性。例如，1 微法电容器在 150 伏电压下，每一电极板上总共有 10^{15} 基本电荷。增加或减少几千个电子是不会被察觉的。1 微安电流相当于 6.2×10^{12} 基本电荷/秒。当然有一些精巧的宏观(或接近宏观的)实验涉及电荷的分立性。密立根(Millikan)的著名油滴实验就是其中的一个。他的油滴半径典型值为 10^{-4} 厘米，在这些油滴上带有几个或几十个基本电荷。

在麦克斯韦方程组(I.1)中，源项的出现缺乏对称性。前两方程有源；后两方程无源。这反映了实验上不存在磁荷和磁流。实际上，正如 6.12 节所证明的，粒子可以具有磁荷和电荷。如果自然界中一切粒子的磁荷-电荷比相同，那末可以重新规定场和源，使得场方程仍是通常的麦克斯韦方程组(I.1)。在这种意义上，习惯于说磁荷或磁流是不存在的。本书的绝大部分场合假定只有电荷和电流在麦克斯韦方程组中起作用，但是在第六章中叙述了当有不同磁荷-电荷比的粒子存在时

(例如：磁单极)的某些结果.

I.2 平方反比律或光子质量

卡文迪许和库仑定量地证明了，静电力对距离的依赖关系是平方反比律．这条定律通过高斯定律和散度定理(参看 1.3 节和 1.4 节)推导出麦克斯韦方程组 (I.1) 的第一个方程．原始实验的准确度只有百分之几，而且是在实验室长度规模上做的．近些年来已经完成了具有较高精度的、在大小不同的系统中做的实验．现在习惯上验证平方反比律的实验是按下述两种方法之一来做的：

(1) 假定力按 $1/r^{2+\epsilon}$ 而变化，定出 ϵ 的值或极限值．

(2) 假定静电势具有“汤川”形式(参看 12.9 节) $r^{-1}e^{-\mu r}$，定出 μ 或 μ^{-1} 的值或极限值．因为 $\mu=m_\gamma c/\hbar$，这里 m_γ 是假定的光子质量，平方反比律的实验有时用 m_γ 的上限来表达．实验室里做的实验通常给出 ϵ，也许给出 μ 或 m_γ；地磁实验给出 μ 或 m_γ．

卡文迪许在 1772 年用同心球做的原始实验①，给出 ϵ 的上限为 $|\epsilon|\leqslant 0.02$．他的仪器如图 I.1 所示．大约一百年以后，麦克斯韦在剑桥完成了一个很相似的实验②，给出 ϵ 的上限为 $|\epsilon|\leqslant 5\times10^{-5}$．其它两个值得注意的实验，是普利姆顿(Plimpton)和劳顿(Lawton)根据高斯定律做的③，给出 $|\epsilon|<2\times10^{-9}$，而最近一个实验是威廉斯、福勒(Faller)和希尔(Hill)做的④．后一实验的仪器简图如图 I.2 所示．虽然不是静电实验($\nu=4\times10^6$ 赫)，其基本思想却几乎与卡文迪许相同．

---

① H. Cavendish, *Electrical Researches*, 编者 J. C. Maxwell, Cambridge University Press(1879), 第 104—113 页.

② 参看注①援引的书中的“注 19”.

③ S. J. Plimpton and W. E. Lawton, *Phys. Rev.* **50**, 1066(1936).

④ E. R. Williams, J. E. Faller, and H. A. Hill, *Phys. Rev. Letters* **26**, 721 (1971).

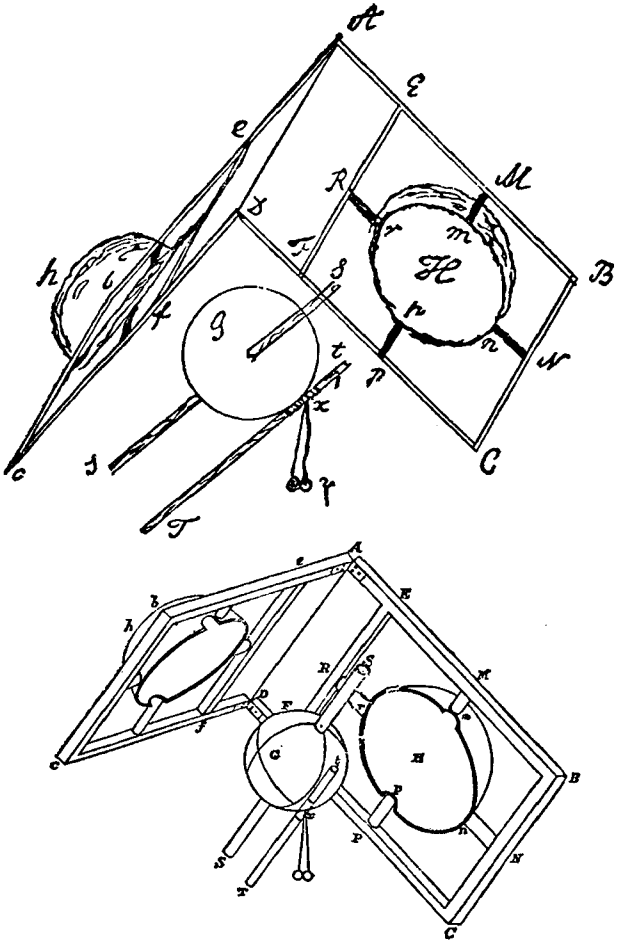


图 I.1　卡文迪许证实静电学平方反比律所用的仪器．上图摹拟卡文迪许本人的草图；下图系绘图员所画．内球直径为 12.1 英寸，两个中空的胶纸板半球的直径稍微大些．球和半球均用锡箔覆盖，“以使它们成为较理想的导电体．”（本图是经剑桥大学出版社同意而复制的．）

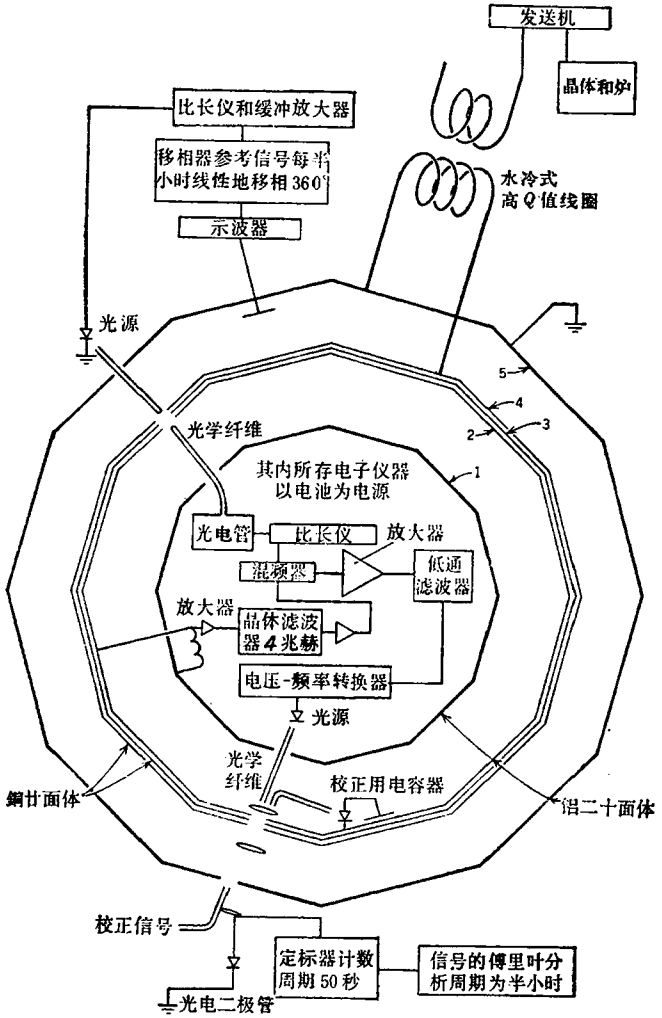


图 1.2 威廉斯、福勒和希尔的"卡文迪许"实验的略图. 五个同心的二十面体.

均是薄壳导体．频率为4兆赫、峰值为10千伏的电压加在壳体5和壳体4之间．壳体4及其邻近壳体2和3的直径，约为1.5米，里边包含壳体1．壳体1和壳体2间的电压差(如果产生的话)通过壳体1的"八点钟"处所示的感应器显示出来．为了把电压信息引到外面来，须用放大器和光学系统．它们相当于卡文迪许的弦线系统，后者自动打开绞接的两个半球，通过木髓球测定内球上的电荷．(本图经作者许可而复制的．)

卡文迪许把内球和带电的外球施行电接触，接着把两者分开，然后他在内球上寻找电荷，他没有找到．威廉斯、福勒和希尔把较外的一个壳体加以 ±10 千伏的交流电压(相对于地)，寻找两个同心壳体之间的电压差．实验的灵敏度如此之高，以致小于 10^{-12} 伏的电压差可以被检测到．他们没有检测到电压差，当用普罗卡(Proca)方程(12.9 节)解释时，给出的极限值为 $\epsilon=(2.7\pm3.1)\times10^{-16}$．

地磁场的测量，不管是在地面上进行，还是在地面以外用卫星观测，都可以给出 ϵ 的最佳极限值，或等效地给出光子质量 m_γ 的最佳值．本绪论末所列的柯勃查列夫(Kobzarev)和奥肯(Okun')以及高特哈勃(Goldhaber)和尼托(Nieto)所写的两篇评论，讨论了地球物理的观测，也讨论了实验室的观测．地面上进行的地磁场测量很容易给出最佳值(参看习题 12.14)，即

$$m_\gamma<4\times10^{-48}\text{ 克}$$

或

$$\mu^{-1}>10^{10}\text{ 厘米}$$

为了比较，我们写出电子质量 $m_e=9.1\times10^{-28}$ 克．威廉斯、福勒和希尔在实验室里所做的实验可以作如下解释：所得光子质量的极限值 $m_\gamma<1.6\times10^{-47}$ 克，比地磁场测量的极限值只粗劣四倍．

注意到地球-电离层共振腔[8.9 节讨论的舒曼(Schumann)共振]有极低频模存在，就非常容易定出光子质量的大致极限值．双重爱因斯坦关系 $h\nu=m_\gamma c^2$ 表明，光子质量必须满足不等式 $m_\gamma<h\nu_0/c^2$，式中 ν_0 为任一电磁共振频率．最低的舒曼共振是 $\nu_0\simeq8$ 赫．由此我们算

出$m_\gamma < 6\times10^{-47}$克，这是一个非常小的值，比最佳极限值只高出一个数量级．这个论证是粗糙的，较仔细的考虑（参看 12.9 节及其所给的参考文献）表明，极限值约大$(R/H)^{1/2}\simeq10$倍，$R\simeq6400$千米是地球半径，而$H\simeq60$千米是电离层的高度①．不管这个放大因数，只考虑舒曼共振的存在而给出10^{-45}克的极限值是完全可以的．

实验室的和地球物理的实验表明，当长度的数量级为1到10^9厘米时，平方反比律极其精确地成立．当距离较小时，我们必须进行非直接的、常常包含附加假设的证明．例如，卢瑟福针对薄箔对α粒子的散射所做的有历史意义的分析证实：假定可以把α粒子和原子核当作静电相互作用的经典点电荷看待，并且可以忽略电子的电荷云，则一直到距离的数量级为10^{-11}厘米时，库仑力定律仍然有效．当然，所有这些假设可以而且已经被验证，但只是在量子力学、线性叠加（见下文）和别的（非常合理的）假设保持有效的范围内才做到的．当距离更小时，必须用相对论性量子力学，这时强相互作用效应使问题复杂且难于解答．然而，用质心系能量高达5千兆电子伏的阳、阴电子做的弹性散射实验表明，量子电动力学（点电子与无质量光子相互作用的相对论性理论）一直到距离的数量级为10^{-15}厘米时保持有效．我们得出以下结论：在整个经典距离范围乃至深入到量子领域，光子质量可以当作为零（力的平方反比律成立）．已经知道平方反比律至少在长度的数量级为24的范围内普遍成立！

I.3 线性叠加

真空中的麦克斯韦方程组是场E和B的线性方程组．这种线性性质常常被利用（例如，一条微波通信线上进行的几百路不同的电话交谈），以致认为是不成问题的．当然，在有些情况下——在磁性材料中，

① 基本论点是：当H/R可忽略时，电磁场的传播，就如同平行板传输线中横向电磁场（TEM）的基模一样．除了通过每单位长度的静电容和电感的变化外，这种传播不受有限的光子质量的影响．明显的光子质量效应以$(H/R)\mu^2$级出现．

在对强激光束起反应的晶体中，甚至在用于电话与微波束接通或断开的器件中——会出现非线性效应．但是我们这里只讨论真空中的场或原子和原子核内部的微观场．

我们有什么证据支持线性叠加的概念呢？在宏观水平上，各种各样的实验都证实了线性叠加的准确度为 0.1 %，如：电荷群和电流产生的籍线性叠加可算出的电磁力，变压器完成的预期作用，传输线上观测到的驻波等，读者能把这些实验列成一表．在光学中，缝隙系统显示出衍射条纹；X 射线衍射告诉我们晶体的结构；白光通过棱镜折射出虹的色彩，再通过棱镜又合并为白光．在宏观水平上甚至在原子水平上，线性叠加非常有效．

在亚原子领域里，必定能发现不符合线性叠加的现象．当带电粒子互相靠得很近时，电场强度变得非常大．如果把一个带电粒子看作定域的电荷分布，我们就看出，当该电荷的定域分布越来越小时，其电磁能越来越大．为了避免点粒子的无穷大自具能，人们自然会推测有某种饱和状态出现，使得场强有一上限．这些经典的非线性理论，过去研究过．一个著名的例子是玻恩和英费耳德的理论①．真空的电导率和磁导率由下式给出：

$$\epsilon=\frac{1}{\mu}=\left[1+\frac{1}{b^2}(B^2-E^2)\right]^{-1/2} \tag{I.4}$$

式中 b 为最大场强．方程(I.4)实际上是玻恩本人更早所建议的简化形式．这只要把一般的概念说明一下就够了．在短距离时显然要把场加以修正；所有的电磁能是有限的．但是，由于非线性出现的方式是任意的，也由于过渡到量子理论时有严重的问题，上述这些理论就遭到了困难．而且，这种经典的非线性是证据不足的．多电子原子的量子力学是用标准的量子理论高度精确地描述的．这个理论是根据一对对

① M. Born and L. Infeld, *Proc. Roy. Soc.* **A** 144. 425 (1934)．初浅的讨论，请参看 M. Born, *Atomic Physics*, Blackie, London, Appendix VI.

势的线性叠加，来处理原子核和电子之间以及电子和电子之间的相互作用(或者精细效应的相对论性的推迟相互作用)．在原子的电子轨道上,场强的数量级为 10^{9}—10^{15} 伏/厘米,而在重原子核的周围,电场强度的数量级为 10^{19} 伏/厘米．象氢那样的轻原子内的能级差，根据电磁相互作用的线性叠加算出的值与实验相符合，其准确度接近 10^{6} 分之一．而且重核的库仑能与电磁效应的线性叠加是一致的．当然，场强大于 10^{19} 伏/厘米时，可能会出现非线性效应．寻找这些效应的一个途径是对超重核(Z>110)的原子能级和库仑能进行研究①．现在还没有什么证据表明在短距离上真空场具有任何经典的非线性特性．

电磁场具有量子力学的非线性，这是由于测不准原理允许两个光子瞬即产生电子-阳电子对，随后电子-阳电子对消失而放出两个不同光子，大意如图 I.3 所示．这种过程叫做光子-光子散射②．两列入射平面波 $e^{i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{x}-i\omega_1 t}$ 和 $e^{i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{x}-i\omega_2 t}$ 不仅仅相干地叠加(如同按线性叠加所预期的)，而且相互作用并转换成(几率很小)两列波矢为 $\mathbf{k}_3$ 和 $\mathbf{k}_4$ 的不同平面波．这个量子电动力学的非线性特征，至少对于慢变化场可以用真空的电导率和磁导率张量来表达：

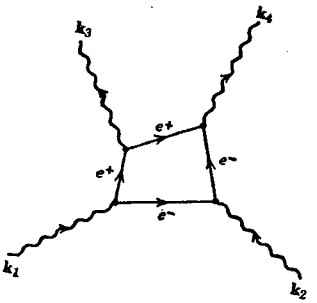


图 I.3 光子对光子的散射．光子-光子散射发生过程示意图．

① J. Rafelski, W. Greiner, and L. P. Fulcher, *Nuovo Cimento* **13B**, 135 (1973). 这篇论文对超重元素的原子能级的玻恩-英费耳德型非线性效应进行了研究．

② 当图 I.3 中两个光子是虚光子，代表与静核库仑场的二级相互作用时，这种过程就是众所周知的戴布吕克 (Delbrück) 散射．参看 J. M. Jauch and F. Rohrlich, *The Theory of Photons and Electrons*(15.8 节), Addison-Wesley, Reading, Mass, (1955).

$$D_i=\sum_k \epsilon_{ik}E_k,\quad B_i=\sum_k \mu_{ik}H_k$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\epsilon_{ik}&=\delta_{ik}+\frac{e^4\hbar}{45\pi m^4c^7}[2(E^2-B^2)\delta_{ik}+7B_iB_k]+\cdots\\ \mu_{ik}&=\delta_{ik}+\frac{e^4\hbar}{45\pi m^4c^7}[2(B^2-E^2)\delta_{ik}+7E_iE_k]+\cdots\end{aligned}\right\}\quad(\text{I}.5)$$

这里 e 和 m 分别为电子的电荷和电子的质量. 这些结果最早由欧勒和柯克尔(Kockel)[①]于 1935 年得出. 我们看出，在经典极限($\hbar\to 0$)下，这些非线性效应趋于零. 与经典的玻恩-英费耳德表式(I.4)比较，可以看出，当非线性很小时，量子力学的场强

$$b_q=\frac{\sqrt{45\pi}}{2}\sqrt{\frac{e^2}{\hbar c}}\frac{e}{r_0^2}\simeq 0.51\frac{e}{r_0^2}$$

起的作用与玻恩-英费耳德参数 b 类似. 这里 $r_0^2=e^2/mc^2\simeq 2.8\times10^{-13}$ 厘米是经典电子半径，而 $e/r_0^2=1.8\times10^{18}$ 伏/厘米是这样的一个经典电子表面上的电场. 顺便说明两点：(一)(I.5)中的 ϵ_{ik} 和 μ_{ik} 是近似式，当场强趋于 b_q 或场随空间或时间变化得太快($\hbar/mc$ 给出长度的中肯值，$\hbar/mc^2$ 给出时间的中肯值)时，这些表式失效；(二)b_q 和 $e/2r_0^2$ 数值上的偶然一致是富有启发性的，但因 b_q 包含普朗克常数 $\hbar$，这种偶然的一致可能没有重大意义.

与极化强度 $\mathbf{P}=(\mathbf{D}-\mathbf{E})/4\pi$ 类似，我们把(I.5)中依赖于场的诸项叫做真空极化效应. 除光子-光子散射或戴布吕克散射外，真空极化又使原子能级发生极微小移动. 主要贡献是产生一虚电子-阳电子对，如图 I.3 那样，但只有两条光子线而不是四条. 如果光子是实的，这过程对光子质量有贡献，然而这过程没有被观测到. 但是，如果光子是虚的，如同在原子核与轨道电子间的电磁相互作用中或加任意外场时，虚电子-阳电子对的产生和湮没常常引起一些可观测的效应. 第一种效应

① H. Euler and B. Kockel, *Naturwiss.* **23**, 246(1935).

是观测到的核电荷的值小于不存在相互作用时的值．裸电荷的这种重正化可按简单的静电项来理解．电子-阳电子对中的电子被核的正电荷所吸引，而阳电子被核的正电荷所排斥．这种真空极化效应使核电荷屏蔽，其数值看起来小于以前的值．因为带电粒子总是被这种虚电子-阳电子对构成的云所包围，所以它们的观测电荷必须解释为它们的重正化电荷．除不可观测的电荷重正化外，真空极化在数量级等于或小于$\hbar/2mc$的距离内感生一个电荷密度，后者使两电荷间的静电势能在数值上大于库仑势能．这就使原子能级在增加结合能的方向上发生极小的移动．最低阶附加势正比于$\alpha q_{外}$，这里$\alpha=e^2\hbar c=1/137$，$q_{外}$是产生外场的电荷．所以附加势对外场来说是线性的，它对麦克斯韦方程组产生微小的线性修正．非线性是从这样的意义上说的，即这种效应的强度依赖于精细结构常数乘以外场，因而附加势中含有电荷的三次幂．更高阶的效应(如图 I.3 那样，但有相当于外场三次幂的三个光子)给出总的非线性真空极化效应．

在电子原子 (*electronic* atoms)内，真空极化效应是总辐射修正中的一小部分，但还能观测到．在μ介原子(*mu-mesic* atoms)内，这种效应比较大，这是因为原子轨道主要位于势要加以修正的区域内．这时真空极化效应本身是重要的．

关于真空中场的线性叠加的最后结论如下：在经典的尺度范围内和可达到的场强下，有大量的证据表明线性叠加是有效的，而没有反对的证据．在原子和亚原子范畴内，有微小的量子力学非线性效应，其根源在于带电粒子和电磁场之间的耦合．非线性效应改变了带电粒子间的相互作用，而且即使不存在物理粒子，非线性效应也形成电磁场之间的相互作用．

I.4 媒质中的宏观麦克斯韦方程组

到目前为止，我们考虑的是真空中的电磁场和源．对电场E和磁

场B的麦克斯韦方程组(I.1)，可以这样看待：倘若给定了全部的源ρ和J，这方程组就给出空间各处的场．当有限源的数目很小时，场的确定是轻而易举的问题，可是对于宏观的物质聚集体，解这些方程几乎是不可能的．这里有来自两方面的困难．其一，独立源(每个原子和原子核里的带电粒子)的数目过于庞大．其二，宏观观测与场(在整个原子距离范围内场随空间剧烈变化)的详细性质无关，有关的是场或源在大于单个原子或分子的体积上的平均．我们把这些平均量叫做宏观场和宏观源．在6.7节里详细证明了宏观麦克斯韦方程组为

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{D}&=4\pi\rho\\ \nabla\times\mathbf{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}&=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}\\ \nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}&=0\\ \nabla\cdot\mathbf{B}&=0\end{aligned}\right\}\tag{I.6}$$

式中E和B为微观或真空麦克斯韦方程组(I.1)的E和B的平均量．两个新的场量D和H，通常分别叫做电位移矢量和磁场强度(这时B叫做磁感应强度)，D和E的分量由下式给出：

$$\begin{aligned}D_\alpha&=E_\alpha+4\pi\Big(P_\alpha-\sum_\beta\frac{\partial Q'_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}+\cdots\Big)\\ H_\alpha&=B_\alpha-4\pi(M_\alpha+\cdots)\end{aligned}\tag{I.7}$$

量P、M、$Q'_{\alpha\beta}$和类似的更高阶量，代表外场存在时媒质的宏观平均的电偶极矩密度、磁偶极矩密度、电四极矩密度和更高级矩密度．同样，电荷密度ρ和电流密度J是媒质中"自由"电荷密度和"自由"电流密度的宏观平均．束缚电荷和束缚电流通过P，M，和$Q'_{\alpha\beta}$出现在方程中．

宏观麦克斯韦方程组(I.6)是含E，B，D，H这四个场的分量的八个方程．把E和B用标势Φ和矢势A表示，就可以在形式上求出四个齐次方程的解．但是，在导出场D和H用E和B表示的关系式尚未知道之前，无法求出四个非齐次方程的解．D，H和E，B的关系式隐含在

(I.7)中，这些关系式就是如所周知的本构关系式：

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{D}&=\mathbf{D}[\mathbf{E},\mathbf{B}]\\ \mathbf{H}&=\mathbf{H}[\mathbf{E},\mathbf{B}]\end{aligned}\right\}\tag{I.8}$$

此外，对传导媒质来说，有推广的欧姆定律：

$$\mathbf{J}=\mathbf{J}[\mathbf{E},\mathbf{B}]\tag{I.8'}$$

方括号意味着：这些关系式不一定是简单的，它们可以依赖于过去的历史(滞后作用)，它们可以是非线性的，等等.

在大多数物质里，(I.7)中的电四极项和更高阶项完全可以忽略。只有电极化强度P和磁极化强度M是重要的. 然而这并不意味着这时的本构关系式是简单的. 物质的电磁性质有巨大的差异，特别是晶体(就铁电和铁磁材料而言，在没有外场时P或M不等于零)和更常见的电介质、抗磁质和顺磁质. 这些性质的研究属于固体物理的一个领域. 在本书里，我们只是非常简短地和初浅地接触一些较基本的概念. 至于更系统和更广泛地论述大块物质的电磁性质，读者应该参看固体物理书籍，例如*Kittel*的那本书.

在铁电体或铁磁体以外的物质中，对于足够弱的场，外电场或外磁场感生一个电极化强度或磁极化强度，其大小与外场成正比. 这时我们说，媒质的反应是线性的，且把D和H的笛卡儿分量写成下式[①]：

$$\left.\begin{aligned}D_\alpha&=\sum_\beta \epsilon_{\alpha\beta}E_\beta\\ H_\alpha&=\sum_\beta \mu'_{\alpha\beta}B_\beta\end{aligned}\right\}\tag{I.9}$$

张量$\epsilon_{\alpha\beta}$叫做电容率或介电张量，$\mu'_{\alpha\beta}$叫做逆磁导率张量. 它们概括了媒质的线性反应，并且依赖于物质的分子或晶体结构以及大块物质的性质，如密度、温度. 对于简单的材料，线性反应在空间上常常是各向

① 以前要求写$B_\alpha=\sum_\beta \mu_{\alpha\beta}H_\beta$，但这种写法颠倒了**B**作为基本磁场、**H**作为导出量的自然的地位. 第五章里我们恢复到习惯的用法.

同性的．这时 $\epsilon_{\alpha\beta}$ 和 $\mu'_{\alpha\beta}$ 都是对角矩阵，各有三个相等的元素，从而 $\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$，$\mathbf{H}=\mu'\mathbf{B}$.

为了具有普遍的正确性，应该认为方程(I.9)对场量的时空傅里叶变换成立．这是因为 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$(或 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{B}$)间的基本线性关系可以是非局域的．于是

$$D_\alpha(\mathbf{x},t)=\sum_\beta\int d^3x'\int dt'\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{x}',t')E_\beta(\mathbf{x}-\mathbf{x}',t-t') \tag{I.10}$$

式中 $\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{x}',t')$ 在 $\mathbf{x}'=0$，$t'=0$ 周围可以是局域的，但离原点的一定范围内不等于零．如果我们通过下式引进傅里叶变换 $D_\alpha(\mathbf{k},\omega)$，$E_\beta(\mathbf{k},\omega)$ 和 $\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)$，

$$f(\mathbf{k},\omega)=\int d^3x\int dt\,f(\mathbf{x},t)e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{X}+i\omega t}$$

则方程(I.9)可以按傅里叶变换写成：

$$D_\alpha(\mathbf{k},\omega)=\sum_\beta\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)E_\beta(\mathbf{k},\omega) \tag{I.11}$$

对于 H_α，可以写出一个相似的方程，把 $H_\alpha(\mathbf{k},\omega)$ 用 $B_\beta(\mathbf{k},\omega)$ 来表示．所以磁导率张量通常是频率和波矢的函数．对可见光或长波长电磁辐射来说，忽略空间的非局域性常常是许可的．于是 $\epsilon_{\alpha\beta}$ 和 $\mu'_{\alpha\beta}$ 只是频率的函数．这是第七章里讨论的情形，在那里给出了物质高频性质的简化处理，并研究了由因果性得到的结果．对导体和半导体来说，长程效应可能是重要的．例如，当导体中电子碰撞的平均自由程变得大于趋肤深度时，欧姆定律的空间局域形式就不再是适当的了．这时也要考虑对波矢的依赖关系．在了解固体的许多性质时，介电常数作为波矢和频率的函数这一概念是很有用的．绪论末列出了典型的参考书．

具体说，低频($\nu\lesssim10^6$ 赫)时，所有电荷不管其惯性质量如何，都对外场有反应，固体的介电常数典型地是在 $\epsilon_{aa}\sim2$—20 范围内，取更大的值并非罕见．具有永久分子偶极矩的系统可能有大得多的、对温度敏感的介电常数．例如，蒸馏水的静态介电常数，0°C 时为 $\epsilon=88$，100°C 时为 $\epsilon=56$．在光频时，只有电子的反应是重要的．介电常数在 $\epsilon_{aa}\sim1.7$—10 范围内，大多数固体的 $\epsilon_{aa}\simeq2$—3．在整个可见光区，水的 $\epsilon=1.77$—1.80，从 0°C 到 100°C，水的 ϵ 基本上与温度无关．

物质对外磁场的反应类型依赖于各个原子或分子的性质，也依赖

于原子或分子的相互作用. 抗磁质由净角动量为零的原子或分子组成. 对外磁场的反应是，形成环形原子电流从而产生与外场反向的很小的总体磁化强度. 根据(I.9)中 $\mu'_{\alpha\beta}$ 的定义和(I.7)式，这意味着 $\mu'_{\alpha\alpha}>1$. 已知的最强抗磁质铋有 $(\mu'_{\alpha\alpha}-1)\simeq 1.8\times 10^{-4}$. 所以抗磁性是一种非常小的效应. 如果物质的基本原子单元具有由不成对电子形成的净角动量，这种物质是顺磁质. 奇电子的磁矩平行于外场的排列，因此 $\mu'_{\alpha\alpha}<1$. 在室温下，典型值为 $(1-\mu'_{\alpha\alpha})\simeq 10^{-2}-10^{-5}$，但在高温下由于热激发的无规效应而减少.

铁磁材料是顺磁的，但因原子的相互作用而显示出极其不同的特性. 在居里温度(Fe 为 1040°K, Ni 为 630°K)以下，铁磁质显示出自发磁化，即是说，在称之为磁畴的微观区域内所有磁矩按同一方向排列. 加以外场后，就使磁畴改变，不同磁畴中的磁矩都排成同一方向，导致总体磁化强度的饱和. 磁场移走后，有相当一部分磁矩仍按同一方向排列，这就给出永久磁化强度，后者可以大到 $B_r=4\pi M_r\gtrsim 10^4$ 高斯.

关于材料的介电性质和磁学性质的数据，读者可以参看某些基本物理手册①，从中得到更专门、更详细的汇编资料.

对弱场显示出线性反应的材料，在足够高的场强下(如把电子振荡器或离子振荡器调到大的振幅)最后也会显示出非线性特性. 线性关系(I.9)要加以修正，例如

$$D_\alpha=\sum_\beta \epsilon^{(1)}_{\alpha\beta}E_\beta+\sum_{\beta,\gamma}\epsilon^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}E_\beta E_\gamma+\cdots \qquad (I.12)$$

对静止场来说，其结果并不特别引人注目，但对于随时间变化的场，则又当别论了. 频率为 ω_1,ω_2 的大振幅波在媒质中产生频率为 $0, 2\omega_1, 2\omega_2$,

---

① *Handbook of Chemistry and Physics*, 编者 R. C. Weast, Chemical Rubber Publishing House, Cleveland, Ohio.

American Institute of Physics Handbook, 编者 D. E. Gray, McGraw Hill, New York, 第三版(1972), 5.*d* 和 5.*f* 两节.

$\omega_1+\omega_2, \omega_1-\omega_2$ 的波和原频率 ω_1，ω_2 的波．由三次和更高次的非线性项可以产生一组更复杂的频谱．随着激光的发展，这种非线性特性就成为激光本身的一个研究领域，叫做非线性光学，也是实验室用的一种工具．现在，用激光能够产生电场巅值接近 10^{10} 或甚至 10^{11} 伏/厘米的光脉冲．氢原子里的电子在其轨道上所受的静电场为 $e/a_0^2 \simeq 5\times10^9$ 伏/厘米．于是我们看出，这种激光场能驱动原子振荡器通入它们的非线性状态，能破坏所研究的样品！绪论末列出了有关这一专门领域的一些参考文献．读者从本书中只能了解到基本的线性现象．

I.5 不同媒质分界面上的边界条件

麦克斯韦方程组(I.6)是局域地用于时空$(\mathbf{x}, t)$中各点的微分方程组．借助于散度定理和斯托克斯定理，可以把它们写成积分形式．令 V 为空间一有限体积，S 为其闭合界面(或几个界面)，da 为界面的面元，$\mathbf{n}$ 为da 处界面的外法线单位矢量．那末把散度定理运用到(I.6)的第一个和最后一个方程，就得到下列积分表式：

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\,da = 4\pi\int_V \rho\, d^3x \tag{I.13}$$

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,da = 0 \tag{I.14}$$

第一式正好是高斯定理，即通过闭合面出来的$\mathbf{D}$的总通量与闭合面内所含的电荷成正比．第二式是磁学上的类似，由于不存在磁荷，$\mathbf{B}$通过闭合面的净通量等于零．

同样，令 C 为空间一闭合回线，S' 为此闭合回线所围成的曲面，$d\mathbf{l}$ 为回线的线元，da 为S' 的面元，$\mathbf{n}'$ 为da 的单位法线矢量，其方向是根据回线积分的方向按右手法则给出的．那末把斯托克斯定理运用到(I.6)的中间两个方程，得到下列积分表式：

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \int_{S'} \left[\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right]\cdot \mathbf{n}'da \tag{I.15}$$

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\int_{S'} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot \mathbf{n}'da \tag{I.16}$$

方程(I.15)是磁场的安培-麦克斯韦定律,(I.16)是电磁感应的法拉第定律.

这些大家熟悉的麦克斯韦方程组的等效积分表式，可以用来直接推导不同媒质分界面两边电磁场各法向和切向分量的关系式，也许分界面上有面电荷密度或面电流密度．一种适当的几何图形，如图 I.4 所示．一个无限小的高斯圆盒横跨电磁性质不同的两种媒质的分界面．同样,无限小的回线 C 的两条长边分别在界面两侧,并把 C 按这样

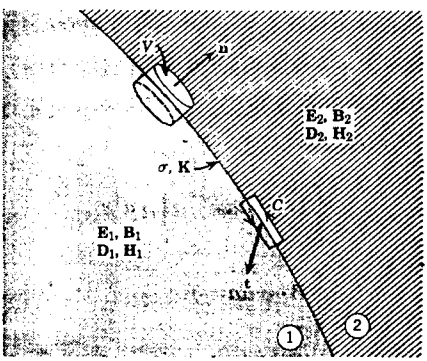


图 I.4　不同媒质分界面(粗线)简图．假定边界区域载有理想的面电荷密度 σ 和面电流密度 $\mathbf{K}$．体积 V 为小圆盒的体积,其一半在一媒质中,另一半在另一媒质中，其顶面的法线矢量 $\mathbf{n}$ 从媒质 1 指向媒质 2．矩形回线 C 的一部分在媒质 1 中,另一部分在媒质 2 中,令其平面垂直于界面,以使其法线 $\mathbf{t}$ 与界面相切.

方位放置，使得其所围面的法线与分界面相切．我们首先对圆盒的体积运用积分表式(I.13)和(I.14)．在圆盒非常扁薄这种极限下，其侧面对(I.13)和(I.14)左边的积分没有贡献．如果顶面和底面平行,并

与界面相切，其面积为 Δa，则(I.13)左边的积分

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\,da=(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)\cdot\mathbf{n}\,\Delta$$

同样可以写出(I.14)左边的积分．如果电荷密度 ρ 在分界面上是奇异的，以便产生一个理想面电荷密度 σ，那末(I.13)右边的积分为

$$4\pi\int_V \rho\,d^3x=4\pi\sigma\,\Delta a$$

于是D和B在界面两侧的法向分量有下列关系：

$$(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)\cdot\mathbf{n}=4\pi\sigma \tag{I.17}$$

$$(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)\cdot\mathbf{n}=0 \tag{I.18}$$

用文字表达如下：B的法向分量是连续的，而D在任意点上法向分量的突变等于 4π 乘该点的面电荷密度．

按类似方法，可以用无限小的斯托克斯回线来确定E和H的切向分量的突变．如果图 I.4 中回线 C 的一对短边的长度可以忽略不计，而一对长边都平行于界面，长度均为 Δl，那末(I.16)左边的积分为

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=(\mathbf{t}\times\mathbf{n})\cdot(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)\,\Delta l$$

同样可以写出(I.15)左边的积分．因为 $\partial\mathbf{B}/\partial t$ 在界面上是有限的，而当一对短边长度趋于零时，回线面积等于零，所以(I.16)右边等于零．但是，如果恰巧在界面上有一流动的理想面电流密度K，则(I.15)右边不等于零．在这种情况下，(I.15)右边的积分为

$$\int_{S'}\left[\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right]\cdot\mathbf{t}\,da=\frac{4\pi}{c}\mathbf{K}\cdot\mathbf{t}\,\Delta l$$

积分的第二项等于零，其证明与上述相同．所以界面两侧E和H的切向分量有下列关系：

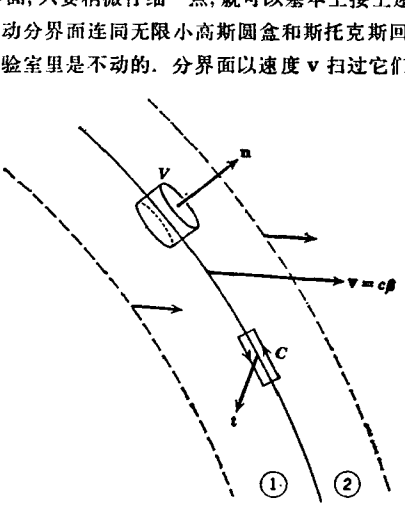
$$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)=0 \tag{I.19}$$

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\frac{4\pi}{c}\mathbf{K} \tag{I.20}$$

由方程(I.20)知道，面电流K在各点只有平行于界面的分量．E的切向分量越过分界面时是连续的，而H的切向分量则不连续，突变的数值等于$4\pi/c$乘面电流密度，突变的方向平行于$\mathbf{K}\times\mathbf{n}$.

突变性方程(I.17)—(I.20)可用来求不同区域里麦克斯韦方程组的解，然后把这些解合并则得全空间的场.

设两种媒质的分界面为时间的函数，在这种普通情况下，上述突变性公式也成立．在一些应用中，运动边界面上的突变性也许是有用的①．对于以速度$\mathbf{v}=c\boldsymbol{\beta}$运动的分界面，只要稍微仔细一点，就可以基本上按上述相同的方法求得结果．两种媒质的运动分界面连同无限小高斯圆盒和斯托克斯回线，如图I.5所示．圆盒和回线在实验室里是不动的．分界面以速度v扫过它们．如果我们现在考虑



图I.5　两种媒质之间的运动分界面．圆盒和回线如同图I.4，且两者在实验室中是固定的．虚线表示前后一瞬间的分界面.

D和B突变性公式(I.17)和(I.18)的推导，就能看出：只要σ被解释为实验室里观测时运动分界面上的面电荷密度，则从(I.13)和(I.14)开始的论证毋需改变，同样有效．因此，对运动的分界面来说，D和B突变性公式(I.17)和(I.18)毋需修正，仍然成立.

但是，E和H的突变性公式(I.19)和(I.20)要加以修正．这是因为(I.15)

① P. D. Noerdinger, *Am. J. Physics* **39**, 191(1971).

和(I.16)右边的时间导数项不再等于零. 分界面扫过静止回线 C, 使这些项有贡献. 为了定出贡献值, 就要考虑 $\mathbf{D}/c$ 的时间导数对这样一个开曲面的面积分, 即开曲面边线的形状与 C 全同, 但以速度 $\mathbf{v}$ 随分界面一起运动, 且与图 I.5 中的 C 瞬时吻合. 该积分为

$$I=\int\frac{1}{c}\frac{d\mathbf{D}}{dt}(\mathbf{x}(t),t)\cdot\mathbf{t}\,da$$

为了强调积分遍及整个运动的开曲面, 我们指出了坐标 $\mathbf{x}$ 隐含时间 t 的依赖关系. 当矩形回线 C 的一对短边趋于零时, 开曲面的面积等于零, 在这种极限下, 积分 I 也等于零. (根据狭义相对论的观点, 在以速度 $\mathbf{v}$ 运动的惯性系中的观测者所看到的分界面是静止的, 所观测到的洛仑兹变换场在分界面上不是奇异的.)但是, 通过对流导数展开, 可以把积分 I 与(I.15)中出现的积分联系起来,

$$0=I=\int\frac{1}{c}\frac{d\mathbf{D}}{dt}(\mathbf{x}(t),t)\cdot\mathbf{t}\,da$$

$$=\int\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\cdot\mathbf{t}\,da+\int[(\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla)\mathbf{D}]\cdot\mathbf{t}\,da$$

利用矢量恒等式可以把第二项改换一下, 所求的积分变为

$$\int\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\cdot t\,da=\int[\nabla\times(\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{D})-\boldsymbol{\beta}\nabla\cdot\mathbf{D}]\cdot\mathbf{t}\,da$$

用斯托克斯定理, 可将上式右边第一项变换为回线积分, 第二项用电荷密度 ρ 表示. 因此, 将(I.15)用于图 I.5 中的回线 C 时, 则得下式:

$$\oint_C[\mathbf{H}-\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{D}]\cdot d\mathbf{l}=\frac{4\pi}{c}\int[\mathbf{J}-\rho\mathbf{v}]\cdot\mathbf{t}\,da$$

按上述(I.19)和(I.20)相同的推导步骤, 可由上式得到突变性公式

$$\mathbf{t}\cdot\{\mathbf{n}\times[\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1-\boldsymbol{\beta}\times(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)]\}=\frac{4\pi}{c}(\mathbf{K}-\sigma\mathbf{v})\cdot\mathbf{t}$$

这里所有量都是在实验室参照系中计算的. 通过矢量运算, 并利用(I.17), 推得

$$\mathbf{t}\cdot[\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)+\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)]=\frac{4\pi}{c}\mathbf{K}\cdot\mathbf{t}\qquad(\text{I.21})$$

由(I.16)通过完全相似的推导, 得

$$\mathbf{t}\cdot[\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)]=0\qquad(\text{I.22})$$

作为 $\mathbf{E}$(和 $\mathbf{B}$)切向分量的突变性公式. 方程(I.21)和(I.22)是(I.19)和(I.20)对两种媒质的运动分界面情况的推广.

在两种媒质中 $\mathbf{D}\simeq\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}\simeq\mathbf{B}$(或者这两式在一种媒质中成立, 而另一种媒

质是良导体，其内所有场等于零）的简化情形下，含有面电流的那个关系式就大大地简化．方程(I.22)可以写成(毋需近似)

$$(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)_{\text{切}}=-(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\mathbf{n}\times(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1) \tag{I.23}$$

然后在(I.21)中令 $\mathbf{H}\to\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{D}\to\mathbf{E}$，把方程(I.23)代入，得

$$[1-(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2]\mathbf{n}\times(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)=\frac{4\pi}{c}\mathbf{K} \tag{I.24}$$

媒质分界面的运动只不过在（I.20）中引进一个总乘积因子，即相对数量级为 v^2/c^2 的校正因子．

I.6 对电磁学中一些理想化的评论

前一节里我们利用了电荷和电流的面分布的概念．这些分布显然是数学上的理想化，在物理世界里不会存在．整个电磁学中还有其它一些抽象概念出现．例如：静电学中说，使物体对通常叫做“地”的零电势保持一定电势．这些理想化同实在世界的关系，即使对大多数有经验的人来说似乎是明显的，恐怕也还值得讨论一番．

首先，我们考虑“使某导体对某参考值保持静电势不变”这个问题．它蕴含以下概念：所用的方法不会明显干扰所要求的电荷和场的分布．为了使一物体保持电势不变，往往至少必须有一条从该物体到遥远(“在无穷远处”)电荷源的导电路线或其等效路线，以便当别的带电体或不带电体放到附近时，电荷可以流入或流出该物体，使其电势总是保持在所要求的值．虽然可能有更完善的方法，可是通常是用金属线做成导电路线的．从直观上我们预料细导线比粗导线干扰小．其理由如下：“因为当导线直径无限减少时，具有一定电势的任意一段导线上的电量都随之无限减少．所以尺寸相当大的物体上的电分布，不会由于把非常细金属线引进场内(例如用来构成这些物体和地、起电机、或静电计之间的电连接)，而明显地受到影响．”[①]当然，在细导线的紧邻

① J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Dover, New York, 1954 年重印第三版(1891)，卷 1，第 96 页．

区域电场是非常大的．可是当距离的数量级远大于“尺寸相当大物体”的线度时，影响是很小的．在历史上，证实麦克斯韦的话的一个重要实验，是二百年前由亨利·卡文迪许作的．卡文迪许在他父亲住宅的一间改造过的马厩里做实验，用莱顿瓶作为电荷源，细导线作为导体，把物体悬挂在屋里，他测定了保持一定电势的圆柱体、圆盘等物体上所带的电荷量，并跟具有相同电势的球（就是图 I.1 所示的球）上的电荷量比较．他这样测得的电容值准确到百分之几．例如，半径相同的球和薄圆盘的电容比为 1.57．理论值为 $\pi/2$．

使用越来越细的导线实际上是有限度的．每单位长度的电荷（作为 $\ln(d/a)$ 的倒数，这里 a 是导线平均半径，d 是导线与某导电面相隔的典型距离．）只是按对数而减少．为了使系统的干扰减到最低程度，必须求助于别的保持电势的方法，例如，使用间歇带电粒子流的比较法．

当说到某一导体接地时，就是假定用极细导线把它跟一遥远电荷源连接起来，后者作为公共零电势．使物体保持一定电势，同样要把它跟电压源（例如电池）的一端连接，电压源的另一端跟公共“地”相连．因此，当一开始带上电的物体互相作相对运动，使得它们的电荷分布发生改变，而它们的电势保持不变，则有一定数量的电荷流出或流入遥远源，假定后者是一个取之不竭的源泉．接地的概念在静电学（在这里时间不是一个因素）里是很明确的概念，但是对于振荡场，有限的传播速度使接地概念模糊了．换句话说，杂散的感应效应和电容效应变成很重要了．这时必须非常小心地确保“良好接地”．

宏观电磁学里的另一种理想化是面电荷密度或面电流密度的概念．物理上的实际情况是电荷或电流分布在表面的紧邻区域．如果该区域的厚度比所考虑的长度小，我们就可以把这种实际情况理想化，近似地以厚度无限小的一个区域取代之，并说成是面分布．有两种不同的极限情形须加以区分．一种极限情形是，“面”分布局限于一个接近

表面的、宏观小而微观大的区域．例如，随时间变化的场透入一优良而非理想的导体，该实例在 8.1 节里描述．我们发现，场被局限于厚度 δ 内，这个厚度叫做趋肤深度，而且当频率足够高、传导性足够好时，δ 在宏观上可以是非常小的．这时把电流密度 J 遍及垂直于表面的方向积分，就得到有效面电流密度 $\mathbf{K}_{有效}$．

另一种极限情形是真正微观的情形，这是由物质原子结构中的量子力学效应提出的．例如，在静电学里考虑一个导体的过剩电荷分布．如所周知，这些电荷完全在导体表面上．于是我们说该导体有一面电荷密度 σ．导体内部没有电场，但按(I.17)，只是在表面外有电场的一个法向分量．从微观上来说，电荷不是完全在表面上的，场的变化不是不连续的．大多数的基本研究指出，过渡区域大小相当于几个原子直

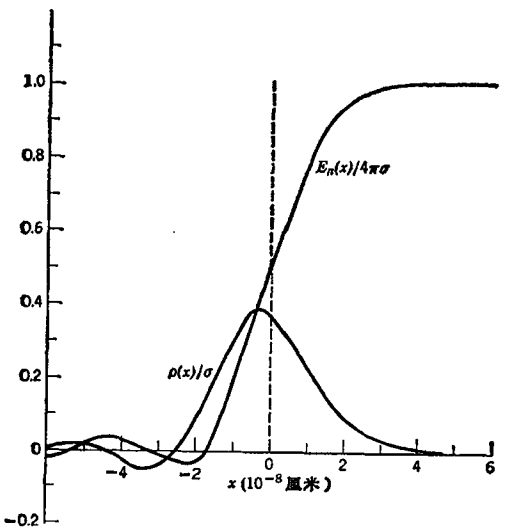


图 I.6 导体表面过剩电荷的分布和电场法向分量的分布．固体中的离子被限制在 $x<0$ 区域，且近似地看作一恒定连续电荷分布，电子穿过这一分布而运动．大部分过剩电荷被限制在"表面"的±2 埃以内．

径．可以认为，金属中的离子是相对固定的，其位置限制在 1 埃或更小的范围内；而较轻的电子受束缚较少．模型计算[①]的结果如图 I.6 所示．这些结果来自量子力学多电子问题的解，其中导体的离子近似地看作 $x<0$ 的连续恒定电荷密度．电子密度($r_s=5$)大体上对铜和较重碱金属是适用的．我们看到过剩电子的电荷局限于离子分布的"表面"的 ± 2 埃区域内．电场在该区域平滑地上升，直到导体"外"的 $4\pi\sigma$ 值．在宏观情况下，10^{-7} 厘米是可忽略不计的距离，我们可以把电荷密度和电场状态理想化为 $\rho(x)=\sigma\delta(x)$ 和 $E_n(x)=4\pi\sigma\theta(x)$，相当于一个真正面电荷密度和一个阶跃函数的跳变电场．

我们看到，经典电磁学的理论处理牵涉到几种理想化，其中有一些是方法上的，有一些是物理上的．本书前几章讨论的静电学这个课题，正如电磁学其它一些课题那样，是作为宏观电现象的实验科学来叙述的．把这些宏观定律，甚至真空中的电荷和电流外推到微观领域，大部分是不适用的．在绪论中我们及早地讨论了这种外推的一些极限情形．有一点要在此说明一下．我们事后知道：倘若源是按量子力学处理的，经典电磁学定律的许多方面也适用于原子领域；将电磁量对含大量分子的体积求平均，就消除了快速的涨落，使静止外场在物质中感生静止的平均反应；从宏观意义上说，过剩电荷就在导体表面上．于是，库仑和安培的宏观观测以及我们由此而得的数学推论，其适用范围要比谨小慎微的物理学家所设想的来得宽阔．空气的有效电极化率或磁化率等于零无疑是简化的情况！

参考书和推荐读物

电学和磁学的历史多半是科学史本身的内容．我们已经引用过下列一套丛书：

---

① N. D. Lang and W. Kohn, *Phys. Rev.* **B1**, 4555(1970); B3, 1215(1971); V. E. Kenner, R. E. Allen, and W. M. Saslow, *Phys. Letters* **38A**, 255(1972).

Whittaker 著，该书分两卷，第一卷阐述 1900 年之前的；还引用过下列一书：

Born and Wolf，该书对电磁学历史作了简短的叙述，其重点放在光学.下列是另一本值得一读的书，其中明白易懂地讨论了原始实验：

N. Feather, *Electricity and Matter*, University Press, Edinburgh(1968).

下列文献评述了有关库仑平方反比律或光子质量(按现代术语说)的实验：

I. Yu. Kobzarev and L. B. Okun′, *Uspekhi Fiz. Nauk* **95**, 131 (1968)[译自 *Sov. Phys. Uspekhi* **11**, 338(1968).]

A. S. Goldhaber and M. M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **43**, 277(1971).

关于宏观麦克斯韦方程组及其从微观方程组的推导，可参看第六章末所列推荐读物．关于电介质、铁电体和磁性材料的基本物理学原理，可参看许多固体物理的书．例如：

Beam,

Kittel,

Wert and Thomson,

Wooten.

第一本书是为电气工程师写的，重点放在像半导体那样的实用课题上．最后一本书主要讲光学性质．

在下列诸书中，讨论了在论述金属表面阻抗(反常趋层效应)时必须用到的空间非局域性，

A. B. Pippard, *Advances in Electronics and Electron Physics*, 卷Ⅵ, 编者 L. Marton, Academic, New York (1954), 第 1—45 页; *Reports on Progress in Physics*, 卷 XXⅢ, 第 176—266 页 (1960); *The Dynamics of Conduction Electrons*, Gordon and Breach, New York(1965).

在下列诸书中，叙述了与波矢、频率有依赖关系的介电常数 $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$ 的概念：

Kittel, *Advanced Topic D*;

D. Pines, *Elementary Excitations in Solid*, W. A. Benjamin, New York (1963), 第三章和第四章;

F. Stern, *Solid State Physics*, 卷 15, 编者 F. Seitz and D. Turnbull, Academic, New York, 第 299—408 页.

非线性光学这一迅速发展的领域，刚开始出版了一本书，许多内容还得参看研究性或评论性期刊，或者参看暑期学校会议录．有关这门学科的介绍可参看：

J. A. Giordmaine, *Physics Today* 22(1)38(1969),

N. Bloembergen, *Am. J. Phys.* **35**, 989(1967),

G. C. Baldwin, *Introduction to Nonlinear Optics*, Plenum, New York (1969).

比较高深的讨论可参看:

S. A. Akhmanov and R. V. Khokhlov, *Usp. Fiz. Nauk.* **88**, 439 (1966); **95**, 231(1968)[译自*Sov. Phys. Uspekhi*, **9**, 210(1966); **11**, 394(1968)],

N. Bloembergen, *Nonlinear Optics*, W. A. Benjamin, New York(1965),

Quantum Optics, Proc. Int. School of Physics "Enico Fermi", Varenna, Course XLII, 1967, 编者 R. J. Glauber, Academic, New York (1969), J. Ducuing, Y. R. Shen, J. A. Giordmaine 所写的论文,

P. S. Pershan, *Progress in Optics*, 卷 V, 编者 E. Wolf, North-Holland, Amsterdam(1966), 第 83-144 页.

第一章　静电学导论

我们从静电学这个题目开始讨论电动力学，静电现象涉及的电荷和场的分布与时间无关. 对大多数读者来说，我们所阐述的题材具有温习的性质. 特别在本章里我们不进行深入的钻研. 我们引进一些对今后讨论至关重要的概念和定义，并且介绍一些基本的数学工具. 在以后几章里将进一步介绍一些数学方法并加以运用.

从物理上应该说明一点：在历史上，静电学是作为研究宏观现象的科学而发展起来的. 正如绪论末所指出的，像点电荷或空间一点的电场强度这样的一些理想化必须看作数学上的构思，以允许在宏观水平上描写诸现象，但是在微观上也许是毫无意义的.

1.1　库仑定律

静电学的全部内容都出于库仑定律的定量描述，该定律叙述了彼此相对静止的诸带电体间的作用力. 库仑用一系列令人佩服的实验证明了：当两个小带电体的距离远大于它们本身的线度时，两者在空气中的作用力

（1）与每个电荷的量值成正比；

（2）与它们间的距离的平方成反比；

（3）方向沿着这两个电荷的连线；

（4）如果这两个带电体带异号电荷，则为吸引力；如果这两个带电体带同号电荷，则为排斥力.

此外，从实验上还证明了：某一小带电体周围的若干个其它小带电体所产生的、作用在该小带电体上的总力，是各两体库仑力的矢量和. 严格地说，库仑的结论只适用于真空中或磁导率可忽略不计的媒质中

的电荷．至于电介质中的电荷，留到第四章再讨论．

1.2 电场强度

虽然最终要测量的是力，但引进一个与力不尽相同的概念，即关于由某种分布的诸带电体所产生的电场强度的概念是有用的．我们可以暂时把电场强度定义为在某一给定点上的单位电荷所受的作用力．它是位置的矢函数，并用 $\mathbf{E}$ 表示．不过，我们对电场强度的这个定义必须小心．将带有一个单位电荷的木髓球放在某一位置时，所观测到的力未必就是电场强度．理由是：一个单位的电荷可以如此之大，以致它的存在显著地改变了原来的场分布．因此，必须采取极限的方法，即测定出当小检验体的电荷量越来越少时，作用在该小检验体上的力与其电荷量的比值①．根据实验，当检验电荷量越来越少时，这个比值和力的方向将变为恒定．这些极限的比值和方向就定义为在所考虑点上的电场强度 $\mathbf{E}$ 的数值和方向。用符号表示时，可以写成：

$$\mathbf{F}=q\mathbf{E} \tag{1.1}$$

式中 $\mathbf{F}$ 是力，$\mathbf{E}$ 是电场强度，q 是电荷．在这个方程中已假定电荷 q 位于一点，并且力和电场强度都是对该点计算出来的．

同样地，可以写出库仑定律．如果 $\mathbf{F}$ 是位于 $\mathbf{x}_2$ 的点电荷 q_2 对位于 $\mathbf{x}_1$ 的点电荷 q_1 的作用力，那么，库仑定律就是：

$$\mathbf{F}=kq_1q_2\frac{(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|^3} \tag{1.2}$$

注意：q_1 和 q_2 是可正可负的代数量．比例常数 k 与所用的单位制有关．

位于 $\mathbf{x}_1$ 点的点电荷 q_1，在 $\mathbf{x}$ 点所产生的电场强度，如图 1.1 所示，可按下式直接求得：

---

① 电荷的分立性（参看 I.1 节）意味着：这种数学极限在物理上不可能实现．这便是宏观电磁学中数学理想化的一个例子．

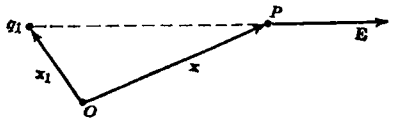


图 1.1

$$\mathbf{E}(\mathbf{x})=kq_1\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|^3} \tag{1.3}$$

常数 k 由所选用的电荷单位确定. 在静电系单位制中，我们选取这样一个电荷作为单位电荷，即/它对相距一厘米处的一个等量电荷所施的力为一达因. 所以，在厘米·克·秒制中，$k=1$，而电荷的单位叫做“静电系电量单位”(或静库仑). 在米·千克·秒·安制(MKSA)中，$k=(4\pi\varepsilon_0)^{-1}$，式中 $\varepsilon_0(=8.854\times10^{-12}$法拉/米)是真空的电容率. 我们将采用静电系单位制①.

由实验得知，许多电荷所产生的总力是按线性叠加的，这意味着，我们可以把位于 $\mathbf{x}_i(i=1,2,\cdots,n)$的一组点电荷 q_i 在 $\mathbf{x}$ 点所产生的电场强度，写成如下矢量和:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}q_i\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i|^3} \tag{1.4}$$

如果这些电荷是这样的小，而数目又这样的多，以致能用电荷密度 $\rho(\mathbf{x}')$来描述它们[如果 Δq 是在 $\mathbf{x}'$ 点的小体积 $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ 内的电荷，则 $\Delta q=\rho(\mathbf{x}')\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$]，那么上述求和就可用积分来代替:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x})=\int\rho(\mathbf{x}')\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}d^3x' \tag{1.5}$$

式中 $d^3x'=dx'\,dy'\,dz'$ 是在 $\mathbf{x}'$ 处的一个三维体积元.

在这里，值得介绍一下狄喇克 δ 函数. 在一维情形下，写成 $\delta(x-a)$形式的 δ 函数是数学上的非正常函数，它具有下列性质:

① 附录中详细地讨论了关于单位制的问题.

(1) 当 $x\neq a$ 时，$\delta(x-a)=0$；

(2) 如果积分区间包含 $x=a$，则$\int\delta(x-a)=1$，否则$\int\delta(x-a)dx=0$. 我们可以给出 δ 函数的直观而不严格的意义，即把它看成一条峰形曲线（例如高斯曲线）在变得越来越窄，但越来越高，而且曲线下的面积仍保持恒定时，所趋于的极限. 薛华兹的分布理论对 δ 函数及其运算作了全面而又严格的数学探讨①.

从以上定义显而易见，对于一个任意函数 $f(x)$ 来说，

(3) $\int f(x)\quad\delta(x-a)\quad dx=f(a)$

如果把 δ 函数看作一个有理的锐峰形函数，就很容易理解 $f(x)$ 乘 δ 函数的导数的积分. 于是其定义为：

(4) $\int f(x)\delta'(x-a)dx=-f'(a)$

式中撇号表示对自变量求微商.

如果 δ 函数的自变量是独立变数 x 的函数 $f(x)$，则此 δ 函数可按下述法则变换：

(5) $\delta(f(x))=\sum_i\frac{1}{\left|\frac{df}{dx}(x_i)\right|}\delta(x-x_i)$

这里假定 $f(x)$ 只具有位于 $x=x_i$ 处的单零点.

在高于一维的情形下，我们只须取各维的 δ 函数的乘积. 例如，在三维情形下，用笛卡儿坐标.

(6) $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X})=\delta(x_1-X_1)\delta(x_2-X_2)\delta(x_3-X_3)$

是一个除了 $\mathbf{x}=\mathbf{X}$ 点外处处为零的函数，并且有如下性质：

(7) $\int_{\Delta V}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X})d^3x=\begin{cases}1 & \text{如果}\Delta V\text{ 包含 }\mathbf{x}=\mathbf{X}\\ 0 & \text{如果}\Delta V\text{ 不包含 }\mathbf{x}=\mathbf{X}\end{cases}$

要注意，不论空间的维数有多少，δ 函数的量纲总是体积的倒数.

借助于 δ 函数就可以用电荷密度去描写分立的点电荷系. 例如，

$$\rho(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}q_i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)\tag{1.6}$$

---

① *Lighthill* 的书给出了狄喇克 δ 函数的有用的和严格的阐述. 也可参看 *Dennery and Krzywicki*, Ⅱ. 13 节.（我们在正文或脚注中用作者名字援引的参考书，其全名可在本书末的参考书目中找到.）

代表位于 $\mathbf{x}_i$ 点的 n 个点电荷 q_i 的分布. 将这一电荷密度(1.6)代入(1.5), 并利用 δ 函数的性质积分之, 即得分立的点电荷系的总场表式(1.4).

1.3 高斯定律

计算电场强度时, 积分(1.5)并不是最适宜的形式. 另有一种积分结果, 叫作高斯定律, 往往更有用, 而且能导出 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ 的微分方程. 为了求高斯定律, 我们先考虑如图 1.2 所示的一个点电荷 q 和一个闭合曲

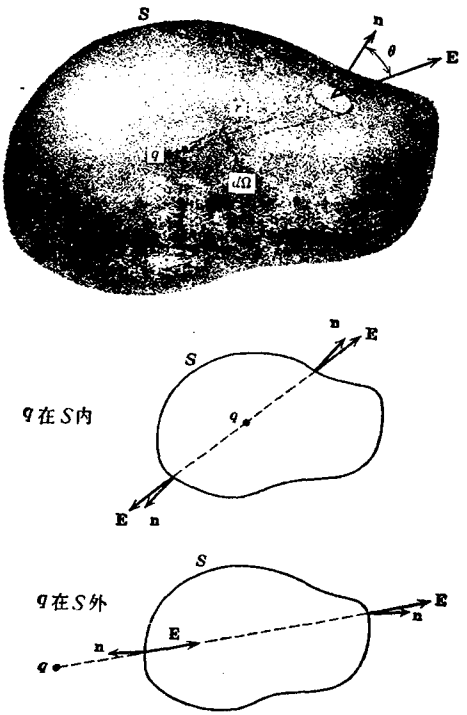


图 1.2 高斯定律. 电场强度的法向分量沿闭合曲面 S 积分. 若电荷在 S 内(外), 则闭合曲面的内侧面对电荷所张的总立体角为 4π(零).

面 S. 设 r 是由该电荷到曲面上一点的距离，$\mathbf{n}$ 是曲面上该点向外的单位法线矢量，da 是曲面面积元. 如果电荷 q 在曲面上该点所产生的电场强度 $\mathbf{E}$ 与单位法线矢量之间的夹角为 θ，那么 $\mathbf{E}$ 的法向分量与面积元相乘，即得：

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}da=q\frac{\cos\theta}{r^2}da \tag{1.7}$$

因为 $\mathbf{E}$ 的方向沿着曲面元到电荷 q 的直线，$\cos\theta\, da=r^2\, d\Omega$，式中 $d\Omega$ 是 da 对电荷所在的点所张的立体角元. 所以，

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}da=qd\Omega \tag{1.8}$$

如果我们现在将 $\mathbf{E}$ 的法向分量遍及整个曲面积分，容易看出

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}da=\begin{cases}4\pi q & \text{如果 } q \text{ 在 } S \text{ 内}\\ 0 & \text{如果 } q \text{ 在 } S \text{ 外}\end{cases} \tag{1.9}$$

这就是对单个点电荷的高斯定律. 对于分立的点电荷系来说，高斯定律显然可写为

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}da=4\pi\sum_i q_i \tag{1.10}$$

式中只对那些在曲面 S 内的诸电荷求和. 对于电荷密度为 $\rho(\mathbf{x})$ 的连续分布电荷来说，高斯定律变为

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}da=4\pi\int_V \rho(\mathbf{x})d^3x \tag{1.11}$$

式中 V 是曲面 S 所包围的体积.

方程(1.11)是静电学的基本方程之一. 应当注意，它依赖于：

(1) 诸电荷间作用力的平方反比律；

(2) 力的有心性质；

(3) 不同电荷的效应的线性叠加.

因此，对于牛顿引力场来说，只要以物质密度代替电荷密度，高斯定律显然也成立.

注意到下列事实是有好处的：甚至在卡文迪许和库仑的实验之前，普列斯特莱(Priestley)就进行了富兰克林(Franklin)的观测，即电荷存在于金属杯的外壁，而不在内壁，他用类似牛顿万有引力定律的方法，推断了静电力与距离的关系必定遵守平方反比律．I.2 节里讨论了对平方反比律的现代见解．

1.4 高斯定律的微分形式

可以认为高斯定律是积分形式的静电学定律．利用散度定理可以得到它的微分形式(即一个微分方程)．散度定理可陈述如下：对于被限定在闭合曲面 S 所包围的体积 V 内的任何矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 来说，$\mathbf{A}$ 的散度的体积分与 $\mathbf{A}$ 的外法向分量的面积分之间有如下关系

$$\oint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}da=\int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,d^3x$$

事实上，这个方程可作散度的定义(参看 *Stratton*，第 4 页)．

为了应用散度定理，我们考虑高斯定律的积分关系式：

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}da=4\pi\int_V \rho(\mathbf{x})\,d^3x$$

现在，利用散度定理可以把这个关系式写成：

$$\int_V (\nabla\cdot\mathbf{E}-4\pi\rho)\,d^3x=0 \tag{1.12}$$

式中体积 V 是任意的．按通常方法，令被积函数等于零，于是得到

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho \tag{1.13}$$

这就是静电学中的高斯定律的微分形式．这个方程本身可以用来求解静电学问题．但因处理位置的标函数，比处理位置的矢函数往往更简单，所以，即便是必要的话，也只在最后才导出矢量的结果(见下文)．

1.5 另一个静电学方程和标势

单独一个方程(1.13)，还不足以完全确定电场 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ 的三个分量．

也许有些读者知道，只有当矢量场的散度和旋度在空间处处给定时，这个矢量场才能几乎①完全确定．所以，我们要寻求确定 E 的旋度（为位置的函数）的方程．即

$$\nabla\times\mathbf{E}=0 \tag{1.14}$$

这样一个方程可以从广义的库仑定律(1.5)

$$\mathbf{E}(\mathbf{x})=\int\rho(\mathbf{x}')\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}d^3x'$$

直接得到．被积函数中的矢量因子可看成 x 的函数，它是标量 $1/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ 的负梯度：

$$\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}=-\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)$$

因为梯度运算只涉及 x，而不涉及积分变数 x′，所以可把梯度算符提到积分号之外．于是电场强度可写为

$$\mathbf{E}(\mathbf{x})=-\nabla\int\frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x' \tag{1.15}$$

因任何连续可微位置标函数的梯度的旋度等于零（对于一切的 ψ，均有 $\nabla\times\nabla\psi=0$），所以由(1.15)立即得出(1.14)．

要注意，$\nabla\times\mathbf{E}=0$ 依赖于诸电荷间作用力的有心性质，也依赖于力只是相对距离的函数这一事实，但不依赖于平方反比律．

在(1.15)中，电场强度（为矢量）是从一个标量通过梯度运算而得出的．因为一个位置函数比三个位置函数易于处理，所以值得把注意力集中在标函数上，并给它一个名称．为此，我们以方程

$$\mathbf{E}=-\nabla\Phi \tag{1.16}$$

来定义标势 $\Phi(\mathbf{x})$．于是(1.15)表明，标势是通过下式而用电荷密度来表示的，

---

① 可以相差一个标函数的梯度，该标函数满足拉普拉斯方程．参看论唯一性的 1.9 节．

$$\Phi(\mathbf{x})=\int\frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x' \tag{1.17}$$

式中积分遍及全空间的一切电荷，而Φ具有一定程度的任意性，即在(1.17)的右边可以加进一个常数.

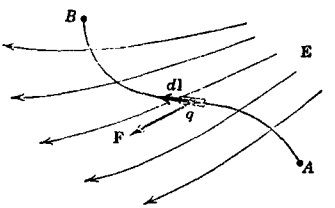


图 1.3

当我们考虑到将电场$\mathbf{E}(\mathbf{x})$中的一个检验电荷q从一点A移到另一点B(如图1.3所示)所作的功时，就能给标势以物理解释. 在任一点，作用在电荷上的力是

$$\mathbf{F}=q\mathbf{E}$$

因此把电荷从A移到B时所作的功是

$$W=-\int_A^B\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}=-q\int_A^B\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \tag{1.18}$$

因为我们计算的是克服电场的作用而对电荷所作的功，所以式中出现了负号. 利用定义(1.16)，这个功可写为

$$W=q\int_A^B\nabla\Phi\cdot d\mathbf{l}=q\int_A^B d\Phi=q[\Phi_B-\Phi_A] \tag{1.19}$$

上式表明，$q\Phi$可解释为在静电场中检验电荷的势能.

从(1.18)和(1.19)可以看出，电场强度在两点之间的线积分与路径无关，并等于这两点之间电势差的负值，

$$\int_A^B\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=-(\Phi_B-\Phi_A) \tag{1.20}$$

当然，这个式子也可以从定义(1.16)直接得到. 如果路径是闭合的，则线积分等于零，

$$\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0 \tag{1.21}$$

这个结果也可以从库仑定律直接得到. 然后应用斯托克斯定理[若$\mathbf{A}(\mathbf{x})$是有理矢量场，S是任意开曲面，C是S的闭合边线，则

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}=\int_S(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,da$$

式中 $d\mathbf{l}$ 是C的线元，$\mathbf{n}$ 是 S 的法线，积分路径C沿相对于 $\mathbf{n}$ 成右手螺旋方向进行.]由上式又立即得到 $\nabla\times\mathbf{E}=0$.

1.6 电荷和电偶极子的面分布;电场强度和电势的突变

静电学中常见的问题之一，就是确定由给定的面电荷分布所产生的电场强度或电势.由高斯定律(1.11)可以直接写出部分结果.如果曲面 S 的单位法向矢量为 $\mathbf{n}$，其方向是从侧面 1 指向侧面 2，在 S 面上有一面电荷密度为 $\sigma(\mathbf{x})$(以每平方厘米的静电系电量单位来度量，在曲面两侧的电场强度为 $\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$，如图 1.4 所示. 那末，由高斯定律立即得到

$$(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)\cdot\mathbf{n}=4\pi\sigma \tag{1.22}$$

除非没有其他场源存在，而且界面的几何形状和 σ 的分布形式又特别简单，否则上式还不能确定 $\mathbf{E}_1$ 与 $\mathbf{E}_2$. (1.22)的全部含义是：当电场强度沿着 $\mathbf{n}$ 的方向越过面电荷密度为 σ 的曲面时，电场强度的法向分量要发生 $4\pi\sigma$ 的突变.

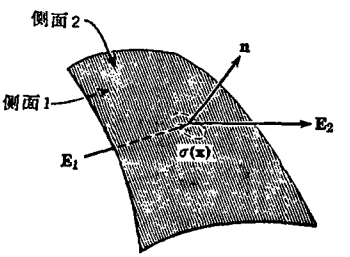


图 1.4 越过面电荷层时，电场强度的法向分量发生突变.

利用 $\mathbf{E}$ 沿闭合回路的线积分(1.21)，可以证明越过边界面时电场强度的切向分量是连续的. 这只须作一矩形回路即可，回路的两条短边可忽略不计，两条长边分别位于边界面的两侧.

由(1.17)，用 $\sigma\,da$ 代替 ρd^3x，就可得到空间任何一点(不恰在曲面上)的势(取微分，就得到电场强度)的表式：

$$\Phi(\mathbf{x})=\int_S \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}da' \tag{1.23}$$

对于体电荷分布或面电荷分布，势是处处连续的，甚至在电荷分布内部也是连续的。这可以由(1.23)或如下事实加以证明，即 $\mathbf{E}$ 是有限的，即使越过面电荷分布时要发生突变。对于点电荷、线电荷或偶极层，正如下文所见，势不再是连续的。

另一个重要的问题是由曲面 S 上偶极层分布所产生的势。我们可以设想偶极层是这样形成的：令曲面 S 上有面电荷密度为 $\sigma(\mathbf{x})$ 的电荷分布着，将另一个曲面 S' 紧挨着 S，在 S' 上与 S 相邻的诸点上带有等量异号的面电荷密度 $-\sigma(\mathbf{x})$，如图 1.5所示。强度为 $D(\mathbf{x})$ 的偶极层分布是这样形成的：令 S' 无限地接近 S，而面电荷密度 $\sigma(\mathbf{x})$ 却趋于无穷大，使得 $\sigma(\mathbf{x})$ 与 S 和 S' 间的距离 $d(\mathbf{x})$ 的乘积趋于极限 $D(\mathbf{x})$：

$$\lim_{d(\mathbf{x})\to 0}\sigma(\mathbf{x})\ \ d(\mathbf{x})=D(\mathbf{x}) \tag{1.24}$$

偶极层的偶极矩的方向垂直于曲面 S，并从负电荷指向正电荷。

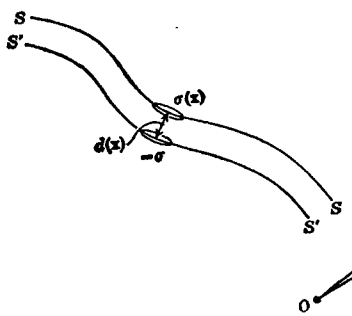


图 1.5 建立偶极层的极限过程。

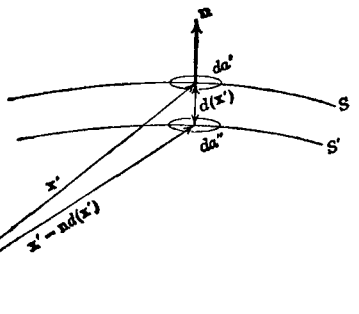


图 1.6 偶极层的几何图形。

为了求偶极层产生的势，我们可以先考虑单个偶极子，然后把许多偶极子叠加成一个面密度，或者对面密度的势的表式(1.23)从数学上施行上面所说的极限处理，也能得到相同结果。第一种方法也许比较

简单，但第二种方法为矢量计算提供了有益的练习．因此，我们采用极限方法．设曲面 S 的单位法向矢量 $\mathbf{n}$ 的方向背离 S'，如图 1.6 所示，则由这两个相邻的曲面产生的势为

$$\Phi(\mathbf{x})=\int_S \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}da'-\int_{S'}\frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'+\mathbf{n}d|}da''$$

当 d 很小时，我们可以展开 $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'+\mathbf{n}d|^{-1}$．考虑普遍表式 $|\mathbf{x}+\mathbf{a}|^{-1}$，式中 $|\mathbf{a}|\ll|\mathbf{x}|$．于是，我们写出：

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mathbf{x}+\mathbf{a}|}&\equiv\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}}}\\&=\frac{1}{x}\left(1-\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}}{x^2}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{x}+\mathbf{a}\cdot\nabla\left(\frac{1}{x}\right)+\cdots\end{aligned}$$

显然，这正是三维的泰勒级数展开式．按照这种方法，我们发现[在取极限(1.24)后]势变成：

$$\Phi(\mathbf{x})=\int_S D(\mathbf{x}')\mathbf{n}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)da' \qquad (1.25)$$

方程(1.25)有一简单的几何解释．我们注意到

$$\mathbf{n}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)da'=-\frac{\cos\theta da'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}=-d\Omega$$

式中 $d\Omega$ 是面积元 da' 对观测点所张的立体角元，如图 1.7 所示．注意如果 θ 是锐角，即当观测点面对着偶极层的“内”侧时，$d\Omega$ 为正．这样，我们可以把势写成：

$$\Phi(\mathbf{x})=-\int_S D(\mathbf{x}')d\Omega \qquad (1.26)$$

对于恒定的面偶极矩密度 D 来说，势恰好是面偶极矩与曲面对观测点所张

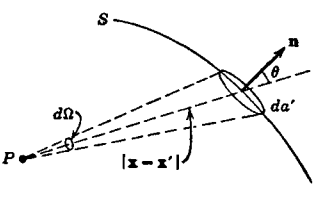


图 1.7 由面积元 da' 上的偶极层 D 在 P 点所产生的势恰好等于 D 与 da' 对 P 所张的立体角元 $d\Omega$ 的乘积的负值．

的立体角的乘积，而与曲面形状无关.

在越过偶极层时，就有势的突变. 令观测点无限接近偶极层，就可以看到这种突变. 现在把偶极层想像为由两部分所组成，其一是观测点紧底下的一个小圆盘. 这圆盘充分地小，以致它可以看作是平面的，且具有恒定的面偶极矩密度 D. 显然，圆盘产生的势和其余部分产生的势的线性叠加，就可以得到总的势. 由(1.26)显而易见，在从内侧越到外侧时，圆盘产生的势发生 $4\pi D$ 的突变，因为在内侧面上为 $-2\pi D$，在外侧面上为 $+2\pi D$. 圆盘以外的部分(它的孔恰好与圆盘相吻合)所产生的势，在越过孔平面时是连续的. 因此，越过曲面时，势的总突变为

$$\Phi_2-\Phi_1=4\pi D \tag{1.27}$$

这个结果和越过面电荷密度时电场强度的突变(1.22)相似. "在物理学上"可以把方程(1.27)解释为偶极层"内部"发生的势降，因而可以把它当作取极限之前两个面电荷层之间的场与它们间的距离的乘积来计算。

1.7 泊松方程和拉普拉斯方程

我们在 1.4 节和 1.5 节中证明了静电场可以用下列两个微分方程来描写：

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho \tag{1.13}$$

和

$$\nabla\times\mathbf{E}=0 \tag{1.14}$$

后一个方程等于说：$\mathbf{E}$ 是一个标函数(标势 Φ)的梯度：

$$\mathbf{E}=-\nabla\Phi \tag{1.16}$$

我们可以把方程(1.13)和(1.16)合并成只含一个函数 $\Phi(\mathbf{x})$ 的偏微分方程：

$$\nabla^2\Phi=-4\pi\rho \tag{1.28}$$

这个方程叫做泊松方程. 在电荷密度为零的空间区域内，标势满足拉普拉斯方程:

$$\nabla^2\Phi=0 \tag{1.29}$$

我们已经有标势的解,即表式(1.17):

$$\Phi(\mathbf{x})=\int\frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x' \tag{1.17}$$

为了证明上式确实满足泊松方程(1.28)，我们将拉普拉斯算符作用于上式的两边:

$$\nabla^2\Phi=\nabla^2\int\frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x'=\int\rho(\mathbf{x}')\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)d^3x' \tag{1.30}$$

我们现在必须计算 $\nabla^2(1/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)$的值. 先把原点移到 $\mathbf{x}'$，从而计算 $\nabla^2(1/r)$(其中 r 是 $\mathbf{x}$ 的量值)是方便的(也是许可的). 直接计算后得到 $r\neq0$ 时, $\nabla^2(1/r)=0$:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left(r\cdot\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(1)=0$$

然而当 $r=0$ 时，上式是不定式. 但是，当 $r\neq0$ 时, $\nabla^2(1/r)=0$, 这意味着,(1.30)可以写成下式:

$$\nabla^2\Phi=C\rho(\mathbf{x})\qquad C=\int\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)d^3x$$

我们用下述极限方法来计算常数 C:

$$C=\lim_{a\to0}\int\nabla^2\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}\right)d^3x$$

拉普拉斯算符作用于有理函数 $(r^2+a^2)^{-1/2}$ 得

$$\nabla^2\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}\right)=\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{r}{\sqrt{r^2+a^2}}\right)=-\frac{3a^2}{(r^2+a^2)^{5/2}}$$

于是

$$C=\lim_{a\to0}\left[-3a^2\int d\Omega\int_0^\infty\frac{r^2\,dr}{(r^2+a^2)^{5/2}}\right]$$

$$= -12\pi \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^{5/2}} = -4\pi$$

这个C值证明了：拉普拉斯算符作用于(1.17)确实满足泊松方程(1.28).

$\nabla^2(1/r)$的奇异性在形式上可以用狄喇克δ函数来表示.因为当$r\neq 0$时，$\nabla^2(1/r)=0$，同时$\nabla^2(1/r)$的体积分等于-4π，我们可以写出形式方程$\nabla^2(1/\delta)=-4\pi\delta(\mathbf{x})$或写成更普遍的形式：

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)=-4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{1.31}$$

1.8 格临定理

如果静电学问题总是涉及定域的分立定域的分立或连续的电荷分布，而没有边界面，那么通解(1.17)就是任何这类问题的最方便、最直接的解. 这样一来，就不需要泊松方程和拉普拉斯方程了. 当然，实际上许多(即使不是大多数)静电学问题都涉及有限的空间区域，在这些区域内可以有电荷，也可以没有电荷，但在边界面上都具有一定的边界条件. 这些边界条件，可用所考虑的区域外(也许在无穷远)的适当的电荷分布来模拟.但除一些简单情形(例如电像法)外，用(1.17)来计算势是不方便的.

为了处理边界条件，必须阐述若干新的数学工具，即格临(1824)所建立的恒等式或定理. 这些恒等式或定理，是简单应用散度定理得到的. 把散度定理

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\, d^3x = \oint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, da$$

用于闭合曲面S所包围的体积V内的任一有理矢量场$\mathbf{A}$. 令$\mathbf{A}=\phi\nabla\psi$，式中$\phi$与$\psi$是任意的标量场. 现在，

$$\nabla\cdot(\phi\nabla\psi)=\phi\nabla^2\psi+\nabla\phi\cdot\nabla\psi \tag{1.32}$$

并且

$$\phi \nabla\psi \cdot \mathbf{n} = \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \tag{1.33}$$

式中 $\partial/\partial n$ 是曲面 S 上的法向导数（从体积 V 内指向 V 外）. 把(1.32)和(1.33)代入散度定理，得到格临第一恒等式:

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi)\, d^3x = \oint_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} da \tag{1.34}$$

如果把 ϕ 与 ψ 调换一下，重写(1.34)，再与原来的(1.34)相减，消去 $\nabla\phi \cdot \nabla\psi$ 项，便得到格临第二恒等式或格临定理:

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d^3x = \oint_S \left[\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] da \tag{1.35}$$

如果我们选取一个特殊的 ψ，即 $1/R \equiv 1/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$，式中 $\mathbf{x}$ 是观测点，$\mathbf{x}'$ 是积分变数，那么，势的泊松微分方程就可以变成积分方程. 此外，我们又令 $\phi = \Phi$(标势)，并利用 $\nabla^2\Phi = -4\pi\rho$. 从(1.31)知 $\nabla^2(1/R) = -4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$，(1.35)因而变成

$$\int_V \left[-4\pi\Phi(\mathbf{x}')\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + \frac{4\pi}{R}\rho(\mathbf{x}') \right] d^3x' =$$

$$= \oint_S \left[\Phi \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right] da'$$

如果点 $\mathbf{x}$ 在体积 V 内，我们得

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{R} d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{1}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial n'} - \Phi \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right) \right] da' \tag{1.36}$$

如果 $\mathbf{x}$ 在曲面 S 之外，则(1.36)左边为零①. [要注意，这和把面积分解释为面电荷密度 $\sigma = (1/4\pi)(\partial\Phi/\partial n')$ 与偶极层 $D = -(1/4\pi)\Phi$ 所产生的势是一致的. 由于越过曲面时电场强度和电势的突变，如式(1.22)与(1.27)所示，致使体积 V 外的场强和势为零.]

① 读者也许抱怨说，因为 $1/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ 在体积 V 内有奇点，所以(1.36)不是以合法方式求得的. 利用上节所述的极限方法或在奇点 $\mathbf{x}=\mathbf{x}'$ 周围挖去一小球，就可以严格地求得(1.36).

关于结果(1.36)有两点要注意：第一，如果曲面S趋于无穷大，并且S上的电场强度下降得比R^{-1}快，那么面积分便化为零，而(1.36)便简化为我们熟知的结果(1.17)；第二，对于无电荷的体积来说，在该体积内任何一点的势(拉普拉斯方程的一个解)，都由式(1.36)以该体积表面上的势和势的法向导数来表示．这个颇为意外的结果，并不是边值问题的一个解，而只是一个积分方程，因为既给定Φ，又给定$\partial\Phi/\partial n$[科希边界条件]乃是对该问题作过多的规定．下面几节将就这点作详细讨论，在那里将阐述利用格临定理(1.35)在多种适宜的边界条件下求解的方法．

1.9 狄利克莱边界条件或诺埃曼边界条件下解的唯一性

现在产生这样一个问题：要使有界区域内存在一个唯一的、有理的(即物理上合理的)解，问适合泊松(或拉普拉斯)方程的边界条件是什么？物理的经验使我们相信，给定闭合曲面上的势(例如保持在不同电势下的导体系)，就唯一地确定了势问题的解．这叫做狄利克莱问题或狄利克莱边界条件．同样地可以相信，给定曲面上各处的电场强度(势的法向导数)，相当于给定面电荷密度，也能唯一地确定势问题的解．给定势的法向导数就叫做诺埃曼边界条件．现在，我们着手用格临第一恒等式(1.34)来证明这些想法．

我们必须证明，体积V内的泊松方程$\nabla^2\Phi=-4\pi\rho$在满足闭合界面S上的狄利克莱边界条件或诺埃曼边界条件下解的唯一性．用反证法，我们假定存在两个满足相同边界条件的解Φ_1与Φ_2．令

$$U=\Phi_2-\Phi_1 \tag{1.37}$$

于是在V内，有$\nabla^2U=0$；在S上，狄利克莱边界条件或诺埃曼边界条件分别为$U=0$或$\partial U/\partial n=0$．从格临第一恒等式(1.34)，令$\phi=\psi=U$，即得

$$\int_V (U\nabla^2 U+\nabla U\cdot\nabla U)d^3x=\oint_S U\frac{\partial U}{\partial n}da \tag{1.38}$$

考虑到U的上述性质，上式对这两类边界条件来说都导致：

$$\int_V |\nabla U|^2 d^3x=0$$

这就意味着 $\nabla U=0$. 因此，在V内，U是恒量. 对于狄利克莱边界条件来说，在S上$U=0$，因此在V内 $\Phi_1=\Phi_2$，解是唯一的. 同样，对于诺埃曼边界条件来说，除了一个无关紧要的任意附加常数外，解也是唯一的.

从(1.38)的右边可以明显地看出，满足混合边界条件(即曲面S的一部分满足狄利克莱条件，其余部分满足诺埃曼条件)的问题也有唯一的解.

应该明白，在闭合边界上既要任意地给定Φ，又要任意地给定$\partial\Phi/\partial n$(科希边界条件)的情况下，泊松方程的解是不存在的，因为对于狄利克莱条件与诺埃曼条件各有一个唯一的解，这些解一般是不一致的. 这可以用(1.36)加以证明. 将Φ和$\partial\Phi/\partial n$的任意值代入右边，可以证明：当x逼近曲面时，$\Phi(x)$和$\nabla\Phi(x)$的值通常与假定的边值不一致. 开曲面上的科希边界条件是否确定静电学问题的唯一解呢？关于这个问题需要作更详细的讨论，但已超出本书的范围. 有关这些问题的详细讨论，读者可以参看 *Morse and Feshbach*, 6.2 节，第 692—706 页，或参看 *Sommerfeld, Partial Differential Equations in Physics*, 第二章. 结论是：静电学问题只能由闭合边界面(当然，其中一部分或全部可以在无穷远处)上 的狄利克莱边界条件或诺埃曼边界条件唯一地确定.

1.10 用格临函数求静电学边值问题的形式解

给定边界面S上的狄利克莱边界条件或诺埃曼边界条件时，有限

体积V内的泊松方程或拉普拉斯方程的解，可以利用格临定理(1.35)和所谓的“格临函数”求得.

我们在求(1.36)这个结果 (这不是一个解)的时候，将函数ψ选为$1/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$，它是单位点电荷的势，满足方程

$$\nabla'^2\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)=-4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{1.31}$$

函数$1/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$只不过是一个依赖于变数$\mathbf{x}$、$\mathbf{x}'$的函数，叫做格临函数，它满足(1.31). 在一般情况下，

$$\nabla'^2 G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=-4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{1.39}$$

式中

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}+F(\mathbf{x},\mathbf{x}') \tag{1.40}$$

而函数F在体积V内满足拉普拉斯方程：

$$\nabla'^2 F(\mathbf{x},\mathbf{x}')=0 \tag{1.41}$$

针对满足所规定的Φ或$\partial\Phi/\partial n$边界条件的问题，我们考虑了(1.36)这个结果时，就能找出解问题的方法. 正如前面指出的，(1.36)并非满足正确类型的边界条件的解，因为Φ和$\partial\Phi/\partial n$都在面积分中出现. (1.36)充其量不过是Φ的一个积分方程. 利用推广的格临函数概念及其附加自由项[即函数$F(\mathbf{x},\mathbf{x}')$]，我们就有可能用格临定理，令$\psi=G(\mathbf{x},\mathbf{x}')$，并选取$F(\mathbf{x},\mathbf{x}')$以消去两个面积分中的一个，从而得到一个只含狄利克莱边界条件或诺埃曼边界条件的结果. 当然，如果所需的$G(\mathbf{x},\mathbf{x}')$密切依赖于边界条件的精确形式，那么，这种方法的普遍性就很差. 但是，我们将马上看到，这种顾虑是不必要的. 因为$G(\mathbf{x},\mathbf{x}')$在$S$上满足相当简单的边界条件.

由格临定理(1.35)，令$\phi=\Phi$，$\psi=G(\mathbf{x},\mathbf{x}')$，再利用已给定的$G$的性质(1.39)，就容易得到(1.36)的推广式：

$$\Phi(\mathbf{x})=\int_V \rho(\mathbf{x}')G(\mathbf{x},\mathbf{x}')d^3x'+\frac{1}{4\pi}\oint_S\left[G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\frac{\partial\Phi}{\partial n'}\right.$$

$$-\Phi(\mathbf{x}')\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial n'}\Big]da' \tag{1.42}$$

在G的定义(1.40)中提供的自由项，意味着我们能使面积分只依赖于所选择的边界条件的类型．所以，对于狄利克莱边界条件，我们要求：

$$G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}')=0 \qquad \text{对于}S\text{上的}\mathbf{x}' \tag{1.43}$$

于是，(1.42)中面积分的第一项等于零，其解为

$$\Phi(\mathbf{x})=\int_V \rho(\mathbf{x}')G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}')d^3x' -\frac{1}{4\pi}\oint_S \Phi(\mathbf{x}')\frac{\partial G_D}{\partial n'}da' \tag{1.44}$$

对于诺埃曼边界条件，我们必须更为小心．初看起来，加在$G(\mathbf{x},\mathbf{x}')$上的边界条件应选择为：

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\mathbf{x},\mathbf{x}')=0 \qquad \text{对于}S\text{上的}\mathbf{x}'$$

因为这可使（1.42）中面积分的第二项化为零．这是我们所期望的．可是，将高斯定律用于(1.39)后，表明

$$\oint_S \frac{\partial G}{\partial n'}da'=-4\pi$$

因此，G_N的最简单的许可的边界条件是

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\mathbf{x},\mathbf{x}')=-\frac{4\pi}{S} \qquad \text{对于}S\text{上的}\mathbf{x}' \tag{1.45}$$

式中S是边界面的总面积。其解为

$$\Phi(\mathbf{x})=\langle\Phi\rangle_S+\int_V \rho(\mathbf{x}')G_N(\mathbf{x},\mathbf{x}')d^3x' +\frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\partial\Phi}{\partial n'}G_N da' \tag{1.46}$$

式中$\langle\Phi\rangle_S$是整个曲面上势的平均值．通常的诺埃曼问题是所谓“外域问题”，在外域问题中，体积V以两个曲面为界，一个是有限的闭合曲面，另一个是在无穷远处．于是，曲面面积S是无穷大；边界条件(1.45)变成齐次的，平均值$\langle\Phi\rangle_S$化为零．

我们要注意，格临函数满足简单的边界条件(1.43)或(1.45)，这些条件并不依赖于狄利克莱（或诺埃曼）边界值的详细形式．即使如此，由于$G(\mathbf{x},\mathbf{x}')$依赖于曲面$S$的形状，因此，要确定$G(\mathbf{x},\mathbf{x}')$也颇为困难

(若不是不可能的话). 在第二章和第三章里,我们将遇到这类问题.

满足狄利克莱边界条件(1.43)的格临函数,我们可以利用格临定理,令 $\phi=G(\mathbf{x},\mathbf{y})$和 $\psi=G(\mathbf{x},\mathbf{y})$(这里 $\mathbf{y}$ 是积分变数)来证明它具有数学上的对称性: $G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=G(\mathbf{x}',\mathbf{x})$. 由于格临函数作为它的一个变数的函数时,乃是单位点电荷所产生的势,因此,这种对称性仅仅表示源与观测点在物理上的可交换性. 对于诺埃曼边界条件,格临函数不自动满足对称性,但可以作为一个独立的要求而强加于它.

最后要阐明的一个重要问题,是关于 $F(\mathbf{x},\mathbf{x}')$的物理意义. $F(\mathbf{x},\mathbf{x}')$是体积 V 内拉普拉斯方程的解,因而代表体积 V 外电荷系的势. 这个势可以认为是由这样选取的外域电荷分布所产生的,即该电荷分布所产生的势与源点 $\mathbf{x}'$ 上的一个点电荷所产生的势组合起来后,在曲面 S 上正好满足电势为零(或势的法向导数为零)的齐次边界条件. 因为点电荷在曲面 $\mathbf{x}$ 点上产生的势与源点的位置有关,所以外域电荷分布产生的势 $F(\mathbf{x},\mathbf{x}')$也必与"参数"$\mathbf{x}'$ 有关. 从这个观点出发,我们看到,电像法(将在第二章中讨论)与确定一个满足边界条件(1.43)或(1.45)的适当的函数 $F(\mathbf{x},\mathbf{x}')$,在物理上是等效的,对于有导体的狄利克莱问题,我们也可以把 $F(\mathbf{x},\mathbf{x}')$解释为:源点 $\mathbf{x}'$ 上的一个点电荷,在导体上感生的面电荷分布所产生的势.

1.11 静电势能与能量密度;电容

在1.5节里已经证明,标势与点电荷的乘积可以解释为势能. 更确切地说,如果把一个点电荷 q_i 从无穷远处移到由标势 Φ(它在无穷远处为零)所描述的定域电场区域内的一点 $\mathbf{x}_i$,那么对该电荷所作的功(从而电荷的势能)由下式给出

$$W_i=q_i\Phi(\mathbf{x}_i) \tag{1.47}$$

我们可以把势 Φ 看作是由位于 $\mathbf{x}_j$ 的 $(n-1)$ 个电荷 $q_j(j=1,2,\cdots,n-1)$组成的电荷系所产生的. 于是

$$\Phi(\mathbf{x}_i)=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{q_j}{|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j|} \tag{1.48}$$

因此，电荷 q_i 的势能为

$$W_i=q_i\sum_{j=1}^{n-1}\frac{q_j}{|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j|} \tag{1.49}$$

显而易见，由诸电荷间的所有相互作用力产生的全部电荷的总势能是

$$W=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j<i}\frac{q_iq_j}{|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j|} \tag{1.50}$$

将各电荷的势能依次相加，就很容易得出上式．对 i 和不受限制的 j 求和，然后除以 2，便可以写出更为对称的形式

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i}\sum_{j}\frac{q_iq_j}{|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j|} \tag{1.51}$$

显然，在双重求和中应略去 $i=j$ 的项(无穷大的“自具能”项)．

对于连续的电荷分布［在一般情况下，或者利用狄喇克 δ 函数(1.6)］，势能取下列形式：

$$W=\frac{1}{2}\iint\frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x\,d^3x' \tag{1.52}$$

只要注意到（1.52）中有一个积分正是标势（1.17），便可以写出与(1.52)等价的另一表式，即

$$W=\frac{1}{2}\int\rho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})d^3x \tag{1.53}$$

方程(1.51)、(1.52)与(1.53)都是以电荷的位置来表示静电势能，因此强调了电荷间的相互作用是一种库仑力．另一种很有效的方法，是强调电场，并把能量解释为贮存在电荷周围的电场中．为了得到后一种形式，我们利用泊松方程消去(1.53)中的电荷密度，

$$W=\frac{-1}{8\pi}\int\Phi\nabla^2\Phi d^3x$$

分部积分后即得:

$$W=\frac{1}{8\pi}\int|\nabla\Phi|^2d^3x=\frac{1}{8\pi}\int|\mathbf{E}|^2d^3x \tag{1.54}$$

式中积分遍及全空间. 在(1.54)中, 所有明显涉及电荷的地方都已去掉, 能量已被表为电场强度的平方对全空间的积分. 由此自然地推出被积函数等于能量密度 w:

$$w=\frac{1}{8\pi}|\mathbf{E}|^2 \tag{1.55}$$

这一能量密度的表式在直观上是合理的, 因为场强大的区域所容纳的能量"一定"更多.

关于(1.55), 或许还有一件令人费解的事情. 能量密度是正的有限值, 因而它的体积分必定不是负的. 这似乎和我们从(1.51)得到的关于两个异号电荷的势能为负的想法相矛盾. 这是一个表面上的矛盾, 其理由在于: (1.54)与(1.55)包含"自具能"对能量密度的贡献, 而(1.51)的双重求和则不然. 为了阐明这一点, 我们考虑 q_1 和 q_2 两个点电荷, 分别位于 $\mathbf{x}_1$ 与 $\mathbf{x}_2$, 如图 1.8 所示. 在坐标为 $\mathbf{x}$ 的 P 点上的电场强度是

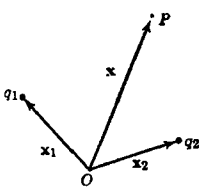


图 1.8

$$\mathbf{E}=\frac{q_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|^3}+\frac{q_2(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_2|^3}$$

因而, 能量密度(1.55)是

$$w=\frac{{q_1}^2}{8\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|^4}+\frac{{q_2}^2}{8\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}_2|^4}+\frac{q_1q_2(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|^3|\mathbf{x}-\mathbf{x}_2|^3} \tag{1.56}$$

显然, 前两项是自具能的贡献. 为了证明第三项给出相互作用势能的正确结果, 我们对全空间积分:

$$W_{\text{相互}}=\frac{q_1q_2}{4\pi}\int\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|^3|\mathbf{x}-\mathbf{x}_2|^3}d^3x \tag{1.57}$$

将积分变数换为 $\boldsymbol{\rho}=(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)/|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|$, 即得

$$W_{\text{相互}}=\frac{q_1q_2}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}\cdot\frac{1}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{\rho}\cdot(\boldsymbol{\rho}+\mathbf{n})}{\rho^3(\boldsymbol{\rho}+\mathbf{n})^3}d^3\rho \tag{1.58}$$

式中 $\mathbf{n}$ 是 $(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)$ 方向上的单位矢量. 应用 $(\boldsymbol{\rho}+\mathbf{n})/|\boldsymbol{\rho}+\mathbf{n}|^3=-\nabla_\rho(1/|\boldsymbol{\rho}+\mathbf{n}|)$ 这一事实,可以很容易地证明,无量纲的积分的值是 4π,因此就得到我们所期望的关于相互作用能的表式.

算出在微小的虚位移下系统总静电能的改变,就可以求出带电体之间的作用力. 这类计算的一些例子在习题中讨论. 应当细心地把能量表式写成这样的形式,使之清楚地表明哪些因子随电荷分布的改变而改变,哪些因子则保持恒定.

作为一个简单的例子,我们来计算面电荷密度为 $\sigma(\mathbf{x})$ 的导体表面每单位面积的作用力. 在紧邻导体表面的区域内,能量密度为

$$w=\frac{1}{8\pi}|\mathbf{E}|^2=2\pi\sigma^2 \tag{1.59}$$

如果我们现在设想导体表面的面积元 Δa 发生微小的外向位移 Δx,那么静电能的减少量就等于能量密度 w 与面积元所扫过的体积 $\Delta x\Delta a$ 的乘积:

$$\Delta W=-2\pi\sigma^2\Delta a\Delta x \tag{1.60}$$

这就是说,在导体表面,每单位面积的外向力为 $2\pi\sigma^2=w$. 通常,我们取面电荷密度与电场强度(要注意将面电荷密度元本身所产生的电场强度除去)的乘积,便可导出这个结果.

对导体系来说,设它由 n 个导体组成的,每个导体具有电势 V_i 和总电荷 $Q_i(i=1,2,\cdots,n)$,导体以外是真空,则静电势能可以用电势和叫做电容系数的其些几何量来表示. 当导体的分布给定时,电势对电荷密度的线性函数依赖关系,意味着第 i 个导体的电势可以写为

$$V_i=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}Q_j\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

式中 p_{ij} 依赖于诸导体的几何分布. 由这 n 个方程可以反过来把第 i 个导体上的电荷用 n 个势来表示:

$$Q_i=\sum_{j=1}^{n}C_{ij}V_j \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1.61}$$

系数 C_{ii} 叫做电容，而 $C_{ij}(i\neq j)$ 叫做感应系数．所以一个导体的电容是该导体处于单位电势、所有其它导体处于零电势时它所带的电荷．有时也规定导体系的电容．例如，两个带等量异号电荷的导体，放在其它接地导体的前面，这两导体的电容规定为一导体上的电荷对两导体间电势差的比值．可以利用方程(1.61)把这个电容用系数 C_{ij} 来表示．

导体系的势能(1.53)为

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}Q_iV_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}V_iV_j \tag{1.62}$$

这个表式把能量用势 V_i 和 C_{ij} 来表示，或者用电荷 Q_i 和系数 p_{ij} 来表示，运用变分法就可以求得电容的近似值．可以证明（参看习题 1.17 和 1.18）：有一些变分原理给出 C_{ii} 的上限和下限．这些变分原理允许按已知误差来估计比较复杂的导体分布的电容．高速计算技术使我们可以采用精心设计的含几个参数的尝试函数．但是必须指出，在求下限时须用满足狄利克莱边界条件的格临函数，以使误差估计符合特定的要求．有关这种计算电容的方法的进一步探讨放在本章末和下面几章末的习题中．

参考书和推荐读物

在数学方面，简单而又严谨地论述了 δ 函数的有：

Lighthill,

Dennery and Kryzwicki.

关于不同类型的偏微分方程，以及与各类偏微分方程相适应的边界条件的讨论，参见

Morse and Feshbach，第六章；

Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*，第二章；

Courant and Hilbert，卷 II，第三章至第六章．

详细论述格临函数一般理论的有：

Friedman, 第三章；

Morse and Feshbach, 第七章.

许多较老的书籍中都广泛地讨论了静电学的一般理论. 著名的(尽管它们用了一些老式符号)有：

Maxwell, 卷 1, 第二章和第四章；

Jeans, 第二、六、七章；

Kellogg.

在论述一般理论的较新的书籍中, 可以提出来的有：

Stratton, 第三章以及第二章的一部分.

对应用于电磁学问题的变分法有兴趣的读者可以参看：

Cairo and Kahan,

Collin, 第四章.

至于完美而有效的数学方法可以参看：

Pólya and Szegö.

习　题

1.1　试用高斯定律(必要时加上(1.21)式)证明下述见解：

(*a*) 放在一导体上的任何过剩电荷必定全部分布在导体的表面上. (根据定义, 导体含有在外电场作用下能自由运动的电荷.)

(*b*) 一个闭合的中空导体能将其内部屏蔽起来, 使外界电荷产生的场不能进入, 但不能阻止它的内部电荷产生的场进入它的外围区域.

(*c*) 导体表面上的电场垂直于表面, 其量值为$4\pi\sigma$, σ是表面上每单位面积的电荷密度.

1.2　三维狄喇克δ函数可以看作$\alpha\to 0$时高斯函数

$$D(\alpha;x,y,z)=(2\pi)^{-3/2}\alpha^{-3}\exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2}(x^2+y^2+z^2)\right]$$

的非正常极限. 假定有一广义正交坐标系, 它是由曲面$u=$常数, $v=$常数, $w=$常数所规定的, 在三个互相垂直方向上的长度元为du/U、dv/V、dw/W. 试从上述高斯函数的极限证明：

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')=\delta(u-u')\delta(v-v')\delta(w-w')UVW$$

要注意：当$\alpha\to 0$时, 只须用无限小长度元作为指数中诸点间的距离.

1.3 利用适当坐标系中的 δ 函数，将下列电荷分布表示成三维电荷密度 $\rho(\mathbf{x})$.

(*a*) 在球坐标中，均匀分布于半径为 R 的球壳上的电荷 Q.

(*b*) 在柱坐标中，均匀分布于半径为 b 的圆柱面上的每单位长度电荷 λ.

(*c*) 在柱坐标中，均匀分布于厚度忽略不计、半径为 R 的平面圆盘上的电荷 Q.

(*d*) 与(*c*)同，但用球坐标.

1.4 有三个半径均为 a 的带电球，其中一个球是导电的，另一个球在体内有均匀分布的电荷密度，第三个球的电荷密度是球对称分布的，并在径向上按 r^n $(n>-3)$变化，这三个球各带总电荷 Q. 试用高斯定律求各球内、外的电场强度. 画出前两个球的电场强度对半径的关系曲线，以及第三个球在 $n=-2$、$+2$ 时的上述曲线.

1.5 中性氢原子的势对时间的平均值由下式给出：

$$\Phi=q\frac{e^{-\alpha r}}{r}\left(1+\frac{\alpha r}{2}\right)$$

式中 q 是电子电荷的量值，$\alpha^{-1}=a_0/2$，a_0 是玻尔半径①. 试求出能够给出这一势的电荷分布(连续的与分立的两种情形)，并从物理上解释你的结果.

1.6 一个简单电容器是由两个相邻的绝缘了的导体所构成的一种装置. 如果在两个导体上置以等量异号电荷，两者之间就会有一定的电势差. 一个导体上的电荷量值与电势差量值之比称为电容(在静电单位制中以厘米来量度). 试用高斯定律计算下列各种情况下的电容：

(*a*) 两块面积为 A 的大而平的导电板，相隔很小的距离 d；

(*b*) 两个同心导电球，半径分别为 a 和 b $(b>a)$；

(*c*) 两个同心导电圆柱，长为 L，L 大于它们的半径 a 和 b $(b>a)$；

(*d*) 一个充满空气的同轴电缆，其中心导体是直径为 1 毫米的圆柱形金属线. 如果电缆的电容为 0.5 微微法/厘米，问电缆的外层导体的内直径应为多少？如果电缆的电容为 0.05 微微法/厘米，问电缆的内层导体的内直径应为多少？

1.7 设半径分别为 a_1 和 a_2 的两根长圆柱形导体相互平行，且相距为 d，而 d 大于两者的半径. 试证明，每单位长度的电容近似地由下式给出：

$$C\simeq\left(4\ln\frac{d}{a}\right)^{-1}$$

式中 a 是两个半径的几何平均值.

---

① 即经典电子半径，它等于 e^2/mc^2. ——译者注

如果一根双线传输线的两金属线间的距离为 0.5 厘米、1.5 厘米和 5.0 厘米，问大致要各用哪种规格的金属线(直径用毫米表示)，才能使传输线的电容为 0.1 微微法/厘米？

1.8 (*a*) 试就习题 1.6 中所讨论的三种形式的电容器，算出总静电能，并且用置于导体上的等量异号电荷 Q 与 $-Q$，以及两导体间的电势差分别表示出来.

(*b*) 试对每一种情形，画出静电场的能量密度对适宜的线性坐标的依赖关系曲线.

1.9 试对下列两种情况，算出平行板电容器[习题 1.6(*a*)]和平行圆柱电容器(习题 1.7)中两导体间的吸引力：

(*a*) 每一导体上的电荷固定不变；

(*b*) 两导体间的电势差固定不变.

1.10 证明均值定理：在无电荷空间中任一点的静电势之值，等于以该点为球心的任一球面上势的平均值.

1.11 试用高斯定律证明，在弯曲的带电导体的表面上，电场强度的法向导数由下式给出：

$$\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial n}=-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

式中 R_1 和 R_2 是曲面的主曲率半径.

1.12 证明格临互易定理：若 Φ 是体积 V 内的体电荷密度 ρ 与导电曲面 S(V 的边界面)上面电荷密度 σ 所产生的势，而 Φ' 是另一电荷分布 ρ' 与 σ' 所产生的势，则

$$\int_V \rho\Phi' d^3x+\int_S \sigma\Phi' da=\int_V \rho'\Phi d^3x+\int_S \sigma'\Phi da$$

1.13 设有两个接地的无限大平行导电平面，两者相距为 d. 把一个点电荷 q 放在两个平面之间. 试用格临互易定理证明：其中一个平面上的总感生电荷，等于 $(-q)$ 乘该点电荷到另一平面的相对垂直距离. (提示：作为比较，试考虑具有相同表面的静电学问题，选取其中一个表面的电荷密度和电势为已知的简单分布.)

1.14 考虑一无电荷体积 V，它以闭合曲面 S 为界，S 由几个独立曲面(导体) S_i 组成，每个 S_i 保持势 V_i 不变. 令 $\Psi(\mathbf{x})$ 为 V 内、S 上的有理函数，$\Psi(\mathbf{x})$ 在每个曲面 S_i 上的值等于 V_i，而在其它各处则是任意的.

定义类能量为

$$W[\Psi]=\frac{1}{8\pi}\int_V |\nabla\Psi|^2 d^3x$$

试证明下列定理：

只要假定Ψ在V内满足拉普拉斯方程，并在曲面S_i上取给定值V_i，则$W[\Psi]$（按定义，它是非负的）是稳定的，且是一个绝对最小值.

1.15 证明汤姆孙定理：设若干导电曲面的位置固定不变，每一曲面上放置一定的总电荷，则当放置的电荷使每一曲面都等势时，以这些曲面为界的区域内静电能为最小.

1.16 证明下述定理：设有若干导电曲面，位置固定不变，每一曲面带一定的总电荷，若将一个不带电的绝缘导体引入以这些曲面为界的区域中，则会降低静电能.

1.17 考虑像习题1.14那样的导体分布，其中一个导体保持单位电势，所有其它导体的电势等于零.

(*a*) 证明这一个导体的电容由下式给出：

$$C=\frac{1}{4\pi}\int_V |\nabla\Phi|^2 d^3x$$

式中$\Phi(\mathbf{x})$是势的解.

(*b*) 利用习题1.14的定理证明真电容C总是小于或等于下列的量：

$$C[\Psi]=\frac{1}{4\pi}\int_V |\nabla\Psi|^2 d^3x$$

式中Ψ是满足诸导体上边界条件的任何尝试函数. 这是一个给出电容上限的变分原理.

1.18 考虑习题1.17的导体分布，除S_1外，所有导体的电势都保持为零.

(*a*) 证明：在体积V内和任一曲面S_i上任何地方的电势$\Phi(\mathbf{x})$，都可以写为

$$\Phi(\mathbf{x})=\oint_{S_1}\sigma_1(\mathbf{x}')G(\mathbf{x},\mathbf{x}')d^3x'$$

式中$\sigma_1(\mathbf{x}')$是S_1上的面电荷密度，$G(\mathbf{x},\mathbf{x}')$是在电势为零的所有曲面（但$S_1$除外）面前放着的一个点电荷的格临函数势. 再证明静电能为

$$W=\frac{1}{2}\oint_{S_1}da\oint_{S_1}da'\sigma_1(\mathbf{x})G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\sigma_1(\mathbf{x}')$$

式中积分只遍及曲面S_1.

(*b*) 证明：设$\sigma(\mathbf{x})$为S_1上给定的任意可积函数，当σ对σ_1作微小变更时，下列变分表式是稳定的：

$$C^{-1}[\sigma]=\frac{\oint_{S_1}da\oint_{S_1}da'\sigma(\mathbf{x})G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\sigma(\mathbf{x}')}{\left[\oint_{S_1}\sigma(\mathbf{x})da\right]^2}$$

利用汤姆孙定理证明 $C^{-1}[\sigma]$ 的倒数给出导体 S_1 的真电容的下限.

1.19 对于习题 1.6(*c*) 的圆柱形电容器，借助简单的尝试函数 $\Psi_1(\rho)=(b-\rho)/(b-a)$ 计算习题 1.17(*b*) 的变分上限. 当 $b/a=1.5, 2, 3$ 时，把变分的结果和严格的结果作一比较. 根据 Ψ_1 的函数形式解释你的结果的变化倾向. *Collin* 这本书的第 151 页至第 152 页论述了一个改进的尝试函数.

1.20 在对一个给定的导体系分布估算其电容时，与已知电容比较，往往是有益的. 考虑 n 个导体的两种分布，在这两种分布中，势保持为零的 $(n-1)$ 个导体是相同的，但我们所要求电容的那个导体则不相同. 特别地，设一种分布中的那个导体具有闭合曲面 S_1，而另一种分布中的那个导体具有闭合曲面 S_1'，S_1' 完全在 S_1 之内.

(*a*) 利用习题 1.14 的定理和习题 1.17 的变分原理证明：以曲面 S_1' 为界的导体的电容 C' 小于或等于以曲面 S_1(S_1 包围了 S_1')为界的导体的电容 C.

(*b*) 求出边长为 a 的导电立方体的电容上限和下限. 把你所得的上下限及其平均值与数值 $C\simeq 0.655a$ 作一比较.

第二章　静电学中的边值问题(I)

许多静电学问题都涉及或者势已给定、或者面电荷密度已给定的边界面．1.10节中用格临函数法介绍了这类问题的形式解．但在实际情况中(或接近于实际情况的相当理想化的情况中)，要找到正确的格临函数，有时候容易，而有时候就不容易．因此，发展起来好几种解静电学边值问题的方法，其中一些方法与格临函数法只有极少的联系．在本章中，我们将研究其中两种特殊方法：(1)电像法，这种方法与格临函数的应用有密切关系；(2)正交函数展开法，这种方法直接利用微分方程本身，而与直接建立格临函数没有多大关系．主要省略了用复变数方法(包括保角映像)来处理二维问题．这个课题是重要的，但限于篇幅，而且在别的著作里各有独特的讨论，所以在此不予阐述．有兴趣的读者可以参看本章末所援引的参考书．

2.1　电像法

电像法用于求解在边界面(例如，接地导体或保持势不变的导体)前面有一个或一个以上点电荷的问题．在较好的条件下，从边界面和电荷的几何位置能够推断：在所考虑的区域外适当地放置几个量值合适的电荷，就能够模拟所需要的边界条件．这些电荷称为像电荷，而这种用一个带有像电荷的、但为无界的扩大区域，来代替有界区域的实际问题的方法，就称为电像法．像电荷必须在所考虑的体积之外，因为它们在该体积内的势必须是拉普拉斯方程的解；“特解”(即泊松方程的解)则由该体积内诸电荷的势之和给出．

一个简单的例子是，一个点电荷位于势为零的无限平面导体的前

面，如图 2.1 所示．显而易见，这种情况和以原来的电荷加上一个像电荷的情况等效，这个像电荷位于由导体位置所确定的平面后的镜像点上，并与原来的电荷等量、异号．

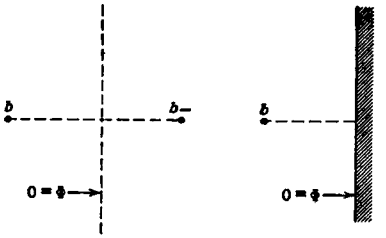


图 2.1　用电像法求解．左图是原来的势问题，右图是等效的电像问题．

2.2　在接地导电球前面的点电荷

作为电像法的一个实例，我们考虑图 2.2 所表示的关于一个位于接地导电球前面 y 点（相对于原点）上的点电荷 q 的问题，该导电球的半径为 a，球心落在原点上．我们来求满足 $\Phi(|\mathbf{x}|=a)=0$ 的势 $\Phi(\mathbf{x})$．由对称性可知，像电荷 q'（假定只需一个像）将处在从原点到电荷 q 的直线上．如果我们认为电荷 q 在球外，则像的位置 $\mathbf{y}'$ 就处在球内．电荷 q 与 q' 产生的势为

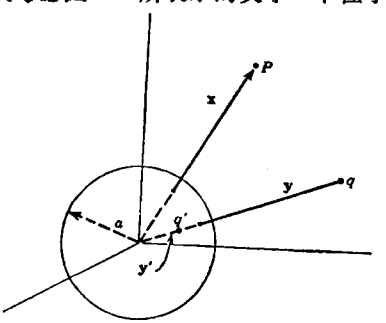


图 2.2　半径为 a 的导电球，以及电荷 q 和像电荷 q'．

$$\Phi(\mathbf{x})=\frac{q}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}+\frac{q'}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}'|} \tag{2.1}$$

现在，我们必须选取 q' 与 $|\mathbf{y}'|$，使得这个势在 $|\mathbf{x}|=a$ 处为零．如果 $\mathbf{n}$ 是 $\mathbf{x}$ 方向上的单位矢量，$\mathbf{n}'$ 是 $\mathbf{y}$ 方向上的单位矢量，那末

$$\Phi(\mathbf{x})=\frac{q}{|x\mathbf{n}-y\mathbf{n}'|}+\frac{q'}{|x\mathbf{n}-y'\mathbf{n}'|} \tag{2.2}$$

如果从第一项中把 x 作为因子提出来，从第二项中把 y' 作为因子提出来，那末在 $x=a$ 处的势变为：

$$\Phi(x=a)=\frac{q}{a\left|\mathbf{n}-\frac{y}{a}\mathbf{n}'\right|}+\frac{q'}{y'\left|\mathbf{n}'-\frac{a}{y'}\mathbf{n}\right|} \tag{2.3}$$

从(2.3)的形式可以看出，选取

$$\frac{q}{a}=-\frac{q'}{y'},\qquad \frac{y}{a}=\frac{a}{y'}$$

对于 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'$ 的一切可能值，都有 $\Phi(x=a)=0$．因此像电荷的量值和位置分别为：

$$q'=-\frac{a}{y}q,\qquad y'=\frac{a^2}{y} \tag{2.4}$$

我们注意到，当电荷 q 移近球体时，像电荷的量值增加，并且从球心向外移动．当 q 靠近球的外表面时，像电荷的量值相等、符号相反，并且靠近球的内表面．

现在，像电荷已经求得，我们就可以回到原来提出来的，关于接地导电球外放一电荷 q 的问题，并考虑各种效应．从球面上 Φ 的法向分量，算出球面上感生的实际电荷密度：

$$\sigma=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\bigg|_{x=a}=-\frac{q}{4\pi a^2}\left(\frac{a}{y}\right)\cdot\frac{\left(1-\frac{a^2}{y^2}\right)}{\left(1+\frac{a^2}{y^2}-2\frac{a}{y}\cos\gamma\right)^{3/2}} \tag{2.5}$$

式中 γ 为 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 间的夹角．图 2.3 对 y/a 的两个值画出了这个感生电

荷密度(以$-q/4\pi a^2$为单位)对γ的关系曲线. 显然，感生电荷集中在指向点电荷q的方向，$y/a=2$的情况，尤其明显. 用直接积分容易证明球上总感生电荷的量值与像电荷相等. 这正是根据高斯定律应有的结果.

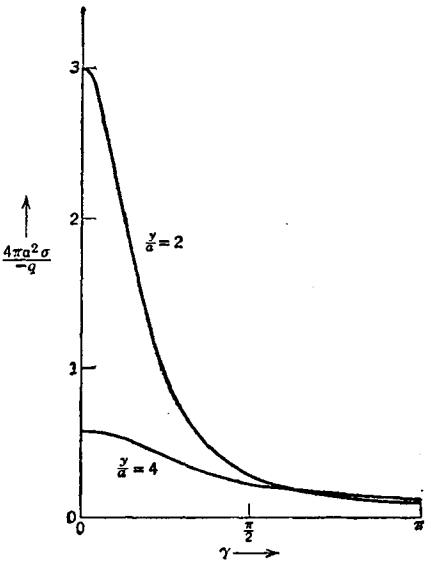


图 2.3 距接地导电球(半径为a)心为y处的一点电荷q，在该球上所感生的面电荷密度σ. 图中对$y=2a$，$4a$两种情况画出了σ对角位置γ的依赖关系：σ以$-q/4\pi a^2$为单位，γ从指向电荷的半径算起.

我们可以用各种不同的方法计算电荷q所受的作用力. 一种最简便的方法是直接写出电荷q与像电荷q'之间的作用力. 因为两者之间的距离是

$$y-y'=y(1-a^2/y^2)$$

所以，根据库仑定律，吸引力为:

$$|\mathbf{F}|=\frac{q^2}{a^2}\left(\frac{a}{y}\right)^3\left(1-\frac{a^2}{y^2}\right)^{-2} \tag{2.6}$$

当距离大时，力遵守立方反比律，但当q接近球体时，力与电荷q离球面的距离的平方成反比.

另一种求力的方法是计算球面所受的总作用力. 作用在每个面积元da上的力是$2\pi\sigma^2 da$，此处σ由(2.5)给出，如图 2.4 所示. 但是由对称性得知，只有与从球心到q的

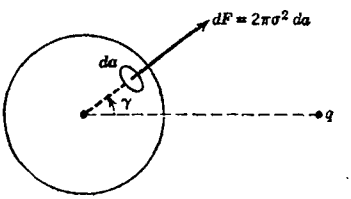


图 2.4

矢径平行的分量对总作用力才有贡献. 因此，球所受的总作用力(与 q 所受的作用力大小相等，方向相反)由下列积分给出:

$$|\mathbf{F}|=\frac{q^2}{8\pi a^2}\left(\frac{a}{y}\right)^2\left(1-\frac{a^2}{y^2}\right)^2 \cdot\int\frac{\cos\gamma}{\left(1+\dfrac{a^2}{y^2}-\dfrac{2a}{y}\cos\gamma\right)^3}d\Omega \tag{2.7}$$

积分后即得(2.6).

上面的整个讨论都是假定点电荷 q 在球外. 实际上，这些结果同样适用于电荷 q 在球内的情况. 因为原先从导体向外的法向导数现在是沿半径向内了，所以只要将面电荷密度 (2.5) 中的负号改为正号即可. 记住现在 $y\leqslant a$，读者即可改写全部公式. 面电荷的角分布与图 2.3 所示相似，但总感生面电荷显然等于 $-q$，而与 y 无关.

2.3 在带电的孤立导电球前面的点电荷

前一节中，我们讨论了接地球体附近的点电荷 q 的问题，并知道在球上感生了面电荷密度. 感生面电荷的总电量 $q'=-aq/y$; 这些电荷分布在球面上，并在所有力的作用下处于平衡状态.

如果讨论放在点电荷 q 前面的带有总电荷 Q 的导电球问题，我们可用线性叠加法求得势的解. 为计算方便起见，我们可以这样设想，首先让接地导电球(其电荷 q' 分布在它的整个表面上). 然后，断开地线，把电量为 $(Q-q')$ 的电荷加到球上，这就使球上总电荷达到 Q. 为了求势，我们只要注意到加上去的电荷 $(Q-q')$ 本身将均匀地分布在球面上，因为点电荷 q 产生的静电力已被电荷 q' 所平衡. 因此，至少对球外诸点而言，加到球上的电荷 $(Q-q')$ 所产生的势，与将同一电量的点电荷置于原点所产生的势相同.

总的势是(2.1)与在原点的点电荷 $(Q-q')$ 产生的势的叠加:

$$\Phi(\mathbf{x})=\frac{q}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}-\frac{aq}{y\left|\mathbf{x}-\frac{a^2}{y^2}\mathbf{y}\right|}+\frac{Q+\frac{a}{y}q}{|\mathbf{x}|} \tag{2.8}$$

根据库仑定律，可以直接写出点电荷 q 所受的作用力．作用力的方向沿着指向 q 的矢径，而大小为：

$$\mathbf{F}=\frac{q}{y^2}\left[Q-\frac{qa^3(2y^2-a^2)}{y(y^2-a^2)^2}\right]\frac{\mathbf{y}}{y} \tag{2.9}$$

在 $y\gg a$ 的极限情况中，这个作用力的表式便化为通常用于两个小带电体的库仑定律．但由于球面上有感生电荷分布，在球附近的作用力就会有所改变．图 2.5 表示在各种 Q/q 比值下，力与距离的函数关系．

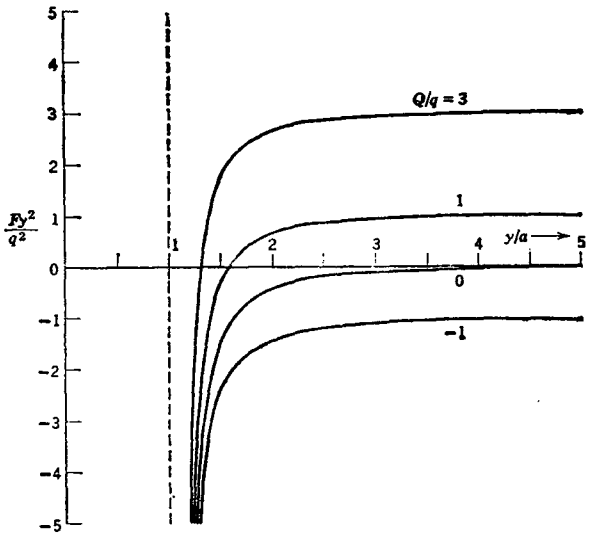


图 2.5　半径为 a，总电荷为 Q 的孤立导电球对点电荷 q 的作用力．正值表示排斥力，负值表示吸引力．图中画出了力的渐近关系．对 $Q/q=-1,0,1,3$ 等情况作出 $F'y^2/q^2$ 对 y/a 的关系曲线．不论 Q 值有多大，由于感生面电荷的影响，在球近处的力总是吸引力．

图中力以 q^2/y^2 为单位；正(负)值表示排斥(吸引)力. 如果球所带的电荷与 q 异号，或者球是不带电的，那么，当 q 在任何地方时，力都是吸引力. 可是，当 q 非常接近球面时，即使电荷 Q 与 q 同号，也变成了吸引力. 在 $Q \gg q$ 的极限情况中，力等于零的点(不稳定平衡点)离球体很近，即在 $y \approx a\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{q/Q}\right)$ 处. 注意，当电荷 q 离球的距离大于几个半径时，力就达到渐近值.

这个例子揭示出一种普遍的性质，根据这种性质，可以解释表面上的剩余电荷为什么不会因为各电荷间的相互排斥而立即离开表面. 每当电荷元刚要从表面移开时，像力就将它吸引回来. 当然，如果作了足够的功，还是可以把电荷从表面移到无穷远的. 金属的功函数大部分就是为了克服吸引的像力使电子能离开表面而作的功.

2.4 在电势不变的导电球附近的点电荷

电势 V 保持不变的导电球附近的点电荷问题，也是一个容易求解的问题. 除了球心的电荷 $(Q-q')$ 用电荷 (Va) 代替外，这个问题的势与带电球的势相同. 从(2.8)可以看出这一点，因为当 $|\mathbf{x}|=a$ 时，前两项相消，最后一项便等于所要求的 V. 于是，势为

$$\Phi(\mathbf{x})=\frac{q}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}-\frac{aq}{y\left|\mathbf{x}-\frac{a^2}{y^2}\mathbf{y}\right|}+\frac{Va}{|\mathbf{x}|} \tag{2.10}$$

电势不变的带电球对电荷 q 的作用力为

$$\mathbf{F}=\frac{q}{y^2}\left[Va-\frac{qay^3}{(y^2-a^2)^2}\right]\frac{\mathbf{y}}{y} \tag{2.11}$$

当把 Va/q 与 Q/q 的值对应起来看时，这个力与图 2.5 所示的带电球的力很相似，虽然这个力更缓慢地趋向渐近值 (Vaq/y^2). 当 $Va \gg q$ 时，不稳定平衡点的位置由 $y \simeq a\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{q/Va}\right)$ 确定.

2.5 用电像法解均匀电场中的导电球

作为电像法的最后一个实例，我们考虑一个位于均匀电场 E_0 中的导电球，其半径为 a. 可以认为，均匀电场是由无穷远处的适量的正负电荷所产生的. 例如，设有两个电荷 $\pm Q$，位于 $z=\mp R$ 处，如图 2.6(a)所示，则在原点附近的很小区域(其线度远小于 R)内，有一个平行于 z 轴的近似恒定的电场 $E_0 \simeq 2Q/R^2$. 在 $R, Q \to \infty$，但 Q/R^2 为常数的极限情况下，这种近似恒定的电场就变为完全恒定的了.

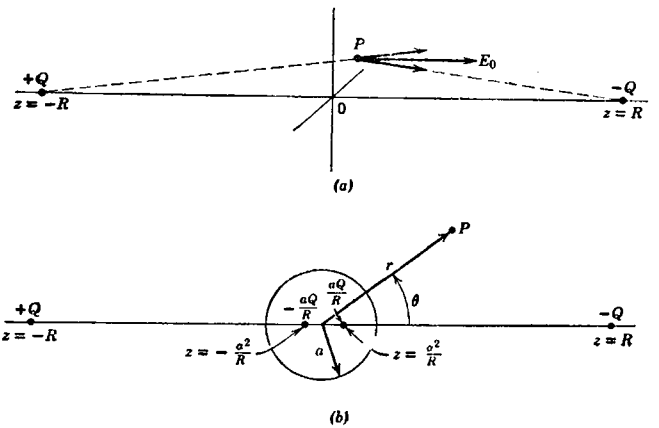


图 2.6 用电像法研究均匀电场中的导电球.

如果现在把一个半径为 a 的导电球放在原点，那么势将由在 $\mp R$ 处的电荷 $\pm Q$ 以及它们在 $z=\mp a^2/R$ 处的像 $\mp Qa/R$ 产生的：

$$\Phi=\frac{Q}{(r^2+R^2+2rR\cos\theta)^{1/2}}-\frac{Q}{(r^2+R^2-2rR\cos\theta)^{1/2}}$$
$$-\frac{aQ}{R\left(r^2+\frac{a^4}{R^2}+\frac{2a^2r}{R}\cos\theta\right)^{1/2}}+\frac{aQ}{R\left(r^2+\frac{a^4}{R^2}-\frac{2a^2r}{R}\cos\theta\right)^{1/2}} \tag{2.12}$$

式中Φ是用观测点的球坐标表出的.根据假定,在头两项中的R远大于r.因此,在提出因子R^2后,我们就可以把根式展开.同样,在第三项与第四项中,我们可以提出因子r^2,然后把根式展开.结果是

$$\Phi=\left[-\frac{2Q}{R^2}r\cos\theta+\frac{2Q}{R^2}\frac{a^3}{r^2}\cos\theta\right]+\cdots \tag{2.13}$$

式中略去了在$R\to\infty$的极限情况下等于零的项.在该极限情况下,$2Q/R^2$变成均匀的外电场,所以势为

$$\Phi=-E_0\left(r-\frac{a^3}{r^2}\right)\cos\theta \tag{2.14}$$

当然,第一项($-E_0z$)是均匀电场E_0的势,我们可以直接写出这个势以代替(2.12)中的头两项.第二项是感生面电荷密度所产生的势,或者说,相当于像电荷所产生的势.注意诸像电荷构成一偶极矩为$D=Qa/R\times 2a^2/R=E_0a^3$的偶极子.感生面电荷密度为:

$$\sigma=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\bigg|_{r=a}=\frac{3}{4\pi}E_0\cos\theta \tag{2.15}$$

我们注意到这个电荷密度的面积分等于零,所以接地的球与孤立的球没有差别.

2.6 球的格临函数;势的通解

在前几节中,我们已经用电像法讨论了放在点电荷前面的导电球问题.如1.10节所指出的,单位电荷及其像(或几个像)所产生的势,在满足齐次边界条件时,也就是适合狄利克莱边界条件和诺埃曼边界条件的格临函数(1.43或1.45).在$G(\mathbf{x},\mathbf{x}')$中,变数$\mathbf{x}'$确定单位电荷的位置$P'$,而变数$\mathbf{x}$确定要计算势的那一点$P$的位置.这些坐标和球如图2.7所示.对于半径为$a$的球上的狄利克莱边界条件来说,单位电荷及其像所产生的势由令$q=1$的式(2.1)及关系式(2.4)给出.适当地变换变数,我们得到格临函数:

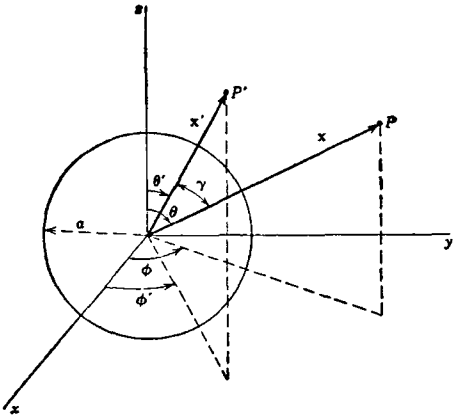


图 2.7

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}-\frac{a}{x'\left|\mathbf{x}-\frac{a^2}{x'^2}\mathbf{x}'\right|} \tag{2.16}$$

用球坐标表示，上式可写成：

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=\frac{1}{(x^2+x'^2-2xx'\cos\gamma)^{1/2}}-\frac{1}{\left(\frac{x^2x'^2}{a^2}+a^2-2xx'\cos\gamma\right)^{1/2}} \tag{2.17}$$

式中 γ 是 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{x}'$ 间的夹角. 显然，在式(2.17)中变数 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{x}'$ 是对称的，若 $\mathbf{x}$ 或 $\mathbf{x}'$ 在球面上，就会有 $G=0$ 这种情况.

为了写出泊松方程的解(1.44)，我们不仅需要 G，而且需要 $\partial G/\partial n'$. 记住 $\mathbf{n}'$ 是从所考虑的体积向外(亦即沿 $\mathbf{x}'$ 指向原点)的法向单位矢量，我们有

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n'}\right|_{x'=a}=-\frac{(x^2-a^2)}{a(x^2+a^2-2ax\cos\gamma)^{3/2}} \tag{2.18}$$

[注意上式实质上是感生面电荷密度(2.5)]. 因此，按照(1.44)，当给定

球面上的势时，球外拉普拉斯方程的解是

$$\Phi(x)=\frac{1}{4\pi}\int\Phi(a,\theta',\phi')\frac{a(x^2-a^2)}{(x^2+a^2-2ax\cos\gamma)^{3/2}}d\Omega' \quad (2.19)$$

式中 $d\Omega'$ 是在点 $(a,\ \theta',\ \phi')$ 上的立体角元，而 $\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')$. 当解内域问题时，法向导数沿半径朝外，所以 $\partial G/\partial n'$ 的符号与(2.18)相反. 这相当于在 (2.19) 中以 (a^2-x^2) 代替因子 (x^2-a^2). 对于有电荷分布的问题，我们必须把适于(1.44)的积分加到(2.19)上并采用式(2.17)的格临函数.

2.7 两半球有不同电势的导电球

作为在给定球面的势时求球外势的通解的一个例子，我们考虑一个半径为 a 并由两个半球组成的导电球，这两个半球由小绝缘环隔开，并保持不同的势. 在这种情况下，只要考虑两个半球的势处于 $\pm V$ 时的解就可以了，因为当这两个半球处于任意不同的电势时，我们都可以把它的解看成是由整个球面处于恒定势的解与两个半球分别处于 $\pm V$ 时的解的叠加①. 绝缘环位于 $z=0$ 的平面，如图 2.8 所示，上(下)半球的电势为 $+V(-V)$.

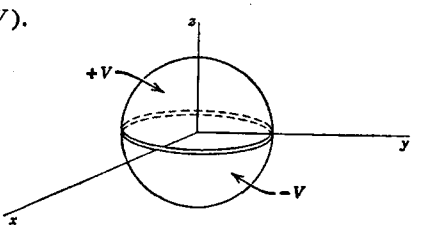


图 2.8

由(2.19)可知，$\Phi(x,\theta,\phi)$ 的解是由下列积分给出：

① 例如，两个半球的电势分别为 V_1 和 $V_2(V_1\neq V_2)$，它的解可以看成是由一个恒定电势为 $(V_1+V_2)/2$ 的带电球的解与电势分别为 $\pm V=\pm(V_1-V_2)/2$ 的两个半球的解的叠加. ——译者注

$$\Phi(x,\theta,\phi)=\frac{V}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\phi'\left\{\int_0^{a}(\cos\theta')-\int_{-1}^{0}d(\cos\theta')\right\}\frac{a(x^2-a^2)}{(a^2+x^2-2ax\cos\gamma)^{3/2}} \tag{2.20}$$

适当地改变第二个积分中的变数($\theta'\to\pi-\theta'$, $\phi'\to\phi'+\pi$), 就可以把(2.20)改成下式:

$$\Phi(x,\theta,\phi)=\frac{Va(x^2-a^2)}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\phi'\int_0^{1}d(\cos\theta')\cdot[a^2+x^2-2ax\cos\gamma)^{-3/2}-(a^2+x^2+2ax\cos\gamma)^{-3/2}] \tag{2.21}$$

由于 $\cos\gamma$ 对角度(θ', ϕ')与(θ, ϕ)有复杂的依赖关系, 一般不能把积分(2.21)表成闭合的形式.

作为一个特殊情形, 我们讨论正 z 轴上的势. 由于 $\theta=0$ 时 $\cos\gamma=\cos\theta'$, 故上列积分是初等积分, 并且可以证明势为

$$\Phi(z)=V\left[1-\frac{(z^2-a^2)}{z\sqrt{z^2+a^2}}\right] \tag{2.22}$$

在 $z=a$ 时, 上式化为所要求的结果 $\Phi=V$, 而当距离很大时, 上式渐趋于 $\Phi\simeq 3Va^2/2z^2$.

在(2.21)中的积分不能表成闭合形式的情况下, 我们可以把分母展成幂级数, 再逐项积分. 从各个分母中提出因子(a^2+x^2), 则得

$$\Phi(x,\theta,\phi)=\frac{Va(x^2-a^2)}{4\pi(x^2+a^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}d\phi'\int_0^{1}d(\cos\theta')\cdot[(1-2\alpha\cos\gamma)^{-3/2}-(1+2\alpha\cos\gamma)^{-3/2}] \tag{2.23}$$

式中 $\alpha=ax/(a^2+x^2)$. 不难看出, 在根式的展开式中只出现 $\alpha\cos\gamma$ 的奇次幂:

$$[(1-2\alpha\cos\gamma)^{-3/2}-(1+2\alpha\cos\gamma)^{-3/2}]=6\alpha\cos\gamma+35\alpha^3\cos^3\gamma+\cdots \tag{2.24}$$

现在必须求 $\cos\gamma$ 的奇次幂对 $d\phi'd(\cos\theta')$ 的积分:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{2\pi}d\phi'\int_0^1 d(\cos\theta')\cos\gamma&=\pi\cos\theta\\ \int_0^{2\pi}d\phi'\int_0^1 d(\cos\theta')\cos^3\gamma&=\frac{\pi}{4}\cos\theta(3-\cos^2\theta)\end{aligned}\right\}\qquad(2.25)$$

如果把(2.24)与(2.25)代入(2.23),那末势变为

$$\Phi(x,\theta,\phi)=\frac{3Va^2}{2x^2}\left[\frac{x^3(x^2-a^2)}{(x^2+a^2)^{5/2}}\right]\cos\theta\times\left[1+\frac{35}{24}\frac{a^2x^2}{(a^2+x^2)^2}(3-\cos^2\theta)+\cdots\right]\qquad(2.26)$$

要注意,式中只出现 $\cos\theta$ 的奇次幂,正如问题的对称性所要求的.如果展开参数是(a^2/x^2),而不是 a^2,级数就可以取下列形式:

$$\Phi(x,\theta,\phi)=\frac{3Va^2}{2x^2}\left[\cos\theta-\frac{7a^2}{12x^2}\left(\frac{5}{2}\cos^3\theta-\frac{3}{2}\cos\theta\right)+\cdots\right]\qquad(2.27)$$

当 x/a 值很大时,这个展开式很快地收敛,所以它是势的一种有用的表式.即使当 $x/a=5$ 时,级数中第二项也只约为第一项的百分之二.容易证明,当 $\cos\theta=1$ 时,表式(2.27)与轴上的势的展开式(2.22)一致.[(2.27)中角因子的各项选择取决于勒让德多项式的定义.事实上,这两个因子就是 $P_1(\cos\theta)$ 与 $P_3(\cos\theta)$,而势的展开式就是一个奇阶勒让德多项式.在 3.3 节中我们将系统地证明这一点.]

2.8 正交函数和正交展开

用正交函数展开来表示势问题(或任何数学物理问题)的解,是一种可以用于解许多问题的有效方法.特定正交集的选择取决于问题中所包含的对称性或近似对称性.为了回想正交函数以及正交函数展开的一般性质,我们考虑变数 ξ 的一个区间(a,b)及在区间(a,b)中平方可积的和正交的实变或复变函数集 $U_n(\xi)$, $n=1,2,\cdots$.函数 $U_n(\xi)$的正交条件用下式表示:

$$\int_a^b U_n^*(\xi)U_m(\xi)d\xi=0,\qquad m\neq n\qquad(2.28)$$

如果 $n=m$，这个积分不等于零．我们假定这些函数是归一化的，则积分等于 1．所以这些函数叫做正交归一函数，它们满足

$$\int_a^b U_n^*(\xi)U_m(\xi)d\xi=\delta_{nm} \tag{2.29}$$

我们可以把在区间(a, b)中的平方可积的任意函数 $f(\xi)$展成正交归一函数 $U_n/(\xi)$的级数．如果级数的项数是有限的(设为N)，即

$$f(\xi)\leftrightarrow\sum_{n=1}^{N}a_nU_n(\xi) \tag{2.30}$$

然后我们就可以进行系数 a_n 的“最佳”选择，使得我们得到函数 $f(\xi)$的“最佳”表式．如果“最佳”两字的定义是使均方误差 M_N 成为最小，而

$$M_N=\int_a^b\left|f(\xi)-\sum_{n=1}^{N}a_nU_n(\xi)\right|^2d\xi \tag{2.31}$$

那末，很容易证明这些系数为

$$a_n=\int_a^b U_n^*(\xi)f(\xi)d\xi \tag{2.32}$$

这里应用了正交归一条件(2.29)．上式是正交归一函数展开中的系数的标准结果．

如果级数(2.30)的项数N愈取愈多，我们就能从直观上预期 $f(\xi)$的级数表示将“愈来愈佳”．只要正交归一函数集是完全的，那我们的直观预期就是正确的．完全性被定义为以下要求：存在一个有限数N_0，使得当 $N>N_0$ 时，均方误差 M_N 可以小于任意小的正量．于是级数表式为

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nU_n(\xi)=f(\xi) \tag{2.33}$$

式中 a_n 由(2.32)给出，该级数是均值地收敛为 $f(\xi)$．通常物理学家把证明一个给定函数集的完全性这项困难工作留给数学家．已经证明，在数学物理中通常出现的一切正交函数集都是完全的．

利用系数 a_n 的表式(2.32)，可以把级数(2.33)改写为：

$$f(\xi)=\int_a^b\left\{\sum_{n=1}^{\infty}U_n^*(\xi')U_n(\xi)\right\}f(\xi')d\xi' \tag{2.34}$$

因为上式代表区间(a,b)中任何一个函数$f(\xi)$，显而易见，双线性项$U_n^*(\xi')U_n(\xi)$的和必须只存在于$\xi'=\xi$的邻域中．事实上，下式必然成立：

$$\sum_{n=1}^{\infty}U_n^*(\xi')U_n(\xi)=\delta(\xi'-\xi) \tag{2.35}$$

这就是所谓完全性关系或闭合关系．除了连续变数ξ与分立指标n交换外，(2.35)类似于正交归一条件(2.29)．

最常见的正交函数是正弦函数和余弦函数，用正弦函数和余弦函数表示的展开式就是傅里叶级数．如果x的区间是$(-a/2,a/2)$，则正交归一函数是

$$\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{2\pi mx}{a}\right),\ \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)$$

其中m是整数，当$m=0$时余弦函数是$1/\sqrt{a}$．习惯上我们把与(2.33)等效的级数写成如下形式：

$$f(x)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{m=1}^{\infty}\left[A_m\cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)+B_m\sin\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)\right] \tag{2.36}$$

式中

$$\begin{aligned}A_m&=\frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2}f(x)\cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)dx\\B_m&=\frac{2}{a}\int_{-a/2}^{a/2}f(x)\sin\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)dx\end{aligned} \tag{2.37}$$

如果正交集所延展的区间大于一维，则公式(2.28)－(2.33)的推广是很明显的．设空间是二维的，变数ξ的区间为(a,b)，而变数η的区间为(c,d)．在各维中的正交归一函数是$U_n(\xi)$与$V_m(\eta)$．则任意函数$f(\xi,\eta)$的展开式是

$$f(\xi,\eta)=\sum_n\sum_m a_{nm}U_n(\xi)V_m(\eta) \tag{2.38}$$

式中

$$a_{nm}=\int_a^b d\xi\int_c^d d\eta U_n^*(\xi)V_m^*(\eta)f(\xi,\eta) \tag{2.39}$$

如果区间(a,b)变为无穷大，正交函数集$U_n(\xi)$可以变为函数的连续统，而不是可数集．那末(2.29)中克朗内克δ符号变为狄喇克δ函数．一个重要的例子是傅里叶积分．首先应用复指数的正交归一集

$$U_m(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{i(2\pi mx/a)} \tag{2.40}$$

$m=0,\pm1,\pm2,\cdots$，在区间$(-a/2,a/2)$中展开，则得

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}A_m e^{i(2\pi mx/a)} \tag{2.41}$$

式中

$$A_m=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-a/2}^{a/2}e^{-i(2\pi mx'/a)}f(x')dx' \tag{2.42}$$

然后，令区间变为无穷大$(a\to\infty)$，同时，进行下列变换：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2\pi m}{a}\to k\\&\sum_m\to\int_{-\infty}^{\infty}dm=\frac{a}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\\&A_m\to\sqrt{\frac{2\pi}{a}}A(k)\end{aligned}\right\} \tag{2.43}$$

与(2.41)等效的最后展开式是傅里叶积分

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A(k)e^{ikx}dk \tag{2.44}$$

式中

$$A(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}f(x)dx \tag{2.45}$$

正交条件是

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(k-k')x}dx=\delta(k-k') \tag{2.46}$$

而完全性关系是

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')}dk=\delta(x-x') \tag{2.47}$$

上面这些积分可用来作为δ函数的方便表式. 要注意在(2.44)—(2.47)中,x、k两个连续变数是完全等效的.

2.9 分离变数法;直角坐标中的拉普拉斯方程

我们常常可以用分离变数法很方便地求解数学物理中的偏微分方程. 在运用这种方法的过程中,常常得到好几个正交函数集,它们各有各的用处. 我们已经知道含有三维拉普拉斯算符的方程,可以在十一种不同坐标系中分离(参看 *Morse and Feshbach*, 第509, 655页). 我们将只详细讨论其中三种坐标系(直角坐标、球坐标和柱坐标)并从最简单的直角坐标开始.

直角坐标中的拉普拉斯方程是

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0 \tag{2.48}$$

假定我们可以用三个函数(每个函数中只含一个坐标)的乘积来表示势:

$$\Phi(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z) \tag{2.49}$$

就可以用三个形式相同的常微分方程求出这个偏微分方程的解. 将(2.49)代入(2.48),再用(2.49)除之,即得

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z}{dz^2}=0 \tag{2.50}$$

因为每项都是只包含一个变数的函数,所以在上式中用全导数代替了偏导数. 如果(2.50)在独立坐标取任意值时都成立,那末这三项的每一项必需分别等于常数:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}&=-\alpha^2\\ \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}&=-\beta^2\\ \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}&=\gamma^2\end{aligned}\right\}\qquad(2.51)$$

式中

$$\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$$

如果我们任意地选取 α^2, β^2 为正数，那末(2.51)中的三个常微分方程的解是 $\exp(\pm i\alpha x)$, $\exp(\pm i\beta y)$, $\exp(\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)$. 所以我们可以按这些解的乘积将势(2.49)写为:

$$\Phi=e^{\pm i\alpha x}e^{\pm i\beta y}e^{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z}\qquad(2.52)$$

式中 α 与 β 是完全任意的. 因而，通过线性叠加，由(2.52)可以得到拉普拉斯方程的许多解.

为了确定 α 和 β，必须对势加上特殊的边界条件. 以一个长方盒为例，它的位置如图 2.9 所示，在 (x, y, z) 方向上的线度为 (a, b, c). 除了 $z=c$ 的面上的势等于 $V(x,y)$ 外，这个盒的所有其他几个面的势都等于零. 需要求的是盒内各处的势. 由下述必要条件: 当 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 时，$\Phi=0$，容易看出，X, Y, Z 必需具有如下形式:

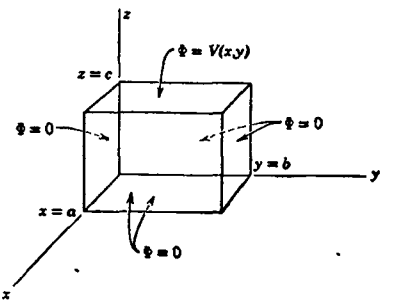


图 2.9 一中空的长方匣，其中五个面处在零电势，而第六个面($z=c$)有特定的势$\Phi=V(x,y)$.

$$\left.\begin{aligned}X&=\sin\alpha x\\ Y&=\sin\beta y\\ Z&=\sin h(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)\end{aligned}\right\}\qquad(2.53)$$

为使 $x=a$ 与 $y=b$ 时，$\Phi=0$，必须有 $\alpha a=n\pi$, $\beta b=m\pi$. 利用下列定义

$$\left.\begin{aligned}\alpha_n&=\frac{n\pi}{a}\\ \beta_m&=\frac{m\pi}{b}\\ \gamma_{nm}&=\pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}\end{aligned}\right\}\tag{2.54}$$

可以写出部分势 Φ_{nm}:

$$\Phi_{nm}=\sin(\alpha_n x)\sin(\beta_m y)\sinh(\gamma_{nm}z)\tag{2.55}$$

这些势除了一个边界条件外，满足所有其他边界条件．我们可以用这些 Φ_{nm} 以及最初是任意的系数(选择这些系数是要满足最后一个边界条件)把势展开:

$$\Phi(x,y,z)=\sum_{n,m=1}^{\infty}A_{nm}\sin(\alpha_n x)\sin(\beta_m y)\sinh(\gamma_{nm}z)\tag{2.56}$$

这里只剩下 $z=c$ 时 $\Phi=V(x,y)$的边界条件:

$$V(x,y)=\sum_{n,m=1}^{\infty}A_{nm}\sin(\alpha_n x)\sin(\beta_m y)\sinh(\gamma_{nm}c)\tag{2.57}$$

这正是函数 $V(x,y)$的二重傅里叶级数．因此系数 A_{nm} 由下式给出:

$$A_{nm}=\frac{4}{ab\sinh(\gamma_{nm}c)}\int_0^a dx\int_0^b dy V(x,y)\sin(\alpha_n x)\sin(\beta_m y)\tag{2.58}$$

如果长方盒所有六个面的势都不等于零，我们就可以通过六个解的线性叠加，得到盒内势的解．这六个解与(2.56),(2.58)相当，每个解对应一个面．为了求解泊松方程的问题，也就是说，盒内有电荷分布并给定盒面上的边界条件而求盒内势的问题时，需要按照(1.43)与(1.44)，建立适当的格临函数．关于这个问题，等到我们论述了球坐标和柱坐标的拉普拉斯方程后再讨论．在这里我们只要注意到，解(2.56)与(2.58)相当于格临函数解(1.44)中的面积分．

2.10 二维势问题；傅里叶级数的累加

现在用分离变数法，简单地讨论笛卡儿坐标系中二维拉普拉斯方

程的解. 二维问题是指那样一些问题，假定在这些问题中的势与一根坐标轴(比方说，z)无关. 通常这只不过是一种近似的方法，但是可以认为是很准确的，比如在一条均匀的长传输线中就是很准确的. 如果势与 z 无关，则上节的基本解就简化为下列乘积:

$$e^{\pm i\alpha x}e^{\pm\alpha y}$$

其中 α 为任意的实常数或复常数. 势的边界条件将决定 α 的允许值和所求的不同解的线性叠加的形式.

可以用图 2.10 所示的简单问题来阐明分离变数法，并建立分离变数法与复变数方法的联系. 我们要求势在 $0\leqslant x\leqslant a$，$y\geqslant 0$ 区域中满足以下边界条件：当 $x=0$ 和 $x=a$ 时，$\Phi=0$；当 $0\leqslant x\leqslant a$ 时，若 $y=0$，则 $\Phi=V$，若 y 很大，则 $\Phi\to 0$. 将基本解仔细分析一下得知：α 是实常

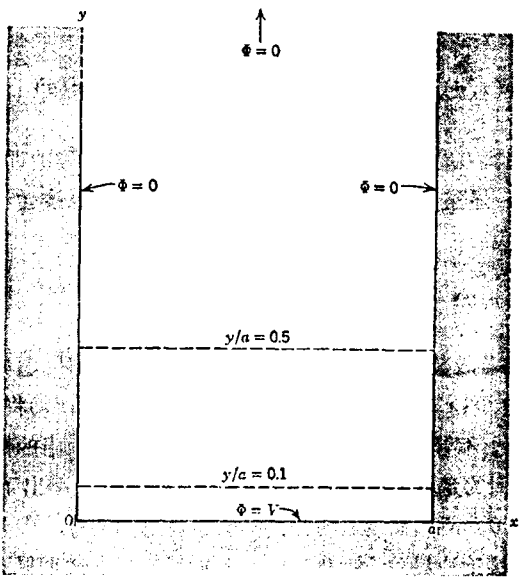


图 2.10　二维势问题.

数，而且为了当 $x=0$ 和 $x=a$ 时对一切 y 值和 $y\to\infty$ 时势都等于零，势应该是 $e^{-\alpha y}\sin(\alpha x)$ 的适当的线性组合，其中 $\alpha=n\pi/a$. 于是满足上述三个边界面的线性组合解是

$$\Phi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\exp(-n\pi y/a)\sin(n\pi x/a) \tag{2.59}$$

系数 A_n 由下述必要条件决定：当 $y=0, 0\leqslant x\leqslant a$ 时，$\Phi=V$. 正如 2.8 节中所讨论的，傅里叶系数为

$$A_n=\frac{2}{a}\int_0^a\Phi(x,0)\sin(n\pi x/a)dx \tag{2.60}$$

当 $\Phi(x,0)=V$ 时，我们得

$$A_n=\frac{4V}{\pi n}\begin{cases}1 & \text{当 } n \text{ 为奇数时}\\ 0 & \text{当 } n \text{ 为偶数时}\end{cases}$$

因此，我们就定出了势 $\Phi(x,y)$，

$$\Phi(x,y)=\frac{4V}{\pi}\sum_{\text{奇}n}\frac{1}{n}\exp(-n\pi y/a)\sin(n\pi x/a) \tag{2.61}$$

当 y 值较小时，在此级数中必须取许多项才能得到精确的近似，可是当 $y\gtrsim a/\pi$ 时，显然只有前面几项是重要的. 势迅速地接近于第一项给出的渐近形式：

$$\Phi(x,y)\to\frac{4V}{\pi}\exp(-\pi y/a)\sin(\pi x/a) \tag{2.62}$$

顺便指出，倘若级数的第一项不等于零，则这一类边值问题都具有上述普遍特性，与 $\Phi(x,0)$ 是否等于常数无关. 系数 A_1(2.60)将是不同的，但当 $y\gtrsim a$ 时，不管 $\Phi(x,0)$ 多么复杂，渐近解对 x 画出的特性曲线是光滑的. 本例的定量特性曲线如图 2.11 所示，图中画出了沿图 2.10 的 $y/a=0.1, 0.5$ 两条虚线上的势. 实曲线是精确的势，虚曲线是第一项(2.62). 接近边界($y/a=0.1$)时，实曲线和虚曲线明显不同，但当 $y/a=0.5$ 时，渐近形式已经是非常好的近似了.

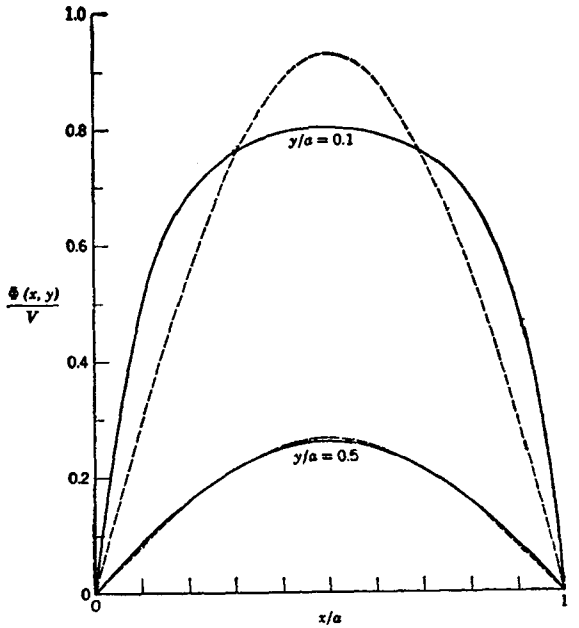


图 2.11　当 $y/a=0.1, 0.5$ (沿图 2.10 的两条虚线)时，势对 x/a 的函数关系曲线．实曲线是精确解；虚曲线是级数解(2.61)的第一项．

有许多傅里叶级数可以求和而得收敛的形式．(2.61)中的傅里叶级数便是其中一个．我们叙述于下．考虑到 $\sin\theta=\mathrm{Im}(e^{i\theta})$，式中 Im 代表虚部，(2.61)就可以写作

$$\Phi(x,y)=\frac{4V}{\pi}\mathrm{Im}\sum_{奇n}\frac{1}{n}e^{(i n\pi/a)(x+iy)}$$

定义

$$Z=e^{(i\pi/a)(x+iy)} \tag{2.63}$$

前一式可以写成：

$$\Phi(x,y)=\frac{4V}{\pi}\operatorname{Im}\sum_{\text{奇}n}\frac{Z^n}{n}$$

在这里我们也许能想起下列展开式:①

$$\ln(1+Z)=Z-\frac{1}{2}Z^2+\frac{1}{3}Z^3-\frac{1}{4}Z^4+\cdots$$

显然,

$$\sum_{\text{奇}n}\frac{Z^n}{n}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)$$

从而

$$\Phi(x,y)=\frac{2V}{\pi}\operatorname{Im}\left[\ln\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)\right] \tag{2.64}$$

因为对数的虚部等于对数的自变量的相,我们考虑

$$\frac{1+Z}{1-Z}=\frac{(1+Z)(1-Z^*)}{|1-Z|^2}=\frac{1-|Z|^2+2i\operatorname{Im}Z}{|1-Z|^2}$$

于是对数的自变量的相是 $\mathrm{tg}^{-1}[2\operatorname{Im}Z/(1-|Z|^2)]$. 将 Z 的明显表式(2.63)代入,势就变为

$$\Phi(x,y)=\frac{2V}{\pi}\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{a}}{\sinh\frac{\pi y}{a}}\right) \tag{2.65}$$

这支正切曲线对应的角度在 0 和 $\pi/2$ 之间. 无穷级数(2.61)就改换成了明显的收敛形式(2.65). 读者可以证明: (2.65)满足边界条件,且由(2.65)可简单地得到渐近形式(2.62).

势(2.64)[其中 Z 由(2.63)给出]显然关系到含有复变数的函数. 这种关系是下述事实直接导致的结果: 作为科希-黎曼方程组的一个

① 另外,我们注意到, $(d/dZ)\left(\sum_{n=1}^{\infty}(Z^n/n)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}Z^n=1/(1-Z)$. 然后积分给出 $\sum_{n=1}^{\infty}(Z^n/n)=-\ln(1-Z)$.

结果，一个解析函数的实部或虚数都满足二维拉普拉斯方程．正如本章一开始所说的，我们删去有关复变数方法的讨论，不是因为它不重要，而是由于篇幅有限，且在别的著作里都有完善的论述．本章末列举了其中一部分．*Collin* 书中附录 *A*.6 阐述了傅里叶级数的求和法，其中有许多例子．

2.11 二维拐角内和沿棱边的电场与电荷密度

在许多实际情况中，导电面至少在小范围内可以近似地看作是两个平面的相交．图 2.9 所示长方盒诸棱边就是一个实例，图 2.10 中 $x=0$，$y=0$ 处和 $x=a$，$y=0$ 处的两个拐角就是另一个实例．了解一下这样一些尖锐"拐角"或棱边附近的电势、电场和面电荷密度的特性是有用处的．我们假定"拐角"或棱边是无限尖锐的，使得离它们足够近的场的特性在函数形式上只取决于所考虑的"拐角"的性质，而不取决于导电面整体分布的详细情况．

一般的二维情形如图 2.12 所示．两个导电平面以 β 角相交．假定这两个平面保持电势 V．离原点遥远的地方有其它一些导体或一些可能的电荷分布，图中没有画出，它们唯一地规定了势问题．因为我们感兴趣的是原点附近的电场等等的函数特性，而不是它们的绝对数值，所以我们尽可能对"遥远处"的特性不作详细规定．

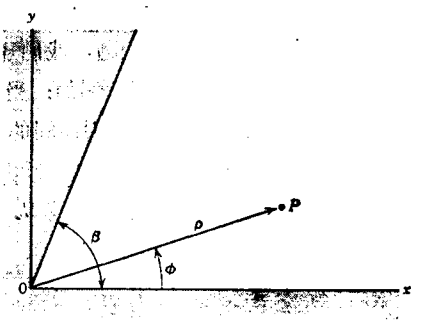


图 2.12 由相交的两个导电平面限定的开角为 β 的二维拐角．

图 2.12 的几何形状意味着用极坐标比用笛卡儿坐标方便．按极坐标 (ρ,ϕ) 写出的二维拉普拉斯方程是

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2}=0 \tag{2.66}$$

利用分离变数法，我们将

$$\Phi(\rho,\phi)=R(\rho)\Psi(\phi)$$

代入(2.66)，乘以 ρ^2/Φ，则得

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{1}{\Psi}\frac{d^2\Psi}{d\phi^2}=0 \tag{2.67}$$

因为两项分别是 ρ 和 ϕ 的函数，所以每一项必定等于常数：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)&=\nu^2,\\ \frac{1}{\Psi}\frac{d^2\Psi}{d\phi^2}&=-\nu^2\end{aligned}\right\} \tag{2.68}$$

这些方程的解为：

$$\left.\begin{aligned}R(\rho)&=a\rho^{\nu}+b\rho^{-\nu}\\ \Psi(\phi)&=A\cos(\nu\phi)+B\sin(\nu\phi)\end{aligned}\right\} \tag{2.69}$$

在 $\nu=0$ 的特殊情况下，解为：

$$\left.\begin{aligned}R(\rho)&=a_0+b_0\ln\rho\\ \Psi(\phi)&=A_0+B_0\phi\end{aligned}\right\} \tag{2.70}$$

这些都是基本解，藉此我们可以用线性叠加法求出电势.

虽然不是本节的中心论题，我们还是要注意当全部方位角都许可时二维拉普拉斯方程的通解，例如：当 $\rho=a$ 和 $\rho=b$ 的两圆柱面上的势给定为 ϕ 的函数时，求两圆柱面间的势. 如果 ϕ 不受限制，为了得到单值的势函数，ν 必须等于正整数或负整数，或者等于零. 并且，当 $\nu=0$ 时，基于同样理由，(2.70)中的常数 B_0 必须等于零. 所以通解为

$$\Phi(\rho,\phi)=a_0+b_0\ln\rho+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\rho^n\sin(n\phi+\alpha_n)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\rho^{-n}\sin(n\phi+\beta_n) \tag{2.71}$$

如果原点在没有电荷的体积内，则所有 b_n 都等于零. 因而只出现常数

项和 ρ 的正幂项. 如果原点不在此体积内，则 b_n 可以不等于零. 尤其要说明一下，对数项相当于位于轴上的、每单位长度电荷密度为 $\lambda=-b_0/2$ 的线电荷，这是众所周知的.

在图 2.12 的情况中，方位角被限制在 $0\leqslant\phi\leqslant\beta$ 范围内. 边界条件是：当 $\phi=0$ 和 $\phi=\beta$ 时，对于 $\rho\geqslant 0$ 的一切值，$\Phi=V$. 这就要求 (2.70)中 $b_0=B_0=0$ 和 (2.69) 中 $b=0$，$A=0$. 并且要求选取 ν 使得 $\sin(\nu\beta)=0$. 因此

$$\nu=\frac{m\pi}{\beta},\quad m=1,2,\cdots$$

从而通解变为

$$\Phi(\rho,\phi)=V+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\rho^{m\pi/\beta}\sin(m\pi\phi/\beta) \tag{2.72}$$

待定系数 a_m 取决于远离 $\rho=0$ 拐角处的势. 因为级数中包含 $\rho^{\pi/\beta}$ 的正幂项，当 ρ 足够小时，只有级数的第一项是重要的.[①] 于是，在 $\rho=0$ 附近，势近似地为

$$\Phi(\rho,\phi)\simeq V+a_1\rho^{\pi/\beta}\sin(\pi\phi/\beta) \tag{2.73}$$

电场强度分量为

$$\left.\begin{aligned}E_\rho(\rho,\phi)&=-\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\simeq-\frac{\pi a_1}{\beta}\rho^{(\pi/\beta)-1}\sin(\pi\phi/\beta)\\E_\phi(\rho,\phi)&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\simeq-\frac{\pi a_1}{\beta}\rho^{(\pi/\beta)-1}\cos(\pi\phi/\beta)\end{aligned}\right\} \tag{2.74}$$

在 $\Phi=0$ 和 $\Phi=\beta$ 处面电荷密度相等，并近似地等于

$$\delta(\rho)=\frac{E_\phi(\rho,0)}{4\pi}\simeq-\frac{a_1}{4\beta}\rho^{(\pi/\beta)-1} \tag{2.75}$$

在 $\rho=0$ 附近，电场强度和面电荷密度的分量都按 $\rho^{(\pi/\beta)-1}$ 随距离而变

① 这里我们要对遥远边界条件作必要的假定，即这些边界条件使系数 a_1 不等于零. 通常这是无关紧要的，但有些特殊对称性可以使 a_1 甚至 a_2 等于零. 这些不常见的例子必须分别加以处理.

化．图 2.13 表示在几种特殊情况中上述分量与 ρ 的依赖关系．当拐角很厉害时（β 很小），ρ 的幂变得很大．这种拐角中基本上没有电荷积累．当 $\beta=\pi$ 时（一个平坦的表面），场量变得与 ρ 无关，正如直观上明显看出的．当 $\beta>\pi$ 时，二维拐角变为棱角，而且当 $\rho\to 0$ 时，电场和面电荷密度变为奇异的．当 $\beta=2\pi$ 时（一块薄板的边缘），奇异性如同 $\rho^{-1/2}$．这仍是可积的，所以在与边缘相隔有限距离以内，电荷是有限的，但这意味着在导电薄板的边缘（或者实际上对 $\beta>\pi$ 的任何棱边）处电场强度变得非常大．

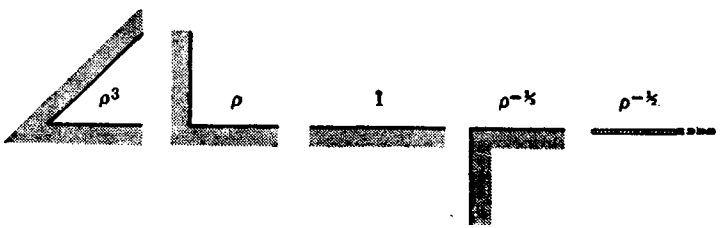


图 2.13　当开角为 $\beta=\pi/4,\pi/2,\pi,3\pi/2,2\pi$ 时，面电荷密度（和电场强度）与离“拐角”或棱边的距离 ρ 的变化关系．

以上对二维静电学问题所作的考虑也适用于许多三维情况，甚至于随时间变化的场．假如棱边是有限长度的尖锐棱边，如远离一拐角的一个立方体的棱边，那末充分接近棱边时沿棱边的势的变化可以忽略不计．这时就适于作二维问题考虑，虽然(2.75)中系数 a_l 沿棱边可以随距离而改变．同样地，静电学的论证甚至对于随时间变化的场也有效．这里要指出的一点是：如果随时间变化，就要考虑另一种长度，即波长．倘若所考虑的地点与棱边相隔的距离小于波长以及其它有关距离，那末场的特性就简化为静电的或静磁的特性．例如导电薄板上的孔对微波的衍射，当 $\rho\to 0$ 时场的奇异性如同 $\rho^{-1/2}$，这里 ρ 是从孔边算起的距离，这个事实在求衍射问题的任何精确解时必须加以考虑．

尖锐棱边附近场的奇异特性是避雷针之所以起作用的原因．在这

里所讨论的理想化情形下，当 $\rho \to 0$ 时场强无限增加，但是对于厚度为 d 的、具有圆滑棱边的薄板，可以推断：表面上的场强正比于 $d^{-1/2}$. 当 d 足够小时，场强非常大. 在绝对真空里，这种场强是可能存在的，但在空气中，当场强超过某一数值(取决于该电极的确切形状、该电极接近其它电极的程度，等等，但对正常温度和压强下的空气来说，此值约大于 2.5×10^4 伏/厘米，有时大于后者的四分之一)时，就会发生电击穿和放电. 雷雨时由于地和雷雨云之间的电势差很大，首先在接地的尖锐的导电棱边附近，或更确切地说，在一个尖端(参看 3.4 节)附近将发生电击穿，随后此棱边或尖端将成为穿过空气的、参差不齐的导电通路的一端，闪电的放电就沿着这条通路进行.

参考书和推荐读物

在许多书里都论述了电像法与有关的反演法，其中讨论得比较完善或更全面的有：

Jeans, 第八章；

Maxwell, 卷 1, 第十一章；

Smythe, 第四章和第五章.

1847 年开耳芬勋爵利用反演法求得一个薄的带电的球形导电碗的内外表面上的电荷分布. 下列书中讨论了开耳芬所用的古典方法：

Kelvin, 第 186 页；

Jeans, 第 250—251 页.

各种例子和许多插图的真正来源是：

Durand, 特别是第三章与第四章.

Durand 在第 107—114 页讨论了反演法.

讨论解二维势问题的复变数方法和保角映像方法的有：

Durand, 第十章；

Jeans, 第八章, 第 306-337 节；

Maxwell, 卷 1, 第十二章；

Morse and Feshbach, 第 443—453 页, 第 1215—1252 页；

Smythe, 第四章, 4.09—4.31 节；

Thomson, 第三章.

一本论述保角映像的有用的数学书是:

Bieberbach.

此外, 有许多工程书籍专门叙述这个课题, 例如:

Gibbs;

Rothe, Ollendorff, *and* Polhausen.

关于傅里叶级数、傅里叶积分和正交展开的数学理论的初浅而清楚的讨论, 可查阅下列各书:

Churchill;

Hildebrand, 第五章.

下面这本书论述傅里叶级数与傅里叶积分的方式是比较旧的, 但有许多例题和习题:

Byerly.

习　题

2.1 把点电荷 q 放在离无限大平面导体的距离为 d 的位置上, 该导体的电势保持为零, 试用电像法求:

(a) 平面上感生的面电荷密度, 并画出感生面电荷密度随坐标的变化曲线;

(b) 应用电荷与其像间的作用力的库仑定律求出平面与电荷间的作用力;

(c) 借助 $2\pi\sigma^2$ 对整个平面的积分, 求作用在平面上的总力;

(d) 求把电荷 q 从它的位置移到无穷远处所做的功;

(e) 求电荷 q 与其像间的势能[与(d)的答案比较, 并加以讨论];

(f) 如电子最初离表面的距离为 1 埃, 求在这种情况下(d)的答案, 并以电子伏为单位.

2.2 用电像法讨论在内半径为 a 的中空接地导电球内的点电荷 q 的问题. 试求:

(a) 球内的势;

(b) 感生面电荷密度;

(c) q 所受作用力的大小与方向.

如果球保持一定的势 V, 其解有何变化? 如果在球的内外表面上带有总电荷 Q, 其解有何变化?

2.3 考虑由 $Z\geqslant 0$ 所限定的半空间中的势问题, 它在 $Z=0$ 平面上(和无穷远

处)满足狄利克莱边界条件.

(*a*) 写出合适的格临函数 $G(\mathbf{x},\mathbf{x}')$;

(*b*) 如果规定在$Z=0$平面上的势,在以原点为圆心以 a 为半径的圆内为 $\Phi=V$,在圆外为 $\Phi=0$,求在以柱坐标(ρ,ϕ,z)标明的P点上的势的积分表式;

(*c*) 证明:沿圆的轴($\rho=0$).上各点的势由下式给出

$$\Phi=V\left(1-\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$$

(*d*) 证明:在很远处$(\rho^2+z^2\gg a^2)$的势可以展成$(\rho^2+z^2)^{-1}$的幂级数,而前几项为

$$\Phi=\frac{Va^2}{2}\frac{z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\left[1-\frac{3a^2}{4(\rho^2+z^2)}+\frac{5(3\rho^2a^2+a^4)}{8(\rho^2+z^2)^2}+\cdots\right]$$

证明在(*c*)和(*d*)的共同有效范围内,(*c*)和(*d*)的结果是彼此一致的.

2.4 一个二维势问题由下列条件所规定:两个平行的直线电荷,相距 R,具有等量异号的线电荷密度 λ 和 $-\lambda$.

(*a*) 试由直接作图法证明:具有恒定势 V 的曲面是一个正圆柱面(在横向的二维平面上是个圆);并求此圆柱面的轴线的坐标,再求用 R, λ, V 表示的圆柱面的半径.

(*b*) 利用(*a*)的结果证明:设有两个并立的正圆柱形导体,半径各为 a 和 b,相距 $d>a+b$,则这两个圆柱形导体每单位长度的电容 C 为

$$C=\frac{1}{2\cosh^{-1}\left(\frac{d^2-a^2-b^2}{2ab}\right)}$$

(*c*) 证明:在适当极限下,C 的结果与习题 1.7 的答案一致,并定出下一级的非零修正项,写成 a/d 和 b/d 的幂.

(*d*) 当两个圆筒互相套迭($d<|b-a|$)时,试重复计算每单位长度的电容.验证同心圆筒($d=0$)的结果.

2.5 在均匀电场 E_0 中有一个孤立的半径为 a 的导电球壳.设用一个垂直于场的平面把这球壳切成两个半球壳,试求阻止这两个半球壳分开所需的力.

(*a*) 设壳不带电;

(*b*) 设壳上总电荷为 Q.

2.6 一个大平行板电容器是由二块平面导体板组成的,在其中一板的内表面上有一个半径为 a 的半球形凸出小疤.带有凸出疤的导体保持零电势.另一个导体处在这样的电势,即使在远离凸出疤处的两板间的电场强度为 E_0.

(*a*) 计算平面上和凸出疤上任意点的面电荷密度，并画出面电荷密度作为距离(或角度)函数的关系图.

(*b*) 证明凸出疤上总电荷的量值为 $3E_0a^2/4$.

(*c*) 设把点电荷 q 放在半球形凸出疤的正上方，以代替处在不同势的另一导体板点电荷与球心的距离为 d，证明凸出疤上的感生电荷是

$$q'=-q\left[1-\frac{d^2-a^2}{d\sqrt{d^2+a^2}}\right]$$

2.7 把线电荷密度为 τ 的一个线电荷放在离圆柱形导体(半径为 b)的轴为 R 的位置上，并平行于该圆柱体的轴，圆柱形导体保持一定的电势，以使无穷远处的电势等于零. 试求

(*a*) 像电荷的位置和量值；

(*b*) 任何一点(用极坐标表示，原点在圆柱体的轴上，把从原点指向线电荷的方向当作 x 轴)的势，包括远离圆柱体处的势的渐近式；

(*c*) 感生面电荷密度，并画出当 $R/b=2,4$(以 $\tau/2\pi b$ 为单位)时感生面电荷密度作为角度函数的关系图；

(*d*) 作用在电荷上的力.

2.8 当半径为 b 的圆柱面上的势给定时，由二维势问题的级数解(2.71)出发，从形式上算出诸系数，把它们代入级数中，并对级数求和，则得圆柱面内的势，后者具有下列泊松积分的形式：

$$\Phi(\rho,\phi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(b,\phi')\frac{b^2-\rho^2}{b^2+\rho^2-2b\rho\cos(\phi'-\phi)}d\phi'$$

如果所求的是以圆柱面和无穷远为界的空间区域内的势，那末必须对上式作什么样的修改？

2.9 (*a*)内半径为 b 的中空长圆柱形导体的两半相隔一条小缝，并分别保持不同的势 V_1 和 V_2. 证明：导体内部的势由下式给出：

$$\Phi(\rho,\phi)=\frac{V_1+V_2}{2}+\frac{V_1-V_2}{\pi}\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2b\rho}{b^2-\rho^2}\cos\phi\right)$$

式中 ϕ 是从一个与通过缝隙的平面相垂直的平面量起的.

(*b*) 计算在各个半圆柱上的面电荷密度.

2.10 上述二维问题的一个变种是：一个半径为 b 的中空长圆柱形导体，被等分成四块，它们交错地保持电势 $+V$ 和 $-V$.

(*a*) 借助于级数解(2.71)求圆柱内的势，并证明圆柱内的势为

$$\Phi(\rho,\phi)=\frac{4V}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{b}\right)^{4n+2}\frac{\sin[(4n+2)\phi]}{2n+1}$$

(*b*) 求此级数的和，并证明

$$\Phi(\rho,\phi)=\frac{2V}{\pi}\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2\rho^2b^2\sin 2\phi}{b^4-\rho^4}\right)$$

(*c*) 画出电力线和等势线的略图。

2.11 (*a*) 试用电像法证明：对于半径为 b 的圆柱体的外域问题，二维狄利克莱-格临函数是

$$G(\rho,\phi;\rho',\phi')=\ln\frac{\{b^4+\rho^2\rho'^2-2b^2\rho\rho'\cos(\phi-\phi')\}}{\{b^2[\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi-\phi')]\}}$$

$$=\ln\left[\frac{(\rho^2-b^2)(\rho'^2-b^2)+b^2|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}{b^2|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}\right]$$

式中 $\boldsymbol{\rho}$ 和 $\boldsymbol{\rho}'$ 为平面上的坐标矢量。

(*b*) 用这个格临函数证明习题 1.7 的结果。

(*c*) 对于内域问题，须作什么样的修改(如果有的话)？

2.12 (*a*) 利用习题 2.11 的格临函数和解(1.44)，求对于一个圆内的狄利克莱问题的解的泊松积分形式(习题 2.8)。

(*b*) 利用科希定理推导泊松积分解。科希定理叙述如下：如果 $F(z)$ 在一个以闭合曲线 C 为界的区域 R 内是解析的，则

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{F(z')dz'}{z'-z}=\begin{cases}F(z) & \text{当 } z \text{ 在 } R \text{ 内时}\\ 0 & \text{当 } z \text{ 在 } R \text{ 外时}\end{cases}$$

提示：读者可以把一个等于零的积分(与像点有关)加到圆内该点的积分上。

2.13 一个中空立方体有六块导电壁，分别由 $x=0, y=0, z=0$ 和 $x=a, y=a, z=a$ 六个平面所决定。$z=0$ 和 $z=a$ 的壁保持在恒定的势 V，其余四块壁的势等于零。

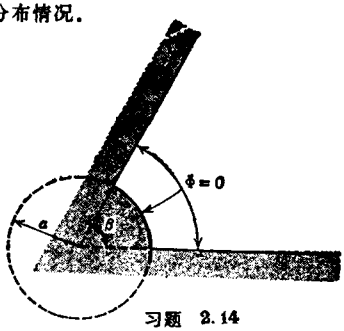
(*a*) 求立方体内任意点上的势 $\Phi(x,y,z)$。

(*b*) 计算立方体中心的势的值，精确到三位有效数字。为了达到这种精确度，级数中必须保留多少项？把你的数值答案跟诸壁上势的平均值作一比较。参看习题 2.16。

(*c*) 求在 $z=a$ 壁上的面电荷密度。

2.14 二维区域 $\rho\geqslant a$, $0\leqslant\phi\leqslant\beta$ 是以 $\phi=0$, $\rho=a$ 和 $\phi=\beta$ 三个导电面为界，这三个面的电势都等于零，如图所示。当 ρ 很大时，电势取决于诸电荷和(或)电

势不变的诸导体的分布情况.



习题 2.14

(*a*) 写出当 ρ 有限时满足边界条件的势 $\Phi(\rho,\phi)$的一个解.

(*b*) 只保留最低的非零项,计算电场分量 E_ρ 和 E_ϕ,以及三个边界面上的面电荷密度 $\sigma(\rho,0)$,$\sigma(\rho,\beta)$和 $\sigma(a,\phi)$.

(*c*) 考虑 $\beta=\pi$(一个平面导体,其上有一个半径为 a 的半圆柱体). 证明:在远离半圆柱体处,(*b*)的最低阶项给出一个垂直于平面的均匀电场. 画出半圆柱体上及其邻域内的电荷密度随坐标变化的曲线. 当远离平面处的电场强度不变时,证明:半圆柱体上的总电荷(实际上是 z 方向上每单位长度的电荷)比半圆柱体不存在时 $2a$ 宽的一条带上的电荷大一倍. 证明:超出的那部分电荷是从附近的平面区域引取来的,所以不管半圆柱体存在与否,宽度比 a 大的一条带上的总电荷是相同的.

2.15 考虑习题 2.14 的二维楔形区域,设 $\beta=2\pi$. 这相当于一个半无限的薄板导体,放在正 x 轴上,一边在 $x=a$ 处,另一边在无限远,半径为 a 的圆柱形导体与薄板导体的一个边固定在一起.

(*a*) 利用最低阶解,画出圆柱体上、薄板上下两面上的面电荷密度随坐标变化的曲线.

(*b*) 计算圆柱体上的总电荷,并与圆柱体附近薄板上电荷的总减少量(即当 a 有限和 $a=0$ 时薄板上总电荷之差)加以比较,假定离圆柱体远处的电荷密度是相同的.

2.16 一闭合体积以若干导电面为界,这些导电面是一规则多面体($n=4,6,8,12,20$)的 n 个侧面. 这 n 个面处于不同的电势 V_i,$i=1,2,\cdots,n$. 用尽可能最简单的方法证明:多面体中心的势等于 n 个侧面上的势的平均. 本题与习题2.13(*b*)有关,并且很有趣地与习题 1.10 的结果相似.

第三章　静电学中的边值问题(II)

本章继续讨论边值问题.首先考虑几何形状为球面和柱面的情形，并用适当的正交归一函数的级数展开来表示拉普拉斯方程的解．对于用分离变数法从拉普拉斯方程得到的各种常微分方程的解只作概要叙述，但对各种函数的性质却作了适当而扼要地介绍.

在各种几何形状下求解泊松方程时，自然会发生用正交归一函数建立格临函数的问题．我们将在下面叙述格临函数的明显的实例，并把它们应用到特殊问题上，然后讨论势问题的各种解法的等效性.

3.1　球坐标中的拉普拉斯方程

在图 3.1 所示的球坐标(r,θ,ϕ)中，我们可以把拉普拉斯方程写成下面形式:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=0 \tag{3.1}$$

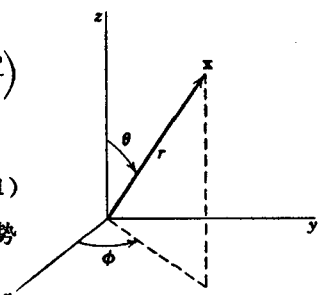


图 3.1

如果我们假定势取乘积形式，则可以把势写为:

$$\Phi=\frac{U(r)}{r}P(\theta)Q(\phi) \tag{3.2}$$

把上式代入(3.1)，就得到下列方程:

$$PQ\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{UQ}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+\frac{UP}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2Q}{d\phi^2}=0$$

如果上式乘以 $r^2\sin^2\theta/UPQ$，我们得到:

$$r^2\sin^2\theta\left[\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta P}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)\right]+\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\phi^2}=0 \qquad (3.3)$$

方程中与 ϕ 有关的函数已完全归入最后一项. 因而该项必须是常数，我们令其为$(-m^2)$:

$$\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\phi^2}=-m^2 \qquad (3.4)$$

上式的解为

$$Q=e^{\pm im\phi} \qquad (3.5)$$

如果上式对所有方位角都成立，要使 Q 是单值函数，m 必须是整数，通过相仿的考虑，我们求得 $P(\theta)$与$U(r)$的分立的方程:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P=0 \qquad (3.6)$$

$$\frac{d^2U}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}U=0 \qquad (3.7)$$

式中 $l(l+1)$是另一实常数.

由径向方程的形式可知，r 的单幂(而不是幂级数)将满足该方程. 所求得的解为:

$$U=Ar^{l+1}+Br^{-l} \qquad (3.8)$$

但 l 还未确定.

3.2 勒让德方程与勒让德多项式

习惯上不用 θ 本身而用 $x=\cos\theta$ 来表示 $P(\theta)$的 θ 方程. 这时,方程取如下形式:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right]+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P=0 \qquad (3.9)$$

这个方程叫做广义勒让德方程，它的解是缔合勒让德函数. 在考察(3.9)之前，我们将扼要叙述用幂级数表示的 $m^2=0$ 的寻常勒让德微分方程的解:

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dP}{dx}\right)+l(l+1)P=0 \tag{3.10}$$

我们假定：$\cos\theta$的整个区间(包括北极和南极)在所考虑的区域之内.这时，为了使欲求的解代表物理的势，这个解在区间$-1\leqslant x\leqslant 1$上，应该是单值的、有限的和连续的.假定用下列形式的幂级数表示这个解：

$$P(x)=x^{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}a_jx^j \tag{3.11}$$

式中α为待定参数.把上式代入(3.10)后，结果得到一个级数：

$$\sum_{j=0}^{\infty}\{(\alpha+j)(\alpha+j-1)a_jx^{\alpha+j-2}-[(\alpha+j)(\alpha+j+1)-l(l+1)]a_jx^{\alpha+j}\}=0 \tag{3.12}$$

在这展开式中，x的每个幂的系数必须分别等于零.当$j=0$，1时，得到

$$\left.\begin{array}{l}\text{若 } a_0\neq 0,\ \text{则 } \alpha(\alpha-1)=0\\ \text{若 } a_1\neq 0,\ \text{则 } \alpha(\alpha+1)=0\end{array}\right\} \tag{3.13}$$

而对于一般的j值，则得

$$a_{j+2}=\left[\frac{(\alpha+j)(\alpha+j+1)-l(l+1)}{(\alpha+j+1)(\alpha+j+2)}\right]a_j \tag{3.14}$$

马上看出，(3.13)的两个关系式是等效的，只要选择a_0或a_1不等于零就足够了，而不必两者都不等于零.选择前一种，得$\alpha=0$或$\alpha=1$.由(3.14)我们知道，这个幂级数只有x的偶次幂($\alpha=0$)，或只有x的奇次幂($\alpha=1$).

对$\alpha=0$的幂级数或$\alpha=1$的幂级数，可以证明下列性质：

(*a*) 不管l的值怎样，当$x^2<1$时，级数收敛；

(*b*) 在$x=\pm 1$处，级数发散，除非它是有限项的.

因为我们所要求的解在$x=\pm 1$和$x^2<1$时是有限的，所以我们要求级数是有限项的.因为α和j是正整数或零，所以仅当l是零或正整数时，递推关系(3.14)才是有限项的.即使在这时候两个级数中也只有一个在$x=\pm 1$时收敛.如果l是偶数(奇数)，那末只有$\alpha=0(\alpha=1)$

的级数是有限项①. 在每种情形下，多项式中 x 的最高幂是 x^l，次高幂是 x^{l-2}，依此类推，当 l 为偶数时，最低幂是 x^0，当 l 为奇数时，最低幂是 x. 照例，把这些多项式归一化，使它在 $x=+1$ 时的值等于 1，把这些归一化多项式叫做 l 阶勒让德多项式 $P_l(x)$. 头几项勒让德多项式为：

$$\left.\begin{aligned} P_0(x)&=1\\ P_1(x)&=x\\ P_2(x)&=\frac{1}{2}(3x^2-1)\\ P_3(x)&=\frac{1}{2}(5x^3-3x)\\ P_4(x)&=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

整理幂级数解(3.11)与(3.14)，可得勒让德多项式的简短表式，即如所周知的洛德利格(Rodrigues)公式：

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l \tag{3.16}$$

[用其它更巧妙的方法，或直接对微分方程(3.10)求 l 重积分，也可以得到上式.]

勒让德多项式构成一个在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 中为完全正交的函数集. 为了证明正交性，我们可以直接求助于微分方程 (3.10). 我们写下 $P_l(x)$的微分方程，并乘以 $P_{l'}(x)$，然后对这区间积分：

---

① 例如，若 $l=0$，则 $\alpha=1$ 的级数具有一般系数 $a_j=a_0/j+1$，$j=0,2,4,\cdots$. 因此，级数为 $a_0\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots\right)$. 这正是函数 $Q_0(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$的幂级数展开，这个函数显然在 $x=\pm 1$ 时发散. 对每一个 l 值，有一个相似的含有对数的函数 $Q_l(x)$，它是有理多项式解的配分函数. 参看 *Magnus and Oberhettinger*，第 59 页起，或 *Magnus, Oberhettinger and Soni*，第 151 页起. *Whittaker and Watson*，第十五章，有利用解析函数的处理方法.

$$\int_{-1}^{1} P_{l'}(x)\left\{\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_l}{dx}\right]+l(l+1)P_l(x)\right\}dx=0 \quad (3.17)$$

对第一项施行分部积分，我们得

$$\int_{-1}^{1}\left[(x^2-1)\frac{dP_l}{dx}\frac{dP_{l'}}{dx}+l(l+1)P_{l'}(x)P_l(x)\right]dx=0 \quad (3.18)$$

如果我们现在写出 l 与 l' 交换后的(3.18)式，并将它与原来的(3.18)相减，结果就是正交条件：

$$[l(l+1)-l'(l'+1)]\int_{-1}^{1} P_{l'}(x)P_l(x)dx=0 \quad (3.19)$$

当 $l\neq l'$ 时，该积分必须等于零．当 $l=l'$ 时，该积分是有限的．为了确定它的值，必须利用勒让德多项式的显式，例如洛德利格公式．那末，该积分显然是：

$$N_l\equiv\int_{-1}^{1}[P_l(x)]^2dx=\frac{1}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l dx$$

分部积分 l 次，得到下面结果：

$$N_l=\frac{(-1)^l}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^l\frac{d^{2l}}{dx^{2l}}(x^2-1)^l dx$$

把$(x^2-1)^l$微分 $2l$ 次，得到常数$(2l)!$，于是

$$N_l=\frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^l dx$$

剩下的积分可以用硬凑的办法求出，但也要用到归纳法．我们将被积函数写成

$$(1-x^2)^l=(1-x^2)(1-x^2)^{l-1}=(1-x^2)^{l-1}+\frac{x}{2l}\frac{d}{dx}(1-x^2)^l$$

于是我们有

$$N_l=\left(\frac{2l-1}{2l}\right)N_{l-1}+\frac{(2l-1)!}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{1}xd[(1-x^2)^l]$$

对上面的积分进行分部积分，则得

$$N_l=\left(\frac{2l-1}{2l}\right)N_{l-1}-\frac{1}{2l}N_l$$

或

$$(2l+1)N_l=(2l-1)N_{l-1} \tag{3.20}$$

上式表明，$(2l+1)N_l$ 与 l 无关．当 $l=0$ 时，因 $P_0(x)=1$，我们有 $N_0=2$．于是 $N_l=2/(2l+1)$，因而我们可以把正交条件写为：

$$\int_{-1}^{1}P_{l'}(x)P_l(x)dx=\frac{2}{2l+1}\delta_{l'l} \tag{3.21}$$

在 2.8 节意义下，正交归一函数是

$$U_l(x)=\sqrt{\frac{2l+1}{2}}P_l(x) \tag{3.22}$$

因为勒让德多项式构成一个正交函数完全集，任何函数 $f(x)$ 在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 中都可以用它们展开．$f(x)$ 的勒让德级数表式是：

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}A_lP_l(x) \tag{3.23}$$

式中

$$A_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_l(x)dx \tag{3.24}$$

为了举例，我们讨论如图 3.2 所示的函数：

$$f(x)=+1 \qquad \text{当 } x>0$$
$$=-1 \qquad \text{当 } x<0$$

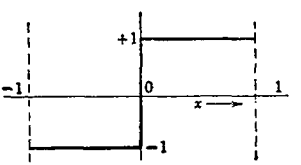


图 3.2

这时

$$A_l=\frac{2l+1}{2}\left[\int_0^1 P_l(x)dx-\int_{-1}^0 P_l(x)dx\right]$$

因为当 l 为奇数(偶数)时，$P_l(x)$ 在 $x=0$ 附近是奇函数(偶函数)，所以只有 l 为奇数的系数才不等于零．因此，当 l 为奇数时，

$$A_l=(2l+1)\int_0^1 P_l(x)dx \tag{3.25}$$

利用洛德利格公式可算出这个积分，得

$$A_l=\left(-\frac{1}{2}\right)^{(l-1)/2}\frac{(2l+1)(l-2)!!}{2\left(\frac{l+1}{2}\right)!} \tag{3.26}$$

式中$(2n+1)!!\equiv(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots\times5\times3\times1$. 因此$f(x)$的级数是:

$$f(x)=\frac{3}{2}P_1(x)-\frac{7}{8}P_3(x)+\frac{11}{16}P_5(x)-\cdots \tag{3.27}$$

各阶勒让德多项式之间的某些递推关系,对于计算积分,对于从低阶多项式导出高阶多项式等等,都是有用的. 从洛德利格公式可以直接证明

$$\frac{dP_{l+1}}{dx}-\frac{dP_{l-1}}{dx}-(2l+1)P_l=0 \tag{3.28}$$

把这个结果与微分方程(3.10)合并,可以得到各种递推公式,其中几个公式如下:

$$\left.\begin{aligned}(l+1)P_{l+1}-(2l+1)xP_l+lP_{l-1}&=0\\ \frac{d\cdot P_{l+1}}{dx}-x\frac{dP_l}{dx}-(l+1)P_l&=0\\ (x^2-1)\frac{dP_l}{dx}-lxP_l+lP_{l-1}&=0\end{aligned}\right\} \tag{3.29}$$

作为这些递推公式应用的一个实例,我们讨论下面这个积分的计算:

$$I_l=\int_{-1}^{1}xP_l(x)P_{l'}(x)dx \tag{3.30}$$

从递推公式(3.29)的第一式,我们得到$xP_l(x)$的表式. 所以(3.30)变为

$$I_l=\frac{1}{2l+1}\int_{-1}^{1}P_{l'}(x)\left[(l+1)P_{l+1}(x)+lP_{l-1}(x)\right]dx$$

现在我们可以用正交性积分(3.21)立即证明这个积分等于零,除非$l'=l\pm1$,并且证明,当$l'=l\pm1$时,

$$\int_{-1}^{1}xP_l(x)P_{l'}(x)dx=\begin{cases}\dfrac{2(l+1)}{(2l+1)(2l+3)}, & l'=l+1\\ \dfrac{2l}{(2l-1)(2l+1)}, & l'=l-1\end{cases} \tag{3.31}$$

只要把 l 和 l' 调换一下，这两个结果实际上是一样的．用相似的方法，容易证明：

$$\int_{-1}^{1} x^2 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \begin{cases} \dfrac{2(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)}, & l' = l+2 \\ \dfrac{2(2l^2+2l-l)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)}, & l' = l \end{cases} \tag{3.32}$$

式中假定了 $l' \geqslant l$．

3.3 轴对称的边值问题

从球坐标中拉普拉斯方程解的形式(3.2)可知，对于具有轴对称的问题，(3.5)中 $m=0$．这意味着这样问题的通解是：

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos\theta) \tag{3.33}$$

系数 A_l 与 B_l 可以由边界条件定出．设在半径为 a 的球面上的势给定为 $V(\theta)$，求球内的势．如果原点上没有电荷，则原点的势必须是有限的．因而对一切 l 来说，$B_l=0$．计算 (3.33) 在球面上的值，就求得系数 A_l，

$$V(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos\theta) \tag{3.34}$$

这正是(3.23)形式的勒让德级数，于是系数 A_l 为：

$$A_l = \frac{2l+1}{2a^l} \int_0^{\pi} V(\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta d\theta \tag{3.35}$$

例如，如果 $V(\theta)$ 与 2.7 节中的相同，两个半球具有等值异号的势，

$$V(\theta) = \begin{cases} +V, & 0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2} \\ -V, & \dfrac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi \end{cases}$$

那末这些系数与(3.27)中的成正比．所以，球内的势为

$$\Phi(r,\theta)=V\left[\frac{3}{2}\frac{r}{a}P_1(\cos\theta)\right.$$
$$\left.-\frac{7}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^3P_3(\cos\theta)+\frac{11}{16}\left(\frac{r}{a}\right)^5P_5(\cos\theta)-\cdots\right] \quad (3.36)$$

为了求球外的势，我们只要用$(a/r)^{l+1}$代替$(r/a)^l$．可以看出，所得到的势跟用另一种方法得到的势(2.27)相同．

级数(3.33)是势的唯一展开式，其系数由边界条件决定．这种唯一性提供了这样一种方法，已知有限区域中的势，即对称轴上的势，就可以求出势问题的解．在对称轴上，(3.33)变为(这时，$z=r$)：

$$\Phi(z=r)=\sum_{l=0}^{\infty}[A_lr^l+B_lr^{-(l+1)}] \quad (3.37)$$

当z为正值时，上式有效．当z为负值时，每一项必须乘以$(-1)^l$．假设用某种方法，可以求出对称轴上任一点z的势$\Phi(z)$．如果把这个势函数按$z=r$展为(3.37)型幂级数，其系数已知，那末用$P_l(\cos\theta)$乘r^l与$r^{-(l+1)}$的每个幂，就得到空间任一点的势的解．

我们不厌麻烦，回到分别处在等值异号的势中的两个半球的问题上．已经用两种不同方法，得到级数解(2.27)与(3.36)．刚刚叙述的这种方法是第三种方法．对轴上的点，我们已求得具有闭合形式的解(2.22)：

$$\Phi(z=r)=V\left[1-\frac{r^2-a^2}{r\sqrt{r^2+a^2}}\right]$$

可以把上式按a^2/r^2的幂展开：

$$\Phi(z=r)=\frac{V}{\sqrt{\pi}}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{\left(2j-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(j-\frac{1}{2}\right)}{j!}\left(\frac{a}{r}\right)^{2j}$$

与展开式(3.37)比较，可以看出，Φ中只包含l的奇数值($l=2j-1$)．因而对球外一切点都有效的解是：

$$\Phi(r,\theta)=\frac{V}{\sqrt{\pi}}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{\left(2j-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(j-\frac{1}{2}\right)}{j!}\left(\frac{a}{r}\right)^{2j}P_{2j-1}(\cos\theta)$$

这个解与已经得到的(2.27)和(3.36)相同.

由 $\mathbf{x}'$ 上的单位点电荷在 $\mathbf{x}$ 处所产生的势的展开式，是很重要的:

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\gamma) \tag{3.38}$$

式中 $r_<(r_>)$ 是 $|\mathbf{x}|$ 与 $|\mathbf{x}'|$ 的较小者（较大者），γ 是 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{x}'$ 的夹角，如图3.3所示. 要证明这点，可转动坐标轴，使得 $\mathbf{x}'$ 在 z 轴上. 于是，势满足拉普拉斯方程，并具有轴对称性，而且除 $\mathbf{x}=\mathbf{x}'$ 点外，都可以按(3.33)展开:

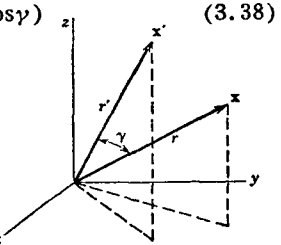


图 3.3

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}=\sum_{l=0}^{\infty}(A_l r^l+B_l r^{-(l+1)})P_l(\cos\gamma)$$

如果 $\mathbf{x}$ 点在 z 轴上，上式右边则化为(3.37)，而左边变为:

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\equiv\frac{1}{(r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma)^{1/2}}\longrightarrow\frac{1}{|r-r'|}$$

将上式展开，对于轴上的 $\mathbf{x}$，我们得

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}=\frac{1}{r_>}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l$$

对于轴外的点，按(3.33)与(3.37)，只须用 $P_l(\cos\gamma)$ 乘上式中每一项. 这就证明了普遍结果(3.38).

另一个例子是均匀分布在半径为 a 的圆环上的总电荷 q 所产生的势，圆环位置如图 3.4 所示，其轴在 z 轴上，其中心位于 $z=b$ 处. 在对称轴上 $z=r$ 的 P 点的势正好等于 q 被距离 AP 除:

$$\Phi(z=r)=\frac{q}{(r^2+c^2-2cr\cos\alpha)^{1/2}}$$

式中，　$c^2=a^2+b^2$，　$\alpha=\mathrm{tg}^{-1}(a/b)$.

距离 AP 的倒数可以用(3.38)展开. 因此，当 $r>c$ 时，

$$\Phi(z=r)=q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{c^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\alpha)$$

当 $r<c$ 时，对应式为

$$\Phi(z=r)=q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{c^{l+1}}P_l(\cos\alpha)$$

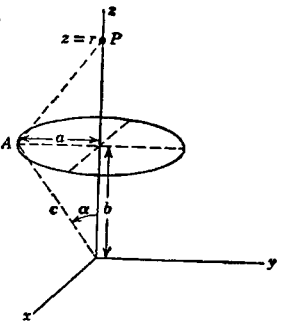


图 3.4　半径为 a，总电荷为 q 的电荷环，放在 z 轴上，其中心位于 $z=b$ 处.

现在用 $P_l(\cos\theta)$ 乘这两列级数中的每一项，就得到空间任一点的势：

$$\Phi(r,\theta)=q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\alpha)P_l(\cos\theta)$$

式中 $r_<(r_>)$ 是 r 与 c 的较小者(较大者).

3.4　锥形孔内或尖端附近的场的特性

在讨论更复杂的边值问题之前，我们讨论一个轴对称的，但 θ 角被限制在一定范围内的问题. 这是与 2.11 节所讨论的情况相似的三维问题. 假设这个有限角的区域 $0\leqslant\theta\leqslant\beta$，$0\leqslant\phi\leqslant2\pi$ 是以一个锥形导电面为界的，如图 3.5 所示. 当 $\beta<\pi/2$ 时，这个区域可以想像为从一个导体中镗出的锥形深孔. 当 $\beta>\pi/2$ 时，这个空间区域是一个尖锥形导体四周的空间.

3.2 节对勒让德微分方程的讨论需要加以修改. 由于假定了轴对称，(3.10)仍然适用，可是我们现在求的是在 $\cos\beta\leqslant x\leqslant1$ 的 $x=\cos\theta$ 区间上有限和单值的解. 并且，因为 $\theta=\beta$ 的导电面的电势不变，我们

可以令此电势为零，为了满足边界条件，用 $\cos\theta$ 表示的解在 $\theta=\beta$ 时

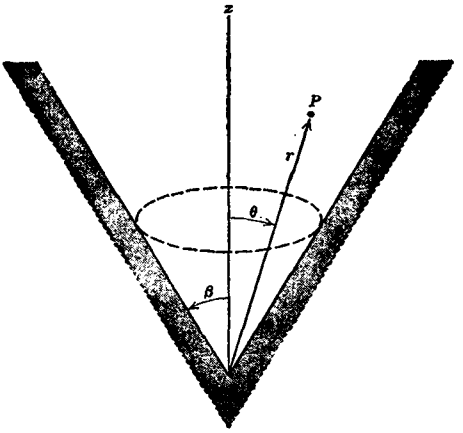


图 3.5

必定等于零．由于我们要求当 $x=1$ 时 $P(x)$ 是正则函数，所以很方便地把 $P(x)$ 对 $x=1$ 而不是对 $x=0$ 进行级数展开，如按(3.11)那样做的．引进下列变数：

$$\xi=\frac{1}{2}(1-x)$$

勒让德方程(3.10)变为

$$\frac{d}{d\xi}\left[\xi(1-\xi)\frac{dP}{d\xi}\right]+\nu(\nu+1)P=0 \tag{3.39}$$

为避免混淆起见，式中已用 ν 代替了 l．与(3.2)中 $U(r)/r$ 相当的径向解是 r^{ν} 和 $r^{-\nu-1}$．将幂级数解

$$P(\xi)=\xi^{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}a_j\xi^j$$

代入(3.39)，由于 ξ 的最低次幂的系数等于零，这就要求 $\alpha=0$．这时，级数中逐项系数间的递推关系是

$$\frac{a_{j+1}}{a_j}=\frac{(j-\nu)(j+\nu+1)}{(j+1)^2} \tag{3.40}$$

为了把这个解归一化，使得当 $\xi=0(\cos\theta=1)$时解等于 1，选取 $a_0=1$，则得下列的级数表式：

$$P_\nu(\xi)=1+\frac{(-\nu)(\nu+1)}{1!1!}\xi + \frac{(-\nu)(-\nu+1)(\nu+1)(\nu+2)}{2!2!}\xi^2+\cdots \tag{3.41}$$

我们首先看出，若 ν 等于零或等于正整数，则此级数只有有限项．读者可以证明：当 $\nu=l=0,1,2,\cdots$时，级数(3.41)恰好就是勒让德多项式(3.15)．当 ν 不等于整数时，(3.41)表示一种广义的函数，叫做第一类 ν 阶勒让德函数．级数(3.41) 是超越几何函数 ${}_2F_1(a,b;c;z)$的一个例子，${}_2F_1(a,b;c;z)$的级数展开式是

$${}_2F_1(a,b;c;z)=1+\frac{ab}{c}\frac{z}{1!}+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!}+\cdots$$

与(3.41)比较，可以证明，勒让德函数可写为

$$P_\nu(x)={}_2F_1\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1;\ \frac{1-x}{2}\right) \tag{3.42}$$

这里我们又重新换成惯用的变数 $x=\cos\theta$．超越几何函数的性质已为人们所熟知(参看 *Morse and Feshbach*, 第五章; *Dennery and Krzywicki*, Ⅳ.16-18 节; *Whittaker and Watson*, 第十四章)．当 $x=1$ 和 $|x|<1$ 时，勒让德函数 $P_\nu(x)$是正则函数，但当 $x=-1$ 时，除非 ν 为整数，勒让德函数 $P_\nu(x)$是奇异函数．在 $|x|<1$区间内，$P_\nu(x)$有若干个零点，这些零点取决于 ν 的值．因为多项式 $P_l(x)$ 当 $|x|<1$ 时有 l 个零点，我们预料，当 ν 为实数且 ν 越来越大时，$P_\nu(x)$出现的零点个数越来越多．并且零点大致均匀地分布于该区间内．尤其是当 ν 增加时，第一个零点越来越靠近 $x=1$ 处．

图 3.5 的拉普拉斯边值问题的基本解是

$$Ar^\nu P_\nu(\cos\theta)$$

这里当原点上的势有限时要求 $\nu>0$．因为当 $\theta=\beta$ 时，对于所有的 r

值，势必须等于零，所以必然有

$$P_\nu(\cos\beta)=0 \tag{3.43}$$

这是 ν 的本征值条件. 由刚才有关 P_ν 的零点的叙述，显而易见，(3.43) 有无限个解，$\nu=\nu_k(k=1,2,\cdots)$，这里我们已经按量值增加次序而排列的. 当 $\nu=\nu_1$ 时，$x=\cos\beta$ 是 $P_{\nu_1}(x)$ 的第一个零点. 当 $\nu=\nu_2$ 时，$x=\cos\beta$ 是 $P_{\nu_2}(x)$的第二个零点，依次类推. 在 $0\leqslant\theta\leqslant\beta$ 的区间内，轴对称势的完全解是①

$$\Phi(r,\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k r^{\nu_k}P_{\nu_k}(\cos\theta) \tag{3.44}$$

按照 2.11 节的精神，我们感兴趣的是在 $r=0$ 邻域内势和场的一般特性，而不是在 r 很大处满足特定边界条件的完全解. 因此，我们用 (3.44)的第一项近似地描写 $r=0$ 附近的势的特性，并把势写为

$$\Phi(r,\theta)\simeq Ar^\nu P_\nu(\cos\theta) \tag{3.45}$$

式中 ν 现在是(3.43)的最小根. 在锥形导体上电场强度和面电荷密度的分量是

$$\left.\begin{aligned}E_r&=-\frac{\partial\Phi}{\partial r}\simeq-\nu Ar^{\nu-1}P_\nu(\cos\theta)\\E_\theta&=-\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\simeq Ar^{\nu-1}\sin\theta P'_\nu(\cos\theta)\\\sigma(r)&=-\frac{1}{4\pi}E_\theta|_{\theta=\beta}\simeq-\frac{A}{4\pi}r^{\nu-1}\sin\beta P'_\nu(\cos\beta)\end{aligned}\right\} \tag{3.46}$$

这里 P_ν 上的撇号表示对其自变量的微商. 当 $r\to0$ 时，场和电荷密度都按 $r^{\nu-1}$ 而变化.

将 $P_\nu(\cos\beta)$的第一个零点的阶数 ν 作为 β 的函数画得的曲线，如图 3.6所示. 显然当 $\beta\ll1$ 时，$\nu\gg1$. 在这个区域内 ν 的近似表式可以

---

① 在 $\cos\beta\leqslant x\leqslant1$ 区间内，函数 $P_{\nu_k}(\cos\vartheta)$ 的正交性可以按与 $P_l(\cos\vartheta)$ 相同的方法加以证明——参看(3.17)—(3.19)，完全性也可以证明.

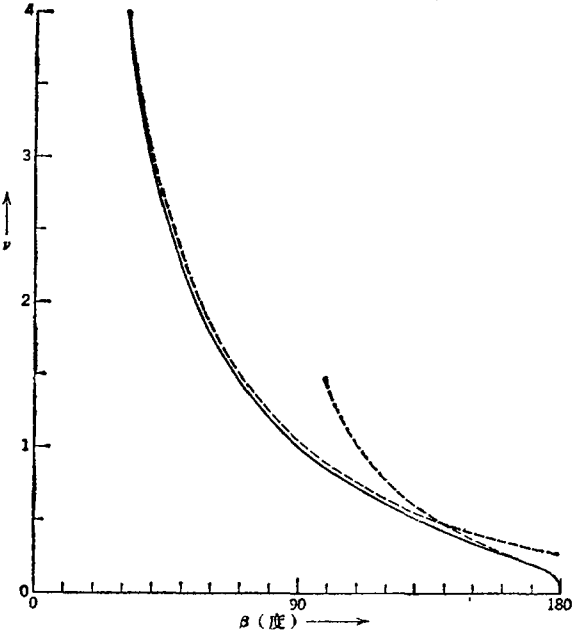


图 3.6 $P_\nu(\cos\beta)$ 第一个零点的阶参数 ν 随 β（以度为单位）的变化曲线. $0<\beta<90°$ 的区间相当于一个锥形孔，而 $90°<\beta<180°$ 是一个锥形尖顶. $r=0$ 附近的场和面电荷密度正比于 $r^{\nu-1}$. 虚曲线是近似表式(3.48a)和(3.48b)的.

从贝塞耳函数近似[①]求得，

$$P_\nu(\cos\theta)\simeq J_0\left((2\nu+1)\sin\frac{\theta}{2}\right) \tag{3.47}$$

在 ν 很大和 $\theta<1$ 时成立. $J_0(x)$ 的第一个零点是在 $x=2.405$ 处. 这就给出

$$\nu\simeq\frac{2.405}{\beta}-\frac{1}{2} \tag{3.48a}$$

① 在 3.7 节中讨论贝塞耳函数.

因为$|\mathbf{E}|$和σ按$r^{\nu-1}$而变化，显然当$\beta\to 0$时锥形孔深处的场和电荷是非常小的．当$\beta=\pi/2$时，锥形导体变成一个平面导体．这时正如所料，$\nu=1$和$\sigma\propto 1$．当$\beta>\pi/2$时，导体的几何形状是锥形尖顶．这时$\nu<1$，而场在$r=0$处是奇异的．当$\beta\to\pi$时，$\nu\to 0$，但相当缓慢．当$(\pi-\beta)$较小时近似地有

$$\nu\simeq\left[2\ln\left(\frac{2}{\pi-\beta}\right)\right]^{-1} \tag{3.48b}$$

上式表明，当$(\pi-\beta)\simeq 10°$时，$\nu\simeq 0.2$，而当$(\pi-\beta)\simeq 1°$时，$\nu\simeq 0.1$．不管怎样，对于一个细窄的锥形尖顶来说，尖端附近的场随$r^{-1+\epsilon}$而变化，这里$\epsilon\ll 1$．尖端周围的场很强．2.11节里讨论过这样尖端在避雷针中所起的作用．

R. N. Hall[*J. Appl. Phys.* 20, 925(1949)]对这种普遍类型的势问题进行了广泛的讨论．他将(3.43)的若干个根ν_k作为β的函数画出了一组曲线图．

3.5 缔合勒让德函数和球谐函数$Y_{lm}(\theta,\phi)$

到现在为止，我们已经讨论了具有轴对称的，其解的形式为(3.33)的势问题．这些问题只牵涉到寻常勒让德多项式，除非像3.4节那样限制θ角的范围．然而，一般的势问题可以随ϕ角而变化，所以(3.5)与(3.9)中的$m\neq 0$．这时，我们需要广义的$P_l(\cos\theta)$，即在(3.9)中的l与m都是任意时(3.9)式的解．用与处理寻常勒让德函数大致相同的方法，可以证明，为了在区间$-1\leqslant x\leqslant 1$上具有有限的解，参数l必须等于零或等于正整数，并且整数m只能取下列值：$-l,-(l-1),\cdots,0,\cdots,(l-1),l$．具备这些性质的解叫做缔合勒让德函数$P_l^m(x)$．当$m$为正值时，该函数用下式定义①：

① $P_l^m(x)$的相是按照Magnus and Oberhettinger和E. U. Condon and G. H. Shortley[*Theory of Atomic Spectra*, Cambridge University Press (1953)]两书里的方法选择的．关于显式与递推公式，参见Magnus and Oberhettinger，第54页．

$$P_l^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x) \tag{3.49}$$

若用洛德利格公式来表示 $P_l(x)$，就得到对正负 m 都有效的定义：

$$P_l^m(x)=\frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l \tag{3.50}$$

$P_l^{-m}(x)$和 $P_l^m(x)$是成比例的，因为微分方程(3.9)仅仅依赖于 m^2，并且 m 是整数．可以证明

$$P_l^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x) \tag{3.51}$$

当 m 固定时，函数 $P_l^m(x)$ 在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上构成指标 l 的正交集．利用与处理勒让德函数相同的方法，可得正交关系：

$$\int_{-1}^{1}P_{l'}^m(x)P_l^m(x)dx=\frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{l'l} \tag{3.52}$$

把拉普拉斯方程的解分解为三个因子的乘积，它们分别为变数 r，θ,ϕ 的函数．把两个角度函数合并，并建立对单位球面的正交归一函数，这是方便的．我们称这些函数为球谐函数，虽然这一专门名词往往留给广义勒让德方程(3.9)的解．在较老的书中，有时把我们的球谐函数叫做“田谐函数”．函数 $Q_m(\phi)=e^{im\phi}$ 构成在区间 $0\leqslant\phi\leqslant 2\pi$ 上指标为 m 的正交函数全集．函数 $P_l^m(\cos\theta)$ 对每个 m 值都构成一个相同的在区间 $-1\leqslant\cos\theta\leqslant 1$ 上指标为 l 的正交函数全集．所以它们的乘积 $P_l^mQ_m$ 构成单位球面上对双指标 l，m 的完全正交集．由归一化条件(3.52)清楚地知道，已适当地归一化的函数[用 $Y_{lm}(\theta,\phi)$表示]为：

$$Y_{lm}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi} \tag{3.53}$$

由(3.51)可以看出

$$Y_{l,-m}(\theta,\phi)=(-1)^mY_{lm}^*(\theta,\phi) \tag{3.54}$$

归一化与正交条件为

$$\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta Y_{l'm'}^*(\theta,\phi)Y_{lm}(\theta,\phi)=\delta_{l'l}\delta_{m'm} \tag{3.55}$$

相当于(2.35)的完全性关系为

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}^{*}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi)=\delta(\phi-\phi')\delta(\cos\theta-\cos\theta') \qquad (3.56)$$

下表列举几个很小的 l 值和 $m\geqslant 0$ 时 $Y_{lm}(\theta,\phi)$ 的显式. 当 m 为负值时, 可以利用(3.54).

球谐函数 $Y_{lm}(\theta,\phi)$

$$l=0 \quad Y_{00}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$l=1 \quad \begin{cases} Y_{11}=-\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi} \\ Y_{10}=\sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\cos\theta \end{cases}$$

$$l=2 \quad \begin{cases} Y_{22}=\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi} \\ Y_{21}=-\sqrt{\dfrac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi} \\ Y_{20}=\sqrt{\dfrac{5}{4\pi}}\left(\dfrac{3}{2}\cos^2\theta-\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$l=3 \quad \begin{cases} Y_{33}=-\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{35}{4\pi}}\sin^3\theta e^{3i\phi} \\ Y_{32}=\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{105}{2\pi}}\sin^2\theta\cos\theta e^{2i\phi} \\ Y_{31}=-\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{21}{4\pi}}\sin\theta(5\cos^2\theta-1)e^{i\phi} \\ Y_{30}=\sqrt{\dfrac{7}{4\pi}}\left(\dfrac{5}{2}\cos^3\theta-\dfrac{3}{2}\cos\theta\right) \end{cases}$$

注意, 当 $m=0$ 时,

$$Y_{l0}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\theta) \qquad (3.57)$$

任意函数 $g(\theta,\phi)$ 可按球谐函数展开:

$$g(\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{3.58}$$

式中的系数为

$$A_{lm}=\int d\Omega Y_{lm}^{*}(\theta,\phi)g(\theta,\phi)$$

在下节里，我们感兴趣的是 $\theta=0$ 时展开式的形式．利用定义(3.57)，我们得：

$$[g(\theta,\phi)]_{\theta=0}=\sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}A_{l0} \tag{3.59}$$

式中

$$A_{l0}=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\int d\Omega P_l(\cos\theta)g(\theta,\phi) \tag{3.60}$$

在 $\theta=0$ 时，级数中所有 $m\neq 0$ 的项都等于零．

可以推广式(3.33)，用球谐函数和 r 的幂写出球坐标中边值问题的通解：

$$\Phi(r,\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{m}[A_{lm}r^{l}+B_{lm}r^{-(l+1)}]Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{3.61}$$

如果球面上的势给定，计算(3.61)在球面上的值，并利用(3.58)，就可以定出这些系数．

3.6 球谐函数的加法定理

一个相当有趣的而且有用的数学结果，就是所谓球谐函数的加法定理．设有两个坐标矢量 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{x}'$，其球坐标分别为 (r,θ,ϕ) 与 (r',θ',ϕ')，两者的夹角为 γ，如图 3.7 所示．加法定理是把角 γ 的 l 阶勒让德多项式表为角 θ,ϕ 与 θ',ϕ' 的球谐函数的乘积：

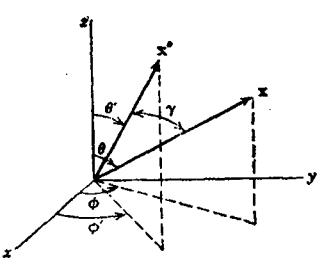


图 3.7

$$P_l(\cos\gamma)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y^*_{lm}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{3.62}$$

式中 $\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')$. 为了证明这一定理，我们把矢量 $\mathbf{x}'$ 看作固定在空间中. 这时 $P_l(\cos\gamma)$ 是角 θ,ϕ 的函数，而角 θ',ϕ' 当作参数. 可以把它展为级数(3.58):

$$P_l(\cos\gamma)=\sum_{l'=0}^{\infty}\sum_{m=-l'}^{l'}A_{l'm}(\theta',\phi')Y_{l'm}(\theta,\phi) \tag{3.63}$$

与(3.62)比较，表明其中只有 $l'=l$ 的项出现. 为了弄明白其道理，就要注意到: 如果这样选择坐标轴，使得 $\mathbf{x}'$ 在 z 轴上，那末 γ 变成通常的极角，而 $P_l(\cos\gamma)$ 满足方程:

$$\nabla'^2P_l(\cos\gamma)+\frac{l(l+1)}{r^2}P_l(\cos\gamma)=0 \tag{3.64}$$

式中 ∇'^2 是属于这些新坐标轴的拉普拉斯算符. 如果现在把坐标轴转到如图 3.7 所示的位置，则 $\nabla'^2=\nabla^2$，而 r 不变①. 因而 $P_l(\cos\gamma)$ 仍满足(3.64)形式的方程；就是说，它是 l 阶球谐函数. 这也表示它只是 l 阶 Y_{lm} 的线性组合:

$$P_l(\cos\gamma)=\sum_{m=-l}^{l}A_m(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{3.65}$$

系数 $A_m(\theta',\phi')$ 由下式给出:

$$A_m(\theta',\phi')=\int Y^*_{lm}(\theta,\phi)P_l(\cos\gamma)d\Omega \tag{3.66}$$

为了算出这系数的值，我们注意到: 按(3.60)，可以把它看作在函数 $\sqrt{4\pi/(2l+1)}Y^*_{lm}(\theta,\phi)$ 的展开式 [展开为属于 (3.64) 的带撇轴的 $Y_{lm'}(\gamma,\beta)$ 的级数] 中 $m'=0$ 时的系数. 这时，由(3.59)看出: 因为只有一个 l 值出现，所以系数(3.66)为

$$A_m(\theta',\phi')=\frac{4\pi}{2l+1}\{Y^*_{lm}[\theta(\gamma,\beta),\phi(\gamma,\beta)]\}_{\gamma=0} \tag{3.67}$$

---

① $\nabla^2\psi=\nabla\cdot\nabla\psi$ 是算符标积，而一切标积在坐标转动下是不变的. 注意到这一点就能最容易地证明: 在坐标转动下，$\nabla'^2=\nabla^2$.

角(θ,ϕ)作为(γ,β)的函数，在$\gamma\to 0$极限下，趋于(θ',ϕ')．这样就证明了加法定理(3.62)．有时不用Y_{lm}，而用$P_l^m(\cos\theta)$写出这个定理．这时它具有如下形式：

$$P_l(\cos\gamma)=P_l(\cos\theta)P_l(\cos\theta')$$
$$+2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta)P_l^m(\cos\theta')\cos[m(\phi-\phi')] \qquad (3.68)$$

若角γ趋于零，就得到一条关于Y_{lm}平方的“求和规则”：

$$\sum_{m=-l}^{l}\left|Y_{lm}(\theta,\phi)\right|^2=\frac{2l+1}{4\pi} \qquad (3.69)$$

可以用加法定理，把$\mathbf{x}'$的单位电荷在$\mathbf{x}$所产生的势的展开式(3.38)化成最一般形式．把(3.62)的$P_l(\cos\gamma)$代入(3.38)，则得

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}=4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y_{lm}^*(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi) \qquad (3.70)$$

方程(3.70)给出的势，是完全按坐标$\mathbf{x},\mathbf{x}'$写成因子的形式．上式在求对电荷密度(以及其它等等)的任何积分的值时是有用的，在这些积分中，一个变数是积分变数，另一变数是观测点的坐标．上式牵涉到双重求和，而不是单一项，这就是所要付出的代价．

3.7 柱坐标中的拉普拉斯方程，贝塞耳函数

在图3.8所示的柱坐标(ρ,ϕ,z)中，拉普拉斯方程取下列形式：

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0 \qquad (3.71)$$

通过如下替换

$$\Phi(\rho,\phi,z)=R(\rho)Q(\phi)Z(z) \qquad (3.72)$$

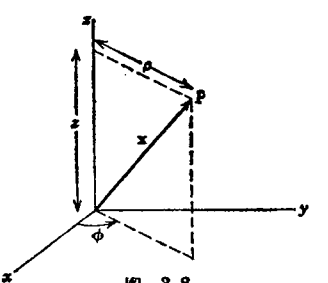


图 3.8

来完成变数分离．照例得到三个常微分方程：

$$\frac{d^2Z}{dz^2}-k^2Z=0 \tag{3.73}$$

$$\frac{d^2Q}{d\phi^2}+\nu^2Q=0 \tag{3.74}$$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+\left(k^2-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R=0 \tag{3.75}$$

前两个方程的解是简单的：

$$\begin{aligned} Z(z)&=e^{\pm kz}\\ Q(\phi)&=e^{\pm i\nu\phi} \end{aligned} \tag{3.76}$$

为了使势在整个方位角内都是单值的，ν 必须为整数．可是，除了在 z 方向上有某种边界条件的要求外，参数 k 是任意的．我们暂且假定 k 为实正数．

将变数换为 $x=k\rho$，就可以把径向方程化为标准形式．这时，它变为

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)R=0 \tag{3.77}$$

这是贝塞耳方程，其解叫做 ν 阶贝塞耳函数．若假定幂级数形式的解为：

$$R(x)=x^{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}a_jx^j \tag{3.78}$$

则得

$$\alpha=\pm\nu \tag{3.79}$$

和

$$a_{2j}=-\frac{1}{4j(j+\alpha)}a_{2j-2} \tag{3.80}$$

$j=0,1,2,3,\cdots$．所有 x^j 的奇次幂的系数都等于零．可以把递推公式叠代之，而得

$$a_{2j}=\frac{(-1)^j\Gamma(\alpha+1)}{2^{2j}j!\Gamma(j+\alpha+1)}a_0 \tag{3.81}$$

照例选用常数 $a_0=[2^\alpha\Gamma(\alpha+1)]^{-1}$. 这时，两个解为

$$J_\nu(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\Gamma(j+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \tag{3.82}$$

$$J_{-\nu}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\Gamma(j-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \tag{3.83}$$

这两个解叫做 $\pm\nu$ 阶第一类贝塞耳函数. 这两个级数对所有 x 的有限值皆为收敛. 若 ν 不是整数，这两个解 $J_{\pm\nu}(x)$ 构成二阶贝塞耳方程的一对线性独立解. 然而，若 ν 是整数，如所周知，这两个解是线性相关的. 事实上，当 $\nu=m$(整数)时，从级数表式可以看出

$$J_{-m}(x)=(-1)^mJ_m(x) \tag{3.84}$$

因而，当 m 是整数时，必须求另一线性独立解. 通常，即使 ν 不是整数，也用 $J_\nu(x)$ 和诺埃曼函数（或第二类贝塞耳函数）$N_\nu(x)$ 代替这一对 $J_{\pm\nu}(x)$:

$$N_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \tag{3.85}$$

当 ν 不是整数时，显然 $N_\nu(x)$ 与 $J_\nu(x)$ 是线性无关的. 在 $\nu\to$整数的极限情形下，可以证明，$N_\nu(x)$ 仍然与 $J_\nu(x)$ 是线性无关的. 正如所料，$N_\nu(x)$ 包含有 $\log x$. 在许多参考书里都给出该函数的级数表式.

第三类贝塞耳函数叫汉克尔 (Hankel)函数，其定义为 $J_\nu(x)$ 与 $N_\nu(x)$ 的线性组合:

$$\left.\begin{aligned}H_\nu^{(1)}(x)&=J_\nu(x)+iN_\nu(x)\\H_\nu^{(2)}(x)&=J_\nu(x)-iN_\nu(x)\end{aligned}\right\} \tag{3.86}$$

汉克尔函数构成贝塞耳方程的一组基本解，正如 $J_\nu(x)$ 与 $N_\nu(x)$ 所构成的解一样.

函数 $J_\nu, N_\nu, H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}$ 都满足下列递推公式:

$$\Omega_{\nu-1}(x)+\Omega_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}\Omega_\nu(x) \tag{3.87}$$

$$\Omega_{\nu-1}(x)-\Omega_{\nu+1}(x)=2\frac{d\Omega_\nu(x)}{dx} \tag{3.88}$$

式中 $\Omega_\nu(x)$是任何一种 ν 阶柱函数. 这些式子可以从级数表式(3.82)直接加以证明.

作为参考，我们列举当自变量很小和很大时，各类贝塞耳函数的极限形式. 为了简单起见，这里只给出主要项:

$$x\ll 1 \qquad J_\nu(x)\longrightarrow\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \tag{3.89}$$

$$N_\nu(x)\longrightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\left[\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)+0.5772\cdots\right], & \nu=0\\ -\dfrac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\dfrac{2}{x}\right)^\nu, & \nu\neq 0\end{cases} \tag{3.90}$$

在这些公式中假定 ν 是非负的实数.

$$x\gg 1,\nu \qquad \left.\begin{aligned}J_\nu(x)&\longrightarrow\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\\ N_\nu(x)&\longrightarrow\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}\right\} \tag{3.91}$$

从 x 很小时的特征式到 x 很大时的渐近式的过渡，是发生在 $x\sim\nu$ 的区域中.

由渐近式(3.91)很清楚地看到，每个贝塞耳函数有无穷多的根。我们将主要讨论 $J_\nu(x)$的根:

$$J_\nu(x_{\nu n})=0, \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{3.92}$$

$x_{\nu n}$ 是 $J_\nu(x)$的第 n 个根。对 ν 的头几个整数值来说，头三个根为:

$$\nu=0,\quad x_{0n}=2.405,\quad 5.520,\quad 8.654,\cdots$$

$$\nu=1,\quad x_{1n}=3.832,\quad 7.016,\quad 10.173,\cdots$$

$$\nu=2,\quad x_{2n}=5.136,\quad 8.417,\quad 11.620,\cdots$$

对 ν 较大的根来说，渐近式

$$x_{\nu n}\simeq n\pi+\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$$

的精确度相当好(至少三位有效数字). 在 *Jahnke, Emde and Lösch* 第 194 页和 *Abramowitz and Stegun* 第 409 页里给出了这些根的表.

我们已经用贝塞耳函数求得拉普拉斯方程径向部分的解, 现在就可以问: 贝塞耳函数在什么意义下构成正交函数全集. 我们将只考虑第一类贝塞耳函数, 并将证明: 当 $\nu\geqslant 0$ 时, $\sqrt{\rho}J_\nu(x_{\nu n}\rho/a)$, $n=1, 2, 3, \cdots$, 构成区间 $0\leqslant\rho\leqslant a$ 上的正交集. 证明是从 $J_\nu(x_{\nu n}\rho/a)$ 所满足的微分方程开始:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{dJ_\nu\left(x_{\nu n}\dfrac{\rho}{a}\right)}{d\rho}\right]+\left(\frac{x_{\nu n}^2}{a^2}-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)J_\nu\left(x_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)=0 \qquad (3.93)$$

若把这个方程乘以 $\rho J_\nu(x_{\nu n'}\rho/a)$, 并从 0 积分到 a, 就得

$$\int_0^a J_\nu(x_{\nu n'}\frac{\rho}{a})\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{dJ_\nu\left(x_{\nu n}\dfrac{\rho}{a}\right)}{d\rho}\right]d\rho$$
$$+\int_0^a\left(\frac{x_{\nu n}^2}{a^2}-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)\rho J_\nu\left(x_{\nu n'}\frac{\rho}{a}\right)J_\nu\left(x_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)d\rho=0$$

用分部积分法, 并考虑到 $(\rho J_\nu J_\nu')$ 在 $\rho=0$(当 $\nu\geqslant 0$)和 $\rho=a$ 时等于零, 就得到下面结果:

$$-\int_0^a\rho\frac{dJ_\nu\left(x_{\nu n'}\dfrac{\rho}{a}\right)}{d\rho}\frac{dJ_\nu\left(x_{\nu\lambda}\dfrac{\rho}{a}\right)}{d\rho}d\rho$$
$$+\int_0^a\left(\frac{x_{\nu n}^2}{a^2}-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)\rho J_\nu\left(x_{\nu n'}\frac{\rho}{a}\right)J_\nu\left(x_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)d\rho=0$$

如果写出 n 与 n' 调换后的同一表达式, 并相减, 就得到正交条件:

$$(x_{\nu n}^2-x_{\nu n'}^2)\int_0^a\rho J_\nu\left(x_{\nu n'}\frac{\rho}{a}\right)J_\nu\left(x_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)d\rho=0 \qquad (3.94)$$

利用递推公式(3.87)、(3.88)以及微分方程(3.93), 就可以求得归一化积分为:

$$\int_0^a \rho J_\nu\left(x_{\nu n'}\frac{\rho}{a}\right)J_\nu\left(x_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)d\rho=\frac{a^2}{2}\left[J_{\nu+1}(x_{\nu n})\right]^2\delta_{n'n} \tag{3.95}$$

假定贝塞耳函数集是完全的，我们可以把区间$0\leqslant\rho\leqslant a$上$\rho$的任意函数按傅里叶-贝塞耳级数展开：

$$f(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}A_{\nu n}J_\nu\left(x_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right) \tag{3.96}$$

式中，

$$A_{\nu n}=\frac{2}{a^2J_{\nu+1}^2(x_{\nu n})}\int_0^a \rho f(\rho)J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}\rho}{a}\right)d\rho \tag{3.97}$$

在我们关于(3.96)的推导中，牵涉到$\nu\geqslant 0$的限制. 实际上，可以证明，(3.96)对$\nu\geqslant -1$的所有值来说都成立.

展开式(3.96)与(3.97)是惯用的傅里叶-贝塞耳级数，它特别适用于在$\rho=a$时等于零的那些函数(例如，圆柱上的齐次狄利克莱边界条件；参见下节). 但要注意到另一种可能的展开式，即展为函数$\sqrt{\rho}J_\nu(y_{\nu n}\rho/a)$的级数，此处$y_{\nu n}$是方程$[dJ_\nu(x)]/dx=0$的第$n$个根. 其理由是：在证明函数的正交性时，只要求量$[\rho J_\nu(\lambda\rho)(d/d\rho)J_\nu(\lambda'\rho)]$在$\rho=0$与$\rho=a$的端点处都等于零. 当$\lambda=x_{\nu n}/a$时，或当$\lambda=y_{\nu n}/a$时[这里$J_\nu(x_{\nu n})=0, J_\nu'(y_{\nu n})=0$]，都可以满足这一要求. 对于在$\rho=a$处的斜率为零的函数来说，用$\sqrt{\rho}J_\nu(y_{\nu n}\rho/a)$集展开的展开式是特别有用的(参见习题 3.10).

傅里叶-贝塞耳级数只不过是牵涉到贝塞耳函数的一种展开式. 诺埃曼级数$\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_nJ_{\nu+n}(z)\right]$，卡布坦 (Kapteyn) 级数$\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_nJ_{\nu+n}((\nu+n)z)\right]$以及许隆利希 (Schlölich) 级数$\left[\sum_{n=1}^{\infty}a_nJ_\nu(nx)\right]$是另一些可能的展开式. 关于这些级数的性质的详细讨论，读者可以参看*Watson*第十六至十九章. 在讨论开普勒行星运动和快速运动电荷的

辐射时，会出现卡布坦级数(参见习题 14.7 与 14.8).

在结束贝塞耳函数性质的论述之前，应该指出：如果在分离拉普拉斯方程时，(3.73)中分离常数 k^2 取作 $-k^2$，那末 $Z(z)$将是 $\sin kz$ 或 $\cos kz$，$R(\rho)$的方程将为：

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}-\left(k^2+\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R=0 \tag{3.98}$$

令 $k\rho=x$，上式变为

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}-\left(1+\frac{\nu^2}{x^2}\right)R=0 \tag{3.99}$$

这个方程的解叫做修正贝塞耳函数．显而易见，它们就是纯虚自变量的贝塞耳函数．用 $I_\nu(x)$与 $K_\nu(x)$表示通常所选取的线性独立解．它们的定义如下：

$$I_\nu(x)=i^{-\nu}J_\nu(ix) \tag{3.100}$$

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2}i^{\nu+1}H_\nu^{(1)}(ix) \tag{3.101}$$

当 x 和 ν 为实数时，它们是实函数．假定实数 $\nu\geqslant 0$，当 x 很小和 x 很大时，它们的极限形式是：

$x\ll 1$

$$I_\nu(x)\longrightarrow\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \tag{3.102}$$

$$K_\nu(x)\longrightarrow\begin{cases}-\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right)+0.5772+\cdots\right], & \nu=0\\ \frac{\Gamma(\nu)}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu, & \nu\neq 0\end{cases} \tag{3.103}$$

$x\gg 1,\nu$

$$\left.\begin{aligned}I_\nu(x)&\longrightarrow\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^x\left[1+0\left(\frac{1}{x}\right)\right]\\ K_\nu(x)&\longrightarrow\sqrt{\frac{\pi}{2\pi}}e^{-x}\left[1+0\left(\frac{1}{x}\right)\right]\end{aligned}\right\} \tag{3.104}$$

3.8 柱坐标中的边值问题

柱坐标中的拉普拉斯方程的解是 $\Phi=R(\rho)Q(\phi)Z(z)$，式中各个

因子已在上节里给出. 现在讨论图 3.9 所示的特殊边值问题. 圆柱的半径为 a, 高为 L, 顶面和底面的位置是在 $z=L$ 和 $z=0$ 的平面上. 圆柱的侧面和底面上的势都等于零, 而顶面上的势为 $\Phi=V(\rho,\phi)$. 我们所要求的是圆柱内任一点的势. 为了使 Φ 是单值的, 并且在 $z=0$ 时等于零, 令

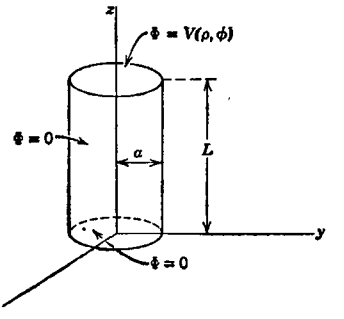


图 3.9

$$\left.\begin{aligned} Q(\phi)&=A\sin m\phi+B\cos m\phi \\ Z(z)&=\sinh kz \end{aligned}\right\} \tag{3.105}$$

式中 $\nu=m$ 是整数, k 是待定常数. 径向因子是

$$R(\rho)=CJ_m(k\rho)+DN_m(k\rho) \tag{3.106}$$

如果在 $\rho=0$ 处, 势是有限值, 则 $D=0$. 在 $\rho=a$ 处, 势等于零, 这一要求意味着, k 只能取下列特殊值, 即:

$$k_{mn}=\frac{x_{mn}}{a}, \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{3.107}$$

式中 x_{mn} 是 $J_m(x_{mn})=0$ 的根.

把所有这些条件归并一起, 我们求得解的一般形式为 $\Phi(\rho,\phi,z)$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}J_m(k_{mn}\rho)\sinh(k_{mn}z)[A_{mn}\sin m\phi+B_{mn}\cos m\phi] \tag{3.108}$$

在 $z=L$ 处, 我们给定势为 $V(\rho,\phi)$. 因此, 我们有

$$V(\rho,\phi)=\sum_{m,n}\sinh(k_{mn}L)J_m(k_{mn}\rho)[A_{mn}\sin m\phi + B_{mn}\cos m\phi]$$

这是 ϕ 的傅里叶级数和 ρ 的傅里叶-贝塞耳级数. 由(2.37)和(3.97)得到诸系数为:

$$A_{mn}=\frac{2\,\mathrm{cosech}(k_{mn}L)}{\pi a^2 J_{m+1}^2(k_{mn}a)}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^a d\rho\rho V(\rho,\phi)J_m(k_{mn}\rho)\sin m\phi$$

和

$$B_{mn}=\frac{2\,\mathrm{cosech}(k_{mn}L)}{\pi a^2 J_{m+1}^2(k_{mn}a)}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^a d\rho\rho V(\rho,\phi)J_m(k_{mn}\rho)\cos m\phi \tag{3.109}$$

附加条件为：我们在级数中用$\frac{1}{2}B_{0n}$作为$m=0$的系数。

对于任意的ρ，在$z=0$处，势等于零，对于任意的z，在$\rho=a$处，势等于零，这一要求说明(3.108)是一种特殊的展开形式．对于不同的边界条件，展开式将取不同的形式．在两个端面上势等于零，在侧面上势等于$V(\phi,z)$，这个例子当作习题3.8，留给读者．

傅里叶-贝塞耳级数(3.108)适用于ρ的有限区间$(0\leqslant\rho\leqslant a)$．当$a\to\infty$时，则由级数转为积分，其转变方式完全类似于从三角傅里叶级数转变为傅里叶积分．例如，在无电荷空间里，当$z\geqslant 0$时，势是有限的；当$z\to\infty$时，势等于零．当$z\geqslant 0$时，解的一般形式必为

$$\Phi(\rho,\phi,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{\infty}dke^{-kz}J_m(k\rho)[A_m(k)\sin m\phi + B_m(k)\cos m\phi] \tag{3.110}$$

若在$z=0$的整个平面上的势给定为$V(\rho,\phi)$，上式诸系数则由下式确定

$$V(\rho,\phi)=\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{\infty}dkJ_m(k\rho)[A_m(k)\sin m\phi+B_m(k)\cos m\phi]$$

其中，随ϕ变化的部分正好是傅里叶级数．所以系数$A_m(k)$和$B_m(k)$分别由下式确定：

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}V(\rho,\phi)\begin{Bmatrix}\sin m\phi\\ \cos m\phi\end{Bmatrix}d\phi=\int_0^{\infty}J_m(k'\rho)\begin{Bmatrix}A_m(k')\\ B_m(k')\end{Bmatrix}dk' \tag{3.111}$$

解出第一类径向积分方程是容易的，因为它们是汉克尔变换式．为

此，我们可以用积分关系式

$$\int_0^{\infty} xJ_m(kx)\,J_m(k'x)\,dx=\frac{1}{k}\delta(k'-k) \tag{3.112}$$

从方程(3.111)反过来求出 $A_m(k)$ 与 $B_m(k)$. 在(3.111)两边分别乘以 $\rho J_m(k\rho)$，并对 ρ 积分，借助(3.112)，我们得知，系数是由对 $z=0$ 的整个平面的积分确定的：

$$\left.\begin{matrix}A_m(k)\\B_m(k)\end{matrix}\right\}=\frac{k}{\pi}\int_0^{\infty}d\rho\rho\int_0^{2\pi}d\phi V(\rho,\phi)J_m(k\rho)\left\{\begin{matrix}\sin m\phi\\\cos m\phi\end{matrix}\right. \tag{3.113}$$

照例在级数(3.110)中，我们必须用 $\frac{1}{2}B_0(k)$ 当作 $m=0$ 的系数.

3.9 球坐标中的格临函数展开

为了处理有电荷分布的势的边值问题(即泊松方程的解)，须要确定满足适当边界条件的格临函数 $G(\mathbf{x},\mathbf{x}')$. 这些给定的边界条件，往往是在某种可分离坐标系的曲面上(例如球形或柱形边界面). 这时，把格临函数用与所取的坐标相适应的函数乘积的级数来表示是方便的. 我们首先考虑球坐标的情况，并把它当作说明这种展开的一个例子.

已知在无边界(除无穷远外)情形下的格临函数展开式，即(3.70)：

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}=4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y_{lm}^*(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi)$$

假定我们希望得到一个类似的，适用于具有球面($r=a$)边界的“外域”问题的格临函数的展开式，则由格临函数的电像形式(2.16)可以马上得到这个结果. 将(2.16)的两项按式(3.70)展开，我们得到：

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=4\pi\sum_{l,m}\frac{1}{2l+1}\left[\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}-\frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{rr'}\right)^{l+1}\right]$$
$$\cdot Y_{lm}^*(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{3.114}$$

为了清楚地看出(3.114)的结构，并证明它满足边界条件，我们分别写出 $r<r'$ 与 $r>r'$ 的径向因子：

$$\left[\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}-\frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{rr'}\right)^{l+1}\right]=\begin{cases}\dfrac{1}{r'^{l+1}}\left[r^l-\dfrac{a^{2l+1}}{r^{l+1}}\right], & r<r' \\ \left[r'^l-\dfrac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}}\right]\dfrac{1}{r^{l+1}}, & r>r'\end{cases} \tag{3.115}$$

首先，我们要注意，当 r 等于 a 或 r' 等于 a 时，径向因子等于零，这正是所要求的性质．同样，在 r 或 $r'\to\infty$ 时，径向因子趋于零．上式对 r 和 r' 是对称的．当固定 r'，而把径向因子看作 r 的函数时，它正是拉普拉斯方程径向部分(3.7)的解 r^l 和 $r^{-(l+1)}$ 的线性组合．显然，这种线性组合对 $r<r'$ 和 $r>r'$ 是不同的．其道理在下文中将会明白，并且与下述事实有关：格临函数是含有 δ 函数的非齐次泊松方程的解．

现在已知可分离坐标中格临函数展开的一般结构．下面就转入从基本原理出发，系统地建立这些展开式．势问题的格临函数满足方程

$$\nabla_x^2 G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=-4\pi\delta(\mathbf{x},\mathbf{x}') \tag{3.116}$$

并遵从边界条件 $G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=0$，当 $\mathbf{x}$ 或 $\mathbf{x}'$ 在界面 S 上时．对于球形界面，我们希望其展开式具有一般形式(3.114)．相应地利用 δ 函数可以写为[①]下面形式这个事实

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')=\frac{1}{r^2}\delta(r-r')\delta(\phi-\phi')\delta(\cos\theta-\cos\theta')$$

以及可以用完全性关系式(3.56)表示角 δ 函数，

---

① 当用坐标 (ξ_1,ξ_2,ξ_3) 表示 $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')=\delta(x_1-x_1')\,\delta(x_2-x_2')\,\delta(x_3-x_3')$ 时，我们要注意到，有意义的量是 $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')d^3x$，而 (ξ_1,ξ_2,ξ_3) 与 (x_1,x_2,x_3) 是通过雅科毕式 $J(x_i,\xi_i)$ 联系起来，因此

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')=\frac{1}{|J(x_i,\xi_i)|}\delta(\xi_1-\xi_1')\delta(\xi_2-\xi_2')\delta(\xi_3-\xi_3')$$

参看习题 1.2.

$$\delta(\mathrm{x}-\mathrm{x}')=\frac{1}{r^2}\delta(r-r')\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}^{*}(\theta',\phi')Y_{lm}(\phi,\theta) \tag{3.117}$$

于是，作为 x 的函数的格临函数可以展开为

$$G(\mathrm{x},\mathrm{x}')=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}(r|r',\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{3.118}$$

把(3.117)和(3.118)代入(3.116)，得到下列结果：

$$A_{lm}(r|r',\theta',\phi')=g_l(r,r')Y_{lm}^{*}(\theta',\phi') \tag{3.119}$$

和

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rg_l(r,r'))-\frac{l(l+1)}{r^2}g_l(r,r')=-\frac{4\pi}{r^2}\delta(r-r') \tag{3.120}$$

我们看到，当 $r\neq r'$ 时，径向格临函数满足齐次径向方程(3.7)．所以，可以把它写为：

$$g_l(r,r')=\begin{cases}Ar^l+Br^{-(l+1)}, & \text{当 } r<r' \text{ 时}\\ A'r^l+B'r^{-(l+1)}, & \text{当 } r>r' \text{ 时}\end{cases}$$

系数 A,B,A',B' 是 r' 的函数，它们决定于边界条件，决定于(3.120)中 $\delta(r-r')$所暗示的要求，以及 $g_l(r,r')$对 r 和 r' 的对称性．假定边界面是 $r=a$ 和 $r=b$ 的同心球面，则当 x 在边界面上时，$G(\mathrm{x},\mathrm{x}')$等于零．意思是当 $r=a$ 和 $r=b$ 时，$g_l(r,r')$等于零．所以 $g_l(r,r')$变为

$$g_l(r,r')=\begin{cases}A\left(r^l-\dfrac{a^{2l+1}}{r^{l+1}}\right), & r<r'\\ B'\left(\dfrac{1}{r^{l+1}}-\dfrac{r^l}{b^{2l+1}}\right), & r>r'\end{cases} \tag{3.121}$$

$g_l(r,r')$对 r 和 r' 的对称性，要求系数 $A(r')$和 $B'(r')$具有这样性质，即使得 $g_l(r,r')$可以写为

$$g(r,r')=C\left(r_<^l-\frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\right)\left(\frac{1}{r_>^{l+1}}-\frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right) \tag{3.122}$$

式中 $r_<(r_>)$是 r 和 r' 的较小者(较大者)．为了定出常数 C，我们必须考虑(3.120)中 δ 函数的作用．如果我们在式(3.20)两边都乘以 r，并

且对 $r=r'-\epsilon$ 到 $r=r'+\epsilon$ 区间积分，其中ϵ是一个很小的数，则得

$$\left\{\frac{d}{dr}\left[rg_l(r,r')\right]\right\}_{r'+\epsilon}-\left\{\frac{d}{dr}\left[rg_l(r,r')\right]\right\}_{r'-\epsilon}=-\frac{4\pi}{r'} \tag{3.123}$$

即在 $r=r'$ 处，斜率不连续，如图 3.10 所示.

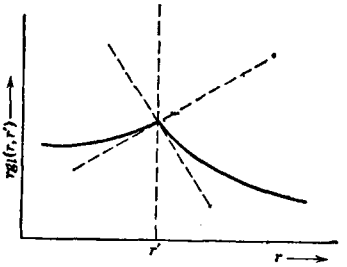


图 3.10 径向格临函数的斜率的不连续性.

当 $r=r'+\epsilon$ 时，$r_>=r$，$r_<=r'$. 因此

$$\left\{\frac{d}{dr}\left(rg_l(r,r')\right)\right\}_{r'+\epsilon}=C\left(r'^l-\frac{a^{2l+1}}{r'^{l+1}}\right)\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^l}-\frac{r^{l+1}}{b^{2l+1}}\right)\right]_{r=r'}$$

$$=-\frac{C}{r'}\left[1-\left(\frac{a}{r'}\right)^{2l+1}\right]\left[l+(l+1)\left(\frac{r'}{b}\right)^{2l+1}\right]$$

同样地

$$\left\{\frac{d}{dr}\left[rg_l(r,r')\right]\right\}_{r'-\epsilon}=\frac{C}{r'}\left[l+1+l\left(\frac{a}{r'}\right)^{2l+1}\right]\cdot\left[1-\left(\frac{r'}{b}\right)^{2l+1}\right]$$

把这些导数代入(3.123)，我们得：

$$C=\frac{4\pi}{(2l+1)\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}\right]} \tag{3.124}$$

把(3.124)，(3.122)，(3.119)，和(3.118)合并，就得到以 $r=a$ 和 $r=b$ 为界的球壳的格临函数的展开式：

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{Y_{lm}^*(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi)}{(2l+1)\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}\right]}\left(r_<^l-\frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\right)\left(\frac{1}{r_>^{l+1}}-\frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right) \tag{3.125}$$

在 $a\to 0, b\to\infty$ 和仅仅 $b\to\infty$ 这两种特殊情形下，我们分别得出以前的展开式(3.70)和(3.114)．对于半径为 b 的球的"内域"问题，只要令 $a\to 0$ 就可以了．虽然由电像法得出对单个球的展开式是最容易的，但用电像法求球壳的一般结果(3.125)都很困难，因为它牵涉到一组无穷多个像．

3.10 用球格临函数展开的势问题的解

边界面上的势值给定时，泊松方程的通解是(参见 1.10 节)：

$$\Phi(\mathbf{x})=\int_V \rho(\mathbf{x}')G(\mathbf{x},\mathbf{x}')d^3x'-\frac{1}{4\pi}\oint_S \Phi(\mathbf{x}')\frac{\partial G}{\partial n'}da' \qquad (3.126)$$

我们以半径为 b 的球为例，讨论球内的势．首先证明(3.126)中的面积分项，相当于3.5节中方法所得(3.61)与(3.58)的结果．令(3.125)中的 $a=0$，并算出 $r'=b$ 处的法向导数，得：

$$\frac{\partial G}{\partial n'}=\frac{\partial G}{\partial r'}\bigg|_{r'=b}=-\frac{4\pi}{b^2}\sum_{l,m}\left(\frac{r}{b}\right)^l Y^*_{lm}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi) \qquad (3.127)$$

因此，按照(3.126)，在 $r=b$ 的球[球面上 $\Phi=V(\theta',\phi')$]内的拉普拉斯方程的解为：

$$\Phi(\mathbf{x}')=\sum_{l,m}\left[\int V(\theta',\phi')Y^*_{lm}(\theta',\phi')d\Omega'\right]\left(\frac{r}{b}\right)^l Y_{lm}(\theta,\phi) \qquad (3.128)$$

就所考虑的情形来说，此解和含有(3.58)的(3.61)的形式相同．还有球面解的第三种形式，即所谓泊松积分(2.19)．此种解与上述格临函数的展开解等效，这可从下述事实得出：两者都可以从一般表式(3.126)与电像格临函数推得．直接证明(2.19)与级数解(3.61)等效，将留下作为习题．

现在讨论在球内有电荷分布的问题的解，这时将牵涉到(3.126)中的体积分．这只要考虑边界面上势等于零的问题就够了，因通过拉普拉斯方程解的线性叠加可以求得通解．第一个例子是：半径为 b 的中空

接地球，其内放一半径为 a，总电荷为 Q 的同心电荷环．电荷环的位置是在 x-y 平面内，如图 3.11 所示．环的电荷密度可以借助角 δ 函数和径向 δ 函数而写为：

$$\rho(x')=\frac{Q}{2\pi a^2}\delta(r'-a)\delta(\cos\theta') \tag{3.129}$$

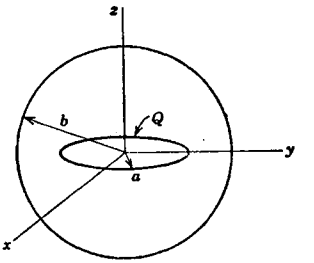


图 3.11 处在半径为 b 的接地导电球内的，半径为 a，总电荷为 Q 的电荷环．

由于轴对称，只有(3.125)中 $m=0$ 的诸项才对格临函数的体积分有贡献．然后，利用(3.57)，并记住让(3.125)中 $a\to 0$，就得

$$\Phi(\mathbf{x})=\int\rho(\mathbf{x}')G(\mathbf{x},\mathbf{x}')d^3x'$$

$$=Q\sum_{l=0}^{\infty}P_l(0)r_<^l\left(\frac{1}{r_>^{l+1}}-\frac{r_<^l}{b^{2l+1}}\right)P_l(\cos\theta) \tag{3.130}$$

现在，式中的 $r_<(r_>)$ 是 r 和 a 的较小者(较大者)．利用 $P_{2n+1}(0)=0$ 和 $P_{2n}(0)=\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}$，可以把(3.130)写为：

$$\Phi(\mathbf{x})=Q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}r_<^{2n}\left(\frac{1}{r_>^{2n+1}}-\frac{r_<^{2n}}{b^{4n+1}}\right)P_{2n}(\cos\theta) \tag{3.131}$$

在 $b\to\infty$ 的极限下，我们将看到(3.130)或(3.131)化为 3.3 节末自由空间中电荷环的表式．我们也可以利用此表式及其对球的电像而得

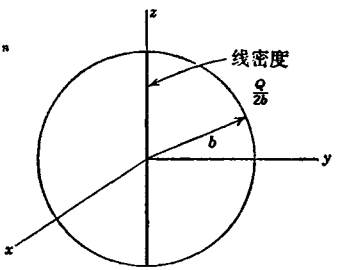


图 3.12 处在半径为 b 的接地导电球内，长度为 $2b$，总电荷为 Q 的均匀线电荷．

出上述结果.

第二个求电荷密度的例子是：在中空接地球内放一根总电荷为Q的均匀线电荷，线电荷位于通过球的南北极的z轴上，如图3.12所示. 我们可以再借助δ函数，把体电荷密度写为：

$$\rho(\mathbf{x}')=\frac{Q}{2b}\frac{1}{2\pi r'^2}\Big[\delta(\cos\theta'-1)+\delta(\cos\theta'+1)\Big] \tag{3.132}$$

两个$\cos\theta$的δ函数相当于在x-y平面上下方的两半段线电荷. 分母中的因子$2\pi r'^2$保证了电荷具有恒定的线密度$Q/2b$. 把这个密度代入(3.126)，我们得到

$$\Phi(\mathbf{x})=\frac{Q}{2b}\sum_{l=0}^{\infty}[P_l(1)+P_l(-1)]P_l(\cos\theta)\int_0^b r_<^l\left(\frac{1}{r_>^{l+1}}-\frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)dr' \tag{3.133}$$

这个积分必须分成$0\leqslant r'<r$和$r\leqslant r'\leqslant b$两个区间来求. 则得

$$\begin{aligned}\int_0^b&=\left(\frac{1}{r^{l+1}}-\frac{r^l}{b^{2l+1}}\right)\int_0^r r'^l dr'+r^l\int_r^b\left(\frac{1}{r'^{l+1}}-\frac{r'^l}{b^{2l+1}}\right)dr'\\&=\frac{(2l+1)}{l(l+1)}\left(1-\left(\frac{r}{b}\right)^l\right)\end{aligned} \tag{3.134}$$

当$l=0$时，这个结果是不定式. 应用洛毕达(L' Hospital)法则，当$l=0$时，我们有

$$\int_0^b=\lim_{l\to 0}\frac{\dfrac{d}{dl}\left[1-\left(\dfrac{r}{b}\right)^l\right]}{\dfrac{d}{dl}(l)}=\lim_{l\to 0}\left[-\frac{d}{dl}e^{l\ln(r/b)}\right]=\ln\left(\frac{b}{r}\right) \tag{3.135}$$

可以证明，对(3.133)的$l=0$项直接求积分，就得上式. 利用$P_l(-1)=(-1)^l$这一事实，我们可以把势(3.133)写成下列形式：

$$\Phi(\mathbf{x})=\frac{Q}{b}\left\{\ln\left(\frac{b}{r}\right)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(4j+1)}{2j(2j+1)}\left[1-\left(\frac{r}{b}\right)^{2j}\right]P_{2j}(\cos\theta)\right\} \tag{3.136}$$

在$l=0$时出现对数项，这使我们想到：沿z轴的势是发散的. 由

(3.136)中的级数可以说明这一点. 除恰在 $r=b$ 处外，当 $\cos\theta=\pm1$ 时，级数是发散的.

对(3.136)求导数，就很容易得出接地球上的面电荷密度:

$$\sigma(\theta)=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\bigg|_{r=b}=-\frac{Q}{4\pi b^2}\cdot\left[1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(4j+1)}{(2j+1)}P_{2j}(\cos\theta)\right] \tag{3.137}$$

其中第一项表明，感生在球面上的总电荷为 $-Q$，其它各项对整个球面的积分等于零.

3.11 柱坐标中的格临函数展开

一个单位点电荷的势在柱坐标中的展开式，是格临函数展开式的另一实例. 我们将按最一般的方式来介绍关于展开步骤的初步知识. 按照这个步骤，可以容易地求出具有柱形界面的势问题的格临函数. 由格临函数方程

$$\nabla_x^2 G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=-\frac{4\pi}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\phi-\phi')\delta(z-z') \tag{3.138}$$

出发，式中 δ 函数已表为柱坐标. 可以用正交归一函数写出 ϕ 和 z 的 δ 函数:

$$\left.\begin{aligned}\delta(z-z')&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk e^{ik(z-z')}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}dk\cos[k(z-z')]\\ \delta(\phi-\phi')&=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im(\phi-\phi')}\end{aligned}\right\} \tag{3.139}$$

按同样方式展开格临函数:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}dk e^{im(\phi-\phi')}\cos[k(z-z')]g_m(\rho,\rho') \tag{3.140}$$

然后代入(3.138)，就得径向格临函数 $g_m(\rho,\rho')$ 的方程：

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dg_m}{d\rho}\right)-\left(k^2+\frac{m^2}{\rho^2}\right)g_m=-\frac{4\pi}{\rho}\delta(\rho-\rho') \tag{3.141}$$

当 $\rho\neq\rho'$ 时，上式正是修正贝塞耳函数 $I_m(k\rho)$ 和 $K_m(k\rho)$ 的方程(3.98)．设 $\psi_1(k\rho)$ 是 I_m 与 K_m 的某一线性组合，它满足 $\rho<\rho'$ 时的适当边界条件，又设 $\psi_2(k\rho)$ 是另一线性无关的组合，它满足 $\rho>\rho'$ 时的固有边界条件．那末，格临函数对 ρ,ρ' 的对称性要求

$$g_m(\rho,\rho')=\psi_1(k\rho_<)\psi_2(k\rho_>) \tag{3.142}$$

乘积 $\psi_1\psi_2$ 的归一化，决定于(3.141)中的 δ 函数所体现出的斜率不连续性：

$$\left.\frac{dg_m}{d\rho}\right|_+-\left.\frac{dg_m}{d\rho}\right|_-=-\frac{4\pi}{\rho'} \tag{3.143}$$

式中 $|_\pm$ 的意思是指在 $\rho=\rho'\pm\epsilon$ 时所算出的值．由(3.142)很明显地得到

$$\left[\left.\frac{dg_m}{d\rho}\right|_+-\left.\frac{dg_m}{d\rho}\right|_-\right]=k(\psi_1\psi_2'-\psi_2\psi_1')=kW[\psi_1,\psi_2] \tag{3.144}$$

式中撇号是指对自变量取导数，$W[\psi_1,\psi_2]$ 是 ψ_1 和 ψ_2 的朗斯基行列式．方程(3.141)是斯特姆-刘维型的方程

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+g(x)y=0 \tag{3.145}$$

众所周知，这种方程的两个线性独立解的朗斯基行列式与 $[1/p(x)]$ 成正比．因此，(3.143)对一切 ρ' 值都满足是有保证的．显然我们必须要求乘积 $\psi_1\psi_2$ 的归一化，应使朗斯基行列式取如下值：

$$W[\psi_1(x),\psi_2(x)]=-\frac{4\pi}{x} \tag{3.146}$$

在没有边界面的情况下，应要求 $g_m(\rho,\rho')$ 在 $\rho=0$ 处是有限的，在 $\rho\to\infty$ 时等于零．因而 $\psi_1(k\rho)=AI_m(k\rho)$，$\psi_2(k\rho)=K_m(k\rho)$．常数 A 由朗斯基行列式条件(3.146)定出．既然对一切 x 值来说，朗斯基行列

式都与$(1/x)$成正比，因而我们可以在任何地方计算它的值．对于小的x，我们利用极限形式(3.102)和(3.103)[或者 对于大的x，我们利用极限形式(3.104)]，则得

$$W[I_m(x), K_m(x)]=-\frac{1}{x} \tag{3.147}$$

由此得$A=4\pi$．于是，$1/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$的展开式变为：

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}=\frac{2}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}dk e^{im(\phi-\phi')}\cos[k(z-z')] \times I_m(k\rho_<)K_m(k\rho_>) \tag{3.148}$$

我们也可以完全用实函数把上式写成：

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}=\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}dk\cos[k(z-z')] \times\{\frac{1}{2}I_0(k\rho_<)K_0(k\rho_>)+\sum_{m=1}^{\infty}\cos[m(\phi-\phi')] \times I_m(k\rho_<)K_m(k\rho_>)\} \tag{3.149}$$

从这个展开式，可以得到一些有用的数学结果．如果令$\mathbf{x}'\to 0$，则只剩下$m=0$项，于是我们得到积分表式：

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos kzK_0(k\rho)dk \tag{3.150}$$

如果以$R^2=\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi-\phi')$代替(3.150)中的$\rho^2$，那末左边为$z'=0$时的距离的倒数$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}$，即适为$z'=0$时(3.149)的结果．然后比较(3.149)和(3.150)的右边(两者对一切z值相等)，就得到：

$$K_0[k\sqrt{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi-\phi')}] =I_0(k\rho_<)K_0(k\rho_>) +2\sum_{m=1}^{\infty}\cos[m(\phi-\phi')]I_m(k\rho_<)K_m(k\rho_>) \tag{3.151}$$

在最后这个结果中，我们可以取 $k\to 0$ 的极限，并得到对于(二维的)极坐标的格临函数展开式：

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi-\phi')}}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{1}{\rho_>}\right)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{\rho_<}{\rho_>}\right)^m\cos[m(\phi-\phi')] \qquad (3.152)$$

循着推导(3.148)的途径，系统地建立泊松方程的二维格临函数，也可以证明这个表式.

3.12 格临函数的本征函数展开

另一种获得格临函数展开式的方法是利用某些有关问题的本征函数. 这种方法跟 3.9 和 3.11 节的方法有密切关系.

为了详细说明本征函数的含义，我们讨论一个椭圆型微分方程，其形式为

$$\nabla^2\psi(\mathbf{x})+[f(\mathbf{x})+\lambda]\psi(\mathbf{x})=0 \qquad (3.153)$$

如果解 $\psi(\mathbf{x})$需要在所考虑的体积 V 的表面 S 上满足一定的边界条件，那末，一般说来，除非 λ 取某些特定的值，否则(3.153)没有有理(例如有限而连续的)解. 这些 λ 值用 λ_n 表示，并叫做本征值(或特征值)，解 $\psi_n(\mathbf{x})$叫做本征函数①. 本征值的微分方程可写为：

$$\nabla^2\psi_n(\mathbf{x})+[f(\mathbf{x})+\lambda_n]\psi_n(\mathbf{x})=0 \qquad (3.154)$$

利用与证明勒让德或贝塞耳函数正交性相类似的方法，可以证明本征函数是正交的：

$$\int_V \psi_m^*(\mathbf{x})\psi_n(\mathbf{x})d^3x=\delta_{mn} \qquad (3.155)$$

假定式中本征函数是归一化的. 本征值 λ_n 的谱可以是分立谱或连续统，也可以两者都有. 我们将假定本征函数的全体构成一完全集.

① 熟悉波动力学的读者会看出，(3.153)相当于势场中一个质点的薛定谔方程.

现在假定我们需要求的是下列方程的格临函数:

$$\nabla_x^2 G(\mathbf{x},\mathbf{x}')+[f(\mathbf{x})+\lambda]G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=-4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \quad (3.156)$$

一般说来，式中 λ 不是(3.154)中的某一个本征值 λ_n. 我们进一步假定，格临函数的边界条件与(3.154)的本征函数的边界条件相同. 于是，就可以把格临函数展开为如下形式的本征函数级数:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=\sum_n a_n(\mathbf{x}')\psi_n(\mathbf{x}) \quad (3.157)$$

将上式代入格临函数的微分方程，就得到下列结果:

$$\sum_m a_m(\mathbf{x}')(\lambda-\lambda_m)\psi_m(\mathbf{x})=-4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \quad (3.158)$$

如果我们在上式两边都乘以 $\psi_n^*(\mathbf{x})$，并对体积 V 积分，利用正交条件(3.155)，可把左边化为一项，即得

$$a_n(\mathbf{x}')=4\pi\frac{\psi_n^*(\mathbf{x}')}{\lambda_n-\lambda} \quad (3.159)$$

因此，格临函数的本征函数展开是:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=4\pi\sum_n\frac{\psi_n^*(\mathbf{x}')\psi_n(\mathbf{x})}{\lambda_n-\lambda} \quad (3.160)$$

对连续统来说，应以积分代替求和.

令(3.156)中的 $f(\mathbf{x})=0$ 和 $\lambda=0$，就能把上述讨论简化为对泊松方程的讨论. 作为第一个例子（实际上这是很普通的例子），我们令(3.154)为适用于全空间的波动方程:

$$(\nabla^2+k^2)\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})=0 \quad (3.161)$$

其本征值 k^2 是连续统，基本征函数为:

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (3.162)$$

这些本征函数是 δ 函数归一化的:

$$\int\psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x})\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})d^3x=\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \quad (3.163)$$

然后按照(3.160),无限空间的格临函数展开式是:

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}=\frac{1}{2\pi^2}\int d^3k\,\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{k^2} \tag{3.164}$$

这正是 $1/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ 的三维傅里叶积分表式.

第二个例子,讨论由 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=a$, $y=b$, $z=c$ 等六个平面所限定的一个长方盒内的狄利克莱问题的格临函数. 用下列波动方程的本征函数建立其展开式:

$$(\nabla^2+k_{lmn}^2)\psi_{lmn}(x,y,z)=0 \tag{3.165}$$

满足上式并在所有边界面上等于零的本征函数为

$$\left.\begin{aligned}&\psi_{lmn}(x,y,z)=\sqrt{\frac{8}{abc}}\sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi z}{c}\right)\\ &\text{和}\\ &k_{lmn}^2=\pi^2\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{3.166}$$

所以格临函数的展开式为:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}')$$

$$=\frac{32}{\pi abc}$$

$$\times\sum_{l,m,n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{l\pi x'}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{m\pi y'}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi z}{c}\right)\sin\left(\frac{n\pi z'}{c}\right)}{\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)} \tag{3.167}$$

为了把展开式(3.167)与 3.9, 3.11 节所得到的几种展开式[即球坐标的(3.125)和柱坐标的(3.148)]联系起来,我们要写出类似的适用于长方形盒的展开式. 如果按照在球坐标和柱坐标的两种情形下处理 (θ,ϕ) 或 (ϕ,z) 的方式,来处理 x 和 y 坐标,而把 z 坐标挑出来单独处理,就得到格临函数:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}')$$

$$=\frac{16\pi}{ab}\sum_{l,m=1}^{\infty}\sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{l\pi x'}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{m\pi y'}{b}\right)$$

$$\times\left[\frac{\sinh(K_{lm}z_<)\sinh(K_{lm}(c-z_>))}{K_{lm}\sinh(K_{lm}c)}\right] \qquad (3.168)$$

式中 $K_{lm}=\pi\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)^{1/2}$. 如果(3.167)和(3.168)相等，则(3.167)中对 n 求和，一定正好是(3.168)中 z 的一维格临函数在区间$(0,c)$上的傅里叶级数表式:

$$\frac{\sinh(K_{lm}z_<)\sinh(K_{lm}(c-z_>))}{K_{lm}\sinh(K_{lm}c)}=\frac{2}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi z'}{c}\right)}{K_{lm}^2+\left(\frac{n\pi}{c}\right)^2}\sin\left(\frac{n\pi z}{c}\right)$$

(3.169)

关于(3.169)是正确的傅里叶表式的证明，我们留给读者当作练习.

在本章末的习题中，将会找到应用这种方法的另一些例子.

3.13 混合边界条件，带一圆孔的导电平板

到目前为止，本章所讨论的势问题只是一种正统的势问题，在这种势问题中，在整个界面上只有一种边界条件（通常是狄利克莱边界条件）. 可是，在拉普拉斯方程或泊松方程解的唯一性证明(1.9节)中，已经指出：混合边界条件（在一部分界面上给定势，在其馀界面上给定势的法向导数)无论如何也得纳入能完全确定的唯一的边值问题中. 在现今流行的教科书里，有这样一种倾向，即当证明唯一性时，叙述了存在混合边界条件的可能性，而在以后的讨论中，却不管这个问题了. 我们将会知道，其原因在于处理混合边界条件比正常边界条件难得多.

为了说明处理混合边界条件所遇到的困难，我们考虑这样一个无限大的薄的接地导电平板问题，在这导电平板中挖有一个半径为 a 的圆孔，在远离圆孔处，电场方向垂直于平板，电场量值恒定，而且在平板

上下方各有不同的值．几何图形如图 3.13 所示．平板位于 $z=0$ 平面上；孔的中心在坐标原点上；非零的渐近电场分量为：当 $z>0$ 时 $E_z=-E_0$，当 $z<0$ 时 $E_z=-E_1$．这个问题看起来似乎是凭空设想的，可是当 $E_0=0$ 或 $E_1=0$ 时，它适用于波导壁的小孔辐射，这里的"小"字定义为：和波长比较起来是小的，以致静电学的考虑可以适用（参见 9.5 节）．

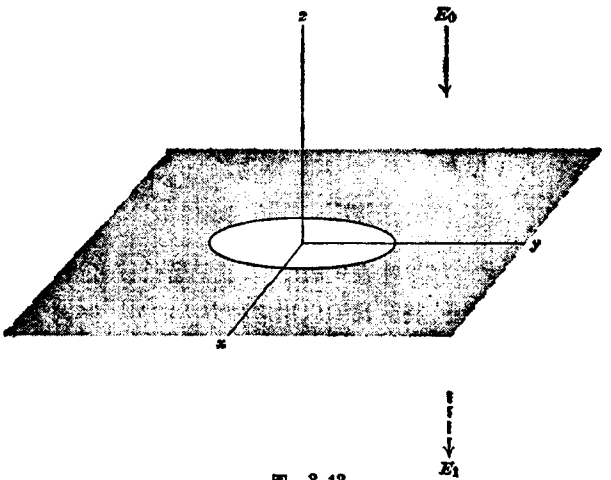


图 3.13

因为远离圆孔处的电场是给定的，我们将势写为

$$\Phi=\begin{cases}E_0z+\Phi^{(1)} & (z>0)\\ E_1z+\Phi^{(1)} & (z<0)\end{cases} \tag{3.170}$$

如果此孔不存在，则 $\Phi^{(1)}$ 等于零．平板的正面有一均匀面电荷密度 $-E_0/4\pi$，其背面有一均匀面电荷密度 $E_1/4\pi$．于是势 $\Phi^{(1)}$ 可以看做孔附近面电荷重新分布所产生的结果．因为这个电荷密度位于 $z=0$ 平面上，势 $\Phi^{(1)}$ 可以写成

$$\Phi^{(1)}(x,y,z)=\int\frac{\sigma^{(1)}(x',y')dx'dy'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}}$$

上式表明，$\Phi^{(1)}$ 是 z 的偶函数，所以 $E_x^{(1)}$ 和 $E_y^{(1)}$ 也是 z 的偶函数，但 $E_z^{(1)}$ 是 z 的奇函数．我们注意，$E_x^{(1)}$ 和 $E_y^{(1)}$ 是总电场的 x 分量和 y 分量，但因(3.170)，$E_z^{(1)}$ 不是电场的总的 z 分量．于是即使 $E_z^{(1)}$ 是 z 的奇函数，$z=0$ 时 $E_z^{(1)}$ 也不等于零．更恰当地说，当 $z=0$ 时 $E_z^{(1)}$ 是不连续的．因为电场的总的 z 分量在孔内越过 $z=0$ 时必须是连续的，我们必定有

$$-E_0+E_z^{(1)}|_{z=0^+}=-E_1+E_z^{(1)}|_{z=0^-}$$

倘若(x,y)在孔内$(0\leqslant\rho<a)$，则因为 $E_z^{(1)}$ 是 z 的奇函数，这个关系式决定了电场的法向分量为

$$E_z^{(1)}|_{z=0^+}=-E_z^{(1)}|_{z=0^-}=\frac{1}{2}(E_0-E_1)$$

对导电平板$(a\leqslant\rho<\infty)$上诸点来说，电场是未知的，但根据假设，势等于零．由(3.170)，这个假设的意思是指那里的 $\Phi^{(1)}=0$．注意，我们还不知道孔内的势．因此我们求解的是带下列混合边界条件的静电学边值问题：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z}\Big|_{z=0^+}=-\frac{1}{2}(E_0-E_1)\qquad\text{当 }0\leqslant\rho<a\text{ 时}\\ \text{和}\qquad&\\ &\Phi^{(1)}|_{z=0}=0\qquad\qquad\text{当 }a\leqslant\rho<\infty\text{ 时}\end{aligned}\right\}\tag{3.171}$$

因为几何形状是轴对称的，就可以用柱坐标[根据(3.110)]把势写成

$$\Phi^{(1)}(\rho,z)=\int_0^\infty dk\,A(k)e^{-k|z|}J_0(k\rho)\tag{3.172}$$

在叙述如何由边界条件定出 $A(k)$ 之前，我们讨论一下当 $k=0$ 时 $A(k)$ 及其导数与势的渐近特性的关系．当 ρ 或 $|z|$ 很大时，$J_0(k\rho)$ 的快速振荡或 $e^{-k|z|}$ 的迅速衰减意味着：在 $k=0$ 附近的区域内，$J_0(k\rho)$ 或 $e^{-k|z|}$ 才对(3.172)中的积分有重要的贡献．因此，$\Phi^{(1)}$ 的渐近特性关系到 k 很小时 $A(k)$ 的特性．我们假定 $A(k)$ 可以在 $k=0$ 附近展开成泰勒

级数:

$$A(k)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{k^l}{l!}\frac{d^lA}{dk^l}(0)$$

把这个级数代入(3.172),势 $\Phi^{(1)}$ 变为

$$\Phi^{(1)}(\rho,z)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{d^lA}{dk^l}(0)B_l(\rho,z) \tag{3.173}$$

式中

$$B_l(\rho,z)=\frac{1}{l!}\int_0^{\infty}dk\,k^l\,e^{-k|z|}\,J_0(k\rho) \tag{3.174}$$

积分(3.174)显然可以写为

$$B_l=\frac{1}{l!}\left(-\frac{d}{d|z|}\right)^l\int_0^{\infty}dke^{-k|z|}J_0(k\rho)$$

利用习题 3.14(c)所得的结果,我们求得 B_l 为

$$B_l=\frac{1}{l!}\left(-\frac{d}{d|z|}\right)^l\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right) \tag{3.175}$$

读者可以领会到,通过明显的计算可得

$$B_l=\frac{P_l(|\cos\theta|)}{r^{l+1}} \tag{3.176}$$

式中 $\cos\theta=z/r$ 和 $r=\sqrt{\rho^2+z^2}$. 所以渐近展开式(3.173)是一种具有球谐函数形式(3.33)的展开式:

$$\Phi^{(1)}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{d^lA}{dk^l}(0)\cdot\frac{P_l(|\cos\theta|)}{r^{l+1}} \tag{3.177}$$

正如下一章所要讨论的,这种按 r^{-1} 的幂的展开叫做多极子展开. $l=0$ 的系数 $A(0)$是总电荷. $l=1$ 的系数 $dA(0)/dk$ 是沿 z 方向的偶极矩,等等. 一旦知道了函数 $A(k)$,描写势的渐近特性的这些量就可以算出来了,毋须用势函数本身的明显结构式.

我们现在准备讨论混合边值问题. 利用我们采用的 $\Phi^{(1)}$ 形式

(3.172)，边界条件(3.171)变为 $A(k)$的一对第一类积分方程：

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty dk\,kA(k)J_0(k\rho)=\frac{1}{2}(E_0-E_1) \qquad \text{当 } 0\leqslant\rho<a \text{ 时}\\&\int_0^\infty dk\,A(k)J_0(k\rho)=0 \qquad \text{当 } a\leqslant\rho<\infty \text{ 时}\end{aligned}\right\}\tag{3.178}$$

这些成对的积分方程(就每一对积分方程来说，其中一个积分方程在独立变数的一部分区间上成立，而另一个积分方程则在另一部分区间上成立) 就是众所周知的双重积分方程. 这种积分方程的一般理论是复杂的，尚未发展为高度成熟的理论①. 整整一百年以前，韦伯用某些包含贝塞耳函数的不连续积分，求解了一个带电圆盘的势问题，这问题与双重积分方程密切有关. 我们将引用推广的韦伯公式. 考虑双重积分方程

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty dy\,y\,g(y)J_n(yx)=x^n \qquad \text{当 } 0\leqslant x<1 \text{ 时}\\&\int_0^\infty dy\,g(y)J_n(yx)=0 \qquad \text{当 } 1\leqslant x<\infty \text{ 时}\end{aligned}\right\}\tag{3.179}$$

查一下 $J_n(at)J_\nu(bt)t^{-\lambda}$ 的积分的索奈恩(Sonine)-夏弗亥林(Schafheitlin)公式[参看 *Watson*, 第 398 页起，或者 *Magnus and Oberhettinger*, 第 35 页，方程(S_1)和(S_3)]，可以证明 $g(y)$的解为

$$g(y)=\frac{\Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}j_{n+1}(y)=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\frac{J_{n+\frac{3}{2}}(y)}{(2y)^{1/2}}\tag{3.180}$$

在这个关系式中，$j_n(y)$是 n 阶球贝塞耳函数(参看 16.1 节).

就 (3.178) 这对方程来说，我们有 $n=0$，$x=\rho/a$，$y=ka$. 所以 $A(k)$为

---

① 参看 I. N. Sneddon, *Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory*, North-Holland, Amsterdam and Wiley-Interscience, New York(1966)；这是一部最近的专论著作，阐述了我们所讨论的课题. 也可参看 *Tranter* 第 50 页和第八章.

$$A(k)=\frac{(E_0-E_1)a^2}{\pi}j_1(ka)=\frac{(E_0-E_1)}{\pi}\left[\frac{\sin ka}{k^2}-\frac{a\cos ka}{k}\right] \tag{3.181}$$

当 k 很小时，$A(k)$的展开式取下列形式：

$$A(k)\simeq\frac{(E_0-E_1)a^2}{3\pi}\left[ka-\frac{(ka)^3}{10}+\cdots\right]$$

这意味着：与 $\Phi^{(1)}$ 有关的总电荷等于零，渐近势(3.177) 中的主要项是 $l=1$ 贡献的，

$$\Phi^{(1)}\longrightarrow\frac{(E_0-E_1)a^2}{3\pi}\cdot\frac{|z|}{r^3} \tag{3.182}$$

$\Phi^{(1)}$ 随距离按 r^{-2} 下降，且具有一个有效电偶极矩：

$$\mathbf{p}=\mp\frac{(\mathbf{E}_0-\mathbf{E}_1)a^3}{3\pi}\qquad(z\gtrless 0) \tag{3.183}$$

有效偶极矩的正负号，取决于观测点是在平板的上方还是下方．这是由于真偶极矩是 z 的奇函数，而(3.182)是 z 的偶函数．导电平板上一个小孔在远离孔处的作用，相当于一个与板面垂直的偶极子．这种概念对于讨论波导壁和空腔壁上的孔所产生的结果是很重要的．图 9.4 以绘图方式表明：类偶极场的起源是由于电力线穿过圆孔到达具有较小恒定场的一方．可以通过(3.182)和(3.183)对该图作定量的解释．

圆孔附近的附加势 $\Phi^{(1)}$ 必须用下列精确表式计算：

$$\Phi^{(1)}(\rho,z)=\frac{(E_0-E_1)}{\pi}a^2\int_0^\infty dk\, j_1(ka)e^{-k|z|}J_0(k\rho) \tag{3.184}$$

我们只限于讨论若干特殊情形．轴上($\rho=0$)的附加势为[①]

$$\Phi^{(1)}(0,z)=\frac{(E_0-E_1)a}{\pi}\left[1-\frac{|z|}{a}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a}{|z|}\right)\right]$$

当 $|z|\gg a$ 时，上式化为 $r=|z|$ 情形下的(3.182)；而当 $|z|\to 0$ 时，近似地等于第一项．在孔平面内($z=0$)，势 $\Phi^{(1)}$ 为

① 这里遇到的一类积分，可参看 *Watson*，第十三章；*Gradshteyn and Ryzhik*；*Magnus, Oberhettinger, and Soni*；或 *Bateman* 手稿影印本．

$$\Phi^{(1)}(\rho,0)=\frac{E_0-E_1}{\pi}\sqrt{a^2-\rho^2}$$

这时 $0\leqslant\rho<a$(当然,当 $\rho\geqslant a$ 时,势 $\Phi^{(1)}$ 等于零). 孔内的切向电场是一个辐向场,

$$\mathbf{E}_{\text{切}}(\rho,0)=\frac{(E_0-E_1)}{\pi}\frac{\boldsymbol{\rho}}{\sqrt{a^2-\rho^2}} \tag{3.185}$$

由(3.171)的第一个方程,孔内电场的法向分量正好是平板上下方的两个均匀电场的平均值,即

$$E_z(\rho,0)=-\frac{1}{2}(E_0+E_1) \tag{3.186}$$

我们看到电场的数值在孔的边缘上具有平方根型奇异点,这与 2.11 节的结果一致. 可以直接计算圆孔附近导电平板正面和背面的面电荷密度. 这种直接计算留作习题.

在 $E_1=0$ 的情况下,总势(3.170)在圆孔附近的等势线图如图3.14

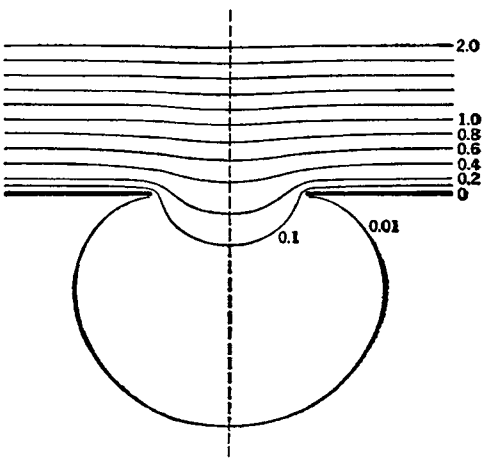


图 3.14 导电平板的圆孔附近的等势线图. 在远离孔处,平板的上方有法向电场 E_0,其下方的场近似为零($E_1=0$). 数字表示以 aE_0 为单位的势 Φ 值. 这个分布对于通过孔心的垂直虚线是旋转对称的.

所示．当离孔的距离大于半径的两倍或三倍时，几乎无法辨别孔是否存在．

斯奈顿（Sneddon）详尽讨论了带电的导电圆盘的经典问题（参看第54页脚注援引的著作）．按椭圆坐标分离拉普拉斯方程，可以避免圆盘或圆孔的混合边界条件．这时圆盘（或圆孔）看作扁球面的极限形式．有关这种方法请参看 *Smythe* 第124页和第171页，或 *Jeans* 第244页．

参考书和推荐读物

数学物理的特殊函数、常微分方程的解、超越几何函数和斯特姆-刘维理论等论题，在许多书籍里都有叙述．如读者还未选好中意的书籍，可以参看

Arfken;

Dennery and Kryzwicki;

Morse and Feshbach;

Whittaker and Watson.

更初浅的论述，而且附有精选的例题和习题的有：

Hildebrand，第四章、第五章和第八章．

阐述勒让德多项式和球谐函数的理论及其应用的较老的经典著作，并附有大量例题和习题的是：

Byerly.

就特殊函数的纯数学性质来说，最有用的一部参考书是：

Magnus and Oberhettinger，及其修订版，即

Magnus, Oberhettinger, and Soni.

至于特殊函数更详细的数学性质，有关贝塞耳函数的参看

Watson;

有关各类特殊函数的参看

Bateman 的手稿影印本

全面讨论柱坐标、球坐标以及其它坐标中的静电问题的有：

Durand，第十一章；

Jeans，第八章；

Smythe, 第五章;

Stratton, 第三章.

习　题

3.1 有两个同心球，半径为 a 和 $b(b>a)$，被同一个水平面分成两个半球，内球的上半球和外球的下半球的势保持 V. 其余两个半球的势等于零.

试把区域 $a\leqslant r\leqslant b$ 内的势表为勒让德多项式的级数. 所包含的项至少达到 $l=4$. 在 $b\to\infty$ 和 $a\to 0$ 的两种极限情形下，把你的解与已知的结果作一比较.

3.2 在半径为 R 的球面上，除由 $\theta=\alpha$ 的锥体所限定的位于北极的球顶部外，都布有均匀分布的电荷，其面密度为 $Q/4\pi R^2$.

(*a*) 证明：球内的势可以表为

$$\Phi=\frac{Q}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}[P_{l+1}(\cos\alpha)-P_{l-1}(\cos\alpha)]\frac{r^l}{R^{l+1}}P_l(\cos\theta)$$

式中当 $l=0$ 时，$P_{l-1}(\cos\alpha)=-1$. 球外的势等于什么？

(*b*) 试求原点的电场的量值和方向；

(*c*) 讨论在下列两种情形下(*a*)中的势与(*b*)中的电场的极限形式：(1)球顶部变得非常小；(2)球顶部变得非常大，以致于球上带电荷的面积变为非常小，它仅仅位于南极的一小部分球面上.

3.3 有一个半径为 R 的薄的平面导电圆盘，放在 $x-y$ 平面上，盘的中心在原点，盘的势保持不变，即等于 V. 并且知道，当盘的势保持不变时，盘上的电荷密度正比于 $(R^2-\rho^2)^{-1/2}$，其中 ρ 是从盘的中心往外量度的距离，

(*a*) 证明：当 $r>R$ 时，势为

$$\Phi(r,\theta,\phi)=\frac{2V}{\pi}\frac{R}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{2l+1}\left(\frac{R}{r}\right)^{2l}P_{2l}(\cos\theta)$$

(*b*) 试求 $r<R$ 的势.

(*c*) 圆盘的电容等于多少？

3.4 设有一组平面，其公共交线为 z 轴，各平面按 ϕ 角均匀地排列. 这组平面把内半径为 a 的中空导电球面分成偶数个相同的片段. (这些片段很像切成楔形的苹果皮或两条相邻子午线之间的地面.)令这些片段交错地保持恒定势 $\pm V$.

(*a*) 建立在片段为 $2n$ 个的一般情形下球内势的级数表式，并计算级数中的诸系数，尽可能精确地定出不等于零的诸系数. 把非零项系数表为对 $\cos\theta$ 的积

分.

(*b*) 直接定出在 $n=1$(两个半球)的特殊情形下的势，一直到包含 $l=3$ 的所有项为止. 试用坐标变换证明这个势可以化为 3.3 节中的结果(3.36).

3.5 一个内半径为 a 的中空球，已知其表面上的势为 $\Phi=V(\theta,\phi)$. 证明下列两种球内势的解是等效的:

(*a*) $$\Phi(\mathbf{x})=\frac{a(a^2-r^2)}{4\pi}\int\frac{V(\theta',\phi')}{(r^2+a^2-2ar\cos\gamma)^{3/2}}d\Omega'$$

式中 $\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')$.

(*b*) $$\Phi(\mathbf{x})=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}\left(\frac{r}{a}\right)^l Y_{lm}(\theta,\phi)$$

式中 $A_{lm}=\int d\Omega' Y^*_{lm}(\theta',\phi')V(\theta',\phi')$.

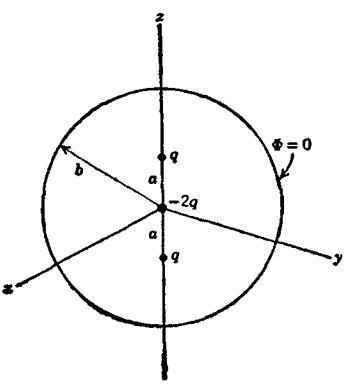
3.6 两点电荷 q 和 $-q$ 分别位于 z 轴上的 $z=ta$ 和 $z=-a$ 处.

(*a*) 试求静电势，把它在 $r>a$ 和 $r<a$ 两种情形下按球谐函数和 r 的幂展开.

(*b*) 在乘积 $qa\equiv p/2$ 保持恒定情况下，取 $a\to 0$ 的极限，并求当 $r\neq 0$ 时的势. 按定义这便是沿 z 轴的一个偶极子及其势.

(*c*) 今设(*b*)中的偶极子被一半径为 b、球心在原点的接地导电球壳所包围. 用线性叠加法求球壳内各处的势.

3.7 三个点电荷 $(q,-2q,q)$ 位于一条直线上，间隔均为 a，中央电荷 $(-2q)$ 位于半径为 b 的接地导电球壳的原点上，如图所示.



习题 3.7

(*a*) 写出无接地球壳时三个电荷的势. 求 $a\to 0$ 但乘积 $qa^2=Q$ 保持有限时势的极限形式. 用球坐标写出后一答案.

(*b*) 有半径为 b 的接地球壳时，就改变了 $r<b$ 处的势. 附加势可以看做是由 $r=b$ 的内表面上的感生面电荷密度所产生的，或者看做位于 $r>b$ 处的像电荷所产生的. 用线性叠加法使其满足边界条件，并求出在 $r<a$ 和 $r>a$ 两种情形下球内各处的势. 证明在 $a\to 0$ 极限下，

$$\Phi(r,\theta,\phi)\to\frac{2Q}{r^3}\left(1-\frac{r^5}{b^5}\right)P_2(\cos\theta)$$

3.8 一个半径为 b 的中空正圆柱体，其轴与 z 轴相合，其两底面各在 $z=0$ 和 $z=L$ 的平面上．底面的势等于零，而柱面的势给定为 $V(\phi,z)$．试用适当的柱坐标中的分离变数法，求圆柱内各处的势的级数解．

3.9 设习题 3.8 中的圆柱面是由两个相同的半圆柱面组成的，一个半圆柱面的势为 V，另一个为 $-V$，即

$$V(\phi,z)=\begin{cases}V, & \text{当}-\dfrac{\pi}{2}<\phi<\dfrac{\pi}{2}\text{时}\\ -V, & \text{当}\dfrac{\pi}{2}<\phi<\dfrac{3\pi}{2}\text{时}\end{cases}$$

(*a*) 试求圆柱内部的势；

(*b*) 假定 $L\gg b$，把 $z=L/2$ 的势看作 ρ 与 ϕ 的函数，将这个势与二维情形的习题 2.9 作一比较．

3.10 证明：任意函数 $f(x)$ 可以在 $0\leqslant x\leqslant a$ 区间内展为修正傅里叶-贝塞耳级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n J_\nu\left(y_{\nu n}\frac{x}{a}\right)$$

式中 $y_{\nu n}$ 为 $\dfrac{dJ_\nu(x)}{dx}=0$ 的第 n 个根，系数 A_n 由下式给出：

$$A_n=\frac{2}{a^2\left(1-\dfrac{\nu^2}{y_{\nu n}^2}\right)J_\nu^2(y_{\nu n})}\int_0^a f(x)xJ_\nu\left(y_{\nu n}\frac{x}{a}\right)dx$$

3.11 一块由导电材料做成的无限大薄平板，其上开一半径为 a 的圆孔．另一块用同样材料做成的薄平圆盘，其半径略小于 a，放在平板上，并填在平板的圆孔内，但用一个很细绝缘环使它与平板隔开．圆盘的势 V 保持一定，而无限大平板的势保持为零．

(*a*) 试用适当的柱坐标，求出平板上方任何一点的势的含有贝塞耳函数的积分表式；

(*b*) 证明：在圆盘中央上方，垂直距离为 z 处的势为

$$\Phi_0(z)=V\left(1-\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$$

(*c*) 证明：在圆盘边缘上方，垂直距离为 z 处的势为

$$\Phi_a(z)=\frac{V}{2}\left[1-\frac{kz}{\pi a}K(k)\right]$$

式中 $k=2a/(z^2+4a^2)^{1/2}$，$K(k)$ 为第一类全椭圆积分.

3.12 试用正文中得到的适当的格临函数，求解习题 3.1 中的势，并证明：这种方法得到的答案与直接从微分方程得到的解相同.

3.13 有一长为 $2d$ 的线电荷，其总电荷为 Q，其线电荷密度按 (d^2-z^2) 而改变，其中 z 是从中点量起的距离. 另有一个内半径为 $b(b>d)$ 的接地导电球壳，其球心位在线电荷的中点.

(*a*) 试求球壳内各处的势，并将它表为勒让德多项式展开；

(*b*) 试计算壳上感生面电荷密度；

(*c*) 试在 $d\ll b$ 的极限下，讨论你的(*a*)和(*b*)的答案.

3.14 (*a*) 试从贝塞耳微分方程出发，证明式(3.112)，或与它等效的下列公式：

$$\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho')=\int_0^\infty kJ_m(k\rho)J_m(k\rho')dk$$

(*b*) 试求下列展开式

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty dke^{im(\phi-\phi')}J_m(k\rho)J_m(k\rho')e^{-k(z_>-z_<)}$$

(*c*) 试用适当的求极限的程序，证明下列展开式：

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}}=\int_0^\infty e^{-k|z|}J_0(k\rho)dk$$

$$J_0(k\sqrt{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos\phi})=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\phi}J_m(k\rho)J_m(k\rho')$$

$$e^{ik\rho\cos\phi}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}i^me^{im\phi}J_m(k\rho)$$

(*d*) 试由最后这个结果，求出贝塞耳函数的积分表式：

$$J_m(x)=\frac{1}{2\pi i^m}\int_0^{2\pi}e^{ix\cos\phi-im\phi}d\phi$$

并与标准积分表式作一比较.

3.15 在 $z=0$ 和 $z=L$ 两平面间的无限空间的狄利克莱-格临函数，可以用来讨论势保持为零的两平行导电平面间的一个点电荷或电荷分布.

(*a*) 用柱坐标证明：格临函数的一种形式为

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=\frac{4}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im(\phi-\phi')}\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right)I_m\left(\frac{n\pi}{L}\rho_<\right)$$
$$\cdot K_m\left(\frac{n\pi}{L}\rho_>\right)$$

(*b*) 证明：格临函数的另一种形式为

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=2\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}dk e^{im(\phi-\phi')}J_m(k\rho)J_m(k\rho')\frac{\sinh(kz_<)\sinh[k(L-z_>)]}{\sinh(kL)}$$

3.16 将习题 3.11 的布局改变一下，在与填有圆盘的薄平板相隔 L 的距离上，平行地放入一个势保持为零的导电平板．为明确起见，令接地平板位于 $z=0$ 平面上，而另一平板位于 $z=L$ 平面上，其圆盘中心在 z 轴上．

(*a*) 证明：两平板之间的电势可以用柱坐标 (z,ρ,ϕ) 写为

$$\Phi(z,\rho)=V\int_0^{\infty}d\lambda J_1(\lambda)J_0(\lambda\rho/a)\frac{\sinh(\lambda z/a)}{\sinh(\lambda L/a)}$$

(*b*) 证明：当 z,ρ,L 不变时，在 $a\to\infty$ 的极限下，(*a*) 中的解简化为预期的结果．把你的结果看作按 a^{-1} 的幂展开的最低阶答案，如果 a 比 ρ 和 L 大，但不等于无穷大，试探讨最低阶表式的修正问题．有否困难？你能直接估计这些修正吗？

(*c*) 讨论当 $(L-z)$，a 和 ρ 不变时，$L\to\infty$ 的极限，并证明所得的结果就是习题 3.11 的结果．当 $L\gg a$ 但 L 不趋于无穷大时，要作哪些修正？

3.17 考虑在电势为零的两块无限大平行导电平板之间的一个点电荷 q．设在柱坐标中这两块导电平板位于 $z=0$ 和 $z=L$ 平面上，而点电荷位于 z 轴上的 $z=z_0$ 处，$0<z_0<L$．用习题 1.12 的格临互易定理，同时把习题 3.16 作为比较．

(*a*) 证明：在 $z=L$ 平板上的半径为 a 的圆（其圆心在 z 轴上）内感生电荷量由下式给出：

$$Q_L(a)=-\frac{c}{V}\Phi(z_0,0)$$

式中 $\Phi(z_0,0)$ 是习题 3.16 的势当 $z=z_0,\rho=0$ 时所取的值．求上平板上总感生电荷．从方法和答案上和习题 1.13 的解作一比较．

(*b*) 证明：上平板上感生电荷密度可以写成

$$\sigma(\rho)=-\frac{q}{2\pi}\int_0^{\infty}dk\frac{\sinh(kz_0)}{\sinh(kL)}kJ_0(k\rho)$$

这积分可以表为一个含有修正贝塞耳函数 $K_0(n\pi\rho/L)$ 的无穷级数（例如，参看 *Gradshteyn and Ryzhik* 第 728 页，公式 6.666）．证明：当径向距离很大时感

生电荷密度按$(\rho)^{-1/2}e^{-\pi\rho/L}$下降.

3.18 (*a*) 根据习题 3.15 的结果或根据前述诸原理证明:放在势为零的两块无限大平行导电平板间的一个点电荷 q 的势可以写为

$$\Phi(z,\ \rho)=\frac{4q}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi z_0}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)K_0\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right)$$

这里两平板位于 $z=0$ 和 $z=L$ 平面上,电荷位于 z 轴上的 $z=z_0$ 点.

(*b*) 计算上下两板上感生电荷密度 $\sigma_0(\rho)$ 和 $\sigma_L(\rho)$. $\sigma_L(\rho)$的结果为

$$\sigma_L(\rho)=\frac{q}{L^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\sin\left(\frac{n\pi z_0}{L}\right)K_0\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right)$$

讨论上式与习题 3.17(*b*)的表式之间的关系.

(*c*) 根据(*b*) 的答案计算 $z=L$ 平板上总电荷 Q_L. 通过对傅里叶级数求和或通过与其它问题作比较,验证你的结果是否符合习题 1.13 的已知表式. [参看 C. Y. Fong and C. Kittel, *Am. J. Phys.* **35** 1091(1967).]

3.19 (*a*) 在 $L\to\infty$的极限下利用习题 3.15(*b*)的格临函数证明:在一接地导电平板上方,离距为 d 处,平行地放着一个半径为 R 的平薄导电圆盘,该圆盘的电容由下式给出:

$$C^{-1}=\int_0^{\infty}dk(1-e^{-2kd})\frac{\left[\int_0^R\rho J_0(k\rho)\sigma(\rho)d\rho\right]^2}{\left[\int_0^R\rho\sigma(\rho)d\rho\right]^2}$$

式中 $\sigma(\rho)$是圆盘上电荷密度.

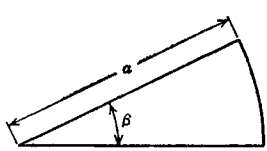
(*b*) 把(*a*)中的表式作为在 $\sigma(\rho)=$常数的近似下 C^{-1} 的变分原理或稳定原理. 直接证明你得到了 $d\ll R$ 时的 C^{-1} 的正确极限值. 求出一个孤立圆盘($d\gg R$)的 C^{-1} 的近似值,并计算它与精确值 $C^{-1}=(\pi/2)R^{-1}$ 之比值.

(*c*) 作为 $\sigma(\rho)$的一个较好的试探形式,考虑一个常数和 $(R^2-\rho^2)^{-1/2}$ 的线性组合,后者是一个孤立圆盘的正确形式.

对于(*b*) ,可以用下列积分:

$$\int_0^{\infty}dt[J_1(t)/t]^2=\frac{4}{3\pi},\quad\int_0^{\infty}dt\frac{J_1^2(t)}{t}=\frac{1}{2}$$

3.20 一个二维势问题的几何形状是在极坐标中由 $\phi=0$, $\phi=\beta$ 和 $\rho=a$ 诸曲面所限定的区域,如图所示.



习题 3.20

利用极坐标的分离变数法,证明格临函数可以

写为

$$G(\rho,\phi;\rho',\phi')=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{m}\rho_<^{m\pi/\beta}\left(\frac{1}{\rho_>^{m\pi/\beta}}-\frac{\rho_>^{m\pi/\beta}}{a^{2m\pi/\beta}}\right)\sin\left(\frac{m\pi\phi}{\beta}\right)\sin\left(\frac{m\pi\phi'}{\beta}\right)$$

3.21 有一个单位点电荷位于由 $z=0, z=L, \rho=a$ 三个面所限定的接地圆柱形盒内的点(ρ',ϕ',z')上. 证明盒内势可以表为下列各种形式:

$$\Phi(\mathbf{x},\mathbf{x}')=\frac{4}{a}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{im(\phi-\phi')}J_m\left(\frac{x_{mn}\rho}{a}\right)J_m\left(\frac{x_{mn}\rho'}{a}\right)}{x_{mn}J_{m+1}^2(x_{mn})\sinh\left(\frac{x_{mn}L}{a}\right)}$$

$$\times\sinh\left[\frac{x_{mn}}{a}z_<\right]\sinh\left[\frac{x_{mn}}{a}(L-z_>)\right]$$

$$\Phi(\mathbf{x},\mathbf{x}')=\frac{4}{L}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}e^{im(\phi-\phi')}\sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi z'}{L}\right)\frac{I_m\left(\frac{n\pi\rho_<}{L}\right)}{I_m\left(\frac{n\pi a}{L}\right)}$$

$$\times\left[I_m\left(\frac{n\pi a}{L}\right)K_m\left(\frac{n\pi\rho_>}{L}\right)-K_m\left(\frac{n\pi a}{L}\right)I_m\left(\frac{n\pi\rho_>}{L}\right)\right]$$

$$\Phi(\mathbf{x},\mathbf{x}')=\frac{8}{La^2}$$

$$\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{im(\phi-\phi')}\sin\left(\frac{k\pi z}{L}\right)\sin\left(\frac{k\pi z'}{L}\right)J_m\left(\frac{x_{mn}\rho}{a}\right)J_m\left(\frac{x_{mn}\rho}{a}\right)}{\left[\left(\frac{x_{mn}}{a}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2\right]J_{m+1}^2(x_{mn})}$$

并讨论最后一种展开(它多一个求和号)与前两种展开的关系.

3.22 设习题 3.21 中的导电圆柱形盒壁的势都等于零,只有上端由 $\rho=b$ 所限定的圆盘例外,其势等于 V.

(*a*) 试用习题 3.21 中得到的各种格临函数形式,求圆柱内势的三种展开式.

(*b*) 假定 $b=L/4=a/2$,试对每一个级数,求 $\rho=0$ 及 $z=L/2$ 的势与圆盘的势之比,并进行数值计算. 至少精确到两位有效数字. 是否有一个级数不像另外二个级数收敛得那么快? 为什么?

(*Jahnke, Emde and Lösch* 书上有 J_0 和 J_1、I_0 和 I_1、$(2/\pi)K_0$ 和$(2/\pi)K_1$ 的表. *Watson* 书上也有许多表.)

3.23 试就 3.13 节中带有半径为 a 的圆孔的导电平板问题,讨论其面电荷密度.

(*a*) 证明:当 $\rho\geqslant a$ 时平板正面和背面上的面电荷密度是

$$\sigma_+(\rho)=-\frac{E_0}{4\pi}+\Delta\sigma(\rho)$$

$$\sigma_-(\rho)=\frac{E_1}{4\pi}+\Delta\sigma(\rho)$$

式中

$$\Delta\sigma(\rho)=-\frac{(E_0-E_1)}{4\pi^2}\left[\frac{a}{\sqrt{\rho^2-a^2}}-\sin^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right)\right]$$

当ρ很大时$\Delta\sigma(\rho)$的特性如何？当$\rho<a$时，用$\Phi^{(1)}$确定的$\Delta\sigma(\rho)$是否等于零？并加以解释.

(*b*) 通过直接积分证明：

$$\lim_{R\to\infty}\left[2\pi\int_a^R d\rho\rho(\sigma_++\sigma_-)+2\pi\int_0^R d\rho\rho\left(\frac{E_0-E_1}{4\pi}\right)\right]=0$$

并解释之.

第四章　多极子，宏观媒质的静电学，电介质

本章首先研究定域的电荷分布所产生的势及其多极子展开．展开式用球谐函数表示，不过，只求出头几个多极子的球谐展开式和直角分量的关系．然后讨论一个处在外场中的多极子的能量．我们简要地叙述了宏观静电学方程的初步推导，而把严谨的处理推迟到第六章里进行．接着描述了电介质与适当的边界条件，解出若干典型的带有电介质的边值问题．我们用一些简单的经典模型说明原子的极化率和磁化率的主要特征．最后还讨论有电介质时的静电能和力的问题．

4.1　多极子展开

定域的电荷分布用电荷密度 $\rho(\mathbf{x}')$ 来描述，它只在以某原点为中心、以 R 为半径的球体内不等于零①．球外的势可以写成一个球谐函数的展开式：

$$\Phi(\mathbf{x})=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}q_{lm}\frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r^{l+1}} \tag{4.1}$$

为了以后方便起见，我们对式中的常系数作了特殊选择．方程(4.1)叫做多极子展开式；$l=0$ 项叫单极项，$l=1$ 项叫偶极项，依次类推．这些名称的由来，以后会明瞭．现在要根据电荷密度 $\rho(\mathbf{x}')$ 的性质确定常数 q_{lm}．用势的积分式(1.17)

① 半径为 R 的球体是一个任意设想的概念．只是用来把空间分成有电荷和没有电荷的区域而已．如果电荷密度随距离的下降快于 r^{-1} 的任何幂，则多极子展开式在充分大的距离上有效．

$$\Phi(\mathbf{x})=\int\frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x'$$

和 $1/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ 的展开式 (3.70)，很容易求得这个问题的解. 因为我们此刻感兴趣的是在电荷分布以外的势，所以 $r_<=r'$, $r_>=r$. 于是得到:

$$\Phi(\mathbf{x})=4\pi\sum_{l,m}\frac{1}{2l+1}\left[\int Y^*_{lm}(\theta',\phi')r'^l\rho(\mathbf{x}')d^3x'\right]\frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r^{l+1}} \tag{4.2}$$

所以，(4.1)里的诸系数是

$$q_{lm}=\int Y^*_{lm}(\theta',\phi')r'^l\rho(\mathbf{x}')d^3x' \tag{4.3}$$

这些系数称为多极矩. 为了理解它们的物理意义，我们把前几个多极矩用笛卡儿坐标明显地表示出来:

$$q_{00}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int\rho(\mathbf{x}')d^3x'=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}q \tag{4.4}$$

$$\left.\begin{aligned}q_{11}&=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\int(x'-iy')\rho(\mathbf{x}')d^3x'=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(p_x-ip_y)\\q_{10}&=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\int z'\rho(\mathbf{x}')d^3x'=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}p_z\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

$$\left.\begin{aligned}q_{22}&=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\int(x'-iy')^2\rho(\mathbf{x}')d^3x'\\&=\frac{1}{12}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(Q_{11}-2iQ_{12}-Q_{22})\\q_{21}&=-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\int z'(x'-iy')\rho(\mathbf{x}')d^3x'\\&=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}(Q_{13}-iQ_{23})\\q_{20}&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\int(3z'^2-r'^2)\rho(\mathbf{x}')d^3x'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}Q_{33}\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

我们只列出 $m\geqslant 0$ 的矩，因为式 (3.54) 表明，对于实电荷密度来说，$m<0$ 的矩有如下关系:

$$q_{l,-m}=(-1)^m q^*_{lm} \tag{4.7}$$

在方程(4.4)—(4.6)里，q 是总电荷，即单极矩，$\mathbf{p}$ 是电偶极矩：

$$\mathbf{p}=\int \mathbf{x}'\rho(\mathbf{x})'d^3x' \tag{4.8}$$

而 Q_{ij} 是零迹四极矩张量：

$$Q_{ij}=\int(3x_i'x_j'-r'^2\delta_{ij})\rho(\mathbf{x}')\,d^3x' \tag{4.9}$$

我们看到，l 阶的多极子的诸系数（共有 $2l+1$ 个）是以直角坐标表示的相应多极子的线性组合．应用 $1/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ 的泰勒级数展开式，可以直接求得 $\Phi(\mathbf{x})$在直角坐标系中的展开式：

$$\Phi(\mathbf{x})=\frac{q}{r}+\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{r^3}+\frac{1}{2}\sum_{i,j}Q_{ij}\frac{x_ix_j}{r^5}+\cdots \tag{4.10}$$

其演算过程留给读者当作练习．要继续展开(4.10)中四极矩以上的项是愈来愈麻烦的．

一个给定的多极子的电场分量，用球坐标很容易表示出来．在(4.1)中，给定了 l 和 m 的项的负梯度具有下列球坐标分量：

$$\left.\begin{aligned}
E_r&=\frac{4\pi(l+1)}{2l+1}q_{lm}\frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r^{l+2}}\\
E_\theta&=-\frac{4\pi}{2l+1}q_{lm}\frac{1}{r^{l+2}}\frac{\partial}{\partial\theta}Y_{lm}(\theta,\phi)\\
E_\phi&=-\frac{4\pi}{2l+1}q_{lm}\frac{1}{r^{l+2}}\frac{im}{\sin\theta}Y_{lm}(\theta,\phi)
\end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

可把 $\partial Y_{lm}/\partial\theta$ 和 $Y_{lm}/\sin\theta$ 表成其他的 Y_{lm} 的线性组合，不过这样的表式没有特殊的启发性，所以省略了．正确的办法是用第十六章所讨论的矢量球谐函数去描述矢量多极子场．

对于沿 z 轴的偶极子 $\mathbf{p}$ 来说，(4.11) 中的场便简化大家熟知的形式：

$$\left.\begin{aligned}
E_r&=\frac{2p\cos\theta}{r^3}\\
E_\theta&=\frac{p\sin\theta}{r^3}\\
E_\phi&=0
\end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

将(4.12)中各式合并，或者把梯度算符直接用在(4.10)中的偶极项上，这些偶极子场就可写成矢量形式．位于 $\mathbf{x}_0$ 点的偶极子 $\mathbf{p}$，在 $\mathbf{x}$ 点产生的场是：

$$\mathbf{E}(\mathbf{x})=\frac{3\mathbf{n}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})-\mathbf{p}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^3} \tag{4.13}$$

式中 $\mathbf{n}$ 是由 $\mathbf{x}_0$ 指向 $\mathbf{x}$ 的单位矢量．

有两点值得注意．第一点，要注意像（4.8）那样的笛卡儿坐标多极矩与球坐标多极矩（4.3）的关系．笛卡儿坐标多极矩的分量有 $(l+1)(l+2)/2$ 个，当 $l>1$ 时，超过球坐标多极矩的分量个数 $(2l+1)$．这里并没有什么矛盾．这种差异的根源在于这两类多极矩有不同的转动变换性质——参看习题 4.3．注意：当 $l=2$ 时，通过定义一个零迹的笛卡儿坐标四极矩(4.9)，我们就可看出这种差异．

第二点要注意的是：一般说来，展开式(4.1)中的多极矩系数与原点的选择有关．作为一个突出的例子，考虑一个位于 $\mathbf{x}_0=(r_0,\theta_0,\phi_0)$ 的点电荷 e．它具有(4.1)形式的多极子展开式，其多极矩为

$$q_{lm}=er_0^l Y_{lm}^*(\theta_0,\phi_0)$$

对所有 l，m 来说，这些 q_{lm} 通常都不等于零．只有 $l=0$ 的多极子 $q_{00}=e/\sqrt{4\pi}$ 与点电荷位置无关．对于分别位于 $\mathbf{x}_0$ 和 $\mathbf{x}_1$ 的两个点电荷 $+e$ 和 $-e$，多极矩为

$$q_{lm}=e[r_0^l Y_{lm}^*(\theta_0,\phi_0)-r_1^l Y_{lm}^*(\theta_1,\phi_1)]$$

现在这个电荷系的 $l=0$ 的多极矩等于零，而 $l=1$ 的多极矩为

$$q_{10}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}e(z_0-z_1)$$

$$q_{11}=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}e[(x_0-x_1)-i(y_0-y_1)]$$

这些极矩与原点的位置无关，它们只依赖于两个电荷的相对位置，但是所有更高阶的多极矩都依赖于原点的位置．这些简单的例子是普遍定

理的特殊情形（参看习题 4.4）. 就任何电荷分布的最低阶非零多极矩来说，q_{lm} 的值与坐标原点的选择无关，但所有更高阶多极矩通常都依赖于原点的位置.

在结束多极子的一般阐述之前，我们讨论一个结果，这个结果在阐明电偶极子和磁偶极子的基本差别（参看 5.6 节）以及在其它方面都是有用的. 考虑一个定域电荷分布 $\rho(\mathbf{x})$，它在整个空间产生一个电场 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$. 我们要计算的是 $\mathbf{E}$ 遍及半径为 R 的球体的积分. 我们先一般地探讨这个问题，而后再专门讨论图 4.1 的两种极端情形：一种是球包含所有的电荷，另一种是电荷全在球外. 选球心为坐标原点，则得电场的体积分

$$\int_{r<R}\mathbf{E}(\mathbf{x})d^3x=-\int_{r<R}\nabla\Phi d^3x \tag{4.14}$$

上式可以换成遍及球面的积分：

$$\int_{r<R}\mathbf{E}(\mathbf{x})d^3x=-\int_{r=R}R^2\,d\Omega\,\Phi(\mathbf{x})\mathbf{n} \tag{4.15}$$

式中 $\mathbf{n}$ 为方向朝外的法线矢量（$\mathbf{n}=\mathbf{x}/R$）. 用(1.17)代替上式中的势，则得

$$\int_{r<R}\mathbf{E}(\mathbf{x})d^3x=-R^2\int d^3x'\,\rho(\mathbf{x}')\int_{r=R}d\Omega\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{4.16}$$

为了算出角积分，我们首先注意到：可以用球坐标的(θ,ϕ)角把 $\mathbf{n}$ 写成

$$\mathbf{n}=\mathbf{i}\sin\theta\cos\phi+\mathbf{j}\sin\theta\sin\phi+\mathbf{k}\cos\theta$$

显然 $\mathbf{n}$ 的各个分量只是 $l=1$ 的 Y_{lm} 的线性组合. 当把(3.38)或(3.70)代入(4.16)时，Y_{lm} 的正交性将使级数中所有各项，除 $l=1$ 项外，全部等于零. 于是有

$$\int_{r=R}d\Omega\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}=\frac{r_<}{r_>^2}\int d\Omega\,\mathbf{n}\cos\gamma \tag{4.16'}$$

式中 $\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')$. 角积分等于 $4\pi\mathbf{n}'/3$，这里 $\mathbf{n}'=\mathbf{r}'/r$. 于是积分(4.16)为

$$\int_{r<R}\mathbf{E}(\mathbf{x})d^3x=-\frac{4\pi R^2}{3}\int d^3x'\,\frac{r_<}{r_>^2}\mathbf{n}'\rho(\mathbf{x}') \tag{4.17}$$

式中$(r_<,r_>)=(r',R)$或(R,r')，取决于r'小于R还是r'大于R.

如果半径为R的球完全包围了电荷密度，如图 4.1*a* 所示，则(4.17)中$r_<=r',r_>=R$. 这时电场遍及球体的体积分变为

$$\int_{r<R}\mathbf{E}(\mathbf{x})d^3x=-\frac{4\pi}{3}\mathbf{p} \tag{4.18}$$

式中$\mathbf{p}$是电荷分布的电偶极矩(4.8)，电荷分布与球心有关. 注意：只要所有电荷都在球内，这个体积分与积分的球体区域的大小无关.

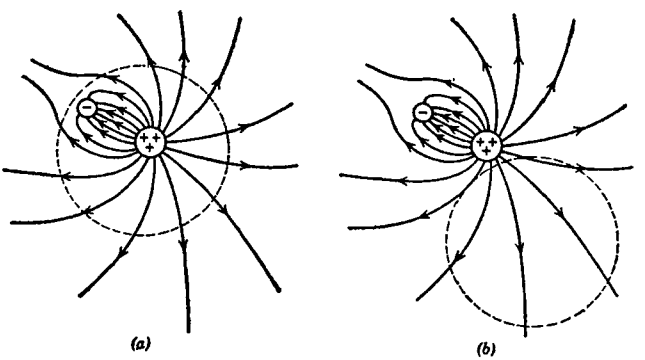


图 4.1　电荷密度分布和球.　　电场的体积分是遍及球体内计算的.

另一方面，如果情况如图 4.1*b* 所示，电荷全在所考虑的球之外，则(4.17)中$r_<=R$和$r_>=r'$. 这时我们得

$$\int_{r<R}\mathbf{E}(\mathbf{x})d^3x=-\frac{4\pi R^3}{3}\int d^3x'\,\frac{\mathbf{n}'}{r'^2}\rho(\mathbf{x}')$$

由库仑定律(1.5)可知，后一积分等于球心处电场的负值. 于是$\mathbf{E}$的体积分变为

$$\int_{r<R}\mathbf{E}(\mathbf{x})d^3x=\frac{4\pi}{3}R^3\mathbf{E}(0) \tag{4.19}$$

换句话说，电场对不含电荷的整个球体积的平均值，等于球心处电场的值.

(4.18)这个结果，意味着要对偶极子的电场(4.13)加以修改．为了与(4.18)一致，偶极场必须写为

$$\mathbf{E}(\mathbf{x})=\frac{3\mathbf{n}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})-\mathbf{p}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^3}-\frac{4\pi}{3}\mathbf{p}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \tag{4.20}$$

附加的 δ 函数对远离偶极子处的场没有贡献．引进 δ 函数的目的是为了得到我们所要的体积分(4.18)，因按惯例，第一项的体积分等于零(由于角积分)，在 $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$ 上的奇异性会引起其它含糊的结果．当我们严谨地处理问题时，可以利用方程 (4.20) 及其磁偶极子的相似方程(5.64)，好像偶极子是理想化的点偶极子似的，这时 δ 函数项从本质上表达了电荷和电流作有限分布的实际情况.

4.2 外电场中电荷分布的能量的多极子展开

如果把 $\rho(\mathbf{x})$ 所描写的定域电荷分布放在电势为 $\Phi(\mathbf{x})$ 的外场中，那末这系统的静电能是:

$$W=\int\rho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})d^3x \tag{4.21}$$

如果电势 Φ 在 $\rho(\mathbf{x})$ 为不可忽略的区域内缓慢地变化，我们就可以围绕一个适当选择的原点，用泰勒级数把 $\Phi(x)$ 展开为

$$\Phi(\mathbf{x})=\Phi(0)+\mathbf{x}\cdot\nabla\Phi(0)+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j x_ix_j\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_j}(0)+\cdots \tag{4.22}$$

利用电场的定义 $\mathbf{E}=-\nabla\Phi$，可以改写最后两项，于是(4.22)变成:

$$\Phi(\mathbf{x})=\Phi(0)-\mathbf{x}\cdot\mathbf{E}(0)-\frac{1}{2}\sum_i\sum_j x_ix_j\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0)+\cdots$$

因为，对于外场，$\nabla\cdot\mathbf{E}=0$，所以，我们可以从最后一项减去

$$\frac{1}{6}r^2\nabla\cdot\mathbf{E}(0)$$

就得到了展开式:

$$\Phi(\mathbf{x})=\Phi(0)-\mathbf{x}\cdot\mathbf{E}(0)$$
$$-\frac{1}{6}\sum_i\sum_j(3x_ix_j-r^2\delta_{ij})\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0)+\cdots \qquad (4.23)$$

把这一展开式代入(4.21),并应用总电荷的定义、偶极矩的定义(4.8)和四极矩的定义(4.9),能量公式则变成:

$$W=q\Phi(0)-\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}(0)-\frac{1}{6}\sum_i\sum_j Q_{ij}\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0)+\cdots \qquad (4.24)$$

这个展开式显示了各种多极子和外场相互作用的特点——电荷是和电势相互作用的,偶极子是和电场相互作用的,四极子是和场的梯度相互作用的,依次类推.

在原子核物理学中,四极子相互作用特别重要. 原子核可以具有电四极矩,其量值及正负号反映中子与质子之间作用力的性质以及原子核本身的形状. 一个原子核的能级或态,是用总角动量 J 及其在 z 轴的投影 M 的量子数,以及由一般指标 α 标明的其他量子数来描写的. 一个给定的原子核态有一与之相联系的量子力学的电荷密度① $\rho_{JM\alpha}(\mathbf{x})$,它依赖于量子数 (J,M,α),但对 z 轴是柱对称的. 所以,唯一不等于零的四极矩是(4.6)中的 q_{20} 或(4.9)中的 Q_{33}②. 一个原子核态的四极矩定义为电荷密度为 $\rho_{JM\alpha}(\mathbf{x})$ 时的 $(1/e)Q_{33}$ 值,式中 e 是质子的电荷,即:

$$Q_{JM\alpha}=\frac{1}{e}\int(3z^2-r^2)\rho_{JM\alpha}(\mathbf{x})\,d^3x \qquad (4.25)$$

---

① 关于这个问题的量子力学方面的初步讨论,可参看 *Blatt and Weisskopf* 第23页以后.

② 实际上 Q_{11} 和 Q_{22} 亦不等于零,但它们不是和 Q_{33} 无关的而是有这样的关系: $Q_{11}=Q_{22}=-\frac{1}{2}Q_{33}$.

所以 Q_{JMe} 的量纲是（长度）^{2}. 除了一些例外的情况（例如电子壳层完全闭合的原子的核），原子核都受到在其附近有场梯度的电场的影响. 因此，根据(4.24)，在原子核的能量中有一部分是从四极矩相互作用来的. J 值相同而 M 值不同的态，有不同的四极矩 Q_{JMe}，所以，四极子和“外部”（晶格或分子）电场耦合，会消除可能存在着的 M 值简并. 用射频技术测出这些微小的能量差，便可确定原子核的四极矩①.

利用偶极场(4.20)，可以从(4.24)直接求出两个偶极子 $\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_2$ 的相互作用能. 所以相互势能为：

$$W_{12}=\frac{\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_2-3(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}_1)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}_2)}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|^3} \tag{4.26}$$

式中 $\mathbf{n}$ 是在 $(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)$ 方向上的单位矢量，且假定 $\mathbf{x}_1\neq\mathbf{x}_2$. 偶极-偶极相互作用是吸引还是排斥，由两个偶极子的取向决定. 当两个偶极子的取向和间距不变时，相互作用能对这两个偶极子的相对位置的平均值等于零. 如果这两个偶极矩大致平行，那么，当它们的排列方向与其中心连线几乎平行（垂直）时，就产生吸引（排斥）. 对于反平行的偶极矩，情形则相反. 势能的极值在数值上相等.

4.3 有质媒质静电学的初步处理

在第一至三章里，我们讨论了有电荷和导体存在，而没有其它有质媒质存在时的静电势和静电场. 因此没有区分微观场和宏观场，虽然我们以面电荷这一理想化方法来处理导体，就意味着是一种宏观描写. 空气是极稀薄的，以致当忽略其介电性质时不会引起明显的误差，迄今我们所得的结果对空气是适用的. 可是许多静电学问题本身涉及有质媒质中的电荷和电场，有质媒质对电场的反应是必须加以考虑的. 在绪论中我们曾经指出，为了获得适用于宏观现象的麦克斯韦方程组，必

① “一个原子核的四极矩”以 Q 表示，其定义为 $M=J$ 态时的 Q_{JMe} 值. 见 *Blatt and Weisskopf*, 引文.

须对宏观小、微观大的区域求平均．第六章里，在讨论了随时间变化的麦克斯韦方程组之后，我们将以严谨的方法来处理这种平均．本节只不过使读者对极化的初浅讨论获得大体上的了解，为此我们忽略了在求平均的程序上和引进宏观量的过程中出现的一些细节．

首先我们注意到：当对齐次方程 $\nabla\times\mathbf{E}_{微}=0$ 求平均时，对于平均电场即宏观电场 $\mathbf{E}$，也有相同的方程成立，即

$$\nabla\times\mathbf{E}=0 \tag{4.27}$$

这意味着电场仍可由静电学中的势 $\Phi(x)$ 导出．

如果把一个电场加到由大量原子或分子构成的媒质上，那末每个分子中的束缚电荷将对外场起反应，并将发生扰动．分子电荷密度的分布就会改变．各个分子的多极矩将不同于它们在没有外场时的多极矩．在一些简单的物质中，没有外场时，多极矩全都等于零，至少在对许多分子求平均时等于零．加外场时主要的分子多极矩是偶极矩．这样便在媒质中产生了电极化强度 $\mathbf{P}$（单位体积的偶极矩），它由下式给出：

$$\mathbf{P}(\mathbf{x})=\sum_i N_i\langle\mathbf{p}_i\rangle \tag{4.28}$$

式中 $\mathbf{p}_i$ 是媒质中第 i 类分子的偶极矩，平均值是对以 $\mathbf{x}$ 为中心的小体积求出的，N_i 是在 $\mathbf{x}$ 点处第 i 类分子的单位体积平均个数．如果分子具有净电荷 e_i，另外还有宏观的过剩电荷或自由电荷，那末在宏观水平上电荷密度是

$$\rho(\mathbf{x})=\sum_i N_i\langle e_i\rangle+\rho_{过剩} \tag{4.29}$$

通常平均的分子电荷等于零．于是电荷密度就是(适当地平均的)过剩电荷或自由电荷的密度．

如果从宏观上来看媒质，则可由可变点 $\mathbf{x}'$ 处的各宏观小体积元 ΔV 的贡献通过线性叠加，来建立势或场．于是 ΔV 的电荷是 $\rho(\mathbf{x}')\Delta V$，而 ΔV 的偶极矩是 $\mathbf{P}(\mathbf{x}')\Delta V$．如果更高阶的宏观多极矩密度不存在，

那末根据(4.10)可以看出,倘若x在ΔV外,则ΔV中偶极矩分布所引起的势$\Delta\Phi(\mathbf{x},\mathbf{x}')$由下式精确地给出:

$$\Delta\Phi(\mathbf{x},\mathbf{x}')=\frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\Delta V+\frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\Delta V \qquad (4.30)$$

我们现在把ΔV(在宏观上)看作无穷小的,令ΔV等于d^3x',并对全空间积分,则得势为

$$\Phi(\mathbf{x})=\int d^3x'\left[\frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}+\mathbf{P}(\mathbf{x}')\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)\right] \qquad (4.31)$$

第二项与偶极层的势(1.25)类似,但它是由偶极子的体分布产生的.通过分部积分,这势变为

$$\Phi(\mathbf{x})=\int d^3x'\,\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}[\rho(\mathbf{x}')-\nabla'\cdot\mathbf{P}(\mathbf{x}')] \qquad (4.32)$$

这正是通常由电荷分布$(\rho-\nabla\cdot\mathbf{P})$产生的势的表式.由于$\mathbf{E}=-\nabla\Phi$,所以麦克斯韦第一方程写为

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi[\rho-\nabla\cdot\mathbf{P}] \qquad (4.33)$$

在有效电荷密度中出现$\mathbf{P}$的散度,这可以从定性上来理解.如果极化是非均匀的,那末在任意的小体积内电荷可能有净增加或净减少,如图4.2所示.

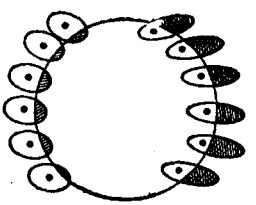


图4.2 极化电荷密度的由来.由于极化随空间的变化,离开一给定的小体积的分子电荷可能比进入该体积的多.图中只画出边界附近的一些分子.

定义电位移$\mathbf{D}$为

$$\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P} \qquad (4.34)$$

(4.33)就变成了我们所熟悉的方程:

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=4\pi\rho \qquad (4.35)$$

方程(4.27)和(4.35)是与第一章中的(1.13)和(1.14)完全相似的宏观方程.

正如绪论中所讨论的,在求得静电势或静电场的解之前,必须先建立联系$\mathbf{D}$与$\mathbf{E}$的本构关系式.在本章以下几节中,我们假定系统对外场的反应是线性的.这就从我们的讨论中排除了铁电现象,但在其他

方面，假定场强不是很大，那末我们的讨论实际上不受限制．为了进一步简化，假设媒质是各向同性的．这时感生的电极化强度 P 平行于 E，同时有一个与方向无关的比例系数：

$$\mathbf{P}=\chi_e\mathbf{E} \tag{4.36}$$

常数 χ_e 叫做媒质的电极化率．因此电位移 D 与 E 成正比，

$$\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E} \tag{4.37}$$

式中

$$\epsilon=1+4\pi\chi_e \tag{4.38}$$

叫做介电常数或相对电容率．

如果电介质不仅是各向同性的，而且是均匀的，那末 ϵ 与位置无关．散度方程(4.35)可以写成

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\left(\frac{\rho}{\epsilon}\right) \tag{4.39}$$

在这类媒质中所有问题都转化为前三章那样的问题，只是各给定电荷产生的电场要减弱为原来的 $1/\epsilon$．这种减弱说明原子的极化产生的场与给定电荷产生的场反向．由此立即得到一个结果：如果电容器的电极间的空间充满介电常数为 ϵ 的电介质，则其电容增至原来的 ϵ 倍(边缘场忽略不计)．

如果均匀媒质不充满有电场存在的整个空间，或者更普遍地说，如果有不同的几种媒质并存，而它们的反应不一定是线性的，那末我们必须考虑媒质分界面上 D 和 E 的边界条件的问题．在 I.5 节中从麦克斯韦方程组导出了这些边界条件．所得的结果是：在分界面两侧的 D 的法向分量和 E 的切向分量满足下列边界条件：

$$\left.\begin{aligned}(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)\cdot\mathbf{n}_{21}&=4\pi\sigma\\(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)\times\mathbf{n}_{21}&=0\end{aligned}\right\} \tag{4.40}$$

这些边界条件对随时间变化的场和静止场都成立，其中 $\mathbf{n}_{21}$ 为边界面的单位法向矢量，其方向从区域 1 指向区域 2，σ 为边界面上宏观面电荷

密度(不包括极化电荷).

4.4 带有电介质的边值问题

我们可以很容易地把前几章中解静电学边值问题的方法，推广来解带有电介质的边值问题，这一节里，将举几个例子来说明解介电媒质问题的各种技巧.

为了说明电介质的电像法，我们考虑一个放在半无限电介质 ϵ_1 里的点电荷 q，它跟第一媒质与另一半无限媒质 ϵ_2 的平面分界面的距离为 d. 我们可以把这平面取作 $z=0$ 的平面，如图 4.3 所示. 试求满足下列方程和边界条件的解:

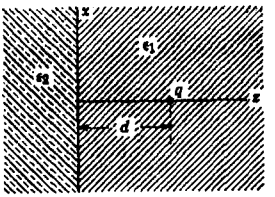


图 4.3

$$\left.\begin{aligned} &\epsilon_1\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho \quad z>0\\ &\epsilon_2\nabla\cdot\mathbf{E}=0 \quad z<0\\ &\nabla\times\mathbf{E}=0 \quad \text{处处}\end{aligned}\right\} \tag{4.41}$$

以及

在 $z=0$ 处的边界条件:

$$\lim_{z\to 0^+}\begin{Bmatrix}\epsilon_1 E_z\\ E_x\\ E_y\end{Bmatrix}=\lim_{z\to 0^-}\begin{Bmatrix}\epsilon_2 E_z\\ E_x\\ E_y\end{Bmatrix} \tag{4.42}$$

因为 $\nabla\times\mathbf{E}=0$ 处处成立，所以 $\mathbf{E}$ 可以按通常办法从势 Φ 导出. 在试图运用电像法的时候，自然要在图 4.4 所示的对称位置 A' 上，放置一个像电荷 q'. 于是，当 $z>0$ 时，在以柱坐标 (ρ, ϕ, z) 表示的某点 P 处的势为

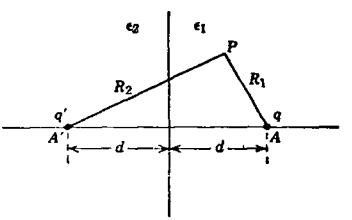


图 4.4

$$\Phi=\frac{1}{\epsilon_1}\left(\frac{q}{R_1}+\frac{q'}{R_2}\right), \qquad z>0 \tag{4.43}$$

式中 $R_1=\sqrt{\rho^2+(d-z)^2}$, $R_2=\sqrt{\rho^2+(d+z)^2}$. 到此为止，解题步骤和以导电物质代替在 $z<0$ 区域内的电介质 ϵ_2 的问题完全类似. 可是，我们现在必须确定 $z<0$ 的势. 因为在 $z<0$ 区域内没有电荷，所以这区域内的势必需是在该区域中无奇异点的拉普拉斯方程的解. 显然，最简单的假定，就是命 $z<0$ 区域内的势等于电荷 q''（处在实际电荷 q 的位置 A 上的）所产生的势：

$$\Phi=\frac{1}{\epsilon_2}\frac{q''}{R_1}, \quad z<0 \tag{4.44}$$

因为

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R_1}\right)\right|_{z=0}=-\left.\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R_2}\right)\right|_{z=0}=\frac{d}{(\rho^2+d^2)^{3/2}}$$

而

$$\left.\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{R_1}\right)\right|_{z=0}=\left.\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{R_2}\right)\right|_{z=0}=\frac{-\rho}{(\rho^2+d^2)^{3/2}}$$

所以从边界条件(4.42)可以推出下列要求：

$$q-q'=q''$$

$$\frac{1}{\epsilon_1}(q+q')=\frac{1}{\epsilon_2}q''$$

求解上列式子，则得像电荷 q' 和 q''：

$$\left.\begin{aligned} q' &= -\left(\frac{\epsilon_2-\epsilon_1}{\epsilon_2+\epsilon_1}\right)q \\ q'' &= \left(\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2+\epsilon_1}\right)q \end{aligned}\right\} \tag{4.45}$$

图 4.5 定性地画出了 $\epsilon_2>\epsilon_1$ 和 $\epsilon_2<\epsilon_1$ 这两种情形下的电力线分布（实际上是电位移线分布）.

$-\nabla\cdot\mathbf{P}$ 给出极化电荷密度. 在这两种电介质中，$\mathbf{P}=\chi_e\mathbf{E}$ 都成立，因此 $-\nabla\cdot\mathbf{P}=-\chi_e\nabla\cdot\mathbf{E}=0$（点电荷 q 所在处除外）. 但在分界面处 χ_e 发生不连续的跃变，即当 z 越过 $z=0$ 的界面时，

$$\Delta\chi_e=(1/4\pi)(\epsilon_1-\epsilon_2)$$

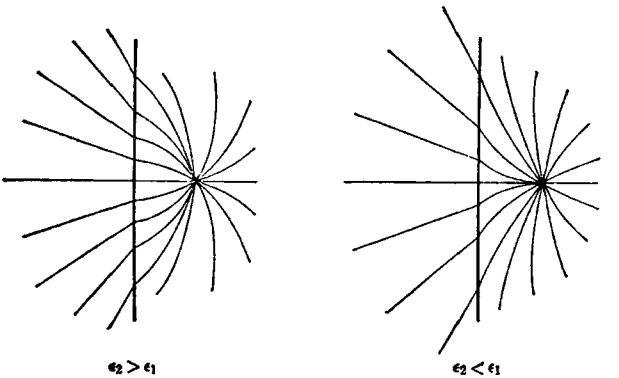


图 4.5　一个点电荷的电位移线．这点电荷放在电介质 ϵ_1 中，并靠近一片半无限电介质 ϵ_2．

说明在 $z=0$ 平面上有极化面电荷密度

$$\sigma_{\text{极化}}=-(\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1)\cdot\mathbf{n}_{21} \tag{4.46}$$

式中 $\mathbf{n}_{21}$ 是由电介质 1 指向电介质 2 的单位法向矢量，$\mathbf{P}_i$ 是电介质 i 在 $z=0$ 处的极化强度．因为

$$\mathbf{P}_i=\left(\frac{\epsilon_i-1}{4\pi}\right)\mathbf{E}=-\left(\frac{\epsilon_i-1}{4\pi}\right)\nabla\Phi$$

很容易证明极化电荷密度是

$$\sigma_{\text{极化}}=-\frac{q}{2\pi}\frac{(\epsilon_2-\epsilon_1)}{\epsilon_1(\epsilon_2+\epsilon_1)}\frac{d}{(\rho^2+d^2)^{3/2}} \tag{4.47}$$

在 $\epsilon_2\gg\epsilon_1$ 的极限情形下，电介质 ϵ_2 的行为很像一个导体，因为在它内部的场十分微弱，而且面电荷密度(4.47)接近于在导体面上所应有的数值．

带电介质的静电学问题的第二个例子是：将一个半径为 a 介电常数为 ϵ 的电介质球体，放在一个最初是均匀的电场中，在远离球体处该电场的方向与 z 轴同向，其量值为 E_0，如图 4.6 所示．球内外没有自由电荷．因此，这是在 $r=a$ 处有适当边界条件的拉普拉斯方程的求解

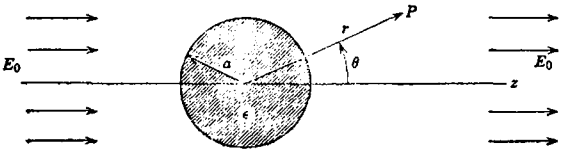


图 4.6

问题．根据几何形状的轴对称性，可令方程的解具有下列形式：

球内：
$$\Phi_{内}=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(\cos\theta) \tag{4.48}$$

球外：
$$\Phi_{外}=\sum_{l=0}^{\infty}[B_l r^l+C_l r^{-(l+1)}]P_l(\cos\theta) \tag{4.49}$$

根据无穷远处的边界条件（$\Phi\to -E_0 z=-E_0 r\cos\theta$），知道 B_l 中唯一不等于零的是 $B_l=-E$．根据 $r=a$ 处的边界条件：

$$\left.\begin{aligned}&\text{切向的 } E\text{：}\quad -\frac{1}{a}\frac{\partial\Phi_{内}}{\partial\theta}\bigg|_{r=a}=-\frac{1}{a}\frac{\partial\Phi_{外}}{\partial\theta}\bigg|_{r=a}\\&\text{法向的 } D\text{：}\quad -\epsilon\frac{\partial\Phi_{内}}{\partial r}\bigg|_{r=a}=-\frac{\partial\Phi_{外}}{\partial r}\bigg|_{r=a}\end{aligned}\right\} \tag{4.50}$$

可以求出其余的系数．把级数(4.48)和(4.49)代入(4.50)，就得到两列等于零的勒让德多项式．因为这两列多项式对所有 θ 必须等于零，所以每一个勒让德多项式的系数必须分别等于零．从第一个边界条件可推出下列关系：

$$\left.\begin{aligned}&A_1=-E_0+\frac{C_1}{a^3}\\&A_l=\frac{C_l}{a^{2l+1}},\ \text{当 } l\neq 1 \text{ 时}\end{aligned}\right\} \tag{4.51}$$

从第二个边界条件可得

$$\left.\begin{aligned}&\epsilon A_1=-E_0-2\frac{C_1}{a^3}\\&\epsilon l A_l=-(l+1)\frac{C_l}{a^{2l+1}}\quad \text{当 } l\neq 1 \text{ 时}\end{aligned}\right\} \tag{4.52}$$

当所有 $l\neq 1$ 时，只有 $A_l=C_l=0$ 才可以同时满足(4.51)和(4.52)的第二方程．其余系数可用外电场 E_0 来表示：

$$\left.\begin{aligned} A_1&=-\left(\frac{3}{2+\epsilon}\right)E_0\\ C_1&=\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)a^3E_0 \end{aligned}\right\} \tag{4.53}$$

因此电势是

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{内}&=-\left(\frac{3}{\epsilon+2}\right)E_0r\cos\theta\\ \Phi_{外}&=-E_0r\cos\theta+\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)E_0\frac{a^3}{r^2}\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{4.54}$$

球内的电势说明在球内有一与外电场平行的恒定电场，其量值为

$$E_{内}=\frac{3}{\epsilon+2}E_0<E_0 \quad 如果\ \epsilon>1 \tag{4.55}$$

球外的电势，等于外场 E_0 的势加上一个放在原点的偶极矩为

$$p=\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon-2}\right)a^3E_0 \tag{4.56}$$

的电偶极子的场的势，偶极子的场与外场同向．上述偶极矩可以解释为极化强度 P 的体积分．极化强度 P 是

$$\mathbf{P}=\left(\frac{\epsilon-1}{4\pi}\right)\mathbf{E}=\frac{3}{4\pi}\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)\mathbf{E}_0 \tag{4.57}$$

它在球的整个体积内是恒定的，它的体积分由(4.56)给出．根据(4.46)，极化面电荷密度 $\sigma_{极化}=(\mathbf{P}\cdot\mathbf{r})/r$，即

$$\sigma_{极化}=\frac{3}{4\pi}\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)E_0\cos\theta \tag{4.58}$$

我们可以认为，该电荷密度产生一个与外场方向相反的内场，因而使球内的场减到上述的数值(4.55)，如图 4.7 所示．

如果在介电常数为 ϵ 的介电媒质中，有一个半径为 a 的球形空腔，和一个平行于 z 轴的外电场 E_0，如图 4.8 所示．那末，可以完全仿照

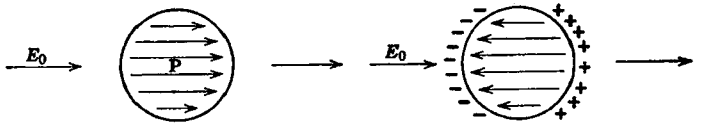


图 4.7　在均匀电场 E_0 中的电介质球．左图表示极化强度，右图表示极化电荷以及与之相联系的与 E_0 反向的电场．

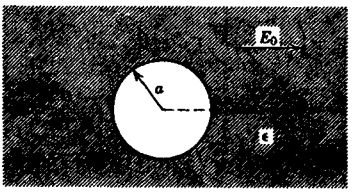


图 4.8　电介质中的球形空腔与均匀外电场．

处理电介质球的办法去处理这个问题．事实上，考察一下边界条件(4.50)就可看出，只要把 ϵ 换为$(1/\epsilon)$，就可以从球体的答案得出空腔的答案．例如：空腔内的场是均匀的，并平行于 E_0，其量值为

$$E_{内}=\frac{3\epsilon}{2\epsilon+1}E_0>E_0 \quad 如果\ \epsilon>1 \tag{4.59}$$

同样地，空腔外的场等于外场加上一个在原点处的偶极子的场，这偶极子的取向和外场方向相反，而偶极矩为

$$p=\left(\frac{\epsilon-1}{2\epsilon+1}\right)a^3E_0 \tag{4.60}$$

4.5　分子极化率和电极化率

本节和下节，讨论分子的性质与一个从宏观上定义的参量(即电极化率 χ_e 之间的关系．虽然严格的讨论必需牵涉到量子力学的论点，但是我们仍将应用分子性质的简单的经典模型进行讨论．幸好电介质的比较简单的性质还是符合经典分析的．

在研究分子的性质与极化率有什么关系之前，我们必需先把作用在媒质中分子上的场与外场区分开来．极化率是用关系式 $\mathbf{P}=\chi_e\mathbf{E}$ 定义的，式中 $\mathbf{E}$ 是宏观的电场强度．在分子间距很大的稀薄媒质中，宏观场与作用在任何一个分子或分子团上的场没有什么区别．但在分子紧紧地聚在一起的稠密媒质中，作用在任何一个给定分子上的场，除了平均的宏观场 $\mathbf{E}$ 之外，还有由于邻近分子的极化所导致的内场 $\mathbf{E}_i$，因此作用在分子上的总电场强度是 $\mathbf{E}+\mathbf{E}_i$．内场可以写成下列两项之差：

$$\mathbf{E}_i=\mathbf{E}_{近}-\mathbf{E}_P \tag{4.61}$$

式中 $\mathbf{E}_{近}$ 是由该分子的近邻分子作出的贡献，而 $\mathbf{E}_P$ 是在平均连续区内可近似地用极化强度 $\mathbf{P}$ 来描写的近邻分子的贡献．这里必须仔细地搞清楚该分子附近近邻分子的特定的原子组态和位置．因此，我们考虑某一宏观小而微观大的体积 V，先在 V 内求出近邻分子的贡献($\mathbf{E}_P$)的宏观平均，再正确地算出贡献($\mathbf{E}_{近}$)．将后者减去前者．两者之差便是附加的内场 $\mathbf{E}_i$．

(4.18)是电场强度遍及一个半径为 R 的、内含电荷分布的球体内的积分，这个结果可以用来计算 $\mathbf{E}_P$．如果体积 V 选为一个含大量分子的半径为 R 的球，只要 V 足够小，使得 $\mathbf{P}$ 在 V 的整个体积内基本上是恒定的，则球内总偶极矩为

$$\mathbf{p}=\frac{4\pi R^3}{3}\mathbf{P}$$

于是(4.18)表明：球内平均电场(正好是我们所要求的 $\mathbf{E}_P$)是

$$\mathbf{E}_P=\frac{3}{4\pi R^3}\int_{r<R}\mathbf{E}d^3x=-\frac{4\pi}{3}\mathbf{P} \tag{4.62}$$

所以内场可以写成

$$\mathbf{E}_i=\frac{4\pi}{3}\mathbf{P}+\mathbf{E}_{近} \tag{4.63}$$

近邻分子产生的场比较难求．洛仑兹(参看 *Lorentz*，第 138 页)证明，对于简单立方点阵里的原子来说，在任何点阵座上 $\mathbf{E}_{近}=0$．他的论

证是以该问题的对称性为依据，从下面的讨论中可以看到这一点．设球内有许多偶极子组成立方点阵，如图 4.9 所示，这些偶极矩的大小恒定，并指向同一方向（记住球体是宏观地小，虽然它含有大量分子）．各偶极子的位置由坐标 $\mathbf{x}_{ijk}$ 给出，它在各坐标轴上的分量是(ia, ja, ka)，其中 a 是点阵间隔，i, j, k 各取正整数值或负整数值．按照(4.13)，所有偶极子在原点处产生的场是

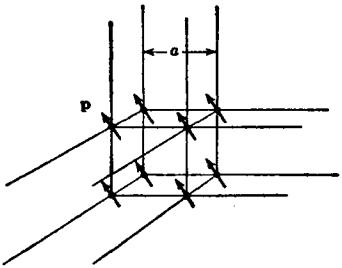


图 4.9　内场的计算——简单立方点阵中近邻分子的贡献．

$$\mathbf{E}=\sum_{i,j,k}\frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}_{ijk})\mathbf{x}_{ijk}-x_{ijk}^2\mathbf{p}}{x_{ijk}^5} \tag{4.64}$$

场的 x 分量可以写成如下形式：

$$E_1=\sum_{ijk}\frac{3(i^2p_1+ijp_2+ikp_3)-(i^2+j^2+k^2)p_1}{a^3(i^2+j^2+k^2)^{5/2}} \tag{4.65}$$

由于各指标均等地取正值和负值，所以含有(ijp_2+ikp_3)的那些交叉项都等于零．根据对称性，下面三个和是相等的：

$$\sum_{ijk}\frac{i^2}{(i^2+j^2+k^2)^{5/2}}=\sum_{ijk}\frac{j^2}{(i^2+j^2+k^2)^{5/2}}=\sum_{ijk}\frac{k^2}{(i^2+j^2+k^2)^{5/2}}$$

因此

$$E_1=\sum_{ijk}\frac{[3i^2-(i^2+j^2+k^2)]p_1}{a^3(i^2+j^2+k^2)^{5/2}}=0 \tag{4.66}$$

同理可证 y 分量和 z 分量也等于零．所以，对于简单的立方点阵，$\mathbf{E}_{近}=0$．

如果对于高度对称的情形 $\mathbf{E}_{近}=0$ 成立，那末对于完全无规的情形，$\mathbf{E}_{近}=0$ 也可能成立．因此，我们预料，非晶形物质没有由近邻分子产生

的内场．对于简单立方点阵以外的其它点阵，$\mathbf{E}_{近}$ 的分量与 $\mathbf{P}$ 的分量的关系可通过一个零迹张量 $S_{\alpha\beta}$ 来建立，$S_{\alpha\beta}$ 表征点阵的对称性质．就大多数材料来说，$\mathbf{E}_{近}\simeq 0$ 还是一个良好的资用假设．

在(4.28)中定义的极化矢量 $\mathbf{P}$ 成为

$$\mathbf{P}=N\langle\mathbf{P}_{分子}\rangle$$

式中 $\langle\mathbf{P}_{分子}\rangle$ 是分子的平均偶极矩．它和作用在分子上的电场强度近似地成正比．为了显示平均偶极矩和电场强度的依赖关系，我们把分子极化率 $\gamma_{分子}$ 定义为平均分子偶极矩与作用在分子上的外场之比．考虑内场(4.63)时，即得

$$\langle\mathbf{P}_{分子}\rangle=\gamma_{分子}(\mathbf{E}+\mathbf{E}_i) \tag{4.67}$$

原则上，$\gamma_{分子}$ 是电场强度的函数，但在很宽的场强范围内，$\gamma_{分子}$ 是一个常数，它表征分子对外场的反应情况．方程(4.67)可与(4.28)、(4.63)合并而得

$$\mathbf{P}=N\gamma_{分子}\left(\mathbf{E}+\frac{4\pi}{3}\mathbf{P}\right) \tag{4.68}$$

已假定式中 $\mathbf{E}_{近}=0$．解出以 $\mathbf{E}$ 表示的 $\mathbf{P}$，并利用物质的电极化率的定义 $\mathbf{P}=\chi_e\mathbf{E}$，即得电极化率(宏观参量)和分子极化率(微观参量)之间的关系：

$$\chi_e=\frac{N\gamma_{分子}}{1-\frac{4\pi}{3}N\gamma_{分子}} \tag{4.69}$$

因为介电常数 $\epsilon=1+4\pi\chi_e$，所以，介电常数可用 $\gamma_{分子}$ 表示，反之，分子极化率也可用介电常数表示：

$$\gamma_{分子}=\frac{3}{4\pi N}\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right) \tag{4.70}$$

这就叫做克劳修斯-莫索提方程，因为莫索提(在 1850 年)和克劳修斯(在 1879 年)分别独立地确立这样关系，即对于任何一种给定的物质，

$(\epsilon-1)/(\epsilon+2)$ 都与该物质的密度成正比①. 这个关系式对于象气体之类的稀薄物质来说是最适用的. 对于液体和固体来说，(4.70)只是近似有效，特别在介电常数大的时候更是如此. 对这问题感兴趣的读者可以从 *Böttcher*、*Debye* 和 *Fröhlich* 分别写的三本书得到更详细的说明.

4.6 分子极化率的模型

一群原子或分子的极化强度，由两种方式产生：

(*a*) 外场改变了电荷分布，使每个分子产生感生偶极矩.

(*b*) 外场促使起初取向杂乱无章的永久分子偶极矩排列整齐.

为了估计感生偶极矩的大小，我们考虑一个简单的谐振束缚电荷(电子和离子)的模型. 每一电荷 e 被回复力

$$\mathbf{F}=-m\omega_0^2\mathbf{x} \tag{4.71}$$

束缚住，式中 m 是该电荷的质量，ω_0 是围绕平衡点振动的频率. 这电荷在电场 $\mathbf{E}$ 的作用下从它的平衡点位移了 $\mathbf{x}$，$\mathbf{x}$ 由下式给出：

$$m\omega_0^2\mathbf{x}=e\mathbf{E}$$

所以，感生偶极矩等于

$$\mathbf{p}_{分子}=e\mathbf{x}=\frac{e^2}{m\omega_0^2}\mathbf{E} \tag{4.72}$$

这就是说极化率 $\gamma=e^2/m\omega_0^2$. 如果在每个分子中有一组质量为 m_j、振动频率为 ω_j 的电荷 e_j，则分子极化率是：

$$\gamma_{分子}=\sum_j\frac{e_j^2}{m_j\omega_j^2} \tag{4.73}$$

为了认识 γ 的数量级，可作两种不同的估计. 因为 γ 具有体积的量纲，所以它的大小必与分子体积同数量级或小于分子体积的数量级，即

① 在光频范围内，$\epsilon=n^2$，其中 n 是折射率. 以 n^2 代替 ϵ 的(4.70)方程，有时叫做洛仑兹-洛仑斯方程(1880).

$\gamma_{电子} \lesssim 10^{-23}$ 厘米^3. 另一方面，我们注意到，原子中电子的束缚频率一定和光频同数量级. 选取典型的光波波长，如 3000 埃，则得 $\omega \simeq 6 \times 10^{15}$ 秒$^{-1}$，于是电子对 γ 的贡献为 $\gamma_{电子} \sim (e^2/m\omega^2) \sim 6 \times 10^{-24}$ 厘米^3，这和用分子体积作出的估计相符. 在标准温度和压强下，每立方厘米气体中的分子数 $N = 2.7 \times 10^{19}$，因此气体的极化率的数量级是 $\varkappa_e \lesssim 10^{-4}$. 这意味着气体的介电常数与 1 相差千分之几或更少一些. 实验上，典型的介电常数之值如下：空气为 1.00054，氨蒸气为 1.0072，甲醇为 1.0057，氦为 1.000068. 对于固体或液体电介质，$N \sim 10^{22}$—10^{23} 分子/厘米^3. 所以，极化率可以与 1 同数量级（变化范围在 $10^{\pm 1}$ 以内），正如观测到的情形一样①.

必须考虑到分子的热骚动有可能修正感生偶极子的极化率(4.73). 在统计力学中，粒子在相空间(p, q 空间)中的几率分布是哈密顿函数的某一函数 $f(H)$. 对经典系统来说，它是玻耳兹曼因子

$$f(H) = e^{-H/kT} \tag{4.74}$$

对于一个受谐和力束缚的电荷处在外场（沿着 z 方向）中的这个简单问题，哈密顿量是

$$H = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + \frac{m}{2}\omega_0^2\mathbf{x}^2 - eEz \tag{4.75}$$

式中 $\mathbf{p}$ 是带电粒子的动量. 沿 z 方向的偶极矩的平均值是：

$$\langle p_{分子} \rangle = \frac{\int d^3p \int d^3x (ez) f(H)}{\int d^3p \int d^3x f(H)} \tag{4.76}$$

假如引进位移坐标 $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - eE\mathbf{k}/m\omega_0^2$，则

$$H = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + \frac{m\omega_0^2}{2}(\mathbf{x}')^2 - \frac{e^2E^2}{2m\omega_0^2} \tag{4.77}$$

---

① 关于各种物质的介电常数表，可参看 *Handbook of Chemistry and Physics*, Chemical Rubber Publishing Co., 或 *American Institute of Physics Hanbook* D. E. Gray 主编，第三版，McGraw-Hill, New York, (1972).

和

$$\langle p_{分子}\rangle = \frac{\int d^3p\int d^3x'\left(ez'+\frac{e^2E}{m\omega_0^2}\right)f(H)}{\int d^3p\int d^3x' f(H)} \tag{4.78}$$

因为H是z'的偶函数，所以第一个积分等于零．于是，上式与$f(H)$的形式无关，我们得

$$\langle p_{分子}\rangle = \frac{e^2}{m\omega_0^2}E$$

这正和不考虑热运动求得的结果(4.72)一样．

第二类极化率是由无规取向的永久偶极矩发生部份取向一致所造成的．这种取向极化在HCl和H_2O之类的"极性"物质中是很重要的，德拜首先(1912年)讨论了这种取向极化．假定所有分子都具有永久偶极矩$\mathbf{p}_0$，在空间可以指向任何方向．没有外场时，热骚动使分子的取向杂乱无章，因此没有净偶极矩．有外场时，就使偶极矩沿场的方向排列，并处能量最低的位形，因此有一平均偶极矩．为了计算这个偶极矩，应注意到分子的哈密顿量是

$$H = H_0 - \mathbf{p}_0\cdot\mathbf{E} \tag{4.79}$$

式中H_0只是分子的"内"坐标的函数．我们利用波耳兹曼因子(4.74)，可以写出平均偶极矩：

$$\langle p_{分子}\rangle = \frac{\int d\Omega p_0\cos\theta\exp\left(\frac{p_0E\cos\theta}{kT}\right)}{\int d\Omega\exp\left(\frac{p_0E\cos\theta}{kT}\right)} \tag{4.80}$$

我们在这里已选取E和z轴平行，并且已经积出所有无关的变数，也注意到$\mathbf{p}_0$中只有和场平行的分量才不等于零．一般说来，除了低温情形外，(p_0E/kT)比1小得多．因此，可将式中的指数展开，并得到

$$\langle p_{分子}\rangle \simeq \frac{1}{3}\frac{p_0^2}{kT}E \tag{4.81}$$

取向极化强度与温度成反比，这正是可以预料到的一种效应．在这种效应中，外场要克服热骚动的反作用．

通常这两种极化强度[感生(电子和离子的)极化强度和取向极化强度]是同时存在的，因此分子极化强度的一般形式是：

$$\gamma_{分子} \simeq \gamma_{感生} + \frac{1}{3}\frac{p_0^2}{kT} \tag{4.82}$$

上式表明，$\gamma_{分子}$与温度的关系具有$(a+b/T)$的形式，因此可以用实验分别测出这两类极化强度，如图 4.10 所示．对于"极性"分子，例如 HCl 和 H_2O，测到的永久偶极矩大约等于一个电子电荷的数量级乘以 10^{-8} 厘米，这数量级和分子的线度相符。

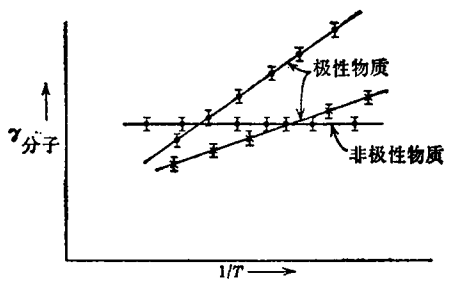


图 4.10　极性物质与非极性物质的分子极化率 $\gamma_{分子}$随温度变化的关系．$\gamma_{分子}$对 T^{-1}的关系图．

4.7　介电媒质中的静电能

我们在 1.11 节里讨论了真空中电荷系的能量．一般说来，不能把 1.11 节所求得的，用电荷密度 $\rho(\mathbf{x})$和电势$\Phi(\mathbf{x})$表示的能量关系式

$$W=\frac{1}{2}\int \rho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})d^3x \tag{4.83}$$

原封不动地搬进电介质的宏观描述中去．只要我们回想一下求(4.83)的过程就可明了其理由．过去认为电荷的最终位形是由许多元电荷逐个积累而成，每一元电荷都是从无穷远处克服当时存在的电场而移进

来的.所做的总功即由(4.83)表示.有电介质存在时,不仅把真实的(宏观的)电荷移进来要作功,而且对媒质中产生的某种极化状态也要做功.即使(4.83)里的ρ和Φ代表宏观变量,也不能明显地看出(4.83)是包括对电介质所作的功在内的总功.

在讨论电介质时,为了普遍起见,我们先不给电介质对外场的反应作有关线性、均匀性等的任何假定.宁愿认为存在于全空间的宏观电荷密度ρ发生了某种变化$\delta\rho$,因此导致能量的微小变化δW.产生这种变化所作的功是

$$\delta W=\int\delta\rho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})d^3x \tag{4.84}$$

式中$\Phi(\mathbf{x})$是原有的电荷密度$\rho(\mathbf{x})$所产生的电势.因为$\nabla\cdot\mathbf{D}=4\pi\rho$,所以我们可以找出改变量$\delta\rho$和电位移矢量的改变量$\delta\mathbf{D}$的关系:

$$\delta\rho=\frac{1}{4\pi}\nabla\cdot(\delta\mathbf{D}) \tag{4.85}$$

从而可以把能量改变量δW写成下列形式

$$\delta W=\frac{1}{4\pi}\int\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}d^3x \tag{4.86}$$

这里已经用了$\mathbf{E}=-\nabla\Phi$,并假定$\rho(\mathbf{x})$是定域电荷分布.现在,令$\mathbf{D}$从初值$\mathbf{D}=0$变到终值$\mathbf{D}$,我们至少可以在形式上写下总静电能

$$W=\frac{1}{4\pi}\int d^3x\int_0^D\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D} \tag{4.87}$$

如果媒质是线性的,则

$$\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}=\frac{1}{2}\delta(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}) \tag{4.88}$$

于是总静电能为

$$W=\frac{1}{8\pi}\int\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}d^3x \tag{4.89}$$

利用$\mathbf{E}=-\nabla\Phi$和$\nabla\cdot\mathbf{D}=4\pi\rho$,或者回到(4.84),并假定$\rho$和$\Phi$有线性关系,都可以把最后这个式子变换成(4.83).所以,我们看到,只有

当媒质是线性的，式(4.83)才在宏观上有效．否则，只好用(4.87)来计算最终位形的能量，并且可以想像，这能量和系统的过去历史(滞后效应)有关．

在场源固定不动的电场中放进一个有线性反应的电介质物体时，能量的变化是一个饶有兴趣的问题．假定起初在介电常数为 ϵ_0(它可能是位置的函数)的媒质中，存在着由某种电荷分布 $\rho_0(\mathbf{x})$产生的电场 $\mathbf{E}_0$，那么初始的静电能是

$$W_0=\frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}_0\cdot\mathbf{D}_0 d^3x$$

式中 $\mathbf{D}_0=\epsilon_0\mathbf{E}_0$．然后，在场源位置固定的情况下，把体积为 V_1 的电介质物体放入场中，使电场强度从 $\mathbf{E}_0$ 变为 $\mathbf{E}$．我们可以用介电常数 $\epsilon(\mathbf{x})$来表示该物体的存在，$\epsilon(\mathbf{x})$在体积 V_1 内取值 ϵ_1，在体积 V_1 外取值 ϵ_0．为了避免数学上的困难，我们设想 $\epsilon(\mathbf{x})$是连续变化的位置函数，但它在体积 V_1 的边缘上却迅速而连续地从 ϵ_1 降为 ϵ_0．现在的能量有如下的数值：

$$W_1=\frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{D} d^3x$$

式中 $\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$．而能量差可以写成：

$$\begin{aligned}W&=\frac{1}{8\pi}\int(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}-\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{D}_0)d^3x\\&=\frac{1}{8\pi}\int(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}_0-\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}_0)d^3x+\frac{1}{8\pi}\int(\mathbf{E}+\mathbf{E}_0)\cdot(\mathbf{D}-\mathbf{D}_0)d^3x\end{aligned}\qquad(4.90)$$

用下述论点可以证明第二个积分等于零．因为 $\nabla\times(\mathbf{E}+\mathbf{E}_0)=0$，我们可以写出

$$\mathbf{E}+\mathbf{E}_0=-\nabla\Phi$$

于是，第二个积分变成：

$$I=-\frac{1}{8\pi}\int\Phi\nabla\cdot(\mathbf{D}-\mathbf{D}_0)d^3x$$

分部积分后，上式变成：

$$I=\frac{1}{8\pi}\int\Phi\nabla\cdot(\mathbf{D}-\mathbf{D}_0)d^3x=0$$

因为我们假定源电荷密度 $\rho_0(\mathbf{x})$不因电介质物体的放入而改变，所以 $\nabla\cdot(\mathbf{D}-\mathbf{D}_0)=0$. 于是，能量的改变是

$$W=\frac{1}{8\pi}\int(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}_0-\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}_0)d^3x \tag{4.91}$$

积分象是遍及全空间，但事实上只是对电介质物体的体积 V_1 积分，因为在 V_1 外，$\mathbf{D}=\epsilon_0\mathbf{E}$. 所以，写成

$$W=-\frac{1}{8\pi}\int_{V_1}(\epsilon_1-\epsilon_0)\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}_0d^3x \tag{4.92}$$

如果电介质物体周围的媒质是真空，那么 $\epsilon_0=1$. 利用极化强度 $\mathbf{P}$ 的定义，可以把(4.92)写成：

$$W=-\frac{1}{2}\int_{V_1}\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}_0d^3x \tag{4.93}$$

式中 $\mathbf{P}$ 是电介质的极化强度. 上式表明，场源固定不变时，放在场 $\mathbf{E}_0$ 内的电介质所具有的能量密度是

$$w=-\frac{1}{2}\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}_0 \tag{4.94}$$

这个结果和外场中有电荷分布时的能量(4.24)中的偶极子项类似. (4.94)表示在外场内的可极化电介质的能量密度，而不表示永久偶极矩的能量密度，因此在(4.94)中有一个因子$\frac{1}{2}$. 这个因子和(4.88)中的$\frac{1}{2}$是同一个因子.

方程(4.92)和(4.93)表明，如果 $\epsilon_1>\epsilon_0$，电介质物体就要向场强 $\mathbf{E}_0$ 增加的区域移动. 为了计算作用力，我们可以设想该物体发生一个很小的广义位移 $\delta\xi$. 于是能量将改变 δW. 因为电荷固定不变. 所以，这里没有外来的能源，而且场能的变化可以解释为物体势能的变化. 这

意味着有一个力作用在物体上:

$$F_i=-\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)_Q \tag{4.95}$$

偏导数后的下标Q表示场源是固定不变的.

在涉及电介质运动的实用情形中,电场往往是由一组电极产生的,这一组电极由于和外电源(例如一个电池)相连接而保持固定电势. 当电介质的分布发生变化时,电荷就流进电池或从电池流向电极,以保持电势不变. 这意味着能量是由外源供给的,因此,把外源供给的能量,与上面求得的场源固定不变时的能量变化加以比较,是很有趣的. 我们只讨论线性媒质,所以(4.83)仍然有效. 这时只要考虑原有位形的微小变化就够了. 从(4.83)可以看到,伴随着电荷密度变化$\delta\rho(\mathbf{x})$和电势变化$\delta\Phi(\mathbf{x})$的能量变化是

$$\delta W=\frac{1}{2}\int(\rho\delta\Phi+\Phi\delta\rho)d^3x \tag{4.96}$$

将上式和(4.84)比较,可以看出,如果介电性质没有变化,那么(4.96)里的两项是相等的. 可是,如果介电性质变了,

$$\epsilon(\mathbf{x})\longrightarrow\epsilon(\mathbf{x})+\delta\epsilon(\mathbf{x}) \tag{4.97}$$

那么(4.96)里的两项就未必相等. 事实上,把一个电介质物体放入场源固定不动的($\delta\rho=0$)电场时所引起的能量变化,我们刚才已经计算过. (4.96)中两项的贡献相等,意味着$\delta W=0$,但(4.91)或(4.92)通常不等于零. 上述差别,是由于存在着极化电荷引起的. 我们可以把(4.97)所表示的介电性质的变化,看成是极化电荷密度的变化. 于是就可以把(4.96)解释为既对自由电荷密度又对极化电荷密度的积分[即把(4.96)看成微观方程],那么两项的贡献就永远相等了. 不过,用宏观量往往是方便的. 于是只有在介电性质不变时,这两项的贡献才相等.

我们可以认为在电极的电势不变时,以某种方式(移动电介质物

体、改变电介质物体的极化率，等等)改变介电性质的过程是分两步进行的：第一步，将电极同电池断开，令电极上的电荷保持不变($\delta\rho=0$)．在介电性质发生变化(4.97)时，能量的变化是

$$\delta W_1=\frac{1}{2}\int\rho\delta\Phi_1 d^3x \tag{4.98}$$

式中 $\delta\Phi_1$ 是所产生的电势变化．可以证明，由上式将得出(4.92)这个结果；第二步，再把电池跟电极接通，让电极的电势回到原来的数值．随着电势的改变 $\delta\Phi_2=-\delta\Phi_1$①，将有电荷 $\delta\rho_2$ 从电池流入电极．因此，第二步里的能量变化是

$$\delta W_2=\frac{1}{2}\int(\rho\delta\Phi_2+\Phi\delta\rho_2)d^3x=-2\delta W_1. \tag{4.99}$$

因为两项的贡献相等．我们发现，在第二步里外电源引起的能量变化的情况与第一步相反，而数值是第一步的两倍．因此，净变化是

$$\delta W=-\frac{1}{2}\int\rho\delta\Phi_1 d^3x \tag{4.100}$$

用符号表示：

$$\delta W_T=-\delta W_Q \tag{4.101}$$

式中的下标表示保持不变的量．如果 $\epsilon>1$ 的一块电介质移向场强更大的区域，能量是增加了，而不是减少了．对于广义位移 $d\xi$ 来说，作用在这块电介质上的机械力是：

$$F_\xi=+\left(\frac{\partial W}{\partial\xi}\right)_T \tag{4.102}$$

参考书和推荐读物

本书第六章以及下列诸书中，介绍了对原子集体求平均来推导宏观静电学方程：

Rosenfeld，第二章；

① 注意，只要知道电极上的变化 $\delta\Phi_2=-\delta\Phi_1$ 就够了，因为自由电荷只能积存在这里．

Mason and Weaver, 第一章, 第三部分;

Van Vleck, 第一章.

Rosenfeld 还讨论了电介质的经典电子论, Van Vleck 的书专门讨论电极化率和磁极化率. 阐述电极化现象的专著有:

Böttcher;

Debye;

Fröhlich.

在第二章和第三章所列的关于静电学的参考书中, 全都讨论了有电介质时的边值问题.

我们对介电媒质的力和能量的讨论是简短扼要的. 更详尽的讨论, 包括作用在液态和固态电介质上的力、电胁强张量、电致收缩和热力学效应, 可查阅下列各书:

Abraham and Becker, 第一卷, 第五章;

Durand, 第六章和第七章;

Landau and Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media* (有中译本, 朗道、栗弗席兹:《连续媒质电动力学》);

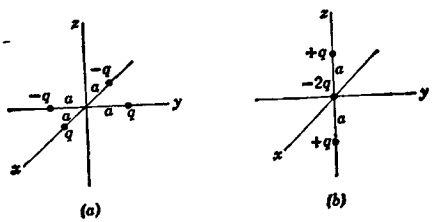
Maxwell, 第一卷, 第五章;

Panofsky and Phillips, 第六章;

Stratton, 第二章.

习　题

4.1 计算下图所示的电荷分布的多极矩 q_{lm}. 试求出对一切 l 均有效的不等于零的矩, 但对每种情形, 至少求出前两组不等于零的矩.



习题 4.1

(c) 写出电荷分布(b)的势的多极子展开. 当只保留展开式中的最低阶项时，画出在 x-y 平面上距离大于 a 的各点的势与离原点距离的关系曲线.

(d) 用库仑定律直接计算(b)在 x-y 平面上的精确势. 画出这个势与距离的函数关系图，并跟(c)的结果作一比较.

提出(c)和(d)中的渐近式，以便更清楚地看出距离很大时势的变化情况.

4.2 一个偶极矩为 $\mathbf{p}$ 的点偶极子位于 $\mathbf{x}_0$ 点. 由狄喇克 δ 函数的导数的性质证明：当计算偶极子在外场中的势 Φ 或能量时，可以用一个有效电荷密度

$$\rho_{\text{有效}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{p}\cdot\nabla\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$$

来描写这个偶极子.

4.3 势的多极子展开式(4.1)中的第 l 项，是用 $(2l+1)$ 个多极矩 q_{lm} 详细写出的. 另一方面，笛卡儿坐标多极矩

$$Q^{(l)}_{\alpha\beta\gamma} = \int \rho(x) x^\alpha y^\beta z^\gamma d^3x$$

(式中 α, β, γ 为非负整数，它们满足 $\alpha+\beta+\gamma=l$ 的约束条件)有 $(l+1)(l+2)/2$ 个. 所以，当 $l>1$ 时，笛卡儿坐标多极矩个数似乎超过了为描写径向关系为 r^{-l-1} 的势中的项所必需的个数.

证明：q_{lm} 在转动下按 l 秩球坐标能量而变换，笛卡儿坐标多极矩相当于 l，$l-2, l-4, \cdots, l_{\text{最小}}$ 秩球坐标能量，这里当 l 为偶数时，$l_{\text{最小}}=0$，当 l 为奇数时，$l_{\text{最小}}=1$. 验证这些不同能量分量的个数之和等于笛卡儿坐标能量分量的总数. 为什么展开式(4.1)中只需 q_{lm}?

4.4 (a) 证明下述定理：

对于一个任意的电荷分布 $\rho(\mathbf{x})$，第一个非零多极子的 $(2l+1)$ 个矩的值与坐标原点无关，但所有更高阶多极矩的值，一般说来与原点选择有关. (当然，对于一定的 l，不同的矩 q_{lm} 与坐标轴的取向有关.)

(b) 设一电荷分布相对于某一坐标系的多极矩为 $q, \mathbf{p}, Q_{ij}, \cdots$，相对于另一坐标系的多极矩为 $q', \mathbf{p}', Q'_{ij}, \cdots$，后一坐标系诸坐标轴与前一坐标系的平行，而其原点位于前一坐标系中 $\mathbf{R}=(X, Y, Z)$ 点. 明确地定出在这两个坐标系中的单极矩、偶极矩和四极矩之间的关系.

(c) 如果 $q\neq 0$，能否求出 $\mathbf{R}$ 满足 $\mathbf{p}'=0$? 如果 $q\neq 0$ 和 $\mathbf{p}\neq 0$，或者至少 $\mathbf{p}\neq 0$，能否求出 $\mathbf{R}$ 满足 $Q'_{ij}=0$?

4.5 一个定域电荷密度 $\rho(x, y, z)$ 放在由势 $\Phi^{(0)}(x, y, z)$ 描写的外静电场中. 在电荷密度不等于零的区域中外电场的势随空间缓慢地变化，

(*a*) 根据前述原理，计算作用在电荷分布上的总力，把它表为多极矩乘电场导数的展开式，一直写到包含四极矩为止．证明：该力为

$$\mathbf{F}=q\mathbf{E}^{(0)}(0)+\{\nabla[\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{x})]\}_0+\left\{\nabla\left[\frac{1}{6}\sum_{j,k}Q_{jk}\frac{\partial E_j^{(0)}}{\partial x_k}(\mathbf{x})\right]\right\}_0+\cdots$$

把上式与能量W的展开式(4.24)作一比较．注意：(4.24)是一个数——它不是$\mathbf{x}$的可微函数；问W与$\mathbf{F}$有什么关系？

(*b*) 对总转矩重复(*a*)中的计算．为简单起见，只计算转矩的一个笛卡儿坐标分量，比方说N_1．证明：这分量为

$$N_1=[\mathbf{p}\times\mathbf{E}^{(0)}(0)]_1+\frac{1}{3}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sum_j Q_{2j}E_j^{(0)}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sum_j Q_{3j}E_j^{(0)}\right)\right]_0+\cdots$$

4.6 一个四极矩为Q的原子核处在柱对称的电场中，该电场在核所处的位置上沿z轴的梯度为$(\partial E_z/\partial z)_0$．

(*a*) 试证四极子相互作用能是

$$W=-\frac{e}{4}Q\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)_0$$

(*b*) 若已知$Q=2\times10^{-24}$厘米^{2}以及W/h为10兆赫，式中h是普朗克常数，试计算$(\partial E_z/\partial z)_0$，并以$e/a_0^3$为单位，其中$a_0=\hbar^2/me^2=0.529\times10^{-8}$厘米，是氢的玻尔半径．

(*c*) 核内电荷分布，可以近似地用一个分布在半长轴为a半短轴为b的椭球体中的恒定电荷密度来表示．试计算这样一个原子核的四极矩，假定总电荷为Ze．已知$Eu^{153}(Z=63)$的四极矩$Q=2.5\times10^{-24}$厘米^2，平均半径

$$R=(a+b)/2=7\times10^{-13}\text{ 厘米}$$

试求相对半径差$(a-b)/R$．

4.7 一定域电荷分布的电荷密度为

$$\rho(\mathbf{r})=\frac{1}{64\pi}r^2e^{-r}\sin^2\theta$$

(*a*) 对此电荷分布的势作多极子展开，并确定所有不等于零的多极矩．写出在远距离处的势，用有限的勒让德多项式展开表示出来．

(*b*) 简明地求出空间任何一点的势，并证明：在原点近傍，精确到含r^2的项，

$$\Phi(\mathbf{r})\simeq\frac{1}{4}-\frac{r^2}{120}P_2(\cos\theta)$$

(*c*) 如果在原点上有一个四极矩$Q=10^{-24}$厘米^{2}的原子核，试求相互作用能

的大小，假定上列 $\rho(\mathbf{r})$ 的电荷单位是电子电荷，长度单位是氢的玻尔半径 $a_0=\hbar^2/me^2=0.529\times10^{-8}$ 厘米．将你的结果除以普朗克常数 h，并用频率表示出来．

本题中的电荷密度乃是氢的 $2p$ 能级中 $m=\pm1$ 态的电荷密度，而四极子相互作用和分子中的四极子相互作用同数量级．

4.8 一个很长的正圆柱形壳，其介电常数为 ϵ，内半径与外半径分别为 a 和 b，把它放在原来是均匀的电场 E_0 中，它的轴与场垂直．圆柱形壳内外媒质的介电常数是 1．

(a) 试求三个区域中的电势和电场，不计末端效应．

(b) 画出 $b\simeq2a$ 时这一典型例子的电力线图．

(c) 针对均匀场中的实心电介质圆柱体和均匀电介质中的柱形空腔这两种情形，讨论你的解的极限形式．

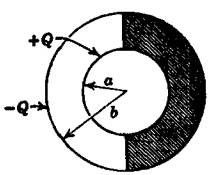
4.9 在真空中有一点电荷 q，它离电介质球的球心为 d，球的半径为 $a(a<d)$，球的介电常数为 ϵ．

(a) 试求空间一切点的势，并用球谐函数展开式来表示．

(b) 计算球心附近的电场强度的直角坐标分量．

(c) 证明在 $\epsilon\to\infty$ 的极限情形下，你的结果和导电球的结果一致．

4.10 有两个同心导电球，内球的半径为 a，外球的半径为 b，分别带电荷 $\pm Q$．两球之间的空隙有一半装着一个电介质半球壳(介电常数为 ϵ)，如图所示．



习题 4.10

(a) 试求两球间各处的电场．

(b) 计算内球上的面电荷分布．

(c) 计算在 $r=a$ 处的电介质表面上感生的极化电荷密度．

4.11 下列介电常数随压强变化关系的数据取自 *Smithsonian Physical Tables*，第九版，第 424 页：

292K 的空气		
压强(大气压)	ϵ	
20	1.0108	*AIP* Handbook,
40	1.0218	第三版，1972 年，
60	1.0333	第 4-165 页给出
80	1.0439	作为压强函数的
100	1.0548	空气的相对密度．

303K的戊烷(C_5H_{12})

压强(大气压)	密度(克/厘米^3)	ϵ
1	0.613	1.82
10^3	0.701	1.96
4×10^3	0.796	2.12
8×10^3	0.865	2.24
12×10^3	0.907	2.33

在上列表的范围内,针对空气和戊烷验证介电常数和密度的克劳修斯-莫索提关系.它是准确地成立呢?还是近似地成立?如果是近似地成立,试讨论密度和$(\epsilon-1)$的相对变化.针对戊烷,将克劳修斯-莫索提关系与较粗略的关系$(\epsilon-1)\propto$密度 作一比较.

4.12 水蒸汽是一种极性气体,它的介电常数显出明显的与温度的依赖关系.下表列出这一效应的实验数据.假定水蒸汽遵守理想气体定律,试计算作为温度倒数的函数的水蒸汽分子极化率,并作图.从曲线的斜率求H_2O分子的永久偶极矩的数值(将偶极矩用静电系单位——静库仑-厘米表示).

T(K)	压强(厘米水银柱高)	$(\epsilon-1)\times10^5$
393	56.49	400 2
423	60.93	371.7
453	65.34	348.8
483	69.75	328.7

4.13 有两个长的同轴圆柱形导电面,其半径分别为a和b.将它们竖直地浸入液体电介质中.如果当这两个电极间的电势差为V时,两个电极间的液体上升的高度是h,证明该液体的极化率等于

$$\chi_e=\frac{(b^2-a^2)\rho gh\ln(b/a)}{V^2}$$

式中ρ是该液体的密度,g是重力加速度,空气的极化率忽略不计.

第五章 静 磁 学

5.1 引言和定义

前几章中，已经研究了静电学的各个方面(即静止电荷的场和相互作用，以及边界等)．现在转入研究稳恒态磁现象．由历史观点看来，人们认识和研究磁现象的历史，至少与电现象一样悠久．古代就已经知道磁石；航海用罗盘就是一项很古老的发明；在1600年以前，吉伯把地球当作一块巨大磁铁来研究．和静电学不同，磁场的基本规律不是直接根据人类同磁性材料的最早接触中得出的．其理由都出自静磁学和静电学的根本差别：没有自由磁荷存在．这意味着，磁现象完全不同于电现象，而且在很长时期内都没有建立起电磁这两种现象之间的连系．在磁学研究中，基本单元就是我们现在知道的磁偶极子．在磁性材料面前，磁偶极子有使其自身沿某一方向排列的倾向．倘若磁偶极子充分小并且充分弱，使得它不会改变所存在的场，那末，按定义，磁偶极子所处的方向就是磁通量密度(用B表示)的方向．磁通量密度B的量值可以用下式确定：

$$\mathbf{N}=\mu\times\mathbf{B} \tag{5.1}$$

式中N是施于磁偶极子的力矩，μ是按适当的一组单位定义的偶极子的磁矩．

在定义磁通量密度B(有时叫做磁感应强度)时，我们已经遇到了一种比电场更复杂的情况．而且在建立电流和磁场的关系之前，不可能定量地阐明磁现象．电流相当于运动电荷，并用电流密度J来描述，J是以每单位时间流过每单位面积的正电荷量来量度的，电荷运动的方向规定为J的方向．在静电系单位中，电流密度是以每平方厘米每

秒静电系电量单位量度的，有时叫做每平方厘米静电系电流单位，而在米·千克·秒·安(MKSA)单位制中，电流密度是以每平方米每秒库仑或每平方米安培量度的．如果电流密度只分布在横截面很小的金属线内，我们通常就求出电流密度对横截面的积分，并说，有若干静电系电流单位或若干安培的电流沿着金属线流动．

电荷守恒要求：空间任一点的电荷密度与其邻域中电流密度的关系，由连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\Delta\cdot\mathbf{J}=0 \tag{5.2}$$

给出．上式表述了这样一个物理事实：在一个小体积内电荷随时间的减少量，必等于流出该小体积表面的电荷量，因为总电荷必须守恒．稳恒态磁现象的特征是，空间各处的净电荷密度不变．因而，在静磁学中

$$\nabla\cdot\mathbf{J}=0 \tag{5·3}$$

我们现在着手讨论电流与磁通量密度之间的实验关系，并建立静磁学基本定律．

5.2 毕奥-萨伐尔定律

1819 年奥斯忒观察到，载电流的金属线使邻近的永久磁偶极子发生偏转，所以，电流是磁通量密度的源．首先是毕奥和萨伐尔(1820)，接着是安培(1820—1825)根据许多精巧而严密的实验，建立了关于磁感应强度 B 与电流的关系的基本实验定律，和一电流与另一电流之间作用力的定律．虽然我们不是按照安培推导的形式叙述的，但其基本关系如下：若 $d\mathbf{l}$ 是一条载电流为 I 的细金属线的长度元（指向电流方向），x 是从长度元到观测点 P 的坐

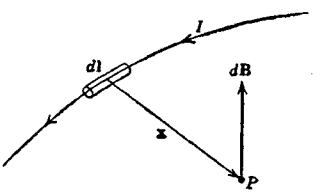


图 5.1 由电流元 $Id\mathbf{l}$ 产生的元磁感应强度 $d\mathbf{B}$．

标矢量，如图 5.1 所示，则 P 点的元磁通量密度 $d\mathbf{B}$ 的量值和方向由下式给出

$$d\mathbf{B}=kI\frac{(d\mathbf{l}\times\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|^3} \tag{5.4}$$

应该指出，(5.4)就是平方反比律，恰如静电学的库仑定律一样．但是，两者的矢量特征是不同的．

关于(5.4)有几句话要提醒一下．有人可能认为(5.4)是与点电荷电场强度(1.3)相当的磁学形式，且认为 $Id\mathbf{l}$ 与 q 相当．严格地说，这是不对的．方程(5.4)只有在下述情况下才有意义：即把它看作对一连续集求和中的一个元素，这个总和代表一电流回路或电路的磁感应强度．显然，单单电流元 $Id\mathbf{l}$ 本身是不满足连续性方程(5.3)的，因为这时电流从何处来哩！通过长度 $d\mathbf{l}$ 后电流又到何处去哩！摆脱这个困难的一种明显的办法是：把电流看作实际的运动电荷，并用 $q\mathbf{v}$ 代替 $Id\mathbf{l}$，这里 q 是电荷，$\mathbf{v}$ 是它的速度．对于这样一个运动电荷，磁通量密度为

$$\mathbf{B}=kq\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \tag{5.5}$$

上式与(5.4)完全相当．可是这个表式与时间有关，并且只有当电荷的速度小于光速、及其加速度可忽略不计时才成立．因为在本章中只考虑稳恒态磁场，所以我们采用(5.4)，将(5.4)历遍电路积分而求得物理结果①．

正如在附录中详细讨论的，(5.4)和(5.5)中的常数 k 与所用的单位制有关．假如以静电系单位量度电流，以电磁系单位量度磁通量密度，

---

① 这里有一个明显的矛盾．电流毕竟还是运动的电荷．怎么将(5.4)积分能得到精确的结果，而从(5.5)只能得到近似的结果呢？答案是，(5.5)只适用于一个电荷．如果由许多电荷组成的一个系统按这样一种方式运动：电荷的单元趋于零，而电荷的数目趋于无穷大，使得这个系统产生一个稳恒电流，那末精确的相对论性场(包括加速度效应)的总和给出一个静磁场，这静磁场等于(5.4)历遍电流积分所得的场．习题 14.12 和 14.13 中就某些特殊情况讨论了这一比较微妙的结果．

那末常数 $k=1/c$，从实验测得式中的 c 等于真空中的光速（$c=2.998\times10^{10}$ 厘米/秒）. 这种单位制叫做高斯制. 把光速引入我们的方程中，在这一阶段看来似乎有点人为的，但如果我们从狭义相对论观点讨论电磁学，则引进光速就不是人为的了. 正如第十一章里详细讨论的，**E** 和 **B** 必须看做场强张量 $F_{\alpha\beta}$ 的不同元素. 在一参照系中静止的电荷，在该参照系中只产生静电场，可是在一运动参照系中，与之相联系的是磁通量密度(5.5). 按习惯用法，这时(5.5)中 $k=1/c$. 在相对论的考虑中自然出现比值 v/c. 选取 $k=1/c$ 也有其优点：由于用一组统一的单位量度电荷与电流，所以连续性方程(5.2)保留它的简单形式，不含有 c 的因子. 我们在这里将采用高斯制.

我们可以用积分的方法把基本磁通量元(5.4)线性叠加起来，从而定出由各种形状的载流金属线所产生的磁通量密度. 例如，一根载电流 I 的直长金属线，如图 5.2 所示，可以看出，其磁感应强度 **B** 的方向与包含金属线和观测点的平面的法线平行，所以磁感应线是环绕金属线的同心圆. **B** 的量值由下式给出

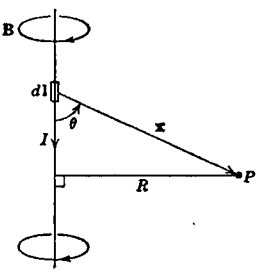


图 5.2

$$|\mathbf{B}|=\frac{IR}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dl}{(R^2+l^2)^{3/2}}=\frac{2I}{cR} \tag{5.6}$$

式中 R 是从观测点到金属线的距离. 这是毕奥和萨伐尔最先发现的实验结果，即是尽人皆知的毕奥-萨伐尔定律. 注意：磁感应强度 **B** 的量值随 R 变化的方式，跟一根带均匀线电荷密度的直长线电荷所产生的电场一样. 这种类似表明，在有些情况下，即使电场和磁场的矢量特征不同，静电问题和静磁问题之间还可以有一种对应关系. 在下面几节里，我们将多次地看到这种对应关系.

安培实验不是直接测定电流与磁感应强度间的关系，而是测定一

根载流金属线在另一根载流金属线面前所受的力．因为我们已经介绍过电流元产生磁感应强度这个概念，所以我们把作用力定律说成，在磁感应强度为 B 的磁场中电流元 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 所受的力．元力为

$$d\mathbf{F}=\frac{I_1}{c}(d\mathbf{l}_1\times\mathbf{B}) \tag{5.7}$$

I_1 是电流元中的电流(以静电系单位量度)，B 是磁通量密度(以电磁系单位量度)，c 是光速．如果外场 B 是由载电流 I_2 的闭合电流回路#2 所产生的，那末载电流 I_1 的闭合电流回路#1 所受的总力为[由(5.4)与(5.7)得到]：

$$\mathbf{F}_{12}=\frac{I_1 I_2}{c^2}\oint\oint\frac{d\mathbf{l}_1\times(d\mathbf{l}_2\times\mathbf{x}_{12})}{|\mathbf{x}_{12}|^3} \tag{5.8}$$

线积分是绕两个回路计算的；$\mathbf{x}_{12}$ 是从线元 $d\mathbf{l}_2$ 到 $d\mathbf{l}_1$ 的矢矩，如图 5.3所示．这就是安培所观测到的两个载流回路间的作用力的数学表述．将被积函数稍加改变，就可以把(5.8) 化为对 $d\mathbf{l}_1$ 与 $d\mathbf{l}_2$ 对称的形式，这种形式显然满足牛顿第三定律．于是

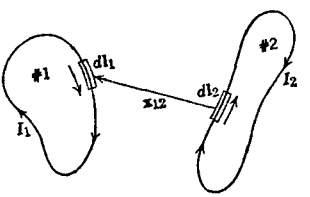


图 5.3 两个安培电流回路．

$$\frac{d\mathbf{l}_1\times(d\mathbf{l}_2\times\mathbf{x}_{12})}{|\mathbf{x}_{12}|^3}=-(d\mathbf{l}_1\cdot d\mathbf{l}_2)\frac{\mathbf{x}_{12}}{|\mathbf{x}_{12}|^3}+d\mathbf{l}_2\left(\frac{d\mathbf{l}_1\cdot\mathbf{x}_{12}}{|\mathbf{x}_{12}|^3}\right) \tag{5.9}$$

第二项在对 $d\mathbf{l}_1$ 的积分中包含了一个全微分，因此倘若积分路线是闭合的或是延伸到无穷远处，第二项对积分 (5.8) 没有贡献．于是，两个电流回路间作用力的安培定律变为

$$\mathbf{F}_{12}=-\frac{I_1 I_2}{c^2}\oint\oint\frac{(d\mathbf{l}_1\cdot d\mathbf{l}_2)\mathbf{x}_{12}}{|\mathbf{x}_{12}|^3} \tag{5.10}$$

上式表明，其积分除对 $\mathbf{x}_{12}$ 有一定的矢量依赖关系外，还具有对称性．

两根平行的直长金属线相距为 d，分别载电流 I_1 与 I_2，则每根金属线每单位长度所受的力的方向垂直于另一根金属线，力的量值为

$$\frac{dF}{dl}=\frac{2I_1I_2}{c^2d} \tag{5.11}$$

若电流流动的方向相同(相反)，则为吸引力(排斥力). 可以用载流金属线间的作用力来定义磁通量密度，这种定义方法与永久磁偶极子无关①. 在下文中我们将会看到，力矩表式(5.1)与元力表式(5.7)是密切相关的.

如果电流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ 是在外磁通量密度 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ 中，那末元力定律表明，该电流分布所受的总力为

$$\mathbf{F}=\frac{1}{c}\int\mathbf{J}(\mathbf{x})\times\mathbf{B}(\mathbf{x})d^3x \tag{5.12}$$

同样，总力矩为

$$\mathbf{N}=\frac{1}{c}\int\mathbf{x}\times(\mathbf{J}\times\mathbf{B})d^3x \tag{5.13}$$

在 5.7 节中，将把这些一般结果应用到定域分布的电流上.

5.3 静磁学的微分方程和安培定律

我们可以用电流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{x})$，把磁感应强度基本定律(5.4)写成一般形式:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})=\frac{1}{c}\int\mathbf{J}(\mathbf{x}')\times\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}d^3x' \tag{5.14}$$

磁学上，这个 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ 表式，类似于电学上用电荷密度表示的电场的表式:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x})=\int\rho(\mathbf{x}')\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}d^3x' \tag{5.15}$$

正因为在有些情形下，$\mathbf{E}$ 的这个结果不如微分方程那样方便，所以对静磁学来说，(5.14)不是最有用的式子，虽然在原理上它描述了一切静磁

① 事实上，(5.11)是国际公认的电流(实际上等于此处的 I/c)标准的根据. 参看附录.

现象.

为了求出与(5.14)等效的微分方程，我们应用关系式(1.15)，把(5.14)变换成下式:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})=\frac{1}{c}\nabla\times\int\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x' \tag{5.16}$$

由(5.16)立即得到，B 的散度等于零:

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \tag{5.17}$$

这就是静磁学第一方程，相当于静电学中的 $\nabla\times\mathbf{E}=0$. 仿照静电学，我们现在计算 B 的旋度:

$$\nabla\times\mathbf{B}=\frac{1}{c}\nabla\times\nabla\times\int\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x' \tag{5.18}$$

利用任意矢量场 A 的恒等式 $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$，表式(5.18)可以变换为

$$\nabla\times\mathbf{B}=\frac{1}{c}\nabla\int\mathbf{J}(\mathbf{x}')\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)d^3x'$$

$$-\frac{1}{c}\int\mathbf{J}(\mathbf{x}')\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)d^3x' \tag{5.19}$$

利用

$$\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)=-\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)$$

以及

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)=-4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

可以把(5.19)中的积分写成:

$$\nabla\times\mathbf{B}=-\frac{1}{c}\nabla\int\mathbf{J}(\mathbf{x}')\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)d^3x'+\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}(\mathbf{x}) \tag{5.20}$$

用分部积分法得:

$$\nabla\times\mathbf{B}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}+\frac{1}{c}\nabla\int\frac{\nabla'\cdot\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x' \tag{5.21}$$

但对于稳恒态磁现象 $\nabla\cdot\mathbf{J}=0$，所以我们得到

$$\nabla\times\mathbf{B}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \tag{5.22}$$

这就是静磁学第二方程，相当于静电学里的 $\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho$.

在静电学中，高斯定律(1.11)是方程 $\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho$ 的积分形式. 与(5.22)等效的积分式叫做安培定律. 把斯托克斯定理应用到(5.22)的法向分量的面积分上，就得到安培定律，这个面积分遍及以闭曲线 C 为界的开曲面 S 上（如图 5.4 所示）. 于是

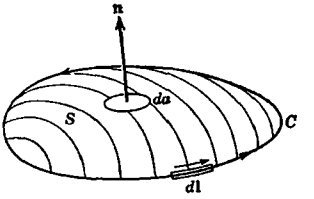


图 5.4

$$\int_S \nabla\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}da=\frac{4\pi}{c}\int_S \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}da \tag{5.23}$$

就变换成

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}=\frac{4\pi}{c}\int_S \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}da \tag{5.24}$$

因为电流密度的面积分就是通过闭曲线 C 的总电流 I，所以安培定律可以写成如下形式:

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}=\frac{4\pi}{c}I \tag{5.25}$$

正如在高度对称情形下可以用高斯定律计算电场一样，在类似情形下，就可以利用安培定律来计算磁场.

5.4 矢势

静磁学基本微分定律由下列两式给出:

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{B}&=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}\\ \nabla\cdot\mathbf{B}&=0\end{aligned}\right\} \tag{5.26}$$

问题在于如何解这两个方程. 如果在所考虑的区域内电流密度等于零，

那末由 $\nabla\times\mathbf{B}=0$ 得知，磁感应强度矢量 $\mathbf{B}$ 可以表为磁标势的梯度，$\mathbf{B}=-\nabla\Phi_M$. 这时，(5.26) 化为 Φ_M 的拉普拉斯方程，并且可以把处理静电问题的所有方法用到这里来. 有大量问题属于这种情形，但是我们把这些问题的讨论放到本章后半部分. 其理由是，静磁学边界条件与静电学里所遇到的不同，并且静磁问题通常牵涉到带有磁性的宏观媒质，后者与带有电荷、电流的真空不同.

一般解法是利用(5.26)中的第二个方程. 假如 $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ 处处成立，那末 $\mathbf{B}$ 一定是某矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 的旋度，$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 叫做矢势：

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})=\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{x}) \tag{5.27}$$

其实，我们已经把 $\mathbf{B}$ 写成(5.16)这种形式. 显而易见，由(5.16)可得 $\mathbf{A}$ 的一般形式：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})=\frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x'+\nabla\Psi(\mathbf{x}) \tag{5.28}$$

附加的任意标函数 Ψ 的梯度表明，对于一个给定的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 来说，矢势可以按

$$\mathbf{A}\to\mathbf{A}+\nabla\Psi \tag{5.29}$$

任意变换. 这种变换叫做规范变换. 因为(5.27)只确定 $\mathbf{A}$ 的旋度，所以对 $\mathbf{A}$ 作这种变换是可能的. 规范变换这种任意性，使我们可以把 $\nabla\cdot\mathbf{A}$ 写成所需要的任何方便的函数形式.

如果把(5.27)代入(5.26)的第一个方程，则得

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}\\ \text{或}\quad&\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}\end{aligned}\right\} \tag{5.30}$$

如果利用 (5.29) 所包含的那种任意性，就可以方便地选择规范[①] $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$. 这时，矢势的每一个直角分量满足泊松方程，

① 这种选择叫做库仑规范，其道理只有读了 6.5 节后才会明白.

$$\nabla^2\mathbf{A}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \tag{5.31}$$

由我们对静电学的讨论很清楚地看到，在无边界空间中A的解为(5.28)，其中Ψ＝常数：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})=\frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x' \tag{5.32}$$

条件Ψ＝常数可以作如下理解．因为$\nabla'\cdot\mathbf{J}=0$，(5.28)中第一项的散度等于零，所以我们选择的规范$\nabla\cdot\mathbf{A}=0$化为$\nabla^2\Psi=0$．如果$\nabla^2\Psi=0$在整个空间内成立，那末，只要无穷远处没有源，Ψ必是常数．

5.5 圆形电流回路的矢势和磁感应强度

作为计算给定电流分布所产生的磁场的例子，我们讨论圆形回路问题，这回路的半径为a，位于x-y平面上，其圆心在原点，所载的电流为I，如图5.5所示．电流密度J只有一个在ϕ方向上的分量，

$$J_\phi=I\delta(\cos\theta')\frac{\delta(r'-a)}{a} \tag{5.33}$$

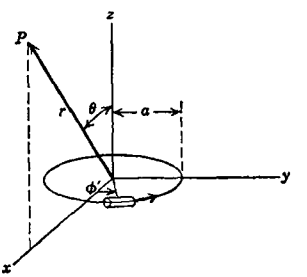


图 5.5

δ函数把电流限制在半径为a的环里流动．电流密度矢量J可以写成

$$\mathbf{J}=-J_\phi\sin\phi'\mathbf{i}+J_\phi\cos\phi'\mathbf{j} \tag{5.34}$$

因为是柱对称几何形状，为了便于计算，我们可以把观测点选在x-z平面上($\phi=0$)．由于(5.32)中对ϕ'角的积分对于$\phi'=0$平面是对称的，所以电流的x分量对积分没有贡献．只有矢势的y分量不为零，这就是A_ϕ．于是

$$A_\phi(r,\theta)=\frac{I}{ca}\int r'^2dr'd\Omega'\frac{\cos\phi'\delta(\cos\theta')\delta(r'-a)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{5.35}$$

式中$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|=[r^2+r'^2-2rr'(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\phi')]^{1/2}$.

我们首先直接计算(5.35)的值. 对δ函数积分,则得下面结果:

$$A_\phi(r,\theta)=\frac{Ia}{c}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\phi'd\phi'}{(a^2+r^2-2ar\sin\theta\cos\phi')^{1/2}} \tag{5.36}$$

这一积分可以用全椭圆积分K和E来表示:

$$A_\phi(r,\theta)=\frac{4Ia}{c\sqrt{a^2+r^2+2ar\sin\theta}}\left[\frac{(2-k^2)K(k)-2E(k)}{k^2}\right] \tag{5.37}$$

式中椭圆积分的自变量是

$$k^2=\frac{4ar\sin\theta}{a^2+r^2+2ar\sin\theta}$$

磁感应强度的分量

$$\left.\begin{aligned}B_r&=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi)\\B_\theta&=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\\B_\phi&=0\end{aligned}\right\} \tag{5.38}$$

也可以用椭圆积分来表示. 但是,这些结果不是一目了然的(可是对计算是有用的).

当k^2很小时,即相当于$a\gg r, a\ll r$, 或$\theta\ll1$时, (5.37)中的方括号化为$(\pi k^2/16)$. 这时,矢势近似地变为

$$A_\phi(r,\theta)=\frac{I\pi a^2}{c}\frac{r\sin\theta}{(a^2+r^2+2ar\sin\theta)^{3/2}} \tag{5.39}$$

对应的场是

$$\left.\begin{aligned}B_r&\simeq\frac{I\pi a^2}{c}\cos\theta\frac{(2a^2+2r^2+ar\sin\theta)}{(a^2+r^2+2ar\sin\theta)^{5/2}}\\B_\theta&\simeq-\frac{I\pi a^2}{c}\sin\theta\frac{(2a^2-r^2+ar\sin\theta)}{(a^2+r^2+2ar\sin\theta)^{5/2}}\end{aligned}\right\} \tag{5.40}$$

这样就很容易确定三个区域内的场: 轴附近($\theta\ll1$), 回路的中心附近($r\ll a$)以及远离回路的地方($r\gg a$).

特别重要的是离回路很远处的场：

$$\left.\begin{aligned} B_r &= 2\left(\frac{I\pi a^2}{c}\right)\frac{\cos\theta}{r^3} \\ B_\theta &= \left(\frac{I\pi a^2}{c}\right)\frac{\sin\theta}{r^3} \end{aligned}\right\} \tag{5.41}$$

把这些场同静电偶极场(4.12)比较，可以看出，在远离圆形电流回路的地方，磁场的特征相当于偶极场．仿照静电学，我们把回路的磁偶极矩定义为

$$m=\frac{\pi I a^2}{c} \tag{5.42}$$

在下一节里我们将会知道：定域电流分布在远处产生偶极场，这是普遍结果的一种特殊情形．平面电流回路的磁矩等于回路面积与 I/c 的乘积．

用椭圆积分表示的这个问题的完全解，已经求出．现在我们用球谐函数展开来说明静磁与静电问题的异同点．所以我们回到(5.35)，并把 $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}$ 代以球谐函数展开式(3.70)：

$$\begin{aligned} A_\phi = &\frac{4\pi I}{ca}\,\mathrm{Re}\sum_{l,m}\frac{Y_{lm}(\theta,0)}{2l+1} \\ &\times\int r'^2 dr' d\Omega' \delta(\cos\theta')\delta(r'-a)e^{i\phi'}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y_{lm}^*(\theta',\phi') \end{aligned} \tag{5.43}$$

$e^{i\phi'}$ 的出现意味着，只有 $m=+1$ 对这个和才有贡献．因此

$$A_\phi=\frac{8\pi^2 Ia}{c}\,\mathrm{Re}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{Y_{l1}(\theta,0)}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\left[Y_{l,1}^*\left(\theta'=\frac{\pi}{2},\phi'\right)e^{i\phi'}\right] \tag{5.44}$$

式中 $r_<(r_>)$ 是 a 和 r 的较小者（较大者）．带方括号的量是依赖于 l 的数：

$$\left[\quad\right]=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi l(l+1)}}P_l^1(0)$$

$$=\begin{cases}0, & \text{当 } l \text{ 为偶数时}\\ \sqrt{\dfrac{2l+1}{4\pi l(l+1)}}\left[\dfrac{(-1)^{n+1}\Gamma\left(n+\dfrac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)}\right], & \text{当 } l=2n+1 \text{ 时}\end{cases} \tag{5.45}$$

于是 A_ϕ 可以写成

$$A_\phi=-\frac{\pi Ia}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n(n+1)!}\frac{r_<^{2n+1}}{r_>^{2n+2}}P_{2n+1}^1(\cos\theta) \tag{5.46}$$

式中 $(2n-1)!!=(2n-1)(2n-3)(\cdots)\times5\times3\times1$，根据定义，总和中 $n=0$ 项的系数等于 1. 为了从(5.38)计算 B 的径向分量的值，我们要用

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{1-x^2}\,P_l^1(x)\right]=l(l+1)P_l(x) \tag{5.47}$$

于是求得

$$B_r=\frac{2\pi Ia}{cr}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)!!}{2^n n!}\frac{r_<^{2n+1}}{r_>^{2n+2}}P_{2n+1}(\cos\theta) \tag{5.48}$$

同样，B的 θ 分量为

$$B_\theta=-\frac{\pi Ia^2}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)!!}{2^n(n+1)!}\cdot\begin{cases}-\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)\dfrac{1}{a^3}\left(\dfrac{r}{a}\right)^{2n}\\ \dfrac{1}{r^3}\left(\dfrac{a}{r}\right)^{2n}\end{cases}P_{2n+1}^1(\cos\theta) \tag{5.49}$$

$r<a$ 时，取上面一行；$r>a$ 时，取下面一行. $r\gg a$ 时，级数中只有 $n=0$ 项是主要的. 这时，因为 $P_1^1(\cos\theta)=-\sin\theta$，(5.48)与(5.49)化为(5.41). 当 $r\ll a$ 时，主要项又是 $n=0$. 此时，这些场相当于一个与 z 方向平行的磁感应强度为 $2\pi I/ac$ 的场. 这个结果也可以按初等方法求得.

我们要注意这种问题和相应的柱对称静电问题有本质的差别．结果中出现缔合勒让德多项式和寻常勒让德多项式．这可以归结为电流和矢势的矢量特征，这和电荷和静电势的标量性质相反．

解平面回路问题的另一种方法是利用柱面波展开式．这时不用 $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}$ 的表示式(3.70)，而用柱面形式(3.148)或(3.149)，或者用习题 3.14(b) 的柱面形式，这种方法在圆形回路方面的应用，将留作习题．

5.6 定域电流分布的磁场；磁矩

现在讨论一个定域在很小空间区域内的一般电流分布的性质，"小"是相对于观察者感兴趣的长度来说的．与静电多极子展开类似，要完整地处理这个问题，可以应用矢量球谐函数．[①] 这些内容在论述多极辐射的第十六章里进行介绍．这里只满足于最低阶近似．从(5.32)出发，我们把分母按 $\mathbf{x}'$ 的幂展开，$\mathbf{x}'$ 是相对于定域电流分布中某一适当原点来量度的，大致如图 5.6 所示：

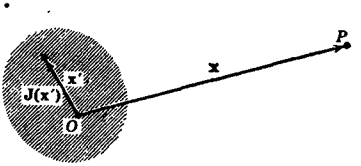


图 5.6 定域电流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$，在坐标为 $\mathbf{x}$ 的 P 点产生一个磁感应强度．

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}=\frac{1}{|\mathbf{x}|}+\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}|^3}+\cdots \tag{5.50}$$

这时，矢势的某一给定分量将有下列展开式，

$$A_i(\mathbf{x})=\frac{1}{c|\mathbf{x}|}\int J_i(\mathbf{x}')d^3x'+\frac{\mathbf{x}}{c|\mathbf{x}|^3}\cdot\int J_i(\mathbf{x}')\mathbf{x}'d^3x'+\cdots \tag{5.51}$$

由于 $\mathbf{J}$ 是定域的、散度为零的电流分布，这就可以将展开式(5.51)加以简化，并改换一下．设 $f(\mathbf{x}')$ 和 $g(\mathbf{x}')$ 为下面所选的 $\mathbf{x}'$ 的有理函数．则当 $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$ 是定域的及其散度为零时，我们得

① 这不是唯一的方法．可以用标势．参看 J. B. Bronzan, *Am. J. Phys.* **39**, 1357 (1971)．

$$\int(f\mathbf{J}\cdot\nabla' g+g\mathbf{J}\cdot\nabla' f)d^3x'=0 \tag{5.52}$$

将上式第二项分部积分，然后展开 $f\nabla'\cdot(g\mathbf{J})$，就能证明上式成立．令 $f=1$ 和 $g=x_i'$，由(5.52)得

$$\int J_i(\mathbf{x}')d^3x' =0$$

因此，(5.51)中第一项(相当于静电学展开式中的单极子项)等于零．令 $f=x_i'$ 和 $g=x_i'$，由(5.52)得

$$\int(x_i' J_j+x_j' J_i)d^3x'=0$$

因此(5.51)中第二项的积分可以写成

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\cdot\int \mathbf{x}' J_i d^3x' &\equiv \sum_j x_j\int x_j' J_i d^3x' \\ &=-\frac{1}{2}\sum_j x_j\int(x_i' J_j-x_j' J_i)\,d^3x' \\ &=-\frac{1}{2}\sum_{i,j}\epsilon_{ijk}x_j\int(\mathbf{x}'\times\mathbf{J})_k d^3x' \\ &=-\frac{1}{2}[\mathbf{x}\times\int(\mathbf{x}'\times\mathbf{J})d^3x']_i\end{aligned}$$

通常定义磁矩密度或磁化强度为

$$\mathcal{M}(\mathbf{x})=\frac{1}{2c}[\mathbf{x}\times\mathbf{J}(\mathbf{x})] \tag{5.53}$$

并将上式的积分作为磁矩 $\mathbf{m}$ 的定义：

$$\mathbf{m}=\frac{1}{2c}\int\mathbf{x}'\times\mathbf{J}(\mathbf{x}')d^3x' \tag{5.54}$$

于是，(5.51)的第二项矢势就是磁偶极子的矢势，

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})=\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \tag{5.55}$$

这是定域稳恒电流分布的 $\mathbf{A}$ 的展开式中最低阶非零项．算出(5.55)的旋度，就可以直接求得磁感应强度 $\mathbf{B}$：

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})=\frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})-\mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3} \tag{5.56}$$

式中 $\mathbf{n}$ 是 $\mathbf{x}$ 方向上的单位矢量. 磁感应强度 (5.56) 确实具有偶极场的形式(4.13). (5.56)是上节中对圆形回路所求得的结果的推广. 在远离任一定域电流分布的地方，磁感应强度等于一个磁偶极子的磁感应强度，这个磁偶极子的偶极矩由(5.54)给出.

如果电流在其他任意形状的平面回路内流动，那末磁矩可以表为简单形式. 假如电流 I 在闭合电路内流动，其线元为 $d\mathbf{l}$，则(5.54)变为

$$\mathbf{m}=\frac{I}{2c}\oint\mathbf{x}\times d\mathbf{l}$$

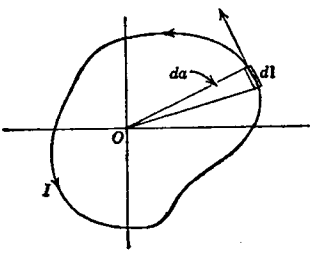


图 5.7

对于如图5.7所示的平面回路来说，磁矩垂直于回路平面. 因为 $\frac{1}{2}|\mathbf{x}\times d\mathbf{l}|=da$, 式中 da 是 $d\mathbf{l}$ 的两个端点和原点所决定的三角形面积元，所以上式的回路积分给出回路总面积. 因此，不管电路的形状如何，磁矩的量值为

$$|\mathbf{m}|=\frac{I}{c}\times(\text{面积}) \tag{5.57}$$

如果电流分布是由若干带电粒子组成的，这些带电粒子带有电荷 q_i，它们的质量为 M_i，并以速度 $\mathbf{v}_i$ 运动，那末可以用这些粒子的轨道角动量表示磁矩. 电流密度为

$$\mathbf{J}=\sum_i q_i\mathbf{v}_i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)$$

式中 $\mathbf{x}_i$ 是第 i 个粒子的位置. 这时磁矩(5.54)变为

$$\mathbf{m}=\frac{1}{2c}\sum_i q_i(\mathbf{x}_i\times\mathbf{v}_i)$$

矢积$(\mathbf{x}_i\times\mathbf{v}_i)$同第 i 个粒子轨道角动量$[\mathbf{L}_i=M_i(\mathbf{x}_i\times\mathbf{v}_i)]$成正比．于是磁矩变为

$$\mathbf{m}=\sum_i\frac{q_i}{2M_ic}\mathbf{L}_i \tag{5.58}$$

如果所有运动粒子都具有相同的荷质比 $(q_i/M_i=e/M)$，那末就可以用总轨道角动量 $\mathbf{L}$ 写出磁矩:

$$\mathbf{m}=\frac{e}{2Mc}\sum_i\mathbf{L}_i=\frac{e}{2Mc}\mathbf{L} \tag{5.59}$$

这就是著名的角动量与磁矩的经典关系式，这个关系式甚至对原子尺度上的轨道运动还有效．但是这个经典关系式对电子或其它基本粒子的内禀矩无效．电子的内禀矩比(5.59)(其中用自旋角动量 $\mathbf{S}$ 代替 $\mathbf{L}$)所表示的要大一倍多一点．所以，我们说，电子有一个 g 因子 2 (1.00116)．磁矩与其经典值不相等，其原因在于相对论效应和量子力学效应，这些效应我们在这里无法考虑．

在结束关于定域电流分布的磁场这个论题之前，我们讨论一下磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的球积分．正如 4.1 节末所讨论的静电学情形那样，有两种重要的极限情形，一种情形是半径为 R 的球包含了全部电流，另一种情形是电流全部在球体之外．$\mathbf{B}$ 的体积分是

$$\int_{r<R}\mathbf{B}(\mathbf{x})d^3x=\int_{r<R}\nabla\times\mathbf{A}d^3x \tag{5.60}$$

可以把 $\mathbf{A}$ 的旋度的体积分换成一个面积分．于是

$$\int_{r<R}\mathbf{B}d^3x=R^2\int d\Omega\mathbf{n}\times\mathbf{A}$$

式中 $\mathbf{n}$ 是外法线矢量．将(5.32)代替上式中的 $\mathbf{A}$，再交换积分次序，上式则可写成

$$\int_{r<R}\mathbf{B}d^3x=-\frac{R^2}{c}\int d^3x'\mathbf{J}(\mathbf{x}')\times\int d\Omega\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

角积分与静电学情形中出现的相同. 所以, 利用(4.16′), 就求得 B 遍及球体的积分,

$$\int_{r<R}\mathbf{B}d^3x=\frac{4\pi}{3c}\int\left(\frac{R^2r_<}{r'r_>^2}\right)\mathbf{x}'\times\mathbf{J}(\mathbf{x}')d^3x' \tag{5.61}$$

式中 $r_<$, ($r_>$) 是 r' 和 R 的较小者 (较大者). 若所有电流密度都在球内, $r_<=r'$ 和 $r_>=R$. 这时

$$\int_{r<R}\mathbf{B}d^3x=\frac{8\pi}{3}\mathbf{m} \tag{5.62}$$

式中 m 是总磁矩 (5.54). 对于相反的极端情形, 即所有电流都在球外, 由(5.14)则得

$$\int_{r<R}\mathbf{B}d^3x=\frac{4\pi R^3}{3}\mathbf{B}(0) \tag{5.63}$$

可以把(5.62)和(5.63)二式与它们对应的静电学表式(4.18)和(4.19)作一比较. (5.62)与(4.18)的差别可归之于场源的差别, (4.18)的场源是电荷, 而(5.62)的场源是环形电流. 如果要使(5.62)这个结果包括在磁偶极场(5.56)中, 我们必须在(5.56)中加上 δ 函数项,

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})=\frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})-\mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3}+\frac{8\pi}{3}\mathbf{m}\delta(\mathbf{x}) \tag{5.64}$$

在原子 s 态的超精细结构表式中含有该 δ 函数项(参看下节).

5.7 定域电流分布在外磁场中所受的力、力矩和所具有的能量

如果把一定域电流分布放在磁感应强度为 B(x) 的外场中, 按照安培定律, 它要受到力和力矩的作用. (5.12)和(5.13)给出总力和总力矩的一般表式. 如果外场的磁感应强度在电流所在的区域内变化很慢, 就可以利用泰勒级数展开, 求出力和力矩的主要项. 对于适当的原点, B 的分量可以展开为:

$$B_k(\mathbf{x})=B_k(0)+\mathbf{x}\cdot\nabla B_k(0)+\cdots \tag{5.65}$$

这时力(5.12)的第 i 个分量变为

$$F_i=\frac{1}{c}\sum_{jk}\epsilon_{ijk}[B_k(0)\int J_j(\mathbf{x}')d^3x'$$

$$+\int J_j(\mathbf{x}')\mathbf{x}'\cdot\nabla B_k(0)d^3x'+\cdots] \tag{5.66}$$

这里 ϵ_{ijk} 是完全反对称单位张量(当 $i=1,j=2,k=3$ 时，或当 i,j,k 为 1,2,3的任何循环排列时，$\epsilon_{ijk}=1$；当 i,j,k 为其它排列时，$\epsilon_{ijk}=-1$；当两个或两个以上的指标相等时，$\epsilon_{ijk}=0$)．对于稳恒电流，J 的体积分等于零；力的最低阶贡献来自(5.66)中的第二项．可以利用上述结果(5.54)[用 $\nabla B_k(\mathbf{x})$ 代替 $\nabla B_k(0)$]而得

$$F_i=\sum_{jk}\epsilon_{ijk}(\mathbf{m}\times\nabla)_jB_k(\mathbf{x}) \tag{5.67}$$

在 $B_k(\mathbf{x})$ 取微分后，令 x 等于零．上式可以写成矢量形式

$$\mathbf{F}=(\mathbf{m}\times\nabla)\times\mathbf{B}=\nabla(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B})-\mathbf{m}(\nabla\cdot\mathbf{B}) \tag{5.68}$$

因为通常 $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$，所以定域电流分布在外磁场 B 中所受的最低阶作用力为

$$\mathbf{F}=\nabla(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}) \tag{5.69}$$

这个结果即使对于随时间变化的外场也成立．对于稳恒外磁场，$\nabla\times\mathbf{B}=0$．这时力可以表为另一种形式：$\mathbf{F}=(\mathbf{m}\cdot\nabla)\mathbf{B}$.

放在非均匀磁场中的定域电流分布，受到一个力的作用，这力与其磁矩 m 成正比，并由(5.69)给出．这个结果的一个简单应用就是：计算在非均匀磁场中作螺旋运动的带电粒子所受到的对时间平均的作用力．如所周知，在均匀磁场中，带电粒子沿着垂直于场的圆周，并以平行于场的恒定速度运动，画出一条螺旋线径迹．这种圆周运动对时间的平均，相当于一个圆形电流回路，这电流回路的磁矩由(5.57)给出．如果场是非均匀的，但其梯度很小(因此粒子沿螺旋线绕行一圈时所经过的场强没有显著差别)，那末可以用等效磁矩受的力来讨论粒子的运动．考虑磁矩和力的符号，可以看出，带电粒子被磁通量密度大的区域所推斥，这与粒子所带电荷的符号无关．从另一种观点看来，这就是

12.6 节里讨论的所谓"磁镜"的根据.

同样,把展开式(5.65)代入(5.13),就得到定域电流分布所受的总力矩. 展开式中的零阶项在这里有贡献. 如果只保留主要项,则得

$$\mathbf{N}=\frac{1}{c}\int\mathbf{x}'\times[\mathbf{J}\times\mathbf{B}(0)]d^3x' \tag{5.70}$$

写出三矢积,我们得

$$\mathbf{N}=\frac{1}{c}\int[(\mathbf{x}'\cdot\mathbf{B})\mathbf{J}-(\mathbf{x}'\cdot\mathbf{J})\mathbf{B}]d^3x'$$

第一个积分的处理与(5.66)的处理相同. 因此可直接写出它的值. 对定域稳恒电流分布来说,第二个积分等于零,这可以从(5.52)令 $f=g=r'$ 看出. 所以力矩中的主要项为

$$\mathbf{N}=\mathbf{m}\times\mathbf{B}(0) \tag{5.71}$$

这就是大家熟知的偶极子所受力矩的表式,在 5.1 节里曾用它作为一种定义磁感应强度的量值和方向的方法,讨论过这种力矩.

从力(5.69)或力矩(5.71)可以求得外磁场中永久磁矩(或偶极子)的势能. 如果把力表示为势能 U 的负梯度,就得

$$U=-\mathbf{m}\cdot\mathbf{B} \tag{5.72}$$

对于均匀场中的磁矩来说,可以把力矩(5.71)表示为 U 对 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{m}$ 夹角的负导数. 这种众所周知的关于偶极子势能的结果表明,偶极子有使其自身的取向与场平行的倾向,在这种状态下,势能最低.

我们顺便指出,(5.72)不是磁矩在外场中的总能量. 将磁矩为 $\mathbf{m}$ 的偶极子放入外场中,并到达其最终位置时,要使产生 $\mathbf{m}$ 的电流 $\mathbf{J}$ 保持恒定,就必须做功. 虽然最终的状态是稳恒态,可是在一开始有一段短暂的时间,在这段时间内有关的场是随时间变化的. 这些内容超出我们现在考虑的范围. 因此,把关于磁场能的讨论放到 6.2 节,该节安排在讨论了法拉第感应定律之后.

在讨论原子能级的磁效应时,如讨论塞曼效应或精细结构和超精细结构时,可以利用能量表式(5.72). 精细结构可以认为是由于电子

内禀磁矩 μ_e 在磁场中具有的能量不同引起的，这是从相对于电子静止的参照系中来看的．在第十一章里，扼要地讨论了精细结构连同微妙复杂的托马斯进动．超精细相互作用是原子核磁矩 μ_N 与电子产生的磁场的相互作用．相互作用哈密顿函数是(5.72)，其中 $\mathbf{m}=\mu_N$，$\mathbf{B}$ 等于在原子核所在位置($\mathbf{x}=0$)计算出的电子产生的磁场．这磁场包括两部分：一部分是偶极场(5.64)，另一部分是电子电荷的轨道运动所产生的磁场．按非相对论的观点，后一磁场由(5.5)给出，并且可以表示为 $\mathbf{B}_{轨道}(0)=e\mathbf{L}/mcr^3$，这里 $\mathbf{L}=\mathbf{x}\times m\mathbf{v}$ 为电子绕原子核的轨道角动量．所以超精细结构哈密顿量是

$$\mathscr{H}_{\mathrm{HFS}}=-\frac{8\pi}{3}\mu_e\cdot\mu_N\delta(\mathbf{x})+\frac{1}{r^3}\left[\mu_e\cdot\mu_N-3\frac{(\mathbf{x}\cdot\mu_e)(\mathbf{x}\cdot\mu_N)}{r^2}-\frac{e}{mc}\mathbf{L}\cdot\mu_N\right] \tag{5.73}$$

这哈密顿函数对各种原子(和原子核自旋)态的期待值给出了超精细能量移动．对于球对称的 s 态，(5.73)的第二项给出的期待值等于零．超精细能量只来自第一项：

$$\Delta E=-\frac{8\pi}{3}|\psi_e(0)|^2\langle\mu_e\cdot\mu_N\rangle \tag{5.74}$$

当 $l\neq0$ 时，由于 $l\neq0$ 的波函数在原点等于零，所以超精细能量完全来自(5.73)的第二项．这些表式最初是费密从狄喇克方程得到的(1930年)．在应用(5.73)和(5.74)时，应该记住：电荷 e 是负的，μ_e 的方向与电子自旋方向相反．氢原子 $1s$ 态的独态和三重态间的能量差(5.74)是天文物理学中著名的21厘米谱线的来源．

5.8 宏观方程组；B 和 H 的边界条件

到现在为止，我们已经把稳恒磁场的基本定律(5.26)当作绪论和第四章意义下的微观方程组处理．我们曾经假定：电流密度 $\mathbf{J}$ 是完全已知的位置函数．在宏观问题中往往不是这样．物质中的原子具有一

些电子，这些电子形成有效原子电流，有效原子电流密度是一个起伏很厉害的量．只有其对宏观体积的平均值是可知的，或者说，只有这种平均值才有确切的意义．而且，原子的电子具有内禀磁矩，这些磁矩不能用经典的电流密度来表示．这些磁矩，能产生一个在原子那么大小的范围内变化相当大的偶极场．

对微观方程求平均而得到有质媒质中磁场的宏观方程的过程，将在第六章详细讨论．正如第四章那样，本节只给出初步的推导．首先要注意到：对方程 $\nabla\cdot\mathbf{B}_{微观}=0$ 求平均，就导出形式相同的宏观磁感应强度的方程，

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \tag{5.75}$$

于是，我们仍可利用矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 的概念，$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 的旋度给出 $\mathbf{B}$．每单位体积中的大量分子或原子（每个分子或原子的磁矩为 $\mathbf{m}_i$）产生一个平均的宏观磁化强度或磁矩密度，

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})=\sum_i N_i\langle\mathbf{m}_i\rangle \tag{5.76}$$

式中 N_i 是每单位体积第 i 类分子的平均数，$\langle\mathbf{m}_i\rangle$ 是 $\mathbf{x}$ 点处一小体积中的平均分子磁矩．除了整体的磁化强度外，我们还假设有一个宏观电流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{x})$，它是由媒质中自由电子的流动产生的．因此，$\mathbf{x}'$ 点处的小体积 ΔV 产生的矢势将是

$$\Delta\mathbf{A}(\mathbf{x})=\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')\Delta V}{c\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}+\frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\Delta V$$

这是与(4.30)类似的磁学表式．第二项是偶极子矢势(5.55)．令 ΔV 变成宏观的无穷小体积元 d^3x'，$\mathbf{x}$ 点的总矢势可以写成遍及整个空间的积分，

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})=\frac{1}{c}\int\left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}+\frac{c\mathbf{M}(\mathbf{x}')\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\right]d^3x' \tag{5.77}$$

磁化强度项可以改写如下：

$$\int\frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}d^3x'=\int\mathbf{M}(\mathbf{x}')\times\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)d^3x'$$

现在通过分部积分把梯度算符作用到磁化强度上，同时还得到一个面积分．若$\mathbf{M}(\mathbf{x}')$是有理的和定域的，则面积分等于零．这时势矢(5.77)变成

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})=\frac{1}{c}\int\frac{[\mathbf{J}(\mathbf{x}')+c\nabla'\times\mathbf{M}(\mathbf{x}')]}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x' \tag{5.78}$$

我们看到磁化强度贡献一个有效磁流密度，

$$\mathbf{J}_M=c\nabla\times\mathbf{M} \tag{5.79}$$

由(5.78)可以得到微观方程$\nabla\times\mathbf{B}_{微观}=4\pi\mathbf{J}_{微观}/c$的宏观等效方程．如果方程(5.32)是(5.26)的一个解，那末(5.78)意味着：$\mathbf{J}+\mathbf{J}_M$在宏观等效方程中起着电流密度的作用，即

$$\nabla\times\mathbf{B}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}+4\pi\nabla\times\mathbf{M} \tag{5.80}$$

可以把$\nabla\times\mathbf{M}$项和$\mathbf{B}$合并而定义一个新的宏观场量$\mathbf{H}$，$\mathbf{H}$叫做磁场强度，

$$\mathbf{H}=\mathbf{B}-4\pi\mathbf{M} \tag{5.81}$$

这时，代替(5.26)的宏观方程为

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{H}&=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}\\ \nabla\cdot\mathbf{B}&=0\end{aligned}\right\} \tag{5.82}$$

引进$\mathbf{H}$作为宏观场的量，跟对静电场引进$\mathbf{D}$，完全类似．与宏观方程(5.82)对应的静电学方程为：

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{D}&=4\pi\rho\\ \nabla\times\mathbf{E}&=0\end{aligned}\right\} \tag{5.83}$$

我们要着重指出，基本场量是$\mathbf{E}$和$\mathbf{B}$．它们满足(5.82)和(5.83)中的齐次方程．为了用平均方法计算原子电荷和原子电流对ρ和$\mathbf{J}$的贡献，引进导出场量$\mathbf{D}$和$\mathbf{H}$是方便的．

为了完成宏观静磁学的描述，必须有$\mathbf{H}$和$\mathbf{B}$的本构关系式．像绪论中讨论的那样，对于各向同性的抗磁质和顺磁质来说，下列简单的线

性关系式成立:

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H} \tag{5.84}$$

式中μ是表征媒质特性的常数，叫做磁导率. 典型的μ值与1只相差十万分之几(顺磁质$\mu>1$,抗磁质$\mu<1$). 对铁磁质来说,(5.84)必须为非线性的函数关系

$$\mathbf{B}=\mathbf{F}(\mathbf{H}) \tag{5.85}$$

所代替. 磁滞现象（大意如图5.8所示)表明,B不是H的单值函数.实际上,函数F(H)与材料的来历有关.假定B与H平行，则μ(H)的增量磁导率定义为B对H的导数. 高磁导率物质的μ(H)可以高到10^6. 未处理过的大多数铁磁材料，当场很小时，其B和H间都存在线性关系(5.84). 起始磁导率的典型值介于10到10^4之间.

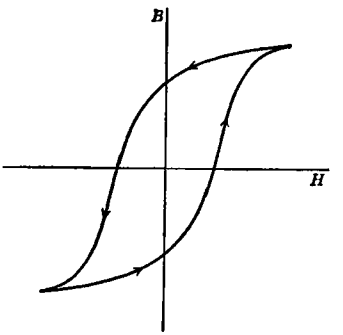


图5.8 磁滞回线，它给出铁磁材料中的B与H的函数关系.

铁磁材料中的B和H之间存在复杂关系，就使得分析磁边值问题比分析类似的静电问题要困难得多. 但是,由于磁导率数值非常大,有时可以对边界条件作出简化假设.

我们在1.5节里导出了两种媒质分界面上B和H的边界条件. 其中证明了,界面两侧B的法向分量和H的切向分量有下列关系:

$$(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)\cdot\mathbf{n}=0 \tag{5.86}$$

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\frac{4\pi}{c}\mathbf{K} \tag{5.87}$$

式中n是单位法线矢量,其方向由区域1指向区域2，K是理想化的面电流密度. 对于满足(5.84)式的线性关系的媒质来说，边界条件可以表示成

$$\mathbf{B}_2\cdot\mathbf{n}=\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{n},\quad \mathbf{B}_2\times\mathbf{n}=\frac{\mu_2}{\mu_1}\mathbf{B}_1\times\mathbf{n} \tag{5.88}$$

或

$$\mathbf{H}_2\cdot\mathbf{n}=\frac{\mu_1}{\mu_2}\mathbf{H}_1\cdot\mathbf{n},\quad \mathbf{H}_2\times\mathbf{n}=\mathbf{H}_1\times\mathbf{n} \tag{5.89}$$

如果 $\mu_1\gg\mu_2$，则 $\mathbf{H}_2$ 的法向分量远大于 $\mathbf{H}_1$ 的法向分量，如图 5-9 所示. 在极限$(\mu_1/\mu_2)\to\infty$ 下，磁场 $\mathbf{H}_2$ 与边界面垂直，且与 $\mathbf{H}_1$ 的方

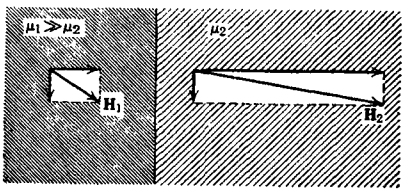


图 5.9

向无关($\mathbf{H}_1$ 完全平行于界面这种例外情形除外). 所以，在磁导率很高的材料的表面上 H 的边界条件，跟导体表面上电场的边界条件相同. 因此，我们可以把静电势理论用于磁场上. 高磁导率材料的表面是近似的"等势面"，H 线垂直于这些等势面. 这种类比在许多磁铁设计问题中用到. 先决定场的型式，然后把极面设计成等势面的形状.

5.9 静磁学边值问题的解法

静磁学的基本方程是

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0,\quad \nabla\times\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \tag{5.90}$$

以及 B 和 H 的本构关系式. 实际上可能出现多种多样的情况，所以值得概括地介绍一下求解静磁学边值问题的各种方法.

A. 普遍适用的矢势法

由于(5.90)的第一个方程，我们总可以引进一个矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$，使得

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$$

如果我们有一个明显的本构关系式 $\mathbf{H}=\mathbf{H}[\mathbf{B}]$，那末(5.90)的第二个方程可以写成

$$\nabla\times\mathbf{H}[\nabla\times\mathbf{A}]=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$

一般地说，除非 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{B}$ 有简单的关系，否则，即使电流分布是简单的，上式也是一个非常复杂的微分方程。对于满足 $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ 的线性媒质，上一方程变成

$$\nabla\times\left(\frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}\right)=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \tag{5.91}$$

如果 μ 在空间的一个有限区域中是恒定不变的，那末在该区域中(5.91)可以写成

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}=\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{J} \tag{5.92}$$

选取库仑规范($\nabla\cdot\mathbf{A}=0$)，上式就变成含有修正电流密度 $\mu\mathbf{J}$ 的(5.31)．这种情况非常类似于各向同性均匀介电媒质的处理，在均匀介电媒质的泊松方程中的有效电荷密度为 ρ/ϵ．在越过边界面时，必须用边界条件(5.88)或(5.89)把不同线性媒质中(5.92)的解配合起来．

B. $\mathbf{J}=0$; 磁标势

如果在某有限空间区域内电流密度等于零，那末(5.90)的第二个方程变成 $\nabla\times\mathbf{H}=0$．这意味着，我们可以引进一个磁标势 Φ_M，使得

$$\mathbf{H}=-\nabla\Phi_M \tag{5.93}$$

正如静电学中 $\mathbf{E}=-\nabla\Phi$ 一样．应用明显的本构关系式，即当 $\mathbf{B}=\mathbf{B}[\mathbf{H}]$ 时，$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ 这个方程可以写成

$$\nabla\cdot\mathbf{B}[-\nabla\Phi_M]=0$$

除非媒质是线性的，否则，上式又是一个非常复杂的微分方程；在线性媒质的情况下，这方程变成

$$\nabla\cdot(\mu\nabla\Phi_M)=0 \tag{5.94}$$

如果 μ 至少是区域常数，那末在每个区域中磁标势满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\Phi_M=0$$

不同区域中的解通过边界条件(5.89)而联系起来的. 要注意: 在上述的 μ 为区域常数的情况下, 我们也可以写出 $\mathbf{B}=-\nabla\Psi_M$, 这时 $\nabla^2\Psi_M=0$. 当采用标势 Ψ_M 时, 边界条件(5.88)是合适的.

磁标势的概念可以非常成功地用于闭合电流回路. 可以证明: Φ_M 与回路边界对观测点所张的立体角成正比. 参看习题 5.1. 这样一种势显然是多值的.

C. 硬铁磁体($\mathbf{M}$ 给定和 $\mathbf{J}=0$)

一种普通的实际情形是有关"硬"铁磁体的问题, 硬铁磁体的磁化强度在适当的外场场强下基本上与外场无关. 可以把这些材料看成具有固定的、已知的磁化强度 $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ 来处理.

(*a*) 标势

因为 $\mathbf{J}=0$, 可以用磁标势 Φ_M. (5.90)的第一个方程写成

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=\nabla\cdot(\mathbf{H}+4\pi\mathbf{M})=0$$

然后利用(5.93), 上式就变成静磁学的泊松方程:

$$\nabla^2\Phi_M=-4\pi\rho_M \tag{5.95}$$

式中 ρ_M 为有效磁荷密度,

$$\rho_M=-\nabla\cdot\mathbf{M} \tag{5.96}$$

当边界面不存在时, 势 Φ_M 的解是

$$\Phi_M(\mathbf{x})=-\int\frac{\nabla'\cdot\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x' \tag{5.97}$$

如果 $\mathbf{M}$ 是有理的和定域的, 那末通过分部积分可得

$$\Phi_M(\mathbf{x})=\int\mathbf{M}(\mathbf{x}')\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)d^3x'$$

然后, 可以利用

$$\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)=-\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)$$

而得

$$\Phi_M(\mathbf{x})=-\nabla\cdot\int\frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x' \tag{5.98}$$

我们顺便指出，在离磁化强度不等于零的区域很远的地方，磁标势可以近似地用下式表示之：

$$\Phi_M(\mathbf{x})\simeq-\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\int\mathbf{M}(\mathbf{x}')d^3x'$$

$$=\frac{\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}}{r^3}$$

式中 $\mathbf{m}=\int\mathbf{M}d^3x$ 是总磁矩．正像由静电学的标势表式(4.10)所看到的，上式就是一个磁偶极子的标势．所以近似地说，一任意的定域磁化强度分布要产生一个偶极场，其场强由该分布的总磁矩给出．

虽然物理上的磁化强度分布从数学上看是有理的，而且没有突变性，但有时为方便起见，把实际情形理想化，并把$\mathbf{M}(\mathbf{x})$当作不连续的来处理．因此，如果一"硬"铁磁体的体积为 V，表面为 S，那末我们就给定 V 内的 $\mathbf{M}(\mathbf{x})$，并假定 $\mathbf{M}(\mathbf{x})$在表面 S 上突然降为零．在横跨表面的高斯小圆盒上，运用散度定理于 ρ_M(5.96)上，可以证明：有一个有效的面磁荷密度，

$$\sigma_M=\mathbf{n}\cdot\mathbf{M} \tag{5.99}$$

式中 $\mathbf{n}$ 为外法线矢量．这时磁标势不是由(5.97)给出，而是由下式给出：

$$\Phi_M(\mathbf{x})=-\int_V\frac{\nabla'\cdot\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x'+\oint_S\frac{\mathbf{n}'\cdot\mathbf{M}(\mathbf{x}')da'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{5.100}$$

一个重要的特殊情形是：在整个体积 V 内具有均匀的磁化强度．这时第一项等于零；只有 σ_M 的面积分才对磁标势有贡献．

值得注意的是：(5.98)是普遍适用的，即使 $\mathbf{M}$ 是不连续分布的极限情形，因为在把(5.97)变成(5.98)以后，我们可以引用极限方法，以便讨论 $\mathbf{M}$ 的突变性．决不要把 σ_M 的面积分同(5.98)相混！

(*b*) 矢势

如果为了自动地满足 $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$，我们选取 $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$，那末(5.90)的第二个方程可写成

$$\nabla\times\mathbf{H}=\nabla\times(\mathbf{B}-4\pi\mathbf{M})=0$$

这就导出库仑规范下 $\mathbf{A}$ 的泊松方程:

$$\nabla^2\mathbf{A}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_M \tag{5.101}$$

式中 $\mathbf{J}_M$ 是有效磁流密度(5.79). 无边界面时矢势的解是

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})=\int\frac{\nabla'\times\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x' \tag{5.102}$$

正如(5.78)中已经证明的. (5.77)中的磁化项给出了矢势的另一种形式.

如果磁化强度的分布是不连续的，那末必须把一个面积分加到(5.102)中. 从(5.77)出发，可以证明: 当 $\mathbf{M}$ 在体积 V 的界面 S 上突然降为零的情况下，(5.102)的推广式为

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})=\int_V\frac{\nabla'\times\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x'+\oint_S\frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')\times\mathbf{n}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}da' \tag{5.103}$$

把 $\mathbf{H}$ 的切向分量的边界条件(5.87)用 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{M}$ 来表示，就能理解有效面磁流密度 $c(\mathbf{M}\times\mathbf{n})$. 此外，若 $\mathbf{M}$ 在整个体积内是常数，则(5.103)只剩下面积分.

5.10 均匀磁化球

为了阐明求解静磁边值问题的各种不同的方法，我们讨论图 5.10 所示的一个简单问题: 有一半径为 a 的球，其均匀永久磁化强度为 $\mathbf{M}$，$\mathbf{M}$ 的量值为 M_0，方向与 z 轴平行，这个球放在非导磁媒质中.

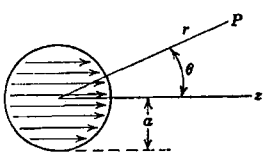


图 5.10

最简单的解法是上节 $C(a)$ 部分叙述

的那种方法，通过球坐标中的磁标势和面磁荷密度 $\sigma_M(\theta)$ 来求解. 由于 $\mathbf{M}=M_0\epsilon$ 和 $\sigma_M=\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}=M_0\cos\theta$，磁标势解(5.100)是

$$\Phi_M(r,\theta)=M_0a^2\int d\Omega'\frac{\cos\theta'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

利用距离倒数的展开式(3.38)或(3.70)，上式只剩下 $l=1$ 的项不等于零. 磁标势为

$$\Phi_M(r,\theta)=\frac{4\pi}{3}M_0a^2\frac{r_<}{r_>^2}\cos\theta \tag{5.104}$$

式中 $(r_<,r_>)$ 是 (r,a) 的较小者和较大者. 在球内，$r_<=r$ 和 $r_>=a$. 这时 $\Phi_M=(4\pi/3)M_0r\cos\theta=(4\pi/3)M_0z$. 所以球内的磁场强度和磁感应强度为

$$\mathbf{H}_{内}=-\frac{4\pi}{3}\mathbf{M},\quad \mathbf{B}_{内}=\frac{8\pi}{3}\mathbf{M} \tag{5.105}$$

要注意：$\mathbf{B}_{内}$ 是平行于 $\mathbf{M}$ 的，而 $\mathbf{H}_{内}$ 则反平行于 $\mathbf{M}$. 在球外，$r_<=a$ 和 $r_>=r$. 于是磁标势为

$$\Phi_M=\frac{4\pi}{3}M_0a^3\frac{\cos\theta}{r^2} \tag{5.106}$$

这是偶极矩为

$$\mathbf{M}=\frac{4\pi a^3}{3}\mathbf{M} \tag{5.107}$$

的一个偶极子所产生的势. 对于均匀磁化球来说，场不仅近似地具有偶极场的特性，而且都会集到球上. 对于这种(只有这种)特殊的几何形状，没有更高阶的多极子场存在.

B 线和 **H** 线如图 5.11 所示. **B** 线是连续的闭合曲线，而 **H** 线终止在球面上，因为球面上有有效面磁荷密度 σ_M.

现在利用(5.98)作一简短说明，而不用(5.100). 由于球内 $\mathbf{M}=M_0\epsilon$，(5.98)给出

$$\Phi_M(r,\theta)=-M_0\frac{\partial}{\partial z}\int_0^a r'^2dr'\int d\Omega'\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{5.108}$$

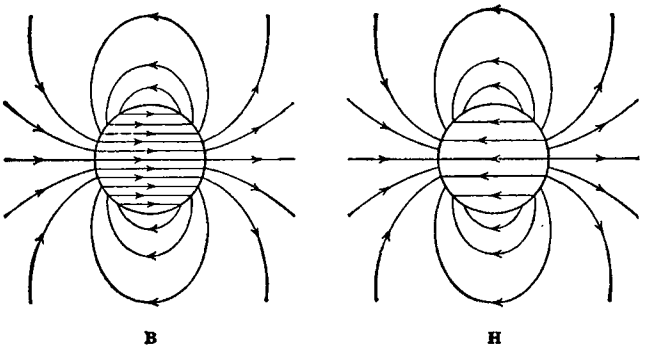


图 5.11　均匀磁化球的 **B** 线和 **H** 线. **B** 线是闭合曲线, 而 **H** 线从有效面磁"荷"密度为 σ_M 的球面上发出.

现在距离倒数的展开式中只有 $l=0$ 项使角积分不等于零,而且积分只是 r 的函数. 利用 $\partial r/\partial z=\cos\theta$,磁标势是

$$\Phi_M(r,\theta)=-4\pi M_0\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\int_0^a\frac{r'^2dr'}{r_>}$$

对 r' 积分,就直接得出 Φ_M 的表式(5.104).

借助于矢势和(5.103)可以求得另一种解. 因为 **M** 在球内是均匀的,所以体磁流密度 $\mathbf{J}_M$ 等于零, 但是面积分对矢势是有贡献的. 由于 $\mathbf{M}=M_0\epsilon$,我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\times\mathbf{n}'&=M_0\sin\phi'\epsilon_\phi\\&=M_0\sin\theta'(-\sin\phi'\epsilon_1+\cos\phi'\epsilon_2)\end{aligned}$$

因为本问题是轴对称的, 我们可以选取观测点在 x-z 平面($\phi=0$)上,正如 5.5 节一样. 这时, 只有 $\mathbf{M}\times\mathbf{n}$ 的 y 分量对方位角的积分不等于零,并给出矢势的 ϕ 分量为

$$A_\phi(\mathbf{x})=M_0a^2\int d\Omega'\frac{\sin\theta'\cos\phi'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\qquad(5.109)$$

式中 $\mathbf{x}'$ 的坐标为(a,θ',ϕ'). 角因子可以写做

$$\sin\theta'\cos\phi' = -\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\mathrm{Re}[Y_{1,1}(\theta,\phi)] \tag{5.110}$$

于是，利用$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}$展开式(3.70)，就只剩下$l=1$，$m=1$项不等于零．因此，

$$A_\phi(\mathbf{x}) = \frac{4\pi}{3}M_0 a^2\left(\frac{r_<}{r_>^2}\right)\sin\theta \tag{5.111}$$

式中$r_<(r_>)$是r和a的较小者(较大者)．由于$\mathbf{A}$只有ϕ分量，磁感应强度$\mathbf{B}$的分量由(5.38)给出．如同以前所求得的，方程(5.111)显然在球内给出均匀的$\mathbf{B}$，而在球外给出偶极场．

5.11 外磁场中的磁化球；永久磁铁

在5.10节里，我们讨论了均匀磁化球产生的场．因为场方程是线性方程，我们可以在全空间迭加一均匀的磁感应强度为$\mathbf{B}_0=\mathbf{H}_0$的外磁场．于是问题就变为外场中的均匀磁化球的问题了．由(5.105)我们知道，现在球内的磁感应强度和磁场强度为

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{B}_{内} &= \mathbf{B}_0 + \frac{8\pi}{3}\mathbf{M}\\ \mathbf{H}_{内} &= \mathbf{B}_0 - \frac{4\pi}{3}\mathbf{M}\end{aligned}\right\} \tag{5.112}$$

如果这个球不是永久磁化体，而是磁导率为μ的顺磁质或抗磁质．那末，磁化强度$\mathbf{M}$就是由所加入的外场而引起的结果．我们用(5.84)

$$\mathbf{B}_{内} = \mu\mathbf{H}_{内} \tag{5.113}$$

求$\mathbf{M}$的量值．于是

$$\mathbf{B}_0 + \frac{8\pi}{3}\mathbf{M} = \mu\left(\mathbf{B}_0 - \frac{4\pi}{3}\mathbf{M}\right) \tag{5.114}$$

上式给出磁化强度为

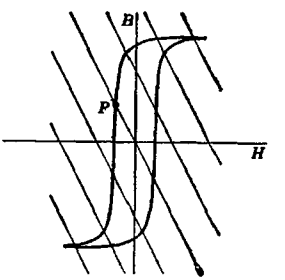


图 5.12

$$\mathbf{M}=\frac{3}{4\pi}\left(\frac{\mu-1}{\mu+2}\right)\mathbf{B}_0 \tag{5.115}$$

我们注意到，上式与均匀电场中电介质球的电极化强度 P(4.57)完全类似.

上面这一段论证对铁磁质无效. 方程(5.115)意味着，当外场等于零时，磁化强度等于零. 有永久磁铁存在时，就和这个结果相抵触. 非线性关系(5.85)和磁滞现象使得永久磁铁的制造成为可能的事情. 我们从方程(5.112)消去 M，可得 $\mathbf{H}_{内}$ 与 $\mathbf{B}_{内}$ 的关系:

$$\mathbf{B}_{内}+2\mathbf{H}_{内}=3\mathbf{B}_0 \tag{5.116}$$

磁滞曲线提供 $\mathbf{B}_{内}$ 与 $\mathbf{H}_{内}$ 的另一个关系，于是可以求得在任何外场下的特定值. 方程(5.116)在磁滞图上相当于斜率为 -2，y 轴上截距为 $3B_0$ 的直线，如图 5.12 所示. 例如，我们假定：增大外场强度，一直到铁磁球的磁化达到饱和为止，然后减弱外场到零. 这时球内的 B 和 H 是由图 5.12 中标以 P 的点给出. 由(5.112)，令 $\mathbf{B}_0=0$，就可以求得磁化强度.

$\mathbf{B}_{内}$ 和 $\mathbf{H}_{内}$ 的关系(5.116)是球所特有的. 对于其它几何形状来说，要遵守别的关系. 我们可以严格地解出椭球问题，并且可以证明，(5.116)的诸直线的斜率介于零和$-\infty$之间，零是对于平盘形的斜率，$-\infty$是对于长针形的斜率. 所以用棒形磁体比用球形或扁球形磁体可以获得较大的内磁感应强度.

5.12 磁屏蔽；放在均匀磁场中的用导磁材料做成的球壳

设在真空区域里最初有磁感应强度 $\mathbf{B}_0$. 现在把一个导磁物体放在这个区域里，磁感应线就发生畸变. 根据 5.8 节末我们对磁导率很高的媒质所作的论述，可以预料，磁感应线应与磁体表面垂直. 而且与导体类似，如果该磁体是空心的，则可以预料，空腔内的场将比外场弱，并在 $\mu\to\infty$ 的极限情形下等于零. 我们就说，空腔内的场的减弱是

由于导磁材料的磁屏蔽所造成的结果. 这种现象在实用上相当重要，因为由于实验目的的要求，或使电子装置工作可靠，往往必须有或希望有根本不存在场的区域.

作为磁屏蔽现象的一个实例，我们考虑一个内(外)半径为 $a(b)$ 的球壳，这球壳是用磁导率为 μ 的材料做成的，并放在本来具有均匀恒定磁感应强度 $\mathbf{B}_0$ 的磁场中，如图 5.13 所示. 我们希望求得空间各处的场 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$，特别是空腔内($r<a$)的场，把这些场表成 μ 的函数. 因为没有电流存在，磁场强度 $\mathbf{H}$ 可以从标势导出，$\mathbf{H}=-\nabla\Phi_M$. 而且，因为 $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$，所以在各个区域内，散度方程 $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ 都变为 $\nabla\cdot\mathbf{H}=0$. 于是，势 Φ_M 处处满足拉普拉斯方程. 问题就转化为：求在不同区域中的特解，这些解在 $r=a$ 和 $r=b$ 处满足边界条件(5.89).

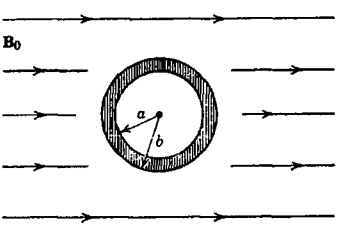


图 5.13

当 $r>b$ 时，为了在远处给出均匀场 $\mathbf{H}=\mathbf{B}=\mathbf{B}_0$，势一定要具有下列形式：

$$\Phi_M=-B_0r\cos\theta+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta) \tag{5.117}$$

在内区域，势一定是

$$\left.\begin{aligned} a<r<b \qquad & \Phi_M=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\beta_l r^l+\gamma_l\frac{1}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta) \\ r<a \qquad & \Phi_M=\sum_{l=0}^{\infty}\delta_l r^l P_l(\cos\theta) \end{aligned}\right\} \tag{5.118}$$

$r=a$ 和 $r=b$ 处的边界条件为：H_θ 和 B_r 是连续的. 用势 Φ_M 来表示，这些边界条件则变为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_M}{\partial\theta}(b_+)&=\frac{\partial\Phi_M}{\partial\theta}(b_-) \qquad \frac{\partial\Phi_M}{\partial\theta}(a_+)=\frac{\partial\Phi_M}{\partial\theta}(a_-)\\ \frac{\partial\Phi_M}{\partial r}(b_+)&=\mu\frac{\partial\Phi_M}{\partial r}(b_-) \quad \mu\frac{\partial\Phi_M}{\partial r}(a_+)=\frac{\partial\Phi_M}{\partial r}(a_-)\end{aligned}\right\} \tag{5.119}$$

符号 $b_\pm$ 分别表示从 $r\gtrless b$ 趋近于极限 $r\to b$; 符号 $a_\pm$ 有类似意义. 这四个条件对一切 θ 角都成立, 用这四个条件足以定出(5.117)和(5.118)中的未知常数. 所有 $l\neq1$ 的系数都等于零. $l=1$ 的系数满足四个联立方程

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1-b^3\beta_1-\gamma_1&=b^3B_0\\ 2\alpha_1+\mu b^3\beta_1-2\mu\gamma_1&=-b^3B_0\\ a^3\beta_1+\gamma_1-a^3\delta_1&=0\\ \mu a^3\beta_1-2\mu\gamma_1-a^3\delta_1&=0\end{aligned}\right\} \tag{5.120}$$

α_1 和 δ_1 的解为

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=\left[\frac{(2\mu+1)(\mu-1)}{(2\mu+1)(\mu+2)-2\dfrac{a^3}{b^3}(\mu-1)^2}\right](b^3-a^3)B_0\\ \delta_1&=-\left[\frac{9\mu}{(2\mu+1)(\mu+2)-2\dfrac{a^3}{b^3}(\mu-1)^2}\right]B_0\end{aligned}\right\} \tag{5.121}$$

球壳外的势相当于均匀场 $\mathbf{B}_0$ 加偶极场(5.41), 后者的偶极矩 α_1 取向与 $\mathbf{B}_0$ 平行. 空腔内部有一方向与 $\mathbf{B}_0$ 平行, 量值等于 $-\delta_1$ 的均匀磁场. 当 $\mu\gg1$ 时, 偶极矩 α_1 和内部场 $-\delta_1$ 变为

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&\to b^3B_0\\ -\delta_1&\to\frac{9}{2\mu\left(1-\dfrac{a^3}{b^3}\right)}B_0\end{aligned}\right\} \tag{5.122}$$

我们看到, 内部场与 μ^{-1} 成正比. 因此, 采用 $\mu\sim10^3$ 到 10^6 的强导磁材料来做屏蔽, 就能使其内部的场大大减弱, 甚至用比较薄的壳就行. 图 5.14 表示 B 线的分布情况. 这些 B 线尽可能穿过导磁媒质.

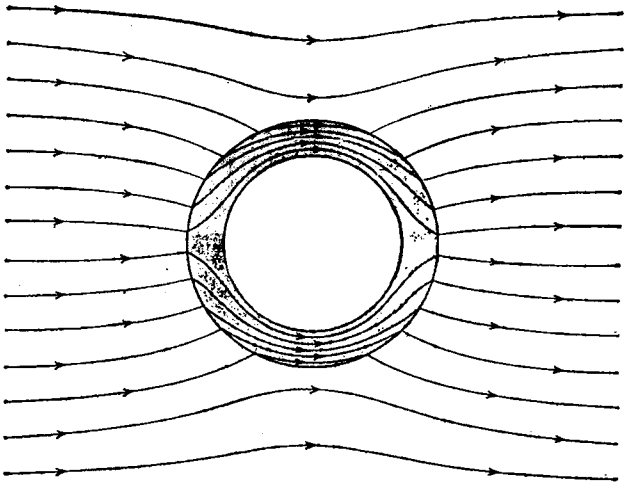


图 5.14　强导磁材料的球壳的屏蔽效应.

5.13　在一侧有渐近均匀切向磁场时理想导电平面上的一个圆孔的效应

3.13 节里讨论了在有渐近均匀法向电场时导电平面上的一个圆孔的静电问题. 其对应的磁学问题是一渐近均匀的切向磁场. 在处理波导和谐振腔上的小孔时，这两个实例是有用的(参看 9.5 节).

在简要地讨论静磁边值问题之前，我们必须讨论理想导体的含义. 静磁场要透入导体，甚至透入优良导体. 导体使静磁场畸变，只是由于其磁学性质，而不是由于其导电性，当然，除非导体内部有电流流动. 随时间变化的场往往另当别论. 8.1节里证明了：导体和非导体的分界面处，对时间有谐和函数关系的场透入导体的深度只有 $\delta=(c^2/2\pi\omega\sigma)^{1/2}$ 数量级，这里 ω 是频率，σ 是电导率. 因此，对于任意的不等于零的 ω，当 $\sigma\to\infty$时，趋层深度 $\delta\to0$. 理想导体内部不存在振荡电场和振荡磁

场. 把理想导体的静磁问题定义为当 $\omega\to 0$ 时谐和变化场的极限情形，倘若同时 $\omega\sigma\to\infty$. 这时导体外部可以有磁场存在，并终止于导体表面，但导体内部不存在磁场. 边界条件(5.86)和(5.87)表明：在导体表面上 $\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}=0$，$\mathbf{n}\times\mathbf{H}=4\pi\mathbf{K}/c$. 这些静磁边界条件是与导体表面上静电边界条件 $\mathbf{E}_{\text{切向}}=0$，$\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}=4\pi\sigma$ 相对应的，在后一关系式中的 σ 是面电荷密度，不是电导率！

我们考虑一理想导电平面，它位于 $z=0$ 平面上，在该导电平面上有一个半径为 a、中心在原点处的圆孔，如图 5.15 所示. 为简单起见，我们假定：该平面周围是均匀的各向同性的线性媒质，同时在 $z>0$ 区域内，远离孔处有一平行于 y 方向的均匀切向磁场 $\mathbf{H}_0$，而在 $z<0$ 区域内，磁场近似地等于零. 由线性叠加法可以得到其它各种可能情形. 因为除 $z=0$ 表面外，没有电流存在，所以可用 $\mathbf{H}=-\nabla\Phi_M$，其中磁标势 $\Phi_M(\mathbf{x})$ 满足带适当混合边界条件的拉普拉斯方程. 这时可用类似于 3.13 节的方法来求解.

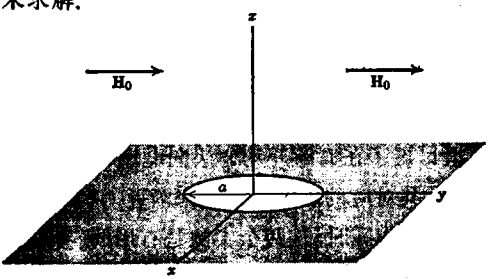


图 5.15

把磁标势写做

$$\Phi_M(x)=\begin{cases}-H_0y+\Phi^{(1)} & \text{当 } z>0 \text{ 时}\\ -\Phi^{(1)} & \text{当 } z<0 \text{ 时}\end{cases}\qquad(5.123)$$

附加势 $\Phi^{(1)}$ 在平面下方之所以改变符号，是由于附加场的对称性质—$H_x^{(1)}$ 和 $H_y^{(1)}$ 是 z 的奇函数，而 $H_z^{(1)}$ 和 $\Phi^{(1)}$ 是 z 的偶函数. 这可以从

(5.14)推断的，我们知道有效电流仅仅在 $z=0$ 表面上，而决定磁标势 $\Phi^{(1)}$ 的是有效磁荷密度.

由(3.110)，在柱坐标中附加势可以写成

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{x})=\int_0^\infty dkA(k)e^{-k|z|}J_1(k\rho)\sin\phi \tag{5.124}$$

因为孔是柱对称的，式中只有 $m=1$ 项，而渐近场按 $y=\rho\sin\phi$ 而变化. 根据 B 的法向分量和 H 的切向分量的边界条件，我们得到总势 Φ_M 的边界条件是:

(*a*) 当 $0\leqslant\rho<a$ 时，Φ_M 连续地越过 $z=0$ 平面;

(*b*) 当 $a<\rho<\infty$ 时，在 $z=0$ 平面处，$\dfrac{\partial\Phi_M}{\partial z}=0$.

这些必要条件就是下列两个积分方程:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty dk\,A(k)J_1(k\rho)=H_0\rho/2 \qquad \text{当 } 0\leqslant\rho<a \text{ 时}\\&\int_0^\infty dk\,kA(k)J_1(k\rho)=0 \qquad \text{当 } a<\rho<\infty \text{ 时}\end{aligned}\right\} \tag{5.125}$$

这两个积分方程与静电学方程组(3.178)或(3.179)有密切关系，但又不同于这些方程组. 这里需要用到下面一对积分方程:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty dy\,g(y)J_n(yx)=x^n, \quad \text{当 } 0\leqslant x<1 \text{ 时}\\&\int_0^\infty dy\,yg(y)J_n(yx)=0, \quad \text{当 } 1<x<\infty \text{ 时}\end{aligned}\right\} \tag{5.126}$$

其解为

$$g(y)=\frac{2\Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}j_n(y)=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2}{y}\right)^{1/2}J_{n+\frac{1}{2}}(y) \tag{5.127}$$

在(5.125)中，我们有 $g=2A(k)/H_0a^2$，$n=1$，$x=\rho/a$ 和 $y=ka$.

所以，

$$A(k)=\frac{2H_0a^2}{\pi}j_1(ka) \tag{5.128}$$

因此，附加势是

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{x})=\frac{2H_0a^2}{\pi}\int_0^\infty dk j_1(ka)e^{-k|z|}J_1(k\rho)\sin\phi \qquad (5.129)$$

采用与3.13节相似的方法可以证明：远离孔处附加势具有下列渐近形式：

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{x})\to\frac{2H_0a^3}{3\pi}\cdot\frac{y}{r^3} \qquad (5.130)$$

这是一个偶极子所产生的势，这偶极子取向平行于 y 的方向，即平行于 $\mathbf{H}_0$ 的方向．由于(5.123)中的正负号，这圆孔在远处等效于一个磁矩为

$$\mathbf{m}=\pm\frac{2a^3}{3\pi}\mathbf{H}_0 \qquad \text{当 } z\gtrless 0 \text{ 时} \qquad (5.131)$$

的偶极子，式中 $\mathbf{H}_0$ 是无孔时在平面的 $z=0^+$ 那一侧的切向磁场．图9.4从定性上表明磁场线是如何畸变而产生偶极场的．在圆孔本身所在处($z=0, 0\leqslant\rho<a$)，磁场的切向和法向分量是

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{H}_{\text{切向}}&=\frac{1}{2}\mathbf{H}_0\\ H_z(\rho,0)&=\frac{2H_0}{\pi}\frac{\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\sin\phi\end{aligned}\right\} \qquad (5.132)$$

同3.13节中对应的静电问题比较，就可以看出它们的异同．概略地说，这两种场的切向分量和法向分量所起的作用对换了一下．它们的有效偶极子都指向渐近场的方向，但当场强数值相同时，磁矩(5.131)比静电矩(3.183)大一倍．对于任意形状的孔，在静电情形下，远处场仍是一个垂直于平面的偶极子所产生的场，而在磁学情形下有效偶极子则位于平面内，但是现在磁偶极子的方向既依赖于场的方向，又依赖于孔的取向(孔具有各向异性的磁化率)．

参考书和推荐读物

若以电流密度代替电位移，以电导率代替介电常数，则广延的电阻媒质中的

稳恒电流问题就与静电势问题类似. 但是边界条件通常是不同的. 论述稳恒电流的有:

Jeans, 第九章和第十章;

Smythe, 第六章.

讨论由给定电流分布产生的磁场和静磁学中的边值问题, 并有大量例题的有:

Durand, 第十四章和第十五章;

Smythe, 第七章和第十二章.

磁性的原子理论完全属于量子力学的范畴. 对磁性作半经典讨论的有:

Abraham and Becker, 第二卷, 第 29—34 节;

Durand, 第 551—573 页和第十七章;

Landau and Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media* (中译本, 朗道和栗弗席兹著:《连续媒质电动力学》);

Rosenfeld, 第四章.

有关磁学(包括晶体学的一些内容和铁磁畴问题)的更详细论述, 可以在下列书中找到:

Bates;

Brailsford;

Kittel;

Ziman, 第十章.

关于合金的磁性以及其它的实用知识和理论, 有下列一本内容广博的参考书:

R. M. Bozorth, *Ferromagnetism*, Van Nostrand, New York, (1951).

习 题

5.1 $\mathbf{x}'$ 处的电流元 $Id\mathbf{l}'$ 在坐标为 $\mathbf{x}$ 的 P 点处产生的磁感应强度的微分表式为

$$d\mathbf{B}=\frac{I}{c}d\mathbf{l}'\times\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}$$

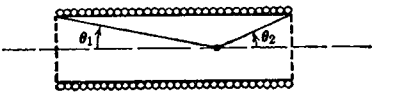
从上式出发, 直接证明: 载电流 I 的闭合回路在观测点 P 产生的磁感应强度为

$$\mathbf{B}=\frac{I}{c}\nabla\Omega$$

式中Ω是回路对P点所张的立体角，这磁感应强度对应的磁标势为$\Phi_M=-I\Omega/c$. 立体角的正负号规定如下：当P点对着回路所围成的曲面的"内"侧时，Ω是正的，即是说，如果通过右手法则按电流方向来规定曲面的单位法线矢量$\mathbf{n}$，则当$\mathbf{n}$指向离开P点的方向时，Ω为正，反之为负. 这条规定与1.6节中电偶层的规定相同.

5.2 (*a*) 试对每单位长度匝数为N、载电流I的螺线管，证明：轴上的磁通量密度近似地由下式给出

$$B_z=\frac{2\pi NI}{c}(\cos\theta_1+\cos\theta_2)$$



(*a*)

习题 5.2

式中的角度是按下图规定的.

(*b*) 试对长度为L，半径为a的长螺线管，证明：在螺线管轴附近和螺线管中心附近，磁感应强度大抵与轴平行，但有一小的径向分量

$$B_\rho\simeq\frac{96\pi NI}{c}\left(\frac{a^2z\rho}{L^4}\right)$$

当$z\ll L$, $\rho\ll a$时，上式成立，准确到a^2/L^2数量级. 坐标z是从轴的中点量起的，螺线管两端位于$z=\pm L/2$处.

(*c*) 证明：在长螺线管末端，轴附近的磁感应强度有下列分量

$$B_z\simeq\frac{2\pi NI}{c},\quad B_\rho\simeq\pm\frac{\pi NI}{c}\left(\frac{\rho}{a}\right)$$

5.3 在半径为a的圆柱形导体内挖一个半径为b的空腔，空腔的轴与圆柱体的轴平行，并与圆柱体的轴相距为$d(d+b<a)$. 电流密度均匀分布在该圆柱体的剩余金属内部，且与轴平行. 利用安培定律和线性叠加原理，求空腔内磁通量密度的量值和方向.

5.4 半径为a的、载电流I的圆形电流回路，位在x-y平面上，其中心在原点处.

(*a*) 证明：矢势只有一个不等于零的分量，即

$$A_\phi(\rho,\ z)=\frac{4Ia}{c}\int_0^\infty dk\cos kz I_1(k\rho_<)K_1(k\rho_>)$$

式中$\rho_<(\rho_>)$是a和ρ的较小者(较大者).

(*b*) 证明A_ϕ的另一种表式为

$$A_\phi(\rho, z)=\frac{2\pi Ia}{c}\int_0^\infty dke^{-k|z|}J_1(ka)J_1(k\rho)$$

(*c*) 用(*a*)和(*b*)的表式写出磁感应强度分量的积分表式. 通过必要的积分, 直接算出 z 轴上的 **B** 的诸分量的值.

5.5 一载电流 I 的圆形导线回路, 其中心位于坐标原点, 回路平面的法线具有球面角 θ_0, ϕ_0. 有一外磁场: $B_x=B_0(1+\beta y)$ 和 $B_y=B_0(1+\beta x)$.

(*a*) 不用作任何近似, 计算回路所受的作用力. 把你的结果同近似结果(5.69)比较. 并加以讨论.

(*b*) 计算最低阶的转矩. 你能够对更高阶项的贡献作出一些推论吗? 对圆形回路来说这些更高阶项等于零吗? 对其它形状回路来说, 等于什么?

5.6 有两个同心圆形回路, 其半径分别为 $a, b(b<a)$, 载电流为 I, I', 这两个回路平面的夹角为 α. 证明: 其中一个回路所受的转矩, 其指向几乎为两回路平面的交线, 其量值为:

$$N=\frac{2\pi^2 II'b^2}{ac^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{(2n+1)}\left[\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+2)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right]^2\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}P_{2n+1}^1(\cos\alpha)$$

式中 $P_{2n+1}^1(\cos\alpha)$ 为缔合勒让德多项式. 求当 α 为锐角, 且电流方向相同(相反)时的转矩的指向.

5.7 在半径为 a 的球面上有均匀面电荷分布 σ. 这球绕一直径以恒定角速度 ω 转动. 试求球内外的矢势和磁通量密度.

5.8 一个长的中空正圆柱体, 内(外)半径为 $a(b)$, 相对磁导率为 μ, 放在原先具有均匀磁通量密度 $\mathbf{B}_0$ 的区域中, 并与磁场垂直. 试求空间各点的磁通量密度, 画出: 当 $a^2/b^2=0.5$, 0.1 时, 圆柱体轴上的 **B** 和 $\mathbf{B}_0$ 的量值比的对数与 $\log_{10}\mu$ 的函数关系图. 不计末端效应.

5.9 有一块用磁导率为 μ 的材料做成的半无限厚的板, 这块板填满 $z<0$ 的半空间, 在板近旁有磁导率等于 1 的媒质, 在媒质里有电流分布 $\mathbf{J}(\mathbf{x})$.

(*a*) 证明: 若以像电流分布 $\mathbf{J}^*$ 代替磁导率为 μ 的媒质, 则可算出 $z>0$ 区域内的磁感应强度. $\mathbf{J}^*$ 的分量为

$$\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)J_x(x,y,-z),\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)J_y(x,y,-z),-\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)J_z(x,y,-z)$$

(*b*) 证明: 在 $z<0$ 区域内的磁感应强度好像是由于在磁导率为 1 的媒质里电流分布 $\left(\frac{2\mu}{\mu+1}\right)\mathbf{J}$ 所产生的.

5.10 一圆形导线回路，其半径为 a，载电流为 I，放在真空中，其中心与磁导率为 μ 的半无限厚的板相距为 d. 试求在下列三种情形下，回路所受的作用力：

(a) 回路平面与板面平行；

(b) 回路平面与板面垂直；

(c) 当 $d \gg a$ 时，定出你的(a)与(b)答案的极限形式. 你能用某种简单而直接的方法求得这些极限值吗？

5.11 将一块"硬"磁性材料做成一个长为 L，半径为 a 的正圆柱体. 这圆柱体具有永久磁化强度 M_0，M_0在圆柱体内处处均匀，其方向与圆柱体轴平行.

(a) 试定出在圆柱体内和圆柱体外的轴上各点的磁场强度 $\mathbf{H}$ 和磁感应强度 $\mathbf{B}$；

(b) 画出当 $L/a=5$ 时，轴上的 $\mathbf{B}/4\pi M_0$ 和 $\mathbf{H}/4\pi M_0$ 这两比值与 z 的函数关系曲线.

5.12 (a) 已知以曲面 S 为界的体积 V 内的磁化强度 $\mathbf{M}$，等效于体磁流密度 $\mathbf{J}_M = c(\nabla \times \mathbf{M})$ 和面磁流密度 $c(\mathbf{M} \times \mathbf{n})$，试从这一事实和力方程(5.12)出发，证明：当没有宏观传导电流存在时，可以把物体所受的总磁力写成

$$\mathbf{F} = -\int_V (\nabla \cdot \mathbf{M})\mathbf{B}_e d^3x + \int_S (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})\mathbf{B}_e da$$

式中 $\mathbf{B}_e$ 是外场的磁感应强度(不包括该物体产生的磁感应强度). 把这力用有效体磁荷密度 ρ_M 和面磁荷密度 σ_M 来表示. 如果磁化强度的分布没有突变，那末曲面可能是在无穷远处，而这力正好由体积分给出.

(b) 半径为 R 的均匀磁化球，其球心在坐标原点上，其磁化强度的方向由球坐标角 θ_0，ϕ_0 定出. 如果外场跟习题 5.5 中的相同，利用(a)中的展开式，计算球所受作用力的诸分量.

5.13 设一静磁场完全是由定域的永久磁化强度分布所产生的.

(a) 证明：

$$\int \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} d^3x = 0$$

倘若该积分是遍及全空间.

(b) 试从外场中的偶极子的势能(5.72)出发，证明：对于连续的永久磁化强度分布来说，除了附加常数外，其静磁能可以写成

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}\, d^3x = -\frac{1}{2}\int \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} d^3x$$

该附加常数与组成这种分布的各磁化物体的方位无关.

5.14 设有一长直棒，具有均匀横截面积 A，且有均匀的纵向磁化强度 M，通常当棒的平滑的一端对着无穷大导磁平面放置时，棒将受到力的作用而紧贴在该平面上，试证该力近似地由下式给出

$$F \simeq 2\pi AM^2$$

把你的讨论同 1.11 节的静电学的论证联系起来.

5.15 一长为 L、半径为 a 的正圆柱体，具有均匀的纵向磁化强度 M.

(*a*) 证明：当把它的平滑的一端对着无穷大导磁平面放置时，它将受到力的作用而紧贴在该平面上，这力为

$$F = 8\pi aLM^2\left[\frac{K(k)-E(k)}{k} - \frac{K(k_1)-E(k_1)}{k_1}\right]$$

式中

$$k = \frac{2a}{\sqrt{4a^2+L^2}}, \quad k_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+L^2}}$$

(*b*) 如果 $L \gg a$，试求力的极限形式.

5.16 (*a*) 设有 5.13 节中的带圆孔的理想导电平面，在平面的一侧有渐近均匀切向磁场 $\mathbf{H}_0$，计算在该平面的有磁场 $\mathbf{H}_0$ 那一侧的附加切向磁场 $\mathbf{H}^{(1)}$. 证明：当 $\rho > a$ 时，其分量为

$$H_x^{(1)} = \frac{2H_0a^3}{\pi}\frac{xy}{\rho^4\sqrt{\rho^2-a^2}}$$

$$H_y^{(1)} = \frac{2H_0a^3}{\pi}\frac{y^2}{\rho^4\sqrt{\rho^2-a^2}} + \frac{H_0}{\pi}\left[\frac{a}{\rho}\sqrt{1-\frac{a^2}{\rho^2}} - \sin^{-1}\left(\frac{a}{\rho}\right)\right]$$

(*b*) 画出在该平面两侧，圆孔附近的面电流线图.

第六章　随时间变化的场，麦克斯韦方程组，守恒定律

我们在前几章里论述了电学和磁学中的稳恒态问题．我们虽然用了相似的数学方法，但把电现象和磁现象当作相互独立的现象来处理．两者之间唯一的联系在于如下事实：从根本上说，磁场是由电流产生的，电流就是运动的电荷．当我们考虑与时间有关的问题时，电现象和磁现象的几乎独立的性质便会消失．随时间变化的磁场会产生电场，反之亦然．这时我们必须说电磁场，而不能说电场或磁场．只有在狭义相对论（第十一章）的范畴里，电场和磁场的相互联系的全部含义，以及两者在本质上的同一性，才能昭然若揭．目前，我们只是先满足于研究基本现象，并导出一组描述电磁场特性的方程，即所谓麦克斯韦方程组．其次我们讨论矢势和标势、规范变换以及波动方程的格临函数．接着阐述宏观电磁学方程的严格推导．然后我们论述能量守恒定律、动量守恒定律、电磁量的变换性质以及磁单极这个有趣课题．

因为我们希望着手讨论其他问题，所以略去不少本身虽然有趣，但可以在别的地方学到的课题．其中包括准稳场、电路理论（只是在6.10节里叙述了用场的概念定义的阻抗和导纳）、电感计算、涡流和感应加热．所有这些课题都没有涉及本章和前几章以外的新概念．有兴趣的读者可在本章末找到有关的参考书．

6.1　法拉第感应定律

法拉第（1831年）在研究置于随时间变化的磁场内的电路中电流特性的实验里，第一次定量地观测了随时间变化的电场和随时间变化的

磁场的关系．法拉第观察到一个电路在下列情况下会感生瞬变电流：(*a*)如果接通或断开一个邻近电路的稳恒电流；(*b*)如果邻近的一个载有稳恒电流的电路相对于第一个电路运动；(*c*)如果将一根永久磁铁插入或抽出电路．除非邻近的电流有变化或者有相对运动，否则第一个电路中就没有电流流动．法拉第把瞬变电流解释为被电路所环绕的磁通量的变化所引起的．变化的磁通量在电路周围感生一个电场，该电场强度的线积分叫做电动势$\mathscr{E}$．根据欧姆定律，这电动势引起电流．

现在我们用定量的数学术语，来表达法拉第的观测结果．假设电路C围成一个单位法线矢量为$\mathbf{n}$的开曲面S，如图 6.1 所示．电路附近的磁感应强度是$\mathbf{B}$．穿过电路的磁通量由下式确定：

$$F=\int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}da \qquad (6.1)$$

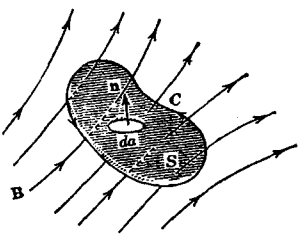


图 6.1

沿着整个电路的电动势为

$$\mathscr{E}=\oint_C \mathbf{E}'\cdot d\mathbf{l} \qquad (6.2)$$

式中$\mathbf{E}'$是电路C上线元$d\mathbf{l}$处的电场．法拉第的观测结果可总结为下列数学形式的定律：

$$\mathscr{E}=-k\frac{dF}{dt} \qquad (6.3)$$

即电路上的感生电动势与穿过电路的磁通量随时间的变化率成正比．式中的符号按楞次定律规定，这个定律说：感生电流(以及伴随的磁通量)是沿这样的方向，使之对抗穿过电路的磁通量的变化．

比例常数k取决于所选取的电场量和磁场量的单位．它不是(像人们最初所想象的)一个从实验确定的独立的经验常数．我们马上会看到，安培定律中的单位和量纲一旦选定，便可以从法拉第定律的伽利略不变性的假定推出k的数值和量纲．在高斯单位制中，$k=c^{-1}$，c是

光速.

在狭义相对论发现之前(甚至在此以后,在处理相对速率比光速小得多的情况时),所有物理学家都公认(虽然不经常明确说出),物理定律在伽利略变换下应该是不变的.也就是说,两个以恒定速度 $\mathbf{v}$ 作相对运动的观察者看到的物理现象是一样的,只要这两组空间坐标和时间坐标的关系遵从伽利略变换: $\mathbf{x}'=\mathbf{x}+\mathbf{v}t, t'=t$. 下面专门研究法拉第的观测. 法拉第的观测预期了并从实验上证实了: 无论是一个载电流的初级电路保持静止,而一个次级电路在运动;或者是次级电路静止,而载电流的初级电路作同样的相对运动,在次级电路中感生的电流是相同的.

现在讨论一个运动电路的法拉第定律,并察看伽利略不变性的后果. 用 $\mathbf{E}'$ 和 $\mathbf{B}$ 的积分表示(6.3),则有

$$\oint_C \mathbf{E}'\cdot d\mathbf{l} = -k\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}da \tag{6.4}$$

即感生电动势与磁通量(可以借改变磁感应强度或改变电路的形状、取向或位置使磁通量变化)对时间的全导数成正比. 式(6.4)是法拉第定律的推广. 我们可以认为积分回路 C 是空间中任一闭合几何图线,它不需与某个电路吻合. 于是(6.4)就变成场与场之间的关系式. 不过,值得注意,电场 $\mathbf{E}'$ 是在对 $d\mathbf{l}$ 静止的坐标系或媒质中 $d\mathbf{l}$ 处的电场,因为,当确实存在一个电路时,它就是引起电流的场.

如果回路 C 正以速度 $\mathbf{v}$ 沿某一方向运动,如图 6.2 所示,那么(6.4)里的时间全导数必须计及这个运动. 通过回路的磁通量可能发生变化,因为(*a*)在某一点上,磁通量随时间变化,或(*b*)回路的平移改变了边界的位置. 容易证明,通过运动回路的磁通量的时间全导数是①

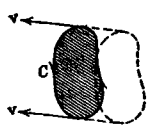


图 6.2

$$\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}da=\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{n}da+\oint_C(\mathbf{B}\times\mathbf{v})\cdot d\mathbf{l} \tag{6.5}$$

现在，可以把方程(6.4)写成下列形式

$$\oint_C[\mathbf{E}'-k(\mathbf{v}\times\mathbf{B})]\cdot d\mathbf{l}=-k\int_S\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{n}da \tag{6.6}$$

这个公式与用于运动回路 C 的法拉第定律是等效的．但是，可以给它以另一种解释．我们可以认为回路 C 和曲面 S 在某一瞬间处在实验室空间的某一位置上．把法拉第定律(6.4)用到这个不动的回路上，可得

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=-k\int_S\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{n}da \tag{6.7}$$

式中的 $\mathbf{E}$ 如今是实验室中的电场了．伽利略不变性的假定意味着(6.6)和(6.7)两式的左边必须相等．这就是说，在随回路运动的坐标系里电场 $\mathbf{E}'$ 是

$$\mathbf{E}'=\mathbf{E}+k(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \tag{6.8}$$

我们只要注意 $\mathbf{E}'$ 的意义，就可以确定常数 k．在一个运动回路中静止的带电粒子(例如，一个传导电子)要受到力 $q\mathbf{E}'$ 的作用．当从实验室来观察时，此电荷表现出一电流 $\mathbf{J}=q\mathbf{v}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$．根据磁力定律(5.7)或(5.12)显然知道，如果常数 k 等于 c^{-1}，那么这电流受到的力的作用

---

① 对于普通的矢量场还附加一项 $\int_S(\nabla\cdot\mathbf{B})\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}da$，表示运动回路所扫过的矢量场的场源的贡献．利用对流导数

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla$$

很容易推出普遍结果．于是，

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt}=\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{B}=\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}+\nabla\times(\mathbf{B}\times\mathbf{v})+\mathbf{v}(\nabla\cdot\mathbf{B})$$

式中 $\mathbf{v}$ 在微分时当作一个固定不变的矢量．对第二项运用斯托克斯定理即得(6.5)．

就符合(6.8)的形式.

因此,我们看出:就我们所选择的电荷和电流的单位来说,伽利略协变性要求该常数 k 等于磁场定义(5.4)中出现的常数.所以法拉第定律(6.4)可写成

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da \tag{6.9}$$

式中 $\mathbf{E}'$ 是在对 $d\mathbf{l}$ 为静止的坐标系中 $d\mathbf{l}$ 处的电场强度.右边的时间导数是一个时间全导数(6.5).作为一个附带的结果,我们得知:在相对于实验室以速度 $\mathbf{v}$ 运动的坐标系中电场 $\mathbf{E}'$ 是

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{6.10}$$

因为我们考虑了伽利略变换,所以(6.10)是一种近似的结果,只当速度比光速小得多时才成立.(11.10节里将推导相对论的表式.)但是,法拉第定律不是一个近似的定律.伽利略变换只是用来计算(6.3)中的常数 k,这项工作用伽利略变换是完全足够的.

可以借助斯托克斯定理把法拉第定律(6.9)化成微分形式,只要回路在选定的参照系中固定不动(为的是在同一个参照系中定义E和B).将电动势的积分变换成一个面积分后,可得

$$\int_S \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) \cdot \mathbf{n} da = 0$$

因为回路 C 和它所限定的曲面 S 都是任意的,所以被积函数在空间必定处处为零.

于是,法拉第定律的微分形式为:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{6.11}$$

要注意,这是静电场方程 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ 在随时间变化情形下的推广.

6.2 磁场的能量

我们在第五章里讨论稳恒磁场时,避开了场能和能量密度的问题.

我们的理由是：要建立电流的稳恒组态及有关的磁场，必定经过一段初始的瞬变期，在这期间，电流和磁场从零增到终值．存在这种随时间变化的场，就存在使电流源做功的感生电动势．因为按照定义，场的能量等于建立这场时所做的总功，所以我们必须考虑这些贡献．

暂且假定我们只有一个载着稳恒电流 I 的简单电路．如果通过电路的磁通量发生变化，那么在电路中就感生一个电动势 $\mathscr{E}$．为了保持电流恒定不变，电流源必须作功．为了确定功率，我们注意到，当力 $\mathbf{F}$ 作用在一个以速度 $\mathbf{v}$ 运动的粒子上时，这个粒子的能量随时间的变化率为 $dE/dt=\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}$．由于磁通量的变化，作用在电荷为 q、漂移速度为 $\mathbf{v}$ 的每个传导电子上的附加电场 $\mathbf{E}'$，使每个电子的能量在单位时间内改变了 $q\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}'$．对电路中所有电子求和，我们得到：为保持电流不变，电流源所做的功率为

$$\frac{dW}{dt}=-I\mathscr{E}=\frac{1}{c}I\frac{dF}{dt}$$

负号是根据楞次定律得来的．除了欧姆损失（它不包括在磁能中）外，这个功保持在电路中．所以，如果通过一个载电流 I 的电路的磁通量的变化是 δF，那么电流源所作的功是

$$\delta W=\frac{1}{c}I\delta F$$

现在，讨论在建立电流和场的一般稳恒态分布的过程中作功的问题．我们可以设想稳恒态的建立过程进行得无限缓慢，以致无论所要求的准确度如何，$\nabla\cdot\mathbf{J}=0$ 都成立．于是，可把电流分布分割为许多元电流回路所组成的网路．典型的一种元电流回路是沿闭合回路 C 的元电流管，它的截面积是 $\Delta\sigma$，C 上张着法线为 $\mathbf{n}$ 的曲面 S，如图 6.3 所示．

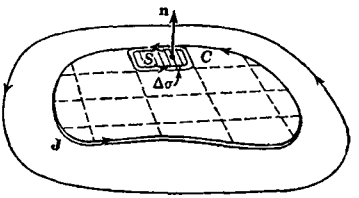


图 6.3 将电流密度分布分割为许多元电流圈．

我们可以用通过电路回路的磁

感应强度的变化，来表示克服感应电动势所作的功的增量：

$$\Delta(\delta W)=\frac{J\Delta\sigma}{c}\int_S \mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{B}da$$

式中附加的Δ是由于我们只考虑一个元回路．如果用矢势$\mathbf{A}$表示$\mathbf{B}$，则有

$$\Delta(\delta W)=\frac{J\Delta\sigma}{c}\int_S(\nabla\times\delta\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}da$$

利用斯托克斯定理可将上式写成

$$\Delta(\delta W)=\frac{J\Delta\sigma}{c}\oint_C\delta\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$$

但是，根据定义，因为$d\mathbf{l}$和$\mathbf{J}$平行，所以$J\Delta\sigma d\mathbf{l}$等于$\mathbf{J}d^3x$．显然，对所有这些元电流回路求和就是体积分．所以，当矢势改变了$\delta\mathbf{A}(\mathbf{x})$时，外源所作功的总增量是

$$\delta W=\frac{1}{c}\int\delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{J}d^3x \tag{6.12}$$

利用安培定律

$$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$

可以得到一个只含磁场而不含$\mathbf{J}$和$\delta\mathbf{A}$的表式．于是：

$$\delta W=\frac{1}{4\pi}\int\delta\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})d^3x \tag{6.13}$$

利用矢量恒等式

$$\nabla\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})=\mathbf{Q}\cdot(\nabla\times\mathbf{P})-\mathbf{P}\cdot(\nabla\times\mathbf{Q})$$

可以把(6.13)变成：

$$\delta W=\frac{1}{4\pi}\int[\mathbf{H}\cdot(\nabla\times\delta\mathbf{A})+\nabla\cdot(\mathbf{H}\times\delta\mathbf{A})]d^3x \tag{6.14}$$

如果假定场的分布区域是有限的，第二个积分则等于零．利用以$\mathbf{A}$表示的$\mathbf{B}$的定义，能量增量可写成：

$$\delta W=\frac{1}{4\pi}\int\mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{B}d^3x \tag{6.15}$$

这个关系式，就是与静电学方程(4.86)相当的磁学关系式．这种形式的关系式适用于一切磁介质，包括铁磁质在内．如果我们假定媒质是顺磁质或抗磁质的，H和B之间就存在线性关系，则

$$\mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{B}=\frac{1}{2}\delta(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})$$

如果我们现在使场从零增到它的终值，总磁能则为

$$W=\frac{1}{8\pi}\int\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}d^3x \tag{6.16}$$

这是类似于(4.89)的磁学公式．

假定J和A之间存在线性关系，便可以从(6.12)求出与(4.83)(该式以电荷密度和电势来表示静电能)对应的磁学公式．于是我们求出磁能是

$$W=\frac{1}{2c}\int\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}d^3x \tag{6.17}$$

将一个磁导率为μ_1的物体放进电流源固定不动的磁场中，这时能量要发生变化，对于这个磁学问题，可以完全仿照4.7节的静电学问题来处理．以B代替E，以H代替D．原来媒质的磁导率是μ_0，存在的磁感应强度是$\mathbf{B}_0$．物体放入后的场是B和H．证明在场源固定不变时，能量的变化是

$$W=\frac{1}{8\pi}\int_{V_1}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}_0-\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}_0)d^3x \tag{6.18}$$

式中积分是遍及该物体的整个体积．这个问题留给读者作为习题．上式还可写成另一种形式：

$$\begin{aligned}W&=\frac{1}{8\pi}\int_{V_1}(\mu-\mu_0)\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}_0d^3x\\&=\frac{1}{8\pi}\int_{V_1}\left(\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{\mu_1}\right)\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}_0d^3x\end{aligned} \tag{6.19}$$

μ_1和μ_0都是位置的函数，但假定它们与场强无关．

如果物体是在真空($\mu_0=1$)中，就可以用磁化强度来表示能量的

变化：

$$W=\frac{1}{2}\int_{V_1}\mathbf{M}\cdot\mathbf{B}_0 d^3x \tag{6.20}$$

应当指出，除了符号不同外，(6.20)就相当于静电学结果(4.93)．符号的改变，是因为能量W是导磁物体放入场内时的总能量变化，其中包括场源克服感生电动势所作的功．在这一方面，固定电流的磁学问题和曲面上具有固定电势(它决定电场)的静电学问题类似．用相当于4.7节末的分析方法可以证明：对于一个微小的位移来说，克服感生电动势所作的功的数值为物体势能变化的两倍，而符号相反．所以，为了求出作用在物体上的力，我们考虑广义坐标ξ，并计算W对位移的正导数：

$$F_\xi=\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)_J \tag{6.21}$$

下角标J表明场源的电流固定不变．

(6.20)和外场中一个永久磁矩的势能(5.72)不同(除了因子$\frac{1}{2}$外，还要追溯到所假定的$\mathbf{M}$和$\mathbf{B}$的线性关系上)的原因是：(6.20)是产生该组态所需的总能，而(5.72)只包含将永久磁矩放进磁场时所作的功，不包括产生磁矩并使之保持不变所作的功．

6.3 麦克斯韦位移电流，麦克斯韦方程组

我们可以将至今所讨论的电学和磁学的基本定律，总结为下列四个微分方程：

$$\left.\begin{aligned}
&\text{库仑定律：} && \nabla\cdot\mathbf{D}=4\pi\rho\\
&\text{安培定律：} && \nabla\times\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}\\
&\text{法拉第定律：} && \nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0\\
&\text{自由磁极不存在：} && \nabla\cdot\mathbf{B}=0
\end{aligned}\right\} \tag{6.22}$$

这些方程是用宏观形式和高斯单位制写成的．我们还记得，除了法拉第定律之外，所有定律都是从稳恒态观察中得出的．因此，从逻辑观点看来，没有什么先验的理由能预料稳恒态方程可以原封不动地用于随时间变化的场．事实上，(6.22)中的诸方程按现在的样子是有矛盾的．

麦克斯韦受到法拉第观察结果的启发，看出方程组(6.22)中的矛盾，并作了修正．这方程组蕴含着当时人们不知道的，但后来为实验完全证实了的新物理现象．由于1865年麦克斯韦的这一辉煌成就，修正后的方程组被公正地称为麦克斯韦方程组．

安培定律是不完善的．这个定律是由遵从 $\nabla\cdot\mathbf{J}=0$ 的稳恒电流现象中得来的．这个对 $\mathbf{J}$ 的散度的要求，本来就包含在安培定律之中，对安培定律的两边取散度，就能看到这一点：

$$\frac{4\pi}{c}\nabla\cdot\mathbf{J}=\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{H})\equiv 0 \tag{6.23}$$

$\nabla\cdot\mathbf{J}=0$，只对稳恒态问题有效，而完整的关系式应由下列电荷与电流的连续性方程给出：

$$\nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \tag{6.24}$$

麦克斯韦看到，用(6.22)中的库仑定律可以将连续性方程化成等于零的散度，即

$$\nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=\nabla\cdot\left(\mathbf{J}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)=0 \tag{6.25}$$

于是，对随时间变化的场来说，麦克斯韦把安培定律中的 $\mathbf{J}$ 换成它的推广式，

$$\mathbf{J}\to\mathbf{J}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \tag{6.26}$$

这样，安培定律就变成

$$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \tag{6.27}$$

这仍然是那个得到实验证明的稳恒态现象的规律，不过，就数学方面来

说，这一式和随时间变化的场的连续性方程(6.24)现在是一致的．麦克斯韦把(6.26)里的附加项叫做位移电流．在安培定律中必须加进的这一项，对于迅变场具有头等重要的意义．如果没有这一项，就不会有电磁辐射，而本书剩下的大部分内容就得删去．麦克斯韦预言，光是一种电磁波现象，一切频率的电磁波都可以产生．这些预言吸引了所有物理学家的注意，并在十九世纪末促使那么多物理学家从事电磁学的理论研究和实验工作．

由下列四个方程

$$\left.\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{D}&=4\pi\rho \qquad \nabla\times\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\mathbf{B}&=0 \qquad\quad \nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0 \end{aligned}\right\} \tag{6.28}$$

组成的方程组通称为麦克斯韦方程组，它成为一切经典电磁现象的基础．这些方程和洛仑兹力方程以及牛顿第二运动定律结合起来，就可以完全描写相互作用的带电粒子和电磁场的经典动力学(参看 6.8 节、第十章、第十二章和第十七章)．在绪论中我们讨论了麦克斯韦方程组的有效范围，如不同媒质分界面上场量的法向分量和切向分量的边界条件问题．在绪论中已经提到把E和B与D和H联系起来的本构关系式，并在第四章和第五章里用这些本构关系式处理静电和静磁现象．在本章和第七章里还将讨论．

我们在写出麦克斯韦方程组(6.28)时，所用的单位与前几章一样，是高斯单位制．为了使读者更熟悉其他单位，附录中表二扼要地列出了用较常见单位制表示的基本方程；表三把各种方程从高斯单位制换成米·千克·秒·安制；表四列出各变量的给定值的相应换算．

6.4 矢势和标势

麦克斯韦方程组是联立的一阶偏微分方程组，它们将电场和磁场的各个分量联系起来．在简单情况下这一方程组可以解出来．但是引

进势往往更方便，这样可得出数目较少的二阶方程，而且同样满足这几个麦克斯韦方程．我们在静电学和静磁学里，已经熟悉这一概念．在那里，用了标势Φ和矢势$\mathbf{A}$．

因为$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$仍然成立，所以可用一个矢势来定义$\mathbf{B}$：

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A} \tag{6.29}$$

于是(6.28)中另一个齐次方程，即法拉第定律，就可写成

$$\nabla\times\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=0 \tag{6.30}$$

这就是说(6.30)里旋度为零的量可以写成某个标量函数的梯度，即标势Φ的梯度：

或

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}&=-\nabla\Phi\\ \mathbf{E}&=-\nabla\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\end{aligned}\right\} \tag{6.31}$$

根据(6.29)和(6.31)用势$\mathbf{A}$和Φ定义的$\mathbf{B}$和$\mathbf{E}$，同样满足麦克斯韦方程组中的两个齐次方程．$\mathbf{A}$和Φ的动力学特性则由(6.28)中两个非齐次方程决定．

在这一阶段，把我们的考虑仅限于微观形式的麦克斯韦方程是合适的．而且，(6.28)里的非齐次方程可以用势表示为：

$$\nabla^2\Phi+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A})=-4\pi\rho \tag{6.32}$$

$$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \tag{6.33}$$

现在已经把麦克斯韦方程组的四个方程化为两个方程．但这两个方程仍然是联立方程．利用势的定义中所隐含的任意性，就可以使这两个方程不联立．因为$\mathbf{B}$是通过(6.29)用$\mathbf{A}$来定义的，所以矢势可以任意地加上某个标量函数Λ的梯度．因此$\mathbf{B}$在下列变换下保持不变

$$\mathbf{A}\to\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\nabla\Lambda \tag{6.34}$$

为了使电场(6.31)也不变，标势必须同时作如下变换：

$$\Phi\to\Phi'=\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t} \tag{6.35}$$

(6.34)和(6.35)所隐含的任意性意味着，我们可以选取一组势$(\mathbf{A},\Phi)$，使得

$$\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0 \tag{6.36}$$

上式可以使(6.32)和(6.33)这一对方程互相独立，从而得出两个非齐次波动方程，一个是Φ的，一个是$\mathbf{A}$的：

$$\nabla^2\Phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=-4\pi\rho \tag{6.37}$$

$$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \tag{6.38}$$

方程(6.37)、(6.38)以及(6.36)组成一个与麦克斯韦方程组完全等效的方程组.

6.5 规范变换，洛仑兹规范，库仑规范

变换式(6.34)和(6.35)叫做规范变换，场在这样变换下的不变性叫做规范不变性. $\mathbf{A}$和Φ的关系式(6.36)叫做洛仑兹条件. 为了证明我们总可以找到满足洛仑兹条件的势，先设势$\mathbf{A}$、Φ满足(6.32)和(6.33)，而不满足(6.36). 然后，我们作规范变换，将势$\mathbf{A}$、Φ变换为$\mathbf{A}'$、Φ'，并要求$\mathbf{A}'$、Φ'满足洛仑兹条件：

$$\nabla\cdot\mathbf{A}'+\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi'}{\partial t}=0=\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\nabla^2\Lambda-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2} \tag{6.39}$$

于是，只要能找到一个满足下式的规范函数Λ

$$\nabla^2\Lambda-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2}=-\left(\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) \tag{6.40}$$

新的函数$\mathbf{A}'$、Φ'就能满足洛仑兹条件和波动方程(6.37)和(6.38).

甚至满足洛仑兹条件(6.36)的势也有任意性. 显然，狭义规范

变换

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{A}&\to\mathbf{A}+\nabla\Lambda\\ \Phi&\to\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\end{aligned}\right\}\tag{6.41}$$

式中

$$\nabla^2\Lambda-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2}=0\tag{6.42}$$

仍然遵从洛仑兹条件，只要起初 $\mathbf{A}$，Φ 满足洛仑兹条件．在狭义规范变换中所有的势都属于洛仑兹规范．人们通常采用洛仑兹规范，首先因为由它得到了波动方程(6.37)和(6.38)，这两个方程以同样形式描述 Φ 和 $\mathbf{A}$．其次因为它是一个与选取的坐标系无关的概念，因而自然地符合狭义相对论的观点(见 11.9 节)．

势的另一种有用的规范就是所谓的库仑规范、辐射规范或横向规范．这是一个使

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=0\tag{6.43}$$

的规范．从(6.32)知道标势满足泊松方程

$$\nabla^2\Phi=-4\pi\rho\tag{6.44}$$

它的解是

$$\Phi(\mathbf{x},t)=\int\frac{\rho(\mathbf{x}',t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x'\tag{6.45}$$

这标势正是由电荷密度 $\rho(\mathbf{x},t)$ 产生的瞬时库仑势．这就是“库仑规范”名称的由来．

矢势满足下列非齐次波动方程：

$$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}+\frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t}\tag{6.46}$$

和势有关的“电流”项，原则上可以从(6.45)计算出来．因为该项含有梯度算符，所以它是无旋项，即其旋度等于零．这就意味着：该项可以抵消电流密度的一部分．电流密度(或任意矢量场)可以写成下列两项

之和:

$$\mathbf{J}=\mathbf{J}_{\text{纵向}}+\mathbf{J}_{\text{横向}} \tag{6.47}$$

其中 $\mathbf{J}_{\text{纵向}}$ 叫做纵向电流或无旋电流,它满足 $\nabla\times\mathbf{J}_{\text{纵向}}=0$,而 $\mathbf{J}_{\text{横向}}$ 叫做横向电流或螺线电流,它满足 $\nabla\cdot\mathbf{J}_{\text{横向}}=0$. 从矢量恒等式

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{J})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{J})-\nabla^2\mathbf{J} \tag{6.48}$$

出发,利用 $\nabla^2(1/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)=-4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$,可以证明: $\mathbf{J}_{\text{纵向}}$ 和 $\mathbf{J}_{\text{横向}}$ 可以直接由 $\mathbf{J}$ 得出,它们是

$$\mathbf{J}_{\text{纵向}}=-\frac{1}{4\pi}\nabla\int\frac{\nabla'\cdot\mathbf{J}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x' \tag{6.49}$$

$$\mathbf{J}_{\text{横向}}=\frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\int\frac{\mathbf{J}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x' \tag{6.50}$$

借助连续性方程和(6.45),可以得知:

$$\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t}=4\pi\mathbf{J}_{\text{纵向}} \tag{6.51}$$

所以, $\mathbf{A}$ 的波动方程的源,可以完全用横向电流(6.50)来表示:

$$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_{\text{横向}} \tag{6.52}$$

这当然就是"横向规范"名称的由来. "辐射规范"这个名称来源于以下事实: 横向辐射场仅由矢势给出,瞬时库仑势只对近场有贡献. 这种规范在量子电动力学中特别有用. 光子的量子力学描写只需要矢势的量子化.

库仑规范或横向规范往往用于无源情形. 这时 $\Phi=0$, $\mathbf{A}$ 满足齐次波动方程. 场由下列两式给出:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}&=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\\ \mathbf{B}&=\nabla\times\mathbf{A}\end{aligned}\right\} \tag{6.53}$$

顺便我们指出库仑规范的特性. 如所周知,电磁扰动以有限速度传播. 然而,(6.45)表明标势在空间各处是瞬时地"传播". 另一方面,

矢势满足波动方程(6.52)，其中含有有限的传播速率 c. 如何避免这种显然不符合物理意义的特性，乍一看来是难以解决的. 初步看法是：我们关心的是场，而不是势. 进一步的意见是：横向电流(6.50)牵涉到遍及整个空间的积分①.

6.6 波动方程的格临函数

波动方程(6.37)、(6.38)和(6.52)都具有如下的基本结构：

$$\nabla^2\Psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=-4\pi f(\mathbf{x},t) \tag{6.54}$$

式中 $f(\mathbf{x},t)$是一个已知的源分布. 因子 c 是波在媒质中的传播速度，假定在媒质中没有色散.

正象静电学问题一样，为了解方程(6.54)，先找出格临函数是有用的. 我们讨论没有边界面的简单情形，并引进一个关于频率的傅里叶变换，通过这个变换可以消去明显的对时间的依赖关系. 假设$\Psi(\mathbf{x},t)$和 $f(\mathbf{x},t)$具有下列傅里叶积分表示式：

$$\left.\begin{aligned}\Psi(\mathbf{x},t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\mathbf{x},\omega)e^{-i\omega t}d\omega\\ f(\mathbf{x},t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\mathbf{x},\omega)e^{-i\omega t}d\omega\end{aligned}\right\} \tag{6.55}$$

而逆变换为

$$\left.\begin{aligned}\Psi(\mathbf{x},\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\mathbf{x},t)e^{i\omega t}dt\\ f(\mathbf{x},\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(\mathbf{x},t)e^{i\omega t}dt\end{aligned}\right\} \tag{6.56}$$

把表式(6.55)代入(6.54)，得知：傅里叶变换 $\Psi(\mathbf{x},\omega)$满足非齐次亥姆霍兹波动方程

$$(\nabla^2+k^2)\Psi(\mathbf{x},\omega)=-4\pi f(\mathbf{x},\omega) \tag{6.57}$$

---

① 关于库仑规范中因果性的详细讨论，参看 O. L. Brill and B. Goodman, *Am. J. phys.* 35, 832(1967). 也可参看习题 6.19.

对每一个ω值上式都成立．式中$k=\omega/c$是与频率ω对应的波数．在这种形式下，无色散的限制是不必要的．k和ω之间的任何先验关系都是许可的，虽然因果性要求强加某些限制(参看7.10节)．

方程(6.57)是一个与泊松方程相似的椭圆偏微分方程，当$k=0$时，(6.57)就简化为泊松方程．适合于(6.57)的格临函数$G(\mathbf{x},\ \mathbf{x}')$满足非齐次方程

$$(\nabla^2+k^2)G_k(\mathbf{x},\mathbf{x}')=-4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{6.58}$$

如果没有边界面，那末格临函数只可能依赖于$\mathbf{R}=\mathbf{x}-\mathbf{x}'$，而且实际上必定是球对称的，即只依赖于$R=|\mathbf{R}|$．由球坐标中的拉普拉斯算符表式[参看(3.1)]，显而易见，$G_k(\mathbf{R})$满足

$$\frac{1}{R}\frac{d^2}{dR^2}(RG_k)+k^2G_k=-4\pi\delta(\mathbf{R}) \tag{6.59}$$

除$R=0$外，$RG_k(R)$处处满足齐次方程

$$\frac{d^2}{d^2R}(RG_k)+k^2(RG_k)=0$$

其解为

$$RG_k(R)=Ae^{ikR}+Be^{-ikR}$$

并且，(6.59)中的δ函数只当$R\to0$时才起作用．在这种极限下，由于$kR\ll1$，(6.59)就简化为泊松方程．因此，我们从静电学得知，正确的归一化是

$$\lim_{kR\to0}G_k(R)=\frac{1}{R} \tag{6.60}$$

所以格临函数的通解是

$$G_k(R)=AG_k^{(+)}(R)+BG_k^{(-)}(R) \tag{6.61}$$

式中

$$G_k^{(\pm)}(R)=\frac{e^{\pm ikR}}{R} \tag{6.62}$$

又$A+B=1$．由于(6.55)规定的对时间的依赖关系，(6.61)中的第一

项代表从原点发出的发散球面波，而第二项代表会聚球面波.

(6.61)中A和B的选择，取决于物理问题给定的时间边界条件.显而易见，如果源在某时刻$t=0$以前是静止的，然后从$t=0$开始工作，那末，相应的格临函数就是(6.61)的第一项，这一项相当于源开始工作后从源往外辐射的波. 这样说法当然是正确的，也是方便的，但不是唯一的或必然的. 适当规定边界时间的波幅，就可以用(6.61)的第二项，而不用第一项来描写源的作用.

为了了解$G_k^{(+)}$和$G_k^{(-)}$有关时间的不同特性，我们需要建立相应的与时间有关的格临函数，后者要满足

$$\left(\nabla_x^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G^{(\pm)}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t')=-4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\delta(t-t') \tag{6.63}$$

利用(6.56)，我们看出，(6.57)的场源项是

$$-4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')e^{i\omega t'}$$

所以解为$G_k^{(\pm)}(R)e^{i\omega t'}$. 由(6.55)，与时间有关的格临函数是

$$G^{(\pm)}(R,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\pm ikR}}{R}\cdot e^{-i\omega\tau}d\omega \tag{6.64}$$

式中$\tau=t-t'$是(6.63)中出现的相对时间. 于是，无限空间格临函数只是源与观测点间的相对距离R和相对时间τ的函数. 对于非色散媒质来说，$k=\omega/c$，(6.64)中的积分是一个δ函数. 格临函数是

$$G^{(\pm)}(R,\tau)=\frac{1}{R}\delta\left(\tau\mp\frac{R}{c}\right) \tag{6.65}$$

或者更明显地写为

$$G^{(\pm)}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t')=\frac{\delta\left(t'\mp\left[t-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}\right]\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{6.66}$$

格临函数$G^{(+)}$叫做推迟格临函数，因为它显示了跟波扰动有关的因果特性. δ函数的自变量表明：在$\mathbf{x}$点于时间t观测的效应是由距离为R的源在较早时或推迟时间为$t'=t-R/c$时的作用引起的. 时间差

R/c 正好是扰动由一点传播到另一点的时间. 同理，$G^{(-)}$ 叫做提早格临函数.

非齐次波动方程(6.54)的特解为

$$\Psi^{(\pm)}(\mathbf{x},t)=\iint G^{(\pm)}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t')f(\mathbf{x}',t')d^3x'\,dt'$$

把其中的每个特解加上齐次方程的解，就能说明一定的物理问题. 我们考虑一个在时间和空间中作定域分布的源 $f(\mathbf{x}',t')$. 这个源分布只在 $t'=0$ 前后一段有限的时间间隔内不等于零. 我们想像两种极限情形. 第一种情形是假定：当时间 $t\to-\infty$ 时，存在一个波 $\Psi_{向内}(\mathbf{x},t)$，它满足齐次波动方程. 这个波在时间和空间中传播；接通源，源产生其特有的波. 对所有的时间来说，这种情况的全解显然是

$$\Psi(\mathbf{x},t)=\Psi_{向内}(\mathbf{x},t)+\iint G^{(+)}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t')f(\mathbf{x}',t')d^3x'\,dt' \quad (6.67)$$

$G^{(+)}$的出现保证了，在源被激活之前，在遥远的过去 t，(6.67)中的积分对 $\Psi(\mathbf{x},t)$没有贡献. 只存在特定的波 $\Psi_{向内}$. 第二种情形是：在遥远的将来($t\to+\infty$)，波给定为 $\Psi_{向外}(\mathbf{x},t)$，它是齐次波动方程的一个已知解. 这时对所有时间的全解为

$$\Psi(\mathbf{x},t)=\Psi_{向外}(\mathbf{x},t)+\iint G^{(-)}(\mathbf{x},t;\mathbf{x}',t')f(\mathbf{x}',t')d^3x'\,dt' \quad (6.68)$$

现在提早格临函数保证了，在切断源之后，源明显地不再发出信号了(假定所有这些信号都包含在 $\Psi_{向外}(\mathbf{x},t)$之中).

最常见的物理情形是用 $\Psi_{向内}=0$ 时的(6.67)描写的. 有时将格临函数(6.66)代入而直接写成

$$\Psi(\mathbf{x},t)=\int\frac{[f(\mathbf{x}',t')]_{推迟}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x' \quad (6.69)$$

方括号[ ]$_{推迟}$表示时间 t' 是按推迟时间 $t'=t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c$计算的.

我们已经就一维、二维和三维情形，对有限时间的初值和终值问题进行过广泛的研究. 读者可以参看 *Morse and Feshbach* 书第843页

至第 847 页，也可以参看 *Hadamard* 书中更详细的数学处理.

6.7 宏观电磁学方程组的推导

前几章里电磁学的讨论是建立在下列宏观麦克斯韦方程组的基础上:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \qquad \nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0 \\ &\nabla\cdot\mathbf{D}=4\pi\rho \qquad \nabla\times\mathbf{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \end{aligned}\right\} \tag{6.70}$$

式中 **E** 和 **B** 是宏观电场和磁场的量，**D** 和 **H** 是相应的导出场，**D** 和 **H** 通过媒质的电极化强度 **P** 和磁化强度 **M** 同 **E** 和 **B** 联系起来，其间的关系式为

$$\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P},\quad \mathbf{H}=\mathbf{B}-4\pi\mathbf{M} \tag{6.71}$$

同样地，ρ 和 **J** 分别是宏观(自由)电荷密度和电流密度. 虽然这些方程是大家熟悉的，而且是完全可以接受的，但是我们还须要从微观的观点出发认真地推导这些方程. 本节将弥补这点缺陷. 然而，即使必须用量子力学来描写原子，我们的推导仍然是属于经典的范畴. 这种处理方法是显然不妥当的，其原因是: 我们用量子力学期待值替代了下文所给公式中的经典量，从而使量子力学的讨论完全跟经典物理的讨论类似. 读者可以查看本章末列出的文献中有关的统计力学处理方法.

我们认为微观世界由电子和原子核组成. 当线度比 10^{-12} 厘米大得多时，可以象电子那样，把原子核看作点电荷系. 我们假定: 这些点电荷的电磁现象所遵循的方程组是微观麦克斯韦方程组，

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\mathbf{b}=0, \qquad \nabla\times\mathbf{e}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t}=0 \\ &\nabla\cdot\mathbf{e}=4\pi\eta, \quad \nabla\times\mathbf{b}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{e}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \end{aligned} \tag{6.72}$$

式中 **e** 和 **b** 是微观的电场和磁场，而 η 和 **j** 是微观的电荷密度和电流

密度．因为所有电荷都包括在 η 和 $\mathbf{j}$ 中，所以没有相应的场量 $\mathbf{d}$ 和 $\mathbf{h}$．一块宏观大小的静止物质，含有数量级为 $10^{23\pm5}$ 个电子和原子核，它们由于热骚动、零点振动或轨道运动而连续不停地在运动．这些随空间和时间非常迅速地变化的电荷产生了微观的电磁场．其空间变化发生在数量级为 10^{-8} 厘米或更少些的距离上，时间涨落发生在从原子核振动的 10^{-13} 秒到电子轨道运动的 10^{-17} 秒的间隔范围内．宏观测量仪器的读数通常是在远大于上列数值的空间和时间的间隔上的平均值．因此，对所有微观涨落求平均，就给出了相对平稳的和变化缓慢的宏观量，如宏观麦克斯韦方程组中出现的那些量．

必须仔细研究哪一种求平均值的方法是合适的问题．人们乍一看，以为必须对空间和时间同时求平均．可是实际上并非这样．只需要对空间求平均．(我们顺便指出，单单对时间求平均肯定是不够的，正象研究离子性晶体所看到的，这种晶体的离子围绕完全确定的分离的点阵座作微小的零点振动．)为了划定电磁现象宏观描写的有效范围，我们注意到：可见光的反射和折射适于用含连续介电常数的麦克斯韦方程组来描写，而 X 射线衍射清楚地显示出物质的原子性质．因此，取长度 $L_0=10^{-6}$ 厘米 $=10^2$Å 作为宏观区域的绝对下限似乎是合理的．与这一波长的光对应的振动周期为 $L_0/c\simeq3\times10^{-17}$ 秒．对普通的物质来说，在 $L_0^3=10^{-18}$ 厘米^{3}的体积中所含原子核和电子数仍达 10^6 数量级．所以，在 $L\gg L_0$ 的任何宏观区域内都有那么多的原子核和电子，以致对空间求平均后就可以把涨落现象完全清除掉．另一方面，因为与 L 相关的时标实际上是在原子和分子运动范围内，所以对时间求平均是不适当的．然而，把媒质的微观时间涨落对空间求平均后所得到的量是觉察不到的．之所以这样，是因为微观场随时间的变化与数量级为 L 的距离不相关的，只要媒质不是特殊制备的且在宏观距离上不建立有序化．剩下的只是按外加频率骚动的振子的诸频率分量．

函数 $F(\mathbf{x},t)$ 对于尝试函数 $f(\mathbf{x})$ 的空间平均被定义为

$$\langle F(\mathbf{x},t)\rangle=\int d^3x' f(\mathbf{x}')F(\mathbf{x}-\mathbf{x}',t) \tag{6.73}$$

式中 $f(\mathbf{x})$是在 $\mathbf{x}=0$ 的某邻域内不等于零的实函数，而且是整个空间的归一化函数．最简单的(虽不是必要的)是设想 $f(\mathbf{x})$ 是一个非负函数．为了使平均物理性质在方向上没有偏倚，我们设 $f(\mathbf{x})$在空间中是各向同性的．列举两个例子：

$$f(\mathbf{x})=\begin{cases}\dfrac{3}{4\pi R^3}, & r<R\\ 0, & r>R\end{cases}$$

$$f(\mathbf{x})=(\pi R^2)^{-3/2}e^{-r^2/R^2}$$

第一个例子是对半径为 R 的球体积求平均，这是文献中常见的例子．它的优点是概念简单，缺点是在 $r=R$ 处发生突变．这就导致平均量发生微小的跳跃，这个平均量是当一个分子或分子团时进时出平均体积时求得的．滑顺尝试函数(我们以高斯函数为例)就消除了这些困难，只要其变化范围比原子线度大得多．幸而，不必详细指明尝试函数 $f(\mathbf{x})$，只须 $f(\mathbf{x})$具有一般的连续性和滑顺性，这些性质允许 $f(\mathbf{x})$在原子线度的距离上展成迅速收敛的泰勒级数，大意如图 6.4 所示．这是一个很大的优点①．

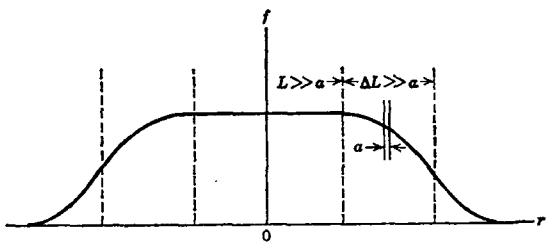


图 6.4　求空间平均时用的尝试函数 $f(\mathbf{x})$的简图．L 为较高的平稳段的宽度，ΔL 为 f 降为零那一段的宽度，这两宽度都比分子线度 a 大得多．

① 我们在这里仿效下列文章中的叙述：
G. Russakoff, *Am. J. Physics* **38**, 1188(1970).

因为麦克斯韦方程组含有空间导数和时间导数，我们必须按照(6.73)来考虑对这些算符求平均．显然，我们有

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\langle F(\mathbf{x},t)\rangle=\int d^3x' f(\mathbf{x}')\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}-\mathbf{x}',t)=\left\langle\frac{\partial F}{\partial x_i}\right\rangle$$

和

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle F(\mathbf{x},t)\rangle=\left\langle\frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle \tag{6.74}$$

所以，对空间和时间求微分的算符同求平均的算符是可交换的．

我们现在考虑对微观麦克斯韦方程组(6.72)求平均．宏观电场和磁场量 **E** 和 **B** 定义为微观场量 **e** 和 **b** 的平均：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x},t)&=\langle\mathbf{e}(\mathbf{x},t)\rangle\\ \mathbf{B}(\mathbf{x},t)&=\langle\mathbf{b}(\mathbf{x},t)\rangle\end{aligned} \tag{6.75}$$

这时，(6.72)中两个齐次方程的平均变成相应的宏观方程，

$$\begin{aligned}&\langle\nabla\cdot\mathbf{b}\rangle=0\rightarrow\nabla\cdot\mathbf{B}=0\\ &\left\langle\nabla\times\mathbf{e}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t}\right\rangle=0\rightarrow\nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0\end{aligned} \tag{6.76}$$

由(6.72)，平均的非齐次方程变成

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\langle\eta(x,t)\rangle\\ &\nabla\times\mathbf{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\langle\mathbf{j}(x,t)\rangle\end{aligned} \tag{6.77}$$

同(6.70)中一对宏观非齐次方程比较，可以指出以下的已知事实：通过从$\langle\eta\rangle$和$\langle\mathbf{j}\rangle$提出某些可以看作媒质的宏观性质的贡献而引进导出场场 **D** 和 **H**．因此下面的任务便是研究$\langle\eta\rangle$和$\langle\mathbf{j}\rangle$．

我们讨论那种由原子核和电子组成的诸分子构成的媒质，并且在此媒质中有“自由”电荷，这些电荷不是局限在任何特定分子的周围．微观电荷密度可以写为

$$\eta(\mathbf{x},t)=\sum_j q_j\delta[\mathbf{x}-\mathbf{x}_j(t)] \tag{6.78}$$

式中 $\mathbf{x}_j(t)$是点电荷 q_j 的位置．为了区分束缚电荷和自由电荷，我们把 η 分成

$$\eta=\eta_{\text{自由}}+\eta_{\text{束缚}} \tag{6.79}$$

并写出

$$\eta_{\text{自由}}=\sum_{j(\text{自由})}q_j\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_j)$$

$$\eta_{\text{束缚}}=\sum_{\substack{n\\(\text{分子})}}\eta_n(\mathbf{x},t)$$

式中 η_n 是第 n 个分子的电荷密度，

$$\eta_n(\mathbf{x},t)=\sum_{j(n)}q_j\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_j) \tag{6.80}$$

在这些方程以及下面的方程中，我们没有写出明显的时间依赖关系，这是因为在时间的一瞬间求平均的．我们先对第 n 个分子的电荷密度求平均，然后再对所有分子的贡献求和．最合理的是，相对于第 n 个分子中静止的原点来写出该分子中诸电荷的坐标．令分子中这个固定点（通常选为质心）的坐标为 $\mathbf{x}_n(t)$，分子中第 j 个电荷相对于该原点的坐标为 $\mathbf{x}_{jn}(t)$，如图 6.5 所示．第 n 个分子电荷密度的平均值是

$$\begin{aligned}\langle\eta_n(\mathbf{x},t)\rangle&=\int d^3x'\,f(\mathbf{x}')\eta_n(\mathbf{x}-\mathbf{x}',t)\\&=\sum_{j(n)}q_j\int d^3x'\,f(\mathbf{x}')\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'-\mathbf{x}_{jn}-\mathbf{x}_n)\\&=\sum_{j(n)}q_jf(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n-\mathbf{x}_{jn})\end{aligned} \tag{6.81}$$

因为 $\mathbf{x}_{jn}$ 具有原子线度的数量级，所以求和号里各项的自变量与 $(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)$ 只相差一点儿，而 $f(\mathbf{x})$ 在这一段间隔上的变化却很明显．因此适合于对每一项写出围绕 $(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ 的泰勒级数展开式．这就给出

$$\begin{aligned}\langle\eta_n(\mathbf{x},t)\rangle=\sum_{j(n)}q_j\Big[&f(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)-\mathbf{x}_{jn}\cdot\nabla f(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)\\&+\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_{jn})_\alpha(\mathbf{x}_{jn})_\beta\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}f(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)+\cdots\Big]\end{aligned}$$

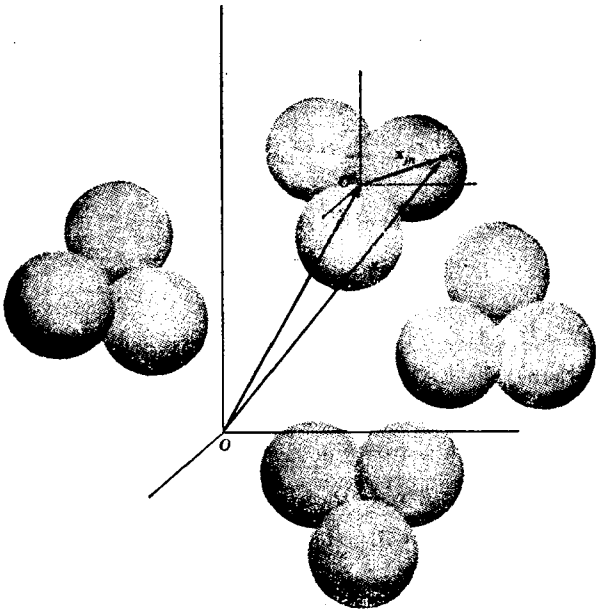


图 6.5 第 n 个分子的坐标. 原点 O' 是固定在分子中的(通常选在质心上). 第 j 个电荷相对于 O' 的坐标为 $\mathbf{x}_{jn}$, 而该分子相对于固定(实验室)坐标系的位置是用坐标 $\mathbf{x}_n$ 来表示的.

对分子中诸电荷求出的各种和值正好是分子多极矩:

$$\text{分子电荷} \qquad q_n=\sum_{j(n)}q_j \tag{6.82}$$

$$\text{分子偶极矩} \qquad \mathbf{p}_n=\sum_{j(n)}q_j\mathbf{x}_{jn} \tag{6.83}$$

$$\text{分子四极矩} \qquad (Q'_n)_{\alpha\beta}=3\sum_{j(n)}q_j(\mathbf{x}_{jn})_\alpha(\mathbf{x}_{jn})_\beta \tag{6.84}$$

用这些多极矩, 可把第 n 个分子的平均电荷密度表成

$$\langle \eta_n(\mathbf{x}, t)\rangle = q_n f(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n) - \mathbf{p}_n \cdot \nabla f(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n) + \frac{1}{6}\sum_{\alpha\beta}(Q'_n)_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \cdots \tag{6.85}$$

假如试图把这个方程，看作从空间平均的定义(6.73)直接得出的结果，那末我们就看出：第一项可以认为是 $\mathbf{x}=\mathbf{x}_n$ 处平均点电荷密度，第二项可以认为是 $\mathbf{x}=\mathbf{x}_n$ 处平均点偶极子密度的散度，以此类推．显然，

$$\langle \eta_n(\mathbf{x}, t)\rangle = \langle q_n \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)\rangle - \nabla\cdot\langle \mathbf{p}_n \cdot \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)\rangle + \frac{1}{6}\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\langle (Q'_n)_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)\rangle + \cdots \tag{6.86}$$

于是我们发现，就求平均得到的有关结果来说，可以把分子看作位于分子中的一固定点上的点多极子的集合．当然，在微观水平上看，分子电荷分布的细节是很重要的，但是，就其效果来说，对于宏观现象可以用多极子的和来代替．

总微观电荷密度(6.79)由自由电荷密度和束缚电荷密度组成．对所有分子(它们可以是不同种类的)求和，并与自由电荷合并，则得平均微观电荷密度为

$$\langle \eta(\mathbf{x}, t)\rangle = \rho(\mathbf{x}, t) - \nabla\cdot\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) + \sum_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}Q'_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t) + \cdots \tag{6.87}$$

式中 ρ 是宏观电荷密度

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \left\langle \sum_{j\,(\text{自由})} q_j \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_j) + \sum_{n\,(\text{分子})} q_n \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n) \right\rangle \tag{6.88}$$

$\mathbf{P}$ 是宏观电极化强度

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \left\langle \sum_{n\,(\text{分子})} \mathbf{p}_n \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n) \right\rangle \tag{6.89}$$

而$Q'_{\alpha\beta}$是宏观四极矩密度

$$Q'_{\alpha\beta}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{6}\left\langle\sum_{n\ (分子)}(Q'_n)_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)\right\rangle \tag{6.90}$$

把(6.87)代入(6.77)的第一个方程中，就得到

$$\sum_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[E_\alpha+4\pi P_\alpha-4\pi\sum_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta}Q'_{\alpha\beta}+\cdots\right]=4\pi\rho \tag{6.91}$$

由(6.70)，上式表明，宏观电位移矢量 D 被定义为具有下列诸分量：

$$D_\alpha=E_\alpha+4\pi P_\alpha-4\pi\sum_\beta\frac{\partial Q'_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}+\cdots \tag{6.92}$$

前两项是大家熟知的结果(6.71)．第三项和更高阶项在原则上是存在的，但几乎都可以忽略不计．

为了完成我们的讨论，还必须考虑〈j〉．由于它的矢量性以及速度的出现，即使不涉及新原理，其推导也比前面对〈η〉的处理复杂得多．在这里我们只叙述结果，而把详细的推导当作练习题留给感兴趣的读者．我们从微观电流密度

$$\mathbf{j}(\mathbf{x},t)=\sum_j q_j\mathbf{v}_j\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_j(t)) \tag{6.93}$$

开始．式中$\mathbf{v}_j=d\mathbf{x}_j/dt$是第 j 个电荷的速度．再把上式求和分成对自由电荷的求和与对分子的求和．正像(6.81)那样，我们可以对第 n 个分子的电流密度求平均，而得

$$\langle\mathbf{j}_n(\mathbf{x},t)\rangle=\sum_{j(n)}q_j(\mathbf{v}_{jn}+\mathbf{v}_n)f(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n-\mathbf{x}_{jn}) \tag{6.94}$$

这里我们假定了电荷作非相对论性运动，把第 j 个电荷的速度写作内部相对速度$\mathbf{v}_{jn}$与分子中原点 O' 的速度$\mathbf{v}_n=d\mathbf{x}_n/dt$之和．由 (6.94) 出发进行的推导需要用到泰勒级数展开和矢量运算．电流的一部分牵涉到分子磁矩，

$$\mathbf{m}_n=\sum_{j(n)}\frac{q_j}{2c}(\mathbf{x}_{jn}\times\mathbf{v}_{jn}) \tag{6.95}$$

关于平均微观电流密度分量的最后结果是

$$\begin{aligned}\langle j_\alpha(\mathbf{x},t)\rangle=&J_\alpha(\mathbf{x},t)+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}[D_\alpha(\mathbf{x},t)-E_\alpha(\mathbf{x},t)]\\&+c\sum_{\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial x_\beta}M_\gamma(\mathbf{x},t)\\&+\sum_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left\langle\sum_{n\ (\text{分子})}[(\mathbf{p}_n)_\alpha(\mathbf{v}_n)_\beta-(\mathbf{p}_n)_\beta(\mathbf{v}_n)_\alpha]\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)\right\rangle\\&-\frac{1}{6}\sum_{\beta\gamma}\frac{\partial^2}{\partial x_\beta\partial x_\gamma}\left\langle\sum_{n\ (\text{分子})}[(Q'_n)_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_n)_\gamma-(Q'_n)_{\gamma\beta}(\mathbf{v}_n)_\alpha]\right.\\&\left.\cdot\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)\right\rangle+\cdots\end{aligned} \tag{6.96}$$

在这个较难的方程中至今尚未确定的量还有宏观电流密度

$$\mathbf{J}(\mathbf{x},t)=\left\langle\sum_{j\ (\text{自由})}q_j\mathbf{v}_j\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_j)+\sum_{n\ (\text{分子})}q_n\mathbf{v}_n\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)\right\rangle \tag{6.97}$$

和宏观磁化强度

$$\mathbf{M}(\mathbf{x},t)=\left\langle\sum_{n\ (\text{分子})}\mathbf{m}_n\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)\right\rangle \tag{6.98}$$

如果自由“电荷”也具有内禀磁矩，那末这些磁矩显然可以包括在 M 的定义中．(6.96)中最后一项涉及分子的电矩和速度，除一些特殊情形(参看下文)外，这一项是不容易解释的．

当把〈j〉代入(6.77)的第二个方程时，就得到(6.70)的宏观安培-麦克斯韦方程(其中导出磁场量 H 由 B 和媒质的性质给出)：

$$\frac{1}{4\pi}(\mathbf{B}-\mathbf{H})_\alpha=\mathbf{M}_\alpha+\left\langle\sum_{n\ (\text{分子})}\left(\mathbf{p}_n\times\frac{\mathbf{v}_n}{c}\right)_\alpha\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)\right\rangle-$$

$$-\frac{1}{6}\sum_{\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial x_\delta}\left\langle\sum_{\substack{n\\(分子)}}(Q_n')_{\delta\beta}\frac{(\mathbf{v}_n)_\gamma}{c}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)\right\rangle+\cdots \qquad (6.99)$$

(6.99)右边第一项是大家熟知的结果(6.71). 其它各项通常都是非常小的，首先是由于分子速度 $\mathbf{v}_n$ 很小，典型的是气体中的热速度或固体中晶格振动速度；其次是由于速度的涨落，而使速度的宏观平均趋于零. 一种例外情形是当媒质进行整体运动时. 为简单起见，假设整个媒质具有平移速度 $\mathbf{v}$. 忽略分子的任何其它运动，并对于所有的 n，令 $\mathbf{v}_n=\mathbf{v}$. 然后，经过一些运算，(6.99)就变为

$$\mathbf{B}-\mathbf{H}=4\pi\mathbf{M}+(\mathbf{D}-\mathbf{E})\times\frac{\mathbf{v}}{c} \qquad (6.100)$$

式中 $\mathbf{D}$ 由(6.92)给出. 上式表明，对于运动的媒质，有效磁化强度包含有电极化强度 $\mathbf{P}$(和四极矩密度 $Q_{\alpha\beta}$). 方程(6.100)是运动媒质的闵可夫斯基电动力学方程组(参看 *Pauli* 书第 105 页)中的一个方程的非相对论性极限.

关于相对论性修正的讨论以及求平均的统计力学方法，读者可以参看 *de Groot* 的书. 从逻辑观点和一致性观点看来，还有一个不够严谨的结论要在此说明一下. 在用(6.84)定义分子四极矩$(Q_n')_{\alpha\beta}$时，我们违反了第四章方程(4.9)的规定，使$(Q_n')_{\alpha\beta}$的迹不等于零而保留下来. 因为我们在第四章里论证了迹为零的四极矩张量的五个独立分量与$(2l+1)$个球谐函数(当 $l=2$ 时)的关系，所以我们须要解释为什么宏观麦克斯韦方程组包含六个分量. 如果借助于(4.9)来定义迹为零的分子四极矩$(Q_n)_{\alpha\beta}$，那末我们有

$$(Q_n')_{\alpha\beta}=(Q_n)_{\alpha\beta}+\sum_{j(n)}q_j(\mathbf{x}_{jn})^2\delta_{\alpha\beta} \qquad (6.101)$$

通过下式引进分子电荷分布的均方电荷半径 r_n^2，

$$er_n^2=\sum_{j(n)}q_j(\mathbf{x}_{jn})^2$$

式中 e 是某一方便的电荷单位，例如是质子的电荷．我们可以把(6.101)写成

$$(Q_n')_{\alpha\beta}=(Q_n)_{\alpha\beta}+er_n^2\delta_{\alpha\beta}$$

于是宏观四极矩密度(6.90)就变为

$$Q'_{\alpha\beta}=Q_{\alpha\beta}+\frac{1}{6}\left\langle\sum_{\substack{n\\(分子)}}er_n^2\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)\right\rangle$$

式中 $Q_{\alpha\beta}$ 正如(6.90)中一样，是用$(Q_n)_{\alpha\beta}$来定义的．净得的结果是：在平均微观电荷密度(6.87)中，迹为零的四极矩密度 $Q_{\alpha\beta}$ 取代了密度 $Q'_{\alpha\beta}$，并且电荷密度 ρ 增加了一个附加项，

$$\rho\to\rho_{自由}+\left\langle\sum_{\substack{n\\(分子)}}q_n\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)\right\rangle+\frac{1}{6}\nabla^2\left\langle\sum_{\substack{n\\(分子)}}er_n^2\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)\right\rangle \quad (6.102)$$

因为张量 $Q'_{\alpha\beta}$ 的迹是多极子展开式中 $l=0$ 项贡献的，所以 $Q'_{\alpha\beta}$ 的迹用电荷密度来表示．当我们考虑静态极限以外的情形时，分子电荷项和均方半径项实际上合在一起才是 $l=0$ 分子多极子展开式中的前两项．在傅里叶变换的波数空间中，它们相当于电荷形状因数按 k^2 的幂展开的式子中的前两项．这从下列的电荷密度 $\rho(\mathbf{x})$的形状因数 $F(k^2)$的定义中可以看到，

$$\begin{aligned}F(k^2)&=\int d^3x\ \rho(\mathbf{x})\langle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\rangle_{l=0\text{ 部分}}\\&=\int d^3x\ \rho(\mathbf{x})\frac{\sin kr}{kr}\\&\simeq\int\rho d^3x-\frac{1}{6}k^2\int r^2\rho d^3x+\cdots\end{aligned}$$

其对应关系为 $k\longleftrightarrow -i\nabla$，这就证明了形状因数展开式与(6.102)是普遍等效的．

在 *Robinson* 这本有趣的专著中讨论了微观方程和宏观方程的关系，其内容与我们的相似．但是，他指出了下列两种方法的差别：一种

是用尝试函数 $f(x)$对空间求平均(6.73)，他称之为(波数谱的)“截断法”；另一种是用统计力学对各种系统求平均．罗滨逊(Robinson)认为：每个宏观问题都有其适当的有关长度的下限，并且在考虑任何一种统计平均之前，该下限决定了尝试函数的大小．

6.8 坡印廷定理，带电粒子和电磁场的联合系统的能量和动量守恒定律

确定电磁场的能量和动量守恒定律的形式是很重要的．我们首先讨论通称为坡印廷定理(1884 年)的能量守恒定律．外电磁场 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 对一个电荷 q 所作的功率是 $q\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}$，其中 $\mathbf{v}$ 是该电荷的速度．因为磁力垂直于速度，所以磁场不作功．如果存在连续分布的电荷与电流，那么在有限体积 V 内，场所作的总功率是

$$\int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}d^3x \tag{6.103}$$

这功率表示电磁能转换为机械能或热能．因此，在体积 V 内的电磁场能量必有一个相应的减少率与之平衡．为了明显地表明这个守恒定律，我们利用麦克斯韦方程组把(6.103)用别的物理量来表示．于是，用安培-麦克斯韦定律消去 $\mathbf{J}$：

$$\int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}d^3x=\frac{1}{4\pi}\int_V\left[c\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})-\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right]d^3x \tag{6.104}$$

如果我们现在应用矢量恒等式

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{E})-\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})$$

和法拉第定律，那么(6.104)的右边就变成

$$\int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}d^3x=\frac{-1}{4\pi}\int_V\left[c\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})+\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right]d^3x \tag{6.105}$$

我们要继续计算，必须提出两条假设．假设所涉及的宏观媒质在电性质和磁性质上都是线性的．于是根据方程(4.89)和(6.16)，可以把(6.105)里的两个时间导数解释为静电能密度和磁能密度的时间导数．现在我们提出第二条假设：即使对于随时间变化的场来说(4.89)

和(6.16)之和就是总电磁能. 那么,如果把总能量密度表成

$$u=\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) \tag{6.106}$$

(6.105)便可写成

$$-\int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}d^3x=\int_V\left[\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{c}{4\pi}\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\right]d^3x \tag{6.107}$$

由于体积 V 是任意的, 所以上式可以改写成一个微分连续性方程或微分守恒定律的形式:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{S}=-\mathbf{J}\cdot\mathbf{E} \tag{6.108}$$

矢量 S 代表能流,并叫做坡印廷矢量,它由下式给出:

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) \tag{6.109}$$

其量纲是(能量/面积×时间). 因为在守恒定律中只出现坡印廷矢量的散度,所以这矢量可以加上任何一个矢量场的旋度. 不过,这样的附加项没有物理意义,所以通常专门选取(6.109).

积分形式(6.107)或微分形式(6.108)的物理意义如下: 在某一体积内的电磁能随时间的变化率, 加上每单位时间由该体积的边界面流出的能量, 等于场对体积内的源所作的总功的负值. 这就是能量守恒的内容. 如果我们遇到耗散效应,如铁磁质的滞后作用,则简单定律(6.108)不再有效,这时必须增加表示滞后功率损失的项.

我们的重点一直是放在电磁场的能量上. 场在单位时间和单位体积内所做的功($\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}$), 代表电磁能转换为机械能或热能. 因为物质归根到底是由带电粒子(电子和原子核)组成的, 所以可把这能量转换率看作每单位体积带电粒子的能量增加率. 这样一来, 我们就可以把微观场($\mathbf{E},\mathbf{B}$)的坡印廷定理, 解释为粒子和场的组合系统的能量守恒定律. 如果用 $E_{机械}$ 表示体积 V 内诸粒子的总能量, 并假定没有粒子移出体积外,就得到

$$\frac{dE_{机械}}{dt}=\int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}d^3x \tag{6.110}$$

于是，坡印廷定理将组合系统的能量守恒表述为：

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}(E_{机械}+E_{场})=-\oint_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{S}da \tag{6.111}$$

式中在V内的总场能是

$$E_{场}=\int_V ud^3x=\frac{1}{8\pi}\int_V(\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2)d^3x \tag{6.112}$$

我们可以同样地讨论线动量守恒．作用在一个带电粒子上的总电磁力是

$$\mathbf{F}=q\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\right) \tag{6.113}$$

如果用$\mathbf{P}_{机械}$表示体积V内全部粒子的所有动量之和，那么，根据牛顿第二定律，我们可以写出

$$\frac{d\mathbf{P}_{机械}}{dt}=\int_V\left(\rho\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{B}\right)d^3x \tag{6.114}$$

为了运算方便，在这里已经把对粒子的求和换成对电荷密度和电流密度的积分．和推导坡印廷定理一样，我们也用麦克斯韦方程组消去(6.114)中的ρ和$\mathbf{J}$：

$$\rho=\frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\mathbf{E},\quad \mathbf{J}=\frac{c}{4\pi}\left(\nabla\times\mathbf{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right) \tag{6.115}$$

将(6.115)代入(6.114)后，被积函数变成：

$$\rho\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{B}=\frac{1}{4\pi}\left[\mathbf{E}(\nabla\cdot\mathbf{E})+\frac{1}{c}\mathbf{B}\times\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}-\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{B})\right]$$

然后写出

$$\mathbf{B}\times\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})+\mathbf{E}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

并将$\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{B})=0$加到方括号中，即得

$$\rho\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{B}=\frac{1}{4\pi}[\mathbf{E}(\nabla\cdot\mathbf{E})+\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{B})-\mathbf{E}\times(\nabla\times\mathbf{E})-$$

$$-\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{B})]-\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})$$

现在，可以把机械动量的变化率(6.114)写成

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{机械}}}{dt}+\frac{d}{dt}\int_V\frac{1}{4\pi c}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\,d^3x=\frac{1}{4\pi}\int_V[\mathbf{E}(\nabla\cdot\mathbf{E})-\mathbf{E}\times(\nabla\times\mathbf{E})$$
$$+\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{B})-\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{B})]d^3x \qquad (6.116)$$

暂时把左边的体积分当作体积V内的总电磁动量$\mathbf{P}_{\text{场}}$:

$$\mathbf{P}_{\text{场}}=\frac{1}{4\pi c}\int_V(\mathbf{E}\times\mathbf{B})d^3x \qquad (6.117)$$

被积函数可解释为电磁动量密度．要注意：这一动量密度是和能流密度$\mathbf{S}$成正比，其比例常数为c^{-2}.

为了完全肯定

$$\mathbf{g}=\frac{1}{4\pi c}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) \qquad (6.118)$$

的体积分就是电磁动量，并确立(6.116)就是动量守恒定律，我们必须把右边的体积分换成某个量的法向分量的面积分，这个量可以当作动量流．设笛卡儿坐标用x_α表示，$\alpha=1,2,3$．(6.116)中被积函数的电场部分的$\alpha=1$分量由下式明显地给出:

$$[\mathbf{E}(\nabla\cdot\mathbf{E})-\mathbf{E}\times(\nabla\times\mathbf{E})]_1$$
$$=E_1\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1}+\frac{\partial E_2}{\partial x_2}+\frac{\partial E_3}{\partial x_3}\right)-E_2\left(\frac{\partial E_2}{\partial x_1}-\frac{\partial E_1}{\partial x_2}\right)$$
$$+E_3\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_3}-\frac{\partial E_3}{\partial x_1}\right)$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_1}(E_1^2)+\frac{\partial}{\partial x_2}(E_1E_2)+\frac{\partial}{\partial x_3}(E_1E_3)$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}(E_1^2+E_2^2+E_3^2)$$

这意味着可以把第α分量写成

$$[\mathbf{E}(\nabla\cdot\mathbf{E})-\mathbf{E}\times(\nabla\times\mathbf{E})]_\alpha=\sum_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(E_\alpha E_\beta-\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\delta_{\alpha\beta}\right) \qquad (6.119)$$

而且右边具有二秩张量的散度形式. 定义麦克斯韦胁强张量 $T_{\alpha\beta}$ 为

$$T_{\alpha\beta}=\frac{1}{4\pi}\left[E_\alpha E_\beta+B_\alpha B_\beta-\frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})\delta_{\alpha\beta}\right]. \tag{6.120}$$

因此，方程(6.116)可以写成如下的分量形式:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P}_{\text{机械}}+\mathbf{P}_{\text{场}})_\alpha=\sum_\beta\int_V\frac{\partial}{\partial x_\beta}T_{\alpha\beta}d^3x \tag{6.121}$$

把散度定理应用到体积分上，则得

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P}_{\text{机械}}+\mathbf{P}_{\text{场}})_\alpha=\oint_S\sum_\beta T_{\alpha\beta}n_\beta da \tag{6.122}$$

式中 $\mathbf{n}$ 为闭合曲面 S 的外法线单位矢量. 显然，如果(6.122)表示动量守恒，那末 $\sum_\beta T_{\alpha\beta}n_\beta$ 就是通过曲面 S 进入体积 V 的每单位面积动量流的第 α 分量. 换句话说，它就是通过曲面 S 的每单位面积传递进来的、作用在 V 内粒子和场的组合系统上的力. 所以我们可以用方程(6.122)来计算电磁场中的物体所受的作用力，其办法如下: 用一个闭合曲面 S 把这些物体包围起来，然后按照(6.122)的右边算出总电磁力.

粒子和场的组合系统的角动量守恒，可以仿照我们处理能量和线动量的方法去处理. 我们把这问题当作习题留给学生去做（参看习题6.9).

6.9 宏观媒质的守恒定律

在上节里，用宏观麦克斯韦方程组推导了坡印廷定理，但是，对动量守恒和麦克斯韦胁强张量的讨论只适合于微观麦克斯韦方程组. 对大块物质来说，在定义电磁能密度 u、能流 $\mathbf{S}$、动量流 $\mathbf{g}$ 和胁强张量 $T_{\alpha\beta}$ 时必须十分小心，因为哪些量是电磁的，哪些量是机械的，在某种程度上是任意的. 这些年来许多物理学工作者从事这个问题的研究. 历史性的叙述可以查阅 *Pauli* 和 *de Groot* 的书. 我们在这里只作一些评论.

如果把宏观麦克斯韦方程组直接应用到动量守恒和能量守恒，就

得到通称的闵可夫斯基(1908)结果，即使其中一些表式是早先由别人提出的。这些表式就是以前得到的 u 表式(6.106)和 $\mathbf{S}$ 表式(6.109)，以及下列的动量密度和胁强张量的表式：

$$\mathbf{g}=\frac{1}{4\pi c}(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) \tag{6.123}$$

$$T_{\alpha\beta}=\frac{1}{4\pi}\left[E_\alpha D_\beta+H_\alpha B_\beta-\frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})\delta_{\alpha\beta}\right] \tag{6.124}$$

假定媒质的反应是线性的，但不一定是各向同性的．要注意：对各向异性媒质来说，胁强张量不是对称的．由于胁强张量缺乏对称性，困扰了许多物理学家．其中最先用对称化形式代替(6.124)的是赫兹和阿布拉罕(Abraham)．用实验来检验并不像人们当初想像的那么容易．布里维克(Brevik)[①]详尽地讨论了各种形式的 $T_{\alpha\beta}$，并且作出了赞成不对称闵可夫斯基形式的结论．

通常认为，把 $\mathbf{g}$ 的闵可夫斯基表式(6.123)当作电磁动量密度是不可接受的．所有物理学工作者都同意

$$\mathbf{g}=\frac{1}{4\pi c}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\frac{1}{c^2}\mathbf{S} \tag{6.125}$$

这个定义．这一结果是对物质与场的组合系统作统计力学处理而得到的，其中电磁量被定义为组合系统与物质系统的量之差，这时物质系统与组合系统的平衡温度 T 和密度 ρ 相同，但物质系统的场等于零．在这个定义下，动量流密度和能流密度由(6.125)和(6.109)给出，而对于 $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ 的各向同性线性媒质，内能的电磁部分是[②]

$$u=\frac{1}{8\pi}\left\{E^2\left[\varepsilon+T\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho\right]+H^2\left[\mu+T\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_\rho\right]\right\} \tag{6.126}$$

而电磁胁强张量是

---

① I. Brevik, *Dankse Videns. Sels. Mat.-fys. Medd.* **37**, *No.* 11 和 *No.* 13(1970).

② 参看 *de Groot* 书第 13 节，或 Landau and Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, 第 10、15、30、34 节.

$$T_{\alpha\beta}=\frac{1}{4\pi}\left\{\varepsilon E_\alpha E_\beta+\mu H_\alpha H_\beta-\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\left[E^2\left(\varepsilon-\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+H^2\left(\mu-\rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_T\right)\right]\right\} \tag{6.127}$$

只有在 ε 和 μ 与温度和密度无关的这种非物理情况下，上面两个表式才化为 μ 和 $T_{\alpha\beta}$ 的闵可夫斯基表式.

电磁场中大块物质的能量和动量的平衡问题显然是很复杂的. 进一步的讨论请读者参看 *Landau and Lifshitz* 的书（见上页注②），也可参看 *Stratton* 书的第二章.

6.10 谐振场的坡印廷定理；根据场的概念定义的阻抗和导纳[①]

集总电路的概念，如二端线性网络的电阻和电抗，在许多实际应用中经常遇到，甚至在系统的大小与自由空间中的波长可相比拟的情况（例如，谐振天线）下也会遇到. 所以根据场的概念作出普遍的定义是很有用的. 考虑到随时间谐和变化的场的坡印廷定理，就能作出普遍的定义. 假定所有的场和源都有一个时间依赖关系 $e^{-i\omega t}$，所以我们写出

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\mathrm{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}]\equiv\frac{1}{2}[\mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}+\mathbf{E}^*(\mathbf{x})e^{i\omega t}] \tag{6.128}$$

场 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ 通常是复数，其量值和位相随位置而变化. 对于乘积形式，例如 $\mathbf{J}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$，我们有

$$\mathbf{J}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{4}[\mathbf{J}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}+\mathbf{J}^*(\mathbf{x})e^{i\omega t}]$$
$$\cdot[\mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}+\mathbf{E}^*(\mathbf{x})e^{i\omega t}]$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\mathbf{J}^*(\mathbf{x})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x})+\mathbf{J}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-2i\omega t}] \tag{6.129}$$

---

① 本节的论述跟 Fano, Chu, and Adler 书中 8.2 和 8.3 节的相同. 读者可以在该书中找到关于下列问题的相当深入的讨论：集总电路与场的概念之间的关系、感应体中杂散电容的一些实例等等. 也可参看 Adler, Chu, and Fano 书的前两章.

因此，乘积的时间平均通常取作一个复量与另一个复量的复共轭之积的实部的一半.

谐振场的麦克斯韦方程组变为:

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0,\qquad \nabla\times\mathbf{E}-i\frac{\omega}{c}\mathbf{B}=0$$
$$\nabla\cdot\mathbf{D}=4\pi\rho,\qquad \nabla\times\mathbf{H}+i\frac{\omega}{c}\mathbf{D}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \tag{6.130}$$

式中所有量，都是按照(6.128)的右边给出的 $\mathbf{x}$ 的复函数. 用下面的体积分代替(6.103):

$$\frac{1}{2}\int_V \mathbf{J}^*\cdot\mathbf{E}d^3x$$

其实部给出体积 V 中场所做的时间平均功率. 严格地按照从(6.103)到(6.107)的步骤进行推导，则得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_V \mathbf{J}^*\cdot\mathbf{E}d^3x &=\frac{c}{8\pi}\int_V \mathbf{E}\cdot\left[\nabla\times\mathbf{H}^*-i\frac{\omega}{c}\mathbf{D}^*\right]d^3x\\ &=\frac{c}{8\pi}\int_V\Big[-\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*)\\ &\qquad -i\frac{\omega}{c}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}^*-\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}^*)\Big]d^3x\end{aligned} \tag{6.131}$$

我们现在定义复坡印廷矢量为

$$\mathbf{S}=\frac{c}{8\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*) \tag{6.132}$$

定义谐振电能密度和谐振磁能密度为

$$w_{电}=\frac{1}{16\pi}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}^*),\quad w_{磁}=\frac{1}{16\pi}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}^*) \tag{6.133}$$

那末(6.131)可以写成

$$\frac{1}{2}\int_V \mathbf{J}^*\cdot\mathbf{E}d^3x+2i\omega\int_V(w_{电}-w_{磁})d^3x+\oint_S\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}da=0 \tag{6.134}$$

这就是与(6.107)相似的谐振场公式. 上式是个复数方程，其实部给出

时间平均量的能量守恒，其虚部则关系到无功能或储能及其交换流①. 如果能量密度 $w_{电}$ 和 $w_{磁}$ 的体积分是实数，例如在无损耗电介质和理想导体的系统中所出现的情况，则(6.134)的实部是

$$\int_V \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{J}^*\cdot\mathbf{E})\,d^3x+\oint_S \mathrm{Re}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{n})da=0$$

这表明场对 V 中所有源所做的稳恒态时间平均功率等于通过界面 S 流入体积 V 内的平均功率流，后者由 ReS 的法向分量算出. 如果我们假定能量密度 u 由稳恒部分和谐波部分组成，那末上式正好是从早先的坡印廷定理(6.107)算得的. 若在系统的诸组元中有耗损，则(6.134)的第二项就有一个计算这种耗散的实部.

复坡印廷定理(6.134)，可用来定义一个普通的二端线性无源电磁系统的输入阻抗. 我们设想这个系统放在以闭合曲面 S 为界的体积 V 中，并且只有两个输入端伸出在外，如图 6.6 所示. 若复谐振输入电流为 I_i，复谐振输入电压为 V_i，则复功率输入为 $\frac{1}{2}I_i^*V_i$. 把(6.134)应用到 S 外的整个空间，就可以用坡印廷矢量写出复输入功率:

$$\frac{1}{2}I_i^*V_i=-\oint_{S_i}\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}da \tag{6.135}$$

式中单位法线矢量 $\mathbf{n}$ 是指向 S 外的，如图 6.6 所示，并已假定输入功率流限定在面积 S_i(图 6.6 的下图中同轴线的横截面)内. 由于考虑到适用于闭合曲面 S 包围的体积 V 的(6.134)，则(6.135)的右边可以用对体积 V 内的场的积分写成:

$$\frac{1}{2}I_i^*V_i=\frac{1}{2}\int_V \mathbf{J}^*\cdot\mathbf{E}d^3x+2i\omega\int_V(w_{电}-w_{磁})d^3x+\oint_{S-S_i}\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}da \tag{6.136}$$

式中面积分表示从体积 V 通过曲面 S (输入曲面 S_i 除外)流出的功率

① 指通过界面 S 流入体积 V 的无功功率流. ——译者注

流．如果曲面 $(S-S_i)$ 取作无限大，那末此面积分为实数，它表示逃脱辐射(参看第九章)．在低频时，这种辐射通常可以忽略不计．这时毋须区别 S 和 S_i；图 6.6 的上图适用．

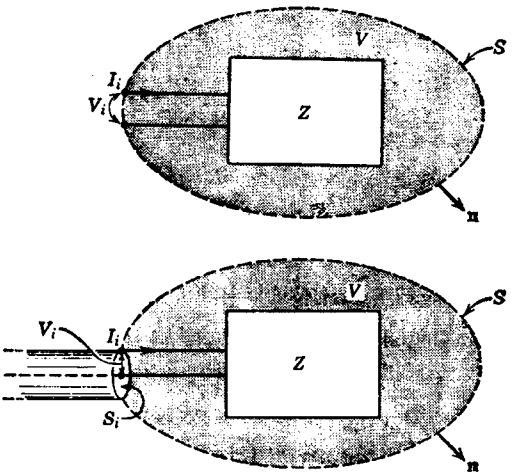


图 6.6 任意的二端线性无源电磁系统的示意图．曲面 S 完全包围了这个系统；只有两个输入端伸出在外．在这两端上，谐振输入电流为 I_i，谐振输入电压为 V_i；输入阻抗 Z 由 $V_i=ZI_i$ 所定义．上图应用于低频情形，这时辐射损失可忽略不计，而下图为同轴线输入，这时要讨论辐射电阻．

输入阻抗 $Z=R-iX$(电气工程师喜欢写作 $Z=R+jX$!)，根据其定义 $V_i=ZI_i$ 可由 (6.136) 求得．其实部和虚部分别为：

$$R=\frac{1}{|I_i|^2}\left\{\mathrm{Re}\int_V \mathbf{J}^*\cdot\mathbf{E}d^3x+2\oint_{S-S_i}\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}da\right.$$
$$\left.+4\omega\mathrm{Im}\int_V (w_{磁}-w_{电})d^3x\right\} \qquad (6.137)$$

$$X=\frac{1}{|I_i|^2}\left\{4\omega\mathrm{Re}\int_V (w_{磁}-w_{电})d^3x-\mathrm{Im}\int_V \mathbf{J}^*\cdot\mathbf{E}d^3x\right\} \qquad (6.138)$$

在写出(6.137)和(6.138)时，我们已假定通过 S 流出的功率流是实

数．因而(6.137)中的第二项就是“辐射电阻”，在高频时这是很重要的．在低频情形下，在欧姆损失是唯一重要耗散源的那些系统中，这些表式简化为

$$R\simeq\frac{1}{|I_i|^2}\int_V\sigma|\mathbf{E}|^2d^3x \tag{6.139}$$

$$X\simeq\frac{4\omega}{|I_i|^2}\int_V(w_{磁}-w_{电})d^3x \tag{6.140}$$

这里σ是实电导率，能量密度$w_{磁}$和$w_{电}$(6.133) 在整个体积中也是实数．显而易见，电阻就是考虑电路中欧姆热损失所预期的值．同样，电抗似乎有如下形式：如果磁储能占优势(例如考虑集总电感时)，则电抗为正，以此类推．低频感抗对不同频率的依赖关系($X=\omega L$)可以根据用电流和电压表示的L的定义($V=L\,dI/dt$)求得，而低频容抗对不同频率的依赖关系 ($X=-1/\omega C$) 可以根据用电荷和电压表示的C的定义($V=Q/C$)求得．对于一些简单实例的处理留作本章末的习题，同时在那里也要推导相当于(6.139)和(6.140)的、复导纳Y的电导和电纳的结果．

6.11 在转动、空间反射和时间反转下电磁场和源的变换性质

有一定关系的诸物理量，在某些类型的坐标变换下，具有若干相容的变换性质．这个事实往往被认为是不成问题的，以致对这些关系式所规定的那些要求和限制的意义有时就被忽视了．因此，明确地讨论电磁量在转动、空间反射和时间反转下的比较明显的性质是很有用的．这些概念直接用来限制唯象的本构关系式，而且在下节中应用这些概念来讨论磁单极问题．

在这里假定读者已从经典力学(例如，参看 *Goldstein* 的书)熟知空间和时间坐标变换以及它们与一般守恒定律的关系．本节只是概括阐述一些主要结果．

转动

三维空间中的转动是一个点坐标的线性变换，这种变换使坐标的平方和保持不变．下式用原来的坐标 x_β 表示变换了的坐标 x'_α：

$$x'_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha\beta} x_\beta \tag{6.141}$$

$(\mathbf{x}')^2 = (\mathbf{x})^2$ 这个要求就是限制实变换系数 $a_{\alpha\beta}$ 必须是正交的：

$$\sum_\alpha a_{\alpha\beta} a_{\alpha\gamma} = \delta_{\beta\gamma} \tag{6.142}$$

逆变换系数为 $(a^{-1})_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$，矩阵 (a) 的行列式的平方等于 1．值 $\det(a) = +1$ 相当于一个真转动，它可以由原来的组态通过一连串无限小的转动步骤得到；而 $\det(a) = -1$ 相当于一个非正常转动，它是一个反射加一个转动．

把物理量按多种不同秩的转动张量来分类，秩取决于物理量在转动下的变换方式．坐标 $\mathbf{x}_i$、速度 $\mathbf{v}_i$、动量 $\mathbf{p}_i$ 的诸分量都按基本变换法则(6.141)而变换，它们是一秩张量或矢量．矢量的标积（如 $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2$ 或 $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{p}_2$）在转动下是不变的，所以是零秩张量或标量．按

$$B'_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma,\delta} a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} B_{\gamma\delta} \tag{6.143}$$

而变换的一组量叫做二秩张量或通常简称张量．麦克斯韦胁强张量就是这样一组量．仿照上述，更高秩张量的变换明显可知．

在讨论电磁场和其它物理量时，我们要处理一个或一个以上的关于坐标和其它动力学变量的函数．这时是以“主动”观点，还是以“被动”观点来看待转动，要我们作一选择．我们采取主动观点——认为坐标轴是固定不动的，物理系统经历一个转动．例如，初始坐标为 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 的两个带电粒子构成一个系统，这系统在转动下被变换，使得粒子的新坐标为 $\mathbf{x}'_1$ 和 $\mathbf{x}'_2$，如图 6.7 所示．每一坐标矢量的诸分量按(6.141)而变换，但静电势是不变的，因为它只是两点的间距 $R = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ 的函

数，而且 R^2 是矢量标积之和，所以它在转动下是不变的．静电势是一个转动下的标量的例子．设物理量 ϕ 是各种坐标的函数，这些坐标共同地用 $\mathbf{x}_i$ 表示之（$\mathbf{x}_i$ 可能包括像速度、动量那样的坐标）．一般说来，如果当物理系统经历了 $\mathbf{x}_i \to \mathbf{x}_i'$ 这一转动时，这物理量保持不变，

$$\phi'(\mathbf{x}_i') = \phi(\mathbf{x}_i) \qquad (6.144)$$

那末 ϕ 就是转动下的标函数．同样地，如果三个一组的物理量 $V_\alpha(\mathbf{x}_i)(\alpha=1,2,3)$，在系统的转动下，按

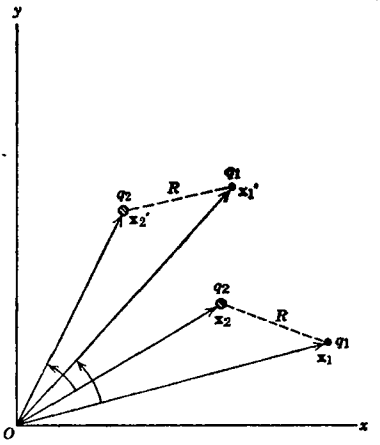


图 6.7　由两个电荷组成的一个系统的主动转动．

$$V_\alpha'(\mathbf{x}_i') = \sum_\beta a_{\alpha\beta} V_\beta(\mathbf{x}_i) \qquad (6.145)$$

而变换，那末 V_α 构成一个矢量的三个分量，更高秩张量可以此类推．

微分矢量算符在转动下具有确定的变换性质．例如，标量的梯度 $\nabla\phi$ 按矢量而变换，矢量的散度 $\nabla\cdot\mathbf{V}$ 是标量，拉普拉斯算符 ∇^2 在下述意义下是标量算符：它作用于一个函数或函数集，不会改变它们的转动变换性质．

我们必须特别提一下两个矢量的矢积：

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C} \qquad (6.146)$$

按分量形式，这个矢量可简写为

$$A_\alpha = \sum_{\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} B_\beta C_\gamma$$

当 $\alpha=1, \beta=2, \gamma=3$ 及它们的循环排列时，式中 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}=+1$，当 α，β，γ

按其它次序排列时，$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}=-1$，当两个或两个以上指标相同时 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}=0$. 因为右边出现两个矢量，所以矢积具有零迹反对称二秩张量的某些特性. 由于这样一个张量只有三个独立分量，我们把它看作一个矢量. 当然，只有它在转动下按(6.141)而变换，才能证实它是一个矢量. 事实上，矢积(6.146)的变换法则是

$$A'_\alpha=\det(a)\sum_\beta a_{\alpha\beta}A_\beta \tag{6.147}$$

对于真转动(这是我们迄今讨论过的唯一的一种转动)来说，$\det(a)=+1$，于是(6.147)与基本坐标变换(6.141)一致. 在真转动下，矢积按矢量而变换.

空间反射或空间反演

对一平面的空间反射相当于改变所有各点的坐标矢量的法向分量的正负号，同时使与平面平行的分量保持不变. 于是，对 x-y 平面的反射来说，$\mathbf{x}_i=(x_i,y_i,z_i)\to\mathbf{x}'_i=(x_i,y_i,-z_i)$. 空间反演相当于各坐标矢量的所有三个分量通过原点的反射，$\mathbf{x}_i\to\mathbf{x}'_i=-\mathbf{x}_i$. 空间反演或空间反射是一种分立变换，对两个以上坐标来说，它通常不可能由真转动来完成. 它相当于 $\det(a)=-1$，并且当直接反演运算时，它由(6.141)给出，其中 $a_{\alpha\beta}=-\delta_{\alpha\beta}$. 这是由于空间反演下矢量改变正负号，但是按(6.147) 变换的矢积的正负号不变. 因而我们不得不区分下列两类矢量(在通常的转动下):

极矢量(或真矢量)—按(6.145)而变换，且当 $\mathbf{x}_i\to\mathbf{x}_i'=-\mathbf{x}_i$ 时，具有

$$\mathbf{V}\to\mathbf{V}'=-\mathbf{V}$$

的特性.

轴矢量或赝矢量—按(6.147)而变换，且当 $\mathbf{x}_i\to\mathbf{x}'_i=-\mathbf{x}_i$ 时，具有

$$\mathbf{A}\to\mathbf{A}'=\mathbf{A}$$

的特性.

同样必须区别转动下的标量. 标量或赝标量，取决于这些量在空间反演下是否改变正负号. 例如，假定 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 全是极矢量，则三标积 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ 是一个赝标量. (我们在这里顺便指出通常使用的记号是含义不清的. 把一个矢量写成 $\mathbf{a}$，并没有告诉我们这是一个极矢量，还是一个轴矢量.)我们可以直接推出高秩张量在空间反演下的变换性质，只要把这些张量写成极矢量或轴矢量的分量之乘积. 假如一个 N 秩张量在空间反演下的变换含有一个因子 $(-1)^N$，那末我们把这个张量叫做 N 秩真张量或简称 N 秩张量. 假如因子是 $(-1)^{N+1}$，我们把它叫做 N 秩赝张量.

时间反转

物理学基本定律对时间的方向来说是不变的（至少在经典水平上). 这并不意味着在时间反转变换 $t\to t'=-t$ 下的方程仍是原先按 t 写出的方程，而是意味着在时间反转变换 $t\to t'=-t$ 下，有关的物理量按一致的方式变换，使得方程的形式与原先的相同. 于是，对于在外势 $U(\mathbf{x})$ 中运动的动量为 $\mathbf{p}$、位置为 $\mathbf{x}$ 的一个粒子，牛顿运动方程

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=-\nabla U(\mathbf{x})$$

在时间反转下是不变的，只要 $\mathbf{x}\to\mathbf{x}'=\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{p}\to\mathbf{p}'=-\mathbf{p}$. 当然，根据动量与速度 $\mathbf{v}=d\mathbf{x}/dt$ 的关系，直接就能看出动量正负号的改变. 由牛顿定律在时间反转下的不变性得出以下结果：如果一个粒子系统在各种力的作用下从某一初态演变到某一终态，这系统的运动可以这样叙述，即从时间反转终态(所有位置相同，但所有速度反转)遍历反转路线演变到时间反转初态.

表 6.1 的第一部分总结了各种力学量在转动、空间反演和时间反转下的变换性质.

表 6.1 各种物理量在转动、空间反演和时间反转下的变换性质*

物 理 量		转 动 (张量的秩)	空间反演 (名称)	时间反转
I. 力学量				
坐标	$\mathbf{x}$	1	奇(矢量)	偶
速度	$\mathbf{v}$	1	奇(矢量)	奇
动量	$\mathbf{p}$	1	奇(矢量)	奇
角动量	$\mathbf{L}=\mathbf{x}\times\mathbf{p}$	1	偶(赝矢量)	奇
力	$\mathbf{F}$	1	奇(矢量)	偶
力矩	$\mathbf{N}=\mathbf{x}\times\mathbf{F}$	1	偶(赝矢量)	偶
动能	$p^2/2m$	0	偶(标量)	偶
势能	$U(\mathbf{x})$	0	偶(标量)	偶
II. 电磁量				
电荷密度	ρ	0	偶(标量)	偶
电流密度	$\mathbf{J}$	1	奇(矢量)	奇
电场强度 电极化强度 电位移矢量	$\mathbf{E}$ $\mathbf{P}$ $\mathbf{D}$	1	奇(矢量)	偶
磁感应强度 磁化强度 磁场强度	$\mathbf{B}$ $\mathbf{M}$ $\mathbf{H}$	1	偶(赝矢量)	奇
坡印廷矢量	$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$	1	奇(矢量)	奇
麦克斯韦胁强张量	$T_{\alpha\beta}$	2	偶(张量)	偶

* 对于作为 $\mathbf{x}$ 和 t 的函数的那些物理量，我们必须彻底弄清楚空间反演或时间反转下奇性或偶性的含义. 例如，磁感应强度是这样的：在空间反演下，$\mathbf{B}(\mathbf{x},t)\to\mathbf{B}_I(\mathbf{x},t)=+\mathbf{B}(-\mathbf{x},t)$，而在时间反转下，$\mathbf{B}(\mathbf{x},t)\to\mathbf{B}_T(\mathbf{x},t)=-\mathbf{B}(\mathbf{x},-t)$.

电磁量

正如力学定律那样，描写电磁现象的方程的形式在转动、空间反演和时间反转下是不变的，这句话是正确的(即与所有已知的实验事实一致). 这意味着：不同的电磁量在这些运算下具有完全确定的变换性质. 电荷在伽利略和洛仑兹变换下是不变的，且在转动下是个标量，这是一个实验事实. 假定电荷也是空间反演下的标量、时间反转下的偶

量，这是自然的、方便的和许可的．这里要指出一点：像力那样物理上的可测的量要涉及电荷和场量的乘积．于是，像 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 那样的场量所具有的变换性质与电荷的选取方法有关．

由于电荷在所有三种变换下是一个标量，电荷密度 ρ 也是一个真标量．从电场强度是每单位电荷所受作用力这一事实，我们看出，$\mathbf{E}$ 是一个在时间反转下呈奇性的极矢量．此结论也可从麦克斯韦方程 $\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho$ 得出，因为该方程两边在这些变换下必须按相同方式而变换．

表示法拉第定律的麦克斯韦方程为

$$\nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0$$

其中第一项是作为转动和空间反演下的赝矢量、时间反转下的偶量而变换的．为了保持形式不变，因此磁感应强度 $\mathbf{B}$ 必定是一个在时间反转下呈奇性的赝矢量．我们可以看出，在安培-麦克斯韦方程

$$\nabla\times\mathbf{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$

的左边是作为一个在时间反转下呈奇性的极矢量而变换的．这意味着电流密度 $\mathbf{J}$ 是一个在时间反转下呈奇性的极矢量，这正是根据其电荷乘速度的定义所预计到的．

我们刚才已经看到，微观场和源在转动、空间反演和时间反转下具有完全确定的变换性质．根据 6.7 节中宏观麦克斯韦方程组的推导及 $\mathbf{P}$、$\mathbf{M}$ 等的定义，我们可以看出，$\mathbf{E}$、$\mathbf{P}$、$\mathbf{D}$ 都按同一方式而变换，同时 $\mathbf{B}$、$\mathbf{M}$、$\mathbf{H}$ 也按同一方式而变换．表 6.1 第二部分总结了电磁量的各种变换性质．

为了说明表 6.1 中列出的各种对称性质的用处，我们讨论下面的问题：对于在磁感应强度为 $\mathbf{B}_0$ 的均匀恒定外磁场中的各向同性的线性无耗媒质，唯象地建立一个确定电极化强度 $\mathbf{P}$ 的空间定域本构关系

式．假定这个关系式是按电场 $\mathbf{E}$ 的第一阶写出的，并且我们要求写成 $\mathbf{B}_0$ 的幂的展开式，写到 $\mathbf{B}_0$ 的二次幂．因为 $\mathbf{P}$ 是一个极矢量，且在时间反转下呈偶性，所以各项乘以标量系数必定仍以原来相同的方式而变换．对 $\mathbf{B}_0$ 的零阶项来说，只能用 $\mathbf{E}$ 写出．对于 $\mathbf{B}_0$ 的一阶项，含 $\mathbf{E}$ 的各项可能是：

$$\mathbf{E}\times\mathbf{B}_0,\quad \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\times\mathbf{B}_0,\quad \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}\times\mathbf{B}_0,\cdots$$

根据转动和空间反演，这些项都是许可的，但只有含奇阶时间导数的那些项在时间反转下正确地变换．对于 $\mathbf{B}_0$ 的二阶项，可能的各项是：

$$(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{B}_0)\mathbf{E},\quad (\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}_0)\mathbf{B}_0,\quad (\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{B}_0)\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},\cdots$$

这里只有含 $\mathbf{E}$ 的零阶或偶阶时间导数的各项满足所有的要求．于是，最普遍的空间定域电极化强度表式，准确到恒定磁场强度 $\mathbf{B}_0$ 的二阶项，可以写为

$$\mathbf{P}=\chi_0\mathbf{E}+\chi_1\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\times\mathbf{B}_0+\chi_2(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{E}_0)\mathbf{E}+\chi_3(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}_0)\mathbf{B}_0+\cdots \quad (6.148)$$

式中 χ_i 是实系数，并且可能有 $\mathbf{E}$ 的更高阶时间导数，这些导数对于 $\mathbf{B}_0$ 的各线性项是奇阶的，对于 $\mathbf{B}_0$ 的零次或二次幂项是偶阶的．在低频时，所有物质系统的反应本质上都是通过电力引起的．这就是说，当频率为零时，$\mathbf{P}$ 应该与 $\mathbf{B}_0$ 无关，一种更切合实际的形式是

$$\mathbf{P}=\chi_0\mathbf{E}+\chi_1\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\times\mathbf{B}_0+\chi_2'(\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{B}_0)\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}+\chi_3'\left(\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}\cdot\mathbf{B}_0\right)\mathbf{B}_0 \quad (6.149)$$

式中我们对 $\mathbf{B}_0$ 的各次幂只写出了最低阶时间导数．在光频时，由这个方程可以理解恒定磁场里各向同性媒质中波的回转特性①．

另一实例是霍耳效应，留作习题．*Landau and Lifshitz* 书(脚注中

① 参看 Landau and Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, 第 334 页例题 3, 第 337 页．

援引的)中讨论了霍耳效应、温差电磁效应以及固体中磁结构的存在.

6.12 关于磁单极问题

现在(1975 年)还没有从实验上证明磁荷或磁单极的存在，但是，主要由于狄喇克[①]早期的杰出的理论论证，凡是在高能物理中开拓新能区时或在一种新物质源(例如从月球取来的岩石)可资利用时，都重新进行磁单极的探索. 狄喇克论证了，一个磁单极在宇宙中的单独存在将对电荷分立性提供一种解释；下文将概括叙述这一论证. 因为电荷的量子化是物理世界的最深奥的概念之一，所以狄喇克的想法有很大的号召力. 阿马尔迪(Amaldi)[②]的评论性文章中叙述了到 1968 年为止的理论概念和实验探索的历史. 本章末援引了一些较新的参考文献.

在研究狄喇克的论证之前，有一些必要的准备. 问题在于粒子既具有磁荷又具有电荷这种说法是否可能. 让我们假设：除了电荷密度 ρ_e 和电流密度 $\mathbf{J}_e$ 外，还存在磁荷密度 ρ_m 和磁流密度 $\mathbf{J}_m$. 那末麦克斯韦方程组将是

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=4\pi\rho_e, \qquad \nabla\times\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_e$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=4\pi\rho_m, \qquad -\nabla\times\mathbf{E}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_m \tag{6.150}$$

我们假定磁荷密度和磁流密度满足与电荷密度和电流密度形式相同的

---

① P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A133**, 60(1931); *Phys. Rev.* **74**, 883(1948).

② E. Amaldi, "On the Dirac Magnetic Poles," 此文刊登在 *Old and New Problems in Elementary Particles*, *ed.*, G. Puppi, Academic Press, New York(1968). 也可参看以下两篇短评: P. G. H. Sandars, *Contemporary Physics* **7**, 419(1966)和 R. H. Carrigan, *Nuovo Cimento* **38**, 638(1965).

连续性方程．由这些方程看来，磁荷和磁流的存在将会有可观测到的电磁效果．可是，考虑下列二元变换：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}&=\mathbf{E}'\cos\xi+\mathbf{H}'\sin\xi, \qquad \mathbf{D}=\mathbf{D}'\cos\xi+\mathbf{B}'\sin\xi\\ \mathbf{H}&=-\mathbf{E}'\sin\xi+\mathbf{H}'\cos\xi, \quad \mathbf{B}=-\mathbf{D}'\sin\xi+\mathbf{B}'\cos\xi\end{aligned} \tag{6.151}$$

对于实角 ξ，这样一种变换使像 $\mathbf{E}\times\mathbf{H}$，$(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})$和麦克斯韦胁强张量 $T_{\alpha\beta}$ 诸分量那样的二次形式保持不变．假如源按同样方式变换，

$$\begin{aligned}\rho_e&=\rho_e'\cos\xi+\rho_m'\sin\xi, \qquad \mathbf{J}_e=\mathbf{J}_e'\cos\xi+\mathbf{J}_m'\sin\xi\\ \rho_m&=-\rho_e'\sin\xi+\rho_m'\cos\xi, \quad \mathbf{J}_m=-\mathbf{J}_e'\sin\xi+\mathbf{J}_m'\cos\xi\end{aligned} \tag{6.152}$$

那末，用代数方法可以直接证明广义麦克斯韦方程组 (6.150) 是不变的，就是说，带撇场$(\mathbf{E}',\mathbf{D}',\mathbf{B}',\mathbf{H}')$ 的方程组与 (6.150) 相同，这时 (6.150)的源改为带撇源．

电动力学方程在二元变换下的不变性表明：粒子具有电荷而不具有磁荷，只不过是一种习惯的说法而已．唯一有意义的问题是所有粒子是否具有相同的磁荷-电荷比．如果相同，那末我们可以作二元变换，选择 ξ 角，使得 $\rho_m=0,\mathbf{J}_m=0$．这时我们所得的麦克斯韦方程组就像通常熟知的一样．

按惯例，若我们选电子的电荷和磁荷为 $q_e=-e,q_m=0$，则可知道质子的 $q_e=+e$（现今的误差极限为$|q_e(\text{电子})+q_e(\text{质子})|/e\sim10^{-20}$），$|q_m(\text{核子})|<2\times10^{-24}e$．

质子或中子的磁荷具有这样非常小的极限值，乃是由下述事实直接得知的：地球表面的平均磁场不大于 1 高斯．在非常高的精度上得出的结论是：普通物质的粒子只具有电荷，或等效地说，它们都具有相同的磁荷-电荷比．对于其它不稳定粒子来说，磁荷的问题还有待解决，但还没有磁荷肯定存在的证据．

ρ_m 和 $\mathbf{J}_m$ 在转动、空间反演和时间反转下的变换性质是重要的．根据在通常方程中 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的已知特性，我们可以从(6.150)第二行的两

个方程得出如下结论:

ρ_m 是一个在时间反转下呈奇性的赝标密度;

$\mathbf{J}_m$ 是一个在时间反转下呈偶性的赝矢密度.

因为 ρ_m 在空间反演和时间反转下的对称性质与 ρ_e 的相反,所以倘使有既带电荷又带磁荷的粒子存在,则必然导致以下结果:空间反演和时间反转不再是对物理学定律有效的对称性质.当然,事实上这些对称性原理在基本粒子物理领域内不是严格地成立的,然而现在的证据是:它们的失效是极其微小的,且只跟弱相互作用有点关系.将来的发展可以把电磁相互作用、弱相互作用以及强相互作用联系起来,并利用载磁荷的粒子作为破坏空间反演和时间反转的对称性的工具.由于磁单极的存在缺乏证据,这问题仍停留在臆测的阶段.

尽管磁单极的存在还未得到证实,仍然让我们回到狄喇克的精巧的建议上.狄喇克根据量子力学,考虑一个放在一个磁单极面前的电子,并证明了,一致性要求下列量子化条件:

$$\frac{ge}{\hbar c}=\frac{n}{2},\qquad n=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{6.153}$$

式中 e 是电子的电荷,$\hbar$ 是普朗克常数除以 2π,g 是磁单极的磁荷.于是由磁单极的存在得出电荷的分立性质.除非用磁荷 g,否则定不了 e 的量值.我们可以倒过来论证.根据已知的精细结构常数值

$$e^2/\hbar c=\frac{1}{137},$$

我们推断带磁荷 g 的磁单极的存在,其磁"精细结构"常数为

$$\frac{g}{\hbar c}=\frac{n^2}{4}\left(\frac{\hbar c}{e^2}\right)\simeq\frac{137}{4}n^2$$

这样的磁单极就是众所周知的狄喇克单极子.它们的耦合强度是巨大的,用直流磁场把它们从物质中引出来,接着进行检测,在原则上都是非常简单的.例如,一个相对论性狄喇克单极子在物质中的能量损失,

近似地等于一个 $Z=137n/2$ 的相对论性重原子核的能量损失. 如果让这个单极子通过一段路程后变为静止，则由于它在路程终点不显示出电离作用的增加，这样就可以把它同上述的原子核大致区分开来(参看习题 13.8).

6.13 关于狄喇克量子化条件的讨论

通过一些半经典的讨论，可以阐明狄喇克量子化条件(6.153). 首先，我们考虑在碰撞参数很大时一个磁荷为 g 的静磁单极产生的场，使一个电荷为 e、质量为 m 的粒子发生的偏转. 当碰撞参数充分大时，假定带电粒子不发生偏转，我们可以通过计算力的冲量来确定该粒子运动状态的变化. 几何图形如图 6.8 所示. 粒子以碰撞参数 b 和速率 v 平行于 z 轴入射，按洛仑兹力公式 (6.113)，它受到磁单极的径向磁场 $\mathbf{B}=g\mathbf{r}/r^3$ 的作用. 在粒子不发生偏转的近似情况下，整个碰撞过程中的作用力只有一个 y 分量，

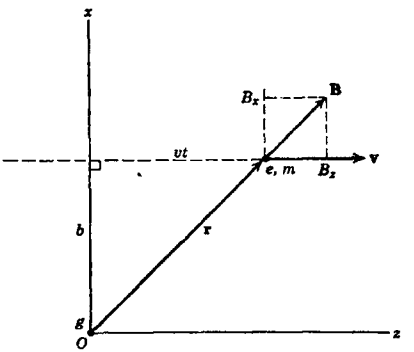


图 6.8 当碰撞参数很大时通过磁单极的带电粒子.

$$F_y=\frac{ev}{c}B_x=\frac{eg}{c}\frac{vb}{(b^2+v^2t^2)^{3/2}} \tag{6.154}$$

此力所传递的冲量是

$$\Delta p_y=\frac{egvb}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(b^2+v^2t^2)^{3/2}}=\frac{2eg}{cb} \tag{6.155}$$

因为冲量沿 y 方向，粒子被偏转出图 6.8 的平面，即是说，沿轴向偏转. 显然，粒子的角动量因碰撞而改变，根据力的非辏性，这结果不足为奇.

可是，角动量改变的数值是有点惊人的．起初，L 没有 z 分量，但最后，L 有了 z 分量．L_z 的改变是

$$\Delta L_z = b\Delta p_y = \frac{2eg}{c} \tag{6.156}$$

粒子角动量的 z 分量的变化与碰撞参数 b 和粒子的速率 v 无关．它只取决于乘积 eg 和光速，并且当一带电粒子经过一静磁单极时，不管粒子离得多远，它总是一个普适值．如果假定角动量的任何变化必须是 $\hbar$ 的整数倍，那末我们就立即导出狄喇克量子化条件(6.153)①．

通过考虑放在一个点磁单极面前的一个点电荷的场所含有的角动量，我们可以理解带电粒子通过磁单极时角动量的变化(6.156)具有的这种独特的普适性．如果磁单极 g 是在 $\mathbf{x}=\mathbf{R}_m$ 处，电荷 e 在 $\mathbf{x}=\mathbf{R}_e$ 处，那末在整个空间磁场和电场是

$$\mathbf{B}=g\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{R}_m)}{|\mathbf{x}-\mathbf{R}_m|^3}, \qquad \mathbf{E}=e\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{R}_e)}{|\mathbf{x}-\mathbf{R}_e|^3} \tag{6.157}$$

角动量 $\mathbf{L}_{em}$ 由 $\mathbf{x}\times\mathbf{g}$ 的体积分给出，其中 $\mathbf{g}$ 是电磁动量密度(6.118)．于是，

$$\mathbf{L}_{em}=\frac{1}{4\pi c}\int \mathbf{x}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{B})d^3x \tag{6.158}$$

场的总动量($\mathbf{g}$ 的体积分)等于零，这在物理上似乎是真实的，在数学上又是可以证明的．这就是说，$\mathbf{L}_{em}$ 与原点的选择无关．那么选取坐标，使得磁荷和电荷位于 z 轴上，并对原点对称的地方，这样就方便了，如图 6.9 所示．选用柱坐标求积分，角动量则由下式明显地给出：

$$\mathbf{L}_{em}=\frac{ega}{2\pi c}\int_{-\infty}^{\infty}dz\int_0^{\infty}\rho d\rho\int_0^{2\pi}d\phi\,\frac{[\rho^2\mathbf{e}_3-\rho z(\cos\phi\mathbf{e}_1+\sin\phi\mathbf{e}_2)]}{[(\rho^2+z^2+a^2)^2-4a^2z^2]^{3/2}}$$

这里磁荷和电荷的间隔为 $2a$．历遍方位角积分，x 分量和 y 分量等于零，剩下

$$\mathbf{L}_{em}=\mathbf{e}_3\frac{ega}{c}\int_{-\infty}^{\infty}dz\int_0^{\infty}\frac{\rho^3d\rho}{[(\rho^2+z^2+a^2)^2-4a^2z^2]^{3/2}}$$

① 这个论证本来应归功于 A. S. Goldhaber, *Phys. Rev.* 140, *B*1407(1965).

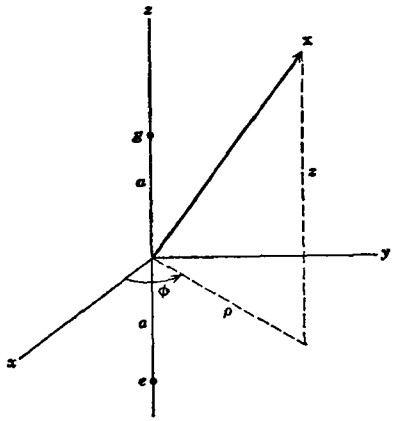


图 6.9

引进无量纲变数 $s=\rho/a$, $t=z/a$, 上式变成

$$\mathbf{L}_{em}=\left(\frac{eg}{c}\right)\mathbf{e}_3\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_0^{\infty}\frac{s^3ds}{[(s^2+t^2+1)^2-4t^2]^{3/2}}$$

因而电磁角动量与磁荷和电荷的间距无关. 其数值是一个纯数乘以 eg/c. 我们可以直接算出式中的二重积分; 它的值等于 1. 所以电磁场角动量为①

$$\mathbf{L}_{em}=\frac{eg}{c}\mathbf{e}_3 \tag{6.159}$$

其方向沿着电荷到磁荷的连线, 其数值等于电荷和磁荷(用高斯单位)之积除以光速. 如果我们现在考虑图 6.8 的碰撞过程以及系统的总角动量, 即粒子角动量与电磁场角动量之和, 那末就看到, 总角动量是守恒的. 粒子角动量的变化(6.156)正好抵消了由于方向 $\mathbf{e}_3$ 的反转而引

① 汤姆逊最早叙述了这一结果, 参看 J. J. Thomson, *Elements of the Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*, Cambridge University Press, 第三版(1904)和以后各版的第 284 节. 第 284 节的论证同我们的完全相反. 汤姆逊从角动量守恒推导出洛仑兹力的磁力部分 $e(\mathbf{v}\times\mathbf{B})/c$.

起的电磁角动量（6.159）的变化．戈特海伯(Goldhaber)（参看 282 页脚注援引的文献)系统地讨论了经典的和量子力学的散射问题，包括电磁角动量．

萨哈 (Saha)[①]和威尔逊 (Wilson)[②]各自独立地利用汤姆逊结果(6.159)，通过半经典方法导出了狄喇克条件(6.153)．为了在只考虑电磁场角动量时得到 $n/2$，而不是 n，必须假设 L_{em} 的半整数量子化，这种对电磁场的假设是不能令人满意的．

最后，我们简单地讨论一下狄喇克导出(6.153)的原始(1931)论证．在讨论一个磁单极面前的一个电子的量子力学时，我们希望尽可能不要改变电磁相互作用的形式，例如，使相互作用哈密顿函数保持标准形式，

$$H_{\text{相互}}=e\Phi-\frac{e}{mc}\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}$$

式中 Φ 和 $\mathbf{A}$ 分别是外源的标势和矢势．为了用磁荷来算，必须要有技巧．我们把磁荷 g 设想为一条延伸至无穷远的偶极子线或密绕螺线管的末端，如图 6.10 所示．那么磁单极及其所连的弦(偶极子线或螺线管通称为弦）可以在一般电磁相互作用的范围内（其中 $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$ 等等）大体上按常规方法来处理．由 (5.55)我们看到：$\mathbf{x}'$ 处的磁偶极子元 $d\mathbf{m}$ 产生的元矢势 $d\mathbf{A}$ 是

$$d\mathbf{A}(\mathbf{x})=-d\mathbf{m}\times\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right) \tag{6.160}$$

于是，对于一条偶极子或螺线管的弦来说，若其位置由弦 L 给定，则其矢势是

$$\mathbf{A}_L(\mathbf{x})=-g\int_L d\mathbf{l}\times\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right) \tag{6.161}$$

---

① M. N. Saha, *Ind. J. Phys.* **10**, 141(1936); *Phys. Rev.* **75**, 1968(1949).

② H. A. Wilson, *Phys. Rev.* **75**, 309(1949).

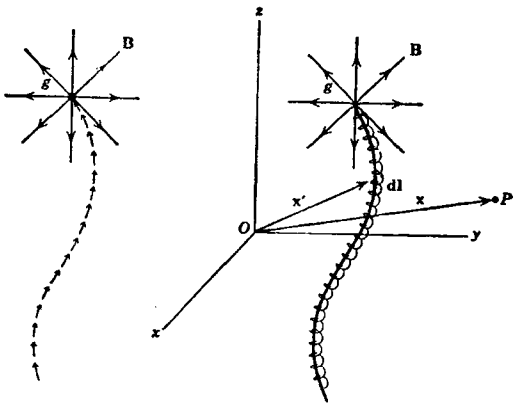


图 6.10　磁单极 g 的两种表示法：一种是一条偶极子线的末端，而另一种是一条密绕螺线管的末端，这两条"弦"都延伸至无穷远.

对于弦外所有各点来说，这矢势有一旋度，其方向由弦的末端沿径向朝外，其大小按距离的倒数而变化，其朝外的积分通量为 $4\pi g$，这正是单极子 g 的 B 场所应有的值. 在弦上，矢势是奇异的. 这种奇异性相当于螺线管内有一强磁场 $\mathbf{B}'$，它产生一个沿弦的反向通量 $(-4\pi g)$ 抵消单极子发出的通量. 到此为止，我们仅仅描述了一个细长螺线管. 我们写出

$$\mathbf{B}_{\text{单极子}}=\nabla\times\mathbf{A}-\mathbf{B}'$$

表示仅仅是一个单极子产生的场，式中 $\mathbf{B}'$ 只存在于弦上(螺线管内). 接着狄喇克论证了：为了描写电子与磁单极(不是与细长螺线管)的相互作用，必须认为电子从来没有"见到"奇异场 $\mathbf{B}'$. 因而他要求电子波函数沿弦等于零. 这一任意的假设遭到了批评，但是有关这些方面的讨论远远超出本书的范围，并且离开了我们的既定目的. 狄喇克稍后的工作(1948)详细论述了弦的不可观测性的问题.

如果我们认为 $\mathbf{A}_L(\mathbf{x})$ 的 (6.161) 适用于单极子及其弦 L 的矢势，那末还有弦位置的任意性问题有待解决. 显而易见，物理上的可观测

量应该与弦的位置无关．我们现在证明：选择不同的弦位置相当于对矢势选择不同的规范．诚然，薛定谔方程的规范不变性和波函数的单值性的要求导致狄喇克量子化条件(6.153)．考虑两条不同的弦 L 和 L'，如图 6.11 所示．(6.161)沿包围面积 S 的闭合回线 $C=L'-L$ 取积分，就给出两矢势的差．根据第 225 页习题 5.1，这就可以写为

$$\mathbf{A}_{L'}(\mathbf{x})=\mathbf{A}_{L}(\mathbf{x})+g\nabla\Omega_{C}(\mathbf{x}) \tag{6.162}$$

式中 Ω_C 是回线 C 对观测点 $\mathbf{x}$ 所张的立体角．同规范变换方程 $\mathbf{A}\to\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\nabla\chi, \Phi\to\Phi'—(1/c)(\partial\chi/\partial t)$ 比较，表明从弦 L 变到弦 L' 等效于一个规范变换 $\chi=g\Omega_C$．

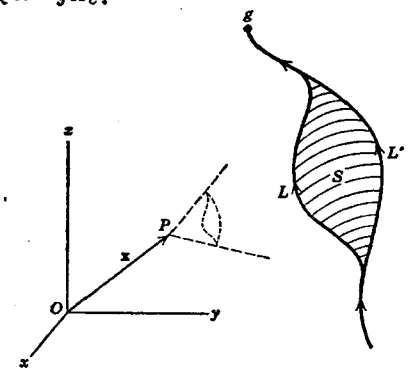


图 6.11　两条不同的弦(L 和 L')给出的单极子矢势，这两个矢势相差一个含立体角 $\Omega_C(\mathbf{x})$ 的梯度的规范变换，$\Omega_C(\mathbf{x})$ 是回线 $C=L'-L$ 所围曲面 S 对观测点 P 张的立体角．

在量子力学中[①] 大家知道：电磁势的规范的改变使薛定谔方程的形式保持不变，只要波函数按

$$\psi\to\psi'=\psi e^{ie\chi/\hbar c}$$

而变换，其中 e 是粒子的电荷，χ 是规范函数．所以，弦位置从 L 到 L'

① 证明是很容易的．例如，参看 H. A. Kramers, *Quantum Mechanics*, North-Holland, Amsterdam, (1957), Dover 再版(1964 年)，第 62 节．

的改变必定伴随有电子波函数的相的改变:

$$\psi \to \psi' = \psi e^{i(eg/\hbar c)\Omega_C} \tag{6.163}$$

因为当电子越过曲面 S 时 Ω_C 突然改变 4π, 所以除非我们要求

$$\frac{eg}{\hbar c} \cdot 4\pi = 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

否则波函数将是多值函数. 这就是狄喇克量子化条件 (6.153). 这是由波函数的规范不变性和单值性的普遍要求得出的, 与单极子的弦的位置无关.

以上关于磁单极的讨论只介绍了最基本的概念. 关于量子化条件的修改、用磁单极和电荷讨论量子电动力学的尝试以及其它方面, 都有广博的文献. 有兴趣的读者可以通过阿马尔迪的文章(第 278 页脚注中援引的)和本章末所列的参考文献继续钻研这个问题.

参考书和推荐读物

把法拉第感应定律, 应用到像法拉第圆盘、同极发电机①那样的运动电路, 需要一点技巧. 有大批文献讨论了这些问题. 我们从一种杂志中选出下列典型文章:

W. V. Houston, *Am. J. Phys.* **7**, 373(1939);

D. R. Corson, *Am. J. Phys.* **24**, 126(1956);

D. L. Webster, *Am. J. Phys.* **31**, 590(1963);

E. M. Pugh, *Am. J. Phys.* **32**, 879(1964).

几乎所有教科书都讨论了电磁场的能量守恒定律和动量守恒定律. 对准稳电流的能量和载电流回路所受的作用力作精辟论述的, 而且处理方法跟我们不同的有:

Panofsky and Phillips, 第十章.

从作用于流体和固体上的力的概念出发, 比较详细地讨论麦克斯韦胁强张量的有:

Stratton, 第二章;

---

① Fano, Chu and Adler 书中 9.9 节和 10.6 节简单地介绍了同极发电机的概念. ——译者注.

Landau and Lifshitz. *Electrodynamics of Continuous Media*. 第 15、16、34 节.

清晰地讨论守恒定律这个普遍论题以及准稳电路理论、电感计算和力等的有:

Abraham and Becker. 第一卷, 第八章和第九章; 以及许多工程方面的教科书.

用许多例题讨论我们删去的题材——涡流和感应加热的有:

Smythe, 第二十章.

正如我们已经提到过的, 把集总电路概念与场的概念联系起来的有:

Adler, Chu and Fano;

Fano, Chu and Adler.

把谐振腔作为电路元件来论述的有下列经典论文:

W. W. Hansen, *J. Appl. Phys.* **9**, 654(1938).

对电磁学宏观方程的推导以及电学和磁学系统的热力学进行启发性讨论的有:

Robinson.

从统计力学观点推导宏观麦克斯韦方程, 一直是荷兰物理学家的一个学派的研究题目. 下列两本综合性书籍中记载了他们的结论:

de Groot;

de Groot and Suttorp.

对电磁场的能量、动量和麦克斯韦胁强张量的论述, 稍微不同于上述这些作者以及 Brevik(第 265 页脚注援引的)的著作:

Penfield and Haus.

关于介电常数和物质中宏观麦克斯韦方程的详细的量子力学处理, 有的读者想要探究时, 我们推荐下列论文:

S. L. Adler, *Phys. Rev.* **126**, 413(1962);

B. D. Josephson, *Phys. Rev.* **152**, 21(1966);

G. D. Mahan, *Phys. Rev.* **153**, 983(1967).

讨论电磁场在反射和转动下的对称性质的有:

Argence and Kahan.

磁单极这个论题有广博的文献. 我们已经援引了 Amaldi 的评论性文章、Carrigan 和 Goldhaber 的论文以及 Dirac 的主要论文. 讨论磁单极和基本粒子的关系的有:

J. Schwinger, *Science* **165**, 757 (1969).

叙述某些实验研究的有:

Hart et al., *Phys. Rev.* **184**, 1393 (1969);

Fleischer, Price and Woods, *Phys. Rev.* **184**, 1398 (1969);

Alvarez et al., *Science* **167**, 701 (1970).

本章的数学题材是以波动方程为中心的. 讨论一维、二维、三维和更高维的初值问题的有:

Morse and Feshbach, 第 843 页至第 847 页.

对这些问题作更详尽的数学讨论的有:

Hadamard.

习 题

6.1 (*a*) 试证真空中电流元系统的磁场的总能量为

$$W=\frac{1}{2c^2}\int d^3x\int d^3x'\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

式中 $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ 是电流密度.

(*b*) 如果该电流系是由 n 个载电流电路组成的, 电流分别为 $I_1, I_2, \cdots, I_n$, 试证能量可以表为

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}L_iI_i^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}M_{ij}I_iI_j$$

列出自感(L_i)和互感(M_{ij})的积分表式.

6.2 有一双线传输线, 它是由一对半径分别为 a 和 b、间距为 $d(d>a+b)$ 的非导磁的平行导线组成的. 电流由一根导线流出去, 由另一根导线流回来. 电流均匀地分布在每根导线的截面上. 证明每单位长度的自感为

$$c^2L=1+2\ln\left(\frac{d^2}{ab}\right)$$

6.3 有一个电路, 它是由一半径为 a 的长圆柱形导电薄壳和壳内一半径为 b 的平行回路导线组成, 回路导线在薄壳的轴线上. 如果假定电流均匀地分布在导线的截面上, 试计算每单位长度的自感. 如果内导体是一根中空的细管, 问自感是多少?

6.4 试证磁导率为 μ 的均匀媒质中两个同轴圆形回线的互感是

$$M_{12}=\frac{4\pi\mu}{c^2}\sqrt{ab}\left[\left(\frac{2}{k}-k\right)K(k)-\frac{2}{k}E(k)\right]$$

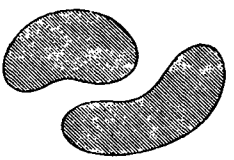
式中

$$k^2=\frac{4ab}{(a+b)^2+d^2}$$

而 a,b 是这两个回线的半径，d 是两个回线中心的距离，K 和 E 是全椭圆积分.

求 $d\ll a,b$ 和 $a\simeq b$ 这种情况下的极限值.

6.5 有一条传输线，它是由两个平行的理想导体组成的，这两个导体的截面形状是任意的，但截面积恒定不变. 电流从一个导体流出去，由另一个导体流回来.



习题 6.5

试证：每单位长度的电感 L 和每单位长度的电容 C 的乘积是

$$LC=\frac{\mu\epsilon}{c^2}$$

式中 μ 和 ϵ 是导体四周媒质的磁导率和介电常数，而 c 是真空中的光速. (参看5.13节开头有关理想导体附近磁场的讨论.)

6.6 考虑两个电流回路(如第190页图5.3所示)，它们在空间中的取向是固定不变的，但它们的相对间距可以改变. 设 O_1 和 O_2 为两个回路的原点，分别对回路#1和回路#2相对固定，$\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 分别为相对于各自原点的回路元 $d\mathbf{l}_1$ 和 $d\mathbf{l}_2$ 的坐标. 设 R 为两原点的相对坐标，方向是从回路#2指向回路#1.

(*a*) 由两回路间作用力表式(5.10)出发，证明：它可以写为

$$\mathbf{F}_{12}=I_1I_2\nabla_R M_{12}(\mathbf{R})$$

式中 M_{12} 为回路的互感，

$$M_{12}(\mathbf{R})=\frac{1}{c^2}\oint\oint\frac{d\mathbf{l}_1\cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2+\mathbf{R}|}$$

并且假定回路的取向不随 $\mathbf{R}$ 而改变.

(*b*) 证明：互感(看作 $\mathbf{R}$ 的函数)是拉普拉斯方程

$$\nabla_R^2 M_{12}(\mathbf{R})=0$$

的一个解. 这个结果的重要性是：倘若对于一特定的 $\mathbf{R}$ 值，可以求得一个解，则拉普拉斯方程解的唯一性允许我们探明这些解的性质.

6.7 两个半径为 a 的等同圆形回路，最初放在与这两回路平面垂直的一条公共轴上，两者相隔距离为 R.

(*a*) 根据表式 $W_{12}=(1/c)\int d^3x\mathbf{J}_1\cdot\mathbf{A}_2$ 和习题 5.4(*b*)所证明的 A_ϕ 结果，求证：这两回路的互感为

$$M_{12}=\frac{4\pi^2a^2}{c^2}\int_0^\infty dke^{-kR}J_1^2(ka)$$

(*b*) 证明：当 $R>2a$ 时，M_{12} 的表式为

$$M_{12}=\frac{2\pi^2a^2}{c^2}\left[\left(\frac{a}{R}\right)^3-3\left(\frac{a}{R}\right)^5+\frac{75}{8}\left(\frac{a}{R}\right)^7+\cdots\right]$$

(*c*) 利用 3.3 节求解拉普拉斯方程的方法，证明：两个半径为 a 的共面的等同圆形回路，它们中心的距离 $R>2a$，则互感为

$$M_{12}=-\frac{\pi^2a^2}{c^2}\left[\left(\frac{a}{R}\right)^3+\frac{9}{4}\left(\frac{a}{R}\right)^5+\frac{375}{64}\left(\frac{a}{R}\right)^7+\cdots\right]$$

(*d*) 在共轴和共面这两种情形下，计算两回路之间的作用力．找出这些答案与习题 5.9 的那些答案的关系．

6.8 微观电流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{x},t)$ 可以写为

$$\mathbf{j}(\mathbf{x},t)=\sum_j q_j\mathbf{v}_j\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_j(t))$$

式中点电荷 q_j 位于 $\mathbf{x}_j(t)$ 点，并具有速度 $\mathbf{v}_j=d\mathbf{x}_j(t)/dt$，正如电荷密度那样，可以把微观电流密度分成“自由”(传导) 电子贡献的和束缚 (分子) 电流贡献的两部分．

仿照 6.7 节求平均的程序，并且假定速度是按非相对论性方法相加的，讨论平均电流密度 $\langle\mathbf{j}(\mathbf{x},t)\rangle$．

(*a*) 证明：根据定义(6.92)，(6.97)和(6.98)，平均电流密度可以写成 (6.96) 的形式．

(*b*) 证明：当媒质内部分子速度可忽略不计，但媒质在作整体运动 (即对于所有的 n，$\mathbf{v}_n=\mathbf{v}$)时，

$$\mathbf{B}-\mathbf{H}=4\pi\mathbf{M}+(\mathbf{D}-\mathbf{E})\times\frac{\mathbf{v}}{c}$$

上式表明：运动电极化强度(**P**)产生有效磁化密度．

对(*a*) 的提示：考虑像 $(d\mathbf{p}_n/dt)$，$(dQ_{ij}^{(n)}/dt)$ 那样的量，并察看它们好像什么量．也要注意到

$$\frac{df}{dt}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n(t))=-\mathbf{v}_n\cdot\nabla f(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n(t))$$

6.9 一个介电常数为 ϵ、半径为 a 的电介质球，放在原点上．沿 x 方向有一个均匀外电场 E_0．该球以角速度 ω 绕 z 轴转动．证明：有一个磁场 $\mathbf{H}=-\nabla\Phi_M$，其中

$$\Phi_M=\frac{3}{5}\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)E_0\frac{\omega}{c}\left(\frac{a}{r_>}\right)^5\cdot xz$$

式中 $r_>$ 是 r 和 a 的较大者．

你可以利用 4.4 节中关于外场中的电介质球的结果．

6.10 试就介电常数为 ϵ、磁导率为 μ 的各向同性均匀媒质内的场源和电磁场组成的宏观系统，讨论其能量守恒和线动量守恒．证明：通过直接计算，场能密度、坡印廷矢量、场动量密度和麦克斯韦胁强张量由闵可夫斯基表式给出，

$$u=\frac{1}{8\pi}(\epsilon E^2+\mu H^2)$$

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$$

$$\mathbf{g}=\frac{\mu\epsilon}{4\pi c}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$$

$$T_{ij}=\frac{1}{4\pi}\left[\epsilon E_iE_j+\mu H_iH_j-\frac{1}{2}\delta_{ij}(\epsilon E^2+\mu H^2)\right]$$

如果 ϵ，μ 是位置的函数，结果有什么变更？

6.11 就习题 6.10 的假定，讨论角动量守恒．证明：守恒定律的微分和积分形式为：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathscr{L}_{机械}+\mathscr{L}_{场})+\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{M}}=0$$

和

$$\frac{d}{dt}\int_V(\mathscr{L}_{机械}+\mathscr{L}_{场})d^3x+\int_S\mathbf{n}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{M}}da=0$$

式中场的角动量密度为

$$\mathscr{L}_{场}=\mathbf{x}\times\mathbf{g}=\frac{\mu\epsilon}{4\pi c}\mathbf{x}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$$

而角动量通量用张量

$$\overleftrightarrow{\mathbf{M}}=\overleftrightarrow{\mathbf{T}}\times\mathbf{x}$$

来描述．

附注：这里用了并矢式记号来表示 M_{ij} 和 T_{ij}．双头箭号表达了十分明显的含义．例如，$\mathbf{n}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{M}}$ 是一个矢量，其第 j 分量为 $\sum_i n_iM_{ij}$．二秩 $\overleftrightarrow{\mathbf{M}}$ 可以写成一个

三秩张量 $M_{ijk}=T_{ij}x_k-T_{ik}x_j$. 但它对指标 j,k 是反对称的,因而只有三个独立元素.包括指标 i 在内,M_{ijk} 就有九个分量,因此可以写做二秩赝张量,如上所示.

6.12 一横向平面波正入射在真空中的一个全吸收平面屏上.

(*a*) 用线动量守恒定律证明:施加在屏上的压强(叫做辐射压强)等于波中每单位体积的场能.

(*b*) 在地球附近,来自太阳的电磁能流约为0.14瓦特/厘米^2. 一架行星际"帆蓬飞机"张有每平方厘米面积的质量为 10^{-4}克的帆蓬,其它重量可以忽略不计.试问:由太阳的辐射压强给帆蓬的最大加速度为每秒每秒若干厘米?这加速度和太阳"风"(微粒辐射)所引起的加速度比起来,情况如何?

6.13 试用6.10节的复坡印廷定理,讨论以场量表示的一个二端线性无源网络的导纳 $Y=G-iB$的定义.

(*a*) 通过考虑(6.134)的复共轭,求出包括辐射损失在内的普遍情形下的电导G和电纳B的一般表式.

(*b*) 证明:在低频时,相当于(6.139)和(6.140)的表式是

$$G\simeq\frac{1}{|V_i|^2}\int_V\sigma|\mathbf{E}|^2d^3x$$

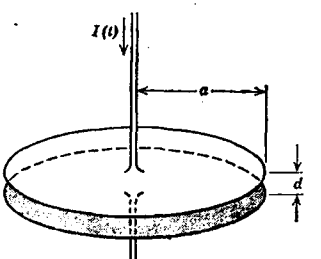
$$B\simeq-\frac{4\omega}{|V_i|^2}\int_V(w_m-w_e)d^3x$$

6.14 一平行板电容器,它是由两块矩形理想导电薄平板组成的,这两块薄平板的边长均为 a 和 b,相隔距离为 d,d 比 a 和 b 小得多.电流沿两板上长度为b的相对邻边均匀地输入和输出.已知在电容器这一端输入的电流和电压,用6.10节场的概念,计算输入阻抗或输入导纳.

(*a*) 计算电容器中的电场和磁场,准确到频率的二次幂,但不计边缘场.

(*b*) 证明:将电抗(6.140)按频率的幂展开至适当阶数,此展开式与由电容$C=ab/4\pi d$和电感 $L=4\pi ad/3bc^2$ 串联而成的集总电路所求得的电抗相同,式中 c 是光速.

6.15 有一理想的圆形平行板电容器,其半径为 a,板距为 $d\ll a$,通过两条沿轴导线把它与电流源相连,如图所示.导线中的电流为 $I(t)=I_0\cos\omega t$.



习题 6.15

(*a*) 计算两板间的电场和磁场，准确至频率(或波数)的二次幂，不计边缘场的影响.

(*b*) 计算在电抗$\mathfrak{X}$的定义(6.140)中出现的w_e和w_m的体积分，算至ω的二次幂. 已知输入电流I_i为$I_i=-i\omega Q$，式中Q是一块板上的总电荷，试证：用I_i来表示时，这些能量是

$$\int w_e d^3x=\frac{|I_i|^2 d}{\omega^2 a^2},\quad \int w_m d^3x=\frac{|I_i|^2 d}{8c^2}\left(1+\frac{\omega^2 a^2}{12c^2}\right)$$

(*c*) 证明：其等效电路是$C\simeq a^2/4d$和$L\simeq d/2c^2$的串联电路. 并证明：此系统的谐振频率的估计值为$\omega_{谐}\simeq 2\sqrt{2}\,c/a$. 同$J_0(x)$的第一个根加以比较.

6.16 如果一导体或半导体由于外电场的作用而有电流在其内部流动，又外加一横向磁场，则在其内部产生一个既垂直于外电场(电流方向)又垂直于磁场的电场分量，结果在导体两侧之间形成一电压差. 这种现象就是众所周知的霍耳效应.

(*a*) 利用电磁场在转动和空间反射下的已知性质，并假定围绕磁场强度的零值作泰勒级数展开，证明：对于各向同性媒质，推广的欧姆定律(准确到磁场的二阶项)必定具有如下形式：

$$\mathbf{E}=\rho_0\mathbf{J}+R(\mathbf{H}\times\mathbf{J})+\beta_1 H^2\mathbf{J}+\beta_2(\mathbf{H}\cdot\mathbf{J})\mathbf{H}$$

式中ρ_0为没有磁场时的电阻率，R叫做霍耳系数.

(*b*) 时间反转不变性的必要条件是什么？

6.17 (*a*) 以达因为单位，计算最小磁荷的狄喇克单极子所受的作用力，狄喇克单极子离磁偶极子的距离为0.5埃，且位于磁偶极子的中央平面内，磁偶极子的磁矩等于一个核磁子$(e\hbar/2m_pc)$.

(*b*) 将(*a*)中的力与诸如电荷(间隔距离与上相同时)间直接静电力、自旋-轨道力、超精细相互作用等原子力作一比较. 试论磁单极对带磁矩的原子核的结合问题. 假定磁单极质量至少等于质子质量.

参看：D. Sivers, *Phys. Rev.* **D2**, 2048(1970).

6.18 考虑磁单极及其相联弦L的矢势的狄喇克表式

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})=g\int_L \frac{d\mathbf{l}'\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}$$

为明确起见，假设磁单极位于原点，而弦沿负z轴.

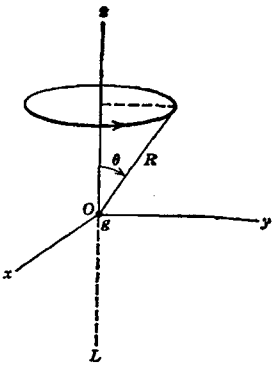
(*a*) 直接计算$\mathbf{A}$，并证明：在球坐标中，其分量为

$$A_r=0,\quad A_\theta=0,\text{和}$$

$$A_\varphi=\frac{g(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}=(g/r)\mathrm{tg}(\theta/2)$$

(*b*) 证明：除 $\theta=\pi$ 外，$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$ 是一点电荷的类库仑场.

(*c*) 用 (*b*) 中确定的 **B**，计算如右图所示的半径为 $R\sin\theta$ 的圆形回路所通过的总磁通量. 分别讨论 $\theta<\pi/2$ 和 $\theta>\pi/2$ 两种情形，但总是计算向上的通量.



习题 6.18

(*d*) 根据沿回路的积分 $\oint\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$，确定回路所通过的总磁通量. 将结果同(*c*)中所得的作一比较. 证明：当 $0<\theta<\pi/2$ 时，两者相等，但当 $\pi/2<\theta<\pi$ 时，两者相差一个常数. 解释这个差别.

6.19 一个在 $t=0$ 瞬间闪现的偶极子源，提供了一个尽管要用库仑规范，但仍然具有因果性和有限传播速率的实例. 有效电荷密度和有效电流密度为

$$\rho(\mathbf{x},t)=\delta(x)\delta(y)\delta'(z)\delta(t)$$

$$J_z(\mathbf{x},t)=-\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta'(t)$$

式中撇号表示对自变量求微商. 这个偶极子的强度为 1，其方向是在负 z 方向上.

(*a*) 证明：瞬时库仑势(6.45)是

$$\Phi(\mathbf{x},t)=-\delta(t)\frac{z}{r^3}$$

(*b*) 证明：横向电流密度 $\mathbf{J}_{\text{横向}}$ 的对称傅里叶变换是

$$\mathbf{J}_{\text{横向}}(\mathbf{x},t)=\frac{i\omega}{(2\pi)^{1/2}}\left[\frac{2}{3}\boldsymbol{\epsilon}_3\delta(\mathbf{x})-\frac{\boldsymbol{\epsilon}_3}{4\pi r^3}+\frac{3}{4\pi r^3}\mathbf{n}(\boldsymbol{\epsilon}_3\cdot\mathbf{n})\right]$$

(*c*) 证明：电场和磁场是有因果性的，而且电场分量是

$$E_x(x,t)=\frac{c}{r}\left[-\delta''(r-ct)+\frac{3}{r}\delta'(r-ct)-\frac{3}{r^2}\delta(r-ct)\right]\sin\theta\cos\theta\cos\phi$$

E_y 与 E_x 相同，只是用 $\sin\phi$ 代替 E_x 中的 $\cos\phi$，而

$$E_z(x,t)=\frac{c}{r}\left[\sin^2\theta\delta''(r-ct)+(3\cos^2\theta-1)\cdot\left(\frac{\delta'(r-ct)}{r}-\frac{\delta(r-ct)}{r^2}\right)\right]$$

提示：当(*b*)中的答案明确地代替横向电流密度时，就可用如下不太明显的

公式：
$$\mathbf{J}_{\text{横向}}(\mathbf{x},t)=-\delta'(t)\left[\epsilon_1\delta(\mathbf{x})+\frac{1}{4\pi}\nabla\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

和式(6.69)来计算(c)中的矢势和场．另一种方法是利用$\mathbf{J}_{\text{横向}}$和$\mathbf{A}$对时间的傅里叶变换、格临函数(6.62)及其在第十六章中球面波展开式．

第七章　平面电磁波和波的传播

本章讨论无界媒质或半无限媒质中的平面波．首先论述了平面电磁波在非导电媒质中的基本性质—平面电磁波的横向性、线偏振态和圆偏振态．然后推导了至关重要的电磁波在平面分界面上反射和折射的菲涅耳公式，并加以应用．接着概括阐述了电介质、导体和等离子体的高频色散关系．对200赫兹以上各种频率的电磁波画出了液态水的折射率和吸收系数对频率的关系曲线(图7.9)，通过全面的图象分析，说明了许多性质．而后简单地讨论了电磁波在电离层中的传播，和在导电媒质或耗散媒质中的波．继而介绍了相速和群速的概念，以及一个脉冲或波包在色散媒质中传播时的扩展．相当详细地讨论了因果性这一重要课题，以及由此而得到的有关媒质色散性质的一些结果，包括克喇末-克朗尼格色散关系以及根据这些关系导出的各种求和法则．本章最后论述了关于信号在色散媒质中的传播这一经典问题，此问题最早是由索末菲和布里渊(1914年)讨论过的，但只不过在最近才获得了实验的验证．

7.1　非导电媒质中的平面波

电磁场麦克斯韦方程组的基本特征是存在行波解，这些解描写能量从一点输运到另一点．最简单最基本的电磁波是横平面波．我们首先使读者了解到，在简单的(即磁导率和磁化率是空间常数)非导电媒质这种情形下如何求得这些解．当没有源存在时，无限媒质中的麦克斯韦方程组是：

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=0 \qquad \nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0$$
$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \qquad \nabla\times\mathbf{B}-\frac{\mu\epsilon}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=0 \tag{7.1}$$

式中用参数 μ,ϵ 描写媒质的特性，假定现在 μ,ϵ 与频率无关．把两个旋度方程合并，并利用散度等于零的方程，我们容易求得，$\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的各个笛卡儿分量满足波动方程：

$$\nabla^2 u-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{7.2}$$

式中

$$v=\frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{7.3}$$

是描写媒质特性的，具有速度量纲的常数．波动方程(7.2)有大家熟知的平面波解：

$$u=e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t} \tag{7.4}$$

式中频率 ω 和波矢 $\mathbf{k}$ 的量值有如下关系：

$$k=\frac{\omega}{v}=\sqrt{\mu\epsilon}\,\frac{\omega}{c} \tag{7.5}$$

如果我们考虑只沿一个方向(例如 x 方向)传播的波，则基本解是

$$u(x,t)=Ae^{ikx-i\omega t}+Be^{-ikx-i\omega t} \tag{7.6}$$

利用(7.5)，上式可以写为

$$u_k(x,t)=Ae^{ik(x-vt)}+Be^{-ik(x+vt)}$$

如果 v 不是 k 的函数(即是非色散媒质，其 $\mu\epsilon$ 与频率无关)，由傅里叶积分定理(2.50)和(2.51)得知，我们可以从 $u_k(x,t)$ 通过线性叠加建立如下形式的通解：

$$u(x,t)=f(x-vt)+g(x+vt) \tag{7.7}$$

式中 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是任意函数．很容易直接证明，上式是波动方程(7.2)的一个解．方程(7.7)表示以传播速度 v 向右和向左行进的波，

v 叫做波的相速度.

如果媒质是色散的，即是说，如果乘积 $\mu\epsilon$ 是频率的函数，那末上述讨论的某些部分就必需加以修改. 在合并 (7.1) 中诸方程之前，先按 ω 作傅里叶积分展开，我们就导出了亥姆霍兹波动方程:

$$\nabla^2 u + \mu\epsilon\frac{\omega^2}{c^2}u = 0 \tag{7.8}$$

因而 k 仍由(7.5)给出. 这意味着，对每个频率分量来说，平面波解是(7.4). 只当我们把波重新看作 $\mathbf{x}$ 和 t 的函数时，由于色散而要作某些修改. 方程(7.7)不再成立. 当波传播时，其形状发生改变(参看 7.8 节、7.9 节和 7.11 节).

基本平面波(7.4)和(7.5)满足标量波动方程 (7.8). 但我们仍必须考虑电磁场的矢量性质及满足麦克斯韦方程组的要求. 按惯例，物理的电场和磁场是通过取复数的实部而求得的，我们假定平面波场具有下列形式:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathscr{E} e^{ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - i\omega t}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathscr{B} e^{ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - i\omega t} \tag{7.9}$$

式中 $\mathscr{E}$, $\mathscr{B}$ 和 $\mathbf{n}$ 是不随空间和时间改变的矢量. 只要

$$k^2\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = \mu\epsilon\frac{\omega^2}{c^2}$$

$\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的每个分量均满足波动方程(7.8). 为了复原为(7.5)，必须假定: $\mathbf{n}$ 是一个矢量，满足 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1$. 由于满足波动方程，剩下的只是确定矢量的性质，使得(7.1)仍然成立. (7.1)中的两个散度方程要求

$$\mathbf{n}\cdot\mathscr{E} = 0 \quad 和 \quad \mathbf{n}\cdot\mathscr{B} = 0 \tag{7.10}$$

这就是说，$\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 都垂直于传播方向 $\mathbf{n}$. 这种波叫做横波. 两个旋度方程给出了进一步的限制，即

$$\mathscr{B} = \sqrt{\mu\epsilon}\,\mathbf{n}\times\mathscr{E} \tag{7.11}$$

如果 n 是实矢量，则(7.11)表示 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{H}$ 同相. 这时引进一组互相正交的实的单位矢量(ϵ_1, ϵ_2, n)是有益的，如图 7.1 所示. 用这些单位矢量来表示场强 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{H}$，即

$$\begin{aligned}\mathscr{E} &= \epsilon_1 E_0,\\ \mathscr{H} &= \epsilon_2\sqrt{\mu\epsilon}\,E_0\end{aligned} \qquad (7.12)$$

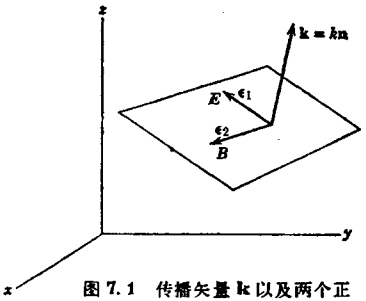


图 7.1 传播矢量 k 以及两个正交的偏振矢量 ϵ_1 和 ϵ_2.

或

$$\mathscr{E} = \epsilon_2 E_0', \qquad \mathscr{H} = -\epsilon_1\sqrt{\mu\epsilon}\,E_0' \qquad (7.12')$$

式中 E_0 和 E_0' 为常数，可能是复数. (7.9)和(7.12)或(7.12′)描写的波是沿 n 方向传播的横波. 这种波是由复坡印廷矢量

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*$$

的实部给出的能流对时间的平均值. 能流（每单位时间流过每单位面积的能量)为

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\,|E_0|^2\,\mathbf{n}_3 \qquad (7.13)$$

相应地，场能密度对时间的平均值 u 为

$$u = \frac{1}{16\pi}\left(\epsilon\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^* + \frac{1}{\mu}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^*\right)$$

上式给出

$$u = \frac{\epsilon}{8\pi}|E_0|^2 \qquad (7.14)$$

(7.13)的量值与(7.14)之比表明：能流速率为 $v = c/\sqrt{\mu\epsilon}$，正如由(7.3)所预料的.

在(7.11)以下的讨论中，我们假定了 n 是一个实单位矢量. 这不会得出最普遍的可能的平面波解. 假设 n 是复矢量，且写作 $\mathbf{n} = \mathbf{n}_R + i\mathbf{n}_I$.

那末(7.9)中的指数变成

$$e^{ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}-i\omega t}=e^{-k\mathbf{n}_I\cdot\mathbf{x}}e^{ik\mathbf{n}_R\cdot\mathbf{x}-i\omega t}$$

沿某些方向，波按指数增涨或衰减，这种波叫做不均匀平面波. 具有恒定振幅和恒定位相的诸曲面仍是平面，但它们不再互相平行. 关系式(7.10)和(7.11)依然成立. 必要条件 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1$ 的实部和虚部如下[①]:

$$\begin{aligned} n_R^2-n_I^2&=1\\ \mathbf{n}_R\cdot\mathbf{n}_I&=0 \end{aligned} \tag{7.15}$$

其中第二个条件表明 $\mathbf{n}_R$ 和 $\mathbf{n}_I$ 是正交的. 可以把坐标轴取作这样的方向，使得 $\mathbf{n}_R$ 沿 x 方向，而 $\mathbf{n}_I$ 沿 y 方向. 一般地说，把 $\mathbf{n}$ 写成

$$\mathbf{n}=\mathbf{e}_1\cosh\theta+i\mathbf{e}_2\sinh\theta \tag{7.16}$$

就可以满足(7.15)中的第一个方程，这里 θ 为实常数，$\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 为 x 和 y 方向上的实单位矢量（不要跟 ϵ_1 和 ϵ_2 混淆！）. 因而，满足 $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}=0$ 的最普遍的矢量 $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ 是

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}=(i\mathbf{e}_1\sinh\theta-\mathbf{e}_2\cosh\theta)A+\mathbf{e}_3A' \tag{7.17}$$

式中 A 和 A' 是复常数. 当 $\theta\neq0$ 时，一般说来，$\boldsymbol{\mathcal{E}}$ 在 $\mathbf{n}$ 的两个方向上都有分量. 容易证明：当 $\theta=0$ 时，就回复为解(7.12)和(7.12′).

在本章稍后讨论导电媒质中的全内反射和折射时，我们遇到不均匀平面波的若干简单实例，虽然在后面的情形下，不均匀性是由复波数引起的，不是由复单位矢量 $\mathbf{n}$ 引起的. 不均匀平面波构成处理波的边值问题的一般基础，而且在求解二维衍射问题时特别有用. 有兴趣的读者可以参看Clemmow 写的书中的全面论述及其例题.

7.2 线偏振和圆偏振；斯托克斯参数

平面波 (7.9) 和 (7.12) 是一个电场矢量总在 ϵ_1 方向上的电磁波. 我们把这种波叫做偏振矢量为 ϵ_1 的线偏振波. 显然，(7.12′) 所

① 要注意：如果 $\mathbf{n}$ 是复矢量，则其量值不等于 1，也就是说，$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1$ 并不意味着 $|\mathbf{n}|^2=1$.

描写的波是偏振矢量为 ϵ_2 的线偏振波，这种线偏振波与第一种无关. 于是，可以把下列两个波

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}_1&=\epsilon_1 E_1 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t}\\ \mathbf{E}_2&=\epsilon_2 E_2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t}\\ \mathbf{B}_j&=\sqrt{\mu\epsilon}\,\frac{\mathbf{k}\times\mathbf{E}_j}{k},\qquad j=1,2\end{aligned}\right\}\tag{7.18}$$

合并起来，而给出沿 $\mathbf{k}=k\mathbf{n}$ 方向传播的最普遍的均匀平面波：

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=(\epsilon_1 E_1+\epsilon_2 E_2)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t}\tag{7.19}$$

振幅 E_1 和 E_2 是复数，以使不同的偏振波之间可以有位相差.

如果 E_1 和 E_2 同相，则(7.19)表示一个线偏振波，其偏振矢量与 ϵ_1 的夹角为 $\theta=\mathrm{tg}^{-1}(E_2/E_1)$，其量值为 $E=\sqrt{E_1^2+E_2^2}$，如图 7.2 所示.

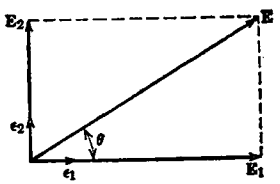


图 7.2　线偏振波的电场.

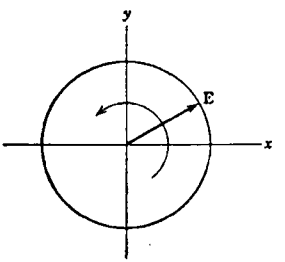


图 7.3　圆偏振波的电场.

如果 E_1 和 E_2 异相，则 (7.19)表示椭圆偏振波. 为了解其含义，让我们讨论最简单情形，即圆偏振. 这时 E_1 和 E_2 的量值相同，但位相相差 90°. 波(7.19)变为：

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=E_0(\epsilon_1\pm i\epsilon_2)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t}\tag{7.20}$$

其中 E_0 为公共实振幅. 我们假想坐标轴是这样选取的，使得波沿正 z 方向传播，而 ϵ_1 和 ϵ_2 分别在 x 和 y 方向上. 这时，取(7.20)的实部，就得到真实电场的分量如下：

$$\left.\begin{aligned} E_x(\mathbf{x},t)&=E_0\cos(kz-\omega t)\\ E_y(\mathbf{x},t)&=\mp E_0\sin(kz-\omega t)\end{aligned}\right\} \tag{7.21}$$

在空间的一个固定点上，场(7.21)的电矢量的量值是常数，但电矢量的矢端以频率 ω 绕圆回转，如图 7.3 所示. 若取上面一行符号 $(\epsilon_1+i\epsilon_2)$，则当观测者对着迎面而来的波时，E 绕逆时针方向旋转. 这种波在光学上叫做左旋圆偏振波. 但是，用现代物理学术语说，这种波具有正螺旋性. 后一种描述似乎更确切，因为这种波的角动量在 z 轴上有正投影(参见习题 7.21). 若取下面一行符号$(\epsilon_1-i\epsilon_2)$，则当观测者面对波时，E 的旋转是顺时针方向的，这种波是右旋圆偏振的(光学上)；它具有反螺旋性.

这两种圆偏振波(7.20)拼成一组相当令人满意的，用于描写一般偏振态的基本场. 我们引进复正交单位矢量:

$$\epsilon_\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_1\pm i\epsilon_2) \tag{7.22}$$

这两矢量具有下列性质

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_\pm^*\cdot\epsilon_\mp&=0\\ \epsilon_\pm^*\cdot\epsilon_3&=0\\ \epsilon_\pm^*\cdot\epsilon_\pm&=1\end{aligned}\right\} \tag{7.23}$$

这时，与(7.19)等效的普遍表式为

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=(E_+\epsilon_++E_-\epsilon_-)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t} \tag{7.24}$$

式中 E_+ 和 E_- 是复振幅. 如果 E_+ 和 E_- 的幅值不同，但位相相同，则(7.24)表示一个椭圆偏振波，其椭圆的主轴在 ϵ_1 和 ϵ_2 方向上. 长半轴与短半轴之比等于 $|(1+r)/(1-r)|$，这里 $E_-/E_+=r$. 如果振幅 E_+ 和 E_- 有一位相差，$E_-/E_+=re^{i\alpha}$，那末容易证明，由 E 矢端所画出的椭圆的轴转过了$(\alpha/2)$ 角. 图 7.4 画出了一般椭圆偏振态，在空间的给定点上，E 和 B 的矢端都画出一个椭圆.

当 $r=\pm1$ 时，我们又得到线偏振波.

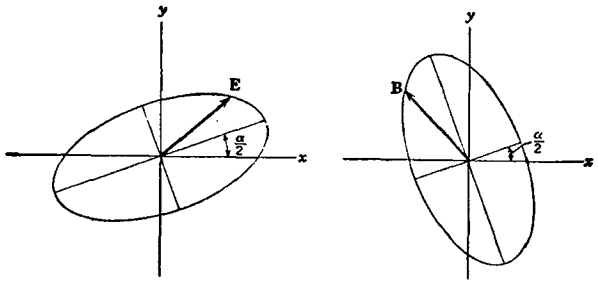


图 7.4　椭圆偏振波的电场强度和磁感应强度.

如果平面电磁波可以写成(7.19)或(7.24)的形式，其中系数(E_1, E_2)或(E_+, E_-)为已知，那末我们就知道了此平面电磁波的偏振状态. 实际上发生的问题相反. 已知波的形式为(7.9)，我们如何能从波束的观测确定偏振态的全部详细情况呢？求解这个问题的一种有效的工具是四个斯托克斯参数，这是斯托克斯在 1852 年所建议的. 这些参数是场强的二次式，而且只要通过强度的测量就可以定出，在强度的测量中需要用到一个起线偏振镜和一块四分一波晶片或其它等效用具. 斯托克斯参数的测量完全决定了波的偏振状态.

注意到下列事实就可以启发我们导出斯托克斯参数：对于沿 z 方向传播的一个波来说，标积

$$\epsilon_1\cdot\mathbf{E},\quad \epsilon_2\cdot\mathbf{E},\quad \epsilon_+^*\cdot\mathbf{E},\quad \epsilon_-^*\cdot\mathbf{E} \tag{7.25}$$

分别是沿 x 方向线偏振的、沿 y 方向线偏振的、具有正螺旋性的和反螺旋性的辐射的振幅. 要注意：在圆偏振时，必须用到适当偏振矢量的复共轭，它们符合(7.23). 这些振幅的平方给出了各类偏振强度的一种测量. 位相也需要知道，这可以从交叉乘积求出. 我们给出相对于线偏振基和相对于圆偏振基的斯托克斯参数的定义，把这些参数用投影振幅(7.25)来表示，并且还直接用诸分量的幅值和相对位相来表示. 为了达到后一目的，我们把(7.19)和(7.24)中的各标量系数定义为一

个幅值乘以一个相因数:

$$E_1=a_1e^{i\delta_1},\quad E_2=a_2e^{i\delta_2}$$
$$E_+=a_+e^{i\delta_+},\quad E_-=a_-e^{i\delta_-} \tag{7.26}$$

用线偏振基(ϵ_1,ϵ_2)来表示,斯托克斯参数是①

$$\left.\begin{aligned}
s_0&=|\epsilon_1\cdot\mathbf{E}|^2+|\epsilon_2\cdot\mathbf{E}|^2=a_1^2+a_2^2\\
s_1&=|\epsilon_1\cdot\mathbf{E}|^2-|\epsilon_2\cdot\mathbf{E}|^2=a_1^2-a_2^2\\
s_2&=2\mathrm{Re}[(\epsilon_1\cdot\mathbf{E})^*(\epsilon_2\cdot\mathbf{E})]=2a_1a_2\cos(\delta_2-\delta_1)\\
s_3&=2\mathrm{Im}[(\epsilon_1\cdot\mathbf{E})^*(\epsilon_2\cdot\mathbf{E})]=2a_1a_2\sin(\delta_2-\delta_1)
\end{aligned}\right\} \tag{7.27}$$

如果改用圆偏振基(ϵ_+,ϵ_-),则定义写成

$$\left.\begin{aligned}
s_0&=|\epsilon_+^*\cdot\mathbf{E}|^2+|\epsilon_-^*\cdot\mathbf{E}|^2=a_+^2+a_-^2\\
s_1&=2\mathrm{Re}[(\epsilon_+^*\cdot\mathbf{E})^*(\epsilon_-^*\cdot\mathbf{E})]=2a_+a_-\cos(\delta_--\delta_+)\\
s_2&=2\mathrm{Im}[(\epsilon_+^*\cdot\mathbf{E})^*(\epsilon_-^*\cdot\mathbf{E})]=2a_+a_-\sin(\delta_--\delta_+)\\
s_3&=|\epsilon_+^*\cdot\mathbf{E}|^2-|\epsilon_-^*\cdot\mathbf{E}|^2=a_+^2-a_-^2
\end{aligned}\right\} \tag{7.28}$$

式(7.27)和(7.28)表明: 相对于这两组基的诸斯托克斯参数的地位被重新作了有意义的安排. 参数s_0在这两种情况下都是量度波的相对强度的. 参数s_1表示x方向线偏振超过y方向线偏振的程度, 而s_2和s_3表示在线偏振基中位相的状况. 由(7.28)可知, 在圆偏振基中, s_3解释为正反螺旋性相对强度之差, 而s_1和s_2与位相有关. 因为四个斯托克斯参数只依赖于a_1,a_2和$\delta_2-\delta_1$这三个量, 所以它们不是独立的参数. 它们满足下列关系式:

$$s_0^2=s_1^2+s_2^2+s_3^2 \tag{7.29}$$

关于测量斯托克斯参数从而确定平面波偏振态所需要的操作步骤,不属于我们讨论的范围.有关细节,请读者参看*Stone*书中的13.13节. 我们也省略了准单色辐射这一重要问题, 而仅仅略微提一下. 即使是目前应用的十分单色的辐射波束, 实际上也是由有限波列叠加成

① 可惜斯托克斯参数的记号不是统一的. 斯托克斯本人用(A,B,C,D); 其它的记号是(I,Q,U,V)和(I,M,C,S). 我们用的记号是*Born and Wolf*书中的.

的．因而根据傅里叶定理，它们包含一个频率范围，所以不完全是单色的．有一种看法认为：(7.26)中的幅值和位相(a_i, δ_i)随时间变化缓慢，也就是说，与频率ω相比是缓慢的．这时，可观测的斯托克斯参数就变成对一个较长的时间间隔所求的平均值，并且写做

$$s_2 = 2\langle a_1 a_2 \cos(\delta_2 - \delta_1)\rangle$$

例如，式中的尖括号表示宏观时间平均．求平均的一个结果是：对一准单色波束来说，斯托克斯参数满足不等式

$$s_0^2 \geqslant s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$$

而不满足等式 (7.29)．“自然光”，即使是高度单色的，也有$s_1 = s_2 = s_3 = 0$．在 *Born and Wolf* 书第十章里更深入地讨论了有关准单色光和部分相干性．

在天体物理中，有一个用斯托克斯参数描写偏振态的例子，这个例子是在研究蟹状星云中的脉冲星发来的光频和射频辐射时提供的．光频辐射显示出微小的线偏振[1]，而$\omega \simeq 2.5 \times 10^9$ 秒$^{-1}$的射频辐射有高度的线偏振[2]．在光频和射频辐射中都没有显示出圆偏振的迹象．这类资料显然有助于阐明从这些迷人天体发来的辐射的机理．

7.3 电磁波在电介质的平面分界面上的反射和折射

光在两种介电性质不同的媒质的分界平面上的反射和折射是大家熟知的现象．这些现象的各种性质可分成两类．

(1) 运动学性质：

(*a*) 反射角等于入射角；

(*b*) 斯涅耳定律：$\dfrac{\sin i}{\sin r} = \dfrac{n'}{n}$，式中 i, r 为入射角和反射角，而 n, n' 、

---

① E. J. Wampler, J. D. Scargle, and J. S. Miller, *Astrophys. J. Lett.* **157**, *LI* (1969).

② D. A. Graham, A. G. Lyne, and F. G. Smith, *Nature* **225**, 526 (1970 年 2 月 7 日), D. B. Campbell, C. Heiles, and J. M. Rankin, *Nature* **225**, 527 (1970 年 2 月 7 日).

为相应的折射率.

(2) 动力学性质:

(*a*) 被反射的辐射和被折射的辐射的强度;

(*b*) 位相的变化和偏振.

运动学性质是直接从这些现象的波动性质及其所满足的边界条件得出的. 但是运动学性质并不依赖于波的性质或边界条件. 另一方面, 动力学性质却完全依赖于电磁场的特定性质以及它们的边界条件.

适用于这种问题的坐标系和符号, 如图 7.5 所示. 在 $z=0$ 平面的上下方的媒质的磁导率和介电常数分别为 μ, ϵ 和 μ', ϵ'. 通过(7.5),把 ck/ω 定义为折射率, 即 $n=\sqrt{\mu\epsilon}$ 和 $n'=\sqrt{\mu'\epsilon'}$. 波矢为 k, 频率为 ω 的平面波自媒质 μ, ϵ 入射. 折射波和反射波的波矢分别为 k′ 和 k″, n 为单位法向矢量, 其方向是从媒质 μ, ϵ 指向媒质 μ', ϵ'.

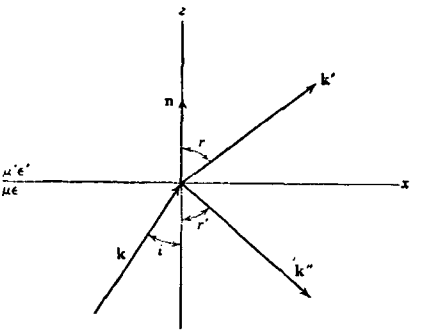


图 7.5 入射波 k 投射在两种不同媒质的平面分界面上, 产生反射波 k″和折射波 k′.

按(7.18),这三个波是

入射波

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}&=\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t}\\ \mathbf{B}&=\sqrt{\mu\epsilon}\,\frac{\mathbf{k}\times\mathbf{E}}{k}\end{aligned}\right\} \tag{7.30}$$

折射波

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}'&=\mathbf{E}'_0 e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}-i\omega t}\\ \mathbf{B}'&=\sqrt{\mu'\epsilon'}\,\frac{\mathbf{k}'\times\mathbf{E}'}{k'}\end{aligned}\right\} \tag{7.31}$$

反射波

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}'' &= \mathbf{E}_0'' e^{i(\mathbf{k}''\cdot\mathbf{x}-i\omega t)} \\ \mathbf{B}'' &= \sqrt{\mu\epsilon}\,\frac{\mathbf{k}''\times\mathbf{E}''}{k}\end{aligned}\right\} \tag{7.32}$$

波数的量值为

$$\left.\begin{aligned}|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}''| &= k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu\epsilon} \\ |\mathbf{k}'| &= k' = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu'\epsilon'}\end{aligned}\right\} \tag{7.33}$$

在 $z=0$ 平面上有一些边界条件，该平面上的一切点必须永远满足这些边界条件，这个事实意味着：在 $z=0$ 处，所有场的空间(和时间)变化必须相同．因此，所有的相因数在 $z=0$ 处必须相等：

$$(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})_{z=0} = (\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x})_{z=0} = (\mathbf{k}''\cdot\mathbf{x})_{z=0} \tag{7.34}$$

这些因数与边界条件的性质无关．方程(7.34)包含了反射和折射的运动学性质．我们立即看出，这三个波矢必都在一个平面内．而且按图7.5的符号可得：

$$k\sin i = k'\sin r = k''\sin r' \tag{7.35}$$

因为 $k''=k$，我们得到 $i=r'$，即入射角等于反射角．斯涅耳定律是

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{k'}{k} = \sqrt{\frac{\mu'\epsilon'}{\mu\epsilon}} = \frac{n'}{n} \tag{7.36}$$

动力学性质包含在边界条件(D和B的法向分量连续；E和H的切向分量连续)中．利用场表式(7.30)—(7.32)，可将 $z=0$ 平面上的这些边界条件写成：

$$\left.\begin{aligned}[\epsilon(\mathbf{E}_0+\mathbf{E}_0'')-\epsilon'\mathbf{E}_0']\cdot\mathbf{n} &= 0 \\ [\mathbf{k}\times\mathbf{E}_0+\mathbf{k}''\times\mathbf{E}_0''-\mathbf{k}'\times\mathbf{E}_0']\cdot\mathbf{n} &= 0 \\ (\mathbf{E}_0+\mathbf{E}_0''-\mathbf{E}_0')\times\mathbf{n} &= 0 \\ \left[\frac{1}{\mu}(\mathbf{k}\times\mathbf{E}_0+\mathbf{k}''\times\mathbf{E}_0'')-\frac{1}{\mu'}(\mathbf{k}'\times\mathbf{E}_0')\right]\times\mathbf{n} &= 0\end{aligned}\right\} \tag{7.37}$$

在应用这些边界条件时，考虑以下两种独立情况是方便的：在第一种情况中，入射平面波是线偏振波，其偏振矢量与入射面(k和n决

定的平面)垂直；在另一种情况中，偏振矢量与入射面平行．按照7.2节的方法，适当地求这两种结果的线性组合，就可以得到任意椭圆偏振的一般情形．

首先讨论电场与入射面垂直的情况，如图7.6所示．图中所有电场都背向观察者．选取B矢量的方位，使得在波矢方向上的能流为正．因为诸电场都平行于分界面，所以由(7.37)中的第一边界条件得不到什么结果．(7.37)中的第三和第四方程给出

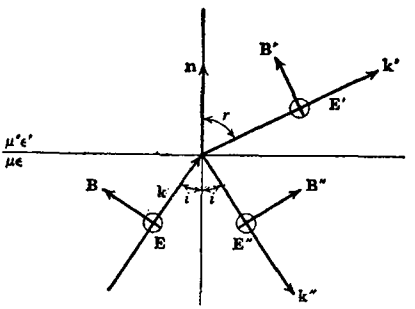


图7.6 当偏振矢量与入射面垂直时的反射和折射．

$$\begin{aligned} E_0+E_0''-E_0'&=0\\ \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}(E_0-E_0'')\cos i-\sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}}E_0'\cos r&=0 \end{aligned} \tag{7.38}$$

利用斯涅耳定律，第二方程化为第三方程．由(7.38)可以求得折射波和反射波的相对振幅．即：

当E与入射面垂直时：

$$\begin{aligned} \frac{E_0'}{E_0}&=\frac{2n\cos i}{n\cos i+\frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2-n^2\sin^2 i}}\\ \frac{E_0''}{E_0}&=\frac{n\cos i-\frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2-n^2\sin^2 i}}{n\cos i+\frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2-n^2\sin^2 i}} \end{aligned} \tag{7.39}$$

这些表式中的平方根是$n'\cos r$，但是我们利用了斯涅耳定律把这平方根用入射角来表示．对光频来说，通常可以令$\mu/\mu'=1$．方程(7.39)以及下面的(7.41)和(7.42)在光学中是最常用的，这时n和n'为实数，

然而这些方程对复介电常数也成立.

如果电场与入射面平行，如图 7.7 所示，则边界条件牵涉到法向D、切向E以及切向H[(7.37)中的第一、第三和第四方程]. 由切向E和切向H的连续性得到

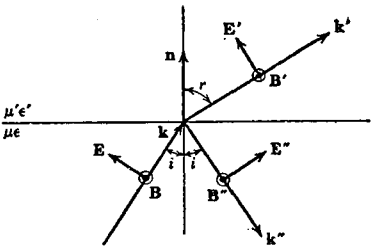


图 7.7 当偏振矢量与入射面平行时的反射和折射.

$$\left.\begin{aligned}\cos i(E_0-E_0'')-\cos r E_0'=0\\ \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}(E_0+E_0'')-\sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}}E_0'=0\end{aligned}\right\}\tag{7.40}$$

法向D连续，加上斯涅耳定律，只不过又回到了(7.37)中的第二方程. 所以折射场和反射场的相对振幅为:

当E与入射面平行时:

$$\left.\begin{aligned}\frac{E_0'}{E_0}&=\frac{2nn'\cos i}{\frac{\mu}{\mu'}n'^2\cos i+n\sqrt{n'^2-n^2\sin^2 i}}\\ \frac{E_0''}{E_0}&=\frac{\frac{\mu}{\mu'}n'^2\cos i-n\sqrt{n'^2-n^2\sin^2 i}}{\frac{\mu}{\mu'}n'^2\cos i+n\sqrt{n'^2-n^2\sin^2 i}}\end{aligned}\right\}\tag{7.41}$$

当正入射($i=0$)时，(7.39)和(7.41)都化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{E_0'}{E_0}&=\frac{2}{\sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{\mu'\epsilon}}+1}\to\frac{2n}{n'+n}\\ \frac{E_0''}{E_0}&=\frac{\sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{\mu'\epsilon}}-1}{\sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{\mu'\epsilon}}+1}\to\frac{n'-n}{n'+n}\end{aligned}\right\}\tag{7.42}$$

其中右边的结果对$\mu'=\mu$时适用. 式中反射波符号的规定，适用于偏

振矢量平行于入射面的情况①. 这意味着，如果 $n'>n$，则反射波与入射波反相.

7.4 反射引起的偏振和全内反射

关于反射和折射的动力学关系，有两种现象值得加以叙述. 第一种现象是，在偏振矢量与入射面平行的情况下，当入射角等于某一角度时，没有反射波存在，这个角度叫做布儒斯特角. 为简单起见，令 $\mu'=\mu$，我们发现：当入射角等于布儒斯特角时，

$$i_B=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{n'}{n}\right) \tag{7.43}$$

(7.41) 中反射波的振幅等于零. 对于$(n'/n)=1.5$这个典型比值来说，$i_B\simeq 56°$. 如果一个混合偏振的平面波以布儒斯特角投射到分界平面上，则反射出来的辐射是完全平面偏振的，其偏振矢量与入射面垂直. 利用这种性质，可以产生平面偏振光束，但是其效果不如其它一些方法，这些方法利用了某些电介质的各向异性的性质. 即使非偏振波不以布儒斯特角投射，反射波也是以与入射面垂直的偏振波为主. 深暗色玻璃能够成功地使只沿一个方向偏振的波透过，就是靠着上面这一事实. 在射频区域中，可以把接收天线按这样的方向排列，即有利于直接透射的波，而不利于表面反射的波(也不利于从电离层反射的波).

第二种现象叫做全内反射. “内”字意味着，入射波和反射波所在媒质的折射率大于折射波所在媒质的折射率$(n>n')$. 斯涅耳定律 (7.36)表明，若 $n>n'$，则 $r>i$. 因此，当 $i=i_0$时，$r=\pi/2$，这里

$$i_0=\sin^{-1}\left(\frac{n'}{n}\right) \tag{7.44}$$

当波以 $i=i_0$ 角入射时，折射波沿分界面传播. 这时没有能量通过分

① 对于偏振矢量垂直于入射面的情况，(7.42)的反射波相对振幅应冠以负号. ——译者注

界面. 因此,在这个入射角时的反射一定是全反射. 如果 $i>i_0$,那末会发生什么情况呢?要回答这个问题,我们首先注意到,当 $i>i_0$ 时,$\sin r>1$. 说明 r 是复角,其余弦是纯虚数.

$$\cos r = i\sqrt{\left(\frac{\sin i}{\sin i_0}\right)^2 - 1} \tag{7.45}$$

当我们考虑如下的折射波的传播因子时,就会弄清楚这些复量的意义:

$$e^{ik\cdot x} = e^{ik'(x\sin r + z\cos r)} = e^{-k'[(\sin i/\sin i_0)^2-1]^{\frac{1}{2}}z} e^{ik'(\sin i/\sin i_0)x} \tag{7.46}$$

上式表明,当 $i>i_0$ 时,只有与分界面平行的折射波在传播. 在分界面上方,折射波按指数衰减. 除 $i\simeq i_0$ 外,衰减只发生在厚度相当于几个波长的边界层内.

即使在分界面另一侧有场存在,显然也没有能量流过界面. 因此,当 $i\geqslant i_0$ 时,发生全内反射. 计算紧接分界面内侧的坡印廷矢量的法向分量对时间的平均值,就可以证明没有能量流过分界面,

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{n} = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}[\mathbf{n}\cdot(\mathbf{E}'\times\mathbf{H}'^*)] \tag{7.47}$$

其中 $\mathbf{H}' = \frac{c}{\mu'\omega}(\mathbf{k}'\times\mathbf{E}')$,我们得

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{n} = \frac{c^2}{8\pi\omega\mu'}\mathrm{Re}[(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}')|\mathbf{E}_0'|^2] \tag{7.48}$$

但 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}' = k'\cos r$ 是纯虚数,所以 $\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}=0$.

$\cos r$ 的纯虚值(7.45)乘以 n',这个量正好取代费涅耳公式 (7.39) 和(7.41)中出现的平方根. 我们看出,现在比值 E_0''/E_0 的模等于 1,正是物理上对全内反射所预期的. 但是,反射波发生位相的变化,在上述两种入射情形下反射波的位相变化是不同的,反射波的位相变化依赖于入射角和(n/n'). 我们可以利用这些位相变化把一种偏振转换成另一种偏振. 费涅耳菱面体就是一种这样的器件,借助于这种器件,通过接连两次内反射,每次内反射发生 45° 的相对位相变化,可以把在入射面内和垂直于入射面的方向上具有相等振幅的线偏振光转换成圆偏振

光(参看 *Born and Wolf* 书第 50 页).

全内反射现象被用到许多实际应用中，这些应用要求在传送光时强度不受损失. 在原子核和基本粒子物理中，塑料作成的"光管"被用来传送从闪烁晶体发射的光，因为电离粒子进入光电倍增管(在光电倍增管中电离粒子转换成有用的电讯号) 要经过一段路程. 由于空间的限制或由于能干扰光电倍增管工作的磁场的存在，光电倍增管往往必须放在离闪烁晶体相当远的地方. 如果光管截面大于所传送的辐射的波长，那末对平面分界面所作的考虑在这里是近似有效的. 但是，当介电媒质的横截面的线度约为一个波长时，必须精密地考虑其几何形状. 这时的传播是属于电介质波导的传播(参看 8.10 节).

7.5 电介质、导体和等离子体的频率色散特性

在 7.1 节里我们假定磁导率和磁化率与频率无关. 正如通解(7.8)所指明的，由于不发生色散，波列在传播中不发生畸变. 事实上，所有的媒质都显示出某些色散性质. 只是在有限的频率范围内，或在真空中，才可以把传播速度当作与频率无关的常数来处理. 当然，前几节中只涉及单个频率分量的全部结果，在有色散存在时也是成立的. 只需把 μ 和 ϵ 的值解释为与所考虑的频率对应的值. 可是，当对一个频率范围进行叠加时，由于 ϵ 和 μ 对频率的依赖关系，就引起了新的效应. 为了考察这些结果，我们至少需要阐述一种简单的色散模型.

(a) $\epsilon(\omega)$的简单模型

色散的物理内容，几乎都是通过推广 4.6 节描写的随时间变化场的经典模型来加以说明的. 为简单起见，我们将外电场和局部电场的差别忽略不计. 所以本模型只适用于密度比较低的物质.[如果愿意的话，可以用 (4.69) 来消除这个缺点.] 我们将令磁导率等于 1. 一个受谐和力(4.71)束缚和受电场 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$作用的电子的运动方程是

$$m\left[\ddot{\mathbf{x}}+\gamma\dot{\mathbf{x}}+\omega_0^2\mathbf{x}\right]=e\mathbf{E}(\mathbf{x},t) \tag{7.49}$$

式中γ量度唯象阻尼力. (7.49)中忽略了磁力效应. 另外我们还要作如下的近似: 振荡的振幅足够地小, 使得我们可以在电子的平均位置上计算电场. 如果当频率为ω时, 电场按$e^{-i\omega t}$方式随时间谐和地变化, 那末由一个电子贡献的偶极矩为

$$\mathbf{p}=e\mathbf{x}=\frac{e^2}{m}(\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma)^{-1}\mathbf{E} \tag{7.50}$$

如果我们假定每单位体积有N个分子, 每个分子有Z个电子, 并且假定所有电子的束缚频率不是单一的, 每个分子中有f_j个电子具有束缚频率ω_j和阻尼常数γ_j, 那末介电常数$\epsilon=1+4\pi\chi_e$由下式给出:

$$\epsilon(\omega)=1+\frac{4\pi Ne^2}{m}\sum_j f_j(\omega_j^2-\omega^2-i\omega\gamma_j)^{-1} \tag{7.51}$$

式中振子强度f_j满足下列求和法则:

$$\sum_j f_j=Z \tag{7.52}$$

利用f_j, γ_j和ω_j的适当的量子力学的定义, (7.51)就是原子对介电常数的贡献的一种精确描写.

(b) 反常色散和共振吸收

阻尼常数γ_j通常比束缚频率或共振频率ω_j小得多. 这意味着: 对大多数频率来说, $\epsilon(\omega)$近似为实数. 当$\omega<\omega_j$时, 因子$(\omega_j^2-\omega^2)^{-1}$为正, 而当$\omega>\omega_j$时, 则为负. 因此, 在低频时, ω低于最小的ω_j, (7.51)中求和的各项都同样贡献一个正号, 并且$\epsilon(\omega)$大于1. 当频率ω超过这个ω_j值时, 求和号下出现的负的项越来越多, 直到最后总和为负, 并且$\epsilon(\omega)$小于1. 当然, 在任一ω_j的邻域内, 特性的改变较厉害. 当$\omega=\omega_j$时, (7.51)中第j项分母的实部等于零, 该项较大, 且是纯虚数. 在两个相继的共振频率附近, $\epsilon(\omega)$的实部和虚部的一般特征如图 7.8 所示. 正常色散与$\mathrm{Re}\epsilon(\omega)$随$\omega$的增加联系在一起, 反常色散则跟其

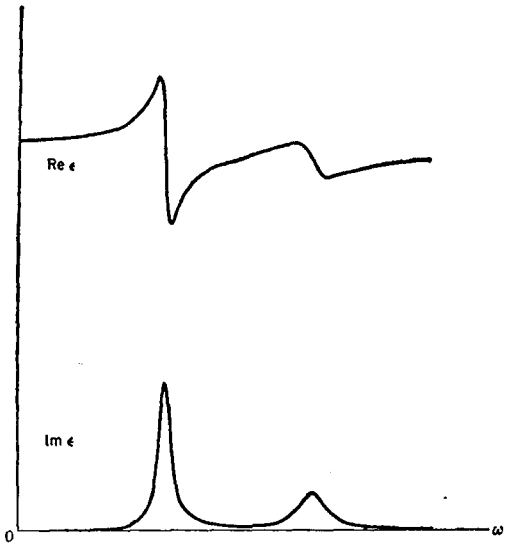


图 7.8　在两个共振频率附近介电常数 $\epsilon(\omega)$ 的实部和虚部. 反常色散区域也就是出现吸收的频率区间.

减少联系在一起. 正常色散被看成是除了在共振频率的邻域以外处处出现的. 只有在反常色散出现的区域，ϵ 的虚部才是相当大的. 因为 ϵ 的一个正的虚部代表能量从电磁波散逸到媒质，所以 $\mathrm{Im}\epsilon$ 大的区域叫做共振吸收区①.

我们用波数 k 的实部和虚部最直接地表示一个平面波的衰减. 如果把波数写成

$$k=\beta+i\frac{\alpha}{2} \tag{7.53}$$

那末参数 α 就是如所周知的衰减常数或吸收系数. 波的强度按 $e^{-\alpha z}$ 下

① 如果 $\mathrm{Im}\epsilon<0$，则媒质把能量给予波；这时就出现放大作用，正如微波激射器或激光器中出现的那样. 参看 M. Borenstein and W. E. Lamb, *Phys. Rev.* **A5**, 1298 (1972).

降．由方程(7.5)得到(α,β)与$(\mathrm{Re}\epsilon,\mathrm{Im}\epsilon)$之间的关系如下：

$$\left.\begin{aligned}\beta^2-\frac{\alpha^2}{4}&=\frac{\omega^2}{c^2}\mathrm{Re}\epsilon\\ \beta\alpha&=\frac{\omega^2}{c^2}\mathrm{Im}\epsilon\end{aligned}\right\}\tag{7.54}$$

如果$\alpha\ll\beta$，正如除了吸收非常强烈或$\mathrm{Re}\epsilon$为负这两种情形以外所出现的那样，那末衰减常数α可以近似地写为

$$\alpha\simeq\frac{\mathrm{Im}\epsilon(\omega)}{\mathrm{Re}\epsilon(\omega)}\beta\tag{7.55}$$

式中$\beta=\sqrt{\mathrm{Re}\epsilon}\,\omega/c$．于是比值$\mathrm{Im}\epsilon/\mathrm{Re}\epsilon$给出每波长的强度的相对减少除以$2\pi$．

(c) 低频特性，电导率

在$\omega\to0$极限下，媒质的反应有定性的差别，这种差别取决于最低共振频率是否等于零．对绝缘体来说，最低共振频率不等于零．这时，在$\omega=0$时分子极化率由(4.73)给出，相当于(7.51)中$\omega=0$极限．电介质在静态极限下的基本性质已经在4.6节里讨论过．

如果每个分子中有一部分(f_0个)电子对$\omega_0=0$来说是“自由的”，那末介电常数在$\omega=0$时是奇异的．若把自由电子的贡献单独分出来，则(7.51)变成

$$\epsilon(\omega)=\epsilon_0+i\frac{4\pi Ne^2f_0}{m\omega(\gamma_0-i\omega)}\tag{7.56}$$

式中ϵ_0是所有其它偶极子的贡献．如果我们考查麦克斯韦-安培方程

$$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

并假定媒质遵守欧姆定律$\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$，且具有一个“正常”介电常数$\epsilon_0$，就能理解这种奇异性．利用谐和时间依赖关系，前面的方程就变成

$$\nabla\times\mathbf{H}=-i\frac{\omega}{c}\left(\epsilon_0+i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)\mathbf{E}\tag{7.57}$$

另一方面，如果我们不是明确地引入欧姆定律，而是把媒质的所有性质

都归之于介电常数，那末就把(7.57) 右边括号中的量看作等于 $\epsilon(\omega)$. 与(7.56)比较，得到电导率的表式：

$$\sigma=\frac{f_0Ne^2}{m(\gamma_0-i\omega)} \tag{7.58}$$

从本质上说，这就是电导率的德鲁特(Drude, 1900 年)模型，其中 f_0N 是媒质中每单位体积的自由电子数. 由电导率的实验数据可以定出阻尼常数 γ_0/f_0 的经验值. 对铜来说，$N\simeq8\times10^{22}$ 个原子/厘米^3，在常温下低频电导率为 $\sigma\simeq5\times10^{17}$ 秒$^{-1}$. 这就给出 $\gamma_0/f_0\simeq3\times10^{13}$ 秒$^{-1}$. 假定 $f_0\sim1$，这就表明：一直到频率超过微波段($\omega\lesssim10^{11}$ 秒$^{-1}$) 时，金属电导率从本质上说是实数(即电流与场同相)，且与频率无关. 在高频(红外和红外以上)时，电导率是复数，并且电导率随着频率的变化是按简单结果(7.58)所定性描写的方式进行的. 电导率的问题实际上是量子力学的问题，其中泡利原理起着重要的作用. 自由电子实际上是孤立原子的价电子，当诸孤立原子结合一起而形成固体时，这些价电子变成准自由的，且比较不受妨碍地通过点阵而运动(倘若它们的能量处在某些间隔或能带中). 阻尼效应来自碰撞，这些碰撞在电子和点阵振动、点阵缺陷、杂质之间引起相当可观的动量转移①.

以上讨论表明：电介质与导体间的区别是人为的，至少在频率与 $\omega=0$ 相差甚远时是这样的. 如果媒质具有自由电子，那末在低频时，它是一个导体；否则，便是一个绝缘体②. 但是，当频率不等于零时，“电导率”对 $\epsilon(\omega)$ (7.51) 的贡献只不过像静止时那样作为共振振幅而出现. 我们可以把媒质的色散性质归因于一个复介电常数，也可归因

① 参看 A. H. Wilson, *Theory of Metals*, 第二版, Cambridge University Press (1953), 或 W. R. Beam, *Electronics of Solids*, McGraw-Hill, New York(1965).

② 根据固体的量子力学能带结构，导体具有一些处在部分满带中的电子，而绝缘体是按泡利原理所允许的把它的满带填满. 一个“自由”电子必定具有一些近乎能量守恒的量子态，它可以跃迁到这些量子态上. 在一个部分满带中就有这样一些量子态，但是，根据定义，一个满带就没有这样有用的量子态.

于一个与频率有关的电导率和一个介电常数.

(*d*) 高频极限;等离子体频率

当频率远远超过最高共振频率时，介电常数（7.51）取下列简单形式:

$$\epsilon(\omega)\simeq 1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \tag{7.59}$$

式中

$$\omega_p^2=\frac{4\pi NZe^2}{m} \tag{7.60}$$

频率 ω_p 叫做媒质的等离子体频率，它只依赖于每单位体积的总电子数 NZ. 在这种极限下，波数由下式给出:

$$ck=\sqrt{\omega^2-\omega_p^2} \tag{7.61}$$

有时我们把（7.61）表示为 $\omega^2=\omega_p^2+c^2k^2$，并且把这个表式叫做 $\omega=\omega(k)$ 的色散关系或色散方程. 在介电媒质中，（7.59）只适用于 $\omega^2\gg\omega_p^2$. 这时介电常数接近于 1，虽然比 1 要稍小些;而且介电常数随频率而增加，有点像图 7.8 所示曲线的最高频率部分那样. 波数是实数，且随频率而变化，如同具有截止频率 ω_p 的波导中的一个波模一样（参看图 8.4）.

在某些情形下，例如在电离层中或在实验室的稀薄电子等离子体中，电子是自由的，而且阻尼可以忽略不计. 这时(7.59)在包括 $\omega<\omega_p$ 的一个宽广的频率范围内成立. 当频率低于等离子体频率时，波数(7.61)是纯虚数. 这种波入射到等离子体，就被后者反射，等离子体内部的场随着与表面相隔的距离按指数下降. 当 $\omega=0$ 时，衰减常数为

$$\alpha_{\text{等离子体}}\simeq\frac{2\omega_p}{c} \tag{7.62}$$

在实验室规模上，等离子体密度的数量级为 10^{12}-10^{16} 个电子/厘米^3. 这就是说 $\omega_p\simeq 6\times10^{10}$-$6\times10^{12}$ 秒$^{-1}$，所以对静场或低频场来说，典型的衰减长度（α^{-1}）的数量级为 0.2 厘米-2×10^{-3} 厘米. 场从等离子体内

排出，这是受控热核过程中的一种熟知的效应，并试图用来约束热等离子体(参看 10.5节).

在光频和高于光频时，金属的反射性主要是由于跟稀薄等离子体相同的特性所引起的. 金属的介电常数由(7.56)给出. 在高频($\omega \gg \gamma_0$)时，该式取下列近似形式：

$$\epsilon(\omega) \simeq \epsilon_0(\omega) - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

式中 $\omega_p^2 = 4\pi n e^2/m^*$ 为传导电子的等离子体频率，假定有效质量 m^* 已部分地计及结合效应. 当 $\omega \ll \omega_p$ 时，入射到金属的光的特性，与(7.59)描写的等离子体近似相同. 光透入金属的距离是非常短的，它几乎完全被反射回去. 但是，当频率增加而进入 $\epsilon(\omega) > 0$ 的范围时，金属就突然地让光透射过去，它的反射率急剧地改变. 这种特性典型地出现在紫外段中，从而导出了金属紫外透明性这一术语. 临界频率的测定给出了传导电子的密度或有效质量的数据①.

(e) 作为频率函数的液态水的折射率和吸收系数

作为说明真实媒质的折射率和吸收系数的实部的全部频率特性的一个实例，我们讨论处处都有的物质——水. 以求一种全面的见解，并指明可能发生的惊人的变化，而不去讨论特殊的细节. 因此，我们编绘了标准温度压强下液态水的 $n(\omega) = \mathrm{Re}\sqrt{\mu\epsilon}$ 和 $\alpha(\omega) = 2\mathrm{Im}\sqrt{\mu\epsilon}\,\omega/c$ 的总特性图，如图 7.9 所示，该图画出了 n 和 α 对 ω 的 log-log 曲线，其中频率标度分为 20 个十进位，吸收系数标度分为 11 个十进位. 由其上图可以看到 $n(\omega)$ 的有趣的但并不引人注目的特性. 在极低频率时，$n(\omega) \simeq 9$，这个值是由于水分子中有一部分永久偶极矩的取向一致而产生的. 频率高于 10^{10} 赫时，曲线比较平滑地下降，到红外段有起伏. 在可见光频段(由竖直虚线标示出来)中，$n(\omega) \simeq 1.34$，变化

① 关于金属在光频段和紫外段的这些介电性质及其它介电性质的讨论，参看 D. Pines, *Elementary Excitation in Solid*, W. A. Benjamin, New York(1963)的第四章.

甚小．然后，在紫外段起伏更大．在 6×10^{15} 赫($h\nu\simeq25$ 电子伏)以上，没有折射率实部的数据．图中画出了(7.59)假定的趋于 1 的渐近值．

吸收系数 α 的特性是更引人注目的．当频率低于 10^8 赫时，吸收系数甚小．数据似乎是不可靠的(图中画出两组不同的数据)，可能这是由于样品纯度的不同．当频率增加到 10^{11} 赫时，吸收系数猛增到 $\alpha\simeq10^2$ 厘米$^{-1}$，这相当于液态水中的衰减长度为 100 微米．这种现象(在潮湿空气中)结束了第二次世界大战期间波长越来越短、雷达分辨本领越来越好的趋势．

在红外段，吸收带跟分子振动型式有关，也许还跟一个分子在其邻近分子的场中的振荡有关，这些吸收带引起了巅值达 $\alpha\simeq10^4$ 厘米$^{-1}$ 的吸收作用．接着，吸收系数陡然地降低 $10^{7.5}$ 倍，而成为 4×10^{14} 赫和 8×10^{14} 赫间狭窄频率范围内的一个 $\alpha<3\times10^{-3}$ 厘米$^{-1}$ 的值．然后，在 2×10^{15} 赫附近再升高 10^8 倍以上．这是一个引人注目的吸收窗，它位于我们称为可见频段的范围内．在吸收窗内水的高度透明性，其根源在于原子和分子的基本能级结构．读者可以联想到浸在水中的行星上生物进化的基本问题，可以解释为什么动物眼睛看见从红到紫的光谱，为什么草是绿色的．大自然必定利用了她的"窗"！在甚远紫外段中，当 $\nu\simeq5\times10^{15}$ 赫(21 电子伏)时有一巅值 $\alpha\simeq1.1\times10^6$ 厘米$^{-1}$．这恰好是等离子体激元能 $\hbar\omega_p$ 的所在，激元能相当于分子中全部电子的集体激发．衰减的数量级由(7.62)给出．在光电效应以及随后的康普顿散射和其它高能过程出现之前，缺乏对更高频率的数据．原子核物理学家已经详细研究了这些频段中的吸收．从根本上说，吸收特性是由原子性质和密度决定的，不是由物质是水这个事实决定的．

在图 7.9 中的低频端，我们画出了海水的吸收系数．在低频时，海水的电导率 $\sigma\simeq4\times10^{10}$ 秒$^{-1}$(4.4 姆欧/米)．由 (7.57) 我们得知：当频率约在 10^8 赫以下时，$\alpha\simeq(8\pi\omega\sigma/c^2)^{1/2}$．于是吸收系数与 $\sqrt{\omega}$ 成正比，且在低频时变得非常小．所画的斜虚线是 α(厘米$^{-1}$)$=8.4\times10^{-5}\times$

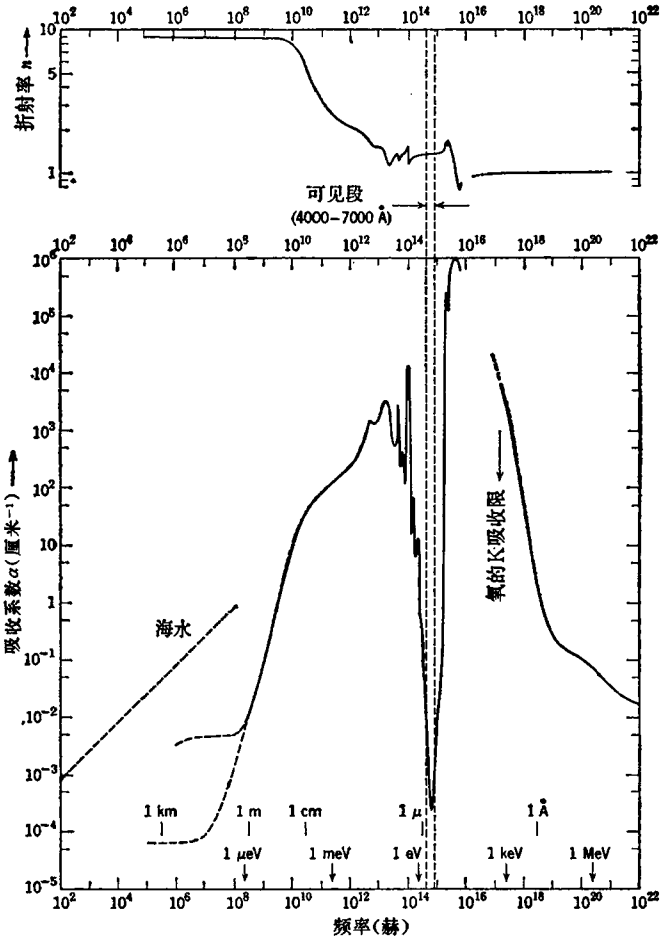


图 7.9　液态水的折射率(上图)和吸收系数(下图)对线频率的函数关系曲线. 横坐标上也标出了能量标度(箭号)和波长标度(竖直线). 两条竖直虚线表示频谱的可见段. 左边的斜虚线表示海水的吸收系数. 注意在纵横两个方向上的标度都是其对数.

$\times\sqrt{\nu(\text{赫})}$. 当频率为 10^2 赫时，海水中的衰减长度 $\alpha^{-1}\simeq 10$ 米. 这意味着：在海面以下 50 米深处波的强度为海面处强度的百分之一. 如果有一支庞大的潜艇舰队散布在全球的各大洋中，当它们潜没在海水中时，我们想从陆上基地发送信息给它们，就会考虑用极低频(ELF)通信. 地球-电离层谐振腔在 8 赫到几百赫的范围内有突出共振存在(参看 8.9 节)，这就使得该频谱段特别引人注意，因为它减少了衰减. 当波长数量级为 5×10^3 千米时，需要用非常大的天线(比起波长来仍然较小!). 关于这些方面的探讨①，在报刊上时常可以查阅到.

7.6 在电离层和磁层中传播的简化模型

在零级近似下，电磁波在电离层中的传播由介电常数(7.59)来描写，然而由于地磁场的存在，要对传播特性进行重大的修改. 对许多实验室等离子体来说，静外磁场的影响也是存在的. 为了说明外磁场的影响，我们考虑一个简单问题，即密度均匀的稀薄电子等离子体，外加有强大的均匀静磁场，其磁感应强度为 $\mathbf{B}_0$，并有沿着与 $\mathbf{B}_0$ 平行方向传播的横波. (习题 10.7 中考虑更一般的沿任意方向传播的问题.)如果电子运动的振幅很小，并且略去碰撞，则运动方程近似地为

$$m\ddot{\mathbf{x}}-\frac{e}{c}\mathbf{B}_0\dot{x}\hat{\mathbf{x}}=-e\,\mathbf{E}\,e^{-i\omega t} \tag{7.63}$$

式中横波的 $\mathbf{B}$ 场的影响与静磁场 $\mathbf{B}_0$ 比较，已经略去不计，而电子的电荷写成 $-e$. 把横波当作圆偏振波是方便的. 这时，我们写出

$$\mathbf{E}=(\epsilon_1\pm i\epsilon_2)E \tag{7.64}$$

和相似的 $\mathbf{x}$ 表式. 因为取 $\mathbf{B}_0$ 方向与 ϵ_1 和 ϵ_2 正交，(7.63)中的矢积只有 ϵ_1 和 ϵ_2 方向上的分量，横向分量为零. (7.63)的稳恒态解为

$$\mathbf{x}=\frac{e}{m\omega(\omega\mp\omega_B)}\mathbf{E} \tag{7.65}$$

---

① *New York Times*, October 14, 1969, 第 49 页, 第 1 栏; August 19, 1973, 第8页, 第 1 栏.

式中 ω_B 是带电粒子在磁场中的进动频率，

$$\omega_B=\frac{eB_0}{mc} \tag{7.66}$$

我们可以根据拉莫尔定理来理解(7.65)对频率的依赖关系．将(7.63)变换到以频率 ω_B 进动的坐标系，在这个坐标系里静磁场被消除了，于是我们就看出：电子动量的改变率是由有效频率为 $(\omega\pm\omega_B)$［正负号取决于圆偏振的符号］的转动电场引起的．

振荡振幅(7.65)给出每个电子的偶极矩，对大块样品来说，(7.65)给出介电常数

$$\epsilon_\mp=1-\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega\mp\omega_B)} \tag{7.67}$$

括号里的负号对应于正螺旋性波(按光学术语，叫左旋圆偏振)，而正号对应于负螺旋性波．当传播方向反平行于磁场 $\mathbf{B}_0$ 时，正负号要颠倒过来．上式便是(7.59)在计入静磁场时的推广．因为(7.67)只适用于沿静磁场方向传播的波，所以它不是完全普遍能用的．但是，即使在这个简单实例中，也看出以下根本特性：右旋和左旋圆偏振波的传播是不同的．电离层是双折射的．当传播方向不与静磁场 $\mathbf{B}_0$ 平行时，可以直接证明：如果 ω_B^2 级的项与 ω^2 和 $\omega\omega_B$ 比较可以忽略不计，那末介电常数仍由(7.67)给出．但是，现在应该把进动频率(7.66)解释为仅仅由于 $\mathbf{B}_0$ 的平行于传播方向的分量所引起的．这意味着：(7.67)中的 ω_B 是角度函数，即媒质不但是双折射的，而且是各向异性的（参看习题10.7)．

电离层的自由电子密度的最大值一般为 10^4—10^6 个电子/厘米^3，相应的等离子体频率约为 $\omega_p\simeq6\times10^6$—$6\times10^7$ 秒$^{-1}$．如果我们取地磁场值为 0.3 高斯，则进动频率 $\omega_B\simeq6\times10^6$ 秒$^{-1}$．

图 7.10 表示在 ω_p/ω_B 的两个比值下 $\epsilon_\pm$ 与频率的函数关系．在这两个例子中都有一段较宽的频率区间，在那里，ϵ_+ 或 ϵ_- 有一个为正，则

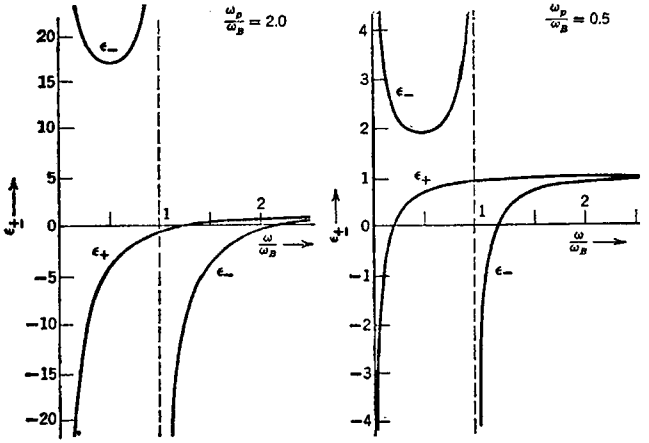


图 7.10 电离层模型(在均匀静磁场中的稀薄电子等离子体)的介电常数与频率的函数关系. $\epsilon_\pm(\omega)$ 相应于传播方向与磁场平行的右旋和左旋圆偏振波. ω_B 是回转频率; ω_p 是等离子体频率. 两组曲线分别相当于 $\omega_p/\omega_B=2.0$ 和 0.5.

另一个为负. 在这些频率上, 圆偏振中的一个态不能在等离子体内传播. 因此, 与这个偏振态对应的波投射到等离子体上时, 将全部反射出来. 偏振中的另一个态可以部分地透射. 所以, 当线偏振波投射到等离子体上时, 反射波将是椭圆偏振波, 其长轴与入射波的偏振方向通常有一夹角.

根据这些概念, 可以解释从电离层发射回来的无线电波的特性, 但是由于电离层中存在好几层等离子体, 其密度和相对位置又随高度和时间而变化, 就使这问题比我们的简单例子复杂得多. 研究竖直向上发送的辐射脉冲的反射, 就可以推断在不同高度上的电子密度. 在电离层的一个给定层内, 每单位体积的自由电子数 n_0 随高度慢慢增加, 并到达最大值, 当高度再继续增加时, 就急剧下降, 如图 7.11 所示. 因为 n_0 变化缓慢, 给定频率 ω_1 的脉冲无反射地进入电离层. 但是, 当密

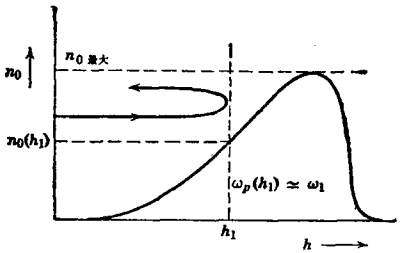


图 7.11 电离层的一个给定层中的电子密度与高度的函数关系(示意图).

度 n_0 足够大时，$\omega_p(h_1)\simeq\omega_1$. 这时，介电常数(7.67)等于零，脉冲被反射出来. 在发生反射的地方，真实密度 n_0 是由(7.67)右边的根给出. 观测从发射信号到收到反射信号时的时间间隔，就可以求得与该密度相对应的高度 h_1. 改变频率 ω_1，并研究时间间隔的变化情况，就可以定出电子密度与高度的函数关系. 如果频率 ω_1 非常高，则折射率不等于零，而且只有很小的反射. 当频率大到某一频率时反射消失，由这个频率可以决定给定层中电子密度的最大值. 习题 7.9 中概括了用温-克-布(WKB)近似作稍进一步的定量处理.

对于所谓"哨声"的独特的磁层的传播现象来说，$\epsilon_-(\omega)$ 在低频时的特性是重要的. 当 $\omega\to 0$ 时，$\epsilon_-(\omega)$ 按 $\epsilon_-\simeq\omega_p^2/\omega\omega_B$ 趋于正无穷大. 这时发生波的传播，但根据(7.5)，其波数为

$$k_-\simeq\frac{\omega_p}{c}\sqrt{\frac{\omega}{\omega_B}}$$

这相当于高色散媒质. 能量输运是按群速度(7.86)—参看 7.8 节—进行的，即

$$v_g(\omega)\simeq 2v_p(\omega)\simeq 2c\frac{\sqrt{\omega_B\omega}}{\omega_p}$$

不同频率的辐射脉冲按不同速率行进：频率越低，速率越慢. 在一个半球上的雷雨产生宽广的辐射谱，其中有一些辐射大概按(7.67)近似描写的方式沿地磁场的偶极场线传播. 高频分量先到达对映点，低频

分量稍后才到达对映点．这就在频率等于和低于 10^5 赫时引起哨声，之所以这样命名，乃因用声接收机检测时信号是哨子似的声音，以高声频开始，通过可闻区，频率迅速降低．利用上述 ω_p 和 ω_B 的估计值以及数量级为 10^4 千米的距离值，读者可以证明哨声的时标是以秒量度的．读者可以在本章末的推荐读物和习题中，找到有关哨声的进一步讨论．

7.7 导电媒质或耗散媒质中的波

在 7.5 节里我们看到：媒质的介电常数通常是复数，不管是绝缘体还是导体．对绝缘体来说，ϵ 的虚部在许多场合下可以忽略不计，但对导体来说，则远非如此．导电媒质中波的特性在实用上是很重要的，即使其主要内容已经在 7.5 节的(a)和(b)段里介绍过，在这里我们还要单独地加以讨论．通常把导电媒质的复介电常数从形式上分为两部份：实"介电常数"ϵ 和实"电导率"σ．这种分法，只是把介电常数的实部和虚部明确表示出来的一种方便的解法而已，然而其更直观的根据在于如此定义的电导率与频率无关，至少对微波和更低的频率是这样，正如前面已经讨论过的．

如果导体中的场按 $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t}$ 随空间和时间而变化，那末根据(7.56)，(7.57)和(7.5)，波数 k 由下列复数表式给出：

$$k^2=\mu\epsilon\frac{\omega^2}{c^2}\left(1+i\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon}\right) \tag{7.68}$$

第一项相当于位移电流的贡献，第二项相当于传导电流的贡献．在开平方根求 k 时，选取这样一个根，使得当 $\sigma=0$ 时给出大家熟知的结果．假定 σ，μ 和 ϵ 都是实数，这时我们求得

$$k=\beta+i\frac{\alpha}{2}$$

其中

$$\left.\begin{matrix}\beta\\ \frac{\alpha}{2}\end{matrix}\right\}=\sqrt{\mu\epsilon}\frac{\omega}{c}\left[\frac{\sqrt{1+\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}\pm 1}{2}\right]^{1/2} \tag{7.69}$$

对于不良导体$\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon}\ll 1\right)$，我们近似求得

$$k=\beta+i\frac{\alpha}{2}\simeq\sqrt{\mu\epsilon}\frac{\omega}{c}+i\frac{2\pi}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\sigma \tag{7.70}$$

这个解准确到$(\sigma/\omega\epsilon)$的一次项．在这种极限情况下，$\mathrm{Re}k\gg\mathrm{Im}k$，而且波的衰减$(\mathrm{Im}k)$与频率无关，除了介电常数和电导率可能随频率而改变的情形外．另一方面，对于良导体$\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon}\gg 1\right)$，$\frac{\alpha}{2}$和$\beta$近似相等，即

$$k\simeq(1+i)\frac{\sqrt{2\pi\omega\mu\sigma}}{c} \tag{7.71}$$

式中只保留$(\omega\epsilon/\sigma)$的最低次项．

按$\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t)$方式传播的波是阻尼横波．场可以写为

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}&=\mathbf{E}_0 e^{-\frac{\alpha}{2}\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}\ e^{i\beta\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}-i\omega t}\\ \mathbf{H}&=\mathbf{H}_0 e^{-\frac{\alpha}{2}\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}\ e^{i\beta\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}-i\omega t}\end{aligned}\right\} \tag{7.72}$$

式中$\mathbf{n}$为$\mathbf{k}$方向上的单位矢量．$\mathbf{E}$的散度方程表明$\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{n}=0$，而法拉第定律给出

$$\mathbf{H}_0=\frac{c}{\mu\omega}\left(\beta+i\frac{\alpha}{2}\right)\mathbf{n}\times\mathbf{E}_0 \tag{7.73}$$

上式表明，导体中$\mathbf{H}$和$\mathbf{E}$的位相不同．k的量值和位相由下式两式决定：

$$\left.\begin{aligned}|k|&=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\beta^2}=\sqrt{\mu\epsilon}\frac{\omega}{c}\left[1+\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right]^{1/4}\\ \phi&=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\alpha}{2\beta}=\frac{1}{2}\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon}\right)\end{aligned}\right\} \tag{7.74}$$

我们可以把(7.73)写成如下形式：

$$\mathbf{H}_0=\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\left[1+\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right]^{1/4}e^{i\phi}\mathbf{n}\times\mathbf{E}_0 \tag{7.75}$$

(7.75)的解释是，在时间上$\mathbf{H}$比$\mathbf{E}$落后相角ϕ．它们的相对振幅为：

$$\frac{|\mathbf{H}_0|}{|\mathbf{E}_0|}=\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\left[1+\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right]^{1/4} \tag{7.76}$$

在非常优良的导体中，我们看到，磁场远大于电场，位相几乎落后45°．从性质上看，场能几乎全部是磁能．

(7.72)给出的波是随距离按指数律衰减．这意味着，进入导体的电磁波在距离

$$\delta=\frac{2}{\alpha}\simeq\frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\omega\sigma}} \tag{7.77}$$

处的振幅减少到初始振幅的$1/e=0.369$．上式是对良导体求得的近似结果．距离δ叫做趋肤深度或透入深度①．像铜这样的导体，当频率为60周/秒时，$\delta\simeq0.85$厘米，当频率为100兆周/秒时，$\delta\simeq0.71\times10^{-3}$厘米．波这样迅速的衰减意味着，在高频电路中，电流只是在导体表面流动．由此得出一个简单的结论：电路元的高频电感稍小于低频电感，因为通量从导体内部被排出．

在导电媒质分界面上的反射和折射问题从细节上说更为复杂，在此不予论述．有关这一问题的讨论，有兴趣的读者可以参看*Stratton*书第500页起．我们只是讲一下，按7.3节的记号，折射波的空间变化为

$$e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}}=e^{i(k'\sin\gamma)x+i(k'\cos\gamma)z}$$

式中x方向是平行于分界面的，z方向是垂直于分界面的．利用斯涅耳定律，上式可以写成

$$e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}}=e^{i(k\sin i)x+i\sqrt{k'^2-k^2\sin^2 i}\,z}$$

在耗散媒质中k'^2是复数[由(7.68)给出]，所以z的系数是复数．波沿

① 供参考：在米·千克·秒·安单位制中，趋肤深度(7.77)为$\delta=(2/\mu\omega\sigma)^{1/2}$．

z 方向衰减. 对于良导体,(7.71)成立, $|k'^2| \gg k^2$, 指数近似地由下式给出:

$$e^{ik'\cdot x} \simeq e^{-z/\delta} e^{i[(k\sin i)x + z/\delta]} \tag{7.78}$$

方程(7.78)相当于 7.1 节末提到的不均匀平面波, 其等幅面与导体表面平行,其等相面与导体表面只有微小的夹角 $(k\delta \sin i)$. 在 8.1 节里将对这个问题再作更详细的研究.

7.8 一维波的叠加; 群速度

在前几节里,我们求出麦克斯韦方程组的平面波解,并讨论了这些解的性质. 我们只讨论了单色波, 这些波具有一定频率和一定波数. 在实际情形中不会有这样理想化的解. 即使在最单色光源情形下, 或在调谐锐度极高的无线电发射机或接收机情形下, 人们也得处理有限展宽(虽然展宽也许很小)的频率或波长. 这种展宽也许是由脉冲的有限宽度、源的固有增宽或其它许多原因引起的. 因为基本方程是线性的,原则上基本问题是求不同频率解的适当的线性迭加. 但是,一般说来,这会引起几种新的情况.

1. 如果媒质是色散的(即介电常数是场频率的函数),则波的各个频率分量的相速度不相等. 因而波的各个不同分量以不同速率行进,并且有改变相对位相的趋势.

2. 在色散媒质中, 能流速度可以与相速度大不相同, 甚至能流速度也许没有确切的意义.

3. 在耗散媒质中, 辐射的脉冲在行进时无论有无畸变都会衰减,而脉冲畸变与否,则取决于耗散效应是否是敏感的频率函数.

这些色散效应和耗散效应的本质, 隐含在傅里叶级数和傅里叶积分的概念 (2.8 节)中. 为了简单起见, 我们只考虑一维标量波. 标量振幅 $u(x, t)$可以被认为是电磁场的一个分量. 波动方程(7.2) 的基本解已列在(7.6)中. (7.5)给出电磁场的频率 ω 和波数 k 的关系. 当我

们考虑线性叠加时，可以把ω或k看作独立变数．一开始我们就会发现，把k当作独立变数是最方便的．对于有可能发生色散的情形，我们将把ω当作k的一般函数：

$$\omega=\omega(k) \tag{7.79}$$

因为色散性质不可能与波向左还是向右行进有关，所以ω一定是k的偶函数，$\omega(-k)=\omega(k)$．对大多数波长来说，ω是k的光滑变化函数．但是，正如在7.5节里所看到的，在某些频率处，有"反常色散"区域，在这些区域中，ω在狭窄的波长区间内迅速地变化．以下的讨论是利用一般形式(7.79)，这些讨论可以同样很好地应用于电磁波、声波、德布罗意物质波等．我们暂且假定k和$\omega(k)$是实数，因而排除了耗散效应．

从基本方程(7.6)出发，可以建立如下形式的通解：

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A(k)e^{ikx-i\omega(k)t}dk \tag{7.80}$$

为了与(2.44)和(2.45)的傅里叶积分表式一致起见，冠以因子$1/\sqrt{2\pi}$．振幅$A(k)$描写不同波的线性叠加的性质．写出$t=0$时空间振幅$u(x,t)$的变换式，就得$A(k)$[①]：

$$A(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)e^{-ikx}dx \tag{7.81}$$

如果对所有x来说，$u(x,0)$代表谐波e^{ik_0x}，则正交关系(2.46)表明$A(k)=\sqrt{2\pi}\,\delta(k-k_0)$，它相当于一个单色行波$u(x,t)=e^{ik_0x-i\omega(k_0)t}$，这正是所要求的结果．可是，如果在$t=0$时，$u(x,0)$代表一有限波列，其长度约为$\Delta x$，如图7.12所示，那末振幅$A(k)$不是$\delta$函数．更确切地说，$A(k)$是以波数$k_0$为中心，宽度约为$\Delta k$的峰形函数，$k_0$为调制波

① 下面的讨论忽略了初值问题．对于二阶微分方程，我们不但必须给定$u(x,0)$，而且必须给定$\partial u(x,0)/\partial t$．这种忽略对本节的其余题材来说，是无关紧要．这种忽略在下一节里予以补救．

$u(x,0)$ 的主波数. 如果 Δx 和 Δk 定义为对 x 和 k 的平均值的方均根偏差[根据强度 $|u(x,0)|^2$ 和 $|A(k)|^2$ 来确定的], 则可以推得普遍结论:

$$\Delta x \Delta k \geqslant \frac{1}{2} \qquad (7.82)$$

读者可以容易地证明, 对于大多数非猛然切断的有规则脉冲或波包来说, Δx 乘 Δk 接近(7.82)的低限值. 这意味着, 只含几个波长的短波列, 其单色波波数分布很宽, 反之, 正弦形长波列几乎是单色的. 关系式(7.82)完全同样适用于时间和频率的分布.

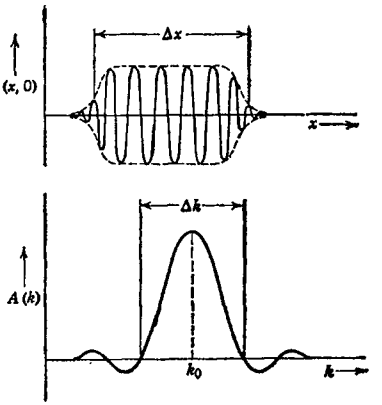


图 7.12 有限广延的谐波列及其波数的傅里叶谱.

下一个问题是脉冲或有限波列随时间变化的情况. 图 7.12 所表示的 $t=0$ 时的脉冲将随着时间的消逝而开始运动. 其中不同频率或不同波数的分量以不同相速度运动. 因而就有失去其原来的相干性和发生脉冲畸变的趋势. 我们至少可以预料到, 脉冲传播的速度与其分量波的平均相速度有所不同. 强色散媒质或波数展宽很大的高锐度脉冲的一般情况是很难处理的. 但是, 对于波数谱不太宽的脉冲或在频率与波数的关系不太大的媒质中的脉冲来说, 它们的传播可以按下述近似方法处理. 在时间 t 的波是由(7.80)给出. 如果分布 $A(k)$ 是以某值 k_0 为中心的相当尖锐的峰形曲线, 那末可以把频率 $\omega(k)$ 绕这一 k_0 值展开:

$$\omega(k)=\omega_0+\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_0(k-k_0)+\cdots \qquad (7.83)$$

并完成积分. 于是

$$u(x,t)\simeq\frac{e^{i[k_0(d\omega/dk)'_0-\omega_0]t}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A(k)e^{i[x-(d\omega/dk)|_0t]k}dk \tag{7.84}$$

由 (7.81) 及其反演式可知, (7.84) 中的积分正是 $u(x',0)$, 其中 $x'=x-(d\omega/dk)|_0 t$:

$$u(x,t)\simeq u\left(x-\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_0 t,0\right)e^{i[k_0(d\omega/dk)|_0-\omega_0]t} \tag{7.85}$$

上式表明,如果不考虑总位相因数,那末整个脉冲以所谓群速度

$$v_g=\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_0 \tag{7.86}$$

行进,而且其形状不发生畸变. 如果把能量密度同波的量值(或其绝对值平方)联系起来,显而易见,在这种近似下,能量以群速度传递,因为群速度是整个脉冲行进的速度.

对于光波, ω 和 k 的关系由下式给出:

$$\omega(k)=\frac{ck}{n(k)} \tag{7.87}$$

式中 c 为真空中的光速, $n(k)$是用 k 的函数表示的折射率. 相速度为

$$v_p=\frac{\omega(k)}{k}=\frac{c}{n(k)} \tag{7.88}$$

v_p 大于 c 还是小于 c, 取决于 $n(k)$ 小于 1 还是大于 1. 几乎在一切物质中,大多数光波长的 $n(k)$大于 1. 群速度(7.86)是

$$v_g=\frac{c}{[n(\omega)+\omega(dn/d\omega)]} \tag{7.89}$$

在这个方程中, 把 n 当作 ω 的函数比当作 k 的函数更为方便. 对正常色散来说, $(dn/d\omega)>0$, 又 $n>1$; 这时能流速度小于相速度,并且也小于 c. 但是,在反常色散区域中, $dn/d\omega$ 可以变得很大,而且为负值,正像由图 7.8 所推断的一样. 这时群速度和相速度大不相同, 群速度往往变得大于 c①. 在反常色散区域附近,群速度和相速度作为频率函数

① 不要认为我们的狭义相对论概念在这里遭到破坏而惊慌失措; 群速度在这里不再是一个有意义的概念. 大的 $dn/d\omega$ 值相当于 ω(是 k 的函数)发生了很快的变化. 因此, 在(7.83)以下所做的近似不再有效. 这时就要牵涉到更多的脉冲行为.

的变化情况如图 7.13 所示.

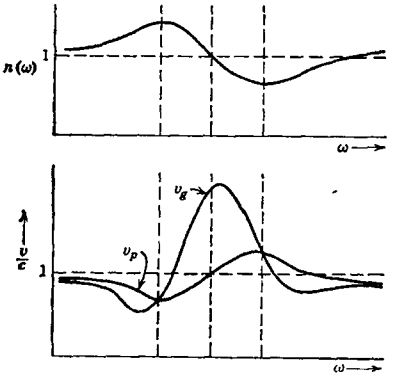


图 7.13 在反常色散区域中折射率$n(\omega)$作为频率ω的函数；相速度v_p和群速度v_g作为ω的函数.

7.9 脉冲在色散媒质中传播时扩展的例证

为了说明上节的概念，并指出群速度概念的适用范围，我们现在考虑一种表示频率对波数依赖关系的特殊模型，并且精确地计算出脉冲在这种模型媒质中的传播. 在详细说明这种特殊模型以前，必须比推导(7.80)和(7.81)时更细致地指明初值问题. 正如在那里所指出的，要完全指明波动方程的初值问题，既需要函数$u(x,0)$的初值，又需要时间导数$\partial u(x,0)/\partial t$的初值. 如果我们认为，取(7.80)的实部就得到$u(x,t)$，

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A(k)e^{ikx-i\omega(k)t}dk+\text{c.c.}^{①} \qquad (7.90)$$

那末容易证明，用初值表示时，$A(k)$由下式给出：

$$A(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}\left[u(x,0)+\frac{i}{\omega(k)}\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right]dx \qquad (7.91)$$

① c.c.是 complex conjugate(复共轭)的缩写. ——译者注

我们将取高斯调制振荡

$$u(x,0)=e^{-x^2/2L^2}\cos k_0 x \tag{7.92}$$

当作脉冲的初始形状. 为简单起见,我们将假定

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0 \tag{7.93}$$

这就是说,在 $t=0$ 前的瞬间,波是由两个脉冲组成的,这两个脉冲都向原点运动,在 $t=0$ 时两者合并而成(7.92)所给出的形状. 显然,在 $t=0$ 以后,我们希望每个脉冲重新在原点的另一侧出现. 因此,可以认为,初始分布(7.92)分成两个等同的波包,一个向左运动,一个向右运动. 由(7.92)和(7.93)所描述的脉冲的傅里叶振幅 $A(k)$为:

$$\begin{aligned}A(k)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}e^{-x^2/2L^2}\cos k_0 x\,dx\\&=\frac{L}{2}[e^{-(L^2/2)(k-k_0)^2}+e^{-(L^2/2)(k+k_0)^2}]\end{aligned} \tag{7.94}$$

正如在下文中将看到的,对称性 $A(-k)=A(k)$反映了有两个背离原点而行进的脉冲存在.

为了计算 $t=0$ 以后的波的形式,我们必须给定 $\omega=\omega(k)$. 作为一个可以进行严格计算,并能显示色散效应本质的模型,我们假定

$$\omega(k)=\nu\left(1+\frac{a^2k^2}{2}\right) \tag{7.95}$$

式中 ν 为恒定频率,a 为恒定长度,这是典型波长,在这种波长下色散效应变得显著了. 方程(7.95)是稀薄等离子体色散方程(7.59)或(7.61)的一种近似. 因为脉冲(7.92)是波数为 $k=k_0$ 的调制波,上节的近似论证告诉我们,两个脉冲以群速度

$$v_g=\frac{d\omega}{dk}(k_0)=\nu a^2k_0 \tag{7.96}$$

行进,而且,倘若脉冲所占空间不太窄,则根本不会变形.

把波看作时间的函数,其确切特性是由(7.90)给出,其中 $A(k)$代

以(7.94):

$$u(x,t)=\frac{L}{2\sqrt{2\pi}}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}[e^{-(L^2/2)(k-k_0)^2}+e^{-(L^2/2)(k+k_0)^2}]e^{ikx-i\nu t[1+(a^2k^2/2)]}dk \tag{7.97}$$

把指数适当地配成平方，就可以算出积分．结果为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{\exp\left[-\dfrac{(x-\nu a^2k_0t)^2}{2L^2\left(1+\dfrac{ia^2\nu t}{L^2}\right)}\right]}{\left(1+\dfrac{ia^2\nu t}{L^2}\right)^{1/2}}\right.$$

$$\left.\times\exp\left[ik_0x-i\nu\left(1+\frac{a^2k_0^2}{2}\right)t\right]+(k_0\to-k_0)\right\} \tag{7.98}$$

方程(7.98)表示两个沿相反方向行进的脉冲．每个脉冲的峰值振幅以群速度(7.96)行进，而调制包络保持高斯曲线形状．可是，高斯曲线的宽度不是恒定的，而是随时间增加．包络的宽度为

$$L(t)=\left[L^2+\left(\frac{a^2\nu t}{L}\right)^2\right]^{1/2} \tag{7.99}$$

所以，脉冲的色散效应越大(对一给定的经历时间来说)，包络的锐度越大．小形变的判据是 $L\gg a$．当然，在长时间里，高斯曲线的宽度随时间线性地增加

$$L(t)\longrightarrow\frac{a^2\nu t}{L} \tag{7.100}$$

但是，达到这种渐近式的时间依赖于比值 (L/a)．把 (7.99) 给出的 $L(t)$同 $v_gt=\nu a^2k_0t$ 比较，就能量度脉冲扩展的快慢．图 7.14 画出两个实例的曲线，图中巅值振幅位置(v_gt)和位置 $v_gt\pm L(t)$ (后者表示脉冲的展宽)当作时间的函数．在左图中，脉冲比起波长 k_0^{-1} 来，不太窄，所以不是很快地扩展．可是，右图中的脉冲起初是很窄的，所以它

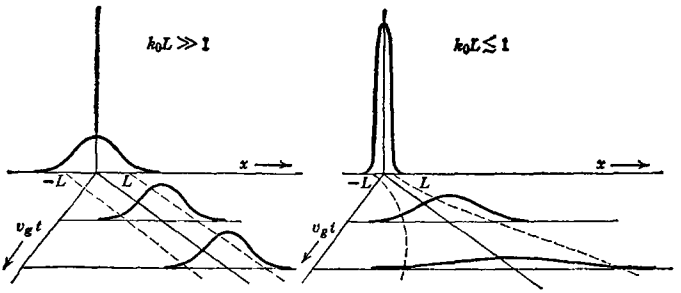


图 7.14　当波包行进时波包的形变．含有许多波长的宽波包($k_0L \gg 1$)，畸变较小，而窄波包($k_0L \lesssim 1$)很快地变宽．

很快地扩展，以致经一短暂时间后几乎不像一个脉冲了．

虽然，上述结果是针对特别选择的初始脉冲形状(7.92)和色散关系(7.95)推得的，但是，这些结果具有普遍性．在 7.8 节里我们已经看到，脉冲的平均速度等于群速度 $v_g = d\omega/dk = \omega'$．初始空间宽度为 Δx_0 的脉冲必须有一波数展宽 $\Delta k \sim (1/\Delta x_0)$，注意到这一点就可以计算脉冲的展宽．这就是说，当对脉冲内各种 k 值计算时，群速度在脉冲内的展宽约为

$$\Delta v_g \sim \omega'' \Delta k \sim \frac{\omega''}{\Delta x_0} \tag{7.101}$$

上式表明，在时间 t 内，位置的展宽约为 $\Delta v_g t$．如果我们采取求平方和再开方的方法，而把位置的两种测不准量合并在一起，就得到 t 时刻的宽度 $\Delta x(t)$ 为

$$\Delta x(t) \simeq \sqrt{(\Delta x_0)^2 + \left(\frac{\omega'' t}{\Delta x_0}\right)^2} \tag{7.102}$$

我们注意到，如果令 $\Delta x_0 = L$，则(7.102)与(7.99)完全一致．$\Delta x(t)$表式(7.102)告诉我们一个普遍结果：如果 $\omega'' \neq 0$，窄脉冲由于其波数谱很宽而迅速扩展，反之亦然．所有这些概念可以直接引用于波动力学．

它们成了海森伯测不准原理的根据．在波动力学中，频率等于能量除以普朗克常数，而波数等于动量除以普朗克常数．

在既有色散又有耗散的媒质中的波包问题是相当复杂的．其某些方面可以用解析函数来讨论，可是解析表达式不容易从物理上加以解释．波包在传播时有相当厉害的衰减和畸变．有关这个问题的讨论，读者可以参看 *Stratton* 书第 301—309 页，书中有大量的例题．

7.10 D和E的关系中的因果性；克喇末-克朗尼格关系

(*a*) 时间的非局域性

由 $\epsilon(\omega)$ 对频率的依赖关系得到的另一个结果是电位移矢量 $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ 和电场强度 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ 间的时间非局域关系．如果频率 ω 的单色分量有如下关系：

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, \omega) = \epsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) \tag{7.103}$$

则其对时间的依赖关系可以通过傅里叶叠加来建立．把空间坐标当作参数，对时间和对频率的傅里叶积分可以写为

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

和

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t')e^{i\omega t'}dt' \tag{7.104}$$

以及 $\mathbf{E}$ 的两个对应的方程．将其中的 $\mathbf{D}(\mathbf{x}, \omega)$ 用(7.103)来代替，得

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

我们现在把 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)$ 的傅里叶表式代入积分中而得

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\epsilon(\omega)e^{-i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega t'}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t')$$

假定积分次序可以交换，上式可以写为

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)\mathbf{E}(\mathbf{x}, t-\tau)d\tau \tag{7.105}$$

式中 $G(\tau)$是 $4\pi\chi_e=\epsilon(\omega)-1$ 的傅里叶变换:

$$G(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\epsilon(\omega)-1]e^{-i\omega\tau}d\omega \tag{7.106}$$

方程(7.105)和(7.106)给出**D**和**E**的非局域关系，其中在 t 时刻的**D**跟 t 以外的其他时刻的电场强度有关①. 若对所有的 ω 来说，$\epsilon(\omega)$与 ω 无关，则由(7.106)得 $G(\tau)\propto\delta(\tau)$，并且得到瞬时关系，但若 $\epsilon(\omega)$随 ω 而变化，则对某些不等于零的 τ 值来说，$G(\tau)$不等于零.

(b) $G(\tau)$的简单模型；极限情形

为了说明(7.105)和(7.106)蕴含的关系的特征，我们讨论折射率(7.51)的单共振形式:

$$\epsilon(\omega)-1=\omega_p^2(\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega)^{-1} \tag{7.107}$$

此 $\epsilon(\omega)$模型的磁化率核 $G(\tau)$是

$$G(\tau)=\frac{\omega_p^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}d\omega \tag{7.108}$$

式中的积分可以用围道积分法算出. 被积函数在 ω 下半平面内有两个极点，即

$$\omega_{1,2}=-\frac{i\gamma}{2}\pm\nu_0,\quad \text{式中 } \nu_0^2=\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4} \tag{7.109}$$

当 $\tau<0$ 时，可以在上半平面内做闭合围道而不影响积分值. 因为被积函数在闭合围道内是正则函数，所以积分等于零. 当 $\tau>0$ 时，可以在下半平面内做闭合围道，给出积分为 $-2\pi i$ 乘两个极点的留数. 因此，核(7.108)为

$$G(\tau)=\omega_p^2e^{-\gamma\tau/2}\frac{\sin\nu_0\tau}{\nu_0}\theta(\tau) \tag{7.110}$$

---

① 方程(7.103)和(7.105)可以作为下述傅里叶积分褶合定理的一个例子来理解：若 $A(t),B(t),C(t)$和 $a(\omega),b(\omega),c(\omega)$ 是两组成对关系的函数，其中每一对函数存在着由傅里叶反演公式(7.104)给出的关系式，且

$$c(\omega)=a(\omega)b(\omega)$$

则在有关可积性的适当限制下，

$$C(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A(t')B(t-t')dt'$$

式中 $\theta(\tau)$为阶梯函数[当 $\tau<0$ 时，$\theta(\tau)=0$；当 $\tau>0$ 时，$\theta(\tau)=1$]．对介电常数(7.51)来说，核 $G(\tau)$恰是像(7.110)那样的各项的线性叠加．核 $G(\tau)$是以媒质的特征频率振荡的，且按电子振子的阻尼常数随时间减幅的．于是，$\mathbf{D}$和$\mathbf{E}$的关系的时间非局域性被限制在数量级为 γ^{-1} 的时间内．因为γ是谱线的频宽，其典型值为 10^7-10^9 秒$^{-1}$，所以跟同时性的偏差为10^{-7}-10^{-9}秒数量级．当频率高于微波段时，电场振荡的许多个周期对给定时刻的电位移矢量$\mathbf{D}$有一贡献，这个贡献为 $G(\tau)$的加权平均值．

方程(7.105)在时间上是非局域的，但在空间上则不然．只要外场空间变化的线度大于原子或分子极化产生区域的线度，上面这种近似是有效的．对束缚电荷来说，后一线度约等于或小于原子线度，所以我们可以预期：介电常数只是ω的函数这个概念，当频率高于可见波段时，是有效的．但是，对导体来说，由于具有宏观平均自由程的自由电荷的存在，使得在频率很低时不能假定 $\epsilon(\omega)$ 或 $\sigma(\omega)$ 是简单的．对像铜那样的良导体来说，我们已经看到：在室温下阻尼常数(相当于碰撞频率)约为 $\gamma_0\sim3\times10^{13}$ 秒$^{-1}$．在液氦温度下，阻尼常数可能是 10^{-3} 乘室温下的值．取氢中的玻尔速度 ($c/137$) 作为金属中电子速度的典型值，我们求得在液氦温度下平均自由程的数量级为 $L\sim c/(137\gamma_0)\sim10^{-2}$ 厘米．另一方面，通常的趋肤深度 δ(7.77) 在微波频率时可能很小，其数量级为 10^{-5} 或 10^{-6} 厘米．在这些情形下，欧姆定律必须用非局域表式代替．电导率变为依赖于波数 $\mathbf{k}$ 和频率 ω 的一个张量．所有这些与标准特性不同的有关性质就是大家熟知的反常趋肤效应．我们可以用这些性质来画出金属中的费密面①．在半导体中出现相似的非

① 参看 A. B. Pippard, *Reports on Progress in Physics* **33**, 176(1960)，以及 A. B. Pippard 所写的题为"The Dynamics of Conduction Electrons"的论文，这篇论文发表在 *Low-Temperature Physics, Les Houches* 1961, C. de Witt, B. Dreyfus 和 P. G. de Gennes 主编，Gorden and Breach, New York (1962)．后一论文已由同一出版社印成单行本发行．

局域效应，半导体的电磁性质涉及的相干长度约为 10^{-4} 厘米①. 以上简短地叙述了(7.105)的几种极限情形以及有效的推广范围，现在就回过来讨论(7.105)的物理内容.

(c) $\epsilon(\omega)$的因果性和解析性区域

核(7.110)的最明显和最基本的特性是当 $\tau<0$ 时它等于零. 这意味着：只有在 t 时刻之前的那些电场强度值参与确定 t 时刻的电位移矢量，这与我们在物理现象中的因果性的基本概念是一致的. 于是，方程(7.105)可以写成

$$\mathbf{D}(\mathbf{x},t)=\mathbf{E}(\mathbf{x},t)+\int_0^\infty G(\tau)\mathbf{E}(\mathbf{x},t-\tau)d\tau \tag{7.111}$$

实际上，上式就是对各向同性均匀媒质中的 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$，写出的最普遍的空间局域线性因果关系. 它的有效范围超过任何特定的$\epsilon(\omega)$模型. 由(7.106)，我们可以用 $G(\tau)$把介电常数表示为

$$\epsilon(\omega)=1+\int_0^\infty G(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau \tag{7.112}$$

这个关系有几个有趣的结果. 由于 $\mathbf{D},\mathbf{E}$ 为实函数，因而(7.111)中的 $G(\tau)$也为实函数，我们可以从(7.112)推断：当 ω 为复数时，

$$\epsilon(-\omega)=\epsilon^*(\omega^*) \tag{7.113}$$

并且，如果我们把(7.112)看作 $\epsilon(\omega)$在复 ω 平面内的一种表式，那末(7.112)表明：只要对所有的 τ 来说 $G(\tau)$是有限的，则$\epsilon(\omega)$是上半平面内 ω 的一个解析函数. 在实轴上，必须引用“物理上合理的”必要条件，即当 $\tau\to\infty$ 时 $G(\tau)\to 0$，以确保 $\epsilon(\omega)$ 在那里也是解析的. 对电介质来说，这是成立的，但对导体来说则不然，在导体中当 $\tau\to\infty$ 时，$G(\tau)\to 4\pi\sigma$，且 $\epsilon(\omega)$在 $\omega=0$ 处有一个一阶极点(当 $\omega\to 0$ 时，$\epsilon\to i4\pi\sigma/\omega$). 于是，作为 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$ 的因果关系(7.111)的一个直接的结

① 例如，参看上面援引的 *Low Temperature Physics* 一书中 M. Tinkham 写的论文“Superconductivity”.

果是：当 $\mathrm{Im}\omega \geqslant 0$ 时，除了在 $\omega=0$ 处可能有一个极点外，介电常数是 ω 的解析函数．当然，对于 7.5节(*a*)和(*c*)段里讨论的那些模型来说，上述这些性质都可以予以证明．

我们可以找出 ω 很大时 $\epsilon(\omega)-1$ 的特性与时间很小时 $G(\tau)$的特性之间的关系．由(7.112)中 G 的泰勒级数展开导出如下渐近级数：

$$\epsilon(\omega)-1 \simeq \frac{iG(0)}{\omega}-\frac{G'(0)}{\omega^2}+\cdots$$

式中 G 及其导数的自变量是 $\tau=0^+$．$G(0^-)=0$ 而 $G(0^+)\neq 0$ 在物理上是不可能的．于是，级数的第一项等于零，并在高频时 $\epsilon(\omega)-1$ 按 ω^{-2} 下降，正如振子模型的(7.59)所得的一样．实际上，渐近级数表明：当实的 ω 很大时，$\epsilon(\omega)-1$ 的实部和虚部的渐近特性为

$$\mathrm{Re}[\epsilon(\omega)-1]=0\left(\frac{1}{\omega^2}\right), \qquad \mathrm{Im}\epsilon(\omega)=0\left(\frac{1}{\omega^3}\right) \tag{7.114}$$

这些渐近式仅仅取决于 $G(\tau)$是否可能围绕 $\tau=0^+$进行泰勒级数展开．

(*d*) *克喇末-克朗尼格关系*

$\epsilon(\omega)$在 ω 上半平面内的解析性，使我们可以利用科希定理求出实轴上 $\epsilon(\omega)$的实部和虚部之间的关系．对于 ω 上半平面的一闭合围道 C 内任意点 z，科希定理给出

$$\epsilon(z)=1+\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{[\epsilon(\omega')-1]}{\omega'-z}d\omega'$$

现在我们把围道 C 选为由实 ω 轴和上半平面内在无穷远处的一个大半圆所组成．根据刚才讨论的渐近展开式或 7.5 节(*d*)段的特殊结果，我们知道：$\epsilon-1$ 在无穷远处十分迅速地趋于零，所以大半圆对积分没有贡献．于是，科希积分可以写为

$$\epsilon(z)=1+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\epsilon(\omega')-1]}{\omega'-z}d\omega' \tag{7.115}$$

式中 z 现在是上半平面内任何一点，而积分是沿实轴计算的．考虑复频率自上趋于实轴这一极限情形，我们把(7.115)中的 z 写为 $z=\omega+i\epsilon$：

$$\epsilon(\omega)=1+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[\epsilon(\omega')-1]}{\omega'-\omega-i\epsilon}d\omega' \tag{7.116}$$

当 ω 为实数时，由于分母中出现 $i\epsilon$，要记住把沿实轴的围道形状稍加改变，即在点 $\omega'=\omega$ 下面作一个无限小半圆回线．分母在形式上可以写为

$$\frac{1}{\omega'-\omega-i\epsilon}=P\left(\frac{1}{\omega'-\omega}\right)+\pi i\delta(\omega'-\omega) \tag{7.117}$$

式中 P 意指主部．δ函数用来分出在围道中途、绕 $\omega'=\omega$ 处的极点、按正向、沿小半圆算出的贡献．利用(7.117)，那末(7.116)经简单整理后就变成

$$\epsilon(\omega)=1+\frac{1}{\pi i}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[\epsilon(\omega')-1]}{\omega'-\omega}d\omega' \tag{7.118}$$

这个方程的实部和虚部如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\epsilon(\omega)&=1+\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\epsilon(\omega')}{\omega'-\omega}d\omega'\\ \mathrm{Im}\epsilon(\omega)&=-\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[\mathrm{Re}\epsilon(\omega')-1]}{\omega'-\omega}d\omega'\end{aligned} \tag{7.119}$$

这些关系式，或后面紧接着阐述的那些关系式，叫做克喇末-克朗尼格关系或色散关系．最早是由克喇末(1927 年)和克朗尼格(1926 年)各自独立地导出的．对称性质(7.113)表明，$\mathrm{Re}\epsilon(\omega)$是 ω 的偶函数，而 $\mathrm{Im}\epsilon(\omega)$是 ω 的奇函数．因而 (7.119) 中的积分可以换成只对正频率计算的积分：

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\epsilon(\omega)&=1+\frac{2}{\pi}P\int_{0}^{\infty}\frac{\omega'\mathrm{Im}\epsilon(\omega')}{\omega'^2-\omega^2}d\omega'\\ \mathrm{Im}\epsilon(\omega)&=-\frac{2\omega}{\pi}P\int_{0}^{\infty}\frac{[\mathrm{Re}\epsilon(\omega')-1]}{\omega'^2-\omega^2}d\omega'\end{aligned} \tag{7.120}$$

在写出(7.119)和(7.120)时，我们不言而喻地假定了：$\epsilon(\omega)$在 $\omega=0$ 处是正则函数．对导体来说，$\omega=0$ 处的一阶极点可以用稍复杂的形式单独地表示出来．

在极化和电场的因果关系(7.111)这个假定之外再作一些别的假

定，就使克喇末-克朗尼格关系具有非常普遍的有效性．从研究吸收得到的 $\mathrm{Im}\epsilon(\omega)$ 经验数据，可以用来由(7.120)的第一个方程计算 $\mathrm{Re}\epsilon(\omega)$．这些关系中包含了图 7.8 所示的吸收和反常色散的关系．在 $\omega=\omega_0$ 处出现非常窄的吸收线或吸收带时，就可以用下式近似地描写：

$$\mathrm{Im}\epsilon(\omega')\simeq\frac{\pi K}{2\omega_0}\delta(\omega'-\omega_0)+\cdots$$

式中 K 是常数，后面的几个圆点表示对 $\mathrm{Im}\epsilon$ 的其它(光滑变化的)贡献．这时，(7.120)的第一个方程变为

$$\mathrm{Re}\epsilon(\omega)\simeq\bar{\epsilon}+\frac{K}{\omega_0^2-\omega^2} \tag{7.121}$$

上式表示频率接近于但不严格等于 $\omega=\omega_0$ 时 $\mathrm{Re}\epsilon(\omega)$ 的特性．$\bar{\epsilon}$ 项代表 $\mathrm{Re}\epsilon$ 的慢变化部分，这是由对 $\mathrm{Im}\epsilon$ 的较细微贡献产生的。近似表式(7.121)显示了在一条吸收线附近(如图 7.8 所示有限宽度的吸收线)$\mathrm{Re}\epsilon(\omega)$ 的快速变化．要是对 $\mathrm{Im}\epsilon$ 采用更具体的描述，就会得到与图 7.8 所示特性完全一致的 $\mathrm{Re}\epsilon$ 表式．有关的证明留作本章末的习题．

联系一个过程的色散和吸收特性的普遍关系式(7.119)或(7.120)，在物理学所有领域内是极其有用的．它们之所以有广泛的应用，是由于在推导它们时只需用到很少几条物理上有根据的假设．本章末给出了把它们应用到基本粒子物理学及固态物理学中的有关参考文献．我们最后叙述由(7.120)可得的两条求和法则．在特殊模型的内容中，我们在 7.5 节(*d*)段里证明了，高频时的介电常数由(7.59)给出．实际上，如同(*c*)段末指出的，(7.59)的形式是十分普遍的．因此，等离子体频率可以利用(7.59)定义如下：

$$\omega_p^2=\lim_{\omega\to\infty}\{\omega^2[1-\epsilon(\omega)]\}$$

倘若高频时 $\mathrm{Im}\epsilon(\omega)$ 的下降由(7.114)给出，则第一个克喇末-克朗尼格关系给出一条对 ω_p^2 的求和法则：

$$\omega_p^2=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\omega\mathrm{Im}\epsilon(\omega)d\omega \tag{7.122}$$

大家知道，这个关系式有时当作振子强度的求和法则．可以证明，对介电常数(7.51)来说，(7.122)与(7.52)等效，但是(7.122)显然是更普遍的．

第二个求和法则与 $\epsilon(\omega)$ 实部的积分有关，它是从(7.120)第二个关系式导出的．假定对所有 $\omega'>N$ 来说，$[\mathrm{Re}\epsilon(\omega')-1]=-\omega_p^2/\omega'^2+0(1/\omega'^4)$，则直接可以证明：当 $\omega>N$ 时，

$$\mathrm{Im}\epsilon(\omega)=\frac{2}{\pi\omega}\left\{-\frac{\omega_p^2}{N}+\int_0^N[\mathrm{Re}\epsilon(\omega')-1]d\omega'\right\}+0\left(\frac{1}{\omega^3}\right)$$

(c)段里已经证明：除了导体以及 $G(0^+)\neq 0$ 的物理上不会发生的事件外，$\mathrm{Im}\epsilon(\omega)$ 在高频时按 ω^{-3} 而变化．由此可知，大括号里的表式必等于零．这样我们就导出第二条求和法则：

$$\frac{1}{N}\int_0^N \mathrm{Re}\epsilon(\omega)d\omega=1+\frac{\omega_p^2}{N^2} \tag{7.123}$$

当 $N\to\infty$ 时，上式叙述如下：$\mathrm{Re}\epsilon(\omega)$ 对所有频率的平均值等于 1．对导体来说，等离子体频率求和法则(7.122)依然成立，但是第二条求和法则(有时叫做超收敛性关系)的右边有一附加项 $-2\pi^2\sigma(0)/N$(参看习题 7.15)．阿尔泰里(Altarelli)等写的论文，讨论了这些光学求和法则及其它几条法则①．

7.11 信号通过色散媒质的传播过程

前几节已经研究了一些色散效应．还留下一个重要课题有待研究，即开始有完全确定起点的波列在到达遥远点时的实际情况．信号是如何建立的？如果主要频率分量的相速或群速大于真空中的光速，那末信号的传播速度能比因果性和相对论所允许的速度快吗？是否能赋于扰动到达时间以明确的定义呢？1914 年索末菲和布里渊在《物理

① M. Altarelli, D. L. Dexter, H. M. Nussenzveig 和 D. Y. Smith, *Phys. Rev.* **B6**, 4502(1972)．

学年鉴《*Annalen der Physik*》上发表的论文中对这些问题作了权威性的研究①. 原始论文加上布里渊以后做的工作，统统包括在布里渊著作的英译本 *Wave Propagation and Group Velocity* 中. 索末菲所著 *Optics* 一书第三章里给出了较简短的叙述. 完整的讨论是冗长的，而且在数学上是复杂的. 我们只作定性而重点的论述. 读者可以在援引的文献中查阅更详细的论述.

为明确起见，我们考虑一个平面波列，它从真空垂直地投射到填满 $x>0$ 区域的、折射率为 $n(\omega)$ 的、半无限均匀媒质上. 由菲涅耳方程 (7.42)及习题 7.12，当 $x>0$ 时波的电场振幅由下式给出：

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{2}{1+n(\omega)}\right]A(\omega)e^{i[k(\omega)x-\omega t]}d\omega \qquad (7.124)$$

式中

$$A(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u_i(0,t)e^{i\omega t}dt \qquad (7.125)$$

这是刚好在媒质外 $x=0^-$ 处计算的实入射电场 $u_i(x,t)$ 的傅里叶变换. 波数 $k(\omega)$ 为

$$k(\omega)=\frac{\omega}{c}n(\omega) \qquad (7.126)$$

一般地说，它是复数，其正的虚部相当于传播时能量的吸收. 有许多媒质是足够透明的，使得在大多数情况下可以把波数当作实函数，可是总还有些阻尼存在. [顺便说一下，我们知道，在(7.124)中，频率(不是波数）是作为独立变数用的. 由于现在强调的是在空间一给定点上波随时间的发展，势必要改变前面 7.8 和 7.9 节的做法.]

(*a*) $A(\omega)$的一般性质

为了讨论传播的通性，我们必须知道把 $A(\omega)$当作复 ω 的函数时它所具有的一些性质. 假设入射波有完全确定的前沿，当 $t=0$ 时这前

① A. Sommerfeld, *Ann. Phys.* 44, 177(1914). L. Brillouin, *Ann. Phys.* 44, 203 (1914).

沿到达 $x=0$. 那末下式成立:

$$u_i(0,t)=0, \qquad \text{当} t<0 \text{时} \tag{7.127}$$

为了确保 $A(\omega)$在 ω 上半平面内是解析函数，上面这个条件连同物理上合理的某些数学要求，既是必要的又是充分的. 其论证完全相似于前述的一个证明，即：表式(7.112)意指 $\epsilon(\omega)$是 ω 上半平面内的解析函数. 在 ω 下半平面内，$A(\omega)$将有奇点，这些奇点由 $u_i(0,t)$的确切形式所决定. 当$|\omega|\to\infty$时 $A(\omega)$的特性取决于 $u_i(0,t)$在很短时间内的变化. 例如，若

$$u_i(0,t)\to\frac{at^m}{m!}, \qquad \text{当 } t\to 0 \text{ 时}$$

则

$$A(\omega)\to\frac{a}{2\pi}\left(\frac{i}{\omega}\right)^{m+1}, \qquad \text{当}|\omega|\to\infty\text{时} \tag{7.128}$$

(b) 在复 ω 平面内 $n(\omega)$的一般性质

传播的特性显然与折射率 $n(\omega)$有关，要得详细的结果就需要指明一个确定的模型. 但是，有些特性从 $n(\omega)$的一般性质—$n(\omega)$的解析域和当$|\omega|\to\infty$时 $n(\omega)$的变化特性—可以推知. 为简单起见，我们讨论 7.5 节里叙述的 $n^2(\omega)$的简单经典模型，并且只有一个共振频率. 于是介电常数 $\epsilon(\omega)=n^2(\omega)$具有以下形式:

$$n^2(\omega)=1+\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma} \tag{7.129}$$

式中 ω_0为共振频率，γ 为阻尼常数($\gamma\geqslant 0$)，而 ω_p 为媒质的等离子体频率(7.60). 定出 $n^2(\omega)$在 ω 平面内的极点和零点的位置，就能确定 $n(\omega)$的奇异性结构. $n^2(\omega)$的零点给出如下:

$$\omega_a=\omega_1-\frac{i\gamma}{2},\ \omega_b=-\omega_1-\frac{i\gamma}{2},\ \text{式中}\ \omega_1^2=\omega_0^2+\omega_p^2-\frac{\gamma^2}{4}$$

$n^2(\omega)$的极点位于

$$\omega_c=\omega_2-\frac{i\gamma}{2},\ \omega_d=-\omega_2-\frac{i\gamma}{2},\ \text{式中}\ \omega_2^2=\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}$$

于是折射率可以写成

$$n(\omega)=\left[\frac{(\omega-\omega_a)(\omega-\omega_b)}{(\omega-\omega_c)(\omega-\omega_d)}\right]^{1/2} \tag{7.130}$$

平方根的分支是这样规定的，使得当$|\omega|\to\infty$时，$n(\omega)\to+1$；分支切割如图 7.15所示．我们看到，折射率和波数$k(\omega)$在ω上半平面内是解析的①．

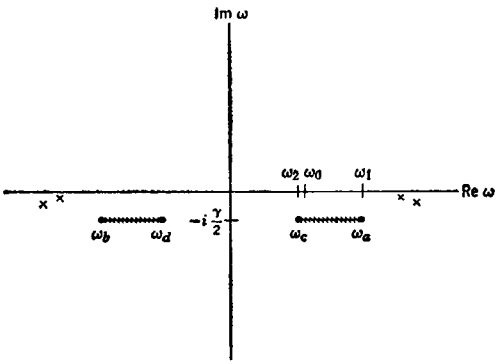


图 7.15　分支切割确定(7.129)的折射率$n(\omega)$的单一共振模型的奇点．对于透明媒质，分支切割的位置比图上所示的更靠近实轴（但仍在实轴下方）．更实际的$n(\omega)$模型具有更复杂的切割构造，所有切割都在ω下半平面内．叉号表示$A(\omega)$的奇点的可能位置．

从(7.129)看出，高频时折射率趋于

$$n(\omega)\to 1-\frac{\omega_p^2}{2\omega^2},\qquad \text{当}|\omega|\to\infty\text{时} \tag{7.131}$$

正如与(7.59)有关的讨论所指出的，这个结果有效范围远远超出本模型．

(c) 物质中光传播速率的上限

现在直截了当证明：不管媒质具体性质如何，信号的传播不能快于真空中的光速．我们用围道积分法从数学上算出振幅(7.124)．因为

① 分支切割是这样选取的，使得在实轴上 Re $n(\omega)>0$．要注意：$n(\omega)$和$\epsilon(\omega)$满足克喇末-克朗尼格关系(7.120)．

当$|\omega|\to\infty$时$n(\omega)\to 1$，所以当ω很大时(7.124)中指数的自变量变为$i\omega(x-ct)/c$，当$x>ct$时可以在上半平面内使围道闭合，当$x<ct$时，可以在下半平面内做闭合围道．由于$n(\omega)$和$A(\omega)$在ω上半平面内是解析的，因而(7.124)中整个被积函数在ω上半平面内也是解析的，科希定理表明这积分等于零．这样我们就证明了：倘若当$\mathrm{Im}\omega>0$时$A(\omega)$和$n(\omega)$是解析的，且当$|\omega|\to\infty$时$n(\omega)\to 1$，则

$$u(x,t)=0, \qquad \text{当}(x-ct)>0\text{时} \tag{7.132}$$

这里没有考虑$n(\omega)$的特殊模型．方程(7.132)与(7.127)一起确立了这样结论：不管什么媒质，没有信号以大于c的速度传播．

(*d*) 稳相法

为了在因果性证明之上作进一步研究，必须有某种方法来估算$t>x/c$各时刻的振幅(7.124)．索末菲和布里渊用最陡下降法[①]来计算各种情形下(7.124)的值．我们将用比较不严密和比较不精确的稳相法，来获得定性的了解．在前面援引的书里，布里渊比较了这两种方法．

稳相法专门用于下列一般类型积分的近似计算问题：

$$I=\int F(\omega)e^{i\phi(\omega)}d\omega \tag{7.133}$$

式中$F(\omega)$是比较缓慢地随ω变化的函数，$\phi(\omega)$是位相，它通常很大且变化很快．$F(\omega)$和$\phi(\omega)$都可能依赖于那些在积分时保持不变的参数．$e^{i\phi}$在大部分积分区间上快速振荡，意味着被积函数的平均几乎等于零．只当$\phi(\omega)$是"稳定"时，即当$\phi(\omega)$有一极值时，才不发生被积函数的平均等于零的情况．该积分可以这样估算：求出$\phi(\omega)$的导数等于零的各点．近似计算每个点的邻域中之积分值，再把这些积分值求和．

① 有关这种方法的讨论，参看 *Jeffreys and Jeffreys* 书17.04节，或 *Born and Wolf* 书附录三．这方法最初是由德拜发展的．

令 $\phi(\omega)$在 $\omega=\omega_s$ 时一阶导数为零. 在这点的邻域中，$\phi(\omega)$可以按泰勒级数展开，

$$\phi(\omega)=\phi_s+\frac{1}{2}\phi_s''(\omega-\omega_s)^2+\cdots \tag{7.134}$$

这里下角标 s 用来表示在 $\omega=\omega_s$ 时算出的 ϕ 或其二阶导数. 因为 $F(\omega)$变化缓慢，这个稳相点对积分的贡献近似等于

$$I_s\simeq F(\omega_s)e^{i\phi_s}\int e^{(i/2)\phi_s''(\omega-\omega_s)^2}d\omega$$

留下来的这个积分可以认为是菲涅耳积分(参看 *Magnus and Oberhettinger* 书第 96 页). 结果为

$$I_s\simeq\left(\frac{2\pi i}{\phi_s''}\right)^{1/2}F(\omega_s)e^{i\phi(\omega_s)} \tag{7.135}$$

式中 ω_s 是这样确定的：在 $\omega=\omega_s$ 处，$(\partial\phi/\partial\omega)=0$. 如果在积分区间上有一个以上稳相点，则积分近似等于(7.135)那样诸项之和.

倘若 $\phi(\omega)$是实函数，稳相近似(7.135)就与最陡下降法的主要项一致. 但是，如果 $\phi(\omega)$是复函数，稳相法可能会得出错误的结果. 在我们现在讨论的问题中，ϕ 涉及折射率 $n(\omega)$，后者通常是复函数. 尽管如此，我们还将用稳相法来定性了解信号的传播过程. 布里渊更仔细的研究，为我们有点自夸的方法提供了归纳性的证明.

(e) 定性讨论

我们可以把振幅(7.124)看作具有(7.133)的形式，其中位相函数为

$$\phi(\omega)=k(\omega)x-\omega t \tag{7.136}$$

这时 $k(\omega)$由(7.126)给出. 由 $\partial\phi/\partial\omega=0$ 确定的稳相点满足下列条件：

$$\frac{cdk}{d\omega}=\frac{ct}{x},\qquad \text{当 } ct>x \text{ 时} \tag{7.137}$$

图 7.16 画出了在 $\gamma=0$ 的单一共振模型(7.129)时(7.137)左边对 ω 的函数关系曲线. (7.137)左边是 c/v_g，式中 v_g 为频率 ω 时的群速度.

当 $\gamma=0$ 时，除 $\omega_0<\omega<\sqrt{\omega_0^2+\omega_p^2}$（这时群速度为纯虚数）外，对所有 ω 来说，群速度都小于 c. 当 $\gamma\neq 0$ 时，如图 7.13 所示，这个区域内的特性更复杂了，但是我们不去考虑这区域内的复杂性. 在图 7.16 中也画出了 $ck/\omega=c/v_p$ 的曲线.

用图解法求出图 7.16 中的实曲线同纵坐标为 $(ct/x)>1$ 的水平线之交点，就能确定对 t 时刻的振幅有贡献的频率范围. 我们看到，当

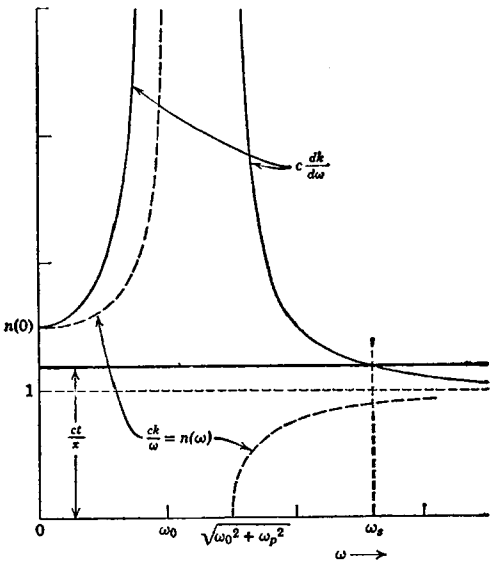


图 7.16　对折射率的无阻尼单一共振模型 (7.129) 画出的 $c\,dk/d\omega=c/v_g$ 和 $n(\omega)=ck/\omega=c/v_p$ 对频率的函数关系曲线. 远离共振时的特性在物理上是合理的，但在 $\omega_0<\omega<\sqrt{\omega_0^2+\omega_p^2}$ 区间（这是图 7.15 中 ω_2 和 ω_1 之间的区间）内没有物理意义. 水平线 (ct/x) 同实曲线 $c\,dk/d\omega$ 之交点给出稳相点. 因为所画的函数是 ω 的偶函数，所以对每个稳相点 $\omega=\omega_s$ 来说，在 $\omega=-\omega_s$ 处也有一个稳相点.

时间刚刚一过 $t_0=x/c$ 后，稳相点就在 $\omega\to\infty$ 处. 由描述 ω 很大时 $n(\omega)$ 特性的近似表式 (7.131)，我们求得稳相点

$$\omega_s \simeq \omega_p \sqrt{\frac{t_0}{2(t-t_0)}} \tag{7.138}$$

及其负值(理所当然的). 稳相近似式(7.135)给出

$$u(x,t) \simeq \frac{a}{2\pi}\left(\frac{\pi}{\xi}\right)^{1/2}\left(\frac{t-t_0}{\xi}\right)^{(n/2)-(1/4)} e^{-2i\sqrt{\xi(t-t_0)}+i(n/2)(m+1/2)} + \text{c.c.} \tag{7.139}$$

式中

$$\xi = \frac{\omega_p^2 x}{2c} = \frac{\omega_p^2 t_0}{2} \tag{7.140}$$

在写出(7.139)时,我们已经利用了 ω 很大时 $A(\omega)$ 的具体特性(7.128). 在叙述(f)段之前我们暂不对(7.139)作详细说明,在(f)段里要导出一个更精确的结果. 这里只要注意到以下事实就够了:初始振幅非常小,并以这样一个(通常是非常高的)频率振荡,这个频率只依赖于媒质的总体性质(ω_p)和行进的距离($x=ct_0$). 信号的这一部分叫做第一波锋或索末菲波锋,它是最早到达的.

在稍后时间里,即当图 7.16 中的水平线 ct/x 上升时,稳相点朝低频方向移动,并进入这样的区域,在这区域中为了准确描述振幅,必须考虑 $n(\omega)$ 的详细特性及其极点和分支切割的位置. 可是,一般来说振幅保持很小. 只当经过的时间达到

$$t_1 = k'(0)x = \frac{n(0)x}{c} \tag{7.141}$$

时,才有定性的改变. 这个时间标志第二波锋或布里渊波锋的到达. 从图 7.16 可以看出定性改变的道理. 当 $t=t_1$ 时,$dk/d\omega$ 曲线的较低段一开始就与水平线 $\frac{ct_1}{x}$ 相交,因而 $\omega=0$ 变成一个稳相点. 这就自然而然引起定性的改变,使得振幅振荡周期远大于较早时间的周期. 但是,最重要的性质是 $\omega=0$ 时 $k(\omega)$ 的二阶导数等于零①. 这意味着 $\phi_s''=0$.

① 对于更精巧的折射率模型,当 $\omega\neq 0$ 时,在稳相点处 $d^2k/d\omega^2$ 可以等于零. 为了处理这些情形,需要修改我们的讨论,但在此不再赘述. 我们在习题 7.17 中给读者以练习的机会.

在这些情况下，稳相结果(7.135)给出的答案为无穷大．当然，振幅不能是无穷大的，但可以设想振幅远大于以前的振幅，且在 $t\simeq t_1$ 时有比较长的周期．为了求得第二波锋的近似结果，只有二次展开式(7.134)是不够的．关于这一点我们简要地讨论如下．

在我们的简单模型里，第二波锋到达以后，就有两个稳相点，使得振幅变得更加复杂．更重要的事实是，$A(\omega)$开始对积分(7.124)的特性起主导作用．用稳相法就不适当了．信号到达后，振幅随时间的变化方式恰像以适当相速度传播的初始波，证明如下．

信号传播的定性特征现在是清楚的．波的很小一部分以真空中的光速而传播．这种初始信号（所谓第一波锋或索末菲波锋）是很小的，且快速地振荡．在稍后的时间 t_1(7.141)，当 $\omega\to 0$ 变成一个稳相点时，有一个突然的变化．第二波锋或布里渊波锋(具有较大振幅和较长周期)到达．在更后的一些时间[取决于 $n(\omega)$和入射波的详细情况]，信号具有预期的稳恒态特性．显然，精密地确定信号是一件复杂的事情，不管媒质详细的色散性质如何，要遵守因果性和相对论，而且我们不可能给信号的到达下一个明确的定义．通常的习惯是把主频率分量的群速度取作为信号速度和能量输运速度．在大多数情况下，这已足够，但用十分灵敏的检测器显然可以推出信号速度接近真空中的光速，并与媒质无关．

(*f*) 第一波锋

我们可以仿照索末菲，求得比(7.139)更准确的早期振幅表式．已经看到：当高频时，在 $t=t_0$ 以后不久诸时刻的振幅取决于(7.124)中被积函数的特性．于是把(7.124)中的积分路线，看成在 ω 上半平面内半径为 R 的大半圆似乎是可行的．在这条围道上，可以用 $A(\omega)$和 $n(\omega)$ 的主要特性把(7.124)写成下列近似形式：

$$u(x,t)\simeq\frac{ai^m}{2\pi i}\oint\frac{d\omega}{\omega^{m+1}}e^{-i[(t-t_0)\omega+t/\omega]} \tag{7.142}$$

式中围道取作按正向(逆时钟方向)绕半径为R的整个圆. 倘若$(t-t_0)>0$,我们看出,当R充分大时,把围道扩充成整个圆而附加的那部分是趋于零的. 变数换成$w=-i(t-t_0)\omega$, (7.142)就换成

$$u(x,t)\simeq\frac{a}{2\pi i}(t-t_0)^m\oint\frac{dw}{w^{m+1}}e^{w-[\xi(t-t_0)/w]}$$

如果m是整数, 则这积分可以看作是与贝塞耳函数的积分表示式成正比的. 该特殊函数的形式为

$$J_m(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^m\oint\frac{dw}{w^{m+1}}e^{w-(z^2/4w)} \tag{7.143}$$

式中围道是绕原点的. 因此,振幅(7.142)为

$$u(x,t)\simeq a\left(\frac{t-t_0}{\xi}\right)^{m/2}J_m[2\sqrt{\xi(t-t_0)}] \tag{7.144}$$

倘若我们把贝塞耳函数的渐近式(3.91)代入(7.144),再把这表式同稳相法的近似表式(7.139)比较, 可以看出两者是一致的. 方程(7.144)给出一种直到$t=t_0$时仍有效的描述. 稳相法在非常接近$t=t_0$时失效,这是因为稳相点移向无穷远,因而由(7.133)出发的推导不再有效.

在详细考察第一波锋的特性之前,我们要讲一下为什么(7.144)只不过是近似的.读者可以如此地坚信柯希定理,以致认为没有作过什么近似.我们所做的只不过把围道弄弯,并在相应于该围道的范围内考虑被积函数!可是毛病就在这里.当$(t-t_0)$很大或半径R很大时,(7.142)中的指数变得非常大. 这意味着$A(\omega)$和$n(\omega)$中的非主要项所作出的贡献不能忽略不计. 例如, (7.128)中$u_i(0,t)$展开式的第二项可以按t^{m+1}那样变化. 这将对$A(\omega)$贡献按$(1/\omega)^{m+2}$方式变化的一个项, 并导致像(7.144)那样的一项,其中m用$m+1$代替. 显然, (7.144)描写的振幅只不过在$(t-t_0)$远小于入射波中的主周期时才有效.

正如已经指出的,第一波锋很小, 且很快地振荡着, 其频率只跟媒质的总体性质和行进距离有关, 跟入射波的频率完全无关. 由于贝塞耳函数的平方根自变量, 第一波锋的振荡频率随时间而减少. 如果用

贝塞耳函数相邻零点间的半周期来定义局部频率 $\omega_1(t)$，则得 $\omega_1(t)\simeq\sqrt{\xi/(t-t_0)}$，其初值为 $\omega_1(0)\simeq\xi$. 振幅随时间很慢地增加，当 $m=1$ 时，振幅按 $(t-t_0)^{1/4}$ 而增加. (7.140)所给的频率参数 ξ 依赖于媒质的等离子体频率. 如果假定每个原子里的所有电子都有贡献，则等离子体频率的平方为

$$\omega_p^2=\frac{4\pi NZe^2}{m}$$

式中Z为原子序数，N为每单位体积所含的原子数. 用密度ρ(克/厘米³)、原子序数 Z 和原子量 A 来表示，

$$\omega_p=4.38\sqrt{\frac{Z\rho}{A}}\times10^{16}\text{ 秒}^{-1}$$

或

$$\hbar\omega_p=28.8\sqrt{\frac{Z\rho}{A}}\quad\text{电子伏}$$

一些代表性的值如下：

标准温度压力下的空气，$\omega_p\simeq1.1\times10^{15}$ 秒$^{-1}$($\hbar\omega_p\simeq0.73$ 电子伏)

石墨，$\omega_p\simeq3.9\times10^{16}$ 秒$^{-1}$($\hbar\omega_p\simeq25.0$ 电子伏)

水，$\omega_p\simeq3.3\times10^{16}$ 秒$^{-1}$($\hbar\omega_p\simeq21.0$ 电子伏)

取典型值为 $\omega_p\simeq10^{16}$ 秒$^{-1}$，距离为 1 毫米(相当于可见光的 2000 个波长)，则 ξ 的数量级为 $\xi\simeq1.7\times10^{20}$ 秒$^{-1}$. 与这个值相当的波长为 10^{-9} 厘米，等于原子线度的十分之一. 因为我们的论述是基于把媒质作为连续区域来描写的，所以不可能预期(7.144)中所含的快速振荡函数在定量上是可靠的. 随着时间的推移，频率按平方根方式降低. 不管频率按这方式如何降低，至少就我们的例子来说，显然可知：只要入射波波长在光波段中或大于光波时，在入射波一个周期的任一相当部分经过之前，就有第一波锋的很多周出现.

(g) 第二波锋

当时间推移到 t_1(7.141)附近时，就出现第二波锋或布里渊波锋.

如同图 7.16 可见，在稳相法中，当时间为 t_1 时，积分的主要贡献来自 $\omega=0$ 附近①. 因为 $\omega=0$ 是这样一点，在该点上 ϕ'' 和 ϕ' 都等于零，所以(7.135)这简单结果是不适用的. 为了改进这结果，我们将 $\phi(\omega)$ (7.136)围绕 $\omega=0$ 展开至 ω^3 项：

$$\phi(\omega)\simeq\omega(t_1-t)+\frac{x}{6}\left(\frac{d^3k}{d\omega^3}\right)_0\omega^3 \tag{7.145}$$

对简单的折射率模型(7.129)来说，$k(\omega)$的三阶导数为

$$\left(\frac{d^3k}{d\omega^3}\right)_0=\frac{3\omega_p^2}{cn(0)\omega_0^4}$$

因此，振幅(7.124)由下式近似给出：

$$u(x,t)\simeq\frac{2A(0)}{1+n(0)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(t_1-t)+i(x/6)(d^3k/d\omega^3)_0\omega^3}d\omega$$

通过换变数，上式可以写成

$$u(x,t)\simeq\frac{4A(0)}{1+n(0)}\left[\frac{3z}{x\left(\frac{d^3k}{d\omega^3}\right)_0}\right]^{1/3}\int_0^{\infty}\cos\left[\frac{3}{2}z\left(\frac{v^3}{3}\pm v\right)\right]dv \tag{7.146}$$

式中

$$z=\frac{2\sqrt{2}\,|t-t_1|^{3/2}}{3\left(x\frac{d^3k}{d\omega^3}\right)^{1/2}} \tag{7.147}$$

被积函数中的正负号是这样取的：当 $t<t_1$ 时取正号，当 $t>t_1$ 时取负号. (7.146)中的积分是爱里积分，爱里(1838 年)研究焦散(对虹霓有关)邻域中光的强度时，首先考虑了这种积分. 它可以用 1/3 阶贝塞耳函数来表示：

$$\int_0^{\infty}\cos\left[\frac{3}{2}z\left(\frac{v^3}{3}\pm v\right)\right]dv=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{3}}K_{1/3}(z)\\[2ex]\dfrac{\pi}{3}[J_{1/3}(z)+J_{-1/3}(z)]\end{cases} \tag{7.148}$$

① 在 ω_0 之上也有一个稳相点，但来自这个区域的贡献远远小于来自 $\omega\simeq0$ 的，且可以忽略不计.

由(7.148)中贝塞耳函数的性质可以看出，当时间早于 $t=t_1$[(t_1-t)增加]时，第二波锋具有随时间按指数衰减的特性，且当$(t-t_1)$为正时，第二波锋具有振荡的特性①. 图 7.17 中画出了在 $t=t_1$ 附近时的振幅. 其特性相似于经典的运动转向点附近的量子力学波函数. 实际上，即使物理内容是不同的，但在数学上是根本相同的.

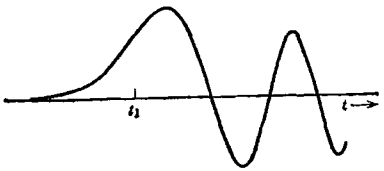


图 7.17 第二波锋或布里渊波锋作为时间函数的近似特性曲线. 振幅由(7.146)给出. 来自图 7.16 中 $\omega>\sqrt{\omega_0^2+\omega_p^2}$ 处稳相点的可忽略不计的贡献，将在本图所示的爱里积分特性曲线上迭加一个高频涟波.

由 $t>t_1$ 时振幅的第一个零点位置可以估算第二波锋的起始频率为 $\omega_{\text{II}}(0)\sim\pi(9xk''')^{-1/3}$. 利用单一共振模型，令 $\omega_0\simeq\omega_p\simeq10^{16}$ 秒$^{-1}$ 和 $x=1$ 毫米，我们求得 $\omega_{\text{II}}(0)\sim10^{14}$ 秒$^{-1}$. 这个值是非常粗略的，而且也只适用于所选的模型和参数的，可是它说明了第二波锋的频率远远低于第一波锋. 因为第一和第二波锋的频率对距离的依赖关系分别为 x 和 $x^{-1/3}$，所以在媒质中行进距离很大时，定性差别就增大了.

(h) 稳恒态信号

在两个波锋到达后，振幅最后进入与入射波直接相关的稳恒态. 为

① 特殊结果(7.146)和(7.148)依存于 $A(0)\neq0$. 若 $A(0)=0$，则这两表式须详细修改，但从定性上看是相同的. 具体地说，如果 $A'(0)\neq0$，那末(7.146)中 $A(0)$用 $iA'(0)$代替，因子$(3z/xk''')$的幂提升为$\frac{2}{3}$而不是$\frac{1}{3}$，积分用下式代替:

$$\int_0^\infty v\sin\left[\frac{3}{2}z\left(\frac{v^3}{3}\pm v\right)\right]dv=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{3}}K_{2/3}(z)\\ \frac{\pi}{3}[J_{-2/3}(z)-J_{2/3}(z)]\end{cases}$$

这振幅在 $t=t_1$ 两边的特性同图 7.17 所示的相似.

了了解这种状态如何发生，考虑图 7.15 所示的奇异性结构，并想像(7.124)中的积分路线被改变，使得它绕过 $A(\omega)$的诸奇点(图 7.15 中叉号所在处)和 $n(\omega)$的诸分支切割．(7.124) 中的被积函数包含一个因子 $e^{i\omega(t-t_0)}$．于是，由围绕 $n(\omega)$的分支切割的围道积分所贡献的诸项将包含一个因子

$$e^{-(\nu/2)(t-t_0)}$$

如果 $A(\omega)$的奇点全都比 $n(\omega)$的分支切割更接近实轴(相当于一个或一个以上的近单色入射波)，则 $A(\omega)$的奇点最后将比 $n(\omega)$的分支切割对积分起着更主导的作用．因而振幅将由只绕过 $A(\omega)$的奇点的围道积分准确地给出．

例如，我们考虑一个下列形式的入射波：

$$u_i(0,t)=\theta(t)e^{-\epsilon t}\sin(\beta-\nu t) \tag{7.149}$$

式中 $\theta(t)$是阶梯函数，β 和 ν 为常数，ϵ 假定是无穷小量．该入射波的傅里叶变换(7.125)是

$$A(\omega)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{i\beta}}{\omega-\nu+i\epsilon}-\frac{e^{-i\beta}}{\omega+\nu+i\epsilon}\right) \tag{7.150}$$

其一阶极点在 $\omega=\pm\nu-i\epsilon$ 处．这两个极点对积分(7.124)的贡献给出振幅

$$u(x,t)=\frac{e^{i[k(\nu)x-\nu t+\beta-(\pi/2)]}}{1+n(\nu)}+\text{c.c.} \tag{7.151}$$

这个波相当于频率为 ν 的单色入射波，其振幅在媒质界面处因折射而减小，接着以相速度 $v_p=\nu/k(\nu)$传播．如果发生吸收，则根据 $n(\nu)$的复杂性质，波行进时其振幅减小．

(i) 两种波锋的实验观测

对于正弦入射波和 $\epsilon(\omega)$单一共振模型(当阻尼很小时)的典型情况，有人已经用准确的数值计算验证了第一波锋 (7.144) 和第二波锋 (7.146)的近似结果以及主信号的到达[①]．在早期，初始信号由素末非

① R. N. Cahn, 私人通信.

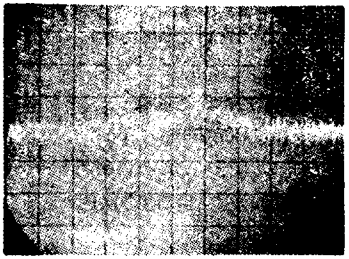
的贝塞耳函数近似(7.144)相当精确地给出. 振幅很小,频率较高. 在时刻 t_1(7.141)到达的布里渊波锋具有 (7.146) 形式, 但正如预期的, 迭加了一个高频涟波. 入射信号(即有点类似于 $x=0$ 处的波形)在 $t=x/v_g$(式中 v_g 是与入射频率有关的群速度)时开始辨别出来, 随后就可以完全看见了.

更有趣的是普莱什柯(pleshko)和帕洛兹 (palócz) 报道的有关索末菲波锋和布里渊波锋的实验观测①. 填满纵向磁化铁磁材料的一条同轴传输线,对其横向电磁波模来说,有一种色散特性, 几乎跟图 7.16 所示的相同,只要把"真空"光速 c 标成 $c'=c/\sqrt{\epsilon_r}$, ϵ_r 为没有磁化时的电常数. 用内磁场 H_i 和饱和磁化强度 M_s 来表示,给出共振频率和等离子体频率为 $\omega_0^2=\gamma^2(H_i+4\pi M_s)H_i$ 和 $\omega_p^2=(4\pi M_s/H_i)\omega_0^2$, 式中 γ 为回磁比. 这样就可以用外磁场的变化来改变系统的色散性质. 所用的材料是掺铝的钇石榴石. 在一系列实验中,入射波是用频率 $\nu/2\pi$[用 (7.149) 的记号]为 0.625 千兆赫、上升时间近似为 1 毫微秒的正弦波列. 对三种不同的外磁场得到的结果如图 7.18 所示. 在 20 高斯时, 频率 ν 位于 ω_0 和 $\sqrt{\omega_0^2+\omega_p^2}$ 之间, 因此主信号不传播. 但是索末菲波锋和布里渊波锋在图 7.18a 中是可见的. 在 100 高斯时, 主信号仍不传播;情况是这样的:当第一波锋在噪声中消失时,第二波锋清楚可见, 并满意地看到它相似于图 7.17 的波形. 在误差范围内到达时间与时间 t_1 是一致的. 在 200 高斯时, $\omega_0\simeq\omega_p$, 外加频率 ν 位于 ω_0 之下. 在图 7.18c 中,布里渊波锋可见,紧接着就是传播的主信号.

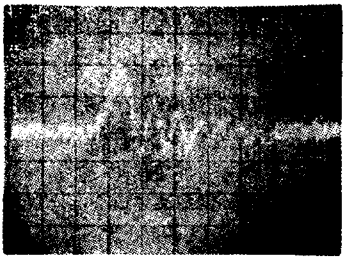
对"信号在色散媒质中的传播"的索末菲-布里渊处理方法的基本依据发生怀疑,是有道理的. 但是感到满足的是,已经从实验上证实这些近似解法(稳相法或最陡下降法)具有主要的物理和数学内容. 把这

---

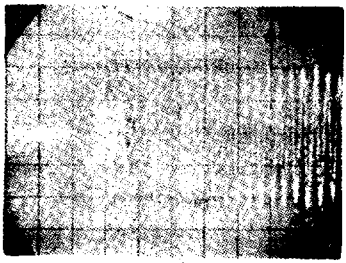
① P. Pleshko and I. Palócz, *Phys. Rev. Letters* **22**, 1201(1969); IBM Research Division report RC 2488(May 27, 1969).



20 高斯
(a)



100 高斯
(b)



200 高斯
(c)

图 7.18　色散媒质中索末菲波锋和布里渊波锋的实验结果．上升时间很短的一个正弦信号被加到一条填满石榴石的同轴传输线，后者的色散相似于图 7.16．频率 ω_0 和 ω_p 取决于外磁场．(a)第一波锋和第二波锋可见，但正弦信号切断．(b)第二波锋(比较图 7.17)，主信号仍切断．(c)第二波锋，后继以传播的信号．(图由普莱什柯和帕洛兹提供的．)

理论应用到"哨声"[它们有特殊的色散特性(图 7.10)]的到达过程，留作习题．

参考书和推荐读物

把光学的全部内容，当作电磁现象来处理的权威性著作有：

Born and Wolf.

该书第一章讨论平面波、偏振、反射和折射，以及其它课题．该书和下列一书对斯托克斯参数都进行了讨论：

Stone.

对入射到电介质和导体边界上的平面波作非常完善讨论的有：

Stratton，第九章.

对各向同性媒质和各向异性媒质中的电磁波作完善论述的有：

Landau and Lifshitz, Electrodynamics of Continuous Media [中译本：朗道、李弗希茨著，周奇译，《连续媒质电动力学》]，第十章和第十一章.

比较初浅，但却清楚而全面地叙述了处理平面波及其性质的方法的有：

Alder, Chu and Fano，第七章和第八章.

电磁波在电离层中的传播这个课题，由于它在实用上很重要，所以有广博的文献. 下列著作中叙述了有关的物理和数学内容：

Budden, *Radio Waves in the Ionosphere*;

Budden, *Lectures on Magnetoionic Theory*;

Wait.

详尽地讨论哨声这个特殊课题的有：

R. A. Helliwell, *Whistlers and Related Ionospheric Phenomena*. Stanford University Press(1965).

光与物质的相互作用牵涉到的基本物理原理，在下列半普及性论文中可以找到概括的介绍：

V. F. Weisskopf, *Scientific American* **219**, 3, 60(September 1968).

详尽地讨论波在色散媒质中的传播的著作有：

Brillouin.

讨论脉冲在耗散材料中的畸变和衰减的有：

Stratton，第 301-309 页.

克喇末-克朗尼格关系以及它们的推广式已用于物理学的许多领域. 在下列著作中可以找到应用于高能物理的实例：

S. Gasiorowicz, *Elementary Particle Physics*, Wiley, New York(1965);

G. Kallen, *Elementary Particle Physics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts(1964);

G. R. Screaton 主编, *Dispersion Relations*(Scottish Universities' Summer School 1960), Oliver and Boyd, Edinburgh and London(1961).

下列一篇论文中讨论了固态物理学中的一些应用：

F. Stern, *Solid State Physics*, Vol. 15, F. Seitz and D. Turnbull

主编，Academic, New York(1963), 299—408 页.

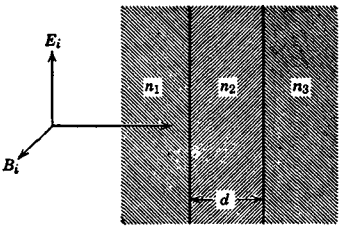
习　题

7.1 对下面所给的各组斯托克斯参数，推出在线偏振基和圆偏振基中电场的幅值和总位相，并且相似于图 7.4，准确绘出表示椭圆轴长及其取向的图.

(*a*) $s_0=3$, $s_1=-1$, $s_2=2$, $s_3=-2$;

(*b*) $s_0=25$, $s_1=0$, $s_2=24$, $s_3=7$.

7.2 有一平面波投射到层状分界面上，如下图所示. 三种非导磁媒质的折射率为 n_1、n_2 和 n_3. 中间一层的厚度为 d. 其它两种媒质为半无限的.



习题 7.2

(*a*) 计算透射系数和反射系数(透射和反射的坡印廷通量对入射通量之比)，并画出当 $n_1=1$, $n_2=2$, $n_3=3$; $n_1=3$, $n_2=2$, $n_3=1$ 和 $n_1=2$, $n_2=4$, $n_3=1$ 时这些系数与频率的函数关系图.

(*b*) 设 n_1 媒质是光学系统的一部分(例如：一个透镜)，n_3 媒质是空气($n_3=1$)若希望在表面上涂以光敷层(n_2 媒质)，使得对频率 ω_0 不产生反射波，问敷层的厚度 d 和折射率 n_2 必须是多少？

7.3 两块半无限平板是用同一种各向同性均匀非导磁无损耗电介质做成的，其折射率为 n，平行地放置着，两板间的空隙($n=1$)宽度为 d. 频率为 ω 的平面电磁波，从其中一板以入射角 i 投射到空隙上. 试就平行于入射面与垂直于入射面这两种线偏振波，

(*a*) 计算透射到第二板中的功率与入射功率之比，以及反射功率与入射功率之比；

(*b*) 试就 i 大于全内反射的临界角的情况，画出透射功率与入射功率之比对 d 的函数关系曲线，d 用空隙中波长为量度单位.

7.4 自由空间中频率为 ω 的平面偏振电磁波，正入射到电导率为 σ、介电常数为 ϵ 的非导磁媒质的平坦表面上.

(*a*) 试就任意的 σ 和 ϵ，计算反射波与入射波的相对振幅和位相差.

(*b*) 试就极劣导体和极良导体两种极限情形加以讨论，并证明：对于良导体，反射系数(反射强度与入射强度之比)近似地为

$$R\simeq 1-2\frac{\omega}{c}\delta$$

式中 δ 为趋肤深度.

7.5 平面偏振电磁波 $\mathbf{E}=\mathbf{E}_i e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t}$ 正入射到用优良导体($\sigma\gg\omega$)做成的厚度为 D 的均匀平片上. 假定空间和导电片的 $\mu=\epsilon=1$. 试讨论入射波的反射和透射.

(*a*) 证明:反射波与透射波的振幅(准确到 $(\omega/\sigma)^{\frac{1}{2}}$ 的第一次项)为:

$$\frac{E_r}{E_i}=\frac{-(1-e^{-2\lambda})}{(1-e^{-2\lambda})+\gamma(1+e^{-2\lambda})}$$

$$\frac{E_t}{E_i}=\frac{2\gamma e^{-\lambda}}{(1-e^{-2\lambda})+\gamma(1+e^{-2\lambda})}$$

式中

$$\gamma=\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}}(1-i)=\frac{\omega\delta}{c}(1-i)$$

$$\lambda=(1-i)D/\delta$$

而 $\delta=c/\sqrt{2\pi\omega\sigma}$ 为趋肤深度.

(*b*) 证明:当厚度为零和厚度为无穷大时,你将得到应有的极限结果.

(*c*) 证明:除厚度非常小的薄片外,透射系数为

$$T=\frac{8(\mathrm{Re}\gamma)^2e^{-2D/\delta}}{1-2e^{-2D/\delta}\cos(2D/\delta)+e^{-4D/\delta}}$$

假定 $\mathrm{Re}\gamma=10^{-2}$,画出 $\log T$ 与 (D/δ) 的函数关系图. 规定"非常小的厚度"的定义.

7.6 频率为 ω 的平面波从真空正入射到一块由复折射率为 $n(\omega)$[$n^2(\omega)=\epsilon(\omega)$]的材料做成的半无限平板上.

(*a*) 证明:反射功率与入射功率之比为

$$R=\left|\frac{1-n(\omega)}{1+n(\omega)}\right|^2$$

而透射到媒质内的功率与入射功率之比为

$$T=\frac{4\mathrm{Re}\,n(\omega)}{|1+n(\omega)|^2}$$

(*b*) 计算作为 (x,y,z) 的一个函数的 $\mathrm{Re}[i\omega(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}^*-\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}^*)/8\pi]$. 证明:用这个每单位体积能量变化率可以解释相对透射功率 T.

(*c*) 对于 $n^2=1+i(4\pi\sigma/\omega)$、$\sigma$ 为实数的导体,写出 $\omega\ll\sigma$ 这一极限情形下(*a*)和(*b*)的结果. 尽可能把你的结果用 δ 来表示. 计算 $\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{J}^*\cdot\mathbf{E})$,并同(*b*)的

结果比较．这两个结果是坡印廷定理的复数形式中的组成部分吗？

7.7 良导体中电扰动与时间的依赖关系遵从电导率与频率的依赖关系(7.58)．试用欧姆定律、连续性方程和库仑定律的微分形式讨论导体中的纵向电场．

(*a*) 证明：时间傅里叶变换的电荷密度满足方程

$$[4\pi\sigma(\omega)-i\omega]\rho(\mathbf{x},\omega)=0$$

(*b*) 利用表式 $\sigma(\omega)=\sigma_0/(1-i\omega\tau)$[式中 $\sigma_0=\omega_p^2\tau/4\pi$，$\tau$ 为阻尼时间]证明：在 $\omega_p\tau\gg1$ 的近似下，任何初始扰动将以等离子体频率振荡，且振幅按阻尼常数 $\lambda=1/2\tau$ 衰减。要注意：如果在(*a*)中你用 $\sigma(\omega)\simeq\sigma(0)=\sigma_0$，那末你将发现不产生振荡，且按(错误的)衰减常数 $\lambda_w=4\pi\sigma_0$ 极其快速地阻尼了．

[W. M. Saslow and G. Wilkinson, *Am. J. Phys.* **39**, 1244(1971).]

7.8 电离层的一种仿效模型是由介电常数(7.59)描写的一种媒质．考虑地球在高度 h 突然开始有这样一种媒质并延伸至无穷远．对于垂直于入射面(从一个水平天线发射的)和在入射面内(从一个垂直天线发射的)偏振的电磁波，

(*a*) 根据反射和折射的费涅耳方程，证明：当 $\omega>\omega_p$ 时，入射角有一段范围，在这段范围内，反射不是全反射，但当入射角超过这段范围时，就全部反射回地球．

(*b*) 无线电爱好者在傍晚用21米波长工作时，发现能收到1000公里以远的电台，但不能收到较近的电台．假定信号从有效高度为300公里处电离层的 F 层被反射回来，试计算电子密度．同已知的 F 层最大和最小电子密度作一比较，已知 F 层最大电子密度约为 2×10^6 厘米$^{-3}$(在白昼)，F 层最小电子密度约为 $(2\text{-}4)\times10^5$ 厘米$^{-3}$(在夜晚)．

7.9 无线电波在地球大气层或电离层中传播的一个简单模型是由 $z=0$ 处的平坦地球和 $z>0$ 处 $\epsilon=\epsilon(z)$ 的非均匀媒质组成的．假定场与 y 无关，并可写为 z 乘 $e^{i(kx-\omega t)}$ 的函数，试考虑麦克斯韦方程组．

(*a*) 证明：当 $z>0$ 时波的传播方程为

$$\frac{d^2F}{dz^2}+q^2(z)F=0$$

式中对于水平偏振，

$$q^2(z)=\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(z)-k^2$$

和 $F=E_y$，而对于垂直偏振，

$$q^2(z)=\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(z)+\frac{1}{2\epsilon}\frac{d^2\epsilon}{dz^2}-\frac{3}{4\epsilon^2}\left(\frac{d\epsilon}{dz}\right)^2-k^2$$

和 $F=\sqrt{\epsilon}E_z$.

(*b*) 用 WKB 近似处理波在与电离层垂直的方向上($k=0$)的传播，假定介电常数由(7.59)给出，其中等离子体频率 $\omega_p(z)$取决于像图 7.11 所示的电子密度. 证明：7.6 节里的定性论证保持有效，只有当 $\omega\sim\omega_{p,\text{最大}}$ 时才在细节上有偏差.

(*c*) 利用(*b*)的 WKB 结果以及 7.8 节里脉冲传播的概念，通过计算主频率为 ω 的脉冲朝上行进和反射回来所需的时间 T，确定电离层的有效高度 $h'(\omega)$ ($h'\equiv cT/2$). [在大多数量子力学书里都对 WKB 近似进行了讨论.]

7.10 平面波在非导磁各向异性均匀电介质中传播. 用张量 ϵ_{ij} 表征电介质，但若把坐标轴选作主轴，则沿诸主轴的电位移矢量的分量与电场强度的分量的关系是 $D_i=\epsilon_iE_i(i=1,2,3)$，式中 ϵ_i 为矩阵 ϵ_{ij} 的本征值.

(*a*) 证明：频率为 ω、波矢为 $\mathbf{k}$ 的平面波一定满足

$$\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{E})+\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{D}=0$$

(*b*) 证明：对于一个给定的波矢 $\mathbf{k}=k\mathbf{n}$，有两种不同的传播方式，它们具有不同的相速度 $v=\omega/k$，相速度满足费涅耳方程

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{n_i^2}{v^2-v_i^2}=0$$

式中 $v_i=\dfrac{c}{\sqrt{\epsilon_i}}$叫做主速度，$n_i$ 是 $\mathbf{n}$ 沿第 i 个主轴的分量.

(*c*) 证明：$\mathbf{D}_a\cdot\mathbf{D}_b=0$，式中 $\mathbf{D}_a$，$\mathbf{D}_b$ 是属于上述两种传播方式的电磁波的电位移矢量.

7.11 一维近单色平面波包的瞬时形式为 $u(x,0)=f(x)e^{ik_0x}$，式中 $f(x)$ 为调制包络. 试就下列 $f(x)$ 的各种形式计算波包的波数谱 $|A(k)|^2$，作 $|u(x,0)|^2$和 $|A(k)|^2$的略图，直接算出相对于平均值的方均根偏差 Δx 和 Δk(根据强度 $|u(x,0)|^2$和 $|A(k)|^2$确定的)，并检验不等式(7.82).

(*a*) $f(x)=Ne^{-a|x|/2}$

(*b*) $f(x)=Ne^{-\alpha^2x^2/4}$

(*c*) $f(x)=\begin{cases}N(1-a|x|) & \text{当 } a|x|<1 \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } a|x|>1 \text{ 时}\end{cases}$

(*d*) $f(x)=\begin{cases}N & \text{当 } |x|<a \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } |x|>a \text{ 时}\end{cases}$

7.12 用折射率 $n(\omega)$ 表示各向同性非导磁均匀电介质的特性，为了描写吸收过程，一般说来，$n(\omega)$ 是复数.

(*a*) 证明：一维平面波的通解可以写为

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega e^{-i\omega t}[A(\omega)e^{i(\omega/c)n(\omega)x}+B(\omega)e^{-i(\omega/c)n(\omega)x}]$$

式中 $u(x,t)$ 是 **E** 或 **B** 的分量.

(*b*) 若 $u(x,t)$ 是实数，试证明 $n(-\omega)=n^*(\omega)$.

(*c*) 证明：若 $u(0,t)$ 和 $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}$ 是 u 及其导数在 $x=0$ 的边界值，则系数 $A(\omega)$ 与 $B(\omega)$ 为

$$\begin{Bmatrix}A(\omega)\\B(\omega)\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dte^{i\omega t}\left[u(0,t)\mp\frac{ic}{\omega n(\omega)}\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)\right]$$

7.13 考虑 **D** 和 **E** 的(时间)非局域关系

$$\mathbf{D}(\mathbf{x},t)=\mathbf{E}(\mathbf{x},t)+\int d\tau G(\tau)\mathbf{E}(\mathbf{x},t-\tau)$$

其中 $G(\tau)$ 是对单一共振模型

$$\epsilon(\omega)=1+\omega_p^2(\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega)^{-1}$$

适用的核.

(*a*) 通过把积分中的电场对 τ 按泰勒级数展开，试把 **D** 和 **E** 的非局域关系转换成含 **E** 对时间的导数的一个瞬时关系. 直接计算对 $G(\tau)$ 的积分，至少到含 $\dfrac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$ 的项.

(*b*) 证明(*a*)中所得的级数从形式上可以通过下法求得：把频率表征关系式 $\mathbf{D}(\mathbf{x},\omega)=\epsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{x},\omega)$ 变换成一个空时关系式：

$$\mathbf{D}(\mathbf{x},t)=\epsilon\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$$

式中 $\epsilon(\omega)$ 的变数 ω 换成了 $i\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)$.

7.14 利用克喇末-克朗尼格关系(7.120)计算 $\epsilon(\omega)$ 的实部，已知当 ω 为正时 $\epsilon(\omega)$ 的虚部为

(*a*) $\mathrm{Im}\,\epsilon=\lambda[\theta(\omega-\omega_1)-\theta(\omega-\omega_2)]$，$\omega_2>\omega_1>0$

(*b*) $$\mathrm{Im}\,\epsilon=\frac{\lambda\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}$$

在每一种情况下，画出 $\mathrm{Im}\,\epsilon(\omega)$ 和 $\mathrm{Re}\,\epsilon(\omega)$ (求得的结果)对 ω 的函数特性曲线.

把你的结果与图 7.8 中的曲线加以比较，并解释它们的异同点。

7.15 讨论适用于静电导率为 σ 的媒质的克喇末-克朗尼格关系 (7.120)的推广形式. 证明：(7.120)中的第一个方程不变，但第二个方程变成

$$\mathrm{Im}\epsilon(\omega)=\frac{4\pi\sigma}{\omega}-\frac{2\omega}{\pi}P\int_0^\infty\frac{[\mathrm{Re}\epsilon(\omega')-1]}{\omega'^2-\omega^2}d\omega'$$

[提示：把 $\epsilon(\omega)-\frac{4\pi\sigma i}{\omega}$ 考虑作 $\mathrm{Im}\,\omega\geqslant 0$ 时的解析函数.]

7.16 (*a*) 利用关系式(7.113)和 $\mathrm{Im}\,\omega\geqslant 0$ 时 $\epsilon(\omega)$ 的解析性，证明：倘若对实的正频率来说 $\mathrm{Im}\,\epsilon\geqslant 0$，则在正虚轴上 $\epsilon(\omega)$ 为实数，且当 $\omega\to i\infty$ 时，$\epsilon(\omega)$ 从原点开始单值地减少而趋于 1.

(*b*) 假定对于有限的实 ω 来说，只当 $\omega=0$ 时，$\mathrm{Im}\,\epsilon=0$，证明：在 ω 上半平面内 $\epsilon(\omega)$ 没有零点.

(*c*) 写出 $\frac{1}{\epsilon(\omega)}$ 的克喇末-克朗尼格关系，并导出与(7.122)相似的求和法则，但作为对 $\mathrm{Im}\left[\frac{1}{\epsilon(\omega)}\right]$ 的积分.

(*d*) 用 $\epsilon(\omega)$ 的单一共振模型(7.107)定出 $\mathrm{Im}\,\epsilon(\omega)$ 和 $\mathrm{Im}\left[\frac{1}{\epsilon(\omega)}\right]$，并直接证明满足(7.122)和(*c*)的求和法则.

7.17 方程 (7.67) 是电磁波沿场线通过均匀外磁场中的等离子体传播时折射率平方表式. 把它作为磁层中的传播模型，试考虑哨声信号的到达过程（实际上是 7.11 节的布里渊波锋以及随后到达的波).

(*a*) 假定 $\frac{\omega_p}{\omega_B}\geqslant 1$，对于正螺旋性波，仔细画出 $\frac{cdk}{d\omega}$ 略图，这里 $k=\frac{\omega n(\omega)}{c}$. 指出 $\frac{cdk}{d\omega}$ 为虚值的区间，但不要求在图中画出!

(*b*) 证明：倘若 $\frac{\omega_p}{\omega_B}\geqslant 1$，则在 $0<\omega<\omega_B$ 区间内，$\frac{cdk}{d\omega}$ 的最小值出现在 $\frac{\omega}{\omega_B}\simeq\frac{1}{4}$ 处. 求出当 ω 接近零时和 ω 接近 ω_B 时 $\frac{cdk}{d\omega}$ 的近似表式.

(*c*) 用稳相法和习题 7.12(*a*)的通解证明：哨声的到达是以作为时间函数的频率之升降来判别的，降频分量是哨声这名词的来源.

(*d*) (任选题) 考虑布里渊波锋的信号形式. 证明：它由一个调制波形组成，后者的包络具有爱里积分形状(布里渊发现的)，而其高频为 $\omega_0\simeq\frac{\omega_B}{4}$. 因而它发

展成为与(c)中两个频率合拍的一个信号.

7.18 一带电粒子(电荷为 Ze)以恒定速度 $\mathbf{v}$ 通过媒质运动，该媒质由介电函数 $\epsilon(\mathbf{q},\omega)$描写，或等效地由电导率函数 $\sigma(\mathbf{q},\omega)=\left(\frac{i\omega}{4\pi}\right)[1-\epsilon(\mathbf{q},\omega)]$ 描写. 在电场强度是电势的负梯度和电流流动服从欧姆定律 $\mathbf{J}(\mathbf{q},\omega)=\sigma(\mathbf{q},\omega)\mathbf{E}(\mathbf{q},\omega)$ 这种近似下，应用介电函数 $\epsilon(\mathbf{q},\omega)$ 计算运动粒子每单位时间的能量损失.

(a) 证明：在适当的归一化后，粒子电荷密度的傅里叶变换是

$$\rho(\mathbf{q},\omega)=\frac{Ze}{(2\pi)^3}\delta(\omega-\mathbf{q}\cdot\mathbf{v})$$

(b) 证明：静电势的傅里叶分量是

$$\phi(\mathbf{q},\omega)=\frac{4\pi}{q^2}\frac{\rho(\mathbf{q},\omega)}{\epsilon(\mathbf{q},\omega)}$$

(c) 由 $\frac{dW}{dt}=\int\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}d^3x$ 出发，证明：每单位时间能量损失可以写为

$$-\frac{dW}{dt}=\frac{Z^2e^2}{\pi^2}\int\frac{d^3q}{q^2}\int_0^\infty d\omega\omega\ \mathrm{Im}\left[\frac{1}{\epsilon(\mathbf{q},\omega)}\right]\delta(\omega-\mathbf{q}\cdot\mathbf{v})$$

[上式表明，$\mathrm{Im}[\epsilon(\mathbf{q},\omega)]^{-1}$ 与能量损失有关，通过研究薄箔中的特征能量损失，提供了有关固体的 $\epsilon(q,\omega)$ 的知识.]

7.19 真空中电磁场分布的角动量由下式给出：

$$\mathbf{L}=\frac{1}{4\pi c}\int d^3x\mathbf{x}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{B})$$

式中的积分是对全空间计算的.

(a) 对于过去一个有限时间产生(因此局限于空间的一个有限区域)的电磁场，证明：倘若借助于矢势 $\mathbf{A}$ 消去式中的磁场，则角动量可以写成下式：

$$\mathbf{L}=\frac{1}{4\pi c}\int d^3x\left[\mathbf{E}\times\mathbf{A}+\sum_{j=1}^{3}E_j(\mathbf{x}\times\nabla)A_j\right]$$

第一项有时被看作光子的“自旋”，第二项由于出现角动量算符 $\mathbf{L}_{算符}=-i(\mathbf{x}\times\nabla)$，有时被看作光子的“轨道”角动量.

(b) 用平面波讨论辐射规范中矢势的展开：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=\sum_\lambda\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}[\epsilon_\lambda(\mathbf{k})a_\lambda(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t}+\mathrm{c.c.}]$$

为方便起见，偏振矢量 $\epsilon_\lambda(\mathbf{k})$ 选为正负螺旋性矢量 $\epsilon_\pm=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\epsilon_1\pm i\epsilon_2)$，这里 ϵ_1 和

ϵ_2 是 x-y 平面内实正交矢量，这 x-y 平面的正法线方向就是 $\mathbf{k}$ 的方向。

证明：$\mathbf{L}$ 的第一(自旋)项对时间的平均可以写为

$$\mathbf{L}_{自旋}=\frac{1}{2\pi c}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\mathbf{k}[|a_+(\mathbf{k})|^2-|a_-(\mathbf{k})|^2]$$

从上式能证明“自旋”角动量这个术语是正确的吗？用 $\mathbf{A}$ 的平面波展开式计算场能并加以比较。

7.20 一个沿 z 方向运动的圆偏振平面波在 x 和 y 方向上占有一定的范围。假定振幅调制是缓慢变化的(波具有许多个波长的宽度)，证明：电场和磁场由下列表式近似给出：

$$\mathbf{E}(x,y,z,t)\simeq\left[E_0(x,y)\,(\mathbf{e}_1\pm i\mathbf{e}_2)+\frac{i}{k}\left(\frac{\partial E_0}{\partial x}\pm i\frac{\partial E_0}{\partial y}\right)\mathbf{e}_3\right]e^{ikz-i\omega t}$$

$$\mathbf{B}\simeq\mp i\sqrt{\mu\epsilon}\,\mathbf{E}$$

式中 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ 为 x,y,z 方向上的单位矢量。

7.21 对习题 7.20 的圆偏振波计算与传播方向平行的角动量分量对时间的平均值。证明：角动量的这个分量对波的能量之比为

$$\frac{L_z}{U}=\pm\omega^{-1}$$

应用辐射量子(光子)解释这个结果。证明：对柱对称有限平面波来说，角动量的横向分量等于零。

第八章　波导和谐振腔[①]

有金属边界存在时的电磁场，是一个具有实用价值的相当重要的题材．在波长的数量级为几米或更短一些的高频情况下，产生和发送电磁波的唯一实用的方法，是利用线度可以与有关波长相比的金属结构．我们在本章里先考虑在一个导体附近的场，并讨论场对表面的穿透以及伴随着的电阻损失．然后用相当普遍的观点讨论中空金属管导引的电磁波和谐振腔等问题，而且在讨论的过程中引进特殊例子来说明这些问题．用两种不同观点讨论波导中的衰减和谐振腔的Q值．其次把地球-电离层系统当作新奇的谐振腔来处理，接着简短地讨论电介质波导．我们还阐述波导中任意场的简正模展开，并应用到定域源产生的场．本章最后把简正模展开进一步应用到用变分法处理波导中障碍物问题．

---

① 本章里，加在方程编号上的星号，是代表这样的意思：只要把方程中用方括号括起来的第一个因子略去，就可以把该公式看成是米·千克·秒·安制里的公式．例如，(8.12)是

$$\frac{dP_{\text{损失}}}{da}=\left[\frac{1}{4\pi}\right]\frac{\mu_c\omega\delta}{4}|\mathbf{H}_n|^2$$

在米·千克·秒·安制里相应的方程就是

$$\frac{dP_{\text{损失}}}{da}=\frac{\mu_c\omega\delta}{4}|\mathbf{H}_n|^2$$

式中所有物理量都应该认为是用米·千克·秒·安单位制量度的量，它们的数值和量纲也许跟用高斯制量度的相应的量完全不同．

如果有星号而没有方括号，那末这一公式中所有物理量既可以看成是用高斯制量度的，又可以看成是用米·千克·秒·安制量度的．

把任何方程变换成在米·千克·秒·安制里的相应形式的一般法则，在附录的表三中给出．

8.1 导体表面和导体内的场

正如我们在 7.7 节末所提到的一样，波在两种导电媒质的分界面上的反射和折射问题是相当复杂的．不过，我们可以用近似方法得到这种现象的最重要和最有用的特性，如果其中一种媒质为良导体，这种近似方法就是有效的．而且，这种方法在它的有效范围内还可以用于比平面波入射更普遍的情形．

我们首先考虑一个单位法向矢量为 $\mathbf{n}$ 的曲面，其一边为理想导体，另一边为非导电媒质，$\mathbf{n}$ 是从理想导体指向非导电媒质．于是，正如静态情形一样，导体内没有电场．假定理想导体内的电荷如此自由，以致不论场变化得多么快，它们都立刻随着运动，而且总是产生合适的面电荷密度 Σ（我们这里用大写的 Σ，以免和电导率 σ 混淆）：

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}=[4\pi]\Sigma \tag{8.1}*$$

使得这理想导体内部的电场为零．同样，对于随时间变化的磁场来说，面电荷总是随着切向磁场而运动，并产生合适的面电流 $\mathbf{K}$：

$$\mathbf{n}\times\mathbf{H}=\left[\frac{4\pi}{c}\right]\mathbf{K} \tag{8.2}*$$

使得理想导体内部的磁场为零．另外两个边界条件，是关于法向的 $\mathbf{B}$ 和切向的 $\mathbf{E}$ 的：

$$\begin{aligned}\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}-\mathbf{B}_c)&=0\\ \mathbf{n}\times(\mathbf{E}-\mathbf{E}_c)&=0\end{aligned} \tag{8.3}*$$

式中的下角标 c 代表导体．我们从这些边界条件看出，在理想导体表面的紧外侧，只能存在法向的 $\mathbf{E}$ 和切向的 $\mathbf{H}$，并且这两个场在理想导体内陡然降为零．图 8.1 画出了这种情况的示意图．

对于一个非理想的良导体来说，在它表面附近的场的分布情况，必然和理想导体的情形近似相同．我们在 7.7 节里已经看到，导体内的场在一个称为趋肤深度的特征长度 δ 内指数地衰减．对于良导体和中

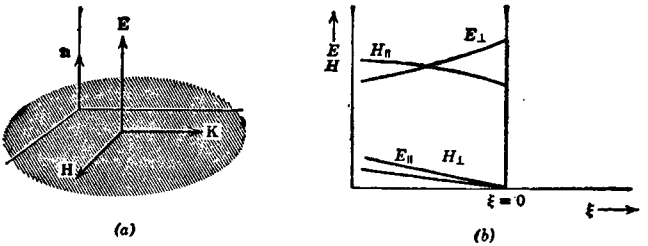


图 8.1　一个理想导体表面附近的场.

等频率，δ 等于若干分之一厘米. 所以，边界条件(8.1)和(8.2)对良导体是近似正确，只有表面上一层很薄的过渡层除外.

可是，如果要研究这一层薄薄的过渡区，必须小心谨慎. 首先，欧姆定律 $\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$ 表明，在电导率有限的情况下，不可能真有一个像(8.2)中所包含的表面电流层. 代替(8.2)的磁场边界条件的是

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}-\mathbf{H}_e)=0 \qquad (8.4)^*$$

为了探讨有限电导率(而不是无限电导率)所引起的变化，我们采用一种逐步近似法. 假定在导体的紧外侧只存在法向电场 $\mathbf{E}_{\perp}$ 和切向磁场 $\mathbf{H}_{\parallel}$，这与理想导体的情形一样. 并假定这些场的量值已从一个适当的边值问题的解得知. 然后用边界条件和导体内的麦克斯韦方程组，去求过渡层内的场以及外部场的小修正值. 在解导体内的麦克斯韦方程组时，我们利用这个事实：场在垂直于表面的方向上的空间变化比平行于表面的方向上的变化快得多. 这意味着：在和法向导数相比，我们可以忽略一切对平行于表面的坐标的导数.

如果表面外有切向的 $\mathbf{H}_{\parallel}$，那么边界条件(8.4)就意味着表面内有相同的 $\mathbf{H}_{\parallel}$. 略去导体内的位移电流后，麦克斯韦旋度方程变为

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_e &\simeq \frac{c}{4\pi\sigma}\nabla\times\mathbf{H}_e\\ \mathbf{H}_e &= -\frac{ic}{\mu\omega}\nabla\times\mathbf{E}_e\end{aligned} \qquad (8.5)$$

式中用了谐和变化 $e^{-i\omega t}$ 的假定. 如果 n 代表导体上向外的单位法向矢量，而 ξ 代表从导体向内的法向坐标，那么当我们将梯度算符作用于导体内的场，并略去其他的导数时，可以把这算符写成

$$\nabla \simeq -\mathbf{n}\frac{\partial}{\partial \xi}$$

作了这样近似后，(8.5)就变成：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_c &\simeq -\frac{c}{4\pi\sigma}\mathbf{n}\times\frac{\partial \mathbf{H}_c}{\partial \xi}\\ \mathbf{H}_c &\simeq \frac{ic}{\mu_c\omega}\mathbf{n}\times\frac{\partial \mathbf{E}_c}{\partial \xi}\end{aligned} \tag{8.6}$$

这两个方程合并起来就得到

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(\mathbf{n}\times\mathbf{H}_c)+\frac{2i}{\delta^2}(\mathbf{n}\times\mathbf{H}_c)\simeq 0 \tag{8.7}$$

和

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}_c \simeq 0$$

式中 δ 是以前定义的趋肤深度：

$$\delta=\left[\frac{c}{\sqrt{4\pi}}\right]\left(\frac{2}{\mu_c\omega\sigma}\right)^{1/2} \tag{8.8}*$$

(8.7)的第二个方程表明：在导体内，H 与表面平行，这和我们的边界条件相符. $\mathbf{H}_c$ 的解是

$$\mathbf{H}_c=\mathbf{H}_{\parallel}e^{-\xi/\delta}e^{i\xi/\delta} \tag{8.9}$$

式中 $\mathbf{H}_{\parallel}$ 是表面外侧的切向磁场. 按照 (8.6)，导体内的电场近似地等于

$$\mathbf{E}_c\simeq\sqrt{\frac{\mu_c\omega}{8\pi\sigma}}(1-i)(\mathbf{n}\times\mathbf{H}_{\parallel})e^{-\xi/\delta}e^{i\xi/\delta} \tag{8.10}$$

导体内的这些H和E的解，显示了 7.7 节里所讨论的那些属性：(*a*)按指数迅速衰减，(*b*)有位相差，(*c*)磁场比电场强得多. 此外，还表明，良

导体内的场和表面平行①，场的传播方向与表面垂直，场的量值只决定于表面紧外侧的切向磁场 $\mathbf{H}_{\parallel}$.

由切向 $\mathbf{E}$ 的边界条件(8.3)得知，在表面紧外侧存在一个由(8.10)给出(在 $\xi=0$ 时)的微小切向电场：

$$\mathbf{E}_{\parallel}\simeq\sqrt{\frac{\mu_c\omega}{8\pi\sigma}}(1-i)(\mathbf{n}\times\mathbf{H}_{\parallel}) \tag{8.11}$$

在这种近似下，在表面紧外侧还有 $\mathbf{B}$ 的一个微小的法向分量. 这可以从法拉第感应定律求得，所得的 $\mathbf{B}_{\perp}$ 和 $\mathbf{E}_{\parallel}$ 是同数量级. 图 8.2 示意地画出导体内外场的振幅.

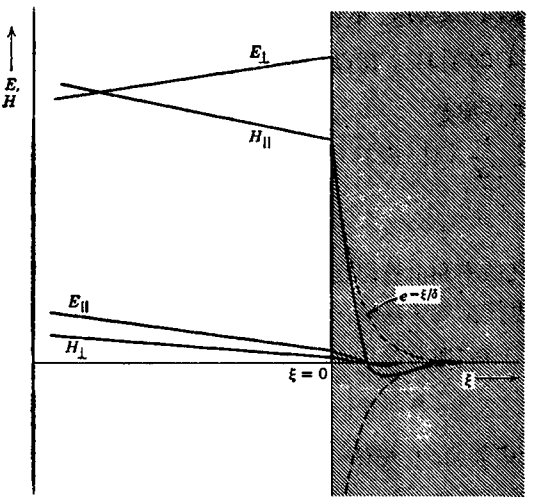


图 8.2　一个非理想的良导体表面附近的场. 当 $\xi>0$ 时，虚线表示 $\mathbf{H}_{\parallel}$ (8.9)的阻尼振荡的包络.

① 我们根据 $\mathbf{H}$ 的切向分量的连续性以及将表面任一侧的 $\mathbf{E}$ 和 $\nabla\times\mathbf{H}$ 连系起来的方程，可以证明导体中存在一个微小的法向分量的电场，$\mathbf{E}_n\cdot\mathbf{n}\simeq(i\omega\epsilon/4\pi\sigma)E_{\perp}$，但这个场比起(8.10)来是一个高一阶的微小量. 要注意：本节里我们的讨论预先假定 $\mathbf{H}$ 有一个切向分量. 在有些情况下，最低阶近似必须是静电的，本节的处理就不适用. 必须采用一些不同的近似方法. 参看 T. H. Boyer, *Phys. Rev.* **A 9**, 68(1974).

在表面外侧，除了法向的$\mathbf{E}$和切向的$\mathbf{H}$外，还有$\mathbf{E}$的一个微小的切向分量存在．这意味着有功率流入导体．每单位面积的吸收对时间平均的功率是

$$\frac{dP_{\text{损失}}}{da}=-\frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}[\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*]=\left[\frac{1}{4\pi}\right]\frac{\mu_c\omega\delta}{4}\left|\mathbf{H}_{\parallel}\right|^2 \quad (8.12)^*$$

可把这个结果简单地解释为导体内的欧姆损失．按照欧姆定律，在导体表面附近有电流密度$\mathbf{J}$：

$$\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}_c=\sqrt{\frac{\mu_c\omega\sigma}{8\pi}}(1-i)(\mathbf{n}\times\mathbf{H}_{\parallel})e^{-\xi(1-i)/\delta} \quad (8.13)$$

由欧姆损失而引起的每单位体积内能量耗散率的时间平均值是$\frac{1}{2}\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}^*=(1/2\sigma)|\mathbf{J}|^2$，所以，导体中在面积元$\Delta A$之下的一块体积内，总的能量耗散率是

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\sigma}\Delta A\int_0^{\infty}d\xi\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}^*&=\Delta A\frac{\mu_c\omega}{8\pi}|\mathbf{H}_{\parallel}|^2\int_0^{\infty}e^{-2\xi/\delta}d\xi\\&=\Delta A\frac{\mu_c\omega\delta}{16\pi}|\mathbf{H}_{\parallel}|^2\end{aligned}$$

这个能量耗散率和由坡印廷矢量给出的结果(8.12)相同．

由于电流密度$\mathbf{J}$局限在紧接导体表面下那样薄的一层里，所以它相当于一个有效面电流$\mathbf{K}_{\text{有效}}$：

$$\mathbf{K}_{\text{有效}}=\int_0^{\infty}\mathbf{J}d\xi=\left[\frac{c}{4\pi}\right]\mathbf{n}\times\mathbf{H}_{\parallel} \quad (8.14)^*$$

和(8.2)比较表明，良导体的特性实际上和理想导体一样，只是理想面电流换成了等效面电流，这等效面电流实际上分布在表面上有限的薄层内．功率损失可以用有效面电流来表示：

$$\frac{dP_{\text{损失}}}{da}=\frac{1}{2\sigma\delta}|\mathbf{K}_{\text{有效}}|^2 \quad (8.15)^*$$

这表明$1/\sigma\delta$起着导体的面电阻的作用①．只要我们解出电导率为无

① 连系$\mathbf{E}_{\parallel}$和$\mathbf{K}_{\text{有效}}$的比例系数叫做表面阻抗Z_s．对良导体来说，由(8.11)得知$Z_s=(1-i)/\sigma\delta$，但是表面阻抗概念的适用范围显然较广．

限的理想化问题的场，就可以用方程(8.14)和(8.15)给出的$\mathbf{K}_{有效}$近似地算出实用谐振腔、传输线和波导的电阻损失，用(8.12)也可以算出这些量值.

8.2 柱形空腔和波导

电磁波在中空的金属柱体内的传播或激发，是一种极为重要的实用情形. 如果柱体具有端面，就叫做空腔，否则就叫做波导. 在我们讨论这问题时，都假定柱体的边界面是理想导体. 在实际应用中发生的能量损失，可用 8.1 节的方法来估计. 图 8.3 表示一个具有一般截面

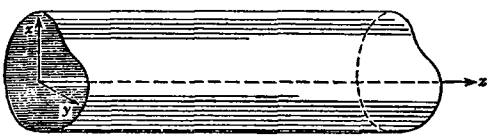


图 8.3 截面形状为任意的中空柱形波导.

的柱形曲面 S. 为简单起见，假定截面的形状和大小沿柱体轴不变. 当柱体内的场具有正弦式时间依赖关系 $e^{-i\omega t}$ 时，麦克斯韦方程组可化成如下形式:

$$\begin{aligned} \nabla\times\mathbf{E}&=i\frac{\omega}{c}\mathbf{B} \quad \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \\ \nabla\times\mathbf{B}&=-i\mu\epsilon\frac{\omega}{c}\mathbf{E} \quad \nabla\cdot\mathbf{E}=0 \end{aligned} \tag{8.16}$$

式中已假定柱体内充满介电常数为 ϵ、磁导率为 μ 的均匀的非耗散媒质. 由此推出 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 均满足:

$$\left(\nabla^2+\mu\epsilon\frac{\omega^2}{c^2}\right)\begin{Bmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{B}\end{Bmatrix}=0 \tag{8.17}$$

由于几何形状是圆柱形的，所以单挑出场在 z 方向的空间变化是有益的，并且假设

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{E}(x,y,z,t)\\ \mathbf{B}(x,y,z,t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{E}(x,y)e^{\pm ikz-i\omega t}\\ \mathbf{B}(x,y)e^{\pm ikz-i\omega t}\end{Bmatrix} \tag{8.18}$$

由适当的线性组合可以给出沿 z 方向的行波或驻波. 目前，波数 k 是一个未知参数，它可能是实数也可能是复数. 假定了场对 z 有上述依赖关系后，波动方程就简化为二维形式:

$$\left[\nabla_t^2+\left(\mu\epsilon\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)\right]\begin{Bmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{B}\end{Bmatrix}=0 \tag{8.19}$$

式中 ∇_t^2 是拉普拉斯算符的横向部分:

$$\nabla_t^2=\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{8.20}$$

把场分解为平行于 z 轴和垂直于 z 轴的分量是有益的:

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_z+\mathbf{E}_t \tag{8.21}$$

式中

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_z&=\mathbf{e}_3E_z\\ \mathbf{E}_t&=(\mathbf{e}_3\times\mathbf{E})\times\mathbf{e}_3\end{aligned} \tag{8.22}$$

而 $\mathbf{e}_3$ 为 z 方向上的单位矢量. 对磁场 $\mathbf{B}$ 也有类似的定义. 麦克斯韦方程(8.16)，可以用横向分量和平行分量写成

$$\frac{\partial\mathbf{E}_t}{\partial z}+i\frac{\omega}{c}\mathbf{e}_3\times\mathbf{B}_t=\nabla_tE_z,\quad \mathbf{e}_3\cdot(\nabla_t\times\mathbf{E}_t)=i\frac{\omega}{c}B_z \tag{8.23}$$

$$\frac{\partial\mathbf{B}_t}{\partial z}-i\mu\epsilon\frac{\omega}{c}\mathbf{e}_3\times\mathbf{E}_t=\nabla_tB_z,\quad \mathbf{e}_3\cdot(\nabla_t\times\mathbf{B}_t)=-i\mu\epsilon\frac{\omega}{c}E_z \tag{8.24}$$

$$\nabla_t\cdot\mathbf{E}_t=-\frac{\partial E_z}{\partial z},\qquad \nabla_t\cdot\mathbf{B}_t=-\frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{8.25}$$

由(8.23)和(8.24)中的第一个方程显而易见，如果 E_z 和 B_z 已知，并假定对 z 的依赖关系由(8.18)给出，则 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的横向分量就被确定.

在讨论中空柱体内可以存在的各种场之前，我们先说一说简并型或特殊型解，即所谓横电磁（TEM）波. 这种解只有垂直于传播方向的横场分量. 由 (8.23) 的第二个方程和 (8.25) 的第一个方程看出，$E_z=0$ 和 $B_z=0$ 意味着 $\mathbf{E}_t=\mathbf{E}_{\mathrm{TEM}}$，并满足

$$\nabla_t\times\mathbf{E}_{\mathrm{TEM}}=0,\qquad \nabla_t\cdot\mathbf{E}_{\mathrm{TEM}}=0 \tag{8.26}$$

这就是说 $\mathbf{E}_{\mathrm{TEM}}$ 是二维静电问题的一个解. 这里有三个主要结果. 第

一个结果是:轴向波数由无限媒质中的值给出,

$$k=k_0=\left[\frac{1}{c}\right]\omega\sqrt{\mu\epsilon} \tag{8.27}*$$

如同由(8.19)可以看出的一样. 第二个结果是: 由(8.24)的第一个方程推知,对于按 $e^{\pm ikz}$ 传播的波,磁场是

$$\mathbf{B}_{\mathrm{TEM}}=\pm\sqrt{\mu\epsilon}\,\mathbf{e}_3\times\mathbf{E}_{\mathrm{TEM}} \tag{8.28}$$

$\mathbf{B}_{\mathrm{TEM}}$ 和 $\mathbf{E}_{\mathrm{TEM}}$ 间的关系恰好与无限媒质中的平面波相同. 最后一个结果是: 电导率为无穷大的单个中空柱形导体内不可能存在 TEM 模. 表面是等势面; 所以内部电场等于零. 为了运载 TEM 模, 必须有两个或两个以上的圆柱面. 大家熟知的同轴电缆和平行导线传输线都是以 TEM 模为主的结构(参看习题 8.1 和 8.2). TEM 模的一个重要性质是不存在截止频率. 对所有 ω 来说, 波数(8.27)是实数. 但对中空柱体内出现的诸波模来说,情况不是这样(参看下文).

在中空柱体内(以及高频时的传输线上)出现两类场的构型. 考虑纵向分量 E_z 和 B_z 满足的波动方程(8.19), 以及它们所满足的边界条件, 就可以看出这两类场的构型的存在. 对于理想导电柱体, 边界条件是

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E}=0,\qquad \mathbf{n}\cdot\mathbf{B}=0$$

式中 $\mathbf{n}$ 是表面 S 上的单位法向矢量. 显然, E_z 的边界条件是

$$E_z|_S=0 \tag{8.29}$$

由(8.24)的第一个方程的平行于 $\mathbf{n}$ 的分量可以推知: 相应的 B_z 的边界条件是

$$\left.\frac{\partial B_z}{\partial n}\right|_S=0 \tag{8.30}$$

式中 $\partial/\partial n$ 为表面上某点的法向导数. E_z 和 B_z 的二维波动方程(8.19)连同边界条件(8.29)和(8.30), 给出了一种寻常的本征值问题. 对于一给定频率 ω 来说, 波数 k 只可以出现某些值(典型的波导情况), 或

者，对于一给定的 k 来说，只允许有某些 ω 值(典型的谐振腔情况)．由于 E_z 和 B_z 的边界条件不同，所以一般说来本征值将是不同的．因此，场自然分成两种不同的类型：

横磁(TM)波

处处 $B_z=0$；边界条件为 $E_z|_S=0$

横电(TE)波

处处 $E_z=0$；边界条件为 $\left.\frac{\partial B_z}{\partial n}\right|_S=0$

有时用“电(或 E)波”和“磁(或 H)波”代替 TM 波和 TE 波，以分别指明场的轴向分量．各种 TM 波和 TE 波，加上 TEM 波(如果它存在的话)，构成一个完整的场，用来描写波导或空腔中任意电磁扰动．

8.3 波导

当波在一个均匀截面的中空波导中传播时，由(8.23)和(8.24)的旋度方程式得知 TM 波和 TE 波的横磁场和横电场的关系如下：

$$\mathbf{H}_t=\frac{\pm 1}{Z}\mathbf{e}_3\times\mathbf{E}_t \tag{8.31}$$

式中 Z 叫做波阻抗，由下式给出：

$$Z=\begin{cases}\dfrac{ck}{\epsilon\omega}=\dfrac{k}{k_0}\sqrt{\dfrac{\mu}{\epsilon}}\ (\mathrm{TM})\\[2ex]\dfrac{\mu\omega}{ck}=\dfrac{k_0}{k}\sqrt{\dfrac{\mu}{\epsilon}}\ (\mathrm{TE})\end{cases} \tag{8.32}*$$

这里 k_0 由(8.27)给出．(8.31)中的正(负)号取决于场对 z 的依赖关系 $e^{ikz}(e^{-ikz})$．横向场可按下式由纵向场决定之：

$$\begin{aligned}&\text{TM 波：}\ \mathbf{E}_t=\pm\frac{ik}{\gamma^2}\nabla_t\psi\\&\text{TE 波：}\ \mathbf{H}_t=\pm\frac{ik}{\gamma^2}\nabla_t\psi\end{aligned} \tag{8.33}$$

式中 ψ 是 TM(TE)波的 $E_z(H_z)$[①]，而 γ^2 的定义如下．标量函数 ψ 满足二维波动方程(8.19)，

$$(\nabla_t^2+\gamma^2)\psi=0 \tag{8.34}$$

式中

$$\gamma^2=\mu\epsilon\frac{\omega^2}{c^2}-k^2 \tag{8.35}$$

并服从 TM(TE)波的边界条件

$$\psi|_S=0, \quad 或 \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_S=0 \tag{8.36}$$

ψ 的方程 (8.34) 连同边界条件 (8.36) 决定本征值问题．容易看出，常数 γ^2 一定不是负的．粗略说来，这是因为 ψ 一定具有振荡性，才能在柱体的对侧同时满足边界条件(8.36)．因此，对于上述本征值问题存在着一个本征值谱 γ_λ^2 和相应的解 ψ_λ，$\lambda=1, 2, 3, \cdots$，这些解构成一个正交系．这些不同的解叫做波导的波模．对于给定的频率 ω，与每一 λ 值对应的波数 k 由下式确定：

$$k_\lambda^2=\mu\epsilon\frac{\omega^2}{c^2}-\gamma_\lambda^2 \tag{8.37}$$

如果我们定义一个截止频率 ω_λ，

$$\omega_\lambda=[c]\frac{\gamma_\lambda}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{8.38}*$$

则波数可以写成

$$k_\lambda=\left[\frac{1}{c}\right]\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{\omega^2-\omega_\lambda^2} \tag{8.39}*$$

我们注意到，当 $\omega>\omega_\lambda$ 时，波数 k_λ 是实数，λ 模的波可以在波导中传播．当频率低于截止频率时，k_λ 是虚数，λ 模的波不能传播，并叫做截止波模或消失波模．图 8.4 定性地表示轴向波数与频率的函数关系．我们看到，在任意一个给定频率上，只有有限个波模可以传播．选择波

① 当用波阻抗时，将基本场从 **E** 和 **B** 换成 **E** 和 **H**，以消去 μ 的因子．(像普通阻抗一样，波阻抗涉及电压和电流，因而涉及 **E** 和 **H**．)

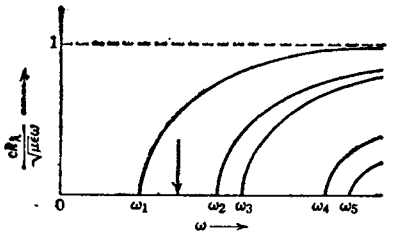


图 8.4　各种 λ 波模的波数 k_λ 对频率 ω 的特性曲线. ω_λ 是截止频率.

导的尺寸，使得在所使用的频率上只能出现最低波模的波，这往往是方便的. 图中的竖直箭头就表示这种情形.

因为波数 k_λ 总小于在自由空间中的波数值 $\sqrt{\mu\epsilon}\,\omega/c$，所以波导里的波长总大于自由空间中的波长. 接着相速度 v_p 就大于无限空间中的值，

$$v_p=\frac{\omega}{k_\lambda}=\frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_\lambda}{\omega}\right)^2}}>\frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{8.40}$$

当频率正好在截止频率上，相速度变为无穷大.

8.4　矩形波导中的波模

作为 8.3 节里所述的一般特性的一个重要实例，我们讨论 TE 波在一个内尺寸为 a、b 的矩形波导（如图 8.5 所示）中的传播问题. $\psi=H_z$ 的波动方程是

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\gamma^2\right)\psi=0 \tag{8.41}$$

而边界条件是：在 $x=0, a$ 和 $y=0, b$ 时，$\partial\psi/\partial n=0$. 因此，$\psi$ 的解是

$$\psi_{mn}(x,y)=H_0\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{8.42}$$

式中

$$\gamma_{mn}^2=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right) \tag{8.43}$$

以前用来说明波模的下角标 λ，现在已换成两个正整数 m、n. 为了得到非平凡解，m、n 不能同时为零. 截止频率 ω_{mn} 由下式给出：

$$\omega_{mn}=[c]\frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^{1/2} \tag{8.44}*$$

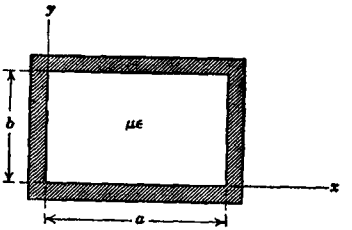


图 8.5

如果 $a>b$，则在 $m=1$，$n=0$ 时出现最低截止频率，即主 TE 模的截止频率：

$$\omega_{1,0}=\frac{\pi c}{\sqrt{\mu\epsilon}\,a} \tag{8.45}$$

它所对应的自由空间波长的一半，正好等于波导的横宽①. 把这种波模（用 $TE_{1,0}$ 表示）的场明显地写出来，即为：

$$\begin{aligned}
H_z&=H_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{ikz-i\omega t}\\
H_x&=-\frac{ika}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{ikz-i\omega t}\\
H_y&=i\frac{\omega a\mu}{\pi c}H_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{ikz-i\omega t}
\end{aligned} \tag{8.46}$$

式中 $k=k_{1,0}$ 由(8.39)给出，其中 $\omega_\lambda=\omega_{1,0}$. 在 H_x（和 E_y）中有一因子 i，这表明在传播方向上 H_x（和 E_y）跟 H_z 有 90° 的空间（或时间）位相差. $TE_{1,0}$ 模具有 TE 和 TM 两类波模的最低截止频率②，所以它是

① 与 $\omega_{1,0}$ 对应的波长为 $\lambda_{1,0}=2\sqrt{\mu\epsilon}\,a$，在自由空间（即波导内没有媒质）情况下，$\lambda_{1,0}=2a$. ——译者注

② 如果我们注意到 TM 模的 E_z 具有下列形式

$$E_z=E_0\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

而 γ^2 仍由(8.43)给出，那末上述情况是显而易见的. 最低的波模为 $m=n=1$. 它的截止频率比 $TE_{1,0}$ 模多一个因子 $\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)^{1/2}$.

在大多数实际情况中所采用的一种波模. 在 $a=2b$ 的典型情况下，邻近几种波模的截止频率 ω_{mn} 和 $\omega_{1,0}$ 之比如下表所示：

	$n\rightarrow$			
	0	1	2	3
0		2.00	4.00	6.00
1	1.00	2.24	4.13	
2	2.00	2.84	4.48	
$m\downarrow$ 3	3.00	3.61	5.00	
4	4.00	4.48	5.66	
5	5.00	5.39		
6	6.00			

从截止频率到两倍截止频率或到(a/b)倍截止频率(取这两种频率的较小者)的频率范围内，$TE_{1,0}$ 模是唯一能传播的波模. 超过此频率范围的上限，其它波模开始迅速出现. 在许多书中都画出了 $TE_{1,0}$ 模和其它波模的场的分布情况，例如：*American Institute of Physics Handbook*, *D.E.Gray* 主编，第三版，McGraw-Hill, New York (1972)，第 5—54 页.

8.5 波导中的能流和衰减

我们扩大 8.3 节里对任意截面形状的柱形波导所作的一般讨论，使它包括沿波导的能流以及波的衰减，后者是当电导率有限时由波导管壁中能量损耗所引起的. 我们只限于讨论波导中只存在一种波模的情况；不过将简短提一下简并波模. 能流用复坡印廷矢量描写：

$$\mathbf{S}=\left[\frac{c}{4\pi}\right]\frac{1}{2}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*) \qquad (8.47)^*$$

其实部给出能流的时间平均值. 对于上述两种类型的场来说，我们利用(8.31)和(8.33)求出：

$$\mathbf{S}=\frac{\omega k}{8\pi\gamma^4}\begin{cases}\epsilon[\mathbf{e}_3|\nabla_t\psi|^2+i\dfrac{\gamma^2}{k}\psi\nabla_t\psi^*]\\ \dfrac{1}{\mu}[\mathbf{e}_3|\nabla_t\psi|^2-i\dfrac{\gamma^2}{k}\psi^*\nabla_t\psi]\end{cases}\tag{8.48}$$

式中上一行对应于TM模；下一行对应于TE模．因为ψ一般是实数①，所以我们看出，$\mathbf{S}$的横向分量代表无功能流，并且对能流的时间平均值没有贡献．另一方面，$\mathbf{S}$的轴向分量给出沿波导传播的能流的时间平均值．为了计算总功率流P，我们求$\mathbf{S}$的轴向分量遍历截面积A的积分：

$$P=\int_A \mathbf{S}\cdot\mathbf{e}_3 da=\frac{\omega k}{8\pi\gamma^4}\begin{Bmatrix}\epsilon\\ \mu\end{Bmatrix}\int_A(\nabla_t\psi)^*\cdot(\nabla_t\psi)da \tag{8.49}$$

借助应用于二维情形的格临第一恒等式(1.34)，可将(8.49)写成

$$P=\frac{\omega k}{8\pi\gamma^4}\begin{Bmatrix}\epsilon\\ \mu\end{Bmatrix}\left[\oint_C \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial n}dl-\int_A\psi^*\nabla_t^2\psi da\right] \tag{8.50}$$

其中第一个积分是沿着限定柱体边界面的曲线C积分的．由于边界条件(8.36)，这一积分对上述两种类型的场均为零．利用波动方程(8.34)，可将第二个积分化简为ψ的归一化积分．因此，传输功率是

$$P=\left[\frac{c}{4\pi}\right]\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^2\left(1-\frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/2}\begin{Bmatrix}\epsilon\\ \mu\end{Bmatrix}\int_A\psi^*\psi da \tag{8.51}*$$

式中上行对应于TM模，下行对应于TE模．上式已经明显地表示传输功率对频率的全部依赖关系．

和计算功率流一样，可以直接计算出在波导每单位长度上的场能，其结果为

$$U=\left[\frac{1}{4\pi}\right]\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^2\begin{Bmatrix}\epsilon\\ \mu\end{Bmatrix}\int_A\psi^*\psi da \tag{8.52}*$$

① 有可能这样激发一个波导，使得某给定波模或一些波模的线性组合具有复数ψ．这时候横向能流对时间的平均值将不为零．可是，因为它是一个环流，所以实际上只代表贮藏的能量，在实用上不大重要．

将此式与功率流P比较，可知P与U成正比．比例常数具有速度(能流速度)的量纲，而且正是群速度：

$$\frac{P}{U}=\frac{k}{\omega}\frac{c^2}{\mu\epsilon}=\frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{1-\frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}}=v_g \tag{8.53}$$

从(8.39)直接计算$v_g=d\omega/dk$，就可以证明这一结论，计算时假定充满波导内的电介质是没有耗散的．我们指出：v_g总小于无限媒质中的波速，并在截止频率上降为零．相速度(8.40)与群速度的乘积是一个常数：

$$v_p v_g=\frac{c^2}{\mu\epsilon} \tag{8.54}$$

这是$\omega\Delta\omega\propto k\Delta k$的一个直接结果．

到此为止，我们只考虑了有理想导电壁的波导．在这种情形下，轴向波数k_λ或者是实数或者是纯虚数．假如波导管壁的电导率为有限值，就会有欧姆损失，这时沿波导的功率流就会衰减．对于电导率大的波导管壁而言，波数将附加上微小的实部和虚部：

$$k_\lambda\simeq k_\lambda^{(0)}+\alpha_\lambda+i\beta_\lambda \tag{8.55}*$$

式中$k_\lambda^{(0)}$是对于理想导电壁的波数值．除非接近截止频率(当$k_\lambda^{(0)}\to 0$时)，通常波数实部的变化α_λ是不太重要的．重新求解具有适用于有限电导率的边界条件的边值问题，或者通过8.1节的方法计算欧姆损失，并应用能量守恒定律，都可以求出衰减常数β_λ．我们将先采用后一种方法．沿波导的功率流将由下式给出：

$$P(z)=P_0e^{-2\beta_\lambda z} \tag{8.56}*$$

所以衰减常数是

$$\beta_\lambda=-\frac{1}{2P}\frac{dP}{dz} \tag{8.57}*$$

式中$-dP/dz$是在波导的每单位长度上耗散于欧姆损失的功率．根据8.1节的那些结果，这功率损失等于

$$-\frac{dP}{dz}=\left[\frac{c^2}{16\pi^2}\right]\frac{1}{2\sigma\delta}\oint_C|\mathbf{n}\times\mathbf{H}|^2dl \qquad (8.58)^*$$

式中的积分历遍一条环绕波导边界的闭合路线．利用(8.31)和(8.33)的场强公式，容易证明，对一个给定的波模来说，

$$-\frac{dP}{dz}=\frac{c^2}{32\pi^2\sigma\delta}\left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^2\oint_C\begin{cases}\dfrac{c^2}{\mu^2\omega_\lambda^2}\left|\dfrac{\partial\psi}{\partial n}\right|^2\\ \dfrac{c^2}{\mu\epsilon\omega_\lambda^2}\left(1-\dfrac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}\right)|\mathbf{n}\times\nabla_t\psi|^2+\dfrac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}|\psi|^2\end{cases}dl \qquad (8.59)$$

式中上行对应于 TM 模，下行对应于 TE 模．

因为 ψ 的横向导数完全决定于波导的形状和大小，所以(8.59)明显地表示出功率损失与频率的依赖关系．实际上，可从下面事实简单地估计(8.59)中的积分：对于每一波模均有

$$\left(\nabla_t^2+\frac{\mu\epsilon\omega_\lambda^2}{c^2}\right)\psi=0 \qquad (8.60)$$

这就是说，除特殊情况以外，在某种平均意义下，ψ' 的横向导数必定和 $\sqrt{\mu\epsilon}(\omega_\lambda/c)\psi$ 同数量级：

$$\left\langle\left|\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|^2\right\rangle\sim\langle|\mathbf{n}\times\nabla_t\psi|^2\rangle\sim\mu\epsilon\frac{\omega_\lambda^2}{c^2}\langle|\psi|^2\rangle \qquad (8.61)$$

所以能够把(8.59)中的线积分和$|\psi|^2$的归一化面积分联系起来．例如

$$\oint_C\frac{c^2}{\omega_\lambda^2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|^2dl=\xi_\lambda\mu\epsilon\frac{C}{A}\int_A|\psi|^2da \qquad (8.62)$$

式中 C 是截面的周边，A 是截面的面积，而 ξ_λ 是与 1 同数量级的无量纲数．我们不必对波导的形状作进一步的了解，就可以求出衰减常数 β_λ 的数量级，并十分明显地表示出它与频率的关系．于是，利用(8.59)以及(8.62)和(8.51)，再加上趋肤深度与频率的关系(8.8)，我们求得

$$\beta_\lambda=\left[\frac{c}{4\pi}\right]\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\frac{1}{\sigma\delta_\lambda}\left(\frac{C}{2A}\right)\frac{\left(\dfrac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^{1/2}}{\left(1-\dfrac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/2}}\left[\xi_\lambda+\eta_\lambda\left(\frac{\omega_\lambda}{\omega}\right)^2\right] \qquad (8.63)^*$$

式中 σ 是电导率(假定与频率无关),δ_s 是在截止频率时的趋肤深度,而 ξ_λ、η_λ 都是和 1 同数量级的无量纲数. 对于 TM 模,$\eta_\lambda=0$.

当截面形状给定时,可以直截了当算出(8.63)中的无量纲参数 ξ_λ 和 η_λ. 对矩形波导中 $n=0$ 的 TE 模来说,参数值为 $\xi_{m,0}=a/(a+b)$和 $\eta_{m,0}=2b/(a+b)$. 对于合适的相对尺寸,这些参数与 1 同数量级,如同预期的一样.

β_λ 与频率的函数关系如图 8.6 所示. 当频率比截止频率高出一个相当数值时,出现最小衰减. 对于 TE 模,ξ_λ 和 η_λ 的相对大小取决于波导的形状和 λ. 因此,我们不能一般地说出发生最小衰减的确切频率. 但对于 TM 模,最小衰减总是发生在 $\omega_{最小}=\sqrt{3}\,\omega_\lambda$ 处. 高频时,衰减按 $\omega^{1/2}$ 增加. 在微波范围内,铜波导的典型衰减常数的数量级为 $\beta_\lambda\sim10^{-4}\omega_\lambda/c$,当距离为 200—400 米时衰减 $1/e$.

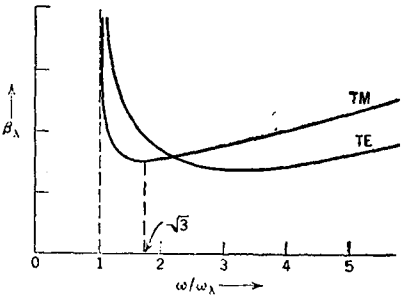


图 8.6 典型的 TE 模和 TM 模的衰减常数 β_λ 与频率的函数关系图. TM模的最小衰减发生在 $\omega/\omega_\lambda=\sqrt{3}$,并与截面的形状无关.

当频率接近截止频率时,在推导(8.63)时所用的近似方法不再有效. 其论据是,当 $\omega=\omega_\lambda$ 时(8.63)的值为无穷大,这在物理上是不可能的.

8.6 边界条件微扰法

用能量守恒定律确定衰减常数 β_λ,这种方法是直截了当的,且乍一看来是吸引人的,但在截止频率上给出的结果没有物理意义,而且无法求出 α_λ(波数实部的变化)的值. 这两个缺点可以用所谓边界条件微扰法来弥补. 这种方法至少在原则上能求得我们想要的任何准确度

的答案，虽然我们只把它应用到最低阶近似．这种方法也可以用来处理简并模的衰减，本章末将简短地提一下．

为明确起见，我们考虑单一 TM 模，没有其它波模（TE 或 TM）与之简并或近简并．对于一个孤立的 TE 模，其论证相似．为了减少上标和下标的个数，我们用下标“0”表示理想导电壁的（未微扰）解，而当壁的电导率为有限时的（微扰）解既不标以下标也不标以上标．于是，未微扰问题具有一个纵向电场 $E_z=\psi_0$，这里

$$(\nabla_t^2-\gamma_0^2)\psi_0=0, \qquad \psi_0|_s=0 \tag{8.64}$$

而 γ_0^2 为实量．当电导率有限但数值很大时，$E_z=\psi$ 在壁上不等于零，且由(8.11)给出．对于最低阶近似，(8.11)的右边用未微扰场近似代替．利用(8.23)和(8.33)中的第一个方程，可以把 ψ 的微扰边界条件表示成

$$\psi\Big|_s \simeq f\frac{\partial\psi_0}{\partial n}\Big|_s \tag{8.65}$$

式中小的复参数 f 为①

$$f=(1+i)\frac{\mu_c\delta}{2\mu}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \tag{8.66}$$

这里 μ_c 和 μ 分别为波导的导电壁和波导内的媒质的磁导率，δ 为趋肤深度(8.8)，ω_0 为未微扰波模的截止频率．于是，与(8.64)等效的微扰问题是

$$(\nabla_t^2+\gamma^2)\psi=0, \qquad \psi\Big|_s \simeq f\frac{\partial\psi_0}{\partial n}\Big|_s \tag{8.67}$$

如果所要求的只是本征值 γ^2，那末可以利用二维格临定理(1.35)：

$$\int_A[\phi\nabla_t^2\psi-\psi\nabla_t^2\phi]da=\oint_C\left[\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right]dl$$

式中右边含有向内法线方向［在导体外，与(8.11)和(8.65)一致］的偏

① 更一般地说，f 可以用表面阻抗 Z_S 来表示：$f=[c^2/4\pi](i\omega/\mu\omega_0^2)Z_S$，式中起首方括号内的因子在米·千克·秒·安制单位里就删去了．

导数．令 $\psi=\psi$ 和 $\phi=\psi_0^*$，利用波动方程(8.64)和(8.67)以及它们的边界条件，格临定理变成

$$(\gamma_0^2-\gamma^2)\int_A \psi_0^*\psi da=f\oint_C\left|\frac{\partial\psi_0}{\partial n}\right|^2 dl \tag{8.68}$$

因为假定 f 是一个小参数，通常把左边积分中的 ψ 近似地用其未微扰值 ψ_0 代替．这就导致最后的结果如下：

$$\gamma_0^2-\gamma^2=k^2-k^{(0)2}\simeq f\frac{\oint_C\left|\frac{\partial\psi_0}{\partial n}\right|^2 dl}{\int_A|\psi_0|^2 da} \tag{8.69}$$

由上节的方程(8.51)和(8.59)，我们得到

$$2k^{(0)}\beta_{\mathrm{TM}}^{(0)}=\frac{\mu_c\delta}{2\mu}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\frac{\oint_C\left|\frac{\partial\psi_0}{\partial n}\right|^2 dl}{\int_A|\psi_0|^2 da} \tag{8.70}$$

式中 $\beta^{(0)}$ 由(8.57)和(8.63)确定，(8.70)包含有(8.69)右边的积分比．这就意味着(8.69)可以写成

$$k^2\simeq k^{(0)2}+2(1+i)k^{(0)}\beta^{(0)} \tag{8.71}$$

这个结果对 TM 和 TE 模均成立，其中 $\beta^{(0)}$ 是上节求得的对应于 TM 和 TE 模的值．当 $k^{(0)}\gg\beta^{(0)}$ 时，(8.71)就化为前面的表式(8.55)[其中 $\alpha=\beta$]．但是，在截止频率时或稍低于截止频率时，上节的结果失效，而(8.71)得出的结果是合理的，因为在 $k^{(0)}=0$ 的邻域内乘积 $k^{(0)}\beta^0$ 是有限的和有理的．如果波导壁还不够成为理想导体，则从传播波模到截止波模的过渡显然不是突变的，但在截止频率的紧上方和紧下方，衰减足够地大，以致作锐截止的假定所引起的误差很小．

本节和上节关于衰减的讨论暂时限定在单一波模情形．这种近似适用于损耗不太大的非简并模．然而，如果一个 TM 模和一个 TE 模都是简并模(正如当 $n\neq0$，$m=0$ 时矩形波导中出现的那样)，那末

任何一种微扰，不管如何微小，都能使这两个波模发生相当明显的混合．在这样一些情况下，迄今所用的诸方法都是无效的．本节所述方法的失败之处在于微扰边界条件(8.65)，所以现在要求式中右边有一项包含未微扰 H_z 的切向导数和 E_z 的法向导数．当然，有一种对应的 H_z 微扰边界条件，涉及两个未微扰纵向场．这个问题是简并态微扰论的一个问题，简并态微扰论是量子力学著作中最普通的课题．微扰波模是未微扰 TM 和 TE 模的正交线性组合，这两类波模的衰减常数具有下列特性表式：

$$\beta=\frac{1}{2}(\beta_{\mathrm{TM}}+\beta_{\mathrm{TE}})\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\beta_{\mathrm{TM}}+\beta_{\mathrm{TE}})^2+4|K|^2}\qquad(8.72)$$

式中 β_{TM} 和 β_{TE} 是上面所求的值，K 是一个耦合参数．

若干作者已经论述了用边界条件微扰法来处理简并模的衰减问题①．*Collin* 书 5.3 节里阐述了帕帕多波洛斯的讨论．

8.7 谐振腔

虽然一个电磁空腔谐振器完全可以具有任意的形状，但是，最重要的一类空腔还是这样构成的，即在一段柱形波导两端加上端面．我们假定端面是平面，并且和柱体的轴垂直．我们照常假定空腔壁的电导率是无穷大的，而腔内充满磁导率和介电常数为 μ 和 ϵ 的无耗散电介质．由于端面的反射作用，场对 z 的依赖关系应当符合驻波的形式：

$$A\sin kz+B\cos kz$$

如果边界平面位在 $z=0$ 和 $z=d$ 处，那么只有当

$$k=p\frac{\pi}{d},\qquad p=0,1,2,\cdots\qquad(8.73)$$

时，边界条件才能在两个端面上同时得到满足．对于 TM 场来说，在

① G. Goubau, *Electromagnetic Waveguides and Cavities*, Pergamon Press, London (1961), 第 25 节.

V. M. Papadopoulos, *Quart. J. Mech. and Appl. Math.* **7**, 325(1954).

$z=0$ 和 $z=d$ 处 $\mathbf{E}_t$ 为零的条件要求

$$E_z=\psi(x,y)\cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right),\qquad p=0,1,2,\cdots \tag{8.74}$$

同样，对于 TE 场来说，在 $z=0$ 和 $z=d$ 处 H_z 为零的条件要求

$$H_z=\psi(x,y)\sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right),\quad p=1,2,3,\cdots \tag{8.75}$$

于是我们从(8.31)和(8.33)求得横向场如下：

TM 场：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_t&=-\frac{p\pi}{d\gamma^2}\sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\nabla_t\psi\\ \mathbf{H}_t&=\frac{i\epsilon\omega}{c\gamma^2}\cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\mathbf{e}_3\times\nabla_t\psi\end{aligned} \tag{8.76}$$

TE 场：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_t&=-\frac{i\omega\mu}{c\gamma^2}\sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\mathbf{e}_3\times\nabla_t\psi\\ \mathbf{H}_t&=\frac{p\pi}{d\gamma^2}\cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\nabla_t\psi\end{aligned} \tag{8.77}$$

在空腔两端的边界条件如今已明显地得到满足．和往常一样，剩下的就是本征值问题(8.34)—(8.36)．不过现在的常数 γ^2 是：

$$\gamma^2=\mu\epsilon\frac{\omega^2}{c^2}-\left(\frac{p\pi}{d}\right)^2 \tag{8.78}$$

对于每一个 p 值，由本征值 γ_λ^2 定出一个本征频率 $\omega_{\lambda p}$：

$$\omega_{\lambda p}^2=\frac{[c^2]}{\mu\epsilon}\left[\gamma_\lambda^2+\left(\frac{p\pi}{d}\right)^2\right] \tag{8.79}*$$

和相应于此谐振模的场．这些谐振频率形成一个分立频率谱，我们可以在波导的轴向波数 k 与频率的关系图上（见 380 页），令 $k=p\pi/d$，而用图解方法求得这些频率．选择空腔的各个线度，使得工作的谐振频率跟其他的谐振频率能够很好地分开，这往往是有利的．这样空腔在工作时就相当稳定，并且对于和频率漂移、负载变动等现象相联系的

干扰效应不敏感.

正圆柱体是一种重要的实用谐振腔，这个柱体有时还装上一个活塞，以便通过改变谐振腔的高度进行调谐. 设这柱体的内半径为 R，长为 d，如图 8.7 所示. 对于一个 TM 模来说，$\psi=E_z$ 的横向波动方程，在 $\rho=R$ 时 $E_z=0$ 的边界条件下具有如下的解：

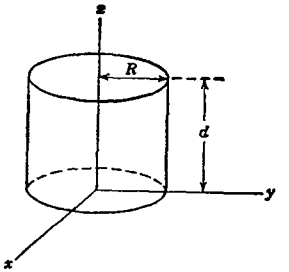


图 8.7

$$\psi(\rho,\phi)=J_m(\gamma_{mn}\rho)e^{\pm im\phi} \tag{8.80}$$

式中

$$\gamma_{mn}=\frac{x_{mn}}{R}$$

x_{mn} 是方程 $J_m(x)=0$ 的第 n 个根. 这些根已列在(116)页方程 (3.92) 的下方. 整数 m 和 n 取的值是 $m=0,1,2,\cdots$，和 $n=1,2,3,\cdots$. 谐振频率由下式给出

$$\omega_{mnp}=\frac{[c]}{\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\frac{x_{mn}^2}{R^2}+\frac{p^2\pi^2}{d^2}} \tag{8.81}^*$$

频率最低的 TM 模是 $m=0,n=1,p=0$，所以记为 $TM_{0,1,0}$. 它的谐振频率是

$$\omega_{010}=\frac{2.405}{\sqrt{\mu\epsilon}}\frac{c}{R}$$

场的明显表示式为

$$\left.\begin{aligned}E_z&=E_0J_0\left(\frac{2.405\rho}{R}\right)e^{-i\omega t}\\H_\phi&=-i\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}E_0J_1\left(\frac{2.405\rho}{R}\right)e^{-i\omega t}\end{aligned}\right\} \tag{8.82}$$

这一波模的谐振频率和 d 无关. 所以不能用调节 d 的简单办法来调谐.

对于 TE 模来说，基本解 (8.80) 仍然适用，但 H_z 的边界条件

$\left(\left.\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right|_R=0\right)$使

$$\gamma_{mn}=\frac{x'_{mn}}{R}$$

式中 x'_{mn} 是 $J'_m(x)=0$ 的第 n 个根. 下面就几个 m、n 的值，列出这些根(当 $m\neq1$ 时，$x=0$ 的根是无关紧要的根):

$J'_m(x)=0$ 的根

$m=0$: $x'_{0n}=3.832,\ 7.016,\ 10.174,\ \cdots$

$m=1$: $x'_{1n}=1.841,\ 5.331,\ 8.536,\ \cdots$

$m=2$: $x'_{2n}=3.054,\ 6.706,\ 9.970,\ \cdots$

$m=3$: $x'_{3n}=4.201,\ 8.015,\ 11.336,\ \cdots$

谐振频率由下式给出

$$\omega_{mnp}=\frac{[c]}{\sqrt{\mu\epsilon}}\left(\frac{x'^2_{mn}}{R^2}+\frac{p^2\pi^2}{d^2}\right)^{1/2}\qquad(8.83)^*$$

式中 $m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，但 $n,\ p=1,\ 2,\ 3,\cdots$. 频率最低的TE模是 $m=n=p=1$，并记为 $TE_{1,1,1}$. 它的谐振频率是

$$\omega_{111}=\frac{1.841}{\sqrt{\mu\epsilon}}\frac{c}{R}\left(1+2.912\frac{R^2}{d^2}\right)^{1/2}\qquad(8.84)$$

而它的场可以利用(8.77)从

$$\psi=H_z=H_0J_1\left(\frac{1.841\rho}{R}\right)\cos\phi\sin\left(\frac{\pi z}{d}\right)e^{-i\omega t}\qquad(8.85)$$

导出. 对于足够大的 $d(d>2.03R)$，谐振频率 ω_{111} 小于 TM 模的最低谐振频率. 这时，$TE_{1,1,1}$ 模就是这个谐振腔的基本振荡. 由于这频率依赖于比值 d/R，所以只要能够调节两个端面的距离，就可能很简单地进行调谐.

8.8 谐振腔的功率损失；谐振腔的Q值

我们在前一节指出谐振腔具有分立的振荡频率，而且每一谐振频

率有一定的场的分布情况．这意味着，如果人们想用某种方法在一个谐振腔中激发一种特定的振荡波模，就得使激发频率正好等于所选择的谐振频率，否则不会建立起合适的场．实际上，不存在 δ 函数型的奇点，但在本征频率左右有一个狭窄的频带，在这频带内都能产生可观察到的激发．能量在谐振腔壁中的耗散以及在充满谐振腔的电介质中的耗散，是锐振荡频率发生扩展的一个重要根源．谐振腔的 Q 值是量度谐振腔对外激发的反应锐度，它的定义是谐振腔中所贮存的能量的时间平均值和每周期的能量损失之比乘以 2π：

$$Q=\omega_0\frac{\text{贮存的能量}}{\text{功率损失}} \tag{8.86}*$$

式中 ω_0 是假定没有能量损失时的谐振频率．根据能量守恒，耗散在欧姆损失上的功率等于贮存能量 U 随时间变化率的负值．因此，我们根据(8.86)可以写出另一个方程，这个方程描写 U 作为时间函数的特性：

它的解是

$$\frac{dU}{dt}=-\frac{\omega_0}{Q}U \tag{8.87}$$

$$U(t)=U_0e^{-\omega_0t/Q}$$

如果最初谐振腔中贮存的能量是 U_0，那么这能量将按指数衰减，衰减常数和 Q 成反比．(8.87)的时间依赖关系表明谐振腔中场的振荡是按下列方式阻尼的：

$$E(t)=E_0e^{-\omega_0t/2Q}e^{-i(\omega_0+\Delta\omega)t} \tag{8.88}$$

式中我们已经考虑到谐振频率移动 $\Delta\omega$ 和阻尼．这种阻尼振荡的频率不是纯一的，而是在 $\omega=\omega_0+\Delta\omega$ 附近的许多频率的叠加．所以

式中

$$E(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}E(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

$$E(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}E_0e^{-\omega_0t/2Q}e^{i(\omega-\omega_0-\Delta\omega)t}dt \tag{8.89}$$

(8.89)中的积分是一个初等积分，由这个积分可以推出谐振腔中能量的频率分布，这种分布具有谐振曲线的形状：

$$|E(\omega)|^2 \propto \frac{1}{(\omega-\omega_0-\Delta\omega)^2+(\omega_0/2Q)^2} \tag{8.90}$$

图8.8所示的谐振曲线形状(8.90)在半极大值的地方有一等于ω_0/Q的全宽度Γ(通常被误称为半宽度). 对恒定的输入电压来说，谐振腔里的振荡能量作为频率函数的变化情况，在一特定的谐振频率附近和谐振曲线的变化情况相似. 因此，两个半功率点的频率间隔$\delta\omega$决定宽度Γ，而谐振腔的Q值就是

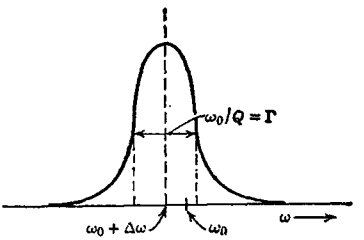


图8.8 谐振曲线形状。在(功率的)半极大值处的全宽度Γ等于未微扰频率ω_0除以谐振腔的Q值.

$$Q=\frac{\omega_0}{\delta\omega}=\frac{\omega_0}{\Gamma} \tag{8.91}$$

对于微波谐振腔来说，Q值通常等于几百或几千.

要确定谐振腔的Q值，必须算出谐振腔所贮存的能量对时间的平均值，然后求出谐振腔壁的功率损失. 计算过程和8.5节中计算波导中的衰减十分相似. 我们在这里只讨论8.7节的柱形谐振腔，并假定没有简并模. 根据(8.74)—(8.77)，谐振腔中所贮存的λ、p波型的能量是:

$$U=\left[\frac{1}{4\pi}\right]\frac{d}{4}\begin{Bmatrix}\epsilon\\ \mu\end{Bmatrix}\left[1\div\left(\frac{p\pi}{\gamma_\lambda d}\right)^2\right]\int_A|\psi|^2da \tag{8.92}*$$

式中上(下)行对应于TM(TE)模. 对于$p=0$的TM模来说，上列结果必须乘以2.

将(8.58)作些修改就可以计算功率损失:

$$P_{\text{损失}}=\left[\frac{c^2}{16\pi^2}\right]\frac{1}{2\sigma\delta}\left[\oint_C dl\int_0^d dz\,|\mathbf{n}\times\mathbf{H}|^2_{\text{侧面}}+2\int_A da\,|\mathbf{n}\times\mathbf{H}|^2_{\text{端面}}\right] \tag{8.93}*$$

对于 $p\neq 0$ 的 TM 模来说，容易证明

$$P_{\text{损失}}=\left[\frac{c^2}{16\pi^2}\right]\frac{\epsilon}{\sigma\delta\mu}\left[1+\left(\frac{p\pi}{\gamma_\lambda d}\right)^2\right]\left(1+\xi_\lambda\frac{Cd}{4A}\right)\int_A|\psi|^2da \quad (8.94)^*$$

式中无量纲数 ξ_λ 和(8.62)里出现的是同一个数，C 是谐振腔的周长，A 是谐振腔的截面积．当 $p=0$ 时，ξ_λ 必须换成 $2\xi_\lambda$．按照(8.86)将(8.92)和(8.94)合并起来，并利用趋肤深度 δ 的定义(8.8)，我们求得谐振腔的 Q 值：

$$Q=\frac{\mu}{\mu_c}\frac{d}{\delta}\frac{1}{2\left(1+\xi_\lambda\frac{Cd}{4A}\right)} \quad (8.95)^*$$

式中 μ_c 是谐振腔的金属壁的磁导率．对于 $p=0$ 波模来说，(8.95)必须乘 2，并且 ξ_λ 要换为 $2\xi_\lambda$．把这个 Q 值的表式写成如下形式，就可以作直观的物理解释，

$$Q=\frac{\mu}{\mu_c}\left(\frac{V}{S\delta}\right)\times(\text{几何因子}) \quad (8.96)^*$$

式中 V 是谐振腔的体积，S 是谐振腔表面的总面积．谐振腔的 Q 值，除了一个几何因子以外，显然是场所占的体积和场透入导体的体积(因为电导率是有限的)之比．对于柱形谐振腔中 TM 模来说，当 $p\neq 0$ 时，几何因子等于

$$\frac{\left(1+\frac{Cd}{2A}\right)}{\left(1+\xi_\lambda\frac{Cd}{4A}\right)} \quad (8.97)$$

对于 $p\neq 0$ 波型来说，则等于

$$\frac{2\left(1+\frac{Cd}{2A}\right)}{\left(1+\xi_\lambda\frac{Cd}{2A}\right)} \quad (8.98)$$

在柱形谐振腔内 TE 模的几何因子比较复杂，但数量级相同．在圆柱形谐振腔内 $TM_{0,1,0}$ 模的场是(8.82)，而且 $\xi_\lambda=1$(对一切 TM 模都正

确)，所以它的几何因子等于 2，而 Q 是：

$$Q=\left(\frac{\mu}{\mu_c}\right)\frac{1}{\left(1+\frac{d}{R}\right)}\frac{d}{\delta} \tag{8.99}*$$

对 $TE_{1,1,1}$ 模进行计算后，得到的几何因子[①]是

$$\left(1+\frac{d}{R}\right)\frac{\left(1+0.344\frac{d^2}{R^2}\right)}{\left(1+0.209\frac{d}{R}+0.242\frac{d^3}{R^3}\right)} \tag{8.100}$$

Q 是：

$$Q=\frac{\mu}{2\mu_c}\left(\frac{d}{\delta}\right)\frac{\left(1+0.344\frac{d^2}{R^2}\right)}{\left(1+0.209\frac{d}{R}+0.242\frac{d^3}{R^3}\right)} \tag{8.101}*$$

Q 的表式 (8.96)不仅适用于柱形谐振腔，而且也适用于任意形状的谐振腔，并具有数量级为 1 的适当的几何因子.

用能量守恒讨论谐振腔的功率损失，其利弊跟波导的讨论相同. Q 值是可以计算的，但是要计算频率的可能移动，就超出本方法的范围. 8.6 节所述的边界条件微扰法再一次补救了这些缺点. 实际上这跟波导情形非常相似，以致毋需进行计算就可以直接推出答案. 具有理想导电壁的谐振腔的谐振频率的未微扰问题是用由(8.64)或其 TE 模对应表式来说明的. 同样，微扰问题涉及求解(8.67)或其对应表式. 显然所得的结果是与(8.69)相当的. 差$(\gamma_0^2-\gamma^2)$与$(\omega_0^2-\omega^2)$成正比，其中 ω_0 现在是未微扰谐振频率，而不是波导的截止频率，ω 是微扰谐振频率. 于是，与(8.69)相似的表式取下列形式：

$$\omega_0^2-\omega^2\simeq(1+i)I \tag{8.102}$$

式中 I 是适当的积分之比. 在 $I\to 0$ 的极限情形下，ω 的虚部等于 $-iI/2\omega_0$. 根据(8.88)，它等于 $-i\omega_0/2Q$，所以 $I=\omega_0^2/Q$. 这样方程

① 请注意：这一因子从 $d/R=0$ 时的 1 变到 $d/R=1.91$ 时的最大值 2.13，然后减少到 $d/R\to\infty$ 时的 1.42.

(8.102)就可以写成

$$\omega^2 \simeq \omega_0^2\left[1-\frac{(1+i)}{Q}\right] \tag{8.103}$$

式中Q是由(8.86)、(8.92)和(8.93)确定的量. 由此看到阻尼使ω^2的实部和虚部引起的变更相同. 当Q值很大时，谐振频率(不是其平方)的变化是

$$\Delta\omega \simeq \mathrm{Im}\omega \simeq -\frac{\omega_0}{2Q}$$

谐振频率总是因电阻损失的出现而降低. ω^2的变化量的实部和虚部接近相等，这是由适用于较良导体的边界条件(8.11)得出的一个结果. 对于损失甚大的系统或边界面具有表面阻抗时，ω^2的变化量的实部和虚部之相对值可以不同于(8.103)给出的值.

正如8.6节一样，本节的讨论局限于非简并模. 8.6节末给出的参考文献阐述了补救这个缺点的处理方法.

8.9 当作谐振腔处理的地球和电离层：舒曼谐振

把地球当作一个边界面，把电离层当作另一个边界面，就提供一个比较奇特的谐振腔的实例. 这样一个系统的最低谐振模显然具有非常低的谐振频率，因为特征波长必须与地球半径的大小同数量级. 在这些情况下，电离层和地球似乎都是具有实电导率的导体. 海水的电导率$\sigma \sim 10^9$秒$^{-1}$，而电离层的电导率$\sigma \sim 10^3$—10^6秒$^{-1}$. 这样谐振腔壁就远非是理想导电的，尤其是以电离层作的那块腔壁. 虽然如此，我们仍然把实际的物理情况理想化，并采用这样一个模型：半径分别为a和$b=a+h$的两个理想导电的同心球面，其中a为地球半径($a \simeq$ 6400千米)，而h为电离层离地面的高度($h \sim$100千米). 而且，如果我们只考虑最低频率，那末就可以专心致志地研究只有切向磁场的TM模①. 其理由是：具有径向电场的TM模可以满足这样的边界条件，

① 对球状谐振腔来说，记号TE(TM)表示径向电(磁)场分量等于零.

即在 $r=a$ 和 $r=b$ 处切向电场等于零，而场在径向没有明显的变化. 另一方面，只有切向电场的 TE 模在 $r=a$ 和 $r=b$ 间必定有约为二分之一波长的径向变化. 因此，TE 模的最低频率约为 $\omega_{TE}\sim\pi c/h$，而 TM 模的最低频率约为 $\omega_{TM}\sim c/a$.

球状谐振腔中波型的一般问题是十分复杂的，这将留待第十六章里详细讨论. 本节只考虑 TM 模，并假定场与方位角 ϕ 无关. 后一限制实际上是不存在的；从球谐函数的研究，我们知道，关键的量是 l，而不是 m. 如果 B 的径向分量等于零，而其它分量与 ϕ 无关，那末 B 的散度等于零这个条件要求：倘若场在 $\theta=0$ 是有限的，则只有 B_ϕ 不等于零. 此外，法拉第定律要求 $E_\phi=0$. 因而齐次麦克斯韦方程组表明，与 ϕ 无关的 TM 模只包含 E_r, E_θ 和 B_ϕ. 假定时间依赖关系为 $e^{-i\omega t}$，我们可以把两个麦克斯韦旋度方程合并成

$$\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{B}-\nabla\times\nabla\times\mathbf{B}=0 \tag{8.104}$$

式中两球面间媒质的磁导率取作 1. (8.104)的 ϕ 分量是

$$\frac{\omega^2}{c^2}(rB_\phi)+\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rB_\phi)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, r\, B_\phi)\right]=0 \tag{8.105}$$

(8.105)的角度部分可以变换成

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, r\, B_\phi)\right]=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial(rB_\phi)}{\partial\theta}\right)-\frac{rB_\phi}{\sin^2\theta}$$

与(3.6)或(3.9)比较表明，θ 依赖关系由 $m=\pm1$ 的缔合勒让德多项式 $P_l^m(\cos\theta)$ 给出. 所以自然可以写出一个乘积形式的解，

$$B_\phi(r,\theta)=\frac{u_l(r)}{r}P_l^1(\cos\theta) \tag{8.106}$$

代入(8.105)得到 $u_l(r)$ 的微分方程，

$$\frac{d^2u_l(r)}{dr^2}+\left[\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u_l(r)=0 \tag{8.107}$$

其中 $l=1,2,\cdots$ 确定波模的角度依赖关系.

当边界条件相当于 $r=a$ 和 $r=b$ 处的理想导电壁时，由(8.107)可求出特征频率．径向和切向电场是

$$E_r=\frac{ic}{\omega r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta B_\phi)=-\frac{ic}{\omega r}l(l+1)\frac{u_l(r)}{r}P_l(\cos\theta)$$

$$E_\theta=-\frac{ic}{\omega r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\phi)=-\frac{ic}{\omega r}\frac{\partial u_l(r)}{\partial r}P_l^1(\cos\theta)$$

在 $r=a$ 和 $r=b$ 处 E_θ 等于零，这意味着 $u_l(r)$ 的边界条件是

$$\frac{du_l(r)}{dr}=0 \quad \text{当 } r=a \text{ 和 } r=b \text{ 时} \tag{8.108}$$

(8.107)的解是 r 乘球贝塞耳函数(参看 16.1 节)．边界条件 (8.108) 导出特征频率的超越方程．有一个具体例子将留作习题，但就我们现在的目的来说，将只满足于一个极限情形．电离层高度 h 与地球半径 a 比较是足够小的，因此可以假定 $h/a\ll1$．(8.107)中 $l(l+1)/r^2$ 项可以近似地用其 $r=a$ 处的值代替．这时 (8.107) 的解是 $\sin(qr)$ 和 $\cos(qr)$，这里 q^2 是(8.107)方括号中的因子在 $r=a$ 处计算的值．应用边界条件(8.108)，解是

$$u_l(r)\simeq A\cos[q(r-a)]$$

式中 $qr=n\pi, n=0,1,2,\cdots$．当 $n=1,2,\cdots$ 时，诸波模的频率显然大于 $\omega=n\pi c/h$，且是在 TE 模的频率范围内．只当 $n=0$ 时才有极低的频率波模．条件 $q=0$ 相当于 $u_l(r)=$ 常数和

$$\omega_l\simeq\sqrt{l(l+1)}\frac{c}{a} \tag{8.109}$$

上式只在 $h/a\to0$ 极限情形下精确成立．精确解表明，算至 h/a 的一次项，正确的结果是把上式的 a 用 $\left(a+\frac{1}{2}h\right)$ 代替．场是 $E_\theta=0$，$r^2E_r\propto P_l(\cos\theta)$，$rB_\phi\propto P_l^1(\cos\theta)$．

谐振频率(8.109)叫做舒曼谐振①．这些频率是非常低的：当 $a=6400$ 千米时，头五个谐振频率为 $\omega_l/2\pi=10.6, 18.3, 25.8, 33.4, 40.9$ 赫

① W. O. Schumann, *Z. Naturforschung* **72**, 149, 250(1952).

兹．舒曼谐振作为在地球周围传播的极低频噪声功率谱中一系列巅峰而出现．闪电(包含一个宽广的频谱)起着径向电场源的作用．接近舒曼谐振的频率分量优先传播，这是因为它们是地球-电离层谐振腔的简正模．1960 年首次对噪声功率谱中的这些巅峰作了肯定的观测①，虽然有迹象表明尼可拉·忒斯拉在 1900 年前也许已经观测到②．典型的噪声功率谱如图 8.9 所示．谐振是明显可见的．它们天天有微小的移

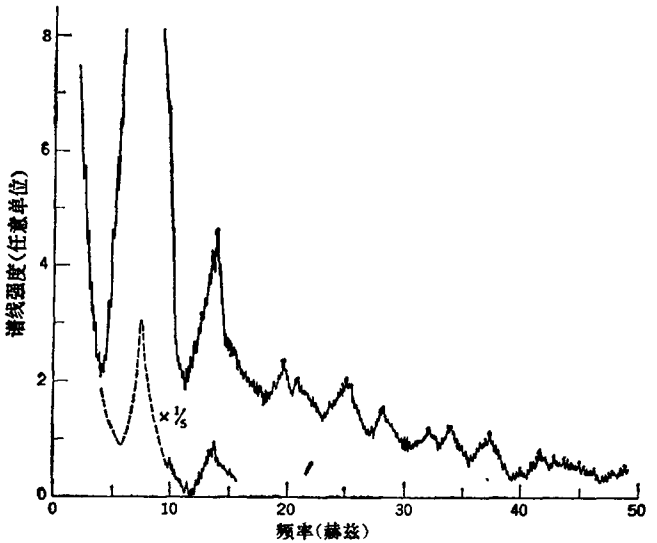


图 8.9　低频时典型噪声功率谱(30 秒钟的积累值)．该谱是 1965 年 6 月 19 日在挪威的拉潘斯达伦城观测到的．发生在 8, 14, 20 和 26 赫兹处的主舒曼谐振，加上 32, 37 和 43 赫兹处的巅峰，以及更小的巅峰都是可见的［本图仿照 A. Egeland and T. R. Larsen, *Physica Norvegica* **2**, 85(1967)绘制的］.

① M. Balser and C. A. Wagner, *Nature* **188**, 638(1960).

② 在 *Nikola Tesla*, Lectures and Patents and Articles, Nikola Tesla Museum, Beograd, Yugoslavia, (1956)中翻印的美国专利第 787412 号 (1905 年 4 月 18 日)里，这位杰出的天才清晰地略述了把地球看作谐振电路的概念(他不知道电离层)，估算了最低谐振频率为 6 赫兹(接近理想导电球的 6.6 赫兹)、并叙述了这些低频波的产生和检测．感谢费希(V. L. Fitch)告诉我这一段动人的历史．

动，并且天天改变形状，但头七个峰的平均线频率为 8, 14, 20, 26, 32, 37 和 43 赫兹．这些频率与 $5.8\sqrt{l(l+1)}$ 赫兹给出的十分接近，系数 5.8 是 0.78 乘 $c/2\pi a$（$=7.46$ 赫兹）．理论值和实验值不完全符合，这是不足为奇的，正如已经指出的，因为理想导电壁的假定跟实际情况相差很远．对头几个谐振（相当于阻尼较厉害时）来说，估算的 Q 值约为 4 到 10．阻尼对谐振频率的影响直接解释了观测值和(8.109)的差别，但是(8.103)表示的简单频率移动约为观测值的一半．不管怎样，谐振频率按 $\sqrt{l(l+1)}$ 而变化是十分明显的．

谐振腔（具有完全确定的、但有耗损的壁）的这种简单模型解释了舒曼谐振的主要特征，虽然在某些定量方面并不成功．在伽丽丝(Galejs)的一篇评论性文章[①]和她的专著里，可以找到一些更符合实际的细致模型以及对一些观测的讨论．本章末所列 *Budden* 和 *Wait* 分别写的两本书里，讨论了利用波导和谐振腔概念来处理电磁波在地球周围的传播．这里也许会引起读者的好奇心．1962 年 7 月 9 日在太平洋中的约翰斯顿岛高空，进行了一次核爆炸．这次核试验的一个结果是，在全世界范围内的电离层和辐射带中产生了可以观测到的变化．这次爆炸后，立即在法国和其他国家观测站都观察到舒曼谐振频率突然减少了 3% 到 5%，这些变化经过几个小时才消退．伽丽丝文章的图 17 中记录了这种情况．

8.10 电介质波导

8.2—8.6 节讨论了用中空金属柱体制成的波导，场只存在于波导的中空处．不过其他的波导结构也是可能的．由平行金属线组成的传输线就是一个例子．对于电磁波波导的一般要求是：能量只沿着波导

① J. Galejs, *J. Res. Nat. Bur. Standards* **69D**, 1043 (1965)．也可参看 T. Madden and W. Thompson, *Rev. Geophys.* **3**, 211 (1965)和 F. W. Chapman, D. L. Jones, J. D. W. Todd, and R. A. Challinor, *Radio Sci.* **1**, 1273(1966)．

构件流动，而不沿着垂直于波导构件的方向流动．即只在紧靠波导构件的附近才能觉察场的存在．中空波导通常满足这一要求．但是对于像平行金属线似的开放式结构来说，场扩展到离导体较远的地方，TEM模的场按 ρ^{-2} 下降，更高阶的波模则按指数下降．

如图 8.10 所示的一个电介质柱体，也可以充当波导，如果它的介电常数足够大，那么它就具有一些与中空金属波导十分相似的性质．不过，由于在这种情况下场在柱体表面上要满足完全不同的边界条件，所以在特性上两者之间存在着差别．8.2 节的一般论述在这里仍然有效，只不过场的横向分量的分布情况由两个与(8.19)相似的方程决定，一个属于柱体内部，一个属于柱体外部．

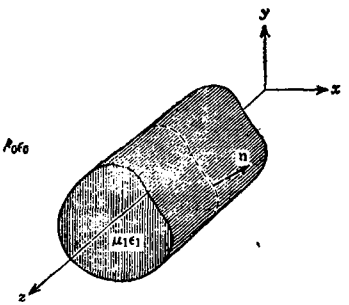


图 8.10　电介质波导的截面图．

内部

$$\left[\nabla_t^2+\left(\mu_1\epsilon_1\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)\right]\begin{Bmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{B}\end{Bmatrix}=0 \tag{8.110}$$

外部

$$\left[\nabla_t^2+\left(\mu_0\epsilon_0\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)\right]\begin{Bmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{B}\end{Bmatrix}=0 \tag{8.111}$$

假定电介质(μ_1,ϵ_1)和周围的媒质(μ_0,ϵ_0)的性质都是均匀的和各向同性的．为了使任何时刻在曲面上的任一点都满足边界条件，轴向传播常数 k 在柱体内部和外部必须相同．

通常在电介质柱体内场的横向拉普拉斯算符必须为负，使得常数

$$\gamma^2=\mu_1\epsilon_1\frac{\omega^2}{c^2}-k^2 \tag{8.112}$$

为正．但是，要求柱体外没有横向能流，就需要场按指数下降．(电介质波导内不存在 TEM 模)．因此，(8.111)中和 γ^2 等效的量必须为负．所以我们定义：

$$\beta^2=k^2-\mu_0\epsilon_0\frac{\omega^2}{c^2} \tag{8.113}$$

并要求可以接受的波导解必须满足 β^2 为正的条件(β 是实数)．

在电介质圆柱体的边界上，振荡解（内部的）必须和指数解(外部的)一致．现在的边界条件是法向的 **B**、**D** 和切向的 **E**、**H** 的连续性，而不是适用于中空导体的法向的 **B** 和切向的 **E** 为零．因为现在的边界条件比较复杂，所以除了轴对称圆柱体的特殊情形外，下面所讨论的各种场不能分成 TE 模和 TM 模．一般说来，**E** 和 **B** 的轴向分量都存在．人们有时把这样的波叫做 HE 模．

为了说明电介质波导的某些特征，我们考虑一个由介电常数为 ϵ_1 的非导磁电介质组成的半径为 a 的圆柱体，柱体外包围着介电常数为 ϵ_0 的非导磁媒质．假定场不随方位角 ϕ 而变化．于是，在柱坐标中，E_z 或 B_z 的径向方程就是贝塞耳方程：

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}+\gamma^2\right)\psi=0,\quad \rho\leqslant a\\ \left(\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}-\beta^2\right)\psi=0,\quad \rho>a\end{aligned}\right\} \tag{8.114}$$

从 3.7 节可知，满足原点和无穷远处为有限的要求的解是

$$\psi=\left\{\begin{aligned}&J_0(\gamma\rho),\quad &\rho\leqslant a\\ &AK_0(\beta\rho),\quad &\rho>a\end{aligned}\right\} \tag{8.115}$$

知道了 E_z 和 B_z 的相对大小之后，便可以从(8.23)和(8.24)求出 **E** 和 **B** 的其他分量．当场与 ϕ 无关时，场化简为：

内部

$$\left.\begin{aligned} B_\rho &= \frac{ik}{\gamma^2}\frac{\partial B_z}{\partial \rho}, \qquad B_\phi = \frac{i\epsilon_1\omega}{\gamma^2 c}\frac{\partial E_z}{\partial \rho} \\ E_\phi &= -\frac{\omega}{ck}B_\rho, \qquad E_\rho = \frac{ck}{\epsilon_1\omega}B_\phi \end{aligned}\right\} \tag{8.116}$$

对于 $\rho>a$ 的情况也有类似表式. 场可分为两组: 一组是和 B_z 有关的 (B_ρ, E_ϕ); 一组是和 E_z 有关的(B_ϕ, E_ρ). 这个事实启发我们应当试图求 TE 或 TM 波型的解,像金属波导的情形一样. 对于 TE 模来说, 场的显式是

$$\left.\begin{aligned} B_z &= J_0(\gamma\rho) \\ B_\rho &= -\frac{ik}{\gamma}J_1(\gamma\rho) \\ E_\phi &= \frac{i\omega}{c\gamma}J_1(\gamma\rho) \end{aligned}\right\} \qquad \rho \leqslant a \tag{8.117}$$

和

$$\left.\begin{aligned} B_z &= AK_0(\beta\rho) \\ B_\rho &= \frac{ikA}{\beta}K_1(\beta\rho) \\ E_\phi &= -\frac{i\omega A}{c\beta}K_1(\beta\rho) \end{aligned}\right\} \qquad \rho>a \tag{8.118}$$

这些场必须满足 $\rho=a$ 处的标准边界条件. 于是得到下面两个条件:

$$\left.\begin{aligned} AK_0(\beta a) &= J_0(\gamma a) \\ -\frac{A}{\beta}K_1(\beta a) &= \frac{J_1(\gamma a)}{\gamma} \end{aligned}\right\} \tag{8.119}$$

消去常数 A, 就得到确定 γ, β 的方程, 从而也得到了确定 k 的方程:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{J_1(\gamma a)}{\gamma J_0(\gamma a)} + \frac{K_1(\beta a)}{\beta K_0(\beta a)} = 0 \\ &\text{又从(8.112)和(8.113)可得} \\ &\gamma^2 + \beta^2 = (\epsilon_1 - \epsilon_0)\frac{\omega^2}{c^2} \end{aligned}\right\} \tag{8.120}$$

(8.120)中第一方程的两个部份曲线如图 8.11 所示, 图中两条曲线按

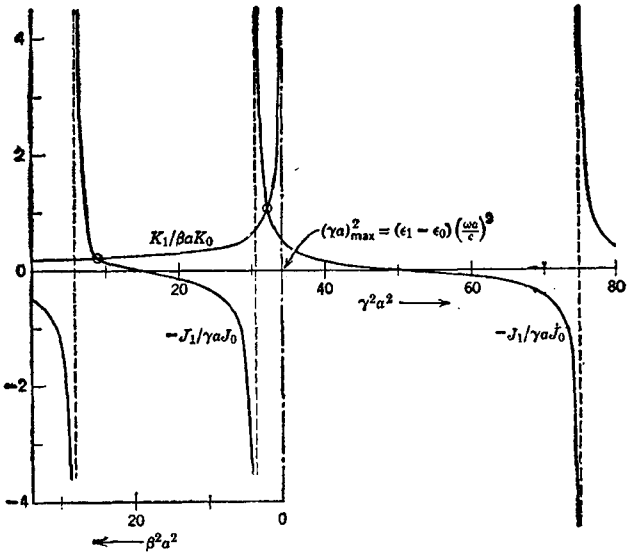


图 8.11　用作图法求电介质波导的轴向传播常数.

照(8.120)的第二方程叠加起来. 我们假定频率足够高,以致在两条曲线的交点上用圆圈标明的两种波模都存在. 竖直的渐近线由 $J_0(x)=0$ 的根给出. 假如 γa 的极大值小于第一个根($x_{01}=2.405$),那么当 β 为实数时,两条曲线就没有交点. 所以,$TE_{0,n}$ 波的最低"截止"频率是

$$\omega_{01}=\frac{2.405c}{\sqrt{\epsilon_1-\epsilon_0}a} \tag{8.121}$$

在这频率上 $\beta^2=0$,但是轴向波数 k 仍然是实数,并且等于在自由空间中的值$\sqrt{\epsilon_0}\omega/c$. 当频率低于这个"截止"频率时,系统就不再起波导的作用,而成为沿径向辐射能量的天线了. 当频率远高于截止频率时,β 和 k 是同数量级的,而且只要 ϵ_1 和 ϵ_0 不是几乎相等,β 和 k 就比 γ 大得多.

对于 TM 模来说,(8.120)的第一个方程应换成

$$\frac{J_1(\gamma a)}{\gamma J_0(\gamma a)}+\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1}\frac{K_1(\beta a)}{\beta K_0(\beta a)}=0 \tag{8.122}$$

显然，TM 波保留着图 8.11 所示的全部定性特征. $TM_{0,n}$ 波的最低“截止”频率显然和 $TE_{0,n}$ 波的相等. 当 $\epsilon_1 \gg \epsilon_0$ 时，(8.122)和图 8.11 表明:除了具有最大的 γ(最小的 β)的波模外，传播常数由 $J_1(\gamma a)\simeq 0$ 决定. 这个方程也正是确定金属波导中 TE 波的传播常数的方程. 电介质波导的 TM 模和中空金属波导的 TE 模等效的原因，可以归结为麦克斯韦方程组在 **E** 和 **B** 互换下的对称性(适当改变符号，并附加因子 $\sqrt{\mu\epsilon}$)，以及金属表面上法向的 **B** 为零和电介质表面上法向的 **E** 几乎为零(由于法向 **D** 的连续性以及 $\epsilon_1 \gg \epsilon_0$)这两个条件的对应性质.

如果 $\epsilon_1 \gg \epsilon_0$，那么从(8.112)和(8.113)可知，除了在截止频率附近外，外部的衰减常数 β 远大于 γ. 说明场并没有显著地扩展到电介质柱体之外. 图 8.12 定性地表示了 $TE_{0,1}$ 模的场的分布情况. 其他波模的情况也与此相似. 正如前面提到的，对于与 ϕ 角有关的场来说，它的各种波模都有 **E** 和 **B** 的纵向分量. 虽然这种情况的数学比较复杂（见习题 8.8)，但波传播的各种定性特征(沿柱体的短波长、柱体外的场迅速下降等等)都和轴对称的波模相同.

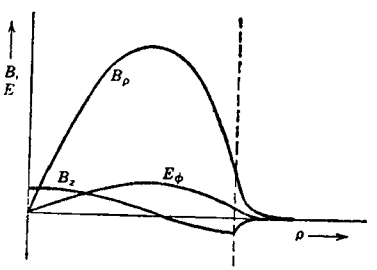


图 8.12 电介质波导中 $TE_{0,1}$ 模的场的径向变化 当 $\epsilon_1 \gg \epsilon_0$ 时，场多半局限在电介质内部.

除了某些特殊应用以外，还没有用电介质波导来传播微波，理由之一是难以获得在微波频率上能量损失足够低的合适的电介质. 在光学频率上的一些应用中，将许许多多很细的电介质丝(每根电介质丝都敷

上薄薄一层折射率很低的材料)紧扎在一起，成为一种传像装置①. 这些丝的直径足够小(~10 微米)，以致波导的概念仍然可用，虽然传播的波通常是几种波模的混合波.

8.11 简正模的展开；波导中定域源产生的场

已知波导截面和频率 ω，中空波导中的电磁场就用特征模或简正模的一个无穷集来描述，这些波模由 TE 波和 TM 波组成，每个波有其特征截止频率. 对任一给定的有限频率来说，只有有限个波模可以传播，其余均是截止波模或消失波模. 离波导中任何源、障碍物或孔很远的地方，场是比较简单的，只有传播波模(往往只有一个波模)以可察知的振幅出现. 但是，在源或障碍物附近，为了正确描述场，必须把许多波模，包括传播波模和消失波模，叠加在一起. 截止波模只在源或障碍物附近才有相当大的振幅，它们的效应沿着一段距离衰减下来，这段距离用它们波数虚部的倒数来量度. 关于波导中源、障碍物或孔的一个典型的实际问题是：尽可能准确地求出源等附近的场的解；把这些场按波导的所有简正模展开；并确定描述远处场的一个或一个以上传播波模的振幅.

(a) 正交归一模

为了有助于处理场按简正模展开，对一给定波模的场的记号加以标准化是有益的，这时把 TE 和 TM 模同等看待，并引进一种方便的归一化. 设下角标 λ 或 μ 表示一给定波模. 我们可以认为 $\lambda=1,2,3,\cdots$ 表示按某种任意顺序(例如，按截止频率的增加)排列的一些波模. 下角标 λ 表示 TE 波的波模，也表示 TM 波的波模. 沿正 z 方向传播的 λ 波模的场写作

---

① 有关早期的定性讨论，参看 B. O'Brien, *Physics Today*, **13**, 52(1960)，有关数学分析和实际应用的论述，参看 N. S. Kapany and J. J. Burke, *Optical Waveguides*, Academic, New York (1972).

$$\mathbf{E}_\lambda^{(+)}(x,y,z)=[\mathbf{E}_\lambda(x,y)+\mathbf{E}_{z\lambda}(x,y)]e^{ik_\lambda z}$$
$$\mathbf{H}_\lambda^{(+)}(x,y,z)=[\mathbf{H}_\lambda(x,y)+\mathbf{H}_{z\lambda}(x,y)]e^{ik_\lambda z} \tag{8.123}$$

式中 $\mathbf{E}_\lambda,\mathbf{H}_\lambda$ 是(8.31)和(8.33)给出的横向场，而 $\mathbf{E}_{z\lambda},\mathbf{H}_{z\lambda}$ 是纵向场. 波数 k_λ 由(8.37)给出，对无损失波导中的传播波模来说，k_λ 取正实数. 当然，我们已知时间依赖关系为 $e^{-i\omega t}$. 对沿负 z 方向传播的波来说，场是

$$\mathbf{E}_\lambda^{(-)}=[\mathbf{E}_\lambda-\mathbf{E}_{z\lambda}]e^{-ik_\lambda z}$$
$$\mathbf{H}_\lambda^{(-)}=[-\mathbf{H}_\lambda+\mathbf{H}_{z\lambda}]e^{-ik_\lambda z} \tag{8.124}$$

根据在每个传播方向上都要满足 $\nabla\cdot\mathbf{E}=\nabla\cdot\mathbf{H}=0$ 的要求，以及沿传播方向能流为正的要求，我们就可以明白(8.124)中的正负号与(8.123)相比时的异同. (8.124)的场与(8.123)的场的相对总位相是任意的. 对这两个传播方向来说，这里所选的 $z=0$ 处横向电场相同，正如对传输线上的电压波所作的选择一样.

(8.123)和(8.124)中的场的一种方便的归一化是这样进行的：取横向电场 $\mathbf{E}_\lambda(x,y)$ 为实量，并要求

$$\int\mathbf{E}_\lambda\cdot\mathbf{E}_\mu da=\delta_{\lambda\mu} \tag{8.125}$$

式中积分遍历波导截面.[这里我们认为不同波模的正交性是理所当然的. 其证明留作习题（习题 8.9），由这个证明导出了下列其它归一化积分.]由电场和磁场的关系(8.31)可知，(8.125)意味着

$$\int\mathbf{H}_\lambda\cdot\mathbf{H}_\mu da=\frac{1}{Z_\lambda^2}\delta_{\lambda\mu} \tag{8.126}$$

第 λ 波模对时间平均的功率流是

$$\frac{c}{8\pi}\int(\mathbf{E}_\lambda\times\mathbf{H}_\mu)\cdot\mathbf{e}_3\,da=\frac{c}{8\pi Z_\lambda}\delta_{\lambda\mu} \tag{8.127}$$

我们也可以证明，如果(8.125)成立，则纵向分量按下列表式归一化：

$$\text{TM 波：}\int E_{z\lambda}E_{z\mu}da=\frac{-\gamma_\lambda^2}{k_\lambda^2}\delta_{\lambda\mu}$$
$$\text{TE 波：}\int H_{z\lambda}H_{z\mu}da=\frac{-\gamma_\lambda^2}{k_\lambda^2Z_\lambda^2}\delta_{\lambda\mu} \tag{8.128}$$

作为这些归一场的一个明显例子，我们列出矩形波导中TE和TM模的横向电场以及 H_z 和 E_z. 波模指标 λ 实际上是两个指标(m,n).归一场是

$$\text{TM 波:}\quad E_{xmn}=\frac{2\pi m}{\gamma_{mn}a\sqrt{ab}}\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$E_{ymn}=\frac{2\pi n}{\gamma_{mn}b\sqrt{ab}}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\qquad(8.129)$$

$$E_{zmn}=\frac{-2i\gamma_{mn}}{k_\lambda\sqrt{ab}}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\text{TE 波:}\quad E_{xmn}=\frac{-2\pi n}{\gamma_{mn}b\sqrt{ab}}\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$E_{ymn}=\frac{2\pi m}{\gamma_{mn}a\sqrt{ab}}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\qquad(8.130)$$

$$H_{zmn}=\frac{-2i\gamma_{mn}}{k_\lambda Z_\lambda\sqrt{ab}}\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

其中 γ_{mn} 由(8.43)给出. 借助于 (8.31) 可以得到横向磁场分量. 对TM模来说，m 和 n 的最低值为1；但对TE模来说，$m=0$ 或 $n=0$是容许的. 如果 $m=0$ 或 $n=0$，那末必须在 (8.130)右边乘以 $1/\sqrt{2}$，对归一化加以修正.

(b) 任意场的展开

具有时间依赖关系 $e^{-i\omega t}$ 的一个任意电磁场，可以按简正模的场(8.123) 和(8.124)展开①. 直接讨论沿两个方向传播的总场量是有用的. 于是任意场可写成以下形式:

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}^{(+)}+\mathbf{E}^{(-)},\quad \mathbf{H}=\mathbf{H}^{(+)}+\mathbf{H}^{(-)}\qquad(8.131)$$

式中

$$\mathbf{E}^{(\pm)}=\sum_\lambda A_\lambda^{(\pm)}\mathbf{E}_\lambda{}^{(\pm)},\quad \mathbf{H}^{(\pm)}=\sum_\lambda A_\lambda^{(\pm)}\mathbf{H}_\lambda{}^{(\pm)}\qquad(8.132)$$

① 我们省略简正模的集的完全性的数学问题. 用傅里叶叠加来处理更一般的时间依赖关系，也只提一下.

逐一定出展开系数 $A_\lambda^{(+)}$ 和 $A_\lambda^{(-)}$，就确定了波导中各处的场．这些展开系数可以根据边界条件或源条件用各种不同方法求出．下面是一个有用的定理：

指明一个平面($z=$常数)内 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的诸横向分量，就唯一地确定了波导中各处的场．

证明：在这里选取 $z=0$ 的平面，并不会失去其普遍性．然后根据(8.131)、(8.132)、(8.123)和(8.124)，横向场是

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_t &= \sum_{\lambda'}(A_{\lambda'}^{(+)}+A_{\lambda'}^{(+)})\mathbf{E}_{\lambda'}\\ \mathbf{H}_t &= \sum_{\lambda'}(A_{\lambda'}^{(+)}-A_{\lambda'}^{(-)})\mathbf{H}_{\lambda'}\end{aligned} \tag{8.133}$$

如果将第一个方程两边和 $\mathbf{E}_\lambda$ 的标积算出，再遍历波导截面积分，那末正交性条件(8.125)表明

$$A_\lambda^{(+)}+A_\lambda^{(-)}=\int \mathbf{E}_\lambda\cdot\mathbf{E}_t da$$

同理，利用(8.126)，由(8.133)的第二个方程得到

$$A_\lambda^{(+)}-A_\lambda^{(-)}=Z_\lambda^2\int \mathbf{H}_\lambda\cdot\mathbf{H}_t da$$

因此诸系数 $A_\lambda^{(\pm)}$ 由下式给出：

$$A_\lambda^{(\pm)}=\frac{1}{2}\int(\mathbf{E}_\lambda\cdot\mathbf{E}_t\pm Z_\lambda^2\mathbf{H}_\lambda\cdot\mathbf{H}_t)da \tag{8.134}$$

上式表明，如果在 $z=0$ 处的 $\mathbf{E}_t$ 和 $\mathbf{H}_t$ 给定，则展开式(8.131)和(8.132)中的诸系数就确定．简正模展开的完全性保证了对所有 z 的表示式的唯一性．

(c) *定域源产生的场*

一个波导中的场可以由一个定域源产生，如图 8.13 所示．假定电流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{x},t)$ 按 $e^{-i\omega t}$ 随时间而变化．由于振荡电流，场往左和往右传播．在源的外面，比方说，在平面 S_+ 上或在其右边，将只有按 $e^{ik_\lambda z}$

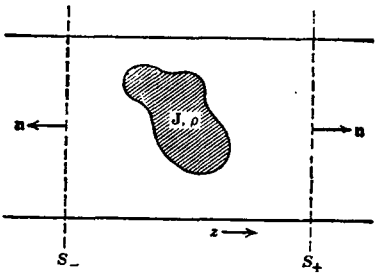


图 8.13 波导中定域源的示意图. 波导壁连同平面 S_+ 和 S_- 确定含源的体积.

变化的场，并且电场可以写成

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}^{(+)}=\sum_{\lambda'}A_{\lambda'}^{(+)}\mathbf{E}_{\lambda'}^{(+)} \tag{8.135}$$

对 H 来说，也有一个相应的表式. 在平面 S_- 上或在其左边，场都按 $e^{-ik_\lambda z}$ 而变化，且电场是

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}^{(-)}=\sum_{\lambda'}A_{\lambda'}^{(-)}\mathbf{E}_{\lambda'}^{(-)} \tag{8.136}$$

为了用 J 定出诸系数 $A_\lambda^{(\pm)}$，我们考虑坡印廷定理的能流方程的一种形式. 由 $\mathbf{E}_\lambda^{(\pm)}$、$\mathbf{H}_\lambda^{(\pm)}$ 的无源麦克斯韦方程组和 E、H 满足的有源麦克斯韦方程组得到下列恒等式:

$$\frac{c}{4\pi}\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}_\lambda^{(\pm)}-\mathbf{E}_\lambda^{(\pm)}\times\mathbf{H})=\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}_\lambda^{(\pm)} \tag{8.137}$$

(8.137)遍及一个由闭合曲面 S 所包围的体积 V 积分，通过散度定理，导出以下结果:

$$\frac{c}{4\pi}\int_S(\mathbf{E}\times\mathbf{H}_\lambda^{(\pm)}-\mathbf{E}_\lambda^{(\pm)}\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{n}da$$

$$=\int_V\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}_\lambda^{(\pm)}d^3x \tag{8.138}$$

式中 n 为外法向单位矢量. 现在我们把体积 V 选为波导内壁和图 8.13 的两个平面 S_+、S_- 所包围的体积. 假定波导壁为理想导电的，其内

不含源或孔，则遍历壁的这一部分面积分等于零．只有遍历 S_+ 和 S_- 的积分对(8.138)左边有贡献．为明确起见，我们在(8.138)中选取下面一行的正负号，并把(8.135)代入遍历 S_+ 的积分：

$$\frac{c}{4\pi}\int_{S_+}=\frac{c}{4\pi}\sum_{\lambda'}A_{\lambda'}^{(+)}\int_{S_+}\mathbf{e}_3\cdot(\mathbf{E}_{\lambda'}^{(+)}\times\mathbf{H}_{\lambda}^{(-)}-\mathbf{E}_{\lambda}^{(-)}\times\mathbf{H}_{\lambda'}^{(+)})da$$

利用场的表式(8.123)、(8.124)和归一化表式(8.127)，上式变成

$$\frac{c}{4\pi}\int_{S_+}=-\frac{c}{2\pi Z_\lambda}A_\lambda^{(+)} \tag{8.139}$$

(8.138)中遍历 S_- 的这一部分面积分是

$$\frac{c}{4\pi}\int_{S_-}=-\frac{c}{4\pi}\sum_{\lambda'}A_{\lambda'}^{(-)}\int_{S_-}\mathbf{e}_3\cdot(\mathbf{E}_{\lambda'}^{(-)}\times\mathbf{H}_{\lambda}^{(-)}-\mathbf{E}_{\lambda}^{(-)}\times\mathbf{H}_{\lambda'}^{(-)})da$$

可以很容易证明上式等于零．因此，当在(8.138)中选下面一行正负号时，只有平面 S_+ 对(8.138)左边有贡献．同理，当在(8.138)中选上面一行正负号时，只有遍历 S_- 的积分对(8.138)左边有贡献．所得的结果与(8.139)相同，只不过把(8.139)中的 $A_\lambda^{(+)}$ 用 $A_\lambda^{(-)}$ 替换．将(8.139)代入(8.138)左边，就定出诸系数 $A_\lambda^{(\pm)}$ 为

$$A_\lambda^{(\pm)}=-\frac{2\pi Z_\lambda}{c}\int_V\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}_\lambda^{(\mp)}d^3x \tag{8.140}$$

式中简正模 λ 的场 $E_\lambda^{(\mp)}$ 按(8.125)归一化．要注意：沿正 z 方向传播的振幅来自电流与描写负 z 方向传播的波模场之标积的积分，反之亦然．

当两平面 S_+ 和 S_- 之间波导壁上有孔（起着源或壑的作用）存在时，问题也很简单．由(8.138)看出，在这样一些情况中(8.140)修改成

$$A_\lambda^{(\pm)}=\frac{Z_\lambda}{2}\int_{孔}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}_\lambda^{(\mp)})\cdot\mathbf{n}da-\frac{2\pi Z_\lambda}{c}\int_V\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}_\lambda^{(\mp)}d^3x \tag{8.141}$$

式中 $\mathbf{E}$ 是孔内精确切向电场，$\mathbf{n}$ 是外法向单位矢量．

将(8.140)应用于波导中波的激发，留作本章习题．下一章(9.5

节)里将研究比波长小的源的问题，并且通过源的电偶极矩和磁偶极矩对第 λ 波模的电场和磁场的耦合，导出(8.140)的近似表式. 9.5 节里也讨论了小孔对波导的耦合. 在微波工程中，波导或谐振腔内源和振荡激发的课题是实用上相当重要的课题. 这个课题有大量文献. *Collin* 一书第五章和第七章是最新的参考文献之一.

8.12 平面隔膜的反射和透射；变分近似法

把波导当作微波系统里电磁能和位相信息的载体，在这种实际应用中，不连续性是以障碍物、电介质板、隔膜和壁孔的形式出现的. 第二次世界大战期间，大批人力物力投入雷达研究，从而导致了求解这些复杂边值问题的精巧数学方法的发展. 本节举例说明最简单的(却是重要的)一类不连续性，即垂直于波导轴的、厚度可忽略不计的平面隔膜或窗. 通常只有用数值计算才能得到这些问题的精确解. 但是，有一些近似方法，通过适当的努力，能得到可靠的答案，其中最著名的是薛温格(Julian Schwinger)①发展的变分法.

纽约麦克格罗-希尔图书有限公司出版的马萨诸塞理工学院辐射实验室丛书中，刊录了1940至1945年期间美国的雷达科学研究. *Montgomery, Dicke and Purcell* 的书中，阐述了微波电路的一般物理原理，而 *Marcuvitz* 的那部著作概要地叙述了关于波导中不连续性的各种结果. 本章末列出了上面这些参考书以及别的参考文献.

我们要研究的特殊类型的不连续性如图 8.14 所示.

隔膜上有虚构的几个孔，旨在使读者想到：我们的论证，在厚度忽略不计的平面横窗的范围内是普遍有效的. 如果波导在这样一个频

① 正如已发现的薛温格的其它开创性工作一样，战时关于波导的论述，仅以未发表过的、一般不能利用的讲演笔记的形式长期保存下来. 经过近四分之一世纪后，才部分地纠正了这种情况，出版了他在马萨诸塞理工学院辐射实验室的讲演笔记，此书列在本章末的参考书中.

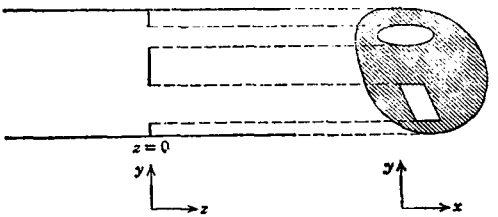


图 8.14　以厚度可忽略不计的平面横隔膜的形式出现的不连续性．左边是侧面图，右边是平面图．

率上工作，使得只有最低波模可以传播，那末在远离不连续区域的地方，只要考虑该最低波模的入射场、反射场和透射场就够了．可以用传输线理论的语言来描写不连续性的诸效应，这时隔膜相当于频率相倚分路阻抗．当然，在隔膜附近，必须把消失波模的效应考虑在内，以便满足隔膜上的边界条件．

假定只有最低波模($\lambda=1$)可以传播，又假定有一个最低波模的、单位振幅(按上节的意义)的波从左边入射进来，则 $z<0$ 处的电场可以写成

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_1^{(+)}+R\mathbf{E}_1^{(-)}+\sum_{\lambda=2}^{\infty}A_\lambda^{(-)}\mathbf{E}_\lambda^{(-)} \tag{8.142}$$

另外，磁场 $\mathbf{H}$ 也可写成一个相似的表式．波模场(8.123)和(8.124)已经明显地分成传播部分和截止部分．场 $E_1^{(\pm)}$ 按 $e^{\pm ikz}$ 随 z 而变化，而 $\lambda\geqslant 2$ 的场 $E_\lambda^{(-)}$ 按 $e^{k_\lambda z}$ 而变化，所以只在 $z=0$ 附近才可察觉．当 $z>0$ 时，只能出现沿正 z 方向前进的波．于是 $z>0$ 处的电场是

$$\mathbf{E}=T\mathbf{E}_1^{(+)}+\sum_{\lambda=2}^{\infty}A_\lambda^{(+)}\mathbf{E}_\lambda^{(+)} \tag{8.143}$$

系数 R 和 T 是最低波模的反射波和透射波的振幅．如果波导壁和隔膜表面是理想导电的，则该系统没有损耗．这就是说 $1+R=T$．从数学上算出(8.142)和(8.143)中的系数，就可以证明这个结果．作出(8.142)

两边与横向波模场 $\mathbf{E}_\lambda$ 的标积，然后遍历 $z=0^-$ 处的波导截面积分，再利用正交关系(8.125)，遂得

$$1+R=\int_{z=0^-}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}_1 da$$

$$A_\lambda^{(-)}=\int_{z=0^-}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}_\lambda da \qquad (\lambda>1)$$

同理，由(8.143)得

$$T=\int_{z=0^+}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}_1 da$$

$$A_\lambda^{(+)}=\int_{z=0^+}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}_\lambda da \qquad (\lambda>1)$$

如果隔膜表面是理想导电的，那末除了孔内以外，切向电场等于零，上列积分只遍历这些孔的面积．因为切向电场在 $z=0$ 处诸孔内是连续的，所以在 $z=0^+$ 处求出的积分和在 $z=0^-$ 处求出的积分没有差别．因此，系数由下列两式给出：

$$1+R=T=\int_{孔}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}_1 da \tag{8.144}$$

$$A_\lambda^{(+)}=A_\lambda^{(-)}=\int_{孔}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}_\lambda da \tag{8.145}$$

如果我们能求出孔内的精确电场，或其某一合理的近似值，那末就可以利用(8.144)确定反射波和透射波的振幅．在某些情况下，我们可以利用静止场和保形映射方法．任何一种近似方案一旦与薛温格的稳定或变分表式结合起来，就会得到改进．用这些薛温格表式导出一个较复杂的结果来代替简单形式(8.144)，这个结果涉及对所有消失波型求的一个和，但对于场偏离其真值的变分是稳定的，所以适合用于场的试验值比较缺乏的情况下．因为要用到许多有关知识，所以我们的推导对初学者来说不是一目了然的．我们先讨论孔内切向电场和切向磁场边界条件的明显形式．切向 $\mathbf{E}$ 和切向 $\mathbf{H}$ 在孔内是连续的．根据波

模场(8.123)、(8.124)和展开式(8.142)、(8.143)，横向电场的连续性仿佛是

$$(1+R)\mathbf{E}_1+\sum_{\lambda=2}^{\infty}A_\lambda^{(-)}\mathbf{E}_\lambda=T\mathbf{E}_1+\sum_{\lambda=2}^{\infty}A_\lambda^{(+)}\mathbf{E}_\lambda \tag{8.146}$$

鉴于(8.144)和(8.145)，不出所料，上式是一个明显的等式．跟上式相对照，写出横向磁场的对应方程：

$$(1-R)\mathbf{H}_1-\sum_{\lambda=2}^{\infty}A_\lambda^{(-)}\mathbf{H}_\lambda=T\mathbf{H}_1+\sum_{\lambda=2}^{\infty}A_\lambda^{(+)}\mathbf{H}_\lambda \tag{8.147}$$

方程(8.146)在波导的整个截面积上成立，这是由于展开系数(8.144)和(8.145)确保切向场在隔膜表面上等于零，但是(8.147)只在孔内成立．在隔膜的任一表面上有电流流动，就不要求切向 $\mathbf{H}$ 的连续性．

由(8.31)，横向波模场 $\mathbf{H}_\lambda$ 可以写成

$$\mathbf{H}_\lambda=Y_\lambda\mathbf{e}_3\times\mathbf{E}_\lambda \tag{8.148}$$

式中 $Y_\lambda=Z_\lambda^{-1}$ 是波导纳，且由(8.32)[其中 $k=k_\lambda$]的倒数给出．于是，孔内切向 $\mathbf{H}$ 连续性表式(8.147)可以用电场写成

$$(1-R)Y_1\mathbf{E}_1-\sum_{\lambda=2}^{\infty}Y_\lambda A_\lambda^{(-)}\mathbf{H}_\lambda=TY_1\mathbf{E}_1+\sum_{\lambda=2}^{\infty}Y_\lambda A_\lambda^{(+)}\mathbf{E}_\lambda$$

利用关系式 $T=1+R$ 和(8.145)，上式可以改写成下式：

$$-2RY_1\mathbf{E}_1=2\sum_{\lambda=2}^{\infty}Y_\lambda\mathbf{E}_\lambda\int_{孔}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}_\lambda da \tag{8.149}$$

施行下列两步运算后，就得变分结果．第一步运算是，求(8.149)两边与精确场 $\mathbf{E}$ 的标积，接着遍历孔求积分．利用(8.144)，得

$$-2R(1+R)Y_1=2\sum_{\lambda=2}^{\infty}Y_\lambda\left[\int_{孔}da\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}_\lambda\right]^2$$

第二(不是如此明显的)步运算是，上一方程两边除以 $Y_1(1+R)^2$，在右边分母中采用(8.144)的右边．结果为

$$Y_d=\frac{2\sum_{\lambda=2}Y_\lambda\left[\int_{\mathfrak{A}}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}_\lambda da\right]^2}{Y_1\left[\int_{\mathfrak{A}}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}_1 da\right]^2} \tag{8.150}$$

式中

$$Y_d=\frac{-2R}{1+R} \tag{8.151}$$

用传输线语言来说是隔膜的相对分路导纳①. 可以证明(8.150)对于电场 $\mathbf{E}$ 偏离其真值的一阶变分是稳定的. (8.150)又是 $\mathbf{E}$ 的齐次式，所以与尝试函数的归一化无关. 通常，极值不是一个极大值或一个极小值. 其理由是，对截止波模求和中诸项的正负号通常不是唯一的. 由(8.32)可以看到，因为对截止波模来说，$k_\lambda=i\kappa_\lambda$，式中 κ_λ 为正实数，所以波导纳的位相依赖于波模的种类:

$$Y_\lambda=\begin{cases}-i|Y_\lambda| & (\text{TM})\\ +i|Y_\lambda| & (\text{TE})\end{cases}$$

如果入射波和隔膜的几何形状是这样的，使得被激发的波模只有一种，那末(8.150)中的和就是由相对正负号全部相同的一些元素组成，并且用 $\mathbf{E}$ 的一个尝试函数求得的 Y_d 结果将是导纳值的一个真上(或下)界. 否则，其结果就不是一个界值，并且用一个改进的 $\mathbf{E}$ 的尝试函数可以求得一个较小或较大的 Y_d 值. 如果 TM 模的贡献在求和中占主导地位，则 Y_d 将为负虚数. 于是，阻抗 Z_d 是正虚数. 当我们记住用 $e^{-i\omega t}$ 而不用 $e^{j\omega t}$ 时，可以认为阻抗 Z_d 是电容性的. 如果 TE 模占主导地位，则 Y_d 是正虚数；隔膜是一个电感性障碍.

为了某些用途，把(8.150)改写成一种稍微不同的形式是有益的，这种形式包含下式定义的并矢格临函数:

$$\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(xy|x'y')=2\sum_{\lambda=2}^{\infty}Y_\lambda\overleftarrow{\mathbf{E}}_\lambda(x,y)\overrightarrow{\mathbf{E}}_\lambda(x',y') \tag{8.152}$$

---

① 不熟悉传输线理论的读者要很好掌握反射振幅、透射振幅与传输线导纳或阻抗之间的关系. 可参看 *Ramo, Whinnery, and Van Duzer* 一书的第一章和第十一章.

右边波模场上方的箭号表示矢量运算的允许方向. 借助这个格临函数，(8.150)可以写成

$$Y_d=\frac{\int dxdy\int dx'\,dy'\mathbf{E}(x,y)\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(xy|x'y')\cdot\mathbf{E}(x',y')}{Y_1\left[\int dxdy\,\mathbf{E}(x,y)\cdot\mathbf{E}_1(x,y)\right]^2} \tag{8.153}$$

在某些问题里，可以(至少近似地)算出(8.152)或其等效形式中对波模的求和，剩下要算的仅仅是(8.153)中的积分，如果需要的话，还可以进行数值运算. 限于篇幅我们不作详细讨论. 关于几个特例的算法，读者可以参看 Collin 一书的第八章和本章末援引的其它参考文献. 一两个简单情况，则作为习题处理.

在变分原理(8.150)的推导中，用电场来消去边界条件(8.147)中的磁场. 另一种方法用 $\mathbf{H}_\lambda$ 消去(8.146)中的 $\mathbf{E}_\lambda$. 将$(1+R)$和 $A_\lambda^{(-)}$ 作为磁场遍历 $z=0^-$ 处波导截面的积分[根据(8.147)的左边]，以及将 T 和 $A_\lambda^{(+)}$ 作为遍历 $z=0^+$ 处波导截面的积分，就可以写成类似于(8.144)和(8.145)的两个表式. 这时，通过完全相似于上述的推导，遂得隔膜分路阻抗 $Z_d=Y_d^{-1}$ 的变分表式:

$$Z_d=\frac{\frac{1}{2}\sum_{\lambda=2}^{\infty}Z_\lambda\left[\int\mathbf{K}\cdot\mathbf{E}_\lambda da\right]^2}{Z_1\left[\int\mathbf{K}\cdot\mathbf{E}_1 da\right]^2} \tag{8.154}$$

式中

$$\mathbf{K}=\frac{c}{4\pi}\mathbf{e}_3\times[\mathbf{H}(z=0^+)-\mathbf{H}(z=0^-)] \tag{8.155}$$

是隔膜上总面电流密度. (8.154)中的积分显然只遍历隔膜表面，因而与(8.150)中的积分是互补的. 把 Y_d 和 Z_d 的两个变分原理合并起来，得到的极限值接近于 Y_d 的精确值，虽然一个表式中对 λ 求和的快收敛也许意味着另一表式中对 λ 求和的慢收敛.

8.13 矩形波导中一块平行于电场的平薄板条的阻抗

作为运用上节变分法的一个简单例子，我们考虑一块横放的理想导电平薄板条引起的反射，这板条如图 8.15 所示.板条宽度为d，放在x-y平面内，使之平行于传播的 $TE_{1,0}$ 模的电场，并令其中线位置为$x=x_0$. 几何条件是这样的，使得只有 $TE_{m,0}$ 模被激发. 因此，波模场由$n=0$的(8.130)给出；只有E_y、H_z和H_x不等于零. 根据阻抗表式 (8.154) 进行计算. 利用(8.154)的齐次特性消去分子分母中的不必要因子，我们得

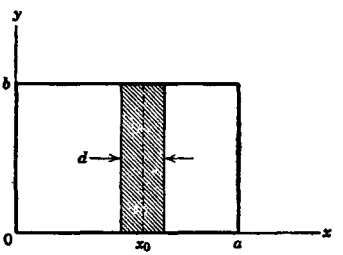


图 8.15 矩形波导中平行于电场的电感性平薄板条.

$$Z_d=-\frac{ia}{\lambda_g}\sum_{m=2}^{\infty}\left(m^2-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^{-1/2}\left[\frac{\int dx K(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)}{\int dx K(x)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)}\right]^2 \tag{8.156}$$

式中 $\lambda_g=2\pi/k_1$ 是频率为ω时波导中的波长，$\omega_1=\pi c/a$ 是 $TE_{1,0}$ 模的截止频率，$K(x)$ 是板条上的面电流（沿 y 方向）. 按我们的习惯，因子$-i$ 表示板条起着电感性分路阻抗的作用[在电工学里，把所有公式中的 i 用 $-j$ 来代替].

任何一种比较合理的面电流 $K(x)$形式将给出 Z_d 的一个近似值，其准确度通常达到百分之十或百分之二十. 只要细心地运算，就可以得到相当好的结果. 最简单的假定是，整个板条上的 $K(x)$为常数. 其计算留作本章习题. 如果知道 $K(x)$ 在板条边缘的特性，则能求得非常好的近似值. 2.11 节里已经证明：薄板边缘场具有$(x)^{-1/2}$型的奇异性，这里 x 是从边缘算起的距离. 倘若把这种特性计入 $K(x)$的尝试

形式，可以预料，Z_d 的近似值会得到改进．为简单起见，我们考虑 $x_0=a/2$．对这样一块放在中心的板条来说，$K(x)$对中点是对称的，(8.156)只含 $m=1,3,5,\cdots$．这时(8.156)中的典型积分是

$$I_m=2\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\int_0^{d/2}K(x')\cos\left(\frac{m\pi x'}{a}\right)dx' \tag{8.157}$$

式中 $x'=x-a/2$．为了把板条边缘的真正特性考虑进去，我们写

$$K(x')=\frac{\bar{K}(x')}{\sqrt{\frac{d^2}{4}-x'^2}} \tag{8.158}$$

式中 $\bar{K}$ 在 $x'=\pm d/2$处是有限的，且 $\bar{K}$ 是 x' 的偶函数．替换变数，令 $x=(d/2)\cos\theta$，(8.157)变成

$$I_m=2\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\int_0^{\pi/2}\bar{K}(\theta)\cos\left(\frac{m\pi d}{2a}\cos\theta\right)d\theta$$

最简单的近似是 $\bar{K}=1$．这时，除了一个常数外，这积分就是零阶贝塞耳函数的泊松公式．于是，

$$I_m=\pi\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)J_0\left(\frac{m\pi d}{2a}\right) \tag{8.159}$$

$\bar{K}(\theta)$ 的N个参数变分尝试函数由一个按 $\sin^2\theta$ 的幂展开的有限多项式[相当于一个按$(d^2/4-x^2)$的幂的展开式]给出：

$$\bar{K}(\theta)=\sum_{k=0}^{N}b_k(\sin^2\theta)^k \tag{8.160}$$

其中 $b_0=1$．对这个尝试函数来说，I_m 由下式给出：

$$I_m=\pi\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\sum_{k=0}^{N}(2k-1)!!b_k\left(\frac{2a}{m\pi d}\right)^kJ_k\left(\frac{m\pi d}{2a}\right) \tag{8.161}$$

我们可以把上式代入(8.156)，并将所得的结果对系数 b_k 的变分求极小值．这里只考虑基于 (8.160) 中第一项的简单表式(8.159)．这时，不连续区域的阻抗由下式近似给出：

$$Z_d \simeq -\frac{ia}{\lambda_g}\frac{1}{J_0^2\left(\frac{\pi d}{2a}\right)}\sum_{m=3,5,\cdots}^{\infty}\frac{J_0^2\left(\frac{m\pi d}{2a}\right)}{\sqrt{m^2-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}}} \tag{8.162}$$

根据贝塞耳函数的渐近式(3.91)可以看到：除了 d/a 非常小之外，当 m 很大时，级数中第 m 项按 m^{-2} 变化，所以级数相当快收敛．对于典型值 $d/a=0.25$，(8.162)的数值计算给出：当 $\omega/\omega_1=1$ 时，$(i\lambda_g Z_d/a)=0.259$；当 $\omega/\omega_1=2$ 时，$(i\lambda_g Z_d/a)=0.306$．由 *Marcuvitz* 书的图 5.2.8 得到的对应值分别为 0.254 和 0.288，把这两个值与前面的两个值加以比较．$\bar{K}=1$ 的尝试函数(8.158)估算的阻抗在截止频率时只高出 2%，在 $\omega/\omega_1=2$ 时只高出 6%．而假定 $K=$常数(习题 8.12)给出的值，在 $d/a=0.25$ 的情况下，分别比 *Marcuvitz* 的两个值大 15% 和 24%．用级数(8.160)作精确的变分计算，可以进一步改进阻抗估算值．

当 d/a 的值很小时，(8.156)中的级数收敛很慢．有一种方便的办法，在积分之前先对级数求和，从而得到像(8.153)那样的包含一个格临函数的表式．对于任意的 ω，级数不能累加成有限形式，但可以把阻抗写成两项，即静态值($\omega=0$)加上一个很快收敛的级数，后者作为修正项：

$$Z_d = Z_d^{(0)} + \Delta Z_d \tag{8.163}$$

式中

$$\frac{i\lambda_g}{a}Z_d^{(0)} = \frac{\int dx\int dx' K(x)G(x,x')K(x')}{\left[\int dx K(x)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]^2} - 1 \tag{8.164}$$

和

$$\frac{i\lambda_g}{a}\Delta Z_d = \sum_{m=2}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{m^2-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}}} - \frac{1}{m}\right]\left[\frac{\int dx K(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)}{\int dx K(x)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)}\right]^2 \tag{8.165}$$

当m很大时，(8.165)中的系数趋于$\omega^2/2\omega_1^2 m^3$，所以给出一个很快收敛的级数，其中一般只需要保留三项或四项．静态阻抗(8.164)中的格临函数是

$$G(x,x')=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi x'}{a}\right) \tag{8.166}$$

这个级数可以求和而得有限项形式①

$$G(x,x')=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin\frac{\pi}{2a}(x+x')}{\sin\frac{\pi}{2a}(x-x')}\right| \tag{8.167}$$

准确到d/a的最低次幂，对数中的分子可以看作常数，并令其中$x=x'=x_0$．于是静态阻抗(8.164)近似地是

$$\begin{aligned}\frac{i\lambda_g}{a}Z_d^{(0)}\simeq{}&\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right)\ln\left(\frac{2a}{\pi d}\sin\frac{\pi x_0}{a}\right)-1\\&+\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right)\frac{\int dx\int dx'\,K(x)K(x')\ln\left|\frac{d}{x-x'}\right|}{2\left[\int K(x)dx\right]^2}\end{aligned} \tag{8.168}$$

修正的数量级为d^2/a^2．主要的对数特性与$K(x)$的形式无关．只有贡献一个常数的那些小的修正项才依赖于$K(x)$．当$K=1$时，(8.168)的末项中$\operatorname{cosec}^2(\pi x_0/a)$的系数等于3/4，而当$K$具有$\bar{K}=1$的(8.158)形式时，它等于$\ln 2=0.693$．若取最后这一数值，则静态阻抗是

$$Z_d^{(0)}\simeq-\frac{ia}{2\lambda_g}\left[\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right)\ln\left(\frac{8a}{\pi d}\sin\frac{\pi x_0}{a}\right)-2\right] \tag{8.169}$$

当准确到d/a的同次幂时，对有限频率来说，修正项(8.165)为

$$\Delta Z_d\simeq-\frac{ia}{\lambda_g}\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right)$$

① *Collin* 一书的附录 *A*.6 讨论像 (8.166) 那样级数的几种求和方法．本书 2.10 节里的实例也适于用来求(8.167)．

$$\sum_{m=2}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{m^2-\frac{\omega^2}{\omega_1^2}}}-\frac{1}{m}\right]\sin^2\left(\frac{m\pi x_0}{a}\right) \tag{8.170}$$

方程(8.169)和(8.170)是 *Marcuvitz* 书第 264 页引用的表式. ΔZ_d 的附加贡献是较小的. 例如,对中心板条($x_0=a/2$)来说,(8.170)中的和估计等于 $0.026\omega^2/\omega_1^2$. 当 $d/a\leqslant 0.1$ 时,上列结果相当准确.

我们以上述两种方法——(8.162)表示的直接级数展开的方法和使用有限形式格临函数(8.167)的方法——为例,说明了计算波导中障碍物的反射系数所用的一些方法. 许多更巧妙的方法有专门文献加以讨论,有兴趣的读者可以查阅.

参考书和推荐读物

许多电工学和通信工程的书籍,都讨论了波导和谐振腔. 例如

Ramo, Whinnery, and Van Duzer, 第七章、第八章、第十章和第十一章.

谢尔科诺夫写的下列两本书值得一提,因为这两本书阐述透彻,且从物理上来看,是有见识的:

Schelkunoff, *Electromagnetic Fields*;

Schelkunoff, *Applied Mathematics for Engineers and Scientists*.

论述波导、传输线和谐振腔的物理学教科书有:

Panofsky and Phillips, 第十二章;

Slater;

Smythe, 第十三章;

Sommefeld, *Electrodynamics*, 第 22 至 25 节;

Stratton, 9.18 至 9.22 节.

在下列一书中有权威性的讨论:

F. E. Borgnis and C. H. Papas, *Electromagnetic Waveguides and Resonators*, Vol. XVI of the *Encyclopaedia of Physics*, S. Flugge, 主编 Springer-Verlag, Berlin, 1958.

下列书籍专供大学毕业的工程师和物理学家使用,而且几乎完全是论述波导和谐振腔的. 这几本书详细叙述了标准理论,以及不连续性那样的许多专题:

Collin;

Harrington;

Johnson;

Waldron.

下列一书总结了有关不连续性的变分法的原始工作:

J.Schwinger and D.S.Saxon, *Discontinuities in Waveguides, Notes on Lectures by Julian Schwinger*, Gordon and Breach, New York, 1968.

下列一书概括阐述了本征频率等的变分原理,和不连续性的变分原理:

L. Cairo and T. Kahan;

下列书籍中也讨论了这些变分原理:

Harrington, 第七章;

Van Bladel, 第十三章;

Waldron, 第八章.

下列一书对波导中不连续区域、接头等的公式和数值结果作了明确的概括:

Marcuvitz.

下列一书介绍了处理这些边值问题所需的数学工具

Morse and Feshbach, 尤其是第十三章.

Morse and Feshbach 的书从第 1038 页起讨论边界条件的微扰.

有关特殊函数的知识,可以查阅下列两本非常可靠的书:

Magnus and Oberhettinger (原版),

Magnus, Oberhettinger and Soni (修订版).

下列一书广博而详细地阐述了特殊函数:

Bateman Manuscript Project, *Higher Transcendental Functions*.

特殊函数的数值和公式由下列两书给出:

Abramowitz and Stegun;

Jahnke, Emde and Lösch.

用波导和简正模的观点,讨论地球周围和电离层中电磁波的传播的两本书是:

K.G.Budden, *The Wave-guide Mode Theory of Wave Propagation*, Logos Press and Academic Press, London, 1961;

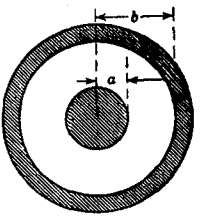
Wait.

也可参看

Galejs.

习　题

8.1　有一传输线，由两个同心的金属圆柱体组成，如下图所示，金属的电导率为 σ，趋肤深度为 δ. 传输线内充满均匀的无损耗电介质 (μ, ϵ). 沿此传输线有一TEM 模传播.



习题 8.1

(*a*) 试证：沿传输线的对时间平均的功率流是

$$P=\left[\frac{c}{4\pi}\right]\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\pi a^2|H_0|^2\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

式中 H_0 是内导体表面上沿 ϕ 角方向的磁场的幅值.

(*b*) 试证：传输功率按下列形式沿线衰减

$$P(z)=P_0e^{-2\gamma z}$$

式中

$$\gamma=\left[\frac{c}{4\pi}\right]\frac{1}{2\sigma\delta}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

(*c*) 传输线的特性阻抗 Z_0，规定为两个柱体之间的电压和其中一个柱体中流过的轴向电流(在任意位置 z 上)之比. 试证：该传输线的特性阻抗为

$$Z_0=\left[\frac{4\pi}{c}\right]\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

(*d*) 试证：该传输线每单位长度上串联电阻和电感是

$$R=\frac{1}{2\pi\sigma\delta}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$L=\left[\frac{4\pi}{c^2}\right]\left\{\frac{\mu}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)+\frac{\mu_c\delta}{4\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right\}$$

式中 μ_c 是导体的磁导率. 对电感的修正是由于能流透入导体的距离约为 δ 所造成的.

8.2　有一传输线，它是由两个相同的金属薄板条组成的，其截面图如下所示. 设 $b\gg a$，讨论 TEM 模在此传输线中的传播问题，重复习题 8.1 的推导. 证明：

$$P=\left[\frac{c}{4\pi}\right]\frac{ab}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}|H_0|^2$$

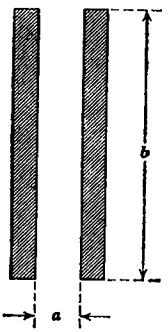
$$\gamma=\left[\frac{c}{4\pi}\right]\frac{1}{a\sigma\delta}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$$

$$Z_0=\left[\frac{4\pi}{c}\right]\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\left(\frac{a}{b}\right)$$

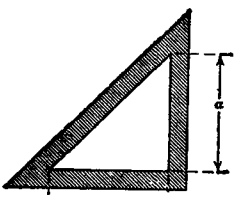
$$R=\frac{2}{\sigma\delta b}$$

$$L=\left[\frac{4\pi}{c^2}\right]\left(\frac{\mu a+\mu_c\delta}{b}\right)$$

式中符号的意义与习题 8.1 相同.



习题 8.2



习题 8.4

8.3 设有横电波和横磁波，沿一内半径为 R 的中空黄铜正圆柱体传播.

(*a*) 试求各种 TE 模和 TM 模的截止频率. 用数值方法定出最低截止频率(主模)，并用管的半径和紧接着的四个较高阶模的截止频率对主模的截止频率之比来表示. 这部分计算中假定黄铜电导率为无穷大.

(*b*) 试就最低的两个波模计算波导的衰减常数与频率的函数关系，并画出这个函数关系图.

8.4 有一波导，其截面为直角三角形，三角形三条边的长为 a、a 和 $\sqrt{2}\ a$，如上图所示. 波导内的媒质的 $\mu=\epsilon=1$.

(*a*) 设波导壁的电导率为无穷大，试求可能的传播波模及其截止频率.

(*b*) 计算各种类型的最低波模的衰减常数，假定波导壁具有大而有限的电导率. 将结果与用同一材料制成的边长为 a 的方形波导的结果作一比较.

8.5 有一铜质谐振腔，它是由内半径为 R，长为 L 的中空正圆柱体以及两个

平坦的端面构成的.

(*a*) 求此谐振腔对所有类型的波的谐振频率. 以$(c/\sqrt{\mu\epsilon}R)$作为频率的单位, 画出当$0<R/L<2$时每种类型的波的四个最低的谐振频率与R/L的函数关系图. 同一波模是否对所有R/L都有最低谐振频率?

(*b*) 若$R=2$厘米, $L=3$厘米, 且谐振腔是用纯铜制成的, 问对于最低谐振模的Q的数值是多少?

8.6 一谐振腔由两个理想导电同心球壳间的空间组成, 较小一个球壳的外半径为a, 较大一个球壳的内半径为b. 正如8.9节所指明的, 磁场的ϕ分量具有由球贝塞耳函数$j_l(kr)$和$n_l(kr)$给出的径向依赖关系, 这里$k=\omega/c$.

(*a*) 写出对任意l的谐振腔特征频率的超越方程.

(*b*) 当$l=1$时, 用球贝塞耳函数的明显形式证明: 特征频率由下式给出,

$$\frac{\operatorname{tg} kh}{kh}=\frac{\left(k^2+\frac{1}{ab}\right)}{k^2+ab\left(k^2-\frac{1}{a^2}\right)\left(k^2-\frac{1}{b^2}\right)}$$

式中$h=b-a$.

(*c*) 当$h/a\ll 1$时, 证明: (*b*)的结果给出8.9节里所得的频率, 并求一阶h/a的修正.

[(*b*)的结果似乎是汤姆孙最先导出的, 并在他所写的书中发表过: *Recent Researches in Electricity and Magnetism*, Oxford Clarendon Press, 1893, 第373页起.]

8.7 假定地球的电导率为σ_e, 电离层的电导率为σ_i, 对应的趋肤深度为δ_e和δ_i, 试计算8.9节所述的舒曼谐振的Q值.

(*a*) 证明: 准确到最低阶h/a, Q值由$Q\simeq Nh/(\delta_e+\delta_i)$给出, 并对所有$l$定出数值因子$N$.

(*b*) 假定$\sigma_e=10^9$秒$^{-1}$, $\sigma_i=10^5$秒$^{-1}$, $h=10^2$千米, 计算最低舒曼谐振的Q值.

(*c*) 讨论(*a*)中所用的近似在(*b*)中所用的参数范围内的有效性.

8.8 用一个半径为a、介电常数为ϵ的非导磁电介质正圆柱体作为真空中的电介质波导.

(*a*) 设场随ϕ角的变化是$e^{im\phi}$, 讨论波在这样一个波导中的传播.

(*b*) 当$m=\pm 1$时, 确定最低截止频率的波模, 并讨论这些场的性质(截止频率、空间变化等等), 假定$\epsilon\gg 1$.

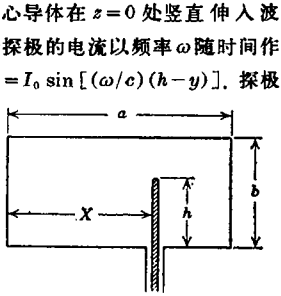
8.9 (*a*) 利用二维格临定理证明，由边值条件(8.34)和(8.36)规定的一个波导中的 TM 和 TE 模的场在如下意义上说是正交的．对于 TM 模，

$$\int_A E_{z\lambda} E_{z\mu}\, da = 0 \quad \text{当 } \lambda \neq \mu \text{ 时}$$

对于 TE 模的 H_z 也有一个对应关系式．

(*b*) 证明：关系式(8.125)－(8.128)构成一组一致的场的归一化条件，其中包括 λ 为 TM 模而 μ 为 TE 模的这种情况．

8.10 有一无限长矩形波导，一条同轴线的中心导体在 $z=0$ 处竖直伸入波导内部，伸入内部的长度为 h，截面图如下所示．沿探极的电流以频率 ω 随时间作正弦振荡，该电流随空间的变化可以近似写作 $I(y)=I_0\sin[(\omega/c)(h-y)]$．探极粗细可以忽略不计．频率是这样的，使得只有 $TE_{1,0}$ 模可以在波导中传播．



习题 8.10

(*a*) 计算所激发的所有 (m, n) 的 TE 和 TM 模的振幅，并证明：对于给定的频率 ω 来说，当 m，$n \gg 1$ 时，振幅与 m，n 有关．

(*b*) 对于传播波模来说，证明：正 z 方向的辐射功率是

$$P=\frac{4\pi\mu I_0^2}{\omega k a b}\sin^2\left(\frac{\pi X}{a}\right)\sin^4\left(\frac{\omega h}{2c}\right)$$

沿负 z 方向的辐射功率与上式相同．这里 k 为 $TE_{1,0}$ 波型的波数．

(*c*) 如果该波导不是在两个方向上都伸展至无穷远，而在 $z=L$ 处用一理想导电面作为端面，试对这种修改过的情况加以讨论．当给定电流 I_0 时，问什么样的 L 值会使功率流最大？探极的最大辐射电阻等于多少？（辐射电阻定义为功率流与探极基底电流平方的一半之比．）

8.11 有一无限长矩形波导，在其一个较窄的壁面上连接一条同轴线，同轴线的细中心导体构成一半径为 R 的半圆回路，其圆心离波导底壁的高度为 h，截面图如附图所示．这半圆回路是在 $z=0$ 平面内，其半径 R 充分地小，使得回路上的电流到处可以看作具有恒定值 I_0．

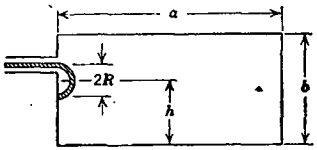
(*a*) 证明：当绕半圆回路的电流是恒定的，且 $R \ll a$，b 时，不能激发 TM 模．从物理上解释为什么这时不能激发 TM 模．

(*b*) 确定波导中最低 TE 模的振幅，并证明这振幅值与高度 h 无关．

(c) 证明：沿任一方向①按最低 TE 模辐射的功率是

$$P=\frac{\pi I_0^2}{4c}Z\frac{a}{b}\left(\frac{\pi R}{b}\right)^4$$

式中 Z 为 $TE_{1,0}$ 模的波阻抗.



习题 8.11

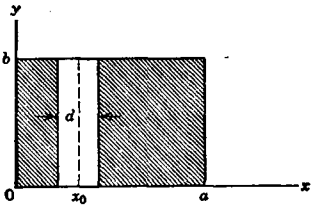
8.12 试讨论矩形波导内一个宽度为 d、中线位于 $x=x_0$ 的平面板条引起的反射，该板条如图 8.15 所示.

(a) 在(8.156)中用 $K(x)=1$ 的近似，证明：分路阻抗由下式近似给出，

$$Z_d=-\frac{ia}{\lambda_g}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^2\sqrt{m^2-\frac{\omega_1^2}{\omega^2}}}\left[\frac{\sin\left(\frac{m\pi x_0}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi d}{2a}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x_0}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi d}{2a}\right)}\right]^2$$

(b) 对于中心板条($x_0=a/2$)，用数值计算 $d/a=0.3$ 和 $\omega/\omega_1=1.0$ 时(a)中的和，并且同准确的结果(根据 *Marcuvitz* 书的图 5.2.8 得到的)$i\lambda_g Z_d/a=0.186$ 加以比较.

8.13 讨论带孔矩形波导中 $TE_{1,0}$ 模的反射，这孔与图 8.15 所示板条是互补的，简图如下：



习题 8.13

(a) 证明：分路导纳可以写为

$$Y_d=\frac{i\lambda_g}{a}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\sqrt{m^2-\frac{\omega_1^2}{\omega^2}}}{m^2}\left[\frac{\int dx H_z(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)}{\int dx H_z(x)\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)}\right]^2$$

式中 $H_z(x)$ 是孔内的纵向磁场.

(b) 证明：类似于(8.166)而定义的静态格临函数是

① 指正 z 方向或负 z 方向.——译者注

$$G(x,x')=-\frac{1}{2}\ln\left[2\left|\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)-\cos\left(\frac{\pi x'}{a}\right)\right|\right]$$

(c) 证明：如果 $H_z(x)$ 由符合场的对称性的 x 的最低阶多项式近似给出，则一个中央窄孔的静态导纳是

$$Y_d^{(0)}\simeq\frac{i\lambda_g}{a}\left[\frac{9}{2\pi^2}\left(\frac{a}{d}\right)^2\right]$$

其修正项相对于主要项的数量级为 $(d/a)^2$. 在 $d/a\ll1$ 的极限下修正的答案为 8/9 乘上列值.

第九章　简单辐射系统；散射和衍射

在第七章和第八章里，讨论了电磁波的性质，以及电磁波在有界的和无界的区域内的传播情况．但是，很少谈到如何产生这些电磁波的问题．本章就转入这个问题，并讨论定域振荡电荷和电流密度系统辐射的电磁波．我们的论述是直截了当的，而不去精心推敲数学形式．当然，这样做只限于比较简单的辐射系统．我们把求系统辐射的渐近法（用任意 l 的矢量多极场）推迟到第十六章里论述．本章只讨论电偶极子、磁偶极子和电器极子，以及导体上电流的一些简单位形．也论述波导中一个源的简单多极子展开和孔的有效多极矩．

本章后半部，用较大篇幅讨论散射和衍射．首先解释长波长情形下的散射，包括瑞利对蓝天的解释和有关的论题．然后讨论标量衍射理论和矢量衍射理论，并举了一些例子．最后讨论短波长情形下的散射和重要的光学定理．

9.1　定域振荡源的场和辐射

对于随时间变化的电荷和电流系统，我们都可以将随时间变化的量作傅里叶分析，并分别处理各个傅里叶分量．因此，只考虑随时间作正弦变化的定域电荷和电流系统所产生的势、场和辐射，是不会失去它的普遍性的，设

$$\left.\begin{aligned}\rho(\mathbf{x},t)&=\rho(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\\ \mathbf{J}(\mathbf{x},t)&=\mathbf{J}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\end{aligned}\right\}\tag{9.1}$$

像通常一样，取这些表式的实部，就得到物理量①. 假定电磁势和电磁场对时间有相同的依赖关系.

在第六章里已经证明，如果没有边界面存在，则在洛仑兹规范中矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ 的解是

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)=\frac{1}{c}\int d^3x' \int dt' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\delta\left(t'+\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}-t\right) \quad (9.2)$$

狄喇克 δ 函数保证了场的因果性. 利用正弦型时间依赖关系(9.1)，$\mathbf{A}$ 的解变为

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})=\frac{1}{c}\int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3x' \quad (9.3)$$

式中 $k=\omega/c$ 为波数，并理解 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 亦有正弦型时间依赖关系. 磁感应强度由下式给出:

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A} \quad (9.4)$$

而源外电场为

$$\mathbf{E}=\frac{i}{k}\nabla\times\mathbf{B} \quad (9.5)$$

给定电流分布 $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$ 以后，至少在原则上可以通过计算(9.3)中的积分来定出场的分布. 9.4 节将讨论一两个直接计算源积分的实例. 但是，现在我们先确立在电流源被局限于小区域内(与波长相比，确实很小)的极限情形下，场所具有的某些简单而普遍的性质. 如果源的线度约为 d，波长为 $\lambda=2\pi c/\omega$，并且 $d\ll\lambda$，则有三个令人感兴趣的空间区域:

近(静态)区: $d\ll r\ll\lambda$

中间(感应)区: $d\ll r\sim\lambda$

远(辐射)区: $d\ll\lambda\ll r$

① 仔细一点讲，可能出现因子 2，请参看习题 9.1. 在经典力学和量子力学的量之间建立的对应关系中也有因子2. 例如，在一个单电子原子里，对于 i 态到 f 态的跃迁，我们的经典偶极矩 $\mathbf{p}$ 被 $2e\langle f|\mathbf{r}|i\rangle$ 所代替.

我们将看到，场在不同区域内有非常不同的性质．在近区内，场具有静态场的特征，其径向分量不等于零，并且场随距离的变化精确地依赖于源的分布．另一方面，在远区内，场与矢径垂直，并且按 r^{-1} 方式下降，这是典型的辐射场．

对近区来说，那里 $r \ll \lambda$（或 $kr \ll 1$），(9.3)中的指数可以用 1 来代替．这时，矢势具有第五章里已讨论过的形式．距离的倒数可以用(3.70)来展开，得到的结果如下：

$$\lim_{kr\to 0} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c}\sum_{l,m}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r^{l+1}}\int \mathbf{J}(\mathbf{x}')r'^{l}Y^{*}_{lm}(\theta',\phi')d^3x' \tag{9.6}$$

上式表明，近场是准静态的，除了按 $e^{-i\omega t}$ 方式作简谐振荡外，其它性质都是静态的．

在远区($kr \gg 1$)内，(9.3)中的指数快速振荡，而且它决定矢势的特性．在这区域内作如下近似就够了[①]：

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \simeq r - \mathbf{n}\cdot\mathbf{x}' \tag{9.7}$$

式中 $\mathbf{n}$ 是 $\mathbf{x}$ 方向上的单位矢量．并且，如果我们只想要 kr 的主项，(9.3)中距离的倒数可以用 r 代替．这时，矢势是

$$\lim_{kr\to\infty} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{cr}\int \mathbf{J}(\mathbf{x}')e^{-ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}'}d^3x' \tag{9.8}$$

上式表明，在远区内，矢势的特性如同一个发散的球面波，该波带有一个与角度有关的系数．容易证明，由(9.4)和(9.5)计算的场垂直于矢径，并按 r^{-1} 方式下降．所以，这些场相当于辐射场．如果源的线度比波长小得多，则可以把(9.8)中的积分按 k 的幂展开，

$$\lim_{kr\to\infty} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{cr}\sum_{n}\frac{(-ik)^n}{n!}\int \mathbf{J}(\mathbf{x}')(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}')^n d^3x' \tag{9.9}$$

---

① 实际上，当 $r \gg d$ 时，不管 kr 的值如何，(9.7)总是成立的．所以即使在近区内，它也是一种相当好的近似．

第 n 项的大小由下式给出:

$$\frac{1}{n!}\int \mathbf{J}(\mathbf{x}')(k\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}')^n d^3x' \tag{9.10}$$

因为 $\mathbf{x}'$ 的数量级为 d, 并且根据假设, kd 比 1 小得多, 所以 $\mathbf{A}$ 的展开式中相继各项显然随 n 很快的下降. 因而, 从源发出的辐射主要决定于展开式 (9.9) 中第一个非零项. 我们在以下几节里将考查头几个非零项.

在中间区或感应区内, 不能采取推导(9.6)和(9.8)的这两种近似, 我们必须保留 kr 的所有幂. 我们不依次介绍第十六章里叙述的矢量多极子场的全部数学工具, 只满足当前的需要就够了. 关键的结果是(9.3)中出现的格临函数的精确表式(16.22). 对源外诸点来说, (9.3)就变成

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})=\frac{4\pi ik}{c}\sum_{l,m} h_l^{(1)}(kr)Y_{lm}(\theta,\phi)\cdot$$
$$\int \mathbf{J}(\mathbf{x}')j_l(kr')Y_{lm}^*(\theta',\phi')d^3x' \tag{9.11}$$

如果源的线度比波长小得多, $j_l(kr')$ 可以由(16.12)近似给出. 这时, 矢势的结果具有(9.6)的形式, 但要作下列替换:

$$\frac{1}{r^{l+1}}\to\frac{e^{ikr}}{r^{l+1}}(1+a_1(ikr)+a_2(ikr)^2+\cdots+a_l(ikr)^l) \tag{9.12}$$

数值系数 a_l 决定于球汉克尔函数的明显表式. (9.12)的右边表明从 $kr\ll 1$ 时静态区的结果(9.6)到 $kr\gg 1$ 时辐射区的形式(9.9)的过渡.

在讨论电偶极子和其它类型的辐射之前, 我们考查一下当源随时间改变时的电单极场的问题. 与(9.2)类似的标势表式是

$$\Phi(\mathbf{x},t)=\int d^3x'\int dt'\frac{\rho(\mathbf{x}',t')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\delta\left(t'+\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}-t\right)$$

电单极的贡献可以通过在积分号下作以下替换而得到: $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\to|\mathbf{x}|\equiv r$. 结果是

$$\Phi_{\text{单极}}(\mathbf{x},t)=\frac{q(t'=t-r/c)}{r}$$

式中 $q(t)$是源的总电荷. 因为电荷是守恒的，且根据定义，定域源是一个没有电荷流入或流出的源，所以总电荷 q 与时间无关. 于是，一个定域源的势(和场)的电单极部分必然是静态的. 具有谐和时间依赖关系 $e^{-i\omega t}(\omega\neq 0)$的场没有单极子项.

现在讨论 $\omega\neq 0$ 时最低阶多极场. 因为这些场可以由矢势通过(9.4)和(9.5)算出，所以我们在下面的论述中不再明显提及标势.

9.2 电偶极场和电偶极辐射

如果在(9.9)中只保留第一项，则矢势为

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})=\frac{e^{ikr}}{cr}\int\mathbf{J}(\mathbf{x}')d^3x' \tag{9.13}$$

考查(9.11)和(9.12)，可以看出：(9.13)是级数中 $l=0$ 的部分，且在源外处处有效，不仅仅在远区内有效. 通过分部积分就可以把上面这个积分写成更熟悉的形式：

$$\int\mathbf{J}d^3x'=-\int\mathbf{x}'(\nabla'\cdot\mathbf{J})d^3x'=-i\omega\int\mathbf{x}'\rho(\mathbf{x}')d^3x' \tag{9.14}$$

上式利用了连续性方程

$$i\omega\rho=\nabla\cdot\mathbf{J} \tag{9.15}$$

于是，矢势为

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})=-ik\mathbf{p}\frac{e^{ikr}}{r} \tag{9.16}$$

式中

$$\mathbf{p}=\int\mathbf{x}'\rho(\mathbf{x}')d^3x' \tag{9.17}$$

为电偶极矩，如同静电学里(4.8)所定义的一样.

由(9.4)和(9.5)得到电偶极场为

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{B}&=k^2(\mathbf{n}\times\mathbf{p})\frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right)\\ \mathbf{E}&=k^2(\mathbf{n}\times\mathbf{p})\times\mathbf{n}\frac{e^{ikr}}{r}+[3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})-\mathbf{p}]\left(\frac{1}{r^3}-\frac{ik}{r^2}\right)e^{ikr}\end{aligned}\right\}\tag{9.18}$$

要注意，在一切距离上，磁感应强度与矢径垂直，但是电场却有平行于 $\mathbf{n}$ 和垂直于 $\mathbf{n}$ 的分量.

在辐射区内，场取下列极限形式：

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{B}&=k^2(\mathbf{n}\times\mathbf{p})\frac{e^{ikr}}{r}\\ \mathbf{E}&=\mathbf{B}\times\mathbf{n}\end{aligned}\right\}\tag{9.19}$$

上式显示了辐射场的典型特性.

另一方面，在近区内，场趋于

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{B}&=ik(\mathbf{n}\times\mathbf{p})\frac{1}{r^2}\\ \mathbf{E}&=[3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{p})-\mathbf{p}]\frac{1}{r^3}\end{aligned}\right\}\tag{9.20}$$

此电场除了随时间振荡以外，恰好就是静态电偶极场(4.13). 在 $kr\ll1$ 的区域内，磁感应强度比电场强度小一个因子(kr). 于是，近区内场的性质是以电场为主. 当然，在 $k\to0$ 的静态极限下，磁感应强度等于零. 这时近区扩展到无穷远.

上述振荡偶极距 $\mathbf{P}$，在单位立体角内所辐射的功率的时间平均值为

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}[r^2\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}\times\mathbf{B}^*]\tag{9.21}$$

式中 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 由(9.19)给出. 于是我们求得

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{c}{8\pi}k^4|(\mathbf{n}\times\mathbf{p})\times\mathbf{n}|^2\tag{9.22}$$

辐射的偏振态是由上式中绝对值符号里的矢量给出的. 如果 $\mathbf{p}$ 的各分量都有相同的位相，则角分布是典型偶极辐射的角分布，

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{c}{8\pi}k^4|\mathbf{p}|^2\sin^2\theta \tag{9.23}$$

式中角 θ 是从 $\mathbf{p}$ 的方向量起的. 总辐射功率为

$$P=\frac{ck^4}{3}|\mathbf{p}|^2 \tag{9.24}$$

与 $\mathbf{p}$ 的诸分量的相对位相无关.

电偶极辐射器的一个简单例子是中央馈电的平直天线，其长度 d 比波长小. 假定天线的方位是沿 z 轴，并从 $z=(d/2)$ 延伸至 $z=-(d/2)$，中央有一窄隙以供激发之用，如图 9.1 所示. 在每半截天线中电流方向相同，在间隙处电流数值为 I_0，电流近乎线性地下降，在两端，电流为零：

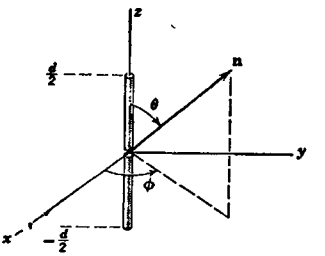


图 9.1 中央馈电的短直天线.

$$I(z)e^{-i\omega t}=I_0\left(1-\frac{2|z|}{d}\right)e^{-i\omega t} \tag{9.25}$$

由连续性方程(9.15)可知，沿天线的每一臂，线电荷密度 ρ'(每单位长度的电荷)是常数，其数值为

$$\rho'(z)=\pm\frac{2iI_0}{\omega d} \tag{9.26}$$

上方的（下方的）符号相当于 z 为正(负)值. 偶极距(9.17)与 z 轴平行，其量值为

$$p=\int_{-(d/2)}^{(d/2)}z\rho'(z)dz=\frac{iI_0d}{2\omega} \tag{9.27}$$

辐射功率的角分布为

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{I_0^2}{32\pi c}(kd)^2\sin^2\theta \tag{9.28}$$

而总辐射功率为

$$P=\frac{I_0^2(kd)^2}{12c} \tag{9.29}$$

我们看到，当输入电流不变时，至少在 $kd \ll 1$ 的长波长范围内，辐射功率是按频率的平方而增加的.

(9.29)中 $I_0^2/2$ 的系数具有电阻的量纲，叫做天线的辐射电阻 $R_{辐射}$. 它相当于(6.137)中的第二项，如果导电性是理想的，则天线的辐射电阻就是天线的总电阻. $I_0^2/2$ 的系数乘以 $30c$ 就得到以欧姆为单位的辐射电阻值. 于是，对这个中央馈电的短直天线来说，$R_{辐射} \simeq 5(kd)^2$ 欧姆. 原则上，天线的输入电抗可以用 6.10 节方程(6.138)或(6.140)算出. 不幸这种算法主要取决于间隙附近的强场，因而主要取决于天线的确切形状和激发方法. 因为这系统是一个电偶极子，静态电偶极场在天线附近起主要作用，但是我们仍然可以肯定地说，当 kd 很小时电抗是负的(电容性的).

9.3 磁偶极场和电四极场

由展开式(9.9)中的第二项导出一个矢势①

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr}}{cr}\left(\frac{1}{r} - ik\right)\int \mathbf{J}(\mathbf{x}')(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}')d^3x' \tag{9.30}$$

这里我们已经把由(9.12)得到的修正项纳入上式，以便使(9.30)在源外处处成立. 这个矢势可以写成两项之和，其中一项给出横向磁场，另一项给出横向电场. 把(9.30)中的被积函数写成两部分之和，就可以

---

① 我们也可以按下面的方法导出(9.30):

因为(9.7)当 $r \gg d$ 时成立，与 kr 的值无关，我们把(9.3)中指数及其分母展为 $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}')$ 的幂级数. 于是有

$$\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \frac{e^{ikr}}{r}\,\frac{e^{-ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}'}}{\left(1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}{r}\right)} = \frac{e^{ikr}}{r}\left[1+\left(\frac{1}{r}-ik\right)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}')+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{r^2}-\frac{2ik}{r}-k^2\right)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}')^2+\cdots\right]$$

将上式代入(9.3)，则其级数的第二项为(9.30)，第 $m+1$ 项为

$$\mathbf{A}_m = \frac{e^{ikr}}{cr}\,\frac{(-ik)^m}{m!}\left(1+\frac{a_1}{ikr}+\cdots+\frac{a_m}{(ikr)^m}\right)\int \mathbf{J}(\mathbf{x}')(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}')^m d^3x'.$$

上列多项式中的系数 a_j 为整数. ——译者注

把上述两项具有不同物理性质的贡献区别开，其中一部分是 $\mathbf{J}$ 和 $\mathbf{x}'$ 的对称部分，另一部分是 $\mathbf{J}$ 和 $\mathbf{x}'$ 的反对称部分．即令

$$\frac{1}{c}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}')\mathbf{J}=\frac{1}{2c}[(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}')\mathbf{J}+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{J})\mathbf{x}']+\frac{1}{2c}(\mathbf{x}'\times\mathbf{J})\times\mathbf{n} \tag{9.31}$$

后面的反对称项可以认为是由电流 $\mathbf{J}$ 所产生的磁化强度

$$\mathcal{M}=\frac{1}{2c}(\mathbf{x}\times\mathbf{J}) \tag{9.32}$$

相联系，我们将证明前面的对称项与电四极矩密度有关．

当只考虑磁化项时，我们得矢势，

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})=ik(\mathbf{n}\times\mathbf{m})\frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right) \tag{9·33}$$

式中 $\mathbf{m}$ 为磁偶极矩，

$$\mathbf{m}=\int\mathcal{M}d^3x=\frac{1}{2c}\int(\mathbf{x}\times\mathbf{J})d^3x \tag{9.34}$$

注意到矢势(9.33)与电偶极子的磁感应强度(9.18)成正比，就可以定出场．这意味着，作 $\mathbf{p}\to\mathbf{m}$ 的替换后，该磁偶极子的磁场就相当于电偶极子的电场．于是得

$$\mathbf{B}=k^2(\mathbf{n}\times\mathbf{m})\times\mathbf{n}\frac{e^{ikr}}{r}+[3\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})-\mathbf{m}]\left(\frac{1}{r^3}-\frac{ik}{r^2}\right)e^{ikr} \tag{9.35}$$

同样，磁偶极子的电场是电偶极子的磁场的负值：

$$\mathbf{E}=-k^2(\mathbf{n}\times\mathbf{m})\frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right) \tag{9.36}$$

所有这些论证表明，当进行 $\mathbf{E}\to\mathbf{B},\mathbf{B}\to-\mathbf{E},\mathbf{p}\to\mathbf{m}$ 的替换后，近区和远区内磁偶极场的分布情况跟电偶极场一样．同样，这两类偶极子的辐射图样和总辐射功率相同．这两种辐射场的唯一差别是在偏振方面．电偶极子的电矢量位于 $\mathbf{n},\mathbf{p}$ 所决定的平面内，而磁偶极子的电矢量则与 $\mathbf{n},\mathbf{m}$ 所决定的平面垂直．

(9.31)中的对称项的积分，经分部积分并整理后，可以变为：

$$\frac{1}{2c}\int[(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}')\mathbf{J}+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{J})\mathbf{x}']d^3x' = -\frac{ik}{2}\int\mathbf{x}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}')d^3x' \quad (9.37)$$

在上式中利用了连续性方程(9.15),将 $\nabla\cdot\mathbf{J}$ 用 $i\omega\rho$ 替代. 因为这积分牵涉到电荷密度的二阶矩，所以这个对称部分相当于电四极源. 矢势为

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{k^2}{2}\frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right)\int\mathbf{x}'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}')d^3x' \quad (9.38)$$

要把场的表式完全写出来是比较复杂的. 我们将只满足于写出辐射区内的场. 这时容易看到

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{B} &= ik\mathbf{n}\times\mathbf{A}\\ \mathbf{E} &= ik(\mathbf{n}\times\mathbf{A})\times\mathbf{n}\end{aligned}\right\} \quad (9.39)$$

因而磁感应强度为

$$\mathbf{B} = -\frac{ik^3}{2}\frac{e^{ikr}}{r}\int(\mathbf{n}\times\mathbf{x}')(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}')d^3x' \quad (9.40)$$

利用四极矩张量的定义(4.9)

$$Q_{\alpha\beta} = \int(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta})\rho(\mathbf{x})d^3x \quad (9.41)$$

(9.40)中的积分可以写为

$$\mathbf{n}\times\int\mathbf{x}'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}')d^3x' = \frac{1}{3}\mathbf{n}\times\mathbf{Q}(\mathbf{n}) \quad (9.42)$$

矢量 $\mathbf{Q}(\mathbf{n})$ 被定义为具有下列分量的量:

$$Q_\alpha = \sum_\beta Q_{\alpha\beta}n_\beta \quad (9.43)$$

我们注意到，$\mathbf{Q}(\mathbf{n})$ 的量值和方向既依赖于源的性质也依赖于观测方向 $\mathbf{n}$. 利用这些定义，得到磁感应强度

$$\mathbf{B} = -\frac{ik^3}{6}\frac{e^{ikr}}{r}\mathbf{n}\times\mathbf{Q}(\mathbf{n}) \quad (9.44)$$

和每单位立体角辐射功率的时间平均值

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{288\pi}k^6|[\mathbf{n}\times\mathbf{Q}(\mathbf{n})]\times\mathbf{n}|^2 \quad (9.45)$$

式中绝对值符号内的矢量给出辐射电场的方向.

一般的角分布是复杂的. 但是总辐射功率可以直接算出. 利用$\mathbf{Q}(\mathbf{n})$的定义,我们可以把角依赖关系写为

$$|[\mathbf{n}\times\mathbf{Q}(\mathbf{n})]\times\mathbf{n}|^2=\mathbf{Q}^*\cdot\mathbf{Q}-|\mathbf{n}\cdot\mathbf{Q}|^2$$
$$=\sum_{\alpha,\beta,\gamma}Q^*_{\alpha\beta}\,Q_{\alpha\gamma}\,n_\beta\,n_\gamma-\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}Q^*_{\alpha\beta}\,Q_{\gamma\delta}\,n_\alpha\,n_\beta\,n_\gamma n_\delta \tag{9.46}$$

很容易求出几个必要的 n 的直角分量乘积的角积分:

$$\left.\begin{aligned}&\int n_\beta n_\gamma d\Omega=\frac{4\pi}{3}\delta_{\beta\gamma}\\&\int n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta d\Omega=\frac{4\pi}{15}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}+\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}+\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})\end{aligned}\right\} \tag{9·47}$$

于是我们求得

$$\int|[\mathbf{n}\times\mathbf{Q}(\mathbf{n})]\times\mathbf{n}|^2d\Omega=4\pi\left\{\frac{1}{3}\sum_{\alpha,\beta}|Q_{\alpha\beta}|^2\right.$$
$$\left.-\frac{1}{15}\left[\sum_\alpha Q^*_{\alpha\alpha}\sum_\gamma Q_{\gamma\gamma}+2\sum_{\alpha,\beta}|Q_{\alpha\beta}|^2\right]\right\} \tag{9.48}$$

因为$Q_{\alpha\beta}$是一个主对角元素之和为零的张量,所以方括号里第一项恒等于零. 于是我们得到四极源的总辐射功率的最后结果:

$$P=\frac{ck^6}{360}\sum_{\alpha,\beta}|Q_{\alpha\beta}|^2 \tag{9·49}$$

当四极矩$Q_{\alpha\beta}$不变时,辐射功率按频率的六次方而变化,而不像偶极辐射功率那样,按频率的四次方而变化.

辐射四极源的一个简单实例是振荡的椭球体电荷分布. $Q_{\alpha\beta}$的非对角元素等于零. 对角元素可以写为

$$Q_{33}=Q_0,\qquad Q_{11}=Q_{22}=-\frac{1}{2}Q_0 \tag{9.50}$$

于是辐射功率的角分布为

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{ck^6}{128\pi}Q_0^2\sin^2\theta\cos^2\theta \tag{9.51}$$

这是一个四瓣图，其极大值在 $\theta=\pi/4$ 和 $\theta=3\pi/4$ 处，如图 9.2 所示. 这个四极子所辐射的总功率为

$$P=\frac{ck^6Q_0^2}{240} \tag{9.52}$$

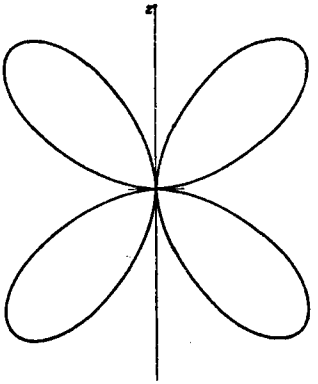


图 9.2 四极子辐射图.

当把矢势(9.8)的展开式(9.9)扩展到电四极子项以上时，处理该展开式中的更高项，要化费越来越艰巨的劳动. 这种方法的另一个缺点是：一定要从(9.9)的各项中把物理性质不同的场（例如磁偶极场和电四极场)分开. 最后，这种方法只是在长波长极限下有用. 在第十六章里，我们将对多极辐射进行系统的讨论. 这种讨论要牵涉到相当繁重的数学工具，但是付出这些代价是值得的. 这种讨论是按同一方法处理了全部多极子项；其结果对一切波长有效；而且物理性质不同的电多极子和磁多极子的贡献从一开始就截然地分开.

9.4 中央馈电的平直天线

(a) 正弦电流近似

对于某些辐射系统，电流的几何形状相当简单，以致矢势的积分(9.3)具有比较简单的有限项形式，如果假定电流的形状是已知的. 作为这样系统的一个实例，我们考虑一条长为 d 的细直天线，它通过位于中点的小间隙而激发. 假定天线

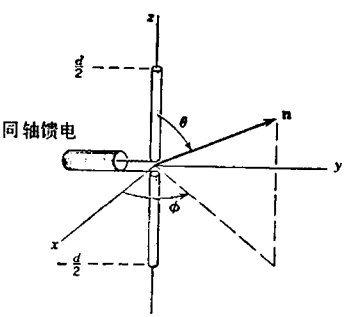


图 9.3 中央馈电的平直天线.

的方位是沿 z 轴，其间隙位于原点，如图 9·3 所示．如果由于辐射引起的阻尼忽略不计，则沿天线的电流可以当作随时间和空间作正弦形变化，其波数 $k=\omega/c$，在天线两臂中的电流是对称的．在天线两端的电流等于零．因此，当 $|z|<(d/2)$ 时，电流密度可以写为

$$\mathbf{J}(\mathbf{x})=I\sin\left(\frac{kd}{2}-k|z|\right)\delta(x)\delta(y)\epsilon_3 \tag{9.53}$$

δ 函数保证了电流只沿 z 轴流动．如果 $kd\geqslant\pi$，则 I 是电流的巅值．间隙处的电流为 $I_0=I\sin(kd/2)$．

根据电流密度(9.53)，矢势是与 z 方向平行，矢势在辐射区内具有如下形式[由(9.8)得到]：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})=\epsilon_3\frac{Ie^{ikr}}{cr}\int_{-(d/2)}^{(d/2)}\sin\left(\frac{kd}{2}-k|z|\right)e^{-ikz\cos\theta}dz \tag{9.54}$$

直接求积分，得到下面的结果：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})=\epsilon_3\frac{2Ie^{ikr}}{ckr}\left[\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(\frac{kd}{2}\right)}{\sin^2\theta}\right] \tag{9.55}$$

因为辐射区内的磁感应强度是由 $\mathbf{B}=ik\mathbf{n}\times\mathbf{A}$ 给出的，其量值为 $|\mathbf{B}|=k\sin\theta|A_3|$．所以每单位立体角内辐射功率的时间平均值为

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{I^2}{2\pi c}\left|\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\left(\frac{kd}{2}\right)}{\sin\theta}\right|^2 \tag{9.56}$$

电矢量与 $\mathbf{A}$ 的垂直于 $\mathbf{n}$ 的分量同方向．因此，辐射的偏振是在包含天线和到观测点的矢径的平面内．

角分布(9.56)依赖于 kd 值．容易证明，在长波长极限($kd\ll1$)下，(9.56)化为偶极子的结果(9.28)．当 $kd=\pi$ 或 2π 这些特殊值（相当于沿天线有半波长或全波长的电流振荡)时，角分布为

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{I^2}{2\pi c}\begin{cases}\dfrac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}, & kd=\pi\\[2ex] \dfrac{4\cos^4\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}, & kd=2\pi\end{cases}\tag{9.57}$$

这些角分布如第十六章图 16.4 所示，在那里把它们跟多极子展开比较．我们看到，半波天线的角分布与简单的偶极辐射图十分相似，但全波天线的角分布就比较尖锐．

全波天线的角分布可以认为是由两个同相激发的半波天线的场相干叠加而成的，一个场加在另一个场上．在 $\theta=\pi/2$ 处，这两个波按代数方法相加，那里的强度是半波天线的四倍．在角度不是 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的地方，这两个波互相干涉，并给出较尖锐的角分布图．适当排列一组基本天线（例如半波天线），同时适当选择电流的位相，就可以通过相干叠加形成任意的辐射分布图．有关这种天线阵的详细讨论，有兴趣的读者可以参阅电工方面的文献．

（*b*）*按边值问题处理的天线*

天线上的电流是正弦型的（或任何其它已知型式）这种假设是站不住脚的，除非天线是无限细的导体．以给定方式激发的有限尺寸天线实际上是一个复杂的边值问题．我们不打算求解这样一些问题，而只针对长度为 d、半径为 a 的圆截面平直天线（图 9.3 的中央馈电天线就是一个实例）建立的边值问题作一些初浅的讨论．假定天线是理想导体，其半径既比波长小得多，又比表面电流只有纵向（z）分量的那段长度小得多，并假定场是轴对称的．那末矢势 **A** 将只有一个 z 分量．设 **A** 有一个频率 ω 的谐和时间依赖关系，在洛仑兹规范下，由 **A** 给出的标势和电场如下：

$$\Phi(\mathbf{x})=\frac{-i}{k}\nabla\cdot\mathbf{A}$$
$$\mathbf{E}(\mathbf{x})=\frac{i}{k}[\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})+k^2\mathbf{A}] \tag{9.58}$$

由于 $\mathbf{A}=\epsilon_3 A_z(\mathbf{x})$，电场的 z 分量为

$$E_z(\mathbf{x})=\frac{i}{k}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)A_z(\mathbf{x})$$

但是，在理想导电天线的表面上，$\mathbf{E}$ 的切向分量等于零．于是，我们确认下列重要事实：天线表面上矢势 A_z（和标势）是严格的正弦型的，而且

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)A_z(\rho=a,z)=0 \tag{9.59}$$

与极其粗糙的关于正弦电流的假定相比，上面这种表述是严密的．

从(9.3)可得电流的一个积分方程．若沿 z 方向的总电流是 $I(z)$，则(9.3)给出天线表面上的 A_z，

$$A_z(\rho=a,z)=\frac{1}{c}\int_{z_0}^{z_0+d}I(z')\,K(z-z')\,dz'$$

式中

$$K(z-z')=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{e^{ik\sqrt{(z-z')^2+4a^2\sin^2\beta}}}{\sqrt{(z-z')^2+4a^2\sin^2\beta}}d\beta \tag{9.60}$$

是格临函数 e^{ikR}/R 对方位角的平均．条件(9.59)导出积分-微分方程

$$0=\left(\frac{d^2}{dz^2}+k^2\right)\int_{z_0}^{z_0+d}I(z')K(z-z')\,dz' \tag{9.61}$$

上式可以看作积分的一个微分方程，或同样可以积分(9.59)并令其积分值等于 $A_z(\rho=a,z)$．所得结果是下列积分方程

$$a_1\cos kz+a_2\sin kz=\int_{z_0}^{z_0+d}I(z')K(z-z')\,dz'$$

常数 a_1 和 a_2 由激发方法和边界条件(在天线两端电流为零)决定．

求解这积分方程是不容易的．由(9.60)式可知，当 $z'\simeq z$ 时必须

小心，这时有限的半径是重要的．当 $a\to 0$ 时，可以证明电流是正弦型的，但修正项的展开参数是 $\ln(d/a)$ 的倒数．这意味着，即使当 $d/a=10^3$ 时，修正的数量级为百分之十至百分之十五．当激发的位置附近有一电流波节时，这些修正项可以突然地改变天线的输入阻抗．*Jones* 的书里叙述了(9.61)的各种近似解法．*Hallén* 的书详细讨论了琼斯这本书中的理论，并给出了中央馈电平直天线的电流、电阻和电抗的数值计算结果．其它参考书在本章末推荐读物中列出．

9.5 波导中定域源或孔的多极子展开

如果波导中有以探极、回线或孔的形式出现的一个源，其尺寸比起场发生明显变化的距离来是充分地小，那末这个源可以用其最低阶多极矩(通常是电偶极子和磁偶极子)来近似描写．具有相同最低阶多极矩的不同源，显然会在波导中产生相同的激发．电偶极矩或磁偶极矩往往可以根据静态场计算，或甚至用几何的方法来估算．即使源不是很小，多极子展开也能对源性质给出一种定性的，常常还是半定量的解释．

(a) 波导内的电流源

8.11 节里已经证明：当激发第 λ 波模时，振幅 $A_\lambda^{(\pm)}$ 与积分

$$\int \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}_\lambda^{(\pm)}d^3x$$

成正比，这积分遍及 J 不等于零的整个区域．如果波模场 $\mathbf{E}_\lambda^{(\mp)}$ 在源上不发生明显改变，那末就可以将这些场围绕某适当选择的原点展成泰勒级数．省略 $\mathbf{E}_\lambda^{(\mp)}$ 上的下角标和上角标，于是这积分就写为

$$\int \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}d^3x=\sum_{\alpha=1}^{3}\int J_\alpha(\mathbf{x})\left[E_\alpha(0)+\sum_{\beta=1}^{3}x_\beta\frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta}(0)+\cdots\right]d^3x \tag{9.62}$$

根据(9.14)和(9.17)，我们看到：第一项是

$$\mathbf{E}(0)\cdot\int\mathbf{J}(\mathbf{x})d^3x=-i\omega\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}(0) \tag{9·63}$$

式中 $\mathbf{p}$ 是源的电偶极矩

$$\mathbf{p}=\frac{i}{\omega}\int\mathbf{J}(\mathbf{x})d^3x$$

借助(9·14)中的两步，就可以把上式变成较熟知的形式(9·17)，只要波导壁上的面积分可以不考虑的话．这就需要选择多极子展开的原点，使得 $J_\alpha x_\beta$ 在波导壁上等于零．将这个要点应用到所有的多极矩．若用涉及电荷密度 ρ 和磁荷密度 ρ_M 的那些式子，就得要求 $(x_\alpha J_\beta \pm x_\beta J_\alpha)x_\gamma\cdots x_\nu$ 在波导壁上等于零．对电偶极子适用的上式和对磁偶极子适用的常用表式(9.34)是永远正确的，跟原点的选择无关．

(9.62)中的第二项具有跟(9.30)相同的一般形式，因而用同样的方法来处理．如同(9.31)中的一样，将乘积 $J_\alpha x_\beta$ 写成对称项和反对称项之和：

$$\sum_{\alpha,\beta}J_\alpha x_\beta\frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta}(0)=\frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta}(J_\alpha x_\beta-J_\beta x_\alpha)\left[\frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta}(0)-\frac{\partial E_\beta}{\partial x_\alpha}(0)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}(J_\alpha x_\beta+J_\beta x_\alpha)\frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta}(0)\qquad(9.64)$$

第一(反对称)部分已被写成这样的形式，使得磁矩密度和电场的旋度是明显可见的．借助于法拉第定律 $\nabla\times\mathbf{E}=i\omega\mathbf{B}/c$，反对称项对(9.62)右边的贡献可以写作

$$\int\left[\sum_{\alpha,\beta}J_\alpha x_\beta\frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta}(0)\right]_{\text{反对称}}d^3x=i\omega\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}(0)\qquad(9.65)$$

式中 $\mathbf{m}$ 是源的磁偶极矩(9.34)．方程(9.63)和(9.65)给出主要阶的多极矩对源积分(9.62)的贡献．

(9.62)展开式中其它项是更高阶多极子产生的．恰如9.3节里一样，我们可以证明(9.64)的对称部分牵涉到零迹电四极矩(9.41)．首先要注意到，如果面积分等于零(参看上述)，

$$\int(J_\alpha x_\beta+J_\beta x_\alpha)d^3x=-i\omega\int x_\alpha x_\beta\rho(\mathbf{x})d^3x$$

那末(9.64)中第二个双重求和项遍及电流分布体积求积分，就得下式：

$$-\frac{i\omega}{2}\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta}(0)\int\rho(\mathbf{x})x_\alpha x_\beta d^3x$$

由于$\nabla\cdot\mathbf{E}=0$，在$x_\alpha x_\beta\to\left(x_\alpha x_\beta-\frac{1}{3}r^2\delta_{\alpha\beta}\right)$的替换后，双重求和的值不变．于是，(9.62)中第二项的对称部分为

$$\int\left[\sum_{\alpha,\beta}J_\alpha x_\beta\frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta}(0)\right]_{\text{对称}}d^3x=-\frac{i\omega}{6}\sum_{\alpha,\beta}Q_{\alpha\beta}\frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta}(0)\qquad(9.66)$$

同样，(9.62)中其次几项(包含$x_\beta x_\gamma$)的反对称部分给出的贡献为

$$\int\left[\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}J_\alpha x_\beta x_\gamma\frac{\partial^2E_\alpha}{\partial x_\beta\partial x_\gamma}(0)\right]_{\substack{\text{对}(\alpha,\beta)\\\text{反对称}}}d^3x=\frac{i\omega}{6}\sum_{\alpha,\beta}Q^M_{\alpha\beta}\frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta}(0)\qquad(9.67)$$

式中$Q^M_{\alpha\beta}$是源的磁四极矩，由(9.41)给出，这时式中的电荷密度$\rho(\mathbf{x})$被磁荷密度

$$\rho^M(\mathbf{x})=-\nabla\cdot\mathcal{M}=-\frac{1}{2c}\nabla\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{J})\qquad(9.68)$$

所替换．

如果把各种贡献合并在一起，那末振幅$A_\lambda^{(\pm)}$的表式(8.140)按多极子展开时可以写成

$$A_\lambda^{(\pm)}=i\frac{2\pi\omega Z_\lambda}{c}\left\{\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_\lambda^{(\mp)}(0)-\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}_\lambda^{(\mp)}(0)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6}\sum_{\alpha,\beta}\left[Q_{\alpha\beta}\frac{\partial E_{\lambda\alpha}^{(\mp)}}{\partial x_\beta}(0)-Q^M_{\alpha\beta}\frac{\partial B_{\lambda\alpha}^{(\pm)}}{\partial x_\beta}(0)\right]+\cdots\right\}\qquad(9.69)$$

应该记住，这里的波模场$E_\lambda^{(\pm)}$是按(8.125)归一化的．这展开式是最有用的，只要源是这样分布的，使得级数很快收敛，且可以近似地只考虑其头几项．考虑源的电偶极(或更高阶)矩和磁偶极(或更高阶)矩的方向以及简正模场的方向，就可以简单地完成探极或天线的定位和定向，以便优先激发某些波模．例如，采用偶极矩平行于波导轴的磁偶极天

线，就可以激发具有轴向磁场的 TE 模. 这样天线不能激发 TM 模，除非通过更高阶多极矩.

(*b*) 波导侧壁上的孔

我们可以把波导壁上的孔看作能源(或壑). 8.11 节里已经指出，如果波导壁上的孔在所考虑的含源的体积内，那末振幅 $A_\lambda^{(\pm)}$ 由(8.141)给出，而不是由(8.140)给出. 假定只有一个孔，而且实际的电流密度等于零，则激发的第 λ 波模的振幅是

$$A_\lambda^{(\pm)}=-\frac{Z_\lambda}{2}\int_{孔}\mathbf{n}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^{(\mp)})da \tag{9.70}$$

式中 $\mathbf{n}$ 为向内法线单位矢量，积分遍历波导壁上的孔. 如果孔比波长或其它描述场的变化的标度小得多，那末正如前述，可以将波模场 $H_\lambda^{(\mp)}$ 展开. 显然，最低阶项(把 $H_\lambda^{(\mp)}$ 当作孔内恒量)导致磁偶极子型的耦合. 其次几项（波模场作线性改变①）导致电偶极子耦合和磁四极子耦合，恰像(9.64)-(9.66)一样，只要把代表电相互作用和磁相互作用的物理量互相交换一下. 结果得到与(9.69)相似的(9.70)的展开式:

$$A_\lambda^{(\pm)}=i\frac{\pi\omega Z_\lambda}{c}[\mathbf{p}_{有效}\cdot\mathbf{E}_\lambda^{(\mp)}(0)-\mathbf{m}_{有效}\cdot\mathbf{B}_\lambda^{(\mp)}(0)+\cdots] \tag{9.71}$$

式中有效电偶极矩和有效磁偶极矩为

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{p}_{有效}&=\frac{\epsilon\mathbf{n}}{4\pi}\int(\mathbf{x}\cdot\mathbf{E}_{切向})da\\ \mathbf{m}_{有效}&=\frac{c}{2\pi i\mu\omega}\int(\mathbf{n}\times\mathbf{E}_{切向})da\end{aligned}\right\} \tag{9.72}$$

在这些表式中积分遍历整个孔，电场 $\mathbf{E}_{切向}$ 是孔内的精确切向场，(9.71)中波模场是在孔(的中心)处计算的. 有效偶极矩(9.72)是一些等效偶极子，它们的场(9.18) 和 (9.35)—(9.36)代表理想导电平面屏上一个小孔的辐射场(参看习题9.15). 将(9.71)和(9.69)比较，我们看出：在产生一个给定的振幅时，偶极矩(9.72)的作用只及波导内一个源的真

① 即含波模场对空间坐标的一阶偏导数的那几项. ——译者注

实偶极矩的一半. 这可以想像如下：在某种意义上说，一个孔的有效偶极子一半在波导内，一半在波导外.

(*c*) 一横隔膜上的小孔

在 8.12 和 8.13 节里，我们已经讨论过一个横隔膜上的一些孔所引起的反射和透射这一问题. 然而，对一个小孔来说，正像侧壁上的一些孔一样，用孔的有效多极矩来描写是有益的. 一个横隔膜的反射系数和折射系数由 (8.144) 和 (8.145) 给出. 利用 (8.31), (8.145)[当 $\lambda=1$ 时, (8.145) 也可以代表(8.144)]就变成

$$A_\lambda^{(+)}=A_\lambda^{(-)}=Z_\lambda\int(\mathbf{e}_3\times\mathbf{E}_{\text{切向}})\cdot\mathbf{H}_\lambda\,da \tag{9.73}$$

按如上述一样的方法，将横向磁场 $\mathbf{H}_\lambda$ 围绕小孔内适当原点展成泰勒级数. (9.73)的结构与(9.70)相同，因而展开式中各项相同. 最低阶多极子给出下列贡献:

$$A_\lambda^{(+)}=A_\lambda^{(-)}=i\frac{2\pi\omega Z_\lambda}{c}[\mathbf{p}_{\text{有效}}^{(\pm)}\cdot\mathbf{E}_\lambda^{(\mp)}(0)-\mathbf{m}_{\text{有效}}^{(\pm)}\cdot\mathbf{B}^{(\mp)}_\lambda(0)+\cdots] \tag{9.74}$$

当 $\lambda=1$ 时，这就给出透射振幅 $T=1+R$. 方程 (9.74) 在形式上与 (9.69) 完全相同，后者适用于波导内的定域电流源. 有效偶极矩 $\mathbf{p}_{\text{有效}}^{(\pm)}$ 和 $\mathbf{m}_{\text{有效}}^{(\mp)}$ 由(9.72)给出，其中 $\mathbf{n}=\pm\mathbf{e}_3$，积分是遍历 z 为恒定的孔计算的. (9.74)中上角标的选择是不重要的，只要一致选上面一行或一致选下面一行就可以了. 正如下面讨论的，有效偶极矩上的上角标(±)相当于从 $z\gtrless0$ 处来看孔.

(*d*) 孔的有效偶极矩

我们初次遇到有效偶极矩 (9.72) 感到有点神秘. 正如已经提到的，它们具有精确的含义，即它们相当于通过理想导电平面屏上一个孔辐射的场的多极子展开的电偶极子部分和磁偶极子部分 (习题 9.15). 对小孔来说，也可以把它们同适当的静态或准静态边值问题的解联系起来. 这样一些问题我们已经讨论过 (3.13 节和 5.13 节)，其结果将

在下面的论述中加以运用.

如果孔比起场有明显变化的距离来是非常小的，那末边值问题可以按这样一个问题近似处理，在这问题中“远离孔”(以孔的线度为单位量度的)处的场是无孔时存在的场. 除了非常细长的孔以外，把隔膜表面当作平面，并把远离孔处各方向上的“渐近”场当作相同的，这样做是足够准确的. 对理想导电面上的孔来说，这时，边值问题是由无孔时存在的法向电场 $\mathbf{E}_0$ 和切向磁场 $\mathbf{H}_0$ 规定的. 场 $\mathbf{E}_0$ 和 $\mathbf{B}_0$ 本身是某边值问题（例如波导中的传播问题或平面波从屏上的反射问题）的结果. 但是，就当前的目的来说，$\mathbf{E}_0$ 和 $\mathbf{B}_0$ 被当作已知的. 倘若把有效电偶矩与 $\mathbf{E}_0$ 联系起来，而把有效磁偶极矩与 $\mathbf{B}_0$ 联系起来(究竟怎样，请参看习题 9.9)，则对于最低阶近似来说，可以忽略 $\mathbf{E}_0$ 和 $\mathbf{B}_0$ 对时间的依赖关系.

场在孔周围的确切形式与孔的形状有关，但是只要考查力线的一般特性，就可以作出一些定性的观测. 在包住孔的一个球面外，场可以用一个多极子展开式来表示. 其主要项将是偶极场. 图 9.4 定性地画出场的特性. 伸出在左图平面上方的磁场回线，看上去是一条从磁偶极

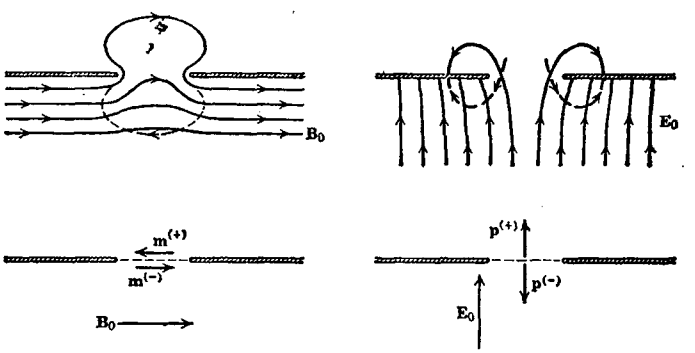


图 9.4　理想导电面上一个小孔引起切向磁场（左图）和法向电场(右图)的畸变. 左下图和右下图表示从平面上下方看时的有效偶极矩.

子发生的力线，其磁偶极矩取向与 $\mathbf{B}_0$ 相反，正如左下图所示的磁偶极矩 $\mathbf{m}^{(+)}$ 的方向．平面下方的磁场可以看做未微扰场 $\mathbf{B}_0$ 加上一个反向偶极场(图中虚线所示)，其偶极矩取向与 $\mathbf{B}_0$ 平行(在左下图中用 $\mathbf{m}^{(-)}$ 表示)．同样，平面上方的电场线看起来是从一个沿 $\mathbf{E}_0$ 方向的垂直偶极矩 $\mathbf{p}^{(+)}$ 发生的，而平面下方的场可以看成未微扰法向场 $\mathbf{E}_0$ 加上一个与 $\mathbf{E}_0$ 反向的偶极子 $\mathbf{p}^{(-)}$ 产生的场．当然，用有效偶极场只限于离孔一定距离的区域．正好在孔内的场与偶极场无相似之处．然而，从定性上说偶极子近似仍是到处可用的，并且计算小孔耦合所需要的也只不过是有效偶极矩而已．

以上的定性讨论有一个严重的缺点．当使电偶极矩的取向总是平行或反平行于 $\mathbf{E}_0$，因而总是垂直于孔时，磁偶极矩则不一定平行或反平行于 $\mathbf{B}_0$．在切面内有两个方向，并且孔的相对取向和 $\mathbf{B}_0$ 的方向都和确定 $\mathbf{m}_{有效}$ 的方向有关．因为有效偶极矩显然平行于场强，所以有必要讨论一下孔的电极化率和磁极化率．有效偶极矩可以写成

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{有效}&=\gamma^{E}\mathbf{E}_0\\(\mathbf{m}_{有效})_\alpha&=\sum_\beta \gamma^{M}_{\alpha\beta}(\mathbf{B}_0)_\beta\end{aligned}\tag{9.75}$$

式中 γ^E 是电极化率标量，$\gamma^M_{\alpha\beta}$ 是 2×2 磁极化率张量．通过选择孔的主轴可以将磁极化率张量对角化．所以有三个极化率(一个电极化率，两个磁极化率)表征一个任意的小孔．应该记住，(9.75)中诸 γ 的正负号取决于从平面的哪一边观察偶极子，如图 9.4 所示．如果在平面的两边都有场，则(9.75)中的表式必须加以修改．例如，若在图 9.4 的右图中，在平面上方有一垂直方向的电场 $\mathbf{E}_1$，同时在平面下方有电场 $\mathbf{E}_0$，则(9.75)中的 $\mathbf{E}_0$ 用 $(\mathbf{E}_0-\mathbf{E}_1)$ 代替．其它种种可能情况可以根据(9.75)用线性叠加法求出．

极化率 γ^E 和 $\gamma^M_{\alpha\beta}$ 具有长度立方的量纲．如果孔的典型尺寸为 d，则可以预期，极化率将是 d^3 乘以数量级等于或小于 1 的数值系数．可

以看出由 $\mathbf{p}_{有效}$ 的表式(9.72)能得到这一结果，因为 $\mathbf{E}_{切向}$ 正比于 E_0，二维积分的结果将给出 E_0 乘以一个表征孔的长度的立方．而且，(9.72)中 $\mathbf{p}_{有效}$ 的矢量性质与(7.95)是一致的．另一方面，(9.72)中 $\mathbf{m}_{有效}$ 的表式显然不是恰当的形式，即使从量纲上看是正确的．通过分部积分，并利用麦克斯韦方程组，我们把这表式变成下列较满意的等效形式：

$$\mathbf{m}_{有效}=\frac{1}{2\pi\mu}\int\mathbf{x}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{B})da \tag{9.76}$$

式中 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}$ 是孔内 B 的精确法向分量，而积分遍历整个孔平面．现在明显可见，$\mathbf{B}_0$ 和 $\mathbf{m}_{有效}$ 的关系就是(9.75)所示的一般形式．对一个半径为 R 的圆孔来说，根据 3.13 节和 5.13 节的静态解，可以得到有效偶极矩．其结果是

$$\mathbf{p}_{有效}=-\frac{R^3}{3\pi}\mathbf{E}_0,\quad \mathbf{m}_{有效}=\frac{2R^3}{3\pi}\mathbf{B}_0 \tag{9.77}$$

式中的正负号相当于从 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 不等于零的那一边来看孔的情况，可以根据图 9.4 来核对．于是，电极化率和磁极化率为

$$\gamma^E=-\frac{R^3}{3\pi},\quad \gamma^M_{\alpha\beta}=\frac{2R^3}{3\pi}\delta_{\alpha\beta} \tag{9.78}$$

用有效偶极矩描述小孔的电磁性质可以追溯到瑞利①．贝特(Bethe)②发展了普遍的理论，并卓有成效地应用到波导和衍射问题上．通过电解槽的测量③，可以从实验上确定任意孔的有效偶极矩，这个事实在实际应用中具有重大意义．

用多极子描述波导中的激发和散射问题以及衍射问题的一些实例留作本章末的几个习题．其它题材可以参看本章末所列的推荐读物．

---

① Lord Rayleigh, *Phil. Mag.* XLIV, 28 (1897)，重印于瑞利的 *Scientific Papers*, Vol IV，第 305 页．

② H.A. Bethe, *Phys. Rev.* **66**, 163(1944).

③ S.B. Cohn, *Proc. I.R.E*, **39**, 1416(1951); **40**, 1069(1952).

9.6 长波长情形下的散射

(a) 小散射体内感生偶极子引起的散射

尺寸小于波长的系统对电磁波的散射是一种常见的重要的情况. 为了方便起见，在描述这样的相互作用时，我们认为入射(辐射)场感生电多极子和磁多极子，这些多极子与入射波保持一定位相关系而振荡，并沿入射方向以外的诸方向辐射能量. 辐射能量角分布的精确形式取决于入射场感生的多极子的相干叠加，一般说来，还依赖于入射波的偏振态. 如果辐射的波长远大于散射体的尺寸，则只有最低阶多极子(通常为电偶极子和磁偶极子)是重要的. 而且，在这些情况下，感生偶极子可以根据静态或准静态边值问题来计算，正如上节的小孔一样.

通常的基本情况是：一个单色平面波入射到一个散射体上. 为简单起见，取周围媒质的 $\mu=\epsilon=1$. 如果规定入射方向的单位矢量为 $\mathbf{n}_0$，入射偏振矢量为 $\boldsymbol{\epsilon}_0$，则入射场是

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\text{入射}}&=\boldsymbol{\epsilon}_0 E_0 e^{ik\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{r}}\\ \mathbf{B}_{\text{入射}}&=\mathbf{n}_0\times\mathbf{E}_{\text{入射}}\end{aligned}\tag{9.79}$$

式中 $k=\omega/c$，并且我们理解时间依赖关系 $e^{-i\omega t}$ 在上式中省写了. 这些场在小散射体内感生偶极矩 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{m}$，这些偶极子在所有方向上辐射能量，如同 9.2 节和 9.3 节里叙述的. 远离散射体处，由(9.19)和(9.36)求得散射(辐射)场如下：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\text{散射}}&=k^2\frac{e^{ikr}}{r}[(\mathbf{n}\times\mathbf{p})\times\mathbf{n}-\mathbf{n}\times\mathbf{m}]\\ \mathbf{B}_{\text{散射}}&=\mathbf{n}\times\mathbf{E}_{\text{散射}}\end{aligned}\tag{9.80}$$

式中 $\mathbf{n}$ 为观察方向上的单位矢量，r 为由散射体量起的距离. 由 $\mathbf{n}_0$ 方向上偏振矢量为 $\boldsymbol{\epsilon}_0$ 的每单位入射通量(每单位面积的功率)产生的，在 $\mathbf{n}$ 方向上每单位立体角内偏振矢量为 $\boldsymbol{\epsilon}$ 的辐射功率是一个量纲为

面积/立体角的量．这个量叫做微分散射截面[①]：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{n},\epsilon;\mathbf{n}_0,\epsilon_0)=\frac{r^2\frac{c}{8\pi}|\epsilon^*\cdot\mathbf{E}_{\text{散射}}|^2}{\frac{c}{8\pi}|\epsilon_0^*\cdot\mathbf{E}_{\text{入射}}|^2} \tag{9.81}$$

如同7.2节里已经提到的那样，(9.81)中偏振矢量的复共轭对正确处理圆偏振来说是很重要的．利用(9.80)和(9.79)可以把微分散射截面写成

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{n},\epsilon;\mathbf{n}_0,\epsilon_0)=\frac{k^4}{E_0^2}|\epsilon^*\cdot\mathbf{p}+(\mathbf{n}\times\epsilon^*)\cdot\mathbf{m}|^2 \tag{9.82}$$

散射截面对 $\mathbf{n}_0$ 和 ϵ_0 的依赖关系蕴含在偶极矩 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{m}$ 中．微分(和总)散射截面按 k^4 方式随波数(或按 λ^{-4} 方式随波长)而变化，这几乎是长波长辐射被任何有限系统散射时呈现的普遍特性．这种对频率的依赖关系就是大家熟知的瑞利定律．只当两种静偶极矩都等于零时，散射才不遵守瑞利定律；这时散射是由四极矩或更高阶多极矩（或与频率有关的偶极矩)发生的，且按 ω^6 或 ω 的更高次方而变化．有时把偶极散射叫做瑞利散射，但是这个术语通常是用于由偶极子散射体集团引起的不相干散射．

(b) 一个电介质小球引起的散射

作为偶极散射的第一个很简单的实例，我们考虑一个半径为 a 的电介质小球，其 $\mu=1$，并具有均匀的各向同性的介电常数 $\epsilon(\omega)$．根据4.4节，特别是(4.56)，我们求得电偶极矩为

$$\mathbf{p}=\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)a^3\mathbf{E}_{\text{入射}} \tag{9.83}$$

磁偶极矩等于零．微分散射截面是

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=k^4a^6\left|\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right|^2|\epsilon^*\cdot\epsilon_0|^2 \tag{9.84}$$

① 在工程文献里，$4\pi(d\sigma/d\Omega)$ 叫做双静态截面．

(9.84)对偏振的依赖性是纯电偶极子散射的典型性质．散射波是线偏振波，其偏振矢量在偶极矩方向(ϵ_0)和单位矢量 n 所确定的平面内．

入射波一般都是非偏振波．这时，人们感兴趣的是求找一个给定线偏振态的散射波的角分布．对于一个给定的 ϵ，将截面(9.84)对初偏振矢量 ϵ_0 求平均．图 9.5 表示一组可能的偏振矢量．散射平面由矢量 $\mathbf{n}_0$ 和 $\mathbf{n}$ 确定．偏振矢量 $\epsilon_0^{(1)}$ 和 $\epsilon^{(1)}$在该平面内，而 $\epsilon_0^{(2)}=\epsilon^{(2)}$与该平面垂直．容易证明，对偏振矢量为 $\epsilon^{(1)}$和 $\epsilon^{(2)}$的散射波来说，微分截面对初偏振矢量的平均值是

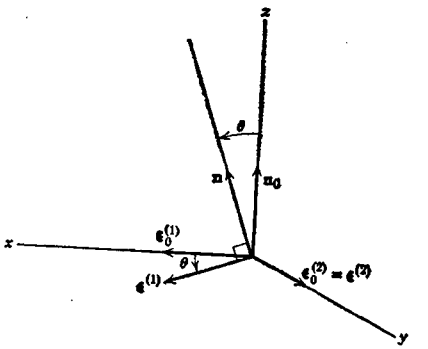


图 9.5　入射波和散射波的偏振矢量和传播矢量．

$$\frac{d\sigma_{/\!/}}{d\Omega}=\frac{k^4a^6}{2}\left|\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right|^2\cos^2\theta$$
$$\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega}=\frac{k^4a^6}{2}\left|\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right|^2 \tag{9.85}$$

式中下角标 // 和⊥，分别表示偏振矢量平行于散射平面和垂直于散射平面这两种情况．散射波的偏振度 $\Pi(\theta)$定义为

$$\Pi(\theta)=\frac{\dfrac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega}-\dfrac{d\sigma_{/\!/}}{d\Omega}}{\dfrac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega}+\dfrac{d\sigma_{/\!/}}{d\Omega}} \tag{9.86}$$

由(9.85)求得电介质小球的(电偶极子)散射的偏振度为

$$\Pi(\theta)=\frac{\sin^2\theta}{1+\cos^2\theta} \tag{9.87}$$

对两散射偏振态求和而得的微分截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=k^4a^6\left|\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right|^2\cdot\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta) \tag{9.88}$$

因而总散射截面为

$$\sigma=\int\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega=\frac{8\pi}{3}k^4a^6\left|\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right|^2 \tag{9.89}$$

微分截面(9.88)和散射波的偏振度(9.87)对 $\cos\theta$ 的函数关系曲线，如图 9.6 所示. 偏振度 $\Pi(\theta)$ 在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时达到最大值. 在这角度时散射波是百分之百的线偏振波，其偏振矢量与散射平面垂直. 在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 两边相当宽的角度范围内，散射波的很大一部分是偏振波. 蓝天的偏振特性是这种现象的一个例证，事实上蓝天的偏振特性促使瑞利最早研究上述问题. 读者可以在晴朗的白天，用一片起线偏镜或适当的太阳眼镜来检验这种普遍特性.

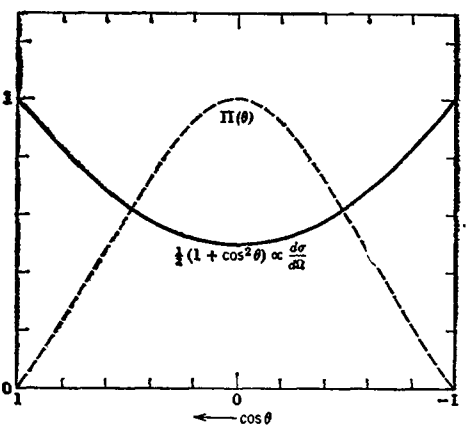


图 9.6 一个电介质小球(偶极子近似)的微分散射截面(9.88)和散射波的偏振度(9.87).

(c) 一个理想导电小球引起的散射

现在讨论一个半径为 a 的理想导电小球引起的散射，这个实例具有的若干有趣性质牵涉到不同多极子间的相干性. 2.5 节里已经证明，这样一个球的电偶极矩是

$$\mathbf{p}=a^3\mathbf{E}_{\text{入射}} \tag{9.90}$$

这球也具有磁偶极矩. 对一个理想导电球来说，磁场的边界条件是：在 $r=a$ 处，B 的法向分量等于零. 按照均匀电场中电介质球(4.4 节)的计算方法，并令 $\epsilon=0$ 类推之，或者根据磁导球(5.11 节)的计算结果并令 $\mu=0$，或者通过简单而直接的计算，都可以求得小球的磁矩为

$$\mathbf{m}=-\frac{a^3}{2}\mathbf{B}_{\text{入射}} \tag{9.91}$$

对一个线偏振入射波来说，两种偶极子互相垂直，且都垂直于入射方向.

微分截面(9.82)是

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{n},\epsilon;\mathbf{n}_0,\epsilon_0)=k^4a^6\left|\epsilon^*\cdot\epsilon_0-\frac{1}{2}(\mathbf{n}\times\epsilon^*)\cdot(\mathbf{n}_0\times\epsilon_0)\right|^2 \tag{9.92}$$

偏振性质和散射波的角分布比电介质球的复杂. 以非偏振波入射时，对于散射波的平行于和垂直于散射平面的两个偏振态来说，类似于(9.85)的截面是

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega}&=\frac{k^4a^6}{2}\left|\cos\theta-\frac{1}{2}\right|^2\\ \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega}&=\frac{k^4a^6}{2}\left|1-\frac{1}{2}\cos\theta\right|^2\end{aligned} \tag{9.93}$$

对两个散射偏振态求和而得的微分散射截面可以写成

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=k^4a^6\left[\frac{5}{8}(1+\cos^2\theta)-\cos\theta\right] \tag{9.94}$$

而偏振度(9.86)是

$$\Pi(\theta)=\frac{3\sin^2\theta}{5(1+\cos^2\theta)-8\cos\theta} \tag{9.95}$$

散射截面和偏振度对 $\cos\theta$ 的函数关系曲线如图 9.7 所示. 截面曲线后部升得很高，这是由电偶极子-磁偶极子干涉引起的. 当 $\theta=60°$ 时偏振度达到 $\Pi=+1$，在整个角度范围内偏振度是正的. 偏振度与图 9.6 所示电介质小球的相似，虽然角分布很不相同. 如果 $(\epsilon-1)$ 不是很小的，总散射截面则为 $\sigma=10\pi k^4a^6/3$，并与电介质球的 σ(9.89) 同数量级.

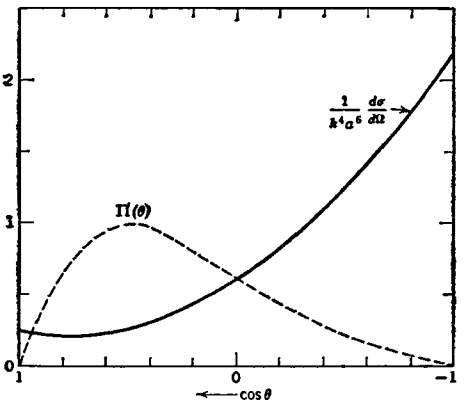


图 9.7 理想导电小球(电偶极子和磁偶极子近似)的微分散射截面(9.94)和散射波的偏振度(9.95).

我们可以把按 ω^4 方式依赖于频率的偶极散射，看作是 kd 展开中的最低阶近似，这里 d 为散射体尺寸的典型长度. 在 $kd\sim1$ 的范围内，我们必须考虑比最低阶高的多极子. 这时，采用球多极场的系统展开来进行完善的讨论. 这些内容在第十六章里予以论述，在那里我们用这种观点来研究一个导电球引起的散射. 当 $kd\gg1$ 时，我们可以采用与上不同的一些近似方法，如同本章第 13 节里举例说明的那样. 有一些书籍专门阐述具有任意 μ、ϵ、σ 的球粒子对光的散射. 有关这类问题的一些参考书在本章末列出.

(*d*) 散射体集团

最后我们要指出：如果散射系统由若干小散射体组成，各散射体间有一定的空间间隔，则每个散射体产生一个(9.80)式的振幅．散射截面是由这些独立振幅相干叠加而产生的．因为感生偶极子正比于入射场(在第 j 个散射体的位置 $\mathbf{x}_j$ 上计算的)，所以感生偶极矩将具有一个相因数 $e^{ik\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{x}_j}$．而且，若观察点远离整个散射系统，则(9.7)表明，对第 j 个散射体来说，场(9.80)将有一个相因数 $e^{-ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}_j}$．对这样一个系统的(9.82)推广式为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{k^4}{E_0^2}\left|\sum_j[\epsilon^*\cdot\mathbf{p}_j+(\mathbf{n}\times\epsilon^*)\cdot\mathbf{m}_j]e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}_j}\right|^2 \tag{9.96}$$

式中 $\mathbf{q}=k\mathbf{n}_0-k\mathbf{n}$ 是波矢在散射时发生的矢量变化．

(9.96) 中相因数 $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}_j}$ 的出现意味着：除了前进方向（在这方向上 $\mathbf{q}=0$）以外，散射敏感地依赖于散射体在空间的确切分布．假定所有散射体是全同的，通过讨论这样的实例可以阐明一般特性．这时，散射截面是单个散射体的散射截面乘以一个结构因数①

$$\mathscr{F}(\mathbf{q})=\left|\sum_j e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}_j}\right|^2 \tag{9.97}$$

将上式写成一个因数乘其复共轭，$\mathscr{F}(\mathbf{q})$是

$$\mathscr{F}(\mathbf{q})=\sum_j\sum_{j'}e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}_j-\mathbf{x}_{j'})}$$

倘若散射体是无规分布的，则可以证明 $j\neq j'$ 的诸项给出的贡献可忽略不计．只有 $j=j'$ 的诸项是重要的．这时，$\mathscr{F}(\mathbf{q})=N$，$N$ 为散射体总数，这种散射就是各散射体个别贡献的不相干叠加．另一方面，倘若散射体非常多，且在空间作有规则分布，则除了沿前进方向外，结构因数实际上处处等于零．因此，非常大的规则散射体阵不引起散射，像岩盐和石英那样的透明固态单晶体就是这种散射阵的一些实例．非

① 这里我们不考虑多次散射效应，即是说，我们假定：散射的平均自由程远大于散射阵的线度．

理想点阵的热振动或杂质等都会引起少量的散射．按简单立方点阵排列的散射中心是一个明显的例证，这也提供了关于上述长波长情形的限制范围的证据．大家知道结构因数是

$$\mathscr{F}(\mathbf{q})=N^2\left[\frac{\sin^2\left(\frac{N_1q_1a}{2}\right)}{N_1^2\sin^2\left(\frac{q_1a}{2}\right)}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{N_2q_2a}{2}\right)}{N_2^2\sin^2\left(\frac{q_2a}{2}\right)}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{N_3q_3a}{2}\right)}{N_3^2\sin^2\left(\frac{q_3a}{2}\right)}\right] \tag{9.98}$$

式中 a 是点阵间隔，N_1、N_2、N_3 是沿三个点阵轴上的点阵座数目，$N=N_1N_2N_3$ 是散射体的总数，q_1、q_2、q_3 是 $\mathbf{q}$ 沿点阵轴的分量．在短波长($ka>\pi$) 情形下，当满足布喇格散射条件 $q_ia=0$，2π，4π，…时，(9.98)有一系列巅值．这就是熟知的X射线衍射情况．但是，在长波长情形下，由于$(q_ia)_{最大}=2ka\ll1$，(9.98)只在 $q_ia=0$ 处有一个巅值．在这种极限情形下，$\mathscr{F}(\mathbf{q})$ 是三个 $[(\sin x_i/x_i]^2$ 型因子的乘积，其中 $x_i=N_iq_ia/2$．所以散射限于 $q_i\lesssim2\pi/N_ia$ 范围内，这相当于角度小于 λ/L，这里 λ 是波长，L 是散射阵的一个典型总线度．

9.7 散射的微扰论；瑞利对蓝天的解释①；气体和液体引起的散射

(a) 一般理论

如果电磁波通过的媒质具有均匀的性质，则波的传播不受干扰，也不发生偏转．但若媒质的电磁性质随空间(或随时间)而变化，则波发生散射．一些能量偏离其原来的路线．如果性质的变化在量值上很

① 虽然瑞利的名字应该毫无疑义地与蓝天的定量解释联系在一起，可是从历史上看有趣的是，达·芬奇(Leonardo da Vinci) 在 1500 年左右就已理解这个基本现象．特别是他做了一些实验，对着黑暗背景观察柴烟对阳光的散射 (如 Jean Paul Richter, *The Literary Works of Leonardo da Vinci*, 第三版, Phaidon, London, 1970 第一卷第 237 页起第 300—302 条援引的．也可参看 Dover 出版社翻印的 *The Notebooks of Leonardo da Vinci* 第一卷第 161 页起)，这些实验比丁道尔所做的非常类似的实验早了 350 年 [J. Tyndall, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **160**, 333(1870)]．

小，那末散射是轻微的，因而可以采用微扰法．我们假想一种对比的情况，这种情况对应的是介电常数为 ϵ_0、磁导率为 μ 的各向同性均匀媒质．现在假定 ϵ_0 和 μ_0 与频率无关，虽然当假定谐和时间依赖关系时这个限制显然可以取消．假设媒质对外场的反应通过某种微扰因素的作用发生微小变化，使得在空间的某些区域内 $\mathbf{D}\neq\epsilon_0\mathbf{E}$, $\mathbf{B}\neq\mu_0\mathbf{H}$．场的这些变化可以是时间和空间变数的函数．由下列无源麦克斯韦方程组出发：

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{B}&=0,\quad \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\mathbf{D}&=0,\quad \nabla\times\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}\tag{9.99}$$

直接得到 $\mathbf{D}$ 的波动方程

$$\nabla^2\mathbf{D}-\frac{\mu_0\epsilon_0}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{D}}{\partial t^2}=-\nabla\times\nabla\times(\mathbf{D}-\epsilon_0\mathbf{E})+\frac{\epsilon_0}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times(\mathbf{B}-\mu_0\mathbf{H})\tag{9.100}$$

这个方程到现在还没有采取近似处理，虽然后来从某种意义上看曾将上式右边当作很小的量来处理①．

如果把(9.100)右边当作已知的，那末从形式上看(9.100)就是具有推迟解(6.69)的(6.54)式．当然，一般说来，右边是未知的，并且(6.69)必须看作一个积分关系，而不是一个解．尽管如此，问题的这种积分形式仍成为卓有成效的微扰近似的出发点．为方便起见，规定未微扰场与频率 ω 间有谐和时间依赖关系，并假定差 $(\mathbf{D}-\epsilon_0\mathbf{E})$ 和 $(\mathbf{B}-\mu_0\mathbf{H})$ 也具有这种时间依赖关系．这就对能用数学形式描述的微扰问题的种类加上某些限制，但可防止讨论变得太复杂．当我们认为时间依赖关系为 $e^{-i\omega t}$ 时，(9.100)变成

① 如果有给定源 $\rho(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{J}(\mathbf{x},t)$存在，则要修改(9.100)，在其左边加上一项

$$-4\pi\left[\nabla\rho+\frac{\mu_0\epsilon_0}{c^2}\frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t}\right]$$

$$(\nabla^2+k^2)\mathbf{D}=-\nabla\times\nabla\times(\mathbf{D}-\epsilon_0\mathbf{E})-\frac{i\epsilon_0\omega}{c}\nabla\times(\mathbf{B}-\mu_0\mathbf{H}) \quad (9.101)$$

式中 $k^2=\mu_0\epsilon_0\omega^2/c^2$，$\mu_0$ 和 ϵ_0 可以是对应于频率 ω 的特定值. 未微扰问题[即令(9.101)右边等于零]的解用 $\mathbf{D}^{(0)}(\mathbf{x})$ 来表示. 如果将(9.101)右边当作已知，则根据(6.67)可以得到(9.101)的形式解. 于是，

$$\mathbf{D}=\mathbf{D}^{(0)}+\frac{1}{4\pi}\int d^3x'\,\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\left\{\begin{array}{c}\nabla'\times\nabla'\times(\mathbf{D}-\epsilon_0\mathbf{E})\\+\dfrac{i\epsilon_0\omega}{c}\nabla'\times(\mathbf{B}-\mu_0\mathbf{H})\end{array}\right\} \quad (9.102)$$

如果物理情况是散射的一种情况，(9.102)中的被积函数被限制在空间的某有限区域，$\mathbf{D}^{(0)}$ 描写沿某方向入射的一个波，那末远离散射区域的场可以写成

$$\mathbf{D}\to\mathbf{D}^{(0)}+\mathbf{A}_{\text{散射}}\frac{e^{ikr}}{r} \quad (9.103)$$

式中散射振幅 $\mathbf{A}_{\text{散射}}$ 是

$$\mathbf{A}_{\text{散射}}=\frac{1}{4\pi}\int d^3x'\,e^{-ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}'}\left\{\begin{array}{c}\nabla'\times\nabla'\times(\mathbf{D}-\epsilon_0\mathbf{E})\\+\dfrac{i\epsilon_0\omega}{c}\nabla'\times(\mathbf{B}-\mu_0\mathbf{H})\end{array}\right\} \quad (9.104)$$

由(9.102)导出(9.104)的步骤跟辐射场的由(9.3)导出(9.8)的步骤相同. 对(9.104)施行一些分部积分，就可以把散射振幅表示成

$$\mathbf{A}_{\text{散射}}=\frac{k^2}{4\pi}\int d^3x e^{-ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}\left\{\begin{array}{c}[\mathbf{n}\times(\mathbf{D}-\epsilon_0\mathbf{E})]\times\mathbf{n}\\-\dfrac{\epsilon_0\omega}{kc}\mathbf{n}\times(\mathbf{B}-\mu_0\mathbf{H})\end{array}\right\} \quad (9.105)$$

可将被积函数的矢量结构，同散射偶极场(9.80)比较. $(\mathbf{D}-\epsilon_0\mathbf{E})$ 对偏振依赖关系的贡献相当于电偶极子的贡献，$(\mathbf{B}-\mu_0\mathbf{H})$ 对偏振依赖关系的贡献相当于磁偶极子的贡献. 与(9.82)对应的微分散射截面是

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{|\epsilon^*\cdot\mathbf{A}_{\text{散射}}|^2}{|\mathbf{D}^{(0)}|^2} \quad (9.106)$$

式中 ϵ 为散射波的偏振矢量.

方程(9.102)、(9.105)和(9.106)给出本节开头提出的散射问题的

一个形式解．当然，至少要知道场的近似值，才能知道散射振幅$\mathbf{A}_{\text{散射}}$．但是，仿照量子力学中散射的玻恩近似级数法，可以由(9.102)发展出一种逐步逼近的系统方法．如果(9.102)中的被积函数可以达到一级近似，那末(9.102)就给出D的一级近似，这就比$\mathbf{D}^{(0)}$改进一些．D的一级近似又可以用来求出被积函数的二级近似，并且可以定出一个D的改进值，以此类推．有关这个级数的收敛性等问题已经在量子力学文献中作了许多研究．除非头几次迭代渐近值很快地收敛，否则这级数就不是很有用的．

(*b*) 玻恩近似

我们将满足于散射振幅的最低级近似．在量子论中这叫做一级玻恩近似或就叫做玻恩近似，按我们现在阐述的内容来说，实际上瑞利在1881年已经叙述过这种近似．而且，我们把下面的讨论只限于这样的简单例子，即媒质的线性反应中只有空间变化．于是，我们假定D和E间、B和H间有如下的关系：

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{x})&=[\epsilon_0+\delta\epsilon(\mathbf{x})]\mathbf{E}(\mathbf{x})\\ \mathbf{B}(\mathbf{x})&=[\mu_0+\delta\mu(\mathbf{x})]\mathbf{H}(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{9.107}$$

式中$\delta\epsilon(\mathbf{x})$和$\delta\mu(\mathbf{x})$的量值比$\epsilon_0$和$\mu_0$小得多．(9.102)和(9.105)中出现的差与$\delta\epsilon$和$\delta\mu$成正比．这时，对最低级近似来说，这些差所代表的场可以用未微扰场来近似表示：

$$\begin{aligned}\mathbf{D}-\epsilon_0\mathbf{E}&\simeq\frac{\delta\epsilon(\mathbf{x})}{\epsilon_0}\mathbf{D}^{(0)}(\mathbf{x})\\ \mathbf{B}-\mu_0\mathbf{H}&\simeq\frac{\delta\mu(\mathbf{x})}{\mu_0}\mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{9.108}$$

如果未微扰场是沿$\mathbf{n}_0$方向传播的一个平面波的场，因而$\mathbf{D}^{(0)}$和$\mathbf{B}^{(0)}$为

$$\mathbf{D}^{(0)}(\mathbf{x})=\epsilon_0 D_0 e^{ik\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{x})=\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\mathbf{n}_0\times\mathbf{D}^{(0)}(\mathbf{x})$$

那末散射振幅(9.105)和ϵ^*的标积除以D_0得

$$\frac{\epsilon^*\cdot\mathbf{A}^{(1)}_{\text{散射}}}{D_0}=\frac{k^2}{4\pi}\int d^3x e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\left\{\begin{array}{l}\epsilon^*\cdot\epsilon_0\dfrac{\delta\epsilon(\mathbf{x})}{\epsilon_0}\\ +(\mathbf{n}\times\epsilon^*)\cdot(\mathbf{n}_0\times\epsilon_0)\dfrac{\delta\mu(\mathbf{x})}{\mu_0}\end{array}\right\} \tag{9.109}$$

式中 $\mathbf{q}=k(\mathbf{n}_0-\mathbf{n})$ 为入射波矢和散射波矢之差. (9.109)的绝对值平方给出微分散射截面(9.106).

如果波长比 $\delta\epsilon$ 和 $\delta\mu$ 的空间界限大得多，就可以令(9.109)中的指数等于 1. 这时的振幅就是类似于上节的偶极子近似，并具有偶极子的频率依赖关系和角分布. 为了同已经得到的结果建立联系，我们假设散射区域是真空中一个半径为 a 的均匀电介质球. 这时 $\epsilon_0=1$，而 $\delta\epsilon$ 在半径为 a 的球体内是恒定的，在该球外等于零. 我们可以对任意的 $|\mathbf{q}|$ 算出(9.109)中的积分，从而得到下列结果:

$$\frac{\epsilon^*\cdot\mathbf{A}_{\text{散射}}}{D_0}=k^2\delta\epsilon(\epsilon^*\cdot\epsilon_0)\left[\frac{\sin qa-qa\cos qa}{q^3}\right]$$

在 $q\to 0$ 的极限下，方括号内的量趋于 $a^3/3$. 因此，在频率非常低时，或者在所有频率的前进方向上，对于一个半径为 a 的电介质球引起的散射来说，其微分截面的玻恩近似是

$$\lim_{q\to 0}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{玻恩}}=k^4a^6\left|\frac{\delta\epsilon}{3}\right|^2|\epsilon^*\cdot\epsilon_0|^2 \tag{9.110}$$

与(9.84)比较，我们看出：玻恩近似和精确的低频结果有预期的关系.

(c) 蓝天——初浅的论证

我们可以按现在的体系来讨论气体对光的散射，瑞利在他的有关夕阳和蓝天的著名论文中，最早定量地论述了这种散射现象①. 因为大多数气体分子的磁矩与电偶极矩相比可以忽略不计，所以散射实质上是纯粹由电偶极子引起的. 个体散射的角分布和偏振度(参看图 9.6)，

① Lord Rayleigh, *Phil. Mag.* **41**, 107, 274, (1871); *Phil. Mag.* **47**, 375 (1899); 重印在他的 *Scientific Papers*, 第一卷第 87 页和第四卷第 397 页上. 瑞利的这些论文，作为一位物理学名家的工作范例，是很值得一读的.

上节讨论过了．因此，我们把注意力集中在总散射截面和入射束的衰减上．我们的论述分成两部分：第一部分是初浅的论证，这适用于稀薄理想气体，其中分子在空间上的相对分布是完全无规的．第二部分是以气体中密度涨落为基础，作了更为普遍有效的论述．

若假定位于 $\mathbf{x}_j$ 的各个分子具有偶极矩 $\mathbf{p}_j=\gamma_{分子}\mathbf{E}(\mathbf{x}_j)$，则(9.109)中介电常数的有效变化 $\delta\epsilon(\mathbf{x})$可以写成

$$\delta\epsilon(\mathbf{x})=4\pi\sum_j\gamma_{分子}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_j) \tag{9.111}$$

由(9.109)和(9.106)求得微分散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=k^4|\gamma_{分子}|^2\cdot|\epsilon^*\cdot\epsilon_0|^2\mathscr{F}(\mathbf{q})$$

式中 $\mathscr{F}(\mathbf{q})$由(9.97)给出．当散射中心作无规分布时，结构因数简化为一个不相干的和，并且截面正好等于单个分子的截面乘以分子数．对稀薄气体来说，分子极化率和介电常数的关系是 $\epsilon\simeq1+4\pi N\gamma_{分子}$，式中 N 为每单位体积的分子数．气体中每个分子的总散射截面为

$$\sigma\simeq\frac{k^4}{6\pi N^2}|\epsilon-1|^2\simeq\frac{2k^4}{3\pi N^2}|n-1|^2 \tag{9.112}$$

其中最后一式是用折射率 n 写出的，假定 $|n-1|\ll1$．截面(9.112)表示每个分子对单位入射能通量的散射功率．在入射能通量通过厚度为 dx 的气体时，通量的相对损失是 $N\sigma dx$．于是，入射束的强度为 $I(x)=I_0e^{-\alpha x}$，式中 α 是(7.53)的吸收系数或衰减系数(也叫做消光系数)，并由下式给出：

$$\alpha=N\sigma\simeq\frac{2k^4}{3\pi N}|n-1|^2 \tag{9.113}$$

(9.112)和(9.113)这些结果描述了所谓瑞利散射，即由气体分子或其它无规分布的偶极子散射体所引起的不相干散射，每种散射都符合瑞利的 ω^4 定律．

瑞利是在大气对光的散射这个意义上推导出 (9.113)．显然，k^4

的依赖关系意味着：在可见光谱中，红光散射最少，紫光散射最多．偏离入射束方向接收的光，其高频(蓝)部分占的比重要大于入射束光谱分布中的高频部分，而在透射束的光谱成分中红光比重增加了，同时透射束的总强度减少了．天空呈蓝色、夕阳显红色、冬天阳光不足、夏天正午容易晒黑，这些现象都是由于大气层中瑞利散射的结果．在可见区(4100—6500 埃)中和在标准温度压强下，空气的折射率为 $(n-1)\simeq 2.78\times 10^{-4}$．取 $N=2.69\times 10^{19}$ 个分子/厘米^3，紫光(4100 埃)、绿光(5200 埃)、红光(6500 埃)的典型衰减长度值 $A=\alpha^{-1}$ 分别为 $A=30$，77，188 千米．采用大气层的等温模型，即大气密度随高度按指数律而变化，我们可以估算太阳在天顶和日出-日没位置时地面上各种波长的强度与大气顶部相应波长的入射强度之相对比值如下：

光的颜色	天顶	日出-日没
红(6500 埃)	0.96	0.21
绿(5200 埃)	0.90	0.024
紫(4100 埃)	0.76	0.000065

这些数值表明日出和日没时透射过来的太阳光明显地变红．

实际情况如图 9.8 所示．曲线 A，表示从地球外面入射到地球上的太阳辐射的功率谱，和光子能量的函数关系曲线．曲线 B，表示太阳恰恰在头顶上时，海平面处的一个典型功率谱①．上面那条虚曲线是根据曲线 A 预期的结果，假定大气层是干燥、清洁、等温的，大气密度随高度按指数律改变，而衰减仅仅由这样大气层的瑞利散射引起的．实际上，衰减比较大，主要由于水蒸汽、臭氧、其它各种分子和尘埃的存在，水蒸汽在红外区有一些强吸收带，臭氧引起紫外吸收．下面那条虚

① 图 9.8 中的数据引自 W. E. Forsythe, *Smithsonian Physical Tables* 第九修订版，Smithsonian Institution, Washington, D.C. (1954)，表 813 和表 815；又引自 K. Ya. Kondratyev, *Radiation in the Atmosphere*, Academic, New York (1969)，第五章．

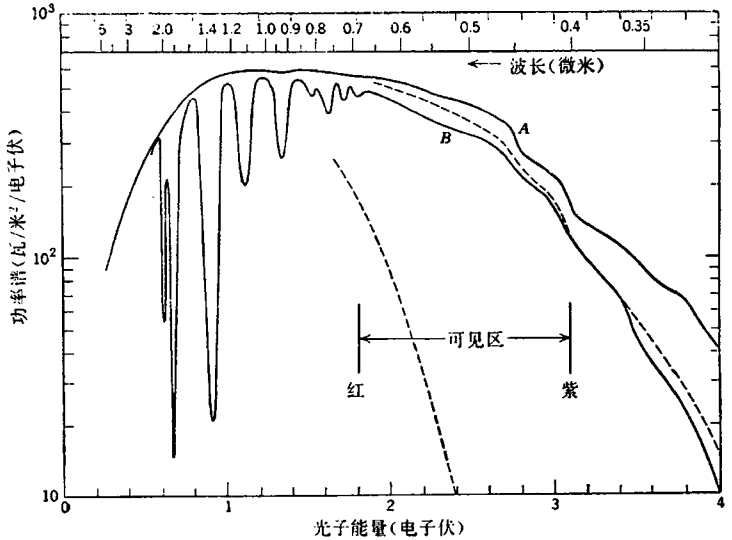


图 9.8 太阳辐射功率谱(以瓦/米²/电子伏为单位)和光子能量(以电子伏为单位)的函数关系曲线. 曲线 A 是大气层上面的入射功率谱. 曲线 B 是太阳在天顶位置时一个典型的海平面上的功率谱. 2 电子伏以下的吸收带主要由水蒸汽引起的, 并随地点和日期的改变而改变. 两条虚曲线分别给出太阳在天顶位置和日出-日没位置时所预期的海平面上的功率谱, 假定衰减仅仅由清洁、干燥空气的瑞利散射引起的.

线大致表示太阳在日出-日没位置时海平面上的功率谱. 沿绕地球的轨道飞行的宇航员看到的日没甚至更红, 这是因为太阳光通过大气层的路程长度加大了一倍.

有人已经报道过对来自天空的散射光的偏振所作的详细观测①. 正如对衰减所作的观测一样, 实际的观测结果跟低密度、干燥、清洁大气层的理想模型有些偏差的. 在 90° 方向上, 偏振度是波长的函数且

① T. Gehrels, *J. Opt. Soc. Am.* **52**, 1164(1962).

在波长为5500埃时达到一个接近75%的最大值．小于100%的原因，估计是由于多次散射(6%)、分子的各向异性(6%)、地面反射(5%，对绿光来说，当有大片绿色植物时地面反射特别重要)和悬浮体(8%)．

消光系数公式(9.113)的显著特点在于它含有因子 N^{-1} 以及诸如折射率等的宏观量．如果没有原子性($N\to\infty$)，那就没有衰减．相反地，可以用观测衰减来确定 N．麦克斯韦给瑞利的私人通信中特别强调了这一点．如果假定大气层的性质已了解得相当清楚，那末就可以用一颗恒星上射来的光的相对强度与高度的函数关系来确定 N．人们早就用这种方法求得了一些估计值，这些值与较常用的一些方法所得的结果相符合．

(*d*) 密度涨落，临界乳光

研究气体和液体中光的散射和衰减的另一种较普遍的方法是考虑密度的涨落，因而要考虑折射率的涨落．我们假想流体体积 V 被分成若干个胞腔，这些胞腔比波长小得多，但每个胞腔含很多分子．每个胞腔体积为 v，其中含有分子的平均数为 $N_v=vN$．实际分子数围绕 N_v 涨落，其涨落方式取决于气体或液体的性质．令第 j 个胞腔内分子数对平均数的偏离为 ΔN_j．第 j 个胞腔折射率的变化 $\delta\epsilon$ 是

$$\delta\epsilon_j=\frac{\partial\epsilon}{\partial N}\cdot\frac{\Delta N_j}{v}$$

根据克劳修斯-莫索提关系式(4.70)，上式可以写为

$$\delta\epsilon_j=\frac{(\epsilon-1)(\epsilon+2)}{3Nv}\Delta N_j \tag{9.114}$$

利用上列第 j 个胞腔的 $\delta\epsilon$ 表式，现在把积分(9.109)写成对胞腔求和的形式：

$$\frac{\epsilon^*\cdot\mathbf{A}^{(1)}_{\text{散射}}}{D_0}=\epsilon^*\cdot\epsilon_0\frac{k^2(\epsilon-1)(\epsilon+2)}{12\pi N\epsilon}\sum_j\Delta N_j e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}_j} \tag{9.115}$$

写出(9.115)的绝对值平方时，会出现类似于(9.97)的一个结构因数．如果假定不同胞腔内涨落的相互关系(由分子间力间接引起的)只在远

小于波长的一段距离上存在，则可以令(9.115)中的指数等于1．这时由

$$\alpha=\frac{1}{V}\int\left|\frac{\epsilon^*\cdot\mathbf{A}^{(1)}_{\text{散射}}}{D_0}\right|^2 d\Omega$$

给出的消光系数 α 是

$$\alpha=\frac{(\omega/c)^4}{6\pi N}\left|\frac{(\epsilon-1)(\epsilon+2)}{3}\right|^2\cdot\frac{\Delta N_V^2}{NV} \tag{9.116}$$

式中 ΔN_V^2 为体积 V 内均方分子数涨落，其定义如下：

$$\Delta N_V^2=\sum_{jj'}\Delta N_j\Delta N_{j'}$$

式中的求和遍及体积 V 内所有的胞腔．利用统计力学，就可以用媒质的等温压缩系数 β_T 来表示量 ΔN_V^2：

$$\frac{\Delta N_V^2}{NV}=NkT\beta_T,\quad \beta_T=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \tag{9.117}$$

那末衰减系数(9.116)就变成

$$\alpha=\frac{1}{6\pi N}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4\left|\frac{(\epsilon-1)(\epsilon+2)}{3}\right|^2\cdot NkT\beta_T \tag{9.118}$$

这个特殊表式最早由爱因斯坦在1910年求得，叫做爱因斯坦-斯莫鲁查夫斯基公式．对稀薄理想气体来说，$|\epsilon-1|\ll 1$和 $NkT\beta_T=1$，(9.118)就化为瑞利结果(9.113)．当趋近临界点时，β_T 变得非常大(恰在临界点时，β_T 为无穷大)．因此，在临界点附近散射和衰减变得很大．这种现象就是如所周知的临界乳光．正如斯莫鲁查夫斯基(1904年)原先强调的，大的散射直接跟临界点附近大的密度涨落有关．当非常靠近临界点时，由于密度涨落的相关长度变为大于波长，我们的处理失效，这是奥尔恩斯坦(Ornstein)和则尼克(Zernicke)(1914年)最早指出的．正确的处理牵涉到密度径向分布函数的傅里叶变换．早期文献的索引可以在 *Fabelinskii* 的书中找到，该书作者详尽讨论了光散射在临界点现象和二级相变研究中的应用．*Rosenfeld* 书第五章第6节里对出现径向密度分布的情形作了完善的讨论．

9.8 标量衍射理论

虽然散射和衍射在逻辑上是分不开的，但在处理上却是分开的，由于波的有限波长使得几何光学不再适用于衍射上．因而衍射通常牵涉到这样一些小孔或障碍物，这些孔或障碍物的线度比波长大得多．对于最低级近似，电磁波的相互作用用光线来描述(几何光学)．高一级近似就牵涉波在障碍物附近或通过孔时的衍射，因而波被扩展．基于傅里叶变换的简单论证表明：波的偏转角被限制在 $\theta \lesssim \lambda/d$ 区域内，其中 λ 为波长，d 为孔或障碍物的线度．下面讨论的各种近似对于 $\lambda/d \ll 1$ 是非常有效的，而当 $\lambda \sim d$ 或 $\lambda > d$ 时就完全失效．

最早研究衍射的工作是跟惠更斯、杨和菲涅耳的名字联系在一起的．基尔霍夫(1882 年)第一个系统地从基本原理推导了菲涅耳理论．基尔霍夫理论虽然在数学上有矛盾、在物理上有缺点，但在光学领域里取得相当惊人的成功，大多数衍射工作都是以基尔霍夫理论为根据的．我们先推导基本的基尔霍夫积分及其运算近似，然后评述其数学上的困难，最后叙述瑞利和索末菲的修正，他们消除了数学上的矛盾．

关于衍射的一般几何形状是由界面 S_1 将空间分成 Ⅰ 和 Ⅱ 两个区域，如图 9.9 所示．界面 S_2 通常取“在无穷远处”，就是说，离所考虑的区域很远．区域 Ⅰ 内的源产生向外传播的场．设界面 S_1 由“不透明”

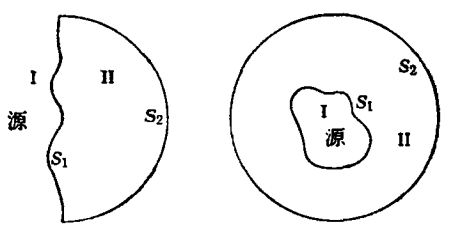


图 9.9　可能有的衍射几何形状．区域 Ⅰ 包含辐射源．区域 Ⅱ 是衍射区，其中的场满足辐射条件．右图也表示散射，这时区域 Ⅰ 内一个有限散射体代替了有效源，而界面 S_1 是一个包围散射体的任意数学曲面，而不是一个带孔的材料屏．

部分(边界条件在下面讨论)和孔组成. 界面 S_1 与区域 I 内产生的场相互作用,反射若干能量,吸收若干能量,还有一部分场进入区域 II,这部分场随着与界面 S_1 的相互作用而变更. 区域 II(衍射区)内场的角分布叫做衍射图样. 我们要把区域 II 内的衍射场用源场及其与 S_1 上屏和孔的相互作用来表示,或者更精确地说,用界面 S_1 上的场来表示. 显然,衍射的几何形状及其描述方式同样适用于散射,只要把区域 I 内的源用一个散射体来代替(把散射体看作入射波驱动的一个源).

基尔霍夫的方法是利用格临定理(1.35),把封闭体积 V 内一个标量场($\mathbf{E}$ 或 $\mathbf{B}$ 的一个分量)用界面 S 上的场及其法向导数的值来表示. 令标量场为 $\psi(\mathbf{x},t)$,并设它具有谐和时间依赖关系 $e^{-i\omega t}$. 假定场 ψ 在体积 V 内满足标量亥姆霍兹波动方程

$$(\nabla^2+k^2)\psi(\mathbf{x})=0 \tag{9.119}$$

对亥姆霍兹波动方程引进格临函数 $G(\mathbf{x},\mathbf{x}')$,其定义如下:

$$(\nabla^2+k^2)G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=-\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{9.120}$$

在格临定理(1.35)中,我们令 $\phi=G,\psi=\psi$,利用波动方程(9.119)和(9.120),则得

$$\psi(\mathbf{x})=\oint_S[\psi(\mathbf{x}')\mathbf{n}'\cdot\nabla'G(\mathbf{x},\mathbf{x}')-G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\mathbf{n}'\cdot\nabla'\psi(\mathbf{x}')]da' \tag{9.121}$$

式中 $\mathbf{n}'$ 是界面 S 的向内法线单位矢量. 若 $\mathbf{x}$ 在 V 内,则方程(9.121)成立;若 $\mathbf{x}$ 不在 V 内,则左边等于零.

取 G 为描写出射波的无限空间格临函数

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=\frac{e^{ikR}}{4\pi R} \tag{9.122}$$

式中 $\mathbf{R}=\mathbf{x}-\mathbf{x}'$,则由(9.121)就可得到基尔霍夫衍射积分. 利用格临函数(9.122),(9.121)变成

$$\psi(\mathbf{x})=-\frac{1}{4\pi}\oint_S\frac{e^{ikR}}{R}\mathbf{n}'\cdot\left[\nabla'\psi+ik\left(1+\frac{i}{kR}\right)\frac{\mathbf{R}}{R}\psi\right]da' \tag{9.123}$$

这几乎就是基尔霍夫积分．为了使数学适应衍射问题．我们认为体积 V 就是图 9.9 中区域Ⅱ的体积，曲面 S 由 S_1+S_2 组成．于是，遍历 S 的积分就分成两部分：一部分是遍历屏及其孔(S_1)的积分，另一部分是遍历"无穷远处"的一个曲面(S_2)的积分．因为我们假定区域Ⅱ内的场是通过 S_1 透射过来的，所以这些场在 S_2 附近是出射波．这些场将满足辐射条件，因而 $\psi(\mathbf{x})$也将满足辐射条件：

$$\psi \to f(\theta, \phi)\frac{e^{ikr}}{r}, \qquad \frac{1}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial r} \to \left(ik - \frac{1}{r}\right) \tag{9.124}$$

根据 ψ 在 S_2 上的这个条件，很容易看出：当半球或球的半径趋于无穷大时，(9.123)中遍历 S_2 的积分至少将按半球或球的半径的倒数那样趋于零．(9.123)中只剩下遍历 S_1 的积分．于是得到基尔霍夫积分公式

$$\psi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{S_1} \frac{e^{ikR}}{R}\mathbf{n}' \cdot \left[\nabla' \psi + ik\left(1 + \frac{i}{kR}\right)\frac{\mathbf{R}}{R}\psi\right] da' \tag{9.125}$$

式中的积分只遍历衍射"屏"的表面 S_1．

为了把(9.125)应用到衍射问题上，必须知道曲面 S_1 上的 ψ 和 $\partial\psi/\partial n$ 的值．但是，这些值是未知的，除非我们已用别的方法解出这个问题．基尔霍夫的方法是，取 S_1 上的 ψ 和 $\partial\psi/\partial n$ 的近似值，以便近似计算衍射波．基尔霍夫近似由下列假定组成：

1．除了孔内以外，ψ 和 $\partial\psi/\partial n$ 在 S_1 上处处等于零．

2．孔内的 ψ 和 $\partial\psi/\partial n$ 的值等于没有任何屏或障碍物时入射波的值．

在经典光学里，标准的衍射计算都以基尔霍夫近似为根据．显而易见，这种方法只能在有限范围内有效．事实上，在基尔霍夫的两个假定中有一个严重的数学矛盾．我们可以对亥姆霍兹波动方程(9.119)以及拉普拉斯方程证明：若 ψ 和 $\partial\psi/\partial n$ 在任一有限曲面上都等于零，则 ψ 处处等于零．因而，基尔霍夫第一个假定在数学上的唯一正确结果

是，衍射场处处等于零．当然，这个结果与第二个假定是矛盾的．而且，由(9.125)不能在 S_1 上得出 ψ 和 $\partial\psi/\partial n$ 的假定值．

基尔霍夫近似中的数学矛盾，可以通过选择(9.121)中的正常格临函数来消除．正如1.10节里一样，我们可以建造一个适合狄利克莱边界条件或诺埃曼边界条件的格临函数．如果 ψ 在曲面 S_1 上已知或近似已知，则就需要一个狄利克莱格临函数 $G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}')$，后者满足

$$G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}')=0 \quad \text{当 } \mathbf{x}' \text{ 在 } S \text{ 上时} \tag{9.126}$$

这时，与(9.125)等价的一个广义基尔霍夫积分是

$$\psi(\mathbf{x})=\int_{S_1}\psi(\mathbf{x}')\frac{\partial G_D}{\partial n'}(\mathbf{x},\mathbf{x}')da' \tag{9.127}$$

而一致的近似是：除了孔内以外，在 S_1 上 $\psi=0$，在孔内则 ψ 等于入射波．如果 ψ 的法向导数近似已知，则要用一个诺埃曼格临函数 $G_N(\mathbf{x},\mathbf{x}')$，后者满足

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\mathbf{x},\mathbf{x}')=0 \quad \text{当 } \mathbf{x}' \text{ 在 } S \text{ 上时} \tag{9.128}$$

这时，适合诺埃曼边界条件的广义基尔霍夫积分是

$$\psi(\mathbf{x})=-\int_{S_1}\frac{\partial\psi}{\partial n'}(\mathbf{x}')G_N(\mathbf{x},\mathbf{x}')da' \tag{9.129}$$

此外，我们还可以叙述一个一致近似的方案．

有一种重要的特殊情况是曲面 S_1 为 $z=0$ 处的无限大平面屏，如图9.10所示．对这种情况，我们可以用镜像法，给出狄利克莱和诺埃曼格临函数的显式：

$$G_{D,N}(\mathbf{x},\mathbf{x}')=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{ikR}}{R}\mp\frac{e^{ikR'}}{R'}\right) \tag{9.130}$$

式中 $\mathbf{R}=\mathbf{x}-\mathbf{x}'$，$\mathbf{R}'=\mathbf{x}-\mathbf{x}''$，$\mathbf{x}''$ 是 $\mathbf{x}'$ 的镜像．显然，我们有

$$R=[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}$$
$$R'=[(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2]^{1/2}$$

于是，广义基尔霍夫积分(9.127)(ψ 在 S_1 上近似已知)取下列形式：

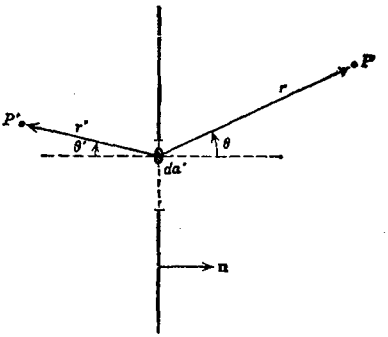


图 9.10　点源 P'、带孔平面屏和观察点 P 的衍射几何形状. 孔内面积元 da' 到 P 点和 P' 点的距离分别为 r 和 r'. 角 θ 和 θ' 分别为 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{n}$ 间和 $\mathbf{r}'$ 与 $-\mathbf{n}$ 间的夹角.

$$\psi(\mathrm{x})=\frac{k}{2\pi i}\int_{S_1}\frac{e^{ikR}}{R}\left(1+\frac{i}{kR}\right)\frac{\mathbf{n}'\cdot\mathbf{R}}{R}\psi(\mathrm{x}')\,da' \qquad (9.131)$$

可以对(9.129)写出一个类似表式. 这两个结果全可归功于对各种问题都有研究的瑞利①.

将(9.131)同(9.125)比较, 可以看出: 由(9.125)略去方括号内第一项, 并将第二项乘 2, 就得(9.131). 另一方面, 将诺埃曼结果(9.129)具体应用到平面屏上, 其结果相当于将(9.125)的第一项乘 2 并略去第二项. 于是, 显然可知: 衍射场的三个近似公式是完全不同的, 它们将导致完全不同的结果. 实际上, 在它们的任何合理而有效的范围内, 它们将导致非常相似的结果. 这种情况可以通过考虑下列衍射问题来理解: 一个点源位于平面屏一侧之 P' 点, 观察点 P 在平面屏之另一侧, 如图 9.10 所示. 我们把点源的振幅当作是球对称的, 且等于 $e^{ikr'}/r'$. 假定 P 和 P' 离屏的距离相当于好多个波长. 在(9.125)中利用基尔霍夫近似, 在(9.131)及其适合诺埃曼边界条件的对应表式中利用等价的

① 索末菲在其早期关于衍射的讨论中也利用了方程 (9.131). 参看 Sommerfeld, *Optics*, 第 197 页起.

假设，就可以把所有三种近似的衍射场写成下列公有形式：

$$\psi(P)=\frac{k}{2\pi i}\int_{\mathcal{A}}\frac{e^{ikr}}{r}\frac{e^{ikr'}}{r'}\mathscr{O}(\theta,\theta')da' \tag{9.132}$$

式中唯一不同点就是倾斜因数 $\mathscr{O}(\theta,\theta')$. 这些因数如下：

$$\mathscr{O}(\theta,\theta')=\begin{cases}\cos\theta & (\text{在 } S_1 \text{ 上 } \psi \text{ 取近似值})\\ \cos\theta' & (\text{在 } S_1 \text{ 上 } \dfrac{\partial\psi}{\partial n} \text{ 取近似值})\\ \dfrac{1}{2}(\cos\theta+\cos\theta') & (\text{基尔霍夫近似})\end{cases}$$

式中的角度是图 9.10 所规定的. 当孔的线度比波长大得多时，衍射强度被限制在一个狭窄的角度范围内，且几乎完全取决于(9.132)中两个指数因子间的干涉. 如果按孔的线度来说，源点 P' 和观察点 P 是远离屏的，则(9.132)中的倾斜因数可以当作一个常数. 这时，不同衍射场的相对振幅将是相同的. 当正入射时，在衍射强度可察觉之处所有倾斜因数都近似等于 1. 在这种情况下，甚至振幅的绝对值也是相同的.

上面的讨论在某种程度上解释了为什么数学上有矛盾的基尔霍夫近似毕竟有其成功的地方. 采用狄利克莱或诺埃曼格临函数能给出一种较好的逻辑结构，而且能略微改进实际的计算，不用深入推敲物理内容. 到目前为止的讨论有一个重要的缺点，即是其标量性质. 电磁场具有矢量特征. 任何一种现实的处理，即使是近似的话，也必须考虑电磁场的矢量特征. 在下节里，我们的任务是求出平面屏的基尔霍夫积分或广义基尔霍夫积分的矢量等价式.

9.9 基尔霍夫积分的等效矢量形式

基尔霍夫积分公式(9.125)是一个精确的数学关系式，它用 ψ 和 $\partial\psi/\partial n$ 遍历有限曲面 S_1 的一个积分，来表示图 9.9 的区域Ⅱ内的散射或衍射标量场 $\psi(\mathbf{x})$. 对应的一些矢量关系是用面积分来表示 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$，这些矢量关系已成为衍射(9.10 节)和散射 (9.13 节) 的矢量基尔霍夫

近似的基础，也成为诸如光学定理(9.14节)的证明等数学阐述的基础.

为了推导电场的基尔霍夫积分，我们一开始对$\mathbf{E}$的每一个直角分量运用(9.121)，并写出明显的等效矢量式

$$\mathbf{E}(\mathbf{x})=\oint_S[\mathbf{E}(\mathbf{n}'\cdot\nabla'G)-G(\mathbf{n}'\cdot\nabla')\mathbf{E}]da' \tag{9.133}$$

假定点$\mathbf{x}$在以曲面S为界的体积V内. 这里如(9.121)一样，单位法线矢量$\mathbf{n}'$的方向指向体积V内. 我们在最后将用G表示无限空间格临函数(9.122)，但在目前我们用G表示(9.120)的任意解. 因为我们要利用某些适用于有理正则函数的矢算定理，而G在$\mathbf{x}'=\mathbf{x}$是奇异的，所以必须加以小心. 我们假想曲面S是由外曲面S'和包围点$\mathbf{x}'=\mathbf{x}$的无穷小内曲面S''组成的. 这时，根据格临定理，(9.133)的左边等于零. 当然，在内曲面S''围绕$\mathbf{x}'=\mathbf{x}$点收缩为零的极限情形下，计算对S''的积分，所得结果为$-\mathbf{E}(\mathbf{x})$. 于是，实际上就回复为(9.133)，但是由于把点$\mathbf{x}'=\mathbf{x}$排除在体积V之外，才确保G有必要的良好的数学特性. 这样理解曲面S时，(9.133)就改写成下式:

$$0=\oint_S[2\mathbf{E}(\mathbf{n}'\cdot\nabla'G)-\mathbf{n}'\cdot\nabla'(G\mathbf{E})]da'$$

利用散度定理把第二项换成一个体积分，而得

$$0=\oint_S 2\mathbf{E}(\mathbf{n}'\cdot\nabla'G)da'+\int_V\nabla'^2(G\mathbf{E})d^3x'$$

利用任意矢量场$\mathbf{A}$满足的矢量公式$\nabla^2\mathbf{A}=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})$，以及下列矢算定理:

$$\begin{aligned}\int_V\nabla\phi\,d^3x&=\oint_S\mathbf{n}\phi\,da\\ \int_V\nabla\times\mathbf{A}\,d^3x&=\oint_S(\mathbf{n}\times\mathbf{A})da\end{aligned} \tag{9.134}$$

式中ϕ和$\mathbf{A}$为任意有理正则标量和矢量函数(而$\mathbf{n}$为外法线单位矢

量)，可以把体积分重新表示成一个面积分．于是得

$$0=\oint_S[2\mathbf{E}(\mathbf{n}'\cdot\nabla'G)-\mathbf{n}'\nabla'\cdot(G\mathbf{E})+\mathbf{n}'\times(\nabla'\times(G\mathbf{E}))]da'$$

算出乘积$G\mathbf{E}$的带撇微分，利用麦克斯韦方程$\nabla'\cdot\mathbf{E}=0$和$\nabla'\times\mathbf{E}=ik\mathbf{B}$，我们得

$$0=\oint_S[ik(\mathbf{n}'\times\mathbf{B})G+2\mathbf{E}(\mathbf{n}'\cdot\nabla'G)$$
$$-\mathbf{n}'(\mathbf{E}\cdot\nabla'G)+\mathbf{n}'\times(\nabla'G\times\mathbf{E})]da'$$

展开三重叉积，并把各项整理一下，得到最后结果如下：

$$\mathbf{E}(\mathbf{x})=\oint_S[ik(\mathbf{n}'\times\mathbf{B})G+(\mathbf{n}'\times\mathbf{E})$$
$$\times\nabla'G+(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{E})\nabla'G]da' \qquad (9.135)$$

现在式中以曲面S为界的体积V包含点$\mathbf{x}'=\mathbf{x}$．通过替换$\mathbf{E}\to\mathbf{B}$和$\mathbf{B}\to-\mathbf{E}$，可以由(9.135)得到类似的$\mathbf{B}$的表式．

方程(9.135)是标量公式(9.121)的等效矢量式．为了得到基尔霍夫积分(9.125)的类似表式，我们考虑图9.9的几何形状，且令曲面S由一个包围源或散射体的有限曲面S_1和一个“无穷远”处的曲面S_2组成．令S_2为半径$r_0\to\infty$的一个球壳，仍不失其普遍性．(9.135)中的积分可以写成两个积分的和，一个积分遍历S_1，另一个积分遍历S_2．在曲面S_2上，当r_0足够大时，格临函数(9.122)由下式给出：

$$G\to\frac{e^{ikr'}}{4\pi r'}e^{-ik\mathbf{n}'\cdot\mathbf{x}}$$

而其梯度由下式给出：

$$\nabla'G\to-ik\mathbf{n}'G$$

这时，S_2对(9.135)的贡献为

$$\oint_{S_2}=ik\oint_{S_2}[\mathbf{n}'\times\mathbf{B}-(\mathbf{n}'\times\mathbf{E})\times\mathbf{n}'-\mathbf{n}'(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{E})]Gda'$$

或

$$\oint_{S_2} = ik \oint_{S_2} [(\mathbf{n}' \times \mathbf{B}) - \mathbf{E}] G da'$$

区域Ⅱ内的场是衍射场或散射场，所以在 S_2 附近满足出射波的条件．尤其是场 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 互相垂直，又都与矢径垂直．于是，在 S_2 上，

$$\mathbf{E} = \mathbf{n}' \times \mathbf{B} + 0(1/r_0^2).$$

这就表明

$$\oint_{S_2} \to 0\left(\frac{1}{r_0}\right)$$

并当 $r_0 \to \infty$ 时遍历 S_2 的积分的贡献等于零．因此，对于图 9.9 的几何形状，当 S_2 在无穷远时，区域Ⅱ内的电场满足矢量基尔霍夫积分关系：

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \oint_{S_1} [ik(\mathbf{n}' \times \mathbf{B})G + (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}) \times \nabla' G + (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{E}) \nabla' G] da' \qquad (9.136)$$

式中 G 由(9.122)给出，积分仅仅遍历有限曲面 S_1．

将(9.136)用于散射情形，且把散射振幅从形式上表示为散射场遍历 S_1 的积分，这是有益的．几何形状如图 9.11 所示．将(9.136)两边的场取作散射场($\mathbf{E}_s$, $\mathbf{B}_s$)，该散射场即为总场($\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$)减入射波场($\mathbf{E}_i$,

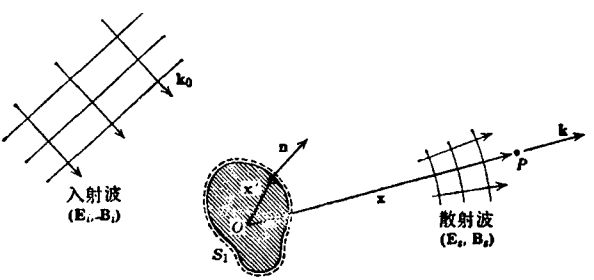


图 9.11　散射的几何图形．具有波矢 $\mathbf{k}_0$ 和场($\mathbf{E}_i$, $\mathbf{B}_i$)的入射平面波，被一障碍物(散射体)所散射，并产生散射场($\mathbf{E}_s$, $\mathbf{B}_s$)，当距离很大时，后者按球面发散波方式传播．曲面 S_1 完全包围散射体．

$\mathbf{B}_i$). 如果观察点P远离散射体，那末格临函数和散射电场取下列渐近式：

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\to\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}$$

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{x})\to\frac{e^{ikr}}{r}\mathbf{F}(\mathbf{k},\mathbf{k}_0)$$

式中$\mathbf{k}$是观察方向上的波矢，$\mathbf{k}_0$是入射波矢，$\mathbf{F}(\mathbf{k},\mathbf{k}_0)$是(未归一化的)矢量散射振幅. 在这种极限下，$\nabla'G=-ikG$. 于是(9.136)可以写成散射振幅$\mathbf{F}(\mathbf{k},\mathbf{k}_0)$的积分表式：

$$\mathbf{F}(\mathbf{k},\mathbf{k}_0)=\frac{i}{4\pi}\oint_{S_1}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}[k(\mathbf{n}'\times\mathbf{B}_s)$$

$$+\mathbf{k}\times(\mathbf{n}'\times\mathbf{E}_s)-\mathbf{k}(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{E}_s)]da' \qquad (9.137)$$

要小心注意：$\mathbf{F}(\mathbf{k},\ \mathbf{k}_0)$是如何明显地依赖于出射方向$\mathbf{k}$的. $\mathbf{F}(\mathbf{k},\mathbf{k}_0)$与由$\mathbf{k}_0$所确定的入射方向的依赖关系蕴含在散射场$\mathbf{E}_s$和$\mathbf{B}_s$中. 因为我们知道$\mathbf{k}\cdot\mathbf{F}=0$，所以在(9.137)中第一个积分平行于$\mathbf{k}$的分量必须与第三个积分抵消. 因此，把(9.137)中的被积函数分解成平行于和垂直于$\mathbf{k}$的两个分量是方便的，从而明显显示出$\mathbf{F}$的横向性：

$$\mathbf{F}(\mathbf{k},\mathbf{k}_0)=\frac{1}{4\pi i}\mathbf{k}\times\oint_{S_1}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}\left[\frac{\mathbf{k}\times(\mathbf{n}'\times\mathbf{B}_s)}{k}-\mathbf{n}'\times\mathbf{E}_s\right]da' \qquad (9.138)$$

另外，我们可以求出波矢为$\mathbf{k}$、偏振矢量为ϵ的散射波的振幅. 这振幅由下式给出：

$$\epsilon^*\cdot\mathbf{F}(\mathbf{k},\mathbf{k}_0)=\frac{i}{4\pi}\oint_{S_1}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}[k\epsilon^*\cdot(\mathbf{n}'\times\mathbf{B}_s)$$

$$+\epsilon^*\cdot(\mathbf{k}\times(\mathbf{n}'\times\mathbf{E}_s))]da' \qquad (9.139)$$

方括号内的诸项，可以解释为面S_1上的有效面电流和面磁流，并作为散射场的源. 上列各种等效式(9.137)—(9.139)，作为讨论短波散射(9.13节)和推导光学定理(9.14节)的出发点，是很有价值的.

9.10 矢量衍射理论

我们可以把矢量基尔霍夫积分(9.136)作为衍射近似理论的基础，所采用的方法完全跟标量理想在(9.125)以下所叙述的相同．不幸，标量基尔霍夫近似中出现的矛盾依旧存在．

然而，对于带孔理想导电薄平面屏这种特殊情况，可以得到与广义基尔霍夫积分(9.127)或(9.131)类似的一些矢量关系，这些关系满足边界条件，并遵从相容近似．设平面屏位于 $z=0$，源位于 $z<0$ 区域，在 $z>0$ 区域观察衍射场．为方便起见，把场分成两部分：

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}^{(0)}+\mathbf{E}', \quad \mathbf{B}=\mathbf{B}^{(0)}+\mathbf{B}' \tag{9.140}$$

式中 $\mathbf{E}^{(0)}$ 和 $\mathbf{B}^{(0)}$ 是没有任何屏或障碍物时源所产生的场(限定在 $z<0$ 和 $z>0$ 两个区域内)，$\mathbf{E}'$ 和 $\mathbf{B}'$ 是因平面屏的放入而引起的场．当 $z>0$ 时，$\mathbf{E}'$、$\mathbf{B}'$ 是衍射场，而当 $z<0$ 时，它们是反射场．当既考虑 $z<0$ 又考虑 $z>0$ 时，我们就把 $\mathbf{E}'$、$\mathbf{B}'$ 叫做散射场．为了满足边界条件，在屏上必定产生面电流密度和面电荷密度．我们可以认为散射场就起源于这些面电流密度和面电荷密度，由于面电流密度和面电荷密度局限在 $z=0$ 平面上，因此散射场具有某些对 z 的反射对称性质．我们可以用矢势 $\mathbf{A}'$ 和标势 Φ' 来建立 $\mathbf{E}'$ 和 $\mathbf{B}'$．因为面电流没有 z 分量，所以 $A_z'=0$．而且，A_x'、A_y' 和 Φ' 显然是 z 的偶函数．场对势的关系表明，散射场具有下列反射对称性：

$$\begin{aligned} &E_x',\ E_y',\ B_z' \quad \text{是 } z \text{ 的偶函数} \\ &E_z',\ B_x',\ B_y' \quad \text{是 } z \text{ 的奇函数} \end{aligned} \tag{9.141}$$

在整个 $z=0$ 平面上，对 z 呈奇性的场不一定等于零．在存在导电面的地方，$E_z'\neq 0$ 意味着有一个与之相联系的面电荷密度，后者在导电面的两侧是相同的．同样，$\mathbf{B}$ 的切向分量不等于零意味着有一个面电流密度，后者的大小和方向在屏的两侧相同．仅仅在孔内，根据连续性，要求 E_z'、B_x'、B_y' 等于零．这就导致如下说法：在理想导电平面屏的孔

内 $\mathbf{E}$ 的法向分量和 $\mathbf{B}$ 的切向分量跟没有屏时的相同.

把适合诺埃曼边界条件的广义基尔霍夫积分(9.129),应用于矢势 $\mathbf{A}'$ 的诸分量. (9.129)右边的法向导数可以用 $\mathbf{B}'$ 的诸分量来表示. 将结果按矢量形式写成:

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x})=\frac{1}{2\pi}\oint_{\text{屏}}(\mathbf{n}\times\mathbf{B}')\frac{e^{ikR}}{R}da' \tag{9.142}$$

鉴于前面的有关面电流和 $\mathbf{B}'$ 的切向分量的说明,也可以直接写出(9.142). 取(9.142)的旋度就可以得到散射磁场:

$$\mathbf{B}'(\mathbf{x})=\frac{1}{2\pi}\nabla\times\int_{\text{屏}}(\mathbf{n}\times\mathbf{B}')\frac{e^{ikR}}{R}da' \tag{9.143}$$

在(9.142)和(9.143)中,我们可以对屏的每一侧算出被积函数,这时 $\mathbf{n}$ 垂直于屏表面. 为明确起见,我们具体地指明: $\mathbf{n}$ 是在正 z 方向上的单位法线矢量,并在 $z=0^+$ 处计算被积函数. 积分遍历屏的金属部分,在孔内 $\mathbf{B}'_{\text{切向}}=0$. 根据 $\mathbf{E}'=(i/k)\nabla\times\mathbf{B}'$,可以计算电场 $\mathbf{E}'$.

方程(9.143)可以用于各种近似计算而不会出现矛盾. 当衍射障碍物由 $z=0$ 处的一个或一个以上有限平面切片(例如,一个圆盘)组成时,(9.143)是最有用的. 这时,障碍物上的面电流可以用某种方法进行近似计算,例如在被积函数中用入射场 $\mathbf{B}^{(0)}$. 于是,就有上节广义基尔霍夫近似的一个等效矢量式.

建立一个与(9.143)相当的电场表式是有益的. 根据无源麦克斯韦方程组对 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的对称性,明显可知: 仿照(9.143),电场 $\mathbf{E}'$ 可以表示为

$$\mathbf{E}'(\mathbf{x})=\pm\frac{1}{2\pi}\nabla\times\int_{S_1}(\mathbf{n}\times\mathbf{E}')\frac{e^{ikR}}{R}da' \tag{9.144}$$

式中假定 $\mathbf{E}'$ 在 $z=0^+$ 的整个表面 S_1 上是已知的. 上(下)面的正(负)号适用于 $z>0(z<0)$. 可以证明,(9.144)满足麦克斯韦方程组,并在 $z=0$ 处给出一致的边值. 同 $\mathbf{B}'$ 表式(9.143)比较,(9.144)当 $z\gtrless0$ 时正负号不同是由于 $\mathbf{E}'$ 和 $\mathbf{B}'$ 有相反的反射对称性[参看(9.141)].

(9.144)本身有一个实际困难. (9.144)中的积分遍历 $z=0$ 处的整个平面. 我们不能在屏的金属部分利用电场切向分量为零这一性质,因为在屏的金属部分总电场切向分量等于零,而 $\mathbf{E}'$ 的切向分量不等于零. 这困难可以用线性叠加来消除. 我们附加以场($\mathbf{E}^{(1)}$, $\mathbf{B}^{(1)}$),它们具有反射对称性(9.141). 于是,可以把它们看作是由 $z=0$ 的面上的电流产生的. 在 $z>0$ 区域内,我们选

$$\mathbf{E}^{(1)}=-\mathbf{E}^{(0)},\quad \mathbf{B}^{(1)}=-\mathbf{B}^{(0)} \tag{9.145}$$

因此,附加场抵消了源产生的未微扰场,并使 $\mathbf{E}'$、$\mathbf{B}'$ 成为 $z>0$ 处的总场. 反射下的对称性(9.141)表明,在 $z<0$ 处,$\mathbf{E}^{(1)}$ 和 $\mathbf{B}^{(1)}$ 的分量是

$$\left.\begin{aligned} E_x^{(1)}(z)&=-E_x^{(0)}(-z),\quad B_x^{(1)}(z)=+B_x^{(0)}(-z)\\ E_y^{(1)}(z)&=-E_y^{(0)}(-z),\quad B_y^{(1)}(z)=+B_y^{(0)}(-z)\\ E_z^{(1)}(z)&=+E_z^{(0)}(-z),\quad B_z^{(1)}(z)=-B_z^{(0)}(-z)\end{aligned}\right\} \tag{9.146}$$

我们理解在每个方程的两边有相同的 x、y. 在 $z<0$ 这一区域内,叠加场($\mathbf{E}^{(0)}+\mathbf{E}^{(1)}$, $\mathbf{B}^{(0)}+\mathbf{B}^{(1)}$)的位形就是产生原场($\mathbf{E}^{(0)}$, $\mathbf{B}^{(0)}$)的一个源所产生的场位形,原场($\mathbf{E}^{(0)}$, $\mathbf{B}^{(0)}$)被布满整个 $z=0$ 平面的理想导电面所反射.

对带某些孔的理想导电平面屏引起的衍射,我们现在作了另一种详细的说明. 令 $\mathbf{E}^{(0)}$、$\mathbf{B}^{(0)}$ 为 $z<0$ 区域内的源产生的场. 令 $\mathbf{E}^{(1)}$、$\mathbf{B}^{(1)}$ 为假定 $z=0$ 处的屏不带孔时 $z<0$ 区域内的反射场[场 $\mathbf{E}^{(1)}$、$\mathbf{B}^{(1)}$ 由(9.146)给出]. 衍射电场 $\mathbf{E}''$ 由下式确定:

$$\mathbf{E}''(\mathbf{x})=\frac{1}{2\pi}\nabla\times\int_{\mathcal{A}}(\mathbf{n}\times\mathbf{E})\frac{e^{ikR}}{R}da' \tag{9.147}$$

式中积分只遍历屏上的孔,被积函数中的 $\mathbf{E}$ 是孔内的总切向电场. 这时,在衍射区域($z>0$)内,总电场是

$$\mathbf{E}(\mathbf{x})=\mathbf{E}''(\mathbf{x}) \tag{9.148}$$

在受照区域($z<0$)内总电场是

$$\mathbf{E}(\mathbf{x})=\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{x})+\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{x})-\mathbf{E}''(\mathbf{x}) \tag{9.149}$$

在衍射区域和受照区域内 $\mathbf{E}''(\mathbf{x})$ 都由(9.147)给出. 用理想导电平面屏的孔内的切向电场表示的这种形式的解，是斯迈斯(Smythe)[①] 最早得到的. 这种形式的解可以作为一种近似方案的基础，这方案与在 $z=0$ 和无穷远处满足边界条件的 $\mathbf{E}''$ 的近似解是一致的. 一些实例在 9.12 节和本章习题中加以讨论.

9.11 互补屏的巴俾涅原理

在讨论衍射的实例之前，我们打算建立一个有用的关系，即所谓巴俾涅原理. 巴俾涅原理是把一块衍射屏的衍射场和互补屏的衍射场联系起来. 我们首先讨论标量基尔霍夫近似中的巴俾涅原理. 假定衍射屏位于某曲面 S 上，这一曲面 S 按 9.8 节的意义把空间分为区域Ⅰ和区域Ⅱ. 衍射屏占据除某些孔以外的全部曲面 S. 互补屏是这样一块衍射屏，它的屏正好是第一个衍射屏的孔，它的孔正好是第一个衍射屏的屏. 如果原来的屏面为 S_a，互补屏面为 S_b，那末 $S_a+S_b=S$，如图9.12 所示.

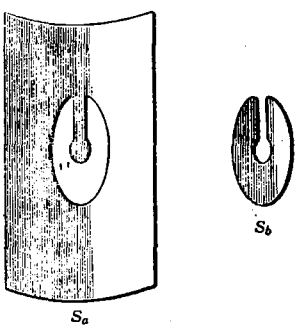


图 9.12 衍射屏 S_a 及其互补衍射屏 S_b.

如果在 S 的内侧（区域Ⅰ内）有源，这些源产生场 $\psi(\mathbf{x})$，那末，在没有屏时，区域Ⅱ内的场 $\psi(\mathbf{x})$ 是由基尔霍夫积分(9.125)给出的. 其中面积分遍历整个曲面 S. 当放置屏 S_a 时，区域Ⅱ内的场 $\psi_a(\mathbf{x})$ 按基尔霍夫近似是由(9.125)给出的，这时在(9.125)的被积函数中的 ψ 是源的场，而面积分只遍历 S_b(孔). 同样，对于互补屏 S_b 来说，按基尔霍夫近似场 $\psi_b(\mathbf{x})$ 是由一个遍历 S_a 的面积分给出的. 于是，衍射场 ψ_a 和 ψ_b 显

① W. R. Smythe, *Phys. Rev.* **72**, 1066 (1947). 也可参看 Smythe 一书 12.18 节.

然有下列关系:

$$\psi_a+\psi_b=\psi \tag{9.150}$$

这就是通常在光学中用公式表示的巴俾涅原理. 例如, 如果ψ代表入射平面波, 那末巴俾涅原理告诉我们, 除入射方向外, 原来的屏及其互补屏的衍射图样相同.

在基尔霍夫近似的意义下, 如果令振幅或其法向导数在孔内等于入射波的振幅或其法向导数, 在别处等于零, 则上列结果(9.150)也可由广义基尔霍夫积分(9.127)或(9.129)推得. 巴俾涅原理的所有这些表达式在以下两方面不能令人满意: 这些公式都是描述标量场的, 而且都是以基尔霍夫近似为根据的.

我们可以针对薄的理想导电平面屏及其互补屏, 来严格叙述电磁场的巴俾涅原理. 其结果可由上节这个衍射问题的两种表达式的任一式推得. 原来的衍射问题及其互补的衍射问题是由下列源场和屏确定的:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{原来的} & \mathbf{E}^{(0)};\ \mathbf{B}^{(0)};\ S_a \\ \text{互补的} & \mathbf{E}_c^{(0)}=-\mathbf{B}^{(0)},\ \mathbf{B}_c^{(0)}=\mathbf{E}^{(0)};\ S_b \end{array}\right\} \tag{9.151}$$

互补情形必须有一个与原来的屏互补的屏, 还必须有偏振特征与原来相反的源场. 对原来的屏S_a来说, 根据(9.147)和(9.148), $z>0$处的电场是

$$\mathbf{E}(\mathbf{x})=\frac{1}{2\pi}\nabla\times\int_{S_b}(\mathbf{n}\times\mathbf{E})\frac{e^{ikR}}{R}da' \tag{9.152}$$

对互补屏S_b来说, 我们不用(9.147), 而选用(9.143)来表示$z>0$处的互补散射磁场$\mathbf{B}_c'$:

$$\mathbf{B}_c'(\mathbf{x})=\frac{1}{2\pi}\nabla\times\int_{S_b}(\mathbf{n}\times\mathbf{B}_c')\frac{e^{ikR}}{R}da' \tag{9.153}$$

在(9.152)和(9.153)中的积分都是遍历屏S_b计算的, 这是由于在这两种情形下$\mathbf{E}$和$\mathbf{B}_c$的边界条件. 从数学上看, (9.152)和(9.153)具有相同的形式. 根据麦克斯韦方程组的线性性质以及原来的和互补的源

场间的关系推知，在 $z>0$ 区域内屏 S_a 的总电场在数值上等于互补屏 S_b 的散射磁场：

$$\mathbf{E}(\mathbf{x})=\mathbf{B}_c'(\mathbf{x})$$

其它场有如下的关系：

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})=-\mathbf{E}_c'(\mathbf{x})$$

正如源场一样，上式中的负号是在无穷远处出射辐射通量所要求的．如果把(9.140)用于互补问题，以便得到 $z>0$ 区域内总场间的关系，那末薄的理想导电平面屏及其互补屏的巴俾涅原理告诉我们，原来的场(E, B)和互补场($\mathbf{E}_c$, $\mathbf{B}_c$)按下列表式联系起来：

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}-\mathbf{B}_c&=-\mathbf{E}^{(0)}\\ \mathbf{B}+\mathbf{E}_c&=-\mathbf{B}^{(0)}\end{aligned}\right\}\qquad(9.154)$$

(9.154)当 $z>0$ 时成立，假定互补衍射问题是由(9.151)规定的．这些关系式是与(9.150)相类似的矢量关系式；它们精确地而不是近似地表述理想导电平面屏这样一个理想化的问题．对一些实际情形(电导率有限但很大；曲率半径比孔的线度大得多的弯曲屏；等等)来说，可以预期矢量的巴俾涅定理近似有效．巴俾涅原理告诉我们，除入射场的方向以外，在其它方向上，屏和其互补屏的衍射强度相同．偏振矢量转过一个角度，但与互补源场(9.151)的偏振矢量所转过的角度一致①．

在微波问题中，巴俾涅原理的严格的矢量表达式是很有用的．例如，考虑一个在无穷大平面导电片上挖出的细槽，这条槽受到电磁波的照射，电磁波的磁感应强度方向与槽平行，电场强度方向与槽垂直，如图 9.13 所示．槽产生的辐射图样和 9.2 与 9.4 节里所讨论的细直天线（其激发电场平行于天线）的辐射图样相

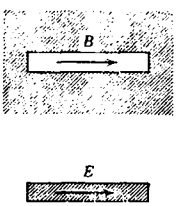


图 9.13 按巴俾涅原理等效的两个辐射体．

① 原来屏的源场的偏振矢量右旋$\frac{\pi}{2}$角，便与互补屏的源场的偏振矢量相合；原来屏的衍射场的偏振矢量右旋$\frac{\pi}{2}$角，便与互补屏的衍射场的偏振矢量相合．——译者注

同. 这两种系统的辐射偏振相反. 用心钻研这些概念，就可能在波导的侧面上适当挖出若干条槽，而设计成各种天线阵①.

9.12 圆孔衍射；关于小孔的评述

自从基尔霍夫的原始著作发表以后，人们就光学方面以及微波的产生和传输方面对衍射这个题目进行了广泛的研究. 在光学方面，一般地说，以(9.125)为根据的标量理论已经足够；在微波的产生和传输方面，需要更准确的解. 有几种专著讨论了衍射和散射这个题目的. 而我们只满足于举几个实例，说明标量定理(9.125)、(9.131)和矢量定理(9.147)的用途，并比较各种近似方法的准确度.

历史上，人们根据所涉及的相对几何线度，把衍射图样分为菲涅耳衍射和夫琅和费衍射两类. 这里要考虑三种长度，衍射系统的大小 d，从衍射系统到观察点的距离 r 和波长 λ. 当 $r\gg d$ 时，衍射图样才变得清晰，这时象表式(9.132)或(9.147)的被积函数中慢变化的因子可以当作常数处理. 只是对 e^{ikR} 中的相因数 kR 要小心处理. 当 $r\gg d$ 时，相因数可以展开为：

$$kR=kr-k\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}'+\frac{k}{2r}[r'^2+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})^2]+\cdots$$

式中 $\mathbf{n}=\mathbf{x}/r$ 是在观察方向上的单位矢量. 相继各项的数量级为 (kr)，(kd)，$(kd)/(d/r)$，…. 如果第三项和更高次项与 1 比较可以忽略不计，这种情况称为夫琅和费衍射. 当衍射系统很小时通常就属于这种情况，这是由于 $kd\ll 1$，我们又假定 $d/r\ll 1$. 但是当系统与波长相比是很大时，即使 $d/r\ll 1$，(kd^2/r) 的数量级仍为 1 或大于 1，这种情况称为费涅耳衍射. 在大多数实际应用中，都相当于最简单的夫琅和费的极限. 在离任何衍射系统足够远处，就属于这种情况. 我们在这里只讨论夫琅和费极限(除了习题 9.16 外).

---

① 例如，参看 *Silver* 书第九章.

如果观测点远离衍射系统，就可以用 $R=|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ 的展开式(9.7)．当只保留$(1/kr)$的最低级项时，标量基尔霍夫表式(9.125)就变为

$$\psi(\mathbf{x})=-\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\int_{S_1}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}[\mathbf{n}\cdot\nabla'\psi(\mathbf{x}')+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\psi(\mathbf{x}')]da' \qquad (9.155)$$

式中 $\mathbf{x}'$ 是面积元 da' 的坐标，r 是从原点 O 到观测点 P 的矢量 $\mathbf{x}$ 的长度，$\mathbf{k}=k(\mathbf{x}/r)$ 是观测方向上的波矢，如图 9.14 所示．当曲面为一平面时，矢量表式(9.147)在这种极限下化为：

$$\mathbf{E}(\mathbf{x})=\frac{ie^{ikr}}{2\pi r}\mathbf{k}\times\int_{S_1}\mathbf{n}\times\mathbf{E}(\mathbf{x}')e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}da' \qquad (9.156)$$

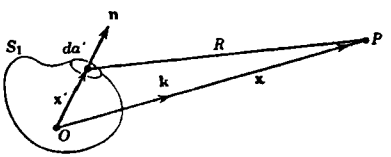


图 9.14

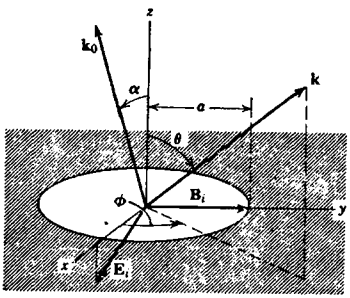


图 9.15 半径为 a 的圆孔的衍射．

作为衍射的一个实例，我们考虑一个平面波，它以 α 角投射到薄的理想导电屏上，屏上有一圆孔，半径为 a 的．入射波的偏振矢量在入射面内．图 9.15 表示一个适当的坐标系．屏位于 x-y 平面上，屏上圆孔的中心在位于原点上．波从下方入射，所以$z>0$的区域是衍射场区域．将入射面取作 x-z 平面．把入射波的电场明显地写成下列的直角分量：

$$\mathbf{E}_i=E_0(\epsilon_1\cos\alpha-\epsilon_3\sin\alpha)e^{ik(\cos\alpha z+\sin\alpha x)} \qquad (9.157)$$

在用(9.155)或(9.156)计算衍射场时，我们将采用一种惯用的近似方法，即用入射场代替面积分中的精确场．为了计算矢量关系

(9.156)，需要用到

$$(\mathbf{n}\times\mathbf{E}_i)_{z=0}=E_0\epsilon_2\cos\alpha e^{ik\sin\alpha x} \tag{9.158}$$

其次，我们为了对整个孔积分，引进平面极坐标，则得

$$\mathbf{E}(\mathbf{x})=\frac{ie^{ikr}E_0\cos\alpha}{2\pi r}(\mathbf{k}\times\epsilon_2)\int_0^a\rho d\rho\int_0^{2\pi}d\beta e^{ik\rho[\sin\alpha\cos\beta-\sin\theta\cos(\phi-\beta)]} \tag{9.159}$$

式中 θ,ϕ 是 $\mathbf{k}$ 的球面角．如果我们定义角函数

$$\xi=(\sin^2\theta+\sin^2\alpha-2\sin\theta\sin\alpha\cos\phi)^{1/2} \tag{9.160}$$

那么，角积分可以变换为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\beta' e^{-ik\rho\xi\cos\beta'}=J_0(k\rho\xi)$$

然后，就可直接算出(9.159)中的径向积分．在矢量斯迈斯-基尔霍夫近似中，总电场为

$$\mathbf{E}(\mathbf{x})=\frac{ie^{ikr}}{r}a^2E_0\cos\alpha(\mathbf{k}\times\epsilon_2)\frac{J_1(ka\xi)}{ka\xi} \tag{9.161}$$

每单位立体角的衍射功率的时间平均值为

$$\frac{dP}{d\Omega}=P_i\cos\alpha\frac{(ka)^2}{4\pi}(\cos^2\theta+\cos^2\phi\sin^2\theta)\left|\frac{2J_1(ka\xi)}{ka\xi}\right|^2 \tag{9.162}$$

式中

$$P_i=\left(\frac{cE_0^2}{8\pi}\right)\pi a^2\cos\alpha \tag{9.163}$$

是正入射到孔上的总功率．如果孔比波长大($ka\gg1$)，因子$[2J_1(ka\xi)/ka\xi]^2$ 在 $\xi=0$ 处有一尖锐的峰，其巅值等于 1，而在 $\xi=0$ 两旁 $\Delta\xi\sim(1/ka)$的区域内迅速地降为零(但有一些很小的次极大值)．这意味着，波的主要部分按几何光学的规律通过小孔，并且只发生微小的衍射效应①．当 $ka\sim1$ 时，贝塞耳函数随角度的变化相当慢，透射波分布

① 为了明显地看出这个情况，我们把 ξ 围绕几何光学方向 $\theta=\alpha$，$\phi=0$ 展开：

$$\xi\simeq\sqrt{(\theta-\alpha)^2+\sin^2\alpha\phi^2}$$

当 $ka\gg1$ 时，显而易见，一旦 θ 明显偏离 α，或 ϕ 明显偏离零，或者 θ 和 ϕ 同时分别明显偏离 α 和零，就有 $ka\xi\gg1$．

在与偏离入射方向的许多方向上. 当$ka\ll1$时，角分布完全取决于(9.161)中的因子$(\mathbf{k}\times\epsilon_2)$. 但是在这种极限情形下，严重地破坏了孔内的场是未微扰场的假定.

把(9.162)对上半球所有角求积分，可以得到总透射功率. 透射功率与入射功率之比，叫做透射系数T:

$$T=\frac{\cos\alpha}{\pi}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi/2}(\cos^2\theta+\cos^2\phi\sin^2\theta)\cdot\left|\frac{J_1(ka\xi)}{\xi}\right|^2\sin\theta d\theta \tag{9.164}$$

在$ka\gg1$和$ka\ll1$这两种极端情形下，透射系数趋于下列值，

$$T\longrightarrow\begin{cases}\cos\alpha, & ka\gg1\\ \frac{1}{3}(ka)^2\cos\alpha, & ka\ll1\end{cases}$$

因为我们作了一些近似的处理，所以长波极限($ka\ll1$)是不可靠的，但长波极限表明，当孔非常小时，透射很少. 当正入射($\alpha=0$)时，透射系数(9.164)可写为

$$T=\int_0^{\pi/2}J_1^2(ka\sin\theta)\left(\frac{2}{\sin\theta}-\sin\theta\right)d\theta$$

借助积分关系

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}J_n^2(z\sin\theta)\frac{d\theta}{\sin\theta}&=\int_0^{2z}\frac{J_{2n}(t)}{t}dt\\ \int_0^{\pi/2}J_n^2(z\sin\theta)\sin\theta d\theta&=\frac{1}{2z}\int_0^{2z}J_{2n}(t)dt\end{aligned}\right\} \tag{9.165}$$

和递推公式(3.87)、(3.88)，可把透射系数写成下列两种形式:

$$T=\begin{cases}1-\frac{1}{ka}\sum_{m=0}^{\infty}J_{2m+1}(2ka)\\ 1-\frac{1}{2ka}\int_0^{2ka}J_0(t)dt\end{cases}$$

当ka增加时，透射系数大致单调地增加，并叠加上一些小振荡. 当

$ka \gg 1$ 时，利用第二式可以得到渐近表式，

$$T \simeq 1 - \frac{1}{2ka} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}(ka)^{3/2}} \sin\left(2ka - \frac{\pi}{4}\right) + \cdots \qquad (9.166)$$

上式显示了 T 的一些小振荡. T 的这些近似表式给出了 T 作为 ka 的函数的一般特性，但不是非常准确的. 有人已经对圆孔作了严格的计算，并得到更准确的近似表式. 在 *King and Wu* 书中(第 126 页，图 41)对这些表式作了比较. 正确的渐近式不含有(9.166)中的 $1/2ka$ 项，而且 $(ka)^{-3/2}$ 项的系数也大两倍.

现在打算把我们的矢量斯迈斯-基尔霍夫近似的结果，同普通的以(9.125)为根据的标量理论作比较. 当波不是正入射时，立即发生这样一个问题：选取什么量作为标量函数 $\psi(\mathbf{x})$ 呢？也许大多数假定都一致选取电场或磁场的量值. 于是，人们一致地把衍射强度当作正比于(9.125)的绝对值平方来处理. 如果选取 $\mathbf{E}$ 或 $\mathbf{B}$ 的分量作为 ψ，那末在计算衍射功率时，我们一定要判断，衍射场的径向分量应该保留还是抛弃呢？当选取 $\mathbf{E}$ 的量值作为 ψ 时，利用(9.155)直接进行计算，则得

$$\psi(\mathbf{x}) = -ik\frac{e^{ikr}}{r}a^2 E_0\left(\frac{\cos\alpha + \cos\theta}{2}\right)\frac{J_1(ka\xi)}{ka\xi}$$

这是(9.161)的等效的标量式. 在标量基尔霍夫近似中，每单位立体角辐射功率为

$$\frac{dP}{d\Omega} \simeq P_i \frac{(ka)^2}{4\pi}\cos\alpha\left(\frac{\cos\alpha + \cos\theta}{2\cos\alpha}\right)^2 \left|\frac{2J_1(ka\xi)}{ka\xi}\right|^2 \qquad (9.167)$$

式中 P_i 由(9.163)给出. 如果用另一个标量公式(9.131)，则(9.167)中的倾斜因数 $(\cos\alpha + \cos\theta)/2$ 被 $\cos\theta$ 所替代.

如果我们把矢量斯迈斯-基尔霍夫结果(9.162)同(9.167)作比较，我们可以看出两者的异同. 两个公式都含有相同的“衍射”分布因子 $[J_1(ka\xi)/ka\xi]^2$，并且对波数有同样的依赖关系. 但是标量结果与 ϕ 角无关(ξ 中包含的除外)，而矢量表式则与 ϕ 角有关. 辐射功率随 ϕ 角

的变化，是由场的偏振性质引起的，因而在标量近似中一定没有这种关系．当正入射($\alpha=0$)和 $ka\gg1$ 时，对偏振的依赖关系是不显著的．衍射局限在围绕前进方向的很小角度内．这时，所有标量近似和矢量近似都导出共同表式：

$$\frac{dP}{d\Omega}\simeq P_i\frac{(ka)^2}{\pi}\left|\frac{J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right|^2 \tag{9.168}$$

图 9.16 中把入射角等于 45°，直径等于一个波长的孔($ka=\pi$) 的矢量近似和标量近似作了比较．画出了入射面（包含入射波的电场矢量）上的角分布和垂直于入射面的平面上的角分布．在每种情形下，实(虚)曲线给出矢量(标量)近似．我们看到，当 $ka=\pi$ 时，这两种近似有显著差别．有理由相信，斯迈斯-基尔霍夫的结果接近正确结果，虽然当 $ka\lesssim1$ 时，这种近似遭到严重失败．对于矩形孔来说，矢量近似和

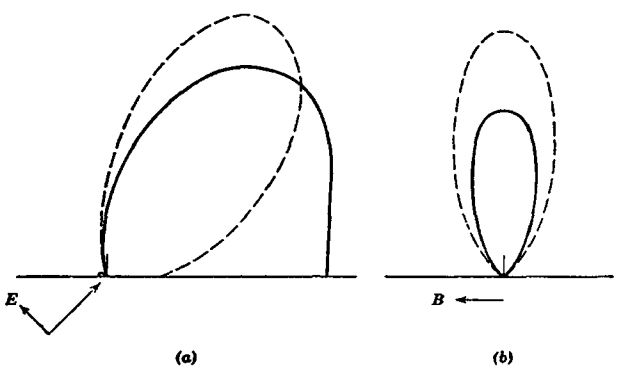


图 9.16　在薄的平面导电片上，直径等于一个波长的圆孔的夫琅和费衍射图样．平面波以 45° 角投射在屏上．实曲线是矢量斯迈斯-基尔霍夫近似，而虚曲线是标量近似．(*a*)在入射面(E 平面)上的强度分布．(*b*)在垂直于入射面的平面(H 平面)上的强度分布(已放大 2.5 倍)．

精确计算所得到的结果一直到 $ka\sim 1$ 时还惊人地符合[1].

线度比波长小得多的孔或障碍物引起的衍射，需要用另外一些方法来处理，这些方法不同于基尔霍夫近似或类基尔霍夫近似. 平面屏的精确公式(9.147)可以用来作为出发点. 如果(9.147)的幅射场按多极子展开，如同 9.2—9.3 节里一样，那末根据孔内精确电场的积分，可以证明有效多极矩(9.72)和(9.76)是相等的. 这些有效矩的推导留作习题 9.15. 一旦知道孔的偶极矩，只要用 9.2 和 9.3 节的偶极场就可以计算衍射. 具有有效矩(9.77)的圆孔的实例留作习题. 有关物理图象的全部讨论与 9.5 节(d)段相似，在此不再重复.

9.13 短波长极限下的散射

在 9.6 节和 9.7 节里，我们已经讨论了长波长极限下的散射. 与基尔霍夫衍射情形相似，在短波长极限下，散射是由比波长大得多的障碍物引起的. 正如屏引起的衍射一样，零级近似由经典几何光学理论给出. 场的波动理论改正了几何光学理论，认为在稍微偏离几何光学的光路的角范围内发生散射. 对于平薄障碍物，可以用 9.10 节的方法，或者再加上巴俾涅原理. 但是，对于其它障碍物，我们的计算是以积分表式(9.139)为根据的，后者用散射体紧外侧的一个曲面 S_1 上的散射场 $\mathbf{E}_s$、$\mathbf{B}_s$ 来表示散射振幅.

在不知道该曲面上 $\mathbf{E}_s$ 和 $\mathbf{B}_s$ 的正确值时，我们必须作一些近似. 如果波长比障碍物的线度短得多，就可以把该曲面大概地分成受照区

---

① 参看 J. A. Stratton and L. J. Chu, *Phys. Rev.*, 56, 99(1939)，该文有一系列图，把矢量斯迈斯-基尔霍夫近似同 P. M. Morse and P. J. Rubenstein, *Phys. Rev.*, 54, 895 (1938) 所完成的精确计算作了比较. 细心的读者，也许会因斯迈斯写的论文（484 页脚注援引的）和斯特拉通与朱合写的论文发表日期的明显不符而感到费解. 这两种计算都得出同一结果，虽然推导的方式和细节完全不同，较早的那种计算牵涉一个绕孔的周边的线积分和一个遍历孔的面积分.

域和阴影区域①. 仅仅在几何光学的极限情形下这两区域的边界才是明显的. 可以证明，过渡区域的宽度约为$(2/kR)^{1/3}R$，其中R为该曲面的典型曲率半径. 因为R的数量级与障碍物的线度相当，短波长的极限情形将近似满足这个几何条件. 不管散射体的性质如何，只要它是"不透明的"，那末在阴影区域内曲面上的散射场必与入射场几乎相等，但方向相反. 另一方面，在受照区域内，曲面上的散射场将依赖于障碍物的性质. 如果波长比最小曲率半径短得多，就可以利用7.3节的菲涅耳方程，把曲面看作局部平坦的. 最后我们具体讨论一下理想导电障碍物，这时切向$\mathbf{E}_s$和法向$\mathbf{B}_s$的大小必须等于相应的入射场，方向则与相应的入射场相反，而切向$\mathbf{B}_s$和法向$\mathbf{E}_s$将近似等于入射场的值[参看(9.146)].

由于阴影区域的贡献带有普遍性，故单独讨论这个贡献. 我们写出

$$\epsilon^*\cdot\mathbf{F}=\epsilon^*\cdot\mathbf{F}_{\text{阴影}}+\epsilon^*\cdot\mathbf{F}_{\text{受照}} \tag{9.169}$$

如果入射波是一个波矢为$\mathbf{k}_0$、偏振矢量为ϵ_0的平面波，

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}_i&=E_0\epsilon_0 e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{x}}\\ \mathbf{B}_i&=\mathbf{k}_0\times\mathbf{E}_{i/k}\end{aligned}\right\} \tag{9.170}$$

则由(9.139)，令$\mathbf{E}_s\simeq-\mathbf{E}_i$，$\mathbf{B}_s\simeq-\mathbf{B}_i$，阴影区域的贡献为

$$\epsilon^*\cdot\mathbf{F}_{\text{阴影}}=\frac{E_0}{4\pi i}\int_{\text{阴影}}\epsilon^*\cdot[\mathbf{n}'\times(\mathbf{k}_0\times\epsilon_0)+\mathbf{k}\times(\mathbf{n}'\times\epsilon_0)]\,e^{i(\mathbf{k}_0-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}'}da' \tag{9.171}$$

式中的积分只遍历S_1的阴影部分. 将矢积整理一下，就可以把(9.171)写成

$$\epsilon^*\cdot\mathbf{F}_{\text{阴影}}=\frac{E_0}{4\pi i}\int_{\text{阴影}}\epsilon^*\cdot[(\mathbf{k}+\mathbf{k}_0)\times(\mathbf{n}'\times\epsilon_0)+(\mathbf{n}'\cdot\epsilon_0)\mathbf{k}_0]e^{i(\mathbf{k}_0-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}'}da' \tag{9.172}$$

① 有一种非常相似的方法处理球体对标量波的散射. 请参看 *Morse and Feshbach*，第1551页至1555页.

在短波长极限下，$\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{x}'$ 和 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'$ 的量值比 1 大得多．所以(9.172)中的指数因子将快速地振荡，使得被积函数的平均值，除了在向前方向($\mathbf{k}\simeq\mathbf{k}_0$)外，处处很小．在这个向前区域($\theta\lesssim 1/kR$)内，由于$(\epsilon^*\cdot\mathbf{k}_0)/k$的数量级为 $\sin\theta\ll 1$，所以方括号里的第二项与第一项相比，可以忽略不计(记住 $\epsilon^*\cdot\mathbf{k}\equiv 0$ 和 $\mathbf{k}_0\simeq\mathbf{k}$)．于是(9.172)可以近似写为

$$\epsilon^*\cdot\mathbf{F}_{\text{阴影}}\simeq\frac{iE_0}{2\pi}\epsilon^*\cdot\epsilon_0\int_{\text{阴影}}e^{i(\mathbf{k}_0-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}'}(\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{n}')da'$$

在这种近似下，对障碍物的阴影面的积分具有这样值得注意的性质：它只与垂直于入射方向的投影面积有关，而与障碍物的具体形状无关．这可以由下面这个事实看出：$(\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{n}')da'=kdx'dy'=kd^2x_\perp$ 恰恰是 k 乘投影面积元，而$(\mathbf{k}_0-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}'=k(1-\cos\theta)z'-\mathbf{k}_\perp\cdot\mathbf{x}_\perp\simeq-\mathbf{k}_\perp\cdot\mathbf{x}_\perp$．这里我们选 $\mathbf{k}_0$ 沿 z 轴，在垂直于 $\mathbf{k}_0$ 的平面内引进两个二维矢量：$\mathbf{x}_\perp=x'\mathbf{e}_1+y'\mathbf{e}_2$，$\mathbf{k}_\perp=k_x\mathbf{e}_1+k_y\mathbf{e}_2$，而且采用小角近似．因此，当 $kR\gg 1$ 和 $\theta\ll 1$ 时，我们最后得到阴影区域对散射的贡献为

$$\epsilon^*\cdot\mathbf{F}_{\text{阴影}}\simeq\frac{ik}{2\pi}E_0(\epsilon^*\cdot\epsilon_0)\int_{\text{阴影}}e^{-i\mathbf{k}_\perp\cdot\mathbf{x}_\perp}d^2x_\perp \qquad (9.173)$$

在这种极限情形下，投影面积相同的一切散射体给出相同的阴影散射贡献．散射波的偏振特性由因子 $\epsilon^*\cdot\epsilon_0$ 给出．因为是小角度散射，所以主要的阴影散射波的偏振特性与入射波相同．用量子力学语言来说，阴影散射不涉及自旋反向散射．

例如，考虑一个散射体，其投影面积是半径为 a 的圆盘．这时，

$$\int_{\text{阴影}}e^{-i\mathbf{k}_\perp\cdot\mathbf{x}_\perp}d^2x_\perp=2\pi a^2\frac{J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta} \qquad (9.174)$$

阴影散射振幅为

$$\epsilon^*\cdot\mathbf{F}_{\text{阴影}}\simeq ika^2E_0(\epsilon^*\cdot\epsilon_0)\frac{J_1(ka\sin\theta)}{(ka\sin\theta)} \qquad (9.175)$$

不给定障碍物表面的形状和性质，就无法计算障碍物受照面引起的散射．举例来说，我们假定受照面是理想导电的．在利用(9.139)

时，我们必须知道 $\mathbf{E}_s$ 和 $\mathbf{B}_s$ 在 S_1 上的切向分量．正如本节开头两段提到的，在短波长极限下，这些分量的大小分别与对应的入射场分量近似相等，而方向则与对应的入射场分量几乎相反．于是，受照面的贡献为

$$\begin{aligned}\epsilon^*\cdot\mathbf{F}_{\text{受照}}=\frac{E_0}{4\pi i}\int_{\text{受照}}\epsilon^*\cdot[&-\mathbf{n}'\times(\mathbf{k}_0\times\epsilon_0)\\&+\mathbf{k}\times(\mathbf{n}'\times\epsilon_0)]e^{i(\mathbf{k}_0-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}'}da'\end{aligned}\tag{9.176}$$

在相同场合下，与阴影面的贡献(9.171)比较表明，第一项相差一个正负号．这个差别对给出两种振幅的非常不同的角度特性是极其重要的．(9.172)的对应表式是

$$\begin{aligned}\epsilon^*\cdot\mathbf{F}_{\text{受照}}=\frac{E_0}{4\pi i}\int_{\text{受照}}\epsilon^*\cdot[&(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\times(\mathbf{n}'\times\epsilon_0)\\&-(\mathbf{n}'\cdot\epsilon_0)\mathbf{k}_0]e^{i(\mathbf{k}_0-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}'}da'\end{aligned}\tag{9.177}$$

当 $kR\gg1$ 时，跟以前的一样，指数快速地振荡，但是现在在向前方向上(我们指望该方向贡献积分的主要部分)，被积函数中其它因子趋于零．其原因在于第一项中出现$(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)$，而不是阴影振幅(9.172)的$(\mathbf{k}+\mathbf{k}_0)$．于是，散射体受照面对小角散射的贡献是适度的．这句话有明确的物理意义，只要我们想一想几何光学的极限情形．受照面一定产生反射波，反射主要发生在向前方向以外的各角度上．

要进一步计算，我们必须给定散射体受照部分的形状及其电磁性质．我们假定表面是半径为 a 的球面．因为主要的贡献不在向前方向，所以我们必须考虑任意散射角．(9.177)中的被积函数由变化较慢的矢量角度函数与变化很快的指数函数之乘积组成．正如 7.11 节(d)段讨论的，这样一个积分的主要贡献来自指数位相是稳定的积分区域．如果(θ,ϕ)是 $\mathbf{k}$ 的角坐标和$(\alpha,\ \beta)$是 $\mathbf{n}'$ 相对于 $\mathbf{k}_0$ 的角坐标，则相因数为

$$\begin{aligned}f(\alpha,\beta)=(\mathbf{k}_0-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}'=ka[&(1-\cos\theta)\cos\alpha\\&-\sin\theta\sin\alpha\cos(\beta-\phi)]\end{aligned}\tag{9.178}$$

容易证明，稳定点是在角 α_0, β_0 处，此处

$$\left.\begin{aligned}\alpha_0 &= \frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\\ \beta_0 &= \phi\end{aligned}\right\} \tag{9.179}$$

显然这些角恰好等于按几何光学得到的球面上的反射角. 在该点上，单位矢量 $\mathbf{n}'$ 指向$(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)$的方向. 如果我们把相因数在 $\alpha=\alpha_0$，$\beta=\beta_0$ 点展开，则得

$$f(\alpha,\beta) = -2ka\sin\frac{\theta}{2}\left[1-\frac{1}{2}\left(x^2+\cos^2\frac{\theta}{2}y^2\right)+\cdots\right] \tag{9.180}$$

式中 $x=\alpha-\alpha_0$，$y=\beta-\beta_0$. 然后，将(9.177)积分中的方括号取它在 $\alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0$ 处的值，就可以近似地求得该积分：

$$\epsilon^*\cdot\mathbf{F}_{\text{受照}} \simeq \frac{ka^2E_0}{4\pi i}\sin\theta e^{-2ika\sin(\theta/2)}\epsilon^*\cdot\epsilon_r \int dx e^{i[ka\sin(\theta/2)]x^2}\int dy e^{i[ka(\sin(\theta/2)\cos^2(\theta/2)]y^2} \tag{9.181}$$

式中 ϵ_r 是单位偏振矢量，它是由下式规定的：

$$\epsilon_r = -\epsilon_0+2(\mathbf{n}_r\cdot\epsilon_0)\mathbf{n}_r$$

式中 $\mathbf{n}_r$ 是$(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)$方向上的单位矢量. 矢量 ϵ_r 恰好是预期的反射波偏振矢量，其垂直于表面的分量等于 ϵ_0 的对应分量，其平行于表面的分量与 ϵ_0 的对应分量符号相反，如图 9.17 所示. 根据(7.135)，我们可以近似写出 (9.181) 中对 x 的积分和对 y 的积分，倘若$2ka\sin\theta/2\gg1$，得到的结果如下：

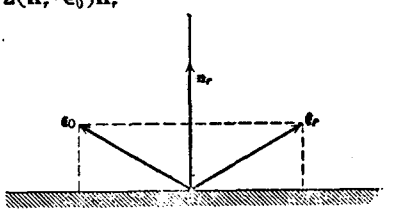


图 9.17 反射波的偏振与入射波的偏振之比较. $\mathbf{n}_r$是在按几何光学发生反射的那点上的面法线矢量. 在图中，为避免复杂起见，波矢 $\mathbf{k}_0$和 $\mathbf{k}$ 没有画出，但它们分别与 ϵ_0和ϵ_r 垂直，这样的取向就使它们与 $\mathbf{n}_r$ 不平行.

$$\epsilon^*\cdot\mathbf{F}_{\text{受照}} \simeq E_0\frac{a}{2}e^{-2ika\sin(\theta/2)}\epsilon^*\cdot\epsilon_r \tag{9.182}$$

当 $2ka\sin\theta/2$ 很大时，受照面对反射波的贡献是角度的函数，其量值恒定，但其位相快速地变化，当 $\theta\to 0$ 时，位相如 θ^2 一样趋于零.

将阴影振幅(9.175)与反射振幅(9.182)比较，我们看出，在正前方向上以阴影贡献为主，其量值比反射振幅大了一个因子 $ka\gg 1$，而在 $ka\sin\theta\gg 1$ 的角度上，它们的量值之比约为 $1/(ka\sin^3\theta)^{1/2}$. 于是，微分散射截面(9.81)对出射波求和，并对初偏振态求平均，给出下列两个区域内的值:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\simeq\begin{cases}a^2(ka)^2\left|\dfrac{J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right|^2, & \theta\lesssim\dfrac{10}{ka}\\[2ex] \dfrac{a^2}{4}, & \theta\gg\dfrac{1}{ka}\end{cases}\tag{9.183}$$

在向前方向上的散射是一个典型的衍射图样，有一个中央极大和若干个较小的次级极大，而在较大的角度上散射是各向同性的. 在中等角度上，两种振幅(9.175)和(9.182)间有一些干涉，致使散射截面不等于(9.183)所示的两项之和. 实际上，在现在的近似下，当 $ka\gg 1$ 时，这种干涉是很小的. 精确解有较大的干涉. 如图 9.18 所示. 精确解的曲线有若干低于 1 的下凹部分. 这些下凹部分表示相消干涉①.

对所有角度积分，就得到总散射截面. 忽略不计干涉项时，根据(9.183)，我们求得阴影衍射峰给出的贡献为 πa^2，而各向同性部分给出的贡献也为 πa^2. 所以总散射截面为 $2\pi a^2$，几何投影面积的一部分，来自直接反射，而另一部分来自衍射散射，后者必伴随着在障碍物后面形成一个阴影. 可以证明，在短波长极限下，总截面的后一部分与散射体的具体形状无关(习题 9.21). 同样，对一个一般的"不透明"散射体

① 对于线偏振入射波来说，干涉的大小依赖于入射波偏振矢量相对于含 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{k}_0$ 的观察平面的取向. ϵ_0 在此平面内时的干涉比 ϵ_0 垂直于此平面时大得多. 参看 *King and Wu* 书的附录，或 *Bowman, Senior and Uslenghi* 书第 402 页至 405 页，那里有相应于不同 ka 值的大批曲线图.

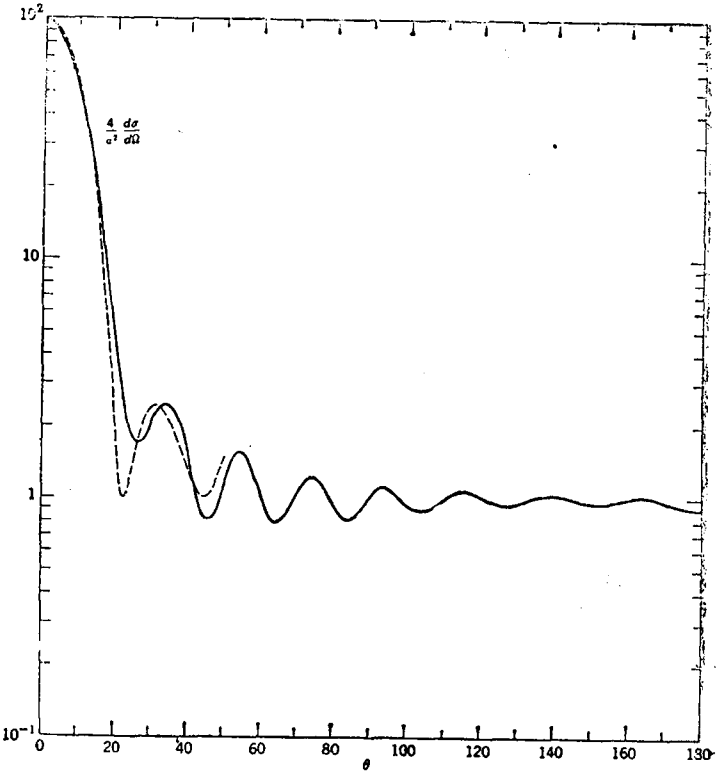


图 9.18　理想导电球的散射截面与散射角的函数关系的半对数曲线图，其中入射波为非偏振平面波，而 $ka=10$. 实曲线是精确结果(*King and Wu*). 虚曲线是根据振幅(9.175)和(9.182)之和算出的近似结果.

来说，总截面的反射或吸收部分也将等于投影面积，虽然不指明受照面的性质，我们就无法知道反射和吸收各占多少比重.

9.14　光学定理和有关问题

散射体的总截面和向前散射振幅的虚部之间有一个基本的关系，

即所谓光学定理. 根据能量和功率流守恒的极其一般的考虑，就可得到这一定理；在量子力学的粒子散射问题中，通过几率守恒，可得到光学定理的对应形式.

为了建立光学定理，我们考虑图 9.11 所示的散射几何图形. 一个波矢为 $\mathbf{k}_0$、场为$(\mathbf{E}_i, \mathbf{B}_i)$的平面波在真空中入射到一个有限的散射体上，这散射体位于曲面 S_1 内. 从散射体传播出来的散射场为$(\mathbf{E}_s, \mathbf{B}_s)$，而且我们在远处沿 $\mathbf{k}$ 的方向观察散射场. 根据定义，在空间一切点上的总场是

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_i+\mathbf{E}_s,\quad \mathbf{B}=\mathbf{B}_i+\mathbf{B}_s$$

一般说来，散射体是耗散的，它从入射波吸收能量. 将总场坡印廷矢量的向内分量遍历曲面 S_1 求积分，就可以算出吸收功率：

$$P_{\text{吸收}}=-\frac{c}{8\pi}\oint_{S_1}\mathrm{Re}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}^*)\cdot\mathbf{n}'da' \tag{9.184}$$

通常在按 $1/r$ 方式下降的简单横向场的区域内，考虑散射场的坡印廷矢量的渐近式，就可算出散射功率. 但因 S_1 和无穷远处之间没有源，散射功率的计算就等于求散射坡印廷矢量的向外分量遍历 S_1 的积分，

$$P_{\text{散射}}=\frac{c}{8\pi}\oint_{S_1}\mathrm{Re}(\mathbf{E}_s\times\mathbf{B}_s^*)\cdot\mathbf{n}'da' \tag{9.185}$$

入射波由于散射或收吸而减少的总功率 P 等于(9.184)和(9.185)之和. 经适当的替代和整理，总功率可以写为

$$P=-\frac{c}{8\pi}\oint_{S_1}\mathrm{Re}[\mathbf{E}_s\times\mathbf{B}_i^*+\mathbf{E}_i^*\times\mathbf{B}_s]\cdot\mathbf{n}'da'$$

将入射波明显地写为

$$\mathbf{E}_i=E_0\boldsymbol{\epsilon}_0e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{x}} \tag{9.186}$$

$$\mathbf{B}_i=\frac{1}{k}\mathbf{k}_0\times\mathbf{E}_i$$

则总功率就写成下式:

$$P=\frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left\{E_0^*\oint_{S_1}e^{-i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{x}'}\left[\epsilon_0^*\cdot(\mathbf{n}'\times\mathbf{B}_s)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\epsilon_0^*\cdot\frac{\mathbf{k}_0\times(\mathbf{n}'\times\mathbf{E}_s)}{k}\right]da'\right\}$$

与散射振幅(9.139)比较,我们看出,总功率和向前($\mathbf{k}=\mathbf{k}_0$, $\epsilon=\epsilon_0$)散射振幅有如下的关系:

$$P=\frac{c}{2k}\mathrm{Im}[E_0^*\epsilon_0^*\cdot\mathbf{F}(\mathbf{k}=\mathbf{k}_0)] \tag{9.187}$$

上式是表述光学定理的基本结果,虽然通常将光学定理表示成一种与入射通量的量值无关的形式. 总截面σ_t(在光学中有时叫做消光截面)定义为总功率P与每单位面积入射功率$c|E_0|^2/8\pi$之比. 同样,归一化散射振幅$\mathbf{f}$定义为散射振幅与入射波在原点的振幅之比:

$$\mathbf{f}(\mathbf{k},\mathbf{k}_0)=\frac{\mathbf{F}(\mathbf{k},\mathbf{k}_0)}{E_0} \tag{9.188}$$

用σ_t和$\mathbf{f}$表述的光学定理是:

$$\sigma_t=\frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}[\epsilon_0^*\cdot\mathbf{f}(\mathbf{k}=\mathbf{k}_0)] \tag{9.189}$$

(9.189)中的记号与量子力学规定的标准记号是对应的. 对于带自旋的粒子,在有关的向前散射振幅中,没有一个粒子改变其自旋态. 对电磁辐射(光子)来说,这就表明有终偏振态与初偏振态相同的散射波振幅$\epsilon_0^*\cdot\mathbf{f}$存在.

光学定理把单个散射体对电磁波的散射和吸收的不同特性联系起来. 它也可能把单个散射体的向前散射振幅同大量散射体组成的媒质的宏观电磁性质(即介电常数)联系起来. 我们将满足于作简单而初浅的讨论,至于更详细、更严格的讨论,读者可查阅有关文献①. 考虑平

① 例如,参看下面这篇很好读的评论性文章: M. A. Lax, *Reviews of Modern Physics* 23, 287 (1951), 或参看 M. L. Goldberger and K. M. Watson, *Collision Theory*, Wiley, New York, (1964), 第十一章,尤其是第766页至第775页.

面波(9.186)从左边正入射到一块薄板上，此薄板由每单位体积含N个全同散射中心的均匀材料组成，如图 9.19 所示. 入射波投射在散射中心上，使每个散射中心产生一个散射波. 入射波和所有散射波的相干叠加在薄板右边产生一个变波. 那么，将观测点O上的这个变波与通过一块由宏观介电常数 $\epsilon(\omega)$描述的薄板的透射波比较，就得到 ϵ 和散射振幅 f 的一个关系.

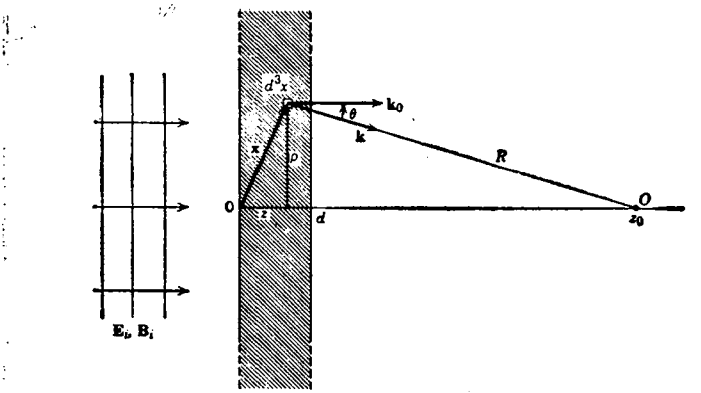


图 9.19 正入射到厚度为 d 的电介质薄板上的一个平面波. 板中的散射体产生散射波，散射波与入射波相干叠加，在板后观察点O处产生一个变波.

假定薄板的厚度和密度充分地小，以致只需要考虑薄板中的单散射，结果，就使得每个散射体上的有效激发场就是入射场本身. 在这种近似下，由薄板中点 $\mathbf{x}(\rho, \phi, z)$处无穷小体积元 d^3x 内 Nd^3x 个散射体所产生的在观察点 O[其柱坐标为$(0, 0, z_0)$]的散射场近似为

$$d\mathbf{E}_s = \frac{e^{ikR}}{R}\mathrm{f}(k, \theta, \phi)E_0 e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{x}}Nd^3x$$

式中我们已经用散射角 θ 和 ϕ 来写出散射振幅，并用 $\sin\theta = \rho/R$，而且还假定了观察点和板相距许多个波长. 体积元到O的距离为 $R = [\rho^2 + (z_0 - z)^2]^{1/2}$. 因为散射体的位置在 x，而不在坐标原点上，入射

波的相因数是必不可少. 遍及薄板体积求积分，得到总散射场

$$\mathbf{E}_s = NE_0\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^d dz\, e^{ikz}\int_0^\infty \rho d\rho \frac{e^{ikR}}{R}\mathbf{f}(k,\theta,\phi) \qquad (9.190)$$

因为 $\rho d\rho = RdR$，上式可以写为

$$\mathbf{E}_s = NE_0\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^d dz e^{ikz}\int_{|z_0-z|}^\infty dR e^{ikR}\mathbf{f}(k,\theta,\phi) \qquad (9.191)$$

式中 $\cos\theta = (z_0-z)/R$. 我们现在把 $e^{ikR}dR$ 当作一个微分，然后分部积分，得出对 R 的积分，

$$\int_{|z_0-z|}^\infty dR e^{ikR}\mathbf{f}(k,\theta,\phi)$$

$$= \frac{1}{ik}e^{ikR}\mathbf{f}(k,\theta,\phi)\Big|_{R=|z_0-z|}^\infty + \frac{1}{ik}$$

$$\int_{|z_0-z|}^\infty dR\left(\frac{z_0-z}{R^2}\right)e^{ikR}\frac{d}{d(\cos\theta)}\mathbf{f}(k,\theta,\phi)$$

只要 f 对 $\cos\theta$ 的导数是有理正则函数，则后一积分的数量级为 $1/(k|z_0-z|)$ 乘原来的积分. 因为我们已假定观察点与薄板的距离为许多个波长，所以这个积分可忽略不计. 当上限 $R\to\infty$ 时忽略不计振荡的贡献(假定当 ρ 很大时每单位体积内散射中心个数 N 降为零，就能使振荡的贡献在 $R\to\infty$ 时等于零)，我们得下列结果：

$$\int_{|z_0-z|}^\infty dR e^{ikR}\mathbf{f}(k,\theta,\phi) = \frac{i}{k}e^{ik|z_0-z|}\mathbf{f}(\mathbf{k},0)$$

因此，O 点的散射场为

$$\mathbf{E}_s = \frac{2\pi i}{k}NE_0\mathbf{f}(k,0)\int_0^d dz e^{ik[z+|z_0-z|]}$$

因为根据假定，$z_0 > z$，我们最后得

$$\mathbf{E}_s = \frac{2\pi i}{k}NE_0\mathbf{f}(k,0)e^{ikz_0}d \qquad (9.192)$$

观察点 O 处的总电场为

$$\mathbf{E} = E_0 e^{ikz_0}\left[\epsilon_0 + \frac{2\pi iNd}{k}\mathbf{f}(k,0)\right] \qquad (9.193)$$

上式正确到薄板厚度 d 的一次项. 在点 O 处与入射波有相同偏振态的一个波的振幅为

$$\epsilon_0^*\cdot\mathbf{E}=E_0e^{ikz_0}\left[1+\frac{2\pi iNd}{k}\epsilon_0^*\cdot\mathbf{f}(\mathbf{k},0)\right] \tag{9.194}$$

假设我们现在从宏观上来考虑这块薄板，其电磁性质用介电常数 $\epsilon(\omega)$ 说明，即用 $\epsilon(\omega)$ 来描述频率为 $\omega=ck$、偏振矢量为 ϵ_0 的波的传播. 利用第七章诸公式进行简单计算，可以看到 $z=z_0$ 处的透射波由下式给出:

$$\epsilon_0^*\cdot\mathbf{E}(\text{宏观的})=E_0e^{ikz_0}\left[1+ik(\epsilon-1)\frac{d}{2}\right] \tag{9.195}$$

上式正确到 d 的一次项，但没有作 $|\epsilon-1|\ll1$ 的近似. 将(9.194)与(9.195)比较，我们看出，介电常数可以用向前散射振幅来表示:

$$\epsilon(\omega)=1+\frac{4\pi N}{k^2}\epsilon_0^*\cdot\mathbf{f}(\mathbf{k},0) \tag{9.196}$$

把上述推导逐步检查一下，显而易见，我们的推导仅仅是启发性的，其中作了若干简化的假定，并且有关场的宏观描述的概念是假定的，不是推理的. 更仔细的考虑表明: (9.196)中的散射振幅应该用媒质里的波数 k' 来计算，不能用自由空间波数 k 来计算，第二项有一个乘数，这乘数量度一个散射体上的有效激发场和媒质里总相干场的相对值. 有关这些内容和其它一些内容，读者可以参看上面援引的文献. 我们满足于这样的说法: 对不太稠密的物质来说，(9.196)是一种合理的近似，相邻散射体之间的相互关系是不重要的. 以第七章里描述介电常数的单电子振子模型为例来阐明(9.196)是值得一做的. (7.50)对各振子求和，就得到原子的偶极矩:

$$\mathbf{p}=\frac{e^2}{m}\sum_j f_j(\omega_j^2-\omega^2-i\omega\gamma_j)^{-1}E_0\epsilon_0 \tag{9.197}$$

根据(9.80)，我们推断，原子散射振幅为

$$\mathbf{f}(\mathbf{k})=\frac{e^2}{m}\sum_j f_j(\omega_j^2-\omega^2-i\omega\gamma_j)^{-1}(\mathbf{k}\times\epsilon_0)\times\mathbf{k} \tag{9.198}$$

ϵ_0^* 和向前散射振幅之标积为

$$\epsilon_0^*\cdot\mathbf{f}(\mathbf{k}=\mathbf{k}_0)=\frac{e^2k^2}{m}\sum_j f_j(\omega_j^2-\omega^2-i\omega\gamma_j)^{-1}$$

代入(9.196)就得介电常数

$$\epsilon(\omega)=1+\frac{4\pi Ne^2}{m}\sum_j f_j(\omega_j^2-\omega^2-i\omega\gamma_j)^{-1} \tag{9.199}$$

与(7.51)一致.

回想一下衰减系数 α 与单个散射体的总截面通过 $\alpha=N\sigma_t$ 联系起来，α 与媒质里波数的虚部通过 $\alpha=2\mathrm{Im}(k')$ 联系起来，我们就能建立(9.196)和光学定理(9.189)之间的关系. 由(9.196)及关系式(7.54)[(7.54)用 $\epsilon(\omega)$ 表示 k' 的实部和虚部的关系]，我们得

$$\alpha=N\sigma_t=\frac{4\pi N}{\mathrm{Re}(k')}\mathrm{Im}[\epsilon_0\cdot\mathbf{f}(\mathrm{Re}(k'),0)] \tag{9.200}$$

正如上述，作者在这里已经以媒质里的波数计算 f，改进了(9.196). 方程(9.200)表明：如果我们考虑浸在媒质里的单个散射体引起的散射，那末只要我们用媒质里的局域波数 k' 来对“运动学”作正确描述，将会像前面那样得出光学定理以及别的关系. 例如，固体里电子的散射会出现相同的情况，这时我们用有效质量或别的近似来说明电磁波通过点阵的传播情况.

作为关于光学定理的结束语，我们要说一说 f 的近似问题. 光学定理是一个精确的关系. 如果我们用 f 的近似表式，则所求得的总截面也许有明显的错误. 例如，在长波长极限下，我们由(9.80)和(9.83)得知：半径为 a 的电介质球的散射振幅为

$$\mathbf{f}=\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)a^3(\mathbf{k}\times\epsilon_0)\times\mathbf{k}$$

向前散射振幅为

$$\epsilon_0^* \cdot \mathbf{f}(\mathbf{k}=\mathbf{k}_0) = k^2 a^3 \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right) \tag{9.201}$$

对无损耗电介质来说，这振幅是实数；这时由光学定理（9.189）得 $\sigma_t = 0$. 另一方面，我们知道，在这种情况下总截面等于散射截面(9.89):

$$\sigma_{\text{散射}} = \frac{8\pi}{3} k^4 a^6 \left|\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right|^2 \tag{9.202}$$

对耗损电介质($\mathrm{Im}\epsilon \neq 0$)来说，由光学定理得总截面为

$$\sigma_t = \frac{12\pi k a^3 \mathrm{Im}\epsilon}{|\epsilon+2|^2} \tag{9.203}$$

而散射截面仍然是(9.202). 这些表观矛盾反映了这样一种情况：为使光学定理的两边一致，必须要作不同级的近似. 在长波长极限下，为了用光学定理求出总截面中散射截面的贡献，必须把向前散射振幅计算到ω的较高次幂. 因此，对无损耗或接近无损耗的散射体来说，确定总截面最简单的方法是，直接把微分散射截面遍历角度求积分. 另一方面，对耗散的散射体来说，由光学定理得到非零的总截面，这总截面对ω和其它参数的依赖关系，不同(通常低一次幂)于散射截面对ω和其它参数的依赖关系. 当然，这时总截面与散射截面之差给出正确到ω最低次幂的吸收截面. 由(9.184)，根据一些基本原理也可算出吸收截面，但光学定理提供了一种精巧而方便的方法. 有关这些考虑的若干实例留作本章末的习题. 在实势引起的量子力学散射中出现类似的情况，这时由一级玻恩近似得到实散射振幅. 二级玻恩近似得到的散射振幅在向前方向上有一虚部，通过光学定理而得总截面，这总截面与一级玻恩近似的积分散射截面一致.

参考书和推荐读物

简单的定域源分布的辐射理论在一切现代教科书里都有讨论. 而在下列三本书里可以找到与本章相似的论述：

Panofsky and Phillips, 第十三章;

Smythe, 第十二章;

Stratton, 第八章.

在一些实用的著作中更完善地讨论了天线和天线阵,例如:

Jordan and Balmain;

Kraus;

Schelkunoff and Friis;

Silver.

用各种观点把天线作为边值问题来处理,这些处理方法可以在下列书里找到:

Hallén;

Jones;

Schelkunoff, *Advanced Antenna Theory*.

关于定域源激发的波导问题以及应用多极矩的方法在下列一书里讨论:

Collin.

在 9.5 节里已援引了用有效偶极矩描写小孔[贝特孔]的原始文献. 基本理论和一些应用在下列书里可以找到:

Collin;

Montgomery, Dicke and Purcell, 第 176 页起和第 296 页起;

Van Bladel.

衍射这一论题有大批文献可查. 全面地论述标量基尔霍夫理论和矢量理论,而且有大量例题和精采插图的有:

Born and Wolf, 第八章、第九章和第十一章.

下列一篇评论性文章中,列出了大量的参考文献,并论述了许多难点:

C. J. Bouwkamp, Diffraction Theory, in *Reports on Progress in Physics*, A. C. Stickland 主编, Vol. XVII, 第 35—100 页, The Physical Society, London(1954).

关于标量理论的更初浅的讨论,可以在下列书里找到:

Slater and Frank, 第十三章和第十四章;

Sommerfeld, *Optics*;

Stone, 第八章、第九章和第十章.

索末菲书里也讨论了他对直棱衍射的严格计算,这是衍射理论中几个精确解之一.

在光学的应用中越来越多地使用衍射的语言，例如关于光学仪器和相衬显微镜的分辨本领的阿贝理论．下书从电工的观点介绍了这一领域：

J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill, New York (1968).

这些应用的一些方面在下列两书里也有讨论：

Born and Wolf;

Stone.

论述解衍射问题的数学方法的有：

Baker and Copson;

Jones, 第八章和第九章;

Morse and Feshbach, 第十一章;

A. Rubinowicz, *Die Beugunswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugung*, PWN-Springer, Warsaw-Berlin, 第二版, (1966);

L. A. Weinstein (Vaynshteyn), *Theory of Diffraction and the Factorization Method*, Golem Press, Boulder, Colorado (1969).

短波长散射或衍射的受照区域和阴影区域间的过渡区宽度约为 $R/(kR)^{1/3}$，其证明可以在下书里找到：

V. A. Fock, *Electromagnetic Diffraction and Propagation Problems*, *Pergamon*, Oxford (1965).

关于球体或其它障碍物对电磁波的散射，有下列专著：

Bowman, Senior, and Uslenghi;

H. C. van de Hulst, *Light Scattering by Small Particles*, Wiley, New York (1957);

Kerker;

King and Wu.

Kerker 书里有精采的历史介绍，包括达芬奇语录和麦克斯韦给瑞利一封信中的话．也可参看下书：

Van Bladel.

本章完全省略了变分原理在衍射和散射中的应用．读者可以通过查阅下列著作来填补这个空白：

Bouwkamp, *Diffraction Theory*, *in Reports on Progress in Physics*, A. C. Stickland 主编, Vol. XVII, 35—100 页, The Physical Society,

London (1954);

Cairo and Kahan;

Harrington, 第七章;

H. Levine and J. Schwinger, *Comm. Pure and Appl. Math.* **3**, 355 (1950);

Morse and Feshbach, 11.4节.

下面这篇论文叙述了用高速计算方法可能实现的一种最令人感兴趣的、处理散射的近似方法:

E.M.Purcell and C.R. Pennypacker, *Astrophys. J.* **186**, 705 (1973). 一个任意形状的电介质散射体近似看作由大约100个偶极子组成的简单立方点阵列，其中每个偶极子产生偶极场(9.18). 通过叠代法求出一个自洽散射解. 跟对球体的精确计算比较，可以看出，在这样一个有趣的波长范围($kR\sim0.5$-5)内是很一致的. 这方法可应用到星际粒子对光的散射和吸收.

习　题

9.1 教科书里常见的一个辐射系统的例子(参看习题9.2)是一个转动的电荷系位形，其中诸电荷是互相相对固定的. 显然电荷密度是时间的函数，但它不是(9.1)的形式.

(*a*) 试证: 按下法计算转动电荷系的多极矩是可行的，直接利用 $\rho(\mathbf{x},t)$ 计算实含时多极矩，然后限定 $\rho(\mathbf{x},t)$ 为(9.1)形式，通过含时多极矩的傅里叶分解或查对，算出给定谐振频率的多极矩. 注意: 当计算 $q_{lm}(t)$ 时，必须小心列出诸线性组合，在写出关系式之前，这些线性组合是实数的.

(*b*) 考虑一电荷密度 $\rho(\mathbf{x},t)$，它是时间的周期函数，其周期为 $T=2\pi/\omega_0$. 通过傅里叶级数展开，证明: 此电荷密度可以写为

$$\rho(\mathbf{x},t)=\rho_0(\mathbf{x})+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}[2\rho_n(\mathbf{x})e^{-in\omega_0 t}]$$

式中

$$\rho_n(\mathbf{x})=\frac{1}{T}\int_0^T\rho(\mathbf{x},t)e^{in\omega_0 t}\,dt$$

这就明显地表明，上式与关系式(9.1)是怎样联系起来的.

(*c*) 对于一个在 x-y 平面内，沿半径为 R 的圆以恒角速率 ω_0 绕原点转动的电荷 q，用(*a*)和(*b*)两种方法计算 $l=0$ 和 $l=1$ 的多极矩，并加以比较. 在方法(*b*)

中，用柱坐标表示电荷密度 $\rho_n(\mathbf{x})$. 有没有更高阶多极矩(例如四极矩)？是在哪些频率上？

9.2 一个辐射四极子是由边长为 a 的、在四个顶角上交错放有电荷 $\pm q$ 的正方形组成的. 这个正方形以角速度 ω，绕垂直于正方形平面并通过其中心的轴转动. 试计算四极矩、辐射场、辐射角分布，以及总辐射功率，所有这些量都按长波长近似运算.

9.3 有两个半径为 R、电导率为无穷大的金属半球壳，其间被一非常小的绝缘孔隙所隔开. 在两个半球之间加一交变势，使得两半球上的势为 $\pm V\cos\omega t$. 试在长波长极限下，求辐射场、辐射功率的角分布以及球的总辐射功率.

9.4 按(9.1)的记号，在氢原子中从 $m=0$ 的 $2p$ 态到 $1s$ 基态的辐射跃迁的跃迁电荷密度是

$$\rho(r,\theta,\phi)=\frac{2e}{\sqrt{6}}a_0^{-4}\cdot r\,e^{-3r/2a_0}\,Y_{00}Y_{10}\,e^{-i\omega_0 t}$$

式中 $a_0=\hbar^2/me^2$ 为玻尔半径，而 $\omega_0=3e^2/8\hbar a_0$ 为能级的频率差.

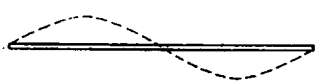
(*a*) 试在长波长极限下，计算此电荷密度的全部辐射多极子.

(*b*) 试在电偶极子近似下，计算总辐射功率的时间平均值. 以 $(\hbar\omega_0)\cdot(\alpha^4c/a_0)$ 为单位来表示你的答案，这里 $\alpha=e^2/\hbar c$ 为精细结构常数.

(*c*) 把经典方法计算的功率解释为光子能量 $(\hbar\omega_0)$ 乘跃迁几率，试从数值上计算跃迁几率，以秒$^{-1}$ 为单位.

(*d*) 用下述条件的电荷密度代替上面所用的半经典电荷密度，如果 $2p$ 态的电子用半径为 $2a_0$ 的圆形玻尔轨道来描写，这电子以跃迁频率 ω_0 沿玻尔轨道作圆周运动的，那末辐射功率为多少？将你的答案用(*b*)中的单位来表示，并从数值上计算这两功率之比.

9.5 一长为 d 的细直天线按如下方式激励，即正弦电流构成全波长振荡，如图所示.



习题 9.5

(*a*) 试精确计算每单位立体角的辐射功率，并画出辐射的角分布.

(*b*) 试定出总辐射功率，并求辐射电阻的数值.

9.6 试用长波长多极子展开法处理习题 9.5 的细直天线.

(*a*) 计算多极矩(电偶极矩、磁偶极矩和电四极矩).

(*b*) 把最低阶非零多极子的辐射功率的角分布的形状，与习题 9.5 的精确分布作比较.

(*c*) 定出最低阶多极子的总辐射功率以及相应的辐射电阻. 与 9.5(*b*) 作一比较. 在这里是自相矛盾吗?

9.7 考虑理想化偶极场 (9.18)，可以定性了解有关短天线的电抗的结果，短天线的辐射场用 9.2 节的电偶极场描写.

(*a*) 试证: 在给定的距离 r，$|\mathbf{E}|^2-|\mathbf{B}|^2$ 对所有角度的积分是

$$\int[|\mathbf{E}|^2-|\mathbf{B}|^2]\,d\Omega=8\pi\frac{|\mathbf{p}|^2}{r^6}$$

(*b*) 试用电抗表式(6.140)证明: 在 $r>a$ 的距离上，场对电抗的贡献 X_a 是

$$X_a=-\frac{2\omega|\mathbf{p}|^2}{3|I_i|^2a^3}$$

式中 I_i 为输入电流.

(*c*) 试就 9.2 节的中央馈电的短天线，证明: $X_a=-d^2/6\omega a^3$，相当于一个有效电容 $6a^3/d^2$. 当 $a=d/2$ 时，X_a 只占短天线的总负电抗的一小部分. 天线附近的场显然不具有偶极子特性，它的贡献较大. 关于短天线电抗的计算，参看 *Schelkunoff and Friis* 的书.

9.8 用源的多极矩观点讨论习题 8.10 的波导的激发.

(*a*) 对于直线探极天线，计算(9.69)中的多极矩 $\mathbf{p}$、$\mathbf{m}$、$Q_{\alpha\beta}$、$Q_{\alpha\beta}^{M}$ 的诸分量.

(*b*) 计算激发 $TE_{1,0}$ 模的振幅，并算出功率流. 将多极子展开的结果同习题 8.10(*b*)的答案比较. 讨论这两种结果一致或不一致的原因. 当激发其它波模时比较两种结果，得到什么结论?

9.9 (*a*) 试通过直接计算证明: 将导电平面上一个圆孔中的切向静电场(3.185)代入电偶极矩 $\mathbf{p}_{有效}$ 的定义方程(9.72)中，就导出表式(9.77).

(*b*) 试用(*a*)中的静电场确定(9.72)给出的 $i\omega\mathbf{m}_{有效}/c$ 的值.

(*c*) 试用对应的圆孔磁边值问题的法向静磁场(5.132)，通过(9.76)，计算磁偶极矩 $\mathbf{m}_{有效}$，并同(9.77)比较.

(*d*) 试评(*b*)和(*c*)结果的差别，并说明定义(9.72)的合适用法. [参看 C. J. B. Bouwkamp (发表在 *Reports on Progress in Physics*, Vol. 17, 主编 A. C. Stickland, The Physical Society, London, 1954.)所写的题为“衍射理论”的论文的第九节.]

9.10 有一尺寸为 (a,b) $(a>b)$ 的理想矩形波导，其内 $\mu=\epsilon=1$，在 $z=0$ 处有

一厚度可忽略不计的理想导电平板型障碍物，带有一半径为R、圆心坐标为(x_0, y_0)的小圆孔．一个最低阶波模($TE_{1,0}$)的波自$z<0$区域入射在障碍物上．试证：最低阶波模的透射波的相对振幅由下式近似给出，

$$T \simeq -i\frac{16}{3}\frac{kR^3}{ab}\sin^2\left(\frac{\pi x_0}{a}\right)$$

式中k为波导中$TE_{1,0}$模的波数．此障碍物的等效相对分路阻抗(Z/Z_0)为多少？它是电感性的，还是电容性的？

9.11 上题的矩形波导，不在$z=0$处放一横板，而在波导窄(侧)壁上挖一半径为R的小圆孔．试证：对$TE_{1,0}$模的传输来说，孔的有效相对分路导纳［由(8.151)定义的］由下式近似给出，

$$Y_a \simeq -i\frac{8\pi^2 R^3}{3kba^3}$$

9.12 有一尺寸为a、b $(a>b)$的矩形波导，在其顶(宽)壁中心上挖一半径为R的小圆孔，圆心在$x=a/2$，$y=b$，$z=0$处．频率是这样的，使得只有$TE_{1,0}$模可以传播．一个波自$z=-\infty$入射进来，朝$z=+\infty$传播．波导内媒质的$\mu \approx \epsilon = 1$．

(*a*) 试证：当从波导内看时，孔的作用相当于具有下列非零分量的电偶极子和磁偶极子的叠加，

$$p_y = -\frac{R^3}{3\pi}E_y, \qquad m_x = -\frac{2R^3}{3\pi Z}E_y$$

式中Z为$TE_{1,0}$模的波阻抗，E_y为在孔处计算的电场值［按8.11节的规定，对于一个单位振幅的波，$E_y=(2/ab)^{1/2}$］．

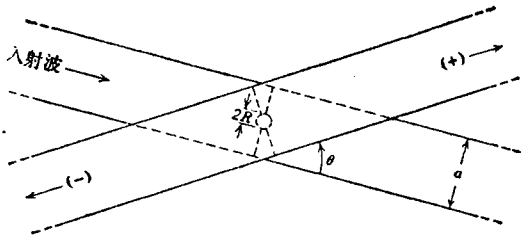
(*b*) 计算入射波的反射系数和透射系数．若有可能，求出一个工作频率，使得反射波和附加的透射波都等于零．

9.13 将习题9.12的波导与另一带相同圆孔的全同波导耦合起来，把这两波导的顶面叠合在一起，使两个孔互相对齐，但波导轴相互之间有夹角θ，如图所示．一个单位振幅的波在底下一个波导中从左边入射进来．波导壁厚度忽略不计．

(*a*) 试证：在上面一个波导中沿正负方向传播的波的振幅正比于

$$1 \pm 2\left(1-\frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right)\cos\theta$$

式中$\omega_1 = \pi c/a$是波导的截止频率．确定沿正负方向传播的波的振幅各应取哪一个正负号？



习题 9.13

(*b*) 试定出比例常数，这常数乘(*a*)中的表式就得到上面一个波导中的振幅，对于 $b=a/2$，$\omega=\sqrt{2}\,\omega_1$ 的波导，选择 θ 角使得在一个方向(哪一个方向？)上的传输完全被抑制．计算耦合因数为 20 分贝(即下波导中入射功率的百分之一传输到上波导中)时 R/a 的值．就这一耦合因数的量值来说，$R/a\ll 1$ 是否是一种好的近似？

本习题的耦合装置叫做贝特孔定向耦合器，因为贝特在 1943 年阐明了该装置的原理．

9.14 在非常接近临界点的气体对光的散射中，观察到的散射光是"较白的"，即是说，其光谱比起远离临界点时，主峰离蓝端要远些．证明这可以通过下面这个事实来理解：密度涨落的体积变得足够大，使得瑞利定律失效．具体地说，考虑由一个半径为 a 的均匀电介质球引起的散射的最低级近似，这个球的介电常数 ϵ 与 1 相差甚微．

(*a*) 证明：当 $ka\gg 1$ 时，在向前方向上微分散射截面有一尖锐的峰，总截面近似值为

$$\sigma\simeq\frac{\pi}{2}(ka)^2\,|\epsilon-1|^2a^2$$

σ 与频率依赖关系是 k^2，而不是 k^4．

(*b*) 证明：对于任意的 ka，正确到 $(\epsilon-1)$ 最低次幂的总截面是(*a*)中的表式乘以函数

$$F(z)=1+5z^{-2}-\frac{7}{2}z^{-4}(1-\cos 2z)-z^{-3}\sin 2z-4(z^{-2}-z^{-4})\int_0^{2z}\frac{1-\cos t}{t}dt$$

式中 $z=2ka$．[这个结果是瑞利在 1914 年导出的．]

9.15 理想导电平面屏上一个孔或一些孔都可以看成若干产生辐射(衍射场)的有效源所在的位置．一个尺寸比波长小得多的孔起着一个偶极子辐射(其它

多极子的贡献可以忽略不计)源的作用.

(*a*) 由(9.147)着手,证明:可以用孔内切向电场的积分把有效电偶极矩和有效磁偶极矩写成

$$\mathbf{p}=\frac{\epsilon\mathbf{n}}{4\pi}\int(\mathbf{x}\cdot\mathbf{E}_{\text{切向}})da$$
$$\mathbf{m}=\frac{c}{2\pi i\omega\mu}\int(\mathbf{n}\times\mathbf{E}_{\text{切向}})da \tag{9.72}$$

式中 $\mathbf{E}_{\text{切向}}$ 为孔内精确切向电场,$\mathbf{n}$ 为平面屏的单位法线矢量,方向指向所考虑的区域,式中积分遍历诸孔面积.

(*b*) 证明:可以把磁偶极矩表式改换成

$$\mathbf{m}=\frac{1}{2\pi\mu}\int\mathbf{x}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{B})da \tag{9.76}$$

要注意:如果屏的厚度无限小,在孔边缘上场的一些分量有奇点,孔边缘可能有贡献.

9.16 一理想导电平面屏占据 x-y 平面的一半(即 $x<0$). 今有强度为 I_0、波数为 k 的平面波沿 z 轴从区域 $z<0$ 投射. 讨论在与 x-y 平面平行的、并由 $z=Z>0$ 定义的平面上衍射场的值. 令观测点的坐标为 $(X,0,Z)$.

(*a*) 证明:在通常的标量基尔霍夫近似中,在 $Z\gg X$ 的极限情况下,衍射场为

$$\psi(X,0,Z)\simeq I_0^{1/2}\,e^{ikz-i\omega t}\left(\frac{1+i}{2i}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-t}^{\infty}e^{it^2}dt$$

式中 $\xi=(k/2Z)^{1/2}X$.

(*b*) 证明:强度可以写为

$$I=|\psi|^2=\frac{I_0}{2}\left[\left(C(\xi)+\frac{1}{2}\right)^2+\left(S(\xi)+\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

式中 $C(\xi)$ 和 $S(\xi)$ 是所谓的菲涅耳积分. 对于大而正的 ξ(受照区域)和大而负的 ξ(阴影区域),确定 I 的渐近特性. I 在 $X=0$ 处的值等于什么?画出 Z 固定时 I 与 X 的函数关系图.

(*c*) 利用矢量公式(9.147)求与(*a*)等效的结果. 比较这两种表示式.

9.17 有一线偏振平面波,其振幅为 E_0,波数为 k,投射到理想导电平面屏上的半径为 a 的圆孔上. 入射波矢量与屏法线的夹角为 α. 偏振矢量与入射面垂直.

(*a*) 试用矢量斯迈斯-基尔霍夫公式 (9.147) 计算衍射场和通过孔的每单位立体角的透射功率,假定孔内切向电场是未微扰入射场.

(*b*) 把你所求得的 (*a*)的结果与标准的标量基尔霍夫近似作比较，再同 9.12 节里当偏振矢量在入射面内时所得的结果作比较.

9.18 讨论一半径为 a 的圆孔对平面波的衍射，仿照 9.12 节，但用以(9.136)为根据的矢量基尔霍夫近似，而不用斯迈斯公式(9.147).

(*a*) 证明：在这种近似下衍射电场跟(9.159)有两个不同点：第一、$\cos\alpha$ 被 $(\cos\theta+\cos\alpha)/2$ 所代替；第二、附加一项与 $(\mathbf{k}\times\mathbf{e}_3)$ 成正比的项. 同标量理论的倾斜因数 $\mathcal{O}$ 作比较.

(*b*) 计算这种矢量基尔霍夫近似下的散射功率和图 9.16 中说明的情况下的散射功率(9.162)之比值. 画出这两个散射功率的角分布简图.

9.19 处在整个 $x-y$ 平面上的理想导电平板中有一矩形孔，孔的边长为 a 和 b ($b\geqslant a$)，其位置由 $x=\pm(a/2)$ 和 $y=\pm(b/2)$ 所规定. 有一平面波正入射在孔上，其偏振矢量与孔的长边成 β 角.

(*a*) 试用矢量斯迈斯-基尔霍夫关系式(9.156)计算衍射场和每单位立体角内的衍射功率，假定孔内切向电场是未微扰入射场.

(*b*) 试计算相应的标量基尔霍夫近似的结果.

(*c*) 当 $b=a$，$\beta=45°$，$ka=4\pi$，$\phi=0$ 时，算出在矢量近似和标量近似下每单位立体角的衍射功率与 θ 角的函数关系. 画图比较这两种结果.

9.20 有一内半径为 a、外半径为 b 的圆柱形同轴传输线，其轴沿着负 z 轴. 内外导体都终止于 $z=0$ 处，外导体连到无穷大平面铜法兰盘上，该法兰盘占有整个 $x-y$ 平面(中心在原点、内半径为 a、外半径为 b 的环带除外). 使传输线激发起频率为 ω 的 TEM 模(主模)，两圆柱间赋值电压为 V. 试用矢量斯迈斯-基尔霍夫近似讨论辐射场、辐射的角分布以及总辐射功率.

9.21 (*a*) 根据(9.173)，证明：对出射偏振矢量求和后，在短波长极限下，阴影散射微分截面的积分可以写成

$$\sigma_{\text{阴影}}=\int d^2x_\perp\int d^2x'_\perp\cdot\frac{1}{4\pi^2}\int e^{i(\mathbf{x}_\perp-\mathbf{x}'_\perp)\cdot\mathbf{k}_\perp}d^2k_\perp$$

所以 $\sigma_{\text{散射}}$ 等于散射体的投影面积，与散射体具体形状无关.

(*b*) 把光学定理应用到"阴影"振幅(9.173)，求出总截面，这时假定在向前方向上散射体受照面的贡献相对地可以忽略不计.

9.22 (*a*) 试用 9.13 节的近似振幅，证明：当波数为 k 的线偏振平面波投射到半径为 a 的理想导电球上时，在 $ka\gg1$ 的极限下，E 平面 ($\boldsymbol{\epsilon}_0$, $\mathbf{k}_0$ 和 $\mathbf{k}$ 共面) 内的微分散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(E\text{平面})=\frac{a^2}{4}\left[4\mathrm{ctg}^2\theta J_1^2(ka\sin\theta)+1+4\mathrm{ctg}\theta J_1(ka\sin\theta)\sin\left(2ka\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

而H平面($\boldsymbol{\epsilon}_0$垂直于$\mathbf{k}_0$和$\mathbf{k}$)内的微分散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(H\text{平面})=\frac{a^2}{4}\left[4\mathrm{cosec}^2\theta J_1^2(ka\sin\theta)+1-4\mathrm{cosec}\theta J_1(ka\sin\theta)\sin\left(2ka\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

(图 9.18 中的虚曲线是这两表式的平均.)

(*b*) 查阅 *King and Wu* 一书的附录或 *Bowman, Senior, and Uslenghi* 书第 402 至 405 页中的精确计算. (*a*) 中列出的衍射和反射振幅之间引起的干涉在定性方面是否与精确结果符合? 定量符合怎么样?

9.23 讨论理想导电平薄板上的小圆孔引起的衍射, 孔的半径为 a, 并假定 $ka\ll1$.

(*a*) 设在入射的那一侧, 屏附近的场是法向电场 $\mathbf{E}_0e^{-i\omega t}$ 和切向磁场 $\mathbf{B}_0e^{-i\omega t}$, 证明在夫琅和费区内衍射电场为

$$\mathbf{E}=\frac{e^{ikr-i\omega t}}{3\pi r}k^2a^3\left[2\frac{\mathbf{k}}{k}\times\mathbf{B}_0+\frac{\mathbf{k}}{k}\times\left(\mathbf{E}_0\times\frac{\mathbf{k}}{k}\right)\right]$$

式中 $\mathbf{k}$ 为观测方向上的波矢.

(*b*) 定出衍射辐射的角分布, 并证明: 透过孔的总功率为

$$P=\frac{c}{54\pi^2}k^4a^6(4B_0^2+E_0^2)$$

9.24 习题 9.23 专门讨论了小圆孔对平面波的衍射. 讨论斜入射的一般情形, 设入射方向与法线成 α 角, 偏振矢量在入射面内和垂直于入射面.

(*a*) 计算衍射辐射的角分布, 把它们同 9.12 节矢量斯迈斯-基尔霍夫近似的结果作比较, 并在 $ka\ll1$ 的极限下, 同习题 9.17 作比较.

(*b*) 在图 9.16 的情况下(但当 $ka\ll1$ 时), 计算入射面内的衍射强度, 并将有关的值与图 9.16 中的实曲线作比较. (用一个量角规和一把尺, 由图 9.16 读出几个不同角度的值.)

(*c*) 证明: 两种偏振态的透射系数[正文(9.164)所定义的]是

$$T_{\parallel}=\frac{64}{27\pi^2}(ka)^4\left(\frac{4+\sin^2\alpha}{4\cos\alpha}\right)$$

$$T_{\perp}=\frac{64}{27\pi^2}(ka)^4\cos\alpha$$

要注意这些透射系数比在同样极限下矢量斯迈斯-基尔霍夫近似给出的透射系数小了一个因子 $(ka)^2$.

9.25 用一个半径为 R、电导率为 σ 的均匀固体球作为频率为 ω 的辐射波的散射体. 波长 λ 比 R 大得多，且电导率足够大，使得在这频率上趋肤深度 δ 比 R 小得多. 一个非偏振的辐射束入射到球上.

(*a*) 计算球的吸收截面，其定义为球的总吸收功率和每单位面积入射功率之比. 证明：倘若电导率与频率无关，则球的吸收截面按 $(\omega)^{1/2}$ 方式变化.

(*b*) 将(*a*)的吸收截面同散射截面(计算至 δ/R 的零次幂) 作比较. 证明：两者之比为

$$\frac{\sigma_{\text{散射}}}{\sigma_{\text{吸收}}} \simeq \frac{10}{9}\sqrt{2\pi\sigma\frac{R^4}{c^4}}\omega^{7/2}$$

9.26 频率为 $\omega=ck$ 的一个非偏振平面波，被一个轻微耗损的各向同性均匀电介质球所散射，球半径 R 比波长小得多. 该球的特性由寻常实介电常数 ϵ 和实电导率 σ 所描述. 这些参数满足以下条件：趋肤深度 δ 远大于半径 R.

(*a*) 计算微分散射截面和总散射截面.

(*b*) 证明：吸收截面为

$$\sigma_{\text{吸收}} = 48\pi^2 R^2 \frac{(R\sigma/c)}{(\epsilon+2)^2+(4\pi\sigma/\omega)^2}$$

(*c*) 根据(*a*)写出向前散射振幅，并利用光学定理计算总截面. 将你的答案与(*a*)和(*b*)所得的散射和吸收截面之和作比较. 并加以讨论.

9.27 把习题 9.26 的电介质球引起的散射当作纯电偶极子散射处理. 这种处理是适当的，除非实介电常数 ϵ 非常大. 在这些情况下，磁偶极子贡献，虽然含 kR 的更高次幂，仍可能是重要的.

(*a*) 证明：入射波磁通量的改变在球内感生一绕轴流动的电流，从而产生一磁偶极矩

$$\mathbf{m} = \frac{i4\pi\sigma}{\omega}(kR)^2\frac{R^3}{30}\mathbf{B}_{\text{入射}}$$

(*b*) 证明：把光学定理应用到电偶极子贡献和磁偶极子贡献的相干叠加而导出的总截面为

$$\sigma_t = 48\pi^2 R^2(R\sigma/c)\cdot\left[\frac{1}{(\epsilon+2)^2+(4\pi\sigma/\omega)^2}+\frac{1}{90}(kR)^2\right]$$

(同 Landau and Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, 第 304 页作比较).

参考书目

Abraham, M., and R. Becker, *Electricity and Magnetism*, Blackie, London, (1937), translation from 8th German edition of *Theorie der Elektrizität*, Band I.

——, *Theorie der Elektrizität*, Band II, *Elektronentheorie*, Tuebner, Leipzig (1933).

Abramowitz, M., and I. A. Stegun, eds., *Handbook of Mathematical Functions*, U.S. National Bureau of Standards, (1964), Dover, New York (1965).

Adler, R. B., L. J. Chu, and R. M. Fano, *Electromagnetic Energy, Transmission and Radiation*, Wiley, New York (1960).

Aharoni, J., *The Special Theory of Relativity*, 2nd edition, Oxford University Press (1965).

Alfvén, H., and C.-G. Fälthammar, *Cosmical Electrodynamics*, 2nd edition, Oxford University Press (1963).

Anderson, J. L., *Principles of Relativity Physics*, Academic, New York (1967).

Arfken, G., *Mathematical Methods for Physicists*, 2nd edition, Academic, New York (1970).

Argence, E., and T. Kahan, *Theory of Waveguides and Cavity Resonators*, Blackie, London (1967).

Arzeliès, H., *Relativistic Kinematics*, Pergamon, Oxford (1966).

——, *Relativistic Point Dynamics*, Pergamon, Oxford (1972).

Baker. B. B., and E. T. Copson, *Mathematical Theory of Huygens'*

Principle, 2nd edition, Oxford University Press (1950).

Baldin, A. M., V. I. Gol'danskii, and I. L. Rozenthal, *Kinematics of Nuclear Reactions*, Pergamon, New York (1961).

Barut, A. O., *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*, Macmillan, New York (1964).

Bateman Manuscript Project, *Higher Transcendental Functions*, 3vols., ed. by A. Erdélyi, McGraw-Hill, New York (1953).

——, *Tables of Integral Transforms*, 2vols., ed. by A. Erdélyi, McGraw-Hill, New York (1954).

Bates, L. F., *Modern Magnetism*, 4th edition, Cambridge University Press (1961).

Beam, W. R., *Electronics of Solids*, McGraw-Hill, New York (1965).

Bekefi, G., *Radiation Processes in Plasma*, Wiley, New York (1966).

Bergmann, P. G., *Introduction to the Theory of Relativity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1942).

Bieberbach, L., *Conformal Mapping*, Chelsea, New York (1964).

Blatt, J. M., and V. F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, Wiley, New York (1952).

Bohm, D., *The Special Theory of Relativity*, Benjamin, New York (1965).

Bohr, N., "Penetration of Atomic Particles through Matter," *Kgl. Danske Videnskab. Selskab Mat.-fys. Medd.*, XVIII, No. 8 (1948).

Born, M., and E. Wolf, *Principles of Optics*, 4th edition, Pergamon, New York (1970).

Böttcher, C.J.F., *Theory of Electric Polarization*, Elsevier, New York (1952).

Bowman, J.J., T.B.A. Senior, and P.L.E. Uslenghi, *Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes*, North-Holland, Amsterdam (1969).

Boyd, T.J.M., and J.J. Sanderson, *Plasma Dynamics*, Nelson, London and Barnes and Noble, New York (1969).

Brailsford, F., *Physical Principles of Magnetism*, Van Nostrand, London (1966).

Brillouin, L., *Wave Propagation and Group Velocity*, Academic, New York (1960).

Budden, K.G., *Lectures on Magnetoionic Theory*, Gordon and Breach, New York (1964).

——, *Radio Waves in the Ionosphere*, Cambridge University Press (1961).

Byerly, W.E., *Fourier Series and Spherical Harmonics*, Ginn, Boston (1893); also Dover reprint.

Cairo, L., and T. Kahan, *Variational Techniques in Electromagnetism*, Blackie, London (1965).

Chandrasekhar, S., *Plasma Physics*, University of Chicago Press (1960).

Churchill, R.V., *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 2nd edition, McGraw-Hill, New York (1963).

Clemmow, P.C., *The Plane Wave Spectrum Representtation of Electromagnetic Fields*, Pergamon, Oxford (1966).

Clemmow, P.C., and J.P. Dougherty, *Electrodynamics of Particles and Plasmas*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1969).

Collin, R. E., *Field Theory of Guided Waves*, McGraw-Hill, New York (1966).

Condon, E. U., and H. Odishaw, eds., *Handbook of Physics*, 2nd edition, McGraw-Hill, New York (1967).

Corben, H. C., and P. Stehle, *Classical Mechanics*, 2nd edition, Wiley, New York (1960).

Courant, R., and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, 2 vols., Wiley-Interscience, New York (1962).

Cowling, T. G. *Magnetohydrodynamics*, Interscience, New York (1957).

Cullwick, E. G., *Elecotrmagnetism and Relativity*, 2nd edition, Longmans, London (1959).

Debye, P., *Polar Molecules*, Dover, New York (1945).

Dennery, P., and A. Krzywicki, *Mathematics for Physicists*, Harper and Row, New York (1967).

Durand, E., *Electrostatique et magnétostatique*, Masson, Paris (1953).

Ecker, G., *Theory of Fully Ionized Plasmas*, Academic, New York (1972).

Einstein, A., H. A. Lorentz, H. Minkowski, and H. Weyl, *The Principle of Relativity*, Collected papers, with notes by A. Sommerfeld, Dover, New York (1952).

Fabelinskii, I. L., *Molecular Scattering of Light*, Plenum, New York (1968).

Fano, R. M., L. J. Chu, and R. B. Adler, *Electromagnetic Fields, Energy, and Forces*, Wiley, New York (1960).

Feynman, R. P., R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lec-*

tures on Physics, 3 vols., Addison-Wesley, Reading, Mass. (1963).

French, A. P., *Special Relativity*, Norton, New York (1968).

Friedman, B., *Principles and Techniques of Applied Mathematics*, Wiley, New York (1956).

Fröhlich, H., *Theory of Dielectrics*, Oxford University Press (1949).

Galejs, J., *Terrestrial Propagation of Long Electromagnetic Waves*, Pergamon, Oxford (1972).

Gibbs, W. J., *Conformal Transformations in Electrical Engineering*, Chapman and Hall, London (1958).

Glasstone, S., and R. H. Lovberg, *Controlled Thermonuclear Reactions*, Van Nostrand, Prin eton, N. J. (1960).

Goldstein, H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1950).

Gradshteyn, I. S., and I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products*, 4th edition, prepared by Yu. V. Geronimus and M. Yu. Tseytlin, translation edited by A. Jeffrey, Academic, New York (1965).

deGroot, S. R., *The Maxwell Equations*, Studies in Statistical Mechanics, Vol. IV, North-Holland, Amsterdam (1969).

deGroot, S. R., and L. G. Suttorp, *Foundations of Electrodynamics*, North-Holland, Amsterdam (1972).

Hadamard, J., *Lectures on Cauchy's Problem*, Yale University Press (1923); Dover reprint (1952).

Hagedorn, R., *Relativistic Kinematics*, Benjamin, New York (1963).

Hallén, E., *Electromagnetic Theory*, Chapman-Hall, London

(1962).

Harrington, R. F., *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, New York (1961).

Heitler, W., *Quantum Theory of Radiation*, 3rd edition, Oxford University Press (1954).

Hess, W. N., *The Radiation Belt and Magnetosphere*, Blaisdell, Waltham, Mass. (1968).

Hildebrand, F. B., *Advanced Calculus for Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1962).

Holt, E. H., and R. E. Haskell, *Foundations of Plasma Dynamics*, Macmillan, New York (1965).

Hughes, W. F., and F. J. Young, *The Electromagnetodynamics of Fluids*, Wiley, New York (1966).

Iwanenko, D., and A. Sokolow, *Klassische Feldtheorie*, Akademie-Verlag, Berlin (1953), translated from the Russian edition (1949).

Jahnke-Emde-Lösch, *Tables of Higher Functions*, 6th edition, revised by F. Lösch, Teubner, Stuttgart and McGraw-Hill, New York (1960).

Jeans, J. H., *Mathematical Theory of Electricity* and *Magnetism*, 5th edition, Cambridge University Press (1948).

Jeffreys, H., and B. S. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*, 3rd edition, Cambridge University Press (1956).

Johnson, C. C., *Field and Wave Electrodynamics*, McGraw-Hill, New York (1965).

Jones, D. S., *The Theory of Electromagnetism*, Pergamon, Oxford (1964).

Jordan, E. C., and K. G. Balmain, *Electromagnetic Waves and Radiating Systems*, 2nd edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1968).

Kacser, C., *Introduction to the Special Theory of Relativity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1967).

Kelvin, Lord (Sir W. Thomson), *Reprints of Papers on Electrostatics and Magnetism*, 2nd edition, Macmillan, London (1884).

Kerker, M., *The Scattering of Light and other Electromagnetic Radiation*, Academic, New York (1969).

Kellogg, O. D., *Foundations of Potential Theory*, Springer-Verlag, Berlin (1929); reprinted by Ungar, New York.

Kilmister, C. W., *Special Theory of Relativity*, Selected Readings in Physics, Pergamon, Oxford (1970).

King, R. W. P., and T. T. Wu., *Scattering and Diffraction of Waves*, Harvard University Press (1959).

Kittel, C., *Introduction to Solid State Physics*, 4th edition, Wiley, New York (1971).

Kraus, J. D., *Antennas*, McGraw-Hill, New York (1950).

Landau, L. M., and E. M. Lifshitz, *The Classicel Theory of Fields*, 3rd revised English edition, translated by M. Hamermesh, Pergamon, Oxford and Addison-Wesley, Reading, Mass. (1971).

——, *Electrodynamics of Continuous Media*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1960).

Lighthill, M. J., *Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions*, Cambridge University Press (1958).

Linhart, J. G., *Plasma Physics*, North-Holland, Amsterdam

(1960).

Livingston, M. S., and J. P. Blewett, *Particle Accelerators*, McGraw-Hill, New York (1962).

Lorentz, H. A., *Theory of Electrons*, 2nd edition, (1915), Dover, New York (1952).

Magnus, W., and F. Oberhettinger, *Special Functions of Mathematical Physics*, Chelsea, New York (1949).

Magnus, W., F. Oberhettinger, and R. P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Springer-Verlag, New York (1966).

Marcuvitz, N., *Waveguide Handbook*, M. I. T. Radiation Laboratory Series, Vol. 10, McGraw-Hill, New York (1951).

Mason, M., and W. Weaver, *The Electromagnetic Field*, University of Chicago Press (1929); Dover reprint.

Maxwell, J. C., *Treatise on Electricity and Magnetism*, 3rd edition (1891), 2 vols., reprint by Dover, New York (1954).

Møller, C., *The Theory of Relativity*, 2nd edition, Clarendon Press, Oxford (1972).

Montgomery, C. G., R. H. Dicke, and E. M. Purcell, *Principles of Microwave Circuits*, M. I. T. Radiation Laboratory Series, Vol. 8, McGraw-Hill, New York (1948). Also available as a Dover reprint.

Morse, P. M., and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, 2 Pts., McGraw-Hill, New York (1953).

Northrop, T. G., *The Adiabatic Motion of Charged Particles*, Interscience-Wiley, New York (1963).

Panofsky, W. K. H., and M. Phillips, *Classical Electricity and*

Magnetism, 2nd edition, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1962).

Pauli, W., *Theory of Relativity*, Pergamon, New York (1958), translated from an article in the *Encyklopedia der mathematischen Wissenschaften*, Vol. V19, Tuebner, Leipzig (1921), with supplementary notes by the author (1956).

Penfield, P., and H. A. Haus, *Electrodynamics of Moving Media*, M. I. T. Press (1967).

Persico, E., E. Ferrari, and S. E. Segre, *Principles of Particle Accelerators*, Benjamin, New York (1968).

Pólya, G., and G. Szegö, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Annals of Mathematics Series No. 27, Princeton University Press (1951).

Ramo, S., J. R. Whinnery, and T. Van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, Wiley, New York (1965).

Robinson, F. N. H., *Macroscopic Electromagnetism*, Pergamon, Oxford (1973).

Rohrlich, F., *Classical Charged Particles*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1965).

Rose, D. J., and M. Clark, *Plasma and Controlled Fusion*, M. I. T.-Wiley, New York (1961).

Rosenfeld, L., *Theory of Electrons*, North-Holland, Amsterdam (1951).

Rosser, W. G. V., *Introductory Relativity*, Butterworths, London (1967).

Rossi, B., *High-Energy Particles*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1952).

Rossi, B., and S. Olbert, *Introduction to the Physics of Space*, McGraw-Hill, New York (1970).

Rothe, R., F. Ollendorff, and K. Polhausen, *Theory of Functions as Applied to Engineering Problems*, Technology Press, Cambridge, Mass. (1933).

Sard, R. D., *Relativistic Mechanics*, Benjamin, New York (1970).

Schelkunoff, S. A., *Advanced Antenna Theory*, Wiley, New York (1952).

——, *Applied Mathematics for Engineers and Scientists*. 2nd edition, Van No strand, New York (1965).

——, *Electromagnetic Fields*. Blaisdell, New York (1963).

Schelkunoff, S. A., and H. T. Friis, *Antennas, Theory and Practice*, Wiley, New York (1952).

Schott, G. A., *Electromagnetic Radiation*, Cambridge University Press (1912).

Schwartz, H. M., *Introduction to Special Relativity*, McGraw-Hill, New York (1968).

Schwinger, J., and D. S. Saxon, *Discontinuities in Waveguides*. Gordon and Breach, New York (1968).

Segre, E., ed., *Experimental Nuclear Physics*, Vol. I, Wiley, New York (1953).

Siegbahn, K., ed., *Beta-and Camma-Ray Spectroscopy*, North-Holtand, Anisterdam and Interscicnce, New York (1955).

Silver, S., ed., *Microwave Antenna Theory and Design*, M.I.T. Radiation Laboratory Series, Vol. 12, McGraw-Hill, New York (1949).

Simon, A., *Introduction to Thermonuclear Research*, Pergamon,

New York (1959).

Slater, J. C., *Microwave Electronics*, McGraw-Hill, New York (1950).

Slater, J. C., and N. H. Frank, *Electromagnetism*, McGraw-Hill, New York (1947).

Smith, J. H., *Introduction to Special Relativity*, Benjamin, New York (1965).

Smythe, W. R., *Static and Dynamic Electricity*. 3rd edition, McGraw-Hill, New York (1969).

Sommerfeld, A., *Electrodynamics*, Academic, New York (1952).

___, *Optics*, Academic, New York (1954).

___, *Partial Differential Equations*, Academic, New York (1949).

Spitzer, L., *Physics of Fully Ionized Gases*, Interscience, New York (1956).

Stone, J. M., *Radiation and Optics*, McGraw-Hill, New York (1963).

Stratton, J. A., *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York (1941).

Taylor, E. F., and J. A. Wheeler, *Spacetime Physics*, Freeman, San Francisco (1966).

Thirring, W. E., *Principles of Quantum Electrodynamics*, translated by J. Bernstein, Academic, New York (1958).

Thomson, J. J. *Recent Researches in Electricity and Magnetism*. Clarendon Press, Oxford (1893).

Titchmarsh, E. C., *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, 2nd cdition Oxford University Press (1948).

Tonnelat, M,-A., *Electromagnetic Theory and Relativity*, Reidel.

Holland (1966).

Tranter, C. J., *Integral Transforms in Mathematical Physics.* 2nd edition, Methuen, London (1956).

Van Bladel, J., *Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, New York (1964).

Van Vleck, J. H., *Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities*, Oxford University Press (1932).

Wait, J. R., *Electromagnetic Waves in Stratified Media*, Pergamon, Oxford (1962).

Waldron, R. A., *Theory of Guided Electromagnetic Waves*, Van Nostrand-Reinhold, London (1970).

Watson, G. N., *Theory of Bessel Functions*, 2nd edition, Cambridge University Press (1952).

Wert, G. A., and R. M. Thomson. *Physics of Solids*, 2nd edition, McGraw-Hill, New York (1970).

Wentzel, G., *The Quantum Theory of Fields*, Interscience, New york (1949).

Whittaker, E. T., *A History of the Theories of Aether and Electricity*, 2 vols., Nelson, London. Vol. 1, *The Classical Theories* (1910. revisecl and enlarged 1951). Vol. 2, *The Modern Theories* 1900-1926 (1953); reprinted by Harper Torchbooks, New York (1960).

Whittaker, E. T., and G. N. Watson, *A Conrse in Modern Analysts*, 4th edition, Cambridge University Press (1950).

Williams, E. J.,"Correlation of Certain Collision Problems with Radiation Theory," *Kgl. Danske Videnskab. Selskab Mat-fys. Medd.*, **XIII**, No. 4, (1935).

Wooten, F., *Optical Properties of Solids*, Academic, New York (1972).

Ziman, J. M., *Principles of the Theory of Solids*, Cambridge University Ptess (1964).

有关特殊函数的主要题材索引

球函数	章节数
勒让德多项式 $P_l(x)$	3.2
缔合勒让德函数 $P_l^m(x)$	3.5
球谐函数 $Y_{lm}(\theta,\phi)$	3.5
柱函数	
贝塞耳函数 $J_\nu(x), N_\nu(x)$	3.7
修正贝塞耳函数 $I_\nu(x), K_\nu(x)$	3.7
球贝塞耳函数 $j_l(x), n_l(x), h_l^{(1,2)}(x)$	16.1
$J_m(x)=0$ 的根	3.7
$J'_m(x)=0$ 的根	8.7
含贝塞耳函数的恒等式	3.11, 3.13, 5.13, 习题 3.14
爱里积分，与贝塞耳函数的关系	7.11, 14.6
正交函数展开	
贝塞耳函数（ρ 的有限区间）	3.7, 习题 3.10
贝塞耳函数（ρ 的无限区间）	3.8
本征函数，洛临函数的本征函数	3.12
傅里叶级数	2.8
傅里叶积分	2.8
勒让德多项式	3.2
球谐函数	3.6

矢量运算的显式

设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 是与左边标题指明的坐标方向有关的正交单位矢量，而 A_1, A_2, A_3 是 $\mathbf{A}$ 的相应分量．则

笛卡儿坐标

$(x_1, x_2, x_3 = x, y, z)$

$$\nabla\psi = \mathbf{e}_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3\frac{\partial\psi}{\partial x_3}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{e}_1\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right) + \mathbf{e}_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right) + \mathbf{e}_3\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)$$

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}$$

柱坐标

(ρ, ϕ, z)

$$\nabla\psi = \mathbf{e}_1\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \mathbf{e}_2\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \mathbf{e}_3\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_1) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_2}{\partial\phi} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{e}_1\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_3}{\partial\phi} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \mathbf{e}_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial\rho}\right) + \mathbf{e}_3\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_2) - \frac{\partial A_1}{\partial\phi}\right)$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

球坐标

(r, θ, ϕ)

$$\nabla\psi = \mathbf{e}_1\frac{\partial\psi}{\partial r} + \mathbf{e}_2\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \mathbf{e}_3\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_1) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_2) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_3}{\partial\phi}$$

$$\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{e}_1\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_3)-\frac{\partial A_2}{\partial\phi}\right]$$
$$+\mathbf{e}_2\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_1}{\partial\phi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_3)\right]+\mathbf{e}_3\frac{1}{r}\left[\frac{r}{\partial_1}(rA_2)-\frac{\partial A}{\partial\theta}\right]$$

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

$$\left[\text{注意：}\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)\ \right]$$

[General Information]
书名=经典电动力学·原书第2版·上册
作者=J.D.杰克逊, 朱培豫
页数=517
出版社=北京：人民教育出版社
出版日期=1979年第2版
DX号=000003242397
ISBN=CN13012.0191
中图分类号=O442
价格=￥1.40
主题=物理-电动力学
参考文献格式=J.D.杰克逊著；朱培豫译. 经典电动力学·原书第2版·上册. 北京：人民教育出版社, 1979.
url=http://book2.duxiu.com/bookDetail.jsp?dxNumber=000003242397&d=930DC9EC269A1BF672ABAA7E1D501B26&fenlei=13030702&sw=%BE%AD%B5%E4%B5%E7%B6%AF%C1%A6%D1%A7

书名页
版权页
前言页
目录页
绪论
Ⅰ．1　真空中的麦克斯韦方程组、场和源
Ⅰ．2　平方反比律或光子质量
Ⅰ．3　线性叠加
Ⅰ．4　媒质中的宏观麦克斯韦方程组
Ⅰ．5　不同媒质分界面上的边界条件
Ⅰ．6　对电磁学中一些理想化的评论
参考书和推荐读物
第一章　静电学导论
1．1　库仑定律
1．2　电场强度
1．3　高斯定律
1．4　高斯定律的微分形式
1．5　另一个静电学方程和标势
1．6　电荷和电偶极子的面分布；电场强度和电势的突变
1．7　泊松方程和拉普拉斯方程
1．8　格临定理
1．9　狄利克莱边界条件或诺埃曼边界条件下解的唯一性
1．10　用格临函数求静电学边值问题的形式解
1．11　静电势能与能量密度；电容

参考书和推荐读物
习题
第二章　静电学中的边值问题（Ⅰ）
２．１　电像法
２．２　在接地导电球前面的点电荷
２．３　在带电的孤立导电球前面的点电荷
２．４　在电势不变的导电球附近的点电荷
２．５　用电像法解均匀电场中的导电球
２．６　球的格临函数；势的通解
２．７　两半球有不同电势的导电球
２．８　正交函数和正交展开
２．９　分离变数法；直角坐标中的拉普拉斯方程
２．１０　二维势问题；傅里叶级数的累加
２．１１　二维拐角内和沿棱边的电场与电荷密度
参考书和推荐读物
习题
第三章　静电学中的边值问题（Ⅱ）
３．１　球坐标中的拉普拉斯方程
３．２　勒让德方程与勒让德多项式
３．３　轴对称的边值问题
３．４　锥形孔内或尖端附近的场的特性
３．５　缔合勒让德函数和球谐函数Ｙｌｍ（θ，φ）
３．６　球谐函数的加法定理

３．７　柱坐标中的拉普拉斯方程，贝塞耳函数
３．８　柱坐标中的边值问题
３．９　球坐标中的格临函数展开
３．１０　用球格临函数展开的势问题的解
３．１１　柱坐标中的格临函数展开
３．１２　格临函数的本征函数展开
３．１３　混合边界条件，带一圆孔的导电平板
参考书和推荐读物
习题
第四章　多极子，宏观媒质的静电学，电介质
４．１　多极子展开
４．２　外电场中电荷分布的能量的多极子展开
４．３　有质煤质静电学的初步处理
４．４　带有电介质的边值问题
４．５　分子极化率和电极化率
４．６　分子极化率的模型
４．７　介电媒质中的静电能
参考书和推荐读物
习题
第五章　静磁学
５．１　引言和定义
５．２　毕奥－萨伐尔定律
５．３　静磁学的微分方程和安培定律
５．４　矢势
５．５　圆形电流回路的矢势和磁感应强度

５．６　定域电流分布的磁场；磁矩
５．７　定域电流分布在外磁场中所受的力、力矩和所具有的能量
５．８　宏观方程组；B和H的边界条件
５．９　静磁学边值问题的解法
５．１０　均匀磁化球
５．１１　外磁场中的磁化球；永久磁铁
５．１２　磁屏蔽；放在均匀磁场中的用导磁材料做成的球壳
５．１３　在一侧有渐近均匀切向磁场时理想导电平面上的一个圆孔的效应
参考书和推荐读物
习题
第六章　随时间变化的场，麦克斯韦方程组，守恒定律
６．１　法拉第感应定律
６．２　磁场的能量
６．３　麦克斯韦位移电流，麦克斯韦方程组
６．４　矢势和标势
６．５　规范变换，洛仑兹规范，库仑规范
６．６　波动方程的格临函数
６．７　宏观电磁学方程组的推导
６．８　坡印廷定理，带电粒子和电磁场的联合系统的能量和动量守恒定律
６．９　宏观媒质的守恒定律
６．１０　谐振场的坡印廷定理；根据场的概念定义的阻抗和导纳

6．11　在转动、空间反射和时间反转下电磁场和源的变换性质
6．12　关于磁单极问题
6．13　关于狄喇克量子化条件的讨论
参考书和推荐读物
习题
第七章　平面电磁波和波的传播
7．1　非导电媒质中的平面波
7．2　线偏振和圆偏振；斯托克斯参数
7．3　电磁波在电介质的平面分界面上的反射和折射
7．4　反射引起的偏振和全内反射
7．5　电介质、导体和等离子体的频率色散特性
7．6　在电离层和磁层中传播的简化模型
7．7　导电媒质或耗散媒质中的波
7．8　一维波的叠加；群速度
7．9　脉冲在色散媒质中传播时扩展的例证
7．10　D和E的关系中的因果性；克喇末-克朗尼格关系
7．11　信号通过色散媒质的传播过程
参考书和推荐读物
习题
第八章　波导和谐振腔
8．1　导体表面和导体内的场
8．2　柱形空腔和波导

8．3　波导
8．4　矩形波导中的波模
8．5　波导中的能流和衰减
8．6　边界条件微扰法
8．7　谐振腔
8．8　谐振腔的功率损失；谐振腔的Q值
8．9　当作谐振腔处理的地球和电离层：舒曼谐振
8．10　电介质波导
8．11　简正模的展开；波导中定域源产生的场
8．12　平面隔膜的反射和透射；变分近似法
8．13　矩形波导中一块平行于电场的平薄板条的阻抗
参考书和推荐读物
习题
第九章　简单辐射系统；散射和衍射
9．1　定域振荡源的场和辐射
9．2　电偶极场和电偶极辐射
9．3　磁偶极场和电四极场
9．4　中央馈电的平直天线
9．5　波导中定域源或孔的多极子展开
9．6　长波长情形下的散射
9．7　散射的微扰论；瑞利对蓝天的解释；气体和液体引起的散射
9．8　标量衍射理论
9．9　基尔霍夫积分的等效矢量形式

９．１０　矢量衍射理论
９．１１　互补屏的巴俾涅原理
９．１２　圆孔衍射；关于小孔的评述
９．１３　短波长极限下的散射
９．１４　光学定理和有关问题
参考书和推荐读物
习题
附录页