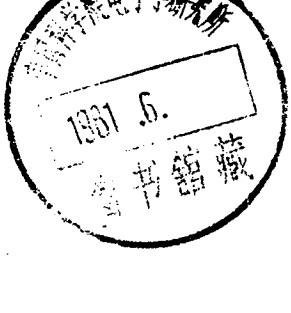
53·64
320
下

经典电动力学

下　册

[美] J. D. 杰克逊 著
朱　培　豫 译



人民教育出版社

1109409

0037/02

内容提要

本书是根据美国 John Wiley & Sons 图书公司1976年出版的 J. D. 杰克逊(Jackson)著《经典电动力学》(Classical Electrodynamics)1975年第二版译出的. 译本分上、下两册出版. 下册除第十章阐述磁流体动力学和等离子体物理学外,主要内容是相对论性带电粒子电动力学,包括狭义相对论、带电粒子间的碰撞、加速运动点电荷的辐射、多极场、辐射反作用等. 下册第十、十三、十四、十六这四章曾由戴勉根据原书第一版译出,后经上海铁道学院朱培豫按原书第二版进行修改,并补译了原书第二版增订的部分. 其余各章和附录均由朱培豫译出. 译稿经河北大学汪镇藩校订.

本书可供综合大学和理工科大学物理系高年级学生、研究生和教师以及有关的科学研究工作者参考.

本书责任编辑:汤发宇.

经典电动力学

下　册

[美] J. D. 杰克逊 著

朱　培　豫 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

重庆新华印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 14　字数 337,000

1980年5月第1版　1980年12月第1次印刷

印数 00,001—9,500

书号 13012·0463　　定价 1.15 元

矢量公式

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$

$$\nabla\times\nabla\psi=0$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{a})=0$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{a})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{a})-\nabla^2\mathbf{a}$$

$$\nabla\cdot(\psi\mathbf{a})=\mathbf{a}\cdot\nabla\psi+\psi\nabla\cdot\mathbf{a}$$

$$\nabla\times(\psi\mathbf{a})=\nabla\psi\times\mathbf{a}+\psi\nabla\times\mathbf{a}$$

$$\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}+(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}+\mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{b})+\mathbf{b}\times(\nabla\times\mathbf{a})$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}\cdot(\nabla\times\mathbf{a})-\mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{b})$$

$$\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{b})-\mathbf{b}(\nabla\cdot\mathbf{a})+(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$$

如果 $\mathbf{x}$ 是一点相对于某原点的坐标，其量值为 $r=|\mathbf{x}|$，而 $\mathbf{n}=\mathbf{x}/r$ 为单位矢径，则

$$\nabla\cdot\mathbf{x}=3 \qquad \nabla\times\mathbf{x}=0$$

$$\nabla\cdot\mathbf{n}=\frac{2}{r} \qquad \nabla\times\mathbf{n}=0$$

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{n}=\frac{1}{r}[\mathbf{a}-\mathbf{n}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})]\equiv\frac{\mathbf{a}_\perp}{r}$$

1109409

矢 算 定 理

在下列定理中，ϕ、ψ 和 $\mathbf{A}$ 是连续可微标量函数或连续可微矢量函数，V 是三维体积，其体积元为 d^3x，S 是 V 的二维闭合边界曲面，其面积元为 da，da 处的外法线单位矢量为 $\mathbf{n}$.

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,d^3x=\int_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,da \qquad \text{（散度定理）}$$

$$\int_V \nabla\psi\,d^3x=\int_S \psi\mathbf{n}\,da$$

$$\int_V \nabla\times\mathbf{A}\,d^3x=\int_S \mathbf{n}\times\mathbf{A}\,da$$

$$\int_V (\phi\nabla^2\psi+\nabla\phi\cdot\nabla\psi)\,d^3x=\int_S \phi\mathbf{n}\cdot\nabla\psi\,da \qquad \text{（格临第一恒等式）}$$

$$\int_V (\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi)\,d^3x=\int_S (\phi\nabla\psi-\psi\nabla\phi)\cdot\mathbf{n}\,da \qquad \text{（格临定理）}$$

在下列定理中，S 是开曲面，C 是 S 的周边，其线元为 $d\mathbf{l}$. S 的单位法线矢量 $\mathbf{n}$ 是按右手法则由绕 C 的线积分的方向确定的.

$$\int_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}da=\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} \qquad \text{（斯托克斯定理）}$$

$$\int_S \mathbf{n}\times\nabla\psi da=\oint_C \psi d\mathbf{l}$$

下册目录

第十章　磁流体动力学和等离子体物理学……1

10.1　引言和定义……1

10.2　磁流体动力学方程……3

10.3　磁扩散，磁粘滞性和磁压强……5

10.4　具有交叉电场和磁场的界面中间的磁流体动力学流动……8

10.5　箍缩效应……13

10.6　箍缩等离子体柱的不稳定性……16

10.7　磁流体动力波……19

10.8　等离子体振荡……25

10.9　等离子体振荡的短波长限和德拜屏蔽距离……30

参考书和推荐读物……34

习题……35

第十一章　狭义相对论……40

11.1　1900年以前的情况；爱因斯坦的两条假设……41

11.2　一些近代的实验……45

11.3　洛仑兹变换和狭义相对论的基本的运动学结果……55

11.4　速度的加法；四元速度……64

11.5　粒子的相对论动量和能量……67

11.6　狭义相对论时空的数学性质……76

11.7　洛仑兹变换的矩阵表示；无穷小生成元……81

11.8　托马斯进动……88

11.9　电荷的不变性；电动力学的协变性……94

11.10　电磁场的变换……101

11.11　在均匀或慢变化外场中自旋的相对论性运动方程……105

11.12　关于相对论运动学中记号和单位的评注……111

参考书和推荐读物……112

习题……114

第十二章　相对论性粒子和电磁场的动力学……124
12.1　在外电磁场中一个相对论性带电粒子的拉格朗日函数和哈密顿函数……125
12.2　关于由库仑定律和狭义相对论得出磁场、磁力和麦克斯韦方程组的问题……132
12.3　在均匀静磁场中的运动……136
12.4　在均匀静电场和静磁场的并合场中的运动……137
12.5　在非均匀静磁场中粒子的漂移……140
12.6　穿过粒子轨道的磁通量的绝热式不变性……145
12.7　相互作用的带电粒子的拉格朗日函数的最低级相对论性修正，达尔文-拉格朗日函数……150
12.8　电磁场的拉格朗日函数……153
12.9　普罗卡-拉格朗日函数；光子质量效应……156
12.10　正则胁强张量和对称胁强张量；守恒定律……160
12.11　协变形式波动方程解；不变格临函数……169
参考书和推荐读物……173
习题……175
第十三章　带电粒子间的碰撞、能量损失和散射……181
13.1　在库仑碰撞中的能量转移……182
13.2　对谐振束缚电荷的能量转移……187
13.3　经典的和量子力学的能量损失公式……191
13.4　在碰撞能量损失中的密度效应……198
13.5　契仑柯夫辐射……205
13.6　电子等离子体中的能量损失……210
13.7　原子对快速粒子的弹性散射……212
13.8　多次散射的均方散射角和角分布……217
参考书和推荐读物……222
习题……222
第十四章　运动电荷的辐射……225
14.1　一个点电荷的李纳-维谢尔势和场……225
14.2　一个加速电荷的总辐射功率—拉莫尔公式及其相对论性推广……230

14.3 一个加速电荷的辐射角分布……234
14.4 一个作任意的极端相对论性运动的电荷的辐射……238
14.5 加速电荷的辐射能的频率分布和角分布……241
14.6 作瞬时圆周运动的相对论性带电粒子的辐射频谱……247
14.7 电磁波的汤姆孙散射……255
14.8 准自由电荷对辐射波的散射；相干与不相干散射……259
14.9 渡越辐射……262
参考书和推荐读物……272
习题……274
第十五章 韧致辐射；虚量子方法；辐射性β过程……282
15.1 碰撞时所放出的辐射……283
15.2 库仑碰撞中的韧致辐射……290
15.3 屏蔽效应；相对论性辐射能量损失……299
15.4 魏次扎克-威廉斯虚量子方法……303
15.5 作为虚量子散射的韧致辐射……309
15.6 β衰变时的辐射……311
15.7 轨道电子俘获时的辐射—电荷和磁矩的消失……313
参考书和推荐读物……319
习题……320
第十六章 多极场……326
16.1 标量波动方程的基本球面波解……326
16.2 电磁场的多极展开……331
16.3 多极场的性质；多极辐射的能量和角动量……335
16.4 多极辐射的角分布……342
16.5 多极辐射的源；多极矩……345
16.6 原子系统和原子核系统的多极辐射……349
16.7 中央馈电细直天线的辐射……354
16.8 矢量平面波的球面波展开……359
16.9 球体对电磁波的散射……363
16.10 多极场的边值问题……370
参考书和推荐读物……370
习题……371

第十七章　辐射阻尼；粒子的自有场；束缚系统对辐射波的散射和吸收……374
17.1　引言……374
17.2　根据能量守恒计算的辐射反作用力……377
17.3　自力的阿伯拉罕-洛仑兹算法……381
17.4　阿伯拉罕-洛仑兹模型的困难……386
17.5　电磁能量和电磁动量的协变定义……388
17.6　计及辐射阻尼的积分微分运动方程……393
17.7　振子的谱线宽度与能级移动……397
17.8　振子对辐射波的散射和吸收……400
参考书和推荐读物……406
习题……406
附录：单位和量纲……410
1. 单位和量纲；基本单位和导出单位……410
2. 电磁单位和电磁方程……412
3. 各种电磁单位制……415
4. 高斯制单位与米·千克·秒·安制单位的方程和数值的换算……418
参考书目
有关特殊函数的主要题材索引

第十章　磁流体动力学和等离子体物理学

10.1　引言和定义

磁流体动力学和等离子体物理学，都是研究由电磁场与导电液体或导电气体组成的联合系统的特性．当有自由电子或准自由电子能够在外场作用下运动时，就会发生电传导．在固态导体里，电子实际上是受到约束的，但从原子尺度来看，这些电子在发生碰撞之前，可以在晶体点阵中移动相当大的距离．如果给固态导体加上外场，就可以观察到诸如电传导和霍耳效应等动力学效应，但通常不发生媒质的整体运动．外场对原子本身的作用，体现为点阵结构中的胁强．相反地，对流体来说，当场作用在电子和电离原子上，都将产生动力学效应，包括媒质本身的整体运动．这种整体运动反过来又引起电磁场的改变．因此，我们必须处理物质与场的复杂的耦合系统．

磁流体动力学与等离子体物理学之间，没有鲜明的差别．虽然如此，仍然存在一些明显地可区分的范围，在这些范围中，要末只能应用磁流体动力学的观点和概念，要末只能应用等离子体物理学的观点和概念．认识这种区别的一种办法是去考察导电物质中 $\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$ 这个关系的建立方式．在裘特(Drude)的简单模型中，假想电子被外场加速，但由于碰撞而改变运动方向，以致电子在场方向上的运动受到有效摩擦力 $\nu m\mathbf{v}$ 的抵抗，这里 ν 是有效碰撞频率．欧姆定律正好表示外力与摩擦阻力间的平衡．当外场频率可以和 ν 相比拟时，电子在两次碰撞中间就来得及加速和减速．于是

出现了惯性效应，并使电导率变成复数．遗憾的是，在这样的频率下，用摩擦力描述碰撞势必变成无效，整个过程变得更加复杂．当外场频率远远高于碰撞频率时，又出现另一种情况．电子和离子受电场的作用沿相反方向加速，因而往往使得电子和离子分开．这种电荷分离又形成强的静电回复力，并发生电荷密度的振荡．这种振荡叫做等离子体振荡．应该把这种振荡和涉及流体运动但无电荷分离的低频振荡区别开来．这些低频振荡叫做磁流体动力波．

在导电液体或稠密的电离气体中，甚至对于非常优良的导体来说，碰撞频率都相当高，以致于简单形式的欧姆定律在很宽的频率范围内都是有效的．在外场的作用下，电子和离子按这样方式运动：即除了高频颤动外，并无电荷分离．电场是由流体运动（这种运动引起电流）所产生的，或者是由随时间变化的磁场或流体以外的电荷分布所产生的．所以，系统的力学运动可用一种具有平常的流体动力学变量（密度、速度和压强）的单导电流体来描述．在低频情况下，通常可以略去安培定律中的位移电流．这种近似就称为磁流体动力学．

在稀薄的电离气体中，碰撞频率较低．这时可能仍然有一个低频区域，在这个区域内磁流体动力学方程能够用于准稳过程。天体物理的应用往往属于这一范畴．但是在高频情况下，忽略电荷分离和位移电流是不许可的．在描述运动时，必须分别考虑电子和离子的惯性效应．这就是我们称之为等离子体物理学的范畴．这里有一个限制诸物理条件的范围，在这范围内电子和离子的双流体模型可以近似正确地描述各种现象．但是对于高温和低密度的情形，必须计入粒子速度在其平均值附近的有限扩展．这时必需用计及或不计及短程关联的玻耳兹曼方程来描述，我们不准备在此详细研究这些细节．当温度更高、密度更低时，静电回复力变得很弱，以致与所考虑体积的尺寸相比电荷分离的间隔要大得

多，这时流体模型所含的粒子集体特性已完全消失，剩下的只是一些快速运动的带电粒子，这些粒子通过库仑碰撞而相互作用着．按定义，等离子体是一种电离气体，在这种气体中，与有关系统的特征长度相比，把小尺度的单个粒子特性同大尺度的集体特性区分开的长度要小得多．这个长度叫做德拜屏蔽半径，我们将在10.9节里讨论它．它的数值等于$7.91(T/n)^{1/2}$厘米，其中T是绝对温度，以开氏温标表示，n是每立方厘米的电子数．除了最热或最稀薄的等离子体外，德拜屏蔽半径一般都比1厘米小得多．

10.2 磁流体动力学方程

我们首先考虑电中性的导电流体在电磁场中的状态．为了简单起见，我们假定流体的磁导率为1，并用物质密度$\rho(\mathbf{x},t)$、速度$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$、压强$p(\mathbf{x},t)$（取作标量）和实电导率σ来描述它．流体动力学方程是连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})=0 \tag{10.1}$$

和力方程

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\nabla p+\frac{1}{c}(\mathbf{J}\times\mathbf{B})+\mathbf{F}_v+\rho\mathbf{g} \tag{10.2}$$

上式中除了压强和磁力这两项外，还包括了粘滞力和万有引力．对不可压缩流体来说，粘滞力可以写成

$$\mathbf{F}_v=\eta\nabla^2\mathbf{v} \tag{10.3}$$

式中η是粘滞系数．必须强调指出，式(10.2)左边中的速度对时间的导数是运流导数，

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla \tag{10.4}$$

它给出以瞬时速度$\mathbf{v}$运动的一个量对时间的总变化率．

略去位移电流后，流体中的电磁场用下列方程描写：

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}&=0\\ \nabla\times\mathbf{B}&=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}\end{aligned}\right\}\tag{10.5}$$

条件 $\nabla\cdot\mathbf{J}=0$ 与忽略位移电流相当，它可以从 (10.5) 中的第二个方程推得. 在(10.5)中已略去两个散度方程. 从法拉第定律可得 $(\partial/\partial t)\nabla\cdot\mathbf{B}=0$，而 $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ 这一要求又可当作初始条件. 由于略去位移电流，库仑定律也就可以忽视了. 原因是电场将由旋度方程和欧姆定律完全确定(见后). 如果在安培定律中保留位移电流，并考虑到 $\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho_e$，也只能得到 (v^2/c^2) 级的改正项. 对于通常的磁流体动力学问题，这些改正完全可以忽略.

为了得到完整的动力学方程组，我们必须说明电流密度 $\mathbf{J}$ 和场 $\mathbf{E}$、$\mathbf{B}$ 之间的关系. 对电导率为 σ 的简单导电媒质来说，欧姆定律适用，其电流密度为

$$\mathbf{J}'=\sigma\mathbf{E}'\tag{10.6}$$

式中 $\mathbf{J}'$ 和 $\mathbf{E}'$ 是在相对于媒质静止的参照系中测定的值. 对于以速度 $\mathbf{v}$ 相对于实验室运动的媒质来说，我们必须适当地变换电流密度和电场强度. 场的非相对论性变换由方程(6.10)给出. 同样，在实验室中电流密度是

$$\mathbf{J}=\mathbf{J}'+\rho_e\mathbf{v}\tag{10.7}$$

式中 ρ_e 是电荷密度. 对于单一成分的导电流体来说，$\rho_e=0$. 于是欧姆定律化为

$$\mathbf{J}=\sigma\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\right)\tag{10.8}$$

有时可以假定流体的有效电导率是无穷大，那末在场 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 作用下，流体将以这样方式流动，即满足

$$\mathbf{E}+\frac{1}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})=0\tag{10.9}$$

方程(10.1)、(10.2)、(10.5)和(10.8)，再加上流体的状态方程，就构成磁流体动力学方程组．我们将在下节里研究这些方程的某些较简单内容，并将详细探讨所涉及的基本概念．

10.3 磁扩散，磁粘滞性和磁压强

流体在电磁场中的特性大半由电导率的大小决定．所有的效应既是电磁的，也是力学的．我们首先考虑电磁效应．我们将会看到，随着电导率的不同，电磁场的特性也很不同．在用(10.8)消去 $\mathbf{E}$ 之后，磁场对时间的依赖关系可以写成

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}=\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B})+\frac{c^2}{4\pi\sigma}\nabla^2\mathbf{B} \tag{10.10}$$

这里假定 σ 在空间中是常数．对于静止流体，(10.10)简化成扩散方程

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}=\frac{c^2}{4\pi\sigma}\nabla^2\mathbf{B} \tag{10.11}$$

这意味着磁场的初位形将在扩散时间

$$\tau=\frac{4\pi\sigma L^2}{c^2} \tag{10.12}$$

内衰退，式中 L 是 $\mathbf{B}$ 的空间变化的特征长度．对于半径为1厘米的铜球来说，其扩散时间 τ 的数量级是1秒，对于地球的熔岩核心来说，τ 的数量级是 10^4 年，对于太阳中的典型磁场来说，τ 的数量级是 10^{10} 年．

在比扩散时间 τ 短得多的时间内(或换句话说，当电导率如此之大，以致(10.10)中第二项可以忽略不计时)，磁场随时间的变化关系由下式给出：

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}=\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \tag{10.13}$$

利用(6.5)及其附带的脚注可以看出，上式与这样的论述相当：即

通过任何以局部流体速度运动的回线的磁通量不随时间而改变. 这时我们说磁力线冻结在流体内，并随流体一起移动. 因为电导率实际上是无穷大，所以(10.9)式适用. 我们可以把 v 的垂直于 B 的分量当作是磁力线的速度 w:

$$\mathbf{w}=\frac{(\mathbf{B}\times\mathbf{v})\times\mathbf{B}}{B^2}=c\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B^2} \tag{10.14}$$

这种所谓的流体和力线的"$E\times B$ 漂移"，可以根据在交叉的电场和磁场中电子与离子的单粒子轨道来理解(参看 12.4 节).

磁雷诺数 R_M 是一个有用的参数，它用来区分力线相对于流体扩散的情况和力线冻结在流体内的情况. 如果 V 是问题的特征速度，L 是相应的长度，那末磁雷诺数的定义是

$$R_M=\frac{V\tau}{L} \tag{10.15}$$

式中 τ 是扩散时间(10.12). 如果 $R_M\gg1$，则力线随流体的移动比起扩散要占绝对优势. 对于实验室里像水银和钠之类的液体来说，$R_M<1$，除非该液体的速度极高. 但是在地球物理和天体物理的应用中，R_M 可以比 1 大得多.

用力方程(10.2)就可以研究系统的力学性质. 用(10.8)的 J 代入，我们得

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{F}-\frac{\sigma B^2}{c^2}(\mathbf{v}_\perp-\mathbf{w}) \tag{10.16}$$

式中 F 是所有非电磁力的和，$\mathbf{v}_\perp$ 是垂直于 B 的速度分量. 由(10.16)可以清楚地看出，平行于 B 的流动仅仅取决于非电磁力. 另一方面，垂直于 B 的液流速度在大约

$$\tau'=\frac{\rho c^2}{\sigma B^2} \tag{10.17}$$

的时间内，从某一任意的初值衰减为

$$\mathbf{v}_\perp=\mathbf{w}+\frac{c^2}{\sigma B^2}\mathbf{F}_\perp \tag{10.18}$$

在电导率为无限大的极限情形下，上述结果简化为（10.14）的结果，正如所预期的一样．（10.16）中与 B^2 成正比的项表示有效粘滞力或摩擦力，它将阻止液体沿垂直于磁力线的方向流动．有时称它为磁粘滞性．如果普通的粘滞性（在这里包括在 F 中）和磁粘滞性可以相比，那末衰减时间 τ' 显然就要缩短一个因子，这因子包含两种粘滞性之比．

以上所述表明，如果电导率很大，磁力线就冻结在流体中，并随着流体运动．与这种运动状态有偏离的任何现象都迅速衰减掉．在考虑力学效应时，我们把电磁量当作给定的，或者在考虑电磁效应时，我们把力学量当作给定的，但力方程和电磁方程当然是联立的．在电导率非常大的极限情形下，可以通过安培定律将力方程中的电流密度 J 和磁感应强度 B 联系起来，并利用电导率为无限大时的式子（10.9）消去法拉第定律中的 E，而求得（10.13）．（10.2）中表示磁力的项现在可以写成

$$\frac{1}{c}(\mathbf{J}\times\mathbf{B}) = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{B}) \tag{10.19}$$

利用矢量恒等式

$$\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{B}) \tag{10.20}$$

可将方程（10.19）改写为

$$\frac{1}{c}(\mathbf{J}\times\mathbf{B}) = -\nabla\left(\frac{B^2}{8\pi}\right)+\frac{1}{4\pi}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} \tag{10.21}$$

这方程表明磁力相当于磁流体静压强

$$p_M = \frac{B^2}{8\pi} \tag{10.22}$$

再加上一项可认为是沿磁力线方向的附加张力．（10.21）这个结果也可以由麦克斯韦胁强张量导出（参看 6.8 节）．

如果我们略去粘滞效应，并假定引力可以从势（$\mathbf{g} = -\nabla\psi$）求

得，力方程(10.2)就化成下式：

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\nabla(p+p_M+\rho\psi)+\frac{1}{4\pi}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} \qquad (10.23)$$

在一些简单的几何情况下，例如B只有一个分量时，附加张力为零．这时，流体的静力学性质用下式描述：

$$p+p_M+\rho\psi=\text{常量} \qquad (10.24)$$

上式表明，除去引力效应后，力学压强的任何改变必然被磁压强的相反改变所平衡．假如将流体约束在某一区域内，使得p在区域外迅速地降为零，那末磁压强必定同样迅速地增长，以便将流体约束在该区域内．这就是10.5节里要讨论的箍缩效应的原理．

10.4 具有交叉电场和磁场的界面中间的磁流体动力学流动

为了说明通过流体的力线冻结与力线扩散之间的竞争，以及$E\times B$漂移与边界条件所导致的特性之间的竞争，我们研究一个简单例子：设有不可压缩的、粘滞的导电流体沿x方向在$z=0$与$z=a$的不导电界面中间流动，如图10.1所示．两个界面分别以速度V_1和V_2沿x方向运动．沿z方向加有均匀磁场B_0．系统在

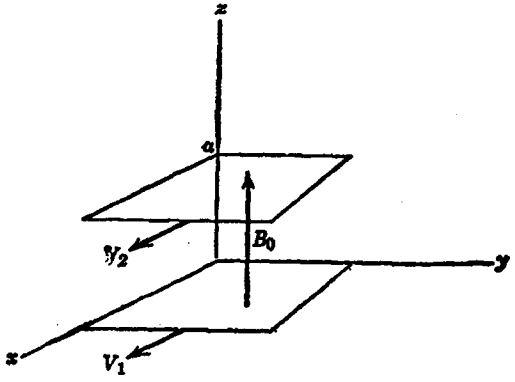


图10.1 粘滞性导电流体在两个以不同速度运动的平面中间的磁场内的流动．

x 和 y 两方向上是无限的. 我们将寻求沿 x 方向流动的稳态解, 在 x 方向上, 各个量只依赖于 z.

如果场不随时间变化, 那末由麦克斯韦方程组(10.5)得知, 存在的任何电场必定是一个静电场, 它可以由势导出, 并由边界条件唯一地决定, 也就是说, 它是一个任意的外电场. 当 σ 为无穷大时, 力线速度的表式(10.14)表明: 在 y 方向上存在电场. 如果我们假定这是 $\mathbf{E}$ 的唯一分量, 那末它必定是常量 E_0. 因为运动的流体将带着力线一起运动, 所以我们预料磁感应强度除了 z 分量 B_0 外, 还有 x 分量 $B_x(z)$.

对不可压缩流体来说, 连续性方程(10.1)简化为 $\nabla\cdot\mathbf{v}=0$. 在 x 方向上只依赖于 z 的速度同样满足该式. 当重力忽略不计时, 力方程取下列稳态形式:

$$\nabla p=\frac{1}{c}(\mathbf{J}\times\mathbf{B})+\eta\nabla^2\mathbf{v} \tag{10.25}$$

$\mathbf{J}$ 的唯一不等于零的分量是 $J_y(z)$:

$$J_y(z)=\sigma\left[E_0-\frac{1}{c}B_0v(z)\right] \tag{10.26}$$

式中 v 是速度的 x 分量. 写出(10.25)的三个分量方程, 可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{\sigma B_0}{c}\left(E_0-\frac{B_0}{v}v\right)+\eta\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\\ \frac{\partial p}{\partial y}&=0\\ \frac{\partial p}{\partial z}&=-\frac{\sigma B_x}{c}\left(E_0-\frac{B_0}{c}v\right)\end{aligned}\right\} \tag{10.27}$$

z 方向的磁力恰恰被压强梯度所平衡. 如果我们假定在 x 方向上没有压强梯度, 第一个方程就可以写成

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-\left(\frac{M}{a}\right)^2 v=-\left(\frac{M}{a}\right)^2\frac{cE_0}{B_0} \tag{10.28}$$

式中

$$M=\left(\frac{\sigma B_0^2 a^2}{\eta c^2}\right)^{1/2} \tag{10.29}$$

叫做哈脱曼(Hartmann)数. 由(10.17)可知, M^2是磁粘滞性与通常粘滞性之比. 满足边界条件 $v(0)=V_1$ 和 $v(a)=V_2$ 的 (10.28) 的解很容易求出:

$$v(z)=\frac{V_1}{\sinh M}\sinh\left[M\left(\frac{a-z}{a}\right)\right]+\frac{V_2}{\sinh M}\sinh\left(\frac{Mz}{a}\right)$$
$$+\frac{cE_0}{B_0}\left\{1-\frac{\sinh\left[M\left(\frac{a-z}{a}\right)\right]+\sinh\left(\frac{Mz}{a}\right)}{\sinh M}\right\} \tag{10.30}$$

在 $B_0\to 0, M\to 0$ 的极限情形下, 我们可以求得标准的片流解:

$$v(z)=V_1+\frac{z}{a}(V_2-V_1) \tag{10.31}$$

在 $M\gg 1$ 的另一种极限情况下, 我们预料磁粘滞性占主要地位, 并且流动几乎完全由 $E\times B$ 漂移决定. 如果求 $v(z)$在 $z\ll a$和$M\gg 1$时的近似解, 可得

$$v(z)\simeq\frac{cE_0}{B_0}+\left(V_1-\frac{cE_0}{B_0}\right)e^{-Mz/a} \tag{10.32}$$

上式表明, 在 $z=0$ 平面处虽然恰恰有 $v(z)=V_1$, 可是在数量级为(a/M)的一段距离上 $v(z)$却迅速地转变为$E\times B$漂移值(cE_0/B_0). 在 $z=a$ 附近, (10.32)中的 V_1 换成 V_2, z 换成$(a-z)$. 在(10.31)和(10.32)两种极限情形下的速度图如图 10.2 所示.

磁场 $B_x(z)$由下列方程决定:

$$\frac{\partial B_x}{\partial z}=\frac{4\pi}{c}J_y=\frac{4\pi\sigma}{c}\left(E_0-\frac{1}{c}B_0 v\right) \tag{10.33}$$

除非我们知道稳恒态的详细建立过程, 或者能够利用一些对称性论证, 否则 B_x 在 $z=0$ 和 $z=a$ 处的边界条件就是不确定的. 我们只知道, $z=0$ 和 $z=a$ 处的 B_x 之差与 x 方向每单位长度上沿 y 方向流动的总电流有关:

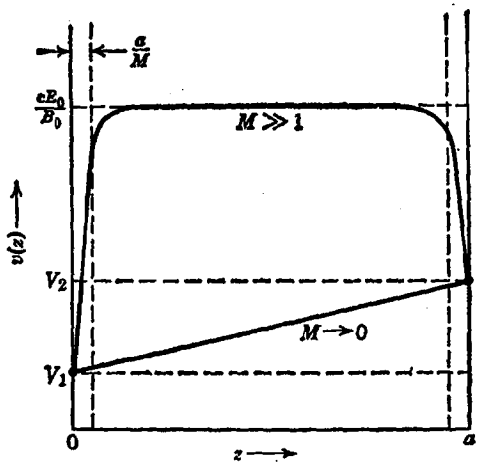


图 10.2　在哈脱曼数很大和很小的情况下的速度图．当 $M\to0$ 时，出现片流．当 $M\gg1$ 时，流动是由 E×B 漂移速度决定的，但紧接界面的地方除外．

$$B_x(a)-B_x(0)=\frac{4\pi}{c}\int_0^a J_y(z)dz \tag{10.34}$$

这种不确定性是由问题的一维性引起的．为了简单起见，我们只计算当 y 方向上的总电流为零时① 的磁场．这时，我们可以假定 $B_x(z)$ 在 $z=0$ 和 $z=a$ 处都等于零．用(10.30)代替 (10.33) 中的速度，于是不难证明

$$B_x(z)=B_0\left[\left(\frac{4\pi\sigma a^2}{c^2}\right)\left(\frac{V_2-V_1}{2a}\right)\right]\left\{\frac{\cosh\frac{M}{2}-\cosh\left(\frac{M}{2}-\frac{Mz}{a}\right)}{M\sinh\frac{M}{2}}\right\} \tag{10.35}$$

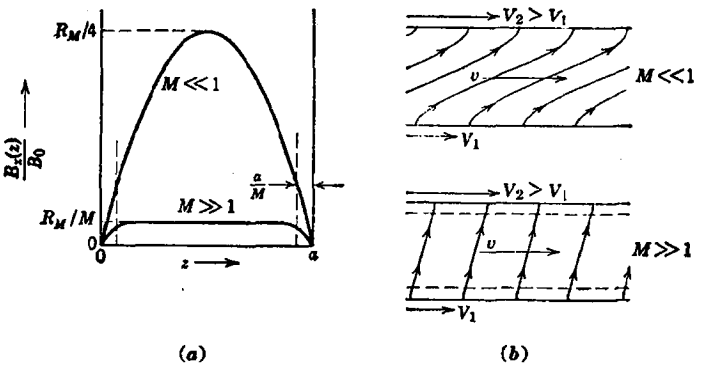
可把(10.35)的方括号里的无量纲系数看作是磁雷诺数 (10.15)，因为 $(V_2-V_1)/2$ 是本问题的特征速度，a 是特征长度．在 $M\ll1$ 和 $M\gg1$ 的两种极限情况下，(10.35)简化为

① 这一要求意味着 $cE_0/B_0=\frac{1}{2}(V_1+V_2)$．

$$B_x(z)\simeq R_M B_0\begin{cases}\dfrac{z}{a}\left(1-\dfrac{z}{a}\right) & \text{当}M\ll 1\text{时}\\ \dfrac{1}{M}\left[1-\left(e^{-Mz/a}+e^{-M[(a-z)/a]}\right)\right] & \text{当}M\gg 1\text{时}\end{cases}$$

(10.36)

图 10.3 表示在这两种极限情形下力线的变化特性. 只有在 R_M 很大时, 力线才有可察觉的迁移. 对给定的 R_M 来说, 哈脱曼数愈大, 力线的迁移愈少.



(a) (b)

图 10.3 (a) 在哈脱曼数很大和很小的情况下, 边界面之间的磁感应强度的轴向分量. (b) 磁感应线在流动方向上的迁移.

液态汞在室温下的有关物理常数是

$$\sigma=9.4\times10^{15}\text{ 秒}^{-1}$$

$$\eta=1.5\times10^{-2}\text{ 泊}$$

$$\rho=13.5\text{ 克/厘米}^3$$

(10.12) 式的扩散时间 $\tau=1.31\times10^{-4}[L(\text{厘米})]^2$秒. (10.29) 的哈脱曼数 $M=2.64\times10^{-2}B_0$ (高斯) a (厘米). 当 $L\simeq a\simeq1$ 厘米时, 由此得磁雷诺数 $R_M\sim10^{-4}V$. 因此, 用汞进行实验室实验时, 力线没有显著迁移, 除非流动速度极高. 另一方面, 如果磁感应强度 B_0 的数量级为 10^4 高斯, 则 $M\sim250$, 并且速度流几乎完全由 $E\times B$ 漂

移(10.14)决定. 在关于地球核心的地磁问题中,以及天体物理学的问题中,诸参数(如长度尺度)是以使 $R_M \gg 1$ 经常出现,从而使力线的迁移变得十分重要.

10.5 箍缩效应

等离子体或导电流体要受自磁场的约束,这种约束在热核研究及其它应用上都相当有用. 为了说明原理,我们来考虑一个无限长圆柱形导电流体,它具有轴向电流密度 $J_z=J(r)$ 和所产生的方位圆方向磁感应强度 $B_\theta=B(r)$. 为简单起见,我们假定电流密度、磁场强度、压强等都只与离圆柱轴线的距离 r 有关,并略去粘滞效应和万有引力效应. 我们首先要问,能否存在一种稳态条件,使得等离子体或导电流体在自身的磁感应强度作用下,主要约束在某一半径为 $r=R$ 的圆柱面以内? 对 $\mathbf{v}=0$ 的稳恒态来说,流体的运动方程(10.23)简化为

$$0=-\frac{dp}{dr}-\frac{d}{dr}\left(\frac{B^2}{8\pi}\right)-\frac{B^2}{4\pi r} \tag{10.37}$$

积分形式的安培定律把 $B(r)$ 和圆柱面所包围的电流联系起来:

$$B(r)=\frac{4\pi}{cr}\int_0^r rJ(r)dr \tag{10.38}$$

在这里毋需详细指明 $J(r)$ 的形式(除了有限性等等物理限制以外)就可以得出一些结果. 从安培定律很清楚地看到,如果流体几乎完全在 $r=R$ 的圆柱面以内,那末流体外的磁感应强度就是

$$B(r)=\frac{2I}{cr} \tag{10.39}$$

式中

$$I=\int_0^R 2\pi rJ(r)dr$$

是在圆柱内流动的总电流. 方程(10.37)可以写成

$$\frac{dp}{dr}=-\frac{1}{8\pi r^2}\frac{d}{dr}(r^2B^2) \tag{10.40}$$

其解为

$$p(r)=p_0-\frac{1}{8\pi}\int_0^r\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2B^2)dr \tag{10.41}$$

式中 p_0 是流体在 $r=0$ 处的压强. 如果物质被约束在 $r\leqslant R$ 的圆柱内, 那末在 $r=R$ 处的压强就降为零. 所以轴线上的压强 p_0 是

$$p_0=\frac{1}{8\pi}\int_0^R\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2B^2)dr \tag{10.42}$$

积分上限可以换成无穷大, 因为从 (10.39) 可以看出, 被积函数在 $r\geqslant R$ 时化为零. 应用上面这个 p_0 的表式 (10.42), 就可以把 (10.41) 写成

$$p(r)=\frac{1}{8\pi}\int_r^R\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2B^2)dr \tag{10.43}$$

不必详细指明径向特性, 就可以把圆柱内的平均压强同总电流 I 和半径 R 联系起来. 于是

$$\langle p\rangle=\frac{2\pi}{\pi R^2}\int_0^R rp(r)dr \tag{10.44}$$

分部积分, 并利用 (10.40), 得

$$\langle p\rangle=\frac{I^2}{2\pi R^2c^2} \tag{10.45}$$

这就是平均压强、总电流和受自磁场约束的流体或等离子体圆柱的半径之间的关系. 应该注意, 物质的平均压强等于圆柱表面的磁压强 $(B^2/8\pi)$. 在热核研究工作中, 人们预知了热等离子体的温度数量级为 10^8K ($kT\sim10$ 千电子伏特), 密度数量级为 10^{15} 个粒子/厘米^3. 这些条件大约相当于 $10^{15}\times10^8k\simeq1.4\times10^7$ 达因/厘米^2 或 14 大气压的压强. 为了把等离子体约束在圆柱内, 所需的磁感应强度在表面处约为 19 千高斯, 相当于 9×10^4R (厘米) 安培的电流. 这就说明, 要约束极热的等离子体必须用极强的电流.

到此为止，我们还没有讨论过这个系统的径向特性．现在就举两个简单例子来说明可能具有的特性．一个例子是：电流密度$J(r)$在$r<R$时是常数．那末当$r<R$时，$B(r)=(2Ir/cR^2)$．然后从方程(10.43)得到压强与半径的抛物线型的依赖关系：

$$p(r)=\frac{I^2}{\pi c^2R^2}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) \tag{10.46}$$

所以轴线上压强p_0是平均压强$\langle p\rangle$的两倍．图10.4表示各种不同的量与半径的依赖关系图．

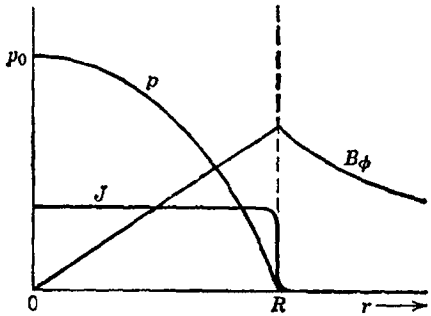


图 10.4　在具有均匀电流密度J的圆柱形等离子体柱中，方位圆方向磁感应强度、压强与半径的关系．

在另一模型中，电流密度被约束在表面的极薄一层内，这种模

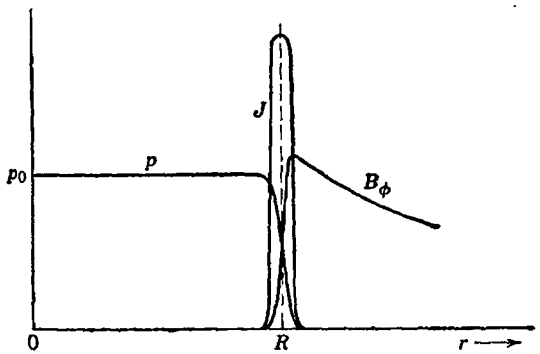


图 10.5　在具有面电流密度的圆柱形等离子体柱中，方位圆方向磁感应强度和压强的变化情况．

型适于描述高度导电流体或等离子体. 当 $r>R$ 时，磁感应强度由(10.39)给出，但圆柱内的磁感应强度等于零. 于是，圆柱内的压强 p 是常数，并且等于 (10.45) 的值. 图 10.5 就是这种情况的简图.

10.6 箍缩等离子体柱的不稳定性

上节的稳恒态情形是实验室里无法实现的一种理想情形，实验室里能实现的场和电流的几何构形，比上节讨论的简单圆柱形几何构形复杂得多. 其原因是，自箍缩等离子体易受许多不稳定性的影响. 其中有一些是磁流体动力学不稳定性，可以用磁压强和磁胁强来理解；而另外还有一些是与粒子运动有关联的不稳定性. 我们在这里只考虑第一类不稳定性，并只限于对两种较简单的不稳定性作定性的讨论. 首先讨论均匀圆柱形等离子体柱及其周围的磁场，并问当等离子体形状与半径恒定的圆柱体有偏离时会发生什么情况？

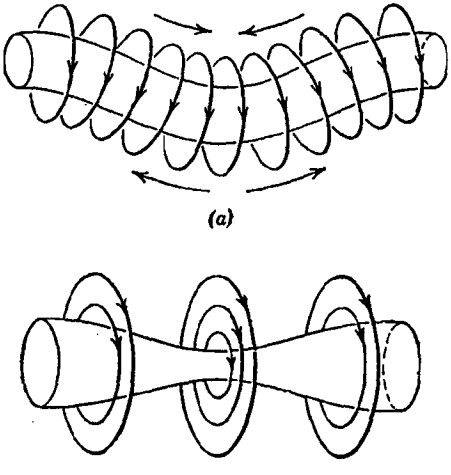


图 10.6 (a) 扭曲不稳定性. (b) 腊肠型或颈缩型不稳定性.

第一种不稳定性是扭曲不稳定性，如图 10.6a 所示．由于等离子体柱向下弯曲，使得柱附近的方位圆方向磁感应线在柱上方靠拢，而在柱下方分离．所以，磁压强朝着加大畸变的方向改变．这种畸变是不稳定的．

第二种畸变叫做腊肠型或颈缩型不稳定性，如图 10.6b 所示．在等离子体柱的颈缩区附近，方位圆方向磁感应强度增加，以致颈部向内压强比别处大．这就使已有的畸变增大．

这两种不稳定性都受到等离子体柱内轴向磁场的抑制．拿腊肠型畸变来说，由于颈缩使轴向磁感应线被压缩，使内部压强增加，并反抗方位圆方向场的压强的增加，如图 10.7 所示．如果假

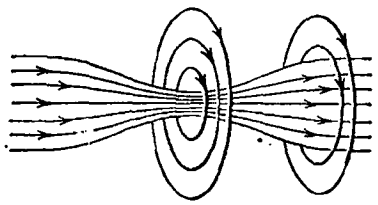


图 10.7　以捕集轴向磁场的向外压强来抑制颈缩型不稳定性．

定等离子体有分明的边界，那末容易证明：这两种磁压强的相对变化是

$$\frac{\Delta p_\phi}{p_\phi}=\frac{2x}{R},\qquad \frac{\Delta p_z}{p_z}=\frac{4x}{R} \tag{10.47}$$

式中 x 是微小的向内位移．因此，如果

$$B_z^2>\frac{1}{2}B_\phi^2 \tag{10.48}$$

则等离子体柱对腊肠型畸变就是稳定的．

对于扭曲畸变来说，不是沿横向压缩轴向磁力线，而是把它拉长了．可是结果相同，即内部磁力线的张力增加，以反抗外部的力，并使等离子体柱趋向稳定．从图 10.8 显而易见，给定横向位移的短波长扭曲所引起的力线伸长要比长波长扭曲多些．因此，在

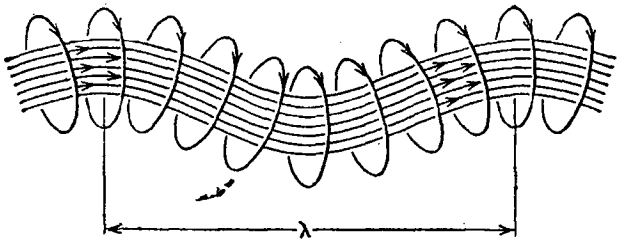


图 10.8 以捕集轴向场的张力来抑制扭曲不稳定性.

内轴向场和外方位圆方向场之比给定时，短波长的扭曲有稳定的趋势，而波长很长的扭曲则不然. 如果轴向场与方位圆方向场大致相等，分析表明：倘若扭曲的波长 $\lambda<14R$，扰动就会稳定下来.

凭藉外围导体的作用，可以使波长更长的扭曲稳定，只要等离子体的半径不比导体的半径小得太多. 这时，方位圆方向磁力线被捕集在导体和等离子体的界面之间，如图 10.9 所示. 如果等离子体柱很接近导体壁，那末磁力线就密集在等离子体柱和壁之间，这样就加大了磁压强，并产生回复力.

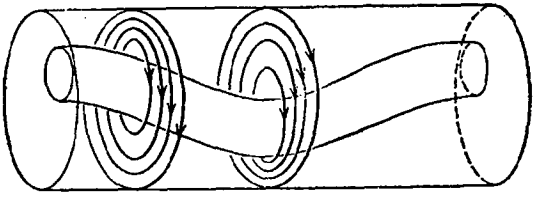


图 10.9 带外围导体的长波长扭曲的稳定性.

定性地看来，至少对于边界分明的高度导电等离子体来说，用捕集轴向场和导电壁的组合，就一定可能造出一个稳定位形，这一点是很清楚的. 详细分析① 证实了这个定性的结论，并定出所涉

① V. D. Shafranov, *Atomnaya Energ.* I, 5, 38(1956); R. J. Tayler, *Proc. Phys. Soc.* (*London*), B 70, 1049(1957); M. Rosenbluth, *Los Alamos Report LA*-2030(1956). 并参看 *Proceedings of the Second International Conference on Peaceful Uses of Atomic Energy*, Vol. 31(1958), Braginsky 与 Shafranov 的论文(第 43 页)和 Tayler 的论文(第 160 页).

及的量的限度．重要的是使等离子体外部的轴向场尽可能小，并保持等离子体的半径大约是导电圆柱半径的一半或三分之一．如果等离子体外部的轴向场太强，B_z 和 B_ϕ 的力线组合起来就会形成螺旋形不稳定性，这在圆环几何构形中是很难处理的．但是，如果使等离子体外部的轴向场非常强，那末螺距就会变得非常大，以致在有限长的等离子体柱内，力线还远远不能形成一个螺圈．于是，又有可能出现稳定．藉助由等离子体外的电流所产生的强轴向场来实现稳定，乃是一些聚变装置（例如仿星器）①的基础．

在实验上很难产生等离子体边界分明的这种理想化状态，即使产生也会遭到破坏，因为等离子体在大致是 $4\pi\sigma R^2/c^2$ 的时间内穿过力线扩散开（参看 10.3 节）．对于每个粒子能量为 1 电子伏特的氢等离子体来说，这时间的数量级在 $R\sim10$ 厘米时是10^{-4}秒，而对于 10 千电子伏特的等离子体来说，则是 10^2 秒．显然，热核实验家必须努力研制出一开始就尽可能热的等离子体，使得初始的扩散时间长到足以进一步加热．

10.7 磁流体动力波

在普通流体动力学里，除表面波外，唯一可能的小振幅波是纵向压缩（声）波．这些波以速度 s 传播，在等熵时，这速度 s 与压强对密度的导数间的关系是

$$s^2=\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0 \tag{10.49}$$

如果我们采用绝热定律 $p=K\rho^\gamma$，就有 $s^2=\gamma p_0/\rho_0$，式中 γ 是比热之比．在磁流体动力学里，可能存在另一种波动，这种波动和磁感应线的横向运动有关．磁力线的张力有使磁力线回复直线形状的趋势，从而引起横振荡．平常声波速度平方的数量级相当于流体

① 是美国的一种研究热核反应的实验装置的名称——译者注．

静压强除以密度，如果将磁流体动力波与平常声波相类比，我们预期这些磁流体动力波的速度将是

$$v\sim\left(\frac{B_0^2}{8\pi\rho_0}\right)^{1/2} \tag{10.50}$$

式中 $B_0^2/8\pi$ 是磁压强，这些磁流体动力波叫阿耳文波.

为了研究磁场中导电流体的波动，我们来考虑在没有引力时磁场中可压缩的无粘滞性理想导电流体．描述流体特性的适当方程组是

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})=0\\&\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=-\nabla p-\frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{B})\\&\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\end{aligned}\right\} \tag{10.51}$$

在这些方程中，还必须补充一个把压强同密度联系起来的状态方程．我们假定平衡时的速度为零，但是还要假定在具有恒定密度 ρ_0 的整个均匀流体里，存在一个空间均匀分布的静磁感应强度 $\mathbf{B}_0$．然后，我们认为各量与其平衡值有小幅度偏差：

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{B}=\mathbf{B}_0+\mathbf{B}_1(\mathbf{x},t)\\&\rho=\rho_0+\rho_1(\mathbf{x},t)\\&\mathbf{v}=\mathbf{v}_1(\mathbf{x},t)\end{aligned}\right\} \tag{10.52}$$

如果把方程(10.51)对微小量线性化，那末这些方程就变成

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\rho_0\nabla\cdot\mathbf{v}_1=0\\&\rho_0\frac{\partial\mathbf{v}_1}{\partial t}+s^2\nabla\rho_1+\frac{\mathbf{B}_0}{4\pi}\times(\nabla\times\mathbf{B}_1)=0\\&\frac{\partial\mathbf{B}_1}{\partial t}-\nabla\times(\mathbf{v}_1\times\mathbf{B}_0)=0\end{aligned}\right\} \tag{10.53}$$

式中 s^2 是声速的平方 (10.49)．把这些方程合并起来可得到一个

仅含$\mathbf{v}_1$的方程:

$$\frac{\partial^2\mathbf{v}_1}{\partial t^2}-s^2\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}_1)+\mathbf{v}_A\times\nabla\times[\nabla\times(\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_A)]=0 \qquad (10.54)$$

式中引进了阿耳文速度矢量

$$\mathbf{v}_A=\frac{\mathbf{B}_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \qquad (10.55)$$

$\mathbf{v}_1$的波动方程(10.54)相当复杂，但是对平行或垂直于磁场方向传播的波，它能给出简单的解①. 如果$\mathbf{v}_1(\mathbf{x},t)$用波矢为$\mathbf{k}$、频率为$\omega$的平面波表示:

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{x},t)=\mathbf{v}_1e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t} \qquad (10.56)$$

方程(10.54)就变成:

$$-\omega^2\mathbf{v}_1+(s^2+v_A^2)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1)\mathbf{k}+\mathbf{v}_A\cdot\mathbf{k}[(\mathbf{v}_A\cdot\mathbf{k})\mathbf{v}_1-(\mathbf{v}_A\cdot\mathbf{v}_1)\mathbf{k}$$
$$-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_A]=0 \qquad (10.57)$$

如果$\mathbf{k}$垂直于$\mathbf{v}_A$，最后一项就等于零. 于是$\mathbf{v}_1$的解就是纵磁声波，它的相速度是

$$u_{相}=\sqrt{s^2+v_A^2} \qquad (10.58)$$

应该注意，这个波的传播速度除了与1同数量级的因子外，还依赖于流体静压强与磁压强之和. 如果$\mathbf{k}$平行于$\mathbf{v}_A$，(10.57)就化为

$$(k^2v_A^2-\omega^2)\mathbf{v}_1+\left(\frac{s^2}{v_A^2}-1\right)k^2(\mathbf{v}_A\cdot\mathbf{v}_1)\mathbf{v}_A=0 \qquad (10.59)$$

在这种情形下，可能存在两种波动. 一种是相速度等于声速s的普通纵波($\mathbf{v}_1$平行于$\mathbf{k}$和$\mathbf{v}_A$)，另一种是相速度等于阿耳文速度v_A的横波($\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_A=0$). 这阿耳文波是一种纯磁流体动力学现象，它只依赖于磁场(张力)和密度(惯性).

对于室温下的汞来说，阿耳文速度是[B_0(高斯)/13.1]厘米/秒，与此相比较的声速是1.45×10^5厘米/秒. 在一切实验室场强

① 我们把确定沿任意方向传播的波的特性留作习题10.3.

下，阿耳文速度都比声速小得多．另一方面在天体物理问题里，由于密度小得多，阿耳文速度可以变得很大．例如，在太阳的光球层里，密度的数量级为 10^{-7} 克/厘米^3($\sim 6\times10^{16}$ 个氢原子/厘米^3)，所以 $v_A\simeq10^3B_0$厘米/秒．太阳磁场在太阳表面处约为 1 或 2 高斯，但在日斑周围则大得多．为了比较，我们指出，在光球层和色球中，声速的数量级都是 10^6 厘米/秒．

从(10.53)的第三个方程可以求出这些不同的波的磁场：

$$\mathbf{B}_1=\begin{cases}\dfrac{k}{\omega}v_1\mathbf{B}_0 & \text{对于 } \mathbf{k}\perp\mathbf{B}_0\\ 0 & \text{对于 } \mathbf{k}\parallel\mathbf{B}_0\text{的纵波}\\ -\dfrac{k}{\omega}B_0\mathbf{v}_1 & \text{对于 } \mathbf{k}\parallel\mathbf{B}_0 \text{ 的横波}\end{cases}\tag{10.60}$$

沿着与 $\mathbf{B}_0$ 垂直的方向运动的磁声波，会使力线密集和疏散，但不改变力线的方向，如图 10.10a 所示．而平行于 $\mathbf{B}_0$ 的阿耳文波，会使力线沿横向来回振荡 (图 10.10b)．这两种情形中的力线都"冻结"在流体里，并随着流体一起运动．

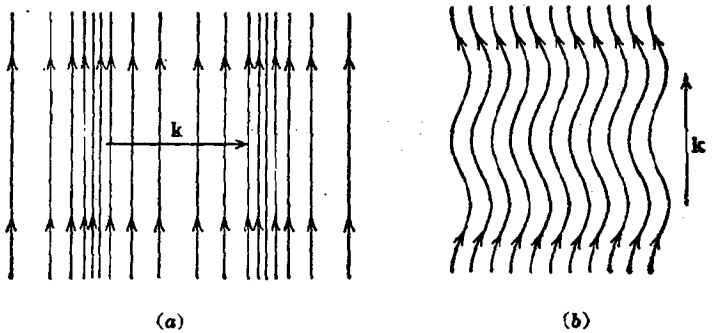


图 10.10　磁流体动力波．

如果流体的电导率不是无穷大的，或者流体有粘滞效应存在，那末我们预期会有耗散性损失和因而造成的振荡阻尼．这时(10.53)的第二个和第三个方程都要用附加项加以修正：

$$\left.\begin{aligned}\rho_0\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t}&=-s^2\nabla\rho_1-\frac{\mathbf{B}_0}{4\pi}\times(\nabla\times\mathbf{B}_1)+\eta\nabla^2\mathbf{v}_1\\ \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}&=\nabla\times(\mathbf{v}_1\times\mathbf{B}_0)+\frac{c^2}{4\pi\sigma}\nabla^2\mathbf{B}_1\end{aligned}\right\}\tag{10.61}$$

式中 η 是粘滞系数①，σ 是电导率. 因为这两个附加项都造成相速度的色散，所以当上式解取平面波形式时，就很容易看出这两项的影响. 对平面波来说，这些方程显然等效于

$$\left.\begin{aligned}\rho_0\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t}&=\frac{1}{\left(1+i\dfrac{\eta k^2}{\rho_0\omega}\right)}\left[-s^2\nabla\rho_1-\frac{\mathbf{B}_0}{4\pi}\times(\nabla\times\mathbf{B}_1)\right]\\ \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}&=\frac{1}{\left(1+i\dfrac{c^2k^2}{4\pi\sigma\omega}\right)}\nabla\times(\mathbf{v}_1\times\mathbf{B}_0)\end{aligned}\right\}\tag{10.62}$$

因此，把 k 同 ω 联系起来的方程(10.57)要作下列修正：(a) 用因子$\left(1+i\dfrac{c^2k^2}{4\pi\sigma\omega}\right)$乘 s^2 和 ω^2；(b) 用因子$\left(1+i\dfrac{\eta k^2}{\rho_0\omega}\right)$乘$\omega^2$.

对于阿耳文波平行于磁场的这一重要情形来说，ω 和 k 的关系变成

$$k^2v_A^2=\omega^2\left(1+i\frac{c^2k^2}{4\pi\sigma\omega}\right)\left(1+i\frac{\eta k^2}{\rho_0\omega}\right)\tag{10.63}$$

如果电阻修正项和粘滞修正项都是微小量，那末波数近似地为

$$k\simeq\frac{\omega}{v_A}+i\frac{\omega^2}{2v_A^3}\left(\frac{c^2}{4\pi\sigma}+\frac{\eta}{\rho_0}\right)\tag{10.64}$$

上式表明：衰减随频率(或波数)而迅速增加，但随磁场强度的增大而减少. 依据 10.3 节里扩散时间 τ 的意义，波数的虚部表明：如果不计粘滞性效应，那末波在衰减为它原来强度的 $1/e$ 时，已经传播了一段时间 τ. τ 的表式(10.12)里的长度参量在这里是振荡的

① 实际上，简单的粘滞力表式(10.3)不允许用于可压缩流体. 不过可以预料，这样做能给出定性上正确的特性.

波长. 对于相反的极端情况,即电阻项及(或)粘滞项占优势时,可以令 (10.63) 右边的两个因子等于零而求出波数. 这时 k 有相等的实部和虚部,而波迅速地衰减掉,并与磁场的量值无关.

上面关于磁流体动力波的讨论,只对于相当低的频率有效,因为我们在安培定律中略去了位移电流. 显而易见,如果频率是够高,场的特性必然变成 7.6 节里所描写的"电离层"特性,这时电荷分离效应起着重要作用. 但是,在磁流体动力学的论述中,即使略去电荷分离效应,位移电流仍然影响阿耳文波和磁声波的传播. 包含位移电流的安培定律的形式是

$$\nabla\times\mathbf{B}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \tag{10.65}$$

上式中我们已经用了电导率为无穷大的近似式(10.9),以消去电场 $\mathbf{E}$. 于是,代入流体运动的力方程中的电流现在是

$$\mathbf{J}=\frac{c}{4\pi}\left[\nabla\times\mathbf{B}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\right] \tag{10.66}$$

因而线性化的方程组(10.53)中第二个方程就推广为

$$\rho_0\left[\frac{\partial\mathbf{v}_1}{\partial t}+\frac{1}{c^2}\mathbf{v}_A\times\left(\frac{\partial\mathbf{v}_1}{\partial t}\times\mathbf{v}_A\right)\right]=-s^2\nabla\rho_1-\frac{\mathbf{B}_0}{4\pi}\times(\nabla\times\mathbf{B}_1) \tag{10.67}$$

这意味着 $\mathbf{v}_1$的波动方程变成下列形式:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\mathbf{v}_1\left(1+\frac{v_A^2}{c^2}\right)-\frac{\mathbf{v}_A}{c^2}(\mathbf{v}_A\cdot\mathbf{v}_1)\right]$$
$$-s^2\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}_1)+\mathbf{v}_A\times\nabla\times\nabla\times(\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_A)=0 \tag{10.68}$$

考察上式可以看出:在 $\mathbf{v}_1$ 平行于 $\mathbf{v}_A$(即 $\mathbf{B}_0$)的情况,方程跟以前没有差别. 但是,对于横向的 $\mathbf{v}_1$(不论是 $\mathbf{k}$ 垂直于 $\mathbf{B}_0$ 的磁声波,还是 $\mathbf{k}$ 平行于 $\mathbf{B}_0$ 的阿耳文波)来说,频率的平方应当乘上一个因子$[1+(v_A^2/c^2)]$. 因此,阿耳文波的相速度变成

$$u_A=\frac{cv_A}{\sqrt{c^2+v_A^2}} \tag{10.69}$$

在通常情况下，$v_A \ll c$，相速度近似等于 v_A，所以位移电流无关紧要．可是，如果 $v_A \gg c$，那末相速度就等于光速．从电磁波的观点来看，我们可以认为横向阿耳文波是一种媒质里的波，这媒质的折射率由下式给出：

$$u_A = \frac{c}{n} \tag{10.70}$$

于是，

$$n^2 = 1 + \frac{c^2}{v_A^2} = 1 + \frac{4\pi\rho_0 c^2}{B_0^2} \tag{10.71}$$

将这一折射率用到电磁波在等离子体中的传播时，须加小心．这个关系式，只对于电荷分离效应并不重要时的那些频率才是有效的．

10.8 等离子体振荡

前几节所讨论的磁流体动力学近似理论，是以下述概念为依据的：流体是单一组元的、电中性的，并且用标量电导率 σ 来描述流体与电磁场的相互作用．可是正如本章引言所讨论过的那样，导电的流体或等离子体都是由电子和一种或一种以上离子组成的多组元流体．在低频率或长波长的情况下，用单流体模型描述是有效的，因为碰撞频率 ν 是够高(并且平均自由程是够短)，以致电子和离子总是保持局部的电中性，同时，平均说来，又在电场的作用下按欧姆定律朝相反方向漂移．在高频率的情况下，单流体模型失效．电子和离子要独立运动，于是出现了电荷分离．这些电荷分离就产生强大的回复力．因此发生静电性质的振荡．如果有磁场存在，还会出现其它效应．电子和离子在磁场中要沿着圆形或螺旋形的轨道运动，其轨道频率由下式给出：

$$\omega_B = \frac{eB}{mc} \tag{10.72}$$

当磁场是够强或密度足够低，以致轨道频率同碰撞频率可以相比时，标量电导率的概念就失效了，电流也表现出对磁场的方向有显著的依赖关系(参看习题10.5)。当频率更高时，由于离子的惯性较大，使得离子跟不上场的快速涨落。于是，只有电子参与运动。离子仅仅提供一个均匀的正电荷本底，使得平均看来呈电中性。均匀的电荷本底的想法，只有在我们所考虑的特征长度至少比粒子间距大时($l \gg n_0^{-1/3}$)才有效，甚至电子流体的概念也是如此。事实上，还有另一个极限，那就是德拜屏蔽长度。对处于适当温度的等离子体来说，德拜屏蔽长度大于 $n_0^{-1/3}$，这德拜屏蔽长度就成为小尺度的单粒子运动与集体的流体运动之间的真正分界线（参看下节）。

为了避免不必要的麻烦，我们只考虑等离子体的高频特性，而略去离子的动力学效应。我们也略去碰撞效应。电荷为 e、质量为 m 的电子用密度 $n(\mathbf{x}, t)$ 和平均速度 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ 来描写。离子和电子的平衡电荷密度是 $\mp en_0$。电子流体的动力学方程是

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial n}{\partial t}+\nabla\cdot(n\mathbf{v})=0 \\ &\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=\frac{e}{m}\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\right)-\frac{1}{mn}\nabla p \end{aligned}\right\} \tag{10.73}$$

式中电子的热动能效应是用电子压强 p（在这里假定 p 是一个标量）来描写。电荷密度和电流密度为

$$\left.\begin{aligned} &\rho_e=e(n-n_0) \\ &\mathbf{J}=en\mathbf{v} \end{aligned}\right\} \tag{10.74}$$

这样麦克斯韦方程组就可以写成

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi e(n-n_0) \\ &\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \\ &\nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0 \\ &\nabla\times\mathbf{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{4\pi en}{c}\mathbf{v} \end{aligned}\right\} \tag{10.75}$$

现在我们假定，静态就是密度 $n=n_0$ 的电子流体静止不动、且没有场存在时的状态．然后考虑由于某些初始的扰动而离开这一状态的微小偏差．于是线性化运动方程组是

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial n}{\partial t}+n_0\nabla\cdot\mathbf{v}=0\\&\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}-\frac{e}{m}\mathbf{E}+\frac{1}{mn_0}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_0\nabla n=0\\&\nabla\cdot\mathbf{E}-4\pi en=0\\&\nabla\times\mathbf{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}-\frac{4\pi en_0}{c}\mathbf{v}=0\end{aligned}\right\}\tag{10.76}$$

再加上那两个齐次麦克斯韦方程．式中 $n(\mathbf{x},t)$ 和 $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ 代表离开平衡值的偏差．如果存在外磁场 $\mathbf{B}_0$，那末在力方程中就应当保留 $[(\mathbf{v}/c)\times\mathbf{B}_0]$ 项(参看习题 10.7)，但涨落场 $\mathbf{B}$ 是一阶小量，所以 $(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$ 是二阶小量．连续性方程实际上不是一个独立的方程，我们只要将(10.76)的末两方程合并就可以导出它．

因为(10.76)中的力方程与磁场无关，所以我们预料会有 $\mathbf{B}=0$ 的纯静电性的解存在．把连续性方程和力方程合并，可以得到密度涨落的波动方程：

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2}+\left(\frac{4\pi e^2n_0}{m}\right)n-\frac{1}{m}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_0\nabla^2 n=0\tag{10.77}$$

另一方面，把安培定律对时间的导数与力方程合并，可以得到场方程：

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}+\left(\frac{4\pi e^2n_0}{m}\right)\mathbf{E}-\frac{1}{m}\left(\frac{\partial\rho}{\partial n}\right)_0\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})=c\nabla\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\tag{10.78}$$

这两个方程左边的结构基本相同．因此，如果我们令 $\partial\mathbf{B}/\partial t=0$，并不会造成矛盾．除了已经假定的静止场外，我们还可以得出下面这样一个结论：$\mathbf{B}=0$ 是一种可能的解．如果 $\partial\mathbf{B}/\partial t=0$，那末法拉第定律表明 $\nabla\times\mathbf{E}=0$．因此，$\mathbf{E}$ 是可以从一个标势导出的纵向场．

显然，E的每一个分量满足的方程与密度涨落方程(10.77)相同. 如果略去(10.77)中的压强项，我们就发现密度、速度和电场都以等离子体频率 ω_p 振荡，

$$\omega_p^2=\frac{4\pi n_0 e^2}{m} \tag{10.79}$$

如果我们把压强计算在内，就得到频率的色散关系：

$$\omega^2=\omega_p^2+\frac{1}{m}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_0 k^2 \tag{10.80}$$

在定 k^2 的系数时必须谨慎. 我们可以采用绝热定律 $p=p_0(n/n_0)^\gamma$，但是对于有三个外自由度而没有内自由度的粒子组成的气体来说，通常的声学值$\left(\gamma=\frac{5}{3}\right)$是不适用的. 原因是这时的密度振荡频率比碰撞频率高得多，这正和声学的情形相反. 因此，密度振荡的一维性继续保持下来. 这样就必须采用适合于一个平动自由度的 γ 值. 因为 $\gamma=(m+2)/m$，式中 m 是自由度的数目，所以在这情况下 $\gamma=3$. 于是

$$\frac{1}{m}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_0=3\frac{p_0}{mn_0} \tag{10.81}$$

如果我们用 $p_0=n_0KT$，并且定义在一个方向(与电场平行)上的速度分量的方均根值为

$$m\langle u^2\rangle=KT=\frac{p_0}{n_0} \tag{10.82}$$

于是色散方程就可以写成

$$\omega^2=\omega_p^2+3\langle u^2\rangle k^2 \tag{10.83}$$

这个关系是近似的，只对长波长有效，并且事实上就是包含高阶的电子速度分布矩的展开式中的头两项(参看习题10.6). (10.83)形式的色散方程的有效范围，超出了我们在推导过程中所用的理想气体定律的适用范围. 例如，(10.83)这方程适用于电子的简并性

费密气体中的等离子体振荡，在这费密气体中，在半径等于费密速度 V_F 的球体内，速度空间的所有相格都被填满．这时，速度的一个分量的方均值是

$$\langle u^2\rangle=\frac{1}{5}V_F^2 \tag{10.84}$$

在色散关系式中只有在 k^2 幂展开式的高阶项里，才明显地出现量子效应．

上面所描写的振荡是振荡磁场恒等于零的纵向静电振荡．这意味着这种振荡不能在无界等离子体中激发辐射．不过，在等离子体中还有一些属于横向电磁波的振荡模式．为了了解各种可能存在的等离子体振荡，我们假定所有变量都按 $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t)$ 变化，并且找出 ω 和 $\mathbf{k}$ 之间的定义关系，就像我们在10.7节里对磁流体动力波所做的那样．在这种假定下，线性化方程(10.76)以及两个齐次麦克斯韦方程就可以写成

$$\left.\begin{aligned}
&n=\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{\omega}n_0\\
&\mathbf{v}=\frac{ie\mathbf{E}}{m\omega}+\frac{3\langle u^2\rangle}{\omega}\frac{n}{n_0}\mathbf{k}\\
&\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}=-i4\pi en\\
&\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}=0\\
&\mathbf{k}\times\mathbf{B}=-\frac{\omega}{c}\mathbf{E}-i\frac{4\pi en_0}{c}\mathbf{v}\\
&\mathbf{k}\times\mathbf{E}=\frac{\omega}{c}\mathbf{B}
\end{aligned}\right\} \tag{10.85}$$

从麦克斯韦方程组可以解出 $\mathbf{v}$，并以 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{E}$ 来表示：

$$\mathbf{v}=\left(\frac{ie}{m\omega}\right)\frac{1}{\omega_p^2}[(\omega^2-c^2k^2)\mathbf{E}+c^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E})\mathbf{k}] \tag{10.86}$$

于是，可以用力方程和 $\mathbf{E}$ 的散度消去 $\mathbf{v}$，以便求出只含 $\mathbf{E}$ 的方程：

$$(\omega^2-\omega_p^2-c^2k^2)\mathbf{E}+(c^2-3\langle u^2\rangle)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E})\mathbf{k}=0 \tag{10.87}$$

如果我们把E用平行于k和垂直于k的分量来表示:

式中

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}&=\mathbf{E}_{\parallel}+\mathbf{E}_{\perp}\\ \mathbf{E}_{\parallel}&=\left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}}{k^2}\right)\mathbf{k}\end{aligned}\right\}\tag{10.88}$$

那末就可以把(10.87)写成两个方程:

$$\left.\begin{aligned}(\omega^2-\omega_p^2-3\langle u^2\rangle k^2)\mathbf{E}_{\parallel}&=0\\ (\omega^2-\omega_p^2-c^2k^2)\mathbf{E}_{\perp}&=0\end{aligned}\right\}\tag{10.89}$$

其中第一个结果表明，纵波满足已经讨论过的色散关系(10.83)，而第二个结果表明，有两个横波(两个偏振态)存在，它们的色散关系是

$$\omega^2=\omega_p^2+c^2k^2\tag{10.90}$$

方程(10.90)正是7.5节(*d*)段里从另一观点描述的横电磁波的色散方程. 在没有外场时，静电振荡和横电磁振荡并不耦合. 可是，譬如说，有外加的磁感应强度时，力方程就要加上一个包含磁场的项，并且这两种振荡是耦合的(参看习题10.7).

10.9 等离子体振荡的短波长限和德拜屏蔽距离

到此为止，我们在讨论等离子体振荡时，并没有提到集体振荡的描述所适用的波数范围. $n_0^{1/3}$ 当然是波数的一个上限. 考察一下纵振荡的色散关系(10.83)，就可以获得关于更恰当的波数上限的线索. 对于长波长来说，振荡频率非常接近 $\omega=\omega_p$. 只有当波数同德拜波数 k_D 差不多时，频率 ω 才与 ω_p 有很大偏差. 德拜波数 k_D 为

$$k_D^2=\frac{\omega_p^2}{\langle u^2\rangle}\tag{10.91}$$

对于波数 $k\ll k_D$ 的情形，等离子体的纵振荡的相速度和群速度是

$$\left.\begin{aligned} v_{相} &\simeq \frac{\omega_p}{k} \\ v_{群} &\simeq \frac{3\langle u^2\rangle}{v_{相}} \end{aligned}\right\} \tag{10.92}$$

我们从 k_D 的定义看出，对于这样的波数，相速度比热运动的方均根速度 $\langle u^2\rangle^{1/2}$ 大得多，而群速度比 $\langle u^2\rangle^{1/2}$ 小得多．当波数朝 k_D 增加时，相速度就从很大的值朝 $\langle u^2\rangle^{1/2}$ 减少．所以当波数大致等于 k_D 时，波是以相当小的速度传播的，以致有数目相当可观的电子以稍快于、或稍慢于、或几乎等于波速的速度运行．这时，相速度位于热速度分布曲线的尾部．波速和电子的热速度不相上下这个事实，乃是使振荡遭到破坏的能量转移机理的根源．这种机理就是：粒子被运动的波所捕集，以致能量由波动转移到粒子上．由此造成的波的阻尼，叫做朗道阻尼．

朗道阻尼的详细计算超出本章范围．但我们可以定性地描述它的物理机理．图 10.11 表示电子速度分布，分布曲线的展宽等于某方均根值，并在较高速度时具有麦克斯韦速度分布的尾部．当 k 很小时，相速度位于分布曲线尾部的远端，产生的阻尼可以忽略不计．可是，当 $k\to k_D$ 时，相速度就在尾部内，如图 10.11 所示，而且有相当数量的电子具有和 $v_{相}$ 差不多的热速度．因此，在 $v=v_{相}$ 附

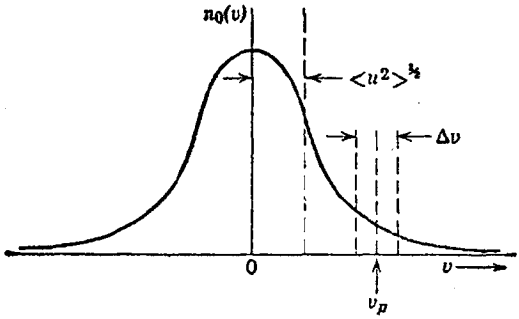


图 10.11　电子的热速度分布．

近存在一个速度带 Δv，在这个带里的电子相对于波的运动是足够慢的，使得电子都被捕集在势阱里，并被波以速度 $v_{相}$ 带走．如果在 Δv 内，开始运动时的速度比 $v_{相}$ 慢的粒子多于比 $v_{相}$ 快的粒子(如图所示)，那末捕集过程就要消耗波的能量，而使粒子的能量有净增加．这就是朗道阻尼的机理．详细的计算表明，只要 $k \ll k_D$，阻尼可以用频率的虚部来表示，这虚数由下式给出：

$$\mathrm{Im}\omega \simeq -\omega_p \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(\frac{k_D}{k}\right)^3 e^{-(k_D^2/2k^2)} \qquad (10.93)$$

在求(10.93)时，采用了麦克斯韦速度分布．当 $k \gtrsim k_D$ 时，阻尼常数比(10.93)给出的值大，并且很快就比(10.83)给出的频率的实部大得多．

朗道公式(10.93)表明，当 $k \ll k_D$ 时，等离子体的纵振荡实际上没有阻尼．可是，一旦 $k \sim k_D$ 时，阻尼就变得重要了(即使当 $k = 0.5k_D$ 时，尚有 $\mathrm{Im}\omega \simeq -0.7\omega_p$)．当波数大于德拜波数时，阻尼是如此之大，以致谈论集体振荡是毫无意义的．

另外一种不太相同的考虑方式也给出了同样的德拜波数限，作为集体振荡效应的界限．我们知道，电子等离子体是具有均匀正电荷本底的电子集合．在非常小的长度尺度上，我们必须用相继发生的许许多多二体库仑碰撞来描写该电子等离子体的特性．但在较大的尺度上，诸电子往往发生合作效应．如果在任何地方出现了局部的正电荷过剩，就会有许多电子蜂拥过去把它中和了．这种对电荷涨落的集体响应，就是产生大尺度等离子体振荡的原因．但是，除了集体振荡之外，或者说得更恰当些，由于集体振荡，电子的合作响应也会减少粒子间的库仑相互作用的长程性．单个电子毕竟是电荷密度的局部涨落．四周的电子都那样地被排斥开，以致把那单个电子的库仑场屏蔽起来，并把它变为短程相互作用．当人们领悟到粒子间的库仑力是静电相互作用的唯一来

源时，就可以明显地看出必定有像上述那样的现象发生．如果静电相互作用的一部分实际上是产生长波长的集体等离子体振荡，那末，剩下的那部分必定是粒子间的短程相互作用之和．

德拜与胡克耳(Hückel)在他们的电解质理论中，首先给出了上述屏蔽效应的一种不严格的推导．基本论点如下：假定我们有一等离子体，其电子处在静电势为Φ的场中的热平衡分布状态．那末，这些电子就按玻耳兹曼因数$e^{-H/KT}$分布，因数中的H是电子的哈密顿函数．所以电子的空间密度为

$$n(\mathbf{x})=n_0e^{-(e\Phi/KT)} \tag{10.94}$$

现在我们想像，在这具有均匀正离子本底(电荷密度为$-en_0$)的电子分布的原点上，放着一个检验电荷Ze．总的势Φ将由下列泊松方程决定：

$$\nabla^2\Phi=-4\pi Ze\delta(\mathbf{x})-4\pi en_0[e^{-(e\Phi/KT)}-1] \tag{10.95}$$

如果假定$(e\Phi/KT)$很小，就可以把方程线性化：

$$\nabla^2\Phi-k_D^2\Phi\simeq-4\pi Ze\delta(\mathbf{x}) \tag{10.96}$$

式中

$$k_D^2=\frac{4\pi n_0e^2}{KT} \tag{10.97}$$

是(10.91)的另一种写法．方程(10.96)有球对称解：

$$\Phi(r)=Ze\frac{e^{-k_Dr}}{r} \tag{10.98}$$

上式表明，电子是这样运动的，即在约为k_D^{-1}的距离内把检验电荷的库仑场屏蔽起来．热动能与静电能之间的平衡决定屏蔽半径的大小．在数值上，

$$k_D^{-1}=6.91\left(\frac{T}{n_0}\right)^{1/2}\text{厘米} \tag{10.99}$$

式中T用开氏温标表示，n_0是每立方厘米的电子数．对于$T=10^6$ K，$n_0=10^{15}$厘米$^{-3}$的典型热等离子体来说，我们求得$k_D^{-1}\simeq2.2\times$

10^{-4} 厘米.

对于低温下的简并性电子气体来说，德拜波数 k_D 由下列费密波数 k_F 所代替：

$$k_F \sim \frac{\omega_p}{V_F} \tag{10.100}$$

式中 V_F 是在费密球面上的速度. 这一屏蔽半径的大小，可由德拜-胡克耳近似法的费密-托马斯推广式导出. 它自然符合色散关系(10.83)和均方速度(10.84).

德拜-胡克耳屏蔽距离是粒子对的小尺度碰撞与大尺度集体效应(如等离子体振荡)之间的自然分界线. 可以单独地证明，短波长的等离子体振荡由于强烈的阻尼而不存在，这是一件幸运的但不是偶然的事.

参考书和推荐读物

关于磁流体动力学和等离子体物理学的文献正在迅速地增多. 系统地阐述磁流体动力学的专著有下列两本：

Alfvén and Fälthammar;

Cowling.

简短讨论磁流体动力学的著作有：

Landau and Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, 第八章.

下列一本工程著作里有许多清晰的例题：

Hughes and Young.

重点讨论等离子体物理的相当的著作有：

Boyd and Sanderson;

Chandrasekhar;

Clemmow and Dougherty;

Ecker;

Holt and Haskell;

Linhart;

Simon;

Spitzer.

等离子体中的辐射过程在上列许多书里都加以讨论，例如在 Boyd and Sanderson 和 Clemmow and Dougherty 这两本书里．有一本专门阐述这些问题的书是

Bekefi.

磁流体动力学和等离子体物理学的概念在地磁场中、在太阳系内外的磁现象和带电粒子现象中的应用，可以在下列三本书里找到：

Alfvén and Fälthammar;

Hess;

Rossi and Olbert.

下列两本书里讨论了受控热核反应(1960 年前的)：

Glasstone and Lovberg;

Rose and Clark.

下面这篇论文对受控热核反应的新近成果作了简短说明：

R. S. Pease, *Phys. Bull.* 20, 515(1969).

想要了解等离子体研究的最近情况的读者，可以查阅下列两套评论性丛书：

Advances in Plasma Physics, eds. A. Simon and W. B. Thompson, Interscience-Wiley, New York;

Reviews of Plasma Physics, ed. M. A. Leontovich, (H. Lashinsky 译), Consultants Bureau, New York.

习　题

10.1 有一无限长的实心金属正圆柱体，其半径为 $(R/2)$，电导率为 σ．在它外围紧套着(但与它绝缘的)一个用同样材料做成的空心金属圆柱体，其内半径为 $(R/2)$，外半径为 R．在内圆柱体和空心外圆柱体中流过的总电流的量值相等，而方向相反，但都均匀地分布在其截面上．在 $t=0$ 时，外电压被短路．

(*a*) 求在 $t=0$ 前这两圆柱体内磁感应强度的分布．

(*b*) 求在 $t=0$ 后磁感应强度分布与时间的函数关系，位移电流忽略不计．

(c) 问在长时间间隔内磁感应强度与时间的函数关系怎样？你所指的长时间间隔是怎样定义的？

10.2 在等离子体开始箍缩之前，将轴向磁感应强度捕集在等离子体内，就可以产生一个比较稳定的自箍缩等离子体柱．假设等离子体柱最初是充满在一个半径为 R_0 的导电管内，并且在管内有一磁感应强度为 B_{z0} 的均匀轴向磁场．然后将电压加在管子上，使得电流沿轴向流动，并产生沿方位圆方向的磁感应强度．

(a) 试证：如果应用准平衡条件，就可以将压强平衡关系写成

$$\left[p(r)+\frac{B_z^2}{8\pi}+\frac{B_\theta^2}{8\pi}\right]_{r_1}^{r_2}+\frac{1}{4\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{B_\theta^2}{r}dr=0$$

(b) 如果等离子体具有鲜明的边界，而且电导率很大，使得电流只能沿着表面的一个薄层流动，试证：在准静态情况下，等离子体柱的半径 $R(t)$ 由下式给出：

$$\frac{R_0}{R}\ln\left(\frac{R_0}{R}\right)=\frac{1}{t_0}\int_0^t f(t)dt$$

式中

$$t_0=\frac{B_{z0}R_0}{cE_0}$$

$E_0 f(t)$ 是外加电场．

(c) 如果最初的轴向磁场为 100 高斯，外加电场的初值为 1 伏特/厘米，并在 1 毫秒内几乎是线性地下降到零．如果等离子体柱的初半径为 50 厘米，求它的终半径．这些条件与英国的环式装置(Zeta)所用的条件差不多，不过由于外感应效应使得箍缩效应比这里所求得的值小．参看 E. P. Butt *et al.*, *Proceedings of the Second International Conference on Peaceful Uses of Atomic Energy*, Vol. 32, p. 42(1958)．

10.3 在磁感应强度为 $\mathbf{B}_0$ 的均匀静磁场中放置一个可压缩的无粘滞性理想导电流体，则在该流体内可以发生磁流体动力波．如果波的传播方向不平行于 $\mathbf{B}_0$，也不垂直于 $\mathbf{B}_0$，则就不能将波分为纯纵波(磁声波)和纯横波(阿耳文波)．设波的传播方向 $\mathbf{k}$ 与磁场 $\mathbf{B}_0$ 的夹角为 θ．

(a) 试证：这时有三个不同的波，其相速度由下式给出：

$$u_1^2=(v_A\cos\theta)^2$$

$$u_{2,3}^2=\frac{1}{2}(s^2+v_A^2)\pm\frac{1}{2}[(s^2+v_A^2)^2-4s^2v_A^2\cos^2\theta]^{\frac{1}{2}}$$

式中 s 为流体中的声速，

$$v_A=(B_0^2/4\pi\rho_0)^{\frac{1}{2}}$$

为阿耳文速度.

(*b*) 试求这三个不同波的速度本征矢(即波矢——译者注)，并证明：第一个波(阿耳文波)总是横波，而其它两个波既不是纵波，又不是横波.

(*c*) 试计算混合波在 $v_A\gg s$ 的近似情况下的相速度和本征矢. 证明：其中一个波的唯一可观的速度分量是平行于磁场的，而其它两个波的唯一分量是垂直于磁场的，并在包含 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{B}_0$ 的平面内.

10.4 有一种不可压缩的无粘滞性理想导电流体，具有恒定密度 ρ_0，它受到势为 ψ 的引力场和磁感应强度为 $\mathbf{B}_0$ 的均匀静磁场的作用.

(*a*) 试证：可以存在 $\mathbf{B}_1(\mathbf{x},t)$，$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ 为任意振幅和任意形式的磁流体动力波，并用下列方程描述：

$$(\mathbf{B}_0\cdot\nabla)\mathbf{B}_1=\pm\sqrt{4\pi\rho_0}\frac{\partial\mathbf{B}_1}{\partial t}$$

$$\mathbf{B}_1=\pm\sqrt{4\pi\rho_0}\,\mathbf{v}$$

$$p+\rho_0\psi+\frac{(\mathbf{B}_0+\mathbf{B}_1)^2}{8\pi}=\text{常量}$$

(*b*) 假定在 $t=0$ 时流体中存在某种扰动 $\mathbf{B}_1(\mathbf{x},0)$，并满足上列诸方程，但取上方正号. 问在后来的时间内扰动的特性如何？

10.5 计及唯象碰撞项，但忽略流体静压强时，电子等离子体的力方程(取零温度近似)是

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=\frac{e}{m}\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\right)-\nu\mathbf{v}$$

式中 ν 是碰撞频率.

(*a*) 试证：当有均匀的外加静电场和静磁场存在时，欧姆定律的线性化稳恒态表式变为

$$J_i=\sum_j\sigma_{ij}E_j$$

式中电导率张量是

$$\sigma_{ij}=\frac{\omega_p^2}{4\pi\nu\left(1+\frac{\omega_B^2}{\nu^2}\right)}\begin{pmatrix}1 & \frac{\omega_B}{\nu} & 0\\ -\frac{\omega_B}{\nu} & 1 & 0\\ 0 & 0 & \left(1+\frac{\omega_B^2}{\nu^2}\right)\end{pmatrix}$$

ω_p 是电子等离子体频率，ω_B 是进动频率．B 的方向取在 z 轴上．

(*b*) 假定在 $t=0$ 时突然加上一个沿着 x 方向的外电场 **E**，而原先还有沿着 z 方向的磁感应强度 **B**．电流在 $t=0$ 时为零．求在任何时刻电流诸分量的表式，包括瞬时特性．

10.6 应用无相关作用的玻耳兹曼(弗拉索夫)方程可以近似地描述有限温度对等离子体的影响．设 $f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$ 是单一组元等离子体中的电子分布函数，电子的电荷为 e，质量为 m．弗拉索夫方程是

$$\frac{df}{dt}\equiv\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla_x f+\mathbf{a}\cdot\nabla_v f=0$$

式中 ∇_x 和 ∇_v 是对坐标和速度的梯度，$\mathbf{a}$ 是粒子的加速度．对于等离子体的静电振荡来说，$\mathbf{a}=e\mathbf{E}/m$，式中 **E** 是宏观电场，它满足

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi e\left[\int f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\,d^3v-n_0\right]$$

如果 $f_0(\mathbf{v})$ 是归一化的电子平衡分布：

$$\left[n_0\int f_0(\mathbf{v})\,d^3v=n_0\right]$$

(*a*) 试证：小振幅纵向等离子体振荡的色散关系是

$$\frac{k^2}{\omega_p^2}=\int\frac{\mathbf{k}\cdot\nabla_v f_0}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}-\omega}d^3v$$

(*b*) 假设波的相速度远大于热速度，试证：由色散关系可得

$$\frac{\omega^2}{\omega_p^2}\simeq 1+2\frac{\langle\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}\rangle}{\omega}+3\frac{\langle(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^2\rangle}{\omega^2}+\cdots$$

式中〈 〉意指对平衡分布 $f_0(\mathbf{v})$ 求平均，把这个结果与正文中用电子流体模型得到的结果作一比较．

(*c*) 当 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}=\omega$ 时，色散关系的奇异性的意义是什么？

10.7 讨论当有外磁场 $\mathbf{B}_0$ 存在时电子等离子体中波的问题．应用流体模型，忽略压强项和碰撞项．

(*a*) 假设所有变量都是按 $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t)$ 变化，写出线性化的运动方程和麦克斯韦方程组．

(*b*) 试证：可以用波数将不同振荡模式的频率色散关系写成

$$\omega^2(\omega^2-\omega_p^2)(\omega^2-\omega_p^2-k^2c^2)^2=\omega_B^2(\omega^2-k^2c^2)[\omega^2(\omega^2-\omega_p^2-k^2c^2)+\omega_p^2c^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{b})^2]$$

式中 $\mathbf{b}$ 是 $\mathbf{B}_0$ 方向上的单位矢量；ω_p 和 ω_B 分别表示等离子体频率和进动

频率.

(*c*) 试证：对于平行于 $\mathbf{B}_0$ 而传播的波，介电常数又恢复为(7.67).

(*d*) 设 $\omega_B \ll \omega_p$，试求下列两种情况下各个根的近似值：(i) $\mathbf{k}$ 平行于 $\mathbf{b}$；(ii) $\mathbf{k}$ 垂直于 $\mathbf{b}$. 画出这两种情况下你所得到的关于 ω^2 与 k^2 的关系曲线.

10.8 "太阳风"(一种行星际等离子体流，其绝大部分是由来自太阳的质子构成的)使地球的偶极子磁场发生畸变. 在地球轨道上，太阳风的密度约为 10 个质子/厘米^3，粒子速度的数量级为 400 千米/秒，与之有关的磁场的量值为 $(3\text{-}7)\times10^{-5}$ 高斯，这些值是平静太阳的典型值.

(*a*) 试计算太阳风的粒子动力压强，并求出在地磁赤道平面内地磁场的磁压强等于粒子动力压强处与地球中心的距离(用地球半径作为量度单位). 假定地球表面上的赤道磁场为 0.31 高斯. 这两种压强相等处的距离标志这样一个区域，在那里，太阳风包围地磁场线，并使后者发生偏转. 太阳风本身的磁压强是否重要？

(*b*) 试在(*a*)的临界半径处，用那里的地磁场，估算声速率(10.49)和阿耳文速率(10.55). 如果粒子速率的数量级等于或大于这些速率，则在分界面[①]处出现像冲击波那样的现象. 这就是"弓形冲击波"波前的成因，"弓形冲击波"波前是地球白昼那侧的磁层边界. [详情查阅 *Review of Geophysics*, 7, No. 1 和 No. 2(1969)所载学术讨论会的论文].

① 指地磁场的磁压强等于太阳风的粒子动力压强的曲面. ——译者注

第十一章　狭义相对论

自从爱因斯坦在1905年发表狭义相对论以后，狭义相对论在物理学中就成了大家经常讨论的题材，并如经典力学的牛顿定律、电磁学的麦克斯韦方程组或量子力学的薛定谔方程一样得到人们的公认．在精细的原子现象的研究中，在原子核物理学中，尤其是在高能物理学中，科学家们天天用到狭义相对论．

狭义相对论起源于电磁学．事实上，我们可以说，把电学、磁学和光学统一起来的麦克斯韦方程组的进一步发展，必然导致狭义相对论的问世．特别重要的是洛仑兹从1890年起对电动力学的研究奠定了狭义相对论的基础．庞加莱作出了重要的贡献，而爱因斯坦完成了决定性的推广，他使狭义相对论不仅适用于电动力学，而且适用于一切物理现象，并着重指出了第二个假设的深远影响．现在人们相信，狭义相对论适用于除大尺度引力现象以外的所有各种形式的相互作用．在现代物理学中，狭义相对论成为检验基本粒子相互作用的各种可能形式的试金石．只有符合狭义相对论的那些理论才有考虑的必要．这就常常严格限制了各种理论成立的可能性．

狭义相对论的实验基础和历史发展以及它的许多基本结果，在许多书籍和论文里都有论述．本章末列举了其中一些书籍和论文．我们满足于总结关键的论点和举例介绍近代的决定性的实验验证．同时择要叙述了基本的运动学结果，包括坐标变换、原时、时间膨胀、相对论性多普勒频移以及速度的加法．从普遍原理出发，不依赖于力方程，推导出粒子的相对论能量和相对论动量．继而介绍洛仑兹群的概念及其数学描述，并用4×4矩阵给出洛仑兹群

的一种特殊表示．然后讨论托马斯进动这一重要现象．接着阐述电荷不变性、电动力学协变性和电磁场的一些明确变换性质的实验基础．本章最后论述相对论性自旋运动方程，且评述相对论运动学的记号和一些约定．

11.1 1900年以前的情况；爱因斯坦的两条假设

在1900年以前的四十年中，以麦克斯韦方程组为基础的波动理论成功地解释了电磁学和光学现象，并建立了两者的相互关系．由以往的经验，波的运动总是牵连到波传播的媒质，所以对物理学家来说，假定光需要通过媒质而传播，这是很自然的事情．鉴于有关光的种种已知事实，有必要假定：这种媒质（叫做以太）充满整个空间，其密度可以忽略不计，它与物质的相互作用也可以忽略不计．它只是作为电磁波传播的媒介物而存在．

以太的假说使电磁现象与物理学的其他现象发生了分歧．人们很早就已知道，在互相作匀速相对运动的不同坐标系中，力学定律是相同的．因此我们说，力学定律在伽利略变换下是不变的．为了强调经典力学与电磁学的差别，让我们分别对它们明确地讨论一下伽利略相对性问题．设有两个参照系K和K'，以相对速度v运动着，它们的坐标分别为(x,y,z,t)和(x',y',z',t')，只要适当选择空间和时间的原点，就可以根据伽利略相对性原理，把这两个参照系的空间和时间坐标通过下式联系起来：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{x} - \mathbf{v}t \\ t' &= t \end{aligned} \tag{11.1}$$

作为力学系统的一个实例，我们考虑通过二体有心势而相互作用的一组粒子．用明显的记号来写，在参照系K'里第i粒子的运动方程为

$$m_i\frac{d\mathbf{v}_i'}{dt'}=-\nabla_i'\sum_j V_{ij}(|\mathbf{x}_i'-\mathbf{x}_j'|) \tag{11.2}$$

由K和K'的坐标之间的关系(11.1)显而易见，$\mathbf{v}_i'=\mathbf{v}_i-\mathbf{v}$, $\nabla_i'=\nabla_i$, $d\mathbf{v}_i/dt'=d\mathbf{v}_i/dt$ 和 $\mathbf{x}_i'-\mathbf{x}_j'=\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j$. 于是我们可以把(11.2)改写成

$$m_i\frac{d\mathbf{v}_i}{dt}=-\nabla_i\sum_j V_{ij}(|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j|) \tag{11.3}$$

上式即是参照系K里的牛顿运动方程.

经典力学方程的形式在变换(11.1)下保持不变，与此相反，描述波动现象的方程的形式在变换(11.1)下是改变的. 设在参照系K'里场$\psi(\mathbf{x}', t')$满足波动方程

$$\left(\sum_i\frac{\partial^2}{\partial x_i'^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\psi=0 \tag{11.4}$$

直接利用(11.1)得知，用参照系K的坐标来表示，波动方程(11.4)就变成

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{2}{c^2}\mathbf{v}\cdot\nabla\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\cdot\nabla\right)\psi=0 \tag{11.5}$$

波动方程的形式在伽利略变换下不是不变的. 并且，设有一种ψ的运动学变换可以把(11.5)复原为(11.4)的形式①. 对声波来说，在伽利略变换下不是不变的，这是完全可以接受的. 风吹我们的声音. 声波在空气中或其它材料中是以压缩和稀疏方式传播的，因而(11.4)成立的从优参照系K'显然就是相对于传播媒质静止

---

① 读者也许要自己考虑一下波动方程和薛定谔方程在伽利略变换下的差别. 如果在K'里薛定谔方程写成

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla'^2\psi'+V\psi'=i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t'}$$

那末在K里这个方程对波函数ψ来说具有相同的形式，只要V是一个伽利略不变量和$\psi=\psi'e^{i(m/\hbar)\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}-i(mv^2/2\hbar)t}$，薛定谔方程在伽利略变换下是不变的.

的参照系.

对电磁学来说,似乎也是如此. 主要的差别如下:声波和相似的波动现象是伽利略经典力学的必然结果. 在从优参照系里现象是简单的,根据传播媒质的整体运动,很容易理解这种从优参照系的存在. 另一方面,对电磁扰动来说,媒质似乎非常的轻,除了维持传播外,没有显示出有别的性质或用处.

当爱因斯坦开始思考这些问题时,存在以下几种可能性:

1. 麦克斯韦方程组是不正确的. 真正的电磁学理论在伽利略变换下是不变的.

2. 伽利略相对性适用于经典力学,但电磁学有一从优参照系,在这参照系里光以太是静止的.

3. 存在一种既适用于经典力学又适用于电磁学的相对性原理,但它不是伽利略相对性. 这就意味着必须修改力学定律. 第一种可能性几乎不存在. 由于赫兹、洛仑兹和其他人的工作,麦克斯韦理论获得惊人的成功,因而电磁学方程有严重错误这一论点是可疑的. 第二种可能性为当时大多数物理学家所接受. 观察地球及其实验室相对于以太静止参照系的运动的种种努力,例如,迈克耳孙-莫雷实验,全都遭到失败. 然而,至少对这个重要的实验来说,否定的结果可以用斐兹杰惹-洛仑兹收缩假说 (1892年) 来解释,根据这个假说,以速度 v 通过以太运动的物体按下列公式在运动方向上被收缩:

$$L(v)=L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{11.6}$$

这个很不平凡的假说显然超出了电磁学范畴,因为它适用于大块物质,但是洛仑兹后来论证了这假说的根源在于电动力学. 洛仑兹和庞加莱证明了:麦克斯韦方程组在所谓的洛仑兹变换下形式不变(参看 11.9 节),并证明了:在电动力学中,对运动电荷密

度等来说，收缩表式(11.6)成立．借助于这样一种概念，即物质具有电磁的本性（电子的发现助长了这一假说），似乎可以设想：(11.6)对于电子和原子的宏观集体来说是成立的．这样，洛仑兹就使以太假说免得与迈克耳孙-莫雷实验抵触．

还有其它一些实验使以太概念无法解释．斐索的著名实验(1851年，1853年)以及后来迈克耳孙和莫雷(1886年)对运动流体中的光速所做的一些类似的实验，只有假设以太被运动流体部分地牵曳，才能理解，而且还要假设运动流体牵曳以太的能力与其折射率有关！

爱因斯坦认为，对斐索实验观测结果的解释，比起对其它实验的解释，是更不可信的，斐索实验使他相信以太假说是不可接受的．他选择了上述第三种可能性，并试图用相对性原理来概括经典力学、电动力学以及一切自然现象．爱因斯坦的狭义相对论以下面两条假设为基础：

1．相对性假设

在一个给定的参照系中的自然规律和一切实验结果，都与整个系统的平动无关．更精确地说，存在着无穷多个互相作匀速直线相对运动的三维等效欧几里得参照系，在这些参照系中，一切物理现象都以等同方式发生．

为简明起见，我们把这些等效坐标系都叫做惯性参照系．相对性假设(这里所说的多少有点像庞加莱的话)与我们的所有只与物体间相对运动有关的力学经验相符合，而且从哥白尼时代以后(即使不是以前的话)，相对性假设已经成为力学中的一个明确的假说．相对性假设也与迈克耳孙-莫雷实验一致，并使"检测相对于以太的运动"这一问题失去意义．

2．光速恒定假设

光速与其源的运动无关．

这条假设本身很简单，但当爱因斯坦提出时尚未进行过检验（只是在近年来才得到明确的验证）．然而这条假设使我们不得不从根本上重新考虑空间和时间的概念，以致许多年来不少人反对这条假设．

狭义相对论及其通过实验逐渐获得确认的历史在许多文献里都有论述．本章末列出了一些参考文献．特别要注意的是1962年美国物理学期刊(*American Journal of Physics*)第三十卷第462页上发表的题为“狭义相对论文献资料索引”(Resource Letter on Relativity)的文章．这篇文章列出了有关狭义相对论各方面的历史、实验验证和实验室演示的书籍和期刊论文．

我们顺便指出，爱因斯坦的两条假设要求对高速运动的力学定律加以修正．在爱因斯坦提出两条假设时，还没有证据表明伽利略相对性不适用于力学．从根本上说，这是由于在1900年左右发现β射线以前，人们对相对论性粒子及相对论性粒子动力学还不了解．庞加莱曾经推测，光速也许是物质粒子的极限速率，但是，爱因斯坦想把一切物理现象按同一方法来处理，而毋需“修补”经典力学，根据这一想法他创立了狭义相对论．11.5节里讨论了像动量和能量那样一些力学概念的狭义相对论的结论．

11.2 一些近代的实验

虽然我们为了不去讨论标准题材，而要求读者先有一些预备知识，并且介绍了许多狭义相对论书籍，但是有两个实验值得一提．一个实验与第一条假设有关，这就是探求“以太漂移”(验证实验室相对于以太的运动)的实验，而另一个实验与第二条假设有关．

(*a*) *以太漂移*

迈克耳孙-莫雷实验(1887年)得到的否定结果，证实了地球

通过假想以太的速度小于地球轨道速率(大约等于 3×10^4 米/秒)的三分之一. 这实验已经重复了许多次,且进行了种种修正,总是得不到地球相对于以太运动的确凿证据. 夏克兰等人已经总结了一切有用的证据[Shankland et al., *Rev. Mod. Phys.* **27**, 167 (1955)].

正如已经指出的,用斐兹杰惹-洛仑兹收缩的假说,毋需放弃以太的概念,就可以解释这些否定的结果. 穆斯堡尔(1958 年)发现的 γ 射线"无反冲"发射或吸收,即所谓的穆斯堡尔效应,容许以惊人的准确度来比较频率,并且可能根据多普勒频移来做非常精确的以太漂移实验. 在穆斯堡尔效应中,γ 射线的发射或吸收引起的反冲动量被整个固体所吸收,而不是被发射核或吸收核所吸收. 这意味着,反冲能量完全可以忽略不计. 发射的 γ 射线带着核跃迁的全部能量 E_0,而不是带着由反冲形成的约化能量

$$E\simeq E_0-E_0^2/2Mc^2,$$

式中 M 为反冲核的质量. 并且,这种无反冲跃迁不会引起热多普勒频移. 因而 γ 射线谱接近其自然形状,没有频率增宽或移动. 用与发射体相同的材料做成的吸收体,可以研究核共振吸收,或将这种吸收体作为一种研究频率的极其微小变化的仪器.

为了理解以穆斯堡尔效应为根据的以太漂移实验的原理,我们需要回顾一下多普勒频移的一些经典结果. 一个平面波的位相是一个不变量,在一切坐标系里都是一样的. 这是由于一个波经历的位相与通过观测者的波峰数成正比. 因为这仅仅是一种计数的操作,所以它必定与坐标系无关. 如果真空中有一平面电磁波,当在惯性参照系 K 和 K' 里观测,而 K 和 K' 通过伽利略坐标变换(11.1)联系起来时,则其位相是

$$\phi=\omega\left(t-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}{c}\right)=\omega'\left(t'-\frac{\mathbf{n}'\cdot\mathbf{x}'}{c'}\right) \qquad (11.7)$$

如果根据(11.1)将 t 和 $\mathbf{x}$ 用 t' 和 $\mathbf{x}'$ 来表示，则我们得到

$$\omega\left[t'\left(1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}'}{c}\right]=\omega'\left(t'-\frac{\mathbf{n}'\cdot\mathbf{x}'}{c'}\right)$$

因为上式必须对所有的 t' 和 $\mathbf{x}'$ 有效，所以两边的 t'，x_1'，x_2'，x_3' 的系数必须分别相等．因此，我们得到

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{n}=\mathbf{n}'\\&\omega'=\omega\left(1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)\\&c'=c-\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\end{aligned}\right\}\tag{11.8}$$

这些表式就是伽利略相对性的标准多普勒频移公式．

由(11.8)可以看出，法向单位波矢量 $\mathbf{n}$ 是一个不变量，在所有的惯性参照系里都是相同的．可是，从一参照系变换到另一参照系时，能流方向发生改变．为了看出这一结果，我们考虑一个平面波的几个片段，略图如图 11.1 所示．平面波的这几个片段可以当作波包的简单图示．在 $t=t'=0$ 时，片段的中心无论在 K 中还是在 K' 中都在 A 点上．如果惯性参照系 K 是从优参照系（以太静止），那么在参照系 K 中，沿 $\mathbf{n}$ 方向运动的波包经过单位时间后到达 B 点．距离 AB 等于 c．在参照系 K' 中，波包中心经过单位时间后到达 B' 点．由于伽利略坐标变换(11.1)，B' 点与 B 点相差一个矢量 $-\mathbf{v}$，如图 11.1 的下图所示．于是，在 K' 中波包运动方向（假定等于能流方向）与 $\mathbf{n}$ 不平行，而是沿着一个单位矢量 $\mathbf{m}$，如图 11.1所示，$\mathbf{m}$ 由下式给出：

$$\mathbf{m}=\frac{c\mathbf{n}-\mathbf{v}}{|c\mathbf{n}-\mathbf{v}|}\tag{11.9}$$

因为实验涉及光子在实验室里的传播，为方便起见，我们把多普勒公式(11.8)用实验室参照系的 $\mathbf{m}$ 来表示，而不用 $\mathbf{n}$ 来表示．

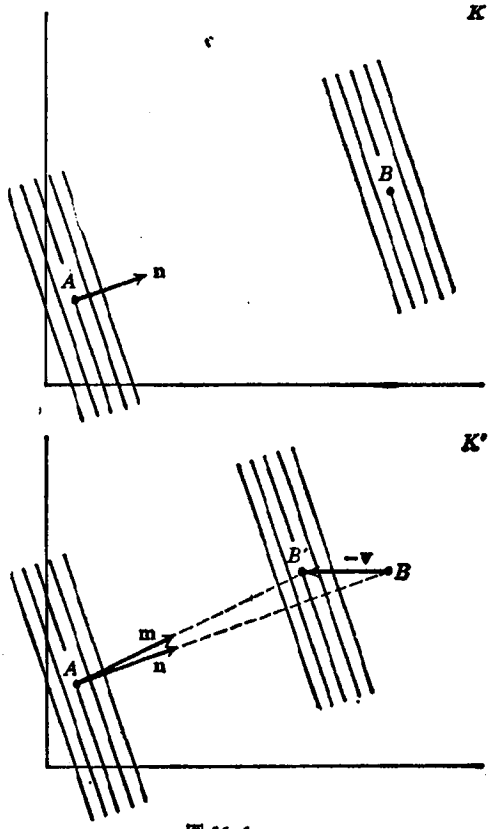


图 11.1

将 n 用准确到一级 v/c 的m 来表示就已足够. 由(11.9),我们得

$$\mathbf{n}\simeq\left(1-\frac{\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}_0}{c}\right)\mathbf{m}+\frac{\mathbf{v}_0}{c} \qquad (11.10)$$

式中 $\mathbf{v}_0$ 是实验室相对于以太静止参照系的速度.

现在考虑一个平面波,它的频率在以太静止参照系中为 ω,在实验室中为 ω_0,而在惯性参照系 K_1 中为 ω_1,K_1 是以速度

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{u}_1+\mathbf{v}_0$$

相对于以太静止参照系运动的惯性参照系. 由(11.8),观测到的

频率是

$$\omega_1=\omega\left(1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_1}{c}\right)$$

$$\omega_0=\omega\left(1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_0}{c}\right)$$

如果 ω_1 用实验室频率 ω_0 来表示，并借助于(11.10)来消去法向单位波矢量 $\mathbf{n}$，那末很容易证明，准确到 v^2/c^2 级时，其结果为

$$\omega_1\simeq\omega_0\left[1-\frac{\mathbf{u}_1}{c}\cdot\left(\mathbf{m}+\frac{\mathbf{v}_0}{c}\right)\right] \tag{11.11}$$

式中 $\mathbf{u}_1$ 是参照系 K_1 相对于实验室的速度，$\mathbf{m}$ 是实验室中能量传播方向，ω_0 是实验室中波的频率，$\mathbf{v}_0$ 是实验室相对于以太的速度.

方程(11.11)成为穆斯堡尔以太漂移实验的分析基础. 这是由于以太静止参照系中的波动方程和伽利略相对性在变换到其它惯性参照系时依然有效的结果. 因为(11.11)包含 $\mathbf{v}_0$，它显然预言以太漂移效应. 考虑两个穆斯堡尔系统，一个是发射体，另一个是吸收体，两者分别以速度 $\mathbf{u}_1$ 和 $\mathbf{u}_2$ 在实验室中运动. 由(11.11)，发射体和吸收体间的频率差是

$$\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_0}=\frac{1}{c}(\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1)\cdot\left(\mathbf{m}+\frac{\mathbf{v}_0}{c}\right)$$

如果发射体和吸收体放在一根长为 $2R$ 的棒的两端，这根棒以角速度 Ω 绕其中心转动，如图 11.2 所示，那末，$(\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1)\cdot\mathbf{m}=0$，而相对频率差为

$$\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_0}=\frac{2\Omega R}{c^2}\sin\Omega t\cdot|(\mathbf{v}_0)_\perp| \tag{11.12}$$

式中 $(\mathbf{v}_0)_\perp$ 是 $\mathbf{v}_0$ 的垂直于转动轴的分量.

1963 年在伯明翰完成了这类共振吸收实验①. 穆斯堡尔线是

① D. C. Champeney, G. R. Isaak, and A. M. Khan, *Phys. Letters* **7**, 241 (1963). 也可参看 G. R. Isaak, *Phys. Bull.* **21**, 255 (1970).

^{57}Co 的 β^+ 衰变后在 ^{57}Fe 中引起的 14.4 千电子伏特 γ 射线. 同位素 ^{57}Fe 是稳定的, 以 2.2% 自然丰度出现; 吸收体是用铁做的, 其中含的 ^{57}Fe 浓缩至 52%. 钴源安放在 ^{56}Fe 中. 箔形发射体和箔形吸收器放在图 11.2 所示的位置, 这时 $R\simeq 4$ 厘米. 观测到的

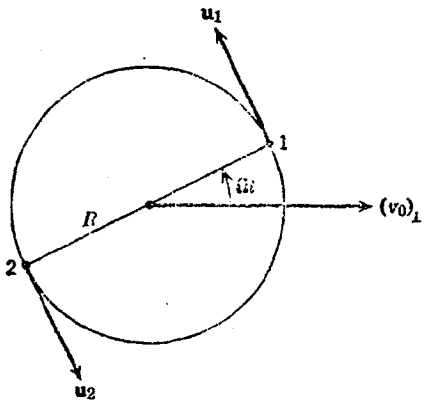


图 11.2

穆斯堡尔线的相对宽度为 $\Delta\omega/\omega\simeq 2\times 10^{-12}$. 两个计数器固定在实验室中, 且沿着圆的一条直径对称地放在源和吸收体的平面内, 计数器记录通过吸收器透射出来的 γ 射线. 每四小时为一测量周期, 交替使用两个转动速率 $\Omega_{低}=1257$ 秒$^{-1}$ (=200 周/秒) 和 $\Omega_{高}=7728$ 秒$^{-1}$(=1230 周/秒), 记录数据①, 并寻求与地球自转有关的昼夜效应. 由(11.12)可知, 若 $\Omega\sim 6000$ 秒$^{-1}$ 和 $R=4$ 厘米, 则 200 米/秒的以太漂移速度会产生量值为上述穆斯堡尔线宽的总频率变化. 数据表明, 准确度为百分之一或百分之二时, 没有发现透射率的昼夜变化. 作者们推断: 以太漂移 $\mathbf{v}_0$ 在垂直于地球自

① 每个测量周期中, 第一小时低速转动, 第二小时和第三小时高速转动, 第四小时低速转动. 两个计数器 N 和 S 由门电路控制, 依次记录对应于这四个小时的平均计数率 $N_{低}$、$N_{高}$、$S_{高}$、$S_{低}$. 每个测量周期记录四个数据, 一昼夜为六个测量周期, 记录二十四个数据. ——译者注

转轴的平面内通过地球的分量大小为$|(\mathbf{v}_0)_\perp|=1.6\pm2.8$米/秒①，这是一个否定的结果．按相同的思路，在1970年做了改进的实验，给出的极限值为5厘米/秒(参看49页脚注援引的*Isaak*写的论文)．

1958年，有人用氨微波激射器完成了一种概念上相似的实验②．当氨分子进入微波激射器空腔时，它们具有完全确定的方向和非零的速率．因此，根据(11.11)，会发生频率的移动．如果我们把氨分子沿相反方向运行的两个微波激射器的频率作比较，就应该有观测得到的拍频．而且如果这两微波激射器一起转过180°，则拍频应该按下式而改变：$\Delta\omega/\omega_0=4|\mathbf{u}_{分子}\cdot\mathbf{v}_0|/c^2$．这个实验的否定结果表明以太漂移速度的分量小于30米/秒．

这两个多普勒频移实验表明，可观测的以太漂移速率极限为地球的轨道速率的$\frac{1}{6000}$和$\frac{1}{1000}$，这就使我们简直不能相信我们可以检测出相对于某"绝对"参照系的任何运动．

(*b*) *运动源的光速*

爱因斯坦第二条假设(即光速与源的运动无关)动摇了把时间当作与空间坐标无关的普适变量的概念．因为这条假设是一个革命性的和不易理解的概念，所以许多人曾企图创立一些理论，想不用这条假设来解释所有观测到的事实．最值得注意的、易为人们接受的一种理论，就是里兹的电动力学理论(1908-1911年)．里兹原封不动地保留两个齐次麦克斯韦方程，但他把两个含源的麦克斯韦方程作了这样的修改，使得只当相对于源测量时光速才等

---

① 请读者注意：这里的$|(\mathbf{v}_0)_\perp|$与(11.12)中的$|(\mathbf{v}_0)_\perp|$，作者虽用同一符号，但两者含义不同．——译者注

② C. J. Cedarholm, G. F. Bland, B. L. Havens, and C. H. Townes, *Phys. Rev. Letters* **1**, 342(1958)．又请参看T. S. Jaseja, A. Javan, J. Murray, and C. H. Townes, *Phys. Rev.* **133**, A1221(1964)．

于 c. 里兹理论符合恒星位置的光行差的观测、斐索实验和原始的迈克耳孙-莫雷实验. 但是,依照惯例,人们引用借地球外的光源(太阳光或恒星光)和从双星来的光做的迈克耳孙-莫雷实验,来证实第二条假设,并推翻里兹理论.

显然因为辐射与它在检测前通过的物质之间有相互作用,所以验证第二条假设的早期证据似乎大部分是不正确的,这一点,似乎是弄清楚了①. 从数学上说,这现象包含于厄瓦耳 (Ewald, 1912 年)和俄辛(Oseen, 1915 年)的消光定理中. 该定理(参看*Born and Wolf* 书第 100页起,或 *Rosenfeld* 书第 105 页起)说,如果一个以真空中的光速 c 传播的入射电磁波进入色散媒质内,那么它的场就被感生偶极子场(从宏观上看就被电极化强度 P)的一部分所抵消,且被另一个波所代替,这个波以表征媒质的相速度传播. 入射波因干涉而消失,并被另一个波所代替. 数学分析表明:对谐和时间依赖关系来说,入射真空场在媒质内的消失是由媒质边界上的偶极子所引起的. 一个波列到达边界并开始在媒质中传播,这种物理情况作如下解释似乎是合理的:入射波消失并被媒质中的对应的一个波所代替,这个过程是在有限的一段距离 X 上发生的. 并且,由于真空波和媒质波有不同的相速度,两者经过这段距离后就有显著的位相差,X 必须与这样一段距离同数量级. 因为当频率为 ω 时位相差是 $\Delta\phi=\omega(n-1)x/c$,式中 n 为折射率,所以我们定义消光定理距离 X 为

$$X=\frac{c}{\omega|n-1|}=\frac{\lambda}{2\pi|n-1|} \tag{11.13}$$

式中 λ 为自由空间波长. 读者必须小心地注意,X 不是 (9.113) 的

① 参看 J. G. Fox 写的几篇评论性文章: *Am. J. Phys.* **30**, 297(1962); *Am. J. Phys.* **33**, 1(1965); *J. Opt. Soc.* **57**, 967(1967). 所引的第二篇文章详细讨论了里兹的辐射理论,评述了反对里兹理论的各种论证. 也可参看 T. Alvager, A. Nilsson, and J. Kjellman, *Arkiv. f. Fys.* **26**, 209(1963).

消光系数或衰减系数(或其倒数). 我们在这里关心的是位相，而不是吸收.

为明确起见，我们指出，对玻璃($n\simeq1.5$)和可见光($\lambda\simeq6000$Å)来说，$X\simeq2\times10^{-5}$ 厘米. 对标准温度压强下的空气($n-1\simeq2.8\times10^{-4}$)和同样的波长来说，$X\simeq0.04$ 厘米. 对更高能的光子(从K层以上的结合能到几兆电子伏特的γ射线)来说，折射率可以近似地由下式求出：

$$n-1\simeq-\frac{2\pi}{k^2}\cdot\frac{Ne^2}{mc^2}$$

式中N为每单位体积的总电子数. 用这个n的近似表式，得消光距离为

$$X\simeq(\lambda r_0N)^{-1}$$

式中$r_0=e^2/mc^2=2.82\times10^{-13}$ 厘米是经典电子半径[也是向前(汤姆孙)散射振幅的负值]. 例如，对于标准温度压强下的空气中1兆电子伏特的γ射线，我们求得 $X\simeq73$ 厘米. 当考虑天文学的有关情形时，对可见光来说，估算值为 $X\simeq0.06N^{-1}$ 光年. 对脉冲星辐射的色散特性的研究指出，在星际空间里，$\langle N\rangle\simeq0.03$ 厘米$^{-3}$，因此得出结论：当可见光通过星系传播时，$X\sim2$ 光年.

由X的各种估算值可以看出，不管光离开其源时的速率多大，由于媒质的介入，可以用一个扰动来代替光，这扰动的频率与光频相同，但以媒质(静止)的特征相速度传播. 这时，对媒质的光学性质进行修正后，相对于媒质静止的观测者测得的光速将等于c. 源的运动和光相对于源的速率无关. 如同福克斯(参看52页脚注援引的Fox的论文)所详细讨论的，关于第二条假设的较老的验证和许多近代的实验，基本上全部因消光定理而失效.

但是，有一些近代的实验并未受福克斯批评的影响. 其中最明确的一个实验，是1964年在瑞士日内瓦的欧洲联合核子研究中

心完成的①，这实验获得了漂亮的结果．在能量很高的中性π介子的衰变中产生6千兆电子伏特的光子，通过测量80米路程上的飞行时间来确定这些光子的速率．这些π介子是用19.2千兆电子伏特的质子轰击铍靶产生的，它们具有的速率为0.99975c(由测量同一轰击中产生的带电π介子的速率而推知的)．利用射束的r-f结构来计时的．在实验误差范围内得到了由极快速运动源发射的光子的速率等于c．如果观测到的速率写作$c'=c+kv$，式中v是源的速率，那末实验表明$k=(0\pm1.3)\times10^{-4}$．与6千兆电子伏特的光子对应的X值不是完全清楚的，但它显然比100米大得多(上述简单公式得出$X=5\times10^3$米)．

欧洲联合核子研究中心的实验无可争辩地证实了狭义相对论第二条假设在实验室规模上是正确的．

(c) 真空中的光速和频率的依赖关系

由测量红外频率下的光速，得知其准确度为10^9分之几；频率越高，准确度越低．人们可能会提出这样的问题：是否有迹象表明真空中的电磁波速率对频率有依赖关系？真空中电磁波速率随频率而改变的一个可能原因可归之于光子的质量．在这种情况下，群速度是

$$c(\omega)=c\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^{1/2}$$

式中光子静能为$\hbar\omega_0$．正如导言里讨论的，地球-电离层谐振腔中只存在简正模，这就给出一个极限值$\omega_0<10c/R$，这里R是地球的半径．因此，从射频($\omega\sim10^8$秒$^{-1}$)到$\omega\to\infty$，传播速度因光子质量引起的变化小于$\Delta c/c\simeq10^{-10}$．

光速随频率而改变的另一个原因是真空的色散，这个概念超

① T. Alvager, J. M. Bailey, F. J. M. Farly, J. Kjellman, and I. Wallin, *Phys. Letters* **12**, 260(1964)和 *Arkiv f. Fys.* **31**, 145(1965)．

出狭义相对论范畴，而是出现在分立时空的模型中．脉冲星的发现使得高度精确地验证这个概念成为可能的事情．脉冲星观测所涉及的频率范围至少包含十三个十进位，任何一种观测仪器都有某一个频谱"窗口"．从一些脉冲星上发来的脉冲具有非常短的持续时间，这一特性可以用来简单估计每种仪器频率窗口内的两个频率 ω_1 和 ω_2 的光速的变化上限：

$$\left|\frac{c(\omega_1)-c(\omega_2)}{c}\right|\leqslant\frac{c\Delta t}{D}$$

式中 Δt 为脉冲持续时间，D 为源到观测者的距离．对蟹状脉冲星 Np 0532 来说，$\Delta t\simeq 3\times10^{-3}$ 秒和 $D\simeq 6\times10^{3}$ 光年，所以 $(c\Delta t/D)\simeq 1.7\times10^{-14}$．由～$4\times10^{8}$ 赫开始，通过光频区直至光子能量为 1 兆电子伏特的各段交迭的观测表明：上面这种简单估计得到的光速在 $\Delta c/c<10^{-14}$ 的数量级上是恒定的①．当能量更高时，斯坦福直线加速器新近做的一个实验②，将 7 千兆电子伏特的光子的速率与可见光光子的速率作了比较，并得到 $\Delta c/c<10^{-5}$．其后，一直到非常高的能量，也没有得到真空色散的证据．所以，光速是一个普适常数，与频率无关．

11.3 洛仑兹变换和狭义相对论的基本的运动学结果

大家都知道，光速与源的运动无关，光速的这种恒定性导致不同惯性参照系空间和时间坐标之间的一些关系，这些关系就是如所周知的洛仑兹变换．我们将在 11.7 节里用更正规方法推导这些结果，但是我们暂且只概要阐述基本的推导和一些重要的结果，而不去叙述详细的内容，这些详细内容可以在许多相对论教科书里找到．想要了解更多内容的读者可以参阅本章末所列的一些

① J. M. Rawls, *Phys. Rev.* **D5**, 487(1972).

② B. C. Brown 等, *Phys. Rev. Letters* **30**, 763(1973).

书籍.

(*a*) 简单的洛仑兹坐标变换

考虑两个惯性参照系K和K'，两者的相对速度为v．一个点的时间和空间坐标在参照系K和K'中分别为(t, x, y, z)和(t', x', y', z')．这两参照系中的坐标轴是平行的，并且有这样的取向，使得当从参照系K来观察时，参照系K'以速率v沿正z方向运动．为简单起见，设在$t=t'=0$时K和K'中的坐标原点是重合的．如果在参照系K中静止(因而当从K'来看时，它是以速率v沿负z方向运动)的一个光源在$t=t'=0$时快速地闪亮一下，那末爱因斯坦第二条假设意味着，在K和K'中的观察者都将看到一个以光速c从各自的原点向外扩张的辐射球壳．在参照系K中波阵面到达点(x, y, z)的时间t由下列方程给出：

$$c^2t^2-(x^2+y^2+z^2)=0 \tag{11.14}$$

同样，在参照系K'中波阵面由下列方程确定：

$$c^2t'^2-(x'^2+y'^2+z'^2)=0 \tag{11.14'}$$

假定时空是均匀的和各向同性的，正如第一条假设所指明的，这两组坐标之间的关系是线性的．这时，二次齐式(11.14)和(11.14')通过下式联系起来：

$$c^2t'^2-(x'^2+y'^2+z'^2)=\lambda^2[c^2t^2-(x^2+y^2+z^2)] \tag{11.15}$$

式中$\lambda=\lambda(v)$是参照系之间可能的标度变化．适当选择坐标轴的方向，并考虑从K'到K的反变换，可以直接证明：对所有的v来说，$\lambda(v)=1$，而且K'中的时间和空间坐标通过洛仑兹变换

$$\left.\begin{aligned} x'_0&=\gamma(x_0-\beta x_1)\\ x'_1&=\gamma(x_1-\beta x_0)\\ x'_2&=x_2\\ x'_3&=x_3 \end{aligned}\right\} \tag{11.16}$$

与K中的时间和空间坐标联系起来．在上式中，我们引进了一种

有启发性的记号 $x_0=ct, x_1=z, x_2=x, x_3=y$，还引进了下列方便的符号：

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{\mathbf{v}}{c},\quad \beta=|\boldsymbol{\beta}|$$
$$\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2} \tag{11.17}$$

洛仑兹变换的反变换为

$$\left.\begin{aligned} x_0&=\gamma(x_0'+\beta x_1')\\ x_1&=\gamma(x_1'+\beta x_0')\\ x_2&=x_2'\\ x_3&=x_3' \end{aligned}\right\} \tag{11.18}$$

上式可以由(11.16)直接计算而得，但是由第一条假设我们知道：根据(11.16)，交换带撇的和不带撇的变量，同时改变 β 的正负号，必得(11.18)．按(11.16)或(11.18)，与相对运动方向垂直的两个坐标是不变的，而与相对运动方向平行的坐标以及时间是变换的．这种变换跟伽利略变换(11.1)有显著不同．

方程组(11.16)和(11.17)描述了洛仑兹变换的一种特殊情况，这种特殊的洛仑兹变换是把一个参照系变换到另一个以速度 $\mathbf{v}$ 平行于 x_1 轴运动的参照系．如果 K 和 K' 中的坐标轴保持平行，而在参照系 K 中参照系 K' 的速度 $\mathbf{v}$ 是在任意的方向上，那末(11.16)的推广式是

$$\left.\begin{aligned} x_0'&=\gamma(x_0-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{x})\\ \mathbf{x}'&=\mathbf{x}+\frac{(\gamma-1)}{\beta^2}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{x})\boldsymbol{\beta}-\gamma\boldsymbol{\beta}x_0 \end{aligned}\right\} \tag{11.19}$$

这里第一个方程很容易由(11.16)的第一个方程推得．第二个方程看起来稍为复杂些，但实际上只要把 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{x}'$ 分成平行于和垂直于 $\mathbf{v}$ 的两类分量，再按(11.16)分别处理之．

根据(11.17)中给出的 β 和 γ 的关系，以及 β 和 γ 的取值范围 $0\leqslant\beta\leqslant1$，$1\leqslant\gamma\leqslant\infty$，我们可以选用另一种参数：

因而

$$\left.\begin{aligned}\beta&=\tanh\xi\\ \gamma&=\cosh\xi\\ \gamma\beta&=\sinh\xi\end{aligned}\right\}\tag{11.20}$$

式中 ξ 就是大家熟知的增速参数或迅度. 用 ξ 来表示, (11.16)的头两个方程就变为

$$\begin{aligned}x'_0&=x_0\cosh\xi-x_1\sinh\xi\\ x'_1&=-x_0\sinh\xi+x_1\cosh\xi\end{aligned}\tag{11.21}$$

这些方程的结构使我们想到坐标的转动，但是双曲函数代替了三角函数，从根本上说，这是由于(11.14)中的空间项和时间项之间有一相对的负号[参看 11.7 节和(11.95)].

(*b*) 四元矢量

洛仑兹变换(11.16)或其更一般的形式(11.19)描述从一惯性参照系到另一惯性参照系的一个点的坐标变换. 正如三维转动一样，基本变换律是根据一个点的坐标来确定的. 在三维情形中，我们把 $\mathbf{x}$ 叫做一个矢量，而把 x_1, x_2, x_3 叫做一个矢量的三个分量. 如果任意三个物理量在转动中按 $\mathbf{x}$ 的分量的变换律而变换，那末我们就把这三个物理量叫做一个矢量的三个分量. 因此，自然就预料到，有许多物理量，它们在洛仑兹变换下按一个点的时空坐标变换律而变换. 依此类推，我们来说一下四元矢量. 坐标四元矢量是(x_0, x_1, x_2, x_3)；同样，我们把任意一个四元矢量的分量叫做(A_0, A_1, A_2, A_3)①，这里 A_1, A_2, A_3 是一个三元矢量 $\mathbf{A}$ 的分量. 对任意一个四元矢量来说，与(11.16)相当的洛仑兹变换律是

$$\left.\begin{aligned}A'_0&=\gamma(A_0-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{A})\\ A'_{\parallel}&=\gamma(A_{\parallel}-\beta A_0)\\ \mathbf{A}'_{\perp}&=\mathbf{A}_{\perp}\end{aligned}\right\}\tag{11.22}$$

① 因为我们把洛仑兹群的明确的代数论述放在 11.7 节里进行，所以对这种四元矢量我们不写成一种简单的符号. 按简单符号来写，它们是反变四元矢量 A^{α} 的分量.

式中平行号和垂直号表示相对于速度 $\mathbf{v}=c\boldsymbol{\beta}$ 的平行分量和垂直分量. 从一惯性参照系到另一惯性参照系的不变性通过第二个假设体现在(11.15)中, 对任意一个四元矢量来说, 也有其不变性的对应表示:

$$A_0'^2-|\mathbf{A}'|^2=A_0^2-|\mathbf{A}|^2 \tag{11.23}$$

式中$(A_0', \mathbf{A}')$和$(A_0, \mathbf{A})$是该四元矢量对任意两个惯性参照系的分量. 两个四元矢量(A_0, A_1, A_2, A_3)和(B_0, B_1, B_2, B_3)的"标积"是一个不变量, 即

$$A_0'B_0'-\mathbf{A}'\cdot\mathbf{B}'=A_0B_0-\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \tag{11.24}$$

把上式左边的带撇分量用(11.22)代入, 直接推演之, 或者对这两个四元矢量之和运用(11.23), 都可以证明(11.24). (11.24)是两个四元矢量之标积在洛仑兹变换下的不变性, 这不变性与 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ 在三维转动下的不变性类似.

(*c*) *光锥; 原时和时间膨胀*

狭义相对论里一个卓有成效的概念, 是关于光锥和两事件的"类空"和"类时"间隔的概念. 考虑图 11.3, 图中时间轴(实际上

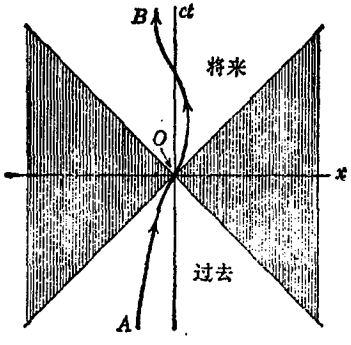


图 11.3 一个系统的世界线和光锥. 光锥内部区域(不画阴影的)代表过去和将来, 而光锥以外的阴影区域叫做"另一世界". 我们说, 光锥内(外)的一个点与原点的间隔是类时(类空)间隔.

是 ct)是竖直轴,三个空间轴与时间轴垂直. 为简单起见,只画出一维空间. 在 $t=0$ 时,一物理系统(比方说,一个粒子)是在原点上. 由于光速是一切速度的上限,可以用一个"锥面"(叫做光锥)把时空域分成三个区域,这个锥面由 $x^2+y^2+z^2=c^2t^2$ 确定. 在 $t=0$ 时从原点发射的光信号沿着图中的 45° 线传播. 但是,任一物质系统的速度都小于 c. 因此,随着时间的推延,物质系统在上半光锥内划出一条路线,叫做物质系统的世界线,例如,曲线 OB. 因为当时间 $t>0$ 时,系统的路线位于上半光锥内,所以上半光锥区域叫做将来. 同样,下半光锥叫做过去. 系统可以循着位于下半光锥内的,像 AO 那样一条路线到达 O 点. 光锥外的阴影区域叫做另一世界. 位于 O 点的一个系统永远不能到达另一世界中的一个时空点,或者,一系统从另一世界中的一个时空点永远不能到达 O.

考虑时空中两个事件 $P_1(t_1,\ \mathbf{x}_1)$ 和 $P_2(t_2,\mathbf{x}_2)$[我们暂时恢复 t 和 $\mathbf{x}$,以避免附标的繁复]的不变间隔 s_{12},就可以明显看出时空分成过去-将来区域(光锥内)和另一世界(光锥外)的重要性. 不变间隔的平方是

$$s_{12}^2=c^2(t_1-t_2)^2-|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|^2 \qquad (11.25)$$

对于任何两个事件 P_1 和 P_2,有三种可能性:(1)$s_{12}^2>0$,(2)$s_{12}^2<0$,(3)$s_{12}^2=0$. 若 $s_{12}^2>0$,我们就说这两事件具有类时间隔. 我们总能找到一个洛仑兹变换①,把 K 变换到一个新的参照系 K',使得 $\mathbf{x}_1'=\mathbf{x}_2'$. 这时,

$$s_{12}^2=c^2(t_1'-t_2')^2>0$$

在参照系 K' 中,这两事件发生在同一空间点,但有一定的时间间隔. 参看图 11.3,一个点可以位于原点,而另一个点位于过去或

① 考虑方程组(11.16),读者可以证明:只要 $s_{12}^2>0$,就存在一个 $\beta<1$ 的洛仑兹变换. 显然,$|\beta|=|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|/c|t_1-t_2|$.

将来. 若 $s_{12}^2<0$, 我们就说这两事件具有类空间隔. 现在有可能找到一个惯性参照系 K'', 在 K'' 中 $t_1''=t_2''$. 这时,

$$s_{12}^2=-|\mathbf{x}_1''-\mathbf{x}_2''|^2<0$$

在 K'' 中这两事件发生在同一时刻, 不同空间点. 根据图 11.3, 一个事件在原点上, 而另一事件位于另一世界中. 最后一种可能性 $s_{12}^2=0$ 意味着类光间隔. 两事件都位于光锥上, 只能用光信号把两事件联系起来.

时空中两事件的间隔分成两类(类空间隔或类时间隔, 并以光锥作为两者的分界面), 这两类间隔是洛仑兹不变量. 在一坐标系中具有类空间隔的两个事件在一切坐标系中都具有类空间隔. 这意味着: 这样两个事件无法从因果上联系起来. 因为物理的相互作用从一点到另一点的传播速度不大于光速, 所以只有具有类时间隔的事件才能有因果的联系. 图 11.3 中原点上的事件, 在因果上只能受在光锥过去区域内发生的诸事件的影响.

另一个有用的概念是原时. 考虑一个系统(为明确起见, 我们将把这系统当作一个粒子), 以瞬时速度 $\mathbf{u}(t)$ 相对于某惯性系 K 而运动. 在时间间隔 dt 内, 其位置改变了 $d\mathbf{x}=\mathbf{u}dt$. 由(11.25), 相应的无穷小不变间隔 ds 的平方是

$$ds^2=c^2dt^2-|d\mathbf{x}|^2=c^2dt^2(1-\beta^2)$$

式中 $\beta=u/c$. 在该系统处于瞬时静止状态的坐标系 K' 中, 时空增量是 $dt'\equiv d\tau$, $d\mathbf{x}'=0$. 于是, 不变间隔为 $ds=cdt$. 因而在系统的瞬时静止参照系中时间增量 dt 是一个洛仑兹不变量, 它取以下形式:

$$d\tau=dt\sqrt{1-\beta^2(t)}=\frac{dt}{\gamma(t)} \tag{11.26}$$

时间 τ 叫做粒子或系统的原时. 这是在系统的静止参照系中观察的时间. 由(11.26)得知, 某一原时间隔 $\tau_2-\tau_1$ 在参照系 K 中看

来，将是如下的时间间隔：

$$t_2-t_1=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta^2(\tau)}}=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma(\tau)d\tau \qquad (11.27)$$

方程(11.27)或(11.26)表达了通称时间膨胀的这种现象．运动时钟比静止时钟走得慢．在时钟静止参照系中相等的一些时间间隔，在参照系K中观察时相应的时间间隔都要大一个因子$\gamma>1$．这种佯谬的结果，在高能物理实验室里每天都得到验证，在那里，已知寿命τ_0的不稳定粒子束在衰变前行经的距离比伽利略衰变距离的上限$c\tau_0$要大好多好多倍．例如，在美国国立费密加速器实验室里产生了能量为200千兆电子伏特的带电π介子，这些带电π介子在行经300米后，由于衰变而引起的损失不超过百分之三．若寿命为$\tau_0=2.56\times10^{-8}$秒，则伽利略衰变距离为$c\tau_0=7.7$米．如果没有时间膨胀，那末将只有$e^{-300/7.7}\simeq10^{-17}$的$\pi$介子保存下来．但是，在200千兆电子伏特时，$\gamma\simeq1400$，$\pi$介子衰变的平均自由程实际上是$\gamma c\tau_0\simeq11$千米！

研究在磁场中以接近恒定速率作轨道运动的μ介子的衰变，为我们提供了在受控实验室条件下进行时间膨胀的精密实验．这样一个实验再结合另一个实验就完全证实了公式(11.27)[参看11.11节末援引的Bailey和Picasso所写的评论]．

有人已经利用作为国家时间标准的典型宏观时钟，完成了一种完全不同而有趣的时间膨胀实验.① 时钟放在航空公司的客机上，相对于地球而运动，铯束原子钟的极高精密度弥补了喷气式飞机比较小的速率．四台时钟绕地球飞行两次，一次的飞行方向朝东，另一次朝西．在飞行期间，测程仪记录了飞机的位置和相对于地面的速率，所以(11.27)中的积分可以计算出来．在每次飞行的前后，把这些时钟与美国联邦海军天文台的全同时钟作比较．扣

① J. C. Hafele and R. E. Keating, *Science* **177**, 166, 168(1972).

除了地球的自转和广义相对论引力"红移"的影响后，以毫微秒为单位的平均观测时差和平均计算时差，对向东飞行来说，分别为-59 ± 10和-40 ± 23，对向西飞行来说，分别为273 ± 7和275 ± 21. 狭义相对论的运动学效应可以与广义相对论效应相比拟. 观测和计算的符合证实了，在喷气式飞机上连续向东飞行的人比我们这些留在家里的人要衰老得慢些，但不是慢很多！

(*d*) 相对论性多普勒频移

正如11.2节(*a*)段已经指出的，一个波的位相是一个不变量，因为我们认为只要计算一个波列中的波峰数就能确定位相，而这种计数操作在一切惯性系中必定得到相同的结果. 在11.2节里，我们用伽利略坐标变换(11.1)求得了伽利略(非相对论)多普勒频移公式(11.8). 在这里我们用洛仑兹坐标变换(11.16)来求相对论性多普勒频移. 考虑一个平面波，在惯性参照系K中这一平面波的频率为ω，波矢为$\mathbf{k}$. 一般地说，在运动参照系K'中，这个波将具有不同的频率ω'和波矢$\mathbf{k}'$，可是波的位相是一个不变量：

$$\phi=\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}=\omega' t'-\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}' \tag{11.28}$$

[我们顺便指出：因为方程组(11.16)是线性的，在K中位相为ϕ的平面波在参照系K'中确实仍然是一个平面波.]利用(11.16)，并且完全仿照由(11.7)到(11.8)的论证，我们得知，用$\omega=ck_0$和$\mathbf{k}$表示的频率$\omega'=ck_0'$和波矢$\mathbf{k}'$由下式给出：

$$\left.\begin{aligned} k_0'&=\gamma(k_0-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{k})\\ k_\parallel'&=\gamma(k_\parallel-\beta k_0)\\ \mathbf{k}_\perp'&=\mathbf{k}_\perp \end{aligned}\right\} \tag{11.29}$$

$(k_0,\mathbf{k})$的洛仑兹变换与$(x_0,\mathbf{x})$的洛仑兹变换具有完全相同的形式. 所以任一平面波的频率和波数构成一个四元矢量. 位相的不变性(11.28)就是两个四元矢量的"标积"的不变性(11.24). 实际上，这种对应关系构成从(11.28)推得变换律(11.29)的另一途径.

对光波来说，$|\mathbf{k}|=k_0$，$|\mathbf{k}'|=k_0'$. 这时，上述结果(11.29)就可以表达成大家更熟悉的多普勒频移公式：

$$\omega'=\gamma\omega(1-\beta\cos\theta)$$
$$\operatorname{tg}\theta'=\frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta-\beta)} \tag{11.30}$$

式中θ和θ'是$\mathbf{k}$和$\mathbf{k}'$同$\mathbf{v}$方向的夹角. 交换带撇量和不带撇量，并改换β的正负号，就得到反变换方程.

(11.30)的第一个方程就是通常的多普勒频移用因数γ加以修正. γ因数的出现表明有横向多普勒频移，即使当$\theta=\frac{\pi}{2}$时也存在这种频移. 有人已经用光谱学方法以运动的原子观测到这种相对论性横向多普勒频移[伊凡斯-斯惕韦耳(Ives—Stilwell)实验，1938年]. 也有人利用精密的共振吸收穆斯堡尔实验观测到这种频移，在这个实验中，原子核γ射线源放在快速转动圆柱体的轴上，而吸收体附着在圆柱体的周界上①.

11.4 速度的加法；四元速度

我们可以用坐标的洛仑兹变换(11.16)或(11.18)求得速度相加定律. 设有一运动的点P，在惯性参照系K'中点P的速度矢量$\mathbf{u}'$的球坐标为(u', θ', ϕ')，如图11.4所示. 参照系K'以速度$\mathbf{v}=c\boldsymbol{\beta}$沿正$x_1$方向相对于惯性参照系$K$而运动. 我们想要求出从$K$来观察时点$P$的速度$\mathbf{u}$的诸分量. 由(11.18)，$dx_0, dx_1, dx_2, dx_3$的微分表式是

$$dx_0=\gamma_v(dx_0'+\beta dx_1')$$

① H. J. Hay, J. P. Schiffer, T. E. Cranshaw, and P. A. Egelstaff, *Phys. Rev. Letters*, 4, 165(1960). 请再参看T. E. Cranshaw写的一篇文章，刊载在*Proceedings of the International School of Physics*, Varenna, Course XX, 1961, Academic Press, New York(1962)，第208页.

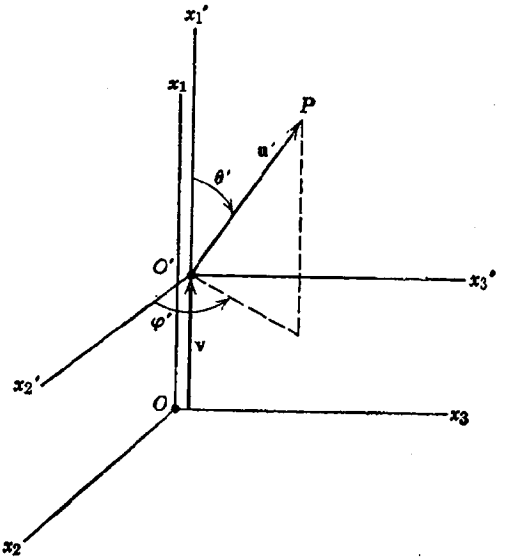


图 11.4　速度的加法

$$dx_1=\gamma_v(dx_1'+\beta dx_0')$$
$$dx_2=dx_2'$$
$$dx_3=dx_3'$$

式中我们在 γ 右下方加一个下标，以便在下面叙述中把它跟 $\gamma_u=(1-u^2/c^2)^{-1/2}$ 和 $\gamma_{u'}=(1-u'^2/c^2)^{-1/2}$ 加以区别. 在这两个参照系中，速度分量分别为 $u_i'=cdx_i'/dx_0'$ 和 $u_i=cdx_i/dx_0$. 这意味着速度分量按下式而变换：

$$\left.\begin{aligned} u_{\parallel}&=\frac{u_{\parallel}'+v}{1+\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}}\\ u_{\perp}&=\frac{\mathbf{u}_{\perp}'}{\gamma_v\left(1+\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)}\end{aligned}\right\}\qquad(11.31)$$

记号 $u_{\parallel}$ 和 $\mathbf{u}_{\perp}$ 分别表示平行于和垂直于 $\mathbf{v}$ 的速度分量. 很容易求

出参照系K中u的量值及其极角θ,ϕ. 因为$u_2/u_2'=u_3/u_3'$，所以在这两个参照系中的方位角是相等的. 而且，

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\theta&=\frac{u'\sin\theta'}{\gamma_v(u'\cos\theta'+v)}\\ \text{和}\qquad u&=\frac{\sqrt{u'^2+v^2+2u'v\cos\theta'-\left(\frac{u'v\sin\theta'}{c}\right)^2}}{1+\frac{u'v}{c^2}\cos\theta'}\end{aligned}\right\}\tag{11.32}$$

像通常一样，由(11.31)和(11.32)，交换带撇量和不带撇量，并改变v的正负号，就可以求得用u来表示u′的反变换关系式.

当速率u'和v都远小于c时，速度相加定律(11.31)就简化为伽利略结果$\mathbf{u}=\mathbf{u}'+\mathbf{v}$，但是，只要$u'$或$v$与$c$可比拟，就要对伽利略结果加以修正. 即使$u'$和$v$都非常接近$c$，这两速度相加而得的速度也不可能大于光速. 对于两速度互相平行的简单情况，相加定律是

$$u=\frac{u'+v}{1+\frac{vu'}{c^2}}\tag{11.33}$$

若$u'=c$，则$u=c$. 这是爱因斯坦第二条假设的一个明确的实例. 读者可以根据(11.32)的第二个方程证明：当两速度不平行时，$u'=c$也意味着$u=c$.

速度相加公式与这样一些实验观测符合，例如与关于运动液体中的光速的斐索实验，以及地球轨道运动所引起的恒星位置光行差的观测符合.

由(11.31)的结构显而易见，速度的变换律不是四元矢量的变换律，后者如(11.22)所给出，(11.16)和(11.29)是四元矢量变换律的两个实例. 但是，有一个四元矢量与普通速度有密切的关系. 为了写出这个四元矢量，我们改写一下(11.31). 根据(11.32)的第二个方程可以直接证明，(11.31)中的因子$(1+\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'/c^2)$可以通

过下式用另一种形式来表达，

$$\gamma_u=\gamma_v\gamma_{u'}\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right) \tag{11.34}$$

式中 γ_v，γ_u，$\gamma_{u'}$ 是由(11.17)对 $\mathbf{v}$，$\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{u}'$ 分别确定的 γ．当将(11.34)代入(11.31)时，这些方程就变成

$$\begin{aligned}\gamma_u u_{\parallel}&=\gamma_v(\gamma_{u'}u'_{\parallel}+v\gamma_{u'})\\ \gamma_u\mathbf{u}_{\perp}&=\gamma_{u'}u'_{\perp}\end{aligned} \tag{11.35}$$

将(11.34)和(11.35)同(11.22)的反变换表式比较，可以看出：四个量$(\gamma_u c,\gamma_u\mathbf{u})$按$(x_0,\mathbf{x})$那样的方式而变换，因而它们构成一个在洛仑兹变换下的四元矢量．这四个量叫做四元速度$(U_0,\mathbf{U})$的时间和空间分量．

写出四元速度的另一种方法是借助于原时 τ 的概念．普通速度 $\mathbf{u}$ 定义为坐标 $\mathbf{x}(t)$的时间导数．速度相加定律(11.31)不是一个四元矢量变换律，这是因为时间在洛仑兹变换下不是不变量．然而我们已经看到：原时 τ 是一个洛仑兹不变量．于是，我们可以把四元矢量$(x_0,\mathbf{x})$对 τ 而不对 t 求微商，从而构成一个四元矢量"速度"．利用(11.26)，我们有

$$\left.\begin{aligned}U_0&\equiv\frac{dx_0}{d\tau}=\frac{dx_0}{dt}\frac{dt}{d\tau}=\gamma_u c\\ \mathbf{U}&\equiv\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}=\frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{dt}{d\tau}=\gamma_u\mathbf{u}\end{aligned}\right\} \tag{11.36}$$

在下节里我们证明：一个粒子的四元速度的诸分量与其总能量和动量成正比．

11.5 粒子的相对论动量和能量

接下来我们考虑粒子的动量和动能的相对论性普遍式．对带电粒子来说，这些表式可以由洛仑兹力方程和电磁场变换性质求得，而洛仑兹力方程和电磁场变换性质是洛仑兹在 1900 年以前就

已经确立了的．但是，给出一种更普遍的推导是有益的，这种推导仅仅以能量和动量守恒定律及洛仑兹变换的运动学为根据．这种推导方法清楚表明，粒子动量和动能的相对论关系式具有普遍性，并与是否存在对该粒子的电磁相互作用无关．

当一个粒子的速率远小于光速时，我们知道该粒子的动量和能量为

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= m\mathbf{u} \\ E &= E(0) + \frac{1}{2}mu^2 \end{aligned} \tag{11.37}$$

式中 m 为粒子的质量，$\mathbf{u}$ 为粒子的速度，而 $E(0)$ 为一常量，等于粒子的静能．在非相对论的研究中，静能可以忽略不计，因为静能对能量平衡方程两边所贡献的附加常数相同．然而，在狭义相对论里静能是不能忽略的．在下面我们将看到，粒子的总能量（静能和动能之和）是一个至关重要的量．

我们想要求的是一个粒子的动量和能量表式，这些表式与速度的洛仑兹变换律(11.31)一致，而且对非相对论性运动来说就简化为(11.37)．符合第一条假设的唯一可能的普遍式是

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathscr{M}(u)\mathbf{u} \\ E &= \mathscr{E}(u) \end{aligned} \tag{11.38}$$

式中 $\mathscr{M}(u)$ 和 $\mathscr{E}(u)$ 是速度 $\mathbf{u}$ 的量值的函数．与(11.37)比较，得到以下极限值：

$$\begin{aligned} \mathscr{M}(0) &= m \\ \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial u^2}(0) &= \frac{m}{2} \end{aligned} \tag{11.39}$$

我们作出这样的合理假定：$\mathscr{M}(u)$ 和 $\mathscr{E}(u)$ 是它们自变量的合理的单调函数．

为了确定 $\mathscr{M}(u)$ 和 $\mathscr{E}(u)$ 的形式，我们考虑两个全同粒子的弹性碰撞，并要求动量和能量守恒定律在一切等效的惯性参照系中

都成立，正如第一条假设所指明的．我们详细地考察由平行于 z 轴的一个洛仑兹变换联系起来的两个惯性系 K 和 K' 中的碰撞．这就不可避免地要进行某些代数运算．为了使这些运算尽可能的少，有两条途径可供选择．一条途径是，巧妙地假设粒子的速度和方向，以便通过代数运算迅速得出漂亮而明显的结果．另一条途径是，挑选一种易懂的运动学情况，审慎地进行推演．前一条途径缺少启发性．我们采取第二条途径．

设惯性参照系 K' 是"质心"参照系，其中两个全同粒子具有沿 z 轴的初速度 $\mathbf{u}'_a=\mathbf{v}, \mathbf{u}'_b=-\mathbf{v}$．这两个粒子碰撞而后散开，它们的末速度为 $\mathbf{u}'_c=\mathbf{v}', \mathbf{u}'_d=\mathbf{v}''$．这些速度如图 11.5 所示．在 K'

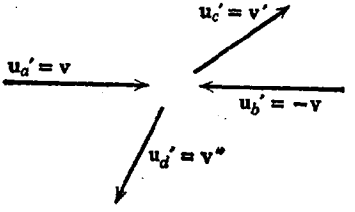


图 11.5　两个全同粒子碰撞时，在参照系 K' 中的初速度和末速度矢量．

中，动量和能量守恒方程写成

$$\mathbf{p}'_a+\mathbf{p}'_b=\mathbf{p}'_c+\mathbf{p}'_d$$
$$E'_a+E'_b=E'_c+E'_d$$

或者，利用(11.38)式，写成

$$\begin{aligned}&\mathscr{M}(v)\mathbf{v}-\mathscr{M}(v)\mathbf{v}=\mathscr{M}(v')\mathbf{v}'+\mathscr{M}(v'')\mathbf{v}''\\&\mathscr{E}(v)+\mathscr{E}(v)=\mathscr{E}(v')+\mathscr{E}(v'')\end{aligned}\qquad(11.40)$$

因为粒子是全同的，所以必需 $\mathscr{E}(v')=\mathscr{E}(v'')$ 成立，再利用 $\mathscr{E}(v)$ 的单调性这个假设，遂得 $v'=v''$．这时，(11.40)的第二个方程要求 $v'=v''=v$．第一个方程要求 $\mathbf{v}''=-\mathbf{v}'$．这四个速度都具有相同的量值，像两个初速度一样，两个末速度的量值相等，方向相反．图 11.6 的右图较清楚地画出了这种情况，图中 θ' 表示 K' 中的散

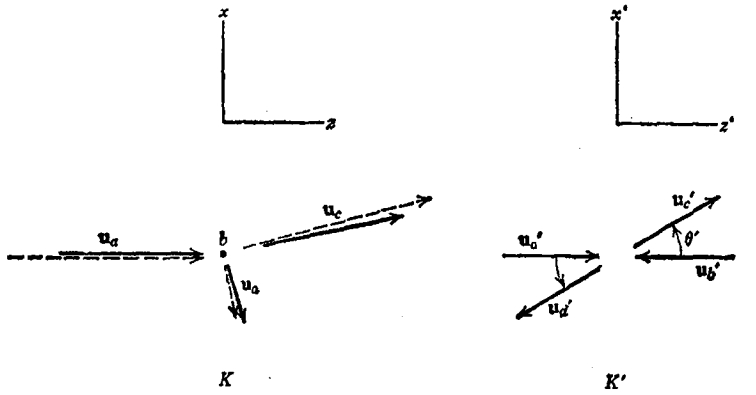


图 11.6　两个全同粒子碰撞时，在参照系 K 和 K' 中的初速度和末速度矢量．实线的长度和取向代表速度的大小和方向，图中画出的情况相当于 $\theta'=30°$ 和 $\beta^2=\frac{1}{3}$．K 中的虚线是由 K' 到 K 的伽利略变换得到的结果．

射角．

现在设有另一惯性参照系 K，以速度 $-\mathrm{v}$ 沿 z 方向相对于 K' 而运动，我们来考虑 K 中的这种碰撞．由速度的变换方程(11.31)可以看出：粒子 b 在 K 中是静止的，而粒子 a 沿 z 轴以速度

$$\mathrm{u}_a=\frac{2\mathrm{v}}{1+\frac{v^2}{c^2}}=\frac{2c\beta}{1+\beta^2} \tag{11.41}$$

入射，式中 $\beta=\mathrm{v}/c$．在 K 中末速度 u_c 和 u_d 的分量类似地为

$$\left.\begin{aligned}(\mathrm{u}_c)_z&=\frac{c\beta\sin\theta'}{\gamma(1+\beta^2\cos\theta')},\quad (\mathrm{u}_c)_x=\frac{c\beta(1+\cos\theta')}{1+\beta^2\cos\theta'}\\(\mathrm{u}_d)_z&=-\frac{c\beta\sin\theta'}{\gamma(1-\beta^2\cos\theta')},\quad (\mathrm{u}_d)_x=\frac{c\beta(1-\cos\theta')}{1-\beta^2\cos\theta'}\end{aligned}\right\} \tag{11.42}$$

式中 $\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}$．

在惯性参照系 K 中，动量和能量守恒方程写作

$$\begin{aligned}\mathscr{M}(u_a)\mathrm{u}_a+\mathscr{M}(u_b)\mathrm{u}_b&=\mathscr{M}(u_c)\mathrm{u}_c+\mathscr{M}(u_d)\mathrm{u}_d\\\mathscr{E}(u_b)+\mathscr{E}(u_b)&=\mathscr{E}(u_c)+\mathscr{E}(u_d)\end{aligned} \tag{11.43}$$

由(11.41)和(11.42)或由图 11.6 的左图显而易见，当粒子 b 静止时其它三个速度通常都是不同的. 所以由(11.43) 似乎很难确定 $\mathscr{M}(u)$ 和 $\mathscr{E}(u)$. 但是，我们可以考虑掠射碰撞的极限情形，这时 θ' 是非常小的. 于是，在惯性系 K 中 $\mathbf{u}_d$ 将是非相对论速度，而 $\mathbf{u}_c$ 与 $\mathbf{u}_a$ 相差甚微. 因此，我们可以围绕 $\theta'=0$ 作适当的泰勒级数展开，并得到含有 $\mathscr{M}(u)$、$\mathscr{E}(u)$，也许还含它们的一阶导数的方程. 明确地说，(11.43)中动量守恒方程的 x 分量是

$$0=\mathscr{M}(u_c)\frac{c\beta\sin\theta'}{\gamma(1+\beta^2\cos\theta')}-\mathscr{M}(u_d)\frac{c\beta\sin\theta'}{\gamma(1-\beta^2\cos\theta')}$$

消去公因子并加以整理，便得

$$\mathscr{M}(u_c)=\left(\frac{1+\beta^2\cos\theta'}{1-\beta^2\cos\theta'}\right)\mathscr{M}(u_d)$$

这个关系式对所有的 θ' 成立，特别是当 $\theta'=0$ 时也成立. 由(11.42)看出，在这种极限情形下，$\mathbf{u}_c=\mathbf{u}_a$，$\mathbf{u}_d=0$. 于是，我们得

$$\mathscr{M}(u_a)=\left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)\mathscr{M}(0) \tag{11.44}$$

由(11.41)容易证明：

$$\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u_a^2}{c^2}}}\equiv\gamma_a \tag{11.45}$$

根据(11.39)，$\mathscr{M}(0)=m$，这样我们就有

$$\mathscr{M}(u_a)=\gamma_a m$$

或换句话说，质量为 m、速度为 $\mathbf{u}$ 的一个粒子的动量为

$$\mathbf{p}=\gamma m\mathbf{u}=\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \tag{11.46}$$

要确定 $\mathscr{E}(u)$ 的函数形式，就需要较多的运算，而不只是直接计算 $\theta'=0$ 时的能量守恒方程. 我们必须探究小 θ' 角的方程. 由(11.43)，我们得

$$\mathscr{E}(u_a)+\mathscr{E}(0)=\mathscr{E}(u_c)+\mathscr{E}(u_d) \tag{11.47}$$

式中 u_c 和 u_d 为 θ' 的函数. 由(11.42)或(11.32),准确到所含的 θ'^3 级项,我们得到

$$u_c^2=u_a^2-\frac{\eta}{\gamma_a^3}+0(\eta^2)$$

$$u_d^2=\eta+0(\eta^2)$$

式中 γ_a 由(11.45)给出,$\eta=c^2\beta^2\theta''/(1-\beta^2)$ 是一个方便的展开参数. 我们现在把(11.47)的两边按泰勒级数展开,并且令 η 的各次幂的系数相等:

$$\mathscr{E}(u_a)+\mathscr{E}(0)=\mathscr{E}(u_a)+\eta\cdot\left(\frac{d\mathscr{E}(u_c)}{du_c^2}\cdot\frac{\partial u_c^2}{\partial\eta}\right)_{\eta=0}$$

$$+\cdots\mathscr{E}(0)+\eta\cdot\left(\frac{d\mathscr{E}(u_d)}{du_d^2}\cdot\frac{\partial u_d^2}{\partial\eta}\right)_{\eta=0}+\cdots$$

零次幂项给出一恒等式,但一次幂项给出

$$0=-\frac{1}{\gamma_a^3}\frac{d\mathscr{E}(u_a)}{du_a^2}+\left(\frac{d\mathscr{E}(u_d)}{du_d^2}\right)_{v_d=0}$$

根据(11.39),上式右边第二项用已知的非相对论值代入,我们得

$$\frac{d\mathscr{E}(u_a)}{du_a^2}=\frac{m}{2}\gamma_a^3=\frac{m}{2\left(1-\frac{u_a^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

积分而得下式:

$$\mathscr{E}(u)==\frac{mc^2}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}+[\mathscr{E}(0)-mc^2] \tag{11.48}$$

这是质量为 m、速度为 u 的一个粒子的能量表式,其中含有一个任意的积分常数. 我们顺便指出,在弹性散射过程中,能量守恒条件可以仅仅用动能项来表示. 因而,(11.48)中的待定常数是必要的,它不是我们泰勒级数展开的结果,这一点,读者或许已推测到. 请注意,动能 $T(u_a)$ 显然由下式给出:

$$T(u)\equiv\mathscr{E}(u)-\mathscr{E}(0)=mc^2\left[\frac{1}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}-1\right] \tag{11.49}$$

方程(11.46)和(11.48)必然都是一个粒子的动量和能量的相对论性普遍式，它们符合守恒定律和狭义相对论的两条假设．现在只剩下一个问题了，即静能$\mathscr{E}(0)$的值．我们可以直接用实验来确定，或者也可以从理论上来探讨．首先，我们说一下用实验确定$\mathscr{E}(0)$值的问题．虽然$\mathscr{E}(0)$不能由弹性散射来确定，但可以由非弹性过程来求出，在非弹性过程中，一种粒子转变成质量不同的另一种粒子或另外几种粒子．衰变过程尤为明显．例如，考虑一个中性K介子衰变为两个光子的过程，即$K^0\to\gamma\gamma$．在K介子的静止参照系中，能量守恒要求两个光子的能量和等于$\mathscr{E}_K(0)$．就另一种衰变方式来说，即一个中性K介子衰变为两个π介子，在K介子的静止参照系中，每个π介子的动能必为

$$T_\pi=\frac{1}{2}\mathscr{E}_K(0)-\mathscr{E}_\pi(0)$$

测量π介子的动能(11.49)，并且知道$\mathscr{E}_K(0)$，就可以确定$\mathscr{E}_\pi(0)$．人们发现，在这些实例和其它各种情形中，质量为m的一个粒子(或更复杂的系统)的静能都可由著名的爱因斯坦质能关系式

$$\mathscr{E}(0)=mc^2 \tag{11.50}$$

给出．于是，(11.48)中带有方括号的第二项等于零．一个质量为m、速度为u的粒子的总能量为

$$E=\gamma mc^2=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{11.51}$$

取得(11.50)和(11.51)这两个结果的另一条途径是从理论上来探讨．虽然把狭义相对论原理应用于能量和动量守恒上，就可得到一个粒子的动量和能量表式(11.46)和(11.48)，但是p和E

在洛仑兹变换下的性质尚未弄清楚.守恒方程组包含四个方程,假定这些方程在一切等效的惯性参照系中都是成立的. 动量守恒由三个方程组成，这三个方程与诸矢量的空间分量有关. 在狭义相对论的范畴内,试图把四个守恒方程看作诸四元矢量间的关系,这是当然的事情. 我们注意到，动量(11.46)与(11.36)中定义的四元速度$(U_0, \mathbf{U})$的空间分量成正比，即$\mathbf{p}=m\mathbf{U}$. 这个四元矢量的时间分量是$p_0=mU_0=m\gamma_u c$. 与(11.48)比较，可以看出：一个粒子的能量跟cp_0相差一个附加常数$[\mathscr{E}(0)-mc^2]$. 这就意味着：对任意一个碰撞过程来说，能量和动量守恒的四个方程可以写成

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{a\\ 初态}}(p_0)_a-\sum_{\substack{b\\ 终态}}(p_0)_b&=\Delta_0\\ \sum_{\substack{a\\ 初态}}\mathbf{p}_a-\sum_{\substack{b\\ 终态}}\mathbf{p}_b&=\mathbf{\Delta}\end{aligned}\tag{11.52}$$

式中$(\Delta_0, \mathbf{\Delta})$是一个四元矢量,其中$\mathbf{\Delta}=0$,而

$$c\Delta_0=\sum_{\substack{b\\ 终态}}[\mathscr{E}_b(0)-m_bc^2]-\sum_{\substack{a\\ 初态}}[\mathscr{E}_a(0)-m_ac^2]$$

根据第一条假设,(11.52)必须在一切等效的惯性参照系中成立.但是,如果在一切惯性参照系中$\mathbf{\Delta}\equiv 0$,则由(11.22)可以看出：必须有$\Delta_0\equiv 0$；四元矢量$(\Delta_0, \mathbf{\Delta})$是一个零矢量. 如果在某一过程的初态和终态中可能出现不同类型或不同数目的粒子,那末,要满足条件$\Delta_0=0$,只能要求(11.50)对每个粒子分别成立. 于是，我们得知(11.51)是总能量的正确形式.

根据(11.46)和(11.51)，我们显然可以把粒子的速度用其动量和能量来表示:

$$\mathbf{u}=\frac{c^2\mathbf{p}}{E}\tag{11.53}$$

能量-动量四元矢量$(p_0=E/c,\mathbf{p})$的不变"长度"是

$$p_0^2-\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}=(mc)^2 \tag{11.54}$$

我们看到，表征一个粒子的动量和能量的不变性是该粒子的质量m，有时叫做该粒子的静质量.① 方程(11.54)加上守恒方程组，构成了处理碰撞和衰变过程的相对论运动学的一种有效而精巧的工具(参看本章末的习题). 我们注意到：根据(11.54)，可以把能量E用动量来表达：

$$E=\sqrt{c^2p^2+m^2c^4} \tag{11.55}$$

粒子的动量、能量和速度的关系式(11.46)、(11.51)、(11.53)已为大家所接受，以致谈论实验验证似乎是多余的. 虽然如此，但是援引一些实验室演证也许还是值得一做的. 有一个实验演证了粒子动能 (11.49) 与其速率的关系②. 用一猝发的电子束 ($\Delta t=3\times10^{-9}$ 秒)通过 8.4米 射 程 来 测定已知动能为 0.5 至 15 兆电子伏特 (电子是在范德格喇夫起电机中被一已知电压加速，按量热学方法用捕束器检测电子的动能) 的电子的速率. 当动能不断增加时，飞越时间朝着 2.8×10^{-8} 秒的极限值而下降，这完全符合(11.49). 在 11.2 节末援引的斯坦福直线加速器的实验中，对 11 千兆电子伏特的电子($\gamma\simeq2\times10^7$) 进行了 c 是物质粒子极限速率的验证，该实验求得电子速率与 c 的差值小于 c 乘 5×10^{-6}. 有一个供大学生做的实验，用于验证动量和能量之间的关系(11.55)，该实验使用了一块曲率半径约为 10 厘米的磁铁来测量 β 射线的动量，又用了一块碘化钠(NaI)晶体来测量 β 射线的能量③.

---

① 有些作者把一个粒子的质量定义为 E/c^2，并称之为 m 或 $m(u)$，而把符号 m_0 用来表示静质量. 我们总是用质量这个名词表示在(11.54)中取平方的那个洛仑兹不变量.

② W. Bertozzi, *Am. J. Phys.* **32**, 551(1964).

③ S. Parker, *Am. J. Phys.* 40, 241(1972).

在任一惯性参照系中，给出了一个粒子的质量，再给出该粒子的速度 u 或动量 p，就可以确定该粒子在这个惯性参照系中的运动学性质(速度、动量、能量)．$(p_0, \mathbf{p})$的洛仑兹变换(11.22)给出在任一其它惯性系中的结果．有时为了方便起见，把垂直于 z 轴的 p 的两个分量和迅度 ζ(11.20) 作为运动学变数．设一个粒子在惯性系 K 中的动量为 p，横向动量为 $\mathbf{p}_\perp$，动量的 z 分量为 p_z．这时只有一种沿 z 方向变换到惯性系 K' 的洛仑兹变换，能使得粒子在 K' 中的动量的 z 分量等于零．在 K' 中，粒子的动量和能量是

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}_\perp, \quad \frac{E'}{c} = \Omega = \sqrt{p_\perp^2 + m^2c^2} \tag{11.56}$$

设联属于 K 到 K' 的洛仑兹变换的迅度参数是 ξ．那么，由(11.21)的反变换式，可以把原惯性系 K 中粒子的动量分量和能量写为

$$\mathbf{p}_\perp, \qquad p_z = \Omega \sinh\xi, \ \frac{E}{c} = \Omega \cosh\xi \tag{11.57}$$

其中 $\Omega = \sqrt{p_\perp^2 + m^2c^2}$．量 Ω/c 有时叫做横质量(因为它依赖于 $\mathbf{p}_\perp$)或纵质量(因为它涉及纵向增速)．如果粒子在 K' 中是静止的，即 $\mathbf{p}_\perp = 0$，那末表式(11.57)变成

$$p = mc\sinh\xi, \qquad E = mc^2\cosh\xi \tag{11.58}$$

这是与(11.46)和(11.51)对应的另一种表达形式．

以 $\mathbf{p}_\perp^{(i)}$ 和 $\xi^{(i)}$ 作为运动学变数的方便之处，就在于沿 Z 方向的洛仑兹变换把所有迅度移动了一个恒定量，$\xi^{(i)} \to \xi^{(i)} - Z$，这里 z 是该变换的迅度参数．用这些变数时，在实验室参照系中观察到的一个碰撞过程中诸粒子的组态与质心参照系中所观察到的同一过程，两者的差异仅仅是迅度原点作一无关紧要的移动．

11.6 狭义相对论时空的数学性质

前几节里介绍的狭义相对论运动学可以用一种更深奥和精巧

的方法来讨论，这种方法既能简化又能阐明理论．在经典力学和量子力学中，可以用保持矢量 $\mathbf{x}$ 之模方不变的坐标变换群来讨论三维转动．在狭义相对论中，由

$$s^2=x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2 \tag{11.59}$$

的不变性得到四维坐标$(x_0,\mathbf{x})$的洛仑兹变换．因此，我们可以把狭义相对论运动学重新按保持 s^2 不变的一切变换的群来考虑．这个群在数学上叫做齐次洛仑兹群．它包含普通转动以及 11.3 节的洛仑兹变换．保持

$$s^2(x,y)=(x_0-y_0)^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2-(x_3-y_3)^2$$

不变的变换群叫做非齐次洛仑兹群或庞加莱群．它包含空间和时间的平移和反射以及齐次洛仑兹群的变换．我们将局限于讨论齐次变换，因此以后提到洛仑兹群时省略齐次两个字．

由第一条假设得知，表达自然界规律的数学方程在洛仑兹群的变换下必定是协变的，即形式上是不变的．因此，这些方程必定是由它们在洛仑兹群下的变换性质确定的洛仑兹标量、四元矢量、四维张量等等的关系式，确定的方法类似于三维转动下的给定秩张量．于是，我们先要简短地讨论模方由(11.59)确定的时空的数学结构．

我们首先总结一下非欧几里得矢量空间中的张量分析的基本原理．时空连续统是用坐标为 x^0,x^1,x^2,x^3 的四维空间来定义的．我们假定有一完全确定的变换，这种变换是按照下列法则得到新坐标 x'^0,x'^1,x'^2,x'^3 的．

$$x'^{\alpha}=x'^{\alpha}(x^0,x^1,x^2,x^3),\ \alpha=0,1,2,3 \tag{11.60}$$

我们暂且不指明变换律．

联属于时空点 x 的 k 秩张量是由它们在 $x\to x'$ 变换下的变换性质确定的．标量(零秩张量)是一个单一的量，其值不因变换而改变．间隔 s^2(11.59) 显然是一个洛仑兹标量．一秩张量叫做矢

量，矢量有两种，必须区别开来．一类叫做反变矢量 A^α，它的四个分量 A^0, A^1, A^2, A^3 按下列法则而变换：

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta \tag{11.61}$$

在这个方程中，导数按(11.60)计算，重复指标 β 意味着对 $\beta=0, 1, 2, 3$ 求和．于是我们具体地写出

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^0} A^0 + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^1} A^1 + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^2} A^2 + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^3} A^3$$

今后，我们将使用这种重复指标的求和约定．协变矢量或一秩张量 B_α 由下列法则定义：

$$B'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} B_\beta \tag{11.62}$$

或者具体地写成

$$B'_\alpha = \frac{\partial x^0}{\partial x'^\alpha} B_0 + \frac{\partial x^1}{\partial x'^\alpha} B_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x'^\alpha} B_2 + \frac{\partial x^3}{\partial x'^\alpha} B_3$$

(11.62)中的偏导数是由(11.60)的逆关系(将 x^β 表为 x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 的函数)算出．

注意反变矢量具有上标，而协变矢量具有下标，分别相当于在变换法则中出现 $\partial x'^\alpha/\partial x^\beta$ 和 $\partial x^\beta/\partial x'^\alpha$．由(11.61)可以证明：如果变换律(11.60)是线性的，则坐标 x^0, x^1, x^2, x^3 构成一个反变矢量的四个分量．

二秩反变张量 $F^{\alpha\beta}$ 由十六个量组成，它们按下式而变换：

$$F'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} F^{\gamma\delta} \tag{11.63}$$

二秩协变张量 $G_{\alpha\beta}$ 按

$$G'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} G_{\gamma\delta} \tag{11.64}$$

而变换．二秩混合张量 H^α_β 按下式变换：

$$H'^\alpha_\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} H^\gamma_\delta \tag{11.65}$$

从这些例子应该很容易推广到任意秩的反变、协变或混合张量.

两个矢量的内积或标积定义为一个协变矢量和一个反变矢量的诸分量之积:

$$B\cdot A\equiv B_\alpha A^\alpha \tag{11.66}$$

根据这一定义,标积在(11.60)变换下是一个不变量或标量. 其证明如下: 考虑标积 $B'\cdot A'$, 并应用(11.61)和(11.62)则得

$$B'\cdot A'=\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu}B_\beta A^\nu=\frac{\partial x^\beta}{\partial x^\nu}B_\beta A^\nu=\delta^\beta_\nu B_\beta A^\nu=B\cdot A$$

与(11.66)类似地定义张量的内积或任意一对指标的缩并,这对指标可以属于同一张量,或者,其中一个指标属于一张量,而另一个指标属于另一张量. 这对指标的一个总是反变的,另一个总是协变的.

上述结果或定义是普遍的. 狭义相对论时空的具体的几何结构由不变间隔 s^2(11.59)确定. 在微分形式上,确定狭义相对论四维空间之模方的无穷小间隔 ds 是

$$(ds)^2=(dx^0)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2 \tag{11.67}$$

这里由于我们现在采用的约定,在坐标上用了上标. 这个模方或度规是广义微分长度元

$$(ds)^2=g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \tag{11.68}$$

的一种特殊情况. 式中 $g_{\alpha\beta}=g_{\beta\alpha}$ 叫做度规张量. 对狭义相对论的平坦时空来说(跟广义相对论的弯曲时空不同),度规张量是对角张量,其元素为

$$g_{00}=1,\qquad g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1 \tag{11.69}$$

反变度规张量 $g^{\alpha\beta}$ 定义为 $g_{\alpha\beta}$ 的归一化余子式. 对平坦时空来说,两者相同:

$$g^{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta} \tag{11.70}$$

注意反变和协变度规张量的缩并给出四维克朗内克 δ:

$$g_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta}=\delta_\alpha^\beta \tag{11.71}$$

式中当 $\alpha\neq\beta$ 时 $\delta_\alpha^\beta=0$，当 $\alpha=0,1,2,3$ 时 $\delta_\alpha^\alpha=1$.

将(11.68)中的不变长度元 $(ds)^2$ 与相似的不变标积(11.66)比较可以看出，从反变坐标 x^β 通过 $g_{\alpha\beta}$ 的缩并，就得到协变四元的坐标矢量 x_α，即

$$x_\alpha=g_{\alpha\beta}x^\beta \tag{11.72}$$

其逆关系为

$$x^\alpha=g^{\alpha\beta}x_\beta \tag{11.73}$$

事实上，用 $g_{\alpha\beta}$ 或 $g^{\alpha\beta}$ 的缩并，就是把任一张量的一个指标从反变变为协变或从协变变为反变的过程. 于是，

和
$$\begin{aligned} F^{\cdots\alpha\cdots}_{\cdots\cdots}&=g^{\alpha\beta}F^{\cdots\cdots}_{\cdots\beta\cdots}\\ G^{\cdots\cdots}_{\cdots\alpha\cdots}&=g_{\alpha\beta}G^{\cdots\beta\cdots}_{\cdots\cdots}\end{aligned} \tag{11.74}$$

根据度规张量(11.69) 可以得知：若一反变四元矢量的分量为 A^0，A^1，A^2，A^3，则其对应的协变四元矢量的分量为 $A_0=A^0$，$A_1=-A^1$，$A_2=-A^2$，$A_3=-A^3$. 我们把它们简明地写成

$$A^\alpha=(A^0,\mathbf{A}),\ A_\alpha=(A^0,-\mathbf{A}) \tag{11.75}$$

式中三元矢量$\mathbf{A}$的分量为 A^1，A^2，A^3. 两个四元矢量的标积(11.66)是

$$B\cdot A=B_\alpha A^\alpha=B^0A^0-\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$$

与(11.24)一致.

现在考虑对 x^α 和 x_α 的偏导算符. 利用具体的微分法则就可以直接确立这些算符的变换性质. 例如，我们有

$$\frac{\partial}{\partial x'^\alpha}=\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial x^\beta}$$

与(11.62)比较，可以看出：对坐标矢量的一个反变分量的导数按一个协变矢量算符的分量而变换. 由(11.72) 得知：对一个协变分量求导数，给出一个反变矢量算符. 所以，我们采用下列记号：

$$\partial^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\nabla\right)$$
$$\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla\right) \tag{11.76}$$

四元矢量 A 的四维散度是一个不变量，

$$\partial^\alpha A_\alpha = \partial_\alpha A^\alpha = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \nabla \cdot \mathbf{A} \tag{11.77}$$

上式在形式上相似于我们所熟悉的电荷和电流密度的连续性、标势和矢势的洛仑兹条件等方程．上面这些例子，初步说明了为什么只要方程中包含的量具有适当的洛仑兹变换性质，物理定律就具有协变性．

我们把四维拉普拉斯算符定义为下列的不变性缩并：

$$\Box \equiv \partial_\alpha \partial^\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \nabla^2 \tag{11.78}$$

当然，这就是真空中波动方程的算符．

11.7 洛仑兹变换的矩阵表示；无穷小生成元

我们现在转入讨论洛仑兹变换群．为使运算具体明确而不抽象，采用这样的矩阵表示是方便的，即由一个反变四元矢量的四个分量构成一个列矢量的四个元素．于是，坐标 x^0, x^1, x^2, x^3 就确定一个坐标矢量，其表示式是

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{11.79}$$

通常把两个四元矢量的矩阵标积 (a, b) 定义为 a 和 b 的诸元素乘积之和，或定义为 a 的转置对 b 的矩阵乘算：

$$(a, b) \equiv \tilde{a} b \tag{11.80}$$

这两种定义是等价的. 矩阵张量 $g_{\alpha\beta}$ 的表示式是 4×4 方阵:

$$g=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} \tag{11.81}$$

这时 $g^2=I$, I 是 4×4 单位矩阵. 协变坐标矢量是

$$gx=\begin{pmatrix}x^0\\-x^1\\-x^2\\-x^3\end{pmatrix} \tag{11.82}$$

这是由 g(11.81)对 x (11.79)进行矩阵乘算而得到的. 注意: 按现在的记号来写时, 两个四元矢量的标积(11.66)写作

$$a\cdot b=(a,gb)=(ga,b)=\tilde{a}gb \tag{11.83}$$

根据 11.3 节里所述的论证, 我们来求坐标的线性变换群,

$$x'=Ax \tag{11.84}$$

式中 A 为 4×4 方阵, 使得模方 (x,gx) 保持不变, 即

$$\tilde{x}'gx'=\tilde{x}gx \tag{11.85}$$

将(11.84)代入上式左边, 得等式

$$\tilde{x}\tilde{A}gAx=\tilde{x}gx$$

因为这个等式必须对一切坐标矢量 x 都成立, 所以 A 必须满足矩阵方程

$$\tilde{A}gA=g \tag{11.86}$$

我们可以直接从(11.86) 推知变换矩阵 A 的某些性质. 首先求出 A 的行列式. 将(11.86)两边取行列式, 我们得

$$\det(\tilde{A}gA)=\det g(\det A)^2=\det g$$

因为 $\det g=-1\neq0$, 我们得

$$\det A=\pm1$$

这里有两类变换：正常洛仑兹变换和非正常洛仑兹变换．前者相当于连续施以恒等变换，所以必须有 $\det A=+1$．对非正常洛仑兹变换来说，$\det A=-1$ 是充分条件而不是必要条件．这两类变换不能用 $\det A=\pm 1$ 来明确地区分，这个事实是由于时空的不定度规引起的．这一论点，可以举非正常洛仑兹变换的两个实例来说明：$A=g$(空间反演)，这时 $\det A=-1$；$A=-I$(空间和时间的反演)，这时$\det A=+1$．

A 的第二个性质，是完全确定群的一个变换所需要的参数的数目．因为 A 和 g 都是 4×4 矩阵，所以 (11.86) 相当于 A 的 $4^2=16$ 个元素的十六个方程．但由于转置时出现的对称性，这十六个方程不是完全独立的．因而对 A 的十六个元素只有

$$16-(1+2+3)=10$$

个线性独立方程．这意味着有六个自由参数，也就是说，洛仑兹群是一个六参数的群．为方便起见，我们认为这六个参数是：(*a*)三个参数(例如欧勒角)确定坐标轴的相对取向，(*b*)三个参数(例如 β的诸分量)确定两个惯性参照系的相对速度．我们顺便指出：对每六个参数来说，A 给出一个正常洛仑兹变换，同时就有一个用 $-A$ 来表示的非正常洛仑兹变换．今后我们只考虑正常洛仑兹变换．

我们可以按下述方法求出 A 的显明结构．假定

$$A=e^{L} \tag{11.87}$$

式中 L 是一个 4×4 矩阵．A 的行列式是①

$$\det A=\det(e^{L})=e^{\mathrm{Tr}\,L}$$

如果 L 是实矩阵，则排除了 $\det A=-1$．并且，如果 L 的迹为零，则 $\det A=+1$．因此，对正常洛仑兹变换来说，L 是一个迹为零的

① 为了证明这一结果，首先指出：一个矩阵的行列式或迹的值在相似变换下是不改变的．然后作一个相似变换，使 L 取对角形式．因而矩阵 A 将是对角化的，其诸元素是 L 相应元素的指数．于是立即得到此结果．

4×4 实矩阵. 方程(11.86)可以写成

$$g\tilde{A}g=A^{-1} \tag{11.88}$$

根据定义(11.87)和 $g^2=I$, 我们有

$$\tilde{A}=e^{\tilde{L}},\qquad g\tilde{A}g=e^{g\tilde{L}g},\qquad A^{-1}=e^{-L}$$

因此, (11.88)等价于

$$g\tilde{L}g=-L$$

或

$$\widetilde{gL}=-gL \tag{11.89}$$

于是, 矩阵 gL 是反对称的. 由 g(11.81)的性质显然可见, L 的一般形式是

$$L=\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ \hline L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{array}\right) \tag{11.90}$$

加进虚线是为了把矩阵 L 划分成两部分: 一、与固定惯性参照系中的普通转动相当的 3×3 反对称空间矩阵; 二、与从一惯性参照系到另一惯性参照系的洛仑兹变换或增速相当的矩阵的对称空间-时间部分.

矩阵(11.90) 及其六个参数是变换矩阵 A 的一种明显结构式[通过(11.87)]. 但是, 通常引进一组基本矩阵把 L 及其六个参数系统化, 这组基本矩阵由以下六个基本矩阵组成:

$$S_1=\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),\quad S_2=\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$S_3=\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{11.91}$$

$$K_1=\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & \mathbf{0} & \\ 0 & & & \end{array}\right), \quad K_2=\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 1 & & \mathbf{0} & \\ 0 & & & \end{array}\right),$$

$$K_3=\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & \mathbf{0} & \\ 1 & & & \end{array}\right)$$

矩阵 S_i 显然产生三维转动，而矩阵 K_i 产生增速. 为了以后参考，我们指出，这六个矩阵的平方都是对角矩阵，并具有下列形式：

$$S_1^2=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad S_2^2=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & -1 \end{pmatrix},$$

$$S_3^2=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \tag{11.92}$$

$$K_1^2=\begin{pmatrix}1&&&0\\&1&&\\&&0&\\0&&&0\end{pmatrix},\quad K_2^2=\begin{pmatrix}1&&&0\\&0&&\\&&1&\\0&&&0\end{pmatrix},$$

$$K_3^2=\begin{pmatrix}1&&&0\\&0&&\\&&0&\\0&&&-1\end{pmatrix}$$

并且可以证明：$(\epsilon\cdot\mathbf{S})^3=-\epsilon\cdot\mathbf{S}$ 和 $(\epsilon'\cdot\mathbf{K})^3=\epsilon'\cdot\mathbf{K}$，式中 ϵ 和 ϵ' 是任意实的单位三元矢量．于是，上列每个矩阵的任意乘幂都可以表为该矩阵或其平方的倍数．

现在我们可以把 L 的一般结果(11.90)写成另一种形式：

和
$$\left.\begin{aligned}L&=-\omega\cdot\mathbf{S}-\zeta\cdot\mathbf{K}\\A&=e^{-\omega\cdot\mathbf{S}-\zeta\cdot\mathbf{K}}\end{aligned}\right\}\tag{11.93}$$

式中 ω 和 ζ 是恒定的三元矢量．ω 的三个分量和 ζ 的三个分量相当于变换的六个参数．为了建立与前述结果(11.16)或(11.21)的关系，我们先考虑一种简单情况，即 $\omega=0$ 和 $\zeta=\zeta\epsilon_1$ 的情况．那末，$L=-\zeta K_1$，并且借助于(11.92)和 $K_1^3=K_1$，我们得

$$A=e^L=(I-K_1)^2-K_1\sinh\zeta+K_1^2\cosh\zeta\tag{11.94}$$

其显式是

$$A=\begin{pmatrix}\cosh\zeta&-\sinh\zeta&0&0\\-\sinh\zeta&\cosh\zeta&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\tag{11.95}$$

这个矩阵完全相当于变换式(11.21)①．如果 $\zeta=0$ 和 $\omega=\omega\epsilon_3$，同

① 读者回想一下，在11.3、11.4和11.5节里，我们没有区分上标和下标．在那几节里的一切矢量的分量，按(11.75)来说，都解释成反变分量．

样求得变换为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\omega & \sin\omega & 0\\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{11.96}$$

这个矩阵相当于坐标轴绕第3轴按顺时钟方向的一个转动.

对于沿任意一个方向的一个增速(无转动)来说,

$$A=e^{-\zeta\cdot\mathbf{K}}$$

增速矢量 ζ 可以用相对速度 β 写成

$$\zeta=\hat{\beta}\,\mathrm{tgh}^{-1}\beta$$

式中 $\hat{\beta}$ 是在两个惯性参照系的相对速度方向上的单位矢量. 于是,纯增速是

$$A_{\text{增速}}(\beta)=e^{-\hat{\beta}\cdot\mathbf{K}\,\mathrm{tgh}^{-1}\beta} \tag{11.97}$$

请读者作为习题来证明:上面这个变换的具体矩阵为

$$A_{\text{增速}}(\beta)=\begin{pmatrix}\gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3\\ -\gamma\beta_1 & 1+\dfrac{(\gamma-1)\beta_1^2}{\beta^2} & \dfrac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & \dfrac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2}\\ -\gamma\beta_2 & \dfrac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & 1+\dfrac{(\gamma-1)\beta_2^2}{\beta^2} & \dfrac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2}\\ -\gamma\beta_3 & \dfrac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} & \dfrac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} & 1+\dfrac{(\gamma-1)\beta_3^2}{\beta^2}\end{pmatrix} \tag{11.98}$$

方程 $x'=A_{\text{增速}}(\beta)\,x$ 是(11.19)的四个方程的矩阵表述.

(11.91)的六个矩阵是洛仑兹群的无穷小生成元的一种表示. 直接计算表明,它们满足下列对易关系:

$$\left.\begin{aligned}[S_i,S_j]&=\epsilon_{ijk}S_k\\ [S_i,K_j]&=\epsilon_{ijk}K_k\\ [K_i,K_j]&=-\epsilon_{ijk}S_k\end{aligned}\right\} \tag{11.99}$$

式中对易符号是 $[A,\ B]\equiv AB-BA$. 第一个关系相当于角动量的

对易关系；第二个关系仅仅表明，K 在转动下按一个矢量而变换；第三个关系表明，增速矩阵通常是不对易的．对易关系(11.99)[最后一个对易符号中含有特征负号]说明洛仑兹群的代数结构是 $SL(2,C)$ 或 $O(3,1)$．

11.8 托马斯进动

用不对易矩阵对洛仑兹变换所作的描述表明，接连施行几个洛仑兹变换得到的结果通常依赖于诸变换施行的次序．对易关系(11.99)说明，两个相继施行的洛仑兹变换相当于一个洛仑兹变换加一个三维转动．洛仑兹变换不对易性的运动学结果的一个实例，就是称为托马斯进动①的现象．为使讨论透彻，我们先叙述一下物理上的来龙去脉．

1926 年，乌仑贝克(Uhlenbeck)和古兹密特(Goudsmit)引进了电子自旋的概念，并证明了：假如电子具有的 g 因数为2，那末可以解释反常塞曼效应，又可以解释多重分裂的存在．但是，遇到一个困难，即观测到的精细结构裂距只等于理论预期值的一半．假如选 g 因数为 1，就正确地给出精细结构裂距，然而这时的塞曼效应是正常塞曼效应．只有用狄喇克的相对论性电子理论，才能完善地解释自旋，包括正确地解释 g 因数和固有的精细结构相互作用．但是，在经验自旋角动量和 g 因数为 2 的情形下，托马斯在1927年证明了：上述矛盾的根源在于相对论性运动学效应，当正确地计入这种效应时，既给出了反常塞曼效应，又给出了正确的精细结构裂距．这种所谓的托马斯进动也给出了原子核自旋-轨道相互作用的定性解释，并证明了为什么原子核双重线是“反转的”．

乌仑贝克-古兹密特假说是，电子具有自旋角动量 s(s 可以沿

① L. T. Thomas, *Phil. Mag.* 3, 1 (1927).

任一轴取量子化的值$\pm\hbar/2$)和磁矩μ,μ与$\mathbf{s}$的关系为

$$\mu=\frac{ge}{2mc}\mathbf{s} \tag{11.100}$$

式中g因数的值为$g=2$. 设电子以速度$\mathbf{v}$在外场$\mathbf{E}$和$\mathbf{B}$中运动. 则在电子的静止参照系中电子角动量的运动方程是

$$\left(\frac{d\mathbf{s}}{dt}\right)_{\text{静止参照系}}=\mu\times\mathbf{B}' \tag{11.101}$$

式中$\mathbf{B}'$为该参照系中的磁感应强度. 在11.10节里我们将证明: 在随电子运动的一个坐标系中,磁感应强度是

$$\mathbf{B}'\simeq\left(\mathbf{B}-\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{E}\right) \tag{11.102}$$

式中我们已忽略了(v^2/c^2)级项. 于是,(11.101)变成

$$\left(\frac{d\mathbf{s}}{dt}\right)_{\text{静止参照系}}=\mu\times\left(\mathbf{B}-\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{E}\right) \tag{11.103}$$

方程(11.103)相当于电子自旋的相互作用能:

$$U'=-\mu\cdot\left(\mathbf{B}-\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{E}\right) \tag{11.104}$$

在一个原子中, 电场力$e\mathbf{E}$可以近似地看作一个球对称平均势能$V(r)$的负梯度. 对单电子原子来说, $e\mathbf{E}$当然恰好就是$V(r)$的负梯度. 于是,

$$e\mathbf{E}=-\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{dV}{dr} \tag{11.105}$$

这时,自旋相互作用能可以写成

$$U'=-\frac{ge}{2mc}\mathbf{s}\cdot\mathbf{B}+\frac{g}{2m^2c^2}(\mathbf{s}\cdot\mathbf{L})\frac{1}{r}\frac{dV}{dr} \tag{11.106}$$

式中$\mathbf{L}=m(\mathbf{r}\times\mathbf{v})$是电子的轨道角动量. 这个相互作用能量正确地给出反常塞曼效应, 但它具有的自旋-轨道相互作用太大, 为正确值的两倍.

(11.106)的误差可以追究到(11.101), (11.101)作为电子自

旋的运动方程是不妥的. (11.101)的左边给出在电子静止参照系中自旋的变率. 正如托马斯最先指出的,如果坐标系旋转的话,那末自旋的总时间变率,或更普遍地说,任一矢量G的总时间变率由下列熟知结果给出①:

$$\left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right)_{\text{不旋转}}=\left(\frac{d\mathbf{G}}{dt}\right)_{\text{静止参照系}}+\boldsymbol{\omega}_T\times\mathbf{G} \tag{11.107}$$

式中 $\boldsymbol{\omega}_T$ 是托马斯发现的转动角速度. 当应用于电子自旋时,(11.107)给出运动方程

$$\left(\frac{d\mathbf{s}}{dt}\right)_{\text{不旋转}}=\mathbf{s}\times\left(\frac{ge\mathbf{B}'}{2mc}-\boldsymbol{\omega}_T\right) \tag{11.108}$$

对应的相互作用能是

$$U=U'+\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\omega}_T \tag{11.109}$$

式中 U' 为电磁自旋相互作用(11.104)或(11.106).

产生托马斯进动频率 $\boldsymbol{\omega}_T$ 的原因是电子在外力作用下运动时受到加速. 考虑一个电子以速度 $\mathbf{v}(t)$ 相对于实验室惯性参照系而运动. 电子静止坐标参照系定义为一系列共动惯性参照系,这一连串的参照系原点在每一瞬时都以电子速度而运动. 设静止参照系相对于实验室的速度,在实验室时间 t 时为 $\mathbf{v}(t)=c\boldsymbol{\beta}$,在实验室时间 $t+\delta t$ 时为 $\mathbf{v}(t+\delta t)=c(\boldsymbol{\beta}+\delta\boldsymbol{\beta})$. 时间 t 的电子静止参照系坐标和实验室参照系坐标之间的关系是

$$x'=A_{\text{增速}}(\boldsymbol{\beta})x \tag{11.110}$$

在时间 $t+\delta t$ 时,此关系是

$$x''=A_{\text{增速}}(\boldsymbol{\beta}+\delta\boldsymbol{\beta})x \tag{11.111}$$

最重要的是要注意到,这些从实验室到静止参照系的坐标变换,在此处是用无转动的纯洛仑兹增速来确定的. 我们感兴趣的是电子静止参照系的坐标轴作为时间函数的变化情况. 因此,我们想要

① 例如,参看 *Goldstein* 书第 133 页.

的是两组静止参照系坐标之间的关系，一组是 t 时刻的 x'，另一组是 $t+\delta t$ 时刻的 x''. 这一关系是

$$x''=A_T x'$$

式中

$$A_T=A_{增速}(\beta+\delta\beta)A_{增速}^{-1}(\beta)=A_{增速}(\beta+\delta\beta)A_{增速}(-\beta) \quad (11.112)$$

为了计算 A_T，适当选择实验室参照系的坐标轴，如图 11.7 所示.

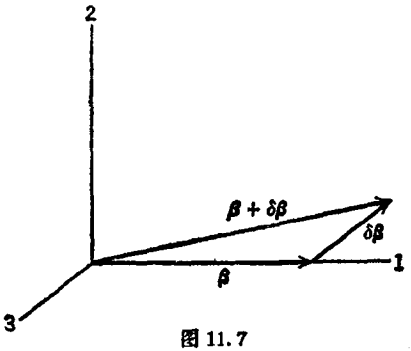


图 11.7

在时间 t 时速度矢量 β 与 1 轴平行，速度增量 $\delta\beta$ 位于 1-2 平面内. 由(11.98)得

$$A_{增速}(-\beta)=\begin{pmatrix}\gamma & \gamma\beta & 0 & 0\\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad (11.113)$$

同样，只保留 $\delta\beta$ 的一次项，由(11.98)得

$$A_{增速}(\beta+\delta\beta)=$$

$$\begin{pmatrix}\gamma+\gamma^3\beta\delta\beta_1 & -(\gamma\beta+\gamma^3\delta\beta_1) & -\gamma\delta\beta_2 & 0\\ -(\gamma\beta+\gamma^3\delta\beta_1) & \gamma+\gamma^3\beta\delta\beta_1 & \left(\frac{\gamma-1}{\beta}\right)\delta\beta_2 & 0\\ -\gamma\delta\beta_2 & \left(\frac{\gamma-1}{\beta}\right)\delta\beta_2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad (11.114)$$

按(11.112)直接作矩阵乘算,得

$$A_T=\begin{pmatrix} 1 & -\gamma^2\delta\beta_1 & -\gamma\delta\beta_2 & 0 \\ -\gamma^2\delta\beta_1 & 1 & \left(\frac{\gamma-1}{\beta}\right)\delta\beta_2 & 0 \\ -\gamma\delta\beta_2 & -\left(\frac{\gamma-1}{\beta}\right)\delta\beta_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11.115}$$

上式表示无穷小洛仑兹变换,这种变换可以用矩阵S和K写成

$$A_T=1-\left(\frac{\gamma-1}{\beta^2}\right)(\boldsymbol{\beta}\times\delta\boldsymbol{\beta})\cdot\mathbf{S}-(\gamma^2\delta\beta_{/\!/}+\gamma\delta\beta_\perp)\cdot\mathbf{K} \tag{11.116}$$

式中$\delta\beta_{/\!/}$和$\delta\beta_\perp$分别为$\delta\boldsymbol{\beta}$的平行于和垂直于$\boldsymbol{\beta}$的分量. 准确到$\delta\boldsymbol{\beta}$的一次项,(11.116)等价于

$$A_T=A_{增速}(\Delta\boldsymbol{\beta})R(\Delta\boldsymbol{\Omega})=R(\Delta\boldsymbol{\Omega})A_{增速}(\Delta\boldsymbol{\beta}) \tag{11.117}$$

式中

$$A_{增速}(\Delta\boldsymbol{\beta})=1-\Delta\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{K}$$

$$R(\Delta\boldsymbol{\Omega})=1-\Delta\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{S}$$

是可对易的无穷小增速和转动,其速度为

$$\Delta\boldsymbol{\beta}=\gamma^2\delta\beta_{/\!/}+\gamma\delta\beta_\perp$$

转动角为

$$\Delta\boldsymbol{\Omega}=\left(\frac{\gamma-1}{\beta^2}\right)\boldsymbol{\beta}\times\delta\boldsymbol{\beta}=\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}\times\delta\boldsymbol{\beta}$$

于是,一个变换到速度为$c(\boldsymbol{\beta}+\delta\boldsymbol{\beta})$的参照系的纯洛仑兹增速变换(11.111),等效于先施行一个变换到速度为$c\boldsymbol{\beta}$的参照系的增速变换(11.110),接着再施行一个无穷小洛仑兹变换,后者由一个速度为$c\Delta\boldsymbol{\beta}$的增速变换和一个转动$\Delta\boldsymbol{\Omega}$组成.

把运动参照系按一系列相继的电子静止参照系来解释时,我们并不需要转动和增速变换. 只要用无转动的无穷小增速变换来

描述静止参照系的演变，就可以预料像(11.101)那样的非相对论性运动方程有效．这样就使我们可以讨论 $t+\delta t$ 时刻的静止参照系坐标，这些坐标由 t 时刻的静止参照系坐标通过增速运算 $A_{增速}(\Delta\boldsymbol{\beta})$ 给出，而不是通过 A_T 来给出．用 x''' 表示这些坐标，我们有

$$x'''=A_{增速}(\Delta\boldsymbol{\beta})x'$$

利用(11.117)、(11.112)和(11.110)，我们可以把 x''' 用实验室坐标来表示：

$$x'''=R(-\Delta\boldsymbol{\Omega})A_{增速}(\boldsymbol{\beta}+\delta\boldsymbol{\beta})x \tag{11.118}$$

由 x''' 确定的静止参照系是一个相对于增速实验室参照系 (x'') 的坐标轴转过了 $-\Delta\boldsymbol{\Omega}$ 的参照系．如果一个物理矢量 G 在静止参照系中的(原时)时间变率为 $(d\mathbf{G}/d\tau)$，那末，静止参照系坐标轴相对于实验室的进动，使得该矢量具有(11.107)的相对于实验室参照系的总时间变率，其中

$$\boldsymbol{\omega}_T=-\lim_{\delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\Omega}}{\delta t}=\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{v}}{c^2} \tag{11.119}$$

这里 a 是实验室参照系中的加速度，精确地说，$(d\mathbf{G}/dt)_{静止参照系}=\gamma^{-1}(d\mathbf{G}/d\tau)_{静止参照系}$．

托马斯进动的起源是纯运动学的．不管怎样，如果加速度有一个垂直于 v 的分量，那末就有一个托马斯进动，后者与其它效应诸如磁矩在磁场中的进动等无关．

对原子中的电子来说，加速度是由屏蔽库仑场(11.105)引起的．因此，托马斯角速度是

$$\boldsymbol{\omega}_T\simeq\frac{-1}{2c^2}\frac{\mathbf{r}\times\mathbf{v}}{m}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}=\frac{-1}{2m^2c^2}\mathbf{L}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr} \tag{11.120}$$

由(11.109)和(11.106)显然可知，托马斯进动对能量的附加贡献使自旋-轨道耦合减少，得

$$U=-\frac{ge}{2mc}\mathbf{s}\cdot\mathbf{B}+\frac{(g-1)}{2m^2c^2}\mathbf{s}\cdot\mathbf{L}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr} \tag{11.121}$$

当 $g=2$ 时，(11.106)的自旋-轨道相互作用减少 1/2(有时叫做托马斯因数)，这正是一个原子电子的正确的自旋-轨道耦合作用能所要求的.

在原子核中，核子由于特定核力的作用而具有巨大的加速度. 相对来说，电磁力是较弱的. 如按近似方法处理，我们可以把核子看作是分别在一个短程球对称引力势阱 $V_N(r)$ 中运动着. 这时，每个核子另外还将受到一种自旋-轨道相互作用，后者由(11.109)给出，略去其中微小的电磁贡献 U'，则得

$$U_N \simeq \mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\omega}_T \tag{11.122}$$

式中 ω_T 所包含的加速度由 $V_N(r)$ 决定. ω_T 的形式与(11.120)相同，其中 V 用 V_N 代替. 于是，核自旋-轨道相互作用近似地为

$$U_N \simeq -\frac{1}{2M^2c^2}\mathbf{s}\cdot\mathbf{L}\,\frac{1}{r}\,\frac{dV_N}{dr} \tag{11.123}$$

将(11.123)与原子公式(11.121)加以比较，我们注意到：V 和 V_N 都是引力势(虽然 V_N 大得多)，所以自旋-轨道能的正负号是相反的. 这意味着，在原子核中，单粒子能级形成"反转的"双重线. 利用适当形式的 V_N，(11.123)同观测到的原子核自旋-轨道分裂定性符合①.

在 11.11 节里，将用更精辟的观点阐述托马斯进动现象，在那里将讨论 BMT 方程.

11.9 电荷的不变性；电动力学的协变性

在狭义相对论创立以前，洛仑兹和庞加莱证明了电动力学方程的形式在洛仑兹变换下的不变性. 麦克斯韦方程组和洛仑兹力方程的协变性或形式不变性意味着，这些方程所含的诸量 ρ、$\mathbf{J}$、$\mathbf{E}$、

① 例如，参看 A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure*, Vol 1, W. A. Benjamin, New York(1969)的 2.4c 节.

B 在洛仑兹变换下以完全确定的方式而变换. 这时，这些方程中的各项在洛仑兹变换下可以具有一致的特性.

首先考虑电荷为 q 的一个粒子的洛仑兹力方程，

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=q\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\right) \tag{11.124}$$

我们知道，$\mathbf{p}$ 作为能量动量四元矢量的空间部分而变换，

$$p^{\alpha}=(p_0,\mathbf{p})=m(U,\mathbf{U})$$

式中 $p_0=E/c, U^{\alpha}$ 是四元速度(11.36). 如果在求导数时我们用原时 τ(11.26)代替 t，就可以把(11.124)写为

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau}=\frac{q}{c}(U_0\mathbf{E}+\mathbf{U}\times\mathbf{B}) \tag{11.125}$$

左边是一个四元矢量的空间部分. 对应的时间分量方程是粒子的能量变化率(6.110)：

$$\frac{dp_0}{d\tau}=\frac{q}{c}\mathbf{U}\cdot\mathbf{E} \tag{11.126}$$

如果力方程和能量变化方程都是洛仑兹协变式，那末以上两方程右边必定构成一个四元矢量的四个分量. 它们涉及下列三个因子的乘积：电荷 q、四元速度和电磁场. 如果这三个因子中有两个因子的变换性质已知，并要求具有洛仑兹协变性，那末就可以确定第三个因子的变换性质.

就我们所知，电荷是绝对守恒的. 而且，基本粒子的电荷的量值(因而任一电荷系统的电荷的量值)是质子电荷的整数倍. 已发表的文献中说①，有人用实验方法证实了电子电荷和质子电荷的相对量值比小于 10^{-19}，而金氏未发表的实验结果，进一步改进了

---

① J. G. King, *Phys. Rev. Letters* 5, 562(1960); L. J. Fraser, E. R. Carlson, and V. W. Hughes, *Bull. Am. Phys. Soc.* 13, 636(1968).

这一极限值，精确度几乎提高了两个数量级①. 我们可以认为这些实验结果证实了电荷在洛仑兹变换下的不变性，或更具体地说，一个粒子的观测电荷与该粒子的速率无关. 在金氏的几个实验中，探测了在氢气或氦气漏泄时残留于容器内的剩余电荷. 金氏没有观测到什么效应，证实了 H_2 和 He 每个分子净电荷都小于 $10^{-19}e$. 因为 He 中电子运动的速率是 H_2 中的两倍，所以电子的电荷不可能明显依赖于电子的速率，至少当速率的数量级为 $(0.01\text{-}0.02)c$ 时是这样的. 在弗雷泽(Fraser)、卡耳孙(Carlson)和赫格斯(Hughes)的实验中，利用原子射束仪器试图观测"中性"铯和钾原子射束的静电偏转. 也没有观测到任何效应，从而推断质子电荷和电子电荷的相对量值比小于 3.5×10^{-19}. 铯和钾的原子序数分别为 $Z=55$ 和19. 这样，铯中 K 层电子至少以数量级为 $0.4c$ 的速率而运动. 在 10^{-18}-10^{-19} 的精度内观测到的铯原子仍是中性的，这是电荷不变性的强有力的证据②.

实验上的电荷不变性以及洛仑兹力方程(11.125)和(11.126)的洛仑兹协变性的要求，决定了电磁场的洛仑兹变换性质. 例如，根据(11.126)，要求 $\mathbf{U}\cdot\mathbf{E}$ 是一个四元矢量的时间分量，这一要求确定了 $\mathbf{E}$ 的分量是二秩张量 $F^{\alpha\beta}$ 的时间-空间部分，也就是说，$\mathbf{E}\cdot\mathbf{U}=F^{0\beta}U_\beta$. 虽然沿这些思路可以求得场强张量 $F^{\alpha\beta}$ 的显式，但是我们现在还是先讨论麦克斯韦方程本身.

为简单起见，我们考虑微观麦克斯韦方程组，这方程组不含 $\mathbf{D}$

---

① 在金氏(J. G. King)未发表的几个实验中，测出了 H_2、He 和 SF_6 各种分子的电荷的最新极限值，并以电子电荷为单位，这些值分别为 1.8 ± 5.4，-0.7 ± 4.7 和 0 ± 4.3 乘 10^{-21}. 此结果引自金氏的私人通信.

② 只提电子会使人误解. 原子核内质子和中子以 $(0.2\text{—}0.3)c$ 数量级的速率而运动. 所以金氏对氦测得的结果已经在相当可观的速率上验证了电荷的不变性. 当然，如果我们满足于 $v/c\sim10^{-3}$ 时在 10^{-19} 的精度内的不变性，那末只要观测大块物质在加热或冷却时的电中性就够了.

和H. 首先考虑电荷密度 $\rho(\mathbf{x}, t)$、电流密度 $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ 和连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla \cdot \mathbf{J}=0 \tag{11.127}$$

据根 11.6 节末的讨论，特别是(11.77)，我们就自然地假设 ρ 和 $\mathbf{J}$ 一起构成一个四元矢量 J^{α}：

$$J^{\alpha}=(c\rho, \mathbf{J}) \tag{11.128}$$

这时连续性方程(11.127)取显然协变的形式，

$$\partial_{\alpha} J^{\alpha}=0 \tag{11.129}$$

式中协变微分算符 ∂_{α} 由(11.76)给出. 根据电荷不变性可以推知 J^{α} 是一个合法的四元矢量. 一个小体积元 d^3x 中的电荷是 ρd^3x. 因为这是一个实验上的不变量，所以 $\rho' d^3x'=\rho d^3x$ 成立. 但是，四维体积元 $d^4x=dx_0 d^3x$ 是一个洛仑兹不变量：

$$d^4x'=\frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} d^4x=\det A d^4x=d^4x$$

因此，等式 $\rho' d^3x'=\rho d^3x$ 意味着，$c\rho$ 像 x^0 那样变换，即 $c\rho$ 是四元矢量(11.128)的时间分量.

在洛仑兹规范群中，矢势 $\mathbf{A}$ 和标势 Φ 的波动方程组是

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}-\nabla^2 \mathbf{A}&=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}-\nabla^2 \Phi&=4\pi\rho \end{aligned}\right\} \tag{11.130}$$

洛仑兹条件为

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\nabla \cdot \mathbf{A}=0 \tag{11.131}$$

(11.130)中微分算符形式是不变的四维拉普拉斯算符(11.78)，而(11.130)右边是一个四元矢量的四个分量. 显然，洛仑兹协变性要求势 Φ 和 $\mathbf{A}$ 构成一个四元矢势

$$A^{\alpha}=(\Phi, \mathbf{A}) \tag{11.132}$$

这时，波动方程组和洛仑兹条件具有明显的协变形式，即

$$\left.\begin{aligned}&\Box A^{\alpha}=\frac{4\pi}{c}J^{\alpha}\\ &\text{和}\\ &\partial_{\alpha}A^{\alpha}=0.\end{aligned}\right\}\tag{11.133}$$

我们用矢势和标势来表示场 **E** 和**B**，

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\nabla\Phi\\ &\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}\end{aligned}\right\}\tag{11.134}$$

E 和 **B** 的 x 分量显然是

$$\left.\begin{aligned}&E_x=-\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}-\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-(\partial^0A^1-\partial^1A^0)\\ &B_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}=-(\partial^2A^3-\partial^3A^2)\end{aligned}\right\}\tag{11.135}$$

式中第二种形式是根据(11.132)和 $\partial^{\alpha}=(\partial/\partial x_0,\ -\nabla)$写出的. 这些方程表明，电场和磁场(一共六个分量)是下列二秩反对称场强张量的元素:

$$F^{\alpha\beta}=\partial^{\alpha}A^{\beta}-\partial^{\beta}A^{\alpha}\tag{11.136}$$

显然，场强张量的矩阵形式是

$$F^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}0 & -E_x & -E_y & -E_z\\ E_x & 0 & -B_z & B_y\\ E_y & B_z & 0 & -B_x\\ E_z & -B_y & B_x & 0\end{pmatrix}\tag{11.137}$$

我们写出具有两个协变指标的场强张量，以供参考.

$$F_{\alpha\beta}=g_{\alpha\nu}F^{\gamma\delta}g_{\delta\beta}=\begin{pmatrix}0 & E_x & E_y & E_z\\ -E_x & 0 & -B_z & B_y\\ -E_y & B_z & 0 & -B_x\\ -E_z & -B_y & B_x & 0\end{pmatrix}\tag{11.138}$$

令 $\mathbf{E}\to-\mathbf{E}$，就可由 $F^{\alpha\beta}$ 求得 $F_{\alpha\beta}$ 的元素. 另一个有用的量是对偶场强张量 $\mathscr{F}^{\alpha\beta}$. 我们首先定义全反对称四秩张量 $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$:

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}=\begin{cases}+1, & \text{当 } \alpha=0,\beta=1,\gamma=2,\delta=3 \text{ 和 } \alpha,\beta,\gamma,\delta \text{ 为 } 0,1,2,3 \text{ 的任意偶排列时;}\\ -1, & \text{当 } \alpha,\beta,\gamma,\delta \text{ 为 } 0,1,2,3 \text{ 的任意奇排列时;}\\ 0, & \text{若有任意两个指标相等时.}\end{cases}$$

(11.139)

注意:所有非零元素具有一个时间指标和三个(不同的)空间指标,并且 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}=-\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$. 张量 $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ 是空间反演下的赝张量.用四个不同的四元矢量将 $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ 缩并,并检查所得的转动不变量的空间反演性质,就可以看出 $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ 是空间反演下的赝张量. 对偶场强张量定义如下:

$$\mathscr{F}^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta}=\begin{pmatrix}0 & -B_x & -B_y & -B_z\\ B_x & 0 & E_z & -E_y\\ B_y & -E_z & 0 & E_x\\ B_z & E_y & -E_x & 0\end{pmatrix} \tag{11.140}$$

令(11.137)中 $\mathbf{E}\to\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{B}\to-\mathbf{E}$, 由 $F^{\alpha\beta}$ 就得对偶张量 $\mathscr{F}^{\alpha\beta}$ 的元素. 这是对偶变换(6.151)的一种特殊情形.

为了完成电动力学协变性的证明, 我们必须把麦克斯韦方程组本身写成明显的协变形式. 两个非齐次方程是

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho$$

$$\nabla\times\mathbf{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$

这两个方程可用 $F^{\alpha\beta}$ 和四元电流 J^{α} 写成下列协变形式:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta}=\frac{4\pi}{c}J^{\beta} \tag{11.141}$$

同样,两个齐次麦克斯韦方程

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0,\ \nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0$$

可以用对偶场强张量写成

$$\partial_\alpha \mathscr{F}^{\alpha\beta}=0 \tag{11.142}$$

若不用 $\mathscr{F}^{\alpha\beta}$ 而用 $F^{\alpha\beta}$ 来写，这些齐次方程就变成下列四个方程：

$$\partial^\alpha F^{\beta\nu}+\partial^\beta F^{\nu\alpha}+\partial^\nu F^{\alpha\beta}=0 \tag{11.143}$$

式中 α, β, ν 是整数 0, 1, 2, 3 中的任意三个数.

利用 J^α 的定义(11.128)、A^α 的定义(11.132)和 $F^{\alpha\beta}$ 的定义(11.136)，再加上波动方程组(11.133)或麦克斯韦方程组(11.141)和(11.142)，就可以证明电磁学方程的协变性. 为了完成这个讨论，我们把洛仑兹力方程(11.125)和能量变化率方程(11.126)写成明显的协变形式：

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau}=m\frac{dU^\alpha}{d\tau}=\frac{q}{c}F^{\alpha\beta}U_\beta \tag{11.144}$$

电磁场和带电粒子的组合系统的守恒定律的协变表述，运动电荷的电磁场的协变能，这两问题放在第十二章里讨论，在那里，将介绍拉格朗日函数的表达.

对于宏观麦克斯韦方程组来说，必须区别两个场强张量，即 $F^{\alpha\beta}=(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ 和 $G^{\alpha\beta}=(\mathbf{D}, \mathbf{H})$，这里 $F^{\alpha\beta}$ 由(11.137)给出，$G^{\alpha\beta}$ 是由(11.137)通过代换 $\mathbf{E}\to\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{B}\to\mathbf{H}$ 而得到的. 这时，麦克斯韦方程组的协变形式是

$$\partial_\alpha G^{\alpha\beta}=\frac{4\pi}{c}J^\beta,\quad \partial_\alpha \mathscr{F}^{\alpha\beta}=0 \tag{11.145}$$

显然，由于场(E, B)和(D, H)按反对称二秩张量而变换，电极化强度 P 和负的磁化强度 $-\mathbf{M}$ 也构成一个相似的反对称二秩张量. 已知这些量的含义是媒质静止参照系中原子性质的宏观平均，利用这些量就能阐明运动宏观物质的电动力学. 上述是闵可夫斯基等人发展的电动力学的基本内容. 关于这一较大和较重要课题的详细内容，读者可以查阅本章末援引的文献.

11.10 电磁场的变换

因为场 **E** 和 **B** 是二秩场强张量 $F^{\alpha\beta}$ 的诸元素，所以它们在一惯性参照系 K' 中的值可以按下式用另一惯性参照系 K 中的值来表示：

$$F'^{\alpha\beta}=\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}}F^{\gamma\delta} \tag{11.146}$$

按 11.7 节的矩阵符号，上式可以写为

$$F'=AF\tilde{A} \tag{11.147}$$

式中 F 和 F' 是 4×4 矩阵(11.137)，A 是(11.93)的洛仑兹变换矩阵．对于特殊的洛仑兹变换(11.95)，即相当于沿 x_1 轴、速率为 $c\beta$ 的一个从不带撇参照系到带撇参照系的增速变换，具体的变换方程式是

$$\begin{aligned} E'_1&=E_1 & B'_1&=B_1\\ E'_2&=\gamma(E_2-\beta B_3) & B'_2&=\gamma(B_2+\beta E_3)\\ E'_3&=\gamma(E_3+\beta B_2) & B'_3&=\gamma(B_3-\beta E_2) \end{aligned} \tag{11.148}$$

在这里和在下面，下标 1, 2, 3 表示普通的笛卡儿空间坐标，不是协变指标．照例，通过交换带撇和不带撇量，并令 $\beta\to-\beta$，求得(11.148)的反变换．对于从参照系 K 到相对于 K 以速度 **v** 运动的参照系 K' 的广义洛仑兹变换来说，场的变换可以写成

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}'&=\gamma(\mathbf{E}+\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B})-\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E})\\ \mathbf{B}'&=\gamma(\mathbf{B}-\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E})-\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{B}) \end{aligned}\right\} \tag{11.149}$$

这些场变换方程类似于坐标变换(11.19)．变换(11.149)表明，**E** 和 **B** 不是独立存在的．一坐标系中的纯电场或纯磁场，在另一坐标系中将以电场和磁场的混合场出现．当然，还要加以某些限制(参看习题 11.12)，例如，由于这些限制，使得一坐标系中的纯静

电场不可能变换为另一坐标系中的纯静磁场. 但是, 电场和磁场完全是互相关联的, 因此, 我们应该讨论电磁场 $F^{\alpha\beta}$, 而不去分别讨论 **E** 或 **B**.

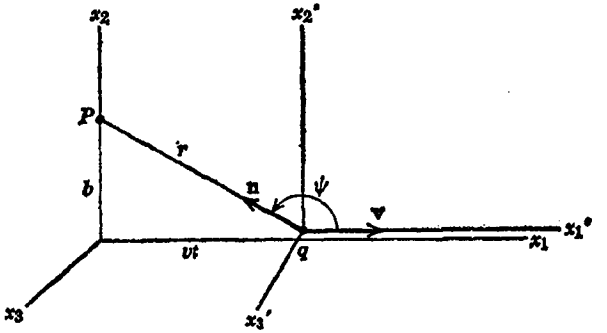


图 11.8 带有电荷 q 的粒子以恒定速度 v 运动, 并在碰撞参数为 b 的地方通过观测点 P.

作为电磁场变换的一个例子, 我们来考虑当点电荷 q 沿直线路径以速度 v 运动时, 在坐标系 K 中观测者所看到的场. 这电荷静止在坐标系 K' 中, 场的变换是由(11.148)或(11.149)的反变换给出. 我们假定, 电荷沿正 x_1 方向运动, 它与观测者的最近距离为 b. 图 11.8 画出了适当选择的一组坐标轴. 观测者站在 P 点. 当 $t=t'=0$ 时, 这两个坐标系的原点重合, 电荷 q 离观测者的距离最近. 在坐标系 K' 中观测者所在的 P 点(即要计算场值的点)的坐标为 $x_1'=-vt'$, $x_2'=b$, $x_3'=0$, 它离 q 的距离为 $r'=\sqrt{b^2+(vt')^2}$. 我们必须用 K 的坐标来表示 r'. 唯一需要变换的坐标是时间 $t'=\gamma[t-(v/c^2)x_1]=\gamma t$, 因为在坐标系 K 中 P 点的坐标 $x_1=0$. 在相对于电荷静止的坐标系 K' 中, 观测点的电场和磁场是

$$\left.\begin{aligned} &E_1'=-\frac{qvt'}{r'^3},\ E_2'=\frac{qb}{r'^3},\ E_3'=0\\ &B_1'=0,\qquad B_2'=0,\quad B_3'=0 \end{aligned}\right\} \tag{11.150}$$

用 K 的坐标来表示, 非零的场分量为

$$E_1'=-\frac{q\gamma vt}{(b^2+\gamma^2v^2t^2)^{3/2}},\ E_2'=\frac{qb}{(b^2+\gamma^2v^2t^2)^{3/2}} \qquad (11.151)$$

这时，利用(11.148)的反变换，我们求得坐标系K中的变换场为：

$$\left.\begin{aligned} E_1&=E_1'=-\frac{q\gamma vt}{(b^2+\gamma^2v^2t^2)^{3/2}}\\ E_2&=\gamma E_2'=\frac{\gamma qb}{(b^2+\gamma^2v^2t^2)^{3/2}}\\ B_3&=\gamma\beta E_2'=\beta E_2 \end{aligned}\right\} \qquad (11.152)$$

其它分量都等于零.

当电荷速度接近光速时，场(11.152)显示出有趣的特性. 首先，观测到沿x_3方向的磁感应强度. 当$\beta\to1$时，这磁场变得几乎等于横电场E_2. 甚至在$\gamma=1$的非相对论性速度下，这磁感应强度等于

$$\mathbf{B}\simeq\frac{q}{c}\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{r}}{r^3}$$

上式正好是运动电荷的磁场的安培-毕奥-萨伐尔表式. 上式显然可以直接从(11.149)的反变换求得. 在高速率下，即当$\gamma\gg1$时，我们看到，巅值横向电场$E_2(t=0)$就等于γ乘其非相对论值. 然而，在同样极限下，在P点具有可察觉的场强的时间间隔减少了. 具有可察觉的场强的时间间隔显然是

$$\Delta t\simeq\frac{b}{\gamma v} \qquad (11.153)$$

当γ增加时，巅值场强按比例增加，但它们的时间间隔则按比例减少. 场与速度v乘积对时间的积分跟速度无关. 图 11.9a 指出了横向电场、横向磁场和纵向电场的这种特性. 当$\beta\to1$时，P点的观测者看到的互相垂直的横向电场与横向磁场几乎相等. 这些场，与沿x_1方向传播的平面偏振辐射脉冲场没有区别. 额外的纵向电场很快地从正值变到负值，其时间积分为零. 如果观测者的

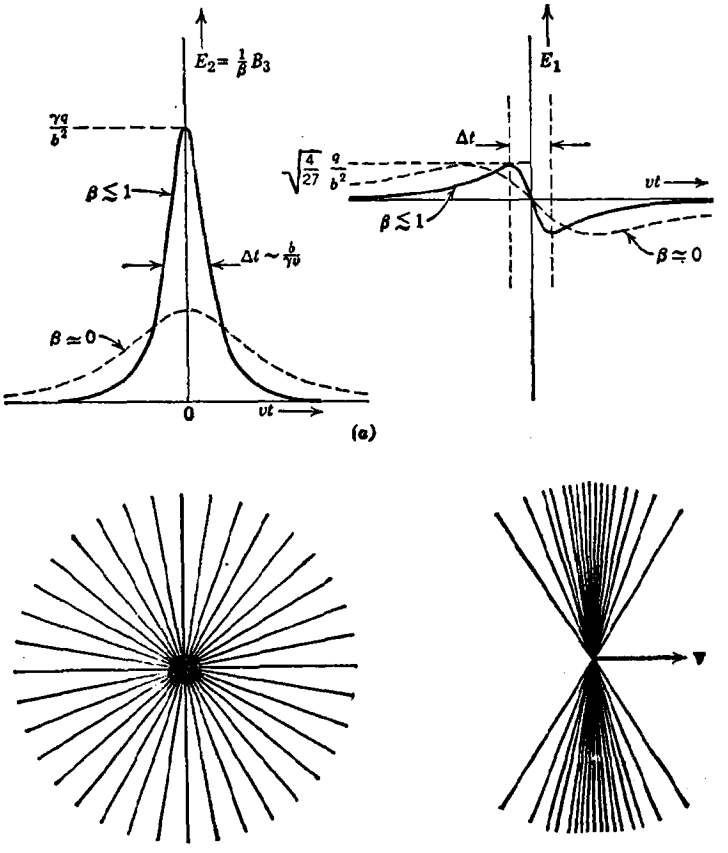


图 11.9　一个作匀速运动的带电粒子产生的场．(*a*) 图 11.8 中观测点 P 处的场与时间的函数关系．(*b*) 静止粒子和运动($\gamma = 3$)粒子的电力线．

探测仪器有一点惯性，则它对这个纵向场不会有反应．因此，实际上他将只观察到横向场．在第十五章里将利用相对论性带电粒子的场与电磁辐射脉冲的场的这种等效性．

场(11.152)和图 11.9*a* 的曲线着重指出了一个固定观测点处的场对时间的依赖关系．根据场相对于电荷本身在实验室中的瞬

时位置的空间变化，可以给出另一种描述. 由(11.152)可见，$\dot{E}_1/\dot{E}_2=-vt/b$. 对照图 11.8，可以看出：电场是沿着 n 的方向，恰如一个静库仑场，n 是从电荷本身位置到观测点的单位径向矢量. 用图 11.8 所示的电荷本身位置到观测点的径向距离 r 和角 $\psi=\cos^{-1}(\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{v}})$ 来表示(11.152)中的分母，我们得到用电荷本身位置表述的电场：

$$\boxed{\mathbf{E}=\frac{q\mathbf{r}}{r^3\gamma^2(1-\beta^2\sin^2\psi)^{3/2}}} \tag{11.154}$$

电场是辐向场，然而只当 $\beta=0$ 时电力线才是各向同性的分布. 沿运动方向($\psi=0,\pi$)的场强比各向同性分布的场强小了一个因子 γ^{-2}，而在横向($\psi=\pi/2$)上的场强则大一个因子 γ. 图 11.9*b* 所示电力线的这种"扫帚"型图样，是与图 11.9*a* 所示时间特性相当的空间"快像". 电力线的横向压缩可以看作斐兹杰惹-洛仑兹收缩的结果.

11.11 在均匀或慢变化外场中自旋的相对论性运动方程

在论述托马斯进动的 11.8 节里，已经讨论了一个粒子的运动对其自旋的进动所产生的各种效应. 本节里，我们利用洛仑兹协变性概念进行另一种更精辟的讨论，这种讨论导出大家熟知的自旋运动的 BMT 方程①. 利用(11.100)给出的磁矩，静止参照系自旋运动方程(11.101)是

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt'}=\frac{ge}{2mc}\mathbf{s}\times\mathbf{B}' \tag{11.155}$$

① 不是根据纽约市一条地下铁道线命名的，而是由于 V. Bargmann, L. Michel, 和 V. L. Telegdi 三位作者姓氏的第一个字母组成的，*Phys. Rev. Letters*, **2**, 435(1959). 实际上，这个方程早已建立；托马斯在 1927 年发表了一个等效的方程(参看第 88 页脚注援引的文献)；在那同一时期，夫伦克耳(Frenkel)也讨论了相似的方程；克喇末(Kramers)在二十世纪 30 年代讨论了 $g=2$ 的方程.

式中撇号表示在静止参照系中确定的量，s 是静止参照系中的自旋. 这个方程适用于质量为 m、电荷为 e、自旋为 s 的粒子，而且该粒子的磁偶极矩中的朗德 g 因子等于 g. 这是一个经典方程，但这方程与量子力学的海森伯自旋算符运动方程相同，或换句话说，与系统的极化矢量的运动方程相同.

(α) 协变运动方程

为了得到(11.155)的相对论性普遍式，必须首先将自旋 s 从粒子静止参照系中的一个三元矢量加以推广. 这种推广有两条路径. 一条路径是：由11.9节末得知 **P** 和 $-\mathbf{M}$ 构成一个反对称二秩张量. 这样，μ 可以推广为二秩张量，因此，s 也可以推广为一个二秩张量 $S^{\alpha\beta}$. 另一条较简单的路径是：这样定义一个四元轴矢量 S^{α}，使得它只有三个独立分量，且在粒子静止参照系中还原为自旋 s.① 如果 S^{α} 表示四元自旋矢量在惯性参照系 K 中的诸分量，则按(11.22)，在静止参照系 K' 中的时间分量为

$$S'^{0}=\gamma(S^{0}-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{S})=\frac{1}{c}U_{\alpha}S^{\alpha}$$

式中 U^{α} 是粒子的四元速度. 我们看出，为使在静止参照系中的时间分量等于零，必须加以协变约束

$$U_{\alpha}S^{\alpha}=0 \tag{11.156}$$

在惯性参照系中，粒子速度为 $c\boldsymbol{\beta}$，所以自旋的时间分量不是独立的，而是

$$S_{0}=\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{S} \tag{11.157}$$

把 S^{α} 和静止参照系自旋 s 之间的明确关系写出来是有用的. 利用(11.19)或(11.22)和(11.157)，得

---

① 就下述意义来说，四元自旋矢量 S^{α} 是张量 $S^{\alpha\beta}$ 的对偶：$S^{\alpha}=(1/2c)\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}U_{\beta}S_{\gamma\delta}$，式中 U^{α} 是粒子的四元速度.

$$\mathbf{s}=\mathbf{S}-\frac{\gamma}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{S})\boldsymbol{\beta} \tag{11.158}$$

以及反变换表式

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{S}&=\mathbf{s}+\frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{s})\boldsymbol{\beta}\\ S_0&=\gamma\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{s}\end{aligned}\right\} \tag{11.159}$$

给出静止参照系三元自旋矢量 s，就可以确定任一惯性参照系中四元自旋矢量 S^α 的分量.

(11.155)左边的明显推广形式是 $dS^\alpha/d\tau$，这里 τ 为粒子的原时. 因此其右边必定可以表示成一个四元矢量. 我们假定，所求的方程是自旋 S^α 和外场 $F^{\alpha\beta}$ 的线性方程. 它也可能包含 U^α 和 $dU^\alpha/d\tau$，后者本身是 $F^{\alpha\beta}$ 的线性函数. 假定不包含更高阶时间导数. 当然，在静止参照系中这方程必须还原为(11.155). 适当搭配 $S^\alpha, F^{\alpha\beta}, U^\alpha, dU^\alpha/d\tau$，并利用 S^α 和 $F^{\alpha\beta}$ 的线性要求，我们可以建立下列四元矢量:

$$F^{\alpha\beta}S_\beta,\ (S_\lambda F^{\lambda\mu}U_\mu)U^\alpha,\ \left(S_\beta\frac{dU^\beta}{d\tau}\right)U^\alpha$$

其它各种可能性，像 $F^{\alpha\beta}U_\beta(S_\lambda U^\lambda)$，$(U_\lambda F^{\lambda\mu}U_\mu)S^\alpha$，$(S_\lambda F^{\lambda\mu}U_\mu)dU^\alpha/d\tau$ 等等，都是 $F^{\alpha\beta}$ 的较高阶项，它们或等于零，或可以还原成上列三个四元矢量的倍数. 因此，运动方程必须具有下列形式:

$$\frac{dS^\alpha}{d\tau}=A_1F^{\alpha\beta}S_\beta+\frac{A_2}{c^2}(S_\lambda F^{\lambda\mu}U_\mu)U^\alpha+\frac{A_3}{c^2}\left(S_\beta\frac{dU^\beta}{d\tau}\right)U^\alpha \tag{11.160}$$

式中 A_1，A_2，A_3 都是常数. 约束方程(11.156)必须永远成立. 这就要求

$$\frac{d}{d\tau}(U_\alpha S^\alpha)=S^\alpha\frac{dU_\alpha}{d\tau}+U_\alpha\frac{dS^\alpha}{d\tau}=0$$

因而

$$(A_1-A_2)U_\alpha F^{\alpha\beta}S_\beta+(1+A_3)S_\beta\frac{dU^\beta}{d\tau}=0 \tag{11.161}$$

如果存在非电磁力或场的梯度力，那末至少在原则上必须有 $A_1=A_2$ 和 $A_3=-1$. 还原到静止参照系，并与(11.155)比较，得 $A_1=ge/2mc$. 于是，(11.160)变成

$$\frac{dS^\alpha}{d\tau}=\frac{ge}{2mc}\left[F^{\alpha\beta}S_\beta+\frac{1}{c^2}U^\alpha(S_\lambda F^{\lambda\mu}U_\mu)\right]-\frac{1}{c^2}U^\alpha\left(S_\lambda\frac{dU^\lambda}{d\tau}\right) \quad (11.162)$$

如果电磁场是空间均匀的，或者如果像 $\nabla(\mu\cdot\mathbf{B})$(5.69) 那样的梯度力项可以忽略，并且没有别的可察觉的力作用在粒子上，那末，该粒子的平移运动由(11.144)描述：

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau}=\frac{e}{mc}F^{\alpha\beta}U_\beta \quad (11.163)$$

这时，(11.162)就变成 *BMT* 方程：

$$\frac{dS^\alpha}{d\tau}=\frac{e}{mc}\left[\frac{g}{2}F^{\alpha\beta}S_\beta+\frac{1}{c^2}\left(\frac{g}{2}-1\right)U^\alpha(S_\lambda F^{\lambda\mu}U_\mu)\right] \quad (11.164)$$

(*b*) *与托马斯进动的关系*

协变方程(11.162)或其特殊情形(11.164)都包含了自旋的托马斯进动. 托马斯进动出现在(11.162)的末项中，该项是由(11.156)这个要求确定的，即四元自旋矢量与四元速度正交. 为了明确地写出托马斯进动，我们考虑静止参照系自旋 s 的运动方程. 利用下列结果

$$S_\lambda\frac{dU^\lambda}{d\tau}=-\gamma\mathbf{S}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{d\tau} \quad (11.165)$$

和(11.158)[用 **S** 表示的 s]，我们得到两个方程如下：

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\tau}=\mathbf{F}+\gamma^2\boldsymbol{\beta}\left(\mathbf{S}\cdot\frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau}\right)$$

和

$$\frac{dS_0}{d\tau}=F_0+\gamma^2\left(\mathbf{S}\cdot\frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau}\right)$$

将这两方程合并，并适当简化，得

$$\frac{d\mathbf{s}}{d\tau}=\mathbf{F}-\frac{\gamma\boldsymbol{\beta}}{\gamma+1}F_0+\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\left[\mathbf{s}\times\left(\boldsymbol{\beta}\times\frac{d\boldsymbol{\beta}}{d\tau}\right)\right] \quad (11.166)$$

在这些方程中，用$(F_0, \mathbf{F})$作为(11.162)中带系数$(ge/2mc)$的那几项的时间和空间分量. 因为$(F_0, \mathbf{F})$构成四元矢量，其中$F_0=\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{F}$，所以(11.166)右边头两项可以认为是在静止参照系中计算的转矩$\mathbf{F}'$. 将两边同除以γ，并利用托马斯进动频率的定义(11.119)，我们得知，(11.166)变成

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt}=\frac{1}{\gamma}\mathbf{F}'+\boldsymbol{\omega}_T\times\mathbf{s} \quad (11.167)$$

因为$\mathbf{F}'$由(11.155)右边给出，所以上式恰好是11.8节的(11.107).

对于电磁场中的运动来说，这时(11.163)成立，

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt}=\frac{e}{\gamma mc}[\mathbf{E}+\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}-\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E})] \quad (11.168)$$

根据B的变换性质(11.149)，我们又有

$$\frac{1}{\gamma}\mathbf{F}'=\frac{ge}{2mc}\mathbf{s}\times\left[\mathbf{B}-\frac{\gamma}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{B})\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E}\right] \quad (11.169)$$

当把这些表式代入(11.167)时，(11.167)就变成

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt}=\frac{e}{mc}\mathbf{s}\times\left[\left(\frac{g}{2}-1+\frac{1}{\gamma}\right)\mathbf{B}-\left(\frac{g}{2}-1\right)\frac{\gamma}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{B})\boldsymbol{\beta}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{g}{2}-\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E}\right] \quad (11.170)$$

这种形式的自旋矢量运动方程就是托马斯方程(11.121)[参看88页脚注援引的论文].

(c) 纵向极化强度的变化率

作为应用(11.170)的一个例子，我们考虑与速度平行的自旋

s的分量的变化率. 这分量就是粒子的纵向极化强度或净螺旋性. 若 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 方向上的单位矢量, 则纵向极化强度为 $\hat{\boldsymbol{\beta}}\cdot\mathbf{s}$. 因为 s 和 $\boldsymbol{\beta}$ 都随时间而变化, 所以纵向极化强度也随时间而变化. 显然, 我们有

$$\frac{d}{dt}(\hat{\boldsymbol{\beta}}\cdot\mathbf{s})=\hat{\boldsymbol{\beta}}\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt}+\frac{1}{\beta}[\mathbf{s}-(\hat{\boldsymbol{\beta}}\cdot\mathbf{s})\hat{\boldsymbol{\beta}}\cdot]\cdot\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt}$$

利用(11.168)和(11.170), 经一些代数运算后, 上式可以写成

$$\frac{d}{dt}(\hat{\boldsymbol{\beta}}\cdot\mathbf{s})=-\frac{e}{mc}\mathbf{s}_{\perp}\cdot\left[\left(\frac{g}{2}-1\right)\hat{\boldsymbol{\beta}}\times\mathbf{B}+\left(\frac{g\beta}{2}-\frac{1}{\beta}\right)\mathbf{E}\right] \quad (11.171)$$

式中 $\mathbf{s}_{\perp}$ 是与速度垂直的 s 的分量.

方程(11.171)显示出一个 $g=2$ 粒子具有的值得注意的性质. 在纯磁场中, 自旋按这样一种方式进动, 即不管粒子如何运动, 纵向极化强度保持不变. 如果粒子是相对论性的($\beta\to1$), 即使有电场存在, 也只能使纵向极化强度产生非常缓慢的变化, 其变化率正比于 γ^{-2} 乘垂直于 v 的电场分量.

电子和 μ 介子的 g 因数与狄喇克值 2 只相差 $\alpha/\pi=0.00232$ 级的辐射场改正. 因为($g-2$)是如此的小, 所以在磁场中作轨道运动的电子束或 μ 介子束的纵向极化强度的变化比较缓慢. 这种现象使我们可以对所谓反常磁矩或异常磁矩这个量 $a\equiv(g-2)/2$ 作出非常精密的测量. a 的值为量子电动力学的有效性提供了准确的检验. 对于一开始就产生 100%纵向极化的 μ 介子来说, 可以通过测量由 μ 介子产生的衰变电子相对于 μ 介子极化方向的非对称性角分布特性曲线, 来检测极化强度的变化. 对于由 β 衰变产生的电子来说, 初始纵向极化强度是 $\pm\beta$. 纵向极化强度随时间的变化, 通过以下两种方法来检测: 测量莫脱散射的非对称性中的变化(e^-), 或者测量强磁场里形成的阳电子素发射的湮没光子的角分布中的变化(e^+). 下列最近的数据表示这些方法所能达到

的精密度:①

$$a(e^-) = (115{,}965.77 \pm 0.35) \times 10^{-8}$$

$$a(e^+) = (116{,}030 \pm 120) \times 10^{-8}$$

$$a(\mu^\pm) = (116{,}616 \pm 31) \times 10^{-8}$$

正如贝莱(Bailey)和毕卡索(Picasso)合写的那篇评论性文章中详细讨论的,这些结果与量子电动力学的预言很好符合.

关于自旋进动的更深入探讨,留作第十二章末的习题.

11.12 关于相对论运动学中记号和单位的评注

在讨论洛仑兹变换和相对论运动学时,采用统一的简单记号和单位制是合适的.我们已经看到,在狭义相对论的诸公式中出现光速 c 的各次幂.虽然 c 的这些乘幂的出现有助于取得非相对论性极限(通过令 $c\to\infty$),但这些乘幂使公式繁琐.在阐述相对论运动学时,通常利用选择适当的单位的方法,消去所有的 c 因子.我们采取如下约定:所有动量、能量和质量均以能量单位来量度,而速度以光速为单位来量度.在粒子运动学中,以符号

$$\left.\begin{matrix} p \\ E \\ m \\ v \end{matrix}\right\} \quad \text{取代} \quad \left\{\begin{matrix} cp \\ E \\ mc^2 \\ \dfrac{v}{c} \end{matrix}\right.$$

于是,动量和总能量之间的关系式写作 $E^2 = p^2 + m^2$,粒子速度为

---

① e^-: J. C. Wesley and A. Rich, *Phys. Rev.* A4, 1341(1971).
e^+: J. R. Gilleland and A. Rich, *Phys. Rev.* A5, 38(1972).
$\mu^\pm$: J. Bailey et al., *Phys. Letters* **28B**, 287(1968).
也可参看 J. Bailey 和 E. Picasso 合写的评论性文章,该文刊载在 *Progress in Nuclear Physics*, Vol. 12, Part 1, 主编者 D. M. Brink and J. H. Mulvey Pergamon, Oxford, (1970), pp. 43—75.

$v=p/E$，等等．以eV(电子伏特)、MeV(兆电子伏特)、GeV(吉电子伏特，或千兆电子伏特)作为能量单位是方便的．一个电子伏特是一个带电子电荷的粒子通过一伏特电势差而降落时获得的能量($1eV=1.602\times10^{-12}$尔格$=1.602\times10^{-19}$焦耳)．

除了消去 c 的乘幂外，通常还在两个斜体拉丁字符中间加一点来表示四元矢量的标积；并照例用两个黑体拉丁字符中间加一点来表示三元矢量的标积．这样我们有

$$a\cdot b\equiv a_\alpha b^\alpha=a_0b_0-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

四元矢量可以写成带指标的或不带指标的．于是，能量和动量守恒可以写成

$$P=p+q$$

或

$$P^\alpha=p^\alpha+q^\alpha$$

参考书和推荐读物

相对论领域里有独特而广博的文献，1921年

Pauli

写的内容渊博的著名论文，(到1956年为止)也许是论述狭义相对论和广义相对论的最最透彻而简明的著作．

另一部权威著作是下列一书：

Mϕller.

供研究生用的，阐述狭义相对论的较老的教科书中有：

Aharoni；

Bergmann(中译本：柏格曼著，周奇、郝苹译，《相对论引论》)，第一章至第九章．比较新近的有：

Anderson，第六章和第七章；

Barut，第一章和第二章；

Schwartz；

Tonnelat，第二部分．

下列著作里有一部分内容是从物理学家观点论述了四维时空的数学(群论和张量分析):

Anderson, 第一章至第五章;

Bergmann, 第五章;

Schwartz, 第五章.

要了解原始的理论发展,可以参阅

Einstein, Lorentz, Minkowski, and Weyl

这本论文集和

Kilmister

这本书中收集和翻印的论文.

在

Arzeliès

写的两本书里,对狭义相对论作了别具一格的讨论,书中援引了广博的参考文献,并作了精辟的评述.

综述各种主要实验的有:

Møller, 第一章和第十二章;

Condon and Odishaw, 第六篇,第八章(由 E. L. Hill 执笔).

下列著作里论述了本书几乎没有叙述的运动媒质电动力学这个课题:

Cullwick;

Møller, 第 209 页起;

Pauli, 第 99 页起;

Penfield and Haus.

Cullwick 的书里讨论了许多实际情况. 可是,阅读该书第二版序得知,要特别注意该书的第五章.

我们已经把相对论运动学归入习题中. 在这一领域里有用的参考书有:

Baldin, Gol'danskii and Rozenthal;

Hagedorn;

Sard, 第四章.

另一个省略的论题是有快速运动物体存在时的情况. 这个吸引人的论题,说明读者必须小心运用诸如斐兹杰惹-洛仑兹收缩等概念. 下列是一些切题的论文:

R. Penrose, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **55**, 137 (1959);

J. Terrell, *Phys. Rev.* **116**, 1041(1959);

V. F. Weisskopf, *Phys. Today* **13**, No. 9, 24(1960);

M. L. Boas, *Am. J. Phys.* **29**, 283(1961);

G. D. Scott. and H. J. Van Driel, *Am. J. Phys*, **38**, 971(1970).

想要比较初浅了解或业余学习狭义相对论的读者，有大批的大学生水平的读物可供选读，兹举几本如下：

Bohm;

Feynmann, 第一卷，第十五章、第十六章、第十七章;

French;

Kacser;

Rosser;

Sard;

Smith;

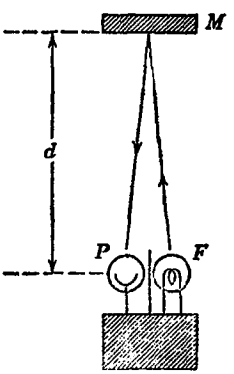
Taylor and Wheeler.

我们特别推荐 Sard 的书. 这是一本中级读物，其中透彻地讨论了托马斯进动和自旋运动. Hagedorn 的书也详细讨论了 BMT 方程.

关于狭义相对论诸专题的详尽参考文献，可以在下面这篇文章里找到: AAPT Resource Letter on Special Relativity SRT-1, *Am. J. Phys.* 30, 462(1962).

习　题

11.1 可能有一种时钟如图所示. 它由闪光管 F 和光电池 P 组成，两者被隔开，使得它们只能各自对着镜 M，镜 M 放在离 P、F 距离为 d 的地方，M 所安放的位置相对于闪光管-光电池系统是严格不变的. 盒子里的电子装置的作用如下：当光电池对来自镜 M 的闪光起反应时，立即触发闪光管，并向镜 M 发射一短暂闪光. 当静止时，这时镜每 $(2d/c)$ 秒"滴答"一次.



习题 11.1

(*a*) 设时钟以速度 v，在垂直于 PF 到 M 的连线的方向上，相对于观测者作匀速运动. 试用相对论的第二条假设，按几何或代数方法直接证

明：当时钟运动时，观测者看到相对论性时间膨胀.

(*b*) 设时钟以速度 v 平行于 PF 到 M 的连线运动. 试证：观测者在这里也观测到时钟变慢，且时间膨胀因子与(*a*)相同.

11.2 试直接证明：两个沿相同方向的相继的洛仑兹变换等效于速度为

$$v=\frac{v_1+v_2}{1+\left(\frac{v_1 v_2}{c^2}\right)}$$

的单个洛仑兹变换. 这就是推导两个平行速度相加定律的另一种方法.

11.3 坐标系 K' 以速度 $\mathbf{v}$ 相对于另一坐标系 K 运动. 在 K' 中一个粒子具有速度 $\mathbf{u}'$ 和加速度 $\mathbf{a}'$. 试求：加速度的洛仑兹变换规律，并证明：在坐标系 K 中，加速度的平行于和垂直于 $\mathbf{v}$ 的分量为

$$\mathbf{a}_{\parallel}=\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^3}\mathbf{a}'_{\parallel}$$

$$\mathbf{a}_{\perp}=\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^3}\left(\mathbf{a}'_{\perp}+\frac{\mathbf{v}}{c^2}\times(\mathbf{a}'\times\mathbf{u})\right)$$

11.4 假定一艘火箭船在2000年离开地球. 有一对生于1980年的孪生子，其中一个留在地球上；另一个乘火箭飞走. 火箭船是这样建造的，使得它在其自身静止参照系中有加速度 g (这就使得船里的人感到跟在家里一样). 火箭船沿一条直线路径加速了五年(按其本身的时钟计算)，然后以相同速率减速五年，掉转方向后再加速五年，再减速五年，而降落在地球上. 火箭中的孪生子是四十岁.

(*a*) 地球上孪生子是几岁？

(*b*) 火箭船的行程离地球多远？

11.5 在参照系 K 中，有两个势均力敌的短跑运动员，对着与 x 轴平行的跑道，并排地蹲在 y 轴上，相距为 d，准备起跑. 两个发令员各站在一个运动员的旁边，并放起跑枪，放枪时间稍有差别，这对其中较优秀的一个运动员是吃亏的. 在 K 中这时间差为 T.

(*a*) 问时间差在什么范围内时，将有一参照系 K'，在 K' 中这运动员不吃亏；又问时间差在什么范围内时，有一参照系 K'，在 K' 中是真的(不是表观

的)吃亏了?

(*b*) 直接确定由参照系 K 到 (*a*) 中的两种可能的参照系 K' 的洛仑兹变换，求 K' 相对于 K 的速度，以及 K' 中每个短跑运动员的时空位置.

11.6 (*a*) 利用相对论性速度加法律和位相不变性，讨论关于运动液体中光传播速度的斐索实验. 试证：当液体以速率 v 平行于或反平行于光路流动时，在实验室里观察到的，并准确到 v 的一次项的光速可由下式给出，

$$u=\frac{c}{n(\omega)}\pm v\left(1-\frac{1}{n^2}+\frac{\omega}{n}\frac{dn(\omega)}{d\omega}\right)$$

式中 ω 是实验室里(流体内和流体外)光的频率，$n(\omega)$ 是液体的折射率. 由于消光定理，假定光以速率 $u'=c/n(\omega')$ 相对于运动液体行进.

(*b*) 参看 W. M. Macek, J. R. Schneider, and R. M. Salamon, *J. Appl. Phys.* **35**, 2556(1964)这篇论文，并讨论斐索实验的情况.

11.7 无穷小洛仑兹变换及其反变换可以写为

$$x'^{\alpha}=(g^{\alpha\beta}+\epsilon^{\alpha\beta})x_{\beta}$$

$$x^{\alpha}=(g^{\alpha\beta}+\epsilon'^{\alpha\beta})x'_{\beta}$$

式中 $\epsilon^{\alpha\beta}$ 和 $\epsilon'^{\alpha\beta}$ 是无穷小张量.

(*a*) 根据反变换的定义，试证：$\epsilon'^{\alpha\beta}=-\epsilon^{\alpha\beta}$.

(*b*) 根据模方不变，试证：$\epsilon^{\alpha\beta}=-\epsilon^{\beta\alpha}$.

(*c*) 按方程两边的反变分量写出变换式，试证：$\epsilon^{\alpha\beta}$ 相当于矩阵 L (11.93).

11.8 (*a*) 试证：洛仑兹增速矩阵 $\mathbf{K}$ 和转动矩阵 $\mathbf{S}$ 满足

$$(\epsilon\cdot\mathbf{S})^3=-\epsilon\cdot\mathbf{S}$$

$$(\epsilon'\cdot\mathbf{K})^3=\epsilon'\cdot\mathbf{K}$$

式中 ϵ 和 ϵ' 是任意实的单位三元矢量.

(*b*) 试用(*a*)的结果，证明：

$$e^{-\zeta\hat{\boldsymbol{\beta}}\cdot\mathbf{K}}=1-\hat{\boldsymbol{\beta}}\cdot\mathbf{K}\sinh\zeta+(\hat{\boldsymbol{\beta}}\cdot\mathbf{K})^2[\cosh\zeta-1]$$

11.9 有两个洛仑兹变换相差一个无穷小量. 按 11.7 节的记号，这两个洛仑兹变换用 $A_1=e^{L}$，$A_2=e^{L+\delta L}$ 来表示. 试证：如写到 δL 的一次项，洛仑兹变换 $A=A_2A_1^{-1}$ 可以写为

$$A=1+\delta L+\frac{1}{2!}[L,\delta L]+\frac{1}{3!}[L,(L,\delta L)]$$

$$+\frac{1}{4!}[L,[L,[L,\delta L]]]+\cdots$$

证明时不必用具体的矩阵表示式.

提示: 前几项可以用硬凑的方法求得，但另一方法是，考虑算符 $A(\lambda)=e^{\lambda(L+\delta L)}e^{-\lambda L}$ 按 λ 的泰勒级数展开，然后令 $\lambda=1$.

11.10 将上题结果应用到托马斯进动(11.116)的纯代数推导上.

(*a*) 利用

$$L=-\frac{\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{K}(\mathrm{tgh}^{-1}\beta)}{\beta}$$

$$L+\delta L=-\frac{(\boldsymbol{\beta}+\delta\boldsymbol{\beta}_{\parallel}+\delta\boldsymbol{\beta}_{\perp})\cdot\mathbf{K}(\mathrm{tgh}^{-1}\beta')}{\beta'}$$

式中 $\beta'=\sqrt{(\boldsymbol{\beta}+\delta\boldsymbol{\beta}_{\parallel})^2+(\delta\boldsymbol{\beta}_{\perp})^2}$，试证:

$$\delta L=-\gamma^2\delta\boldsymbol{\beta}_{\parallel}\cdot\mathbf{K}-\frac{\delta\boldsymbol{\beta}_{\perp}\cdot\mathbf{K}(\mathrm{tgh}^{-1}\beta)}{\beta}$$

(*b*) 利用 $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{S}$ 的对易关系，试证:

$$C_1=[L,\delta L]=-\left(\frac{\mathrm{tgh}^{-1}\beta}{\beta}\right)^2(\boldsymbol{\beta}\times\delta\boldsymbol{\beta}_{\perp})\cdot\mathbf{S}$$

$$C_2=[L,C_1]=(\mathrm{tgh}^{-1}\beta)^2\delta L_{\perp}$$

$$C_3=[L,C_2]=(\mathrm{tgh}^{-1}\beta)^2C_1$$

$$C_4=[L,C_3)=(\mathrm{tgh}^{-1}\beta)^4\delta L_{\perp}$$

式中 $\delta L_{\perp}$ 是 δL 中含 $\delta\boldsymbol{\beta}_{\perp}$ 的那一项.

(*c*) 对 $A_T=A_2A_1^{-1}$ 的诸项的级数求和，得

$$A_T=1-(\gamma^2\delta\boldsymbol{\beta}_{\parallel}+\gamma\delta\boldsymbol{\beta}_{\perp})\cdot\mathbf{K}$$

$$-\frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\boldsymbol{\beta}\times\delta\boldsymbol{\beta}_{\perp})\cdot\mathbf{S}$$

上式准确到 $\delta\boldsymbol{\beta}$ 的一次项. [参看 D. Shelupsky, *Am. J. Phys.* **35**, 650 (1967).]

11.11 有一条截面积可忽略不计的无限长的直导线，在惯性参照系 K' 中这条导线是静止的，并具有均匀的线电荷密度 q_0. 参照系 K' (和导线)相对于实验室参照系 K 以速度 $\mathbf{v}$ 平行于导线方向而运动.

(*a*) 写出在导线的静止参照系中用柱坐标表示的电场和磁场. 利用场的洛仑兹变换性质，求出实验室中电场和磁场的诸分量.

(*b*) 在导线的静止参照系中与导线有关联的电荷和电流密度是多少？在实验室中是多少？

(c) 由实验室的电荷和电流密度，直接计算实验室中的电场和磁场，与(a)的结果比较.

11.12 (a) 用 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 表示洛仑兹标量 $F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$，$\mathcal{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$，和 $\mathcal{F}^{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\alpha\beta}$，是否还有任何别的场强 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的不变二次式呢？

(b) 是否可能有一种电磁场，它在一惯性参照系中作为纯电场出现，而在某别的惯性参照系中作为纯磁场出现？要使一惯性参照系中没有电场存在，$\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的判据是什么？

(c) 对宏观媒质来说，$\mathbf{E}$、$\mathbf{B}$ 构成场张量 $F^{\alpha\beta}$，$\mathbf{D}$、$\mathbf{H}$ 构成张量 $G^{\alpha\beta}$. 可以进一步构成哪些不变量呢？用三元矢量场表示，它们的显式是什么？

11.13 在某一参照系中，有一均匀静电场 E_0 平行于 x 轴，又有一均匀静磁感应强度 $B_0=2E_0$ 在 x-y 平面内，它与 x 轴的夹角为 θ. 试确定一个参照系的相对速度，在该参照系中电场和磁场是平行的. 当 $\theta\ll 1$ 和 $\theta\to(\pi/2)$ 时，该参照系中的场是什么？

11.14 在一导电媒质的静止参照系中，电流密度满足欧姆定律 $\mathbf{J}'=\sigma\mathbf{E}'$，式中 σ 是电导率，撇号表示在静止参照系中的量.

(a) 考虑到运流电流和传导电流的可能性，试证：欧姆定律的协变推广式是

$$J^\alpha-\frac{1}{c^2}(U_\beta J^\beta)U^\alpha=\frac{\sigma}{c}F^{\alpha\beta}U_\beta$$

式中 U^α 是媒质的四元速度.

(b) 试证：如果媒质相对于某惯性参照系的速度为 $\mathbf{v}=c\boldsymbol{\beta}$，则在该参照系中三元电流矢量是

$$\mathbf{J}=\gamma\sigma[\mathbf{E}+\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}-\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E})]+\rho\mathbf{v}$$

式中 ρ 是在该参照系中观测的电荷密度.

(c) 如果媒质在其静止参照系中是不带电的($\rho'=0$)，那末在(b)的参照系中电荷密度和 $\mathbf{J}$ 的表式是什么？这是(10.8)的相对论性推广式.

11.15 根据电荷静止参照系中的欧姆定律，并根据场强 $F^{\alpha\beta}$ 是反对称二秩张量这个事实，毋需明确地考虑洛仑兹变换，就可以求得一个匀速运动电荷的电场和磁场(11.152). 这种想法如下. 对一个匀速运动电荷来说，有关变量仅仅是电荷的四元速度 U^α 和相对坐标 $X^\alpha=x_p^\alpha-x_q^\alpha$，式中 x_p^α 和 x_q^α 分别是观测点和电荷的四元坐标矢量. 唯一可能构成的反对称张量是 $(X^\alpha U^\beta-X^\beta U^\alpha)$. 于是，电磁场 $F^{\alpha\beta}$ 必定是这个张量乘以某标量函数，后者为 $X_\alpha X^\alpha$，

$X_\alpha U^\alpha$, $U_\alpha U^\alpha$ 这几个可能标积的函数.

(*a*) 对于图 11.8 所示的情况来说，P 和 q 在 K 中同一时刻的坐标可以写作 $x_P^\alpha=(ct,\mathbf{b})$，$x_q^\alpha=(ct,\mathbf{v}t)$，其中 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}=0$. 通过考虑电荷静止参照系中 $F^{\alpha\beta}$ 的一般形式，试证:

$$F^{\alpha\beta}=\frac{q}{c}\frac{(X^\alpha U^\beta-X^\beta U^\alpha)}{\left[\frac{1}{c^2}(U_\alpha X^\alpha)^2-X_\alpha X^\alpha\right]^{3/2}}$$

并证明：由上式可得出在惯性参照系 K 中的表式(11.152).

(*b*) 从静止参照系中共同时间的坐标 $x_P'^\alpha=(ct',\mathbf{b}-\mathbf{v}t')$ 和 $x_q'^\alpha=(ct',0)$着手，重作上述计算. 试证:

$$F^{\alpha\beta}=\frac{q}{c}\frac{(Y^\alpha U^\beta-Y^\beta U^\alpha)}{(-Y_\alpha Y^\alpha)^{3/2}}$$

式中 $Y^\alpha=x_P'^\alpha-x_q'^\alpha$. 证明：场与(*a*)中的相同. 注意：为了获得(11.152)的结果，必须将 K 中观测点 P 的时间 t 当作时间参量.

(*c*) 最后，考虑坐标 $x_P^\alpha=(ct,\ \mathbf{b})$和"推迟时间"的坐标 $x_q^\alpha=[ct-R,\ \boldsymbol{\beta}(ct-R)]$，这里 R 是 P 和 q 在推迟时间的距离. 将这两种坐标之差定义为 $Z^\alpha=[R,\mathbf{b}-\boldsymbol{\beta}(ct-R)]$. 试证：用 Z^α 和 U^α 表示，场是

$$F^{\alpha\beta}=\frac{q}{c}\frac{(Z^\alpha U^\beta-Z^\beta U^\alpha)}{\left(\frac{1}{c}U_\alpha Z^\alpha\right)^3}$$

11.16 一个质量为 M、四元动量为 P 的粒子衰变成质量为 m_1 和 m_2 的两个粒子.

(*a*) 利用能量和动量守恒(写成 $p_2=P-p_1$)以及四元矢量的标积的不变性，试证：在衰变粒子的静止参照系中第一个粒子的总能量为

$$E_1=\frac{M^2+m_1^2-m_2^2}{2M}$$

并证明：E_2 可以通过交换 m_1 和 m_2 而得到.

(*b*) 试证：在同一参照系中第 i 个粒子的动能 T_i 为

$$T_i=\Delta M\left(1-\frac{m_i}{M}-\frac{\Delta M}{2M}\right)$$

式中 $\Delta M=M-m_1-m_2$ 是过程的质量盈余或 Q 值.

(*c*) 带电 π 介子($M=139.6$ 兆电子伏特)衰变成一个 μ 介子($m_1=105.7$ 兆电子伏特)和一个中微子($m_2=0$). 试计算在 π 介子的静止参照系中 μ 介子和中微子的动能. μ 介子具有单值的动能，这是二体衰变的象征. 1947年鲍

威尔(Powell)及其同事们在照相乳胶中发现π介子，上述象征起着重要作用.

11.17 Λ粒子是质量$M=1115$兆电子伏特的一种中性重子，它以$\tau=2.9\times10^{-10}$秒的寿命衰变成质量为$m_1\simeq939$兆电子伏特的一个核子和质量为$m_2\simeq140$兆电子伏特的一个π介子. 这种粒子最初是在云室中当它飞行时通过其带电衰变方式$\Lambda\to p+\pi^-$而被观测到的. 衰变产生的带电粒子的径迹是从一个点发出的，并且具有倒写的V形即Λ形. 从这两个带电粒子在云室磁场中的行程和曲率半径，可以推断这两个粒子的种类及其动量.

(*a*) 利用能量和动量的守恒，以及四元矢量的标积的不变性，试证：如果测出两径迹间的张角θ，则由下列公式可以求出衰变粒子的质量：

$$M^2=m_1^2+m_2^2+2E_1E_2-2p_1p_2\cos\theta$$

式中p_1和p_2是三元动量的量值.

(*b*) 在云室顶板内的一种碰撞中，产生一个带有总能量为10千兆电子伏特的Λ粒子. 问这Λ粒子当衰变以前在云室中平均行程有多远？如果衰变在Λ粒子的静止参照系中差不多是各向同性的，则对一个10千兆电子伏特的Λ粒子来说，张角的范围将有多大？

11.18 如果质量为M的一个系统静止地衰变或转变成若干粒子，它们的质量之和比M小了一个量ΔM.

(*a*) 试证：第i个粒子(质量为m_i)的最大动能是

$$(T_i)_{\max}=\Delta M\left(1-\frac{m_i}{M}-\frac{\Delta M}{2M}\right)$$

(*b*) 在下列静止粒子的衰变或转变中，确定每个粒子的最大动能(以兆电子伏特为单位)以及最大动能对ΔM之比值：

$$\mu\to e+\nu+\bar{\nu}$$
$$K^+\to\pi^++\pi^-+\pi^+$$
$$K^\pm\to e^\pm+\pi^0+\nu$$
$$K^\pm\to\mu^\pm+\pi^0+\nu$$
$$p+\bar{p}\to2\pi^++2\pi^-+\pi^0$$
$$p+\bar{p}\to K^++K^-+3\pi^0$$

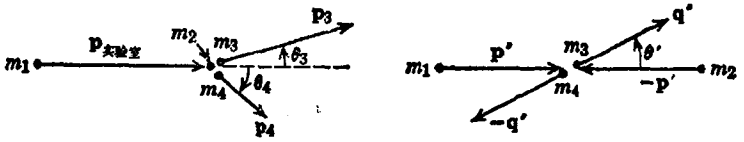
11.19 在宇宙中存在一个近似均匀的温度约为3K的黑体辐射"海洋"，这个"海洋"的存在提供了一种机理，用以解释所产生的光子在产生后走过一段可观距离时所具有的能量上限. 如果两个光子在"质量"中心具有足够的

能量，那么光子-光子碰撞可以引起一个带电粒子及其反粒子的产生("粒子偶产生")．最低阈能和最大截面都出现在阴电子-阳电子偶产生时．

(*a*) 取典型的 3K 光子的能量为 $E=2.5\times10^{-4}$ 电子伏特，计算一个入射光子的能量，这能量刚刚足以使它产生一个阴电子-阳电子偶．当光子能量大于这个阈值时，截面随着能量的增加而增加，并达到数量级为 $(e^2/mc^2)^2$ 的一个最大值，而后当能量再增大时截面却慢慢地减少．这种相互作用就是这些光子在走过宇宙距离时将会消失的机理．

(*b*) 一些证据表明，有一种漫射X射线本底，其光子能量为几百电子伏特或更大些．在 1 千电子伏特以上，谱按 E^{-n} 下降，这里 $n\simeq1.5$．假定这"海洋"中光子能量为 500 电子伏特，重算入射能量的阈值．

11.20　在一个碰撞过程中，在实验室中静止的质量为 m_2 的一个粒子，被质量为 m_1、动量为 $\mathbf{p}_{实验室}$、总能量为 $E_{实验室}$ 的一个粒子所撞击．在碰撞中，这两个初始粒子转变成质量为 m_3 和 m_4 的另外两个粒子．在动量中心(cm)参照系（习惯上叫做质心参照系）和实验室参照系中动量矢量的组态如图所示．



实验室参照系　　动量中心参照系

习题 11.20

(*a*) 利用不变标积，试证：在动量中心参照系中，总能量 W 的平方由下式给出，

$$W^2=m_1^2+m_2^2+2m_2E_{实验室}$$

动量中心参照系中三元动量 $\mathbf{p}'$ 是

$$\mathbf{p}'=\frac{m_2\mathbf{p}_{实验室}}{W}$$

(*b*) 试证：描写动量中心参照系在实验室中的速度的洛仑兹变换参量 $\beta_{动量中心系}$ 和 $\gamma_{动量中心系}$ 是

$$\beta_{动量中心系}=\frac{\mathbf{p}_{实验室}}{m_2+E_{实验室}},\qquad \gamma_{动量中心系}=\frac{m_2+E_{实验室}}{W}$$

(*c*) 试证：在非相对论极限下，(*a*) 和 (*b*) 的结果简化为下列熟知的表

式，

$$W \simeq m_1 + m_2 + \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)\frac{p^2_{\text{实验室}}}{2m_1}$$

$$\mathbf{p}' \simeq \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)\mathbf{p}_{\text{实验室}}, \qquad \beta_{\text{动量中心系}} \simeq \frac{\mathbf{p}_{\text{实验室}}}{m_1+m_2}$$

11.21 对一给定的反应来说，实验室中阈值动能 $T_{\text{阈}}$ 就是入射到静靶上的粒子动能，这个动能刚刚足够使质心能量 W 等于终态诸粒子静能之和．试计算下列过程的阈值动能．将你的结果以兆电子伏特或千兆电子伏特为单位来表示，再以入射粒子的静能为单位来表示（除非入射粒子是质量为零的粒子）．

(*a*) 光生 π 介子过程：$\gamma p \to \pi^0 p$

($m_p = 938.5$ 兆电子伏特，$m_{\pi^0} = 135.0$ 兆电子伏特)

(*b*) 在核子-核子碰撞中产生核子-反核子偶的过程，例如，$pp \to ppp\bar{p}$.

(*c*) 在电子-电子碰撞中产生核子-反核子偶的过程：$e^-e^- \to e^-e^-p\bar{p}$ 和 $e^+e^- \to p\bar{p}$ ($m_e = 0.511$ 兆电子伏特)．

11.22 在像欧洲联合核子研究中心(CERN)的交叉储存环(ISR)或许多 e^+e^- 储存环那样的施碰粒子束机器中，储存了反向转动的相对论性粒子束，以便使得在一个或一个以上相互作用区域中或多或少地发生对撞．设两个粒子束中的粒子的质量分别为 m_1 和 m_2，动量分别为 p_1 和 p_2；又设这两个粒子束以夹角 θ 相交叉．

(*a*) 试证：准确到 $(m/p)^2$ 级时，在质心参照系中总能量平方为

$$W^2 = 4p_1p_2\cos^2\frac{\theta}{2} + (p_1+p_2)\left(\frac{m_1^2}{p_1}+\frac{m_2^2}{p_2}\right)$$

(*b*) 试证：质心惯性参照系在实验室中的速度为

$$\beta_{\text{质心系}} = \frac{(p_1+p_2)\sin\theta/2}{(E_1+E_2)\sin\alpha}$$

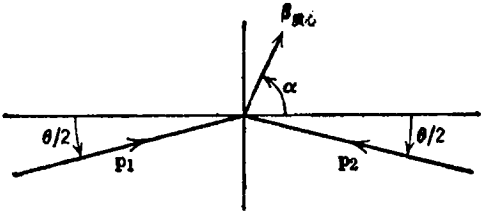
式中

$$\text{tg}\alpha = \left(\frac{p_1+p_2}{p_1-p_2}\right)\text{tg}\frac{\theta}{2}$$

在下图中表明了角 α 的定义．

(*c*) 证明：(*b*)的结果跟习题(11.20)的(*b*)符合．

(*d*) 若交叉角为 $\theta = 20°$，且 $p_1 = p_2 = 30$ 千兆电子伏特/c，问实验室参照系是否相当接近于质心参照系吗？例如，考虑一种质子-质子非弹性碰撞，



习题 11.22

这种碰撞产生 π 介子；考查所产生的两个 π 介子的共线性质，这两个 π 介子在质心参照系中具有相同的动量量值(都等于 1 千兆电子伏特/c)，但方向相反.

11.23 在一个弹性散射过程中，入射粒子将能量传给静靶. 入射粒子失去的能量 ΔE 作为靶的反冲动能而出现. 按习题 11.20 的记号，$m_3=m_1$ 和 $m_4=m_2$，而 $\Delta E=T_4=E_4-m_4$.

(*a*) 试证：ΔE 可以用下列不同方法来表示，

$$\Delta E=\frac{m_2}{W^2}p^2_{\text{实验室}}(1-\cos\theta')$$

$$\Delta E=\frac{2m_2p^2_{\text{实验室}}\cos^2\theta_4}{W^2+p^2_{\text{实验室}}\sin^2\theta_4}$$

$$\Delta E=\frac{Q^2}{2m_2}$$

这里 $Q^2=-(p_1-p_3)^2=(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_3)^2-(E_1-E_3)^2$ 是洛仑兹不变的动量转移(平方).

(*b*) 试证：当带电粒子(电子除外)入射到静电子上时($m_1\gg m_2$)，最大能量损失约为

$$\Delta E_{\text{最大}}\simeq 2\gamma^2\beta^2m_e$$

式中 γ 和 β 是表示入射粒子特性的量，且 $\gamma\ll(m_1/m_e)$. 考虑入射粒子的静止参照系中有关的碰撞，然后又变回到实验室参照系，从而给上一结果以简单的解释.

(*c*) 试证：电子-电子碰撞时最大能量转移为

$$\Delta E^{(e)}_{\text{最大}}=(\gamma-1)m_e$$

第十二章　相对论性粒子和电磁场的动力学

第十一章里阐述了狭义相对论运动学．我们现在转入讨论动力学问题．在本章前一部分中，讨论在外电磁场中带电粒子运动的动力学．介绍用拉格朗日函数推导运动方程的方法，这主要是为了引进洛仑兹不变作用量的概念，由此可以导出协变式动力学方程．接着利用正则动量的定义，讨论向哈密顿函数的过渡．随后一节叙述力的洛仑兹变换性质以及所面临的困难，即若不作另外的假定，就无法从库仑定律导出麦克斯韦方程组；这一节也许是纯理论的，或至少是出于教授法的考虑．继而有几节专门用来阐述电场和磁场中带电粒子的运动．在论述均匀静磁场中的运动以后，就探讨电场和磁场并存情况下的运动．而后讨论非均匀磁场引起粒子轨道的长期变化(漂移)和耦合磁通量①的绝热式不变性。本章论述相互作用带电粒子系统的相对论性拉格朗日函数问题，同时证明：当准确到 v^2/c^2 级，就可能消除推迟效应，并用粒子的瞬时位置和瞬时速度写出拉格朗日函数(达尔文-拉格朗日函数)。

本章最后四节重点放在电磁场上．首先，由一个适当的拉格朗日函数导出麦克斯韦方程组．其次，介绍描述一个带质量的"光子"的修正拉格朗日函数，以及把它用于谐振电路、传输线和谐振腔所得的结果．然后讨论电磁场哈密顿函数的协变式推广，以及无源的电磁场和与带电粒子相互作用的电磁场的能量、动量、角动量守恒定律．本章最后推导不变格临函数，后者构成求解以一个已

① 作者把"穿过粒子轨道的磁通量"叫做"粒子轨道耦合磁通量"，有时还简称为"耦合磁通量"．——译者注

知四元矢量电流密度为源的波动方程的基础.

12.1 在外电磁场中一个相对论性带电粒子的拉格朗日函数和哈密顿函数

我们可以把在外场 **E** 和 **B** 中一个带电荷 e 的粒子的运动方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mathbf{p}}{dt}&=e\left[\mathbf{E}+\frac{\mathbf{u}}{c}\times\mathbf{B}\right]\\ \frac{dE}{dt}&=e\mathbf{u}\cdot\mathbf{E}.\end{aligned}\right\}\tag{12.1}$$

写成协变形式(11.144):

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau}=\frac{e}{mc}F^{\alpha\beta}U_\beta\tag{12.2}$$

式中 m 为粒子的质量, τ 为粒子的原时, $U^\alpha=(\gamma c,\gamma\mathbf{u})=\mathbf{p}^\alpha/m$ 为粒子的四元速度.

虽然运动方程(12.1)是以描述一个带电粒子在外电磁场中的一般运动(忽略粒子的辐射场), 但是用拉格朗日和哈密顿力学的观点来考虑动力学的表述, 往往是有益的. 拉格朗日力学的论述是以最小作用原理或哈密顿原理为基础的. 在非相对论力学里, 系统是用广义坐标 $q_i(t)$ 和广义速度 $\dot{q}_i(t)$ 来描写的. 拉格朗日函数 L 是 q_i 和 $\dot{q}_i$ 的一个泛函, 也许还显含时间 t; 作用量 A 定义为 L 沿该系统的一条可能路线的时间积分. 最小作用原理表述于下: 一个力学系统是这样运动的, 当它从时间 t_1 的组态 a 变到时间 t_2 的组态 b 时, 作用量

$$A=\int_{t_1}^{t_2}L[q_i(t),\dot{q}_i(t),t]dt\tag{12.3}$$

是一个极值. 考虑广义坐标和广义速度偏离实际路线的微小变更, 并要求 $\delta A=0$, 便得到(参看 *Goldstein* 书第二章)欧勒-拉格

朗日运动方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \tag{12.4}$$

我们想要把上述形式推广到相对论性粒子运动，使得到的结果符合狭义相对论，并且对外场中的带电粒子导出(12.1)或(12.2)．可以有几种处理方法，这些方法的精巧程度是不相同的。精巧程度最差的、人们最熟悉的一种处理方法，是继续用普通的坐标、速度和时间，直接从非相对论范畴进行推广．较精巧的一种方法，是按明显协变形式加以处理的．我们先介绍基本的处理方法，然后阐述明显协变的处理方法．

(a) 求相对论性拉格朗日函数的基本方法

为了求得外场中一个粒子的相对论性拉格朗日函数，我们首先讨论拉格朗日函数的洛仑兹变换性质这一问题．根据狭义相对论第一条假设，作用量积分必定是一个洛仑兹不变量，因为运动方程是由极值条件 $\delta A=0$ 确定的．如果我们在(12.3)中通过 $dt=\gamma d\tau$ 引进粒子的原时 τ，则作用量积分变为

$$A=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma L d\tau \tag{12.5}$$

因为原时是不变量，所以要得到 A 也是不变量这个条件，就要求 γL 是洛仑兹不变量．

自由粒子的拉格朗日函数可以是粒子速度和粒子质量的一个函数，但可以与粒子位置无关．唯一可以利用的以速度为变量的洛仑兹不变函数是 $U_\alpha U^\alpha=c^2$．于是，我们推断：自由粒子的拉格朗日函数与 $\gamma^{-1}=\sqrt{1-\beta^2}$ 成正比．容易看出，

$$L_{自由}=-mc^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \tag{12.6}$$

是 γ^{-1} 的适当倍数，通过(12.4)得到自由粒子运动方程

$$\frac{d}{dt}(\gamma m\mathrm{u})=0$$

作用量(12.5)与原时从初原时 τ_1 到终原时 τ_2 的路线积分成正比. 这积分是洛仑兹不变量,但与所取的积分路线有关. 为了计算这积分,我们考虑粒子在初始时静止的那个参照系. 由原时的定义(11.26)显然可知,如果粒子在该参照系中静止不动,则原时积分要比粒子以非零速度沿路线运动时的大. 因此我们看到,连接路线的起点和终点的一条直的世界线给出最大的原时积分,或因(12.6)中的负号,给出最小的作用量积分. 当然,这种恒定速度的运动就是自由粒子运动方程的解.

只要我们知道静止场中非相对论性运动的拉格朗日函数(或运动方程),我们就可以从 γL 是洛仑兹不变量这一普遍要求,来确定一个相对论性带电粒子在外电磁场中的拉格朗日函数. 一个缓慢运动的带电粒子主要受电场的影响,电场可从标势 Φ 导出. 相互作用势能为 $V=e\Phi$. 因为非相对论性拉格朗日函数是 $(T-V)$,所以相对论性拉格朗日函数的相互作用部分 $L_{\text{相互}}$,在非相对论性极限下必须简化为

$$L_{\text{相互}}\to L_{\text{相互}}^{\text{非相对论性}}=-e\Phi \tag{12.7}$$

于是我们的问题就变为求 $\gamma L_{\text{相互}}$ 的洛仑兹不变式,它对于非相对论性速度来说,将简化为(12.7). 因为 Φ 是四元矢势 A^α 的时间分量,所以我们预期 $\gamma L_{\text{相互}}$ 要包含 A^α 与某四元矢量的标积. 可资利用的其它四元矢量,仅仅是粒子的动量矢量和位置矢量. 因为 γ 与拉格朗日函数的乘积必须是平移不变量和洛仑兹不变量,所以它不能显含坐标. 因此,相互作用的拉格朗日函数必须是①

① 不用求非相对论性极限,也可以写下 $L_{\text{相互}}$ 的这一形式,只要令 $\gamma L_{\text{相互}}$ 这个洛仑兹不变量是:(1)粒子电荷的线性函数;(2)电磁势的线性函数;(3)平移不变量;(4)粒子坐标的不高于一阶的时间导数的函数. 读者可以考虑满足这些条件的相互作用拉格朗日函数是否可能存在,但它不是势 A^α 的线性函数,而是场强 $F^{\alpha\beta}$ 的线性函数.

或

$$\left.\begin{aligned} L_{相互}&=-\frac{e}{\gamma c}U_\mu A^\mu \\ L_{相互}&=-e\Phi+\frac{e}{c}\mathbf{u}\cdot\mathbf{A}\end{aligned}\right\} \tag{12.8}$$

将(12.6)和(12.8)合并，就得带电粒子的完整的相对论性拉格朗日函数:

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}+\frac{e}{c}\mathbf{u}\cdot\mathbf{A}-e\Phi \tag{12.9}$$

可以证明由(12.9)确实能导出洛仑兹力方程，关于这个证明留给读者作为练习. 在证明时，必须用到对流导数$[d/dt=(\partial/\partial t)+\mathbf{u}\cdot\nabla]$以及用势来表示的场的标准定义.

和位置坐标 $\mathbf{x}$ 共轭的正则动量 $\mathbf{P}$ 可由下列定义得到:

$$P_i\equiv\frac{\partial L}{\partial u_i}=\gamma mu_i+\frac{e}{c}A_i \tag{12.10}$$

所以共轭动量是

$$\mathbf{P}=\mathbf{P}+\frac{e}{c}\mathbf{A} \tag{12.11}$$

式中$\mathbf{P}=\gamma m\mathbf{u}$是普通的动量. 哈密顿函数$H$是坐标 $\mathbf{x}$ 及其共轭动量 $\mathbf{P}$ 的函数，如果拉格朗日函数不是时间的显函数，哈密顿函数就是一个运动常数. 用拉格朗日函数定义的哈密顿函数是

$$H=\mathbf{P}\cdot\mathbf{u}-L \tag{12.12}$$

速度 $\mathbf{u}$ 必须从(12.12)中消去，以使H是 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{x}$ 的函数. 由(12.10)或(12.11)，得

$$\mathbf{u}=\frac{c\mathbf{P}-e\mathbf{A}}{\sqrt{\left(\mathbf{P}-\frac{e\mathbf{A}}{c}\right)^2+m^2c^2}} \tag{12.13}$$

当把上式代入(12.12)和L(12.9)后，哈密顿函数就取下列形式:

$$H=\sqrt{(c\mathbf{P}-e\mathbf{A})^2+m^2c^4}+e\Phi \tag{12.14}$$

读者还可以证明，将诸哈密顿运动方程合并，可以得到洛仑兹力方程．方程(12.14)是粒子总能量W的一个表式．它和自由粒子能量的差别在于多了一项势能$e\Phi$，并将P换成了$[\mathbf{P}-(e/c)\mathbf{A}]$．实际上，这两个修正项只是一个四元矢量的变化．将(12.14)中的$e\Phi$项移到左边，再两边取平方，就可以看出这一点．于是

$$(W-e\Phi)^2-(c\mathbf{P}-e\mathbf{A})^2=(mc^2)^2 \tag{12.15}$$

这正好是四元矢量标积

$$p_\alpha p^\alpha=(mc)^2 \tag{12.16}$$

式中

$$p^\alpha\equiv\left(\frac{E}{c},\mathbf{P}\right)=\left(\frac{1}{c}(W-e\Phi),\ \mathbf{P}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right) \tag{12.17}$$

我们看到，总能量E/c相当于正则共轭四元动量P^α的时间分量，而(12.11)给出的$\mathbf{P}$是$\mathbf{P}^\alpha$的空间部分．在下面的(*b*)段中和习题12.1中讨论的一种明显协变的处理方法，很自然地导出了上面这个四元动量．

顺便指出规范变换的问题．显然，运动方程(12.1)在势的规范变换下是不变的．因为拉格朗日函数(12.8)显含势，所以它不是不变量．尽管L在规范变换下不具有不变性，仍然可以证明(习题12.2)拉格朗日函数的变化是这样一种形式的变化(时间全导数)，它不改变作用量积分或运动方程．

(*b*) 相对论性拉格朗日函数的明显协变的处理方法

为了作明显协变的描述，用四元矢量x^α和U^α代替通常用的变量$\mathbf{x}$和$\mathbf{u}$．自由粒子拉格朗日函数(12.6)可以用U^α写作

$$L_{自由}=-\frac{mc}{\gamma}\sqrt{U_\alpha U^\alpha} \tag{12.18}$$

这时，作用量积分(12.5)将变为

$$A=-mc\int_{\tau_1}^{\tau_2}\sqrt{U_\alpha U^\alpha}\,d\tau \tag{12.19}$$

我们可以记为，这一明显协变形式是导出运动方程 $dU^\alpha/d\tau=0$ 的变分计算的起点．但是，要把约束方程

$$U_\alpha U^\alpha=c^2 \tag{12.20a}$$

或等效的约束方程

$$U_\alpha\frac{dU^\alpha}{d\tau}=0 \tag{12.20b}$$

加到运动方程上．为此可以采用拉格朗日乘子法，但我们采用一种不同的等效的方法．(12.19)中的被积函数是

$$\sqrt{U_\alpha U^\alpha}d\tau=\sqrt{\frac{dx_\alpha}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau}}\,d\tau=\sqrt{g^{\alpha\beta}dx_\alpha dx_\beta}$$

即是四维空间的无穷小长度元．上式告诉我们，作用量积分(12.19)可以用下式代替：

$$A=-mc\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{g^{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}}\,ds \tag{12.21}$$

式中粒子的四元坐标矢量是 $x^\alpha(s)$，而参量 s 是 τ 的单调增长函数，除此之外它是任意的．作用量积分是一个沿粒子世界线的积分，最小作用原理表述为：实际路线是最长的路线，即短程线．①拉格朗日变量现在是 x^α 和"速度"dx^α/ds，但 s 看作是任意的．只要在完成变分计算后，我们令

$$\sqrt{g^{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}}\,ds=cd\tau \tag{12.22}$$

从而就施加了约束(12.20)．对(12.21)直接进行变分计算，就得欧勒-拉格朗日方程

$$mc\frac{d}{ds}\left[\frac{dx^\alpha/ds}{\sqrt{\frac{dx_\beta}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}}}\right]=0$$

① 对事件的类时间隔来说，短程线是最长路线或最长原时．参看 *Rohrlich* 的书第277页至第278页．

或

$$m\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}=0$$

上式正是预期的自由粒子运动方程.

对外场中一个带电粒子来说，拉格朗日函数(12.8)式告诉我们，作用量积分的明显协变形式是

$$A=-\int_{s_1}^{s_2}\left[mc\sqrt{g^{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}}+\frac{e}{c}\frac{dx_\alpha}{ds}A^\alpha(x)\right]ds \quad (12.23)$$

由哈密顿原理得到欧勒-拉格朗日方程

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\left(\frac{dx_\alpha}{ds}\right)}\right)-\partial^\alpha\widetilde{L}=0 \quad (12.24)$$

式中拉格朗日函数是

$$\widetilde{L}=-\left[mc\sqrt{g^{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}}+\frac{e}{c}\frac{dx_\alpha}{ds}A^\alpha(x)\right] \quad (12.25)$$

显然，将(12.24)除以$\sqrt{g^{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}}$，并利用(12.22)，就得

$$m\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}+\frac{e}{c}\frac{dA^\alpha(x)}{d\tau}-\frac{e}{c}\frac{dx_\beta}{d\tau}\partial^\alpha A^\beta(x)=0$$

因为$dA^\alpha/d\tau=(dx_\beta/d\tau)\partial^\beta A^\alpha$，所以上面这个方程可以写作

$$m\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}=\frac{e}{c}(\partial^\alpha A^\beta-\partial^\beta A^\alpha)\frac{dx_\beta}{d\tau} \quad (12.26)$$

上式就是用不同符号写出的协变运动方程(12.2).

转换成共轭动量和哈密顿函数的过程是相当简单的，但有一些问题要加以解释. 共轭的四元动量矢量由下式确定:

$$P^\alpha=-\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\left(\frac{dx_\alpha}{ds}\right)}=mU^\alpha+\frac{e}{c}A^\alpha \quad (12.27)$$

引进负号以使(12.27)与(12.11)一致；其原因可以追溯到洛仑兹时空的性质. 哈密顿函数可以定义如下:

$$\widetilde{H}=\frac{1}{2}(P_\alpha U^\alpha+\widetilde{L}) \tag{12.28}$$

用(12.27)消去U^α，导出下式：

$$\widetilde{H}=\frac{1}{2m}\left(P_\alpha-\frac{eA_\alpha}{c}\right)\left(P^\alpha-\frac{eA^\alpha}{c}\right)-\frac{1}{2}mc^2 \tag{12.29}$$

哈密顿方程是

和

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx^\alpha}{d\tau}&=\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial P_\alpha}=\frac{1}{m}\left(P^\alpha-\frac{e}{c}A^\alpha\right)\\ \frac{dP^\alpha}{d\tau}&=-\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial x_\alpha}=\frac{e}{mc}\left(P_\beta-\frac{eA_\beta}{c}\right)\partial^\alpha A^\beta\end{aligned}\right\} \tag{12.30}$$

可以直接证明，上式相当于欧勒-拉格朗日方程(12.26)。

上述哈密顿函数在形式上是满意的，可是它还存在几个问题。首先，根据定义，它是一个洛仑兹标量，不是一个类似能量的量。其次，利用(12.20a)和(12.27)可以证明$\widetilde{H}\equiv 0$。显然，这样一种哈密顿函数表述跟熟知的非相对论性哈密顿函数有很大的差别。有关这种哈密顿函数和其它各种哈密顿函数的讨论，读者可以查阅*Barut*书第68页起。

12.2 关于由库仑定律和狭义相对论得出磁场、磁力和麦克斯韦方程组的问题

目前在一些大学课本或别的著作里①，试图由静电学的库仑定律和狭义相对论的运动学导出磁场，甚至导出麦克斯韦方程组，这种做法很流行。应该可以直接而明显地看出，若不另加别的假设，这种推导是不可能成功的。一个显然的反例是引力。在非相对论性极限下，力定律所具有的时空性质与库仑定律的相同，然而

① 例如，参看P. Lorrain and D. R. Corson, *Electromagnetic Fields and Waves*, 2nd edition, W. H. Freeman, San Francisco(1970)和A. Bergstrom, *Nuovo Cimento* 14B, 235(1973)。

相对论性引力理论涉及的势按二秩张量而变换，不是按四元矢量而变换.

造成这种混乱的主要原因，是力具有这样的洛仑兹变换性质，即当一惯性参照系中的力用另一惯性参照系中的力来表示时将出现一个类磁力项. 这就促使人们认为这一附加的力项是独立存在的，因而把磁场看作独立的实体. 但是，若不作另外的假设，这一步是无法认可的. 考虑在外力作用下一个粒子的运动，除了这个外力遵守狭义相对论外，我们对该力的性质不作具体规定. 在惯性参照系 K' 中运动方程为

$$\frac{d\mathbf{p}'}{dt'}=\mathbf{F}' \tag{12.31}$$

式中粒子速度为 $\mathbf{u}'=d\mathbf{x}'/dt'$，粒子动量为 $\mathbf{p}'=\gamma_{u'}m\mathbf{u}'$. 如果我们现在考虑粒子在惯性参照系 K 中的运动方程，如图 12.1 所示，那末，我们利用已知的动量的洛仑兹变换性质，经过直接计算[通过

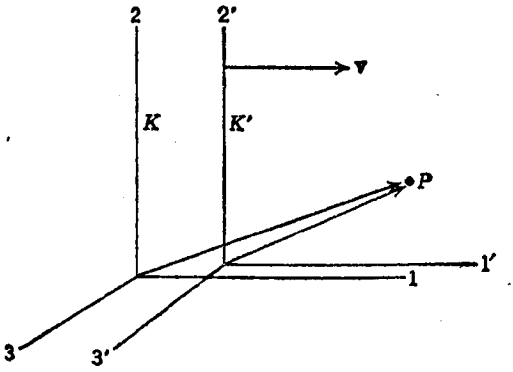


图 12.1

$dp^\alpha/d\tau$ 或直接由 p^α 和关系式 $t'=\gamma_v(t-\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}/c^2)$]，就得到 K 中动量的时间变率可用 K' 中的力表示为

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_{\parallel}=\left(\frac{d\mathbf{p}'}{dt'}\right)_{\parallel}+\frac{\gamma_v}{c^2}\left[\mathbf{u}\times\left(\mathbf{v}\times\frac{d\mathbf{p}'}{dt'}\right)\right]_{\parallel}$$
$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_{\perp}=\gamma_v\left(\frac{d\mathbf{p}'}{dt'}\right)_{\perp}+\frac{\gamma_v}{c^2}\left[\mathbf{u}\times\left(\mathbf{v}\times\frac{d\mathbf{p}'}{dt'}\right)\right]_{\perp} \tag{12.32}$$

这里 $\mathbf{u}$ 是粒子在 K 中的速度，而 $\mathbf{v}$ 和 γ_v 是与从 K 到 K' 的洛仑兹变换有关连的量. 方程(12.32)的右边故意不用 $\mathbf{F}'$ 而用 $d\mathbf{p}'/dt'$ 写出，以强调这些方程的运动学性质，也强调与速度有关的右边第二项的运动学性质.

常见的那种错误想法认为：在 K' 中粒子的运动是非相对论性的，因而它受到一个静电力 $\mathbf{F}'=q\mathbf{E}'$，式中 q 为粒子的电荷，$\mathbf{E}'$ 为该参照系中的电场。于是，不管是否忽略 v^2/c^2 级的项，我们都定义参照系 K 中的磁场如下：

$$\mathbf{B}=\frac{\gamma_v}{qc}\left(\mathbf{v}\times\frac{d\mathbf{p}'}{dt'}\right)=\frac{\gamma_v}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{E}' \tag{12.33}$$

由(12.32)右边第二项显然可得洛仑兹力中的磁力项为

$$\frac{q}{c}\mathbf{u}\times\mathbf{B}$$

读者也许认为这似乎是很合理的，特别是当他从(11.149)看到，只要 K' 中有一个纯电场 $\mathbf{E}'$ 存在，(12.33)就是 K 中磁场的正确表式. 但是，如果 K' 中存在的是一个磁场 $\mathbf{B}'$，会发生什么情况呢？倘若 $\mathbf{u}'\simeq 0$，力 $\mathbf{F}'$ 依然是 $\mathbf{F}'=q\mathbf{E}'$，可是(12.33)将不再是 K 中的正确磁场①.

事实是这样的：不可能单单从(12.32)推断磁场 $\mathbf{B}$ 和磁力 $q(\mathbf{u}\times\mathbf{B})/c$ 的存在. 必须作出别的假设. 一个关键的假设或实验事实是，在产生电场 $\mathbf{E}$ 的所有源电荷均处于静止的那个参照系 K

① 这意味着，(12.32)右边第二项并不给出 K 中的全部磁力. $q(\mathbf{u}\times\mathbf{B})/c$ 中有一些来自第一项. 当然，洛仑兹力定律确实是与(12.32)一致的. 读者将可证明：由 K' 中的 $\mathbf{F}'=q(\mathbf{E}'+\mathbf{u}'\times\mathbf{B}'/c)$，通过(12.32)，可以导出 K 中的 $\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B}/c)$，

中，作用在一个电荷 q 上的力是由 $\mathbf{F}=q\mathbf{E}$ 给出的，与此电荷在参照系 K 中的速度 $\mathbf{u}$ 无关. 弗立许和威莱兹[①] 给出了一种相当完善的处理方法，他们利用狭义相对论，并采取所有的显而易见的假设，推导出麦克斯韦方程组.

有一个明显的反例，也可以用来说明上节所述的方法，这例子是一个粒子与一洛仑兹标势 $\phi(x)$ 的相互作用. 拉格朗日函数 L 或 $\tilde{L}$ 是

$$\begin{aligned} L&=-mc^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}e^{g\phi(x)/mc^2} \\ \tilde{L}&=-mc\sqrt{g^{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}}\,e^{g\phi(x)/mc^2} \end{aligned} \tag{12.34}$$

式中 g 是类似于电荷的一个耦合常数. 由(12.24)，利用拉格朗日函数(12.34)，得到协变运动方程如下：

$$m\frac{dU^\alpha}{d\tau}=g\left(\partial^\alpha\phi-\frac{1}{c^2}U^\alpha U_\beta\partial^\beta\phi\right) \tag{12.35}$$

而具体的时空方程是

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=-\frac{g}{\gamma_u}\nabla\phi-\frac{g\mathbf{p}}{mc^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\phi\right) \tag{12.36}$$

和 $dE/dt=\mathbf{u}\cdot d\mathbf{p}/dt$. 对非相对论性运动来说，(12.36)具有库仑力定律或牛顿引力定律的形式，其中我们把 ϕ 当作势. 但对相对论性运动来说，这力不遵守洛仑兹力定律；它涉及四元矢量 $\partial^\alpha\phi$，不涉及二秩场强张量 $F^{\alpha\beta}$. 还要注意：即使在"源"所静止的参照系中，这时 ϕ 与时间无关，然而作用在粒子上的力仍是与速度相关的，这是与洛仑兹力的另一差别.

不管与电磁学有哪些差别，这个洛仑兹标势的例子符合(12.

① D. H. Frisch and L. wilets, *Am. J. Phys.* **24**, 574(1956). 也可参看 J. R. Tessman, *Am. J. Phys.* **34**, 1048(1966). 在 M. Schwartz, *Principles of Electrodynamics*, McGraw-Hill, New York(1972) 的第三章里可以找到一种非正规的、但富有启发性的讨论，并且清晰地阐述了所有的实验事实和假设.

32)的要求. 在参照系K中存在一个明显的类磁力. 但是,不存在独立的实体B. 在任一参照系中,力由$\partial^\alpha\phi$的四个分量给出,而不是由$F^{\alpha\beta}$的六个分量给出. 关于这个例子的进一步探讨,留作习题12.3.

12.3 在均匀静磁场中的运动

作为电磁场中带电粒子动力学最重要的一个例子,我们考虑带电粒子在磁感应强度为B的均匀静磁场中的运动. 运动方程(12.1)是

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\frac{e}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B},\quad \frac{dE}{dt}=0 \tag{12.37}$$

式中粒子的速度用v来表示. 因为能量不随时间改变,所以速度的量值是常数,从而γ也是常数. 这时,第一个方程可以写成

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}_B \tag{12.38}$$

式中

$$\omega_B=\frac{eB}{\gamma mc}=\frac{ecB}{E} \tag{12.39}$$

是迴转频率或进动频率. (12.38)所描写的运动是垂直于B的圆周运动加上平行于B的匀速平移. 容易证明,速度的解是

$$\mathbf{v}(t)=v_{\parallel}\epsilon_3+\omega_B a(\epsilon_1-i\epsilon_2)e^{-i\omega_B t} \tag{12.40}$$

式中ϵ_3是平行于磁场的单位矢量,ϵ_1和ϵ_2是另外两个正交单位矢量,$v_\parallel$是平行于磁场的速度分量,a是迴转半径. 按惯例,只取方程的实部. 于是,我们得知,当顺着B的方向看时,(12.40)表示反时针转动(对正电荷e来说). 再对(12.40)求积分,即得粒子的位移

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{X}_0+v_\parallel t\epsilon_3+ia(\epsilon_1-i\epsilon_2)e^{-i\omega_B t} \tag{12.41}$$

粒子的路线是半径为 a、螺旋角为 $\alpha=\mathrm{tg}^{-1}(v_{\perp}/\omega_B a)$的螺旋线. 回转半径 a 的量值取决于磁感应强度B和粒子的横向动量 $\mathbf{p}_{\perp}$. 由(12.39)和(12.40)明显看到

$$cp_{\perp}=eBa$$

用这个式子确定粒子动量是方便的. 根据带电粒子在已知磁场(B 为其磁感应强度)中运动路线的曲率半径，可以确定粒子的动量. 对带电量等于电子电荷的粒子来说，可以把动量写成带有数值系数的形式:

$$p_{\perp}(\text{兆电子伏特}/c)=3.00\times10^{-4}\,Ba(\text{高斯-厘米}) \quad (12.42)$$

12.4 在均匀静电场和静磁场的并合场中的运动

我们现在研究一个带电粒子在电场E和磁场B的并合场中的运动，这两个场都是均匀的静止场，但通常是不平行的. 我们将先论述一种重要的特殊情形，即垂直场. 力方程(12.1)表明，粒子的能量是随时间改变的. 因此，不能像静磁场那样，求得一个简单的速度方程. 然而用适当的洛仑兹变换可以简化运动方程. 考虑一个洛仑兹变换，借此把原坐标系变换到以速度 $\mathbf{u}$ 相对于原坐标系运动的一个坐标系 K'. 那末在 K' 中粒子的洛仑兹力方程是

$$\frac{d\mathbf{p}'}{dt'}=e\left(E'+\frac{\mathbf{v}'\times\mathbf{B}'}{c}\right)$$

式中带撇的变量是坐标系 K' 中的变量. 场 $\mathbf{E}'$ 和 $\mathbf{B}'$ 由关系式(11.149)给出，但 $\mathbf{v}$ 应换成 $\mathbf{u}$. 让我们首先假定 $|\mathbf{E}|<|\mathbf{B}|$. 如果现在选取 $\mathbf{u}$，使与正交矢量 $\mathbf{E}$、$\mathbf{B}$ 相垂直，即

$$\boxed{\mathbf{u}=c\frac{(\mathbf{E}\times\mathbf{B})}{B^2}} \quad (12.43)$$

我们求得 K' 中的场是

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel}&=0, \qquad \mathbf{E}'_{\perp}=\gamma\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{u}}{c}\times\mathbf{B}\right)=0 \\ \mathbf{B}'_{\parallel}&=0, \qquad \mathbf{B}'_{\perp}=\frac{1}{\gamma}\mathbf{B}=\left(\frac{B^2-E^2}{B^2}\right)^{1/2}\mathbf{B} \end{aligned}\right\} \tag{12.44}$$

式中$\parallel$和$\perp$分别表示平行于和垂直于u方向的分量. 在坐标系K'中作用于粒子上的场只有静磁场$\mathbf{B}'$,它的方向与B相同，但强度只有B的γ分之一. 所以在K'中的运动和上节讨论的相同,即围绕力线作螺旋线运动. 当从原坐标系来看时，这种迴转运动伴随着一种垂直于E和B的匀速"漂移"u, 后者由(12.43)给出. 这种漂移有时叫做$E\times B$漂移. 我们已经在10.3节里讨论导电流体时在另一种意义下考虑过这种漂移. 只要注意到下述情况,就可以定性地理解这种漂移: 开始绕B迴转的粒子被电场所加速而获得能量，并在大约半周期内沿着一条半径较大的路线运动. 但在下半周期内,电场使粒子减速,并使它失去能量，所以沿一条较弯的弧线运动. 这些弧线连在一起就形成垂直于E和B的平移,如图12.2所示. 漂移的方向与粒子所带电荷的正负号无关.

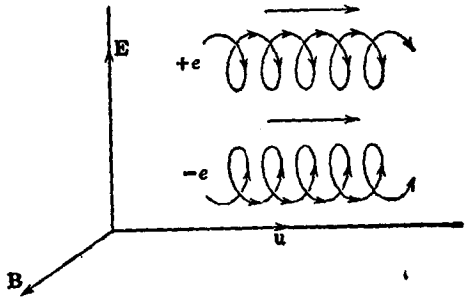


图12.2 带电粒子在交叉场中的E×B漂移.

漂移速度u(12.43)只在它小于光速时，即在$|E|<|B|$时,才有物理意义. 如果$|E|>|B|$,则电场是如此之强，以致粒子沿E方向连续加速,且它的平均能量随时间连续地增加. 为了看出这一点,我们考虑从原坐标系到坐标系K''的洛仑兹变换,K''是以速度

$$\boxed{\mathbf{u}'=c\frac{(\mathbf{E}\times\mathbf{B})}{E^2}} \tag{12.45}$$

相对于原坐标系运动的. 在坐标系 K'' 中,电场和磁场是

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}''_{\parallel}&=0,\quad \mathbf{E}''_{\perp}=\frac{1}{\gamma'}\mathbf{E}=\left(\frac{E^2-B^2}{E^2}\right)^{1/2}\mathbf{E}\\ \mathbf{B}''_{\parallel}&=0,\quad \mathbf{B}''_{\perp}=\gamma'\left(\mathbf{B}-\frac{\mathbf{u}'\times\mathbf{E}}{c}\right)=0\end{aligned}\right\} \tag{12.46}$$

所以,在坐标系 K'' 中粒子受到纯静电场的作用,粒子以不断增长的速度作双曲线运动(参看习题 12.4).

粒子能以匀速度 $u=cE/B$ 通过交叉的 E、B 场,这一事实,为我们提供了按速度挑选带电粒子的可能性. 如果一束具有某一速度分布的带电粒子正入射到交叉的均匀电场和磁场所在的区域内,那末,只有速度等于 cE/B 的那些粒子才能无偏折地通过该区域. 于是,用适当的入射狭缝和出射狭缝,就可以只允许在 cE/B 附近狭窄的速度带内的粒子通过,分辨本领取决于几何结构、所要的速度以及场强. 当把这些 $E\times B$ 速度选择器和动量选择器(例如一块致偏磁体)联合使用时,就可以从混有不同质量和动量的粒子束中,分离出非常纯的、单能量的、定质量粒子束. 人们常常用这种大型仪器,来提供超高能加速器中产生的各种实验用的粒子束,以供实验使用.

如果 E 有一个平行于 B 的分量,那就不能用上面这样简单的办法来了解粒子的特性. 标积 $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ 是一个洛仑兹不变量(参看习题 11.12),正如 (B^2-E^2) 是一个洛仑兹不变量一样. 当电场和磁场垂直时($\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}=0$),可以找到一个洛仑兹参照系,使得在那里当 $|\mathbf{B}|>|\mathbf{E}|$ 时,$\mathbf{E}=0$,或当 $|\mathbf{E}|>|\mathbf{B}|$ 时 $\mathbf{B}=0$. 在这些坐标系中粒子的运动是比较简单的. 如果 $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\neq 0$,那末,在所有洛仑兹参照系中,电场和磁场都将同时存在,这两种场之间的夹角是锐角还是钝角取决于它在原坐标系中的值. 因此必须考虑并合场中的运动.

当场是均匀静止场时，可以直接求出用笛卡儿分量表示的粒子运动的解．我们把它留作习题 12.7．

12.5 在非均匀静磁场中粒子的漂移

在天体物理学和热核物理学的应用中，知道粒子在随空间变化磁场中的状态是相当重要的．场随空间的变化往往是足够缓慢，以致运动的微扰解（最先由阿耳文给出）是很好的近似．“足够缓慢”一般意味着：B的量值或方向发生了可察觉变化的距离比粒子的迴转半径 a 大得多．这时按最低级近似来说，粒子的运动是围绕力线的螺旋形迴转，其迴转频率由磁感应强度的局部值给出．在高一级近似中，轨道发生缓慢的变化，我们可以把这情况说成是导向中心的漂移．

我们所考虑的场的第一类空间变化是在垂直于B的方向上有梯度变化．设观察点处的梯度和单位矢量 $\mathbf{n}$ 同方向，且 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}=0$．则在一级近似中，迴转频率可写成

$$\omega_B(\mathbf{x})=\frac{e}{\gamma mc}B(\mathbf{x})\simeq\omega_0\left[1+\frac{1}{B_0}\left(\frac{\partial B}{\partial\xi}\right)_0\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}\right] \tag{12.47}$$

在(12.47)中，ξ 是在 $\mathbf{n}$ 方向上的坐标，并对坐标原点展开，在坐标原点上 $\omega_B=\omega_0$．因为B的方向不变，所以平行于B的运动保持匀速平移状态．因而我们只考虑对横向运动的修正．我们写出 $\mathbf{v}_\perp=\mathbf{v}_0+\mathbf{v}_1$，式中 $\mathbf{v}_0$ 是均匀场中的横向速度，$\mathbf{v}_1$ 是一个微小的修正项．我们可以将(12.47)代入力方程

$$\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt}=\mathbf{v}_\perp\times\omega_B(\mathbf{x}) \tag{12.48}$$

并且只保留一级项，即得下列近似结果：

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt}\simeq\left[\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_0(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}_0)\frac{1}{B_0}\left(\frac{\partial B}{\partial\xi}\right)_0\right]\times\omega_0 \tag{12.49}$$

由(12.40)和(12.41)很容易看出，均匀场中横向速度 $\mathbf{v}_0$ 和坐

标 $\mathbf{x}_0$ 有下列关系：

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{v}_0 &= -\omega_0\times(\mathbf{x}_0-\mathbf{X})\\ (\mathbf{x}_0-\mathbf{X}) &= \frac{1}{\omega_0^2}(\omega_0\times\mathbf{v}_0)\end{aligned}\right\} \tag{12.50}$$

式中 $\mathbf{X}$ 是未扰动圆周运动的迴转中心的坐标（在这里 $\mathbf{X}=0$）。如果在(12.49)中消去 $(\omega_0\times\mathbf{v}_0)$，代之以 $\mathbf{x}_0$，我们得

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt}\simeq\left[\mathbf{v}_1-\frac{1}{B_0}\left(\frac{\partial B_0}{\partial\xi}\right)_0\omega_0\times\mathbf{x}_0(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}_0)\right]\times\omega_0 \tag{12.51}$$

上式表明，$\mathbf{v}_1$ 除了作周期变化的几项以外，还有一个非零的平均值，

$$\mathbf{v}_G\equiv\langle\mathbf{v}_1\rangle=\frac{1}{B_0}\left(\frac{\partial B}{\partial\xi}\right)_0\omega_0\times\langle(\mathbf{x}_0)_\perp(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}_0)\rangle \tag{12.52}$$

$(\mathbf{x}_0)_\perp$ 的直角分量是以嶺值振幅 a 和 90° 位相之差作正弦式振荡，只须注意到这一点，就可定出 $(\mathbf{x}_0)_\perp(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}_0)$ 的平均值。因此，$(\mathbf{x}_0)_\perp$ 的分量中，只有平行于 $\mathbf{n}$ 的分量对平均值有贡献，并且

$$\langle(\mathbf{x}_0)_\perp(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}_0)\rangle=\frac{a^2}{2}\mathbf{n} \tag{12.53}$$

于是，梯度漂移速度由下式给出：

$$\mathbf{v}_G=\frac{a^2}{2}\frac{1}{B_0}\left(\frac{\partial B}{\partial\xi}\right)_0(\omega_0\times\mathbf{n}) \tag{12.54}$$

另一与坐标无关的表式是

$$\frac{\mathbf{v}_G}{\omega_B a}=\frac{a}{2B^2}(\mathbf{B}\times\nabla_\perp B) \tag{12.55}$$

由(12.55)显而易见，如果场的梯度满足 $|\nabla B/B|\ll 1$，则漂移速度与轨道速度 $(\omega_B a)$ 比起来是不大的。粒子迅速地作螺旋线运动，而其迴转中心在垂直于 $\mathbf{B}$ 和 ∇B 的方向上缓慢地运动。(12.55)给出带正电粒子的漂移指向。带负电粒子的漂移速度的符号是相反的；正负号的改变是由 ω_B 的定义引起的。研究粒子在场强大于和小于平均场强的区域内进出时迴转半径的变化，便可定性地

解释梯度漂移. 图 12.3 定性地画出了带正负电荷粒子的这种特性.

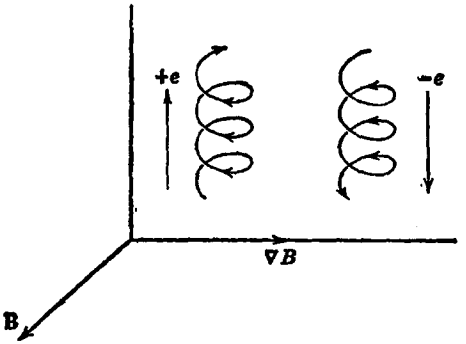


图 12.3 由磁场的横向梯度引起的带电粒子的漂移.

另一种引起粒子导向中心漂移的场变化是力线的弯曲. 考虑如图 12.4 所示的二维场. 这个场的局部场强与 z 无关. 左图是平行于 x 轴的恒定的均匀磁场, 其磁感应强度为 B_0. 粒子以迴转半径 a 和速度 $\omega_B a$ 绕着力线迴转, 同时以匀速度 $v_\parallel$ 沿着力线运动. 我们想要把这种运动当作在右图所示的场中的粒子运动的零级近似来处理, 右图中的力线是弯曲的, 其局部曲率半径 R 比 a 大.

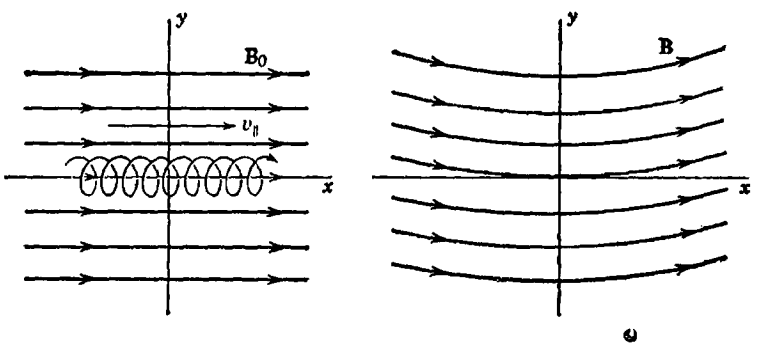


图 12.4 (a) 粒子沿着均匀恒定的磁感应线作螺旋线运动;
(b) 磁感应线的弯曲会引起垂直于 (x, y) 平面的漂移.

一级近似的粒子运动可作如下理解. 粒子要围绕力线作螺旋线运动,但力线向一边弯曲. 就导向中心的运动来说,这相当于量值为 $v_{\parallel}^2/R$的离心加速度. 我们可以认为这加速度是由附加于磁感应强度 $\mathbf{B}_0$ 上的一个有效电场所引起的,该有效电场为

$$\mathbf{E}_{有效}=\frac{\gamma m}{e}\frac{\mathbf{R}}{R^2}v_{\parallel}^2 \tag{12.56}$$

我们从 (12.43) 看出, 有效电场和磁感应强度共同引起曲率漂移速度,

$$\mathbf{v}_C\simeq c\frac{\gamma m}{e}v_{\parallel}^2\frac{\mathbf{R}\times\mathbf{B}_0}{R^2B_0^2} \tag{12.57}$$

利用定义 $\omega_B=eB_0/\gamma mc$, 可将曲率漂移速度写成

$$\mathbf{v}_C=\frac{v_{\parallel}^2}{\omega_B R}\left(\frac{\mathbf{R}\times\mathbf{B}_0}{RB_0}\right) \tag{12.58}$$

漂移方向由矢积决定, 其中R是从有效曲率中心到电荷位置的矢径。(12.58)的正负号适合于正电荷, 且与 $v_{\parallel}$ 的正负号无关. 对负粒子来说,由于 ω_B 的正负号相反, 所以(12.58)所取的正负号也相反.

直接解洛仑兹力方程也可以导出 (12.58), 这种方法虽然平常, 但比较直截了当. 如果我们采用适合于图 12.4*b* 的柱坐标 (ρ,ϕ,z), 并把坐标原点选在曲率中心上,那末, 磁感应强度只有一个 ϕ 分量, 即 $B_\phi=B_0$. 于是, 容易证明, 力方程给出下列三个方程:

$$\begin{aligned}\ddot{\rho}-\rho\dot{\phi}^2&=-\omega_B\dot{z}\\ \rho\ddot{\phi}+2\dot{\rho}\dot{\phi}&=0\\ \ddot{z}&=\omega_B\dot{\rho}\end{aligned} \tag{12.59}$$

如果零级轨道是半径 a 比曲率半径 R 小的螺旋线, 那末在最低级近似中, $\dot{\phi}\simeq v_{\parallel}/R$, 而 $\rho\simeq R$. 因而由(12.59)的第一个方程得到 $\ddot{z}$ 的近似结果:

$$\dot{z}\simeq\frac{v_\parallel^2}{\omega_B R} \tag{12.60}$$

这正是(12.58)所描述的曲率漂移.

对于没有电流的空间，我们可以把梯度漂移 $\mathbf{v}_G$(12.55) 和曲率漂移 $\mathbf{v}_C$(12.58) 合并成一个简单式子. 这是由下列事实得知的：对于像图 12.4*b* 所示的二维场来说，$\nabla\times\mathbf{B}=0$意味着

$$\frac{\nabla_\perp B}{B}=-\frac{\mathbf{R}}{R^2}$$

因此，显而易见，对二维场来说，$\mathbf{v}_G$ 和 $\mathbf{v}_C$ 之和是总漂移速度，

$$\mathbf{v}_D=\frac{1}{\omega_B R}\left(v_\parallel^2+\frac{1}{2}v_\perp^2\right)\left(\frac{\mathbf{R}\times\mathbf{B}}{RB}\right) \tag{12.61}$$

式中 $v_\perp=\omega_B a$ 是迴转运动的横向速度. 对于处在热平衡态的带单个电荷的非相对论性粒子来说，漂移速度的量值为

$$v_D(\text{厘米/秒})=\frac{172T(\text{K})}{R(\text{米})B(\text{高斯})} \tag{12.62}$$

(12.61) 表示的粒子漂移给某几种为约束热等离子体而设计的热核装置带来麻烦. 一种可能的装置是具有强大轴向场的环形管，轴向场是由绕在环形管外的螺线管绕组产生的. 典型参数为 $R=1$ 米，$B=10^3$ 高斯时，1 电子伏特($T\simeq10^4$K)等离子体中的粒子所具有的漂移速度是 $v_D\sim1.8\times10^3$ 厘米/秒. 这意味着，粒子将在若干分之一秒时间内漂移到器壁之外. 等离子体愈热，漂移速度相应地就愈大. 有一种防止诸环形装置内的这种一级漂移的方法，是把环形管扭成 8 字形. 因为粒子在漂移出管外之前，一般要沿闭合路线走了好多圈，所以它们感觉不到场的净曲率或梯度. 因此，至少在 $1/R$ 的第一级近似下，粒子没有净漂移. 仿星器型热核装置就是采用这种方法来消除由于磁场的空间变化所引起的漂移，在仿星器中，试图用一个外部产生的强大的轴向磁场来约束等离子体.

12.6 穿过粒子轨道的磁通量的绝热式不变性

前几节里讨论的各种运动都是和磁力线垂直的. 由电场，或者由磁场的梯度或曲率所引起的这些运动，是洛仑兹力方程中磁力项的一些特性造成的. 为了使我们对粒子在磁场中的运动的一般概述完善起见，还必须考虑平行于磁力线的运动. 对于变化缓慢的场来说，绝热式不变量的概念确是一个强有力的工具. 在天体力学和旧的量子论中，在讨论微扰(摄动)① 或确定哪些量应该量子化时，绝热式不变量都是很有用的. 我们的讨论将和天体力学问题的讨论非常接近，这是因为我们感兴趣的是带电粒子在慢变化场中的运动性质，而这种场可以看成和 12.3 节里考虑的简单均匀静止场相差很小.

考虑力学系统的作用量积分来引入绝热式不变性概念. 如果 q_i 和 p_i 是广义的正则坐标和正则动量，那末，对每一个周期性坐标来说，作用量积分 J_i 由下式定义：

$$J_i = \oint p_i dq_i \tag{12.63}$$

积分遍及坐标 q_i 的一完整周期. 对于一个给定的具有已知初始条件的力学系统来说，作用量积分 J_i 是常量. 如果现在系统的性质有一些变化(例如弹性常数或某一粒子的质量有了变化)，就产生作用量积分如何变化的问题. 可以证明②，如果性质的变化比有关的运动周期缓慢，并且与周期无关(这种变化叫绝热式变化)，那末，作用量积分就是不变量. 这意味着，如果我们有某个力学系统处在某一运动状态，并且令其某些性质发生绝热式变化，以致经过

---

① peturbations 在天体力学中译作"摄动"，在量子力学中译作"微扰". ——译者注

② 例如，参看 M. Born, *The Mechanics of the Atom*, Bell London(1927).

很长时间后，结果成为一个不同的力学系统，那末，这个不同的力学系统的运动最后仍使作用量积分值与初始系统的值相同．显然，这是研究系统性质微小变化所引起的效应的一个有力工具．

对于处在磁感应强度为B的均匀静磁场中的带电粒子来说，其横向运动是周期性的．这横向运动的作用量积分是

$$J=\oint \mathbf{P}_{\perp}\cdot d\mathbf{l} \tag{12.64}$$

式中 $\mathbf{P}_{\perp}$ 为正则动量(12.11)的横向分量，$d\mathbf{l}$ 是粒子圆形路线上的指向线元．由(12.11)，我们得

$$J=\oint \gamma m\mathbf{v}_{\perp}\cdot d\mathbf{l}+\frac{e}{c}\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} \tag{12.65}$$

因为 $\mathbf{v}_{\perp}$ 与 $d\mathbf{l}$ 平行，又得

$$J=\oint \gamma m\omega_B a^2 d\theta+\frac{e}{c}\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} \tag{12.66}$$

将斯托克斯定理应用到第二个积分上，并将第一个积分遍历 θ 积分，遂得

$$J=2\pi\gamma m\omega_B a^2+\frac{e}{c}\int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,da \tag{12.67}$$

因为(12.64)中的线元 $d\mathbf{l}$ 相对于B为反时针方向，所以单位矢量n和B反平行．因此，要从上式中第一项减去对圆形轨道的积分．这样，利用 $\omega_B=eB/\gamma mc$，就得到

$$J=\gamma m\omega_B\pi a^2=\frac{e}{c}(B\pi a^2)=\frac{e}{c}\Phi \tag{12.68}$$

$B\pi a^2$ 这个量是穿过粒子轨道的磁通量．

如果粒子是在磁场强度的空间或时间变化都很缓慢的区域内运动的，则 J 的绝热式不变性意味着：穿过粒子轨道的磁通量保持不变．如果 B 增加，半径 a 就减少，使得 $B\pi a^2$ 保持不变．这种粒子轨道耦合磁通量的不变性，可以用粒子的轨道半径、横向动

量、磁矩等几种不同的术语来表述. 这些不同说法如下:

$$\left.\begin{array}{l} Ba^2 \\ p_\perp^2/B \\ \gamma\mu \end{array}\right\} \text{是绝热式不变量} \tag{12.69}$$

这里 $\mu=(e\omega_B a^2/2c)$ 是粒子轨道运动所构成的圆电流的磁矩. 如果只有静磁场存在,则粒子的速率保持不变,粒子的总能量也保持不变. 于是磁矩 μ 本身就是一个绝热式不变量. 在随时间变化的场或静电场中, μ 只在非相对论性极限下才是一个绝热式不变量.

现在考虑下述简单情况: 静磁场B的作用主要在 z 方向上,但在该方向上有一个小的正梯度. 图 12.5 表示力线的一般形状. 场除了具有 z 分量外,还有电力线的弯曲所形成的微小径向分量.

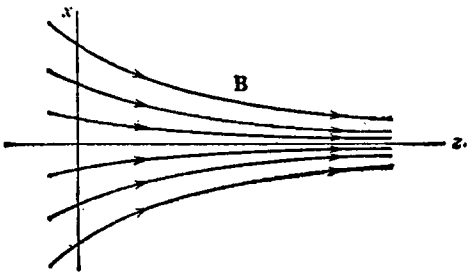


图 12.5

为简单起见, 假定场是柱对称的. 设一个粒子绕 z 轴作小半径的螺旋线运动,在 $z=0$ 处其横向速度为 $\mathbf{v}_{\perp 0}$, 平行于B 的速度分量为 $v_{\parallel 0}$, 在 $z=0$ 处的轴向场强为 B_0. 粒子的速率保持不变, 所以在沿 z 轴的任何位置上,

$$v_\parallel^2+v_\perp^2=v_0^2 \tag{12.70}$$

式中 $v_0^2=v_{\perp 0}^2+v_{\parallel 0}^2$ 是 $z=0$ 处速率的平方. 如果我们假定耦合磁通量是一个运动常数,那末,从(12.69)可以写出

$$\frac{v_\perp^2}{B}=\frac{v_{\perp 0}^2}{B_0} \tag{12.71}$$

式中 B 是轴向磁感应强度. 于是我们求得在 z 轴的任何位置上的平行速度为

$$v_{\parallel}^2 = v_0^2 - v_{\perp 0}^2 \frac{B(z)}{B_0} \tag{12.72}$$

粒子在 z 方向上的速度方程(12.72)相当于粒子在一维势①

$$V(z) = \frac{1}{2} m \frac{v_{\perp 0}^2}{B_0} B(z)$$

中的牛顿运动方程的初积分. 如果 $B(z)$ 增加得足够大, (12.72)的右边终于会在某一点 $z = z_0$ 上变为零. 这意味着, 粒子绕力线的螺旋线轨道越来越收紧, 因而越来越多的平移能转换成转动能, 直到其轴向速度变为零为止. 然后, 粒子调转过来沿负 z 方向往后运动, 而其迴转方向仍保持原来的. 这样, 粒子就被磁场反射回去, 大概情况如图 12.6 所示.

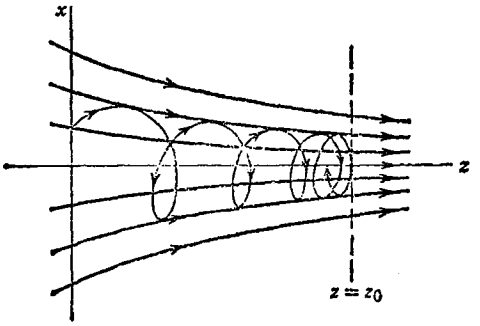


图 12.6 高场强区将带电粒子反射回去.

方程(12.72)是假定 $p_{\perp}^2/B$ 为不变量的结果. 为了证明这种不变性至少在第一级近似下可从洛仑兹力方程导出, 我们考虑运动方程的显解. 如果沿 z 轴的磁感应强度是 $B(z)$, 则在轴附近的场

① 不过要注意, 我们的讨论完全是相对论性的, 跟一维非相对论性力学的类比, 只是形式上的类比而已.

的径向分量由散度方程给出，

$$B_\rho(\rho, z)\simeq-\frac{1}{2}\rho\frac{\partial B(z)}{\partial z} \tag{12.73}$$

式中 ρ 是由轴向外的半径．力方程的 z 分量是

$$\ddot{z}=\frac{e}{\gamma mc}(-\rho\dot{\phi}B_\rho)\simeq\frac{e}{2\gamma mc}\rho^2\dot{\phi}\frac{\partial B(z)}{\partial z} \tag{12.74}$$

式中 $\dot{\phi}$ 是绕 z 轴的角速度．准确到 $B(z)$ 变化的一级小量时，上式可写成

$$\ddot{z}\simeq-\frac{v_{\perp 0}^2}{2B_0}\frac{\partial B(z)}{\partial z} \tag{12.75}$$

式中已用了 $\rho^2\dot{\phi}^2\simeq-(a^2\omega_B)_0=-(v_{\perp 0}^2/\omega_{B0})$．方程(12.75) 的初积分是(12.72)，这就表明：在准确到一级小量的情况下，穿过粒子轨道的磁通量的恒定性可直接从运动方程导出．

当讨论粒子在各种随空间变化的磁场中运动时，轨道耦合磁通量的绝热式不变性是很有用的．上述简单例子阐明了“磁镜”的原理：带电粒子被强磁场区域所反射．磁镜的性质构成了费密理论的基础，费密理论说明了宇宙射线粒子由于在星际空间中与运动的磁云碰撞而被加速，并达到非常高的能量．磁镜原理可以用来约束热等离子体以产生热核能．螺线管绕组在空间某一区域内产生一个轴向磁场，在螺线管绕组的两端各有一组附加线圈，使得在两端产生一个比中部强大得多的磁场，这两个磁场就可以构成一个磁瓶．磁力线的形状如图 12.7 所示．在中央区域内产生的粒子或由外界注入场内的粒子，都将沿着轴线作螺旋线运动，但在两端都将被磁镜所反射．如果镜内最大磁感应强度 B_m 与中央区域磁感应强度 B 的比值非常大，只有轴向速度分量非常大的粒子才能穿出两端．由(12.72)显然可知，捕集粒子的判据是

$$\left|\frac{v_{\parallel 0}}{v_{\perp 0}}\right|<\left(\frac{B_m}{B}-1\right)^{1/2} \tag{12.76}$$

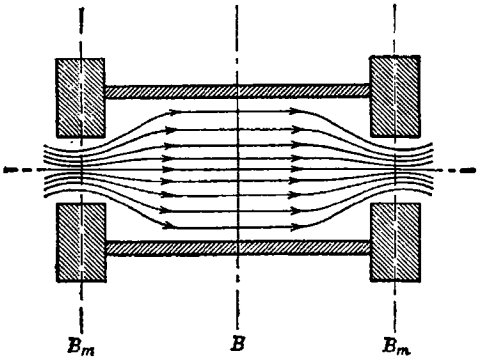


图 12.7 约束热等离子体的"磁镜"装置的示意图.

如果粒子被注入该装置中，那末(12.76)这个要求是容易满足的. 这时，粒子的逃逸取决于它们被剩余气体原子散射的速率以及其它等等因素，这些因素使粒子的速度分量不遵守(12.76).

这些原理的另一应用领域是地磁场和恒星磁场. 根据本节讨论的绝热式不变量和 12.5 节讨论的漂移速度，可以了解带电粒子在太阳或地球的磁偶极子场中的运动. 我们把这一课题的某些内容留作习题 12.8 和 12.9，这两题讨论地球周围被捕集的粒子[范艾伦(Van Allen)带].

12.7 相互作用的带电粒子的拉格朗日函数的最低级相对论性修正，达尔文-拉格朗日函数

在12.1 节里，我们讨论了一个相对论性带电粒子在外电磁场中的一般拉格朗日函数的形式，这外电磁场是用矢势 $\mathbf{A}$ 和标势 Φ 来描写的. 对应的相互作用拉格朗日函数由(12.8)给出. 如果现在考虑两个或两个以上带电粒子的相互作用拉格朗日函数的一般表述问题，我们就会看到，只有在非相对性速度下才能有这种表述. 假定拉格朗日函数是所有粒子的瞬时速度和瞬时坐标的函数. 当考虑到电磁场以有限速度传播时，这种假定就不可能成立了，因

为其它粒子在某一粒子位置上所产生的势的值与那些粒子在“推迟”时间的运动状态有关．只有当推迟效应可以忽略不计时，才可能用瞬时位置和瞬时速度表示的拉格朗日函数来描述粒子系统．因此，人们也许以为，只在静态极限[即零级的(v/c)]下才可能用拉格朗日函数来表述．但是，我们现在要来证明：把最低级相对论性修正项考虑进去，可以给出相互作用粒子的近似的拉格朗日函数，它准确到$(v/c)^2$级．

我们只要考虑电荷为q_1、q_2，质量为m_1、m_2，坐标为$\mathbf{x}_1$、$\mathbf{x}_2$的两个相互作用粒子就够了．粒子的相对间距是$\mathbf{r}=\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2$，在静态极限下，相互作用的拉格朗日函数恰好是静电势能的负值：

$$L_{\text{相互}}^{\text{非相对论性}}=-\frac{q_1q_2}{r} \tag{12.77}$$

如果把注意力放在第一个粒子上，就可以把上式看成是第二个粒子在第一个粒子位置上产生的势Φ_{12}和q_1的乘积的负值．上式和(12.7)在形式上是相同的．如果我们想把它推广到静态极限以外的情形，就必须根据(12.8)来确定Φ_{12}和$\mathbf{A}_{12}$的某一级近似值．一般说来，Φ_{12}和$\mathbf{A}_{12}$都要进行相对论性修正．但在库仑规范下，由瞬时库仑势给出标势，并准确到v/c的各次幂．所以，如果我们在库仑规范下作计算，则标势Φ_{12}是已知的，这时只须考虑矢势$\mathbf{A}_{12}$就行了．

如果只要最低级的相对论性修正，则在计算$\mathbf{A}_{12}$时可以忽略推迟效应．原因是：拉格朗日函数(12.8)中矢势是以组合形式$q_1(\mathbf{v}_1/c)\cdot\mathbf{A}_{12}$出现的．因为$\mathbf{A}_{12}$本身是$v_2/c$级的，所以在计算$\mathbf{A}_{12}$时就不需要更高的准确度．因此，我们有静磁表式

$$\mathbf{A}_{12}\simeq\frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{J}_t(\mathbf{x}')d^3x'}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}'|} \tag{12.78}$$

式中$\mathbf{J}_t$是第二个粒子产生的电流的横向部分，这在6.5节里讨论

过．根据方程(6.46)-(6.50)可以证明，横向电流是

$$\mathbf{J}_t(\mathbf{x}')=q_2\mathbf{v}_2\delta(\mathbf{x}'-\mathbf{x}_2)-\frac{q_2}{4\pi}\nabla'\left(\frac{\mathbf{v}_2\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}_2|^3}\right) \tag{12.79}$$

将上式代入(12.78)，立刻可以求出第一项的积分．于是，

$$\mathbf{A}_{12}\simeq\frac{q_2\mathbf{v}_2}{cr}-\frac{q_2}{4\pi c}\int\frac{1}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}_1|}\nabla'\left(\frac{\mathbf{v}_2\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}_2|^3}\right)d^3x'$$

将变数换成$\mathbf{y}=\mathbf{x}'-\mathbf{x}_2$，并进行分部积分，就可以把积分写成下面的形式：

$$\mathbf{A}_{12}\simeq\frac{q_2\mathbf{v}_2}{cr}-\frac{q_2}{4\pi c}\nabla_r\int\frac{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{y}}{y^3}\frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{r}|}d^3y$$

现在可以直接算出积分而得

$$\mathbf{A}_{12}\simeq\frac{q_2}{c}\left[\frac{\mathbf{v}_2}{r}-\frac{1}{2}\nabla_r\left(\frac{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{r}}{r}\right)\right]$$

算出第二项中的微分，即得最后结果：

$$\mathbf{A}_{12}\simeq\frac{q_2}{2cr}\left[\mathbf{v}_2+\frac{\mathbf{r}(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{r})}{r^2}\right] \tag{12.80}$$

如利用表式(12.80)作为第二个粒子在第一个粒子位置上所产生的矢势，并计及最低级相对论性效应，则两个带电粒子相互作用的拉格朗日函数即是

$$L_{\text{相互}}=\frac{q_1q_2}{r}\left\{-1+\frac{1}{2c^2}\left[\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2+\frac{(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{r})(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{r})}{r^2}\right]\right\} \tag{12.81}$$

这种相互作用形式是达尔文在1920年最先求得的．在用量子力学讨论双电子原子的相对论性修正时，上式是很重要的．在量子力学问题中，速度矢量是用相应的量子力学算符(狄喇克α算符)代替．这时的相互作用叫做布赖特(Breit)相互作用(1930)①．

① 参看 H. A. Bethe and E. E. Salpeter, *Quantum Mechanics of One-and Two-Electron Atoms*, Springer-Verlag, Berlin, Academic, New York, 1957, 第170页起.

对于一个由若干相互作用带电粒子组成的系统来说，将每个粒子的自由粒子拉格朗日函数(12.6)展开，并对所有的(12.81)形式的相互作用项求和，就可以写出准确到 $1/c^2$ 级的完整达尔文-拉格朗日函数．结果如下：

$$L_{达尔文}=\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2+\frac{1}{8c^2}\sum_i m_i v_i^4-\frac{1}{2}\sum_{i,j}{}' \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$+\frac{1}{4c^2}\sum_{i,j}{}' \frac{q_i q_j}{r_{ij}}[\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_j+\mathbf{v}_i\cdot\hat{\mathbf{r}}_{ij}\mathbf{v}_j\cdot\hat{\mathbf{r}}_{ij}] \quad (12.82)$$

式中 $r_{ij}=|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j|$，$\hat{\mathbf{r}}_{ij}$ 为 $\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j$ 方向上的单位矢量，二重求和号上所加的撇号表示略去 $i=j$ 的(自具能)项．虽然达尔文-拉格朗日函数从量子力学布赖特相互作用这一方面来看已经有了其值得赞美的应用，但它在纯经典领域中也是有用的．本章末的推荐读物中引证了两个实例．也可参看习题．

12.8 电磁场的拉格朗日函数

在 12.1 节里，我们研究了一个带电粒子在外电磁场中的运动方程的拉格朗日函数表述．现在研究怎样描述与给定外电荷和电流源相互作用的电磁场的拉格朗日函数．描述连续场的拉格朗日函数方法，与描述分立的点粒子的方法十分相似①．将有限个坐标 $q_i(t)$ 和 $\dot{q}_i(t)$，$i=1,2,\cdots,n$，换成无限个自由度．时空 x^α 中每个点对应于有限个分立指标 i 的值．将广义坐标 q_i 换成带分立指标 $(k=1,2,\cdots,n)$ 的连续场 $\phi_k(x)$ 和连续指标 (x^α)．将广义速度 $\dot{q}_i$ 换成四元梯度矢量 $\partial^\beta\phi_k$．并根据作用量积分对围绕物理值的变分 $\delta\phi_k$ 和 $\delta(\partial^\beta\phi_k)$ 的稳定性，就得到欧勒-拉格朗日方程．于是，我们有下列对应关系：

① 要了解比我们简短说明更详细的内容或背景，参看 *Goldstein* 书第十一章和 *Wentzel* 书第一章，或本章末所援引的其它参考书．

$$
\begin{aligned}
&i \to x^\alpha, k \\
&q_i \to \phi_k(x) \\
&\dot{q}_i \to \partial^\alpha \phi_k(x) \\
&L=\sum_i L_i(q_i, \dot{q}_i) \to \int \mathscr{L}(\phi_k, \partial^\alpha \phi_k) d^3x
\end{aligned}
\tag{12.83}
$$

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_i} \to \partial^\beta \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial^\beta \phi_k)}=\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_k}
$$

这里$\mathscr{L}$是对应于时空中一个确定点的拉格朗日密度，它相当于像(12.82)那样分立粒子拉格朗日函数中的各个项．对电磁场来说，"坐标"和"速度"是A^α和$\partial^\beta A^\alpha$．

作用量积分取下列形式：

$$
A=\iint \mathscr{L} d^3x\, dt=\int \mathscr{L} d^4x \tag{12.84}
$$

只要拉格朗日密度$\mathscr{L}$是一个洛仑兹标量，作用量就保持洛仑兹不变性质(因为四维体积元是不变量)．与分立粒子情形类似，我们期望自由场拉格朗日函数至少是速度的二次式，即$\partial^\beta A^\alpha$或$F^{\alpha\beta}$的二次式．洛仑兹不变的二次式只有$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$和$F_{\alpha\beta}\mathscr{F}^{\alpha\beta}$（参看习题11.12)．后者是正常洛仑兹变换下的标量，而且是反演下的赝标量．如果我们要求$\mathscr{L}$是反演和正常洛仑兹变换下的标量，那末$\mathscr{L}_{自由}$必定为$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$的某一倍数．$\mathscr{L}$中的相互作用项涉及源密度．这些源密度是用电流密度四元矢量$J^\alpha(x)$来描述的．根据静电能和静磁能的形式，或根据带电粒子相互作用拉格朗日函数(12.8)，我们预期$\mathscr{L}_{相互}$是$J_\alpha A^\alpha$的一个倍数．出于这个动机，我们假设电磁拉格朗日密度如下：

$$
\mathscr{L}=-\frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}-\frac{1}{c}\cdot J_\alpha A^\alpha \tag{12.85}
$$

相互作用项的系数和正负号都要妥为选择，使得与(12.8)一致；自由拉格朗日函数的正负号和系数，可根据场强的定义和麦克斯韦

方程组来确定.

为了利用 (12.83) 中所给出的那种形式的欧勒-拉格朗日方程，我们将场的定义代入(12.85)，而写成

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{16\pi}g_{\lambda\beta}g_{\nu\sigma}(\partial^{\mu}A^{\sigma}-\partial^{\sigma}A^{\mu})\,(\partial^{\lambda}A^{\nu}-\partial^{\nu}A^{\lambda})$$

$$-\frac{1}{c}J_{\alpha}A^{\alpha} \tag{12.86}$$

在计算 $\partial\mathscr{L}/\partial(\partial^{\beta}A^{\alpha})$ 时，必须小心地将所有项整理归类. 从下面的具体计算可以看出，计有四个不同的项:

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial^{\beta}A^{\alpha})}=-\frac{1}{16\pi}g_{\lambda\mu}g_{\nu\sigma}\left\{\begin{matrix}\delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\sigma}_{\alpha}F^{\lambda\nu}-\delta^{\sigma}_{\beta}\delta^{\mu}_{\alpha}F^{\lambda\nu}\\+\delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\nu}_{\alpha}F^{\mu\sigma}-\delta^{\nu}_{\beta}\delta^{\lambda}_{\alpha}F^{\mu\sigma}\end{matrix}\right\}$$

由于 $g_{\alpha\beta}$ 的对称性和 $F^{\alpha\beta}$ 的反对称性，所有这四项是相等的，所以导数变为

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial^{\beta}A^{\alpha})}=-\frac{1}{4\pi}F_{\beta\alpha}=\frac{1}{4\pi}F_{\alpha\beta} \tag{12.87}$$

欧勒-拉格朗日方程的另一部分是

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A^{\alpha}}=-\frac{1}{c}J_{\alpha} \tag{12.88}$$

于是，电磁场的运动方程是

$$\frac{1}{4\pi}\partial^{\beta}F_{\beta\alpha}=\frac{1}{c}J_{\alpha} \tag{12.89}$$

我们把这些方程看作非齐次麦克斯韦方程(11.141)的协变式.

由拉格朗日函数(12.85)得到非齐次麦克斯韦方程，但不能得到齐次麦克斯韦方程. 这是因为我们这样来选取用四元矢势 A^{λ} 定义的场强张量 $F^{\alpha\beta}$，使得齐次方程自动地被满足(参看 6.4 节). 在用目前这四维张量符号时，为了看出这一点，我们来考虑齐次方程(11.142)的左边:

$$\partial_{\alpha}\mathscr{F}^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\partial_{\alpha}\epsilon^{\alpha\beta\lambda\mu}F_{\lambda\mu}$$

$$=\partial_\alpha \epsilon^{\alpha\beta\lambda\mu}\partial_\lambda A_\mu$$
$$=\epsilon^{\alpha\beta\lambda\mu}\partial_\alpha\partial_\lambda A_\mu$$

但是，微分算符 $\partial_\alpha\partial_\lambda$ 对 α 和 λ 是对称的(假定 A_μ 是合理的函数)，而 $\epsilon^{\alpha\beta\lambda\mu}$ 对 α 和 λ 是反对称的. 于是，将 α 和 λ 缩并，上式就等于零. 齐次麦克斯韦方程就自然地得到满足.

由(12.89)，取两边的四维散度，可以得到源电流密度的守恒:

$$\frac{1}{4\pi}\partial^\alpha\partial^\beta F_{\beta\alpha}=\frac{1}{c}\partial^\alpha J_\alpha$$

左边有一个对 α 和 β 是对称的微分算符，而 $F_{\beta\alpha}$ 是反对称的. 在缩并指标后，上式左边就变为零，于是得到

$$\partial^\alpha J_\alpha=0 \tag{12.90}$$

12.9 普罗卡-拉格朗日函数; 光子质量效应

通常所用的麦克斯韦方程组和拉格朗日函数(12.85)，是以光子质量等于零这个假设为基础的. 犹如绪论里讨论过的，人们总是会探问: 光子质量为零的证据何在？这等于问: 库仑力平方反比律的证据何在？若光子质量不等于零，会得到哪些结果？用拉格朗日函数表述，就是探讨这些问题的一种系统的方法. 我们修改拉格朗日密度(12.85)，把它添加一个"质量"项. 所得到的拉格朗日函数叫做普罗卡-拉格朗日函数，普罗卡最先研究了这种函数(1930 年，1936 年). 普罗卡-拉格朗日函数是

$$\mathscr{L}_{普罗卡}=-\frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}+\frac{\mu^2}{8\pi}A_\alpha A^\alpha-\frac{1}{c}J_\alpha A^\alpha \tag{12.91}$$

参量 μ 具有长度倒数的量纲，它是光子康普顿波长的倒数 ($\mu=m_\gamma c/\hbar$). 取代(12.89)的普罗卡运动方程是

$$\partial^\beta F_{\beta\alpha}+\mu^2 A_\alpha=\frac{4\pi}{c}J_\alpha \tag{12.92}$$

我们看到，普罗卡方程中包含了势和场. 与麦克斯韦方程组大不

相同，势通过质量项获得了实在的物理(可观测的)意义．在洛仑兹规范下(现在是由电流守恒所要求的)，方程(12.92)可以写成

$$\Box A_\alpha+\mu^2 A_\alpha=\frac{4\pi}{c}J_\alpha \tag{12.93}$$

在静态极限下，上式写作

$$\nabla^2 A_\alpha-\mu^2 A_\alpha=-\frac{4\pi}{c}J_\alpha$$

如果源是在原点上静止的点电荷 q，那末，只有时间分量 $A_0=\Phi$ 不等于零．它具有球对称汤川形式：

$$\Phi(x)=q\frac{e^{-\mu r}}{r} \tag{12.94}$$

上式显示了光子质量的本性．静势和静止场有一个随距离下降的指数因子，当距离等于 μ^{-1} 时，这因子变为 $1/e$．正如绪论和习题12.14中讨论的，这个指数因子充分地改变了地磁场的特性，使得我们可以根据地磁数据完全确定光子质量的严格的极限值．一度曾有人指出①，利用集总 LC 电路的一些比较简单的实验室实验，可以改进这些极限值，然而这种想法在概念上是有缺陷的．关于这一论题，有一些相当微妙之处，值得作一简短讨论②．

我们的讨论，是以无源情况下的(12.93)作为出发点．如果假定按谐和方式随时间和空间而变化，那末，频率和波数的约束方程是

$$\omega^2=c^2k^2+\mu^2c^2 \tag{12.95}$$

这是动量为 $\hbar k$、质量为 $\mu\hbar/c$ 的一个粒子的能量(除以 $\hbar$)平方的标准表式．现在我们考虑某一谐振系统(谐振腔或集总电路)．假定

---

① P. A. Franken and G. W. Ampulski, *Phys. Rev. Letters* **26**, 115(1971).

② 在这种想法提出以后不久，就出现好几篇文章，根据普罗卡方程作了分析．兹举其中一些如下：A. S. Goldhaber and M. M. Nieto, *Phys. Rev. Letters* **26**, 1390 (1971)；D. Park and E. R. Williams, *Phys. Rev. Letters* **26**, 1393(1971)；N. M. Kroll, *Phys. Rev. Letters* **26**, 1395(1971)；D. G. Boulware, *Phys. Rev. Letters* **27**, 55(1971)；N. M. Kroll, *Phy. Rev. Letters* **27**, 340(1971).

当 $\mu=0$ 时其谐振频率为 ω_0，而当 $\mu\neq0$ 时谐振频率为 ω．根据(12.95)的结构，可以写出下面的关系：

$$\omega^2=\omega_0^2+\mu^2c^2 \tag{12.96}$$

显然，对一个给定的光子质量来说，频率愈小，ω 和 ω_0 的相对比值就愈大．这意味着可以用集总 LC 电路来做实验．实验方案是测量一系列电路的谐振频率，这些电路的 ω_0^2 具有已知的比值．如果观测到的谐振频率平方之比值与 ω_0^2 之比值不同，那末就证实了(12.96)中的 $\mu\neq0$．弗兰肯(Franken)和安普耳斯基(Ampulski)比较了两个电路，一个电路由某一电感 L 和一个电容 C 组成，因而 $\omega_0^2=(LC)^{-1}$；另一电路用同样的电感器，但用两个并联的电容 C．对电阻效应修正后，观测到的频率的平方在误差范围内具有比值 2:1．于是，他俩推断了光子质量的上限，并指出：如果这种想法是正确的话，则把准确度改进几个数量级在原则上是可能的．

这种想法错在哪里呢？首先注意到，根据定义，集总电路不可能给出光子质量的任何极限值①．一个电容的集总电路概念是一个双端匣子，它具有这样的性质，电流 I 从一端流入，两端之间的电压为 V，I 和 V 的关系是 $I=CdV/dt$．同样，一个集总电感也是一个双端匣子，遵守方程 $V=-LdI/dt$．当这两个匣子连接在一起时，电流和电压必须相等，并合系统用方程 $V+LCd^2V/dt^2=0$ 来描写．集总 LC 电路的谐振频率是 $\omega_0=(LC)^{-1}$ 周/秒．

当然，正确地说，一组给定的导电面或一个给定的金属线圈具有不同的电容或电感的静态性质，这些性质取决于 μ 是否等于零．势和场都要根据(12.94)这个通式的指数因子而加以修改，于是就产生这样一个问题：利用“桌子上面的”(table-top)实验是否能确定一个有意义的 μ 极限值，这个实验不用集总电路元件，而

① 作者感谢普塞耳(E. M. Purcell)，他着重指出：在讨论弗兰肯-安普耳斯基建议时，这一论点几乎被大家所忽视，或者至少是被掩饰过去了．

是用一些尺寸适中的元件. 例如, 读者可以证明: 一个半径为 a 的实心导电球体放在内半径为 b 的中空导电球壳的中心, 后者的势保持为零, 对该系统来说, 倘若 $\mu b \ll 1$, 则电容增加了一个量 $\mu^2 a^2 b/3$. 因此, 结果不是由(12.96)导得的相对比值

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \simeq \frac{\mu^2 c^2}{2\omega_0^2} \tag{12.97}$$

(其中 $\omega_0^2 = (LC)^{-1}$), 有限光子质量的实际效应是

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 0(\mu^2 d^2) \tag{12.98}$$

式中 d 是线路的特征尺寸, ω_0 是 $\mu = 0$ 时的谐振频率. 这就使得"桌子上面的"实验在原则上可能给出光子质量, 然而这种实验在实际上灵敏度非常差.

虽然估算式(12.98)的物理意义已如上述, 但对传输线、波导或谐振腔考虑一下有限光子质量的效应, 倒是有益的. 对传输线来说, 光子质量效应跟静态集总电路参量的效应相同. 回忆第八章, 我们得知: 当 $\mu = 0$ 时, 传输线的 TEM 模是简并模, 以等于光速的相速度传播. 如果 $\mu \neq 0$, 情况并不发生改变. 唯一差别是场的横向特性取决于 $(\nabla_t^2 - \mu^2)\psi = 0$, 而不取决于拉普拉斯方程. 传输线每单位长度的电容和电感都相对地改变了数量级为 $\mu^2 d^2$ 的一个量, 可是别的情况都没有改变(习题 6.5 的结果仍然成立).

对波导中的 TE 模和 TM 模来说, 情况比较复杂. 我们必须仔细考虑场和势的边界条件. 分析表明 (参看第 157 页脚注援引的 Kroll 写的论文): TM 模的传播取决于简明方程(12.96), 可是 TE 模的传播通常是不同的. 不管怎样, 由于波导的截止频率决定于波导的侧面尺寸, 非普遍有效的估算式(12.97)变得跟特殊估算式(12.98)相同.

对谐振腔来说, 严格的解是复杂的, 但当质量很小时, 可以得

到一些简单的结果. 例如,对一个矩形谐振腔来说, 当模数 l、m、n 都不等于零时, (12.96) 是一种很好的近似, 但当任一模数等于零时, (12.96)就失效. 这是因为在 l、m 或 n 等于零的有关方向上场的性质犹如静止场, 我们先前所作的论证都适用. 8.9 节里讨论过的地球-电离层谐振腔的低频模(舒曼谐振)是特别有趣的. 这些模具有一个辐向电场,对于 h/R 的零次幂项来说(这里 h 为电离层高度, R 为地球半径), 这些模是平行板几何结构中的 TEM 模. 于是,这些模的传播跟 $\mu=0$ 时的值没有差别, 因而它们的谐振频率也没有变化. 考虑到 h/R的一次幂项, 谐振频率就有与质量相关的变化. 结论(参看上面援引的 Kroll 的第二篇论文)是: 对最低舒曼模来说, (12.97)右边要用一个乘数因子 $g\simeq 0.44h/R$ 加以修正. 当 $h\simeq 70$ 千米时, $g\simeq 5\times 10^{-3}$. 这意味着,在确定光子质量的极限值时,谐振频率 $\omega_0\simeq 50$ 秒$^{-1}$ 所起的作用只是原来简单考虑的$(1/g)^{1/2}\simeq 14$ 分之一.

12.10 正则胁强张量和对称胁强张量; 守恒定律

(a) 哈密顿函数的推广: 正则胁强张量

在粒子力学中,先定义正则动量变量

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{12.99}$$

再引进哈密顿函数

$$H=\sum_i p_i\dot{q}_i-L \tag{12.100}$$

就过渡到哈密顿函数表述和能量守恒. 这时,可以证明: 倘若 $\partial L/\partial t=0$, 则 $dH/dt=0$. 对电磁场来说, 我们预期有一个哈密顿密度, 其遍及三维空间的体积分是哈密顿函数. 我们可以推测$\mathscr{H}$的洛仑兹变换性质如下: 因为粒子的能量是一个四元矢量的时间分

量，所以哈密顿函数应该按同样的方式而变换．因为$H=\int\mathscr{H}d^3x$，而不变四维体积元是$d^4x=d^3xdx_0$，所以哈密顿密度$\mathscr{H}$必定按一个二秩张量的时间-时间分量而变换．如果某些场的拉格朗日密度是场变量$\phi_k(x)$、$\partial^\alpha\phi_k(x)$的函数，$k=1,2,\cdots,n$，那末，与(12.100)类似，哈密顿密度定义为

$$\mathscr{H}=\sum_k\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi_k}{\partial t}\right)}\frac{\partial\phi_k}{\partial t}-\mathscr{L} \tag{12.101}$$

求和号里第一个因子是与$\phi_k(x)$正则共轭的场动量，$\partial\phi_k/\partial t$相当于速度$\dot{q}_i$．由所推断的$\mathscr{H}$的洛仑兹变换性质可以得知，哈密顿密度的协变式推广是正则胁强张量：

$$T^{\alpha\beta}=\sum_k\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_k)}\partial^\beta\phi_k-g^{\alpha\beta}\mathscr{L} \tag{12.102}$$

对于自由电磁场的拉格朗日函数

$$\mathscr{L}_{电磁}=-\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{12.103}$$

来说，正则胁强张量为

$$T^{\alpha\beta}=\frac{\partial\mathscr{L}_{电磁}}{\partial(\partial_\alpha A^\lambda)}\partial^\beta A^\lambda-g^{\alpha\beta}\mathscr{L}_{电磁}$$

式中重复指标λ意味着对所有λ求和．借助于(12.87)(但要注意指标的位置!)，我们得

$$T^{\alpha\beta}=-\frac{1}{4\pi}g^{\alpha\mu}F_{\mu\lambda}\partial^\beta A^\lambda-g^{\alpha\beta}\mathscr{L}_{电磁} \tag{12.104}$$

为了阐明此张量的含义，我们写出其中一些分量．利用$\mathscr{L}=(\mathbf{E}^2-\mathbf{B}^2)/8\pi$和(11.138)，我们得

$$\left.\begin{aligned} T^{00}&=\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2)+\frac{1}{4\pi}\nabla\cdot(\Phi\mathbf{E})\\ T^{0i}&=\frac{1}{4\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})_i+\frac{1}{4\pi}\nabla\cdot(A_i\mathbf{E})\\ T^{i0}&=\frac{1}{4\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})_i+\frac{1}{4\pi}\left[(\nabla\times\Phi\mathbf{B})_i-\frac{\partial}{\partial x_0}(\Phi E_i)\right] \end{aligned}\right\} \quad (12.105)$$

这里在写出第二项时我们已经利用了自由场方程 $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$ 和 $\nabla\times\mathbf{B}-\partial\mathbf{E}/\partial x_0=0$. 如果我们假定，场是定域在空间的某一有限区域内(而且因为传播速度是有限的，所以场总是定域的)，则在某惯性系中分量 T^{00} 和 T^{0i} 在给定时刻遍及整个三维空间的积分，可以照第六章里那样，解释为在该惯性系中电磁场的总能量和 c 乘电磁场的总动量：

$$\begin{aligned} \int T^{00}d^3x&=\frac{1}{8\pi}\int(\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2)d^3x=E_{\text{场}}\\ \int T^{0i}d^3x&=\frac{1}{4\pi}\int(\mathbf{E}\times\mathbf{B})_i d^3x=cP^i_{\text{场}} \end{aligned} \quad (12.106)$$

这两式就是 6.8 节里讨论过的场的总能量和总动量的常用表式. 我们注意，分量 T^{00} 和 T^{0i} 本身跟能量密度和动量密度的标准定义相差一些附加的散度项. 然而，遍及全空间求积分后，这些附加项没有贡献，因为把这些附加项的积分换成无穷远处的面积分，而所有场和势在无穷远处都恒等于零.

$T^{\alpha\beta}$ 的时间-时间和时间-空间分量同场的能量和动量密度的关系表明，坡印廷矢量的微分守恒定律(6.108)有一个协变推广式. 这个微分守恒定律的协变推广式是

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta}=0 \quad (12.107)$$

在证明(12.107)时，我们讨论用张量(12.102)和欧勒-拉格朗日方程(12.83)描述的普遍情况. 考虑

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta}=\sum_k\partial_\alpha\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_k)}\partial^\beta\phi_k\right]-\partial^\beta\mathscr{L}$$

$$=\sum_k\left[\partial_\alpha\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_k)}\cdot\partial^\beta\phi_k+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_k)}\partial_\alpha\partial^\beta\phi_k\right]-\partial^\beta\mathscr{L}$$

利用运动方程(12.83)，可以将第一项改写一下，使得

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta}=\sum_k\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_k}\partial^\beta\phi_k+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_k)}\partial^\beta(\partial_\alpha\phi_k)\right]-\partial^\beta\mathscr{L}$$

因为$\mathscr{L}=\mathscr{L}(\phi_k,\partial^\alpha\phi_k)$，方括号求和就是一个隐微分(链式法则)表式．因此，

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta}=\partial^\beta\mathscr{L}(\phi_k,\partial^\alpha\phi_k)-\partial^\beta\mathscr{L}=0$$

将守恒定律或连续性方程(12.107)在给定时间遍及整个三维空间积分，就得总能量和总动量守恒．明确地写出，我们有

$$0=\int\partial_\alpha T^{\alpha\beta}d^3x=\partial_0\int T^{0\beta}d^3x+\int\partial_i T^{i\beta}d^3x$$

如果场是定域的，则第二个积分(散度)没有贡献．然后利用等式(12.106)，得

$$\frac{d}{dt}E_{场}=0,\quad\frac{d}{dt}\mathbf{P}_{场}=0 \tag{12.108}$$

在上述能量守恒(坡印廷定理)和动量守恒的推导中，以及在定义(12.106)中，我们没有展示出明显的协变性．这些结果对静止于参照系（在此参照系中场是已知的）的观测者是有效的．但是，我们还没有谈到从一参照系变换到另一参照系的问题．根据协变微分守恒定律$\partial_\alpha T^{\alpha\beta}=0$，我们预料协变积分表述也是可能的．(12.106)中的积分似乎不具有四元矢量的分量的变换性质．对无源场来说，这些积分实际上是按四元矢量的分量而变换(参看习题12.15和*Rohrlich*书，附录*A*1-5)，但一般说来，并不是这样的．为了避免在每个惯性系中分别确定电磁能量和电磁动量，我们不用惯性系之间的通常关系，我们必须建立电磁能量和动量的明显协变积分表式，表式(12.106)仅仅在一个惯性系中有效，它们是这些协变积分表式的特殊情况．这一内容在第十七章里将从经典自具

电磁能问题的角度进一步加以讨论. 关于守恒定律的积分形式的明显协变论述, 参看 *Rohrlich* 书中第 4-9 节.

(*b*) 对称胁强张量

正则胁强张量 $T^{\alpha\beta}$ 虽然到目前为止是相当满意的, 但还有某些缺点. 我们已经看到, T^{00} 和 T^{0i} 不同于通常的能量和动量密度表式. 另一缺点是这个张量不具有对称性——参看(12.105)中的 T^{0i} 和 T^{i0}. 当我们考虑场的角动量

$$\mathbf{L}_{场}=\frac{1}{4\pi c}\int \mathbf{x}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{B})d^3x$$

时, 就出现对称性问题. 角动量密度有一个用三秩张量表示的协变推广式:

$$M^{\alpha\beta\gamma}=T^{\alpha\beta}x^{\gamma}-T^{\alpha\gamma}x^{\beta} \tag{12.109}$$

这时, 四维散度等于零

$$\partial_{\alpha}M^{\alpha\beta\gamma}=0 \tag{12.110}$$

意味着场的总角动量守恒, 这正如(12.107)就是表示(12.108)一样. 直接计算(12.110)给出

$$0=(\partial_{\alpha}T^{\alpha\beta})x^{\gamma}+T^{\gamma\beta}-(\partial_{\alpha}T^{\alpha\gamma})x^{\beta}-T^{\beta\gamma}$$

利用(12.107)消去第一项和第三项, 我们看出: 角动量守恒要求 $T^{\alpha\beta}$ 是对称张量. $T^{\alpha\beta}$(12.104)还有两个缺点, 一是它显含势, 所以它不是规范不变量; 另一是它的迹(T^{α}_{α})不等于零, 正如对质量为零的光子所要求的那样.

有一种一般的程序, 用来从正则胁强张量 $T^{\alpha\beta}$ 建立迹为零的对称的规范不变胁强张量 $\Theta^{\alpha\beta}$(参看本章末援引的参考书). 我们直接从(12.104)的电磁张量 $T^{\alpha\beta}$ 着手. 将 $\partial^{\beta}A^{\lambda}=-F^{\lambda\beta}+\partial^{\lambda}A^{\beta}$ 代入, 得

$$T^{\alpha\beta}=\frac{1}{4\pi}\left[g^{\alpha\mu}F_{\mu\lambda}F^{\lambda\beta}+\frac{1}{4}g^{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]-\frac{1}{4\pi}g^{\alpha\mu}F^{\mu\lambda}\partial^{\lambda}A^{\beta} \tag{12.111}$$

(12.111)的第一项对 α、β 是对称的，并且是规范不变的．借助于无源麦克斯韦方程组，末项可以写成

$$T_D^{\alpha\beta}\equiv-\frac{1}{4\pi}g^{\alpha\mu}F_{\mu\lambda}\partial^\lambda A^\beta=\frac{1}{4\pi}F^{\lambda\alpha}\partial_\lambda A^\beta$$

$$=\frac{1}{4\pi}(F^{\lambda\alpha}\partial_\lambda A^\beta+A^\beta\partial_\lambda F^{\lambda\alpha})$$

$$=\frac{1}{4\pi}\partial_\lambda(F^{\lambda\alpha}A^\beta) \tag{12.112}$$

张量 $T_D^{\alpha\beta}$ 具有下列容易证明的性质：

(i) $$\partial_\alpha T_D^{\alpha\beta}=0$$

(ii) $$\int T_D^{0\beta}d^3x=0$$

因此，如果微分守恒定律(12.107)对 $T^{\alpha\beta}$ 来说是成立的，那末它对 $(T^{\alpha\beta}-T_D^{\alpha\beta})$ 这个差来说也将成立．并且，场的总能量和总动量的积分关系式(12.106)若用这个张量差来表示也将成立．所以我们可随意定义对称胁强张量 $\Theta^{\alpha\beta}$ 为

$$\Theta^{\alpha\beta}=T^{\alpha\beta}-T_D^{\alpha\beta}$$

或

$$\Theta^{\alpha\beta}=\frac{1}{4\pi}\left(g^{\alpha\mu}F_{\mu\lambda}F^{\lambda\beta}+\frac{1}{4}g^{\alpha\beta}F_{\mu\lambda}F^{\mu\lambda}\right) \tag{12.113}$$

直接计算给出下列分量：

$$\Theta^{00}=\frac{1}{8\pi}(E^2+B^2)$$

$$\Theta^{0i}=\frac{1}{4\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})_i \tag{12.114}$$

$$\Theta^{ij}=\frac{-1}{4\pi}\left[E_iE_j+B_iB_j-\frac{1}{2}\delta_{ij}(E^2+B^2)\right]$$

指标 i 和 j 指的是三维空间中的笛卡儿分量．张量 $\Theta^{\alpha\beta}$ 可以按简约矩阵形式写为

$$\Theta^{\alpha\beta}=\left(\begin{array}{c|c} u & cg \\ \hline cg & -T_{ij}^{(M)} \end{array}\right) \tag{12.115}$$

在(12.115)中，时间-时间和时间-空间分量被表示成能量密度(6.106)和动量密度(6.118)，同时我们看到，(12.114)的空间-空间分量恰好等于麦克斯韦胁强张量(6.120)的负值，在这里用$T_{ij}^{(M)}$表示麦克斯韦胁强张量，以免与正则张量$T^{\alpha\beta}$相混淆．另外几种胁变和混合形式的胁强张量是

$$\Theta_{\alpha\beta}=\left(\begin{array}{c|c} u & -cg \\ \hline -cg & -T_{ij}^{(M)} \end{array}\right) \qquad \Theta_{\beta}^{\alpha}=\left(\begin{array}{c|c} u & -cg \\ \hline cg & T_{ij}^{(M)} \end{array}\right)$$

$$\Theta_{\alpha}^{\beta}=\left(\begin{array}{c|c} u & cg \\ \hline -cg & T_{ij}^{(M)} \end{array}\right)$$

微分守恒定律

$$\partial_{\alpha}\Theta^{\alpha\beta}=0 \tag{12.116}$$

体现了自由场的坡印廷定理和动量守恒．例如，当$\beta=0$时，我们有

$$0=\partial_{\alpha}\Theta^{\alpha 0}=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{S}\right)$$

式中$\mathbf{S}=c^2\mathbf{g}$是坡印廷矢量．这就是(6.108)的无源形式．同样，当$\beta=i$时，

$$0=\partial_{\alpha}\Theta^{\alpha i}=\frac{\partial g_i}{\partial t}-\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}T_{ij}^{(M)}$$

这个结果相当于无源情况下的(6.121)．通过张量

$$M^{\alpha\beta\gamma}=\Theta^{\alpha\beta}x^{\gamma}-\Theta^{\alpha\gamma}x^{\beta} \tag{12.117}$$

来定义场角动量，正如已经讨论过的，(12.116)和$\Theta^{\alpha\beta}$的对称性确

保了场角动量守恒．除了能量、动量和角动量外，显然还有别的守恒量．张量$M^{0\beta\gamma}$除了给出角动量密度的空间-空间分量外，还有三个时间-空间分量．这三个分量是角动量的胁变推广式的必要部分．角动量守恒就是关于质心运动的一种表述（参看习题12.16）．

(c) 与带电粒子相互作用的电磁场的守恒定律

在有外源存在时，麦克斯韦方程组的拉格朗日函数是(12.85)．电磁场的对称胁强张量仍保持(12.113)形式，但对源电流的耦合使得其散度不等于零．直接计算散度如下：

$$\partial_\alpha\Theta^{\alpha\beta}=\frac{1}{4\pi}\left[\partial^\mu(F_{\mu\lambda}F^{\lambda\beta})+\frac{1}{4}\partial^\beta(F_{\mu\lambda}F^{\mu\lambda})\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[(\partial^\mu F_{\mu\lambda})F^{\lambda\beta}+F_{\mu\lambda}\partial^\mu F^{\lambda\beta}+\frac{1}{2}F_{\mu\lambda}\partial^\beta F^{\mu\lambda}\right]$$

我们可以用非齐次麦克斯韦方程(12.89)改写第一项．将该项移至左边，得

$$\partial_\alpha\Theta^{\alpha\beta}+\frac{1}{c}F^{\beta\lambda}J_\lambda=\frac{1}{8\pi}F_{\mu\lambda}(\partial^\mu F^{\lambda\beta}+\underline{\partial^\mu F^{\lambda\beta}+\partial^\beta F^{\mu\lambda}})$$

对这些项进行了特别的分组，其原因在于，利用齐次麦克斯韦方程$(\partial^\mu F^{\lambda\beta}+\partial^\beta F^{\mu\lambda}+\partial^\lambda F^{\beta\mu}=0)$，可以将下面划线的两项之和用$-\partial^\lambda F^{\beta\mu}=+\partial^\lambda F^{\mu\beta}$替代．于是，我们得到

$$\partial_\alpha\Theta^{\alpha\beta}+\frac{1}{c}F^{\beta\lambda}J_\lambda=\frac{1}{8\pi}F_{\mu\lambda}(\partial^\mu F^{\lambda\beta}+\partial^\lambda F^{\mu\beta})$$

但是，现在右边是一个对称因子和一个反对称因子对指标μ和λ的缩并．所以其结果等于零．于是，胁强张量的散度是

$$\partial_\alpha\Theta^{\alpha\beta}=\frac{-1}{c}F^{\beta\lambda}J_\lambda \tag{12.118}$$

这个方程的时间和空间分量是

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{S}\right)=-\frac{1}{c}\mathbf{J}\cdot\mathbf{E} \tag{12.119}$$

和

$$\frac{\partial g_i}{\partial t}-\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}T_{ij}^{(M)}=-\left[\rho E_i+\frac{1}{c}(\mathbf{J}\times\mathbf{B})_i\right] \tag{12.120}$$

这些方程恰好就是第六章里针对与 $J^\alpha=(c\rho,\mathbf{J})$所描写的源相互作用的电磁场导出的能量和动量守恒方程. (12.118)右边的四元矢量叫做洛仑兹力密度,

$$f^\beta\equiv\frac{1}{c}F^{\beta\lambda}J_\lambda=\left(\frac{1}{c}\mathbf{J}\cdot\mathbf{E},\ \rho\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{B}\right) \tag{12.121}$$

如果源是若干带电粒子,那末通过洛仑兹力方程(12.1),可由f^β的体积分导出所有粒子能量和动量之和的时间变率:

$$\int f^\beta d^3x=\frac{dP^\beta_{\text{粒子}}}{dt}$$

根据(a)段末所述的关于协变性的限制,(12.118)左边在给定时间遍及三维空间的积分就是场的总能量或总动量的时间变率.因此,我们得到粒子和场并合系统的四元动量守恒:

$$\int d^3x(\partial_\alpha\Theta^{\alpha\beta}+f^\beta)=\frac{d}{dt}(P^\beta_{\text{场}}+P^\beta_{\text{粒子}})=0 \tag{12.122}$$

上述讨论重点放在电磁场上,带电粒子只作为四元电流密度的源而提到的. 粒子和场并合系统的一种更恰当的处理牵涉到拉格朗日函数,这拉格朗日函数有三项:自由场拉格朗日函数、自由粒子拉格朗日函数和相互作用拉格朗日函数,后者既涉及场自由度又涉及粒子自由度. 作用量积分对粒子坐标的变分导出洛仑兹力方程,犹如12.1节里一样,而作用量积分对场"坐标"的变分给出麦克斯韦方程组,犹如12.8节里一样. 可是,当计及自具能和辐射反作用效应时,处理就完全不像这样简单. 有关这些方面,请参看本章末援引的著作.

应该再提一下超距作用方法，此方法与史瓦西(Schwarzschild)、惕特洛德(Tetrode)和福科(Fokker)的名字联系在一起．这种方法强调了带电粒子，并假定了不变作用量原理的相互作用项包含对所有粒子世界线的诸积分．而把电磁场的概念和麦克斯韦方程组放在次要地位．这种方法是惠勒-费因曼(Wheeler-Feynman)辐射吸收子理论的基础①.

12.11 协变形式波动方程解；不变格临函数

外源 $J^\alpha(x)$产生的电磁场 $F^{\alpha\beta}$ 满足非齐次麦克斯韦方程组

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta}=\frac{4\pi}{c}J^\beta$$

根据用势表示的场的定义，上式变成

$$\Box A^\beta-\partial^\beta(\partial_\alpha A^\alpha)=\frac{4\pi}{c}J^\beta$$

如果势满足洛仑兹条件 $\partial_\alpha A^\alpha=0$，那末这些势就是四维波动方程

$$\Box A^\beta=\frac{4\pi}{c}J^\beta(x) \tag{12.123}$$

的解．求出下列方程

$$\Box_x D(x,x')=\delta^{(4)}(x-x') \tag{12.124}$$

的格临函数 $D(x,x')$，就可以求得(12.123)的解，上式中 $\delta^{(4)}(x-x')=\delta(x_0-x_0')\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$是四维 δ 函数．在无边界面时，格临函数可以只依赖于四元矢量差 $z^\alpha=x^\alpha-x'^\alpha$．于是 $D(x,x')=D(x-x')=D(z)$，而(12.124)变成

$$\Box_z D(z)=\delta^{(4)}(z)$$

我们用傅里叶积分从坐标空间变换到波数空间．格临函数的傅里叶变换 $\tilde{D}(k)$ 由下式确定：

$$D(z)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\tilde{D}(k)e^{-ik\cdot z} \tag{12.125}$$

---

① J A Wheeler and R P Feynman, *Rev. Mod. Phys.* 21, 425(1949).

式中 $k\cdot z=k_0z_0-\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}$. 利用 δ 函数的表式

$$\delta^{(4)}(z)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k e^{-ik\cdot z} \tag{12.126}$$

我们求得 k 空间格临函数是

$$\tilde{D}(k)=-\frac{1}{k\cdot k} \tag{12.127}$$

因此，格临函数 $D(z)$ 是

$$D(z)=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4k\frac{e^{-ik\cdot z}}{k\cdot k} \tag{12.128}$$

由于(12.128)中的被积函数是奇异函数，上式是不确定的，只有在处理奇点以后才能赋予上式以确定的含义. 我们先对 dk_0 积分. 这样，

$$D(z)=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}}\int_{-\infty}^{\infty}dk_0\frac{e^{-ik_0z_0}}{k_0^2-\kappa^2} \tag{12.129}$$

式中我们引进了记号 $\kappa=|\mathbf{k}|$. 将 k_0 当作复变数，并将积分当作 k_0 平面内的围道积分来处理，就能给出 k_0 积分的意义. 被积函数有两个一阶极点，在 $k_0=\pm\kappa$ 处，如图 12.8 所示. 相对于极点选取不同的积分围道，就得到带有不同性质的格临函数. 图 12.8 中两条可能的围道分别用 r 和 a 来标示. 这两条开围道都可以在无穷远处用上半平面或下半平面内一个半圆闭合起来，这个半圆是在上半平面还是在下半平面，则取决于指数中 z_0 的正负号. 当 $z_0>0$

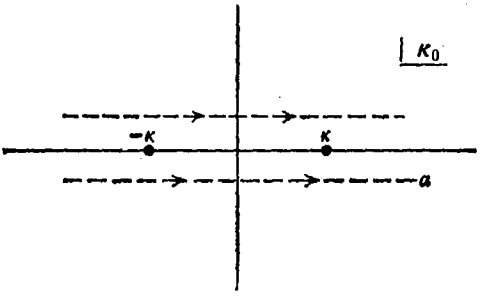


图 12.8

时，指数 $e^{-ik_0z_0}$ 在上半平面内无限地增大. 为了运用残数定理，所以我们必须在下半平面内令围道闭合起来. 当 $z_0<0$ 时，则反之.

现在考虑围道 r. 当 $z_0<0$ 时，由于围道在上半平面内闭合，且不包围奇点，所求得的积分等于零. 当 $z_0>0$ 时，对 k_0 的积分是

$$\oint_r dk_0 \frac{e^{-ik_0z_0}}{k_0^2-\kappa^2} = -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-ik_0z_0}}{k_0^2-\kappa^2}\right)$$

$$= -\frac{2\pi}{\kappa}\sin(\kappa z_0)$$

于是，格临函数(12.129)是

$$D_r(z) = \frac{\theta(z_0)}{(2\pi)^3}\int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}} \frac{\sin(\kappa z_0)}{\kappa}$$

对 $\mathbf{k}$ 的角坐标积分，得

$$D_r(z) = \frac{\theta(z_0)}{2\pi^2 R}\int_0^\infty d\kappa \sin(\kappa R)\sin(\kappa z_0) \qquad (12.130)$$

式中 $R=|\mathbf{z}|=|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$ 为 x^a 和 x'^a 间的空间距离. 利用一些简单的三角学公式，并改换变数，(12.130)可以写成

$$D_r(z) = \frac{\theta(z_0)}{8\pi^2 R}\int_{-\infty}^{\infty} d\kappa [e^{i(z_0-R)\kappa} - e^{i(z_0+R)\kappa}]$$

剩下的积分刚好是狄喇克 δ 函数. 因为 $z_0>0$ 和 $R>0$，第二个积分总是等于零. 所以对围道 r 来说，格临函数是

$$D_r(x-x') = \frac{\theta(x_0-x_0')}{4\pi R}\delta(x_0-x_0'-R) \qquad (12.131)$$

这里我们重新引进了原来的变数 x 和 x'. 这种格临函数叫做推迟格临函数或表因格临函数，因为源点的时间 x_0' 总是早于观测点的时间 x_0. 方程(12.131)或其对 x_0 的傅里叶变换 $(4\pi R)^{-1}e^{i\omega R/c}$ 就是大家熟悉的第六章里的出射波格临函数.

若选图 12.8 中的围道 a，则通过相仿的严密计算，得到提早格临函数：

$$D_a(x-x')=\frac{\theta[-(x_0-x_0')]}{4\pi R}\delta(x_0-x_0'+R) \qquad (12.132)$$

利用下列恒等式可以将这些格临函数写成协变形式：

$$\begin{aligned}\delta[(x-x')^2]&=\delta[(x_0-x_0')^2-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2]\\&=\delta[(x_0-x_0'-R)(x_0-x_0'+R)]\\&=\frac{1}{2R}[\delta(x_0-x_0'-R)+\delta(x_0-x_0'+R)]\end{aligned}$$

这时，因为 θ 函数与上列末式两项相乘，其中只有一项的乘积不等于零，所以我们有

$$\begin{aligned}D_r(x-x')&=\frac{1}{2\pi}\theta(x_0-x_0')\delta[(x-x')^2]\\D_a(x-x')&=\frac{1}{2\pi}\theta(x_0'-x_0)\delta[(x-x')^2]\end{aligned} \qquad (12.133)$$

θ 函数显然是非不变量，但当它受到 δ 函数约束时，实际上它是通常洛仑兹变换下的不变量．所以，(12.133)给出了格临函数的明显不变表式．(12.133)中的 θ 函数和 δ 函数表明：推迟(提早)格临函数仅仅在源点的向前(向后)光锥上才不等于零．

现在我们可以把波动方程(12.123)的解用这两个格临函数写出：

$$A^\alpha(x)=A^\alpha_{\text{入射}}(x)+\frac{4\pi}{c}\int d^4x' D_r(x-x')J^\alpha(x') \qquad (12.134)$$

或

$$A^\alpha(x)=A^\alpha_{\text{出射}}(x)+\frac{4\pi}{c}\int d^4x' D_a(x-x')J^\alpha(x') \qquad (12.135)$$

式中 $A^\alpha_{\text{入射}}$ 和 $A^\alpha_{\text{出射}}$ 是齐次波动方程的解．在(12.134)中用到了推迟格临函数．由于格临函数的推迟性质，在 $x_0\to-\infty$ 这种极限情况下，假定诸源是空间和时间的定域源，则遍及所有源的积分等于零．我们看到，自由场的势 $A^\alpha_{\text{入射}}(x)$ 可解释为 $x_0\to-\infty$ 时给定的"入射"势．同样，在(12.135)中用到了提早格临函数，齐次解

$A^{\alpha}_{出射}(x)$是$x_0\to+\infty$时给定的渐近"出射"势. 辐射场定义为"出射"场和"入射"场之差. 辐射场的四元矢势是

$$A^{\alpha}_{辐射}(x)=A^{\alpha}_{出射}-A^{\alpha}_{入射}=\frac{4\pi}{c}\int d^4x'D(x-x')J^{\alpha}(x') \tag{12.136}$$

式中

$$D(z)=D_r(z)-D_a(z) \tag{12.137}$$

是推迟和提早格临函数之差.

在第十四章里，我们感兴趣的是按规定路线运动的带电粒子产生的场. 如果粒子是一个点电荷e，它在惯性系K中的位置是$\mathbf{r}(t)$，则在该惯性系中它的电荷密度和电流密度是

$$\left.\begin{aligned}\rho(\mathbf{x},t)&=e\delta[\mathbf{x}-\mathbf{r}(t)]\\ \mathbf{J}(\mathbf{x},t)&=e\mathbf{v}(t)\delta[\mathbf{x}-\mathbf{r}(t)]\end{aligned}\right\} \tag{12.138}$$

式中$\mathbf{v}(t)=d\mathbf{r}(t)/dt$是$K$中的电荷速度. 引进电荷的四元坐标矢量$r^{\alpha}(\tau)$作为电荷原时$\tau$的函数，并用一个适当的附加$\delta$函数遍历原时积分，就可以把电荷密度和电流密度写成具有明显协变形式的四元电流矢量. 于是

$$J^{\alpha}(x)=ec\int d\tau U^{\alpha}(\tau)\delta^{(4)}[x-r(\tau)] \tag{12.139}$$

式中U^{α}是电荷的四元速度. 在惯性系K中，$r^{\alpha}=[ct,\mathbf{r}(t)]$和$U^{\alpha}=(\gamma c,\gamma\mathbf{v})$. 将(12.139)用到(12.134)，得到运动电荷的势和场，这将在14.1节里叙述.

参考书和推荐读物

每一本高等力学教科书以及一些电动力学书籍里，都论述了相对论性带电粒子的拉格朗日函数和哈密顿函数的数学形式. 一些有用的参考书是

Barut，第二章；

Corben and Stehle，第十六章；

Goldstein，第六章；

Landau and Lifshitz, *Classical Theory of Fields*

(中译本：朗道、栗弗席兹著，任朗、袁炳南译《场论》)，第二章和第三章.

带电粒子在外电磁场中，特别是在不均匀磁场中的运动，日益成为地球物理学、太阳物理学和热核研究的重要课题．关于这些问题的经典参考书是

Alfvén and Fälthammar.

可是，下列各书里也都介绍了基本结果：

Chandrasekhar，第二章和第三章；

Clemmow and Dougherty，第四章；

Linhart，第一章；

Spitzer，第一章.

下列书里阐述了带电粒子在地球和太阳的磁场中的运动：

Rossi and Olbert.

绝热式不变量这一论题在下列书中作了透彻的论述：

Northrop.

高能加速器是相对论性带电粒子动力学的另一个重要应用领域．有关这一领域的物理问题的介绍，在下列书中可以找到：

Corben and Stehle，第十七章.

关于加速器的一些实际知识和物理基础知识，可以在下列书中找到：

Livingston and Blewett；

Persico, Ferrari and Segre.

下面这篇论文主张把达尔文-拉格朗日函数(12.82)作为描述等离子体低频振荡的有用工具：

A. N. Kaufman and P. S. Rostler, *Physics of Fluids* 14, 446 (1971).

在下面这篇有趣的论文中，用达尔文-拉格朗日函数解决动量守恒和牛顿第三定律中的一个佯谬：

S. Coleman and J. H. Van Vleck, *Phys. Rev.* 171, 1370(1968).

下列书中讨论了电磁场的拉格朗日函数描述这一课题：

Barut，第三章；

Corben and Stehle，第十五章；

Goldstein，第十一章；

Schwartz, 第六章;

Wentzel, 第一章.

下列书中叙述了从 $T^{\alpha\beta}$ 建立对称的规范不变胁强张量$\Theta^{\alpha\beta}$的一般方法:

Wentzel, 附录;

Landau and Lifshitz, *Classical Theory of Field*, 第 32 节和第 94 节.

带电粒子和电磁场的相互作用, 以及有关的守恒定律, 这些专题在下列书中论述:

Barut, 第四章和第五章;

Landau and Lifshitz, *Classical Theory of Fields*, 第四章;

Schwartz, 第七章.

下列书中格外透彻地论述了这些专题:

Rohrlich,

作者在该书中详细论述了自具能和辐射反作用. 关于电磁场能量、动量和质量的仔细讨论, 请查阅刚才援引的 Rohrlich 的书, 也可参看

F. Rohrlich, *Am. J. Phys.* 38, 1310(1970).

几乎在任何一本量子场论书里都推导了波动方程的不变格临函数. 下列书就是这样的一本书:

Thirring, I. 2 节和附录 Ⅱ,

书中一开始就简要地阐述了经典电动力学的协变原理.

关于光子质量问题, 有两篇评述性文章, 在绪论里已经援引过, 它们是

A. S. Goldhaber and M. M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* 43, 277(1971);

I. Yu. Kobzarev and L. B. Okun', *Uspekhi Fiz. Nauk.* 95, 131 (1968) [英译: *Sov. Phys. Uspekhi* 11, 338(1968)].

习 题

12.1 (*a*) 证明: 洛仑兹不变拉格朗日函数

$$L=-\frac{1}{2}mU_\alpha U^\alpha-\frac{q}{c}U_\alpha A^\alpha$$

给出了质量为 m、带电荷为 q 的一个粒子在与外场相互作用时正确的相对论性运动方程, 这外场用四元矢势 $A^\alpha(x)$ 描述.

(*b*) 确定正则动量, 并写出有效哈密顿函数的协变式和时空形式. 这有

效哈密顿函数是一个洛仑兹不变量．它的值是什么？

12.2 (*a*) 根据哈密顿原理证明：若有一些拉格朗日函数，它们互相只相差某坐标和时间函数的时间全导数，则在下述意义上它们是等效的，即这些函数都给出相同的欧勒-拉格朗日运动方程．

(*b*) 直接证明：对带电粒子拉格朗日函数 (12.9) 中的势施行规范变换 $A^\alpha \to A^\alpha + \partial^\alpha \Lambda$，只不过产生另一等效的拉格朗日函数．

12.3 有一个与外场相互作用的粒子，该外场由洛仑兹标势描写．

(*a*) 利用作用量的洛仑兹不变性，并利用平移与转动不变性的标准假定，证明：相对论性拉格朗日函数 L 必定是(12.34)式，即自由粒子拉格朗日函数与 x 的洛仑兹标量函数的乘积．

(*b*) 证明：如果粒子在参照系 K' 中作非相对论性运动，则在该参照系中的力近似地为 $\mathbf{F}' = q\mathbf{E}'_{\text{有效}}$，式中 $\mathbf{E}'_{\text{有效}} = -\nabla'\phi$；并证明：在参照系 K 中因而有一个质磁力 $q(\mathbf{u}\times\mathbf{B}_{\text{有效}})/c$，式中 $\mathbf{B}_{\text{有效}} = (\gamma_v/c)\mathbf{v}\times\mathbf{E}'_{\text{有效}}$．

(*c*) 但是，用直接的代换和 $\partial^\alpha\phi(x)$ 的变换，可以证明：由 K' 中计算的力方程(12.36)通过力的变换方程(12.32)就能导出 K 中的力方程，此力方程与(12.36)相同．

12.4 一个质量为 m、电荷为 e 的粒子在均匀静电场 $\mathbf{E}_0$ 中运动．

(*a*) 设初速度 $\mathbf{v}_0$ 垂直于电场，求解作为时间的显函数的粒子的速度和位置．

(*b*) 消去时间，求出粒子在空间中的轨道．讨论短时间和长时间(怎样定义"短"时间和"长"时间)两种情况下路线的形状．

12.5 设要利用在长度 L 内交叉的均匀静电场和静磁场，做成一个 $E\times B$ 速度选择器．如果入射和出射缝宽为 Δx，讨论在平均值 $u = cE/B$ 附近，由选择器所透过的粒子的速度间隔 Δu，求出 Δu 与入射粒子的质量、动量（或能量）、场强、选择器长度和任何其它有关变量间的函数关系．略去两端的边缘效应．请根据下列实际情况进行讨论：$L \simeq$ 几米，$E_{\text{最大}} \simeq 3\times10^4$ 伏特/厘米，$\Delta x \simeq 10^{-1}$ 至 10^{-2} 厘米，$u \simeq 0.5$ 至 $0.995c$（考虑以平均速率 u 沿粒子束方向运动的参照系中和实验室中的运动方程是有益的）．参考文献：C. A. Coombes etal., *Phys. Rev.* **112**, 1303(1958)；P. Eberhard, M. L. Good, and H. K. Ticho, *Rev. Sci. Inst.* **31**, 1054(1960)．

12.6 一个质量为 m、电荷为 e 的粒子在实验室里的交叉的均匀静电场和静磁场中运动．$\mathbf{E}$ 和 x 轴平行；$\mathbf{B}$ 和 y 轴平行．

(*a*) 设$|\mathbf{E}|<|\mathbf{B}|$，列出12.4节里所述的必要的洛仑兹变换，以得到粒子轨道的显参数方程.

(*b*) 设$|\mathbf{E}|>|\mathbf{B}|$，重复(*a*)的计算.

12.7 设均匀静电场$\mathbf{E}$和均匀静磁场$\mathbf{B}$彼此的夹角为θ.

(*a*) 适当选取坐标轴，求解在直角坐标系中关于电荷为e、质量为m的粒子运动的力方程.

(*b*) 当$\mathbf{E}$和$\mathbf{B}$平行时，证明：用适当的积分常数等等，就可以把参数解写成

$$x=AR\sin\phi,\quad y=AR\cos\phi,\quad z=\frac{R}{\rho}\sqrt{1+A^2}\cosh(\rho\phi)$$

$$ct=\frac{R}{\rho}\sqrt{1+A^2}\sinh(\rho\phi)$$

式中$R=(mc^2/eB)$，$\rho=(E/B)$，A是任意常数，ϕ是参量[实际上等于c/R乘原时].

12.8 地球的磁场可以近似地用磁矩为$M=8.1\times10^{25}$高斯-厘米^{3}的磁偶极子场来表示. 试研究高能电子在此偶极子场作用下在地球附近的运动[范艾伦(Van Allen)电子带].

(*a*) 证明：磁力线方程是$r=r_0\sin^2\theta$，式中θ是从偶极子轴量起的通常的极角(余纬)，并求出沿任何一条力线的B的量值与θ的函数关系.

(*b*) 一个带正电的粒子，以回转半径a和平均半径$R(a\ll R)$在赤道平面内绕力线回转. 证明：粒子的方位角(经度)按下式近似线性地随时间而变化，

$$\phi(t)=\phi_0+\frac{3}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^2\omega_B(t-t_0)$$

式中ω_B是在半径为R时的回转频率.

(*c*) 如果粒子除了(*b*)的圆周运动外，还有平行于力线的微小速度分量，证明：粒子的θ角以频率$\Omega=(3/\sqrt{2})(a/R)\omega_B$绕$\theta=\pi/2$作小振荡. 求在纬度振荡一周期内经度的变化.

(*d*) 求平均半径为$R=3\times10^9$厘米、动能为10兆电子伏特的一个电子的ω_B和a，从而确定它绕地球漂移一周所需的时间，以及纬度振荡一周所需的时间. 对具有相同半径的10千电子伏特的电子算出这些量.

12.9 在某一瞬间，一个带电粒子处在地磁场(设为偶极子场)的赤道面内、离地球中心为R的地方. 这时，粒子的速度矢量和赤道面的夹角为α

$(v_\parallel/v_\perp=\mathrm{tg}\alpha)$. 假定粒子以回转半径 $a(a\ll R)$ 沿力线作螺旋线运动，穿过轨道的磁通量又是运动常数，求粒子所达到的最大磁纬度 λ 与 α 角的函数关系. 画出 λ 与 α 的关系图(不是略图). 试在曲线上标出下列情况下的 α 值，即当 $R/R_0=1.2, 1.5, 2.0, 2.5, 3, 4, 5$ 时在赤道面内半径为 R 的粒子与地球(半径为 R_0)相遇处的 α 值.

12.10 讨论一个 μ 介子的自旋进动，这个 μ 介子最初是纵向极化的，并在垂直于均匀磁场 $\mathbf{B}$ 的平面内沿圆形轨道运动.

(*a*) 证明：自旋进动频率与轨道回转频率之差 Ω 是

$$\Omega=\frac{eBa}{m_\mu c}$$

与 μ 介子的能量无关，式中 $a=(g-2)/2$ 是反常磁矩(求自旋沿互相垂直方向上的分量的运动方程，这些方向是由粒子的速度、从圆心至粒子的矢径和磁场确定的).

(*b*) 欧洲联合原子核研究中心的 μ 介子储存环[参看 11.1 节 (*c*) 段]的轨道半径是 $R=2.5$ 米，$B=17\times10^3$ 高斯. 问 μ 介子的动量是多大？时间膨胀因数 γ 等于多少？在实验室观测到的 μ 介子平均寿命内出现多少个进动周期 $T=2\pi/\Omega$？[$m_\mu=105.66$ 兆电子伏特，$\tau_0=2.2\times10^{-6}$ 秒，$a\simeq\alpha/2\pi$].

(*c*) 以轨道转动频率为单位来表示差频 Ω，并对 300 兆电子伏特的 μ 介子、300 兆电子伏特的电子、5 千兆电子伏特的电子（后者是斯坦福和汉堡的 e^+e^- 储存环最近产生的典型粒子）分别计算每转动一次出现多少个进动周期(其频率不同)？

12.11 在 11.11 节里求得带电荷 e 的粒子和带任意 g 因数的磁矩的 BMT 自旋运动方程.

(*a*) 证明：(11.171) 是静止参照系中自旋矢量 $\mathbf{s}$ 纵向分量的时间导数的正确方程.

(*b*) 设 $\hat{\mathbf{n}}$ 是垂直于 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 且与 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$、$\mathbf{s}$ 共面的单位三元矢量 ($\hat{\mathbf{n}}$ 通常是与时间相关的). 令 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 和 $\mathbf{s}$ 的夹角为 θ. 证明：θ 的时间变率可以写成

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{e}{mc}\left[\left(\frac{g}{2}-1\right)\hat{\mathbf{n}}\cdot(\hat{\boldsymbol{\beta}}\times\mathbf{B})+\left(\frac{g\beta}{2}-\frac{1}{\beta}\right)\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{E}\right]$$

式中 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 是实验室里的电磁场，$c\boldsymbol{\beta}=c\beta\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 是粒子在实验室里的瞬时速度.

(*c*) 当一个粒子不偏转地通过 $E\times B$ 速度选择器而运动，并且 $(\hat{\mathbf{n}}\times\hat{\boldsymbol{\beta}})\cdot\mathbf{B}=B$ 时，求用回转频率 $eB/\gamma mc$ 表示的 $d\theta/dt$.

(*d*) 试通过两个四元矢量 $L^\alpha=(\gamma\beta,\gamma\hat{\boldsymbol{\beta}})$ 和 $N^\alpha=(0,\hat{\mathbf{n}})$ 的定义，证明：$d\theta/d\tau$ 可以写成准协变形式

$$\frac{d\theta}{d\tau}=\frac{e}{mc}\left[\frac{g}{2}L_\alpha-\frac{1}{v}U_\alpha\right]F^{\alpha\beta}N_\beta$$

式中 U^α 为粒子的四元速度.

12.12 (*a*) 将达尔文-拉格朗日函数(12.82)具体应用到两个带电粒子 (m_1,q_1) 和 (m_2,q_2) 的相互作用上. 引进约化粒子坐标 $\mathbf{r}=\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2$, $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$ 以及质心坐标. 写出质心速度为零的参照系中的拉格朗日函数，并计算正则动量分量 $p_x=\partial L/\partial v_x$ 等.

(*b*) 计算哈密顿函数至 $1/c^2$ 的一次幂项，并证明它是

$$H=\frac{p^2}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)+\frac{q_1q_2}{r}-\frac{p^4}{8c^2}\left(\frac{1}{m_1^3}+\frac{1}{m_2^3}\right)+\frac{q_1q_2}{2m_1m_2c^2}\left(\frac{p^2+(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}})^2}{r}\right)$$

跟 Bethe 和 Salpeter 的书(第 193 页脚注援引的)第 193 页(42.1)式各项作一比较. 讨论这两式的异同.

12.13 另一个电磁场拉格朗日密度是

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{8\pi}\partial_\alpha A_\beta\partial^\alpha A^\beta-\frac{1}{c}J_\alpha A^\alpha$$

(*a*) 推导欧勒-拉格朗日运动方程. 这方程组是麦克斯韦方程组吗？在哪些假定下？

(*b*) 直接证明(用到哪些假定？)：上面这个拉格朗日密度与 (12.85) 相差一个四维散度. 这一附加的四维散度影响作用量或运动方程吗？

12.14 讨论定域稳态电流分布的普罗卡方程，该分布只有一个静磁矩. 这一模型可以用来研究有限光子质量对地磁场的可观测的效应. 注意：如果磁化强度为 $\mathscr{M}(\mathbf{x})$，则电流密度可以写成 $\mathbf{J}=c(\nabla\times\mathscr{M})$.

(*a*) 证明：如果 $\mathscr{M}=\mathbf{m}f(\mathbf{x})$，式中 $\mathbf{m}$ 为固定矢量，$f(\mathbf{x})$ 为定域标量函数，则矢势是

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})=-\mathbf{m}\times\nabla\int f(\mathbf{x}')\frac{e^{-\mu|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x'$$

(*b*) 如果磁偶极子是在原点上的一个点偶极子，证明：磁场是

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})=[3\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{m})-\mathbf{m}]\left(1+\mu r+\frac{\mu^2r^2}{3}\right)\frac{e^{-\mu r}}{r^3}-\frac{2}{3}\mu^2\mathbf{m}\frac{e^{-\mu r}}{r}$$

(*c*) (*b*)的结果表明：当给定 $r=R$ 时 (即在地球表面上)，地磁场相当于偶极子角分布迭加一个反平行于 $\mathbf{m}$ 的附加恒定磁场(表观外场). 人造卫

星观测和地面观测得出结论如下：这"外"场小于 4×10^{-3} 乘地磁赤道处的偶极子场．由这一数据估计以地球半径为单位的 μ^{-1} 的下限和以克为单位的光子质量的上限．

这一估计 μ 的方法应归功于 E. Schrödinger, *Proc. Roy. Irish Acad.* **A49**, 135(1943) 参看A. S. Goldhaber and M. M. Nieto, *Phys. Rev. Letters* **21**, 567(1968)．

12.15 用四维散度定理或别的方法证明：对于被约束在有限空间区域的无源电磁场来说，Θ^{00} 和 Θ^{0i} 的三维空间积分按四元矢量的分量而变换，正如(12.106)所表明的．

12.16 在空间的局部区域内存在无源电磁场．讨论在 $\partial_\alpha M^{\alpha\beta\gamma}=0$ 遍及整个空间的积分中所包含的各种守恒定律，这里 $M^{\alpha\beta\gamma}$ 是由 (12.117) 定义的．

(*a*) 证明：当 β 和 γ 都是空间指标时，得出场的总角动量守恒．

(*b*) 证明：当 $\beta=0$ 时，守恒定律是

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}=\frac{c^2\mathbf{P}_{\text{电磁}}}{E_{\text{电磁}}}$$

式中 $\mathbf{X}$ 是电磁场的质量中心的坐标，其定义为

$$\mathbf{X}\int u d^3x=\int \mathbf{x}u d^3x$$

式中 u 是电磁能量密度，$E_{\text{电磁}}$ 是电磁场的总能量，$\mathbf{P}_{\text{电磁}}$ 是电磁场的总动量．

第十三章　带电粒子间的碰撞、能量损失和散射

本章讨论快速运动，带电粒子的碰撞，特别着重于碰撞粒子间的能量交换和伴随的入射粒子运动方向的偏转．一个快速带电粒子入射到物质上，就跟原子的电子和原子核发生碰撞．如果这个粒子比电子重(μ 介子或 π 介子、K 介子、质子等)，那末它跟电子碰撞的结果，就和跟原子核碰撞的结果不同．轻的电子能从入射粒子取得数量可观的能量，而不使入射粒子偏转；重的原子核吸收的能量很少，但由于它们的电量较大，却使入射粒子发生散射．所以，入射粒子的能量损失，几乎完全发生在跟电子碰撞的时候．另一方面，入射粒子运动方向的偏转，基本上是由于它跟原子核的弹性碰撞所造成的．粒子的散射局限在相当小的角度内，所以重粒子在损失能量的过程中大体上保持着直线路径，直到接近其射程的终点为止．当入射电子跟原子的电子碰撞时，既损失能量，又发生散射．所以，电子的路径远非直线．走过一段短距离后，电子就要在物质中扩散开来，而不走直线路径．

能量损失和散射问题是一个重要的课题，有几本书里[①]讨论了这个课题，并提供了一些数值表和图表．因此，我们的讨论将着重于有关的物理概念，不着重于精确的数值公式．即使所有的基本特征都起源于经典的或半经典的处理，但要得到精确结果，的确还必须完全用量子力学来处理．正如我们在下面将看到的，所有量子效应的数量级都可以由测不准原理导出．

我们一开始先讨论一个简单问题，即快速重粒子将能量转移

① 参看本章末援引的参考书．

给自由电子的问题．然后再探讨作用于电子上的束缚力所引起的效应，并求出能量损失的经典玻尔公式．在论述了量子修正和媒质极化效应后，接着讨论与之密切有关的现象，即透明物质中的契仑柯夫辐射．继而简短地讨论电子等离子体中的能量损失．最后介绍原子核对入射粒子的弹性散射和多次散射．

13.1 在库仑碰撞中的能量转移

一个电荷为 ze、质量为 M 的快速粒子跟原子中的一个电子碰撞．如果粒子的运动速度比电子轨道运动的特征速度快得多，在处理时就可以认为这电子在碰撞过程中是自由的，而且在初始时是静止不动的．作为进一步的近似，我们假定动量转移 Δp 足够微小，以致入射粒子基本上不偏离其直线路径，且在碰撞过程中，反冲电子基本上是不动的．于是，只要计算入射粒子的电场在电子的位置上所引起的冲量，就可以求出碰撞过程中的能量转移．如果电子基本上静止不动，那末粒子的磁场是无关紧要的．

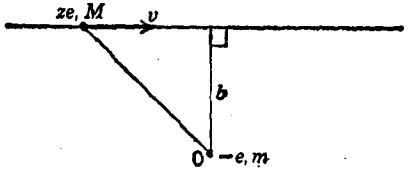


图 13.1

图 13.1 表示碰撞过程的几何图形．入射粒子的速度为 v，能量为 $E=\gamma Mc^2$．它从电荷为 $-e$、质量为 $m(m\ll M)$ 的电子旁边飞过，其碰撞参数为 b．在电子的位置上，入射粒子的电场由(11.152)给出，式中 $q=ze$．这时只有横向电场 E_2 的时间积分不等于零．因此，冲量 Δp 是在横向上，其量值为

$$\Delta p=\int_{-\infty}^{\infty} eE_2(t)dt=\frac{2ze^2}{bv} \tag{13.1}$$

应该注意，Δp 与 γ 无关，正如 11.10 节末所讨论的一样．转移给电子的能量是

$$\Delta E(b)=\frac{(\Delta p)^2}{2m}=\frac{2z^2e^4}{mv^2}\left(\frac{1}{b^2}\right) \tag{13.2}$$

倘若 $\Delta p\ll p$，则入射粒子的偏转角由 $\theta\simeq\Delta p/p$ 给出．因此，偏转很小时，

$$\theta\simeq\frac{2ze^2}{pvb} \tag{13.3}$$

我们可以把这一结果跟下列著名的精确公式(13.4)比较，(13.4)式表明一个电荷为 ze 的非相对论性粒子由于电荷为 $z'e$ 的库仑力场而引起的卢瑟福散射：

$$2\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{2zz'e^2}{pvb} \tag{13.4}$$

可以看出，当偏转角很小时，这两个式子是一致的①．

由(13.2)给出的能量转移 $\Delta E(b)$ 有几个有趣的特点．它只和入射粒子的电荷和速度有关，和入射粒子的质量无关．由于它和碰撞参数 b 的平方成反比，所以切近碰撞有很大的能量转移．当然，能量转移有一个和正碰撞对应的上限．我们的计算方法只当 b 值很大时才真正有效．我们令 (13.2) 等于最大可能的能量转移[参看习题 11.23(b)]，就可以求出碰撞参数的下限 $b_{\min}$，在这下限内我们的近似计算方法仍然有效，即令

$$\Delta E(b_{\min})=\Delta E_{\max}\simeq 2m\gamma^2v^2 \tag{13.5}$$

这就得到下限

---

① 实际上，在比较(13.3)和(13.4)时出现关于参照系的问题．因为(13.4)对于固定不动的力心(或 cm 参照系)成立，所以我们应该把它和轻的电子在那个重的入射粒子所静止的参照系里的偏转结果比较．这时(13.3)成立，式中 $p\simeq\gamma mv$，它是电子在该参照系中的动量．读者可以把 cm 参照系中的角度变换到实验室参照系的角度，来证明(13.3)和(13.4)在电子所静止的参照系里亦是一致的．

$$b_{\min}=\frac{ze^2}{\gamma mv^2} \tag{13.6}$$

低于这个下限时，就必须用更准确的表式来代替近似结果(13.2)；当 $b\to 0$ 时，这个准确表式趋于 (13.5)．可以证明(习题 13.1)，通过适当运算而给出的更准确的结果是

$$\Delta E(b)\simeq\frac{2z^2e^4}{mv^2}\left(\frac{1}{b^2_{\min}+b^2}\right) \tag{13.7}$$

当 $b\to 0$ 时，方程(13.7)就显示出应有的极限结果，并且当 $b\gg b_{\min}$ 时简化为(13.2)．

我们可以用另一种方法求出 b 的下限．假定在碰撞过程中电子没有很明显的位移，并在这一假定下导出方程(13.2)．只要电子实际移动的距离 d 比 b 小得多，我们就可以预料(13.2)是正确的．如果我们认为电子在碰撞过程中的平均速度是 $\frac{\Delta p}{2m}$，而且碰撞时间由(11.153)给出，即 $\Delta t\simeq b/\gamma v$，就可以估计出 d 的值．因此，在碰撞时，电子移动的距离大约是

$$d\sim\frac{\Delta p}{2m}\times\Delta t=\frac{ze^2}{\gamma mv^2}=b_{\min} \tag{13.8}$$

只要 $b\gg d$，(13.2)就应该成立．这正是(13.7)所暗示的条件。

在另一种极端情形，即远距离碰撞的情形中，由于原子中的电子受到束缚，所以 $\Delta E(b)$ 的近似式(13.2)是有错误的．当时我们假定电子是自由的，而事实上电子都被束缚在原子里．但是，只要碰撞时间(11.153)比轨道运动的周期短得多，我们就可以认为，由于碰撞时间很短促，以致于可以把电子当成自由电子来处理．反之，如果碰撞时间(11.153)比轨道周期长得多，那末当入射粒子缓慢地经过时，电子转了许多周，并将绝热地受到电磁场的影响，而且没有能量的净转移．在碰撞时间(11.153)和轨道周期可以相比时的碰撞参数 $b_{\max}$，就是上述两种情况的分界点．如果 ω 是原

子中电子运动的特征频率，那末上述条件就是

$$\left.\begin{aligned}\Delta t\,(b_{\max})&\sim\frac{1}{\omega}\\ b_{\max}&=\frac{\gamma v}{\omega}\end{aligned}\right\}\quad\text{或}\qquad(13.9)$$

我们可以预料，当碰撞参数比 $b_{\max}$ 大时，能量转移就低于(13.2)，而且当 $b\gg b_{\max}$ 时，能量转移迅速地趋于零.

图 13.2 表示 $\Delta E(b)$ 与 b 的函数关系的一般情况. 虚线代表

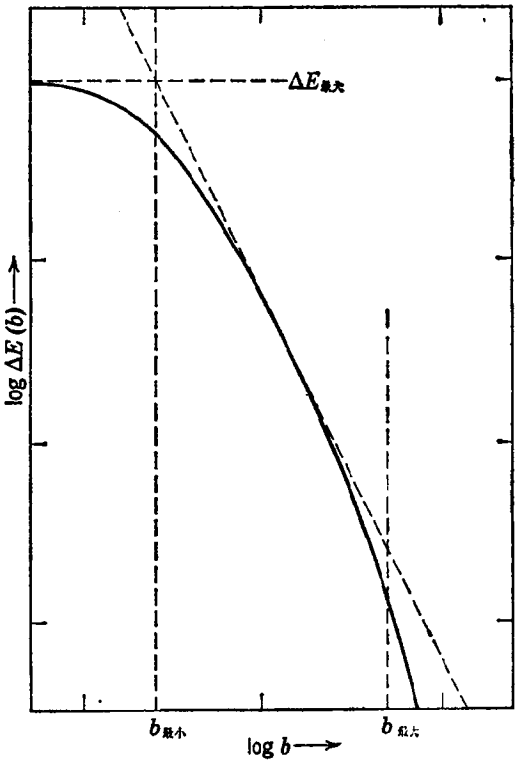


图 13.2 能量转移和碰撞参数的函数关系.

近似式(13.2)，实线代表正确的结果．在区间 $b_{\min}<b<b_{\max}$ 内，能量转移由(13.2)近似地给出．但对于在这区间以外的碰撞参数来说，能量转移的正确值要比近似值小得多．

一个通过物质的快速粒子会"看见"许多离它路径不同距离处的电子．如果每单位体积内有 N 个原子，而每个原子有 Z 个电子，那末，在厚度为 dx 的物质内，碰撞参数介于 b 和 $(b+db)$ 之间的电子数是

$$dn=NZ2\pi bdbdx \tag{13.10}$$

为了求出入射粒子在每单位距离上的能量损失，可将(13.10)乘以能量转移 $\Delta E(b)$，并对所有碰撞参数积分．于是，能量损失是

$$\frac{dE}{dx}=2\pi NZ\int\Delta E(b)\,bdb \tag{13.11}$$

考虑到图 13.2 所示的 $\Delta E(b)$ 的特性，可以利用近似式(13.2)，并在 $b_{\min}$ 和 $b_{\max}$ 之间取积分．于是，我们求得下列结果：

$$\frac{dE}{dx}\simeq 4\pi NZ\frac{z^2e^4}{mv^2}\int_{b_{\min}}^{b_{\max}}\frac{1}{b^2}bdb \tag{13.12}$$

或

$$\frac{dE}{dx}\simeq 4\pi NZ\frac{z^2e^4}{mv^2}\ln B \tag{13.13}$$

式中

$$B=\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\simeq\frac{\gamma^2mv^3}{ze^2\omega} \tag{13.14}$$

这个能量损失的近似式显示了玻尔(1915)得到的经典结果的所有基本特征．处理 (13.12) 中积分下限的方法和采用 $\Delta E(b)$ 的表式(13.7)是完全相当的．在 $b=b_{\max}$ 处的截止只是近似的．因此 B 不准确到一个和 1 同数量级的因子．但因为 B 出现在对数里，所以这个因子在数值上是无关紧要的．但是无论如何下节里还将酌量论述束缚效应．而把 (13.13) 当作能量函数的讨论以及它与实

验的比较推迟到 13.3 节.

13.2 对谐振束缚电荷的能量转移

碰撞参数的可能值 b_{max}(13.9)把库仑碰撞和绝热碰撞分开，前者 $b<b_{max}$，而自由能量转移是(13.2)，后者 $b>b_{max}$ 而能量转移可忽略不计. 为了证明这个可能值，我们考虑一个重的带电粒子(电量为 ze，速度为 v)从一个谐振束缚电荷(质量为 m，电量为 $-e$)旁边经过时的能量损失问题. 这个问题可以作为粒子通过物质时能量损失的简化模型. 和以前一样，我们将假定重粒子在碰撞中路径偏转很小，所以我们可以认为它的路径近似为一条直线. 重粒子在碰撞参数为 b 的地方经过束缚粒子，碰撞参数从束缚力中心 O 量起，如图 13.3 所示. 因为我们主要兴趣是大碰撞参数，在那

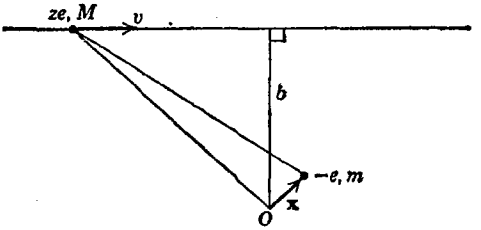


图 13.3

里束缚效应是很重要的，所以，我们可以假定能量转移不大，在整个碰撞过程中，束缚粒子的运动是非相对论性的，并且它围绕原点 O 振荡的初振幅和末振幅都比 b 小得多. 于是，x 方程中只需包括入射粒子的电场. 此外，我们还可以忽略电场在束缚粒子位置上的变化，并把场在原点 O 的值取作场在粒子位置上的有效值. 这种假定有时被称为偶极子近似，因为它和相应的辐射吸收问题类似.

应用这些近似处理，就可以把谐振束缚电荷的力方程写成

$$\ddot{\mathbf{x}}+\Gamma\dot{\mathbf{x}}+\omega_0^2\mathbf{x}=-\frac{e}{m}\mathbf{E}(t) \tag{13.15}$$

式中 $\mathbf{E}(t)$ 是电荷 ze 在 O 点产生的电场，它的分量已由(11.152)给出，ω_0 是束缚振动的特征频率，Γ 是一个小的阻尼常数．这个阻尼因子并不是必要的，不过，各种实际的物理系统至少都有一些阻尼，而且这个阻尼因子还可以消除没有阻尼因子时所发生的含糊不清的问题．为了求解(13.15)，我们对 $\mathbf{E}(t)$ 和 $\mathbf{x}(t)$ 作傅里叶分析：

$$\mathbf{x}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{x}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \tag{13.16}$$

$$\mathbf{E}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \tag{13.17}$$

因为 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{E}(t)$ 都是实数，所以它们的傅里叶变换的正频率部分和负频率部分有如下关系：

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(-\omega)&=\mathbf{x}^*(\omega)\\ \mathbf{E}(-\omega)&=\mathbf{E}^*(\omega)\end{aligned} \tag{13.18}$$

把傅里叶积分式代入力方程后，可得

$$\mathbf{x}(\omega)=-\frac{e}{m}\frac{\mathbf{E}(\omega)}{\omega_0^2-i\omega\Gamma-\omega^2} \tag{13.19}$$

如果知道 $\mathbf{E}(t)$ 的形式，就可以确定傅里叶振幅 $\mathbf{E}(\omega)$．这时，利用(13.19)，就可以从(13.16)求出 $\mathbf{x}(t)$．只要我们能够算出这个积分，问题就解决了．

我们最感兴趣的，不是束缚粒子的详细运动状况，而是碰撞中的能量转移．考虑入射粒子对束缚粒子所作的功，就可以求出能量转移．所作的功率由下式给出：

$$\frac{dE}{dt}=\int\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}d^3x' \tag{13.20}$$

因此，飞过的粒子所作的总功是

$$\Delta E=\int_{-\infty}^{\infty}dt\int d^3x'\mathbf{E}\cdot\mathbf{J} \tag{13.21}$$

束缚电荷的电流密度是 $\mathbf{J}=-e\mathbf{v}\delta[\mathbf{x}'-\mathbf{x}(t)]$. 所以

$$\Delta E=-e\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}dt \tag{13.22}$$

式中 $\mathbf{v}=\dot{\mathbf{x}}$, 而在偶极子近似中, $\mathbf{E}$ 是入射粒子在原点 O 的电场. 利用傅里叶表式 (13.16) 和 (13.17), 以及 δ 函数的傅里叶表式 (2.46) 和现实性条件 (13.18), 就可以把能量转移写成

$$\Delta E=2e\mathrm{Re}\int_0^{\infty}i\omega\mathbf{x}(\omega)\cdot\mathbf{E}^*(\omega)d\omega \tag{13.23}$$

如果现在把 $\mathbf{x}(\omega)$ 的结果 (13.19) 代入上式, 即得

$$\Delta E=\frac{e^2}{m}\int_0^{\infty}|\mathbf{E}(\omega)|^2\frac{2\omega^2\Gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}d\omega \tag{13.24}$$

当 Γ 很小时, 被积函数在 $\omega=\omega_0$ 处有一个尖锐的峰, 峰的形状近似于洛仑兹线形. 因此, 包含电场的因子可以用这因子在 $\omega=\omega_0$ 处的数值近似代替. 于是, (13.24) 变成

$$\Delta E=\frac{2e^2}{m}\left|\mathbf{E}(\omega_0)\right|^2\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{\left[\frac{\omega_0^2}{\Gamma^2}-x^2\right]^2+x^2} \tag{13.25}$$

积分的数值是 $\pi/2$, 它和 ω_0/Γ 无关. 所以, 能量转移是

$$\Delta E=\frac{\pi e^2}{m}|\mathbf{E}(\omega_0)|^2 \tag{13.26}$$

方程 (13.26) 是由外电磁场转移给非相对论性振子的能量的最普遍结果. 在上述例子里, 场是由一个飞过的带电粒子产生的. 但是这个场也可以是辐射脉冲, 或者是外场的任何组合.

当一个电荷为 ze 的粒子, 在碰撞参数为 b 的地方, 以速度 v 经过原点 O 时, 在原点产生的电磁场由 (11.152) 给出, 式中 $q=ze$. 为了说明傅里叶变换 (13.17) 的求法, 我们考虑 $E_2(t)$. 它的傅里叶变换 $E_2(\omega)$ 的定义是

$$E_2(\omega)=\frac{ze\gamma b}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}dt}{(b^2+\gamma^2v^2t^2)^{3/2}} \tag{13.27}$$

把积分变数换成 $x=\gamma vt/b$ 后，就可以把(13.27)写成

$$E_2(\omega)=\frac{ze}{\sqrt{2\pi}\,bv}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega bx/\gamma v}}{(1+x^2)^{3/2}}dx \tag{13.28}$$

我们从傅里叶变换表① 中查出这积分是和与 1 同数量级的修正贝塞耳函数成正比[见(3.101)]，即

$$E_2(\omega)=\frac{ze}{bv}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left[\frac{\omega b}{\gamma v}K_1\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right)\right] \tag{13.29}$$

同样地，由(11.152)给出的 $E_1(t)$ 具有下列傅里叶变换：

$$E_1(\omega)=-i\frac{ze}{\gamma vb}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left[\frac{\omega b}{\gamma v}K_0\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right)\right] \tag{13.30}$$

现在，可以直接算出对谐振束缚电荷的能量转移(13.26)，利用(13.29)和(13.30)，可得

$$\Delta E(b)=\frac{2z^2e^4}{mv^2}\left(\frac{1}{b^2}\right)\left[\xi^2K_1^2(\xi)+\frac{1}{\gamma^2}\xi^2K_0^2(\xi)\right] \tag{13.31}$$

式中

$$\xi=\frac{\omega_0 b}{\gamma v} \tag{13.32}$$

和方括号相乘的因子正好是近似结果(13.2)。当 ξ 很小和很大时，极限形式(3.103)和(3.104)表明，在(13.31)里的方括号具有如下极限值：

$$[\quad]=\begin{cases}1, & \text{当 } \xi\ll 1 \text{ 时}\\ \left(1+\dfrac{1}{\gamma^2}\right)\dfrac{\pi}{2}\xi e^{-2\xi}, & \text{当 } \xi\gg 1 \text{ 时}\end{cases} \tag{13.33}$$

因为 $\xi=b/b_{\max}$，所以我们看到，当 $b\ll b_{\max}$ 时，能量转移基本上等于近似结果 (13.2)，而当 $b\gtrsim b_{\max}$ 时，能量转移按指数律下降为

① 例如，参看 Magnus and Oberhettinger，第八章；或 Bateman Manuscript Project, *Tables of Integral Transforms*，第一卷，第一章至第三章。

零. 这就证明了上节对上限b_{max}所做的定性讨论是合理的.

13.3 经典的和量子力学的能量损失公式

对一个谐振束缚电荷的能量转移(13.31)可以用来计算一个快速重粒子通过物质时在每单位长度上的经典能量损失. 我们假定每单位体积内有N个原子, 每个原子有Z个电子. 我们可以把Z个电子分成许多组, 并用指标j来标明, 第j组有f_j个具有相同的谐振束缚频率ω_j的电子. 数f_j叫做第j振子的振子强度. 振子强度显然满足求和法则: $\sum_j f_j = Z$. 我们把推导(13.11)和(13.12)的论点略加推广, 就得出能量损失:

$$\frac{dE}{dx} = 2\pi N \sum_j f_j \int_{b_{min}}^{\infty} \Delta E_j(b)\, b\, db \tag{13.34}$$

在这里$\Delta E_j(b)$由(13.31)给出, 这时式中$\xi = \omega_j b/\gamma v$, 并且所规定的下限$b_{min}$和(13.7)一致. 因为当$b$很大时, (13.31)很快地降为零, 所以不需要上限. 我们可以求出修正贝塞耳函数的积分的闭合形式, 于是, 得到

$$\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi N z^2 e^4}{mv^2} \sum_j f_j \left[\xi_{min} K_1(\xi_{min}) K_0(\xi_{min}) - \frac{v^2}{2c^2}\xi_{min}^2 (K_1^2(\xi_{min}) - K_0^2(\xi_{min}))\right] \tag{13.35}$$

式中$\xi_{min} = \omega_j b_{min}/\gamma v$. 一般说来, $\xi_{min} \ll 1$. 这意味着, 我们可以用极限形式(3.103)来简化(13.35). 最后求出的经典能量损失的表式是

$$\frac{dE_c}{dx} = 4\pi N Z \frac{z^2 e^4}{mv^2}\left[\ln B_c - \frac{v^2}{2c^2}\right] \tag{13.36}$$

式中对数的宗量是

$$B_c=\frac{1.123\gamma v}{\langle\omega\rangle b_{\min}}=\frac{1.123\gamma^2 mv^3}{ze^2\langle\omega\rangle} \tag{13.37}$$

出现在 B_c 中的平均频率$\langle\omega\rangle$是由

$$Z\ln\langle\omega\rangle=\sum_j f_j\ln\omega_j \tag{13.38}$$

所定义的几何平均值. (13.36)-(13.38)就是玻尔在他的关于能量损失的经典性论文 (1915 年) 中所得到的结果. 我们的近似式(13.13)在一切主要方面和(13.36)相符合, 因为, 即使速度很高, 附加的 $-v^2/2c^2$ 也只是一个很小的修正项.

对于相当慢的 α 粒子和重原子核来说, 玻尔公式(13.36)能很好地描写能量损失. 可是对于电子、介子、质子、甚至快 α 粒子来说, 由玻尔公式估计出的能量损失就过多了. 原因在于: 对于轻粒子来说, 量子力学的修正要使经典结果失效. 重要的量子效应有: (1) 可能的能量转移的不连续性, (2) 由粒子的波动性和测不准原理所带来的限制.

我们可用计算经典的能量转移(13.2) 在 $b\simeq b_{\max}$ 时的值来说明能量转移的不连续性问题. 这个值大约是最小的能量转移, 它在能量损失过程中是很重要的. 为简单起见, 我们假定只有一种束缚频率 ω_0, 于是得到,

$$\Delta E(b_{\max})\simeq\frac{1}{\gamma^2}z^2\left(\frac{v_0}{v}\right)^4\hbar\omega_0\left(\frac{\hbar\omega_0}{I_H}\right) \tag{13.39}$$

式中 $v_0=c/137$ 是氢的基态电子的轨道速度, $I_H=me^4/2\hbar^2=13.6$ 电子伏特, 这是氢的电离电势. 因为 $\hbar\omega_0$ 和原子的电离电势同数量级, 即和 I_H 同数量级, 所以我们看到, 对于快速($v\gg v_0$)粒子来说, 经典的能量转移(13.39)比电离电势小很多, 甚至比原子的最小激发能也小很多. 可是, 我们知道, 能量必然以一定的量子性跳变来转移. 像 (13.39) 那么少的能量根本不可能被原子吸收. 我们也可以说, 唯有在我们的经典公式(13.2)所给出的能量转移比

典型的原子激发能大得多时，我们才可以认为这经典公式是正确的．这样就能给碰撞参数定出一个截然不同的上限．幸好，只要我们重新说明这公式的含义，则经典的结果在统计意义下还可以应用．量子性的研究表明，关于在每次碰撞中都有少量能量转移的经典结论是不正确的．可是，如果我们考虑大量碰撞，我们就会发现，就平均效果来说是有少量的能量转移．不过能量转移不是发生在每次碰撞中．在大多数碰撞中都没有能量转移．但是在少数几次碰撞中却发生了相当可观的激发，因此对许多碰撞平均后就得出一个小的平均值．在这种统计意义下，不连续的能量转移的量子机理就跟连续的任意数量的能量转移的经典过程调和起来了．根据振子强度 f_j 和谐振频率 ω_j 的量子力学定义而求得的能量转移，在具体数字上跟经典统计平均值符合（但跟个别值却不符）．

另一个重要的量子修正来自粒子的波动性．测不准原理给经典轨道概念规定了有效应用范围．倘使我们试造一个波包，以给出经典轨道的近似意义，我们就知道粒子运动路线只能确定到一个测不准范围 $\Delta x \gtrsim \hbar/p$．当碰撞参数 b 比这测不准范围小时，经典概念就失效了．因为在某种意义上说粒子的波动性含有粒子在大约为 Δx 的距离内弥散开来的意思，所以我们预料，在 $b<\Delta x$ 时，与正确的量子力学的能量损失相对应的能量转移远小于(13.2)所给出的值．所以，$\Delta x \sim \hbar/p$ 就是和最小碰撞参数(13.6)相类似的量子力学最小碰撞参数．当两个粒子碰撞时，每个粒子都有波动性．在给定的相对速度下，位置的测不准性决定于两粒子中较轻的一个．对于重的与电子碰撞的入射粒子来说，在入射粒子所静止的坐标系（几乎就是 cm 系）内，电子的动量是 $p'=\gamma mv$，式中 m 是电子的质量．所以量子力学的最小碰撞参数是

$$b_{\min}^{(q)}=\frac{\hbar}{\gamma mv} \tag{13.40}$$

对于电子入射在电子上的情形来说，我们必须加倍小心，并考虑在cm系中质量相等时的动量．于是，我们得到电子的最小碰撞参数为

$$[b_{\min}^{(q)}]_{电子}=\frac{\hbar}{mc}\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} \tag{13.41}$$

在一个给定的情况中，必须用两个最小碰撞参数（13.6）和(13.40)中较大的一个来定dE/dx中对数的宗量B(13.14)．$b_{\min}$的经典值和量子值之比是

$$\eta=\frac{ze^2}{\hbar v} \tag{13.42}$$

如果$\eta>1$，就必须用经典的玻尔公式．我们看到，带电多的慢入射粒子的情形就是如此，并和观测结果一致．如果$\eta<1$，量子的最小碰撞参数就大于经典的最小碰撞参数．这时，在能量损失公式里就会出现量子修正项．在(13.13)里的对数的宗量就变成

$$B_q=\frac{b_{\max}}{b_{\min}^{(q)}}=\eta B=\frac{\gamma^2mv^2}{\hbar\langle\omega\rangle} \tag{13.43}$$

在对数里用量子力学量B_q(13.43)的方程(13.13)乃是贝特（Bethe)的量子理论结果(1930年）的一个很好近似．包含切近碰撞效应的贝特公式是

$$\frac{dE_q}{dx}=4\pi NZ\frac{z^2e^4}{mv^2}\left[\ln\left(\frac{2\gamma^2mv^2}{\hbar\langle\omega\rangle}\right)-\frac{v^2}{c^2}\right] \tag{13.44}$$

这个式子，除了微小修正项$-v^2/c^2$和对数宗量里的因子2之外，都和我们的近似式相同．

在电子的情形中，包含在(13.41)里的量子效应给对数带来一个修正的量子力学宗量

$$B_{电子}\simeq(\gamma-1)\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\frac{mc^2}{\hbar\langle\omega\rangle}\to\frac{\gamma^{3/2}mc^2}{\sqrt{2}\,\hbar\langle\omega\rangle} \tag{13.45}$$

式中的后一表式在高能情况中有效．虽然电子还有其他的量子效

应，诸如自旋效应和交换效应，但最主要的修正都已包括在(13.45)之中.

图 13.4 表示经典的和量子力学的能量损失公式的普遍性质. 在低能情况下，能量基本上按 v^{-2} 变化，因为对数变化很慢. 但在高能情况下，$v\to c$，能量变化率又上升了，在 $\gamma\gg1$ 时，像 $\ln\gamma$ 一样变化. 对于 $\eta<1$ 的所有快速粒子来说，只要能量不太高，贝特的公式就和实验符合得很好(参看下一节).

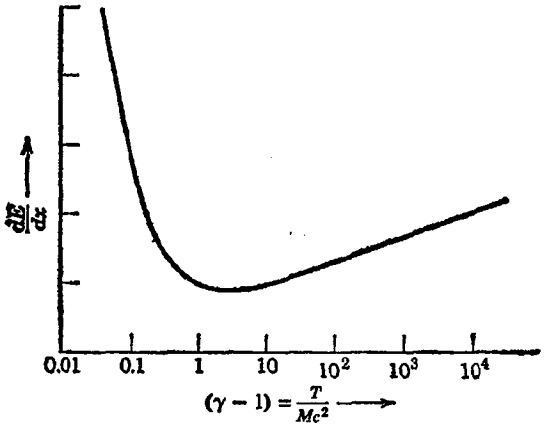


图 13.4 能量损失和动能的函数关系.

值得注意的是：出现在 B_c(13.37)和B_t(13.43) 中的 γ 平方的物理来源. 其中一个 γ 是由于在正碰撞中所能转移的最大能量(13.5)增加而出现的，使得(13.6)或(13.40)中的 $b_{\min}\propto\gamma^{-1}$. 另一个 γ 的出现是由于一个快速粒子的电磁场 (11.152) 的形状发生了相对论性的改变，以致碰撞时间(11.153)减小，而 $b_{\max}$(13.9)增大. 在相对论性粒子的情况下电磁场有效地转移能量的距离大于非相对论性粒子的情况.

有时，我们需要知道由于多次碰撞所造成的每单位距离上的能量损失，在这多次碰撞中的每次碰撞所转移的能量不超过某一

定能量 ϵ. 例如，能量大约在 1 万电子伏特以上的碰出电子在照相乳胶里的射程大于溴化银晶粒的平均线度. 因此，耗散在使溴化银晶粒变黑的能量相当于能量转移小于 1 万电子伏特的碰撞. 我们从玻尔公式 (13.35) 可以求得所要的经典能量损失公式. 这时(13.35)中的最小碰撞参数 $b_{\min}(\epsilon)$要这样选择，即使 (13.2)等于 ϵ. 于是，

$$b_{\min}(\epsilon)=\frac{2ze^2}{v(2m\epsilon)^{1/2}}$$

由此可得出一个形式和(13.36)相同的公式，但它的对数的宗量是

$$B_c(\epsilon)=\frac{1.123\gamma v^2(2m\epsilon)^{1/2}}{2ze^2\langle\omega\rangle}$$

因为可以用下列代换[见(13.43)]

$$B_q=\eta B_c=\frac{ze^2}{\hbar v}B_c$$

从经典的能量损失公式求出量子力学的能量损失公式，所以我们料想，由于能量转移少于 ϵ 的多次碰撞所造成的每单位距离内的能量损失的量子力学公式是

$$\frac{dE_q}{dx}(\epsilon)=4\pi NZ\frac{z^2e^4}{mv^2}\left[\ln B_q(\epsilon)-\frac{v^2}{2c^2}\right] \tag{13.46}$$

式中

$$B_q(\epsilon)=\lambda\frac{\gamma v(2m\epsilon)^{1/2}}{\hbar\langle\omega\rangle} \tag{13.47}$$

常数 λ 是和 1 同数量级的数值因子，要求出这个数值因子，非用详细量子力学计算不可. 贝特的计算(1930 年)给出 $\lambda=1$. 量子力学的 $B_q(\epsilon)$可以写成

$$B_q(\epsilon)=\frac{b_{\max}}{b_{\min}^{(q)}(\epsilon)} \tag{13.48}$$

式中 $b_{\max}$ 由(13.9)给出，而最小碰撞参数是

$$b_{\min}^{(q)}(\epsilon)\simeq\frac{\hbar}{\Delta p}\simeq\frac{\hbar}{(2m\epsilon)^{1/2}} \tag{13.49}$$

这个公式的含义是：经典轨道的不确定程度至少要和 (13.49) 一样，才能使横向动量的测不准度 Δp 小于碰撞中的动量转移．否则，我们就不能肯定在碰撞中的确发生了小于 ϵ 的能量转移．因此，(13.49)就自然地构成了在这种情况中经典轨道图象的量子力学下限．

迄今求得的 dE/dx 表式表示一个粒子通过物质时每单位距离上的平均能量损失．因为每单位距离上的碰撞次数是有限的(即使这数目很大)，而且各次碰撞可能引起的能量损失谱是很宽的，所以将会有围绕平均值的涨落．这些涨落，使得一个粒子通过一定厚度物质时，粒子的能量和所在位置发生离散．如果碰撞次数足够大，而能量损失不太大，则粒子的终能量将围绕平均值作高斯型分布．高斯分布的宽度可以估计如下：与(13.11)相仿，我们定义每单位距离上能量损失的均方值为

$$\frac{dE^2}{dx}=2\pi NZ\int_{b_{\min}}^{b_{\max}}[\Delta E(b)]^2bdb$$

其中 $\Delta E(b)$ 由(13.2)给出．倘若 $b_{\min}\ll b_{\max}$，上式就变为

$$\frac{dE^2}{dx}=4\pi NZ\frac{z^2e^4}{mv^2}\left[\gamma^2mv^2\left(1-\frac{\beta^2}{2}\right)\right] \tag{13.50}$$

我们已经加上了 $-\beta^2/2$ 项，以资对上式进行相对论性修正．对 dE^2/dx 的最主要的贡献来自切近碰撞．对切近碰撞来说，牵涉到电子在入射粒子的静止参照系中的大辐度偏转，因而有一与自旋有关的相对论性修正项，该项使结果变成上述形式．

当初能量为 E_0 的一个粒子穿过厚度为 x 的吸收体，并且以平均能量 $\bar{E}$ 出现时，可以证明(例如参看 *Bohr* 书 2.3 节)：能量的均方偏差为

$$\Omega^2=x\frac{dE^2}{dx} \tag{13.51}$$

上式假定了$(E_0-\bar{E})/E_0$很小，以致在$E=E_0$处计算(13.50)就够了．这时，能量分布近似地为

$$P(E_0,E,x)\simeq\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\Omega}e^{-(E-\bar{E})^2/2\Omega^2} \tag{13.52}$$

只要$\Omega\ll\bar{E}$而且$\Omega\ll(E_0-\bar{E})$，这个结果就成立，而且当$\Omega\gg\Delta E_{max}\simeq 2\gamma^2mv^2$时，这个结果也成立．对真正的相对论性粒子来说，最后一个条件总是不存在的．这时，能量的分布不是高斯型的，而是由朗道曲线描写的．有关更详细的内容，有兴趣的读者可以参看本章末援引的参考书．

13.4 在碰撞能量损失中的密度效应

对于不太相对论性的粒子来说，当所有各种粒子通过各类媒质时所观察到的能量损失都是由(13.44)[或由(13.36)，如果$\eta>1$]准确地给出．但是，对于极端相对论性粒子来说，所观察到的能量损失就小于由(13.44)所算出的值，特别是对于稠密的物质．依据(dE/dx)的图13.4，所观察到的能量损失达到最小值之后往上增加的斜率大约只有理论曲线的斜率的一半，这种情形相当于(13.44)的对数宗量里的γ只是一次方，而不是两次方．根据晶粒密度测出来的在照相乳胶里的能量损失在达到最小值后就增加得很少，从而形成一个平坦的坡度，一直延伸到已知的最高能量．这种情况相当于γ又减少了一次方，这一次减少的是$B_q(\epsilon)$(13.47)里的γ．

这种能量损失的降低，叫做密度效应，最先是费密从理论上给予说明的(1940年)．在前面讨论里我们已在暗中作了这样假设，即对稠密物质是无效的．我们已假设这样处理是合适的：即计算

入射粒子的场对各个原子中的各个电子的效应，然后用不相干性迭加方法，将转移给所有原子(其碰撞参数在$b_{\min}<b<b_{\max}$的范围)中所有电子的能量相加起来. 如今 $b_{\max}$ 比原子线度大得多，特别是当 γ 很大时. 因此，在稠密媒质中，如果 b 和 $b_{\max}$ 差不多，则在入射粒子的轨道和我们所考虑的原子之间存在许多原子. 这些原子本身受到快速粒子场的影响之后，就要在所考虑的原子的位置上产生干扰场，从而改变这原子对快速粒子场的反应. 换句话说，在稠密媒质中，材料的电介质极化使粒子的场从它们在自由空间里的值变成表征电介质中宏观场的值. 计算在远距离碰撞中的能量转移时，必须考虑到这种由于媒质极化而对场所作的修正. 在切近碰撞中，入射粒子每次只跟一个原子发生作用，这时可以用没有极化效应的自由粒子的场来计算. 区分切近碰撞和远距离碰撞的碰撞参数是和原子线度同数量级的. 由于求和时涉及两个对数的合并，所以 b 的分界值不必规定得很准确.

我们要确定在远距离碰撞($b\geq a$)中的能量损失，就假定媒质中的场可以用宏观介电常数为 $\epsilon(\omega)$ 的连续区近似法来计算. 如果 a 和原子线度同数量级，那末这种近似法对于最近的远距离碰撞是不适用的，但对绝大多数碰撞都有效.

关于以恒定速度快速运动的入射粒子在媒质中产生电场的问题，用傅里叶变换求解最容易. 如果势 $A_\mu(x)$ 和源密度 $J_\mu(x)$ 是按下列一般法则在空间和时间中变换：

$$F(\mathbf{x},t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int d^3k\int d\omega F(\mathbf{k},\omega)\,e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t)} \tag{13.53}$$

则变换后的波动方程为

$$\left.\begin{aligned}\left[k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(\omega)\right]\Phi(\mathbf{k},\omega)&=\frac{4\pi}{\epsilon(\omega)}\rho(\mathbf{k},\omega)\\ \left[k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(\omega)\right]\mathbf{A}(\mathbf{k},\omega)&=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}(\mathbf{k},\omega)\end{aligned}\right\} \tag{13.54}$$

介电常数$\epsilon(\omega)$明显地出现在上式中，乃是由于麦克斯韦方程组中含有D的缘故．我们很容易求得

$$\left.\begin{aligned}\rho(\mathbf{x},t)&=ze\delta(\mathbf{x}-\mathbf{v}t)\\ \mathbf{J}(\mathbf{x},t)&=\mathbf{v}\rho(\mathbf{x},t)\end{aligned}\right\}\quad(13.55)$$

和

的傅里叶变换是

$$\left.\begin{aligned}\rho(\mathbf{k},\omega)&=\frac{ze}{2\pi}\delta(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\\ \mathbf{J}(\mathbf{k},\omega)&=\mathbf{v}\rho(\mathbf{k},\omega)\end{aligned}\right\}\quad(13.56)$$

我们从(13.54)看出势的傅里叶变换是

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\mathbf{k},\omega)&=\frac{2ze}{\epsilon(\omega)}\cdot\frac{\delta(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(\omega)}\\ \mathbf{A}(\mathbf{k},\omega)&=\epsilon(\omega)\frac{\mathbf{v}}{c}\Phi(\mathbf{k},\omega)\end{aligned}\right\}\quad(13.57)$$

和

根据以势表示电磁场的定义，我们求得场的傅里叶变换是

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega)&=i\left[\frac{\omega\epsilon(\omega)}{c}\frac{\mathbf{v}}{c}-\mathbf{k}\right]\Phi(\mathbf{k},\omega)\\ \mathbf{B}(\mathbf{k},\omega)&=i\epsilon(\omega)\mathbf{k}\times\frac{\mathbf{v}}{c}\Phi(\mathbf{k},\omega)\end{aligned}\right\}\quad(13.58)$$

由(13.23)显而易见，在计算能量损失时，我们要用到离粒子（沿x轴运动）路径的垂直距离为b处的电磁场的傅里叶时间变换．于是，所要求的电场是

$$\mathbf{E}(\omega)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\mathbf{E}(\mathbf{k},\omega)e^{ibk_2}\quad(13.59)$$

在这里观测点的坐标为$(0,b,0)$．为了说明$\mathbf{E}(\omega)$的求法，我们来计算$E_1(\omega)$．$E_1(\omega)$是与v平行的E的分量．把(13.57)和(13.58)的显式代入，即得

$$E_1(\omega)=\frac{2ize}{\epsilon(\omega)}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k e^{ibk_2}\left[\frac{\omega\epsilon(\omega)v}{c^2}-k_1\right]$$

$$\frac{\delta(\omega-vk_1)}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(\omega)} \tag{13.60}$$

我们可以立即算出对 dk_1 的积分. 于是,

$$E_1(\omega)=-\frac{2iz_1e\omega}{(2\pi)^{3/2}v^2}\left[\frac{1}{\epsilon(\omega)}-\beta^2\right]\int_{-\infty}^{\infty}dk_2e^{ibk_2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_3}{k_2^2+k_3^2+\lambda^2}$$

式中

$$\lambda^2=\frac{\omega^2}{v^2}-\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(\omega)=\frac{\omega^2}{v^2}[1-\beta^2\epsilon(\omega)] \tag{13.61}$$

对 dk_3 的积分值是 $\pi/(\lambda^2+k_2^2)^{1/2}$, 因此 $E_1(\omega)$ 可以写成

$$E_1(\omega)=-\frac{ize\omega}{\sqrt{2\pi}v^2}\left[\frac{1}{\epsilon(\omega)}-\beta^2\right]\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ibk_2}}{(\lambda^2+k_2^2)^{1/2}}dk_2 \tag{13.62}$$

剩下的积分的结构和(13.28)相同. 其结果是

$$E_1(\omega)=-\frac{ize\omega}{v^2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left[\frac{1}{\epsilon(\omega)}-\beta^2\right]K_0(\lambda b) \tag{13.63}$$

在这里,选择(13.62)的平方根时是使 λ 在第四象限内. 用类似的计算可求出其他场强:

$$\left.\begin{aligned}E_2(\omega)&=\frac{ze}{v}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{\lambda}{\epsilon(\omega)}K_1(\lambda b)\\ B_3(\omega)&=\epsilon(\omega)\beta E_2(\omega)\end{aligned}\right\} \tag{13.64}$$

在 $\epsilon(\omega)\to 1$ 的极限情况下, 容易看出: 场(13.63) 和(13.64)简化成以前的结果(13.30)和(13.29).

为了求出转移给碰撞参数为 b 的原子的能量, 我们只要写下(13.23)的推广式

$$\Delta E(b)=2e\sum_j f_j\mathrm{Re}\int_0^{\infty}i\omega\mathbf{x}_j(\omega)\cdot\mathbf{E}^*(\omega)d\omega$$

就够了, 式中 $\mathbf{x}_j(\omega)$ 是原子中第 j 类电子的振幅. 在这里我们不用 $\mathbf{x}_j(\omega)$ 的表式(13.19)代入, 而宁愿把偶极矩的和用分子极化率来表示, 也就是用介电常数来表示:

$$-e\sum_j f_i \mathbf{x}_j(\omega)=\frac{1}{4\pi N}[\epsilon(\omega)-1]\mathbf{E}(\omega)$$

式中N是每单位体积的原子数. 于是,能量转移可写成

$$\Delta E(b)=\frac{1}{2\pi N}\mathrm{Re}\int_0^\infty -i\omega\epsilon(\omega)\,|\mathbf{E}(\omega)|^2 d\omega \qquad (13.65)$$

在碰撞参数为$b\geqslant a$的碰撞中, 每单位距离上的能量损失显然是

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a}=2\pi N\int_a^\infty \Delta E(b)\,b\,db \qquad (13.66)$$

如果把场(13.63)和(13.64)代入(13.65)和(13.66)中,那末,经过一些运算后,可得

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a}=\frac{2\,(ze)^2}{\pi\quad v^2}\mathrm{Re}\int_0^\infty i\omega\lambda^* a K_1(\lambda^* a)K_0(\lambda a)$$
$$\left(\frac{1}{\epsilon(\omega)}-\beta^2\right)d\omega \qquad (13.67)$$

这公式是费密导出的,式中λ由(13.61)给出. 如果围绕入射粒子路线作一个半径为a的圆柱体, 计算通过这个圆柱体而辐射出去的电磁能,就可以更精致地得到上列结果. 根据能量守恒,辐射出去的能量就是入射粒子在单位时间内的能量损失. 所以

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a}=\frac{1}{v}\frac{dE}{dt}=-\frac{c}{4\pi v}\int_{-\infty}^\infty 2\pi a B_3 E_1 dz$$

在某一时刻对dx的积分相当于在柱体某一点上对所有时间的积分. 利用$dx=v\,dt$,我们得到

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a}=-\frac{ca}{2}\int_{-\infty}^\infty B_3(t)E_1(t)dt$$

可以按标准方法把这式子变成对频率的积分:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a}=-ca\mathrm{Re}\int_0^\infty B_3^*(\omega)E_1(\omega)d\omega \qquad (13.68)$$

将场(13.63)和(13.64)代入,即得费密的结果(13.67).

费密公式(13.67)和我们前面求出的能量损失表式，例如(13.35)，很不相像．但在极化效应不重要的情况下，费密公式却得出和以前一样的结果．例如，对于非相对论性粒子($\beta \ll 1$)来说，从(13.61)可知，$\lambda \simeq \omega/v$，并和$\epsilon(\omega)$无关．这时，在(13.67)中修正贝塞耳函数是实函数．只有$1/\epsilon(\omega)$的虚部对积分才有贡献．如果我们略去4.5节的对原子内场的极化强度修正，则介电常数可以写成

$$\epsilon(\omega) \simeq 1+\frac{4\pi N e^2}{m}\sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2-\omega^2-i\omega\Gamma_j} \tag{13.69}$$

在这里我们已经用了偶极矩表式(13.19)．假定第二项很小，我们很容易算出$1/\epsilon(\omega)$的虚部，并将它代入(13.67)．然后用(13.24)-(13.26)中所用的近似法，就可以求出对$d\omega$的积分，并得出非相对论性公式(13.35)．如果忽略λ跟$\omega/\gamma v$的偏差，但不再作其他近似处理，则由(13.67)正好得出玻尔的结果(13.35)．

密度效应显然是由于修正贝塞耳函数中出现了复宗量而引起的．复宗量的出现相当于在(13.61)中考虑了$\epsilon(\omega)$．因为在那里的$(\epsilon\omega)$是和β^2相乘的，所以，密度效应显然只在高能情况下才确实重要．应用像(13.69)这样的$\epsilon(\omega)$显式进行能量的详细计算是相当复杂的，而且没有什么特别的好处．所以我们将满足于研究极端相对论性的极限情况($\beta \simeq 1$)．此外，因为在对$d\omega$的积分中，重要的频率是光频，而且半径a与原子线度同数量级，所以$|\lambda_a| \sim (\omega a/c) \ll 1$．因此，我们可以把贝塞耳函数近似地取为它们的小宗量的极限(3.103)．于是，在相对论性的极限情况下，费密公式(13.67)就成为

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a} \simeq \frac{2(ze)^2}{\pi c^2}\mathrm{Re}\int_0^\infty i\omega\left(\frac{1}{\epsilon(\omega)}-1\right)\left\{\ln\left(\frac{(1.123c)}{\omega a}\right)-\frac{1}{2}\ln[1-\epsilon(\omega)]\right\}d\omega \tag{13.70}$$

在这里值得指出：第二个对数的宗量事实上是 $[1-\beta^2\epsilon(\omega)]$. 在 $\epsilon=1$ 的极限情形下，这个对数项使合并后的对数中出现一个 γ 因子，这和旧结果(13.36)相对应. 只要 $\epsilon(\omega)\neq 1$，我们可以把这个因子写成$[1-\epsilon(\omega)]$，因而从对数中除去 γ 的一次方，其结果和实验一致.

用科希定理，把对正实数的 ω 的积分变成对正虚数的 ω 的积分并减去对无穷远处的四分之一圆的积分，就可以很容易地算出(13.70)中的积分，积分中的 $\epsilon(\omega)$ 由(13.69)给出. 沿虚轴的积分没有贡献. 只要假定 (13.69)中的 Γ_j 为常数，那末对四分之一圆的积分结果可以写成下列简单形式：

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a}=\frac{(ze)^2\omega_p^2}{c^2}\ln\left(\frac{1.123c}{a\omega_p}\right) \tag{13.71}$$

式中 ω_p 是电子等离子体的频率.

$$\omega_p^2=\frac{4\pi NZe^2}{m} \tag{13.72}$$

根据(13.36)，相应的没有密度效应的相对论性表式是

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{b>a}=\frac{(ze)^2\omega_p^2}{c^2}\left[\ln\left(\frac{1.123\gamma c}{a\langle\omega\rangle}\right)-\frac{1}{2}\right] \tag{13.73}$$

我们看到，密度效应使能量损失的渐近表式简单化了，它不再通过 $\langle\omega\rangle$(13.38)而依赖于原子的详细结构，它只通过 ω_p 而依赖于每单位体积的电子数. 两种原子结构很不相同的物质，只要它们的密度恰使它们所含的电子密度相同，就会对极端相对论性粒子造成同样的能量损失.

因为已经有很多根据贝特公式 (13.44) 计算出来的能量损失曲线，所以列出因密度效应而引起的能量损失的减少往往是方便的. 能量损失的减少正是(13.73)和(13.71)之差：

$$\lim_{\beta\to 1}\Delta\left(\frac{dE}{dx}\right)=\frac{(ze)^2\omega_p^2}{c^2}\left[\ln\left(\frac{\gamma\omega_p}{\langle\omega\rangle}\right)-\frac{1}{2}\right] \tag{13.74}$$

对照相乳胶来说，有关的能量损失由(13.46)和(13.47)给出，式中的 $\epsilon \simeq 1$ 万电子伏特．考虑了密度修正以后，高能情形的能量损失就变为常量，其值为

$$\frac{dE(\epsilon)}{dx} \to \frac{(ze)^2\omega_p^2}{2c^2}\ln\left(\frac{2mc^2\epsilon}{\hbar^2\omega_p^2}\right) \tag{13.75}$$

对溴化银来说，$\hbar\omega_p \simeq 48$ 电子伏特．这时，对单个带电粒子来说，(13.75)除以密度之后所得的值近似等于 1.02 兆电子伏特·厘米^2/克．这个能量损失和实验结果很符合，它相当于从最小值往上增加不到百分之十．图 13.5 表示一种典型物质的总能量损失以及在 1 万电子伏特以下的能量转移所造成的能量损失．虚线是未加密度效应修正的总能量损失的贝特曲线．

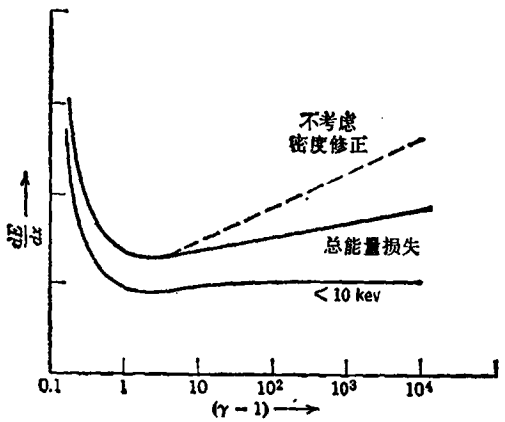


图 13.5　计及密度效应时的能量损失．虚线表示未加密度修正的总能量损失．实线是考虑了密度效应的．上面一条曲线表示总能量损失，下面一条曲线表示由许多在 1 万电子伏特以下的单个能量转移所造成的能量损失．

13.5　契仑柯夫辐射

能量损失的密度效应是与媒质在一个产生契仑柯夫辐射的相

对论性粒子通过时所引起的相干反应密切相关的. 实际上, 它们是同一现象在不同极限情况下的表现. 表式 (13.67), 或更确切地说, 表式(13.68)表示从粒子散逸到离开粒子路径的距离大于$b=a$的那些区域内的能量. 通过改变a, 我们可以考查能量是如何贮存在整个媒质中的. 在(13.70)中, 我们已经把a当作是原子的线度, 并假定$|\lambda a|\ll 1$. 现在我们考虑相反的情形. 如果$|\lambda a|\gg 1$, 则修正贝塞耳函数可以用它们的渐近形式来近似代替. 这时, 场(13.63)和(13.64)变为

$$\left.\begin{aligned} E_1(\omega,b)&\to i\frac{ze\omega}{c^2}\left[1-\frac{1}{\beta^2\epsilon(\omega)}\right]\frac{e^{-\lambda b}}{\sqrt{\lambda b}}\\ E_2(\omega,b)&\to\frac{ze}{v\epsilon(\omega)}\sqrt{\frac{\lambda}{b}}e^{-\lambda b}\\ B_3(\omega,b)&\to\beta\epsilon(\omega)E_2(\omega,b)\end{aligned}\right\}\tag{13.76}$$

在这种极限情形下, (13.68)中的被积函数是

$$(-caB_3^*E_1)\to\frac{z^2e^2}{c^2}\left(-i\sqrt{\frac{\lambda^*}{\lambda}}\right)\omega\left[1-\frac{1}{\beta^2\epsilon(\omega)}\right]e^{-(\lambda+\lambda^*)a}\tag{13.77}$$

这个表式的实部对频率取积分, 就给出远离粒子路径处贮存的能量. 如果λ的实部为正(一般地说都是如此的), 那末(13.77)中的指数因子就会使表式在距离很大时很快地趋于零. 全部能量贮存在路径的附近. 只当λ为纯虚数时, 这种情况才不成立. 这时, 指数等于1; 表式与a无关; 一些能量作为辐射而散逸到无穷远处. 由(13.61)可以看出, 若$\epsilon(\omega)$是实数(无吸收), 且$\beta^2\epsilon(\omega)>1$, 则$\lambda$可以是纯虚数. 实际上, 适当的吸收是可以允许的, 然而, 为简单起见, 我们今后将假定$\epsilon(\omega)$基本上是实数. 我们可以把条件$\beta^2\epsilon(\omega)>1$写成下列比较明显的形式:

$$v>\frac{c}{\sqrt{\epsilon(\omega)}}\tag{13.78}$$

上式表明: 为了发射频率为ω的契仑柯夫辐射, 粒子的速度必须

大于频率为ω的电磁场的相速度.

假定当$\omega>0$时$\epsilon(\omega)$具有一个无穷小的正的虚部，我们来研究当$\beta^2\epsilon$从小于1变到大于1时λ的位相，可以证明：

$$\lambda=-i|\lambda|，\quad 当\ \beta^2\epsilon>1\ 时$$

上式意味着，$(\lambda^*/\lambda)^{1/2}=i$，(13.77)是实数，且与$a$无关. 于是，方程(13.68)表示沿粒子路径、每单位距离上按契仑柯夫辐射方式放出的能量为

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{辐射}=\frac{(ze)^2}{c^2}\int_{\epsilon(\omega)>(1/\beta^2)}\omega\left(1-\frac{1}{\beta^2\epsilon(\omega)}\right)d\omega \qquad (13.79)$$

显然，被积函数给出对频率的微分谱. 这就是夫兰克-塔姆导出的结果，最早发表于1937年，用来解释契仑柯夫在1934年观察到的这种辐射. 显然，契仑柯夫辐射不是按频率均匀地发射的. 这种辐射往往是在稍低于反常色散区域的一些频带内（在这些频带内，$\epsilon(\omega)>\beta^{-2}$）发射的，如图13.6所示. 当然，如果$\beta\simeq1$，那末，$\epsilon(\omega)>\beta^{-2}$的那些区域也许是相当宽的.

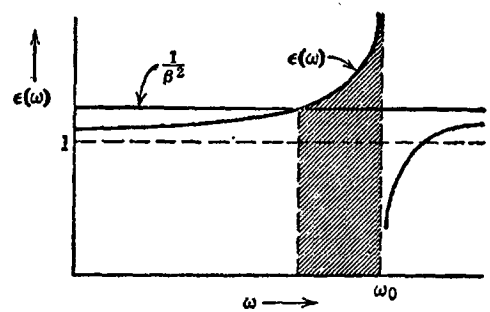


图13.6 契仑柯夫带. 契仑柯夫辐射只是在$\epsilon(\omega)>\beta^{-2}$的画荫影的频率范围内发射的.

契仑柯夫辐射的另一特性是它的辐射角. 在离开路径的距离很大的地方，场变成横向辐射场. 传播方向由$\mathbf{E}\times\mathbf{B}$给出. 犹如图13.7所示，相对于粒子速度的契仑柯夫辐射的发射角θ_c由下式

给出：

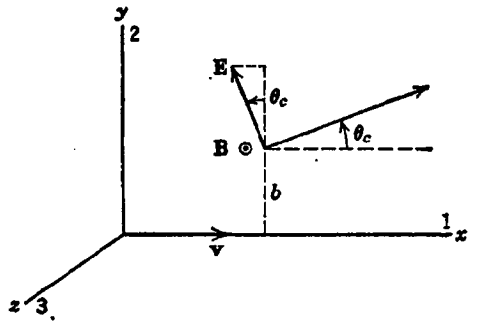


图 13.7

$$\mathrm{tg}\theta_c=-\frac{E_1}{E_2} \tag{13.80}$$

对远场(13.76)来说，我们求得

$$\cos\theta_c=\frac{1}{\beta\sqrt{\epsilon(\omega)}} \tag{13.81}$$

现在我们可以把判据 $\beta^2\epsilon>1$ 改写为下述要求：发射角 θ_c 是一个有物理意义的角，其余弦小于 1．顺便我们根据图 13.7 指出，契仑柯夫辐射是在包含观察方向和粒子路径的平面内完全线偏振的．

用“冲击”波阵面可以定性解释发射角 θ_c，这种“冲击”波阵面类似于水中船首冲击波阵面或超声速飞行伴有的冲击波阵面．图 13.8 中简略画出了两组波阵面，这些波阵面都是从一个以恒速 v 运动的粒子的相继瞬时位置上发出的以速率 $c/\sqrt{\epsilon}$ 运动的相继球面子波．左图假定 v 小于 $c/\sqrt{\epsilon}$，右图假定 v 大于 $c/\sqrt{\epsilon}$．当 $v>c/\sqrt{\epsilon}$ 时，子波相互干涉，以致在粒子后面产生“激震”前沿① 或尾流，很容易看出，“激震”前沿或尾流与粒子运动方向的夹角是 θ_c 的余角．静止观察者看见波阵面沿 θ_c 方向运动．

① 冲击波阵面又叫激震前沿．——译者注

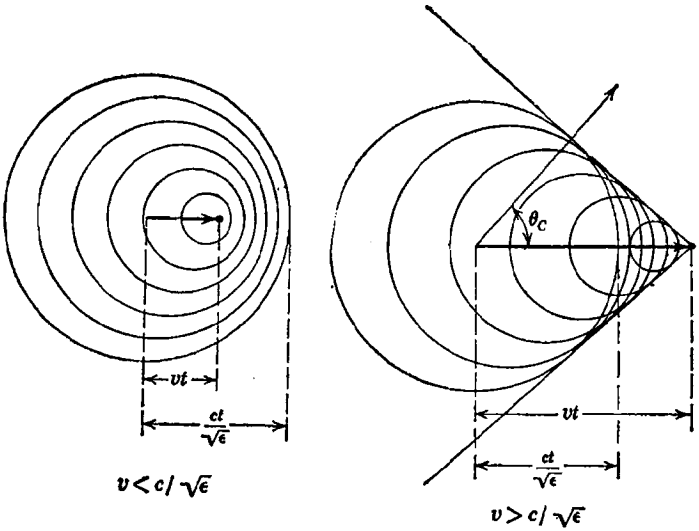


图 13.8　契仑柯夫辐射．一个以小于和大于媒质中光速而运动的粒子所产生的场的球面子波．当 $v>c/\sqrt{\epsilon}$ 时，出现电磁"冲击"波，沿着契仑柯夫角 θ_C 所给定的方向运动．

由(13.57)，利用(13.53)，确定势 $\Phi(\mathbf{x},t)$ 或 $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$，通过考查 $\Phi(\mathbf{x},t)$ 或 $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$，就可以对图 13.8 中的定性特性给出定量的处理．例如，矢势取下列形式：

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=\frac{2ze}{(2\pi)^2}\boldsymbol{\beta}\int d^3k\frac{e^{ik_1(x-vt)}e^{i\mathbf{k}_\perp\cdot\boldsymbol{\rho}}}{k_1^2(1-\beta^2\epsilon)+k_\perp^2}$$

式中 $\epsilon=\epsilon(k_1v)$，而 $\boldsymbol{\rho}$ 和 $\mathbf{k}_\perp$ 为横向分量①．采用一种不现实的、但容易处理的近似，即 ϵ 为一常量，我们可以算得上列积分为有限项形式．在契仑柯夫辐射的情况下($\beta^2\epsilon>1$)，分母在积分路线上有极点．选取 k_1 积分的围道，使得在粒子前面的点($x-vt>0$)上的势等于零，求得结果如下：在契仑柯夫锥内

① 原文为横向坐标．——译者注

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=\boldsymbol{\beta}\frac{2ze}{\sqrt{(x-vt)^2-(\beta^2\epsilon-1)\rho^2}} \tag{13.82}$$

在契仑柯夫锥外 $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ 等于零. 注意:沿着激震前沿,$\mathbf{A}$ 是奇异的,犹如图 13.8 中的子波所启示的. 表式(13.82)只能看作启发性的表式. 介电常数是随 $\omega=k_1v$ 而变化的. 这种函数依赖关系将会消除(13.82)中的数学奇异性.

契仑柯夫辐射的性质可以被利用来测量快速粒子的速度. 如果给定速度的粒子通过已知介电常数 ϵ 的媒质,那末光就以契仑柯夫角(13.81)发射出来. 于是,测量契仑柯夫角就可以确定粒子的速度. 因为媒质的介电常数通常随频率而变化,所以不同颜色的光从稍微不同的角度发射出来. 可以利用窄带滤波器选择微小的频率间隔,从而改进速度测量的精密度. 对极快速的粒子($\beta\lesssim 1$)来说,可以利用气体来提供一个与 1 相差甚微的介电常数,并通过改变气体的压强,使得(ϵ-1)在很宽的范围内可以改变. 利用契仑柯夫辐射而设计的计数装置被广泛应用于高能物理研究中,这种装置可以用作测量速度的仪器,当与动量分析结合起来时,又可以用作质谱分析器,还可用作甄别器以去掉不需要的慢粒子.

13.6 电子等离子体中的能量损失

我们可以仿照处理相对论性粒子的密度效应的方法,来讨论非相对论性粒子通过等离子体时的能量损失. 正如在 10.9 节所讨论过的情形一样,按等离子体的长度尺度分成两个区域. 当尺度远大于德拜屏蔽距离 k_D^{-1} (10.91) 时,等离子体的作用就像一种连续媒质,在该媒质中带电粒子参与诸如等离子体振荡之类的集体运动. 当尺度小于 k_D^{-1} 时,单粒子特性起主要作用,而且粒子之间是通过二体屏蔽势(10.98)而相互作用的. 这意味着,在计算能量损失时,德拜屏蔽距离在这里所起的作用,就跟原子线度 a 在

密度效应的计算中所起的作用一样．在切近碰撞情形中，集体效应可以忽略，而且可以用二体屏蔽势来计算它对能量损失的贡献．我们把这种计算留给读者当作一个练习(习题 13.3)．对于碰撞参数 $bk_D>1$ 的远距离碰撞来说，可以用费密公式(13.67)来计算集体效应，公式中含有一个合适的关于等离子体的介电常数．在远距离碰撞中的能量损失，相当于在媒质中激发等离子体振荡．

对于非相对论性粒子来说，由(13.67)就得出在距离 $b>k_D^{-1}$ 时的能量损失表式：

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{k_Db>1}\simeq\frac{2}{\pi}\frac{(ze)^2}{v^2}\mathrm{Re}\int_0^\infty\frac{i\omega}{\epsilon(\omega)}\left[\frac{\omega}{k_Dv}K_1\left(\frac{\omega}{k_Dv}\right)K_0\left(\frac{\omega}{k_Dv}\right)\right]d\omega \tag{13.83}$$

因为我们知道积分中重要的频率是 $\omega\sim\omega_p$，所以有关的贝塞耳函数宗量是

$$\frac{\omega_p}{k_Dv}=\frac{\langle u^2\rangle^{1/2}}{v} \tag{13.84}$$

对于入射速度 v 比热运动速度小的粒子来说，这个宗量比 1 大得多．由于大宗量的贝塞耳函数按指数律下降，所以在这种粒子激发等离子体振荡时的能量损失可以忽略不计．能量全部损失在近距离的二体碰撞上．如果入射速度和热速率差不多，或比热速率大，那末，粒子就有相当一部分能量损失在激发集体振荡上．显然，这部分振荡能是贮藏在粒子的路径附近，离粒子路径的距离约为 $(v/\langle u^2\rangle^{1/2})k_D^{-1}$ 的范围内．

对于运动速度比热速率快得多的粒子来说，我们可以利用大家熟知的小宗量的修正贝塞耳函数的形式．于是(13.83)变成：

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{k_Db>1}\simeq\frac{2}{\pi}\frac{(ze)^2}{v^2}\int_0^\infty\mathrm{Re}\left(\frac{i\omega}{\epsilon(\omega)}\right)\ln\left(\frac{1.123k_Dv}{\omega}\right)d\omega \tag{13.85}$$

我们将采用简单的介电常数(7.59)，并加上一些阻尼：

$$\epsilon(\omega)=1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2+i\omega\Gamma} \tag{13.86}$$

假定阻尼常数Γ比ω_p小得多. 所需的组合式

$$\mathrm{Re}\left(\frac{i\omega}{\epsilon(\omega)}\right)=\omega_p^2\frac{\omega^2\Gamma}{(\omega^2-\omega_p^2)^2+\omega^2\Gamma^2}$$

具有标准的共振特性, 例如在(13.24)中所看到的. 在$\Gamma\ll\omega_p$的极限情形下,(13.85)中的积分化成如下简单结果:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{k_Db>1}\simeq\frac{(ze)^2}{v^2}\omega_p^2\ln\left(\frac{1.123k_Dv}{\omega_p}\right) \tag{13.87}$$

将上式和习题13.3的结果合并, 就得到粒子通过等离子体时的总能量损失公式:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dx}&=\left(\frac{dE}{dx}\right)_{k_Db<1}+\left(\frac{dE}{dx}\right)_{k_Db>1}\\&\simeq\frac{(ze)^2}{v^2}\omega_p^2\ln\left(\frac{\Lambda v}{\omega_p b_{\min}}\right)\end{aligned} \tag{13.88}$$

式中Λ是数量级为1的一个数, $b_{\min}$由(13.6)和(13.40)的较大者给出. 对数中出现ω_p, 这表明能量损失是以$\hbar\omega_p$为量子而跳变的, 正如(13.44)中的平均频率$\langle\omega\rangle$表征了原子中典型的量子跳变一样. 电子通过金属薄箔时, 其能量损失也呈现这种分立性. 这现象可以用来测定金属的有效等离子体频率①.

13.7 原子对快速粒子的弹性散射

前几节讨论了粒子通过物质时的能量损失. 在这些讨论中, 假定了粒子的轨道是一条直线. 实际上, 这种近似并不严格成立. 如13.1节所讨论的情形一样, 互相碰撞的粒子之间如有动量转移, 就会导致角偏转. 在本章开头的引言里已经指出, 粒子和电子

① 参看H. Raether, *Springer Tracts in Modern Physics*, Vol. 38, G. Hohler主编, Springer-Verlag, Berlin, (1965), 第84页至第157页.

的碰撞决定能量损失，而粒子和原子的碰撞则决定散射．如果略去原子中的电子对核库仑场的屏蔽作用，那末根据(13.3)可知，动量为 $p=\gamma Mv$、电荷为 ze 的粒子，在碰撞参数为 b 的地方通过电荷为 Ze 的重核时 1 将有角偏转

$$\theta\simeq\frac{2zZe}{pvb} \tag{13.89}$$

微分散射截面$d\sigma/d\Omega$(其量纲为每原子每单位立体角的面积)由下式定义：

$$nbdbd\phi=n\frac{d\sigma}{d\Omega}\sin\theta d\theta d\phi \tag{13.90}$$

式中 n 是每单位时间入射在原子每单位面积上的粒子数．(13.90)的左边是每单位时间、在方位角介于 ϕ 和$(\phi+d\phi)$之间、碰撞参数介于 b 与$(b+db)$之间的入射粒子数．右边是每单位时间、在极坐标角(θ,ϕ)处、在立体角元 $d\Omega=\sin\theta d\theta d\phi$ 之内散射出去的粒子数．因为 b 和 θ 有函数关系，所以(13.90)式仅仅表述了粒子数守恒．于是，经典的微分散射截面可以写成

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right| \tag{13.91}$$

因为 db 和 $d\theta$ 通常是异号的，而按定义，散射截面却是正的有限值，所以要加上绝对值符号．如果 b 是 θ 的多值函数，那末在(13.91)中必须把各个不同的贡献都加起来．

利用 b 和 θ 的关系式(13.89)，我们可得每个原子的小角度核碰撞的卢瑟福散射截面，

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\simeq\left(\frac{2zZe^2}{pv}\right)\frac{1}{\theta^4} \tag{13.92}$$

我们要注意，每一原子的 Z 个电子的贡献是一个原子核贡献的 Z 分之一．因此电子可以忽略，但它们的屏蔽作用除外．人们发现，核散射的小角卢瑟福定律(13.92)在量子力学中也成立，它与入射

粒子的自旋性质无关．在大角度的情况下出现自旋效应，但对于非相对论性粒子来说，从(13.4)式推得的经典的卢瑟福散射公式

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{zZe^2}{2Mv^2}\right)^2\operatorname{cosec}^4\frac{\theta}{2} \tag{13.93}$$

在量子力学中也同样成立．

因为大部分散射发生在 $\theta\ll1$ 时，并且即使在 $\theta=\pi/2$，小角度结果(13.92)和卢瑟福公式的相差不到百分之三十，所以，对于所有角度来说，凡无屏蔽的点库仑场描写行之有效的，应用(13.92)都是足够精确的．

在大角度和小角度(相应于小碰撞参数和大碰撞参数)的情况中与点库仑场的近似处理有些出入．在 b 很大的地方，原子中电子的屏蔽效应使电势下降得比 $(1/r)$ 还快．在费密-托马斯模型中，电势可粗略地用下列近似式表示：

$$V(r)\simeq\frac{zZe^2}{r}\exp(-r/a) \tag{13.94}$$

式中原子半径 a 为

$$a\simeq1.4a_0Z^{-1/3} \tag{13.95}$$

长度 $a_0=\hbar^2/me^2$ 是氢的玻尔半径．对于碰撞参数大约等于或大于 a 的情形，势(13.94)的迅速减少将使散射角随着 b 的增加而很快地变为零，比(13.89)所给出的结果还要快．这意味着，散射截面在小角度时增加得很慢，并在 $\theta=0$ 处达到一个有限值，而不是像 θ^{-4} 那样增加着．用截止库仑势作的简单计算表明散射截面具有如下普遍形式：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\simeq\left(\frac{2zZe^2}{pv}\right)^2\frac{1}{(\theta^2+\theta_{\min}^2)^2} \tag{13.96}$$

式中 $\theta_{\min}$ 是截止角．当小于这个最小角 $\theta_{\min}$ 时，散射截面和简单结果(13.92)相差很多；这个最小角可以用经典方法或量子力学方法求得．和能量损失计算中的 $b_{\min}$ 一样，在所求出的两个角度中，要

用较大的一个才正确. 按经典理论,令(13.89)中的 $b=a$, 就可以估算出 $\theta_{\min}$, 结果得到

$$\theta_{\min}^{(c)}\simeq\frac{2zZe^2}{pva} \tag{13.97}$$

按量子力学理论，散射体的有限大小意味着近似的经典轨道必定局限在 $\Delta x<a$ 之内，而入射粒子的横向动量必有一最小的测不准范围 $\Delta p\gtrsim\hbar/a$. 对于动量转移 (13.1) 比 $\hbar/a$ 大得多的那些碰撞来说，经典的卢瑟福公式还可以应用. 但对于较小的动量转移来说，我们料想量子力学的测不准性会使散射截面增加得很慢. 由此得出量子力学的 $\theta_{\min}$ 如下:

$$\theta_{\min}^{(q)}\simeq\frac{\hbar}{pa} \tag{13.98}$$

我们注意到经典的角 $\theta_{\min}$ 和量子力学的角 $\theta_{\min}$之比等于$Zze^2/\hbar v$, 并和 $b_{\min}$ 的经典值与量子值之比 (13.42) 相符. 除了 Z 最大的那些物质以外,快速粒子在一切物质中的$(Zze^2/\hbar v)$都小于 1. 这时 $\theta_{\min}$ 应取量子值(13.98). 令屏蔽半径 a 取(13.95)的值，(13.98)就变成

$$\theta_{\min}^{(q)}\simeq\frac{Z^{1/3}}{192}\left(\frac{mc}{p}\right) \tag{13.99}$$

式中 p 是入射动量($p=\gamma Mv$), m 是电子的质量.

因为原子核有一定的大小，所以在角度相当大时，截面跟(13.92)不同. 对于电子和 μ 介子来说,原子核大小的影响纯粹是电磁效应,但对于 π 介子、质子等粒子来说,还存在着核力所引起的特殊效应. 因为不管什么原因,总的效果是使散射截面低于(13.92)所估计的值,所以我们只考虑电磁效应.原子核的电荷分布,可以这样粗略而近似地看作是在半径为 R 的球内呈均匀体分布，在 R 外则迅速地降为零. 这意味着，核内的静电势的变化规律不是 $1/r$, 而是抛物线的形状,并在 $r=0$ 时有一有限值:

$$V(r)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}\dfrac{zZe^2}{R}\left(1-\dfrac{r^2}{3R^2}\right), & \text{当}\quad r<R\text{ 时}\\ \dfrac{zZe^2}{r}, & \text{当}\quad r>R\text{ 时}\end{cases}\tag{13.100}$$

点电荷库仑场具有这样特点，即它的量子力学截面公式等于经典的卢瑟福公式．所以，对于点状原子核来说，无须把角域分成两个分别对应于碰撞参数大于或小于量子力学碰撞参数$b_{\min}^{(q)}$(13.40)的范围．可是对于有限大小的原子核来说，入射粒子的德布罗意波长要起作用．当我们考虑一个波包入射到具有相对恒定(在$r=R$内)电势 (13.100) 的原子核上时，所得的散射截面跟简单公式 (13.92) 相差很大．这种情形跟第九章讨论的波在球形物体上的衍射十分相似．散射全部局限在大约小于$(\lambda\!\!\!^{-}/R)$的角度内，这里的$\lambda\!\!\!^{-}$是所涉及的波的波长（被2π除）．当角度很大时，来自散射体的不同部分的子波互相干涉，使散射迅速衰减，或造成次极大值和次极小值．因为粒子的波长为$\lambda\!\!\!^{-}=\hbar/p$，所以最大散射角是

$$\theta_{\max}\simeq\frac{\hbar}{pR}\tag{13.101}$$

超过这个角，散射截面就下降得比θ^{-4}律快得多．利用简单的估算值$R\simeq\frac{1}{2}(e^2/mc^2)A^{1/3}=1.4A^{1/3}\times10^{-13}$厘米，可得最大散射的数值，

$$\theta_{\max}\simeq\frac{274}{A^{1/3}}\left(\frac{mc}{p}\right)\tag{13.102}$$

我们注意到，对于所有的Z值和A值，来说，$\theta_{\max}\gg\theta_{\min}$．如果入射的动量如此之小，以致$\theta_{\max}\gtrsim1$，则核的大小对散射没有什么影响．对于铝靶来说，当$p\sim50$兆电子伏特/$c$，即相当于电子、$\mu$介子、质子的动能分别是$\sim50$兆电子伏特、12兆电子伏特和1.3兆电子伏特时，$\theta_{\max}=1$．只有当能量高于这些数值时，核的大小对散射才有很

重要的影响. 在这个动量值下，$\theta_{\min}^{(q)} \sim 10^{-4}$ 弧度.

散射截面与散射角的一般关系如图 13.9 所示. 虚线表示小

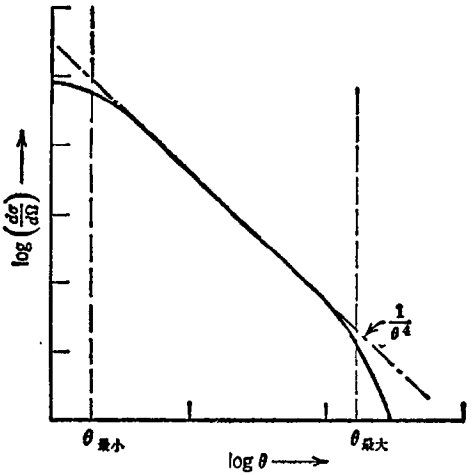


图 13.9 原子散射，其中小角度散射包括了电子屏蔽效应，大角度散射则包括了核的有限大小的效应 .

角度卢瑟福近似(13.92)，实线表示计及屏蔽效应和有限核大小后的散射截面跟散射角的定性关系. 将(13.96) 遍及全部立体角取积分，可得散射总截面:

$$\sigma=\int\frac{d\sigma}{d\Omega}\sin\theta d\theta\, d\phi\simeq 2\pi\left(\frac{2zZe^2}{pv}\right)^2\int_0^\infty\frac{\theta d\theta}{(\theta_{\min}^2+\theta^2)^2} \tag{13.103}$$

由此得出

$$\sigma\simeq\pi\left(\frac{2zZe^2}{pv}\right)^2\frac{1}{\theta_{\min}^2}=\pi a^2\left(\frac{2zZe^2}{\hbar v}\right)^2 \tag{13.104}$$

其中最后一式是利用 $\theta_{\min}^{(q)}$ 的(13.98) 得到的. 这式子表明，在高速度情形下总截面可比经典的几何面积的值 πa^2 小得多.

13.8 多次散射的均方散射角和角分布

即使对于点库仑场来说，卢瑟福散射也局限在很小的角度以

内，并且对于快速粒子来说，θ_{max}远小于 1. 因此小角度散射的几率很大. 一个粒子通过有限厚度的物质时，要经受多次小角度偏转，并且一般以小的角度射出，这个角度乃是大量偏转的累积统计叠加. 粒子的大角度偏转是罕有的，由于这种情况不经常发生，所以一个粒子只能有一次大角度碰撞. 这种情况使我们可以将角域划分为二：一个是角度相当大的区域，在该区域内只有单次散射；一个是角度很小的区域，在该区域内有多次散射或多重散射. 我们分别讨论这两个区域的情况，就可以近似地确定整个角分布. 而所谓复散射的中间区域，应该可以从小角度散射平滑地过渡到大角度散射.

在多次散射区域内，有大量相继的小角度偏转围绕着入射方向对称地分布着，这种区域中重要的量是单次散射的均方角. 它的定义是

$$\langle\theta^2\rangle=\frac{\int\theta^2\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega}{\int\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega} \tag{13.105}$$

利用 13.7 节的近似处理，我们得到

$$\langle\theta^2\rangle=2\theta_{min}^2\ln\left(\frac{\theta_{max}}{\theta_{min}}\right) \tag{13.106}$$

如果用 θ_{min} 的量子值(13.99) 和 θ_{max} 的 (13.102)，则因 $A\simeq 2Z$，(13.106)的数值形式为

$$\langle\theta^2\rangle\simeq 4\theta_{min}^2\ln(204Z^{-1/3}) \tag{13.107}$$

如果核的大小不起重要作用(一般说来，只对电子或其他极低能的粒子才起重要作用)，就应该令(13.106)中的 θ_{max} 等于 1. 于是，(13.107)中对数的宗量就不是$(204Z^{-1/3})$，而是$\left(\frac{192}{Z^{1/3}}\frac{p}{mc}\right)^{1/2}$.

我们往往希望用散射投影角 θ'，这是散射角在某一方便的平

面(例如照相乳胶板或气泡室的平面)上的投影，如图 13.10 所示. 对于小的角度来说，容易证明

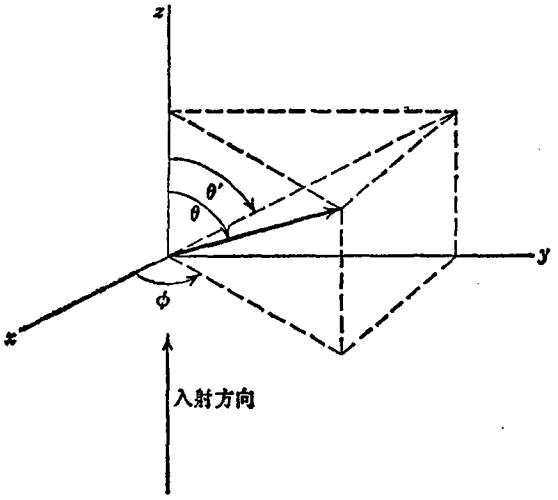


图 13.10

$$\langle\theta'^2\rangle=\frac{1}{2}\langle\theta^2\rangle \tag{13.108}$$

每次碰撞的角偏转都遵守卢瑟福偏公式(13.92)，该公式适当地截止于 $\theta_{\min}$ 和 $\theta_{\max}$. 角偏转（不论是相对于向前方向观察的散射角，还是投影角)的平均值为零，均方角$\langle\theta^2\rangle$由(13.106)给出. 因为相继的碰撞都是独立事件，所以可以用统计学的中心极限定理证明：当这种碰撞的次数 n 很大时，其角分布大致是围绕向前方向的高斯分布，并且均方角$\langle\Theta^2\rangle=n\langle\theta^2\rangle$. 当粒子通过厚度为 t、每单位体积含有N个原子的物质时，发生的碰撞次数为

$$n=N\sigma t\simeq\pi N\left(\frac{2zZe^2}{pv}\right)^2\frac{t}{\theta_{\min}^2} \tag{13.109}$$

这意味着，高斯分布的均方角为

$$\langle\Theta^2\rangle\simeq 2\pi N\left(\frac{2zZe^2}{pv}\right)^2\ln\left(\frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}}\right)t \tag{13.110}$$

或利用$\langle\theta^2\rangle$的表式(13.107),即得

$$\langle\Theta^2\rangle\simeq 4\pi N\left(\frac{2zZe^2}{pv}\right)^2 \ln(204Z^{-1/3})\,t \qquad (13.111)$$

均方角随厚度 t 线性地增大.但是,当厚度适当而使粒子损失的能量不太多时,高斯曲线仍然在很小的向前角内有一个巅值.

散射投影角的多次散射分布是

$$P_{多}(\theta')d\theta'=\frac{1}{\sqrt{\pi\langle\Theta^2\rangle}}\exp\left(-\frac{\theta'^2}{\langle\Theta^2\rangle}\right)d\theta' \qquad (13.112)$$

式中包括了 θ' 的正值和负值.小角度卢瑟福散射公式 (13.92)可用投影角表示:

$$\frac{d\sigma}{d\theta'}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{2zZe^2}{pv}\right)^2\frac{1}{\theta'^3} \qquad (13.113)$$

由此得出投影角的单次散射分布:

$$P_{单}(\theta')d\theta'=Nt\frac{d\sigma}{d\theta'}d\theta'=\frac{\pi}{2}Nt\left(\frac{2zZe^2}{pv}\right)^2\frac{d\theta'}{\theta'^3} \qquad (13.114)$$

这个单次散射分布只在角度比$\langle\Theta^2\rangle^{1/2}$大得多时才有效,所以使高斯分布曲线有一条曳尾.

如果我们用相对投影角

$$\alpha=\frac{\theta'}{\langle\Theta^2\rangle^{1/2}} \qquad (13.115)$$

来表示角度,那末,多次散射和单次散射的分布可以写成

$$\begin{aligned}P_{多}(\alpha)d\alpha&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\alpha^2}d\alpha\\ P_{单}(\alpha)d\alpha&=\frac{1}{8\ln(204Z^{-1/3})}\frac{d\alpha}{\alpha^3}\end{aligned} \qquad (13.116)$$

在这里已用了$\langle\Theta^2\rangle$的表式(13.111).我们注意到,采用这种单位后,多次散射和单次散射的相对数值就跟厚度无关,只跟Z有关。甚至这种对Z的依赖关系也不显著.当 $Z=13$(铝)时,因子 $8\ln(204Z^{-1/3})$的值是 36,当 $Z=82$(铅)时,这因子的值是 31.图 13.11

表示散射分布与α的函数关系. 从多次散射转变为单次散射是发生在$\alpha\simeq 2.5$的附近. 在这一点上高斯曲线的值是其巅值的1/600. 因此, 单次散射分布只给多次散射曲线添了一条很小的曳尾.

这里有两件事情使得实际情况和图13.11所示的简单情况有所不同. 高斯曲线是n非常大的角分布曲线的极限形式. 如果选

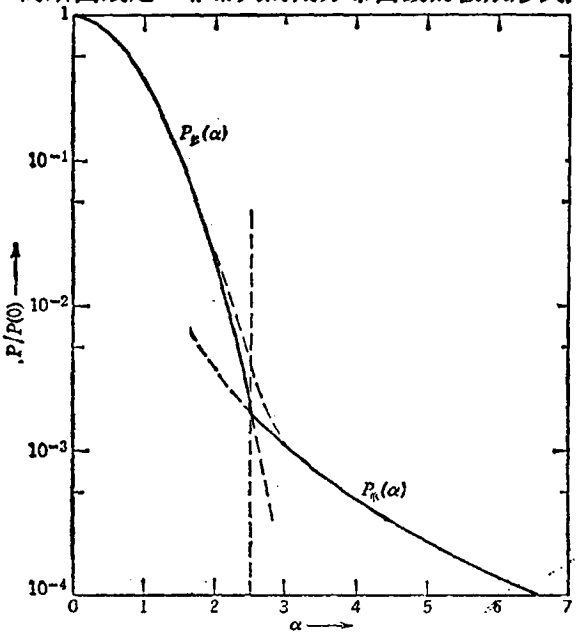


图13.11 投影角的多次散射分布和单次散射分布. 在复散射区域($\alpha\sim 2$-3)内的虚线表示从小角度的多次散射(形状近似高斯曲线)平滑地过渡到大角度的单次散射(与α^{-3}成正比).

取厚度t, 使得n(13.109)不太大(即$n\lesssim 100$), 那末, 在比$\alpha\simeq 2.5$小的角度处, 分布曲线就和单次散射曲线相同, 并且在零角度处的巅峰比高斯曲线略微尖锐些. 另一方面, 如果厚度足够大, 那末均方角$\langle\Theta^2\rangle$就和限制单次散射分布的角宽度的θ_{max}角(13.102)差不多. 当厚度更大时, 多次散射曲线的角度就越过了单次散射区域, 以致于在分布曲线上没有单次散射的曳尾(参看习题13.5).

参考书和推荐读物

尼尔斯·玻尔毕生对粒子穿透物质的问题感到兴趣. 他在 1948 年发表的一篇综述性论文中对整个问题作出透彻的阐述, 文中特别着重说明经典效应和量子力学效应的相互关系. 请参看下列著作:

Bohr.

下列两本书里给出了能量损失数据的数字表、关系曲线图和主要公式:

Rossi, 第二章;

Segre, 由 H. A. Bethe 和 J. Ashkin 写的论文. 也可参看.

U. Fano, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **13**, 1 (1963).

Rossi 用类似于我们的半经典方法论述了能量损失和散射. 他也讨论了能量损失中的涨落问题, 包括朗道-西蒙(Landau-Simon)理论.

下列一篇论文讨论了极端相对论性粒子的能量损失的密度效应, 并以图表形式给出了不同物质的很多数据:

R. M. Sternheimer, 刊载在 *Methods of Experimental Physics.* Vol. 5A, *Nuclear Physics, Part* A, L. C. L. Yuan and C. S. Wu 主编, Academic, New York, (1961), 第 4 页至第 55 页.

契仑柯夫辐射在许多著作中都有讨论. 刚才提到的 Yuan and Wu 的书中叙述了契仑柯夫辐射对粒子探测器的应用, 下面这本书中也有叙述:

D. M. Ritson 主编, *Techniques in High Energy Physics,* Interscience, New York (1961).

但是, 契仑柯夫辐射新近的应用, 读者必须查阅一些期刊, 例如 *Nuclear Instruments and Methods.*

习　题

13.1 有一个电荷为 ze、质量为 M、非相对论性速度为 v 的重粒子和初始时静止不动的电荷为 $-e$、质量为 m 的自由电子碰撞. 除了采用非相对论性运动以及 $M \gg m$ 的近似外, 不作其他近似处理, 试证: 在此库仑碰撞中转移给电子的能量与碰撞参数 b 的函数关系是

$$\Delta E(b) = \frac{2(ze^2)^2}{mv^2} \frac{1}{b^2 + (ze^2/mv^2)^2}$$

13.2 (*a*) 在量子力学的能量损失公式中，令 $\hbar\langle\omega\rangle = 12Z$ 电子伏特. 试对质子、μ 介子计算它们在标准温度压力下的空气、铝、铜和铅中的能量损失率(以兆电子伏特/厘米为单位). 质子和 μ 介子的动能为 10、100、1000 兆电子伏特.

(*b*) 将你的答案化为以兆电子伏特-厘米^2/克为单位的能量损失，比较对不同物质所得的数值. 解释为什么所有以兆电子伏特-厘米^2/克表示的能量损失彼此相差都在因子 2 以内，而以兆电子伏特/厘米表示的值则相差很远.

13.3 试考虑一个快速的但非相对论性的重粒子通过电子等离子体时因切近碰撞而损失的能量. 此重粒子的电荷为 ze. 设电子与入射粒子间的作用是屏蔽库仑相互作用(10.98).

(*a*) 试证：在碰撞参数 b 处，一次碰撞所转移的能量近似等于

$$\Delta E(b) \simeq \frac{2(ze^2)^2}{mv^2} k_D^2 K_1^2(k_D b)$$

式中 m 是电子的质量，v 是入射粒子的速度，k_D 是德拜波数(10.99).

(*b*) 求碰撞参数大于 $b_{\min}$ 时每经过单位距离的能量损失. 假定 $k_D b_{\min} \ll 1$，试证：

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{k_D b \ll 1} \simeq \frac{(ze)^2}{v^2} \omega_p^2 \ln\left(\frac{1}{1.47 k_D b_{\min}}\right)$$

式中 $b_{\min}$ 由(13.6)和(13.40)的较大者给出.

13.4 用讨论多次散射时所用的近似方法，证明入射粒子的横向位移的投影 y(见图 13.10)可用高斯分布近似地描写：

$$P(y)dy = A\exp\left[\frac{-y^2}{2\langle y^2\rangle}\right]dy$$

式中均方位移是 $\langle y^2\rangle = (x^2/6)\langle\Theta^2\rangle$，$x$ 是通过物质的厚度，$\langle\Theta^2\rangle$是均方散射角.

13.5 如果在多次散射分布的“单次散射”曳尾中计入核的有限大小的影响，则有一个临界厚度 x_c，超过这个临界厚度就没有单次散射曳尾.

(*a*) 假设入射粒子是相对论性粒子，试用合理的方法定义 x_c，并计算铝和铅的 x_c 值(以厘米为单位).

(*b*) 计算在这些厚度内所发生的碰撞次数，并断定高斯近似是否有效.

13.6 假定普莱玻璃或留西特（一种有机玻璃——译者注）在可见光区域的折射率为 1.50，试计算电子和质子的可见光契仑柯夫辐射的发射角，将

发射角表为以兆电子伏特为单位的电子和质子动能的函数. 确定 1 兆电子伏特电子、500 兆电子伏特质子、5 千兆电子伏特质子在留西特中每厘米路径上发射的, 波长介于 4000 埃和 6000 埃间的量子有多少个?

13.7 有一个电荷为 ze 的粒子以恒定速率 v 沿 z 轴运动, 在 $t=0$ 时通过 $z=0$ 处. 用介电常数 $\epsilon(\omega)$ 描写该粒子所通过的媒质.

(*a*) 由(13.57)的势 $\Phi(\mathbf{k},\omega)$ 着手, 试证: 频率为 ω 的势与空间坐标 $\mathbf{x}$ 的函数关系由下式给出,

$$\Phi(\omega,\mathbf{x})=\frac{ze}{v\epsilon(\omega)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}K_0\left(\frac{|\omega|\rho}{v}\sqrt{1-\beta^2\epsilon}\right)e^{i\omega z/v}$$

式中 z 和 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ 为观察点的柱坐标.

(*b*) 假定 ϵ 与频率无关, 且 $\beta^2\epsilon<1$, 将(*a*)中的表式对 ω 取傅里叶变换, 得 $\Phi(\mathbf{x},t)$. 试计算电场和磁场, 并将它们与真空场(11.152)加以比较. 证明: 其中真空因子 γ 被 $\Gamma=(1-\beta^2\epsilon)^{-1/2}$ 所替代.

(*c*) 令 $\beta^2\epsilon>1$, 重作(*a*)和(*b*)的计算. 试证: 当 $\omega\gtrless0$ 时, 则有

$$\Phi(\omega,\mathbf{x})=\frac{ze}{v\epsilon(\omega)}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{i\omega z/v}$$
$$\left[-N_0\left(\frac{|\omega|\rho}{v}\sqrt{\beta^2\epsilon-1}\right)\pm iJ_0\left(\frac{|\omega|\rho}{v}\sqrt{\beta^2\epsilon-1}\right)\right]$$

计算上式的傅里叶变换, 以便得到 $\Phi(\mathbf{x},t)$. 将你的答案与 13.5 节对 $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ 所给出的结果联系起来, 找出其中的关系.

13.8 带磁荷 g 的一个磁单极通过物质, 并因与电子碰撞而损失能量, 犹如带电荷 ze 的一个粒子那样.

(*a*) 按 13.1-13.3 节所阐述的近似法, 试证: 每单位距离上的能量损失由(13.44)近似地给出, 不过要令 $ze\to\beta g$, 所得的表式为

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{磁单极}}\simeq4\pi NZ\frac{g^2e^2}{mc^2}\ln\left(\frac{2\gamma^2mv^2}{\langle\hbar\omega\rangle}\right)$$

(*b*) 根据确定磁荷的狄喇克量子化条件(6.153), 如果要使一个普通的带电粒子在以相对论性速率运动时损失能量的快慢与一个磁单极相同, 那末这个普通带电粒子的 z 值有多大? 对磁单极简略画出与图 13.4 相当的 dE/dx 曲线, 并且评述一下两种情形的差异.

第十四章　运动电荷的辐射

大家知道，加速的电荷发出电磁辐射．我们在第九章里讨论了随时间变化的宏观电荷和电流密度(从本质上说，它们是运动的电荷）所发出的辐射的一些实例．第十六章系统地讨论多极辐射时，还要再回到这类问题上来．但是，有一类辐射现象，它们的源是一个或少数几个运动的点电荷．对于这些问题，采取这样表述方式是有用的，即将辐射强度和偏振跟电荷轨道和运动的性质直接联系起来．我们特别感兴趣的是总辐射强度、辐射的角分布及其频谱．对于非相对论性运动，辐射是用著名的拉莫尔公式(参看 14.2 节)来描写．但对于相对论性粒子，则出现若干不平常而有趣的效应．我们要强调的也就是这些相对论性效应．本章要导出一些普遍结果，并把它们应用到电荷作特定运动(特别是在外力场中运动)的一些实例上．另外，讨论渡越辐射，这是当粒子通过介电性质不同的两种媒质的分界面时所出现的合作现象．第十五章要论述原子碰撞或核碰撞中发出的辐射．

14.1　一个点电荷的李纳-维谢尔势和场

在 12.11 节里已经证明：如果没有入射场，则一个运动带电粒子所形成的四元矢势为

$$A^{\alpha}(x)=\frac{4\pi}{c}\int d^4x'\,D_r(x-x')J^{\alpha}(x') \tag{14.1}$$

式中 $D_r(x-x')$ 为推迟格临函数(12.133)，而

$$J^{\alpha}(x')=ec\int d\tau V^{\alpha}(\tau)\delta^{(4)}[x'-r(\tau)] \tag{14.2}$$

为电荷的四元电流矢量，$V^\alpha(\tau)$为电荷的四元速度，$r^\alpha(\tau)$为电荷的位置．将格临函数和电流代入(14.1)，对d^4x'积分，得

$$A^\alpha(x)=2e\int d\tau V^\alpha(\tau)\theta[x_0-r_0(\tau)]\delta\{[x-r(\tau)]^2\} \quad (14.3)$$

剩下的遍历电荷原时的积分只在$\tau=\tau_0$时才不等于零，这里τ_0是由光锥条件

$$[x-r(\tau_0)]^2=0 \quad (14.4)$$

和推迟性要求$x_0>r_0(\tau_0)$确定的．在图14.1中用图解的方法表示了这些条件的意义．格临函数只在观察点的向后光锥上才不等

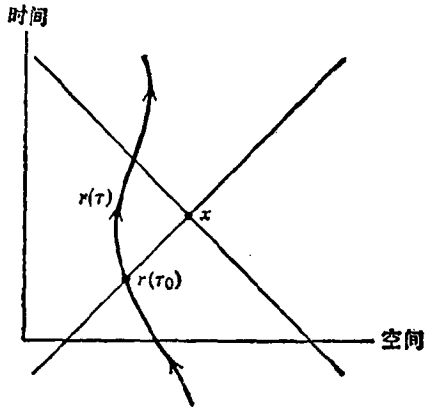


图 14.1

于零．粒子的世界线$r(\tau)$仅仅在两个点与光锥相交，一个点早于x_0，另一个点晚于x_0．在电荷的路线上，只有较早的点$r^\alpha(\tau_0)$才对x^α处的场有贡献．为了计算(14.3)的值，我们利用以下法则：

$$\delta[f(x)]=\sum_i\frac{\delta(x-x_i)}{\left|\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_i}\right|}$$

式中点$x=x_i$是$f(x)$的零点，假定$f(x)$为线性函数．我们需要计算的是

$$\frac{d}{d\tau}[x-r(\tau)]^2=-2[x-r(\tau)]_\beta V^\beta(\tau) \tag{14.5}$$

在 $\tau=\tau_0$ 这一点上的值. 因此,四元矢势为

$$A^\alpha(x)=\frac{eV^\alpha(\tau)}{V\cdot[x-r(\tau)]}\Big|_{\tau=\tau_0} \tag{14.6}$$

式中 τ_0 由(14.4)确定.

势(14.6)就是大家知道的李纳-维谢尔势. 往往把它们写成下列非协变的(不过,或许是更熟悉的)形式. 光锥条件(14.4)意味着 $x_0-r_0(\tau_0)=|\mathbf{x}-\mathbf{r}(\tau_0)|\equiv R$. 于是,

$$\begin{aligned}V\cdot(x-r)&=V_0[x_0-r_0(\tau_0)]-\mathbf{V}\cdot[\mathbf{x}-\mathbf{r}(\tau_0)]\\&=\gamma cR-\gamma\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}R\\&=\gamma cR(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})\end{aligned} \tag{14.7}$$

式中 $\mathbf{n}$ 为 $\mathbf{x}-\mathbf{r}(\tau)$ 方向上的单位矢量,$\boldsymbol{\beta}=\mathbf{v}(\tau)/c$. 因而势(14.6)可以写成

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x},t)&=\left[\frac{e}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})R}\right]_{\text{推迟}}\\\mathbf{A}(\mathbf{x},t)&=\left[\frac{e\boldsymbol{\beta}}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})R}\right]_{\text{推迟}}\end{aligned}\right\} \tag{14.8}$$

方括号带有下标"推迟",这意味着方括号内的量是在推迟时间 $\tau_0(\tau_0)=x_0-R$ 计算的. 显然,对非相对论性运动来说,势还原为大家都知道的结果.

我们可以直接从(14.6)或(14.8)计算电磁场 $F^{\alpha\beta}(x)$,但比较简单的是回过去计算对 $d\tau$ 的积分,即(14.3). 在计算 $F^{\alpha\beta}$ 时,对观察点 x 的微分算符将作用在 θ 函数和 δ 函数上. θ 函数的微分将给出 $\delta[x_0-r_0(\tau)]$,所以 δ 函数不得不是 $\delta(-R^2)$. 除在 $R=0$ 外,这个微分将没有贡献. 不考虑 $R=0$ 时,导数 $\partial^\alpha A^\beta$ 是

$$\partial^\alpha A^\beta=2e\int d\tau V^\beta(\tau)\theta[x_0-r_0(\tau)]\partial^\alpha\delta\{[x-r(\tau)]^2\} \tag{14.9}$$

右边的偏导数可以写成

$$\partial^\alpha\delta[f]=\partial^\alpha f\cdot\frac{d}{df}\delta[f]=\partial^\alpha f\cdot\frac{d\tau}{df}\cdot\frac{d}{d\tau}\delta[f]$$

式中 $f=[x-r(\tau)]^2$. 直接算出上式右边的两个导数, 即得

$$\partial^\alpha\delta[f]=-\frac{(x-r)^\alpha}{V\cdot(x-r)}\frac{d}{d\tau}\delta[f]$$

将上式代入(14.9), 并分部积分, 得到的结果是

$$\partial^\alpha A^\beta=2e\int d\tau\frac{d}{d\tau}\left[\frac{(x-r)^\alpha V^\beta}{V\cdot(x-r)}\right]\theta[x_0-r_0(\tau)]\delta\{[x-r(\tau)]^2\}\quad(14.10)$$

正如已经指出的, 在分部积分时, θ 函数的微分没有贡献. (14.10)的形式与(14.3)相同, 只不过用导数项替代了 $V^\alpha(\tau)$. 因此, 根据(14.6), 将其中的 $V^\alpha(\tau)$ 用导数项来代替, 就可以得到(14.10)的结果. 场强张量是

$$F^{\alpha\beta}=\frac{e}{V\cdot(x-r)}\frac{d}{d\tau}\left[\frac{(x-r)^\alpha V^\beta-(x-r)^\beta V^\alpha}{V\cdot(x-r)}\right]\quad(14.11)$$

式中 r^α 和 V^α 是 τ 的函数. 在经微分运算后, 整个表式(14.11)要在推迟原时 τ_0 上计算其值.

场强张量 $F^{\alpha\beta}$(14.11)应该是个协变式, 但不是非常明显的. 有时, 将场 **E** 和 **B** 表成电荷速度和加速度的显函数是很有用的. (14.11)中需完成微分运算的一些成分是:

$$\left.\begin{aligned}(x-r)^\alpha&=(R,R\mathbf{n}),\ V^\alpha=(\gamma c,\gamma c\boldsymbol{\beta})\\ \frac{dV^\alpha}{d\tau}&=[c\gamma^4\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}},c\gamma^2\dot{\boldsymbol{\beta}}+c\gamma^4\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}})]\\ \frac{d}{d\tau}[V\cdot(x-r)]&=-c^2+(x-r)\cdot\frac{dV^\alpha}{d\tau}\end{aligned}\right\}\quad(14.12)$$

式中 $\boldsymbol{\beta}=d\boldsymbol{\beta}/dt$ 是普通的加速度除以 c. 利用这些表式和(14.7), 我们可以把(14.11)写成不太精巧的(或许倒是比较直观的)形式:

$$\mathbf{B}=[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]_{\text{推迟}}\quad(14.13)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=e\left[\frac{\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}}{\gamma^2(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})^3R^2}\right]_{\text{推迟}}+\frac{e}{c}\left[\frac{\mathbf{n}\times\{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})^3R}\right]_{\text{推迟}} \tag{14.14}$$

场(14.13)和(14.14)自然地分成"速度场"(与加速度无关)和"加速度场"(是$\dot{\boldsymbol{\beta}}$的线性函数). 速度场在本质上是静止场, 按R^{-2}方式下降, 而加速度场是典型的辐射场, **E**和**B**都垂直于矢径, 并按R^{-1}方式变化.

若考虑粒子作匀速运动的这种特殊情况, (14.14)右边第二项等于零. 第一项(速度场)必定与11.10节里用静库仑场的洛仑兹变换所得到的结果相同. 证明这一结论的一种方法是: 由$F^{\alpha\beta}$的(14.11), 我们注意到, 如果V^α为恒量, 则场是

$$F^{\alpha\beta}=\frac{ec^2}{[V\cdot(x-r)]^3}\cdot[(x-r)^\alpha V^\beta-(x-r)^\beta V^\alpha] \tag{14.15}$$

上式与习题11.15中第三个协变形式一致. 但是, 为了明确地证明表式(11.152)和(14.14)虽然看起来不同但实际上是相同的, 把电荷坐标从其所在位置(11.10节中所用的)变换到本节所用的推迟位置是值得一做的. 电荷的这两种位置在图14.2中用点P和P'表示, O是观察点. 距离$P'Q$为$\beta R\cos\theta=\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n}R$. 所以距离$OQ$

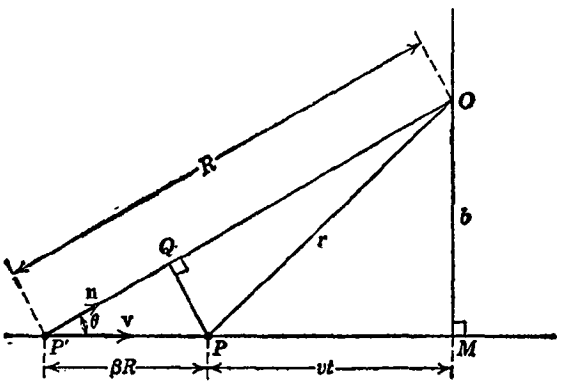


图14.2 一个匀速运动电荷的所在位置和推迟位置.

为$(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})R$. 但由三角形 OPQ 和 $PP'Q$, 我们有$[(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})R]^2=r^2-(PQ)^2=r^2-\beta^2R^2\sin^2\theta$. 接着, 由三角形 OMP', 我们有 $R\sin\theta=b$, 所以

$$[(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})R]^2=b^2+v^2t^2-\beta^2b^2=\frac{1}{\gamma^2}(b^2+\gamma^2v^2t^2) \quad (14.16)$$

于是, 由(11.152), 横向分量

$$E_2=\frac{e\gamma b}{(b^2+\gamma^2v^2t^2)^{3/2}} \quad (14.17a)$$

可以用推迟位置写成

$$E_2=e\left[\frac{b}{\gamma^2(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})^3R^3}\right]_{\text{推迟}} \quad (14.17b)$$

这正好是(14.14)中速度场的横向分量. 同理可以证明 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的其它分量.

14.2 一个加速电荷的总辐射功率——拉莫尔公式及其相对论性推广

如果一个电荷在加速, 但它相对于某个参照系的速度比光速小得多, 那末, 在这坐标系中观测时, (14.14)中的加速场就化为

$$\mathbf{E}_a=\frac{e}{c}\left[\frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})}{R}\right]_{\text{推迟}} \quad (14.18)$$

瞬时能流由坡印廷矢量给出,

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B}=\frac{c}{4\pi}|\mathbf{E}_a|^2\mathbf{n}. \quad (14.19)$$

这意味着, 在每单位立体角内的辐射功率是①

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{c}{4\pi}|R\mathbf{E}_a|^2=\frac{e^2}{4\pi c}|\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})|^2 \quad (14.20)$$

① 在写辐射的角分布时, 我们将总是写成与电场成正比的一个矢量的绝对值的平方, 以显示出偏振性. 如果想要的是某特定偏振的角分布, 那末, 先取这矢量与适当偏振矢量之标积, 再取平方, 就得到所想要的角分布.

如果Θ是加速度$\dot{\mathbf{v}}$与$\mathbf{n}$的夹角，如图14.3所示，那末总辐射功率

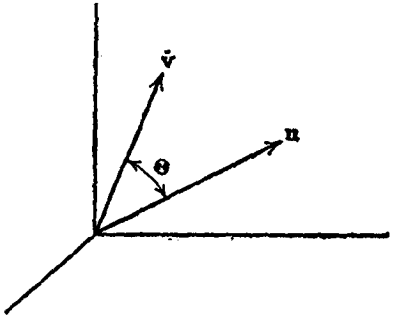


图 14.3

可以写成

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{e^2}{4\pi c^3}|\dot{\mathbf{v}}|^2\sin^2\Theta \tag{14.21}$$

这式子显示了大家熟悉的典型的$\sin^2\Theta$的角依赖关系．我们从(14.18)可知，辐射的偏振方向在包含$\dot{\mathbf{v}}$与$\mathbf{n}$的平面内．将(14.21)遍及所有的立体角求积分，即得瞬时的总辐射功率．即

$$P=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}|\dot{\mathbf{v}}|^2 \tag{14.22}$$

这便是大家熟悉的非相对论性加速电荷的拉莫尔公式．

我们可以利用洛仑兹变换下的协变性来推广拉莫尔公式(14.22)，从而得到对任意速度的电荷都有效的公式．辐射出去的电磁能量在洛仑兹变换下的性质像一个四元矢量的第四分量(参看习题12.15)．这可以用来(参看 *Rohrlich* 书第109页起)证明'功率P是一个洛仑兹不变量．如果我们能够找到一个当$\beta\ll1$时化为拉莫尔公式(14.22)的洛仑兹不变量，那末我们也就得到了想要的推广式．当然，在$\beta\to0$时化为所要形式的洛仑兹不变量是很多的．可是，从(14.14)容易看到，普遍的结果必须只含$\boldsymbol{\beta}$和$\dot{\boldsymbol{\beta}}$．对于可能出现的导数的阶数加上这种限制后，所得结果就是唯一

的．为了求出合适的推广式，我们把拉莫尔公式写成下列有启发性的形式：

$$P=\frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^3}\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right) \tag{14.23}$$

式中m是带电粒子的质量，$\mathbf{p}$是带电粒子的动量．洛仑兹不变的推广式显然是

$$P=-\frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^3}\left(\frac{dp_\mu}{d\tau}\frac{dp^\mu}{d\tau}\right) \tag{14.24}$$

式中$d\tau=dt/\gamma$是原时元，p^μ是带电粒子的动量-能量四元矢量①．为了验证$\beta\to0$时(14.24)的确化为(14.23)，我们来计算四元矢量的标积，

$$-\frac{dp_\mu}{d\tau}\frac{dp^\mu}{d\tau}=\left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dE}{d\tau}\right)^2=\left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau}\right)^2-\beta^2\left(\frac{dp}{d\tau}\right)^2 \tag{14.25}$$

如果利用$E=\gamma mc^2$和$\mathbf{p}=\gamma m\mathbf{v}$，将(14.24)用速度和加速度表示，我们便得到李纳结果(1898年)：

$$\boxed{P=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\gamma^6[(\dot{\boldsymbol{\beta}})^2-(\boldsymbol{\beta}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})^2]} \tag{14.26}$$

带电粒子加速器乃是辐射功率的相对论性公式的一个应用领域．加速器实际能够达到的最大能量，有时受辐射损失所限制．对于给定的外加力(即给定的动量变化率)来说，辐射功率(14.24)和有关粒子的质量平方成反比．因此，电子的这些辐射效应最大．

在直线加速器中，粒子的运动是一维的．从(14.25)可知，在这种情况下的辐射功率是

---

① 注意到洛仑兹不变量是由四元矢量或高秩张量的标积所构成的，即可看出(14.24)是唯一的．可用的四元矢量是p^μ和$dp^\mu/d\tau$．只有(14.24)式在$\beta\to0$时化为拉莫尔公式．可以证明，像$p^\mu(dp^\nu/d\tau)$之类的高秩张量在缩并后化为零，或者给出与(14.24)或m^2成正比的结果．

$$P=\frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^3}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 \tag{14.27}$$

动量的变化率等于粒子在每单位距离上能量的变化. 因此,

$$P=\frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^3}\left(\frac{dE}{dx}\right)^2 \tag{14.28}$$

这式子表明在直线运动情况下,辐射功率只跟外力(它决定粒子能量随距离的变化率)有关,而和粒子的实际能量或动量无关. 辐射功率与外源所供给的功率之比为

$$\frac{P}{(dE/dt)}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^3}\frac{1}{v}\frac{dE}{dx}\to\frac{2}{3}\frac{(e^2/mc^2)}{mc^2}\frac{dE}{dx} \tag{14.29}$$

这里的后一个式子适用于相对论性粒子($\beta\to1$). 方程(14.29)表明,在电子直线加速器中辐射损失是无足轻重的,除非能量增益在 $e^2/mc^2=2.82\times10^{-13}$ 厘米的距离内约为 $mc^2=0.511$ 兆电子伏特,亦即 2×10^{14} 兆电子伏特/米! 典型的能量增益小于 10 兆电子伏特/米. 所以不管是电子还是较重的粒子,它们在直线加速器中的辐射损失完全可以忽略.

像同步加速器或电子回旋加速器之类的圆形加速器,情形就回然不同. 在这类机器中,当粒子回旋时,它们的动量 $\mathbf{p}$ 的方向迅速地改变,但每转一周的能量改变却很小. 这意味着

$$\left|\frac{d\mathbf{p}}{d\tau}\right|=\gamma\omega|\mathbf{p}|\gg\frac{1}{c}\frac{dE}{d\tau} \tag{14.30}$$

因此,辐射功率(14.24)可以近似地写成

$$P=\frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^3}\gamma^2\omega^2|\mathbf{p}|^2=\frac{2}{3}\frac{e^2c}{\rho^2}\beta^4\gamma^4 \tag{14.31}$$

我们在式中已用了 $\omega=(c\beta/\rho)$, ρ 为轨道半径. 这个结果是李纳在 1898 年最先获得的. 每转一周辐射能的损失为

$$\delta E=\frac{2\pi\rho}{c\beta}P=\frac{4\pi}{3}\frac{e^2}{\rho}\beta^3\gamma^4 \tag{14.32}$$

对于高能电子($\beta\simeq1$)来说,其数值为

$$\delta E(\text{兆电子伏特})=8.85\times10^{-2}\frac{[E(\text{千兆电子伏特})]^4}{\rho(\text{米})} \quad (14.33)$$

最早的电子同步加速器的 $\rho\simeq1$ 米,$E_{max}\simeq0.3$ 千兆电子伏特.因而 $\delta E_{max}\simeq$每周 1 千电子伏特.这个数值比每周数千电子伏特的能量增益小,但是不可忽略不计.在较高能量时,利用射频功率克服辐射损失遇到了困难,这个事实变成主要考虑的问题.例如,在康乃耳(Cornell)的 10 千兆电子伏特电子同步加速器中,轨道半径为 $\rho\sim100$ 米,最大磁场为~3.3 千高斯,在 10 千兆电子伏特时每周的射频电压为10.5兆伏特.按(14.33),每周的能量损失为 8.85 兆电子伏特.对阴阳电子储存环也同样要运用这些一般性的考虑;在阴阳电子储存环中,当粒子束作环流时,必须供给射频功率以便刚好使粒子束保持恒定能量.

我们可以用数值来表示圆形电子加速器中的辐射功率:

$$P(\text{瓦特})=10^6\delta E(\text{兆电子伏特})J(\text{安培}) \quad (14.34)$$

式中 J 是作回旋运动的电子束的电流强度.这方程只适用于回旋电子束中不同电子的辐射是不相干的情形.对于最大的电子同步加速器,辐射功率约为每微安电子束$\gtrsim$1 瓦特.这种功率耗散虽然很小,但辐射能量很容易探测到,而且还有一些有趣的性质,我们在 14.6 节将讨论这些性质.

14.3 一个加速电荷的辐射角分布

一个作非相对论性运动的加速电荷的辐射角分布呈现简单的 $\sin^2\Theta$的分布特性,正如(14.21)所给出的,这里Θ是相对于加速度方向量度的.对于相对论性运动,加速场不仅和加速度有关,而且和速度有关.因此,角分布就复杂得多.从(14.14)可以算出坡印廷矢量的径向分量为

$$[\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}]_{推迟}=\frac{e^2}{4\pi c}\left\{\frac{1}{R^2}\left|\frac{\mathbf{n}\times[(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})^3}\right|^2\right\}_{推迟} \tag{14.35}$$

式中显然包含两种相对论性效应. 一种是由 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ 间的特殊的空间关系引起的效应, 它决定着细致的角分布. 另一种是由粒子的静止参照系变换到观测者的参照系所引起的普遍的相对论性效应, 它体现在(14.35)分母中的因子 $(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})$ 上. 对于极端相对论性粒子, 后一种效应在整个角动量分布中占主要地位.

(14.35)中的 $\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}$ 是由电荷在时间 $t'=t-R(t')/c$ 所发射的、在时间 t 于观测点所检测到的每单位时间每单位面积的辐射能量. 如果我们要计算在一般有限加速时间内的辐射能量, 比如说计算从 $t'=T_1$ 到 $t'=T_2$ 这一段时间内的辐射能量, 我们应写为

$$E=\int_{t=T_1+[R(T_1)/c]}^{t=T_2+[R(T_2)/c]}[\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}]_{推迟}dt=\int_{t'=T_1}^{t'=T_2}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{n})\frac{dt}{dt'}dt' \tag{14.36}$$

由此可见, 有用的和有深刻含义的量是 $(\mathbf{S}\cdot\mathbf{n})(dt/dt')$, 即用电荷自身的时间来表示的每单位面积的辐射功率. 因此我们将每单位立体角的辐射功率定义为

$$\frac{dP(t')}{d\Omega}=R^2(\mathbf{S}\cdot\mathbf{n})\frac{dt}{dt'}=R^2\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n}) \tag{14.37}$$

如果我们设想电荷只在短暂的时间内被加速, 在这段时间内, $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ 的方向和量值基本上恒定不变, 而我们又从离电荷足够远的地方来观测辐射, 所以在这段加速的时间间隔内 $\mathbf{n}$ 和 R 的变化可以忽略不计, 因而(14.37)和辐射能的角分布成正比. 利用坡印廷矢量的表式(14.35), 可得角分布为

$$\frac{dP(t')}{d\Omega}=\frac{e^2}{4\pi c}\frac{|\mathbf{n}\times\{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\}|^2}{(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^5} \tag{14.38}$$

(14.38)的最简单的例子便是直线运动, 这时 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ 是平行的. 如果从 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ 的共同方向量起的观测角为 θ, 则(14.38)化

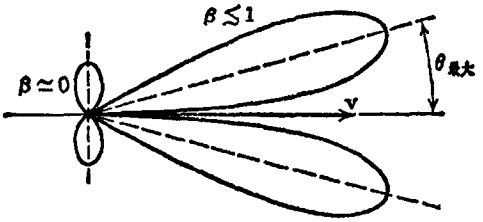


图 14.4　在运动方向上加速的电荷的辐射图样．两种图样是用不同比例画的．对于相同的加速度，相对论性图样(对应于 $\gamma\sim 2$)大约已缩成 10^4 分之一．

简为

$$\frac{dP(t')}{d\Omega}=\frac{e^2\dot{v}^2}{4\pi c^3}\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5} \tag{14.39}$$

当 $\beta\ll 1$ 时，这就是拉莫尔结果(14.21)．但当 $\beta\to 1$ 时，角分布愈来愈向前倾向于运动方向．而且量值愈来愈增大，如图 14.4 所示．强度为极大的角度 θ_{max} 是

$$\theta_{max}=\cos^{-1}\left[\frac{1}{3\beta}(\sqrt{1+15\beta^2}-1)\right]\to\frac{1}{2\gamma} \tag{14.40}$$

这里的后一式是 $\beta\to 1$ 时的极限值．在这同一个极限情形下，巅值强度与 γ^8 成正比．即使 $\beta=0.5$，相当于动能约为 8 万电子伏特的电子，$\theta_{max}=38.2°$．相对论性粒子的 θ_{max} 很小，因为它与粒子的静止能量和总能量之比同数量级．所以角分布局限在运动方向上很窄的圆锥内．对于这样小的角度，我们可以将角分布(14.39)近似地写为

$$\frac{dP(t')}{d\Omega}\simeq\frac{8}{\pi}\frac{e^2\dot{v}^2}{c^3}\gamma^8\frac{(\gamma\theta)^2}{(1+\gamma^2\theta^2)^5} \tag{14.41}$$

显然，γ^{-1} 是自然的角单位．图 14.5 所示的便是以这种单位量度角度的角分布．巅峰出现在 $\gamma\theta=\frac{1}{2}$处，半功率点在 $\gamma\theta=0.23$ 与 $\gamma\theta=0.91$ 处．在相对论性极限下，辐射的发射角的方均根值为

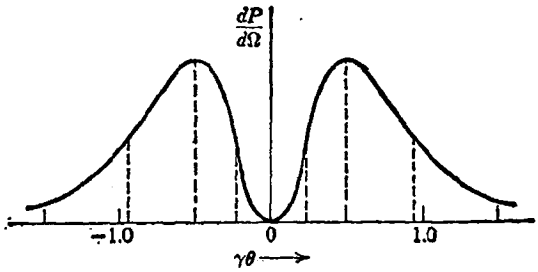


图 14.5 相对论性粒子的辐射角分布.

$$\langle\delta^2\rangle^{1/2}=\frac{1}{\gamma}=\frac{mc^2}{E} \tag{14.42}$$

这是典型的相对论性辐射图样，不论 β 和 $\dot{\beta}$ 间的矢量关系如何，辐射图样都是如此. 将(14.39)遍及所有角度积分，可得总辐射功率. 即

$$P(t')=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{v}^2\gamma^6 \tag{14.43}$$

这跟(14.26)和(14.27)一致.

辐射角分布的另一个例子是一个作瞬时圆周运动的电荷，它的加速度 $\dot{\beta}$ 和速度 β 垂直. 我们选一个坐标系使瞬时的 β 在 z 方向，$\dot{\beta}$ 在 x 方向. 如以惯用的极坐标的角 θ，ϕ 来表示观测方向，如图 14.6 所示，则普遍公式(14.38)化为

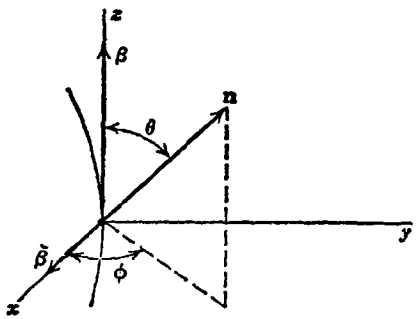


图 14.6

$$\frac{dP(t')}{d\Omega}=\frac{e^2}{4\pi c^3}\frac{|\dot{\mathbf{v}}|^2}{(1-\beta\cos\theta)^3}\left[1-\frac{\sin^2\theta\cos^2\phi}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2}\right] \quad (14.44)$$

我们注意到，虽然详细的角分布和直线加速度的情形不同，但公式中仍出现了典型的在前向角度上的相对论性巅值．在相对论性极限($\gamma\gg1$)下，角分布可以近似地写成

$$\frac{dP(t')}{d\Omega}\simeq\frac{2}{\pi}\frac{e^2}{c^3}r^6\frac{|\dot{\mathbf{v}}|^2}{(1+\gamma^2\theta^2)^3}\left[1-\frac{4\gamma^2\theta^2\cos^2\phi}{(1+\gamma^2\theta^2)^2}\right] \quad (14.45)$$

此近似式中的发射角的方均根值由(14.42)给出，正和一维运动的情况相同．将(14.44)遍及所有角度积分，或用(14.26)，都可求出总辐射功率：

$$P(t')=\frac{2}{3}\frac{e^2|\dot{\mathbf{v}}|^2}{c^3}\gamma^4 \quad (14.46)$$

在外加力的量值相同的情况下，将加速度平行于速度的带电粒子所辐射的功率(14.43)或(14.27)，跟加速度垂直于速度的带电粒子所辐射的功率(14.46)加以比较，是很有益处的．对于圆周运动来说，动量变化率(等于外加力)的量值为$\gamma m\dot{v}$．因此，(14.46)可以写成

$$P_{\text{■■}}(t')=\frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^3}\gamma^2\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)^2 \quad (14.47)$$

将此式跟直线运动的相应结果(14.27)加以比较，我们就发现，当外加力的量值给定时，横向加速情况下的辐射功率等于平行加速情况下的γ^2倍．

14.4 一个作任意的极端相对论性运动的电荷的辐射

一个作任意的极端相对论性运动的带电粒子在任何时刻所发出的辐射，都可以看成是与速度平行和垂直的加速度分量的两种贡献相干叠加而成的．可是，我们刚才看到，当平行力与垂直力的大小差不多时，平行分量的辐射和垂直分量的辐射相比可以忽略不

计(因为前者约为后者的 $1/r^2$). 因此, 我们可以略去加速度的平行分量, 并只以垂直分量所产生的辐射强度来近似地代表总辐射强度. 换句话说, 作任意的极端相对论性运动的带电粒子所发出的辐射, 大致等于沿曲率半径为 ρ 的圆弧路径作瞬时运动的粒子所发出的辐射, ρ 由下式给出:

$$\rho=\frac{v^2}{\dot{v}_\perp}\simeq\frac{c^2}{\dot{v}_\perp} \tag{14.48}$$

式中 $\dot{v}_\perp$ 是加速度的垂直分量. 辐射角分布的公式为(14.44)或(14.45). 它相当于沿电荷瞬时速度方向的一束狭窄的圆锥形辐射, 或一束探照灯式的辐射.

对于携带频率灵敏度探测器的观察者来说, 辐射局限在平行于速度的狭束内, 这个事实具有重要的后果. 只有当粒子的速度指向观察者时才可以看到辐射. 对于作任意运动的粒子, 观测者会探测到非常短暂的辐射脉冲或猝发(如果粒子作周期性运动, 则探测到许多相继的猝发), 如图 14.7 所示. 由于射线束的角宽度为 γ^{-1} 量级, 所以当照射观测者时, 粒子行移的距离将只约有

$$d=\frac{\rho}{\gamma}$$

对应的时间间隔为

$$\Delta t=\frac{\rho}{\gamma v}$$

为使论证在概念上简单起见, 在这一段时间内忽略路径的曲率, 并假设所发射的辐射脉冲是尖锐的矩形脉冲. 在时间 Δt 内, 脉冲前沿行移的距离为

$$D=c\Delta t=\frac{\rho}{\gamma\beta}$$

因为粒子以速率 v 沿相同方向运动, 并在时间 Δt 内移动了距离 d, 所以脉冲后沿将只行移了如下一段距离:

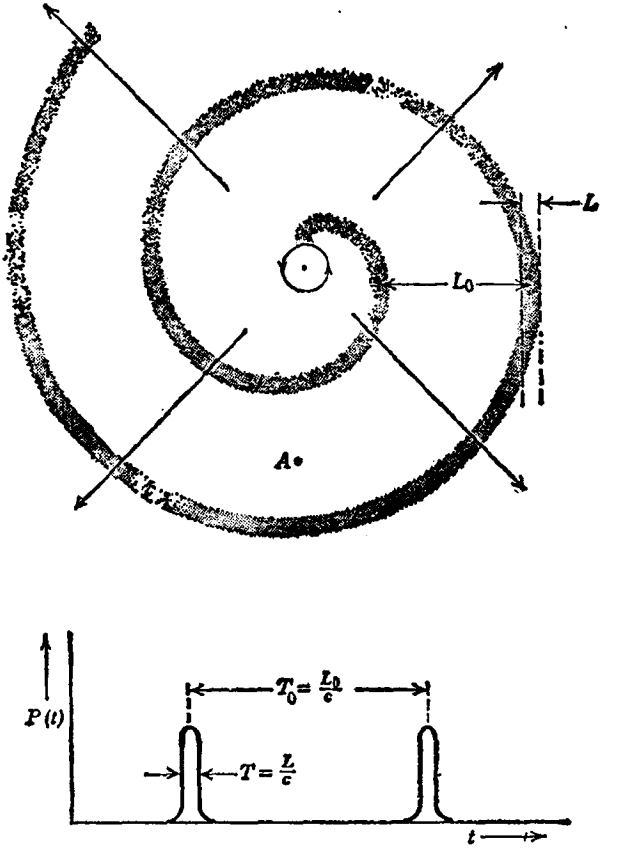


图 14.7　一个作周期性运动的相对论性粒子发射的螺旋线辐射图样，在 A 点的观测者探测到的是短暂的辐射猝发以有规则时间间隔 $T_0=L_0/c$ 出现，其时间宽度为 $T=L/c$. 脉冲宽度由(14.49)给出，而脉冲间隔 $T_0=2\pi\rho/v\simeq 2\pi\rho/c$. 关于辐射粒子的漂亮的场线图，参看 R. Y. Tsien, *Am. J. Phys.* 40, 46(1972).

$$L=D-d=\left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{\rho}{\gamma}\simeq\frac{\rho}{2\gamma^3} \tag{14.49}$$

当脉冲行移时，脉冲后沿落在脉冲前沿的后面. 于是，脉冲的空间

宽度为 L，或者说，脉冲的时间宽度为 L/c. 根据有限波列的傅里叶分解的一般讨论，这意味着，辐射谱将包含相当多的频率成分，一直到临界频率

$$\omega_c \sim \frac{c}{L} \sim \left(\frac{c}{\rho}\right)\gamma^3 \tag{14.50}$$

对于圆周运动来说，c/ρ 就是转动的角频率 ω_0，即使对于任意运动来说，它也起着运动基频的作用. 方程(14.50)表明，相对论性粒子发射出很宽的、直到基频的 γ^3 倍的频谱. 在一台 200 兆电子伏特的同步加速器中，$\gamma_{max} \simeq 400$，而 $\omega_0 \simeq 3\times10^8$ 秒$^{-1}$. 辐射的频谱扩展到$\sim 2\times10^{16}$ 秒$^{-1}$，或降低到 1000 埃的波长，即使基频在 100 兆赫范围之内. 对于康乃耳的 10 千兆电子伏特加速器来说，$\gamma_{max} \simeq 2\times10^4$，$\omega_0 \simeq 3\times10^6$ 秒$^{-1}$. 这意味着，$\omega_c \simeq 2.4\times10^{19}$ 秒$^{-1}$，相当于 16 千电子伏特的X射线. 在 14.6 节里，我们将详细讨论不同频率成分的角分布，以及总辐射能与频率的函数关系.

14.5 加速电荷的辐射能的频率分布和角分布

上一节的定性讨论指出，在相对论性运动情形中的辐射能是分布在很宽的频率范围内的. 我们利用傅里叶积分的性质估计了频谱的范围. 利用傅里叶分析中的帕斯伐(Parseval)定理就可以将前面的论证严密化和定量化.

每单位立体角的辐射功率的一般形式为

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = |\mathbf{A}(t)|^2 \tag{14.51}$$

式中

$$\mathbf{A}(t) = \left(\frac{c}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} [R\mathbf{E}]_{推迟} \tag{14.52}$$

$\mathbf{E}$ 乃是电场(14.14). (14.51)的瞬时功率是用观察者的时间来表示的(和14.3 节中的定义相反)，因为我们想要考虑的是以观察者

的频率来表示的频谱. 为了明确起见，我们认为加速过程发生在一段有限的时间间隔内，或者至少在遥远的过去和遥远的未来要下降为零，以致总的辐射能是有限的. 并且，我们认为观测点离电荷足够远，以致电荷在加速过程中所扫过的空间区域对观测点所张的立体角元是很小的.

每单位立体角的总辐射能是(14.51)式对时间的积分:

$$\frac{dW}{d\Omega}=\int_{-\infty}^{\infty}|\mathbf{A}(t)|^2dt \tag{14.53}$$

应用傅里叶变换也可以将上式表为一个遍历频谱的积分. 我们引进 $\mathbf{A}(t)$的傅里叶变换 $\mathbf{A}(\omega)$:

$$\mathbf{A}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{A}(t)e^{i\omega t}dt \tag{14.54}$$

及其反变换

$$\mathbf{A}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{A}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \tag{14.55}$$

则(14.53)可以写成

$$\frac{dW}{d\Omega}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}d\omega'\mathbf{A}^*(\omega')\cdot\mathbf{A}(\omega)e^{i(\omega'-\omega)t} \tag{14.56}$$

将时间积分与频率积分的次序互换后，我们就看到时间积分恰恰是 δ 函数 $\delta(\omega'-\omega)$的傅里叶表示. 因此，每单位立体角的辐射能变成

$$\frac{dW}{d\Omega}=\int_{-\infty}^{\infty}|\mathbf{A}(\omega)|^2d\omega \tag{14.57}$$

对函数 $\mathbf{A}(t)$加以适当的数学限制，(14.57)才能和(14.53)相等，这是帕斯伐定理的特殊情况. 由于频率的正负号没有物理意义，人们习惯上只对正频率求积分. 于是关系式

$$\frac{dW}{d\Omega}=\int_0^\infty \frac{d^2I(\omega,\mathbf{n})}{d\omega d\Omega}d\omega \tag{14.58}$$

确定一个量，这个量就是每单位立体角、每单位频率间隔的辐射能量：

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}=|\mathbf{A}(\omega)|^2+|\mathbf{A}(-\omega)|^2 \tag{14.59}$$

如果$\mathbf{A}(t)$是实函数，则从(14.55)显然可得$\mathbf{A}(-\omega)=\mathbf{A}^*(\omega)$. 于是

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}=2|\mathbf{A}(\omega)|^2 \tag{14.60}$$

这个结果以定量的方式，表示了作为时间函数的辐射功率的特性与辐射能频谱的关系.

我们利用加速电荷的场的表式(14.14)，可以得到一个普遍表式，它是用一个遍历粒子轨道的积分来表示每单位立体角、每单位频率间隔的辐射能量. 我们必须算出由(14.52)给出的$\mathbf{A}(t)$的傅里叶变换. 利用(14.14)，可得

$$\mathbf{A}(\omega)=\left(\frac{e^2}{8\pi^2c}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}\left[\frac{\mathbf{n}\times[(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})^3}\right]_{\text{推迟}}dt \tag{14.61}$$

式中"推迟"表示在$t'+[R(t')/c]=t$时计算的值. 我们将积分变数t换成t'，便得下列结果：

$$\mathbf{A}(\omega)=\left(\frac{e^2}{8\pi^2c}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega[t'+[R(t')/c]}\frac{\mathbf{n}\times[(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})^2}dt' \tag{14.62}$$

因为我们假定观察点远离粒子作加速运动的空间区域，所以单位矢量$\mathbf{n}$显然不随时间变化. 再者，距离$R(t')$可以近似地表为

$$R(t')\simeq x-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}(t') \tag{14.63}$$

式中x是从原点O到观察点P的距离，$\mathbf{r}(t')$是粒子相对于O的位置，如图 14.8 所示. 于是除了一个总的相因子外，(14.62)变成

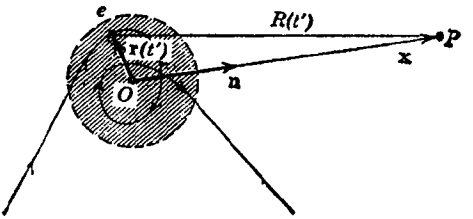


图 14.8

$$\mathbf{A}(\omega)=\left(\frac{e^2}{8\pi^2 c}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}(t)/c)}\frac{\mathbf{n}\times[(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})^2}dt \tag{14.64}$$

为简明起见，时间变数上的撇号已被略去. 于是每单位立体角每单位频率间隔的辐射能(14.60)是

$$\frac{d^2I(\omega)}{d\omega d\Omega}=\frac{e^2}{4\pi^2 c}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathbf{n}\times[(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})^2}e^{i\omega(t-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}(t)/c)}dt\right|^2 \tag{14.65}$$

对于特定的运动来说，$\mathbf{r}(t)$是已知的，因此可以计算$\boldsymbol{\beta}(t)$和$\dot{\boldsymbol{\beta}}(t)$，从而算出积分作为$\omega$与$\mathbf{n}$的方向的函数. 如果有一个以上的电荷在加速，那末(14.65)中的单个振幅必须用许多振幅$\mathbf{A}_j(\omega)$的相干迭加来代替，每个电荷各有一个振幅(参看习题14.12、15.3-15.6).

(14.65) 明确地表示出积分的时间区间是局限于加速度不等于零的时间内，虽然(14.65)具有这个优点，但是对(14.64)作分部积分也可以得出一个较为简单的表式，以适应某些目的. 容易证明，在(14.64)的被积函数中除去指数项后就是一个全微分：

$$\frac{\mathbf{n}\times[(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})^2}=\frac{d}{dt}\left[\frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta})}{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n}}\right] \tag{14.66}$$

于是，分部积分后便得强度分布：

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}=\frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta})\,e^{i\omega(t-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}(t)/c)}dt\right|^2 \tag{14.67}$$

读者当然可以问道：(14.67)是否在所有情况下都是正确的？假设只在$T_1 \leqslant t \leqslant T_2$时加速度才不等于零，那末为什么(14.67)中的积分要遍历全部时间呢？正确的答案如下：我们可以证明，由(14.65)加上或减掉那些在速度保持恒定时的时间积分，就可导出(14.67)，只要在(14.65)的被积函数中加进一个收敛因子$e^{-\epsilon|t|}$，并算出积分值及取$\epsilon \to 0$的极限值，以消除$t=\pm\infty$时的不定性．在像β衰变那样一些过程中，经典描述要在诸电荷的运动中考虑到有的电荷几乎是瞬时停止或瞬时起动的，对于这些过程，我们必须格外小心地从物理上确定每个粒子的速度与时间的明显函数关系．

应当注意，在(14.67)与(14.65)中，辐射的偏振是由每一式中矢量积分的方向规定的．在求绝对值的平方之前，先取矢量积分和适当的单位偏振矢量的标积，便可以求出某一固定偏振的辐射强度．

如有若干个电荷e_j作加速运动，则(14.67)中的被积函数应作如下替换：

$$e\boldsymbol{\beta}e^{-i(\omega/c)\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}(t)} \to \sum_{j=1}^{N} e_j\boldsymbol{\beta}_j e^{-i(\omega/c)\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_j(t)} \tag{14.68}$$

如果是连续分布的电荷在运动，那末在这种极限情形下，对j的求和变为对电流密度$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$的积分：

$$e\boldsymbol{\beta}e^{-i(\omega/c)\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}(t)} \to \frac{1}{c}\int d^3x\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)e^{-i(\omega/c)\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}} \tag{14.69}$$

于是，强度分布变为

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2c^3}\left|\int dt\int d^3x\mathbf{n}\times[\mathbf{n}\times\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)]e^{i\omega[t-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})/c]}\right|^2 \tag{14.70}$$

直接求解矢势的非齐次波动方程，也可以得到这个结果．

运动磁矩的辐射也很有趣. 我们回想第五章里所说的: 磁化强度 $\mathcal{M}(\mathbf{x}, t)$ 等效于电流 $\mathbf{J}_{\mathcal{M}}=c\nabla\times\mathcal{M}$. 可以把这个电流代入(14.70), 但是, 还有另一贡献. 在第十一章里, 我们求得: 一个运动的磁化强度有一个关联的电极化强度. 由安培-麦克斯韦方程显而易见, 一个运动磁矩的有效源电流为

$$\mathbf{J}_{\text{有效}}=c\nabla\times\mathcal{M}+\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial t} \tag{14.71}$$

式中 $\mathcal{P}$ 是关联的电极化强度. 代入(14.70)并分部积分, 即得

$$\frac{d^2I'}{d\omega d\Omega}=\frac{\omega^4}{4\pi^2c^3}\left|\int dt\int d^3x\mathbf{n}\times[\mathcal{M}+\mathbf{n}\times\mathcal{P}]e^{i\omega(t-\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}/c)}\right|^2 \tag{14.72}$$

对于点 $\mathbf{r}(t)$ 上的点磁矩 $\boldsymbol{\mu}(t)$ 来说, 磁化强度为

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}, t)=\boldsymbol{\mu}(t)\delta[\mathbf{x}-\mathbf{r}(t)] \tag{14.73a}$$

根据(11.149)和对应关系 $\mathbf{B}\to-\mathcal{M}$、$\mathbf{E}\to\mathcal{P}$, 我们得出如下结论: 一个粒子若在其静止参照系 K' 中只具有一个磁矩, 则在粒子速度为 $c\boldsymbol{\beta}$ 的参照系 K 中, 这粒子将具有一个磁矩和一个电偶极矩,

$$\mathbf{p}=\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\mu} \tag{14.73b}$$

式中 $\boldsymbol{\mu}$ 为在 K 中观测到的磁矩. 于是, (14.72)中的电极化强度由下式给出:

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}, t)=\boldsymbol{\beta}(t)\times\boldsymbol{\mu}(t)\delta[\mathbf{x}-\mathbf{r}(t)] \tag{14.73c}$$

将(14.73a)和(14.73c)代入(14.72), 即得一个运动磁矩在每单位立体角、每单位频率间隔内的辐射能为

$$\frac{d^2I'}{d\omega d\Omega}=\frac{\omega^4}{4\pi^2c^3}\left|\int dt\mathbf{n}\times[\boldsymbol{\mu}+\mathbf{n}\times(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\mu})]e^{i\omega(t-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}(t)/c)}\right|^2 \tag{14.74}$$

我们注意到, 除了积分对频率的依赖关系外, 磁偶极子的辐射强度和加速电荷的辐射强度之间存在着一个 ω^2 因子的特征差别.

在本章和以下几章里, 我们将把本节求得的一般公式, 尤其是

把(14.65)和(14.67)，应用到各种辐射问题上．在第十五章里将把磁矩公式 (14.74) 应用到轨道电子被核俘获时所发出的辐射问题上．

14.6 作瞬时圆周运动的相对论性带电粒子的辐射频谱

我们在 14.4 节中看到，作任意加速运动的极端相对论性粒子发出的辐射，跟在适当的圆形路线上以恒定速率作瞬时运动的粒子发出的辐射等效．辐射在速度矢量方向上会聚成狭窄锥形．在一个观察者看来，当这道探照灯似的射线束扫过观察点时就象短暂的辐射脉冲．

若要求出能量的频率分布和角分布，就必须计算(14.67)中的积分．因为脉冲持续时间很短，所以只需知道在指向观测点的切线方向上的一小段轨道上的速度 β 和位置 $r(t)$ 就够了．图 14.9 表示一个适当的坐标系．在 x-y 平面内有一段轨道，其瞬时曲率半径为 ρ．因为要取路线积分，所以我们可以将单位矢量 n 选在 x-z 平面内而不失去其普遍性，这个单位矢量和 x 轴交成 θ 角(纬度)．只在 θ 很小的时候，才有很可观的辐射强度．我们这样选取时间的原点，使得 $t=0$ 时，粒子正在坐标原点上．

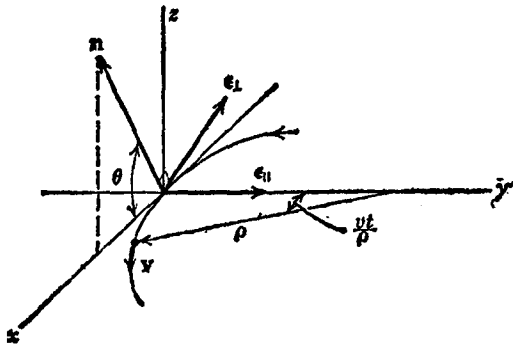


图 14.9

在(14.67)中被积函数的矢量部分可以写成

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta})=\beta\left[-\epsilon_{\parallel}\sin\left(\frac{vt}{\rho}\right)+\epsilon_{\perp}\cos\left(\frac{vt}{\rho}\right)\sin\theta\right] \tag{14.75}$$

式中 $\epsilon_{\parallel}=\epsilon_2$ 是在 y 方向上的单位矢量，它和轨道平面内的偏振对应，$\epsilon_{\perp}=\mathbf{n}\times\epsilon_2$ 是正交偏振矢量，它和垂直于轨道平面（当 θ 角很小时）的偏振近似对应. 指数的宗量为

$$\omega\left(t-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}(t)}{c}\right)=\omega\left[t-\frac{\rho}{c}\sin\left(\frac{vt}{\rho}\right)\cos\theta\right] \tag{14.76}$$

因为我们只考虑小角度 θ 和 $t=0$ 前后较短的时间，所以可将(14.76)中两个三角函数展开而得到

$$\omega\left(t-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}(t)}{c}\right)\simeq\frac{\omega}{2}\left[\left(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2\right)t+\frac{c^2}{3\rho^2}t^3\right] \tag{14.77}$$

只要有可能我们就令式中的 β 等于 1. 利用 t 的估计值 $\rho/c\gamma$ 和 θ 的估计值 $\langle\theta^2\rangle^{1/2}$(14.42)，容易看出(14.77)中略去的项约为保留项的 γ^2 分之一.

将推导(14.77)的那种近似处理应用到(14.75)上，就可将辐射能分布(14.67)写成

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}=\frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c}\left|-\epsilon_{\parallel}A_{\parallel}(\omega)+\epsilon_{\perp}A_{\perp}(\omega)\right|^2 \tag{14.78}$$

式中的振幅为①

$$\left.\begin{aligned}A_{\parallel}(\omega)&\simeq\frac{c}{\rho}\int_{-\infty}^{\infty}t\exp\left\{i\frac{\omega}{2}\left[\left(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2\right)t+\frac{c^2t^3}{3\rho^2}\right]\right\}dt\\A_{\perp}(\omega)&\simeq\theta\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{i\frac{\omega}{2}\left[\left(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2\right)t+\frac{c^2t^3}{3\rho^2}\right]\right\}dt\end{aligned}\right\} \tag{14.79}$$

① 在(14.79)中的积分限为 $t=\pm\infty$ 的事实，似乎与从(14.76)导出(14.77)所作的近似相矛盾. 关键在于，对于大多数频率来说，(14.79)中被积函数的位相振荡得十分迅速，以致被积函数在远小于保证(14.77)有效而需要的时间内实际上等于零. 因此可将积分的上下限取为无穷大而没有误差. 这种近似处理，只当频率 $\omega\sim(c/\rho)\sim\omega_0$ 时才失效. 但是，我们在 14.4 节中已经看到，对于相对论性粒子来说，全部频谱基本上处在高得多的频率上.

将变数换为 $x=\left[ct/\rho\left(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$，并引入参数 ξ：

$$\xi=\frac{\omega\rho}{3c}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2\right)^{\frac{3}{2}} \tag{14.80}$$

就可以将 $A_{\parallel}(\omega)$ 和 $A_{\perp}(\omega)$ 中的积分变换成下列形式：

$$\left.\begin{aligned} A_{\parallel}(\omega)&=\frac{\rho}{c}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}x\exp\left[i\frac{3}{2}\xi\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)\right]dx \\ A_{\perp}(\omega)&=\frac{\rho}{c}\theta\left(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2\right)^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\frac{3}{2}\xi\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)\right]dx \end{aligned}\right\} \tag{14.81}$$

(14.81)中的积分可与爱里(Airy)积分等同，或与修正贝塞耳函数等同：

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\infty}x\sin\left[\frac{3}{2}\xi\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)\right]dx&=\frac{1}{\sqrt{3}}K_{2/3}(\xi) \\ \int_0^{\infty}\cos\left[\frac{3}{2}\xi\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)\right]dx&=\frac{1}{\sqrt{3}}K_{1/3}(\xi) \end{aligned}\right\} \tag{14.82}$$

因此，每单位频率间隔每单位立体角的辐射能是

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}=\frac{e^2}{3\pi^2c}\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)^2\left(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2\right)^2\left[K_{2/3}^2(\xi)+\frac{\theta^2}{(1/\gamma^2)+\theta^2}K_{1/3}^2(\xi)\right] \tag{14.83}$$

方括号中的第一项相当于在轨道平面内偏振的辐射，第二项相当于与轨道平面垂直偏振的辐射.

我们现在来研究这个稍微复杂的结果. 我们先对所有的频率积分，因而发现能量的角分布为

$$\frac{dI}{d\Omega}=\int_0^{\infty}\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}d\omega=\frac{7}{16}\frac{e^2}{\rho}\frac{1}{\left(\frac{1}{\gamma^2}+\theta^2\right)^{5/2}}\left[1+\frac{5}{7}\frac{\theta^2}{\left(\frac{1}{\gamma^2}\right)+\theta^2}\right] \tag{14.84}$$

上式表明 14.3 节中已见过的典型特性. 当然，我们将圆运动的功

率公式(14.44)稍加推广并对所有时间积分，就可以直接得到(14.84)．和(14.83)一样，(14.84)的第一项对应于与轨道平面平行的偏振，第二项对应于与轨道平面垂直的偏振．对所有的角度积分后，我们发现平行偏振的辐射能是垂直偏振的七倍．相对论性运动电荷的辐射是很强烈地在运动平面内偏振的，但并不是完全在运动平面内偏振的．

(3.103)和(3.104)所概括的修正贝塞耳函数的性质表明，当$\xi\gg1$时，辐射强度可以忽略不计．我们从(14.80)看到，在角度很大时就是这种情形；频率愈高，临界角愈小(超过临界角的辐射可以忽略)．这表明辐射基本上局限在运动所在的平面内，如(14.84)所表明的，频率对c/ρ之比愈高，辐射区域就愈窄．可是，如果ω太大了，我们就看到ξ在一切角度上都很大．因而以这个频率辐射出去的总能量可以忽略．当$\theta=0$时，可用$\xi=1$来定义临界频率ω_c，如果超过这个频率，则在一切角度上的辐射都可以忽略．于是得到

$$\omega_c=3\gamma^3\left(\frac{c}{\rho}\right)=3\left(\frac{E}{mc^2}\right)^3\frac{c}{\rho} \tag{14.85}$$

我们看到，这临界频率和14.4节中的定性估计值(14.50)相符．如果电荷确实作圆周运动，则c/ρ为转动的基频ω_0．于是我们可以定义临界谐振频率$\omega_c=n_c\omega_0$，其谐数为

$$n_c=3\left(\frac{E}{mc^2}\right)^3 \tag{14.86}$$

由于在$\gamma\gg1$时绝大部分的辐射都在轨道平面内，所以估计一下(14.83)在$\theta=0$时的角分布是有益的．当频率低于临界频率($\omega\ll\omega_c$)时，我们得到

$$\left.\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}\right|_{\theta=0}\simeq\frac{e^2}{c}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\pi}\right]^2\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{14.87}$$

对于相反的极限来说，$\omega \gg \omega_c$，其结果是

$$\left.\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}\right|_{\theta=0} \simeq \frac{3}{2\pi}\frac{e^2}{c}\gamma^2\frac{\omega}{\omega_c}e^{-2\omega/\omega_c} \tag{14.88}$$

这些极限式表明：$\theta=0$ 处的谱，当频率低于临界频率时大致按 $\omega^{2/3}$ 随频率而增加，在 ω_c 附近达到极大值，超过这个频率，则按指数律降到零.

定出满足 $\xi(\theta_c)\simeq\xi(0)+1$ 的角度 θ_c，就可以估计固定频率的角度展开. 在低频区 $(\omega\ll\omega_c)$，$\xi(0)$ 非常小，因而 $\xi(\theta_c)\simeq 1$. 这就给出

$$\theta_c \simeq \left(\frac{3c}{\omega\rho}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{14.89}$$

我们注意，低频成分的发射角比平均值 $\langle\theta^2\rangle^{1/2}\sim\gamma^{-1}$ 宽得多. 在高频区 $(\omega>\omega_c)$，$\xi(0)$ 比 1 大得多. 于是强度近似地按下列规律随角度的增加而下降：

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} \simeq \left.\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}\right|_{\theta=0} \cdot e^{-3\omega\gamma^2\theta^2/\omega_c} \tag{14.90}$$

由此可见，以 $1/e$ 点来定义的临界角为

$$\theta_c \simeq \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\omega_c}{3\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{14.91}$$

上式表明高频成分局限在比平均值小得多的角域内. 图 14.10 定性地画出了当频率 ω 远小于、近似等于和远大于 ω_c 时的角分布. 图中用了自然的角单位 $\gamma\theta$.

将(14.83)对角度积分，可以求出当粒子经过时所发射的总能量的频率分布：

$$\frac{dI}{d\omega} = 2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}\cos\theta\, d\theta \simeq 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}d\theta \tag{14.92}$$

(记住 θ 是纬度). 我们可用角分布在 $\theta=0$ 的值(14.87)和临界角

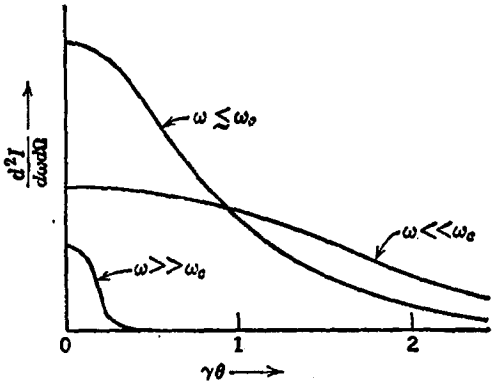


图 14.10 微分频谱和角度的函数关系. 当频率和临界频率 ω_c 差不多时，辐射局限在约为 γ^{-1} 的角度之内. 当频率小(大)得多时，角度展开就较大(小).

θ_c(14.89)来估计低频区的积分. 于是得到

$$\frac{dI}{d\omega}\sim 2\pi\theta_c\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}\bigg|_{\theta=0}\sim\frac{e^2}{c}\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{14.93}$$

上式表明，当 $\omega\ll\omega_c$ 时，谱按 $\omega^{1/3}$ 增加. 这式子给出当频率低于 ω_c 时的宽而平坦的谱. 在高频的极限情况($\omega\gg\omega_c$)下，我们可将(14.90)遍历角度积分，从而得到相当精确的结果：

$$\frac{dI}{d\omega}\simeq\sqrt{3\pi}\frac{e^2}{c}\gamma\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-2\omega/\omega_c} \tag{14.94}$$

将(14.83)对角度作适当的积分后，可得下式①：

$$\frac{dI}{d\omega}=2\sqrt{3}\frac{e^2}{c}\gamma\frac{\omega}{\omega_c}\int_{\frac{2\omega}{\omega_c}}^{\infty}K_{5/3}(x)dx \tag{14.95}$$

---

① 施温格以稍不同的方法导出了这个结果和微分分布(14.83)，参看 J. Schwinger, *Phys. Rev.* **75**, 1912 (1949). 后来，施温格又证明了：经典结果的第一级量子力学改正，要在 $\omega^{-1}d^2I/d\omega d\Omega$ 或 $\omega^{-1}dI/d\omega$ 中施行这样的替换，即 $\omega\to\omega(1+\hbar\omega/E)$ [*Proc. Nat. Acad. Sci.* **40**, 132(1954)]，因而倘若 $\hbar\omega_c\ll E$，或相当于 $\gamma\ll(\rho mc/\hbar)^{1/2}$ 时，这种改正可忽略不计.

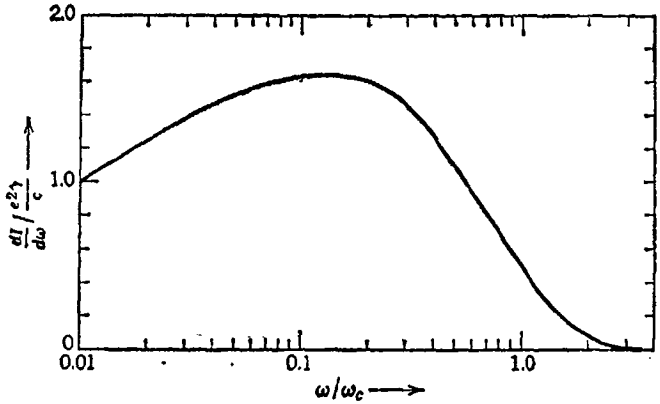


图 14.11　同步加速器辐射谱(每单位频率间隔的辐射能)和频率的函数关系. 强度是以 $\gamma e^2/c$ 为单位来量度的, 而频率则以 ω_c(14.85)为单位来表示的.

在 $\omega \ll \omega_c$ 的极限情况下, 上式化为(14.93)式, 但带上一个数值系数 3.25; 当 $\omega \gg \omega_c$ 时, 上式等于(14.94). 图 14.11画出 $dI/d\omega$ 和频率的函数关系. 巅值强度的量级为 $e^2\gamma/c$, 总能量的量级为 $e^2\gamma\omega_c/c = 3e^2\gamma^4/\rho$. 这是和圆形加速器中每转一周的辐射损失值 $4\pi e^2\gamma^4/3\rho$(14.32)一致.

(14.83)和(14.95)所表示的辐射, 因为是在电子同步加速器中最先观察到的(1948 年), 所以叫做同步加速器辐射. 但理论结果却早得多, 肖特(Schott)在 1912 年已经求得关于圆周运动的理论结果, 虽然将肖特等的结果写成现今适用的形式应归功于施温格(参看第 252 页脚注援引的文献). 对于周期性的圆周运动, 由于频谱中的频率都是基频 $\omega_0 = c/\rho$ 的整数倍, 所以频谱实际上是分立的. 因为带电粒子以每秒 $c/2\pi\rho$ 周的速率重复地运动, 所以用频率为 $n\omega_0$ 的辐射功率的角分布代替粒子在每次飞过时每单位频率间隔的辐射能来进行讨论比较方便. 我们只要以重复率

$c/2\pi\rho$ 去乘 $dI/d\omega$(14.95)或 $d^2I/d\omega d\Omega$(14.83)，将能量换算为功率，并乘以 $\omega_0=c/\rho$，将每单位频率间隔换算为每谐波，就可以求出谐波功率表式．于是，

$$\left.\begin{aligned}\frac{dP_n}{d\Omega}&=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{c}{\rho}\right)^2\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}\Big|_{\omega=n\omega_0}\\ P_n&=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{c}{\rho}\right)^2\frac{dI}{d\omega}\Big|_{\omega=n\omega_0}\end{aligned}\right\}\qquad(14.96)$$

有人已经将这些结果跟各种能量同步加速器的实验作了比较①．角分布、偏振分布和频率分布全部跟理论很好符合．由于图14.11所示的宽广频率分布遍及可见光区、紫外区和X射线区，所以同步加速器辐射是研究固体光学性质的一种有用工具．有几种利用同步加速器辐射效应而设计的光学装置，已用作高能同步加速器或储存环的附属设备，高能加速器及储存环的主要目的是研究基本粒子．高德温②的论文用这种观点详细讨论了同步加速器辐射．

人们已经在与日斑、蟹状星云有关的天文学领域内观测到同步加速器辐射，并且从木星的粒子辐射带也已观测到同步加速器辐射．对蟹状星云来说，辐射谱的频率范围从射频一直伸展到远紫外频率，并显示出很强的偏振．根据详细的观测，可以得到以下结论：能量高到 10^{12} 电子伏特的电子，在磁感应强度为 10^{-3} 高斯量级的磁场中沿圆形或螺旋线轨道运动时，会发出同步加速器辐射(参看习题 14.15)．来自木星的～10^3兆赫的射电波是由范艾仑带中俘获的高能电子所产生的，范艾仑带离木星表面的距离为几个木星半径 (R_J) 到 30-100 个木星半径 (R_J)．来自在 $2.8R_J$ 以内

① F. R. Elder, R. V. Langmuir, and H. C. Pollock, *Phys. Rev.*, **74**, 52 (1948); D. H. Tomboulain and P. L. Hartman, *Phys. Rev.*, **102**, 1423(1956); G. Bathow, E. Freytag, and R. Haensel, *J. Appl. Phys.*, **37**, 3449(1966).

② R. P. Godwin 的论文刊载在 *Springer Tracts in Modern Physics*, Vol. 51, G. Höhler 主编, Springer-Verlag, Berlin(1969), 第 1 页至第 73 页.

通过木星的一艘宇宙飞船（先锋10号，1973年12月4日与木星相遇）的数据表明，有一个近似的偶极子磁场，其偶极矩为$4R_J^3$高斯．人们曾观测到能量大于3兆电子伏特的可观的俘获电子流，其中有百分之几的俘获电子具有大于50兆电子伏特．取1高斯为典型磁场和5兆电子伏特为典型能量，方程(12.42)和(14.85)表明，螺旋线半径为100-200米量级，$\omega_0 \sim 2\times10^6$秒$^{-1}$，且约有$10^3$个显著的谐波被辐射出来．

14.7 电磁波的汤姆孙散射

如果单色平面电磁波入射到电荷为e、质量为m的自由粒子上，这粒子就被加速而发出辐射．这种辐射将沿着与入射平面波不同的诸方向发射出去，但在粒子作非相对论性运动时，辐射波的频率和入射波的频率相同．因此，可以把整个过程描写成入射波的散射．

按照(14.20)，一个作非相对论性运动、电荷为e的粒子所放出的偏振态为ϵ的瞬时辐射功率是

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{e^2}{4\pi c^3}|\epsilon^*\cdot\dot{\mathbf{v}}|^2 \tag{14.97}$$

加速度是由入射平面波引起的．如果入射平面波的传播矢量为$\mathbf{k}_0$，其偏振矢量为ϵ_0，则电场强度可以写成

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\epsilon_0 E_0 e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{x}-i\omega t} \tag{14.98}$$

于是，根据非相对论性运动的力方程，可得加速度：

$$\dot{\mathbf{v}}(t)=\epsilon_0\frac{e}{m}E_0 e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{x}-i\omega t} \tag{14.99}$$

如果我们假定在一周振荡中电荷移动的距离比波长小得多，则$|\dot{\mathbf{v}}|^2$对时间的平均值为$\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\dot{\mathbf{v}}\cdot\dot{\mathbf{v}}^*)$．于是每单位立体角的平均功率可以表示为

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c}{8\pi} |E_0|^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |\epsilon^* \cdot \epsilon_0|^2 \qquad (14.100)$$

既然把这过程当作散射过程看待最为简单，所以引进散射截面是方便的. 犹如第九章一样，散射截面的定义是

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{辐射能/单位时间/单位立体角}}{\text{入射能流的能量/单位面积/单位时间}} \qquad (14.101)$$

入射能流就是平面波的对时间平均的坡印廷矢量，即 $c|E_0|^2/8\pi$. 因此，我们从(14.100)得到微分散射截面，

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |\epsilon^* \cdot \epsilon_0|^2 \qquad (14.102)$$

散射的几何情况如图 14.12 所示，图中所选取的偏振矢量是出射

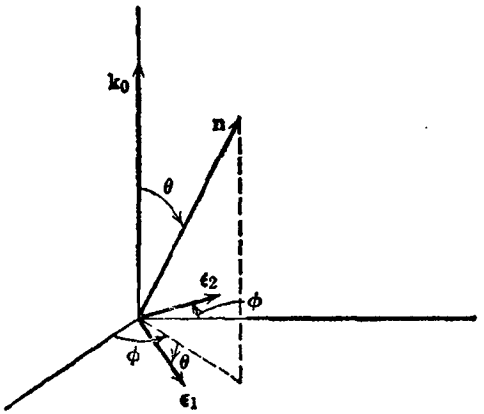


图 14.12

波的偏振矢量. 偏振矢量 ϵ_1 是在包含 n 和 $\mathbf{k}_0$ 的平面内；ϵ_2 与此平面垂直. 用平行于坐标轴的诸单位矢量来表示，ϵ_1 和 ϵ_2 是

$$\epsilon_1 = \cos\theta(\mathbf{e}_x\cos\phi + \mathbf{e}_y\sin\phi) - \mathbf{e}_z\sin\theta$$

$$\epsilon_2 = -\mathbf{e}_x\sin\phi + \mathbf{e}_y\cos\phi$$

当偏振矢量平行于 x 轴的一个线偏振波入射时，对诸终偏振态求和的角分布为$(\cos^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\phi)$，而当偏振矢量平行于 y 轴的

一个线偏振波入射时，对诸终偏振态求和的角分布为$(\cos^2\theta\sin^2\phi+\cos^2\phi)$．因此，对于非偏振入射波来说，散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta) \qquad (14.103)$$

上式叫做自由电荷对电磁波散射的汤姆孙公式，它适用于电子对X射线的散射或质子对γ射线的散射．角分布如图 14.13 的实线所示．总散射截面叫做汤姆孙截面，它是

$$\sigma_T=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \qquad (14.104)$$

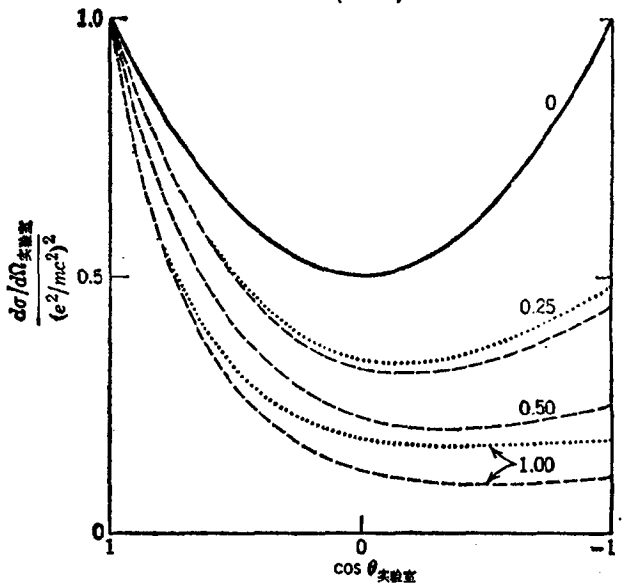


图 14.13　一个最初在实验室中静止的带电点粒子的非偏振辐射的微分散射截面．实曲线是经典的汤姆孙结果．虚曲线是对一个自旋为零的粒子求得的量子力学结果，数字表示$\hbar\omega/mc^2$的值．当 $\hbar\omega/mc^2=0.25, 1.0$ 时，点曲线表示对自旋为 1/2 的点粒子(电子)所求得的结果．

电子的汤姆孙截面等于 0.665×10^{-24} 厘米^2．$e^2/mc^2=2.82\times10^{-13}$ 厘米这个长度单位叫做经典电子半径，因为电子全部电荷的经典分布必须具有与此同数量级的半径，如果电子的静电自具能等于

电子质量的话.

经典汤姆孙公式只在低频率时才有效，这时入射光子的动量可以忽略不计. 当光子动量 $\hbar\omega/c$ 变得跟 mc 差不多，或比 mc 大时，情况就发生变化. 这些变化之所以能叫做量子力学效应，乃因将光子看作质量为零、动量和能量不为零的粒子，这无疑是量子力学的概念(动摇了牛顿力学的基础!)，但是假定大部分变化是纯运动学的. 最重要的变化是康普顿用实验观测到的. 由于碰撞时带电粒子的反冲，散射光子的能量或动量小于入射光子的能量. 将二体相对论性运动学应用到这一过程，便知出射波数与入射波数之比可由康普顿公式给出，即

$$\frac{k'}{k}=\frac{1}{1+\dfrac{\hbar\omega}{mc^2}(1-\cos\theta)}$$

式中 θ 为实验室(靶所静止的参照系)中的散射角. 由量子力学的计算得到电荷为 e、质量为 m、自旋为零的点粒子对光子的散射截面如下：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\left(\frac{k'}{k}\right)^2|\epsilon^*\cdot\epsilon_0|^2 \qquad (14.105)$$

上式与经典表式(14.102)相当. 在辐射规范下，量子力学矩阵元与经典振幅相同. 因子 $(k'/k)^2$ 完全来自相空间. 这个因子的出现，使得微分截面在大角度时相对于汤姆孙结果而减少，如图 14.13 的虚曲线所示. 图中还用点曲线表示光子-电子散射的量子力学结果，这种散射也就是一个由狄喇克方程描述的、自旋为 1/2 的点粒子对光子的散射. 一般地说，这些曲线是与自旋为零的粒子的曲线相似的，但在大角度时由于电子磁矩引起的散射，微分截面要稍微大些①. (14.105) 对角度的积分是一个初等积分，然而比较

① 对电子来说，截面表式相当于在(14.105)中将 $|\epsilon^*\cdot\epsilon_0|^2$ 用

$$|\epsilon^*\cdot\epsilon_0|^2+\frac{(k-k')^2}{4kk'}$$

来替代. 这就是所谓的康普顿散射的克莱因-仁科公式.

复杂. 我们只引用当 $\hbar\omega \ll mc^2$ 和 $\hbar\omega \gg mc^2$ 时的两种极限形式:

$$\frac{\sigma}{\sigma_T}=\begin{cases}1-2\dfrac{\hbar\omega}{mc^2}+\cdots, & \text{当 } \hbar\omega \ll mc^2 \text{ 时}\\ \dfrac{3}{4}\dfrac{mc^2}{\hbar\omega}, & \text{当 } \hbar\omega \gg mc^2 \text{ 时}\end{cases} \tag{14.106}$$

对于电子对光子的散射来说,低频时的极限形式相同,高频时有一个附加的乘数因子 $\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\hbar\omega}{mc^2}\right)\right]$.

对质子来说,当光子能量约为 100 兆电子伏特以上时,散射截面就不遵从汤姆孙公式. 100 兆电子伏特这个数值,远低于根据电子康普顿效应类推而预计出来的临界能量 $\hbar\omega \sim Mc^2 \sim 1$ 千兆电子伏特,原因在于:电子乃是一个除电磁相互作用外别无其它相互作用的点粒子,质子不像电子那样,而是一个复杂的实体,具有与 π 介子强相互作用所引起的扩展的电荷分布,其半径约为 0.8×10^{-13} 厘米. 跟汤姆孙散射的偏离(截面值的迅速增加),发生在光子能量约等于 π 介子的静止能量(140 兆电子伏特)时.

14.8 准自由电荷对辐射波的散射;相干与不相干散射

在原子对 X 射线的散射中,至少对于轻元素来说,在宽广的角度范围内可以观察到角分布(14.103). 但在向前方向上,每个电子的散射截面迅速增加到比汤姆孙截面大很多的数值. 原因在于:在向前方向上由所有电子产生的辐射振幅发生了相干叠加. 从 (14.18)可以看到,若干自由的非相对论性带电粒子产生的辐射场是

$$\mathbf{E}_a=\frac{1}{c}\sum_j e_j\left[\frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}_j)}{R_j}\right]_{\text{推迟}} \tag{14.107}$$

利用典型粒子的加速度公式(14.99)可得

$$\mathbf{E}_a=\frac{E_0}{c^2}\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\epsilon_0)\sum_j\frac{e_j^2}{m_j}\frac{\exp\left[i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{x}_j-i\omega\left(t-\frac{R_j}{c}\right)\right]}{R_j} \tag{14.108}$$

在计算辐射时，用(14.63)式来近似地代表指数中的 R_j 已经足够. 然后，仿照从(14.97)到(14.102)的步骤，我们求得散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left|\sum_j\frac{e_j^2}{m_jc^2}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}_j}\right|^2\cdot|\epsilon^*\cdot\epsilon_0|^2 \tag{14.109}$$

式中

$$\mathbf{q}=\frac{\omega}{c}\mathbf{n}-\mathbf{k}_0 \tag{14.110}$$

表示散射过程中波矢的改变.

方程(14.109)适用于瞬时位置在 $\mathbf{x}_j$ 上的自由带电粒子. 比方说，原子中的电子就不是自由的. 但是，如果入射波的频率比本征束缚频率高得多，我们就可以把被宽度有限的脉冲所加速的粒子当作自由粒子. 所以(14.109)适用于束缚带电粒子对高频(跟束缚频率相比)辐射波的散射. 在跟实验比较以前唯一还要做的事是将(14.109)对束缚系统内所有粒子的位置求平均. 因此，可观测的散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left\langle\left|\sum_j\frac{e_j^2}{m_jc^2}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}_j}\right|^2\right\rangle|\epsilon^*\cdot\epsilon_0|^2 \tag{14.111}$$

式中的符号< >表示对 $\mathbf{x}_j$ 的一切可能值求平均.

截面(14.111)随$|\mathbf{q}|$值的不同而呈现极不相同的特性. 坐标 $\mathbf{x}_j$ 的量值跟束缚系统的线度差不多. 如果我们把这线度叫做 a，那末在 $qa\ll1$ 和 $qa\gg1$ 这两个区域内截面的特性是迥然不同的. 如果散射角是 θ，则 q 的量值是 $2k\sin(\theta/2)$. 因此划分这两个区域的角度满足

$$2ka\sin\frac{\theta}{2}\sim 1 \tag{14.112}$$

如果频率足够低以致 $ka\ll 1$，那末由 $qa\ll 1$ 这一极限所得到的结果将适用于一切角度．但对于 $\kappa a\gg 1$ 处的频率，有一个小于

$$\theta_e\sim\frac{1}{\kappa a} \tag{14.113}$$

的向前角度范围，在这范围内，极限 $qa\ll 1$ 适用，同时还存在较宽广的角度范围，在其中极限 $qa\gg 1$ 适用．

当 $qa\ll 1$ 时，(14.111)中那些指数的宗量都很小，所以我们可以令这些指数近似等于 1．于是微分散射截面变成

$$\lim_{qa\to 0}\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left|\sum_j\frac{e_j^2}{m_jc^2}\right|^2|\epsilon^*\cdot\epsilon_0|^2=Z^2\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2|\epsilon^*\cdot\epsilon_0|^2 \tag{14.114}$$

这里的后一式适用于原子序数为 Z 的原子中的电子．这式子显示了所有粒子的相干效应，给出的强度相应于粒子数的平方与单个粒子的散射强度之积．

在 $qa\gg 1$ 的相反的极限情况下，各指数的宗量很大，并且数值相差很远．因此在(14.114)式里的和的平方中交叉项的平均值为零．只有各个完全平方项保留下来．因此截面是：

$$\lim_{qa\to\infty}\frac{d\sigma}{d\Omega}=\sum_j\left(\frac{e_j^2}{m_jc^2}\right)^2|\epsilon^*\cdot\epsilon_0|^2=Z\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2|\epsilon^*\cdot\epsilon_0|^2 \tag{14.115}$$

这里的后一式仍适用于原子中的电子．这结果相当于个别粒子的散射的非相干性叠加．

我们可以用(13.95)作为原子半径来估计 X 射线被原子散射的临界角(14.113)．我们得到下列数值，

$$\theta_c \sim \frac{Z^{1/3}}{\hbar\omega(\text{千电子伏特})} \tag{14.116}$$

当角度小于 θ_c 时，截面迅速增到跟(14.114)差不多的数值，在大角度下则为汤姆孙结果的 Z 倍，即(14.115)．对于高能X射线或 γ 射线来说，则用克莱因-仁科公式计算，如图 14.13 所示

14.9 渡越辐射

一个在自由空间中作匀速直线运动的带电粒子是不会辐射的．但是，13.5 节里已经证明：如果一个粒子是在媒质中以恒定速度运动，并且其速率大于光在该媒质中的相速度，那末它就能辐射．这种辐射是契仑柯夫辐射，其特征发射角为

$$\theta_0 = \sec^{-1}(\beta\epsilon^{1/2}).$$

另外还有一种辐射，叫渡越辐射，这是金斯堡(Ginsburg)和夫兰克(Frank)在 1946 年最先指出的，当一个带电粒子从一媒质突然进入另一媒质时，都会发出这种辐射．在第一媒质中远离边界的地方，粒子具有一定的场，这些场表征粒子的运动和第一媒质的性质．后来，当粒子深入第二媒质时，它的场表征粒子的运动和第二媒质的性质．即使在整个过程中粒子都作匀速运动，只要两种媒质具有不同的电磁性质，初场和终场就将不同．显然，当粒子趋近并通过分界面时，场必须自行调整．在此调整过程中，一部分场就作为渡越辐射而发出．

毋需进行精心的计算，就可以了解渡越辐射的重要特征．① 我们考虑一个电荷为 ze 的相对论性粒子，它以速率 $v=\beta c$ 沿 z 轴从真空($z<0$)正入射到折射率为 $n(\omega)$ 的半无限的均匀媒质($z>0$)，如图 14.14 所示．带电粒子的运动电磁场在媒质中感生一个与时

① 各地的同事们提出了许多问题，魏斯考普(V. F. Weisskopf)在由他所主持的一个研究班上介绍了一种类似的讨论，这些都使我深深感到有必要进行定性的讨论．

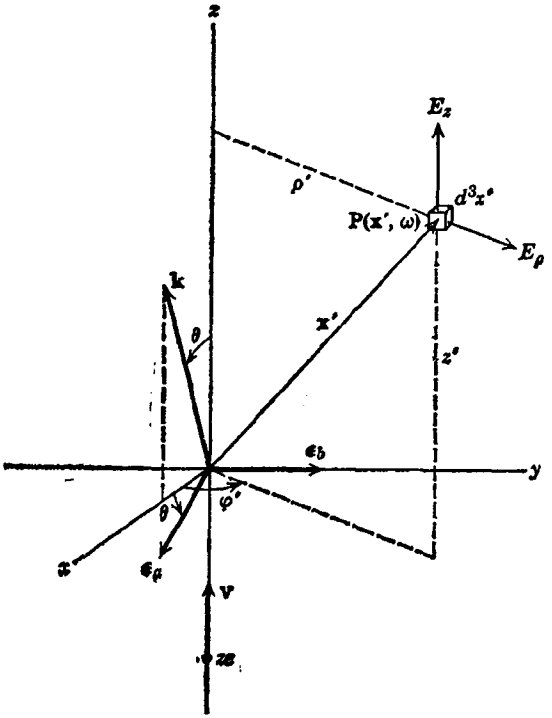


图 14 14　电荷为 Ze、速度为 v 的带电粒子沿 z 轴正入射到半无限均匀介电媒质，后者占据 $z>0$ 的半空间. 图中用波矢 k 和有关的偏振矢量 ϵ_a、ϵ_b 来表示在与粒子运动方向的夹角为 θ 的方向上观测到的渡越辐射.

间相关的电极化强度 $\mathbf{P}(\mathbf{x}', t)$. 由于极化而发出辐射. 来自空间不同点的辐射场，在粒子运动路线附近相干叠加，并叠加到媒质内一定的深度，结果引起渡越辐射，其角分布和强度具有一定的特征.

产生明显的辐射强度需要一定的相干性，角分布和形成长度 D 是这种相干性要求的直接结果. 入射粒子的激发场由(11.152)给出. 在点 $\mathbf{x}'=(z', \rho', \phi')$ 处入射粒子激发场对

$$[\rho'^2+\gamma^2(z'-vt)^2]$$

的乘幂倒数的依赖关系表明，频率为ω的傅里叶分量将(a)沿着z方向以速度$\mathbf{v}$运动，所以其振幅正比于$e^{i\omega z'/v}$；(b)只在粒子运动路线往外约为$\rho'_{\max}\simeq\gamma v/\omega$的径向距离上才有显著的量值．另一方面，在$\mathbf{x}'$处，与时间有关的极化产生一个波，它在辐射区内的形式为

$$A\frac{e^{ikr}}{r}\cdot e^{-ik(z'\cos\theta+\rho'\sin\theta\cos\phi')}$$

这里A正比于入射粒子的激发场，$k=n(\omega)\omega/c$，并假定辐射是在前向半球内、x-z平面上被观测的．只要粒子的激发场和产出波之积的位相在整个区域内不发生明显改变，那末就会发生来自媒质不同点的产出波的明显相干叠加．振幅中有关的因子为

$$e^{i(\omega/v)z'}e^{-i(\omega/c)n(\omega)\cos\theta z'}e^{-i((\omega/c)n(\omega)\rho'\sin\theta\cos\phi'}$$

$$=e^{i(\omega/c)(1/\beta-n(\omega)\cos\theta)z'}e^{-i(\omega/c)n(\omega)\rho'\sin\theta\cos\phi'}$$

只当含ρ'的位相在明显的激发场所在区域$0<\rho'\lesssim\rho'_{\text{最大}}$内等于1或小于1时，在径向方向上将保持相干性．于是，当$\gamma\gg1$时，除非

$$\frac{\omega}{c}n(\omega)\frac{\gamma v}{\omega}\sin\theta\lesssim1$$

或

$$n(\omega)\gamma\theta\lesssim1 \qquad (14.117)$$

否则辐射将不是明显的．因此，如同一切相对论性辐射过程一样，角分布局限于前向锥体$\gamma\theta\lesssim1$内．

振幅中与z'有关的因子是

$$e^{i(\omega/c)(1/\beta-n(\omega)\cos\theta)z'}$$

所以，保持相干性的深度$d(\omega)$为

$$\frac{\omega}{c}\left(\frac{1}{\beta}-n(\omega)\cos\theta\right)d(\omega)\simeq1$$

对于不发生契仑柯夫辐射的光频区以上的频率来说，我们近似有

$n(\omega)\simeq 1-(\omega_p^2/2\omega^2)$，对于一个相对论性粒子来说，我们有$\beta^{-1}\simeq 1+1/2\gamma^2$，而且$\cos\theta\simeq 1$，遂得

$$d(\nu)\simeq\frac{2\gamma c/\omega_p}{\nu+\nu^{-1}} \tag{14.118}$$

式中我们已经引进一个无量纲的频率变量

$$\nu=\frac{\omega}{\gamma\omega_p} \tag{14.119}$$

我们将形成长度D定义为$d(\nu)$(作为ν的函数)的最大值：

$$D=d(1)=\frac{\gamma c}{\omega_p} \tag{14.120}$$

对密度的量级为1的物质来说，等离子体频率为

$$\omega_p\simeq 3\times 10^{16}\text{秒}^{-1},$$

对应的能量为$\hbar\omega_p\simeq 20$电子伏特．于是，$c/\omega_p\simeq 10^{-6}$厘米，而且，即使$\gamma\gtrsim 10^3$，形成长度D也只不过为几十微米．对标准温度压强下的空气来说，由于密度的减少，D要大30倍．

在粒子路径附近，并且靠近频率为ω的渡越辐射的发射表面处，相干体积显然为

$$V(\omega)\sim\pi\rho_{\text{最大}}^2(\omega)d(\omega)\sim 2\pi\gamma\left(\frac{c}{\omega_p}\right)^3\frac{1}{\nu(1+\nu^2)}$$

当$\nu>1$时，这个体积的大小迅速减少．因此，我们可以预期，当没有补偿因素时，渡越辐射谱将扩展至$\nu\simeq 1$，但不明显超出$\nu\simeq 1$．

我们已经对渡越辐射的机制及其主要特征有了一些了解．渡越辐射是局限在向前方向的很小角度范围内($\gamma\theta\lesssim 1$)．它是在粒子路径附近、深度为形成长度D的一块体积很小的媒质中，随时间变化的极化的相干辐射所产生的．它的谱，扩展至频率$\omega\sim\gamma\omega_p$．可以继续进行定性讨论，并得到总辐射能的估算值，但是我们要让读者开始锻炼从分析具体问题来领会普遍规律的能力．所以我们不去继续进行定性讨论，而转入对实际现象进行计算．

渡越辐射的严密计算是很复杂的．本章末列出了有关的一些参考文献．我们满足于一种近似计算，这种近似计算对于大部分的应用来说是足够的，而且从物理概念上来看也是很透彻的．它是以如下的观测为根据的：当频率在光学共振区以上时，折射率与1相差不是很多的．在这样的频率下，入射粒子的场在媒质中和在真空中相差不多．这意味着，感生极化强度 $\mathbf{P}(\mathbf{x}', \omega)$ 的傅里叶分量可以按下式近似计算：

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}', \omega) \simeq \left[\frac{\epsilon(\omega)-1}{\pi}\right]\mathbf{E}_i(\mathbf{x}', \omega) \tag{14.121}$$

式中 $\mathbf{E}_i$ 是入射粒子在真空中的电场的傅里叶变换．然而，因极化而产生的辐射波的传播，当然一定要用对应于媒质的波数

$$k=\omega n(\omega)/c$$

来描写．这是因为位相之差很显著，正如定性讨论中已经看到的．

根据(9.18)，由 $\mathbf{x}'$ 处体积元 d^3x' 中的极化强度 $\mathbf{P}(\mathbf{x}', \omega)d^3x'$ 所产生的偶极辐射场为

$$d\mathbf{E}_{\text{辐射}}=\frac{e^{ikR}}{R}(\mathbf{k}\times\mathbf{P})\times\mathbf{k}d^3x'$$

式中 $\mathbf{k}$ 为观测方向上的波矢，$R\simeq r-\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{x}'$．将(14.121)代入，并遍及 $z'>0$ 的半空间积分，得到频率为 ω 的总辐射场如下：

$$\mathbf{E}_{\text{辐射}}=\frac{e^{ikr}}{r}\left[\frac{\epsilon(\omega)-1}{4\pi}\right]k^2\int_{z'>0}(\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}_i)\times\hat{\mathbf{k}}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}d^3x'$$

利用近似式

$$\epsilon(\omega)\simeq 1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \tag{14.122}$$

当 $\omega\gg\omega_p$ 时辐射场就变成

$$\mathbf{E}_{\text{辐射}}\simeq\frac{e^{ikr}}{r}\left(\frac{-\omega_p^2}{4\pi c^2}\right)\int_{z'>0}(\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}_i)\times\hat{\mathbf{k}}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}d^3x' \tag{14.123}$$

根据(14.52)和(14.60)，上式意味着，辐射能对角度和能量的微分谱为

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}=\frac{c}{32\pi^3}\left(\frac{\omega_p}{c}\right)^4\left|\int_{z>0}[\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}_i(\mathbf{x},\omega)]\times\hat{\mathbf{k}}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d^3x\right|^2 \tag{14.124}$$

注意：激发场 $\mathbf{E}_i$ 是由 11.10 节的场的傅里叶变换(14.54)确定的，13.2 节里已经用到这些场．在我们的近似处理中，不必采用13.4节的较精确的场．用图 14.14 的记号，入射场为

$$\begin{aligned}E_\rho(\mathbf{x},\omega)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{ze\omega}{\gamma v^2}e^{i\omega z/v}K_1\left(\frac{\omega\rho}{\gamma v}\right)\\ E_z(\mathbf{x},\omega)&=-i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{ze\omega}{\gamma^2v^2}e^{i\omega z/v}K_0\left(\frac{\omega\rho}{\gamma v}\right)\end{aligned} \tag{14.125}$$

我们可以计算(14.124)中的积分如下：首先利用这样一个事实，即$\mathbf{E}_i$ 只通过因子 $e^{i\omega z/v}$ 与 z 有依赖关系，并且写出

$$\begin{aligned}\mathbf{F}&\equiv\int_{z>0}[\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}_i(\mathbf{x},\omega)]\times\hat{\mathbf{k}}_e{}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d^3x\\ &=\iint dxdy[\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}_i]_{z=0}\times\hat{\mathbf{k}}e^{-ik\sin\theta x}\int_0^\infty dze^{i(\omega/v-k\cos\theta)z}\\ &=\frac{i}{\left(\frac{\omega}{v}-k\cos\theta\right)}(1-e^{i(\omega/v-k\cos\theta)Z})\int dx\int dy[\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}_i]_{z=0}\\ &\quad\times\hat{\mathbf{k}}e^{-ik\sin\theta x}\end{aligned}$$

z 的积分上限 Z 从数学上说是这样一个量，它表示：在 z 值达到 $Z\gtrsim D$ 以前，来自不同 z 值的贡献叠加起来，使振幅逐渐增加；超过深度 D，迅速转动的位相就阻止振幅进一步增加．对于实际所遇到的半无限媒质(厚度比 D 大得多的平板)，基于物理上的考虑，我们删去 Z 的振荡指数①；当考虑单一分界面时，求得

① 对于厚度不大于 D 的箔片来说，或者当使用叠层箔时，必须进行较复杂的处理，考虑对厚度的依赖性．参看习题 14.18 和 14.19.

$$\mathbf{F}=\frac{i}{\left(\frac{\omega}{v}-k\cos\theta\right)}\iint dxdy e^{-ik\sin\theta x}[\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}_t]_{z=0}\times\hat{\mathbf{k}}$$

我们可以用图 14.14 所示的分量 E_ρ、E_z 和偏振矢量 ϵ_a、ϵ_b 来表示电场的垂直于 $\hat{\mathbf{k}}$ 的分量:

$$[\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}_t]\times\hat{\mathbf{k}}=(E_\rho\cos\theta\cos\phi-E_z\sin\theta)\,\epsilon_a+E_\rho\sin\phi\,\epsilon_b$$

式中 θ 为 $\hat{\mathbf{k}}$ 的极角，积分的方位角上的撇号已经去掉. 由于平行于 ϵ_b 的分量对 y 呈奇性，所以该分量的积分等于零. 于是，将(14.125)代入，我们有

$$\mathbf{F}=\frac{i\epsilon_a}{\left(\frac{\omega}{v}-k\cos\theta\right)}\iint dxdy e^{-ik\sin\theta x}$$

$$\left[\cos\theta\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}E_\rho-\sin\theta E_z\right]_{z=0}$$

$$=\frac{i\epsilon_a}{\left(\frac{\omega}{v}-k\cos\theta\right)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{ze\omega}{\gamma v^2}\iint dxdy e^{-ik\sin\theta x}$$

$$\left[\cos\theta\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}K_1\left(\frac{\omega}{\gamma v}\sqrt{x^2+y^2}\right)\right.$$

$$\left.+i\frac{\sin\theta}{\gamma}K_0\left(\frac{\omega}{\gamma v}\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]$$

利用

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}K_1\left(\frac{\omega}{\gamma v}\sqrt{x^2+y^2}\right)=-\frac{\gamma v}{\omega}\frac{\partial}{\partial x}K_0\left(\frac{\omega}{\gamma v}\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

将上式右边第一项对 x 分部积分，而把第一项改写成 K_0 的积分，就得

$$\mathbf{F}=\epsilon_a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{ze\sin\theta}{v\left(\frac{\omega}{v}-k\cos\theta\right)}\left(k\cos\theta-\frac{\omega}{v\gamma^2}\right)$$

$$\iint dxdy\,e^{-ik\sin\theta x}K_0\left(\frac{\omega}{\gamma v}\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

根据余弦变换

$$\int_0^\infty K_0(\beta\sqrt{z^2+t^2})\cos(\alpha z)dz$$
$$=\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\exp\left(-|t|\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right) \tag{14.126}$$

可以算出剩下的积分. 于是, F 的结果是

$$\mathbf{F}=\epsilon_a\frac{2\sqrt{2\pi}\,ze\sin\theta\left(k\cos\theta-\dfrac{\omega}{v\gamma^2}\right)}{v\left(\dfrac{\omega}{v}-k\cos\theta\right)\left(\dfrac{\omega^2}{\gamma^2v^2}+k^2\sin^2\theta\right)} \tag{14.127}$$

在相对论性运动($\gamma\gg1$)、小角度($\theta\ll1$)和高频($\omega\gg\omega_p$)的近似处理下, 上式变成

$$\mathbf{F}\simeq\epsilon_a 4\sqrt{2\pi}\frac{ze}{c}\left(\frac{c}{\omega_p}\right)^2\frac{\gamma}{\nu^2}\frac{\sqrt{\eta}}{\left(1+\dfrac{1}{\nu^2}+\eta\right)(1+\eta)} \tag{14.128}$$

式中 ν 是无量纲频率变量(14.119), $\eta=(\gamma\theta)^2$ 是一个适当的角度变量. 利用 $d\Omega=d\phi d(\cos\theta)\simeq d\phi d\eta/2\gamma^2$, 能量按 ν 和 η 的分布是

$$\frac{d^2I}{d\nu d\eta}=\frac{\pi}{\gamma^2}\cdot\gamma\omega_p\cdot\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}$$
$$\simeq\frac{z^2e^2\gamma\omega_p}{\pi c}\cdot\left[\frac{\eta}{\nu^4\left(1+\dfrac{1}{\nu^2}+\eta\right)^2(1+\eta)^2}\right] \tag{14.129}$$

对固定 ν 值的角分布如图 14.15 所示. 在低频时, 谱在 $\eta\simeq1$ 处有一巅峰, 然后按 η^{-1} 比较缓慢地下降, 一直到 η 值达到 $\eta=\nu^{-2}$ 为止. 继而又按 η^{-3} 下降. 当 $\nu\gtrsim1$ 时, 谱在 $\eta\gtrsim\frac{1}{3}$ 处有一巅峰, 在 $\eta\gg1$ 处按 η^{-3} 下降. 在 $\eta=0$ 处, (14.129)中的分母为 $(1+\nu^2)^2$, 表明在 $\nu\gg1$ 时在任何角度上强度都可以忽略不计[与上述相干体积 $V(\omega)$ 比较].

对角度变量 η 积分而得的能谱为

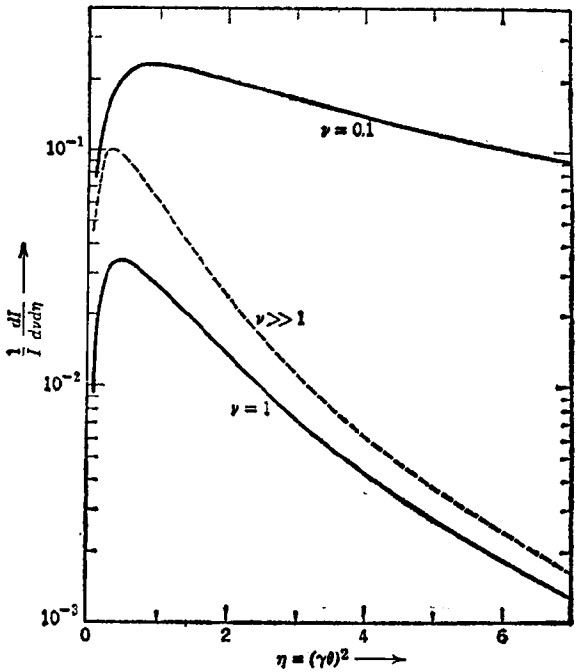


图 14.15　当 $\nu=0.1$, $\nu=1$ 和 $\nu\gg1$ 时渡越辐射的角分布. 实曲线是归一化角分布, 即(14.129)与(14.132)之比. 虚曲线是在 $\nu\to\infty$ 极限情况下上述比值与 ν^4 之积.

$$\frac{dI}{d\nu}=\frac{z^2e^2\gamma\omega_p}{\pi c}\left[(1+2\gamma^2)\ln\left(1+\frac{1}{\nu^2}\right)-2\right] \tag{14.130}$$

当 ν 很小和 ν 很大时, 上式取下列极限值:

$$\frac{dI}{d\nu}\simeq\frac{z^2e^2\gamma\omega_p}{\pi c}\begin{cases}2\ln(1/e\nu), & \text{当 } \nu\ll1 \text{ 时}\\ \dfrac{1}{6\nu^4}, & \text{当 } \nu\gg1 \text{ 时}\end{cases} \tag{14.131}$$

能谱的对数曲线如图 14.16 所示. 在低频时谱按对数发散, 这时我们的近似处理完全失效, 但是谱的积分是有限的. 每个分界面的渡越辐射的总能量为

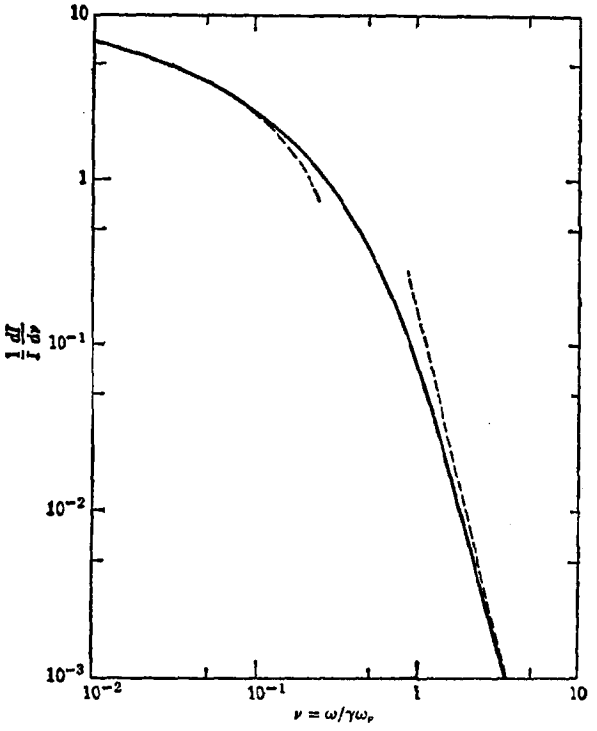


图 14.16　渡越辐射归一化频率分布 $(1/I)(dI/d\nu)$ 与 $\nu=\omega/\gamma\omega_p$ 的函数关系．虚曲线相当于 (14.131) 中两个近似表式．

$$I=\int_0^\infty \frac{dI}{d\nu}d\nu=\frac{z^2e^2\gamma\omega_p}{3c}=\frac{z^2}{3(137)}\gamma\hbar\omega_p \qquad (14.132)$$

由图 14.16, 我们可以估计出，约有一半能量是在 $0.1\leqslant\nu\leqslant1$ 范围内辐射出去的．用量子力学语言来说，能量的相当一部分是以比较高能的光子出现的．例如，就 $\gamma=10^3$ 和 $\hbar\omega_p=20$ 电子伏特来说, 这些量子属于 2 到 20 千电子伏特的软X射线区．

(14.132) 中出现 γ 这个因子, 使得渡越辐射引起人们的注意, 把它作为识别超高能粒子的一种机制，甚至把它作为测量这些粒

子能量的一种机制，而在超高能下其它方法是无法利用的．数字因子 $1/(3\times137)$ 的出现，意味着在每渡越一次分界面时高能光子发射概率是很小的．必须利用一个多箔叠层，其箔片间有间隙．这些箔片要相当薄，但只须比形成长度 D (14.120) 厚．这时，一个粒子穿过每一箔片时将以渡越辐射形式发射两倍于(14.132)的能量．(参看习题 14.18)．一个典型的装置可以包含 200 片厚度为 $(1-5)\times10^{-3}$ 厘米的聚酯树脂(Mylar)箔，其间隙为 2×10^{-2} 厘米至 0.4 厘米．来自不同分界面(每一箔片有两个分界面)的场的相干叠加引起能量和角分布的调制(参看习题 14.19)．叠层中软 X 射线的容限、吸收问题以及在有本底存在时软X射线的可靠探测问题，使得建造有用的仪器发生困难．重要的研究和发展最早是在苏联开始的，而后遍及许多国家，现在已经取得了成功，而且继续在研究和发展中．①

参考书和推荐读物

所有的电动力学教科书里，至少都要论述加速电荷的辐射，虽然侧重点很不相同．较为详细论述相对论性方面的书有：

Iwanenko and sokolow, 第 39-43 节；

Landau and Lifshitz, *Classical Theory of Fields*, 第八章和第九章；

Panofsky and Phillips, 第十八章和第十九章；

Sommerfeld, *Electrodynamics*, 第 29 节和第 30 节．

在下列一本有趣的专著里，介绍了关于相对论性粒子所发生的辐射的大量计算，并且预示了 1940-1950 年期间重新推得的许多结果：

Schott.

① 关于渡越辐射和粒子识别器的实验工作，有一些新近的参考文献：L. C. Yuan 等，*phys. Letters* 31B, 603(1970)；*A.* I. Alikhanian 等，*Phys. Rev. Letters* 30, 109(1973)；F. Harris 等，*Nucl. Inst. and Meth.* 107, 413(1973)；M. L. Cherry, D. Muller and T. A. Price, *Nucl. Inst. and Meth.* 115, 141(1974).

同步加速器辐射在固态物理学、等离子体物理学和天体物理学中有许多应用. 下列著作里详细地把同步加速器当作光源来描述:

Godwin (第 254 页脚注援引的著作).

下列一书里讨论了等离子体物理学中的应用:

Bekefi.

而天体物理问题在下面这本书中作了详细论述, 该书每章末尾列出了许多研究性的参考文献:

A. G. Pacholczyk, *Radio Astrophysics*, *Freeman*, San Francisco (1970).

下列两本书清楚地阐述了带电粒子对辐射波的散射:

Landau and Lifshitz, *Classical theory of Fields*, 9.11-9.13 节;

Landau and Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, 第十四章和第十五章.

下列著作评述了渡越辐射, 并附有广泛的参考文献目录:

I. M. Frank, *Usp. Fiz. Nauk.* **87**, 189(1965) [英译: *Sov. Phys. Uspekhi* **8**, 729(1966)];

F. G. Bass and V. M. Yakovenko, *Usp. Fiz. Nauk.* **87**, 189 (1965) [英译: *Sov. Phys. Uspekhi* **8**, 420(1965)];

M. L. Ter-Mikaelian, *High-Energy Electromagnetic Processes in Condensed Media*, Wiley-Interscience New York(1972).

下列论文中给出了渡越辐射的详细理论计算:

G. M. Garibyan, *Zh. Eksp. Teor. Fiz* **33**, 1403(1957)[英译: *Sov. Phys. JETP* **6**, 1079(1958)];

G. M. Garibyan, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **37**, 527(1959)[英译: *Sov. Phys. JETP* **10**, 372(1960)];

J. Dooher, *Phys. Rev. D***3**, 2652(1971).

最后一篇论文实际上阐述了磁单极的渡越辐射, 而且该文很容易改写。下列一篇论文计算了高能粒子通过星际尘粒时发生的渡越辐射, 其所用的近似与本书14.9 节里所用的相同:

L. Durand, *Astrophysics. J.* **182**, 417(1973)

习　题

14.1　试以直接的计算证明：匀速运动粒子的 **E** 和 **B** 的所有分量的李纳-维谢尔表式与本书正文中用洛仑兹变换求得的结果一致. 仿照 14.1 节末所述的一般方法。

14.2　试用李纳-维谢尔场来讨论电荷为 e 的粒子在下述两种情形下在每单位立体角内所辐射的功率对时间的平均值：

(*a*) 沿 z 轴作非相对论性运动，其瞬时位置为 $z(t)=a\cos\omega_0 t$；

(*b*) 在 x-y 平面内，以恒定角频率 ω_0 绕半径为 R 的圆作非相对论性运动.

画出辐射角分布的略图，并确定每种情形中的总辐射能.

14.3　一个电荷为 ze、质量为 m、动能为 E 的非相对论性粒子，与力程有限的固定有心力场发生正碰撞. 相互作用力为排斥力，并用势 $V(r)$ 描写，在近距离内 $V(r)$ 变得大于 E.

(*a*) 试证：总辐射能为

$$\Delta W=\frac{4}{3}\frac{z^2e^2}{m^2c^3}\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r\min}^{\infty}\left|\frac{dV}{dr}\right|^2\frac{dr}{\sqrt{V(r_{\min})-V(r)}}$$

式中 $r_{\min}$ 为碰撞中最切近的距离.

(*b*) 若相互作用为库仑势 $V(r)=zZe^2/r$，试证：总辐射时能为

$$\Delta W=\frac{8}{45}\frac{zmv_0^5}{Zc^3}$$

式中 v_0 为电荷在无穷远处的速度.

14.4　一个质量为 m、电荷为 q 的粒子在一个平面内运动，该平面垂直于磁感应强度为 B 的均匀静磁场。

(*a*) 计算每单位时间的总辐射能，并用上列已规定的常数和粒子总能量与其静能之比 γ 来表示.

(*b*) 若在时刻 $t=0$ 时，粒子总能量为 $E_0=\gamma_0mc^2$，试证：在时刻 t，粒子将具有能量 $E=\gamma mc^2<E_0$，这里，倘若 $\gamma\gg1$，则有

$$t\simeq\frac{3m^3c^5}{2q^4B^2}\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\gamma_0}\right)$$

(*c*) 若在初始时刻，粒子为非相对论性的，且在 $t=0$ 时动能为 ϵ_0，试问在时刻 t，粒子的动能等于多少？

(*d*) 如果一个粒子确被地球的磁偶极子场所俘获，并沿一条力线往复作螺旋线运动，试问粒子辐射的能量是在赤道附近，还是在它的转折点附近较多？为什么？若可能的话，请你作定量说明.

14.5 和习题 14.2*a* 一样，有一个电荷 e 沿 z 轴作简谐运动，$z(t')=a\cos(\omega_0 t')$.

(*a*) 试证：每单位立体角内的瞬时辐射功率为

$$\frac{dP(t')}{d\Omega}=\frac{e^2c\beta^4}{4\pi a^2}\frac{\sin^2\theta\cos^2(\omega_0 t')}{(1+\beta\cos\theta\sin\omega_0 t')^5}$$

式中 $\beta=a\omega_0/c$.

(*b*) 求对时间的平均，并证明每单位立体角的平均功率为

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{e^2c\beta^4}{32\pi a^2}\left[\frac{4+\beta^2\cos^2\theta}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^{7/2}}\right]\sin^2\theta$$

(*c*) 画出非相对论性运动和相对论性运动的角分布的略图.

14.6 试用泊松求和公式或其它方法直接证明：如果一个正在辐射的粒子以周期 T 重复运动，那末，连续的频谱就变成分立谱，其中包含着基频整倍数的频率.

证明：对于基频 $\omega_0=2\pi/T$ 的每一倍数 m 来说[①]，每单位立体角内辐射功率对时间的平均值的一般表式为

$$\frac{dP_m}{d\Omega}=\frac{e^2\omega_0^4m^2}{(2\pi c)^3}\left|\int_0^{2\pi/\omega_0}\mathbf{v}(t)\times\mathbf{n}\exp\left[im\omega_0\left(t-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}(t)}{c}\right)\right]dt\right|^2$$

14.7 (*a*) 试证：对于习题 14.5 所讨论的简谐运动的电荷来说，第 m 谐波的每单位立体角的平均辐射功率为

$$\frac{dP_m}{d\Omega}=\frac{e^2c\beta^2}{2\pi a^2}m^2+\mathrm{tg}^2\theta J_m^2(m\beta\cos\theta)$$

(*b*) 试证：在非相对论性极限下，总辐射功率全是基频的，而且数值为

$$P\simeq\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\omega_0^4\overline{a^2}$$

式中 $\overline{a^2}$ 为谐振动振幅的方均值.

14.8 有一电荷为 e 的粒子，在 x-y 平面内以恒定角速度 ω_0 沿半径为 R 的圆形路线运动.

(*a*) 试证：频率为 $m\omega_0$ 的辐射功率的角分布的精确表式为

---

① 即频率为 $\omega=m\omega_0$. ——译者注

$$\frac{dP_m}{d\Omega}=\frac{e^2\omega_0^4R^2}{2\pi c^3}m^2\left\{\left[\frac{dJ_m(m\beta\sin\theta)}{d(m\beta\sin\theta)}\right]^2+\frac{\mathrm{ctg}^2\theta}{\beta^2}J_m^2(m\beta\sin\theta)\right\},$$

式中 $\beta=\omega_0R/c$, $J_m(x)$ 为 m 阶贝塞耳函数.

(*b*) 假定粒子作非相对论性运动, 求 $dP_m/d\Omega$ 的近似结果. 证明: 在这种极限情形下得到习题 14.2*b* 的结果.

(*c*) 假定粒子作极端相对论性运动, 则得到的就是本书正文所求出的作瞬时圆周运动的相对论性粒子的结果. (*Watson* 书第 79 页和第 249 页对你也许有帮助.)

14.9 一个电荷为 e、质量为 m 的粒子在均匀磁场 **B** 中沿一条螺旋形路线作相对论性运动. 螺旋线的俯仰角为 α ($\alpha=0$ 相当于圆周运动).

(*a*) 仿照 14.4 节的论证, 试证: 远离螺旋线处的观测者所探测到的辐射, 其基频为

$$\omega_0=\frac{\omega_B}{\cos^2\alpha}$$

谱将扩展到量级为

$$\omega_c=\gamma^3\omega_B\cos\alpha$$

的频率, 式中 $\omega_B=eB/\gamma mc$ (小心地确定螺旋路线的曲率半径 ρ).

(*b*) 根据 (*a*) 和 14.6 节的结果, 试证: 每单位立体角每单位圆频率间隔的辐射功率为

$$\frac{d^2P}{d\omega d\Omega}\simeq\frac{e^2\gamma^2}{3\pi^2c}\frac{\omega_B}{\cos^2\alpha}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2(1+\gamma^2\psi^2)^2\left[K_{2/3}^2(\xi)+\frac{\gamma^2\psi^2}{1+\gamma^2\psi^2}K_{1/3}^2(\xi)\right]$$

式中 ω_B 和 ω_c 的定义如上, $\xi=(\omega/3\omega_c)(1+\gamma^2\psi^2)^{3/2}$, ψ 为相对于粒子速度矢量测量的观测角, 如图 14.9 所示.

14.10 玻尔的对应原理说: 在大量子数的极限下, 以基频辐射出去的经典辐射功率, 等于量子能量 ($\hbar\omega_0$) 乘上从主量子数 n 到 $(n-1)$ 的平均跃迁寿命的倒数.

(*a*) 试用非相对论性近似证明: 在类氢原子中从主量子数为 n 的圆形轨道跃迁到主量子数为 $(n-1)$ 的圆形轨道的跃迁概率 (平均寿命的倒数) 的经典公式是

$$\frac{1}{\tau}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{\hbar c}\left(\frac{Ze^2}{\hbar c}\right)^4\frac{mc^2}{\hbar}\frac{1}{n^5}$$

(*b*) 对于氢, 试将得自 (*a*) 的经典值与下列跃迁的正确量子力学结果作比较: $2p\to1s$ (1.6×10^{-9} 秒), $4f\to3d$ (7.3×10^{-8} 秒), $6h\to5g$ (6.1×10^{-7} 秒).

14.11 作周期运动的电荷产生一个为运动基频整倍数的分立频谱. 由于相对论性效应(习题 14.7 和 14.8), 可以出现相当明显的频率为基频整倍数的辐射, 即使速度分量确是正弦式的, 或者虽是周期的、但非正弦式的. 在氢原子中作非相对论性椭圆运动的电子, 便是后一种运动的实例.

这种轨道, 可以用下列参数方程来确定:

$$x=a(\cos u-\epsilon)$$

$$y=a\sqrt{1-\epsilon^2}\sin u$$

式中

$$\omega_0 t=u-\epsilon\sin u$$

a 为半长轴, ϵ 为偏心率, ω_0 为轨道频率, u 为与粒子的极角 θ 有关的一个角度, 它与 θ 的关系为 $\mathrm{tg}(u/2)=\sqrt{(1-\epsilon)/(1+\epsilon)}\,\mathrm{tg}(\theta/2)$. 各常数用结合能 B 和角动量 L 表示如下:

$$a=\frac{e^2}{2B},\quad \epsilon=\sqrt{1-\frac{2BL^2}{me^4}},\quad \omega_0^2=\frac{8B^2}{me^4}$$

(a) 试证: 频率为 $k\omega_0$ 的辐射功率为

$$P_k=\frac{4e^2}{3c^3}(k\omega_0)^4a^2\left\{\frac{1}{k^2}\left[(J_k'(k\epsilon))^2+\left(\frac{1-\epsilon^2}{\epsilon^2}\right)J_k^2(k\epsilon)\right]\right\}$$

式中 $J_k(x)$ 为 k 阶贝塞耳函数.

(b) 试证: 对圆形轨道来说, 一般结果(a)与习题 14.10的(a)相符.

14.12 设以 N 个电荷, 代替习题 14.8 中沿半径为 R 的圆周以恒定角速度 ω_0 运动的一个电荷, 这 N 个电荷以不变的相对位置沿同一圆周运动.

(a) 试证: 频率为 $m\omega_0$ 的辐射功率为

$$\frac{dP_m(N)}{d\Omega}\approx\frac{dP_m(1)}{d\Omega}F_m(N)$$

式中 $dP_m(1)/d\Omega$ 为习题 14.8 中(a)的结果, 而

$$F_m(N)=\left|\sum_{j=1}^{N}e^{im\theta_j}\right|^2$$

θ_j 为第 j 个电荷在 $t=t_0$ 时的角位置.

(b) 试证: 如果电荷沿圆周均匀地分布, 则只放出频率为 $N\omega_0$ 的整倍数的辐射, 但其强度为单个电荷强度的 N^2 倍. 试定性解释这些事实.

(c) 不用详细计算, 试证: 对于非相对论性运动来说, 总辐射功率和 N 的依赖关系主要是 β^{2N}, 因此在 $N\to\infty$ 的极限情况下, 不发生辐射.

(*d*) 采用和(*c*)相似的论证，试证：对相对论性的粒子来说，当 $N \gg \gamma^3$ 时，辐射功率主要按 $\exp(-2N/3\gamma^3)$ 方式随 N 而变化，因此当 $N \to \infty$ 时仍不发生辐射.

(*e*) 上面(*c*)和(*d*)的结果与回路中稳恒电流的辐射性质有什么关系？

14.13 作为电路中稳恒电流的一种理想化，考虑 N 个全同电荷 q 组成的系统，这些电荷以恒定速率 v (但有加速度)在任意的闭合路线中运动. 相邻电荷之间的小间隔 Δ 是恒定的.

从每个粒子的李纳-维谢尔场出发，并且不假定速率 v 和光速有什么关系. 试证：在 $N \to \infty$, $q \to 0$ 和 $\Delta \to 0$, 但 $Nq =$ 常数, $q/\Delta =$ 常数 的极限情形下，系统不发生辐射，而系统的电场和磁场为通常的静态值.

(注意：在实际的电路中，导体中静止正离子产生的电场恰好抵消了运动电荷的电场.)

14.14 假定同步加速器中电子所发射的瞬时辐射功率谱可由下式给出：

$$P(\omega, t) \simeq \frac{3}{\pi} \frac{e^2}{\rho} \gamma(t) \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{1/3} e^{-2\omega/\omega_c}$$

式中 $\omega_c = 3\omega_0 \gamma^3(t)$.

(*a*) 如果电子在运转一周的期间，它的能量近似线性地上升，试证：功率谱在运转一周内所取的平均值为

$$\langle P(\omega, t) \rangle \simeq \frac{2^{2/3}}{3\pi} \frac{e^2}{\rho} \gamma_{\max} x^{2/3} \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y^{4/3}} dy$$

式中 $x = 2\omega/\omega_{c\max}$.

(*b*) 当 $x \ll 1$ 和 $x \gg 1$ 时，确定谱的极限形式.

(*c*) 查积分表(这积分是一个不完全的 Γ 函数)或令 $x = 0.1$、0.5、1.0、1.5，用作图法求积分，从数值上确定谱，画出它和 $\log[\omega/\omega_{c最大}]$ 的函数关系图，并与 Elder, Langmuir, and Pollcck, *Phys. Rev.*, **74**, 52(1948)，图 1 所给出的曲线作比较.

14.15 (*a*) 在 14.6 节的近似处理的范围内，试证：当一个相对论性粒子沿瞬时曲率半径为 ρ 的路线运动时，螺旋性为正和螺旋性为负的辐射的频率-角度谱为

$$\frac{d^2 I_\pm}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{6\pi^2 c} \left(\frac{\omega\rho}{c}\right)^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)^2 \left| K_{2/3}(\xi) \pm \frac{\theta}{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)^{1/2}} K_{1/3}(\xi) \right|^2$$

(*b*) 根据 14.6 节和上面(*a*)的公式，讨论总辐射的偏振与频率、角度的函数关系. 特别是确定在下述情况下的偏振态：(1)在一切角度上的高频($\omega>\omega_c$)；(2)在大角度上的中频和低频($\omega<\omega_c$)；(3)在极小角度上的中频和低频.

(*c*) 和实验作比较，参看 P. Joos, *Phys. Rev. Letters*, **4**, 558 (1960).

14.16 考虑蟹状星云的同步加速器辐射. 能量高达 10^{13} 电子伏特的电子在数量级为 10^{-4} 高斯的磁场中运动.

(*a*) 当 $E=10^{13}$ 电子伏特，$B=3\times10^{-4}$ 高斯时，计算轨道半径 ρ、基频 $\omega_0=c/\rho$ 和临界频率 ω_c. 能量 $\hbar\omega_c$ 为多少千电子伏特？

(*b*) 试证：对于恒定磁场中能量为 E 的相对论性电子来说，同步加速器辐射的功率谱可以写成

$$P(E,\omega)=\text{常数}\left(\frac{\omega}{E^2}\right)^{1/3}f\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

式中 $f(x)$ 是一个截止函数，它在 $x=0$ 时的值为 1，而当 $x\gg1$ 时则迅速地变为零[例如，$f\simeq\exp(-2\omega/3\omega_c)$，如同习题 14.14 那样]，而 $\omega_c=(eB/mc)(E/mc^2)^2\cos\theta$，其中 θ 为螺旋形路线的俯仰角. 参看习题 14.9(*a*).

(*c*) 如果电子的能量分布谱为 $N(E)dE\sim E^{-n}dE$，试证：同步加速器辐射的功率谱为

$$\langle P(\omega)\rangle d\omega\sim\omega^{-a}d\omega$$

式中 $a=(n-1)/2$.

(*d*) 对来自蟹状星云的射频和光频连续谱的观测表明：在 $\omega\sim10^8$ 秒$^{-1}$到 $\omega\sim6\times10^{15}$ 秒$^{-1}$ 的频率区间内，常数 $a\simeq0.35$. 在 10^{18} 秒$^{-1}$ 以上的频率，辐射谱急剧地下降，这时 $a\gtrsim1.5$. 求电子能谱的指数 n 以及电子能谱的上截止值. 这截止值和(*a*)中的数字是否相符？

(*e*) 一个发生同步加速器辐射的粒子的半衰期定义为该粒子失去其初始能量的一半所需要的时间. 根据习题14.4(*b*)的结果，求出电子的半衰期公式，其中半衰期以年为单位，B 以毫高斯为单位，而 E 以千兆电子伏特为单位. 用(*a*)的数据，问半衰期为多少？将此半衰期与蟹状星云的已知寿命作比较，结果如何？必须连续不断补充高能电子吗？从什么源得到补充？

14.17 一个电荷为 ze 的相对论性粒子沿 z 轴以恒定速率 βc 运动. 在 $z\leqslant0$ 的半空间填满了均匀的各向同性介电媒质，其等离子体频率为 ω_1，而在 $z>0$ 的空间填满了类似的媒质，其等离子体频率为 ω_2. 试用 14.9 节的

近似处理方法，讨论当粒子穿过分界面时所发生的渡越辐射.

(a) 证明：每单位圆频率间隔、每单位立体角的辐射强度近似地由下式给出，

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}\simeq\frac{z^2e^2\theta^2}{\pi^2c}\left|\frac{1}{\frac{1}{\gamma^2}+\frac{\omega_1^2}{\omega^2}+\theta^2}-\frac{1}{\frac{1}{\gamma^2}+\frac{\omega_2^2}{\omega^2}+\theta^2}\right|^2$$

式中 θ 为相对于粒子速度的发射角，而 $\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}$.

(b) 证明：总辐射能为

$$I\simeq\frac{z^2e^2}{3c}\cdot\frac{(\omega_1-\omega_2)^2}{(\omega_1+\omega_2)^2}\cdot\gamma$$

14.18 一个相对论性粒子穿过一片电介质箔，这箔片厚度为 a，与粒子的运动路线垂直，考虑这个粒子发出的渡越辐射. 假定 $|[n(\omega)-1]/[n(\omega)+1]|$ 非常小，以致反射可以忽略不计，试证：微分角-频率谱为单一分界面结果(14.129)乘以因子

$$\mathscr{F}=4\sin^2\Theta$$

其中

$$\Theta=\nu\left(1+\frac{1}{\gamma^2}+\eta\right)\frac{a}{4D}$$

这里 $D=\gamma c/\omega_p$ 为形成长度，$\nu=\omega/\gamma\omega_p$，而 $\eta=(\gamma\theta)^2$. 倘若 $a\gg D$，则因子 $\mathscr{F}$ 极快地随角度或频率而振荡，其平均值为 $\langle\mathscr{F}\rangle=2$. 这种箔片的平滑的强度分布正好是单一分界面的两倍.

14.19 一个相对论性粒子垂直地穿过由 N 片电介质箔组成的均匀阵列，每一箔片厚度为 a，箔片间有空气间隙(实际上可以看作是真空)，每一间隙长度为 b，考虑这个粒子发生的渡越辐射. 假定对整个叠层来说，多次反射可以忽略不计 这就要求

$$\left|\frac{n(\omega)-1}{n(\omega)+1}\right|\simeq\frac{\omega_p^2}{4\omega^2}\ll\frac{1}{N}$$

(a) 试证：如果媒质的介电常数在 z 方向上按 $\epsilon(\omega,z)=1-(\omega_p^2/\omega^2)\rho(z)$ 而变化，则渡越辐射的微分谱近似地等于单一分界面结果(14.129)乘以

$$\mathscr{F}=\left|\mu\int dz\rho(z)e^{i\omega z/v}\exp\left(-i\cos\theta\int^z k(z')dz'\right)\right|^2$$

式中按惯例 $\rho(0)=1$，$k(z)=(\omega/c)\sqrt{\epsilon(\omega,z)}$，而 $\mu=\omega/v-k(0)\cos\theta$.

(b) 试证：对 N 个箔片组成的叠层来说，

$$\mathscr{F} = 4\sin^2\Theta \frac{\sin^2[N(\Theta+\Psi)]}{\sin^2[\Theta+\Psi]}$$

式中 Θ 是按习题 14.18 来定义的，$\Psi = \nu(1+\eta)(b/4D)$. 并与 G. M. Garibyan, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **60**, 39(1970)[英译: *Sov. Phys. JETP* **33** 23 (1971)]作比较.

第十五章　轫致辐射；虚量子方法；辐射性 β 过程

第十四章里，以一般方式讨论了加速电荷的辐射，推导了频率和角分布的公式，并且论述了外场中非相对论性和相对论性带电粒子的辐射的一些实例．本章专门用来讨论在原子和原子核过程中带电粒子的电磁辐射问题．

第十三章里详细叙述过，粒子通过物质时，就被散射，并且因碰撞而损失能量．在这些碰撞中，粒子被加速；因此，它们放出电磁辐射．在与原子碰撞时放出的辐射通常叫做轫致辐射，这是因为这种效应最先在高能电子于厚金属靶中受阻而停住时被观测到．对非相对论性粒子来说，由于辐射引起的能量损失比起碰撞的能量损失来，可以忽略不计．但是，对极端相对论性粒子来说，辐射可能是能量损失的主要方式．

我们首先来讨论在极低频率下的辐射谱，这时可以导出一个普遍表式，这表式在量子力学和经典物理中都有效．在讨论库仑碰撞中发生的轫致辐射这种特殊现象之前，先论述一般碰撞中发出的辐射的角分布、偏振和积分强度．在适当的时候，我们通过正确地讨论运动学(包括光子的能量和动量)来进行量子力学修正．我们就是按这种方法来考虑所有重要的量子效应，有时，还导出精确的量子力学结果．我们详细讨论一些能使结果发生显著变化的相对论性效应．

带电粒子的产生或湮没是另一种放出辐射的过程．这种过程的原因是纯量子力学的．企图用经典方法解释这些基本现象，是不可能实现的．但是，假如发生了这种过程，我们可以按正规方

法讨论这种过程所伴有的电磁辐射谱和辐射强度. 例如, 在原子核 β 衰变中快速电子的突然产生, 为了求这一过程所伴有的电磁辐射谱和辐射强度, 我们可以把这个过程看作: 一个原先静止的带电粒子被猛烈地加速, 并在一段极短时间间隔内, 达到某一末速度, 或者, 换句话说, 在这段极短的时间间隔内, 运动粒子突然带上了电荷. 在 15.6 和 15.7 节里, 我们将用这些说法来讨论核 β 衰变和轨道电子俘获.

像轫致辐射那样一些辐射过程, 只要在确定最大和最小有效动量转移时适当处理一下能量和动量守恒, 就能解释较大的量子力学效应. 像辐射性 β 衰变那样另外一些过程中, 量子效应更为严重. 这时相空间发生改变, 这种改变无法根根经典观点来解释. 辐射是如何放出的尚不清楚, 而且不容易找出辐射和电荷加速度的关系. 一般说来, 我们的结果局限于"软"光子区域, 即光子的能量远小于有效总能量. 可以预料, 在频谱的上端, 我们的半经典表式只是定性地有效.

15.1 碰撞时所放出的辐射

如果一个带电粒子作一次碰撞, 它就被加速, 并放出辐射. 如果碰撞的对方也是一个带电粒子, 则双方同时放出辐射, 而且这两个辐射场必定相干地叠加. 因为辐射场的振幅依赖于电荷与加速度的乘积, 倘若这两个粒子的电荷差不多, 则较轻的粒子放出较多的辐射. 在许多应用中, 其中一个碰撞粒子的质量远大于另一个碰撞粒子的质量. 这时, 对所放出的辐射来说, 只要把碰撞当作两粒子中较轻的一个与不变力场的相互作用来处理就足够了. 我们将只考虑这种情形, 至于更复杂的情形, 将留作本章末的习题.

(*a*) 低频极限

由(14.65)和(14.66)我们看出, 一个电荷为 ze 的粒子在碰撞

时的辐射强度可以写为

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}=\frac{z^2e^2}{4\pi^2c}\left|\int\frac{d}{dt}\left[\frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta})}{1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}}\right]e^{i\omega(t-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}(t)/c)}dt\right|^2 \tag{15.1}$$

让我们假设:碰撞进行的时间为 τ,在这段时间内,粒子被猛烈地加速,而且碰撞使粒子速度从初值 $c\boldsymbol{\beta}$ 变为终值 $c\boldsymbol{\beta}'$. 在有限频率下的辐射谱将依赖于碰撞的细节,但在低频下辐射谱的形式仅仅依赖于初速和末速. 在 $\omega\to0$ 的极限情况下,(15.1)中的指数因子等于 1. 这时,被积函数是一个全微分. 因此,偏振为 ϵ 的辐射谱是

$$\lim_{\omega\to0}\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}=\frac{z^2e^2}{4\pi^2c}\left|\epsilon^*\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\beta}'}{1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}'}-\frac{\boldsymbol{\beta}}{1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}}\right)\right|^2 \tag{15.2}$$

(15.2)是一个非常普遍的结果,在量子力学和经典物理中都有效. 为了确立与量子力学形式的关系,我们先将(15.2)改换成光子谱. 频率为 ω 的一个光子的能量为 $\hbar\omega$. 因此,将(15.2)除以 $\hbar^2\omega$,就得到偏振为 ϵ 的"软"光子($\hbar\omega\to0$)的每单位能量间隔、每单位立体角的微分粒子数谱:

$$\lim_{\hbar\omega\to0}\frac{d^2N}{d(\hbar\omega)d\Omega_\gamma}=\frac{z^2\alpha}{4\pi^2\hbar\omega}\left|\epsilon^*\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\beta}'}{1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}'}-\frac{\boldsymbol{\beta}}{1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}}\right)\right|^2 \tag{15.3}$$

如果 e 为质子电荷,则上式中的 $\alpha=e^2/\hbar c\simeq1/137$ 为精细结构常数. 立体角元的下标 γ 用来表示光子所在的立体角. 谱 (15.3) 解释如下. 设碰撞是由外势或其它相互作用引起的. 把引起 $c\boldsymbol{\beta}\to c\boldsymbol{\beta}'$ 速度变化的散射截面用 $d\sigma/d\Omega_p$ 来表示,下标 p 代表粒子. 那末,每单位能量间隔、每单位立体角的散射(同时产生能量为 $\hbar\omega$ 的软光子)截面是

$$\frac{d^3\sigma}{d\Omega_p d(\hbar\omega)d\Omega_\gamma}=\left[\lim_{\hbar\omega\to0}\frac{d^2N}{d(\hbar\omega)d\Omega_\gamma}\right]\cdot\frac{d\sigma}{d\Omega_p} \tag{15.4}$$

引进光子的能量-动量四元矢量 $k^\mu=(\hbar/c)(\omega,\omega\mathbf{n})$ 和粒子的能量-

动量四元矢量 $p^\mu = Mc(\gamma, \gamma\beta)$，就可以把表式(15.3)写成相对论性协变式. 用洛仑兹不变相空间 d^3k/k_0 写出下列明显不变式也是有益的:①

$$\frac{d^3N}{(d^3k/k_0)} \equiv \frac{c^2}{\hbar\omega}\frac{d^2N}{d(\hbar\omega)\,d\Omega_\gamma} = \frac{c^2}{\hbar(\hbar\omega)^2}\frac{d^2I}{d\omega d\Omega_\gamma} \tag{15.5}$$

于是，我们由(15.3)得

$$\lim_{\hbar\omega\to 0}\frac{d^3N}{(d^3k/k_0)} = \frac{z^2\alpha}{4\pi^2}\left|\frac{\epsilon^*\cdot p'}{k\cdot p'} - \frac{\epsilon^*\cdot p}{k\cdot p}\right|^2 \tag{15.6}$$

式中各标积都是四元矢量的标积(在辐射规范 $\epsilon^\mu = (0, \epsilon)$ 下). 考虑一下图 15.1 中的四幅图，可知根据量子力学计算也能得到 (15.6). 上面一幅图表示无辐射的散射过程. 下面三幅图表示既有散射又有光子放出的过程. 它们的贡献相干地叠加. 左边两幅图有由外线发出的光子，也就是说，在碰撞前或碰撞后发出光子. 这两个过程，都牵涉到散射顶点和光子顶点之间粒子的传播函数，其形

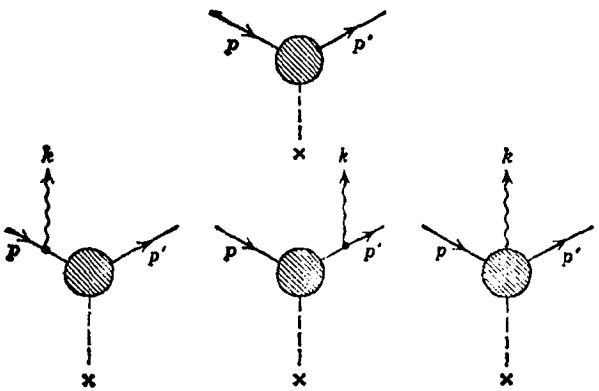


图 15.1 描述粒子散射的量子力学图. 上图表示不发生光子的散射，下图表示发出一个光子的散射.

① ω^{-2} 与 $d^2I/d\omega d\Omega$ 的乘积是洛仑兹不变量，这个事实不限于在 $\omega\to 0$ 的极限情形下成立. 在我们以后的一些讨论中，将发现这一结果是有用的.

式为

$$\frac{1}{(p\pm k)^2-M^2}=\frac{1}{\pm 2p\cdot k}$$

在 $\omega\to 0$ 的极限下，这些传播函数使得这两幅图的贡献具有奇异性质，并给出(15.3)中的$(\hbar\omega)^{-1}$. 另一方面，右边一幅图有从散射顶点内部发出的光子. 其贡献在$\omega\to 0$时有限，所以与前两幅图相比可忽略不计. 直接的计算得到下述极限情形下的(15.4)和(15.6)，即光子的能量和动量在运动学中可以略而不计. 在任一过程中，软光子只能从外线发出，并且这是由经典结果给出的.

(*b*) 偏振和对角度积分的谱

(15.2)的一些极限形式是有趣的. 如果粒子在碰撞前和碰撞后作非相对论性运动，那末我们可以令分母中的因子等于1. 辐射强度变成

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{d^2I_{\text{非相对论性}}}{d\omega d\Omega}=\frac{z^2e^2}{4\pi^2c}|\epsilon^*\cdot\Delta\beta|^2 \tag{15.7}$$

式中 $\Delta\beta=\beta'-\beta$ 是碰撞中速度的变化. 这正好是偶极辐射图样；对偏振求和，并对角度积分，就给出每次非相对论性碰撞中每单位频率间隔的总辐射能：

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{dI_{\text{非相对论性}}}{d\omega}=\frac{2z^2e^2}{3\pi c}\cdot|\Delta\beta|^2 \tag{15.8}$$

对相对论性运动来说，当速度的变化 $\Delta\beta$ 很小时，只须考虑 $\Delta\beta$ 的最低级，(15.2)可以近似写成

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{d^2I}{dwd\Omega}\simeq\frac{z^2e^2}{4\pi^2c}\left|\epsilon^*\cdot\left(\frac{\Delta\beta+\mathbf{n}\times(\beta\times\Delta\beta)}{(1-\mathbf{n}\cdot\beta)^2}\right)\right|^2 \tag{15.9}$$

式中 $c\beta$ 为初速度(或平均速度).

我们现在讨论以一定偏振态放出的辐射的角分布显式. 在碰撞问题中，通常入射粒子方向和辐射方向是已知的，可是偏转粒子方向是未知的，因而 $\Delta\beta$ 的方向是未知的. 所以包含入射束方向和

辐射方向的平面是一个自然的平面，辐射偏振态是相对于这一平面确定的.

为简单起见，我们考虑小角度偏转，因此 $\Delta\beta$ 近似垂直于入射方向. 图 15.2 表示这些矢量关系. 为了不失其普遍性，我们选取观测方向 $\mathbf{n}$ 在 x-z 平面内，与入射束的夹角为 θ. 速度的变化 $\Delta\beta$ 位于 x-y 平面内，与 x 轴的夹角为 ϕ. 因为不去观测散射粒子的方向，所以我们将对 ϕ 求平均. 单位矢量 $\epsilon_{\parallel}$ 和 $\epsilon_{\perp}$ 是平行于和垂直于含 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\mathbf{n}$ 的平面的偏振矢量.

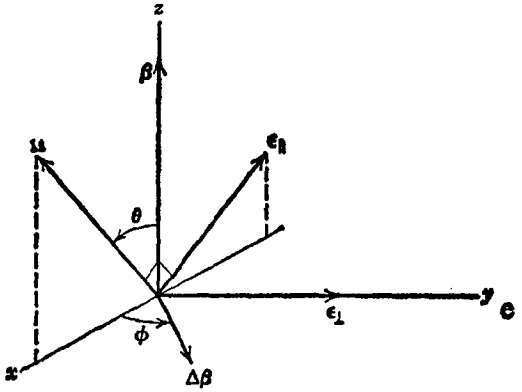


图 15.2

由(15.9)，稍加代数演算，导出下列表式(对 ϕ 求平均)：

$$\left.\begin{aligned}\lim_{\omega\to 0}\frac{d^2I_{\parallel}}{d\omega d\Omega}&=\frac{z^2e^2}{8\pi^2c}|\Delta\beta|^2\frac{(\beta-\cos\theta)^2}{(1-\beta\cos\theta)^4}\\ \lim_{\omega\to 0}\frac{d^2I_{\perp}}{d\omega d\Omega}&=\frac{z^2e^2}{8\pi^2c}|\Delta\beta|^2\frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^2}\end{aligned}\right\}\tag{15.10}$$

(15.10)相当于两种线偏振态的低频极限情形. 这些角分布对各种小角碰撞都有效. 偏振度 $P(\theta)$ 定义为

$$(d^2I_{\perp}-d^2I_{\parallel})/(d^2I_{\perp}+d^2I_{\parallel});$$

当 $\theta=0$ 时，$P(\theta)$ 为零；当 $\cos\theta=\beta$ 时，$P(\theta)$ 为极大值 $+1$；当角度较大时，$P(\theta)$ 单调地减少. 当 $\gamma\gg 1$ 时，偏振度具有这样的形式：

$$P(\theta)\simeq 2\gamma^2\theta^2/(1+\gamma^4\theta^4).$$

这一定性的特性，已在实验上观测到①，但与 $\omega\to 0$ 极限情形有明显的偏差，甚至当 $\omega/\omega_{max}=0.1$ 时.

(15.10)中两项之和给出任意小角碰撞($\Delta\boldsymbol{\beta}$ 量值很小，且垂直于入射方向)中放出的软辐射的角分布. 对相对论性运动来说，角分布在向前方向上有一高峰，其形状已为大家所熟知，平均发射角的量级为 $\gamma^{-1}=Mc^2/E$. 显然，在 $\gamma\gg 1$ 的极限情形下，我们有

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}\simeq\frac{z^2e^2\gamma^4|\Delta\boldsymbol{\beta}|^2}{\pi^2c}\frac{(1+\gamma^4\theta^4)}{(1+\gamma^2\theta^2)^4} \tag{15.11}$$

利用初等积分法，由(15.10)得到任意速度的每单位频率间隔的总强度为

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{dI}{d\omega}=\frac{2}{3\pi}\frac{z^2e^2}{c}\gamma^2|\Delta\boldsymbol{\beta}|^2$$

对非相对论性运动来说，上式简化为(15.8). 因为粒子的动量是 $\mathbf{p}=\gamma Mc\boldsymbol{\beta}$，上一结果可以写成

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{dI}{d\omega}=\frac{2}{3\pi}\frac{z^2e^2}{M^2c^3}Q^2 \tag{15.12}$$

式中 $Q=|\mathbf{p}'-\mathbf{p}|$ 是碰撞中动量转移的量值.

方程(15.10)和(15.12)对于相对论性运动和非相对论性运动都成立，只要速度的变化不太大. 对相对论性运动来说，判据是

$$|\Delta\boldsymbol{\beta}|<\frac{2}{\gamma},\quad \text{或 } Q<2Mc \tag{15.13}$$

这可以从(15.2)看出. 如果两个速度 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\beta}'$ 间的夹角 $|\Delta\boldsymbol{\beta}|/\beta$ 大于 $2/\gamma$，振幅中的两项将互不干涉. 当发射方向 $\mathbf{n}$ 足以使得其中一项较大，另一项可忽略不计时，角分布将是两个探照灯式射束，其中一个射束围绕 $\boldsymbol{\beta}$，另一射束围绕 $\boldsymbol{\beta}'$，每一射束由一项的绝对值

① W. Lichtenberg, A. Przybylski, and M. Scheer, *Phys. Rev.* A11, 480 (1975)给出了电子韧致辐射的最新数据.

平方给出. 于是,对角度积分的辐射强度近似地为

$$\lim_{\substack{\omega\to 0\\ Q>2Mc}}\frac{dI}{d\omega}\simeq\frac{4z^2e^2}{\pi c}\ln\gamma \tag{15.14}$$

当 $Q>2Mc$ 时，软光子的辐射强度与 Q^2 无关,此与动量转移较小时情况不同,(15.12)表明,动量转移较小时软光子辐射强度随 Q^2 而作线性增加.对非相对论性运动来说,动量转移总是小于(15.13)的极限值. 因此,对一切动量转移来说,强度都由(15.12)给出.

(c) 有限频率下的定性特性

到目前为止,我们着重讨论了(15.1)的极低频率极限情况.现在我们考虑有限频率下谱的定性特性. (15.1)中的位相因子决定有限频率下的特性. 只当碰撞中位相的变化比较小时，才出现明显的辐射. 如果将粒子坐标 $\mathbf{r}(t)$ 写作

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(0)+\int_0^t c\boldsymbol{\beta}(t')dt'$$

那末,除了一个常数外,(15.1)中被积函数的位相是

$$\Phi(t)=\omega\left(t-\mathbf{n}\cdot\int_0^t\boldsymbol{\beta}(t')dt'\right)$$

如果我们设想碰撞是在 τ 这样一段时间内发生的,$\boldsymbol{\beta}$从其初值比较平滑地变化到终值,那末明显辐射的判据是

$$\omega\tau(1-\mathbf{n}\cdot\langle\boldsymbol{\beta}\rangle)<1 \tag{15.15}$$

式中 $\langle\boldsymbol{\beta}\rangle=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\boldsymbol{\beta}(t)dt$ 为碰撞期间 $\boldsymbol{\beta}$ 的平均值. 对非相对论性碰撞来说,上式简化为

$$\omega\tau<1$$

在低频时,辐射强度由(15.7)给出，但当 $\omega\tau>1$ 时,振荡的位相因子将使积分远远小于 $\omega=0$ 时的值. 因此，当 $\omega>1/\tau$ 时，强度将迅速下降为零. 对于相对论性运动来说，情况更为复杂. 当 $|\Delta\boldsymbol{\beta}|$ 很小但 $\gamma\gg1$ 时,判据(15.15)近似地为

$$\frac{\omega\tau}{2\gamma^2}(1+\gamma^2\theta^2)<1 \tag{15.16}$$

现在有角度的依赖关系. 当 $\omega\tau<1$ 时, 在一切角度上都有显著的辐射. 当 $\omega\tau$ 在这样的区间内, 即 $1<\omega\tau<\gamma^2$ 时, 只有在角度量级超过 $\theta_{最大}$ 时才发生明显的辐射, 这里 $\theta_{max}^2=1/\omega\tau$. 当 $\omega\tau>\gamma^2$ 时, (15.16)不是对任何角度都满足的. 因此, 只要 $\omega\tau\ll\gamma^2$, 相对论性碰撞中的辐射谱由(15.11)和(15.12)近似给出, 但当 $\omega\tau$ 趋于 γ^2 时, 角分布中出现一些修正, 而且当 $\omega\gtrsim\gamma^2/\tau$ 时, 所有角度上的强度迅速地减少.

15.2 库仑碰撞中的韧致辐射

放出辐射连续谱的最普通情况是快速粒子与原子的碰撞. 由于原子核的电荷较大, 原子核比电子更有效地使入射粒子发生偏转. 因此, 我们暂且忽略电子的效应, 并考虑一个电荷为 ze、质量为 M、初速为 $c\beta$ 的粒子与一个固定点电荷 Ze 的库仑场发生碰撞时所放出的辐射.

静库仑场对带电粒子的弹性散射由卢瑟福公式(参看 13.6 节)给出:

$$\frac{d\sigma_s}{d\Omega'}=\left(\frac{2zZe^2}{pv}\right)^2\cdot\frac{1}{(2\sin\theta'/2)^4} \tag{15.17}$$

式中 θ' 为粒子的散射角. 在非相对论物理上, 这截面对一切角度都是正确的, 而在量子力学上, 仅对任意粒子的相对论性小角散射有效. 将(15.17)表为每单位动量转移(Q)间隔的散射截面, 就比较方便. 对弹性散射来说,

$$Q^2=4p^2\sin^2\theta'/2=2p^2(1-\cos\theta') \tag{15.18}$$

利用 $d\Omega'=d\phi'd\cos\theta'=-Qd\phi'dQ/p^2$, 将(15.17)对方位角积分, 得

$$\frac{d\sigma_s}{dQ}=8\pi\left(\frac{zZe^2}{\beta c}\right)^2\cdot\frac{1}{Q^3} \tag{15.19}$$

在动量转移为Q的库仑碰撞中，入射粒子被加速，同时放出辐射．由前节我们知道：角分布由(15.10)给出(至少对小角偏转来说是如此)，积分强度由(15.12)给出．因为我们已经讨论过角分布，所以把讨论的重点集中在对角度积分的频谱上．仿照(15.4)，我们定义微分辐射截面为

$$\frac{d^2\chi}{d\omega dQ}=\frac{dI(\omega,Q)}{d\omega}\cdot\frac{d\sigma_s}{dQ}(Q) \tag{15.20}$$

式中$dI(\omega,Q)/d\omega$是在一次动量转移为Q的碰撞中每单位频率间隔的辐射能．微分辐射截面的量纲为(面积×能量/频率×动量)．(15.20)除以$\hbar^2\omega$，就得每单位能量间隔的光子发射截面．

只要Q不太大，低频辐射谱由(15.12)给出．将(15.12)和(15.19)代入(15.20)，便得

$$\frac{d^2\chi}{d\omega dQ}=\frac{16}{3}\frac{Z^2e^2}{c}\left(\frac{Z^2e^2}{Mc^2}\right)^2\frac{1}{\beta^2}\cdot\frac{1}{Q} \tag{15.21}$$

这一结果在频率和动量转移都足够低时有效，所以满足前节的判据．对动量转移积分的辐射截面是

$$\frac{d\chi}{d\omega}\simeq\frac{16}{3}\frac{Z^2e^2}{c}\left(\frac{Z^2e^2}{Mc^2}\right)^2\cdot\frac{1}{\beta^2}\int_{Q_{\min}}^{Q_{\max}}\frac{dQ}{Q}$$

或

$$\frac{d\chi}{d\omega}\simeq\frac{16}{3}\frac{Z^2e^2}{c}\left(\frac{z^2e^2}{Mc^2}\right)^2\cdot\frac{1}{\beta^2}\ln\left(\frac{Q_{\max}}{Q_{\min}}\right) \tag{15.22}$$

在对动量转移求和时，我们用Q的最大值和最小值作为(15.21)的有效范围的上限和下限．在任一给定频率上，(15.21)只在Q的一个有限范围内才近似地描述微分辐射截面．在此范围以外，截面降到(15.21)估计值以下，这是由于(15.20)中一个因子或另一因子远小于(15.12)或(15.19)(或等于零)．这就有效地限制了Q的范围，并导出(15.22)．针对不同的物理情况确定$Q_{\max}$和$Q_{\min}$的值，是我们的下一项任务．

(a) 经典韧致辐射

在第十三章里讨论能量损失时我们看到，只要

$$\eta=\frac{zZe^2}{\hbar v}>1$$

经典的考虑就可以应用．对于带适量电荷的粒子来说，这意味着 $\beta\ll1$．在这种非相对论性极限下，最大有效动量转移不因(15.12)失效而受限制．唯一的限制是运动学的．由(15.18)我们看到

$$Q_{\max}=2p=2Mv \tag{15.23}$$

Q 的低限在经典上取决于频率和碰撞时间之间的关系，如果有显著辐射的话，这一关系必须满足．根据 11.10 节和 13.1 节，我们有

$$\frac{1}{\tau}\simeq\frac{v}{b},\quad Q\simeq\frac{2zZe^2}{bv}$$

所以我们可以用 Q 把条件 $\omega<1/\tau$ 写成

$$Q>Q_{\min}^{(c)}=\frac{2zZe^2\omega}{v^2} \tag{15.24}$$

因此，经典辐射截面是

$$\frac{d\chi_c}{d\omega}\simeq\frac{16}{3}\frac{Z^2e^2}{c}\left(\frac{z^2e^2}{Mc^2}\right)\cdot\frac{1}{\beta^2}\cdot\ln\left(\frac{\lambda Mv^3}{zZe^2\omega}\right) \tag{15.25}$$

式中 λ 是量级为 1 的一个数，这是由于强度在 $\omega\tau=1$ 附近降为零的细致情况我们尚不完全清楚．只要对数的宗量大于 1，这一截面是有意义的．于是，频谱有一个上限 $\omega_{\max}^{(c)}$．用光子能量来表示，就是

$$\hbar\omega_{\max}^{(c)}=\frac{2\lambda}{\eta}\left(\frac{Mv^2}{2}\right) \tag{15.26}$$

因为在这种经典情况下，η 比 1 大得多，所以我们得知：光子能量范围被局限于极软的量子，这些量子的能量比起入射粒子的动能来都是非常小的．$\eta=10$ 的经典谱如图 15.3 所示，其中 $\lambda=2$ (这

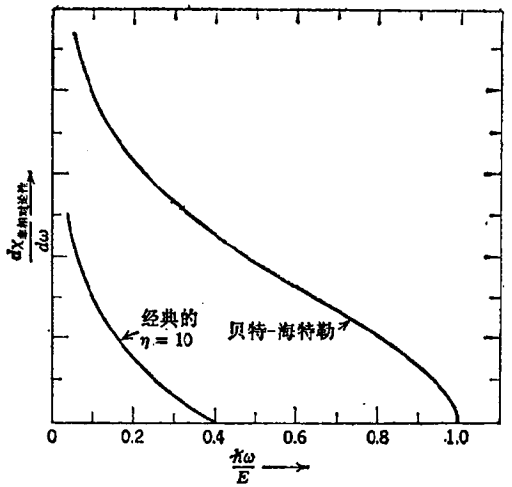


图 15.3 非相对论性库仑碰撞的辐射截面（能量×面积/单位频率）与频率（以最大频率（$E/\hbar$）为单位）的函数关系. 经典谱被局限于极低频率上. 标以"贝特-海特勒"(Bethe-Heitler) 的曲线是量子力学波恩近似的结果，即 $\lambda'=1$ 时的 $\lambda'=1$(15.29).

样选取的 λ 值，可使当 $\eta=1$ 和 $\omega=0$ 时，经典截面和量子力学截面相符合).

(*b*) 非相对论性韧致辐射

在经典极限下,我们未曾考虑光子的能量和动量. 因为(15.26)表明谱被局限于极低能光子，所以忽略光子的能量和动量是合理的. 但是,对于 $n<1$ 的快速(虽然仍是非相对论性的)粒子来说,必须考虑把光子包括在内的能量和动量守恒. 当考虑固定的（或大的)力心引起的散射时,守恒要求是

$$\begin{aligned} E&=E'+\hbar\omega \\ Q^2&=(\mathbf{p}-\mathbf{p}'-\mathbf{k})^2\simeq(\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2 \end{aligned} \tag{15.27}$$

式中 $E=p^2/2M$ 和 $E'=p'^2/2M$ 为粒子碰撞前后的动能，$\hbar\omega$ 和 $\mathbf{k}=\hbar\omega\mathbf{n}/c$ 为光子的能量和动量，Q 为对散射中心的动量转移，正如

上述．读者可以证明：只要粒子是非相对论性的，在第二个表式(即 Q^2 表式)中忽略光子的动量 $\mathbf{k}$ 是可行的，并与动量的方向无关．

辐射的最大有效动量转移仍由运动学确定．同样，最小有效 Q 由运动学确定，而不取决于碰撞时间①．根据(15.27)中第二个方程，我们得

$$\frac{Q_{\max}}{Q_{\min}}=\frac{p+p'}{p-p'}=\frac{(\sqrt{E}+\sqrt{E-\hbar\omega})^2}{\hbar\omega} \tag{15.28}$$

其中第二式是利用能量守恒求得的．因此，辐射截面(15.22)是

$$\frac{d\chi_{\text{非相对论性}}}{d\omega}\simeq\frac{16}{3}\frac{Z^2e^2}{c}\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2\cdot\frac{1}{\beta^2}\cdot\ln\left[\frac{\lambda'(\sqrt{E}+\sqrt{E-\hbar\omega})^2}{\hbar\omega}\right] \tag{15.29}$$

式中 λ' 又是一个数，预期其量级为 1．实际上，若令 $\lambda'=1$，则(15.29)恰好是玻恩近似中的量子力学结果，这是贝特和海特勒于 1934 年最先算得的．辐射截面与频率的函数关系曲线的形状如图 15.3 所示．

通过半经典论证，即只在运动学中考虑量子效应，我们已经得到了正确的量子力学玻恩近似截面，这个事实，我们可以根据 15.1 节特别是图 15.1 的考虑来理解．在玻恩近似中，散射顶点(在图 15.1 中画成一个圆圈，表示所发生的诸复杂事件)简化为像光子-粒子顶点那样的一个点状顶点．下面的第三幅图是不存在的．只有外线辐射；振幅由(15.6)给出；同时考虑精确的运动学和相空间，可得(15.29)．

辐射截面 $d\chi/d\omega$ 按 Z^2z^4/M^2 依赖于参与碰撞的诸粒子的性

① 对软光子来说，$Q_{\text{最小}}=p-p'$ 可以近似地用 $Q_{\text{最小}}\simeq 2\hbar\omega/v$ 来代替，而经典表式(15.24)是 $Q^{(c)}_{\text{最小}}=2\eta\hbar\omega/v$．若 $\eta<1$，则量子力学的 $Q_{\text{最小}}$ 大于经典值，所以它决定 Q 的低截止值．对于更高能的光子来说，$(p\to p')$ 还要大．在相对论性碰撞中，$Q^{(c)}_{\text{最小}}$ 是 γ^{-1} 与其非相对论性值的乘积，所以远小于(15.33)．

质，这表明：在原子序数很高的材料中，辐射对电子来说是最重要的．当粒子通过每单位体积含N个固定电荷Ze(原子核)的单位厚度物质时，总辐射能量损失为

$$\frac{dE_{\text{辐射}}}{dx}=N\int_0^{\omega_{\max}}\frac{d\chi(\omega)}{d\omega}d\omega$$

将$d\chi/d\omega$代以(15.29)，改换积分变数$x=(\hbar\omega/E)$，我们可以把辐射能量损失写成

$$\frac{dE_{\text{辐射}}}{dx}=\frac{16}{3}NZ\left(\frac{Ze^2}{\hbar c}\right)\frac{z^4e^4}{Mc^2}\int_0^1\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\right)dx \qquad (15.30)$$

无量纲积分的值等于1．为了比较，我们写出辐射能量损失与碰撞能量损失(13.13)或(13.44)之比：

$$\frac{dE_{\text{辐射}}}{dE_{\text{碰撞}}}\simeq\frac{4}{3\pi}z^2\frac{Z}{137}\frac{m}{M}\left(\frac{v}{c}\right)^2\frac{1}{\ln B_q} \qquad (15.31)$$

对于非相对论性粒子($v\ll c$)，辐射损失与碰撞损失比较，完全可以忽略．无论什么时候，只要在基本过程(在这里是粒子在核库仑场中的偏转)之外，还有附加的辐射过程，那末，在结果中就加入一个表示特性的精细结构常数($e^2/\hbar c=1/137$)．因为辐射损失牵涉到入射粒子的加速，而碰撞损失牵涉到电子的加速，所以出现因子m/M．

(c) 相对论性韧致辐射

对于相对论性粒子来说，我们必须对能量守恒所得到的上下限加以修正．要进行两种修正．第一种修正，是最大有效Q值不再由运动学决定．15.1节里已证明，(15.12)只当$Q<2Mc$时才成立．当Q较大时，辐射强度不随Q而改变，且由(15.14)给出．由于(15.19)中Q^{-3}的特性，意味着(15.22)中的$Q_{\max}$为

$$Q_{\max}\simeq 2Mc \qquad (15.32)$$

第二种修正，是在由(15.27)确定最小动量转移时，光子的动量不再可以忽略不计．显然，当所有三个动量都互相平行时，就发生

最小动量转移:

$$Q_{\min}=p-p'-k$$

当粒子在初始和终了时如果都作相对论性运动(即使光子可以带走可观的能量),我们就可以近似地认为 $cp\simeq E-M^2c^4/2E$, $cp'\simeq E'-M^2c^4/2E$, 式中 E 和 E' 现在是总能量. 于是,得

$$Q_{\min}\simeq\frac{M^2c^3\hbar\omega}{2EE'} \tag{15.33}$$

利用(15.32)和(15.33),辐射截面(15.22)变成

$$\frac{d\chi_{\text{相对论性}}}{d\omega}\simeq\frac{16}{3}\frac{Z^2e^2}{c}\left(\frac{z^2e^2}{Mc^2}\right)^2\ln\left(\frac{\lambda''EE'}{Mc^2\hbar\omega}\right) \tag{15.34}$$

其中 λ'' 照例是量级为 1 的一个数. 只要光子能量满足 $\hbar\omega\ll E$,上面这个结果就与量子力学在相对论性极限下所得到的结果相同. 在 $E, E'\gg Mc^2$ 的极限下,量子公式为

$$\left(\frac{d\chi_{\text{相对论性}}}{d\omega}\right)_{\text{波恩}}\simeq\frac{16}{3}\frac{Z^2e^2}{c}\left(\frac{z^2e^2}{Mc^2}\right)^2\left(1-\frac{\hbar\omega}{E}+\frac{3\hbar^2\omega^2}{4E^2}\right)\left[\ln\left(\frac{2EE'}{Mc^2\hbar\omega}\right)-\frac{1}{2}\right] \tag{15.35}$$

我们顺便指出,因为 $Q_{\max}\simeq 2Mc$, 在相对论性碰撞中,速度的微小变化 $\Delta\beta$ 总是在垂直于入射方向的平面内. 因而辐射的角分布由(15.11)给出. 于是,当 $\hbar\omega\ll E$ 时, 每单位频率间隔、每单位立体角的辐射能的二重微分辐射截面为

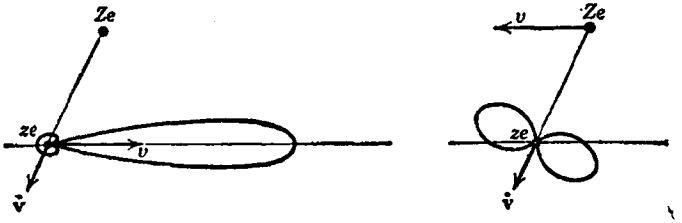
$$\frac{d^2\chi_{\text{相对论性}}}{d\omega d\Omega_{\gamma}}\simeq\left[\frac{3}{2\pi}\gamma^2\frac{(1+\gamma^4\theta^4)}{(1+\gamma^2\theta^2)^4}\right]\cdot\frac{d\chi_{\text{相对论性}}}{d\omega} \tag{15.36}$$

式中 θ 为光子的发射角, $d\chi_{\text{相对论性}}/d\omega$ 由(15.34)给出. $Q_{\text{最大}}/p$ 很小,这说明用相对论性卢瑟福公式(15.19)是恰当的,毋需进行自旋的量子力学修正.

(*d*) 通过洛仑兹变换的相对论性韧致辐射

用稍不同的观点来考虑相对论性韧致辐射的计算,是有益处

的.假设不用力心静止的实验室坐标系,我们观察在初粒子的静止坐标系 K' 中进行的过程. 图 15.4 中简略地表示了这两个坐标系中所出现的辐射过程. 实验室中的小角度偏转相当于坐标系 K



实验室坐标系　　坐标系 K'

图 15.4　从实验室(原子核所静止的)和坐标系 K'(入射粒子所静止的)中观察到的相对论性碰撞时所放出的辐射.

中整个碰撞期间的非相对论性运动. 于是, K' 中的微分辐射强度由(15.10)中两项之和给出,这时令 $\beta=0$:

$$\frac{d^2I'}{d\omega' d\Omega'}=\frac{z^2e^2}{8\pi^2c}|\Delta\boldsymbol{\beta}'|^2(1+\cos^2\theta')$$

撇号用来表示在坐标系 K' 中计算的量. 非相对论性运动的速度变化可以写为 $\Delta\boldsymbol{\beta}'=\Delta\mathbf{p}'/Mc$,式中 $\Delta\mathbf{p}'$ 是 K' 中的动量变化. 对于实验室中的微小偏转来说,$\Delta\mathbf{p}'$ 垂直于运动方向,所以在实验室中和在 K' 中是相同的. 它的量值是动量转移 Q. 因此,辐射能谱可以写成

$$\frac{d^2I'}{d\omega' d\Omega'}=\frac{z^2e^2}{8\pi^2c}\left(\frac{Q}{Mc}\right)^2(1+\cos^2\theta')$$

与(15.20)类似,每单位频率间隔、每单位立体角、每单位动量转移间隔的三重微分辐射截面为

$$\frac{d^3\chi'}{d\omega' d\Omega' dQ}=\frac{z^2e^2}{8\pi^2c}\left(\frac{Q}{Mc}\right)^2\cdot\frac{d\sigma_s}{dQ}\cdot(1+\cos^2\theta') \qquad (15.37)$$

这是在坐标系 K' 中的截面. 在 $d\sigma_s/dQ$ 或 Q^2 上不出现撇号,因

为 Q 是横向的，这些量显然是洛仑兹变换下的不变量①.

坐标系 K' 中的辐射以(15.37)中简单的偶极辐射而出现. 为了得到实验室中的截面，必须施以洛仑兹变换. 在 15.1 节里我们看到，(15.5)是一个洛仑兹不变量. 利用刚才谈到的有关 $d\sigma_s/dQ$ 的性质，显而易见，联系两个坐标系中微分截面的方程是

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{d^3\chi}{d\omega d\Omega dQ}=\frac{1}{\omega'^2}\frac{d^3\chi'}{d\omega' d\Omega' dQ} \tag{15.38}$$

于是，在实验室中的三重微分截面为

$$\frac{d^3\chi}{d\omega d\Omega dQ}=\frac{2}{3\pi}\cdot\frac{z^2e^2}{c}\left(\frac{Q}{Mc}\right)^2\cdot\frac{d\sigma_s}{dQ}\cdot \left[\frac{3}{16\pi}\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2(1+\cos^2\theta')\right] \tag{15.39}$$

当然，方括号里的量必须用(不带撇的)实验室的量来表示. 相对论性多普勒频移公式是

$$\omega=\gamma\omega'(1+\beta\cos\theta')$$

和

$$\omega'=\gamma\omega(1-\beta\cos\theta)$$

将这两方程合并，便得

和

$$\left.\begin{aligned}\frac{\omega}{\omega'}&=\frac{1}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}\simeq\frac{2\gamma}{1+\gamma^2\theta^2}\\ \cos\theta'&=\frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}\simeq\frac{1-\gamma^2\theta^2}{1+\gamma^2\theta^2}\end{aligned}\right\} \tag{15.40}$$

右边的近似表式适用于实验室中围绕入射方向的一些微小角度. 利用这些近似表式，(15.39)中带方括号的量变成

$$\left[\frac{3}{16\pi}\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2(1+\cos^2\theta')\right]\simeq\left[\frac{3\gamma^2}{2\pi}\frac{(1+\gamma^4\theta^4)}{(1+\gamma^2\theta^2)^4}\right]$$

① 实际上，我们可以利用明显不变的四元动量转移，它的平方由 $Q^2=-(p_1-p_2)^2=(p_1-p_2)^2-(E_1-E_2)^2/c^2$ 给出. 对于大力心引起的弹性散射来说，$E_1=E_2$，当角度很小、能量很高时，即使发生非弹性碰撞，能量之差的那一项也可以忽略不计.

上式恰恰就是(15.36)中的归一化表式.[利用(15.40)中的精确表式，就导出(15.10)中的两项之和.]利用卢瑟福截面(15.19)，或者,如果合适的话，用其它碰撞截面作为 $d\sigma_s/dQ$，可由(15.39)得到像前面那样的相对论性韧致辐射结果.

多普勒频移公式阐明一个重要的论点. 在 K' 中以完全任意角度发射的能量为 $\hbar\omega'$ 的光子,在实验室中看来,则在向前的锥体内,具有量级为 $\hbar\omega\sim\gamma\hbar\omega'$ 的能量. 因此,实验室中处在 $Mc^2\ll\hbar\omega\ll\gamma Mc^2$ 能量范围内的高能光子，都来自入射粒子静止坐标系中能量为 $\hbar\omega'\ll Mc^2$ 的软量子.

15.3 屏蔽效应；相对论性辐射能量损失

到目前为止,在韧致辐射的处理中,我们忽视了原子中电子的影响. 因为每个原子中电子的贡献约为原子核贡献的 Z 分之一，所以,当作入射粒子加速的直接贡献者来看时,电子的影响完全可以忽视. 但是电子通过对核电荷的屏蔽而发生间接的影响. 在原子场中,入射粒子的势能可以近似地用(13.94)式表示. 散射在小角度上不同于卢瑟福公式. 散射截面不是(15.17),而是(13.96),其中 $\theta_{\min}$ 由 (13.98) 和 (13.99) 给出. 用动量转移来表示时,(15.19)被下式所取代:

$$\frac{d\sigma_s}{dQ}=8\pi\left(\frac{zZe^2}{\beta c}\right)^2\cdot\frac{Q}{(Q^2+Q_s^2)^2} \tag{15.41}$$

式中

$$Q_s=p\theta_{\min}^{(q)}=\frac{\hbar}{a}\simeq\frac{Z^{1/3}}{192}mc \tag{15.42}$$

是与屏蔽半径 a 有关的动量转移. 注意: m 是电子的质量.

照 15.2 节开头那样进行韧致辐射的计算，不过要在(15.22)中作以下的替换:

$$\int_{Q_{\min}}^{Q_{\max}}\frac{dQ}{Q}\longrightarrow\int_{Q_{\min}}^{Q_{\max}}\frac{Q^3dQ}{(Q^2+Q_s^2)^2}$$

借助于 $Q_{\max}$ 远远大于 $Q_{\min}$ 和 Q_s 这个假定，我们得知，(15.22)中的对数可代之以

$$\ln\left(\frac{Q_{\max}}{Q_{\min}}\right)\longrightarrow\ln\left(\frac{Q_{\max}}{\sqrt{Q_{\min}^2+Q_s^2}}\right)-\frac{Q_s^2}{2(Q_{\min}^2+Q_s^2)}\qquad(15.43)$$

当 $Q_{\min}\gg Q_s$ 时，屏蔽效应是不重要的，上节的结果不需更改. 但当 $Q_{\min}\lesssim Q_s$ 时，就出现重要的变更.

由(15.23)、(15.28)和(15.32)，我们看到：在一切情况下，$Q_{\text{最大}}$ 可以写成

$$Q_{\max}\simeq 2Mv\qquad(15.44)$$

而由(15.28)和(15.33)，我们求得 $Q_{\min}$ 值，

$$\left.\begin{aligned}Q_{\min}^{(\text{非相对论性})}&=p-p'\simeq\frac{2\hbar\omega}{v}\\Q_{\min}^{(\text{相对论性})}&\simeq\frac{\hbar\omega}{2\gamma\gamma'c}\simeq\frac{\hbar\omega}{2\gamma^2c}\end{aligned}\right\}\qquad(15.45)$$

右边的近似式适用于软光子.(注意：将对数中 2 的因子另作考虑，有一个适用于软光子的 $Q_{\min}$ 的普适公式，即 $Q_{\min}\simeq\hbar\omega/\gamma^2v$). 因为对软光子来说，两个 $Q_{\min}$ 都正比于 ω，显然将总有一个频率，在小于此频率时屏蔽效应是重要的. 取(15.42)给出的 Q_s，对非相对论性韧致辐射来说，$Q_{\min}$ 与 Q_s 之比为

$$\frac{Q_{\min}^{(\text{非相对论性})}}{Q_s}\simeq\frac{384}{Z^{1/3}}\cdot\frac{\hbar\omega}{mvc}=\frac{192M\beta}{mZ^{1/3}}\cdot\frac{\hbar\omega}{(\hbar\omega)_{\max}}$$

式中 $(\hbar\omega)_{\max}=Mv^2/2$. 除了极低的速率外，$Q_{\min}^{(\text{非相对论性})}\lesssim Q_s$ 时的频率比最大频率小得多. 例如，对于入射到金靶($Z=79$)上的 100 千电子伏特的电子来说，只有当 $\omega/\omega_{\max}<0.04$ 时，屏蔽才是重要的. 对于比电子重的粒子来说，因子 M/m 使得屏蔽在非相对论性韧致辐射中完全不重要.

但是，对于相对论性韧致辐射来说，屏蔽效应可能是很重要的．$Q_{\min}$ 与 Q_s 之比现在是

$$\frac{Q_{\min}^{(\text{相对论性})}}{Q_s}\simeq\frac{96\hbar\omega}{\gamma\gamma' mc^2Z^{1/3}}=\frac{96M}{\gamma' mZ^{1/3}}\cdot\frac{\hbar\omega}{(\hbar\omega)_{\max}}$$

式中 $(\hbar\omega)_{\max}=\gamma Mc^2$．分母中出现 γ' 因子，这意味着：在足够高的能量下，几乎在整个频率范围内，$Q_{\min}^{(\text{相对论性})}$ 可以小于 Q_s（如果 $\omega/\omega_{\max}=x$，则 $\gamma'=(1-x)\gamma$）．这时的屏蔽叫做完全屏蔽．完全屏蔽的入射能量定义为 $E\gg E_s$，这里临界能量 E_s 是

$$E_s=\left(\frac{192M}{mZ^{1/3}}\right)Mc^2 \tag{15.46}$$

当能量比 E_s 大得多时，除了谱的最末端外，在所有频率上，(15.43)中 $Q_{\min}$ 与 Q_s 相比较，可以忽略不计．于是，在完全屏蔽极限下，辐射截面是恒定值，

$$\frac{d\chi}{d\omega}\simeq\frac{16}{3}\frac{Z^2e^2}{c}\left(\frac{z^2e^2}{Mc^2}\right)^2\ln\left(\frac{233M}{mZ^{1/3}}\right) \tag{15.47}$$

当然，对数中的数值系数在某种程度上说是不定的．贝特和海特勒求得一个结果，其对数中的数值系数不是 233，而是 183，并且此结果是以(15.35)的多项式 $(1-\hbar\omega/E+3\hbar^2\omega^2/4E^2)$ 乘(15.47)．

就电子来说，铝($Z=13$)中的 $E_s\simeq 42$ 兆电子伏特，而铅($Z=82$)中的 E_s 为 23 兆电子伏特．就 μ 介子来说，相应的值为 2×10^6 兆电子伏特和 10^6 兆电子伏特．由于因子 M/m，屏蔽只对电子是重要的．当 $E>E_s$ 时，对所有频率来说，辐射截面由恒定值(15.47)给出．图 15.5 中画的是在完全屏蔽的极限情形下的辐射截面(15.47)以及相应的贝特-海特勒结果．它们的真正的量子力学处理牵涉到上述缓慢变化的多项式，这多项式从 $\omega=0$ 处的 1 变化到 $\omega=\omega_{\max}$ 处的 0.75．对于宇宙线的电子和从极高能电子加速器中出来的电子来说，韧致辐射是属于完全屏蔽的极限情形．因而光子谱显示出典型的 $(\hbar\omega)^{-1}$ 特性．

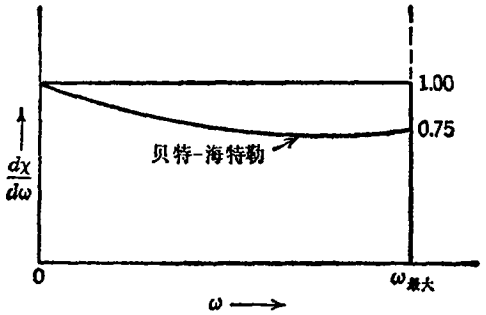


图 15.5 在完全屏蔽的极限情形下的辐射截面. 恒定值是半经典结果. 标以"贝特-海特勒"的曲线是量子力学的波恩近似.

在 15.2 节(*b*)段里讨论了非相对论性极限下的辐射能量损失，并且发现辐射能量损失较之碰撞能量损失小得可以忽略. 对于极端相对论性粒子，特别是电子，这不再是正确的. 在 $\gamma \gg 1$ 的极限下，辐射能量损失近似地由下式给出:

$$\frac{dE_{辐射}}{dx} \simeq \frac{16}{3} N \frac{Z^2 e^2}{c} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2}\right)^2 \int_0^{\gamma Mc^3/\hbar} \ln\left(\frac{Q_{\max}}{\sqrt{Q_{\min}^2 + Q_s^2}}\right) d\omega$$

当屏蔽可以忽略时，近似地得到

$$\frac{dE_{辐射}}{dx} \simeq \frac{16}{3} N \frac{Z^2 e^2}{\hbar c} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2}\right)^2 \ln(\lambda\gamma) \gamma Mc^2$$

当能量较高时，完全屏蔽，上式就改为

$$\frac{dE_{辐射}}{dx} \simeq \left[\frac{16}{3} N \frac{Z^2 e^2}{\hbar c} \left(\frac{z^2 e^2}{Mc^2}\right)^2 \ln\left(\frac{233M}{Z^{1/3}m}\right)\right] \gamma Mc^2 \tag{15.48}$$

上式表明，辐射损失正比于粒子的能量.

现在把辐射损失与碰撞损失相比，得

$$\frac{dE_{辐射}}{dE_{碰撞}} \simeq \frac{4}{3\pi} \left(\frac{Zz^2}{137}\right) \frac{m}{M} \frac{\ln\left(\frac{233M}{Z^{1/3}m}\right)}{\ln B_q} \gamma$$

当这比值等于 1 时的 γ 值依赖于粒子和 Z. 就电子来说，对于空气

$\gamma\sim200$，对于铅 $\gamma\sim20$. 能量较高时，辐射能量损失大于碰撞损失，辐射损失是极端相对论性粒子的主要损失机理.

在辐射能量损失占优势的能量下，完全屏蔽的结果(15.48)有效. 这时，引入一种长度单位 X_0 是有用的，X_0 叫做辐射长度，它相当于当粒子的能量降到其初值的 e^{-1} 时粒子所行进的距离. 根据能量守恒，可以把(15.48)改写为

$$\frac{dE}{dx}=-\frac{E}{X_0}$$

其解为

$$E(x)=E_0e^{-x/X_0}.$$

式中辐射长度 X_0 为

$$X_0=\left[\frac{16}{3}N\frac{Z^2e^2}{\hbar c}\left(\frac{z^2e^2}{Mc^2}\right)^2\ln\left(\frac{233M}{Z^{1/3}m}\right)\right]^{-1} \tag{15.49}$$

就电子来说，X_0 的一些典型值如下：在标准温度压力下，空气中的 X_0 为 32 克/厘米^2(270 米)，铝中的为 19 克/厘米^2(7.2 厘米)，铅中的为 4.4 克/厘米^2(0.39 厘米)①. 在研究宇宙线或人造高能粒子通过物质的行程时，辐射长度 X_0 是一种方便的单位，因为不仅辐射能量损失由它决定，而且辐射光子产生阴电子-阳电子偶的过程以及电子级联簇射的全部发展过程也都由它决定.

15.4 魏次扎克-威廉斯虚量子方法

韧致辐射以及涉及相对论性粒子的电磁相互作用的其它过程，可以按下文叙述的一种观点来处理，这种观点非常有助于从物理上了解这些过程. 这种观点叫做虚量子方法. 它利用了快速运

① 这些数值跟 *Rossi* 书第 55 页里给出的值大约相差百分之二十到三十，因为他在(15.49)中用更精确的系数 4 代替 $\frac{16}{3}$，并用 $Z(Z+1)$ 代替 Z^2.

动带电粒子的场与辐射脉冲的场的相似性(参看 11.10 节)，并把相对论性带电粒子与某系统的碰撞效应，跟辐射场(虚量子)与该系统的相互作用所产生的相应效应联系起来. 这种方法是由魏次扎克(C. F. Weizsäcker)和威廉斯(E. J. Williams)两人于1934年彼此独立地发展出来的. 从根本上说，费密比他们早十年就已经运用同一概念把电离引起的能量损失跟原子对X射线的吸收联系起来(参见习题 15.7).

在任一给定碰撞中，有一"入射粒子"和一"被撞系统". 我们将入射粒子的微扰场代之以等效的辐射脉冲，后者被分解成虚量子的频谱. 然后，我们计算虚量子对被撞系统的效应(散射或吸收). 用这种方法将带电粒子的相互作用跟光子的相互作用联系起来. 下表列出了几个典型的对应关系，并一一指明入射粒子和被撞系统.

带电粒子的相互作用和光子的相互作用之间的对应关系

粒子过程	入射粒子	被撞系统	辐射过程	$b_{\min}$
电子(轻粒子)-原子核碰撞中的韧致辐射	原子核	电子(轻粒子)	电子(轻粒子)对核库仑场的虚光子的散射	$\hbar/2Mv$
原子的碰撞电离(远距碰撞)	入射粒子	原子	由虚量子在原子中引起的电子的光致发射	a
由电子引起的原子核蜕变	电子	原子核	由虚量子引起的原子核的光致蜕变	$\hbar/\gamma mv$和R的较大者
在电子-原子核碰撞中π介子的产生	电子	原子核	由虚量子与原子核的相互作用引起的π介子的光致产生	

由上表我们看出，被撞系统并不总是实验室中的靶. 就韧致辐射来说，被撞系统是两个碰撞粒子的较轻者，因为它对辐射场的散射能力较大. 对于电子-电子碰撞中的韧致辐射来说，由于对称性，必须取两项贡献之和，这两项贡献就是轮流把各个电子看成最初静止于某参照系中的被撞系统而得到的.

在虚量子方法中，主要的假定，是等效辐射场的各频率成分的

效应彼此不相干地叠加. 只要场的微扰效应很小，这个假定是正确的，并且与 15.2 节(*d*)段里我们所作的假定(在整个碰撞过程中，粒子在参照系 K' 中的运动是非相对论性的)是一致的.

在讨论魏次扎克-威廉斯方法时，为了运用前几章里所得到的有关场的傅里叶变换的结果，用碰撞参数的方法比用动量转移的方法更为方便. 这两种方法，通过下列测不准原理关系式联系起来:

$$b\sim\frac{\hbar}{Q}$$

利用韧致辐射的 $Q_{\max}$ 的表式(15.44)，我们看出，在产生辐射时最小有效碰撞参数为

$$b_{\min}\simeq\frac{\hbar}{Q_{\max}}\simeq\frac{\hbar}{2Mv} \tag{15.50}$$

正如上表所列出的. 与(15.45)的 $Q_{\min}$ 值对应的最大碰撞参数不必详细列举. 虚量子谱自动地截止在与 $Q_{\min}$ 相当的地方.

当电荷为 q、速度为 $v\simeq c$ 的入射粒子在碰撞参数为 b 的地方通过被撞系统 S 时，其等效辐射场的谱可以由 11.10 节所示的场

$$E_2(t)=q\frac{\gamma b}{(b^2+\gamma^2v^2t^2)^{3/2}}$$

$$B_3(t)=\beta E_2(t)$$

$$E_1(t)=-q\frac{\gamma vt}{(b^2+\gamma^2v^2t^2)^{3/2}}$$

求得. 当 $\beta\simeq1$ 时，场 $E_2(t)$ 和 $B_3(t)$ 完全等效于沿 x_1 方向入射到 S 上的平面偏振辐射脉冲 P_1，如图 15.6 所示. 在上列表式中没有伴随 $E_1(t)$ 的磁场，所以尚不能构成沿 x_2 方向入射的真正辐射脉冲 P_2(如图所示). 虽然如此，但若在此坐标系里，S 中带电粒子的运动是非相对论性的，则我们可以加上必要的磁场，以形成脉冲 P_2，而不影响物理问题，原因是 S 中的粒子只对电场力起反应. 即

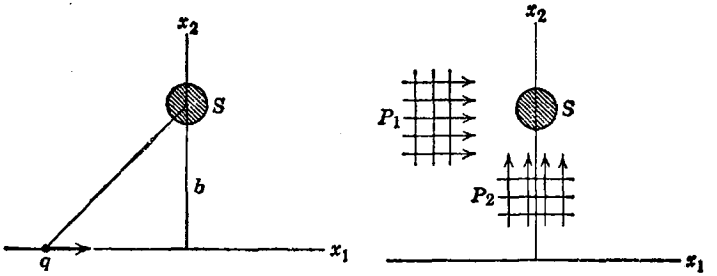


图 15.6　通过被撞系统 S 的相对论性带电粒子以及等效的辐射脉冲.

使 S 中的粒子受磁场力的影响，用辐射脉冲 P_2 代替 $E_1(t)$ 而显示出的附加磁场也是不重要的，因为我们将看到脉冲 P_2 的重要性总归较小.

由 14.5 节的讨论，特别是方程(14.51)、(14.52)和(14.60)，显而易见，等效脉冲 P_1 的频谱(每单位面积每单位频率间隔的能量)$dI_1(\omega,b)/d\omega$ 由下式给出:

$$\frac{dI_1}{d\omega}(\omega,b)=\frac{c}{2\pi}|E_2(\omega)|^2 \tag{15.51a}$$

式中 $E_2(\omega)$ 是 $E_2(t)$ 的傅里叶变换(14.54). 同样，脉冲 P_2 的频谱是

$$\frac{dI_2}{d\omega}(\omega,b)=\frac{c}{2\pi}|E_1(\omega)|^2 \tag{15.51b}$$

第十三章里已经计算了傅里叶积分，并由(13.29)和(13.30)给出. 这两个频谱是

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{dI_1(\omega,b)}{d\omega}\\ \dfrac{dI_2(\omega,b)}{d\omega}\end{matrix}\right\}=\frac{1}{\pi^2}\frac{q^2}{c}\left(\frac{c}{v}\right)^2\frac{1}{b^2}\left\{\begin{matrix}\left(\dfrac{\omega b}{\gamma v}\right)^2K_1^2\left(\dfrac{\omega b}{\gamma v}\right)\\ \dfrac{1}{\gamma^2}\left(\dfrac{\omega b}{\gamma v}\right)^2K_0^2\left(\dfrac{\omega b}{\gamma v}\right)\end{matrix}\right. \tag{15.52}$$

我们注意到，脉冲 P_2 的强度包含一个因子 γ^{-2}，所以对极端相对论性粒子来说是不太重要的. 图 15.7 中定性地描绘了这些谱的形状. 我们很容易理解这种特性，如果回想起，脉冲 P_1 的场随时间

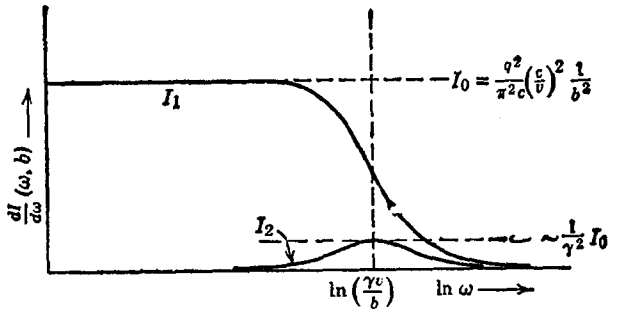


图 15.7　两个等效的辐射脉冲的频谱.

变化的曲线是铃状的，其宽度为 $\Delta t \sim b/\gamma v$. 所以谱频将包含所有频率，一直到最大值 $\omega_{max} \sim 1/\Delta t$. 另一方面，脉冲 P_2 的场好像频率为 $\omega \sim \gamma v/b$ 的一个正弦波. 因此，P_2 的谱将只含有以 $\gamma v/b$ 为中心的一个适当的频率范围.

在碰撞问题中，必须把频谱(15.52)对各种可能的碰撞参数求和. 这样才得出在等效辐射场中每单位频率间隔的能量. 但在这种问题中，我们通常必须指明最小碰撞参数 b_{min}. 仅当我们可以选取这样的 b_{min} 时，即对于比 b_{min} 大的碰撞参数，入射粒子场的效应可以精确地用等效辐射脉冲的效应来描述，而对于小的碰撞参数，粒子场的效应可以忽略或用别的方法加以考虑，这时，虚量子方法才是有用的. 至于通常如何选取 b_{min} 的值才算恰当，这个问题暂且搁在一边[(15.50)对韧致辐射是有效的]，我们可以把频谱写成对各种可能碰撞参数的积分，

$$\frac{dI}{d\omega}(\omega) = 2\pi \int_{b_{min}}^{\infty} \left[\frac{dI_1}{d\omega}(\omega, b) + \frac{dI_2}{d\omega}(\omega, b)\right] b db \qquad (15.53)$$

式中我们已经合并了脉冲 P_1 和脉冲 P_2 的贡献. 这个积分在 13.3 节里已经求出，即方程(13.35). 其结果为

$$\frac{dI}{d\omega}(\omega) = \frac{2}{\pi}\frac{q^2}{c}\left(\frac{c}{v}\right)^2 \left\{x K_0(x) K_1(x) - \frac{v^2}{2c^2} x^2\right.$$

$$\times [K_1^2(x) - K_0^2(x)]\Big\} \qquad (15.54)$$

式中

$$x = \frac{\omega b_{\min}}{\gamma v} \qquad (15.55)$$

低频时($\omega \ll \gamma v / b_{\min}$)，每单位频率间隔的能量简化为

$$\frac{dI}{d\omega}(\omega) \simeq \frac{2}{\pi} \frac{q^2}{c}\left(\frac{c}{v}\right)^2 \left[\ln\left(\frac{1.123\gamma v}{\omega b_{\min}}\right) - \frac{v^2}{2c^2}\right] \qquad (15.56)$$

而当高频时($\omega \gg \gamma v / b_{\min}$)，谱按指数而下降，

$$\frac{dI}{d\omega}(\omega) \simeq \frac{q^2}{c}\left(\frac{c}{v}\right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) e^{-(2\omega b_{\min}/\gamma v)} \qquad (15.57)$$

图 15.8 画出了当 $v \simeq c$ 时 $I(\omega)$ (15.54) 的精确图线以及低频近似 (15.56)。可以看出，能谱绝大部分由低频量子组成，并有一条尾

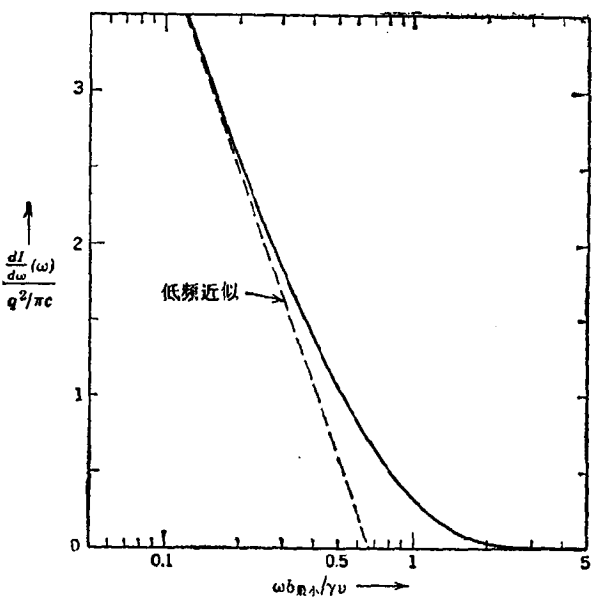


图 15.8 相对论性粒子的虚量子的频谱：每单位频率的能量 $dI(\omega)/d\omega$ 以 $q^2/\pi c$ 为单位，频率以 $\gamma v/b_{最小}$ 为单位。除以 $\hbar^2\omega$，就得每单位能量间隔的虚量子数。

巴伸展到频率 $2\gamma v/b_{\min}$ 附近.

利用关系式

$$\frac{dI}{d\omega}(\omega)d\omega=\hbar\omega N(\hbar\omega)d(\hbar\omega) \tag{15.58}$$

可得虚量子数谱 $N(\hbar\omega)$. 于是，在低频极限下，每单位能量间隔的虚量子数为

$$N(\hbar\omega)\simeq\frac{2}{\pi}\left(\frac{q^2}{\hbar c}\right)\left(\frac{c}{v}\right)^2\frac{1}{\hbar\omega}\left[\ln\left(\frac{1.123\gamma v}{\omega b_{\min}}\right)-\frac{v^2}{2c^2}\right] \tag{15.59}$$

我们必须讨论一下最小碰撞参数 $b_{\min}$ 的选择. 正如已经讨论过的那样，在韧致辐射中，$b_{\min}=\hbar/2Mv$，式中 M 是较轻粒子的质量. 就原子的碰撞电离来说，$b_{\min}\simeq a$，a 为原子半径，这时较切近的碰撞是当作入射粒子与自由电子的碰撞来处理的. 在由电子引起的原子核蜕变或由电子与原子核碰撞产生 π 介子的情况中，粒子(它的场提供了虚量子)的波动性决定了有效的最小碰撞参数. 在这些情况下，$b_{\min}=\hbar/\gamma Mv$ 或 $b_{\min}=R$，R 为原子核半径，选取其中的较大者为有效的最小碰撞参数. 这些值已简要地列在第 304 页的表中.

15.5 作为虚量子散射的韧致辐射

电荷为 ze、质量为 M 的相对论性入射粒子与电荷为 Ze 的原子核碰撞时所发出的韧致辐射，在入射粒子所静止的坐标系 K' 中，可以看作入射粒子对核库仑场里的虚量子的散射. 虚量子谱 $dI(\omega')/d\omega'$ 由(15.54)给出，其中 $q=Ze$. 最小碰撞参数为 $\hbar/2Mv$，于是频谱伸展到 $\omega'\sim\gamma Mc^2/\hbar$.

入射粒子(在 K' 中的被撞系统)对虚量子的散射，在低频时遵守汤姆孙截面(14.103). 于是，在坐标系 K' 中，当频率远小于 $Mc^2/\hbar$ 时，微分辐射截面近似地为

$$\frac{d\chi'}{d\omega' d\Omega'} \simeq \left(\frac{z^2e^2}{Mc^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta') \cdot \frac{dI'}{d\omega'}$$

因为虚量子谱伸展到 $\gamma Mc^2/\hbar$，所以在 $\omega' \ll Mc^2/\hbar$ 的区域内可以用近似式(15.56)作为 $dI'(\omega')/d\omega'$. 于是，在 K' 中的辐射截面变为

$$\frac{d\chi'}{d\omega' d\Omega'} \simeq \frac{1}{\pi}\frac{Z^2e^2}{c}\left(\frac{z^2e^2}{Mc^2}\right)^2 (1+\cos^2\theta') \cdot \ln\left(\frac{\lambda\gamma Mc^2}{\hbar\omega'}\right) \quad (15.60)$$

我们可以按照 15.2 节(d)段里的方法，求得实验室中的截面. 利用(15.38)和多普勒公式(15.40)，得

$$\frac{d\chi}{d\omega d\Omega} \simeq \frac{16}{3}\frac{Z^2e^2}{c}\left(\frac{z^2e^2}{Mc^2}\right)^2 \ln\left(\frac{2\lambda\gamma^2 Mc^2}{\hbar\omega(1+\gamma^2\theta^2)}\right) \cdot \left[\frac{3\gamma^2(1+\gamma^4\theta^4)}{2\pi(1+\gamma^2\theta^2)^4}\right] \quad (15.61)$$

从本质上说，这个截面与(15.36)相同. 将(15.61)对发射角积分，所得到的一个表式等于(15.34)的软光子极限.

方程(15.60)和(15.61)是以汤姆孙散射截面为根据的，所以只对于静止坐标系 K' 中 $\omega' < Mc^2/\hbar$ 的光子才有效. 当然，正如我们在 15.2 节(d)段里已经看到的，这样的软光子变换为实验室中的高能光子. 但是，虚量子谱包含的频率一直到 $\omega' \simeq \gamma Mc^2\hbar$. 对这样一些频率来说，辐射的散射不是由汤姆孙截面给出，而是由自旋为零的被撞粒子的(14.105)或自旋为$\frac{1}{2}$的粒子的克莱因-仁科公式给出. 这些光子的散射角分布，不同于(15.60)的偶极子形式，如图 14.13 所示. 更重要的事实，是当频率大于 $Mc^2/\hbar$ 时，散射的总截面迅速减少，这一点可以由(14.106)看出. 这个事实表明：在坐标系 K' 中韧致辐射的量子被局限于 $0 < \omega' \lesssim Mc^2/\hbar$ 的频率范围内，即使核库仑场里的虚量子的谱伸展到很高的频率. K' 中的谱受到限制，在物理上这是能量守恒所要求的，因为在 $\omega \simeq \gamma\omega'$ 的实验室坐标系中，频谱被限制在 $0 < \omega < (\gamma Mc^2/\hbar)$ 的范围内. 根

据克莱因-仁科公式，利用散射的角分布，进行详细讨论，所得到的韧致辐射截面与贝特-海特勒公式完全一致(Weizsäcker，1934年).

可以用魏次扎克-威廉斯方法来讨论屏蔽对韧致辐射谱的影响. 对于屏蔽库仑势，虚量子谱是(15.56)的修正式. 应将式中对数的宗量变为常数，正如15.3节里所讨论的那样.

把虚量子方法进一步应用到诸如原子的碰撞电离和电子引起的核蜕变等问题，留作本章末的习题.

15.6 β 衰变时的辐射

在β衰变过程中，原子序数为Z的一个不稳定核自发地转变成原子序数为$(Z\pm1)$的另一个核，同时放出一个电子$(\mp e)$和一个中微子. 这种过程用符号写为

$$Z\rightarrow(Z\pm1)+e^{\mp}+\nu \tag{15.62}$$

衰变中释放的能量几乎全部分配给电子和中微子，由于反冲核的质量很大，它所获得的那部分能量完全可以忽略. 即使不知道β衰变发生的原因及发生的过程，我们也可以预料到，在快速运动带电粒子突然产生时，会同时发出辐射. 正如引言里所提到的，我们可以认为电子起初是静止的，在一段短暂的时间内被急剧地加速到末速度，或者，我们也可以认为，在该段短暂的时间内电子突然带上了电荷. 重核所经受的加速，可以忽略，因而它对辐射没有贡献.

为了便于计算起见，我们可以假定，在$t=0$时，于原点上产生一个电子，它具有恒定速度$\mathbf{v}=c\boldsymbol{\beta}$. 这时，根据(15.1)或(15.2)，辐射的强度分布由下式给出：

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}=\frac{e^2}{4\pi^2c}\left|\frac{\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\boldsymbol{\beta}}{1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}}\right|^2 \tag{15.63}$$

这是能谱的低频极限．强度将从违反条件(15.15)的频率上的值逐渐减少．虽然很难准确地定出(15.15)中出现的$\langle\beta\rangle$的值，但若把形成过程想像为一条速度对时间的曲线，例如图 15.9 所简略画出的，则$\langle\beta\rangle$的值应该不大于$\frac{1}{2}$．在该情况下，判据(15.15)相当于$\omega\tau<1$．形成时间τ可以由测不准原理来估计：

$$\tau\sim\frac{\hbar}{\Delta E}\sim\frac{\hbar}{E} \tag{15.64}$$

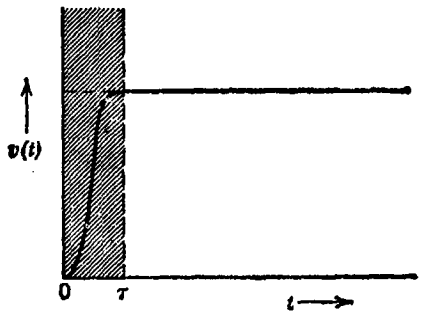


图 15.9

因为在β衰变的过程中总能量为E的电子是突然产生的．τ的这个估计值表明，显著辐射的频率被局限于$\omega<E/\hbar$．这恰好是能量守恒所加的限制．由(15.63)我们看到，辐射是在包含电子速度矢量和观测方向的平面内作线偏振的．球坐标中的微分分布是

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}=\frac{e^2}{4\pi^2c}\beta^2\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^2} \tag{15.65}$$

而每单位频率间隔的总强度为

$$\frac{dI}{d\omega}(\omega)=\frac{e^2}{\pi c}\left[\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)-2\right] \tag{15.66}$$

当$\beta\ll1$时，(15.66)简化为$dI/d\omega\simeq2e^2\beta^2/3\pi c$，这就表明：对于低能$\beta$粒子来说，辐射强度可以忽略不计．

强度分布(15.66)是典型的韧致辐射谱，其每单位能量间隔的光子数由下式给出：

$$N(\hbar\omega)=\frac{e^2}{\pi\hbar c}\left(\frac{1}{\hbar\omega}\right)\left[\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)-2\right] \tag{15.67}$$

有时引用“内韧致辐射”这个名称，以便与同样的β粒子通过物质时发出的韧致辐射相区别.

总辐射能近似地为

$$E_{\text{辐射}}=\int_0^{\omega_{\max}}\frac{dI}{d\omega}(\omega)d\omega\simeq\frac{e^2}{\pi\hbar c}\left[\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)-2\right]E \tag{15.68}$$

对于极快的β粒子，辐射能量与粒子能量之比为

$$\frac{E_{\text{辐射}}}{E}\simeq\frac{2}{\pi}\frac{e^2}{\hbar c}\left[\ln\left(\frac{2E}{mc^2}\right)-1\right] \tag{15.69}$$

上式表明：即使是最强的β过程($E_{\max}\sim30mc^2$)，辐射能也仅是β衰变中总释放能的极小一部分. 但是，这种辐射可以被观测到，并且为原子核物理学家提供了有用的知识.

在实际的β过程中，释放的能量分配给电子和中微子，所以电子具有某一最大能量值以下的全部能谱. 这时，必须把辐射谱(15.66)对β粒子的能量分布求平均. 而且，经过量子力学处理，可进行在光子谱上端附近的修正. 当与实验作定量比较时，这些修正都是很重要的. 但是，凭我们的经典计算，就足以找出辐射的原因并作半定量的描述了.

15.7 轨道电子俘获时的辐射—电荷和磁矩的消失

在β放射时，快速电子的突然产生引起了辐射. 在轨道电子俘获时，电子的突然消失也同样会引起辐射. 轨道电子俘获是这样的过程：在原子序数为Z的不稳定核周围的轨道电子被核所俘获，这个核转变为另一种核，其原子序数为$(Z-1)$，同时放出一个中微子，后者带走多余的能量. 这种过程可以用符号写为

$$Z+e^{-}\rightarrow(Z-1)+\nu \qquad (15.70)$$

因为假如没有辐射，则实际上无法探测的中微子就得带走衰变能，所以轨道电子俘获所伴有的光子谱对了解能量的释放情况是非常重要的.

作为一个简化的模型，我们设想一个电子沿半径为 a 的圆形原子轨道，以恒定角速度 ω_0 运动. 这轨道在 $x-y$ 平面内，原子核位于轨道的中心，如图 15.10 所示. 规定观测方向 n 的极角为 θ，

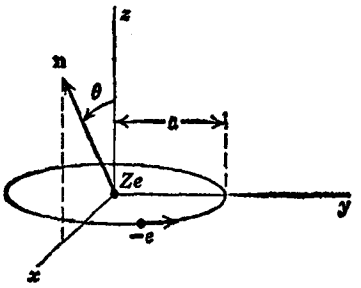


图 15 10

n 位于 $x-z$ 平面内. 电子的速度为

$$\mathbf{v}(t)=-\epsilon_1\omega_0 a\sin(\omega_0 t+\alpha)+\epsilon_2\omega_0 a\cos(\omega_0 t+\alpha) \qquad (15.71)$$

式中 α 为任意的相角. 如果在 $t=0$ 时电子消失，则辐射频谱 (14.67)近似地为①

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}=\frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c^2}\left|\int_{-\infty}^{0}\mathbf{n}\times[\mathbf{n}\times\mathbf{v}(t)]e^{i\omega t}dt\right|^2 \qquad (15.72)$$

这里我们已经假定 $(\omega a/c)\ll 1$(偶极近似)，并令推迟因子等于 1. (15.72)中的积分可以写成

$$\int_{-\infty}^{0}dt=-\omega_0 a(\epsilon_\perp I_1+\epsilon_\parallel\cos\theta I_2) \qquad (15.73)$$

① 为了依从(14 67)式下面的忠告，我们应该用一个因子，例如$(1-e^{t/\tau})\theta(-t)$，去乘速度(15 71)，以便使速度在 $t=0$ 附近的一段短暂时间 τ 内连续的降为零. 读者可以证明：在 $\omega_0\tau\ll 1$ 和 $\omega\tau\ll 1$ 的极限情况下，就得到下面所给出的结果.

式中

$$\left.\begin{aligned} I_1&=\int_{-\infty}^{0}\cos(\omega_0 t+\alpha)e^{i\omega t}dt \\ I_2&=\int_{-\infty}^{0}\sin(\omega_0 t+\alpha)e^{i\omega t}dt \end{aligned}\right\} \tag{15.74}$$

而 $\epsilon_\perp$、$\epsilon_{/\!/}$ 是与包含 n 和 z 轴的平面垂直的和平行的单位偏振矢量. 这些积分很简单,从而得到强度分布为

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}=\frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c^3}\frac{\omega_0^2a^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}[(\omega^2\cos^2\alpha+\omega_0^2\sin^2\alpha) + \cos^2\theta(\omega^2\sin^2\alpha+\omega_0^2\cos^2\alpha)] \tag{15.75}$$

因为可以从轨道的任一位置把电子俘获过来,所以我们对相角 α 求平均. 于是,强度分布为

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}=\frac{e^2}{4\pi^2c}\left(\frac{\omega_0 a}{c}\right)^2\frac{\omega^2(\omega^2+\omega_0^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}\cdot\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta) \tag{15.76}$$

每单位频率间隔的总辐射能量为

$$\frac{dI(\omega)}{d\omega}=\frac{2}{3\pi}\frac{e^2}{c}\left(\frac{\omega_0 a}{c}\right)^2\left[\frac{\omega^2(\omega_0^2+\omega^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}\right] \tag{15.77}$$

而每单位能量间隔的光子数为

$$N(\hbar\omega)=\frac{2}{3\pi}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\left(\frac{\omega_0 a}{c}\right)^2\left[\frac{\omega^2(\omega_0^2+\omega^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}\right]\frac{1}{\hbar\omega} \tag{15.78}$$

当 $\omega\gg\omega_0$ 时,方括号里的量趋于 1,这时的谱是典型的韧致辐射谱. 但是,当 $\omega\simeq\omega_0$ 时,强度很大(在我们的近似法中是无穷大). 光子谱的特性如图 15.11 所示. 读者也许会对 $\omega=\omega_0$ 处的奇异性感到惊奇,但是这种奇异性实际上是十分自然的,并且是预料到的. 如果电子永远保持轨道运动,辐射谱将是在 $\omega=\omega_0$ 处的锐线. 周期运动的突然停止,就使谱在特征频率附近展宽.

由量子力学得知,当一个 $l=1$ 的电子(主要是从 $2p$ 轨道)作一次可能的辐射跃迁,跃迁到 $l=0$ 态,处在这个态的电子可以被核吸收,这时就引起辐射. 于是,频率 ω_0 必恒等于标志 $2p\to1s$ 的

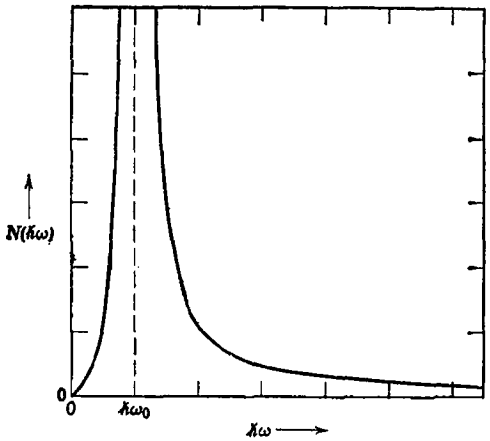


图 15.11　在轨道电子俘获时，由于电子电荷的消失而放出的光子谱.

X 射线的频率，即 $\hbar\omega_0 \simeq (3Z^2e^2/8a_0)$. 同样，轨道半径实际上是跃迁的偶极矩. 估计 $a \simeq a_0/Z$，式中 a_0 是玻尔半径，由此可得光子谱(15.78)为

$$N(\hbar\omega) \simeq \frac{3}{32\pi} Z^2 \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^3 \frac{1}{\hbar\omega} \left[\frac{\omega^2(\omega^2+\omega_0^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}\right] \tag{15.79}$$

这谱的根本特征是，谱在X射线能量处有一高峰，谱按 Z^2 依赖于原子序数.

到现在为止，我们已经讨论了在电子俘获过程中轨道电子电荷的消失所伴有的辐射. 电子具有磁矩与电荷. 磁矩的消失也会引起辐射，但其辐射谱具有完全不同的特征. 对运动的点磁矩来说，强度按角度和频率的分布由(14.74)给出. 可以把电子的磁矩当作空间恒定矢量处理，一直到它在 $t=0$ 时消失为止. 那末，在偶极近似下，若 $\beta \ll 1$，则相应的强度分布为

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} = \frac{\omega^4}{4\pi^2c^3} \left| \int_{-\infty}^{0} \mathbf{n} \times \boldsymbol{\mu} e^{i\omega t} dt \right|^2 \tag{15.80}$$

上式给出

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}=\frac{\omega^2}{4\pi^2c^3}\mu^2\sin^2\Theta \tag{15.81}$$

式中 Θ 是 $\boldsymbol{\mu}$ 与观测方向 $\mathbf{n}$ 的夹角.

在半经典意义下，可以认为电子磁矩的量值为 $\mu=\sqrt{3}(e\hbar/2mc)$，但只有通过它在任意轴上的投影 $\mu_z=\pm(e\hbar/2mc)$ 才能观测到. 可以认为，磁矩绕这个轴进动，它与轴的夹角为 $\alpha=\mathrm{tg}^{-1}\sqrt{2}$，于是，求平均后，只有磁矩沿轴的分量不等于零. 容易证明，对这种进动求平均，(15.81)中的 $\sin^2\Theta$ 的平均值等于 $\frac{2}{3}$，它与观测方向无关. 所以，角度和频率谱变为

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}=\frac{e^2}{8\pi^2c}\left(\frac{\hbar\omega}{mc^2}\right)^2 \tag{15.82}$$

每单位频率间隔的总辐射能量为

$$\frac{dI}{d\omega}=\frac{e^2}{2\pi c}\left(\frac{\hbar\omega}{mc^2}\right)^2 \tag{15.83}$$

而相应的每单位能量间隔的光子数为

$$N(\hbar\omega)=\frac{e^2}{2\pi\hbar c}\frac{\hbar\omega}{(mc^2)^2} \tag{15.84}$$

这些谱与频率的依赖关系跟轫致辐射谱很不一样. 它们随频率的增加而增加，这种增加显然是无限制的. 当然，我们已经事先提醒过：我们得到的经典结果只在低频极限下是有效的. 我们可以想像，测不准原理的某种论证，例如在 15.6 节里对辐射性 β 衰变所用到的论证，在这里也是有效的，并且至少保证了能量守恒. 实际上，因为在电子俘获过程中总是有中微子放出，所以就要加以修正. 可以证明，中微子的放射概率依赖于其能量 E_ν 的平方. 当没有光子放出时，中微子占有全部衰变能量 $E_\nu=E_0$. 但是，当伴随它放出能量为 $\hbar\omega$ 的光子时，中微子能量缩减为 $E'_\nu=E_0-\hbar\omega$. 这时，中微子放射概率缩减为前一情况下的概率乘以下列因子：

$$\left(\frac{E'_\nu}{E_\nu}\right)^2=\left(1-\frac{\hbar\omega}{E_0}\right)^2 \tag{15.85}$$

这意味着，我们的经典谱(15.83)和(15.84)必须加以修正，修正时要考虑到中微子放射的运动学，所以用(15.85)乘(15.83)和(15.84)．修正的经典光子谱为

$$N(\hbar\omega)=\frac{e^2}{2\pi\hbar c}\frac{\hbar\omega}{(mc^2)^2}\left(1-\frac{\hbar\omega}{E_0}\right)^2 \tag{15.86}$$

上式实质上是正确的量子力学结果．修正分布(15.86)与经典分布(15.84)的比较，如图 15.12 所示．显然，中微子放射概率对于获悉光子能谱的固有特性具有决定性意义．对于通常的韧致辐射谱来说，这种修正因子是不太重要的，因为以光子形式放出的辐射能量远小于最大容许值．

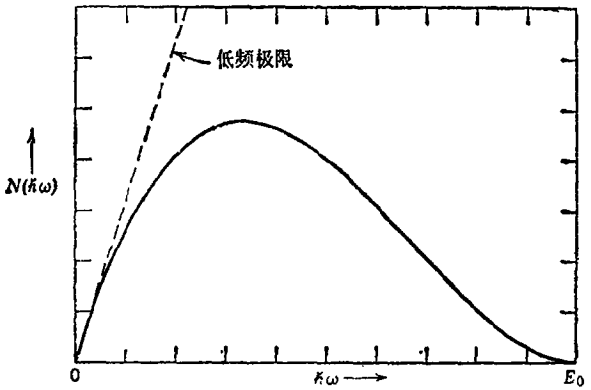


图 15.12　在轨道电子俘获时由于电子磁矩的消失而放出的光子谱．

在轨道电子俘获时，放出的总辐射是电荷消失和磁矩消失的两种贡献之和．由于(15.79)和(15.86)的特性不同，我们看出，除非释放能很小，辐射谱的上端是以磁矩贡献为主，而辐射谱的下端是以电荷项为主，特别是当 Z 很大时．图 15.13 表示 $Z\sim$20-30时的典型合成谱．对若干种核进行观测，即可证实辐射谱具有上述一般特征，并可定出释放能 E_0．

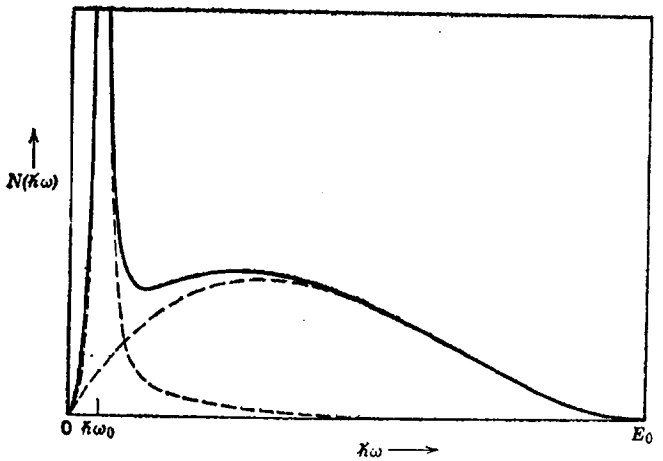


图 15.13　释放能为 E_0 的辐射性轨道电子俘获的典型光子谱，图中画出了由电子的电荷消失和磁矩消失所产生的贡献。

参考书和推荐读物

简短地讨论经典韧致辐射的有

Landau and Lifshitz, *Classical Theory of Fields*, 9.4 节;

Panofsky and Phillips, 19.6 节.

在下列一书里叙述了类似于本书的一种半经典讨论，但全部运用碰撞参数，且比本书简短得多:

Rossi, 2.12 节.

只有采用适当的量子力学处理，才能精确地描述韧致辐射．有关的标准参考书是

Heitler.

虚量子方法(魏次扎克-威廉斯方法)只有一篇专门的参考文献．即下面这篇经典论文:

Williams.

在下列两书里简短地讨论了这种方法:

Heitler, 附录 6;

Panofsky and Phillips, 18.5 节.

比魏次扎克-威廉斯的论述早十年的费密著作是

E. Fermi, *Zeit. Physik* **29**, 315(1924).

以下一篇论文通过运用量子力学阐明了费密的计算能量损失的方法的局限性:

E. J. Williams, *Proc. Roy. Soc.* **A139**, 163(1933).

下列著作叙述了辐射性 β 过程的量子力学处理,并在某些情况下跟实验作了比较:

C. S. W. Chang and D. L. Falkoff, *Phys. Rev.* **76**, 365(1949);

P. C. Martin and R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **109**, 1307(1958);

Siegbahn, 第二十章第 III 节(吴健雄撰写).

至今尚未提到的一个重要课题是由高能电子在晶体上所产生的相干韧致辐射束. 在适当条件下,可以产生大致单色的高度偏振的光子束. 下面这篇著作对有关的理论和实验作了评述:

G. Diambrini Palazzi, *Rev. Mod. Phys.* **40**, 611. (1968).

习 题

15.1 有一个电荷为 e、质量为 m 的非相对论性粒子,与一半径为 R 的固定的光滑硬球相撞. 假定碰撞是弹性的. 试证: 在偶极近似下(忽略推迟效应),每单位立体角、每单位能量间隔发射光子的经典微分截面为

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d(\hbar\omega)}=\frac{R^2}{12\pi}\frac{e^2}{\hbar c}\left(\frac{v}{c}\right)^2\frac{1}{\hbar\omega}(2+3\sin^2\theta)$$

式中 θ 是从入射方向量起的. 画出角分布的示意图. 对角度积分,求韧致辐射总截面. 从定性上说,频谱的上限取决于哪一个因子(或哪几个因子)?

15.2 不用非相对论性运动的假定,而用(15.2),并假定弹性碰撞的时间可以忽略不计,在这样的条件下讨论上题. 试证: 这时光子发射截面为

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d(\hbar\omega)}=\frac{R^2}{4\pi}\frac{e^2}{\hbar c}\frac{\beta^2}{\hbar\omega}\left[\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^2}+\frac{1}{\beta^3}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)-\frac{2}{\beta^2}\right]$$

15.3 电荷为 q_j、坐标为 $\mathbf{r}_j(t)$ 的一群带电粒子互相作用着,并且只在 $-\tau/2<t<\tau/2$ 这段时间内被加速,在这段时间内,它们的速度从 $c\boldsymbol{\beta}_j$ 变为 $c\boldsymbol{\beta}'_j$.

(*a*) 试证: 当 $\omega\tau\ll1$ 时,每单位立体角、每单位频率间隔发生的偏振为 ϵ 的辐射强度是

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega}=\frac{1}{4\pi^2c}|\epsilon^*\cdot\mathbf{E}|^2$$

式中

$$\mathbf{E}=\sum_j e_j\left(\frac{\boldsymbol{\beta}'_j}{1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}_j}-\frac{\boldsymbol{\beta}_j}{1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}_j}\right)e^{-i\omega\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_j^{(0)}/c}$$

(*b*) 一个质量为 784 兆电子伏特的 ω^0 介子衰变成 $\pi^+\pi^-$ 和 e^+e^-，其分支比分别为 1.3×10^{-2} 和 8×10^{-5}. 试证：这两种衰变方式在低频时辐射能量的频谱为

$$\frac{dI}{d\omega}=\frac{e^2}{\pi c}\left[\left(\frac{1+\beta^2}{\beta}\right)\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)-2\right]\simeq\frac{4e^2}{\pi c}\left[\ln\left(\frac{M_\omega}{m}\right)-\frac{1}{2}\right]$$

式中 M_ω 是 ω^0 介子的质量，m 是其中一个衰变产生粒子的质量. 将频谱一直积分到运动学容许的最大频率，近似地算出每种衰变的总辐射能. 问在每种衰变中总辐射能等于 ω^0 的静能的几分之一？

15.4 与习题 15.3(*b*)密切相关的一种情况是，在高能储存环实验中当电子和阳电子湮没而产生强子时，由电荷和磁矩的消失而引起辐射. 如果 $e^+e^-\to$强子这过程在没有放射光子时的微分截面为 $d\sigma_0$，当这一过程伴有一个在 $\hbar\omega$ 附近、$d(\hbar\omega)$ 能量间隔内的软光子($\hbar\omega\to0$)发射时，试计算截面. 将你的结果与下列量子力学表式加以比较：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega d(\hbar\omega)}=\frac{\alpha}{\pi^2}\frac{d\sigma_0(s')}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{s'^2-4m^2s'}{s^2-4m^2s}}\cdot\frac{\left[\beta^2\sin^2\theta+\dfrac{\hbar^2\omega^2}{s'+2m^2}(1-\beta^4\cos^4\theta)\right]}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^2}$$

$$\frac{d\sigma}{d(\hbar\omega)}=\frac{4\alpha}{\pi}\frac{d\sigma_0(s')}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{s'^2-4m^2s'}{s^2-4m^2s}}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1+\beta^2}{2\beta}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)-1\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\hbar^2\omega^2}{s'+2m^2}\left[\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)-1\right]\right\}$$

式中 $s=(p_1+p_2)^2$，$s'=(p_1+p_2-k)^2$，$\beta=$质心系中电子的 v/c. 忽略任一强子的辐射，假定所有强子远远重于电子.

这些表式的分子中有着正比于 ω^2 的因子，这可以归因于磁矩的消失. 若你在自己的半经典计算中尚未计及这些贡献，可以考虑计算这些贡献.

15.5 两个粒子各带有电荷 q_1 和 q_2，它们的质量各为 m_1 和 m_2，在电磁力(也许还有其它力)作用下发生碰撞. 试考究在碰撞时发出的辐射的角度和频率分布.

(*a*) 证明：对于非相对论性运动，在质心坐标系中，每单位立体角、每单位频率间隔的辐射能由下式给出，

$$\frac{dI(\omega,\Omega)}{d\Omega}=\frac{\mu^2}{4\pi^2c^3}\left|\int e^{-i\omega t}\ddot{\mathbf{x}}\times\mathbf{n}\left[\frac{q_1}{m_1}e^{i(\omega/c)(\mu/m_1)\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}(t)}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{q_2}{m_2}e^{-i(\omega/c)(\mu/m_2)\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}(t)}\right]dt\right|^2$$

式中 $\mathbf{x}=(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)$ 是相对坐标，$\mathbf{n}$ 是观测方向上的单位矢量，$\mu=m_1m_2/(m_1+m_2)$ 是约化质量.

(*b*) 展开推迟因子，证明：如果两个粒子有相同的荷质比(例如，氘核和 α 粒子)，则第一(偶极)项化为零，底下一级的项给出

$$\frac{dI(\omega,\Omega)}{d\Omega}=\frac{\omega^2}{4\pi^2c^5}\left(\frac{q_1\mu^2}{m_1^2}+\frac{q_2\mu^2}{m_2^2}\right)^2\left|\int e^{-i\omega t}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})(\ddot{\mathbf{x}}\times\mathbf{n})dt\right|^2$$

(*c*) 求结果(*b*)与 9.1-9.3 节里的多极子展开之间的关系.

15.6 两个全同的点粒子，它们的电荷都为 q，质量都为 m，其间的相互作用是短程推斥相互作用，这种相互作用相当于粒子跟一个硬球碰撞，这个硬球以这两个粒子的间距 R 为半径. 忽略这两个粒子间的电磁相互作用，试在质心坐标系中求出这两个全同粒子碰撞时的辐射截面的最低级非零近似. 证明：每单位立体角、每单位能量间隔发射光子的微分截面为

$$\frac{d^2\sigma}{d(\hbar\omega)d\Omega}=\frac{R^2}{60\pi}\left(\frac{q^2}{\hbar c}\right)\frac{v^2}{c^2}\left(\frac{R}{\hbar c}\right)^2\hbar\omega\left[1+\frac{5}{14}P_2(\cos\theta)-\frac{3}{28}P_4(\cos\theta)\right]$$

式中 θ 是相对于入射方向量度的. 试就频率依赖关系、相对量值等等，把这些结果与习题 15.1 的结果作比较.

15.7 有一电荷为 ze、质量为 m 的粒子，以非相对论性速度 v 运动，在屏蔽库仑场 $V(r)=Zze^2e^{-ar}/r$ 里被偏转，因而发生辐射. 若近似地认为，粒子几乎以直线轨道越过力心，讨论在这种情况下的辐射.

(*a*) 证明：如果碰撞参数为 b，则当 $\omega\ll v/b$ 时，每单位频率间隔的辐射能为

$$\frac{dI}{d\omega}(\omega,b)=\frac{8}{3\pi}\frac{Z^2e^2}{c}\left(\frac{z^2e^2}{mc^2}\right)^2\left(\frac{c}{v}\right)^2a^2K_1^2(ab)$$

当 $\omega\gg v/b$ 时，每单位频率间隔的辐射能可以忽略不计.

(*b*) 证明：辐射截面为

$$\frac{d\chi(\omega)}{d\omega}\simeq-\frac{16}{3}\frac{Z^2e^2}{c}\left(\frac{z^2e^2}{mc^2}\right)^2\left(\frac{c}{v}\right)^2\left\{\frac{x^2}{2}\left[K_0^2(x)-K_1^2(x)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2K_0(x)K_1(x)}{x}\right]\right\}_{x_1}^{x_2}$$

式中 $x_1=ab_{\text{最小}}$，$x_2=ab_{\text{最大}}$.

(c) 设 $b_{最小}=\hbar/mv, b_{最大}=v/\omega$, $\alpha^{-1}=1.4a_0Z^{-1/3}$, 求在 $x_2\ll 1$ 和 $x_2\gg 1$ 这两种极限情况下的辐射截面. 把你所得的结果跟正文的"屏蔽"和"非屏蔽"极限情况作比较.

15.8 有一电荷为 ze、质量为 m、速度为 v 的粒子, 被不变的推斥库仑势 $V(r)=Zze^2/r$ 所偏转, 而沿一条双曲线路径运动. 试在非相对论性偶极近似(但不作其它近似)下,

(a) 证明: 当粒子最初以碰撞参数 b 入射时, 其每单位频率间隔的辐射能为

$$\frac{d}{d\omega}I(\omega,b)=\frac{8}{3\pi}\frac{(zea\omega)^2}{c^3}e^{-(\pi\omega/\omega_0)}\left\{\left[K'_{i\omega/\omega_0}\left(\frac{\omega\epsilon}{\omega_0}\right)\right]^2+\right.$$
$$\left.+\frac{\epsilon^2-1}{\epsilon^2}\left[K_{i\omega/\omega_0}\left(\frac{\omega\epsilon}{\omega_0}\right)\right]^2\right\}$$

(b) 证明: 辐射截面为

$$\frac{d}{d\omega}\chi(\omega)=\frac{16}{3}\frac{(zeav)^2}{c^3}e^{-(\pi\omega/\omega_0)}\frac{\omega}{\omega_0}K_{i\omega/\omega_0}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\left[-K'_{i\omega/\omega_0}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]$$

(c) 证明: 当 $\omega\ll\omega_0$ 时, 辐射截面化为正文中对经典轫致辐射所得到的结果. 问当 $\omega\gg\omega_0$ 时的极限形式是什么?

(d) 对引力库仑相互作用要进行哪些修正? 双曲线路径可以用下列方程描写:

$$x=a(\epsilon+\cosh\xi), y=-b\sinh\xi, \omega_0 t=(\xi+\epsilon\sinh\xi)$$

式中 $a=Zze^2/mv^2, \epsilon=\sqrt{1+(b/a)^2}, \omega_0=v/a$.

15.9 试用虚量子方法讨论核的光致蜕变截面和由电子引起的核蜕变截面之间的关系.

(a) 证明: 当电子能量 $E=\gamma mc^2\gg mc^2$ 时, 由电子引起的核蜕变截面近似地为

$$\sigma_{电子}(E)\simeq\frac{2}{\pi}\frac{e^2}{\hbar c}\int_{\omega_T}^{E/\hbar}\sigma_{光子}(\omega)\ln\left(\frac{k\gamma^2mc^2}{\hbar\omega}\right)\frac{d\omega}{\omega}$$

式中 $\hbar\omega_T$ 是过程的阈能.

(b) 假定 $\sigma_{光子}(\omega)$ 具有共振形状:

$$\sigma_{光子}(\omega)\simeq\frac{A}{2\pi}\frac{e^2}{Mc^2}\frac{\Gamma}{(\omega-\omega_0)^2+(\Gamma/2)^2}$$

式中宽度 Γ 小于 $(\omega_0-\omega_T)$, 画出 $\sigma_{电子}(E)$ 与 E 的函数关系曲线. 证明: 当 $E\gg\hbar\omega_0$ 时,

$$\sigma_{\text{电子}}(E)\simeq\frac{2}{\pi}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\frac{Ae^4}{Mc}\frac{1}{\omega_0}\ln\left(\frac{kE^2}{mc^2\hbar\omega_0}\right)$$

(*c*) 像 Brown and Wilson, *Phys. Rev.*, **93**, 443(1954)一文所介绍的那样，从实验上比较轫致辐射谱和单能电子所产生的放射性，并证明：如果用魏次扎克-威廉斯谱描述这两个过程，且光致蜕变截面具有共振形状，则在高能下，定义为 $F_{\text{实验}}(Z,E)$ 的量具有近似值 $8\pi/3$.

15.10 有一电荷为 ze、质量为 M、速度为 v 的快速粒子，与类氢原子碰撞，后者具有一个电荷为 $-e$、质量为 m 的电子，这电子被电荷为 Ze 的中心核所束缚. 碰撞可以分为两类：切近碰撞，这时粒子通过原子($b<d$)；远距碰撞，这时粒子在原子外边($b>d$)越过. 原子"半径"d 可以取作 a_0/Z. 当切近碰撞时，可以把入射粒子与电子的相互作用当作两体碰撞处理，并由卢瑟福截面计算能量转移. 当远距碰撞时，可以把原子的激发和电离考虑成由入射粒子场的虚量子的光电效应引起的结果.

为简单起见，假定：当光子能量 Q 大于电离电势 I 时，光电截面为

$$\sigma_\gamma(Q)=\frac{8\pi^2}{137}\left(\frac{a_0}{Z}\right)^2\left(\frac{I}{Q}\right)^3$$

(上式服从X射线吸收的 $Z^4\lambda^3$ 经验定律，并且其系数已调整到满足偶极求和定则 $\int\sigma_\gamma(Q)\,dQ=2\pi^2e^2\hbar/mc$.)

(*a*) 计算切近碰撞和远距碰撞的能量转移 Q 的微分截面 $d\sigma/dQ$ (尽可能把截面写作 Q/I 的函数，并以 $2\pi z^2e^4/mv^2I^2$ 为单位). 画出当入射粒子作非相对论性运动和 $\frac{1}{2}mv^2=10^3I$ 时的 $Q/I>1$ 的两种分布图.

(*b*) 证明：用积分截面量度的远距碰撞次数远大于切近碰撞次数，可是就每次碰撞的能量转移来说，则远距碰撞远小于切近碰撞. 证明：这两类碰撞所分得的能量损失近似相等，并证明：你所得到的总能量损失与贝特结果(13.44)大体上符合.

15.11 当静止 π 介子衰变时，产生一个 μ 介子和一个中微子. 有效总动能为 $(m_\pi-m_\mu)c^2=34$ 兆电子伏特. μ 介子的动能为 4.1 兆电子伏特. 试定出由于运动 μ 介子的突然产生，每单位能量间隔所放出的量子数. 假定光子放射方向垂直于 μ 介子运动方向(实际上是 $\sin^2\theta$ 分布)，证明：最大光子能量为 17 兆电子伏特. 试求所发射的能量大于最大值的十分之一的量子数，并把你的结果同观测到的辐射性 π-μ 衰变的比值作比较[W. F. Fry, *Phys.*

Rev., **86**, 418(1952); H. Primakoff, *Phys. Rev.*, **84**, 1255(1951).]

15.12 在内变换中，核从一个态跃迁到另一个态，并放出一个轨道电子．这电子的动能等于跃迁能量减其结合能．试对1兆电子伏特的变换线，定出由于电子的突然发射，每单位能量放出的量子数．有百分之几的电子，它们的能量比总能量小了百分之九十九？变换线的这一低能尾巴在实验上可以观测到吗？

15.13 K^+ 介子的衰变方式之一是三π介子衰变：$K^+ \longrightarrow \pi^+\pi^+\pi^-$．释放能为75兆电子伏特，小得足以在粗略近似中把$\pi$介子按非相对论性粒子来处理．

(*a*) 证明：在K介子静止参照系中低频的辐射强度微分谱近似地为

$$\frac{d^2I}{d\omega d\Omega} \simeq \frac{2e^2}{\pi^2 c} \cdot \frac{T_-}{m_\pi c^2} \cdot \sin^2\theta$$

式中T_-是负π介子的动能，θ是光子相对于负π介子动量的发射角．

(*b*) 估算能量大于Δ的光子发射与非辐射性三π介子衰变的分支比．当$\Delta=1$兆电子伏特时，此分支比的数值等于多少？当$\Delta=10$兆电子伏特时，又等于多少？

15.14 带电K介子($M_K=493.7$兆电子伏特)的衰变方式之一是$K^+ \to \pi^+\pi^0$($M_{\pi^+}=139.6$兆电子伏特，$M_{\pi^0}=135.0$兆电子伏特)．因正π介子的产生而发出内韧致辐射．Edwards等，在*Phys. Rev.* **D5**, 2720(1972)上已经对这种辐射性衰变方式作了研究．

(*a*) 计算软光子按角度和频率的经典分布，并与Edwards等写的论文中图6的数据作比较．又当$\beta=0.71$时(相当于一个动能为58兆电子伏特的带电π介子)，计算经典分布，并加以比较．

(*b*) 估计动能在58兆电子伏特$\leqslant T_\pi \leqslant$90兆电子伏特的间隔内带电$\pi$介子的辐射性衰变数，将这个数表为所有$K^+$衰变的一个百分数($\pi^+\pi^0$衰变方式是全部衰变的21%)．你可以将光子考虑在内，正确地讨论运动学，或者，可以用下述理想化的假定近似地处理实际情况：中性π介子总是带有相同的动量，光子和带电π介子带有平行的动量[关于证明这一假定的合理性，参看(*a*)]．这一理想化假定使你可以直接求出带电π介子动能的限值与光子动能的限值之间的关系．将你的估计值跟$\pi^+\pi^0\gamma$(其中π^+能量范围有限)分支比的实验值$(2.4\pm0.8)\times10^{-4}$作比较．

第十六章 多 极 场

在讨论静电学的第三章和第四章里，我们广泛地运用了标势的球谐函数展开，来处理对坐标原点具有某些对称性的问题．这种方法不仅在球坐标中解边值问题时有用，而且在有源存在时，还提供了一种用电荷密度的多极矩来展开势的系统方法．对于随时间变化的电磁场来说，可以把标量球谐函数展开推广为矢量球面波展开．用这些矢量球面波，来讨论具有球对称性的电磁边值问题和定域源分布的多极辐射，都是方便的．在第九章里，我们已经讨论了最简单的多极辐射系统．在本章里，将系统论述这个问题．

16.1 标量波动方程的基本球面波解

我们先讨论标量波动方程，以此作为讨论矢量球面波问题的开端．满足无源波动方程

$$\nabla^2\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0 \tag{16.1}$$

的标量场 $\psi(\mathbf{x},t)$ 可按时间作傅里叶展开：

$$\psi(\mathbf{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\mathbf{x},\omega)e^{-i\omega t}d\omega \tag{16.2}$$

式中每一傅里叶分量满足亥姆霍兹方程

$$(\nabla^2+k^2)\psi(\mathbf{x},\omega)=0 \tag{16.3}$$

式中 $k^2=\omega^2/c^2$．这对某一原点具有对称性质的一些问题来说，采用适合于球坐标的基本解是方便的．拉普拉斯算符在球坐标中的表示式已由方程(3.1)给出．我们可以按大家熟知的展开式

$$\psi(\mathbf{x},\omega)=\sum_{l,m}f_l(r)Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{16.4}$$

来分离角变数和径向变数. 上式的球谐函数 Y_{lm} 是由(3.53)定义的. 径向函数 $f_l(r)$ 满足下列径向方程:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]f_l(r)=0 \tag{16.5}$$

用下列替换:

$$f_l(r)=\frac{1}{r^{1/2}}u_l(r) \tag{16.6}$$

则方程(16.5)就变成

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+k^2-\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right]u_l(r)=0 \tag{16.7}$$

这方程正好是 $\nu=l+\frac{1}{2}$ 的贝塞耳方程(3.75). 所以, $f_l(r)$ 的解是

$$f_l(r)=\frac{A}{r^{1/2}}J_{l+1/2}(kr)+\frac{B}{r^{1/2}}N_{l+1/2}(kr) \tag{16.8}$$

通常用下列公式定义球贝塞耳函数和球汉克尔函数(记作 $j_l(x), n_l(x), h_l^{(1,2)}(x)$):

$$\left.\begin{aligned} j_l(x)&=\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2}J_{l+1/2}(x)\\ n_l(x)&=\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2}N_{l+1/2}(x)\\ h_l^{(1,2)}(x)&=\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2}[J_{l+1/2}(x)\pm iN_{l+1/2}(x)] \end{aligned}\right\} \tag{16.9}$$

当 x 为实数时, $h_l^{(2)}(x)$ 是 $h_l^{(1)}(x)$ 的复共轭. 由级数展开式(3.82)和(3.83), 可以证明:

$$\left.\begin{aligned} j_l(x)&=(-x)^l\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l\left(\frac{\sin x}{x}\right)\\ n_l(x)&=-(-x)^l\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l\left(\frac{\cos x}{x}\right) \end{aligned}\right\} \tag{16.10}$$

对于前几个 l 的值，这些函数的显式为

$$
\left.\begin{aligned}
&j_0(x)=\frac{\sin x}{x}, \qquad n_0(x)=-\frac{\cos x}{x}, \qquad h_0^{(1)}(x)=\frac{e^{ix}}{ix}\\
&j_1(x)=\frac{\sin x}{x^2}-\frac{\cos x}{x}, \qquad n_1(x)=-\frac{\cos x}{x^2}-\frac{\sin x}{x}\\
&h_1^{(1)}(x)=-\frac{e^{ix}}{x}\left(1+\frac{i}{x}\right)\\
&j_2(x)=\left(\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x}\right)\sin x-\frac{3\cos x}{x^2},\\
&n_2(x)=-\left(\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x}\right)\cos x-3\frac{\sin x}{x^2}\\
&h_2^{(1)}(x)=\frac{ie^{ix}}{x}\left(1+\frac{3i}{x}-\frac{3}{x^2}\right)\\
&j_3(x)=\left(\frac{15}{x^4}-\frac{6}{x^2}\right)\sin x-\left(\frac{15}{x^3}-\frac{1}{x}\right)\cos x\\
&n_3(x)=-\left(\frac{15}{x^4}-\frac{6}{x^2}\right)\cos x-\left(\frac{15}{x^3}-\frac{1}{x}\right)\sin x\\
&h_3^{(1)}(x)=\frac{e^{ix}}{x}\left(1+\frac{6i}{x}-\frac{15}{x^2}-\frac{15i}{x^3}\right)
\end{aligned}\right\}(16.11)
$$

由级数(3.82)、(3.83)和定义(3.85)，可以计算小宗量极限，得

$x\ll 1, l$

$$
\left.\begin{aligned}
&j_l(x)\longrightarrow\frac{x^l}{(2l+1)!!}\left(1-\frac{x^2}{2(2l+3)}+\cdots\right)\\
&n_l(x)\longrightarrow-\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}}\left(1-\frac{x^2}{2(1-2l)}+\cdots\right)
\end{aligned}\right\}\qquad(16.12)
$$

式中 $(2l+1)!!=(2l+1)(2l-1)(2l-3)\cdots(5)\cdot(3)\cdot 1$. 同理，大宗量极限为

$x\gg l$

$$\left.\begin{aligned} j_l(x) &\longrightarrow \frac{1}{x}\sin\left(x-\frac{l\pi}{2}\right) \\ n_l(x) &\longrightarrow -\frac{1}{x}\cos\left(x-\frac{l\pi}{2}\right) \\ h_l^{(1)}(x) &\longrightarrow (-i)^{l+1}\frac{e^{ix}}{x} \end{aligned}\right\} \tag{16.13}$$

球贝塞耳函数满足下列递推公式:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2l+1}{x}z_l(x) &= z_{l-1}(x)+z_{l+1}(x) \\ z_l'(x) &= \frac{1}{2l+1}[l z_{l-1}(x)-(l+1)z_{l+1}(x)] \end{aligned}\right\} \tag{16.14}$$

式中 $z_l(x)$ 是函数 $j_l(x)$、$n_l(x)$、$h_l^{(1)}(x)$、$h_l^{(2)}(x)$中的任意一个. 各对函数的朗斯基行列式是

$$W(j_l, n_l)=\frac{1}{i}W(j_l, h_l^{(1)})=-W(n_l, h_l^{(1)})=\frac{1}{x^2} \tag{16.15}$$

(16.3)在球坐标中的通解可以写成

$$\psi(\mathbf{x})=\sum_{l,m}[A_{lm}^{(1)}h_l^{(1)}(kr)+A_{lm}^{(2)}h_l^{(2)}(kr)]Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{16.16}$$

式中系数 $A_{lm}^{(1)}$ 和 $A_{lm}^{(2)}$ 由边界条件确定.

为了便于参考,我们列出出射波格临函数 $G(\mathbf{x},,\mathbf{x}')$的球面波展开式. $G(\mathbf{x},\mathbf{x}')$在全空间中满足方程

$$(\nabla^2+k^2)G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=-\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{16.17}$$

第六章里已经指出,这个格临函数是

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{16.18}$$

我们可以完全仿照 3.9 节里处理泊松方程的方法,来求得 $G(\mathbf{x},\mathbf{x}')$的球面波展开式[特别参看方程(3.117)以及该方程以下的叙述]. 将下列展开式

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=\sum_{l,m}g_l(r,r')Y^*_{lm}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi) \qquad (16.19)$$

代入(16.17)，即得 $g_l(r,r')$的方程为

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]g_l=-\frac{1}{r^2}\delta(r-r') \qquad (16.20)$$

满足"在原点为有限而在无穷远处为出射波"的边界条件的解是

$$g_l(r,r')=Aj_l(kr_<)h_l^{(1)}(kr_>) \qquad (16.21)$$

如果 $A=ik$，即可保证斜率在 $r=r'$ 处有合适的间断，所以格临函数的展开是

$$\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}=ik\sum_{l=0}^{\infty}j_l(kr_<)h_l^{(1)}(kr_>)\sum_{m=-l}^{l}Y^*_{lm}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi) \qquad (16.22)$$

至此为止，我们着重讨论了满足标量波动方程的径向函数．现在重新考查一下角函数，以便引进一些讨论矢量波动方程时有用的概念．基本的角函数是球谐函数 $Y_{lm}(\theta,\phi)$(3.53)，它们是下列方程的解：

$$-\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]Y_{lm}=l(l+1)Y_{lm} \qquad (16.23)$$

正如大家在量子力学中所熟知的，这个方程可写成下列形式：

$$L^2Y_{lm}=l(l+1)Y_{lm} \qquad (16.24)$$

微分算符 $L^2=L_x^2+L_y^2+L_z^2$，而

$$\mathbf{L}=\frac{1}{i}(\mathbf{r}\times\nabla) \qquad (16.25)$$

是波动力学的轨道角动量算符与 $\hbar^{-1}$ 的乘积．

$\mathbf{L}$ 的诸分量可以方便地组合成下列形式：

$$\left.\begin{aligned} L_+ &= L_x + iL_y = e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\ L_- &= L_x - iL_y = e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\ L_z &= -i\frac{\partial}{\partial\phi} \end{aligned}\right\} \tag{16.26}$$

我们注意到，$\mathbf{L}$ 只作用于角变量，与 r 无关．由定义(16.25)显而易见，算符方程

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{L}=0 \tag{16.27}$$

成立．由显式(16.26)容易证明，L^2 等于(16.23)左边的算符．

由显式(16.26)和 Y_{lm} 的递推关系，可以确立下列有用的关系式：

$$\left.\begin{aligned} L_+Y_{lm} &= \sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,Y_{l,m+1} \\ L_-Y_{lm} &= \sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,Y_{l,m-1} \\ L_zY_{lm} &= mY_{lm} \end{aligned}\right\} \tag{16.28}$$

最后，我们写下关于 $\mathbf{L}$、L^2 和 ∇^2 的对易性的下列算符方程：

$$\left.\begin{aligned} L^2\mathbf{L} &= \mathbf{L}L^2 \\ \mathbf{L}\times\mathbf{L} &= i\mathbf{L} \\ L_j\nabla^2 &= \nabla^2L_j \end{aligned}\right\} \tag{16.29}$$

式中

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r) - \frac{L^2}{r^2} \tag{16.30}$$

16.2 电磁场的多极展开

设场量与时间的依从关系为 $e^{-i\omega t}$，则真空的无源区域中的麦克斯韦方程组是

$$\left.\begin{aligned} \nabla\times\mathbf{E} &= ik\mathbf{B}, \quad \nabla\times\mathbf{B} = -ik\mathbf{E} \\ \nabla\cdot\mathbf{E} &= 0, \quad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{16.31}$$

式中 $k=\omega/c$. 若将两个旋度方程合并以消去 **E**, 则得 **B** 所满足的方程

$$\left.\begin{aligned}&(\nabla^2+k^2)\mathbf{B}=0, \quad \nabla\cdot\mathbf{B}=0\\ &\text{这时 } \mathbf{E} \text{ 由}\\ &\mathbf{E}=\frac{i}{k}\nabla\times\mathbf{B}\end{aligned}\right\} \tag{16.32}$$

给出. 另外, 也可以消去 **B** 而得

$$\left.\begin{aligned}&(\nabla^2+k^2)\mathbf{E}=0, \quad \nabla\cdot\mathbf{E}=0\\ &\text{这时 } \mathbf{B} \text{ 由}\\ &\mathbf{B}=-\frac{i}{k}\nabla\times\mathbf{E}\end{aligned}\right\} \tag{16.33}$$

给出. (16.32)或(16.33)都是和麦克斯韦方程组(16.31)等效的一组方程, 各包含三个方程.

我们现在想要求出**E**和**B**的多极解. 由(16.32)和(16.33)显而易见, **B** 和**E**的每一笛卡儿分量都满足亥姆霍兹波动方程(16.3). 因此, 每一笛卡儿分量都可以写成通解(16.16)那样的展开式. 但是, 剩下的问题是: 将不同的分量组合起来, 以便满足 $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ 和 $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$, 并给出 (l, m) 阶纯多极场. 我们遵照蒲卡普和卡西米① 所提出的一种不同的但稍容易的方法. 考虑标量 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}$, 这里**A**是合理的矢量场. 很容易证明: 拉普拉斯算符作用在此标量上得

$$\nabla^2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{A})=\mathbf{r}\cdot(\nabla^2\mathbf{A})+2\nabla\cdot\mathbf{A} \tag{16.34}$$

所以, 由(16.32)和(16.33)得知: 标量 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}$ 都满足亥姆霍兹波动方程, 即满足

$$(\nabla^2+k^2)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{E})=0, \quad (\nabla^2+k^2)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{B})=0 \tag{16.35}$$

$\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}$ 的通解由(16.16)给出, 同理, $\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}$ 的通解也由(16.16)给出.

---

① C. J. Bouwkamp and H. B. G. Casimir, *Physica* **20**, 539 (1954). 这篇论文讨论了若干不同而等效的处理多极辐射的方法之间的关系.

我们现在用下列条件来定义(l, m)阶磁多极场:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}_{lm}^{(M)}&=\frac{l(l+1)}{k}g_l(kr)Y_{lm}(\theta,\phi)\\ \mathbf{r}\cdot\mathbf{E}_{lm}^{(M)}&=0\end{aligned}\right\}\tag{16.36}$$

式中

$$g_l(kr)=A_l^{(1)}h_l^{(1)}(kr)+A_l^{(2)}h_l^{(2)}(kr)\tag{16.37}$$

(16.36)中引用$l(l+1)/k$的因子,是为了以后的方便. 利用(16.33)中的旋度方程,我们可以把$\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}$与电场联系起来:

$$k\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}=\frac{1}{i}\mathbf{r}\cdot(\nabla\times\mathbf{E})=\frac{1}{i}(\mathbf{r}\times\nabla)\cdot\mathbf{E}=\mathbf{L}\cdot\mathbf{E}\tag{16.38}$$

式中$\mathbf{L}$由(16.25)给出. 利用(16.36)给出的$\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}$, 磁多极的电场必须满足

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{E}_{lm}^{(M)}(r,\theta,\phi)=l(l+1)g_l(kr)Y_{lm}(\theta,\phi)\tag{16.39}$$

和$\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}_{lm}^{(M)}=0$. 为了由(16.39)定出纯横向电场, 我们首先要注意到,算符$\mathbf{L}$只作用在角变数(θ,ϕ)上. 这意味着, $\mathbf{E}_{lm}^{(M)}$的径向依赖关系必定由$g_l(kr)$给出. 其次, 算符$\mathbf{L}$作用在Y_{lm}上, 将按(16.28)而变换m的值,但不改变l的值. 所以, $\mathbf{E}_{lm}^{(M)}$的分量至多可以是Y_{lm}的线性组合, 其诸项的m值是不同的, 而l值是相同的, 等于(16.39)右边的l值. 稍加思考就可看出, 对$\mathbf{L}\cdot\mathbf{E}_{lm}^{(M)}$来说,为了得到单一的$Y_{lm}$,必须事先令$\mathbf{E}_{lm}^{(M)}$有这样一些分量, 它们能抵消$\mathbf{L}$的提升或降低$m$值的作用. 于是,例如在$L_-E_+$项中,$E_+$必定是与$L_+Y_{lm}$成正比的. 总而言之,电场应该是

$$\left.\begin{aligned}E_{lm}^{(M)}&=g_l(kr)\mathbf{L}Y_{lm}(\theta,\phi)\\ \text{磁场是}\quad B_{lm}^{(M)}&=-\frac{i}{k}\nabla\times\mathbf{E}_{lm}^{(M)}\end{aligned}\right\}\tag{16.40}$$

(16.40)详细给出(l, m)阶磁多极的电磁场. 因为(16.40)的电场是与矢径正交的,所以这些多极场有时宁愿叫做横向电(TE)多极

场，而不叫磁多极场.

同样，$(l,\ m)$阶电多极的场或$(l,\ m)$阶横向磁(TM)多极的场由下列条件给出:

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}^{(E)}_{lm}=-\frac{l(l+1)}{k}f_l(kr)Y_{lm}(\theta,\phi)\\&\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}^{(E)}_{lm}=0\end{aligned}\right\}\qquad(16.41)$$

这时，电多极场为

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{B}^{(E)}_{lm}=f_l(kr)\mathbf{L}Y_{lm}(\theta,\phi)\\&\mathbf{E}^{(E)}_{lm}=\frac{i}{k}\nabla\times\mathbf{B}^{(E)}_{lm}\end{aligned}\right\}\qquad(16.42)$$

径向函数$f_l(kr)$由类似于(16.37)的一个表式给出.

场(16.40)和(16.42)是类似于第八章的横电型和横磁型柱面模的球面波.犹如圆柱形波导那样，可以证明，(16.40)和(16.42)这两组多极场构成无源区域中麦克斯韦方程组矢量解的一个完备集.我们将用电多极场和磁多极场这样的术语，而不用横向磁多极子场和横向电多极场，因为我们将把这两种类型的场的源分别看成是电荷密度和磁矩密度.由于矢量球谐函数$\mathbf{L}Y_{lm}$占有重要的地位，所以引进下列归一化形式是方便的①:

$$\mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi)=\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\mathbf{L}Y_{lm}(\theta,\phi)\qquad(16.43)$$

这个归一化矢量球谐函数具有以下正交性质：对所有l、l'、m、m'来说，

$$\int\mathbf{X}^*_{l'm'}\cdot\mathbf{X}_{lm}d\Omega=\delta_{ll'}\delta_{mm'}\qquad(16.44)$$

和

$$\int\mathbf{X}^*_{l'm'}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{X}_{lm})d\Omega=0\qquad(16.45)$$

① 按定义$l=0$时$\mathbf{X}_{lm}$恒等于零.只在$k\to0$的静态极限下，无源麦克斯韦方程组才有球对称解.参看9.1节.

将这两种类型的场合并之，我们可以写出麦克斯韦方程组(16.31)的通解：

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{B}&=\sum_{l,m}\left[a_E(l,m)f_l(kr)\mathbf{X}_{lm}-\frac{i}{k}a_M(l,m)\nabla\times g_l(kr)\mathbf{X}_{lm}\right]\\ \mathbf{E}&=\sum_{l,m}\left[\frac{i}{k}a_E(l,m)\nabla\times f_l(kr)\mathbf{X}_{lm}+a_M(l,m)g_l(kr)\mathbf{X}_{lm}\right]\end{aligned}\right\}\tag{16.46}$$

式中的系数 $a_E(l,m)$ 和 $a_M(l,m)$ 决定了 (l,m) 阶电多极场和 (l,m)阶磁多极场的大小．径向函数 $f_l(kr)$ 和 $g_l(kr)$ 的形式都如(16.37)．系数 $a_E(l,m)$ 和 $a_M(l,m)$，以及(16.37)中两项的相对比值，全由源和边界条件决定．为清楚起见，我们注意到：根据

$$\left.\begin{aligned}a_M(l,m)g_l(kr)&=\frac{k}{\sqrt{l(l+1)}}\int Y^*_{lm}\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}\,d\Omega\\ a_E(l,m)f_l(kr)&=-\frac{k}{\sqrt{l(l+1)}}\int Y^*_{lm}\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}\,d\Omega\end{aligned}\right\}\tag{16.47}$$

标量 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}$ 足以确定(16.46)中的未知量．因此，知道了无源区域中两个不同半径 r_1 和 r_2 处的 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}$，就可以完全确定场，包括确定 f_l 和 g_l 中 $h_l^{(1)}$ 和 $h_l^{(2)}$ 的相对比值．利用标量 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}$，可以比较容易地确立源 ρ、$\mathbf{J}$ 与多极系数 $a_E(l,m)$ 和 $a_M(l,m)$ 之间的关系(参看 16.5 节)．

16.3 多极场的性质；多极辐射的能量和角动量

在考虑通解(16.46)和定域源分布的关系之前，我们先考察单项的多极场(16.40)和(16.42)的性质．在近区内($kr\ll1$)，径向函数 $f_l(kr)$ 和(16.12)给出的 n_l 成正比，除非它的系数恒等于零．若把这种系数为零的可能性排除在外，则 (l,m)阶电多极的磁感应

强度的极限特性是

$$\mathbf{B}_{lm}^{(E)} \to -\frac{k}{l}\mathbf{L}\frac{Y_{lm}}{r^{l+1}} \tag{16.48}$$

式中的比例系数是为以后方便而选定的. 为了求电场，我们必须取右边的旋度. 一个有用的算符恒等式是

$$i\nabla\times\mathbf{L}=\mathrm{r}\nabla^2-\nabla\left(1+r\frac{\partial}{\partial r}\right) \tag{16.49}$$

电场(16.42)是

$$\mathbf{E}_{lm}^{(E)} \to \frac{-i}{l}\nabla\times\mathbf{L}\left(\frac{Y_{lm}}{r^{l+1}}\right) \tag{16.50}$$

因为(Y_{lm}/r^{l+1})是拉普拉斯方程的一个解，所以(16.49)的第一项等于零. 因此，(l,m)阶电多极的近距离电场为

$$\mathbf{E}_{lm}^{(E)} \to -\nabla\left(\frac{Y_{lm}}{r^{l+1}}\right) \tag{16.51}$$

这正是4.1节里静电多极场. 我们注意到，在量值上磁感应强度$\mathbf{B}_{lm}^{(E)}$只有$\mathbf{E}_{lm}^{(E)}$的kr分之一. 因此，在近区中，电多极的磁感应强度总是比电场强度小得多. 对于磁多极场(16.40)来说，E和B的地位显然按下列变换而对换：

$$\mathbf{E}^{(E)} \to -\mathbf{B}^{(M)}, \qquad \mathbf{B}^{(E)} \to \mathbf{E}^{(M)} \tag{16.52}$$

在远区，即辐射区$(kr\gg 1)$内，多极场和边界条件有关. 为明确起见，我们考虑适用于由定域源辐射出的出射波的例子. 这时，径向函数$f_l(kr)$与球汉克尔函数$h_l^{(1)}(kr)$成正比. 由渐近式(16.13)可知，在辐射区内，(l,m)阶电多极的磁感应强度为

$$\mathbf{B}_{lm}^{(E)} \to (-i)^{l+1}\frac{e^{ikr}}{kr}\mathbf{L}Y_{lm} \tag{16.53}$$

这时，电场可以写为

$$\mathbf{E}_{lm}^{(E)}=\frac{(-i)^l}{k^2}\left[\nabla\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\times\mathbf{L}Y_{lm}+\frac{e^{ikr}}{r}\nabla\times\mathbf{L}Y_{lm}\right] \tag{16.54}$$

因为我们已经用了球汉克尔函数的渐近形式，所以我们不必保留

$(1/r)$的幂次高于 1 的项. 由这个限制, 再利用恒等式(16.49), 即得

$$\mathbf{E}_{lm}^{(E)}=-(-i)^{l+1}\frac{e^{ikr}}{kr}\left[\mathbf{n}\times\mathbf{L}Y_{lm}-\frac{1}{k}(\mathbf{r}\nabla^2-\nabla)Y_{lm}\right] \quad (16.55)$$

式中 $\mathbf{n}=(\mathbf{r}/r)$是径向的单位矢量. 第二项显然等于 $1/kr$ 乘以某个无量纲的角函数, 因而在 $kr\gg1$ 的极限情况下可以忽略不计. 于是, 我们求得辐射区内的电场强度是

$$\mathbf{E}_{lm}^{(E)}=\mathbf{B}_{lm}^{(E)}\times\mathbf{n} \quad (16.56)$$

式中 $\mathbf{B}_{lm}^{(E)}$由 (16.53)给出. 这些场是典型的辐射场, 它与矢径垂直, 并按 r^{-1} 衰减. 对于磁多极场来说, 我们只消作(16.52)的对换即可.

我们可以用辐射源的多极子场来计算辐射所带走的能量和角动量. 为明确起见, 我们考虑 m 值不同而 l 值相同的 (l,m)阶电多极的一个线性叠加, 并按(16.46)写出场强如下:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{B}_l&=\sum_m a_E(l,m)\mathbf{X}_{lm}h_l^{(1)}(kr)e^{-i\omega t}\\ \mathbf{E}_l&=\frac{i}{k}\nabla\times\mathbf{B}_l\end{aligned}\right\} \quad (16.57)$$

就谐和变化场来说, 能量密度对时间的平均值是

$$u=\frac{1}{16\pi}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*+\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^*) \quad (16.58)$$

在辐射区内这两项相等. 因此, 在 r 和$(r+dr)$之间的球壳内的能量(当 $kr\gg1$ 时)是

$$dU=\frac{dr}{8\pi k^2}\sum_{m,m'}a_E^*(l,m')a_E(l,m)\int\mathbf{X}_{lm'}^*\cdot\mathbf{X}_{lm}d\Omega \quad (16.59)$$

这里我们已用了球汉克尔函数的渐近形式(16.13). 利用正交积分(16.44), 上式变为

$$\frac{dU}{dr}=\frac{1}{8\pi k^2}\sum_m|a_E(l,m)|^2 \tag{16.60}$$

与半径无关. 就电多极和磁多极的一般叠加来说，对m的求和变成对l和m的求和，而$|a_E|^2$变成$|a_E|^2+|a_M|^2$. 所以在辐射区内一个球壳中的总能量是对所有多极的不相干叠加.

对时间平均的角动量密度是

$$\mathbf{m}=\frac{1}{8\pi c}\mathrm{Re}[\mathbf{r}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{B}^*)] \tag{16.61}$$

可以将三重叉积展开，并代以电场(16.57)，即得电多极的叠加场的 m 如下：

$$\mathbf{m}=\frac{1}{8\pi\omega}\mathrm{Re}[\mathbf{B}^*(\mathbf{L}\cdot\mathbf{B})] \tag{16.62}$$

于是，在辐射区内 r 和$(r+dr)$之间的球壳中的角动量为

$$d\mathbf{M}=\frac{dr}{8\pi\omega k^2}\mathrm{Re}\sum_{m,m'}a_E^*(l,m')a_E(l,m)\int(\mathbf{L}\cdot\mathbf{X}_{lm'})^*\mathbf{X}_{lm}d\Omega \tag{16.63}$$

运用 $\mathbf{X}_{lm}$ 的显式(16.43)，(16.63)可以写成

$$\frac{d\mathbf{M}}{dr}=\frac{1}{8\pi\omega k^2}\mathrm{Re}\sum_{m,m'}a_E^*(l,m')a_E(l,m)\int Y_{lm'}^*\,\mathbf{L}Y_{lm}d\Omega \tag{16.64}$$

根据 (16.28) 列出的 $\mathbf{L}Y_{lm}$ 的性质和球谐函数的正交性，可得到 $d\mathbf{M}/dr$ 的笛卡儿分量的诸表式如下：

$$\frac{dM_x}{dr}=\frac{1}{16\pi\omega k^2}\mathrm{Re}\sum_m[\sqrt{(l-m)(l+m+1)}a_E^*(l,m+1)+\sqrt{(1+m)(l-m+1)}a_E^*(l,m-1)]a_E(l,m) \tag{16.65}$$

$$\frac{dM_y}{dr}=\frac{1}{16\pi\omega k^2}\mathrm{Im}\sum_m[\sqrt{(1-m)(1+m+1)}a_E^*(l,m+1)-\sqrt{(l+m)(l-m+1)}a_E^*(l,m-1)]a_E(l,m) \tag{16.66}$$

$$\frac{dM_z}{dr}=\frac{1}{8\pi\omega k^2}\sum_m m|a_E(l,m)|^2 \tag{16.67}$$

这些方程表明：对于一个由不同m值的线性叠加组成的一般的l阶电多极来说，只有角动量的z分量比较简单.

对于一个具有单一m值的多极来说，M_x和M_y等于零，把(16.67)和(16.60)比较一下，我们看出

$$\frac{dM_z}{dr}=\frac{m}{\omega}\frac{dU}{dr} \tag{16.68}$$

与r无关. 上式显然可作如下的量子力学解释：在(l,m)阶多极的辐射中，能量为$\hbar\omega$的每个光子带走了$m\hbar$单位的角动量的z分量. 即使考虑不同m值的叠加，(16.67)的解释也同样有效，每一个具有一定m值的多极都对角动量的z分量作出其应有的贡献，各不相干. 但是，现在x分量和y分量通常不等于零，相邻m值的多极对加权相干叠加有贡献. (16.64)所包含的和(16.65)-(16.67)所明显展示的特性，在量子力学中讨论矢量算符及其关于J^2和J_z的基态的表示时，已为大家所熟悉①. 多极子场的角动量就是这种特性的一个经典例子，z分量在(l,m)多极基中是对角化的，而x分量和y分量则不然.

刚才所介绍的角动量特性普遍地成立，虽然我们的例子(16.57)有些特殊. 对于不同(l,m)值的电多极和磁多极的叠加来说，角动量表式(16.63)推广为

$$\frac{d\mathbf{M}}{dr}=\frac{1}{8\pi\omega k^2}\mathrm{Re}\sum_{\substack{l,m\\l',m'}}\Big\{[a_E^*(l',m')a_E(l,m)+a_M^*(l',m')a_M$$

$$(l,m)]\int(\mathbf{L}\cdot\mathbf{X}_{l'm'})^*\mathbf{X}_{lm}d\Omega+[a_E^*(l',m')a_M(l,m)$$

① 例如，参看 E. U. Condon and G. H. Shortley, *The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge University Press, (1953), 第63页.

$$-a_M^*(l',m')a_E(l,m)]\int(\mathbf{L}\cdot\mathbf{X}_{l'm'})\mathbf{n}\times\mathbf{X}_{lm}d\Omega\Big\} \tag{16.69}$$

(16.69)中第一项的形式如同(16.63)，分别表示电多极和磁多极的和．第二项是电多极与磁多极之间的相互干涉．考查第二项的角积分，可以看出，干涉是在 l 值不等于 1 的电多极和磁多极之间发生．这是多极场的宇称性质的必然结果(见下文)．除了这种混有干涉的性质外，$d\mathbf{M}/dr$ 的其它性质如前．

(16.68) 的量子力学解释关系到每个光子所带走的角动量的 z 分量．与量子力学再作进一步的类比，我们就会预料到角动量平方和能量平方之比值为

$$\frac{M^{(q)^2}}{U^2}=\frac{(M_x^2+M_y^2+M_z^2)_q}{U^2}=\frac{l(l+1)}{\omega^2} \tag{16.70}$$

但是，根据(16.60)和(16.65)-(16.67)，一个纯(l,m)阶多极的经典结果是

$$\frac{M^{(c)^2}}{U^2}=\frac{|M_z|^2}{U^2}=\frac{m^2}{\omega^2} \tag{16.71}$$

造成这一差别的原因，在于单个光子的电磁场的量子性质．如果我们精确地知道单个光子的角动量的 z 分量，则测不准原理要求其它分量是不确定的，只是它们的均方值使 (16.70) 成立．另一方面，对包含许多光子的辐射场态(经典极限)来说，角动量的横向分量的均方值比 z 分量的平方小到可以忽略不计．这时，可以应用经典极限(16.71)．对于包含N个光子的(l,m)阶多极场来说，可以证明下式成立①：

$$\frac{[M^{(q)}(N)]^2}{[U(N)]^2}=\frac{N^2m^2+Nl(l+1)-m^2}{N^2\omega^2} \tag{16.72}$$

① C. Morette De Witt and J. H. D. Jensen, *Z. Naturforsch*, 8a, 267 (1953)．他们的处理与我们的极其相似，我们的经典多极系数 $a_E(l,m)$和 $a_M(l,m)$变为量子力学的光子湮没算符(复共轭 a_E^* 和 a_M^* 变为厄密共轭产生算符)．

上式包括了作为极限情形的(16.70)和(16.71).

在关于多极场的单个光子的辐射角动量的量子力学解释中，还包括量子态间的多极跃迁的选择定则. (l,m) 阶的多极跃迁，将总角动量 J 及其 z 分量 M 所确定的初量子态，跟在 $|J-l|\leqslant J'\leqslant J+l$ 范围内的总角动量 J' 及其分量 $M'=M-m$ 所确定的终量子态联系起来. 换句话说，对于 (J,M) 和 (J',M') 两个态来说，可能发生的多极跃迁的阶 (l,m) 满足 $|J-J'|\leqslant l\leqslant J+J'$ 和 $m=M-M'$.

为使多极跃迁的量子力学描述完善起见，还必须说明初态和终态的宇称是否相同. 初态的宇称等于终态宇称与多极场宇称的乘积. 要确定多极场的宇称，只需考查磁感应强度 $\mathbf{B}_{lm}$ 在对原点的宇称反演变换 $(\mathbf{r}\to-\mathbf{r})$ 下的特性. 多极场的宇称可由 $\mathbf{B}_{lm}$ 来描述，要了解这一点，有一条途径，就是回想带电粒子和电磁场的相互作用是与 $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A})$ 成正比的. 由于旋度运算改变了宇称，如果对于某一多极跃迁来说，$\mathbf{B}_{lm}$ 有某种宇称(偶或奇)，则对应的 $\mathbf{A}_{lm}$ 将有相反的宇称. 那末因为 $\mathbf{v}$ 是奇宇称的极矢量，所以由相互作用算符 $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A})$ 联系起来的那些态，其宇称是不同的，它们之差别等于磁感应强度 $\mathbf{B}_{lm}$ 的宇称.

电多极场的磁感应强度由(16.57)给出. 宇称变换 $(\mathbf{r}\to-\mathbf{r})$ 在球坐标中等效于 $(r\to r,\theta\to\pi-\theta,\phi\to\phi+\pi)$. 算符 $\mathbf{L}$ 在反演下不变. 因此，电多极场的 $\mathbf{B}_{lm}$ 的宇称性质由 $Y_{lm}(\theta,\phi)$ 的变换决定. 由(3.53)和(3.50)显然可知，Y_{lm} 的宇称是 $(-1)^l$. 于是，我们看出，(l,m) 阶电多极场的宇称是 $(-1)^l$. 具体地说，磁感应强度 $\mathbf{B}_{lm}$ 的宇称是 $(-1)^l$，而电场 $\mathbf{E}_{lm}$ 的宇称是 $(-1)^{l+1}$，因为 $\mathbf{E}_{lm}=i\nabla\times\mathbf{B}_{lm}/k$.

(l,m) 阶磁多极场的宇称是 $(-1)^{l+1}$. 这时的电场强度 $\mathbf{E}_{lm}$ 形式上和电多极场的 $\mathbf{B}_{lm}$ 相同. 所以磁多极场的宇称正好和同阶的

电多极场的宇称相反.

将量子跃迁中的宇称变化和角动量变化联系起来，我们看到，只有某些多极跃迁可以并合发生. 例如，如果两个态具有 $J=\frac{1}{2}$ 和 $J'=\frac{3}{2}$，则允许的多极阶为 $l=1,2$. 如果两个态的宇称相同，我们看到宇称守恒又对跃迁概率加了限制，以致只能发生磁偶极跃迁和电四极跃迁. 如果两个态的宇称不同，则可以发射或吸收电偶极辐射或磁四极辐射.

16.4 多极辐射的角分布

对一般定域源分布来说，辐射区内的场由下列叠加式给出：

$$\mathbf{B}\to\frac{e^{ikr-i\omega t}}{kr}\sum_{l,m}(-i)^{l+1}[a_E(l,m)\mathbf{X}_{lm}+a_M(l,m)\mathbf{n}\times\mathbf{X}_{lm}]$$

$$\mathbf{E}\to\mathbf{B}\times\mathbf{n} \tag{16.73}$$

系数 $a_E(l,m)$ 和 $a_M(l,m)$ 与源的性质的关系将在下节里论述. 对时间平均的单位立体角辐射功率是

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{c}{8\pi k^2}\left|\sum_{l,m}(-i)^{l+1}[a_E(l,m)\mathbf{X}_{lm}\times\mathbf{n}+a_M(l,m)\mathbf{X}_{lm}]\right|^2 \tag{16.74}$$

辐射的偏振由绝对值符号内诸矢量的方向决定. 我们注意到，给定 (l,m) 的电和磁多极场对角度的依赖关系是相同的，但偏振方向互成直角. 所以多极的阶数可以藉测量辐射功率的角分布来确定，但辐射(电或磁)的性质只能靠测量偏振来确定.

对 (l,m) 阶纯多极场来说，角分布(16.74)简化成单项：

$$\frac{dP(l,m)}{d\Omega}=\frac{c}{8\pi k^2}|a(l,m)|^2|\mathbf{X}_{lm}|^2 \tag{16.75}$$

根据 $\mathbf{X}_{lm}$ 的定义(16.43)和性质(16.28)，可将上式改写成明显的形式：

$$\frac{dP(l,m)}{d\Omega}=\frac{c|a(l,m)|^2}{8\pi k^2 l(l+1)}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}(l-m)(l+m+1)|Y_{l,m+1}|^2\\ +\frac{1}{2}(l+m)(l-m+1)|Y_{l,m-1}|^2+m^2|Y_{lm}|^2\end{array}\right\} \tag{16.76}$$

下表列出了一些较简单的角分布.

$|\mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi)|^2$

l	m		
	0	±1	±2
1 偶极	$\frac{3}{8\pi}\sin^2\theta$	$\frac{3}{16\pi}(1+\cos^2\theta)$	
2 四极	$\frac{15}{8\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta$	$\frac{5}{16\pi}(1-3\cos^2\theta+4\cos^4\theta)$	$\frac{5}{16\pi}(1-\cos^4\theta)$

我们看到，偶极场的分布乃是振动方向平行于 z 轴的偶极场($m=0$)和另外两个偶极场($m=\pm1$)的叠加，其中一个沿 x 轴，另一个沿 y 轴，两者位相之差为 90°. 图 16.1 中画出了偶极场和四极场的角分布，这些图是极坐标强度图. 这些图代表 $l=1$ 和 $l=2$ 的多极场的角分布，可是，一般的 l 阶多极场分布将涉及不同 m 值的 $(2l+1)$ 个振幅的相干叠加，如(16.74)所示.

用(3.69)可以证明，矢量球谐函数的绝对值平方遵守下述求和法则：

$$\sum_{m=-l}^{l}|\mathbf{X}_{lm}(\theta,\phi)|^2=\frac{2l+1}{4\pi} \tag{16.77}$$

因此，对于由一组 l 阶多极所组成的源来说，当多极系数 $a(l,m)$ 与 m 无关，而且彼此不相干地叠加起来时，由这个源所发出的

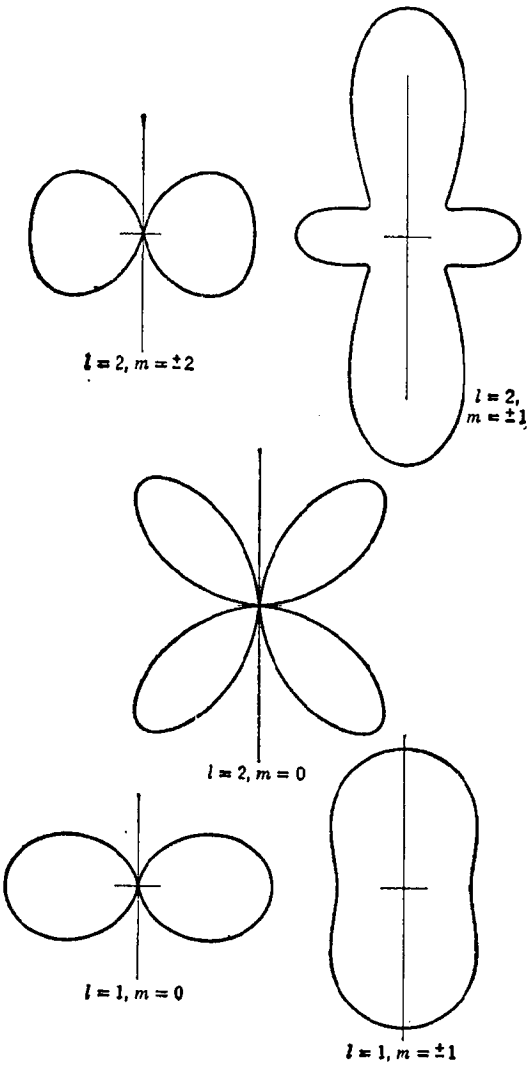


图 16.1 (l, m)阶纯多极的偶极辐射和四极辐射图样。

辐射分布是各向同性的. 在原子和原子核的辐射跃迁中, 通常以这种情况为主, 除非对初态作了特别的处理.

一个(l, m)阶的纯多极所辐射的总功率由(16.75)对所有角度的积分给出. 因为$\mathbf{X}_{lm}$已归一化为1, 所以辐射功率为

$$P(l, m)=\frac{c}{8\pi k^2}|a(l, m)|^2 \tag{16.78}$$

对一般的源来说, 角分布由相干叠加式(16.74)给出. 根据对角度的积分容易证明, 干涉项对总功率无贡献. 因此, 总辐射功率正好是不同多极的贡献的不相干叠加:

$$P=\frac{c}{8\pi k^2}\sum_{l,m}[|a_E(l, m)|^2+|a_M(l, m)|^2] \tag{16.79}$$

16.5 多极辐射的源; 多极矩

我们已经讨论了多极场的性质、辐射图样以及被带走的角动量和能量, 现在转而研究场和产生场的源的关系. 我们假定存在着合理的定域的电荷分布$\rho(\mathbf{x}, t)$、电流分布$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$和内禀磁化强度分布$\mathcal{M}(\mathbf{x}, t)$. 此外, 我们还假定对时间的依赖关系可以分解为傅里叶分量, 下面我们只考虑谐变的源,

$$\rho(\mathbf{x})e^{-i\omega t},\quad \mathbf{J}(\mathbf{x})e^{-i\omega t},\quad \mathcal{M}(\mathbf{x})e^{-i\omega t} \tag{16.80}$$

在这里, 只取这些复量的实部, 这是不言而喻的. 用线性叠加可以得到更一般的时间依赖关系(参看习题9.1).

$\mathbf{E}$和$\mathbf{B}$的麦克斯韦方程为

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot\mathbf{B}=0,\quad \nabla\times\mathbf{E}-ik\mathbf{B}=0\\&\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho,\ \nabla\times\mathbf{B}+ik\mathbf{E}=\frac{4\pi}{c}(\mathbf{J}+c\nabla\times\mathcal{M})\end{aligned}\right\} \tag{16.81}$$

而连续性方程为

$$i\omega\rho=\nabla\cdot\mathbf{J} \tag{16.82}$$

为方便起见，讨论无散场．因此，我们用B和

$$\mathbf{E}'=\mathbf{E}+\frac{4\pi i}{\omega}\mathbf{J} \tag{16.83}$$

作为场变量．在源外部的区域中，$\mathbf{E}'$ 简化为 E．用这些场来写，麦克斯韦方程变成

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot\mathbf{B}=0,\quad \nabla\times\mathbf{E}'-ik\mathbf{B}=\frac{4\pi i}{\omega}\nabla\times\mathbf{J}\\&\nabla\cdot\mathbf{E}'=0,\quad \nabla\times\mathbf{B}+ik\mathbf{E}'=4\pi\nabla\times\mathcal{M}\end{aligned}\right\} \tag{16.84}$$

我们可以将两个旋度方程合并而得到非齐次亥姆霍兹波动方程

$$\left.\begin{aligned}&(\nabla^2+k^2)\mathbf{B}=-\frac{4\pi}{c}\nabla\times(\mathbf{J}+c\nabla\times\mathcal{M})\\\text{和}\\&(\nabla^2+k^2)\mathbf{E}'=-4\pi ik\nabla\times\left(\mathcal{M}+\frac{1}{ck^2}\nabla\times\mathbf{J}\right)\end{aligned}\right. \tag{16.85}$$

这些波动方程连同 $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$，$\nabla\cdot\mathbf{E}'=0$ 以及用 B 给出 $\mathbf{E}'$ 的旋度方程或用 $\mathbf{E}'$ 给出 B 的旋度方程，构成了有源存在时与 (16.32) 和 (16.33) 对应的方程组．

因为按照(16.47)，(16.46)中的多极系数是由标量 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}'$ 确定的，所以考虑 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}'$ 的波动方程就够了，不用考虑矢量场 $\mathbf{E}'$ 和 B 的波动方程．根据(16.34)、(16.85)和任意矢量场 A 的矢量关系式 $\mathbf{r}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=(\mathbf{r}\times\nabla)\cdot\mathbf{A}=-i\mathbf{L}\cdot\mathbf{A}$，我们求得非齐次波动方程

$$\left.\begin{aligned}&(\nabla^2+k^2)\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}=-\frac{4\pi i}{c}\mathbf{L}\cdot(\mathbf{J}+c\nabla\times\mathcal{M})\\&(\nabla^2+k^2)\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}'=4\pi k\mathbf{L}\cdot\left(\mathcal{M}+\frac{1}{ck^2}\nabla\times\mathbf{J}\right)\end{aligned}\right\} \tag{16.86}$$

根据 6.6 节的阐述，可以直接得到这些标量波动方程的解．利用无穷远处出射波的边界条件，我们有

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}(x)&=\frac{i}{c}\int\frac{e^{ik|x-x'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\mathbf{L}'\cdot[\mathbf{J}(\mathbf{x}')+c\nabla'\times\mathscr{M}(\mathbf{x}')]d^3x'\\ \mathbf{r}\cdot\mathbf{E}(x)&=-k\int\frac{e^{ik|x-x'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\mathbf{L}'\cdot\left[\mathscr{M}(\mathbf{x}')+\frac{1}{ck^2}\nabla'\times\mathbf{J}(\mathbf{x}')\right]d^3x'\end{aligned}\right\}$$

(16.87)

为了用(16.47)算出多极系数，我们首先注意到，在无穷远处的出射波要求(16.37)中 $A_l^{(2)}=0$. 所以在 (16.46) 中选取 $f_l(kr)=g_l(kr)=h_l^{(1)}(kr)$，而将该式作为源外 E 和 B 的表示式. 其次，将球面波表示式(16.22)作为(16.87)中的格临函数，并假定点 x 在完全包围源的球面之外. 这时，在(16.87)的积分中，$r_<=r'$，$r_>=r$. (16.47)所需要的球面波投影是

$$\int d\Omega Y_{lm}^*(\theta,\phi)\frac{e^{ik|x-x'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}=4\pi ikh_l^{(1)}(kr)j_l(kr')Y_{lm}^*(\theta',\phi')$$

(16.88)

借助于这一投影式，我们看到，$a_M(l,m)$和$a_E(l,m)$可以用(16.87)中的被积函数表示，由下式给出：

$$\left.\begin{aligned}a_E(l,m)&=\frac{4\pi ik^3}{\sqrt{l(l+1)}}\int j_l(kr)Y_{lm}^*\mathbf{L}\cdot\left(\mathscr{M}+\frac{1}{ck^2}\nabla\times\mathbf{J}\right)d^3x\\ a_M(l,m)&=\frac{-4\pi k^2}{\sqrt{l(l+1)}}\int j_l(kr)Y_{lm}^*\mathbf{L}\cdot(\mathbf{J}+c\nabla\times\mathscr{M})d^3x\end{aligned}\right\}$$

(16.89)

(16.89)中的表式用源密度 J 和 $\mathscr{M}$ 的积分给出了源外各多极场的强度. 我们可以用下列恒等式将这两表式化成更有用的形式. 令 A(x)为任一合理的矢量场，则

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{L}\cdot\mathbf{A}=i\nabla\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{A})\\ &\mathbf{L}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=i\nabla^2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{A})-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\nabla\cdot\mathbf{A})\end{aligned}\right\}$$

(16.90)

这些恒等式是从 L 的定义(16.25)和简单的矢量恒等式导出的. 在第一个恒等式中令 $\mathbf{A}=\mathscr{M}$，在第二个恒等式中令 $\mathbf{A}=\mathbf{J}$，(16.89)中

$a_E(l,m)$这个积分就变成

$$a_E(l,m)=-\frac{4\pi k^3}{\sqrt{l(l+1)}}\int j_l(kr)Y^*_{lm}$$
$$\left[\nabla\cdot(\mathbf{r}\times\mathscr{M})+\frac{1}{ck^2}\nabla^2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{J})-\frac{i}{k}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\rho)\right]d^3x$$

在上式中，我们利用了(16.82)，将$\nabla\cdot\mathbf{J}$用ρ来表示．把第二项分部积分，以$-k^2$取代∇^2；把第三项对径向变数分部积分，而将径向导数改换成球贝塞耳函数．电多极系数的结果是

$$a_E(l,m)=\frac{4\pi k^2}{i\sqrt{l(l+1)}}\int Y^*_{lm}$$
$$\begin{cases}\rho\dfrac{\partial}{\partial r}[rj_l(kr)]+\dfrac{ik}{c}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{J})j_l(kr)\\ -ik\nabla\cdot(\mathbf{r}\times\mathscr{M})j_l(kr)\end{cases}d^3x \tag{16.91}$$

对(16.89)的第二个方程进行类似的运算，导出磁多极系数，

$$a_M(l,m)=\frac{4\pi k^2}{i\sqrt{l(l+1)}}\int Y^*_{lm}$$
$$\begin{cases}\nabla\cdot\left(\dfrac{\mathbf{r}\times\mathbf{J}}{c}\right)j_l(kr)+\nabla\cdot\mathscr{M}\dfrac{\partial}{\partial r}[rj_l(kr)]\\ -k^2(\mathbf{r}\cdot\mathscr{M})j_l(kr)\end{cases}d^3x \tag{16.92}$$

这些结果是精确的表式，对任意的频率和任何尺寸的源都成立．

对于原子和原子核物理学的许多应用来说，源的线度比波长小得多($kr_{max}\ll1$)．这时，多极系数可以大大地简化．球贝塞耳函数可用小宗量极限(16.12)代替．对于含ρ或$\mathbf{J}$、$\mathscr{M}$的项，当只保留kr的最低次幂时，即得电多极系数的近似式：

$$a_E(l,m)\simeq\frac{4\pi k^{l+2}}{i(2l+1)!!}\left(\frac{l+1}{l}\right)^{1/2}(Q_{lm}+Q'_{lm}) \tag{16.93}$$

式中的多极矩为

和

$$\left.\begin{aligned} Q_{lm} &= \int r^l Y_{lm}^* \rho d^3x \\ Q'_{lm} &= \frac{-ik}{l+1}\int r^l Y_{lm}^* \nabla\cdot(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\mathcal{M}})d^3x \end{aligned}\right\} \tag{16.94}$$

我们看到，多极矩 Q_{lm} 的形式和静电多极矩 q_{lm}(4.3)相同. 多极矩 Q'_{lm} 是来自磁化强度的感生电多极矩. 一般地说，它比正常多极矩 Q_{lm} 至少小一个因子 kr. 磁多极系数 $a_M(l,m)$ 的相应的长波近似为

$$a_M(l,m)\simeq\frac{4\pi ik^{l+2}}{(2l+1)!!}\left(\frac{l+1}{l}\right)^{1/2}(M_{lm}+M'_{lm}) \tag{16.95}$$

式中的磁多极矩为

和

$$\left.\begin{aligned} M_{lm} &= -\frac{1}{l+1}\int r^l Y_{lm}^* \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}\times\mathbf{J}}{c}\right)d^3x \\ M'_{lm} &= -\int r^l Y_{lm}^* \nabla\cdot\boldsymbol{\mathcal{M}}d^3x \end{aligned}\right\} \tag{16.96}$$

与电多极矩 Q_{lm}、Q'_{lm} 的情况相反，对于具有内禀磁化强度的系统来说，磁多极矩 M_{lm} 和 M'_{lm} 一般是同数量级的.

在长波长极限下，我们清楚地看到电多极场与电荷密度 ρ 有关，而磁多极场则由磁矩密度 $(\mathbf{r}\times\mathbf{J})/2c$ 和 $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ 所决定.

16.6 原子系统和原子核系统的多极辐射

虽然要详细讨论原子和原子核的多极辐射必须用量子力学对所涉及的态作适当的处理①，但是用简单的论证仍然可以说明这些多极辐射的基本特征. 根据(16.78)和多极系数(16.93)、(16.95)，一个 (l,m) 阶多极的总辐射功率是

① 关于多极矩的量子力学定义，请参看 *Blatt and Weisskopf* 书第 597 页至第 599 页. 请注意，该书讲的多极矩跟本书讲的多极矩相差因子 2，这是由于该书第 590 页上关于源密度的定义(3.1)和(3.2)跟本书的(16.80)不同. 参看习题 9.1 关于(16.80)的因子化形式和经典源 $\rho(\mathbf{x},t)$ 等之间的关系.

$$\left.\begin{aligned} P_E(l,m) &= \frac{2\pi c}{[(2l+1)!!]^2}\left(\frac{l+1}{l}\right)k^{2l+2}|Q_{lm}+Q'_{lm}|^2 \\ P_M(l,m) &= \frac{2\pi c}{[(2l+1)!!]^2}\left(\frac{l+1}{l}\right)k^{2l+2}|M_{lm}+M'_{lm}|^2 \end{aligned}\right\} \tag{16.97}$$

用量子力学的术语来说，我们感兴趣的是跃迁概率(平均寿命的倒数)，它的定义是功率除以一个光子的能量：

$$\frac{1}{\tau}=\frac{P}{\hbar\omega} \tag{16.98}$$

因为我们只要估计数量级，所以对源作了如下的简化模型. 我们假定振荡的电荷密度是

$$\rho(\mathbf{x})=\begin{cases}\dfrac{3e}{a^3}Y_{lm}(\theta,\phi), & r<a \\ 0, & r>a\end{cases} \tag{16.99}$$

则电多极矩 Q_{lm} 的估计值为

$$Q_{lm}\simeq\frac{3}{l+3}ea^l \tag{16.100}$$

它与 m 无关. 同样，我们假定磁化强度的散度的简化形式是

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\mathcal{M}}+\frac{1}{l+1}\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}\times\mathbf{J}}{c}\right)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2g}{a^3}Y_{lm}(\theta,\phi)\left(\dfrac{e\hbar}{mcr}\right), & r<a \\ 0, & r>a\end{cases} \tag{16.101}$$

式中 g 是原子系统或原子核系统中粒子磁矩的有效 g 因数，$e\hbar/mc$ 为这些粒子的玻尔磁子的两倍. 于是，磁多极矩之和的估计值为

$$M_{lm}+M'_{lm}\simeq-\frac{2}{l+2}ea^l\left(\frac{g\hbar}{mca}\right) \tag{16.102}$$

由 Q'_m 的定义(16.94)可知，

$$Q'_{lm}\simeq g\left(\frac{\hbar\omega}{mc^2}\right)Q_{lm} \tag{16.103}$$

因为原子与原子核中辐射跃迁的能量总是比所涉及的粒子的静能小得多，所以 Q'_{lm} 与 Q_{lm} 相比，总是可以完全忽略不计.

对于 l 阶电多极跃迁来说，由估算式(16.100)导出的跃迁概率(16.98)为

$$\frac{1}{\tau_E(l)}\simeq\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\frac{2\pi}{[(2l+1)!!]^2}\left(\frac{l+1}{l}\right)\left(\frac{3}{l+3}\right)^2(ka)^{2l}\omega \tag{16.104}$$

根据(16.102)，除了一个数量级为1的因子外，磁多极的跃迁概率为

$$\frac{1}{\tau_M(l)}\simeq\left(\frac{g\hbar}{mca}\right)^2\frac{1}{\tau_E(l)} \tag{16.105}$$

跃迁概率(16.104)中出现因子 $(ka)^{2l}$，这意味着，频率固定时，跃迁率在长波长极限 ($ka\ll1$) 下随多极阶数的增加而迅速下降. 因此，在原子或原子核跃迁中，通常只有最低阶的非零多极才是重要的. 频率相同的邻阶电多极或磁多极的跃迁概率之比是

$$\frac{[\tau(l+1)]^{-1}}{[\tau(l)]^{-1}}\sim\frac{(ka)^2}{4l^2} \tag{16.106}$$

式中我们已经略去相对量级为 $(1/l)$ 的数值因子.

在原子系统中，辐射过程所涉及的粒子是电子. 所以源的线度可以取为 $a\simeq(a_0/Z_{有效})$，式中 a_0 为玻尔半径，$Z_{有效}$ 为原子核的有效电荷(对于价电子跃迁来说，$Z_{有效}\sim1$；对于X射线跃迁来说，$Z_{有效}\lesssim Z$). 为了估计 ka，我们注意，原子跃迁能量通常约为

$$\hbar\omega\lesssim Z_{有效}^2\frac{e^2}{a_0} \tag{16.107}$$

所以，

$$ka\lesssim\frac{Z_{有效}}{137} \tag{16.108}$$

由 (16.106) 我们看出，邻阶多极跃迁几率之比为 ($Z_{有效}$/

$137)^2$. 由(16.105)可以估算磁多极与电多极跃迁率之比. 电子的 g 因数与1同数量级. 令 $a \simeq a_0/Z_{有效} = 137\ (\hbar/mcZ_{有效})$, 我们看到, l 阶磁多极跃迁率只有相应电多极跃迁率$(Z_{有效}/137)^2$分之一. 我们得出以下结论: 在原子中, 电偶极跃迁将是最强的, 电四极跃迁和磁偶极跃迁则比它小, 都只有$(Z_{有效}/137)^2$分之一. 只在重元素的X射线跃迁中, 最低阶以上的电多极跃迁才有可能与电偶极跃迁相比.

现在我们转入研究原子核中的辐射跃迁问题. 因为原子核辐射跃迁能量变化范围很大 (从10千电子伏特左右到几兆电子伏特), 所以 ka 值的变化范围很大. 这意味着, 对于给定的多极阶数来说, 跃迁概率(或平均寿命)的变化范围随释放能量的不同可达10的许多次方, 并和邻阶多极跃迁概率的变化范围重叠. 尽管这样, 粗略的估算式(16.104)和(16.105)对原子核多极跃迁的分类是很有用的, 因为对固定的释放能来说, 不同多极的估算值相差很大.

图16.2表示电多极跃迁寿命的估算式(16.104)的log-log图. 取质子电荷为 e, 而 $a \simeq 5.6 \times 10^{-13}$ 厘米. 这是相当于质量数 $A \simeq 100$ 的核半径. 我们看到, 这些曲线在高能时虽然趋于会合, 但在同一能量下, 不同多极的寿命一般相差 10^5 倍. 这意味着, 在每次跃迁中实际的多极矩和我们简单的估算值可以相差甚远, 但并不减少这些估算式在判定多极阶数时作为指南的用处. 实验表明①, 在寿命-能量图上出现宽而分明的带, 这些带分布在图16.2中诸直线的邻域. 一般趋向是用估算式(16.104)作为寿命的下限, 它跟用(16.100)作为多极矩的上限相对应, 但对某些所谓

① 参看下列论文的图1和图2: M. Goldhaber and J. Weneser, *Annual Review of Nuclear Science*, Vol 5, J. G. Beckerley, 主编 *Annual Reviews*, Stanford(1955), 第1页到第24页.

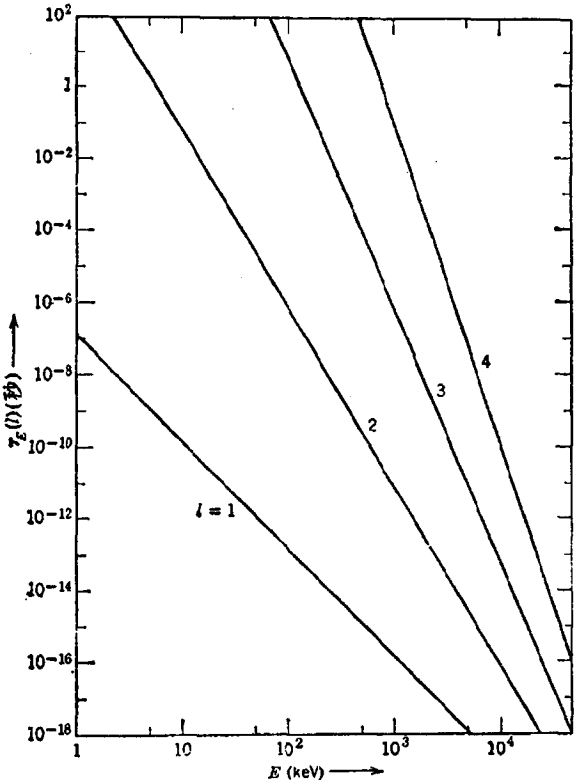


图 16.2　在电多极辐射中原子核激发态的寿命估算值与光子能量的函数关系图；$l=1,2,3,4$.

"增强"的电四极跃迁来说，其寿命可比图 16.2 所示的缩短一百分之九十九.

用(16.105)可以比较同阶的磁多极和电多极. 核子的有效 g 因数的典型值约为 $g\sim3$，因为它们有反常磁矩. 于是，将源的大小估计为 $a\simeq R=1.2A^{1/3}\times10^{-13}$ 厘米，即得

$$\frac{1}{\tau_M(l)}\simeq\frac{0.3}{A^{2/3}}\frac{1}{\tau_E(l)} \tag{16.109}$$

当 $20<A<250$ 时，数值因子在 4×10^{-2} 到 0.8×10^{-2} 范围内变化.

因此，我们预料，对于给定的多极阶数来说，电跃迁要比磁跃迁强 25--120倍．对大多数多极跃迁来说，上述情况通常是正确的．但当 $l\simeq 1$ 时，在原子核中出现特殊情况(与电荷无关的强吸引力)，禁止电偶极跃迁(至少在低能时如此)．这时估算式(16.109)失效；磁偶极跃迁更为常见，并且和电偶极跃迁一样强．

在 16.3 节里讨论了宇称选择定则和角动量选择定则，并指出：在两个量子态之间的跃迁中可以出现混合多极，例如，l、$(l+2)$、… 阶磁多极和$(l+1)$、$(l+3)$、…阶电多极．在长波长极限下，只需考虑每种类型的最低阶多极．我们可把比值(16.105)和(16.106)合并起来，以求$(l+1)$阶电多极和 l 阶磁多极（最常用的是在 $l=1$ 时)的相对跃迁率：

$$\frac{[\tau_E(l+1)]^{-1}}{[\tau_M(l)]^{-1}}\simeq\left(\frac{A^{1/3}E}{200l}\right)^2 \tag{16.110}$$

式中 E 是光子能量，以兆电子伏特为单位．对于重元素的高能跃迁来说，电四极的振幅约为磁偶极振幅的百分之五左右．如果有效四极矩增强十倍（在稀土和超铀元素的核中的确出现这种情况)，电四极跃迁和磁偶极跃迁可以相比．

对于 $(l+1)$ 阶磁多极和 l 阶电多极的混合多极来说，跃迁率之比是

$$\frac{[\tau_M(l+1)]^{-1}}{[\tau_E(l)]^{-1}}\simeq\left(\frac{E}{600l}\right)^2 \tag{16.111}$$

即使在高能跃迁中，$(l+1)$阶磁多极的跃迁率决比不上 l 阶电多极的跃迁率．

16.7 中央馈电细直天线的辐射

我们现在讨论由如图 16.3 所示的中央馈电细直天线发出的辐射，用以说明多极展开在线度和波长差不多的源上的应用．

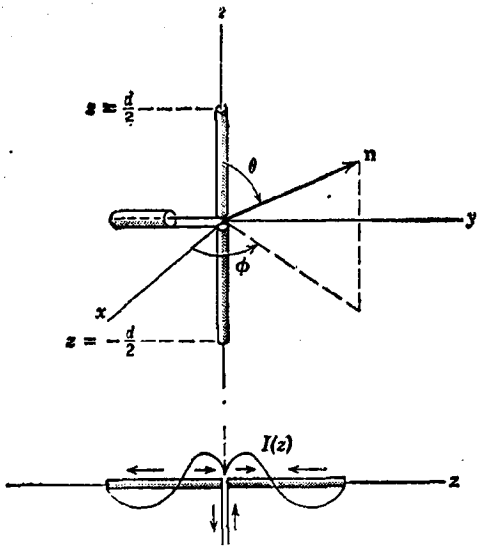


图 16.3　中央馈电细直天线

在第九章里已经给出电流分布为正弦式时的场的直接解. 我们将用这个解作为比较的基础, 来检验多极展开的收敛性. 假定天线位于 z 轴的 $-(d/2)\leqslant z\leqslant(d/2)$ 这个范围, 在其中央有一窄隙, 以便适当地进行激发. 沿天线的电流是 z 的偶函数, 且在两个端点上为零. 我们暂时把它写为

$$I(z,t)=I(|z|)e^{-i\omega t},\quad I\left(\frac{d}{2}\right)=0 \tag{16.112}$$

而不作更多的规定.

因为电流沿径向流动, 所以 $(\mathbf{r}\times\mathbf{J})=0$. 此外, 也没有内禀磁化强度. 因此, 所有磁多极系数 $a_M(l,m)$ 都等于零. 为了计算电多极系数 $a_E(l,m)$ (16.91), 我们需要电荷和电流密度的表达式. 电流密度 $\mathbf{J}$ 是局限于 z 轴上的径向电流. 在球坐标中, 当 $r<(d/2)$ 时, 电流密度可以写成

$$\mathbf{J}(\mathbf{x})=\epsilon_r\frac{I(r)}{2\pi r^2}[\delta(\cos\theta-1)-\delta(\cos\theta+1)] \tag{16.113}$$

式中 δ 函数表示电流只沿 z 轴向上(或向下)流动. 根据连续性方程(16.82),我们求出电荷密度,

$$\rho(\mathbf{x})=\frac{1}{i\omega}\frac{dI(r)}{dr}\left[\frac{\delta(\cos\theta-1)-\delta(\cos\theta+1)}{2\pi r^2}\right] \quad (16.114)$$

将这些 $\mathbf{J}$ 和 ρ 的表式代入(16.91),即得

$$a_E(l,m)=\frac{2k^2}{\sqrt{l(l+1)}}$$
$$\int_0^{d/2}dr\left\{\frac{k}{c}rj_l(kr)I(r)-\frac{1}{\omega}\frac{dI}{dr}\frac{d}{dr}[rj_l(kr)]\right\}$$
$$\times\int d\Omega Y_{lm}^*[\delta(\cos\theta-1)-\delta(\cos\theta+1)] \quad (16.115)$$

对角度的积分是

$$\int d\Omega=2\pi\delta_{m,0}[Y_{l0}(0)-Y_{l0}(\pi)] \quad (16.116)$$

上式表明只有 $m=0$ 的多极出现. 由天线的柱对称性,这是显然的. 当 l 为偶(奇)数时,勒让德多项式对 $\theta=\pi/2$ 来说是偶(奇)函数. 因此,只有奇 l 阶的非零多极. 于是,角积分的值为

$$\int d\Omega=\sqrt{4\pi(2l+1)},\quad l\text{ 为奇数},m=0 \quad (16.117)$$

稍加演算后,(16.115)可以写成

$$a_E(l,0)=\frac{2k}{c}\left[\frac{4\pi(2l+1)}{l(l+1)}\right]^{1/2}\int_0^{d/2}\left\{-\frac{d}{dr}\left[rj_l(kr)\frac{dI}{dr}\right]\right.$$
$$\left.+rj_l(kr)\left(\frac{d^2I}{dr^2}+k^2I\right)\right\}dr \quad (16.118)$$

为了计算(16.118),必须确定沿天线的电流 $I(z)$. 如果没有辐射,则频率为 ω 的正弦式时间变化意味着波数为 $k=\omega/c$ 的正弦式空间变化. 但是,正如 9.4 节(b)段所讨论的,辐射的发射改变了电流分布,除非天线是无限细的. 正确的电流 $I(z)$,只有通过解复杂的边值问题才求得出. 因为在这里我们的目的是,将多

极展开跟已知电流分布的有限项形式的解作比较，所以我们对$I(z)$作出像 9.4 节(a)段里那样的假定，即

$$I(z)=I\sin\left(\frac{kd}{2}-k|z|\right) \tag{16.119}$$

式中I为巅值电流，所选的位相使电流在天线两端为零．对于正弦电流，(16.118)的被积函数的第二部分等于零．第一部分是一个全微分．因此，用(16.119)的$I(z)$便立即得到

$$a_E(l,0)=\frac{4I}{cd}\left[\frac{4\pi(2l+1)}{l(l+1)}\right]^{1/2}\left[\left(\frac{kd}{2}\right)^2 j_l\left(\frac{kd}{2}\right)\right],\ l\text{ 为奇数} \tag{16.120}$$

因为我们想要研究在源的线度和波长差不多的情形下的多极展开，所以我们考虑半波天线$(kd=2\pi)$和全波天线$(kd=2\pi)$这两种特殊情形．我们就这两个kd值列出$l=1$时的系数，也列出$l=3,5$时的相对值．从表中可知：(a)当l增加时系数的量值迅速减少；(b)源的线度越大，l越高的系数就越主要．但即使对于

kd	$a_E(1,0)$	$a_E(3,0)/a_E(1,0)$	$a_E(5,0)/a_E(1,0)$
π	$4\sqrt{6\pi}\,\frac{I}{cd}$	4.95×10^{-2}	1.02×10^{-3}
2π	$4\pi\sqrt{6\pi}\,\frac{I}{cd}$	0.325	3.09×10^{-2}

全波天线来说，在角分布中只保留$l=1$和$l=3$或许就够了，当求总功率(它含有系数的平方)时，保留这两项肯定就够了．

在角分布中只保留偶极项和八极项，我们求得每单位立体角的辐射功率(16.74)为

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{c|a_E(1,0)|^2}{16\pi k^2}\left|\mathbf{L}Y_{1,0}-\frac{a_E(3,0)}{\sqrt{6}\,a_E(1,0)}\mathbf{L}Y_{3,0}\right|^2 \tag{16.121}$$

在绝对值平方中的各因子是

$$\left.\begin{aligned}
&|\mathbf{L}Y_{1,0}|^2=\frac{3}{4\pi}\sin^2\theta\\
&|\mathbf{L}Y_{3,0}|^2=\frac{63}{16\pi}\sin^2\theta(5\cos^2\theta-1)^2\\
&(\mathbf{L}\cdot Y_{1,0})^*\cdot(\mathbf{L}Y_{3,0})=\frac{3\sqrt{21}}{8\pi}\sin^2\theta(5\cos^2\theta-1)
\end{aligned}\right\}\qquad(16.122)$$

利用这些角因子，(16.121)就变成

$$\frac{dP}{d\Omega}=\lambda\frac{12I^2}{\pi^2c}\left(\frac{3}{8\pi}\sin^2\theta\right)\left|1-\sqrt{\frac{7}{8}}\frac{a_E(3,0)}{a_E(1,0)}(5\cos^2\theta-1)\right|^2\qquad(16.123)$$

式中因子 λ 对半波天线来说等于 1，对全波天线来说等于 $(\pi^2/4)$. (16.123)中 $(5\cos^2\theta-1)$ 的系数对半波和全波天线来说分别为 0.0463 和 0.304.

由第九章可知精确的角分布(对于正弦式激励电流)是

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{I^2}{2\pi c}\begin{cases}\dfrac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}, & kd=\pi\\[2ex] 4\dfrac{\cos^4\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}, & kd=2\pi\end{cases}\qquad(16.124)$$

精确角分布和近似角分布的数值比较如图 16.4 所示. 实曲线是精确结果，虚曲线是二项多极展开. 对于半波天线来说(图 16.4*a*)，还用点曲线画出了简单的偶极结果[(16.123)中的第一项]. $kd=\pi$ 时，二项多极展开跟精确结果几乎分不出来. 这时，甚至最低级近似的偏差也不大. 对于全波天线来说 (图 16.46)，偶极近似显然很差. 但二项多极展开相当好，在辐射很强的区域内相差不到百分之五.

根据(16.79)，总辐射功率是

$$P=\frac{c}{8\pi k^2}\sum_{奇l}|a_E(l,0)|^2\qquad(16.125)$$

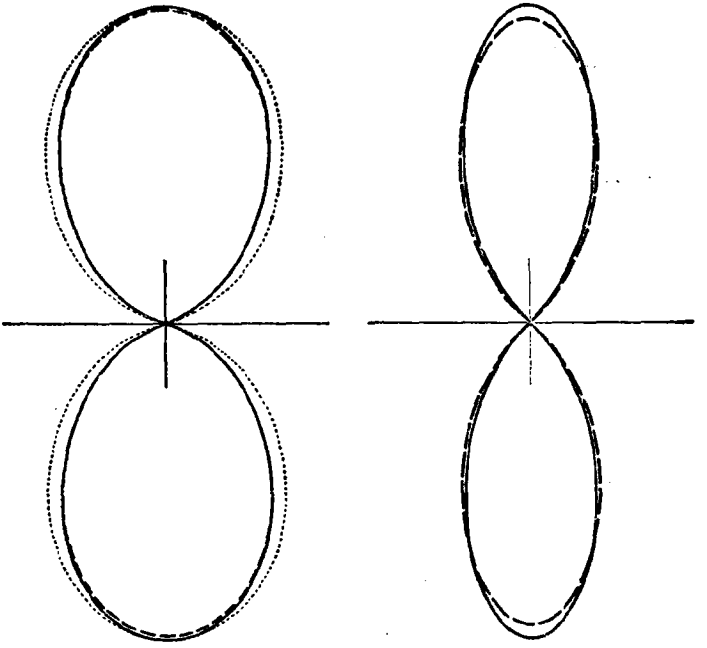


图 16.4　半波($kd=\pi$)和全波($kd=2\pi$)中央馈电天线的精确辐射图样(实曲线)跟二项多极展开(虚曲线)的比较. 在半波图样中,还画出了偶极近似(点曲线). 二项多极的结果和精确的结果很符合,$kd=\pi$ 时犹为符合.

对于半波天线来说，第 357 页表中的系数表明：辐射功率等于简单偶极结果($12I^2/\pi^2 c$)的 1.00245 倍. 对于全波天线来说,辐射功率等于偶极形式($3I^2/c$)的 1.114 倍.

16.8　矢量平面波的球面波展开

在讨论球形物体或一般的定域系统对电磁波的散射或吸收问题时,将平面电磁波展开为球面波是有用的.

对于满足波动方程的标量场 $\psi(\mathbf{x})$ 来说，利用基本球面解

$j_l(kr)Y_{lm}(\theta,\phi)$的正交性可得所需的展开式. 另一种推导法, 是利用格临函数$(e^{ikR}/4\pi R)$的球面波展开式(16.22). 令(16.22)两边的$|\mathbf{x}'|\to\infty$. 于是, 我们可以令左边的$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\simeq r'-\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}$, 式中$\mathbf{n}$是$\mathbf{x}'$方向上的单位矢量. 在右边, $r_>=r'$, $r_<=r$. 此外, 我们可以用$h_l^{(1)}(kr')$的渐近式(16.13). 于是, 得到

$$\frac{e^{ikr'}}{4\pi r'}e^{-ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}=ik\frac{e^{ikr'}}{kr'}\sum_{l,m}(-i)^{l+1}j_l(kr)Y_{lm}^*(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{16.126}$$

消去两边的因子$e^{ikr'}/r'$, 并取复共轭, 便得到平面波的展开式:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}=4\pi\sum_{l=0}^{\infty}i^l j_l(kr)\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}^*(\theta,\phi)Y_{lm}(\theta',\phi') \tag{16.127}$$

式中$\mathbf{k}$是波矢, 其球坐标是k,θ',ϕ'. 我们可以运用加法定理(3.62)将上式写成更简洁的形式:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}=\sum_{l=0}^{\infty}i^l(2l+1)j_l(kr)P_l(\cos\gamma) \tag{16.128}$$

式中γ是$\mathbf{k}$和$\mathbf{x}$的夹角. 取$P_l(\cos\gamma)$为(3.57)的形式, 可将上式写成

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}=\sum_{l=0}^{\infty}i^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\,j_l(kr)Y_{l,0}(\gamma) \tag{16.129}$$

我们现在要对沿z轴入射的圆偏振平面波作相仿的展开. 这波是

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x})&=(\epsilon_1\pm i\epsilon_2)e^{ikz}\\ \mathbf{B}(\mathbf{x})&=\epsilon_3\times\mathbf{E}=\mp i\mathbf{E}\end{aligned}\right\} \tag{16.130}$$

由于平面波处处为有限值, 因而它的多极展开式(16.46)只含正规的径向函数$j_l(kr)$, 可写为

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x})=&\sum_{l,m}\Big[a_{\pm}(l,m)\,j_l(kr)\mathbf{X}_{lm}\\&+\frac{i}{k}b_{\pm}(l,m)\nabla\times j_l(kr)\mathbf{X}_{lm}\Big]\\\mathbf{B}(\mathbf{x})=&\sum_{l,m}\Big[\frac{-i}{k}a_{\pm}(l,m)\nabla\times j_l(kr)\mathbf{X}_{lm}\\&+b_{\pm}(l,m)\,j_l(kr)\mathbf{X}_{lm}\Big]\end{aligned}\right\}\tag{16.131}$$

我们可以利用矢量球谐函数 $\mathbf{X}_{lm}$ 的正交性来确定系数 $a_{\pm}(l,m)$ 和 $b_{\pm}(l,m)$. 我们将基本关系(16.44)和其它一些有用的关系总结于下,以供参考:

$$\begin{aligned}&\int[f_l(r)\mathbf{X}_{l'm'}]^*\cdot[g_l(r)\mathbf{X}_{lm}]d\Omega=f_l^*g_l\delta_{ll'}\delta_{mm'}\\&\int[f_l(r)\mathbf{X}_{l'm'}]^*\cdot[\nabla\times g_l(r)\mathbf{X}_{lm}]d\Omega=0\\&\frac{1}{k^2}\int[\nabla\times f_l(r)\mathbf{X}_{l'm'}]^*\cdot[\nabla\times g_l(r)\mathbf{X}_{lm}]d\Omega\\&\qquad=\delta_{ll'}\delta_{mm'}\left\{f_l^*g_l+\frac{1}{k^2r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[rf_l^*\frac{\partial}{\partial r}(rg_l)\right]\right\}\end{aligned}\tag{16.132}$$

这些关系式中 $f_l(r)$ 和 $g_l(r)$ 是满足(16.5)的球贝塞耳函数的线性组合. 利用算符恒等式(16.49)、梯度算符表式

$$\nabla=\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{i}{r^2}\mathbf{r}\times\mathbf{L}$$

以及径向微分方程(16.5),可以证明上述第二个和第三个关系式.

为了确定系数 $a_{\pm}(l,m)$ 和 $b_{\pm}(l,m)$, 我们取(16.131)的两边与 $\mathbf{X}_{lm}^*$ 的标积,然后对角度积分. 于是,利用(16.132)中第一个和第二个正交关系, 我们得到

$$a_{\pm}(l,m)\,j_l(kr)=\int\mathbf{X}_{lm}^*\cdot\mathbf{E}(\mathbf{x})d\Omega\tag{16.133}$$

和

$$b_{\pm}(l,m)\,j_l(kr)=\int \mathbf{X}^*_{lm}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{x})d\Omega \tag{16.134}$$

用电场表式(16.130)后，(16.133)变成

$$a_{\pm}(l,m)\,j_l(kr)=\int\frac{(L_{\mp}Y_{lm})^*}{\sqrt{l(l+1)}}e^{ikz}d\Omega \tag{16.135}$$

式中算符 $L_{\pm}$ 由(16.26)定义，它们的运算结果由(16.28)所确定. 于是，我们得到

$$a_{\pm}(l,m)\,j_l(kr)=\frac{\sqrt{(l\pm m)(l\mp m+1)}}{\sqrt{l(l+1)}}\int Y^*_{l,m\mp1}\,e^{ikz}d\Omega \tag{16.136}$$

如果把 e^{ikz} 的展开式(16.129)代入，则由 Y_{lm} 的正交性显然可得下列结果：

$$a_{\pm}(l,m)=i^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\,\delta_{m,\pm1} \tag{16.137}$$

由(16.134)和(16.130)可知

$$b_{\pm}(l,m)=\mp ia_{\pm}(l,m) \tag{16.138}$$

于是，平面波(16.130)的多极展开是

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x})&=\sum_{l=1}^{\infty}i^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\left[j_l(kr)\mathbf{X}_{l,\pm1}\pm\frac{1}{k}\nabla\right.\\&\qquad\left.\times j_l(kr)\mathbf{X}_{l,\pm1}\right]\\\mathbf{B}(\mathbf{x})&=\sum_{l=1}^{\infty}i^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\left[\frac{-i}{k}\nabla\times j_l(kr)\mathbf{X}_{l,\pm1}\right.\\&\qquad\left.\mp ij_l(kr)\mathbf{X}_{l,\pm1}\right]\end{aligned}\right\} \tag{16.139}$$

对于这样的圆偏振波，显然可将 m 的值($m=\pm1$)解释为每个光子在平行于传播方向上具有 ±1 单位角动量. 习题7.20 和习题7.21 中已经证明了这一点.

16.9 球体对电磁波的散射

如果平面电磁波入射在一个球形障碍物上，如图 16.5 所示，电磁波即被散射，于是在远离散射体的地方，场是平面波和出射球面波的叠加．障碍物除了可以引起散射外，还可以有吸收．这时，流出障碍物的总能量要比流向障碍物的总能量少，两者之差就是被吸收的能量．

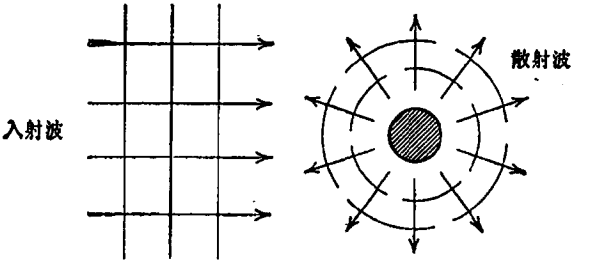


图 16.5 定域物体对辐射的散射

我们最终将讨论一个简单的例子：半径为 a、电导率为无穷大的球的散射，但是我们暂时将问题考虑得更普遍些．

球外的场可写成入射波和散射波之和：

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x})&=\mathbf{E}_{\text{入射}}+\mathbf{E}_{\text{散射}}\\ \mathbf{B}(\mathbf{x})&=\mathbf{B}_{\text{入射}}+\mathbf{B}_{\text{散射}}\end{aligned}\right\}\tag{16.140}$$

式中 $\mathbf{E}_{\text{入射}}$ 和 $\mathbf{B}_{\text{入射}}$ 由(16.139)给出．因为在无穷远处的散射场是出射波，所以它们的展开式必具有如下的形式：

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}_{\text{散射}}&=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}i^{l}\sqrt{4\pi(2l+1)}\left[\alpha_{\pm}(l)\,h_{l}^{(1)}(kr)\mathbf{X}_{l,\pm1}\right.\\ &\left.\pm\frac{\beta_{\pm}(l)}{k}\nabla\times h_{l}^{(1)}(kr)\mathbf{X}_{l,\pm1}\right]\\ \mathbf{B}_{\text{散射}}&=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}i^{l}\sqrt{4\pi(2l+1)}\left[\frac{-i\alpha_{\pm}(l)}{k}\nabla\right.\\ &\left.\times h_{l}^{(1)}(kr)\mathbf{X}_{l,\pm1}\mp i\beta_{\pm}(l)h_{l}^{(1)}(kr)\mathbf{X}_{l,\pm1}\right]\end{aligned}\right\}\tag{16.141}$$

系数 $\alpha_l(l)$ 和 $\beta_\pm(l)$ 由散射体表面上的边界条件确定. 从演绎上说, (16.141)中必须对所有的 m 和 l 求和, 但是这里所考虑的仅限于球对称类问题, 所以只出现 $m=\pm1$.

正如(9.184)和(9.185)所表示的那样, 我们可以根据一个包围散射体的半径为 a 的球面上的散射场和总场, 导出用系数 $\alpha(l)$ 和 $\beta(l)$ 表示的总散射功率和总吸收功率的正规表式. 这些表式可以写成

$$P_{\text{散射}}=-\frac{ca^2}{8\pi}\mathrm{Re}\int\mathbf{E}_{\text{散射}}\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{B}^*_{\text{散射}})d\Omega \tag{16.142}$$

$$P_{\text{吸收}}=\frac{ca^2}{8\pi}\mathrm{Re}\int\mathbf{E}\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{B}^*)d\Omega \tag{16.143}$$

这里 $\mathbf{n}$ 为沿径向朝外的单位法线矢量, $\mathbf{E}_{\text{散射}}$ 和 $\mathbf{B}_{\text{散射}}$ 由(16.141)给出, 而 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 是平面波场(16.139)和散射场(16.141)之和. 这些方程只含场的横向分量. 我们已经知道 $\mathbf{X}_{lm}$ 是横向的. (16.139)和(16.141)中另一类项是

$$\nabla\times f_l(r)\mathbf{X}_{lm}=\frac{\mathrm{i}n\sqrt{l(l+1)}}{r}f_l(r)Y_{lm}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rf_l(r)]\mathbf{n}\times\mathbf{X}_{lm} \tag{16.144}$$

式中 f_l 是满足(16.5)的任一 l 阶球贝塞耳函数. 当将场的多极展开式代入(16.142)和(16.143)时, 就产生 $\mathbf{X}^*_{lm}\cdot\mathbf{X}_{l'm'}$, $\mathbf{X}^*_{lm}\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{X}_{l'm'})$ 和 $(\mathbf{n}\times\mathbf{X}^*_{lm})\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{X}_{l'm'})$ 的各种形式的标积对 l 和 l' 的双重求和. 对角度积分, 利用正交关系(16.132), 双重求和就化为单一求和. 和中的每一项, 都包含球贝塞耳函数和球贝塞耳函数的导数之积. 利用朗斯基行列式(16.15), 可以消去所有贝塞耳函数, 得到下列总散射截面和总吸收截面(散射功率或吸收功率除以入射通量 $c/4\pi$)表式:

$$\sigma_{\text{散射}}=\frac{\pi}{2k^2}\sum_l(2l+1)[|\alpha(l)|^2+|\beta(l)|^2] \tag{16.144}$$

$$\sigma_{\text{吸收}}=\frac{\pi}{2k^2}\sum_l(2l+1)[2-|\alpha(l)+1|^2-|\beta(l)+1|^2] \quad (16.145)$$

总截面或消光截面是 $\sigma_{\text{散射}}$ 和 $\sigma_{\text{吸收}}$ 之和:

$$\sigma_{\text{总}}=-\frac{\pi}{k^2}\sum_l(2l+1)\mathrm{Re}[\alpha(l)+\beta(l)] \quad (16.146)$$

并不奇怪，这些截面表式与量子力学散射的部分波展开式极其相像①.

计算进入一给定立体角元 $d\Omega$ 中的辐射功率，或是等效地，取归一化散射振幅 $\mathbf{f}$(9.188)的绝对值平方，都可以求得微分散射截面. 利用习题 16.11(a)的结果，我们求得入射偏振为($\epsilon_1\pm i\epsilon_2$)的散射截面是

$$\frac{d\sigma_{\text{散射}}}{d\Omega}=\frac{\pi}{2k^2}\left|\sum_l\sqrt{2l+1}[\alpha_\pm(l)\mathbf{X}_{l,\pm1}\pm i\beta_\pm(l)\mathbf{n}\times\mathbf{X}_{l,\pm1}]\right|^2 \quad (16.147)$$

散射波通常是椭圆偏振的. 只当对所有的 l 来说 $\alpha_\pm(l)=\beta_\pm(l)$ 时，它才是圆偏振的. 这意味着，如果入射波是线偏振的，则散射波是椭圆偏振的；如果入射波是非偏振的，则散射波随观测角的不同而呈现不同程度的部分偏振. 我们在第九章里已叙述了在长波长极限下上述情况的一些例子(参看图 9.6 和图 9.7).

(16.141)中的系数 $\alpha_\pm(l)$ 和 $\beta_\pm(l)$ 由 $r=a$ 处的场的边界条件决定. 通常这要牵涉到球内的麦克斯韦方程组的解和 $r=a$ 处适当搭配的解. 但是，如果散射体是半径为 a 的球，其电磁性质可以

---

① 我们的结果不是完全普适的. 如果在(16 141)中包含对 m 的求和，那末散射截面含有 $\alpha(l,m)$ 和 $\beta(l,m)$ 的绝对值平方，并对 l 和 m 求和. 总截面表式依然有效，只要作以下替换: $\alpha(l)\to\alpha\left(l,m=\pm\frac{1}{2}\right)$ 和 $\beta(l)\to\beta\left(l,m=\pm\frac{1}{2}\right)$，正负号取决于入射波(16.130)的偏振态. 取 $\sigma_{\text{总}}$ 和 $\sigma_{\text{散射}}$ 之差，可以导出吸收截面.

用表面阻抗 Z_s 描写(就这种情况来说，球的紧内侧场的径向变化必定比半径快得多)，那末边界条件就取比较简单的形式，

$$\mathbf{E}_{\text{切向}}=\frac{c}{4\pi}Z_s\mathbf{n}\times\mathbf{B} \tag{16.148}$$

式中 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 是在球的紧外侧计算的. 由(16.139)、(16.141)和(16.144)，我们得

$$\mathbf{E}_{\text{切向}}=\sum_l i^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\left\{\left[j_l+\frac{\alpha_\pm(l)}{2}h_l^{(1)}\right]\mathbf{X}_{l,\pm1}\right.$$
$$\left.\pm\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left[x\left(j_l+\frac{\beta_\pm(l)}{2}h_l^{(1)}\right)\right]\mathbf{n}\times\mathbf{X}_{l,\pm1}\right\}$$

和

$$\mathbf{n}\times\mathbf{B}=\sum_l i^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\left\{\frac{i}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left[x\left(j_l+\frac{\alpha_\pm(l)}{2}h_l^{(1)}\right)\right]\mathbf{X}_{l,\pm1}\right.$$
$$\left.\mp i\left[j_l+\frac{\beta_\pm(l)}{2}h_l^{(1)}\right]\mathbf{n}\times\mathbf{X}_{l,\pm1}\right\}$$

式中 $x=ka$，所有球贝塞耳函数的宗量为 x. 按照

$$\left.\begin{aligned}j_l+\frac{\alpha_\pm(l)}{2}h_l^{(1)}&=i\left(\frac{cZ_s}{4\pi}\right)\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[x\left(j_l+\frac{\alpha_\pm(l)}{2}h_l^{(1)}\right)\right]\\ j_l+\frac{\beta_\pm(l)}{2}h_l^{(1)}&=i\left(\frac{4\pi}{cZ_s}\right)\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[x\left(j_l+\frac{\beta_\pm(l)}{2}h_l^{(1)}\right)\right]\end{aligned}\right\} \tag{16.149}$$

对每一个 l 值、每一项 $\mathbf{X}_{lm}$ 和每一项 $\mathbf{n}\times\mathbf{X}_{lm}$ 来说，$\mathbf{E}_{\text{切向}}$ 的系数与 $\mathbf{n}\times\mathbf{B}$ 的系数成正比，这是边界条件(16.148)要求的. 利用关系式 $2j_l=h_l^{(1)}+h_l^{(2)}$，系数 $\alpha_\pm(l)$ 和 $\beta_\pm(l)$ 可以写成

$$\alpha_\pm(l)+1=-\left[\frac{h_l^{(2)}-i\left(\frac{cZ_s}{4\pi}\right)\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(xh_l^{(2)})}{h_l^{(1)}-i\left(\frac{cZ_s}{4\pi}\right)\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(xh_l^{(1)})}\right] \tag{16.150}$$

而 $\beta_\pm(l)$ 的形式与 $\alpha_\pm(l)$ 相同，但 $\left(\frac{cZ_s}{4\pi}\right)$ 被其倒数所代替. 我们注

意到，若用表面阻抗边界条件，则对两个圆偏振态来说，系数是相同的.

从原则上说，当 Z_s 给定后，所有多极系数就可以确定，因而可以知道散射. 剩下的只不过是代以数字罢了. 在讨论特殊的极限情形以前，我们先说明几点. 首先，如果 Z_s 是纯虚数(无耗散)，或者如果 $Z_s=0$ 和 $Z_s\to\infty$，则$[\alpha_\pm(l)+1]$和$[\beta_\pm(l)+1]$是模数为 1 的数. 这意味着，$\alpha_\pm(l)$和 $\beta_\pm(l)$可以写为

$$\alpha_\pm(l)=(e^{2i\delta_l}-1),\quad \beta_\pm(l)=(e^{2i\delta'_l}-1) \tag{16.151}$$

式中相角 δ_l 和 δ'_l 叫做散射相移. 特别是，如果 $Z_s=0$ (理想导电球)，则

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\delta_l&=j_l(ka)/n_l(ka)\\ \operatorname{tg}\delta'_l&=\left[\frac{\dfrac{d}{dx}(xj_l(x))}{\dfrac{d}{dx}(xn_l(x))}\right]_{x=ka}\end{aligned}\right\} \tag{16.152}$$

而当 $Z_s\to\infty$时，$\delta_l\longleftrightarrow\delta'_l$.

第二点要说明的是，在低频极限和高频极限下，(16.150)可以简化. 当 $ka\ll l$ 时，我们可以按(16.12)取球贝塞耳函数的近似式. 于是，我们求得长波长近似:

$$\alpha_\pm(l)\simeq\frac{-2i(ka)^{2l+1}}{(2l+1)[(2l-1)!!]^2}\left[\frac{x-i(l+1)\dfrac{cZ_s}{4\pi}}{x+il\dfrac{cZ_s}{4\pi}}\right] \tag{16.153}$$

而 $\beta_\pm(l)$的形式与 $\alpha_\pm(l)$相同，但$(cZ_s/4\pi)$用其倒数代替. 当 $ka\gg l$时，我们利用(16.13)而得

$$\alpha_\pm(l)\simeq\left(\frac{\dfrac{cZ_s}{4\pi}-1}{\dfrac{cZ_s}{4\pi}+1}\right)e^{2i[(l+1)(\pi/2)-ka]}-1 \tag{16.154}$$

同时通过代换$\frac{cZ_s}{4\pi}\to\frac{4\pi}{cZ_s}$，又得$\beta_\pm(l)=-\alpha_\pm(l)$，在长波长极限下，与$Z_s$的实际值无关，当$l$增加时，散射系数$\alpha_\pm(l)$、$\beta_\pm(l)$很快地变小．通常，对每一多极级数来说，只需保留最低阶项($l=1$)，在相反的$ka\gg1$的极限下，(16.154)表明：当$l\ll ka$时，逐项系数的大小大抵相当，但在很宽范围内有位相涨落．当$l\sim l_{\max}=ka$时，有一个过渡区域，而当$l\gg l_{\max}$时，(16.153)成立．对于这样大的项数来说，用部分波或多极展开是一件棘手的事情，必须使用电子数字计算机，或用9.13节里讨论的那种类型的一些近似方法．

我们现在专门来讨论理想导电球($Z_s=0$)的长波长极限($ka\ll1$)，并将一些稍复杂的实例留作习题．在(16.147)中只有$l=1$的项才是重要的．由(16.153)，我们求得

$$\alpha_\pm(1)=\frac{-1}{2}\beta_\pm(1)\simeq-\frac{2i}{3}(ka)^3$$

在这种极限下，散射截面是

$$\frac{d\sigma_{\text{散射}}}{d\Omega}\simeq\frac{2\pi}{3}a^2(ka)^4|\mathbf{X}_{1,\pm1}\mp2i\mathbf{n}\times\mathbf{X}_{1,\pm1}|^2 \tag{16.155}$$

根据第343页上的表，我们得到绝对值平方项为

$$|\mathbf{n}\times\mathbf{X}_{1,\pm1}|^2=|\mathbf{X}_{1,\pm1}|^2=\frac{3}{16\pi}(1+\cos^2\theta) \tag{16.156}$$

我们可以容易地算出交叉项：

$$[\pm i(\mathbf{n}\times\mathbf{X}_{1,\pm1})^*\cdot\mathbf{X}_{1,\pm1}]=\frac{-3}{8\pi}\cos\theta \tag{16.157}$$

于是，微分散射截面的长波长极限是

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\simeq a^2(ka)^4\left[\frac{5}{8}(1+\cos^2\theta)-\cos\theta\right] \tag{16.158}$$

与入射波的偏振态无关．散射波的角分布如图16.6所示，这是与图9.7等效的极坐标图．散射主要是向后散射，对90°的明显不对称性是由电偶极-磁偶极干涉项所引起的．

长波长极限下的总截面是

$$\sigma=\frac{10\pi}{3}a^2(ka)^4 \quad (16.159)$$

这个著名结果是米 (Mie) 氏和德拜最先得到的 (1908—1909 年)，并在 9.6 节(c)段里，已经用不同的观点讨论过.

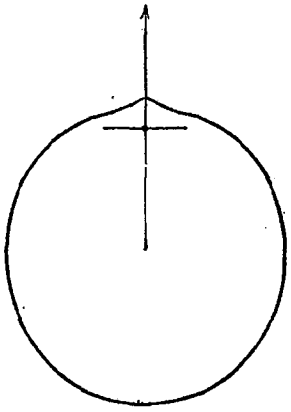


图 16.6 在长波长极限情况($ka\ll 1$)下，理想导电球对电磁波散射的角分布.

当 ka 不是很小时，具有任意电磁性质的球体对电磁波的散射的一般问题是复杂的. 在 1908 至 1909 年间，米氏和德拜最先系统地研究了这个问题. 现在已经发表了数百篇论文讨论这一课题. 有关这个重要问题的许多方面的详细论述可以在下列三本书中找到: *Kerker*; *King and Wu*; *Bowman, Senior, and Uslenghi*. 也可以在本章末援引的其它书籍中找到. *Bowman, Senior, and Uslenghi* 这本书除了球体以外还讨论了其它规则形状物体的散射.

对于球、圆柱等以外的散射体来说，正统的理论很少. 最近已经取得了一些令人感兴趣的进展，即普塞耳(Purcell) 和潘尼派克(Pennypacker)所发展的近似方法，在此近似方法中，用一个由基本偶极散射体组成的粗粒点阵列，来代替一个具有任意电磁性质、任意形状的散射体，这些基本偶极散射体的性质能使任意形状散射体的诸性质重现. 使用高速电子数字计算机，采用数值计算方法，求得了“散射体”内外场的自洽解. 第九章末的推荐读物中援引了这项工作.

16.10 多极场的边值问题

导电球对电磁波的散射是多极场边值问题的一个例子. 其它的例子是，导电球的自由振荡、球形谐振腔以及电介质球的散射. 导体中可能出现的电阻损失，加上诸如谐振腔的Q值和吸收截面(已经提到过)等问题，有待进一步讨论. 处理这些问题的一般方法与16.9节和第八章里用过的相同. 本章里已经阐明了必要的数学工具. 我们将把这些例子的讨论留作本章末的习题.

参考书和推荐读物

透彻讨论了矢量球谐函数和多极矢量场理论的书有:

Blatt and Weisskopf, 附录 B;

Morse and Feshbach, 13.3 节.

在下列著作中论述了在原子核多极辐射方面的应用:

Blatt and Weisskopf, 第十二章;

Siegbahn, 第十三章(S. A. Moszkowski 撰写) 和第十六章(I)(M. Goldhaber 和 A. W. Sunyar 撰写).

第九章末援引了若干论述天线和散射的书籍. 但是,其中没有一本书用严密的方法讨论多极展开的问题.

简要地论述了理想导电球对电磁波的散射的书有:

Morse and Feshbach, 第 1882 页至第 1886 页;

Panofsky and phillips, 12.9 节.

下列两书作了更精辟的讨论, 所讨论的球体具有任意的介电性质和导电性质:

Born and Wolf, 13.5 节;

Stratton, 9.25 节.

关于球贝塞耳函数等的数学知识, 可参看

Morse and Feshbach, 第 1573 页至第 1576 页.

16.9 节末已经援引了有关散射的其它参考书.

习　题

16.1 在 z 轴上放有三个电荷：电荷 $+2q$ 在原点上，电荷 $-q$ 在 $z=\pm a\cos\omega t$ 处．试求最低阶非零多极矩、辐射的角分布和总辐射功率．假定 $ka\ll 1$．

16.2 在由

$$R(\theta)=R_0[1+\beta P_2(\cos\theta)]$$

所确定的近似球面内有总值为 Q 的均匀体电荷分布．小参数 β 按频率 ω 随时间谐和地变化．这相当于球上的表面波．若只保留 β 的最低级项并作长波长近似处理，试计算非零多极矩、辐射的角分布和总辐射功率．

16.3 将 16.2 题的均匀电荷密度换成与 z 轴平行的总磁矩为 M 的均匀内禀磁化强度．用与上题一样的近似处理，计算非零的辐射多极矩、辐射的角分布和总辐射功率．

16.4 在 x-y 平面内有一个由半径 a 的圆形金属回线构成的天线，它的中心在原点上．金属线中的电流强度是

$$I=I_0\cos\omega t=\mathrm{Re}I_0e^{-i\omega t}$$

(*a*) 若对 ka 的量值不作近似处理，求辐射区内 **E** 和 **B** 的表式．定出每单位立体角的辐射功率．

(*b*) 最低阶非零多极矩（$Q_{l,m}$ 或 $M_{l,m}$）是什么？计算在 $ka\ll 1$ 的极限情况下的这个最低阶非零多极矩．

16.5 在一平面上放有两个相距为 $2a$ 的不变的电偶极子，它们的偶极矩都是 p，它们的轴平行于和垂直于这个平面，但偶极矩方向相反．这两个偶极子以恒定角速度 ω 绕着一个在它们正中间的平行轴转动（$\omega\ll c/a$）．

(*a*) 试计算四极矩的分量；

(*b*) 试证：辐射的角分布正比于 $(1-3\cos^2\theta+4\cos^4\theta)$，并且总辐射功率为

$$P=\frac{2cp^2a^2}{5}\left(\frac{\omega}{c}\right)^6$$

16.6 在长波长极限下，计算电荷分布为

$$\rho=Cr^3e^{-5r/6}Y_{1,1}(\theta,\phi)Y_{2,0}(\theta,\phi)e^{-i\omega_0 t}$$

的全部的非零电多极矩，并确定每个多极的角分布和总辐射功率．这个电荷分布适用于氢原子的 $n=3$、$l=2(3d)$ 和 $n=2$、$l=1(2p)$ 态之间的跃迁．

16.7 表示在半径为 R 的柱形波导中传播的横磁波的场是

$$E_z=J_m(\gamma r)e^{im\phi}e^{i\beta z-i\omega t},\ H_z=0$$

$$E_\phi=\frac{-m\beta}{\gamma^2}\frac{E_z}{r},\quad H_r=-\frac{k}{\beta}E_\phi$$

$$E_r=\frac{i\beta}{\gamma^2}\frac{\partial E_z}{\partial r},\quad H_\phi=\frac{k}{\beta}E_r$$

式中 m 是说明角度依赖关系的指数，β 是传播常数，$\gamma^2=k^2-\beta^2(k=\omega/c)$，式中 γ 满足 $J_m(\gamma R)=0$. 试计算电磁角动量的 z 分量和场能之比. 为了简化你的计算，先作几次分部积分，并利用 E_z 所满足的微分方程可能有好处.

16.8 设在导电媒质中有一个半径为 a 的球形空腔，可当作电磁谐振腔.

(*a*) 设电导率为无穷大，求空腔的 TE 模和 TM 模的特征频率 ω_{lm} 所满足的超越方程.

(*b*) 以半径 a 为单位，计算四个最低的 TE 模和 TM 模的波长 λ_{lm} 的数值.

(*c*) 算出空腔中最低的 TE 模和 TM 模的电场和磁场的显式.

16.9 设在 16.8 题中的球形谐振腔有非导磁壁，后者的电导率很大，但是有限的. 在趋肤深度 δ 远小于空腔半径 a 的近似下，证明：方程(8.86)所定义的谐振腔的 Q 值为

$$Q=\frac{a}{\delta},\ \text{对一切 TE 模来说}$$

和

$$Q=\frac{a}{\delta}\left(1-\frac{l(l+1)}{x_{lm}^2}\right),\ \text{对一切 TM 模来说}$$

式中 $x_{lm}=(a/c)\omega_{lm}$，这是对 TM 模来说的.

16.10 讨论自由空间中半径为 a 的理想导电实心球的振荡简正模[这个问题是汤姆孙在 1880 年解出的].

(*a*) 确定 TE 和 TM 振荡模的本征频率所满足的特性方程. 设时间依赖关系为 $e^{-i\omega t}$，证明：ω 的诸根总是负的虚部.

(*b*) 计算 $l=1$ 和 $l=2$ 的 TE 和 TM 模的本征频率. 用表格列出每个模的波长(用频率的实部来定义)，以半径 a 为单位；同时列出衰减时间(定义为能量下降为初值的 e^{-1} 所需的时间)，以过渡时间 (a/c) 为单位.

16.11 (*a*) 证明：对散射波(16.141)来说，归一化散射振幅(9.188)是

$$\mathbf{f}=\frac{1}{ik}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{l}\sqrt{2l+1}[a_{\pm}(l)\mathbf{X}_{l,\pm1}\pm i\beta_{\pm}(l)\mathbf{n}\times\mathbf{X}_{l,\pm1}]$$

式中入射波的偏振矢量为 $(\epsilon_1\pm i\epsilon_2)/\sqrt{2}$.

(*b*) 根据光学定理(9.189)和上述 $\mathbf{f}$ 表式，推导总截面 $\sigma_{总}$ 的表式.

16.12 有一频率 $\omega=ck$ 的圆偏振平面波，入射到半径为 a 的磁导率为 1 的导电球上.

(*a*) 设球的电导率为无穷大，写出在 $ka\ll1$ 的长波长极限下球面附近和球面上的电场和磁场的显式.

(*b*) 运用第八章的方法，计算球从入射波吸收的功率，假定电导率很大，但是有限的. 设 $ka\ll1$，把你的结果写成用波数 k、半径 a 和趋肤深度 δ 表示的吸收截面.

16.13 讨论半径为 a、介电常数为 ϵ 的磁导率为 1 的电介质球对平面电磁波的散射.

(*a*) 求出球内的场，并令它在球面上等于球外的入射波和散射波的总场，从而确定散射波的多极系数. 确定适合本题的相移.

(*b*) 讨论长波长极限 ($ka\ll1$) 并定出微分散射截面和总散射截面的显式. 把你的结果与 9.6 节(*b*)段的结果作比较.

(*c*) 在 $\epsilon\to\infty$ 的极限情况下，把你的结果与理想导电球的结果作比较.

16.14 考虑半径为 a 的非导磁球对平面波的散射，这个球具有非常良好的、但不是理想的导电性. 假定 $ka\ll1$，并假定趋肤深度 $\delta<a$.

(*a*) 根据 8.1 节的分析，证明:

$$\frac{cZ_s}{4\pi}=\frac{k\delta}{2}(1-i)$$

(*b*) 在长波长极限下，证明：当 $l=1$ 时，(16.149)中的系数 $a_{\pm}(l)$ 和 $\beta_{\pm}(l)$ 是

$$a_{\pm}(l)\simeq-\frac{2i}{3}(ka)^3\left[\frac{\left(1-\frac{\delta}{a}\right)-i\frac{\delta}{a}}{\left(1+\frac{\delta}{2a}\right)+i\frac{\delta}{2a}}\right]$$

$$\beta_{\pm}(l)\simeq\frac{4i}{3}(ka)^3$$

(*c*) 明确地写出微分散射截面，准确到 δ/a 的一级项和 ka 的最低级项.

(*d*) 利用(16.145)，算出吸收截面. 证明：准确到 δ 的一级项，吸收截面为 $\sigma_{吸收}\simeq3\pi(k\delta)a^2$. 如果 $\delta=a$，那末截面值有哪些不同？

第十七章　辐射阻尼；粒子的自有场；束缚系统对辐射波的散射和吸收

17.1　引言

在前几章里，我们把电动力学的问题分成两类：有一类问题是，给定了电荷和电流，在计算它们所产生的电磁场；而另一类问题是，给定了外电磁场，在计算带电粒子的运动或电流．波导、谐振腔以及由给定的多极源引起的辐射，都是第一类问题的实例；而电荷在电场和磁场中的运动以及能量损失现象，则是第二类问题的实例．有时，例如在韧致辐射的讨论中，这两类问题是结合在一起的．但是，其处理仍是分成两步进行的，首先，在忽略所放出的辐射波的条件下，确定带电粒子在外场中的运动；然后，把粒子轨道看作给定的源分布来计算辐射．

显而易见，这种处理电动力学问题的方法只可能近似有效．在外力场中带电粒子的运动，只要有加速度时，就必然发生辐射．所发出的辐射场携走了能量、动量和角动量，因而势必影响带电粒子后来的运动．所以，辐射源的运动有一部分取决于辐射的方式．正确的处理一定要考虑到辐射对源运动的反作用．

为什么我们的电动力学讨论已进行了这样久才考虑这件事情呢？为什么用显然错误的方法算得的许多结果会跟实验很好地符合呢？第一个问题的部分答案包含在第二个问题的答案中．在电动力学中，有很多这样类型的问题，可以把它们当作第一段所述的两类问题之一来处理，所带来的误差小得可以忽略不计．因此，在讨论这些问题时，不再考虑那些使问题不必要地复杂化的反作用

效应是值得的. 第一个问题的另一部分答案是，辐射反作用效应的完全满意的处理是不存在的. 这个问题所面临的困难，牵涉到物理学的最基本的方面，即基本粒子的本质. 虽然可以给出一部份的解答，这些解答在有限范围内是适用的，可是基本问题仍悬而未决. 人们可以期望，从经典力学的处理过渡到量子力学的处理，将会克服这些困难. 虽然"困难终将克服"的希望仍然存在，但目前的量子力学的论述比起经典力学却有更多的麻烦. 近年来（约在 1948 到 1950 年）取得的一个进展是，在量子电动力学中，利用洛仑兹协变性和规范不变性的概念，相当巧妙地避开了这些困难，从而可以极其精确地计算出很微小的辐射效应，其结果完全与实验符合. 然而，从基本观点来看，困难依然存在. 在本章里，我们将只考虑经典方面，但也顺便指出量子力学方面的类似情况.

为什么许多过程可以忽略辐射的反作用效应来处理呢？关于这个问题，显然的答案是，这种效应在那些过程中一定是很不重要的. 为了从定性上了解在什么时候可以照上述处理，并对辐射效应重要或不重要的参量范围作出半定量估计，我们需要一个简单的判据. 这样一个判据可以从能量的考虑得到. 如果外力场使电荷为 e 的粒子在 T 这段时间内得到加速，其加速度的典型值为 a，则由拉莫尔公式(14.22)，辐射能量约为

$$E_{\text{辐射}} \sim \frac{2e^2a^2T}{3c^2} \tag{17.1}$$

如果此辐射能量损失比起问题的有关能量 E_0 来可以忽略不计，那末我们就能预料到，辐射效应是不重要的. 但若 $E_{\text{辐射}} \gtrsim E_0$，则辐射反作用效应将相当显著. 所以，当辐射效应开始变得重要时的判据，可以用下式表示：

$$E_{\text{辐射}} \sim E_0 \tag{17.2}$$

在确定有关能量 E_0 时需要小心. 我们将区别两种截然不同

的情况，在一种情况下，粒子最初是静止的，后来只在有限的时间 T 内受到外力的作用；在另一种情况下，粒子持续地加速，例如，在某特征频率 ω_0 下作准周期运动．对于最初静止的粒子，其特征能量显然是其加速后的动能．于是，

$$E_0 \sim m(aT)^2$$

那末判据(17.2)变为

$$\frac{2}{3}\frac{e^2a^2T}{c^3} \sim ma^2T^2$$

或

$$T \sim \frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^3}$$

把这个关系式中的特征时间定义为

$$\tau = \frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^3} \tag{17.3}$$

是有益的．于是，得到如下结论：当时间 T 比 τ 长得多时，辐射效应是不重要的．只当力是在 $T \sim \tau$ 这段短时间内突然地作用在粒子上，辐射效应才会显著地改变粒子的运动．值得注意的是，对带电粒子来说，最长的特征时间 τ 是电子的特征时间，其值为 $\tau = 6.26 \times 10^{-24}$ 秒．这大约是光走 10^{-13} 厘米所需的时间．仅仅对于牵涉到这样的距离或时间的现象，我们才预料到辐射效应起着决定性作用．

如果带电粒子的运动是准周期的，其特征振幅为 d，特征频率为 ω_0，则可令 E_0 为粒子运动的机械能，它约为

$$E_0 \sim m\omega_0^2 d^2$$

加速度的典型值为 $a \sim \omega_0^2 d$，时间为 $T \sim (1/\omega_0)$．因此，判据(17.2)是

$$\frac{2e^2\omega_0^4 d^2}{3c^3\omega_0} \simeq m\omega_0^2 d^2$$

或

$$\omega_0\tau\sim 1 \tag{17.4}$$

式中 τ 由(17.3)给出. 因为 ω_0^{-1} 相当于力学运动的时间，所以我们再次看到，如果有关的力学时间比特征时间 τ (17.3)长得多，则辐射反作用效应对运动的影响是不重要的.

最后两段里所介绍的例子表明：如果外力使得带电粒子的运动在约为 τ 的时间内或在约为 $c\tau$ 的距离上有显著的改变，则可以预料，辐射对带电粒子运动的反作用效应是重要的. 这是经典电动力学领域中一个普遍的判据. 当运动不太剧烈时，反作用效应就足够地小，以致它们对短期运动的影响可以忽略. 它们的长期的累积的影响，可以按近似方法来考虑，这在下文即将讲到.

17.2 根据能量守恒计算的辐射反作用力

现在提出这样一个问题：在带电粒子的运动方程中如何把辐射的反作用效应包括进去. 我们从以非相对论性带电粒子的能量守恒为根据的简单而合理的论证开始. 一种更基本的推导以及包括相对论性效应在内的处理方法，留到下面几节里阐述.

如果忽略辐射，一个受外力 $\mathbf{F}_{外}$ 作用的质量为 m、电荷为 e 的带电粒子就按牛顿运动方程而运动：

$$m\dot{\mathbf{v}}=\mathbf{F}_{外} \tag{17.5}$$

因为粒子被加速，它就发出辐射波，其辐射功率由拉莫尔功率公式(14.22)给出，

$$P(t)=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}(\dot{\mathbf{v}})^2 \tag{17.6}$$

为考虑这种辐射能量损失及其对粒子运动的影响，我们将牛顿方程(17.5)加以修正，在其中加进辐射反作用力 $\mathbf{F}_{辐射}$：

$$m\dot{\mathbf{v}}=\mathbf{F}_{外}+\mathbf{F}_{辐射} \tag{17.7}$$

虽然在这里 $\mathbf{F}_{辐射}$ 是尚未确定的，但是我们可以看出它"必须"满足以下的一些要求：

（1）若 $\dot{\mathbf{v}}=0$，则因没有辐射，$\mathbf{F}_{辐射}$ "必"为零；

（2）因为(*a*)辐射功率正比于 e^2，(*b*)辐射效应并不牵涉到电荷的符号，所以 $\mathbf{F}_{辐射}$"必"与 e^2 成正比；

（3）因为特征时间 τ(17.3) 显然是唯一可资利用的有意义的参数，所以实际上 $\mathbf{F}_{辐射}$"必"包含特征时间 τ (17.3).

我们要求这力在时间间隔 $t_1<t<t_2$ 内对粒子所做的功等于在这段时间内辐射能量的负值，并由此来确定 $\mathbf{F}_{辐射}$的形式. 这样，能量将是守恒的，至少在间隔(t_1, t_2)上如此. 利用拉莫尔结果(17.6)，这个要求是

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}_{辐射}\cdot\mathbf{v}dt=-\int_{t_1}^{t_2}\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\mathbf{v}}\cdot\dot{\mathbf{v}}dt$$

可以对第二个积分施行分部积分，而得

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}_{辐射}\cdot\mathbf{v}dt=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\int_{t_1}^{t_2}\ddot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}dt-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}(\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v})\Big|_{t_1}^{t_2}$$

如果运动是周期性的，或在 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 时满足$(\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v})=0$，我们就可以写为

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\mathbf{F}_{辐射}-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\mathbf{v}}\right)\cdot\mathbf{v}dt=0$$

于是，可以令辐射反作用力等于

$$\mathbf{F}_{辐射}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\mathbf{v}}=m\tau\ddot{\mathbf{v}} \tag{17.8}$$

从而得到修正的运动方程：

$$m(\dot{\mathbf{v}}-\tau\ddot{\mathbf{v}})=\mathbf{F}_{外} \tag{17.9}$$

方程 (17.9) 有时叫做阿伯拉罕-洛仑兹运动方程. 可以把它看作这样一个方程，即以某种近似的对时间取平均的方法包括了辐射的反作用效应. 这方程可能受到非难，原因是：它是时间的

二阶方程，而不是一阶方程，因而违背了大家熟悉的动力学运动方程的要求．这个困难直接表现在所谓“奔离”的解上．如果外力等于零，显而易见，(17.9)有两种可能的解：

$$\dot{\mathbf{v}}(t)=\begin{cases}0\\ \mathbf{a}e^{t/\tau}\end{cases} \tag{17.10}$$

式中 $\mathbf{a}$ 为 $t=0$ 时的加速度．实际上，只有第一种解是合理的．从当初推导 $\mathbf{F}_{\text{辐射}}$ 的方法可以看出：第二种解是无法接受的，因为在 t_1 和 t_2 时，$(\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v})\neq 0$．显而易见，只当反作用项是很小的修正项时，上面给出的运动方程才是有用的．这时，可以把辐射的反作用当作对粒子运动状态产生缓慢或微小变化的微扰来处理．用一个积分微分方程代替(17.9)，就可以避开“奔离”解的问题(参看第17.6节)．

为了说明(17.9)对计算微小辐射效应的用处，可考虑一个在保守的有心引力场中运动的粒子．当不存在辐射反作用时，粒子的能量和角动量都守恒，并且决定了运动状态．辐射的发出就引起这些量的变化．倘若加速度不太大，只当时间间隔比运动的特征周期长得多时，能量和角动量才有显著改变．所以，就瞬时情况来说，运动大致与不存在辐射反作用时的相同．至于长期性的改变，可以采取对粒子的未扰动轨道求平均的方法来描述．

如果保守的有心引力场是用势 $V(r)$ 描写的，则忽略反作用效应时的加速度为

$$\dot{\mathbf{v}}=\frac{-1}{m}\left(\frac{dV}{dr}\right)\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{17.11}$$

由能量守恒可知，粒子总能量的变化率是由拉莫尔功率的负值给出：

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}(\dot{\mathbf{v}})^2=-\frac{2e^2}{3m^2c^3}\left(\frac{dV}{dr}\right)^2$$

利用 τ 的定义(17.3)，上式可以写为

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{\tau}{m}\left\langle\left(\frac{dV}{dr}\right)^2\right\rangle \tag{17.12}$$

因为假定沿轨道一周能量的变化很小，所以右边那一项可代以它的按牛顿轨道计算的对时间平均值．这时，我们得

$$\frac{dE}{dt}\simeq-\frac{\tau}{m}\left\langle\left\langle\left(\frac{dV}{dr}\right)^2\right\rangle\right\rangle \tag{17.13}$$

考虑(17.9)与矢径 $\mathbf{r}$ 的矢积，就可以求得角动量的长期性变化．因为角动量为 $\mathbf{L}=m\mathbf{r}\times\mathbf{v}$，我们得

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}_{外}+m\tau\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{v}} \tag{17.14}$$

由于外力是有心力，故外力矩等于零．但是辐射力矩项可以表为

$$m\tau\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{v}}=\tau\left(\frac{d^2\mathbf{L}}{dt^2}-m\mathbf{v}\times\dot{\mathbf{v}}\right) \tag{17.15}$$

假定角动量随时间变化很慢(当然，在这里时间是以 τ 为单位量度的)，因而，就可以在(17.15)中忽略 $\mathbf{L}$ 对 t 的二阶导数，并把其中的 $\dot{\mathbf{v}}$ 代之以未扰动运动方程 (17.11)．这时，角动量变化率可以写为

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}\simeq-\frac{\tau}{m}\left\langle\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\right\rangle\mathbf{L} \tag{17.16}$$

像(17.13)一样，式中已按瞬时轨道对时间求平均．

方程(17.13)和(17.16)决定了由辐射反作用引起的粒子轨道如何随时间变化．虽然详细的变化情况与特定的作用力定律有关，但可以作一些定性的叙述．如果运动的特征频率为 ω_0，(17.16)中的平均值可以写为

$$\frac{\tau}{m}\left\langle\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\right\rangle\sim\frac{\tau}{m}m\omega_0^2=\omega_0^2\tau$$

其中无量纲数值系数的量级为1．上式表明，角动量有明显变化的特征时间间隔约为 $1/(\omega_0\tau)\omega_0$．倘若 $\omega_0\tau\ll1$，这段时间就比轨道

周期 $2\pi/\omega_0$ 长得多．可以用能量方程完成相仿的论证．

计及辐射效应的这些方程可以用来讨论实际问题，例如计算 μ 介子或 π 介子从量子数很大的绕原子核的轨道落到低量子数轨道所需的减速时间．当时间间隔很大，同时量子数又足够大时，经典的连续运动描写是一种相当好的近似．有关这类实例的讨论留作习题．

17.3 自力的阿伯拉罕-洛仑兹算法

上节关于辐射反作用力的推导，虽然是容许的，但肯定地说，这种推导并不是严格的，或者说，不是基本的．现在的问题是要提供一种令人满意的方法，计算带电粒子的辐射场对带电粒子本身的反作用力．这时，任何一种系统的论述，都必须考虑到粒子的电荷结构及其自有场．阿伯拉罕(1903 年)和洛仑兹 (1904 年) 最先完成的论证方法，是试图建立一种纯电动力学的带电粒子模型。我们的讨论是效仿洛仑兹在其书(*Theory of Electrons*, 附注 18, 第 252 页)中所给出的讨论．

让我们考虑一个总电荷为 e 的带电粒子，其电荷密度 $\rho(\mathbf{x})$ 在粒子的静止参照系中是一尖锐的定域分布．这粒子是处在外电磁场 $\mathbf{E}_{外}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{B}_{外}(\mathbf{x}, t)$ 中。在 6.8 节和 12.10 节里，我们已经看到：机械动量加电磁动量的变化率在一给定体积中等于零，只要没有动量流入该体积或从该体积流出．阿伯拉罕和洛仑兹建议：带电粒子的表观机械动量，从起源上看，实际上是电磁动量．这时，动量守恒定律可以表为

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt}=0$$

或用洛仑兹力密度(12.121)等效地表为

$$\int\left(\rho\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{B}\right)d^3x=0 \tag{17.17}$$

在这个方程中，场是总场，积分遍及粒子的体积.

为使(17.17)取牛顿运动方程的形式

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{F}_{外}$$

我们把总场分解成外场和自有场 $\mathbf{E}_s$、$\mathbf{B}_s$，后者是由粒子本身的电荷密度 ρ 和电流密度 $\mathbf{J}$ 所产生的：

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}&=\mathbf{E}_{外}+\mathbf{E}_s\\ \mathbf{B}&=\mathbf{B}_{外}+\mathbf{B}_s\end{aligned}\right\} \tag{17.18}$$

这时，(17.17)可以写成牛顿运动方程的形式，其外力为

$$\mathbf{F}_{外}=\int\left(\rho\mathbf{E}_{外}+\frac{1}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{B}_{外}\right)d^3x \tag{17.19}$$

而粒子的动量变化率为

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=-\int\left(\rho\mathbf{E}_s+\frac{1}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{B}_s\right)d^3x \tag{17.20}$$

倘若外场在粒子所占据的空间内只是略微有些改变，则外力(17.19)刚好变为电荷为 e、速度为 $\mathbf{v}$ 的粒子所受的寻常洛仑兹力.

为了计算自力[(17.20)右边的积分]，必须先有带电粒子的模型. 为简单起见，我们假定：

(*a*) 粒子是瞬时静止的；

(*b*) 电荷分布是刚性的球对称分布.

这时，我们的结果必须只限于非相对论性运动，并且不会具有正常的洛仑兹变换性质. 这些缺陷可以在后面予以补救.

就瞬时静止的粒子来说，(17.20)变为

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=-\int\rho(\mathbf{x},t)\mathbf{E}_s(\mathbf{x},t)d^3x \tag{17.21}$$

自有场可以用自有势 $\mathbf{A}$ 和 Φ 来表示，所以

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\int\rho(\mathbf{x},t)\left[\nabla\Phi(\mathbf{x},t)+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{x},t)\right]d^3x \tag{17.22}$$

这些势由 $A^\alpha=(\Phi,\mathbf{A})$ 给出：

$$A^a(\mathbf{x},t)=\frac{1}{c}\int\frac{[J^a(\mathbf{x}',t')]_{\text{推迟}}}{R}d^3x' \tag{17.23}$$

其中 $J^a=(c\rho,\mathbf{J})$ 和 $\mathbf{R}=\mathbf{x}-\mathbf{x}'$.

在(17.23)中，四元电流的值必须在推迟时间 t' 计算. t' 与 t 相差的一段时间约为 $\Delta t\sim(a/c)$，这里 a 是粒子的线度. 当电荷分布局限在极小区域内时，这段时间间隔是极其短的. 在这样一段短时间内，可以假定粒子的运动只有微小的改变. 因此，自然地将(17.23)围绕时间 $t'=t$ 作泰勒级数展开. 因为[ ]$_{\text{推迟}}$意味着在 $t'=t-(R/c)$ 时计算的值，所以任何推迟量都有下列展开式:

$$[\ \ ]_{\text{推迟}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{R}{c}\right)^n\frac{\partial^n}{\partial t^n}(\ \ ) \tag{17.24}$$

借助于这个展开式，把(17.23)中的推迟四元电流展开，表式(17.22)就变为

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!c^n}\int d^3x\int d^3x'\rho(\mathbf{x},t)\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[\rho(\mathbf{x}',t)\nabla R^{n-1}+\frac{R^{n-1}}{c^2}\frac{\partial\mathbf{J}(\mathbf{x}',t)}{\partial t}\right]$$

考虑右边标势部分（方括号内第一项）的 $n=0$ 和 $n=1$ 项. $n=0$ 项正比于

$$\int d^3x\int d^3x'\rho(\mathbf{x},t)\rho(\mathbf{x}',t)\nabla\left(\frac{1}{R}\right)$$

这正是静电自力. 对于球对称的电荷分布来说，该项等于零. $n=1$ 项恒等于零，因为它含有 ∇R^{n-1}. 于是，标势部分给出的第一项非零贡献来自 $n=2$. 这意味着，我们可以改变求和指标，使得这个和现在写作

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,c^{n+2}}\int d^3x\int d^3x'\rho(\mathbf{x},t)R^{n-1}\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}\left\{\quad\right\}\Bigg\}\tag{17.25}$$

式中

$$\left\{\quad\right\}=\mathbf{J}(\mathbf{x}',t)+\frac{\partial\rho}{\partial t}(\mathbf{x}',t)\frac{\nabla R^{n+1}}{(n+1)(n+2)R^{n-1}}\Bigg\}$$

利用电荷和电流密度的连续性方程，(17.25)中的曲括号可以写为

$$\left\{\quad\right\}=\mathbf{J}(\mathbf{x}',t)-\frac{\mathbf{R}}{n+2}\nabla'\cdot\mathbf{J}(\mathbf{x}',t)$$

在对 d^3x' 积分时，我们可以将第二项进行分部积分. 这时，我们有

$$-\int d^3x'R^{n-1}\frac{\mathbf{R}}{n+2}\nabla'\cdot\mathbf{J}=+\frac{1}{n+2}\int d^3x'(\mathbf{J}\cdot\nabla')R^{n-1}\mathbf{R}$$

$$=\frac{-1}{n+2}\int d^3x'R^{n-1}\left(\mathbf{J}+(n-1)\frac{\mathbf{J}\cdot\mathbf{R}}{R^2}\mathbf{R}\right)$$

这意味着，(17.25)中的曲括号在实效上等于

$$\left\{\quad\right\}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\mathbf{J}(\mathbf{x}',t)-\left(\frac{n-1}{n+2}\right)\frac{(\mathbf{J}\cdot\mathbf{R})\mathbf{R}}{R^2}\tag{17.26}$$

就刚性电荷分布来说，电流是

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}',t)=\rho(\mathbf{x}',t)\mathbf{v}(t)$$

如果电荷分布是球对称的，在本问题中只有 $\mathbf{v}(t)$这样一个特定方向. 因而，在对 d^3x 和 d^3x' 的积分中，(17.26)只有沿 $\mathbf{v}(t)$方向的分量才不等于零. 所以(17.26)相当于

$$\left\{\quad\right\}=\rho(\mathbf{x}',t)\mathbf{v}(t)\left[\frac{n+1}{n+2}-\frac{n-1}{n+2}\left(\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{Rv}\right)^2\right]$$

而且 $\mathbf{R}$ 对一切方向都是同样可能的. 这意味着，上式第二项的 $\left(\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{Rv}\right)^2$ 可代以其平均值 $\frac{1}{3}$. 于是就得到(17.25)中曲括号的最终的简单形式：

$$\left\{\quad\right\}=\frac{2}{3}\rho(\mathbf{x}',t)\mathbf{v}(t) \tag{17.27}$$

把(17.27)代入(17.25)，自力变为

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{c^{n+2}}\frac{2}{3n!}\frac{\partial^{n+1}\mathbf{v}}{\partial t^{n+1}}\int d^3x'\int d^3x\rho(\mathbf{x}')R^{n-1}\rho(\mathbf{x}) \tag{17.28}$$

上式不包括已被忽略的 $\mathbf{v}$ 对时间导数的非线性项(这些项在 $n\geq 4$ 时出现).

为了领会(17.28)的含义，我们考虑这展开式中的头几项:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_0&=\frac{2}{3c^2}\dot{\mathbf{v}}\int d^3x\int d^3x'\frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{R}\\ \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_1&=\frac{-2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}\int d^3x\int d^3x'\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')=-\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}\\ \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_n&\sim\frac{e^2}{n!c^{n+2}}\overset{(n+1)}{\mathbf{v}}a^{n-1}\end{aligned} \tag{17.29}$$

第三个表式中的 a 是一种长度，它表征粒子电荷分布的广延度.我们注意到，在点粒子($a\to 0$)的极限情况下，展开式中 $n\geq 2$ 的项等于零. 所以，当电荷分布局限在极小区域内时，我们只需考虑 $n=0$ 和 $n=1$ 的贡献. $n=1$ 的项正是(17.9)中已经求得的辐射反作用力. 它与粒子的结构无关，只与粒子的总电荷有关. 我们现在的推导，比起17.2节的处理来，可认为是建立在更基本的立脚点上的.

(17.29)中 $n=0$ 的项值得特别注意. 其二重积分正比于电荷分布的静电自具能 U,

$$U=\frac{1}{2}\int d^3x\int d^3x'\frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{R} \tag{17.30}$$

因而，$n=0$ 的项可以表为

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)_0=\frac{4}{3}\frac{U}{c^2}\dot{\mathbf{v}} \tag{17.31}$$

上式具有动量变化率所要求的一般形式. 静电自具能除以 c^2 后，即等于粒子的电磁质量:

$$m_e=\frac{U}{c^2} \tag{17.32}$$

倘若忽略展开式(17.28)中的高级项，则阿伯拉罕-洛仑兹模型的牛顿运动方程就取下列形式:

$$\left(\frac{4}{3}m_e\right)\dot{\mathbf{v}}-\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}=\mathbf{F}_{外} \tag{17.33}$$

除了$\frac{4}{3}$乘电磁质量这一因子外，上式与(17.9)相同.

17.4 阿伯拉罕-洛仑兹模型的困难

虽然阿伯拉罕-洛仑兹的工作朝带电粒子的根本性描述迈进了一大步，但在下列几个方面，它仍是不足的:

1. 一个明显的缺点是这模型的非相对论性质. 单就反作用力项来说，可以容易地完成其相对论性推广(参看习题 17.4)，但就模型本身来说，这种推广还是不够的.

2. (17.33)中电磁质量前面的系数是不正确的. 这是模型本身具有非正常洛仑兹协变性质的一种征兆. 在下一节里，将会更清楚地看到这一点.

3. 如果我们想要忽略自力展开式中的高级项，我们必须令 $a\to 0$. 但电磁质量约为(e^2/c^2a). 因此，在 $a\to 0$ 的极限下，电磁质量变为无穷大. 如果我们想要使电磁质量具有粒子的观测质量 m 的数量级，则电荷分布的广延度必须是 $a\sim r_0$，这里

$$r_0=\frac{e^2}{mc^2}$$

对电子来说，这个长度叫做经典电子半径，等于 2.82×10^{-13} 厘米. 虽然它是非常小的，但可以想像，对于足够剧烈的运动来说，展开

式中的高级项对这一有限的广延度就变得重要了.①因此，如果粒子具有有限的广延度，那末就必须把这种"截断"理论仅仅当作一种近似的描写.

4. 定域电荷分布必须有一些非电磁性的力，以使其保持稳定. 所以，在麦克斯韦方程组和狭义相对论的体系内，必须放弃物质的纯电磁模型的概念. 我们知道，自然界中存在强大的非电磁力. 参与这些强相互作用的粒子叫做强子，强相互作用的研究表明这些粒子具有有限的空间广延度. 由电子和 μ 介子的散射，可以探明强子的电荷和磁化强度的分布，只要假定这些试探粒子是点电荷，并且在切近距离上电动力学定律依然成立. 根据对中子和质子所作的详尽研究和对其它强子所作的不完整研究，我们得知，电荷和磁化的广延度约为 $(0.5\text{-}1.0)\times10^{-13}$ 厘米. 这数值稍小于经典电子半径 r_0，但与后者有同一数量级. 这种情况也许有某种深刻的意义，可是就我们目前的认识水平来说，一个密切相关的事实是：π 介子(核力场的最轻的量子) 的康普顿波长为 $\hbar/m_\pi c\simeq 1.4\times10^{-13}$ 厘米. 可以推测，就是这一康普顿波长和其它类似强子的康普顿波长决定了在电子散射实验中所观测到的广延度.

我们认为，带电的轻子(电子和 μ 介子)只有电磁相互作用和弱相互作用. 所以，它们是阿伯拉罕-洛仑兹模型的量子力学推广的候选者. 正如绪论里所提到过的，对电子所作的一些实验至少在 10^{-15} 厘米的量级上没有显示出任何迹象，表明电子具有结构或有限的广延度. 从经典电动力学角度上看，电荷是扩展分布的，因此上述这个事实完全无法理解. 当然，我们知道，在量级为 $\hbar/mc=137r_0$ 的距离上出现量子效应. 因此，纯经典电磁模型同实在世

① 展开式中相继项的比为 $\left(\frac{a}{c}\frac{d^{n+2}v}{dt^{n+2}}\Big/\frac{d^{n+1}v}{dt^{n+1}}\right)$. 这意味着，在时间间隔 (a/c) 内，运动必有相当可观的改变. 因 $a\sim e^2/mc^2$，这段时间间隔正好是 (17.3) 给出的 τ. 于是，我们又得到上述的那个判据.

界的关系很小.

非电磁力的存在意味着,这种力对粒子质量有一贡献 m_0. 在迄今所讨论的阿伯拉罕-洛仑兹模型的范围内,这一附加质量只能作为(17.33)中加速度的一个附加系数而出现.

17.5 电磁能量和电磁动量的协变定义

阿伯拉罕-洛仑兹模型中的一个主要问题,是电磁自具能和电磁自具动量没有正常的协变性,这正是惯性表式中那个$\frac{4}{3}$的反常因子所显示的,此因子是汤姆孙(1881 年)最先求得的. 这个困难的根源,可以追溯到该模型运用了大家熟悉的能量密度和动量密度:

$$u=\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2),\quad \mathbf{g}=\frac{1}{4\pi c}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) \tag{17.34}$$

这两式是按无可非议形式写出的. 通常(参看 6.8 节)将总电磁能量和总电磁动量定义为电磁能量密度和电磁动量密度在一定时刻的三维体积分. 在讨论坡印廷定理时,对于在已确定好场的惯性系中静止的观测者来说,这样的定义是许可的,然而,一般说来,如果在不同惯性系中讨论总电磁四元动量,那末,这样的定义是不适用的. 密度(17.34)是对称电磁胁强张量$\Theta^{\alpha\beta}$(12.115)的元素. 正如 12.10节(a)段里已提过的,Θ^{00} 和 Θ^{0i} 在一定时刻的三维空间积分不是按四元矢量的分量而变换,除非此张量满足 $\partial_\alpha\Theta^{\alpha\beta}=0$,即无源场的方程. 对于一个经典的有广延度的带电粒子来说,若其电荷和电流密度不等于零,则电磁胁强张量 $\Theta^{\alpha\beta}$ 的散度不等于零[参看 (12.118)]. 因此,通常的 u 和 $\mathbf{g}$ 的三维空间积分不可能是在一切惯性系中都一致的带电粒子的电磁能量和动量.

在 1906 年,庞加莱回避了电磁能量和动量各自的变换性质问

题，给出了阿伯拉罕-洛仑兹粒子的能量和动量的协变性问题的一个解以及这个解的稳定性．庞加莱指出：一个纯电磁的带电粒子是不可能的(从经典上说)，这是由于这种粒子本身的电荷分布是不稳定的．要保持电荷稳定必须有非电力．于是，庞加莱假设了一个非电磁胁强张量 $P^{\alpha\beta}$，后者应该与$\Theta^{\alpha\beta}$ 相加而给出总自胁强张量 $S^{\alpha\beta}$：

$$S^{\alpha\beta}=\Theta^{\alpha\beta}+P^{\alpha\beta}$$

这时，粒子的总四元动量定义为

$$cP^{\alpha}=\int S^{\alpha 0}d^3x \tag{17.35}$$

式中的积分是在一定时刻遍及整个三维空间计算的．可以证明：(17.35)按四元矢量而变换，只要在粒子的静止参照系中(P＝0)，有

$$\int S^{(0)ij}d^3x^{(0)}=0 \tag{17.36}$$

式中 $i,j=1,2,3$，上标(0) 表示静止参照系。这个要求是总自胁强(在三维的意义下)等于零，这正是力学稳定性条件．我们可以把总自胁强在静止参照系中等于零这一要求与下列微分要求联系起来：

$$\partial_{\alpha}S^{\alpha\beta}=0$$

于是，又得到与无源辐射相同的情况．如果洛仑兹协变胁强张量的四元散度不等于零，那末(17.35)在一定时刻的空间积分应当可以代表守恒的能量-动量四元矢量．

庞加莱的解有某些优点，但也有些缺点．为了提供稳定性，它需要未知的庞加莱胁强．它回避了任一系统的能量和动量的电磁部分的变换性质的问题．

即使有源存在，只要适当小心，就可以确保电磁能量和动量的正确的四元矢量特性．我们可以考虑用下列表式来定义某特殊惯

性系 K' 中的能量和动量：

$$\left.\begin{aligned} E'_e &= \frac{1}{8\pi}\int (\mathbf{E}'^2+\mathbf{B}'^2)d^3x' \\ \mathbf{P}'_e &= \frac{1}{4\pi c}\int \mathbf{E}'\times\mathbf{B}'d^3x' \end{aligned}\right\} \tag{17.37}$$

(17.37)中的被积函数是二秩张量$\Theta^{\alpha\beta}$的元素．显然，我们必须用一个四元矢量来缩并此张量的一个指标，而这个四元矢量在惯性系 K' 中必须简化为 d^3x'．我们定义类时四元矢量

$$d\sigma^\beta = n^\beta d^3\sigma \tag{17.38}$$

式中 $d^3\sigma$ 是四维空间中一个类空超平面上的不变的三维“面积”元．此超平面的法线 n^β 在 K' 中的分量为(1, 0, 0, 0)．不变量$d^3\sigma$显然是 $d^3\sigma = n_\beta d\sigma^\beta = d^3x'$．如果惯性系 K' 以速度 $c\boldsymbol{\beta}$ 相对于惯性系K运动，那末，在K中四元矢量 n^β 是

$$n^\beta = (\gamma, \gamma\boldsymbol{\beta}) \tag{17.39}$$

因此，在任一参照系中电磁四元动量的一般定义是

$$cP^\alpha_e = \int \Theta^{\alpha\beta}d\sigma_\beta = \int \Theta^{\alpha\beta}n_\beta d^3\sigma \tag{17.40}$$

在 K' 中，n_β 只有一个时间分量．因 $d^3\sigma = d^3x'$，这一协变表式就化为(17.37)．但是，在参照系K中，$n_\beta = (\gamma, -\gamma\boldsymbol{\beta})$，协变定义具有时间分量和空间分量：

$$\left.\begin{aligned} cP^0_e &= \gamma\int (u - \mathbf{v}\cdot\mathbf{g})d^3\sigma \\ cP^i_e &= \gamma\int (cg^i + T^{(M)}_{ij}\beta^j)d^3\sigma \end{aligned}\right\} \tag{17.41}$$

式中 $T^{(M)}_{ij}$ 是 3×3 麦克斯韦胁强张量(6.120)．如果需要的话，可以用 $d^3x' = \gamma d^3x$ 把不变体积元 $d^3\sigma = d^3x'$ 化成参照系K中的体积元 d^3x(在一定时刻 t 积分)．

电磁四元动量的定义(17.40)或(17.41)是由任意参照系 K' 中的纯真表式(17.37)出发而得到的协变定义．当然，选择不同的

参照系 K' 就导出不同的四元矢量，但是不要因此而担忧①. 如果场的电磁质量不等于零，那末，就自然地把参照系 K' 选为静止参照系，即在此参照系中有

$$\frac{1}{4\pi c}\int \mathbf{E}^{(0)}\times\mathbf{B}^{(0)}d^3x^{(0)}=0 \tag{17.42}$$

我们用 $K^{(0)}$ 表示上述的这样一个参照系，在此参照系中总电磁动量 $\mathbf{P}'_e$ 等于零，并且在此参照系的诸量上附加了上标"0"，以明确表示这是一种特殊选择的参照系 K'. 于是，按照(17.37)，电磁静能为

$$E_e^{(0)}=m_ec^2=\frac{1}{8\pi}\int[\mathbf{E}^{(0)2}+\mathbf{B}^{(0)2}]d^3x^{(0)} \tag{17.43}$$

在参照系 K 中，电磁能量和电磁动量由(17.41)给出，其中的 $\mathbf{v}$ 现在是静止参照系 $K^{(0)}$ 在 K 中的速度.

对于所有电荷静止于某参照系的这种电磁位形来说（带电粒子的阿伯拉罕-洛仑兹模型是一个实例），我们可以将一般公式简化为更有吸引力的、一目了然的形式. 显然，所有电荷都处于静止的参照系是 $K^{(0)}$，因为在那里一切都是静电的，并且磁场在三维空间中处处等于零. 对于这样的电磁位形来说，当不作近似处理时，参照系 K 中的磁场由下式给出：

$$\mathbf{B}=\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E} \tag{17.44}$$

根据(11.149)，可以证明上式. 于是，(17.41)的第一个方程中的被积函数是一个洛仑兹不变量：

$$\begin{aligned}(u-\mathbf{v}\cdot\mathbf{g})&=\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2)-\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\beta}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\\&=\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2)-\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{B}\end{aligned}$$

① 有一种可能的选择，即选 K' 为观测者所静止的"实验室". 我们可以按这种选择来解释第六章里关于守恒定律的讨论.

$$=\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2-\mathbf{B}^2)$$

因而K中的能量由下式给出:

$$cP_e^0=\gamma\int\frac{(\mathbf{E}^2-\mathbf{B}^2)}{8\pi}d^3\sigma=\gamma^2\int\frac{(\mathbf{E}^2-\mathbf{B}^2)}{8\pi}d^3x \qquad (17.45)$$

同理,(17.41)中的第二个方程变成

$$c\mathbf{P}_e=\gamma\boldsymbol{\beta}\int\frac{(\mathbf{E}^2-\mathbf{B}^2)}{8\pi}d^3\sigma=\gamma^2\boldsymbol{\beta}\int\frac{(\mathbf{E}^2-\mathbf{B}^2)}{8\pi}d^3x \qquad (17.46)$$

因为被积函数$(\mathbf{E}^2-\mathbf{B}^2)$是个不变量,显而易见,我们有一个四元矢量$P_e^\alpha=(\gamma m_e c,\gamma m_e\mathbf{v})$,式中电磁质量为

$$m_e=\frac{1}{8\pi c^2}\int(\mathbf{E}^2-\mathbf{B}^2)d^3\sigma=\frac{1}{8\pi c^2}\int\mathbf{E}^{(0)}d^3x^{(0)}$$

上式与(17.43)一致,也与(17.30)和(17.32)一致.

布特勒①用能量方程(17.45)讨论了特罗顿-诺勃耳(Trouton-Noble)实验,这是一个验证狭义相对论的实验,它涉及一个相对于以太运动的带电悬式电容器所受的转矩的问题.

考查$\mathbf{P}_e$表式中的诸项,观察$\frac{4}{3}$因子的出现和消失,也许是有益的.写下(17.41)中动量的第一项,

$$c\mathbf{P}_e^{(1)}=\gamma\int c\mathbf{g}d^3\sigma \qquad (17.47)$$

我们得到

$$c\mathbf{P}_e^{(1)}=\frac{\gamma}{4\pi}\int[\mathbf{E}^2\boldsymbol{\beta}-(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}]d^3\sigma \qquad (17.48)$$

在非相对论性极限下,$\mathbf{E}$从其在静止参照系中的值仅仅改变了量级为β^2的一些项.假定场在静止参照系中是球对称的,则第二项对角度的积分的平均值等于第一项对角度的积分值的三分之一.

---

① J. W. Butler, *Am J Phys.* 36, 936(1968).

于是，我们就有一个数值系数$\left(\frac{2}{3}\right)\Big/4\pi=\left(\frac{4}{3}\right)\Big/8\pi$，或$\mathbf{P}_e^{(1)}\simeq 4m_e\mathbf{v}/3$. (17.41)中麦克斯韦胁强张量的贡献可以写为

$$c\mathbf{P}_e^{(2)}=\frac{\gamma}{4\pi}\int\left[(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}-\frac{1}{2}(\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2)\boldsymbol{\beta}\right]d^3\sigma \qquad (17.49)$$

在非相对论性极限和静止参照系中球对称的假定下，$\mathbf{P}_e^{(2)}\simeq -m_e\mathbf{v}/3$，这就给出了应有的和值①. 但是，极其重要的事实是：在不作任何假定或近似的情况下，$\mathbf{P}_e^{(1)}+\mathbf{P}_e^{(2)}$给出(17.46)，正确的三元动量矢量与能量(17.45)一起构成静止参照系中静电场的能量-动量四元矢量.

利用四元电磁动量的固有协变表式(17.40)，人们已经解决了阿伯拉罕-洛仑兹模型不具有协变性的问题. 这个问题最早是由克瓦耳②解决的，后来罗尔利希③在他所撰写的书中作了透彻的讨论，这本书列在本章的参考书目中. 与此密切有关的是，1922年费密④对阿伯拉罕-洛仑兹力方程中的不正确因子$\frac{4}{3}$作了相对论性的讨论，当时他证明了：哈密顿原理的协变应用会导致自力(17.20)的相应的修正，于是得到的因子为1，而不是$\frac{4}{3}$. 威耳孙⑤介绍过一种处理，这种处理在某些方面与这里所讲的相似.

17.6 计及辐射阻尼的积分微分运动方程

第17.2节里定性地讨论了阿伯拉罕-洛仑兹方程(17.9). 我

① 指$\mathbf{P}_e^{(1)}+\mathbf{P}_e^{(2)}\simeq m_e\mathbf{v}$. ——译者注

② B. Kwal, *J. Phys. radium* **10**, 103(1949).

③ F. Rohrlich, *Am. J. Phys.* **28**, 639(1960). 又参看F. Rohrlich, *Am. J. Phys.* **38**, 1310(1970).

④ E. Fermi, *Z. Physik* **24**, 340(1922)或 *Atti accad. nazl. Lincei Rend.* **31**, 184, 306(1922).

⑤ W. Wilson, *Proc. Phys. Soc.* (London)A48, 376(1936).

们曾经指出，如果认为辐射效应在某种意义上是很小的，就可以用逐步近似法来描写运动．尽管如此，写成微分形式的方程还是包含了非物理特性[例如，解(17.10)]，因为方程中出现了比力学运动方程更高阶的时间导数．人们希望有一个阶数合适的等效运动方程，它不具有毫无物理意义的解，并且很自然地显示出逐步近似性．我们的讨论将只限于非相对论性运动，不过要推广到完全相对论性运动也不难．

把(17.9)变换成等效运动方程时，所用的主导原理是：新方程应具有一些解，在粒子的电荷趋于零的极限下，这些解连续地趋于中性粒子的解．粒子的电荷愈小，自有场就愈小，辐射效应也就愈小，而其它性质则是一样的．

如果认为外力是给定的时间函数，就可以用一个积分因子，把(17.9)对时间积分一次．令

$$\dot{\mathbf{v}}(t)=e^{t/\tau}\mathbf{u}(t)$$

这时，由(17.9)得

$$m\dot{\mathbf{u}}=-\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\mathbf{F}(t)$$

所以，初积分为

$$m\dot{\mathbf{v}}(t)=\frac{e^{t/\tau}}{\tau}\int_t^C e^{-t'/\tau}\mathbf{F}(t')\,dt' \tag{17.50}$$

由于把积分下限取为不定限，前一式中的负号就被去掉．积分常数C是根据物理条件来确定的．

积分微分运动方程(17.50)不同于通常的力学运动方程，其不同之处，便是在任何时刻，粒子的加速度不依赖于作用力的瞬时值，而依赖于作用力对时间的加权平均值．$e^{-(t'-t)/\tau}$因子的出现，意味着只须考虑数量级为τ的微小时间间隔．因为$\tau\propto e^2$，所以当$e^2\to 0$时，时间间隔变为无穷小．这时我们要求运动方程变为牛顿运动方程$m\dot{\mathbf{v}}(t)=\mathbf{F}(t)$．把(17.50)的积分上限选作无穷大，就

可以实现这种要求. 为了详细说明这种特性，我们引进一个新的积分变数，

$$s=\frac{1}{\tau}(t'-t)$$

那末，(17.50)可以写为

$$m\dot{\mathbf{v}}(t)=\int_0^\infty e^{-s}\mathbf{F}(t+\tau s)ds \tag{17.51}$$

如果力随时间(以 τ 为单位量度的)的变化很缓慢，就可以预料到，围绕 $s=0$ 的泰勒级数展开很快地收敛. 于是，我们写出

$$\mathbf{F}(t+\tau s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\tau s)^n}{n!}\frac{d^n\mathbf{F}(t)}{dt^n} \tag{17.52}$$

把上式代入(17.51)，给出

$$m\dot{\mathbf{v}}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\tau^n\frac{d^n\mathbf{F}(t)}{dt^n} \tag{17.53}$$

在 $\tau\to 0$ 的极限情况下，级数只剩下 $n=0$ 项. 这时，我们就得到寻常的非带电粒子的运动方程. 较高级项表示对带电粒子的辐射修正，这些项只有当力随时间变化足够快时才是重要的.

从物理上看，可以认为，积分微分方程(17.51)合理地取代了阿伯拉罕-洛仑兹运动方程(17.9). (17.51)的一切解都满足(17.9). 但是，不出现没有物理意义的"奔离"解，例如解 (17.10). 方程 (17.51) 还有一些特性. 其中一个主要特性是它破坏了传统的因果性概念. 由(17.51)显而易见，t 时刻的加速度依赖于 t 以后时刻的作用力. 这跟因果概念相矛盾. 图 17.1 画出了这种反因果特性的一个典型例子. 在 $t>0$ 诸时刻，有一恒定力作用于粒子上. 运动方程预言，在力"实际"作用之前，有"超前加速度"存在.

为了弄明白这种效应是否跟已知的论据相矛盾，我们必须讨论所涉及的时间尺度. 这种反因果效应局限于数量级为 $\tau\sim e^2/$

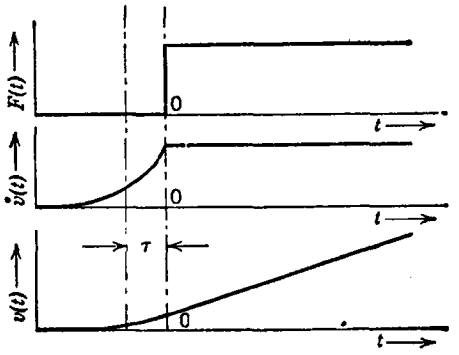


图 17.1　带电粒子的"超前加速".

$mc^3\sim10^{-24}$ 秒的时间间隔内. 这段时间相当于光行经基本粒子那样"大小"的一段距离. 这样短的时间间隔，不可能用宏观方法加以探测. 例如，不能在图示那段时间内把力加在粒子上而又马上撤除. 因此，(17.51)所包含的对因果性的违背，在实验室里是无法观测到的. 我们把这种情态描写如下：虽然(17.51)意味着违背微观因果性，可是这模型满足宏观因果性要求. 另外，这模型是经典模型，当距离与时间远大于 e^2/mc^2 和 τ 时必定失效，这一点很重要. 作为测不准原理的一个结果，在时间间隔 Δt 内加上外力，则伴有的能量测不准范围约为 $\Delta E\sim\hbar/\Delta t$. 假如这些能量测不准范围的数量级为粒子的静能 mc^2，那末，粒子的特性就与经典的大不相同. 这就给出时间间隔的量子力学界限，$\tau_q\sim\hbar/mc^2\sim137\tau$. 因为 $\tau_q\gg\tau$，我们得出结论：在所预料的经典方程成立的范围内，运动是足够缓慢的，以致：(1)反因果效应极不显著；(2)辐射反作用对运动只引起微小的修正.

如果外力 F 不是作为时间函数而是作为位置函数给出时，积分微分方程的解就稍微复杂些，虽然在原则上没有什么差别.

17.7 振子的谱线宽度与能级移动

辐射反作用效应对原子系统的细致特性是极其重要的. 虽然完善的讨论要涉及更精巧的量子电动力学的数学形式, 但是从经典的处理中, 还是可以了解到定性的特征的. 作为一个典型的例子, 我们考虑一个带电粒子, 它受一维线性回复力的束缚, 力常数为 $k=m\omega_0^2$. 在没有辐射阻尼时, 粒子以恒定振幅按特征频率 ω_0 而振荡. 当有反作用效应存在时, 因为运动能量转换成辐射能量, 振荡的振幅逐渐减少. 这是自发射的经典类似情形, 在自发射中, 一个原子从激发态跃迁到低能态, 同时放出一个光子.

如果带电粒子相对于平衡位置的位移是 $x(t)$, 则这一问题的运动方程(17.51)为

$$\ddot{x}(t)+\omega_0^2\int_0^\infty e^{-s}x(t+\tau s)ds=0 \tag{17.54}$$

因为当 $\tau=0$ 时, 解为 $x(t)\sim e^{-i\omega_0 t}$, 所以自然就假定解的形式为

$$x(t)=x_0e^{-\alpha t} \tag{17.55}$$

根据物理条件, 我们预料到, 至少当 $\omega_0\tau\ll1$ 时, α 的虚部将接近等于 ω_0, 但是 α 有一正的实部, 描写辐射的耗散效应, 当把(17.55)代入(17.54)后, (17.54)变为

$$x_0e^{-\alpha t}\left[\alpha^2+\omega_0^2\int_0^\infty e^{-(1+\alpha\tau)s}ds\right]=0$$

上式中出现的积分要求 $\mathrm{Re}(1+\alpha\tau)>0$. 算出上式的积分, 便得 α 的三次方程:

$$\tau\alpha^3+\alpha^2+\omega_0^2=0 \tag{17.56}$$

利用 $\mathrm{Re}(1+\alpha\tau)>0$ 这个条件, 再根据上列三次方程就可定出 α. (17.56)跟由(17.9)得到的三次方程相同, 但我们导出条件 $\mathrm{Re}(1+\alpha\tau)>0$ 来消除"奔离"解($\alpha\simeq-(1+\omega_0^2\tau^2)/\tau$). 两个有物理意义的根可以对任意的 τ 和 ω_0 值写成闭合形式, 但这公式是相当复杂

的，除供数值计算外，其价值很小．实际上，我们只对于 $\omega_0\tau \ll 1$ 的参数范围感到兴趣．这时，只需由(17.56)就可以直接证明，当准确到 $(\omega_0\tau)^2$ 级时，α 由下式给出：

$$\left.\begin{aligned} &\alpha=\frac{\Gamma}{2}\pm i(\omega_0+\Delta\omega)\\ \text{式中}\quad &\Gamma=\omega_0^2\tau\\ &\Delta\omega=-\frac{5}{8}\omega_0^3\tau^2 \end{aligned}\right\} \tag{17.57}$$

常数 Γ 就是大家熟知的衰减常数，而 $\Delta\omega$ 称之为能级移动①．

由于辐射阻尼，振子能量按 $e^{-\Gamma t}$ 的指数律衰减．这意味着，辐射的波将表现为一个有效长度约为 c/Γ 的波列．这样的有限辐射脉冲不完全是单色的，而是有一宽度量级为 Γ 的频谱分布．频谱的确切形状是由电场或加速度的傅里叶变换式的平方给出．如果忽略初始瞬变(持续时间为 τ)，则谱幅正比于

$$E(\omega)\propto\int_0^\infty e^{-\alpha t}e^{i\omega t}dt=\frac{1}{\alpha-i\omega}$$

因此，每单位频率间隔的辐射能量为

$$\frac{dI(\omega)}{d\omega}=I_0\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{(\omega-\omega_0-\Delta\omega)^2+(\Gamma/2)^2} \tag{17.58}$$

式中 I_0 是总辐射能．这种谱线分布叫做共振线型．在强度为极大值的一半处的分布宽度叫做半宽度或谱线宽度，这宽度等于 Γ．图 17.2 所示的就是这种谱线．由于辐射的反作用效应，谱线的频率被展宽，并有移动．

当用波长表示时，电子振子的经典谱线宽度是一个普适常数：

---

① 请读者读到这里时暂停一下，并从不同的观点讨论衰减常数 Γ．一种观点是，利用拉莫尔功率公式(17.6)和能量守恒直接求出辐射功率的时间平均值 $P(t)$ 与振子总能量 $E(t)$ 的关系．另一种观点是，求出振子的初能量和振幅 x_0，此振子满足 $\Gamma=\overline{P}/\hbar\omega_0$，这相当于发射能量为 $\hbar\omega_0$ 的单一光子．然后，把这些值跟一个处于第 n 量子态的量子力学振子的值作比较．

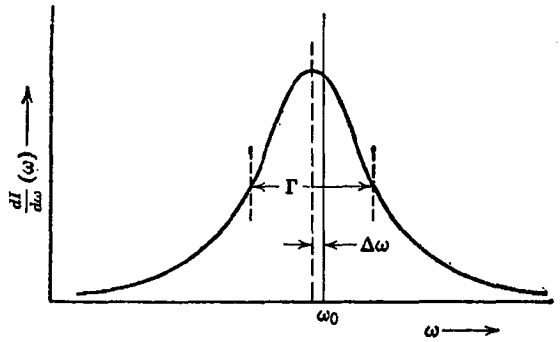


图 17.2　由于辐射反作用而引起谱线的展宽和移动．共振线型具有宽度 Γ．能级移动为 Δω．

$$\Delta\lambda=2\pi\frac{c}{\omega_0^2}\Gamma=2\pi c\tau=1.2\times10^{-4}\text{ 埃}$$

在量子力学中，谱线的自然宽度有一些改变．为了建立量子力学处理与经典处理之间的关系，有时把量子力学谱线宽度写为

$$\Gamma_q=f_{ij}\Gamma$$

式中 f_{ij} 为$(i\to j)$ 跃迁的“振子强度”．振子强度的变化相当大，对于强的单电子跃迁来说，振子强度有时接近 1，有时则很小．

经典能级移动 Δω 等于谱线宽度 Γ 乘以一个因子 $\omega_0\tau\ll1$．在量子力学上(以及实验上)，则不是这样．其原因是，在量子论中能级移动的机理是不同的，虽然这个机理仍牵连到电磁场的效应．对于量子化的辐射场，即使不存在光子，电磁场强度平方的期待值也不等于零(真空涨落)．这些涨落场(跟阴电子-阳电子场的真空涨落一起)作用于带电粒子上，就会引起其能量的移动．振子的量子力学能级移动约为

$$\frac{\Delta\omega_q}{\omega_0}\sim\omega_0\tau\log\left(\frac{mc^2}{\hbar\omega_0}\right)$$

试与下列由于放出辐射波而引起的经典移动比较一下：

$$\frac{|\Delta\omega_c|}{\omega_0}\sim(\omega_0\tau)^2$$

我们看到，量子力学能级移动与谱线宽度不相上下，或比谱线宽度大．兰姆于 1947 年首先观测到原子能级的这种由辐射引起的微小的移动①，为了纪念他，把这样移动叫做兰姆移位．魏斯考普已经就这问题的量子理论方面的解释写了一篇易懂的文章②，这篇文章只要求读者具备初步的量子场论知识．

17.8 振子对辐射波的散射和吸收

在 14.7 节和 14.8 节里已经讨论过自由带电粒子对辐射波的散射．现在打算考察束缚电荷对辐射波的散射和吸收．所选的第一个实例，是质量为 m、电荷为 e、受球对称线性回复力 $m\omega_0^2\mathbf{x}$ 束缚的单个非相对论性粒子对频率为 ω 的辐射波的散射．因为我们将处理稳态振动，所以可以利用阿伯拉罕-洛仑兹方程(17.9)，而不用积分微分形式(17.51)．于是，运动方程为

$$m(\dddot{\mathbf{x}}-\tau\ddot{\mathbf{x}}+\omega_0^2\dot{\mathbf{x}})=\mathbf{F}(t)$$

如果我们还要考虑其它的耗散过程（在量子力学上相当于除光子的再发射以外的其它衰变方式），就可以在左边追加一阻力项 $(m\Gamma'\dot{\mathbf{x}})$，$\Gamma'$ 是衰减常数，具有频率的量纲．入射电磁场提供策动力．于是，在偶极近似下，运动方程变成

$$\dddot{\mathbf{x}}+\Gamma'\ddot{\mathbf{x}}-\tau\ddot{\mathbf{x}}+\omega_0^2\dot{\mathbf{x}}=\frac{e}{m}\epsilon E_0e^{-i\omega t} \tag{17.59}$$

式中 E_0 是力心处的电场，ϵ 是入射偏振矢量．稳态解是

$$\mathbf{x}=\frac{e}{m}\frac{E_0e^{-i\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\Gamma_{\text{总}}}\epsilon \tag{17.60}$$

式中

① W. E. Lamb and R. C. Retherford, *Phys. Rev.* **72**, 241(1947).

② V. F. Weisskopf, *Revs. Modern Phys.*, **21**, 305(1949).

$$\Gamma_{总}(\omega)=\Gamma'+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\Gamma \tag{17.61}$$

叫做总衰减常数或总宽度. 辐射衰减常数为 $\Gamma=\omega_0^2\tau$.

(17.60)所描写的加速运动将产生辐射场. 由(14.18), 辐射电场为

$$\mathbf{E}_{辐射}=\frac{e}{c^2}\frac{1}{r}[\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\ddot{\mathbf{x}})]_{推迟}$$

因而,具有偏振矢量 ϵ' 的辐射场由下式给出:

$$\epsilon'^*\cdot\mathbf{E}_{辐射}=\frac{e^2}{mc^2}\omega^2\frac{E_0e^{-i\omega t}e^{ikr}}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\Gamma_{总}}\left(\frac{\epsilon'^*\cdot\epsilon}{r}\right) \tag{17.62}$$

由微分散射截面的定义(14.101)我们得到, 频率为 ω 和偏振矢量为 ϵ' 的散射截面是

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma(\omega,\epsilon')}{d\Omega}&=\left|\frac{r\epsilon'^*\cdot\mathbf{E}_{辐射}}{E_0}\right|^2\\&=\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2|\epsilon'^*\cdot\epsilon|^2\left[\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma_{总}^2}\right]\end{aligned} \tag{17.63}$$

乘在方括号前的因子刚好是汤姆孙自由粒子散射截面.

当入射波的频率远低于结合频率①时($\omega\ll\omega_0$), 截面化为

$$\frac{d\sigma(\omega,\epsilon')}{d\Omega}=\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2|\epsilon'^*\cdot\epsilon|^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \tag{17.64}$$

所以在长波下, 散射截面反比于波长的四次方. 这就是瑞利散射定律,这在第九章和第十六章里关于长波散射的讨论中已经讲过.

当频率接近结合频率 ω_0 时,散射变得非常大, 显示出典型的共振特性. 在共振附近,截面近似地由下式给出:

$$\frac{d\sigma(\omega,\epsilon')}{d\Omega}\simeq\frac{9}{16}\lambda_0^2\frac{\Gamma^2}{(\omega-\omega_0)^2+(\Gamma_{总}/2)^2}|\epsilon'^*\cdot\epsilon|^2 \tag{17.65}$$

① 即本征频率. ——译者注

式中 $\lambda_0=(c/\omega_0)$为共振时的波长(除以 2π), $\Gamma=\omega_0^2\tau$ 为辐射衰减常数, 而 $\Gamma_{总}\simeq\Gamma+\Gamma'$. 如果对散射的偏振求和, 并对所有角度求积分, 就得总散射截面,

$$\sigma_{散射}(\omega)\simeq\frac{3\pi}{2}\lambda_0^2\frac{\Gamma^2}{(\omega-\omega_0)^2+(\Gamma_{总}/2)^2} \tag{17.66}$$

这截面的频谱属于典型的共振线型, 其半宽度由 $\Gamma_{总}$ 给出, 截面的巅值为

$$\sigma_{散射}(\omega_0)=6\pi\lambda_0^2\left(\frac{\Gamma}{\Gamma_{总}}\right)^2 \tag{17.67}$$

在高频时($\omega\gg\omega_0$), 除了一个由辐射阻尼引起的因子 $(1+\omega^2\tau^2)^{-1}$ 外, 截面(17.63)趋近于汤姆孙自由粒子的值. 在经典范围内, 这个因子可以取作 1: $\omega\tau\sim1$ 相当于光子能量为 $\hbar\omega\sim137mc^2$. 而当 $\hbar\omega\sim mc^2$ 时, 量子效应就变得重要了, 正像 14.7 节和 17.6 节里所讨论的那样.

图 17.3 画出了整个经典频率范围内的散射截面.

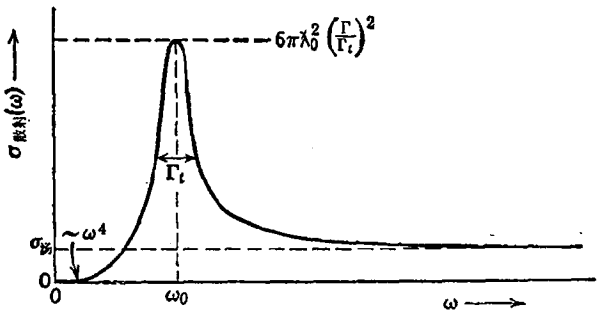


图 17.3 振子对辐射波的散射的总截面与频率的函数关系. $\sigma_{汤}$是汤姆孙自由粒子散射截面.

在 $\omega=\omega_0$ 处的锐共振散射叫做共振荧光. 在量子力学中这种现象相当于原子、分子或原子核从其基态跃迁到激发态时吸收辐射波, 接着在消激发过程中沿别的方向再放出辐射波. 在量子力

学中，截面巅值中的因子 $6\pi\lambda\bar{}_0^2$ 将代之以统计因子，

$$6\pi\lambda\bar{}_0^2 \longrightarrow 4\pi\lambda\bar{}_0^2 \frac{(2J_{激发}+1)}{2(2J_{基}+1)}$$

式中 $J_{基}$ 和 $J_{激发}$ 为基态和激发态的角动量，$4\pi\lambda\bar{}_0^2$ 为任何单量子态的最大容许散射．剩下的因子相当于对所有终态亚能级（对应于不同的磁量子数）求和并对初态能级求平均，因子 2 是与入射的辐射波的偏振相联系的统计权重．经典结果相当于 $J_{基}=0$ 和 $J_{激发}=1$．

振子对辐射的吸收与散射不同，这已经在 13.2 节里讨论过．那里的策动场虽是快速带电粒子的场，但其处理方法[从方程(13.15)到方程(13.24)]是有普遍意义的，可以直接转用过来．唯一的差别是，13.2 节的 Γ 要以 $\Gamma_{总}$(17.61) 代替，入射电场应当基本上是单色的．由(13.24)我们得到，在偶极近似下，每单位频率间隔的吸收能量为

$$\frac{dE}{d\omega}=\frac{e^2}{m}|E_0(\omega)|^2\frac{2\omega^2\Gamma_{总}}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma_{总}^2} \tag{17.68}$$

从入射束取出这一能量，并转换成振子的机械运动．此能量的一部分又再发射出来．这就是我们刚才讨论过的散射．还有一些能量通过其它方式耗散掉，这些方式已由 (17.59) 的摩擦项简略描写．就我们在 16.9 节和第九章里所采用的能量意义来说，上述的耗散就是真吸收．因为 (17.68) 代表了散射和非辐射性耗散的总和，所以将总截面定义为每单位频率间隔的吸收能量(17.68)除以每单位面积每单位频率的入射能量是很合适的．入射通量为 $(c/2\pi)|E_0(\omega)|^2$．因此，总截面为

$$\sigma_{总}(\omega)=4\pi\frac{e^2}{mc}\frac{\omega^2\Gamma_{总}}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma_{总}^2} \tag{17.69}$$

利用 $\Gamma=\omega_0^2\tau$ 的定义，上式可以写成

$$\sigma_{总}(\omega)=6\pi\lambda\bar{}_0^2\frac{\omega^2\Gamma\Gamma_{总}}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma_{总}^2} \tag{17.70}$$

在 $\omega \ll \omega_0$, $\omega \simeq \omega_0$, $\omega \gg \omega_0$ 这三个区域内，截面可以近似写为

$$\sigma_{总}(\omega) \simeq \begin{cases} 6\pi\lambda_0^2 \dfrac{\omega^2 \Gamma \Gamma_{总}}{\omega_0^4}, & \omega \ll \omega_0 \\ \dfrac{3\pi}{2}\lambda_0^2 \dfrac{\Gamma \Gamma_{总}}{(\omega_0-\omega)^2+(\Gamma_{总}/2)^2}, & \omega \simeq \omega_0 \\ 6\pi\lambda_0^2 \dfrac{\Gamma \Gamma_{总}}{\omega^2}, & \omega \gg \omega_0 \end{cases} \tag{17.71}$$

我们看到，在共振频率 ω_0 附近，总截面的形状与散射截面相同，为共振线型，但大了一个因子 $\Gamma_{总}/\Gamma$. 在高频时 $\Gamma_{总} \to \omega^2\tau$，所以总截面趋于恒定的汤姆孙值(与 1 相比，我们又把 $\omega\tau$ 略去不计).

总截面和散射截面之差是吸收截面，有时叫做反应截面 $\sigma_{反应}(\omega)$. 根据(17.70)，所有这三种截面可以写成下列富有启发性的形式：

$$\left.\begin{matrix} \sigma_{散射}(\omega) \\ \sigma_{反应}(\omega) \\ \sigma_{总}(\omega) \end{matrix}\right\} = 6\pi c^2 \frac{(\omega^2/\omega_0^2)\Gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma_{总}^2} \begin{cases} \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\Gamma \\ \Gamma' \\ \Gamma_{总} \end{cases} \tag{17.72}$$

这三种截面的共振分母相同. 散射过程正比于 $(\omega^2/\omega_0^2)\Gamma = \omega^2\tau$. 其它耗散过程(反应)正比于 Γ'. 公有的因子 $(\omega^2/\omega_0^2)\Gamma$ 代表入射的辐射波. 散射截面的第二个因子为 $(\omega^2/\omega_0^2)\Gamma$，而反应截面的第二个因子为 Γ'. 总截面包含总宽度 $\Gamma_{总}$. 在量子力学的共振反应理论里，也同样出现这种适用于过程的初态和终态的衰减常数或宽度的特性乘积.

将总截面遍及所有频率积分，就得到一个所谓偶极求和定则的关系式. 辐射阻尼效应忽略不计. 如果我们必须考虑因果特性的话，这样做是必要的. 三次方程 (17.56) 的无物理意义的那个根，在这里对应于(17.62)在复 ω 平面内的一个极点，这极点位于上半平面内远离原点的 $\omega \simeq i/\tau$ 处. 在遍及所有频率的积分中，这

个无物理意义的极点的贡献是重要的，而且引起误差．辐射反作用效应的忽略不计相当于假定 (17.70) 中的宽度 $\Gamma_{辐}$ 是一个与频率无关的常数．容易证明，在这种近似下，$\sigma_{辐}(\omega)$遍及所有频率的积分是

$$\int_0^\infty \sigma_{辐}(\omega)d\omega=\frac{2\pi^2e^2}{mc} \tag{17.73}$$

我们注意到，求和定则只与粒子的电荷和质量有关，而不依赖于其它的具体性质，例如 ω_0 和 Γ'．上式相当于系统自外场所吸收的总能量表式(13.26)．上式也相当于等离子体频率的克喇末-克朗尼格求和定则(7.122)$(\omega\mathrm{Im}\epsilon(\omega)=cN\sigma_t)$．

将偶极求和定则与克喇末-克朗尼格色散关系联系起来，可以据此而推断，偶极求和定则是一种普遍的表述，它在经典电动力学中和在量子电动力学中都是有效的，不管系统对入射的辐射波的反应是多么复杂的频率函数．这条定则只依赖于三项物理要求：(*a*) 应用偶极近似；(*b*) 由于永远存在阻尼损失，系统的正规振荡方式必须随时间衰减(即使衰减很慢)；(*c*) 在高频下，结合效应是不重要的，粒子仿佛是自由的(参看习题 17.8)．

对于由一组束缚于固定中心的、电荷为 e_j、质量为 m_j 的诸独立粒子所构成的系统来说，显然可以把求和定则推广为

$$\int_0^\infty \sigma_{辐}(\omega)d\omega=\frac{2\pi^2}{c}\sum_j\frac{e_j^2}{m_j} \tag{17.74}$$

如果粒子是由于相互作用而结合在一起的，则必须除去质心的运动．容易证明，从(17.74)的和中减掉一项(Q^2/M)，就除去了质心的运动，这里 Q 为粒子系统的总电荷，M 为总质量．对于具有 Z 个质子和 $N(=A-Z)$ 个中子的原子核来说，求和定则变为

$$\int_0^\infty \sigma_{辐}(\omega)d\omega=\frac{2\pi^2e^2}{mc}\left(\frac{NZ}{A}\right) \tag{17.75}$$

式中 e 是质子的电荷，m 是单个核子的质量.①

参考书和推荐读物

在下列一书中引人入胜地详尽论述了许多建立带电粒子经典模型的尝试以及有关问题的来历:

Whittaker.

介绍阿伯拉罕、洛仑兹和庞加莱等人的思想的有:

Lorentz, 第 26—37, 179—184 节, 附注 18.

简明地论述自具能效应和辐射反作用的书籍有:

Abraham and Becker, 第二卷, 第 13、14、66 节;

Landau and Lifshitz, *Classical Theory of Fields*, 9.9 节;

Panofsky and Phillips, 第二十章和第二十一章;

Sommerfeld, *Electrodynamics*, 第 36 节.

下列一篇论文最早阐述了相对论性经典点电子理论:

P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.*, **A167**, 148(1938).

下列两书中讨论了洛仑兹-狄喇克理论:

Barut;

Rohrlich.

这两本书中还详细论述了相对论性经典场论的其它许多方面的问题.

最早写出积分微分运动方程(17.51)的似乎是下列一书:

Iwanenko and Sokolow, 第 35 节.

下列一篇论文中给出了求解积分微分运动方程的一些实例:

G. N. Plass, *Revs. Modern Phys.*, **33**, 37(1961).

习　题

17.1　一个电荷为 e、质量为 m 的非相对论性粒子受各向同性的线性回

① 实际上，光核效应的求和定则有一附加因子$(1+x)$，其中 $x\sim\frac{1}{2}$，是核中交换力所产生的贡献. 从物理上对这个因子的一种理解，是认为交换力是由核子间带电的虚 π 介子的转移所引起的. 这些带电虚 π 介子对总核电流有贡献. 既然它们的 e/m 比值大于核子的 e/m 比值，就使得求和定则比其寻常值(17.75)有所增加.

复力束缚，力常数为 $m\omega_0^2$.

试利用 17.2 节的(17.13)和(17.16)证明：粒子的能量和角动量都从它们的初值按 $e^{-\Gamma t}$ 的指数律衰减，这里 $\Gamma=\omega_0^2\tau$.

17.2 一个电荷为 $-e$、质量为 m 的非相对论性电子，束缚于库仑引力势 $(-Ze^2/r)$ 中，当没有辐射反作用时，它沿一圆形轨道而运动.

(*a*) 试证：由能量和角动量方程(17.13)和(17.16)可导出慢变化轨道半径的解，

$$r^3(t)=r_0^3-9Z(c\tau)^3\frac{\xi}{\tau}$$

式中 r_0 为 $t=0$ 时的 $r(t)$ 值.

(*b*) 对于玻尔原子中的圆形轨道来说，轨道半径和主量子数 n 的关系是 $r=n^2a_0/Z$. 如果对 $n\to(n-1)$ 跃迁来说，跃迁概率定义为 $-dn/dt$，试证：(*a*)的结果与习题 14.10 所得到的结果一致.

(*c*) 根据(*a*)，计算质量 $m=207m_e$ 的 μ 介子从主量子数为 $n_1=10$ 的圆形轨道落到 $n_2=4$ 和 $n_2=1$ 的轨道所需的时间值. 这就合理估算了 μ 介子被一个孤立原子俘获后落到其最低轨道所需的时间.

17.3 一个电子在库仑引力场 $(-Ze^2/r)$ 中运动，其结合能为 ϵ，角动量为 L，它具有下列椭圆轨道：

$$\frac{1}{r}=\frac{Ze^2m}{L}\left[1+\sqrt{1-\frac{2\epsilon L^2}{Z^2e^4m}}\cos(\theta-\theta_0)\right]$$

椭圆的偏心率 ξ 由平方根乘余弦给出.

(*a*) 按轨道对时间求平均，试证：能量和角动量的长期性变化为

$$\frac{d\epsilon}{dt}=\frac{2^{3/2}}{3}\frac{Z^3e^8m^{1/2}}{c^3}\frac{\epsilon^{3/2}}{L^5}\left(3-\frac{2\epsilon L^2}{Z^2e^4m}\right)$$

$$\frac{dL}{dt}=-\frac{2^{5/2}}{3}\frac{Ze^4}{m^{1/2}c^3}\frac{\epsilon^{3/2}}{L^2}$$

(*b*) 如果 ϵ 和 L 的初值为 ϵ_0 和 L_0，试证：

$$\epsilon(L)=\frac{Z^2e^4m}{2L^2}\left[1-\left(\frac{L}{L_0}\right)^3\right]+\frac{\epsilon_0}{L_0}L$$

计算椭圆的偏心率，并证明：它从其初值按 $(L/L_0)^{3/2}$ 而减少. 证明：随着时间的消逝，轨道趋于圆形.

(*c*) 把你在这里所得的结果与习题 17.2 的图形轨道的特殊情形加以比较.

提示：在对时间求平均时，利用开普勒的等面积定律（$dt=mr^2d\theta/L$），把时间积分换成角度积分.

17.4 狄喇克(1938)相对论性经典点电子理论的运动方程为

$$\frac{dp_\mu}{d\tau}=F_\mu^{外}+F_\mu^{辐射}$$

式中 p_μ 为粒子的四元动量，τ 为粒子的原时，$F_\mu^{辐射}$ 为辐射反作用力(17.8)的协变推广.

利用任何力必须满足 $F_\mu p^\mu=0$ 的要求，证明：

$$F_\mu^{辐射}=\frac{2e^2}{3mc^3}\left[\frac{d^2p_\mu}{d\tau^2}+\frac{p_\mu}{m^2c^2}\left(\frac{dp_\nu}{d\tau}\frac{dp^\nu}{d\tau}\right)\right]$$

17.5 (*a*) 试证：就一维相对论性运动来说，习题 17.4 中的运动方程可以写成下列形式，

$$\dot{p}-\frac{2e^2}{3mc^3}\left(\ddot{p}-\frac{p\dot{p}^2}{p^2+m^2c^2}\right)=\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}}f(\tau)$$

式中 p 为在运动方向上的动量，圆点表示对原时的导数，$f(\tau)$是写成原时函数的寻常牛顿力.

(*b*) 试证：施行代换 $p=mc\sinh y$ 后，相对论性方程就简化成用 y 和 τ 写出的阿伯拉罕-洛仑兹形式(17.9). 利用初始条件：

$$p(\tau)=p_0,\quad 在\ \tau=0\ 时$$

写出 $p(\tau)$的通解.

17.6 一个电荷为 e、质量为 m 的非相对论性粒子作一维运动，当它通过宽度为 d 的隙缝时，受恒定电场作用而加速. 在数学上，可作如下的理想化处理：当粒子坐标在区间$(0,d)$内时粒子受外力 $m\alpha$ 作用. 当不考虑辐射阻尼时，初速为 v_0 的粒子在 $T=(-v_0/\alpha)+\sqrt{(v_0^2/\alpha^2)+(2d/\alpha)}$ 这段时间内被均匀加速，以末速 $v_1=\sqrt{v_0^2+2\alpha d}$ 出现在 $x=d$ 处.

当考虑辐射阻尼时，运动就有所不同，粒子要以 T' 时间通过隙缝，并以速度 v_1' 出现.

(*a*) 假定 T 和 T' 比 τ 大得多，求解计及辐射阻尼的积分微分运动方程，画出阻尼运动和无阻尼运动的速度与时间的关系图.

(*b*) 试证：当只算到 τ 的最低级项时，

$$T'=T-\tau\left(1-\frac{v_0}{v_1}\right)$$

$$v_1' = v_1 - \frac{a^2\tau}{v_t}T$$

(c) 试证：辐射能量与粒子动能变化之和等于外场所做的功.

17.7 描写谱线的碰撞展宽的一个经典模型是：振子在经过一段时间 T 的振荡后，因碰撞而使振荡中断，以致失去波列的相干性.

(a) 取 17.7 节里所用的振子，并假定在时间 T 和 $(T+dT)$ 之间发生一次碰撞的概率为 $(\nu e^{-\nu T}dT)$，这里 ν 是平均碰撞频率，证明：平均谱分布为

$$\frac{dI(\omega)}{d\omega} = \frac{I_0}{2\pi}\frac{\Gamma+2\nu}{(\omega-\omega_0)^2+\left(\frac{\Gamma}{2}+\nu\right)^2}$$

于是，谱线的宽度为 $(2\nu+\Gamma)$.

(b) 就 5893 埃处的钠双重线来说，振子强度为 $f=0.975$，所以自然宽度基本上等于经典值 $\Delta\lambda = 1.2\times10^{-4}$ 埃. 假定钠原子在温度为 $500K$ 时处于热平衡，估计这谱线的多普勒宽度，并将其与自然宽度作比较. 假定碰撞截面为 10^{-16} 厘米^2，试把钠双重线的碰撞宽度定为钠气压强的函数. 问在多大气压下，碰撞宽度等于自然宽度？在多大气压下，碰撞宽度等于多普勒宽度？

17.8 在外电场 $\mathbf{E}_0e^{-i\omega t}$ 的作用下，单粒子振子的偶极矩由下式给出：

$$\mathbf{p} = \alpha(\omega)\mathbf{E}_0e^{-i\omega t}$$

(a) 证明：偶极子的总截面可以写为

$$\sigma_{总}(\omega) = \frac{2\pi}{c}[-i\omega\alpha(\omega)+\text{复共轭}]$$

(b) 一切振荡筒正模必定有一些阻尼，并且当高频时，极化率 $\alpha(\omega)$ 必趋于自由粒子值 $(-e^2/m\omega^2)$，试仅利用这个事实来证明：总截面满足偶极求和定则

$$\int_0^\infty \sigma_{总}(\omega)\,d\omega = \frac{2\pi^2e^2}{mc}$$

(显然，这与第七章里关于克喇末-克朗尼格色散关系的讨论有关.)

附录：单位和量纲

电学与磁学里的单位和量纲问题多年来为许多物理学家和工程师所操心. 这种情况与长度(厘米或米)、质量(克或千克)、时间(平均太阳秒)的基本单位几乎在全世界统一，适成鲜明对照. 其原因也许是，当"绝对"标准的概念还是一种新概念时（就在公元1800年前)，力学单位就已得到规定了，而且这些力学单位经一群大科学家(邦达、拉普拉斯等)在科技界和商业界里极力推行. 那时已有(现在还有)许多专家提出电磁单位的问题. 本附录的目的是要以尽可能少的篇幅、尽可能清楚地阐明这个问题，不讨论那些尚在争论中的内容.

1. 单位和量纲；基本单位和导出单位

阿伯拉罕、普朗克、布里奇曼、①勃欧伊②等曾经强调指出，基本单位的数目以及用这些单位表示的任一物理量的量纲都是任意的. 对单位感兴趣的读者要好好精读勃欧伊所写的一系列卓越的论文.

在任何领域里，我们都希望单位制具有方便和明瞭的特色. 例如，从事于相对论性量子场论和基本粒子理论研究的理论物理学家发现，把普适常数，诸如普朗克作用量子和真空中的光速，选为量值等于1的无量纲的量，是方便的. 这样所得的单位制（叫做"自然"单位)只有一个基本单位，往往把这个单位选为长度. 所有

① P. W. Bridgman, *Dimensional Analysis*, Yale University Press (1931).

② R. T. Birge, *Am. Phys. Teacher*(现名 *Am. J. Phys.*), 2, 41(1934); 3, 102, 171(1935).

的量，不论是长度、时间、力、能量，还是其它等等，若全用这一个单位来表示，则它们的量纲都是这个单位的量纲的乘幂．从这种单位制不能得到什么新东西，换句话说，比起把米、千克、秒作为基本单位的单位制（米·千克·秒制）来，这种单位制并不是更基本的．采用这种单位制仅仅是为了方便．①

人们把基本单位（或基本标准）看作独立的量，导出单位（或导出标准）的量值和量纲都是通过理论和实验用基本单位来规定的，现在我们就阐述这两种单位．习惯上，要求把质量（m）、长度（l）和时间（t）当作基本单位看待．但是，就电学量来说，至今还没有必须遵循的惯例．例如，让我们考虑电流的单位．“国际”安培（长期以来公认为电流的实用单位）是根据每单位时间在标准银电量计中由于电解而淀积的银的质量来规定的．这样的电流单位，完全可以看作一个基本单位，它与质量、长度、时间的单位无关，因为当作单位用的那电流的数量是由被认为可以复做的电解实验求得的．

另一方面，现在公认的电流单位，即“绝对”安培，这样规定：两条无穷长的平行导线，其截面积可以忽略不计，在真空里相距 1 米时，两条导线每单位长度的横向相互作用力如为 2×10^{-7} 牛顿/米，则这时每条导线中所流过的电流即为 1“绝对”安培．这意味着，“绝对”安培是一个导出单位，因为它的定义是通过下列方程(A. 4)按两导线间的机械力来下的②．根据这个定义，“绝对”安培刚好等

① 在量子场论里，耦合常数的乘幂在进行量纲分析时起着另一种基本单位的作用．

② 所以，在米·千克·秒·安制里，(A. 4)中的比例常数 k_2 的值为 $k_2=10^{-7}$．“绝对”安培的量纲，与其量值不同，依赖于所指定的 k_2 的量纲．在通常的米·千克·秒·安(MKSA)制电磁单位里，把电流(I)任意地选为第四个基本量纲．因此，电荷的量纲为 It，k_2 的量纲为 $mlI^{-2}t^{-2}$．如果 k_2 取作无量纲的数，那末，电流的量纲为 $m^{1/2}l^{1/2}t^{-1}$．究竟是引进像电流那样的第四个基本量纲，还是用三个基本力学量纲的乘幂（有时是分数）给出电磁量的量纲，这问题纯粹是主观的事情，毫无根本意义．

于电磁制电流单位的十分之一. 自从1948年以来,国际上采用的电磁单位制是以米、千克、秒和上面规定的"绝对"安培,加上电阻、电压等其它导出单位为基础的. 这种单位制似乎是很合意的. 因为它避免了由下述情况引起的一些困难: 1894 年, 美国国会决议(根据国际工程师和科学家委员会的推荐)宣布,用三个独立的实验(银电量计、克拉克标准电池、特别规定的水银柱) 来规定电流、电压、电阻的独立的基本单位①. 其后不久,按照美国国会决议,由于实验中存在的系统误差超出了所要求的准确度, 欧姆定律不再有效!

现在,国际单位制中,质量是根据保存在巴黎的标准千克来规定的,长度是用米来规定的, 1 米等于 ^{86}Kr 原子中某一原子跃迁在真空里的波长的某一倍数,时间是用秒来规定的,1 秒等于 ^{133}Cs 中某一超精细跃迁的周期的某个整倍数. 由于用稳定激光器可以极精密地测量光速(实际上是测量同一光谱线的频率和波长), 不久将有可能用时间的单位(^{133}Cs)和确定的真空中光速值来规定米(有关 c 的最新值,参看绪论)②.

2. 电磁单位和电磁方程

在讨论电磁学的单位和量纲时,我们的出发点是,把长度(l)、质量(m)、时间(t)按一般习惯选为独立的基本量纲. 而且, 我们将把电荷随时间的变化率作为公认的电流定义($I=dq/dt$). 这意味着,电荷和电流之比具有时间的量纲③. 这时, 电荷和电流密度

① 例如,参看 F. A. Laws, *Electrical Measurements*, McGraw-Hill, New York(1917), 第 705—706 页.

② 关于利用量子现象规定基本量度单位的讨论,请参看 J. Thewlis 主编, *Encyclopaedic Dictionary of Physics*, Supplementary Volume 4, Pergamon, Oxford(1971), 第354 页起刊载的 B. W. Petley 所写的关于量子基本度量学的论文

③ 由狭义相对论的观点看来,把电流的量纲取作电荷除以长度, 是比较自然的. 这时,电流密度 J 和电荷密度 ρ 将有相同的量纲, 并构成一个"自然的"四元矢量. 在修正的高斯单位制里采用这种选择(参看表 4 的脚注(第421 页)).

的连续性方程取下列形式:

$$\nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \qquad (A.1)$$

为简单起见,我们最初只考虑自由空间里的电磁现象,暂且不管有电荷和电流存在的情况.

静电学的基本物理规律就是关于两个相距 r 的点电荷 q 和 q' 的相互作用力的库仑定律. 用符号来表示,这定律是

$$F_1=k_1\frac{qq'}{r^2} \qquad (A.2)$$

常数 k_1 是比例常数,要不是独立地给定电荷单位的量值和量纲,而按上列方程确定 k_1 的量值和量纲,便是任意选取 k_1 的量值和量纲,从而确定电荷的单位. 在我们上述体制内,现在所能肯定的,只不过是乘积(k_1qq')具有量纲(ml^3t^{-2}).

电场强度 E 是一个导出量,通常定义为每单位电荷所受的力. 更普遍的定义是,电场强度的数值正比于每单位电荷所受的力,其比例常数是一个普适常数,也许具有量纲,以致电场强度的量纲不同于每单位电荷所受的力的量纲. 但因电场强度 E 是第一个待定义的导出场量,所以从 E 的这种更普遍的定义没有得到什么好处. 仅仅当我们定义其它场量时,为了调整这些场量相对于电场强度的量纲和量值,在定义中引入量纲比例常数,也许是方便的. 因此,我们可以根据(A.2)把点电荷 q 所产生的电场强度定义为每单位电荷所受的力,

$$E=k_1\frac{q}{r^2} \qquad (A.3)$$

这种定义仍然具有普遍意义. 作者所知道的所有单位制都采用这种电场强度的定义.

对稳恒态磁现象来说,安培的观测构成确定相互作用和定义磁感应强度的基础. 按照安培的观测,两条相距为 d、载电流为 I

和 I' 的无穷长平行导线，每单位长度所受的作用力为

$$\frac{dF_2}{dl}=2k_2\frac{II'}{d} \tag{A.4}$$

常数 k_2 是与(A.2)中的 k_1 类同的比例常数．在(A.4)中引进无量纲数 2 是为了以后便于确定 k_2．因为我们对电流和电荷的量纲的选择已体现在(A.1)中，所以 k_2 相对于 k_1 的量纲是确定的．由(A.2)和(A.4)容易求得，比值 k_1/k_2 具有速度平方的量纲(l^2t^{-2})．而且，对已知的电荷和电流比较两种机械力(A.2)和(A.4)的量值，就可以求得自由空间中 k_1/k_2 的比值．这比值正好等于真空中光速的平方．所以，我们可以用符号写为

$$\frac{k_1}{k_2}=c^2 \tag{A.5}$$

式中 c 代表光速的量值和量纲．

磁感应强度 **B** 是由安培的作用力定律导出的，**B** 的量值正比于每单位电流所受的力，其比例常数 α 可以具有为方便而选取的某些量纲．于是，对载电流 I 的长直导线来说，在相距为 d 的地方，磁感应强度 **B** 的量值(和量纲)为

$$B=2k_2\alpha\frac{I}{d} \tag{A.6}$$

电场强度与磁感应强度之比值的量纲可以从(A.1)、(A.3)、(A.5)和(A.6)求出．结果得知：(E/B) 具有量纲$(l/t\alpha)$．

确定电磁单位和量纲的第三个关系，即最后一个关系，就是把电现象和磁现象联系起来的法拉第感应定律．这实验定律说，绕一迴路的感生电动势与通过该迴路的磁通量变化率成正比，可以把它写成微分形式：

$$\nabla\times\mathbf{E}+k_3\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0 \tag{A.7}$$

式中 k_3 为比例常数．因为 **E** 相对于 **B** 的量纲已经确定，所以只

要令(A.7)中的两项有相同的量纲，就可以用以前定义的量来表示 k_3 的量纲. 于是，我们求得 k_3 的量纲为 α^{-1}. 实际上，k_3 等于 α^{-1}. 根据 6.1 节里的伽利略不变性可以证明这一点. 但是，证明 k_3 等于 α^{-1} 的最容易的方法是用这里所定义的诸场量写出全部麦克斯韦方程组:

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi k_1\rho\\
&\nabla\times\mathbf{B}=4\pi k_2\alpha\mathbf{J}+\frac{k_2\alpha}{k_1}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\\
&\nabla\times\mathbf{E}+k_3\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0\\
&\nabla\cdot\mathbf{B}=0
\end{aligned}\right\}\qquad(A.8)$$

这时，对无源区域来说，两个旋度方程可以合并成波动方程:

$$\nabla^2\mathbf{B}-k_3\frac{k_2\alpha}{k_1}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}=0\qquad(A.9)$$

(A.9)所描写的波的传播速度与式中出现的一组常数有关. 因为已知这速度是光速，所以我们可以写出

$$\frac{k_1}{k_3k_2\alpha}=c^2\qquad(A.10)$$

将(A.5)和(A.10)合并，我们得到

$$k_3=\frac{1}{\alpha}\qquad(A.11)$$

这等式对量值与量纲均有效.

3. 各种电磁单位制

各种电磁单位制的差别在于选取上述各常数的量值和量纲. 由关系式(A.5)和(A.11)可知，只有两个常数(例如，k_1 和 k_3)可以(且必须)任意选择. 不管怎样，把比较常用的单位制的所有四个常数(k_1, k_2, α, k_3)列成表，是方便的. 表 1 中给出了这些常数. 我们注意到，除量纲外，电磁制单位和米·千克·秒·安制单位非常

表 1　各种单位制的电磁常数的量值和量纲

量纲写在数值后面. 符号 c 代表真空中的光速($c=2.998\times10^{10}$ 厘米/秒 $=2.998\times10^{8}$ 米/秒). 前四种单位制用厘米、克、秒作为长度、质量、时间(l, m, t)的基本单位. 米·千克·秒·安(MKSA)单位制采用米、千克和秒, 另外把电流(I)作为第四个量纲, 以安培为单位.

单位制名称	k_1	k_2	α	k_3
静电制 (esu)	1	$c^{-2}(t^2l^{-2})$	1	1
电磁制 (emu)	$c^2(l^2t^{-2})$	1	1	1
高斯制	1	$c^{-2}(t^2l^{-2})$	$c(lt^{-1})$	$c^{-1}(tl^{-1})$
亥维赛-洛仑兹制	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi c^2}(t^2l^{-2})$	$c(lt^{-1})$	$c^{-1}(tl^{-1})$
合理化的 米·千克·秒·安制 (MKSA)	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}=10^{-7}c^2$ $(ml^3t^{-4}I^{-1})$	$\frac{\mu_0}{4\pi}\equiv10^{-7}$ $(mlt^{-2}I^{-2})$	1	1

相似, 唯一差别是两单位制的力学单位和电磁单位相差 10 的各种不同次幂. 高斯制单位和亥维赛-洛仑兹制单位只相差一个 4π 因子. 仅仅在高斯(和亥维赛-洛仑兹)单位制中, k_3 才具有量纲. 由(A.7)显而易见, k_3 具有速度倒数的量纲, **E** 和 **B** 的量纲相同. 而且, 利用 $k_3=c^{-1}$, (A.7)表明: 就自由空间中的电磁波来说, **E** 和 **B** 的量值也相等.

到现在为止, 我们只讨论了自由空间中的电磁场. 因而只出现两个基本场量 **E** 和 **B**. 这里还有一项工作要做, 即规定宏观场变量 **D** 和 **H**. 如果媒质的平均电磁性质是用宏观电极化强度 **P** 和磁化强度 **M** 描写的, 则 **D** 和 **H** 的定义的一般形式为

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{D}&=\epsilon_0\mathbf{E}+\lambda\mathbf{P}\\ \mathbf{H}&=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}-\lambda'\mathbf{M}\end{aligned}\right\}\qquad(\text{A.12})$$

式中 ϵ_0, μ_0, λ, λ' 为比例常数. 使 **D** 和 **P** 或 **H** 和 **M** 具有不同的

表 2　各种单位制中 ϵ_0, μ_0, D, H 的定义、宏观麦克斯韦方程组和洛仑兹力方程

表中，当有必要时，就在括号内给出某些量的量纲。符号 c 代表真空中的光速，其量纲为(lt^{-1})。

单位制名称	ϵ_0	μ_0	D, H	宏观麦克斯韦方程组	每单位电荷的洛仑兹力
静电制 (esu)	1	c^{-2} (t^2l^{-2})	$\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H}=c^2\mathbf{B}-4\pi\mathbf{M}$	$\nabla\cdot\mathbf{D}=4\pi\rho$　$\nabla\times\mathbf{H}=4\pi\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$　$\nabla\times\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0$　$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$	$\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}$
电磁制 (emu)	c^{-2} (t^2l^{-2})	1	$\mathbf{D}=\frac{1}{c^2}\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H}=\mathbf{B}-4\pi\mathbf{M}$	$\nabla\cdot\mathbf{D}=4\pi\rho$　$\nabla\times\mathbf{H}=4\pi\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$　$\nabla\times\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0$　$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$	$\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}$
高斯制	1	1	$\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H}=\mathbf{B}-4\pi\mathbf{M}$	$\nabla\cdot\mathbf{D}=4\pi\rho$　$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$　$\nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0$　$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$	$\mathbf{E}+\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}$
亥维赛-洛仑兹制	1	1	$\mathbf{D}=\mathbf{E}+\mathbf{P}$ $\mathbf{H}=\mathbf{B}-\mathbf{M}$	$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$　$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{1}{c}\left(\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)$　$\nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0$　$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$	$\mathbf{E}+\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}$
合理化的米·千克·秒·安制 (MKSA)	$\frac{10^7}{4\pi c^2}$ $(I^2t^4m^{-1}l^{-3})$	$4\pi\times10^{-7}$ $(mlI^{-2}t^{-2})$	$\mathbf{D}=\epsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$ $\mathbf{H}=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}-\mathbf{M}$	$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$　$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$　$\nabla\times\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0$　$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$	$\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}$

量纲，不会得到什么好处．因此，把 λ 和 λ' 选为纯数字（在合理化的单位制中 $\lambda=\lambda'=1$，在未合理化的单位制中 $\lambda=\lambda'=4\pi$）．但是，有一种选择是使 D 和 P 的量纲不同于 E，而 H 和 M 的量纲不同于 B．作这种选择是为了简单和方便，通常是为了使宏观麦克斯韦方程组具有比较简洁的形式．在列表表示对各种单位制所作的选择之前，我们要注意到，对线性的各向同性媒质来说，本构关系式总是写成

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{D}&=\epsilon\mathbf{E}\\ \mathbf{B}&=\mu\mathbf{H}\end{aligned}\right\} \tag{A.13}$$

于是，(A.12)中常数 ϵ_0 和 μ_0 是 ϵ 和 μ 的真空值．物质的相对电容率（常常叫做介电常数）定义为无量纲的比值 (ϵ/ϵ_0)，而相对磁导率（常常叫做磁导率）定义为 (μ/μ_0)．

表 2 就表 1 的五种常用单位制列出了 ϵ_0 和 μ_0 的值、D 和 H 的定义方程、麦克斯韦方程组的宏观形式以及洛仑兹力方程．每一种单位制的电荷和电流的连续性方程都由(A.1)给出，这可以由表中各种情形的第一对麦克斯韦方程加以证明①．同样，在各种单位制中，欧姆定律的表述是 $\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$，式中 σ 为电导率．

4. 高斯制单位与米·千克·秒·安制单位的方程和数值的换算

今天最常用的两种电磁单位制是高斯制和合理化的米·千克·秒·安制．米·千克·秒·安制的优点是，对于实际的大尺度现象，特别是在工程应用上，使用起来很方便．高斯制比较适用于微观问题，包括单个带电粒子的电动力学等．因为本书的重点是微观的相对论性问题，我们觉得全部采用高斯制单位是最方便的．在论

① 有些作者采用修正的高斯单位制，在这种单位制中，电流是用 $I=(1/c)(dq/dt)$ 来定义的．这时，表中的电流密度 J 必须用 $c\mathbf{J}$ 来代替，连续性方程为 $\nabla\cdot\mathbf{J}+(1/c)(\partial\rho/\partial t)=0$．也可参看表 4 底下的脚注．

述波导和谐振腔的第八章里，为了照顾工程师而按这样一种方法写出每一个关键性公式：若省略方程中方括号内的因子，就得到等效的米·千克·秒·安制方程（只要把所有符号都解释为米·千克·秒·安制的变量）.

表 3 和表 4 是针对从一单位制换算到另一单位制的一般用途而设计的. 表 3 是符号和方程的换算表，使读者可以把任一方程从高斯制换算到米·千克·秒·安制，也可以反过来换算. 这两幅较简单的表，只能用于米·千克·秒·安制和高斯制之间的换算，我们还可能作出其它的表. 但是，若令一切力学量保持不变，表 3 可以使我们直接换算由电磁力和机械力的相互作用所产生的量（例如，精细结构常数 $e^2/\hbar c$ 和等离子体频率 $\omega_p^2=4\pi ne^2/m$），而不用作其它考虑. 表 4 是单位换算表，使读者可以把任一给定的实际物理量表示为用米·千克·秒·安制单位或厘米·克·秒高斯制单位写出的数值.

表 3　符号与公式的换算表

质量、长度、时间、力以及其它未列出的诸电磁量的符号是不变的，为了把高斯制中的任何方程换成米·千克·秒·安制的对应方程，只消在方程的两边，把"高斯制"底下所列的有关符号代以右方所列的对应的"米·千克·秒·安制"的符号，也可以反过来换算。因为长度和时间的符号是不变的，所以表中尽可能把那些在量纲上彼此只相差长度和(或)时间的乘幂的量放在一起。

物　理　量	高　斯　制	米·千克·秒·安制
光　速	c	$(\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$
电场强度(电势、电压)	$\mathbf{E}(\Phi, V)$	$\sqrt{4\pi\epsilon_0}\mathbf{E}(\Phi, V)$
电位移矢量	$\mathbf{D}$	$\sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0}}\mathbf{D}$
电荷密度 (电荷、电流密度、电流、电极化强度)	$\rho(q, \mathbf{J}, I, \mathbf{P})$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}\rho(q, \mathbf{J}, I, \mathbf{P})$
磁感应强度	$\mathbf{B}$	$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}\mathbf{B}$
磁场强度	$\mathbf{H}$	$\sqrt{4\pi\mu_0}\mathbf{H}$
磁化强度	$\mathbf{M}$	$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}\mathbf{M}$
电导率	σ	$\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}$
介电常数	ϵ	$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$
磁导率	μ	$\frac{\mu}{\mu_0}$
电阻(阻抗)	$R(Z)$	$4\pi\epsilon_0 R(Z)$
电　感	L	$4\pi\epsilon_0 L$
电　容	C	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}C$

表 4　物理量的给定数值的换算表

本表是这样安排的，使得用米·千克·秒·安制或高斯制单位表示的某物理量的给定数值，可以表示成其它单位制单位的等效的数值。表中每一横列代表用不同单位表示的同一个量。就准确的工作来说，所有 3 的因子(除指数外)都应该用 2.99792456 代替，后者代表光速的数值。例如，在电位移矢量(D)这一列中，$12\pi\times10^5$ 这一项的准确值实际上应为 $2.99792\times4\pi\times10^5$。表中所给单位的名称与习惯用法一致，或者就遵照习惯用法。要不然我们也可以读作多少高斯单位，或者多少米·千克·秒·安单位或国际单位。

物理量	符号	合理化的米·千克·秒·安制单位	高斯制单位	
长度	l	1米(m)	10^2	厘米(cm)
质量	m	1千克(kg)	10^3	克(g)
时间	t	1秒(s)	1	秒(s)
频率	ν	1赫(Hz)	1	赫(Hz)
力	F	1牛顿	10^5	达因
功 能量	W U	1焦耳	10^7	尔格
功率	P	1瓦特	10^7	尔格·秒$^{-1}$
电荷	q	1库仑	3×10^9	静电库仑
电荷密度	ρ	1库仑·米$^{-3}$	3×10^3	静电库仑·厘米$^{-3}$
电流	I	1安培(A)	3×10^9	静电安培
电流密度	J	1安培·米$^{-2}$	3×10^5	静电安培·厘米$^{-2}$
电场强度	E	1伏特·米$^{-1}$	$\frac{1}{3}\times10^{-4}$	静电伏特·厘米$^{-1}$
电势	Φ, V	1伏特	$\frac{1}{300}$	静电伏特
电极化强度	P	1库仑·米$^{-2}$	3×10^5	偶极矩·厘米$^{-3}$
电位移矢量	D	1库仑·米$^{-2}$	$12\pi\times10^5$	静电伏特·厘米$^{-1}$ (静电库仑·厘米$^{-2}$)
电导率	σ	1姆欧·米$^{-1}$	9×10^9	秒$^{-1}$
电阻	R	1欧姆	$\frac{1}{9}\times10^{-11}$	秒·厘米$^{-1}$
电容	C	1法拉	9×10^{11}	厘米
磁通量	ϕ, F	1韦伯	10^8	高斯·厘米^{2}或麦克斯韦
磁感应强度	B	1忒斯拉	10^4	高斯
磁场强度	H	1安培·匝·米$^{-1}$	$4\pi\times10^{-3}$	奥斯忒
磁化强度	M	1安培·米$^{-1}$	10^{-3}	磁矩·厘米$^{-3}$
①电感	L	1亨利	$\frac{1}{9}\times10^{-11}$	

① 高斯单位制中的电感单位有些混乱. 这是由于有些作者采用修正的高斯单位制, 在这种单位制中, 电流是用电磁制单位量度的, 所以电荷和电流的关系是 $I_m=(1/c)(dq/dt)$. 因为电感是通过感生电压 $V=L(dI/dt)$或能量 $U=\frac{1}{2}LI^2$ 来定义的, 所以选取第2节里所规定的电流就意味着: 我们的高斯制电感单位在数值上和量纲(t^2l^{-1})上都等于静电制电感单位. 电磁制电流 I_m 与我们的高斯制电流 I 通过关系式 $I_m=(1/c)I$ 联系起来. 根据用能量来定义的电感, 可以看出: 电磁制电感 L_m 与我们的高斯制电感 L 通过关系式 $L_m=c^2L$ 联系起来. 所以, L_m 具有长度的量纲. 修正的高斯制通常采用电磁制电感单位和电流单位. 这时, 电压关系式写作 $V=(L_m/c)(dI_m/dt)$. 电感单位之间的数值关系为

1亨利$=\frac{1}{9}\times10^{-11}$高斯制(静电)单位$=10^9$电磁制单位.

参考书目

Abraham, M., and R. Becker, *Electricity and Magnetism*, Blackie, London, (1937), translation from 8th German edition of *Theorie der Elektrizität*, Band I.

——, *Theorie der Elektrizität*, Band II, *Elektronentheorie*, Tuebner, Leipzig (1933).

Abramowitz, M., and I. A. Stegun, eds., *Handbook of Mathematical Functions*, U.S. National Bureau of Standards, (1964), Dover, New York (1965).

Adler, R. B., L. J. Chu, and R. M. Fano, *Electromagnetic Energy, Transmission and Radiation*, Wiley, New York (1960).

Aharoni, J., *The Special Theory of Relativity*, 2nd edition, Oxford University Press (1965).

Alfvén, H., and C.-G. Fälthammar, *Cosmical Electrodynamics*, 2nd edition, Oxford University Press (1963).

Anderson, J. L., *Principles of Relativity Physics*, Academic, New York (1967).

Arfken, G., *Mathematical Methods for Physicists*, 2nd edition, Academic, New York (1970).

Argence, E., and T. Kahan, *Theory of Waveguides and Cavity Resonators*, Blackie, London (1967).

Arzeliès, H., *Relativistic Kinematics*, Pergamon, Oxford (1966).

——, *Relativistic Point Dynamics*, Pergamon, Oxford (1972).

Baker. B. B., and E. T. Copson, *Mathematical Theory of Huygens'*

Principle, 2nd edition, Oxford University Press (1950).

Baldin, A. M., V. I. Gol'danskii, and I. L. Rozenthal, *Kinematics of Nuclear Reactions*, Pergamon, New York (1961).

Barut, A. O., *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*, Macmillan, New York (1964).

Bateman Manuscript Project, *Higher Transcendental Functions*, 3vols., ed. by A. Erdélyi, McGraw-Hill, New York (1953).

——, *Tables of Integral Transforms*, 2vols., ed. by A. Erdélyi, McGraw-Hill, New York (1954).

Bates, L. F., *Modern Magnetism*, 4th edition, Cambridge University Press (1961).

Beam, W. R., *Electronics of Solids*, McGraw-Hill, New York (1965).

Bekefi, G., *Radiation Processes in Plasma*, Wiley, New York (1966).

Bergmann, P. G., *Introduction to the Theory of Relativity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1942).

Bieberbach, L., *Conformal Mapping*, Chelsea, New York (1964).

Blatt, J. M., and V. F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, Wiley, New York (1952).

Bohm, D., *The Special Theory of Relativity*, Benjamin, New York (1965).

Bohr, N., "Penetration of Atomic Particles through Matter," *Kgl. Danske Videnskab. Selskab Mat.-fys. Medd.*, XVIII, No. 8 (1948).

Born, M., and E. Wolf, *Principles of Optics*, 4th edition, Pergamon, New York (1970).

Böttcher, C. J. F., *Theory of Electric Polarization*, Elsevier, New York (1952).

Bowman, J. J., T. B. A. Senior, and P. L. E. Uslenghi, *Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes*, North-Holland, Amsterdam (1969).

Boyd, T. J. M., and J. J. Sanderson, *Plasma Dynamics*, Nelson, London and Barnes and Noble, New York (1969).

Brailsford, F., *Physical Principles of Magnetism*, Van Nostrand, London (1966).

Brillouin, L., *Wave Propagation and Group Velocity*, Academic, New York (1960).

Budden, K. G., *Lectures on Magnetoionic Theory*, Gordon and Breach, New York (1964).

——, *Radio Waves in the Ionosphere*, Cambridge University Press (1961).

Byerly, W. E., *Fourier Series and Spherical Harmonics*, Ginn, Boston (1893); also Dover reprint.

Cairo, L., and T. Kahan, *Variational Techniques in Electromagnetism*, Blackie, London (1965).

Chandrasekhar, S., *Plasma Physics*, University of Chicago Press (1960).

Churchill, R. V., *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 2nd edition, McGraw-Hill, New York (1963).

Clemmow, P. C., *The Plane Wave Spectrum Representation of Electromagnetic Fields*, Pergamon, Oxford (1966).

Clemmow, P. C., and J. P. Dougherty, *Electrodynamics of Particles and Plasmas*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1969).

Collin, R. E., *Field Theory of Guided Waves*, McGraw-Hill, New York (1966).

Condon, E. U., and H. Odishaw, eds., *Handbook of Physics*, 2nd edition, McGraw-Hill, New York (1967).

Corben, H. C., and P. Stehle, *Classical Mechanics*, 2nd edition, Wiley, New York (1960).

Courant, R., and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, 2 vols., Wiley-Interscience, New York (1962).

Cowling, T. G. *Magnetohydrodynamics*, Interscience, New York (1957).

Cullwick, E. G., *Elecotrmagnetism and Relativity*, 2nd edition, Longmans, London (1959).

Debye, P., *Polar Molecules*, Dover, New York (1945).

Dennery, P., and A. Krzywicki, *Mathematics for Physicists*, Harper and Row, New York (1967).

Durand, E., *Electrostatique et magnétostatique*, Masson, Paris (1953).

Ecker, G., *Theory of Fully Ionized Plasmas*, Academic, New York (1972).

Einstein, A., H. A. Lorentz, H. Minkowski, and H. Weyl, *The Principle of Relativity*, Collected papers, with notes by A. Sommerfeld, Dover, New York (1952).

Fabelinskii, I. L., *Molecular Scattering of Light*, Plenum, New York (1968).

Fano, R. M., L. J. Chu, and R. B. Adler, *Electromagnetic Fields, Energy, and Forces*, Wiley, New York (1960).

Feynman, R. P., R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lec-*

tures on Physics, 3 vols., Addison-Wesley, Reading, Mass. (1963).

French, A. P., *Special Relativity*, Norton, New York (1968).

Friedman, B., *Principles and Techniques of Applied Mathematics*, Wiley, New York (1956).

Fröhlich, H., *Theory of Dielectrics*, Oxford University Press (1949).

Galejs, J., *Terrestrial Propagation of Long Electromagnetic Waves*, Pergamon, Oxford (1972).

Gibbs, W. J., *Conformal Transformations in Electrical Engineering*, Chapman and Hall, London (1958).

Glasstone, S., and R. H. Lovberg, *Controlled Thermonuclear Reactions*, Van Nostrand, Prin eton, N. J. (1960).

Goldstein, H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1950).

Gradshteyn, I. S., and I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products*, 4th edition, prepared by Yu. V. Geronimus and M. Yu. Tseytlin, translation edited by A. Jeffrey, Academic, New York (1965).

deGroot, S. R., *The Maxwell Equations*, Studies in Statistical Mechanics, Vol. IV, North-Holland, Amsterdam (1969).

deGroot, S. R., and L. G. Suttorp, *Foundations of Electrodynamics*, North-Holland, Amsterdam (1972).

Hadamard, J., *Lectures on Cauchy's Problem*, Yale University Press (1923); Dover reprint (1952).

Hagedorn, R., *Relativistic Kinematics*, Benjamin, New York (1963).

Hallén, E., *Electromagnetic Theory*, Chapman-Hall, London

(1962).

Harrington, R. F., *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, New York (1961).

Heitler, W., *Quantum Theory of Radiation*, 3rd edition, Oxford University Press (1954).

Hess, W. N., *The Radiation Belt and Magnetosphere*, Blaisdell, Waltham, Mass. (1968).

Hildebrand, F. B., *Advanced Calculus for Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1962).

Holt, E. H., and R. E. Haskell, *Foundations of Plasma Dynamics*, Macmillan, New York (1965).

Hughes, W. F., and F. J. Young, *The Electromagnetodynamics of Fluids*, Wiley, New York (1966).

Iwanenko, D., and A. Sokolow, *Klassische Feldtheorie*, Akademie-Verlag, Berlin (1953), translated from the Russian edition (1949).

Jahnke-Emde-Lösch, *Tables of Higher Functions*, 6th edition, revised by F. Lösch, Teubner, Stuttgart and McGraw-Hill, New York (1960).

Jeans, J. H., *Mathematical Theory of Electricity* and *Magnetism*, 5th edition, Cambridge University Press (1948).

Jeffreys, H., and B. S. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*, 3rd edition, Cambridge University Press (1956).

Johnson, C. C., *Field and Wave Electrodynamics*, McGraw-Hill, New York (1965).

Jones, D. S., *The Theory of Electromagnetism*, Pergamon, Oxford (1964).

Jordan, E. C., and K. G. Balmain, *Electromagnetic Waves and Radiating Systems*, 2nd edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1968).

Kacser, C., *Introduction to the Special Theory of Relativity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1967).

Kelvin, Lord (Sir W. Thomson), *Reprints of Papers on Electrostatics and Magnetism*, 2nd edition, Macmillan, London (1884).

Kerker, M., *The Scattering of Light and other Electromagnetic Radiation*, Academic, New York (1969).

Kellogg, O. D., *Foundations of Potential Theory*, Springer-Verlag, Berlin (1929); reprinted by Ungar, New York.

Kilmister, C. W., *Special Theory of Relativity*, Selected Readings in Physics, Pergamon, Oxford (1970).

King, R. W. P., and T. T. Wu., *Scattering and Diffraction of Waves*, Harvard University Press (1959).

Kittel, C., *Introduction to Solid State Physics*, 4th edition, Wiley, New York (1971).

Kraus, J. D., *Antennas*, McGraw-Hill, New York (1950).

Landau, L. M., and E. M. Lifshitz, *The Classicol Theory of Fields*, 3rd revised English edition, translated by M. Hamermesh, Pergamon, Oxford and Addison-Wesley, Reading, Mass. (1971).

——, *Electrodynamics of Continuous Media*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1960).

Lighthill, M. J., *Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions*, Cambridge University Press (1958).

Linhart, J. G., *Plasma Physics*, North-Holland, Amsterdam

(1960).

Livingston, M. S., and J. P. Blewett, *Particle Accelerators*, McGraw-Hill, New York (1962).

Lorentz, H. A., *Theory of Electrons*, 2nd edition, (1915), Dover, New York (1952).

Magnus, W., and F. Oberhettinger, *Special Functions of Mathematical Physics*, Chelsea, New York (1949).

Magnus, W., F. Oberhettinger, and R. P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Springer-Verlag, New York (1966).

Marcuvitz, N., *Waveguide Handbook*, M. I. T. Radiation Laboratory Series, Vol. 10, McGraw-Hill, New York (1951).

Mason, M., and W. Weaver, *The Electromagnetic Field*, University of Chicago Press (1929); Dover reprint.

Maxwell, J. C., *Treatise on Electricity and Magnetism*, 3rd edition (1891), 2 vols., reprint by Dover, New York (1954).

Møller, C., *The Theory of Relativity*, 2nd edition, Clarendon Press, Oxford (1972).

Montgomery, C. G., R. H. Dicke, and E. M. Purcell, *Principles of Microwave Circuits*, M. I. T. Radiation Laboratory Series, Vol. 8, McGraw-Hill, New York (1948). Also available as a Dover reprint.

Morse, P. M., and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, 2 Pts., McGraw-Hill, New York (1953).

Northrop, T. G., *The Adiabatic Motion of Charged Particles*, Interscience-Wiley, New York (1963).

Panofsky, W. K. H., and M. Phillips, *Classical Electricity and*

Magnetism, 2nd edition, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1962).

Pauli, W., *Theory of Relativity*, Pergamon, New York (1958), translated from an article in the *Encyklopedia der mathematischen Wissenschaften*, Vol. V19, Tuebner, Leipzig (1921), with supplementary notes by the author (1956).

Penfield, P., and H. A. Haus, *Electrodynamics of Moving Media*, M. I. T. Press (1967).

Persico, E., E. Ferrari, and S. E. Segre, *Principles of Particle Accelerators*, Benjamin, New York (1968).

Pólya, G., and G. Szegö, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Annals of Mathematics Series No. 27, Princeton University Press (1951).

Ramo, S., J. R. Whinnery, and T. Van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, Wiley, New York (1965).

Robinson, F. N. H., *Macroscopic Electromagnetism*, Pergamon, Oxford (1973).

Rohrlich, F., *Classical Charged Particles*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1965).

Rose, D. J., and M. Clark, *Plasma and Controlled Fusion*, M. I. T.-Wiley, New York (1961).

Rosenfeld, L., *Theory of Electrons*, North-Holland, Amsterdam (1951).

Rosser, W. G. V., *Introductory Relativity*, Butterworths, London (1967).

Rossi, B., *High-Energy Particles*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1952).

Rossi, B., and S. Olbert, *Introduction to the Physics of Space*, McGraw-Hill, New York (1970).

Rothe, R., F. Ollendorff, and K. Polhausen, *Theory of Functions as Applied to Engineering Problems*, Technology Press, Cambridge, Mass. (1933).

Sard, R. D., *Relativistic Mechanics*, Benjamin, New York (1970).

Schelkunoff, S. A., *Advanced Antenna Theory*, Wiley, New York (1952).

——, *Applied Mathematics for Engineers and Scientists*. 2nd edition, Van No strand, New York (1965).

——, *Electromagnetic Fields*. Blaisdell, New York (1963).

Schelkunoff, S. A., and H. T. Friis, *Antennas, Theory and Practice*, Wiley, New York (1952).

Schott, G. A., *Electromagnetic Radiation*, Cambridge University Press (1912).

Schwartz, H. M., *Introduction to Special Relativity*, McGraw-Hill, New York (1968).

Schwinger, J., and D. S. Saxon, *Discontinuities in Waveguides*. Gordon and Breach, New York (1968).

Ségre, E., ed., *Experimental Nuclear Physics*, Vol. 1, Wiley, New York (1953).

Siegbahn, K., ed., *Beta-and Camma-Ray Spectroscopy*, North-Holtand, Anisterdam and Interscicnce, New York (1955).

Silver, S., ed., *Microwave Antenna Theory and Design*, M.I.T. Radiation Laboratory Series, Vol. 12, McGraw-Hill, New York (1949).

Simon, A., *Introduction to Thermonuclear Research*, Pergamon,

New York (1959).

Slater, J. C., *Microwave Electronics*, McGraw-Hill, New York (1950).

Slater, J. C., and N. H. Frank, *Electromagnetism*, McGraw-Hill, New York (1947).

Smith, J. H., *Introduction to Special Relativity*, Benjamin, New York (1965).

Smythe, W. R., *Static and Dynamic Electricity*. 3rd edition, McGraw-Hill, New York (1969).

Sommerfeld, A., *Electrodynamics*, Academic, New York (1952).

——, *Optics*, Academic, New York (1954).

——, *Partial Differential Equations*, Academic, New York (1949).

Spitzer, L., *Physics of Fully Ionized Gases*, Interscience, New York (1956).

Stone, J. M., *Radiation and Optics*, McGraw-Hill, New York (1963).

Stratton, J. A., *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York (1941).

Taylor, E. F., and J. A. Wheeler, *Spacetime Physics*, Freeman, San Francisco (1966).

Thirring, W. E., *Principles of Quantum Electrodynamics*, translated by J. Bernstein, Academic, New York (1958).

Thomson, J. J. *Recent Researches in Electricity and Magnetism*. Clarendon Press, Oxford (1893).

Titchmarsh, E. C., *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, 2nd cdition Oxford University Press (1948).

Tonnelat, M,-A., *Electromagnetic Theory and Relativity*, Reidel,

Holland (1966).

Tranter, C. J., *Integral Transforms in Mathematical Physics.* 2nd edition, Methuen, London (1956).

Van Bladel, J., *Electromagnetic Fields,* McGraw-Hill, New York (1964).

Van Vleck, J. H., *Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities,* Oxford University Press (1932).

Wait, J. R., *Electromagnetic Waves in Stratified Media,* Pergamon, Oxford (1962).

Waldron, R. A., *Theory of Guided Electromagnetic Waves,* Van Nostrand-Reinhold, London (1970).

Watson, G. N., *Theory of Bessel Functions,* 2nd edition, Cambridge University Press (1952).

Wert, G. A., and R. M. Thomson. *Physics of Solids,* 2nd edition, McGraw-Hill, New York (1970).

Wentzel, G., *The Quantum Theory of Fields,* Interscience, New york (1949).

Whittaker, E. T., *A History of the Theories of Aether and Electricity,* 2 vols., Nelson, London. Vol. 1, *The Classical Theories* (1910. revised and enlarged 1951). Vol. 2, *The Modern Theories* 1900-1926 (1953); reprinted by Harper Torchbooks, New York (1960).

Whittaker, E. T., and G. N. Watson, *A Course in Modern Analysis,* 4th edition, Cambridge University Press (1950).

Williams, E. J., "Correlation of Certain Collision Problems with Radiation Theory," *Kgl. Danske Videnskab. Selskab Mat-fys. Medd.,* XIII, No. 4, (1935).

Wooten, F., *Optical Properties of Solids*, Academic, New York (1972).

Ziman, J. M., *Principles of the Theory of Solids*, Cambridge University Ptess (1964).

有关特殊函数的主要题材索引

球函数	章节数
勒让德多项式 $P_l(x)$	3.2
缔合勒让德函数 $P_l^m(x)$	3.5
球谐函数 $Y_{lm}(\theta,\phi)$	3.5
柱函数	
贝塞耳函数 $J_\nu(x)$, $N_\nu(x)$	3.7
修正贝塞耳函数 $I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$	3.7
球贝塞耳函数 $j_l(x)$, $n_l(x)$, $h_l^{(1,2)}(x)$	16.1
$J_m(x)=0$ 的根	3.7
$J'_m(x)=0$ 的根	8.7
含贝塞耳函数的恒等式	3.11, 3.13, 5.13, 习题 3.14
爱里积分, 与贝塞耳函数的关系	7.11, 14.6
正交函数展开	
贝塞耳函数(ρ 的有限区间)	3.7, 习题 3.10
贝塞耳函数(ρ 的无限区间)	3.8
本征函数, 格临函数的本征函数	3.12
傅里叶级数	2.8
傅里叶积分	2.8
勒让德多项式	3.2
球谐函数	3.6

矢量运算的显式

设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 是与左边标题指明的坐标方向有关的正交单位矢量，而 A_1, A_2, A_3 是 $\mathbf{A}$ 的相应分量．则

笛卡儿坐标

$(x_1, x_2, x_3 = x, y, z)$

$$\nabla\psi = \mathbf{e}_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3\frac{\partial\psi}{\partial x_3}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{e}_1\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right) + \mathbf{e}_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right) + \mathbf{e}_3\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)$$

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}$$

柱坐标

(ρ, ϕ, z)

$$\nabla\psi = \mathbf{e}_1\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \mathbf{e}_2\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \mathbf{e}_3\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_1) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_2}{\partial\phi} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{e}_1\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_3}{\partial\phi} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \mathbf{e}_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial\rho}\right) + \mathbf{e}_3\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_2) - \frac{\partial A_1}{\partial\phi}\right)$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

球坐标

(r, θ, ϕ)

$$\nabla\psi = \mathbf{e}_1\frac{\partial\psi}{\partial r} + \mathbf{e}_2\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \mathbf{e}_3\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_1) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_2) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_3}{\partial\phi}$$

$$\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{e}_1\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_3)-\frac{\partial A_2}{\partial\phi}\right]$$
$$+\mathbf{e}_2\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_1}{\partial\phi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_3)\right]+\mathbf{e}_3\frac{1}{r}\left[\frac{r}{\partial_1}(rA_2)-\frac{\partial A}{\partial\theta}\right]$$
$$\nabla^2\psi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$
$$\left[\text{注意: }\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)\right]$$

[General Information]
书名=经典电动力学·原书第2版·下册
作者=J.D.杰克逊, 朱培豫
页数=421
出版社=北京：人民教育出版社
出版日期=1980年第2版
DX号=000000926287
ISBN=CN13012.0463
中图分类号=O442
价格=￥1.15
主题=物理-电动力学
参考文献格式=J.D.杰克逊著；朱培豫译. 经典电动力学·原书第2版·下册. 北京：人民教育出版社，1980.
url=http://book2.duxiu.com/bookDetail.jsp?dxNumber=000000926287&d=2D9807EE351F93845D15E5123A1A54EF&fenlei=13030702&sw=%BE%AD%B5%E4%B5%E7%B6%AF%C1%A6%D1%A7

书名页
版权页
前言页
目录页
第十章　磁流体动力学和等离子体物理学
１０．１　引言和定义
１０．２　磁流体动力学方程
１０．３　磁扩散，磁粘滞性和磁压强
１０．４　具有交叉电场和磁场的界面中间的磁流体动力学流动
１０．５　箍缩效应
１０．６　箍缩等离子体柱的不稳定性
１０．７　磁流体动力波
１０．８　等离子体振荡
１０．９　等离子体振荡的短波长限和德拜屏蔽距离
参考书和推荐读物
习题
第十一章　狭义相对论
１１．１　１９００年以前的情况；爱因斯坦的两条假设
１１．２　一些近代的实验
１１．３　洛仑兹变换和狭义相对论的基本的运动学结果
１１．４　速度的加法；四元速度
１１．５　粒子的相对论动量和能量
１１．６　狭义相对论时空的数学性质
１１．７　洛仑兹变换的矩阵表示；

无穷小生成元
11．8　托马斯进动
11．9　电荷的不变性；电动力学的协变性
11．10　电磁场的变换
11．11　在均匀或慢变化外场中自旋的相对论性运动方程
11．12　关于相对论运动学中记号和单位的评注
参考书和推荐读物
习题
第十二章　相对论性粒子和电磁场的动力学
12．1　在外电磁场中一个相对论性带电粒子的拉格朗日函数和哈密顿函数
12．2　关于由库仑定律和狭义相对论得出磁场、磁力和麦克斯韦方程组的问题
12．3　在均匀静磁场中的运动
12．4　在均匀静电场和静磁场的并合场中的运动
12．5　在非均匀静磁场中粒子的漂移
12．6　穿过粒子轨道的磁通量的绝热式不变性
12．7　相互作用的带电粒子的拉格朗日函数的最低级相对论性修正，达尔文－拉格朗日函数
12．8　电磁场的拉格朗日函数
12．9　普罗卡－拉格朗日函数；光子质量效应
12．10　正则胁强张量和对称胁强张量；守恒定律

12.11 协变形式波动方程解；不变格临函数
参考书和推荐读物
习题
第十三章 带电粒子间的碰撞、能量损失和散射
13.1 在库仑碰撞中的能量转移
13.2 对谐振束缚电荷的能量转移
13.3 经典的和量子力学的能量损失公式
13.4 在碰撞能量损失中的密度效应
13.5 契仑柯夫辐射
13.6 电子等离子体中的能量损失
13.7 原子对快速粒子的弹性散射
13.8 多次散射的均方散射角和角分布
参考书和推荐读物
习题
第十四章 运动电荷的辐射
14.1 一个点电荷的李纳－维谢尔势和场
14.2 一个加速电荷的总辐射功率－拉莫尔公式及共相对论性推广
14.3 一个加速电荷的辐射角分布
14.4 一个作任意的极端相对论性运动的电荷的辐射

１４．５　加速电荷的辐射能的频率分布和角分布
１４．６　作瞬时圆周运动的相对论性带电粒子的辐射频谱
１４．７　电磁波的汤姆孙散射
１４．８　准自由电荷对辐射波的散射；相干与不相干散射
１４．９　渡越辐射
参考书和推荐读物
习题
第十五章　韧致辐射；虚量子方法；辐射性β过程
１５．１　碰撞时所放出的辐射
１５．２　库仑碰撞中的韧致辐射
１５．３　屏蔽效应；相对论性辐射能量损失
１５．４　魏次扎克－威廉斯虚量子方法
１５．５　作为虚量子散射的韧致辐射
１５．６　β衰变时的辐射
１５．７　轨道电子俘获时的辐射—电荷和磁矩的消失
参考书和推荐读物
习题
第十六章　多极场
１６．１　标量波动方程的基本球面波解
１６．２　电磁场的多极展开
１６．３　多极场的性质；多极辐射的能量和角动量

１６．４　多极辐射的角分布
１６．５　多极辐射的源；多极矩
１６．６　原子系统和原子核系统的多极辐射
１６．７　中央馈电细直天线的辐射
１６．８　矢量平面波的球面波展开
１６．９　球体对电磁波的散射
１６．１０　多极场的边值问题
参考书和推荐读物
习题
第十七章　辐射阻尼；粒子的自有场；束缚系统对辐射波的散射和吸收
１７．１　引言
１７．２　根据能量守恒计算的辐射反作用力
１７．３　自力的阿伯拉罕－洛仑兹算法
１７．４　阿伯拉罕－洛仑兹模型的困难
１７．５　电磁能量和电磁动量的协变定义
１７．６　计及辐射阻尼的积分微分运动方程
１７．７　振子的谱线宽度与能级移动
１７．８　振子对辐射波的散射和吸收
参考书和推荐读物
习题
附录：单位和量纲
１．单位和量纲；基本单位和导出单位

2．电磁单位和电磁方程
3．各种电磁单位制
4．高斯制单位与米·千克·秒·安制单位的方程和数值的换算
附录页