Mc Graw Hill Education

光学（第4版）

Optics

4th Edition

[印度] Ajoy Ghatak 著　张晓光 席丽霞 余和军 译

清华大学出版社

Mc Graw Hill Education

光学（第4版）

Optics

4th Edition

[印度] Ajoy Ghatak 著

张晓光　席丽霞　余和军 译

清华大学出版社

北京

Ajoy Ghatak
Optics, 4th
ISBN: 978-0-07-026215-7
Copyright © 2009 by Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited
All Rights reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including without limitation photocopying, recording, taping, or any database, information or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.
This authorized Chinese translation edition is jointly published by McGraw-Hill Education (Asia) and Tsinghua University Press Limited. This edition is authorized for sale in the People's Republic of China only, excluding Hong Kong, Macao SAR and Taiwan.
Copyright © 2013 by The McGraw-Hill Asia Holdings (Singapore) PTE. LTD and Tsinghua University Press Limited.
版权所有。未经出版人事先书面许可，对本出版物的任何部分不得以任何方式或途径复制或传播，包括但不限于复印、录制、录音，或通过任何数据库、信息或可检索的系统。
本授权中文简体字翻译版由麦格劳-希尔(亚洲)教育出版公司和清华大学出版社有限公司合作出版。此版本经授权仅限在中华人民共和国境内(不包括香港特别行政区、澳门特别行政区和台湾地区)销售。
版权© 2013 由麦格劳-希尔(亚洲)教育出版公司与清华大学出版社有限公司所有。
北京市版权局著作权合同登记号　图字:[01-2010-0566]

本书封面贴有 McGraw-Hill 公司防伪标签，无标签者不得销售。
版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989　13701121933

图书在版编目(CIP)数据

光学(第 4 版)/(印)伽塔克(Ghatak, A.)著；张晓光，席丽霞，余和军译. --北京：清华大学出版社，2013
书名原文：Optics, 4ed
ISBN 978-7-302-33948-9

Ⅰ. ①光…　Ⅱ. ①伽…　②张…　③席…　④余…　Ⅲ. ①光学－高等学校－教材　Ⅳ. ①O43

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 222891 号

责任编辑：邹开颜　赵从棉
封面设计：常雪影
责任校对：赵丽敏
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：清华大学印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　张**：43.75　　**插　页**：8　　**字　数**：1085 千字
版　　次：2013 年 10 月第 1 版　　**印　次**：2013 年 10 月第 1 次印刷
印　　数：1～2000
定　　价：98.00 元

产品编号：035948-01



图 1　抛物面碟式卫星天线，照片由 McGraw-Hill 数字图书馆提供。

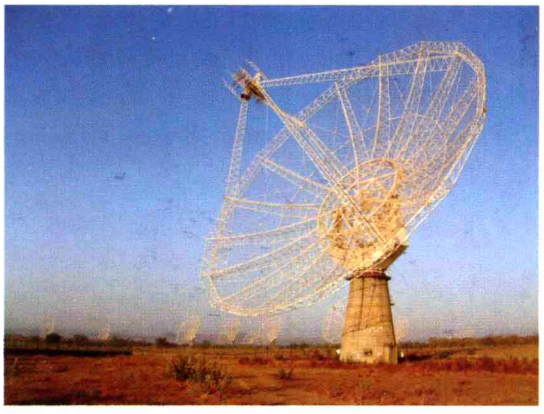


图 2　巨米波射电望远镜(GMRT)中自动指向的 45m 抛物面碟形天线，位于印度浦那。GMRT 具有 30 个 45m 直径的抛物面碟形天线，其中有 14 个天线组成中心阵列。图片由来自印度浦那 GMRT 的 Govind Swarup 教授提供。

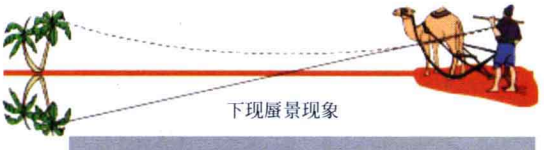




图 3　在热天的一条公路上可以看到的典型海市蜃楼(也称下现蜃景)现象。图片引自 http://fizyka.phys.poznan.pl/~pieranks/Physics%20Around%20Us/Air%20mirror.jpg。

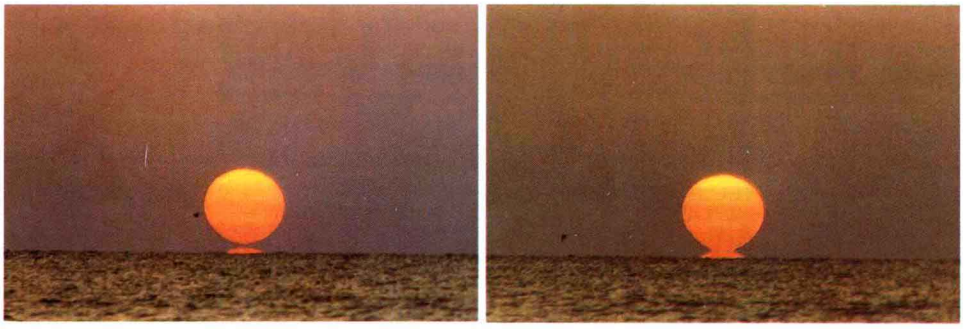


图 4　太阳下面的一抹红实际上不是太阳在海洋中的反射像，而是太阳下边缘形成海市蜃楼（也称下现蜃景）的（反转的）像。几秒钟后（注意太阳左边鸟的运动），反转的海市蜃楼像与正立的太阳像融合为一体。照片由美国海军实验室的 George Kaplan 拍摄，引自美国海军实验室网站。图片引自 http://mintaka.sdsu.edu/GF/explan/simulations/infmir/Kaplan_photo.html。

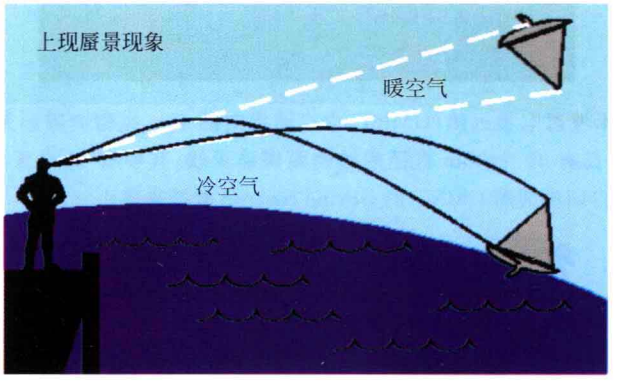


图 5　上现蜃景发生在与下现蜃景大气条件相反的情况下。正如所看到的，表面处的空气必须比表面上方的空气冷，这种条件在雪表面、冰表面和冷水表面是常见的。当冷空气位于暖空气下方时，光线向着表面弯曲，这样就给我们的眼睛开了个玩笑，让物体看上去在它实际位置的上方。图片引自 http://www.islandnet.com/~see/weather/elements/mirage.htm。



图 6　群岛中的一间房子和它的上现蜃景像。图片引自 http://netcomm/news/showarticle.asp? intNWSAID=25722。



图 7　日落时太阳显示不是圆形

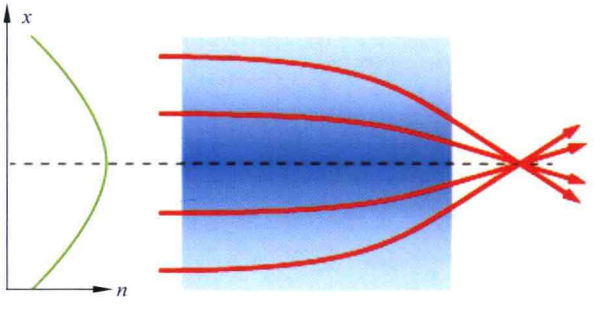


图 8　具有抛物线型折射率变化的渐变折射率透镜。该透镜可以像普通透镜一样聚焦光束。图片引自 http:/en.wikipedia.org/wiki/Refractive_index。

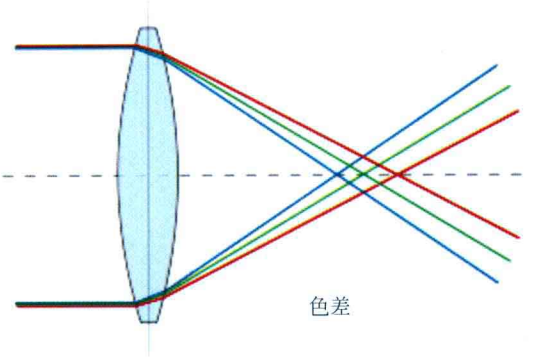


图 9　对于单个透镜，源于不同波长具有不同的焦距造成的色差。图片引自 http://en.wikipedia.org/wiki/Chromatic_aberration。

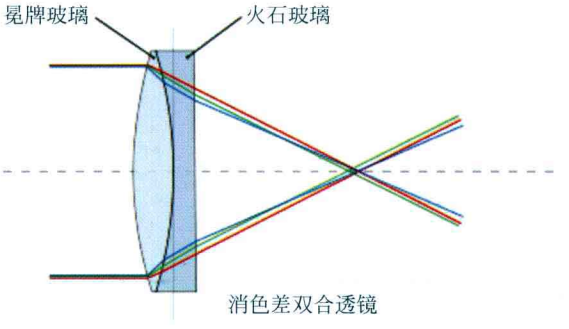


图 10　消色差双合透镜，在可见光波长范围内，近似有相等的焦距。图片引自 http://en.wikipedia.org/wiki/Chromatic_aberration。

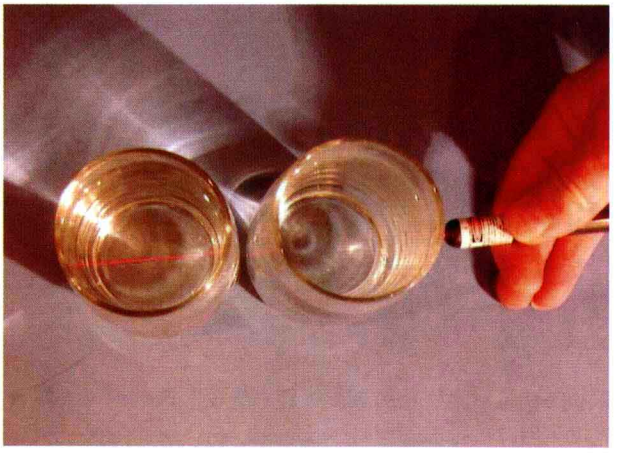
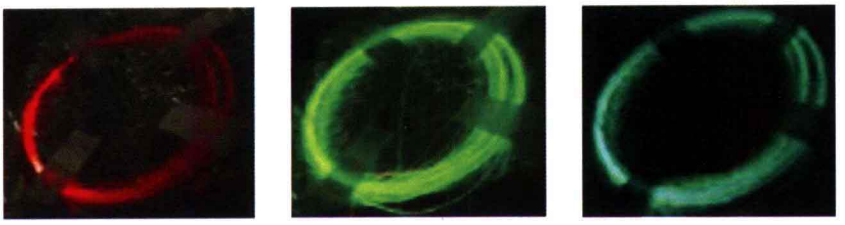


图 11　右边玻璃杯盛蒸馏水，左边玻璃杯的水中加入几滴牛奶。由于散射，当激光束穿过液体时，可以从侧面看到它。图片引自 http://silver-lighting.com/tyndall/。



(a) (b) (c)

图 12　一持续时间为 80fs、波长为 800nm 的激光脉冲射入光子晶体光纤(PCF)中，这种特殊光纤的特点是具有非常小的模场直径，这导致纤芯内具有很大的强度。源于高强度，像自相位调制(SPM，该效应将在 10.4 节中讨论)和其他非线性效应可以被观察到；这些非线性效应导致产生新的频率组分。(a)对应具有 0.09nJ 总能量的脉冲激光入射，从光纤侧面能看到光是源于对于入射光的瑞利散射，脉冲激光的总能量还没有达到足以产生新的频率组分。(b)和(c)为波长相等的激光脉冲入射，只是此时入射脉冲总能量升至 1.5nJ。因为高强度，源于非线性效应产生了新的频率组分。这些特殊光纤是由 Shyamal Bhadra 博士和他们位于加尔各答的中央玻璃和陶瓷研究所(CGCRI)工作组制造的。所产生的新频率组分是由位于爱丁堡的赫瑞瓦特大学(Heriot Watt University)Ajoy Kar 教授与 Henry Bookey 博士观察到的。



图 13　在水面漂浮的柴油薄膜上表面以及柴油与水的分界面分别对白光反射所产生的彩色干涉图样。照片由 Guinnog 博士拍摄。图片引自 http://en.wikipedia.org/wiki/Thin-film_optics。

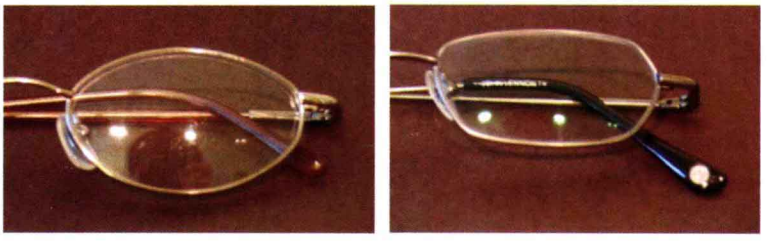


图 14　没有镀消反射膜(左边)和镀有消反射膜(右边)的眼镜的对比，注意左边眼镜所反射的摄影师的像和右边眼镜带颜色的反射。图片引自 http://en.wikipedia.org/wiki/Optical_coating，由 Justin Lebar 拍摄。

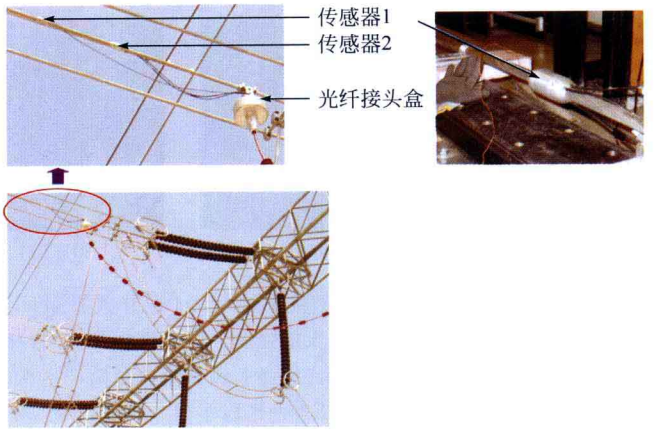


图 15　用于印度电网公司 Subhashgram 变电站(在加尔各答附近)400kV 供电导线上的基于光纤布拉格光栅(FBG)的温度传感器系统。图片由加尔各答中央玻璃和陶瓷研究所的 Tarun Gangopathyay 博士和 Kzmal Dasgupta 先生提供。



图 16　印度电网公司变电站(在印度加尔各答附近),在这里安装了光纤布拉格光栅(FBG)温度传感器。

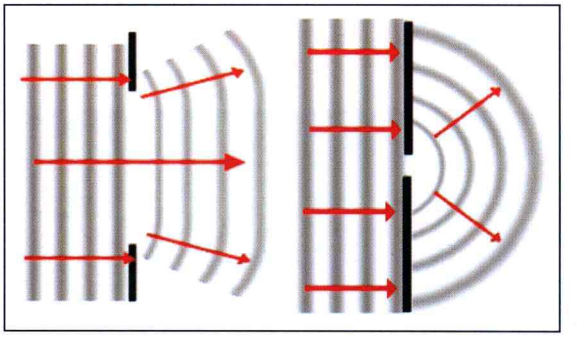


图 17　如果带有一个小缝隙的阻挡屏放在水箱中,平面水波经过小缝隙将产生几乎半圆形的涟漪。小缝隙扮演一个点波源的角色。然而当缝隙扩得很大,衍射效应将大受限制。此处说阻挡屏缝隙尺寸"小",是和水波涟漪的波长相比较。图片引自 http://en.wikipedia.org/wiki/Ripple_tank。

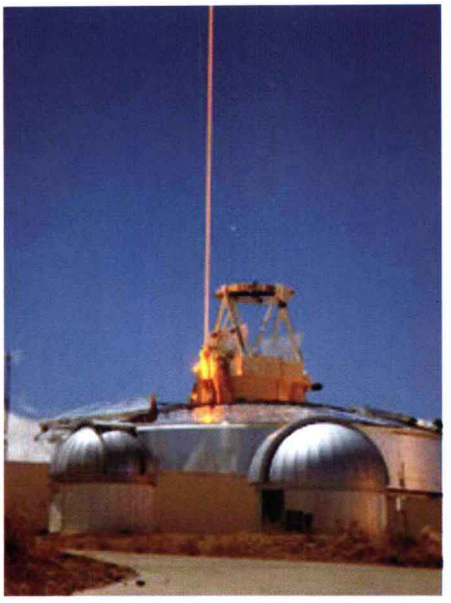


图 18　一个 50W 的 FASOR。FASOR 是 Frequency Addition Source of Optical Radiation（光辐射的和频光源）。它是与激光器相似的器件，利用两个不同频率的激光源产生和频过程。它包含两个单频注入锁定的 Nd:YAG 激光器，输出波长接近 1064nm 和 1319nm，这两个频率在包含三硼酸锂（LBO）晶体的谐振腔里能够谐振，产生波长为 589.158nm 的和频光。该和频光辐射可以用来激发中间层大气的钠原子。图片引自 http://en.wikipedia.org/wiki/Laser。

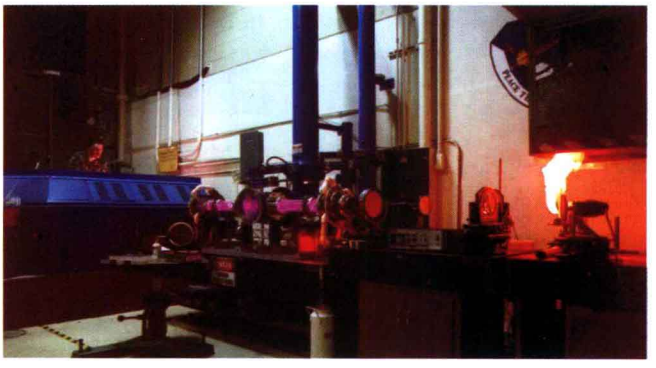


图 19　一个测试样品被一个发射几十千瓦功率红外光的高功率二氧化碳连续波激光器照射而蒸发，并伴有辐射引发的火焰。图片引自：http://en.wikipedia.org/wiki/CO_2_laser。

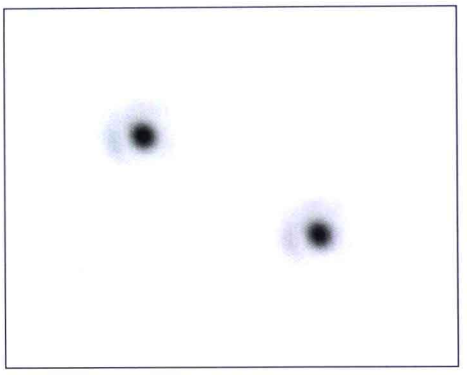


图 20　由一个孔径 2.56m 的望远镜观测牧夫座 ζ 双星的成像，并可以看到每颗星体周围的艾里图样。图片由 Bob Tubbs 拍摄，图片引自 http://en.wikipedia.org/wiki/Diffraction。

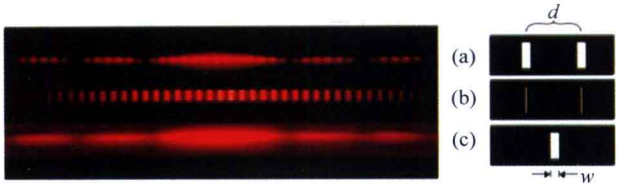


图 21　(a)由实际双缝形成的衍射图案，每条缝的宽度远大于光的波长，这是一张真实照片；(b)这张是不可能在现实生活中产生的理想图样。为了获得这样的图样，每条缝要足够窄，以致可以与光波长相比拟，然而这通常是不可能的，这不是自然影像；(c)由与(a)缝宽度一样的单缝所形成的单缝衍射，是一张真实的照片。图片引自 http://www.lightanmatter.com/html_books/5op/ch05/ch05.html。

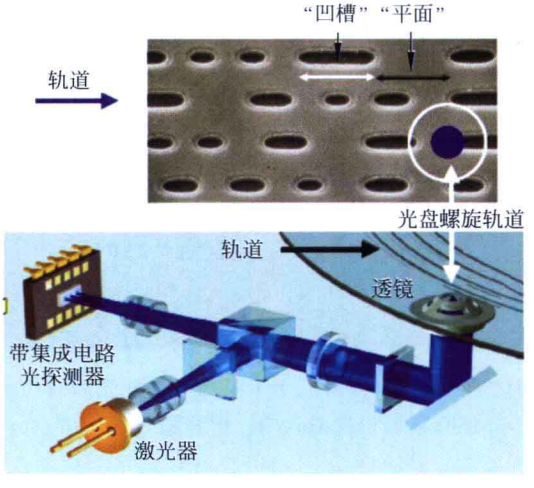


图 22　“凹槽”与“平面”反映了盘片上的物理特性，可通过注入模塑法得到。“凹槽”距离表面的高度不是任意的，是固定的，等于 $\lambda/4$，λ 为所用的激光波长。图片承蒙 Rajeev Jindal 博士与 Giriraj Nyati 先生友情提供，他们来自位于印度大诺伊达的 Moser Baer India 公司。

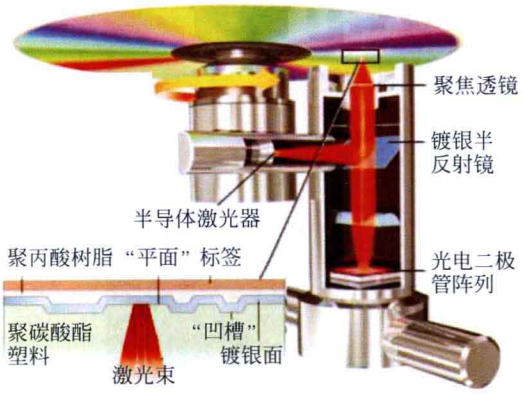


图 23　一张 CD-ROM 基片是由光学抛光的聚碳酸酯构成，在上面通过注入模塑法制成数据记号。盘片内孔直径为 15mm，而盘片总直径为 120mm，厚度为 1.2mm。盘片的上面覆盖一层非常薄的银或金，构成反射层，可将激光束反射回来以便读取数据。反射光入射到象限光电探测器上，把光转变为适当的电脉冲，对于这些电脉冲随后的处理可提取出相关数据。盘片的数据容量一般为 650～700MB。图片承蒙 Rajeev Jindal 博士与 Giriraj Nyati 先生友情提供，他们来自位于印度大诺伊达的 Moser Baer India 公司。

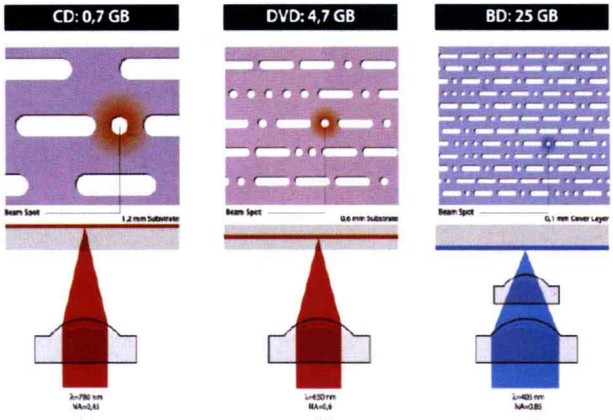


图 24　(a)红外二极管激光器(λ＝780nm)，简易物透镜(NA＝0.45)。(b)红色二极管激光器(λ＝650nm)，增大光阑的物镜(NA＝0.60)。(c)蓝色激光(λ＝405nm)，NA 进一步增大到 0.85。图片承蒙 Rajeev Jindal 博士与 Giriraj Nyati 先生友情提供，他们来自位于印度大诺伊达的 Moser Baer India 公司。

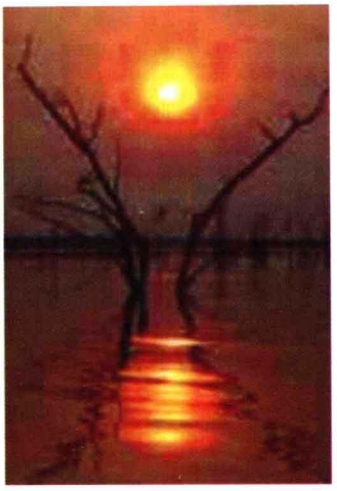


图 25　当阳光以接近起偏振角的角度入射到海平面时，反射光几乎是线偏振光。如果通过一个可旋转的偏振片来观察水面，则在偏振片遮挡了反射的炫光后，海水会变得更加透明。图片引自 http://polarization.com/water/water.html。



(a)　　(b)

图 26　当太阳光以接近于起偏振角的角度入射到水面时，反射光几乎是线偏振光。(a)若偏振片允许全部(几乎是线偏振的)反射光通过，可以看到水面上的炫光。(b)用一个透光方向竖直的偏振片可以屏蔽掉反射的炫光，就能看到水下面的情景。图片引自 http://polarization.com/water/water.html。



图 27　一块方解石晶体放置在纸上方，有些字母显示出双折射。图片引自 http://en.wikipedia.org/wiki/Photon_polari-zation。

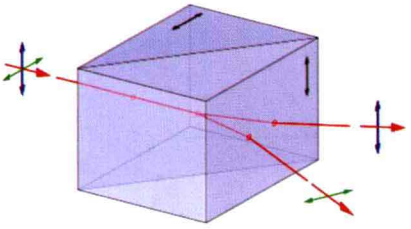


图 28　渥拉斯顿棱镜将随机偏振的或非偏振光分为两束正交的线偏振光输出。它由两个正交的方解石棱镜在其基底粘合(一般用加拿大树胶)而成,两个棱镜的光轴相互垂直。输出光从棱镜出射后分开,给出两束正交偏振光,光束的分离角与棱镜的楔形角大小及光波长有关。一般商用的棱镜可以提供 15°～45°的分离角。图片引自 http://en.wikipedia.org/wiki/wollaston_prism。

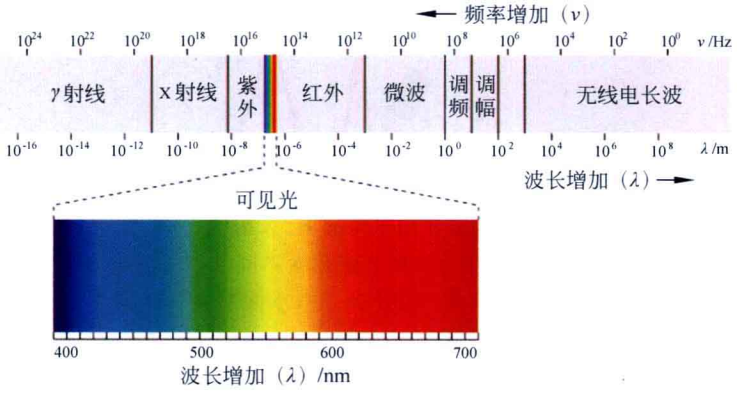


图 29　电磁波谱,可见光仅占整个电磁波谱的一小部分。图片引自 http://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnetic_waves。

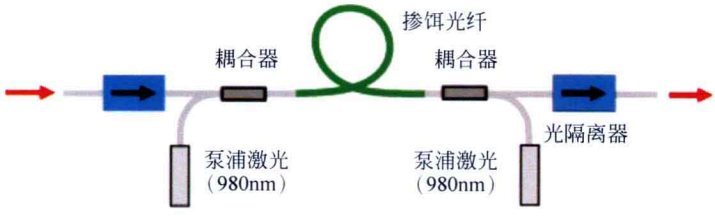


图 30　一个简单的掺铒光纤放大器的原理图,其中用了两个激光二极管(LD)为掺饵光纤提供泵浦功率。图片引自 http://www.rp-hotonics.com/erbium_doped_fiber_amplifiers.html。

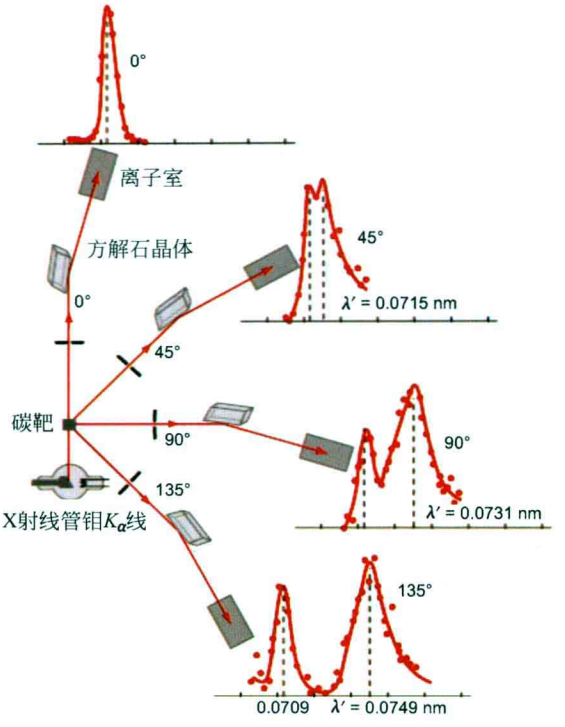


图 31　康普顿的原始实验使用了钼的 K_α X 射线，波长为 0.0709nm。入射光由碳靶对其散射，并利用布拉格光谱仪在不同散射角处进行观察。实验数据引自康普顿的原始论文里（见图 25.8），本图引自佐治亚手里大学 Rod Nave 教授所作的图。图片引自 http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hframe.html。

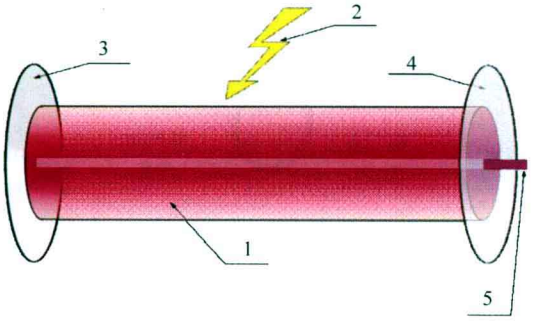


图 32　激光器主要组成部分。1—激光激活媒质；2—泵浦能量；3—高反射器；4—耦合输出器；5—激光。图片引自 http://en.wikipedia.org/wiki/Laser。



图 33　一个安装在机器人系统上的 2kW 光纤激光器在切割低碳钢。图片下载自因特网。

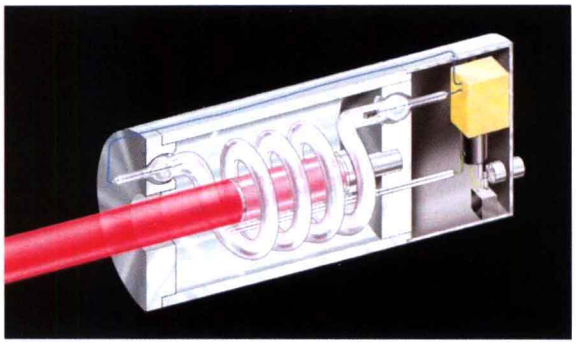


图 34　第一台红宝石激光器。图片引自 http://en.wikipedia.org/wiki/Ruby_laser。

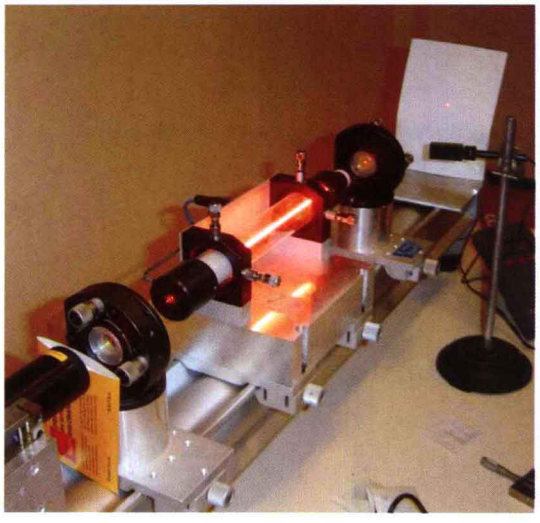


图 35　在巴黎大学 Kastler-Brossel 实验室展示的氦-氖激光器。管中心的辉光是像氖灯一样的电子放电发光，气体中的氖是激光穿过时的增益媒质。可以从管侧面看到的放电发光不是激光束本身，管外的激光束穿过空气在右侧的屏幕上打上了一个红点。图片引自 http://en.wikipedia.org/wiki/Laser。

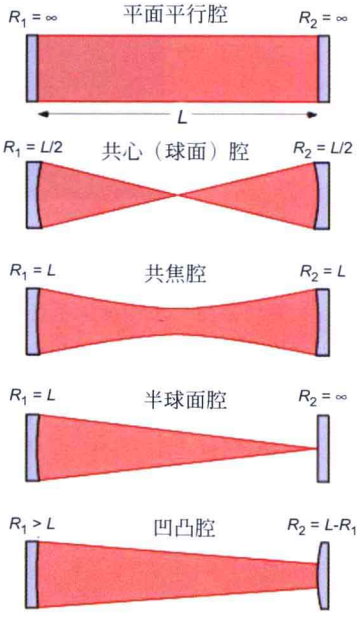


图 36　不同结构的光学谐振腔。图片引自 http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Optical-cavity1.png。

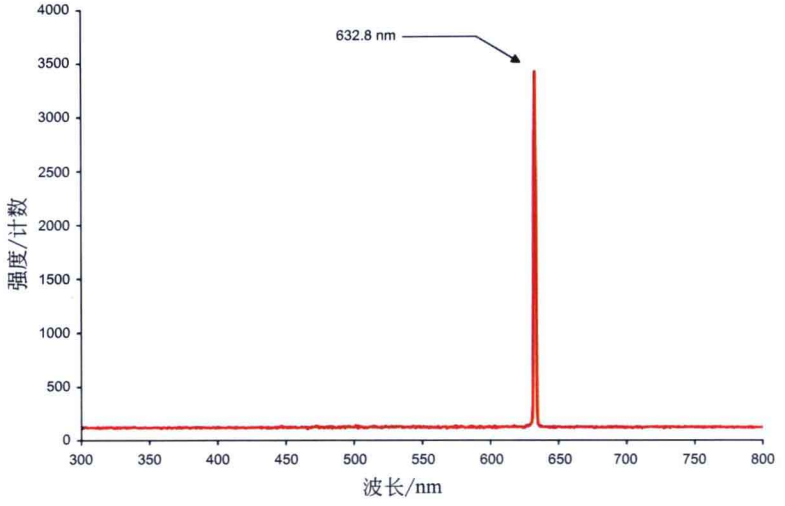


图 37　氦-氖激光器的光谱。相较于其他激光器而言，氦-氖激光器发出的光具有非常窄的固有谱线宽度。图片引自 http://en.wikipedia.org/wiki/Helium-neon laser。

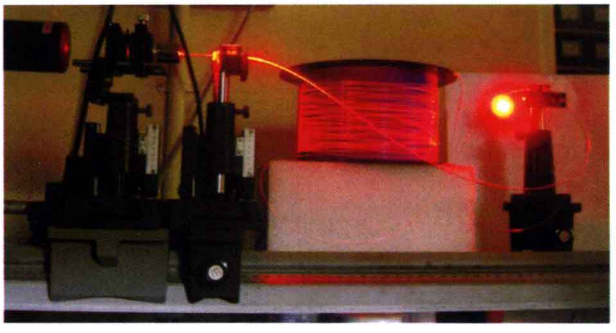


图 38　氦-氖激光器的光束入射一根阶跃折射率多模光纤，并在终端产生输出光斑。之所以可以从侧面看到光纤中的光，主要是由于瑞利散射存在的缘故。图中光纤是由位于印度加尔各答的中央玻璃和陶瓷研究所(CGCRI)公司的拉丝装置制造，图片由 Shyamal Bhadra 博士和 Atasi Pal 女士提供。

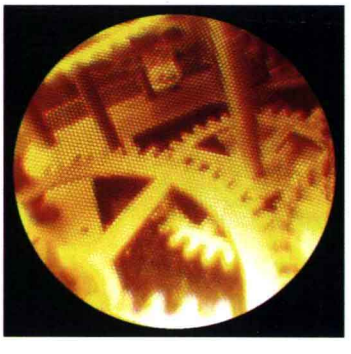


图 39　用一个低分辨率的光纤图像显示镜(约有 6000 根光纤)观察一个老式机械钟的内部结构。注意，由于单根光纤只传送一种颜色，因此，图像中每一根光纤都可辨认出来。图片引自 http://en.wikipedia.org/wiki/fiberscope。

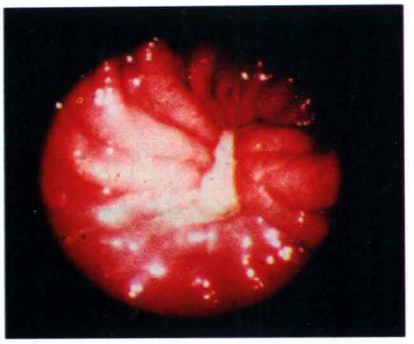


图 40　内窥镜下观察的胃溃疡。图片由设在新德里的美国信息服务部提供。



图 41　利用光纤中的法拉第旋光效应测量导线中大电流的实验装置。图片由印度理工学院德里分校的 Chandra Sekhar 教授和 K Thyagarajan 教授提供。

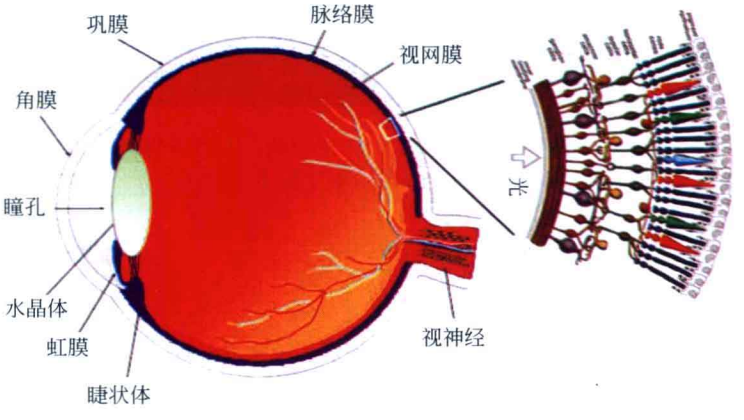
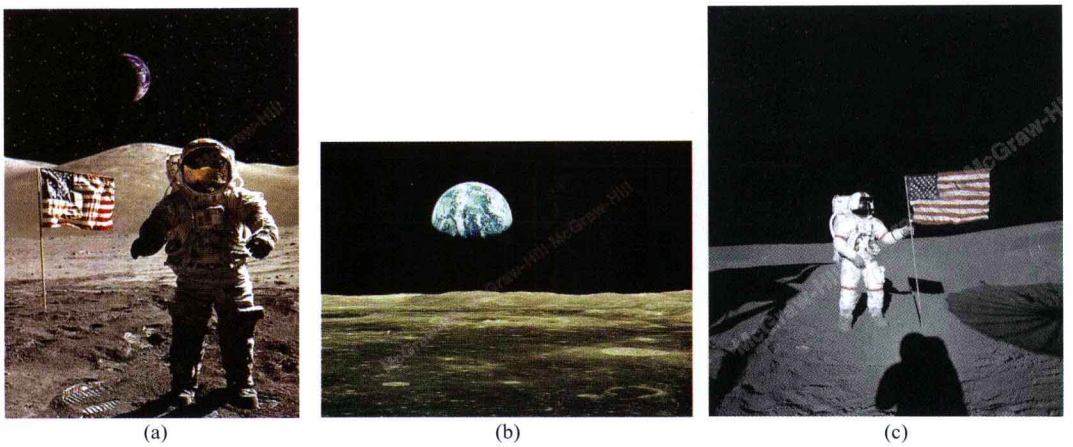


图 42　眼球中的杆状细胞和锥状细胞，图片引自 http://www.biologymad.com/nervoussystem/eyenote.htm。



(a) (b) (c)

图 43　在月球上拍摄的照片。因为月球上没有大气层，月球的天空和月球上的阴影都非常暗。在(a)和(b)中还可以看见地球。图片由 McGraw-Hill 数字图书馆提供。



图 44　一轮满月挂在黄昏天空的景色。注意，天空的蓝色和落日的红色余晖，这两种现象都源于瑞利散射。图片由 McGraw-Hill 数字图书馆提供。

译 者 序

A. 伽塔克是印度理工学院德里分校物理系教授，在光学、光纤光学和量子力学领域著述颇丰，著有《Optics》(4ed)、《An Introduction to Fiber Optics》、《Lasers Theory and Applications》、《Contemporary Optics》、《Fiber Optics and Lasers: The Two Revolutions》、《Introduction to Quantum Mechanics》、《Quantum Mechanics: Theory and Applications》(5ed)、《Mathematical Physics: Differential Equations and Transform Theory》、《Special Theory of Relativity》等。其中，《Optics》第 1 版(1977 年)与《Contemporary Optics》(1978 年)已有中译本。

译者在长期的教学和科研工作中，从伽塔克教授所著上述著作中受益匪浅。因此，将他的著作翻译成中文，为国内读者提供一本优秀的光学教材，一直是译者的一个愿望。非常感谢清华大学出版社为我们提供了这样的机会。

承蒙伽塔克教授为本书的中文版写了序言，在此表示深深的谢意。

在翻译过程中，对于原书中的一些印刷错误做了纠正，并对一些原书中译者认为的不当之处做了相应的改动，并加以注释。由于译者水平有限，译文中肯定存在错误和不足，恳请读者批评指正。

译 者

2013 年于北京

中文第4版序

当得知我的著作《光学》第四版正在被翻译成中文，中国的学生读到我的书的时候，我感到极大的满足。近年来，中国的科学技术大踏步地发展，赢得了世界范围的认可和尊重。印中两国之间知识与学术界的交流传统由来已久，多年来，两国的学者在不断地加强这种联系，扩大交流的领域。虽然我的著作拥有中国的读者对于加强这种联系的作用只是前进了一小步，但是我真诚地希望印中两国未来将进一步强化这种联系。我特别高兴由张晓光教授来翻译这本书，他在光纤光学和光通信领域都做了重要的工作。

1960年，第一台激光器诞生，从那以后，光学领域里的“文艺复兴”运动开始了。从光放大器到激光物理，从光纤光学到光纤通信，从光数据处理到全息术，从光传感器到DVD技术，从超短脉冲到超连续谱，光学在科学与工程的几乎所有分支中都有重要的应用。光学除了大量的实际应用之外，在人们不断追问“光的本性”的过程中，在科学领域引发了两场革命。量子力学的发展起源于人们试图理解“光的量子性”；而相对论的起因是对于综合电和磁定律的麦克斯韦方程组的研究。正是由于光学在科学与工程领域的这种地位，作为本科生的《光学》课程，不仅对于物理学专业的学生是必须的，对于工程专业的学生同样也是“必须的”。虽然用一本光学书试图涵盖所有方面是不可能的，但是本书还是努力对这个激动人心的领域中许多重要的课题给出了一个全面的阐述，以满足科学与工程的本科生学习光学课程的需要。

本书的第1版出版于1977年。令我满意的是，经历31年，本书已在印度的科学界被广泛认可。本书的第1版还被翻译为中文与波斯文，第3版还在新加坡重印。我自己在印度理工学院德里分校教授工程专业以及工程物理专业时，本科的光学课程多次应用本书作为教材，从而感觉到必须对本书的部分内容重新编写。因此，在准备出版第4版时，对全书做了大规模的修改，添加了新的章节，引入了一些新的论题。

新版的变化

下面列举了新版内容的变化。

- 本版一开始给出了大量的彩色照片，刻画了光学的一些有趣的内容；并在开篇加入新的一章（第1章光学史）来追溯光学里研究主题的演进。
- 对第2章光是什么进行了重要修改。在第3章费马原理及其应用里加入一些新的图片，使论题解释得更加清晰。
- 第9章狄拉克δ函数和傅里叶变换是新加入的一章，包含了狄拉克δ函数的表述，傅里叶积分定理，二维和三维傅里叶变换。这些论题对于理解傅里叶光学十分重要。
- 在第15章双光速干涉：振幅分割法里，对一些图片进行了更新。光纤布拉格光栅一节重写了。第18章夫琅禾费衍射：Ⅰ的部分内容也进行了重写，并增加了一些新图

片。而第19章夫琅禾费衍射:Ⅱ是本版新的一章。

- 对第22章偏振光与双折射和第25章辐射的粒子性进行了重要修订,加入了一些新的图片。
- 第26章激光导论新添了10幅图片,构成了本章新的亮点。
- 第27、28和29章是新引入的三章,主要介绍关于光纤光学和波导理论的内容,涉及35年来通信领域革命的内容。这三章着重于光纤光学的基本概念和光线光学处理、波导基本理论和模式概念以及单模光纤理论。

需要说明的是,我自己的研究兴趣在光纤光学领域。我发现,光纤光学的一些美妙的实验(虽然做起来不是十分困难)不仅帮助我们更易于理解那些复杂的概念,也有助于发现一些光学的重要应用。比如,光纤布拉格光栅是干涉现象的引人注目的应用,并在传感器及其光学器件领域有重要的应用。类似地,棱镜-薄膜耦合器的实验帮助我们理解量子化的概念(隧道效应),光纤中法拉第旋光效应在工业界找到了重要应用(用于测量大电流)。再者,准单色的激光脉冲经过一特殊光纤,可以导致"惊人的"超连续谱。还有许多这样的例子,在新版中,我选择了其中的一些加以说明。

本书的内容组织

本书试图在传统光学与该领域最新的进展之间取得平衡。基于这样的考虑,本书组织内容的规划如下。

- 好的图片会使一些重要的概念更加清晰,并能引发学生对该论题的兴趣。基于这种考虑,本书一开始就用一些彩色图片来描述光学中的一些重要概念。
- 本书第1章给出了光学发展的简史。我认为,人们应该对他(或她)所要学习的学科的演进有一个全面的了解。光学是一个涵盖广泛的领域,以致很难在所有领域给出一个历史性的全面概述。因此,我不得不省略了一些对光学做出重大贡献的人物。好在互联网上有丰富的资料可以查阅。我已列出了大量的书籍和网址供参考。在本章中,突出了光纤光学以及相关领域的进展,突出介绍了一些对光学的发展做出重要贡献的人物。
- 第2章给出了为解释"光的本性"提出的不同模型的简要历史演进过程。本章从光的微粒模型开始;然后讨论光的波动模型演进过程以及光的电磁特性;接下来讨论20世纪早些年的一些实验,它们可以通过假设光是粒子的来加以解释;最后以如何协调"波粒二象性"结束本章的讨论。
- 第3~6章是关于几何光学的内容。第3章以费马原理开始,并通过渐变折射率媒质中光的传播来讨论光线追迹理论,并基于此讨论了"海市蜃楼"和"上现蜃景现象";还讨论了光线在渐变折射率媒质中的传播问题,和光线经电离层反射的问题。第4章是关于透镜系统中的光线追迹理论。第5章讨论了工业界常用的傍轴光学的矩阵理论。第6章简单介绍了像差问题。
- 第7~12章讨论折射率的起源和波传播的基础物理原理,包括惠更斯原理。并对许多有趣的实验(比如落日显现红色、水波行为等)进行了讨论。对群速度的概念和光脉冲在色散媒质中传输时的色散现象进行了详细的讨论。对于能够导致超连续谱的自相位调制(SPM)效应进行了解释。

- 第13～16章涵盖了重要且引人入胜的干涉领域以及许多相关的优美实验。其背后遵循的叠加原理在第13章中进行了讨论。第14章讨论了分波前干涉，包括杨氏双孔干涉实验。第15章讨论了分振幅干涉(它使我们理解薄膜上显示的色彩)和减反射薄膜的应用等，以及光纤布拉格光栅(FBG)的基本工作原理，及其在工业界的应用。在同一章中，对迈克耳孙干涉仪也进行了讨论，它也许是光学仪器中设计得最精巧、最敏感的仪器之一。基于此，迈克耳孙获得了1907年的诺贝尔物理学奖。第16章讨论了法布里-珀罗干涉仪，它基于多光束干涉原理，具有高分辨率，因此广泛地应用于高分辨率光谱学。
- 第17章讨论了时间相干性与空间相干性的概念。详细讨论了利用空间相干性概念，通过设计精巧的迈克耳孙实验如何确定恒星的角直径。对于光学拍和傅里叶变换光谱学也进行了讨论。
- 第18、19和20章涵盖了光学中非常重要的衍射领域，像激光束的衍射发散、望远镜的分辨本领、激光聚焦、X射线衍射、傅里叶光学和空间频率滤波等。
- 第21章是关于全息术的内容，给出了全息术的原理和应用。丹尼斯·伽柏于1971年因发现全息术原理而获得诺贝尔物理学奖。
- 接下来的三章是关于光波的电磁特性的内容。第22章讨论了偏振现象以及电磁波在各向异性介质中的传播问题，包括波速与射线速度的第一性原理的推导。从第一性原理出发，解释了光学旋光和法拉第旋光现象(用来测量大电流)。在第23章中，从麦克斯韦方程组出发，导出了波动方程，它预言了电磁波的存在，并提出光是一种电磁波。电磁波在电介质界面的反射和折射在第24章中进行了讨论，本章推导出的结论直接解释了布儒斯特定律、全反射、隐逝波、法布里-珀罗传输谐振腔等。
- 第25章是关于辐射的粒子性的内容，基于此，爱因斯坦获得了1921年的诺贝尔物理学奖。本章还讨论了康普顿效应(基于此，康普顿获得了1927年的诺贝尔物理学奖)，并在康普顿效应的基础上，得出光子的动量为 h/λ 结论。
- 第26章是关于激光的内容。激光是一个极具技术价值的论题，本章讨论了光放大器和激光器的基本物理原理，以及它们的特殊性质。
- 最后三章是关于波导理论和光纤光学的内容，这是一个引发了通信革命，并在传感器领域有重要应用的领域。第27章(利用光线光学)讨论了光纤的导波原理，及其在光纤通信系统中的应用。本章还给出了光纤传感器的简单解释。第28章以麦克斯韦方程组为出发点，讨论了基本的波导理论。第29章讨论了单模光纤的传输特性，单模光纤现在已广泛地应用于光纤通信系统。

归纳起来，本书讨论了对科学与技术产生重大影响的一些光学论题。

本书的特色

- 相应于实际数值计算的大量的图片是利用GNUPLOT和Mathematica软件制作的，并用它们制作了一些三维图片，反映一些现象的全貌。
- 每章都以本领域重要的里程碑开始，它能给出本章内容的一个历史概貌。
- 所有的重要公式都由第一性原理推导出来，以便利用本书进行自学。
- 本书中散布着大量的例子，可以帮助我们对复杂的概念有更清晰的认识。

- 每章的结尾都附有本章中推导的重要结论的小结。
- 每章后的习题可以加深所学概念的理解。
- 另外,参考文献和推荐读物为读者提供了更多的学习资讯。
- 附录中包括了伽马函数、高斯函数的积分、高斯光束的衍射和平面波导的横电波与横磁波。

网络资源

与本书相联系的网站为教与学提供了额外的资源。这些电子形式的补充资源包括为学生准备的关于光学仪器的文章、习题解和为教师准备的按照章节分开的 PowerPoint 幻灯片。

我把这本书献给我的学生。在我与他们不断的交流中,使得我们对于光学的理解都更加深入。我以下面的语录(引自 G. L. Squires 所著的一本书)结束序言:"我从我的老师那里学到了许多,但我从我的学生那里学到了更多。"我欠我的学生许多!

我非常欢迎对于进一步改进本书的建议。我的电子邮箱是 ajoykghatak@yahoo.com 和 ajoykghatak@gmail.com。

A. 伽塔克
新德里
2013 年 1 月 18 日

致　谢

在印度理工学院德里分校，我有幸有机会与优秀的同事与学生交流，他们使我感到教授任何课程都是一种愉悦和挑战。我有机会自由地改进我所讲过的课程，建立新的课程，以使得课程更加吸引人。这些也都反映到目前的这本书中了。

在本书前后几版的出版过程中，得到了许多人的帮助，接受了许多有价值的意见。我需要首先提及的是我非常要好的朋友和同事 Ishwar Goyal 教授，他在印度理工学院德里分校教授光学课程时，许多次都用了本书的前几版做教材，并给出了大量的建议和批评。如果他能看到这一书新版的出版，一定是非常高兴的。但是不幸的是，他已经不能和我们在一起了。我非常怀念与他交流的日子。我还非常感谢 M. S. Sodha 教授，感谢他一直以来的鼓励和支持。我要感谢 K. Thyagarajan 教授，他一直以来与我合作，并允许我使用他还未发表的讲义。我要向 Arun Kumar 教授、Lalit Malhotra 教授、Bishnu Pal 教授、Anurag Shama 教授、K. Thyagarajan 教授（以上来自印度理工学院德里分校）、Kamal Dasgupta 博士和 Mrinmay Pal 博士（以上来自加尔各答的 CGCRI 公司）、Rajeev Jindal 博士和 Giriraj Nyati 先生（以上来自诺伊达的 Moser Maer 公司）、Vengu Lakshminarayanan 教授（来自加拿大的滑铁卢大学）和 Enakshi Sharma（目前在德里大学，南校区）表示我真诚的感谢，感谢他们帮助我完成了本书的部分写作。我要向 Gouranga Bose 博士和 Parthasarathi Palai 博士（目前在班加罗尔的泰亚斯网络公司）、Chandra Sakher 教授、R. S. Sirohi 教授和 Ravi Vashney 教授（以上来自印度理工学院德里分校）、Govind Swarup 教授（来自浦那的 GMRT 巨米波射电望远镜天文台）、Somnath Bandyopadhyay 博士、Shyamal Bhadra 博士、Kamal Dasgupta 博士、Tarun Gangopadhyay 博士、Atashi Pal 女士和 Mrinmay Pal 博士（以上来自加尔各答的 CGCRI 公司）、Suresh Nair（来自柯钦的 NeST 公司）、Avinash Pasricha 先生（来自位于新德里的美国信息服务中心）、Ajoy Kar 教授和 Henry Bookey 博士（来自英国爱丁堡的赫瑞瓦特大学）、R. W. Terhune 博士、R. A. Philips 教授和 A. G. Chynoweth 博士（来自美国）和 R. E. Bailey（来自澳大利亚）表示深深的感谢，感谢他们为我提供本书中应用的重要图片。我要感谢 V. V. Bhat 先生为我提供的古印度科学家、技术专家贡献的文献资料。我还要向我的其他同事表示谢意，他们是 B. D. Gupta 教授、Ajit Kumar 教授、M. R. Shenoy 教授和 Kehar Singh 教授，感谢他们在研究工作中与我的合作，以及激发灵感的讨论。我还要感谢所有让我引用他们书中图片的作者和出版商。

我希望向 V. Balasubrahmanyam 博士（来自海得拉巴的奥斯马尼亚大学）、Ramakrishna Damle 博士（来自班加罗尔大学）、R. K. Kar 博士（来自森蒂尼盖登的维丝华巴尔提大学）、Sanjay Kumar 博士（来自德里的圣斯蒂芬学院）、N. Ramamurthy 博士（来自泰米尔纳德邦的安娜马来大学）、Amarjyoti Choudury 博士（来自阿萨姆邦提斯浦尔大学）和 K. Porsezian 博士（来自本地治里的本地治里大学）表示真诚的感谢，感谢他们对本书前 3 版给予的评论和有价值的建议。我要感谢墨尔本大学的 G. I. Opat 教授，是他在 1989 年邀

请我参加光学教学会议(1989 Conference on Teaching of Optics),他告诉我许多如何使光学中的复杂概念易于理解的方法。我要向 Sunil Khijwania 博士、Monish Das 先生和 Debasish Roy 先生表示感谢,他们帮助我准备文稿,并绘制了一些复杂的图片。本版的部分修订得到了印度政府科技部的支持,我对这些支持表示感激。最后,我感到我欠我的家人很多很多——特别是我的夫人 Gopa 女士——使我能将很多时间花费在这篇艰辛的文稿中,并对我给予了一贯的支持。

A. 伽塔克

新德里

2013 年 1 月 18 日

目　录

第 1 章　光学史 …… 1
参考文献和推荐读物 …… 21

第 2 章　光是什么 …… 23
2.1　引言 …… 23
2.2　微粒模型 …… 23
2.3　波动模型 …… 25
2.4　辐射的粒子性 …… 28
2.5　物质的波动性 …… 29
2.6　测不准原理 …… 31
2.7　单缝衍射实验 …… 31
2.8　物质波的概率解释 …… 33
2.9　干涉实验的理解 …… 35
2.10　光子的偏振 …… 37
2.11　时间-能量不确定关系 …… 39
小结 …… 39
习题 …… 40
题解 …… 41
参考文献和推荐读物 …… 41

第一部分　几何光学

第 3 章　费马原理及其应用 …… 45
3.1　引言 …… 45
3.2　从费马原理推导反射定律和折射定律 …… 47
3.3　非均匀媒质中的光线路径 …… 52
3.4　光线方程与它的解 …… 59
3.5　光线在各向同性媒质和各向异性媒质的分界面的折射 …… 67
小结 …… 71
习题 …… 72
参考文献和推荐读物 …… 76

第4章　光线经过球面的折射与反射 …… 77
4.1　引言 …… 77
4.2　在单一球面上的折射 …… 78
4.3　在单一球面上的反射 …… 80
4.4　薄透镜 …… 82
4.5　透镜的主焦点和焦距 …… 83
4.6　牛顿公式 …… 85
4.7　横向放大率 …… 85
4.8　球面的齐明点 …… 87
4.9　笛卡儿卵形面 …… 89
4.10　齐明点存在的几何证明 …… 89
4.11　正弦条件 …… 91
小结 …… 92
习题 …… 93
参考文献和推荐读物 …… 95

第5章　傍轴光学的矩阵方法 …… 96
5.1　引言 …… 96
5.2　矩阵方法 …… 98
5.3　主平面(单位面) …… 105
5.4　节平面 …… 107
5.5　两薄透镜构成的系统 …… 110
小结 …… 112
习题 …… 113
参考文献和推荐读物 …… 114

第6章　像差 …… 115
6.1　引言 …… 115
6.2　色差 …… 115
6.3　单色像差 …… 119
小结 …… 130
习题 …… 131
参考文献和推荐读物 …… 131

第二部分　振动与波动

第7章　简谐运动、受迫振动和折射率的起源 …… 135
7.1　引言 …… 135
7.2　简谐运动 …… 135

7.3 阻尼简谐运动 …… 141
7.4 受迫振动 …… 143
7.5 折射率的起源 …… 146
7.6 瑞利散射 …… 152
小结 …… 153
习题 …… 154
参考文献和推荐读物 …… 157

第 8 章 傅里叶级数及其应用 …… 158
8.1 引言 …… 158
8.2 弹拨弦上的横向振动 …… 161
8.3 傅里叶级数在研究受迫振动中的应用 …… 164
8.4 傅里叶积分 …… 165
小结 …… 167
习题 …… 167
参考文献和推荐读物 …… 168

第 9 章 狄拉克 δ 函数和傅里叶变换 …… 169
9.1 引言 …… 169
9.2 狄拉克 δ 函数的表示 …… 169
9.3 δ 函数的积分表示 …… 170
9.4 作为分布函数的 δ 函数 …… 171
9.5 傅里叶积分定理 …… 171
9.6 二维和三维傅里叶变换 …… 175
小结 …… 176
习题 …… 177

第 10 章 群速度和脉冲色散 …… 179
10.1 引言 …… 179
10.2 群速度 …… 179
10.3 波包的群速度 …… 185
10.4 自相位调制 …… 193
小结 …… 195
习题 …… 196
参考文献和推荐读物 …… 198

第 11 章 波的传播和波动方程 …… 199
11.1 引言 …… 199
11.2 正弦波：频率和波长的概念 …… 201

11.3 波的种类…… 203
11.4 波动的能量传播…… 204
11.5 一维波动方程…… 205
11.6 拉紧弦的横向波动…… 207
11.7 固体中的纵向声波…… 208
11.8 气体中的纵波…… 209
11.9 一维波动方程的通解…… 211
小结…… 217
习题…… 218
参考文献和推荐读物…… 219

第12章 惠更斯原理及其应用 …… 220
12.1 引言…… 220
12.2 惠更斯原理…… 220
12.3 光的直线传播…… 222
12.4 应用惠更斯原理研究折射与反射…… 223
12.5 非均匀媒质中的惠更斯原理…… 231
小结…… 232
习题…… 232
参考文献和推荐读物…… 232

第三部分 干 涉

第13章 波的叠加 …… 235
13.1 引言…… 235
13.2 弦上驻波…… 236
13.3 在一根两端固定的弦上的驻波…… 238
13.4 光驻波：艾夫斯和维纳实验…… 239
13.5 两个正弦波的叠加…… 240
13.6 研究正弦波叠加的图解法…… 241
13.7 复数表示法…… 244
小结…… 244
习题…… 245
参考文献和推荐读物…… 245

第14章 双光束干涉：波前分割法 …… 246
14.1 引言…… 246
14.2 在水面上产生的干涉图样…… 247
14.3 相干性…… 251

14.4 光波的干涉 …… 252
14.5 干涉图样 …… 253
14.6 强度分布 …… 255
14.7 菲涅尔双面镜装置 …… 263
14.8 菲涅尔双棱镜装置 …… 263
14.9 白光干涉 …… 264
14.10 条纹的位移 …… 265
14.11 洛埃镜装置 …… 266
14.12 反射时的相位变化 …… 267
小结 …… 268
习题 …… 268
参考文献和推荐读物 …… 270

第 15 章 双光束干涉：振幅分割法 …… 271
15.1 引言 …… 271
15.2 平面波照射平行平面薄膜发生的干涉 …… 272
15.3 余弦定律 …… 274
15.4 消反射膜 …… 275
15.5 增反射膜 …… 280
15.6 周期性结构产生的反射 …… 280
15.7 点光源照射平行平面薄膜发生的干涉 …… 286
15.8 两反射面不平行的薄膜发生的干涉 …… 290
15.9 薄膜的颜色 …… 294
15.10 牛顿环 …… 295
15.11 迈克耳孙干涉仪 …… 300
小结 …… 304
习题 …… 304
参考文献和推荐读物 …… 305

第 16 章 多光束干涉量度学 …… 306
16.1 引言 …… 306
16.2 平行平面薄膜上的多次反射 …… 306
16.3 法布里-珀罗标准具 …… 309
16.4 法布里-珀罗干涉仪 …… 313
16.5 分辨能力 …… 314
16.6 陆末-格尔克板 …… 318
16.7 干涉滤波器 …… 319
小结 …… 320
习题 …… 320

参考文献和推荐读物…… 321

第17章 相干性 …… 322
17.1 引言…… 322
17.2 线宽…… 326
17.3 空间相干性…… 327
17.4 迈克耳孙测星干涉仪…… 329
17.5 光学拍…… 331
17.6 相干时间和线宽的傅里叶分析…… 334
17.7 复相干度和杨氏双孔实验中的条纹可见度…… 336
17.8 傅里叶变换光谱学…… 338
小结…… 345
习题…… 346
参考文献和推荐读物…… 347

第四部分 衍 射

第18章 夫琅禾费衍射：Ⅰ …… 351
18.1 引言…… 351
18.2 单缝衍射图样…… 352
18.3 圆孔衍射…… 358
18.4 激光束的定向性…… 361
18.5 分辨极限…… 367
18.6 双缝的夫琅禾费衍射图样…… 371
18.7 多缝的夫琅禾费衍射图样…… 374
18.8 衍射光栅…… 378
18.9 斜入射…… 383
18.10 X射线衍射 …… 383
18.11 自聚焦现象 …… 389
18.12 关于光学媒体技术的短文 …… 392
小结…… 396
习题…… 397
参考文献和推荐读物…… 399

第19章 夫琅禾费衍射：Ⅱ和傅里叶光学 …… 400
19.1 引言…… 400
19.2 菲涅耳衍射积分…… 400
19.3 均匀振幅和相位分布…… 402
19.4 夫琅禾费近似…… 403

19.5 长狭缝的夫琅禾费衍射 …… 403
19.6 矩孔的夫琅禾费衍射 …… 404
19.7 圆孔的夫琅禾费衍射 …… 406
19.8 全同孔阵列 …… 408
19.9 空间滤波 …… 409
19.10 薄透镜的傅里叶变换性质 …… 413
小结 …… 416
习题 …… 416
参考文献和推荐读物 …… 417

第 20 章 菲涅耳衍射 …… 418
20.1 引言 …… 418
20.2 菲涅耳半波带 …… 419
20.3 波带片 …… 422
20.4 对菲涅耳衍射的更严谨探讨 …… 424
20.5 高斯光束的传播 …… 427
20.6 直边衍射 …… 430
20.7 平面波被长狭缝衍射以及向夫琅禾费衍射的过渡 …… 437
小结 …… 441
习题 …… 443
参考文献和推荐读物 …… 445

第 21 章 全息术 …… 446
21.1 引言 …… 446
21.2 全息术理论 …… 448
21.3 全息术的要求 …… 452
21.4 全息术的一些应用 …… 453
小结 …… 455
习题 …… 455
参考文献和推荐读物 …… 456

第五部分 光的电磁特性

第 22 章 偏振与双折射 …… 459
22.1 引言 …… 459
22.2 偏振光的产生 …… 463
22.3 马吕斯定律 …… 467
22.4 两个扰动的叠加 …… 468
22.5 双折射现象 …… 472

22.6 偏振光干涉：四分之一波片与半波片 …… 478
22.7 偏振光的分析 …… 481
22.8 光学旋光 …… 482
22.9 光束在椭圆芯单模光纤中传输时偏振态的变化 …… 484
22.10 渥拉斯顿棱镜 …… 487
22.11 罗雄棱镜 …… 488
22.12 各向异性媒质中平面电磁波的传播 …… 489
22.13 射线速度与射线折射率 …… 495
22.14 琼斯运算法 …… 498
22.15 法拉第旋光 …… 500
22.16 光学旋光理论 …… 501
小结 …… 505
习题 …… 506
参考文献和推荐读物 …… 509

第23章 电磁波 …… 510
23.1 麦克斯韦方程组 …… 510
23.2 电介质中的平面波 …… 511
23.3 电介质中的三维波动方程 …… 516
23.4 坡印亭矢量 …… 517
23.5 电磁波的能量密度和强度 …… 520
23.6 辐射压强 …… 522
23.7 导电介质中的波动方程 …… 524
23.8 连续性条件 …… 526
23.9 麦克斯韦方程组的物理意义 …… 527
小结 …… 529
习题 …… 530
参考文献和推荐读物 …… 531

第24章 电磁波的反射与折射 …… 532
24.1 引言 …… 532
24.2 两电介质分界面上的反射 …… 532
24.3 导电介质的反射 …… 550
24.4 电介质薄膜上的反射 …… 552
小结 …… 554
习题 …… 555
参考文献和推荐读物 …… 556

第六部分　光　　子

第 25 章　辐射的粒子性 …… 559
25.1　引言 …… 560
25.2　光电效应 …… 560
25.3　康普顿效应 …… 563
25.4　光子质量 …… 569
25.5　光子的角动量 …… 569
小结 …… 572
习题 …… 573
参考文献和推荐读物 …… 574

第七部分　激光与光纤光学

第 26 章　激光导论 …… 577
26.1　引言 …… 578
26.2　光纤激光器 …… 585
26.3　红宝石激光器 …… 587
26.4　氦-氖激光器 …… 589
26.5　光学谐振腔 …… 591
26.6　爱因斯坦系数和光放大 …… 596
26.7　线型函数 …… 604
26.8　红宝石激光器的典型参数 …… 607
26.9　激光束的单色性 …… 608
26.10　拉曼放大和拉曼激光器 …… 609
小结 …… 613
习题 …… 615
参考文献和推荐读物 …… 616

第 27 章　光纤光学Ⅰ：基本概念和射线光学 …… 617
27.1　引言 …… 618
27.2　一些历史评论 …… 618
27.3　全反射 …… 621
27.4　光纤 …… 623
27.5　为什么是玻璃纤维 …… 624
27.6　相干光纤束 …… 625
27.7　数值孔径 …… 626
27.8　光纤的损耗 …… 628

27.9 损耗极限 …… 630
27.10 多模光纤中的脉冲色散 …… 631
27.11 色散和最大比特率 …… 635
27.12 光纤传感器 …… 636
习题 …… 637
参考文献和推荐读物 …… 638

第28章 光纤光学Ⅱ：波导的基本理论与模式的概念 …… 639
28.1 引言 …… 639
28.2 对称平面阶跃型波导的TE模式 …… 640
28.3 模式的物理意义 …… 646
28.4 折射率分布为抛物线型的平面波导中的TE模式 …… 648
28.5 对称的阶跃型平面波导的TM模式 …… 649
28.6 波导理论和量子力学 …… 650
习题 …… 653
参考文献和推荐读物 …… 654

第29章 光纤光学Ⅲ：单模光纤 …… 655
29.1 引言 …… 655
29.2 基本方程 …… 655
29.3 阶跃型折射率光纤的导模 …… 658
29.4 单模光纤 …… 662
29.5 单模光纤中的脉冲色散 …… 664
29.6 色散补偿光纤 …… 668
习题 …… 671
参考文献和推荐读物 …… 672

附录A 伽马函数和与高斯函数相关的积分 …… 673

附录B 积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin gx}{x}\mathrm{d}x$ …… 675

附录C 高斯光束的衍射 …… 676

附录D 平板波导的TE模式与TM模式 …… 677

第1章 光 学 史

上帝说：要有光，就有了光。

——旧约《创世纪》

光学是研究光的学科，自从人类具有看的能力，就被光所吸引。瓦斯科·龙基在他所著的《论光的本性》(On the Nature of Light)中写到："在人们今天的记忆中，是牛顿和惠更斯奠定了物理光学的基础，这是不确切的。也许这种误解源于时间跨度太长了，以至于人们只关注了前台的人物，而忽略了背景的作用。实际上，关于光的本性的讨论在这两个人出生之前，就完整地建立起来了……"基于这种观点，我认为，给出一个光学研究的简史是恰当的。值得庆幸的是，对于那些想了解更多光学史的人们，通过现今的互联网，他们可以得到大量的所需信息。你可以在互联网上找到许多参考文献，而不只限于本章后面所列的那些文献。本章所涉及的大多数人物的材料取自网址：www.wikipedia.org。

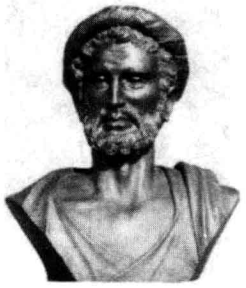


图 1.1 阿尔希塔斯的雕像

阿尔希塔斯(Archytas，公元前 428—公元前 347 年，见图 1.1)是一位希腊哲学家、数学家、天文学家与政治家。据说是他提出视觉来源于从眼睛中发出的看不见的"火"遇到物体后产生效应，从而使物体显现出形状与色彩(见文献[1,2])。

欧几里得(Euclid，又名亚历山大城的欧几里得，见图 1.2)是一位希腊数学家，他出生于公元前 320—公元前 324 年之间。在他所写的《光学》(Optica，著于大约公元前 300 年)著作中，他提到光的直线传播并描述了反射定律。他相信，视觉牵涉从眼睛到达所见物体的光线，并且还研究了物体显示的大小与在眼睛中形成的视角的关系。欧几里得关于光学的工作被西方人所知晓似乎是由中世纪阿拉伯的教科书传入欧洲的。欧几里得的《光学》(图 1.3)翻译自 Kittab Uqlidis Fi Ikhtilaf Al-Manazir(见文献[4～6]中的书评《欧几里得光学的阿拉伯版》)。

希罗(Hero，又名赫伦(Heron)，约公元 10—70 年)生活在罗马帝国统治下埃及的亚历山大，是亚历山大大学的数学、物理和力学教师。他写了《反射光学》(Catoptrica)一书。书中描述了光的传播、光的反射和如何运用镜子。如图 1.4 所示，为希罗的肖像画，取自文献[7]。

托勒密(Claudius Ptolemaeus，约公元 90—168 年)在英语中拼写为 Ptolemy，他是希腊的数学家和天文学家，生活在罗马帝国统治下的埃及。如图 1.5 所示，这张托勒密的油画给我们一个中世纪艺术家的印象(见文献[8])。托勒密所著《光学》(Optics)借助于一本拙劣的阿拉伯语译本，又由阿拉伯文翻译成拉丁文的译本而得以存世。在这本著作中，他涉及了有关光的反射、折射与颜色等性质，还测量了在不同入射角下，光线进入水的折射角，并给出了列表。

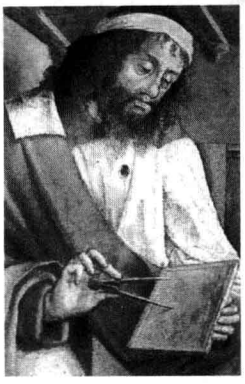


图1.2 贾斯特斯·凡·根特于15世纪画的欧几里得像。在欧几里得的有生之年并没有留下关于他相貌的记载。



图1.3 欧几里得《光学》拉丁版翻译本(1458年)的封面,见参考文献[3]。



图1.4 希罗的肖像画



图1.5 托勒密的油画画像

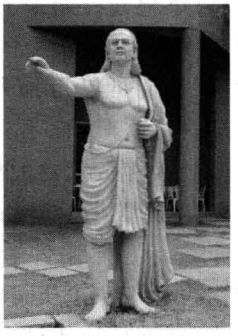


图1.6 阿耶波多雕像

阿耶波多(Āryabhatta,公元476—550年)被认为是印度数学和印度天文学古典时期的第一个伟大的数学家和天文学家。古希腊的学者假定眼睛是光的源泉,早期的印度哲学家也是这样假设的。在5世纪,阿耶波多多次指出了是来源于外界的光到达视网膜,才使我们看见周围的世界。如图1.6所示,这个阿耶波多的雕像位于印度浦那IUCAA(Inter-University Centre for Astronomy and Astrophysics)的空场上(见文献[9])。

伊本·阿尔·海赛姆(Ibn al-Haytham,公元965—1039年,经常被叫做阿尔哈增(Alhazen))出生于伊拉克(美索不达米亚)的巴士拉。图1.7是印有阿尔哈增头像的伊拉克10000第纳尔钞票的图案。阿尔哈增因为他那有巨大影响的《光学之书》(英语Book of Optics,阿拉伯语Kitab al-Manazir,拉丁语De Aspectibus or Perspectiva)被认为是"光学之父"。罗伯特·埃利奥特在评论他的这本著作时写道:

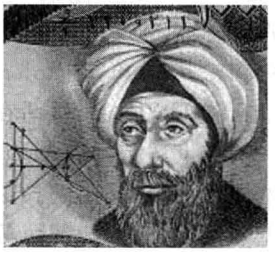


图1.7 印有阿尔哈增头像的钞票

阿尔哈增是有史以来光学的最能干的学生之一,他发表了7部关于光学的著作,这些著作在整个中世纪都非常有名,并极大地影响了西方思想家,特别是影响了罗吉

尔·培根和开普勒。他的著作讨论了柱面和球面的凹面镜和凸面镜、先于费马得到了费马最小时间原理、考察了透镜具有折射与放大的能力。这些著作还包含了对于眼睛这个光学系统的过人的、清晰的解释，他坚信光是来源于被看到物体发出的光线，而不是来源于眼睛中的光线。这个观点与欧几里得和托勒密的观点正好相反。

阿尔哈增还研究了小孔成一个倒像的现象，并指出了光是沿直线传播的。引用诺贝尔奖获得者阿卜杜勒萨拉姆的话说："伊本·阿尔·海赛姆是整个物理学时代最伟大的物理学家之一。他对光学实验的贡献是顶级的。他明确地指出了光线通过媒质时，选择的是更容易、更快的路径。他的这一论断早于费马发表最小时间原理许多个世纪……"罗吉尔·培根的著作《大著作》(Opus Majus)中的第 V 部分的内容就部分是伊本·阿尔·海赛姆光学著作的解读。有许多书都介绍了阿尔哈增的工作(参见参考文献[10])，关于阿尔哈增工作的部分讨论，可以在参考文献[11]中找到。

伊拉兹马斯·西奥莱克·维泰洛(Erazmus Ciolek Witelo，生于 1230 年，卒于 1275 年，见图 1.8)是神学家、物理学家、自然哲学家和数学家。维泰洛用拉丁语称呼自己为 Turingorum et Polonorum filius，意为"波兰与图林根的儿子"。维泰洛写了 10 卷本的有关光学的著作，名为《Perspectiva》，见图 1.9。这本著作大部分内容基于伊本·阿尔·海赛姆的工作，直到 17 世纪，它都是光学领域的标准教科书(见参考文献[12～15])。



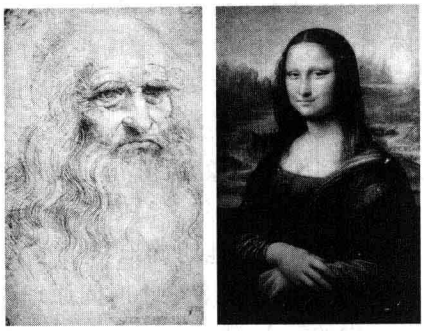
图 1.8　维泰洛头像



图 1.9　(Vitellonis Thuringopoloni opticae libri decem)《维泰洛的光学十卷书》一书的封面，参见参考文献[15]。

虽然阿尔哈增已经研究过小孔成像为倒立像，然而，第一个对于针孔照相机(camera obscura，成像暗箱)做出详细解释的是在**列奥纳多·达·芬奇**(图 1.10)手稿的大西洋古抄本(Codex atlanticus)里给出的(公元 1485 年)，达·芬奇曾经用它来研究绘画中的透视关系。1545 年，成像暗箱发表在《天文学的几何原理》(De radio astronomico et geometrico liber)这本书里。如图 1.11 所示，是荷兰物理学家和数学家赫马·弗里修斯用来解释他在 1544 年观察日食的情景。

开普勒(Johannes Kepler，生于 1571 年 12 月 27 日，卒于 1630 年 11 月 15 日)是德国数学家、天文学家和占星家，他是 17 世纪天文学革命的关键人物。如图 1.12 所示，他的肖像曾经印在德意志民主共和国(东德)的邮票上(见参考文献[19])。1604年，他发表了名为



(a) (b)

图 1.10

(a) 列奥纳多·达·芬奇在大约 1514 年画的自画像(Leonardo da Vinci,生于 1452 年 4 月 15 日,卒于 1519 年 5 月 2 日);(b) 他在 1503—1505 年间所画的著名的《蒙娜丽莎》(参见参考文献[16])。有些人相信是列奥纳多·达·芬奇第一次观察到衍射现象。

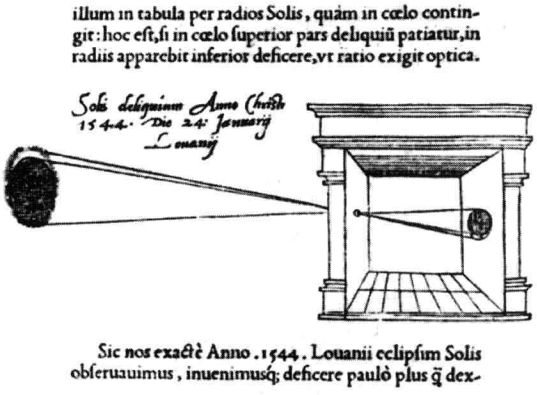


图 1.11 赫马·弗里修斯在 1544 年用来观察日食的成像暗箱



图 1.12 印有开普勒肖像的邮票

《对威蒂略的补充,天文光学说明》(Ad Vitellionem paralipomena, quibus Astronomiae pars optica traditur)一书,其英译本(由 William H. Donahue 翻译)已经于近期出版,名为《开普勒光学》(Johannes Kepler Optics)。在此书的宣传材料(见参考文献[20])中这样说道:"这本《光学》是在开普勒的最有创造力时期的作品。此书在开始时,试图为天文光学奠定一个坚实的基础,但是,随后很快就超越了这一狭窄的目标,变为重建完整的光的理论、视觉的哲学和折射的数学。这是一个具有非凡气息的工作,它非凡的意义超越了可能存在的大多数此类工作的意义。"David Lindberg 在评述这本书时这样写道:"Donahue 的这本书为研究开普勒的学者和早期光学史的研究者提供了具有巨大价值的服务,他对于用严格拉丁文写就的开普勒最伟大的著作进行了清晰易懂的翻译,这不但使人们能够随时了解开普勒在光学领域的成就,并且突显了开普勒的论点是那么清晰、严谨、具有说服力。"

汉斯·李普塞(立浦喜、利波塞、利伯希、利珀希,Hans Lippershey,生于 1570 年,卒于 1619 年 9 月,见图 1.13)是荷兰眼镜制造商。许多历史学家都相信,在 1608 年,李普塞看到两个小孩在他的商店用透镜在玩耍时,发现了通过两个透镜看到的像更加清晰,这激励他制造了第一

架望远镜。此外，一些史学家相信是伽利略发明了第一架望远镜，另一些史学家相信李普塞还发明了复式显微镜。关于这一点有许多相互矛盾的说法，可以参见参考文献[21,22]。

伽利略(生于 1564 年 2 月 15 日，卒于 1642 年 1 月 8 日，见图 1.14)经常被誉为“现代物理学之父”。1610 年，伽利略利用一个望远镜作为复式显微镜，并在 1623 年及之后，改进了多架显微镜。这似乎是第一个使用复式显微镜的清晰文字记载(图 1.15)。



图 1.13　李普塞的肖像

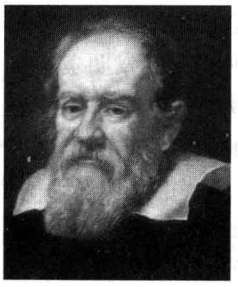


图 1.14　伽利略的肖像

斯涅耳(Willebrord Snell van Royen，1580—1626 年，见图 1.16)是荷兰天文学家和数学家。1621 年，他发现了折射定律，被称作斯涅耳定律。更细节的补充材料见参考文献[24]。

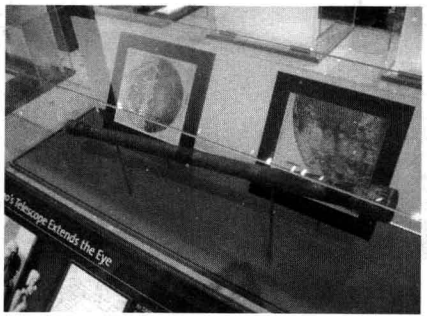


图 1.15　格里菲斯天文台展出的由伽利略制造的现存最早望远镜的复制品



图 1.16　斯涅耳的肖像

费马(Pierre de Fermat，1601 年 8 月 11 日—1665 年 1 月 12 日，见图 1.17)是法国数学家，他从来没有进入大学任职过。在写给 Cureau de la Chambre 的信中(1662 年 1 月 1 日)，费马通过光线经过的路径取最小时间的假定，证明了折射定律。费马原理遭遇了反对。在 1662 年 5 月，光学专家 Clerselier 写道：“作为你证明基础的原理，亦即自然总是表现出倾向取最短和最简单路径的行为，只是道德原则，而不是物理原理。它不是、也不能是任何自然效应的原因。”



图 1.17　费马的肖像

笛卡儿(René Descartes，1596 年 3 月 31 日—1650 年 2 月 11 日，见图 1.18)是具有极高影响力的法国哲学家、数学家、科学家和作家。笛卡儿在他名为《折光学》(也有翻译为《屈光学》，Dioptriuqe)的

(1637年[①])著作中给出了光传播的基本定律——反射定律和折射定律。他还提出了微粒模型,将光看成是一群圆形微粒(见参考文献[26～29])。在参考文献[29]中,已经证明:"笛卡儿对于斯涅耳定律富有洞察力的推导看起来几乎等价于牛顿应用机械粒子或微粒模型对其的推导"(牛顿在笛卡儿逝世时7岁)。

格里马尔迪(Francesco Maria Grimaldi,1618年4月—1663年12月28日,见图1.19)大约在1660年发现了光的衍射现象,并将其命名为"衍射(diffraction)",意思是"散开(breaking up)"。他用这样的描述来解释衍射现象:"光只能由某种以持续振动状态存在的细流组成。"他为后来衍射光栅的发明奠定了基础。他在著作《光的物理数学》(physico-mathesis de lumine,1666年)中,为光的波动理论建立了一种几何基本方法,正是这本著作吸引了牛顿去研究光学。牛顿在他的著作《光学》(Opticks,1704年)中的第Ⅲ部分讨论了格里马尔迪提出的衍射问题。胡克在1672年也观察到了衍射现象。进一步了解可见参考文献[30,31]。

胡克(Robert Hooke,英国皇家学会院士,1635年7月18日—1703年3月3日)。如图1.20所示这张胡克肖像来源于参考文献[32],但是未经确认[②]。胡克在1665年[③]的著作《显微术》(Micrographia)中第一次描述了"牛顿环"。这个环是以牛顿命名的,因为牛顿于1675年12月向皇家学会提交的一篇论文中解释了"牛顿环现象"(虽然解释得并不正确),并在他的著作《光学》(Opticks,1704)中更详细地做了解释。胡克还观察到了云母薄片的不同颜色,这个现象很久以后才通过干涉理论解释清楚。



图1.18 笛卡儿的肖像



图1.19 格里马尔迪的肖像

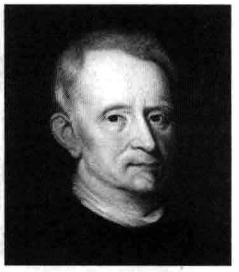


图1.20 存疑的胡克肖像

巴托林(巴托莱纳斯,Rasmus Bartholin,拉丁语为Erasmus Bartholinus,1625年8月13日—1698年11月4日,见图1.21)是丹麦科学家。1669年,他通过方解石晶体观察到双折射现象,并写了一篇60页的专题论文来讨论这一结果(图1.22是论文的第1页和第14页(见参考文献[33])),后来,又对其进行了解释和说明。

惠更斯(1629年4月14日—1695年7月8日,见图1.23)是荷兰数学家、天文学家和物理学家。1678年,他在向法国皇家科学院提交的一篇论文中,提出了光的波动理论。并特别论证了波动怎样相互干涉形成一个波前,并沿着直线传播(见参考文献[34])。1672年,

① 原著上写的是1638年,实际为1637年。译者注。

② 译者注:在维基百科上(参考文献[32])对这张肖像的说明是:"这张肖像里的人物在一个时期曾被认为是胡克,但现在几乎可以肯定是海耳蒙特(Jan Baptist van Helmont,比利时化学家、生理学家和医学家)。"似乎本书作者倾向于这是胡克的肖像。

③ 译者注:原著为"1664年",但是实际上为1665年。见参考文献[32]。



图 1.21　巴托林的肖像


ERASMI BARTHOLINI
EXPERIMENTA
CRYSTALLI ISLANDICI
DISDIACLASTICI
Quibus mira & insolita
REFRACTIO
detegitur.
ANNO 1670.
HAFNIÆ,
Sumptibus DANIELIS PAULLI Reg. Bibl.

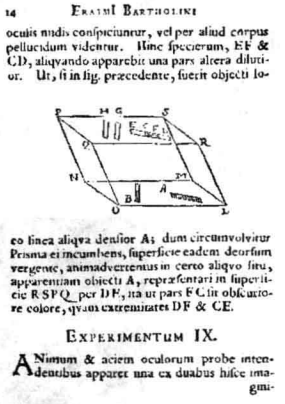

14　ERASMI BARTHOLINI
oculis nudis conspiciuntur, vel per aliud corpus pellucidum videntur. Hinc specierum, EF & GD, aliquando apparebit una pars altera dilutior. Ut, si in fig. præcedente, fuerit objecti lo-
eo linea aliqua denior A; dum circumvolvitur Prisma ei incumbens, superficie eadem deorsum vergente, animadvertemus in certo aliquo situ, apparentiam objecti A, repræsentari in superficie RSFQ per DF, ita ut pars FC ejus obscuriore colore, quam extremitates DF & CE.
EXPERIMENTUM IX.
ANimum & aciem oculorum probe intendentibus apparet una ex duabus hisce imagi-

图 1.22　巴托林论文的第 1 页和第 14 页

惠更斯给出了理论去解释巴托林于 1669 年发现的双折射现象。1690 年，他发表了著名的著作《光论》(Traite de la Lumiere)，这本著作的英文版有多佛尔出版社重印版可以参考(见参考文献[35])，并可在文献[36]所示的网页上读到本书全文。图 1.24 所示为此书的第 1 页。



图 1.23　惠更斯的肖像

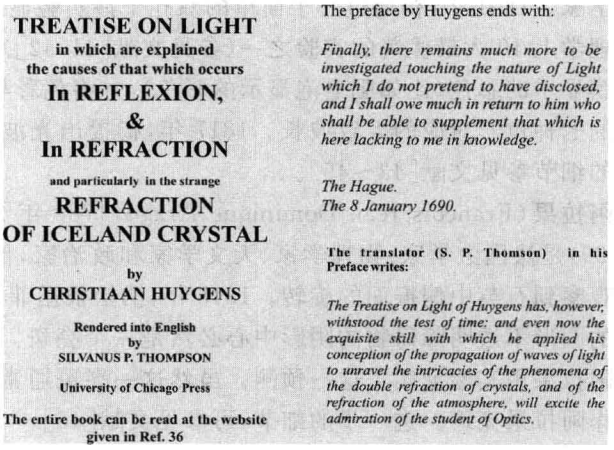

TREATISE ON LIGHT
in which are explained
the causes of that which occurs
In REFLEXION,
&
In REFRACTION
and particularly in the strange
REFRACTION
OF ICELAND CRYSTAL
by
CHRISTIAAN HUYGENS
Rendered into English
by
SILVANUS P. THOMPSON
University of Chicago Press
The entire book can be read at the website given in Ref. 36
The preface by Huygens ends with:
Finally, there remains much more to be investigated touching the nature of Light which I do not pretend to have disclosed, and I shall owe much in return to him who shall be able to supplement that which is here lacking to me in knowledge.
The Hague.
The 8 January 1690.
The translator (S. P. Thomson) in his Preface writes:
The Treatise on Light of Huygens has, however, withstood the test of time: and even now the exquisite skill with which he applied his conception of the propagation of waves of light to unravel the intricacies of the phenomena of the double refraction of crystals, and of the refraction of the atmosphere, will excite the admiration of the student of Optics.

图 1.24　《光论》的第 1 页

罗麦(Ole Christensen Rϕmer，1644 年 9 月 25 日—1710 年 9 月 19 日，见图 1.25)是丹麦天文学家，他于 1676 年第一次定量地测量了光速。详见参考文献[37]。

牛顿爵士(Sir Isaac Newton，1643 年 1 月 4 日—1727 年 3 月 31 日)被誉为科学史上最伟大的科学家之一(详见参考文献[38])。他除了对科学与数学做出了巨大贡献以外，还系统地研究了光现象，并在 1704 年出版的著作《光学》(Opticks)中做了详细的论述。该书的第 4 版有多佛尔出版社重印版可以参考(参见文献[39])，也可以在文献[40]给出的网页上看到。



图 1.25　罗麦的肖像

图 1.26 和图 1.27 分别是牛顿爵士所著《光学》的第 1 版和第 4 版的封面，该书也名为“论光的反射、折射、偏折与颜色”。在这本

书中,牛顿对于他关于色散的实验进行了描述,该实验于 1672 年首次报道。所谓色散,就是光分散到其不同颜色组分的一个光谱。格里马尔迪在早些时候就观察到光可以进入到一根针的阴影中。牛顿的解释为针施加了一个拉力,使光偏离了直线的路径。胡克在早些时候观察到薄云母片显现出不同的颜色,牛顿的解释为"源于光线易于透射的变化倾向和易于反射的变化倾向"。

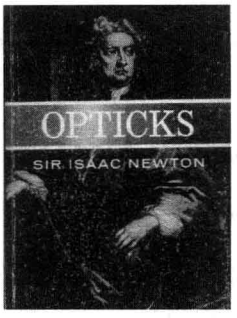


图 1.26　多佛尔出版社重印的牛顿《光学》第 4 版的封面

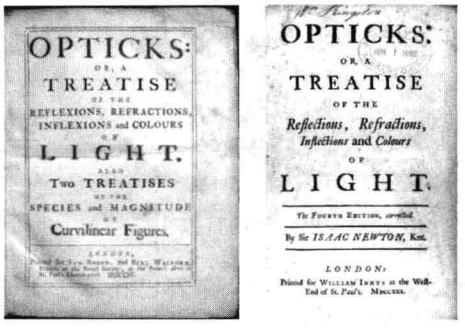


图 1.27　《光学》第 1 版和第 4 版的封面

托马斯·杨(Thomas Young,1773 年 6 月 13 日—1829 年 5 月 10 日,见图 1.28)为英国科学家。1801 年,杨通过一个简单的双孔干涉实验显示了光的波动性。这个实验被认为是物理学上 10 大最优美的实验之一(参见文献[41,42])。托马斯·杨用他的波动理论解释了薄膜显示的彩色(比如肥皂泡显示的彩色),并将色彩与波长联系起来,并计算出牛顿所辨识出的七种色彩对应的大致波长。1817 年,杨提出光波是横波,从而解释了偏振现象。进一步的细节参见文献[43～45]。

阿拉果(François Jean Dominique Arago,1786 年 2 月 26 日—1853 年 10 月 2 日,见图 1.29)是法国数学家、物理学家、天文学家和政治家,他是法国第 25 届总理。1811 年,阿拉果观察到石英中偏振面的旋转。1818 年,泊松根据菲涅尔的理论推导出结论——一个被照射的圆形不透明障碍物的阴影中心必然是一个亮斑。泊松原想用此结果否定波动理论,然而阿拉果用实验证实了这一预测。虽然这一亮斑通常被叫做泊松亮斑,但也有许多人把它称作阿拉果亮斑。进一步的细节,可参见文献[46]。



图 1.28　杨的肖像



图 1.29　阿拉果的肖像



图 1.30　夫琅禾费的肖像

夫琅禾费(Joseph von Fraunhofer,1787 年 3 月 6 日—1826 年 6 月 7 日,见图 1.30)是德国的眼睛配镜技师。1814 年,夫琅禾费发明了光谱仪,并在太阳光谱中发现了 574 条暗线,这些光谱暗线被称作夫琅禾费谱线。1859 年,基尔霍夫(Kirchhoff)和班森(Bunsen)将

这些光谱暗线解释为原子吸收谱线。1823 年，夫琅禾费发表了他的衍射理论。此外，他还发明了光栅，并进行了光的波长的精确测量。进一步的细节可参见文献[47]。

菲涅尔(Augustin-Jean Fresnel，1788 年 5 月 10 日—1827 年 7 月 14 日，见图 1.31)是法国物理学家，他最有意义的贡献是建立了光的波动理论。1818 年，菲涅尔发表关于衍射的专题论文，并于第二年在巴黎获得了法国皇家科学院的大奖。1819 年，他被推荐为法国灯塔照明改组委员会委员，期间他第一次制作了一个特殊的透镜，用来替代灯塔上的反射镜，现在这种透镜被称为菲涅尔透镜。到了 1821 年，菲涅尔通过数学方法，证明了只有光波是横波，才能解释偏振现象。进一步的细节可参见文献[48]。



图 1.31　菲涅尔的肖像

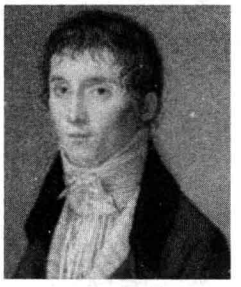


图 1.32　涅普斯的肖像

约瑟夫·尼塞福尔·涅普斯(Joseph Nicephore Niepce，1765 年 3 月 7 日—1833 年 7 月 5 日，见图 1.32，图 1.33)是法国发明家，也是摄影术发明的先驱。

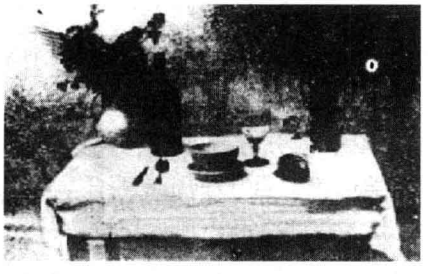


图 1.33　摄影术的诞生：涅普斯于 1822 年拍摄的照片“准备餐桌(La Table Servie)”[①](参见文献[49,50])。



图 1.34　法拉第的肖像

法拉第(Michael Faraday，1791 年 9 月 22 日—1867 年 8 月 25 日，见图 1.34)在电磁场和电化学领域做出了非常有意义的贡献。法拉第提出并证实了变化的磁场会产生一个电场，这个关系随后成为麦克斯韦方程组四个方程中的一个方程，称为法拉第电磁感应定律。1845 年，法拉第发现了一个如今称为法拉第旋光的现象，在这个实验中，线偏振光通过一材

① 译者注：涅普斯 1822 年拍摄的世界第一张永久性照片(无透镜拍摄)是画有教皇庇护七世的雕刻版画。可惜涅普斯在试图复印它时被损坏了。而第一张用照相机拍摄的永久性照片是涅普斯在 1826 年拍摄的“View from the Window at Le Gras”。这里给出的照片“准备餐桌”应该是涅普斯 1827 年的作品。参见文献[49]以及网页 http://www.lensrentals.com/blog/2011/04/the-chemists-the-potter-and-the-aristocrat-attempts-at-photography-before-the-invention-of-the-camera

料媒质,当外加一个与光传播方向一致的磁场时,该线偏振光的偏振面会发生旋转。如图1.34所示,法拉第手持一根玻璃棒,这正是他于1845年用来演示法拉第旋光效应的那根玻璃棒。该实验证实了磁力与光是相联系的。法拉第在他的笔记中这样写道:“我最终成功地磁化了一根光线……”(文献[51])

1809年**马吕斯**(Malus,见图1.35)发表了他的一个发现——反射光的偏振,然而,他未能得到起偏角与折射率的关系。1811年,戴维·布儒斯特(David Brewster,见图1.36)重复了马吕斯的实验,并用许多材料进行了重复实验。他认识到,当反射光变为线偏振后,反射光线与折射光线呈90°。他迅速地将这个规律命名为**布儒斯特定律**。马吕斯最出名的是那个以他命名的定律,该定律表述为通过两个偏振片的光强正比于两个偏振片夹角余弦的平方。在1810年,马吕斯发表了他关于晶体中的双折射的理论。进一步的细节参见文献[52,53]。



图1.35 马吕斯(Etienne Louis Malus,1775年7月23日—1812年2月24日)法国工程师、物理学家和数学家



图1.36 布儒斯特(David Brewster,英国皇家学会院士,1781年12月11日—1868年2月10日)苏格兰科学家

麦克斯韦(James Clerk Maxwell,1831年6月13日—1879年11月5日)是杰出的苏格兰数学家和理论物理学家。大约在1865年,麦克斯韦证明了电和磁的定律可以用被称为麦克斯韦方程组的4个微分方程来描述。这4个方程在他于1873年出版的《电磁学通论》(A Treatise on Electricity and Magnetism,图1.37)中给出。麦克斯韦还预言了电磁波的存在(后来被赫兹观察到),并且证明了电磁波的速度几乎等于(当时)测量的光速值,这引导他预言出光必然是一种电磁波。1864年他写道:“这个速度是这样接近光的速度,这使我们有足够理由得出结论:光自身(包括热辐射和其他辐射)是一种电磁扰动,它以电磁波的形式通过遵循电磁定律的电磁场传播。”

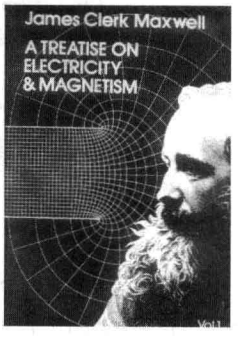


图1.37 麦克斯韦《电磁学通论》封面

这种对电、磁、光现象的综合理论代表了19世纪最伟大的科学成就之一。1931年,(在纪念麦克斯韦诞辰仪式上)普朗克赞扬道:“(麦克斯韦的理论)……作为最伟大的人类智慧的结晶,地位将一直保持不变。”爱因斯坦也曾经赞道:“(麦克斯韦的工作是)……自牛顿以来物理学经历的最深刻的最富有成果的工作。”关于麦克斯韦更详细的介绍可以参见文献[54,55]。一些麦克斯韦的原始论文可以在文献[56]的网站上找到。

1869年,**约翰·廷德尔**(见图1.38)发现当光束通过有小粒子悬浮的液体(比如在水中

放一点牛奶)时,短波长的蓝色光比红色光散射得更厉害。因此,从侧面看上去光束呈蓝色,而直接穿透过去的光束呈红色。虽然有许多人称这种现象为廷德尔散射,但是人们更经常地称其为瑞利散射,因为**瑞利爵士**(见图 1.39)在 1871 年更加细致地研究了这种现象,并且证明了散射强度与散射光波长的 4 次方成反比(参见文献[57～59])。因此,蓝色光的散射光强度是红色光的 10 倍(因为红色光的波长大约为蓝色光的 1.75 倍),这就是天空呈现蓝色的原因。虽然紫色光的波长更短,但在太阳光中,紫色光占的份额非常小。瑞利爵士的一些科学论文可以在文献[60]给出的网页上看到。瑞利爵士于 1904 年获得诺贝尔奖。

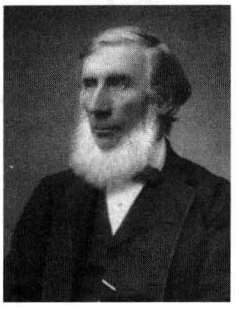


图 1.38　约翰·廷德尔(1820 年 8 月 2 日—1893 年 12 月 4 日)爱尔兰自然哲学家

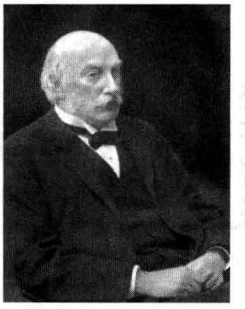


图 1.39　约翰·斯特拉特——经常被称为瑞利爵士(1842 年 11 月 12 日—1919 年 6 月 30 日)

1854 年,约翰·廷德尔演示了喷射水流可以导光,该实验重复了巴比涅的实验,却没有在论文中致谢巴比涅(细节见文献[62])。

赫兹(Heinrich Rudolf Hertz,1857 年 2 月 22 日—1894 年 1 月 1 日,图 1.40)是德国物理学家,国际单位制中频率的单位赫兹以他的名字命名(参见文献[62])。这里引用了文献[63]中的描述:

1888 年,在柏林卡尔斯鲁厄理工学院物理教室的一个角落里,赫兹用一个电路产生了电波。这个电路包含一个中间有一个间隙的金属棒,当经过这个间隙打火花时,激烈的高频振荡在金属棒中产生。赫兹证明,这一振荡引起的波动在空气中传播,可以用放置不远处的另一小电路探测到。他还证明了这个电波像光波一样,也可以有反射与折射现象,特别重要的是,它的传播速度与光速是一样的,只是波长比光波长得多。这种波最初叫做赫兹波,但是现在被称作无线电波。赫兹对无线电波存在的实验证明确凿地证实了麦克斯韦对于电磁波存在的预言,光波可以是电磁波的一种形式,无线电波也可以是电磁波的一种形式。

赫兹是一个很谦逊的人,在他做了上述发现后说道:“这个实验只是证明了麦克斯韦的预言是正确的,虽然我们肉眼看不到这种神奇的电磁波,但是它们确实存在。”“那下一步该是什么?”波恩大学他的一个学生问。“我猜,没有。”赫兹在后来曾经说:“我没有想到我发现的无线电波有什么实际应用。”

我们在此应该提及一下,在 1842 年(此时麦克斯韦 11 岁),美国物理学家约瑟夫·亨利(Joseph Henry)曾经利用一个火花磁化了相隔 30 英尺(中间隔着两层楼板,每个楼板 14in 厚)的一根针。但是,约瑟夫·亨利没有意识到他已经产生和探测到了电磁波。更为详细的内容可以参见比如 David Park 的书(文献[64])和 Park 书中对亨利原始论文的选录。

赫兹还是第一个发现光电效应的科学家。1887年,在利用具有火花间隙的线圈接收电磁波的实验中,他发现当将整个装置放在黑盒子中时,火花长度变短了(这是因为黑盒子吸收了紫外线,而紫外线可以帮助电子穿越间隙)。赫兹报道了他的发现,但是并没有继续深入研究,也没有试图解释这一现象。1897年,J. J. 汤姆孙发现了电子,并于1899年证实了当光照射在金属表面时,会发射电子。1902年,飞利浦·莱纳德(Philip Lenard)观察到所发射电子的动能与入射光强度无关;以及当入射光频率增大时,所发射电子的能量也将随之增大。



图1.40 在墨西哥邮票上的赫兹与麦克斯韦(文献[65])

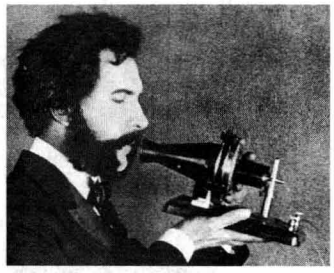


图1.41 贝尔的照片

图1.41所示为**亚历山大·格雷厄姆·贝尔**(Alexander Graham Bell,1847年3月3日—1922年8月2日)在1876年的照片,他正在对着电话样机模型说着话(文献[66])。他在爱丁堡出生并长大,并于1870年移民加拿大,接着于1871年移民美国。光话机(photophone,也叫radiophone)是贝尔与他的助手查尔斯·萨姆纳·泰恩特(Charles Sumner Tainter)于1880年2月19日联合发明的。贝尔认为光话机是他最重要的发明。

迈克耳孙(Albert Abraham Michelson,1852年12月19日—1931年5月9日,见图1.42)出生于普鲁士的小镇史翠诺(Strelno,Prussia),两岁时随家移居美国。迈克耳孙设计制造了著名的干涉仪,后来被称作迈克耳孙干涉仪。他于1907年获得诺贝尔物理学奖(他是科学上第一个获得诺贝尔奖的美国公民),获奖原因是他制造的光学精密仪器迈克耳孙干涉仪,以及借助这台仪器进行的光谱和基本度量学方面的研究。瑞典皇家科学院主席在他获奖时致辞说:"……你的光学干涉仪使我们不借助特定材料作为长度标准成为可能,并且达到了从来没有的精度。利用这种方法,我们可以保证'米原器'在长度上保持不变,即使假定它变短了,也可以恢复它,并使其不产生误差。"1887年,迈克耳孙与莫雷进行了著名的迈克耳孙-莫雷实验,证实了以太并不存在。David Park(文献[64])曾经写道:"他(迈克耳孙)证实找不到以太的这一事实时只有34岁,但他仍然将这种精巧的光学测量实验进行了44年多,而且直到死,他也不相信会有一种不需要某种媒质搭载的波在传播。"



图1.42 迈克耳孙的照片

法布里(Maurice Paul Auguste Charles Fabry,1867年6月—1945年7月9日,见图1.43)和**珀罗**(Jean-Baptiste Alfred Pérot,1863年11月3日—1925年11月28日,见图1.44)是法国物理学家。1897年,法布里和珀罗合作发表了一篇文章,是关于他们发明的一种光学仪器的讨论,这种仪器现在被我们称作法布里-珀罗干涉仪。细节请参考文献[68]。



图 1.43　法布里的照片



图 1.44　珀罗的照片

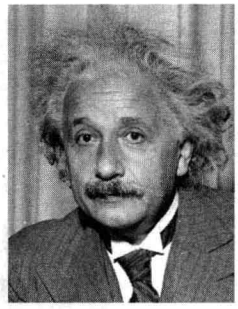


图 1.45　爱因斯坦的照片

爱因斯坦(Albert Einstain,1879 年 3 月 14 日—1955 年 4 月 18 日,见图 1.45)是一位杰出的理论物理学家。图 1.46 所示的照片是马克斯·普朗克于 1929 年 6 月 28 日在柏林因爱因斯坦在理论物理学领域所做出的卓越成就向他颁发马克斯·普朗克奖章(文献[69])。爱因斯坦由于他的相对论,特别是质量-能量等价式 $E=mc^2$ 而闻名天下。1905 年,爱因斯坦提出光是由能量量子组成,这最终导致了量子理论的发展。1917 年,在一篇名为《关于辐射的量子理论》的论文中,在对普朗克定律重新推导的过程中,爱因斯坦预言了受激辐射的过程。大约 40 年后,这一预言导致了激光的发展。1921 年,因其对理论物理学的贡献,特别是对光电效应的解释,爱因斯坦获得了诺贝尔物理学奖。2005 年是"爱因斯坦奇迹之年"的百年之际,Mukunda 教授在一次关于爱因斯坦生平和遗产的讲演中说道:"如何结束这个讲演呢?最好的方式是用爱因斯坦 1939 年评论甘地的一段话来结尾:'后世的子孙也许很难相信,曾经有这样一个血肉之躯曾经在地球上匆匆走过'。"

爱因斯坦还是一个人道主义者和圣雄甘地的崇拜者。对于甘地(图 1.47,图 1.48),他曾经这样评述:

我相信,甘地的观点代表了我们这一时代所有开明的政治家的观点。我们必须按照他的精神去奋斗:不因为我们的任何理由而选择暴力,对你认为邪恶的事,只要不予合作就够了。



图 1.46　普朗克向爱因斯坦颁奖

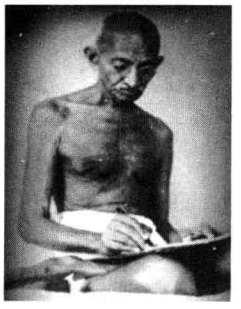


图 1.47　甘地的照片

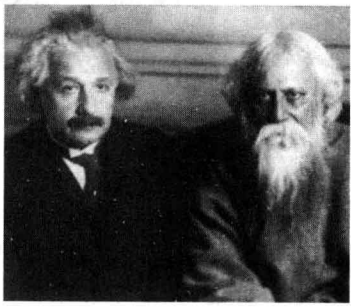


图 1.48　1930 年 7 月 14 日会面时的爱因斯坦和泰戈尔的合照

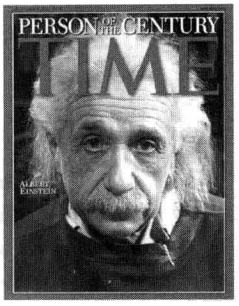


图 1.49　1999 年爱因斯坦被《时代周刊》评选为世纪伟人。该期的主要文章(lead article)评价:“他是纯粹知识分子的化身”。

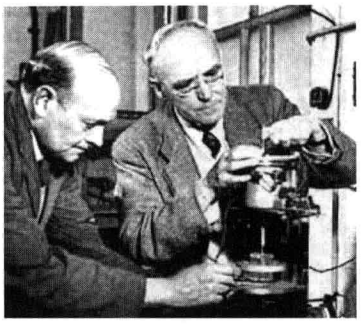


图 1.50　泰勒和他的助手汤普森

如图 1.50 所示,照片中右边的是杰弗里·英格拉姆·泰勒(1886 年 3 月 7 日—1975 年 6 月 27 日),左边的是他的助手沃尔特·汤普森,照片来自文献[71]。1909 年,泰勒用一个强度极微弱的光源产生了干涉条纹。这个引发了诺贝尔物理学奖获得者狄拉克说出他那句著名的言论:“每个光子只和它自己干涉”。泰勒常常被誉为 20 世纪最伟大的物理学家之一。细节参见文献[72,73]。

威廉·劳伦斯·布拉格(见图 1.52)发现了非常著名的布拉格定律,这使得利用晶格对 X 射线散射计算晶体中原子位置成为可能。这个定律是于 1912 年他在剑桥大学研究生第一年时发现的,他与他父亲(威廉·亨利·布拉格,见图 1.51)讨论了他的想法。威廉·亨利·布拉格曾经在利兹制造了 X 射线谱仪。1915 年,他们父子因为利用 X 射线分析晶体结构的贡献,共同获得诺贝尔物理学奖。父子之间的研究合作使得许多人相信是父亲引领了他们的研究,这使得儿子十分烦恼(见文献[74])。



图 1.51　威廉·亨利·布拉格(1862 年 7 月 2 日—1942 年 3 月 10 日)



图 1.52　威廉·劳伦斯·布拉格(1890 年 3 月 31 日—1971 年 7 月 1 日)

康普顿(Arthur Holly Compton,1892 年 9 月 10 日—1962 年 3 月 15 日)于 1936 年 1 月 13 日上了时代周刊的封面(见图 1.53)。1922 年,康普顿发现 X 射线或者伽马光子当被自由电子散射时,能量会减少。这个被称为康普顿效应的发现显示了光的粒子特性。康普顿因为以他名字而命名的康普顿效应发现,获得 1927 年的诺贝尔物理学奖。康普顿的一些研究论文可以在文献[76]给出的网页上找到。

德布罗意(Louis de Broglie,1892 年 8 月 15 日—1987 年 3 月 19 日)是法国物理学家。如图 1.54 所示的照片,来源于文献[77]。1927 年,德布罗意阐述了德布罗意假设,他断言不仅是光,所有物质都有类似波的属性,并将波长与动量联系起来。关于电子的德布罗意公式在三年后由 2 个独立发现的电子衍射实验证实。德布罗意因为对电子波动性的发现,获得 1929 年的诺贝尔物理学奖,并在获奖发言中提到,物质在本质上是一种波动。那时,尽管没有任何支持这一理论的事实,德布罗意依旧断言,当一束电子流经过一阻挡屏上的一个小孔时,必然在相同条件下表现出像光一样的(衍射)现象。



图 1.53　时代周刊封面上的康普顿



图 1.54　德布罗意的照片

狄拉克(Paul Adrien Maurice Dirac,1902 年 8 月 8 日—1984 年 10 月 20 日)和**海森堡**(Werner Karl Heisenberg,1901 年 12 月 5 日—1976 年 2 月 1 日)都是著名的理论物理学家(图 1.55)。海森堡是量子力学的奠基人之一,他还因为发现海森堡测不准原理而闻名,该原理是现代物理中心原理之一,它是在海森堡于 1927 年发表的一篇论文中建立的。(这个从量子力学规律直接推导出来的)测不准原理可以用来解释光子(或电子)的衍射。狄拉克被认为建立了完整的量子力学理论的公式化表述。爱因斯坦曾经说:“我认为量子力学在逻辑上最完善的描述应归功于狄拉克。”狄拉克在他著名的《量子力学原理》中写道:

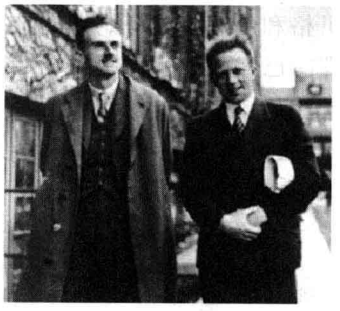


图 1.55　狄拉克(左)与海森堡(右)

在量子力学发现前不久,人们的认识是光波与光子之间的联系必然表现出统计特征。然而,他们并没有清楚地理解到,波函数告诉我们的是光子处于一特定位置的概率,而不是处于那一位置的可能的光子数。这一区别的重要性可以用下面的方法看清楚。假设有一束包含大量光子的光束被分为两束强度相同的组分。按照光束的强度与其中可能包含的光子数相联系的假定,我们就会得到,光子总数的一半被分到每一个组分中。现在如果使这两个组分互相干涉,我们就得要求一个组分中的一个光子能够与另一组分中的一个光子互相干涉。在某种情况下,这两个光子有可能相互抵消,而在另一些情况下,它们又有可能产生四个光子。这样一来,就与能量守恒相矛盾了。而将波函数与一个光子的概率联系在一起的新理论,就可以克服这一困难。根据这一理论,每一个光子是部分地处于每一个组分。这样,每一个光子只与它自己发生干涉,而不会出现两个不同光子之间发生干涉。

狄拉克被广泛认可为史上最伟大的物理学家之一。根据文献[78],狄拉克并不信上帝。

他曾经说："上帝用数学创造世界。"但是他在这里说的"上帝"实际上隐喻的是自然界。海森堡曾回忆在1927年的索尔维会议上，一群年轻的参会者在讨论爱因斯坦和普朗克对于宗教的观点时，有这样一段朋友间的对话。泡利、海森堡和狄拉克都是参与者。除了其他议题以外，狄拉克说，"我不明白为什么闲得没事讨论宗教问题。如果我们是诚实的——作为科学家，诚实是我们的天职——我们不得不承认宗教是一堆假话，一点没有真实的基础。上帝的思想是人们想象的产物……我不承认宗教神话，至少它们总是相互矛盾的……"。泡利开玩笑地说："看啊，我们的朋友狄拉克创造了一种宗教，他的第一条戒律就是：上帝根本不存在，而狄拉克是他的先知。"(见文献[79])

1928年2月28日，**克里施南**(见图1.57)与**拉曼**(见图1.56)在几种有机蒸汽(如戊烷蒸汽)中观察到了"拉曼效应"，他们称其为"新的散射辐射"。拉曼于1928年2月29日在报纸上作了声明，并于1928年3月8日向自然杂志提交了题为《光散射中的波长变化》的文章。文章在1928年4月21日得以发表。虽然拉曼在文章中说明是克里施南和他一起做的实验观察，但是由于拉曼是该文的作者，此现象渐渐地被人们称作"拉曼效应"。但是还是有许多科学家(特别是印度科学家)坚持称其为"拉曼-克里施南效应"。拉曼与克里施南随后又撰写了几篇相关文章。拉曼因其光散射的工作和以他名字命名的效应获得了1930年的诺贝尔物理学奖。几乎在同时，俄罗斯的兰茨贝格(Landsberg)和曼德尔施塔姆(Mandel'shtam)也在做光散射的研究。据曼德尔施塔姆说，他们在1928年2月21日观察到了"拉曼谱线"，但是完整的实验结果在1928年4月才陆陆续续呈现出来。直到1928年5月6日兰兹贝格和曼德尔施塔姆才将实验结果提交给《自然和科学杂志》(Naturwissenschaften)，但是那时已经太晚了。很久以后，俄罗斯一直将"拉曼散射"称作"曼德尔施塔姆-拉曼散射"。关于拉曼效应历史的细致解释，我们推荐读者参考文献[80]。拉曼效应发现于1928年，70年后，它成为光纤通信系统信号放大的重要机制。今天，我们仍不时地在光纤中提到拉曼放大。



图1.56　拉曼(Chandrasekhara Venkata Raman，1888年11月7日—1970年11月21日)



图1.57　克里施南(Rariamanikkam Srinivasa Krishnan，1898年12月4日—1961年6月13日)

丹尼斯·伽柏(Dennis Gabor，生于1900年6月5日，布达佩斯，卒于1979年2月9日，伦敦)。图1.58所示为1988年匈牙利为纪念伽柏而发行的邮票(来源于文献[81])。1947年，当伽柏在英国汤姆森-休斯敦公司做电子光学领域的研究时，发明了全息术，并于1971年因为他发明及发展了全息术而获得了诺贝尔物理学奖。然而，全息领域只是在1960年激

光发明后才得到了大的发展。最早记录 3 维的全息照片是 1963 年由美国密歇根大学的利斯(Emmett Leith)与帕特尼克斯(Juris Upatnieks),以及苏联的丹尼苏克(Yuri Denisyuk)制作的。

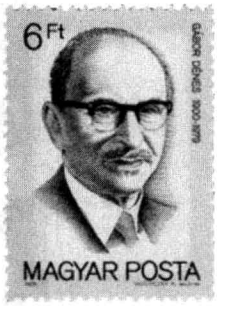
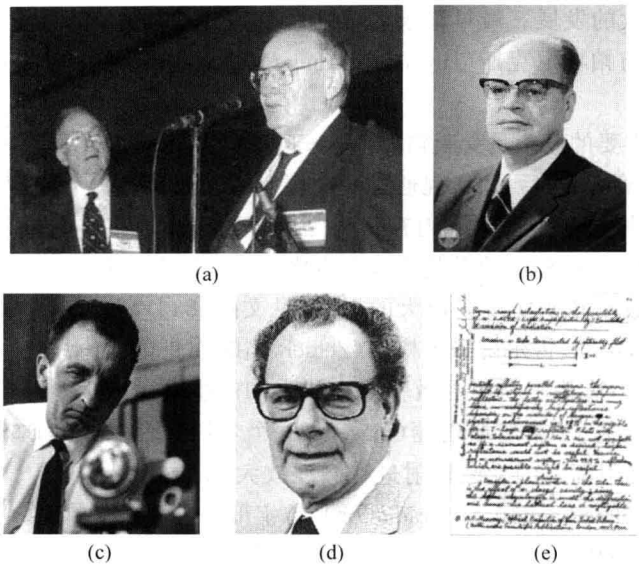


图 1.58　伽柏的纪念邮票

激光产生的最重要的概念是受激辐射,它是于 1917 年由爱因斯坦提出的,然而直到 35 年后,才实现通过受激辐射的光放大,这主要是由于在很长的时间里,受激辐射被认为是纯理论概念而很难被观察到。在正常条件下,吸收总是比辐射占优势。1951 年,汤斯构想出利用布居数反转来实现光放大的思想(见文献[83]),并于 1954 年早些时候,汤斯、古尔德和齐格尔(Zeiger,当时在哥伦比亚大学物理系)发表一篇关于利用受激辐射来放大和产生电磁波方法的文章。他们创造了"微波激射器(maser)"这个术语来命名这种装置,它是由"利用辐射的受激辐射进行微波放大(microwave amplification by stimulated emission of radiation)"首字母组成的缩略单词。几乎在同时,在莫斯科的列别捷夫研究所的巴索夫(见图 1.59(b))和普罗霍罗夫(见图 1.59(c))也独立地发表了有关微波激射器的文章。1958 年,肖洛和汤斯在《物理评论》上发表了题为"红外和光频微波激射器"的文章,说明了对于更短的波长受激辐射怎样实现,并描述了光频微波激射器(后来被重新命名为激光(laser))的基本原理,从而使这一新兴的科学领域得以发展。汤斯、巴索夫和普罗霍罗夫分享了 1964 年的诺贝尔物理学奖,获奖原因是他们在量子电子学领域的基础工作,根据这些基础工作,致使基于微波激射-光波激射原理的振荡器和放大器研制成功。该年诺贝尔物理学奖的一半授予汤斯,另一半授予巴索夫和普罗霍罗夫。肖洛很晚才获得诺贝尔奖,他在 1981 年与布隆姆贝根以及凯·西格班分享了诺贝尔物理学奖,获奖原因是他们在建立激光光谱学方面的贡献。然而,许多人相信戈登·古尔德(当时他是哥伦比亚大学的研究生,见图 1.59(d))是激光的发明者。古尔德在他的有关激光笔记本的第一页(见图 1.59(e)于 1957 年纪录的),创造了由首字母组成的缩略单词"LASER(激光)",并且描述了激光器的基本组件。实际上,术语"laser"的首次出现是源于古尔德在 1959 年的一篇会议文章,题为"激光-辐射的受激辐射光放大"(The LASER, Light Amplification by Stimulated emission of Radiation)。古尔德与美国专利和商标局打了 30 年官司,就是为了激光发明者身份的认证。细节请参考比如 Taylar(文献[84])和 Bertolotti(文献[85])写的书。Bertolotti 书中一部分可以在文献[86]给出的网站上读到。

如图 1.60(a),(b)所示,是**西奥多·哈罗德·梅曼**(Theodore Harold Maiman,1927 年 7 月11 日—2007 年5 月 5 日)和他制作的第一台红宝石激光器的结构。在《自然杂志的一个世纪:改变科学与世界的 21 项发现》(A Century of Nature: Twenty-One Discoveries that Changed Science and the World)一书中,汤斯撰写了一篇题为"第一台激光器"的文章(文献[88])。这篇文章中写道:"西奥多·哈罗德·梅曼于 1960 年 5 月 16 日在加利福尼亚州的休斯飞机公司的实验室里,通过一个高功率闪光灯照射一个两端镀银的红宝石棒,使第一台激光器运行起来。他马上将这一工作写成短讯投稿给《物理评论快报》(Physical Review Letters),但是被编辑拒稿了。有些人认为,这是因为《物理评论》杂志声称他们收到了太多有关微波激射器(即激光器在长波长波段的前任器件)的稿件,今后任何相关稿件都将被拒稿。但是据当时的《物理评论快报》杂志编辑 Simon Pasternack 说,他之所以拒绝了这一历

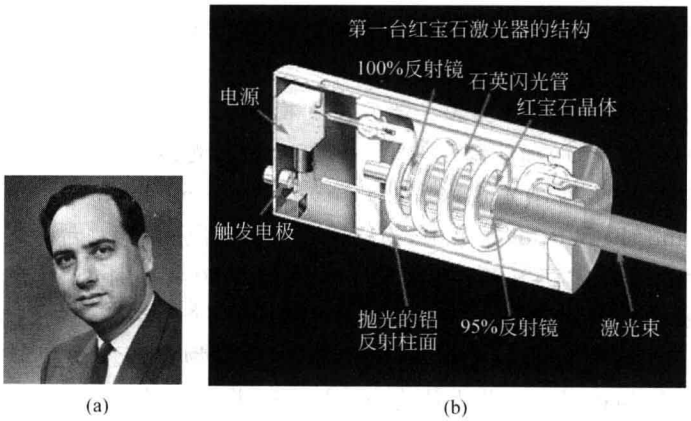


(a) (b) (c) (d) (e)

图 1.59

(a) **汤斯**(Charles Hard Townes,生于1915年7月28日)和(他的妹夫)**肖洛**(Arthur Leonard Schowlow,1921年5月5日—1999年4月28日)是美国物理学家,他们同时出现在1998年在旧金山召开的CLEO大会的"激光发明"40周年纪念仪式的现场;(b) **巴索夫**(Nikolay Gennadiyevich Basov,1922年12月14日—2001年7月1日),俄国物理学家和教育家;(c) **普罗霍罗夫**(Aleksandr Mikhailovich Prokhorov,1916年7月11日—2002年1月8日),生于澳大利亚的俄罗斯物理学家;(d) **戈登·古尔德**(Gordon Could,1920年7月11日—2005年9月16日),美国物理学家;(e) 古尔德关于激光笔记的第1页,记录于1957年。以上材料改编自文献[82]。

史性稿件的发表,是因为梅曼在1960年6月刚刚发表一篇论文,是关于利用光激励红宝石晶体,其中考察了量子态之间的跃迁的弛豫时间。而他的新工作似乎没有什么不同。Pasternack的态度也许反映了当时人们对于激光的本质和意义理解的不足。梅曼渴望他的工作尽快发表,他将稿件转投了《自然》杂志,通常人们认为该杂志比《物理评论快报》对文章更加挑剔。而梅曼的文章被顺利接受,并于8月6日发表。"



(a) (b)

图 1.60

(a) 梅曼的照片;(b) 红宝石激光器的结构

1960 年 12 月 12 日，**贾万**(Ali Javan)、**本内特**(William Bennett)和**赫里奥特**(Donald Herriott)制造出连续输出激光(1.15μm 波长)的气体激光器(图 1.61，文献[89,90])。

1961 年，第一台激光器诞生一年后，**史尼泽**(Elias Snitzer，见图 1.62)和他的同事们制造出第一台光纤激光器。史尼泽还发明了钕和铒掺杂的激光玻璃，对此可参见文献[91,92]。

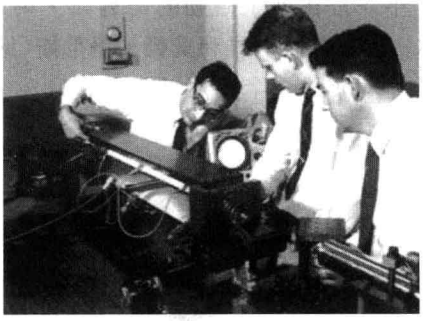


图 1.61　贾万、本内特和赫里奥特

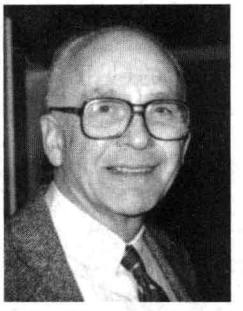


图 1.62　史尼泽的照片

帕特尔(C. Kumar N. Patel，1938 年 7 月 2 日出生)于 1963 年研制出第一台二氧化碳激光器，这种激光器现在被广泛地应用在工业切割和焊接中，也被应用在外科手术上。图 1.63 所示为 1964 年拍摄的帕特尔博士和他研制的二氧化碳激光器照片，来源于文献[93]。

1966 年，在一篇里程碑式的理论文章(发表于 Proceedings of IEE)中，英国标准电信研究所的**高锟**(1933 年 11 月 4 日生于中国上海，见图 1.64)和**霍克汉姆**(George Hockham，见图 1.65)指出，玻璃光纤的损耗主要由其中的杂质引起，而不是光纤本身的特性。他们指出，如果能将光纤中的杂质去除，则其损耗可以下降到约几个 dB/km，甚至更小。如果这一点能够实现，(引用文献[94]中的话)“与现有的同轴电缆及无线电系统相比，一种新形式的通信媒质将会流行，而且这种媒质传输信息的容量大，价格低。”这篇文章发表后，美国、英国、法国、日本和德国的物理学家开始进行提纯玻璃媒质的研究工作，1970 年，第一个突破性进展被报道。

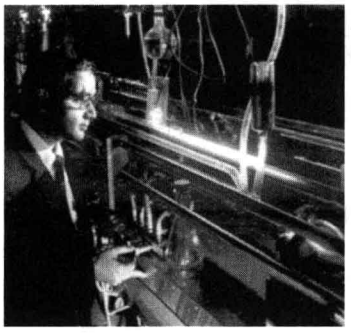


图 1.63　帕特尔与二氧化碳激光器



图 1.64　高锟(Charles Kao)

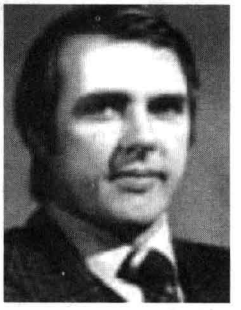


图 1.65　霍克汉姆(George Hockham)

1970年,康宁玻璃公司的科学家**唐纳德·凯克**(Donald Keck)、**罗伯特·毛瑞尔**(Robert Maurer)和**彼得·舒尔茨**(Peter Schultz)成功地制备出一批低损耗光纤,从而使得光纤通信实用化。这一突破是纤维光学革命性的开始。如图1.66所示的照片来源于文献[95]。在随后十多年的时间里,随着实验的继续,光纤变得越来越透明,并且实验表明,在传输1km后,大约有超过95%的光信号能量能够透过。

室温下连续工作的半导体激光器是于1970年5月在列宁格勒的**诺列斯·阿尔费罗夫**(见图1.67)领导的小组,和于1970年6月在贝尔实验室的**林严雄**和**莫顿·潘尼斯**(见图1.68)首先设计制造的(见图1.69)。这是光纤通信系统发展的一个重要转折点。阿尔费罗夫于2000年与克勒默、基尔比分享了诺贝尔物理学奖。

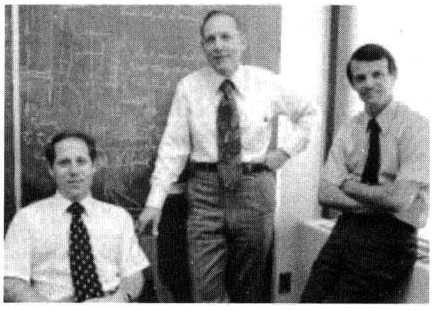


图1.66 康宁玻璃公司的凯克、毛瑞尔和舒尔茨



图1.67 若列斯·阿尔费罗夫(Zhores Alferov[①])

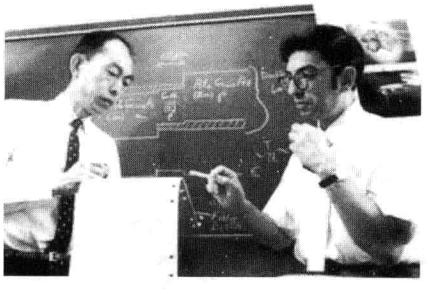


图1.68 林严雄(Izuo Hayashi)和莫顿·潘尼斯(Morton Panish)

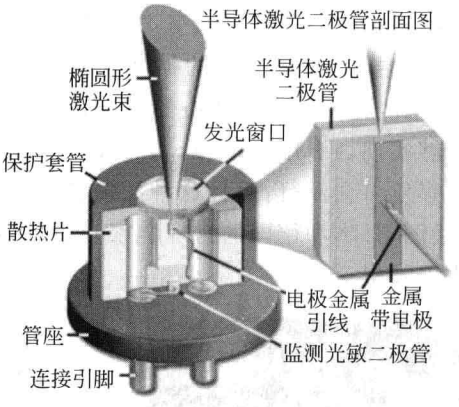


图1.69 半导体激光二极管剖面图

标准电信实验室(现属于Notel公司)的**拉姆齐**(Murray Ramsay)于1971年在伦敦电子工程研究所,为英国伊丽莎白二世女王陛下做光纤传输视频的演示,如图1.70所示,这张照片引自文献[97]。

1978年,加拿大渥太华通信研究中心工作的**肯尼思·希尔**(Kenneth Hill,见图1.71)发现了纤芯中掺杂锗的光纤具有光敏性。此外,他还第一个研制了光纤光栅。

① 译者注:原书阿尔费罗夫的英文拼写Zhorev Alferov有误,特更正。

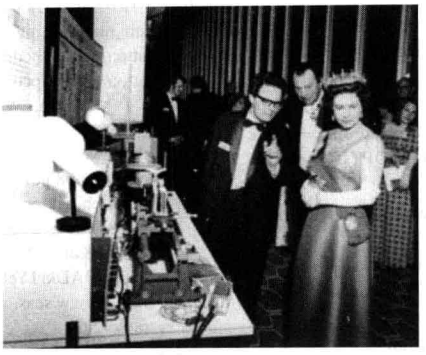


图 1.70　拉姆齐为英国伊丽莎白二世女王做光纤传输视频的演示

佩恩(David N. Payne,1944 年 8 月 13 日出生,见图 1.72)。掺铒光纤放大器(一般缩写为 EDFA)于 1987 年由来自于南安普顿大学的佩恩、米尔斯(R. Mears)、里奇(L. Reekie)和来自 AT&T 贝尔实验室的戴瑟瓦尔(E. Desurvire)、贝克(P. Becker)、辛普森(J. Simpson)所组成的小组发明的。EDFA 引发了光纤通信系统的又一个革命。

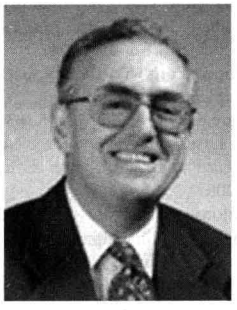


图 1.71　希尔的照片

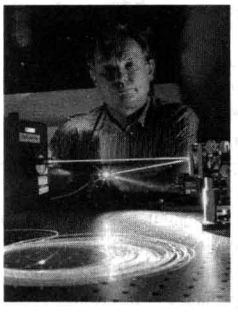


图 1.72　佩恩的照片

参考文献和推荐读物

1. http://en.wikipedia.org/wiki/Archytas_of Tarentum
2. The Dictionary of the History of Ideas at the University of Virginia Library (http://etext.virginia.edu/cgi-local/DHI/ot2wwwdhi?specfile=/texts/english/dhi/dhi.o2w&act=text&offset=13050720&query=optics&tag=OPTICS+AND+VISION).
3. http://www.ibiblio.org/expo/vatican.exhibit/exhibit/d-mathematics/Greek_math.html
4. http://www.ecademics.org/kheirand/publications/reviews.html.
5. http://en.wikipedia.org/wiki/Euclid
6. http://members.aol.com/WSRNet/D1/hist.htm
7. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Heron.html
8. http://en.wikipedia.org/wiki/Ptolemy
9. http://en.wikipedia.org/wiki/Aryabhatta
10. http://en.wikipedia.org/wiki/Al-Hazen
11. http://www.ibnalhaytham.net/custom.em?pid=673913
12. http://micro.magnet.fsu.edu/optics/timeline/people/witelo.html
13. http://www.polybiblio.com/watbooks/2915.html
14. http://members.aol.com/WSRNet/D1/hist.htm
15. http://en.wikipedia.org/wiki/Witelo
16. http://en.wikipedia.org/wiki/Leonardo_da_Vinci
17. http://www.pinhole.cz/en/pinholecameras/whatis.html
18. Eric Renner, *Pinhole* Photography, Rediscovering a Historic Technique, Focal Press (1995).
19. http://en.wikipedia.org/wiki/Kepler
20. http://www.greenlion.com/cgi-bin/SoftCart.100.exe/optics.html?E+scstore
21. http://en.wikipedia.org/wiki/Hans_Lippershey
22. http://www.ece.umd.edu/~taylor/optics3.htm
23. http://en.wikipedia.org/wiki/Galileo
24. http://en.wikipedia.org/wiki/Willebrord_Snellius

25. http://en.wikipedia.org/wiki/Fermat
26. http://en.wikipedia.org/wiki/Descartes
27. V Ronchi, The Nature of Light (Translated by V Barocas), Heinemann, London (1972).
28. http://etext.lib.virginia.edu/cgi-local/DHI/ot2www-dhi?specfile=/texts/english/dhi/dhi.o2w&act=text&offset=13050720&query=optics&tag=OPTICS+AND+VISION
29. W.B. Joyce and Alice Joyce, Descartes, Newton and Snell's Law, J. Opt. Soc. Am., Vol 66, p1, 1976.
30. http://en.wikipedia.org/wiki/Francesco_Maria_Grimaldi
31. http://www.faculty.fairfield.edu/jmac/sj/scientists/grimaldi.html
32. http://en.wikipedia.org/wiki/Robert_Hooke
33. http://www.polarization.com/history/bart.html
34. http://en.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens
35. C Huygens, Treatise on Light, Dover publications (1962).
36. http://www.gutenberg.org/files/14725/14725-h/14725-h.html
37. http://en.wikipedia.org/wiki/Olaf_Roemer
38. http://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton
39. Isaac Newton, Opticks, Dover Publications (1952).
40. http://books.google.com/books?id=GnAFAAAAQAAJ&pg=PA381&dq=Newton%27s+book+OPTICKS#PPA219,M1
41. http://physics.nad.ru/Physics/English/top_ref.htm
42. "Great Experiments in Physics" p96-101, Holt Reinhart and Winston, New York, 1959.
43. http://www.cavendishscience.org/phys/tyoung/tyoung.htm
44. http://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Young_%28scientist%29
45. http://www.manhattanrarebooks-science.com/young.htm
46. http://en.wikipedia.org/wiki/Fran%C3%A7ois_Arago
47. http://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_von_Fraunhofer
48. http://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel
49. http://en.wikipedia.org/wiki/Niepce
50. http://courses.ece.uiuc.edu/ece549/lecture2-3.pdf
51. http://en.wikipedia.org/wiki/Michael_Faraday
52. http://en.wikipedia.org/wiki/Etienne-Louis_Malus
53. http://en.wikipedia.org/wiki/David_brewster
54. http://en.wikipedia.org/wiki/James_Clerk Maxwell
55. http://www.phy.hr/~dpaar/fizicari/xmaxwell.html
56. http://vacuum-physics.com/Maxwell/maxwell_oplf.pdf
57. http://en.wikipedia.org/wiki/John_Tyndall_biography.shtml
58. http://www.tyndall.ac.uk/general/history/john_tyndall_biography.shtml
59. http://en.wikipedia.org/wiki/John_William_Strutt
60. http://books.google.com/books?id=gWMSAAAAIAAJ&pg=RA3-PA426&lpg= PA3-PA426&dq=scientific+papers+of+rayleigh&source
61. J. Hecht, City of Light, Oxford (1999)
62. http://en.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Hertz
63. http://phisicist.info/hertz.html
64. David Park, The Fire within the Eye: A Historical Essay on the Nature and Meaning of Light, Princeton University Press (1997).
65. http://th.physik.uni-frankfurt.de/~jr/gif/stamps/sm_maxwell.jpg
66. http://en.wikipedia.org/wiki/Alexander_Graham_Bell
67. http://en.wikipedia.org/wiki/Albert_Abraham_Michelson
68. J. F. Mulligan, "Who were Fabry and Pérot?", Am. J. Phys., Vol. 66, No. 9, pp798-802, September 1998 [available at the website http://www.physics.rutgers.edu/ugrad/387/Mulligan98.pdf].
69. http://en.wikipedia.org/wiki/Einstein
70. http://books.google.com/books?id=WcDPrrf1-oQC&pg=PA56&ots=FNeFkfdlW_&dq=Papers+of+Albert+Einstein&sig=OADkr1YehpFPm9xCR2lpKlYNsz0#PPA110,M1
71. http://www.seas.harvard.edu/brenner/taylor/physic_today/taylor.htm
72. http://en.wikipedia.org/wiki/Geoffrey_Ingram_Taylor
73. G. Batchelor, The Life and Legacy of G.I. Taylor, Cambridge University Press (1994).
74. http://en.wikipedia.org/wiki/William_Lawrence_Bragg
75. http://en.wikipedia.org/wiki/Arthur_Compton
76. http://books.google.com/ooks?id=98sCh99YIJsC&dq=Papers+of+Arthur+H+Compton
77. http://en.wikipedia.org/wiki/Louis_de_Broglie
78. http://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Adrien_Maurice_Dirac
79. W Heisenberg, Physics and Beyond: Encounters and Conversations. New York: Harper & Row (1971).
80. G. Venkataraman, Journey into Light: Life and Science of C.V. Raman,Penguin Books (1994).
81. http://en.wikipedia.org/wiki/Dennis_Gabor
82. http://en.wikipedia.org/wiki/Laser
83. http://www.greatachievements.org/?id=3717
84. Nick Taylor, Laser: The Inventor, the Nobel Laureate, and the Thirty-Year Patent War, Simon & Schuster Publishers, New York (2001).
85. Mario Bertolotti, The History of the Laser, Institute of Physics Publishing, Philadelphia (2005).
86. http://books.google.com/books?id=JObDnEtzMJUC&pg=PA241&lpg=PA241&dq=javan+bennett+and+herriot&source=web&ots=tvP2kA2aNb&sig=K7KDtOYXjgHjTPaYwpOxXquumT4#PPP9,M1
87. http://www.llnl.gov/nif/library/aboutlasers/how.html
88. http://www.press.uchicago.edu/Misc/Chicago/284158_townes.html
89. http://www.farhangsara.com/laser.htm
90. http://www.bell-labs.com/history/laser/contrib.html
91. http://www.zeiss.com/C125716F004E0776/0/D94B4F1F28466E2AC125717100513E1A/$File/Innovation_7_35.pdf
92. http://www.ieee.org/organizations/foundation/donors.html
93. http://www.bell-labs.com/history/laser/contrib.html
94. C. K. Kao and G. A. Hockham, Dielectric-fibre surface waveguides for optical frequencies, Proc. IEE, Vol.113 (7), 1151, (1966).
95. http://www.beyonddiscovery.org/content/view.page.asp?I=448
96. http://www.bell-labs.com/history/laser/contrib.html
97. http://fibers.org/articles/news/8/2/9/1/queen
98. http://www.cap.ca/awards/press/1998-hill.html

第2章 光是什么

我将用我的余生来思索光的本性。

——阿尔伯特·爱因斯坦，1917年于加利福尼亚

对于“什么是光量子”的思考已在我心中萦绕了50年，但是并没能使我接近答案半步。如今每个人都自以为知道答案，实际上，他们那是自欺欺人。

——阿尔伯特·爱因斯坦，于1951年

2.1 引言

自从人类可以看到世界，人们就被“光是什么”这一问题所吸引。早期，光束被认为是由粒子组成。后来，光的干涉与衍射现象被演示出来，而这些现象只能假定光是波动才能解释。再后来，只有假设光是粒子，才能解释像光电效应、康普顿效应等现象。现今，正如已知道的，电子、质子、α粒子等的质量与电量的测量值已经达到了相当高的精确度——约十亿分之一！它们的速度也会随外加电场和磁场而改变。因此，倾向于将它们看成是微小的粒子。但是，它们也会表现出衍射现象，以及那些只能假设它们为“波”才能解释的效应。所以，对于像“电子是什么或者光是什么”这样的问题很难回答。实际上，电子、质子、中子、光子、α粒子等，它们既不是粒子，也不是波。现代量子理论用一种与日常生活经验很难联系的非常抽象的方式来描述它们。引用费曼的观点如下(见文献[1])：

牛顿认为光是由粒子组成。但是接下来却发现光的行为像波动。然而后来(在20世纪初)，人们发现光又确实有时候行为像粒子。在历史上，比如说电子，起先被认为行为像粒子，然而接下来在许多方面它又像波，所以它实际上表现得二者都不像。现在我们已经放弃去追究它像什么，我们说“它二者都不像”。然而有一点值得庆幸——电子的行为酷似光。原子客体(电子、质子、中子、光子等)的量子行为都是相同的，它们都是“粒子波”，或者你叫它们什么都可以。

本章将对那些重要实验做一个简单的、历史性的回顾，这些重要实验导致了各种光的本性模型的形成。在本章结尾时，我们还要定性地讨论，利用测不准原理和物质波的概率解释，该如何理解辐射的波动性和粒子性。

2.2 微粒模型

微粒模型是光的最简单的模型。按照这一模型，一个发光体在所有方向上发射粒子流。艾萨克·牛顿在他的《光学》((Opticks)，文献[2])中写到：“从闪烁体上发射的光线难道不是非常小的物体吗?”光粒子被假定为非常小的，以至于当两束光交叠时，两个粒子很难发生

碰撞。利用微粒模型,可以用下面的方式解释反射定律与折射定律。

反射定律可以看成是粒子与平面的弹性反射的结果。为了理解折射,考虑一个粒子入射到一个如图2.1所示的表面上($y=0$),并假定粒子运动限于x-y平面内。粒子的运动轨迹取决于其动量在x方向分量的守恒($=p\sin\theta$),其中θ是粒子传播方向与y轴形成的夹角。从守恒条件可以得到方程

$$p_1\sin\theta_1 = p_2\sin\theta_2 \tag{2.1}$$

θ_1与θ_2定义如图2.1所示。从上面的方程可以直接导出斯涅耳定律

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{v_2}{v_1} \tag{2.2}$$

为了能够应用微粒模型来理解斯涅耳定律,考虑一个简单的实验。在这个实验中,一个以一特定速率的小球在一个水平面上运动,并通过一个斜面,从该水平面运动到另一个更低的水平面。如图2.2所示,是两张频闪灯下小球如何运动的照片,它显示出平行于斜面边沿的动量分量没有改变,而垂直于边沿的动量分量在数值上有所增加,这表示小球的速率增大了。反过来,当小球开始时是从低位的水平面向斜面运动,登上斜面后,其速率将减小。这与折射光线的可逆性是一致,而这个斜面可以近似地代表两个媒质的界面。

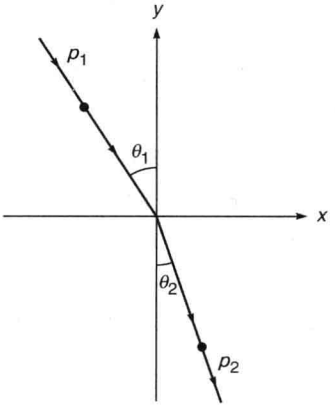


图2.1 微粒的折射

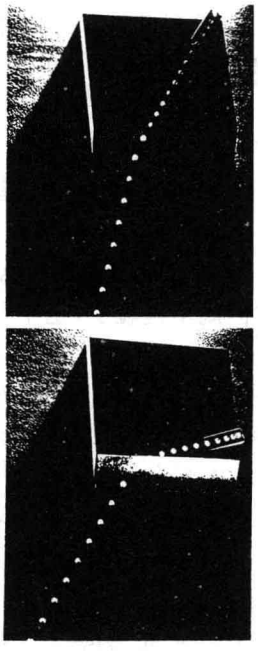


图2.2 一个运动的小球从一水平面上通过一个斜坡运动到一个低一些水平面上的频闪照片。
(取自PSSC,物理,D.C. Heath & CO.,波士顿,马萨诸塞州,1965年。已获许可)

虽然这个简单的微粒模型满意地解释了折射斯涅耳定律,但是它预测,假如光线是近法线偏转的(即假如折射发生在进入质密媒质),光的速率将变大。然而,随后将看到这个结论与实验观察不符。波动理论反而能给出两媒质速率比值的正确预测。

在这里需要指出的是,在公元140年,托勒密测量到当光由空气进入水中时,与不同的

入射角对应的折射角，并按此做了一个表格。W. 斯涅耳在 1621 年利用这张表格发现了称之为斯涅耳定律的折射定律。R. 笛卡儿于 1637 年从理论上推导出斯涅耳定律，而他的推导完全等价于通常归功于牛顿的基于微粒模型的推导。然而，当笛卡儿(1596—1650 年)逝世时，牛顿(1642—1727 年)只有 8 岁，因此，笛卡儿是不可能借助牛顿的微粒模型的！牛顿的《光学》(Opticks)出版于 1704 年(在该著作中牛顿讨论了光的微粒模型)，正是由于牛顿这本《光学》专著的流行，才使得人们通常将微粒理论归功于牛顿。后来在乔伊斯兄弟发表的一篇论文中翻译了笛卡儿的原始论文(文献[3])。笛卡儿的理论在 1662 年以前是没有争议的，直到这一年，费马阐明了最小时间原理，质疑了笛卡儿的理论。费马利用他的最小时间原理推导出了斯涅耳定律(见第 3 章)，证明了如果光在第二媒质的光速比第一媒质要小，则光线就会近法线折射。这一结论与微粒理论是完全相反的。

最后，按照牛顿的说法，不同大小的微粒会在视网膜上引起不同颜色的视觉。他假设不同大小的微粒以不同的角度折射，解释了棱镜产生的光谱。在此，要提一下爱因斯坦对于牛顿《光学》的评论：

……他(牛顿)这一新版的《光学》仍然受到人们带着由衷感激之情的欢迎，因为仅这本著作，就能使我们一睹这个伟人个人活动的快乐……他(牛顿)一个人集实验家、理论家、技工、讲解员(并不是不重要的)于一身。在我们面前，他是那么坚强、自信与卓尔不群，他对创造性的乐趣和推崇细致、精准的习性都在每一个词句、每一幅图中彰显出来。

也许正是两个重要的实验事实，使得最初人们相信光的微粒模型：①光直线传播导致阴影的形成；②光可以在真空中传播。假设光是直线传播的光学领域称作几何光学，几何光学可以用光的微粒模型来解释。然而，后来更仔细的实验显示，阴影中并不是完全是黑暗的，一些光确实进入了几何阴影中，而这是源于衍射现象。衍射现象本质上源于光的波动特性，是不能用简单的微粒模型来解释的。正如在随后的章节中可以看到，衍射效应通常是很难观察到的，这是由于与光波相联系的波长极短的原因。在这里要提及的是，在大楼的阴影下仍然可以读书——这时进入阴影的光线并不是由于衍射，而是光被空气中的分子散射的结果，而这种散射现象，也是天空显示蓝色以及初升的太阳显示红色的原因。假如地球上没有大气，那么阴影下将是一团漆黑，与月球表面上的情况一致。由于月球上没有大气，阴影下非常的黑，以至于不能在自己的阴影里读书！此外，站在月球的表面，天空显得异常的黑(见图 2.3)。但是，即使在月球的表面，还是会有极少的光进入几何阴影，这正是由于衍射的作用。

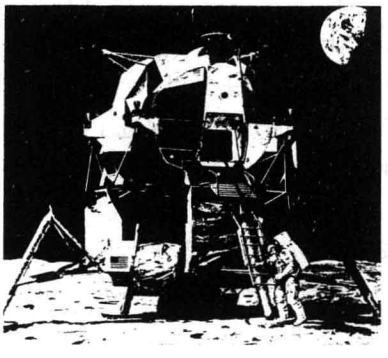


图 2.3　人在月球上的照片，注意黑色的天空。照片由新德里的美国信息服务中心提供。

2.3　波动模型

虽然微粒模型解释了光在自由空间中的传播问题，并预言了反射和折射定律的正确形式，但是随之而来的大量实验观察(像干涉、衍射和偏振)并不能在光的微粒模型的基础上加

以解释。历史上,“牛顿环”——光的波动特性的一种完美表现,在17世纪中叶为胡克(Hooke)所观察到。这种环以牛顿命名,是因为最初牛顿用微粒模型给出了牛顿环的成因,但随后,人们发现这种解释并不能令人满意。基于波动模型对牛顿环的解释,将在第15章进行讨论。牛顿对牛顿环的解释在许多文献中都可以找到(见文献[4])。

大约在1665年,意大利的物理学家弗朗西斯科·格里马尔迪(Francesco Grimaldi)观察到当白光通过小孔时的衍射现象,他可能是第一个观察到这一现象的人。格里马尔迪从衍射现象得出结论(引自互联网),光是一种表现为波样运动的流体,而胡克后来也观察到了这一现象。在后面的章节中将讨论,只有在光的波动模型下,对于衍射现象的解释才令人满意。这个模型由惠更斯在1678年首先提出(文献[5]),并且应用这个波动模型,惠更斯也可以解释反射定律和折射定律(参见第12章),还可以说明由丹麦物理学家巴托林于1669年发现的双折射现象(参见第22章)。然而,由于牛顿的令人尊敬的权威性,使他周围的人比牛顿自己更忠实于他的微粒理论,反而没有人相信惠更斯的波动理论。这种情况一直延续到托马斯·杨于1802年做出了著名的杨氏干涉实验,该实验只有用光的波动模型才能解释,才改变了这一局面(见第14章)。此外,在惠更斯的时代,人们已经知道光是沿直线传播的,而惠更斯在运用他的波动理论解释光的直线传播时,试图援引的一些假设都不切实际,这一缺陷也是人们不能马上接受他的波动模型的原因之一。杨证明了光波的波长大约为6×10^{-5}cm。正是因为波长是那样小,导致衍射效应不明显,因而光近似是沿直线传播的。的确,完全不考虑波长有限性的光学的这一分支称为几何光学,其中,光线定义为$\lambda\to0$的条件下光能量传播的路径。

1802年,杨令人满意地解释了牛顿环的成因。1808年,马吕斯观察到光的偏振现象,但他并没有试图解释这种现象。1816年,菲涅尔运用波动理论,给出了对衍射现象的满意解释,并计算了各种形状的孔与直边产生的衍射图样。1816年,菲涅尔和阿喇果一起完成了著名的线偏振光叠加实验,而杨对光是横波的假设,解释了这个实验。

到了19世纪第二个25年时期,波动理论看来取得了牢固的地位。由于当时人们认为波传播时需要媒质,弹性以太理论得以建立。1832年,菲涅尔运用以太振动模型导出了反射率与透射率的表达式①。泊松、纳维尔、柯西和其他许多物理学家都对以太理论的发展做出了贡献,这一理论也促进了弹性理论的发展。然而在对这一模型的解释上,还有诸多的困难,我们现在也知道了以太并不存在,因此,我们将不探讨这众多理论的细节。

19世纪也见证了电磁学的发展。1820年,奥斯特发现了电流可以产生磁效应。不久之后,安培就发现了两条平行的载流导线间可以相互吸引。大约1830年,法拉第进行了变化磁场感应产生电动势的实验,亨利在大约相同的时间也做了类似的实验,实验定律称作法拉第-亨利定律。

不久,麦克斯韦扩展了安培环路定律指出变化的电场也能产生一个磁场。他将所有电的和磁的定律总结为方程组的形式(现在被称作麦克斯韦方程组(参见第23章)),并从这一方程组出发,推导出一个波动方程,预言了电磁波的存在(参见第23章)。他根据所导出的波动方程,表明用两种方法测量一定数量的电荷值的实验,可以计算出电磁波的速度。这两个测量实验在1856年由科耳劳什(Kohrausch)与韦伯(Weber)完成。利用他们的实验数据,麦克斯韦发现空气中电磁波的传播速度约为3.107×10^{8}m/s。他发现这一数值与斐索

① 建立在电磁理论上的菲涅尔定律的推导将在第24章中讨论。这一推导与文献[6]中原始的推导非常相似。

(Fizeau)在 1849 年对光速的测量值 3.14858×10^{8} m/s 十分接近。仅就这两个数值之间非常接近的事实，启发了麦克斯韦(约在 1865 年)提出了他著名的电磁理论，根据这一理论：

光波是一种电磁波。

将光波与变化的电场和变化的磁场相联系，变化的磁场产生随时间和空间变化的电场，变化的电场又产生随时间和空间变化的磁场，结果使得电磁波甚至可以在自由空间传播。1888 年，海因里希·赫兹(Heinrich Hertz)进行了电磁波产生与探测的实验，得到的电磁波频率比光波小很多，是由两个充电板之间间隙火花放电而形成的。发射的电磁波的频率取决于放电电路的电感与电容的大小。这一电磁波可以用探测器探测出来。实验发现，当探测器与波源平行时，接收不到信号[①](见图 2.4)。

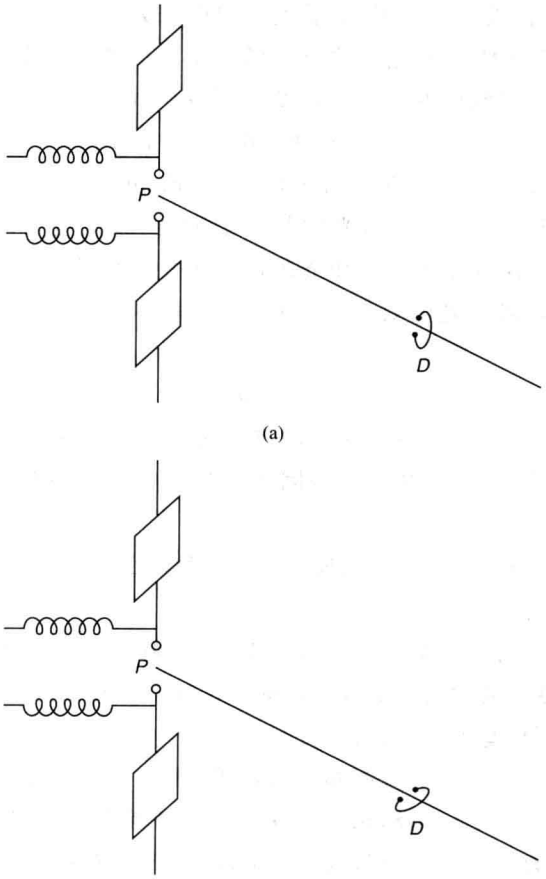


图 2.4　赫兹产生与探测电磁波实验的示意图。间隙 P 间打过火花，从而产生电磁波，电磁波的频率由电路的电感与电容决定。可以通过探测器 D 来探测电磁波，它是一个弯成圆形并留有一个间隙的导线。

(a) 当探测器的间隙平行于发射器打火花间隙 P 的两球形电极连线时，信号将会被探测到；(b) 当间隙垂直于这个连接线时，接收不到信号。

① 从 22.4.1 节的电偶极子辐射图样就能直接得到这一结果。如图 22.4 所示，电偶极子在 z 轴方向上振动，位于 y 轴方向上电场也是沿 z 轴方向变化。

赫兹用一个金属板让电磁波反射,从而产生了电磁驻波(见图13.3和图13.4)。借助驻波,他计算出电磁波的波长,进而得到频率,证明了电磁波的速度与光速相同。他利用一束经过准直的电磁波在一个金属板上反射,从而演示了反射定律。赫兹的实验结果奇迹般地证实了麦克斯韦的电磁理论。此外,还有许多的实验结果可以用麦克斯韦的理论来解释,以至于19世纪末的物理学家认为,人们最终理解了光究竟是什么。

2.4 辐射的粒子性

1887年,当赫兹利用有一间隙的金属圆环接收电磁波时,圆环间隙会有火花放电。赫兹发现,当将整个装置放在一个黑盒子里时,间隙放电时的火花最大长度就会减小。这种现象是源于我们现在所知的光电效应。黑盒子会吸收紫外辐射,可以帮助电子越过间隙。赫兹报道了这一观测结果,但是并没有更深入地探究下去,也没有试图解释它。1897年,J. J. 汤姆孙(J. J. Thomson)发现了电子,并在1899年指出,当光照射到金属表面时,就会发射出电子。1902年,菲利普·雷纳德(Philip Lenard)观测到:①放出电子的动能与光照射的强度无关;②当入射光的频率增大时,放出电子的动能就增加。正如将在25.2节讨论的那样,这种现象不能用光的波动模型来解释。1905年,爱因斯坦用他提出的著名的光子理论解释了光电效应。根据光子理论,光是由一些能量量子组成,能量量子具有能量

$$E = h\nu \tag{2.3}$$

式中ν是频率、$h(\approx 6.626\times10^{-34}\text{J}\cdot\text{s})$是普朗克常数。爱因斯坦指出,电子与单个量子(即光子)相互作用才导致发射出一个光电子。爱因斯坦在他1905年的论文(文献[7]以及文献[8]的重印本)中写道:

单频辐射就好像它由具有$h\nu$数值、彼此间独立的能量子组成一样。

并在同一论文中写道:

根据麦克斯韦理论,对于所有的纯电磁现象,能量都被看成连续的空间函数,因此,对于光也应该如此……用连续的空间函数来处理的光的波动理论已经完美地证明了自己……

在1909年,爱因斯坦写道(引自文献[9]):

不可否认,确实存在着大量的有关辐射的数据,显示光具有这样的基本性质,站在牛顿的辐射(粒子)理论的观点上来解释,比站在波动理论的观点上来解释更易于理解。以我的观点,理论物理下一阶段的发展所带给我们光的理论,可以看成是一种波动与粒子辐射理论的融合。

我们还会注意到爱因斯坦的预言(引自文献[10]):

根据爱因斯坦1905年发表的论文,最初正是由于物理学家将光电效应归于光子存在的不可辩驳的证实,光电效应才在量子力学的概念发展中起了重要角色。

1926年,美国化学家吉尔伯特·刘易斯创造出"光子"一词,来描述爱因斯坦的"定域能量子"。爱因斯坦因为他对理论物理的贡献,尤其是对光电效应的解释,于1921年获得诺贝尔物理学奖。爱因斯坦的光子理论预言,照在金属上的辐射的频率ν超过临界频率ν_c,则出射的光电子动能将是$h(\nu-\nu_c)$。这一结论分别在可见光频段由密立根(Milligan)、在X射

线频段由德布罗意(de Broglie)、在 γ 光频段由蒂博(Thibaud)与埃利斯(Ellis)的实验所证实。爱因斯坦还指出，光子除了具有能量 $h\nu$ 外，还应该具有以下形式的动量

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \tag{2.4}$$

这个结论于 1923 年由康普顿(Compton)用实验证实，这个实验被称作康普顿效应，将在 26.3 节中加以讨论。康普顿在 1927 年由于以他名字命名的康普顿效应的发现，获得诺贝尔物理学奖。

在这里要提及的是，早在 1900 年 M. 普朗克就已经提出了他著名的黑体辐射理论。其中理论推导的前提假设是：当一个独立谐振腔吸收与发射时，其吸收与发射的能量是量子化的量值 $h\nu$。根据爱因斯坦的记述：

不过我能预见到热辐射定律(普朗克定律)会对光电效应，以及牵涉辐射能量交换的其他现象、特别是固体的比热容的理解产生什么样的后果。然而，我所做的将物理的理论基础去适应这些新知识的一切努力都失败了。似乎大厦的地基被抽掉了，哪里也看不到可以建大厦的坚实基础。这一靠不住的以及相互冲突的理论基础，却足以帮助波尔以他对事物独一无二的直觉与机智去发现原子的光谱线和电子壳层的规律，以及它们的化学意义。而这些工作当时对于我来说好像是奇迹，甚至到今天对于我来讲仍然是奇迹。这是在思想领域中最高形式的音乐篇章。(引自《阿尔伯特·爱因斯坦：哲学家、科学家》中“爱因斯坦笔记”，P. A. Schilpp，Tudor Publishing Co.，New York，1951)

从普朗克的量子化谐振子过渡到辐射量子，爱因斯坦引入了概念上的转变，即，他引入了辐射是粒子行为的思想。虽然牛顿早先也将光描述成一种粒子流，但这种观点后来已经完全被光的波动图像所取代。这一波动图像已经被纳入麦克斯韦的电磁理论。而现在粒子图像的再一次复活造成了严重的概念性问题：如何使对于辐射的波动行为与粒子行为的解释和谐起来。很快，物质表现出波动与粒子两种行为的观点变得越来越显而易见。例如，具有精确测量质量和电量的电子却能表现出类似于光波一样的衍射行为。现在，将对其他显示出物质的波粒二象性的实验证据做一个简要说明，正是物质的波粒二象性引领了量子理论的发展。

2.5　物质的波动性

威尔孙(C. T. Wilson)利用他的云室所做的实验，清楚地显示出 α 粒子与 β 粒子的粒子行为。这些粒子由放射性元素辐射产生，当它们穿过饱和蒸汽时，使蒸汽形成冷凝液滴，从而显示出粒子经过的径迹。对于 α 粒子，其径迹几乎是个直线；然而对于电子，其径迹呈不规则曲线。这种连续径迹的存在给出提示，放射性物质的辐射可以看成是高速微小粒子。进而，电子可以被电场和磁场偏转的事实，以及可以精确地确定电子的电荷质量比(荷质比)的事实，更加明确地提示电子是粒子。这种观点一直持续若干年后才得以改变。威尔孙(C. T. Wilson)因为发现利用蒸汽的凝聚使带电粒子运动路径显现化的方法，获得 1927 年的诺贝尔物理学奖。

在这一阶段，人们或许会问，是否物质也会显示出像波动的行为，就像光表现出既像微

粒又像波动的行为一样。1925年,德布罗意恰好提出了这样的假设,表明由公式(2.4)给出的波长与动量的关系式对电子也同样适用。他在1925年的论文中写道:

当然,量子理论的基本思想就是:当将能量考虑成为一个独立的量子时,而不将一特定频率赋予它是不可能的……

德布罗意因为他发现的电子的波动性而获得1929年的诺贝尔奖。在1929年12月12日获奖仪式的发言中,诺贝尔物理奖委员会主席说到:

路易斯·德布罗意大胆地主张物质的性质不只包含粒子性……当没有一个人支持他的理论时,路易斯·德布罗意仍然断言,当一电子束经过一阻挡屏上的一个小孔时,它必然表现出像一束光通过小孔一样的现象……现在的实验完全证实了路易斯·德布罗意的理论。因此,并不存在两个世界,一个是光的波动世界,另一个是物质的粒子世界。我们只有一个宇宙。

后来,德布罗意写道(引自文献[9]第58页):

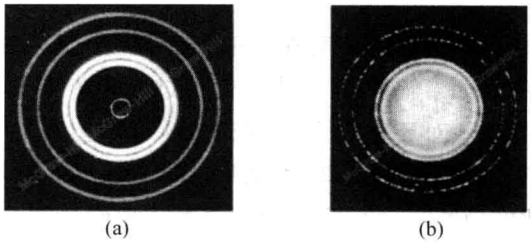
我深信,爱因斯坦在他的光量子理论中,波-粒二象性的发现是普适的,可以扩展到所有物理世界中。因此,它似乎为我证实了波的传播特性与任何形式的粒子(如光子、电子、质子等)的运动相联系。

1927年,戴维孙与革末研究了在镍单晶上的电子衍射现象,实验显示,衍射图样可以用假设电子具有德布罗意给出的波长来解释

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{2.5}$$

其中 p 是电子的动量。很快,在1928年,G. P. 汤姆孙进行了电子经过多晶金属薄片衍射的实验(更多的细节见18.10节)。衍射图样为像X射线衍射图样中的德拜-谢勒环一样的同心圆环花样。通过测量圆环直径与已知的晶体结构,汤姆孙计算出与电子束相连的波长与德布罗意关系(式(2.5))相符。1937年,戴维孙与汤姆孙因为他们发现的电子的晶体衍射现象的实验,共享了诺贝尔物理奖。麦克斯·贾墨在文献[10]中写道:汤姆孙家族中,父亲汤姆孙因为证明电子是粒子而获诺贝尔奖,而儿子汤姆孙却因为证明电子是波动而获诺贝尔奖。

如图2.5所示,为经过铝箔由X射线散射(见图2.5(a))与由电子束散射(见图2.5(b))形成的德拜-谢勒环。两幅图清晰地表明X射线与电子在波动性方面的相似性。



(a) (b)

图2.5 经过铝箔形成的衍射图样,注意两幅衍射图极为相似

(a) X射线;(b) 电子

2.6　测不准原理

现代量子理论带来了光的粒子性与波动性的解释的和谐(电子的粒子性与波动性也一样);海森堡的测不准原理也许是波粒二象性的推论[①],海森堡测不准原理叙述如下:

如果已知粒子的位置在 x 方向上的分量精确到 Δx,则其动量在 x 方向的分量的精确度不可能高于 $\Delta p_x \approx h/\Delta x$,式中 h 是普朗克常数。

换句话说,分别代表位置和动量在 x 方向上分量的精确度 Δx 与 Δp_x,由下面的不等式决定

$$\Delta x \Delta p_x \geqslant h \tag{2.6}$$

在日常生活中之所以感受不到这个不等式,是由于普朗克常数太小了($\approx 6.6\times 10^{-27}\,\mathrm{erg\cdot s}$)。比如,对于一个质量为 $10^{-6}\,\mathrm{g}$ 的粒子,假如它的位置能够决定到的精确度约 $10^{-6}\,\mathrm{cm}$,则根据测不准原理,它的速度不可能决定到精确度高于 $\Delta v \approx 6\times 10^{-16}\,\mathrm{cm/s}$。这一数值比目前可以测量到的粒子速度的精确度还小得多。对于质量更大的粒子,其 Δv 将更小。实际上,正是由于普朗克常数是如此的小,才使得微观世界表现出那么大的不同。在一本十分优秀的图书中,伽莫夫讨论了假如能感知到测不准原理效应的情况下,世界将会变成怎样(文献[13])。

2.7　单缝衍射实验

下面将基于辐射的粒子特性与测不准原理,来说明光束的衍射现象如何解释。考虑如图 2.6 所示的一个宽度为 b 的狭长单缝,并让光源与单缝之间的距离足够长,以致可以假定 p_x 可以任意小。比如,光源距离单缝距离为 d,则到达单缝的光子的 p_x 的最大值是

$$p_x \approx p\,\frac{b}{d} = \frac{h\nu}{c}\cdot\frac{b}{d}$$

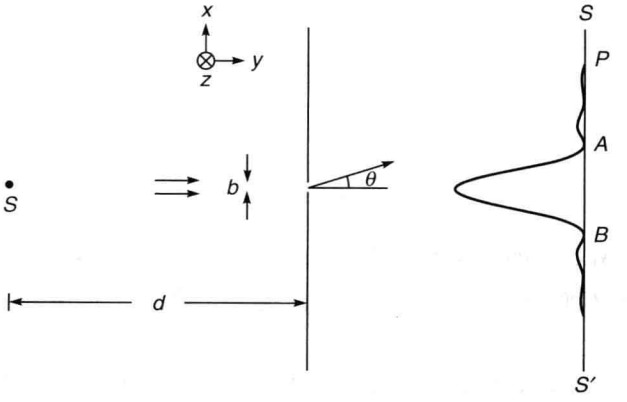


图 2.6　光子(或电子)经过宽度为 b 的窄缝时的衍射

① 这里应该提一下,测不准原理可以由薛定谔方程推导而来(比如,见文献[12]的第 5 章)。正如理查德·费曼指出的:"(薛定谔方程)从何处推导得来?没有。不可能从你所知的任何知识推导出薛定谔方程,它只来源于薛定谔的脑子里。"

这里的 p_x 可以任意小,是因为选择的 d 足够大,即光源距离单缝足够远,以致可以假设到达单缝的光子只有 y 分量。现在根据辐射的粒子模型,到达点 P(位于单缝的几何阴影内)的粒子数极其少。进一步,如果减小单缝的宽度,到达点 P 的辐射强度应该减小。这一判断与实验结果是完全矛盾的,因为,当光束发生衍射时,随着单缝宽度的减小,屏幕上点 P 的辐射强度一般会增加。因此,经典的粒子模型理论完全不能解释衍射现象。然而,如果将测不准原理结合粒子模型,用下述的方法就可以解释衍射现象。当一个光子(或者电子)通过一个单缝时,可以说

$$\Delta x \approx b$$

这就意味着可以确定的光子位置精度为 b。如果再利用测不准原理,则有

$$\Delta p_x \approx \frac{h}{b} \tag{2.7}$$

即,当光子刚好通过缝宽为 b 的单缝时,单缝在 x 方向传给光子一个$\approx h/b$ 的动量。应该指出,只要光源离单缝足够远,当光子经过单缝前,其 p_x(因而 Δp_x)可以认为是任意小的,因此,可以写为 $\Delta p_x \approx 0$。但是光子经过单缝后,却不能因为光子进入单缝之前 $\Delta p_x \approx 0$ 得出 $\Delta p_x \Delta x$ 为零的结论。当光子进入单缝后,其在 x 方向上被限制在 b 的范围内,从而 $\Delta p_x \approx h/b$。进一步,既然光子进入单缝前有 $p_x \approx 0$,则

$$| p_x | \approx \Delta p_x \approx \frac{h}{b}$$

又有 $p_x = p\sin\theta$,式中 θ 是从单缝出来的光子与 y 轴之间的夹角(见图 2.6),则

$$p\sin\theta \approx \frac{h}{b}$$

或

$$\sin\theta \approx \frac{h}{pb} \tag{2.8}$$

上面的公式预言了沿着与 y 方向夹角为 θ 传播的光子概率与缝宽成反比,即,b 越小,θ 越大,从而光子更深地进入单缝几何阴影区的概率也越大。这正是衍射现象。又光子的动量为

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

则公式(2.8)可变为

$$\sin\theta \approx \frac{\lambda}{b} \tag{2.9}$$

这正是将要在 18.3 节讨论的为人熟知的衍射理论。这样,可以说,波粒二象性是测不准原理的一个推论,而测不准原理也是波粒二象性的一个推论。引用马克斯·波恩的话(文献[14]):

物理学家今天已经认识到,并不是每一个关于电子或光子运动的问题我们都能解释,只有那些与测不准原理不相矛盾的问题能够得到解释。

回到式(2.7),注意德布罗意指出,方程 $\lambda = h/p$ 不仅对于光子是正确的,对于像电子、质子、中子等这样的粒子也是正确的。的确,德布罗意关系已经被电子、中子等被晶体衍射形成的衍射图样的研究所证实。这些衍射图样与 X 射线衍射图样极为相似(见 18.10 节)。

如图 2.7 所示，给出了 Shull 在研究中子经过单缝弗朗禾费衍射的实验数据，其实验结果与由式(2.5)预言的强度分布与 λ 关系的波动理论相一致。

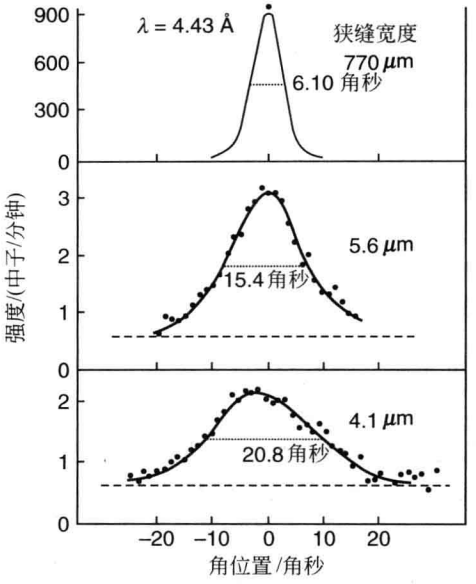


图 2.7　中子束通过狭缝后的角展宽(来源于文献[15])

2.8　物质波的概率解释

在前一节已知，如果一个光子通过一个宽度为 b 的单缝，则在 x 方向(即单缝宽度的方向)单缝传给光子的动量≈ h/b。随之会产生这样的问题，是否可以预言单一光子的路径，回答是“不能”。不能说某一光子将落在屏幕的哪里，只能预言光子到达屏幕上某一特定区域的概率。例如，只能说位于点 A 与点 B 之间的区域，光子到达的概率是 0.85(见图 2.6)。这意味着，如果采用大量的光子进行这个实验，它们之中大约有 85%会落在 AB 的区域内。但是对于某个单一光子的命运是无法预言的，这与牛顿力学的运动轨迹总是可以预测的理论完全相反。而且，如果将一个光探测器放在屏幕上，则只能记录到一个光子或没有记录到一个光子，而绝不会记录到半个光子，这正是辐射粒子特性的最本质的寓意。然而，对光子概率分布的预测与凭借波动理论预测的结果是一样的，因此，当采用大量光子做实验时(对于大多数实验确实如此)，在屏幕上记录到的强度分布与波动理论预测到的结果完全一致。

为了明显地验证衍射并不是一种多光子专有的现象，泰勒在 1909 年做了一个精彩的实验。在一个箱子中，一盏弱光灯将针的影子投射在照相底片上(见图 2.8)。光的强度是如此之弱，以至于在单缝与照相底片之间几乎不可能同时有两个光子出现(见例 2.1)。实际上，为了得到较佳的条纹图样，泰勒将曝光时间持续了几个月，得到的衍射图样与波动理论预言的结果完全一致。

辐射的粒子性与不能预言单一光子轨迹的事实，如图 2.9 所示，图中的一系列图片，显示了对不同光子数曝光形成的不同质量的图片(文献[16])。图中清楚地显示出，图像是由

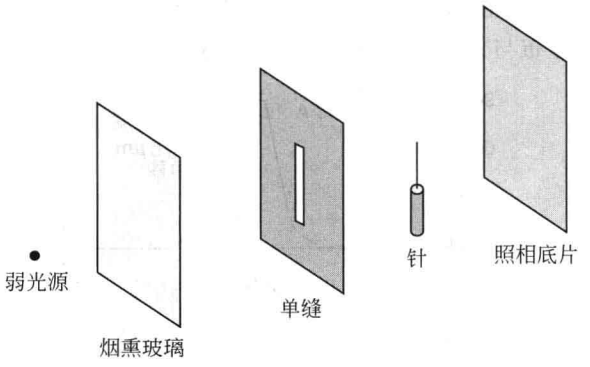


图 2.8　泰勒利用弱光源进行衍射实验的实验装置图，整个装置都放在一个箱子中。

到达光子形成的能量包曝光而成。同时指出，一特定光子到达哪一点，完全是一个随机事件。图中还显示出，当涉及的光子数很少时，照片几乎看不出什么特征，而随着到达照相底片的光子数增大，照片上强度的分布变成符合波动理论预言的结果。引用费曼的话说：

……要预测什么将发生是不可能，我们只能预测可能性！如果这是正确的话，就是否意味着物理学已经放弃试图预测在特定情况下什么将会发生的问题？是的！物理学已经放弃了。我们不知道如何预测在特定情形下什么将会发生，并且我们现在相信这是不可能的——我们唯一可以预测的是不同事件发生的概率。必须承认，这是从人们理解自然界的早期思想中的一种退却。也许这是一种退却，但是，还没有人看到避免这种退却的出路。

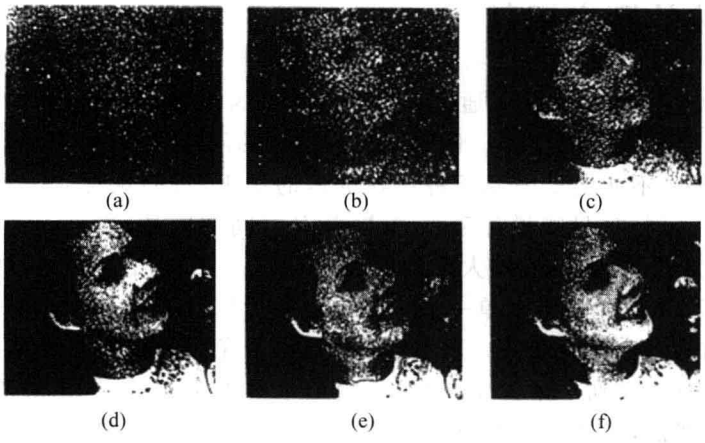


图 2.9　在不同光子数下图片显示的质量：(a)，(b)，(c)，(d)，(e)和(f)分别对应 3×10^3、1.2×10^4、9.3×10^4、7.6×10^5、3.6×10^6 和 2.8×10^7 个光子(来自文献[16]，经过允许重印)。

在放射性研究领域也会出现相似的情形。考虑一个放射性原子核，具有比如 1h 的半衰期。如果开始有 1000 个这样的原子核，则平均来讲，1h 内将有 500 个发生放射性衰变，下一个小时内将有 250 个原子核发生衰变，如此进行下去。因此，虽然开始时，所有的原子核都是一样的，但有些原子核将在最初的 1min 就经历衰变，而有些却可以存在几个小时而不衰变。所以，绝不能预言哪一个原子核在哪一个时间段经历衰变，只能预言在一个特定时间段内，该原子核经历衰变的概率。这确实是量子力学的表现。再次引用费曼的话：

一个哲学家一旦说必须存在这样一种科学，同样的条件将产生同样的结果，则这种科学就恰好不存在！

2.9　干涉实验的理解

考虑与杨氏实验（见 14.4 节与 14.5 节）十分相似的双孔干涉实验。实验装置如图 2.10 所示，一个弱光源 S_0 照亮了双孔 S_1 和 S_2，从而在屏幕 PP' 产生干涉图样。假设强度非常弱，以至于在平面 AB 与屏幕 PP' 之间的区域同时不会有超过 1 个光子（见例 2.1）。单一光子也被置于屏幕 PP' 上的探测器探测计数。可以发现，强度具有 $\cos^2$ 的分布图样，这个图样与如图 14.9 和图 14.10 所示的图样相似。由于探测器只能探测到整个的光子而不是一个光子的一部分，从而可以来证实辐射的粒子性。干涉图样的出现是因为一个光子与它自身相干涉的结果。根据量子理论，一个光子部分地通过孔 S_1 以及部分地通过孔 S_2，这并不是说光子被分成两半，而是意味着如果想要发现光子到底从哪一个孔通过时，将在一半时间发现它从孔 S_1 通过，一半时间发现它从孔 S_2 通过。光子处于两个态的叠加状态，其中一个状态对应发自孔 S_1 的波，而另一状态对应发自孔 S_2 的波，叠加态导致了相似于两波叠加时得到的强度分布。也许要注意的是，假设利用一种定位仪器（如一种显微镜）来确定光子从哪一个孔通过时，则干涉图样将被冲洗掉。这是因为任何测量都将对系统产生扰动。这一点在文献[1]中讨论得很充分。因此，可以说，光子或许是以能量包的形式达到屏幕，然而其（屏幕上的）概率分布确实正比于用波动模型预测的强度分布。

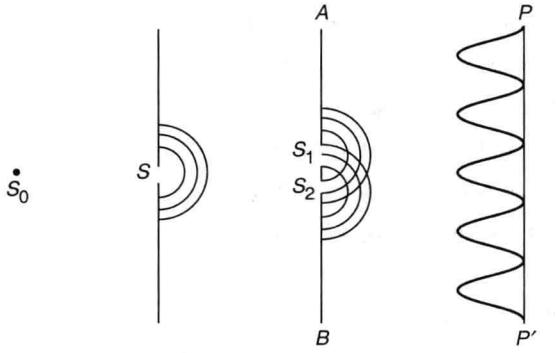


图 2.10　杨氏双孔干涉实验与干涉图样，S_0 代表光源

在近来的一篇论文中，殿村和他的同事（文献[17]）演示了如何用单个电子积聚成一幅干涉图样的实验。如图 2.11 所示为他们的结果，可以看到，当只有少量电子时，它们在屏幕上随机地出现；而当大量的电子积累后，得到的强度分布与波动理论预期的一致。

接着考虑迈克耳孙干涉仪的干涉实验，其中一束光被分束器部分地反射回来，最后使得两束光进行干涉（见图 2.12）。由迈克耳孙干涉仪形成的干涉图样将要在第 15 章讨论。根据狄拉克的话（文献[18]）：

在量子力学建立之前的一阶段，人们认识到，光波与光子之间的联系是具有统计特性的。然而他们没有清晰地认识到，波函数给出的信息是一个光子在某一特定地方出现的概率，而不是出现在那个地方光子的可能数目。用下面的方法可以更清楚地理解这种区分的

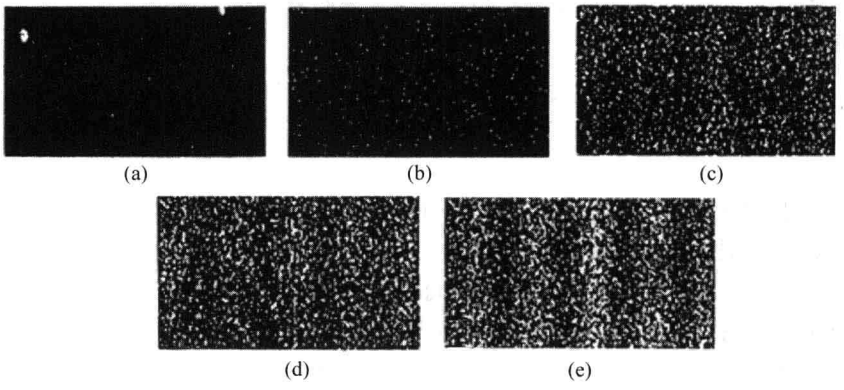


图 2.11　电子衍射图样的建立。在(a),(b),(c),(d)和(e)中电子数分别为 10,100,3000,20000,70000(选自文献[17])

重要性。假定有一包含大量光子的光束,被分成强度相等的两个分量。如果假设光束与其中包含的光子可能的数目相联系,我们就应该认为光束的两个分量中各包含总数一半的光子。当让这两个分量相互干涉时,我们就应当要求光束一个分量中的某一个光子能与光束另一分量中的另一个光子相互干涉。这样,两个光子有时不得不在相互作用后湮灭,而其他时候,二者又不得不相互作用后产生四个光子。这将与能量守恒相抵触。但是用新理论就能克服上述困难,该理论将波函数与一个光子出现的概率相联系。当光束被分开时,将每一个光子部分地分到光束的两个分量中去,这样,每个光子只与它自己发生干涉,在两个光子间进行的干涉从来没有发生过。

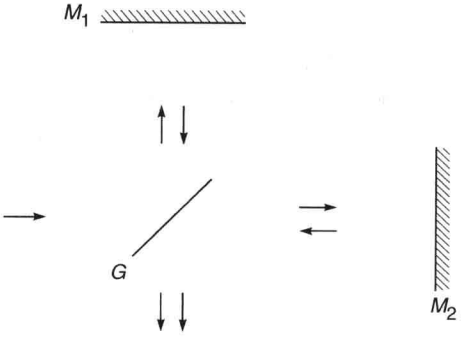


图 2.12　迈克耳孙干涉仪装置示意图。G 是分束器,M_1 与 M_2 是平面镜。

对于迈克耳孙干涉仪实验,狄拉克认为:

……我们将光子描述成部分地进入光束分开的两个分量中。我们可以说,光子处于一个由两个平动态叠加的平动态,而这两个平动态与光束的两分量相联系……对于一个处于确定的平动态的光子,它不一定要只与一束光相联系,也可能与两束光甚至更多束光相联系。而这些光束是由一个原始光束分开而形成的分量。用精确的数学理论来说,每个平动态与普通波动光学的波函数之一相联系,每个波函数描述了由一个原始光束分开的其中一束光、两束光或多束光。

这些平动态可以用类似于考虑两束光干涉一样的方式叠加起来。这样,每个光子部分地进入两个分量中,并且只与自己相干涉。如果试图用测量光束分量之一的能量的方法去确定某单一光子的命运,狄拉克主张:

这种确定的结果必然是:或者测得一个整光子,或者什么也测不到。这时,光子将从部分地处于一束光以及部分地处于另一束光的状态,突然变到全部地处于其中一束光的状态。

这种突然变化来源于为了进行观测而必然对该平动态的扰动。预测某一光子会在哪一束光里被发现是根本不可能的，只有光子在哪一光束里被发现的概率是可以计算的……我们对光子的这种描述使我们推论，当进行能量测量后，就再也不可能在两个分量之间引起干涉效应。只要光子是部分地处于一个分量光束、部分地处于另一分量光束的状态，当两束光叠加时，就会发生干涉。但是，当由于我们进行观测而迫使光子完整地处于两光束之一时，干涉的可能性就消失了。

2.10　光子的偏振

考察一列平面电磁波投射到一个通光方向沿 y 方向放置的偏振片上(如图 2.13 所示)，显然，透射波的电场矢量也将沿着 y 方向(见第 22 章)，这样，如果入射波电场矢量沿 x 方向振动，则入射波将被偏振片吸收；另一方面，如果入射波电场矢量沿着 y 方向振动，则恰好能通过偏振片。进而，如果入射波的电场矢量与偏振片的通光方向成 θ 角时，则透射波强度为 $I_0\cos^2\theta$，式中 I_0 代表入射光的光强(这个关系叫马吕斯定律，将在 22.3 节中讨论)。

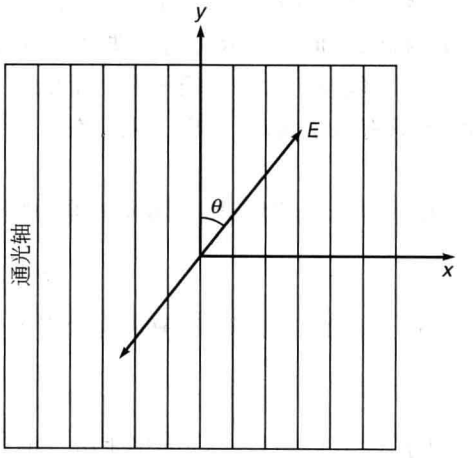


图 2.13　一电场矢量与 y 轴成 θ 角的线偏振光入射到一偏振片上，偏振片的通光方向为 y 轴。

在光子理论中，可以将一个确定的偏振态赋予每个光子。可以认为，与光子相联系的电场矢量沿着 y 轴或 x 轴，则光子将通过偏振片或被它吸收。问题是，如果一个光子的电场矢量方向与偏振片的通光方向成 θ 角时，将会发生什么？答案是光子通过偏振片的概率是 $\cos^2\theta$。如果用 N 个光子做实验(N 非常大)，则有 $N\cos^2\theta$ 个光子通过偏振片。同理，不可能预测出单个光子的演化进程。

例 2.1　在如图 2.10 所示的实验中，如果光源(波长 $\lambda=5\times10^{-5}$cm)的功率是 1W，

(1) 计算光源每秒发射出的光子数；

(2) 假设孔 S，S_1 和 S_2 的半径均为 0.02cm，且 $\overline{S_0S}=\overline{SS_1}=\overline{SS_2}=100$cm，平面 AB 与 PP' 之间的距离也是 100cm。证明：不可能同时在此区域发现两个光子。

解

(1) 每个光子的能量为

$$h\nu=\frac{hc}{\lambda}=\frac{6.6\times10^{-34}(\mathrm{J\cdot s})\times3\times10^{8}(\mathrm{m/s})}{5\times10^{-7}(\mathrm{m})}\approx4\times10^{-19}\mathrm{J}$$

因此，每秒发射的光子数为

$$\frac{1\mathrm{W}}{4\times10^{-19}\mathrm{J}}=2.5\times10^{18}$$

(2) 每秒穿过孔 S 的光子数近似为

$$\frac{2.5\times10^{18}\times\pi\times(0.02)^2}{4\times\pi\times(100)^2}=2.5\times10^{10}$$

类似的,每秒通过 S_1 或 S_2 的光子数近似为

$$\frac{2.5\times10^{10}\times2\times\pi\times(0.02)^2}{2\times\pi\times(100)^2}=1000$$

式中假设通过 S 后,光子平均地分布在半圆上。严格来讲这是不对的,因为衍射图样实际上是一个艾里斑(见第18章),然而,上述计算在定性上是正确的。平面 AB 与 PP' 之间的距离是100cm,意味着光子越过这段距离花了 $\approx3\times10^{-9}$ s。因此,大约每1/1000s内将有1个光子进入这一区域,它在第2个光子进入之前早已越过了这一空间。因此,在 AB 与 PP' 之间的区域,几乎无法同时发现两个光子。这有点像如下的情形,平均来看,一年之内有100个人穿过一房间,而每个人只花约1s的时间穿过此房间,那么,有两个人同时在房间中穿过的情形是极不可能出现的。

例2.2 在这个例子中,将利用测不准原理来确定氢原子的尺寸[①]。虽然本例与光学不直接相关,但它显示了测不准原理的深远影响。

考虑氢原子由一个质子和一个电子组成。既然质子质量远大于电子质量,假定质子不动,而只有电子运动,让电子限定在一个线度约为 a 的区域内,则根据测不准原理,有

$$p\approx\Delta p\approx\hbar/a \tag{2.10}$$

式中 $\hbar=h/2\pi$。使用 $\hbar$ 而不用 h 的原因将在后面讨论。电子的动能为

$$\text{K.E.}=\frac{p^2}{2m}\approx\frac{\hbar^2}{2ma^2} \tag{2.11}$$

由于质子与电子之间有静电吸引力,就会有相应的势能

$$\text{P.E.}=-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} \tag{2.12}$$

式中 $q(\approx1.6\times10^{-19}\ \text{C})$ 为电子所带电量,$\varepsilon_0(\approx8.854\times10^{-12}\ \text{N}^{-1}\cdot\text{C}^2\cdot\text{m}^{-2})$ 代表真空中的介电常数。因此,氢原子的总能量为

$$E=\text{K.E.}+\text{P.E.}\approx\frac{\hbar^2}{2ma^2}-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} \tag{2.13}$$

系统将趋于处于最低能态,令 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}a$ 为零

$$0=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}a}=-\frac{\hbar^2}{ma^3}+\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

则

$$a=a_0=\frac{\hbar^2}{m\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)} \tag{2.14}$$

如果将 $\hbar(\approx1.055\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})$,$m$ $(\approx9.11\times10^{-31}\ \text{kg})$,$\varepsilon_0$ 和 q 代入式(2.14),可得

$$a=a_0\approx0.53\times10^{-10}\ \text{m}\approx0.53\text{Å} \tag{2.15}$$

这样,就得到了一个惊人的结果,氢原子的尺寸可以直接利用测不准原理得到。引用费曼的话说:

所以,我们现在懂得了我们为什么不会掉到地板下面去……为了把原子挤得更靠近一些,电子必须被限制在一个较小的空间中,由测不准原理,平均而言,它们的动量将变得更大

① 这里的分析引自文献[1]。

一些，这就意味着能量变大。因此，抵抗原子压缩的是一种量子效应……

下面，将式(2.14)中的 a 代入式(2.13)，可得

$$E=\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{m}{\hbar^2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{m}{\hbar^2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)$$

$$=-\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \tag{2.16}$$

将 $\hbar$，m，q 和 ε_0 代入，可得

$$E\approx-2.17\times10^{-19}\text{J}\approx-13.6\text{eV} \tag{2.17}$$

这恰好就是氢原子基态能量。因此，氢原子的电离能近似为 13.6eV 可以由测不准原理求得。要指出的是，利用测不准原理只能给出氢原子尺寸或电离能的数量级；有意识地选择恰当的常数，这才使基态能量得出这样正确的结果。正是因为如此，在式(2.10)和式(2.11)中选择了常数 $\hbar$，而不是 h。

2.11　时间-能量不确定关系

当一个原子从能态 E_2 跃迁到能态 E_1 时($E_2>E_1$)，发射一个频率为 $\nu=(E_2-E_1)/h$ 的光子。这实质上是发射一个持续时间约为 10^{-9}s 的一个脉冲，持续时间记为 τ。它将导致一个频率展宽 $\Delta\nu$(将在第 17 章讨论)，则

$$\tau\Delta\nu\geqslant1 \tag{2.18}$$

两边同乘以 h，可以得到时间-能量不确定关系

$$\Delta t\Delta E\geqslant h \tag{2.19}$$

这个关系可解释如下：当 Δt 代表一个与时间相关的过程发生时的时间不确定度，则在此过程中，能量的不确定度为$\geqslant h/\Delta t$。假设 $\Delta t\approx10^{-9}$s，则

$$\Delta E\approx\frac{h}{\Delta t}\approx4\times10^{-6}\text{eV}$$

小　结

- 光的粒子模型是由笛卡儿提出的，而不是牛顿。光的折射定律是斯涅耳在 1621 年实验发现的。1637 年，笛卡儿利用粒子模型推导出斯涅耳的折射定律。
- 光的波动模型是 1678 年由惠更斯第一次提出的。利用波动模型，惠更斯可以解释反射和折射定律，并且还可以解释双折射现象。
- 大约 19 世纪中叶，麦克斯韦由变化的电场也可以产生磁场出发，推广了安培定律。他将所有电和磁的定律总结成方程组的形式，现在称之为麦克斯韦方程组。基于这组方程，他推导出波动方程，预言了电磁波的存在，并证明了空气中电磁波的速度大约为 3.107×10^8m/s，这与光速当时的测量值非常接近。这两个数值非常接近的独特的现象促使麦克斯韦提出了他著名的光的电磁理论，光波是一种电磁波。
- 1905 年，爱因斯坦利用他提出的光子理论解释了光电效应，根据光子理论，一束频率为 ν 的光的能量都是聚集在能量为 $h\nu$ 的光量子上，这里 h 表示普朗克常数。

- 波粒二象性是海森堡测不准原理的推论。根据测不准原理,假如一个粒子位置在 x 方向上可以精确到 Δx,其在 x 方向上的动量的精确度不可能好过 $\Delta p_x \approx h/\Delta x$,式中 h 是普朗克常数。
- 经典粒子模型无法解释光通过单缝的衍射现象。然而我们用测不准原理与粒子模型相结合,就可以解释衍射现象了。
- 在杨氏双孔干涉图样实验中,辐射的粒子性由探测到的是一个整光子而不是一部分光子而得到证实。干涉图样的出现是由于光子与它自己进行干涉。量子理论告诉我们,光子是部分地通过两个孔,这并不是说光子被分成了两半,而只是意味着光子处于两个态的叠加态上。其中一个态对应起源于第一个孔的波,而另一个态对应于起源于第二个孔的波。叠加态产生的强度分布与考虑两个波叠加而成的强度分布一致。

习　题

2.1 一个能量为 200eV 的电子通过一个半径为 10^{-4}cm 的圆孔,其动量和衍射角的不确定度是多少?

[**答案**: $\Delta p \approx 5\times10^{-24}$ g·cm/s; $\Delta\theta \approx 6\times10^{-6}$ rad]

2.2 一个质量为 0.1g 的小球,通过一个半径为 1cm 的小孔以 10^{3}cm/s 的速度抛出,其衍射角的不确定度是多少?

[**答案**: $\Delta\theta \approx 5\times10^{-30}$ rad]

2.3 一个波长为 6000Å 的光子通过一个 0.2mm 宽的狭缝,

(1) 计算其衍射角不确定度;

(2) 单缝衍射的第一极小出现在 $\arcsin(\lambda/b)$ 处,式中 b 是缝宽,并将这一计算结果与(1)计算得到的角度比较一下。

[**答案**: $\Delta\theta \approx 3\times10^{-3}$ rad]

2.4 一个 50W 的灯泡辐射波长为 0.6μm 的光,计算每秒辐射的光子数。

[**答案**: $\approx 1.5\times10^{20}$ 个/s]

2.5 质子被束缚在半径为 10^{-13}cm 的原子核内,计算其动量的不确定度。基于这个结果,估算质子在原子核中的动能以及原子核相互作用能。如果将电子也束缚在原子核中,电子的动能是多少?

2.6 氢原子 2P 态的寿命是 1.6×10^{-9}s,利用时间-能量不确定关系,计算辐射的频率宽度 $\Delta\nu$。

[**答案**: $\approx 6\times10^{8}$ Hz]

2.7 一个输出 1W 的激光束(直径为 2cm)正入射到两个直径为 0.05cm 的圆孔上,如图 2.14 所示。计算能在平面 AB 与 PP' 之间找到的平均光子数。假定波长 $\lambda = 6\times10^{-5}$cm,平面 AB 与 PP' 之间的距离是 30cm。

[**答案**: $\approx 4\times10^{6}$ 个光子]

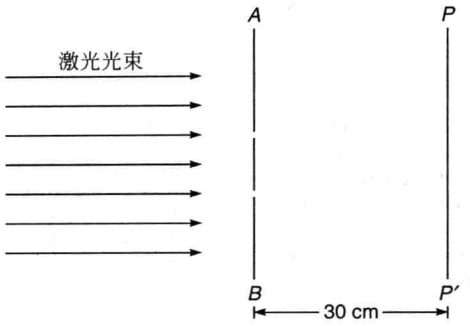


图 2.14　习题 2.7 图

题　解

2.5　质子被限定在一个直径为 $r_0 \approx 10^{-13}\,\mathrm{cm}$ 的核内，则其动量的不确定度至少在量级上与 $\hbar/r_0$ 相当，则：

$$p \sim \frac{\hbar}{r_0}$$

所以，质子的动能为：

$$E = \frac{p^2}{2m_p} \sim \frac{\hbar^2}{2m_p r_0^2}$$

式中 m_p 是质子的质量。代入数据，得

$$E \sim \frac{(1.05\times10^{-27}\,\mathrm{erg\cdot s})^2}{2\times1.67\times10^{-24}\,\mathrm{g}\times(10^{-13}\,\mathrm{cm})^2} \approx 3\times10^{-5}\,\mathrm{erg} \approx 20\mathrm{MeV}$$

既然质子束缚在原子核内，平均势能$\langle V\rangle$必然是负的，且数值上应该大于动能，所以：

$$-\langle V\rangle \geqslant 20\mathrm{MeV}$$

这就给出了势能的数量级。电子的动量不确定度也是$\hbar/r_0$，但其质量远小于质子的质量，因此其速度接近光速 c，应用能量的相对论公式，可得

$$E = cp = \frac{c\hbar}{r_0} \approx \frac{(3\times10^{10})(1.05\times10^{-27})}{10^{-13}\times1.6\times10^{-6}}\mathrm{MeV} \approx 200\mathrm{MeV}$$

虽然电子是从原子核的 β 衰变过程中产生的，但是它们鲜有能量超过几个兆电子伏的。所以，人们不会预测电子是原子核的基本构成。β 衰变这种罕见的过程归因于一个中子变换成一个质子和一个电子(还有一个中微子)的变换过程，因此，电子确实是在衰变的瞬间产生的。

参考文献和推荐读物

1. R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, The Feynman Lectures on Physics, Vol. III, Addison Wesley Publishing Co., Reading, Mass. (1965).
2. Isaac Newton, Optiks, Dover Publications (1952).
3. W.B. Joyce and A. Joyce, Descartes, Newton and Snell's law, J. Opt. Soc. America, Vol. **66**, 1, (1976).
4. A. W. Barton, A Text Book on Light, Longmans Green & Co., London (1939).
5. C. Huygens, Treatise on Light, Dover Publications (1962).
6. R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The* Feynman

Lectures on Physics, Vol. II, Addison Wesley Publishing Co., Reading, Mass. (1965).
7. A. Einstein, On a heuristic point of view concerning the production and transformation of light, Annalen der Physik, **17**, 132, 1905.
8. J. Stachel (Ed.), Einstein's Miraculous Year: Five Papers that changed the face of Physics, Prtinceton University Press, Princeton, 1998; reprinted by Shrishti Publishers, New Delhi.
9. W.H. Cropper, The Quantum Physicists and an Introduction to their Physics, Oxford University Press, New York (1970).
10. M. Jammer, The Conceptual Development of Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York (1965).
11. R. Eisberg and R. Resnick, Quantum Physics, John Wiley & Sons, New York (1974).
12. A. Ghatak and S Lokanathan, Quantum Mechanice: Theory and Applications, Macmillan India, New Delhi (2005); reprinted by Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2004).
13. G. Gamow,Mr. Tompkins in Wonderland,Cambridge University Press, Cambridge (1940).
14. M. Born, Atomic Physics, Blackie & Son, London (1962).
15. C.G. Shull, Neutron Diffraction: A General Tool in Physics in Current Problems in Neutron Scattering, Proceedings of the Symposium held at CNEN Casaccia Center in September 1968, CNEN, Rome (1970).
16. A. Rose, Quantum Effects in Human Vision, Advances in Biological and Medical Physics, Vol. V, Academic Press, (1957).
17. A. Tonomura, J. Endo, T. Matsuda, T. Kawasaki and H. Ezawa, Demonstration of single-electron build up of an interference pattern, Am. J. Phys. **57** (2). 117 (1989).
18. P.A.M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics, Oxford University Press, Oxford (1958).

第一部分

几何光学

这一部分(包含 4 章)所讨论的内容完全基于几何光学,内容包括:

※ 渐变折射率媒质里的光线追迹方法,并用该方法讨论海市蜃楼(又名上现蜃景)和下现蜃景现象,以及光线从电离层反射的问题。

※ 透镜系统的光线追迹方法,引出光学仪器设计所用的各种概念。

※ 对傍轴近似光学中的矩阵方法进行详述,这些内容广泛地用于工业界。

※ 光学系统像差的研究。

第3章 费马原理及其应用

随着科学的进一步发展，我们所追求的是比知道公式更多的东西。首先先观察，接着测量一些数据，然后总结所有数据的关系而得到定律。但是，科学真正的辉煌在于可以找到一种思想方法，运用这样的思想方法，从而使得定律清晰易懂。使得有关光的行为的定律成为明显事实的第一个思想方法是由费马于1650年发现的，它称为最小时间原理或费马原理。

——理查德·费曼，《费曼物理学讲义》，第一卷

重要的里程碑

公元前140年	希腊物理学家托勒密对光线在空气中不同的入射角，测量出其在水中的折射角，并制作出一个数值表格。
1621年	虽然上述数值表格是在公元前140年建立的，直到1621年，荷兰数学家维勒布罗德·斯涅耳才发现了现今称为斯涅耳定律的折射定律。
1637年	笛卡儿推导了斯涅耳定律，在推导中他假设光为粒子模型。
1657年	费马阐述了“最小时间原理”，用其推导了斯涅耳定律，并证明了如果第二媒质的光速小一些，则光线将朝法线方向弯曲，这与笛卡儿的“粒子理论”相反。

3.1 引言

在几何光学领域研究光的传播需要用到光线的概念。为了理解什么是光线，考虑一个圆形光阑放在点光源 P 之前，如图3.1所示。当光阑的直径相当大(约1cm)时，则在屏幕 SS' 上，可以看到界限分明的圆形光斑。开始减小光阑的尺寸，刚开始的时候，光斑尺寸也随之减小。但是当光阑尺寸变得非常小($\leqslant$0.1mm)时，屏幕 SS' 上的图样不再是界限分明的。这种现象被称作衍射现象，它是光波长(用 λ 表示)为有限值的直接结果。在第18章和第20章中将更详细地讨论衍射现象，并证明衍射效应将随着波长的减小而减小。实际上，当在 $\lambda\to0$ 的极限情况下，衍射现象将消失，这时，即使光阑的尺寸极其的小，也可以在屏幕 SS' 上得到界限分明的影子。因此，当波长取极限为零的情况下，可以获得无限细的一束光，叫做光线。这样，光线定义为在波长趋于零的极限下能量的传播路径。由于光波长具有 10^{-5}cm 的数量级，这与像透镜、反射镜等通常光学仪器的尺寸比起来非常小，从而在许多应用中可以忽略波长的有限大小。在这种近似下(即忽略波长有限大小)的光学领域，被

称为几何光学。

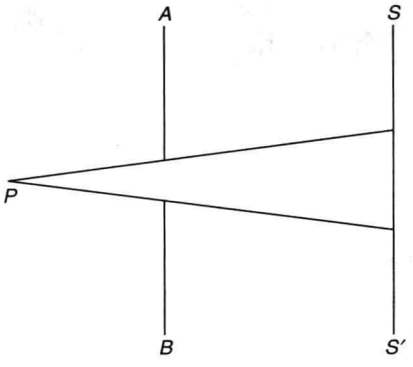


图 3.1　一个点光源发出的光经过一个圆孔，如果圆孔直径相比波长足够大，则光投射到屏幕 SS' 上形成界限分明的圆形光斑。

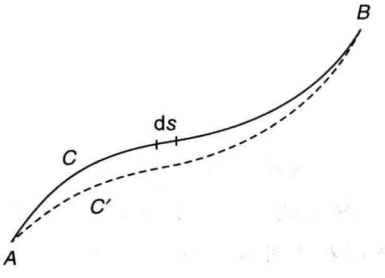


图 3.2　假如路径 ACB 代表真实路径，则经历路径 ACB 所需时间相比于相邻的路径 $AC'B$ 来说取极值。

几何光学领域的问题可以用决定光线路径的费马原理进行研究。根据费马原理，光线对应于这样的路径，它比起相邻路径的传播时间取极值，这里极值的含义是或者取最小值、或者取最大值、或者取平稳值[①]。令 $n(x,y,z)$ 表示与位置相关的折射率，则

$$\frac{\mathrm{d}s}{c/n}=\frac{n\mathrm{d}s}{c}$$

这表示了光在折射率为 n 的媒质中，经历几何路径 $\mathrm{d}s$ 所需要的时间。式中 c 表示自由空间中的光速。如果用 τ 表示光线沿曲线 C 经历路径 AB 所需的总时间(见图 3.2)，则

$$\tau=\frac{1}{c}\sum_i n_i\mathrm{d}s_i=\frac{1}{c}\int_{A\xrightarrow[C]{}B}n\mathrm{d}s \tag{3.1}$$

式中 $\mathrm{d}s_i$ 代表第 i 个小弧长，n_i 是这一段小弧长处对应的折射率，积分号下的符号 $A\xrightarrow[C]{}B$ 代表沿着曲线 C 从点 A 积到点 B。令 τ' 表示沿着相邻的路径 $AC'B$(如图 3.2 所示中的虚线)，假如路径 ACB 代表实际的光线路径，则 τ 与它旁边相邻的所有 $AC'B$ 路径所用时间 τ' 相比，τ 或者小于 τ'、τ 或者大于 τ'、τ 或者等于 τ'。根据费马原理，在连接两点的许多路径中，光线将沿着所需时间取极值的那条路径通过。既然 c 是个常数，换一种说法定义光线，令

$$\int_{A\xrightarrow[C]{}B}n\mathrm{d}s \tag{3.2}$$

取极值[②]。上面的积分代表沿着 C 从点 A 到点 B 的光程。即光线沿着这样的路径，该路径满足

$$\delta\int_{A\xrightarrow[C]{}B}n\mathrm{d}s=0 \tag{3.3}$$

式(3.3)左边表示由于光线路径无限小的变分引起的积分变化。在这里提一下费马原理的

① 整个经典光学(包括几何光学和物理光学)都能由麦克斯韦方程组来解释，费马原理也可以由麦克斯韦方程组推导出来(见文献[1,2])。

② 关于极值原理的一个非常好的讨论见文献[3]中的第 26 章。

最初表述：

两点之间一束光的真实光线是取所需时间最小的路径。

上述的表述是不完全的，而且稍有漏洞。正确的表述形式为：

两点之间的真实光线是所走光程相对于路径的变分是平稳的那一条。

这一表述与式(3.3)是一致的。在这个公式中，光线光程取极小值、极大值或者平稳值。

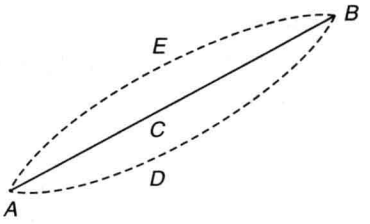


图 3.3　两点之间最短的路径是一条直线，那么，均匀媒质中的光线就是直线。所有其他相邻的路径，如 AEB 和 ADB，都要花更长的时间。

从上述原理可以立刻看出，在均匀媒质中(即媒质的折射率在每一点都是常数)，光线将是直线，因为直线对应媒质中两点间光程取最小值。如图 3.3 所示，如果点 A 和点 B 是均匀媒质中的两个点，则光线将沿着直线 ACB 传播，因为任意相邻路径如 ADB 或 AEB 都对应于所需时间更长的路径。

3.2　从费马原理推导反射定律和折射定律

根据费马原理，可以得到反射定律和折射定律。如图 3.4 所示，考虑一个平面反射镜 MN，为了得到反射定律，要确定从点 A(经反射镜)到点 B 的光线路径，该路径的光程应该取最小值。由于光线在均匀媒质中传播，只需考察路程取最小值。这样，需要寻找路径 APB 使得 $\overline{AP}+\overline{PB}$ 为最小值。为了找到反射镜上点 P 的位置，由点 A 向反射镜引一个垂线，并令点 A' 是垂线上的一点，且 $\overline{AR}=\overline{RA'}$。则 $\overline{AP}=\overline{PA'}$ 和 $\overline{AQ}=\overline{A'Q}$，这里 AQB 是与 APB 相邻的路径。很显然，为使 $\overline{A'PB}$ 为最小值，点 P 必然位于直线 $A'B$ 上，因此，点 A，A'，P 和 B 将处于同一平面内。如果在点 P 画法线 PS，则 PS 仍在此平面内。由几何关系可证明

$$\angle APS = \angle SPB$$

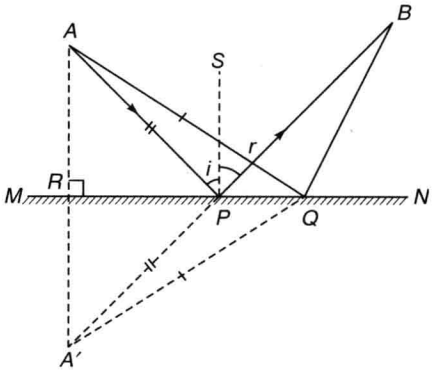


图 3.4　通过反射镜连接两点 A 和 B 的最短路径是沿着 APB 的路径，其中 P 满足以下条件：AP，PB 和反射镜面的法线 PS 在一个平面内，$\angle APS=\angle SPB$。直线 AB 也是一条光线。

这样，为使光程最小，入射角 $i(=\angle APS)$ 与反射角 $r(=\angle SPB)$ 必须相等，入射光线、

反射光线和镜面上入射点的法线必须位于同一平面内,以上这些表述形成了反射定律。应当指出的是,在反射镜存在的情况下,连接点 A 与点 B,将有两条光线路径,分别为 AB 和 APB。根据费马原理,只要光程存在一个极值,就会存在一条光线。因此两点之间可能存在不止一条光线。

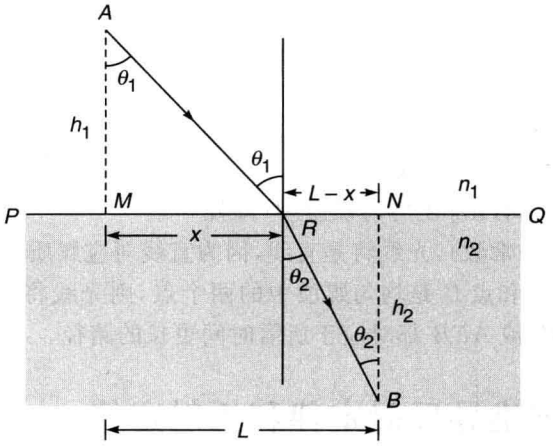


图 3.5 A 和 B 分别是折射率为 n_1 和 n_2 媒质内的两点。连接 A 和 B 的光线路径将满足 $n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2$

为了得到折射定律,令 PQ 表示区分折射率分别为 n_1 和 n_2 的两个媒质的界面,如图 3.5 所示。令光线从点 A 出发,与界面相交于点 R,然后沿 RB 到达点 B。很显然,为使光程取最小值,入射光线、反射光线与界面法线必须位于同一平面内。为了确定点 R 的位置使得光程为最小,分别从点 A 和点 B 引到界面 PQ 的垂线 AM 和 BN。令 $\overline{AM}=h_1$,$\overline{BN}=h_2$,以及 $\overline{MR}=x$,而点 A 和点 B 是固定的,则 $\overline{RN}=L-x$,这里 $\overline{MN}=L$ 是一个固定值。按照定义,从点 A 到点 B 的光程为

$$L_{\text{op}} = n_1\,\overline{AR} + n_2\,\overline{RB} = n_1\sqrt{x^2+h_1^2} + n_2\sqrt{(L-x)^2+h_2^2} \tag{3.4}$$

取极小值,有

$$\frac{\mathrm{d}L_{\text{op}}}{\mathrm{d}x} = 0$$

即

$$\frac{n_1 x}{\sqrt{x^2+h_1^2}} - \frac{n_2(L-x)}{\sqrt{(L-x)^2+h_2^2}} = 0 \tag{3.5}$$

见图 3.5,可得

$$\sin\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+h_1^2}}$$

及

$$\sin\theta_2 = \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2+h_2^2}}$$

则式(3.5)可变为

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \text{①} \tag{3.6}$$

这正是斯涅耳折射定律。

例 3.1　考虑一组平行于光轴的光线入射到抛物面反射镜上(见图 3.6)。根据费马原理证明：所有这组光线均将通过抛物面的焦点。抛物面是由一抛物线绕它的轴旋转一周而成。这就是抛物面镜被用来聚焦远方光源的平行光线的原因(见图 3.7 和图 3.8)。

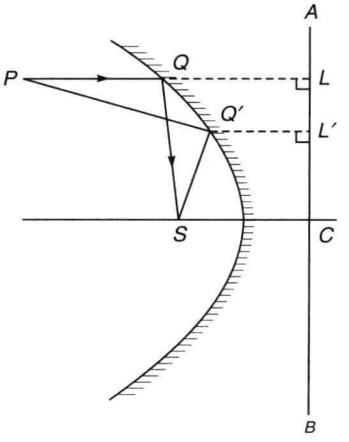


图 3.6　所有平行于抛物面反射镜光轴的光线反射后，都通过焦点(直线 ACB 是准线)。这就是天线(接收电磁波用)与太阳能接收器经常做成抛物面形状的原因。

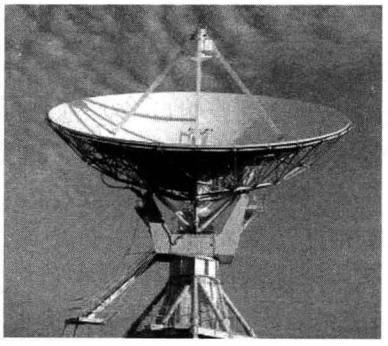


图 3.7　抛物面碟形卫星接收天线。图片由 McGraw-Hill 数字图书馆提供。彩图见文前附录图表页的图 1

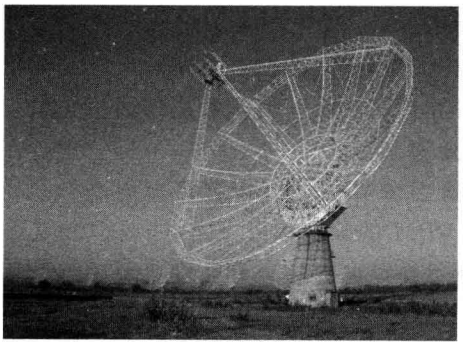


图 3.8　巨米波射电望远镜(GMRT)中自动指向的 45m 抛物面碟形天线，位于印度浦那。GMRT 具有 30 个 45m 直径的抛物面碟形天线，其中有 14 个天线组成中心阵列。图片由来自印度浦那 GMRT 的 Govind Swarup 教授提供。彩图见文前附录图表页的图 2。

解　考虑一平行于抛物面光轴的光线 PQ，入射点在点 Q(见图 3.6)。为了找出反射线，画出抛物面上点 Q 处的法线，再画出反射线。由几何关系可以证明，反射线 QS 一定会通过焦点 S 的。然而，我们将指出这个证明过程非常麻烦。利用费马原理，可以立刻得到

① 原书为 $n_1 \sin\theta_1 = n_1 \sin\theta_2$

所需的结果。

为了应用费马原理,连接焦点 S 和任一点 P 之间的光线(见图 3.6)。画一条光线的路径为 $PQ'S$,根据费马原理,实际光线对应于 $\overline{PQ'}+\overline{Q'S}$ 取最小值。从点 Q' 引一垂线 $Q'L'$ 到准线 AB,由抛物线的定义,$\overline{Q'L'}=\overline{Q'S}$,则

$$\overline{PQ'}+\overline{Q'S}=\overline{PQ'}+\overline{Q'L'}$$

令点 L 为从点 P 向 AB 所引垂线的垂足,为了使 $\overline{PQ'}+\overline{Q'L'}$ 取最小值,点 Q 应位于直线 PQL 上,所以,连接点 P 和点 S 的真实光线将是 $\overline{PQ}+\overline{QS}$,其中 PQ 平行于光轴。因此,所有平行于光轴的光线都将通过点 S,反之,所有从点 S 发出的光线经过反射后,都将平行于光轴。

例 3.2 考虑一个椭球反射器,点 S_1 和点 S_2 是它的焦点(见图 3.9)。证明所有从焦点 S_1 发出的光线经过反射后,都将通过焦点 S_2。

解 考虑椭圆上的任意一点 P(见图 3.9)。可知,$\overline{S_1P}+\overline{S_2P}$ 是一个常数,因此,从焦点 S_1 发出的所有光线都将通过焦点 S_2。注意这里,有了一个光线所需时间是平稳的例子,即,对于所有的点 P,它既不是最大值也不是最小值,而是常数值。作为一个推论,要注意以下两点。

(1) 除了轴上的光线,不会有其他光线(不论从哪个焦点发出)通过位于轴上的任意点 Q。

(2) 对于将椭圆绕其轴旋转而成的椭球面,上面的所有结论同样适用。

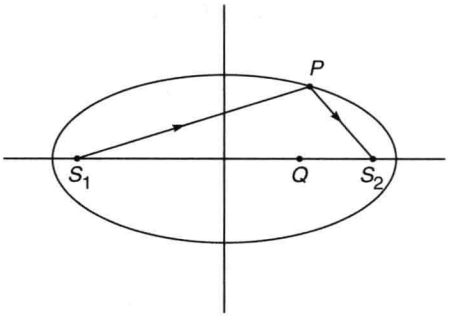


图 3.9 从椭球镜面的一个焦点发出的所有光线经镜面反射后,都将通过另一个焦点。

由于椭圆反射器的上述性质,它常被用于激光器系统中。例如,在红宝石激光器中(见第 26 章),激光棒与闪光灯放置在柱状椭圆反射镜的两个焦线上,这样的构造,使闪光灯发出的能量有效地传递到激光棒上。

例 3.3 考虑一球形折射分界面 SPM,它将折射率分别为 n_1 和 n_2 的媒质分开(见图 3.10),点 C 代表球形面 SPM 的圆心。考虑两点(点 O 和点 Q),使得点 O、C 与 Q 在一条直线上。利用如图 3.10 所示的距离 x,y,r 和角度 θ,计算光程 OSQ,并根据费马原理,找出点 O 和点 Q。最后在假定 θ 很小时,确定物点 O 的傍轴像点。

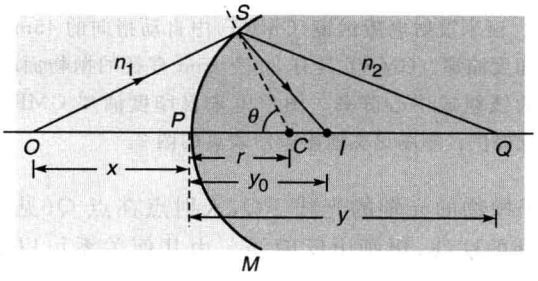


图 3.10 SPM 是分开两种折射率分别为 n_1 和 n_2 媒质的球形折射界面,C 表示球形面的圆心。

[**注意**:R 表示球面的曲率半径,如果曲率中心位于点 P 的右侧(或者左侧),曲率半径

取正值(或者负值)。r 表示曲率半径的大小,如图 3.10 所示,它碰巧就是 R。同样,x 与 y 也是距离的大小,它们的符号习惯将在本例题后面讨论。]

解　由△SOC,有

$$\begin{aligned}\overline{OS} &= [(x+r)^2 + r^2 - 2(x+r)r\cos\theta]^{\frac{1}{2}} \\ &\approx \left[x^2 + 2rx + 2r^2 - 2(xr+r^2)\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\approx x\left(1+\frac{rx+r^2}{x^2}\theta^2\right)^{\frac{1}{2}} \approx x + \frac{1}{2}r^2\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{x}\right)\theta^2\end{aligned}$$

式中已假设 θ(单位用 rad)非常小,以至于可以用下式表示

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

并代入上式做二项式展开。同理,由△SCQ,有

$$\overline{SQ} \approx y - \frac{1}{2}r^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{y}\right)\theta^2$$

则光程 OSQ 为

$$L_{op} = n_1\,\overline{OS} + n_2\,\overline{SQ} \approx (n_1 x + n_2 y) + \frac{1}{2}r^2\left(\frac{n_1}{x}+\frac{n_2}{y}-\frac{n_2-n_1}{r}\right)\theta^2 \tag{3.7}$$

令光程取极值,则

$$\frac{\mathrm{d}L_{op}}{\mathrm{d}\theta} = 0 = r^2\left(\frac{n_1}{x}+\frac{n_2}{y}-\frac{n_2-n_1}{r}\right)\theta \tag{3.8}$$

这样,除非式(3.8)中圆括号内的量为零,则必须有 $\theta=0$,这意味着对应连接点 O 与点 Q 的唯一光线只能是直线 OPQ。这个结果服从斯涅耳定律,因为 OP 是沿着球面的法线入射的,它当然不会偏离直线。

另一方面,如果 y 取某些值使得括号内的量为零,即如果 $y=y_0$,有

$$\frac{n_2}{y_0}+\frac{n_1}{x} = \frac{n_2-n_1}{r} \tag{3.9}$$

在此时,对于所有 θ 值,$\mathrm{d}L_{op}/\mathrm{d}\theta$ 都将为零。当然,已经假定 θ 非常小——也就是傍轴近似。现在,如果对应线段 $\overline{PI}=y_0$(见图 3.10)上的点 I,则使得所有 OSI 都是光线路径,也就是意味着所有从点 O 发出的(傍轴)光线都将通过点 I,点 I 也就将代表傍轴像点。显然,所有像 OSI 的光线(起始于点 O 而最终通过点 I)当到达点 I 时,经历了相同的时间。

应该指出,式(3.9)是如下所示的傍轴像点公式的一个特定形式

$$\frac{n_2}{v}-\frac{n_1}{u} = \frac{n_2-n_1}{R} \tag{3.10}$$

式(3.10)采用传统的符号选取方法:所有在点 P 右侧测量的距离都取正号,而那些在左侧的取负号。因此,这里 $u=-x$,$v=+y$,以及 $r=+R$。

为确定光线路径 OPQ 是否对应于最小时间、或者最大时间、或者取常数,必须确定 $\mathrm{d}^2L_{op}/\mathrm{d}\theta^2$ 的符号。

$$\frac{\mathrm{d}^2L_{op}}{\mathrm{d}\theta^2} = r^2\left(\frac{n_1}{x}+\frac{n_2}{y}-\frac{n_2-n_1}{r}\right) = r^2 n_2\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y_0}\right)$$

显然,如果 $y>y_0$(即点 Q 位于傍轴像点 I 的右侧),$\mathrm{d}^2L_{op}/\mathrm{d}\theta^2$ 是负的,光线路径 OPQ

相比于邻近路径取最大时间，反之亦然。另一方面，如果 $y=y_0$，$\mathrm{d}^2L_{\mathrm{op}}/\mathrm{d}\theta^2$ 将为零，这意味着光程极值取常数，因此，在傍轴近似下，所有从点 O 发出的光线当到达点 I 时，所需时间相等。

反过来，如果认为点 I 是点 O 的傍轴像，则

$$n_1\overline{OP}+n_2\overline{PI}=n_1\overline{OS}+n_2\overline{SI}$$

当点 Q 位于点 I 的右侧时，有

$$\begin{aligned}n_1\overline{OP}+n_2\overline{PQ}&=n_1\overline{OS}+n_2(\overline{SI}-\overline{PI}+\overline{PQ})=n_1\overline{OS}+n_2(\overline{SI}+\overline{IQ})\\&>n_1\overline{OS}+n_2\overline{SQ}\end{aligned}$$

这意味着光程 OPQ 对应于一个最大值。同理，当点 Q 位于点 I 左侧时，光程 OPQ 对应于一个最小值。而当点 Q 与点 I 重合时，就具备了光程取平稳值的条件。

例 3.4 再次考察在球面处的折射，假设折射光线是从主光轴发散开来(见图 3.11)。考察傍轴光线，并令点 I(位于光轴上)满足 $n_1\overline{OS}-n_2\overline{SI}$ 的值不受点 S 位置的影响，那么，对于傍轴光线，量

$$(n_1\overline{OS}-n_2\overline{SI})\quad\text{与}\theta\text{无关}\qquad(3.11)$$

并取极值。令点 P 为第二媒质中的任意点，下面希望找到连接点 O 与点 P 的光线，使得 OSP 是一条可能的光线路径，则

$$L_{\mathrm{op}}=n_1\overline{OS}+n_2\overline{SP}\quad\text{取极值}$$

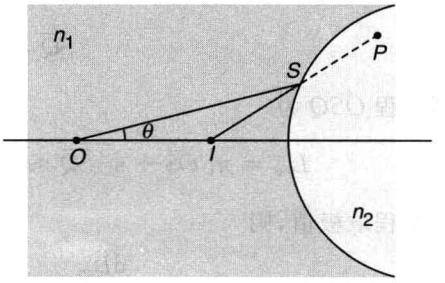


图 3.11 假设折射光从主光轴发散开。

或

$$L_{\mathrm{op}}=(n_1\overline{OS}-n_2\overline{SI})+n_2(\overline{IS}+\overline{SP})\quad\text{取极值}$$

在这个公式中，同时“+”和“−”了 $n_2\overline{SI}$。现在选取点 I 的位置使第一项已经取极值，则量 $\overline{SP}+\overline{SI}$ 也应该取极值，因此它应该是一条直线。所以折射光线看上去好像是从点 I 发出，从而可以说，对于一个虚像，使得

$$n_1\overline{OS}-n_2\overline{SI}\quad\text{取极值}\qquad(3.12)$$

3.3 非均匀媒质中的光线路径

在非均匀媒质中，折射率连续地变化，一般来说，其中的光线路径是弯曲的。例如，在一个大热天，接近地表的空气温度高于远离地表的空气温度。由于空气的密度随着温度的升高而减小，则从地面向上，空气的折射率将连续地增加，这会导致一种现象，即大家熟知的“海市蜃楼”。下面根据斯涅耳定律(或者费马原理)来确定光线在非均匀媒质中的路径。将问题只限制在一种特殊情况：折射率只沿着一个方向连续变化，即，假设变化方向沿着 x 轴方向。

非均匀媒质可以想象成一系列具有不同折射率的层状媒质的极限情况，如图 3.12(a)所示。在每一个界面上，光线都满足斯涅耳定律，可得

$$n_1\sin\phi_1=n_2\sin\phi_2=n_3\sin\phi_3=\cdots\qquad(3.13)$$

那么，称乘积

$$n(x)\cos\theta(x)=n(x)\sin\phi(x)\qquad(3.14)$$

为光线路径的不变量，并将这个不变量记为 $\tilde{\beta}$。$\tilde{\beta}$ 这个不变量由如下的事实确定，如果光线开始时在折射率为 n_1 的一点与 z 轴夹角为 θ_1（相对于 z 轴），则 $\tilde{\beta}$ 的值就是 $n_1\cos\theta_1$。那么，在折射率连续变化的极限情况下，如图 3.12(a)所示的那些分段直线将形成一条连续的曲线，这条曲线由下面的方程决定

$$n(x)\cos\theta(x) = n_1\cos\theta_1 = \tilde{\beta} \tag{3.15}$$

这意味着：当折射率变化时，光线路径以保持乘积 $n(x)\cos\theta(x)$ 为常数的方式弯曲（见图 3.12(b)）。式(3.15)可以用来推导光线方程（见 3.4 节）。

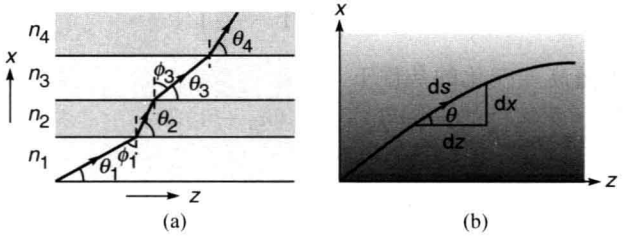


图　3.12

(a) 在层状结构中，光线会按照使乘积 $n_i\cos\theta_i$ 保持常数方式转向弯曲；

(b) 对于连续变化折射率的媒质，光线路径会按照乘积 $n(x)\cos\theta(x)$ 保持常数的方式弯曲。

3.3.1　海市蜃楼现象[①]

下面定性地讨论海市蜃楼现象（也称下现蜃景现象）的形成。如前所述，在一个热天，当接近地表时，空气折射率将逐渐连续减小。实际上，折射率的变换规律可以近似地假设为以下形式

$$n(x) \approx n_0 + kx, \quad 0 < x < \text{几米} \tag{3.16}$$

式中 n_0 为 $x=0$ 处的空气折射率（即刚刚高于地面处），k 是一个常数。精确的光线路径（见例 3.8）如图 3.13 所示。

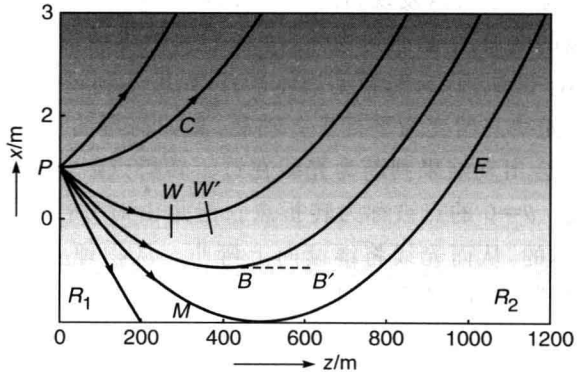


图 3.13　折射率线性变化的媒质中的光线路径（见式(3.16)），其中变化率 $k\approx 1.234\times 10^{-5}\,\mathrm{m}^{-1}$。物点位于 1.5m 高度处，这些光线分别对应于 $+0.2°$，$0°$，$-0.2°$，$-0.28°$，$-0.3486°$ 和 $-0.5°$。不断增加的灰阶表示折射率随 x 方向增大。

① 详见文献[4～8]。

考虑一条光线，当 $x=0$ 时处于水平位置。在进入眼睛的位置点 $E(x=x_E)$，如果点 E 的光线与水平线的夹角为 θ_E，则有

$$\tilde{\beta} = n_0 = n_E\cos\theta_E \tag{3.17}$$

通常来讲，$\theta_E \ll 1$，则

$$\frac{n_0}{n_E} = \cos\theta_E \approx 1 - \frac{1}{2}\theta_E^2$$

有

$$\theta_E \approx \sqrt{2\left(1 - \frac{n_0}{n_E}\right)} \tag{3.18}$$

在空气压强近似地不随高度变化的条件下

$$(n_0 - 1)T_0 \approx (n_E - 1)T_E \tag{3.19}$$

由式(3.19)，可得

$$1 - \frac{n_0 - 1}{n_E - 1} = 1 - \frac{T_E}{T_0}$$

$$\frac{n_E - n_0}{n_E} = \frac{n_E - 1}{n_E}\left(1 - \frac{T_E}{T_0}\right)$$

因此

$$\theta_E \approx \sqrt{2\left(1 - \frac{1}{n_E}\right)\left(1 - \frac{T_E}{T_0}\right)} \tag{3.20}$$

在一个典型的地表温度 $T_0 \approx 323\text{K}(=50℃)$ 的大热天，而在地表上面 1.5m 处，$T_E \approx 303\text{K}(=30℃)$。此时，当温度为 30℃时，$n_E \approx 1.00026$，且给定角度 $\theta_E \approx 5.67\times10^{-3}\,\text{rad} \approx 0.325°$。如图 3.13 所示，从距地表 1.5m 处的点 P 发出的(以不同角度的)光线，每一条光线都有一个特殊的不变量 $\tilde{\beta}(=n_1\cos\theta_1)$ 的值。如图 3.13 所示，位于物点的点 P 和观察点的点 E 都接近地表，连接点 P 和点 E 的唯一光线将沿着曲线 PME 的方向，而从点 P 水平地发出的光线指向 PC 方向。因此，在这样的条件下，位于点 E 的眼睛看到的只是物点的像，而不直接是物点本身。还可以发现，存在一个区域 R_2，从点 P 发出的光线无法到达此区域，因此，位于 R_2 区域的眼睛既看不到物体，也看不到物体的像，被称为阴影区。再者，还存在一个区域 R_1，在 R_1 区域内，只能看见物体本身，而看不到物体的虚像。

应该在此提及，当光线开始变为平行于 z 轴后，其如何弯曲不能直接由式(3.15)得到，因为在此处 $\theta=0$，可能会出现结果判断为光线在过了转折点后，将维持水平方向的错误，如图 3.13 所示中的虚线。$\theta=0$ 的点被称为转折点。但是由对称性和光线的可逆性可得：光线相对于转折点是对称的，从而光线将继续向上弯曲。从物理上看，光线弯曲可以这样理解：考虑波前的一小部分，如 W(见图 3.13)，其上沿将以相对于下沿更小的速度传播，从而使波前向上倾斜(见 W')，光线也就向上弯曲了。此外，像 BB' 这样的直线路径，并不对应于光程的一个极值。

下面考虑一种情况：当 $x\to\infty$ 时，折射率逐渐趋向常数

$$n^2(x) = n_0^2 + n_2^2(1 - \mathrm{e}^{-\alpha x}), \quad x > 0 \tag{3.21}$$

式中 n_0，n_2 和 α 是常数，x 表示距离地面的高度。当 $x=0$ 时，折射率为 n_0，而当对应很大的 x 值时，折射率趋向于 $(n_0^2+n_2^2)^{1/2}$。通过解光线方程，可以得到如图 3.14 和图 3.15 所示的

准确的光线路径。其中各常数参量的取值为

$$n_0 = 1.000233, \quad n_2 = 0.45836, \quad \alpha = 2.303\text{m}^{-1} \tag{3.22}$$

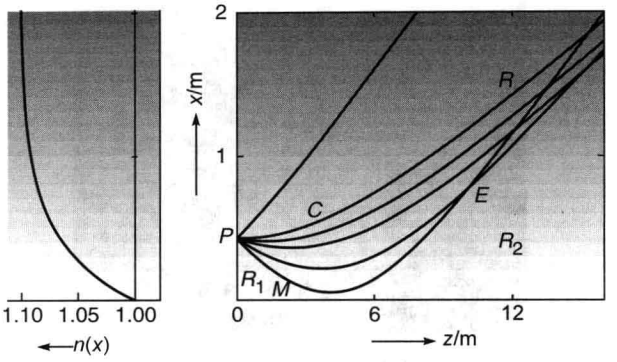


图 3.14　式(3.21)和式(3.22)描述的媒质中的光线路径。物点位于 $1/\alpha(\approx 0.43\text{m})$高度处。这些弯曲的光线分别对应 θ_1(初始发射角)$=+\pi/10$，0，$-\pi/60$，$-\pi/30$，$-\pi/15$ 和 $-\pi/10$。渐变的灰色表示折射率沿 x 方向增大。

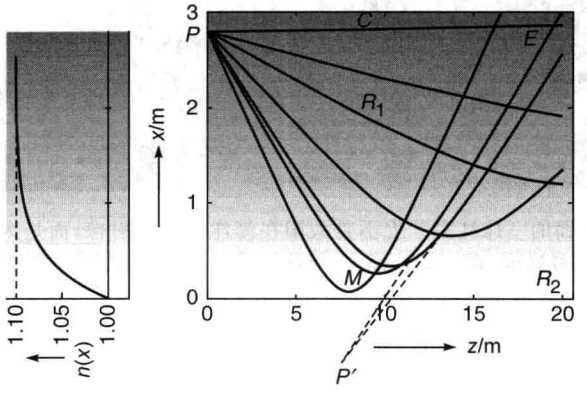


图 3.15　式(3.21)和式(3.22)描述的媒质中的光线路径。物点位于 2.8m 高度处。这些弯曲的光线分别对应 θ_1(初始发射角)$=0$，$-\pi/60$，$-\pi/30$，$-\pi/16$，$-\pi/11$，$-\pi/10$ 和 $-\pi/8$。渐变的灰色表示折射率沿 x 方向增大。

虽然上述方程参量的取值使得得到的折射率变化并不符合实际情况，但是它可以定量地理解渐变折射率媒质中的光线路径的形成。图 3.14 和图 3.15 所示分别为从距离地面 0.43m 与 2.8m 的物点发出的光线簇的路径。如图 3.14 所示，点 P 的折射率等于 1.06455 ($=n_1$)，且由点 P 发出的各条光线对应的不同的角度为 θ_1，θ_1 是在点 P 处的光线与 z 轴形成的角度。从图 3.14 可以得出，当物点点 P 与观察点点 E 都接近地面时，连接点 P 与点 E 的光线路径只能是曲线 PME，且从点 P 水平方向发出的光线将向上弯曲传输，如图 3.14 中的曲线 PC。因此，在这样的条件下，位于点 E 的眼睛将看到海市蜃楼的幻像，而不是直线地看到位于点 P 处的像。然而，当点 P 与点 E 高于地面很多时(见图 3.15)，眼睛可以看到几乎直线地来源于点 P 的像(源于沿曲线 PCE 的光线)，而且还可以看到表面上似乎从点 P'发出的光线。很容易看到不同的光线并未显示出从同一点发出，因此可以看到的反射像(即海市蜃楼幻像)有相当大的变形。另外还存在一个阴影区 R_2，(从点 P 发出的)光线无法到达

这里,因此,R_2 区域内的眼睛既看不到物,也看不到它的像。现实世界中的幻像(海市蜃楼)的照片,如图 3.16 和图 3.17 所示。

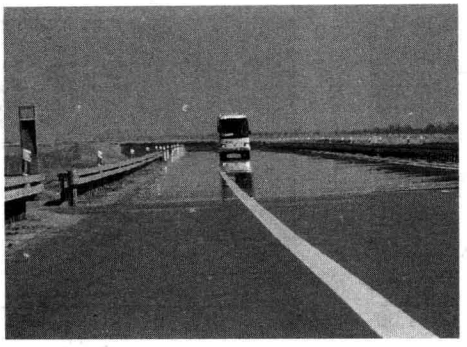


图 3.16　在热天的一条公路上可以看到的典型的海市蜃楼(也叫下现蜃景)现象。图片引自 http://fizyka.phys.poznan.pl/~pieranks/ Physics%20Around%20Us/Air%20mirror.jpg。彩图见文前附录图表页的图 3。

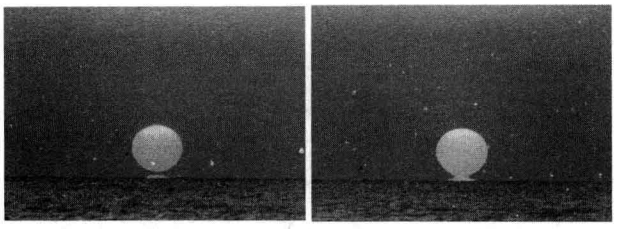


图 3.17　太阳下面的一抹红实际上不是太阳在海洋中的反射像,而是太阳下边缘形成海市蜃楼(也称下现蜃景)的(反转的)像。几秒钟后(注意太阳左边鸟的运动),反转的海市蜃楼像与正立的太阳像融合为一体。照片由美国海军实验室的 George Kaplan 拍摄,引自美国海军实验室网站。参阅 http://mintaka.sdsu.edu/GF/explan/simulations/infmir/Kaplan_photo.html. 彩图见文前附录图表页的图 4。

例 3.5　以如图 3.14 所示的物点为例,计算由点 P 发出光线,在 $x=0.2\text{m}$ 处变为水平方向的光线的发射角。

$$\text{在 } x = 0.2\text{m 处}, \quad n(x) = 1.03827$$

因此,假如 θ_1 代表点 P 发出的光线与 z 轴形成的夹角(见图 3.14),则有

$$n_1\cos\theta_1 = 1.03827 \times \cos 0$$

得

$$\theta_1 \approx 13^\circ$$

进一步,当 $x=0.2\text{m}$ 时,光线变为水平,可得到不变量的值

$$\tilde{\beta} \approx 1.03827$$

例 3.6　如图 3.15 所示,物点在 $x=2.8\text{m}$ 处,对应 $n(x)\approx 1.1$。对于发射角 $\theta_1 = -\pi/8$ 的光线来说

$$\tilde{\beta} = 1.1\cos\theta_1 = 1.01627$$

这样,当光线在 $x=x_2$ 变成水平时,有

$$n(x_2) = \tilde{\beta} = 1.01627$$

则

$$x_2 = -\frac{1}{\alpha}\ln\left[1-\frac{n^2(x_2)-n_0^2}{n_2^2}\right]\approx 0.073\text{m}$$

3.3.2　上现蜃景现象

以上讨论的海市蜃楼(也称下现蜃景)现象的形成是源于在热地表面上的空气折射率渐增的原因。而另一方面,在冰冷的海水上方,接近水表面的空气比上面的空气更冷,从而存在一个相反的温度梯度。则在这样的情况下,其合理的折射率变化可以写为

$$n^2(x) = n_0^2 + n_2^2 e^{-\alpha x} \tag{3.23}$$

式(3.23)描述的媒质中的光线路径将在习题 3.13 中讨论。假设 n_0,n_2 和 α 取自式(3.22)。对于在高度为 0.5m 处的像点 P,各光线路径如图 3.18 所示。假如眼睛位于点 E,接收到的光线看上去发自点 P'。这种物体看上去在实际位置上方的现象,称作上现蜃景现象。通常站在冰冷的海面上的观光游船会看到这种现象(见图 3.19 和图 3.20)。再者,既然没有其他光线可以从点 P 发出到达点 E(注原书为点 A),那么人们不可能直接看到物体。

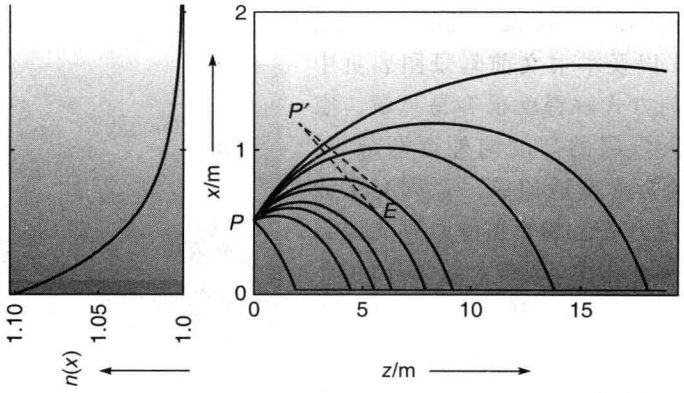


图 3.18　由位于 0.5m 高度物点发出的各光线路径,折射率分布满足式(3.23),n_0,n_2 和 α 由式(3.22)给出。

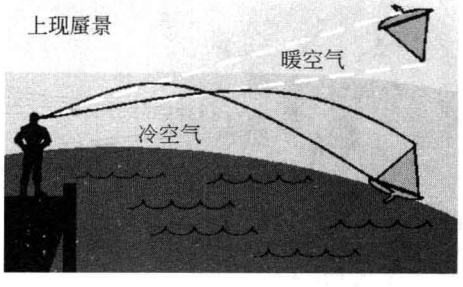


图 3.19　上现蜃景发生在与下现蜃景大气条件相反的情况下。正如所看到的,表面处的空气必须比表面上方的空气冷,这种条件在雪表面、冰表面和冷水表面是常见的。当冷空气位于暖空气下方时,光线向着表面弯曲,这样就给我们的眼睛开了个玩笑,让物体看上去在它实际位置的上方。图片引自 http://www.islandnet.com/~see/weather/elements/mirage.htm。彩图见文前附录图表页的图 5。

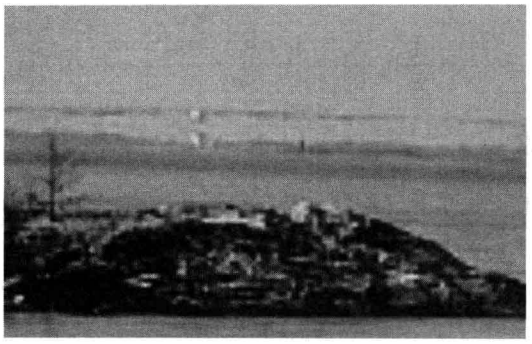


图 3.20　群岛中的一间房子和它的上现蜃景。图片引自 http://netcomm/news/showarticle.asp? intNWSAID=25722。彩图见文前附录图表页的图 6。

3.3.3　具有渐变折射率的大气层

与渐变折射率的媒质中成像有关的一个有趣的现象，就是日出与日落的太阳不是圆形的现象(见图 3.21 以及本书文前附录图表页中的图 7)。用下面的方式解释就很容易理解。空气的折射率随着大气层的高度向外逐渐减小。将连续梯度变化的折射率近似成一系列有限数量的空气层(每一层有固定的折射率)，则光线将如图 3.22 所示的那样弯曲，这样太阳(实际位于点 S)看上去就像在点 S' 处。因为这个原因，落日看上去显得扁了一些，并且造成白天的时间比没有大气层时长了 5min。显然，假如在月球表面，太阳在日出与日落时不仅看上去是白色的，而且是圆形的！



图 3.21　日落时太阳显示为不是圆形。彩图见文前附录图表页的图 7。

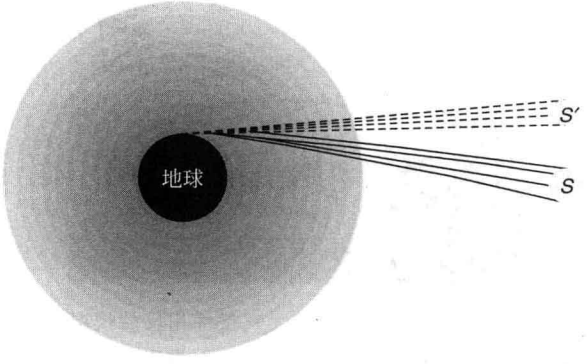


图 3.22　由于折射率的变化，由点 S 发出的光看上去好像来自点 S'。

3.4　光线方程与它的解

在本节中将推导光线方程，方程的解可以给出非均匀媒质中精确的光线路径，并把讨论局限在折射率在一个方向上连续变化的特殊情况，这个方向假设为 x 轴方向。这样的媒质可以想象成一系列的具有不同折射率的薄层的极限。如前所述，对于连续变化的折射率媒质，乘积 $n(x)\cos\theta(x)$ 是光线的不变量，用 $\tilde{\beta}$ 表示

$$n(x)\cos\theta(x) = \tilde{\beta} \tag{3.24}$$

此外，对于连续变化的折射率媒质，图 3.12(a)所示的分段直线将形成图 3.12(b)所示的连续曲线。令 $\mathrm{d}s$ 表示曲线上的无限小的弧长，则

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}z)^2$$

或者

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2 + 1 \tag{3.25}$$

联系图 3.12(b)，可得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \cos\theta = \frac{\tilde{\beta}}{n(x)} \tag{3.26}$$

则式(3.25)变为

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2 = \frac{n^2(x)}{\tilde{\beta}^2} - 1 \tag{3.27}$$

对于给定的 $n(x)$ 变化，对式(3.27)积分，可得到光线路径 $x(z)$；但为了方便，通常将式(3.27)对 z 微商

$$2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2} = \frac{1}{\tilde{\beta}^2}\frac{\mathrm{d}n^2}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2} = \frac{1}{2\tilde{\beta}^2}\frac{\mathrm{d}n^2}{\mathrm{d}x} \tag{3.28}$$

当折射率只与 x 相关时，式(3.27)和式(3.28)都是严格的光线方程。

例 3.7　考虑对式(3.28)的一个简单应用。考虑一个均匀媒质，其折射率为一常数。这样，式(3.28)的右侧为零，可得

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2} = 0$$

将上式对 z 积分两次，得到

$$x = Az + B$$

这是一个直线方程，与均匀媒质中的光线方程一致。

例 3.8　考察式(3.29)所描述的折射率变化的媒质中的光线路径

$$n(x) = n_0 + kx \tag{3.29}$$

对于上面的折射率变化，光线方程(式(3.28))取下面的形式

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2} = \frac{1}{2\tilde{\beta}^2}\frac{\mathrm{d}n^2}{\mathrm{d}x} = \frac{k}{\tilde{\beta}^2}(n_0 + kx)$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}z^2}=\kappa^2X(z) \tag{3.30}$$

式中

$$X\overset{\text{def}}{=\!=}x+\frac{n_0}{k}\quad\text{及}\quad\kappa=\frac{k}{\tilde{\beta}} \tag{3.31}$$

则光线路径为

$$x(z)=-\frac{n_0}{k}+C_1\mathrm{e}^{\kappa z}+C_2\mathrm{e}^{-\kappa z} \tag{3.32}$$

式中常数 C_1 和 C_2 由初始条件确定。假设在 $z=0$ 处，光线由 $x=x_1$ 处发出，与 z 轴之间的夹角为 θ_1，则

$$x(z=0)=x_1$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0}=\tan\theta_1$$

经过基本的运算后，可得

$$C_1=\frac{1}{2}\left[x_1+\frac{1}{k}(n_0+n_1\sin\theta_1)\right] \tag{3.33}$$

$$C_2=\frac{1}{2}\left[x_1+\frac{1}{k}(n_0-n_1\sin\theta_1)\right] \tag{3.34}$$

式中 $n_1=n_0+kx$ 表示在 $x=x_1$ 处的折射率值，计算中还用到了

$$\tilde{\beta}=n_1\cos\theta_1 \tag{3.35}$$

图 3.13 所示为式(3.32)给出的光线路径，其中 $x_1=1.5\mathrm{m}$，$n_1=1.00026$ 以及 $k\approx1.234\times10^{-5}\mathrm{m}^{-1}$。

3.4.1 抛物线型折射率变化媒质中的光线路径

考察式(3.36)所描述的抛物线型折射率分布的媒质

$$n^2(x)=n_1^2-\gamma^2x^2 \tag{3.36}$$

根据式(3.27)来确定光线路径。式(3.27)可以改写为

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{n^2(x)-\tilde{\beta}^2}}=\pm\frac{1}{\tilde{\beta}}\int\mathrm{d}z \tag{3.37}$$

对式(3.36)替换 $n^2(x)$，可得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x_0^2-x^2}}=\pm\Gamma\int\mathrm{d}z \tag{3.38}$$

式中

$$x_0=\frac{1}{\gamma}\sqrt{n_1^2-\tilde{\beta}^2} \tag{3.39}$$

$$\Gamma=\frac{\gamma}{\tilde{\beta}} \tag{3.40}$$

令 $x=x_0\sin\theta$，并积分得

$$x=\pm x_0\sin[\Gamma(z-z_0)] \tag{3.41}$$

选择原点为起始，使得 $z_0=0$。这样，光线路径的通解可以写为

$$x=\pm x_0\sin\Gamma z \tag{3.42}$$

要在此提及，实际上，也可以根据式(3.28)求得光线路径。一种光波导的折射率分布通常写成以下形式[①]

$$\begin{cases} n^2(x)=n_1^2\left[1-2\Delta\left(\dfrac{x}{a}\right)\right]^2, & |x|<a \\ n^2(x)=n_2^2=n_1^2(1-2\Delta), & |x|>a \end{cases} \tag{3.43}$$

$|x|<a$ 的区域为波导的芯，而 $|x|>a$ 的区域一般指波导的包层。则有

$$\gamma=\frac{n_1\sqrt{2\Delta}}{a} \tag{3.44}$$

对于典型的抛物线型折射率分布的光纤，有

$$n_1=1.5,\quad \Delta=0.01,\quad a=20\mu\mathrm{m} \tag{3.45}$$

给出

$$n_2\approx 1.485,\quad \gamma\approx 1.0607\times 10^4\,\mathrm{m}^{-1}$$

不同的 θ_1 的典型光线路径见图 3.23。显然，当满足 $n_2<\tilde{\beta}<n_1$ 时，光线被导引在波导芯内。当 $\tilde{\beta}=n_2$ 时，光线在芯-包层边界处变为水平。对于 $\tilde{\beta}<n_2$ 的情况，光线以一定角度入射到芯-包层边界，并被折射出去。因此，可以将光线分为

$$\begin{aligned} &n_2<\tilde{\beta}<n_1\Rightarrow \text{导引光线} \\ &\tilde{\beta}<n_2\Rightarrow \text{折射光线} \end{aligned} \tag{3.46}$$

如图 3.23 所示，3 条光线分别对应于

$$z_0=0,\quad \theta_1=4^\circ,\quad 8.13^\circ,\quad 20^\circ$$

相应的 $\tilde{\beta}$ 的取值约为 1.496($>n_2$)，1.485($=n_2$)和 1.410($<n_2$)。最后一组光线在芯-包层边界经历了折射。容易看出，正弦摆动的光线的空间周期长度 z_p 为

$$z_p=\frac{2\pi}{\Gamma}=\frac{2\pi a\cos\theta_1}{\sqrt{2\Delta}} \tag{3.47}$$

如图 3.23 所示的摆动的两根光线(它们的角度为 $\theta_1=4^\circ, 8.13^\circ$)，$z_p$ 的取值分别为 0.8864mm 和 0.8796mm。实际上，当做傍轴近似时，$\cos\theta_1\approx 1$，则所有的光线具有相同的空间周期。如图 3.24(译者改)所示，绘出了一组典型的傍轴光线路径情况，这组入射光线在入射端沿 z 轴平行入射，不同的光线对应于不同的 $\tilde{\beta}$ 值。

在这里，有以下 4 点特性要特别指出。

(1) 在傍轴近似($\tilde{\beta}\approx n_1$)中，所有平行入射的光线都将聚焦于某一点。因此，这种媒质就像聚焦透镜一样，其焦距为

$$f\approx\frac{\pi}{2}\frac{a}{\sqrt{2\Delta}} \tag{3.48}$$

(2) 以与轴线不同角度入射的光线(见图 3.24(译者改)中由点 P 发射的光线)将被“陷”在媒质中，因此，这类媒质扮演着“向导”的角色。实际上，这类媒质被称作光波导。在

① 在这种媒质中的光线路径具有非常重要的意义，以这种抛物线型折射率分布的光纤广泛地应用于光纤通信系统中(见 27.7 节)。

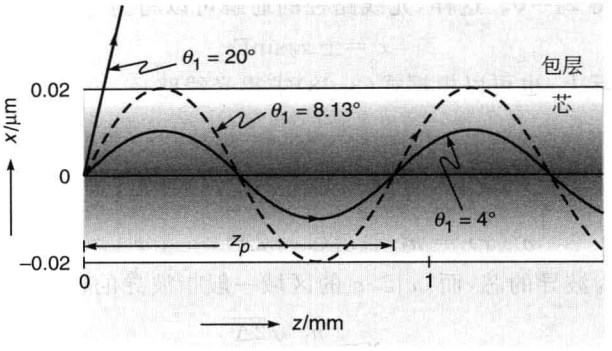


图 3.23　在一抛物线型折射率分布的媒质中的一组典型光线路径。分别对应式(3.45)的参数 $\theta_1=4°$,8.13°和 20°。

近代,对光波导的研究形成了一个人们极感兴趣的课题。

(3) 光线路径是只可以存在于 $\tilde{\beta}$ 小于或等于 $n(x)$的区域(见式(3.26))。更进一步,当 $n(x)=\tilde{\beta}$ 时,$\mathrm{d}x/\mathrm{d}z=0$(即光线平行于 z 轴)。这个结论可以由式(3.27)得出。

(4) 在这种媒质中,光线将如图 3.24 所示的那样,周期性地聚焦与发散。在傍轴近似下,所有由点 P 发出的光线都将聚焦于点 Q。结合例 3.3 的讨论,还可以得出,所有由点 P 到点 Q 的光线都必将经历相同的时间。从物理上看,虽然光线 PLQ 相比 PMQ 传输了更长的路程,但它传输的路径处于平均上较"低"的折射率区域,从而较大的"平均速率"将补偿较长的传输路程,所以,所有的光线在波导内传播一段距离经历了相同的时间(精确计算见 3.4.2 节)。正是由于这个原因,抛物线型折射率光纤被广泛地应用于光纤通信系统(局域网(译者注))中(详见 27.7 节)。

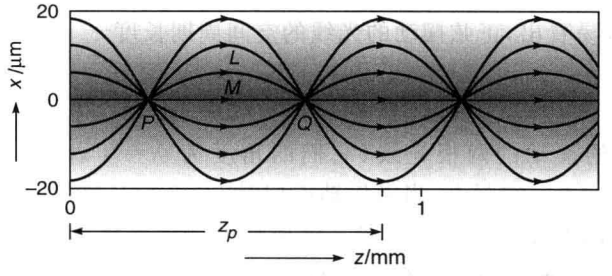


图 3.24　在抛物线型媒质中的傍轴光线路径。注意这束光周期性地聚焦和发散。

这里要提一下渐变折射率透镜(GRIN),其特点是折射率沿着横向以抛物线型变化。GRIN 透镜现在已商用,而且应用广泛(见图 3.25)。比如,GRIN 透镜可以用来将激光二极管输出的光束耦合入光纤。这样的 GRIN 透镜长度为 $z_p/4$(见图 3.25(译者改));典型的 z_p 约为几厘米,而透镜的直径只有几毫米。这样小的透镜有许多用途。同样地,具有 $z_p/2$ 的 GRIN 透镜可以实现从一个透镜一端到另一个透镜一端的准直光传输。

3.4.2　抛物线型折射率波导中光线传播时间的计算

在本节中将计算一条光线在如式(3.36)所描述的抛物线型折射率光波导内通过一段距

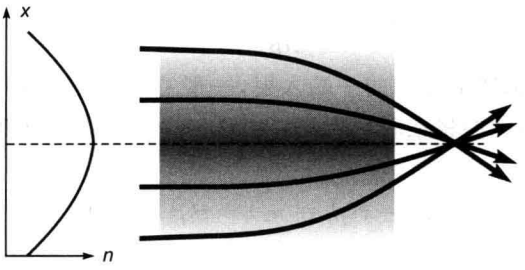


图 3.25　具有抛物线型折射率变化的渐变折射率透镜。该透镜可以像普通透镜一样聚焦光束。此图引自 http:/en. wikipedia. org/wiki/Refractive_index。彩图见文前附录图表页的图 8。

离所用的时间，这一计算在光纤通信系统中是非常重要的。正如 3.4.1 节讨论的一样，(在光波导芯内)光线路径由下式给出

$$x = x_0 \sin \Gamma z \tag{3.49}$$

式中 x_0 与 Γ 已在式(3.39)和式(3.40)中定义过。令 $\mathrm{d}\tau$ 表示光线传播一段长度 $\mathrm{d}s$ 所需的时间(见图 3.12(b))

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}s}{c/n(x)} \tag{3.50}$$

式中 c 是自由空间的光速。又由

$$n(x)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \tilde{\beta}$$

(见式(3.26))可将式(3.50)写为

$$\mathrm{d}\tau = \frac{1}{c\tilde{\beta}} n^2(x)\mathrm{d}z = \frac{1}{c\tilde{\beta}}(n_1^2 - \gamma^2 x^2)\mathrm{d}z$$

或者

$$\mathrm{d}\tau = \frac{1}{c\tilde{\beta}}(n_1^2 - \gamma^2 x_0^2 \sin^2 \Gamma z)\mathrm{d}z \tag{3.51}$$

式中最后一步的推导用到了式(3.49)。这样，如果 $\tau(z)$ 表示光线沿着波导传播一段距离 z 所需的时间，则

$$\begin{aligned}\tau(z) &= \frac{n_1^2}{c\tilde{\beta}}\int_0^z \mathrm{d}z - \frac{\gamma^2 x_0^2}{c\tilde{\beta}}\int_0^z \frac{1-\cos(2\Gamma z)}{2}\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{c\tilde{\beta}}\left(n_1^2 - \frac{1}{2}\gamma^2 x_0^2\right)z + \frac{\gamma^2 x_0^2}{2c\tilde{\beta}}\frac{1}{2\Gamma}\sin 2\Gamma z\end{aligned}$$

或者

$$\tau(z) = \frac{1}{2c\tilde{\beta}}(n_1^2 + \tilde{\beta}^2)z + \frac{(n_1^2 - \tilde{\beta}^2)}{4c\gamma}\sin 2\Gamma z \tag{3.52}$$

式中用到了式(3.39)。当 $\tilde{\beta} = n_1$(对应于沿 z 轴的光线)时，有

$$\tau(z) = \frac{z}{c/n_1} \tag{3.53}$$

这个结果是可以预期的，因为这条光线总是以 c/n_1 的速度传播。对于很大的 z 值，式(3.52)右侧的第 2 项可以忽略，从而可以将耗时写为

$$\tau(z)=\frac{1}{2c\tilde{\beta}}(n_1^2+\tilde{\beta}^2)z \tag{3.54}$$

假如现在有一个光脉冲从波导的一端入射,一般它会激励出大量光线。既然不同的光线将经历不同的时间,则脉冲将在时域展宽。对于一个抛物线型折射率光波导,这种脉冲展宽为

$$\Delta\tau=\tau(\tilde{\beta}=n_2)-\tau(\tilde{\beta}=n_1)$$

或者

$$\Delta\tau=\frac{z}{2c}\frac{(n_1-n_2)^2}{n_2}\approx\frac{zn_2}{2c}\Delta^2 \tag{3.55}$$

式中最后一步假设

$$\Delta\overset{\text{def}}{=\!=}\frac{n_1^2-n_2^2}{2n_1^2}\approx\frac{n_1-n_2}{n_2} \tag{3.56}$$

对于式(3.45)的参数,可得

$$\Delta\tau\approx 0.25\text{ns/km} \tag{3.57}$$

在第27章中将采用这一结果。

例 3.9 考虑在式(3.58)所描述的折射率变化的媒质中的光线路径

$$\begin{cases}n^2(x)=n_1^2, & x<0\\ n^2(x)=n_1^2-gx, & x>0\end{cases} \tag{3.58}$$

在$x>0$的区域,$n^2(x)$随x线性减小,则式(3.28)取以下形式

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2}=-\frac{g}{2\tilde{\beta}^2}$$

此方程的通解为

$$x(z)=-\frac{g}{4\tilde{\beta}^2}z^2+K_1z+K_2 \tag{3.59}$$

如图3.26所示,考虑一由原点入射的光线($x=0,z=0$),则

$$K_2=0,\quad \tilde{\beta}=n_1\cos\theta_1 \tag{3.60}$$

进而

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0}=K_1=\tan\theta_1 \tag{3.61}$$

因此,光线路径由下式描述

$$\begin{cases}x(z)=(\tan\theta_1)z, & z<0\\ x(z)=-\dfrac{gz}{4\tilde{\beta}^2}(z-z_0), & 0<z<z_0\\ x(z)=-\dfrac{gz_0}{4\tilde{\beta}^2}(z-z_0), & z>z_0\end{cases} \tag{3.62}$$

式中

$$z_0=\frac{2n_1^2}{g}\sin2\theta_1$$

因此,在$0<z<z_0$的区域内,光线路径是抛物线。图3.26绘出了对应于以下参数的典型光线路径

$$n_1 = 1.5, \quad g = 0.1\text{m}^{-1}$$

这些不同光线对应于不同的角度

$$\theta_1 = \frac{\pi}{9}, \quad \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{3}$$

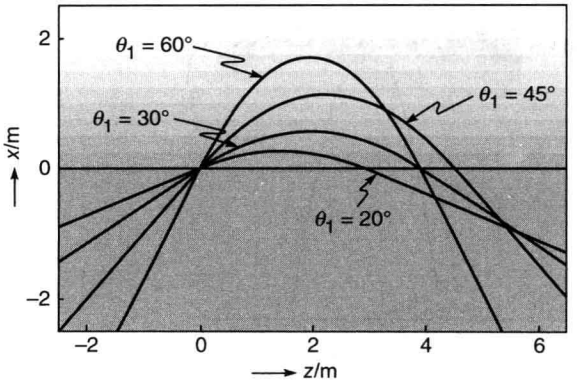


图 3.26　由式(3.58)描述的媒质中，抛物线光线路径(对应于 $\theta_1 = 20°, 30°, 45°, 60°$)。在 $x<0$ 的区域，光线路径是直线。

3.4.3　自电离层的反射

太阳辐射中的紫外线会造成大气层中的各组分气体电离，从而形成众所周知的电离层。在高度低于 60km 时，这种电离几乎可以忽略。由于在电离层中存在自由电子，其折射率由式(3.63)给出(见式(7.76))

$$n^2(x) = 1 - \frac{N_e(x)q^2}{m\varepsilon_0\omega^2} \tag{3.63}$$

式中：$N_e(x)$为电子数密度，电子数/单位体积，m^{-3}；x 为距地面的高度，m；ω 为电磁波的角频率，rad/s；q 为电子电量，$\approx 1.60\times10^{-19}\text{C}$；$m$ 为电子质量，$\approx 9.11\times10^{-31}\text{kg}$；$\varepsilon_0$ 为真空中介电常数，$\approx 8.854\times10^{-12}\text{C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}^2)$。①

这样，电子数密度从 0 开始增加(从高度 60km 开始算起)，而折射率开始减小，则电离层中的光线路径将与例 3.9 中描述的十分相似。

定义一个 n_T 表示光线经历转折点(此时光线水平)时的折射率，则(见图 3.27)

$$\tilde{\beta} = \cos\theta_1 = n_T \tag{3.64}$$

这样，假设电磁信号由点 A(以角度 θ_1)发出，在点 B 被接收到，那么可以确定反射电磁波束的电离层的折射率(进而确定电子数密度)。这就是短波无线电($\lambda=20\text{m}$)从一个城市(比如伦敦)以一个特定角度发送广播，经电离层的反射，会到达另一个城市(比如新德里)的原理。例如对于正入射，$\theta=\pi/2$，以及 $n_T=0$，预示着

$$N_e(x_T) = \frac{m\varepsilon_0\omega^2}{q^2} \tag{3.65}$$

在一个典型的实验中，一个电磁脉冲(0.5～20MHz)沿竖直向上方向发射，经历一个时

① 原书为 $\varepsilon_0\approx 8.854\times10^{-12}\times10^{-12}\text{C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}^2)$

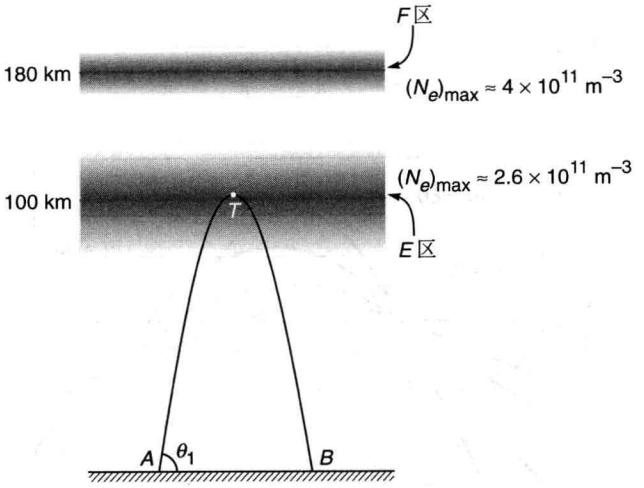


图 3.27　在电离层的 E 区反射，点 T 表示转折点。灰度的变化表示电子数密度的变化。

延 Δt 接收到回波，则

$$\Delta t \approx \frac{2h}{c} \tag{3.66}$$

式中 h 表示经历反射的高度。因此，如果电磁脉冲经电离层的 E 层(大约 100km 高)反射，将在 670μs 后接收到回波。反之，可以通过测量时延，也可以根据式(3.67)来确定(脉冲被反射)高度

$$h \approx \frac{c}{2}\Delta t \tag{3.67}$$

图 3.28 绘出了电磁脉冲频率与从 E 区到 F 区反射的等价高度(由回声的时延得出)的关系。如图 3.28 所示，当 $\nu = 4.6 \times 10^6$ Hz 时，回声突然从 100km 高度消失，有

$$N_e(100\text{km}) \approx \frac{m\varepsilon_0(2\pi\nu)^2}{q^2} \approx \frac{9.11 \times 10^{-31} \times 8.854 \times 10^{-12} \times (2\pi \times 4.6 \times 10^6)^2}{(1.6 \times 10^{-19})^2}$$

$$\approx 2.6 \times 10^{11} \text{ 个电子 /m}^3$$

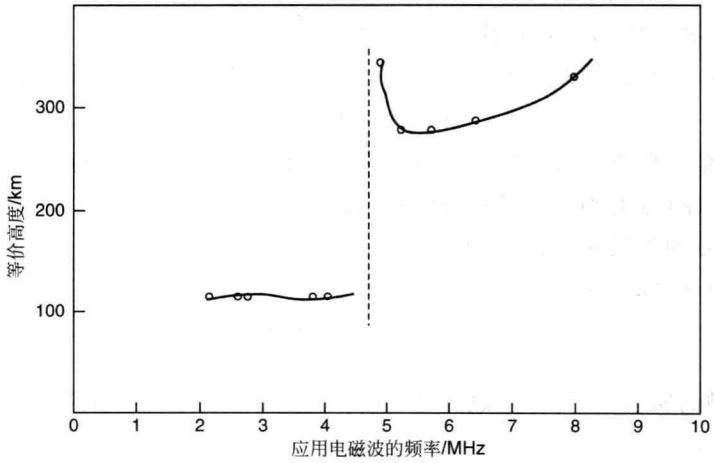


图 3.28　电磁脉冲频率与从 E 区到 F 区反射的等价高度的关系(来自参考文献[9])

如果进一步增大频率，电磁回声从电离层的 F 区又出现了。如果要了解更多的关于电离层研究的细节，可以参阅 S. K. Mitra 教授撰写的易于理解的多本教材之一（见参考文献[9]）。

例 3.10　把下式所描述的折射率分布的媒质中的光线方程的解

$$n^2(x) = n_0^2 + n_2^2(1 - \mathrm{e}^{-\alpha x}) \tag{3.68}$$

代入式(3.27)，可得

$$\pm \mathrm{d}z = \frac{\tilde{\beta}\,\mathrm{d}x}{[(n_0^2 + n_2^2 - \tilde{\beta}^2) - n_2^2\mathrm{e}^{-\alpha x}]^{1/2}} = \frac{\tilde{\beta}\,\mathrm{e}^{\alpha x/2}\mathrm{d}x}{n_2[K^2\mathrm{e}^{\alpha x} - 1]^{1/2}}$$

或者

$$\pm \mathrm{d}z = \frac{2\tilde{\beta}}{K\alpha n_2}\frac{\mathrm{d}\Phi}{[\Phi^2 - 1]^{1/2}} \tag{3.69}$$

式中

$$K = \frac{1}{n_2}(n_0^2 + n_2^2 - \tilde{\beta}^2)^{1/2} \tag{3.70}$$

$$\Phi(x) = K^2\mathrm{e}^{\alpha x/2} \tag{3.71}$$

式(3.69)中的“+”和“−”分别对应于向上和向下传播的光线。又

$$\tilde{\beta} = n_1\cos\theta_1 \tag{3.72}$$

式中 θ_1 为光线起始时，在 $x=x_1$，$z=0$ 以及 $n_1=n(x_1)$ 情况下与 z 轴的夹角。利用初等积分，可得光线路径公式

$$x(z) = \frac{2}{\alpha}\ln\left[\frac{1}{K}\cosh\gamma(C \pm z)\right] \tag{3.73}$$

式中

$$\gamma = \frac{\alpha K n_2}{2\tilde{\beta}} \tag{3.74}$$

既然在 $x=x_1$ 时，$z=0$（起始点），得

$$C = \frac{1}{\gamma}\mathrm{arccosh}(K\mathrm{e}^{\alpha x_1/2}) \tag{3.75}$$

还可得

$$K\mathrm{e}^{\alpha x_1/2} = \left(\frac{n_0^2 + n_p^2 - \tilde{\beta}^2}{n_0^2 + n_p^2 - n_1^2}\right)^{1/2} \tag{3.76}$$

由 $x=x_1$ 处水平发射的光线，$C=0$，满足此条件的典型光线（对于不同的 θ_1 角）的路径如图 3.14 和图 3.15 所示。

3.5　光线在各向同性媒质和各向异性媒质的分界面的折射

在本节中将根据费马原理来确定光线入射到一个各向同性媒质与各向异性媒质分界面时，其折射光线的方向[①]。在各向同性媒质中，在各个方向上，媒质的性质保持相同，其典型物质如玻璃、水、空气。然而，在各向异性媒质中，某些性质（如光速）在各个方向上可能会有

① 将费马原理应用于各向异性媒质的证明在 Newcomb 的书（见参考文献[10]）中给出，这个证明相当复杂。关于双轴媒质中光线路径的讨论，见参考文献[10]。

不同。在第 22 章中,将更详细地讨论各向异性媒质。在这里,只做如下讨论:当光线投射到一块像方解石这类晶体上时,一般来说,它将分开成两束光线,一束称为寻常光线,另一束称为非常光线。寻常光线的传播速度在各个方向上保持相同,因此,它遵守斯涅耳定律(Snell's law)。而非常光线却不如此。在此根据费马原理来研究一束光从各向同性媒质中入射到各向异性媒质中的折射规律。其中两类媒质均假设为均匀的。

在单轴媒质中,非常光线的折射率变化由下式给出(见式(22.121)):

$$n^2(\theta) = n_o^2\cos^2\theta + n_e^2\sin^2\theta \tag{3.77}$$

式中 n_o 和 n_e 是晶体的两个常数,θ 表示光线与光轴的夹角。很显然,当非常光线的传播方向与光轴方向一致时(即 $\theta=0$ 时),其光速为 c/n_o,而当其传播方向与光轴方向垂直时($\theta=\pi/2$),光速为 c/n_e。

3.5.1 光轴垂直于分界面的情况

首先考虑最简单的情况,即光轴方向垂直于分界面的情况。如图 3.29 所示,光线从点 A 到点 B 的光程为

$$L_{op} = n_1[h_1^2 + (L-x)^2]^{1/2} + n(\theta)[h_2^2 + x^2]^{1/2} \tag{3.78}$$

式中 n_1 为媒质Ⅰ的折射率,此外,假设入射光线和光轴方向在一个平面内。又由

$$\cos\theta = \frac{h_2}{(h_2^2+x^2)^{1/2}}, \quad \sin\theta = \frac{x}{(h_2^2+x^2)^{1/2}}$$

可得

$$L_{op} = n_1[h_1^2 + (L-x)^2]^{1/2} + (n_o^2h_2^2 + n_e^2x^2)^{1/2}① \tag{3.79}$$

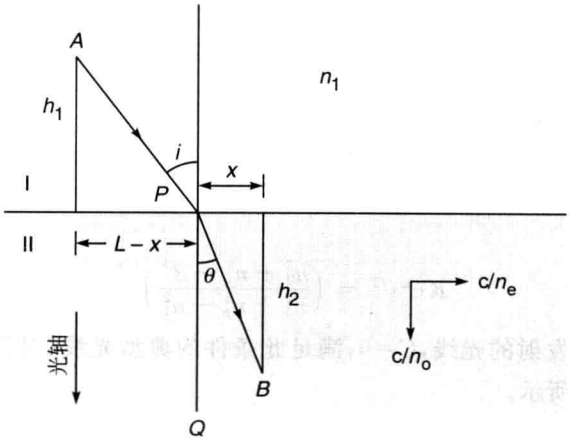


图 3.29 当单轴晶体的光轴垂直于分界面时,非常光线的折射方向。

对于真实光线,必然有

$$\frac{dL_{op}}{dx} = 0$$

意味着

① 原文为 $L_{op} = n_1[h_1^2 + (L-x)]^{1/2} + [n_o^2h_L^2 + n_e^2x^2]^{1/2}$

$$\frac{n_1(L-x)}{[h_1^2+(L-x)^2]^{1/2}}=\frac{n_e^2 x}{(n_o^2 h_2^2+n_e^2 x^2)^{1/2}}$$

或者

$$n_1\sin i=\frac{n_e^2\tan r}{(n_o^2+n_e^2\tan^2 r)^{1/2}} \tag{3.80}$$

这里用到了以下关系

$$\text{折射角 } r=\theta,\quad \tan r=\frac{x}{h_2}$$

根据简单的计算，可得

$$\tan r=\frac{n_o n_1\sin i}{n_e\sqrt{n_e^2-n_1^2\sin^2 i}} \tag{3.81}$$

根据这个公式，可以计算（当光轴垂直于分界面时）给定任意入射角时的折射角。作为一个简单的例子，假设第一个媒质是空气，$n_1=1$，则

$$\tan r=\frac{n_o\sin i}{n_e\sqrt{n_e^2-\sin^2 i}} \tag{3.82}$$

假设第二个媒质是方解石，则

$$n_o=1.65836,\quad n_e=1.48641$$

由 $i=45°$，可得

$$r\approx 31.1°$$

容易看出，当 $n_o=n_e=n_2$ 时，式(3.80)还原为

$$n_1\sin i=n_2\sin r \tag{3.83}$$

它就是斯涅耳定律(Snell's law)。

3.5.2　光轴在入射面内的情况[①]

下面考虑更加普遍的情况。如图 3.30 所示，光轴与法线之间的夹角为 ϕ，且光轴在入射面内。在这里需要提及，一般情况下，非常光线不一定也在入射面内。但可以证明，当光轴在入射面内时，非常光线也在入射面内。在目前的计算中，正是假设在这种情况下，来计算给定入射角时的折射光线的方向。如图 3.30 所示，从点 A 到点 B 的光程为

$$L_{op}=n_1[h_1^2+(L-x)^2]^{1/2}+n(\theta)(h_2^2+x^2)^{1/2} \tag{3.84}$$

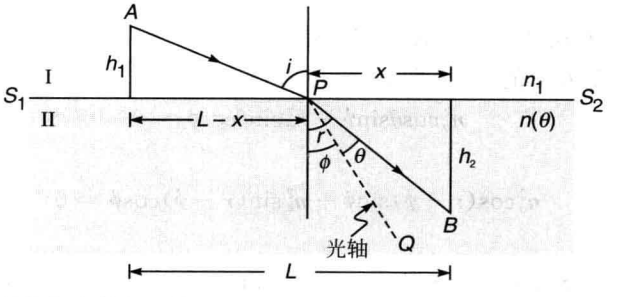


图 3.30　当单轴晶体的光轴在入射面内，且与法线之间的夹角为 ϕ 时，非常光线的折射方向。

① 第一次阅读可略过。

由 $\theta=r-\phi$,有

$$\begin{aligned}n^2(\theta) &= n_o^2\cos^2(r-\phi)+n_e^2\sin^2(r-\phi)\\ &= n_o^2(\cos r\cos\phi+\sin r\sin\phi)^2\\ &\quad + n_e^2(\sin r\cos\phi-\cos r\sin\phi)^2\\ &= n_o^2\left[\frac{h_2}{\sqrt{h_2^2+x^2}}\cos\phi+\frac{x}{\sqrt{h_2^2+x^2}}\sin\phi\right]^2\\ &\quad + n_e^2\left[\frac{x}{\sqrt{h_2^2+x^2}}\cos\phi-\frac{h_2}{\sqrt{h_2^2+x^2}}\sin\phi\right]^2\end{aligned}$$

则

$$n(\theta)=\frac{1}{\sqrt{h_2^2+x^2}}\left[n_o^2(h_2\cos\phi+x\sin\phi)^2+n_e^2(x\cos\phi-h_2\sin\phi)^2\right]^{1/2} \tag{3.85}$$

$$\begin{aligned}L_{op} &= n_1\left[h_1^2+(L-x)^2\right]^{1/2}+\\ &\quad \left[n_o^2(h_2\cos\phi+x\sin\phi)^2+n_e^2(x\cos\phi-h_2\sin\phi)^2\right]^{1/2}\end{aligned} \tag{3.86}$$

对于实际光线路径,有

$$\frac{dL_{op}}{dx}=0$$

意味着

$$\frac{n_1(L-x)}{\left[h_1^2+(L-x)^2\right]^{1/2}}=\frac{n_o^2(h_2\cos\phi+x\sin\phi)\sin\phi+n_e^2(x\cos\phi-h_2\sin\phi)\cos\phi}{\left[n_o^2(h_2\cos\phi+x\sin\phi)^2+n_e^2(x\cos\phi-h_2\sin\phi)^2\right]^{1/2}}$$

或者

$$n_1\sin i=\frac{n_o^2\cos\theta\sin\phi+n_e^2\sin\theta\cos\phi}{(n_o^2\cos^2\theta+n_e^2\sin^2\theta)^{1/2}} \tag{3.87}$$

对于给定的 i 和 ϕ,解上述方程,可得 θ,从而可得折射角 $r(=\theta+\phi)$。

以下几种特殊情况值得注意。

(1) 当 $n_o=n_e=n_2$ 时,各向异性媒质变为各向同性媒质,式(3.87)可以简化为

$$n_1\sin i=n_2\sin(\theta+\phi)=n_2\sin r$$

这就是斯涅耳定律(Snell's law)。

(2) 当 $\phi=0$ 时,即光轴垂直于分界面,式(3.87)可变为

$$n_1\sin i=\frac{n_e^2\sin\theta}{(n_o^2\cos^2\theta+n_e^2\sin^2\theta)^{1/2}}=\frac{n_e^2\sin r}{(n_o^2\cos^2 r+n_e^2\sin^2 r)^{1/2}} \tag{3.88}$$

其中用到了 $r=\theta$,式(3.88)与式(3.80)是一致的。

(3) 最后,考虑正入射的情况,即 $i=0$,则式(3.87)给出

$$n_o^2\cos\theta\sin\phi+n_e^2\sin\theta\cos\phi=0$$

或者

$$n_o^2\cos(r-\phi)\sin\phi+n_e^2\sin(r-\phi)\cos\phi=0$$

或者

$$\cos r(n_o^2\cos\phi\sin\phi-n_e^2\sin\phi\cos\phi)+\sin r(n_o^2\sin^2\phi+n_e^2\cos^2\phi)=0$$

或者

$$\tan r=\frac{(n_e^2-n_o^2)\cos\phi\sin\phi}{n_o^2\sin^2\phi+n_e^2\cos^2\phi} \tag{3.89}$$

由式(3.89)可得，通常 $r\neq 0$(见图 3.31)。这里要指出：对于正入射，无论光轴的方向如何，这个结论总是正确的，且折射光线(非常光线)位于法线与光轴方向组成的平面内。此外，对于正入射，当晶体绕着入射光线旋转时，折射光线也同时旋转，构成一个圆锥面(见图 22.18(b))。

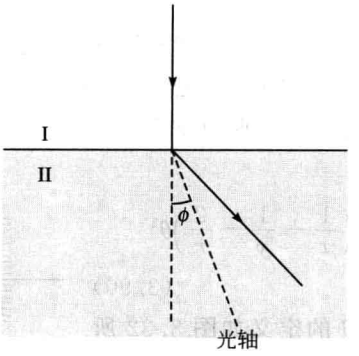


图 3.31　对于正入射，折射光线通常经历有限的偏折。然而，当光轴平行或者垂直于分界面时，折射光线并不偏折。

回到式(3.89)，注意到：当光轴垂直于分界面($\phi=0$)，或者光轴平行于分界面，且位于入射面内时($\phi=\pi/2$)，则 $r=0$，即折射光线不偏离法线。

小　结

- 有些许改进的费马原理：两点之间的真实路径是其光程相对于路径的变分是平稳的那一条。
- 折射定律，即，斯涅耳定律($n_1\sin\phi_1=n_2\sin\phi_2$，式中 ϕ_1 和 ϕ_2 表示入射角和折射角)，可以由费马原理推导得出。
- 对于折射率变化为 $n(x)$ 的非均匀媒质，其光线路径 $x(z)$ 要满足 $n(x)\cos\theta(x)$ 的乘积保持常数，式中 $\theta(x)$ 是光线与 z 轴的夹角。这个常数用 $\tilde{\beta}$ 表示，称为光线不变量。精确的光纤路径由下面两个方程之一求解

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=\pm\frac{\sqrt{n^2(x)-\tilde{\beta}^2}}{\tilde{\beta}}$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2}=\frac{1}{2\tilde{\beta}^2}\frac{\mathrm{d}n^2(x)}{\mathrm{d}x}$$

式中不变量 $\tilde{\beta}$ 由光线的初始条件确定。

- 通过解光线方程得到光线路径，可以用来研究海市蜃楼(下现蜃景)、上现蜃景现象，以及经电离层的反射现象。
- 在抛物线折射率分布为 $n^2(x)=n_1^2-\gamma^2x^2$ 的媒质中，光线路径是按照正弦规律摆动的

$$x=\pm x_0\sin\Gamma z$$

式中 $\Gamma=\dfrac{\gamma}{\tilde{\beta}}$，$x_0=\dfrac{1}{\gamma}\sqrt{n_1^2-\tilde{\beta}^2}$，并且假设光线入射时，$x=0$，$z=0$。以不同角度入射

的光线经历较长距离的传播后，传播时间近似相等。

- 费马原理可以用来研究光线在各向同性与各向异性媒质分界面的折射现象。

习　题

3.1 习题3.1和习题3.2都将根据费马原理来推导球面镜傍轴成像的规律。

考虑一个物点 O 位于一个曲率中心在点 C 的凹面镜前，令另一点 Q 在系统的轴线上。根据如同例3.3相似的方法，证明其光程 L_{op} ($=\overline{OS}+\overline{SQ}$)可以近似为

$$L_{op} \approx x + y + \frac{1}{2}r^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{r}\right)\theta^2 \tag{3.90}$$

式中距离 x，y 和 r 以及 θ 的定义如图3.32所示，假设 θ 很小。确定傍轴的像点，并证明结果与球面成像公式一致

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{2}{R} \tag{3.91}$$

式中 u 和 v 是物距和像距，R 是曲率半径。符号采用传统规定，即在点 P 右侧为正，点 P 左侧为负。

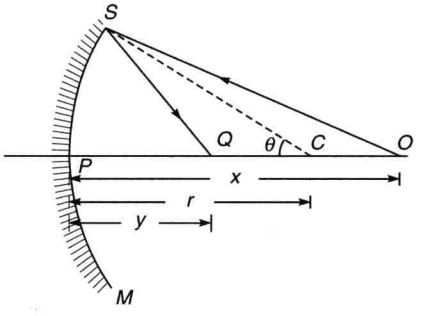


图3.32　凹面镜的傍轴成像

3.2 费马原理也可以用来确定当物成一虚像时的傍轴像点。考察一凸面镜 SPM(见图3.33)前面的物点 O。假设光程 $L_{op}=\overline{OS}-\overline{SQ}$，负号是由于在点 S 的光线指向点 Q 的反向(见例3.4)。证明

$$L_{op} \approx \overline{OS}-\overline{SQ} \approx x - y + \frac{1}{2}r^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{2}{r}\right)\theta^2 \tag{3.92}$$

式中距离 x，y 和 r 以及 θ 的定义如图3.33所示。证明在 $y=y_0$ 处的傍轴像点由式(3.93)决定

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y_0}=-\frac{2}{r} \tag{3.93}$$

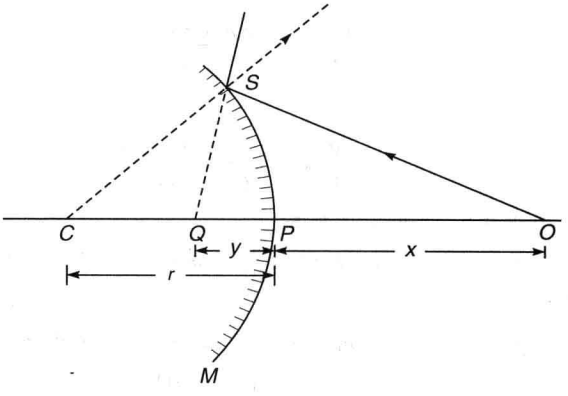


图3.33　凸面镜的傍轴成像

这与式(3.91)一致，只是 u 为正值，而像距 v 与曲率半径为负，这是因为像点与曲率中心在点 P 的左方。

3.3 续习题 3.2，根据费马原理确定：对于曲率半径为 R 的凹面镜，当物点距离小于 $R/2$ 时的球面镜成像公式。

3.4 考察将折射率分别为 n_1 和 n_2 的媒质分开的凹折射面 SPM，前面一物点 O 的成像情况(见图 3.34)。C 表示曲率中心。这种情况下，成像为一虚像。令点 Q 为光轴上的任意一点。现在考虑光程 $L_{op}=n_1\overline{OS}-n_2\overline{SQ}$。证明：

$$\begin{aligned} L_{op} &= n_1\overline{OS}-n_2\overline{SQ} \\ &\approx n_1x-n_2y-\frac{1}{2}r^2\left(\frac{n_2}{y}-\frac{n_1}{x}-\frac{n_2-n_1}{r}\right)\theta^2 \end{aligned} \tag{3.94}$$

再证明式(3.94)与傍轴成像方程式(3.10)一致。请注意：u，v 和 R 均为负值，因为它们都位于折射面的左边。

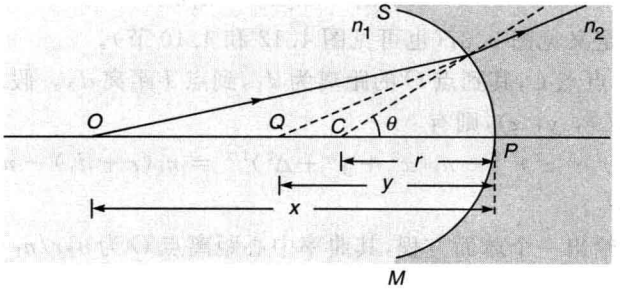


图 3.34　凹折射面 SPM 的傍轴成像

3.5 将一个椭圆沿其主轴旋转，得到一个旋转椭球。利用费马原理证明，只要椭圆的偏心率等于 n_1/n_2，则所有平行于主轴的光线都将聚焦于椭球的一个焦点上(见图 3.35)。

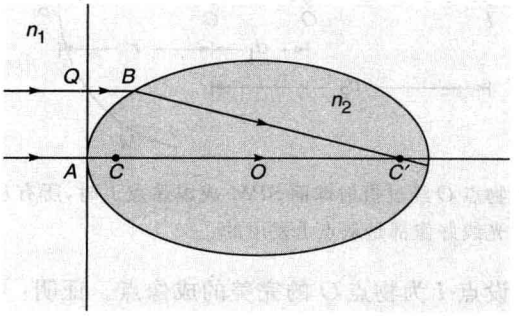


图 3.35　只要椭圆的偏心率等于 n_1/n_2，则所有平行于旋转椭球主轴的光线都将聚焦于椭球的一个焦点上

(提示：从下面的关系入手

$$n_2\overline{AC'}=n_1\overline{QB}+n_2\overline{BC}$$

并证明点 B(其坐标是 x 和 y)位于椭圆的边缘上。)

3.6 点 C 是半径为 R 的折射球面的中心(见图 3.36)，点 P_1 与点 P_2 是一直径上距离中心等距的两点。(1)求出光程 $\overline{P_1O}+\overline{OP_2}$ 与 θ 的函数关系；(2)求出球面反射真实光线

P_1OP_2 对应的 θ。

3.7 SPM 是将折射率分别为 n_1 和 n_2 的媒质分开的球形折射面(见图 3.37)。考虑物点 O 在点 I 成一虚像。假设由点 O 发出的所有光线看上去就如同都由点 I 发出的一样,从而在点 I 形成一个完美的虚像。根据费马原理,必然有

$$n_1\,\overline{OS}-n_2\,\overline{SI}=n_1\,\overline{OP}-n_2\,\overline{PI}$$

式中点 S 是折射球面上的任意一点。假设上述方程右侧为零,证明折射界面是球面,且其半径为

$$r=\frac{n_1}{n_1+n_2}\,\overline{OP} \tag{3.95}$$

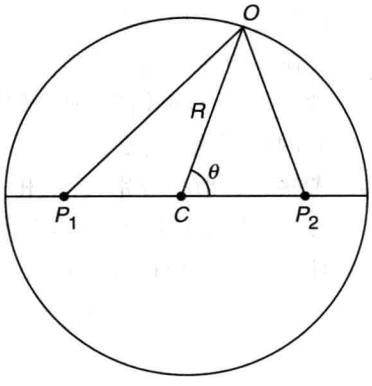


图 3.36 一个球面反射器

随后证明

$$n_1^2d_1=n_2^2d_2=n_1n_2r \tag{3.96}$$

式中 d_1,d_2 的定义见图 3.37(也可见图 4.12 和 4.10 节)。

[提示:考虑一点点 C,其到点 O 的距离为 d_1,到点 I 距离 d_2。假设点 O 为原点,并令点 S 的坐标为 $(x,\ y,\ z)$,则有

$$n_1(x^2+y^2+z^2)^{1/2}-n_2(x^2+y^2+\Delta^2)^{1/2}=n_1(r+d_1)-n_2(r+d_2)=0$$

式中 $\Delta=d_1-d_2$。

上述方程给出一个球面方程,其曲率中心距离点 O 为 n_2r/n_1 $(=d_1)$。]

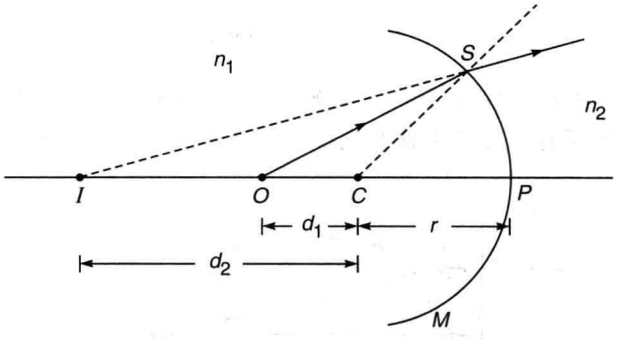


图 3.37 当物点 O 经过折射球面 SPM 成虚像点 I 时,所有从点 O 发出的光线好像都是从点 I 发出的。

3.8 如图 3.38 所示,假设点 I 为物点 O 的完美的成像点。证明:将折射率分别为 n_1 和 n_2 的媒质分开的折射面方程为

$$n_1(x^2+y^2+z^2)^{1/2}+n_2(x^2+y^2+(z_2-z)^2)^{1/2}=n_1z_1-n_2(z_2-z_1) \tag{3.97}$$

式中假设原点为点 O,点 P 和点 I 的坐标分别假设为 $(0,0,z_1)$ 和 $(0,0,z_2)$。式(3.97)的曲面被称为笛卡儿卵形面。

3.9 对于折射率分布根据式(3.21)和式(3.22)变化的媒质,一条光线由 $x=0.43\text{m}$ 处,以与 z 轴成 $-\pi/60$ 方向发射(见图 3.14)。计算当光线变为水平时的 x 值。

3.10 对于折射率分布根据式(3.21)和式(3.22)变化的媒质,一条光线由 $x=2.8\text{m}$ 处发

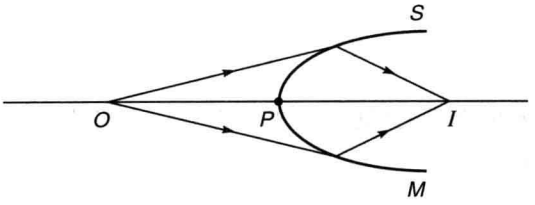


图 3.38　笛卡儿卵形面。所有由点 O 发出的光线将经过 SPM 面折射，全部通过点 I。

射，且在 $x=0.2\text{m}$ 处变为水平方向（见图 3.15）。计算光线在发射点处与 z 轴的夹角。

[**答案**：$\theta_1\approx19°$]

3.11　考虑一个按照抛物线型变化的媒质，其折射率变化如下

$$\begin{cases} n^2(x)=n_1^2\left[1-2\Delta\left(\dfrac{x}{a}\right)^2\right], & |x|<a \\ n^2(x)=n_1^2(1-2\Delta)=n_2^2, & |x|>a \end{cases}$$

假设 $n_1=1.50$，$n_2=1.48$，$a=50\mu\text{m}$。计算以下条件的 Δ 的值。

(1) 假设光线从光轴上的 $z=0$ 处发射（即当 $z=0$ 时，$x=0$），且其光线不变量分别为

$$\tilde{\beta}=1.495,\ 1.490,\ 1.485,\ 1.480,\ 1.475,\ 1.470$$

计算每一种情况下光线初始时与光轴的夹角（θ_1），并画出每一条光线的路径。计算出在每一种情况下光线变为水平的高度。

(2) 光线在 $z=0$ 平面正入射，其起始位置分别在 $x=0,\pm10\mu\text{m},\pm20\mu\text{m},\pm30\mu\text{m},\pm40\mu\text{m}$ 处。计算其光线不变量 $\tilde{\beta}$，并对每一光线，计算其焦距，并定性地画出光线路径。

3.12　在一非均匀媒质中，折射率分布由下式给出

$$\begin{cases} n^2(x)=1+\dfrac{x}{L}, & x>0 \\ n^2(x)=1, & x<0 \end{cases}$$

写出经过点(0,0,0)的在 x-z 平面内的光线方程，并证明此点光线与 x 轴的夹角为 45°。

3.13　由式(3.23)给出的折射率分布的媒质，证明式(3.27)可以写为以下形式

$$\pm\frac{\alpha K_1 n_2}{2\tilde{\beta}}\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}G}{\sqrt{1-G^2}} \tag{3.98}$$

式中

$$K_1=\frac{\sqrt{\tilde{\beta}^2-n_0^2}}{n_2},\quad G(x)=K_1\mathrm{e}^{\alpha x/2} \tag{3.99}$$

对式(3.98)积分，可得光线路径。

3.14　考虑一个渐变折射率媒质，其折射率分布由下式给出

$$n^2(x)=n_1^2\operatorname{sech}^2 gx \tag{3.100}$$

将其代入式(3.27)，并积分，可得

$$x(z)=\frac{1}{g}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{\sqrt{n_1^2-\tilde{\beta}^2}}{\tilde{\beta}}\sin gz\right) \tag{3.101}$$

证明其空间周期

$$z_p = \frac{2\pi}{g}$$

与发射光线的起始角度无关(见图 3.39),并且所有光线沿 z 轴传播一段距离 z_p 后,所花的时间严格相等。

$\left(\text{提示：在进行积分时，做替换 } \zeta = \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{n_1^2 - \tilde{\beta}^2}} \sinh gx\right)$

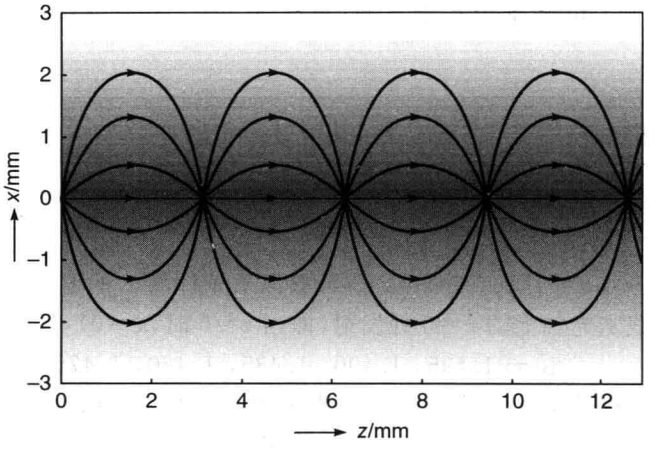


图 3.39　由式(3.100)决定的渐变折射率分布的媒质中的光线路径

参考文献和推荐读物

1. M. Born and E. Wolf, Principles of Optics, Pergamon Press, Oxford, UK, 1975.
2. A.K. Ghatak and K. Thyagarajan, Contemporary Optics, Plenum Press, New York, (1978). [Reprinted by Macmillan India, New Delhi].
3. R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, The Feynman Lectures on Physics, Vol. I, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1965.
4. M.S. Sodha, A.K. Aggarwal and P.K. Kaw, 'Image formation by an optically stratified medium: Optics of mirage and looming', British Journal of Applied Physics, vol. **18**, 503, 1967.
5. R.T. Bush and R.S. Robinson, 'A Note explaining the mirage', American Journal of Physics, vol. **42**, 774, 1974.
6. A.B. Fraser and W.H. Mach, 'Mirages', Scientific American, January, vol. **234**, 102, 1976.
7. E. Khular, K. Thyagarajan and A. K. Ghatak, 'A note on mirage formation', American Journal of Physics, vol. **45**, 90, 1977.
8. W.J. Humphreys, Physics of the Air, McGraw-Hill Book Co., New York, 1920.
9. S. K. Mitra, The Upper Atmosphere, Second Edition, The Asiatic Society, Calcutta, 1952.
10. W.A. Newcomb, 'Generalized Fermat's principles', American Journal of Physics, vol. **51**, 338, 1983.
11. E. Khular, K. Thyagarajan and A.K. Ghatak, 'Ray tracing in uniaxial and biaxial media', Optik, vol. **46**, 297, 1976.
12. V Lakshminarayanan, A. Ghatak and K Thyagarajan, Lagrangian Optics, Kluwer Academic Publishers, 2002.

第4章 光线经过球面的折射与反射

对于平面镜和曲面镜的应用，以及对凸透镜和凹面镜的应用是由中国和希腊分别独立发现的。关于应用镜子来点火的印证几乎可以追溯到有历史记载之初，中国和希腊关于光学的知识很可能来源于美索不达米亚、印度或埃及……希腊哲学家及数学家毕达哥拉斯(公元前6世纪)提出：光是由一组射线组成，其作用就像感知器。它自眼睛发出，直线传播到物体，当这些射线碰触到物体时，就形成了视觉。这样，就解释了神秘的视觉是通过根据触觉直观地感知的。然而，必须将这些光线的方向反过来，才形成了现代几何光学的框架。希腊数学家欧几里得(公元前300年)接受了毕达哥拉斯的观点，得到了从镜子反射的光线角度等于由物体到镜子的入射光线的角度。关于光是由一个光源发出，被物体反射，进入人眼后形成视觉这样的思想，是由另一位希腊哲学家伊壁鸠鲁(公元前300年)建立的。在阿拉伯数学家和物理学家阿尔哈增(Al-Haitham，西方人称其为Alhazen)的影响下，直到大约公元1000年，毕达哥拉斯的视觉假设才被彻底抛弃，使人们最终接受了光线是由物体传播到眼睛的观念。

——《大不列颠新百科全书》，第23卷

阿尔哈增利用球面镜和抛物面镜解释成像，并认识到球面像差。他还研究了透镜的放大率和大气折射。他的著作被翻译成拉丁语，才使后来的欧洲学者可以读到他的著作。

——来自因特网

4.1 引言

在本章，将研究简单光学系统的成像。假设这些光学系统由数个折射界面组成，比如一组透镜[①]。为了追踪一条光线是如何通过这个光学系统的，只要按照下面的原则，在每个折射面应用斯涅尔定律即可。

(1) 入射光线、折射光线和(折射面的)法线在同一平面内。

(2) 如果 ϕ_1 和 ϕ_2 分别表示入射角和折射角，则

$$\frac{\sin\phi_1}{\sin\phi_2}=\frac{n_2}{n_1} \tag{4.1}$$

式中 n_1 和 n_2 是两个媒质的折射率(见图4.1)。虽然在光线追迹的过程中除了斯涅尔定律之外没有涉及更多的物理知识，但是，即使设计一个简单的光学系统也要处理许多光线的追

① 这些光学系统中也可以有反射镜，此时也要考虑光线的反射(见4.3节)。

迹问题,从而包含了庞大的数字计算。今天,这样的数字计算通常可以由高速计算机来完成。有趣的是,在 20 世纪 50 年代前期电子计算机刚出现时,光学设计者是第一批使用计算机的。

4.2 在单一球面上的折射

首先研究在一个两边折射率分别是 n_1 和 n_2 的媒质的分界球面 SPM 上的折射(见图 4.1(a))。令点 C 为球面的曲率中心,考虑一个物点 O 在各个方向上发射光线,应用斯涅尔折射定律来决定点 O 的像。需要提醒的是,不是所有由点 O 发出的光线都将会聚到同一点上。但是,如果只考虑小角度光线,则满足这一条件的所有光线确实将会聚到同一点 I(见图 4.1(a)),这就是所谓的傍轴近似。根据费马原理,这些傍轴光线从点 O 到点 I 都经历相同的时间(见例 3.3)。

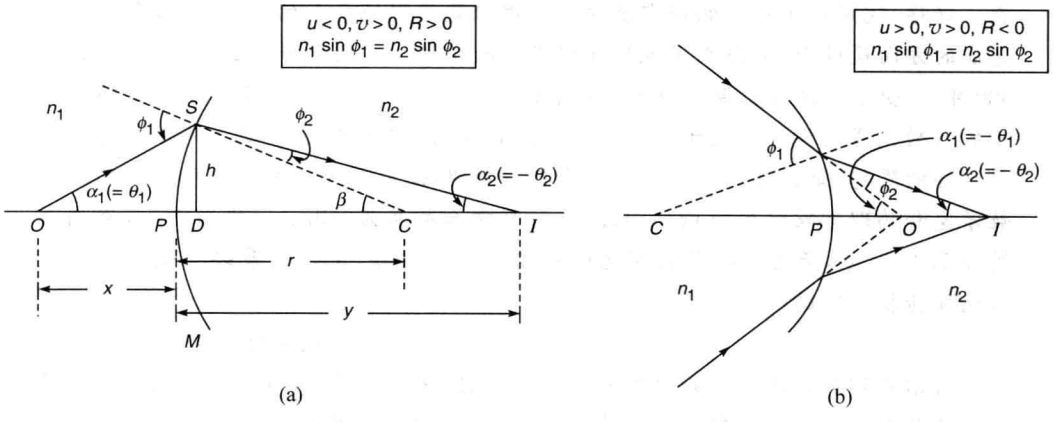


图 4.1

(a) 分开两个折射率分别为 n_1 和 n_2 媒质的球折射面的傍轴成像,点 O 表示物点,点 I 是傍轴像点;(b) 相应于 u 为正值的情况。

如图 4.1(a)所示中定义的角度,有

$$\phi_1 = \beta + \alpha_1, \quad \phi_2 = \beta - \alpha_2$$

应用傍轴近似,即角度 ϕ_1,ϕ_2,α_1,α_2 和 β 都很小,以至于

$\sin\phi_1 \approx \tan\phi_1 \approx \phi_1$,如此类推

式中的角度以 rad 为度量单位。有

$$\sin\phi_1 \approx \phi_1 = \beta + \alpha_1 \approx \tan\beta + \tan\alpha_1 \approx \frac{h}{r} + \frac{h}{x} \tag{4.2}$$

$$\sin\phi_2 \approx \phi_2 = \beta - \alpha_2 \approx \tan\beta - \tan\alpha_2 \approx \frac{h}{r} - \frac{h}{y} \tag{4.3}$$

式中距离 h,x,y 和 r 的定义见图 4.1(a),假设垂足点 D 非常靠近点 P,从而 $\overline{OD} \approx \overline{OP} = x$,$\overline{ID} \approx \overline{IP} = y$。根据式(4.1)~式(4.3),可得(在傍轴近似下)

$$n_1\left(\frac{h}{r} + \frac{h}{x}\right) = n_2\left(\frac{h}{r} - \frac{h}{y}\right)$$

即

$$\frac{n_2}{y}+\frac{n_1}{x}=\frac{n_2-n_1}{r} \tag{4.4}$$

4.2.1　符号约定

继续进行讨论之前，必须声明一下将贯穿本书始终的符号约定。如图 4.1(a)所示，以点 P 为坐标原点，则符号约定如下。

(1) 光线总是从折射面(或反射面)的左侧入射。

(2) 所有在点 P 右侧的距离为正值，而在其左侧的距离为负值。因此，如图 4.1(a)所示中，物距 u 是负值，而像距 v 和曲率半径 R 是正值。如图 4.1(b)所示，u 为正值，此时如果不存在折射面，则光线聚焦在点 P 的右侧。

(3) 当光轴沿逆时针方向(经过一个锐角)旋转能与光线重合时，光线与光轴所夹的角度为正；反之，当光线沿顺时针方向(经过一个锐角)旋转能与光线重合时，光线与光轴所夹的角度为负。所以如图 4.1(a)所示，如果光线 OS 与 SI 与光轴所夹角度为 θ_1 和 θ_2，则 $\theta_1=\alpha_1$，$\theta_2=-\alpha_2$；α_1，α_2 和 β 表示角度的数值(如果最后的结果与角度无关时，只应用角度的数值是方便的，见 4.2 节)。如图 4.1(b)所示，θ_1 和 θ_2 都是负值。

(4) 对于光线与界面法线的夹角，当法线沿逆时针方向(经过一个锐角)旋转能与光线重合时，该角度取正值；反之为负值。如图 4.1(a)所示，ϕ_1 和 ϕ_2 为正值。

(5) 所有距离，(沿与光轴垂直方向)在光轴上方为正值，在光轴下方为负值。

4.2.2　单球面的高斯公式

应用上述符号约定，如图 4.1(a)所示的光线图像，$u=-x$，$v=y$ 和 $R=r$，则式(4.4)变为

$$\frac{n_2}{v}-\frac{n_1}{u}=\frac{n_2-n_1}{R} \tag{4.5}$$

式(4.5)给出了在一个球形界面上的成像公式(还可以参见式(3.10))。式(4.5)称为单球面的高斯公式。应该注意，如图 4.1(a)所示，u 为负值，v 为正值；而如图 4.1(b)所示，u 和 v 均为正值。

例 4.1　如图 4.2 所示，考察一折射率为 1.5 的媒质，其边界为两个球面 $S_1P_1M_1$ 和 $S_2P_2M_2$，两球面的曲率半径分别为 15cm 和 25cm，分别以点 C_1 和点 C_2 为曲率中心。在点 C_1 和点 C_2 的连线上，距离点 P_1 40cm 处有一物点 O，试确定傍轴像点的位置。

解　首先研究 $S_1P_1M_1$ 面的折射。显然，$u=-40\text{cm}$，$R=+15\text{cm}$，$n_1=1.0$ 以及 $n_2=1.5$，则

$$\frac{1.5}{v}+\frac{1}{40}=\frac{0.5}{15}\Rightarrow v=+180\text{cm}$$

在没有第二个界面时，距离点 P_2 150cm 的点 O' 将成一像。点 O' 是虚像点，且位于 $S_2P_2M_2$ 的右侧。考虑第二个界面的折射，有 $u=+150\text{cm}$，$R=-25\text{cm}$，$n_1=1.5$ 以及 $n_2=1.0$，则

$$\frac{1.0}{v}-\frac{1.5}{150}=+\frac{0.5}{25}$$

可得

$$v = +33\frac{1}{3}\text{cm}$$

即将在点 P_2 的右侧 $33\frac{1}{3}$cm 处成一实像。

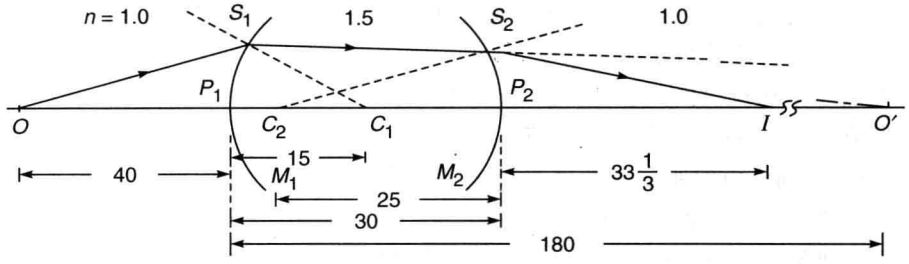


图 4.2　通过两个球面 $S_1P_1M_1$ 和 $S_2P_2M_2$ 包围的折射率为 1.5 的媒质傍轴成像所有距离由厘米度量。

必须指出：当研究单界面折射时(见图 4.1)，系统光轴定义为物点 O 与曲率中心点 C 的连线。这样，任意从点 O 发出的光线(像 OS)将位于包含光轴、法线与点 S 的平面内，且折射线总会与光轴相交。另一方面，如果有第二个折射界面(见图 4.2 或者透镜成像)存在时，两个曲率中心的连线定义为光轴。对于后一种情况，很容易看出，并不是所有从不在光轴上的物点发出的光线都与光轴相交，并且经过第二个界面的折射，一般来说，光线不会仍保持在同一平面内，这些光线被称为不交轴光线(也叫斜光线)。局限在光轴平面内的光线称为子午光线。很显然，从光轴上一点发出的所有光线都是子午光线。

4.3　在单一球面上的反射

下面研究一物点 O 被一球面镜 SPM 在傍轴近似下的反射成像问题(见图 4.3)。点 C 表示曲率中心。用非常类似于 4.2 节的方式，来进行下面的分析。如图 4.3 所示，可得

$$\phi_1 = \beta - \alpha_1 \approx \frac{h}{r} - \frac{h}{x}$$

$$\phi_2 = \alpha_2 - \beta \approx \frac{h}{y} - \frac{h}{r}$$

式中距离 x, y, h 和 r 的定义见图 4.3。由 $\phi_1 = \phi_2$(反射定律)，可得

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{r} \tag{4.6}$$

如果还用先前的符号约定，所有在点 P 右侧的距离为正值，在左侧的距离为负值，则 $u = -x, v = -y$ 和 $R = -r$，从而得到球面镜成像公式

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{2}{R} \tag{4.7}$$

这与根据费马原理推导出的公式一样(见习题 3.1)。值得注意的是，如果在式(4.5)中令 $n_1 = -n_2$，也会得到式(4.7)。这是因为只要在斯涅尔折射定律式(4.1)中令 $n_1 = -n_2$，就可以得到反射定律。

下面用一个例子来解释式(4.7)的应用。

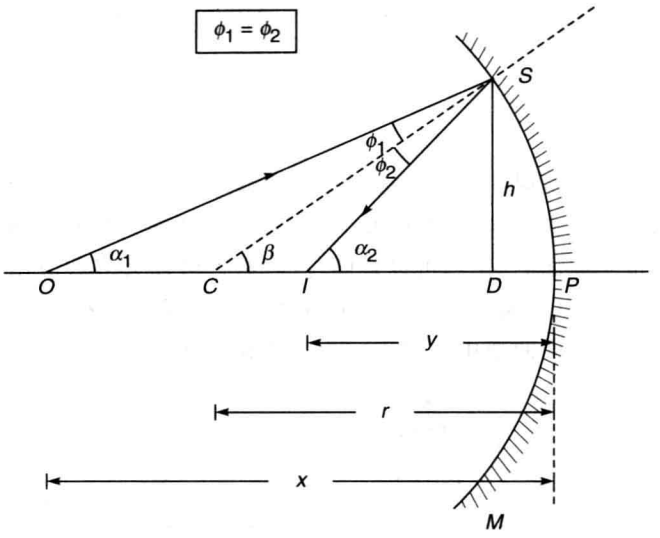


图 4.3　通过球形反射面 SPM 的傍轴成像

例 4.2　考察一个光学系统，由一个凹面镜 $S_1P_1M_1$ 和一个凸面镜 $S_2P_2M_2$ 组成，它们的曲率半径分别为 60cm 和 20cm（见图 4.4），两镜之间距离为 40cm。试确定距离点 P_1 80cm 的物点 O 最后成像的位置。

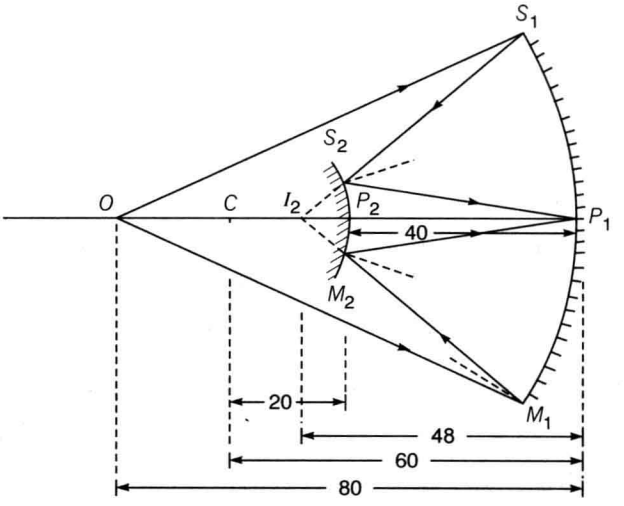


图 4.4　由一个凹面镜 $S_1P_1M_1$ 和凸面镜 $S_2P_2M_2$ 组成的光学系统所成傍轴像的过程

首先研究 $S_1P_1M_1$ 面的成像，由 $u=-80\text{cm}$ 和 $R=-60\text{cm}$（取负值是因为点 O 和点 C 均在点 P_1 的左侧），有

$$-\frac{1}{80}+\frac{1}{v}=-\frac{2}{60}\Rightarrow v=-48\text{cm}$$

如果没有凸面镜 $S_2P_2M_2$，将在点 I_1 成一实像，而现在它将作为 $S_2P_2M_2$ 面的虚物。既然点 I_1 在点 P_2 的左侧，（经 $S_2P_2M_2$ 面成像）由 $u=-8\text{cm}$ 和 $R=-20\text{cm}$，有

$$\frac{1}{v}-\frac{1}{8}=-\frac{2}{20}\Rightarrow v=+40\text{cm}$$

可得最后的像位于 $S_2P_2M_2$ 面右侧 40cm 处，即恰好是点 P_1。

4.4 薄透镜

一媒质夹在两个球面折射面之间形成一球面透镜。假定这种透镜的厚度(如图 4.5 所示的 t)与物距和像距以及曲率半径比起来小很多，则该球面透镜属于薄透镜。一般来说，透镜的折射面可以是非球面的(比如可以是圆柱面的)。然而大多数应用于光学系统的透镜都是球形折射面。因此，可以简单地用透镜来替代球面透镜的名称。如图 4.6 所示为不同类型的透镜。两个折射球面曲率中心的连线称为透镜的光轴。

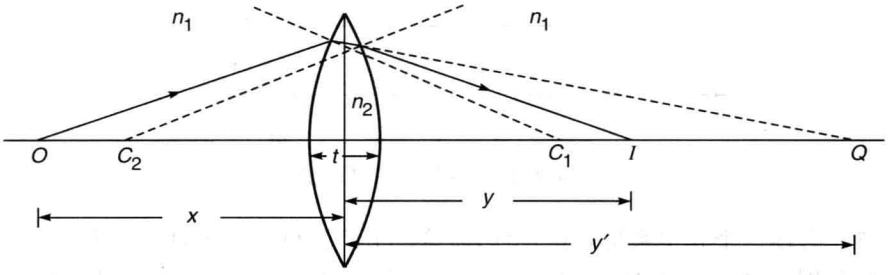


图 4.5　薄透镜的成像，两个曲率中心的连线被称为透镜的光轴($u=-x$，$v'=y'$，$v=y$)

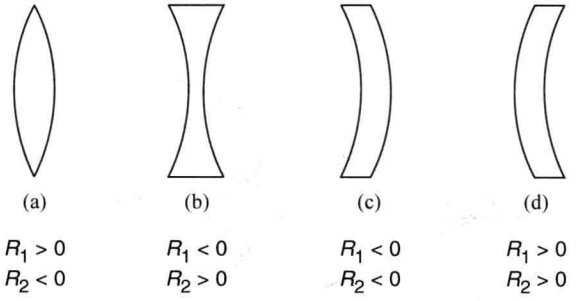


图 4.6　不同类型的透镜 R_1 和 R_2 的符号不同

研究如图 4.5 所示(薄)透镜光轴上的一个物点 O。透镜放在一折射率为 n_1 的媒质中，透镜媒质的折射率为 n_2。令 R_1 和 R_2 为透镜左侧和右侧两个折射面的曲率半径。如图 4.5 所示，R_1 是正的，R_2 是负的。为了确定最后像点的位置，研究两个折射面连续的折射。第一个折射面的像(可以是实的也可以是虚的)用来作为第二个折射面的物。假如没有第二个折射面，物点 O 将在点 Q 成一像，其位置(用 v' 表示)由下式决定(见式(4.5))

$$\frac{n_2}{v'}-\frac{n_1}{u}=\frac{n_2-n_1}{R_1} \tag{4.8}$$

式中 u 是物距，如图 4.5 所示，对于物点 O 来说，物距是负的。显然，如果 v' 是正的，则点 Q 位于第一折射面的右侧，而如果 v' 是负的，则点 Q 位于第一折射面的左侧。现在点 Q 作为第二折射面的物(虚物)，最后的像将位于点 I。其位置由下式决定

$$\frac{n_1}{v}-\frac{n_2}{v'}=\frac{n_1-n_2}{R_2} \tag{4.9}$$

在式(4.8)和式(4.9)中，距离都是从透镜的中点 P 开始度量的。由于是薄透镜，这些距离代表物距、像距是没有问题的。将式(4.8)和式(4.9)两式相加，得

$$\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \tag{4.10}$$

式中

$$n \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{n_2}{n_1}$$

式(4.10)被称为薄透镜成像公式，通常写为

$$\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f} \tag{4.11}$$

式中 f 称为透镜的焦距，定义为

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \tag{4.12}$$

对于放在空气中的透镜(这也是通常的情况)，$n>1$。如果$[(1/R_1)-(1/R_2)]$为正值，则焦距为正，透镜起会聚作用(见图 4.7(a))。类似地，如果$[(1/R_1)-(1/R_2)]$为负值，则焦距为负，透镜起发散作用(见图 4.7(b))。然而，当一个双凸的透镜放在折射率比透镜媒质高的媒质中，则焦距变为负值，透镜起发散作用(见图 4.7(c))。类似地，对于一个双凹透镜，也放在高折射率媒质中，它起着会聚作用(见图 4.7(d))。

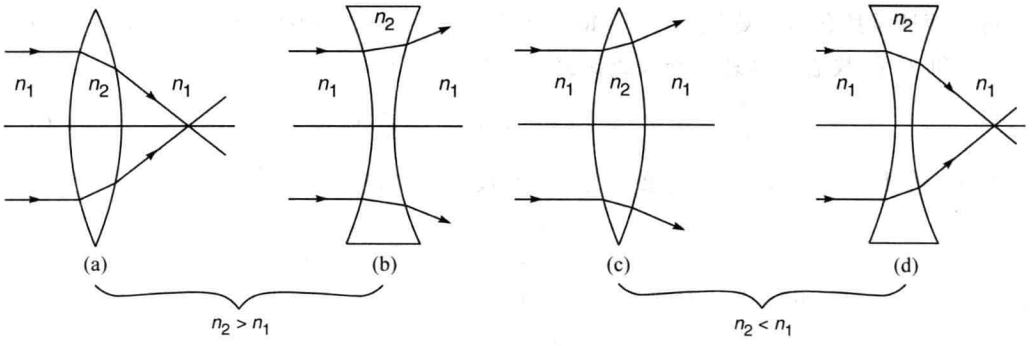


图 4.7　(a)和(b)对应于透镜媒质的折射率高于周围媒质时的情况，此时，双凸透镜表现为会聚作用，而双凹透镜表现为发散作用。(c)和(d)对应于透镜媒质折射率低于周围媒质的情况，此时，双凸透镜表现出发散作用，而双凹透镜表现为会聚作用。

4.5　透镜的主焦点和焦距

对于一个会聚透镜，其第一主焦点定义为(主轴上)这样的一点，当一条光线通过这一点，并经过透镜折射，将变为一根平行于光轴的光线——见图 4.8(a)中的光线 1。点 F_1 称为第一主焦点。对于一个发散透镜，如果一根光线原来(在没有透镜时)应该通过第一主焦点，但经过折射后，将变为一根平行于光轴的光线——见图 4.8(b)中的光线 1。点 F_1 就是第一主焦点，而它与透镜的距离(以 f_1 表示)被称为透镜的第一焦距。显然，对于会聚透镜，f_1 是负值；而对于发散透镜，f_1 是正值。

下面研究一条平行于光轴传输的光线(见图 4.8(a)和(b)中的光线 2)，经过会聚透镜，

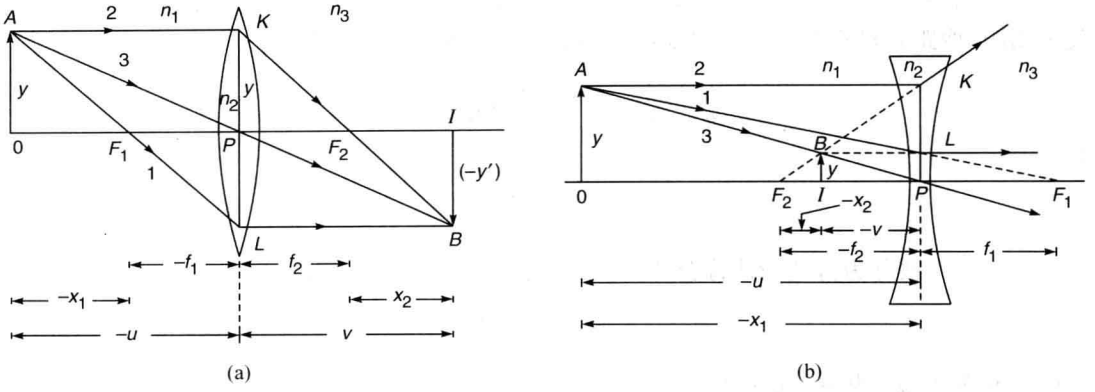


图 4.8

(a) 一个会聚透镜的傍轴成像。x_1,f_1 和 u 为负值,而 x_2,f_2 和 v 为正值;(b) 一个发散透镜的傍轴成像。x_1,f_2,u 和 v 为负值,而 x_2 和 f_1 为正值。

与光轴相交的点称为第二主焦点(见图 4.8(a)中的点 F_2)。类似地,对于发散透镜,与光轴的反向延长线相交的点称为第二主焦点(见图 4.8(b)中的 F_2)。从透镜到第二主焦点的距离被称为第二焦距,用 f_2 来表示。如图 4.8 所示,对于会聚透镜,f_2 是正的;而对于发散透镜,f_2 是负的。

对于薄透镜所包围的媒质,在薄透镜两边折射率相等(即如图 4.8 所示中,$n_3=n_1$)的情况下,f_1 和 f_2 的数值很容易由透镜成像公式得到(见式(4.10))

$$\frac{1}{f_2}=-\frac{1}{f_1}=\left[(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right]=\frac{1}{f} \tag{4.13}$$

然而,如果 $n_3\neq n_1$,则透镜成像公式可以假设为(见习题 4.2)

$$\frac{n_3}{v}-\frac{n_1}{u}=\frac{n_2-n_1}{R_1}+\frac{n_3-n_2}{R_2} \tag{4.14}$$

则,当 $v=\infty$,$u=f_1$(见图 4.8 中的光线 1),有

$$\frac{1}{f_1}=-\frac{1}{n_1}\left(\frac{n_2-n_1}{R_1}+\frac{n_3-n_2}{R_2}\right) \tag{4.15}$$

同理,当 $u=-\infty$,$v=f_2$(见图 4.8 中的光线 2),有

$$\frac{1}{f_2}=\frac{1}{n_3}\left(\frac{n_2-n_1}{R_1}+\frac{n_3-n_2}{R_2}\right) \tag{4.16}$$

一旦确定了 f_1 和 f_2(随即就知道了第一主焦点和第二主焦点的位置),则(傍轴)成像可以由以下规则用画图法确定。

(1) 经过折射后,通过第一主焦点的光线将转为平行于光轴(见图 4.8(a)和(b)中的光线 1)。

(2) 经过折射后,一平行于光轴的光线将弯曲,变为经过第二主焦点,或者(决定于 f_2 的符号)看上去来自第二主焦点(见图 4.8(a)和(b)中的光线 2)。

(3) 通过透镜中心点 P 的光线将不会改变方向[①](见图 4.8(a)和(b)中的光线 3)。

① 这是基于以下事实:当 $u=0$ 时,$v=0$(见式(4.10)和式(4.14))。

4.6　牛顿公式

令 x_1 为从第一主焦点 F_1 到物点的距离(如果物点在点 F_1 的右侧，x_1 为正，否则为负)，并令 x_2 为从第二主焦点 F_2 到像点的距离，如图 4.8(a)和(b)所示。考虑如图 4.8(a)所示中三角形的相似性，有

$$\frac{-y'}{y}=\frac{-f_1}{-x_1} \tag{4.17}$$

$$\frac{-y'}{y}=\frac{x_2}{f_2} \tag{4.18}$$

式中垂直距离如果在光轴的上方为正，在下方为负(见 4.2.1 节)，则由式(4.17)和式(4.18)可得

$$f_1 f_2 = x_1 x_2 \tag{4.19}$$

此式称为牛顿透镜公式。需要指出的是：对于一个发散透镜(见图 4.8(b))，式(4.17)和式(4.18)为

$$\frac{y'}{y}=\frac{f_1}{-x_1}=\frac{x_2}{-f_2}$$

这与式(4.17)和式(4.18)是一致的。

当薄透镜两侧是同一媒质时，根据式(4.13)，有

$$x_1 x_2 = -f^2 \tag{4.20}$$

说明 x_1 和 x_2 必然是反号的。因此，如果物点位于第一主焦点的左侧，则像点将位于第二主焦点的右侧；反之亦然。

4.7　横向放大率

横向放大率 m 是像高与物高的比值。如图 4.8(a)和(b)所示，可得

$$m=\frac{y'}{y}=\frac{v}{u}=\frac{f_2+x_2}{f_1+x_1}=-\frac{f_1}{x_1}=-\frac{x_2}{f_2} \tag{4.21}$$

式中利用了式(4.17)和式(4.18)。很显然，如果 m 是负值，像是倒立的(如图 4.8(a)所示)；反之，如果 m 是正值，像是正立的(如图 4.8(b)所示)。放大率也可以由每个折射面单独成像的放大率的乘积来计算。如图 4.9 所示，经过单一折射面后的放大率为

$$m=\frac{y'}{y}$$

考虑△AOC 和△ICB，可得

$$\frac{-y'}{y}=\frac{v-R}{-u+R}=\frac{\dfrac{v}{R}-1}{-\dfrac{u}{R}+1} \tag{4.22}$$

现在，式(4.5)给出

$$\frac{n_2}{n_1}-\frac{v}{u}=\frac{n_2-n_1}{n_1}\frac{v}{R}$$

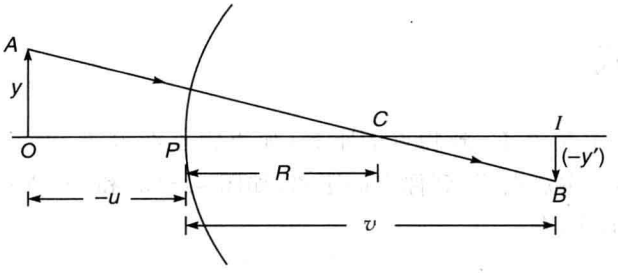


图 4.9　一个高 y 的物被球形折射面成像的情况

$$\frac{u}{v}-\frac{n_1}{n_2}=\frac{n_2-n_1}{n_2}\frac{u}{R}$$

替换式(4.22)中的 v/R 和 u/R,可得

$$m=\frac{y'}{y}=\frac{n_1 v}{n_2 u} \tag{4.23}$$

因此,如果 m_1 和 m_2 分别表示如图 4.8 所示中两个折射面分别折射的放大率,则

$$m_1=\frac{n_1}{n_2}\frac{v'}{u}①$$

$$m_2=\frac{n_2}{n_1}\frac{v}{v'}$$

式中 v' 表示第一个折射面形成的像距,则

$$m=m_1 m_2=\frac{v}{u} \tag{4.24}$$

这与式(4.21)是一致的。

例 4.3　设一个如图 4.10 所示的光学系统由两个薄透镜组成,其中凸透镜的焦距为+20cm,凹透镜的焦距为−10cm,两个透镜之间分开距离为 8cm。一个高 1cm 的物(位于离凸透镜 40cm 处),计算像的位置和大小(这个问题将在第 5 章中用矩阵法再次求解)。

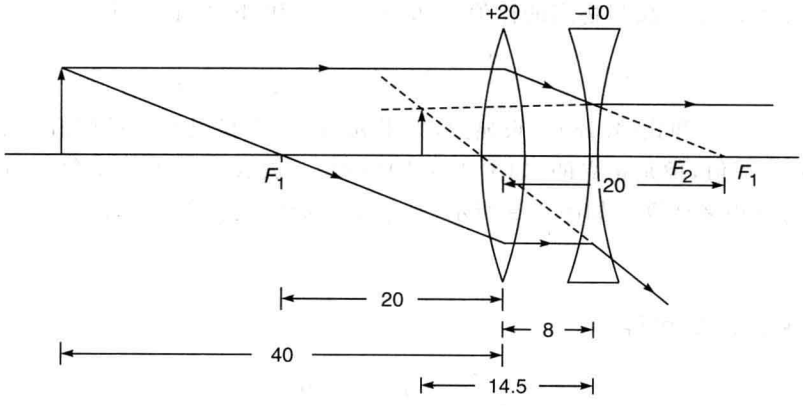


图 4.10　由相隔 8cm 的焦距为 20cm 的会聚透镜和−10cm 的发散透镜组成的光学系统成傍轴像的过程。图中所有距离的标注单位为 cm。

① 原书为 $m=\frac{n_1}{n_1}\frac{v'}{u}$

解　首先计算由第一个透镜成像的位置和大小

$$u = -40\text{cm}, \quad f = +20\text{cm}$$

根据式(4.11),可得

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{u} + \frac{1}{f} = -\frac{1}{40} + \frac{1}{20} = +\frac{1}{40}$$

所以,$v = +40\text{cm}$,$m_1 = -1$。即,像和物大小一样,但是颠倒的。这个像作为凹透镜的虚物,$u = +32\text{cm}$,$f = -10\text{cm}$。则

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{32} - \frac{1}{10} = -\frac{22}{320}$$

可得

$$v \approx -14.5\text{cm}$$

进而

$$m_2 = -\frac{320/22}{32} = -\frac{1}{2.2}$$

则

$$m = m_1 m_2 = +\frac{1}{2.2}$$

最后的成像位于凹透镜左侧 14.5cm 处,像是个正立、缩小 1/2.2 的虚像。

4.8　球面的齐明点

在 4.2 节中讨论单一折射面成像时,应用了傍轴近似,即,只考虑那些与光轴夹角很小的光线。在这种近似下,可以发现,物点成像是理想的,即,所有从给定物点发出的光线都将相交于同一点——像点。如果考虑到与光轴成大夹角的光线,会发现一般来说,(经过折射)它们并不能经过光轴上的同一点(见图 4.11),从而理想的像点也就不存在了。这种结果被称为有像差的成像。不过,对于给定的球面存在两个点,从一点发出的所有光线都相交于另一点。这一点距离球面中心为 $n_2|R|/n_1$,而所成虚像点距离中心为 $n_1|R|/n_2$(见图 4.12(a)和(b))。这个结论很容易根据费马原理(见习题 3.7)或几何方法(见图 4.16)证明。这两点称为球面的齐明点,这种现象可以用来构造齐明透镜(见图 4.13),或用于大孔径的油浸物镜。点 O 和点 I 是半径为 R_2 球面的齐明点(见图 4.13),则

$$\overline{OP_2} = |R_2| \left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right) \tag{4.25}$$

$$\overline{IP_2} = |R_2| \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) \tag{4.26}$$

将第一球面的曲率半径($=R_1$)设计成恰好使点 O 位于其曲率中心,这样,从点 O 发出的所有光线在到第一球面时都是以法向投射,因此,经过第一球面并不改变方向。为了实用,设点 O 是在折射率为 n_1(原文为 n_2)的媒质中,这样,一个理想的(虚)像将在点 I 形成。

4.8.1　油浸物镜

齐明原理在显微物镜方面有很重要的应用,显微物镜要求在不引起像差的情况下,容纳更宽的光线锥。参考如图 4.14 所示的光学系统,将一个半球面透镜 L_1 紧贴一折射率相同

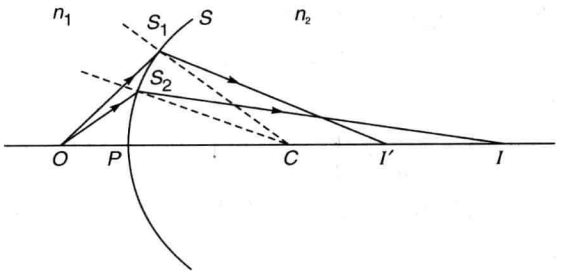


图 4.11　点 I 表示物点点 O 经过折射面 SPM 傍轴成像的像点。但是如果考虑到非傍轴光线 OS_1(与光轴夹角很大),一般来说,折射线将不经过点 I,这就引入了像差。

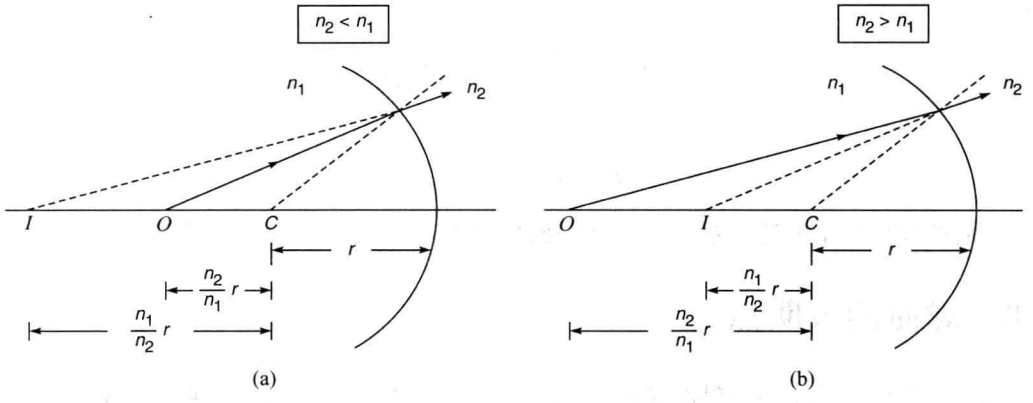


图 4.12　点 O 和点 I 表示球面的齐明点,即所有由点 O 发出的光线都看上去来自点 I。(a)和(b)分别对应 $n_2 < n_1$ 和 $n_2 > n_1$ 的情况。

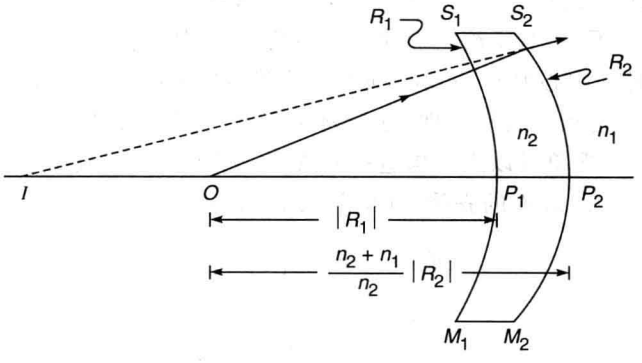


图 4.13　齐明透镜。物点点 O 是第一球面 $S_1P_1M_1$ 的曲率中心,点 O 与点 I 是球面 $S_2P_2M_2$ 的齐明点,在点 I 成一理想的(虚)像。

的油滴。将物 O 浸入油滴,并使距离 $\overline{OC} = n_3 |R_1| / n_2$,以便使点 O 是半球面的齐明点,这样,将在点 I_1 处成一理想的(虚)像。现另放置一透镜 L_2,其相对于点 I_1 来说是齐明透镜。这样,可在点 I 成一点 I_1 的理想的像。由折射面 R_1 和透镜 L_2 引起的横向放大率分别为

$$m_1 = \frac{n_2}{n_3} \frac{\overline{I_1P_1}}{\overline{OP_1}} \tag{4.27}$$

$$m_2 = \frac{n_4\,\overline{IP_3}}{n_5\,\overline{I_1P_3}} \tag{4.28}$$

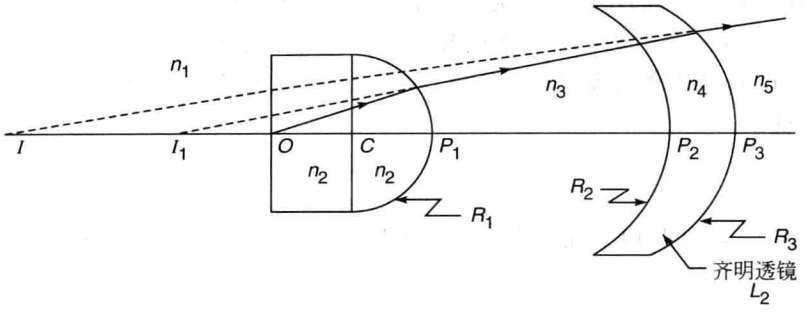


图 4.14　油浸显微物镜。点 O 和点 I_1 相对于半径为 R_1 的半球面来说是齐明点；透镜 L_2 对于(虚)物 I_1 起到齐明透镜的作用。

因此，油浸物镜在相当程度上减小了光线的角发散，从而提高了横向放大率而不引起球差。然而，也应当指出，油浸物镜只能在一点形成理想的像，临近点都会有一定的像差。此外，油浸物镜有一定的色差。

4.9　笛卡儿卵形面

通常地，两点之间能够互成理想的像的折射面不应该是球面。如图 4.15 所示的点 O 和点 I，具有使所有从点 O 发出的(并为系统接收的)光线都相交于点 I 的性质，则如图 4.15 所示的曲面 SPM 满足式(4.29)的点 S 的轨迹

$$n_1\,\overline{OS} + n_2\,\overline{SI} = \text{常数} \tag{4.29}$$

这个折射面可以由图中的曲线绕 z 轴旋转而得(见习题 3.8)。该折射面被称为笛卡儿卵形面。当物点位于无穷大时，该曲面变为一旋转椭球(见习题 3.5)。在特定条件下，该曲面为球形，但此时成像是虚像(见图 4.12(a)和(b))。

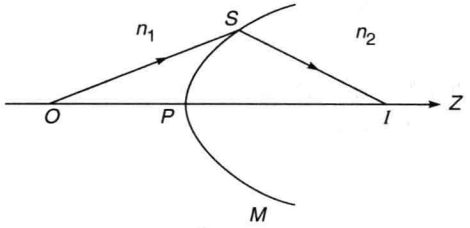


图 4.15　折射面 SPM(称为笛卡儿卵形面)使得所有从点 O 发出的光线都相交于点 I

4.10　齐明点存在的几何证明

在本节中，将根据几何方法来证明齐明点的存在。考虑一个半径为 r 的折射面 SPM 将两个折射率分别为 n_1 和 n_2 的媒质分开(见图 4.16)，假设 $n_2 < n_1$，并定义

$$\mu = \frac{n_1}{n_2} \tag{4.30}$$

式中 $\mu>1$，点 C 表示球面 SPM 的中心。如图 4.16 所示，以点 C 为中心，绘出两个球面，半径分别为 μr 和 r/μ。令 $IOCP$ 为一条包含三个球面直径的线，并与内外球分别相交于点 O 和点 I。从点 O 起引任意直线，与折射面相交于点 S。连接点 I 和点 S，并将该直线延长至 SQ。如果能证明

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{\mu} \tag{4.31}$$

则对于任意的 θ_1，发自点 O 的光线将看上去来自点 I，这样点 O 和点 I 对于折射面 SPM 为齐明点。因为

$$\frac{\overline{IC}}{\overline{CS}} = \frac{\mu r}{r} = \mu \tag{4.32}$$

$$\frac{\overline{CS}}{\overline{OC}} = \frac{r}{r/\mu} = \mu = \frac{\overline{IC}}{\overline{CS}} \tag{4.33}$$

因此，$\triangle SOC \backsim \triangle SIC$，有

$$\alpha = \theta_2, \quad \beta = \angle ISC = \theta_1 \tag{4.34}$$

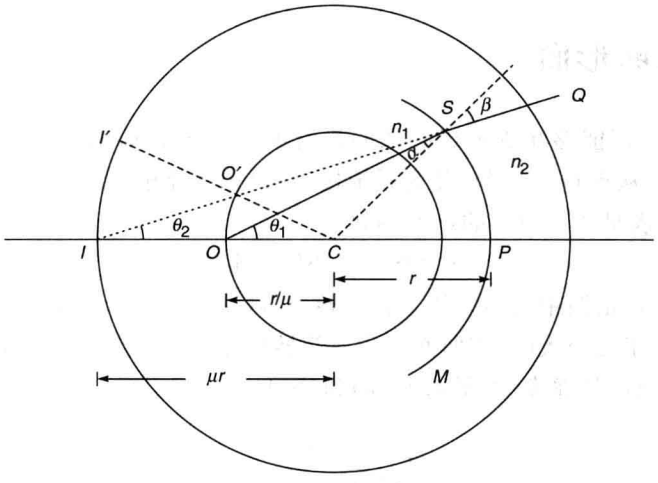


图 4.16　证明齐明点的几何构造。SPM 是半径为 r 的折射面，内外球半径分别为 r/μ 和 μr，点 O 和点 I 是齐明点。

现在考虑 $\triangle SOC$，有

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\theta_1} = \frac{r/\mu}{r} = \frac{1}{\mu} \tag{4.35}$$

根据式(4.34)，得

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{\mu} = \frac{n_2}{n_1} \tag{4.36}$$

这就证明了点 O 和点 I 是齐明点，又有

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{n_1}{n_2} \tag{4.37}$$

很明显，点 O' 和点 I' 也是齐明点，所以，即使不在光轴上的一个位于点 O 的小面物体的

像，也将是清晰的。这个系统不仅没有球差，也没有彗差。此外，其线性放大率为

$$m \approx \frac{\overline{I'I}}{\overline{O'O}} \approx \frac{\mu r}{r/\mu} = \mu^2 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \tag{4.38}$$

4.11　正弦条件

考察如图 4.17 所示的一个光学系统。假设（系统光轴上的）点 O 在点 I 成一理想的像，即，所有发自点 O 的光线将在点 I 相交。这样就意味着相对于点 O，该光学系统没有球差。再考虑稍微离开光轴一些的点 O'（就在点 O 上方），根据正弦条件，对于能够将点 O' 清晰成像于点 I'，必然遵守[①]

$$\frac{n_1 \sin\theta_1}{n_2 \sin\theta_2} = \frac{y_2}{y_1} = \text{线性放大率} \tag{4.39}$$

式中 θ_1 和 θ_2 的定义见图 4.17。如果对于折射面上的所有点，$\sin\theta_1/\sin\theta_2$ 为常数，则线性放大率也为常数，而且成像不会有彗差。值得注意的是，根据式(4.39)，要在（光轴附近）偏离光轴的点成理想的像，要满足的条件与在光轴上的点是一样的。然而，当点 O 满足式(4.39)时，其附近位于光轴上的点（如点 O_1）却不能形成清晰的像。实际上，点 O 与点 O_1 成清晰像所满足的条件是完全不同的。

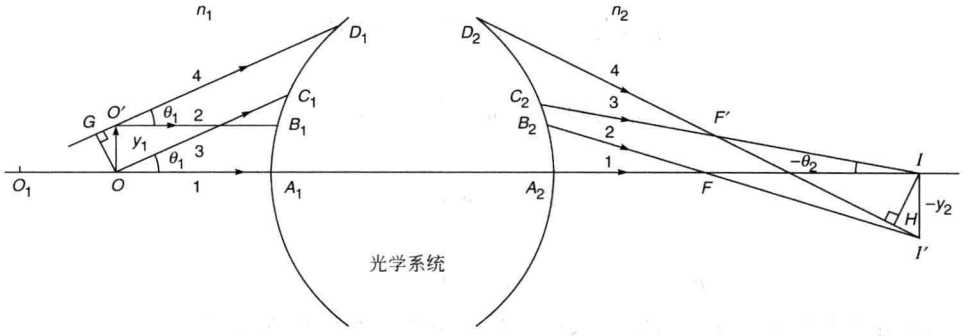


图 4.17　光学系统将点 O 和点 O' 完美成像于点 I 和点 I'

4.11.1　正弦条件的证明[②]

如图 4.17 所示，假设轴上一点点 O 将在点 I 成一理想的像，根据费马原理，确定偏离轴附近一点点 O' 成理想像的条件。光线 $O'B_1$ 平行于光线 OA_1，光线 $O'D_1$ 平行于 OC_1。既然点 I 为点 O 的像，则有

$$\mathrm{OPL}(OA_1A_2I) = \mathrm{OPL}(OC_1C_2I) \tag{4.40}$$

式中 OPL 表示光程。又有

---

① 请注意，如果根据式(4.37)和式(4.38)，可得

$$m = \frac{y_2}{y_1} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = \frac{n_1}{n_2}\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$$

与式(4.39)一致。

② 对于正弦条件的更严格的证明，见参考文献[3]。

$$\mathrm{OPL}(O'B_1B_2I') = \mathrm{OPL}(O'D_1D_2I') \tag{4.41}$$

由于光线 $O'B_1$ 和 OA_1 在无穷远处相交,则

$$\mathrm{OPL}(O'B_1B_2F) = \mathrm{OPL}(OA_1A_2F) \tag{4.42}$$

考虑$\triangle FII'$,有

$$\overline{FI'} = [\overline{FI}^2 + |\ y_2\ |^2]^{1/2} = \overline{FI}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{|\ y_2\ |^2}{\overline{FI}^2}\right)$$

所以

$$\overline{FI'} \approx \overline{FI} \tag{4.43}$$

这里假设$|y_2|$是一个小量,可以忽略正比于$|y_2|^2$的项。将式(4.42)和式(4.43)相加,得

$$\mathrm{OPL}(O'B_1B_2I') = \mathrm{OPL}(OA_1A_2I) = \mathrm{OPL}(OC_1C_2I) \tag{4.44}$$

由式(4.44)的左侧等于 $\mathrm{OPL}(O'D_1D_2I')$,得

$$\mathrm{OPL}(O'D_1D_2I') = \mathrm{OPL}(OC_1C_2I) \tag{4.45}$$

既然,光线 3 和光线 4 相交于无穷远处和点 F',有

$$\mathrm{OPL}(GD_1D_2F') = \mathrm{OPL}(OC_1C_2F') \tag{4.46}$$

式中点 G 是从点 O 向光线 4 所引垂线的垂足。用式(4.46)减去式(4.45),得

$$\mathrm{OPL}(F'I') - \mathrm{OPL}(GO') = \mathrm{OPL}(F'I) \tag{4.47}$$

或者

$$n_2(\overline{F'I'}) - n_1(\overline{GO'}) = n_2(\overline{F'I})$$

或者

$$n_1(\overline{GO'}) = n_2(\overline{F'I'} - \overline{F'I}) \tag{4.48}$$

又有

$$\overline{GO'} = y_1\sin\theta_1 \tag{4.49}$$

且

$$\overline{F'I'} - \overline{F'I} \approx \overline{HI'} \approx (-y_2)\sin(-\theta_2) \tag{4.50}$$

式中点 H 是从点 I 向光线 4 所引垂线的垂足。将上面两式代入式(4.48),得

$$\frac{n_1\sin\theta_1}{n_2\sin\theta_2} = \frac{y_2}{y_1} = \text{线性放大率} \tag{4.51}$$

对折射面上的所有点,有 $\sin\theta_1/\sin\theta_2$ 为常数,则线性放大率即为常数。在光学系统的设计中,正弦条件有着广泛的应用。

小　结

- 考虑分开两个折射率为 n_1 和 n_2 媒质的一个球形分界折射面。对于一个位于左侧距离为$|u|$的物点,将在距离为 v 的地方成一傍轴像,且满足

$$\frac{n_2}{v} - \frac{n_1}{u} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

其符号约定如下所述。

(1) 入射光线总是从折射面的左侧入射。

(2) 所有位于折射面右侧的距离为正,位于左侧的距离为负。

- 一个折射率为 n 的薄透镜(放置于空气中),令 R_1 和 R_2 为透镜左侧界面和右侧界面的曲率半径,则像距为

$$\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right),\quad \frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)^{①}$$

一般被称为薄透镜成像公式。f 称为透镜的焦距。

- 对于一个球形界面,存在两个点,满足从一点发出的所有光线将聚焦在另一点。其中一点距离球面中心为 $n_2|R|/n_1$,并在距离中心为 $n_1|R|/n_2$ 处成一虚像。这两个点称为球面的齐明点,用来构造齐明透镜。
- 如果通过一个折射面,两点之间可相互成理想的像,该折射面称为笛卡儿卵形面。

习　题

4.1　(1) 考虑一个双凸透镜(见图 4.18)由折射率为 1.5 的材料制成,第一和第二球面的曲率半径分别为(R_1 和 R_2)+100cm 和−60cm,透镜放置在空气中(即 $n_2=n_3=1$)。对于距离透镜 100cm 的像点,确定其傍轴像点的距离和线性放大率。此外,计算 x_1 和 x_2,并验证牛顿公式(式(4.20))。

[**答案**: $x_1=-25\text{cm}, x_2=+225\text{cm}$]

(2) 当物距为 50cm 时,重复上面的计算。

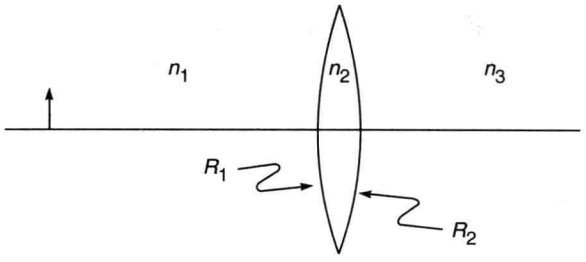


图 4.18　习题 4.1 图

4.2　考虑一个薄透镜(由折射率为 n_2 的媒质构成),其两侧为不同媒质,令 n_1 和 n_3 分别为左侧和右侧媒质的折射率。根据式(4.5),并假设在两个界面上连续折射,试推导式(4.14)。

4.3　如图 4.18 所示,假定双凸透镜具有 $|R_1|=100\text{cm}$, $|R_2|=60\text{cm}$, $n_1=1.0$, $n_3=1.6$。对于物距 $u=-50\text{cm}$,确定(傍轴)像距的位置。此外,确定第一和第二主焦点位置,验证牛顿公式,并画出光线图。

[**答案**: $x_1=250\text{cm}, x_2=576\text{cm}$]

4.4　(1) 如图 4.18 所示,假设用一双凹透镜去替换双凸透镜, $|R_1|=100\text{cm}$, $|R_2|=60\text{cm}$,假设 $n_1=n_3=1$, $n_2=1.5$。确定物距 $u=-100\text{cm}$ 的像的位置,画出光线图。

(2) 在(1)中,假定 $n_1=n_3=1.5$, $n_2=1.3$,重复上面的计算并画图。对于(1)和(2)中

① 原文中无 $\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$

的系统,数据有什么不同?

4.5 高度为1cm的物放在距离焦距为15cm的凸透镜24cm处(见图4.19),一个焦距为−20cm的凹透镜放在凸透镜另一端25cm处。画出光线图,并确定最终像的位置和大小。

[**答案**:在凹透镜60cm处成一实像]

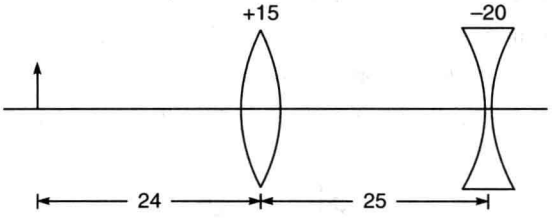


图4.19 由一个凸透镜和一个凹透镜组成的光学系统。所有距离用cm为单位。

4.6 一个厚透镜,其第一和第二折射面的曲率半径数值上分别为45cm和30cm,透镜厚度为5cm,透镜材料的折射率为1.5。高1cm的物放在距离第一折射面90cm处,确定其像的位置和大小,并绘出轴上点的光路图。

[**答案**:在距离第二折射面60cm处成一实像]

4.7 在习题4.6中,如果第二折射面上镀了银,可以当做凹面镜。高1cm的物放在距离第一折射面90cm处,确定其像的位置和大小,并画出光路图。

[**答案**:在距离第一折射面6.2cm处成一实像(注意符号约定)]

4.8 考虑一折射率为1.6、半径为20cm的球(见图4.20)。证明其傍轴焦点在距离点P_2 6.7cm处。

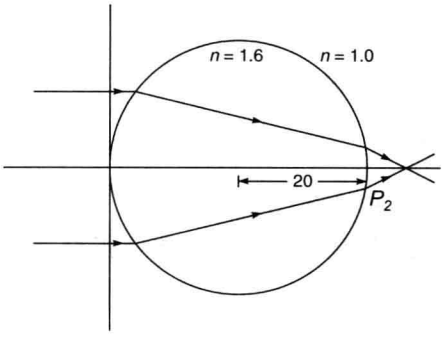


图4.20 习题4.8图

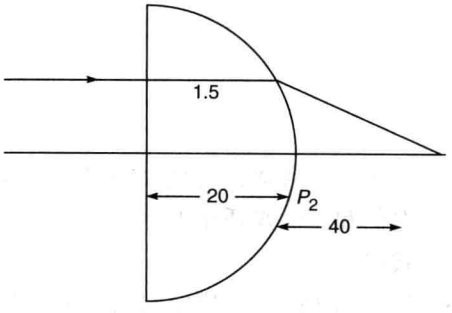


图4.21 习题4.9图

4.9 考虑一折射率为1.5、半径为20cm的半球,证明平行光线将聚焦于距离点P_2 40cm处(见图4.21)。

4.10 一个厚度为1cm的透镜,材料折射率为1.5,放置在空气中,第一和第二折射面曲率半径分别为+4cm,−4cm。确定平行光线聚焦的位置。

[**答案**:位于距离第二折射面4.55cm处]

参考文献和推荐读物

1. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics, Pergamon Press*, Oxford, 1975.
2. R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. I, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass, 1965.
3. A.K. Ghatak and K. Thyagarajan, *Contemporary Optics*, Plenum Press, New York, 1978. [Reprinted by Macmillan India, New Delhi.]
4. R.H. Penfield, 'Consequences of parameter invariance in geometrical optics', *American Journal of Physics.*, Vol. **24,** 19, 1956.

第5章 傍轴光学的矩阵方法

在处理透镜系统成像时，我们只是简单地对一连串透镜进行光线追迹处理，这实际上就是处理透镜系统成像要做的一切。

——理查德·费曼，《费曼物理学讲义》，第一卷

5.1 引言

一条光线 PQ 投射到一个折射率分别为 n_1 和 n_2 的折射面 SQS' 上（见图 5.1），NQN' 为面法线，则折射线由以下条件可完全确定：

（1）入射线、折射线和法线位于同一平面内；

（2）如果 θ_1 和 θ_2 分别表示入射角和反射角，则

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{n_2}{n_1} \tag{5.1}$$

一般来说，光学系统是由大量的这些折射面组成（比如透镜组合），从而任何光线都可以按照上面的条件进行追迹。为了得到此系统最后成像的位置，人不得不一步一步地对折射面计算成像，以便作为下一个折射面的物。当这个成像系统元件的个数越来越多，这样一步一步的计算将变得非常复杂。因此在本章中，我们将为这类系统建立一种矩阵方法，这种矩阵方法在利用计算机进行这种复杂光学系统的光线追迹运算中特别有用。

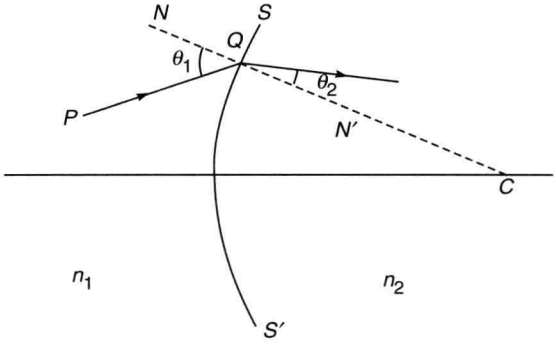


图 5.1　光线在分开折射率为 n_1 和 n_2 的媒质的球面 SQS' 上的折射。NQN' 为在点 Q 的法线。如果折射面是球面，则法线 NQN' 将经过曲率中心点 C。

在描述几何光学的矩阵方法之前，有必要提一下矩阵的乘法规则和利用矩阵解方程的应用方法。一个 $m\times n$ 矩阵是 m 行 n 列，有 $m\times n$ 个元素，则矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{bmatrix} \tag{5.2}$$

为 2 行 3 列，2×3＝6 个元素。一个 $m\times n$ 矩阵乘以一个 $n\times p$ 矩阵，得到一个 $m\times p$ 矩阵。令

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}g\\ h\\ i\end{bmatrix} \tag{5.3}$$

为 3×1 矩阵，则矩阵乘积

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g\\ h\\ i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ag+bh+ci\\ dg+eh+fi\end{bmatrix} \tag{5.4}$$

为一个 2×1 矩阵，且 $\boldsymbol{BA}$ 没有意义。

再定义一个矩阵

$$\boldsymbol{A}'=\begin{bmatrix}a' & b' & c'\\ d' & e' & f'\end{bmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}$$

当且仅当 $a'=a,b'=b,c'=c,d'=d,e'=e$ 和 $f'=f$ 时才成立，即，所有的对应元素都必须相等。二元方程组

$$\begin{cases}x_1=ay_1+by_2\\ x_2=cy_1+dy_2\end{cases} \tag{5.5}$$

可以写成下面形式

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ay_1+by_2\\ cy_1+dy_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} \tag{5.6}$$

其中最后一步用到了矩阵乘法规则。

又有

$$\begin{cases}y_1=ez_1+fz_2\\ y_2=gz_1+hz_2\end{cases} \tag{5.7}$$

则

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix} \tag{5.8}$$

则

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix} \tag{5.9}$$

即

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BZ} \tag{5.10}$$

式中 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Z}$ 为 2×1 矩阵

$$\boldsymbol{X}\overset{\text{def}}{=\!=}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{Z}\overset{\text{def}}{=\!=}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix} \tag{5.11}$$

$\boldsymbol{B}$ 为一 2×2 矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(ae+bg) & (af+bh)\\ (ce+dg) & (cf+dh)\end{bmatrix} \tag{5.12}$$

由式(5.9)和式(5.10)可得

$$\begin{cases}x_1=(ae+bg)z_1+(af+bh)z_2\\ x_2=(ce+dg)z_1+(df+dh)z_2\end{cases} \tag{5.13}$$

这个结果也可以通过直接代换得到。现在,根据矩阵方法,在轴对称光学系统中进行傍轴光线追迹。

5.2 矩阵方法

如图 5.2 所示的轴对称光学系统,对称轴为 z 轴。本章中只考虑傍轴光线,非傍轴光线会引入像差,将在第 6 章中讨论。

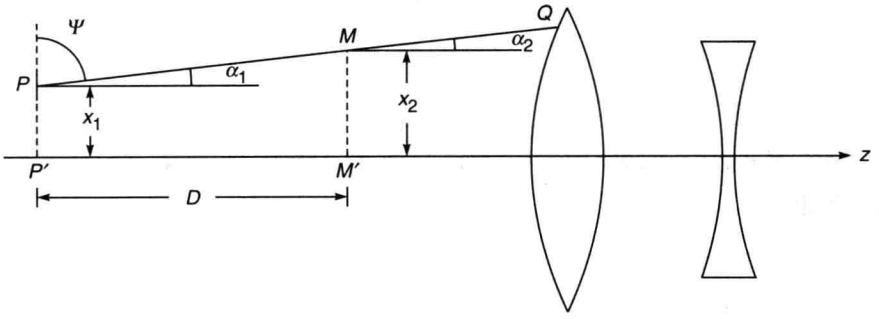


图 5.2 在一个均匀媒质中,光线直线传播。

在傍轴近似中,限定只讨论通过光轴的那些光线。这样的光线限定在一个平面内,可以用离轴的距离以及与轴所成的角度来表征。如图 5.2 所示,光线上的点 P 位于离轴 x_1 距离处,与轴夹角为 α_1,这一对量(x_1,α_1)可以表示这条光线的坐标。然而,在此不用光线与光轴的夹角为表征量,而用如下的量来表征光线

$$\lambda=n\cos\psi(=n\sin\alpha)$$

这个量实际是折射率与光线与光轴之间角度的正弦(即光线与垂直方向角度的余弦)的乘积,被称作光方向余弦。

当光线经过光学系统传播时,实际上它经历了两种操作:①平移和②折射。当光线在一均匀媒质的 PQ 区域中(见图 5.2)传输时,光线经历平移。然而,当光线遇到两媒质的分界面时,光线经历折射。下面将研究平移效应和折射效应对光线坐标的作用。

1. 平移效应

考虑一条在折射率为 n_1 的媒质中传播的光线,起始位置在离 z 轴距离 x_1 处,与 z 轴夹角为 α_1(见图 5.2 中的点 P)。令(x_2,α_2)为光线到达点 M 的坐标(见图 5.2)。既然媒质是均匀的,光线沿直线传播,从而有

$$\alpha_2=\alpha_1 \tag{5.14}$$

进而,如果 PP' 与 MM' 是垂直于光轴的线段,且$\overline{P'M'}=D$,则

$$x_2 = x_1 + D\tan\alpha_1 \tag{5.15}$$

因为只关注傍轴光线，角度 α_1 很小，因此，可以近似 $\tan\alpha_1 \approx \alpha_1$，式中 α_1 以 rad 为单位。这样，式(5.15)可简化为

$$x_2 \approx x_1 + \alpha_1 D \tag{5.16}$$

如果

$$\lambda_1 = n_1\alpha_1 \tag{5.17}$$

$$\lambda_2 = n_2\alpha_2 \tag{5.18}$$

由式(5.15)和式(5.17)，可得

$$\begin{cases} \lambda_2 = \lambda_1 \\ x_2 = x_1 + \dfrac{D}{n_1}\lambda_1 \end{cases} \tag{5.19}$$

把式(5.19)变成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ D/n_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

这样，如果一条光线最初用一个参数为 λ_1 和 x_1 的 2×1 矩阵来表征，那么，在一折射率为 n_1 的均匀媒质中，对一条光线平移距离 D 的平移效应完全可以用如式(5.21)的 2×2 矩阵描述

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ D/n_1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

最终光线坐标由式(5.20)给出。矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为传输矩阵，且具有如下性质

$$\det \boldsymbol{T} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ D/n_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \tag{5.22}$$

2. 折射效应

下面将确定代表通过一个曲率半径为 R 的球面折射的矩阵。考虑光线 AP 与(分开折射率分别为 n_1 和 n_2 的)球面相交于点 P，然后沿 PB 折射(见图 5.3)。假设 θ_1 和 θ_2 分别为入射光线和折射光线与球面上点 P 的法线的夹角(即入射光线和折射光线与连接点 P 与球面曲率中心点 C 的夹角)，则根据斯涅耳定律

$$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2 \tag{5.23}$$

既然只讨论傍轴光线，那么，可以近似为 $\sin\theta\approx\theta$，则式(5.23)可以简化为

$$n_1\theta_1 \approx n_2\theta_2 \tag{5.24}$$

又如图 5.3 所示，可得

$$\theta_1 = \phi_1 + \alpha_1, \quad \theta_2 = \phi_1 + \alpha_2 \tag{5.25}$$

式中 α_1，α_2 和 ϕ_1 分别为入射光线、折射光线和球面法线与 z 轴的夹角。此外，既然 ϕ_1 非常小，可以写为

$$\phi_1 = \frac{x}{R} \tag{5.26}$$

由式(5.24)和式(5.25)，可得

$$n_1(\phi_1 + \alpha_1) \approx n_2(\phi_1 + \alpha_2)$$

或者

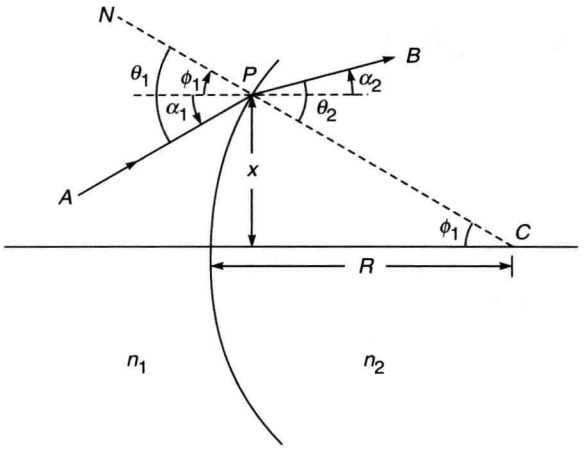


图 5.3　光线在球面的折射

$$n_2\alpha_2 \approx n_1\alpha_1 - \frac{n_2 - n_1}{R}x \tag{5.27}$$

其推导中用到了式(5.26),则

$$\lambda_2 = \lambda_1 - Px \tag{5.28}$$

式中

$$P = \frac{n_2 - n_1}{R} \tag{5.29}$$

被称为折射面的光焦度。此外,既然在点 P 处入射光线与折射光线的高度相同(即 $x_2 = x_1$),则对于折射光线

$$\begin{bmatrix}\lambda_2\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -P\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ x_1\end{bmatrix} \tag{5.30}$$

所以,球面对于光线的折射效应可用如式(5.31)的 2×2 矩阵描述

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix}1 & -P\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{5.31}$$

注意,这里也有

$$\det \boldsymbol{R} = \begin{vmatrix}1 & -P\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 1 \tag{5.32}$$

一般地,一个由一系列透镜组成的光学系统,可以由一系列折射矩阵和平移矩阵描述。

入射光线用$\begin{bmatrix}\lambda_1\\ x_1\end{bmatrix}$表征,经过光学系统后,出射光线用$\begin{bmatrix}\lambda_2\\ x_2\end{bmatrix}$表征,则它们之间的变换关系可以写为

$$\begin{bmatrix}\lambda_2\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b & -a\\ -d & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ x_1\end{bmatrix} \tag{5.33}$$

式中矩阵

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix}b & -a\\ -d & c\end{bmatrix} \tag{5.34}$$

被称为系统矩阵，可以唯一地由光学系统决定。矩阵 $\boldsymbol{S}$ 中一些元素的负号是为了方便引入的。既然一条光线经一光学系统传播只有折射与平移的操作，因此，系统矩阵一般是折射矩阵与平移矩阵的乘积。又矩阵乘积的行列式是矩阵行列式的乘积，有

$$\det \boldsymbol{S} = 1 \tag{5.35}$$

即

$$bc - ad = 1 \tag{5.36}$$

要在此提醒一下，b 和 c 没有量纲，a 和 P 的量纲是长度的倒数，而 d 的量纲是长度。通常单位是不给出的，但矩阵已经隐含了 a 和 P 用 cm^{-1} 度量，d 用 cm 度量。

5.2.1　一个折射球面的成像

作为矩阵方法的最简单应用，考虑一个分开两个折射率分别为 n_1 和 n_2 的媒质的球面的折射成像（见图 5.4）。同样的问题已经在前边用标准的几何光学方法讨论过了。令 (λ_1, x_1)，(λ', x')，(λ'', x'') 和 (λ_2, x_2) 分别为光线在点 O，A'（刚好折射前），A''（刚好折射后）和点 I 的坐标。

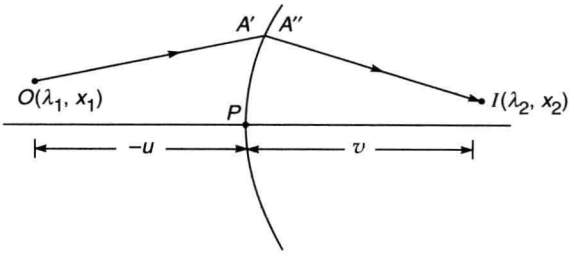


图 5.4　经过一个分开两个折射率分别为 n_1 和 n_2 的媒质的球面的折射成像

应用下面的符号约定：在点 P 左边的坐标为负，点 P 右边的坐标为正（见 4.2.1 节），则

$$\begin{bmatrix} \lambda' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u/n_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda'' \\ x'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda' \\ x' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v/n_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda'' \\ x'' \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v/n_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -u/n_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

通过简单的乘法，可得

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{Pu}{n_1} & -P \\ \dfrac{v}{n_2}\left(1 + \dfrac{Pu}{n_1}\right) - \dfrac{u}{n_1} & 1 - \dfrac{vP}{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \tag{5.37}$$

从中可得

$$x_2 = \left[\frac{v}{n_2}\left(1+\frac{Pu}{n_1}\right)-\frac{u}{n_1}\right]\lambda_1 + \left[1-\frac{vP}{n_2}\right]x_1 \tag{5.38}$$

对于从光轴上物点发出的光线(即 $x_1=0$),其像平面由 $x_2=0$ 决定。因此在这种情况下,上式中 λ_1 的系数要求为零,有

$$\frac{u}{n_1} = \frac{v}{n_2}\left(1+\frac{Pu}{n_1}\right)$$

或者

$$\frac{n_2}{v}-\frac{n_1}{u} = P = \frac{n_2-n_1}{R} \tag{5.39}$$

这与上一章推导的公式一样,因此,在像平面

$$\begin{bmatrix}\lambda_2\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+\dfrac{Pu}{n_1} & -P\\ 0 & 1-\dfrac{vP}{n_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ x_1\end{bmatrix} \tag{5.40}$$

给出

$$x_2 = \left(1-\frac{vP}{n_2}\right)x_1$$

因此,横向放大率为

$$m = \frac{x_2}{x_1} = 1-\frac{vP}{n_2}$$

根据式(5.39),可得

$$m = \frac{n_1 v}{n_2 u}$$

这与式(4.23)一致。

5.2.2 共轴光学系统的成像

对于一个光学系统,物平面位于第一个折射面距离为 $-D_1$ 处,下面将推导出像平面的位置(见图5.5)。令最后成像在最后一个折射面距离为 D_2 处。根据对符号的约定:折射面左边的点,距离是负的;折射面右边的点,距离是正的。这样,D_1 自然就是负的量。此外,如果 D_2 是正的,则成像是实像,且成像位于最后折射面的右侧;反之,如果 D_2 是负的,则成像是虚像,且成像位于最后折射面的左侧。

令 $O'P$ 为一条源于物平面上的点 O' 的光线,QI' 为从最后折射面出射的光线。点 I' 假定位于像平面,如图5.5所示(点 I 为点 O 的傍轴像,像平面定义为包含点 I 并垂直于光轴的平面)。令 (λ_1,x_1),(λ',x'),(λ'',x'') 和 (λ_2,x_2) 分别为光线在点 O',P,Q 和 I' 的坐标,则

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\lambda'\\ x'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -D_1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ x_1\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\lambda''\\ x''\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b & -a\\ -d & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda'\\ x'\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\lambda_2\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ D_2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda''\\ x''\end{bmatrix}\end{cases}$$

所以

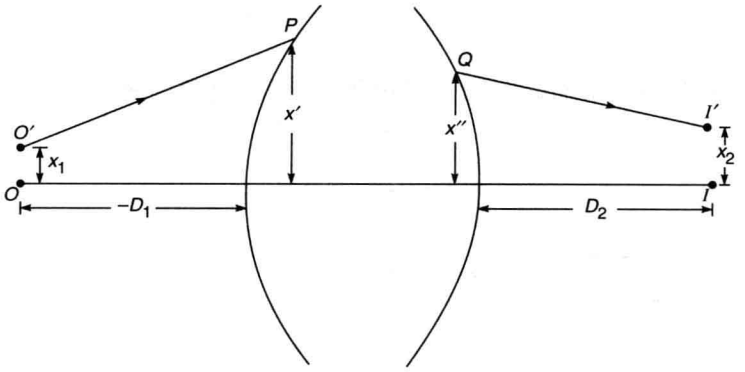


图 5.5　一个物点 O 距离第一个折射面为 $-D_1$，最后的傍轴像假定位于最后一个折射面距离为 D_2 处

$$\begin{bmatrix}\lambda_2\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ D_2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b & -a\\ -d & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -D_1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ x_1\end{bmatrix} \tag{5.41}$$

式中等式右边第一个和第三个矩阵分别对应于距离为 D_2 和 $(-D_1)$ 的平移(在折射率为 1 的媒质内)，第二个矩阵对应于光学系统的系统矩阵。经过矩阵乘法，可得

$$\begin{bmatrix}\lambda_2\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b+aD_1 & -a\\ bD_2+aD_1D_2-cD_1-d & c-aD_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ x_1\end{bmatrix} \tag{5.42}$$

所以

$$x_2=(bD_2+aD_1D_2-cD_1-d)\lambda_1+(c-aD_2)x_1$$

对于从光轴上物点发出的光线(即 $x_1=0$)，其像平面由 $x_2=0$ 决定。这样，对于像平面，必然有

$$bD_2+aD_1D_2-cD_1-d=0 \tag{5.43}$$

式(5.43)给出了距离 D_1 和 D_2 的关系。那么，对于像平面，可得

$$\begin{bmatrix}\lambda_2\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b+aD_1 & -a\\ 0 & c-aD_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ x_1\end{bmatrix} \tag{5.44}$$

当 $x_2\neq 0$ 时，可得

$$x_2=(c-aD_2)x_1$$

系统的放大率 $M\left(=\dfrac{x_2}{x_1}\right)$ 为

$$M=\frac{x_2}{x_1}=c-aD_2 \tag{5.45}$$

此外，又由

$$\begin{vmatrix}b+aD_1 & -a\\ 0 & c-aD_2\end{vmatrix}=1$$

可得

$$b+aD_1=\frac{1}{c-aD_2}=\frac{1}{M} \tag{5.46}$$

对于一个通常的光学系统，如果 x_1 和 x_2 对应于物平面和像平面，则有

$$\begin{bmatrix}\lambda_2\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/M & -a\\ 0 & M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ x_1\end{bmatrix} \tag{5.47}$$

例 5.1 求厚透镜的系统矩阵,并推导出薄透镜和厚透镜的成像公式。

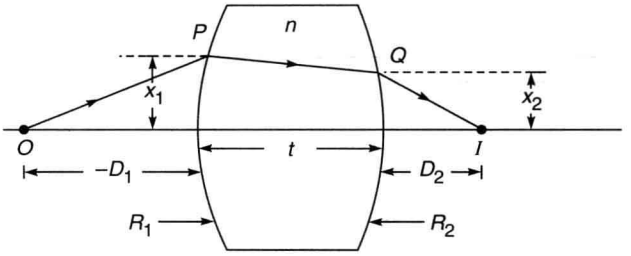


图 5.6 傍轴光线通过一厚度为 t 的厚透镜的情况

解 考虑一个厚度为 t,媒质折射率为 n 的厚透镜(如图 5.6 所示),令 R_1 和 R_2 为两界面的曲率半径。假设光线射到第一界面上点 P,从第二界面上点 Q 射出,令光线在点 P 和点 Q 的坐标分别为

$$\begin{bmatrix}\lambda_1\\ x_1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\lambda_2\\ x_2\end{bmatrix} \tag{5.48}$$

式中 λ_1 和 λ_2 为光线在点 P 和点 Q 的光学方向余弦,x_1 和 x_2 为点 P 和点 Q 离轴的距离(见图 5.6)。从点 P 到点 Q,光线经历了两次折射(一次是在第一界面(曲率半径为 R_1),另一次是在第二界面(曲率半径为 R_2))和一次在折射率为 n 的媒质里距离为 t 的平移[①],所以有

$$\begin{bmatrix}\lambda_2\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -P_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ t/n & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -P_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ x_1\end{bmatrix} \tag{5.49}$$

式中

$$P_1=\frac{n-1}{R_1},\quad P_2=\frac{1-n}{R_2}=-\frac{n-1}{R_2} \tag{5.50}$$

表示两个折射面的光焦度。因此,系统矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}&=\begin{bmatrix}b & -a\\ -d & c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -P_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ t/n & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -P_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}1-\dfrac{P_2t}{n} & -P_1-P_2\left(1-\dfrac{t}{n}P_1\right)\\ \dfrac{t}{n} & 1-\dfrac{t}{n}P_1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{5.51}$$

对于薄透镜,$t\to 0$,则系统矩阵为

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}1 & -P_1-P_2\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{5.52}$$

因此,对于薄透镜

$$a=P_1+P_2,\quad b=1,\quad c=1,\quad d=0 \tag{5.53}$$

将上面的 a,b,c 和 d 代入式(5.43),可得

① 注意,既然讨论的是傍轴光线,则点 P 和点 Q 的距离就可以近似为 t。

$$D_2 + (P_1 + P_2)D_1D_2 - D_1 = 0$$

或者

$$\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1} = (P_1 + P_2) = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{5.54}$$

或者

$$\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_1} = \frac{1}{f} \tag{5.55}$$

式中

$$f = \frac{1}{P_1 + P_2} = \left[(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right]^{-1} \tag{5.56}$$

为透镜的焦距。式(5.55)就是著名的薄透镜公式(不同种类的薄透镜 R_1 和 R_2 的符号见图 5.7)。所以,薄透镜的系统矩阵为

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{f} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.57}$$

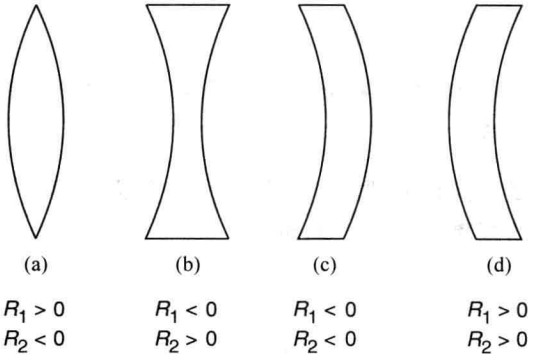


图 5.7　不同种类的薄透镜 R_1 和 R_2 的符号

对于厚透镜,根据式(5.51),有

$$a = P_1 + P_2\left(1 - \frac{t}{n}P_1\right), \quad b = 1 - \frac{P_2 t}{n}, \quad c = 1 - \frac{t}{n}P_1, \quad d = -\frac{t}{n} \tag{5.58}$$

将 a,b,c 和 d 代入式(5.43),可得所要求的 D_1 和 D_2 之间的关系。然而,对于厚透镜,直接定义主平面(单位面)和节平面更为方便,这将在下一节讨论。

5.3　主平面(单位面)

主平面也叫单位面,它们是这样的两个平面:分别位于物空间和像空间,它们之间的放大率为 1,即,从物空间的主平面发出的任何傍轴光线,将出现在像空间主平面的同一高度。如果 d_{u1} 和 d_{u2} 代表两个主平面到两个折射面的距离(见图 5.8)[①],根据式(5.46),可得

$$b + ad_{u1} = \frac{1}{c - ad_{u2}} = 1 \tag{5.59}$$

① 显然,如果以 U_1 作为物平面,则 U_2 即为相应的像平面。

或者

$$d_{u1} = \frac{1-b}{a} \tag{5.60}$$

$$d_{u2} = \frac{c-1}{a} \tag{5.61}$$

这样,主平面完全可以由系统矩阵元素决定。

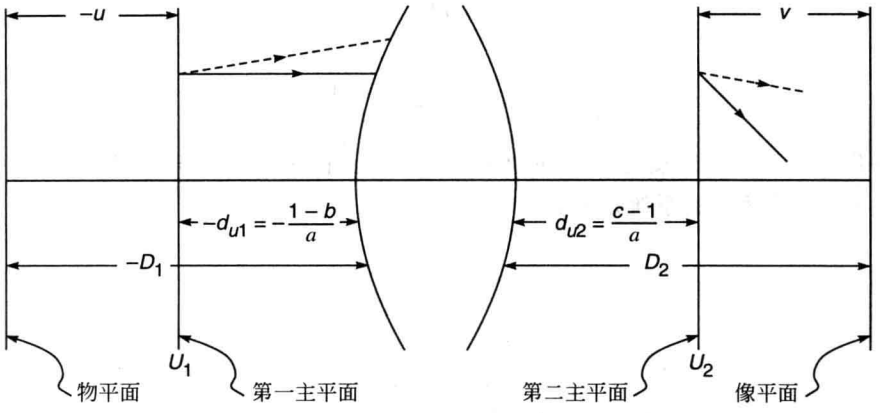


图 5.8 U_1 和 U_2 是两个单位面,在第一单位面任意高度发出的光线将相交于第二单位面的同样高度

以主平面为基准度量距离是方便的。如果 u 是物平面到第一主平面的距离,v 是相应的像平面到第二主平面的距离(见图 5.8),可得

$$D_1 = u + d_{u1} = u + \frac{1-b}{a} \tag{5.62}$$

$$D_2 = v + d_{u2} = v + \frac{c-1}{a} \tag{5.63}$$

由式(5.43),得

$$D_2 = \frac{d + cD_1}{b + aD_1} \tag{5.64}$$

将式(5.62)和式(5.63)的 D_1 和 D_2 代入式(5.64),得

$$v + \frac{c-1}{a} = \frac{d + cu + \dfrac{c(1-b)}{a}}{b + au + (1-b)}$$

或者

$$v = \frac{ad - bc + c(au+1) - (c-1)(1+au)}{a(1+au)} = \frac{au}{a(1+au)} \tag{5.65}$$

其中用到了条件

$$\det \boldsymbol{S} = bc - ad = 1 \tag{5.66}$$

经过简化,可得

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = a \tag{5.67}$$

因此,如果以主平面为基准测量距离,则 $1/a$ 代表焦距。例如对于一个厚透镜,(根据

式(5.58)、式(5.60)和式(5.61))有

$$d_{u1}=\frac{P_2 t}{n}\frac{1}{P_1+P_2\left(1-\frac{t}{n}P_1\right)} \tag{5.68}$$

$$d_{u2}=-\frac{t}{n}\frac{P_1}{P_1+P_2\left(1-\frac{t}{n}P_1\right)} \tag{5.69}$$

对于一个双凸透镜，$|R_1|=|R_2|$，则

$$P_1=P_2=\frac{n-1}{R} \tag{5.70}$$

式中 $R=|R_1|=|R_2|$。因此

$$d_{u1}=\frac{t}{n}\frac{1}{2-\frac{t}{n}\frac{n-1}{R}}\approx\frac{t}{2n} \tag{5.71}$$

$$d_{u2}=-\frac{t}{n}\frac{1}{2-\frac{t}{n}\frac{n-1}{R}}\approx-\frac{t}{2n} \tag{5.72}$$

式中，假设 $t\ll R$，对于大多数厚透镜来说，这个条件确实成立。对于厚透镜，主平面的位置如图 5.9 所示。为了计算焦距，由式(5.67)有

$$\frac{1}{f}=a=P_1+P_2\left(1-\frac{t}{n}P_1\right) \tag{5.73}$$

其中，用到了式(5.58)，则

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{(n-1)^2 t}{nR_1R_2} \tag{5.74}$$

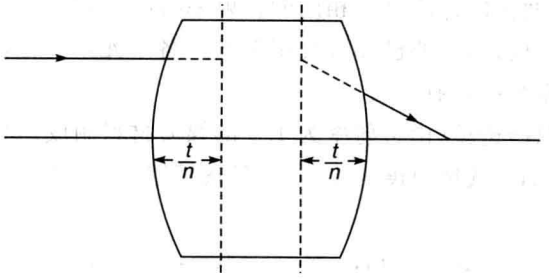


图 5.9　双凸透镜的单位面

5.4　节平面

节点是光轴上相对角放大率为 1 的两点，即，入射光线以角 α 入射到第一节点，则出射光线将在第二节点以同样的角度射出(见图 5.10)。通过节点并垂直于光轴的平面叫做节平面。

为了确定节点的位置，考虑分别距离两折射面为 d_{n1} 和 d_{n2} 的两点，点 N_1 和点 N_2(见图 5.10)。根据节点的定义，要求光线以角度 α_1 在点 N_1 入射，经过光学系统后，以同样角

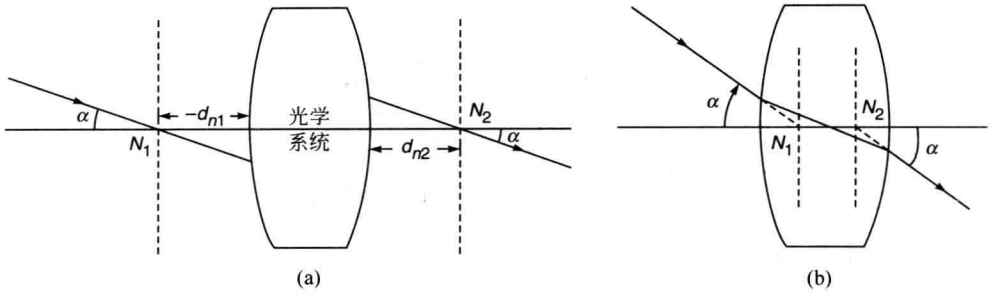


图 5.10　点 N_1 和点 N_2 表示一光学系统的两个节点。节点也可以在光学系统内部(b)。

度 α_1[①] 在点 N_2 出射。假设光学系统的两侧媒质一样，则 $\lambda_1=\lambda_2$。此外，考虑光轴上的物点，$x_1=0$，根据式(5.44)，可得

$$\lambda_2 = (b+ad_{n1})\lambda_1 = \lambda_1 \tag{5.75}$$

则

$$b+ad_{n1}=1 \tag{5.76}$$

或者

$$d_{n1}=\frac{1-b}{a} \tag{5.77}$$

与式(5.60)比较，可得 $d_{n1}=d_{u1}$，这是因为光学系统两侧媒质的折射率相等引起的。同理，有

$$d_{n2}=\frac{c-1}{a} \tag{5.78}$$

所以，当光学系统两侧的媒质具有相同的折射率时(大多数光学系统都是如此)，节平面与主平面是重合的。一般地，只要已知系统矩阵 S 的各个元素(a,b,c 和 d，也叫做系统的高斯常数)，就可以得知系统的所有性质。

例 5.2　一对称双凸透镜(由折射率为 1.5 的媒质材料制成)如图 5.9 所示。两个界面的曲率半径数值均为 4cm，透镜厚度为 1cm，并且透镜置于空气中。求系统矩阵，确定焦距，并求主平面的位置。

解　　$R_1=4\text{cm}$，　$R_2=-4\text{cm}$，　$t=1\text{cm}$

两个界面有相同的光焦度

$$P_1=P_2=\frac{n-1}{R_1}=\frac{0.5}{4}=0.125(\text{cm}^{-1})$$

根据式(5.51)，可以得到系统矩阵

$$\begin{bmatrix} 1-\dfrac{0.125\times 1}{1.5} & -0.125-0.125\left(1-\dfrac{1}{1.5}\times 0.125\right) \\ \dfrac{1}{1.5} & 1-\dfrac{0.125}{1.5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9167 & -0.240 \\ 0.6667 & 0.9167 \end{bmatrix}$$

则

① 原文为 α

$$a = \frac{1}{f} = 0.24 \Rightarrow f \approx 4.2\text{cm}$$

$$b = 0.9167 = c, \quad d = -0.6667$$

根据式(5.60)和式(5.61),可以得到主平面的位置

$$d_{u1} = \frac{1-b}{a} \approx 0.35\text{cm}$$

$$d_{u2} = \frac{c-1}{a} \approx -0.35\text{cm}$$

主平面的位置如图 5.9 所示。因为透镜置于空气中,节平面与主平面重合。

例 5.3　考虑一个折射率为 1.6,半径为 20cm 的球(见图 5.11)。求傍轴焦点和主平面的位置。

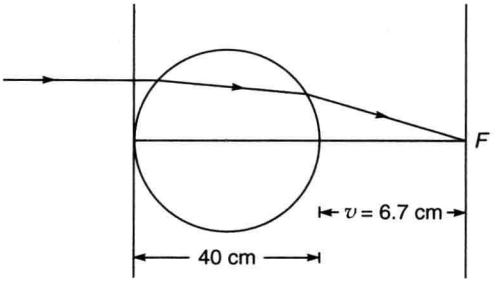


图 5.11　折射率为 1.6,半径为 20cm 的球成像。

解　从第一折射面到像平面的矩阵为

第二界面成像　在第二界面的折射　在玻璃中的传播　在第一界面的折射

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & (1-1.6)/20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 40/1.6 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -(1.6-1)/20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.25 & -0.0375 \\ 25 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.25 & -0.0375 \\ 25+0.25v & 0.25-0.0375v \end{bmatrix}$$

因此,在像平面,光线的坐标为

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.0375 \\ 25+0.25v & 0.25-0.0375v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

可得

$$x_2 = (25+0.25v)\lambda_1 + (0.25-0.0375v)x_1$$

为了确定焦平面距离 v,考虑一平行入射的光线,$\lambda_1 = 0$,在焦平面 $x_2 = 0$,得到

$$0.0375v = 0.25 \quad \text{或} \quad v = 6.7\text{cm}$$

系统矩阵的各元素为

$$a = \frac{1}{f} = 0.0375\text{cm}^{-1} \Rightarrow f \approx 26.7\text{cm}$$

$$b = 0.25, \quad c = 0.25, \quad d = -25\text{cm}$$

主平面位置

$$d_{u1}=\frac{1-b}{a}=20\text{cm}$$

$$d_{u2}=\frac{c-1}{a}=-20\text{cm}$$

因此,两个主平面均穿过球中心。

5.5 两薄透镜构成的系统

在本节中将根据矩阵方法分析两个焦距分别为 f_1 和 f_2,分开间隔为 t 的薄透镜组合系统。为了求得这两个薄透镜组合的系统矩阵,先考察两个薄透镜各自的矩阵(见式(5.57))

$$\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{f_1}\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{f_2}\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{5.79}$$

以及(在空气中)平移距离 t 的矩阵

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{bmatrix} \tag{5.80}$$

因此,系统矩阵 $\boldsymbol{S}$ 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}&=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{f_2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{f_1}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}1-\frac{t}{f_2} & -\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{t}{f_1f_2}\right)\\ t & 1-\frac{t}{f_1}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{5.81}$$

因此

$$a=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{t}{f_1f_2},\quad b=1-\frac{t}{f_2},\quad c=1-\frac{t}{f_1},\quad d=-t \tag{5.82}$$

注意到,系统矩阵中的元素 a 表示系统焦距的倒数,则这种透镜组合的焦距为

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{t}{f_1f_2}=a \tag{5.83}$$

主平面的位置(见式(5.60)和式(5.61))

$$d_{u1}=\frac{1-b}{a}=\frac{tf}{f_2}$$

$$d_{u2}=\frac{c-1}{a}=-\frac{tf}{f_1} \tag{5.84}$$

可见如果将4个薄透镜组合为一系统,只需简单地做7个矩阵的乘法(其中4个如式(5.79)的形式,3个如式(5.80)的形式)。

例 5.4 由一个凸透镜(焦距为+15cm)和一个凹透镜(焦距为−20cm)组成透镜组合,两透镜间距为25cm(见图5.12和习题4.5)。求其系统矩阵和主平面的位置。对于一个(高度1cm)距离凸透镜27.5cm的物,确定其像的大小与位置。

解　　$f_1=+15\text{cm}$，　$f_2=-20\text{cm}$，　$t=25\text{cm}$

根据式(5.82)，可得

$$a=\frac{1}{10}=\frac{1}{f}，\quad b=\frac{45}{20}，\quad c=-\frac{2}{3}，\quad d=-25$$

则

$$d_{u1}=\frac{1-b}{a}=-12.5\text{cm}，\quad d_{u2}=\frac{c-1}{a}=-\frac{50}{3}\text{cm}$$

因此，物距离第一主平面的距离为

$$u=-27.5-(-12.5)=-15(\text{cm})$$

又 $f=+10\text{cm}$，(根据式(5.67))得

$$v=30\text{cm}$$

v 为像平面距离第二主平面的距离，因此，像距离凹透镜的距离为 $30-(50/3)=40/3(\text{cm})$。放大率为

$$M=\frac{v}{u}=-2$$

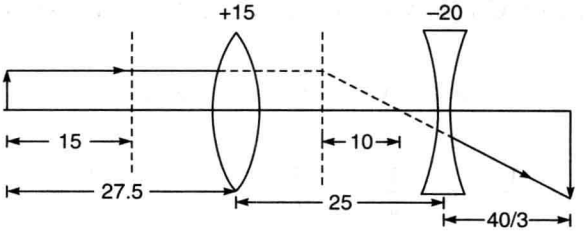


图 5.12　例 5.4 图

例 5.5　如图 4.10 所示的两个薄透镜组合，对于一高 1cm、距离凸透镜 40cm 的物，计算其像的位置和大小。

解　令 v 为距离凹透镜的像平面的位置，则其系统矩阵为

凹透镜到像　　凹透镜　　凸透镜到凹透镜　　凸透镜　　物到凸透镜

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ v & 1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1 & +1/10\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1 & -1/20\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1 & 0\\ 40 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ v & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2.2 & 0.01\\ 32 & 0.6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2.2 & 0.01\\ 2.2v+32 & 0.6+0.01v\end{bmatrix}$$

像平面对应于

$$32+2.2v=0$$

或

$$v\approx-14.5\text{cm}$$

即，像平面位于凹透镜左侧 14.5cm 处。将此结果与式(5.45)比较，得

$$M=0.6+0.01v=0.6-0.01\times\frac{32}{2.2}=+\frac{1}{2.2}$$

例 5.6 接例 5.5,求系统矩阵,然后确定主平面的位置。最后根据式(5.67)来确定像的位置。

解 系统矩阵为

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}1 & +1/10\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1/20\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9/5 & 1/100\\ 8 & 3/5\end{bmatrix}$$

则

$$a=-\frac{1}{100}\quad\Rightarrow\quad f\approx-100\text{cm}$$

$$b=\frac{9}{5},\quad c=\frac{3}{5},\quad d=-8$$

根据式(5.60)和式(5.61),可得

$$d_{u1}=\frac{1-b}{a}=80\text{cm}$$

$$d_{u2}=\frac{c-1}{a}=40\text{cm}$$

因此,第一主平面位于凸透镜右侧 80cm 处,第二主平面位于凹透镜右侧 40cm 处。距离第一主平面的物距为

$$u=-(80+40)=-120(\text{cm})$$

根据式(5.67),可得

$$\frac{1}{v}=a+\frac{1}{u}=-\frac{1}{100}-\frac{1}{120}=-\frac{22}{1200}\Rightarrow$$

$$v=-\frac{600}{11}\text{cm}$$

因此,像位于第二主平面左侧 54.5cm 处,或距离凹透镜左侧 14.5cm 处,如图 4.10 所示。放大率为

$$M=\frac{v}{u}=+\frac{1}{2.2}$$

小　结

- 在傍轴近似下,可以只考虑通过系统光轴的光线。这些光线都在同一个平面内,可用其离开光轴的距离 x 和参量 $\lambda=n\sin\alpha$ 来表征,λ 表示折射率和光线与 z 轴夹角正弦的乘积。
- 如果光线最初用一个元素为 λ_1 和 x_1 的(2×1)矩阵来描述,则在一折射率为 n_1 的均匀媒质中移动一段距离 D 的平移效应为

$$\begin{bmatrix}\lambda_2\\ x_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{T}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ x_1\end{bmatrix}$$

平移矩阵 $\boldsymbol{T}$ 为

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ D/n_1 & 1\end{bmatrix}$$

- 经过一(分开两折射率分别为 n_1 和 n_2 的媒质)折射面的折射效应为

$$\begin{bmatrix}\lambda_2\\ x_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{R}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ x_1\end{bmatrix}$$

式中折射矩阵为

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}1 & -P\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

式中

$$P=\frac{n_2-n_1}{R}$$

- 经过连续地应用上述矩阵,可以研究一共轴光学系统的傍轴成像问题。
- 在一光学系统中,主平面(单位面)是这样的两个平面,分别位于物空间和像空间,它们之间的放大率为 1,即,从物空间主平面发出的任意傍轴光线将以同样高度在像空间的主平面射出。
- 节点是位于光轴上相对角放大率为 1 的两个点,即,经过第一节点以角度 α 发出的光线将在第二节点以相同的角度射出,通过两节点并垂直于光轴的平面叫做节平面。

习　题

5.1　一光学系统由两个焦距分别为 10cm 和 30cm 的凸透镜组合而成,两透镜间距为 20cm。

(1) 求系统矩阵和主平面的位置。

(2) 假设一平行光束从左侧入射,根据式(5.67)和主平面的位置,求像点位置。并在主平面绘出成像光路图。

[**答案**:(1) $a=1/15, b=1/3, c=-1, d=-20$;第一主平面在两透镜的正中间。(2) 最后的像是虚像,位于第二透镜左侧 15cm 处。]

5.2　一个双凸厚透镜,其第一和第二折射面的曲率半径分别为 45cm 和 30cm,透镜厚 5cm,材料折射率为 1.5。求系统矩阵的各元素和主平面的位置。并根据式(5.67)求出距离第一折射面 90cm 处物的像点位置。

[**答案**:$a=0.02716, b=0.9444, c=0.9630, d=-3.3333, d_{u1}=2.0455, d_{u2}=-1.3636$。最后的像位于第二折射面 60cm 处。]

5.3　一折射率为 1.5、半径为 20cm 的半球,如果点 H_1 和点 H_2 为第一和第二主点,试证明 $\overline{AH_1}=13.3$cm,以及点 H_2 位于第二折射面上,如图 5.13 所示。此外,试证明焦距为 40cm。

5.4　如图 5.14 所示的厚透镜,第一和第二折射面的曲率半径分别为 −10cm 和 +20cm,透镜厚度为 1.0cm,透镜材料的折射率为 1.5。求主平面的位置。

[**答案**:$d_{u1}=20/91$cm, $d_{u2}=40/91$cm]

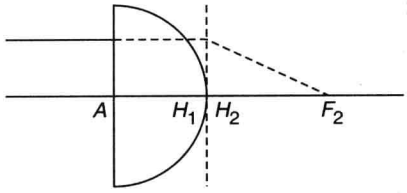


图 5.13　习题 5.3 图

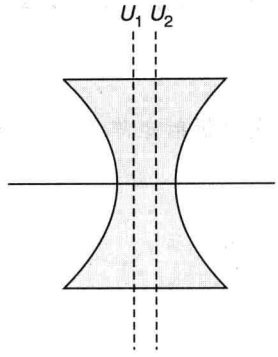


图 5.14　习题 5.4 图

5.5　两个薄透镜组合，焦距分别为 f_1 和 f_2，间距为 f_1+f_2。证明：透镜组合的角放大率 $\left(\text{定义为}\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}=\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$为 $-f_1/f_2$，并解释符号的意义。

5.6　一球形折射面如图 4.12 所示，利用矩阵方法证明当一物距离折射面为 $\left(1+\dfrac{n_2}{n_1}\right)r$ 时，其像是一虚像，且距离折射面是 $\left(1+\dfrac{n_1}{n_2}\right)r$。

参考文献和推荐读物

1. J.N. Blaker, *Geometrical Optics: The Matrix Theory,* Marcel Dekker, New York, 1971.
2. W. Brouwer, *Matrix Methods in Optical Instrumental Design,* Benjamin, New York, 1964.
3. D.M. Eakin, and S.P. Davis, 'An application of matrix optics,' *American Journal of Physics,* Vol. **34,** 758, 1966.
4. A. Gerrard, and J.M. Burch, *Introduction to Matrix Methods in Optics,* John Wiley & Sons, New York, 1975.
5. K. Halbach, 'Matrix representation of Gaussian optics,' *American Journal of Physics,* Vol. **32,** 90, 1964.
6. A Nussbaum, *Geometric Optics: An Introduction,* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass, 1968.
7. J.W. Simmons and M.J. Guttmann, *States, Waves and Photons: A Modern Introduction to Light,* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass, 1970.

第6章 像 差

几何光学可以很容易，也可以复杂……如果有人想解决一个实际而详细的透镜设计问题，包括像差分析在内，他就得应用折射定律去做通过各个折射面的光线轨迹，并且求出这些光线从哪里射出，看看它们是否可以形成一个满意的像。有人说，这也太麻烦了。但在今天，借助于计算机，问题的解决就简便了。人们可以建立问题的模型，使一根接一根光线的计算变得很容易。从而问题最终确实变得非常简单，也不需要什么新的原理。

——理查德·费曼，《费曼物理学讲义》，第一卷

6.1 引言

在第4章中，当讨论折射面和薄透镜成像时，是假设物点离光学系统光轴不远，使得参与成像的光线与系统光轴的夹角很小。但是在实用中，上述所有假设均不能满足，在实际应用中，不得不处理与光轴呈大角度的光线问题。处理光线在光轴附近并与光轴夹角很小范畴的光学称为傍轴光学。可以发现，在傍轴光学范畴，物体成像都是理想的，即，从单一物点发出的所有光线都将会聚于单一像点处，且对于一个光学系统，其系统放大率是常数，而与成像所考虑的特定光线无关。既然对于实际光学系统，非傍轴光线也参与成像，因此，实际成像远非理想的像，这种相对于理想像的偏离被称为像差。

可以证明，对于任何旋转对称系统的初级像差有5种，分别是球差、彗差、像散、像场弯曲和畸变，统称为赛德尔像差。因为这些像差对于单一波长也存在，所以也被称为单色像差。在本章中，将分别考虑这5种像差，并讨论每种像差对于成像的影响效果。

应该提及的是如果利用多色光源（像白光）照明成像（大多数光学仪器就是这种情况）时，一般来说，所成像带有彩色，这种现象称为色差。色差的物理机制源于透镜材料的折射率与所考虑照射光的波长相关。因为成像总是伴随着在折射率不连续的界面的折射，折射率对于波长的依赖关系导致所成的像带有彩色。对于多色光源，其不同波长组分的光线（在折射后）将沿着不同方向传播，从而成像于空间上的不同点。因为色差现象是最早被认识的，所以，本章将首先讨论色差现象，随后再讨论单色像差。

6.2 色差

考虑一平行白光束照射在一凸透镜上的情况，如图6.1所示。由于蓝光的折射率比红光大，蓝光经透镜聚焦的点比红光近，从而成像看起来呈彩色。需要提一下，色差与在后面几节中将要讨论的5种赛德尔像差没有关系。

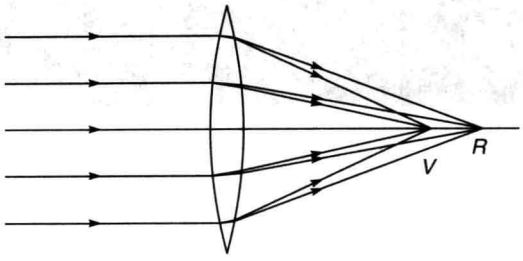


图 6.1　当包含一个连续范围波长的白光照射到透镜时，由于每个波长的光线组分折射的程度不同，导致色差，色差与 5 种赛德尔像差无关。彩图见文前附录图表页的图 9

对于薄透镜，很容易导出色差的表达式。薄透镜的焦距由式(6.1)给出

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \tag{6.1}$$

如果折射率 n 变化一个 δn(n 的变化源于光波波长的变化)导致焦距 f 变化一个 δf，对式(6.1)微分，可得

$$-\frac{\delta f}{f^2}=\delta n\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{\delta n}{n-1}\frac{1}{f}$$

即

$$\delta f=-f\frac{\delta n}{n-1} \tag{6.2}$$

式(6.2)表示了薄透镜的色差。如果 n_b 和 n_r 分别对应于蓝色光和红色光的折射率，则有

$$f_r-f_b=f\left(\frac{n_b-n_r}{n-1}\right) \tag{6.3}$$

表示色差。

6.2.1　消色差双合透镜

首先考虑由两种不同材料紧贴在一起的透镜制成的光学系统。例如，其中一个透镜的材料为冕牌玻璃，另一个透镜的材料为火石玻璃。下面找出这种透镜组合体对于蓝色和红色具有相同焦距的条件。令 n_b，n_y 和 n_r 分别表示第一个透镜的材料对于蓝色、黄色和红色的折射率，同样地，令 n'_b，n'_y 和 n'_r 分别表示第二个透镜的材料相应的折射率。令 f_b 和 f'_b 分别表示第一和第二透镜相对于蓝色光的焦距，而 F_b 表示两透镜结合体(紧贴在一起)对于蓝光的焦距，则有

$$\frac{1}{F_b}=\frac{1}{f_b}+\frac{1}{f'_b}=(n_b-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+(n'_b-1)\left(\frac{1}{R'_1}-\frac{1}{R'_2}\right) \tag{6.4}$$

式中 R_1 和 R_2 为对于第一透镜的第一和第二表面的曲率半径。如前所述，带撇量对应第二个透镜。这样，有

$$\frac{1}{F_b}=\frac{n_b-1}{n-1}\frac{1}{f}+\frac{n'_b-1}{n'-1}\frac{1}{f'} \tag{6.5}$$

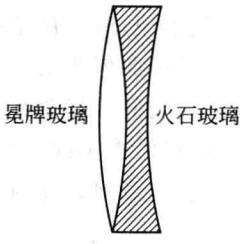


图 6.2　消色差双合透镜，在可见光波长范围内，近似有相等的焦距。彩图见文前附录图表页的图 10。

式中

$$\frac{1}{f} \overset{\text{def}}{=\!=} (n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

$$\frac{1}{f'} \overset{\text{def}}{=\!=} (n'-1)\left(\frac{1}{R_1'}-\frac{1}{R_2'}\right) \tag{6.6}$$

$$n \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{n_b+n_r}{2} \approx n_y, \quad n' \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{n_b'+n_r'}{2} \approx n_y' \tag{6.7}$$

f 和 f' 分别为相应于平均色的第一和第二透镜焦距，这个平均色就是围绕黄色的区域。同样地，对于红色光透镜组合体的焦距可以写为

$$\frac{1}{F_r} = \frac{n_r-1}{n-1}\frac{1}{f} + \frac{n_r'-1}{n'-1}\frac{1}{f'} \tag{6.8}$$

因为透镜组合体对于蓝色光和红色光的焦距相等，有

$$\frac{n_b-1}{n-1}\frac{1}{f} + \frac{n_b'-1}{n'-1}\frac{1}{f'} = \frac{n_r-1}{n-1}\frac{1}{f} + \frac{n_r'-1}{n'-1}\frac{1}{f'}$$

或者

$$\frac{\omega}{f} + \frac{\omega'}{f'} = 0 \tag{6.9}$$

式中

$$\omega = \frac{n_b-n_r}{n-1}, \quad \omega' = \frac{n_b'-n_r'}{n'-1} \tag{6.10}$$

称作色散本领[①]。因为 ω 和 ω' 都为正，为使式(6.9)成立，f 和 f' 必须符号相反。满足式(6.9)的透镜组合被称为消色差双合透镜。需要提及的是，如果两个透镜的制作材料相同，则 $\omega=\omega'$，式(6.9)就意味着 $f=-f'$，这样的透镜组合将具有无穷大的焦距。所以，消色差双合透镜的两个透镜必须是由不同材料制成的。

例 6.1 一个焦距为 20cm 的消色差双合透镜是将一个硅酸硼冕玻璃凸透镜和一个重火石玻璃发散透镜紧密结合在一起制成。假设 $n_r=1.51462$，$n_b=1.52264$，$n_r'=1.61216$ 和 $n_b'=1.62901$。这里不带撇的和带撇的量分别对应于硅酸硼冕玻璃和重火石玻璃，计算每一个透镜的焦距。

解

$$n \approx \frac{n_b+n_r}{2} = \frac{1.52264+1.51462}{2} = 1.51863$$

$$n' \approx \frac{n_b'+n_r'}{2} = \frac{1.62901+1.61216}{2} = 1.62058$$

则

$$\omega = \frac{1.52264-1.51462}{1.51863-1} = 0.01546$$

$$\omega' = \frac{1.62901-1.61216}{1.62058-1} = 0.02715$$

代入式(6.9)，可得

① 消色差双合透镜的色散本领的倒数 V 也常常用到，称为色散率、V 数或阿贝数。译者注。

$$\frac{0.01546}{f}+\frac{0.02715}{f'}=0$$

可得

$$\frac{f}{f'}=-0.56942$$

由于透镜组合的总焦距为20cm,必须有

$$\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}=\frac{1}{20}$$

则

$$\frac{1}{f}(1-0.56942)=\frac{1}{20}$$

$$f=20\times 0.43058=8.61(\text{cm})$$

$$f'=-\frac{f}{0.56942}\simeq -15.1\text{cm}$$

6.2.2 分离双透镜消色差

考察两个焦距为 f 和 f' 的薄透镜,相隔距离 t(见图6.3),这个透镜组合的焦距 F 满足

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}-\frac{t}{ff'} \tag{6.11}$$

第一个透镜的焦距由式(6.12)给出

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \tag{6.12}$$

对于第二个透镜的 $1/f'$ 具有相似的表示式。如果 Δf 和 Δn 为由波长改变 $\Delta\lambda$ 而引起的焦距和折射率的改变,对式(6.12)微分,可得

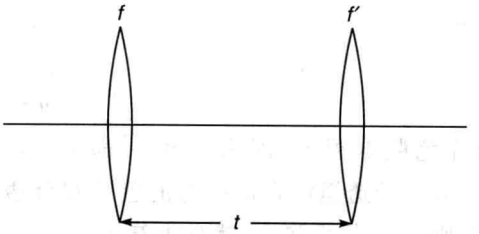


图6.3 分离双透镜

$$-\frac{\Delta f}{f^2}=\Delta n\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{\Delta n}{(n-1)f}$$

对式(6.11)微分,可得

$$\begin{aligned}-\frac{\Delta F}{F^2}&=-\frac{\Delta f}{f^2}-\frac{\Delta f'}{f'^2}+\frac{t}{f}\frac{\Delta f'}{f'^2}+\frac{t}{f'}\frac{\Delta f}{f^2}\\&=\frac{\Delta n}{(n-1)f}+\frac{\Delta n'}{(n'-1)f'}-\frac{t}{f}\frac{\Delta n'}{(n'-1)f'}-\frac{t}{f'}\frac{\Delta n}{(n-1)f}\\&=\frac{\omega}{f}+\frac{\omega'}{f'}-\frac{t}{ff'}(\omega+\omega')\end{aligned} \tag{6.13}$$

如前所述,式中 ω 和 ω' 代表色散本领。因此,为了使透镜组合对于蓝色光和红色光有相同的焦距,应该有

$$\frac{t(\omega+\omega')}{ff'}=\frac{\omega}{f}+\frac{\omega'}{f'}$$

即

$$t=\frac{\omega f'+\omega' f}{\omega+\omega'} \tag{6.14}$$

如果两个透镜是用同一种材料制成,则 $\omega=\omega'$,式(6.14)可简化为

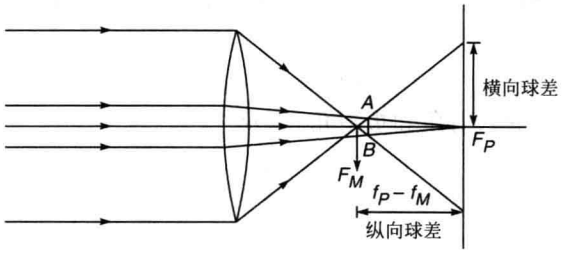
$$t = \frac{f + f'}{2} \tag{6.15}$$

这意味着当两透镜间的距离等于两透镜焦距平均值时，色差非常小。惠更斯目镜就是根据这种原理制造的。

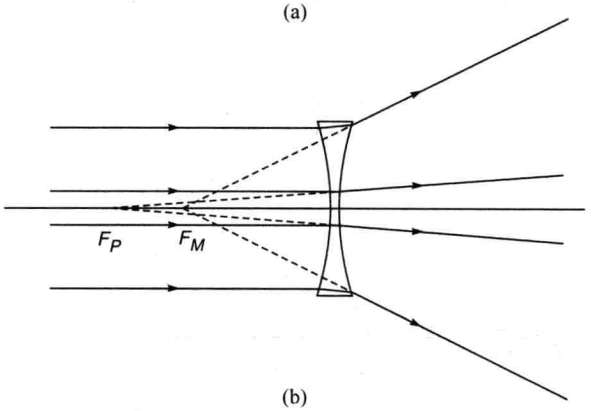
6.3　单色像差

6.3.1　球差

令与光轴平行的一束光入射到一薄透镜上（见图 6.4），经过透镜之后，光线向光轴弯曲并与光轴相交。如果只局限于傍轴区，会看到所有光线与 z 轴相交于同一点，该点距离透镜为 f_P，为透镜傍轴光线的焦距。如果不局限于傍轴区，一般来说，入射到透镜不同高度的光线与光轴相交于不同的点。比如，边缘光线（即入射在透镜外缘的光线）的聚焦点比傍轴光线的聚焦点更靠近透镜（见图 6.4(a)）。同样地，对于一凹透镜，入射到透镜离轴更远的光线经过透镜后，好像从离透镜更近的一点发射出来（见图 6.4(b)）。平行的傍轴光线聚焦于光轴的点（点 F_P）叫做傍轴焦点，而平行的边缘光线聚焦的点（点 F_M）叫做边缘焦点。两个焦点之间的距离用球差来度量。如果点 O 代表一轴上物点，从物点发出来的不同光线将会



(a)



(b)

图　6.4

(a) 考虑一会聚透镜，边缘光线的焦点比傍轴光线的焦点离透镜更近。傍轴光线和边缘光线焦点之间的距离称为纵向球差，而在傍轴焦平面上像的半径称为横向球差。散焦和球差的联合作用导致成像的最小模糊圈，最小模糊圈处像的直径最小；(b) 发散透镜的球差。

聚在不同点,从而物点的像就不再是一个点了。沿轴向的傍轴像点,与对应于边缘光线(即入射到透镜边上的光线)的像点之间的距离用纵向球差这个术语来表示。类似地,傍轴像点和边缘光线与傍轴像平面的交点之间的距离叫做横向球差。在任何(垂直于 z 轴)的平面上的像都是一个圆形光斑,但是如图 6.4(a)所示,在平面 AB 上的圆斑有最小直径,这个圆斑叫做最小模糊圈(见图 6.5)。需要指出的是,位于柱状对称系统(如共轴的透镜系统)的对称轴上的一个物点,其像只存在球差,而所有其他离轴像差,如彗差、象散等,是不存在的。

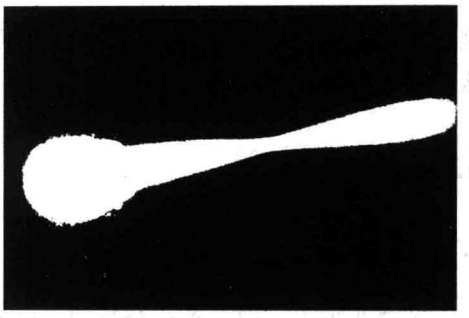


图 6.5 一凸透镜的球差

为了搞清楚投射在折射面不同高度的光线会聚焦于光轴不同的点,考虑如图 6.6 所示的平面折射面。设平面折射面位于 $z=0$ 处,P 为物点。选 z 轴方向沿点 P 到平面的法线(PO)方向。位于 $z=0$ 处的平面将折射率分别为 n_1 和 n_2 的媒质分开(见图 6.6),并假设 $n_2>n_1$。考虑一光线 PM(从物点)投射到折射面上高度为 h 的点(如图 6.6),折射线好像从点 Q 发出。假设点 O 为原点,而点 P 和点 Q 的位置分别为 z_0 和 z_1。显然,z_0 和 z_1 均为负值,那么距离 $\overline{OP}$ 和 $\overline{OQ}$ 分别为 $-z_0$ 和 $-z_1$(见图 6.6)。求用 z_0 来表示 z_1 的表达式。根据斯涅耳定律

$$\sin\alpha = n\sin\beta \tag{6.16}$$

式中 α 和 β 为相对于 z 轴的入射角和折射角,以及

$$n = \frac{n_2}{n_1} \tag{6.17}$$

如图 6.6 所示,有

$$(-z_1) = h\cot\beta = \frac{h}{\sin\beta}\sqrt{1-\sin^2\beta}$$

即

$$z_1 = -\frac{nh}{\sin\alpha}\left(1-\frac{1}{n^2}\sin^2\alpha\right)^{1/2} \tag{6.18}$$

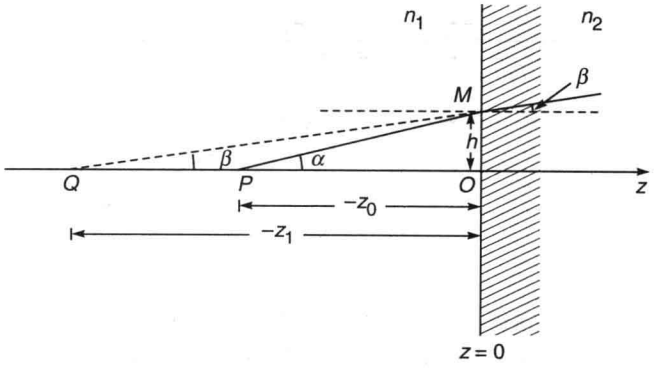


图 6.6 在平面上的折射

其中用到了式(6.16)。又

$$\sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + z_0^2}} \tag{6.19}$$

有

$$z_1 = -\frac{nh}{h}(h^2 + z_0^2)^{1/2}\left[1 - \frac{1}{n^2}\frac{h^2}{(h^2 + z_0^2)}\right]^{1/2} \tag{6.20}$$

即

$$z_1 = -n \mid z_0 \mid \left(1 + \frac{h^2}{z_0^2}\right)^{1/2}\left[1 - \frac{h^2}{n^2 z_0^2}\left(1 + \frac{h^2}{z_0^2}\right)^{-1}\right]^{1/2} \tag{6.21}$$

式(6.21)中的 z_1 是用 z_0 的函数精确地表示出来的，可以看出，像距 z_1 是光线高度 h 的复杂函数。当 $h \to 0$ 时，即对于傍轴光线，得

$$z_1 = -n \mid z_0 \mid \tag{6.22}$$

这就是傍轴近似的像距表达式。当进行下一级近似时，假设 $|h/z_0| \ll 1$，得

$$\begin{aligned} z &\simeq -n \mid z_0 \mid \left(1 + \frac{h^2}{2z_0^2}\right)\left(1 - \frac{h^2}{2n^2 z_0^2}\right) \\ &\simeq -n \mid z_0 \mid \left[1 + \frac{h^2}{2z_0^2 n^2}(n^2 - 1)\right] \end{aligned} \tag{6.23}$$

因此，像差为

$$\Delta z = -\frac{h^2}{2n \mid z_0 \mid}(n^2 - 1) \tag{6.24}$$

式(6.24)给出了纵向球差公式，负号表示非傍轴光线来自比傍轴光线像点更远的一点发出。

从上面的例子可以看出，即使对于一个简单的平面折射面也会产生球差，因此，球面折射面和透镜肯定会产生球差。

至于球差的计算，甚至单一球面产生的球差计算也是很复杂的(见文献[5])，这里只给出最后结果

$$\Delta z = -\frac{n_2 - n_1}{2n_2\left(\frac{1}{z_0} + \frac{n_2 - n_1}{n_1 R}\right)^2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{z_0}\right)^2\left(-\frac{n_2 + n_1}{n_1 z_0} + \frac{1}{R}\right)h^2 \tag{6.25}$$

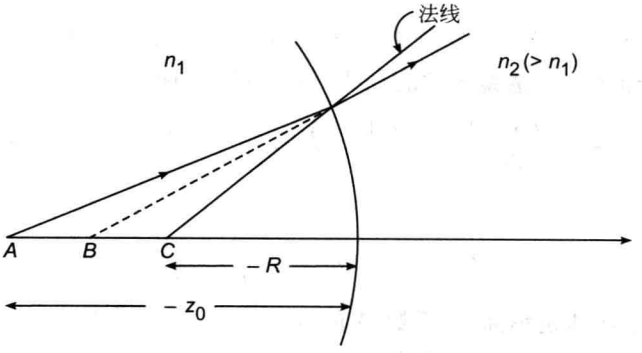


图 6.7　球折射面的齐明点

式中 R 为折射面的曲率半径，n_1 和 n_2 分别为折射面左侧和右侧的折射率(见图 6.7)。对于平面，$R=\infty$，式(6.25)还原为式(6.24)(式中 $n=n_2/n_1$)

例 6.2 考虑一半径为 R 的一个球折射面(见图 6.7)。证明：如果点 A 满足

$$z_0 = \frac{n_1+n_2}{n_1}R \tag{6.26}$$

其球差为零。注意，R 和 z_0 均为负值，相应像点 B 位于 $\frac{n_2-n_1}{n_2}z_0$ 处，点 A 和点 B 被称为齐明点，可以用在显微物镜中。

解 由于 $z_0=\frac{n_1+n_2}{n_1}R$，它使得式(6.25)中最后括号内的因子消失，因此，球差为零。其实可以严格证明所有从点 A 发出的光线看上去就像是从点 B 发出的一样(见 4.8 节)

例 6.3 考虑沿着一个椭圆主轴旋转形成的椭球折射面。证明：如果椭圆偏心率等于 n_1/n_2，则所有平行于主轴的光线将聚焦于椭球的焦点上。

[提示：椭圆偏心率为

$$\varepsilon = \frac{\overline{OF}}{a} = \left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)^{1/2}$$

式中 a 和 b 分别为半长轴和半短轴(见图 6.8)。假设 $n_1\,\overline{QP}+n_2\,\overline{PF}=n_2\,\overline{BF}$，证明 $P(x,y)$ 满足椭圆方程。]

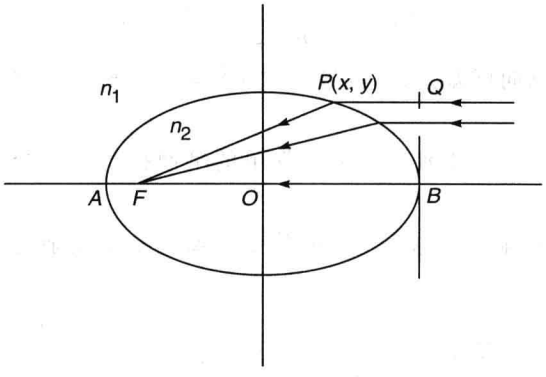


图 6.8 例 6.3 图

同理，可以证明，对于放置在空气中薄透镜，折射率为 n，透镜两表面的曲率半径分别为 R_1 和 R_2。对于一组平行于透镜光轴的光线，该薄透镜的球差系数为

$$A = -\frac{f(n-1)}{2n^2}\left\{-\left(\frac{1}{R_2}-P\right)^2\left[\frac{1}{R_2}-P(n+1)\right]+\frac{1}{R_1^3}\right\} \tag{6.27}$$

式中

$$P = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \tag{6.28}$$

为透镜的光焦度(也叫透镜焦强)。系数 A 的含义如下，当它乘以光线在透镜上高度的立方时，可以得到横向球差。这样，对于投射在透镜位于高度 h 的光线，其横向球差为

$$S_{\text{lat}} = Ah^3 = -\frac{f(n-1)h^3}{2n^2}\left\{-\left(\frac{1}{R_2}-P\right)^2\left[\frac{1}{R_2}-P(n+1)\right]+\frac{1}{R_1^3}\right\} \tag{6.29}$$

纵向球差对应于边缘焦距和傍轴焦距的差为

$$S_{\text{long}} = Ah^2 f = -\frac{(n-1)f^2h^2}{2n^2}\left\{-\left(\frac{1}{R_2}-P\right)^2\left[\frac{1}{R_2}-P(n+1)\right]+\frac{1}{R_1^3}\right\} \tag{6.30}$$

对于会聚透镜，S_{long}为负值，意味着边缘光线聚焦得更靠近透镜。

对于给定光焦度的薄透镜(即给定焦距)，可以用式(6.31)定义一个形状因子的量

$$q = \frac{R_2+R_1}{R_2-R_1} \tag{6.31}$$

式中 R_1 和 R_2 为透镜两个面的曲率半径。对于一给定焦距的透镜，可以通过改变 q 的值来控制球差，这个过程叫做透镜的配曲调整。如图 6.9 所示，给出了透镜 $n=1.5$，$f=40\text{cm}$，$h=1\text{cm}$(即 $P=0.025\text{cm}^{-1}$)时，球差的变化曲线。可见，当 q 位于 $q\simeq+0.7$ 附近时，球差(值)最小(但并不为零)。因此，适当选取透镜两折射面的曲率半径，可以使球差最小化。这里提一下，当 $q=+1$ 时，$R_2=\infty$，对应于一平凸透镜，其凸面面向入射光线；另一方面，$R_1=\infty$及 $q=-1$ 对应于平面面向入射光线的平凸透镜。所以，透镜球差的大小取决于在两个折射面之间偏差的分配。

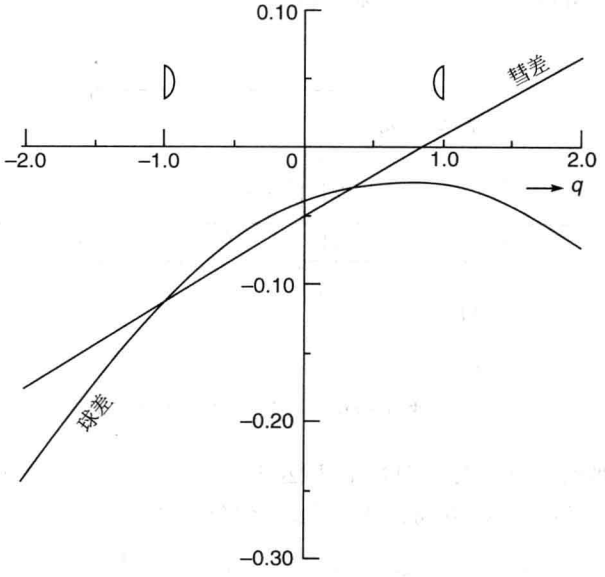


图 6.9 当薄透镜的 $n=1.5$，$f=40\text{cm}$，$h=1\text{cm}$ 时，球差与慧差随形状因子 q 的变化曲线。在计算彗差时，假设 $\tan\theta=1$，即光线与光轴的夹角为 45°。

当 $q\approx+0.7$ 时，球差 $|S_{\text{long}}|$ 取最小值的物理解释如下。在前面已经提到过，(对于会聚透镜)边缘光线经历了一个大的偏向，从而造成了球差(见图 6.4(a))。因此，可以预见当偏向角 δ(见图 6.10(a))取最小时球差最小。就如同三棱镜一样(见图 6.10(b))，当在两个折射面上的偏向角相等时，总偏向角最小，即

$$\delta_1 = \delta_2, \quad \delta = \delta_1 + \delta_2 \tag{6.32}$$

确实，在 $q\approx+0.7$ 时，光线在透镜两个折射面的偏向角相等，此时，球差最小。

利用上面等偏向角准则，对于两个分开的透镜，可以判断出间隔多远时，球差最小。令两个透镜 L_1 和 L_2 的焦距分别为 f_1 和 f_2，间距为 x(见图 6.11)，令 θ_1 和 θ_2 为光线分别经

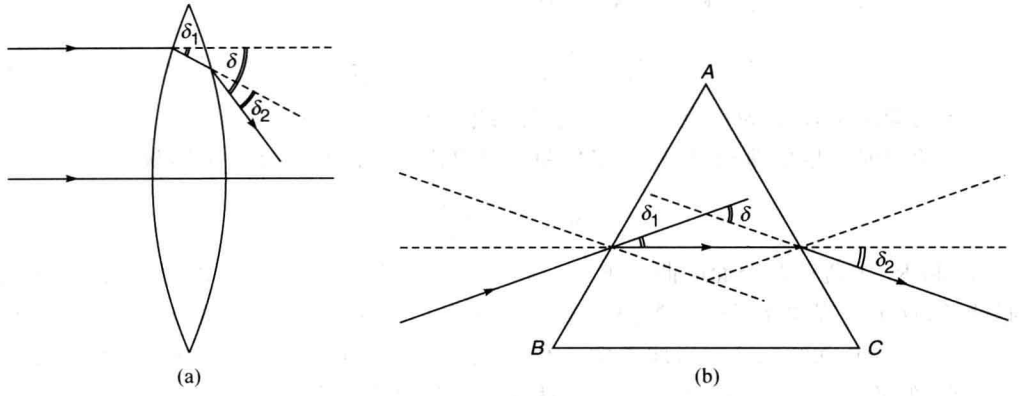


图 6.10

(a) 一个薄透镜两个折射面上的折射情况。为了看清,偏向角度被夸大了。(b) 对于三棱镜,最小偏向对应于 $\delta_1=\delta_2$ 的情况。

过两个透镜后的偏向角,则对应于最小球差,有

$$\theta_1 = \theta_2 \tag{6.33}$$

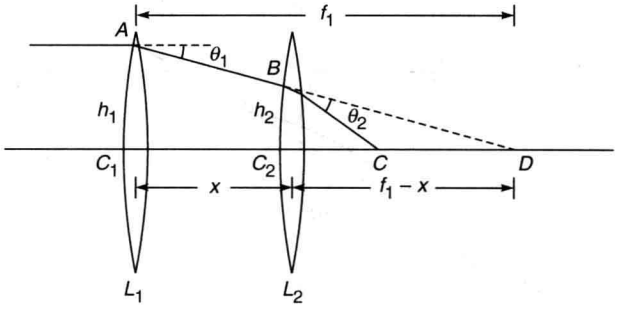


图 6.11 两个透镜组合达到最小球差的条件

为了得到光线遇到一透镜时偏向角的表达式,参考如图 6.12 所示,其中光线 PA 经折射偏折一个角度 θ 后,沿着 AQ 方向传播。由 $\triangle PAQ$,可得

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 \approx \frac{h}{v} + \frac{h}{-u} = h\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u}\right) = \frac{h}{f} \tag{6.34}$$

其中用到傍轴关系

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f} \tag{6.35}$$

u 本身是负值,则式(6.33)变为

$$\frac{h_1}{f_1} = \frac{h_2}{f_2} \tag{6.36}$$

根据 $\triangle AC_1D \backsim \triangle BC_2D$(见图 6.11),可得

$$\frac{h_1}{f_1} = \frac{h_2}{f_1 - x} \tag{6.37}$$

根据式(6.36)与式(6.37),可得

$$x = f_1 - f_2 \tag{6.38}$$

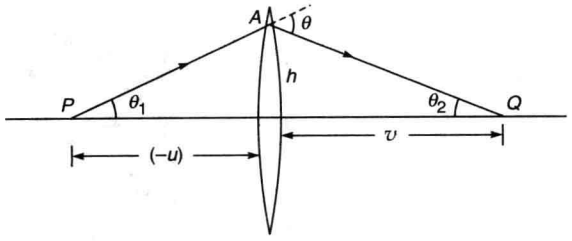


图 6.12　偏向角的计算

因此，当两个薄透镜组合间距等于它们的焦距差时，球差最小。确实，惠更斯目镜（见图 6.13）的场镜焦距为 $3f$，目镜的焦距是 f，两镜的间距为 $2f$。可以看出，此时消色差条件（见式(6.15)）和最小球差条件（见式(6.38)）同时满足。由于惠更斯目镜作为整体被校正了像差，而每个透镜本身的像差没有校正，因此，（放在面 PQ 上的）叉丝的像还是有像差的。讨论不同光学仪器减小像差的过程需要详细讨论与光线追迹相关的问题，这已经超出了本书的范围。

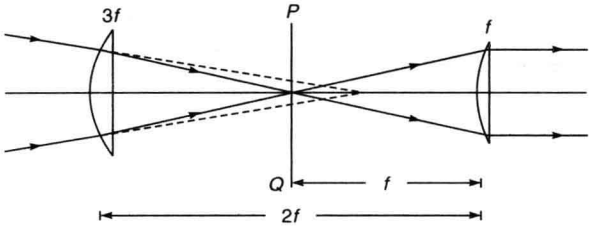


图 6.13　惠更斯目镜

需要提及的是，即使光学系统没有任何像差，由于衍射效应，像点仍然不是一个点（见 18.3 节）。比如从透镜会聚一个理想的球面波，光线理论预言，它将会聚于一个像点，而衍射理论（考虑到波长不为无穷小）预言，其在像平面成一艾里斑（见图 18.8），其第一暗环出现在离傍轴像点 $\frac{1.22\lambda f}{D}$ 处（见图 6.14），式中 D 为出射光瞳的直径。例如，当 $\lambda=5000\text{Å}$，$D=5\text{cm}$，$f=10\text{cm}$ 时，艾里斑的第一和第二暗环半径分别为 0.00012mm 和 0.00022mm（见 18.3 节）。随着 D 的减小，艾里斑在空间扩展得更大。通常用“光阑”来限制傍轴区。但是，如果光阑的直径做得太小，衍射效应将占主导地位。实际上，当照相机的光圈选 $f/D\approx5.6$ 时，给出的成像效果最好。大光圈时，像差使成像质量下降；而小光圈时，衍射使成像质量下降。

6.3.2　彗差

正如前面提到的，对于光轴上的物点只存在球差。而对于离轴的物点，还存在彗差、像散、像场弯曲和畸变。第一位的离轴像差是彗差，即对于离轴很近的物点，其像只存在球差和彗差。在本节我们将简单地讨论彗差效应，并假设其他的像差都不存在。

图 6.15(a)原理性地显示了彗差效应。由于傍轴光线聚焦的点与边缘光线不同，从而表现为透镜不同部分的横向放大率也不同。需要提及的是，当考虑到透镜不同区域成像时，球差来源于透镜不同区域的光焦度不同，而彗差来源于不同区域的横向放大率不同。图 6.15(a)只绘

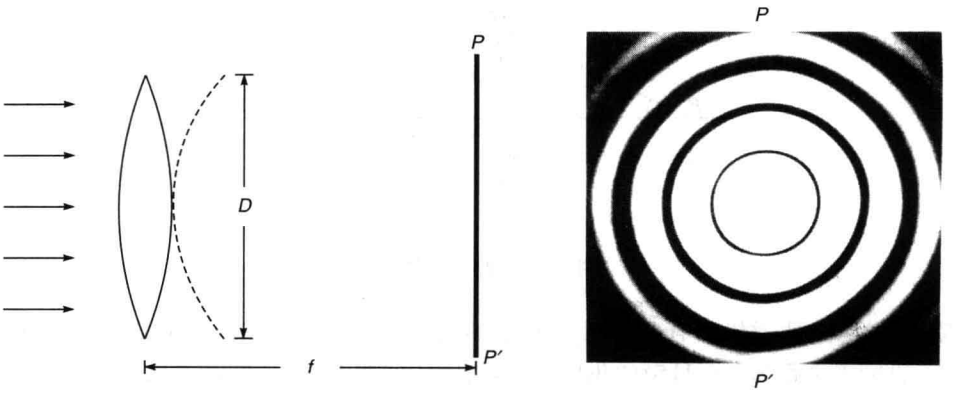


图 6.14

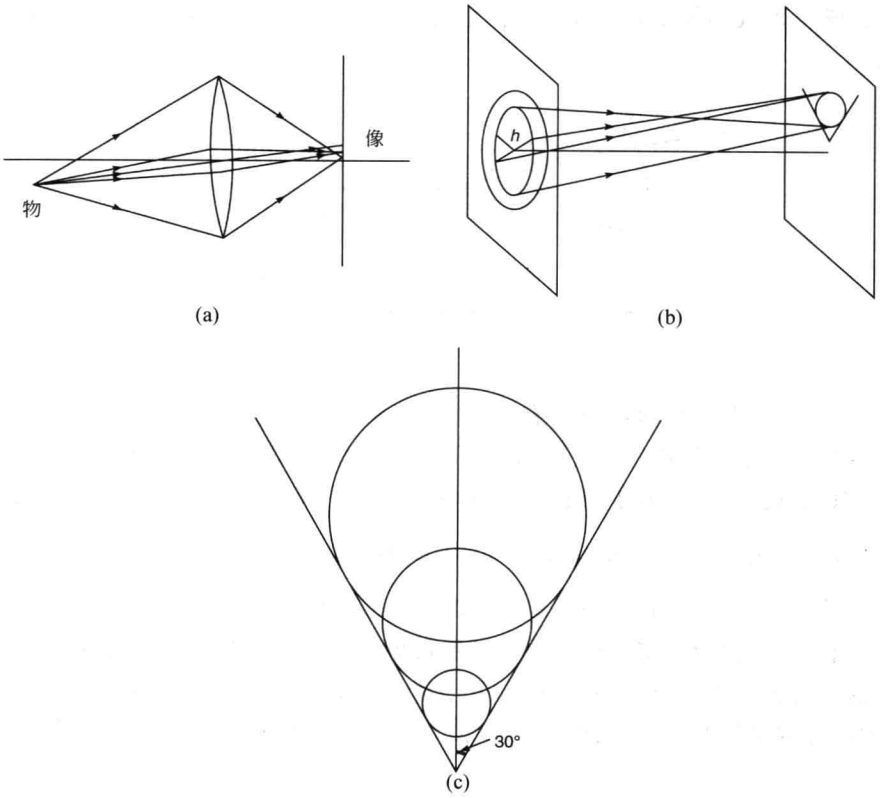


图 6.15 存在彗差时的成像。在(a)中,只显示了子午面内的光线;在(b)中显示了 3 维视图;在(c)中显示了合成的像差。

出了子午面内的光线,子午面定义为包含光轴与物点的平面。要看到像的全貌,必须将所有的光线考虑在内[①]。图 6.15(b)显示了一个 3 维透视图,图中考察了投射到透镜上距离中心

① 必须指出:对于像差全面的理解必须借助于仔细与彻底的数学分析,而这超出了本书的范畴,有兴趣的读者可以参阅文献[1,3]。

等距圆上的一组光线。其中与透镜直径两端相交的一对光线，经透镜折射后，将会聚到傍轴像面上的一点。这些成对的不同光线组将会聚到像面的不同点，从而将这些点的轨迹构成一个圆。圆的半径与圆心到理想像点的距离定量地描写了彗差。随着与透镜相交等距圆环带半径(见图 6.15(b)中的 h)的增大，像面上圆的中心也将逐渐远离理想像点。这样最后形成的像为如图 6.15(c)所示的形状，由于一个物点的像相似于彗星一样的图案，彗差因此得名(见图 6.16)。

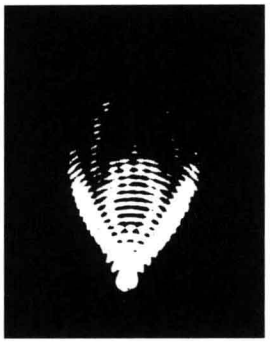


图 6.16　一个点源的像形成的彗差。图片引自 H. F. Meiners, Physics Demonstration Experiments, Vol. Ⅱ, The Ronald Press Co., New York, 1970。已获授权。

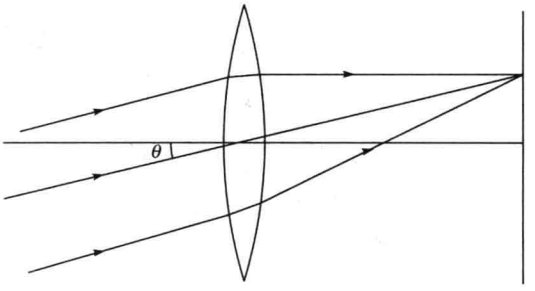


图 6.17　一束平行光(以与光轴夹角 θ 的方向)入射一薄透镜

一束与 z 轴夹角为 θ、倾斜射向透镜的平行光(见图 6.17)，可以证明，其像的彗差为(参见文献[1])

$$\text{彗差} = \frac{3(n-1)}{2} f h^2 \tan^2\theta \left[\frac{(n-1)(2n+1)}{nR_1R_2} - \frac{n^2-n-1}{n^2R_1^2} - \frac{n}{R_2^2} \right] \tag{6.39}$$

如图 6.9 所示，已经绘出了彗差随形状因子 q 变化的曲线，由曲线可以看出，对于 $q=+0.8$ 的透镜，彗差为零。还可以看出，对于一平凸透镜(凸面面向入射光线)，当 $q=1.0$ 时，球差与彗差都接近最小。这种透镜被广泛地应用于目镜中。

在此需要提及的是，在 4.11 节中，已经推导出阿贝-正弦条件，当满足这一条件时，光学系统没有球差与彗差。

6.3.3　像散与像场弯曲

当一光学系统没有球差和彗差时，系统对于在光轴上及在光轴附近的物点，将形成锐利的像。但是对于远离光轴的物点，系统成像不再是一个点，此时称光学系统经历了像散。

考察一个离轴较远的一点点 P。包含物点与光轴的平面叫做子午面，垂直于子午面的平面(也包含主光线(原书为“也包含光轴”))叫做弧矢面。如图 6.18 所示，为只存在像散时的成像情况，子午面内的光线会聚点与弧矢面内的光线会聚点不同。比如，光线 PA 与 PB 会聚于点 T，而 PC 与 PD 会聚于点 S，点 T 与点 S 不是同一点。因为在点 T，弧矢面内的光线还没有聚焦，实际上，在这里形成一条与子午面垂直的焦线，焦线 T 叫做切向焦线。同样地，由于在点 S，子午面内的光线已经散焦，在切向面内可以得到一条焦线，叫做弧矢焦

线。焦线 S 与 T 之间的距离用来度量像散。

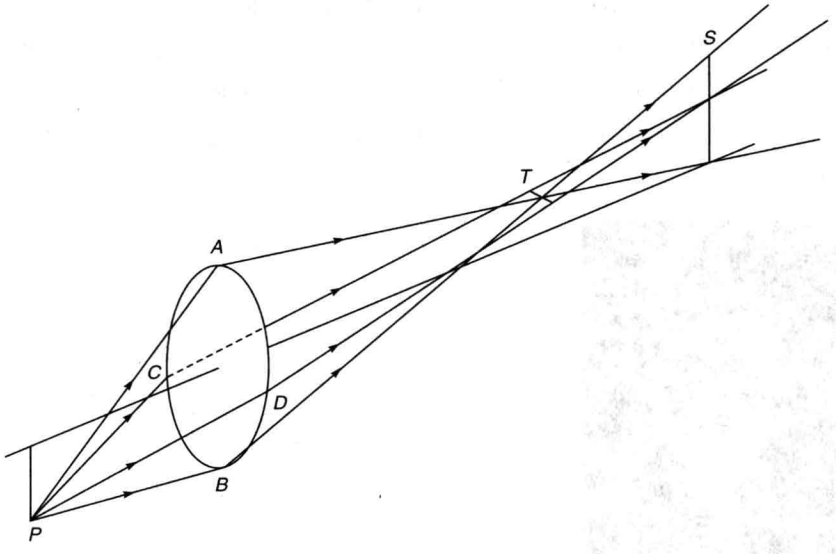


图 6.18　存在像散时的成像情况

为了弄清像散的起源,考虑光轴上的一点(如果透镜不存在其他像差),从透镜射出的波面是个球面,当波面向前传播时,将会聚为一个点。但是对于离轴的一个物点,从透镜射出的不是球面,其向前传播时不再会聚为一点,而是会聚为相互正交的两条线,叫做切向焦线和弧矢焦线。在这两条焦线之间的某处,像是圆形的,这个像叫做最小模糊圈。

切向焦点与弧矢焦点间的距离随着物点远离光轴而增加,因此,对于离光轴距离不同的物点,其切向焦点和弧矢焦点将分别处在如图 6.19 所示的两个曲面上。当这两个曲面重合时,该光学系统不存在像散。但是,即使二者重合,也可以证明最终的像面是弯曲的,这种像的缺陷叫做像场弯曲。

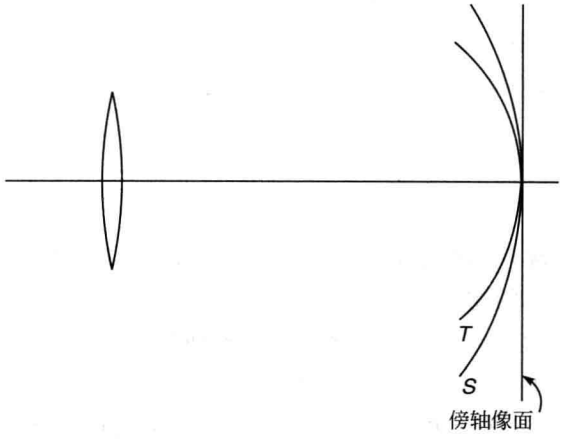


图 6.19　切向焦点与弧矢焦点

作为像散存在时成像的一个例子，观察如图 6.20(a)所示的与透镜光轴共轴的一个辐轮。因为在 T 面上，一个物点的像位于垂直于子午面的一条线上，从而在 T 面上辐轮的整个边缘会很好地聚焦，而辐条不能，如图 6.20(b)所示。类似地，在 S 面上，一个物点的像位于物面子午面内的一条线上，从而，在 S 面上辐条将聚焦，而边缘不会在此聚焦，如图 6.20(c)所示[①]。

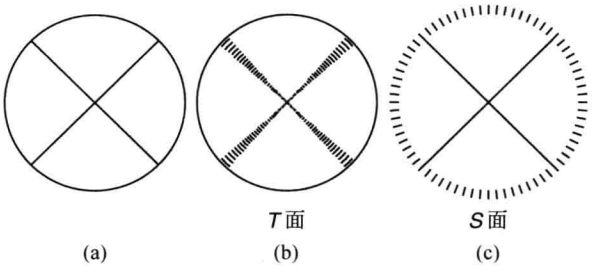


图 6.20

(a)与透镜光轴共轴的辐轮；(b)与(c)分别显示了在 T 面和 S 面上的成像

6.3.4 畸变

最后一种赛德尔像差叫做畸变，它是由系统放大率不均匀引起的。在讨论球差时，曾经提及对于一光学系统轴上一物点，其像只受球差影响。同理，如果在光学系统的任意平面放置一个针孔，则其像只受畸变影响。这是因为相应于物面上的任意一点，只有一根从该点发出的光线能够通过针孔，从而所有其他像差都不存在。显然，对于这样构造的光学系统，物面上的每一点都将成像为一个点。但是如果系统的放大率不均匀，成像将发生畸变。考察 4 个等间距的点 A,B,C,D，可以说明畸变现象，这四个点的像分别为 A',B',C',D'。数学上的分析显示

$$X_d = Mx_0 + E(x_0^2 + y_0^2)x_0 \tag{6.40}$$

$$Y_d = My_0 + E(x_0^2 + y_0^2)y_0 \tag{6.41}$$

式中(x_0, y_0)和(X_d, Y_d)分别为物和像的坐标，M 为系统的放大率，E 为畸变系数。如图 6.22(b)所示为相应于 E 为负值的畸变情况，叫做桶形畸变。考察如图 6.22(a)所示的一方格点的成像，就很容易理解畸变。假设放大率为 1，坐标为$(0,0),(h,0),(2h,0),(3h,0),(0,h),(0,2h),(0,3h),(h,h),(h,2h),(2h,h)\cdots$这些点的像分别位于$(0,0),(h+Eh^3,0),(2h+8Eh^3,0),(3h+27Eh^3,0),(0,h+Eh^3),(0,2h+8Eh^3),(0,3h+27Eh^3),(h+Eh^3,h+Eh^3),(h+Eh^3,2h+8Eh^3),(2h+8Eh^3,h+Eh^3)\cdots$。如果读者将这些点在纸上描出来，会看出，当 $E<0$ 时，将得到如图 6.22(b)所示的图像；同样地，当 $E>0$ 时，将得到如图 6.22(c)所示的图像。注意，每一个点的像仍然是一个点，但由于放大率不均匀，整个像是有畸变的。

① 译者解释辐轮在 T 面与 S 面成像情况：切向焦线是切向的，凡是物面上的切向线在此聚焦；而弧矢焦线是径向的，凡是物面上的径向线在此聚焦。辐轮是由边缘的切向线与辐条的径向线组成，因此，在 T 面边缘聚焦清晰，而在 S 面辐条聚焦清晰。

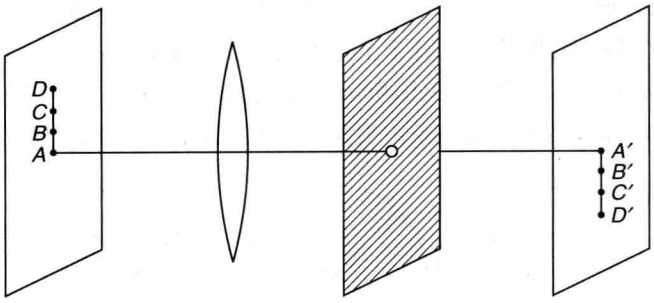


图 6.21　当光轴上放置一个针孔时，成像只受畸变影响

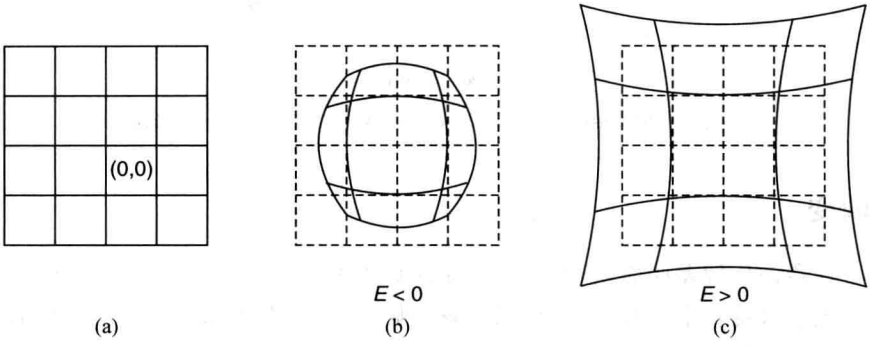


图　6.22

(a) 物；(b) $E<0$ 时的成像；(c) $E>0$ 时的成像。

小　结

- 对于一个多色光源，不同的波长分量(在折射后)将沿不同的方向传播，并成像于不同点，这导致了色差。如果考虑两个用不同材料制成的薄透镜，并将二者紧贴在一起，则当满足下面条件时，透镜组合的焦距对于蓝色光与红色光是一样的

$$\frac{\omega}{f}+\frac{\omega'}{f'}=0$$

式中

$$\omega=\frac{n_{\mathrm{b}}-n_{\mathrm{r}}}{n-1},\quad \omega'=\frac{n'_{\mathrm{b}}-n'_{\mathrm{r}}}{n'-1}$$

被称作色散本领。此外

$$n\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\frac{n_{\mathrm{b}}+n_{\mathrm{r}}}{2}\approx n_{\mathrm{y}},\quad n'\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\frac{n'_{\mathrm{b}}+n'_{\mathrm{r}}}{2}\approx n'_{\mathrm{y}}$$

式中 n_{b}，n_{y} 和 n_{r} 分别为第一个透镜材料对应于蓝色光、黄色光和红色光的折射率。类似地，n'_{b}，n'_{y}和 n'_{r}分别为第二个透镜材料相应的折射率。又由于 ω 和 ω' 都为正，f 和 f' 必须符号相反。

- 对于一透镜，(投射在透镜边缘)的边缘光线的聚焦点与傍轴光线的聚焦点不同，在光轴上，傍轴像与相应于边缘光线的像之间的距离被称为纵向球差。

- 当两个薄透镜组合间距等于它们的焦距差时，球差最小。

习　题

6.1 考察一厚度为 d、材料折射率为 n 的平板玻璃，放置于空气中。简单地运用斯涅尔定律，求出平板球差的表达式。并考虑是否还存在其他像差。

[**答案**：球差 $=-\dfrac{(n^2-1)dh^2}{2n^3u^2}$，式中 h 为光线投射的高度，u 为物点到玻璃平面的距离。]

6.2 为什么不能根据式(6.27)中使 R_1 和 R_2 趋于∞的方法来得到玻璃平板像的球差表达式。

6.3 求出玻璃平板像的色差表达式。

6.4 平面镜的成像有像差吗？

6.5 计算一薄平凸透镜的纵向球差。其中透镜材料折射率为 1.5，透镜凸面的曲率半径为 10cm，光线投射高度为 1cm。比较一下，凸面对着入射光线和平面对着入射光线两种情况下，球差值的不同。

6.6 考察一材料折射率为 1.5、焦距为 25cm 的透镜。假定入射光线高度 $h=0.5$cm，入射角 $\theta=45°$。计算这样的透镜当形状因子 q 变化时的球差与彗差的变化，并画出类似于如图 6.9 所示的变化图。

6.7 一焦距为 25cm 的消色差双胶合透镜由一个火石玻璃为材料的对称双凸透镜($n_b=1.50529$，$n_r=1.49776$)和一个冕牌玻璃凹透镜($n_b=1.66270$，$n_r=1.64357$)制成。计算透镜不同曲面的曲率半径和每个透镜的焦距。

参考文献和推荐读物

1. M. Born, and E. Wolf, *Principles of Optics,* Pergamon Press, Oxford, 1975.
2. M. Cagnet, M. Francon and J.C. Thierr, *Atlas of Optical Phenomena,* Springer-Verlag, Berlin, 1962.
3. A. Ghatak and K. Thyagarajan, *Contemporary Optics,* Plenum Press, New York, 1978. [Reprinted by Macmillan India, New Delhi.]
4. H.H Hopkins, *Wave Theory of Aberrations,* Oxford University Press, London, 1950.
5. C.J. Smith, 'A Degree Physics', Part III, *Optics,* Edward Arnold Publishers, London, 1960.
6. W.T. Welford, *Geometrical Optics,* North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1962.
7. W.T. Welford, *Aberrations of the Symmetrical Optical System,* Academic Press, New York, 1974.

第二部分

振动与波动

这一部分(包含5章)讨论了许多物理现象背后的有趣实验,例如,电离层对电磁波的反射、落日呈现红色、水波传播、冲击波、脉冲色散等。第7章以简谐运动开篇(它是与波动相联系的最基本的振动形式),随后推导了折射率随频率变化规律的公式。第8章和第9章讨论了傅里叶级数和傅里叶变换,它们被广泛应用于研究色散媒质导致光脉冲传播时畸变的问题中(第10章)。波动方程的推导与求解是波动传播的基本物理问题,将在第11章中讨论。第12章讨论了惠更斯原理,并用来推导了反射定律和斯涅耳折射定律。

第7章 简谐运动、受迫振动和折射率的起源

由波动力学理论所提供的原子标准图像指出，就目前所涉及的光的问题而言，电子的行为就如同它们被弹簧拴着一样，所以我们假设电子受到一个线性的恢复力，与电子质量 m 一起，使电子的行为像一个共振频率为 ω_0 的小振子……光波的电场使气体中分子极化，进而产生振荡的电偶极矩。振荡电荷会产生加速度，从而辐射出新的光场波。这一新产生的光场与原来的光场发生干涉，形成一个改变了的光场，而这一光场等效于在原始光波的基础上产生了一个相移。因为产生的相移与媒质材料的厚度成正比，那么，这个效果就等同于在媒质材料中产生一个不同的相速度。

——理查德·费曼，《费曼物理学讲义》，第一卷

7.1 引言

简谐运动是与波动相联系的最基本的振动形式；在 7.2 节中，将讨论简谐运动，在 7.3 节中将研究因阻尼引起的振动效果。如果一个周期性的力作用在振动系统上，该系统就会经历我们熟知的受迫振动；在 7.4 节，将学习这种振动如何帮我们理解折射率的起源（见 7.5 节），甚至理解瑞利散射（见 7.6 节），而瑞利散射可以解释日落（或日出）呈现红色和天空呈现蓝色的原因，彩色照片见本书文前附录图表页中的图 7。

7.2 简谐运动

周期运动是每经过一定的时间间隔就重复它本身的一种运动，最简单的周期运动就是简谐运动，其位移随时间作正弦变化。为了理解简谐运动，考察一点 P，以角速度 ω，在半径为 a 的圆周上旋转（见图 7.1）。以圆心为原点，并且假定在 $t=0$ 时，点 P 在 x 轴上（即在点 P_0 处），则在任意时刻 t 所处的位置 P，有 $\angle POX=\omega t$。

设点 A 为点 P 向 x 轴所引垂线的垂足，有

$$\overline{OA} = a\cos\omega t \tag{7.1}$$

当点 P 在圆周上旋转时，点 A 就在直径上以原点为中心来回运动。当点 P 在点 P_1 位置时，垂足在点 O。这可以由式(7.1)得到，因为当点 P 与点 P_1 重合时，$\omega t=\pi/2$，则 $a\cos\omega t=a\cos\pi/2=0$。当点 P 继续运动时，垂足移动到原点的另一边，因此 $\overline{OA}$ 为负，这也可以由式(7.1)得到，由于这时的 ωt 大于 $\pi/2$。当点 P 与点 P_2 重合时，$\overline{OA}=\overline{OP_2}=-a$。点 P 再向点 P_3 运动时，$\overline{OA}$ 开始逐渐减小，最后在点 P 与点 P_3 重合时，减小到 0。点 P 经过点 P_3

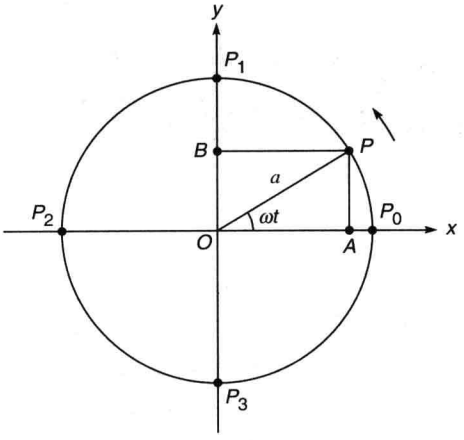


图 7.1　点 P 以匀角速度 ω 在半径为 a 的圆周上沿逆时针方向旋转。点 P 在任一直径上的垂线的垂足都在做简谐运动。点 P_0 是该点在 $t=0$ 时刻的位置。

后，$\overline{OA}$又开始增大，最后当点 P 与点 P_0 重合时，取得值 a。经过点 P_0 后，运动又开始重复。

位移随时间作正余弦变化的运动(如式(7.1)所示)称为简谐运动。因此，当一点在圆周上以匀角速度旋转时，其端点向任意一条直径所引垂线的垂足都在作简谐运动。a 称为运动的振幅，而运动周期 T 就是旋转一周所需要的时间。因为角速度为 ω，所以，旋转一周所需要的时间就是 $2\pi/\omega$。于是

$$T = 2\pi/\omega \tag{7.2}$$

时间周期的倒数为频率

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

或者

$$\omega = 2\pi\nu \tag{7.3}$$

应该指出，也可以研究点 B 的运动，点 B 是点 P 向 y 轴所引垂线的垂足。距离$\overline{OB}$为

$$\overline{OB} = y = a\sin\omega t \tag{7.4}$$

为方便起见，前面选取了点 P 在 x 轴上的时刻为 $t=0$。但时刻 $t=0$ 的选取是任意的，也可以选取点 P 在点 P'的时刻为 $t=0$(见图 7.2)。如果$\angle P'OX=\theta$，那么，点 P 在任意时刻 t，在 x 轴上的投影就是

$$\overline{OA} = x = a\cos(\omega t+\theta) \tag{7.5}$$

式(7.5)中的$(\omega t+\theta)$称为相位，θ 为初相位。根据上述讨论，显然，θ 的值是完全任意的，它取决于开始测量的时刻。

接下来考察以相同角速度在圆周上旋转的两点点 P 和点 Q，它们在 $t=0$ 时刻的位置分别为点 P'和点 Q'。设$\angle P'OX$ 和$\angle Q'OX$ 分别为 θ 和 ϕ(见图 7.3)。显然，在任意时刻 t，垂线的垂足到原点的距离为

$$x_P = a\cos(\omega t+\theta) \tag{7.6a}$$

$$x_Q = a\cos(\omega t+\phi) \tag{7.6b}$$

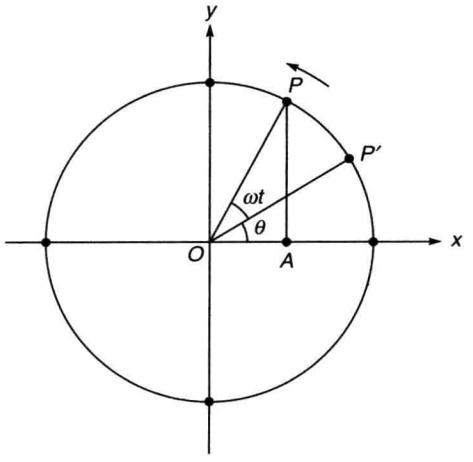


图 7.2　在 $t=0$ 时刻，点 P 在点 P' 处，因此，初相位为 θ。

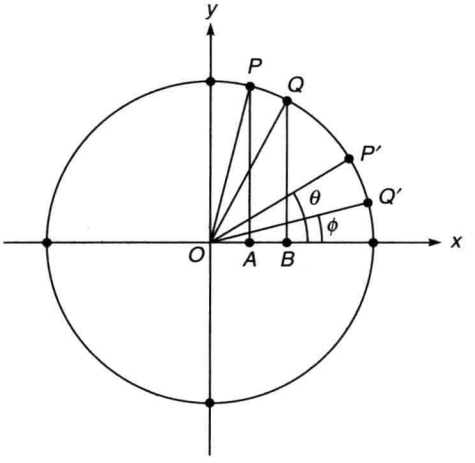


图 7.3　点 A 和点 B 以相同的频率 ω 作简谐运动。点 A 和点 B 的初相位分别为 θ 和 ϕ。

式中的量

$$(\omega t+\theta)-(\omega t+\phi)=\theta-\phi \tag{7.7}$$

表示两个简谐运动之间的相位差，并且如果 $\theta-\phi=0$（或 π 的偶数倍），就称两运动是同相的；如果 $\theta-\phi=\pi$（或 π 的奇数倍），称两运动是反相的。当选取不同的时间原点时，θ 和 ϕ 的值将只改变一个相同的附加常数，因此，相位差（$\theta-\phi$）与时刻 $t=0$ 的选取无关。

这样，做简谐运动的粒子的位移可以写为

$$x=a\sin(\omega t+\theta) \tag{7.8}$$

粒子的速度和加速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a\omega\cos(\omega t+\theta) \tag{7.9}$$

$$f=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-a\omega^2\sin(\omega t+\theta)$$

或者

$$f=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2x \tag{7.10}$$

式(7.10)表明粒子的加速度和位移成反比，负号表示加速度总是指向原点方向。可以根据式(7.10)把简谐运动定义为一个粒子在直线上的运动方式为：其加速度正比于它离开直线上固定一点的位移，且加速度的方向总是指向该固定点（这里指点 $x=0$，通常称为平衡位置）。若以粒子的质量乘以式(7.10)，就得到作用在粒子上力的表达式

$$F=mf=-m\omega^2x$$

或者

$$F=-kx \tag{7.11}$$

式中 $k(=m\omega^2)$ 称为“力常数”。也可以由式(7.11)出发，完全等价地导出简谐运动的表达式。这一点很容易看出，由于力是在 x 方向作用的，所以，运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F=-kx$$

或者

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$$

也可写为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \tag{7.12}$$

式中 $\omega^2=k/m$。式(7.12)的通解可以表达为

$$x=A\sin\omega t+B\cos\omega t \tag{7.13}$$

也可以写为以下两种形式中的一种

$$x=a\sin(\omega t+\theta) \tag{7.14}$$

或者

$$x=a\cos(\omega t+\theta) \tag{7.15}$$

它们都可以描述简谐运动。

7.2.1 简谐运动的举例

在这一节,我们将讨论三种简单的简谐运动。

1. 单摆

简谐运动最简单的例子是在重力场中单摆摆锤的运动。如果单摆的摆锤稍微离开平衡位置(见图7.4),有竖直向下的重力 mg 和沿 $B'A$ 方向的拉力 T 作用在摆锤上。在平衡位置(AB),拉力与重力等大反向。但是,在移动后的位置上,拉力 T 与重力方向不同。如果将重力沿摆线方向和垂直于摆线的方向分解,可以看出,分力 $mg\cos\theta$ 与拉力 T 平衡,而分力 $mg\sin\theta$ 是恢复力。单摆的运动是沿着一段圆弧进行的,但是如果单摆的摆长很长,而且 θ 很小,那么,就可以近似地认为摆锤的运动是在一直线上进行的(见图7.4(b))。在这一近似下,可以假设力的方向始终指向点 B,且力的大小为[①]

$$mg\sin\theta\approx mg\frac{x}{l} \tag{7.16}$$

因此,运动方程为

$$F=m\frac{d^2x}{dt^2}=-mg\frac{x}{l} \tag{7.17}$$

或者

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \tag{7.18}$$

式中 $\omega^2=g/l$。式(7.18)和式(7.12)有相同的形式,因此摆锤的运动为简谐运动,其时间周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{7.19}$$

应该指出,只要 $\theta\lesssim4°$,时间周期的表达式就是颇为精确地(即运动可以近似地认为是简谐运动)。

① 假设 θ 足够小以至于满足 $\sin\theta\approx\theta$,式中 θ 的单位为 rad,上述近似在 $\theta\lesssim0.07\text{rad}(\approx4°)$ 适用。

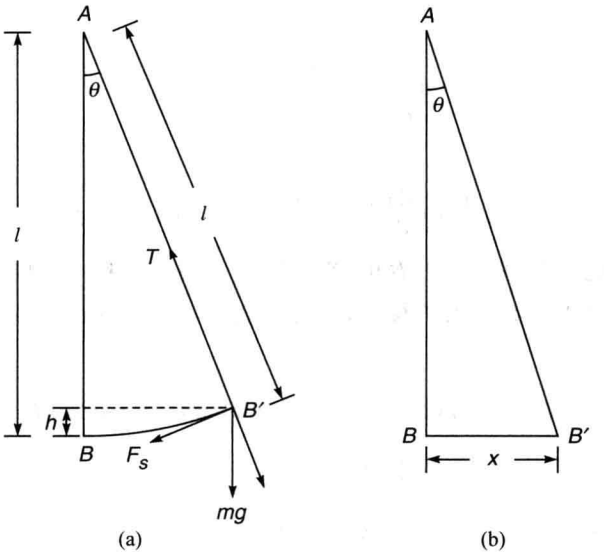


图　7.4

(a) 当摆锤离开平衡位置时，作用在摆锤上的力的图示。F_S 是恢复力，等于 $mg\sin\theta$；(b) 若角 θ 很小，可近似地假设摆锤的运动是在一直线上进行的。

下面考察两个全同的单摆运动。它们以相同的振幅 a 振动(见图 7.5)。设在 $t=0$ 时，其中一个摆的摆锤处在右侧的最大位移位置(见图 7.5(a))，另一个摆的摆锤在平衡位置处且正向右运动(见图 7.5(b))。如果从摆的平衡位置开始度量位移，那么，这两个摆的位移分别为

$$\begin{cases} x_1 = a\cos\omega t \\ x_2 = a\sin\omega t = a\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \tag{7.20}$$

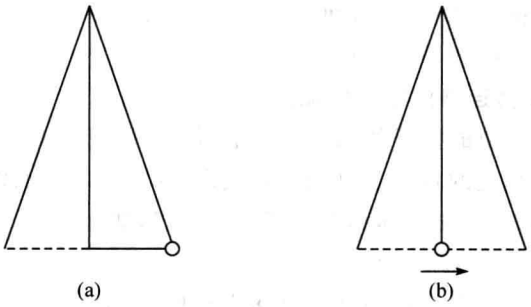


图 7.5　(a)和(b)表示两个全同摆的运动，它们以相同的振幅振动，但是相位差为 $\pi/2$。图中的小圆圈表示摆锤在 $t=0$ 时的位置。

可见，两个摆作的简谐运动有一个相位差 $\pi/2$，实际上是第一个单摆的相位超前了 $\pi/2$。需要提醒的是，如图 7.5(b)所示，如果单摆向左运动，则运动方程为

$$x_2 = -a\sin\omega t = a\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

即第二个单摆的相位将超前 $\pi/2$。一般来说，单摆的位移可以写为

$$x = a\cos(\omega t + \phi) \tag{7.21}$$

则摆锤的速度为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -a\omega\sin(\omega t + \phi) \tag{7.22}$$

其动能为

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2(\omega t + \phi) \tag{7.23}$$

比较式(7.21)和式(7.23),可以看出,当摆锤处于最大位移时,其动能为零;而当摆锤通过平衡位置时,动能最大。在最大位移处,动能转变成势能。如图7.4(a)所示,可以得出势能为

$$V = mgh = mgl(1-\cos\theta) = mgl2\sin^2\frac{\theta}{2} \approx 2mgl\left(\frac{\theta}{2}\right)^2$$

[θ 的单位为 rad]

$$\approx \frac{1}{2}mgl\left(\frac{x}{l}\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{g}{l}\right)x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \tag{7.24}$$

或者

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2a^2\cos^2(\omega t + \phi) \tag{7.25}$$

式中用到了 $\omega^2 = g/l$。令势能在 x 和 $x+\mathrm{d}x$ 处分别为 V 和 $V+\mathrm{d}V$,那么,有

$$\mathrm{d}V = -F\mathrm{d}x = +kx\mathrm{d}x \tag{7.26}$$

因此

$$V = \int_0^x kx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2 \tag{7.27}$$

式中假定 $x=0$ 处为势能零点。因此,总能量 E 为

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\omega^2a^2 \tag{7.28}$$

式(7.28)正如之前预计的,总能量与时间无关。由式(7.28)[①]也可以进一步看出,简谐运动的能量与振幅的平方和频率的平方成正比。

2. 由两个拉伸的弹簧连着的物体的振动

简谐运动的另一个简单的例子如图7.6所示,是由两个拉伸的弹簧连着的物体 m 在光滑桌面上的运动。两个弹簧的自然长度为 l_0(见图7.6(a)),当物体处于平衡位置时,对应的弹簧拉伸后的长度为 l。如果物体稍微离开平衡位置,那么,作用在物体上的合力就是

$$F = k[(l-x)-l_0] - k[(l+x)-l_0] = -2kx \tag{7.29}$$

式中 k 为弹簧力常数。再一次得到一个与位移成正比,方向指向平衡位置的力,因此,从本质上来说,这个物体在没有摩擦的桌面上的运动属于简谐运动。

3. 拉紧的弦的振动

当一根拉紧的弦(如弦音计上的一根弦)以它的基模振动时(见图7.7),弦上各点都作简谐运动,它们有不同的振幅,但是初相位相同。各点的位移可以写成如下形式

① 原书在这里指式(7.26),显然有误。

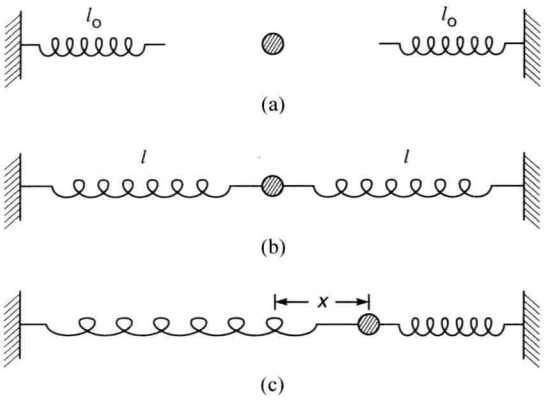


图 7.6　自然长度为 l_0 的两根弹簧(见图(a)),因与物体相连而被拉伸到长度 l(见图(b))。如果物体离开平衡位置一个很小的距离 x(见图(c)),物体将作简谐运动。

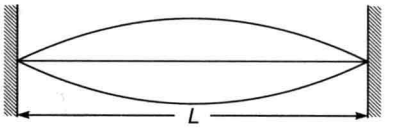


图 7.7　两端固定的一根弦以它的基模振动时,所有质点都以同一频率和同一初相位作简谐运动,但它们有不同的振幅。

$$y = a\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\cos\omega t \tag{7.30}$$

在 $x=0$ 与 $x=L$ 处,振幅为零;而在 $x=L/2$ 处,振幅最大。另一方面,如果弦以它的第一谐模振动,那么,左边半根弦上各点的振动与右边半根弦上各点的振动反相。

7.3　阻尼简谐运动

在 7.2 节,已经得出粒子作简谐运动时,其运动方程的形式为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x(t) = 0 \tag{7.31}$$

方程的解由下式给出

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) \tag{7.32}$$

式中 A 为振幅,ω_0 为简谐运动的角频率。式(7.32)告诉我们,运动将永远继续下去,但实际上,任何系统(如音叉)的振幅都是逐渐减小,直至最后停止振动。同理,单摆的摆锤经过一定时间后也会停下来。这种现象正是由于存在阻尼力所致,当粒子运动时,阻尼力就会起作用。对于一个振动的单摆来说,阻尼力主要是由周围媒质的粘滞性所引起的。因此,在液体中的阻尼力要比在气体中大得多。一般说来,阻尼力与速度的关系相当复杂;然而,在一级近似下,可以假设力与粒子的速度成正比,这也与粒子静止时没有阻尼力的事实相符。在这种模型中,运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\Gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - k_0 x \tag{7.33}$$

式中常数 Γ 取决于阻尼力的大小;为了避免与波矢量 $\boldsymbol{k}$ 相混淆,这里用 k_0 来表示力常数。式(7.33)也可以写为如下式所示

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2K\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t) = 0 \tag{7.34}$$

式中

$$2K = \frac{\Gamma}{m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m}} \tag{7.35}$$

为求解式(7.34),引入一个新变量 $\xi(t)$,如下定义

$$x(t) = \xi(t)\mathrm{e}^{-Kt} \tag{7.36}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} - K\xi(t)\right]\mathrm{e}^{-Kt}$$

且

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \left[\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} - 2K\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} + K^2\xi(t)\right]\mathrm{e}^{-Kt}$$

代入式(7.34),可得

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} + (\omega_0^2 - K^2)\xi(t) = 0 \tag{7.37}$$

式(7.37)与式(7.31)类似,但$(\omega_0^2 - K^2)$可以为正,也可以为负或者等于零,这要取决于阻尼力的大小。因此,考虑以下三种情况。

1. 第Ⅰ种情况($\omega_0^2 > K^2$)

如果阻尼很小,则 $\omega_0^2 > K^2$,且式(7.37)的解为

$$\xi(t) = A\cos[\sqrt{\omega_0^2 - K^2}t + \theta] \tag{7.38}$$

或者

$$x(t) = A\mathrm{e}^{-Kt}\cos[\sqrt{\omega_0^2 - K^2}t + \theta] \tag{7.39}$$

式中 A 和 θ 是由 $t=0$ 时运动的振幅和相位决定的常数。式(7.39)为阻尼简谐运动(见图7.8)表达式。需要注意振幅随时间按指数规律减小,并且振动的时间周期($2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - K^2}$)大于无阻尼时的情况。

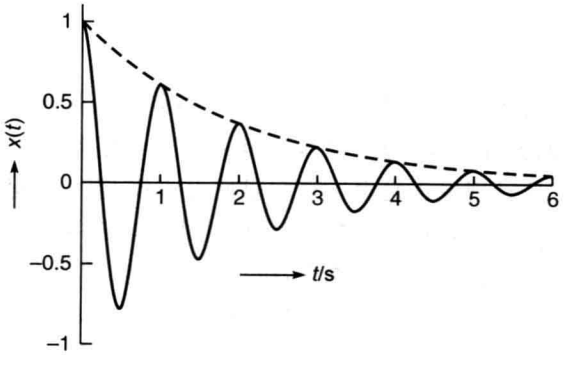


图 7.8 阻尼简谐运动的振幅按指数规律减小。本图对应 $\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - K^2}} = 1\mathrm{s}$,$K = 0.5\mathrm{s}^{-1}$ 的情况。

2. 第Ⅱ种情况($K^2 > \omega_0^2$)

如果阻尼很大,则 $K^2 > \omega_0^2$,且式(7.37)可写为以下形式

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}-(K^2-\omega_0^2)\xi(t)=0 \tag{7.40}$$

其解为

$$\xi(t)=A\exp(\sqrt{K^2-\omega_0^2}t)+B\exp(-\sqrt{K^2-\omega_0^2}t) \tag{7.41}$$

$$x(t)=A\exp[(-K+\sqrt{K^2-\omega_0^2})t]+B\exp[(-K-\sqrt{K^2-\omega_0^2})t] \tag{7.42}$$

这样，可以得到两种运动；一种运动的位移单调下降到零，另一种运动的位移先增大到极大值，然后再减小到零（见图 7.9）。这两种情形都不存在振荡，因而，运动被称为“过阻尼”或“不振荡”。一个典型的例子就是单摆在粘滞度很大的液体（如甘油）中的运动，此时，单摆只能完成一次振动的几分之一便要停下来。

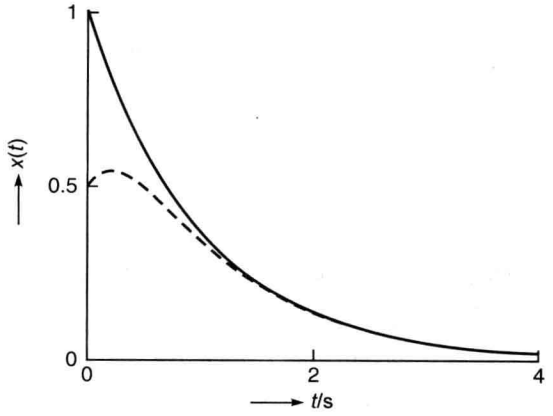


图 7.9　过阻尼运动位移随时间的变化示意图。实线和虚线分别代表 $B=0$ 和 $B=-A/2$的情形（见文献[42]）。在进行计算时，假设 $K=2\mathrm{s}^{-1}$，$\sqrt{K^2-\omega_0^2}=1\mathrm{s}^{-1}$。

3. 第Ⅲ种情况（$K^2=\omega_0^2$）

当 $K^2=\omega_0^2$ 时，式(7.37)变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}=0 \tag{7.43}$$

它的解为

$$\xi=At+B \tag{7.44}$$

则

$$x(t)=(At+B)\mathrm{e}^{-Kt} \tag{7.45}$$

这种运动也是非振荡的，称这种运动为“临界阻尼”运动。

7.4　受迫振动

现在考察一个按正弦周期变化的力（见 8.3 节）对振动系统的运动的影响。如果外力的频率为 ω，则运动方程为（见式(7.33)）

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F\cos\omega t-\Gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-k_0x \tag{7.46}$$

式中右侧的第一项代表外力;其他项与式(7.33)相同。式(7.46)可以改写为以下形式[①]

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2K\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x(t)=G\cos\omega t \tag{7.47}$$

式中 $G=F/m$,其他符号已经在7.3节中给出了定义。对于式(7.47)的特解,先尝试解

$$x(t)=a\cos(\omega t-\phi) \tag{7.48}$$

则

$$\frac{dx}{dt}=-a\omega\sin(\omega t-\phi)$$

且

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-a\omega^2\cos(\omega t-\phi)$$

把以上关于 $x(t)$,$\frac{dx}{dt}$和$\frac{d^2x}{dt^2}$的式子代入式(7.47),可得

$$\begin{aligned}&-a\omega^2\cos(\omega t-\phi)-2Ka\omega\sin(\omega t-\phi)+a\omega_0^2\cos(\omega t-\phi)\\&=G\cos[(\omega t-\phi)+\phi]\end{aligned} \tag{7.49}$$

式中把 $G\cos\omega t$ 表示成 $G\cos[(\omega t-\phi)+\phi]$。则

$$\begin{aligned}&a(\omega_0^2-\omega^2)\cos(\omega t-\phi)-2Ka\omega\sin(\omega t-\phi)\\&=G\cos(\omega t-\phi)\cos\phi-G\sin(\omega t-\phi)\sin\phi\end{aligned} \tag{7.50}$$

因为式(7.50)在任意时刻都成立,必然有

$$a(\omega_0^2-\omega^2)=G\cos\phi \tag{7.51}$$

$$2Ka\omega=G\sin\phi \tag{7.52}$$

把两式平方相加,可得

$$a=\frac{G}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4K^2\omega^2]^{1/2}} \tag{7.53}$$

而且

$$\tan\phi=\frac{2K\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \tag{7.54}$$

由于 K,ω 和 a 都为正,所以只要 $\sin\phi$ 为正,即 ϕ 必须在第一或第二象限,就可以唯一地确定 ϕ。

还必须将齐次方程(7.34)的解加入由式(7.48)给出的解,才能得到非齐次方程的通解。因此,在假定 $\omega_0^2>K^2$(即弱阻尼)的情况下,式(7.47)的通解为

$$x(t)=Ae^{-Kt}\cos(\sqrt{\omega_0^2-K^2}t-\theta)+a\cos(\omega t-\phi) \tag{7.55}$$

式子右边的第一项表示最终要消失的暂态解(与系统的固有振动相对应);第二项代表稳态解,对应于外力作用下的受迫振动。注意,受迫振动的频率与外力的频率相等。

7.4.1 共振

受迫振动的振幅为

$$a=\frac{G}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4K^2\omega^2]^{1/2}} \tag{7.56}$$

① 需要注意,式(7.47)右侧项与 x 无关,这样的方程就叫作非齐次方程。形如式(7.34)的方程叫作齐次方程。

取决于驱动力的频率，并且当$(\omega_0^2-\omega^2)^2+4K^2\omega^2$取最小值时，振幅有最大值，即当

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4K^2\omega^2]=0$$

或者

$$2(\omega_0^2-\omega^2)(-2\omega)+8K^2\omega=0$$

或者

$$\omega=\omega_0\left(1-\frac{2K^2}{\omega_0^2}\right)^{1/2} \tag{7.57}$$

因此，当ω由式(7.57)给出时，振幅取最大值[①]，此时称为振幅共振。在阻尼很小时，发生共振的频率十分接近系统的固有频率。振幅随ω的变化关系如图 7.10 所示。注意，随着阻尼的减小，极大值会变得十分尖锐陡峭，并且当偏离共振频率时，振幅将迅速减小。振幅的极大值由下式给出

$$a_{\max}=\frac{G}{\left[(2K^2)^2+4K^2\omega_0^2\left(1-\frac{2K^2}{\omega_0^2}\right)\right]^{1/2}}=\frac{G}{2K(\omega_0^2-K^2)^{1/2}}=\frac{G}{2K(\omega^2+K^2)^{1/2}} \tag{7.58}$$

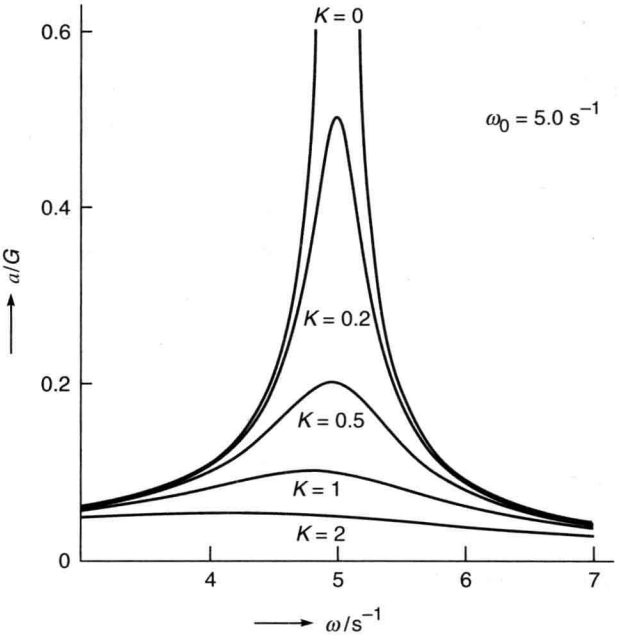


图 7.10　在不同 K 值下，振幅随外加驱动力的频率的变化。计算结果对应于$\omega_0=5\mathrm{s}^{-1}$的情况，$K$ 的单位为 s^{-1}。注意，随着阻尼的增大，共振出现在 ω 值较小的地方。

因此，随着阻尼的增大，极大值将出现在 ω 更小的地方，且共振曲线也将变得不那么陡峭。

① 在$K^2\geqslant\frac{1}{2}\omega_0^2$的条件下，不存在共振。

为了讨论受迫振动的相位(见式(7.54)),由式(7.54)可以看出,在阻尼很小的时候,除了接近共振区的范围,相位角是很小的。当 $\omega=\omega_0$ 时,$\tan\phi=\infty$,且 $\phi=\pi/2$,即受迫振动的相位比驱动力超前了 $\pi/2$。当驱动力的频率增大到超过 ω_0 时,相位也随之增大,并趋近于 π(见图 7.11)。

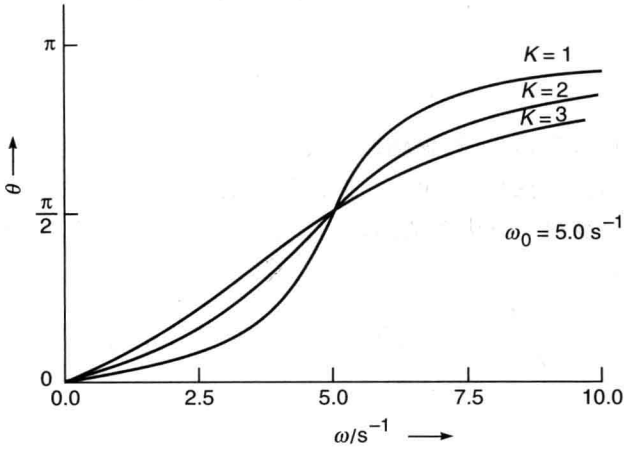


图 7.11　受迫振动的相位随驱动力频率的变化而变化。

受迫振动所有显著的特点都可以很容易地用如图 7.12 所示的装置来演示。图中 AC 是一根带有可移动摆锤 B 的金属杆,LM 是带有摆锤 M 的单摆。金属杆和单摆悬挂在弦线 PQ 上,如图 7.12 所示。把 B 放在最低位置,当金属杆 AC 开始振动时,单摆 LM 也振动起来。摆锤 B 向上移动时,振动的时间周期开始减小,杆的摆动频率变得接近于单摆的固有频率,最后共振条件得到满足。共振时,单摆摆动的振幅有极大值,且两振动之间的相位差接近于 $\pi/2$,即当金属杆处在最低位置且向右运动时,单摆处在左边的极大位置。如果摆锤 B 再向上移动,则振动的频率增大,受迫振动的振幅将减小。

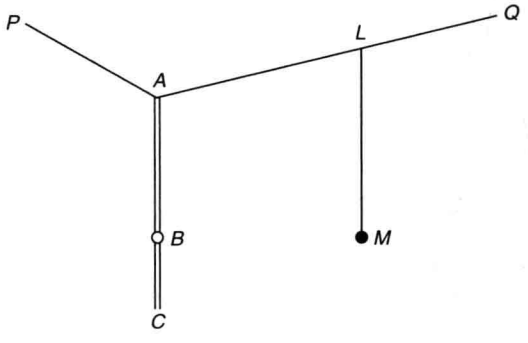


图 7.12　演示受迫振动的装置。

7.5　折射率的起源

在这一节中,将研究折射率的起源。我们知道,原子是由一个质量很重的带正电的原子核和包围着核的一些电子组成。在最简单的原子模型中,假设电子弹性地束缚在它们的平衡位置上,因此,当这些电子在电场的作用下发生位移时,与位移成比例的恢复力将作用在电子上,使电子回复到它们的平衡位置。根据这一模型,在存在外电场 $\boldsymbol{E}$ 的情况下,电子的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2}+k_0\boldsymbol{x}=-q\boldsymbol{E} \tag{7.59}$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2\boldsymbol{x}=-\frac{q}{m}\boldsymbol{E} \tag{7.60}$$

式中 $\boldsymbol{x}$ 为电子的位置，m 和 $-q$ 表示电子的质量和电荷（$q\approx+1.6\times10^{-19}\mathrm{C}$），$k_0$ 为力常数，$\omega_0(=\sqrt{k_0/m})$ 为振子的特征频率。假设

$$\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{x}}E_0\cos(kz-\omega t) \tag{7.61}$$

即电场是在 x 方向振动，其振幅为 E_0，且沿 z 方向传播。$\hat{\boldsymbol{x}}$ 表示 x 方向的单位矢量，且 $k=2\pi/\lambda$，式中 λ 为波长。因此

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2x=-\frac{qE_0}{m}\cos(kz-\omega t) \tag{7.62}$$

式中用相应的标量代替了矢量，这是因为位移和电场的方向相同。除了阻尼项之外，式(7.62)与式(7.46)类似，因此，相应于受迫振动的解由下式给出[①]

$$x=-\frac{qE_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos(kz-\omega t) \tag{7.63}$$

在最简单的原子模型中，假设（电子所形成的）负电荷的中心位于原子核的中心。在存在电场的情况下，负电荷的中心就会偏离原子核的位置，使得原子有了一定的偶极矩。特别是，当正电荷 $+q$ 在原点，负电荷 $-q$ 在距离为 x 的位置，偶极矩为 $-qx$；那么，如果单位体积内有 N 个色散电子[②]，则极化强度矢量（即单位体积内的偶极矩）由下式给出

$$\boldsymbol{P}=-Nq\boldsymbol{x}=\frac{Nq^2}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\boldsymbol{E}=\chi\boldsymbol{E} \tag{7.64}$$

式中

$$\chi=\frac{Nq^2}{m(\omega_0^2-\omega^2)} \tag{7.65}$$

被称为材料的电极化率。介电常数由式(7.66)给出（见第 23 章）

$$\varepsilon=\varepsilon_0+\chi \tag{7.66}$$

或者

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}=1+\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0(\omega_0^2-\omega^2)} \tag{7.67}$$

$\varepsilon/\varepsilon_0$ 为相对介电常数，它等于折射率的平方（见第 23 章），那么

$$n^2=1+\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0\omega_0^2}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1} \tag{7.68}$$

式(7.68)表明折射率与频率有关，这一现象称为色散。假设特征频率 ω_0 位于远紫外区（见式(7.74)）[③]，$\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1}$ 的值在整个可见光区段都为正。并且，当 ω 增大时，n^2 也随之增

① 注意，在没有阻尼的情况（即当 $\Gamma=0$ 时），$\phi=0$，见式(7.54)。

② 理想气体一个分子中的“色散电子”的数量等于分子的价数。例如，H_2 的价数为 2，N_2 的价数为 6，如此类推。

③ 这也可以从经典电动力学得出，一个以频率为 ω_0 振动的振荡偶极子，将辐射频率为 ω_0 的电磁波。作为一个例子，考虑氢原子，那么，由 $\hbar\omega_0\approx13.6\mathrm{eV}$ 可得 $\omega_0\approx2\times10^{16}\mathrm{s}^{-1}$。这一频率对应于远紫外区。

大,即折射率随频率的增大而增大,这称为正常色散。如果进一步假设 $\omega/\omega_0 \ll 1$,那么

$$\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1} \approx 1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$$

则

$$n^2 \approx 1+\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0\omega_0^2}\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\approx 1+\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0\omega_0^2}+\frac{4\pi^2c^2Nq^2}{m\varepsilon_0\omega_0^4}\frac{1}{\lambda_0^2} \tag{7.69}$$

式中 $\lambda_0=2\pi c/\omega$ 是自由空间中的波长。式(7.69)可以写为

$$n^2 = A+\frac{B}{\lambda_0^2} \tag{7.70}$$

这就是著名的柯西(Cauchy)关系式。对于氢气,在实验中得到的 n^2 随 λ_0 的变化可由式(7.71)表示

$$n^2 = 1+2.721\times10^{-4}+\frac{2.11\times10^{-18}}{\lambda_0^2} \tag{7.71}$$

式中的波长以 m 为单位来量度。上面的数据对应于 0℃、76cm 汞柱的情况(见参考文献[9])。即

$$\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0\omega_0^2} = 2.721\times10^{-4} \tag{7.72}$$

$$\frac{4\pi^2c^2Nq^2}{m\varepsilon_0\omega_0^4} = 2.11\times10^{-18}\,\mathrm{m}^2 \tag{7.73}$$

如果用式(7.73)除以式(7.72),可得

$$\frac{4\pi^2c^2}{\omega_0^2} = \frac{2.11\times10^{-18}}{2.721\times10^{-4}}$$

或者

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 3\times10^{15}\,\mathrm{s}^{-1} \tag{7.74}$$

这确实是在紫外区。由式(7.72)和式(7.73)消去 ω_0,可得

$$\frac{Nq^2}{4\pi^2c^2\varepsilon_0 m} \approx 3\times10^{10}\,\mathrm{m}^{-2} \tag{7.75}$$

又在标准温度和标准大气压的情况下,22400cc 的 H_2 含有 6×10^{23} 个分子,则

$$N = 2\times\frac{6\times10^{23}}{22400\times10^{-5}}\mathrm{m}^{-3} \approx 5\times10^{25}\,\mathrm{m}^{-3}$$

式中的因子 2 是因为一个氢分子包含两个电子。那么

$$\frac{Nq^2}{4\pi^2c^2\varepsilon_0 m} \approx \frac{5\times10^{25}\times(1.6\times10^{-19})^2}{4\times\pi^2\times9\times10^{16}\times8.85\times10^{-12}\times9.1\times10^{-31}} = 4\times10^{10}(\mathrm{m}^{-2})$$

与式(7.75)的定性分析一致。

值得一提的是,对于由自由电子组成的气体(如在上层大气的情况),不存在恢复力,因此必须令 $\omega_0=0$。这样,折射率的表达式变为(见式(7.67))

$$n^2 = 1-\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0\omega^2} \tag{7.76}$$

式中 N 表示自由电子的密度。式(7.76)表明折射率比 1 小。但是,这并不意味着在自由空间传送信号的速度可以大于光速(见第 10 章)。引用费曼的话:

对于自由电子，$\omega_0=0$(不存在弹性恢复力)。在我们的色散公式中，令 $\omega_0=0$ 就可以推出在平流层中无线电波折射率的正确形式，式中 N 表示平流层中自由电子的密度(单位体积中的自由电子数)。但是让我们再来看一下这个公式，如果我们用 X 射线照射物体，或者用无线电波(或者任意电波)照射自由电子，$(\omega_0^2-\omega^2)$ 这一项就变为负的，于是，我们将得到 $n<1$ 的结果。这意味着在物质中波的有效速度比光速 c 还快！这会是正确的吗？这是正确的。尽管人们说传送信号的速度不可能比光速还快，然而在特定的频率下，材料的折射率既可以大于 1，也可以小于 1，这一点是真的。

式(7.76)通常写为

$$n^2=1-\left(\frac{\omega_P}{\omega}\right)^2 \tag{7.77}$$

式中

$$\omega_P=\left(\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}\right)^{1/2} \tag{7.78}$$

这就是等离子体频率。注意，当 $\omega<\omega_P$ 时，折射率是纯虚数，这会导致电磁波的衰减；当 $\omega>\omega_P$ 时，折射率是实数。的确，在 1933 年，伍德(Wood)发现碱金属对紫外光是透明的。比如对于钠蒸汽，如果假设折射率主要是由自由电子引起的，并且每一个原子有 1 个自由电子，那么

$$N=\frac{6\times10^{23}\times0.9712}{22.99}\approx2.535\times10^{22}(\mathrm{cm}^{-3})$$

式中已假设钠的原子质量为 22.99，且它的密度为 $0.9712\mathrm{g/cm}^3$。代入数据 $m\approx9.109\times10^{-31}\mathrm{kg}$，$q\approx1.602\times10^{-19}\mathrm{C}$ 和 $\varepsilon_0\approx8.854\times10^{-12}\mathrm{C/(N\cdot m^2)}$，可得

$$\lambda_P\left(=\frac{2\pi c}{\omega_P}\right)\approx2098\text{Å}$$

因此，对于 $\lambda<2098$Å，钠的折射率将变为实数，且钠金属汽也会变为透明的。相应的实验值为 2100Å。对于锂、钾和铷的 λ_P 的理论值和实验值，将在习题 7.7 中讨论。

正如上面所提到的，式(7.76)给出了对于无线电波在平流层中的折射率的准确关系；在 3.4.3 节，根据式(3.76)，研究了电磁波在电离层的反射。

回到式(7.68)，可以注意到，当 $\omega\to\omega_0$ 时，折射率趋于∞。这是由于在计算过程中忽略了阻尼力的关系。如果把阻尼力考虑在内，式(7.62)将修正为(见式(7.46))

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+k_0x=qE_0\cos(kz-\omega t) \tag{7.79}$$

为了导出折射率的表达式，把式(7.79)写为如下式的形式更为方便

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2K\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=\frac{qE_0}{m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} \tag{7.80}$$

式(7.79)的解是式(7.80)解的实部。式(7.80)的齐次方程将给出暂态行为，其在 $t\to\infty$ 时将消失掉(见 7.4 节)。而稳态解是对应于频率 ω 的。因此，如果尝试如下形式的解

$$x(t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} \tag{7.81}$$

将其代入到式(7.80)中，可得

$$(-\omega^2-2\mathrm{i}K\omega+\omega_0^2)A=\frac{qE_0}{m}$$

或者[①]

$$A = \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\mathrm{i}K\omega)} \tag{7.82}$$

则

$$\boldsymbol{P} = \frac{Nq^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\mathrm{i}K\omega)}\boldsymbol{E} \tag{7.83}$$

电极化率由下式给出

$$\chi = \frac{Nq^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\mathrm{i}K\omega)}$$

因此

$$n^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\chi}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\mathrm{i}K\omega)} \tag{7.84}$$

注意到折射率是复数,其中虚部表示电磁波在传播过程中的吸收。的确,如果将折射率写为

$$n = \eta + \mathrm{i}\kappa \tag{7.85}$$

式中 η 和 κ 是实数,那么,波数 $k(=n\omega/c)$就可以由下式表示

$$k = (\eta + \mathrm{i}\kappa)\frac{\omega}{c} \tag{7.86}$$

考察一个沿 $+z$ 方向传播的平面电磁波,那么,它的场随 z 和 t 的变化有 $\exp[\mathrm{i}(kz-\omega t)]$ 的形式,则

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} = \boldsymbol{E}_0 \exp\left\{\mathrm{i}\left[(\eta + \mathrm{i}\kappa)\frac{\omega}{c}z - \omega t\right]\right\} = \boldsymbol{E}_0 \exp\left[-\mathrm{i}\omega\left(t - \frac{\eta z}{c}\right) - \frac{\kappa\omega}{c}z\right] \tag{7.87}$$

式(7.87)表示振幅按指数规律衰减。这是在意料之中的,因为阻尼的存在会引起能量的损失。

为求得 η 和 κ 的表达式,把 n 的表达式(7.85)代入式(7.84),可得

$$(\eta + \mathrm{i}\kappa)^2 = 1 + \frac{Nq^2(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\mathrm{i}K\omega)}{m\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\mathrm{i}K\omega)(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\mathrm{i}K\omega)}$$

或者

$$\eta^2 - \kappa^2 = 1 + \frac{Nq^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{m\varepsilon_0[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4K^2\omega^2]} \tag{7.88}$$

$$2\eta\kappa = \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}\frac{2K\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4K^2\omega^2} \tag{7.89}$$

上面两式又可写为

$$\eta^2 - \kappa^2 = 1 - \frac{\alpha\Omega}{\Omega^2 + \beta^2(\Omega + 1)} \tag{7.90}$$

$$2\eta\kappa = \frac{\alpha\beta\sqrt{1+\Omega}}{\Omega^2 + \beta^2(\Omega + 1)} \tag{7.91}$$

① 注意 A 是复数;但是,如果把 A 的表达式(7.82)代入式(7.81)并取实部,就会得出与7.4节得到的表达式相同的 $x(t)$ 的表达式。

式中引入了下面的无量纲参数

$$\alpha=\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0\omega_0^2},\quad \Omega=\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega_0^2},\quad \beta=\frac{2K}{\omega_0}$$

如图 7.13 所示，定性地表达出$(\eta^2-\kappa^2)$和 $2\eta\kappa$ 随 Ω 的变化。容易证明，在 $\Omega=-\beta$ 和 $\Omega=+\beta$ 处，函数$(\eta^2-\kappa^2)$分别取得极大值和极小值。

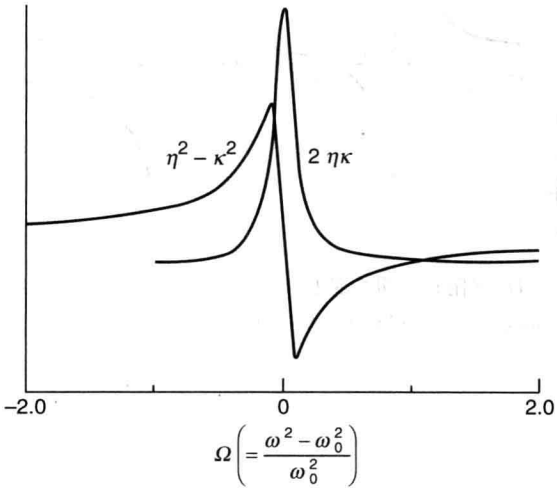


图 7.13　定性地表示$(\eta^2-\kappa^2)$和 $2\eta\kappa$ 随 Ω 的变化

应该指出，更一般情况下，原子可以看作对应于多个不同共振频率的振子，因此，我们必须考虑各种振子的贡献。若以 ω_0、ω_1、…表示这些共振频率，以 f_j 表示每单位体积内共振频率为 ω_j 的电子所占的比例，那么，式(7.84)将会修正为①

$$n^2=1+\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}\sum_j\frac{f_j}{\omega_j^2-\omega^2-2\mathrm{i}K_j\omega}\tag{7.92}$$

式中 K_j 表示对应于共振频率 ω_j 的阻尼常数。实际上，式(7.92)正确地描述了大多数气体折射率的变化。如图 7.14 所示，在 $\lambda_0=5800$Å 附近钠蒸汽的折射率随频率的变化。由于 D_1 和 D_2 线出现在 5890Å 和 5896Å，因此可以预测，共振振荡就发生在这两个频率附近。如图 7.14 所示的数据确实证明了这一点。折射率的变化可以精确地用下式表示

$$n^2=1+\frac{A}{\nu^2-\nu_1^2}+\frac{B}{\nu^2-\nu_2^2}\tag{7.93}$$

这里忽略了阻尼力的存在。当排除了电场振荡频率非常地接近于共振频率的情况，这是合理的。

值得一提的是，在液体中，由于分子彼此间非常靠近，因此，它们之间会发生偶极子的相互作用。考虑到这种相互作用，可以得出②

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}=\frac{Nq^2}{3m\varepsilon_0}\sum_j\frac{f_j}{\omega_j^2-\omega^2}\tag{7.94}$$

这里忽略了阻尼的存在。对于如液氢、液氧等分子没有固有偶极矩的液体，式(7.94)给出了

① 量子力学也给出一个类似的结果(例如，参阅参考文献[6])。

② 见参考文献[1]。注意，当 n 十分接近于 1 时(即稀薄流体的情况)，式(7.94)变为式(7.92)。

一种颇为精准的描述。但是,对于如水这样的分子具有固有偶极矩的液体,必须另作分析。

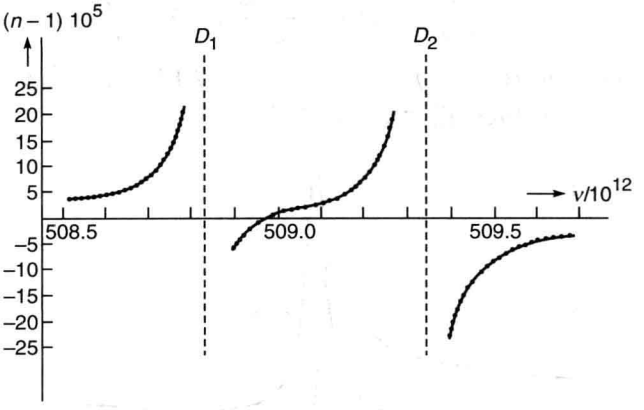


图 7.14　在 D_1 和 D_2 线附近测量出钠折射率的变化。这些测量是由罗日捷茨文斯基(Rocschdestwensky)得到的,本图引自文献[1]。

7.6　瑞利散射

下面通过对瑞利散射做一个简短介绍来结束本章内容。在以上所有分析中,假设每一个散射中心都是独立的,而这一假设只有当气体的平均原子间距大于波长时才成立。如 7.5 节所讨论的,入射的电场 $\boldsymbol{E}$ 产生的一个偶极矩由下式给出(见式(7.64)和式(7.65))

$$\boldsymbol{p} = \frac{q^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\boldsymbol{E} \tag{7.95}$$

式中 ω_0 表示原子的固有频率。尽管把阻尼效应考虑在内并不困难,但是为了简化讨论,还是忽略了这一效应。现在,一个振子的偶极矩由下式给出

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{7.96}$$

该振子以式(7.97)表示其平均功率辐射能量(见 23.4.1 节)

$$\overline{P} = \frac{\omega^4 p_0^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3} \tag{7.97}$$

或者

$$\overline{P} = \frac{\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{q^4}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}E_0^2 \tag{7.98}$$

因此,如果用 N 表示单位体积的原子数,那么,(单位体积内的原子)辐射的总平均功率为 $N\overline{P}$。

假设电磁波沿 x 轴方向传播,波的强度由下式给出(见式(23.78))

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2 \tag{7.99}$$

因此,电磁波传播 $\mathrm{d}x$ 距离后,强度的变化为

$$\mathrm{d}I = -N\overline{P}\,\mathrm{d}x$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}I}{I} = -\gamma \mathrm{d}x \tag{7.100}$$

式中

$$\gamma = \frac{N\omega^4}{6\pi\varepsilon_0^2 c^4}\frac{q^4}{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2} \tag{7.101}$$

对式(7.100)积分，可得

$$I = I_0 e^{-\gamma x} \tag{7.102}$$

式中 γ 表示衰减系数。对于大多数原子，ω_0 出现在紫外区，例如，对于氢原子，$\hbar\omega_0 \approx$ 几个电子伏特。因此，如果假设 $\omega \ll \omega_0$，那么，γ 与 ω^4 成比例，或者

$$\gamma \propto \frac{1}{\lambda^4} \tag{7.103}$$

这就是著名的具有 $1/\lambda^4$ 形式的瑞利散射定理，也是天空呈现蓝色的原因(因为被散射的主要是蓝光成分)。同理，落日所发出光中的蓝色组分大部分被散射掉了，从而使得落日呈现红色。的确，如果日落(日出)的颜色为深红色，那么就可以推断污染水平很高。现在，对气体有

$$n^2 - 1 = \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0(\omega_0^2-\omega^2)} \tag{7.104}$$

(见式(7.68))对于空气，折射率非常接近于 1，则可以写为

$$n - 1 \approx \frac{Nq^2}{2m\varepsilon_0(\omega_0^2-\omega^2)} \tag{7.105}$$

根据式(7.105)，式(7.101)可以写为如下的简便形式

$$\gamma = \frac{2}{3\pi N}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4 (n-1)^2 = \frac{2k^4}{3\pi N}(n-1)^2, \quad k = \frac{\omega}{c} \tag{7.106}$$

在标准温度及标准大气压下的空气，可见光谱区段 $(n-1)\approx 2.78\times 10^{-4}$。由 $N\approx 2.7\times 10^{19}\,\mathrm{mol/cm^3}$，可得

$$L = \frac{1}{\gamma} = 27\mathrm{km}, 128\mathrm{km}\ 和\ 188\mathrm{km}$$

分别对应 $\lambda = 4000$Å(紫色)，5900Å(黄色)和 6500Å(红色)。L 的值表示强度减小到 1/e 时传播的距离。

可以通过引用 1929 年版的大英百科全书中瑞利爵士所写的一篇关于“天空”的文章来总结这一章：

天空：显然，大气层覆盖着拱形的天穹……。天空蓝色的多变是常见的事，即使是在万里无云的时候也是如此。随着(观察点)移向天顶(zenith，地平坐标系)以及观测者位置的升高，天空的颜色通常越变越深……与颜色密切相关的是天空散射光的偏振程度。这种情况发生在一个穿过太阳的平面内，并在高度角(地平坐标系)大约为 90° 处，偏振度达到最大值。

小　结

- 与波动相联系的最基本的振动是简谐运动。
- 当一点沿着圆的圆周以均匀的角速度旋转时，其端点向任一直径所引垂线的垂足将会作简谐运动。
- 当一个按正余弦规律变化的外力作用在振动系统时，将得到受迫振动。在稳态时，受迫振动的频率与外力的频率相等。

- 当一束光作用于一个原子时，可以假设电子的行为如同共振频率为 ω_0 的振子。光波的电场会使气体分子极化，产生振荡的电偶极矩。根据这一模型，可利用第一性原理计算得到折射率满足

$$n^2(\omega) \approx 1 + \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\mathrm{i}K\omega)}$$

式中 m 为电子的质量，q 为电子电荷量的大小，N 是单位体积内电子的数目，K 是阻尼常数。由于振动的偶极子向外辐射能量，光波就会衰减；这就导致了著名的 $\frac{1}{\lambda^4}$ 瑞利散射定理，该定理也是正在升起的太阳呈现红色和天空呈现蓝色的原因。

习　题

7.1 弦位移由下式给出

$$y(x,t) = a\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi\nu t\right)$$

式中 a，λ 及 ν 分别表示振幅、波长和频率。

假设 $a=0.1\mathrm{cm}$，$\lambda=4\mathrm{cm}$，$\nu=1\mathrm{s}^{-1}$。试对于 $x=0$，0.5cm，1.0cm，1.5cm，2cm，3cm，4cm 的各点，绘出位移随时间变化的曲线，并从物理上说明这些曲线。

[**答案**：$y(x=3.0,t)=-y(x=1.0,t)$，因为两点相差 $\frac{\lambda}{2}$；如此类推。]

7.2 弦音计上驻波的位移由下式给出

$$y(x,t) = 2a\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos 2\pi\nu t$$

如果弦长为 L，则 $\lambda=2L,2L/2,2L/3,\cdots$（见 13.2 节）。考察 $\lambda=\frac{2L}{5}$ 的情况，把两相邻波节之间的各点称为一段[①]，研究各段中位移随时间的变化，并证明每隔一段，振动都是同相的（段内各点有不同的振幅）；而相邻两段中振动反相。

7.3 如图 7.15 所示，挖一条穿过地球的隧道，一个物体在点 A 沿着隧道下落。试证明物体将作简谐运动。它的周期为多少？

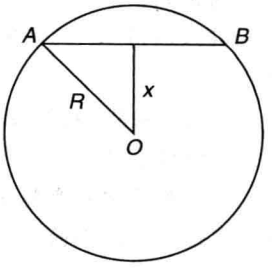


图 7.15　习题 7.3 图

[**答案**：时间周期为 $T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$]

7.4 一个质量为 1g 的物体悬挂在一根竖直的弹簧上，物体作简谐运动的周期为 0.1s。试求当物体悬挂在弹簧上时，弹簧拉伸了多长？

[**答案**：$\Delta x\approx 0.25\mathrm{cm}$]

7.5 一根拉紧的弦在 x 轴和 y 轴方向同时产生的位移为

$$x(z,t) = a\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}z - 2\pi\nu t\right)$$

① 此处为译者补充。

$$y(z,t) = a\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}z - 2\pi\nu t\right)$$

证明：弦将沿着与 x 轴和 y 轴成 $\pi/4$ 角度的方向振动。

7.6　在习题 7.5 中，如果

$$x(z,t) = a\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}z - 2\pi\nu t\right)$$

$$y(z,t) = a\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}z - 2\pi\nu t\right)$$

试求合位移又将如何变化。

7.7　如 7.5 节所提到的，碱金属对紫外光是透明的。假设影响折射率的主要因素是自由电子，且每一原子都有一个自由电子。分别计算锂、钾和铷的 $\lambda_P\left(=\dfrac{2\pi c}{\omega_P}\right)$。可以设锂、钾和铷的原子质量分别为 6.94，39.10 和 85.48，相应的密度分别为 0.534，0.870 和 1.532 $\mathrm{g/cm^3}$。另有其他物理常量为：$m=9.109\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$，$q=1.602\times10^{-19}\,\mathrm{C}$，$\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/(N\cdot m^2)}$。

[**答案**：1550Å[①]，2890Å，3220Å；相应的实验值分别为 1551Å，3150Å 和 3400Å]

7.8　(1) 在金属中，可以假设电子是完全自由的。电子的漂移速率方程满足

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + m\boldsymbol{v}\nu = \boldsymbol{F} = -q\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

式中 ν 表示碰撞频率。计算稳态下的电流密度（$\boldsymbol{J}=-Nq\boldsymbol{v}$），并证明电导率为

$$\sigma(\omega) = \frac{Nq^2}{m}\frac{1}{\nu - \mathrm{i}\omega}$$

(2) 如果 $\boldsymbol{r}$ 表示电子的位移，试证明极化强度矢量

$$\boldsymbol{P} = -Nq\boldsymbol{r} = -\frac{Nq^2}{m(\omega^2 + \mathrm{i}\omega\nu)}\boldsymbol{E}$$

并用上式证明自由电子气体的相对介电常数为

$$\kappa(\omega) = 1 - \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0(\omega^2 + \mathrm{i}\omega\nu)}$$

7.9　假设每一个铜原子贡献一个电子，且低频电导率 $\sigma\approx6\times10^7$ 姆欧/米[②]，试证明 $\nu\approx4\times10^{13}\,\mathrm{s^{-1}}$。并根据 ν 的值，证明：对 $\omega<10^{11}\,\mathrm{s^{-1}}$ 的情况，传导率几乎为实数。当 $\omega=10^8\,\mathrm{s^{-1}}$ 时，计算复相对介电常数，并把这一数值与对应的红外频率的数值相比较。

值得注意的是，低频时，一个铜原子中只有一个电子可以视为自由电子。另一方面，对于 X 射线的频率，所有电子都可视为自由电子（见习题 7.10～习题 7.12）。讨论上述论断的有效性。

7.10　证明在高频（$\omega\gg\nu$）情况下，相对介电常数（如习题 7.8 所导出）是实数，其随频率的变化有如下形式

$$\kappa = 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}$$

---

① 原书为 1550Å，2884Å，3214Å。

② 电导率是电阻率的倒数，电阻率单位是欧姆·米，电导率的单位是姆欧/米，也叫西门子/米。译者注。

式中 $\omega_P=\left(\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}\right)^{1/2}$ 称为等离子频率。在X射线频率下,对于许多金属,上式都成立。假设在这样的频率条件下,所有的电子都可以认为是自由电子,计算铜的 ω_P,铜的原子序数为29,质量数为63,密度是 $9\mathrm{g/cm^3}$。

[**答案**:约为 $9\times10^{16}\mathrm{s^{-1}}$]

7.11 对于金属钠,在 $\lambda=1$Å 时,所有电子可假设为自由电子。在该假设条件下,证明:$\omega_P\approx3\times10^{16}\mathrm{s^{-1}}$,$n^2\approx1$ 以及金属为完全透明的。

7.12 对于离子晶体(如 NaCl,CaF_2 等),必须考虑离子的红外共振振荡,并将式(7.68)修正为

$$n^2=1+\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0(\omega_1^2-\omega^2)}+\frac{pNq^2}{M\varepsilon_0(\omega_2^2-\omega^2)}$$

式中 M 为两个离子的约化质量,p 为离子的价(对 Na^+,Cl^-,有 $p=1$;对 Ca^{++},F_2^{--},有 $p=2$)。证明:上式可以写成如下形式[①]

$$n^2=n_\infty^2+\frac{A_1}{\lambda^2-\lambda_1^2}+\frac{A_2}{\lambda^2-\lambda_2^2}$$

式中

$$\lambda_1=\frac{2\pi c}{\omega_1},\quad \lambda_2=\frac{2\pi c}{\omega_2}$$

$$A_1=\frac{Nq^2}{4\pi^2c^2\varepsilon_0 m}\lambda_1^4,\quad A_2=\frac{pNq^2}{4\pi^2c^2\varepsilon_0 M}\lambda_2^4$$

7.13 对于 CaF_2,折射率的变化(在可见光谱区)可以写为如下形式[①]

$$n^2=6.09+\frac{6.12\times10^{-15}}{\lambda^2-8.88\times10^{-15}}+\frac{5.10\times10^{-9}}{\lambda^2-1.26\times10^{-9}}$$

式中 λ 以m为单位。

(1) 绘出在可见区,n^2 随 λ 变化的曲线。

(2) 根据 A_1 和 A_2,证明 $m/M\approx2.07\times10^{-5}$,并把这一数值与准确值相比较。

(3) 证明:利用常数 A_1,A_2,λ_1,λ_2 求得的 $n_\infty^2\approx5.73$ 的值与实验值可以很好地吻合。

7.14 (1) 等离子体的折射率(在忽略碰撞的情况下),近似地由下式给出(见7.5节)

$$n^2=1-\frac{\omega_P^2}{\omega^2}$$

式中

$$\omega_P=\left(\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}\right)^{1/2}\approx56.414\mathrm{N^{1/2}s^{-1}}$$

被称为等离子体频率。在电离层中,N_0 的极大值$\approx10^{10}\sim10^{12}$个电子/$\mathrm{m^3}$。计算等离子体频率。注意,在高频时,$n^2\approx1$,因此,高频波(如电视中使用的电波)不受电离层的反射。另一方面,对于低频波,折射率为虚数(像一个导体,见24.3节),且波束能被反射。这一事实被用来进行远距离的无线电通信(见图3.20)。

(2) 假设当 $x\approx200\mathrm{km}$,$N=10^{12}$个电子/$\mathrm{m^3}$,并且在 $x\approx300\mathrm{km}$ 的地方,电子密度增加到 2×10^{12}个电子/$\mathrm{m^3}$。当 $x<300\mathrm{km}$ 时,电子密度减小。假设 N 的变化是抛物线

① 引自参考文献[9];测量是由Paschen得到的。

形，绘出相应的折射率变化曲线。

[**答案**：当 $2\times10^5\,\mathrm{m}<x<4\times10^5\,\mathrm{m}$ 时，$n^2(x)\approx1-\dfrac{6.4\times10^{15}}{\omega^2}[1-5\times10^{-11}(x-3\times10^5)^2]$，式中 ω 以 s^{-1} 为单位，x 以 m 为单位。]

参考文献和推荐读物

1. C.J.F. Bottcher, *Theory of Electric Polarization*, Elsevier Publishing Co., Amsterdam, 1952.
2. H.J.J. Braddick, *Vibrations, Waves and Diffraction*, McGraw-Hill Publishing Co., London, 1965.
3. F.S. Crawford, *Waves and Oscillations: Berkeley Physics Course*, Vol. III, McGraw-Hill Book Co., New York, 1968.
4. R.P. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. I, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1965.
5. A.P. French, *Vibrations and Waves*, Arnold-Heineman India, New Delhi, 1973.
6. R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*, Clarendon Press, Oxford, 1973.
7. H.J. Pain, *The Physics of Vibrations and Waves*, John Wiley & Sons, London, 1968.
8. R. Resnick and D. Halliday, *Physics*, Part I, John Wiley & Sons, New York, 1966.
9. A. Sommerfeld, *Optics*, Academic Press, New York, 1964.
10. J.M. Stone, *Radiation and Optics*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1963.

第8章 傅里叶级数及其应用

……黎曼(在他1867年发表的一篇文章中)称,傅里叶于1807年在他向法国科学院提交的第一篇论文中,提出完全任意的一个函数可以表示为一个这样的级数,该级数项可以非常明确地确定。他的这一论断使拉格朗日大为吃惊,以致他拒绝承认傅里叶给出的这些级数项成立的可能性。还应该指出,傅里叶第一个提出了任意函数可以在不同的区间内用不同的解析表达式表示。

——H.A.卡斯劳(1930年)

8.1 引言

傅里叶级数和傅里叶积分广泛地应用于振动和波动理论中。因此,本章将讨论傅里叶级数和傅里叶积分。在本章中得到的结果会应用到后续章节中。根据傅里叶定理,任何周期性的振动都可以表示为一系列正弦函数与余弦函数之和,而且这些正弦函数与余弦函数的频率均是按照自然数的比率增加的。因此,一个周期为 T 的周期函数

$$f(t+nT)=f(t),\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{8.1}$$

可以被展开为如下形式

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) \\ &= \frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\omega t) \end{aligned} \tag{8.2}$$

式中

$$\omega=\frac{2\pi}{T} \tag{8.3}$$

表示基频。事实上,为了使这种展开成为可能,函数 $f(t)$ 必须满足一些特定的条件。这些条件要求函数 $f(t)$ 在一个周期中(即在间隔 $t_0<t<t_0+T$)必须满足①单值;②分段连续(可以最多有有限个非无穷大的不连续点);③具有有限个极大值和极小值。这些条件就是狄里赫利条件,而我们遇到的大部分的物理问题均满足这一条件。

利用三角函数的性质,可以很容易地确定系数 a_n 和 b_n

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\cos n\omega t\cos m\omega t\,\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & m\neq n\\ T/2, & m=n\end{cases} \tag{8.4}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\sin n\omega t\sin m\omega t\,\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & m\neq n\\ T/2, & m=n\end{cases} \tag{8.5}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\cos n\omega t\sin m\omega t\,\mathrm{d}t=0 \tag{8.6}$$

上面公式的推导很简单，例如，当 $m=n$ 时

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\cos n\omega t\cos m\omega t\,\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_0+T}\cos^2 n\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_0+T}(1+\cos 2n\omega t)\,\mathrm{d}t=\frac{T}{2}$$

类似的，当 $m\neq n$ 时

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\cos n\omega t\cos m\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_0+T}[\cos(n-m)\omega t+\cos(n+m)\omega t]\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-m)\omega}\sin(n-m)\omega t+\frac{1}{(n+m)\omega}\sin(n+m)\omega t\right]\Bigg|_{t_0}^{t_0+T}=0$$

为了确定系数 a_n 和 b_n，先把式(8.2)乘以 $\mathrm{d}t$ 并积分，积分范围从 t_0 到 t_0+T

$$\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}a_0\int_{t_0}^{t_0+T}\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{t_0}^{t_0+T}\cos n\omega t\,\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_{t_0}^{t_0+T}\sin n\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{T}{2}a_0$$

这里，用到了式(8.4)与式(8.6)，并令 $m=0$，则

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\,\mathrm{d}t \tag{8.7}$$

把式(8.2)对 $\cos(m\omega t)\,\mathrm{d}t$ 积分，积分范围为 t_0 到 t_0+T

$$\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos(m\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}a_0\int_{t_0}^{t_0+T}\cos(m\omega t)\,\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{t_0}^{t_0+T}\cos(m\omega t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_{t_0}^{t_0+T}\cos(m\omega t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{T}{2}a_m$$

这里用到了式(8.4)与式(8.6)。将上式结合式(8.7)，可得

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t,\quad n=0,1,2,3,\cdots \tag{8.8}$$

同理，有

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t,\quad n=0,1,2,3,\cdots \tag{8.9}$$

应该指出，上面 t_0 的值的取值是任意的。在一些问题中，如下选取是方便的

$$t_0=-T/2$$

由此

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}f(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t,\quad n=0,1,2,3,\cdots$$

和

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}f(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t,\quad n=0,1,2,3,\cdots$$

当函数为偶函数(即 $f(t)=f(-t)$)或奇函数(即 $f(t)=-f(-t)$)时，这样的选取特别方便。对于偶函数，有 $b_n=0$；对于奇函数，有 $a_n=0$。而在有些问题中，选择 $t_0=0$ 是方便的。

例 8.1　考虑一个周期函数

$$\begin{cases}f(t)=t, & -\tau<t<+\tau\\ f(t+2n\tau)=f(t), & \text{其他}\end{cases} \tag{8.10}$$

(见图 8.1)。这样的函数被称为锯齿函数。要求将这个函数展开为傅里叶级数。由于 $f(t)$ 为 t 的奇函数,则有 $a_n=0$,且

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\tau}^{+\tau}f(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\tau}\int_0^{\tau}t\sin n\omega t\,\mathrm{d}t$$

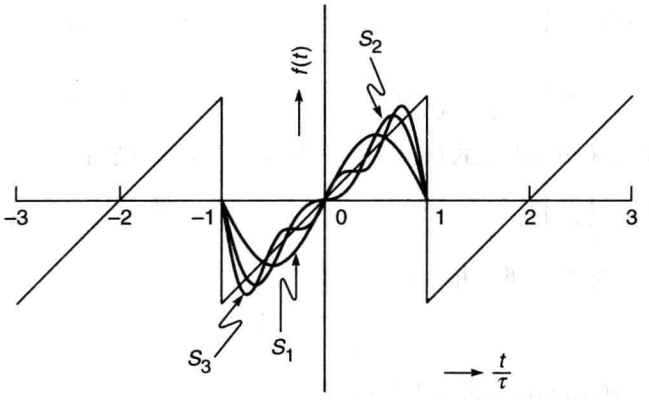


图 8.1 锯齿函数,S_1,S_2 和 S_3 表示锯齿函数的部分级数项的叠加结果。

应注意函数周期为 2τ,因此,$\omega=\pi/\tau$。积分可得

$$b_n=\frac{2}{\tau}\left[-\frac{t}{n\omega}\cos n\omega t+\frac{1}{n\omega}\left(\frac{1}{n\omega}\sin n\omega t\right)\right]\Bigg|_0^{\tau}=-\frac{2\tau}{n\pi}\cos n\pi=(-1)^{n+1}\frac{2\tau}{n\pi}\tag{8.11}$$

因此

$$f(t)=\frac{2\tau}{\pi}\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\omega t=\frac{2\tau}{\pi}\left[\sin\omega t-\frac{1}{2}\sin 2\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t-\cdots\right]\tag{8.12}$$

如图 8.1 所示,绘出了部分级数项的和

$$S_1=\frac{2\tau}{\pi}\sin\omega t$$

$$S_2=\frac{2\tau}{\pi}\left(\sin\omega t-\frac{1}{2}\sin 2\omega t\right)$$

$$S_3=\frac{2\tau}{\pi}\left(\sin\omega t-\frac{1}{2}\sin 2\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t\right)$$

如图 8.1 所示,随着 n 的增加,S_n 越来越接近 $f(t)$。

例 8.2 在本例中,对下面的函数做傅里叶展开

$$\begin{cases}f(t)=-A, & -\dfrac{T}{2}<t<0\\ f(t)=+A, & 0<t<t+\dfrac{T}{2}\end{cases}\tag{8.13}$$

以及

$$f(t+T)=f(t)$$

这个函数图形如图 8.2 所示。可见,这个函数为奇函数,则有 $a_n=0$,且

$$b_n=\frac{2}{T}2\int_0^{T/2}A\sin n\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{4A}{T}\frac{1}{n\omega}[-\cos n\omega t]\,|_0^{T/2}=\frac{2A}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\frac{2A}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

则

$$f(t)=\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1,2,3,\cdots}\frac{1}{n}[1-(-1)^n]\sin n\omega t=\frac{4A}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\cdots\right)$$

其部分级数项的和为

$$S_1=\frac{4A}{\pi}\sin\omega t$$

$$S_2=\frac{4A}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t\right)$$

$$S_3=\frac{4A}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t\right)$$

同样如图 8.2 所示。

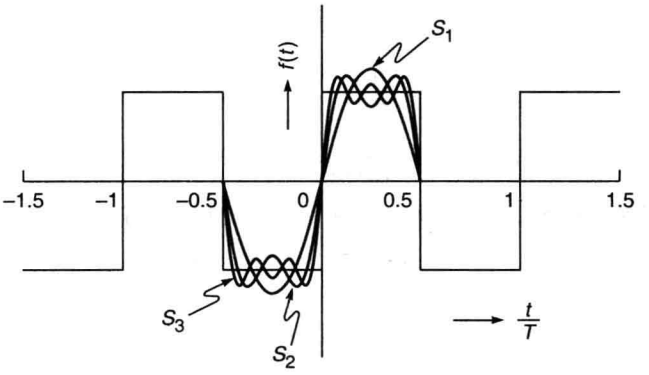


图 8.2　由式(8.13)定义的周期性阶跃函数，S_1，S_2 和 S_3 表示锯齿函数的部分级数项的叠加结果

8.2　弹拨弦上的横向振动

傅里叶级数的一个很有趣的应用是研究一个弹拨弦上的横向振动。

考虑一根拉紧的弦，固定在 A，B 两端。选 A 端为原点。设当弦位于平衡位置时，弦与 x 轴重合(见图 8.3)。弦上的一点被向上拉离平衡位置 d 的距离时，弦的形状如图 8.3 中的虚线。若这个位移出现在距离起始点距离为 a 的位置，则描述弦的形状的公式为

$$\begin{cases}y=\dfrac{d}{a}x, & 0<x<a\\[2ex] y=\dfrac{d}{L-a}(L-x), & a<x<L\end{cases}\tag{8.14}$$

式中 L 为弦的长度。若弦在 $t=0$ 时刻被放开，试确定随后任意时刻弦的形状。

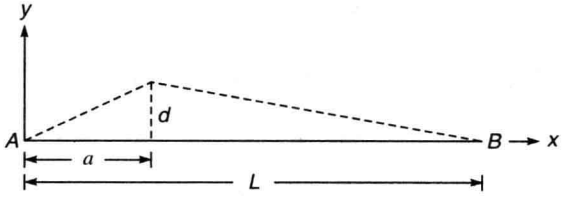


图 8.3　弹拨弦。直线 AB 表示平衡位置，虚线表示 $t=0$ 时刻的位移位置。

在11.6节中将会证明,位移 $y(x,t)$ 满足下面的波动方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{8.15}$$

式中,$v(=\sqrt{T/\rho})$ 为横波的速度,T 为弦中的张力,ρ 为单位长度的质量。在下列边界条件下求解式(8.15):

(1) 在任意时刻 t,$x=0$ 以及 $x=L$ 处 $y=0$; (8.16)

(2) 在 $t=0$ 时刻。

① 对所有的 x 值,有

$$\frac{\partial y}{\partial t}=0 \tag{8.17}$$

②

$$\begin{cases} y(x,t=0)=\dfrac{d}{a}x, & 0<x<a \\ y(x,t=0)=\dfrac{d}{L-a}(L-x), & a<x<L \end{cases} \tag{8.18}$$

假设解与时间相关的部分具有 $\cos\omega t$(或 $\sin\omega t$)的形式,有

$$y(X,t)=X(x)\cos\omega t$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{\omega^2}{v^2}X(x)$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}+k^2X(x)=0 \tag{8.19}$$

式中

$$k=\frac{\omega}{v} \tag{8.20}$$

式(8.19)的解非常简单[①],为

$$X(x)=A\sin kx+B\cos kx \tag{8.21}$$

因此

$$y(x,t)=(A\sin kx+B\cos kx)(C\cos\omega t+D\sin\omega t)$$

---

① 严格来讲,应该用分离变量法。因此,假设

$$y(x,t)=X(x)T(t)$$

式中 $X(x)$ 只是 x 的函数,$T(t)$ 只是 t 的函数。将解代入式(8.15),可得

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{1}{T(t)}\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}=-k^2$$

既然 $\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}$ 只是 x 的函数,$\frac{1}{v^2}\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}$ 只是 t 的函数,上面的项必然为一个常数,令其为 $-k^2$。有

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2T(t)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}+k^2X(x)=0$$

式中

$$\omega=kv$$

对任意时刻 t，都有

$$y(x,t)\mid_{x=0}=0$$

则 $B=0$，并且可以得到

$$y(x,t)=\sin kx(C\cos\omega t+D\sin\omega t)$$

式中，将 A 归并入了 C 和 D。又由对任意时刻 t，有

$$y(x,t)\mid_{x=L}=0$$

可得

$$\sin kL=0$$

或者

$$kL=n\pi,\quad n=1,2,3,\cdots \tag{8.22}$$

因此，k（进而 ω）为离散值，这些值为

$$k_n=\frac{n\pi}{L},\quad n=1,2,3,\cdots \tag{8.23}$$

以及

$$\omega_n=\frac{n\pi v}{L},\quad n=1,2,3,\cdots \tag{8.24}$$

式(8.24)给出了弦振动的不同模式的频率。最低频率($n=1$)对应的模式称为基模。

因此，式(8.15)满足边界条件(8.16)的解可以写为

$$y(x,t)=\sum_{n=1,2,3,\cdots}\sin k_nx(C_n\cos\omega_nt+D_n\sin\omega_nt) \tag{8.25}$$

对 t 求偏微商，可得

$$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_n\sin k_nx(-\omega_nC_n\sin\omega_nt+\omega_nD_n\cos\omega_nt)\mid_{t=0}=\sum_n\omega_nD_n\sin k_nx \tag{8.26}$$

又，对任意 x，有

$$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0}=0$$

对所有 n，可得

$$D_n=0$$

因此

$$y(x,t)=\sum_nC_n\sin k_nx\cos\omega_nt \tag{8.27}$$

或者

$$y(x,0)=\sum_nC_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{8.28}$$

式(8.28)在本质上是一个傅里叶级数。为了确定 C_n，把式(8.28)的两边乘以 $\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x$并积分，积分范围从 0 到 L，可得

$$C_m=\frac{2}{L}\int_0^Ly(x,0)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x \tag{8.29}$$

其中用到了

$$\int_0^L\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n\\ L/2, & m=n\end{cases} \tag{8.30}$$

(见式(8.5))。将式(8.18)的初条件 $y(x,0)$ 代入式(8.29),可得

$$C_n = \frac{2}{L}\left[\frac{d}{a}\int_0^a x\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x + \frac{d}{L-a}\int_a^L (L-x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x\right] = \frac{2dL^2}{a(L-a)\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{L}a\right)$$

代入式(8.27),最终可得

$$y(x,t) = \frac{2dL^2}{a(L-a)\pi^2}\sum_{n=1,2,3,\cdots}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{L}a\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi v}{L}t\right) \tag{8.31}$$

式(8.31)可用来确定任意时刻弦的形状。如果弦是在中心位置被拨动的($a=L/2$),$n=2,4,6,\cdots$ 的项为零(即偶谐振项不存在),式(8.31)可简化为

$$y(x,t) = \frac{8d}{\pi^2}\sum_m (-1)^{m+1}\frac{1}{(2m-1)^2}\sin\left[\frac{(2m-1)\pi}{L}x\right]\cos\left[\frac{(2m-1)\pi v}{L}t\right] \tag{8.32}$$

8.3 傅里叶级数在研究受迫振动中的应用

首先考虑阻尼振子的受迫振荡。描述其运动的方程可以写为

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + k_0 y = F(t) \tag{8.33}$$

式中 Γ 为阻尼系数(见7.3节),F 为外界驱动力。在7.4节已经证明,当 $\Gamma>0$,且

$$F(t) = F_0\cos(pt+\theta) \tag{8.34}$$

此时式(8.33)的稳态解为以与驱动力相等频率的简谐运动形式。当驱动力 $F(t)$ 不是正弦或余弦函数时,式(8.33)的一般解很难求得。然而,如果驱动力为周期函数,可以应用傅里叶定理来获得式(8.33)的解。例如,令

$$F(t) = \alpha t, \quad -\tau < t < \tau \tag{8.35}$$

以及

$$F(t+2n\tau) = F(t), \quad n = 1,2,3,\cdots$$

这样函数的傅里叶级数在例8.1中已经讨论过,其形式为

$$F(t) = \sum_n F_n\sin n\omega t = \frac{2\alpha\tau}{\pi}\left[\sum_{n=1,2,\cdots}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\omega t\right] \tag{8.36}$$

随后,考虑下面微分方程的解

$$m\frac{\mathrm{d}^2y_n}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}t} + k_0 y_n = F_n\sin n\omega t$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}^2y_n}{\mathrm{d}t^2} + K\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y_n = A_n\sin n\omega t \tag{8.37}$$

式中

$$K \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{\Gamma}{m}, \quad \omega_0^2 \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{k_0}{m}$$

以及

$$A_n = \frac{F_n}{m} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{2\alpha\tau}{\pi m} \tag{8.38}$$

则式(8.37)的稳态解将具有如下形式

$$y_n = C_n\sin n\omega t + D_n\cos n\omega t$$

同时，式(8.33)的解将具有如下形式

$$y = \sum_n y_n \tag{8.39}$$

为了确定系数 C_n 和 D_n，将上面得到的解代入式(8.37)，可得

$$\begin{aligned} &-n^2\omega^2(C_n\sin n\omega t + D_n\cos n\omega t) + n\omega K(C_n\cos n\omega t - D_n\sin n\omega t) \\ &+\omega_0^2(C_n\sin n\omega t + D_n\cos n\omega t) = A_n\sin n\omega t \end{aligned}$$

由此

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - n^2\omega^2)C_n - n\omega K D_n = A_n \\ (\omega_0^2 - n^2\omega^2)D_n - n\omega K C_n = 0 \end{cases} \tag{8.40}$$

求解方程组(8.40)，可得

$$D_n = -\frac{n\omega K}{(\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + n^2\omega^2K^2}A_n$$

$$C_n = \frac{\omega_0^2 - n^2\omega^2}{(\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + n^2\omega^2K^2}A_n$$

因此，稳态解可写为如下形式

$$y = \sum_n G_n\sin(n\omega t + \theta_n) \tag{8.41}$$

式中的振幅 G_n 为

$$G_n = (C_n^2 + D_n^2)^{1/2} = \frac{A_n}{[(\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + n^2\omega^2K^2]^{1/2}} \tag{8.42}$$

8.4　傅里叶积分

在 8.1 节中，证明了一个周期函数可以展开为以下形式

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t) \tag{8.43}$$

式中

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t, \quad n = 0,1,2,3,\cdots \tag{8.44}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t, \quad n = 0,1,2,3,\cdots \tag{8.45}$$

以及

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{8.46}$$

将 a_n、b_n 的表达式代入式(8.43)，可得(要将式(8.44)、式(8.45)中的 t 用 t' 代替)

$$\begin{aligned} f(t) =& \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t')\,\mathrm{d}t' \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{T}\cos n\omega t\int_{-T/2}^{+T/2}\cos n\omega t' f(t')\,\mathrm{d}t' + \frac{2}{T}\sin n\omega t\int_{-T/2}^{+T/2}\sin n\omega t' f(t')\,\mathrm{d}t'\right] \end{aligned} \tag{8.47}$$

或者

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\Delta s\int_{-\pi/\Delta s}^{+\pi/\Delta s} f(t')\,\mathrm{d}t' + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta s}{\pi}\int_{-\pi/\Delta s}^{+\pi/\Delta s}\cos[n\Delta s(t-t')]f(t')\,\mathrm{d}t' \tag{8.48}$$

式中

$$\Delta s \xlongequal{\text{def}} \frac{2\pi}{T} = \omega$$

令 $T\to\infty$,则 $\Delta s\to 0$;需注意的是,当 $T\to\infty$时,函数就不再是周期函数。由此,如果积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | f(t') | \, \mathrm{d}t'$$

存在(即它具有有限值),则在式(8.48)等号右边的第一项将趋于零。此外,由

$$\int_0^{\infty} F(s)\mathrm{d}s = \lim_{\Delta s\to 0}\sum_{n=1}^{\infty} F(n\Delta s)\Delta s \tag{8.49}$$

有

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t')\cos[s(t-t')]\mathrm{d}t'\right]\mathrm{d}s \tag{8.50}$$

式(8.50)被称为傅里叶积分。因为积分内部的余弦函数是 s 的偶函数,可以将其写为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t')\cos[s(t-t')]\mathrm{d}t'\right\}\mathrm{d}s \tag{8.51}$$

此外,由于 $\sin[s(t-t')]$为 s 的奇函数,则

$$\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t')\sin[s(t-t')]\mathrm{d}t'\right\}\mathrm{d}s = 0 \tag{8.52}$$

将上面两式相加(或相减),可得

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t')\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega(t-t')}\mathrm{d}t'\mathrm{d}\omega \tag{8.53}$$

式中用 ω 代替了 s。式(8.53)通常称作傅里叶积分定理。因此,如果

$$F(\omega) \xlongequal{\text{def}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{8.54}$$

则

$$f(t) \xlongequal{\text{def}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{8.55}$$

函数 $F(\omega)$称作 $f(t)$的傅里叶变换。对于一个与时间相关的函数 $f(t)$,通常称 $F(\omega)$为其频谱。式(8.54)与式(8.55)也可写为如下的形式

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{8.56}$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{8.57}$$

还可以写出

$$G(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \tag{8.58}$$

反过来

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \tag{8.59}$$

式中 k 称为空间频率,这是一个广泛用于傅里叶光学中的概念(见第19章)。

在下一章中,将引入狄拉克 δ 函数,并重新推导式(8.54)~式(8.59),而后用一些例子来说明傅里叶变换的物理意义和它的应用。在第10章中,将应用傅里叶变换来学习光脉冲

在色散和非线性媒质中的传播。

小　结

- 一个周期为 T 的周期函数，即

$$f(t+nT)=f(t),\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

可以展开为如下形式

$$f(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)$$

$$=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\omega t)$$

式中

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

表示基频。上面的无穷级数称为傅里叶级数，其系数 a_n、b_n 为

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t,\quad n=0,1,2,3,\cdots$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t^{①},\quad n=0,1,2,3,\cdots$$

- 弹拨弦上横向振动和受迫振动可以应用傅里叶级数来研究。
- 对于一个随时间变化的函数 $f(t)$，其傅里叶变换的定义为

$$F(\omega)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

则

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega^{②}$$

习　题

8.1　考虑一个有如下形式的周期力

$$\begin{cases}F(t)=F_0\sin\omega t, & 0<t<T/2\\ F(t)=0, & T/2<t<T\end{cases}$$

且有

$$F(t+T)=F(t)$$

式中

---

① 原文为：$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos n\omega t$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\sin n\omega t$$

② 原文为：$F(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\omega)\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

证明

$$F(t) = \frac{1}{\pi}F_0 + \frac{1}{2}F_0\sin\omega t - \frac{2}{\pi}F_0\left(\frac{1}{3}\cos 2\omega t + \frac{1}{15}\cos 4\omega t + \cdots\right)$$

用上式表示半波整流器的周期性电压,那么,全波整流器的傅里叶展开式是什么?

8.2 在量子力学理论中,描述自由粒子的一维薛定谔方程为

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} a(p)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(px-\frac{p^2}{2m}t\right)}\mathrm{d}p$$

式中 p 为质量为 m 粒子的动量。

证明

$$a(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(x,0)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}px}\mathrm{d}x$$

8.3 接习题 8.2,如果设

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{1/4}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}p_0x\right)$$

证明

$$a(p) = \left(\frac{\sigma^2}{\pi\hbar^2}\right)^{1/4}\exp\left[-\frac{\sigma^2}{2\hbar^2}(p-p_0)^2\right]$$

并证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi(x,0)|^2\mathrm{d}x = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty}|a(p)|^2\mathrm{d}p$$

实际上,式中的 $|\Psi(x,0)|^2\mathrm{d}x$ 表示发现粒子位于区间 $x\sim x+\mathrm{d}x$ 的概率,$|a(p)|^2\mathrm{d}p$ 为发现粒子动量位于区间 $p\sim p+\mathrm{d}p$ 的概率。据此,可以得到测不准关系

$$\Delta x\Delta p \sim \hbar$$

参考文献和推荐读物

1. H.S. Carslaw, *Introduction to the Theory of Fourier Series and Integrals*, Dover Publications, New York, 1950.
2. E.C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Oxford University Press, New York, 1937.
3. A. K. Ghatak, I. C. Goyal and S. J. Chua, *Mathematical Physics*, Macmillan India Ltd, New Delhi, 1995.
4. J. Arsac, *Fourier Transforms and the Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.
5. E.C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Clarendon Press, Oxford, 1959 .

第9章 狄拉克δ函数和傅里叶变换

严格来讲，$\delta(x)$并不是一个 x 的具有通常意义的函数，但它可以视作某些系列函数的极限。尽管如此，人们可以像通常意义的函数那样使用 $\delta(x)$。特别地，人们用它来解决量子力学问题，而不会带来不正确的结果。人们同样可以使用 $\delta(x)$的各阶微商，即 $\delta'(x)$，$\delta''(x)$，…这些函数比 $\delta(x)$更加不连续，而且更不具有“通常意义”。

——P.A.M 狄拉克，《量子动力学的物理解释》，伦敦皇家学会会议录(A)，113，621-641(1926)

9.1 引言

狄拉克 δ 函数可以用下面的公式来定义

$$\delta(x-a)=0, \quad x\neq a \tag{9.1}$$

$$\int_{a-\alpha}^{a+\beta}\delta(x-a)\mathrm{d}x=1 \tag{9.2}$$

式中 α、$\beta>0$。因此，δ 函数在 $x=a$ 处没有有限值，且其曲线下的面积为 1。对于一个在 $x=a$ 点连续的任意函数，有

$$\int_{a-\alpha}^{a+\beta}f(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x=f(a)\int_{a-\alpha}^{a+\beta}\delta(x-a)\mathrm{d}x=f(a) \tag{9.3}$$

容易看出，若 x 具有长度的量纲，则 $\delta(x-a)$将具有长度倒数的量纲。类似的，若 x 具有时间的量纲，则 $\delta(x-a)$将具有时间倒数的量纲。

9.2 狄拉克 δ 函数的表示

狄拉克 δ 函数具有很多种表示形式。但是最简单的表示形式是如下矩形函数 $R_\sigma(x)$的极限形式

$$\begin{cases}R_\sigma(x)=\dfrac{1}{2\sigma}, & a-\sigma<x<a+\sigma\\ R_\sigma(x)=0, & |x-a|>\sigma\end{cases} \tag{9.4}$$

如图 9.1 所示，是 σ 取不同值时的矩形函数的形式。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}R_\sigma(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\sigma}\int_{a-\sigma}^{a+\sigma}\mathrm{d}x=1 \quad (\text{与}\sigma\text{的值无关})$$

当 $\sigma\to0$ 时，矩形函数变得越来越接近陡峭的尖峰形状，但其下面覆盖的面积保持为 1 不变。在 $\sigma\to0$ 的极限下，矩形函数具有狄拉克 δ 函数的性质，可以写为

$$\delta(x-a)=\lim_{\sigma\to0}R_\sigma(x)$$

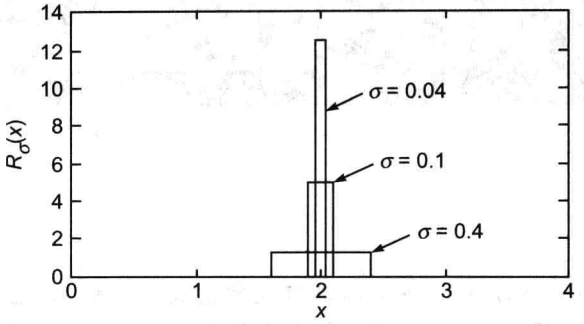


图 9.1　$a=2,\sigma=0.4,\sigma=0.1,\sigma=0.04$ 时的矩形函数。每个矩形函数所包围的面积均为1，当 $\sigma\to 0$ 时，矩形函数具有狄拉克 δ 函数的性质。

有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)R_\sigma(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\sigma}\int_{a-\sigma}^{a+\sigma} f(x)\mathrm{d}x \tag{9.5}$$

假设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 点连续，因此，当 $\sigma\to 0$ 时，在无限小的间隔 $a-\sigma<x<a+\sigma$ 内，$f(x)$ 可以看做常数($=f(a)$)并提出积分号外。因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x=\lim_{\sigma\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)R_\sigma(x)\mathrm{d}x=\lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{2\sigma}f(a)\int_{a-\sigma}^{a+\sigma}\mathrm{d}x=f(a)$$

9.3　δ 函数的积分表示

狄拉克 δ 函数的一种十分重要的形式，可以通过下面的积分表示

$$\delta(x-a)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}k(x-a)}\mathrm{d}k \tag{9.6}$$

为了证明式(9.6)，首先注意到

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}k(x-a)}\mathrm{d}k=\frac{\mathrm{sing}(x-a)}{\pi(x-a)} \tag{9.7}$$

在附录 B 中，已证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{sin}gx}{\pi x}\mathrm{d}x=1,\quad g>0 \tag{9.8}$$

g 为大于零的任意值。此外，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sin}gx}{x}=g$$

因此，对比较大的 g 值，函数

$$\frac{\mathrm{sing}(x-a)}{\pi(x-a)}$$

在 $x=a$ 附近非常尖峰化(见图 9.2)，并且不论 g 为何值，其曲线下覆盖的面积总为1；因此，在 $g\to\infty$ 时，其具有 δ 函数的全部性质，可以写为

$$\delta(x-a)=\lim_{g\to\infty}\frac{\mathrm{sing}(x-a)}{\pi(x-a)}=\lim_{g\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-g}^{+g}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}k(x-a)}\mathrm{d}k \tag{9.9}$$

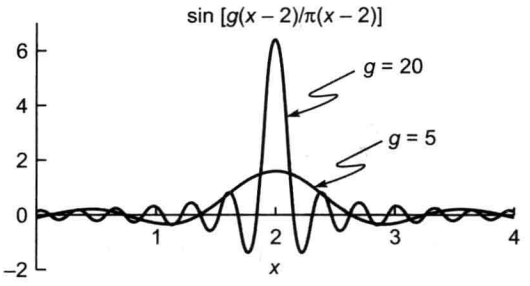


图 9.2　$a=2$ 且 $g=5,20$ 时，函数 $\frac{\sin g(x-a)}{\pi(x-a)}$ 的图形。任一情况下，曲线下覆盖的面积为 1。在 $g\to\infty$ 的极限条件下，在 $x=a$ 处，其函数极其尖峰化，此时具有狄拉克 δ 函数的全部性质。

9.4　作为分布函数的 δ 函数

我们应该指出，δ 函数其实是一个分布函数。为了理解这一点，首先考虑麦克斯韦分布函数

$$N(E)\mathrm{d}E = N_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} E^{1/2} \mathrm{e}^{-\frac{E}{kT}} \mathrm{d}E \tag{9.10}$$

式中 k 为玻尔兹曼常数，T 为热力学温度，m 为每个分子的质量。在式(9.10)中，$N(E)\mathrm{d}E$ 表示能量位于 E 至 $E+\mathrm{d}E$ 区间内的分子数。总分子数为 N_0，有

$$\int_0^\infty N(E)\mathrm{d}E = N_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty E^{1/2} \mathrm{e}^{-E/kT} \mathrm{d}E = N_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$$

式中 $x=E/kT$。其中积分的值 $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$。可得

$$\int_0^\infty N(E)\mathrm{d}E = N_0$$

应该注意到，N_0 仅是一个数，所以，$N(E)$ 应该具有能量倒数的量纲。显然，如果提问有多少分子具有准确的能量 E_1，答案也许是零。这就是分布的特性。另一方面，除了式(9.10)那样的分布，如果确实有 N_1 个分子都具有相同的能量 E_1，则其分布函数可以写为

$$N(E) = N_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} E^{1/2} \mathrm{e}^{-\frac{E}{kT}} + N_1 \delta(E - E_1) \tag{9.11}$$

式中 $\delta(E-E_1)$ 代表狄拉克 δ 函数，其量纲为能量的倒数。

9.5　傅里叶积分定理

在前面的章节中，已经推导出狄拉克 δ 函数积分表示式为

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}k(x-x')} \mathrm{d}k \tag{9.12}$$

由于

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x')f(x')\mathrm{d}x' \tag{9.13}$$

有

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}k(x-x')}f(x')\mathrm{d}x'\mathrm{d}k \tag{9.14}$$

因此,如果定义

$$F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \tag{9.15}$$

则

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \tag{9.16}$$

函数 $F(k)$称为 $f(x)$的傅里叶变换,根据式(9.16),可以由傅里叶变换反过来计算原函数。当下列条件满足时,式(9.14)就构成了傅里叶积分定理(见第8章的参考文献[4,5]):

(1) 对于实变量 $x(-\infty<x<\infty)$,函数 $f(x)$必须为单值函数。但是,可以有有限个数的有限(非无穷大)不连续点。

(2) 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 必须存在。

由式(9.14)可以看出,在式(9.15)和式(9.16)中,没有任何理由说明因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ 与 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ 不可以互换,即可以定义

$$F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \tag{9.17}$$

则

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \tag{9.18}$$

然而,在后面的讨论中,还是使用式(9.15)和式(9.16)的定义。

例 9.1 考虑一个高斯函数

$$f(x)=A\exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] \tag{9.19}$$

其傅里叶变换可以写为

$$F(k)=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

或

$$F(k)=A\sigma\exp\left[-\frac{1}{2}k^2\sigma^2\right] \tag{9.20}$$

其中应用了如下积分结果(见附录A)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x^2+\beta x}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp\left[\frac{\beta^2}{4\alpha}\right],\quad \mathrm{Re}\,\alpha>0 \tag{9.21}$$

从式(9.20)可以看出,函数 $F(k)$也是高斯型。因此,可以得出结论:高斯函数的傅里叶变换还是高斯函数。同时也注意到,如果式(9.19)的高斯函数其空间宽度为(见图9.3(a))

$$\Delta x\sim\sigma$$

其傅里叶变换 $F(k)$的宽度为(见图9.3(b))

$$\Delta k \sim \frac{1}{\sigma} \tag{9.22}$$

因此可得

$$\Delta x \Delta k \sim 1 \tag{9.23}$$

上式是傅里叶变换对的一般性质。

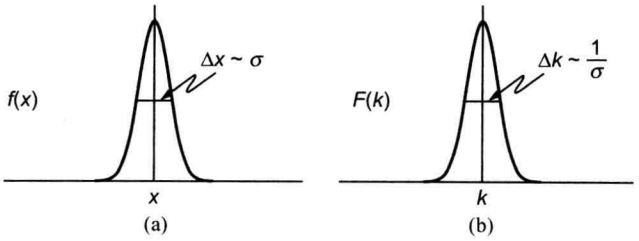


图　9.3

(a) 由式(9.19)给出的高斯函数 $f(x)$；(b) 高斯函数的傅里叶变换在 k 空间中仍然是高斯函数(见式(9.20))

例 9.2　计算矩形函数的傅里叶变换

$$f(x) = \mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 1, & |x| < \dfrac{1}{2}a \\ 0, & |x| > \dfrac{1}{2}a \end{cases} \tag{9.24}$$

其傅里叶变换为(见图 9.4)

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x$$

$$F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(ka/2)}{k} \tag{9.25}$$

再次注意到，矩形函数的宽度为 $\Delta x = a$，而其傅里叶变换的宽度为

$$\Delta k \sim \frac{\pi}{a}$$

给出 $\Delta x \Delta k \sim 1$。式(9.25)可以写为

$$F(k) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{sinc}\xi \tag{9.26}$$

式中

$$\xi \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \frac{ka}{2} \tag{9.27}$$

且

$$\mathrm{sinc}(x) \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \frac{\sin x}{x} \tag{9.28}$$

称为 sinc 函数。应用式(9.16)，可得

$$\mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{sinc}\xi \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$$

或

$$\mathrm{rect}\left(\frac{X}{2}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}\xi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi X}\,\mathrm{d}\xi\right) \tag{9.29}$$

式中

$$X\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\frac{x}{a/2} \tag{9.30}$$

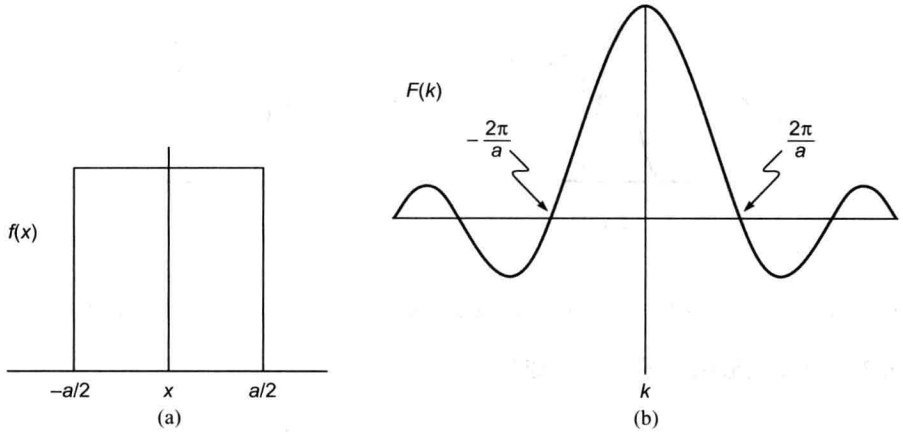


图 9.4

(a) 矩形函数;(b) 矩形函数的傅里叶变换

因此,sinc 函数的傅里叶变换即为$\sqrt{\pi/2}$倍的矩形函数

$$\mathscr{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{rect}\left(\frac{k}{2}\right) \tag{9.31}$$

对于一随时间变化的函数,可以将其傅里叶变换写为(参见 8.4 节)

$$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{9.32}$$

其反变换可以写为

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{9.33}$$

上面两式除了将 x 和 k 替换做 t 和 ω 外,与式(9.15)和式(9.16)没有区别。函数 $F(\omega)$ 一般视作时间函数 $f(t)$ 的频谱。

例 9.3 考虑高斯函数的傅里叶变换(见图 9.5)

$$f(t)=A\exp\left(-\frac{t^2}{t_0^2}\right) \tag{9.34}$$

其傅里叶变换为(应用式(9.32)):

$$F(\omega)=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{t_0^2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t=\frac{At_0}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{\omega^2t_0^2}{4}\right) \tag{9.35}$$

其中应用了式(9.21)的积分。函数 $F(\omega)$(见式(9.35))如图 9.5 所示。将 $f(t)$ 的半高全宽(通常缩写为 FWHM)用 Δt 表示;因此,在 $t=\pm\frac{1}{2}\Delta t$ 处,函数 $f(t)$ 的值为其峰值的一半

$$\frac{1}{2}A=A\exp\left(-\frac{(\Delta t)^2}{4t_0^2}\right)$$

因此

$$\Delta t = \sqrt{\ln 2}t_0 \approx 1.67t_0$$

同理，若定义 $\Delta\omega$ 为 $F(\omega)$的半高全宽 FWHM(见图 9.5)，则

$$\Delta\omega = \frac{4\sqrt{\ln 2}}{t_0} \approx \frac{3.34}{t_0} \tag{9.36}$$

由此可知，若一个时间函数 $f(t)$的时间宽度为 Δt，则其傅里叶变换 $F(\omega)$的谱宽为

$$\Delta\omega \sim \frac{1}{\Delta t} \tag{9.37}$$

这给出了测不准关系(见例 10.4 以及 17.6 节)

$$\Delta\omega\Delta t \sim 1 \tag{9.38}$$

上式与前面证明的关系 $\Delta x\Delta k \sim 1$ 是类似的。

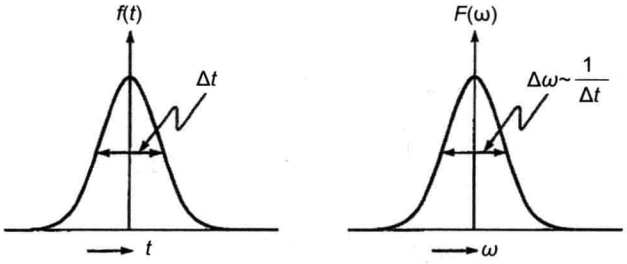


图 9.5　将时域空间中的高斯函数经傅里叶变换变换到频域空间，仍然是高斯函数。

9.6　二维和三维傅里叶变换

将 9.4 节中的分析推广到二维或三维的情况。例如，函数 $f(x,y)$的二维傅里叶变换为

$$F(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(ux+vy)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{9.39}$$

式中 u 和 v 称为空间频率。其傅里叶反变换为

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u,v)\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}(ux+vy)}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{9.40}$$

根据 19.6 节中的式(19.29)和式(19.30)。类似地，可以定义三维傅里叶变换

$$F(u,v,w) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(ux+vy+uz)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{9.41}$$

其傅里叶反变换为

$$f(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u,v,w)\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}(ux+vy+uz)}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \tag{9.42}$$

9.6.1　卷积定理

两个函数 $f(x)$和 $g(x)$的卷积定义为

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x')g(x-x')\mathrm{d}x' = g(x) * f(x) \tag{9.43}$$

卷积具有十分重要的性质：

两个函数卷积的傅里叶变换是其分别傅里叶变换乘积的$\sqrt{2\pi}$倍。

上述性质的证明如下

$$\mathscr{F}[f(x)*g(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x'f(x')g(x-x')\right]$$

$$=\sqrt{2\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x'f(x')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx'}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}xg(x-x')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-x')}\right] \tag{9.44}$$

在第二个括号中，用ξ替换$x-x'$，可得

$$\mathscr{F}[f(x)*g(x)]=\sqrt{2\pi}F(k)G(k)$$

式中$F(k)$和$G(k)$分别为$f(x)$和$g(x)$的傅里叶变换。卷积也可以用来得到两个函数乘积的傅里叶变换

$$\mathscr{F}[f(x)g(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}xg(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}\mathrm{d}k'\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k'F(k')\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}xg(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-k')x}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(k')G(k-k')\mathrm{d}k'$$

因此

$$\mathscr{F}[f(x)g(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(k)*G(k)$$

由上式的结果可知，两个函数的乘积的傅里叶变换是其分别傅里叶变换进行卷积的$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$倍。

小　结

- 狄拉克δ函数定义为

$$\delta(x-a)=0,\quad x\neq a$$

对于在$x=a$点连续的函数$f(x)$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x=f(a)$$

- 对于一个时间函数$f(t)$，其傅里叶变换为

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

其反变换为

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t^{①}$$

- 高斯函数

$$f(t)=A\exp\left(-\frac{t^2}{t_0^2}\right)$$

的傅里叶变换为

$$F(\omega)=\frac{At_0}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2t_0^2}{4}}$$

- 一般地，若一个函数时域展宽为 Δt，则其傅里叶变换 $F(\omega)$ 的谱展宽为 $\Delta\omega\approx1/\Delta t$。
- 函数 $f(x,y)$ 的二维傅里叶变换为

$$F(u,v)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(ux+vy)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

式中 u 和 v 称为空间频率。其傅里叶反变换为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F(u,v)\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}(ux+vy)}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

- 两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的卷积定义为

$$f(x)*g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x')g(x-x')\mathrm{d}x'=g(x)*f(x)$$

两个函数卷积的傅里叶变换是其分别傅里叶变换的乘积的 $\sqrt{2\pi}$ 倍。

习　题

9.1　考虑高斯函数

$$G_\sigma(x)\overset{\text{def}}{=\!=}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right],\quad\sigma>0$$

应用式(9.21)，证明：$\int_{-\infty}^{\infty}G_\sigma(x)\mathrm{d}x=1$。并绘出 $a=2$，且 $\sigma=1,5$ 和 10 时的 $G_\sigma(x)$。并由此证明

$$\delta(x-a)=\lim_{\sigma\to0}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]\tag{9.45}$$

为 δ 函数的高斯函数表示。

9.2　考虑斜坡函数

$$F_\sigma(x)=\begin{cases}0, & x<a-\sigma\\ \dfrac{1}{2\sigma}(x-a+\sigma), & |x-a|<\sigma\\ 1, & x>a+\sigma\end{cases}\tag{9.46}$$

证明

$$\frac{\mathrm{d}F_\sigma}{\mathrm{d}x}=R_\sigma(x)$$

① 原文为：$F(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\omega)\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t$。

式中 $R_\sigma(x)$ 为如式(9.4)定义的矩形函数。取极限 $\sigma\to 0$,证明 $\delta(x-a)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H(x-a)$,式中 $H(x-a)$ 为单位阶梯函数。由此,可以得到重要的结论:若一个函数在 $x=a$ 处的不连续的差值为 α,则其在 $x=a$ 的导数为 $\alpha\delta(x-a)$。

9.3 考虑对称函数

$$\psi(x)=A\exp(-K\mid x\mid)$$

证明

$$\psi''(x)=K^2\psi(x)-2AK\delta(x)$$

9.4 考虑函数 $f(t)=A\mathrm{e}^{-t^2/2\tau^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$,计算其傅里叶变换 $F(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$,并近似估算其 $\Delta\omega\Delta t$,而后应用 $F(\omega)$ 的表示计算 $f(t)$。

9.5 计算下列函数的傅里叶变换

(1)

$$\begin{cases}f(x)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 x}, & \mid x\mid<L/2\\ f(x)=0, & \mid x\mid>L/2\end{cases}$$

(2)

$$f(x)=A\exp\left[-\frac{\mid x\mid}{L}\right]$$

对于上述每一个函数,分别用物理解释地估算 Δx 和 Δk。

9.6 证明两个高斯函数的卷积为另一个高斯函数

$$\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)*\exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right)=ab\left(\frac{\pi}{a^2+b^2}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{a^2+b^2}\right)$$

第10章 群速度和脉冲色散

对于一个理想的波，你无法说出它是从何时开始的，所以，你不能用它作一个计时信号。为了传送信号，你不得不对这个波做某种改变，比如在其上面造成一个凹口，让它变得稍阔一点或者稍窄一点。这就意味着你必须让这个波中不只包含单一频率，而且，可以证明，信号传输的速度不只取决于折射率，也取决于折射率随频率改变的方式。

——理查德·费曼，《费曼物理学讲义》，第一卷

重要的里程碑

1672年 艾萨克·牛顿向英国皇家学会报告了关于阳光经过三棱镜后的色散的发现。从这个实验中，牛顿总结出太阳光是由不同颜色的光组成的，玻璃对于这些不同颜色的光的折射程度不同。

10.1 引言

光源一开一关，就产生了一个脉冲。这个脉冲以所谓的群速度在媒质中传播，在本章中，我们将对群速度进行讨论。此外，还将讨论当脉冲在传播时产生畸变的情况[①]。研究光脉冲的畸变在很多领域都是很重要的课题，尤其是在光纤通信系统中具有非常重要的意义，我们将在第27章和第29章对其进行讨论。

10.2 群速度

考虑两个频率稍有不同的平面波(有相同的振幅A)沿$+z$方向传播，其频率分别为$\omega+\Delta\omega$和$\omega-\Delta\omega$

$$\Psi_1(z,t) = A\cos[(\omega+\Delta\omega)t-(k+\Delta k)z] \tag{10.1}$$

$$\Psi_2(z,t) = A\cos[(\omega-\Delta\omega)t-(k-\Delta k)z] \tag{10.2}$$

式中，$k+\Delta k$和$k-\Delta k$是与频率$\omega+\Delta\omega$和$\omega-\Delta\omega$相关联的波数。两个波的叠加由下式给出

$$\Psi(z,t) = A\cos[(\omega+\Delta\omega)t-(k+\Delta k)z]+A\cos[(\omega-\Delta\omega)t-(k-\Delta k)z]$$

① 本章涉及的波的相关知识将会在下一章进行讨论。也许读者可以先看第11章，再看这一章。

或者

$$\Psi(z,t) = 2A\cos(\omega t - kz)\cos[(\Delta\omega)t - (\Delta k)z] \tag{10.3}$$

如图10.1(a)所示,为当 $t=0$ 时 $\cos(\omega t - kz)$ 项的快速变化,两个相邻波峰的间距是 $2\pi/k$。如图10.1(b)所示,为当 $t=0$ 时慢变包络项的变化,用 $\cos[(\Delta\omega)t-(\Delta k)z]$ 表示,两个相邻波峰之间的距离是 $2\pi/\Delta k$。如图10.2(a)和(b)所示,分别绘出了 $t=0$ 和 $t=\Delta t$ 时的 $\Psi(z,t)$。

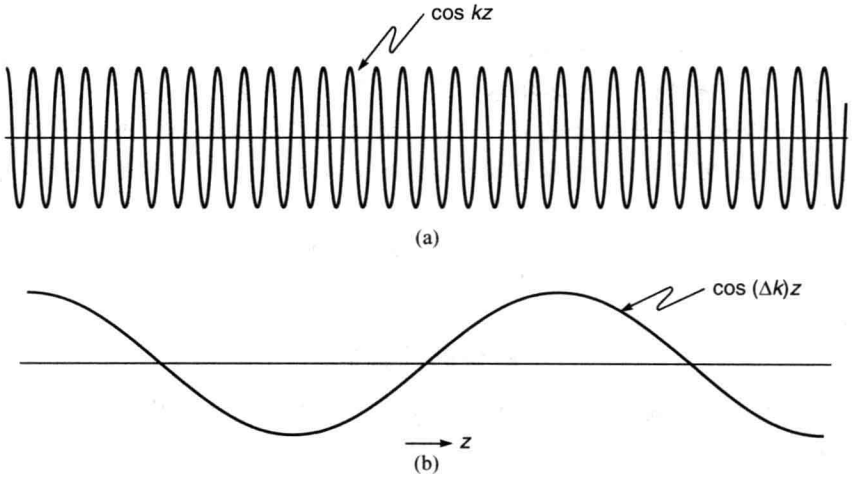


图 10.1

(a) 当 $t=0$ 时,$\cos(\omega t-kz)$ 项的快速变化,两个相邻波峰的间距是 $2\pi/k$;(b) 当 $t=0$ 时慢变包络项的变化,用 $\cos[(\Delta\omega)t-(\Delta k)z]$ 表示,两个相邻波峰之间的距离是 $2\pi/\Delta k$。

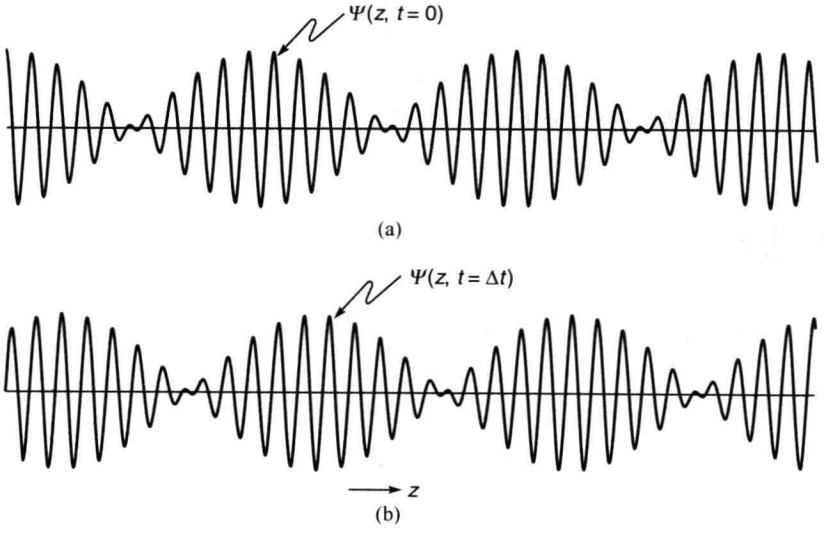


图 10.2 (a)和(b)中分别画出了 $t=0$ 和 $t=\Delta t$ 时的 $\Psi(z,t)$。包络以群速度 $\Delta\omega/\Delta k$ 移动。

显然,快变的第一项以速度 v_p 传输

$$v_p = \frac{\omega}{k} \tag{10.4}$$

而慢变包络(即式(10.3)中的第二项)以速度 v_g 传输

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \tag{10.5}$$

v_p 和 v_g 分别称为相速度和群速度。群速度是一个非常重要的概念,实际上,在下一节将会严格论证一个时域脉冲将以群速度 v_g 传输

$$v_g = \frac{1}{\mathrm{d}k/\mathrm{d}\omega} \tag{10.6}$$

在折射率为 $n(\omega)$的媒质中,有

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega) \tag{10.7}$$

因此

$$\frac{1}{v_g} = \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega} = \frac{1}{c}\left[n(\omega) + \omega\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}\right] \tag{10.8}$$

又在自由空间,对于所有的频率都满足 $n(\omega)=1$,则

$$v_g = v_p = c \tag{10.9}$$

回到式(10.8),我们习惯用自由空间中的波长 λ_0 来表示自变量,λ_0 与 ω 的关系由式(10.10)给出

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_0} \tag{10.10}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda_0}\frac{\mathrm{d}\lambda_0}{\mathrm{d}\omega} = -\frac{\lambda_0^2}{2\pi c}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda_0} \tag{10.11}$$

或者

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{c}\left[n(\lambda_0) - \lambda_0\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda_0}\right] \tag{10.12}$$

群折射率 n_g 定义为

$$n_g = \frac{c}{v_g} = n(\lambda_0) - \lambda_0\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda_0} \tag{10.13}$$

在表 10.1 中列出了纯二氧化硅关于自由空间波长 λ_0 的函数 $n(\lambda_0)$,$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda_0}$和 $n_g(\lambda_0)$。如图 10.3 所示,为(纯二氧化硅)群速度 v_g 随波长的变化。可以看出,群速度在 $\lambda_0 \approx 1.27\mu\mathrm{m}$ 时达到了最大值。本章后面的章节(还有第 27 章)中将证明这个波长在光通信系统中有重要意义。

例 10.1　假设纯二氧化硅在波长范围 $0.5\mu\mathrm{m} < \lambda_0 < 1.6\mu\mathrm{m}$ 的折射率变化近似由下面的经验方程给出

$$n(\lambda_0) \approx C_0 - a\lambda_0^2 + \frac{a}{\lambda_0^2} \tag{10.14}$$

式中 $C_0 \approx 1.451$,$a \approx 0.003$,λ_0 的单位为 $\mu\mathrm{m}$。(习题 10.6 中有关于 $n(\lambda_0)$的更精确表达式)。通过简单地计算,有

$$n_g(\lambda_0) = C_0 + a\lambda_0^2 + \frac{3a}{\lambda_0^2} \tag{10.15}$$

那么,当 $\lambda_0 = 1\mu\mathrm{m}$ 时,有

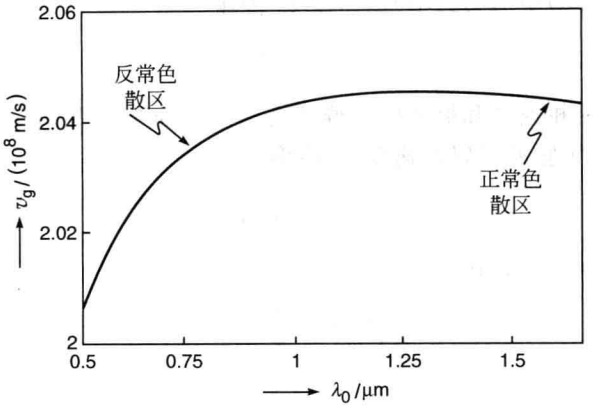


图 10.3　纯二氧化硅中群速度 v_g 随波长的变化

$$n(\lambda_0) \approx 1.451$$

以及

$$n_g(\lambda_0) \approx 1.463$$

这说明群速度和相速度的值相差 0.8%。更精确的 $n(\lambda_0)$ 和 $n_g(\lambda_0)$ 的值将在表 10.1 中给出(由习题 10.6 中给出的方程计算得到)。

根据表 10.1,可以发现在纯二氧化硅中,对于

$$\lambda_0 = 0.80\mu m, \quad v_g = c/n_g = 2.0444 \times 10^8 m/s$$

但对于

$$\lambda_0 = 0.85\mu m, \quad v_g = c/n_g = 2.0464 \times 10^8 m/s$$

这意味着波长更长($\lambda_0 < 1.27\mu m$)的组分传播得更快;同样地,在 $\lambda_0 > 1.27\mu m$ 的范围,波长短的组分传播得更快。每个光源都有一定的波长延展,这种延展通常称为光源的频谱宽度。因此,一个白光源(比如日光)有大约 3000Å 的谱宽;而一个发光二极管(通常简写为 LED)的谱宽约为 25nm;一个工作在 1.3μm 附近的典型激光二极管(通常简写为 LD)的谱宽大约为 2nm,这个谱宽常记为 $\Delta\lambda_0$。由于(一个脉冲的)每个波长组分将以稍有差异的群速度传输,通常这会导致脉冲展宽。为了计算这个展宽量,把一个脉冲在色散媒质中传输距离 L 所用的时间记为

$$\tau = \frac{L}{v_g} = \frac{L}{c}\left[n(\lambda_0) - \lambda_0 \frac{dn}{d\lambda_0}\right] \tag{10.16}$$

由于等式右边依赖于 λ_0,那么,上式意味着不同的波长在色散媒质中以不同的群速度走过特定的距离,脉冲展宽可由式(10.17)给出

$$\Delta\tau_m = \frac{d\tau}{d\lambda_0}\Delta\lambda_0 = -\frac{L\Delta\lambda_0}{\lambda_0 c}\left(\lambda_0^2 \frac{d^2 n}{d\lambda_0^2}\right) \tag{10.17}$$

$\Delta\tau_m$ 通常称为材料色散,因为它是由媒质的材料特性决定的,用下标 m 表示。式(10.17)的括号中的量是无量纲的。实际上,在色散媒质中传输了距离 L 后,脉冲的时域宽度 τ_0 会展宽成 τ_f

$$\tau_f^2 \approx \tau_0^2 + (\Delta\tau_m)^2 \tag{10.18}$$

表 10.1　纯二氧化硅中的 n,n_g 和 D_m 的值①

$\lambda_0/\mu m$	$n(\lambda_0)$	$\left.\frac{dn}{d\lambda_0}\right/\mu m^{-1}$	$n_g(\lambda_0)$	$\left.\frac{d^2n}{d\lambda_0^2}\right/\mu m^{-2}$	$D_m/(ps/(km\cdot nm))$
0.70	1.45561	−0.02276	1.47154	0.0741	−172.9
0.75	1.45456	−0.01958	1.46924	0.0541	−135.3
0.80	1.45364	−0.01725159	1.46744	0.0400	−106.6
0.85	1.45282	−0.01552236	1.46601	0.0297	−84.2
0.90	1.45208	−0.01423535	1.46489	0.0221	−66.4
0.95	1.45139	−0.01327862	1.46401	0.0164	−51.9
1.00	1.45075	−0.01257282	1.46332	0.0120	−40.1
1.05	1.45013	−0.01206070	1.46279	0.0086	−30.1
1.10	1.44954	−0.01170022	1.46241	0.0059	−21.7
1.15	1.44896	−0.01146001	1.46214	0.0037	−14.5
1.20	1.44839	−0.01131637	1.46197	0.0020	−8.14
1.25	1.44783	−0.01125123	1.46189	0.00062	−2.58
1.30	1.44726	−0.01125037	1.46189	−0.00055	2.39
1.35	1.44670	−0.01130300	1.46196	−0.00153	6.87
1.40	1.44613	−0.01140040	1.46209	−0.00235	10.95
1.45	1.44556	−0.01153568	1.46229	−0.00305	14.72
1.50	1.44498	−0.01170333	1.46253	−0.00365	18.23
1.55	1.44439	−0.01189888	1.46283	−0.00416	21.52
1.60	1.44379	−0.01211873	1.46318	−0.00462	24.64

下一节将以高斯脉冲为例,对此进行更明晰的证明。从式(10.17)中可以看出,脉冲的展宽与媒质中的传输距离 L 以及光源的谱宽 $\Delta\lambda_0$ 是成比例的。假设

$$\Delta\lambda_0 = 1\text{nm} = 10^{-9}\text{m},\quad L = 1\text{km} = 1000\text{m}$$

并定义色散系数

$$D_m = \frac{\Delta\tau_m}{L\Delta\lambda_0} \approx -\frac{1}{3\lambda_0}\left(\lambda_0^2\frac{d^2n}{d\lambda_0^2}\right)\times 10^4,\quad \text{ps/(km}\cdot\text{nm)} \tag{10.19}$$

式中,λ_0 的单位是 μm,并假设 $c\approx 3\times10^8$m/s。D_m 通常被称为材料色散系数(因为它源于媒质的材料特性),并且用脚标 m 标识出来。当媒质的 D_m 为正时,媒质称为具有反常色散特征②,当 D_m 为负时,媒质称为具有正常色散特征。

---

① 表格里的数值都是根据参考文献[2]中给出的折射率变化公式计算的(见习题 10.6)。

② 描述材料色散特性的物理量有 $\gamma \overset{\text{def}}{=\!=} d^2k/d\omega^2$(见式(10.42))和 D_m,它们区别于在研究材料色散引起的时延展宽时,用频率还是用波长表示。其中

$$\Delta\tau_m = \frac{d\tau_m}{d\omega}\Delta\omega = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{L}{v_g}\right)\Delta\omega = L\frac{d^2k}{d\omega^2}\Delta\omega = L\gamma\Delta\omega,\quad \Delta\tau_m = \frac{d\tau}{d\lambda_0}\Delta\lambda_0 = LD_m\Delta\lambda_0$$

显然,有关系

$$D_m = -\frac{2\pi c}{\lambda_0^2}\gamma$$

按照光纤通信正常的定义:当 $\gamma>0$ 时($D_m<0$)称为正常色散(normal dispersion);当 $\gamma<0$ 时($D_m>0$)称为反常色散(abnormal dispersion)。原书中以 D_m 的正负称为正色散(positive dispersion)和负色散(negtive dispersion)是不规范的,因此,翻译时做了纠正。当然,还要注意光纤通信中所谓的"色散"、"正常色散"和"反称色散"与光学中的相应概念有差别(7.5 节)。译者注。

这里说明一下,脉冲的频谱宽度通常是基于光源的固有谱宽。对于典型的LED是25nm,而商用的LD大约是1～2nm。此外,对于一个准单色光源,固有谱宽是极小的,而且,实际的脉冲谱宽则由其有限的持续时间决定(这种脉冲通常被称为傅里叶变换极限脉冲[①])。那么,一个20ps(傅里叶变换的)脉冲的谱宽

$$\Delta\nu \approx \frac{1}{20\times10^{-12}} \approx 5\times10^{11}\,\mathrm{Hz}$$

即,意味着

$$\Delta\lambda_0 \approx \frac{\lambda_0^2\Delta\nu}{c} \approx 0.4\mathrm{nm}$$

可以看出,在$\lambda_0\approx1.27\mu$m附近,有

$$\frac{\mathrm{d}^2n}{\mathrm{d}\lambda_0^2} \approx 0$$

实际上,波长$\lambda_0\approx1270$nm通常被称为零材料色散波长,由于在$\lambda_0\approx1300$nm附近为低材料色散,第二代和第三代光通信系统都是在该波段工作的,更详细的讨论将在第27章给出。

例10.2 在第一代光通信系统中,使用的是$\lambda_0\approx0.85\mu$m和$\Delta\lambda_0\approx25$nm的LED光源。因为对于$\lambda_0\approx0.85\mu$m,有

$$\frac{\mathrm{d}^2n}{\mathrm{d}\lambda_0^2} \approx 0.030\mu\mathrm{m}^{-2}$$

给出

$$D_\mathrm{m} \approx -85\mathrm{ps/(km\cdot nm)}$$

负号表示长波长比短波长传输快。这样,对于$\Delta\lambda_0\approx25$nm,脉冲实际展宽为

$$\Delta\tau_\mathrm{m} \approx 2.1\mathrm{ns/km}$$[②]

即脉冲在石英光纤中传输1km后,会展宽2.1ns。

例10.3 在第四代光通信系统中使用的是$\lambda_0=1.55\mu$m,$\Delta\lambda_0\approx2$nm的激光源。对于$\lambda_0\approx1.55\mu$m,有

$$\frac{\mathrm{d}^2n}{\mathrm{d}\lambda_0^2} \approx 0.0042\mu\mathrm{m}^{-2}$$

给出

$$D_\mathrm{m} \approx +21.7\mathrm{ps/(km\cdot nm)}$$

正号表明长波长比短波长传播速度慢。(从表10.1中也可以看出,对于波长$\lambda_0\geqslant1.27\mu$m,$n_\mathrm{g}$随$\lambda_0$的增大而增大)。那么,对于$\Delta\lambda_0\approx2$nm,脉冲实际展宽了

$$\Delta\tau_\mathrm{m} \approx 43\mathrm{ps/km}$$

即在石英光纤中传播1km后,脉冲展宽了43ps。

---

① 原书为Fourier Transformed pulse,实际上应为Fourier Transform Limited pulse。傅里叶变换极限脉冲意味脉冲没有啁啾,这样的脉冲其持续时间与频谱宽度的乘积(时间带宽积)最小。只有傅里叶极限脉冲才有关系$\Delta t\Delta\nu\sim1$,而有啁啾的脉冲没有这种关系。译者注。

② 光纤通信一般定义时延或时延差均为走过单位距离所用的时间或时间差。显然,原书式(10.16)、式(10.17)的定义与这里有差别,这里的$\Delta\tau_\mathrm{m}$才是时延差。但在原书中除了例题,正文部分还是自洽的。需要注意的例题还有例10.3、例27.14、例27.15。

10.3　波包的群速度

一个沿着 $+z$ 方向传播的一维平面波，其对应的(广义)位移可以写为以下形式

$$E(z,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)} \tag{10.20}$$

式中 A 表示波的振幅，而

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c}n(\omega) \tag{10.21}$$

n 是媒质的折射率。式(10.20)描述的是以式(10.22)给出的相速度 v_{p} 传播的单色波

$$v_{\mathrm{p}} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} \tag{10.22}$$

在这里需要提及的是，一般地讲，A 可能是复数，如果把 A 写为

$$A = |A|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$$

那么，式(10.20)则变成

$$E(z,t) = |A|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz + \phi)}$$

实际的(广义)位移是取 E 的实部，即

$$\text{实际电场强度} = \mathrm{Re}(E) = |A|\cos(\omega t - kz + \phi) \tag{10.23}$$

用式(10.20)表示的平面波实际上是不可能实现的，因为无论 z 取何值，(广义)位移对于 t 的所有值都要求是有限的；例如

$$E(z=0,t) = A\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}, \quad -\infty < t < +\infty \tag{10.24}$$

表示一个对所有时间都进行的正弦变化。在实际中，位移只在一段时间内是有限的，我们称之为波包。波包通常可以表示为不同频率的平面波的叠加，即

$$E(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}\,\mathrm{d}\omega \tag{10.25}$$

显然

$$E(z=0,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{10.26}$$

这样，$E(z=0,t)$就是 $A(\omega)$的傅里叶变换，代入前面章节的结果，可得

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E(z=0,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{10.27}$$

那么，如果已知 $E(z=0,t)$，可以使用下面的方法求得 $E(z,t)$：

先根据式(10.27)求出 $A(\omega)$，再将其代入式(10.25)，进行积分运算，得到 $E(z,t)$。

例 10.4　以高斯脉冲为例，可写为

$$E(z=0,t) = E_0\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{\tau_0^2}}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega_0 t} \tag{10.28}$$

将式(10.28)代入式(10.27)，可得

$$A(\omega) = \frac{E_0}{2\pi}\int \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{\tau_0^2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t}\,\mathrm{d}t = \frac{E_0\tau_0}{2\sqrt{\pi}}\exp\left[-\frac{1}{4}(\omega-\omega_0)^2\tau_0^2\right] \tag{10.29}$$

其中用到了

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x^2+\beta x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\mathrm{e}^{\beta^2/4\alpha} \tag{10.30}$$

(见附录A)。通常$A(\omega)$是复数,则定义频谱密度为

$$S(\omega) = |A(\omega)|^2 \tag{10.31}$$

对于高斯脉冲,有

$$S(\omega) = \frac{E_0^2\tau_0^2}{4\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}(\omega-\omega_0)^2\tau_0^2\right] \tag{10.32}$$

如图10.4(a)所示函数的表达式为

$$E_0 e^{-\frac{t^2}{\tau_0^2}}\cos(\omega_0 t)$$

(该函数是式(10.28)的实部),该脉冲宽度为20fs($\tau_0 = 20\times10^{-15}$ s),对应波长$\lambda_0 = 1\mu$m($\omega_0 \approx 6\pi\times10^{14}$ Hz);如图10.4(b)所示为该脉冲对应的频谱密度函数$S(\omega)$。可以看出,$S(\omega)$是一个在$\omega=\omega_0$附近非常尖锐的峰函数。$S(\omega)$的半高全宽(通常简写作FWHM)记为$\Delta\omega$;那么,在$\omega=\omega_0\pm\frac{1}{2}\Delta\omega$处,$S(\omega)$取值为最大值的一半;$\Delta\omega$的取值由下式得出

$$\frac{1}{2} = \exp\left[-\frac{(\Delta\omega)^2\tau_0^2}{8}\right]$$

或者

$$\text{FWHM} = \Delta\omega = \frac{2\sqrt{2\ln 2}}{\tau_0} \approx \frac{2.35}{\tau_0} \tag{10.33}$$

这样,时域宽度为20fs的高斯脉冲的频率宽度$\Delta\omega$为

$$\Delta\omega \approx 1.18\times10^{14}\,\text{Hz} \tag{10.34}$$

则

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx 0.06$$

需要指出的是,为了让图表现得清晰,选择的τ_0的值非常小;而通常τ_0的值要大得多。τ_0的取值变大意味着$\Delta\omega$的值变小(导致脉冲接近单色),从而如图10.4(b)所示中的峰会更尖锐。在后面关于相干性的章节(第17章)中,将进行更详细地讨论。

回到式(10.25),考虑以下几种情况。

10.3.1 在无色散媒质中的传播

真空对于电磁波来说是无色散媒质,在真空中,所有频率都以相同的速度c传播,则

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c}$$

且式(10.25)可以写为如下形式

$$E(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega)e^{-i\frac{\omega}{c}(z-ct)}\,d\omega \tag{10.35}$$

等号的右边是$(z-ct)$的函数,这样,任何脉冲都可以无失真的以速度c传播。所以,对于式(10.28)给出的高斯脉冲,有

$$E(z,t) = E_0\exp\left[-\frac{(z-ct)^2}{c^2\tau_0^2}\right]\exp\left[-i\frac{\omega_0}{c}(z-ct)\right] \tag{10.36}$$

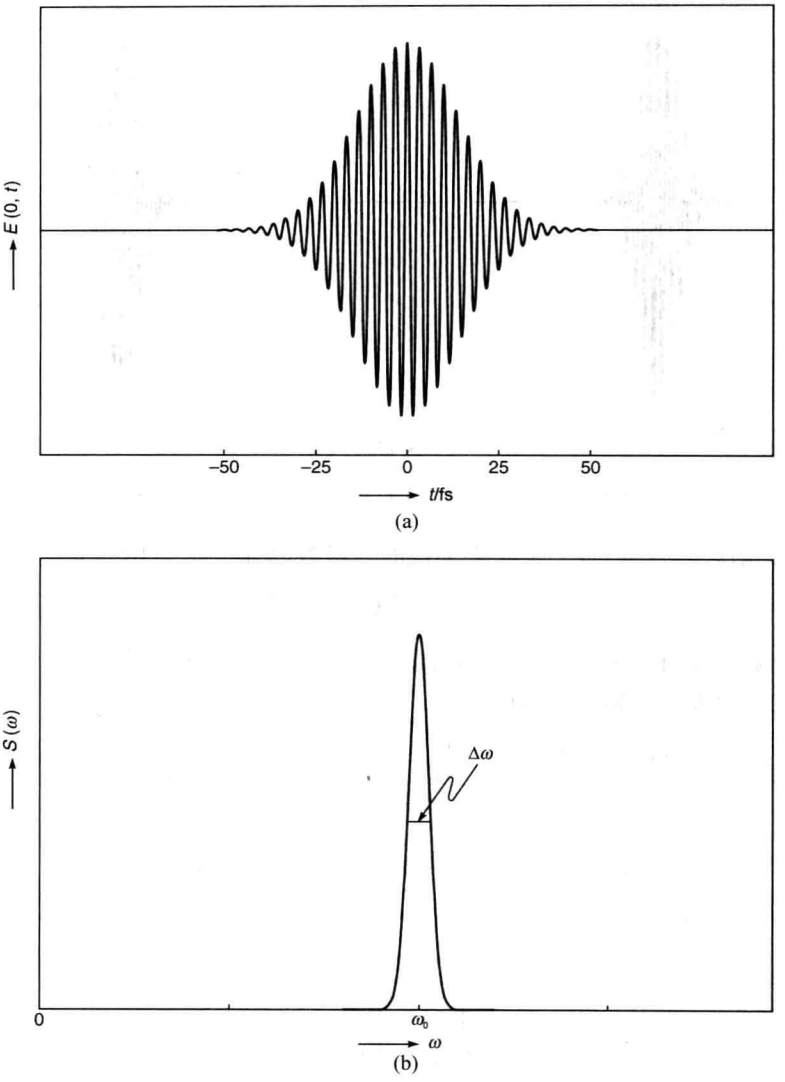


图　10.4

(a) $\lambda_0=1\mu$m 的 20fs($\tau_0=20\times10^{-15}$s)的高斯脉冲；(b) 相应的谱密度，$\omega=\omega_0$ 附近的频谱通常十分尖锐

表示在无色散媒质中，高斯脉冲将无失真传播[①]。如图 10.5 所示为一个 20fs 脉冲的无失真传播过程。

10.3.2　在色散媒质中的传播

对于在折射率随频率的变化为 $n(\omega)$的媒质中的波的传播，有

$$k(\omega)=\frac{\omega}{c}n(\omega)$$

① 式(10.36)直接来源于式(10.35)。将此练习留给读者去证明，将式(10.29)中的 $A(\omega)$代入式(10.35)，很容易得到式(10.36)。

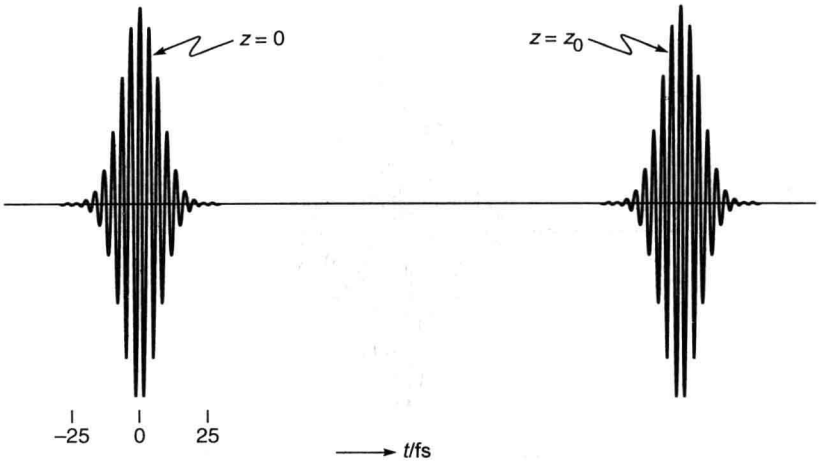


图 10.5　高斯脉冲在无色散媒质中的无失真传输

在大多数情况下，$A(\omega)$是一个非常尖锐的峰函数(见图 10.4(b))，有

$$E(z,t) \approx \int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} A(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\omega t - k(\omega) z]} \mathrm{d}\omega \tag{10.37}$$

由于对于 $\omega > \omega_0 + \Delta\omega$ 和 $\omega < \omega_0 - \Delta\omega$ 的情况，函数 $A(\omega)$的取值小到可以忽略。在这个小的积分域内，对 $k(\omega)$进行泰勒展开，有

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega=\omega_0} + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2 \left.\frac{\mathrm{d}^2 k}{\mathrm{d}\omega^2}\right|_{\omega=\omega_0} + \cdots \tag{10.38}$$

或者

$$k(\omega) = k_0 + \frac{1}{v_\mathrm{g}}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2 \gamma \tag{10.39}$$

式中

$$k_0 \overset{\text{def}}{=\!=} k(\omega_0) \tag{10.40}$$

$$\frac{1}{v_\mathrm{g}} \overset{\text{def}}{=\!=} \left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega=\omega_0} \tag{10.41}$$

且有

$$\gamma \overset{\text{def}}{=\!=} \left.\frac{\mathrm{d}^2 k}{\mathrm{d}\omega^2}\right|_{\omega=\omega_0} \tag{10.42}$$

这里要说明，通过式(10.41)定义了 v_g，下面证明脉冲包络以群速度 v_g 移动。如果只保留式(10.39)右侧的前两项，则可由式(10.37)得到

$$E(z,t) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \exp\left[-\mathrm{i}\left(k_0 z + \frac{\omega - \omega_0}{v_\mathrm{g}} z - \omega t\right)\right] \mathrm{d}\omega \tag{10.43}$$

式中把积分限换成从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 是由于在任何情况下，来自于 $|\omega - \omega_0| > \Delta\omega$ 区域的贡献都是非常小的。将 ωt 写为

$$\omega t = (\omega - \omega_0) t + \omega_0 t \tag{10.44}$$

则式(10.43)可以变为以下形式

$$E(z,t) \approx \underbrace{\exp[\mathrm{i}(\omega_0 t - k_0 z)]}_{\text{相位项}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\Omega) \underbrace{\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\Omega}{v_\mathrm{g}}(z - v_\mathrm{g} t)\right]}_{\text{包络项}} \mathrm{d}\Omega \tag{10.45}$$

式中

$$\Omega \xlongequal{\text{def}} \omega - \omega_0 \tag{10.46}$$

可以看出，包络项中 z 和 t 并没有独立出现，而是以结合的形式 $z-v_g t$ 出现，因此，脉冲包络以群速度 v_g 无失真地传播，即

$$v_g = \frac{1}{\left(\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0}} \tag{10.47}$$

如果忽略 γ（以及式(10.39)中其他的更高阶项），脉冲就以群速度 v_g 无失真地传播。

如果考虑式(10.39)中的前三项，可得

$$E(z,t) \approx \underbrace{\exp[\mathrm{i}(\omega_0 t - k_0 z)]}_{\text{相位项}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\Omega) \underbrace{\exp\left[\mathrm{i}\Omega\left(t - \frac{z}{v_g}\right) - \frac{\mathrm{i}}{2}\Omega^2 \gamma z\right]}_{\text{包络项}} \mathrm{d}\Omega \tag{10.48}$$

对于高斯脉冲（见式(10.28)），$A(\omega)$ 由式(10.29)给出；如果把 $A(\omega)$ 代入上述公式，并引入式(10.30)的积分，有

$$E(z,t) = \frac{E_0}{\sqrt{1+\mathrm{i}p}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0 t - k_0 z)} \exp\left[-\frac{\left(t - \dfrac{z}{v_g}\right)^2}{\tau_0^2(1+\mathrm{i}p)}\right] \tag{10.49}$$

式中

$$p \xlongequal{\text{def}} \frac{2\gamma z}{\tau_0^2} \tag{10.50}$$

相应的波强度分布为

$$I(z,t) = \frac{I_0}{\tau(z)/\tau_0} \exp\left[-\frac{2\left(t - \dfrac{z}{v_g}\right)^2}{\tau^2(z)}\right] \tag{10.51}$$

式中

$$\tau^2(z) \xlongequal{\text{def}} \tau_0^2(1+p^2) \tag{10.52}$$

如图 10.6 所示为 z 取不同值时，波强度随时间的变化。从式(10.52)可以看出，脉冲随着传播在时域展宽了。定义脉冲展宽 $\Delta\tau$ 为

$$\Delta\tau = \sqrt{\tau^2(z) - \tau_0^2} = |\,p\,|\,\tau_0 = \frac{2\,|\,\gamma\,|\,z}{\tau_0} \tag{10.53}$$

则

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}^2 k}{\mathrm{d}\omega^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\frac{1}{c}\left(n - \lambda_0 \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda_0}\right)\right] = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_0}\left[n(\lambda_0) - \lambda_0 \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda_0}\right]\frac{\mathrm{d}\lambda_0}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\lambda_0}{2\pi c^2}\left(\lambda_0^2 \frac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d}\lambda_0^2}\right) \tag{10.54}$$

式中方括号里的量是无量纲的。此外，既然高斯脉冲的谱宽为（见式(10.33)）

$$\Delta\omega \approx \frac{2}{\tau_0} \tag{10.55}$$

可以写为

$$\frac{1}{\tau_0} \approx \frac{1}{2}\Delta\omega \approx \frac{1}{2}\frac{2\pi c}{\lambda_0^2}\,|\,\Delta\lambda_0\,| \tag{10.56}$$

把式(10.56)中的 τ_0 和式(10.54)中的 γ 代入式(10.53)，可得

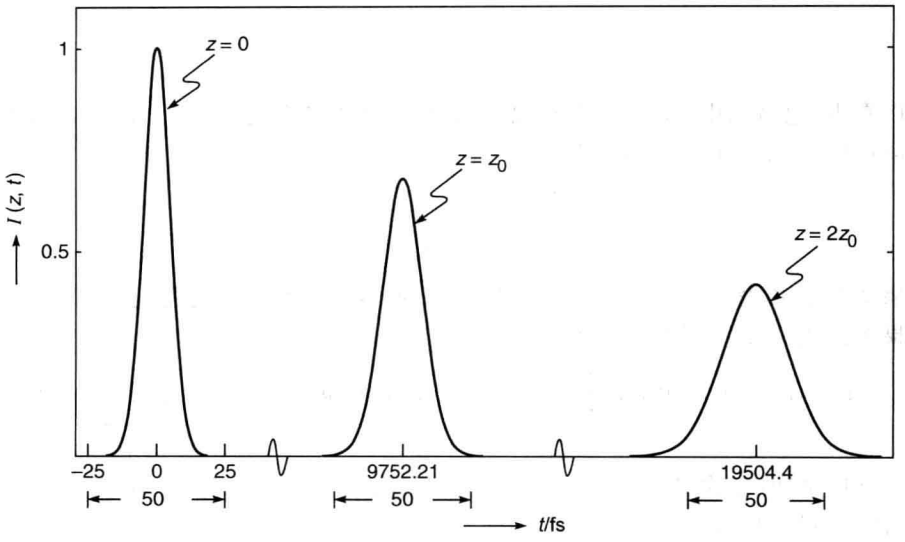


图 10.6　z 取不同值时，波强度随时间的变化，注意，脉冲在时域展宽了。

$$\Delta\tau = \frac{z}{\lambda_0 c}\left|\lambda_0^2 \frac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d}\lambda_0^2}\right| \Delta\lambda_0 \tag{10.57}$$

这与前一节(见式(10.17))得到的结果是一致的。

例 10.5　设 $\lambda_0 = 1.55\mu\mathrm{m}$，纯二氧化硅在该波长(见表 10.1)上有

$$\frac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d}\lambda_0^2} = -0.004165\mu\mathrm{m}^{-2}$$

则

$$\gamma \approx -\frac{1.55\times10^{-6}}{2\pi\times9\times10^{16}}(1.55\times1.55\times0.004165) \approx -2.743\times10^{-26}(\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^2)$$

对于一个 100ps 的脉冲在 2km 长的光纤中传输，有

$$\Delta\tau \approx \frac{2\times2.743\times10^{-26}\times2\times10^3}{10^{-10}} \approx 1.1(\mathrm{ps})$$

另一方面，对于一个 10fs 的脉冲，当 $z = 2z_0 = 4\mathrm{mm}$ 时[①]，则有

$$\Delta\tau \approx 22\mathrm{fs}$$

亦即

$$\tau_f = [\tau_0^2 + (\Delta\tau)^2]^{1/2} \approx 25\mathrm{fs}$$

这表明 10fs 的脉冲在传输一段很小的距离后，时域宽度成倍展宽了(见图 10.7 和图 10.8)。

10.3.3　色散脉冲的啁啾

如果做简单的变换，式(10.49)可写为

$$E(z,t) = \frac{E_0}{\sqrt{\tau(z)/\tau_0}}\exp\left[-\frac{\left(t-\frac{z}{v_g}\right)^2}{\tau^2(z)}\right]\exp[\mathrm{i}(\phi(z,t) - k_0 z)] \tag{10.58}$$

① 在这里和图 10.5～图 10.8 中都出现了一个特征长度 z_0，但原书正文中并没有对 z_0 的定义。译者认为，z_0 应该是色散长度，其定义为 $z_0 = \tau_0^2/2|\gamma|$，含义为色散开始起作用的传输距离。译者注。

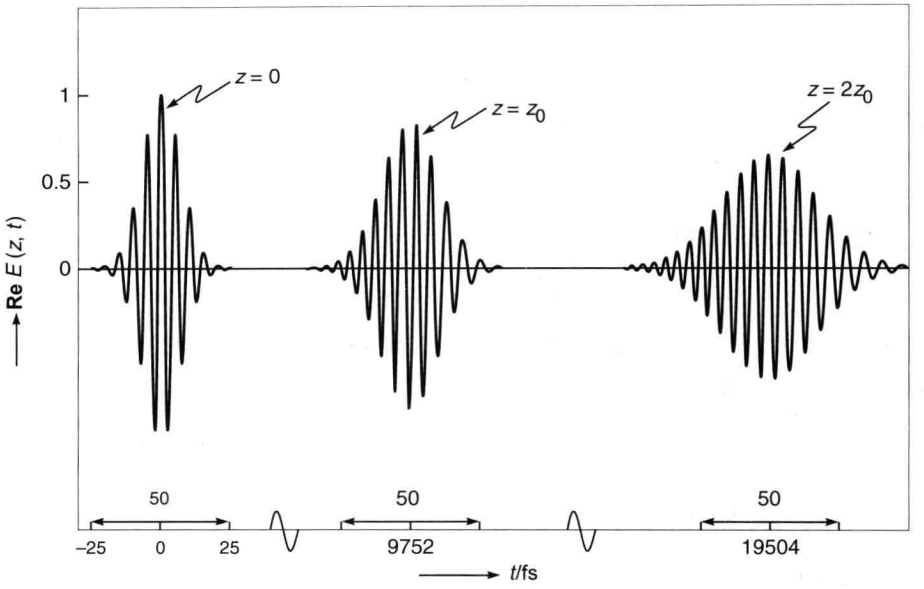


图 10.7　一个 10fs 无啁啾高斯脉冲($\lambda_0 = 1.55\mu m$)在二氧化硅中传输后的时域展宽。注意，由于是在反常色散区，脉冲是下啁啾。

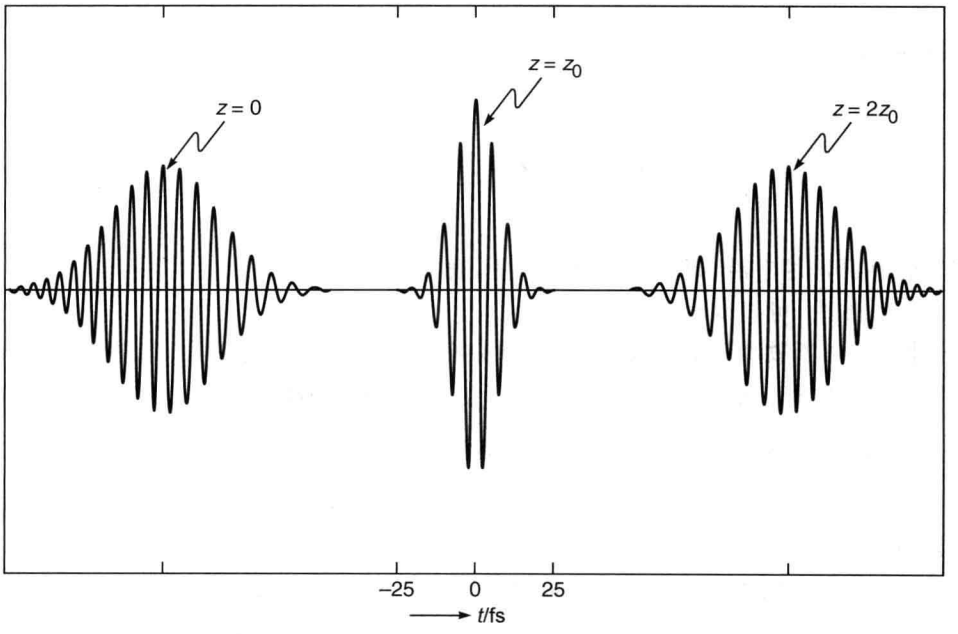


图 10.8　一个下啁啾脉冲在正常色散媒质中传播，它将会被压缩，直到变成无啁啾脉冲，然后又会在相反啁啾的作用下展宽。

式中相位项由式(10.59)给出

$$\Phi(z,t) = \omega_0 t + \kappa\left(t - \frac{z}{v_g}\right)^2 - \frac{1}{2}\arctan p \tag{10.59}$$

且有

$$\kappa(z)=\frac{p}{\tau_0^2(1+p^2)} \tag{10.60}$$

式(10.59)代表相位项,瞬时频率为

$$\omega(t)=\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\omega_0+2\kappa\left(t-\frac{z}{v_g}\right) \tag{10.61}$$

说明 $\omega(t)$随脉冲变化,则频率啁啾为

$$\Delta\omega=\omega(t)-\omega_0=2\kappa\left(t-\frac{z}{v_g}\right) \tag{10.62}$$

例 10.6 续前例 10.5,假设 $\lambda_0=1.55\mu$m,$z=2$km 时,考虑 100ps 的脉冲在纯石英光纤中传输所产生的啁啾,则有

$$p=\frac{2\gamma z}{\tau_0^2}\approx-\frac{2\times2.743\times10^{-26}\times2\times10^3}{(100\times10^{-12})^2}\approx-0.011$$

在 $t-\frac{z}{v_g}=-50$ps 处(即脉冲的前沿),有

$$\Delta\omega\approx\frac{2p}{\tau_0^2(1+p^2)}\times(-50\times10^{-12})\approx+\frac{2\times0.011\times50\times10^{-12}}{(100\times10^{-12})^2}=+1.1\times10^8(\text{Hz})$$

这样,在脉冲的前沿,频率就稍微高一些,通常被称为“蓝移”。注意到,有

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\approx9\times10^{-8}$$

在 $t=\frac{z}{v_g}$处,有

$$\Delta\omega=0$$

而在 $t-\frac{z}{v_g}=+50$ps 处(即脉冲的后沿),有

$$\Delta\omega\approx-1.1\times10^8\,\text{Hz}$$

那么,在脉冲的后沿,频率就稍微低一些,通常被称为“红移”。

从例 10.6 中,可以得出以下结论:

脉冲在反常色散媒质中传播时(即 γ 取负值),p 和 κ 取值也为负,这意味着瞬时频率(位于脉冲内)随着时间而减小(当然要假定 $z>0$),这被称作下啁啾[①]脉冲。脉冲的前沿$\left(t<\frac{z}{v_g}\right)$是**蓝移**(即频率比 ω_0 高);而脉冲的**后沿**$\left(t>\frac{z}{v_g}\right)$是**红移**(即频率比 ω_0 低)。

如图 10.7 所示的是 $t=0$ 时一个无啁啾脉冲。随着脉冲的传播,它将会变得更宽,并且得到很大的负啁啾。

从式(10.61)中很容易看出,当 z 取负值时,p(还有 κ)的取值是正的,并且脉冲的**前沿**$\left(t<\frac{z}{v_g}\right)$是**红移**(即频率比 ω_0 低),脉冲的**后沿**$\left(t>\frac{z}{v_g}\right)$是**蓝移**(即频率比 ω_0 高)。

这意味着得到一种上啁啾[②]脉冲。那么如果一个上啁啾脉冲在反常色散媒质中传播,它将会被压缩,直到变成无啁啾脉冲,然后,又会在相反啁啾的作用下展宽。

① 也称为负啁啾,译者注。

② 也称为正啁啾,译者注。

类似地，可以讨论脉冲在正常色散媒质中传播的情况（即 γ 取值为正）。如果一个下啁啾脉冲在正常色散媒质中传播，它将会被压缩，直到变成无啁啾脉冲，然后又会在相反啁啾的作用下展宽（见图 10.8）。

10.4　自相位调制

值得一提的是，当脉冲在色散媒质中传播时，频谱保持不变，即，没有产生新的频率组分。不同频率组分在不同相位的叠加会导致脉冲时域形状的失真（见习题 10.10）。当传输媒质是非线性时，就会产生新的频率组分。本节将对此简单地进行讨论。

只有当传输激光束的强度较小时，材料的折射率才是常数。如果强度很大，那么，折射率的变化可以近似由下式给出

$$n \approx n_0 + n_2 I \tag{10.63}$$

式中 n_2 是常数，I 为激光束的强度。例如，对于熔融石英，$n_0 \approx 1.47$，$n_2 \approx 3.2 \times 10^{-20}\,\mathrm{m^2/W}$。且如果光束的有效面积为 A_{eff}，那么，强度为

$$I = \frac{P}{A_{\mathrm{eff}}} \tag{10.64}$$

式中 P 是光束的功率。现在，单模光纤中光束的光斑尺寸 w_0 大约为 $5\mu\mathrm{m}$（见例 29.8）。所以，光束的有效横截面积[①] $A_{\mathrm{eff}} \approx \pi w_0^2 \approx 50\mu\mathrm{m}^2$。一个 5mW 的激光束在这样的光纤中传播，由此产生的强度为

$$I = \frac{P}{A_{\mathrm{eff}}} \approx \frac{5 \times 10^{-3}\,\mathrm{W}}{50 \times 10^{-12}\,\mathrm{m^2}} = 10^8\,\mathrm{W/m^2} \tag{10.65}$$

则折射率的改变为

$$\Delta n = n_2 I \approx 3.2 \times 10^{-12} \tag{10.66}$$

尽管这个值很小，但当光在光纤中传播很长距离后（几百到几千千米），积累的非线性效应是可观的。这是光纤的巨大优势，即光束在长距离传输后仍然保持能受限于一块很小的面积内！

考虑光纤中传输的一个激光脉冲（频率为 ω_0），有效传输常数为

$$k = \frac{\omega_0}{c}(n_0 + n_2 I) = \frac{\omega_0}{c}\left[n_0 + n_2 \frac{P(t)}{A_{\mathrm{eff}}}\right] \tag{10.67}$$

对于这样的传播光束，相位项可近似为

$$\mathrm{e}^{+\mathrm{i}(\omega_0 t - kz)} = \exp\left\{+\mathrm{i}\left[\omega_0 t - \frac{\omega_0}{c}\left(n_0 + n_2 \frac{P(t)}{A_{\mathrm{eff}}}\right)z\right]\right\} = \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\Phi}$$

式中，相位 Φ 定义为

$$\Phi(z,t) \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \omega_0 t - \frac{\omega_0}{c}\left(n_0 + n_2 \frac{P(t)}{A_{\mathrm{eff}}}\right)z \tag{10.68}$$

可以定义瞬时频率为（参照式(10.61)）

$$\omega(t) \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \omega_0 - g\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}z$$

① 数值取自参考文献[2]。

式中

$$g = \frac{n_2\omega_0}{cA_{\text{eff}}} = \frac{2\pi n_2}{\lambda_0 A_{\text{eff}}} \tag{10.69}$$

对于 $A_{\text{eff}} \approx 50\mu\text{m}^2$，$\lambda_0 \approx 1.55\mu\text{m}$，且 $n_2 \approx 3.2\times10^{-20}\,\text{m}^2/\text{W}$，$g \approx 2.6\times10^{-3}\,\text{W}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$。

对于以群速度 v_g 传播的高斯脉冲(见式(10.51))，有

$$P(z,t) = P_0\exp\left[-\frac{2\left(t-\frac{z}{v_g}\right)^2}{\tau_0^2}\right]$$

此处忽略了色散(即式(10.49)和式(10.52)中 $p=0$)。那么

$$\omega(t) = \omega_0\left\{1+\frac{2gz}{\omega_0\tau_0^2}P_0\left(t-\frac{z}{v_g}\right)\exp\left[-\frac{2\left(t-\frac{z}{v_g}\right)^2}{\tau_0^2}\right]\right\}$$

对于 $\lambda_0 = 1.55\mu\text{m}$，有

$$\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0} = \frac{2\pi\times3\times10^8}{1.55\times10^{-6}} \approx 1.22\times10^{15}(\text{s}^{-1})$$

且对于 $P_0 = 15\text{mW}$，$\tau_0 = 20\text{fs}$，$z = 200\text{km}$，有

$$\frac{2gz}{\omega_0\tau_0^2}P_0\left(t-\frac{z}{v_g}\right) = \frac{2\times2.6\times10^{-3}\times2\times10^5\times15\times10^{-3}}{1.22\times10^{15}\times(20\times10^{-15})^2}\left(t-\frac{z}{v_g}\right) \approx 3.2\times10^{13}\left(t-\frac{z}{v_g}\right)$$

$$\approx\begin{cases}+0.64, & t-\dfrac{z}{v_g}\approx 20\text{fs}(\text{脉冲后沿})\\ -0.64, & t-\dfrac{z}{v_g}\approx -20\text{fs}(\text{脉冲前沿})\end{cases}$$

脉冲内瞬时频率随时间改变会导致脉冲产生啁啾，如图 10.9 所示。这种现象称为自相位调制(通常缩写为 SPM)。注意到，虽然脉宽没有改变，但脉冲引入了啁啾，脉冲的频率组分增加了，也就是说，SPM 导致了新的频率组分的产生。实际上，脉冲在横截面积很小(因

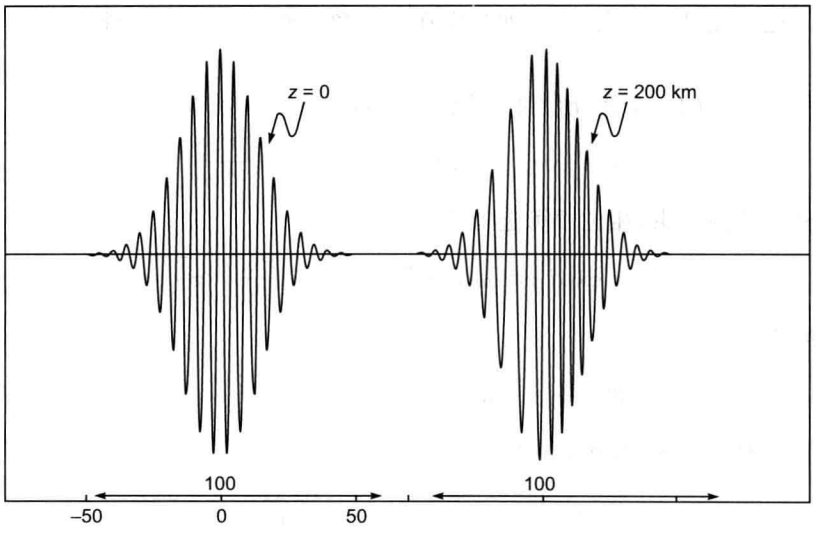


图 10.9　由于自相位调制，脉冲内随时间改变的瞬时频率导致了脉冲的啁啾。相关的计算量为 $P_0 = 15\text{mW}$，$\tau_0 = 20\text{fs}$，$\lambda_0 = 1.55\mu\text{m}$，$A_{\text{eff}} = 5\mu\text{m}^2$，$v_g = 2\times10^8\,\text{m/s}$。

此 g 的值很大)的光纤中传播时,有可能产生覆盖整个可见光谱的组分(见图 10.10)。

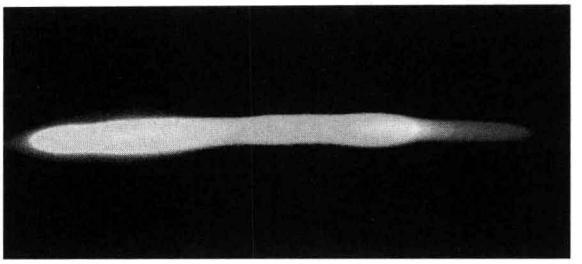


图 10.10　一持续时间为 80fs,波长为 800nm 的激光脉冲(总能量为 1.6nJ)射入一种被称为多孔光纤的特殊光纤中,其中硅芯被周期分布的空气孔包围。多孔光纤的特点是具有非常小的模场直径,这将导致纤芯内具有很大的强度。源于高强度,自相位调制和其他非线性效应可以被观察到。这些非线性效应导致新的频率组分的产生。在这个实验中,产生了覆盖整个可见光谱的组分,并可将光纤出射的光束经过一个棱镜后观察到这个光谱。激光脉冲的重复频率是 82MHz。这些特殊光纤是由 Shyamal Bhadra 博士、Kamal Dasgupta 博士和他们位于加尔各答的中央玻璃和陶瓷研究所(CGCRI)工作组制造的;所产生的超连续谱是由位于爱丁堡的赫瑞瓦特大学(Heriot Watt University)的 Ajoy Kar 教授与 Henry Bookey 博士观察到的。这张图片的彩色照片出现在本书的封面上。

小　结

- 光源一开一关的时候就会产生一个脉冲。这个脉冲在媒质中以群速度 v_g 进行传输

$$v_g = \frac{1}{\mathrm{d}k/\mathrm{d}\omega}$$

对于折射率随频率的变化为 $n(\omega)$ 的媒质,有

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega)$$

群速度为

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{c}\left[n(\lambda_0) - \lambda_0 \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda_0}\right]$$

式中 λ_0 是真空中的波长,$c \approx 3\times10^8\,\mathrm{m/s}$ 是光在真空中的波长。

- 在色散媒质中传输距离 L 后,脉冲会展宽,其展宽量为

$$\Delta t_m = -\frac{L\Delta\lambda_0}{\lambda_0 c}\left(\lambda_0^2 \frac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d}\lambda_0^2}\right)$$

式中 $\Delta\lambda_0$ 是光源的频谱宽度;下标 m 表示已考虑到了媒质的色散。色散系数为

$$D_m = \frac{\Delta t_m}{L\Delta\lambda_0} \approx -\frac{1}{3\lambda_0}\left(\lambda_0^2 \frac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d}\lambda_0^2}\right)\times 10^4\,\mathrm{ps/(km\cdot nm)}$$

式中 λ_0 的单位是 μm,且假设 $c \approx 3\times10^8\,\mathrm{m/s}$。例如对于二氧化硅,当 $\lambda_0 = 1.55\mu\mathrm{m}$ 时,$\dfrac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d}\lambda_0^2} \approx -0.00416\mu\mathrm{m}^{-2}$,$D_m = +22\mathrm{ps/(km\cdot nm)}$(媒质的长度单位为 km,光源的频宽单位为 nm)。另一方面,在 $\lambda_0 \approx 1.27\mu\mathrm{m}$ 附近,二氧化硅有 $\dfrac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d}\lambda_0^2} = 0$。1.27$\mu$m 通

常被称为零材料色散波长，并且由于在 $\lambda_0 \approx 1.3\mu m$ 附近材料的色散很低，第二代和第三代光纤通信系统都工作在此波段。

- 对于高斯脉冲

$$E(z=0,t) = E_0 \exp\left(-\frac{t^2}{\tau_0^2}\right) e^{+i\omega_0 t}$$

传输距离 z 后，时域宽度为 $\tau(z) = \tau_0 \sqrt{1+p^2}$；因此，脉宽的展宽量为

$$\Delta\tau = \sqrt{\tau^2(z) - \tau_0^2} = |p|\tau_0$$

式中

$$p = \frac{2}{\tau_0^2} \frac{\lambda_0}{2\pi c^2} \left(\lambda_0^2 \frac{d^2 n}{d\lambda_0^2}\right) \cdot z$$

那么，在 $\lambda_0 \approx 1.55\mu m$ 处，对于一个 $\tau_0 \approx 100ps$ 的脉冲(在纯二氧化硅中传播)，有 $\Delta\tau \approx 0.55ps/km$。

习　题

10.1 根据式(10.14)给出的公式，计算在二氧化硅中，当 $\lambda_0 = 0.7\mu m, 0.8\mu m, 1.0\mu m, 1.2\mu m, 1.4\mu m$ 时的相速度和群速度。并与表 10.1 中给出的值(更精确的值)进行比较。

[**答案**：$n(\lambda_0) \approx 1.456, 1.454, 1.451, 1.449, 1.455$；$n_g(\lambda_0) \approx 1.4708, 1.4670, 1.4630, 1.4616, 1.4615$]

10.2 对于纯二氧化硅，取经验公式 $n(\lambda_0) \approx 1.451 - 0.003\left(\lambda_0^2 - \frac{1}{\lambda_0^2}\right)$，$\lambda_0$ 的单位为 μm。

(1) 计算零色散波长。

(2) 计算 800nm 处的材料色散，单位为 ps/(km·nm)。

[**答案**：$1.32\mu m$；$-101ps/(km \cdot nm)$]

10.3 令 $n(\lambda_0) = n_0 + A\lambda_0$，式中 λ_0 是真空中的波长，推导其相速度和群速度的表达式。

[**答案**：$v_g = c/n_0$]

10.4 考虑一个 LED 光源发射的光波长为 850nm，且谱宽为 50nm。根据表 10.1，计算脉冲在纯二氧化硅中传播的展宽量。

[**答案**：4.2ns/km]

10.5 1836 年，柯西给出了描述可见光谱范围内玻璃的折射率与波长关系的近似方程为

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$$

式中(见表 12.2)

$$\left.\begin{aligned} n(\lambda_1) &= 1.50883 \\ n(\lambda_2) &= 1.51690 \end{aligned}\right\} \text{硼硅玻璃}$$

$$\left.\begin{aligned} n(\lambda_1) &= 1.45640 \\ n(\lambda_2) &= 1.46318 \end{aligned}\right\} \text{石英玻璃}$$

式中 $\lambda_1 = 0.6563\mu m$，$\lambda_2 = 0.4861\mu m$。

(1) 计算 A 和 B。

(2) 根据柯西方程，计算 0.5890μm 和 0.3988μm 处的折射率，并与相应的实验结果比较：

① (1.51124 和 1.52546)对于硼硅玻璃；

② (1.45845 和 1.47030)对于石英玻璃。

[**答案**：(1) 对于硼硅玻璃，$A=1.499$，$B\approx 4.22\times10^{-15}\,\mathrm{m}^2$；对于石英玻璃，$A=1.44817$，$B\approx 3.546\times10^{-15}\,\mathrm{m}^2$；(2) 当 $\lambda=0.5890\mu$m 时，$n=1.51120$；当 $\lambda=0.3988\mu$m 时，$n=1.52557$。]

10.6 当波长位于 $0.5\mu\mathrm{m}<\lambda_0<1.6\mu\mathrm{m}$ 范围内时，纯二氧化硅的折射率变化可以由以下公式精确表达

$$n(\lambda_0)=C_0+C_1\lambda_0^2+C_2\lambda_0^4+\frac{C_3}{(\lambda_0^2-l)}+\frac{C_4}{(\lambda_0^2-l)^2}+\frac{C_5}{(\lambda_0^2-l)^3}$$

式中 $C_0=1.4508554$，$C_1=-0.0031268$，$C_2=-0.0000381$，$C_3=0.0030270$，$C_4=-0.0000779$，$C_5=0.0000018$，$l=0.035$，且 λ_0 的单位是 μm。编写简单的程序来计算和绘出 $0.5\mu\mathrm{m}<\lambda_0<1.6\mu\mathrm{m}$ 时的 $n(\lambda_0)$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2n}{\mathrm{d}\lambda_0^2}$，并与表 10.1 中给出的结果比较。

10.7 (1) 对于由 $E=E_0\exp\left(-\dfrac{t^2}{\tau_0^2}\right)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega_0 t}$ 给出的高斯脉冲，谱宽近似由 $\Delta\omega\approx\dfrac{1}{\tau_0}$ 得出。假设 $\lambda_0=8000\text{Å}$，计算 $\tau_0=1\mathrm{ns}$ 和 $\tau_0=1\mathrm{ps}$ 时的 $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0}$。

(2) 对于这样一个高斯脉冲，脉冲展宽为 $\Delta\tau=\dfrac{2z}{\tau_0}|\gamma|$，式中 $\gamma=\dfrac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}\omega^2}$。根据表 10.1，计算 $\Delta\tau$ 并解释其物理意义。

[**答案**：(1) $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0}\approx4\times10^{-7}$ 和 4×10^{-4}；(2) $\gamma\approx3.62\times10^{-26}\,\mathrm{m}^{-1}\mathrm{s}^2$；$\tau_0=1\mathrm{ns}$ 时，$\Delta\tau\approx0.072\mathrm{ps/km}$；$\tau_0=1\mathrm{ps}$ 时，$\Delta\tau\approx72\mathrm{ps/km}$]

10.8 高斯脉冲传播时的频率啁啾为

$$\Delta\omega=\frac{2p}{\tau_0^2(1+p^2)}\left(t-\frac{z}{v_\mathrm{g}}\right)$$

式中 p 由式(10.50)定义。假设有一个波长为 $\lambda_0=1\mu$m 脉宽为 100ps($=\tau_0$)的脉冲。试计算当 $t-\dfrac{z}{v_\mathrm{g}}=-100\mathrm{ps}$，$-50\mathrm{ps}$，$+50\mathrm{ps}$，$+100\mathrm{ps}$ 时，对应的频率啁啾 $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0}$。设 $z=1\mathrm{km}$，且其他值参考表 10.1。

[**答案**：当 $t-\dfrac{z}{v_\mathrm{g}}=-100\mathrm{ps}$，$-50\mathrm{ps}$，$+50\mathrm{ps}$，$+100\mathrm{ps}$ 时，相应的 $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0}\approx-4.5\times10^{-8}$，$-2.25\times10^{-8}$，$+2.25\times10^{-8}$，$+4.5\times10^{-8}$]

10.9 令 $\lambda_0=1.5\mu$m，重做上一题；τ_0 和 z 的值保持不变。结果说明习题 10.8 和习题 10.9 的本质不同在于，在 $\lambda=1\mu$m 处为反常色散区，且前沿为红移($\Delta\omega$ 是负值)，后沿为蓝移；在 $\lambda=1.5\mu$m 处结果正好相反，因为其处于正常色散区。

10.10 $E(0,t)$的频谱由函数 $A(\omega)$给出。证明：$E(z,t)$的频谱可以简单地表示为

$$A(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\omega)z}$$

这意味着没有产生新的频率组分,只是当 z 取不同值时,不同频率组分在不同相位的叠加。

10.11 一个高斯脉冲在色散媒质中的时间演化为

$$E(z,t)=\frac{E_0}{\sqrt{1+\mathrm{i}p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0 t-k_0 z)}\exp\left[-\frac{\left(t-\frac{z}{v_g}\right)^2}{\tau_0^2(1+\mathrm{i}p)}\right]$$

式中 $p\overset{\text{def}}{=\!=}\frac{2\gamma z}{\tau_0^2}$。严格计算 $E(0,t)$和 $E(z,t)$的频谱,并说明计算结果与习题 10.10 相一致。

参考文献和推荐读物

1. R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. I, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massa., 1964.
2. U.C. Paek, G.E. Peterson and A. Carnevale, 'Disper-sionless single mode light guides with a index profiles' Bell System Technical Journal, Vol. **60**, 583, 1981.
3. A. Ghatak and K Thyagarajan, *Introduction to Fiber Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, (Reprinted in India by Foundation Books, New Delhi).

第11章 波的传播和波动方程

如果你把一个小石块投掷进池塘，却不观察那些扩散开来的涟漪，那么你就是白费劲了——虚构的俄国哲学家 KuzmaPrutkoff[①] 如是说。事实上，我们的确能通过观察这些从宁静水面上泛开的优美波纹中受益匪浅。

——伽莫夫(Gamow)与克里弗兰(Cleveland)

11.1 引言

在本章中将讨论波动现象。波动是扰动的传播。例如，把一块石子投到平静的水池里，就会有一个圆形的波纹从石子落入点扩散开来。石子的冲击产生一个向外传播的扰动。然而在扰动传播过程中，水分子并不随着扰动向外运动，而是围绕平衡位置近似地作圆周轨道运动。一旦扰动通过某一区域，这个区域每一滴水都依然保留在各自的初始位置上。只要在水面上放一小块木片就很容易验证这一事实。当扰动通过木片时，会引起木片的振荡，一旦扰动通过后，木片又返回其原来的位置。此外，圆形波纹会随着时间的推移不断向外扩散，这就是说，这个扰动(在给定时间内只传播到某一特定区域)在稍后的时刻，会在邻近的点产生一个形式大致相同的扰动。扰动的这种传播(媒质在传播方向上没有移动)称为波。也可以看到，波携带着能量，在上述例子中，能量是以水分子动能的形式出现的。

首先考虑波传播的一个最简单的例子，即在一根弦上传播的横波。假设你握住弦的一端，另一个人拉紧弦的另一端，使弦不至于弯曲。如果你把弦的一端上下抖动几下，就会产生一个扰动，并将朝着弦的另一端传播。因此，如果在 $t=0$ 和稍后一个时刻 Δt 拍摄弦的“快照”，那么，这两张“快照”大致如图 11.1(a)和(b)所示[②]。这两幅图表明，两个扰动有相同的形状，不同的只是一个扰动相对于另一个扰动移动了一段距离 $v\Delta t$，式中 v 是扰动传播的速度。扰动在传播时，其形状不改变是波的特征。不过，还要注意以下两点。

(1) 当波产生时已经做了一定量的功，而当波通过弦传播时，它携带着一定能量传播，并可以被拿着弦的另一端的人感知到。

(2) 这个波是横波，即弦上粒子的位移与波的传播方向成直角。

如图 11.1(a)和(b)所示，弦在 Δt 时刻的形状与 $t=0$ 时刻的形状相似，只不过整个扰动传播了一段距离。若用 v 表示波的速度，这段距离就是 $v\Delta t$。因此，若描述 $t=0$ 时刻的弦线的函数是 $y(x)$，则在后一时刻 t，弦线的函数就是 $y(x-vt)$，这个式子简单地表示波偏离了原点一段距离 vt。同理，对于沿 $-x$ 方向传播的扰动，若描述 $t=0$ 时刻的弦线函数是 $y(x)$，

---

① 其英文名还拼写成 Kozma Prutkov(参见 http://en.wikipedia.org/wiki/Kozma_Prutkov)。译者注。

② 这里假设扰动通过弦传播时，衰减可以忽略，并且没有形变。

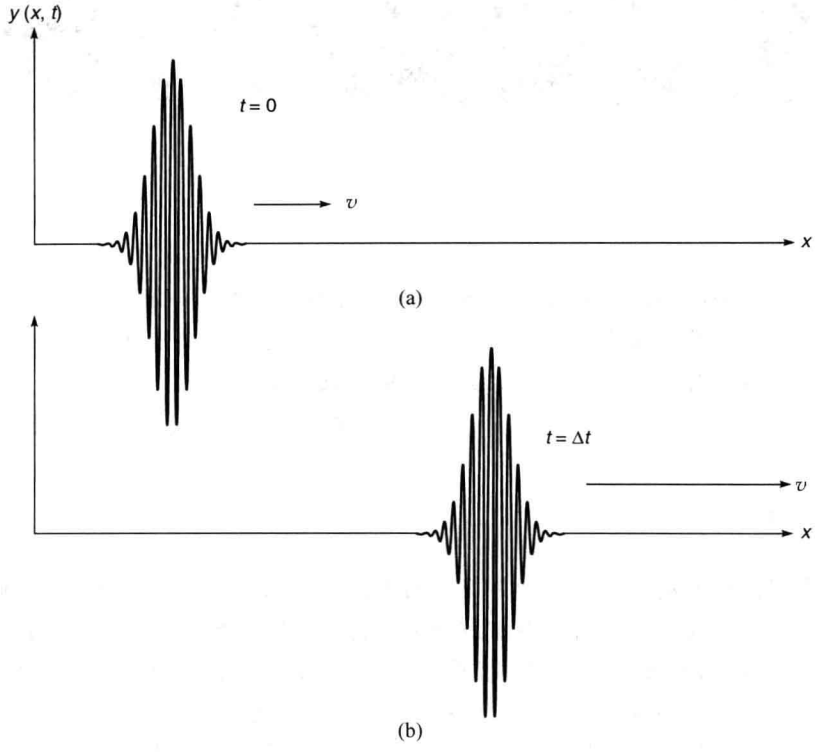


图 11.1　一个横波沿 $+x$ 轴方向在弦上传播，(a)和(b)分别表示 $t=0$ 和 $t=\Delta t$ 时刻的位移。

那么在后一时刻 t，弦线的函数便为 $y(x+vt)$。

例 11.1　研究一个半圆形脉冲沿 $+x$ 方向的传播。脉冲在 $t=0$ 时刻的位移由下式给出

$$\begin{cases} y(x,t=0) = +(R^2-x^2)^{1/2}, & |x| \leqslant R \\ y(x,t=0) = 0, & |x| \geqslant R \end{cases} \tag{11.1}$$

解　对于沿 $+x$ 方向传播的波，$y(x,t)$ 随 x 和 t 变化可以用函数 $(x-vt)$ 表示，则

$$\begin{cases} y(x,t) = +[R^2-(x-vt)^2]^{1/2}, & |x-vt| \leqslant R \\ y(x,t) = 0, & |x-vt| \geqslant R \end{cases} \tag{11.2}$$

脉冲在 $t=0$ 和随后一个时刻 t_0 时的形状如图 11.2 所示。式(11.2)是直接根据以下事实得出：$y(x,t)$ 必须有 $y(x-vt)$ 的形式，并且在 $t=0$ 时刻，$y(x,t)$ 必定由式(11.1)给出。

例 11.2　考察一个以速度 v 沿 $-x$ 方向传播的脉冲。在 $t=t_0$ 时刻，脉冲形状由下式给出

$$y(x,t=t_0) = \frac{b^2}{a^2+(x-x_0)^2} \tag{11.3}$$

(这种脉冲称为洛伦兹脉冲)。试确定在任一时刻 t 的脉冲形状。

解　在 $t=t_0$ 时刻脉冲的形状如图 11.3(a)所示。位移的极大值出现在 $x=x_0$ 处。因为脉冲沿 $-x$ 方向传播，则在后一个时刻 t 时，极大值将出现在 $x_0-v(t-t_0)$ 处。因此，脉冲在任一时刻 t 的形状由下式给出

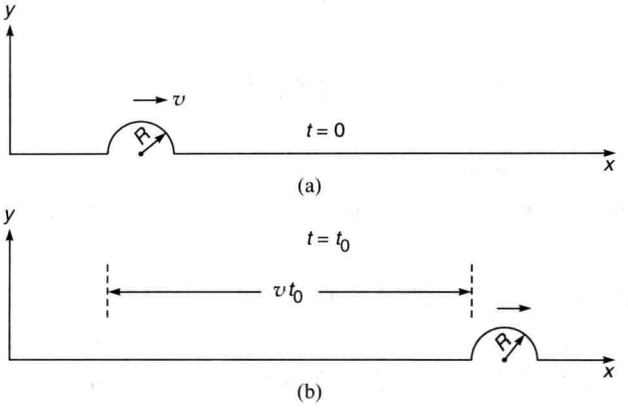


图 11.2　一个半圆形脉冲沿 $+x$ 方向的传播，(a)和(b)分别表示在 $t=0$ 和随后一个时刻 t_0 时脉冲的形状。

$$y(x,t) = \frac{b^2}{a^2 + [x - x_0 + v(t - t_0)]^2} \tag{11.4}$$

式(11.4)是通过以 $x+v(t-t_0)$ 代换 x，直接由式(11.3)得出的。

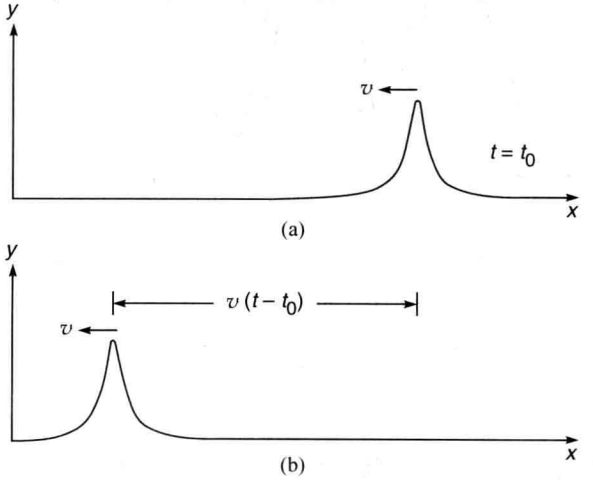


图 11.3　一个洛伦兹脉冲沿 $-x$ 方向传播，(a)和(b)分别表示在 $t=t_0$ 和随后某一时刻 t 时的脉冲形状

11.2　正弦波：频率和波长的概念

到现在为止，讨论的是在一段有限时间内脉冲持续传播的问题。现在，来讨论位移 $y(x,t)$ 为以下形式的一种周期性波

$$y(x,t) = a\cos[k(x \mp vt) + \phi] \tag{11.5}$$

式中负号和正号分别对应波沿 $+x$ 方向和 $-x$ 方向传播。在一根拉紧的长弦的一端放置一个连续振动的音叉，则在弦上便会产生这种形式的位移。ϕ 称为波的初相位(见第 7 章)。

不失一般性,假设 $\phi=0$,于是对于沿 $+x$ 方向传播的波,有

$$y(x,t) = a\cos k(x - vt) \tag{11.6}$$

如图 11.4 所示,绘出了 $t=0$ 和 $t=\Delta t$ 时刻位移 y 随 x 变化的曲线,分别为

$$\begin{aligned} y(x) &= a\cos kx, \quad t = 0 \\ y(x) &= a\cos k(x - v\Delta t), \quad t = \Delta t \end{aligned} \tag{11.7}$$

这两条曲线是弦在两个时刻的"快照"。如图 11.4 所示,在一个特定时刻,距离为

$$\lambda = 2\pi/k \tag{11.8}$$

的任何两点都有相同的位移。这段距离就称为波长。令对应于 $t=0$ 的曲线平移一段距离 $v\Delta t$,便得到对应于 $t=\Delta t$ 时刻的曲线,这表明波沿 $+x$ 方向以速度 v 传播。还可以看出,质点离开平衡位置的最大位移为 a,这个最大位移就称为波的振幅。

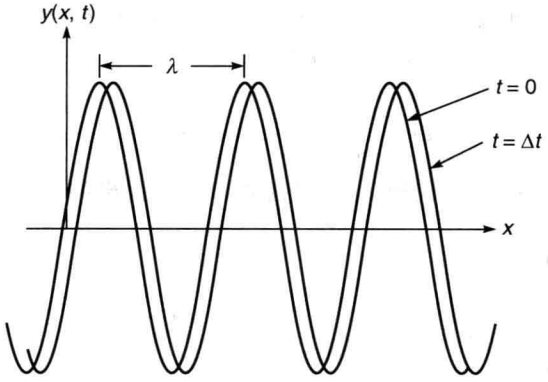


图 11.4　两曲线分别表示正弦波沿 $+x$ 方向传播时,弦在 $t=0$ 和 $t=\Delta t$ 时刻的位移①

如图 11.5 所示,绘出了 $x=0$ 和 $x=\Delta x$ 这两点的位移随时间变化的曲线,分别为

$$\begin{aligned} y(t) &= a\cos(\omega t), \quad x = 0 \\ y(t) &= a\cos(\omega t - k\Delta x), \quad x = \Delta x \end{aligned} \tag{11.9}$$

式中

$$\omega = kv \tag{11.10}$$

这两条曲线分别对应两点的位移随时间变化的情况。可以看出,对应于某一特定点,每过一段时间间隔为

$$T = 2\pi/\omega \tag{11.11}$$

位移就重复一次,这段时间就称为波的时间周期。而

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{11.12}$$

被称为波的频率,它表示质点在 1s 内振荡的次数。如图 11.5 所示两条曲线可以看出,$x=0$ 和 $x=\Delta x$ 这两点的振动完全相似,但之间存在一个相位差 $k\Delta x$。事实上,弦上任何两点都以相等的振幅和相等的频率做简谐运动,只不过之间存在一个相位差 kx_0,式中 x_0 为两点间的距离。很明显,如果这段距离是波长的倍数,即

① 原书图 11.4 无 a

$$x_0 = m\lambda, \quad m = 1,2,\cdots$$

则有

$$kx_0 = \frac{2\pi}{\lambda}m\lambda = 2m\pi$$

上式表示，距离是波长整数倍的两点，以相同的相位振动。同理，距离为$\frac{1}{2}\lambda$，$\frac{3}{2}\lambda$，…的两点，以相反的相位振动。普遍来说，距离差 x_0 对应于相位差$\frac{2\pi}{\lambda}x_0$。

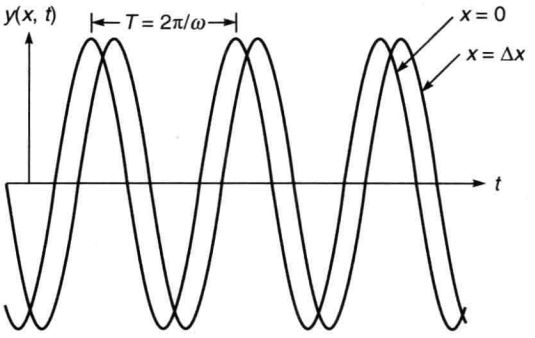


图 11.5　两曲线分别表示正弦波沿 $+x$ 方向传播时，在 $x=0$ 和 $x=\Delta x$ 这两点的位移随时间的变化

应用式(11.10)～式(11.12)，可得

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{kv}{2\pi} = \frac{v}{\lambda}$$

或者

$$v = \nu\lambda \tag{11.13}$$

可以注意到，(在某一个给定时刻)位移随 x 变化和(在某一个给定位置)位移随 t 变化具有相似性(见图 11.4 和图 11.5)。这种相似性可以通过把式(11.6)写为如下形式表示出来

$$y(x,t) = a\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right) \tag{11.14}$$

式(11.14)表示波长 λ 在图 11.4 中所起的作用和时间周期 T 在图 11.5 中所起的作用相同。式(11.14)也可以写为

$$y(x,t) = a\cos(kx - \omega t) \tag{11.15}$$

应该指出，上述讨论在相位因子 ϕ 为任意值的情况下都是成立的。

11.3　波的种类

如前所述，在弦上传播的波，振动位移与传播方向成直角，这种波称为横波[①]。类似地，当声波在空气中传播时，空气分子的位移是沿着波传播方向的，这种波称为纵波。但是，有

① 电磁波本质上也是横波。但值得一提的是，电磁波在接近波源的地方也有纵向分量，但在离波源较远的地方，纵向分量会迅速衰减(见 23.4 节)。

一些波在性质上既不是纵波也不是横波,例如,一个波在水的表面上传播时,水分子近似地在一个圆形轨道上运动。

11.4 波动的能量传播

波携带着能量,例如,当横波在弦上传播时,弦上的粒子就在平衡位置附近做简谐运动,而与这种运动相联系的是一定的能量。随着波的传播,能量不断地从弦的一端传输到另一端。考察粒子的位移随时间的变化,可以写为

$$y = a\cos(\omega t + \phi) \tag{11.16}$$

粒子的瞬时速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -a\omega\sin(\omega t + \phi) \tag{11.17}$$

因此,动能 T 由下式给出

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2(\omega t + \phi) \tag{11.18}$$

总能量 E 为 T 的极大值[①]

$$E = (T)_{\max} = \frac{1}{2}ma^2\omega^2[\sin^2(\omega t + \phi)]_{\max} = \frac{1}{2}ma^2\omega^2 \tag{11.19}$$

对于在空气中传播的声波,每单位体积的能量 ε(能量密度)可由下式给出

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mna^2\omega^2 = \frac{1}{2}\rho a^2\omega^2 = 2\pi^2\rho a^2\nu^2 \tag{11.20}$$

式中 n 为每单位体积的分子数,$\rho(=nm)$ 为气体密度。对于声波,可以联系到强度,强度定义为单位时间内通过垂直于传播方向的单位面积的能量流(平均值)。因为波的传播速度为 v,则强度 I 由下式给出[②]

$$I = 2\pi^2\rho v a^2\nu^2 \tag{11.21}$$

因此,强度正比于振幅平方和频率的平方。

下面讨论点波源在均匀的各向同性媒质[③]中发出的波。假设媒质没有吸收,点源 1s 发出 WJ 的平均能量(W 代表点源功率)。考察以点源为中心,半径为 r 的一个球面;显然,1s 内发出的 WJ 的能量将通过面积为 $4\pi r^2$ 的球面。强度 I 由下式给出

---

① 此处原文有误。对于一个波动,对于波场中的一个粒子,总能量是动态变化的,不会是一个常数。实际上,对于一个简谐波的波动,粒子的势能与动能在任意时刻是相等的,其总能量为

$$E = T + U = 2T = ma^2\omega^2\sin^2(kx - \omega t + \phi)$$

是一个动态变化量,表示该粒子的能量有时是净输入,有时是净输出,从而表明能量有传递。但是其在一个周期内的平均值是个常数,为

$$\bar{E} = ma^2\omega^2\,\overline{\sin^2(kx - \omega t + \phi)} = \frac{1}{2}ma^2\omega^2$$

式(11.20)表示的能量密度也是平均能量密度,而式(11.21)表示的波强度是观测平均值的概念。译者注。

② 根据以下事实容易理解式(11.21):如果单位体积内有 n 个以同一速度 v 运动的粒子,那么,单位时间通过垂直于 v 的单位面积的粒子数就是 nv。

③ 各向同性媒质是指其物理性质(如特定的一种波的传播速度)在所有方向都相同的媒质。在第 22 章中,将讨论各向异性媒质。

$$I = \frac{W}{4\pi r^2} \tag{11.22}$$

这就是平方反比定律。根据式(11.21)和式(11.22),可得

$$\frac{W}{4\pi r^2} = 2\pi^2 \rho v a^2 \nu^2$$

或者

$$a = \left(\frac{W}{8\pi^3 \rho v \nu^2}\right)^{1/2} \frac{1}{r} \tag{11.23}$$

表示振幅按照$\frac{1}{r}$减小。实际上,对于点源发出的球面波[①],位移由下式给出

$$f = \frac{a_0}{r}\sin(kr - \omega t)$$

式中 a_0 表示距点源单位距离处的波的振幅。

例 11.3　一个声源在空气中以 256 次/s 的频率振动,并以 5J/s 的速率向各个方向均匀地传播能量。计算距离声源 25m 处声波的强度和振幅。假设传播过程中没有吸收(声波在空气中的传播速度为 330m/s,空气密度为 1.29kg/m³)。

解　强度

$$I = \frac{5\text{J}\cdot\text{s}^{-1}}{4\pi \times (25)^2 \text{m}^2} \approx 6.4^{②} \times 10^{-4}\text{J}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$$

则

$$a = \left(\frac{5}{8\pi^3 \times 1.29 \times 330 \times 256 \times 256}\right)^{1/2} \times \frac{1}{25} \approx 1 \times 10^{-6}{}^{③}(\text{m})$$

例 11.4　试证明:在弦上传播的横波,单位时间传递的平均能量是$\frac{1}{2}\rho\omega^2 a^2 v$,式中 ρ 是单位弦长的质量,a 是波的振幅,v 是波的传播速度。

解　与单位弦长相联系的平均能量是$\frac{1}{2}\rho\omega^2 a^2$,又因为波的速度为 v,即可得出结论。

11.5　一维波动方程

在 11.1 节里已经证明,一维波的位移 ψ 总有这样的形式

$$\psi = f(x - vt) + g(x + vt) \tag{11.24}$$

式(11.24)右边第一项表示以速度 v 沿 $+x$ 方向传播的扰动。同理,第二项表示以速度 v 沿 $-x$ 方向传播的扰动。现在的问题是,怎样可以预知这些波的存在及这些波的传播速度为多少?这个问题的答案如下:从物理的角度来讲,如果可以导出如下形式的方程

---

① 对于在各向同性媒质中的点源发出的波,以点源为中心的球面上的所有点都有相等的振幅和相位;换言之,具有相等振幅和相位的点的轨迹是球面,这种波称为球面波。当离开点源很远时,通过一小块面积的球面波实质上是平面波。

② 原书为 $6.3 \times 10^{-4}\text{J}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$。

③ 原书为 $3 \times 10^{-7}\text{m}$。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{11.25}$$

就可以断言波的存在,而 ψ 就表示与波相联系的位移。这一结论可以从下面的事实得出:式(11.25)的通解具有以下形式

$$\psi = f(x - vt) + g(x + vt) \tag{11.26}$$

式中 f 和 g 是自变量的任意函数。虽然式(11.25)的通解在11.9节里会给出推导,但还是在这里先证明:式(11.26)表示的解的确满足式(11.25)。把式(11.26)写为

$$\psi = f(\xi) + g(\eta) \tag{11.27}$$

式中

$$\xi = x - vt \tag{11.28a}$$

$$\eta = x + vt \tag{11.28b}$$

则

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f'(\xi)\frac{\partial \xi}{\partial x} + g'(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

式中撇号表示对自变量的微商,即

$$f'(\xi) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}$$

如此类推。又由 $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 = \frac{\partial \eta}{\partial x}$(见式(11.28)),可得

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f'(\xi) + g'(\eta)$$

再取一次微商,可得

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = f''(\xi)\frac{\partial \xi}{\partial x} + g''(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x} = f''(\xi) + g''(\eta) \tag{11.29}$$

同理,有

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = f'(\xi)\frac{\partial \xi}{\partial t} + g'(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial t} = v[-f'(\xi) + g'(\eta)]$$

又有

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2[f''(\xi) + g''(\eta)] \tag{11.30}$$

则

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = f''(\xi) + g''(\eta) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \tag{11.31}$$

这就证明了式(11.26)表示的解的确满足式(11.25)。因此,从物理的角度来讲,如果得到形如式(11.25)的方程,就可以断言波的存在,并且波的速度就是 v。

必须指出,波动方程的最简单的特解对应于正弦变化

$$\psi = A\sin[k(x \pm vt) + \phi] \tag{11.32a}$$

或者

$$\psi = A\cos[k(x \pm vt) + \phi] \tag{11.32b}$$

在11.2节中已经指出

$$k = 2\pi/\lambda, \quad kv = \omega = 2\pi\nu$$

式中 λ 是波长，ν 是波的频率。为了更为方便，通常把波动方程的解写为如式(11.33)的指数形式，而不是写成正弦变化的形式

$$\psi = A\exp[\mathrm{i}(kx \pm \omega t + \phi)] \tag{11.33}$$

式中 A 和 ϕ 分别表示波的振幅和初相位。由式(11.33)可以得知，实际位移就是 ψ 的实部，即

$$A\cos(kx \pm \omega t + \phi)$$

在下面 3 节中，将推导在某些简单情况下的波动方程[①]。在 11.9 节，再来讨论波动方程的通解。

11.6　拉紧弦的横向波动

考虑一根张力为 T 的拉紧的弦。假设弦的平衡位置在 x 轴上。如果在 y 方向拉动弦，就会有一个使弦回到平衡位置的力作用在弦上。考察一小段弦 AB，并计算在 y 方向作用在这小段弦上的净力。由于张力 T 的作用，两端点点 A 和点 B 都受到了力，力的方向为如图 11.6 所示的箭头方向。作用在点 A 的方向的力为

$$-T\sin\theta_1 \approx -T\tan\theta_1 = -T\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_x$$

同理，作用在点 B 的方向的力为

$$T\sin\theta_2 \approx T\tan\theta_2 = T\frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x+\mathrm{d}x}$$

这里假设 θ_1 和 θ_2 很小。那么，作用在 AB 上的 y 方向的净力为

$$T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\mathrm{d}x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right] = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mathrm{d}x \tag{11.34}$$

式中使用了 $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\mathrm{d}x}$ 在 x 点附近的泰勒级数展开式

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\mathrm{d}x} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\bigg|_x \mathrm{d}x$$

并且因为 $\mathrm{d}x$ 是无穷小量而略去了高次项。因此，弦段 AB 的运动方程为

$$\Delta m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mathrm{d}x$$

式中 Δm 是弦段 AB 的质量。若单位弦长的质量为 ρ，则有

$$\Delta m = \rho\mathrm{d}x$$

因而得到

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{T/\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{11.35}$$

这就是一维波动方程。从而可以得出结论：横波可以在一根拉紧的弦上传播，并且比较式(11.35)和式(11.25)，就可以得出横波速度的表达式为

$$v = \sqrt{T/\rho} \tag{11.36}$$

① 在第 23 章中，将从麦克斯韦方程组导出波动方程，从而得出电磁波速度的表达式。

端点固定的弦的振动问题将在13.2节中讨论。值得一提的是,实际弦的位移并不严格具有式(11.24)给出的形式;而且一般波都有衰减,波的形状也不能保持不变。这就是在推导波动方程时做各种近似的意义所在。

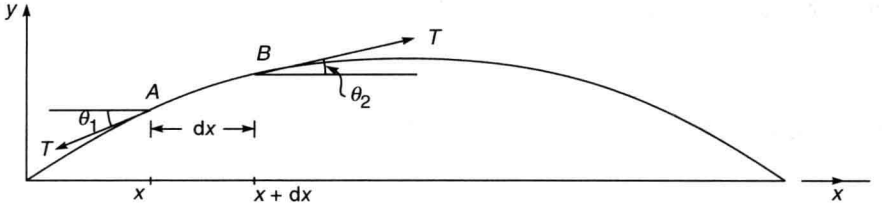


图 11.6 一根拉紧的弦的横向运动

11.7 固体中的纵向声波

在这一节中,将推导在弹性固体中传播的纵向声波的速度表达式。考察截面积为 A 的一根圆柱形棒。用 PQ 和 RS 表示距离某一固定点 O 为 x 和 $x+\Delta x$ 处的圆棒的横截面,并选择沿圆棒的长度方向为 x 轴的方向(见图 11.7)。

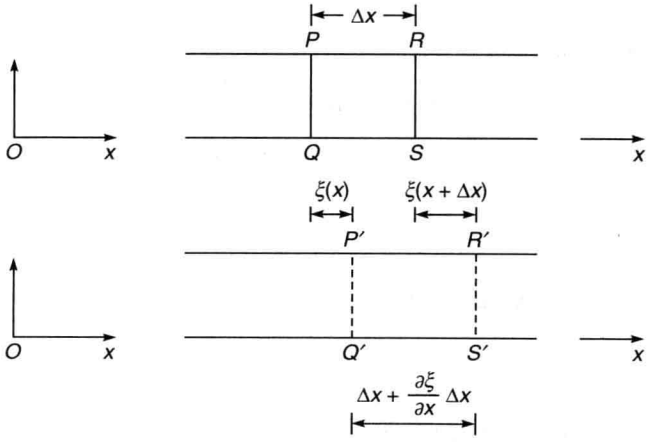


图 11.7 纵向声波在圆柱形棒内的传播

以 $\xi(x)$ 表示一个平面的纵向位移,则平面 PQ 和 RS 的位移分别是 $\xi(x)$ 和 $\xi(x+\Delta x)$。在位移后,平面 $P'Q'$ 和 $R'S'$ 之间的距离为

$$\xi(x+\Delta x)-\xi(x)+\Delta x=\xi(x)+\frac{\partial \xi}{\partial x}\Delta x-\xi(x)+\Delta x=\Delta x+\frac{\partial \xi}{\partial x}\Delta x$$

即这一小段棒延伸了 $\frac{\partial \xi}{\partial x}\Delta x$,因此,纵向应变为

$$\frac{\text{增加的长度}}{\text{原来的长度}}=\frac{\frac{\partial \xi}{\partial x}\Delta x}{\Delta x}=\frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{11.37}$$

又由于杨氏模量(Y)定义为纵向应力与纵向应变之比,所以有

$$\text{纵向应力}=\frac{F}{A}=Y\times\text{应变}=Y\frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{11.38}$$

式中，F 是作用在平面 $P'Q'$ 上的力，则

$$F(x) = YA\frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{11.39}$$

并且

$$\frac{\partial F}{\partial x} = YA\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{11.40}$$

现在，如果考察体积 $P'Q'S'R'$，那么，作用在平面 $P'Q'$ 上的力 F 是沿 $-x$ 方向，而作用在平面 $R'S'$ 上的力 $F(x+\Delta x)$ 是沿 $+x$ 方向。因此，作用在棒元 $P'Q'S'R'$ 上的合力为

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x = YA\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\Delta x \tag{11.41}$$

以 ρ 表示密度，则这一小段棒的质量为 $\rho A\Delta x$。这样一来，运动方程可写为

$$\rho A\Delta x\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = YA\Delta x\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

或者

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v_l^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{11.42}$$

式中

$$v_l = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \tag{11.43}$$

表示波的速度，脚标 l 表示讨论的是纵波[①]。

当棒的横向尺寸远小于扰动的波长时，可以假设任一横截面（如 PQ）上各点的纵向位移都相同，此时上述的推导才有效。在普遍情形下，如果对广延的各向同性的弹性固体中的振动进行严格分析，可以证明，纵波和横波的速度分别由下面两式给出[②]

$$v_l = \sqrt{\frac{Y}{\rho}\frac{(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}} = \sqrt{\frac{K+\frac{4}{3}\eta}{\rho}} \tag{11.44}$$

$$v_t = \sqrt{\frac{Y}{\rho}\frac{1}{2(1+\sigma)}} = \sqrt{\frac{\eta}{\rho}} \tag{11.45}$$

式中 σ，η 和 K 分别表示泊松比、刚性模量和体积弹性模量。必须注意的是，这里讨论的横波（其速度由式(11.45)给出）是由于材料的弹性所产生的恢复力引起的，而 11.6 节中所讨论的横波，弦是作为一个整体运动的，恢复力则是由外部施加的张力所引起的。

11.8　气体中的纵波

为了确定纵向声波在气体中的传播速度，考察如图 11.8(a)所示的一个柱体 $PQSR$。由于是纵向位移，再次以 $\xi(x)$ 表示平面 PQ 的位移，而以 $\xi(x+\Delta x)$ 表示平面 RS 的位移（见

① 可以用类似的方法讨论横波在弹性固体内的传播，横波的速度由下式给出（见参考文献[8]）

$$v_t = \sqrt{\eta/\rho}$$

式中，η 表示刚性模量。

② 见参考文献[5]。

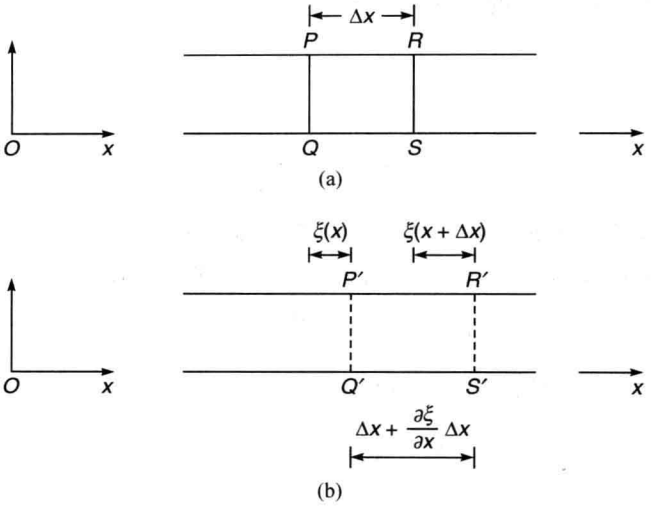


图 11.8　在空气中传播的纵向声波

图 11.8)。设没有任何扰动时气体的压强为 P_0,令 $P_0+\Delta P(x)$和 $P_0+\Delta P(x+\Delta x)$分别表示平面 $P'Q'$和 $R'S'$上的压强。现在,如果考虑柱体 $P'Q'S'R'$,那么,作用在面 $P'Q'$上的压强 $P_0+\Delta P(x)$是沿 $+x$ 方向的,而作用在面 $R'S'$上的压强 $P_0+\Delta P(x+\Delta x)$是沿 $-x$ 方向的。那么,作用在柱体 $P'Q'S'R'$上的力为

$$[\Delta P(x)-\Delta P(x+\Delta x)]A=-\frac{\partial}{\partial x}(\Delta P)\Delta xA \tag{11.46}$$

式中 A 为该柱体的截面积。这样一来,柱体 $P'Q'S'R'$的运动方程为

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\Delta P)A\Delta x=\rho A\Delta x\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

式中 ρ 表示气体密度。那么,有

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\Delta P)=\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \tag{11.47}$$

压强的变化将引起体积的变化,并且,如果波的频率比较高($\gtrsim$20Hz),压强的涨落是很迅速地,从而可以假设过程是绝热的。因此,可以写出

$$PV^\gamma=\text{常数} \tag{11.48}$$

式中 $\gamma=C_p/C_V$ 是定压比热和定容比热之比。对式(11.48)微分,可得

$$\Delta PV^\gamma+\gamma V^{\gamma-1}P\Delta V=0$$

或者

$$\Delta P=-\frac{\gamma P}{V}\Delta V \tag{11.49}$$

柱体 $PQSR$ 的长度的变化为

$$[\xi(x+\Delta x)-\xi(x)+\Delta x]-\Delta x=\frac{\partial\xi}{\partial x}\Delta x$$

因此,体积的变化为

$$\Delta V=\frac{\partial\xi}{\partial x}A\Delta x$$

体积元原来的体积为 $A\Delta x$，则

$$\Delta P = -\frac{\gamma P}{A\Delta x}\frac{\partial \xi}{\partial x}A\Delta x = -\gamma P\frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{11.50}$$

或者

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Delta P) = -\gamma P\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{11.51}$$

根据式(11.47)和式(11.51)，可得

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{11.52}$$

式中

$$v = \left(\frac{\gamma P}{\rho}\right)^{1/2} \tag{11.53}$$

表示纵向声波在气体中的传播速度。对空气来说，假设 $\gamma = 1.40$，$P = 1.01 \times 10^6 \mathrm{dyn/cm^2}$，$\rho = 1.3 \times 10^{-3} \mathrm{g/cm^3}$，可得

$$v \approx 330\mathrm{m/s}$$

气体的绝热压缩系数为

$$\kappa_s = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_s = \frac{1}{\gamma P} \tag{11.54}$$

式中，下标 s 表示绝热过程(熵为常数)。气体的体积弹性模量 K 是 κ_s 的倒数，即

$$K = \frac{1}{\kappa_s} = \gamma P \tag{11.55}$$

如果把式(11.55)代入式(11.44)，并利用气体的刚性模量 η 为零这一事实，可得式(11.53)。

11.9　一维波动方程的通解[①]

为求得波动方程

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{11.56}$$

的通解，引入两个新变量

$$\xi = x - vt \tag{11.57}$$

$$\eta = x + vt \tag{11.58}$$

并把式(11.57)、式(11.58)代入式(11.56)，则

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{11.59}$$

或者

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \tag{11.60}$$

上式引用了

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1$$

① 初次阅读时可跳过这一节。

将式(11.60)对 x 微商,可得

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}$$

或者

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta\partial\xi}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} \tag{11.61}$$

同理,有

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}=-v\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+v\frac{\partial\psi}{\partial\eta}$$

并且

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-v\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\eta}{\partial t}\right]+v\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\eta}{\partial t}\right]$$

或者

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=v^2\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta\partial\xi}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\right] \tag{11.62}$$

把式(11.61)和式(11.62)关于$\partial^2\psi/\partial x^2$ 和$\partial^2\psi/\partial t^2$ 的表示式代入式(11.56),可得

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta\partial\xi}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta\partial\xi}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}$$

或者

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)=0 \tag{11.63}$$

因此,$\partial\psi/\partial\xi$ 必定独立于 η;然而,$\partial\psi/\partial\xi$ 可以是 ξ 的任意函数,即

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi}=F(\xi) \tag{11.64}$$

或者

$$\psi=\int F(\xi)\mathrm{d}\xi+\text{积分常数}$$

积分常数可以是 η 的任意函数,并且因为任意函数的积分仍是一个任意函数,所以,可求得波动方程的通解为

$$\psi=f(\xi)+g(\eta)=f(x-vt)+g(x+vt) \tag{11.65}$$

式中,f 和 g 是自变量的任意函数。函数 $f(x-vt)$表示以速度 v 沿$+x$ 方向传播的扰动,而函数 $g(x+vt)$表示以速度 v 沿$-x$ 方向传播的扰动。

例 11.5 利用分离变量法[①]求解一维波动方程(式(11.25)),并证明:方程的解的确可以表示为式(11.32)和式(11.33)的形式。

① 分离变量法是求解某些种类的偏微分方程的有效方法。这种方法假设方程的解是一些函数之积,而每一个函数只与一个独立变量有关(见式(11.67))。把这个解代入方程,如果变量能够分离开,表示这种方法是有效的,并且通解就是各个可能的解的线性组合。如果变量不能分离开,就必须用其他方法求解方程。

解　利用分离变量法，假设波动方程

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{11.66}$$

的解的形式为

$$\psi(x,t) = X(x)T(t) \tag{11.67}$$

式中 $X(x)$ 仅是 x 的函数，$T(t)$ 仅是 t 的函数。代入式(11.66)，可得

$$T(t)\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{v^2}X(x)\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2}$$①

或者②

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{v^2 T(t)}\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2} \tag{11.68}$$

式(11.68)左边仅是 x 的函数，而右边仅是 t 的函数。这表明不论 x 和 t 取什么值，独立变量 x 的函数都等于另一个独立变量 t 的函数；这只有当式(11.68)两边均为常数时才可能成立。令这个常数等于 $-k^2$，则有

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{v^2 T(t)}\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2} = -k^2 \tag{11.69}$$

或者有

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + k^2 X(x) = 0 \tag{11.70}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{d\,\mathrm{t}^2} + \omega^2 T(t) = 0 \tag{11.71}$$

式中

$$\omega = kv = \frac{2\pi}{\lambda}v \tag{11.72}$$

为波的角频率。式(11.70)和式(11.71)的解可以很容易写出，为

$$X(x) = A\cos kx + B\sin kx$$

$$T(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t$$

因此

$$\psi(x,t) = (A\cos kx + B\sin kx)(C\cos\omega t + D\sin\omega t) \tag{11.73}$$

选择适当的常数 A,B,C 和 D，可得

$$\psi(x,t) = a\cos(kx - \omega t + \phi)$$

或者

$$\psi(x,t) = a\cos(kx + \omega t + \phi)$$

两式分别代表沿 $+x$ 方向和 $-x$ 方向传播的波。也可以把

$$\psi(x,t) = a\exp[\pm \mathrm{i}(kx \pm \omega t + \phi)]$$

作为方程的解。

一般情形下，所有的频率值都是允许的，只是频率和波长必须由式(11.72)联系起来。

---

① 原书为 $\frac{1}{v^2}X(x)\frac{\partial^2 T}{\mathrm{d}t^2}$

② 请注意，偏微分已经替换成了全微分。

但是,有些系统(如有张力作用并且两端固定的弦)的频率只允许某些固定的值(见8.2节)。

例 11.6 到现在为止,讨论只限于一维的波动方程。三维的波动方程具有以下形式

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{11.74}$$

式中

$$\nabla^2\psi \xlongequal{\text{def}} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{11.75}$$

试利用分离变量法求解三维波动方程,并说明解的物理意义。

解 利用分离变量法,可写出

$$\psi(x,y,z,t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t) \tag{11.76}$$

式中 $X(x)$ 仅是 x 的函数,并以此类推。代入式(11.74),可得

$$YZT\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + XZT\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} + XYT\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} = \frac{1}{v^2}XYZ\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}$$

各项除以 ψ,有

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} = \frac{1}{v^2}\left(\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}\right) \tag{11.77}$$

由于左边第一项仅是 x 的函数,第二项仅是 y 的函数,如此类推。则每一项都必须令其等于常数,可写为

$$\begin{aligned}
\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} &= -k_x^2 \\
\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} &= -k_y^2 \\
\frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} &= -k_z^2
\end{aligned} \tag{11.78}$$

式中 k_x^2,k_y^2 和 k_z^2 均为常数,则

$$\frac{1}{v^2}\left(\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}\right) = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2T(t) = 0 \tag{11.79}$$

式中

$$\omega^2 = k^2v^2 \tag{11.80}$$

并且

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

式(11.78)和式(11.79)的解可以写为正弦和余弦函数的形式;但是,更方便的是把它们写为指数函数的形式

$$\psi = A\exp[\mathrm{i}(k_xx + k_yy + k_zz \pm \omega t + \phi)] = A\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} \pm \omega t + \phi)] \tag{11.81}$$

式中,矢量 $\boldsymbol{k}$ 是这样规定的:它的 x,y,z 分量分别是 k_x,k_y,k_z。那么,也可以把解写为

$$\psi = A\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \phi) \tag{11.82}$$

考察垂直于 $\boldsymbol{k}$ 的一个矢量 $\boldsymbol{r}$,有 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=0$。所以,在一个给定的时刻,扰动的相位在垂直于 $\boldsymbol{k}$

的平面上是常数。扰动传播的方向沿着 $\boldsymbol{k}$ 的方向，而等相面（波阵面）是垂直于 $\boldsymbol{k}$ 的平面。这种波称为平面波（见图 11.9）。要注意，对于给定的一个频率值，k^2 的值是确定的（见式(11.80)），然而，波的传播方向可以根据 k_x，k_y 和 k_z 之间的相互取值的不同而不同。例如，如果

$$k_x = k, \quad k_y = k_z = 0 \tag{11.83a}$$

则得到一个沿 x 轴传播的波，等相面平行于 y-z 平面。同理，当

$$k_x = \frac{k}{\sqrt{2}}, \quad k_y = \frac{k}{\sqrt{2}}, \quad k_z = 0 \tag{11.83b}$$

时，波将沿着与 x 轴和 y 轴成相等角度（且与 z 轴垂直）的方向传播（见图 11.9），如此类推。

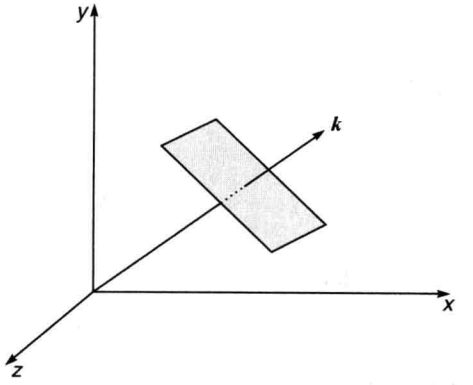


图 11.9　平面波沿 $\boldsymbol{k}$ 方向传播 $\left(k_x=k_y=\frac{k}{\sqrt{2}},\ k_z=0\right)$

例 11.7　对于球面波，位移 ψ 只相关于 r 和 t，这里 r 是到某一固定点的距离。试求球面波波动方程的通解。

解　首先证明，对于球面波

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) \tag{11.84}$$

有[①]

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} \tag{11.85}$$

因为

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{11.86}$$

所以

$$2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x$$

或者

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

因此

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

并且

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + x\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{x^2}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$$

---

① 一般 ψ 是三个球坐标 r，θ 和 ϕ 的函数，且

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

但是，对球面波来说，ψ 仅是 r 的函数，因此，后两项为零。

或者

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{x^2}{r^3}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

同理,有

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{y^2}{r^3}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{z^2}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{z^2}{r^3}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

以上三式相加,可得

$$\nabla^2\psi=\frac{3}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

这里利用了式(11.86)。因此

$$\nabla^2\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\tag{11.87}$$

这样一来,球面波的波动方程简化为

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\tag{11.88}$$

如果作代换

$$\psi=\frac{u(r,t)}{r}$$

则

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}-u\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial^2u}{\partial r^2}$$

这样,式(11.88)可变为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2u}{\partial r^2}=\frac{1}{v^2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$$

或者

$$\frac{\partial^2u}{\partial r^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\tag{11.89}$$

式(11.89)与一维波动方程形式相同。因此,式(11.89)的通解可由下式给出

$$\psi=\frac{f(r-vt)}{r}+\frac{g(r+vt)}{r}\tag{11.90}$$

式(11.90)右边第一项和第二项分别表示一个发散球面波和一个汇聚球面波。当时间依赖关系具有 $e^{\pm i\omega t}$ 的形式时,有

$$\psi=\frac{A}{r}\exp[i(kr\pm\omega t)]\tag{11.91}$$

注意到因子$\frac{1}{r}$表示球面波的振幅与 r 成反比地减小,因此,强度随$\frac{1}{r^2}$减小。

例 11.8 前面已经提到,用分离变量法求得方程的解是通解。试证明:脉冲

$$\psi(x,t)=A\exp\left[-\frac{(x-vt)^2}{\sigma^2}\right]\tag{11.92}$$

可以表示为用分离变量法求得的一些解的叠加。

解　任一个沿 $+x$ 方向传播的扰动都可以写为形如

$$\cos k(x-vt) \quad 和 \quad \sin k(x-vt)$$

的一些函数的叠加，即

$$\psi(x,t)=\int_0^\infty a(k)\cos k(x-vt)\mathrm{d}k+\int_0^\infty b(k)\sin k(x-vt)\mathrm{d}k \tag{11.93}$$

式中，函数 $a(k)$ 和 $b(k)$ 由 $\psi(x,t=0)$ 的形式决定，即

$$\psi(x,0)=\int_0^\infty a(k)\cos kx\,\mathrm{d}k+\int_0^\infty b(k)\sin kx\,\mathrm{d}k \tag{11.94}$$

若 $\psi(x,0)$ 是 x 的偶函数，则 $b(k)=0$；若 $\psi(x,0)$ 是 x 的奇函数，则 $a(k)=0$。若 $\psi(x,0)$ 既不是偶函数也不是奇函数，那么，$a(k)$ 和 $b(k)$ 都不等于零。在目前情况下，有

$$\psi(x,0)=A\exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \tag{11.95}$$

是 x 的偶函数。那么

$$\psi(x,0)=A\exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right)=\int_0^\infty a(k)\cos kx\,\mathrm{d}k \tag{11.96}$$

根据傅里叶余弦变换，有

$$a(k)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \psi(x,0)\cos kx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}A\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right)\cos kx\,\mathrm{d}x=\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}A\exp\left(-\frac{k^2\sigma^2}{4}\right)$$

则

$$A\exp\left[-\frac{(x-vt)^2}{\sigma^2}\right]=\frac{\sigma A}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{k^2\sigma^2}{4}\right)\cos(kx-\omega t)\mathrm{d}k \tag{11.97}$$

小　结

- 对于一个正弦波，位移可以表示为

$$\psi=a\cos(kx\pm\omega t+\phi)$$

式中 a 为波的振幅，$\omega(=2\pi\nu)$ 为波的角频率，$k(=2\pi/\lambda)$ 为波数，λ 为波长。正号与负号分别对应沿 $-x$ 方向和 $+x$ 方向传播的波。在拉紧的弦的一端放置一个连续振动的音叉，在弦上就会产生这种形式的位移。ϕ 称为波的初相位。

- 波动方程

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

的通解形式为

$$\psi=f(x-vt)+g(x+vt)$$

式中 f 和 g 是自变量的任意函数。上述方程右边的第一项表示以速度 v 沿 $+x$ 方向传播的扰动，第二项表示以速度 v 沿 $-x$ 方向传播的扰动。从物理的角度出发，如果能推导出波动方程，那么就可以断言波的存在，而 ψ 就表示与该波相联系的位移。

- 对于一个球面波，其位移可以表示为

$$\psi=\frac{A}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr\pm\omega t)}$$

式中“+”与“-”分别对应汇聚球面波和发散球面波。注意到因子 $1/r$ 表示球面波的振幅与 r 成反比地减小，因此，强度随 $1/r^2$ 减小。

习　题

11.1 给出波的位移方程分别为

(1) $y(x,t)=0.1\cos(0.2x-2t)$

(2) $y(x,t)=0.2\sin(0.5x+3t)$

(3) $y(x,t)=0.5\sin 2\pi(0.1x-t)$

每一种情况的 x 和 y 的单位都是 cm，t 的单位为 s。试计算每一种情况的频率和波速。

[**答案**：(1) $\nu\approx 0.32\text{s}^{-1}$，$v=10\text{cm/s}$；(2) $\nu\approx 0.48\text{s}^{-1}$，$v=6\text{cm/s}$；(3) $\nu=1\text{s}^{-1}$；$v=10\text{cm/s}$]

11.2 一横波($\lambda=15\text{cm}$，$\nu=200\text{s}^{-1}$)在拉紧的弦上沿 $+x$ 方向传播，振幅为 0.5cm。在 $t=0$ 时，$x=0$ 的点正好处于平衡位置，且要向上运动。试写出描述这个波的方程式，若 $\rho=0.1\text{g/cm}$，试计算每单位弦长波的能量。

[**答案**：单位弦长波的能量$\approx 1.97\times 10^4\text{erg/cm}$]

11.3 设人耳听觉的频率范围是 $20<\nu<20000\text{Hz}$，问相应的波长范围是多少？

[**答案**：$16.5\text{m}>\lambda>0.0165\text{m}$]

11.4 计算在标准温度和压力下，在(1)氩气($\gamma=1.67$)；(2)氢气($\gamma=1.41$)中，纵波的传播速度。

[**答案**：(1) 308m/s；(2) 1260m/s]

11.5 考察以速度 100cm/s，沿 $+x$ 方向传播的一列波。在 $x=10\text{cm}$ 处的位移由下式给出

$$y(x=10,t)=0.5\sin(0.4t)$$

式中 x 和 y 的单位为 cm，而 t 的单位为 s。试计算这个波的波长和频率，并求出在 $x=0$ 处的位移随时间变化的表示式。

[**答案**：$\lambda\approx 1571\text{cm}$；波的位移为 $y(x,t)=0.5\sin[0.4t-0.004(x-10)]$]

11.6 考察频率为 100s^{-1} 的沿 $-x$ 方向传播的波。在 $t=5\text{s}$ 时，波的位移由下式给出

$$y(x,t=5)=0.5\cos(0.1x)$$

式中 x 和 y 的单位为 cm，t 的单位为 s。试写出 $t=10\text{s}$ 时的位移(表示成 x 的函数)，该波的波长和波速是多少？

[**答案**：波的位移为 $y(x,t)=0.5\cos[0.1x+200\pi(t-5)]$]

11.7 试对

$$y(x,t=5)=0.5\cos(0.1x)+0.4\sin\left(0.1x+\frac{\pi}{3}\right)$$

的情况重做上题。

11.8 有一个高斯脉冲沿 $+x$ 方向传播，在 $t=t_0$ 时，位移由下式给出

$$y(x,t=t_0)=a\exp\left[-\frac{(x-b)^2}{\sigma^2}\right]$$

试求 $y(x,t)$。

[**答案**：$y(x,t)=a\exp\left\{-\dfrac{[x-b-v(t-t_0)^2]}{\sigma^2}\right\}$]

11.9　弦音计上拉紧的弦丝中的张力为 1N，试计算其上传播的横波速度（设 $\rho=0.2\text{g/cm}$）。

[**答案**：$v\approx 707\text{cm/s}$]

11.10　一个三维波的位移由下式给出

$$\psi(x,y,z,t)=a\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx+\frac{1}{2}ky-\omega t\right)$$

试证明：波沿着与 x 轴成 30°方向传播。

11.11　一个波的位移由下式给出

$$\psi(x,y,z,t)=a\cos(2x+3y+4z-5t)$$

式中 x,y,z 的单位为 cm，t 的单位为 s，试求波传播方向的单位矢量，该波的波长和频率是多少？

$$\left[\text{**答案**：}\frac{2}{\sqrt{29}}\hat{\boldsymbol{x}}+\frac{3}{\sqrt{29}}\hat{\boldsymbol{y}}+\frac{4}{\sqrt{29}}\hat{\boldsymbol{z}}\right]$$

11.12　一个波包在 $t=0$ 时的位移由下式描写

$$\psi(x,t=0)=a\exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right)\cos kx$$

试把这个位移表示为一些平面波的叠加，并解释 $k\sigma\gg 1$ 时式子的物理意义。

$$\left[\text{**答案**：}\psi(x,t=0)=\int_{-\infty}^{+\infty}A(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k\text{，式中 }A(k)=\frac{a}{4\pi}\left\{\sqrt{\pi\sigma^2}\left\{\exp\left[-\frac{(k-k_0)^2\sigma^2}{4}\right]+\exp\left[-\frac{(k+k_0)^2\sigma^2}{4}\right]\right\}\right\}\right]$$

11.13　计算弹性纵波在铝（$Y=0.70\times 10^{12}\text{N/cm}^2$，$\rho=2.7\text{g/cm}^3$）中的传播速度，并与声波在空气中的传播速度相比较。

[**答案**：$v_l\approx 5.1\times 10^5\text{cm/s}$]

参考文献和推荐读物

1. H. J. J. Braddick, *Vibrations, Waves and Diffraction*, McGraw-Hill Publishing Co., London, 1965.
2. F. S. Crawford, *Waves and Oscillations*, *Berkeley Physics Course*, Vol. III, McGraw-Hill Book Co., New York, 1968.
3. C. A. Coulson, *Waves*, Seventh Edition, Oliver & Boyd Ltd., Edinburgh, 1955.
4. W. C. Elmore and M. A. Heald, *Physics of Waves*, McGraw-Hill Publishing Co., Maidenhead, 1969.
5. G. Joos, *Theoretical Physics* (translated by I. M. Freeman), Blackie & Son Ltd., London, 1955.
6. H. J. Pain, *The Physics of Vibrations and Waves*, John Wiley & Sons, London, 1968.
7. Physical Science Study Committee, *Physics*, D. C. Heath and Co., Boston, Mass., 1967.
8. J. C. Slater and N. H. Frank, *Electromagnetism*, Dover Publications, New York, 1969.
9. R. A. Waldson, *Waves and Oscillations*, Van Nostrand Publishing Co., New York, 1964.

第12章 惠更斯原理及其应用

在致法国科学院的一次通信中，荷兰物理学家惠更斯提出了他的光波动理论(此理论发表于1690年的《光论》(Traite de Lumiere)中)。他认为：当光在由小弹性颗粒构成的弥漫的以太中传播时，每一个颗粒可以作为子波的波源。基于此，惠更斯解释了许多已知的光传播现象，包括巴托林纳斯(Bartholinus)发现的光经过方解石时的双折射现象。

——摘自因特网

12.1 引言

光的波动理论最早由惠更斯于1678年提出。那时候，人们都相信牛顿的光的微粒说。微粒说可以很好地解释光的反射、折射、直线传播等现象，以及光线能够在真空中传播的事实。牛顿至高无上的权威致使牛顿周围的科学家比牛顿本人都更深信微粒说。所以，当惠更斯提出光的波动理论时，没有人真正相信他。在他的波动理论的基础上，惠更斯满意地解释了光的反射、折射和全反射现象，并且对当时刚发现的双折射现象(见第22章)给出了简单的解释。正如后文所述，惠更斯的波动说预言了光在媒质(如水)中的速度比在自由空间中的速度要小，这一结果与牛顿微粒说预言的结果是正好相反的(见2.2节)。

直到19世纪初，杨和菲涅耳的干涉实验之后，光的波动说才被人们真正接受，因为干涉实验只有波动说才能解释。后来，科学家们测出光在透明媒质中的传播速度，此速度与根据光的波动理论算得的结果相一致。应该指出的是，惠更斯本人并不知道光波是横波还是纵波，以及光在真空中是如何传播的。直到19世纪末，麦克斯韦提出了著名的电磁理论，光的本性才被正确理解。

12.2 惠更斯原理

惠更斯原理是以几何作图法为基础的，如果已知某一时刻的波前的形状，就可以根据这一作图法，确定以后任一时刻的波前的形状。所谓波前，就是指有相同相位的点的轨迹，例如，如果把一个小石子投到平静的湖面，就会有一些圆形的波纹自撞击点扩散开来，以撞击点为圆心的圆圈上的每一点都以相同的振幅和相位振荡，由此得到了圆形波前。另一方面，如果在一个均匀各向同性的媒质中有一个点源，那么，它所发出的等振幅等相位的点的轨迹就形成一个球面，在这种情况下得到的就是一个球面波，如图12.1(a)所示。在距离波源很远的地方，球面波前的一小部分可以近似看作平面，这样就得到了所谓的平面波(见图12.1(b))。

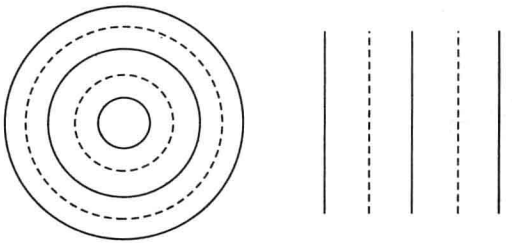


图　12.1

(a) 点源产生球面波；(b) 在离点源很远时，球面波前的一小部分可以近似看成平面波。

依据惠更斯原理，波前上的每一点都可以看作是一个子波源，并且这些点发出的子波以原波速向四周传播。这些子波的包络面形成新的波前。如图 12.2 所示，S_1S_2 表示(由波源点 O 发出的)在一特定的记为 $t=0$ 时刻的波前形状，假设媒质是均匀的和各向同性的，即媒质中所有点都有相同的性质，并且波沿任何方向都有相同的传播速度。如果想要确定 Δt 时刻的波前形状，以波前上的每一个点为中心，作半径为 $v\Delta t$ 的球面，其中 v 是波在这种媒质中的传播速度。如果做出所有这些球的公切面，就能得到一个包络面，这个包络面仍以点 O 为圆心。这样，就得到了在 Δt 时刻的波面的形状，即球面 $S_1'S_2'$。

但是，上述模型存在一个缺陷，会同时得到一个实际上并不存在的后退波，即球面 $S_1''S_2''$，如图 12.2 所示。在惠更斯理论中，可以通过假设子波源的振幅不是沿各个方向都相等这一点来避免出现后退波，即，在波的前进方向有极大值，在后退波的方向为零[①]。更严格的波动理论已经证实，的确不存在后退波。

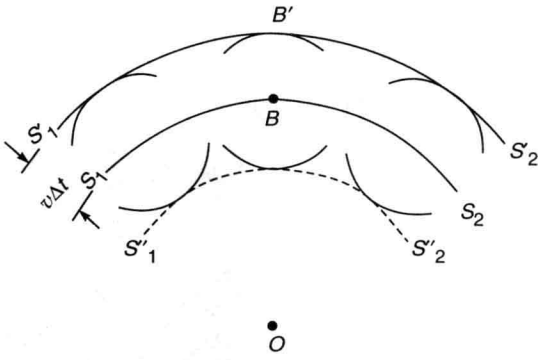


图 12.2　已知早一时刻的波前形状，决定后一时刻的波前的惠更斯作图法。S_1S_2 是某一时刻($t=0$ 时)以点 O 为中心的球面波前。$S_1'S_2'$ 对应于时间 Δt 后的波前，它仍是以点 O 为中心的球面。虚线 $S_1''S_2''$ 表示后退波。

下一节将讨论惠更斯一开始为解释光的直线传播所作的论证。12.4 节将用惠更斯原

① 事实上，衍射理论证明在某种近似下，确实能够得到一个 $\frac{1}{2}(1+\cos\theta)$ 形式的倾斜因子，式中 θ 为波前的法线与所考察光线方向的夹角。显然，当 $\theta=0$ 时，倾斜因子为 1(在前进方向的振幅为极大值)；当 $\theta=\pi$ 时，倾斜因子为 0(在后退方向的振幅为零)。

理推导光的折射定律和反射定律。最后,在12.5节将说明如何把惠更斯原理应用于非均匀媒质。

12.3 光的直线传播

考察从点源O发出的球面波遇到障碍物A时的情况(见图12.3)。根据光的直线传播原理(也能够由光的微粒说预测出来),应该在屏幕上PQ区域内得到一个阴影。但从后面的章节可以得出,实际情况并非严格如此,在几何阴影区内也有一定的光强度。可是,在惠更斯那个时代,光被认为是沿直线传播的,因而,惠更斯假设子波面上不与波前包络面相切的点的振幅为零来解释这一点。这样一来,如图12.2所示,由一代表点B发出的子波就只有在点B'产生一定的振幅,而在其他点产生的振幅为零。

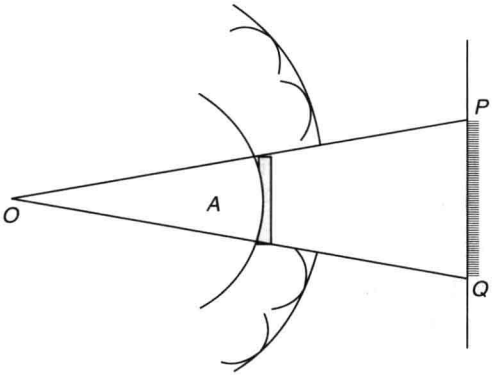


图12.3 光的直线传播。点O是发出球面波的点光源,A是在幕上PQ区域产生暗影的障碍物。

上述对光的直线传播的解释的确是不令人满意的,并且也是不正确的。此外,正如前面所指出的,在几何阴影区内确实观察到一定的光强。菲涅尔给出了令人满意的解释,他假设子波源发出的波是相互干涉的。惠更斯原理与子波相互干涉结合在一起,就是著名的惠更斯-菲涅尔原理。应当指出的是,当平面波入射到一个小孔上时[①],这个小孔就可以近似看成是一个点光源,并发出球面波(见图12.4(a)和(b))。这个事实与惠更斯原先的假说是完全矛盾的:根据惠更斯的假设,子波源发出的波不在波前包络面的点的振幅为零;但是,在光的衍射一章可以看到,这个事实可以用惠更斯-菲涅尔原理得到圆满的解释[②]。

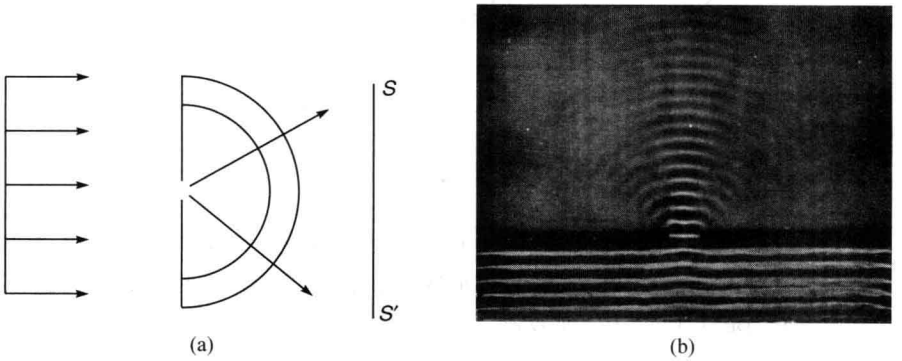


图 12.4

(a) 一束平面波入射到一个针孔上。如果针孔的直径与光的波长相比很小,那么,整个光屏SS'都会被照到,彩图见文前附录图表页的图17;(b) 直纹水波通过一个开口时发生的衍射(引自参考文献[6])。

① 这里所指的小孔,其直径在0.1mm的量级或更小。

② 利用惠更斯原理确定各向异性媒质中光的波前将在第22章中讨论。

12.4　应用惠更斯原理研究折射与反射

12.4.1　平面波在平面分界面上的折射

首先来推导折射定律。如图 12.5 所示，S_1S_2 是两种不同媒质的分界面，光波在两种媒质中的传播速度分别为 v_1，v_2。令 A_1B_1 为以角 i 入射到分界面的平面波前，A_1B_1 表示入射光波波前在 $t=0$ 时刻的位置。

设 τ 为波前传播 B_1B_3 距离所用的时间，则有 $\overline{B_1B_3}=v_1\tau$。同时，光波在第二种媒质中也已经传播了 $\overline{A_1A_3}=v_2\tau$ 的距离。（注意，直线 A_1A_3、B_1B_3 等总是与波面垂直，表示各向同性媒质中的光线，见第 4 章）。容易看出，入射光线和折射光线与法线的夹角分别为 i 和 r。为了确定在 $t=\tau$ 时刻的波前形状，任选波前上的一点 C_1。设波动通过 C_1C_2 这段距离所需的时间为 τ_1，有 $\overline{C_1C_2}=v_1\tau_1$，由点 C_2 画半径为 $v_2(\tau-\tau_1)$ 的子波。与此类似，由点 A_1 可以画出半径为 $v_2\tau$ 的子波。这些子波的包络面为 $A_3C_3B_3$，在中间时刻 τ_1，波前的形状为 $A_2C_2B_2$，显然，有 $\overline{B_1B_2}=\overline{C_1C_2}=v_1\tau_1$，$\overline{A_1A_2}=v_2\tau_1$。在直角三角形 $B_2C_2B_3$ 和 $C_3C_2B_3$ 中，$\angle B_2C_2B_3=i$（入射角），$\angle C_2B_3C_3=r$（折射角），则

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{\overline{B_2B_3}/\overline{C_2B_3}}{\overline{C_2C_3}/\overline{C_2B_3}}=\frac{\overline{B_2B_3}}{\overline{C_2C_3}}=\frac{v_1(\tau-\tau_1)}{v_2(\tau-\tau_1)}=\frac{v_1}{v_2} \tag{12.1}$$

这就是斯涅尔定理。实验观察可以得出，当光从光疏媒质射入光密媒质时，入射角比折射角大，即

$$\frac{\sin i}{\sin r}>1$$

有 $v_1>v_2$。从而，惠更斯原理预测光在光疏媒质中的传播速度要大于光密媒质中的传播速度，这个预测与牛顿的微粒说（见 2.2 节）推出的结论完全相反。之后的实验表明，波动理论预测的结果是正确的。

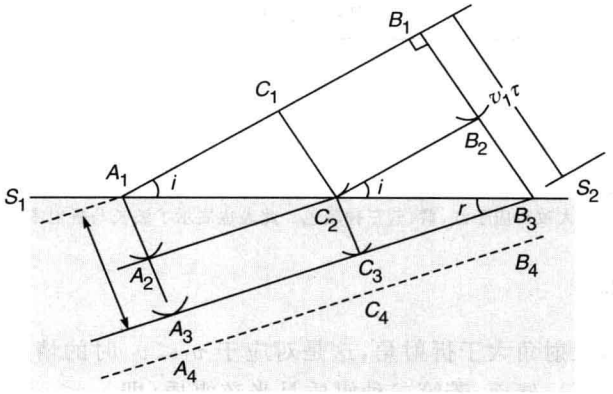


图 12.5　平面波 A_1B_1 在由平面 S_1S_2 分隔的两种媒质表面的折射，光在两种媒质中的速度分别为 v_1，$v_2(<v_1)$；i 和 r 分别为入射角与折射角。$A_2C_2B_2$ 代表在中间时刻 τ_1 波前的形状，注意 $r<i$。

如果 c 为自由空间中的光速，那么，比值 $\frac{c}{v}$（式中 v 为光在特定媒质中的传播速度）被称为这种媒质的折射率 n。因此，如果两种媒质的折射率分别为 $n_1\left(=\frac{c}{v_1}\right)$ 和 $n_2\left(=\frac{c}{v_2}\right)$，则斯涅尔定律可以写为

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r \tag{12.2}$$

设 $A_1C_1B_1$，$A_2C_2B_2$，$A_3C_3B_3$，$A_4C_4B_4$ 分别表示相邻波峰的位置。λ_1 和 λ_2 分别表示在媒质1和媒质2中光波的波长，则 $\overline{B_1B_2}=\overline{B_2B_3}=\overline{C_1C_2}=\lambda_1$，$\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}=\overline{C_2C_3}=\lambda_2$。如图12.5所示，可得

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{v_1}{v_2} \tag{12.3}$$

或者

$$v_1/\lambda_1 = v_2/\lambda_2 \tag{12.4}$$

因此，当光波折射到光密媒质（$v_1>v_2$）中时，波长和波速减小，而频率（$=v/\lambda$）保持不变；当光波折射到光疏媒质时，波长和波速增大。表12.1给出了几种材料相对于真空的折射率。表12.2给出了冕牌玻璃与透明石英的折射率随波长的变化。三个波长大致对应红、黄、蓝三种颜色的光。请注意波长与折射率所能测量的精度。

表12.1　不同材料相对真空的折射率（摘自参考文献[1]）

（对应入射光的波长 $\lambda=5.890\times10^{-5}$ cm）

材料名称	n	材料名称	n
真空	1.0000	石英(熔融)	1.46
空气	1.0003	岩盐	1.54
水	1.33	玻璃(普通冕牌)	1.52
石英(晶体)	1.54	重火石玻璃	1.66

表12.2　望远镜冕牌玻璃与透明石英的折射率随波长的变化

（摘自参考文献[7]）

	波长/cm	望远镜冕牌玻璃	透明石英
1	6.562816×10^{-5}	1.52441	1.45640
2	5.889953×10^{-5}	1.52704	1.45845
3	4.861327×10^{-5}	1.53303	1.46318

注：序数为1,2,3的波长大致对应于红、黄、蓝三种颜色。此表也展示了波长与折射率的测量精度。见习题10.5。

12.4.2　全内反射

如图12.5所示，入射角大于折射角，这是对应于 $v_2<v_1$ 时的情况，即光波由光疏媒质射入光密媒质中的情形。然而，若第二种媒质是光疏媒质（即 $v_1<v_2$），那么，折射角将会大于入射角，一个典型的折射光波波前如图12.6所示，其中 $\overline{B_1B_2}=v_1\tau$，$\overline{A_1A_2}=v_2\tau$。显然，如果入射角大到使 $v_2\tau>\overline{A_1B_2}$，折射光的波前将会消失，这就是所谓的全内反射。全内反射的临界角相应于

$$\overline{A_1B_2} = v_2\tau$$

则

$$\sin i_c = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{A_1B_2}} = \frac{v_1}{v_2} = n_{12} \tag{12.5}$$

式中 i_c 为临界角，n_{12} 为第二媒质相对于第一媒质的折射率的比值。当入射角大于 i_c 时，就会发生全反射。

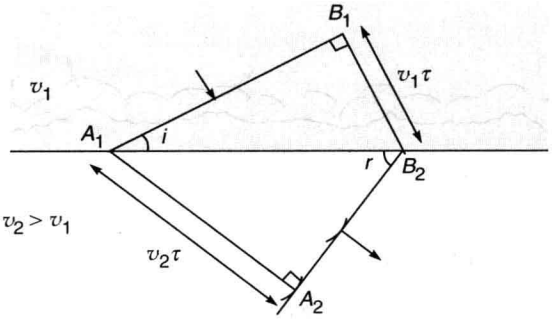


图 12.6　一束平面波入射到光疏媒质(即 $v_2 > v_1$)时折射。注意，折射角 r 大于入射角 i，且当 $r=\pi/2$ 时，i 为临界角。

12.4.3　平面波在平面分界面上的反射

考察一束平面波 AB 以入射角 i 入射到一个平面镜上的情形，如图 12.7 所示。下面将讨论平面波的反射，并试图求得反射波前的形状。设 $t=0$ 时，波前的位置为 AB。如果没有平面镜，则后一时刻 τ 时，波前的位置将会是 CB'，这里，$\overline{BB'}=\overline{PP'}=\overline{AC}=v\tau$，且 v 是波的传播速度。为了得到 $t=\tau$ 时刻反射波前的形状，在波前 AB 上任选一点 P，并令 τ_1 为光波由点 P 传到点 P_1 所需的时间。从 P_1 点画一个半径为 $v(\tau-\tau_1)$ 的球面，并过点 B' 作球面的切面。又 $\overline{BB_1}=\overline{PP_1}=v\tau_1$，则 $\overline{B_1B'}=\overline{P_1P_2}(=v(\tau-\tau_1))$。考虑三角形 $P'P_1B'$ 和 B_1P_1B'，P_1B' 为公共边，又 $\overline{P_1P'}=\overline{B'B_1}$[①]，且这两个三角形均为直角三角形，则 $\angle P'B'P_1=\angle B_1P_1B'$。前者是反射角，后者是**入射角**。因此得到反射定律：当平面波前在平面分界面上反射时，反射角与入射角相等，且反射波仍是平面波前。

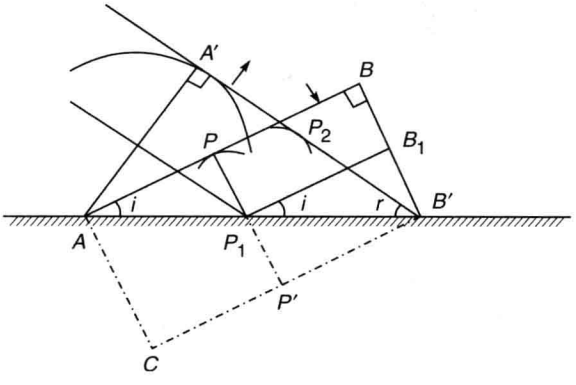


图 12.7　平面波 AB 入射到平面镜上的反射。$A'B'$ 为反射波前；i 和 r 分别为入射角和反射角。

① 原书为：$P_1P'=B'B_2$

12.4.4 漫反射

12.4.3 节讨论了光波经光滑表面的反射,这种反射被称为镜面反射。如果反射表面是粗糙的(如图 12.8 所示),这种反射被称为漫反射。由于从粗糙表面射出的子波向各个方向传播,因此,得不到轮廓分明的反射波。实际上可以证明,如果表面的不平度比光的波长大很多时,就得到漫反射。



图 12.8 平面波前在粗糙表面上的漫反射。显然,不存在轮廓分明的反射波。

12.4.5 镜面附近点光源的反射

如图 12.9 所示,考察从点光源 P 发出的球面波入射到平面镜 MM' 时的情形。令 ABC 表示 $t=0$ 时刻的波前形状。在没有平面镜时,后一时刻 τ 时,波前形状应该为 $A_1B_1C_1$,且 $\overline{AA_1}=\overline{QQ_1}=\overline{BB_1}=\overline{CC_1}=v\tau$,点 Q 是波前上任意一点。假设光波传播距离 QQ' 所需的时间为 τ_1,为了确定反射光波前的形状,以点 Q' 为球心作一个半径为 $v(\tau-\tau_1)$ 的球面。用类似的方法,可以画出镜面上其他点发出的子波,特别是在点 B 处的半径为 $v\tau$ 的球面。做所有这些球面的公切面,即可得到反射波的波前,即 $A_1B_1'C_1$,如图 12.9 所示。可以看出,$A_1B_1'C_1$ 的形状与 $A_1B_1C_1$ 完全相似,只是它的曲率中心在点 P',而 $\overline{PB}=\overline{BP'}$。因此,反射波看起来好像是从点光源 P 的虚像点 P' 发出的一样。

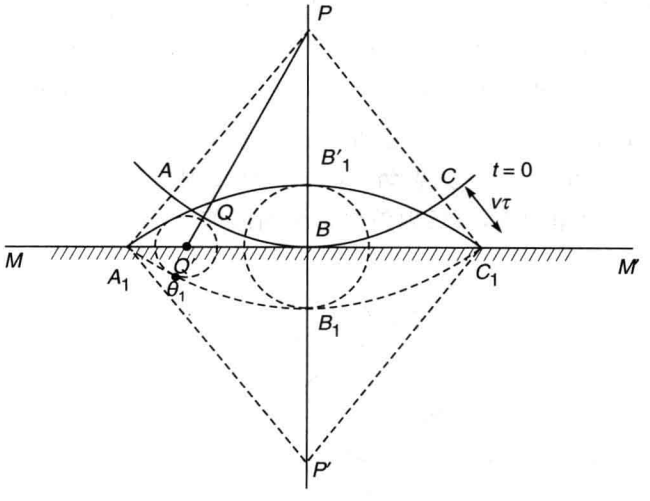


图 12.9 点 P 是一个放置在平面镜 MM' 附近的点光源。ABC 是入射波前(以点 P 为球心),$A_1B_1'C_1$ 是相应的反射波前(以点 P' 为球心),点 P' 为点 P 的虚像。

12.4.6 球面波通过一个球面的折射

考察(从点 P 发出的)球面波入射到凸球面 SBS' 的情况。设波前在 $t=0$ 时刻的形状为

ABC(如图 12.10(a)所示),球面左侧和右侧的折射率分别为 n_1 和 n_2。在没有球面的情况下,后一时刻 τ 时,波前的形状应为 $A_1B_1C_1$,其中$\overline{AA_1}=\overline{BB_1}=\overline{CC_1}=v_1\tau$。考虑波前 ABC 上的任意一点 Q,并设 τ_1 是光波由点 Q 传播到球面上点 Q' 所需要的时间,有$\overline{QQ'}=v_1\tau_1$。为了确定后一时刻折射波前的形状,以点 Q' 为球心作一个半径为 $v_2(\tau-\tau_1)$ 的球面子波。球面上的其他点可以画出类似的子波,特别是点 B 处的球面波前,其半径为$\overline{BB_2}=v_2\tau$。这些球面的包络面为 $A_1B_2C_1$。一般说来,它不是一个球面①。但是,任何弯曲表面的一小部分都可以视为球面。在这种近似下,可以把 $A_1B_2C_1$ 视为曲率中心在点 M 的球面。于是,这个球面波前将会聚于点 M,点 M 为点光源 P 的实像。

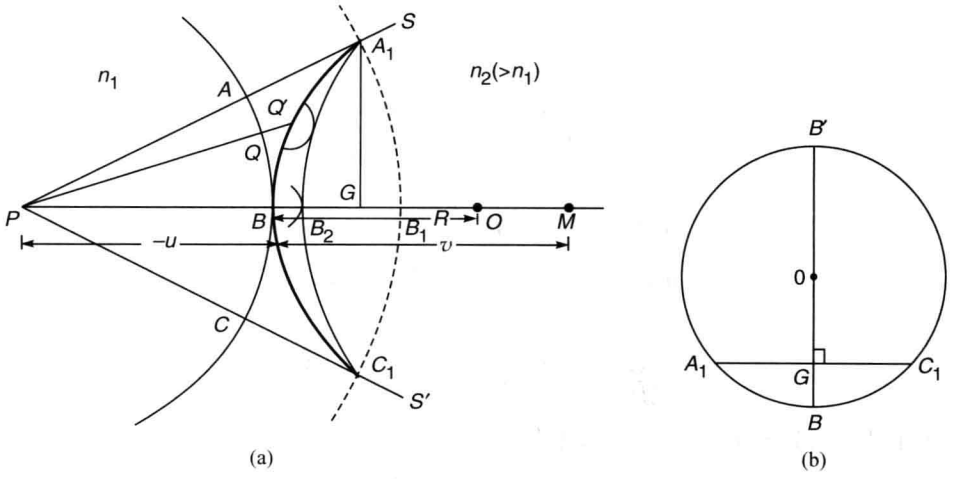


图　12.10

(a) 点光源 P 发出的球面波 ABC 通过凸球面 SBS' 的折射。凸球面分隔开折射率分别为 n_1 和 $n_2(>n_1)$ 的媒质。$A_1B_2C_1$ 为折射波前,近似地为一球面且曲率中心在点 M。因此,点 M 是点 P 的实像。点 O 是 SS' 的曲率中心;(b) 直径 $B'OB$ 与弦 A_1GC_1 正交。

采用习惯的符号规则,把从点 B 向左度量的所有距离取为负,从点 B 向右度量的所有距离取为正。则

$$\overline{PB}=-u$$

式中 u 本身就是负值。并且,由于点 M 在点 B 的右面,有

$$\overline{BM}=v$$

同理,有

$$\overline{BO}=R$$

式中点 O 为球面的曲率中心。

为推导出 u,v 和 R 之间的关系,引入几何学的一个定理

$$\overline{A_1G}^2=\overline{GB}\times(2R-\overline{GB}) \tag{12.6}$$

式中点 G 是点 A_1 在轴 PM 上的垂足(见图 12.10(b))。如图 12.10(b)所示,直径 $B'OB$ 与弦 A_1GC_1 正交。如果$\overline{GB}\ll R$,则

① 折射波前一般不是球面,这会导致所谓的像差(aberrations)。

$$\overline{A_1G}^2 \approx 2R \times \overline{GB}$$

考察球面 SBS'(见图 12.10(a)),其半径为 R,有

$$\overline{A_1G}^2 = (2R - \overline{GB}) \times \overline{GB} \approx 2R \times \overline{GB} \tag{12.7}$$

这里假设$\overline{GB} \ll R$。同样,考虑以点 M 为中心的球面 $A_1B_2C_1$,可得

$$\overline{A_1G}^2 \approx 2v \times \overline{GB_2} \tag{12.8}$$

式中 $v = \overline{BM} \approx \overline{B_2M}$。同理,有

$$\overline{A_1G}^2 \approx 2(-u) \times \overline{GB_1} \tag{12.9}$$

因为 u 为负值,所以$\overline{A_1G}^2$ 为正。又

$$\overline{BB_1} = v_1\tau, \quad \overline{BB_2} = v_2\tau$$

则

$$\frac{\overline{BB_1}}{\overline{BB_2}} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

或者

$$n_1\,\overline{BB_1} = n_2\,\overline{BB_2}$$

$$n_1(\overline{BG} + \overline{GB_1}) = n_2(\overline{BG} - \overline{GB_2})$$

或写为

$$n_1\left(\frac{\overline{A_1G}^2}{2R} - \frac{\overline{A_1G}^2}{2u}\right) = n_2\left(\frac{\overline{A_1G}^2}{2R} - \frac{\overline{A_1G}^2}{2v}\right)$$

此处利用了式(12.7)~式(12.9)。因此有

$$\frac{n_2}{v} - \frac{n_1}{u} = \frac{n_2 - n_1}{R} \tag{12.10}$$

也可以写为

$$\frac{n_2}{v} = \frac{n_1}{u} + \frac{n_2 - n_1}{R} \tag{12.11}$$

因此,如果

$$\frac{n_1}{|u|} > \frac{n_2 - n_1}{R}$$

或者

$$|u| < \frac{Rn_1}{n_2 - n_1}$$

将得到一个虚像(假设第二媒质是光密媒质,即 $n_2 > n_1$;如果 $n_2 < n_1$,则总是得到虚像)。

会聚的球面波前会以如图 12.11 所示的方式传播。通过焦点后,将如图 12.11 所示,开始发散[①]。

同理,考察一球面波自面 SBS' 折射的情况,如图 12.12 所示($n_2 > n_1$)。曲率中心仍位于点 B 的左侧,u 和 R 都是负值。因此,无论 u 和 R 的数值是多少,v 都将是负值,会得到一个虚像。

① 离焦点很近时,必须用更严格的波动理论来讨论。这时波前的形状与球面有很大的差别(见参考文献[8])。但是在离开焦点相当远时,波前又变成球面。

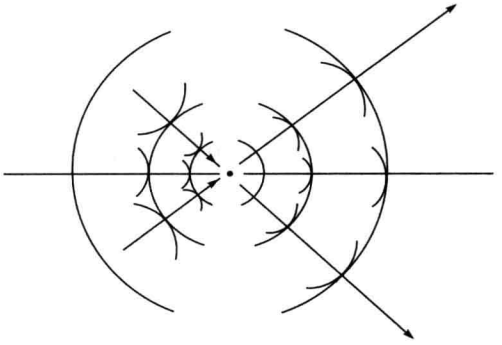


图 12.11　应用惠更斯原理分析汇聚球面波的传播

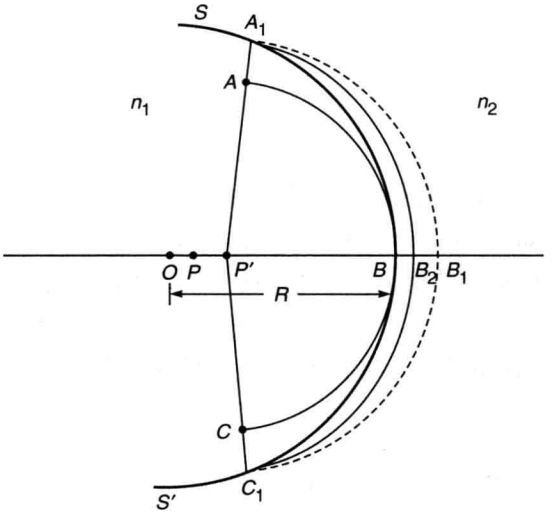


图 12.12　球面波经凹面的折射，此凹面两边媒质的折射率分别为 n_1 和 $n_2(>n_1)$，点 P' 为点 P 的虚像。

根据式(12.10)很容易推导出薄透镜公式。假定将一个折射率为 n_2 的薄透镜放置在折射率为 n_1 的媒质里(见图 12.13)。设透镜两个表面的曲率半径分别为 R_1 和 R_2。令 v' 是点 P 在不存在透镜第二个表面时的像距，则

$$\frac{n_2}{v'}-\frac{n_1}{u}=\frac{n_2-n_1}{R_1} \tag{12.12}$$

(既然假设透镜是薄透镜，所有的距离都是相对于点 O 量度的。)这个像对于球面 R_2 而言就相当于物，且球面 R_2 的左侧媒质的折射率为 n_2，右侧媒质的折射率为 n_1。因此，若 v 是距点 O 的最终像距的话，有

$$\frac{n_1}{v}-\frac{n_2}{v'}=\frac{n_1-n_2}{R_2} \tag{12.13}$$

将式(12.12)和式(12.13)相加，可得

$$\frac{n_1}{v}-\frac{n_1}{u}=(n_2-n_1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \tag{12.14}$$

或者

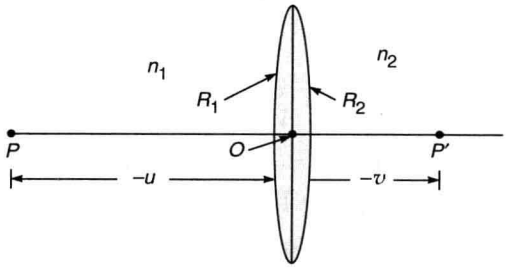


图 12.13　材料折射率为 n_2 的薄透镜放在折射率为 n_1 的媒质中。透镜的两个表面的曲率半径分别为 R_1 和 R_2。点 P'(距透镜中心点 O 距离为 v)为物点 P(距透镜中心点 O 的距离为 $-u$)的像。

$$\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f} \tag{12.15}$$

式中

$$\frac{1}{f}=\frac{n_2-n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \tag{12.16}$$

注意,这里无需担心 v' 的正负,它将自动遵循符号法则。而且,这一公式适用于所有透镜,例如,对于双凸透镜,R_1 为正值,R_2 为负值;对于双凹透镜,R_1 为负值,R_2 为正值。同理,也可以得到其他类型薄透镜的曲率的正负(见图 4.6)。

例 12.1 一个振动源在一媒质中以速度 V 移动。设波在这种媒质中的传播速度为 v。证明:在 $V>v$ 的情况下,将会形成一个圆锥形的波前,且其半角为

$$\theta=\arcsin\frac{v}{V} \tag{12.17}$$

解 设 $t=0$ 时刻,振源位于点 P_0,并以速度 V 沿 x 轴移动(见图 12.14)。我们希望找出后一时刻 τ 时的波前。点 P_0 发出的扰动在 τ 时间内传播了 $v\tau$ 的距离。因此,以点 P_0 为中心,画半径为 $v\tau$ 的球面。下一步,考虑 $\tau_1(<\tau)$ 时刻波源发出的波形。设 τ_1 时刻波源位于点 P_1,有

$$\overline{P_0P_1}=V\tau_1$$

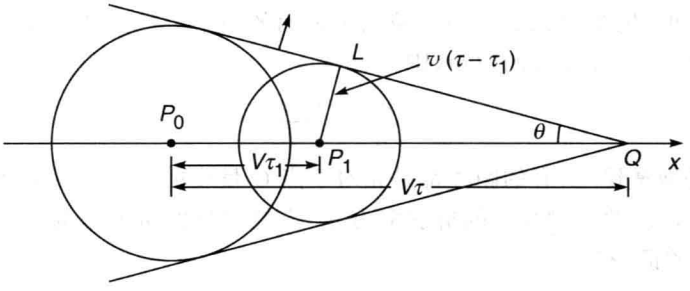


图 12.14 以速度 V 运动的振源 P_0 在波速为 $v(<V)$ 的媒质中传播时产生的冲击波前

为了确定在 τ 时刻波前的形状,以点 P_1 为中心,做半径为 $v(\tau-\tau_1)$ 的球面。设 τ 时刻波源位于点 Q,则

$$\overline{P_0Q}=V\tau$$

从点 Q 作点 P_1 为中心的球的切平面。又由

$$\overline{P_1L}=v(\tau-\tau_1),\quad \overline{P_1Q}=V(\tau-\tau_1)$$

$$\sin\theta=\frac{\overline{P_1L}}{\overline{P_1Q}}=\frac{v}{V}\quad(\text{与 }\tau_1\text{ 无关})$$

由于 θ 独立于 τ_1,可知在 P_0Q 上任意一点画出的球面都有相同的公切面。这一公切面称为冲激波前(该波前形状为一圆锥,也称为马赫锥),它以速度 v 传播。

有趣的是,即使波源不振动,如果它的传播速度超过声速时,也将产生冲激波。当一个带电粒子(例如电子)在一媒质中的传播速度比光在该媒质中的传播速度还快时,也会发生

类似现象[①]，发出的光被称为切伦科夫辐射。如果观察一个游泳池型的反应堆，会发现有蓝光从中闪耀，这就是由快速运动的电子产生的切伦科夫辐射。

12.5　非均匀媒质中的惠更斯原理

惠更斯原理也可以用来研究波在非均匀媒质中的传播。为明确起见，考察一种折射率从一给定轴线周围连续下降的媒质，并把此轴线定为 z 轴，而 x 轴与 y 轴为横向轴。一个简单的例子是自聚焦光纤[②]，它的折射率变化满足如下形式

$$n^2(x,y) = n_1^2 - \gamma^2(x^2 + y^2) \tag{12.18}$$

式中 n_1 为 z 轴上的折射率。设平面波沿 z 轴入射，如图 12.15 所示。由于折射率随 x 与 y 的增大而减小，所以，从入射波前上各部分发出的子波的速度将随着离开轴线距离的增大而增大。已知 $t=0$ 时刻的波前为平面波前 A_1B_1，如图 12.15 所示，试求出 Δt 时刻波前的形状。以点 (x,y) 为中心作半径为 $v(x,y)\Delta t$ 的球面，式中 $v(x,y)$ 是波在点 (x,y) 的波速，随 x 和 y 的增大而增大，因此，这些球面半径会随离开轴线距离的增大而增大。如果做所有这些球面的公切面，会得到如图 12.15 所示中 A_2B_2 的波前。可以立刻看出，起初的平面波前现在变成了曲面。重复上述过程，还可以得到比如说时刻 $2\Delta t$ 的波前形状，如 A_3B_3。很明显，波前现在正在会聚聚焦。但是应该记住，现在讨论的是非均匀媒质，折射率随位置是连续变化的。为使上述作图法仍然有效，Δt 应取得很小，使得在这个很短的时间间隔里可以认为子波是球形的。

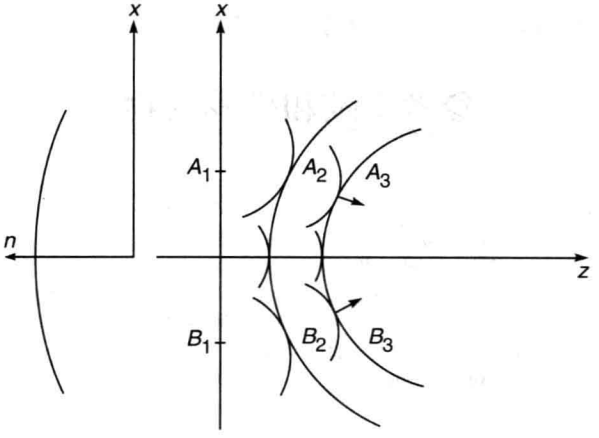


图 12.15　在一种折射率变化如式(12.18)的非均匀媒质中，一平面波前入射而会聚聚焦。

① 这里与相对论中粒子的运动速度不能超过自由空间中的光速(3×10^8 m/s)的理论并不矛盾。光在媒质中的传播速度等于 c/n，式中 n 为媒质的折射率。例如，在水中光速为 2.25×10^8 m/s(小于自由空间中的光速)，但电子的运动速度可以大于这个值。

② 见 3.4.1 节

小　结

- 根据惠更斯原理,波前上的每一点都可以看作是一个子波源,并且这些点发出的子波以原波速向各个方向传播。这些子波的包络面形成新的波前。
- 将惠更斯原理与子波之间相互干涉相结合,称为惠更斯-菲涅尔原理。
- 利用惠更斯原理能够推导出反射定律和斯涅尔定律。
- 利用惠更斯原理可以推导出透镜成像公式

$$\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f}$$

习　题

12.1 根据惠更斯原理,试证明位于光轴上的点光源发出的球面波经一个曲率半径为 R 的凸面镜反射时的成像公式为

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{2}{R}$$

12.2 考察平面波斜入射到一棱镜表面的情况。用惠更斯原理画出透射波前,并证明棱镜产生的偏向角为

$$\delta=i+t-A$$

式中 A 为棱镜顶角,i 和 t 分别为入射角和透射角。

参考文献和推荐读物

1. A.B. Arons, *Development of Concepts in Physics*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1965.
2. B.B. Baker and E.J. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle*, Oxford University Press, London, 1969.
3. H.J.J. Braddick, *Vibration, Waves and Diffraction*, McGraw-Hill Publishing Co., London, 1965.
4. A.J DeWitte, 'Equivalence of Huygens' principle and Fermat's principle in ray geometry', America Journal of Physics, Vol. 27, 293, 1959.
5. C. Huygens, *Treatise on Light*, Dover Publications, New York, 1962.
6. PSSC, *Physics*, D.C. Heath and Company, Boston, Mass., 1965.
7. F.A. Jenkins and H.E. White, *Fundamentals of Optics*, 3rd Edn., McGraw-Hill, 1957, p. 465.
8. M. Born and E. Wolf, *Principle of Optics*, Pergamon Press, Oxford, 1975.

第三部分

干　涉

第三部分以波的叠加原理开始，它是所有干涉实验的物理学基础。从杨氏双孔干涉实验开始，在不同的章节里，将讨论许多与干涉相关的有意思的实验。第 15 章详细讨论了迈克耳孙干涉仪，它也许是最精巧、最绝妙的光学仪器之一。基于此，迈克耳孙获得了 1907 年的诺贝尔物理学奖。第 16 章讨论了法布里-珀罗干涉仪，它基于多光束干涉原理，其特征是有很高的光学分辨能力，从而在高分辨率光谱学领域中得到广泛应用。第 17 章讨论了时间和空间相干性的基本概念，以及迈克耳孙的一个巧妙的实验(它使用空间相干性来确定星体的角直径)，除此之外，还讨论了光拍频和傅里叶变换光谱学。

第13章 波的叠加

“在我看来，无论如何，对已有实验的解释已足够消除我们对光、热辐射和电磁波同一性的怀疑。我相信从现在起，我们将有更大的信心去发扬这种既能基于光学也能基于电学导出所要的研究结果的同一性的优势。”

——赫兹(1988)[①]

13.1 引言

这一章将讨论波的叠加原理的应用，据此原理，多个波(在某一特定点)产生的合位移是每一个波(在该点)产生的扰动位移的矢量和。举一个简单的例子，考察一根拉紧的长弦AB(见图 13.1)。一个三角形脉冲以一定的速度v由端点A向右传播。假设没有其他扰动存在，这个扰动就会没有任何变化地沿$+x$方向传播。当然，这里忽略了脉冲的任何衰减和变形。又假设有一个同样的脉冲以相同的速度v由端点B向左传播(在 11.6 节中已经证明，波的速度是由弦中的张力和单位长度的质量比决定的)。在$t=0$时，弦的“快照”如图 13.1(a)所示。在稍后的一个时刻，每个脉冲都运动了一段距离而彼此接近，但尚未发生干涉，如图 13.1(b)所示。如图 13.1(c)所示，则表示两个脉冲发生干涉时弦的一张“快照”，图中虚线表示每一个脉冲独自运动情况下弦的形状，实线表示把两个位移按代数方法相加所得到的合位移。短时间之后，两个脉冲完全互相重叠(见图 13.1(d))，合位移处处为零

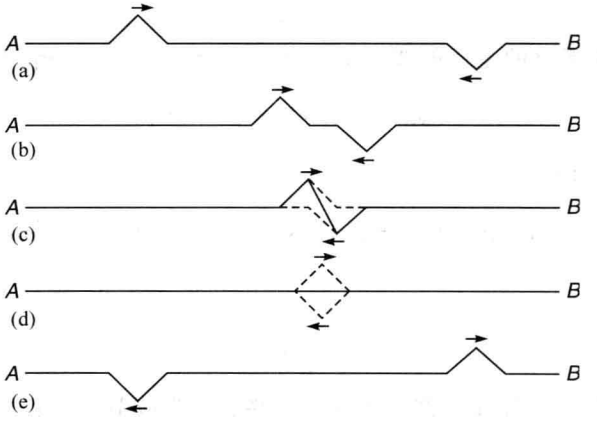


图 13.1 两个三角波在一条拉紧的弦上沿相反方向传播，实线表示绳子的实际形状。(a)，(b)，(c)，(d)和(e)对应于不同时刻。

① 作者在 Smith 与 King 的著作中发现了这个引述(见文献[1])。

(试想能量哪里去了呢?)。再过一段时间,两脉冲又互相错开(见图 13.1(e)),并继续传播,好像什么也没有发生过一样。这就是波的叠加的一个特性。

相比上例,干涉现象并不包含更多的物理内容。在下面几节中,将再考察几个例子。

13.2 弦上驻波

考察固定在点 A 的一根弦(见图 13.2)。沿着这根弦向 $-x$ 方向发出一列正弦横波,这个波在弦上任意点产生的位移由下式给出

$$y_i = a\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x+vt)+\phi\right] \tag{13.1}$$

式中,下标 i 表示考察的是入射波。为不失普遍性,令 $\phi=0$,则式(13.1)可写为

$$y_i = a\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x+vt)\right]=a\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda}+\nu t\right)\right] \tag{13.2}$$

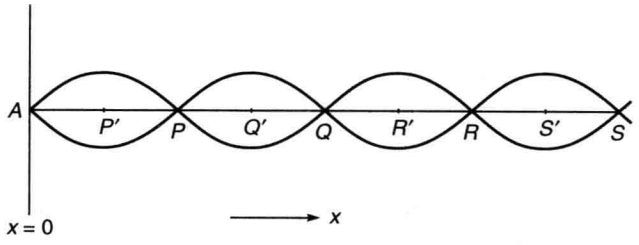


图 13.2 在 $x=0$ 处的反射波

那么,源于入射波的作用,点 A 的位移为

$$y_i\,|_{x=0} = a\sin(2\pi\nu t) \tag{13.3}$$

式中 $\nu=v/\lambda$,并且假设点 A 对应 $x=0$。但是,由于点 A 是固定的,所以必然有一反射波,且这个反射波(在点 A)所产生的位移与 y_i 数值相等,方向相反,即

$$y_r\,|_{x=0} = -a\sin(2\pi\nu t) \tag{13.4}$$

式中下标 r 表示现在考察的是反射波。由于反射波沿 $+x$ 方向传播,有

$$y_r = +a\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\nu t\right) \tag{13.5}$$

因此,合位移可以表示为

$$y = y_i + y_r = a\left[\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}+\nu t\right)+\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\nu t\right)\right]= 2a\sin\frac{2\pi}{\lambda}x\cos 2\pi\nu t \tag{13.6}$$

应该看到,对于满足

$$\sin\frac{2\pi}{\lambda}x = 0 \tag{13.7}$$

的那些 x 值,在任何时刻,位移 y 都等于零。这些点称为波节,它们对应的 x 坐标为

$$x = 0,\frac{\lambda}{2},\lambda,\frac{3\lambda}{2},2\lambda,\cdots \tag{13.8}$$

如图 13.2 所示,以点 A,P,Q 和 R 表示。波节之间的间隔为 $\lambda/2$,在相邻两个波节的中点,即在

$$x=\frac{\lambda}{4},\frac{3\lambda}{4},\frac{5\lambda}{4},\cdots$$

等处，振动的振幅有极大值。这些点（称为波腹）的位移可以表示为

$$y=\pm 2a\cos 2\pi\nu t \tag{13.9}$$

在波腹处，动能密度由下式给出（见 7.2 节）

$$\text{动能/单位长度}=\frac{1}{2}\rho(2a)^2\omega^2\cos^2\omega t=2\rho a^2\omega^2\cos^2\omega t \tag{13.10}$$

式中 $\omega=2\pi\nu$ 为角频率，ρ 为单位长度弦的质量。

也可以用电磁波做类似实验。如图 13.3 所示，T 为电磁波发射机（发射出的电磁波波长为厘米数量级），R 为反射器，它可以是一个抛得很光的金属面，D 为探测器，用来测量电磁波在不同点的强度的变化。可近似地假设平面波入射到反射器并被反射，入射波和反射波之间发生干涉，形成波节和波腹。一个典型实验的结果如图 13.4 所示，可以看出，强度有周期性的变化，且两个相邻的极大值的间距约为 5.8cm，因此，电磁波的波长 $\lambda\approx 11.6\text{cm}$，相对应的频率（$\approx 2.6\times 10^9\,\text{s}^{-1}$），在实验室里是容易计算得到的。如果改变频率，就可以观察到波腹之间距离的变化。应该注意，强度的极小值实际上并不对应于强度为零，而且强度的极大值也不是常数，这是因为入射波实际上并不是平面波[①]，而且电磁波也不是完全被反射的缘故。事实上，可以引入反射率（r），定义为反射波束和入射波束之间的能量比，则振幅比为$\sqrt{r}$。如果入射波表示为

$$E_{\text{入射}}=a\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda}+\nu t\right)\right] \tag{13.11}$$

那么，反射波就可以表示为

$$E_{\text{反射}}=a\sqrt{r}\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\nu t\right)\right] \tag{13.12}$$

这里 $x=0$ 的平面对应于反射器的平面，E 表示电磁波的电场。因此，合电场可以表示为

$$\begin{aligned}E_{\text{总}}&=E_{\text{入射}}+E_{\text{反射}}=a\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda}+\nu t\right)\right]+a\sqrt{r}\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\nu t\right)\right]\\&=a\sqrt{r}\left\{\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda}+\nu t\right)\right]+\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\nu t\right)\right]\right\}+a(1-\sqrt{r})\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda}+\nu t\right)\right]\\&=2a\sqrt{r}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos 2\pi\nu t+a(1-\sqrt{r})\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda}+\nu t\right)\right]\end{aligned} \tag{13.13}$$

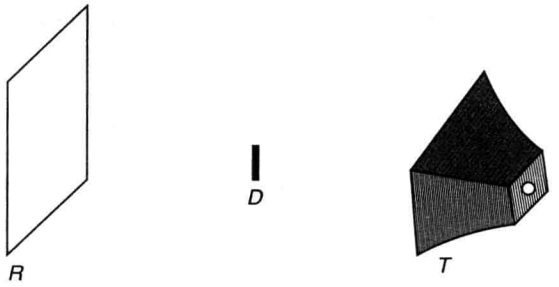


图 13.3　研究电磁驻波的实验装置

① 点源距离观察点很远时才得到平面波（见第 11 章）。

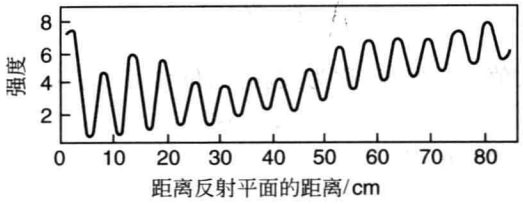


图 13.4　反射器和发射机之间电磁波强度的一种典型分布(引自参考文献[2])

式(13.13)第一项为驻波分量,第二项(如果 r 接近 1 时,它是很小的)为合成波束的行波部分。

13.3　在一根两端固定的弦上的驻波

在 13.2 节中讨论弦上的驻波时,假设只有一端($x=0$)固定,并且证明了合位移可表示为(见式(13.6))

$$y = 2a\sin\frac{2\pi}{\lambda}x\cos 2\pi\nu t \tag{13.14}$$

如果弦的另一端(设 $x=L$ 处)也固定,则有

$$2a\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}L\right)\cos(2\pi\nu t) = 0 \tag{13.15}$$

式(13.15)在任何时刻都成立,有

$$\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}L\right) = 0 = \sin n\pi \tag{13.16}$$

或者

$$\lambda = \lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1,2,3,\cdots \tag{13.17}$$

即,相应的频率为

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{2L}, \quad n = 1,2,3,\cdots \tag{13.18}$$

因此,如果长度为 L 的一根弦两端固定(例如,弦音计的弦丝那样),那么,它就只能以一些完全确定的波长振动。当 $\lambda=2L$(即 $n=1$)时,就可以说弦以它的基模振动(见图 13.5(a))。同理,当 $\lambda=2L/2$ 和 $2L/3$ 时,就称弦以它的第一和第二谐波模振动。一般来说,如果弦被拨动而产生振动,那么,它的位移可以表示为

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n}x\right)\cos(2\pi\nu_n t + \phi_n) \tag{13.19}$$

式中常数 a_n 和 ϕ_n 由 $y(x,t=0)$ 和 $\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0}$ 的值决定,并称为初始条件。关于拉紧的弦的振动,在 8.2 节中详细讨论过。

应该看到,当一根弦以特定的模式振动时,虽然弦的每一部分都与一定的能量密度相联系(见式(13.10)),却没有能量的净传递。在波腹处,能量密度有极大值;在波节处,能量密

度有极小值[①]。两相邻波腹或相邻波节之间的距离都为 $\lambda/2$。

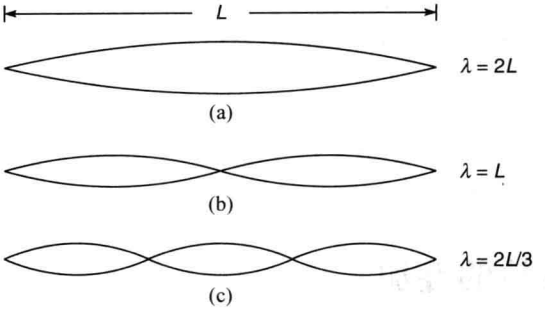


图 13.5　在一根两端固定的张紧的弦上的驻波

13.4　光驻波：艾夫斯和维纳实验

要实现光驻波的实验是非常困难的，这是由于光的波长非常短（$\approx 5\times10^{-5}$ cm）的缘故。在艾夫斯的实验装置中，照相底板的乳胶面与水银面相接触，如图 13.6 所示。用一束平行单色光垂直照射玻璃底板，光束在水银面上被反射，入射波和反射波发生干涉而形成驻波。沿着垂直于表面的一个平面切出照相底板的截面，并把切出的截面放在显微镜下，可以观察到一些（以一定间隔分开的）亮带和暗带。只要测量出相邻两暗带之间的距离（$=\lambda/2$），就可以计算出波长。

因为光的波长很短，所以相邻暗带（或亮带）之间的距离是很小的，这使得结果难以测量。维纳把照相底片放置成有一个小角度的斜面（见图 13.7），从而大大增加了暗带（或亮

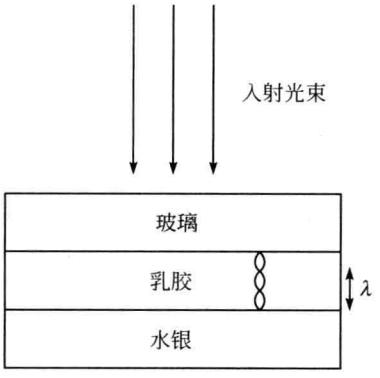


图 13.6　研究光驻波的艾夫斯实验装置

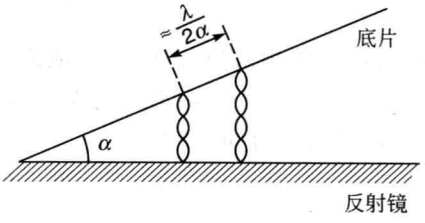
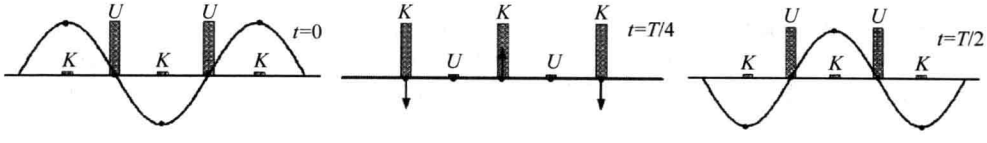


图 13.7　研究光驻波的维纳实验装置

① 这句话是有问题的。如下图所示，为一个驻波在不同时刻的能量分布。在 $t=0$ 和 $t=T/2$ 时，能量密度在波节处有极大值；而在 $t=T/4$ 和 $t=3T/4$ 时，能量密度在波腹处有极大值。因此，能量是在波节和波腹之间来回传递，而不是向着某一方向持续传递的。这也是该波称为驻波的原因。译者注。



带)之间的距离,克服了测量上的困难。

例 13.1 在一种典型的维纳实验装置中,底片和反射镜之间的夹角约为 10^{-3} rad。如果光波波长 $\lambda=5\times10^{-5}$ cm,问相邻暗带之间的距离为多少?

解 所求距离为

$$\frac{\lambda}{2\alpha}=\frac{5\times10^{-5}}{2\times10^{-3}}\text{cm}=0.25\text{mm}$$

而在艾夫斯装置中,距离只有 2.5×10^{-4} mm。

13.5 两个正弦波的叠加

考察两个具有相同频率[①]的正弦波在某一点的叠加。设

$$\begin{cases}x_1(t)=a_1\cos(\omega t+\theta_1)\\x_2(t)=a_2\cos(\omega t+\theta_2)\end{cases}\tag{13.20}$$

式中每一行表示每一个扰动所产生的位移。假设两个位移以相同的方向[②]传播,但可以有不同的振幅和初相位。那么,根据叠加原理,合位移 $x(t)$ 由下式给出

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)=a_1\cos(\omega t+\theta_1)+a_2\cos(\omega t+\theta_2)\tag{13.21}$$

也可以写成如下的形式

$$x(t)=a\cos(\omega t+\theta)\tag{13.22}$$

式中

$$a\cos\theta=a_1\cos\theta_1+a_2\cos\theta_2\tag{13.23}$$

$$a\sin\theta=a_1\sin\theta_1+a_2\sin\theta_2\tag{13.24}$$

因此,合位移在特征上也是同一频率的简谐运动,但有不同的振幅和初相位。把式(13.23)和式(13.24)平方后相加,可得

$$a=[a_1^2+a_2^2+2a_1a_2\cos(\theta_1-\theta_2)]^{1/2}\tag{13.25}$$

并且

$$\tan\theta=\frac{a_1\sin\theta_1+a_2\sin\theta_2}{a_1\cos\theta_1+a_2\cos\theta_2}\tag{13.26}$$

应该指出,θ 不能由式(13.26)唯一地确定,但如果 a 总是正的,那么就可以由式(13.23)和式(13.24)确定 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$,从而唯一地确定 θ。

由式(13.25)可知,如果

$$\theta_1-\theta_2=0,2\pi,4\pi,\cdots\tag{13.27}$$

则

$$a=a_1+a_2\tag{13.28}$$

即,如果两位移同相,合振幅就是两振幅之和,称为相长干涉。同理,若

$$\theta_1-\theta_2=\pi,3\pi,5\pi,\cdots\tag{13.29}$$

---

① 在第17章中将讨论频率几乎相等的波的叠加,这将导致拍现象。

② 事实上,在13.2节讨论弦上的驻波时,已经对某一特定的 x 处的具有相同频率(但具有不同的初相位)的两个正弦波进行了叠加。然而,一般而言,可以处理的叠加是不同方向的位移的叠加,例如,两个线偏振光波的叠加会产生一个圆偏振光(见第22章)。

则有

$$a = |a_1 - a_2| \tag{13.30}$$

合振幅为两振幅之差，称为相消干涉。对照如图 13.2 所示，可以看出，在 $x=\frac{\lambda}{4},\frac{3\lambda}{4},\frac{5\lambda}{4},\cdots$（即在点 $P',Q',R',\cdots$）等处发生相长干涉，而在 $x=0,\frac{\lambda}{2},\lambda,\frac{3\lambda}{2},\cdots$（即在点 $A,P,Q,R,\cdots$）等处发生相消干涉[①]。值得一提的是，发生相长干涉和相消干涉时，并没有违背能量守恒原理，只是能量进行了重新分布。

普遍地，设有 n 个位移

$$\begin{cases} x_1 = a_1\cos(\omega t + \theta_1) \\ x_2 = a_2\cos(\omega t + \theta_2) \\ \quad\vdots \\ x_n = a_n\cos(\omega t + \theta_n) \end{cases} \tag{13.31}$$

则

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a\cos(\omega t + \theta) \tag{13.32}$$

式中

$$a\cos\theta = a_1\cos\theta_1 + \cdots + a_n\cos\theta_n \tag{13.33}$$

$$a\sin\theta = a_1\sin\theta_1 + \cdots + a_n\sin\theta_n \tag{13.34}$$

13.6　研究正弦波叠加的图解法

这一节中将讨论具有相同频率的振动叠加的图解法。当研究许多个波的叠加时，这种方法特别有用，比如在讨论衍射现象时就的确会遇到这种情况。

首先，用图解法求解式(13.20)给出的两个位移的合成。画半径为 a_1 的一个圆，并取圆周上的点 P，使 OP 与 x 轴的夹角为 θ_1（见图 13.8）[②]。再画同圆心的半径为 a_2 的一个圆，取圆周上的点 Q，使 OQ 与 x 轴的夹角为 θ_2。根据平行四边形法则，可以求出矢量$\overrightarrow{OP}$和$\overrightarrow{OQ}$的合矢量$\overrightarrow{OR}$，合矢量$\overrightarrow{OR}$的长度 a 表示合位移的振幅；如果 OR 与 x 轴的夹角为 θ，那么，合位移的初相位就是 θ。上述结论是容易得出的，只要注意到

$$\overline{OR}\cos\theta = \overline{OP}\cos\theta_1 + \overline{PR}\cos\theta_2 = a_1\cos\theta_1 + a_2\cos\theta_2 \tag{13.35}$$

同理，有

$$\overline{OR}\sin\theta = a_1\sin\theta_1 + a_2\sin\theta_2 \tag{13.36}$$

与式(13.23)和式(13.24)一致。并且当矢量$\overrightarrow{OP}$和$\overrightarrow{OQ}$在半径分别为 a_1 和 a_2 的圆周上旋转时，矢量$\overrightarrow{OR}$也以相同的频率在半径 OR 的圆周上旋转。

因此，要想合成由式(13.20)给出的两个位移，就必须先画出与轴线夹角为 θ_1、长度为

① 在第 14 章中将研究由两个点光源发出的球面波的叠加产生的干涉图样。

② 很明显，如果矢量$\overrightarrow{OP}$以角速度 ω（沿逆时针方向）旋转，矢量$\overrightarrow{OP}$的 x 坐标为 $a_1\cos(\omega t+\theta_1)$，这里 $t=0$ 相应于旋转矢量在点 P 的时刻。

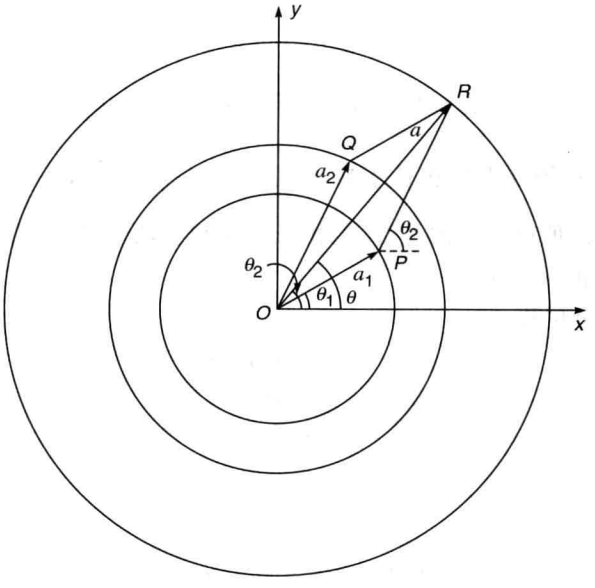


图 13.8　图解法求两个沿着同一方向且频率相同的简谐波的合成

a_1 的矢量($\overrightarrow{OP}$),再从这个矢量的末端画出另一个与轴线夹角为 θ_2、长度为 a_2 的矢量($\overrightarrow{PR}$)。这样,矢量$\overrightarrow{OR}$的长度就表示合振幅,它与轴线的夹角就表示合位移的初相位。显而易见,如果还有第三个位移

$$x_3 = a_3\cos(\omega t + \theta_3) \tag{13.37}$$

那么,从点 R 出发再画与轴线夹角为 θ_3、长度为 a_3 的矢量$\overrightarrow{RR'}$,那么,$\overrightarrow{OR'}$就表示 x_1,x_2 和 x_3 的合成。

举一个例子来说明上述方法,考察 N 个简谐运动的合成,它们的振幅相等,相位按算术级数增加,有

$$\begin{aligned} x_1 &= a\cos\omega t \\ x_2 &= a\cos[\omega t + \theta_0] \\ &\vdots \\ x_N &= a\cos[\omega t + (N-1)\theta_0] \end{aligned} \tag{13.38}$$

如图 13.9 所示,矢量$\overrightarrow{OP_1}$,$\overrightarrow{P_1P_2}$,$\overrightarrow{P_2P_3}$,…分别对应于 x_1,x_2,x_3,…;矢量$\overrightarrow{OP_N}$就表示合矢量。设 Q_1L 和 Q_2L 分别为 OP_1 和 P_1P_2 的垂直平分线。容易证明

$$\triangle LQ_1P_1 \cong \triangle LQ_2P_1$$

因此,$\overline{LO}=\overline{LP_1}=\overline{LP_2}$。于是,点 O,P_1,P_2,P_3,…,P_N 处在以点 L 为圆心、以 LO 为半径的圆周上,且$\angle LP_1O=\dfrac{\pi-\theta_0}{2}$,则$\angle OLP_1=\theta_0$。于是,有

$$\overline{LO} = \frac{a/2}{\sin\theta_0/2}$$

而

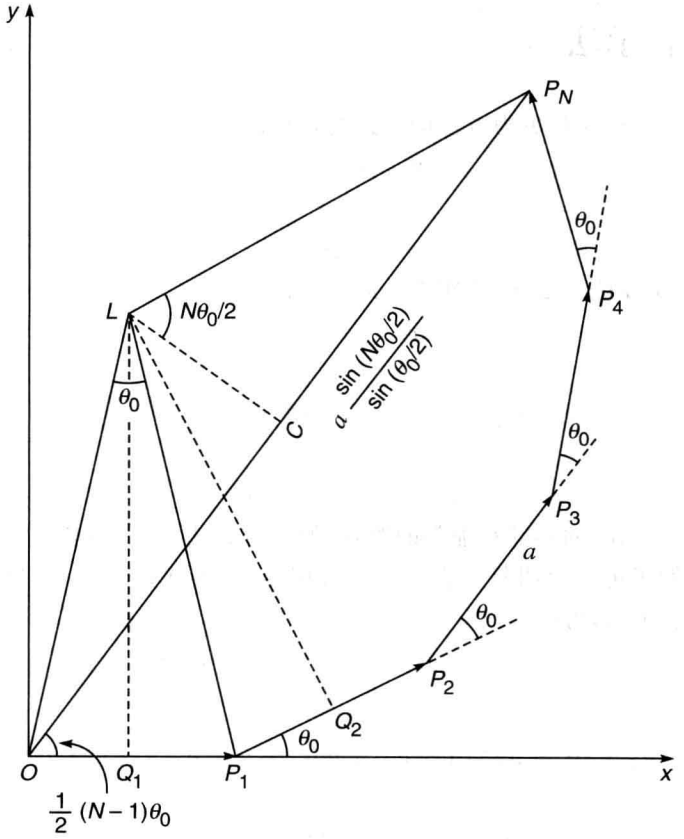


图 13.9　图解法求 N 个同方向同频率简谐振动的合成

$$\overline{OP}_N = 2\,\overline{OC} = 2\,\overline{LO}\sin\frac{N\theta_0}{2} = a\,\frac{\sin\dfrac{N\theta_0}{2}}{\sin\dfrac{\theta_0}{2}} \tag{13.39}$$

此外，合位移的初相位为

$$\angle P_N OX = \frac{1}{2}(N-1)\theta_0$$

因此，有

$$a\cos\omega t + a\cos(\omega t+\theta_0) + \cdots + a\cos[\omega t + (N-1)\theta_0] = A\cos(\omega t+\theta) \tag{13.40}$$

式中

$$A = a\,\frac{\sin\dfrac{N\theta_0}{2}}{\sin\dfrac{\theta_0}{2}} \tag{13.41}$$

$$\theta = \frac{1}{2}(N-1)\theta_0 \tag{13.42}$$

在第 18 章将要用到这个结果。

13.7 复数表示法

使用复数表示法往往是更为方便的。此时,位移

$$x_1 = a_1\cos(\omega t + \theta_1) \tag{13.43}$$

写为

$$x_1 = a_1 e^{i(\omega t+\theta_1)} \tag{13.44}$$

式(13.44)意味着实际位移是 x_1 的实部。此外,若

$$x_2 = a_2 e^{i(\omega t+\theta_2)}$$

则

$$x_1 + x_2 = (a_1 e^{i\theta_1} + a_2 e^{i\theta_2})e^{i\omega t} = a e^{i(\omega t+\theta)} \tag{13.45}$$

式中

$$a e^{i\theta} = a_1 e^{i\theta_1} + a_2 e^{i\theta_2} \tag{13.46}$$

如果分别写出式(13.46)的实部和虚部的等式,便可得到式(13.23)和式(13.24)。

一个有趣的例子可以说明复数表示法很有用处,考察式(13.38)所描述的 N 个位移的合成。根据复数表示法,可以写出

$$x_1 = a e^{i\omega t}, \quad x_2 = a e^{i(\omega t+\theta_0)}, \quad \cdots$$

因此,有

$$x = x_1 + x_2 + \cdots = a e^{i\omega t}[1 + e^{i\theta_0} + e^{2i\theta_0} + \cdots + e^{i(N-1)\theta_0}] = a e^{i\omega t}\frac{1 - e^{Ni\theta_0}}{1 - e^{i\theta_0}}$$

$$= a e^{i\omega t}\frac{e^{iN\theta_0/2}}{e^{i\theta_0/2}} \cdot \frac{e^{iN\theta_0/2} - e^{-iN\theta_0/2}}{e^{i\theta_0/2} - e^{-i\theta_0/2}} = \frac{a\sin\dfrac{N\theta_0}{2}}{\sin\dfrac{\theta_0}{2}}\exp\left\{i\left[\omega t + (N-1)\frac{\theta_0}{2}\right]\right\} \tag{13.47}$$

此式与式(13.40)一致。在讨论波包扩展的问题时(见10.3节),复数表示法也是很有用的。

值得注意的是,尽管

$$\mathrm{Re}(x_1) + \mathrm{Re}(x_2) = \mathrm{Re}(x_1 + x_2)$$

但

$$\mathrm{Re}(x_1)\mathrm{Re}(x_2) \neq \mathrm{Re}(x_1 x_2)$$

式中 Re (…)表示取括号内的量的实部。因此,在计算与振幅平方成正比的波的强度时,必须注意这一点。在应用复数表示法时,必须先计算振幅,然后计算强度。

小　结

- 根据波的叠加原理,由若干波(在特定点)产生的合位移等于由每一个波产生的位移的矢量和。
- 弦上的驻波和电磁驻波是由沿相反方向传输的波叠加而成的。
- 如果(由正弦波产生的)两个位移同相位,那么,合成波的幅度就是两个波的幅度之和,称为相长干涉。相反,如果两个位移反相,合成波幅度将会是两个波幅度之差,称为相消干涉。

习　题

13.1 在一根张力为 1N，两端拉紧的弦上形成一列驻波，弦长 30cm，形成 3 个波腹的振动。设弦单位长度的质量为 10mg/cm，试计算振动的频率。

13.2 在上题中，若弦以它的基模振动，振动频率又是多少？

13.3 维纳实验装置中，若相邻暗带之间的距离为 7×10^{-3}cm，问底片和反射镜之间的夹角为多少？假设 $\lambda=6\times10^{-5}$cm。

[**答案**：$\sim0.25°$]

13.4 在张力作用下，一根拉紧的弦上形成的驻波形成 5 个波腹的振动，弦长为 50cm，振动频率为 $250s^{-1}$。试计算距离弦的一端为 2cm，5cm，15cm，18cm，20cm，35cm，45cm 的各点的位移随时间的变化。

13.5 在同一方向上传播的两个波有相同的振幅，但频率稍有不同，位移分别写为

$$a\cos2\pi\left(\nu t-\frac{x}{\lambda}\right),\quad a\cos2\pi\left[(\nu+\Delta\nu)t-\frac{x}{(\lambda-\Delta\lambda)}\right]$$

（实际上两个频率稍有不同的音叉振动时，其位移为此形式）。试讨论这两个位移的叠加，并证明当 x 一定时，强度随时间变化。

13.6 在上题中，设 $v=330m\cdot s^{-1}$，$\nu=256s^{-1}$，$\Delta\nu=2s^{-1}$，$a=0.1$cm。试绘出在 $x=0$，$\frac{\lambda}{4}$ 和 $\frac{\lambda}{2}$ 各点强度随时间的变化曲线。

13.7 在习题 13.5 和习题 13.6 中，用复数表示法研究在 $x=0$ 处合位移随时间的变化。

13.8 讨论频率相等且在同一方向上传播的两个平面波的叠加结果与它们的相位差之间的函数关系（实际上，当平面波在玻璃板的上下表面反射时，就出现这种情况，见 15.2 节）。

13.9 在例 11.1 中已讨论过半圆形脉冲在弦上的传播，现在考察传播方向相反的两个半圆形脉冲。在 $t=0$ 时，沿 $+x$ 方向和 $-x$ 方向传播的脉冲的位移分别表示为

$$[R^2-x^2]^{1/2},\quad -[R^2-(x-10R)^2]^{1/2}$$

试画图表示 $t=R/v$，$2.5R/v$，$5R/v$，$7.5R/v$ 和 $10R/v$ 时的合扰动，式中 v 为波的传播速度。

参考文献和推荐读物

见第 14 章的末尾。

第14章 双光束干涉：波前分割法

托马斯·杨于1801年通过一个出奇简单的实验，第一次令人信服地解释了光的波动本性……他让一束太阳光射入暗室，在暗室的前面放置一个带有两个针孔的黑屏，在黑屏后面一定距离处放置一个白屏。他在一条亮线两边看到了两条微暗的线，这样的结果让他有足够的勇气去重复做这个实验。他使用了撒有食盐的火焰作为光源，来产生明亮的钠黄光。这次，他观察到了一系列规则排列的暗纹；第一次明确给出了光波与光波叠加能产生暗纹的证据。这个现象被称作干涉。托马斯·杨在之前就预料到了这个结果，因为他相信光的波动理论。

——伽柏于1971年12月11日在获得诺贝尔奖后的演讲

对于光，杨氏有着令人惊异的广泛兴趣和天赋……以他在医学和科学上的发现，亥姆霍兹总结到："他是有史以来知识最渊博的人物之一。"

——摘自因特网

14.1 引言

第13章中已经讨论了在弦上传播的一维波的叠加，并证明了两列波的干涉会引起能量密度沿弦长方向的变化(见图13.5)。一般来说，两列波叠加就会产生一个称为干涉图样的强度分布。在本章中，将考察由两个点源发出的波所产生的干涉图样。应该指出，观察声波的干涉图样是不难的，因为两列干涉波保持恒定的相位关系；同理，观察微波的干涉也不困难。然而对光波而言，由于光波有特殊的发光过程，使得无法观察到两个独立光源发出的光波之间的干涉现象[①]，尽管它们之间也确实发生了干涉(见14.4节)。因此，只好设法从同一束光波中分出几束光波进行干涉，以保持恒定的相位关系。达到这一目的的方法可分成两大类。在属于第一类方法的一个典型装置中，让一束光入射到两个很靠近的小孔上，从小孔出射的两束光发生干涉，这种方法称为波前分割法。对此，将在本章中详细讨论。另一种方法称为振幅分割法，一束光被两个或多个反射面分割，分割出来的这些反射光束发生干涉，将在第15章中讨论。但必须指出的是，第14章和第15章都是基于同一个原理的，即叠加原理。

观察多光束的干涉，称为多光束干涉量度学，这部分内容留在第16章中讨论，并将证明多光束干涉量度学比双光束干涉量度学具有某些独特的优点。

---

① 即使使用两束激光束，想要观察到它们的干涉图样也是非常困难的，除非激光束的相位是锁定的。

14.2　在水面上产生的干涉图样

考察一个水箱里由两个点源发出的水面波，例如，通过两根尖锐的针在点 S_1 和 S_2 上下振动产生的水面波（见图 14.1）。虽然水波实际上并不是横波，但为简单起见，假设水波产生的位移方向垂直于传播方向。

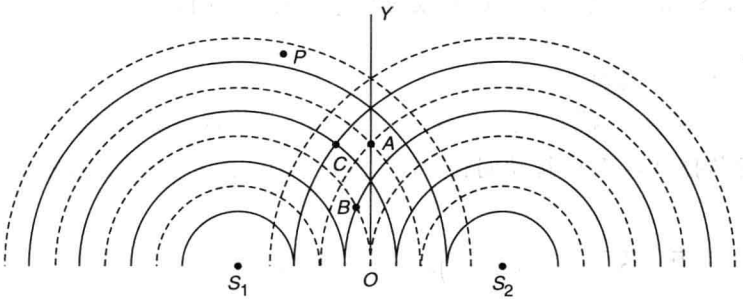


图 14.1　两个同相振动的点源 S_1 和 S_2 发出的波，实线和虚线分别表示波峰与波谷的位置。

假如只有一根针（比如在点 S_1）以一定的频率 ν 振动，那么，就会有一些圆形的波纹从点 S_1 扩展开来，波的波长为 v/ν，且波的波峰和波谷向外传播。如果一根针在点 S_2 振动，也会有类似的情形。但是，如果两根针都在振动，波源 S_1 发出的波就会与波源 S_2 发出的波进行干涉。假定两根针在点 S_1，S_2 的振动是同相的，即振动在点 S_1 和 S_2 同时向上，也同时到达最低位置。这样，若某一时刻由波源 S_1 发出的扰动在距离点 S_1 为 ρ 的地方产生波峰，那么，从波源 S_2 发出的扰动也会在距离点 S_2 为 ρ 的地方产生波峰，如此类推。如图 14.1 所示，清楚地展示了这一点，图中实线表示某一特定时刻由波源 S_1 和 S_2 发出的扰动产生的波峰位置；同理，虚线表示同一时刻的波谷位置。请注意，对于垂直平分线 OY 上所有的点，由波源 S_1 和 S_2 传播到的波在每一点处的扰动总是同相的，因此，垂直平分线上任一点 A 的合扰动可以写为

$$y = y_1 + y_2 = 2a\cos\omega t \tag{14.1}$$

式中 $y_1(=a\cos\omega t)$ 和 $y_2(=a\cos\omega t)$ 分别表示波源 S_1 和 S_2 在点 A 处产生的位移。可见点 A 的振幅等于每一个波源单独产生的振幅的两倍。应该注意到，在 $t=\dfrac{T}{4}\left(=\dfrac{1}{4\nu}=\dfrac{\pi}{2\omega}\right)$ 时，每一个波源在点 A 处产生的位移等于零，从而合位移也为零。由式（14.1）来看，这也是很明显的。

再来考察另一点 B，它满足

$$\overline{S_2B}-\overline{S_1B}=\lambda/2 \tag{14.2}$$

即，由波源 S_1 传播到点 B 的扰动总是与由波源 S_2 传播到点 B 的扰动反相。这一结论是基于以下事实得出的：从波源 S_2 传播到点 B 的扰动早半个周期（$=T/2$）。因此，如果波源 S_1 在点 B 产生的位移为

$$y_1 = a\cos\omega t$$

那么，波源 S_2 在点 B 产生的位移为

$$y_2 = a\cos(\omega t-\pi) = -a\cos\omega t$$

结果合位移 $y=y_1+y_2$ 在任何时刻均为零。那么,在这一点是相消干涉,这一点称为波节,对应于强度极小值。可以指出,当波源 S_1 和 S_2 到点 B 的距离不同时,传播到点 B 的两个振动的振幅实际上是不相等的。但是,如果波源 S_1 和 S_2 到点 B 的距离比波长大得多时,两个振幅就非常地接近相等,从而合强度也非常地接近零。

同理,考察满足

$$\overline{S_2C}-\overline{S_1C}=\lambda$$

的点 C。从波源 S_1 和 S_2 传播到点 C 的振动的相位完全相同,这和点 A 一样,因此,会再次发生相长干涉。

普遍地说,若点 P 满足

$$\overline{S_2P}-\overline{S_1P}=n\lambda,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots(\text{极大值条件}) \tag{14.3}$$

那么,从两波源传播到点 P 的扰动同相,发生相长干涉,点 P 的强度为极大值。另一方面,若点 P 满足

$$\overline{S_2P}-\overline{S_1P}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda,\quad n=\pm1,\pm2,\cdots(\text{极小值条件}) \tag{14.4}$$

那么,从两波源传播到点 P 的扰动反相,发生相消干涉,点 P 的强度为极小值。在一个水箱中同相振动的两点源实际产生的干涉图样如图 14.2 所示。

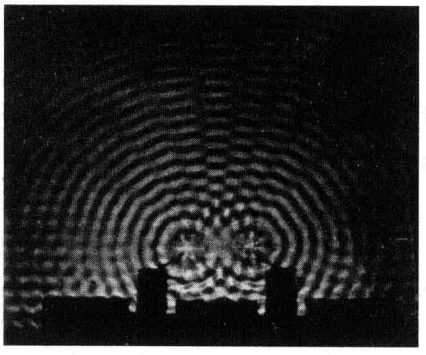


图 14.2 在一个水箱中,两个同相点源振动时产生的实际干涉图样(见文献[9])

例 14.1 不满足式(14.3)和式(14.4)的点的强度既不是极大值也不是极小值。考察满足 $\overline{S_2P}-\overline{S_1P}=\lambda/3$ 的一点 P,求点 P 的强度和强度极大值之比。

解 若从点源 S_1 传播到点 P 的扰动表示为

$$y_1=a\cos\omega t$$

由于 $\lambda/3$ 的光程差相当于相位差为 $\frac{2\pi}{3}$,那么,从点源 S_2 传播到点 P 的扰动就可以表示为

$$y_2=a\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)$$

合位移为

$$y=y_1+y_2=a\left[\cos\omega t+\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)\right]=2a\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=a\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{3}\right)$$

因此,点 P 的强度是强度极大值的 1/4。同理,可以计算出任何其他点的强度。

例 14.2 与强度极小值相对应的点的轨迹称为节线。试证明节线方程为双曲线。同理,与强度极大值相对应的点的轨迹也是双曲线。

解 为普遍性起见,来求满足下式的点 P 轨迹

$$\overline{S_1P}-\overline{S_2P}=\Delta \tag{14.5}$$

若 $\Delta=n\lambda$,点 P 的强度为极大值;若 $\Delta=\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda$,点 P 的强度为极小值。选择 S_1S_2 的中

点为原点，x 轴沿 S_1S_2 方向，y 轴与之垂直(见图 14.3)。若点 S_1 和点 S_2 之间的距离为 d，则点 S_1 和点 S_2 的坐标分别为 $\left(-\frac{d}{2},0\right)$ 和 $\left(+\frac{d}{2},0\right)$。设点 P 的坐标为 (x,y)，则

$$\overline{S_1P}=\left[\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+y^2\right]^{1/2}$$

$$\overline{S_2P}=\left[\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2\right]^{1/2}$$

因此

$$\overline{S_1P}-\overline{S_2P}=\left[\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+y^2\right]^{1/2}-\left[\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2\right]^{1/2}=\Delta$$

或者

$$\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+y^2=\Delta^2+\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2+2\Delta\left[\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2\right]^{1/2}$$

$$2xd-\Delta^2=2\Delta\left[\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2\right]^{1/2}$$

平方后，可得

$$4x^2d^2-4xd\Delta^2+\Delta^4=4\Delta^2\left(x^2-xd+\frac{d^2}{4}+y^2\right)$$

整理，得

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}\Delta^2}-\frac{y^2}{\frac{1}{4}(d^2-\Delta^2)}=1 \tag{14.6}$$

这是一个双曲线方程。当 $\Delta=\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda$ 时，曲线与极小值对应，而当 $\Delta=n\lambda$ 时，曲线与极大值对应。x 和 y 值较大时，曲线渐近地趋于直线

$$y=\pm\left(\frac{d^2-\Delta^2}{\Delta^2}\right)^{1/2}x \tag{14.7}$$

应该指出，使 $\overline{S_1P}-\overline{S_2P}>d$ 的点 P 是不存在的(只在 x 轴上，有 $\overline{S_1P}-\overline{S_2P}=d$)。而根据式(14.6)，当 $\Delta>d$ 时，所得到的方程是一个椭圆方程，但这是不可能的。这个错误的推论是几次平方运算所造成的，因为经过几次平方运算之后，式(14.6)也表示满足 $\overline{S_1P}+\overline{S_2P}=\Delta$ 的所有那些点的轨迹，显然，在这种情况下，Δ 可以大于 d。

例 14.3　考察距离原点为 D 的平行于 x 轴的一条直线(见图 14.3)，假定 $D\gg\lambda$。求直线上出现强度极小值的那些点的位置。

解　该直线的方程为

$$y=D \tag{14.8}$$

此外，在离原点较远的情况下，节线方程可以表示为

$$y=\pm\left(\frac{d^2-\Delta_n^2}{\Delta_n^2}\right)^{1/2}x \tag{14.9}$$

式中 $\Delta_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda$，$n=0,1,2,\cdots$ 因此，在直线 $y=D$ 上出现强度极小值的点的位置为

$$x_n=\pm\left(\frac{\Delta_n^2}{d^2-\Delta_n^2}\right)^{1/2}D=\pm\frac{\Delta_n}{d}\left(1-\frac{\Delta_n^2}{d^2}\right)^{-1/2}D$$

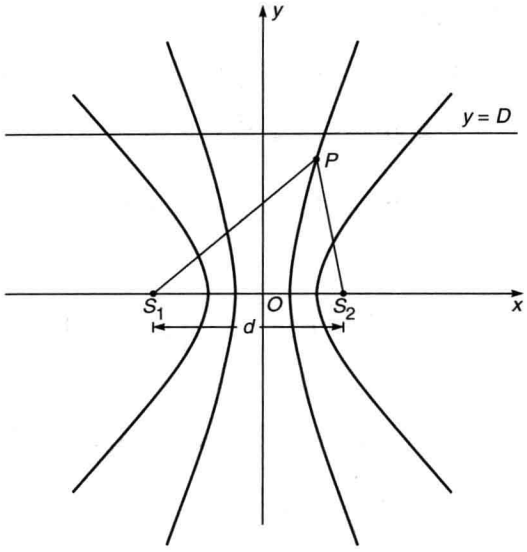


图 14.3　节线

$$\approx \pm \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda D}{d} \tag{14.10}$$

这里假设了 $\Delta_n \ll d$。因此，强度极小值的点是等间距的，其间距为 $\lambda D/d$。

例 14.4　上述一直假设两根针在波源 S_1 和 S_2（见图 14.1）的振动是同相的，现在假设两根针的振动之间有相位差 π。求这种情况下的节线位置，并把结果推广到两根针的振动有任意相位差的情况。

解　由于在源 S_1 和 S_2 的两根针的振动反相，因此，在任意时刻，如果波源 S_1 的这根针在距离为 R 的地方产生波峰，那么，在波源 S_2 的这根针在距离为 R 的地方就产生波谷。这样，在垂直平分线 OY 上的所有点（见图 14.4），两振动总是反相，因此强度为极小值。另一方面，在满足

$$\overline{S_2B}-\overline{S_1B}=\lambda/2$$

的点 B，两振动是同相的，强度为极大值。因此，由于两振动有初始相位差 π，极大值条件和极小值条件与前述的情况正好相反，即当

$$\overline{S_2P}-\overline{S_1P}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots\text{（极大值条件）}$$

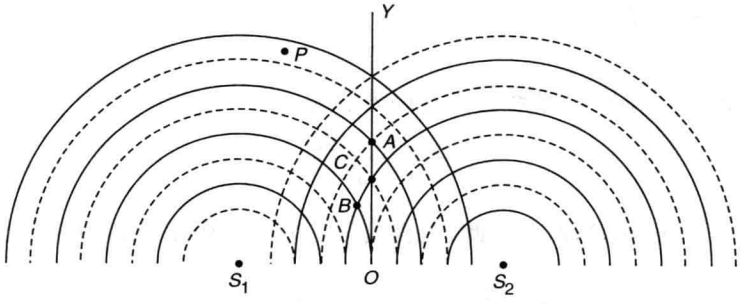


图 14.4　两点源 S_1 和 S_2 的波前在反相时的图样

时发生相长干涉，得到强度极大值。而当

$$\overline{S_2P}-\overline{S_1P}=n\lambda,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots(\text{极小值条件})$$

时，发生相消干涉，得到强度极小值。可见，再次得到了节线为双曲线的稳定的干涉图样。

上述分析可以很容易地推广到两针之间有任意相位差的情况。例如，假设相位差为 $\pi/3$，即如果距离波源 S_1 为 R 的地方是波峰，那么，距离波源 S_2 为 $R-\lambda/6$ 的地方也是波峰。这样，当满足条件

$$\overline{S_1P}-\overline{S_2P}=n\lambda+\frac{\lambda}{6},\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

将对应于强度极大值。

14.3　相干性

由上述各例可以看出，只要两根针的振动有恒定的相位差，就会产生一个稳定的干涉图样，而强度的极大值和极小值的位置将取决于两针振动的相位差。两个以固定相位差振动的波源称为相干波源。

其次，假设两针的振动有时是同相的，有时是反相的，有时又有相位差 $\pi/3$，以此类推，这样干涉图样将不断变化。如果相位差的变化极为迅速，以至于不能观察到稳定的干涉图样，两波源就称为非相干波源。

设波源 S_1 和 S_2 产生的位移表示为

$$\begin{cases}y_1=a\cos\omega t\\ y_2=a\cos(\omega t+\phi)\end{cases}\tag{14.11}$$

那么，合位移为

$$y=y_1+y_2=2a\cos\phi/2\cos(\omega t+\phi/2)\tag{14.12}$$

与振幅平方成正比的强度(I)可以写为以下形式

$$I=4I_0\cos^2\phi/2\tag{14.13}$$

式中 I_0 为每一个波源单独产生的强度。显然，当 $\phi=\pm\pi,\pm3\pi,\cdots$ 时，$I=0$，得到极小值。而当 $\phi=0,\pm2\pi,\pm4\pi,\cdots$ 时，$I=4I_0$ 为极大值。但是，如果两波源 S_1 和 S_2 之间的相位差(ϕ)随时间变化，那么，观察到的强度为

$$I=4I_0\left\langle\cos^2\frac{\phi}{2}\right\rangle\tag{14.14}$$

符号〈…〉表示取角括号内量的时间平均值。一个随时间变化的函数的时间平均值由下式定义

$$\langle f(t)\rangle=\frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}f(t)\mathrm{d}t\tag{14.15}$$

式中 τ 表示取平均值的时间间隔。例如，用正常眼睛观察干涉图样时，取平均值的时间间隔约 1/10s；而用照相机拍摄时，如果曝光时间为 0.001s，则 $\tau=0.001$s，如此类推。显然，若 ϕ 在比 τ 小得多的时间内随机变化时，$\cos^2\phi/2$ 也将在 0 和 1 之间随机变化，因此，$\langle\cos^2\phi/2\rangle=1/2$（见 14.6 节）。在这种情况下，有

$$I=2I_0\tag{14.16}$$

这表明若两波源是非相干的,则合强度为两强度之和,并且没有强度的变化! 因此,如果两振源之一或两者同时以随机方式时振时停(以致两波源振动的相位差变化很快),那么,干涉现象就观察不到。在 14.6 节和第 17 章中,还要讨论这个问题。

14.4 光波的干涉

到目前为止,讨论的是水面上产生的波的干涉。现在,将讨论光波产生的干涉图样;不过对光波而言,想要观察到稳定的干涉图样是非常困难的。例如,用两个普通光源(如两盏钠光灯)分别照明两个针孔(见图 14.5),在屏幕上是不会观察到干涉图样的。原因在于普通光源发出的光是由大量的独立原子发出的,每一个原子的发光时间约为 10^{-10} s,即,一个原子发射的光实质上是一个只持续 10^{-10} s 的脉冲①。并且,即使原子都在相似的条件下发光,不同原子发出光波的初始相位也会不同。

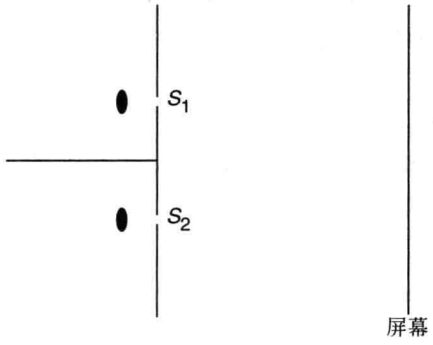


图 14.5 若两盏钠光灯照射到两个小孔 S_1 和 S_2 上,屏幕上观察不到干涉图样。

这样,从孔 S_1 和 S_2 发出的光就只在约 10^{-10} s 的时间间隔内有恒定的相位关系,从而干涉图样每十亿分之一秒就要发生变化。而眼睛能够感受到的强度变化至少要持续1/10s,所以,在屏幕上看到的是均匀强度的图样。但是,如果真有一架快门开启时间小于 10^{-10} s 的照相机,底片还是会记录到干涉图样的②。把上述结果总结一下:两个独立光源发出的光束没有恒定的相位关系③时,不会产生稳定的干涉图样。

杨于 1801 年设计出一种既巧妙又简单的方法来锁定两光源之间的相位关系。该方法的巧妙之处在于把单个波前分割成两个波前,使得这两个波前如同是由两个有恒定相位关系的光源发出的一样,因此,当这两个波前发生干涉时,就可以得到稳定的干涉图样。在实际的实验中,使用一个光源照亮小孔 S(见图 14.6),由这小孔发散出的光透射在有两个小孔 S_1 和 S_2 的屏幕上,S_1 和 S_2 相互靠得很近,且与 S 等距。所以,由 S_1 和 S_2 发出的球面波是相干的(见图 14.7),从而在屏幕上得到漂亮的干涉条纹。为了证明这确实是一种干涉效

① 由于光的频率为 $10^{15}s^{-1}$ 的量级,这样,一个短脉冲大约由经历了一百万次的振荡组成,因此,它近乎是单色的(见第 17 章)。

② 只有当光波具有相同的偏振态时,才能产生这样由一系列亮暗带组成的干涉图样。不过,只要在 S_1 和 S_2 前面放两片偏振片就很容易做到这一点。这里应该指出,目前已经有可能使用两个独立的激光器去记录干涉图样(见第 17 章)。

③ 这样的光源称为非相干光源。

应，杨显示了当 S_1（或 S_2）被挡住时，屏幕上的条纹即行消失。他运用叠加原理解释了干涉图样，并根据测出的条纹间距，计算出波长。图 14.7 所示为包含了 S，S_1 和 S_2 的平面上，球面波前的截面图。

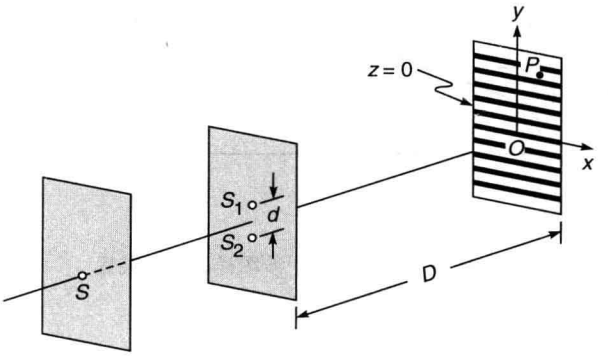


图 14.6　产生干涉图样的杨氏装置

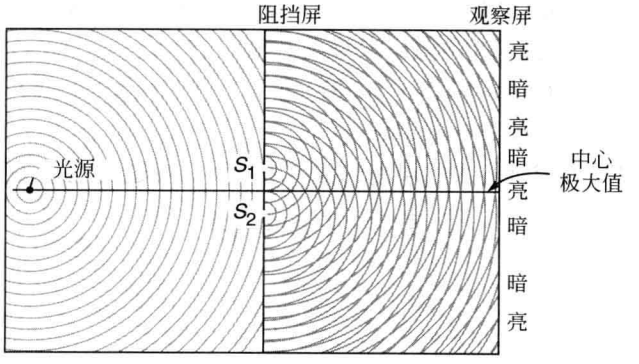


图 14.7　从 S，S_1 和 S_2 发出的球面波前的截面图
（见文献[7]）

14.5　干涉图样

令 S_1 和 S_2 表示杨氏干涉实验的两个小孔，来确定直线 LL' 上光强极大值和极小值的位置，设直线 LL' 与 y 轴平行，且在包含点 S，S_1 和 S_2 的平面内（见图 14.8）。下面将证明（在点 O 附近的）干涉图样是由一系列垂直于纸面的暗线和亮线组成，点 O 是点 S 到屏幕的垂足。

直线 LL' 上与光强极大值对应的一点 P 必须满足

$$\overline{S_2P} - \overline{S_1P} = n\lambda, \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{14.17}$$

又有

$$\overline{S_2P}^2 - \overline{S_1P}^2 = \left[D^2 + \left(y_n + \frac{d}{2}\right)^2\right] - \left[D^2 + \left(y_n - \frac{d}{2}\right)^2\right] = 2y_nd$$

式中

$$\overline{S_1S_2} = d, \quad \overline{OP} = y_n$$

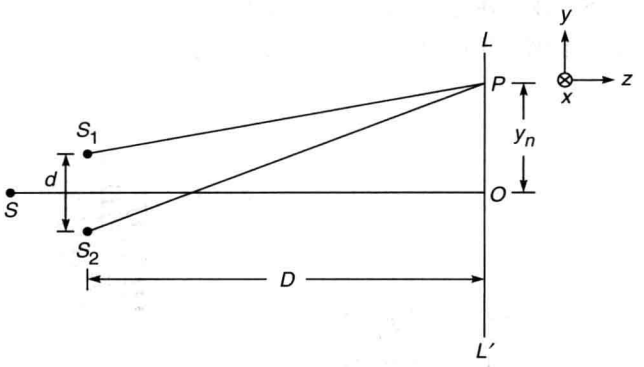


图 14.8　产生杨氏干涉图样的实验装置

因此,有

$$\overline{S_2P}-\overline{S_1P}=\frac{2y_nd}{\overline{S_2P}+\overline{S_1P}} \tag{14.18}$$

如果 $y_n,d\ll D$,则可忽略用 $2D$ 代替$\overline{S_2P}+\overline{S_1P}$所引入的误差。例如,$d=0.02\text{cm}$,$D=50\text{cm}$,$\overline{OP}=0.5\text{cm}$(在光干涉实验中,这是一组典型的数值),有

$$\begin{aligned}\overline{S_2P}+\overline{S_1P}&=[(50)^2+(0.51)^2]^{1/2}+[(50)^2+(0.49)^2]^{1/2}\\&\approx 100.005(\text{cm})\end{aligned}$$

因此,以 $2D$ 代替$\overline{S_2P}+\overline{S_1P}$所引入的误差约为 0.005%。在这种近似下,式(14.18)可化为

$$\overline{S_2P}-\overline{S_1P}\approx\frac{y_nd}{D} \tag{14.19}$$

根据式(14.17),可得

$$y_n=\frac{n\lambda D}{d} \tag{14.20}$$

因此,暗条纹和亮条纹是等间距的,两相邻暗条纹(或亮条纹)的间距为

$$\beta=y_{n+1}-y_n=\frac{(n+1)\lambda D}{d}-\frac{n\lambda D}{d}$$

即

$$\beta=\frac{\lambda D}{d} \tag{14.21}$$

这就是条纹宽度的表达式。

为了确定干涉条纹的形状,首先注意到:满足

$$\overline{S_2P}-\overline{S_1P}=\Delta \tag{14.22}$$

的点 P 的轨迹,在包含点 S_1 和 S_2 的任一平面内是一条双曲线(见例 14.2)。因此,在空间中点 P 的轨迹是以 S_1S_2 为轴,旋转双曲线而得到的旋转双曲面。为了求得屏幕上条纹的形状,假设原点在点 O,z 轴垂直于屏幕平面,如图 14.6 所示。假设 y 轴是平行 S_2S_1 的。考虑屏幕平面上(即 $z=0$ 平面)任一点 P(见图 14.6),设点 P 坐标为$(x,y,0)$。点 S_1 和 S_2 的坐标分别为$\left(0,\frac{d}{2},D\right)$和$\left(0,-\frac{d}{2},D\right)$。因此,有

$$\overline{S_2P}-\overline{S_1P}=\left[x^2+\left(y+\frac{d}{2}\right)^2+D^2\right]^{1/2}-\left[x^2+\left(y-\frac{d}{2}\right)^2+D^2\right]^{1/2}=\Delta$$

或者

$$\left[x^2+\left(y+\frac{d}{2}\right)^2+D^2\right]=\left\{\Delta+\left[x^2+\left(y-\frac{d}{2}\right)^2+D^2\right]^{1/2}\right\}^2$$

或者

$$[2yd-\Delta^2]^2=(2\Delta)^2\left[x^2+\left(y-\frac{d}{2}\right)^2+D^2\right]$$

则

$$(d^2-\Delta^2)y^2-\Delta^2x^2=\Delta^2\left[D^2+\frac{1}{4}(d^2-\Delta^2)\right]$$

这是一个双曲线方程。因此，条纹的形状是双曲线形的。上式整理后，可得

$$y=\pm\left(\frac{\Delta^2}{d^2-\Delta^2}\right)^{1/2}\left[x^2+D^2+\frac{1}{4}(d^2-\Delta^2)\right]^{1/2} \tag{14.23}$$

当 x 值满足

$$x^2\ll D^2 \tag{14.24}$$

时，轨迹是平行于 x 轴的直线，于是在屏幕上得到直线条纹。应该强调的是，尽管光源 S_1 和 S_2 是点光源，但在屏幕上得到的干涉仍是直线条纹。容易看出，如果改用缝光源代替点光源，也会得到直线条纹，且条纹的强度会增大。

用点光源和缝光源产生的干涉条纹称为非定域干涉条纹。只要把照相底片置于屏幕的位置便可以把干涉条纹摄取下来；也可以通过目镜来观察干涉条纹。

14.6　强度分布

设 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 分别是点源 S_1 和 S_2 在点 P 产生的电场（见图 14.8），一般而言，$\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 有不同的方向和不同的大小。但是，如果 $\overline{S_1P}$ 和 $\overline{S_2P}$ 相比 $\overline{S_1S_2}$ 大得多，那么，$\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 近乎是同方向的。因此，可以写为

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_1=\hat{\boldsymbol{i}}E_{01}\cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\overline{S_1P}-\omega t\right)\\ \boldsymbol{E}_2=\hat{\boldsymbol{i}}E_{02}\cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\overline{S_2P}-\omega t\right)\end{cases} \tag{14.25}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{i}}$ 表示沿其中任意一个电场方向的单位矢量。而合电场为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2=\hat{\boldsymbol{i}}\left[E_{01}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\overline{S_1P}-\omega t\right)+E_{02}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\overline{S_2P}-\omega t\right)\right] \tag{14.26}$$

又强度 I 与电场的平方成正比，有

$$I=KE^2 \tag{14.27}$$

或者

$$\begin{aligned}I=K\Bigg[&E_{01}^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\overline{S_1P}-\omega t\right)+E_{02}^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\overline{S_2P}-\omega t\right)\\&+E_{01}E_{02}\left\{\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\overline{S_2P}-\overline{S_1P})\right]+\cos\left[2\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}(\overline{S_2P}+\overline{S_1P})\right]\right\}\Bigg]\end{aligned} \tag{14.28}$$

式中 K 为比例常数[①]。对光束来说，频率极高（$\omega\approx10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$），则与 ωt 有关的各项也将极迅

① 式(14.27)将在 23.5 节中推导。在自由空间中，可证明常数 $K=\varepsilon_0c^2$，式中 ε_0（$=8.854\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/(N\cdot m^2)}$）为自由空间的介电常数，$c$ 为真空中的光速。

速的变化(10^{15}次/s),从而任何探测器都只能记录到这些变化量的平均值。因此,有

$$\langle\cos^2(\omega t-\theta)\rangle=\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\frac{1+\cos[2(\omega t-\theta)]}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{16\pi}\frac{T}{\tau}\left\{[\sin 2(\omega t-\theta)]\Big|_{-\tau}^{+\tau}\right\}$$

对光束而言,式中 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}(\approx 2\pi\times10^{-15}\,\mathrm{s})$,而任何实用的探测器[①],$\dfrac{T}{\tau}\ll1$,并且由于大括号内的值总在$-2$和$+2$之间,所以上式可写为

$$\langle\cos^2(\omega t-\theta)\rangle\approx\frac{1}{2}\tag{14.29}$$

而$\cos(2\omega t-\phi)$在$+1$和-1之间振荡,实际上,也可以用数学方法证明它的平均值为零。因此,探测器记录到的强度由下式给出

$$I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\delta\tag{14.30}$$

式中

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}(\overline{S_2P}-\overline{S_1P})\tag{14.31}$$

表示由光源 S_1 和 S_2 传播到点 P 的电场之间的相位差,而

$$I_1=\frac{1}{2}KE_{01}^2$$

表示不允许光从光源 S_2 投射到屏幕上的情况下,光源 S_1 单独产生的强度。同理,$I_2=\dfrac{1}{2}KE_{02}^2$ 表示不允许光从光源 S_1 投射到屏幕上的情况下,光源 S_2 单独产生的强度。由式(14.30)可以得出如下几点结论。

(1) $\cos\delta$ 的极大值和极小值分别为$+1$和-1,因此,I 的极大值和极小值分别为

$$\begin{cases}I_{\max}=(\sqrt{I_1}+\sqrt{I_2})^2\\ I_{\min}=(\sqrt{I_1}-\sqrt{I_2})^2\end{cases}\tag{14.32}$$

当

$$\delta=2n\pi,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

或者

$$\overline{S_2P}-\overline{S_1P}=n\lambda$$

时,强度为极大值。而当

$$\delta=(2n+1)\pi,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

或者

$$\overline{S_2P}-\overline{S_1P}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda$$

时,强度为极小值。应注意到,当 $I_1=I_2$ 时,强度极小值为零。一般说来,$I_1\neq I_2$,因此,强度极小值不等于零。

(2) 如果小孔 S_1 和 S_2 由不同的光源照明(见图14.4),那么,相位差 δ 只是在约 10^{-10} s

① 对正常眼睛而言,$\tau\approx0.1$s,因此 $T/\tau=6\times10^{-14}$;即使对于分辨时间仅为1ns的探测器,$T/\tau\approx6\times10^{-5}$。

内保持恒定(见 14.3 节的讨论)，因此，δ 也随时间无规则的变化[①]。如果此时在 10^{-8}s 数量级的时间范围内取平均值，则

$$\langle \cos\delta \rangle = 0$$

从而有

$$I = I_1 + I_2$$

因此，对两个非相干光源，合强度为每一个光源单独产生的强度之和，此时观察不到干涉图样。

(3) 如图 14.6 所示的装置中，若$\overline{S_1P}$和$\overline{S_2P}$比 d 大得多，则

$$I_1 \approx I_2 = I_0$$

则

$$I = 2I_0 + 2I_0\cos\delta = 4I_0\cos^2\frac{\delta}{2} \tag{14.33}$$

这种强度分布(通常叫做 $\cos^2$ 图样)如图 14.9 所示。实际的干涉条纹图样(将出现在屏幕上)如图 14.10 所示。如图 14.10(a)和(b)所示，分别对应于 $d=0.005$mm ($\beta\approx5$mm)和$d=0.025$mm($\beta\approx1$mm)的情况，且有 $D=5$cm 和 $\lambda=5\times10^{-5}$cm。通过选取这样的参数，就能观察到如图 14.10(a)所示的具有双曲线特性的干涉条纹图样。

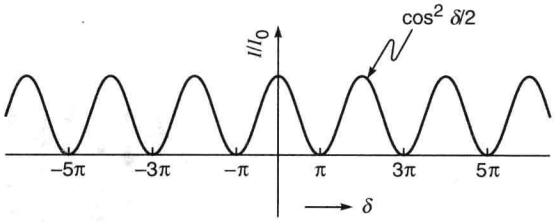


图 14.9　强度随 δ 的变化

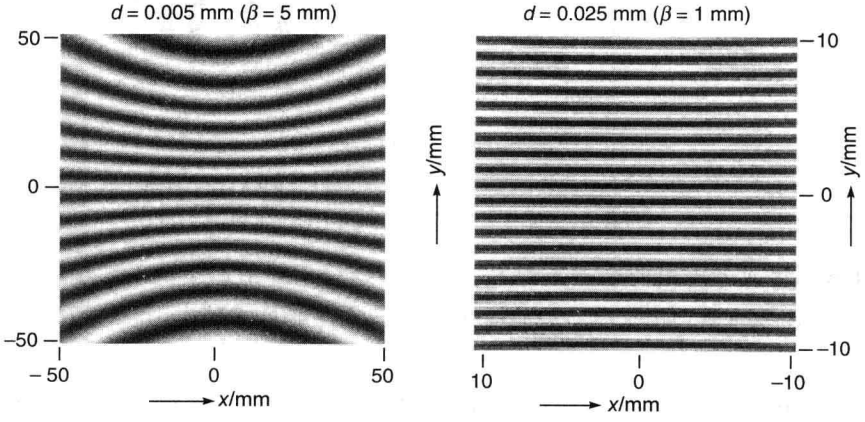


图 14.10　通过计算机得到的两个点光源 S_1 和 S_2 在屏幕 LL' 上(见图 14.8)产生的干涉图样。(a)和(b)分别对应于 $d=0.005$mm 和 $d=0.025$mm 的情况(两个干涉图样都是取 $D=5$cm 和 $\lambda=5\times10^{-5}$cm)。

① 注意此处这种变化发生在 10^{-10}s 数量级的时间内，比起随 ωt 项引起的强度变化时间长约一百万倍，因此我们有理由在一开始取平均时保留此项，导出的是公式(14.30)。而后是否要再取平均需视情形而定。

例 14.5 考虑如图 14.11(a)所示的两个平面波的叠加，而不是考虑两个点光源。两个波的波矢量由下式给出

$$\boldsymbol{k}_1 = -\hat{\boldsymbol{y}}k\sin\theta_1 + \hat{\boldsymbol{z}}\,k\cos\theta_1$$

$$\boldsymbol{k}_2 = +\hat{\boldsymbol{y}}k\sin\theta_2 + \hat{\boldsymbol{z}}\,k\cos\theta_2$$

式中 $k=2\pi/\lambda$，θ_1 和 θ_2 如图 14.11(a)所示定义。因此，这两个波的电场可以由下面两式表示

$$E_1 = E_{01}\cos(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega t) = E_{01}\cos(-ky\sin\theta_1 + kz\cos\theta_1 - \omega t)$$

$$E_2 = E_{02}\cos(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega t) = E_{02}\cos(ky\sin\theta_2 + kz\cos\theta_2 - \omega t)$$

式中假设两个电场都沿着相同的方向(比如沿着 x 轴方向)；如果进一步假设 $E_{01}=E_{02}=E_0$，$\theta_1=\theta_2=\theta$，那么，合电场可以由下式给出

$$E = 2E_0\cos(ky\sin\theta)\cos(kz\cos\theta-\omega t)$$

则照相底片 LL' 上的强度将由下式给出

$$I = 4I_0\cos^2(ky\sin\theta)$$

干涉条纹图样将会是严格的直线，且条纹宽度为

$$\beta = \frac{\lambda}{2\sin\theta}$$

如图 14.11(b)所示为当 $\theta=\pi/6$，$\lambda=5000$Å 时，计算机生成的屏幕 LL' 上的干涉条纹图样，且 $\beta=\lambda=0.0005$mm。

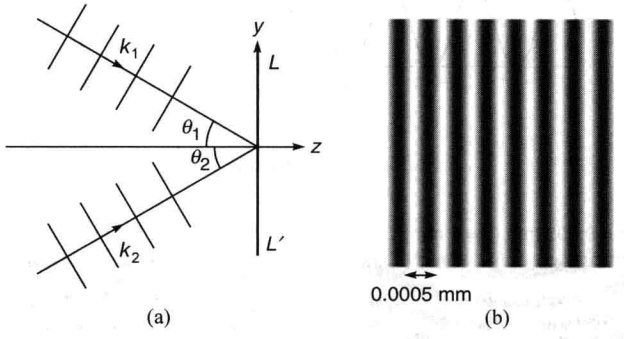


图 14.11

(a) 两平面波在 LL' 处叠加；(b) 在 $\theta_1=\theta_2=\pi/6$，$\lambda=5000$Å 时，计算机生成的屏幕 LL' 上的干涉条纹图样，波动平行于 x 轴。

例 14.6 再次考虑由两个点光源 S_1 和 S_2 在屏幕 PP' 上产生的干涉图样，屏幕 PP' 与点 S_1 和 S_2 的连线垂直(如图 14.12(a)所示)。显然，在屏幕 PP' 上，点 P 的轨迹

$$\overline{S_1P} - \overline{S_2P} = \text{常数}$$

会是一个圆。如图 14.12(b)和(c)所示分别为当 $D=20$cm 和 $D=10$cm 时的干涉条纹图样，且 $\overline{S_1S_2}=d=0.05$mm，$\lambda=5000$Å。显然，如果点 O 代表干涉条纹图样的中心，那么

$$\overline{S_1O} - \overline{S_2O} = d = 100\lambda$$

因此(当 $d=100\lambda$ 时)对于所有的 D，中心点会是明纹，且与 $n=100$ 对应。第一圈和第二圈明纹将分别对应路径差为 99λ 和 98λ 的情况。同理，干涉图样上的第一圈和第二圈暗纹将分别对应路径差为 99.5λ 和 98.5λ 的情况。条纹的半径可以由习题 14.10 中给出的公式来计算。

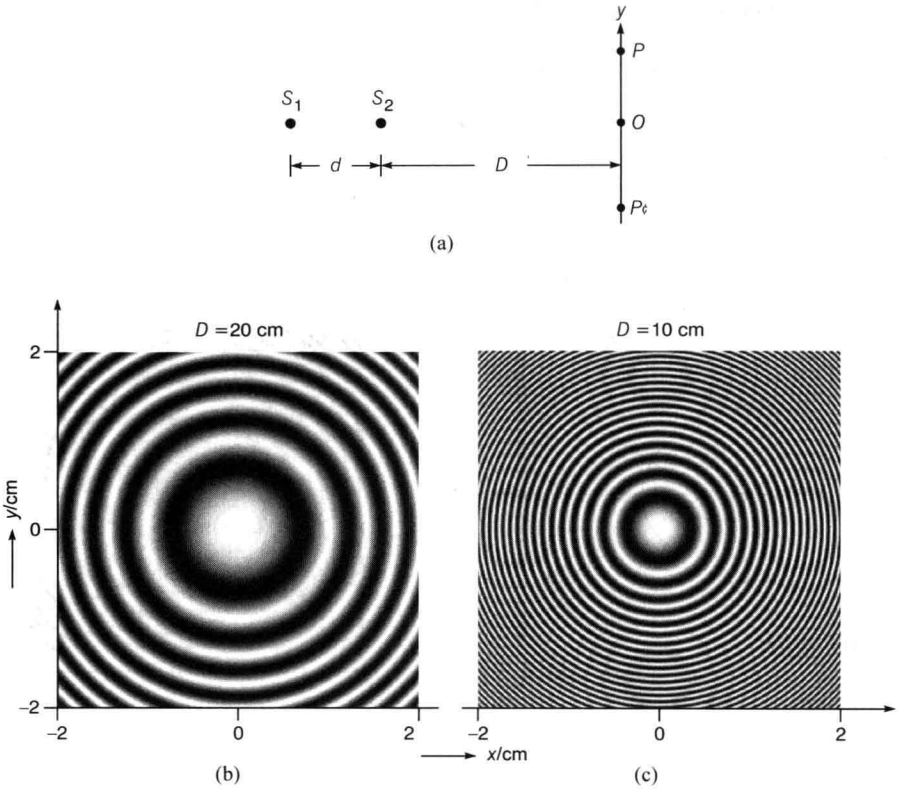


图　14.12

(a) S_1 和 S_2 为两个相干光源；(b)和(c) 分别为 $D=20\text{cm}$ 和 $D=10\text{cm}$ 时，屏幕 PP' 上的干涉图样。

例 14.7　考虑一个正入射的平面波和一个在点 O 发射的球面波在 PP' 处叠加产生的干涉图样，如图 14.13(a)所示。平面波的表达式为

$$E_1 = E_0\cos(kz - \omega t + \phi)$$

球面波的表达式为

$$E_2 = \frac{A_0}{r}\cos(kr - \omega t)$$

式中 r 为从点 O 开始测量的距离，点 O 假设为原点。现在，在平面 $PP'(z=D)$ 上，有

$$r = (x^2 + y^2 + D^2)^{\frac{1}{2}} \approx D\left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2D^2}\right) \approx D + \frac{x^2 + y^2}{2D}$$

式中假设 $x, y \ll D$。在 $z=D$ 的平面上，合场强为

$$E = E_1 + E_2 \approx E_0\cos(kD - \omega t + \phi) + \frac{A_0}{D}\cos\left[kD + \frac{k}{2D}(x^2 + y^2) - \omega t\right]$$

则

$$\langle E^2\rangle = \frac{1}{2}E_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{A_0}{D}\right)^2 + E_0\frac{A_0}{D}\cos\left[\frac{k}{2D}(x^2 + y^2) - \phi\right]$$

如果假设

$$\frac{A_0}{D} \approx E_0$$

即(在平面 PP' 上)球面波的幅度和平面波的幅度相同,那么

$$\langle E^2 \rangle \approx 2E_0^2 \cos^2\left[\frac{k}{4D}(x^2+y^2)-\frac{1}{2}\phi\right]$$

将得到如图 14.13(b)所示的圆形的干涉条纹。如果 r_m 和 r_{m+p} 表示第 m 级和第 $m+p$ 级明纹的半径,那么

$$r_{m+p}^2 - r_m^2 = 2p\lambda D$$

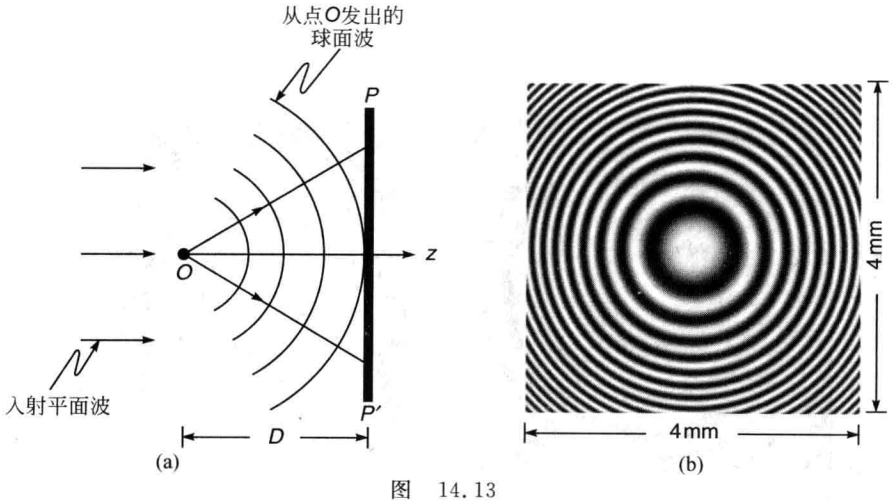


图 14.13

(a) 从点 O 发出的球面波与平面波的叠加;(b) 屏幕 PP' 上的干涉图样

14.6.1 莫尔条纹

在这一节中将谈到莫尔条纹,它可以用来有效地研究干涉条纹图样的形式。图 14.14 给出了将两个简单图案交叠后形成莫尔条纹的例子,其中每一个图案都可以理解为由两个传播方向稍有不同的平面波叠加时形成的明暗相间的条纹图案。在教室中很容易演示这种情形,比如将一张有周期性图案的透明片与它的拷贝片以稍微不同的角度交叠在一起。同理,如果把一个(幻灯片上的)圆形图案和它的拷贝片相交叠,就可以得到如图 14.15 所示的双曲线莫尔条纹(为了看到更加清晰的条纹图样,可以从较远的距离去观察图样)。在 17.5 节中,将说明如何通过观察由两个空间周期相差很小的图案交叠形成的莫尔条纹,而去理解拍现象(见图 17.13)。

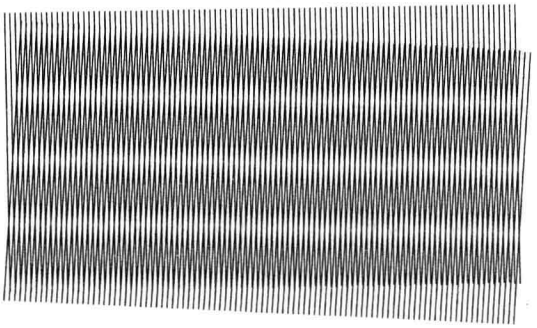


图 14.14 两直线图案重叠产生的莫尔条纹图样

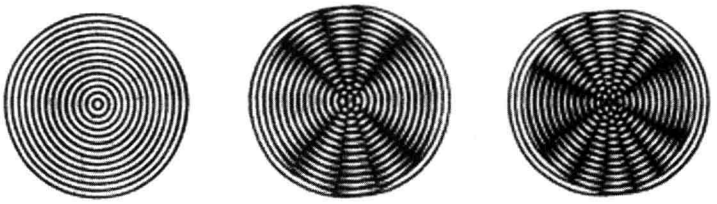


图 14.15　两个重叠的圆形图案产生的莫尔条纹图样，如果把图样放在距离眼睛更远的地方，会看到更加清晰的双曲线莫尔条纹。

例 14.8　考虑两平行狭缝 S_1 和 S_2（垂直于纸面），它们被两个远距离的非相干光源 S' 和 S'' 照亮，如图 14.16 所示。$\angle S'AO' = \angle S''AO' = 10°$。假设两光源发出波长同为 λ 的准单色光，试确定屏幕上的强度分布图样，屏幕到狭缝的距离为 D。

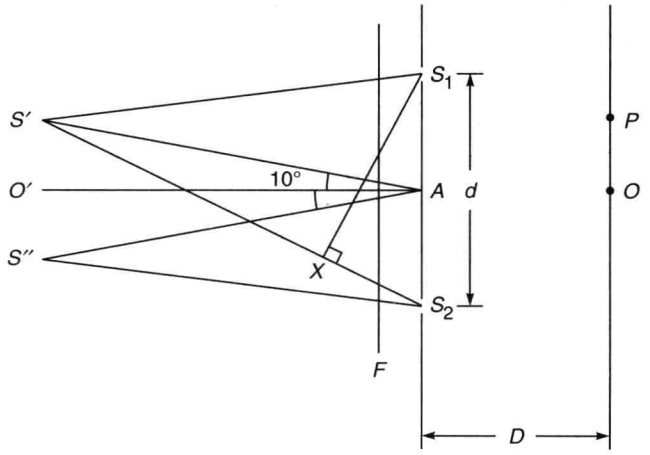


图 14.16　两个远距离的非相干光源 S' 和 S'' 照射到狭缝 S_1 和 S_2 上

解　首先计算每个光源所产生的强度图样。由于两个光源是非相干的，所以屏幕上的合强度图样就是每个光源在屏幕上产生的强度之和。考察屏幕上任一点 P，如果

$$\overline{XS_2} + \overline{S_2P} - \overline{S_1P} = n\lambda$$

那么，光源 S' 发出的光将在点 P 发生相长干涉。上式中假设点 S' 距离狭缝很远，以至于 $\overline{S'S_2} - \overline{S'S_1} \approx \overline{XS_2}$，式中点 X 是点 S_1 到 $S'S_2$ 的垂足。这样，光源 S' 在屏幕上产生的强度为

$$I_{S'} = I_0 \cos^2 \delta/2$$

式中

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(\overline{XS_2} + \overline{S_2P} - \overline{S_1P})$$

又

$$\overline{XS_2} = \overline{S_1S_2}\sin(\angle XS_1S_2) \approx \overline{S_1S_2}\sin 10°$$

则

$$I_{S'} = I_0 \cos^2\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\overline{S_2P} - \overline{S_1P}) + \frac{2\pi}{\lambda}\overline{S_1S_2}\sin 10°\right]$$

$$= I_0 \cos^2\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{xd}{D} + d\sin 10^\circ\right)\right]$$

同理,有

$$I_S'' = I_0 \cos^2\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{xd}{D} - d\sin 10^\circ\right)\right]$$

所以,合强度为

$$I = I_{S'} + I_{S''}$$

例 14.8 具有非常重要的实际意义,例如当利用干涉装置来观察远方星体(如猎户星座中的参宿四星和参宿七星)时就用到它。在实际工作中,为使投射到两狭缝上的光是准单色的,通常在狭缝前放置滤光片 F。

例 14.9 在杨氏双缝装置中,在双缝前放置两片方解石半波片[①](见图 14.17)。放置在缝 S_1 前的半波片 H_1 的光轴沿 y 轴方向,放置在缝 S_2 前的半波片 H_2 的光轴沿 x 方向。试确定屏幕上的强度分布。假设来自光源 S 的光是线偏振光,且(1)偏振方向沿 y 轴;(2)偏振方向沿 x 轴。

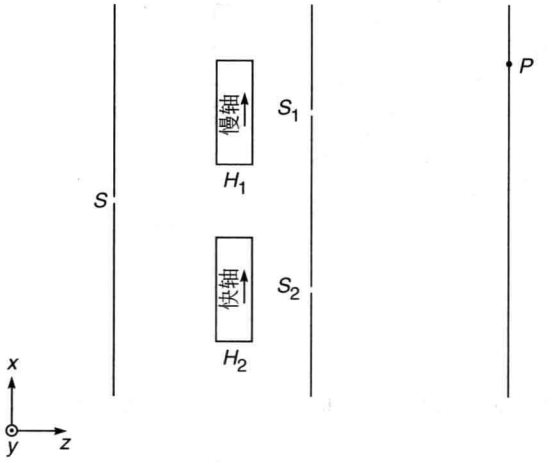


图 14.17 H_1 和 H_2 是放置在狭缝 S_1 和 S_2 前面的两片半波片,它们的光轴分别沿着 y 轴和 x 轴。

解 (1) 当 $\boldsymbol{E}$ 沿 y 方向时。在方解石中,非寻常光传输要比寻常光快。而且,由于 H_1 的光轴是沿着 y 轴,因此,沿 y 轴方向的偏振光将会以 e 光的形式通过 H_1 传播(见 22.6 节)。同理,沿 y 轴方向的偏振光将会以 o 光的形式通过 H_2 传播。因此,如果通过 H_1 的光程包含 $n\lambda$,那么,通过 H_2 的光程就包含 $\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda$(因为 e 光传得更快)。因此,在两光束之一引入了 $\frac{\lambda}{2}$ 的附加光程,于是整个干涉条纹图样要平移半个条纹,即,当 $\overline{S_2P} - \overline{S_1P} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda$ 和 $n\lambda$ 时,分别对应光强的极大值和极小值。

(2) 当 $\boldsymbol{E}$ 沿 x 方向时,也将得到类似的条纹图样,即整个条纹图样平移了半个条纹。

① 这个例子预先假设读者已有关于半波片的知识,而这将在第 22 章中讨论,见 22.6 节。

14.7　菲涅尔双面镜装置

在杨氏双孔干涉实验的基础上，菲涅尔设计出一系列的实验装置来产生干涉图样。其中之一是被称为菲涅尔双面镜的装置，如图 14.18 所示。它由两块平面镜组成，两平面镜之间有一个很小的倾角 θ，并且在点 M 相接，点 S 表示垂直纸面放置的狭缝。

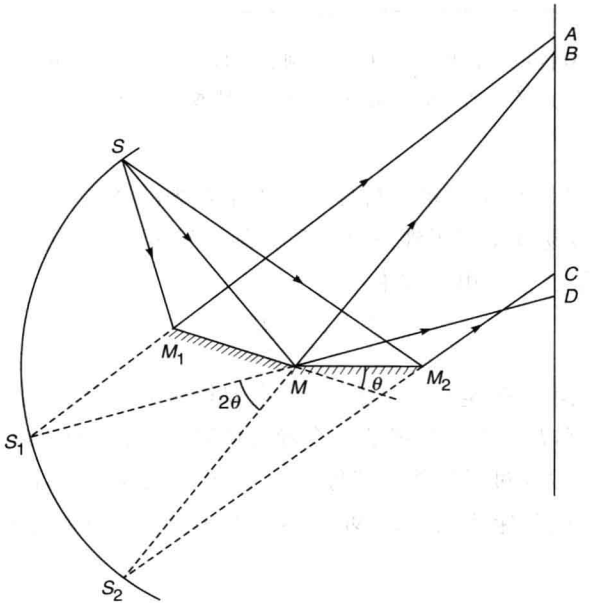


图 14.18　菲涅尔双面镜装置

点 S 发出的一部分波前被反射镜 M_1M 反射到屏幕上的 AD 区域，另一部分波前被反射镜 MM_2 反射到屏幕上的 BC 区域。由于这两部分波前来自同一个光源，所以它们是相干的。因此，在 BC 区域内可以观察到干涉条纹。干涉条纹的形成也可以理解为从点 S 的虚光源点 S_1 和点 S_2（分别由反射镜 M_1 和 M_2 形成）发出的波前干涉的结果。由简单的几何学讨论便可以证明，点 S，S_1 和 S_2 在以点 M 为圆心的圆上。此外，如两反射镜夹角为 θ，则 $\angle S_1SS_2=\theta$，而 $\angle S_1MS_2=2\theta$。因此 $\overline{S_1S_2}=2R\theta$，式中 R 为圆的半径。

14.8　菲涅尔双棱镜装置

菲涅尔还设计过另一种简单装置来产生干涉图样。他采用了一个双棱镜，实际上是一个简单棱镜，棱镜的两个底角非常小（$\approx 20'$）。棱镜的截面如图 14.19 所示，假设棱镜是垂直于纸面立放的。S 表示狭缝，也与纸面垂直放置。狭缝 S 发出的光经棱镜折射后，产生两个虚像 S_1 和 S_2，这两个像起着相干光源的作用，因而，在双棱镜的右方将产生干涉条纹。这些干涉条纹可以通过目镜来观察。若以 n 表示双棱镜材料的折射率，α 表示底角，那么，棱镜对于光线产生的偏转角近似为 $(n-1)\alpha$。因此，$\overline{S_1S_2}=2a(n-1)\alpha$，式中 a 表示点 S 到棱镜底面的距离。若 $n=1.5$，$\alpha\approx 20'\approx 5.8\times 10^{-3}\,\mathrm{rad}$，$a\approx 2\mathrm{cm}$，则 $d=0.012\mathrm{cm}$。

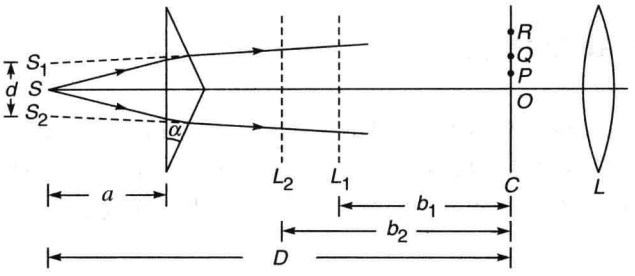


图 14.19　菲涅尔双棱镜实验装置，L 和 C 分别表示目镜和目镜叉丝的位置。为了确定 d，在棱镜和目镜叉丝之间引入透镜，L_1 和 L_2 是透镜的两个位置，透镜放在此处可以清晰地看见狭缝。

双棱镜装置可用来测定例如钠光灯发出的准单色光的波长。当钠光灯发出的光照射狭缝 S 时，通过目镜很容易观察到干涉条纹。利用装在目镜上的测微计(千分尺)可测定条纹宽度(β)。β 测出后，波长便可由下式求出

$$\lambda = \frac{d\beta}{D} \tag{14.34}$$

应该指出，不测量 α 也可以确定出 d。事实上，在双棱镜和目镜之间放置一凸透镜，就可以很容易地测定距离 d 和 D。对于目镜的一个确定位置，将有两个透镜位置(如图 14.19 所示中的 L_1 和 L_2)使得可以通过目镜能看清像[①] S_1 和 S_2。设 d_1 为透镜在位置 L_1 时两像之间的距离，b_1 为 L_1 到目镜的距离，而 d_2 和 b_2 为透镜在 L_2 位置时相应的距离。那么，容易证明

$$d = \sqrt{d_1 d_2}$$

及

$$D = b_1 + b_2$$

双棱镜装置的典型的值为取 $d \approx 0.01\text{cm}$，$\lambda \approx 6\times10^{-5}\text{cm}$，$D \approx 50\text{cm}$，$\beta \approx 0.3\text{cm}$。

应该指出，这里讨论的是缝光源而不是点光源。但由于每一对点光源 S_1 和 S_2 都产生(近似)直线条纹，所以缝光源也将产生直线条纹，且条纹的强度会增大。

14.9　白光干涉

现在讨论用白光照射狭缝时产生的干涉图样。与白光光谱的紫端和红端对应的波长分别大约是 $4\times10^{-5}\text{cm}$ 和 $7\times10^{-5}\text{cm}$。显然，在点 O(见图 14.19)产生的中央条纹是白色的，因为所有波长在点 O 都发生相长干涉。但点 O 向下(上)一点附近的条纹将变成有颜色的。例如，若点 P 满足

$$\overline{S_2P} - \overline{S_1P} = 2\times10^{-5}\text{cm}\left(=\frac{\lambda_{紫}}{2}\right)$$

那么紫光就要发生完全的相消干涉，而其他波长则部分地发生相消干涉，从而得到一条除去

① 这种方法类似于测定凸透镜焦距的位移法。

紫光而呈现暗红色的线。满足

$$\overline{S_2Q}-\overline{S_1Q}=3.5\times10^{-5}\,\text{cm}\left(=\frac{\lambda_{红}}{2}\right)$$

的点 Q 将不含红光，而对于紫光则几乎是相长干涉。可见光区间内的其他波长既不发生相长干涉也不发生相消干涉。因此，紧靠白色中央条纹的是一些彩色条纹；当光程差约为 2×10^{-5} cm 时，条纹呈红色，继而颜色渐渐变为紫色。彩色条纹将很快消失，因为对于离开点 O 较远的点，(在可见光区域内)有许许多多的波长都发生相长干涉，所以看到的是均匀的白色光。例如，在满足 $\overline{S_2R}-\overline{S_1R}=30\times10^{-5}$ cm 的点 R，对应于 $\lambda=30\times10^{-5}/n(n=1,2,\cdots)$ 的波长将发生相长干涉，在可见光区，这些波长为 7.5×10^{-5} cm(红色)，6×10^{-5} cm(黄色)，5×10^{-5} cm(黄绿色)，4.3×10^{-5} cm(紫色)。此外，对应于 $\lambda=30\times10^{-5}/(n+1/2)$ 的波长将发生相消干涉，所以，在可见光区内将不包含 6.67×10^{-5} cm(橙色)，5.5×10^{-5} cm(黄色)，4.6×10^{-5} cm(靛蓝色)等波长。在肉眼看来，这样的光的颜色是白色的。因此，在白光照射下，在零光程差的点将得到白色中央条纹，在白色条纹的两侧有少数几条彩色条纹，再往外颜色很快又褪变为白色。如果还使用白色光源，但在我们的眼睛前放一个红色(或绿色)的滤光片，将会看到相应的红色(或绿色)干涉图样。

通常在利用准单色光源(如钠光灯)产生的干涉图样中，会得到数目很多的干涉条纹，但要确定中央条纹的位置是非常困难的。但是许多干涉实验都需要确定中央条纹的位置，根据上述讨论，如果采用白光光源，就很容易做到这一点。

14.10　条纹的位移

现在讨论在两干涉光束之一的光路中加入一透明薄片所引起的干涉图样的变化，如图 14.20 所示。设薄片的厚度为 t，折射率为 n，则由点 S_1 到点 P 的光要在薄片中经过距离 t，在空气中经过距离 $\overline{S_1P}-t$。因此，光由点 S_1 到点 P 所需时间为

$$\frac{\overline{S_1P}-t}{c}+\frac{t}{v}=\frac{1}{c}(\overline{S_1P}-t+nt)=\frac{1}{c}[\overline{S_1P}+(n-1)t] \tag{14.35}$$

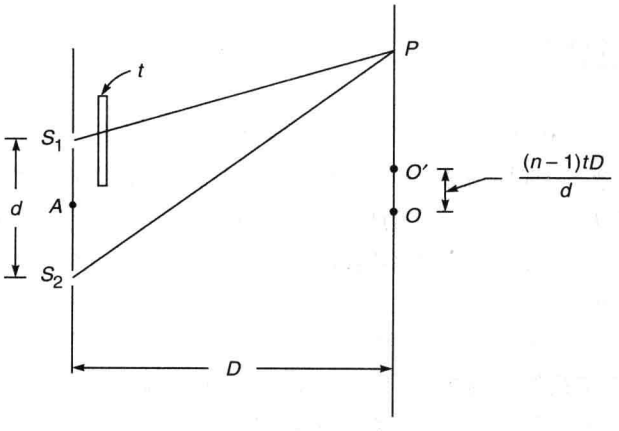


图 14.20　如果在一束光束中引入一片很薄的薄片(厚度为 t)，那么，观察到的干涉图样会移动 $(n-1)tD/d$ 的距离。

式中 $v\left(=\frac{c}{n}\right)$ 表示光在薄片中的光速。式(14.35)表明,由于加入薄片,实际光程增加了 $(n-1)t$。因此,加入薄片后,中央条纹(对应于离点 S_1 和 S_2 是相等的光程)就在点 O' 形成,点 O' 满足

$$\overline{S_1O'}+(n-1)t=\overline{S_2O'}$$

又由(见式(14.19))

$$\overline{S_2O'}-\overline{S_1O'}\approx\frac{d}{D}\overline{OO'}$$

有

$$(n-1)t=\frac{d}{D}\overline{OO'} \tag{14.36}$$

因此,干涉条纹图样移动了一段距离 Δ,Δ 由式(14.37)给出

$$\Delta=\frac{(n-1)tD}{d} \tag{14.37}$$

上述原理使得可以由中央条纹移动的距离来测定非常薄的透明薄片(如云母片)的厚度。如果利用白光光源,中央条纹的移动距离是可以很容易测出的。

例 14.10 在双缝干涉装置中,将一 $n=1.58$ 的云母薄片盖在其中一个缝上。$\overline{S_1S_2}$ 和 $\overline{AO}$(见图 14.20)分别为 0.1cm 和 50cm,加入云母薄片后引起的中央条纹的位移为 0.2cm。试求云母片的厚度。

解 已知 $\Delta=0.2\text{cm}$,$d=0.1\text{cm}$,$D=50\text{cm}$,则

$$t=\frac{d\Delta}{D(n-1)}=\frac{0.1\times0.2}{50\times0.58}\approx6.7\times10^{-4}(\text{cm})$$

例 14.11 与例 14.10 类似的实验装置中,发现加入云母片后,中央条纹出现在原先第 11 条亮条纹的位置上。设光源为钠光灯($\lambda=5893\text{Å}$),试求云母片的厚度。

解 点 O'(见图 14.20)对应于第 11 条亮条纹,有

$$\overline{S_2O'}-\overline{S_1O'}=11\lambda=(n-1)t=0.58t$$

$$t=\frac{11\lambda}{0.58}=\frac{11\times5893\times10^{-10}}{0.58}=1.12\times10^{-6}(\text{m})^{①}$$

14.11 洛埃镜装置

在洛埃镜装置中,让狭缝 S_1 发出的光掠入射到平面反射镜上(见图 14.21),在屏幕上的 BC 区域内,由狭缝 S_1 直接射来的光和经过平面反射镜反射来的光发生干涉,从而形成干涉图样。因此,可以把狭缝 S_1 和它的虚像 S_2 看成是产生干涉图样的两个相干光源。应该注意,在掠入射情况下,实际上可以不需要反射面是镜子,因为在此角度,即使电媒质表面也有很高的反射率(见第 23 章)。

如图 14.21 所示,在屏幕 L_1L_2 上不可能观察到中央条纹,除非是把屏幕移到位置 $L_1'L_2'$ 处,即移到与反射镜一边相接触的地方,或者是在直接射到屏幕上的光路中加入一片云母片,使中央条纹出现在 BC 区域内(这个问题将在习题 14.2 中详细讨论)。实际上,如果利用白光

① 原书漏掉了最后的答案。译者注。

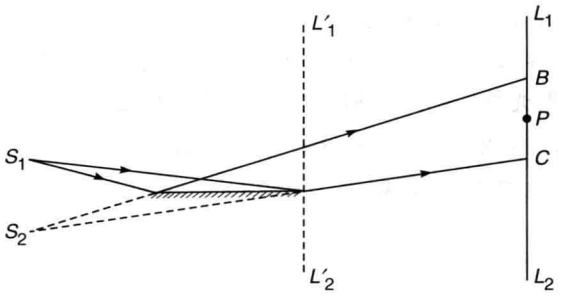


图 14.21　洛埃镜装置

来观察中央条纹，就会发现那一点是暗的，这表明反射光束在反射时发生了 π 的相位突变。因此，当屏幕上点 P 满足

$$\overline{S_2P}-\overline{S_1P}=n\lambda,\quad n=0,1,2,3,\cdots$$

时，将得到强度的极小值（即发生相消干涉）；而当

$$\overline{S_2P}-\overline{S_1P}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda$$

时，得到强度的极大值（即发生相长干涉）。

在 14.12 节，将用光学可逆性原理来证明：光在光密媒质上反射时，有 π 的相位突变；而在光疏媒质上反射时，就没有这种相位突变。

14.12　反射时的相位变化

现在根据光学可逆性原理来研究光在两种媒质分界面上的反射。根据可逆性原理，在没有吸收的情况下，如果反射光线或折射光线的方向倒逆，光线将沿原路返回[①]。

考察一束光线入射到折射率分别为 n_1 和 n_2 的两种媒质的分界面上的情况，如图 14.22(a)所示。设振幅反射系数和振幅透射系数分别为 r_1 和 t_1。这样，如果入射光线的振幅为 a，则反射光线和折射光线的振幅就分别为 ar_1 和 at_1。

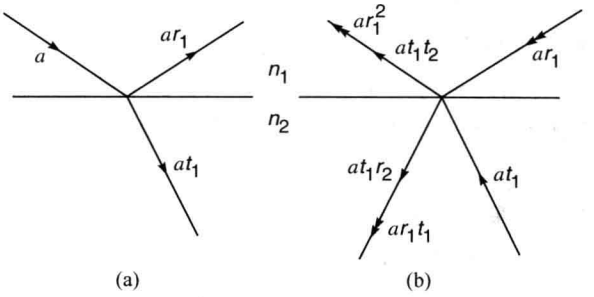


图　14.22

(a) 一束光线从折射率为 n_1 的媒质入射到折射率为 n_2 的媒质；

(b) 幅度为 ar_1 和 at_1 的两束光线入射到折射率为 n_1 的媒质

① 可逆性原理是时间倒逆不变性的结果。按照这种不变性，过程在时间上可以正向进行，也可以反向进行。详细的讨论参见文献[3,8]。

现在使光线倒逆,并来考察振幅为 at_1 的光线入射到媒质1,及振幅为 ar_1 的光线入射到媒质2的情况,如图14.22(b)所示。振幅为 at_1 的光线将产生振幅为 at_1r_2 的反射光线,以及振幅为 at_1t_2 的透射光线,式中 r_2 和 t_2 是光线从媒质2入射到媒质1的振幅反射系数和振幅透射系数。同理,振幅为 ar_1 的光线将产生振幅为 ar_1^2 的反射光线和振幅为 ar_1t_1 的折射光线。根据光学可逆性原理,振幅为 ar_1^2 和 at_1t_2 的两束光线必定结合为如图14.22(a)所示的入射光线,有

$$ar_1^2 + at_1t_2 = a$$

或者

$$t_1t_2 = 1 - r_1^2 \tag{14.38}$$

并且,振幅为 at_1r_2 和 ar_1t_1 的两束光线必须相互抵消,即

$$at_1r_2 + ar_1t_1 = 0$$

或者

$$r_2 = -r_1 \tag{14.39}$$

又根据洛埃镜实验可知,光被光密媒质反射时有 π 的相位突变,所以,由式(14.39)可推知,光被光疏媒质反射时不发生相位突变,这一点实际上已为实验所证实。式(14.38)和式(14.39)称为斯托克斯(Stokes)关系式。

在第24章中,在平面波入射到电媒质及导体的情况下,将计算振幅反射系数和透射系数,并证明这些系数满足斯托克斯关系式,还要讨论反射时的相位变化问题。

小　结

- 1801年,托马斯·杨设计出一个既巧妙又简单的方法来锁定两个光源的相位关系。它们巧妙之处在于将一个波前分割成两个,这两个分割的波前就好像是从两个有着固定相位关系的光源发出的一样。因此,当这两个波前发生干涉时,就能得到稳定的干涉图样。
- 两个相干点光源将在屏幕上形成几乎是直线的干涉条纹,并且通过测量干涉条纹的宽度(表示为两个相邻条纹间的距离),就能计算出波长。
- 当两个相干点光源的连线与屏幕垂直时,屏幕上的干涉条纹图样是圆形的。
- 在杨氏双缝干涉实验中,如果使用的是白光光源,就能在光程差为零的点得到白色的中央条纹,并且在其两侧伴随着一些彩色条纹,并且这些彩色条纹会迅速褪变成白色。如果在干涉光束之一的路径上引入透明材料的薄片(例如云母片),干涉条纹就会发生移位,通过测量条纹移位的距离,就能计算出云母片的厚度。

习　题

14.1 在杨氏双孔实验中(见图14.6),两孔之间的距离为0.5mm,$\lambda = 5 \times 10^{-5}$ cm,$D =$ 50cm,问条纹宽度是多少?

14.2　如图 14.23 所示，是洛埃镜实验的装置图。S 是点光源，发出频率为 $6\times10^{14}\,s^{-1}$ 的光波。点 A 和点 B 为水平放置的反射镜的两边，LOM 为屏幕。$\overline{SP}$，$\overline{PA}$，$\overline{AB}$，$\overline{BO}$分别为 1cm，5cm，5cm，190cm。(1)确定屏幕上可以看到条纹的区域位置，并计算条纹数目。(2)在直接射到屏幕上的光路中加入一云母片($n=1.5$)，使得最下方的条纹变为中央条纹，计算此时云母片的厚度。$c=3\times10^{10}$cm/s。

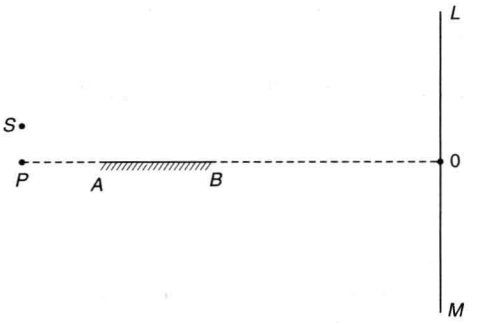


图 14.23　习题 14.2 图

[**答案**：(1) 2cm，40 条条纹；(2) 38μm]

14.3　(1) 在菲涅尔双棱镜实验中，证明：$d=2(n-1)a\alpha$，式中 a 为光源到棱镜底面的距离(见图 14.19)，α 为双棱镜的底角，n 为双棱镜的折射率。

(2) 在一种典型的菲涅尔双棱镜装置中，$b/a=20$，式中 b 为双棱镜和屏幕之间的距离。用钠光照射时($\lambda\approx5893$Å)，条纹宽度为 0.1cm。设 $n=1.5$，试计算 α。

[**答案**：$\alpha\approx0.71°$]

14.4　在杨氏双孔实验中，在两光束之一的光路中加入一薄云母片($n=1.5$)。如果中央条纹移动了 0.2cm，计算云母片的厚度。设 $d=0.1$cm，$D=50$cm。

14.5　在菲涅尔双棱镜实验中，为确定两狭缝间的距离，在双棱镜和目镜间放置一凸透镜，证明：若 $D>4f$，将有两个能在目镜中形成狭缝像的透镜位置，式中 f 为凸透镜焦距，D 为狭缝和目镜间的距离。如果 d_1 和 d_2 是通过目镜测出的(凸透镜分别位于两个位置时狭缝所成)两像之间的距离，试证明：$d=\sqrt{d_1d_2}$。如果 $D<4f$，则会发生什么情况？

14.6　在杨氏双孔试验中，用钠光灯来照明产生干涉条纹，钠光主要由两个波长(5890Å 和 5896Å)组成。求屏幕上干涉条纹图样消失的区域。设 $d=0.5$mm，$D=100$cm。

14.7　如果用波长为 3cm 的微波来做杨氏双孔实验，试讨论，在 $d=0.1$cm，1cm，4cm 的情况下，分别得到的干涉条纹图样的特性。假设 $D=100$cm。此时，还可以根据式(14.21)计算条纹宽度吗？

14.8　在菲涅尔双面镜装置中(见图 14.18)，证明：点 S，S_1 和 S_2 共圆，且$\overline{S_1S_2}=2b\theta$，式中 $b=\overline{MS}$，θ 为两双面镜间的夹角。

14.9　在利用白光的双孔实验中，考察屏幕上两点：一点对应于光程差为 5000Å，另一点对应于光程差为 40000Å。求在可见光区内，对应于相长干涉和相消干涉的波长。这两点分别是什么颜色？

14.10　(1) 考察一个与两相干光源 S_1 和 S_2 连线垂直的平面，如图 14.14 所示。如果 $\overline{S_1P}-\overline{S_2P}=\Delta$，证明

$$y=\frac{1}{2\Delta}(d^2-\Delta^2)^{\frac{1}{2}}[4D^2+4Dd+(d^2-\Delta^2)]^{\frac{1}{2}}\approx\frac{D}{\Delta}\sqrt{(d-\Delta)(d+\Delta)}$$

其中最后的表达式在 $D\gg d$ 时成立。

(2) 当 $\lambda=0.5\mu$m，$d=0.4$mm，$D=20$cm，$\overline{S_1O}-\overline{S_2O}=800\lambda$ 时，计算点 P 分别位于

第一暗环和第一明环位置时的$\overline{S_1P}-\overline{S_2P}$的值。

[**答案**：0.39975mm,0.3995mm]

14.11 继续上一题，计算下面情况下头两个暗环的半径

(1) $D=20\text{cm}$。

(2) $D=10\text{cm}$。

[**答案**：(1) ≈0.71cm；(2) 1.22cm]

14.12 在题14.10中，设$d=0.5\text{mm}$，$\lambda=5\times10^{-5}\text{cm}$，$D=100\text{cm}$，因此，中心(亮)点将对应于$n=1000$。计算第一、第二和第三个明环的半径，它们分别对应于$n=999$，998和997。

14.13 对于振幅反射系数和振幅透射系数的表示式(见第24章)，试证明它们满足斯托克斯关系式。

14.14 假设平面波正入射到一个开有两个孔的平面上，两孔距离为d。若在双孔后面放置一凸透镜，证明：在透镜焦平面上观察到的干涉条纹宽度为$f\lambda/d$，式中f为透镜的焦距。

14.15 在题14.14中，证明：如果(包含孔的)平面在透镜的前焦平面上，那么，干涉条纹图样是一系列严格的平行直线；如果该平面不在透镜的前焦平面上，则干涉条纹图样将是双曲线形式。

14.16 在杨氏双孔实验中，计算$I/I_{\max}$，式中I表示光程差为$\lambda/5$的一点的强度。

参考文献和推荐读物

1. F. Graham Smith and T.A. King, *Optics and Photonics: An Introduction*, John Wiley, Chicester (2000).
2. R. W. Ditchburn, *Light*, Academic Press, London (1976).
3. R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. I, Chapter 52, Addison-Wesley, 1965.
4. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
5. E. Hecht and A. Zajac, *Optics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.
6. R. S. Longhurst, *Geometrical and Physical Optics*, 2nd Edition, Longman, London, 1973.
7. D. E. Bailey and M. J. Welch, '*Moire Fringes*', *Proceedings of the Conference and Workshop on the Teaching of Optics* (Edited by: G. I. Opat, D. Booth, A. P. Mazzolini and G. Smith, University of Melbourne, Australia.)
8. A. Baker, *Modern Physics and Anti Physics*, Chapter 3, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1970.
9. PSSC, *Physics*, D.C. Heath & Co. Boston, Mass., 1965.

第15章 双光束干涉：振幅分割法

依据斐索在1868年提出的方法，迈克耳孙教授制造了也许是最精巧的、绝妙的、可应用于天文学的仪器——干涉仪。

詹姆斯·金斯爵士，《环绕我们的宇宙》，剑桥大学出版社，1930

重要的里程碑

1665年 英国物理学家罗伯特·胡克在他的专著《显微术》里描述了他利用一个凸透物镜和凸透目镜组成的复显微镜进行的观察。在同样的工作中，描述了他对于薄云母片、肥皂泡和水上的油膜产生的各种颜色的观察。他认识到由薄云母片产生的颜色与云母片的厚度有关，但是没能得到厚度和颜色间的确切关系。胡克是光传输波动理论的倡导者。

1704年 “牛顿环”最先是由波义耳和胡克发现的，它以牛顿命名是因为牛顿用粒子模型解释了这个现象，但是后来人们发现粒子模型不是满意的解释。

1802年 托马斯·杨基于波动理论对“牛顿环”给出了一个满意的解释。

1881年 迈克耳孙发明了“迈克耳孙干涉仪”，并因为他发明的精密光学仪器及借助该仪器实现的光谱与计量观察使他获得了1907年的诺贝尔物理学奖。迈克耳孙是美国第一位科学领域诺贝尔奖获得者。在颁奖典礼上，瑞典皇家科学院主席说：“迈克耳孙教授，您的干涉仪使我们可能获得一个非实物的、非常精确的长度标准，而这样的精度是迄今为止没有达到的。利用这种标准，使我们能够确保米原器长度不变。并且，即使假设米原器丢失了，我们也有绝对的自信重建一个……”

1887年 迈克耳孙和莫雷用迈克耳孙干涉仪进行了著名的迈克耳孙-莫雷实验，并探测了地球相对于“以太”的运动。

15.1 引言

第14章已经讨论过波前分割法产生的干涉图样。例如，让一个从小孔发出的光投射到两个小孔上，从这两个小孔出射的球面波将产生干涉图样。在本章中将讨论由振幅分割法产生的干涉图样。例如，一个平面波投射到薄膜上，从薄膜上表面反射的波与从薄膜下表面反射的波发生干涉。这类研究有许多实际的应用，并且能解释一些实际现象，比如肥皂泡在白光照射下出现的漂亮色彩。

15.2 平面波照射平行平面薄膜发生的干涉

如果一平面波正入射到厚度为 d 的均匀薄膜[①]上(见图 15.1),那么,薄膜上表面反射的波与下表面反射的波将发生干涉。在这一节里,要研究产生的干涉图样。为了观察干涉图样而不妨碍入射光束,用了一个部分反射片 G,如图 15.1 所示。这样的设置也能避免光束直接入射到照相底片 P(或者眼睛)上。把被照明的针孔放置在一个校正了的透镜焦点上,就可以产生平面波;或者利用激光器发出的激光束也行。

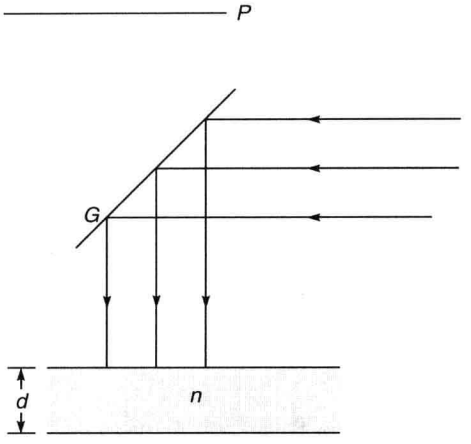


图 15.1 平行光束正入射到折射率为 n,厚度为 d 的薄膜上,G 表示部分反射片,P 表示照相底片。

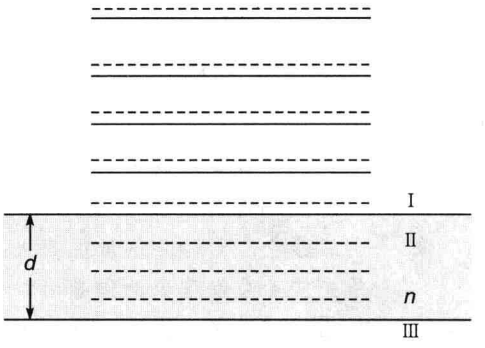


图 15.2 实线和虚线分别表示薄膜上表面和下表面反射的光波的波峰位置,注意,薄膜内两相邻波峰之间的距离小于媒质Ⅰ中相应的距离

如图 15.2 所示,实线和虚线分别代表薄膜上表面和下表面[②]反射的光波(在任意特定时刻)的波峰[③]位置。显然,薄膜下表面反射的光波多走了一段附加的光程 $2nd$,式中 n 为薄膜材料的折射率。此外,如果薄膜放置在空气中,从上表面反射的波会有 π 相位的突变(见 14.12 节)。这样,相消干涉和相长干涉的条件可以表示为

$$2nd = m\lambda \qquad \text{(相消干涉)} \tag{15.1a}$$

$$2nd = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda \qquad \text{(相长干涉)} \tag{15.1b}$$

式中 $m=0,1,2,\cdots$,λ 为真空中光的波长。

因此,如果在 P 处放置一照相底片(见图 15.1),底片会被均匀照射。当 $2nd=m\lambda$ 时是暗的,$2nd=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$,$m=0,1,2,\cdots$ 时是亮的。如果不用照相底片,直接用肉眼观察薄膜

① 对于为什么膜要薄的解释见 15.7 节。

② 一般来说,薄膜下表面反射的光会发生多次反射,这里忽略了这种多次反射效应(见第 16 章)。

③ 请注意,在薄膜中两相邻波峰间的距离小于空气中相应的距离,这是因为在折射率为 n 的媒质中有效波长等于 λ/n 的缘故。

（从上面），薄膜将呈现出均匀亮度。

应该注意到，由薄膜上表面和下表面反射的光波的振幅一般是略有不同的，因此，两光波的干涉不会完全相消。但是，选择适当的媒质Ⅱ和媒质Ⅲ的折射率（见例 15.1），就可以使两反射光波的振幅接近相等。

对于两玻璃片之间夹着空气膜的情况（见图 15.3）。光在玻璃-空气分界面上反射时没有相位变化，但是在空气-玻璃分界面上反射时会发生 π 的相位变化，因此，干涉极大和极小的条件仍然成立（仍为式(15.1a)和式(15.1b)）。另一方面，如果媒质Ⅰ是冕牌玻璃（$n=1.52$），媒质Ⅱ是折射率为 1.60 的油，媒质Ⅲ是火石玻璃（$n=1.66$），那么，上下两个表面的反射都将有 π 的相位变化，从而出现干涉极大和极小的条件应为

$$2nd = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda \qquad \text{（极小条件）} \tag{15.2a}$$

$$2nd = m\lambda \qquad \text{（极大条件）} \tag{15.2b}$$

一般来说，只要媒质Ⅱ的折射率介于媒质Ⅰ和媒质Ⅲ之间，干涉的极大条件和极小条件就由式(15.2a)和式(15.2b)给出。

下面将讨论斜入射到薄膜的情况（见图 15.4）。薄膜上表面反射的光与下表面反射的光仍然会发生干涉。但后者多走了一段附加光程 Δ，由下式给出（见图 15.5）

$$\Delta = n_2(\overline{BD}+\overline{DF}) - n_1\,\overline{BC} \tag{15.3}$$

这里点 C 是点 F 在 BG 上的垂足。在下一节中将证明

$$\Delta = 2n_2 d\cos\theta' \tag{15.4}$$

式中 θ' 为折射角。

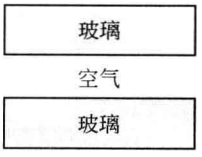


图 15.3　两玻璃之间形成的空气薄膜

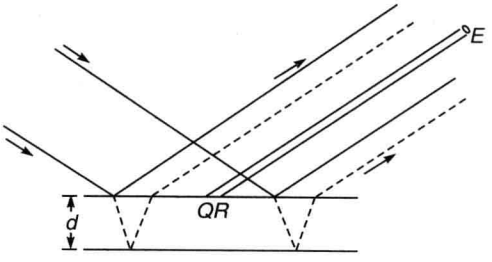


图 15.4　平面波斜入射到薄膜上，实线和虚线分别表示薄膜上表面和下表面反射的光波的边界，眼睛 E 只接收到区域 QR 反射的光。

对于置于空气中的薄膜来说，光波在点 B 反射时有 π 的相位变化（见图 15.5），因此，发生相消干涉和相长干涉的条件可表示为

$$\Delta = 2n_2 d\cos\theta' = m\lambda \qquad \text{（极小条件）} \tag{15.5a}$$

$$\Delta = 2n_2 d\cos\theta' = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda \qquad \text{（极大条件）} \tag{15.5b}$$

如果在点 P 处放置照相底片（见图 15.5），它将被均匀照明。如果用肉眼在点 E 位置（见图 15.4）观察薄膜，这时只有一小部分区域 QR 反射的光到达眼睛，在视网膜上形成的像是暗的还是亮的，要取决于 Δ 的值（见式(15.5)）。

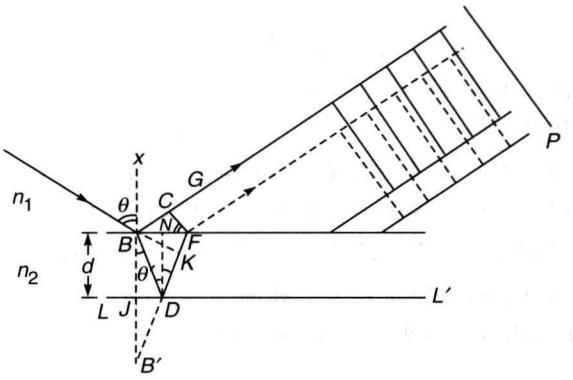


图 15.5　薄膜上表面和下表面反射光波的光程差的计算,实线和虚线表示相应的波峰位置,P 表示照相底片。

15.3　余弦定律

在本节中,将证明从薄膜下表面反射的光波传播的附加光程由下式表示

$$\Delta[=n_2(\overline{BD}+\overline{DF})-n_1\,\overline{BC}]=2n_2d\cos\theta' \tag{15.6}$$

式中 θ 和 θ' 分别表示入射角和折射角。由点 B 向下表面 LL' 引垂线 BJ,并延长 BJ 和 FD 相交于点 B'(见图 15.5)。显然,有

$$\angle JBD=\angle BDN=\angle NDF=\theta'$$

其中点 N 是点 D 向 BF 所作垂线的垂足,则

$$\angle BDJ=\frac{\pi}{2}-\theta'$$

且

$$\angle B'DJ=\pi-\left[\left(\frac{\pi}{2}-\theta'\right)+\theta'+\theta'\right]=\frac{\pi}{2}-\theta'$$

因此,有

$$\overline{BD}=\overline{B'D},\quad \overline{BJ}=\overline{JB'}=d$$

或者

$$\overline{BD}+\overline{DF}=\overline{B'D}+\overline{DF}=\overline{B'F}$$

那么,有

$$\Delta=n_2\,\overline{B'F}-n_1\,\overline{BC} \tag{15.7}$$

又有

$$\angle CFB=\angle CBX=\theta$$

$$\overline{BC}=\overline{BF}\sin\theta=\frac{\overline{KF}}{\sin\theta'}\sin\theta=\frac{n_2}{n_1}\overline{KF} \tag{15.8}$$

这里点 K 是点 B 在 $B'F$ 上的垂足。把式(15.8)代入式(15.7),可得

$$\Delta=n_2\,\overline{B'F}-n_2\,\overline{KF}=n_2\,\overline{B'K}$$

或者

$$\Delta = 2n_2 d\cos\theta' \tag{15.9}$$

式(15.9)称为余弦定律。

15.4　消反射膜

在 15.2 节讨论的薄膜干涉现象的一个重要应用是用来减小透镜表面的反射率，这也正是本节要讨论的问题。为了定量地理解这个现象，必须假设当在折射率为 n_1 的媒质中传播的光束正入射到折射率为 n_2 的电媒质上时，反射光束和透射光束的振幅与入射光束的振幅有如下关系[①](见图 15.6(a))

$$a_r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} a_i \tag{15.10a}$$

$$a_t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} a_i \tag{15.10b}$$

式中 a_i，a_r 和 a_t 分别是入射光束、反射光束和透射光束的振幅。注意，当 $n_2 > n_1$ 时，a_r 为负，这表明经光密媒质表面上发生反射后，有 π 的相位变化。因此，振幅反射系数 r 和振幅透射系数 t 由以下两式给出

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \tag{15.11a}$$

$$t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \tag{15.11b}$$

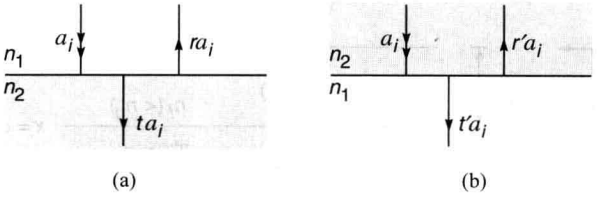


图　15.6

(a) 在折射率为 n_1 的媒质中传播的振幅为 a_i 的平面波正入射到折射率为 n_2 的媒质上时，反射波和透射波的振幅分别是 a_r 和 a_t；(b) 同理，在折射率为 n_2 的媒质中传播的光束正入射到折射率为 n_1 的媒质上的情况。

值得指出的是，如果光波在折射率为 n_2 的媒质中传播，正入射到折射率为 n_1 的媒质上时的反射系数和透射系数分别为 r' 和 t'(见图 15.6(b))，那么

$$r' = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} = -r \tag{15.12}$$

$$t' = \frac{2n_2}{n_1 + n_2} \tag{15.13}$$

且

$$1 - tt' = 1 - \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 = r^2 \tag{15.14}$$

① 这两个关系式可由电磁理论导出，见式(24.67)～式(24.72)(令 $\theta_1 = \theta_2 = 0$)。

式(15.12)和式(15.14)就是斯托克斯关系式(见14.12节)。

现在讨论如何应用薄膜干涉现象来减小透镜表面的反射率。我们知道,很多光学仪器(比如望远镜)有许多个透镜表面,由于反射造成的强度损失可能很严重。例如,在接近正入射时[①],冕牌玻璃在空气中的反射率为

$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2=\left(\frac{1.5-1}{1.5+1}\right)^2\approx 0.04$$

即有4%的入射光被反射。对于$n\approx1.67$的重火石玻璃,约有6%的入射光被反射。这样,如果有许多个表面,那么在这些表面的反射损失是相当可观的。为了减小这种损失,常常在透镜表面镀上一层厚度为$\lambda/4n$的"消反射膜",且膜的折射率小于透镜的折射率。例如,在玻璃($n=1.5$)上镀一层氟化镁(MgF_2)膜(见图15.7),膜的厚度d应满足[②]

$$2n_fd=\frac{1}{2}\lambda$$

或者

$$d=\frac{\lambda}{4n_f} \tag{15.15}$$

这里假设接近正入射(即$\cos\theta'\approx1$,见式(15.9)),n_f表示膜的折射率。对于MgF_2,$n_f=1.38$。因此,如果假设$\lambda=5.0\times10^{-5}\,\text{cm}$(大致对应于可见光谱的中心),于是得到

$$d=\frac{5.0\times10^{-5}\,\text{cm}}{4\times1.38}\approx0.9\times10^{-5}\,\text{cm}$$

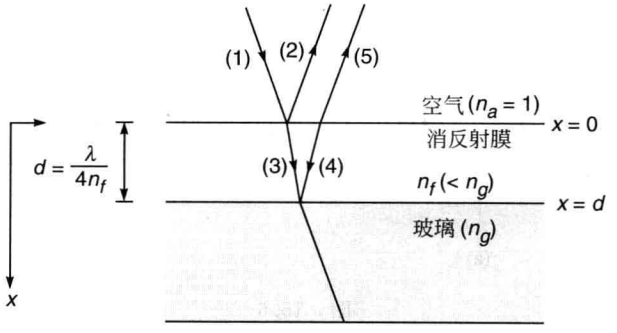


图15.7 在玻璃表面上镀上一层厚度为$\lambda/4n_f$、折射率小于玻璃折射率的膜,则由膜上表面反射的波和由膜下表面反射的波发生相消干涉,这种薄膜称为消反射膜。

如图15.8所示为没有消反射膜(上)和有消反射膜(下)的眼镜的对比,注意上面眼镜所反射的摄影师的像和下面眼镜带颜色的反射。我们强调以下几点。

(1) 设n_a,n_f和n_g分别为空气、消反射膜和玻璃的折射率。若a是入射波的振幅,那么,反射波和透射波的振幅(见图15.7中光线(2)和光线(3))分别为(假设接近正入射)

$$-\frac{n_f-n_a}{n_f+n_a}a,\quad \frac{2n_a}{n_f+n_a}a$$

光线(4)和光线(5)对应的波振幅分别为

① 在这一节接下来的讨论中,均假设是正入射。

② 因为消反射膜的折射率大于空气的折射率而小于玻璃的折射率,所以,光在两个分界面上反射时都会发生π的相位变化。因此,当$2nd\cos\theta'=m\lambda$时发生相长干涉;当$2nd\cos\theta'=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$时发生相消干涉。

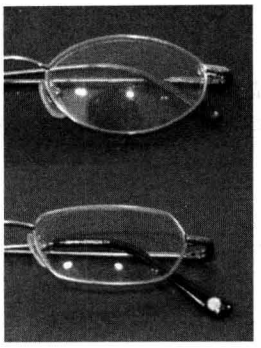


图 15.8　没有消反射膜(上)和有消反射膜(下)的眼镜的对比，注意上面眼镜所反射的摄影师的像和下面眼镜带颜色的反射。图片引自 http://en.wikipedia.org/wiki/Optical_coating (由 Justin Lebar 拍摄)。本图的彩图见前附录图表页的图 14。

$$-\frac{2n_a}{n_f+n_a}\frac{n_g-n_f}{n_g+n_f}a$$

$$-\frac{2n_a}{n_f+n_a}\frac{n_g-n_f}{n_g+n_f}\frac{2n_f}{n_f+n_a}a$$

由于发生完全相消干涉，则光线(2)和光线(5)对应的光波应有相等的幅度，即

$$-\frac{n_f-n_a}{n_f+n_a}a=-\frac{2n_a}{n_f+n_a}\frac{n_g-n_f}{n_g+n_f}\frac{2n_f}{n_f+n_a}a \tag{15.16}$$

或者

$$\frac{n_f-n_a}{n_f+n_a}=\frac{n_g-n_f}{n_g+n_f} \tag{15.17}$$

这里用到了$\frac{4n_an_f}{(n_f+n_a)^2}\approx1$ 的事实。对于 $n_a=1$，$n_f=1.4$，有

$$\frac{4n_an_f}{(n_f+n_a)^2}\approx0.97$$

简化后，得

$$n_f=\sqrt{n_an_g} \tag{15.18}$$

如果第一种媒质是空气，$n_a=1$ 且 $n_g=1.66$(重火石玻璃)，则 $n_f=1.29$；当 $n_g=1.5$(轻冕玻璃)时，$n_f=1.22$。氟化镁和冰晶石的折射率分别为 1.38 和 1.36，则厚为 $\lambda/4n$ 的薄膜的反射率为

$$\left(\frac{n_f-n_a}{n_f+n_a}-\frac{n_g-n_f}{n_g+n_f}\right)^2 \tag{15.19}$$

因此，当 $n_a=1$，$n_f=1.38$ 和 $n_g=1.5$ 时，反射率约为 1.3%；而没有薄膜时，反射率约为 4%。对于重火石玻璃，反射率的减小更为显著。这种减小反射率的技术称为镀膜。

(2) 薄膜只能对一种特定的波长消反射，在式(15.15)中假设 $\lambda=5000$Å。对于复色光，当波长大于或小于上述波长值时，薄膜的消反射性能就会降低，但影响不是很严重。例如，冕牌玻璃上的 MgF_2 消反射膜 $\lambda=5000$Å，对于可见光谱中的红光或紫光来说，反射率也只增加了约 0.5%。在 15.4.2 节中将讨论为什么采用 $\lambda/4n$ 厚的薄膜，而不采用 $3\lambda/4n$ 或 $5\lambda/4n$ 厚的薄膜，虽然后者对所选定的波长也会发生相消干涉。

(3) 消反射现象和杨氏双缝实验的情形一样，不存在能量消失的问题，能量只是重新分布。大部分能量都出现在透射光束中。

15.4.1 反射波的数学描述

对如图15.7所示的消反射膜做如下数学分析,假设 $n_g>n_f>n_a$,$x=0$ 位于膜的上表面且 x 轴指向下方。入射波(沿 $+x$ 轴传播)的位移由下式给出

$$y_1 = a\cos(\omega t - k_a x), \quad k_a = \frac{\omega}{c}n_a \tag{15.20}$$

则在 $x=0$ 处,$y_1=a\cos\omega t$。反射波(见图15.7中光波(2))为

$$y_2 = -a\,|\,r_1\,|\cos(\omega t + k_a x) \tag{15.21}$$

式中

$$|\,r_1\,| = \left|\frac{n_f - n_a}{n_f + n_a}\right| \tag{15.22}$$

是一个正值。式(15.21)中的负号表示 $x=0$ 处的 π 相位突变。透射波(见图15.7中光波(3))用下式表示

$$y_3 = at_1\cos(\omega t - k_f x), \quad k_f = \frac{\omega}{c}n_f \tag{15.23}$$

式中

$$t_1 = \frac{2n_a}{n_f + n_a} \tag{15.24}$$

因此,$x=d$ 处的位移(对应光波(3))为

$$y_3 = at_1\cos(\omega t - k_f d) \tag{15.25}$$

因此,从下表面反射的波(光波(4),沿 $-x$ 轴传播)为

$$y_4 = -at_1\,|\,r_2\,|\cos[\omega t + k_f(x-2d)]$$

$$|\,r_2\,| = \left|\frac{n_g - n_f}{n_g + n_f}\right| \tag{15.26}$$

这里对相位因子进行了调整,以便在 $x=+d$ 时得到式(15.25)的相位。光波(5)则由下式给出

$$y_5 = -at_1\,|\,r_2\,|\,t_2\cos(\omega t + k_a x - 2k_f d) \tag{15.27}$$

假设 y_2 和 y_5 幅度接近相等,那么相消干涉会在满足如下条件时发生

$$2k_f d = \pi, 3\pi, \cdots \tag{15.28}$$

或者

$$d = \frac{\lambda_f}{4}, \frac{3\lambda_f}{4}, \frac{5\lambda_f}{4}, \cdots, \quad \lambda_f = \frac{\lambda}{n_f} \tag{15.29}$$

15.4.2 反射率的精确表达式

在上一节中已经考虑了双光束干涉,并忽略了上表面和下表面之间的多次反射。多次反射的影响将在16.2节中讨论。然而,在结合适当的边界条件求解麦克斯韦方程组时,多次反射效应会被自动地考虑进去,在24.4节中将要对此进行分析,并在第24章(见式(24.97))中给出如图15.7所示电介质薄膜的(正入射情况下)反射率①

$$R = \frac{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2\cos 2\delta}{1 + r_1^2 r_2^2 + 2r_1 r_2\cos 2\delta} \tag{15.30}$$

① r_1,r_2 和 δ 在定义恰当时,即使是斜入射,式(15.30)也成立(见24.4节)。

式中

$$r_1 = \frac{n_a - n_f}{n_a + n_f}, \quad r_2 = \frac{n_f - n_g}{n_f + n_g} \tag{15.31}$$

分别表示第一个和第二个分界处的菲涅尔振幅反射系数，且

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} n_f d \tag{15.32}$$

式中 d 为薄膜厚度，λ 为自由空间波长。利用基本的微商可以证明，当 $\sin 2\delta = 0$ 时，$dR/d\delta = 0$。实际上，对于 $r_1 r_2 > 0$，满足

$$\cos 2\delta = -1 \text{（对应反射率为极小值）} \tag{15.33}$$

是反射率达到极小值的条件。满足这个条件时，反射率由下式给出

$$R = \left(\frac{r_1 - r_2}{1 - r_1 r_2}\right)^2 = \left(\frac{n_a n_g - n_f^2}{n_a n_g + n_f^2}\right)^2 \tag{15.34}$$

这里用到了式(15.31)。因此，当 $n_f = \sqrt{n_a n_g}$ 时，薄膜消反射，与式(15.18)一致。$\cos 2\delta = -1$ 的条件是

$$2\delta = \frac{4\pi}{\lambda} n_f d = (2m+1)\pi, \quad m = 0, 1, 2, \cdots \tag{15.35}$$

或者

$$d = \frac{\lambda}{4n_f}, \frac{3\lambda}{4n_f}, \frac{5\lambda}{4n_f}, \cdots \tag{15.36}$$

如图 15.9 所示，相应于

$$n_a = 1, \quad n_g = 1.5, \quad n_f = \sqrt{n_a n_g} \approx 1.225 \tag{15.37}$$

如图 15.9(a)所示，为薄膜反射率随 δ 变化的曲线。正如所期望的，当 $\delta = 0, \pi, 2\pi, \cdots$ 时，反射率达最大值（$R \approx 4\%$）；当 $\delta = \pi/2, 3\pi/2, \cdots$，即 $d = \frac{\lambda}{4n_f}, \frac{3\lambda}{4n_f}, \cdots$ 时，薄膜消反射（$R = 0$）。举例来说，假如希望在 $\lambda = 6000$Å 处让薄膜消反射，由式(15.36)，可得此时的薄膜厚度为

1224.7Å　或者　3674.2Å　或者　6123.7Å，　…

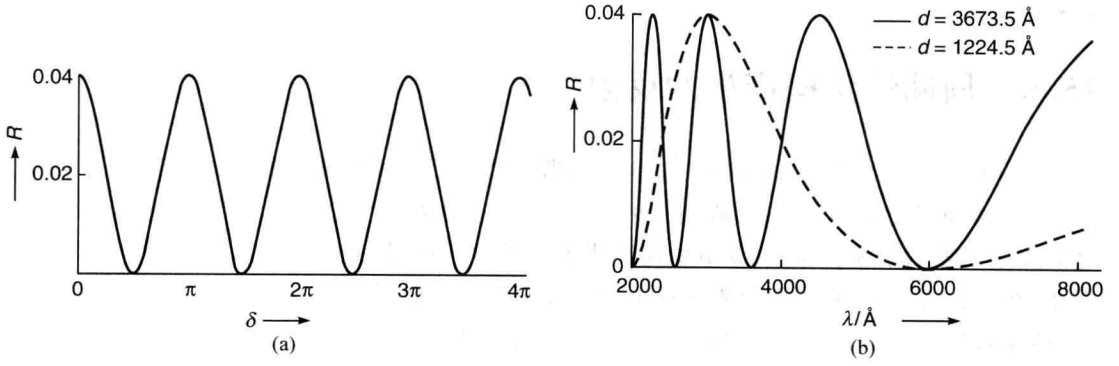


图　15.9

(a) 薄膜反射率随 $\delta(=2\pi n_f d/\lambda)$ 变化的曲线，式中 $n_a = 1, n_g = 1.5$，$n_f = \sqrt{n_a n_g} \approx 1.225$。注意，当 $\delta = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \cdots$ 时，反射率为零；(b) 对于薄膜厚度为 1224.5Å(虚线)和 3673.5Å(实线)的反射率随波长的变化曲线，式中 $n_a = 1, n_g = 1.5$，$n_f = \sqrt{n_a n_g} \approx 1.225$。注意两种厚度的膜在 6000Å 波长时均为消反射。

如图15.9(b)所示,为对应于 $d=1224.7$Å 和 3647.2Å 的反射率随波长的变化曲线。可以看出,对于 $d=\lambda/4n_f$,在可见光谱的整个范围内,最小值的范围很宽且反射率很小。因此,对于消反射膜,倾向于用最小膜厚。对于 $n_a=1$,$n_g=1.5$ 和 $n_f=1.38$ 的条件,反射率为1.4%(根据式(15.34)),非常接近于先前通过近似理论得到的结果(见式(15.19))。

15.5 增反射膜

薄膜干涉现象的另一个重要应用正好与刚才讨论过的问题相反,即在玻璃表面上镀一层适当材料的薄膜来增大反射率。薄膜的厚度也是 $\lambda/4n_f$,式中 n_f 为薄膜的折射率。但由于膜的折射率要大于玻璃的折射率,所以 π 的相位突变只是发生在空气-薄膜分界面,因此,由空气-薄膜分界面和薄膜-玻璃分界面反射的光束产生相长干涉。例如,考虑一个折射率为2.37(硫化锌)的薄膜,它的表面反射率等于 $(2.37-1)^2/(2.37+1)^2\approx16\%$。将它镀在折射率为1.5的玻璃(轻冕玻璃)表面时,反射率变为(见15.4节的分析)

$$\left[-\frac{2.37-1}{2.37+1}-\frac{4\times1\times2.37}{(3.37)^2}\times\frac{2.37-1.5}{2.37+1.5}\right]^2\approx35\%$$

应该注意到,如果薄膜与玻璃之间的折射率差增大,反射率也会随之增大。

根据式(15.30)计算在玻璃上蒸镀薄膜后的高反射率。实际上,当 $n_a<n_f$ 且 $n_f>n_g$,$r_1r_2<0$(见式(15.31)),以及满足

$$\cos2\delta=-1\text{(对应反射率为极大值)} \tag{15.38}$$

为反射率达到最大值的条件。反射率的极大值为

$$R=\left(\frac{r_1-r_2}{1-r_1r_2}\right)^2 \tag{15.39}$$

对于 $n_a=1.0$,$n_f=2.37$ 和 $n_g=1.5$,可得

$$r_1\approx-0.407,\quad r_2\approx0.225。$$

简单的计算表明反射率为33%,这与前述的用近似理论得到的结果35%相比,符合得很好。

15.6 周期性结构产生的反射[①]

在15.4节中已经证明,厚度为 $\lambda/4n_f$ 的薄膜相当于消反射膜,式中 λ 为自由空间的波长,n_f 为薄膜反射率(介于两边媒质折射率之间)。这是因为上分界面和下分界面反射的波之间发生了相消干涉。在15.5节中还证明了如果薄膜折射率小于(或大于)两边媒质的折射率,在这种情况下,除了下分界面反射的光波由于多传播了一段距离而产生的附加相位差外,两反射波之间还有额外的相位差 π。因此,在这种情况下,厚度为 $\lambda/4n_f$ 的薄膜会提高反射率,而不是降低。

现在考虑由厚度均为 d、折射率分别为 $n_0+\Delta n$ 和 $n_0-\Delta n$ 的薄层交替排列组成的媒质(见图15.10(a))。这种媒质称为周期性媒质,折射率变化的空间周期为

① 这一节承蒙 K. Thyagarajan 教授编写。

$$\Lambda = 2d$$

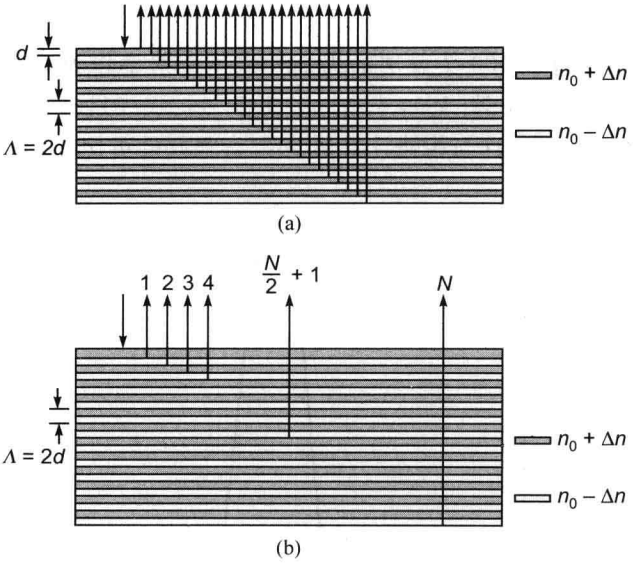


图　15.10

(a) 由厚度均为 $d=\lambda_B/4n_0$、折射率分别为 $n_0+\Delta n$ 和 $n_0-\Delta n$ 的薄层交替排列组成的周期性结构的反射；(b) 如果选择波长 $\lambda_B+\Delta\lambda$，使自第 1 层和自第 $N/2+1$ 层反射的波反相，而自第 2 层和自第 $N/2+2$ 层反射的波也反相，如此类推，一直到最后自第 $N/2$ 层和自第 N 层反射的波也反相，那么，总反射率将为 0。

如果 $\Delta n \ll n_0$，且选择每一薄层的厚度为

$$d = \frac{\lambda}{4n_0} \approx \frac{\lambda}{4(n_0 + \Delta n)} \approx \frac{\lambda}{4(n_0 - \Delta n)}$$

那么，来自不同分界面的各个反射波将同相，从而导致很强的反射。对于选定波长为 λ_B（自由空间的波长）的波将发生强反射，折射率变化周期为

$$\Lambda = 2d = \frac{\lambda_B}{2n_0} \tag{15.40}$$

此结果称为布拉格条件，它与 X 射线经不同原子层产生的布拉格衍射非常类似（见 18.9 节）。式(15.40)对应于正入射的布拉格条件，λ_B 通常称为布拉格波长。

举例来说，考察一个由折射率分别为 1.51 和 1.49 的两种薄层交替排列组成的周期性媒质，即 $n_0=1.50$，$\Delta n=0.01$。如果要求在波长 $\lambda=\lambda_B=5500$Å 得到很强的反射率，则折射率变化周期需满足

$$\Lambda = \frac{5500}{2 \times 1.5}\text{Å} \approx 1833\text{Å}$$

如果周期性媒质由 100 层组成（即 50 个周期），那么，可以近似得到总的合成振幅反射系数为

$$100 \times \frac{\Delta n}{n_0} \approx \frac{1}{1.5}$$

式中 $\Delta n/n_0$ 为每个分界面的振幅反射系数。上面的这个估值只是一个近似值，它在 $\Delta n/n_0 \ll 1$ 时才成立，也就是说适用于低反射率的情况，此处我们只是想粗略地估计一下总反射率。因

此在5500Å波长处的反射率为

$$R \approx \left(\frac{1}{1.5}\right)^2 \Rightarrow R \approx 44\% \tag{15.41}$$

如图15.11所示为包含100个薄层的周期性媒质反射率作为波长函数的实际计算值(采用了严格的电磁理论,见文献[6]),式中 $n_0=1.5$,$\Delta n=0.01$,$d=\lambda_B/4n_0$。注意,实际计算值得到的反射率约为33%,这与粗略计算值44%有很好的可比性。

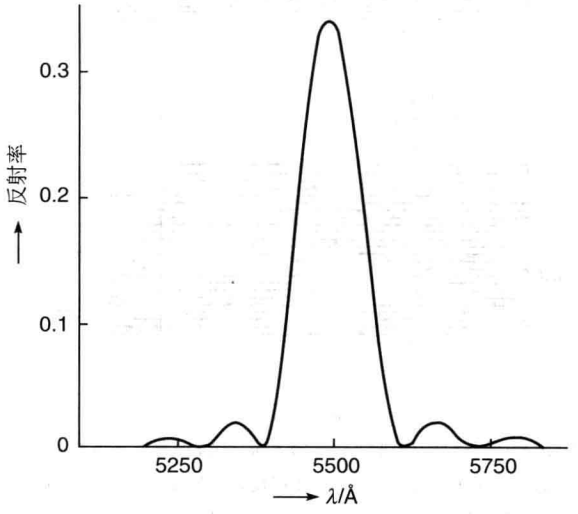


图15.11 100层周期性结构反射率随波长的变化,$n_0=1.5$,$\Delta n=0.01$,$\Lambda=2d=1833$Å。峰值反射率出现 $\lambda=\lambda_B=4n_0d$ 处。(引自参考文献[6])

如图15.11所示,当偏离中心波长($\lambda_B=2n_0\Lambda$)时,周期性媒质的反射率将急剧下降。事实上,可以得到波长偏离 λ_B 一个 $\Delta\lambda$ 时的近似描述,在此处反射率降为零。为了得到这个结果,注意在波长为 $\lambda_B(=2n_0\Lambda)$ 时,从 N 个薄层的每个分界面反射的波均为同相,从而导致强反射。如果偏离波长 λ_B,从不同薄层分界面反射的各个波不再同相,因此反射率下降。如果选择的波长为($\lambda_B+\Delta\lambda$),这使得来自第1层和第($N/2+1$)层的反射波反相,来自第2层和第($N/2+2$)层的反射波反相,如此类推,一直到来自第 $N/2$ 层和第 N 层的反射波反相(见图15.10(b)),那么反射率将为零。对于来源于上面 $N/2$ 层的每一个反射,总会在下面 $N/2$ 层中存在一个与之对应的反相的反射波(这个讨论与获得狭缝衍射图样最小值的光线衍射方向的讨论非常类似,见18.2节和图18.5)。当波长从 λ_B 变化到($\lambda_B+\Delta\lambda$)时,从第1层和第($N/2+1$)层的反射波应该再附加一个 π 的相位差。因此,有

$$\frac{2\pi}{\lambda_B}n_0\frac{N\Lambda}{2}-\frac{2\pi}{\lambda_B+\Delta\lambda}n_0\frac{N\Lambda}{2}=\pi \tag{15.42}$$

等式左边第一项是在波长处于 λ_B 时第1层和第($N/2+1$)层的反射波之间的相位差,此相位差是由于后者多传输额外的路程产生的;第二项是在波长处于($\lambda_B+\Delta\lambda$)时的相位差。假设 $\Delta\lambda\ll\lambda_B$,有

$$\frac{2\pi}{\lambda_B^2}\frac{n_0N\Lambda}{2}\Delta\lambda=\pi$$

或者

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_B}=\frac{\lambda_B}{n_0 N\Lambda}=\frac{\Lambda}{L} \tag{15.43}$$

这里利用了式(15.40)，$L=N\Lambda/2$ 是周期性媒质的总厚度。对于如图 15.11 所示，可得

$$\Delta\lambda\approx 110\text{Å} \tag{15.44}$$

这与其实际计算值可以相比拟。因此，如果入射光用复色光(像白光)，其反射光就可能会有很高的单色性。事实上，这就是应用到白光全息的原理。

上面讨论的周期性媒质在高反射率多层镀膜、体全息、光纤布拉格光栅等方面已有广泛的应用。接下来，将对光纤布拉格光栅作简要讨论。

15.6.1　光纤布拉格光栅

上面讨论的周期性结构在光纤布拉格光栅(缩写为 FBG)中有很重要的应用。本书将在第 27 章里讨论光纤，这里仅提及一些简单的概念。光纤是圆柱形结构，它由一种电介质纤芯和较小折射率材料的包层组成(见图 27.7)。之所以形成光波导是由于在纤芯-包层分界处发生了全反射(详细内容见第 27 章和第 29 章)。包层材料是纯二氧化硅，纤芯一般是掺锗的二氧化硅，掺杂的结果使得纤芯的折射率稍高。现在，当掺锗的纤芯在紫外线辐射中(波长约 0.24μm)曝光，掺锗区域的折射率会升高。这是源于所谓的光敏现象，该现象是被(Kenneth Hill)于 1974 年发现的。光纤中纤芯折射率最大可增大 0.001。如果光纤在一对相干的紫外线光束中曝光(见图 15.12)，将得到类似于如图 14.11(b)所示的干涉图样。在相长干涉区域，折射率增大。既然条纹宽度依赖于干涉光之间的角度，就可以通过选择干涉光之间的角度来控制光栅周期的大小(见例 14.5)。因此，将掺锗光纤在两紫外光束形成的干涉图样中曝光，光纤的纤芯中会形成折射率周期性的变化。

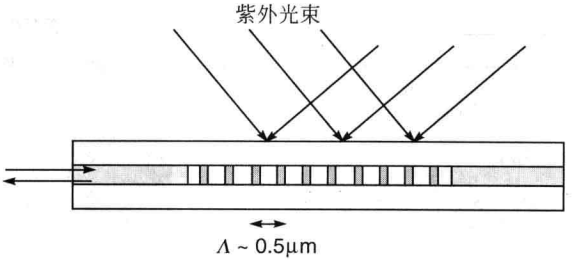


图 15.12　光纤布拉格光栅(通常简写为 FBG)是通过两相干光束产生干涉图样而制造的。

考虑一复色光入射进入光纤中，如图 15.13 所示。如前所述，周期性结构的反射在满足如下条件时会加强

$$\lambda=\lambda_B=2\Lambda n_0 \text{ 布拉格条件} \tag{15.45}$$

这就是布拉格条件。如图 15.13(a)所示是入射复色光的频谱；如图 15.13(b)所示是反射复色光的频谱；如图 15.13(c)所示是反射波的典型频谱，实线表示计算值，虚线表示实验测量值。对于 $n_0\approx 1.46$ 的二氧化硅光纤，为使周期性结构对波长 $\lambda=1550\text{nm}$ 的光反射，必须满足

$$\Lambda=\frac{\lambda_B}{2n_0}=\frac{1550\text{nm}}{2\times 1.46}\approx 0.531\mu\text{m} \tag{15.46}$$

相应的峰值反射率由下式给出

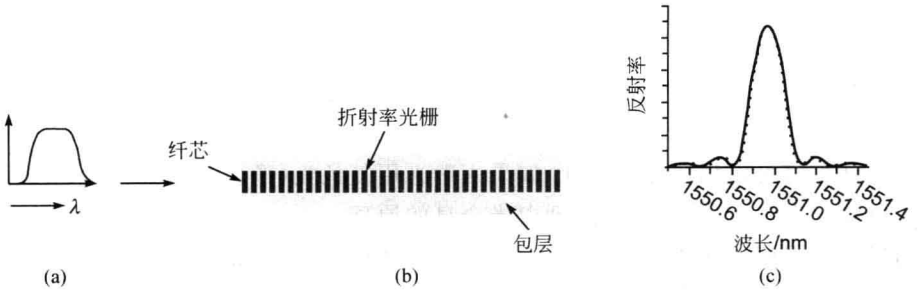


图 15.13

(a) 一宽频谱光波入射进入；(b) 光纤布拉格光栅(FBG)；(c) 反射光波频谱，实线是计算值，虚线是对加尔各答中央玻璃和陶瓷研究所(CGCRI)生产的FBG的实验测量值。

$$R_p = \tanh^2\left(\frac{\pi\Delta nL}{\lambda_B}\right) \approx 0.855 \tag{15.47}$$

式中假设 $\Delta n = 4\times10^{-4}$，$L = 2\text{mm}$。相应带宽由下式给出(见式(15.43))

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_B} \approx \frac{\lambda_B}{2n_0L}\left\{1+\left(\frac{(\Delta n)L}{\lambda_B}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{15.48}$$

得到 $\Delta\lambda \approx 0.5\text{nm}$。由式(15.48)可以看出，带宽(即反射波的单色性)和峰值反射率取决于 Δn 和 L。

由于反射谱极小的带宽，FBG被广泛应用于传感器中。例如，温度略微升高会使光栅周期增大，从而导致峰值波长变长。因为二氧化硅是电介质(绝缘体)，所以，基于FBG的温度传感器广泛应用于高压环境中。如图15.14所示是用于电力变电站(见图15.15)400kV供电导线上的基于FBG的温度传感器系统。图15.16是图15.14中所用的两个FBG传感

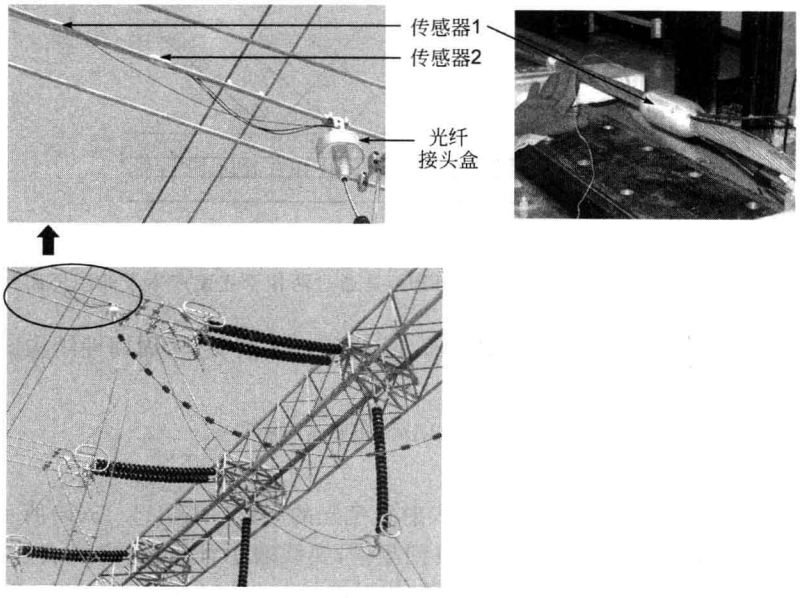


图 15.14　用于印度电网公司 Subhashgram 变电站(在加尔各答附近)400kV 供电导线上的基于FBG的温度传感器系统。图片由加尔各答中央玻璃和陶瓷研究所的 Tarun Gangopadhyay 博士和 Kzmal Dasgupta 博士提供。彩图见文前附录图表页的图15。

器的典型反射谱及测量温度的记录报告。对于这两个传感器，峰值反射率分别出现在 1544.6438nm 和 1545.8789nm 处。

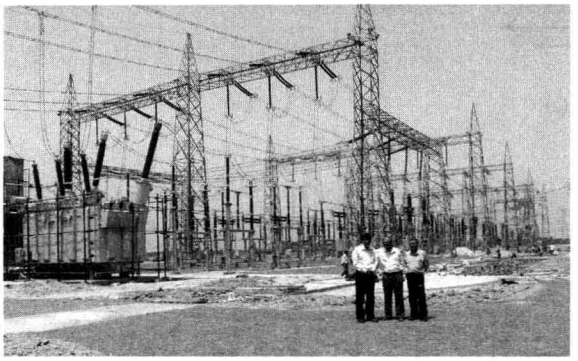


图 15.15　印度电网公司变电站，在这里安装了 FBG 温度传感器。照片中作者与加尔各答中央玻璃和陶瓷研究所的 Tarun Gangopadhyay 博士和 Kzmal Dasgupta 博士一起。彩图见文前附录图表页的图 16。

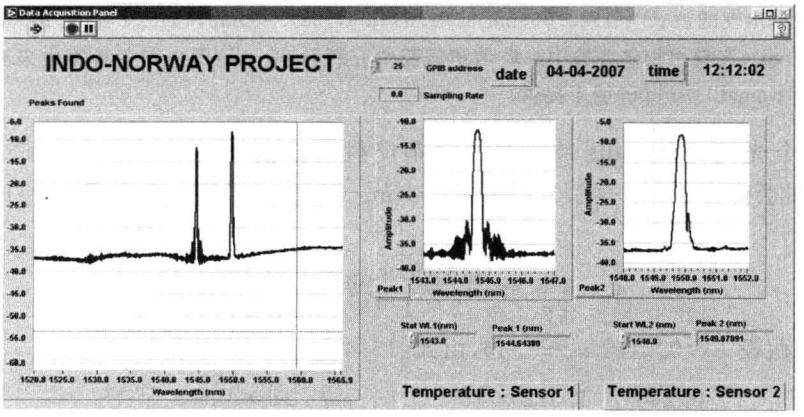
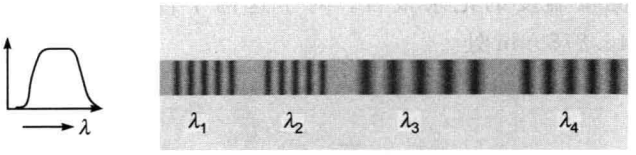


图 15.16　图 15.14 所示的两个 FBG 传感器的典型反射谱。照片提供者：加尔各答中央玻璃和陶瓷研究所的 Kamal Dasgupta 博士和 Tarun Gangopadhyay 博士。

FBG 传感器的一个主要优势就是几个光栅可以写在同一根光纤上，如图 15.17 所示。每个光栅有不同的结构周期，分别对应于一个特定波长的峰值反射率。如果将一个分布式传感器放置在大桥里，就可以测量出相应的特定区域的应力。事实上，对于许多新建的桥梁，FBG 传感器被安放在不同的地方。图 15.18 所示为写有 6 个光栅的光纤实际反射光谱，其中每个光栅都有不同的周期。出现峰值反射率的波长分别为

1522.030nm，3dB 带宽为 0.240nm
1529.915nm，3dB 带宽为 0.230nm
1537.950nm，3dB 带宽为 0.240nm
1545.955nm，3dB 带宽为 0.230nm
1553.990nm，3dB 带宽为 0.240nm
1561.895nm，3dB 带宽为 0.230nm



(a) (b)

图 15.17

(a)一宽频谱光波入射进入如图(b)所示的写有4个光栅的光纤中。每个光栅的周期稍有不同，因为每个光栅要在不同的波长处出现反射率峰值。

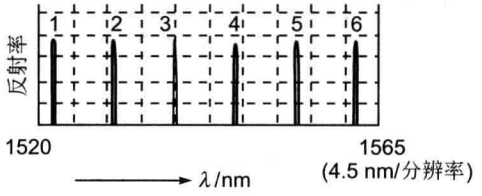


图 15.18 由写有6个光栅的光纤的反射波得到的实际光谱，每个光栅的周期稍有不同。峰值反射率出现的波长为1522.030nm，1529.915nm，1537.950nm，1545.955nm，1553.990nm，1561.895nm。光栅由加尔各答中央玻璃和陶瓷研究所制造。(该图由加尔各答中央玻璃和陶瓷研究所 Kamal Dasgupta 博士提供)

以第一个光栅为例，3dB 带宽的意思是反射率在偏离中心波长 $\lambda\approx1521.910\text{nm}$ 和 1522.150nm 处会降为 50%。每个光栅栅格长 1cm。因此，对于第一个光栅($\lambda_B=1522.030\text{nm}$)，可得

$$\Lambda=\frac{\lambda_B}{2n_0}=\frac{1522.030\text{nm}}{2\times1.46}\approx0.5212\mu\text{m}$$

进一步，假设 $L=0.01\text{m}$，$n_0\approx1.46$，由式(15.48)有(注意单位!)

$$\frac{0.240}{1522}\approx\frac{1.522\times10^{-6}}{1.46\times0.01}\times\left[1+\left(\frac{\Delta n\times0.01}{1.522\times10^{-6}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

可得

$$\Delta n\approx1.7\times10^{-4}$$

15.7 点光源照射平行平面薄膜发生的干涉

在15.2节中讨论过当平行光束入射到薄膜上时，由薄膜上、下表面反射的光波产生的干涉。现在考察用点光源照明薄膜的情况。观察薄膜时为了不挡住入射光束，再次采用部分反射片 G，如图15.19所示。但是，为便于研究干涉图样起见，可以假设点光源 S 在薄膜的正上方(见图15.19)，以致(见图15.20中的)$\overline{SK}$ 等于(见图15.19中的)$\overline{SA}+\overline{AK}$；(见图15.19中的)$KA$ 和(见图15.20中的)KS 与薄膜垂直。显然，(见图15.20中)由薄膜上表面反射的光波如同从点 S' 发出的一样，满足

$$\overline{KS'}=\overline{KS}\tag{15.49}$$

(见图15.20)并且，根据简单的几何关系可以证明，由薄膜下表面反射的光波是如同从

点 S''发出的一样，点 S''满足

$$\overline{KS''} \approx \overline{KS} + 2d/n_2 \tag{15.50}$$

(见图 15.20)式(15.50)只在接近正入射的情况下才成立[①]。因此，对于接近正入射的情况，在区域Ⅰ(见图 15.20)产生的图样几乎[②]与由两个相干点光源 S'和 S''产生的图样相同(即

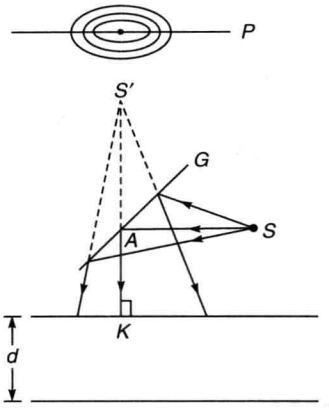


图 15.19　点光源 S 发出的光照射到厚度为 d 的薄膜上，G 为部分反射片，P 为照相底片，在照相底片上将获得圆形条纹。

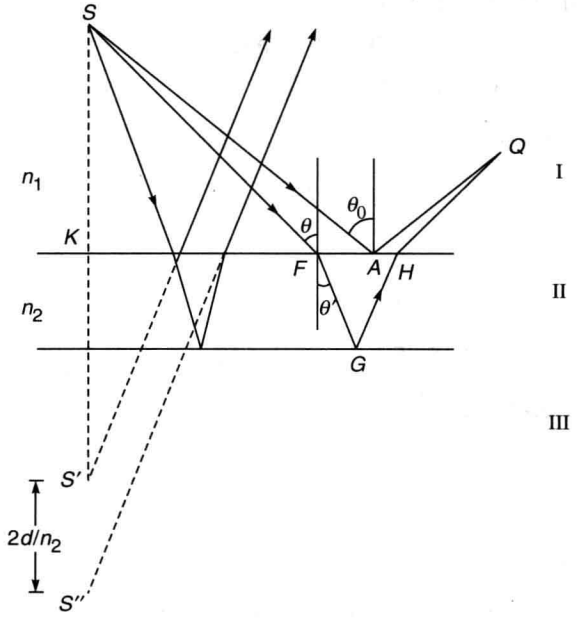


图 15.20　点光源 S 发出的光入射到薄膜上，在区域Ⅰ产生的干涉图样近似地等同于由两个相干点光源 S'和 S''所产生的，S'和 S''之间的距离为 $2d/n_2$，式中 d 为薄膜的厚度，n_2 为薄膜的折射率。

① 这是由于折射平面所成的点光源的像不理想的缘故。

② 事实上，它不同于杨氏图样，原因是点 S''不是点 S 的理想的像。当入射角较大时，下表面反射的光就好像是从相对于点 S''有位移的一点发出的一样。

第14章中讨论的杨氏双孔干涉实验)。因此,如果(像如图15.19所示那样)放置照相底片P,一般将获得干涉条纹。空间任一点Q(见图15.20)的强度由下面的关系式决定

$$\Delta = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda \qquad \text{(极大值)} \tag{15.51a}$$

$$\Delta = m\lambda \qquad \text{(极小值)} \tag{15.51b}$$

式中

$$\Delta = [n_1\,\overline{SF} + n_2(\overline{FG}+\overline{GH}) + n_1\,\overline{HQ}] - [n_1(\overline{SA}+\overline{AQ})] \tag{15.52}$$

代表光程差,并且已假设了其中一路反射有π的相位突变;n_1和n_2分别表示媒质Ⅰ和媒质Ⅱ的折射率。上面两个条件是严格正确的,即,在入射角很大时也成立。此外,可以证明,在接近正入射时,有

$$\Delta \approx 2n_2 d\cos\theta' \tag{15.53}$$

更严格的计算可证明(参见文献[7])

$$\Delta \approx 2n_2 d\cos\theta'\left[1-\frac{n_1^2\sin\theta\cos\theta}{n_2^2-n_1^2\sin^2\theta}\left(\frac{\theta_0-\theta}{2}\right)\right] \tag{15.54}$$

式中θ,θ_0和θ'如图15.20所示定义。

如果放置照相底片P(平行于薄膜表面(见图15.20)),将得到一些明暗相间的同心圆环条纹(见例14.6)[①]。另一方面,如果用肉眼观察薄膜,对于一个给定的眼睛位置就只能看见薄膜的很小的一部分,例如,当眼睛位于点E且点光源位于点S时,只有点B附近的薄膜部分可以看见(见图15.21(a)),点B看起来是暗还是亮,决定于光程差

$$\Delta = n_1\,\overline{SQ} + n_2(\overline{QA}+\overline{AB}) - n_1\,\overline{SB}$$

是$m\lambda$还是$\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$。此外,用一种类似于15.3节中介绍的方法,可得

$$\Delta \approx 2n_2 d\cos\theta' \tag{15.55}$$

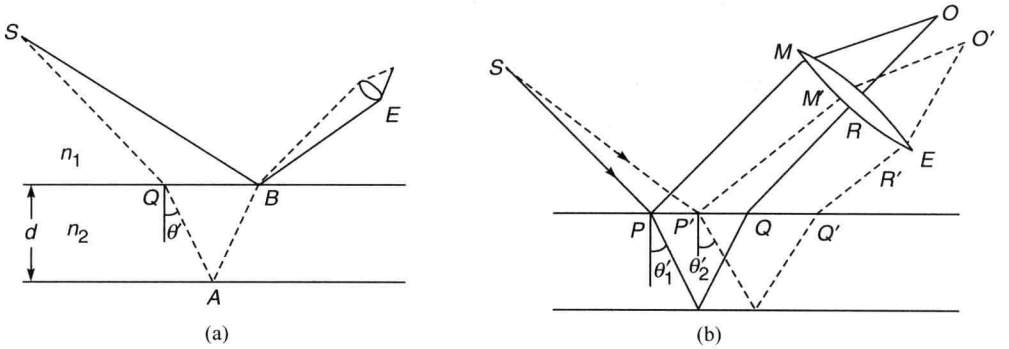


图15.21 点光源S发出的光入射到薄膜上[②]

(a) 用肉眼观察薄膜,如果光程差$[n_1\,\overline{SQ}+n_2(\overline{QA}+\overline{AB})-n_1\,\overline{SB}]$等于$m\lambda$,点$B$为暗点;如果光程差等于$\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$,点$B$为亮点;(b) 若眼睛聚焦于无穷远处,那么,眼睛接收到的是来自不同方向对应于不同折射角θ'的平行光线(它们有不同的光程差)。

① 如果点光源远离薄膜,则容易看出,圆环条纹将扩散开来;在点光源离薄膜无限远的情况下(即平行入射),照相底片将被均匀照明。

② 原图有误,根据文字描述,图中的θ_1和θ_2应该修订为θ_1'和θ_2'。

如果眼睛透过薄膜聚焦于无穷远处而不去看薄膜[①]，那么，发生干涉的两束光是由同一入射光线在薄膜上、下表面反射产生的（见图 15.21(b)）。例如，聚焦于视网膜上点 O 的光线 PM 和 QR 是由同一光线 SP 分割出来的，而聚焦于视网膜上点 O' 的两条光线 $P'M'$ 和 $Q'R'$ 是由光线 SP' 分割出来的。由于（对应于这两组光线的）折射角 θ_1' 和 θ_2' 不等，所以，在点 O 和点 O' 的强度一般也是不等的。

下面来讨论用扩展光源 S 照明的情况（见图 15.22）。扩展光源可以用一盏钠光灯照射一块毛玻璃来产生。扩展光源上的每一点都会在照相底片 P 上产生自己的干涉图样，而且这些干涉图样彼此错位，因此，在照相底片上看起来没有明确稳定的条纹图样出现。但是，如果用眼睛观察薄膜，来自薄膜上所有点的光线都会到达眼睛。如果眼睛调焦于无穷远处，那么，只有来自某一特定方向的平行光线才能到达眼睛，聚焦于视网膜的一点。而这组平行光是从扩展光源上相近的一些点发出的，并且它们聚焦在视网膜上产生的强度取决于 $2n_2 d\cos\theta'$ 的值，而这个值对所有的平行光，如 S_1Q, S_2Q' 等都是相同的（见图 15.22）。不同方向发出的光线（如 S_1R, S_2R' 等）对应于不同的 θ'，并且会聚在视网膜的不同点上。由于在一个圆锥面（锥轴垂直于薄膜，锥顶在眼睛位置）上的 θ' 是常数，所以，眼睛将看到一些明暗相间的同心圆环，圆环的中心在 $\theta'=0$ 的方向上。这种由厚度均匀的薄膜产生的条纹称为海丁格条纹，也叫做等倾条纹，因为光程的变化是由入射方向的变化，也就是由 θ' 的变化引起的。在 15.10 节中将讨论可以用来观察这种条纹的迈克耳孙干涉仪。

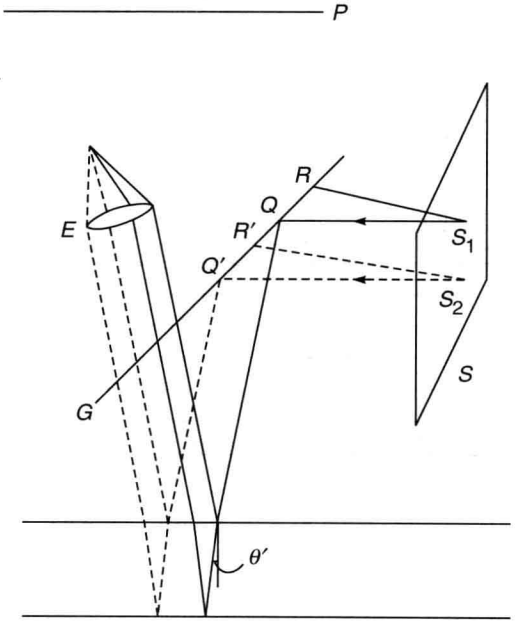
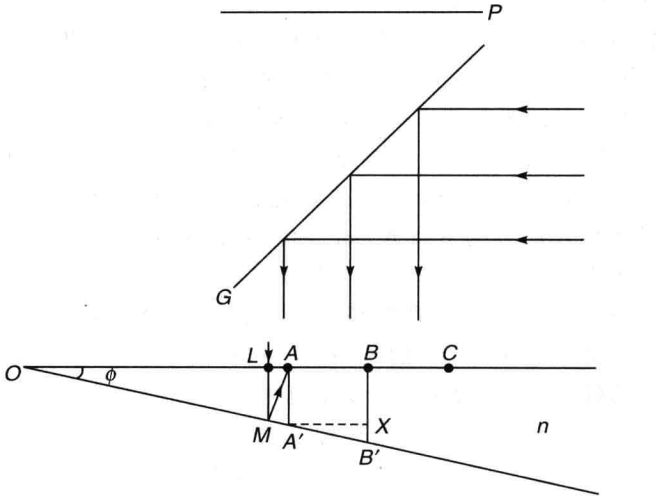


图 15.22　用扩展光源发出的光照亮薄膜，G 为部分反射片，P 为照相底片，眼睛 E 聚焦于无穷远处。

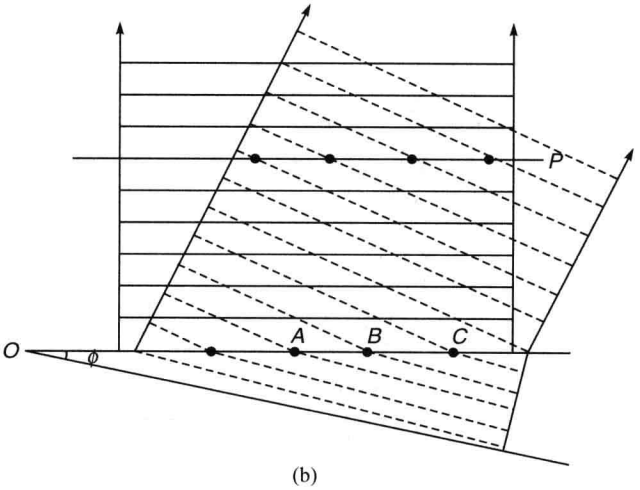
① 有些读者有看计算机制作的立体画的经验。如果只是将眼睛聚焦于画的表面，是很乱的图案；但是如果努力将眼睛调节到不去看画表面，而是透过画表面往里看无穷远处，显示在眼睛里的就是三维立体像了。这里用同样的方法调节眼睛。译者注。

15.8 两反射面不平行的薄膜发生的干涉

到目前为止,我们都假设薄膜是等厚的。下面来讨论厚度不均匀薄膜所产生的干涉图样,以两个不平行平面夹成的一个楔形劈尖薄膜为例(见图 15.23(a))。



(a)



(b)

图 15.23

(a) 平行光束入射到一个劈尖上;(b) 实线和虚线分别表示上表面和下表面反射的光波在某一特定时刻的波峰位置,极大值对应于实线和虚线的交点,条纹垂直于纸面。

首先考察平行光束正入射到薄膜上表面的情况(见图 15.23(a))。如图 15.23(b)所示,实线和虚线分别表示从薄膜上表面和下表面反射的光波在某一个特定时刻的一系列波峰位置。显然,在照相底片 P 上将记录到一些平行于劈尖棱边的直线干涉条纹(棱边是通过点 O 并垂直于纸面的一条线)。如图 15.23(b)所示的黑点表示极大值的位置。为求出薄膜上相

邻两条纹之间的距离，假设点 A 是明亮的[①]，则有

$$n(\overline{LM}+\overline{MA})=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda,\quad m=0,1,2,\cdots \tag{15.56}$$

（见图 15.23(a)）然而，当劈尖角 ϕ 很小时（实际情况确实如此），有

$$\overline{LM}+\overline{MA}\approx 2\,\overline{AA'}$$

式中 $\overline{AA'}$ 为点 A 处的薄膜厚度。因此，点 A 为亮点的条件为

$$2n\,\overline{AA'}\approx\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda \tag{15.57}$$

同理，相邻的亮条纹出现在满足式(15.58)的点 B

$$2n\,\overline{BB'}\approx\left(m+\frac{3}{2}\right)\lambda \tag{15.58}$$

因此，有

$$2n(\overline{BB'}-\overline{AA'})\approx\lambda$$

或者

$$\overline{XB'}\approx\lambda/2n \tag{15.59}$$

又有

$$\overline{XB'}=\overline{A'X}\tan\phi$$

或者

$$\overline{A'X}=\beta\approx\frac{\lambda}{2n\phi} \tag{15.60}$$

式中 β 为条纹宽度，并假设 ϕ 是很小的。这种条纹通常称为等厚条纹。

另一方面，对于点光源，条纹图样将类似于平行平面薄膜的情况，即，在接近正入射时，干涉图样几乎与两点光源 S' 和 S''（见图 15.24）所产生的完全相同（但是要注意，点 S'' 不在点 S' 的正下方，这是由于薄膜上、下两表面不平行所造成的结果）。任一点 Q 的强度由下式决定

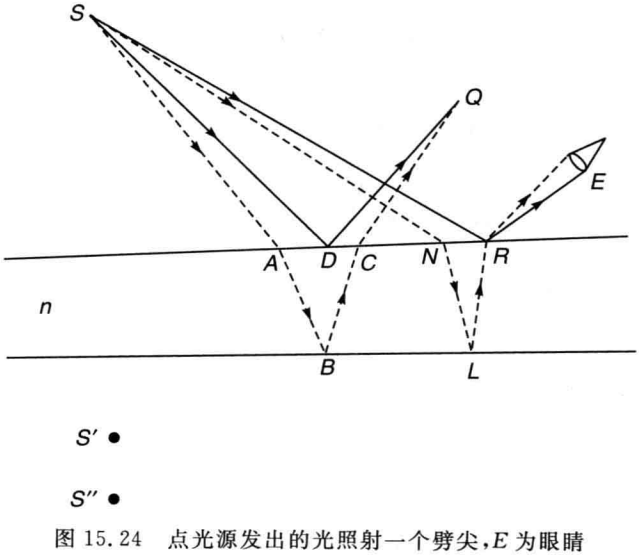


图 15.24　点光源发出的光照射一个劈尖，E 为眼睛

① 这里假设光束在上表面反射时有 π 的相位变化，但条纹宽度的表示式(15.60)与这个条件无关。

$$[\overline{SA}+n(\overline{AB}+\overline{BC})+\overline{CQ}]-(\overline{SD}+\overline{DQ})\begin{cases}=\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\lambda & \text{(极大值)}\\ =m\lambda & \text{(极小值)}\end{cases}\tag{15.61}$$

如果用肉眼观察薄膜(比如眼睛在 E 处,如图 15.24 所示),则只能看到(点 R 附近的)很小一部分薄膜,点 R 呈亮点还是暗点取决于光程差$\{[\overline{SN}+n(\overline{NL}+\overline{LR})]-\overline{SR}\}$等于$\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\lambda$ 还是 $m\lambda$。同理,也可以用类似的方法来讨论眼睛聚焦于无穷远处的情况。

下面讨论扩展光源 S 照射薄膜的情况,如图 15.25 所示。由于扩展光源可以看作由大量的独立点光源组成的,每一个点光源都在照相底片 P 上产生它自己的图样,因此,将观察不到明确稳定的条纹图样①。但是,如果用照相机(或眼睛)观察薄膜并将照相机聚焦于薄膜上表面,那么,薄膜上的一个特定点将取决于 $2nd$ 是等于 $m\lambda$ 还是$\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\lambda$ 而呈暗点或亮点(见图 15.25),这里假设光线接近正入射。如图 15.25 所示,在点 Q 发生的干涉是源于发自扩展光源上不同点的光线②,如果光线接近正入射,点 Q 的强度就完全由该处的薄膜厚度决定。同理,点 Q'的强度由点 Q'处的薄膜厚度决定,但是,点 Q'将聚焦于视网膜上的

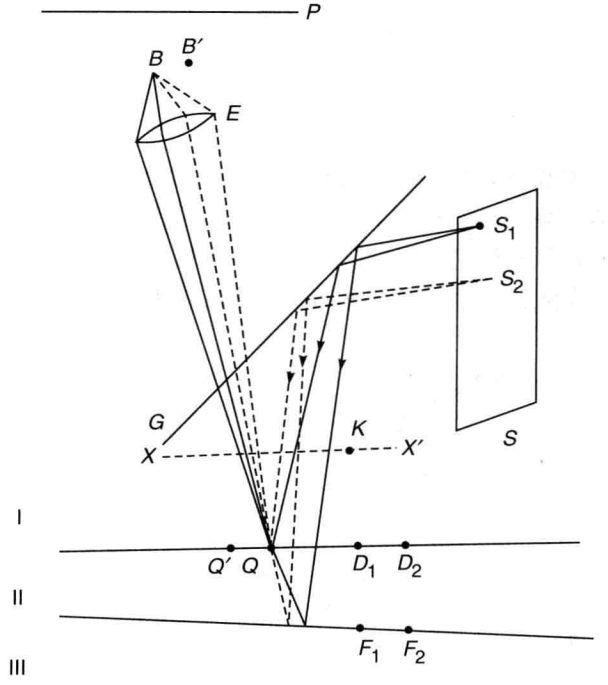


图 15.25　用扩展光源 S 产生的定域干涉条纹,这种条纹只有当眼睛调焦于薄膜上表面时才可以看见。

① 但是这对于一点有例外,就是当扩展光源离得很远时,到达玻璃片 G 的光线近似是平行的,这时将会在底片 P 上形成低对比度的干涉图样。如果不是把扩展光源移远,而是把底片 P 放到远离劈尖的地方,也会出现同样的现象。

② 这段文字与如图 15.25 所示中所标字母配合不上,译者已根据文字将图中字母 Q 和 Q'互换。译者注。

另一点 B'。条纹将是一系列平行于薄膜棱边 OO' 的直线（见图 15.26）。应该强调指出，自始至终都假设光线是接近正入射的，而且劈尖角极小，并且这些假设在实际情况中确实是成立的。

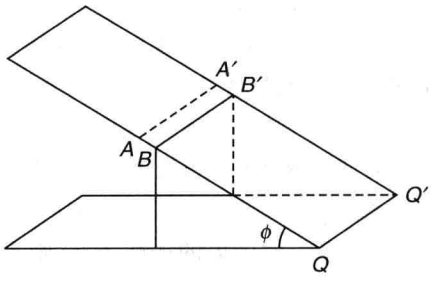


图 15.26　劈尖产生的条纹平行于棱边 OO'

有趣的是，如果把照相机聚焦在薄膜上方的平面 XX' 上，就不会看到明确稳定的干涉图样。这是由于从点 S_2 到达点 K 的光波是在点 D_2 和点 F_2 发生反射，而从点 S_1 到达点 K 的光波是在点 D_1 和点 F_1 发生反射的缘故。由于薄膜厚度不均匀，从点 S_1 到达点 K 的光波可能产生亮条纹，而从点 S_2 到达点 K 的光波就有可能产生暗条纹。因此，为了观察到条纹，必须把照相机聚焦于膜的上表面。从这层意义上讲，这种条纹称为是定域的。作为作业留给读者，要求证明如果照相机聚焦于无穷远处，将记录不到明确稳定的干涉图样。

到目前为止，一直都假设膜是“薄”的，现在的问题是，膜应该薄到什么程度。为了获得干涉图样，从薄膜上表面和下表面反射的光波之间应有确定的相位关系。因此，光程差 $\Delta(=2nd\cos\theta')$ 应小于相干长度[①]。例如，如果使用普通钠光灯的 D_1 线（$\lambda=5.890\times10^{-5}$ cm），相干长度有 1cm 的数量级，因此，为了能观察到条纹，Δ 应比 1cm 小得多。应该指出，并不存在对应于条纹消失的明确的 Δ；但随着 Δ 的增大，条纹的对比度越来越差。激光束的相干长度很长，所以，即使光程差比 1m 大得多，仍可以看见条纹。另一方面，如用白光光源，只要 $\Delta\geqslant2\times10^{-4}$ cm，就看不见条纹了（见 14.9 节）。

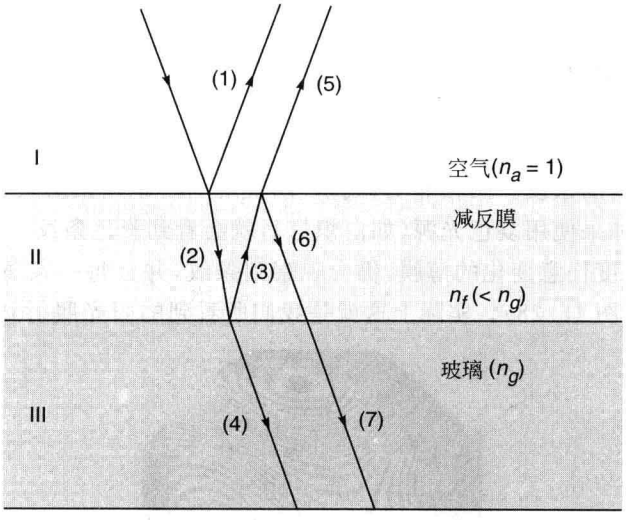


图 15.27　一般而言，即使光束(1)和光束(5)的振幅接近相等，光束(2)和光束(6)的振幅也相差悬殊。

① 相干长度的定义见 17.1 节。如果光源在时间 τ 内仍保持是相干的，则相干长度（L）大约是 $c\tau_c$，式中 c 为自由空间的光速。当 $\tau_c\approx10^{-10}$ s 时，$L\approx3$cm。

应该指出,干涉也会发生在区域Ⅲ的两光束之间(见图 15.27),其中一束是直接透射光束,另一束是经历两次薄膜反射后(第一次在下表面,第二次在上表面)透出来的光束。然而由于这两束光的振幅相差悬殊,因此形成的条纹对比度将很差(见例 15.1)。

例 15.1 考察处于空气中的一个折射率为 1.36 的薄膜。设光束接近正入射($\theta\approx0$),试证明:反射光束(1)和光束(5)(见图 15.27)的振幅接近相等,但透射光束(4)和光束(7)的振幅却相差悬殊(这就是在透射方向看到的条纹对比度很差的原因)。

解 设入射光束的振幅为 a,则光束(1),(2),(3),…的振幅分别为 $a_1,a_2,a_3,\cdots$。根据式(15.10a)和式(15.10b),可得

$$a_1=\frac{1-n}{1+n}a=-\frac{0.36}{2.36}a\approx-0.153a$$

$$a_2=\frac{2}{1+n}a=\frac{2}{2.36}a\approx0.847a$$

$$a_3=\frac{n-1}{n+1}a_2=\frac{0.36}{2.36}\times0.847a\approx0.129a$$

$$a_5=\frac{2n}{n+1}a_3=\frac{2\times1.36}{2.36}\times0.129a\approx0.149a$$

$$a_4=\frac{2n}{1+n}a_2=\frac{2\times1.36}{2.36}\times0.847a\approx0.977a$$

$$a_7=\frac{2n}{n+1}a_6=\frac{2n}{n+1}\frac{n-1}{n+1}a_3=\frac{2\times1.36\times0.36}{(2.36)^2}a_3\approx0.023a$$

首先注意到 a_5 和 a_1 的符号相反,这是由于光束在点 B 反射时发生了 π 相位突变的结果,且 $|a_5|\approx|a_1|$。另一方面,$|a_7|\ll|a_4|$,这就是在折射光中形成干涉条纹的对比度很差的原因。

15.9 薄膜的颜色

15.8 节中已知,如果来自扩展单色光源(如钠光灯)的光正入射到一个劈尖上,会观察到等间距的明暗相间的条纹。两相邻明(或暗)条纹之间的距离由劈尖角、光波波长以及薄膜的折射率决定。如果使用复色光源(如白炽灯),就会看到彩色条纹。更进一步,如果不用劈尖,而是用一个厚度任意变化的薄膜,仍会观察到条纹,并且每一条条纹都代表了薄膜上等厚度点的轨迹(见图 15.28)。实际上这就是我们所看到的阳光照射到肥皂泡上或照射在



图 15.28 相互接触的两玻璃表面(非光学平面)之间形成的空气膜所产生的典型干涉条纹图样。当空气膜的厚度等于 $m\lambda/2$ 时,得到暗条纹;当空气膜的厚度等于 $\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda/2$ 时,得到明条纹。每条条纹描述了薄膜上等厚度点的轨迹。(照片由 R. S. Sirohi 教授提供)

水面上的油膜时所呈现出的五光十色的干涉图样，参见前附录图表页的图 13。应该指出，如果薄膜上表面和下表面反射的光波之间的光程差超过了几个波长，那么，由于多种颜色的干涉图样互相重叠，干涉图样将被“洗刷掉”，结果使得什么条纹也看不见（见 14.9 节）。因此，为了能看见白光的干涉条纹，薄膜的厚度应不超过几个波长。

15.10　牛顿环

如果将一块平凸透镜放在平板玻璃表面上，就会在透镜的凸面（AOB）和平板玻璃面（POQ）之间形成一个空气膜（见图 15.29）。在两表面的接触点 O，空气膜的厚度为零，由接触点向外，膜的厚度逐渐增大。如果用单色光（如钠光）照射透镜表面，则由面 AOB 反射的光会与由面 POQ 反射的光发生干涉。在接近正入射（并且只考虑紧靠接触点的那些点）的情况下，两反射光波的光程差非常接近于 $2nt$，式中 n 为膜的折射率，t 为膜的厚度。因此，只要空气膜的厚度满足

$$2nt = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad m = 0,1,2,\cdots \tag{15.62}$$

将得到光强的极大值。同理，满足

$$2nt = m\lambda \tag{15.63}$$

将得到光强的极小值。由于透镜的凸面是球面，所以空气膜的厚度在（以点 O 为中心的）圆上是常数，因此，将得到同心的明暗相间的圆环，这些圆环称为牛顿环[①]。应该指出，为观察这些条纹，显微镜（或眼睛）必须聚焦于膜的上表面（见 15.7 节的讨论）。

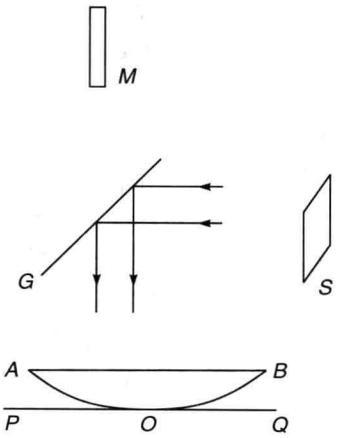


图 15.29　观察牛顿环的装置。来自扩展光源 S 的光正入射到由平凸透镜 AOB 和平面玻璃板 POQ 形成的薄膜上，M 表示移测显微镜。

不同圆环的半径是很容易计算的。前面已经提到过，空气膜的厚度在以接触点 O 为中心的圆上是常数。设第 m 个暗环的半径为 r_m，设出现第 m 个暗环处的空气膜厚度为 t，则有

$$r_m^2 = t(2R - t) \tag{15.64}$$

式中 R 为透镜凸面的曲率半径（见图 15.30）。如果令 $R \approx 100\text{cm}$，$t \leqslant 10^{-3}\text{cm}$，则同 $2R$ 相比可略去 t，可得

$$r_m^2 \approx 2Rt$$

或者

$$2t \approx \frac{r_m^2}{R} \tag{15.65}$$

把式（15.65）代入式（15.63），可得

① 波义耳和胡克早在牛顿之前就各自独立观察过这种条纹，但是牛顿首次测量出了这些条纹的半径，并进行了分析。正确的解释是由托马斯·杨给的。见本章开始时的“里程碑”。

$$r_m^2 \approx m\lambda R, \quad m = 0,1,2,\cdots \tag{15.66}$$

式(15.66)表明各圆环的半径随着自然数的平方根变化。因此,随着半径的增大,环与环的间距变得密集起来(见图15.31)。两个相邻暗环之间有一个亮环,它的半径是$\sqrt{m+\frac{1}{2}}\lambda R$。

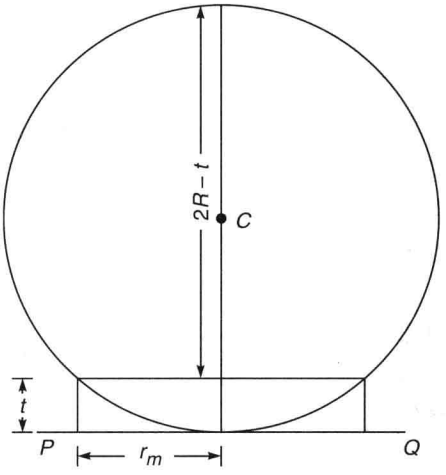


图15.30 r_m表示第m个暗环的半径,(形成第m个暗环处的)空气膜的厚度为t。

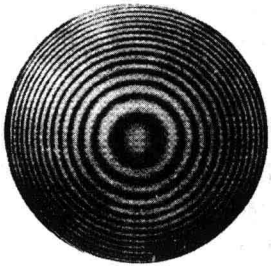


图15.31 观察到的由反射光形成的牛顿环,在透射光中观察到的环的对比度要差得多(照片由G. Bose博士提供)。

在实验室里利用如图15.29所示的装置很容易观察到牛顿环。扩展光源(发出准单色光,如钠光灯)照射到部分反射玻璃片上,由玻璃片反射的光束再投射到平凸透镜-玻璃片装置上,直接用眼睛观察或通过移测显微镜M观察,都很容易看到牛顿环。实际上,并不一定需要平凸透镜,利用双凸透镜也可以看到圆环。

典型地,当$\lambda=6\times10^{-5}$cm,$R=100$cm时,有

$$r_m = 0.0774\sqrt{m} \tag{15.67}$$

因此第1,2,3个暗环的半径分别约为0.0774cm,0.110cm,0.134cm。可见,第2、3暗环间的间距要小于第1、2暗环间的间距。

式(15.63)预言了中央斑点是暗的。通常,由于有尘埃微粒,实际的接触点的接触并不是很理想,因此,中央斑点可能不完全是暗的。所以在实验中应该测量第m个和第$(m+p)$个环($p\approx10$)的半径,再取半径平方之差($r_{m+p}^2-r_m^2=p\lambda R$),这样就完全与$m$无关了。通常测量直径更为准确,用直径表示时,波长由下式给出

$$\lambda = \frac{D_{m+p}^2 - D_m^2}{4pR} \tag{15.68}$$

透镜的曲率半径可以利用球径仪准确地测量出来,因此,只要测出暗环(或者亮环)的直径,就可以通过实验确定光的波长。

如果在透镜和玻璃板之间注入折射率为n的液体,暗环的半径由下式给出

$$r_m = (m\lambda R/n)^{1/2} \tag{15.69}$$

可以将式(15.69)与式(15.66)相比较。此外,如果透镜和玻璃板材料的折射率不同,并且液体的折射率大小在它们二者之间时,中央斑点是亮的(见图15.31),而式(15.69)给出

的将是亮环半径。

与牛顿环实验有关原理的一个重要的实际应用是测定一玻璃平板的光学平整度。将一块玻璃板置于另一块平整度已知的玻璃板表面上，用准单色光束照射这个组合装置，并用显微镜观察反射光，一般来讲，会看到一些明暗相间的斑纹（见图 15.28）。两玻璃板表面之间的空隙形成一个厚度变化的空气膜，当厚度为 $m\lambda/2$ 时，就看到暗斑；当厚度为 $\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda/2$ 时，就看见亮斑。两相邻暗条纹之间空气膜的厚度相差 $\lambda/2$。因此，测出相邻暗条纹或亮条纹间的距离，就可以计算出玻璃板的平整度。

例 15.2　考察波长为 $\lambda=6.4\times10^{-5}$cm 的准单色光形成的牛顿环，假设接触点是理想的。现在竖直向上缓慢提起透镜，试讨论当透镜逐渐离开玻璃板时，由显微镜所看到的圆环图样的变化情况。假设透镜凸面的曲率半径为 100cm。

解　既然接触点是理想的，那么中央斑点是暗的。第一个暗环在满足 $\overline{PA}=\lambda/2$ 的点 P 形成，并且环的半径 $\overline{OA}=\sqrt{\lambda R}$（$=0.080$cm），见图 15.32(a)。同理，第 2 个暗环的半径为 $\overline{OB}=\sqrt{2\lambda R}$（$=0.113$cm）。现在若将透镜上移 $\lambda/4$（$=1.6\times10^{-5}$cm），对应于中央斑点的 $2t=\lambda/2$，因此，将看到亮斑而不是暗斑。此时第 1 个和第 2 个暗环的半径分别为

$$\overline{OA_1}=\left(\frac{1}{2}\lambda R\right)^{1/2}=0.0566\text{cm}$$

$$\overline{OB_1}=\left(\frac{3}{2}\lambda R\right)^{1/2}=0.098\text{cm}$$

（见图 15.32(b)）。如果透镜再上移 $\lambda/4$（见图 15.32(c)），则第 1 个暗环向中心塌缩，中央斑点变成了暗的。原来在点 Q 处的环现在移动到了点 Q_2 处，同理，点 R 处的环（见图 15.32(a)）收缩到点 R_2 处（见图 15.32(c)）。

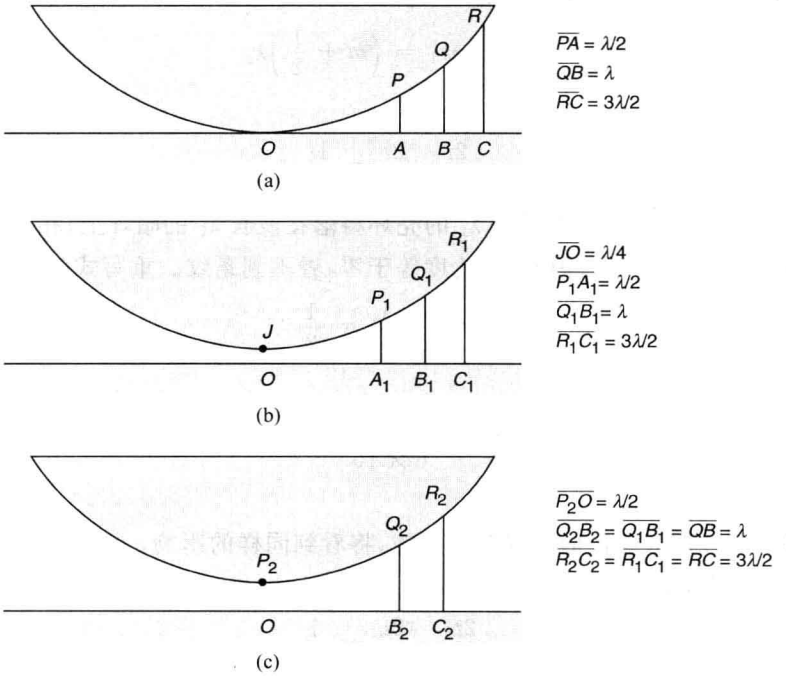


图 15.32　当透镜自玻璃上移时，环向中心收缩。

因此,当透镜向上移动时,环向中心收缩。如果可以测出透镜向上移动的距离,并且也能数出向中心收缩的暗环的数目,那么,就可以确定光波的波长。例如,在本例的条件下,如果透镜移动了 6.4×10^{-3} cm,有 200 个环收缩到中心。当进行这个实验时,就会观察到第 200 个暗环缓慢地向中心收缩;当透镜准确地移动 6.4×10^{-3} cm 时,第 200 个暗环也就正好收缩到中心。

例 15.3 考察当有两个十分靠近的波长,如钠光的 D_1 和 D_2 线($\lambda_1=5890$Å,$\lambda_2=5896$Å),同时存在时所形成的牛顿环。当透镜逐渐远离玻璃板时,这两种波长的同时存在将产生什么影响?如果用白光源代替钠光灯,情形又如何?

解 首先假设透镜与平面玻璃板接触(见图 15.32(a))。由于入射光的两个波长非常靠近,所以,λ_1 的亮环和暗环分别重叠在 λ_2 的亮环和暗环上。这一点通过计算每一种波长的第 9 个亮环和暗环的半径就可以很容易地看出来。

对于 $\lambda=5.890\times10^{-5}$ cm 的光波,有

$$\text{第 9 个亮环的半径}=\sqrt{\left(9+\frac{1}{2}\right)\lambda R}=\sqrt{9.5\times5.980\times10^{-5}\times100}$$
$$=0.236548(\text{cm})$$
$$\text{第 9 个暗环的半径}=\sqrt{9\lambda R}=0.230239(\text{cm})$$

同理,对于 5.896×10^{-5} cm 的光波,有

$$\text{第 9 个亮环的半径}=\sqrt{9.5\times5.896\times10^{-5}\times100}=0.236669(\text{cm})$$
$$\text{第 9 个暗环的半径}=\sqrt{9\times5.896\times10^{-3}}=0.230356(\text{cm})$$

因此,各圆环几乎准确地重叠。但是,当 m 很大时,两组圆环图样均将呈现均匀的照明。更准确地说,当空气膜的厚度满足

$$2t=m\lambda_1=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda_2$$

或者

$$\frac{2t}{\lambda_2}-\frac{2t}{\lambda_1}=\frac{1}{2}\tag{15.70}$$

该点周围的条纹会完全消失。即波长 λ_1 的亮环将落在波长 λ_2 的暗环上;相反的,波长 λ_1 的暗环将落在波长 λ_2 的亮环上,因此,对比度等于零,看不到条纹。重写式(15.70),可得

$$2t\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}=\frac{1}{2}$$

或者

$$2t=\frac{1}{2}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\Delta\lambda}\approx\frac{1}{2}\frac{(5.893\times10^{-5})^2}{6\times10^{-8}}\approx3\times10^{-2}(\text{cm})$$

对应于 $m\approx500$。

如果像例 15.2 那样缓慢向上提高凸透镜,将看到同样的影响。设透镜升高的距离为 t_0(见图 15.33),并且满足

$$\frac{2t_0}{\lambda_2}-\frac{2t_0}{\lambda_1}=\frac{1}{2}$$

或者

$$t_0 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{4(\lambda_1 - \lambda_2)}$$

因此，如果点 J（见图 15.33）对应于波长为 λ_1 的暗环，则它也同时对应于波长为 λ_2 的亮环；相反，如果点 J 对应于波长为 λ_1 的亮环，则它也同时对应于波长为 λ_2 的暗环。此外，附近对于波长为 λ_1 的暗环也差不多落在波长为 λ_2 的亮环上，干涉图样将消失，因此，从显微镜里看不到干涉图样。如果将透镜再向上移动距离 t_0，则有

$$\frac{2t_1}{\lambda_2} - \frac{2t_1}{\lambda_1} = 1 \tag{15.71}$$

式中 $t_1 = 2t_0$。结果是，如果点 J' 对应于波长 λ_1 的暗环，那么它也同时对应于波长 λ_2 的暗环。这时将再次出现干涉条纹图样，但对比度会稍差一些（见第 17 章）。

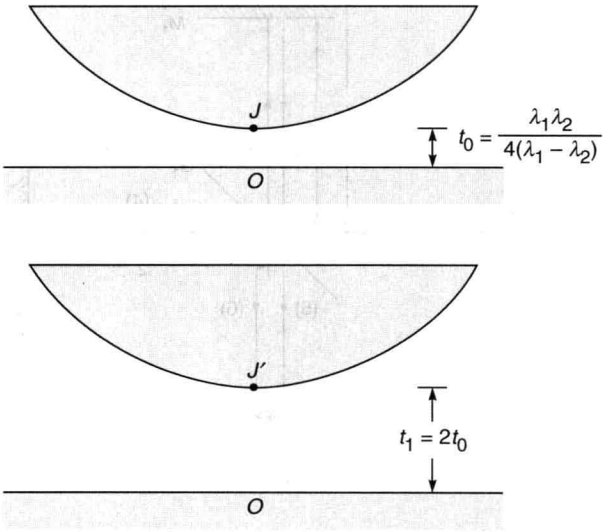


图 15.33　牛顿环实验中，如果光波包含两个很靠近的波长 λ_1 和 λ_2（如钠光的 D_1 和 D_2 线），那么，当透镜离开玻璃板的距离为 $t_0 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{4(\lambda_1 - \lambda_2)}$ 时，干涉条纹就会消失；而当距离为 $2t_0$ 时，条纹将重新出现。

如果继续向上移动透镜，那么，每当透镜移动一段距离 $2t_0\left(\approx\frac{1}{2}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\Delta\lambda}\right)$，整个条纹图样就会重新出现一次。在迈克耳孙干涉仪中，这个原理被用来测量两条靠近的谱线（如钠光的 D_1 和 D_2 线）的波长差 $\Delta\lambda$。

应该指出，为使条纹图样完全消失，两条谱线 λ_1 和 λ_2 的强度应该相等。

上述实验的另一个推论是，当使用单一谱线（波长为 λ）的光源时，这条谱线也有一定宽度 $\Delta\lambda$，（在透镜升高过程中）也将会发现干涉条纹的对比度的变化。由于谱线有一定宽度，因此，应该假设在 λ 和 $\lambda+\Delta\lambda$ 之间的所有波长都存在。通过找出条纹消失时透镜升高的近似高度，就可以计算出 $\Delta\lambda$。相干长度（L）和 $\Delta\lambda$ 之间有以下关系（见 17.2 节）

$$L \sim \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \tag{15.72}$$

15.11 迈克耳孙干涉仪

迈克耳孙干涉仪的示意图如图15.34所示，S表示光源(可以是钠光灯)，L表示毛玻璃片，它的作用是形成一个强度几乎均匀的扩展光源。G_1为分光板，即，入射到G上的光束会一部分反射，一部分透射。M_1和M_2是两面反射率很高的高质量平面镜，有一面平面镜(通常是M_2)是固定的，另一面平面镜(通常是M_1)借助螺旋装置可以沿着精密导轨移动，使其靠近或者远离分光板G_1。调节干涉仪，使平面镜M_1和M_2互相垂直，且均与G_1之间的夹角为45°。

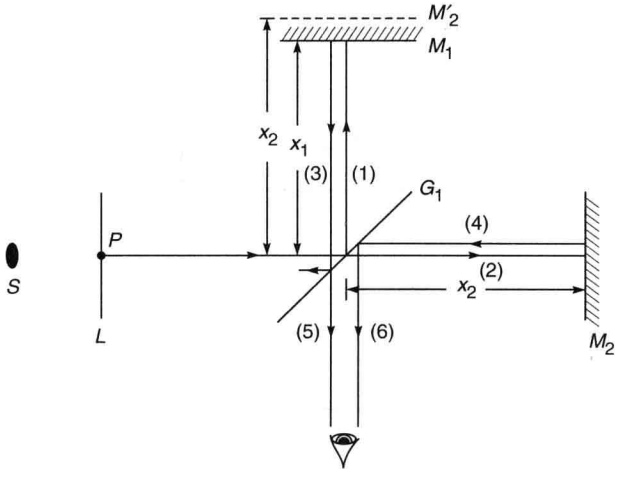


图15.34　迈克耳孙干涉仪的示意图

从点P发出的光波经分光板G_1，一部分反射而另一部分透射，所得到的两束光按如下方式发生干涉：反射波(见图15.34中的光线(1))经过M_1再次反射，这个反射波又部分透过G_1，如图15.34所示的光线(5)；透射波(见图15.34中的光线(2))经M_2反射，再经G_1部分反射，得到如图15.34所示的光线(6)。光波(5)和(6)，以完全类似于如图15.22所示的方式发生干涉。这一结论容易由这样的事实看出：如果x_1和x_2是平面镜M_1和M_2到分光板G_1的距离，从点P发出的到达眼睛的两光波看起来就好像是从间距为(x_1-x_2)的两平行平面镜(如图15.34中M_1和M_2')反射回来的。正如在15.7节中讨论过的一样，如果采用扩展光源，放置于眼睛位置的照相底片上得不到明确稳定的干涉图样。但如果换用聚焦于无穷远处的照相机，在其焦平面上就会得到一组圆条纹，每一条条纹对应于一个确定的θ(见图15.22和图15.35)，这些圆条纹看起来如图15.36所示。如果分光板是一块简单的玻璃片，从平面镜M_2反射回来的光束会有π相位突变(分光板反射时附加的)；又由于其中一束光多走了$2(x_1-x_2)$的距离，那么，发生相消干涉的条件为

$$2d\cos\theta = m\lambda, \quad m = 0,1,2,3,\cdots$$

且有

$$d = x_1 - x_2$$

θ表示光线与轴线(一般垂直于平面镜，如图15.35所示)的夹角。同理，产生亮环的条件为

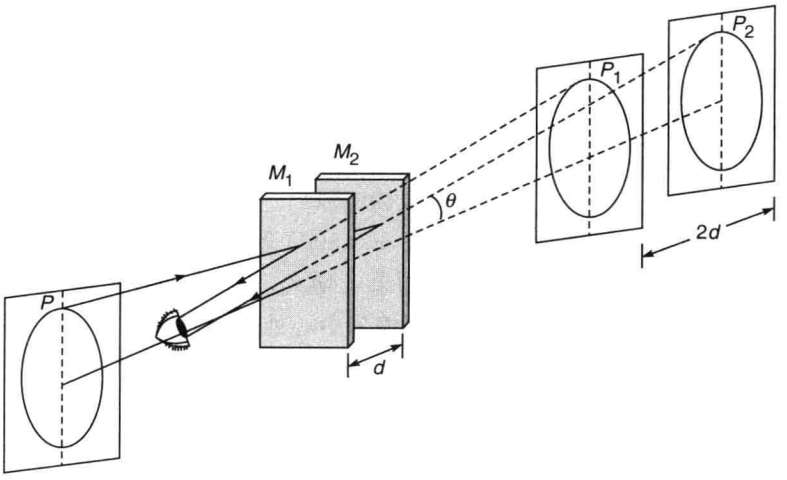


图 15.35　圆条纹形成示意图(图片引自文献[7])

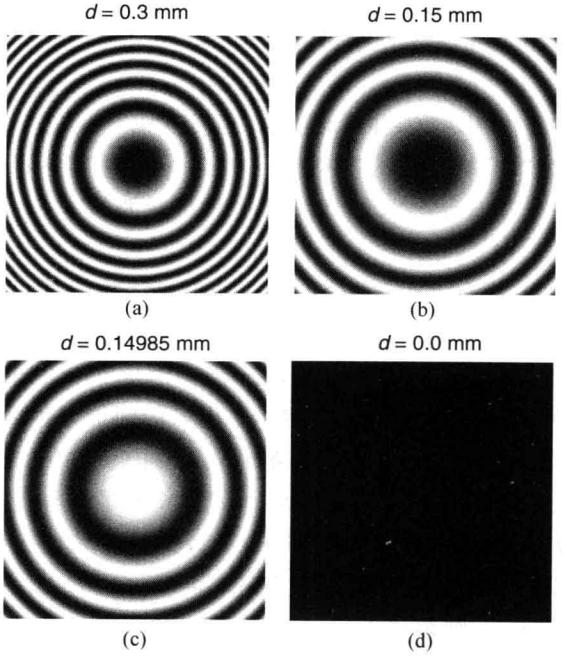


图 15.36　用电脑制作的迈克耳孙干涉仪干涉图样

$$2d\cos\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

例如，当 $\lambda = 6\times10^{-5}\,\mathrm{cm}$，$d = 0.3\,\mathrm{mm}$ 时，出现暗环的角度满足

$$\theta = \arccos\left(\frac{m}{1000}\right) = 0^\circ, 2.56^\circ, 3.62^\circ, 4.44^\circ, 5.13^\circ, 5.73^\circ, 6.28^\circ, \cdots$$

对应的干涉级数为 $m = 1000, 999, 998, 997, 996, 995, \cdots$ 因此，如图 15.36(a)所示的中央暗环对应 $m = 1000$，第 1 个暗环对应 $m = 999$，如此类推。如果减小两平面镜之间的距离，例如 $d = 0.15\,\mathrm{mm}$，出现暗环的角度满足(见图 15.36(b))

$$\theta = \arccos\left(\frac{m}{500}\right) = 0°, 3.62°, 5.13°, 6.28°, 7.25°, \cdots$$

这些角度对应的干涉级数为 $m=500, 499, 498, 497, 496, 495, \cdots$ 所以，当减小 d 时，所有条纹都会向中心收缩，且条纹间距会变得稀疏。应该注意到，如果 d 仅减小一个极小的值，比如从 0.15mm 减小到到 0.14985mm，则

$$2d = 499.5\lambda$$

如图 15.36(b)所示的中心黑斑(对应于级数 $m=500$)会消失，中心条纹会变亮。因此，当 d 减小时，干涉条纹图样向中心收缩(相反，如果 d 增大，条纹会向外扩展)。实际上，如果当平面镜 M_1 移动了距离 d_0 后，有 N 条条纹塌缩到中心处，则必然有

$$2d = m\lambda$$

$$2(d - d_0) = (m - N)\lambda$$

由于此时观察的是中央条纹，因此，令 $\theta=0$，可得

$$\lambda = \frac{2d_0}{N} \tag{15.73}$$

这里给我们提供了一种测量波长的方法。例如，在一个典型的实验中，平面镜移动距离为 2.90×10^{-2}cm，如果有 1000 条条纹收缩到中心，则

$$\lambda = 5800\text{Å}$$

迈克耳孙曾把上述方法用于“米”的标准化。他发现镉红线($\lambda=6438.4696$Å)是一种理想的单色光源，可以作为“米”标准化的参考基准。实际上，他用下面的关系式来定义米(m)

$$1\text{m} = 1553164.13 \text{ 个镉红线波长}$$

精度约为 $1/10^9$。

在实际的迈克耳孙干涉仪中，分光板 G_1 由一块玻璃板构成(厚度约为 1/2cm)，板的背面部分镀银，所以反射发生在背面，如图 15.37 所示。很明显，光束(5)通过玻璃板 3 次，比光束(6)多通过 2 次，为了补偿这一附加光程，加入“补偿板”G_2，它的厚度与 G_1 精确相等。用单色光源时，实际上可以不需要补偿板，因为 G_1 引入的附加光程 $2(n-1)t$ 可以通过将平面镜 M_1 移动 $(n-1)t$ 的距离来补偿，式中 n 是毛玻璃 G_1 的材料折射率。

但是，当使用白光光源时，不可能同时满足所有波长的零光程差条件，这是因为折射率是随波长是变化的。例如，对于 $\lambda=6560$Å 和 4861Å，冕牌玻璃的折射率分别为 1.5244 和 1.5330。这样，如果用 0.5cm 厚的冕牌玻璃作为 G_1，对于 $\lambda=6560$Å，M_1 应该移动 0.2622cm，而对于 $\lambda=4861$Å，则该移动 0.2665cm。两个位置之间的距离差等效于一百多个波长。因此，如果从 4861Å 到 6560Å 有一个连续的波长范围，任何两束相干光束(见图 15.34)之间的光程差都会随着波长发生很大的变化。然而，由于补偿板 G_2 的存在，会在相应于零光程差的点附近观察到几条彩色条纹(见 14.9 节)。

迈克耳孙干涉仪也可以用来测量两个靠得很近的波长的波长差。假设有一盏钠光灯，它主要发出两种靠近的波长 5890Å 和 5896Å。首先将干涉仪调节在零光程差位置[①]，在接近 $d=0$ 的情况下，两组条纹图样重叠在一起。如果将平面镜 M_1 远离(或靠近)分光板 G_1 一段距离 d。对应于波长 λ_1 的干涉强度极大值的倾角一般不会与对应于波长 λ_2 的倾角

① 利用白光很容易得到零光程差，在 $d=0$ 处，会出现一些彩色条纹，很容易看到。

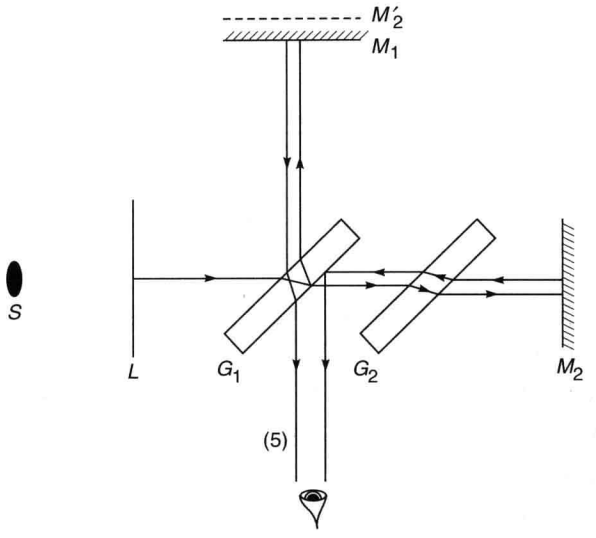


图 15.37　实际的迈克耳孙干涉仪中，还安装了一个补偿板 G_2。

相重合。事实上，如果 d 满足

$$\frac{2d}{\lambda_1}-\frac{2d}{\lambda_2}=\frac{1}{2} \tag{15.74}$$

并且 $2d\cos\theta'=m\lambda_1$，则有 $2d\cos\theta'=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda_2$。这样，波长 λ_1 的强度极大值倾角就落到波长 λ_2 的强度极小值的倾角位置上，波长 λ_1 的强度极小值倾角落到波长 λ_2 的强度极大值倾角位置上，因此，条纹图样将消失。容易看出，如果

$$\frac{2d}{\lambda_1}-\frac{2d}{\lambda_2}=1 \tag{15.75}$$

则干涉图样再次出现。一般说来，如果$\frac{2d}{\lambda_1}-\frac{2d}{\lambda_2}$等于 1/2，3/2，5/2，…时，条纹图样消失；如果它等于 1，2，3，…时，条纹图样出现。

如果光源不是只包含两个独立的波长，而是包含 λ 到 $\lambda+\Delta\lambda$ 之间的所有波长时，则当

$$\frac{2d}{\lambda}-\frac{2d}{\lambda+\frac{\Delta\lambda}{2}}\geqslant\frac{1}{2}$$

或者

$$2d\geqslant\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \tag{15.76}$$

时，就观察不到干涉图样。

在这种情况下，条纹不会再次出现，这是因为波长是有一个连续的范围，而不是两个独立的波长（见 17.2 节）。

例 15.4　使用钠光灯时，干涉图样相继两次消失之间，平面镜移动的距离为 0.289mm。试计算 D_1 和 D_2 线的波长差。假设 $\lambda=5890$Å。

解　平面镜的移动距离为 0.289mm，所引入的附加光程为 0.578mm。因此，有

$$\frac{0.578}{\lambda}-\frac{0.578}{\lambda+\Delta\lambda}=1$$

或者

$$\Delta\lambda\approx\frac{\lambda^2}{0.578}=\frac{(5890\times10^{-7})^2}{0.578}\text{mm}\approx6\text{Å}$$

小　结

- 如果一平面波正入射到一厚度为 d 的均匀薄膜上，从上表面反射的波将会与从下表面反射的波发生干涉。实际上，对于厚度为 $\lambda/4n_f$ 的薄膜(式中 λ 为自由空间波长，n_f 为薄膜折射率，且 n_f 介于围绕薄膜的上、下媒质的折射率之间)，从上表面反射的波与从下表面反射的波将发生相消干涉，薄膜起到了消反射层的作用。
- 由大量厚度均为 d，折射率分别为 $n_0+\Delta n$ 和 $n_0-\Delta n$ 的两种薄层交替排列组成的媒质层，称为周期性媒质，其折射率变化的空间周期为 $\Lambda(=2d)$。当 $\Delta n\ll n_0$ 时，如果 $d\approx\frac{\lambda}{4n_0}$(式中 λ 为自由空间波长)，则来源于不同分界面的各自反射波都是同相位的，从而形成很强的反射。因此，对于选定波长 λ_B(自由空间)要发生强反射，折射率变化周期应为

  $$\Lambda=2d=\frac{\lambda_B}{2n_0}$$

  这叫做布拉格条件，也是光纤布拉格光栅的工作原理。
- 如果将一平凸透镜放置在一平板玻璃表面上，透镜曲面和平板玻璃表面之间会形成一层空气薄膜。如果令一准单色光(如钠光灯)(几乎垂直地)入射到透镜表面，则从透镜曲面反射的光将与从平面玻璃板上表面反射的光产生干涉。既然透镜的凸面是一球面，那么，空气薄膜的厚度在一圆圈上是常数，会得到一系列同心的暗环和亮环。这些环就是牛顿环。相邻两个同心环的半径的平方差接近一个常数。
- 迈克耳孙干涉仪被迈克耳孙用作“米”的标准化工具。他发现镉红线($\lambda=6438.4696$Å)是理想的单色光源之一，因此，这个波长被用作“米”标准化的参考基准。事实上，他利用如下关系式来定义米

  $$1\text{m}=1553164.13\text{个镉红线波长}$$

  精度约为 $1/10^9$。
- 迈克耳孙干涉仪也被用于两波长靠得很近的波长差的测量。

习　题

15.1 将折射率为 1.6 的玻璃板与另一块折射率为 1.8 的玻璃板沿着一条边接触，形成一个 0.5° 的楔形劈。令波长为 5000Å 的光垂直入射到劈上，同时在上方观察这个膜。试计算干涉条纹的间距。若整个装置浸在折射率为 1.7 的油中，定性讨论条纹图样会有什么不同，这时条纹宽度怎样变化？

15.2 两块平面玻璃板重叠在一起，一边垫一硬纸片，以形成一个薄空气劈。假设波长为

6000Å 的光束正入射，并且每厘米产生 100 条条纹，试计算劈角。

15.3 考察一个折射率为 1.38 的消反射膜，设该膜的厚度为 9×10^{-6}cm。试计算在可见光区能使该薄膜消反射的波长。对厚度为 45×10^{-6}cm 的空气膜重复上述计算。并证明两种膜都对同一个特定的波长消反射，但只有前一种膜是适用的，为什么？

15.4 在牛顿环装置中，平凸透镜凸面的曲率半径为 100cm，试求当 $\lambda=6\times10^{-5}$cm 时，第 9 个和第 10 个亮环的半径为多少？

15.5 在牛顿环装置中，透镜凸面的曲率半径为 50cm，第 9 个和第 16 个暗环的半径分别为 0.18cm 和 0.2235cm，试计算光波波长。（提示：如果根据式(15.66)，会得到错误的结果，为什么？）

[**答案**：5015Å]

15.6 在牛顿环装置中，如果入射光包含两种波长(4000Å 和 4002Å)，试计算从圆环条纹消失的位置到中心接触点的距离，假设透镜凸面的曲率半径为 400cm。

[**答案**：4cm]

15.7 在上题中，如果透镜缓慢地向上升高，试计算中心附近的条纹图案消失时，透镜上升的高度。

[**答案**：0.2mm]

15.8 一个对称凸透镜置于另一个对称凸透镜之上。上面凸透镜两面的曲率半径为 50cm，下面凸透镜两面的曲率半径为 100cm。两透镜之间形成空气膜，从膜上、下表面反射的光波发生干涉，产生牛顿环。试计算暗环的半径，假设 $\lambda=6000$Å。

[**答案**：$0.0447\sqrt{m}$ cm]

15.9 在迈克耳孙干涉仪装置中，如果当一块平面镜移动距离为 0.08mm 时，有 250 条条纹通过视场。试计算光波波长。

[**答案**：6400Å]

15.10 一个包含两种波长 4882Å 和 4886Å 的光源用来做迈克耳孙干涉仪实验。在条纹两次消失的位置之间，平面镜必须移动多长的距离？

[**答案**：0.298mm]

15.11 在迈克耳孙干涉仪实验中，计算当 $d=5\times10^{-3}$cm 时，相应于亮条纹的 θ' 可取值。并证明若 d 减小到 4.997×10^{-3}cm 时，对应于 $m=200$ 的条纹将消失。问相应的 θ' 为多少？假设 $\lambda=5\times10^{-5}$cm。

参考文献和推荐读物

1. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford, 1975.
2. M. Cagnet, M. Francon and S. Mallick, *Atlas of Optical Phenomena*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
3. E. F. Cave and L. V. Holroyd, 'Inexpensive Michelson interferometer', *Amer. J. Phys.*, Vol **23**, 61, 1955.
4. A.H. Cook, *Interence of Electromagnetic Waves*, Clarendon Press, Oxford, 1971.
5. M. Francon, *Optical Interferometry*, Academic Press, New York 1966.
6. A. K. Ghatak and K. Thyagarajan, *Optical Electronics*, Cambridge University Press, London, 1989. [Reprinted by Foundation Books, New Delhi.]
7. F. A. Jenkins and H. E. White, *Fundamentals of Optics*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1976.
8. V. Oppenheim and J. H. Jaffe, 'Interference in an optical wedge' *Amer. J. Phys.*, Vol. **24**, 610, 1956.
9. J. Sladkova, *Interference of Light*, Iliffe Books Ltd., London, 1968.
10. W. H. Steel, *Interometry*, Cambridge University Press, London, 1967.
11. S. Tolansky, *An Introduction to Interferometry*, Longmans Green and Co., London, 1955.

第16章 多光束干涉量度学

当两个波动……振动方向完全一致或非常接近时，它们联合的效应是每个单独运动的合成。[①]

——托马斯·杨(Thomas Young，1801年)

重要的里程碑

1899年 法布里(Marie Fabry)和珀罗(Jean Perot)发明了法布里-珀罗干涉仪，它具有非常高的分辨能力。

16.1 引言

在前两章中讨论了双束光的干涉，这两束光是用波前分割法或振幅分割法从单一光束中分离出来的。在本章中将讨论多光束干涉，这些光束是由单一光束通过多次反射(振幅分割)得到的。例如，一平面波射到一块平行平面玻璃板上，光束就会在玻璃板的上、下两表面经历多次反射，并且从玻璃板上、下两边射出许多振幅依次递减的光束。无论哪一边的出射光束都会发生相互干涉，并在无穷远处产生一个干涉图样。可以证明，多光束干涉形成的条纹比双光束干涉形成的条纹更加明亮且细锐，所以，利用多光束干涉的干涉仪有很高的分辨能力，从而在高分辨光谱学中得到广泛的应用。

16.2 平行平面薄膜上的多次反射

考察一个平面波入射到厚度为 h(折射率为 n_2)且被折射率为 n_1 的媒质所包围的平板上，见图16.1，为随后将要讨论的法布里-珀罗干涉仪做准备。法布里-珀罗干涉仪包含两个部分反射镜(它们分开一个固定距离 h)，因为装置放在空气中，所以 $n_1=n_2=1$。

设 A_0 是入射波的(复)振幅，这个波在两个分界面上将经历多次反射，如图16.1(a)所示。令 r_1 和 t_1 分别表示光从 n_1 入射到 n_2 时的振幅反射系数和振幅透射系数，令 r_2 和 t_2 分别表示光从 n_2 入射到 n_1 时的振幅反射系数和振幅透射系数。因此，在经历连续反射过程中，波的振幅依次为

① 引自参考文献[1]。

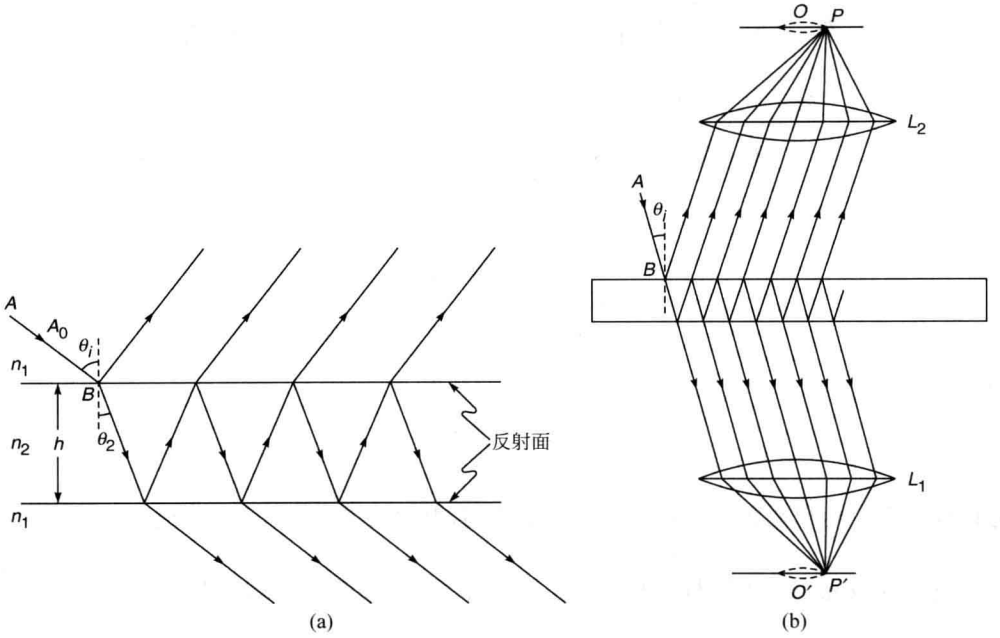


图　16.1

(a) 振幅为 A_0 的光束以角度 θ_i 入射到折射率为 n_2、厚度为 h 的薄膜上发生的反射和透射；(b) 任何平行于 AB 的光线都聚焦于同一点 P。如果光线 AB 绕通过点 B 的法线旋转。那么点 P 将在一个以点 O 为中心的圆圈上旋转；这个圆圈是亮或是暗取决于 θ_i 的值。以不同角度入射的光线聚焦在离点 O 不同距离的地方，从而使用扩散光源将得到一些同心的亮环和暗环。

$$A_0 r_1, \quad A_0 t_1 r_2 t_2 e^{i\delta}, \quad A_0 t_1 r_2^3 e^{2i\delta}, \quad \cdots$$

式中

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta = \frac{4\pi n_2 h\cos\theta_2}{\lambda_0} \tag{16.1}$$

为(相邻两束自平板射出的光波之间的)相位差，该相位差源于薄膜中光束传播来回一次所附加的光程差(见第 15.1 节)。式(16.1)中的 θ_2 为薄膜内(折射率为 n_2)的折射角，h 为膜厚，λ_0 为入射平面波在自由空间中的波长。因此，合成的反射波最后的(合)振幅为

$$\begin{aligned} A_r &= A_0[r_1 + t_1 r_2 t_2 e^{i\delta}(1 + r_2^2 e^{i\delta} + r_2^4 e^{2i\delta} + \cdots)] \\ &= A_0\left(r_1 + \frac{t_1 t_2 r_2 e^{i\delta}}{1 - r_2^2 e^{i\delta}}\right) \end{aligned} \tag{16.2}$$

若反射面无损耗，则分界面处的反射率和透射率由下式给出(见 14.12 节)

$$R = r_1^2 = r_2^2$$

$$\tau = t_1 t_2 = 1 - R$$

(保留符号 T，用来表示法布里-珀罗标准具的整体透射率)。因此，有

$$\frac{A_r}{A_0} = r_1\left[1 - \frac{(1-R)e^{i\delta}}{1 - Re^{i\delta}}\right]$$

这里利用了 $r_2 = -r_1$。因此，法布里-珀罗标准具的反射率由下式给出

$$\mathcal{R}=\left|\frac{A_r}{A_0}\right|^2=R\left|\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}{1-R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}\right|^2=R\frac{(1-\cos\delta)^2+\sin^2\delta}{(1-R\cos\delta)^2+R^2\sin^2\delta}$$

$$=\frac{4R\sin^2\frac{\delta}{2}}{(1-R)^2+4R\sin^2\frac{\delta}{2}}$$

或者

$$\mathcal{R}=\frac{F\sin^2\frac{\delta}{2}}{1+F\sin^2\frac{\delta}{2}} \tag{16.3}$$

式中

$$F=\frac{4R}{(1-R)^2} \tag{16.4}$$

称为锐度系数。可以看出,当 $R\ll1$ 时,F 很小,且整体反射率与 $\sin^2\frac{\delta}{2}$ 成比例。相同的强度分布也会在双光束干涉图样里得到(见14.7节)。需要提一下,这里得到的是 $\sin^2\frac{\delta}{2}$,而不是 $\cos^2\frac{\delta}{2}$,这是因为其中一束反射光附加了 π 相位突变。

同理,连续透射波的振幅依次为

$$A_0t_1t_2,\quad A_0t_1t_2r_2^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta},\quad A_0t_1t_2r_2^4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta},\quad \cdots$$

这里,为了不失一般性,不计任何损耗。假设第一个透射波为零相位,则透射波的合振幅为

$$A_t=A_0t_1t_2(1+r_2^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}+r_2^4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta}+\cdots)$$

$$=A_0\frac{t_1t_2}{1-r_2^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}=A_0\frac{1-R}{1-R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}$$

因此,薄膜的整体透射率为

$$T=\left|\frac{A_t}{A_0}\right|^2=\frac{(1-R)^2}{(1-R\cos\delta)^2+R^2\sin^2\delta}$$

或者

$$T=\frac{1}{1+F\sin^2\frac{\delta}{2}} \tag{16.5}$$

可以看出,法布里-珀罗标准具的整体透射率和整体反射率相加为1。并且,当

$$\delta=2m\pi,\quad m=1,2,3,\cdots \tag{16.6}$$

时,有

$$T=1$$

如图16.2所示为相应于不同的 F 值,整体透射率关于 δ 的函数关系。为了估算透射共振峰的半高宽,相应于 $\delta=2m\pi\pm\frac{\Delta\delta}{2}$ 时,令

$$T=\frac{1}{2}$$

则

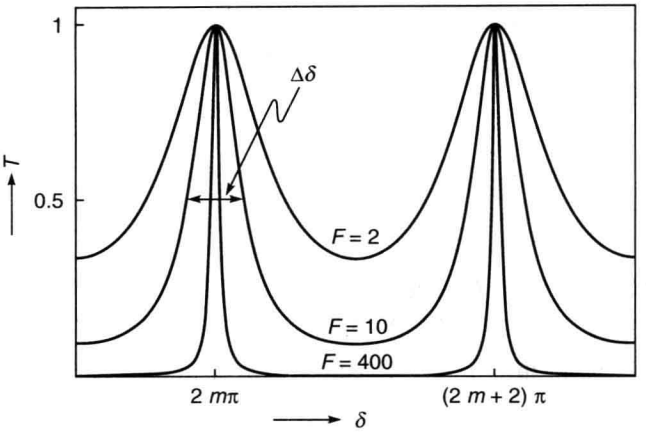


图 16.2　相应于不同 F，法布里-珀罗标准具的透射率随 δ 的变化曲线，m 通常很大，当 F 增大时，透射共振峰变得越来越锐。半高全宽用 $\Delta\delta$ 表示。

$$F\sin^2\frac{\Delta\delta}{4}=1 \tag{16.7}$$

$\Delta\delta$ 定义为半高全宽(full width at half maximum，FWHM)。大多数情况下，$\Delta\delta\ll1$，因此，得到一个很好的近似

$$\Delta\delta\approx\frac{4}{\sqrt{F}}=\frac{2(1-R)}{\sqrt{R}} \tag{16.8}$$

所以，当 F 值变大时，透射共振峰变得尖锐。

16.3　法布里-珀罗标准具

这一节讨论法布里-珀罗干涉仪，它是以上节讨论的多光束干涉的原理为基础的。这种干涉仪(如图 16.3 所示)由两块平面玻璃板(或石英板)组成，在平面玻璃板的一面镀有部分反射金属膜[①](铝或银)，反射率约为 80%。两板选择合适的放置位置使得它们的镀膜面之间形成一个平行平面空气层。如果反射玻璃板相互平行，且它们之间间隔固定，这种结构称为法布里-珀罗标准具。实际上，我们往往忽视玻璃片的存在，而只考虑金属膜的反射(和透射)。并且，如果板平行放置，光线不会有任何偏离。

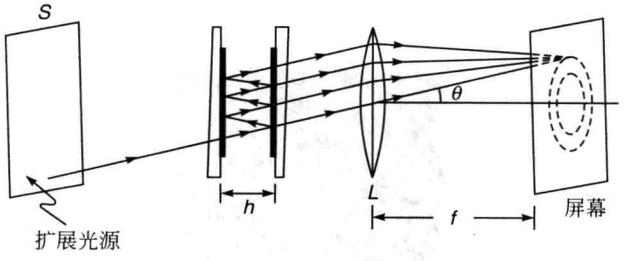


图 16.3　法布里-珀罗标准具

① 在可见光谱区，镀银是最好的(它在红光区的反射率约为 0.97，而到蓝光区则减小为 0.90)。但在蓝光区之外，镀银的反射率迅速下降，通常波长在 4000Å 以下时镀铝。

在一个典型实验中，扩展光源发出的光经透镜准直后通过法布里-珀罗标准具，如图16.3所示。对于一个特定波长为λ_0的光，当入射角满足

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} n_2 h \cos\theta_2 = 2m\pi \tag{16.9}$$

或者

$$\cos\theta_2 = \frac{m\lambda_0}{2n_2 h} \tag{16.10}$$

入射光会全部透射(即$T=1$)。在锐度系数F很大的情况下，当θ_2稍微偏离上式，整体透射率就会降到很小。这样，对于一个给定的波长，在透镜L的焦平面上，会得到同心圆环组成的干涉条纹图样，每个亮环相应于一个特定的m。随着F的增大，亮环会变得非常尖锐(标准具的分辨能力也会增强)。

例16.1 作为例子，假设一个标准具的$n_2=1$，$h=1\text{cm}$，$F=400$($F=400$意味着$R\approx0.905$，即标准具每个镜面的反射率约为90%)。如图16.4所示为在$\lambda_0=5000\text{Å}$和4999.98Å时，透射强度随θ的变化曲线，在焦距为25cm的透镜的焦平面上得到的实际干涉图样如图16.5所示。对于

$$\lambda_0 = \lambda_1 = 5000\text{Å}$$

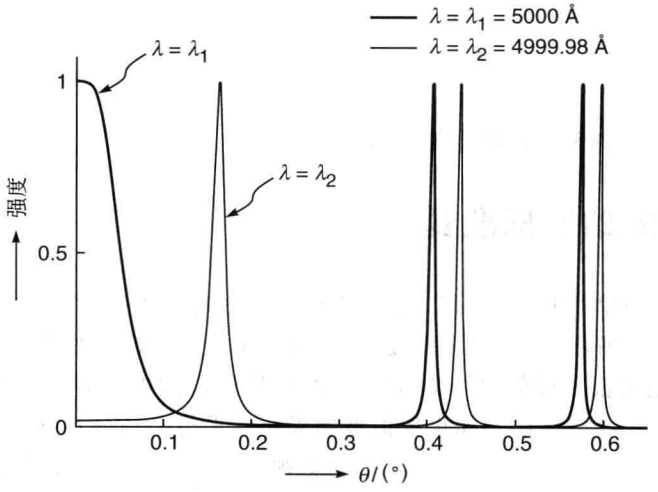


图16.4 对于$n_2=1$，$h=1\text{cm}$，$F=400$的法布里-珀罗标准具，干涉图样强度随θ的变化曲线，分别对应于$\lambda_0=5000\text{Å}(=\lambda_1)$和$\lambda_0=4999.98\text{Å}(=\lambda_2)$。

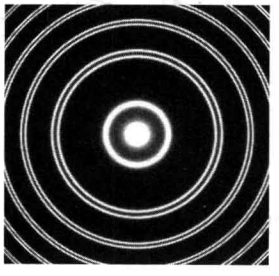


图16.5 (利用计算机得到的)法布里-珀罗干涉仪的干涉图样(在透镜焦平面上)，其中$n_2=1$，$h=1.0\text{cm}$，$F=400$，对应波长为$\lambda_0=5000\text{Å}(=\lambda_1)$和$\lambda_0=4999.98\text{Å}(=\lambda_2)$。

根据式(16.9),有

$$\theta_2 = \arccos\left(\frac{m}{40000}\right)$$

亮环出现的角度为

$$\theta_2 = 0°, 0.41°, 0.57°, 0.70°, \cdots$$

分别对应干涉级次为

$$m = 40000, 39999, 39998, 39997, \cdots,$$

如图 16.4 所示的粗线。另一方面,对于

$$\lambda_0 = \lambda_2 = 4999.98\text{Å}$$

有

$$\theta_2 = \arccos\left(\frac{m}{40000.16}\right)$$

亮环出现的角度为

$$\theta_2 = 0.162°, 0.436°, 0.595°, \cdots$$

分别对应级次为

$$m = 40000, 39999, 39998, \cdots$$

如图 16.4 所示的细线。相应地,在透镜焦平面上得到圆环图样如图 16.5 所示,两谱线的波长相差 0.02Å,很小,但是能通过标准具很好地将其分辨开。如图 16.5 所示,中央亮斑和第一个亮环分别对应于波长 $\lambda_0 = 5000$Å 和 $\lambda_0 = 4999.98$Å,且都相应于 $m = 40000$ 的干涉级次。接下来的两个挨得很近的亮环分别与两个波长对应,相应的级次为 $m = 39999$。

16.3.1　镀膜表面的平整度

为了获得尖锐的条纹,两个镀膜层表面应该高度平行。实际上,镀膜层的平坦度应该达到 $\lambda/50$ 以内,式中 λ 为所用光波的波长。为了理解这一点,假设在前面的例子中 h 增大 $\lambda/20(=250\text{Å}=2.5\times10^{-6}\text{cm})$,则

$$h = 1 + 2.5\times10^{-6} = 1.0000025(\text{cm})$$

对于 $\lambda_0 = 5000$Å,可得

$$\theta_2 = \arccos\left(\frac{m}{40000.1}\right)$$

形成亮环的角度为

$$\theta_2 = 0.128°, 0.425°, 0.587°, \cdots$$

如果与例 16.1 中的结果进行比较会发现:如果间距变化 $\lambda/20$,对应波长为 $\lambda_0 = 5000$Å 和 4999.98Å 的条纹开始重叠。因此,镀膜面应该高度平行,平整度应是波长长度很小的一个分数(即占很小的百分比)。进而,两块玻璃板未镀膜的表面稍微做成有一个很小角度(~1~10 弧分,见图 16.3)的楔形,可以避免出现由于经未镀膜表面内多次反射而形成的不希望有的条纹的干扰。

16.3.2　法布里-珀罗腔的模式

考虑一复色光束垂直入射到($\theta_2 = 0$)法布里-珀罗标准具上,其两反射平板之间是空气($n_2 = 1$),见图 16.6。将波长可以用频率表示为

$$\nu = \frac{c}{\lambda_0}$$

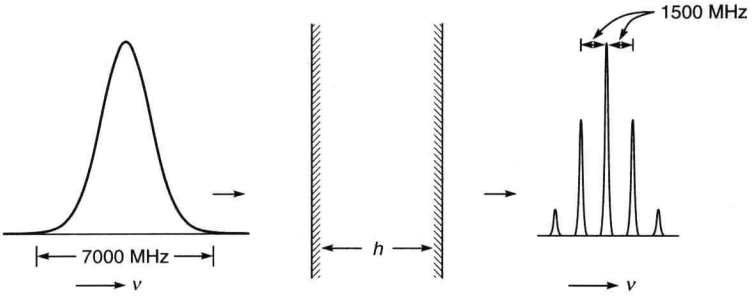


图 16.6　谱宽为 7000MHz 的光束($\nu_0=6\times10^{14}$ Hz 附近)垂直入射到 $h=10$cm,$n_2=1$ 的法布里-珀罗干涉仪上。输出光有 5 条窄谱线。

根据式(16.9),当式(16.11)成立时,会发生透射共振现象

$$\nu=\nu_m=m\frac{c}{2h} \tag{16.11}$$

式中 m 是整数。式(16.11)表示(法布里-珀罗)腔内的不同(纵向)模式。当 $h=10$cm 时,两个相邻模式的频率间隔为

$$\delta\nu=\frac{c}{2h}=1500\text{MHz}$$

对于一个中心频率为 $\nu=\nu_0=6\times10^{14}$ Hz,谱宽为 7000MHz[①] 的入射光波,输出光波的频率为

$$\nu_0,\quad \nu_0\pm\delta\nu,\quad \nu_0\pm2\delta\nu$$

如图 16.6 所示。根据式(16.11),可以计算出这 5 条谱线所对应干涉级数的 m 为

$$m=399998,399999,400000,400001,400002$$

图 16.7 所示为一个多纵模激光二极管的典型输出光谱,两相邻模式的波长间隔约为 0.005μm。

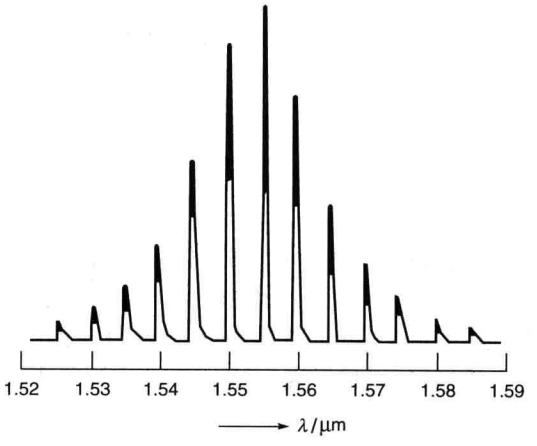


图 16.7　一个多纵模法布里-珀罗激光二极管的典型输出光谱图,两相邻模式的波长间隔约为 0.005μm。

① 相应于 $\nu_0=6\times10^{14}$ Hz,$\lambda_0=5000$Å,谱宽 7000MHz 意味着 $\left|\frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0}\right|=\left|\frac{\Delta\nu}{\nu_0}\right|=\frac{7\times10^9}{6\times10^{14}}\approx1.2\times10^{-5}$,从而给出 $\Delta\lambda_0\approx0.06$Å。因此,谱宽为 7000MHz($\nu_0=6\times10^{14}$ Hz 附近)的光波长展宽不超过 0.06Å。

16.4　法布里-珀罗干涉仪

如果两块板中有一块是固定的，另一块可以移动，从而可以改变两板镀膜镜面之间的距离，这种结构的系统称为法布里-珀罗干涉仪。对于垂直入射到干涉仪上的光束，通过改变间距 h 以测量透镜 L 焦平面上的强度变化（见图 16.8），这样的装置通常被称为扫描法布里-珀罗干涉仪。由于 h 是变化的，记为

$$h = h_0 + x \tag{16.12}$$

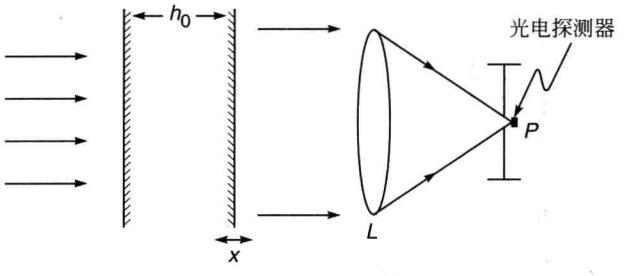


图 16.8　扫描法布里-珀罗干涉仪。在透镜 L 的焦平面上的强度变化（通过光电探测器）被记录下来。

如果入射光束是单色光，如图 16.9 所示为点 P 处强度典型的变化。图样对应的入射光频率为

$$\nu = \nu_0 = 6 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz}$$

当 $h_0 = 10\mathrm{cm}$，$n_2 = 1$，$\cos\theta_2 = 1$ 时，可得

$$\delta = \frac{4\pi\nu_0(h_0 + x)}{c} = 800000\pi\left(1 + \frac{x}{h_0}\right)$$

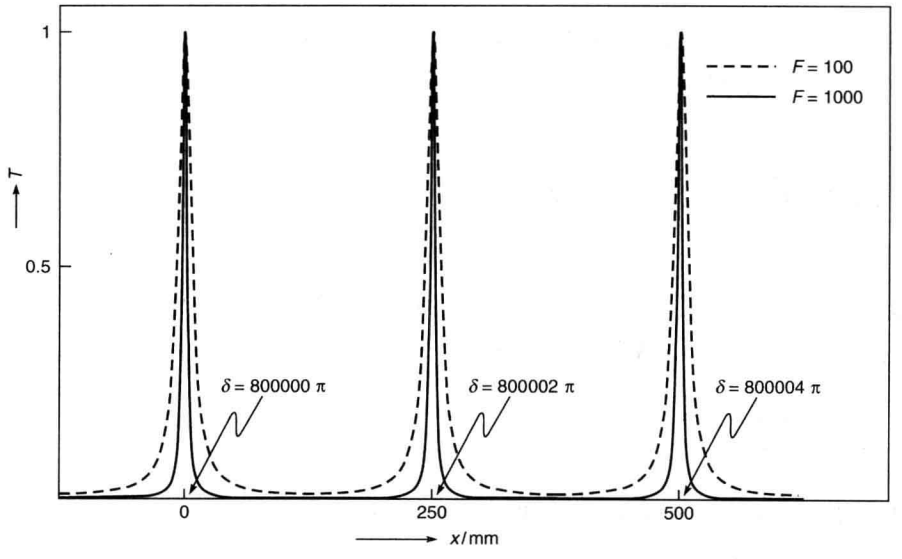


图 16.9　单色光束正入射到扫描法布里-珀罗干涉仪上（见图 16.8 中的装置），点 P 处强度随 x 的变化曲线。实线对应 $F=1000$，虚线对应 $F=100$。

因此,当

$$\delta = 800000\pi, 800002\pi, 800004\pi, \cdots$$

时,处于透射共振状态,相应的厚度增加值 x 分别满足

$$x = 0, 250\text{nm}, 500\text{nm}, \cdots$$

图 16.9 所示的两条曲线分别对应于 $F=100$ 和 $F=1000$,且如果增大 F 值,透射共振峰会变得更尖锐。图 16.10 所示为当包含频率间隔为 300MHz 的两束光入射时,点 P 处的强度变化。显然,两个频率的光谱线可以被很好地分辨开。

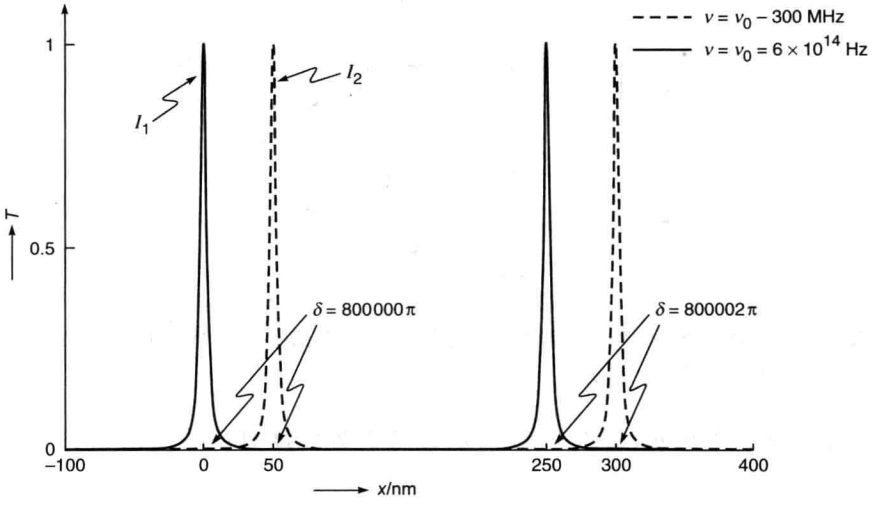


图 16.10　当频率间隔为 300MHz 的两束光入射时,点 P 强度随 x 的变化。

这里需要提及的是,如果入射光束的频率增加 $c/2h_0$,即,如果

$$\nu = \nu_0 + \frac{c}{2h_0}$$

很容易证明,透射共振峰出现在相同的 x 处,相对应的相位差 δ 分别为 800002π(对应于 $x=0$),800004π(对应于 $x=250\text{nm}$)。的确,如果

$$\nu = \nu_0 \pm p\frac{c}{2h_0}, \quad p = 1, 2, 3, \cdots$$

将得到相同的 T 随 x 的变化曲线。物理量

$$\Delta\nu_s = \frac{c}{2h_0} \tag{16.13}$$

被称为法布里-珀罗干涉仪的自由光谱范围(FSR,也称为无交叠范围)。因此,当入射光束光谱中包含间隔很宽的波长成分时,得到的干涉谱中各级光谱会发生级间重叠现象。

16.5　分辨能力

首先考虑光束正入射到扫描法布里-珀罗干涉仪时的分辨能力,接下来会介绍对应的法布里-珀罗标准具的情况。

16.5.1　扫描法布里-珀罗干涉仪的分辨能力

考虑强度相等、频率分别为 ν_1 和 ν_2 的两束光正入射到扫描法布里-珀罗干涉仪上的情况。假设频率为 ν_1 光的半强度点恰好落在频率为 ν_2 光的半强度点上时，两个频率恰好可分辨，如图 16.11 所示。此时，合强度（见图 16.11 中的虚线）中间的极小值是两边最大值的 74%。正如 16.2 节中讨论的，如果半强度点出现在对应相位差

$$\delta = \delta_{1/2} = 2m\pi \pm \frac{\Delta\delta}{2} \tag{16.14}$$

则

$$\Delta\delta \approx \frac{4}{\sqrt{F}} \tag{16.15}$$

（这与式(16.8)一致）考虑频率 ν_1，如果强度最大值出现在 $h=h_1$，则

$$\delta_1 = \frac{4\pi h_1 \nu_1}{c} = 2m\pi \tag{16.16}$$

令 $\nu=\nu_2(=\nu_1+\Delta\nu_1)$ 的强度最大值出现在

$$h = h_2 = h_1 + \Delta h_1$$

则

$$\delta_2 = \frac{4\pi(h_1+\Delta h_1)(\nu_1+\Delta\nu_1)}{c} = 2m\pi \tag{16.17}$$

根据式(16.16)和式(16.17)，忽略二次项 $\Delta h_1 \Delta\nu_1$，可得

$$\nu_1 \Delta h_1 + h_1 \Delta\nu_1 = 0$$

或者

$$\Delta h_1 = -\frac{h_1}{\nu_1}\Delta\nu_1 \tag{16.18}$$

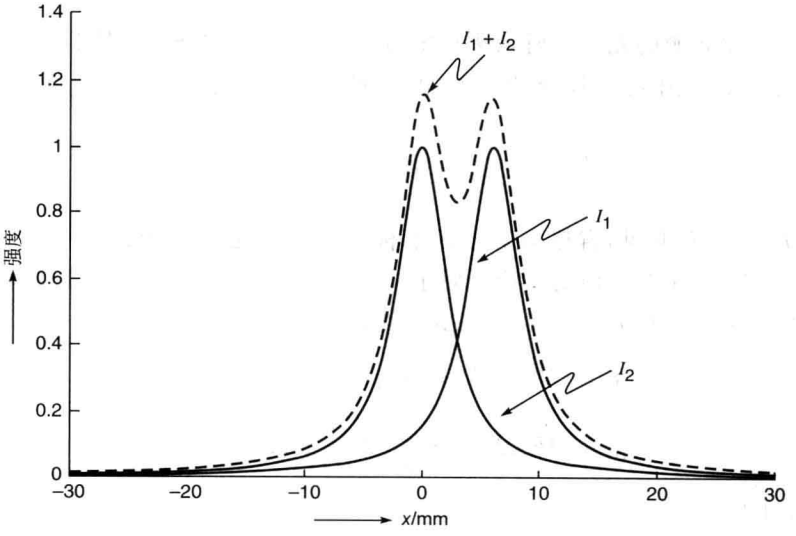


图 16.11　频率为 ν_1 和 ν_2 的两束光，强度 I_1 和 I_2 的变化曲线，以及两频率恰好分辨开时，合强度 (I_1+I_2) 的变化曲线。

式(16.18)说明,如果 Δh_1 是正的,$\Delta\nu_1$ 应该是负的。现在令频率 ν_1 的半强度点出现在 $h=h_1+\delta h_1$(相应的 $\delta=2m\pi+\Delta\delta_1/2$),根据式(16.16),有

$$\frac{4\pi\nu_1\delta h_1}{c}=\frac{1}{2}\Delta\delta_1\approx\frac{2}{\sqrt{F}} \tag{16.19}$$

或者

$$\Delta h_1=\frac{c}{2\pi\nu_1\sqrt{F}} \tag{16.20}$$

利用两频率恰好能分辨的条件为

$$\Delta h_1=2\delta h_1\approx\frac{c}{\pi\nu_1\sqrt{F}} \tag{16.21}$$

根据式(16.18),可得分辨能力为

$$\left|\frac{\nu_1}{\Delta\nu}\right|=\frac{h_1}{\Delta h}=\frac{\pi h_1\nu_1\sqrt{F}}{c}$$

将下标去掉,即

$$\text{分辨能力}=\left|\frac{\nu}{\Delta\nu}\right|=\frac{\pi h\nu\sqrt{F}}{c} \tag{16.22}$$

或者,也可以用波长的形式表示为

$$\text{分辨能力}=\left|\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0}\right|=\frac{\pi h\sqrt{F}}{\lambda_0} \tag{16.23}$$

当 $h=1\text{cm}$,$\lambda_0=6\times10^{-5}\text{cm}$ 时,有

$$\Delta\lambda\approx0.013\text{Å}(F=80)$$
$$\Delta\lambda\approx0.006\text{Å}(F=360)$$

16.5.2 法布里-珀罗标准具的分辨能力

考虑来自一宽光源的光束入射到法布里-珀罗标准具的情况,如图16.3所示。再次考虑其中存在强度相等、中心波长分别为 λ_1 和 λ_2 的两束光入射,令 $T=1$,则入射角满足(见式(16.9))

$$\delta=\frac{4\pi\nu}{c}h\mu=2m\pi \tag{16.24}$$

式中 $\mu=\cos\theta$。为简单起见,省略 μ 和 θ 的下标。除了 h 是固定的、$\mu(=\cos\theta)$ 是变化的之外,可以得到与16.5.1节类似的结论。对于 $\nu=\nu_1$ 和 $\nu=\nu_2(=\nu_1+\Delta\nu_1)$,如果第 m 级强度最大值分别出现在 $\mu=\mu_1$ 和 $\mu=\mu_2(=\mu_1+\Delta\mu_1)$ 处,则

$$\delta_1=\frac{4\pi\nu_1h\mu_1}{c}=2m\pi \tag{16.25}$$

$$\delta_2=\frac{4\pi h(\nu_1+\Delta\nu_1)(\mu_1+\Delta\mu_1)}{c}=2m\pi \tag{16.26}$$

忽略二阶项,可得

$$\Delta\mu_1=-\frac{\mu_1}{\nu_1}\Delta\nu_1 \tag{16.27}$$

对于 ν_1 光,设其半强度点出现在 $\mu=\mu_1+\delta\mu_1$(相应的 $\delta=2m\pi+\Delta\delta_1/2$)。根据

式(16.24),得

$$\frac{4\pi\nu_1 h\delta\mu_1}{c}=\frac{1}{2}\Delta\delta_1\approx\frac{2}{\sqrt{F}} \tag{16.28}$$

或者

$$\delta\mu_1\approx\frac{c}{2\pi\nu_1 h\sqrt{F}} \tag{16.29}$$

如先前讨论的,假设 ν_1 光的半强度点落在 ν_2 光的半强度点上时,两频率的光恰好能分辨开,则

$$\Delta\mu_1=2\delta\mu_1\approx\frac{c}{\pi\nu_1 h\sqrt{F}} \tag{16.30}$$

根据式(16.27),可得

$$\text{分辨能力}=\left|\frac{\nu_1}{\Delta\nu_1}\right|=\frac{\mu_1}{\Delta\mu_1}=\frac{\pi\nu_1 h\sqrt{F}\mu_1}{c} \tag{16.31}$$

或者,也可以用波长的形式表示为

$$\text{分辨能力}=\left|\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0}\right|=\frac{\pi h\sqrt{F}\cos\theta}{\lambda_0} \tag{16.32}$$

因此,当 $F=360(R=0.9)$,$h=1\text{cm}$,$\lambda_0=5000\text{Å}$ 时,有

$$\left|\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0}\right|\approx 1.2\times 10^6$$

这里已经假设是正入射。上式给出

$$\Delta\lambda_0\approx 0.004\text{Å}$$

因此,法布里-珀罗干涉仪器可以分辨两个相差约 10^{-3} Å 的波长。相比之下,一个光栅(比如 25000 条刻槽)在 $\lambda=5000$Å 时只能达到分辨约 0.1Å 的波长差,而棱镜(由底边长 5cm 的重火石玻璃制成)在 5000Å 只能达到分辨约 1Å 的波长差 。必须注意,在前面的分析中,讨论的是两条单色谱线 λ 和 $\lambda+\Delta\lambda$ 的分辨。通常情况下,波长 λ 和 $\lambda+\Delta\lambda$ 的谱线本身也是有波长宽度的,这就限制了干涉仪达不到这么高的分辨能力。

当利用法布里-珀罗干涉仪来分析谱线成分靠得很近的光谱时,相邻两极大值之间的距离需要大于这些谱线所形成的圆环条纹之间的位移。但是,当光谱的波长成分间隔很大时,就有可能使圆环条纹之间的位移大于相邻极大值之间的距离,结果引起条纹的级间“重叠”(见 16.4 节最后部分的讨论)。相应于同一级次条纹最大位移的波长差($\Delta\lambda_s$)称为干涉仪的自由光谱范围,可以写为

$$\Delta\lambda_s=\frac{\lambda^2}{2nh\cos\theta} \tag{16.33}$$

接近正入射时($\theta\approx 0$),式(16.33)变为

$$\Delta\lambda_s=\frac{\lambda^2}{2nh} \tag{16.34}$$

可见,$\Delta\lambda_s$ 与 h 成反比。这与分辨能力相反,分辨能力与 h 成正比(见式(16.31)和式(16.32))。

当光谱比较复杂,包含若干个相隔较大的波长成分,并且每一个波长成分还有超精细结构时,可以通过法布里-珀罗干涉仪和一台摄谱仪联合使用来分开不同的波长成分,如

图 16.12(a)所示。光源 S 发出的光通过透镜 L_1 变为平行光,通过法布里-珀罗干涉仪(见图 16.12(a)中 FP)形成干涉图样,并落到摄谱仪的狭缝上,然后摄谱仪中的棱镜再把这些光谱成分分离开,从而在平面 P 上得到狭缝的一些像,每一个狭缝像中都会有一些条纹横穿其中,如图 16.12(b)所示。

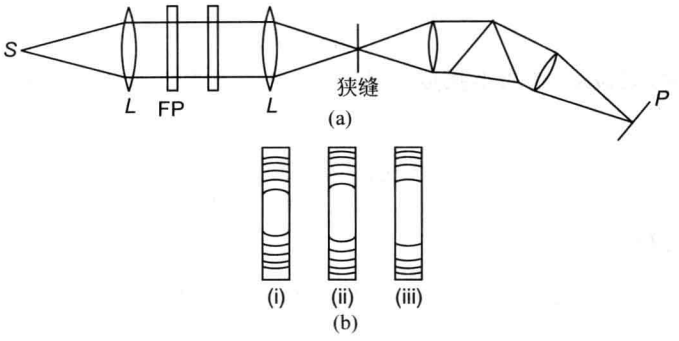


图 16.12

(a) 法布里-珀罗干涉仪与摄谱仪联合使用;(b) 交错的条纹在狭缝平面上形成,然后摄谱仪中的棱镜将它们分开。例如,在平面 P 上观察时,(i)、(ii)和(iii)分别对应于红光区、黄光区和绿光区内的谱线。

16.6 陆末-格尔克板[①]

在 16.2 节中已经看到,多光束干涉仪条纹的锐度(与此相应的是分辨能力)随着板的反射率 R 的增加而增加。但是,我们不能用很厚的金属镀层来增大反射率,这是因为光束的强度会由于金属镀层的吸收而显著降低。这一困难可以利用全内反射现象(代替金属反射)来克服。这正是本节将要讨论的陆末-格尔克板所采用的方法。

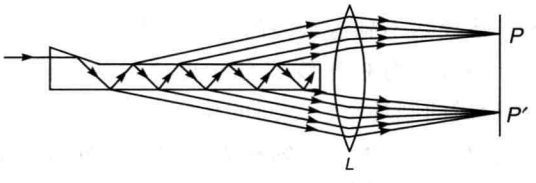


图 16.13 陆末-格尔克板

陆末-格尔克板是一块由玻璃(或石英)制成的平行平面板,在板的一端固定一个与平板材料相同的直角小棱镜(见图 16.13),棱镜的角度要选得恰好,从而使得正入射到棱镜表面的光线在板的两表面上的入射角略小于临界角[②]。由于板的两表面是平行的,所以相继发生的反射都有相同的入射角(接近临界角)。在每次反射时,大部分光都被反射,只有小部分光透射。从而从板的上、下表面将射出一系列光,最后它们在焦平面 P 发生干涉,产生干涉条纹(见图 16.13)。请注意,棱镜抑制了(见图 16.1 中平行平面薄膜上表面的)外反射

① 16.6 节和 16.7 节由承蒙 Anurag Sharma 教授撰写。

② 超过临界角,发生全反射;略小于临界角,仍有很高的反射率(见 24.2 节)。

光。在平面 P 上，板的两边都获得条纹图样，条纹近似是平行于板面的直线。

我们不准备对陆末-格尔克板的理论进行详细讨论，但是有以下两点应予注意。

(1) 与法布里-珀罗干涉仪不同，陆末-格尔克板的两反射表面之间是色散媒质。

(2) 反射的次数没有法布里-珀罗干涉仪那么多。反射次数取决于板的长度和 θ(见图 16.13)，因此，仪器的分辨能力取决于板的长度。

早些时候，陆末-格尔克板曾用在高分辨光谱学中，然而，现在它已经被更为灵活的法布里-珀罗干涉仪所取代。

16.7　干涉滤波器

用一束(非准直的)单色光照射法布里-珀罗干涉仪时，会得到由一些不同的强度极大值组成的干涉图样，这些强度极大值的位置满足

$$2nh\cos\theta_r = m\lambda \tag{16.35}$$

如果用一束准直的白光垂直照射法布里-珀罗干涉仪($\theta_r \approx 0$)，则在透射光中满足式(16.36)的波长对应不同级次的极大值

$$\lambda = \frac{2nh}{m} \tag{16.36}$$

若 h 很大，在可见光区域内可观察到许多极大值。例如，$h=1\text{cm}$ 时可观察到约 23000 个极大值。但是如果减小 h，则可以做到在可见光区只有 1 个或 2 个极大值。例如，$n=1.5$ 和 $h=6\times10^{-5}\text{cm}$ 时，在可见光区就只有 2 个极大值，分别对应于 $\lambda=6000\text{Å}$($m=3$)和 $\lambda=4500\text{Å}$($m=4$)。这 2 个极大值分得很开，从而可以消除其中的一个，使得只有一种波长的光透过。这样，就可以从一束白光中滤出某一特定波长的光，这种结构被称为干涉滤波器[①]。采用上述原理的干涉滤波器可以用现代真空淀积技术来制备。利用真空淀积技术把一层金属薄膜(通常是铝或银)淀积在一块基片(通常是玻璃片)上；然后在上面淀积一层很薄的电介质材料，如冰晶石($3\text{NaF}\cdot\text{AlF}_3$)；并在这个结构上再镀上一层金属膜(见图 16.14)。为了保护这个薄膜结构不受损害，会在其上放置另一块玻璃片。这样，在两玻璃片之间就形成了一个法布里-珀罗结构。通过改变电介质膜的厚度，就可以过滤出任何特定的波长。但是，过滤出的光会有一定的波长宽度，即在波长附近形成一个尖峰样的窄带谱。透射谱的锐度由所构成的法布里-珀罗结构的分辨能力决定，因此，也是由表面的反射率决定的，反射率越大，透射谱就越窄。但是不能无限制地增加金属膜的厚度来提高反射率，因为膜的吸收会降低透射光的强度。为了克服这一困难，也可以用全电介质结构来代替金属膜。

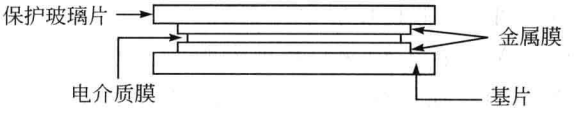


图 16.14　干涉滤波器

在全电介质结构中，要淀积若干层折射率适当的电介质材料。在第 15 章中已经证明如

① 法布里-珀罗结构也相当于一个谐振腔，从而可以维持所谓的模的振荡。

何利用电介质膜来增大表面反射率。如果在玻璃片上淀积一层折射率大于玻璃的 $\lambda/4$ 厚的电介质膜,就可以增大玻璃片的反射率。两者折射率的差越大,反射率就越大。干涉滤波器常用的电介质材料是氧化钛($n=2.8$)和硫化锌($n=2.3$)。为了制备干涉滤波器,在玻璃基片上淀积一层 $\lambda/4$ 厚的氧化钛膜,然后淀积一层低折射率的电介质材料(如冰晶石或氟化镁),在这上面再淀积一层 $\lambda/4$ 厚的高折射率材料。为增大反射率,可采用高、低折射率材料交替的多层结构。采用这种方法,可以对任何特定的波长做到反射率大于90%(更详细的说明见15.6节)。因此,如果入射光是复色光(比如白光),反射光将具有很高的单色性。

小　结

- 如果一平面波入射到平行平面膜上,会在两个表面上经历多次反射,多束振幅连续衰减的光束会从膜的上、下两侧射出。这些光束(每一边)会在无穷远处产生干涉条纹。如果每个面的反射率 $R\approx1$,那么形成的条纹会比双光束干涉产生的条纹尖锐得多。因此,多光束干涉的干涉仪具有高分辨能力,常应用于高分辨率光谱学中。这样的膜的总体透射率为

$$T=\frac{1}{1+F\sin^2\frac{\delta}{2}}$$

式中 $F=\frac{4R}{(1-R)^2}$ 是锐度系数。且

$$\delta=\frac{4\pi n_2 h\cos\theta_2}{\lambda_0}$$

表示(两连续反射波之间的)相位差,它是由光束在膜内往返一次所附加的光程差引起,θ_2 为膜内(折射率为 n_2)的折射角,h 为膜厚,λ_0 为自由空间的波长。当 $\delta=2m\pi$,$m=1,2,3,\cdots$ 时,透射率 $T=1$。当 $R\approx1$ 时,F 非常大,透射共振峰非常尖锐。这就是应用这种膜结构的法布里-珀罗干涉仪具有高分辨能力的原理。

习　题

16.1 计算法布里-珀罗干涉仪的分辨能力,已知组成干涉仪的两反射表面的反射率为0.85,间距为1mm,$\lambda=4880$Å。

16.2 如果法布里-珀罗干涉仪在 $\lambda=6000$Å 处可以分辨 $\Delta\lambda=0.1$Å 的两条谱线,试计算它的两板之间的最小间距。假设反射率为0.8。

16.3 考虑一波长为6000Å的单色光(来自扩展光源)正入射到 $n_2=1$,$h=1$cm,$F=200$ 的法布里-珀罗标准具上。在焦距为20cm的透镜焦平面上观察到同心圆。

(1) 计算每个平面镜的反射率。

(2) 计算前4个亮环的半径以及对应的级次 m 是多少?

(3) 计算每个亮环强度下降一半时的角宽度和线半高全宽度(用mm度量)。

16.4 考虑两个波长分别为6000Å和5999.9Å的光束入射到法布里-珀罗标准具的情况,标准具的参数如上题所述。计算对应每个波长的前3个亮环的半径及相应的级数

m？光谱线能被分辨开吗？

16.5　考虑波长为 6000Å 的单色光束正入射到 $n_2=1$，$F=400$ 的扫描法布里-珀罗干涉仪上，两平面镜之间距离为 $h=h_0+x$。设 $h_0=10\text{cm}$，计算

(1) 当透射率为 1 时，对应的前 3 个 x 和对应的 m。

(2) 当透射率为 1/2 时的半高全宽 Δh。

(3) 如果 $F=200$，Δh 的值为多少？

[**答案**：(1) $x=200\text{nm}(m=333334)$，$x=500\text{nm}$ $(m=333335)$；(2) $\Delta h\approx 9.5\text{nm}$]

16.6　接习题 16.5，现在考虑两个波长分别为 λ_0(6000Å)和 $\lambda_0+\Delta\lambda$ 的光束正入射到 $n_2=1$，$F=400$，$h_0=10\text{cm}$ 的法布里-珀罗干涉仪上。$\Delta\lambda$ 取什么值时，相应于相同的 h 值，使得对于两个波长的 $T=1/2$？

16.7　考虑一激光束正入射到法布里-珀罗干涉仪上，如图 16.15 所示。

(1) 假设 $h_0=0.1\text{m}$，$c=3\times10^8\text{m/s}$，$\nu=\nu_0=5\times10^{14}\,\text{s}^{-1}$，绘出相应于 $F=200$ 和 $F=1000$ 的 T 关于 x($-100\text{nm}<x<400\text{nm}$)的函数曲线。

(2) 证明如果 $\nu=(\nu_0\pm p1500\text{MHz}, p=1,2,\cdots)$，会得到同样的 T 相对于 x 曲线，1500MHz 是自由谱范围(FSR)，那么，相应的 δ 是多少？

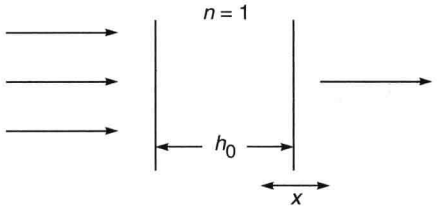


图 16.15　习题 16.7 图

参考文献和推荐读物

1. R. Baierlein, *Newton to Einstein:* the Trail of Light, Cambridge University Press, 1992.
2. P. Baumeister and G. Pincus, 'Optical interference coatings', *Scientific American*., Vol. 223, 59, December, 1970.
3. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford, 1975.
4. M. Cagnet, M. Francon and S. Mallick, *Atlas of Optical Phenomena*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
5. R. W. Ditchburn, *Light*, Academic Press, London, 1976.
6. M. Francon, *Modern Applications of Physical Optics*, Interscience, New York, 1963.
7. M. Francon, *Optical Interferometry*, Academic Press, New York, 1966.
8. F. A. Jenkins and H. E. White, *Fundamentals of Optics*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1976.
9. C. Lin, 'Optical communications: Single mode optical fiber transmission systems',. *Optoelectronic Technology and Lightwave Communications Systems*, Ed. C. Lin, Van Nostrand Reinhold, New York, 1989.
10. W. H. Steel, *Interferometry*, Cambridge University Press, Cambridge, London, 1967.
11. S. Tolansky, *Multiple Beam Interferometry of Surfaces and Films*, Oxford University Press, London, 1948.
12. S. Tolansky, *An Introduction to Interferometry*, Longmans Green and Co., London, 1955.

第17章 相 干 性

能够干涉的光称为“相干光”。显而易见，为了产生出许多干涉条纹，就必须采用单色性好的光。可以用两束来自同一光源发出的光的光程差来很方便地测量其相干性，这个光程差可以是经过不同路径后产生的，然而其干涉条纹仍然能够观测到，这个差值被称为相干长度……瑞利爵士和迈克耳孙首先意识到相干时间就是光谱线宽的倒数。迈克耳孙将相干性用来进行精巧的光谱分析和星体直径的测量。

——丹尼斯·伽柏在诺贝尔颁奖仪式上关于全息术的讲演，1971 年 12 月 11 日

17.1 引言

在讲述干涉的前几章中，假设波动的位移在任意时间里都保持为正弦型。因此，波的位移(E)可以写为

$$E = A\cos(kx - \omega t + \phi)$$

上式意味着 x 在 $-\infty < t < \infty$ 的范围内取任何值，位移都将按正弦规律变化。例如，当 $x=0$ 时(见图 17.1(a))，有

$$E = A\cos(\omega t - \phi), \quad -\infty < t < \infty \tag{17.1}$$

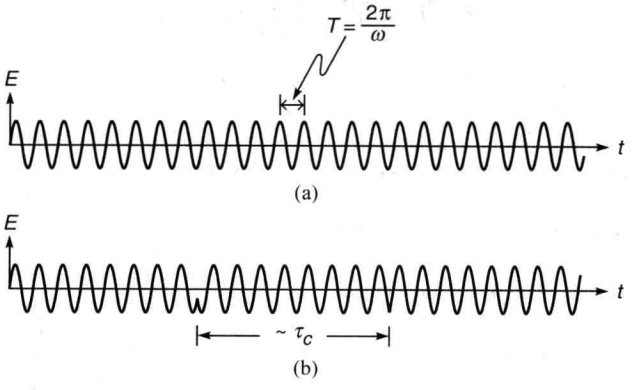


图 17.1

(a) 对于一个完美的单色光束，在 $-\infty < t < \infty$ 的范围内，其位移保持正弦变化；(b) 对于实际光源，只在 τ_c 量级的时间内波动存在确定的相位关系，这个时间称为光束的时间相干性。对于一个光波，如果其 $\nu \sim 5\times 10^{14}\,\mathrm{Hz}$，$\tau_c \sim 10^{-10}\,\mathrm{s}$，则在 τ_c 内约有 50000 次震荡。

显然，这对应的是一种理想情况，因为从普通光源辐射出的光是由有限长度的光波列组成的，其典型的变化如图 17.1(b)所示。由于这里只考虑光波，E 表示的是与光波相联系的电场。如图 17.1(b)所示，τ_c 为波列的平均持续时间，也就是说在 τ_c 数量级的时间内，电场将保持为正弦变化。因此，在一个给定的点，当 $\Delta t \ll \tau_c$ 时，t 时刻和 $t+\Delta t$ 时刻的电场一般会保持明确的相位关系；而当 $\Delta t \gg \tau_c$ 时，这两者之间(几乎)没有任何相位关系。τ_c 被称作光源的相干时间，也可以说是场在 τ_c 范围内保持相干性。波列的长度为

$$L = c\tau_c \tag{17.2}$$

(式中 c 为自由空间中的光速)称为相干长度。对于氖的谱线($\lambda = 6328$Å)，$\tau_c \sim 10^{-10}$s；而对镉的红光谱线($\lambda = 6438$Å)，$\tau_c \sim 10^{-9}$s。与它们相对应的相干长度分别为 3cm 和 30cm。相干时间 τ_c 为有限长可以归因于许多因素。例如，如果一个正在发光的原子与另一个原子发生碰撞，那么，波列将会经历一个突然的相位变化，如图 17.1(b)所示。有限的相干时间也可以解释为原子的随机运动或者归因于原子能级的寿命是有限的这一事实，原子发光时，它从该能级向低能级跃迁[①]。

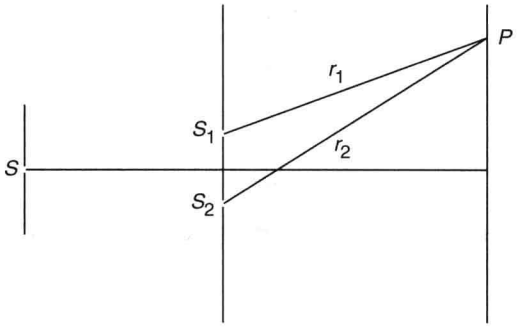


图 17.2　杨氏双孔干涉实验。t 时刻在点 P 附近观察到的干涉图样是由 $t - r_1/c$ 时刻 S_1 发出的光波和 $t - r_2/c$ 时刻 S_2 发出的光波叠加形成的，因此，当 $(r_2 - r_1)/c \ll \tau_c$ 时，在点 P 能够观测到高可见度的干涉条纹。

为了理解相干时间(或者相干长度)的概念，考虑如图 17.2 所示的杨氏双孔干涉实验。这个实验装置产生的干涉图样已在 14.4 节相当详细地讨论过了。t 时刻在点 P 附近观测到的干涉图样是源于 $t - r_1/c$ 时刻 S_1 发出的光波和 $t - r_2/c$ 时刻 S_2 发出的光波叠加形成的，式中 r_1 和 r_2 分别表示$\overline{S_1P}$和$\overline{S_2P}$。显而易见，如果

$$\frac{r_2 - r_1}{c} \ll \tau_c$$

那么，从 S_1 发出到达点 P 的光波和从 S_2 发出到达点 P 的光波会有确定的相位关系，此时将能获得可见度高的明暗条纹。另一方面，如果路径差 $(r_2 - r_1)$ 足够大，以至于

$$\frac{r_2 - r_1}{c} \gg \tau_c$$

则从 S_1 发出到达点 P 的光波和从 S_2 发出到达点 P 的光波将不会有固定的相位关系，此时将看不到干涉图样。因此，一般来说，中心条纹($r_1 = r_2$)会有很好的可见度，而当移向高级

① 更详细的讨论请参见文献[17]。

条纹时,可见度逐渐变差,在17.7节中将更详细地讨论这一点。

接下来讨论迈克耳孙干涉仪实验(见15.11节)。一束光射到分光板G(通常是部分镀银板)上,然后从平面镜M_1和M_2反射的光波将发生干涉(见图17.3)。令M_2'表示眼睛看到的(由分光板G形成的)平面镜M_2的像。如果把M_1M_2'之间的距离表示为d,那么,由平面镜M_2反射的光束传播了额外的路程$2d$。因此,此时刻由M_1反射的光束将会与$2d/c$秒之前由M_2反射的光束发生干涉。

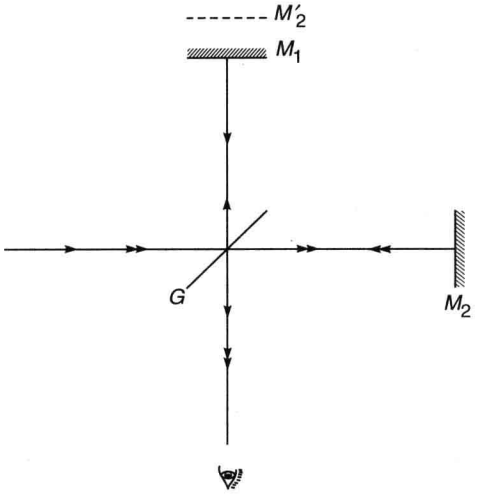


图17.3 迈克耳孙干涉仪装置。G表示分光板,M'_2表示由G形成的M_2的像。

如果距离d满足

$$\frac{2d}{c} \ll \tau_c$$

那么,两光束之间将存在确定的相位关系,则能够观测到清晰的干涉条纹。另一方面,如果

$$\frac{2d}{c} \gg \tau_c$$

那么一般来说,两光束之间将不存在确定的相位关系,则观测不到干涉图样。需要指出的是,使干涉图样消失的确定距离是不存在的,实际情况是随着距离的增大,条纹的可见度逐渐降低,直到最后整个条纹图案消失。对于氖谱线($\lambda=6328$Å),$\tau_c \sim 10^{-10}$s,当光程差为几个厘米时干涉条纹就会消失。然而对于镉红光谱线($\lambda=6438$Å),$\tau_c \sim 10^{-9}$s,它的相干长度约为30cm的量级。

激光光束的相干时间通常比普通光源大很多。实际上,已经制造出相干时间长达50ms的氦-氖激光器(见文献[9]),这就意味着相干长度长达15000km!商用的氦-氖激光器其相干时间$\tau_c \sim 50$ns,相干长度约为15m。应用这样的激光器,即使光程差高达几米,依然能够得到高可见度的干涉条纹。

为了说明激光束的相干长度有多大,考虑如图17.4所示的实验装置。一束平行光垂直入射到一对圆孔上,在凸透镜的后焦平面上能够观测到夫琅禾费衍射图样。首先使用氦-氖

激光作为入射光，干涉图样如图 17.5(a)所示，它是艾里斑和双孔干涉图样的简单乘积形式[①]。然后将一个 1/2mm 厚的玻璃片放在其中一个圆孔前，如图 17.5(b)所示，干涉图样几乎没有改变。很明显，相比于激光光束的相干长度而言，由玻璃片引入的额外光程差(=$(\mu-1)t$，见 14.10 节)太小了。但如果用准直的汞弧光重复这个实验，就会发现随着玻璃片的引入，干涉图样消失了(见图 17.6)。这表明玻璃片引入的额外光程差大到了使得从两个圆孔发出的光到达观察屏后不再有确定的相位关系。

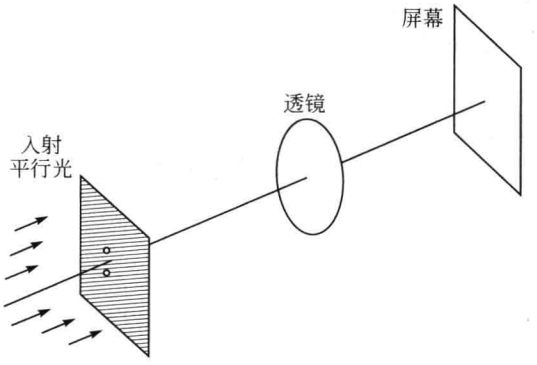


图 17.4　一束平行光垂直入射到一对圆孔上，在凸透镜的后焦平面上能够观测到夫琅禾费衍射图样。

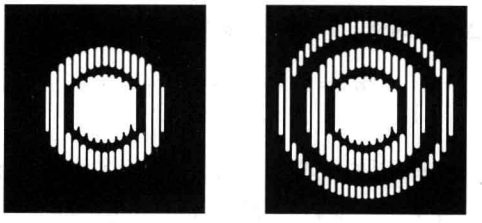


图　17.5

(a) 用氦-氖激光束在如图 17.4 所示的装置中产生的干涉图样；(b) 将厚度为 1/2mm 的玻璃片放置在其中一个小孔前得到的干涉图样(图 17.5 和图 17.6 都引自文献[16]，作者在文献[8]中也看到了这两张图片)。

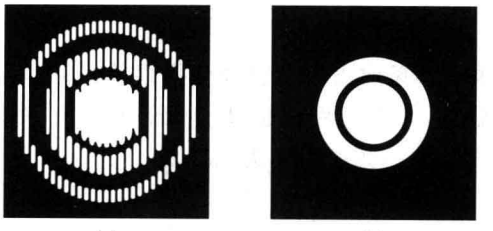


图　17.6

(a) 用准直的汞弧光在如图 17.4 所示的装置中产生的干涉图样；(b) 将厚度为 1/2mm 的玻璃片放置在其中一个小孔前得到的干涉图样。

① 见 19.8 节。

17.2 线宽

在上一节讨论的迈克耳孙干涉仪实验中,干涉条纹可见度的下降也可以解释为由于光源发出的光波具有一定的频率宽度,并不是单一频率的波。当发生干涉的两束光的光程差为零或者很小时,不同频率分量产生的干涉条纹无错位地重叠在一起,从而使图样有很好的可见度。另一方面,当光程差增加时,不同频率分量产生的条纹彼此略微错开,干涉图样的可见度相比而言降低了。换句话说,大光程差所产生的可见度差的条纹图案是由于光源的非单色性导致的。

如果用两个靠近的波长 λ_1 和 λ_2 进行迈克耳孙干涉实验,上述两种解释的等价性就很容易理解。实际上,在15.11节中已经证明两个靠近的波长 λ_1 和 λ_2(比如钠黄光的 D_1 和 D_2 线),当满足

$$\frac{2d}{\lambda_2}-\frac{2d}{\lambda_1}=\frac{1}{2} \tag{17.3}$$

条件时,干涉条纹将消失,式中 $2d$ 表示两光束之间的光程差。因此,它可以表示为

$$2d=\frac{\lambda_1\lambda_2}{2(\lambda_1-\lambda_2)}\approx\frac{\lambda^2}{2(\lambda_1-\lambda_2)} \tag{17.4}$$

相较于仅仅是两个分立的波长的光束,如果假设光束包含了 λ 到 $\lambda+\Delta\lambda$ 之间的所有波长成分,那么,波长由 λ 到 $\lambda+\Delta\lambda/2$ 的光产生的干涉图样在满足条件

$$2d=\frac{\lambda^2}{2\times\left(\frac{1}{2}\Delta\lambda\right)}=\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \tag{17.5}$$

时,干涉条纹将消失。更进一步,位于 λ 到 $\lambda+\Delta\lambda/2$ 之间的每一个波长都会与(位于 $\lambda+\Delta\lambda/2$ 到 $\lambda+\Delta\lambda$ 之间)的一个波长相对应,使得前者产生的极小值的位置恰好落在后者产生的相应的极大值的位置,从而导致条纹消失。因此,当

$$2d\geqslant\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \tag{17.6}$$

时,干涉条纹的可见度将会极差。把上面的公式改写为

$$\Delta\lambda\geqslant\frac{\lambda^2}{2d} \tag{17.7}$$

它表明光程差$\sim d$时,如果干涉条纹可见度已经变得很差,那么,光源的线宽$\sim\lambda^2/2d$。

在17.1节中已经了解到,如果光程差超过了相干长度 L,将观测不到干涉条纹。而从上面的讨论得出结论,如果光源的频谱宽度为 $\Delta\lambda$,则

$$\Delta\lambda\sim\frac{\lambda^2}{L}=\frac{\lambda^2}{c\tau_c} \tag{17.8}$$

因此,光束的时间相干性的表征量 τ_c 可以直接与谱宽 $\Delta\lambda$ 联系起来。例如,对于镉红线,$\lambda=6438\text{Å}$,$L\approx30\text{cm}$($\tau_c\approx10^{-9}\text{s}$),可得

$$\Delta\lambda\sim\frac{\lambda^2}{c\tau_c}=\frac{(6.438\times10^{-5})^2}{3\times10^{10}\times10^{-9}}\sim0.01(\text{Å})$$

对于钠线,$\lambda\approx5890\text{Å}$,$L\approx3\text{cm}$($\tau_c\approx10^{-10}\text{s}$),则线宽 $\Delta\lambda\sim0.1\text{Å}$。再者,又由 $\nu=c/\lambda$,谱线的频率展宽为

$$\Delta\nu \sim \frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda \sim \frac{c}{L} \tag{17.9}$$

式中没有考虑符号正负的问题。由于 $\tau_c = L/c$，可得

$$\Delta\nu \sim \frac{1}{\tau_c} \tag{17.10}$$

因此，谱线的频宽与相干时间的倒数为同一数量级。例如，对于钠黄光($\lambda = 5890\text{Å}$)，有

$$\tau_c \sim 10^{-10}\,\text{s} \Rightarrow \Delta\nu \sim 10^{10}\,\text{Hz}$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times10^{10}}{5.89\times10^{-5}} \approx 5\times10^{14}\,\text{Hz}$$

可得

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \sim \frac{10^{10}}{5\times10^{14}} = 2\times10^{-5}$$

物理量 $\Delta\nu/\nu$ 可以表示光源的单色性(或者频谱的纯净性)。可以看出，即使对于普通光源，其值也相当小。对于商用激光器输出的光束，$\tau_c \sim 50\text{ns}$，意味着 $\Delta\nu/\nu \sim 4\times10^{-8}$。有限的相干时间与光源谱宽直接联系的结论也可以通过傅里叶变换分析得到，这方面内容将在 17.6 节中讨论。

17.3　空间相干性

至此已经讨论了从一个点光源发出的两个光场，通过不同光程到达某特定点的相干情况。在这一节中将讨论光源具有有限大小所引出的相干性特征。

考虑杨氏双孔干涉实验中，点光源 S 到双孔 S_1 和 S_2 的距离相等(见图 17.7(a))。假设 S 发出的几乎是单色光，以便在屏幕 PP' 产生高可见度的干涉条纹。屏上的点 O 满足 $\overline{S_1O} = \overline{S_2O}$。很显然，点光源 S 将在点 O 附近产生一个强度极大值。接下来考虑另一个相似的点光源 S'，它与点光源 S 相距 l。假设从 S 和 S' 发出的光波没有特定的相位关系，那么，在屏幕 PP' 形成的干涉图样将是 S 和 S' 各自形成的干涉条纹强度分布的简单层叠(见 17.5 节)。如果光源间的距离 l 从零缓慢增大，由于光源 S 产生的干涉图样与 S' 产生的干

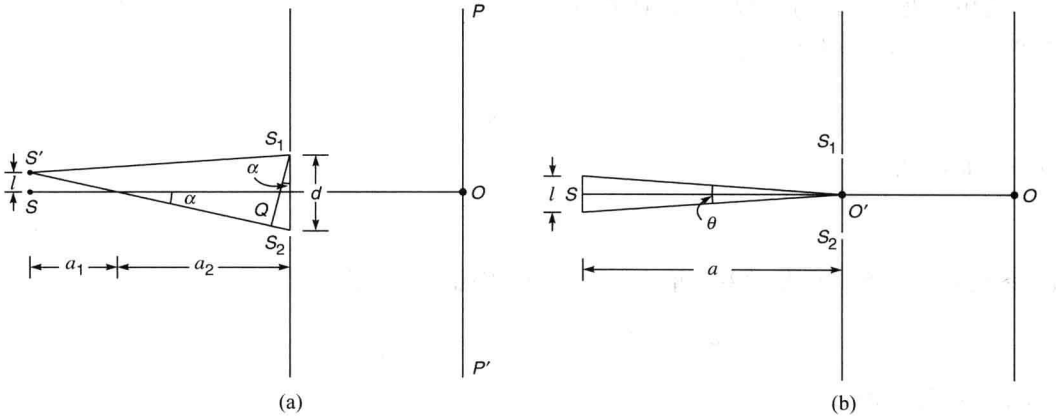


图　17.7

(a) 利用两个独立点光源 S 和 S' 的杨氏双孔干涉实验；(b) 用扩展光源的杨氏双孔干涉实验

涉图样有一些错位,屏幕 PP' 的干涉条纹的可见度将会下降。显然,如果

$$\overline{S'S_2}-\overline{S'S_1}=\frac{\lambda}{2} \tag{17.11}$$

那么,由光源 S 产生的干涉图样的极小值将会落在由 S' 产生的干涉图样的极大值上,结果将观测不到干涉条纹。很容易计算

$$\overline{S'S_2}=\left[a^2+\left(\frac{d}{2}+l\right)^2\right]^{1/2}\approx a+\frac{1}{2a}\left(\frac{d}{2}+l\right)^2$$

和

$$\overline{S'S_1}=\left[a^2+\left(\frac{d}{2}-l\right)^2\right]^{1/2}\approx a+\frac{1}{2a}\left(\frac{d}{2}-l\right)^2$$

式中

$$a=a_1+a_2$$

假设 $a\gg d,l$。则有

$$\overline{S'S_2}-\overline{S'S_1}\approx\frac{ld}{a}$$

当条纹消失时,可得

$$\frac{\lambda}{2}=\overline{S'S_2}-\overline{S'S_1}\approx\frac{ld}{a}$$

或者

$$l\approx\frac{\lambda a}{2d}$$

现在如果有一个扩展的非相干光源,它的线度$\sim\lambda a/d$,则对于光源上的每一点,总存在一个与之相距 $\lambda a/2d$ 的点,其产生的干涉条纹图样移动了半个条纹宽度。因此,将观测不到干涉图样。对于扩展非相干光源而言,仅当

$$l\ll\frac{\lambda a}{d} \tag{17.12}$$

时,才能观测到可见度高的条纹。

若用 θ 表示光源对点 O' 的张角(见图 17.7(b)),则 $\theta\approx l/a$,那么,式(17.12)表示的获得高可见度条纹的条件可以改写为

$$d\ll\frac{\lambda}{\theta} \tag{17.13}$$

另一方面,如果

$$d\sim\frac{\lambda}{\theta} \tag{17.14}$$

时,条纹的可见度将会非常差。事实上,由更严格的衍射理论,当

$$d=1.22\frac{\lambda}{\theta},2.25\frac{\lambda}{\theta},3.24\frac{\lambda}{\theta},\cdots \tag{17.15}$$

时,干涉图样将消失[①]。

① 见文献[7]的5.5节。

因此，随着两个小孔的间距从零开始增大，干涉条纹的可见度逐渐变差，当 $d=1.22\lambda/\theta$ 时，条纹消失；如果 d 继续增大，干涉条纹将以相对较差的可见度重新出现，然后在 $d=2.25\lambda/\theta$ 时，再次消失；以此类推。距离

$$l_w = \lambda/\theta \text{（横向相干宽度）} \tag{17.16}$$

给出了光束截面横向隔开多远距离的两点能够被看作是空间上相干的，这个距离称为横向相干宽度。

例 17.1　在地球表面，太阳对地球表面所张的角度约为 $32'$。假设阳光正入射到如图 17.7 所示的双孔干涉实验装置上，且在双孔 S_1，S_2 之前有一个滤波器，使得 $\lambda=5000\text{Å}$ 的光入射到 S_1，S_2。S_1，S_2 的间距为多少时，才能在屏幕上观测到可见度高的干涉条纹？

解　$\theta \approx 32' = \dfrac{32\pi}{180\times 60}\text{rad} \approx 0.01\text{rad}$ 则横向相干宽度为

$$l_w \approx \frac{5\times 10^{-5}}{10^{-2}} = 0.005(\text{cm})$$

因此，如果两孔间距小于 0.005cm 时，就能观测到可见度非常好的相干条纹。

17.4　迈克耳孙测星干涉仪

利用空间相干性的概念，迈克耳孙开发出精巧的测量星体角直径的方法。这一方法是基于：对于远处的圆形光源，当双孔 S_1 和 S_2（见图 17.8）的距离（见式(17.15)）为

$$d = 1.22\frac{\lambda}{\theta} \tag{17.17}$$

时，干涉条纹将消失。式中 θ 表示圆形光源对双孔中点的张角，如图 17.8 所示。对于角直径为 10^{-7}rad 的星体来说，条纹消失的双孔间距为

$$d \sim \frac{1.22\times 5\times 10^{-5}}{10^{-7}} \approx 600(\text{cm})$$

假设光波波长为 $\lambda\approx 5000\text{Å}$。很明显，对于如此大的 d 值，干涉条纹宽度将会变得极窄，而且还需要用到一个巨大的透镜，它不仅制作困难，而实际上只用到了其中很小的一部分。为了克服这个困难，迈克耳孙使用了两个可移动的平面镜 M_1 和 M_2，如图 17.9 所示，从而有效

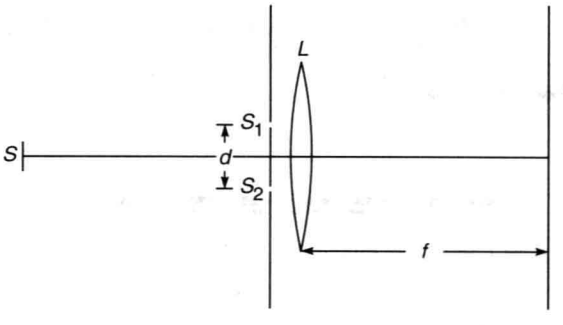


图 17.8　S 是有一定空间大小的光源。S_1 和 S_2 是两个狭缝，它们之间的距离 d 可变。在透镜 L 的焦平面上观测条纹。

地获得了大的 d 值,这一装置称为迈克耳孙测星干涉仪。在一次典型实验中,当 $\overline{M_1M_2}\approx 24$ 英尺(≈ 7.3152m)时,发生了第一次条纹消失,从而得出星体的角直径为

$$\theta \approx \frac{1.22\times 5\times 10^{-5}}{24\times 12\times 2.54}(\text{rad}) \approx 0.02''$$

这颗星叫做大角星。根据与这颗星的已知距离,就可以估算出它的直径约为太阳的27倍。

需要指出的是,激光束在整个激光束截面内都是空间相干的。因此,如果用激光束直接射到一个双缝装置上(见图17.10),只要激光束覆盖了两个缝,在屏幕上就可以观测到清晰的干涉图样。这表明激光束在整个波前上都是空间相干的。

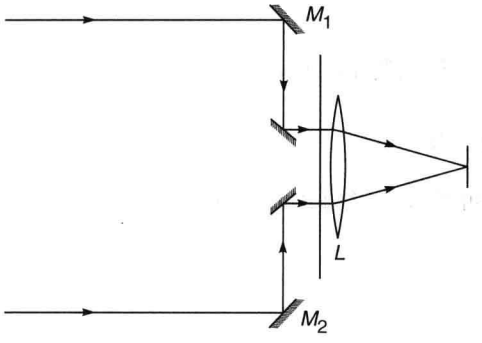


图17.9 迈克耳孙测星干涉仪

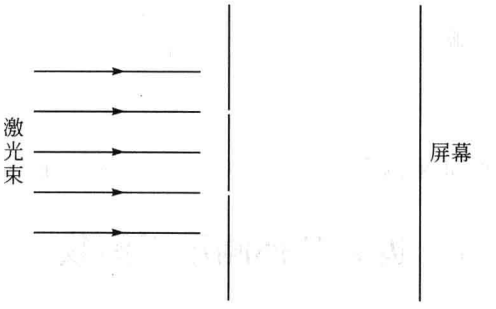


图17.10 当激光束射到双缝装置时,在屏幕上可以观测到干涉条纹。这说明激光束在整个波前是空间相干的。

如图17.11所示为Nelson和Collins(见文献[14])在红宝石激光器内的红宝石棒端面放置一对宽度为7.5μm、间距为54.1μm的狭缝,并由此所得到的干涉图样,其结果在20%内与理论计算相吻合。为了证明空间相干性确实是激光器的行为,他们证明了当输出低于(激光器)某个阈值时,不能观测到正常的相干图样,此时照相底板上只能得到一片均匀的暗区。

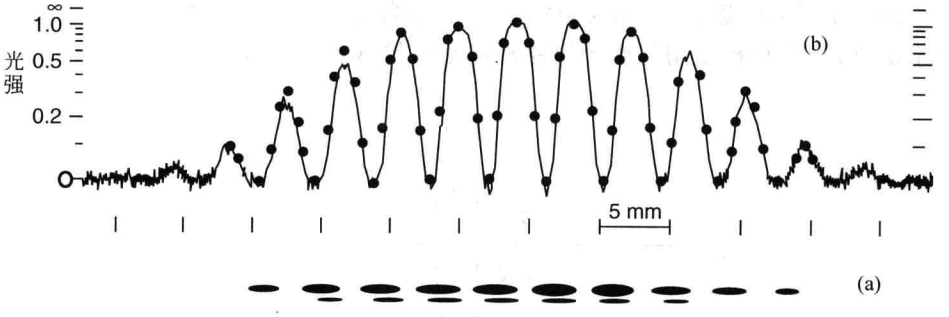


图17.11 在红宝石棒的端面上放置一对宽度为7.5μm,间距为54.1μm的狭缝所得到的双缝干涉图样。(a)真实的干涉图样;(b)显示了干涉图样的光密度计曲线,圆点为假设平面波传播到双缝时的理论计算值。图片来自参考文献[14],由D. F. Nelson博士提供。

17.5　光学拍

当频率分别为 256Hz 和 260Hz 的两个音叉同时振动时，会听到一个频率约为 258Hz、强度从零到极大来回往复变化、变化频率为 4Hz 的时强时弱的声音，这一现象称为拍。考虑频率分别为 ω 和 $\omega+\Delta\omega$ 的两个波的叠加，将很容易理解这一现象。两波的位移方程分别为

$$\begin{aligned} y_1 &= a\sin(\omega t+\phi_1) \\ y_2 &= a\sin[(\omega+\Delta\omega)t+\phi_2] \end{aligned} \tag{17.18}$$

为了简便起见，假设两波有相同的振幅，叠加后的合位移为

$$\begin{aligned} y &= y_1+y_2 \\ &= 2a\sin\left[\left(\omega+\frac{1}{2}\Delta\omega\right)t+\frac{1}{2}(\phi_1+\phi_2)\right]\cos\left[\frac{1}{2}(\Delta\omega)t+\frac{1}{2}(\phi_2-\phi_1)\right] \\ &= 2a\sin\left[\left(\omega+\frac{1}{2}\Delta\omega\right)t\right]\sin\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t\right) \end{aligned} \tag{17.19}$$

我们假设 $\phi_1=\pi/2=-\phi_2$，这并不失普遍性。如图 17.12(a)和(b)所示，分别反映了下面两项随时间的变化曲线

$$\sin\left(\omega+\frac{1}{2}\Delta\omega\right)t,\quad \sin\left(\frac{1}{2}\Delta\omega\right)t$$

如图 17.12(c)所示，为这两项乘积的曲线，这一乘积表示合位移。请注意，虽然包络以 $\frac{\Delta\omega}{4\pi}\left(=\frac{1}{2}\Delta\nu\right)$ 的频率进行变化(见图 17.12(b))，但强度每 $1/\Delta\nu$ 秒变化一次。这种声音的强弱变化称为拍。

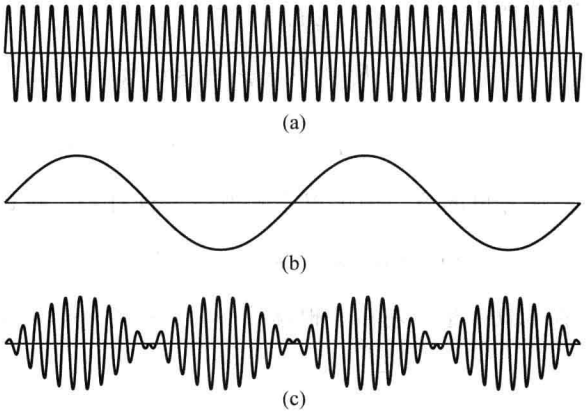


图　17.12

(a)和(b)分别表示 $\sin\left[\left(\omega+\frac{1}{2}\Delta\omega\right)t\right]$ 和 $\sin\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t\right)$ 随时间的典型变化曲线；(c)表示了两者的乘积随时间的变化曲线。

通过观察莫尔条纹(见图 17.13)，可以很容易地理解拍现象。莫尔条纹是由空间频率稍有差别的两个平行线图样交叠在一起形成的，每当一个图样的暗线恰好落在另一个图样的亮线上时，认为这两个波“反相”，从而得到了周期性出现的宽“暗区”。

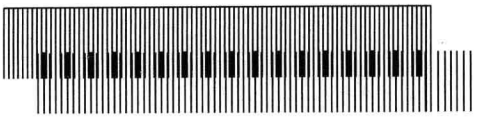


图 17.13　由空间频率稍有差别的两个平行线图样交叠在一起形成的莫尔条纹,展示了拍现象。

同理可以讨论光学拍现象。例如,考虑频率分别为 ω 和 $\omega+\Delta\omega$ 的两个场 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 的叠加

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_{01}\sin(\omega t+\phi_1) \tag{17.20}$$

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}_{02}\sin[(\omega+\Delta\omega)t+\phi_2] \tag{17.21}$$

假设两个电场是在同一个方向上的线偏振光,为了计算合场强,只需把 E_1 和 E_2 进行简单的代数相加

$$E = E_1 + E_2 = E_{01}\sin(\omega t+\phi_1) + E_{02}\sin[(\omega+\Delta\omega)t+\phi_2]$$

这样

$$\begin{aligned} E^2(t) =& E_{01}^2\sin^2(\omega t+\phi_1) + E_{02}^2\sin^2[(\omega+\Delta\omega)t+\phi_2] \\ &+ E_{01}E_{02}[-\cos(2\omega t+\Delta\omega t+\phi_1+\phi_2) \\ &+ \cos(\Delta\omega t+\phi_2-\phi_1)] \end{aligned} \tag{17.22}$$

对于光波频率来说,$\omega\approx10^{15}$ Hz,因此前三项会变化得极为迅速,探测器(像眼睛或者光电探测器)只能观测到其时间平均值。通过以下式子,定义 $F(t)$ 在时间段 $2T$ 内的时间平均为

$$\langle F(t)\rangle = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}F(t)\,\mathrm{d}t \tag{17.23}$$

则

$$\begin{aligned} \langle E_{01}^2\sin^2(\omega t+\phi_1)\rangle =& E_{01}^2\,\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\sin^2(\omega t+\phi_1)\,\mathrm{d}t \\ =& E_{01}^2\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\omega T}[\sin2(\omega t+\phi_1)]\Big|_{-T}^{+T}\right\} \\ =& \frac{1}{2}E_{01}^2\left(1-\frac{1}{2\omega T}\sin2\omega T\cos2\phi_1\right) \end{aligned} \tag{17.24}$$

当平均时间 $T\gg1/\omega$ 时,括号里的第二项可以小到忽略不计,因此,可以把式(17.24)写为

$$\langle E_{01}^2\sin^2(\omega t+\phi_1)\rangle \approx \frac{1}{2}E_{01}^2 \tag{17.25}$$

例如,眼睛的响应时间在 0.05s 量级左右。根据 $T\sim0.05$s 和 $\omega\approx10^{15}$ Hz,可得

$$\frac{1}{\omega T}\approx 2\times10^{-14}$$

与 1 相比这是一个特别小的值,这就是眼睛无法感受到光强度变化的原因。即使对于一个响应时间约为 10^{-9}s 的快速光电探测器来说,$1/(\omega T)\sim10^{-6}$s,仍然是可忽略的。

回到式(17.22),如果在一段比 $2\pi/\omega$ 长但比 $2\pi/\Delta\omega$ 短的时间内做时间平均,可得

$$\langle E^2(t)\rangle = \frac{1}{2}E_{01}^2 + \frac{1}{2}E_{02}^2 + E_{01}E_{02}\cos[(\Delta\omega)t+\phi_2-\phi_1] \tag{17.26}$$

例如,如果 $\Delta\omega\approx10^7$ Hz,光电探测器的分辨率约为 10^{-9}s,则探测器对于式(17.22)等号右边前三项只能记录到平均值,但是能记录到最后一项随时间的变化,这就是上式所展示的我们熟悉的拍现象。

作为示例，考虑钠光的 D_1 和 D_2 两谱线形成的拍，其波长分别为

$$\lambda_1 = 5890\text{Å}(\Rightarrow\omega_1 \approx 3.2003\times10^{15}\,\text{Hz})$$

$$\lambda_2 = 5896\text{Å}(\Rightarrow\omega_2 \approx 3.1970\times10^{15}\,\text{Hz})$$

则 $\Delta\omega\approx3.3\times10^{12}\,\text{Hz}$。

为了观测到拍现象，探测器的响应时间应该远小于 $1/\Delta\omega$，即，光电探测器的响应时间应该$\leqslant10^{-13}$ s，而这在现实中是无法实现的。因此，必须减小 $\Delta\omega$ 的值以观测光学拍。Forrester 等人(见文献[6])进行了第一次观测光学拍的实验，他们使用了用磁场分裂出的一条谱线(这种分裂现象被称为赛曼效应)得到的两个相接近的光频率进行实验。磁场越微弱，所得到的 $\Delta\omega$ 越小。在这次实验中，Forrester 和他的同事们得到的 $\Delta\nu\sim10^{10}\,\text{Hz}$，从而观测到光学拍。

很显然，为了使光学拍的强弱频率非常缓慢(以便能够用响应时间较长的光电探测器进行观测)，$\Delta\omega$ 应该进一步减小。但这可能会引发相干性问题。在上面的分析中，假设相位 ϕ_1 和 ϕ_2 随时间保持常数。但是对于非相干光源，ϕ_1 和 ϕ_2 在 10^{-9} s 的量级随机变化。因此，如果探测器的响应时间$\geqslant10^{-8}$ s，将观测到式(17.26)中 $\cos[(\Delta\omega)t+\phi_2-\phi_1]$项的时间平均，显然“余弦项”的时间平均为零，可得

$$\langle E^2(t)\rangle = \frac{1}{2}E_{01}^2 + \frac{1}{2}E_{02}^2$$

这表明合成波的强度将会是单个波强度的和

$$I = I_1 + I_2 \tag{17.27}$$

随着激光器的出现，光学拍实验变得更加容易了。如图 17.14 所示为一种典型的实验装置(它与迈克耳孙干涉仪很相似)。Lipsett 和 Mandel(见文献[11])记录下了实验中的典型拍频，如图 17.15 所示。实验观察到，拍频音符的频率在 0.7μs 的时间内从约 33MHz 变化到约 21MHz，相干时间$\sim$0.5μs，这与脉冲激光的持续时间相一致。

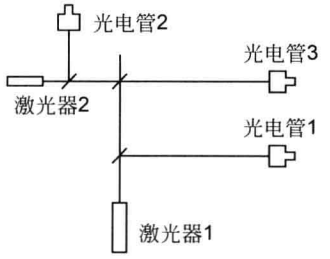


图 17.14　Lipsett 和 Mandel(见文献[11])使用两束激光观察光学拍的实验装置。

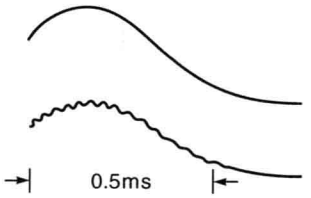


图 17.15　上面的曲线：两激光束强度直接相加的示波器扫描波形；下面曲线：两激光束相干叠加后强度的示波器扫描波形(见文献[11])。

最后引用费曼的话作为这一节的结论：“随着激光光源的应用，总有一天，人们能够演示这样的实验：当两个光源照在墙上时，产生的拍非常缓慢，以至于我们能够看见墙上的明暗变化。”

17.6 相干时间和线宽的傅里叶分析

谱线的频率展宽与相干时间的倒数是同一个数量级的(见式(17.10)),这个结论能够用傅里叶变换进行分析。以一个持续时间为 τ_c 的正弦型位移为例,即

$$\begin{aligned}\psi(x=0,t) &= a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}, \quad |t|<\frac{1}{2}\tau_c \\ \psi(x=0,t) &= 0, \quad |t|>\frac{1}{2}\tau_c\end{aligned} \tag{17.28}$$

假设 τ_c 足够长,使得一个扰动可以包含许多振荡。例如,对于一个频率为 $\nu_0\approx 5\times10^{14}\,\mathrm{Hz}$ 的 2ns 脉冲来说,它所包含的振荡数为 $5\times10^{14}\times2\times10^{-9}=10^6$,即这个脉冲包含了约 100 万个振荡!

在讨论傅里叶变换理论时(见 8.4 节和 9.5 节),已经证明了对于一个随时间变化的函数 $f(t)$,如果定义

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{17.29}$$

则有

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{17.30}$$

用 $\psi(x=0,t)$ 替换 $f(t)$,可得

$$\psi(x=0,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{17.31}$$

等号右边代表了一系列平面波的叠加,式中 $A(\omega)$ 表示频率为 ω 的平面波的振幅[①]。式(17.31)表明 $\psi(x=0,t)$ 是 $A(\omega)$ 的傅里叶变换,从而根据傅里叶反变换(见式(17.29)),有

$$\begin{aligned}A(\omega)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x=0,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{1}{2}\tau_c}^{+\frac{1}{2}\tau_c}a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0-\omega)t}\,\mathrm{d}t \\ &=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}a\left\{\frac{\sin\left[\frac{1}{2}(\omega-\omega_0)\tau_c\right]}{(\omega-\omega_0)}\right\} \\ &=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{a}{\omega_0}\left\{\frac{\sin[\alpha(\Omega-1)]}{\Omega-1}\right\}\end{aligned} \tag{17.32}$$

式中 $\Omega\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\frac{\omega}{\omega_0}$,$\alpha=\frac{1}{2}\omega_0\tau_c$。如图 17.16 所示为函数

---

① 注意,式(17.30)等号右边的积分也包括负频部分。但是位移(或者电场)是 ψ 的实部(忽略 $\sqrt{2\pi}$ 因子),可以写为

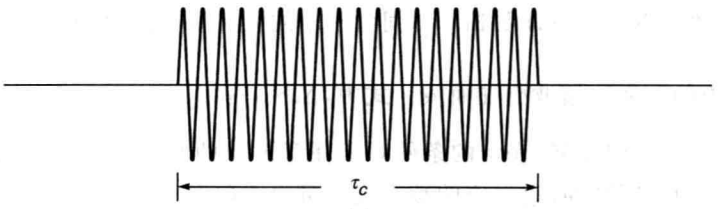
$$E=\mathrm{Re}[\psi(x=0,t)]=\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}|A(\omega)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\phi)}\,\mathrm{d}\omega\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}|A(\omega)|\cos(\omega t+\phi)\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\int_0^{\infty}|A(\omega)|\cos(\omega t+\phi)\,\mathrm{d}\omega+\int_0^{\infty}|A(-\omega)|\cos[\omega t-\phi(-\omega)]\,\mathrm{d}\omega$$

在推导中用到了关系式 $A(\omega)=|A(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$。以上式子可以写为

$$\int_0^{\infty}C(\omega)\cos[\omega t+\theta(\omega)]\,\mathrm{d}\omega$$

的形式。因此,负频相关的振幅实质上对相应的正频部分有贡献。



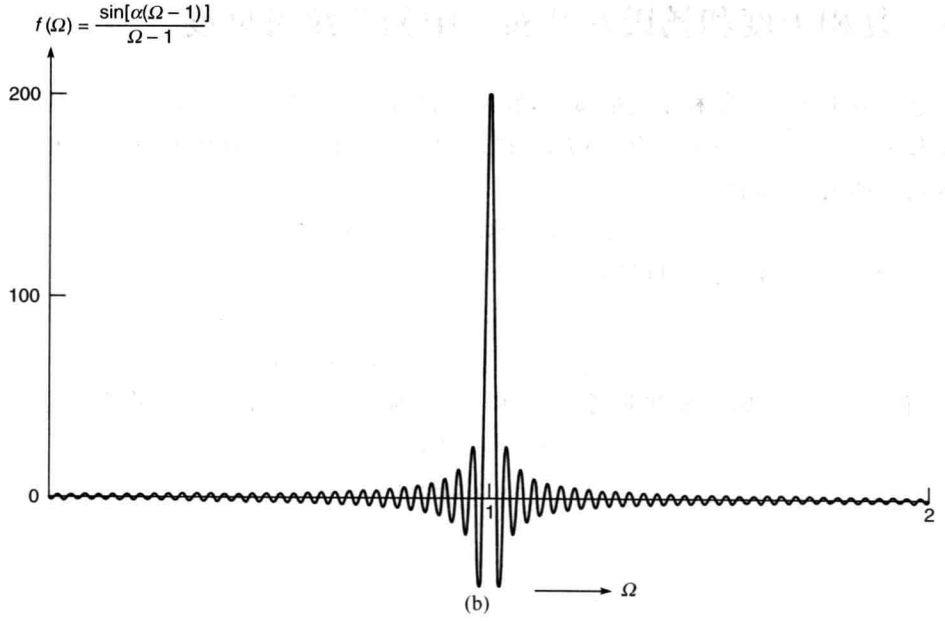


图　17.16

(a) 一个持续时间为 τ_c 的正弦型位移；(b) 取 $\alpha=200$ 时，函数 $\frac{\sin[\alpha(\Omega-1)]}{\Omega-1}$ 随 Ω 的变化。注意，在 $\Omega=1$ 附近，函数有陡峭的峰值。

$$\frac{\sin[\alpha(\Omega-1)]}{\Omega-1} \tag{17.33}$$

随 Ω 的变化曲线，其中取 $\alpha=200$。可以看出，当 $\Omega=1$ 时，函数有一个陡峭的峰值(在此处函数值为 α)，第一个零点在 $\Omega=1\pm\pi/\alpha$ 处出现。当 α 取更大的值时，函数出现的峰更陡峭。峰值的宽度由下式给出

$$\Delta\Omega\left(=\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)\sim\frac{\pi}{\alpha} \tag{17.34}$$

或者

$$\Delta\omega\sim\frac{\pi\omega_0}{\alpha}\sim\frac{2\pi}{\tau_c}$$

则

$$\Delta\nu\sim\frac{1}{\tau_c} \tag{17.35}$$

与式(17.10)一致。以上分析证明相干时间为$\sim\tau_c$的波实质上是由频率处于$\nu_0-\frac{1}{2}\Delta\nu\leqslant\nu\leqslant\nu_0+\frac{1}{2}\Delta\nu$区域内的一系列谐波叠加而成。式中,$\Delta\nu\sim1/\tau_c$。

需要注意的是,式(17.35)表示的条件对于任意形状的脉冲都普遍适用。例如,对于一个持续时间$\sim\tau_c$的高斯脉冲,它对应的频率展宽可由式(17.35)给出(见例10.4)。

17.7 复相干度和杨氏双孔实验中的条纹可见度

在这一节中将引入复相干度的概念,并说明它可以与杨氏双孔干涉实验中的条纹可见度联系起来,如图17.2所示。令$\psi_1(P,t)$和$\psi_2(P,t)$分别表示由双缝S_1和S_2在点P产生的复数场。那么,合位移为

$$\psi=\psi_1(P,t)+\psi_2(P,t) \tag{17.36}$$

点P的强度与$|\psi|^2$成正比,可以写为

$$\begin{aligned}|\psi|^2&=\psi_1^*\psi_1+\psi_2^*\psi_2+\psi_1^*\psi_2+\psi_1\psi_2^*\\&=|\psi_1|^2+|\psi_2|^2+2\mathrm{Re}(\psi_1^*\psi_2)\end{aligned}$$

由于ψ_1和ψ_2变化极快,只能观测到$|\psi_1|^2$和$|\psi_2|^2$的平均值。因此,如果将它们写为

$$I_1=\langle|\psi_1(P,t)|^2\rangle$$

$$I_2=\langle|\psi_2(P,t)|^2\rangle$$

则

$$I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\,\mathrm{Re}\,\gamma_{12} \tag{17.37}$$

式中

$$\gamma_{12}=\frac{\langle\psi_1^*(P,t)\psi_2(P,t)\rangle}{[\langle|\psi_1(P,t)|^2\rangle\langle|\psi_2(P,t)|^2\rangle]^{1/2}} \tag{17.38}$$

γ_{12}被称为复相干度,而$\langle\cdots\rangle$表示对三角括号内的量取时间平均(见式(17.23))。场$\psi_1(P,t)$是点源S_1在$t-\frac{r_1}{c}$时刻发出的波产生的,式中$r_1=\overline{S_1P}$。因此,$\psi_1(P,t)$正比于$\psi\left(S_1,t-\frac{r_1}{c}\right)$,式中$\psi(S_1,t)$表示$t$时刻在$S_1$处的场。同理,$\psi_2(P,t)$正比于$\psi\left(S_2,t-\frac{r_2}{c}\right)$。因此,有

$$\gamma_{12}=\frac{\left\langle\psi^*\left(S_1,t-\frac{r_1}{c}\right)\psi\left(S_2,t-\frac{r_2}{c}\right)\right\rangle}{\left[\left\langle\left|\psi\left(S_1,t-\frac{r_1}{c}\right)\right|^2\right\rangle\left\langle\left|\psi\left(S_2,t-\frac{r_2}{c}\right)\right|^2\right\rangle\right]^{1/2}}$$

由于条纹图样中总体的强度分布不随时间变化,上式又可以写为

$$\gamma_{12}=\frac{\langle\psi^*(S_1,t+\tau)\psi(S_2,t)\rangle}{[\langle|\psi^*(S_1,t)|^2\rangle\langle|\psi(S_2,t)|^2\rangle]^{1/2}} \tag{17.39}$$

式中$\tau=(r_2-r_1)/c$。为了讨论时间相干性的影响,假设S,S_1和S_2的空间尺寸可忽略,且S_1和S_2到S等距,可设

$$\psi(S_1,t)=\psi(S_2,t)=\psi(t) \tag{17.40}$$

因此,在这种情况下,有

$$\gamma_{12}(\tau)=\frac{\langle\psi^{*}(t+\tau)\psi(t)\rangle}{\langle|\psi(t)|^{2}\rangle} \tag{17.41}$$

实际的场表示为

$$\psi(t)=A(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega t+\phi(t)]} \tag{17.42}$$

式中 $A(t)$和 $\phi(t)$是时间的慢变实函数。对于理想的单色光(即相干时间无限长)而言,$A(t)$和 $\phi(t)$是常数,因此

$$\psi^{*}(t+\tau)\psi(t)=A^{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}$$

即

$$\gamma_{12}(\tau)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau} \tag{17.43}$$

在这种情况下,有

$$I=I_{1}+I_{2}+2\sqrt{I_{1}I_{2}}\cos\omega\tau \tag{17.44}$$

可见度(V)定义为

$$V=\frac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}} \tag{17.45}$$

将式(17.44)代入,可得

$$V=\frac{2\sqrt{I_{1}I_{2}}}{I_{1}+I_{2}} \tag{17.46}$$

对于 $I_{1}=I_{2}$ 的情况,可得 $V=1$,这表明对于理想单色光来说,条纹的明暗对比是理想的。另一方面,对于相干时间 $\tau_{c}\sim10^{-10}\,\mathrm{s}$ 的普通光源来说,可假设函数 $A(t)$和 $\phi(t)$在 $\leqslant10^{-10}\,\mathrm{s}$ 的时间内是常数。因此,如果 $\tau\geqslant10^{-10}\,\mathrm{s}$①,$\psi(t)$和 $\psi(t+\tau)$就没有确定的相位关系,则时间平均值$\langle\psi^{*}(t+\tau)\psi(t)\rangle=0$。因此,如果光程差$\overline{S_{2}P}-\overline{S_{1}P}$②满足

$$\frac{\overline{S_{2}P}-\overline{S_{1}P}}{c}\geqslant\tau_{c} \tag{17.47}$$

将观测不到条纹图样。

一般来说,可以把复相干度写为

$$\gamma_{12}=|\gamma_{12}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega\tau+\beta)} \tag{17.48}$$

其中,$|\gamma_{12}|$和 β 在观测点附近可假设是常数,这样就可得出

$$I=I_{1}+I_{2}+2\sqrt{I_{1}I_{2}}\,|\gamma_{12}|\cos\alpha \tag{17.49}$$

式中 $\alpha=\omega\tau+\beta$。因此,有

$$I_{\max}=I_{1}+I_{2}+2\sqrt{I_{1}I_{2}}\,|\gamma_{12}| \tag{17.50}$$

$$I_{\min}=I_{1}+I_{2}-2\sqrt{I_{1}I_{2}}\,|\gamma_{12}| \tag{17.51}$$

则可见度为

$$V=\frac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}}=\frac{2\sqrt{I_{1}I_{2}}}{I_{1}+I_{2}}\,|\gamma_{12}| \tag{17.52}$$

因此,条纹的可见度(或者说对比度)可由 $|\gamma_{12}|$来直接度量。如果 $I_{1}=I_{2}$,则 $V=|\gamma_{12}|$。在当前情形下,由于 S,S_{1} 和 S_{2} 已假设是点光源,所以,$|\gamma_{12}|$只依赖于光束的时间相干性。当

① 此处原著为 $\tau_{c}\geqslant10^{-10}\,\mathrm{s}$。而在 17.1 节中已经定义 τ_{c} 为相干长度。译者注。

② 此处原著$\overline{S_{2}P}\sim\overline{S_{1}P}$有误,译者注。

$\tau \ll \tau_c$ 时，$|\gamma_{12}|$ 接近于1，此时条纹的可见度很好；当 $\tau \gg \tau_c$ 时，$|\gamma_{12}|$ 接近于0，此时的条纹可见度很差。

在式(17.43)提到，对于理想单色光 $|\gamma_{12}|=1$，$\alpha=\omega\tau=\omega(\overline{S_2P}-\overline{S_1P})/c$。对于一般的光源，可以证明 $0<|\gamma_{12}|<1$；$|\gamma_{12}|=0$，表示完全不相干；而 $|\gamma_{12}|=1$，表示完全相干。在实际中，如果 $|\gamma_{12}|>0.88$，发出的光被称为“几乎相干的”。更进一步讲，因为

$$\langle \psi^*(t+\tau)\psi(t)\rangle = e^{i\omega\tau}\langle A(t+\tau)A(t)e^{i[\phi(t+\tau)-\phi(t)]}\rangle$$

对于几乎单色的光源而言，$A(t)$ 和 $\phi(t)$ 是时间的慢变函数，尖括号里的量(上式等号右边)不会随着 τ 快速变化，因此，可以写为

$$\gamma_{12} = |\gamma_{12}|\, e^{i\beta}e^{i\omega\tau} \tag{17.53}$$

其中，$|\gamma_{12}|$ 和 β 都是 τ 的慢变函数，而 τ 的定义为

$$\tau = \frac{\overline{S_2P}-\overline{S_1P}}{c} \tag{17.54}$$

对于空间和时间相干性更详细的理论，读者可查阅文献[2,3,7,20]。

17.8 傅里叶变换光谱学[①]

在前几节中已经证明干涉图样的可见度决定于光程差 Δ 对于光源相干长度 $L_c(=c\tau_c)$ 的相对大小。对于给定的光源，可见度随着光程差 Δ 的改变而改变，从最初 $\Delta \ll L_c$ 时对应的极好的可见度，一直变化到 $\Delta \gg L_c$ 时对应的极差的可见度。实际上，裴索在1862年解释了在钠灯照射下，牛顿环的可见度随着放在玻璃平板上的透镜向上移动而呈周期性变化的原因在于，钠灯有两根相距6Å的谱线(见例15.4)。迈克耳孙在1890—1900年间进行了许多利用多条谱线光源的干涉实验。利用迈克耳孙干涉仪，他测量了可见度随光程差变化的函数，并利用他自制的机械装置，得到了光源的频谱。这正是本节的目的：通过测量强度随光程差的变化，再利用傅里叶变换，就能得到光源的光谱分布。

将迈克耳孙干涉仪应用于光谱学在20世纪50年代重新兴起，特别适用于红外波段相对复杂的光谱。

在本节中将针对具有一定光谱分布的光源，推导可见度随着光程差变化的表达式。并将证明利用干涉图样，可以得到给定光源的光谱强度分布。

17.8.1 傅里叶变换光谱学的原理

如图17.17所示为傅里叶变换光谱仪的装置图。从给定光源发出的光准直后进入迈克耳孙干涉仪，在透射端测量透镜焦平面上强度随光程差 Δ 的变化。如果一束强度为 I_0 的单色光束被分为两束光$\left(\text{每束光的强度为}\frac{1}{2}I_0\right)$，然后让它们相干，则得到的合强度可以表示为

$$I = I_0(1+\cos\delta) \tag{17.55}$$

式中

① 本节承蒙 K. Thyagarajan 教授撰写。

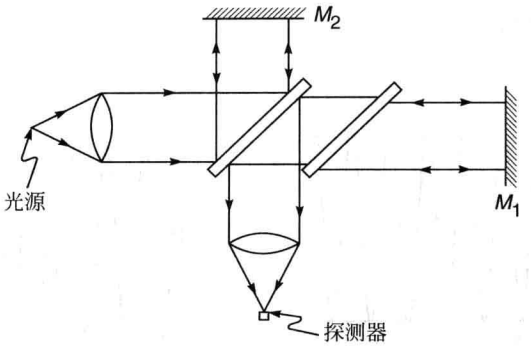


图 17.17　傅里叶变换光谱仪的装置图

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta = \frac{2\pi\nu}{c}\Delta \tag{17.56}$$

表示参与干涉的两束光的相位差。在推导式(17.55)时，用到了式(14.30)，其中

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2}I_0$$

如果 $I(\nu)\mathrm{d}\nu$ 表示光源在 $\nu\sim\nu+\mathrm{d}\nu$ 间发出的光的强度，因此，位于 $\nu\sim\nu+\mathrm{d}\nu$ 区间的点 O 的强度可以表示为

$$I_t(\nu)\mathrm{d}\nu = I(\nu)\mathrm{d}\nu\left(1+\cos\frac{2\pi\nu\Delta}{c}\right) \tag{17.57}$$

因此，在点 O 对应的光程差 Δ 的总强度为

$$I_t(\Delta) = \int_0^\infty I_t(\nu)\mathrm{d}\nu = \int_0^\infty I(\nu)\mathrm{d}\nu + \int_0^\infty I(\nu)\cos\frac{2\pi\nu\Delta}{c}\mathrm{d}\nu \tag{17.58}$$

物理量

$$I_T = \int_0^\infty I(\nu)\mathrm{d}\nu = \frac{1}{2}I_t(0) \tag{17.59}$$

为光源的总能量。定义归一化透射函数为

$$\gamma(\Delta) = \frac{I_t(\Delta)-I_T}{I_T} = \frac{1}{I_T}\int_0^\infty I(\nu)\cos\frac{2\pi\nu\Delta}{c}\mathrm{d}\nu \tag{17.60}$$

正是把 $I_t(\Delta)$这个物理量作为 Δ 的函数进行测量，从而算得 $\gamma(\Delta)$。下面考虑几个特别情况的例子，这些例子中，$I_t(\Delta)$和 $\gamma(\Delta)$有明确的表达式。

1. 单色光源

对于强度为 I_0，频率为 ν_0 的单色光源，有

$$I(\nu)\mathrm{d}\nu = I_0\delta(\nu-\nu_0)\mathrm{d}\nu \tag{17.61}$$

式中 $\delta(\nu-\nu_0)$表示狄拉克 δ 函数，则

$$\gamma(\Delta) = \frac{\int_0^\infty \delta(\nu-\nu_0)\cos\frac{2\pi\nu\Delta}{c}\mathrm{d}\nu}{\int_0^\infty \delta(\nu-\nu_0)\mathrm{d}\nu} = \cos\left(\frac{2\pi\nu_0\Delta}{c}\right) \tag{17.62}$$

$$I_t(\Delta) = \left(1+\cos\frac{2\pi\nu_0\Delta}{c}\right) \tag{17.63}$$

因此，对于所有的光程差值 Δ，$I_t(\Delta)$和 γ 按照正弦规律变化(见图 17.18(a)和(b))，这表明

光源的相干长度是无限长的。

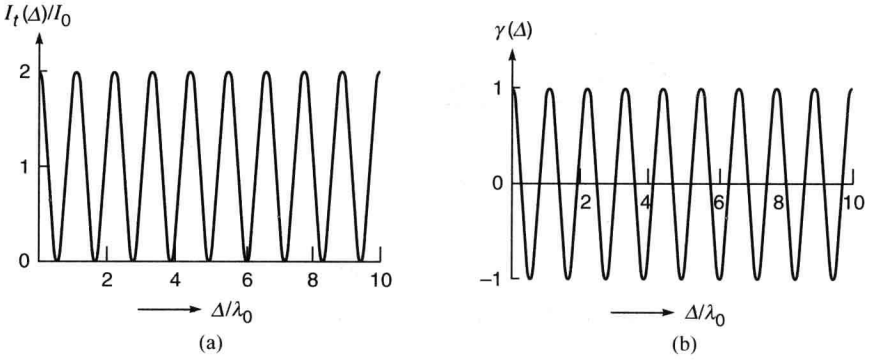


图 17.18

(a) 对于一个单色光源,在点 O 处的总强度是光程差 Δ 的函数;(b) $\gamma(\Delta)$ 随 Δ 按余弦规律变化。

2. 具有两条单色谱线的光源

现在考虑具有两条单色谱线 ν_1 和 ν_2 的光源,每一根谱线的强度是 $\frac{1}{2}I_0$,因此,有

$$I(\nu)\mathrm{d}\nu = \frac{1}{2}I_0[\delta(\nu-\nu_1)+\delta(\nu-\nu_2)] \tag{17.64}$$

$$\begin{aligned}\gamma(\Delta) &= \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty \delta(\nu-\nu_1)\cos\frac{2\pi\nu\Delta}{c}\mathrm{d}\nu+\int_0^\infty \delta(\nu-\nu_2)\cos\frac{2\pi\nu\Delta}{c}\mathrm{d}\nu\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{2\pi\nu_1\Delta}{c}+\cos\frac{2\pi\nu_2\Delta}{c}\right]\\ &= \cos\left[2\pi\frac{(\nu_1+\nu_2)}{2c}\Delta\right]\cos\left[2\pi\frac{(\nu_1-\nu_2)}{2c}\Delta\right]\end{aligned} \tag{17.65}$$

$$I_t(\Delta) = I_0\left\{1+\cos\left[2\pi\frac{(\nu_1+\nu_2)}{2c}\Delta\right]\cos\left[2\pi\frac{(\nu_1-\nu_2)}{2c}\Delta\right]\right\} \tag{17.66}$$

如图 17.19 所示为 $I_t(\Delta)$ 和 $\gamma(\Delta)$ 随 Δ 的变化情况。从式(17.65)可知,$\gamma(\Delta)$ 是一个幅度调制的正弦变化,正弦变化的周期为

$$p = \frac{2c}{\nu_1+\nu_2} = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \approx \lambda_0 \tag{17.67}$$

式中 $\lambda_0(\approx\lambda_1\approx\lambda_2)$ 为平均波长。当 Δ 满足

$$2\pi\frac{(\nu_1-\nu_2)}{2c}\Delta = \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi$$

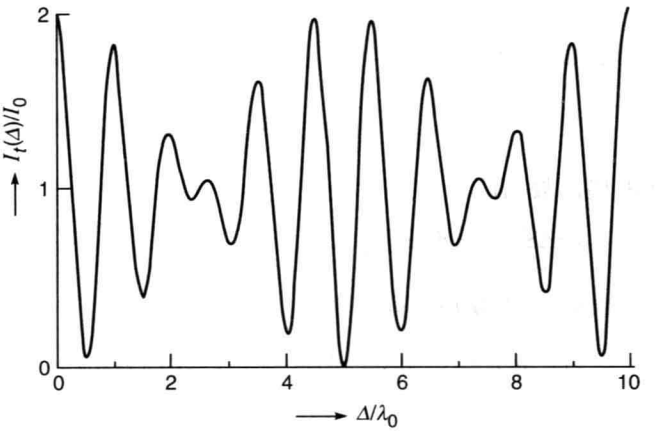
或者

$$\Delta = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{c}{\nu_1-\nu_2} \tag{17.68}$$

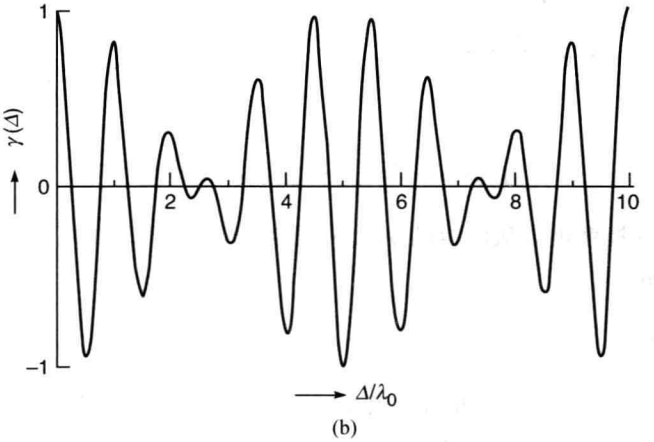
调制幅度为零。

因此,两次可见度消失的最小光程差为

$$\Delta_m = \frac{c}{2(\nu_1-\nu_2)} = \frac{c}{2\delta\nu} \tag{17.69}$$



(a)



(b)

图　17.19

(a) 对于包含两条单色谱线的光源，其在点 O 的总强度随光程差 Δ 的变化；
(b) $\gamma(\Delta)$ 随 Δ 的变化

这恰好对应了光源的相干长度。将 $\delta\nu$ 表示为 $\delta\lambda$，可得

$$L_c = \Delta_m = \frac{\lambda^2}{2\delta\lambda} \tag{17.70}$$

这与式(17.2)是一致的。

相邻两次使得条纹消失的位置对应的光程差的差值为 $c/\delta\nu = \lambda^2/\delta\lambda$。从中得出的简单结论是，如果利用钠灯进行牛顿环的实验，假设钠灯发射两个分立的波长为 λ_1 和 λ_2，当把凸透镜放在玻璃片的上面做牛顿环实验时，会看到在例 15.3 中讨论过的条纹周期性地出现和消失的现象。

17.8.2　从 $\gamma(\Delta)$ 反推恢复出 $I(\nu)$

在实际实验中，可以测量的是 $I_t(\Delta)$ 和 I_T，因此，需要将式(17.60)逆变换，以便从测量的 $\gamma(\Delta)$ 得到光源的频谱分布 $I(\nu)$。这可以通过给式(17.60)乘以 $\cos\dfrac{2\pi\nu'\Delta}{c}$，并对 Δ 积分得

到,则

$$\int_0^{\infty}\gamma(\Delta)\cos\frac{2\pi\nu'\Delta}{c}\mathrm{d}\Delta=\frac{1}{I_T}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\Delta\int_0^{\infty}\mathrm{d}\nu I(\nu)\cos\frac{2\pi\nu\Delta}{c}\cos\frac{2\pi\nu'\Delta}{c}$$

$$=\frac{1}{I_T}\int_0^{\infty}d\nu I(\nu)\int_0^{\infty}\cos\frac{2\pi\nu\Delta}{c}\cos\frac{2\pi\nu'\Delta}{c}\mathrm{d}\Delta$$

由于积分函数是 Δ 的偶函数,有

$$\int_0^{\infty}\cos\frac{2\pi\nu\Delta}{c}\cos\frac{2\pi\nu'\Delta}{c}\mathrm{d}\Delta=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\frac{2\pi\nu\Delta}{c}\cos\frac{2\pi\nu'\Delta}{c}\mathrm{d}\Delta$$

把两个余弦项写为指数形式,并使用下列关系

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\pm2\pi\mathrm{i}(\nu-\nu')\Delta/c}\mathrm{d}\Delta=\delta\left(\frac{\nu-\nu'}{c}\right)=c\delta(\nu-\nu')\tag{17.71}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\pm2\pi\mathrm{i}(\nu+\nu')\Delta/c}\mathrm{d}\Delta=0\tag{17.72}$$

(由于 ν 和 ν' 都是正数)可得

$$\int_0^{+\infty}\gamma(\Delta)\cos\frac{2\pi\nu'\Delta}{c}d\Delta=\frac{c}{4I_T}\int_0^{+\infty}\delta(\nu-\nu')I(\nu)\mathrm{d}\nu=\frac{c}{4I_T}I(\nu')\tag{17.73}$$

则

$$I(\nu)=\frac{4I_T}{c}\int_0^{+\infty}\gamma(\Delta)\cos\frac{2\pi\nu\Delta}{c}\mathrm{d}\Delta\tag{17.74}$$

这样,用一个余弦变换就可以从测得的 $\gamma(\Delta)$ 中得到光源频谱分布 $I(\nu)$。一般使用计算机做从 $\gamma(\Delta)$ 到 $I(\nu)$ 的转换。

17.8.3 分辨率

从式(17.74)可以得出,为了得到光源频谱分布 $I(\nu)$,必须计算光程差从 $0\sim\infty$ 的所有 $\gamma(\Delta)$ 的值。由于在实际实验中,总会有一个光程差的最大极限,这个光程差的最大值决定了能得到的 $I(\nu)$ 的分辨率。为了估计这个分辨率,考虑一束频率为 ν_0 的理想单色光入射到干涉仪上,根据式(17.62)可知,在这种情况下,$\gamma(\Delta)$ 随 Δ 的变化关系。设实验测得的最大光程差为 Δ_m,则 $\gamma(\Delta)$ 为

$$\begin{cases}\gamma(\Delta)=\cos\dfrac{2\pi\nu_0\Delta}{c}, & 0<\Delta<\Delta_m\\ \gamma(\Delta)=0, & \text{其他}\end{cases}\tag{17.75}$$

根据式(17.74),可得

$$I(\nu)=\frac{4I_T}{c}\int_0^{\Delta_m}\cos\left(\frac{2\pi\nu_0\Delta}{c}\right)\cos\left(\frac{2\pi\nu\Delta}{c}\right)\mathrm{d}\Delta$$

$$=\frac{2I_T}{c}\int_0^{\Delta_m}\left[\cos\frac{2\pi(\nu+\nu_0)\Delta}{c}+\cos\frac{2\pi(\nu-\nu_0)\Delta}{c}\right]\mathrm{d}\Delta$$

$$=\frac{2I_T}{c}\left[\frac{\sin\dfrac{2\pi(\nu+\nu_0)\Delta_m}{c}}{\dfrac{2\pi}{c}(\nu+\nu_0)}+\frac{\sin\dfrac{2\pi(\nu-\nu_0)\Delta_m}{c}}{\dfrac{2\pi}{c}(\nu-\nu_0)}\right]$$

由于 ν 和 ν_0 都为正,并且它们比 c/Δ 大得多,等号右边括号里的第一项可以忽略,则

$$I(\nu) \approx \frac{2I_T}{c}\left[\frac{\sin\dfrac{2\pi(\nu-\nu_0)\Delta_m}{c}}{\dfrac{2\pi}{c}(\nu-\nu_0)}\right] \tag{17.76}$$

式(17.76)估计的光源频谱与如图 17.16 所示的曲线相似。频谱在 ν_0 处有个峰值，第一个零点出现在

$$\frac{2\pi(\nu-\nu_0)}{c}\Delta_m = \pm\pi$$

或者

$$\nu = \nu_0 \pm \frac{c}{2\Delta_m} \tag{17.77}$$

因此，虽然入射光是单色的，但由于 Δ_m 为有限值，经过转换过程，变为有一定宽度的频谱。

如果入射光包含了两个频率，就能使用瑞利判据，来定义恰能分辨的最小频率间隔是 $I(\nu)$从峰值到第一个零点的频谱宽度，即

$$\delta\nu = \frac{c}{2\Delta_m} \tag{17.78}$$

因此，测量 γ 所能达到的最大光程差 Δ_m 越大，分辨率就越高。

以 $\Delta_m = 5\text{cm}$ 为例，有

$$\delta\nu = \frac{3\times10^{10}}{2\times5} = 3(\text{GHz})$$

如果取 $\lambda = 1\mu\text{m}$，结果对应 $\delta\lambda = 0.1\text{Å}$。

例 17.2　考虑一个准单色光源，有如下的高斯频谱

$$I(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(\delta\nu)}I_0 e^{-(\nu-\nu_0)^2/(\delta\nu)^2} = \frac{I_0}{\sqrt{\pi}}\tau e^{-(\nu-\nu_0)^2\tau^2} \tag{17.79}$$

由于 $I(\nu)$的强度在 $\nu=\nu_0\pm\delta\nu$ 时下降到 $\nu=\nu_0$ 时峰值的 $1/e$，这里用 $\delta\nu=1/\tau$ 来表征频谱宽度。对于准单色光，有 $\delta\nu/\nu_0 \ll 1$，则

$$I_T = \int_0^\infty I(\nu)\mathrm{d}\nu = \frac{I_0\tau}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-(\nu-\nu_0)^2\tau^2}\mathrm{d}\nu \approx \frac{I_0\tau}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\nu-\nu_0)^2\tau^2}\mathrm{d}\nu \tag{17.80}$$

在式(17.80)推导的最后一步中用到了条件 $1/\tau=\delta\nu\ll\nu_0$。如果使用积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2+\beta x}\mathrm{d}x = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right), \quad \mathrm{Re}\,\alpha > 0 \tag{17.81}$$

可得

$$I_T = I_0 \tag{17.82}$$

则有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty I(\nu)\cos\frac{2\pi\nu\Delta}{c}\mathrm{d}\nu &= \frac{I_0\tau}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-(\nu-\nu_0)^2\tau^2}\cos\frac{2\pi\nu\Delta}{c}\mathrm{d}\nu\\ &\approx \frac{\tau}{\sqrt{\pi}}I_0\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\nu-\nu_0)^2\tau^2}\cos\frac{2\pi\nu\Delta}{c}\mathrm{d}\nu\\ &= \frac{\tau}{\sqrt{\pi}}I_0\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\nu-\nu_0)^2\tau^2}e^{\mathrm{i}2\pi\nu\Delta/c}\mathrm{d}\nu\end{aligned}$$

$$=\frac{\tau}{\sqrt{\pi}}I_0\mathrm{Re}e^{i2\pi\nu_0\Delta/c}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2\tau^2}e^{i2\pi\xi\Delta/c}d\xi,\quad \xi=\nu-\nu_0$$

$$=I_0\mathrm{Re}\left[e^{i2\pi\nu_0\Delta/c}\exp\left(-\frac{\pi^2\Delta^2}{c^2\tau^2}\right)\right]$$

其中用到了式(17.81),参数为 $\alpha=\tau,\beta=i2\pi\Delta/c$。则

$$\int_0^\infty I(\nu)\cos\frac{2\pi\nu\Delta}{c}d\nu=I_0\exp\left(-\frac{\pi^2\Delta^2}{c^2\tau^2}\right)\cos\frac{2\pi\nu_0\Delta}{c} \tag{17.83}$$

因此,有

$$\gamma(\Delta)=\exp\left(-\frac{\pi^2\Delta^2}{c^2\tau^2}\right)\cos\frac{2\pi\nu_0\Delta}{c} \tag{17.84}$$

如图 17.20 所示为光源的频谱分布和 $\gamma(\Delta)$ 随 Δ 的变化情况。注意,在本例中,如果光程差 $\Delta\ll c/\delta\nu$,则 $\gamma(\Delta)\approx\cos(2\pi\nu_0\Delta/c)$,就非常像单色光源的情况。但随着光程差的增加,$\gamma(\Delta)$ 调制幅度下降。为了得到良好的可见度,必须满足

$$\Delta\ll c\tau=c/\delta\nu \tag{17.85}$$

定义相干长度为

$$L_c=c\tau=\frac{c}{\delta\nu} \tag{17.86}$$

这与式(17.2)是一致的。

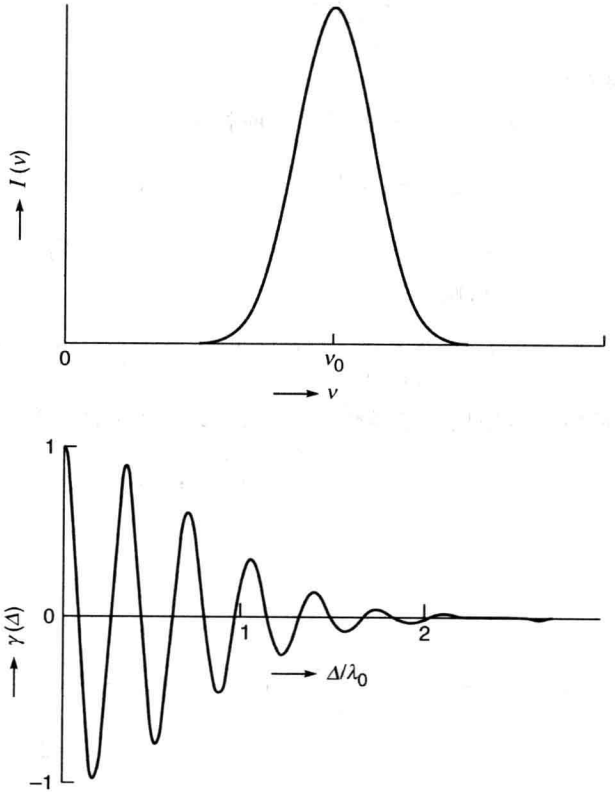


图 17.20　式(17.79)描述的光源的频谱分布和 $\gamma(\Delta)$ 随 Δ 的变化曲线

例 17.3　考虑有如下频谱分布特征的准单色光源

$$I(\nu)=\frac{1}{\delta\nu}I_0,\quad \nu_0-\frac{1}{2}\delta\nu<\nu<\nu_0+\frac{1}{2}\delta\nu$$
$$I(\nu)=0,\quad \text{其他} \tag{17.87}$$

计算其 $\gamma(\Delta)$，并再次证明当光程差 $\Delta\gg c/\delta\nu$ 时，可见度将会特别差。

解　$$I_T=\frac{1}{\delta\nu}I_0\int_{\nu_0-\frac{1}{2}\delta\nu}^{\nu_0+\frac{1}{2}\delta\nu}\mathrm{d}\nu=I_0 \tag{17.88}$$

$$\int_0^\infty I(\nu)\cos\frac{2\pi\nu\Delta}{c}\mathrm{d}\nu=\frac{I_0}{\delta\nu}\cos\frac{2\pi\nu_0\Delta}{c}\,\frac{\sin\dfrac{\pi\delta\nu\Delta}{c}}{\pi\Delta/c}$$

则

$$\gamma(\Delta)=\frac{1}{I_T}\int_0^\infty I(\nu)\cos\frac{2\pi\nu\Delta}{c}\mathrm{d}\nu=\frac{\sin\dfrac{\pi\delta\nu\Delta}{c}}{\dfrac{\pi\delta\nu\Delta}{c}}\cos\frac{2\pi\nu_0\Delta}{c} \tag{17.89}$$

当 $\Delta\ll c/\delta\nu$ 时，$\gamma(\Delta)\approx\cos(2\pi\nu_0\Delta/c)$，并且条纹在

$$\Delta=c/\delta\nu \tag{17.90}$$

时消失。式(17.90)亦表示相干长度。绘出 $\gamma(\Delta)$ 随 Δ 变化的情况，注意与例 17.2 不同的是，例 17.3 的情况中，$\gamma(\Delta)$ 并不是单调递减到 0。

关于傅里叶变换光谱学的更多细节，请参阅参考文献[10,12,18]。

小　结

- 相干时间 τ_c 表示波列的平均持续时间，即，电场在 τ_c 的量级时间间隔内保持正弦变化。
- 波列的长度定义为

  $$L_c=c\tau_c$$

  (式中 c 为自由空间中的光速)也称为相干长度。例如，对于镉红光($\lambda=6438\text{Å}$)，$\tau_c\sim10^{-9}\text{s}$，对应的相干长度为 $\sim30\text{cm}$。
- 扩展非相干光源的横向相干宽度(l_w)表示了在光束截面横向隔开多远距离的两点能够被看作是空间相干的。横向相干宽度表示为

  $$l_w\approx\frac{\lambda}{\theta}$$

  式中 θ 为光源对观察点所张的角度。
- 利用空间相干性的概念，迈克耳孙开发出精巧的测量星体角直径的方法。这一方法基于以下结论：对于远处的圆形光源，由(两小孔形成的)干涉图样在两小孔的距离满足下式时消失

  $$d=1.22\frac{\lambda}{\theta}$$

  式中 θ 为圆形光源对双孔中点的张角。
- 使用两个激光束叠加时，有可能观测到光学拍现象。

- 在两个激光束形成的干涉图样中，干涉条纹的可见度随着光程差 Δ 变化而变化，从最初 $\Delta \ll L_c$ 时对应的极好的可见度，一直变化到 $\Delta \gg L_c$ 时对应的极差的可见度。
- 实际上，可以从强度随光程差的变化信息中，借助傅里叶变换，得到光源的频谱分布。

习　题

17.1 氪橙线($\lambda=6058$Å)的相干长度～20cm。计算它的线宽和频率稳定度。

[**答案**：～0.018Å，$\sim 3\times10^{-6}$]

17.2 目前已得到线宽小到 20Hz 的激光。计算它的相干长度和频率稳定度。假设 $\lambda=63280$Å。

17.3 在 17.4 节中提到圆形光源的横向相干宽度为 $d=1.22\lambda/\theta$。证明：要得到好的相干性(可见度在 0.88 或以上)，相干宽度应该$\leqslant 0.3\lambda/\theta$。假设太阳的角直径约为 30′，计算能够产生清晰干涉图样的两孔间的距离。

[**答案**：～0.02mm]

17.4 一个光源的直径为 1mm，计算它与光屏应相距多少时，光屏上距离为 0.5mm 的两个点能被称为是相干的。假设 $\lambda=6\times10^{-5}$cm。

17.5 在迈克耳孙干涉仪实验中，发现对于某一个光源 S，当其中一反射镜从等光程位置移动约 5cm 时，条纹消失。该光源所发出的光波的相干时间是多少？

17.6 用白光做杨氏双孔实验时，只可以看见几条彩色条纹。设可见光谱从 4000Å 延伸到 7000Å，试从相干长度的角度定性地解释这一现象。

17.7 迈克耳孙用测星干涉仪测量参宿四这颗星时观察到，当可移动的反射镜之间的距离为 25 英寸($\approx$635mm)时，条纹消失。假设 $\lambda\approx6\times10^{-5}$cm，试计算这颗星的角直径。

17.8 考虑如图 17.2 所示的杨氏双孔实验。$\overline{SS_1}\approx1$m，$\overline{S_1S_2}\approx0.5$mm。试计算能在屏幕上产生清晰干涉图样的孔 S 的角直径。设 $\lambda=6000$Å。

17.9 假设一个高斯脉冲满足如下形式

$$\psi(x=0,t)=E_0\exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right)e^{i\omega_0 t}$$

证明它的傅里叶变换满足

$$A(\omega)=E_0\tau\exp\left[-\frac{1}{2}(\omega-\omega_0)^2\tau^2\right]$$

下列积分有可能会被用到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\alpha x^2+\beta x)\mathrm{d}x=\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right),\quad \alpha>0$$

证明相干时间$\sim\tau$。设 $\tau\gg1/\omega_0$，绘出傅里叶变换 $A(\omega)$(随 ω 变化的情况)，并给出物理解释，证明频率展宽为 $\Delta\omega\sim1/\tau$。

17.10 在习题 17.9 中，假设 $\lambda_0=6\times10^{-5}$cm 和 $\tau\sim10^{-9}$s。计算脉冲中存在的主要频率成分，并与当 $\tau\sim10^{-6}$s 时的情况作对比。

参考文献和推荐读物

1. D. E. Bailey and M. J. Welch, 'Moiré Fringes', *Proceedings of the Conference and Workshop on the Teaching of Optics*, Ed. G. I. Opat, D. Booth, A. P. Mazzolini and G. Smith, University of Melbourne, 1989.
2. J. Beran and G. B. Parrent, *Theory of Partial Coherence*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964.
3. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford, 1975.
4. M. Francon, *Diffraction: Coherence in Optics*, Pergamon Press, Oxford, 1966.
5. A. T. Forrester, 'On Coherence Properties of Light Waves' *American Journal of Physics*, Vol. 24, 192, 1956.
6. A. T. Forrester, R. A. Gudmundsen and P. O. Johnson, 'Photoelectric mixing of Incoherent Light', *Physical Review*, Vol. 99 (6), 1891, 1955.
7. A. Ghatak and K. Thyagarajan, *Contemporary Optics*, Plenum Press, New York, 1978. [Reprinted by Macmillan India, New Delhi.]
8. E. Hecht and A. Zajac, *Optics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.
9. T. S. Jaseja, A. Javan and C. H. Townes, 'Frequency Stability of He–Ne Masers and Measurement of Length', *Physical Review Letters*, Vol. 10, 165, 1963.
10. M. V. Klein, *Optics*, John Wiley, New York, 1970.
11. M. S. Lipsett and L. Mandel, 'Coherence Time Measure-ment of light from Ruby Optical Masers', *Nature*, Vol. 199, 553, 1963.
12. G. F. Lothian, *Optics and its Uses*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1975.
13. H. F. Meiners, *Physics Demonstrations and Experiments*, Vol. 2, The Ronald Press Co., New York, 1970.
14. D. F. Nelson and R. J. Collins, 'Spatial Coherence in the Output of an Optical Maser', *Journal of Applied Physics*, Vol. 32, 739, 1961.
15. A. E. Siegman, *Lasers*, Oxford University Press, 1986.
16. B. J. Thompson, J. Soc. Photo. Inst. Engr., Vol. 4, 7, 1965.
17. K. Thyagarajan and A. K. Ghatak, *Lasers: Theory and Applications*, Plenum Press, New York, 1981. [Reprinted by Macmillan India, New Delhi.]
18. G. A. Vanasse and H. Sakai, '*Fourier Spectroscopy*' *in Progress in Optics*, Vol. VI., Ed. E. Wolf, North Holland Pub. Co., Amsterdam, 1967.
19. H. Weltin, 'Light Beats', *American Journal of Physics*, Vol. 30, 653, 1962.
20. A. Sharma, A. K. Ghatak and H. C. Kandpal, *Coherence*, Encyclopaedia of Modern Optics (Ed: R. Guenther, A. Miller, L. Bayvel and J. Midwinter), Elsevier (2005)

第四部分

衍　　射

第 18，19 和 20 章涵盖了衍射的非常重要的领域，讨论了论题背后的原理，比如激光束衍射发散、望远镜的分辨本领、激光聚焦、空间滤波、X 射线衍射等。第 21 章是关于全息术的原理与应用。丹尼斯·伽柏因发现全息术原理获得 1971 年诺贝尔物理学奖。

第18章 夫琅禾费衍射：Ⅰ

至今没有人能够令人满意地界定干涉与衍射之间的区别。这只是用法上的问题，它们之间在物理上并没有明确的重大区别。我们最多能做的就是，粗略地说，当只有几个波源(比如说两个)参与干涉，其结果通常被称为干涉，但如果牵涉有大量波源时，那么，用衍射一词更为常用。

——理查德·费曼，《费曼物理学讲义》，第一卷

重要的里程碑

1819年　约瑟夫·夫琅禾费展示了光通过光栅的衍射，这种最原始的光栅是由缠绕在平行螺丝钉上的金属丝线栅网制成。

1823年　夫琅禾费发表了他的衍射理论。

1835年　乔治·艾里计算出由圆孔产生的(夫琅禾费)衍射图样。

18.1 引言

考察一列平面波入射到宽度为 b 的长狭缝上的情形(见图18.1)。按照几何光学，屏幕 SS' 上区域 AB 是被照明的，而其他区域应该是绝对黑暗区(称为几何阴影)。但是，仔细地观察会发现，如果缝的宽度比起波长来说不是很大，那么，在区域 AB 内的光强度是不均匀的，而且在几何阴影区内也会有些许光强分布。此外，如果缝越窄，到达几何阴影区的能量就越多。这种波通过狭窄开口后扩展开来的现象被称为衍射，在屏幕上的强度分布称为衍射图样。在本章中将讨论衍射现象，并将证明这样的扩展随着波长的缩短而减小。的确，正是由于光的波长很短($\lambda\sim5\times10^{-5}\,\mathrm{cm}$)，衍射所引起的效应才不容易被观察到。

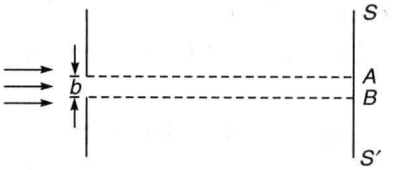


图18.1　如果平面波入射到孔上时，根据几何光学的观点，波投射在屏幕上的 AB 区将呈现边缘清晰的影区。

应该指出的是，在干涉和衍射之间并没有太大的差异，实际上，干涉对应于从多个点源发出的波的叠加的情况；而衍射则对应于来自像圆孔或者矩形孔甚至是许多个矩形孔(比如衍射光栅)这样的面光源的波的叠加情况。

衍射现象通常分为两类：①菲涅耳衍射；②夫琅禾费衍射。

在菲涅耳衍射中，光源和观察屏离开衍射孔的距离通常都是有限的(见图18.2(a))。在

夫琅禾费衍射中,光源和观察屏都离衍射孔无限远;如果将光源置于一个凸透镜的焦平面处,并将观察屏置于另一个凸透镜的焦平面处,就很容易实现夫琅禾费衍射所需的条件(见图 18.2(b))。这两个透镜的作用是将光源和观察屏移到无限远处,第一个透镜使得光束变为平行光,第二个透镜使得接收到的平行光聚焦于观察屏。结果表明,计算夫琅禾费衍射图样的强度分布要容易得多,在本章中将对此加以讨论。此外,对夫琅禾费衍射也不难观测,只要有一台实验室中常用的分光计就够了。分光计的准直管将光束变为平行光,分光计的望远镜将平行光束接收到它的焦面上,衍射孔就放在棱镜台上。在第 20 章中将学习菲涅尔衍射,并讨论从菲涅尔衍射过渡到夫琅禾费衍射的条件。

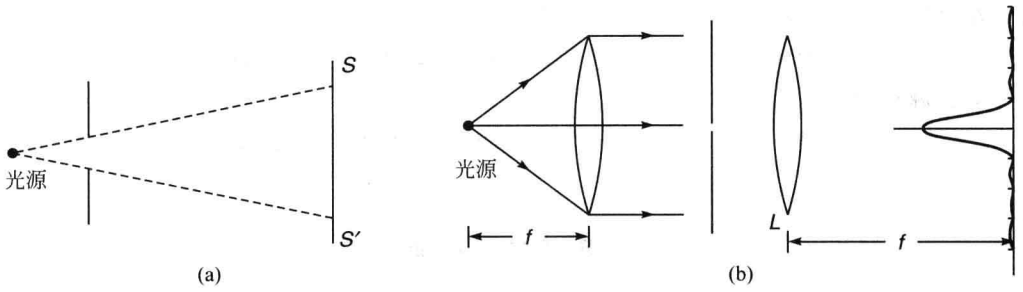


图 18.2

(a) 当光源和观察屏两者之一(或二者都)距离衍射孔有限远时,衍射图样就属于菲涅耳衍射;(b) 在夫琅禾费衍射中,光源和观察屏都在无限远处

18.2 单缝衍射图样

首先研究宽度为 b 的无限长单缝产生的夫琅禾费衍射图样。假设一列平面波垂直入射到单缝上,希望计算得到透镜 L 焦平面上的强度分布(见图 18.3(a))。缝可以看为是由大量的等间隔的点光源组成,并且认为,缝上的每一点都是一个惠更斯子波源,它们发出的子波互相干涉。设点光源位于 $A_1, A_2, A_3, \cdots$,并设相邻点光源的间隔为 Δ(见图 18.3(b))。因此,如果点光源的数目为 n,则

$$b = (n-1)\Delta \tag{18.1}$$

现在来计算 n 个点光源在点 P 的总叠加场。点 P 是(透镜焦平面上的)任意一点,它所能接收(并聚焦于该点)的平行光与狭缝法线的夹角为 θ(见图 18.3(b))。由于实际上缝是由连续分布的点光源组成的,所以在最后的表达式中,将让 n 趋于无穷大,Δ 趋于零,并保持 $n\Delta$ 趋于 b。

因为点 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 到点 P 的距离比起缝宽 b 来是很大的,所以,从这些点到达点 P 的扰动的幅度几乎完全相等。但是,即使它们到点 P 的距离只有微小的差别,由点 A_1 产生的扰动在相位上也不同于点 A_2 产生的扰动。

对于垂直入射的平面波,在点 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 是同相位的。因此,点 A_2 发出的扰动所通过的附加光程为 $\overline{A_2A'_2}$,这里点 A'_2 是点 A_1 向 A_2B_2 所作垂线的垂足。这个结论是根据光程 A_1B_1P 和 A'_2B_2P 相等这一事实得出的。如果衍射光线与狭缝法线的夹角为 θ,则二者的光程差为

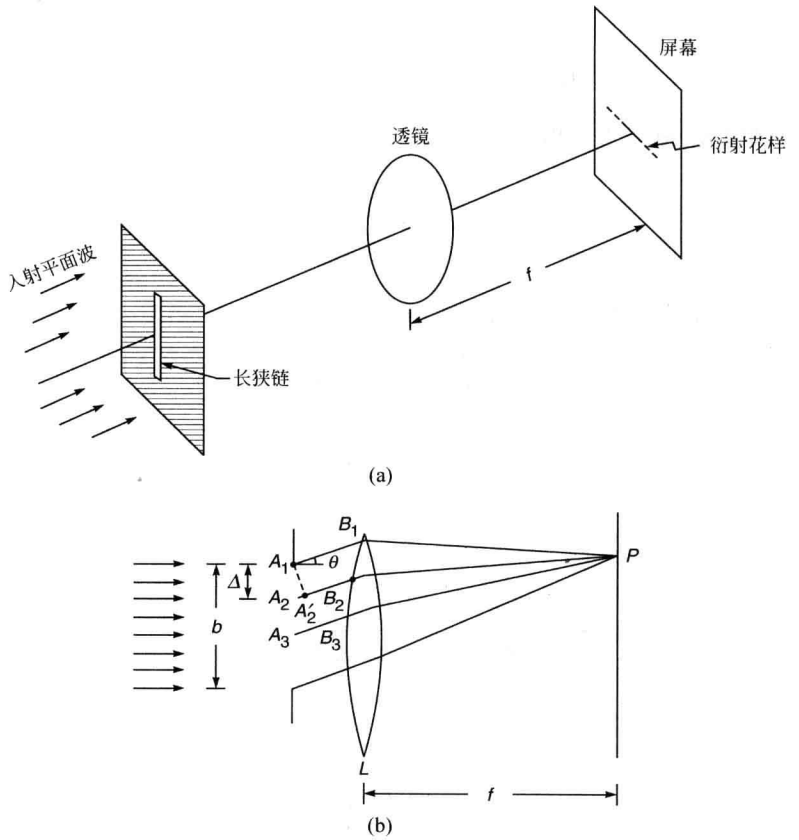


图　18.3

(a) 一束平面波垂直入射到宽为 b 的长狭缝的衍射花样。注意，衍射的扩展是沿着缝宽的方向发生的。(b) 为了计算衍射图样，假设缝是由大量的等间距的点源组成的。

$$\overline{A_2A'_2} = \Delta\sin\theta$$

相应的相位差由下式给出

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta\sin\theta \tag{18.2}$$

即，如果点 A_1 发出的扰动在点 P 产生的场是 $a\cos\omega t$，那么，由点 A_2 发出的扰动在点 P 产生的场就是 $a\cos(\omega t-\phi)$。同理，点 A_2 和点 A_3 发出的扰动的相位差也是 ϕ，因此，在点 P 的合波场为

$$E = a\{\cos\omega t + \cos(\omega t-\phi) + \cdots + \cos[\omega t-(n-1)\phi]\} \tag{18.3}$$

式中

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta\sin\theta$$

在 11.7 节中已证明

$$\cos\omega t + \cos(\omega t-\phi) + \cdots + \cos[\omega t-(n-1)\phi] = \frac{\sin\dfrac{n\phi}{2}}{\sin\dfrac{\phi}{2}}\cos\left[\omega t-\frac{1}{2}(n-1)\phi\right] \tag{18.4}$$

则

$$E = E_\theta \cos\left[\omega t - \frac{1}{2}(n-1)\phi\right] \tag{18.5}$$

式中合波场的振幅 E_θ 由下式给出[①]

$$E_\theta = a\frac{\sin\frac{n\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}} \tag{18.6}$$

在 $n\to\infty$ 和 $\Delta\to 0$，并保持 $n\Delta\to b$ 的极限情形下，有

$$\frac{n\phi}{2} = \frac{\pi}{\lambda}n\Delta\sin\theta \to \frac{\pi}{\lambda}b\sin\theta$$

又有

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta\sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{b\sin\theta}{n}$$

将趋于零，则

$$E_\theta \approx a\frac{\sin\frac{n\phi}{2}}{\frac{\phi}{2}} = na\frac{\sin\frac{\pi b\sin\theta}{\lambda}}{\frac{\pi b\sin\theta}{\lambda}} = A\frac{\sin\beta}{\beta} \tag{18.7}$$

式中[②]

$$A = na$$
$$\beta = \frac{\pi b\sin\theta}{\lambda} \tag{18.8}$$

因此，有

$$E = A\frac{\sin\beta}{\beta}\cos(\omega t - \beta) \tag{18.9}$$

对应的强度分布由下式给出

$$I = I_0\frac{\sin^2\beta}{\beta^2} \tag{18.10}$$

式中 I_0 表示对应于 $\theta=0$ 处的强度。

18.2.1 极大值与极小值的位置

强度随 β 的变化如图 18.4(a)所示。由式(18.10)可以明显看出，当

$$\beta = m\pi, \quad m \neq 0 \tag{18.11}$$

时，强度为零$\left(\text{当 }\beta=0\text{ 时，}\frac{\sin\beta}{\beta}=1\text{，且 }I=I_0\text{，对应强度的极大值}\right)$。将 β 代入式(18.11)，得到极小值的条件为

$$b\sin\theta = m\lambda, \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\text{(极小值)} \tag{18.12}$$

---

① 式(18.6)表示由 n 个点光源干涉形成的幅度分布。若 $n=2$ 时，幅度 $E_\theta=\cos\phi/2$，这将导致 $\cos^2\phi/2$ 的强度分布[见式(14.13)]。注意，如果有大量同相振荡的等距排列的光源，那么，光是沿着使振动叠加同相的特定方向传播的。

② 在这里需说明，$n\to\infty$，$a\to 0$ 时，na 趋于一个有限的极限。

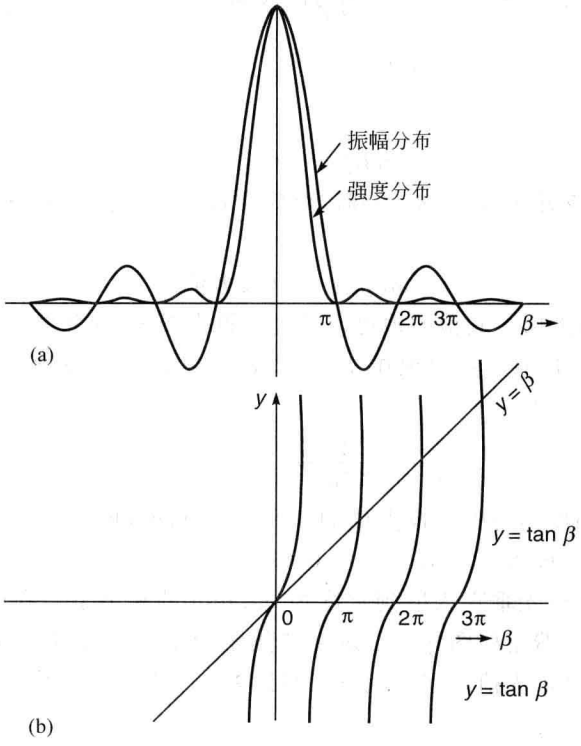


图　18.4

(a) 单缝夫琅禾费衍射的强度分布；(b) 图解法确定方程 $\tan\beta=\beta$ 的根

第一个极小值出现在 $\theta=\pm\arcsin\dfrac{\lambda}{b}$ 处，第二个极小值出现在 $\theta=\pm\arcsin\dfrac{2\lambda}{b}$ 处，如此类推。又由于 $\sin\theta\leqslant 1$，所以最大的 m 是小于 $\dfrac{b}{\lambda}$ 并最接近于 $\dfrac{b}{\lambda}$ 的整数。

通过简单的定性讨论便可以直接求得极小值的位置。下面考虑 $m=1$ 的情形，θ 满足

$$b\sin\theta=\lambda \tag{18.13}$$

把缝分成两半，如图 18.5 所示。考察间隔为 $b/2$ 的点 A 和点 A'。显然，从这两点到达点 P 的扰动之间的光程差为 $\dfrac{b}{2}\sin\theta$，而此时正等于 $\dfrac{\lambda}{2}$，相应的相位差为 π，因而，合扰动将等于零。如此类推，来自点 B 的扰动将与来自点 B' 的扰动相抵消，从而，来自缝的上半部的扰动将与来自下半部的扰动相抵消，总强度等于零。当

$$b\sin\theta=2\lambda \tag{18.14}$$

时，同理，把缝分成 4 等份，第 1 等份与第 2 等份相互抵消，第 3 等份和第 4 等份相互抵消。同理，当 $m=3$ 时，就把缝分成 6 等份，如此类推。

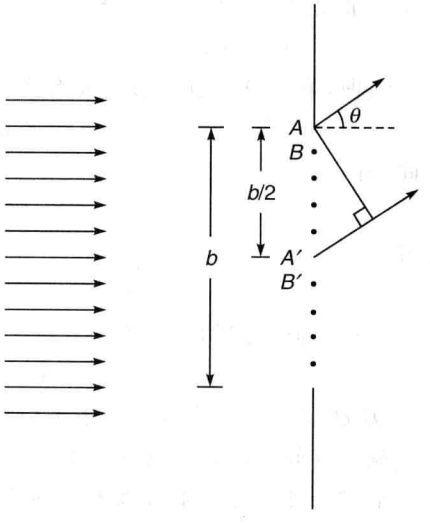


图 18.5　为推导第一极小值的条件，狭缝被分为两部分

为决定极大值的位置,取式(18.10)对 β 的微商,并让它等于零。即

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\beta}=I_0\left(\frac{2\sin\beta\cos\beta}{\beta^2}-\frac{2\sin^2\beta}{\beta^3}\right)=0$$

或者

$$\sin\beta(\beta-\tan\beta)=0 \tag{18.15}$$

当条件满足 $\sin\beta=0$,或者 $\beta=m\pi(m\neq0)$时,对应于极小值。极大值条件为下列超越方程式的根

$$\tan\beta=\beta \quad (\text{极大值}) \tag{18.16}$$

根 $\beta=0$ 对应于中央极大值。其他的根可以通过求解直线 $y=\beta$ 和曲线 $y=\tan\beta$ 交点的方法求得(见图 18.4(b))。这些交点出现在 $\beta=1.43\pi,2.46\pi,\cdots$处,分别称为第一极大值、第二极大值,…。又由

$$\left[\frac{\sin(1.43\pi)}{1.43\pi}\right]^2\approx0.0496$$

所以,第一极大值的强度约为中央极大值的 4.96%。同理,可求出第二极大值和第三极大值的强度分别约为中央极大值的 1.68%和 0.83%。

例 18.1 一束平行光垂直入射到宽度为 0.2mm 的狭缝上。在凸透镜焦平面位置处的观察屏上观察夫琅禾费衍射图样。凸透镜的焦距为 20cm。试计算观察屏上前两个极小值之间的距离和前两个极大值之间的距离。假设 $\lambda=5\times10^{-5}$cm,并且透镜紧靠狭缝。

解 $\dfrac{\lambda}{b}=\dfrac{5\times10^{-5}}{2\times10^{-2}}=2.5\times10^{-3}$

衍射的极小值条件可由 $\sin\theta=m\lambda/b$ 给出。假定 θ 很小(用弧度表示),则满足 $\sin\theta\approx\theta$(这个假设将通过下面的计算进行验证)。用 λ/b 代替角度,可得

$$\theta\approx2.5\times10^{-3}\text{rad} \quad 和 \quad 5\times10^{-3}\text{rad}$$

对应第一、第二极小值的衍射角。注意,由于

$$\sin(2.5\times10^{-3})=2.4999973\times10^{-3}$$

$\sin\theta\approx\theta$ 的误差大约为百万分之一。它们在透镜焦面上分开的距离为$(5\times10^{-3}-2.5\times10^{-3})\times20=0.05$(cm)。

同理,第一极大值和第二极大值分别出现在

$$\beta=1.43\pi,2.46\pi$$

因此,有

$$b\sin\theta=1.43\lambda,2.46\lambda$$

或者

$$\sin\theta=1.43\times2.5\times10^{-3},2.46\times2.5\times10^{-3}$$

这两个极大值之间的距离为

$$(2.46-1.43)\times2.5\times10^{-3}\times20\approx0.05(\text{cm})$$

例 18.2 再一次考虑一束平行光($\lambda=5\times10^{-5}$cm)垂直入射到宽度为 0.2mm 的狭缝上。观察屏放在距离单缝 3m 处。假设观察屏距单缝的距离已足够远,使得衍射满足夫琅禾费衍射条件。计算中央极大值的宽度。

解 与例 18.1 一样,第一级极小值在 $\theta\approx2.5\times10^{-3}$rad 处;因此,中央极大值的全宽度可近似给出

$$2\times 3\times \tan(2.5\times 10^{-3})\approx 0.015(\mathrm{m})$$

如图 18.6 所示，为 4 幅在观察屏上实际看到的单缝衍射图样，对应的缝宽分别为 8.8×10^{-3}cm，1.76×10^{-2}cm，3.5×10^{-2}cm 和 7.0×10^{-2}cm。所用的光波长为 6328Å$=6.328\times10^{-5}$cm。注意到以下两点。

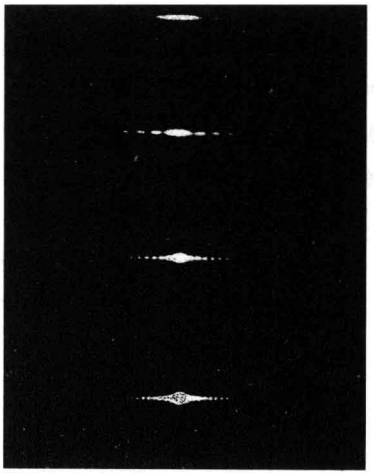


图 18.6　对应于 $b=0.0088$cm，0.0176cm，0.035cm 和 0.070cm 的单缝衍射图样，光波长为 6.328×10^{-5}cm（引自参考文献[17]，已授权）。

（1）图样只沿着狭缝宽度的方向扩展，这是由于缝的长度比宽度大得多的缘故。

（2）与 4 个缝宽对应的 λ/b 分别为 7.191×10^{-3}，3.595×10^{-3}，1.808×10^{-3} 和 0.904×10^{-3}。因此，出现第一极小值的衍射角分别为

$$\theta\approx\sin\theta=7.191\times10^{-3},3.595\times10^{-3},$$
$$1.808\times10^{-3}\text{ 和 }0.904\times10^{-3}$$

式中角度的单位为 rad[①]。

当缝宽为 8.8×10^{-3}cm 和 1.76×10^{-2}cm 时，由式(18.10)预言的强度分布如图 18.7 所示。对于 $b\gg\lambda$，衍射光束的大部分能量包含在两个第一极小值之间，即

$$-\frac{\lambda}{b}\lessapprox\theta\lessapprox\frac{\lambda}{b}\qquad(18.17)$$

(式中 θ 的单位为 rad)其发散角范围(其中包含了大部分的能量)由下式给出

$$\Delta\theta\sim\frac{\lambda}{b}\qquad(18.18)$$

当 b 很小时，光几乎均匀地从狭缝处扩展开来。还注意到，当 $\lambda\to0$，则 $\Delta\theta\to0$，表示此时衍射效应完全消失。

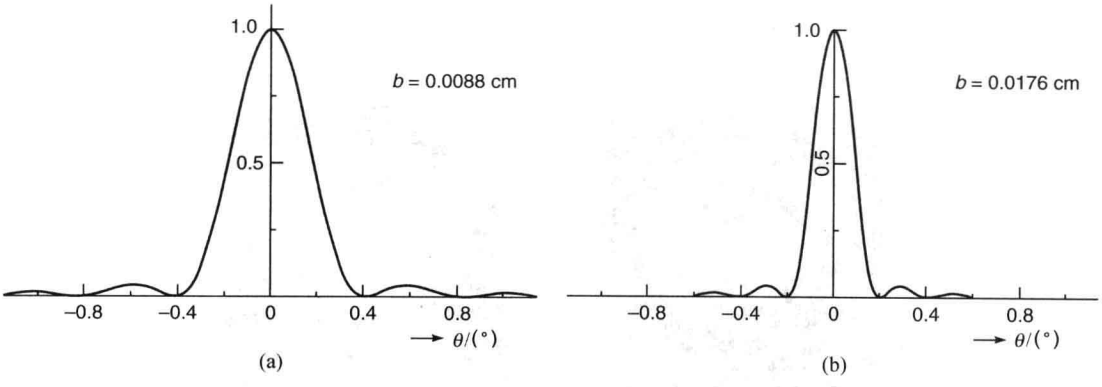


图 18.7　由式(18.10)计算出的强度分布，缝宽 b 分别为 0.0088cm 和 0.0176cm($\lambda=6.328\times10^{-5}$cm)

① 如图 18.6 所示，胶片距狭缝 15 英尺(≈4.572m)。它记录了当 $b=8.8\times10^{-3}$cm，1.76×10^{-2}cm，3.5×10^{-2}cm 和 7.0×10^{-2}cm 时的夫琅禾费衍射图样。第一个极小值出现在距中央极大值的 3.288cm，1.644cm，0.827cm 和 0.413cm 处。

18.3 圆孔衍射

在上节中已经指出,当平面波入射到一个宽度为 b 的长狭缝时,通过狭缝后,将(沿着缝宽的方向)扩展开来,发散角$\sim\lambda/b$。同理,可以讨论平面波的圆孔衍射问题。图 18.8 为可以观察这种衍射图样的装置,一束平面波入射到圆孔上,一个直径比圆孔的直径大很多的透镜紧贴圆孔放置,那么,在透镜的焦面上,将可以看到夫琅禾费衍射图样。由于这个系统具有旋转对称性,则衍射图样应是由一系列的同心亮环和暗环组成的(在透镜后面的焦平面上的)衍射图样被称为艾里图样。如图 18.9(a)和(b)所示,为圆孔半径为 0.5mm 和 0.25mm 的艾里图样。圆孔衍射图样的详细数学分析比较复杂(见 19.7 节),在此只给出最后的结果,强度分布由下式给出

$$I = I_0\left[\frac{2J_1(v)}{v}\right]^2 \tag{18.19}$$

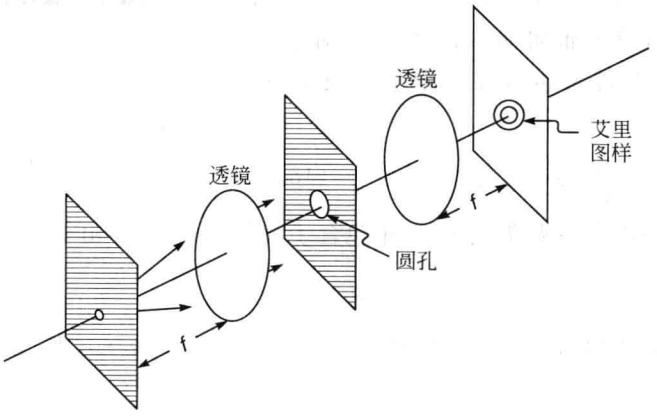


图 18.8 观察圆孔夫琅禾费衍射的实验装置

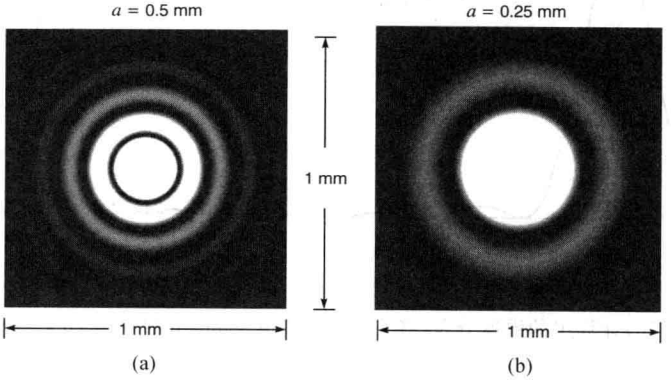


图 18.9 计算机生成的艾里图样;(a)和(b)分别对应 $a=0.5$mm 和 $a=0.25$mm,并位于焦距为 20cm 的透镜的焦面上($\lambda=0.5\mu$m)

式中

$$v = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta \tag{18.20}$$

a 为圆孔半径，λ 为光的波长，θ 为衍射角，I_0 为 $\theta=0$ 时的强度（表示中心极大值）。函数 $J_1(v)$ 称为一阶贝塞尔函数。在凸透镜的焦平面上

$$v \approx \frac{2\pi}{\lambda} a \frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{f} \tag{18.21}$$

式中 f 为透镜的焦距。对于那些不熟悉贝塞尔函数的人来说，只提示 $J_1(v)$ 的变化有点类似于有阻尼的正弦函数（见图 18.10）。由于 $J_1(0)=0$，可得

$$\underset{v\to 0}{Lt} \frac{2J_1(v)}{v} = 1$$

就像下式一样

$$\underset{x\to 0}{Lt} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$J_1(v)$ 的其他零点出现在下列 v 值处

$$v = 3.832, 7.016, 10.174, \cdots$$

如图 18.11 所示为函数

$$\left[\frac{2J_1(v)}{v}\right]^2$$

的曲线，它表示与艾里图样相对应的强度分布。艾里图样中的一系列暗环（见图 18.9）对应于

$$v = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta = 3.832, 7.016, 10.174, \cdots \tag{18.22}$$

或者

$$\sin\theta = \frac{3.832\lambda}{2\pi a}, \frac{7.016\lambda}{2\pi a}, \cdots \tag{18.23}$$

如果用 f 表示透镜的焦距，则

$$\text{暗环的半径} = f\tan\theta \approx \frac{3.832\lambda f}{2\pi a}, \frac{7.016\lambda f}{2\pi a}, \cdots \tag{18.24}$$

此处假设 θ 很小，以致 $\tan\theta \approx \sin\theta$。如图 18.9(a)和(b)所示的艾里图样分别对应于 $a=$

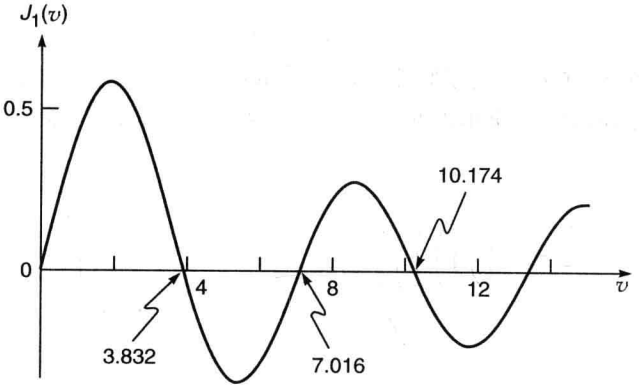


图 18.10　$J_1(v)$ 随 v 的变化曲线

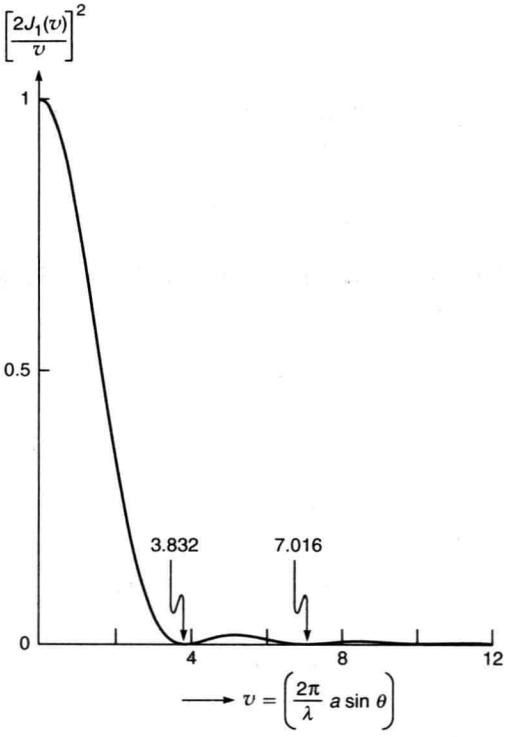


图 18.11　艾里图样的强度变化

0.5mm 和 0.25mm，且其中 $\lambda=5000\text{Å}$，$f=20\text{cm}$。因此，有

第一暗环的半径 $\approx$ 0.12mm 和 0.24mm

分别对应于 $a=0.5\text{mm}$ 和 0.25mm。详细的数学分析表明 84% 的能量包含在第一暗环以内(见 19.7 节)，所以可以说，光束的发散角近似地由下式给出

$$\Delta\theta \approx \frac{0.61\lambda}{D} \approx \frac{\lambda}{D} \tag{18.25}$$

式中 $D(=2a)$ 表示孔的直径。比较式(18.18)和式(18.25)，可以说，与衍射图样相联系的发散角可以写为如下的普遍形式

$$\Delta\theta \sim \frac{\lambda}{\text{孔的线度}} \tag{18.26}$$

上述现象的一个有意义的应用如图 18.12 所示，外行人会认为为了得到指向性更好的声波，应该使用如图 18.12(a)所示的小孔径的扬声器，但实际上，它会存在一个较严重的衍

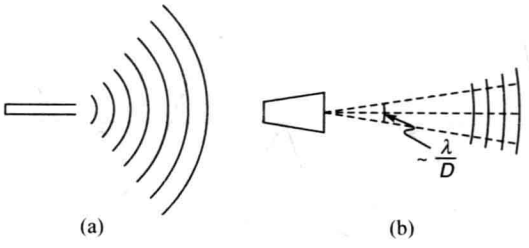


图 18.12　声波的定向性随发声器直径的增加而增加

射发散，从而使得只有一小部分能量到达观察者。反之，如果使用孔径较大的扬声器，却能得到更好的定向性（见图 18.12(b)）。

如图 18.13 所示，如果一个带有小空隙的障碍物放置于水箱中，（水波）涟漪就会呈现半圆状散开；小空隙就像一个点光源的作用一样。然而如果空隙很大，衍射效应就会受到很大的限制。在此情景中，“小”意味着障碍物的大小和（水波）涟漪的波长相当。

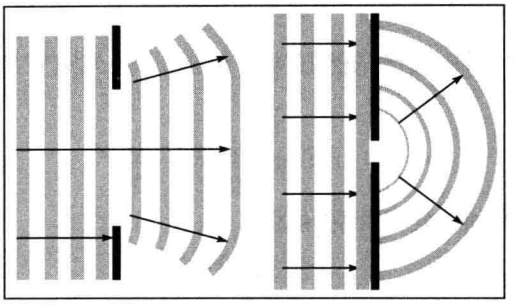


图 18.13　如果一个带有小缝隙的障碍物放置于水箱中，（水波）涟漪就会呈现半圆状散开；小缝隙扮演了点光源的作用。然而如果缝隙很大，衍射效应就会受到很大的限制。此处说阻挡屏缝隙尺寸“小”，是和（水波）涟漪的波长相比较。此图引自 http://en.wikipedia.org/wiki/Ripple_tank，彩图见文前附录图表页的图 17。

例 18.3　半径为 0.02cm 的圆孔在焦距为 20cm 的凸透镜的焦平面上产生衍射图样，试计算头两个暗环的半径。假设 $\lambda=6\times10^{-5}\text{cm}$。

解　第一暗环出现在

$$\theta\approx\sin\theta=\frac{1.22\times6\times10^{-5}}{2\times0.02}\approx1.8\times10^{-3}(\text{rad})$$

因此，第一暗环的半径为

$$\approx20\times1.8\times10^{-3}=3.6\times10^{-2}(\text{cm})$$

同理，第二暗环的半径为

$$\approx20\times\frac{7.016\times6\times10^{-5}}{2\pi\times0.02}\approx6.7\times10^{-2}(\text{cm})$$

18.4　激光束的定向性

普通光源（如钠灯）向各个方向辐射。而激光束的发散主要来源于衍射效应。对于多数激光束来说，它的横向振幅服从高斯分布；当光束远离激光器（可假设其位于 $z=0$）时，振幅分布服从

$$A(x,y)=a\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}\right)\tag{18.27}$$

假设波阵面在 $z=0$ 处为平面。由式(18.27)可知，在距离 z 轴 w_0 处，幅度下降到原来的 $1/e$（即，强度下降因子为 $1/e^2$），称 w_0 为光束的光斑尺寸。在 20.5 节中将证明当光束在 z 方向上传播时，强度分布服从

$$I(x,y,z)=\frac{I_0}{1+\gamma^2}\exp\left[-\frac{2(x^2+y^2)}{w^2(z)}\right] \tag{18.28}$$

式中

$$\gamma=\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}$$
$$w(z)=w_0(1+\gamma^2)^{1/2}=w_0\left(1+\frac{\lambda^2 z^2}{\pi^2 w_0^4}\right)^{1/2} \tag{18.29}$$

因此,光束随着 z 的增加,横向强度依然服从高斯分布,且光束宽度也随之增加。当 z 值很大($\geqslant w_0^2/\lambda$)时,可得

$$w(z)\approx w_0\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}=\frac{\lambda z}{\pi w_0} \tag{18.30}$$

这表明宽度随着 z 线性增加。定义衍射角为

$$\tan\theta=\frac{w(z)}{z}\approx\frac{\lambda}{\pi w_0} \tag{18.31}$$

式(18.31)说明光束宽度的增长率与传输的波长成正比,与光束的初始宽度成反比,且式(18.31)与式(18.26)一致。为了得到一些数值的印象,假设 $\lambda=0.5\mu m$,对于 $w_0=1mm$,有

$$2\theta\approx 0.018^\circ$$

且当 $z=10m$ 时,有

$$w\approx 1.88mm$$

同理,对于 $w_0=0.25mm$,有

$$2\theta\approx 0.073^\circ$$

且当 $z=2m$ 时,有

$$w\approx 6.35mm$$

(见图 18.14)注意到 θ 随着 w_0 的减小而增大(光斑的尺寸越小,衍射效应越大)。由

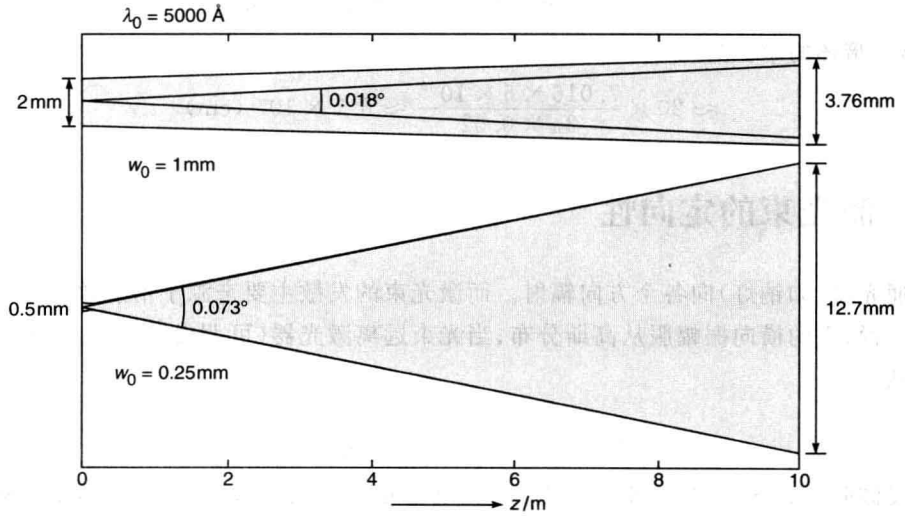


图 18.14 波阵面在 $z=0$ 处为平面的高斯光束的衍射图样,当初始光斑尺寸的大小由 1mm 减为 0.25mm 时,衍射发散扩大,设波长为 5000Å。

式(18.31)，可以得到以下结论。

(1) 对于一个给定的 λ_0，θ 随着 w_0 的减小而增大，这表明初始的光斑尺寸越小，衍射发散越大。

(2) 对于给定的 w_0，θ(也就是衍射发散)随着 λ_0 的减小而减小。实际上，当 $\lambda_0 \to 0$ 时，没有光束的扩展，这就是所谓的几何光学极限。

图 18.15 所示为波长为 589.158nm 的 50W 激光束在空气中的传播，注意，这里没有光束的发散，对此将在 19.5 节中做更加详细的讨论。由式(18.27)可容易地证明

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} I(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi w_0^2}{2} I_0$$

与 z 无关。这是可以预料的，当总能量涵盖整个 x-y 平面时，总能量不会随着 z 而改变。

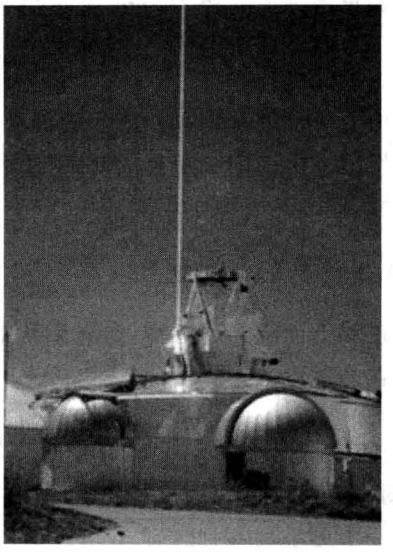


图 18.15　波长为 589.158nm、功率为 50W 的激光束通过大气传播，注意，这里光束没有发散。此图引自 http://en.wikipedia.org/wiki/Laser。彩图见文前附录图表页的图 18。

例 18.4　从单模光纤输出的激光束近似于高斯分布，且 $w_0 = 5\mu\mathrm{m}$。该激光束工作在 He-Ne 激光波长($\lambda_0 = 0.6328\mu\mathrm{m}$)上。因此，相对应的发散角为

$$\theta \approx \arctan\left(\frac{\lambda_0}{\pi w_0}\right) \approx 2.3^\circ$$

将屏幕放置在距离光纤 50cm 远的位置上，光束的半径为 2cm。

如果光束的发散仅由衍射所致，则该光束被称为衍射极限光束。一般来说，激光束都是衍射极限光束。此外，如果在透镜的焦平面上放置一根灯丝光源，那么其发出的光束由于灯丝的有限尺寸而发散(见图 18.16)。光束的发散角为(见图 18.16)

$$\Delta\theta \approx \frac{l}{f} \tag{18.32}$$

式中 l 表示灯丝的长度，f 为透镜的焦距。如果灯丝的粗细为 2mm(放在焦距为 10cm 的透镜的焦平面上)，光束的发散角(来源于灯丝的有限尺寸)近似为

$$\Delta\theta \approx \frac{2\mathrm{mm}}{100\mathrm{mm}} = 0.02\mathrm{rad}$$

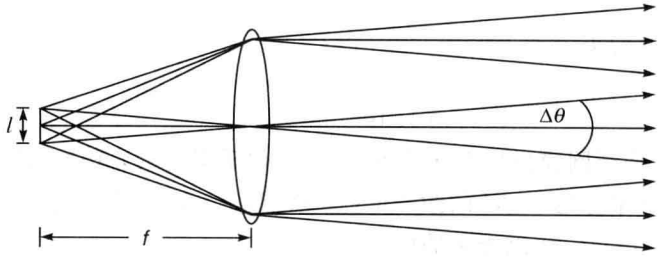


图 18.16　一根细丝置于凸透镜的焦平面上

如果透镜的孔径为5cm,光束由于透镜的衍射造成的发散角为

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{D} \approx \frac{5\times10^{-5}\text{cm}}{5\text{cm}} = 0.00001\text{rad}$$

这比由于灯丝的有限尺寸产生的发散角小得多。只有当灯丝的尺寸比10^{-3}mm小很多时,光束发散才由衍射决定。因此,对于大多数实际的光源来说,光束的发散是来源于光源的有限尺寸,而不是来源于衍射。

18.4.1 激光束的聚焦

正如上面提到的一样,激光束常常是衍射极限的光束。如果这样的一个衍射极限光束投射在凸透镜上,则

$$\text{焦点光斑的半径} \approx \frac{\lambda_0 f}{a} \tag{18.33}$$

(见图18.17)式中f表示透镜的焦距,a表示激光束的半径或者透镜孔径的半径(视它们之间哪一个更小)。因此,有

$$\text{焦点光斑的面积} \approx \pi\left(\frac{\lambda_0 f}{a}\right)^2$$

下面通过一些例子来理解聚焦的效应。

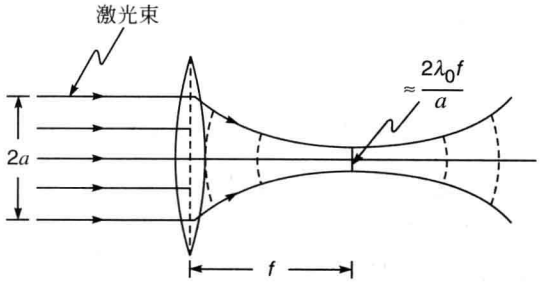


图18.17 如果一束有限截面的平面波(直径为$2a$)垂直入射到焦距为f的无像差透镜上,那么,从透镜出射的光将聚焦到聚焦点,其光斑的半径$\approx\lambda_0 f/a$,焦点光斑面积$\approx\pi(\lambda_0 f/a)^2$。

例18.5 考虑一个2mW的激光束($\lambda_0\approx6\times10^{-5}$cm)入射到焦距为$f\approx2.5$cm的眼睛上。如果瞳孔的直径($=2a$)为2mm,那么,焦点光斑的面积

$$A \approx \pi\left(\frac{\lambda_0 f}{a}\right)^2 \approx 7\times10^{-6}(\text{cm}^2)$$

在视网膜上,光强近似为

$$I \approx \frac{P}{A} \approx \frac{2\times10^{-3}\text{W}}{7\times10^{-10}\text{m}^2} \approx 3\times10^6\,\text{W/m}^2$$

如此高的强度将损伤视网膜!!! 因此绝不要正视(似乎无害的)低功率激光束。

例18.6 接下来考虑3mW的激光束($\lambda_0\approx6\times10^{-5}$cm和光束宽度$2a\approx1$cm)入射到焦距为5cm的透镜上,那么,焦点光斑的面积

$$A \approx \pi\left(\frac{\lambda_0 f}{a}\right)^2 \approx 10^{-6}\text{cm}^2 = 10^{-10}\text{m}^2$$

在透镜的焦平面上，强度近似为

$$I \approx \frac{P}{A} \approx \frac{3\times10^{6}\,\mathrm{W}}{10^{-10}\,\mathrm{m}^{2}} \approx 3\times10^{16}\,\mathrm{W/m}^{2}$$

由式(18.34)(见式(23.78))可知，光束的强度与电场强度振幅 E_0 的关系为

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2 \tag{18.34}$$

式中 $\varepsilon_0 \approx 8.854\times10^{-12}$(MKS 单位制)表示自由空间的介电常数，$c \approx 3\times10^{8}\,\mathrm{m/s}$ 为自由空间的光速。将 $I=3\times10^{16}\,\mathrm{W/m}^2$ 代入式(18.34)，可得

$$E_0 \approx 5\times10^{9}\,\mathrm{V/m}$$

如此高的电场强度将导致空气中火花的产生(见图 18.18)。因此，激光束(由于其高定向性)能聚焦在相当小的区域内而产生高的强度。如此高的强度使得激光应用于许多工业中，如材料的焊接、打眼、切割等。如图 18.19 所示，一个测试样品被一个发射几十千瓦功率的红外光的高功率二氧化碳连续波激光器照射而蒸发，并伴有辐射引发的火焰。

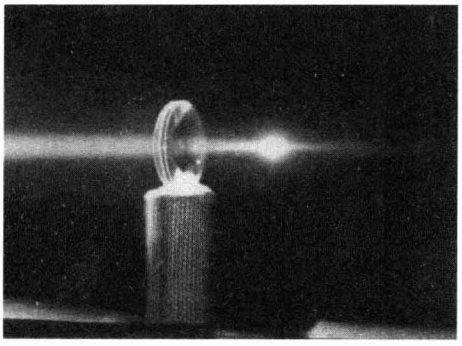


图 18.18　一峰值功率为 3mW 的红宝石激光束被聚焦。在焦点处，电场强度 $\sim10^{9}\,\mathrm{V/m}$，从而在空气中引发了火花(图片引用得到 R. W. Terhune 博士的允许)。

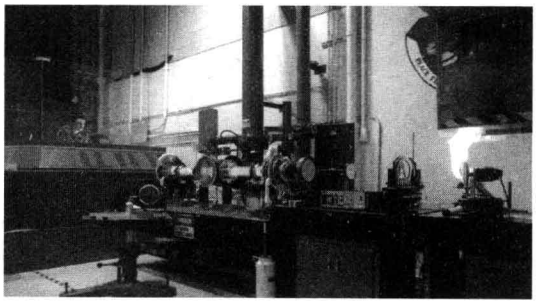


图 18.19　一个测试样品被一个发射几十千瓦功率的红外光的高功率二氧化碳连续波激光器照射而蒸发，并伴有辐射引发的火焰。图片引自：http://en.wikipedia.org/wiki/CO2_laser。彩图见文前附录图表页的图 19。

在下面两个例子中，将计算当直视一个 500W 的灯泡或太阳时(照射在眼睛视网膜)的光强度(注意：绝不要直视太阳，视网膜将受到损伤，这不仅是由于太阳光的高强度，还由于太阳光中包含大量的紫外线成分)。

例 18.7　考虑一个直径为 6cm 的白炽光源(比如 500W 的灯泡)，距离眼睛 5m 远(见图 18.20)。假设瞳孔的直径为 2mm。因此，有

$$\text{眼镜瞳孔的面积} \approx \pi(1\times1)\,\mathrm{mm}^2 \approx 3\times10^{-6}\,\mathrm{m}^2$$

$$\text{进入眼睛的光功率} \approx (500\mathrm{W})\times\frac{\pi r^2}{4\pi R^2} \approx 5\times10^{-6}\,\mathrm{W}$$

$$\text{成像的半径} = \text{光源的半径}\times\text{缩小倍数} \approx 3\mathrm{cm}\times\frac{2.5}{500} \approx 1.5\times10^{-4}\,\mathrm{m}$$

假设在距离瞳孔 2.5cm 处形成图像，则

$$像位置处的功率密度 = \frac{(5\times10^{-6}\,\mathrm{W})}{\pi\times(1.5\times10^{-4})^2\,\mathrm{m}^2}\approx 70\,\mathrm{W/m^2}$$

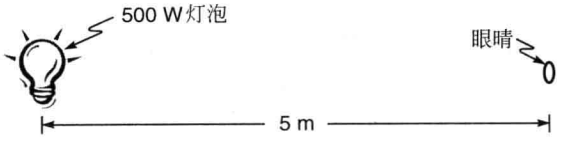


图 18.20　距离眼睛 5m 处的 500W 的灯泡

例 18.8　计算直视太阳(见图 18.21)时,视网膜处的光强度。此时

到达地球上的太阳光的强度 $\approx 1.35\,\mathrm{kW/m^2}$

则

$$进入眼睛的光功率 \approx 1.35\times10^{3}\times\pi\times10^{-6}\approx 4\,\mathrm{mW}$$

在地球上太阳所成锥角大约为 0.5°。因此,有

$$太阳在视网膜成像的半径 \approx 0.5\times\frac{\pi}{180}\times25\approx 0.2\,\mathrm{mm}=2\times10^{-4}\,\mathrm{m}$$

以及

$$像位置处的功率密度 \approx \frac{4\times10^{-3}\,\mathrm{W}}{\pi\times(2\times10^{-4})^2\,\mathrm{m}^2}\approx 30\,\mathrm{kW/m^2}$$

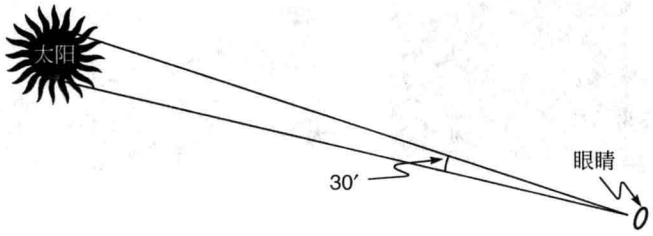


图 18.21　如果直视太阳,将会产生高达 $30\,\mathrm{kW/m^2}$ 的光强度,这会损坏视网膜。

总结一下,一个 2mW 衍射极限的激光束入射到眼睛上,可以在视网膜上产生大约 $10^6\,\mathrm{W/m^2}$ 的光强度,这肯定会损伤视网膜。而眼睛去看一个 500W 的灯泡是相当安全的,但是直视一个 2mW 的激光束是非常危险的。正是由于激光束能聚焦在非常狭小的区域内,从而使得激光在眼科手术、激光焊接等领域有重要的应用。

从上面的讨论中可以得出,光束的半径越大,焦点光斑尺寸越小,从而在焦点光斑上的强度越大。实际上,可使用光束扩束器(见图 18.22)来产生更大尺寸的光束,使其焦点光斑点尺寸减小。但是,在焦点之后,光束将有更大的发散,因此将在一个很短的距离内扩展。

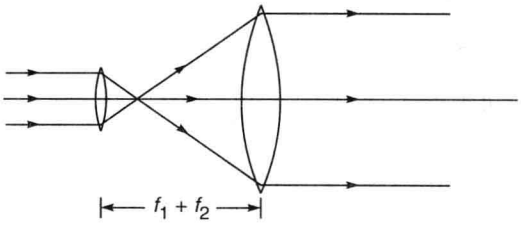


图 18.22　两个间隔距离为其焦距之和的凸透镜可以用作光束扩束器

通常定义一个焦深，定义为当光强相比于焦点处减小一个特定因子时，与焦点间的距离。因此，当焦点光斑小时，焦深也小。在透镜焦平面上的强度分布由式(18.19)给出，式中参数 v 由式(18.21)给出。此外，轴上的光强度由下式给出

$$I = I_0\left[\frac{\sin(w/4)}{w/4}\right]^2 \tag{18.35}$$

式中

$$w = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{a}{f}\right)^2 z \tag{18.36}$$

此处 $z=0$ 表示焦平面[①]。

很容易可以看出，强度在

$$z \approx \pm 0.5\lambda(f/a)^2 \tag{18.37}$$

处下降 20%。这个 z 通常被称为焦深或焦点容限，且 a 越大，焦点容限越小。当 $\lambda=6\times10^{-5}$cm，$f=10$cm，$a=1$cm 时，焦点容限约为 3×10^{-3}cm。

18.5　分辨极限

考察两个点光源，例如两颗星星(这样可以认为进入光学系统孔径的光波是平面波)被直径为 D 的望远物镜所聚焦(见图 18.23)。正如在以前章节中讨论的，这个系统可以等效于图 18.8 所示的系统，一个直径为 D 的圆孔后面有一个焦距为 f 的会聚透镜。这样一来，两个点光源将各自产生自己的艾里图样，如图 18.23 所示。艾里环的直径取决于物镜的直径、焦距和光的波长(见例 18.3)。

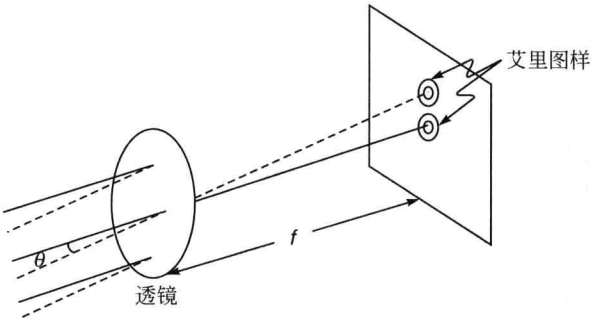


图 18.23　两个远距离物体在凸透镜焦平面上成像。如果它们各自的衍射图样可以很好地分开，那么，称它们是可分辨的。

如图 18.23 所示的两个艾里图样彼此离开得相当远，因此，两个物点是清晰可辨的。由于第一暗环的半径是 $\frac{1.22\lambda}{D}f$，当物镜直径越变越小时，两个艾里图样的重叠区域就会越来越大，因此，要想得到更高的分辨率，就要求更大的物镜直径，这就是望远镜通常以物镜直径大小来表征其分辨本领的原因。比如，40in(≈1.016m)的望远镜意味着其物镜的直径是

① 该式的推导已在多处给出，如参考文献[6]的 6.5 节。

40in。图18.24所示为用一个孔径2.56m的望远镜观测牧夫座ζ双星的成像,并可以看到每颗星体周围的艾里图样。

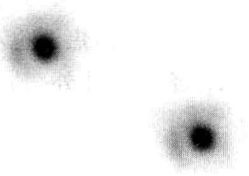


图18.24 用一个孔径2.56m的望远镜观测牧夫座ζ双星的成像,并可以看到每颗星体周围的艾里图样。图像由Bob Tubbs拍摄,见http://en.wikipedia.org/wiki/Diffraction。彩图见文前附录图表页的图20。

如图18.25和图18.26所示,为两个远距离物体在不同的分离角时,各自的强度分布及合强度分布;在每种情况下,假设两个源在各自的中心点产生相等的强度。很明显,合强度分布相当的复杂(见图18.27)。如图18.25和图18.26所示,为两艾里图样的中心连接线上的强度分布图,需要指出的是,由于两点光源是独立的,因此它们的光强分布(艾里图样)将直接相加。如果选择此连线作为x轴,图18.25和图18.26所示的参数v由下式给出

$$v=\frac{2\pi a}{\lambda f}x \tag{18.38}$$

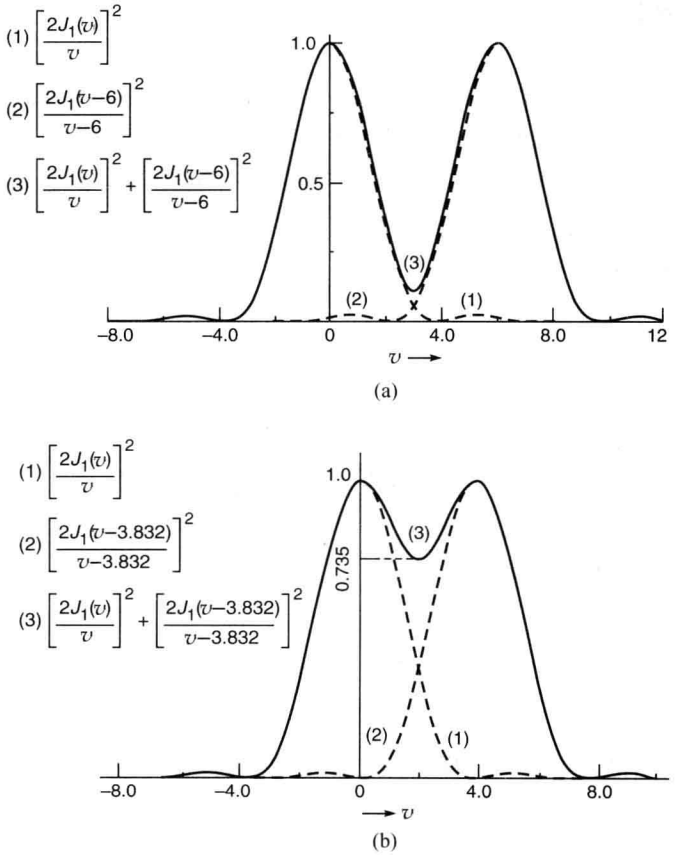


图18.25 虚线表示两个点光源分别产生的强度分布(在中心点产生的强度相等);实线表示合强度分布。(a)和(b)分别对应两物点的角间距为$6\lambda/\pi D$和$1.22\lambda/D$的情况。第一种情况下,两个物点可以很好地分辨;而在第二种情况下(根据瑞利判据),它们恰好可以分辨。

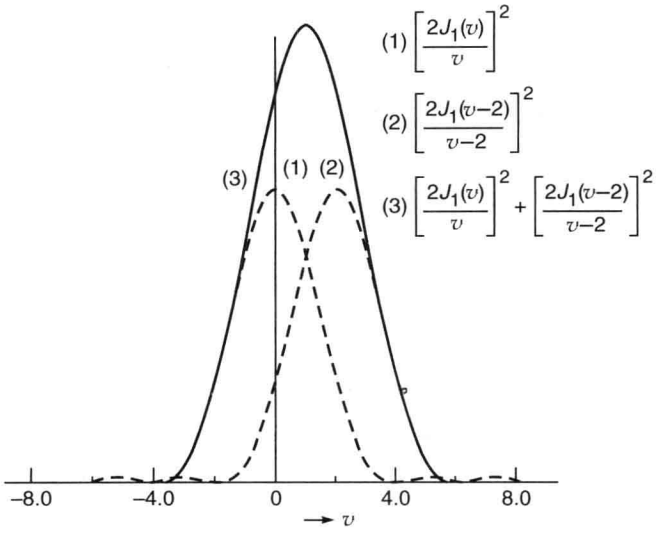


图 18.26　虚线表示两个角间距为 $2\lambda/\pi D$ 的远离物点产生的强度分布。合强度分布(如实线所示)只有一个峰，从而两物点不可分辨。

如图 18.25(a)所示为两个角距离约为 $6\lambda/\pi D$ 的远离物体产生的合强度的分布，可见，两个像可以清晰地分辨开。如图 18.26 所示对应于两物体的角距离为

$$\Delta\theta \approx \frac{2\lambda}{\pi D} \tag{18.39}$$

的情形，而合强度分布只有一个峰，因此，两物体根本不能分辨开。当两物体的角距离为 $1.22\lambda/D$ 时，一个艾里图样的中央极大值就落到另一个图样的第一极小值上，这时两个物体被说成是恰好可以分辨的。分辨极限的这个准则称为瑞利判据，其相应的强度分布图如图 18.25(b)所示，实际的衍射图样见图 18.27。

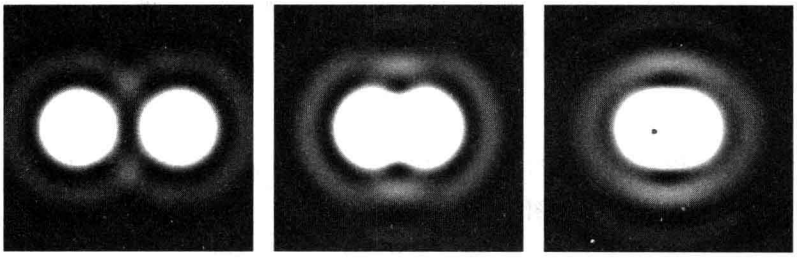


图 18.27　由计算机生成的两点光源产生的强度分布
(a) 两物点可清晰分辨；(b) 两物点恰好可分辨；(c) 两物点不可分辨

为了对上述结果有一个数值概念，考虑一个直径为 5cm 和焦距 $f=30$cm 的望远物镜。假定光的波长 $\lambda=6\times10^{-5}$cm，求得两个恰好可以分辨开的远离物体的角距离为

$$1.22\,\frac{\lambda}{D}=\frac{1.22\times6\times10^{-5}}{5}\approx1.5\times10^{-5}(\text{rad})$$

而艾里图样的第一暗环的半径为

$$1.22\frac{\lambda}{D}\times f=\frac{1.22\times 6\times 10^{-5}}{5}\times 30\approx 4.5\times 10^{-4}(\text{cm})$$

显而易见,物镜直径越大,分辨本领越高。例如,最大的望远物镜的直径约为80in(≈2.032m),相应的恰可分辨的两物体的最小角距离约为0.07″(角秒也称弧秒)。这是一个非常小的分辨极限,但由于大气的紊动,建在地面上的望远镜从未能达到这样小的分辨率极限。然而,较大的口径总是能提供较高的集光本领,从而具有观察更深、更远宇宙空间的能力。

有趣的是,如果假设人眼的分辨力主要受到衍射效应的限制,可以求出人眼的最小分辨角为

$$\Delta\theta\sim\frac{\lambda}{D}\approx\frac{6\times 10^{-5}}{2\times 10^{-1}}=3\times 10^{-4}(\text{rad}) \tag{18.40}$$

假设瞳孔直径为2mm。这样一来,在20m远的地方,人眼能分辨出的最近的两点之间的距离为

$$3\times 10^{-4}\times 20=6\times 10^{-3}(\text{m})=6(\text{mm})$$

通过将一根毫米刻度尺逐渐远离眼睛,找出在什么距离毫米刻线变模糊了,就能够定性地证实上述结果。

在上面的讨论中,已假设两个物点将产生完全相同的(但是是分开的)的艾里图样。如果情况不是这样,则两个中央极大值的强度不相等,就必须修正分辨极限的判据,以使得两个极大值可以分辨。

18.5.1 显微镜的分辨本领

下面讨论直径为D的显微物镜的分辨本领。如图18.28所示,点P和点Q表示通过显微镜观察的靠得很近的两自身发光的点状物体。假定不存在几何像差,发自点P和点Q的光(经过透镜折射后)将各自产生球面波前,并以各自的傍轴像点点P'和点Q'为中心形成艾里图样。对于恰好能够分辨的点P和点Q,要求点Q'恰好位于围绕点P'的第一暗环处,因此,有

$$\sin\alpha'\approx\frac{1.22\lambda}{D}=\frac{1.22\lambda_0}{n'D} \tag{18.41}$$

式中n和n'分别表示物空间和像空间的折射率,λ_0和$\lambda=\lambda_0/n'$分别表示光在自由空间和在折射率为n'的媒质中的波长。如图18.28所示定义角度α',且有

$$\sin\alpha'\approx\frac{y'}{\overline{OP'}}=\frac{y'\tan i'}{D/2}\approx\frac{y'\sin i'}{D/2} \tag{18.42}$$

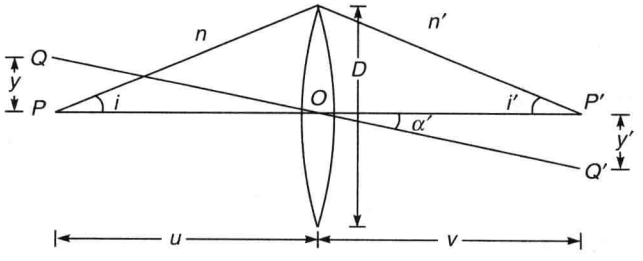


图18.28 显微镜物镜的分辨能力

式中假设 $\sin i' \approx \tan i'$，由于像距（$\overline{OP'}$）远大于 D，因此，这是合理的。根据式(18.41)和式(18.42)，可得

$$y' \approx \frac{0.61\lambda_0}{n'\sin i'}$$

又由正弦定律 $n'y'\sin i' = ny\sin i$（见式(4.39)），可得

$$y \approx \frac{0.61\lambda_0}{n\sin i} \tag{18.43}$$

表示显微镜所分辨的最小间隔。式中 $n\sin i$ 为光学系统的数值孔径，分辨本领随着数值孔径的增大而增大。正是这个原因，在有些显微镜中，会在物镜和物体标本之间的空间中充满一种油，通常被称为油浸物镜。由式(18.43)可知，分辨本领随着 λ 的缩短而提高，正是由于这个原因，常常用蓝光（甚至用紫外光）来照明物体。例如，在电子显微镜中，加速到 100keV 的电子束的德布罗意波长约为 0.03×10^{-8}cm，因此，这样的电子显微镜有极高的分辨本领。

在上面的推导中已假设两个物点是自身发光的，从而两个强度可以直接相加。但在实际情况中，物体是被同一个光源照明的，因此，一般说来，来自两个物点的所发射光波之间存在某些相位上的关联。严格说来，在这种情形下，不能将强度直接相加（见 14.6 节），式(18.43)可以给出分辨极限的正确数量级。

18.6　双缝的夫琅禾费衍射图样

在 18.3 节中已经研究过宽度为 b 的单缝所产生的夫琅禾费衍射图样，并且求出了其包含极大值和极小值的强度分布。本节中将研究由两个间隔为 d 的平行狭缝（每一个狭缝的宽度为 b）所产生的夫琅禾费衍射图样。我们会发现，合强度分布就是单缝衍射图样与间隔为 d 的两个点光源产生的干涉图样的乘积。

为了计算衍射图样，采用计算单缝衍射图样时用过的类似的方法，假设每个缝都由大量的间隔相等的点光源组成，并且假设每个点都是惠更斯子波源。设（第一个缝中的）点光源处于点 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 以及（第二个缝中的点光源）处于点 $B_1, B_2, B_3, \cdots$（见图 18.29）。如前所述，任意狭缝中的相邻点光源之间的距离为 Δ。如果衍射光线与狭缝平面法线的夹角为 θ，那么，每个缝上相邻两个点光源到点 P 的扰动之间的光程差为 $\Delta\sin\theta$。因此，第一个缝在点 P 产生的场为（见式(18.9)）

$$E_1 = A\frac{\sin\beta}{\beta}\cos(\omega t - \beta)$$

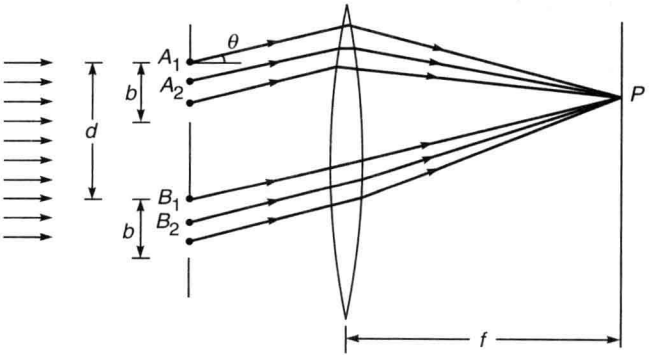


图 18.29　一平面波垂直入射到双缝上的夫琅禾费衍射

同理,第二个缝在点 P 产生的场为

$$E_2 = A\frac{\sin\beta}{\beta}\cos(\omega t-\beta-\phi_1)$$

式中

$$\phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta$$

表示从两个缝上互相对应的两点(到达点 P)的扰动之间的相位差。这里所谓互相对应的两点,是指间隔为 d 的诸如(A_1,B_1),(A_2,B_2),…这样的一对对的点,则合波场为

$$E = E_1+E_2 = A\frac{\sin\beta}{\beta}[\cos(\omega t-\beta)+\cos(\omega t-\beta-\phi_1)]$$

表示两波的干涉,每个波的幅度为 $A\dfrac{\sin\beta}{\beta}$,且相位差 ϕ_1。上式可写为

$$E = A\frac{\sin\beta}{\beta}\cos\gamma\cos\left(\omega t-\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\phi_1\right)$$

式中

$$\gamma = \frac{\phi_1}{2} = \frac{\pi}{\lambda}d\sin\theta \tag{18.44}$$

强度分布将有如下形式

$$I = 4I_0\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}\cos^2\gamma \tag{18.45}$$

式中 $I_0\sin^2\beta/\beta^2$ 表示一条缝单独存在时所产生的强度分布。可以看出,强度分布是两因子之积,第一个因子$(\sin^2\beta/\beta^2)$表示宽度为 b 的单缝产生的衍射图样,第二个因子 $\cos^2\gamma$ 代表间隔为 d 的两个点光源产生的干涉图样。当然,如果缝宽小到第一个因子 $\sin^2\beta/\beta^2$ 几乎不随 θ 变化的话,即可得到杨氏干涉图样(见14.6节)。

如图18.30所示为双缝衍射图样,分别对应于 $d=0$,0.0176cm,0.035cm,0.070cm,$b=0.0088$cm,$\lambda=6.328\times10^{-5}$cm。由式(18.45)得出的强度分布见图18.31。

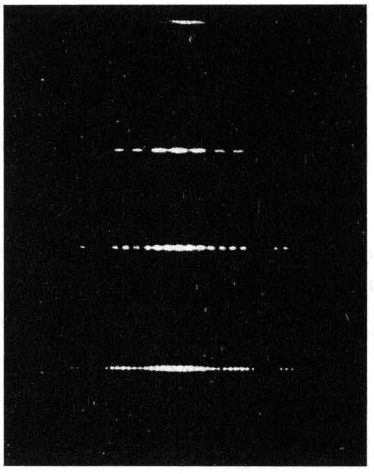


图18.30 当 $b=0.0088$cm,$\lambda=6.328\times10^{-5}$cm 时,观察到的双缝夫琅禾费衍射图样。$d=0$,0.0176cm,0.035cm,0.070cm。(引自文献[17],已授权。)

18.6.1 极大值和极小值的位置

由式(18.45)可见,当

$$\beta = \pi,2\pi,3\pi,\cdots$$

或者

$$\gamma = \frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\cdots$$

时,$I=0$。相应的衍射角由下式给出

$$\begin{cases} b\sin\theta = m\lambda, & m = 1,2,3,\cdots \\ d\sin\theta = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\lambda, & n = 1,2,3,\cdots \end{cases} \tag{18.46}$$

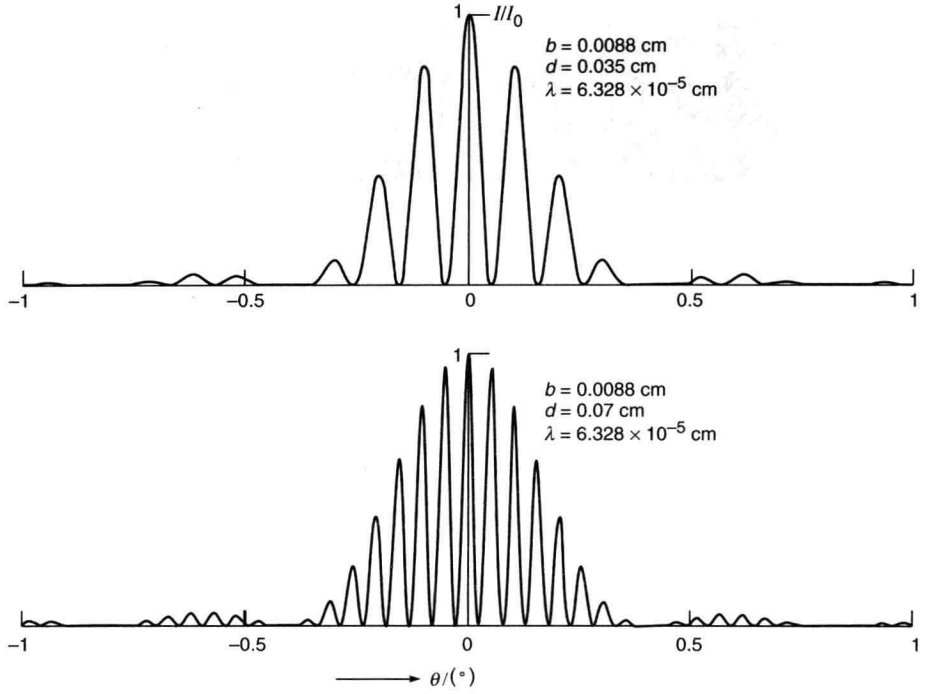


图 18.31　由式(18.45)推出的双缝强度分布，对应 $d=0.035$cm 和 0.070cm($b=0.0088$cm 和 $\lambda=6.328\times10^{-5}$cm)。

当

$$\gamma = 0,\pi,2\pi,\cdots$$

或者当

$$d\sin\theta = 0,\lambda,2\lambda,\cdots \tag{18.47}$$

时，出现干涉极大值。

只要衍射项的变化不是太快，极大值的实际位置就近似地出现在由上式所决定的这些角度处。此外，如果这些 θ 恰好对应于衍射极小值，即，如果 $b\sin\theta=\lambda,2\lambda,3\lambda,\cdots$ 极大值就根本不出现，这些未出现的极大值通常被称为缺极。例如，如图 18.31 所示，当 $b=0.0088$cm 时，在 $\theta\approx0.41°$ 处的干涉极大是非常微弱的。这是因为，当

$$\theta = \arcsin\frac{\lambda}{b} = \arcsin\left(\frac{6.328\times10^{-5}}{8.8\times10^{-3}}\right) = \arcsin(7.19\times10^{-3})$$

$$\approx 0.00719\text{rad} \approx 0.412°$$

时，恰好出现衍射的第一极小值。图 18.32(a)所示自然影像是由实际的双缝形成的衍射照片，且每条缝的宽度远大于光的波长。图 18.32(b)所示不是自然影像，它是不可能在现实生活中产生的理想图样，为了获得这种图样，使每条缝足够窄，以致可以与光波长相比拟。图 18.32(c)所示为自然影像，它是由与顶部图片中的缝宽度一样的单缝所形成的单缝衍射照片。

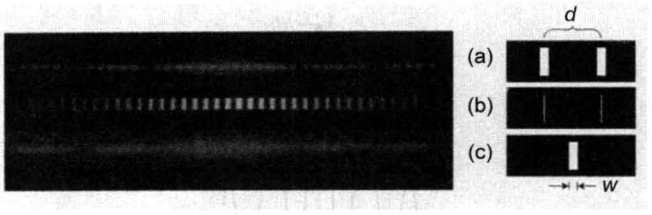


图 18.32

(a) 由实际双缝形成的衍射图案,每条缝的宽度远大于光的波长,这是一张真实照片;(b) 这是不可能在现实生活中产生的理想图样,为了获得这样的图样,每条缝要足够窄,以致可以与光波长相比拟,然而这通常是不可能的,这不是自然影像;(c) 由与(a)的缝宽度一样的单缝所形成的单缝衍射,是一张真实的照片。彩图见文前附录页的图21。

例 18.9 考察 $b=8.8\times10^{-3}\,\text{cm}$,$d=7.0\times10^{-2}\,\text{cm}$ 和 $\lambda=6.328\times10^{-5}\,\text{cm}$ 的情形(见图18.31),在中央极大值两侧的两个衍射极小值之间将出现多少个干涉极小值?在如图18.30所示的实验装置中,显示屏放置在离双缝15英尺(≈4.572m)处,试计算条纹宽度。

解 当满足式(18.46)时,即,当 $\sin\theta$ 取下列数值时,将出现干涉极小值

$$\sin\theta=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d}=0.904\times10^{-3}\left(n+\frac{1}{2}\right),\quad n=0,1,2,\cdots$$

$$=0.452\times10^{-3},1.356\times10^{-3},2.260\times10^{-3},3.164\times10^{-3},$$

$$4.068\times10^{-3},4.972\times10^{-3},5.876\times10^{-3},6.780\times10^{-3}$$

因此,在两个第一级衍射极小值之间有16个干涉极小值。

两个干涉极大值之间的角间距为(见式(18.47))

$$\Delta\theta\approx\frac{\lambda}{d}=9.04\times10^{-4}(\text{rad})$$

则条纹宽度为

$$15\times12\times2.54\times9.04\times10^{-4}\approx0.413(\text{cm})$$

18.7 多缝的夫琅禾费衍射图样

下面讨论 N 条平行的狭缝所产生的衍射图样。每条缝的宽度均为 b,相邻两缝之间的间隔为 d。如前,把每条缝看做由间隔为 Δ 的 n 个点光源组成(见图18.33)。因此,在任一点 P 的场,实质上等于 N 项之和

$$E=A\frac{\sin\beta}{\beta}\cos(\omega t-\beta)+A\frac{\sin\beta}{\beta}\cos(\omega t-\beta-\phi_1)$$

$$+\cdots+A\frac{\sin\beta}{\beta}\cos(\omega t-\beta-(N-1)\phi_1)\tag{18.48}$$

式中第一项表示第一条缝产生的扰动,第二项表示第二条缝产生的扰动,如此类推,并且各个符号的意义与18.6节一致。式(18.48)也可写为

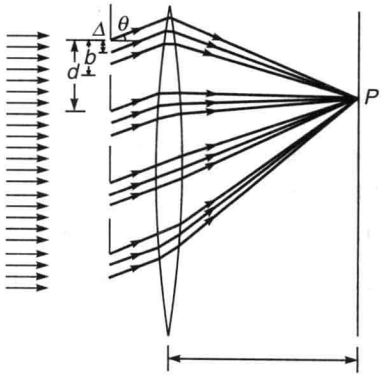


图 18.33 垂直入射到多缝的夫琅禾费衍射

$$E = A\frac{\sin\beta}{\beta}\{\cos(\omega t-\beta)+\cos(\omega t-\beta-\phi_1)+\cdots+\cos[\omega t-\beta-(N-1)\phi_1]\}$$

$$= A\frac{\sin\beta}{\beta}\frac{\sin N\gamma}{\sin\gamma}\cos\left[\omega t-\beta-\frac{1}{2}(N-1)\phi_1\right] \tag{18.49}$$

式中

$$\gamma = \frac{\phi_1}{2} = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta$$

相应的强度分布为

$$I = I_0\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}\frac{\sin^2 N\gamma}{\sin^2\gamma} \tag{18.50}$$

式中 $I_0\sin^2\beta/\beta^2$ 表示单缝衍射产生的强度分布。可以看出，强度分布是两个因子之积，第一个因子$\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}$表示单一一条缝产生的衍射图样；第二个因子$\frac{\sin^2 N\gamma}{\sin^2\gamma}$表示 N 个等间隔的点光源产生的干涉图样。当 $N=1$ 时，式(18.50)简化为单缝衍射图样(见式(18.10))；当 $N=2$ 时，变为双缝衍射图样(见式(18.45))。图 18.34 所示为 $N=5$ 和 $N=12$ 时函数

$$\frac{\sin^2 N\gamma}{\sin^2\gamma}$$

的曲线，可以看出，随着 N 的增大，函数在 $\gamma=0,\pi,2\pi,\cdots$ 处变得更加尖锐。在两峰之间，当

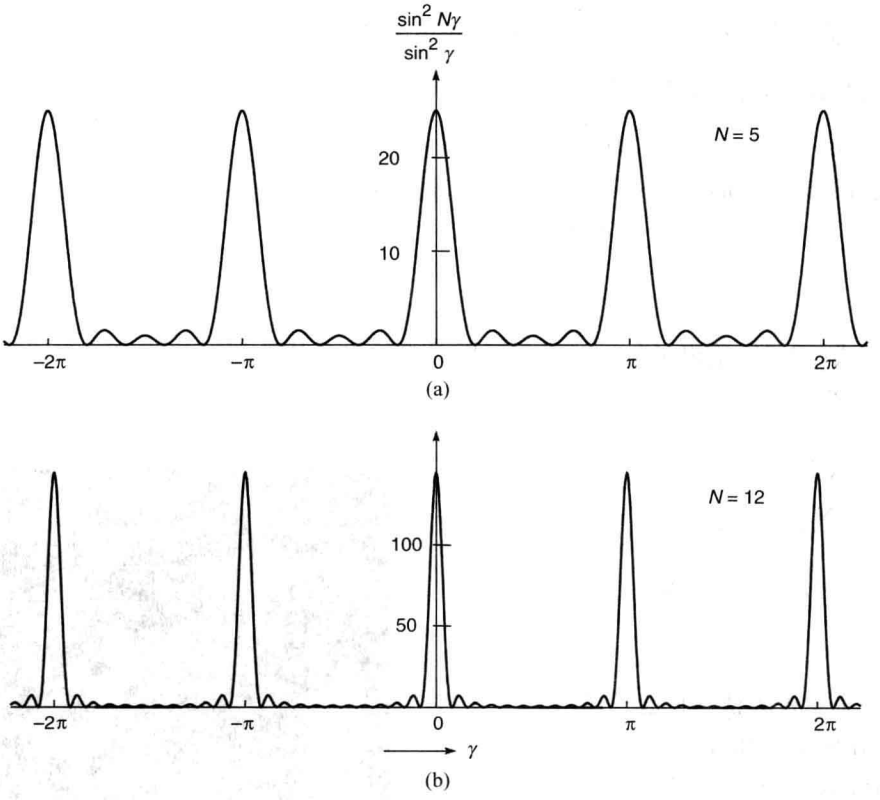


图 18.34　当 $N=5$ 和 12 时，函数$\frac{\sin^2 N\gamma}{\sin^2\gamma}$随 γ 的变化曲线。随着 N 的增大，函数在 $\gamma=0,\pi,2\pi,\cdots$ 处变得更加尖锐。

$$\gamma = \frac{p\pi}{N}, \quad p = \pm 1, \pm 2, \cdots \quad 且 \quad p \neq 0, \pm N, \pm 2N, \cdots$$

时,函数为零,这对应于极小值。

18.7.1 极大值和极小值的位置

如果 N 的值非常大,在 $\gamma \approx m\pi$ 处,即,当

$$d\sin\theta = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \cdots \tag{18.51}$$

时,将得到很强的极大值。通过注意下式,这一点是很容易看出来的

$$\lim_{\gamma \to m\pi} \frac{\sin N\gamma}{\sin\gamma} = \lim_{\gamma \to m\pi} \frac{N\cos N\gamma}{\cos\gamma} = \pm N$$

因此,合振幅和相应的强度分布分别为

$$E = N\frac{A\sin\beta}{\beta} \tag{18.52}$$

$$I = N^2 I_0 \frac{\sin^2\beta}{\beta^2} \tag{18.53}$$

式中

$$\beta = \frac{\pi b\sin\theta}{\lambda} = \frac{\pi b}{\lambda}\frac{m\lambda}{d} = \frac{\pi bm}{d} \tag{18.54}$$

这样的极大值称为主极大。物理上看,在这些极大值处,各个单缝所产生的场是同相的,因此,它们相互叠加,合波场就是每一条缝所产生的场的 N 倍。因而,除非 $\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}$ 本身极小,合强度是很大的。又 $|\sin\theta| \leqslant 1$,则 $m \leqslant d/\lambda$(见式(18.51))。因此,主极大的数量是有限的。

由式(18.50)可知,当下式二者之一成立,即,当

$$b\sin\theta = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{18.55}$$

或者当

$$N\gamma = p\pi, \quad p \neq N, 2N, \cdots \tag{18.56}$$

时,$I=0$。式(18.55)给出了与单缝衍射图样对应的极小值位置。与式(18.56)相应的衍射角则由下式给出

$$\begin{aligned} d\sin\theta = {} & \frac{\lambda}{N}, \frac{2\lambda}{N}, \cdots, \frac{(N-1)\lambda}{N}, \frac{(N+1)\lambda}{N}, \\ & \frac{(N+2)\lambda}{N}, \cdots, \frac{(2N-1)\lambda}{N}, \\ & \frac{(2N+1)\lambda}{N}, \frac{(2N+2)\lambda}{N}, \cdots \end{aligned} \tag{18.57}$$

因此,在两个主极大值之间至少有 $N-1$ 个极小值。且在两个相邻极小值之间,必有一个强度极大值,这些极大值称为次极大值。如图 18.35 所示为 $N=1,2,3$ 和 4 时的一些典型图样,如图 18.36 所示为 $N=4$ 时,由式(18.50)计算出的强度分布。当 N 非常大时,主极大

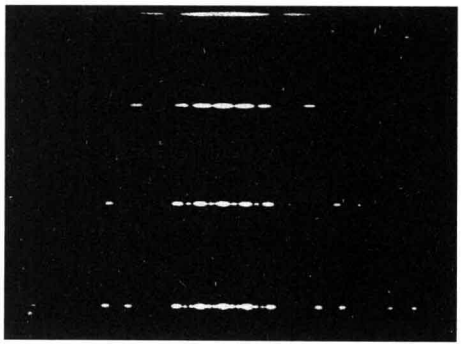


图 18.35 当 $b=0.0044\text{cm}$,$d=0.0132\text{cm}$,$\lambda=6.328\times10^{-5}\text{cm}$ 时的多缝夫琅禾费衍射图样。相应的狭缝数量 $N=1,2,3,4$。

强度要比次极大大得多。这里指出以下两点。

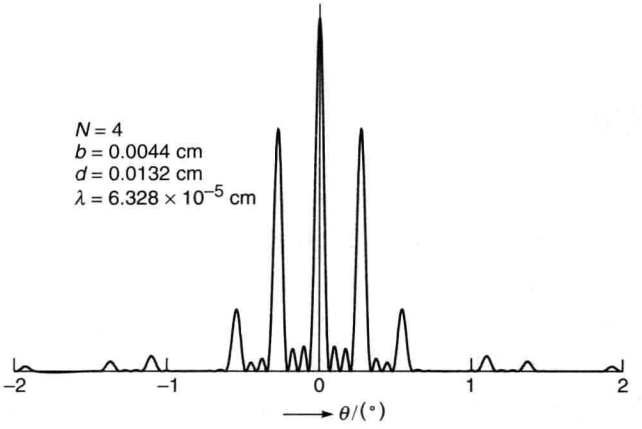


图 18.36　当 $b=0.0044\text{cm}$，$d=0.0132\text{cm}$，$\lambda=6.328\times10^{-5}\text{cm}$ 时，由式(18.50)得出的四缝夫琅禾费衍射图样的强度分布。主极大位于 $\theta\approx0.275°,0.55°,0.82°,1.1°,\cdots$注意几乎消失的第三阶主极大。

(1) 如果某一特定的主极大也对应于决定单缝衍射图样极小值的角度时，这个主极大会消失。当

$$d\sin\theta = m\lambda \tag{18.58}$$

$$b\sin\theta = \lambda,2\lambda,3\lambda\cdots \tag{18.59}$$

同时满足时，就会发生这种情形，通常称之为缺级。即使式(18.59)不是精确地成立(即 $b\sin\theta$ 只是接近于 λ 的整数倍)，相应的主极大也是非常微弱的(例如，见图 18.36，在 $\theta\approx0.8°$ 附近就是这样)。

(2) 除了根据式(18.56)预计的极小值外，还有单缝衍射极小值(见式(18.55))。但当 N 非常大时，衍射极小值的数目很少(原文如此)[①]。

18.7.2　主极大的宽度

在前面已经证明，在由 N 条缝产生的衍射图样中，第 m 级主极大的位置出现在

$$d\sin\theta_m = m\lambda,\quad m = 0,1,2,\cdots \tag{18.60}$$

而出现极小值的衍射角由式(18.57)决定。如果 $\theta_m+\Delta\theta_{1m}$ 和 $\theta_m-\Delta\theta_{2m}$ 分别表示对应于主极大两侧的第一极小值的衍射角，那么，$\frac{1}{2}(\Delta\theta_{1m}+\Delta\theta_{2m})$ 就称为第 m 级主极大的半角宽度。对于比较大的 N 值，有 $\Delta\theta_{1m}\approx\Delta\theta_{2m}$，都写成 $\Delta\theta_m$，则有

$$d\sin(\theta_m\pm\Delta\theta_m) = m\lambda\pm\frac{\lambda}{N} \tag{18.61}$$

又

$$\sin(\theta_m\pm\Delta\theta_m) = \sin\theta_m\cos\Delta\theta_m\pm\cos\theta_m\sin\Delta\theta_m\approx\sin\theta_m\pm\Delta\theta_m\cos\theta_m \tag{18.62}$$

因此，由式(18.61)可得

① 译者注：由式(18.55)可知，N 对于单缝衍射极小值没有影响。

$$\Delta\theta_m \approx \frac{\lambda}{Nd\cos\theta_m} \tag{18.63}$$

式(18.63)表示主极大随着 N 的增大而变得更加尖锐。

18.8 衍射光栅

在18.6节中已经讨论过平行等距的多缝系统产生的衍射图样。由大量等距排列的狭缝组成的系统被称为衍射光栅,相应的衍射图样称为光栅光谱。由于衍射图样中主极大的精确位置依赖于波长,所以,(对应于不同波长的)不同光谱线相应的主极大将对应于不同的衍射角。因此,光栅光谱提供了一种容易实现的确定波长的实验手段。由式(18.63)可知,为了获得狭窄的主极大(即更加明锐的光谱线),要求非常大的 N。因此,高质量的光栅要求的缝数非常大(典型的数值大约为每英寸(=25.4mm)15000条)。这是用金刚石刀尖在一块光学透明的材料上刻出沟槽来实现的,这些沟槽就扮演着缝与缝之间不透明间隔的作用。每条沟槽刻完后,金刚石刀尖抬起,光栅基片向前移动,以待刻划下一条沟槽。由于相邻沟槽之间的间隔极小,要借助一个螺杆的转动来推动承载基片的拖板,以带动基片向前移动。对高质量的光栅的另一个重要的要求是刻线的间隔要尽可能相等。因此,螺杆的螺距必须是常数。直到(1882年由罗兰)制作出一根近乎完美的螺杆,才成功地解决了光栅的制造问题。在罗兰装置中,每英寸(=25.4mm)有14438条刻线,相应的 $d=2.54/14438=1.759\times10^{-4}$(cm)。对于这样一个光栅,当 $\lambda=6\times10^{-5}$cm 时,m 的最大值为2,因此,只能观察到头两级光谱。而对于 $\lambda=5\times10^{-5}$cm,第三级光谱也可以观察到。

商品光栅是以刻划好的光栅作为模子,压在像醋酸纤维素之类的薄膜上印制成的。将浓度适当的醋酸纤维素溶液注到光栅的刻线面上,待它干燥后形成一层坚固的薄膜,再从母光栅上取下来。通过将薄膜夹在两片玻璃之间,来保存这些光栅印模。现在,光栅也有用全息方法制造的,即通过记录两束平面波或球面波的干涉图样来实现(见例14.5)。与刻痕光栅相比,全息光栅在每单位厘米中的刻线数要多得多。

18.8.1 光栅光谱

在18.7节中已经指出,主极大的位置由下式给出

$$d\sin\theta = m\lambda, \quad m = 0,1,2,\cdots \tag{18.64}$$

这个关系式也叫做光栅方程,被用来研究衍射角 θ 对波长 λ 的依赖关系。不管波长是多大,它的零级主极大总出现在 $\theta=0$ 处。因此,如果使用多色光源(例如白光光源),那么,中央主极大的颜色将与光源本身的颜色相同。但是,当 $m\neq0$ 时,不同波长的衍射角就不相等,从而使得不同的光谱分量出现在不同的位置。这样一来,只要测量出各种颜色的衍射角(m 已知),就能够确定出相应的波长值。需要提一下,零级光谱的强度是最大的(此处无色散),而其他级次的强度随着级次 m 的增加而下降。

求式(18.64)的微商,可得

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta} \tag{18.65}$$

根据这个结果,可以得出以下结论。

(1) 假定 θ 非常小(即 $\cos\theta\approx1$),可以看出,对于给定的 $\Delta\lambda$,$\Delta\theta$ 正比于光谱的级次(m)。

因此，对于给定的 m，$\Delta\theta/\Delta\lambda$ 是常数。这样的光谱叫做标准光谱，在这种光谱中，两条谱线的衍射角之差正比于波长差。但是对于较大的 θ，不难证明，在光谱红端的色散比较大。

(2) 由式(18.65)可知，$\Delta\theta$ 反比于 d，因此，光栅常数越小，角色散就越大。

图 18.37 和图 18.38 为研究多色光源光栅光谱的实验装置示意图。如图 18.37 所示，透镜 L_1 的焦平面上放置一个小孔，一束平行光经过透镜 L_1 投射到光栅上，而在透镜 L_2 的焦平面上将观察到衍射图样。如果在透镜 L_1 的焦平面上用狭缝代替小孔(见图 18.38)，在实验室用的典型装置正是这样的，将有在不同方向传播的平行光束，并在透镜 L_2 的焦平面上得到如图 18.38 所示的带状光谱。

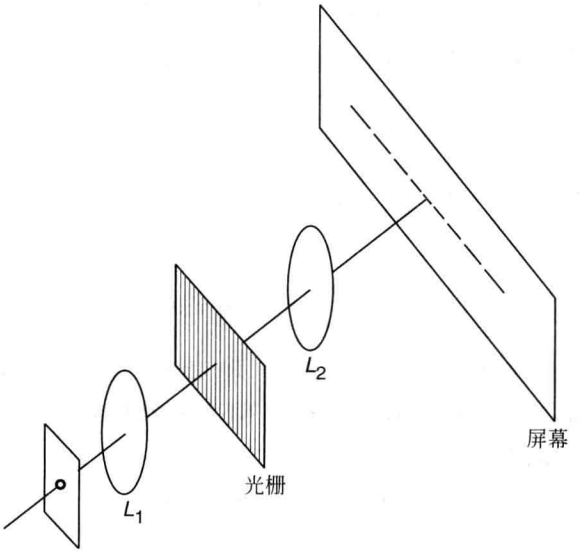


图 18.37　当一束平面波垂直入射到光栅时的夫琅禾费衍射

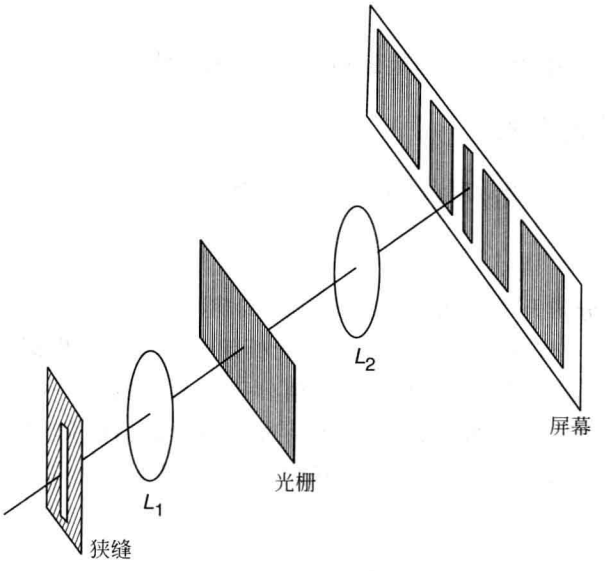


图 18.38　如果在透镜 L_1 的焦平面上用狭缝代替点光源，那么，可以在 L_2 的焦平面上得到带状光谱。

透镜 L_2 是一个望远镜的物镜,衍射图样通过目镜来观察。各级光栅光谱的衍射角能被测量出来,已知 d,就可以计算出不同谱线的波长。

例 18.10 考虑一块每英寸(=25.4mm)有 15000 条刻线的衍射光栅,(1)试证明,如果使用白光光源,其第二级和第三级光谱会重叠;(2)在第二级光谱中,钠的 D_1 线和 D_2 线的角距离是多少?

解

(1) 光栅常数为

$$d = \frac{2.54}{15000} = 1.69 \times 10^{-4}(\text{cm})$$

设 θ_{mv} 和 θ_{mr} 分别表示第 m 级光谱中与紫光和红光对应的衍射角,则

$$\theta_{2v} = \arcsin\frac{2 \times 4 \times 10^{-5}}{1.69 \times 10^{-4}} \approx \arcsin 0.473 \approx 28.2^\circ$$

$$\theta_{2r} = \arcsin\frac{2 \times 7 \times 10^{-5}}{1.69 \times 10^{-4}} \approx \arcsin 0.828 \approx 55.90^\circ$$

而

$$\theta_{3v} = \arcsin\frac{3 \times 4 \times 10^{-5}}{1.69 \times 10^{-4}} \approx \arcsin 0.710 \approx 45.23^\circ$$

假设紫光和红光的波长分别为 4×10^{-5}cm 和 7×10^{-5}cm。因为 $\theta_{2r} > \theta_{3v}$,第二级和第三级光谱将重叠。此外,又 $\sin\theta_{3r} > 1$,则在第三级光谱中不能观察到红光。

(2) 由于 $d\sin\theta = m\lambda$,对于小的 $\Delta\lambda$,有

$$(d\cos\theta)\Delta\theta = m(\Delta\lambda)$$

或者

$$\Delta\theta = \frac{m\Delta\lambda}{d\left[1-\left(\frac{m\lambda}{d}\right)^2\right]^{1/2}} \approx \frac{2 \times 6 \times 10^{-8}}{1.69 \times 10^{-4}\left[1-\left(\frac{2 \times 6 \times 10^{-5}}{1.69 \times 10^{-4}}\right)^2\right]^{1/2}} \approx 0.0010\text{rad} \approx 3.47'$$

如果用一个角放大率为 10 倍的望远镜来观察,钠双线将有 $34.7'$的角距离。

18.8.2 光栅的分辨本领

对于光栅来说,分辨本领是指光栅能分辨出两条很靠近的光线谱的能力,且由下式定义

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \tag{18.66}$$

式中 $\Delta\lambda$ 为光栅恰能分辨开的两谱线的波长差。$\Delta\lambda$ 越小,分辨本领越高。

瑞利判据(见 18.4 节)可以再次用来确定光栅的分辨极限。根据瑞利判据,如果与波长 $\lambda+\Delta\lambda$ 对应的主极大值落到波长 λ 的主极大值(任意一侧)的第一极小值上,就说这两个波长 λ 和 $\lambda+\Delta\lambda$ 恰好能分辨(见图 18.39)。如果这个共同的衍射角用 θ 表示,且观察的是第 m 级光谱,那么,当两个波长 λ 和 $\lambda+\Delta\lambda$ 恰好能分辨时,以下两式同时成立

$$d\sin\theta = m(\lambda + \Delta\lambda) \tag{18.67}$$

$$d\sin\theta = m\lambda + \frac{\lambda}{N} \tag{18.68}$$

则

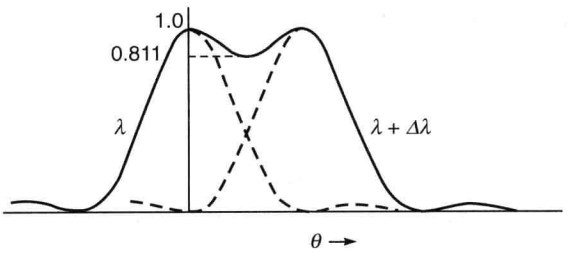


图 18.39　分辨两条光谱线的瑞利判据

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN \tag{18.69}$$

式(18.69)表明光栅的分辨本领依赖于光栅的总条数，当然是指曝光于入射光束中的总条数(见 18.6 节)。此外，分辨本领还正比于光谱的级次。因此，为了能在第一级光谱中分辨开钠的 D_1 线和 D_2 线($\Delta\lambda = 6\text{Å}$)，必须有 $N \geqslant 5.89\times10^{-5}/6\times10^{-8} \approx 1000$。

从式(18.69)看来，似乎分辨能力随 N 的增大而可以无限制地提高。但是，对于给定的光栅宽度 $D(=Nd)$，随着 N 的增加，d 反而减小，因此，m 的最大值也要减小。如果 $d = 2.5\lambda$，那么，仅可观察到第一级和第二级光谱，若其进一步减小到 1.5λ，只能观察到第一级光谱。

18.8.3　棱镜的分辨本领

通过计算棱镜的分辨率来结束本节。图 18.40 所示为观察棱镜光谱的实验装置示意图，这个光谱由下式决定

$$n(\lambda) = \frac{\sin\dfrac{A+\delta(\lambda)}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}} \tag{18.70}$$

式中 A 表示棱镜的顶角，δ 表示最小偏差角。假设折射率随 λ 而减小(这是通常的情况)，则 δ 也随着 λ 而减小。图 18.40 所示的点 P_1 和点 P_2 分别表示与 λ 和 $\lambda+\Delta\lambda$ 相对应的像。假设 $\Delta\lambda$ 足够小，以致使得有微小偏差的两个波长在棱镜的同一位置。在实际实验中，可用(垂直于纸面的)狭缝光源来形成位于点 P_1 和点 P_2 的线状的像。由于我们面对的棱镜截面是矩形的，则强度分布与宽度为 b(见 18.2 节)的缝产生的强度分布是相似的[①]。对于恰能

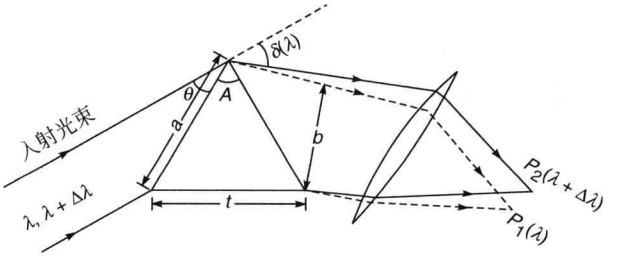


图 18.40　观察棱镜光谱的实验装置示意图。P_1 和 P_2 表示与 λ 和 $\lambda+\Delta\lambda$ 相对应的像。

① 由于使用的是缝光源，无需考虑与图平面垂直方向的衍射。

分辨的那些谱线，对应 λ 的第一衍射极小值位置[式(18.12)中的 $m=1$]应该落在对应 $\lambda+\Delta\lambda$ 的中心主极大处，则

$$\Delta\lambda \approx \frac{\lambda}{b} \tag{18.71}$$

为了以 $\Delta\lambda$ 的形式表示 $\Delta\delta$，对式(18.70)微分：

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{1}{\sin\dfrac{A}{2}}\cos\left[\frac{A+\delta(\lambda)}{2}\right]\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\lambda}$$

整理，得

$$\Delta\delta = \frac{2\sin\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{A+\delta(\lambda)}{2}}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\Delta\lambda$$

如图 18.40 所示，可知

$$\theta = \frac{1}{2}[\pi-(A+\delta)]$$

或者

$$\sin\theta = \frac{b}{a} = \cos\frac{A+\delta}{2}$$

式中长度 a 如图 18.40 所示。从而，有

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{t/2}{a}$$

式中 t 为棱镜的底边长。因此，有

$$\Delta\delta \approx \frac{t}{b}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\Delta\lambda \tag{18.72}$$

代入式(18.71)，可得分辨本领

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = t\frac{dn}{d\lambda} \tag{18.73}$$

对于大多玻璃而言，折射率对波长的依赖关系可由柯西公式准确描述

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \cdots \tag{18.74}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} = -\left(\frac{2B}{\lambda^3} + \frac{4C}{\lambda^5} + \cdots\right) \tag{18.75}$$

负号表示折射率随着波长的增大而减小。下面以望远镜的冕冠玻璃为例，有[①]

$$A = 1.51375,\quad B = 4.608\times10^{-11}\,\mathrm{cm}^2,\quad C = 6.88\times10^{-22}\,\mathrm{cm}^4$$

对于 $\lambda=6\times10^{-5}\,\mathrm{cm}$，有

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} \approx -(4.27\times10^2 + 3.54) \approx -4.30\times10^2\,(\mathrm{cm}^{-1})$$

因此，对于 $t\approx2.5\,\mathrm{cm}$，有

① 数据引自参考文献[2]。

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \approx 1000$$

比 15000 条线的典型衍射光栅低一个数量级。

18.9　斜入射

直到现在为止，一直假设平面波是正入射到光栅上的。而在实验设置中，精确地实现垂直入射这个条件是十分困难的，从而可以看出，稍许偏离正入射这一条件，就会引入可观的误差。因此，讨论更普遍的斜入射的情形（见图 18.41）更有实际意义。在斜入射时，也能用最小偏向法来测量波长，这与用棱镜测量波长时的做法一致。

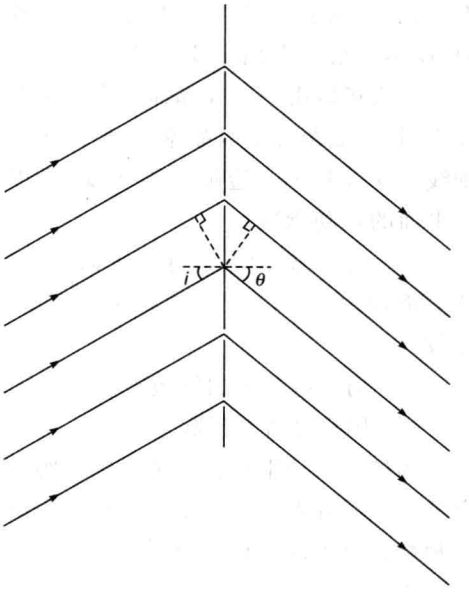


图 18.41　平面波斜入射到光栅时的衍射

如果入射角为 i，那么来自相邻缝上对应两点的衍射光线的光程差将是 $d\sin\theta + d\sin i$（见图 18.41）。因此，出现主极大的条件为

$$d\sin\theta + d\sin i = m\lambda \qquad (18.76)$$

或者

$$d[\sin(\delta - i) + \sin i] = m\lambda \qquad (18.77)$$

式中 $\delta = i + \theta$ 是偏向角。为了让 δ 达到极小，必须有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i}[\sin(\delta - i) + \sin i] = 0 \qquad (18.78)$$

$$-\cos(\delta - i) + \cos i = 0$$

即

$$i = \delta - i = \theta \qquad (18.79)$$

或者

$$i = \frac{\delta}{2} = \theta \qquad (18.80)$$

因而，在最小偏向角位置，光栅方程变为

$$2d\sin\frac{\delta}{2} = m\lambda \qquad (18.81)$$

最小偏向角位置可以用与处理棱镜时的情形同理得到。由于这种调整方法相当简单，从而提供了一个更精确的确定 λ 的方法。

18.10　X 射线衍射[①]

可见光是波长在 4000～7000Å 之间的电磁波。X 射线也是电磁波，不过其波长只有 1Å 的数量级。显然，要想制作一个足够窄的狭缝来研究 X 射线的衍射图样是极其困难的。

① 作者对 Lalit K. Malhotra 教授在编写本节时提供的帮助表示感谢。

由于晶体中原子之间的距离通常具有1Å的数量级,因此,可以用晶体作为研究X射线衍射的三维衍射光栅。实际上,X射线已被广泛地用于晶体结构的研究。

在理想的晶体中,原子或分子以规则的三维模式来排列,且可以通过一个特定单元样式的三维重复排列而获得。这种具有整个晶体的所有特征、且可完全占满空间的最简单的体积元称为晶胞。可以在这规则的周期性排列中想象各种可辨认的平面族(见图18.42)。米勒指数是被普遍用来作为晶体内平面族的标记符号系统,可以确定该平面族相对于晶体轴线的方向,而不用给出平面在空间中相对于原点的位置。米勒指数由平面在晶体三个轴上的截距计算出,每个截距都是以晶胞尺寸(a,b或c)沿着轴线方向度量的。遵循以下步骤,可以判断一个平面的米勒指数。

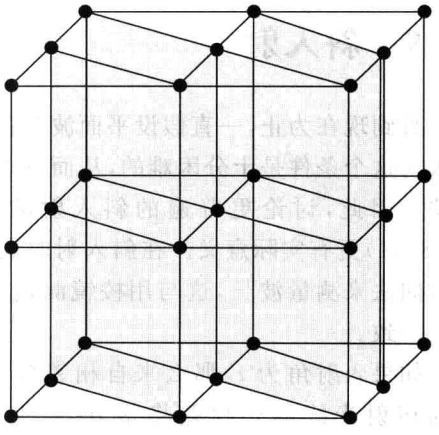


图18.42 氯化钠晶体中的斜平面。图片来源于http://en.wikipedia.org/wiki/Bragg_diffraction。

(1) 找出(离源点最近的平面在)三个轴上的截距,将它们表示为晶胞尺寸的倍数或者分数。

(2) 用这些数字的倒数乘以它们分母的最小公倍数。

(3) 用括号将其括起来。

例如,(111)平面在三个轴的截距都是1个单元距离(见图18.43(a));(211)平面在三个轴的截距分别为1/2,1和1单元距离(见图18.43(b))。同理,(110)平面截z轴于∞处。米勒指数也可以是负的,负号加在数字上边,如$(\bar{1}1\bar{1})$。如图18.44所示为简单立方晶格中米勒指数为$(\bar{1}11)$的平面。

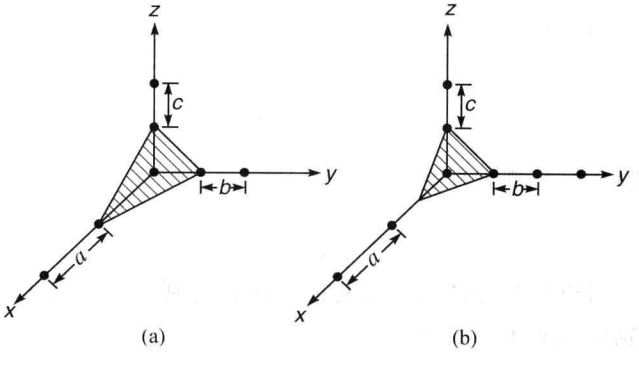


图 18.43

(a) (111)平面在三个轴的截距都是1单元距离;(b) (211)平面在三个轴的截距分别为1/2,1和1单元距离

考虑一束单色X射线束入射到晶体上。如图18.45所示,水平虚线表示一组米勒指数为(hkl)的平行晶面。W_1W_2和W_3W_4分别表示入射波前和反射波前。显然,点A、B和C发出的子波在W_3W_4上是同相的(见12.4节和图12.7)。其次,当式(18.82)满足时,点

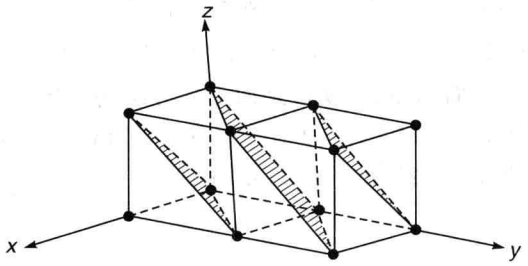


图 18.44　简单立方晶格中米勒指数为($\bar{1}11$)的平面

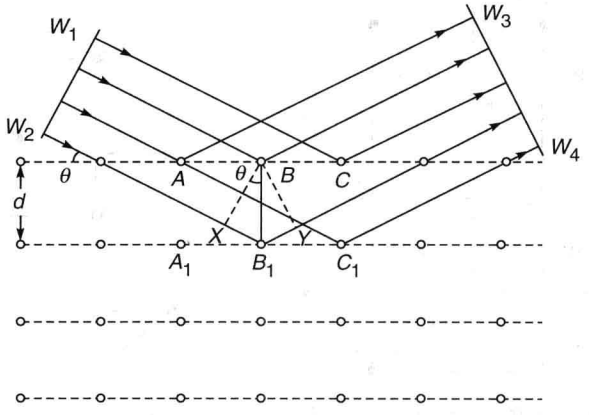


图 18.45　经过一组米勒指数为(hkl)的平行晶面后的平面波的反射。当满足布拉格等式 $2d_{hkl}\sin\theta = m\lambda$ 时，从不同排散射的波之间是同相的。

A_1，B_1 和 C_1 发出的子波在 W_3W_4 上也是同相的

$$\overline{XB_1} + \overline{B_1Y} = m\lambda, \quad m = 1,2,3,\cdots \tag{18.82}$$

或者

$$2d_{hkl}\sin\theta = m\lambda \tag{18.83}$$

式中 d_{hkl} 是米勒指数为(hkl)的晶面族相邻的面间距，$m=1,2,3,\cdots$ 为衍射级数，θ 为掠射角。这个式子就是著名的布拉格定律，它通过入射的 X 射线的波长 λ 和晶体族相邻间距 d_{hkl} 的形式给出了相互增强的衍射光束的角位置。当式(18.83)不满足时，发生相消干涉且不会产生相互增强的光束。当式(18.83)满足时，发生相长干涉，并导致在强度分布中产生峰值。对于立方结构的固体(将在随后讨论)，米勒指数为(hkl)的两个最近的平行面之间的面间距 d_{hkl} 为

$$d_{hkl} = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} \tag{18.84}$$

式中 a 表示晶格常数。由于知道了米勒指数，就可以得到 d_{hkl}，并根据布拉格定律，可以求得满足布拉格等式的 θ。

有三种类型的立方结构：简单立方(SC)，体心立方(BCC)和面心立方(FCC)。图 18.42 所示为一种简单立方结构，原子处于称为晶胞的立方体的顶角上。将晶胞在三维尺度上重复排列，就可以构建出晶体。此外，如果有一个原子在每个立方体的中心(见

图18.46中标注的点9,10,11和12),这种排列称为体心立方结构。体心立方结构的米勒指数为$(\bar{1}10)$的相邻晶面间距为$a/\sqrt{2}$,通过简单地几何计算可以核实。此外,如果把在立方体心的原子放在立方体六个面的面心,就得到面心立方结构。形成面心立方结构的铜、银和金晶体的晶格常数分别为$a=3.61$Å,4.09Å,4.08Å。具有体心立方结构的金属,例如,钠、钡和钨的晶格常数分别为$a=4.29$Å,5.03Å,3.16Å[①]。

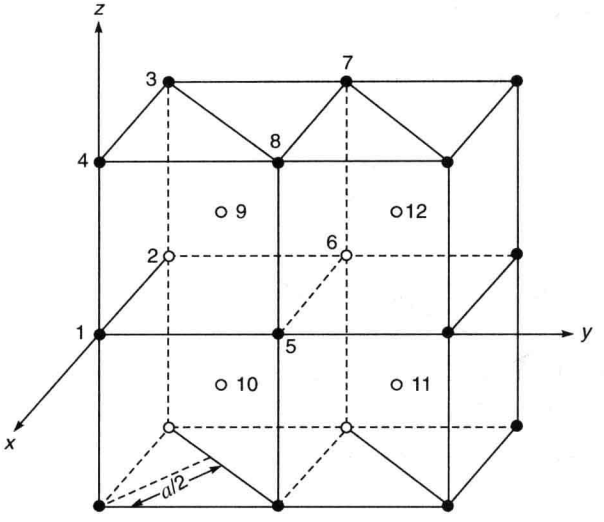


图18.46 一个体心立方结构晶格,米勒指数为$(\bar{1}10)$的相邻平面间距为$a/\sqrt{2}$

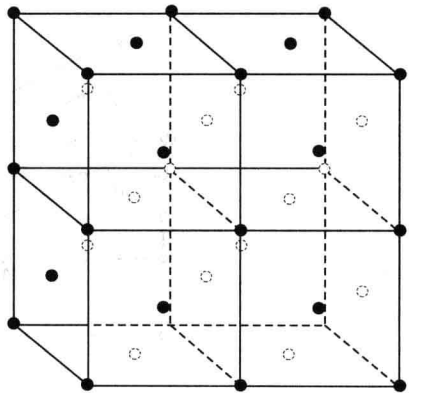


图18.47 一个面心立方(FCC)结构晶格

正如衍射光栅有丢失的光学级次一样,来自晶体的X射线反射也有结构型消光。对于简单的立方结构,来自所有(hkl)平面的反射都是可能的。但是对于体心立方结构,只有当平面的米勒指数加起来是偶数的时候,才会发生衍射。因此,对于体心立方结构,对于一级衍射的主衍射平面为(110),(200)和(211)(以及其他类似的平面),如此类推,这里的$h+k+l$是偶数。对于面心立方结构,主衍射平面的米勒指数要求全都是偶数或全都是奇数,例如(111),(200),(220)等。

18.10.1 X射线衍射的实验方法

根据布拉格定律,$2d_{hkl}\sin\theta=m\lambda$,清楚地看到,有以下三种可行的基本方法来满足布拉格公式。

	λ	θ
旋转晶体法	固定的	可变的(需刻意旋转)
粉末法	固定的	可变的(本身固有的)
劳厄法	可变的	固定的

当使用单色X射线时,布拉格定律不能对任意的θ都满足。因此,旋转单晶体以使对于

① 非立方体的晶体结构也是很普遍的,例如,锌会结晶成六方(角)形结构,碳会形成金刚石结构。但最重要的是,在这些结构中,都存在着确定的原子周期性。

X 射线反射在一些不连续的 θ 方向发生。这种方法只有在所用单晶具有合理尺寸时才可行。如果单晶不能足够大，只要使用粉末型样品，仍可使用单色 X 射线，此时在恰当的方向上总有足够的微晶粒，去满足布拉格关系。这种粉末是由大量取向杂乱的微晶组成的，每粒微晶本质上就是一个单晶。当 X 射线束通过这样的多晶材料时，任何一组给定的晶面，其相对于 X 射线束的取向，从一粒微晶到另一粒微晶是不断改变的。这样一来，对应于一组给定的晶面，将有大量的微晶都满足布拉格条件，并在照相底片上形成许多同心圆环（见图 18.48(a)），每个圆环对应于一定的 d_{hkl} 和一定的 m。出现圆环的原因可以这样来理解，考察一组平行于 AB 的平面（见图 18.48(b)），假设掠射角 θ 满足布拉格条件，绕着入射 X 射线束的方向转动微晶，那么，在转动过程中，相应于微晶经历的每一位置，对于这组平面，其掠射角都是相等的。此外，对于微晶的每个位置，衍射束的方向虽然不同，但它总处在半顶角为 2θ 的锥面上。因此，在照相底片上将得到同心圆环，这些圆环称为德拜-谢勒环。

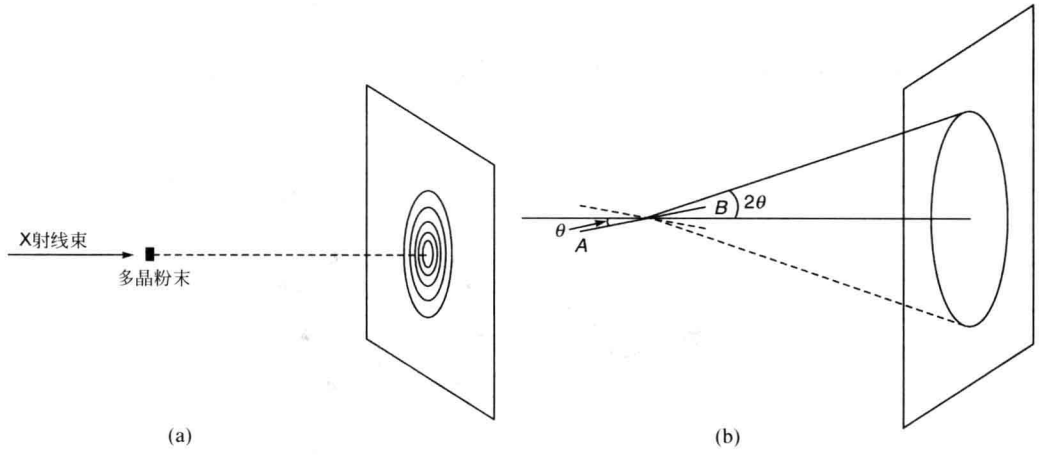


图　18.48

(a) 单色 X 光束打在多晶样本上，会得到德拜-谢勒环；(b) 多晶样本的衍射图样

当用粉末法时，照相底片围成一个以多晶样品为轴的圆柱面，如图 18.49(a)所示。每个德拜-谢勒环在底片上形成圆弧。当展平底片时，就得到如图 18.49(b)和(c)所示的图样。从这些圆弧的位置能够计算出 θ，从而确定晶面的间距，对晶面间距的研究能够确定出晶体结构[①]。尽管用卷起来的胶片带的 X 射线粉末照相机在过去广泛采用，但现代的 X 射线晶体分析采用 X 射线衍射仪，用一个辐射计数器来探测衍射光束的衍射角和衍射束强度。

最后是劳厄法，劳厄法中的单晶体是静止的，采用连续 X 射线光束，每个平面族会选择自己的波长来满足布拉格关系（见图 18.50）。

为计算衍射角，将式(18.84)代入布拉格定律（式(18.83)），有

$$\frac{2a}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}\sin\theta = m\lambda \tag{18.85}$$

计算只限于一级反射（$m=1$），高级反射常常很弱（见习题 18.22）。因此，式(18.85)可以

① 更为细节的问题，读者可参阅文献[7]

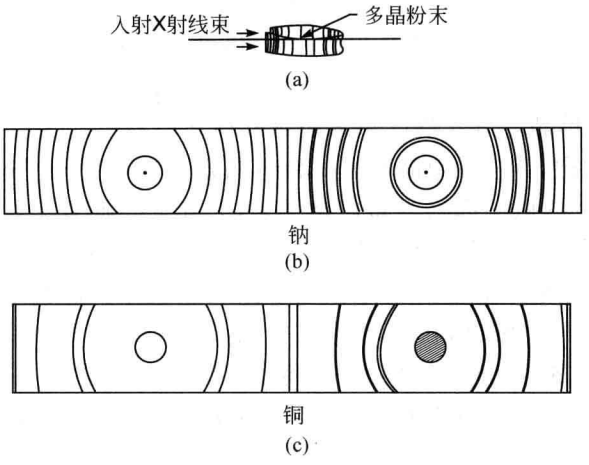


图　18.49

(a) 使用粉末法时,胶片围成一个以多晶样品为轴的圆柱面;(b)和(c) 表示钠和铜的衍射图样

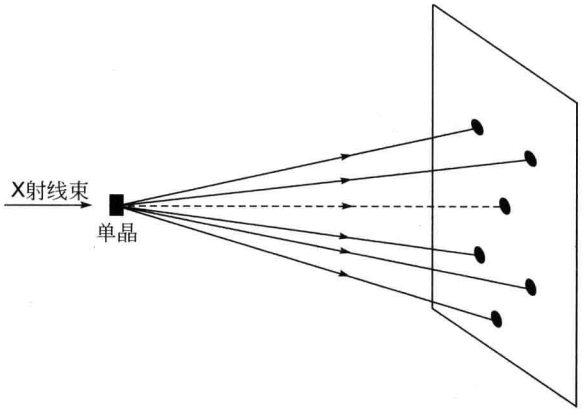


图 18.50　当多色 X 光束打到单晶上时,就会得到劳厄斑。每个平面族选择 X 光中的波长来满足布拉格关系。

写为

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{2a}\sqrt{N} \tag{18.86}$$

式中

$$N = h^2 + k^2 + l^2$$

对于一个简单的立方晶格,所有可能的(hkl)给出了下面 N 的可能值

$$N = 1,2,3,4,5,6,7,\cdots(\mathrm{SC}) \tag{18.87a}$$

同理,对于体心立方结构晶格,$h+k+l$ 必须为偶数,则 N 的可能值

$$N = h^2 + k^2 + l^2 = 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,\cdots(\mathrm{BCC}) \tag{18.87b}$$

对于面心立方结构晶格,米勒指数要么都是奇数,要么都是偶数,得

$$N = h^2 + k^2 + l^2 = 3,4,8,11,12,16,19,20,24,27,\cdots(\mathrm{FCC}) \tag{18.87c}$$

对于给定的结构和给定的 λ 和 a,很容易计算出不同的 θ。例如,如果考虑 X 光波长为

$\lambda=1.540$Å 和 $\lambda=1.544$Å(对应于 Cu$K_{\alpha1}$ 和 Cu$K_{\alpha2}$ 线)，用钠(体心立方结构，$a=4.2906$Å)作样本，相应的 θ 为

$$(14.70°,14.74°),\quad (21.03°,21.09°),\quad (26.08°,26.15°),$$
$$(30.50°,30.59°),\quad (34.58°,34.68°),\quad (38.44°,38.56°),$$
$$(42.18°,42.32°),\quad (45.88°,46.03°),\quad (49.59°,49.76°),$$
$$(53.38°,53.58°),\quad (57.33°,57.56°),\quad (61.54°,61.82°),$$
$$(66.22°,66.56°),\quad (79.41°,80.23°)$$

每个括号里的两个角度分别对应于所用的 X 射线波长为 1.540Å 和 1.544Å 的两条谱线。由于存在两个波长，对于每个平面族将得到双线，且这些双线只有在散射角较大时才可以分辨开。同理，可得到其他晶体结构的反射(见习题 18.19～习题 18.21)。每一个 θ 将产生一个德拜-谢勒环，如图 18.48(a)，图 18.49(b)和(c)所示。

最后应该提醒一下，衍射波的强度依赖于在考虑的平面中单位面积上的原子数目。例如，对于体心立方结构晶格的$(\bar{1}10)$和$(\bar{2}22)$平面，在同样的面积 a^2 内，分别有两个原子和一个原子[①]，因此，第一种情形中的衍射波强度比第二种情形大得多。

18.11　自聚焦现象[②]

随着强激光束的获得，已有大量有趣的非线性光学现象被研究。其中一个这样的非线性光学现象，是由于折射率依赖于光束的强度，而影响到光束的传播效应，导致光束的自聚焦(或自散焦)。为了从物理上理解自聚焦现象，可以假设折射率随电场的非线性变化具有如下形式

$$n = n_0 + \frac{1}{2}n'E_0^2 \tag{18.88}$$

式中 n_0 为没有电磁场存在时媒质的折射率，n'表示非线性效应的常数[③]，而 E_0 为电场的振幅。作为例子，入射激光(沿 z 方向传播)具有高斯型的横向强度分布，也就是说，实际的电场有如下形式

$$E(x,y,z,t) \approx E_0\cos(kz-\omega t) \tag{18.89}$$

式中

---

① 译者注：原文为“在同样的面积 a^2 内分别有一个原子和两个原子”。如图 18.46 所示，可以看出译者改正的是正确的。

② 本节基于参考文献[8]，更严谨的解释见参考文献[9]。

③ 这种依赖于光强的非线性效应来源于许多物理机制，比如克尔效应、电致伸缩效应、热效应等。最简单且容易理解的是热效应，热效应源于具有横向强度分布的强光束经过吸收媒质的传输，会在横向产生一个温度梯度。比如，假如光束具有横向高斯分布的变化(即具有 $\exp(-r^2/a^2)$ 的形式，传播方向为沿着 z 轴)，则温度在轴上取最大值(即 $r=0$)，随着 r 的增大而减小。如果 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}T>0$，折射率在轴上为极大值，则光束将经历聚焦；反之，如果 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}T<0$，则光束将经历发散(见文献[9])。

克尔效应来源于液晶(如 CS_2)分子各向异性的极化。一束强光波趋向于将各向异性极化的分子排列起来，其最大的极化方向沿着电场矢量的方向，结果，将改变媒质的介电常数。另外，电致伸缩效应(这个效应在固体中很重要)是源于非均匀的电场力作用在材料媒质上引起的，这个力影响、改变了材料的密度分布，从而改变了折射率的分布。因此，一束波前上强度非均匀分布的激光可以使媒质折射率改变，造成光束的聚焦(或者散焦)。更进一步关于电致伸缩和克尔效应的细节参考文献[9～11]。

$$E_0 = E_{00}\exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) \tag{18.90}$$

式中 a 表示高斯光束的宽度，$r(=\sqrt{x^2+y^2})$表示柱坐标中的半径。在不存在任何非线性效应时，光束将会经历衍射发散(见20.5节)。但是，如果光束入射到 n' 为正值的媒质上时，强度分布将造成相应的折射率分布，其最大值在轴上(即在 $r=0$ 处)，并随着 r 的增大而逐渐减小。实际上，根据式(18.88)～式(18.90)，可得

$$n \approx n_0 + \frac{1}{2}n'E_{00}^2\exp\left(-\frac{2r^2}{a^2}\right) \approx \left(n_0 + \frac{1}{2}n'E_{00}^2\right) - \frac{1}{2}n_0\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 \tag{18.91}$$

式中

$$\alpha^2 = \frac{n_0 a^2}{2n'E_{00}^2} \tag{18.92}$$

对式(18.91)做指数项展开，仅保留前两项。即，限定 r 很小，也就是说，采用了傍轴近似。又 $\frac{1}{2}n'E_{00}^2$ 与 n_0 相比通常很小，则可以写为(平方后)

$$n^2 \approx n_0^2\left[1-\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2\right] \tag{18.93}$$

在3.4.1节中，讨论过折射率从轴开始以抛物线形式减小的媒质中的光的传播，并已证明，光束会周期性聚焦(见图3.25)。实际上，已经证明了这种媒质对于光束的作用与焦距为 $\frac{\pi\alpha}{2}$ 的凸透镜相似(见式(3.48))。在这里由于非线性效应(取 $n'>0$)的作用，媒质对于光束的作用与具有如下式焦距的凸透镜相似

$$f_{nl} \approx \frac{\pi}{2}\alpha \approx \frac{\pi}{2}\left(\frac{n_0}{2n'E_{00}^2}\right)^{1/2} a \tag{18.94}$$

下标 nl 表示这种影响是由于非线性效应所致。因此，源于非线性效应，光束经历了自聚焦，这里“自”的意思是，光束自身造成媒质折射率产生梯度变化，从而导致光束聚焦①。

3.4.1节中对焦距计算的分析是基于射线光学的，且忽略了衍射的影响。现在，如果忽略非线性效应的影响，光束将会由于衍射而发散，发散角由下式给出(见图18.14)

$$\theta_d \approx \frac{\lambda}{\pi d} = \frac{\lambda_0/n_0}{\pi a} \tag{18.95}$$

式中 λ_0 为真空中的波长。因此，这种衍射现象可通过发散透镜的焦距来近似(见图18.51)。

$$f_d \approx \frac{a}{\theta_d} \approx \frac{1}{2}ka^2 \tag{18.96}$$

式中

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0}n_0 \tag{18.97}$$

显然，如果 $f_d<f_{nl}$，衍射发散效应将占主导地位，从而光束将会发散。如果 $f_d>f_{nl}$，非线性自聚焦效应将占主导地位，从而光束将会自聚焦。当 $f_d\approx f_{nl}$ 时，这两种效应将相互抵

① 需要说明的是，若 n' 为负值，则远离轴线时，折射率会增大，从而导致光的散焦。例如，如果折射率随着温度的升高而减小，那么，光束会经历所谓的热散焦。

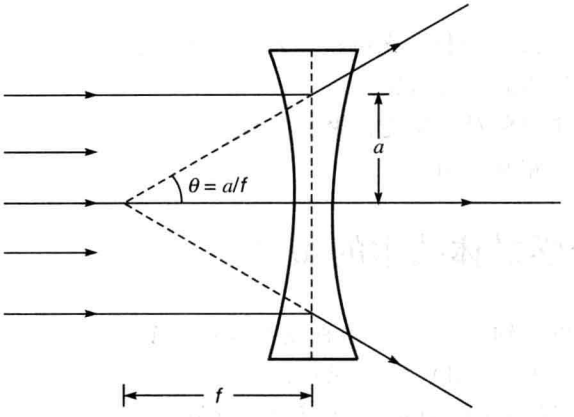


图 18.51　当平面波垂直入射到发散透镜上时，光线沿着与入射轴成 $\theta \approx a/f$ 的角度发散。

消，光束在传播时既不发散也不聚焦，这种情况称为均匀波导样的传播条件。条件 $f_d \approx f_n$ 表明

$$\frac{1}{2}ka^2 \approx \frac{\pi}{2}\left(\frac{n_0}{2n'E_{00}^2}\right)^{1/2}a$$

或者

$$E_{00}^2 \approx \frac{1}{n_0 n'}\frac{\lambda_0^2}{8a^2} \tag{18.98}$$

这样，光束的功率是由下式给出

$$P = \int_0^\infty \text{波速} \times (\text{能量 / 单位体积}) \times 2\pi r\mathrm{d}r \approx \int_0^\infty \left(\frac{c}{n_0}\right) \times \left(\frac{1}{2}\varepsilon E_0^2\right) \times 2\pi r\mathrm{d}r$$

$$\approx \frac{c}{n_0}\left(\frac{1}{2}n_0^2\varepsilon_0 E_{00}^2\right)\int_0^\infty \exp\left(-\frac{2r^2}{a^2}\right)2\pi r\mathrm{d}r \approx \frac{\pi}{4}n_0 c\varepsilon_0 E_{00}^2 a^2 \tag{18.99}$$

式中 $\varepsilon(=n_{00}^2\varepsilon_0)$ 为媒介的介电常数，$\varepsilon_0(=8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/(N\cdot m^2)})$ 为真空中的介电常数（见 19.2 节）。如果将 E_{00}^2 的表示式(18.98)代入式(18.99)，可得临界功率为

$$P_{cr} \approx \frac{\pi}{32}(c\varepsilon_0)\frac{\lambda_0^2}{n'} \tag{18.100}$$

珈迈里(Garmire)、切奥(Chiao)和汤斯(Townes)完成了红宝石激光束($\lambda_0 = 0.6943\mu\mathrm{m}$)在二硫化碳中的自聚焦实验（见文献[12]），并测出临界功率为 $25\pm5\mathrm{kW}$。另一方面，根据式(18.100)，可得

$$P_{cr} \approx \frac{3.14}{32}\times 3\times10^8\times8.85\times10^{-12}\times\frac{(0.6943\times10^{-6})^2}{2\times10^{-20}} \approx 6.3(\mathrm{kW}) \tag{18.101}$$

式中采用了 CS_2 的下列参数：$n_0 \approx 1.6276$，$n' \approx 1.8\times10^{-11}$ CGS 单位 $\approx 2\times10^{-20}$ MKS 单位（n'的 MKS 单位为$(\mathrm{m/V})^2$）。结果可能差 4 倍，但得到了与实验相比正确的数量级，这是所有数量级计算中常有的情形。所以，可以得出以下结论。

(1) 当 $P < P_{cr}$ 时，光束将由于衍射而发散。

(2) 当 $P = P_{cr}$ 时，光束在传播时既不发散也不会聚，这种情况称为均匀波导样的传播

条件。

(3) 当 $P>P_{cr}$ 时,可以推测出,光束将会发生聚焦。实际上,更严格的分析已经得出了这个结论。这种现象称为光束的自聚焦。

详尽地学习自聚焦现象对于激光核聚变实验是很重要的,因为在该实验中,激光束与等离子体之间有非线性的相互作用。

18.12 关于光学媒体技术的短文[①]

光学媒体技术问世大约30年了。这种技术有各种演变,从激光视盘(有模拟记录的光学媒体)到只读光碟(CD-ROM)、可刻录/可重写的光碟、磁光盘、数字多用光碟(DVD-ROM)、可刻录/可重写的DVD-ROM这些重大的突破,直到目前的蓝光技术。利用激光进行存储的方法不仅提供每比特最低的花费,并且是坚固耐用、可运输、可交换的。它可快速地随机存取,其可擦除和不可擦除的操作也是耐用、方便地。

光学数据存储是通过光来存储和检索的系统,它的光源恰好是激光。像大多消费产品一样,激光是通过半导体激光二极管来产生的。这个光学系统包括两大部分:媒质(或盘片)和驱动部分。盘片承载着数字信息,以螺旋轨道上的有限长度的"凹槽"与"平面"为信息形式。光驱动包含光学读取头(OPU)和控制它的伺服系统、盘片旋转系统和主机板上的相关电子设备。

如图18.52所示,OPU实际上是一个光学扫描显微镜,通过伺服电动机来扫描任何想要的位置。OPU是用来存储和读取数据的,OPU配备有一个激光二极管和一组光学元件,可将光束聚焦在盘面上,并检测其后向反射光。如图18.53所示,聚焦的光斑尺寸可由熟知的OPU透镜的数值孔径(NA)的概念给出。NA越大,光斑尺寸越小。稍后要讨论的是,如何利用这个特性来形成更小的光斑,从而在相同的物理结构上存储更多的数据。对容量需求的不断增加,导致了DVD和蓝光技术的出现。

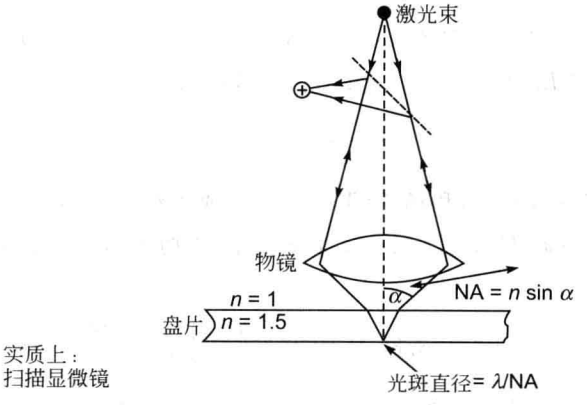


图18.52 光学读取头(OPU)实际上是一个光学扫描显微镜,通过伺服电动机来扫描任何想要的位置。

① 这篇短文是Rajeev Jindal博士和Giriraj Nyati先生写作的。他们服务于位于印度大诺伊达的Moser Baer印度有限公司。Moser Baer公司在DVD制造领域做了大量先驱性工作。

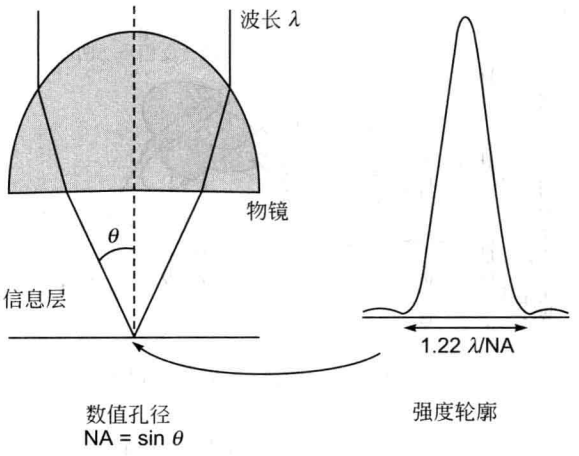


图 18.53　光斑的大小由波长和 OPU 透镜的数值孔径(NA)确定

“凹槽”与“平面”反映了盘片上的物理特性，可通过注入模塑法得到。“凹槽”距离表面的高度不是任意的，是固定的，等于 $\lambda/4$，λ 为所用的激光波长。如图 18.54 所示，“凹槽”的高度造成了与“平面”之间 $\lambda/2$ 的光程差。当激光束扫过“凹槽”和“平面”反射时，光学读取头通过捕捉反射光来读取信息。“凹槽”与“平面”造成光强度的变化情况被译为“0”和“1”——光强从亮到暗或者从暗到亮的反转记为 1，如图 18.55 所示。图 18.56 给出了实际工作原理。实际的系统和剖面图如图 18.57 和图 18.58 所示。

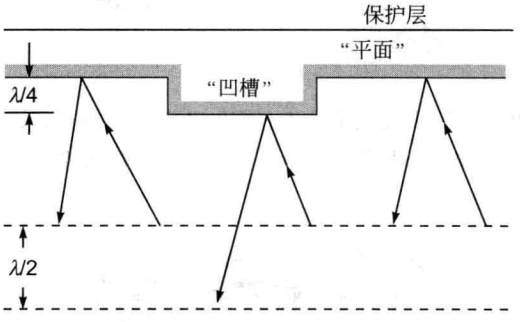


图 18.54　“凹槽”与“平面”反映了盘片上的物理特性，可通过注入模塑法得到。“凹槽”距离表面的高度不是任意的，是固定的，等于 $\lambda/4$，λ 为所用的激光波长。

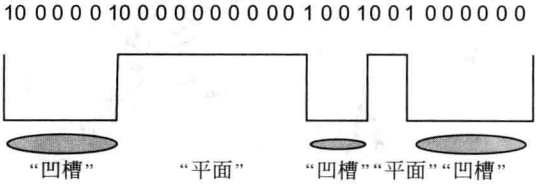


图 18.55　光学读取头通过捕捉反射光来读信息。“凹槽”与“平面”造成光强度的变化情况被翻译为“0”和“1”——光强从亮到暗或者从暗到亮的反转记为 1。

一张 CD-ROM 基片是由光学抛光的聚碳酸酯构成，在上面通过注入模塑法制成数据记号。盘片内孔直径为 15mm，而盘片总直径为 120mm，厚度为 1.2mm。盘片的上面覆盖一

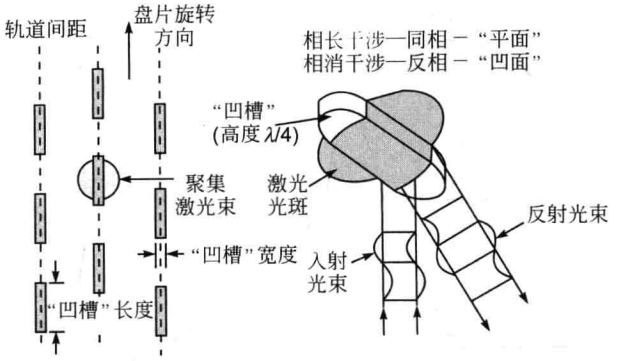


图 18.56　从“凹槽”反射的原理图

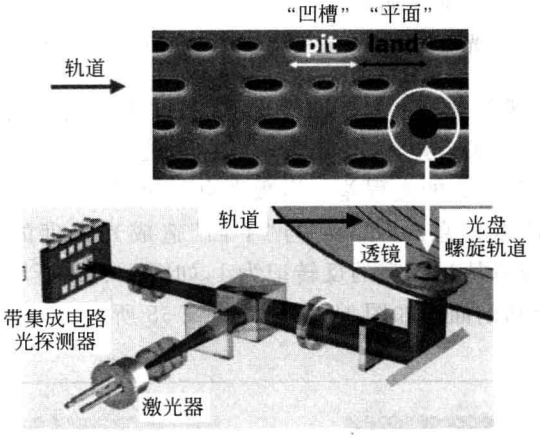


图 18.57　“凹槽”与“平面”反映了盘片上的物理特性,可通过注入模塑法得到。“凹槽”距离表面的高度不是任意的,是固定的,等于 $\lambda/4$,λ 为所用的激光波长。彩图见文前附录图表页的图 22。

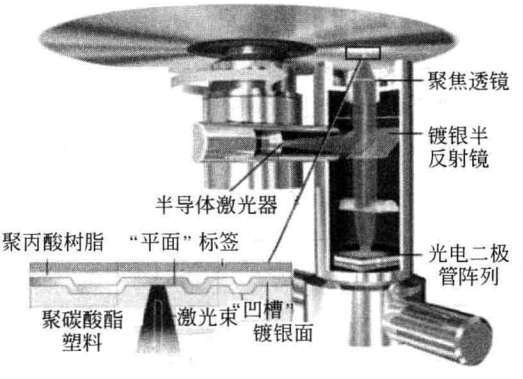


图 18.58　一张 CD-ROM 基片是由光学抛光的聚碳酸酯构成,在上面通过注入模塑法制成数据记号。盘片内孔直径为 15mm,而盘片总直径为 120mm,厚度是 1.2mm。盘片的上面覆盖一层非常薄的银或金,构成反射层,可将激光束反射回来以便读取数据。反射光入射到象限光电探测器上,把光转变为适当的电脉冲,对于这些电脉冲随后的处理可提取出相关数据。盘片的数据容量一般为 650～700MB。彩图见文前附录图表页的图 23。

层非常薄的银或金，构成反射层，可将激光束反射回来，以便读取数据。反射光入射到象限光电探测器上，把光转变为适当的电脉冲，对于这些电脉冲随后的处理可提取出相关数据。盘片的数据容量一般为 650～700MB。

从 CD 到 DVD 的演变：由于需要更高的容量和更好的分辨本领(图片质量)，从而需要有更高容量的媒体。由于向下兼容性的需求，需要保持盘片的物理结构不变，即保持外直径为 120mm、内直径为 15mm 的塑料盘片。如图 18.52 所示，扫描斑点尺寸与波长成正比，与 NA 成反比，因此，DVD 可利用的波长减小到了 650nm，NA 增加到了 0.65，从而得到更小的斑点尺寸。在 CD 到 DVD 的演变过程中，光路也减小了，导致更薄的基片。整个演变过程如图 18.59 和图 18.60 所示。但是，出于不断增加的对数据容量的需求，一种称为蓝光光碟的新产品产生了，在先前讨论的因素中，NA 增加到了 0.85，波长减小到了 405nm(蓝紫光)。容量增加到 25GB/层，如图 18.61 和图 18.62 所示。

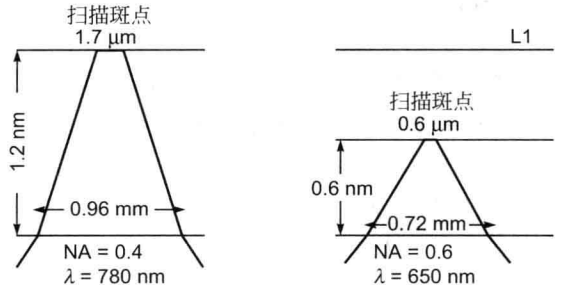


图 18.59　通过减小波长及增大数值孔径，都可以减小扫描斑点的尺寸。

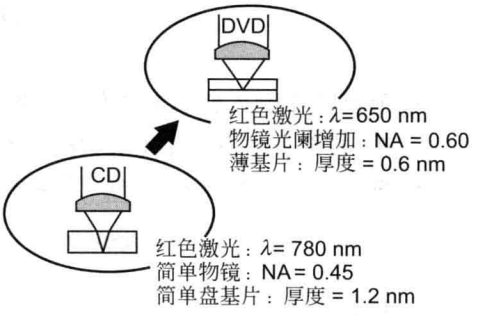


图 18.60　通过减小波长及增大数值孔径，都可以减小斑点尺寸。

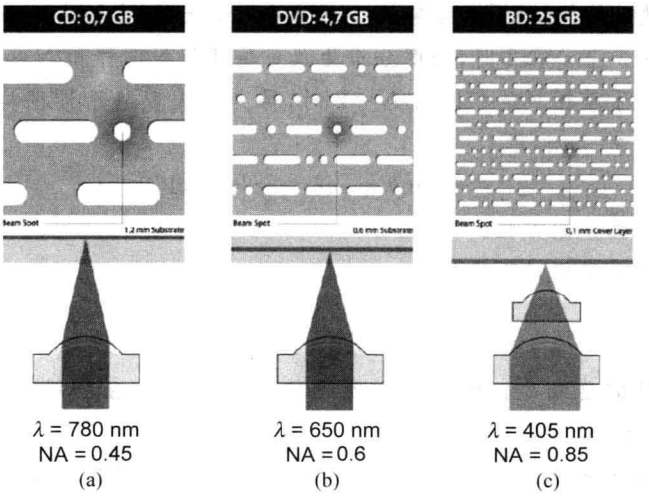


图　18.61

(a) 红外二极管激光器(λ＝780nm)，简易物透镜(NA＝0.45)；(b) 红色二极管激光器(λ＝650nm)，增大光阑的物镜(NA＝0.60)；(c) 蓝色激光(λ＝405nm)，NA 进一步增大到 0.85。彩图见文前附录图表页的图 24。

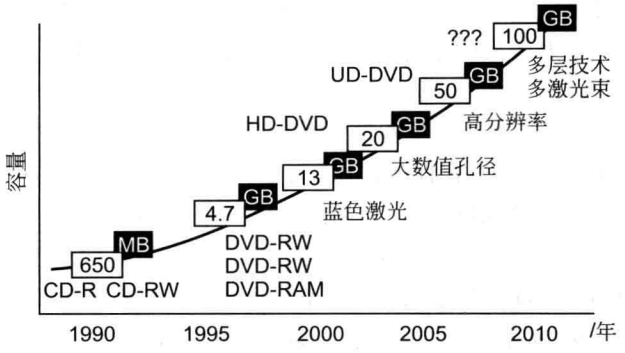


图 18.62　光学媒体技术的演变

小　结

- 干涉对应于从多个点源发出的波的叠加的情况;而衍射对应于来自像圆孔或者矩形孔,甚至是许多个矩形孔(比如衍射光栅)这样的面光源的波的叠加情况。
- 当平面波正入射到 N 个平行的狭缝上时,夫琅禾费衍射图样通过下式给出

$$I = I_0 \frac{\sin^2\beta}{\beta^2} \frac{\sin^2 N\gamma}{\sin^2\gamma}$$

式中

$$\beta = \frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}, \quad \gamma = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}$$

式中 λ 为波长,θ 为衍射角,b 为狭缝宽度,d 为两个狭缝之间的间隔。当 $N=1$ 时,得到单一狭缝的衍射图样,且在 $\theta=0$ 时为中心最大值,在 $b\sin\theta=m\lambda$,$m=\pm1,\pm2,\cdots$ 时为最小值。当 $N\geqslant2$ 时,强度分布为单一狭缝衍射图样和 N 个间隔距离为 d 的点光源产生的干涉图样的积。当 $N=2$ 时,得到杨氏双缝干涉图样。对于大的 N,主极大发生在 $\gamma=m\pi$,即

$$d\sin\theta = m\lambda, \quad m = 0,1,2,\cdots$$

此式通常称做光栅方程。

- 光栅的分辨本领通过下式给出

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$$

N 表示光栅的总线数。比如衍射光栅的 $N=10000$,在一级光谱($m=1$)中,对于 $\lambda=5000$Å,有 $\Delta\lambda=0.5$Å。

- 考虑单色 X 射线束入射到晶体上,相互增强的衍射光的掠射角 θ 可通过下式给出

$$2d_{hkl}\sin\theta = m\lambda$$

d_{hkl} 为米勒指数(hkl)的晶面族的晶面间距,$m=1,2,3,\cdots$ 称作衍射的级数,θ 为掠射角。上面的方程称作布拉格定律,它给出了相互增强的衍射光束的角位置。

习　题

18.1 一平面波($\lambda=5000$Å)垂直入射到宽度为 0.5mm 的长狭缝上。试计算与头三个极小值对应的衍射角。当狭缝宽度为 0.1mm 时，再次计算上面的结果，并从物理上解释衍射图样的变化。

[**答案**：0.057°，0.115°，0.17°；0.29°，0.57°，0.86°]

18.2 焦距为 20cm 的凸透镜放在宽为 0.6mm 的狭缝后面，如果波长为 6000Å 的平面波垂直入射到狭缝上，试计算在中央极大值两侧的第二极小值之间的间隔。

[**答案**：≈0.08cm]

18.3 在习题 18.2 中，试计算中央极大值与两侧的第一极大值的强度之比。

[**答案**：～21]

18.4 考察一束波长为 5×10^{-5}cm 的激光束，其圆形截面的直径为 3cm。试计算这束激光在传播了 3km 远后直径的数量级。

[**答案**：～14cm，这说明了激光束有极高的指向性]

18.5 半径为 0.01cm 的圆孔放在焦距为 25cm 的凸透镜的前面，并被波长为 5×10^{-5}cm 的平行光束照明，试计算前三个暗环的半径。

[**答案**：0.76mm，1.4mm，2.02mm]

18.6 一列平面波入射到直径为 5cm、焦距为 10cm 的凸透镜上，如果入射光的波长为 6000Å，试计算在透镜焦平面上第一暗环的半径。对一个焦距相同、但直径为 15cm 的透镜，重复此计算，并从物理上解释所得到的结果。

[**答案**：1.46×10^{-4}cm，4.88×10^{-5}cm]

18.7 有一双缝，每个缝的宽度为 $b=5\times10^{-2}$cm，间距为 $d=0.1$cm，被波长为 6.328×10^{-5}cm 的单色光照明，并在双缝后面放置一焦距为 10cm 的凸透镜，试计算在第一衍射极小值以内的诸极小值的位置。

[**答案**：0.0316mm，0.094mm]

18.8 证明：当 $b=d$ 时，得到的双缝衍射图样对应于宽度为 $2b$ 的单缝衍射图样。

18.9 证明：当光栅用于研究包含波长成分从 4000～7000Å 的光束时，第一级和第二级光谱不会重叠。

18.10 有一宽度为 5cm 的光栅，每条缝的宽度为 0.0001cm，间隔为 0.0002cm。试问哪一个数据对应于光栅常数？对于波长 $\lambda=5.5\times10^{-5}$cm，能观察到多少级？并计算主极大值的宽度，是否有缺级？

18.11 对于习题 18.10 的衍射光栅，计算各级的色散，及每一级的分辨本领是多少？

18.12 一块每英寸(=25.4mm)有 15000 条刻线的光栅由白光照明。假定白光的波长在 4000～7000Å 之间，试分别计算第一级光谱和第二级光谱的角宽度。(提示：不应该用式(18.65)计算，为什么？)

18.13 一块每英寸(=25.4mm)有 15000 条刻线的光栅由钠光照明。在焦距为 10cm 的凸透镜的焦面上观测光栅光谱，试计算钠的 D_1 线和 D_2 线之间的间隔(D_1 线和 D_2 线的波长分别为 5890Å 和 5896Å)。(提示：可以用式(18.65)，为什么？)

18.14 一块一英寸(=25.4mm)宽的光栅有15000条刻线,试计算它的第二级光谱中的分辨能力。

18.15 一个线丝光栅宽度为1cm,有1000条线。试计算第二主极大的角宽度,并将结果与1cm宽的有5000条线的光栅的相应值进行比较。假设波长 $\lambda=5\times10^{-5}$cm。

18.16 有一块衍射光栅,在最小偏向位置时,第一级光谱的偏向角为30°。如果 $\lambda=6\times10^{-5}$cm,试计算光栅常数。

18.17 如果一个望远镜对于波长 $\lambda=6\times10^{-5}$cm 要求有0.1″的分辨本领,试计算它的物镜的直径。

18.18 假设眼睛的分辨本领只由衍射效应决定,试计算最远在多少距离处,眼睛还能分辨开间隔为2m的两物点。(假设人眼瞳孔直径为2mm,$\lambda=6000$Å)。

18.19 (1)针孔照相机本质上就是一个前方带针孔的矩形盒子。物体倒立的像成在盒子的后部。考虑一束入射平行光正入射在针孔上,如果忽略衍射效应,那么,图像的直径会随着针孔的直径线性增长。另一方面,如果假设是夫琅禾费衍射,那么,第一暗环直径将随着孔直径的减小而增大。当几何图像的直径大概等于艾里图样中第一暗环的直径时,试求此时的针孔直径。假设 $\lambda=6000$Å,且针孔和盒子后部相距15cm。(2)如图18.63所示为不同针孔直径下的图像质量,定量地讨论在针孔直径太大或太小情况下,图像会模糊。

[**答案**:(1) 0.47mm]



图18.63 针孔直径不同的针孔照相机形成的图像。图片由K. Thyagarajan教授提供,来自因特网,引自 http://www.cs.bekeley.edu/~daf/book/chapter-4.pdf。

18.20 铜属于面心立方点阵,其晶格常数为3.615Å,用包含波长为1.540Å和1.544Å的X射线摄取铜的粉末照相。试证明:当 θ 为下列值时,将观察到衍射极大:
(21.64°,21.70°),(25.21°,25.28°),(37.05°,37.16°),(44.94°,45.09°),
(47.55°,47.71°),(58.43°,58.67°),(68.20°,68.58°),(72.29°,72.76°)

18.21 钨属于体心立方点阵,晶格常数为3.1648Å。试证明:在钨的粉末照相中(对应的X射线波长为1.542Å),$\theta=20.15°,29.17°,36.64°,43.56°,50.39°,57.55°,65.74°$和77.03°时,将观察到衍射极大值。

18.22 (1)在简单立方点阵中交替地放置Na和Cl,将得到NaCl晶体。试证明:Na原子(和Cl原子)独立地形成面心立方点阵。其晶格常数为5.6402Å,试证明:对于波

长为 1.542Å 的 X 射线，当 $\theta=13.69°, 15.86°, 22.75°, 26.95°, 28.27°, 33.15°, 36.57°, 37.69°, 42.05°, 45.26°, 50.66°, 53.98°, 55.10°, 59.84°, 63.69°, 65.06°, 71.27°, 77.45°$ 和 80.66°时，观察到衍射极大值。

(2) 试证明：如果把 NaCl 作为点阵常数为 2.82Å 的简单立方点阵来处理，将观察不到对应于 $\theta=13.69°, 26.95°, 36.57°, 45.26°, 53.98°, 63.69°$ 和 77.45°的极大值，实际上，在 NaCl 的 X 射线衍射图样中，与这些 θ 对应的极大值确实是非常小的。

18.23 证明：来自米勒指数为 (hkl) 的平面的第 m 级反射和米勒指数为 $(mh\ mk\ ml)$ 的平面的第 1 级反射是一样的。

18.24 组成双缝的两个单缝的宽度分别为 b 和 $3b$，间隔为 $6b$，试计算由这个双缝产生的夫琅禾费衍射图样。

18.25 有一束功率为 1kW 的激光(波长 $\lambda=6943$Å、光束直径≈1cm)在 CS_2 中传播。试计算 f_d 和 f_{nl}，并讨论光束的散焦(或聚焦)。对功率为 1000kW 的激光束重复此计算，并定性地讨论这两种情形有什么不同，n_0 和 n' 的数据已在 18.10 节中给出。

18.26 苯的 n_0 和 n' 分别等于 1.5 和 0.6×10^{-10} CGS 单位。试求出临界功率的近似表示式。

参考文献和推荐读物

1. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford, 1975.
2. F. A. Jenkin and H. E. White, *Fundamentals of Optics*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1957.
3. E. Hecht and A. Zajac, *Optics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., USA, 1974.
4. A. Nussbaum and R. A. Philips, *Contemporary Optics for Scientists and Engineers*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976.
5. K. Thyagarajan and A. Ghatak, *Lasers: Theory and Applications*, Plenum Press, New York, 1981; [Reprinted by Macmillan India Ltd., New Delhi.]
6. A. Ghatak and K. Thyagarajan, *Optical Electronics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989; [Reprinted by Foundation Books, New Delhi.]
7. A. R. Verma and O. N. Srivastava, *Crystallography for Solid State Physics*, Wiley Eastern, New Delhi, 1982.
8. M. S. Sodha, 'Theory of Nonlinear Refraction: Self Focusing of Laser Beams' *Journal of Physics Education, (India)*, Vol. 1 (2), 13, 1973.
9. M. S. Sodha, A. K. Ghatak and V. K. Tripathi, *Self-Focusing of Laser Beams in Dielectrics, Plasmas and Semiconductors*, Tata McGraw-Hill, New Delhi, 1974.
10. W. K. H. Panofsky and M. Philips, *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962.
11. W. G. Wagner, H. A. Haus and J. M. Marburger, 'Large Scale Self-trapping of Optical Beams in Paraxial Ray Approximation' *Physical Review Letters*, Vol. 175, 256, 1968.
12. E. Garmire, R. V. Chiao and C. H. Townes, 'Dynamics and Characteristics of the Self-trapping of Intense Light Beams' *Physical Review Letters.*, Vol. 16, 347, 1966.
13. J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill, New York, 1968.
14. G. J. Ball, *An Introduction to the Theory of Diffraction*, Pergamon Press, Oxford, 1966.
15. J. M. Cowley, *Diffraction Physics*, North Holland, Amsterdam, 1975.
16. M. Francon, *Diffraction, Coherence in Optics*, Pergamon Press, Oxford, 1966.
17. H. F. Meiners, Physics Demonstration Experiments, Vol. II, The Ronald Press Co., New York, 1970.

第19章 夫琅禾费衍射：Ⅱ和傅里叶光学

傅里叶分析是无处不在的工具，在物理和工程领域有广泛的应用。

——约瑟夫·古德曼(Joseph Goodman)，《傅里叶光学导论》的前言

19.1 引言

在本章中，将对于一束平面波通过不同的孔径后的远场衍射进行更普遍的分析，而这种远场衍射就是常说的夫琅禾费衍射。首先将推导在第 20 章中会用到的菲涅耳衍射公式。接着，由远场近似可得出夫琅禾费衍射图样，它被证明是孔径函数的傅里叶变换。最后，将推导薄透镜的傅里叶变换性质，它是傅里叶光学和空间滤波的基础。

19.2 菲涅耳衍射积分

假设一列(振幅为 A)平面波正入射到如图 19.1 所示的孔径上。根据惠更斯-菲涅耳原理，可以计算出在距离孔径 z 处的屏幕 SS' 上某点 P 的场分布。从点源发散的球面波，场强分布由下式给出

$$u \sim \frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}$$

式中 r 为从光源(位于点源)到观察点的距离。考虑在包含该孔径的平面上(在点 M 附近)一个无穷小的面元 $\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$，则在点 P 来源于那些无穷小面元的波的场分布正比于

$$\frac{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{19.1}$$

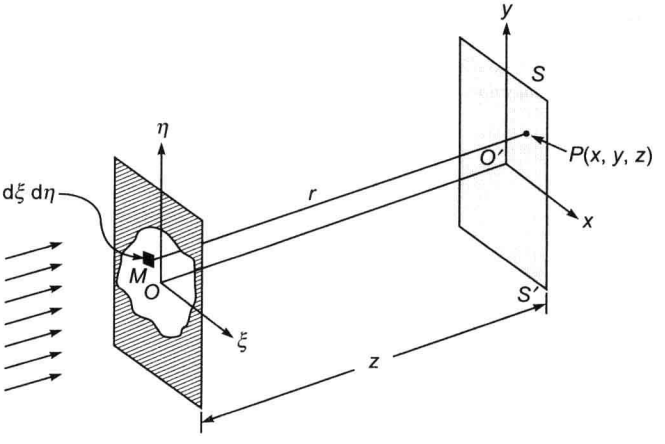


图 19.1 平面波正入射到一个孔径上，在屏幕 SS' 处观察到的衍射图样

式中 $r=\overline{MP}$。为计算出(点 P 的)总的场强分布，对所有的无穷小面元积分，从而得到

$$u(P)=C\iint\frac{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{19.2}$$

式中 C 为比例常数，积分遍及整个孔径。由一个更普遍的理论(见文献[1～4])，可证明

$$C=-\frac{\mathrm{i}k}{2\pi}=\frac{1}{\mathrm{i}\lambda} \tag{19.3}$$

(见 19.3 节)可推得

$$u(P)=\frac{A}{\mathrm{i}\lambda}\iint\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{19.4}$$

如果在 $z=0$ 处的振幅和相位分布由函数 $A(\xi,\eta)$ 给出，则上述积分可变为

$$u(P)=\frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\iint A(\xi,\eta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{19.5}$$

推导式(19.4)和式(19.5)中，已做如下假设。

(1)(位于孔径平面上的)屏幕大小对点 P 的场强分布没有影响，这个假设仅当孔径的尺寸比波长大很多时成立。如果进行更精确的分析，则要将屏幕大小对点 P 场强的影响考虑进去。但普遍来说，非常困难。

(2) 在分析中采用标量理论，并用标量函数 u 来表征场，这意味着电场在任何地方的方向都相同。这个假设仅在点 O 与观察点 P 连线与轴线的夹角足够小时才成立。

r 表示孔径平面上点 M(坐标为$(\xi,\eta,0)$)与屏幕上点 P(坐标为(x,y,z))的距离(见图 19.1)，因此，r 可写为

$$r=[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{1/2}=z\sqrt{1+\alpha}$$

式中

$$\alpha\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\frac{(x-\xi)^2}{z^2}+\frac{(y-\eta)^2}{z^2} \tag{19.6}$$

如果 $\alpha<1$，则：

$$\sqrt{1+\alpha}=1+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{8}\alpha^2+\cdots \tag{19.7}$$

假设 $\alpha\ll1$，并忽略上述展开式中的二阶项和更高阶的项，可得

$$r\approx z+\frac{(x-\xi)^2}{2z}+\frac{(y-\eta)^2}{2z} \tag{19.8}$$

更进一步，可以将式(19.5)中分母上的 r 用 z 来代替，则[①]

$$u(x,y,z)\approx\frac{1}{\mathrm{i}\lambda z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\iint A(\xi,\eta)\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{2z}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\right\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{19.9}$$

菲涅耳衍射积分

式(19.9)也可以写为如下形式

$$u(x,y,z)\approx\frac{1}{\mathrm{i}\lambda z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2z}(x^2+y^2)\right]\iint A(\xi,\eta)\times\exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2z}(\xi^2+\eta^2)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(u\xi+v\eta)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{19.10}$$

① 例如，当 $\lambda=6\times10^{-5}$cm 时，因子 $\cos kr$ 变为 $\cos\left(\frac{\pi}{3}10^5 r\right)$，假如 r 从 60cm 变为 60.00002cm，余弦因子会从 $+1$ 变为 -0.5。这说明尽管 r 的改变很非常小，但在积分域中范围内，指数因子的变化很迅速。

式中

$$u=\frac{2\pi x}{\lambda z},\quad v=\frac{2\pi y}{\lambda z} \tag{19.11}$$

表示空间频率,式(19.9)和式(19.10)都被称为菲涅耳衍射积分。在第20章中,会用到上述积分来计算菲涅耳衍射图样。在这里必须指出,在菲涅耳近似中,忽略了与 α^2 成比例的项,这是合理的,因为这一项引起的相位变化必须远小于 π,这样,菲涅耳近似在下列条件满足时成立

$$\frac{1}{8}kz\alpha^2\ll\pi\Rightarrow\frac{1}{8}\frac{2\pi}{\lambda}\frac{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^2}{z^3}\ll\pi \tag{19.12}$$

则

$$z\gg\left\{\frac{1}{4\lambda}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^2_{\max}\right\}^{\frac{1}{3}} \tag{19.13}$$

菲涅耳近似成立的条件

举例说明,考虑一个半径为 a 的圆形孔,如果在远比 a 大的区域内观察,则可以忽略等式右边的 ξ 和 η 项,从而得到

$$z\gg\left[\frac{1}{4\lambda}(x^2+y^2)^2\right]^{\frac{1}{3}} \tag{19.14}$$

因此,对于半径为0.1cm的圆形孔,如果在半径为1cm的区域内观察,x^2+y^2 的最大值约为 1cm^2;如果假设 $\lambda\approx5\times10^{-5}\text{cm}$,由式(19.14),可得 $z\gg17\text{cm}$。

19.3 均匀振幅和相位分布

首先考虑不存在孔径的情况,则在 $z=0$ 处,有

$$A(\xi,\eta)=A,\quad \text{对于所有的}\ \xi\ \text{和}\ \eta$$

式(19.9)可写为

$$u(x,y,z)=\frac{A}{i\lambda z}e^{ikz}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{ik}{2z}X^2}dX\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{ik}{2z}Y^2}dY$$

式中 $X=x-\xi$,$Y=y-\eta$。根据积分公式(见附录A),有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^2+\beta x}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \tag{19.15}$$

可得

$$u(x,y,z)=\frac{A}{i\lambda z}e^{ikz}\left(\sqrt{\frac{\pi 2z}{-ik}}\right)\left(\sqrt{\frac{\pi 2z}{-ik}}\right)$$

或者

$$u(x,y,z)=Ae^{ikz} \tag{19.16}$$

可以表示一均匀平面波。这表明虽然计算中采用了近似,但最终得到的结果是正确的。式(19.16)也证明式(19.3)中给出的 C 是正确的。

19.4　夫琅禾费近似

在夫琅禾费近似下，假设积分方程式(19.10)中的 z 足够大，以致函数

$$\exp\left[\frac{ik}{2z}(\xi^2+\eta^2)\right]$$

可以用 1 来替换，最大相位改变必须小于 π。因此，除了式(19.13)中所给的条件，还必须增加

$$z \gg \frac{(\xi^2+\eta^2)_{\max}}{\lambda} \tag{19.17}$$

夫琅禾费近似成立的条件

在这种近似下，式(19.10)可化为如下形式

$$u(x,y,z) \approx \frac{1}{i\lambda z}e^{ikz}\exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)\right]\times\iint A(\xi,\eta)e^{-i(u\xi+v\eta)}d\xi d\eta \tag{19.18}$$

夫琅禾费衍射积分

式(19.18)表示夫琅禾费衍射图样，且等式右边为函数 $A(\xi,\eta)$ 的二维傅里叶变换(见 9.6 节)。这样，式(19.18)给出了一个非常重要的结论：

夫琅禾费衍射图样是孔径函数的傅里叶变换。

对于一个半径为 a 的圆形孔径，式(19.17)可变为

$$z \gg \frac{a^2}{\lambda} \tag{19.19}$$

引入菲涅耳数，有

$$N_F = \frac{a^2}{\lambda z} \tag{19.20}$$

这样，夫琅禾费近似成立，必须有

$$N_F \ll 1 \tag{19.21}$$

19.5　长狭缝的夫琅禾费衍射

首先考虑一列平面波正入射到孔径平面上宽度为 b(沿着 ξ 轴方向)的狭缝上的夫琅禾费衍射。如图 19.2 所示，一个矩形的缝隙，假设缝隙沿 η 轴很长，那么，可以近似地看作是长狭缝，在这种情况下，对于所有的 η，有

$$\begin{cases} A(\xi,\eta) = A, & |\xi| < \dfrac{b}{2} \\ A(\xi,\eta) = 0, & |\xi| > \dfrac{b}{2} \end{cases} \tag{19.22}$$

将式(19.22)代入式(19.18)中，可得

$$u(x,y,z) = \frac{A}{i\lambda z}e^{ikz}\exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)\right]\times\int_{-b/2}^{+b/2}e^{-iu\xi}d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iv\eta}d\eta \tag{19.23}$$

在 9.3 节中，已知

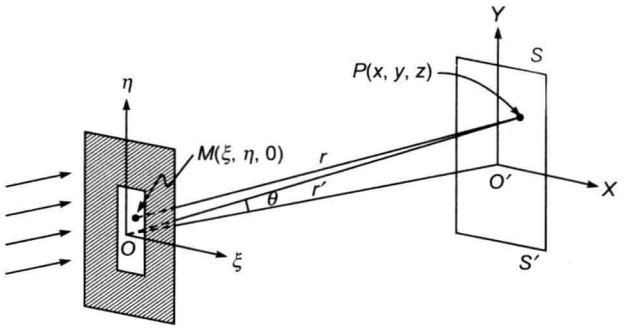


图 19.2　平面波正入射到一个矩形孔径的衍射

$$\delta(v)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}v\eta}\,\mathrm{d}\eta \tag{19.24}$$

$$\int_{-b/2}^{+b/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u\xi}\,\mathrm{d}\xi=\frac{1}{-\mathrm{i}u}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u\xi}\Big|_{-b/2}^{+b/2}=\frac{2}{u}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ub/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ub/2}}{2\mathrm{i}}=b\,\frac{\sin\beta}{\beta}$$

式中

$$\beta=\frac{ub}{2}=\frac{\pi bx}{\lambda z}\approx\frac{\pi b\sin\theta}{\lambda} \tag{19.25}$$

以及 $\sin\theta\approx\frac{x}{z}$。$\theta$ 表示沿着 x 方向的衍射角。因此,有

$$u(x,y,z)=\frac{Ab}{\mathrm{i}\lambda z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2z}(x^2+y^2)\right]\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)2\pi\delta(v) \tag{19.26}$$

δ 函数的值除了在 x 轴上,强度均为 0,则沿着 x 轴的强度分布可以写为

$$I=I_0\left(\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}\right) \tag{19.27}$$

这样,就得到 18.3 节中的单缝衍射图样(见图 18.3(a)和图 18.6)。

19.6　矩孔的夫琅禾费衍射

下面讨论矩形孔径(尺寸为 $a\times b$)的衍射情况(见图 19.2)。平面波正入射到矩形孔的夫琅禾费衍射可以由下式给出

$$u(x,y,z)=\frac{A}{\mathrm{i}\lambda z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2z}(x^2+y^2)\right]\times\int_{-b/2}^{+b/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u\xi}\,\mathrm{d}\xi\int_{-a/2}^{+a/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}v\eta}\,\mathrm{d}\eta \tag{19.28}$$

假设将点源置于矩形孔的中心处(见图 19.2),代入前面的积分,有

$$u(x,y,z)=\frac{Aba}{\mathrm{i}\lambda z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2z}(x^2+y^2)\right]\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)\left(\frac{\sin\gamma}{\gamma}\right) \tag{19.29}$$

式中 β 由式(19.25)给出

$$\gamma=\frac{va}{2}=\frac{\pi ay}{\lambda z}\approx\frac{\pi a\sin\phi}{\lambda} \tag{19.30}$$

且 $\sin\phi\approx\frac{y}{z}$;$\phi$ 表示 y 方向的衍射角。因此,可以写出衍射强度的表达式为

$$I(P)=I_0\,\frac{\sin^2\gamma}{\gamma^2}\,\frac{\sin^2\beta}{\beta^2} \tag{19.31}$$

式(19.31)表示矩形孔的夫琅禾费衍射图样。必须记住式(19.29)和式(19.31)是在式(19.13)与式(19.17)被满足时才成立。正方形孔($a=b$)的衍射强度如图 19.3 所示，$a=b=0.01\text{cm}$，$z=100\text{cm}$，且假设 $\lambda\approx5\times10^{-5}\text{cm}$。如果在半径为 0.5cm(即$(x^2+y^2)<0.25\text{cm}^2$)的区域观察，则式(19.13)给出

$$z\gg\left[\frac{1}{4\times5\times10^{-5}}\times(0.25)^2\right]^{\frac{1}{3}}\approx7(\text{cm})$$

进一步，式(19.17)给出

$$z\gg\frac{1}{5\times10^{-5}}\times2\times(0.01)^2\approx4(\text{cm})$$

在计算中，取 $z=100\text{cm}$，得到的衍射图样如图 19.3 所示。尽管在上式的计算中，假设观察区域的半径为 0.5cm，仍在$-2\text{cm}<x,y<+2\text{cm}$ 的范围内画出了衍射图样。

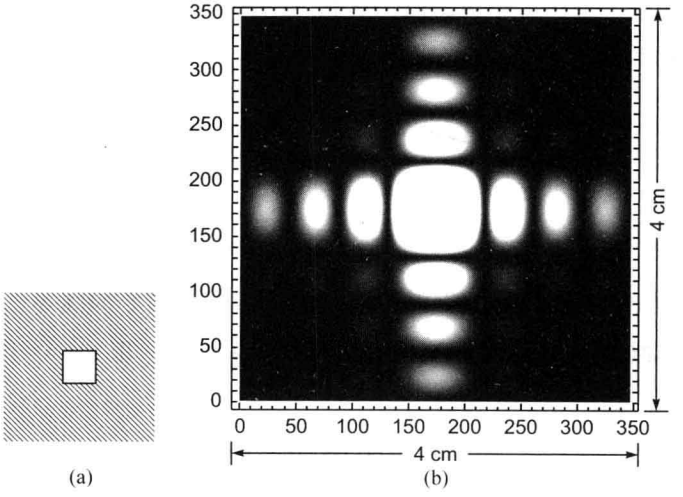


图　19.3

(a) 边长为 0.01cm 的方形孔；(b) 在距离孔径 100cm 的屏幕上显示的相应的(电脑生成)夫琅禾费衍射图，$\lambda=5\times10^{-5}\text{cm}$

注意到沿着 x 轴，当满足下列条件时，强度为 0

$$\beta=\frac{\pi bx}{\lambda z}=m\pi,\quad m=0,1,2,3,\cdots \tag{19.32}$$

或者

$$x=\frac{m\lambda}{b}z=m\times0.5=0.5\text{cm},1.0\text{cm},1.5\text{cm},2.0\text{cm},\cdots$$

对应于 $m=1,2,3,4,\cdots$这与图 19.3 中极小值的位置相符。

对于长狭缝(即 $a\to\infty$)的情况，函数

$$\frac{a\sin\gamma}{\gamma}=\frac{\sin\left(a\,\dfrac{\pi\sin\phi}{\lambda}\right)}{\dfrac{\pi\sin\phi}{\lambda}}$$

在 $\phi=0$ 附近有一个很陡的峰。既然 $\phi=0$ 意味着 $y=0$，所以，不存在沿着 y 轴的衍射(见 19.4 节)。

19.7 圆孔的夫琅禾费衍射

考虑一列平面波正入射到一圆形孔上，如图 19.4 所示。在圆孔平面上取柱坐标(见图 19.5)，有

$$\xi = \rho\cos\phi, \quad \eta = \rho\sin\phi \tag{19.33}$$

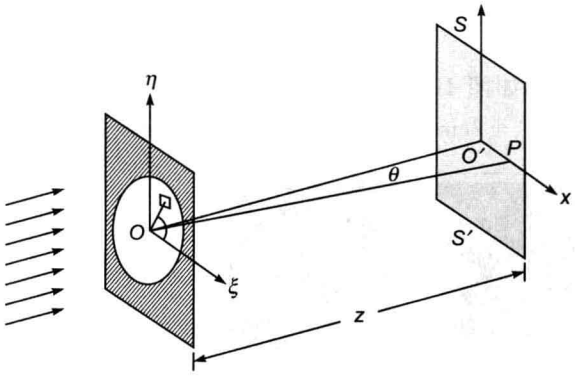


图 19.4 一列平面波经过一半径为 a 圆形孔的衍射

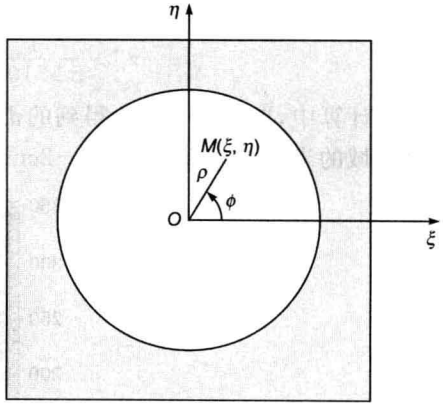


图 19.5 圆孔平面内的柱坐标(ρ,θ)

进一步，由于系统的圆对称性，衍射图样将是以点 O' 为圆心的圆环。因此，计算强度分布时，只需沿着 x 轴(即在 $y=0$ 的点)计算，然后把结果中的 x 用 $\sqrt{x^2+y^2}$ 替换即可。于是，当 $y=0$ 时，有

$$v = 0, \quad \sin\theta \approx \frac{x}{z} \tag{19.34}$$

式中 θ 为 OP 与 z 轴的夹角。从而有

$$u = \frac{2\pi x}{\lambda z} = k\sin\theta$$

式(19.18)可变为

$$u(P) = \frac{A}{\mathrm{i}\lambda z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\exp\left(\frac{\mathrm{i}kr^2}{2z}\right)\int_0^a\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\rho\sin\theta\cos\phi}\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi \tag{19.35}$$

则

$$\begin{aligned} u(P) &= \frac{A}{\mathrm{i}\lambda z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\exp\left(\frac{\mathrm{i}kr^2}{2z}\right)\frac{1}{(k\sin\theta)^2}\int_0^{ka\sin\theta}\zeta\mathrm{d}\zeta\int\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta\cos\phi}\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{A}{\mathrm{i}\lambda z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\exp\left(\frac{\mathrm{i}kr^2}{2z}\right)\frac{2\pi}{(k\sin\theta)^2}\int_0^{ka\sin\theta}\zeta J_0(\zeta)\mathrm{d}\zeta \end{aligned} \tag{19.36}$$

式中 $\zeta=k\rho\sin\theta$，且用到了关系式①

$$J_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\zeta\cos\phi}\mathrm{d}\phi \tag{19.37}$$

又有

① 与贝塞尔函数相关的恒等式可以在大部分数学物理方法的书籍中找到，比如文献[5～7]。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}[\zeta J_1(\zeta)] = \zeta J_0(\zeta) \tag{19.38}$$

那么，式(19.36)可变为

$$u(P) = \frac{A}{\mathrm{i}\lambda z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\exp\left(\frac{\mathrm{i}kr^2}{2z}\right)\frac{2\pi}{(k\sin\theta)^2}[\zeta J_1(\zeta)]\Big|_0^{ka\sin\theta}$$

$$= \frac{A}{\mathrm{i}\lambda z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\exp\left(\frac{\mathrm{i}kr^2}{2z}\right)\pi a^2\left[\frac{2J_1(v)}{v}\right]$$

式中 $v=ka\sin\theta$，则强度分布为

$$I(P) = I_0\left[\frac{2J_1(v)}{v}\right]^2 \tag{19.39}$$

式中 I_0 为点 O' 的强度(见图 19.4)。这就是在 18.3 节中讨论过的著名的艾里斑。之前提到过，衍射光斑(在平面 SS' 内)以点 O' 为中心的圆环组成。如果用 $F(r)$ 来表示一半径为 r 的圆内的能量百分比，则

$$F(r) = \frac{\int_0^r I(\sigma)2\pi\sigma\mathrm{d}\sigma}{\int_0^\infty I(\sigma)2\pi\sigma\mathrm{d}\sigma} \tag{19.40}$$

式中 $I(\sigma)2\pi\sigma\mathrm{d}\sigma$ 正比于包含在半径 $\sigma\sim\sigma+\mathrm{d}\sigma$ 之间的环形区域内的能量。显然，有

$$\sin\theta = \frac{\sigma}{z} \tag{19.41}$$

又 $v=ka\sin\theta$，可得

$$\sigma = \frac{z}{ka}v \tag{19.42}$$

式(19.40)可变为

$$F(r) = \frac{\int_0^v\left[\frac{2J_1(v)}{v}\right]^2 v\mathrm{d}v}{\int_0^\infty\left[\frac{2J_1(v)}{v}\right]^2 v\mathrm{d}v} \tag{19.43}$$

其中用到了用式(19.39)表示的强度分布。于是，有

$$\frac{J_1^2(v)}{v} = J_1(v)\left[J_0(v) - \frac{\mathrm{d}J_1(v)}{\mathrm{d}v}\right]$$

$$= -\left[J_0(v) - \frac{\mathrm{d}J_0(v)}{\mathrm{d}v} + J_1(v)\frac{\mathrm{d}J_1(v)}{\mathrm{d}v}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}[J_0^2(v) + J_1^2(v)] \tag{19.44}$$

于是，有

$$F(r) = \frac{J_0^2(v) + J_1^2(v)J\,|_0^v}{J_0^2(v) + J_1^2(v)\,|_0^\infty} = 1 - J_0^2(v) + J_1^2(v) \tag{19.45}$$

以上函数曲线如图 19.6 所示，且由函数曲线可以推断出，将近 84%的光包含在第一暗环所包围的圆形区域内，将近 91%的光包含在头两个暗环所包围的圆形区域内。环形孔的夫琅禾费衍射图样将在习题 19.5 中讨论。

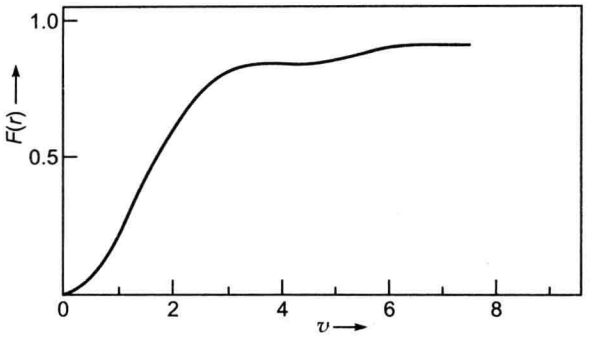


图 19.6　包含在半径 r 的圆环区域内的能量百分比

19.8　全同孔阵列

接下来考虑图 19.7 所示的 N 个全同孔组成的阵列，其夫琅禾费衍射图样模式是单独的孔产生的场分布之和，并由下式给出(见式(19.18))

$$u = C\left(\iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \cdots\right)\exp[-\mathrm{i}(u\xi + v\eta)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{19.46}$$

式中每个积分表示一个特定孔产生的场分布贡献。点 $O_1, O_2, O_3, \cdots$ 表示位于不同孔中相同位置的点，比如，如果孔是矩形的，点 $O_1, O_2, O_3, \cdots$ 表示矩形孔的中心点。用 (ξ_1, η_1)，(ξ_2, η_2)，(ξ_3, η_3)，$\cdots$ 分别表示点 $O_1, O_2, O_3, \cdots$ 的坐标，那么，有

$$u = C\sum_{n=1}^{N}\iint \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[u(\xi_n+\xi')+v(\eta_n+\eta')]}\mathrm{d}\xi'\mathrm{d}\eta' \tag{19.47}$$

式中 (ξ', η') 表示如图 19.7 所示的指定孔中相对于 (ξ_n, η_n) 的其他任意点的坐标，则

$$u = u_s\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(u\xi_n+v\eta_n)} \tag{19.48}$$

式中

$$u_S = C\iint \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(u\xi'+v\eta')}\mathrm{d}\xi'\mathrm{d}\eta' \tag{19.49}$$

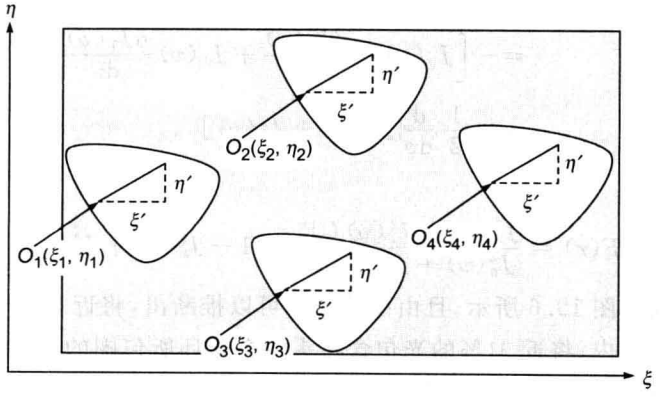


图 19.7　一列平面波正入射到 N 个全同孔的阵列

是单个孔产生的场分布。合强度分布可以写为

$$I = I_s I_1 \tag{19.50}$$

式中 I_s 表示单个孔产生的强度，且

$$I_1 = \left| \sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(u\xi_n + v\eta_n)} \right|^2 \tag{19.51}$$

表示由 N 个点源产生的强度分布。

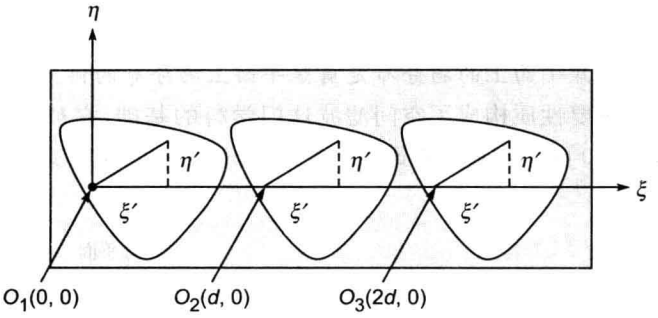


图 19.8　平面波正入射到 N 个同间距孔阵列的衍射

作为例子，考虑如图 19.8 所示的 N 个有相同间隔的全同孔。为不失普遍性，假设

$$\xi_n = (n-1)d, \quad \eta_n = 0, \quad n = 1,2,3,\cdots,N$$

则

$$\sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u(n-1)d} = 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ud} + \cdots + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(N-1)ud} = \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Nud}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ud}}$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2}\mathrm{i}(N-1)ud\right]\frac{\sin N\gamma}{\sin\gamma} \tag{19.52}$$

式中

$$\gamma = \frac{ud}{2} = \frac{\pi d \sin\theta}{\gamma} \tag{19.53}$$

$$\sin\theta = \frac{x}{z} \tag{19.54}$$

因此，可得

$$I_1 = \left| \sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u(n-1)d} \right|^2 = \frac{\sin^2 N\gamma}{\sin^2\gamma} \tag{19.55}$$

它是由 N 个间隔相同的点源产生的干涉图样，且与 18.7 节所推导的结果一致。当 $N=2$ 时，可以得到由双孔产生的干涉图样。

如果每个孔都是一个长狭缝，得到由一个光栅产生的衍射（见式(18.50)）。此外，如果每个孔是个圆孔，可以得到艾里斑和双孔产生的干涉（见图 17.4 和图 17.5）。

19.9　空间滤波

在接下来的一节中，将证明如果 $g(x,y)$ 表示一校正像差透镜的前焦平面的场分布（见图 19.9 中的平面 P_1），那么，在后焦平面 P_2 上，可以得到 $g(x,y)$ 的傅里叶变换，z 轴表示

透镜的光轴。如果 $G(x,y)$表示后焦平面 P_2 的场分布,那么,它与 $g(x,y)$的关系为

$$G(u,v)=\frac{1}{\lambda f}\iint g(x',y')\exp[-\mathrm{i}(ux'+vy')]\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{19.56}$$

式中

$$u\overset{\text{def}}{=}\frac{2\pi x}{\lambda f},\quad v\overset{\text{def}}{=}\frac{2\pi y}{\lambda f} \tag{19.57}$$

表示空间频率,λ 表示光的波长,f 表示透镜的焦距。如果将式(19.56)和式(9.39)做比较,可以得出

校正像差透镜的后焦平面上的场分布是前焦平面上场分布的傅里叶变换。

校正像差透镜的重要性质构成了空间滤波这门学科的基础,它被广泛地应用于各个领域(参见文献[2,4,8~10])。必须注意到,在式(19.56)中,忽略了等式右边(不重要)的相位因子。(见 19.10 节)

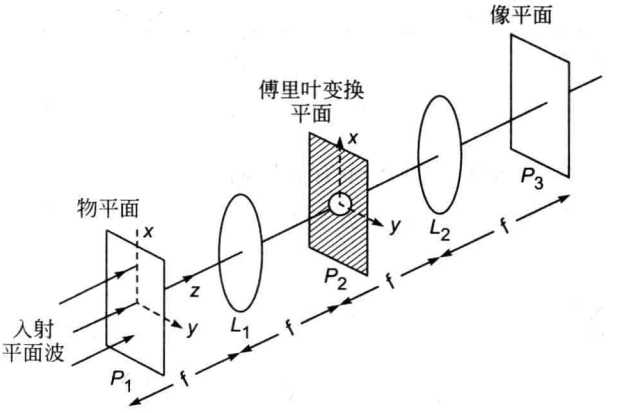


图 19.9　平面 P_2 是傅里叶变换平面,它体现了物(位于平面 P_1)的空间频率成分。小孔放在光轴(在平面 P_2)上,过滤了高频分量。

首先考虑平面波正入射到透镜上,这意味着 $g(x,y)$是个常量(比如说$=g_0$),则

$$G(u,v)=\frac{g_0}{\lambda f}\iint\exp[-\mathrm{i}(ux'+vy')]\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{19.58}$$

又有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ux}\mathrm{d}x=2\pi\delta(u) \tag{19.59}$$

(见式(9.32))可得

$$G(u,v)=\frac{g_0}{\lambda f}4\pi^2\delta(u)\delta(v) \tag{19.60}$$

式中 $\delta(u)$和 $\delta(v)$表示狄拉克 δ 函数。因为当 $u\neq0$ 时,有 $\delta(u)=0$,则可从式(19.60)推知,除了原点($x=0,y=0$)外,其他所有点的强度都为零。这是可想而知的,因为校正了像差的透镜把平面波全部都聚焦于一点[①](假设透镜足够大)。

① 假定透镜的尺寸很大,因此,式(19.56)中的积分限可以假定为$-\infty\sim+\infty$。在大多数情况下,这都是很好的近似。

另一个有趣的例子是当物平面上有一个一维余弦场分布时，有

$$g(x,y) = g_0\cos(2\pi\alpha x) \tag{19.61}$$

式中 α 为一个常数[①]。这里已假设场没有 y 分量，又有恒等式

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

则

$$G(u,v) = \frac{g_0}{\lambda f}\int \frac{1}{2}[e^{i2\pi\alpha x'} + e^{-i2\pi\alpha x'}]e^{-iux'}\,dx'\int e^{ivy'}\,dy' \tag{19.62}$$

又根据式(19.59)，可以推出

$$G(u,v) = \frac{g_0}{\lambda f}2\pi^2[\delta(u-2\pi\alpha) + \delta(u+2\pi\alpha)]\delta(v) \tag{19.63}$$

于是，在平面 P_2 上会得到两块斑点，分别位于轴上($v=0$)的 $u=\pm 2\pi\alpha$ 点(即 $x=\pm\lambda f\alpha$)。物理上可以这么理解：当平面波正入射到平面 P_1 上(见图 19.9)，时间依赖关系为 $\cos\omega t$。假设在平面 P_1 上有一个物体，其透明度正比于 $\cos(2\pi\alpha x)$，那么，平面 P_1 右边的场也会正比于

$$\cos\omega t\cos(2\pi\alpha x) = \frac{1}{2}[\cos(\omega t + 2\pi\alpha x) + \cos(\omega t - 2\pi\alpha x)] \tag{19.64}$$

已知对于 $k_y=0$ 的平面波，波场变化可取下面的形式(见例 11.6)：

$$\cos(\omega t - k_x x - k_z z) \tag{19.65}$$

式中 $k_x = k\sin\theta, k_z = k\cos\theta, k = \frac{2\pi}{\lambda}$，且 θ 为波矢量 $\boldsymbol{k}$ 与 z 轴的夹角。$z=0$ 处，波场变为

$$\cos(\omega t - k_x x) \tag{19.66}$$

将式(19.66)与式(19.64)比较，不难发现，式(19.64)右边的两项分别表示沿着与 z 轴成 $-\theta$ 和 $+\theta$ 方向传播的平面波，式中

$$\sin\theta = \frac{k_x}{k} = \frac{2\pi\alpha}{2\pi/\lambda} = \alpha\lambda \tag{19.67}$$

这些平面波显然聚焦于平面 P_2 的 x 轴上位于 $x=-\lambda f\alpha$ 和 $x=+\lambda f\alpha$ 的两点。由于 α 表示与物体相联系的空间频率，从本质上来说，就是在后焦平面上物体的空间频谱。

一般的时变信号都可以表示成一些纯正弦信号的叠加(见式(9.33))。同理，穿过一任意物体(放置在平面 P_1 上)的变化场，也能表示成正弦函数的叠加，并且可以在平面 P_2 上得到对应的(空间)频率分量。由于这个原因，平面 P_2 也被称为傅里叶转换平面。

作为另一个例子，一个物体的振幅变化为以下形式

$$g(x,y) = A\cos 2\pi\alpha x + B\cos 2\pi\beta x \tag{19.68}$$

那么，将在平面 P_2 上得到 4 个斑点(全部位于 x 轴上)，这些斑点出现在 $x=\pm\lambda f\alpha, x=\pm\lambda f\beta$。由于函数傅里叶变换的傅里叶变换是函数本身[②](见第 9 章)，假如将平面 P_2 放置于透镜 L_2 的前焦平面上，则在它的后焦平面上(见图 19.9 的平面 P_3)会得到与该物体相联

---

① 在平面 P_1 中(见图 19.7)，如果放置如图 14.11(b)所示的照片的底片，使得底片中的条纹沿着 y 轴，并假设有平面波正入射到底片上，那么，场分布会正比于 $\cos^2(2\pi\alpha x)$，即正比于 $\frac{1}{2}[1+\cos(2\pi\alpha x)]$。

② 但是会出现倒置，即 $f(x,y)$ 在平面 P_3 上会变为 $f(-x,-y)$。用简单的光线追迹也能看到这一点。

系的振幅分布。如果现在将平面 P_2 上位于点($x=+\lambda f\alpha, y=0$)和点($x=-\lambda f\alpha, y=0$)的两个斑点遮住,则在平面 P_3 上将得到与 $\cos 2\pi\beta x$ 成正比的场分布。这样就滤掉了空间频率为 α 的分量,这就是空间滤波的基本原理。

对于任意的物,如果在平面 P_2 上放置一个小孔,那么,它将过滤掉高频分量(见图 19.10(a));如果在轴上放置一个小圆屏,则会滤掉低频分量(见图 19.10(b))。另一方面,平面 P_2 上的环形孔就如同带通滤波器一样,如图 19.10(c)所示。

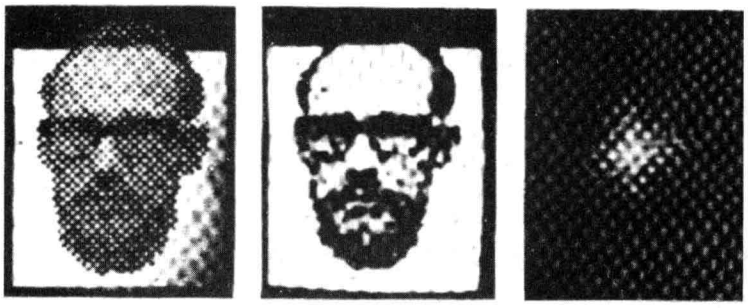


(a) (b) (c)

图 19.10

(a) 低通滤波器;(b) 高通滤波器;(c) 带通滤波器

作为空间滤波的一个简单应用,考虑一张网点照片(例如,报纸上的照片),它是由大量不同灰度的斑点组成的图像。由于这些斑点紧凑排列,表示着高频噪声,而与整个图像相关的空间频率要低得多。因此,如果使用与如图 19.11(a)所示的类似的透明胶片图,并且只允许低频分量通过(利用如图 19.9 所示的装置),将在平面 P_3 得到不含不需要的高频噪声的图像(见图 19.11(b))。



(a) (b) (c)

图 19.11 (a)图片是由很多规则排列的不同尺寸的黑格和白格组成。当在傅里叶变换平面上放置一小孔以阻止高频分量通过时,就能得到如(b)所示的图片;图(c)显示的是空间频谱。注意到(b)中灰度显现的一些差别,以致一些细节丢失了,例如眼镜框上一些细节的丢失。[R. A. Phillips, Spatial Filtering Experiments for Undergraduate Laboratories, American Journal of Physics, 37, 536(1969).]

空间滤波还应用于其他许多领域,例如反差加强、字符识别等(见文献[2,4,9])。

19.9.1 4f 相关器

4f 相关器是以 9.7 节讨论的卷积定理为基础的。假设一列平面波入射于一具有二维函数 $g(x,y)$ 形式的透明片上,并放置在第一个透镜前焦平面上,如图 19.12 所示。$g(x,y)$ 的傅里

叶变换[$=G(u,v)$]在透镜的后焦平面上形成。包含第二个函数 $h(x,y)$ 傅里叶变换[$=H(u,v)$]的透射掩模也被放置在这个平面上。于是，这相当于乘积 $G(u,v)H(u,v)$ 出现在第二个透镜的前焦平面上，则在第二个透镜的后焦平面上将得到 $G(u,v)H(u,v)$ 的傅里叶变换，即 $g(x,y)$ 和 $h(x,y)$ 的卷积。这个概念在很多领域中广泛应用(见文献[2,4,8～10])。

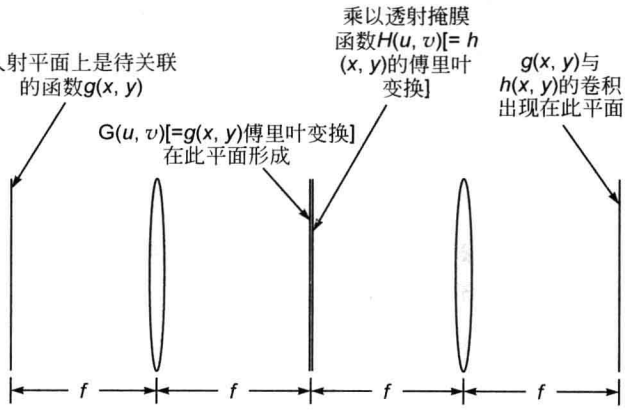


图 19.12　4f 相关器，图片引自参考文献[11]。

19.10　薄透镜的傅里叶变换性质

本节将导出薄透镜的傅里叶变换性质(见式(19.56))。首先证明焦距为 f 的薄透镜产生的效果是在入射场分布上乘以因子 p_L，p_L 由下式给出

$$p_L = \exp\left[-\frac{\mathrm{i}k}{2f}(x^2+y^2)\right] \tag{19.69}$$

假设一个物点 O 距离焦距为 f 的薄透镜的距离为 d_1(如图 19.13 所示)。如果像点 I 距离透镜为 d_2，则 d_2 满足(见 4.4 节)

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{f} \tag{19.70}$$

式中 d_1 和 d_2 分别表示物点和像点与透镜的距离。与发自点 O 扰动相对应的相因子可以表述为 $\exp(+\mathrm{i}kr)$，式中 r 为从点 O 开始测量的距离。于是，有

$$r=(x^2+y^2+d_1^2)^{1/2}=d_1\left(1+\frac{x^2+y^2}{d_1^2}\right)^{1/2}\approx d_1+\frac{x^2+y^2}{2d_1}$$

上式中在推导到最后一步的时候，假设 $x,y\ll d_1$，即，把观测的区域限定在透镜光轴的附近，这就是常说的傍轴近似。距离点 O 为 d_1 的横向平面 P_2 上(即恰好在透镜前面的平面，如图 19.13 所示)的相位分布可以由下式给出

$$\exp(+\mathrm{i}kr)\approx\exp\left[\mathrm{i}k\left(d_1+\frac{x^2+y^2}{2d_1}\right)\right]$$

既然成像的位置是点 I，则入射球面波经过透镜以后会变为另一个半径为 d_2 的球面波，其傍轴近似为

$$\exp\left[-\mathrm{i}k\left(d_2+\frac{x^2+y^2}{2d_2}\right)\right]$$

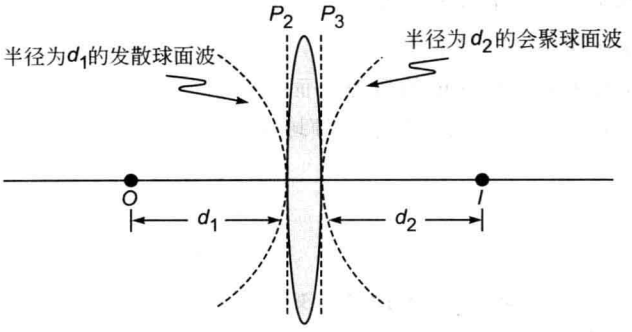


图 19.13　由点 O 发出的球面波经过透镜折射汇聚于点 I

指数项里的负号是因为该球面波是会聚波。因此，如果用 p_L 表示变换因子，则入射波相因子乘以该变换因子，就能得到出射波相因子，即

$$\exp\left[-\mathrm{i}k\left(d_2+\frac{x^2+y^2}{2d_2}\right)\right]=\exp\left[\mathrm{i}k\left(d_1+\frac{x^2+y^2}{2d_1}\right)\right]p_L$$

或者

$$p_L=\exp[-\mathrm{i}k(d_1+d_2)]\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}k}{2}\left[\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)(x^2+y^2)\right]\right\} \tag{19.71}$$

变换因子中 p 的角标 L 表示变换由透镜引发。根据式(19.70)，并忽略变换因子中的第一个因子，因为它不依赖于 x 和 y，那么，就能得到式(19.69)。因此，薄透镜作用在入射场的效果，就相当于将入射相位分布乘以由式(19.69)给出的因子。对于一个沿着轴向入射的平面波，透射后形成的扰动将简单地用 p_L 表示，它可以看作半径为 f 的汇聚球面波波前的傍轴近似。

用 $g(x,y)$ 表示(如图 19.14 所示)平面 P_1 上的场分布，首先来确定平面 P_2 上的场分布，其距离 P_1 为 f。显然，场将经历菲涅尔衍射并在平面 P_2 上得到如下的场分布(根据式(19.9))

$$u(x,y)\mid_{P_2}=\frac{1}{\mathrm{i}\lambda f}\exp(\mathrm{i}kf)\times\iint g(\xi,\eta)\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{2f}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\right\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{19.72}$$

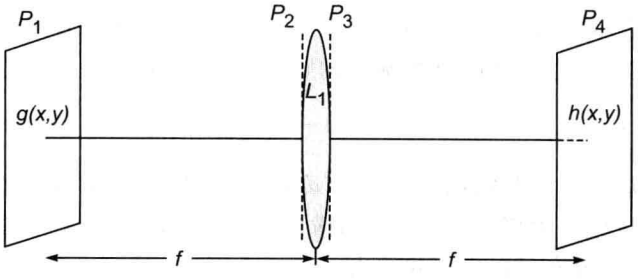


图 19.14　在透镜的前焦平面 P_1 上的场分布为 $g(x,y)$，则在透镜后焦平面 P_4 上将产生场分布 $h(x,y)$。从 P_1 到 P_2，场 $g(x,y)$ 将经历第一次菲涅尔衍射，然后乘以透镜的变换相因子，最后从 P_3 到 P_4 再次经历菲涅尔衍射产生场分布 $h(x,y)$。

如前所述，焦距为 f 的薄透镜对于入射场的效果就相当于入射相位分布乘以式(19.69)给出的因子 p_L，因此，在平面 P_3 上，将得到如下场分布

$$u(x,y)\mid_{P_3}=\frac{1}{\mathrm{i}\lambda f}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kf}\exp[-\mathrm{i}\alpha(x^2+y^2)]\times\iint g(\xi,\eta)\exp\{\mathrm{i}\alpha[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{19.73}$$

式中

$$\alpha=\frac{k}{2f}=\frac{\pi}{\lambda f} \tag{19.74}$$

从平面 P_3 开始，场会再一次经历菲涅尔衍射，因此，在平面 P_4 上（根据式(19.9)）将得到

$$u(x,y)\mid_{P_4}=\frac{1}{\mathrm{i}\lambda f}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kf}\iint u(\zeta,\tau)\mid_{P_3}\times\exp\{\mathrm{i}\alpha[(x-\zeta)^2+(y-\tau)^2]\}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\tau \tag{19.75}$$

将式(19.73)中 $u|_{P_3}$ 的结果代入，得

$$u(x,y)\mid_{P_4}=\left(\frac{1}{\mathrm{i}\lambda f}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kf}\right)^2 I(x,y) \tag{19.76}$$

式中

$$I(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\iint g(\xi,\eta)H(x,y,\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{19.77}$$

$$\begin{aligned}H(x,y,\xi,\eta)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\iint\exp[-\mathrm{i}\alpha(\zeta^2+\tau^2)]\\&\quad\times\exp\{\mathrm{i}\alpha[(\zeta-\xi)^2+(\tau-\eta)^2]\}\\&\quad\times\exp\{\mathrm{i}\alpha[(x-\zeta)^2+(y-\tau)^2]\}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\tau\\&=H_\xi(x)H_\eta(y)\end{aligned} \tag{19.78}$$

$$H_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[\mathrm{i}\alpha(\xi^2-2\xi\zeta+x^2-2x\zeta+\zeta^2)]\mathrm{d}\zeta \tag{19.79}$$

H_η 的表达式也可同理得出。且

$$\begin{aligned}\xi^2-2\xi\zeta+x^2-2x\zeta+\zeta^2&=\zeta^2-2\zeta(x+\xi)+(x+\xi)^2-(x+\xi)^2+\xi^2+x^2\\&=(\zeta-g)^2-2x\xi\end{aligned}$$

式中 $g=x+\xi$，则

$$H_\xi=\exp(-2\mathrm{i}\alpha x\xi)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[\mathrm{i}\alpha(\zeta-g)^2]\mathrm{d}\zeta$$

或者

$$H_\xi(x)=\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha x\xi}\sqrt{\frac{\pi}{-\mathrm{i}\alpha}} \tag{19.80}$$

$H_\eta(y)$的表达式也可同理得出，则

$$\begin{aligned}I(x,y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\iint g(\xi,\eta)H_\xi(x)H_\eta(y)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\&=\frac{\pi}{-\mathrm{i}\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\iint g(\xi,\eta)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha(x\xi+y\eta)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\&=\mathrm{i}\lambda f\int_{-\infty}^{+\infty}\iint g(\xi,\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(u\xi+v\eta)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\end{aligned}$$

在上式的推导中用到了式(19.74),且

$$u = 2\alpha x = \frac{2\pi x}{\lambda f}, \quad v = 2\alpha y = \frac{2\pi y}{\lambda f} \tag{19.81}$$

分别表示 x 和 y 方向上的空间频率。如果用上面的表达式代替式(19.76)中的 $I(x,y)$,可得

$$u(x,y)\mid_{P_4} = \frac{1}{\lambda f}\iint_{-\infty}^{+\infty} g(\xi,\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(u\xi+v\eta)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{19.82}$$

其中忽略了并不重要的恒定相位因子。式(19.82)与式(19.56)一样,给出了重要的结论:

校正像差透镜的后焦平面上的场分布是前焦平面上场分布的傅里叶变换。

在此应该提一下,在书写积分限从$-\infty\sim+\infty$时,已假设透镜是无限延展的。假设引入的误差是非常小的,因为实际上,对几乎所有的透镜,有

$$a/\lambda \gg 1$$

式中 a 表示透镜的孔径。

小　结

- 如果在 $z=0$ 平面,振幅和相位分布由 $A(\xi,\eta)$ 给出,则菲涅尔衍射图样表达式为

$$u(x,y,z) \approx \frac{1}{\mathrm{i}\lambda z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\iint A(\xi,\eta)\times\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{2z}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\right\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

式中

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- 夫琅禾费衍射图样是孔径函数的傅里叶变换,由下式给出

$$u(x,y,z) \approx \frac{1}{\mathrm{i}\lambda z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2z}(x^2+y^2)\right]\iint A(\xi,\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(u\xi+v\eta)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

一列平面波正入射到半径为 a 的圆孔上,其夫琅禾费衍射图样由下式给出

$$I(P) = I_0\left[\frac{2J_1(v)}{v}\right]^2$$

式中

$$v = ka\sin\theta$$

- 如果 $g(x,y)$ 和 $G(x,y)$ 分别表示校正了像差透镜的前焦平面和后焦平面的场分布,则

$$G(u,v) = \frac{1}{\lambda f}\iint g(x',y')\exp[-\mathrm{i}(ux'+vy')]\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

式中 $u \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{2\pi x}{\lambda f}$ 和 $v \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{2\pi y}{\lambda f}$ 表示空间频率。于是,在透镜的后焦平面上可以得到 $g(x,y)$ 的傅里叶变换形式,z 轴表示透镜的光轴。这个校正像差透镜的重要性质是空间滤波的基础。

习　题

19.1 考虑一个大小为 0.2mm×0.3mm 的矩形孔,在距离孔径 100cm 的地方放置一块屏幕。假设一束波长为 $\lambda=5\times10^{-5}$ cm 的平面波正入射到孔径上,计算在屏幕 0.2cm×

0.2cm 的区域上最大值和最小值的位置。并证明本题中菲涅尔近似和夫琅禾费近似条件都得到满足。

19.2 在上题中，假设一焦距为 20cm 的凸透镜紧靠在孔径后面。计算在 x 轴(即 $\phi=0$)和 y 轴(即 $\theta=0$)上头三个最大值和最小值的位置。

19.3 在焦距为 20cm 的凸透镜的焦平面上观察一圆孔(半径 0.5mm)的夫琅禾费衍射图样。计算出头两个暗环的半径，假设波长 $\lambda=5.5\times10^{-5}$cm。

[**答案**：0.13mm 和 0.18mm]

19.4 在上题中，计算出(在焦平面上)包含总能量 95%的区域块的面积。

19.5 计算由半径 a_1 和 a_2($>a_1$)围成的环形孔径的衍射图形。

[**提示**：式(19.35)中对 ρ 的积分上、下限必须是 a_1 和 a_2]

参考文献和推荐读物

1. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Seventh Edition, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1999).
2. J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, Third Edition, Roberts & Co., Englewood, Co. USA (2005).
3. M.V. Klein and T.E. Furtak, *Optics*, John Wiley, New York (1986).
4. A. Ghatak and K. Thyagarajan, *Contemporary Optics*, Plenum Press, New York (1978); reprinted by Macmillan India, New Delhi (1981).
5. J. Irving and N. Mullineux, *Mathematics in Physics and Engineering*, Academic Press, New York (1959).
6. G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Second Edition, Academic press, New York (1970).
7. A. K. Ghatak, I.C. Goyal and S. J. Chua, *Mathematical Physics*, Macmillan India, New Delhi (1985).
8. E. G. Steward, *Fourier Optics: An Introduction*, Second Edition, Dover Publications, New York (2004).
9. B.E.A. Saleh and M.C. Teich, Fundamentals of Photonics, John Wiley, New York (1991).
10. E. Hecht, *Optics*, Pearson Education, Singapore (2002). http://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_optics.

第20章 菲涅耳衍射

你们的委员之一，泊松，已经根据作者(菲涅耳)报道的积分得到了一个奇怪的推论——当用稍稍倾斜的光线照射一个不透明的圆屏上时，阴影中心会被照亮，就好像遮挡屏不存在一样。这一结果已被直接的实验所证明，观察结果完美地证实了这一计算。

——多米尼克·阿拉果致法国科学院[①]

重要的里程碑

1816年 奥古斯丁·菲涅耳利用光的波动理论建立了衍射理论。

1817年 根据菲涅耳的理论，泊松预言在不透明圆盘的阴影中心存在一个亮斑，人们习惯性地将其称为“泊松亮斑”。

1818年 菲涅耳和阿拉果两人完成了证明泊松亮斑存在的实验，同时也证明了光的波动理论的正确性。

1874年 马里·考纽发明了一种作图法，用以研究菲涅耳衍射，这就是我们熟知的考纽螺线。

20.1 引言

在第18章中，提到衍射现象可以粗略地分成两大类：第一类是菲涅耳衍射，它要求光源和观察屏二者中至少有一个(或者二者都)距离衍射孔径有限远；第二类是(前两章讨论的)夫琅禾费衍射，其入射到孔上的波是平面波，而衍射图样是在凸透镜的焦平面上观察的，这样，观察屏相当于离孔无限远。在本章中将讨论菲涅耳衍射，同时研究菲涅耳衍射向夫琅禾费衍射过渡的问题。整个分析的基本原理是惠更斯-菲涅耳原理：

波前上的每一点都是一个子波扰动源，并且从不同点出发的子波会互相干涉。

为了理解惠更斯-菲涅耳原理的含义，考虑平面波入射到半径为 a 的圆孔上的情况，如图20.1所示。由18.3节可知，光束会由于衍射而发散，其角宽度为

$$\Delta\theta \sim \frac{\lambda}{2a}$$

因此，当 $a \gg \lambda$ 时，点 R(处于几何阴影区深部)的强度是可以忽略的。另一方面，如果 $a \sim \lambda$，

① 见参考文献[1]。

光束差不多均匀地向各个方向扩展，因此，在屏上得到(几乎)均匀的照明。这个现象显示了这样一个事实，即当 $a \gg \lambda$ 时，从圆孔上不同点发出的子波之间非常漂亮地进行干涉，结果在几何阴影区的强度几乎为零，而在圆形区域里有高强度照明(见图 20.1)。然而，当 $a \sim \lambda$ 时，圆孔起着点光源的作用，结果在屏幕上产生均匀的照明(见图 12.3)

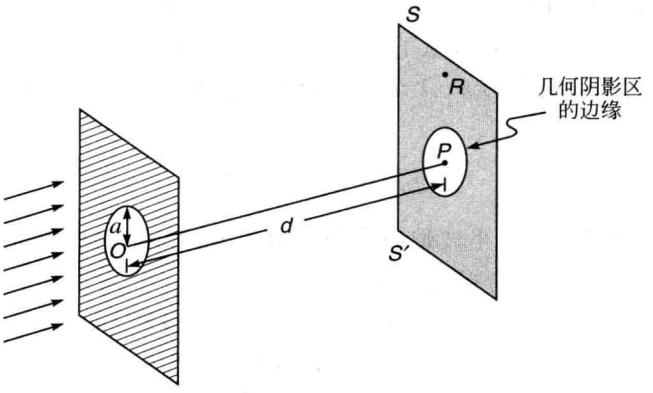


图 20.1　一平面波正入射到半径为 a 的圆孔上的衍射

下面将先引入菲涅耳半波带的概念，以便对菲涅耳衍射图样先有一个定性的理解。接着对菲涅耳衍射进行更严密的分析，并讨论它怎样过渡到夫琅禾费衍射。

20.2　菲涅耳半波带

考虑沿 z 轴传播的平面波前 WW'，如图 20.2 所示。为了确定源于波前上不同区域的扰动在任意一点 P 产生的场，按下列方法作图：从点 P 作波前的垂线 PO。如果 $\overline{PO}=d$，以点 P 为中心，以 $d+\lambda/2, d+2\lambda/2, d+3\lambda/2, \cdots$ 为半径，分别作出一系列球面，这些球面与 WW' 相交为圆，如图 20.2 所示。第 n 个圆的半径由下式决定

$$r_n = \left[\left(d + n\frac{\lambda}{2}\right)^2 - d^2\right]^{1/2} = \sqrt{n\lambda d}\left(1 + \frac{n\lambda}{4d}\right)^{1/2}$$

或者

$$r_n \approx \sqrt{n\lambda d} \tag{20.1}$$

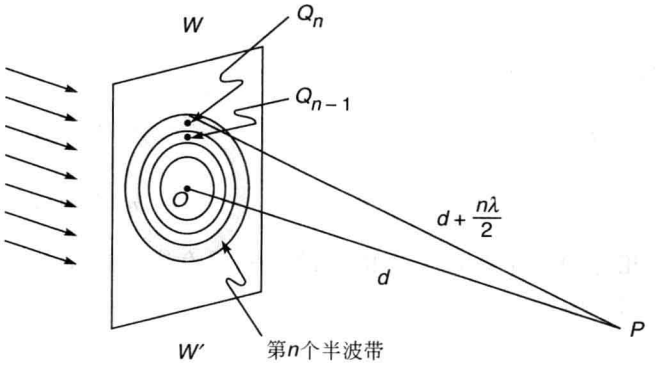


图 20.2　菲涅耳半波带作图法

其中已假设 $d \gg \lambda$，这在可见光的实际系统中是正确的。假设 n 不是一个很大的数，则第 n 个圆与第 $n-1$ 个圆之间的环状区域被称作第 n 个半波带。第 n 个半波带的面积由下式给出

$$A_n = \pi r_n^2 - \pi r_{n-1}^2 \approx \pi[n\lambda d - (n-1)\lambda d] = \pi\lambda d \tag{20.2}$$

因此，所有半波带面积近似相等。第 n 个半波带与第 $n-1$(或 $n+1$)个半波带在点 P 产生的扰动有 π 的相位差。这一点可以从下面的考虑得出：对于第 n 个半波带上围绕任意一点 Q_n 附近的无限小的面元，则在第 $n-1$ 个半波带上总存在着围绕相应的一点 Q_{n-1} 附近的无限小的面元，使得

$$\overline{Q_nP} - \overline{Q_{n-1}P} = \frac{\lambda}{2}$$

对应的相位差为 π，并且由于各半波带的面积近似相等，所以，在相邻带上的点与点之间能够一一对应。因此，在点 P 的合振幅可以写为

$$u(P) = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{m+1}u_m + \cdots \tag{20.3}$$

式中 u_n 表示从第 n 个半波带发出的子波产生的净振幅，交替出现的正负号表示相邻两个半波带之间的扰动是反相的。由一特定半波带产生的振幅正比于该带的面积，反比于点 P 到该带的距离，且正比于倾斜因子 $\frac{1}{2}(1+\cos\chi)$，式中 χ 为该带的法线与 QP 之间的夹角。倾斜因子可从严格的衍射理论中自动得出[①]，则

$$u_n = 常数 \times \frac{A_n}{\overline{Q_nP}} \frac{(1+\cos\chi)}{2} \tag{20.4}$$

式中 A_n 表示第 n 个半波带的面积。由 r_n 的精确表示式可知，半波带的面积随着 n 的增大而增大。但这个面积的稍许增加正好被半波带到点 P 的距离的增加抵消了。不仅于此，振幅 $u_1, u_2, u_3, \cdots$ 随着倾斜度的增大而单调地减少。因此，可以写出

$$u_1 > u_2 > u_3 \cdots \tag{20.5}$$

式(20.3)所表示的级数能够用舒斯特(Schuster)提出的方法近似求和。将式(20.3)写为

$$u(P) = \frac{u_1}{2} + \left(\frac{u_1}{2} - u_2 + \frac{u_3}{2}\right) + \left(\frac{u_3}{2} - u_4 + \frac{u_5}{2}\right) + \cdots \tag{20.6}$$

式中最后一项是 $\frac{1}{2}u_m$ 或是 $\left(\frac{1}{2}u_{m-1} - u_m\right)$，具体是谁要看 m 是奇数还是偶数而定。如果倾斜因子可以使得

$$u_n > \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n+1}) \tag{20.7}$$

则式(20.6)括号里的量是负的，则

$$\begin{cases} u(P) < \dfrac{u_1}{2} + \dfrac{u_m}{2}, & m \text{ 为奇数} \\ u(P) < \dfrac{u_1}{2} + \dfrac{u_{m-1}}{2} - u_m \approx \dfrac{u_1}{2} - \dfrac{u_m}{2}, & m \text{ 为偶数} \end{cases} \tag{20.8}$$

其中已假设由相邻两个半波带产生的场的振幅只有微小的变化。为了得到上限，将式(20.3)重新写为如下形式

① 见参考文献[2]。

$$u(P)=u_1-\frac{u_2}{2}-\left(\frac{u_2}{2}-u_3+\frac{u_4}{2}\right)-\left(\frac{u_4}{2}-u_5+\frac{u_6}{2}\right)+\cdots \tag{20.9}$$

当 m 是奇数时，最后一项为 $\left(-\frac{1}{2}u_{m-1}+u_m\right)$；当 m 是偶数时，最后一项为 $-\frac{1}{2}u_m$。由于括号里的量是负的，则

$$\begin{cases} u(P)>u_1-\dfrac{u_2}{2}-\dfrac{u_{m-1}}{2}+u_m\approx\dfrac{u_1}{2}+\dfrac{u_m}{2}, & \text{当 } m \text{ 是奇数时} \\ u(P)>u_1-\dfrac{u_2}{2}-\dfrac{u_m}{2}\approx\dfrac{u_1}{2}-\dfrac{u_m}{2}, & \text{当 } m \text{ 是偶数时} \end{cases} \tag{20.10}$$

根据式(20.8)和式(20.10)，可以近似地写出

$$\begin{cases} u(P)\approx\dfrac{u_1}{2}+\dfrac{u_m}{2}, & \text{当 } m \text{ 是奇数时} \\ u(P)\approx\dfrac{u_1}{2}-\dfrac{u_m}{2}, & \text{当 } m \text{ 是偶数时} \end{cases} \tag{20.11}$$

如果 u_m 与 u_1 相比可以忽略，则式(20.11)[①]将给出一个值得注意的结果

$$u(P)\approx\frac{u_1}{2} \tag{20.12}$$

这意味着由整个波前所产生的合振幅只是第一个半波带所产生的振幅的一半。

20.2.1　圆孔衍射

根据上面的分析来研究由圆孔产生的平面波的衍射问题。设点 P 距离圆孔的距离为 d（见图 20.1）。假设圆孔的半径 a 能够从零开始逐渐增加，则当 a 增加时，点 P 的强度也将逐渐增加，一直到圆孔包含了第一个半波带为止，当 $a=\sqrt{\lambda d}$ 时，就出现这种情况。此时点 P 的合振幅等于 u_1，u_1 是没有受到阻挡时的波前所产生的振幅的二倍（见式(20.12)），因此，强度为 $4I_0$，式中 I_0 为没有受到阻挡时的波前在点 P 产生的强度。如果继续增加 a，$u(P)$ 就开始下降，当圆孔包含了头两个半波带时（当 $a=\sqrt{2\lambda d}$ 时出现这种情况），合振幅（$=u_1-u_2$）将几乎为零。因此，增加圆孔的直径，点 P 的强度反而降到几乎为零。这个有趣的实验再一次证明了惠更斯-菲涅耳原理的正确性，并且对声波而言也是适用的。归纳上述结果，即当

$$a=\sqrt{(2n+1)\lambda d},\quad n=0,1,2,\cdots(\text{为极大值})$$

时，圆孔包含了奇数个半波带，此时强度最大；另一方面，当

$$a=\sqrt{2n\lambda d},\quad n=1,2,\cdots(\text{为极小值})$$

时，圆孔包含了偶数个半波带，强度最小。为了对数值有充分的了解，当 $d=50\text{cm}$，$\lambda=5\times10^{-5}\text{cm}$ 时，第 1 个、第 2 个和第 3 个半波带的半径分别为 0.500mm，0.707mm 和 0.866mm。作为上述问题的一个推论，考虑一个半径固定为 a 的圆孔，并研究强度沿着轴线的变化。只

① 如果假设倾斜因子具有如式(20.4)中一样的形式的话，当 m 从 1 增加到∞时，倾斜因子的值会从 1 降为 1/2。这表明 $|u_m|$ 永远都不会比 $\frac{u_1}{2}$ 小。但是，当 m 很大时，轴上点 P 的微小移动都会引起强度从 $\frac{u_1}{2}+\frac{u_m}{2}$ 到 $\frac{u_1}{2}-\frac{u_m}{2}$ 的变化，且这种变化极其迅速，以至于只能够看到它的平均值 $\frac{u_1}{2}$。

要距离

$$d=\frac{a^2}{(2n+1)\lambda},\quad n=0,1,2,\cdots(\text{为极大值})$$

时,点 P(见图 20.1)将对应于强度极大值,而当

$$d=\frac{a^2}{2n\lambda},\quad n=1,2,\cdots(\text{为极小值})$$

时,将有强度极小值。屏幕 SS' 上位于光轴外的点的强度分布也能近似地用半波带法计算出来,不过这种计算是相当复杂的。但是,由系统的对称性可以推出,衍射图样必定具有以点 P 为中心的同心圆环的形状。

20.2.2 圆屏衍射——泊松亮斑

如果用圆屏代替圆孔(见图 20.3(a)),且圆屏挡住了前 p 个半波带,那么,在点 P 的场为

$$u(P)=u_{p+1}-u_{p+2}+\cdots\approx\frac{u_{p+1}}{2}\tag{20.13}$$

因此,在圆屏后的轴上总是得到一个亮斑(更严格的理论也预测到同样的结论,见 20.4.2 节),这个亮斑叫做泊松亮斑。在此要提一下,1816 年,法国物理学家奥古斯丁·菲涅耳根据光的波动理论得到了衍射数学理论。著名的数学家西蒙·泊松利用菲涅耳理论预言,在不透明圆盘的阴影区的中心存在一个亮斑。泊松是光粒子说支持者中的大人物,他指出,既然亮斑的出现有违常理,所以,光的波动理论一定是错的。紧接着,菲涅耳和阿拉果进行了实验,证明了泊松亮斑的存在(见图 20.3(b)),也证明了光波动说的正确性。

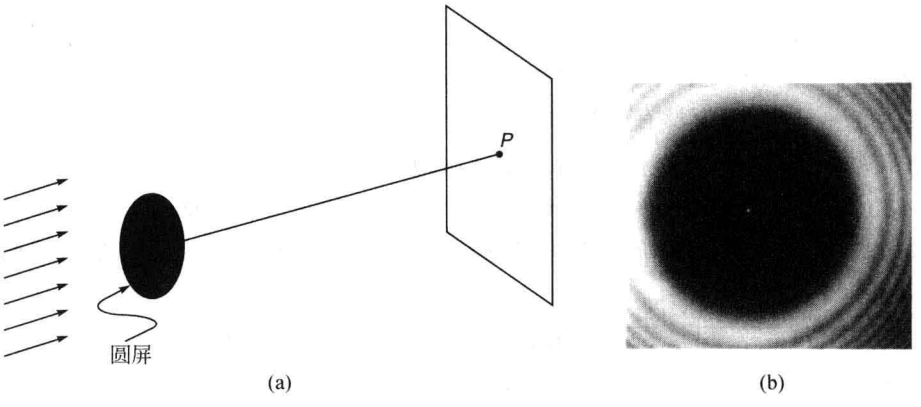


图 20.3

(a) 当一列平面波正入射到不透明圆屏上时,位于轴上的点上总能形成一个亮斑,被称为泊松亮斑;(b) 一枚一分钱硬币的阴影中心处的泊松亮斑;观察屏距离硬币 20m,光源距离硬币也是 20m(照片取自参考文献[2])

20.3 波带片

菲涅耳半波带概念的一个漂亮应用是波带片的制作。波带片是由许多同心圆组成的,这些同心圆的半径正比于自然数的平方根,并且将这些环形区每隔一个就涂黑(见

图 20.4)。设这些圆的半径为$\sqrt{1}K,\sqrt{2}K,\sqrt{3}K,\sqrt{4}K,\cdots$式中 K 为常数,且具有长度的量纲。考察距波带片为 K^2/λ 的点 P_1。相对于这一点涂黑的环对应于第 2,4,6,…半波带。因此,偶数的带被遮住了,点 P_1 的合振幅为(见图 20.5(a))

$$u_1+u_3+u_5+\cdots \tag{20.14}$$

此时强度有极大值。对于点 P_3 $\left(\text{距离波带片为}\dfrac{K^2}{3\lambda}\right)$,第一个涂黑的环含有并挡住了第 4,5,6 三个半波带,第二个涂黑的环含有并挡住了第 10,11,12 三个半波带,以此类推。合振幅可以表示为



图 20.4　波带片

$$(u_1-u_2+u_3)+(u_7-u_8+u_9)+\cdots \tag{20.15}$$

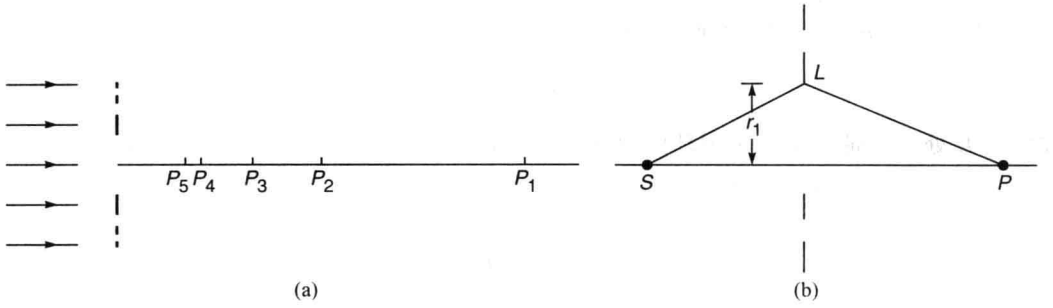


图　20.5

(a) 当平面波入射到波带片上时,强度极大值出现在点 $P_1,P_3,\cdots$处,极小值出现在点 $P_2,P_4,\cdots$处;

(b) 利用波带片对物点成像

这也对应着极大值,但它没有点 P_1 的强度大。在点 P_1 与点 P_3 的中间将存在一点 P_2 $\left(\text{距波带片的距离为}\dfrac{K^2}{2\lambda}\right)$,此时的合振幅为

$$(u_1-u_2)+(u_5-u_6)+\cdots \tag{20.16}$$

即,对于点 P_2 来说,第一个涂黑的环含有并挡住了第 3,4 两个半波带,以此类推,很明显,点 P_2 对应于极小值。因此,如果一列平面波正入射到波带片上时,以下各点对应于波带片的聚焦点,它们到波带片的距离分别为

$$\frac{K^2}{\lambda},\frac{K^2}{3\lambda},\frac{K^2}{5\lambda},\cdots \tag{20.17}$$

通过一些简单的计算可以看出,波带片(作为聚焦系统)会产生相当大的色差(见习题 20.3)。

例 20.1　假设波长 $\lambda=5\times10^{-5}$cm 的平面波入射到半径为 0.5mm 的圆孔上,试计算轴上的最亮点和最暗点的位置。

解　对于最亮点,圆孔应该只包含第一个波带,因此,必须有(见图 20.1)

$$0.05^2=\overline{OP}\times(5\times10^{-5})$$

可得

$$\overline{OP}=50\text{cm}$$

同理,最暗点的距离应为

$$\frac{(0.05)^2}{2\times 5\times 10^{-5}} = 25(\text{cm})$$

例 20.2 考虑半径为

$$r_n = 0.1\sqrt{n}\,\text{cm}$$

的波带片,对于波长为 $\lambda=5\times10^{-5}$ cm 的平面光,计算各个焦点的位置。

解 最强的焦点的距离为

$$\frac{r_1^2}{\lambda} = \frac{0.01}{5\times10^{-5}} = 200(\text{cm})$$

其他焦点的距离分别为 200/3cm,200/5cm,200/7cm,以此类推。在轴上任意两个相邻焦点之间都有一个暗点,对于这些暗点来说,波带片的第一个圆含有偶数个半波带。

波带片也可以用来对轴上的点进行成像。例如,如果点 S 有一点光源,当点 P 满足下列条件时,在点 P 成一明亮的像(见图 20.5(b))

$$\overline{SL}+\overline{LP}-\overline{SP} = \frac{\lambda}{2} \tag{20.18}$$

式中点 L 处于波带片第一个圆环的边缘上(见图 20.5(b))。如果第一个圆的半径为 r_1,则

$$\begin{aligned}\overline{SL}+\overline{LP}-\overline{SP} &= \sqrt{a^2+r_1^2}+\sqrt{b^2+r_1^2}-(a+b)\\ &\approx a\left(1+\frac{r_1^2}{2a^2}\right)+b\left(1+\frac{r_1^2}{2b^2}\right)-(a+b)\\ &\approx \frac{r_1^2}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\end{aligned} \tag{20.19}$$

则式(20.18)可变为

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{1}{f} \tag{20.20}$$

式中 $f=\dfrac{r_1^2}{\lambda}$ 表示焦距。式(20.20)与透镜成像定律很相似。波带片一个非常有趣的验证性实验是用微波($\lambda\sim1$cm)来做波带片实验,用尺寸~40cm×40cm 的有机玻璃上镶嵌铝环来代替波带片的暗环。

20.4 对菲涅耳衍射的更严谨探讨

在 19.2 节中,已经用更严谨的分析讨论了平面波照射不同形状孔径的衍射现象。现在考虑一列平面波(幅度为 A)正入射到一个如图 20.6 所示的孔径上的情况。根据惠更斯-菲涅耳原理,可以证明,(在距离孔 d 处的)屏 SS' 上的点 P 处场可表示为

$$u(P) = \frac{A}{\mathrm{i}\lambda}\iint\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{20.21}$$

式中积分涵盖了孔径的整个面积。现在假设在 $z=0$ 平面上的幅度和相位分布用 $A(\xi,\eta)$ 表示,则式(20.21)的积分可以改写为

$$u(P) = \frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\iint A(\xi,\eta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{20.22}$$

进一步,在菲涅耳近似下,(见式(19.9))式(20.22)的积分可以有以下形式

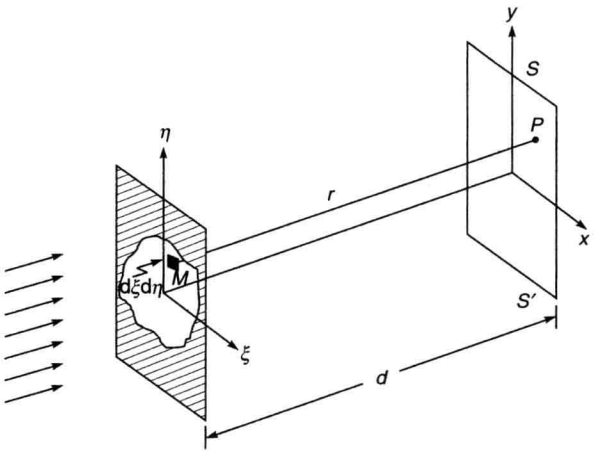


图 20.6　平面波正入射到一个孔径上

$$u(x,y,z)\approx\frac{1}{\mathrm{i}\lambda z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\iint A(\xi,\eta)\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{2z}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\right\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{20.23}$$

20.4.1　平面波正入射到圆孔的衍射

假设一平面波正入射到一个半径为 a 的圆孔上，如图 20.7 所示。z 轴垂直于圆孔所在的平面，假设屏幕 SS' 也垂直于 z 轴。根据对称性，很明显得出，可以在屏幕 SS' 上得到圆环状的条纹，但很难精确地计算出屏幕上的强度变化。因此，为了数学计算简单，只计算沿着 z 轴方向上的强度分布，显然，用柱坐标系可以使计算更方便。在此系统中，圆孔上任意一点 M 的坐标为 (ρ,ϕ)，其中 ρ 为点 M 到中心点 O 的距离，ϕ 为 OM 与 ξ 轴的夹角（见图 20.7）。则环绕点 M 的面积微元 $\mathrm{d}S=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi$。因此，有

$$u(P)\approx-\frac{\mathrm{i}A}{\lambda}\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi \tag{20.24}$$

又有

$$\rho^2+d^2=r^2$$

因此

$$\rho\mathrm{d}\rho=r\mathrm{d}r$$

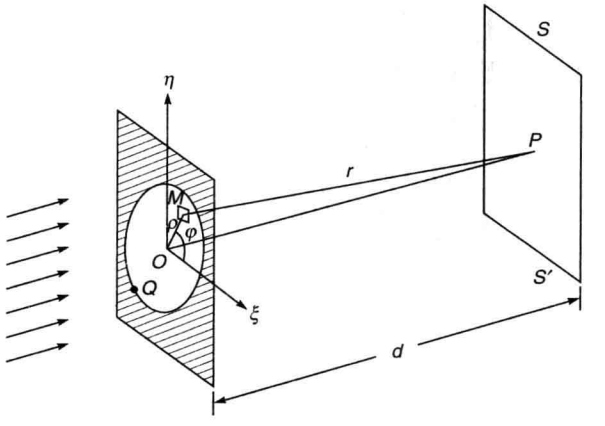


图 20.7　一平面波正入射到半径为 a 的圆孔上的衍射，点 Q 是孔边缘上的任意一点。

则式(20.24)可变为

$$u(P) \approx -\frac{\mathrm{i}A}{\lambda}\int_0^{2\pi}\int_d^{\sqrt{a^2+d^2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi \tag{20.25}$$

式(20.25)的积分很简单。由于 $k=2\pi/\lambda$,可得

$$u(P) \approx A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kd}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\pi}) \tag{20.26}$$

其中定义了

$$k(\sqrt{a^2+d^2}-d) = p\pi$$

上式表示了

$$\overline{QP}-\overline{OP} = \frac{p\lambda}{2}$$

其中点 Q 是圆孔边缘上的任意一点(见图 20.7)。由式(20.20)~式(20.26),可得

$$I(P) = 4I_0\sin^2\frac{p\pi}{2} \tag{20.27}$$

式中 I_0 为平面波的强度。由式(20.27)可知,当 p 为偶数或奇数时,即,$\overline{QP}-\overline{OP}$ 是 $\lambda/2$ 的偶数倍或奇数倍时,强度为零或达到极大值。这一点可以通过 20.2 节讨论过的菲涅耳半波带的概念来从物理上加以理解。如果圆孔包含了偶数个半波带,则此时点 P 的强度将小到可忽略不计;反之,若包含了奇数个半波带,则点 P 的强度取极大值。若 $d \ll a$(这是通常的情况),可得

$$p \approx \frac{k}{\pi}\left[d\left(1+\frac{a^2}{2d^2}\right)-d\right]$$

或者

$$p \approx \frac{a^2}{\lambda d} \tag{20.28}$$

p 称为孔径的菲涅尔数。如图 20.8 所示,绘出了相应的强度随无量纲函数

$$\frac{\lambda d}{a^2}$$

变化的曲线。

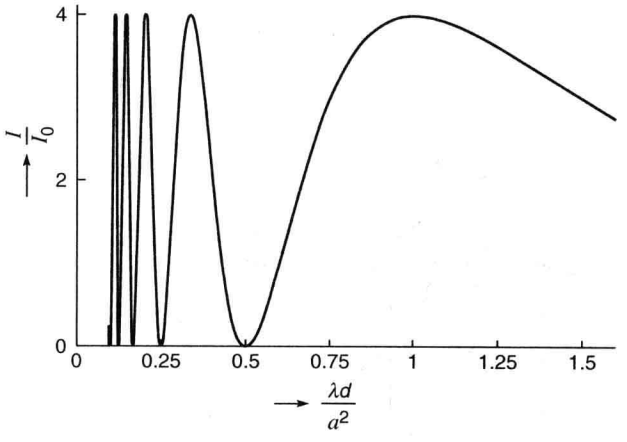


图 20.8 平面波正入射到半径为 a 的圆孔上时,位于轴线上点的强度变化情况。

如图 20.8 所示，当(圆)孔径包含有偶数个半波带时点 P 处的强度为零；当孔径包含有奇数个半波带时，点 P 强度取极大值。

20.4.2　圆屏衍射

下面考察一个半径为 a 的不透明圆屏产生的衍射图样(见图 20.3)。再次假设观察点在圆屏的轴上。由式(20.21)可知，为了计算场，必须在整个敞开区域里进行积分。显然，如果 $u_1(P)$ 和 $u_2(P)$ 分别表示一个圆孔和一个圆屏(半径相同)分别存在时，在点 P 产生的场，则

$$u_1(P)+u_2(P)=u_0(P) \tag{20.29}$$

式中 $u_0(P)$ 表示不存在任何孔或者屏时在点 P 产生的场。式(20.29)称为巴俾涅原理。因此，有

$$u_2(P)=u_0(P)-u_1(P)=u_0(P)-u_0(P)(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\pi})$$

或者

$$u_2(P)=u_0(P)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\pi} \tag{20.30}$$

其中 $u_1(P)$ 的推导根据式(20.26)，因此，圆屏轴线上点 P 的强度为

$$I_2(P)=|u_2(P)|^2=I_0(P) \tag{20.31}$$

式(20.31)给出了一个不寻常的结果，即，不透明圆屏轴上一点的强度等于圆屏不存在时该点的强度！这就是 20.2.2 节讨论过的泊松亮斑。

20.5　高斯光束的传播

当激光器振荡于基横模时，它的横向幅度分布是高斯型的，且从单模光纤输出的光也非常接近高斯分布。因此，研究高斯光束的衍射是非常重要的。假设高斯光束沿着 z 轴方向传输，它在 $z=0$ 处平面的振幅分布由下式给出

$$A(\xi,\eta)=a\exp\left(-\frac{\xi^2+\eta^2}{w_0^2}\right) \tag{20.32}$$

这里假设 $z=0$ 处的波阵面是平面。根据式(20.32)，在距离 z 轴 w_0 处的振幅按 $\frac{1}{\mathrm{e}}$ 因子衰减(即强度按 $\frac{1}{\mathrm{e}^2}$ 因子衰减)。w_0 被称为光束的光斑尺寸。将式(20.32)代入式(20.23)并积分，得(见附录 C)

$$u(x,y,z)\approx\frac{a}{(1+\mathrm{i}\gamma)}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi} \tag{20.33}$$

式中

$$\gamma=\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \tag{20.34}$$

$$w(z)=w_0(1+\gamma^2)^{1/2}=w_0\left(1+\frac{\lambda^2z^2}{\pi^2w_0^4}\right)^{1/2} \tag{20.35}$$

$$\Phi=kz+\frac{k}{2R(z)}(x^2+y^2) \tag{20.36}$$

$$R(z)\overset{\text{def}}{=\!=}z\left(1+\frac{1}{\gamma^2}\right)=z\left(1+\frac{\pi^2w_0^4}{\lambda^2z^2}\right) \tag{20.37}$$

因此,强度分布为

$$I(x,y,z)=\frac{I_0}{1+\gamma^2}\exp\left[-\frac{2(x^2+y^2)}{w^2(z)}\right] \tag{20.38}$$

这表明横向分布仍保持高斯型,并且光束宽度随 z 展宽,这实际上说明光束因衍射而发散。由式(20.35)可知,当 z 值很小时,光束宽度随 z 的平方增加;但是当 $z\gg\omega_0^2/\lambda$ 时,有

$$w(z)\approx w_0\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}=\frac{\lambda z}{\pi w_0} \tag{20.39}$$

这表示光束宽度随 z 线性增加。定义衍射角为

$$\tan\theta=\frac{w(z)}{z}\approx\frac{\lambda}{\pi w_0} \tag{20.40}$$

式(20.40)表明光束宽度的增长率与波长成正比,与光束的初始宽度成反比。为了做一些数值分析,假设 $\lambda=0.5\mu m$,则当 $w_0=1mm$ 时,在 $z=10m$ 处,有

$$2\theta\approx 0.018^\circ,\quad w\approx 1.88mm \tag{20.41}$$

同理,当 $w_0=0.25mm$ 时,在 $z=10m$ 处,有

$$2\theta\approx 0.073^\circ,\quad w\approx 6.35mm \tag{20.42}$$

(见图 20.9)。注意到,θ 随 w_0 的减小而增大(孔径的尺寸越小,衍射效应越强)。此外,对于给定 w_0 的情况,衍射效应随 λ 的减小而减弱。如图 20.10 所示为给定尺寸 $w_0=0.25mm$ 时,波长从 5000Å 变为 500Å 时的衍射发散减弱的变化。的确,如果 $\lambda\to 0$,那么,$\theta\to 0$,此时没有衍射,这是几何光学极限。由式(20.38),可以证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int I(x,y,z)\,dx\,dy=\frac{\pi w_0^2}{2}I_0 \tag{20.43}$$

式(20.43)与 z 无关。这正如所期望的那样,跨越整个 x-y 平面的总能量不随 z 变化。

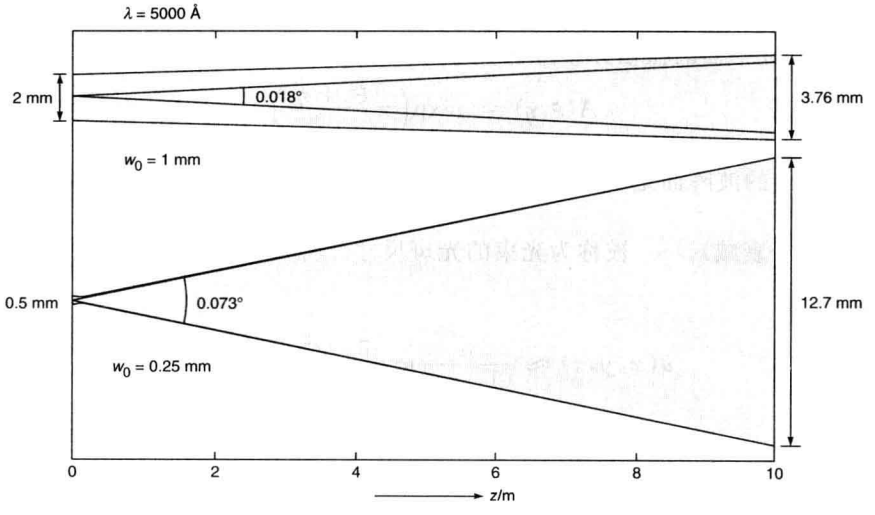


图 20.9 波前在 $z=0$ 为平面时的高斯光束的衍射发散。在波长为 5000Å 时,初始光斑尺寸由 1mm 降到 0.25mm 时,衍射发散加大。

现在,考察从原点发出的球面波,其场分布可由下式决定

$$u\sim\frac{1}{r}e^{ikr} \tag{20.44}$$

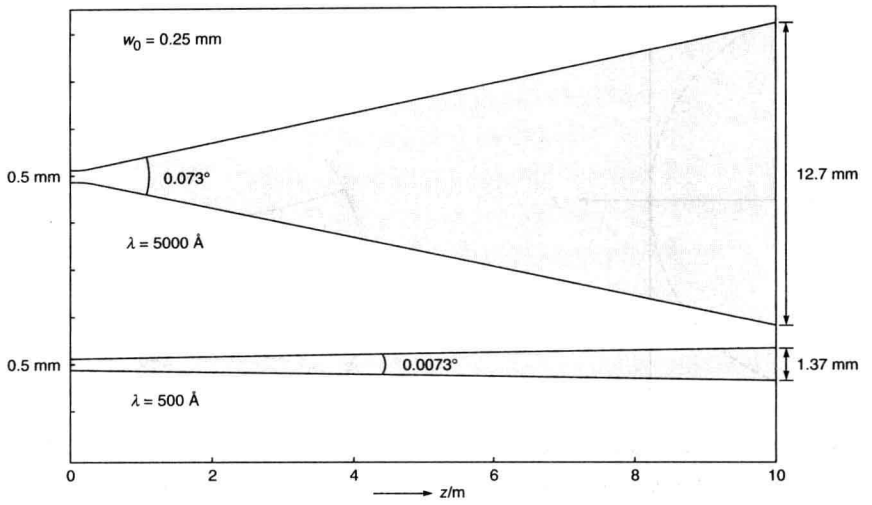


图 20.10　波前在 $z=0$ 为平面时的高斯光束的衍射发散。给定初始光斑尺寸为 $w_0=0.25\text{mm}$ 时，波长从 5000Å 减少到 500Å 时衍射发散变小。

在 $z=R$ 平面(见图 20.11)，有

$$r=(x^2+y^2+R^2)^{1/2} \tag{20.45}$$

则

$$r=R\left(1+\frac{x^2+y^2}{R^2}\right)^{1/2}\approx R+\frac{x^2+y^2}{2R} \tag{20.46}$$

其中假设 $|x|,|y|\ll R$。因此，在 $z=R$ 平面内，(半径为 R 的球面波的)相位分布由下式给出

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\approx \mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k}{2R}(x^2+y^2)} \tag{20.47}$$

式(20.47)说明(在 x-y 平面内)相位变化有如下形式

$$\exp\left[\mathrm{i}\frac{k}{2R}(x^2+y^2)\right] \tag{20.48}$$

的波表示一个半径为 R 的发散球面波。如果将式(20.48)与式(20.36)和式(20.37)相比较，可以得到波前曲率半径的近似表达式为(见图 20.11)

$$R(z)\approx z\left(1+\frac{\pi w_0^4}{\lambda^2 z^2}\right) \tag{20.49}$$

因此，随着光束的传输，它的波前由在 $z=0$ 处时的平面变成了曲面。如图 20.12 所示，为一束在两个半径为 R 的球面镜之间振荡的高斯光束(也可参见前附录图表页图 36)。在 $z=0$ 的平面处，波前为平面，光束有最小的光斑尺寸，被称为高斯光束的腰。当光束在球面镜腔内振荡时，波前必须具有与球面镜半径 R 相等的曲率半径。基于此，可得

$$R\approx\frac{d}{2}\left(1+\frac{4\pi w_0^4}{\lambda^2 d^2}\right) \tag{20.50}$$

式中 d 为两球面镜间的距离。

值得注意的是，尽管在推导式(20.33)时假设 z 足够大，但是在 $z=0$ 时，式(20.33)表示的场分布仍然是正确的。

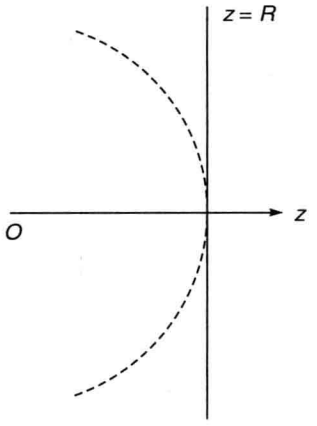


图 20.11　从点 O 发出的球面波，虚弧线表示距离光源为 R 处的球面波前的一部分。

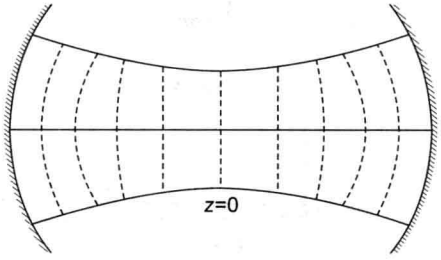
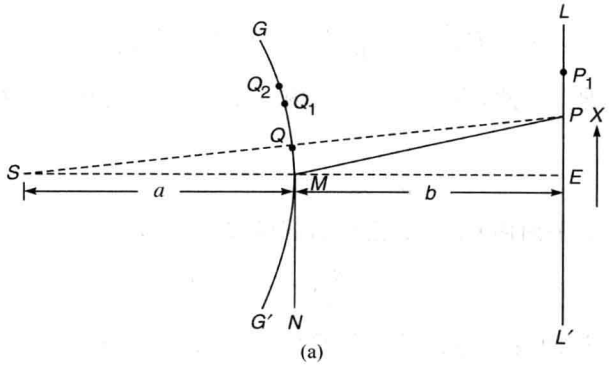


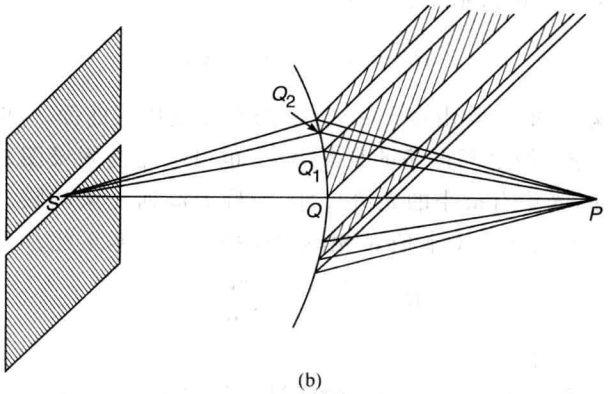
图 20.12　波前在 $z=0$ 时为平面的高斯光束的衍射发散，虚线代表波前。

20.6　直边衍射

考察一个垂直于纸面且平行于长狭缝 S 放置的直边 MN(见图 20.13)。希望计算出在屏幕 LL' 上的强度分布。根据实验的几何布置，显然，屏幕上在沿平行于直边长度的方向



(a)



(b)

图　20.13

(a) 直边衍射；(b) 柱面波前的半波带

上，强度是不变的。因此，衍射条纹（无论出现在哪里）将具有平行于直边的直线形状。下面首先会给出一个基于菲涅耳半波带的近似理论；然后再给出一个更严谨的分析。

20.6.1　基于菲涅耳半波带的分析

在本节中将给出一个基于菲涅耳半波带的近似理论。从狭缝发出的波前是柱面的，为了求出（屏幕上）任意一点 P 的振幅，按以下方法画出半波条带：设 $GQMG'$ 表示波前的一部分，点 Q 位于点 S 和点 P 的连线上。波前上的点 Q_1 和点 Q_2 满足条件

$$\begin{cases} \overline{SQ}_1 + \overline{Q_1P} - \overline{SQP} = \dfrac{\lambda}{2} \\ \overline{SQ}_2 + \overline{Q_2P} - \overline{SQP} = \dfrac{2\lambda}{2} \end{cases} \tag{20.51}$$

以此类推。这样，在柱面波前上划分出如图 20.13(b)所示的半波条带。但与菲涅耳半波带不同，这里的半波条带的面积是不等的，因此分析起来十分困难。即使如此，还是能够得出以下结论。

(1) 相对于几何阴影的边缘（见图 20.13(a)的点 E 处），波前有一半被直边遮住，因此振幅由下式给出

$$u(E) = \frac{1}{2}u_0 \tag{20.52}$$

式中 u_0 表示未受阻挡的波前（即直边不存在时）所产生的振幅。强度由下式给出

$$I(E) = \frac{1}{4}I_0 \tag{20.53}$$

(2) 假设点 P 满足以下关系

$$\overline{SM} + \overline{MP} - \overline{SQP} = \frac{\lambda}{2} \tag{20.54}$$

此时，只有波前下部的第一个半波条带有贡献，合振幅近似为

$$\frac{u_1}{2} + \frac{u_1}{4} = \frac{3u_1}{4} = \frac{3}{2}\left(\frac{u_1}{2}\right) = \frac{3}{2}u_0 \tag{20.55}$$

式中 $\dfrac{u_1}{2}$ 为波前下部的第一个半波条带所产生的振幅，$\dfrac{u_1}{4}$ 为波前的上半部所产生的合振幅（见式(20.12)），强度为 $\dfrac{9}{4}I_0$。对于图中的点 P_1，如果满足

$$\overline{SM} + \overline{MP}_1 - \overline{SP}_1 = \lambda \tag{20.56}$$

则在点 P_1 将得到极小值，合振幅为

$$\left(\frac{u_1}{2} - \frac{u_2}{2}\right) + \frac{u_1}{4} \tag{20.57}$$

一般来说，满足下面条件的任意一点 P，将对应于强度极大值

$$\overline{SM} + \overline{MP} - \overline{SP} = (2n+1)\frac{\lambda}{2}, \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{20.58}$$

如果满足下面条件的点 P，将对应于强度极小值

$$\overline{SM} + \overline{MP} - \overline{SP} = 2n\frac{\lambda}{2}, \quad n = 1,2,\cdots \tag{20.59}$$

由几何关系，有

$$\overline{MP}=(x^2+b^2)^{1/2}\approx b\left(1+\frac{1}{2}\frac{x^2}{b^2}\right)=b+\frac{x^2}{2b}$$

$$\overline{SP}=[x^2+(a+b)^2]^{1/2}\approx(a+b)+\frac{x^2}{2(a+b)}$$

则

$$\overline{SM}+\overline{MP}-\overline{SP}\approx a+b+\frac{x^2}{2b}-(a+b)-\frac{x^2}{2(a+b)}\approx\frac{ax^2}{2(a+b)b}$$

因此,当满足

$$x\approx\left[(2n+1)\frac{b(a+b)}{a}\lambda\right]^{1/2},\quad n=1,2,\cdots \tag{20.60}$$

时,得到极大值。例如,当 $a=b=25\text{cm}$,$\lambda=5\times10^{-5}\text{cm}$ 时,有

$$\left[\frac{b(a+b)}{a}\lambda\right]^{1/2}=5\times10^{-2}\text{cm}$$

因此,第1个极大值出现在离几何阴影边缘0.05cm处,而第2个和第3个极大值分别出现在离几何阴影边缘0.0866cm和0.112cm处。当逐渐远离几何阴影边缘时,相邻两个极大值之间的距离将逐渐缩短。同理,极小值的位置由下式给出

$$x\approx\left[2n\frac{b(a+b)}{a}\lambda\right]^{1/2},\quad n=1,2,3,\cdots \tag{20.61}$$

对于如上参数,第1极小值和第2极小值将出现离几何阴影边缘0.07cm和0.10cm处。通过确定这些极大值和极小值的位置,可以计算出波长。根据这样粗略的分析是很难计算出强度的精确分布的,接下来将给出更严谨的理论。

20.6.2 对平面波的直边衍射的更严谨分析

在讨论直边衍射图样之前,先介绍一下菲涅耳积分。

菲涅耳积分:菲涅耳积分由下面的公式来定义

$$C(\tau)=\int_0^\tau\cos\left(\frac{1}{2}\pi u^2\right)\mathrm{d}u \tag{20.62}$$

$$S(\tau)=\int_0^\tau\sin\left(\frac{1}{2}\pi u^2\right)\mathrm{d}u \tag{20.63}$$

由于被积函数是的 τ 的偶函数,所以,菲涅耳积分 $C(\tau)$ 与 $S(\tau)$ 是对 τ 的奇函数,有

$$C(-\tau)=-C(\tau),\quad S(-\tau)=-S(\tau) \tag{20.64}$$

又有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{20.65}$$

则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi u^2/2}\mathrm{d}u=\sqrt{\frac{\pi}{-\mathrm{i}\pi/2}}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}=1+\mathrm{i} \tag{20.66}$$

因为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi u^2}{2}\right)\mathrm{d}u=2\left[\int_0^\infty\cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\mathrm{d}u+\mathrm{i}\int_0^\infty\sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\mathrm{d}u\right]=2[C(\infty)+\mathrm{i}S(\infty)]$$

因此,根据式(20.66),可得

$$C(\infty)=\frac{1}{2}=S(\infty)$$

总结一下，菲涅耳积分具有下列重要性质

$$C(\infty)=S(\infty)=\frac{1}{2},\quad C(0)=S(0)=0 \tag{20.67}$$

$$C(-\tau)=-C(\tau),\quad S(-\tau)=-S(\tau) \tag{20.68}$$

对一些典型的 τ 值，计算出的菲涅耳积分值列表于表 20.1。

表 20.1　菲涅耳积分积分表[①]

$$C(\tau)=\int_0^{\tau}\cos\left(\frac{1}{2}\pi v^2\right)\mathrm{d}v,\quad S(\tau)=\int_0^{\tau}\sin\left(\frac{1}{2}\pi v^2\right)\mathrm{d}v$$

τ	$C(\tau)$	$S(\tau)$	τ	$C(\tau)$	$S(\tau)$
0.0	0.00000	0.00000	2.6	0.38894	0.54999
0.2	0.19992	0.00419	2.8	0.46749	0.39153
0.4	0.39748	0.03336	3.0	0.60572	0.49631
0.6	0.58110	0.11054	3.2	0.46632	0.59335
0.8	0.72284	0.24934	3.4	0.43849	0.42965
1.0	0.77989	0.43826	3.6	0.58795	0.49231
1.2	0.71544	0.62340	3.8	0.44809	0.56562
1.4	0.54310	0.71353	4.0	0.49843	0.42052
1.6	0.36546	0.63889	4.2	0.54172	0.56320
1.8	0.33363	0.45094	4.4	0.43833	0.46227
2.0	0.48825	0.34342	4.6	0.56724	0.51619
2.2	0.63629	0.45570	4.8	0.43380	0.49675
2.4	0.55496	0.61969	5.0	0.56363	0.49919
			∞	0.5	0.5

如图 20.14 所示，为菲涅尔积分的参量表示，被称为考纽螺线。水平轴和垂直轴分别表示$C(\tau)$和 $S(\tau)$。螺线上标注的数字为 τ。如图 20.14 所示，当 $\tau=1.0$ 时，$C(\tau)\approx0.77989$，$S(\tau)\approx0.43826$。

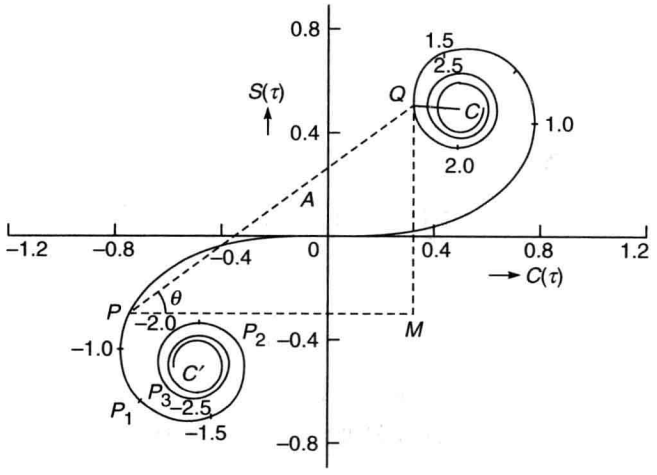


图 20.14　以 $C(\tau)$和 $S(\tau)$为参数绘制的考纽螺线

① 表引自参考文献[5]，更详细(具有更精确的值)的内容可以在那里找到。

现在,回到20.6.1节所讨论的直边衍射图样的计算,在20.6.1节的讨论是定性的。本节中将更严谨地分析平面波正入射到直边所产生的衍射问题(见图20.15)。再一次看出,沿 x 轴方向的强度是不变的。因而,为不失普遍性,可以假设屏幕上任意一点 P 的坐标为 $(0,y)$,这里已假设原点位于几何阴影的边缘上。如果在直边平面上任意一点 M 的 x,y 坐标用 ξ 和 η 表示,则

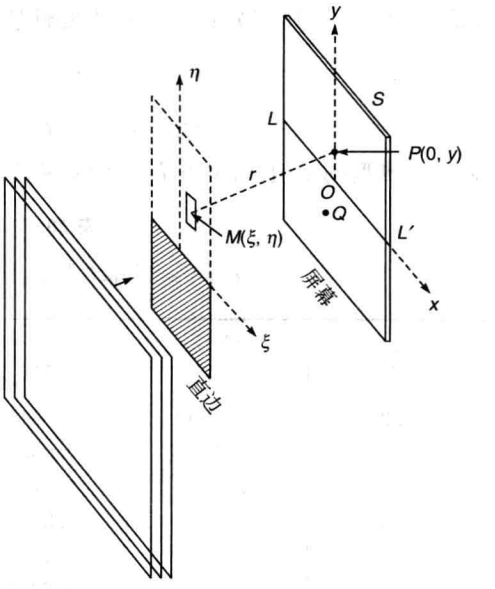


图 20.15 平面波正入射到直边上的衍射

$$\begin{aligned} r=\overline{MP}&=[\xi^2+(\eta-y)^2+d^2]^{1/2}\\ &=d\left[1+\frac{\xi^2+(\eta-y)^2}{d^2}\right]^{1/2}\\ &\approx d+\frac{\xi^2+(\eta-y)^2}{2d} \end{aligned} \tag{20.69}$$

式中 d 为直边与屏幕之间的距离。将 r 的表达式(20.69)代入式(20.21),可得

$$u(P)\approx-\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\frac{A}{d}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}\eta\exp\left\{\mathrm{i}k\left[d+\frac{\xi^2+(\eta-y)^2}{2d}\right]\right\} \tag{20.70}$$

式中被积函数分母中的 r 已用 r 的最小值 d 来代替①。为了用菲涅耳积分表达式(20.70),引入了两个无量纲的变量 u 和 v,且由下式定义

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\pi u^2=\dfrac{k}{2d}\xi^2=\dfrac{\pi}{\lambda d}\xi^2\\[2ex] \dfrac{1}{2}\pi v^2=\dfrac{k}{2d}(\eta-y)^2=\dfrac{\pi}{\lambda d}(\eta-y)^2\end{cases}$$

因此,可以假设 u 和 v 由下式定义

$$\begin{cases}u=\sqrt{\dfrac{2}{\lambda d}}\xi\\[2ex] v=\sqrt{\dfrac{2}{\lambda d}}(\eta-y)\end{cases} \tag{20.71}$$

利用代换,式(20.70)可变为

$$u(P)=-\frac{\mathrm{i}}{2}u_0\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi u^2}{2}\right)\mathrm{d}u\int_{v_0}^{\infty}\exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi v^2}{2}\right)\mathrm{d}v \tag{20.72}$$

式中

$$\begin{aligned} v_0&=-\sqrt{\frac{2}{\lambda d}}y\\ u_0&=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kd} \end{aligned} \tag{20.73}$$

表示不存在直边时点 P 的场。为了计算强度分布,应用菲涅耳积分公式,可得

① 这样的替换是合理的,因为在进行积分时,只有在 $r=d$ 周围的小区域才会对积分有贡献。较远的点对此的贡献很小,因为积分函数的指数项会随着距离增加快速振荡衰减(见19.2节的脚注)。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi u^2}{2}\right)\mathrm{d}u = 2[C(\infty)+\mathrm{i}S(\infty)] = 1+\mathrm{i} \tag{20.74}$$

此外，有

$$\begin{aligned}\int_{v_0}^{\infty}\exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi v^2}{2}\right)\mathrm{d}v &= \left[\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)\mathrm{d}v-\int_0^{v_0}\cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)\mathrm{d}v\right]\\ &\quad+\mathrm{i}\left[\int_0^{\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)\mathrm{d}v-\int_0^{v_0}\sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)\mathrm{d}v\right]\\ &=\left[\frac{1}{2}-C(v_0)\right]+\mathrm{i}\left[\frac{1}{2}-S(v_0)\right]\end{aligned} \tag{20.75}$$

代入式(20.72)，得

$$\begin{aligned}u(P) &= -\frac{\mathrm{i}}{2}u_0(1+\mathrm{i})\left\{\left[\frac{1}{2}-C(v_0)\right]+\mathrm{i}\left[\frac{1}{2}-S(v_0)\right]\right\}\\ &=\frac{1-\mathrm{i}}{2}u_0\left\{\left[\frac{1}{2}-C(v_0)\right]+\mathrm{i}\left[\frac{1}{2}-S(v_0)\right]\right\}\end{aligned} \tag{20.76}$$

离几何阴影边缘很远的点对应于大的 y，注意到这一点是有趣地。对于这样的点，v_0 将趋于 $-\infty$(见式(20.73))，可得

$$u(P) = \frac{1-\mathrm{i}}{2}u_0\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\right] = u_0 \tag{20.77}$$

这样的点的振幅与直边不存在时的情形相同，这正是所期待的结果。同时，这也证明了式(20.21)中积分前给出的常系数是有依据的[①]。另一方面，如果点 P 在几何阴影区的深部(即当 $y\to-\infty$时，有 $v_0\to\infty$)时，有

$$C(v_0) = S(v_0)\to\frac{1}{2}$$

可得

$$u(P)\to 0$$

实际上也确实如此。与式(20.76)相应的强度分布由下式给出

$$I(P) = \frac{1}{2}I_0\left\{\left[\frac{1}{2}-C(v_0)\right]^2+\left[\frac{1}{2}-S(v_0)\right]^2\right\} \tag{20.78}$$

如果点 P 在几何阴影区的边缘上(即在 LL' 上，见图 20.15)，那么，$y=0$，从而 $v_0=0$，有

$$I(P) = \frac{1}{2}I_0\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}I_0 \tag{20.79}$$

其中用到了 $C(0)=S(0)=0$ 这一事实，因此，在几何阴影区边缘上的强度是直边不存在时的强度的$\frac{1}{4}$(见式(20.53))。为了确定任意一点 P 的场，可以根据表 20.1，计算出式(20.78)右边的值。强度的变化曲线如图 20.16 的所示，并可以得出以下几点结论。

(1) 如图 20.16 所示为一条普适曲线，即，给定 λ 和 d，只需计算出观察点沿着 y 轴移动时的 v_0，就可以得到强度变化。例如，头三个极大值发生在

$$\left.\begin{aligned}&\text{当 } v_0\approx-1.22 \text{ 时，强度为 } I\approx 1.37I_0\\ &\text{当 } v_0\approx-2.34 \text{ 时，强度为 } I\approx 1.20I_0\\ &\text{当 } v_0\approx-3.08 \text{ 时，强度为 } I\approx 1.15I_0\end{aligned}\right\}\text{取极大值}$$

① 译者注：即式(20.21)中的系数$\frac{1}{\mathrm{i}\lambda}$。

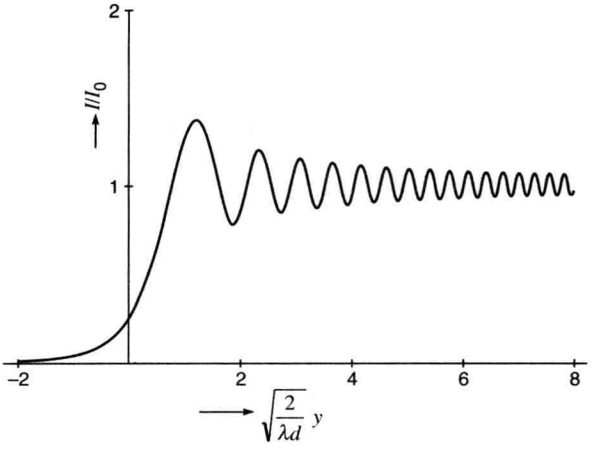


图 20.16　直边衍射图样的强度变化曲线

同理,头三个极小值发生在

$$\left.\begin{aligned}&\text{当 } v_0 \approx -1.87 \text{ 时,强度为 } I \approx 0.778 I_0\\&\text{当 } v_0 \approx -2.74 \text{ 时,强度为 } I \approx 0.843 I_0\\&\text{当 } v_0 \approx -3.39 \text{ 时,强度为 } I \approx 0.872 I_0\end{aligned}\right\}\text{取极小值}$$

因此,当进入几何阴影区内部时,强度调制下降(见图 20.16)。

(2) 对于一个给定的实验装置,决定极大值和极小值的位置是相当简单的。例如,对于参数 $\lambda=6\times10^{-5}$cm 和 $d=120$cm,有

$$y=-\sqrt{\frac{\lambda d}{2}}v_0=-0.06v_0\,\text{cm}$$

头三个极大值发生在

$$y\approx 0.732\text{mm},1.404\text{mm},1.848\text{mm}$$

同理,头三个极小值发生在

$$y\approx 1.122\text{mm},1.644\text{mm},2.034\text{mm}$$

这些结果可以与 20.6.1 节中的结果进行对比。

(3) 当进入几何阴影区时,强度单调地下降到零。

(4) 也可以直接由考纽螺线(见图 20.14)研究强度变化。根据考纽螺线,可以得到以下性质。有

$$[C(\tau_2)-C(\tau_1)]+\mathrm{i}[S(\tau_2)-S(\tau_1)]\overset{\text{def}}{=\!=}A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\tag{20.80}$$

则

$$C(\tau_2)-C(\tau_1)=A\cos\theta$$
$$S(\tau_2)-S(\tau_1)=A\sin\theta$$

令考纽螺线上的点 P 和点 Q(见图 20.14)分别对应于 $\tau=\tau_1$ 和 $\tau=\tau_2$。显然,有

$$\overline{PM}=C(\tau_2)-C(\tau_1)=A\cos\theta$$
$$\overline{QM}=S(\tau_2)-S(\tau_1)=A\sin\theta$$

因此点 P 和点 Q 连线的长度为 A，且 PQ 与横坐标轴的夹角为 θ。为了利用考纽螺线，重新写出式(20.76)

$$u=\frac{1-\mathrm{i}}{2}u_0\left\{\left[\frac{1}{2}-C(v_0)\right]+\mathrm{i}\left[\frac{1}{2}-S(v_0)\right]\right\}$$

首先考虑观察点 Q 是处在几何阴影区内，则 v_0 是正数。令点 Q 在考纽螺线上对应 $\tau=v_0$(见图 20.14)。由于螺线上的点 C 对应于 $\tau=\infty$，有

$$\left[\frac{1}{2}-C(v_0)\right]+\mathrm{i}\left[\frac{1}{2}-S(v_0)\right]=\overline{QC}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$$

式中 ψ 为 QC 与横坐标轴的夹角(见式(20.80))，则

$$u(Q)=\frac{1-\mathrm{i}}{2}\overline{QC}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}u_0$$

或者

$$I(Q)=\frac{1}{2}(\overline{QC})^2I_0 \tag{20.81}$$

容易看出，当观察点移入阴影区时，v_0 值增加。因此，点 Q 沿螺线逐渐移向点 C，$\overline{QC}$ 均匀缩短，因此，在阴影区内强度均匀地降到零(见图 20.16 和图 20.17)。

当从几何阴影区的边缘移向照明区时，v_0 值变为负的，(考纽螺线上)对应的点 P 位于第三象限，如图 20.14 所示。强度的公式仍为

$$I(P)=\frac{1}{2}(\overline{PC})^2I_0$$

当 v_0 值在负向越来越大时，$\overline{PC}$ 不断增大，直到点 P 到达对应于 $v_0\approx-1.22$ 的点 P_1 为止。点 P_1 的强度是极大值，此时 $\overline{P_1C}\approx1.66$，相应的强度为

$$I(P_1)\approx\frac{1}{2}\times(1.66)^2I_0\approx1.37I_0 \tag{20.82}$$

当 v_0 值进一步负向增大时，PC 开始缩短，直到点 P 到达点 P_2 为止。因此，在照明区不断上移时，强度围绕着 I_0 持续不断地振荡，只是振荡的幅度渐渐变小(见图 20.16 和图 20.17)。

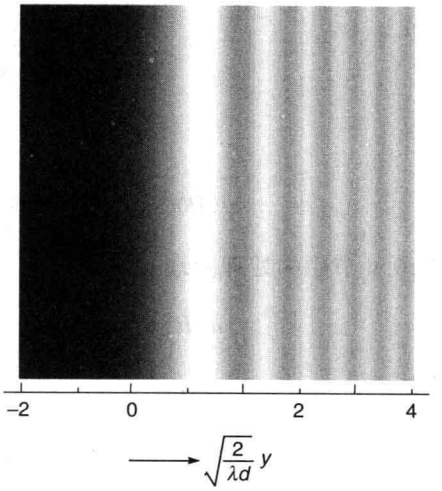


图 20.17　电脑产生的直边衍射图样

20.7　平面波被长狭缝衍射以及向夫琅禾费衍射的过渡

下面考虑一列平面波正入射到宽度为 b 的长狭缝上，如图 20.18 所示。希望计算屏幕 SS' 上的任意一点 P 的强度。直线 LL' 和 MM' 表示几何阴影区的边缘。可以再次看出，沿着 x 轴方向的强度没有变化，为不失一般性，可以假设点 P 的坐标为 $(0,y)$。在点 P 的场仍由式(20.70)给出，只不过现在对 η 积分的积分限为 $-b/2\sim+b/2$(假设坐标原点在缝的中心)。因此，有

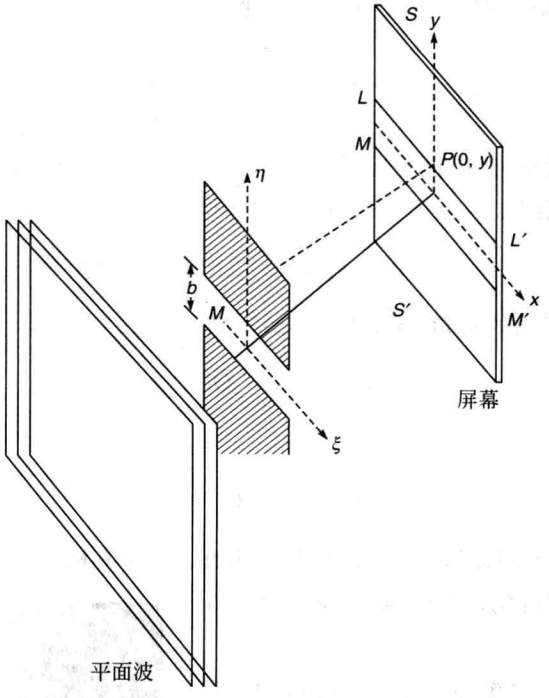


图 20.18　平面波正入射到一长狭缝时的衍射

$$u(P) = -\frac{\mathrm{i}A}{\lambda d}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\int_{-b/2}^{+b/2}\mathrm{d}\eta\exp\left\{\mathrm{i}k\left[d+\frac{\xi^2+(\eta-y)^2}{2d}\right]\right\}$$

与 20.6 节中的处理同理,得

$$u(P) = -\frac{\mathrm{i}}{2}u_0\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi u^2}{2}\right)\mathrm{d}u\int_{-(v_2+v_1)}^{-(v_2-v_1)}\exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi v^2}{2}\right)\mathrm{d}v$$

式中

$$u=\sqrt{\frac{2}{\lambda d}}\xi,\quad v=\sqrt{\frac{2}{\lambda d}}(\eta-y)$$

$$v_1=\sqrt{\frac{2}{\lambda d}}\frac{b}{2},\quad v_2=\sqrt{\frac{2}{\lambda d}}y$$

根据式(20.66),可得

$$u(P) = -\frac{\mathrm{i}}{2}u_0(1+i)$$
$$\times\left\{\int_0^{-(v_2-v_1)}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)\right]\mathrm{d}v-\int_0^{-(v_2+v_1)}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)\right]\mathrm{d}v\right\}$$

或者

$$u(P)=\frac{(1-\mathrm{i})}{2}u_0\{[C(v_2+v_1)-C(v_2-v_1)]+\mathrm{i}[S(v_2+v_1)-S(v_2-v_1)]\}\tag{20.83}$$

这里用到了式(20.64)。因此,强度分布为

$$I(P)=\frac{1}{2}I_0\{[C(v_2+v_1)-C(v_2-v_1)]^2+[S(v_2+v_1)-S(v_2-v_1)]^2\} \quad (20.84)$$

对于一个给定的系统，λ，d 和 b 是已知的，从而可以确定 v_1。例如，当 $\lambda=5\times10^{-5}$cm，$d=100$cm 和 $b=0.1$cm 时，可得 $v_1=2.0$。另一方面，当 y 在屏幕上变化时，v_2 也跟着变化。如图 20.19～图 20.22 所示，分别对应于 $v_1=0.5$，1.0，1.5 和 5.0 的情况，绘出了强度随 v_2 变化的曲线。可以看出，当 v_1 很大(即缝很宽)时，衍射图样就像两直边分别产生的衍射图样拼接在一起一样，这确实也是可以估计的。另一方面，当 v_1 很小(即观察屏离缝很远时)，衍射图样实质上是夫琅禾费型的。为了清楚地证明这一点，注意到

$$v_2=\sqrt{\frac{2}{\lambda d}}y=\sqrt{\frac{2d}{\lambda}}\frac{y}{d}\approx\sqrt{\frac{2d}{\lambda}}\theta \quad (20.85)$$

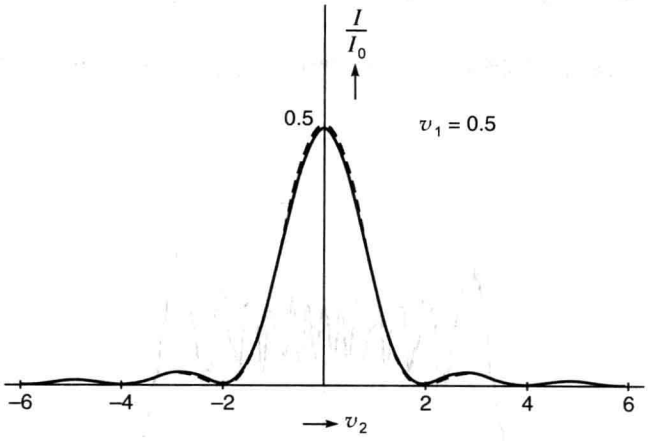


图 20.19　$v_1=0.5$ 时，平面波在长狭缝上衍射所产生的强度分布，虚线对应于式(20.86)。

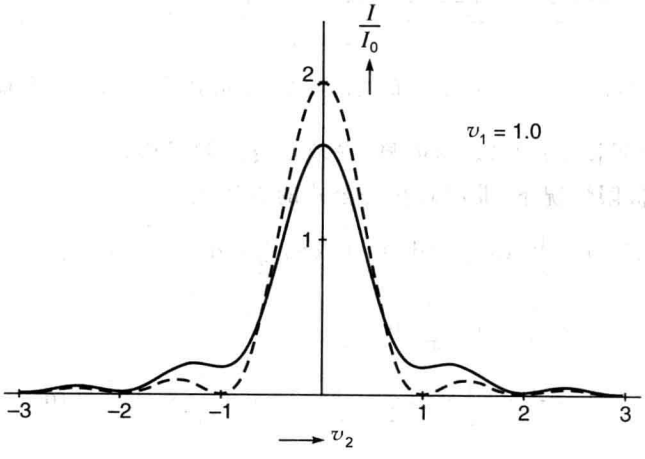


图 20.20　$v_1=1.0$ 时，平面波在长狭缝上衍射所产生的强度分布，虚线对应于式(20.86)。

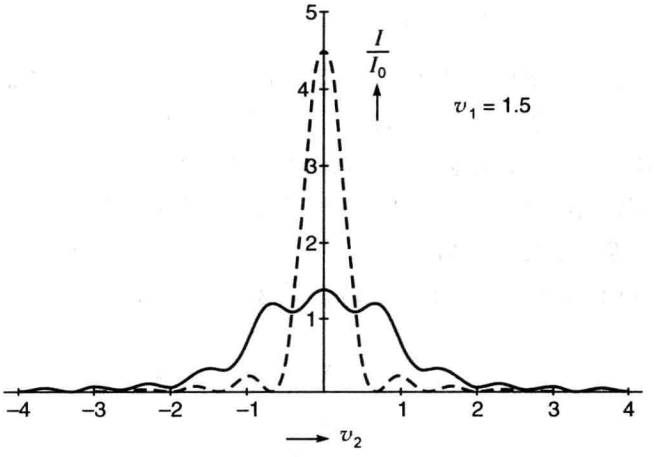


图 20.21　$v_1 = 1.5$ 时，平面波在长狭缝上衍射所产生的强度分布，虚线对应于式(20.86)。

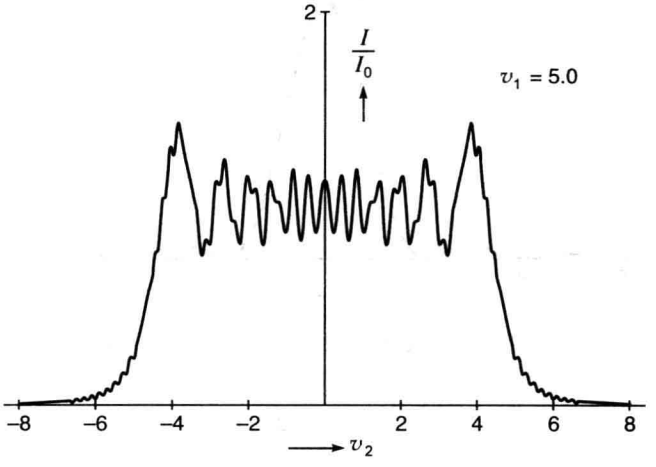


图 20.22　$v_1 = 5.0$ 时，平面波在长狭缝上衍射所产生的强度分布。

式中 θ 表示衍射角(见图 20.23)。很明显，夫琅禾费衍射意味着 d 很大，v_2 也很大，因此，必须找出在 $v \to \infty$ 的极限情况下，菲涅耳积分公式的表达式。可以写出

$$\begin{aligned} C(v) &= \int_0^v \cos\frac{\pi}{2}v^2\,\mathrm{d}v = \int_0^\infty \cos\frac{\pi}{2}v^2\,\mathrm{d}v - \int_v^\infty \cos\frac{\pi}{2}v^2\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2} - \int_v^\infty \frac{1}{\pi v}\cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)\pi v\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi v}\sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)\Big|_v^\infty + \int_v^\infty \frac{1}{\pi v^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)\mathrm{d}v \\ &\approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi v}\sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right) \end{aligned}$$

式中忽略了 $\frac{1}{v^3}$ 级次的项。同理，可得

$$S(v) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi v}\cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)$$

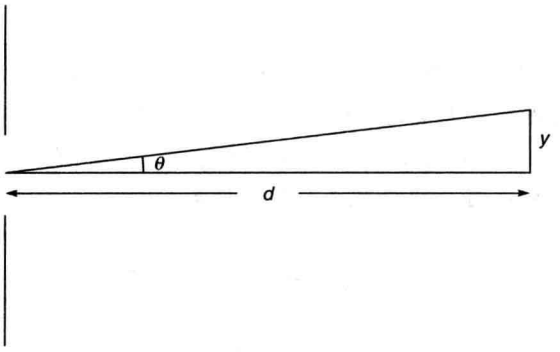


图 20.23　在夫琅禾费区，d 很大

既然 v_2 很大而 v_1 很小，可得

$$C(v_2+v_1)-C(v_2-v_1)\approx\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi v_2}\sin\frac{\pi}{2}(v_2+v_1)^2\right]-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi v_2}\sin\frac{\pi}{2}(v_2-v_1)^2\right]$$

$$\approx\frac{2}{\pi v_2}\cos\frac{\pi}{2}(v_2^2+v_1^2)\sin(\pi v_1 v_2)$$

同理，有

$$S(v_2+v_2)-S(v_2-v_1)\approx\frac{2}{\pi v_2}\sin\frac{\pi}{2}(v_2^2+v_1^2)\sin(\pi v_1 v_2)$$

因此，在夫琅禾费极限下，式(20.84)变为

$$I(P)=\frac{1}{2}I_0\left[\frac{4}{\pi^2 v_2^2}\sin^2(\pi v_1 v_2)\right]=I_{00}\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}\tag{20.86}$$

式中

$$I_{00}=2I_0 v_1^2$$

$$\beta=\pi v_1 v_2=\frac{\pi}{\lambda d}by\approx\frac{\pi b}{\lambda}\theta\tag{20.87}$$

式中

$$\theta\approx\frac{y}{d}\tag{20.88}$$

表示衍射角。式(20.86)表明强度分布的确是夫琅禾费型的(见 18.2 节)。如图 20.19～图 20.22 所示的虚线对应于式(20.86)。可以看出，当 $v_1\leqslant 0.5$ 时，强度分布就几乎为夫琅禾费型的了。

小　结

- 衍射理论的最根本的原理是惠更斯-菲涅耳原理：波前上的每一点都是一个次级扰动源，不同点发出的次级子波之间相互干涉。
- 平面波正入射到一个半径为 a 的圆孔上时，轴上点 P 的强度分布为

$$I=I_0\sin^2\frac{p\pi}{2}$$

式中

$$p \approx \frac{a^2}{\lambda d}$$

λ 为波长，d 为点 P 距离圆孔中心的长度。p 被称作孔径的菲涅耳数。当 $p=1,3,5,7,\cdots$ 时，得到强度极大值，此时圆孔(相对于点 P)包含有奇数个菲涅耳半波带；当 $p=2,4,6,8,\cdots$ 时，得到强度极小值，此时圆孔包含有偶数个菲涅耳半波带。

- 如果用一个不透明圆屏代替圆孔，将在屏后的轴上得到一个亮斑，被称为“泊松亮斑”。
- 对于一高斯光束(其在 $z=0$ 的波前是平面)，光斑尺寸由下式给出

$$w(z) \approx w_0 \left(1 + \frac{\lambda^2 z^2}{\pi^2 w_0^4}\right)^{1/2}$$

式中 w_0 是在 $z=0$ 处的光斑尺寸。当 z 很大时，有

$$w(z) \approx \frac{\lambda z}{\pi w_0}$$

表明光束宽度将随 z 线性增加，定义衍射角为

$$\tan\theta = \frac{w(z)}{z} \approx \frac{\lambda}{\pi w_0}$$

表明宽度的增长率正比于波长，反比于光束的初始宽度，这恰是衍射的特征。相应波前的曲率半径为

$$R(z) \approx z\left(1 + \frac{\pi^2 w_0^4}{\lambda^2 z^2}\right)$$

- 当平面波正入射到一直边上时，(距离直边为 d 的)屏幕上的光强变化为

$$I = \frac{1}{2} I_0 \left\{ \left[\frac{1}{2} - C(v_0)\right]^2 + \left[\frac{1}{2} - S(v_0)\right]^2 \right\}$$

式中 I_0 为直边不存在时的强度。

$$v_0 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda d}} y$$

y 为考察点到直边的几何阴影区的距离。且

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{1}{2}\pi u^2\right) \mathrm{d}u$$

$$S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{1}{2}\pi u^2\right) \mathrm{d}u$$

被称为菲涅耳积分公式，当进入几何阴影区深处的时候，强度单调地降至零。如果从几何阴影区边缘开始向被照明的区域上移时，可以在 $v_0 \approx -1.22$ ($I \approx 1.37 I_0$)，-2.34 ($I \approx 1.20 I_0$)，-3.08 ($I \approx 1.15 I_0$)，$\cdots$ 处得到极大值；而在 $v_0 \approx -1.87$ ($I \approx 0.78 I_0$)，-2.74 ($I \approx 0.84 I_0$)，-3.39 ($I \approx 0.87 I_0$)，$\cdots$ 处得到极小值。

- 当一列平面波正入射到一个宽度为 b 的长狭缝时，(距离狭缝为 d 的)屏幕上的强度变化为

$$I = \frac{1}{2} I_0 \{[C(v_2 + v_1) - C(v_2 - v_1)]^2 + [S(v_2 + v_1) - S(v_2 - v_1)]^2\}$$

式中

$$v_1 = \sqrt{\frac{2}{\lambda d}} \frac{b}{2}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda d}} y$$

y 为观察点到几何阴影区边缘的距离，当 v_1 变大时，将得到相当于两直边衍射图样拼接的强度分布；当 $v_1 \to 0$ 时，将得到夫琅禾费衍射图样。

习　题

20.1　一波长为 6×10^{-5}cm 的平面波正入射到半径为 0.01cm 的圆孔上，试计算轴上亮点和暗点的位置。

[**答案**：$d\approx1.67$cm，0.56cm，0.33cm，…（极大值）
$d\approx0.83$cm，0.42cm，…（极小值）]

20.2　如果用一个半径相等的不透明圆屏代替习题 20.1 中的圆孔，结果将会怎样？

20.3　(1) 平面波正入射到一个半径为 a 的圆孔时（$\lambda=6\times10^{-5}$cm），①假设 $a=1$mm，计算轴上强度取极大值的 z，并绘出随 z 变化的强度图，进行物理的解释。②假设 $z=50$cm，计算轴上强度取极小值时的 a 值，并绘出随 a 变化的强度图，进行物理的解释。

(2) 当 $\lambda=5\times10^{-5}$cm 时，重新计算(1)，并讨论波带片的色差。

[**答案**：(1) ①$z=166.7$cm，55.6cm，33.3cm，…（极大值）；②强度极小值发生在 $a\approx0.0775$cm，0.110cm，0.134cm，…]

20.4　考虑一直径为 2mm 的圆孔被一平面波照射时，轴上光强最强点距离孔 200cm，试计算该平面波的波长。

[**答案**：5×10^{-5}cm]

20.5　如果一个波带片对于 $\lambda=6\times10^{-5}$cm 的光有 50cm 长的主焦距，试写出各波带半径的表示式。如果 $\lambda=5\times10^{-5}$cm 时，波带片的主焦距又为多少？

[**答案**：$\sqrt{0.3n}$mm，60cm]

20.6　有一个波带片的第 2，4，6，…条带被涂黑。假如它们不被涂黑，而替换成将第 1，3，5，…条带涂黑，结果会怎样？

20.7　(1) 一列平面波正入射到一直边上（见图 20.24），证明任一点 P 的场由下式给出

$$u(P)=\frac{1-\mathrm{i}}{2}u_0\left\{\left[\frac{1}{2}-C(v_0)\right]+\mathrm{i}\left[\frac{1}{2}-S(v_0)\right]\right\}$$

式中

$$v_0=-\sqrt{\frac{2}{\lambda d}}y$$

(2) 假设 $\lambda_0=5000$Å 和 $d=100$cm。根据表 20.1，写出在点 O（点 O 在几何阴影区的边缘），$P(y=0.5\text{mm})$，$Q(y=1\text{mm})$，$R(y=-1\text{mm})$处的 I/I_0 的近似值。

[**答案**：(2) $I/I_0\approx1.26$，0.24，0.01]

20.8　考虑一直边被一束波长 $\lambda=6\times10^{-5}$cm 的平行光束照射，观察屏距离直边 50cm，试计算屏幕上头两个极大值和极小值的位置。

[**答案**：头两个极大值位于 $y\approx0.0473$cm 和 0.0906cm；
头两个极小值位于 $y\approx0.0724$cm 和 0.1061cm]

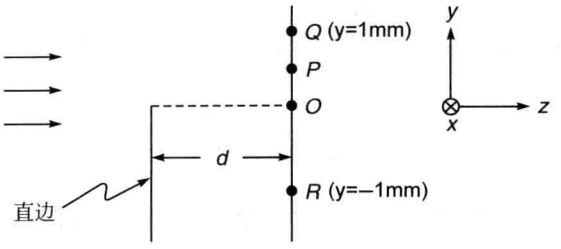


图 20.24　习题 20.7 图

20.9　在直边衍射图样中观察到，在观察屏内，最强的极大值离几何阴影区边缘距离 1mm。如果观察屏与直边的距离为 300cm，试计算光的波长。

[**答案**：≈4480Å]

20.10　在直边衍射图样中，如果所用的光波长为 6000Å，屏幕与直边的距离为 100cm，试计算在强度最大值与相邻的极大值之间的距离。在几何阴影区内大约多少距离处，$I/I_0=0.1$，单位为 cm。

[**答案**：$y\approx0.027$cm]

20.11　考虑一列平面波正入射到宽度为 0.5mm 的狭缝上。如果光波长为 6×10^{-5}cm，计算令 $v_1=0.5,1.0,1.5,5.0$ 时，屏幕与狭缝的距离(见图 20.19～图 20.22)，并讨论其向夫琅禾费衍射转变的过程。

20.12　考虑一列平面波正入射到宽度为 b 的狭缝上时，产生菲涅耳衍射图样。假设 $\lambda=5\times10^{-5}$cm，$d=100$cm。根据表 20.1 近似计算出在 $y=0,\pm0.05,\pm0.1$cm 时的强度值($b=0.1$cm)。当 $b=5$cm 时，重复计算上面的问题。

[**答案**：位于 $y=0$，$I/I_0\approx1.60$；位于 $y=\pm0.05$cm，$I/I_0\approx0.356$；
位于 $y=\pm0.1$cm，$I/I_0\approx0.01685$]

20.13　在 19.7 节中导出了半径为 a 的圆孔的衍射图样。试导出以半径为 a_1 和 $a_2(a_2>a_1)$ 的圆为界的环形孔的衍射图样。

[**提示**：19.7 节中式(19.35)中对 ρ 积分的积分限必须为 a_1 和 a_2]

20.14　考虑一个 0.2mm×0.3mm 的矩形孔。试求出其夫琅禾费衍射图样中沿着平行于矩形孔的长度和宽度方向的前几个极大值和极小值的位置。假设 $\lambda=5\times10^{-5}$cm，并假设衍射图样是在焦距 20mm 的透镜的焦平面上产生的。

[**答案**：沿着 x 轴，极小值发生在 $x\approx0.05$cm，0.10cm，0.15cm，…；
沿着 y 轴，极小值发生在 $y\approx0.033$cm，0.067cm，0.1cm，…]

20.15　在焦距为 20cm 的凸透镜的焦平面上观察一个半径为 0.5mm 的圆孔的夫琅禾费衍射图样。试计算第 1 个和第 2 个暗环的半径。假设 $\lambda=5.5\times10^{-5}$cm。

[**答案**：0.13mm，0.25mm]

20.16　在习题 20.15 中，试计算在焦平面上包含有总能量的 95%的圆形区域的面积。

[**答案**：$\approx5.55\times10^{-3}$cm^2]

20.17　(1) He-Ne 激光器($\lambda=6328$Å)的输出可以看作是波前为平面的高斯光束。计算当 $w_0=1$mm 和 $w_0=0.2$mm 时，在 $z=20$m 处高斯光束的直径。

(2) 重复计算当 $\lambda=5000$Å 时的值，并对结果解释其物理意义。

[**答案**：(1) 0.83cm 和 4.0cm]

20.18　激光器发出一束高斯光束。假设 $\lambda=6000\text{Å}$，在 $z=0$ 处，光束宽度为 1mm，且波前是平面。在真空中传播 10m 后计算(1)光束宽度；(2)波前的曲率半径。

[**答案**：$2w\approx 0.77\text{cm}$；$R(z)\approx 1017\text{cm}$]

20.19　强度为 I_0 的平面波正入射到如图 20.25 所示的圆孔上时，计算轴上点 P 处的强度。

[**提示**：应用式(20.25)]

20.20　证明相位变化形式为

$$\exp\left[\mathrm{i}kz+\frac{\mathrm{i}k(x^2+y^2)}{2R(z)}\right]$$

的波是半径为 R 的发散球面波。

20.21　考虑由平面镜和半径为 R 的凹面镜组成的谐振腔(见图 20.26)，假设 $\lambda=1\mu\text{m}$，$R=100\text{cm}$，两镜子间的距离为 50cm。计算其高斯光束的光斑尺寸。

[**答案**：$w_0\approx 0.4\text{mm}$]

20.22　半导体激光器的输出可近似地看为具有沿横向(w_T)和侧向(w_L)两个方向的不同宽度的高斯光束

$$\psi(x,y)=A\exp\left(-\frac{x^2}{w_L^2}-\frac{y^2}{w_T^2}\right)$$

式中 x，y 分别表示平行和垂直于 pn 结平面的轴。取典型值 $w_T\approx 0.5\mu\text{m}$，$w_L=2\mu\text{m}$，讨论此光束的远场情况(见图 20.27)。

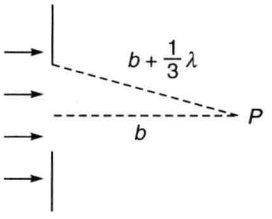


图 20.25　习题 20.19 图

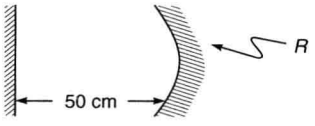


图 20.26　习题 20.21 图

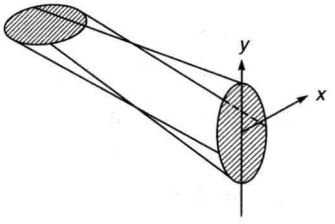


图 20.27　习题 20.22 图

参考文献和推荐读物

1. R. Baierlein, *Newton to Einstein: The Trail of light*, Cambridge University Press, 1992.
2. P. M. Rinard, 'Large scale diffraction patterns from circular objects', *American Journal of Physics,* Vol. **44**, 70, 1976.
3. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, 2000.
4. A. Ghatak and K. Thyagarajan, *Contemporary Optics*, Plenum Press, New York, 1978.
5. M. Abramowitz and I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, Applied Mathematics Series, Vol. 55; National Bureau of Standards, Washington (1964).

第21章 全 息 术[①]

电子显微镜利用的是物体光与相干背景光之间形成的干涉图样，所谓的相干背景光也就是照明光束中没有被衍射的部分。对于这种干涉图样，我称之为全息图(hologram)，这一词来源于希腊语中的“完全”(holos)，因为它包含了物体的全部信息。因此，全息图可以在光学系统中通过光来重构，可以用来纠正电子光学系统的像差。

——丹尼斯·伽柏 1971 年 12 月 11 日诺贝尔演讲[②]。

重要的里程碑

1948 年	丹尼斯·伽柏(Dennis Gabor)发现了全息术的原理。
1960 年	西奥多·梅曼(Theodore Maiman)成功研制了第一台激光器。
1962 年	利斯(E. N. Leith)和乌帕特尼克斯(J. Upatnieks)发明了离轴全息技术。
1962 年	丹尼苏克(Y. N. Denisyuk)提出了基于厚照相乳胶片的三维全息图构想。在他的方法中，全息图可以利用普通的太阳光进行恢复。这样的全息图被称作李普曼·布拉格全息图。
1964 年	利斯和乌帕特尼克斯指出，选择 3 种合适波长的光来记录的全息图可以显示彩色的全息影像。
1969 年	本顿发明了“彩虹全息术”，可以用白光进行全息影像显示，这是将全息术应用于显示技术的必不可少的一步。

21.1 引言

普通照相是对三维场景的二维记录，记录的是曝光时位于底片平面上的强度分布。由于感光媒质只对光强度的变化敏感，因此，在拍摄一张照片时，位于底片平面上的相位分布丢失了。因为只有强度图样被记录下来，所以，景物的三维特性(比如看物体时的视差)丢失了。因此，当从不同的角度观察照片时，无法看到被摄物体像的透视关系变化，也不能对照片中被摄物体像的任何未聚焦部分进行重新聚焦。全息术是丹尼斯·伽柏于 1947 年发明的一种拍摄技术，全息术不仅能记录光波的振幅，也能记录光波的相位，这是通过干涉技术实现的。

---

① 本章部分内容是基于 K. Thyagarajan 教授尚未出版的讲稿。

② 丹尼斯·伽柏于 1971 年因发现全息术原理而获得了诺贝尔物理学奖，伽柏的原始论文发表于 1948 年(见参考文献[1])。伽柏获诺贝尔奖的演讲题目是《全息术，1948—1971 年》，通篇没有数学公式，用大量精美的图片来解释说明，参考文献[2]是这篇论文的再版。

正由于这个缘故，全息术产生的像具有真实三维影像的形式。因此，可以像观察一个真正的物体一样，变换位置，从不同的视角去观察物体的影像，或者在不同的距离对物体影像进行重新聚焦。能够产生出与物体本身一样的真实影像的成像能力，正是全息术广受欢迎的原因。

全息术的基本方法如下：在记录全息图时，将物波与另一束被称为参考波进行叠加，并用制作的成像底片记录下所形成的干涉图样（见图 21.1）。参考波通常是平面波。记录下来的干涉图样形成了全息图，（随后将会证明）该全息图不但包含了与物波相关的振幅信息，也包含了相关的相位信息。与普通照相不同，记录下来的全息图片本身与原始物体没有什么相似之处。事实上，与物体相关的信息是被编码并记录到全息图里的。观察像时，使用另一束波来照明全息图片，该照明波称为重建波（大多数情形下，重建波与记录全息图时所用的参考波完全相同），这个过程称为重建过程（见图 21.2）。一般说来，重建过程得到原来物体影像的一个虚像和一个实像。这个虚像具有原来物体的一切特征，如视差等，从而可以移动眼睛的位置看到物体的背面，也能够在不同的距离重新聚焦。实像不需要借助透镜就能够拍摄记录下来，只要将感光媒质放到实像所形成的位置即可。图 21.3(a)，(b)和(c)分别为物体本身、它的全息图和重建像。

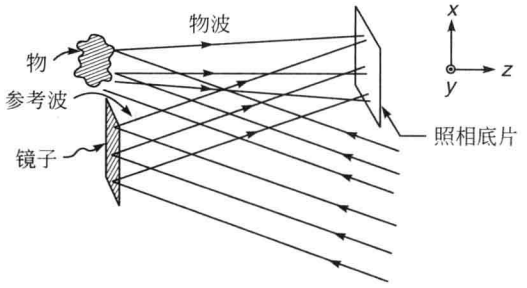


图 21.1　全息图的记录

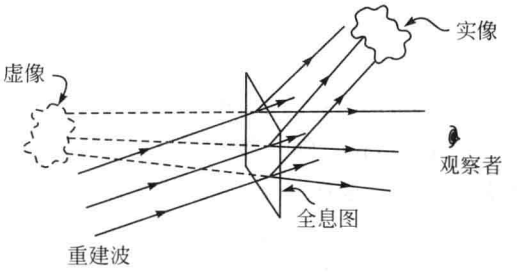


图 21.2　全息图的重建

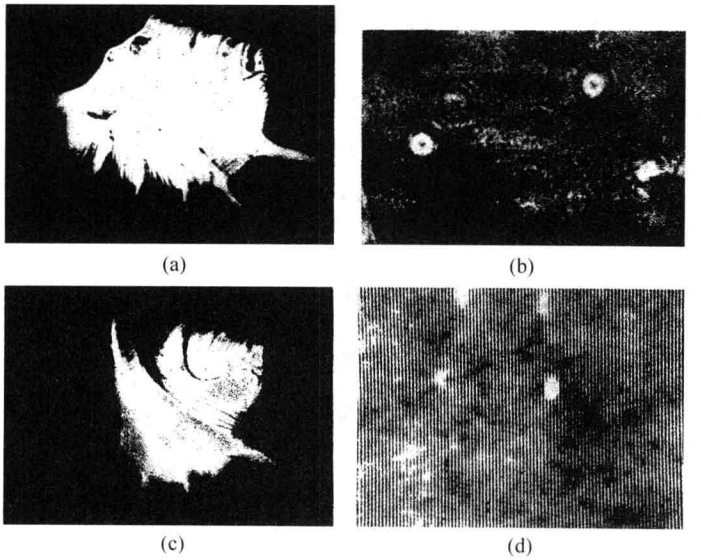


图　21.3

(a) 物体的普通照片；(b) 用如图 21.1 所示的方法产生的物体的全息图；(c) 观察者看到的重建像；(d) 将图(b)所示的全息图其中的一小部分放大的图。（照片由 R. S. Sirohi 教授拍摄）

21.2 全息术理论

如果物体是一个点状散射体,那么,物波就是$\frac{A}{r}\cos(kr-\omega t+\phi)$,式中$r$表示从散射体到观察点的距离,$A$表示一个常数,$k=2\pi/\lambda$。任何的普通物体都可以看作是由大量的点组成,而被物体反射的合成波则是这些点所散射物波的矢量和。全息术的本质就是记录这束物波,特别是记录其相位分布。

下面来考察记录过程。令

$$O(x,y)=a(x,y)\cos[\phi(x,y)-\omega t] \tag{21.1}$$

表示如图21.1所示的位于照相底片平面($z=0$)处的物波(如前所述,物波是由物体上各点所散射的波叠加成的)。参考波为一列平面波,为了简单起见,假设参考波的传播方向在x-z平面内且与z轴之间的夹角为θ(见图21.1),则与这个平面波相联系的场由下式给出

$$r(x,y,z)=A\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)=A\cos(kx\sin\theta+kz\cos\theta-\omega t) \tag{21.2}$$

如果$r(x,y)$表示参考波位于平面$z=0$处的场,可以看出

$$r(x,y)=A\cos(kx\sin\theta-\omega t)=A\cos(2\pi\alpha x-\omega t) \tag{21.3}$$

式中$\alpha=\sin\theta/\lambda$为空间频率(见19.9节)。式(21.3)表示与$z$轴成$\theta$的倾斜平面波的场,并且可以看出,相位随$x$线性变化。请注意,因为假设平面波的传播矢量在$x$-$z$平面内,相位不依赖于$y$。这样一来,在照相底片处(与平面$z=0$重合)的总场由下式给出

$$u(x,y,t)=a(x,y)\cos[\phi(x,y)-\omega t]+A\cos(2\pi\alpha x-\omega t) \tag{21.4}$$

照相底片只对强度有反应,而强度正比于$[u(x,y,t)]^2$的时间平均值。因此,照相底片上记录的强度图样将是

$$I(x,y)=\langle u^2(x,y,t)\rangle=\langle\{a(x,y)\cos[\phi(x,y)-\omega t]+A\cos(2\pi\alpha x-\omega t)\}^2\rangle \tag{21.5}$$

式中角括号表示对时间取平均值(见17.3节)。因此,有

$$\begin{aligned}I(x,y)=&a^2(x,y)\langle\cos^2[\phi(x,y)-\omega t]\rangle+A^2\langle\cos^2(2\pi\alpha x-\omega t)\rangle\\&+2a(x,y)A\langle\cos[\phi(x,y)-\omega t]\cos(2\pi\alpha x-\omega t)\rangle\end{aligned} \tag{21.6}$$

又有

$$\langle\cos^2[\phi(x,y)-\omega t]\rangle=\frac{1}{2}=\langle\cos^2(2\pi\alpha x-\omega t)\rangle \tag{21.7}$$

$$\begin{aligned}&\langle\cos[\phi(x,y)-\omega t]\cos(2\pi\alpha x-\omega t)\rangle\\&=\frac{1}{2}\langle\cos[\phi(x,y)+2\pi\alpha x-2\omega t]+\cos[\phi(x,y)-2\pi\alpha x]\rangle\\&=\frac{1}{2}\cos[\phi(x,y)-2\pi\alpha x]\end{aligned} \tag{21.8}$$

则式(21.6)可变为

$$I(x,y)=\frac{1}{2}a^2(x,y)+\frac{1}{2}A^2+Aa(x,y)\cos[\phi(x,y)-2\pi\alpha x] \tag{21.9}$$

由式(21.9)可以看出,包含在$\phi(x,y)$中的物波的相位信息已被记录在强度图样中。

将(记录了上述强度图样的)照相底片进行处理(显影、定影)后,就得到全息图(见图 21.3(b)和(d))。全息图的透射率,即透射场与入射场之比,依赖于 $I(x,y)$。用适当的显影过程能够实现振幅透射率与 $I(x,y)$ 成线性关系的条件。在此条件下,如果用 $R(x,y)$ 表示重建波在全息图平面处的场,则透射场为

$$\begin{aligned} v(x,y) &= KR(x,y)I(x,y) \\ &= K\left[\frac{1}{2}a^2(x,y)+\frac{1}{2}A^2\right]R(x,y)+KAa(x,y)R(x,y)\cos[\phi(x,y)-2\pi\alpha x] \end{aligned} \tag{21.10}$$

式中 K 为常数。考虑重建波与参考波 $r(x,y)$ 完全相同的情况(见图 21.2)。在这种情形下,可得(忽略常数 K)

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \left[\frac{1}{2}a^2(x,y)+\frac{1}{2}A^2\right]A\cos(2\pi\alpha x-\omega t) \\ &\quad + A^2a(x,y)\cos(2\pi\alpha x-\omega t)\cos[\phi(x,y)-2\pi\alpha x] \\ &= \left[\frac{1}{2}a^2(x,y)+\frac{1}{2}A^2\right]A\cos(2\pi\alpha x-\omega t) \\ &\quad + \frac{1}{2}A^2a(x,y)\cos[\phi(x,y)-\omega t]+\frac{1}{2}A^2a(x,y)\cos[4\pi\alpha x-\phi(x,y)-\omega t] \end{aligned} \tag{21.11}$$

式(21.11)给出了在平面 $z=0$ 处的透射场。分别分析等号右边三项中的每一项。第一项只不过是重建波本身,只是其振幅由于 $a^2(x,y)$ 的存在而受到调制。总波场的这一部分将仍沿着重建波的方向传播。第二项(除了一个常数因子外)与式(21.1)的右边完全相同,因此,它表示原先的物波,将产生一个虚像。观察此波的效果与观察物体本身是一样的。重建的物波将沿着与原始物波相同的方向传播。

为了研究最后一项,首先看到除了有 $4\pi\alpha x$ 这一项外,相位中的 $\phi(x,y)$ 还带负号。负号表示这列波具有与物波的波面相反的波面。因此,如果物波是发散的球面波,那么最后一项就表示汇聚的球面波。所以与第二项相反,这列波将形成物体的实像,只要简单地放一张底片就能将这个实像拍摄下来(见图 21.2)。

为了决定 $4\pi\alpha x$ 这一项产生的效果,考虑物波也是一列平面波且沿 z 轴传播的情况。对于这样的物波,有 $\phi(x,y)=0$,从而最后一项表示沿 $\theta'=\arcsin(2\sin\theta)$ 方向传播的平面波。因此,$4\pi\alpha x$ 这一项的效果是旋转了波的传播方向。因此,式(21.11)右边的最后一项表示物波的共轭波,将沿着与重建波和物波都不同的方向传播,形成物体的实像。既然由这三项所代表的波沿着不同的方向传播,当传播了一段距离后,它们就会分离开来,使得观察者能够不受干扰地观察虚像。

全息图具有的一个非常有趣的性质是,即使它破裂成许多不同的碎块,每个分离的块仍能产生物体完整的虚像①。这个性质可以从以下事实来理解:对于漫反射的物体,物体上的每一点都能照明整个全息图,因此,全息图上的每一点接收到的是来自整个物体的波。不过,像的分辨率会随着碎块尺寸的减小而降低。当物体是非漫反射的反射体,或者物体是透

① 全息图的这一特性只有当物体是漫散射体时才会发生,此时从物的每一个点散射出来的波才能够到达全息板的所有部分。在某些情况下,这一特性将不再保持,比如,记录一个透明片的全息图。

明片时,可以通过附加一个漫射屏来照明物体。

例 21.1 作为全息图的形成和重建的一个明晰的例子,考虑物波和参考波都是平面波的简单情况(见图 21.4(a)),一列平面物波对应于离全息图非常远的一个单独物点。①试证明在这种情形下,全息图由一组杨氏干涉条纹组成,且其强度分布具有 $\cos^2$ 的形式(见图 14.11);②如果用另一列平面波重建全息图(见图 21.4(b)),则证明透射光由一列零级平面波和两列Ⅰ级平面波组成,这两列Ⅰ级平面波分别对应于原始物波和其共轭波。

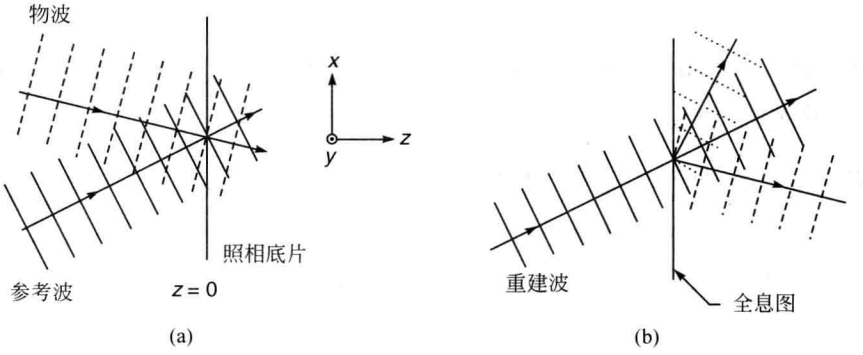


图 21.4

(a) 当物体和参考波都是平面波时,全息图的形成;(b) 用另一列平面波让全息图再现

解 (1) 考察一列平面波,其传播矢量位于 x-z 平面内,且与 z 轴的夹角为 θ_1,其场具有如下形式

$$A_1\cos(kx\sin\theta_1 + kz\cos\theta_1 - \omega t)$$

假设照相底片与平面 $z=0$ 重合,则这个平面上的场的分布将由下式给出

$$A_1\cos(kx\sin\theta_1 - \omega t)$$

同理,(还是在照相底片平面)与 z 轴成 θ_2 的平面波的场为

$$A_2\cos(kx\sin\theta_2 - \omega t)$$

总场的强度分布正比于

$$\begin{aligned}&\langle[A_1\cos(kx\sin\theta_1 - \omega t) + A_2\cos(kx\sin\theta_2 - \omega t)]^2\rangle\\ =&\frac{1}{2}(A_1 - A_2)^2 + 2A_1A_2\cos^2\left[\frac{kx}{2}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)\right]\\ =&\frac{1}{2}(A_1 - A_2)^2 + 2A_1A_2\cos^2\left[\frac{kx}{2}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)\right]\end{aligned}$$

当 $A_1=A_2$ 时,上式可简化为

$$2A^2\cos^2\left[\frac{kx}{2}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)\right]$$

这说明在平行于 y 轴方向上强度保持不变,而(沿 x 轴方向的)条纹间隔依赖于 θ_1 和 θ_2。且强度分布具有 $\cos^2$ 的形式(见图 14.11)。

(2) 在计算全息图的透射场之前,先考虑一宽度为 b 的窄狭缝被一列平面波照明(见图 21.5)。考虑缝开口区域离缝中心为 s 的条状面元 $\mathrm{d}s$,基于这个面元向 θ 方向衍射的波在很远的点 P 处振幅将正比于 $\sin[k(r-s\sin\theta)-\omega t]\mathrm{d}s$,式中 $k=2\pi/\lambda$,θ 的定义见图 21.5。因此,沿 θ 方向发自狭缝的衍射波的总场由下式给出

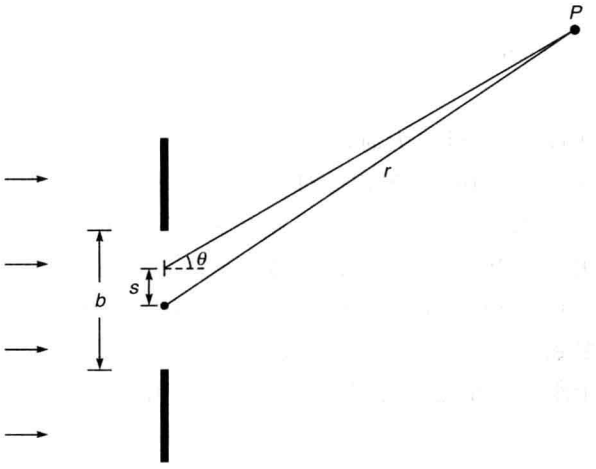


图 21.5　一列平面波照射到一宽度为 b 的窄狭缝上

$$E \approx A\int_{-b/2}^{+b/2}\sin[k(r-s\sin\theta)-\omega t]\mathrm{d}s \tag{21.12}$$

式中 A 为常数。上述积分也可以写为

$$E = A\int_{-b/2}^{+b/2}[\sin(kr-\omega t)\cos(ks\sin\theta)-\cos(kr-\omega t)\sin(ks\sin\theta)]\mathrm{d}s$$

$$= 2A\sin(kr-\omega t)\,\frac{\sin\left(\frac{kb}{2}\sin\theta\right)}{k\sin\theta}$$

其中第二项积分由于其被积函数是 s 的奇函数而等于零。整理得

$$E = Ab\sin(kr-\omega t)\,\frac{\sin\beta}{\beta} \tag{21.13}$$

式中

$$\beta = \frac{1}{2}kb\sin\theta = \frac{\pi b\sin\theta}{\lambda}$$

式(21.13)表示的振幅与 18.2 节中得到的结果具有相同的形式。在此处，全息图的透射率以 $\cos^2\alpha s$ 的形式变化，因此，透射场有如下形式

$$E = A\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\cos^2\alpha s\sin[kr-ks(\sin\theta-\sin\theta_i)-\omega t]\mathrm{d}s \tag{21.14}$$

式中 θ_i 表示照明平面波的入射角。因此，有

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}A\int_{-b/2}^{+b/2}(1+\cos 2\alpha s)\\ &\quad\times\{\sin(kr-\omega t)\cos[ks(\sin\theta-\sin\theta_i)]-\cos(kr-\omega t)\sin[ks(\sin\theta-\sin\theta_i)]\}\mathrm{d}s\\ &= \frac{1}{2}A\sin(kr-\omega t)\left\{\int_{-b/2}^{+b/2}\cos[ks(\sin\theta-\sin\theta_i)]\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\int_{-b/2}^{+b/2}\cos[ks(\sin\theta-\sin\theta_i+2\alpha)]\mathrm{d}s\right.\\ &\quad\left.+\frac{1}{2}\int_{-b/2}^{+b/2}\cos[ks(\sin\theta-\sin\theta_i-2\alpha)]\mathrm{d}s\right\}\end{aligned} \tag{21.15}$$

上面的三项积分很容易计算。例如

$$\int_{-b/2}^{+b/2}\cos[ks(\sin\theta-\sin\theta_i+2\alpha)]\mathrm{d}s=\frac{\sin\left[b\,\frac{k}{2}(\sin\theta-\sin\theta_i+2\alpha)\right]}{\frac{k}{2}(\sin\theta-\sin\theta_i+2\alpha)} \tag{21.16}$$

当 $b\to\infty$，即，全息图的尺寸变得很大时，上式在 $\sin\theta=\sin\theta_i-2\alpha$ 附近变为越来越锐的峰。因此，当 b 很大时，式(21.15)中的三项积分对应于三列平面波，分别沿着 $\sin\theta=\sin\theta_i$，$\sin\theta=\sin\theta_i-2\alpha$ 和 $\sin\theta=\sin\theta_i+2\alpha$ 三个方向传播，分别代表 0 级衍射波和 2 列 1 级衍射波。

例 21.2 考虑用一个物点和一列平面参考波形成全息图的情况(见图 14.13(a))。选择 z 轴为物点到照相底片所作的垂线方向，并假设照相底片与平面 $z=0$ 重合。为简单起见，假设参考波正入射到底片上。试求出由全息图记录下来的干涉图样。

解 令点源位于距离照相底片为 d 处。从物点发出的波在底片上任一点 $P(x,y,0)$ 的场为

$$O(x,y,z=0,t)=\frac{A}{r}\cos(kr-\omega t) \tag{21.17}$$

式中 $r=(x^2+y^2+d^2)^{1/2}$，A 为一常数。沿与 z 轴方向传播的平面波为

$$R(x,y,z,t)=B\cos(kz-\omega t) \tag{21.18}$$

因此，参考波在照相底片($z=0$)处的场为

$$R(x,y,z=0,t)=B\cos\omega t \tag{21.19}$$

这样一来，在照明底片平面上的总场为

$$\begin{aligned}T(x,y,t)&=O(x,y,z=0,t)+R(x,y,z=0,t)\\&=\frac{A}{r}\cos(kr-\omega t)+B\cos\omega t\end{aligned} \tag{21.20}$$

记录下来的强度图样为

$$I(x,y)=\langle|\,T(x,y,t)\,|^2\rangle=\left\langle\left|\frac{A}{r}\cos(kr-\omega t)+B\cos\omega t\right|^2\right\rangle \tag{21.21}$$

式中角括号仍如前所述，表示对时间取平均值。进行时间平均值后，得

$$I(x,y)=\frac{A^2}{2r^2}+\frac{B^2}{2}+\frac{AB}{r}\cos kr \tag{21.22}$$

如果假定 $d\gg x,y$(在大多数实际情况下，这个假设是正确的)，可以写出

$$r=(x^2+y^2+d^2)^{1/2}\approx d+\frac{x^2+y^2}{2d} \tag{21.23}$$

则

$$I(x,y)=\frac{A^2}{2d^2}+\frac{B^2}{2}+\frac{AB}{r}\cos\left[kd+\frac{k}{2d}(x^2+y^2)\right] \tag{21.24}$$

结果得到的条纹图样为中心在原点的圆(见例 14.7)。这样形成的全息图实质上是一个波带片，与菲涅尔波带片不同的是，其透射比是按照正弦方式变化的(见图 14.13(b)和 20.3 节)。

21.3 全息术的要求

由于全息术实质上是一种干涉现象，所以，对相干性的某些要求必须得到满足。在第 17 章中已经引入了相干长度的概念。如果要形成稳定的干涉条纹(以便可以记录下来)，那

么，物波和参考波之间的最大光程差不应超过相干长度。而且，空间相干性也是很重要的，它使得从物体不同部分散射的波能够与参考波相干涉。

在重建过程中，重建出来的像的坐标既依赖于重建光源的波长，也依赖于重建光源的位置。因此，如果要求重建像的分辨率高，重建光源就不能是宽频带的，而是窄线宽的。值得一提的是，重建过程也像透镜成像一样伴随有像差。如果重建光源的波长与参考光源的相同，而且重建光源相对于全息图的位置也与参考光源相同，只有这些条件成立时，重建像才没有任何像差。

对制造全息图提出的另一个关键性要求是记录装置的稳定性。因此，底片、物体以及用来产生参考波的镜子在曝光时都要求没有任何相对运动。还有一个不大明显(但也是必要)的要求是底片的分辨率。与轴分别成 $+\theta$ 和 $-\theta$ 的两列平面波产生的干涉条纹的间距为 $d=\dfrac{\lambda}{2\sin\theta}$。假定 $\theta=15°$，$\lambda=6328$Å(氦-氖激光器)，可以求出 $d=1.222\times10^{-3}$mm，空间频率就是 818 线/mm，因此，照相底片要求能记录下密集到间隔为 0.1222×10^{-4}mm 的条纹。这就要求一种感光极为缓慢的特殊材料，这就对全息照相装置的稳定性提出了更高的要求。用于全息术的底片材料有柯达(Kodak)649F、阿格法-盖弗特(Agfa-Gaevert)10E 或 8E75 等。

21.4　全息术的一些应用

全息术的原理在许多领域获得了广泛的应用[①]。全息术能够记录具有深度的信息，使其可以应用于研究瞬态的微观事件。例如，需要研究在某一体积内出现的一些瞬态现象时，用普通的显微技术很难一开始就找准位置并进行观察。如果记录下事件场景的全息图，则该事件就被冻结在全息图中了，因此，就能在重建像的整个深度范围内逐一聚焦，从容地对现象进行研究。

全息术最有前途的应用之一是在干涉度量学领域。全息过程在重建阶段能够利用重建波重现物波的能力，使得可以让存在于不同时刻的不同波之间进行干涉。因此，在所谓二次曝光全息干涉度量术中，首先在照相底片上对物波与参考波部分地曝光一次；随后物体被加上应力，并与同一参考波对底片进行二次曝光；照相底片在显影和定影后形成全息图。当用重现波照明全息图时，从全息图重现出两列物波，其中一列对应于未受应力的物体，另一列对应于受到应力的物体。由于两列物波已被重建出来，将相互干涉并产生干涉条纹，这些干涉条纹反映了物体发生应变的特征。定量地研究物体中产生的条纹图样，就能给出物体中应变的分布。

为了理解条纹图样是怎样形成的，假设物体的变形只是改变了物波的相位分布，这样一来，如果

$$O(x,y,t)=A(x,y)\cos[\phi(x,y)-\omega t] \tag{21.25}$$

表示物体未受应力时(在全息图平面处)的物波(见图 21.6(a))，而 $O'(x,y,t)$ 表示物体受到应力后的物波(见图 21.6(b))，那么，可以写出

① 见参考文献[3～12]。

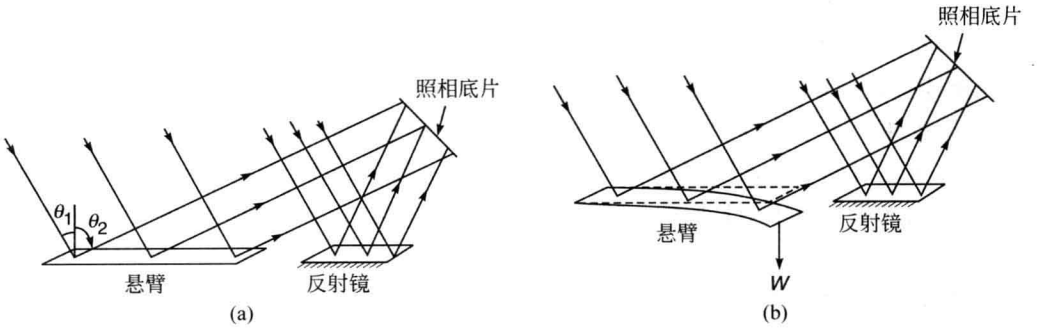


图 21.6

(a) 记录未加应力时的物波；(b) 在同一感光乳剂上记录加有应力时的物波，以产生二次曝光的全息图

$$O'(x,y,t) = A(x,y)\cos[\phi'(x,y) - \omega t] \tag{21.26}$$

其中已假设相位分布从 $\phi(x,y)$ 变为 $\phi'(x,y)$。在重建过程中，上述两列物波都从全息图重现出来，并且能观测到的将是这两列物波相互干涉所产生的强度图样，由下式给出[①]

$$\begin{aligned} I(x,y) &= \langle\{A(x,y)\cos[\phi(x,y) - \omega t] + A(x,y)\cos[\phi'(x,y) - \omega t]\}^2\rangle \\ &= A^2(x,y) + A^2(x,y)\cos[\phi'(x,y) - \phi(x,y)] \end{aligned} \tag{21.27}$$

因此，当

$$\phi'(x,y) - \phi(x,y) = 2m\pi, \quad m = 0,1,2,\cdots \tag{21.28}$$

时，这两列波将发生相长干涉；而当

$$\phi'(x,y) - \phi(x,y) = (2m+1)\pi, \quad m = 0,1,2,\cdots \tag{21.29}$$

时，这两列波将发生相消干涉。于是，在重建过程中可以得到由两列物波叠加而形成的亮纹和暗纹(见图 21.7)，这些亮纹和暗纹是由$[\phi'(x,y) - \phi(x,y)]$决定的。

下面考察上述技术在决定材料的杨氏模量中的简单应用。如果一根棒的一端固定，另一端负荷重物，则可以证明，负荷一端的位移 δ 由下式给出[②]

$$\delta = \frac{WL^3}{3YI} \tag{21.30}$$

式中 W 为负荷的重量，L 为棒的长度，I 为截面的转动惯量，对于截面是宽度为 a、厚度为 b 的矩形棒来说，$I = ab^3/12$；Y 表示材料的杨氏模量。因此，如果对于给定的负荷能够测出 δ，就能从式(21.30)算出 Y。

首先确定$(\phi' - \phi)$的表示式。如图 21.6 所示，悬臂被与 z 轴成 θ_1 的激光束照明，且给出了悬臂位移前和位移后的位置。沿着与 z 轴成 θ_2 的方向观察这根悬臂。当悬臂产生如图 21.6(b)所示的位移 δ 时，相位改变为

$$\phi' - \phi = \frac{2\pi}{\lambda}(\delta\cos\theta_1 + \delta\cos\theta_2) = \frac{2\pi}{\lambda}\delta(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \tag{21.31}$$

如果在悬臂的整个长度 L 上有 N 条条纹，则由于一条条纹跨度对应于 2π 的相位差(见式(21.28))，可以写出

---

① 重建过程中还产生了其他波的分量，但是正如早先讨论的那样，这些波的分量将沿着不同方向传输，此处只关注物波。

② 见参考文献[13]，第 75 页。

$$\frac{2\pi}{\lambda}\delta(\cos\theta_1+\cos\theta_2)=N\cdot 2\pi$$

或者

$$\delta=\frac{N\lambda}{\cos\theta_1+\cos\theta_2}$$

因此，测量了 N,θ_1 和 θ_2，并且知道了 λ，就能决定 δ。如图 21.7 所示为宽 4cm，厚 0.2cm，长 12cm 的一块铝片的二次曝光全息图的重建像。从形成的条纹数可以计算出杨氏模量(见习题 21.3)。

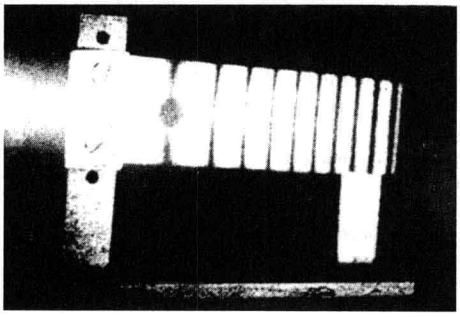


图 21.7　在测定杨氏模量时，用二次曝光干涉度量术产生的干涉条纹。图片由 R. S. Sirohi 教授提供。

小　结

- 全息图技术原理如下：在记录全息图时，与物波相叠加的波叫做参考波，照相底片用来记录它们的干涉图样。参考波通常是一列平面波。这种被记录的干涉图样形成全息图，既携带了物波的幅度信息，又携带了相位信息。为了观测它的像，需要用另一列称为重建波的平面波照射全息图。通常重建过程会产生原来物体影像的一个虚像和一个实像，其中的虚像拥有物体的全部特征，如视差等。
- 如果物波和参考波都是平面波，其全息图是一系列的杨氏干涉条纹。
- 对于一个物点和一列平面参考波，其全息图与菲涅尔波带片不同，更像是一个透射率按照正弦变化的波带片。

习　题

21.1　考虑例 21.2 中实验装置形成全息图的重建过程，用一束沿平行于 z 轴方向传播的平面波照明全息图。试证明会出现一个虚像和一个实像。

21.2　继续例 21.2，计算当入射平面波与 z 轴成 θ 时的干涉图样(见图 14.13)。假设 $B\approx A/d$。

$$\left[\text{答案：}4B^2\cos^2\left[kd-kx\sin\theta+\frac{k}{2d}(x^2+y^2)\right]\right]$$

21.3　如图 21.7 所示为一张二次曝光的全息图重建后拍摄的照片。这张全息图记录的两列物波分别对应于宽 4cm、厚 0.2cm、长 12cm 的一块铝片加应力前后的位置。如果

应力产生的形变位移对应于 1g 的负荷重量作用到铝片的一端，并假设 $\theta_1 \approx \theta_2 \approx 0$，$\lambda = 6328\text{Å}$，试计算铝的杨氏模量。

[**提示**：N 表示在悬臂整个长度上产生的条纹数。]

[**答案**：$0.7 \times 10^{11}\ \text{N/m}^2$]

参考文献和推荐读物

1. D. Gabor, 'A New Microscopic Principle', *Nature*, Vol. **161**, 777, 1948; 'Microscopy by Reconstructed Wavefronts', *Proceedings of the Royal Society* (London), Vol. **A197**, 454, 1949.
2. K. Thyagarajan and A. K. Ghatak, *Lasers: Theory and Applications*, Plenum Press, New York, 1981 (Reprinted by Macmillan India Ltd., New Delhi.)
3. J. C. Brown and J. A. Harte, 'Holography in the undergraduate optics course', *American Journal of Physics*, Vol. **37**, 441, 1969.
4. H. J. Caulfield and S. Lu, *The Applications of Holography*, John Wiley & Sons, New York, 1970.
5. R. J. Collier, C. B. Burckhardt and L. H. Lin, *Optical Holography*, Academic Press, New York, 1971.
6. A. K. Ghatak and K. Thyagarajan, *Contemporary Optics*, Plenum Press, New York, 1978 (Reprinted by Macmillan, New Delhi, 1984.)
7. M. P. Givens, 'Introduction to holography', *American Journal of Physics*, Vol. **35**, 1056, 1967.
8. E. N. Leith and J. Upatnieks, 'Photography by Laser', *Scientific American*, Vol. **212**, p. 24, June, 1965.
9. A. F. Methernal, 'Acoustical holography', *Scientific American*, Vol. **221**, p. 36, October, 1969.
10. K. S. Pennington, 'Advances in holography', *Scientific American*, Vol. **218**, p. 40, February, 1968.
11. H. M. Smith, *Principles of Holography*, Wiley Interscience, New York, 1975.
12. D. Venkateshwarulu, 'Holography, theory and applications', *Journal of Scientific and Industrial Research*, Vol. **29**, November, 1970.
13. B. L. Worsnop and H. T. Flint, *Advanced Practical Physics for Students*, Asia Publishing House, Bombay, 1951.
14. C. Sakher and Ajoy Ghatak, *Holography*, Encyclopaedia of Modern Optics (Eds. R. Guenther, A. Miller, L. Bayvel and J. Midwinter), Elsevier (2005).

第五部分

光的电磁特性

这部分由3章组成，讨论了光波不同方面的电磁特性。在这一部分的第22章中，对于不同形式的偏振光的产生与性质进行了讨论;随后详细分析了电磁波在各向异性媒质中的传播，包括波速和射线速度的第一性原理推导;并对像旋光性、法拉第旋光等在内的应用也进行了讨论。第23章有些数学化，由麦克斯韦方程组入手，讨论了麦克斯韦方程组不同解的偏振态问题，并推导了波动方程。正是在这个推导的过程中，麦克斯韦预测了电磁波的存在。第24章讨论了电磁波在电介质表面的反射和折射，其结果直接解释了布儒斯特定律、全反射、隐失波(也叫倏逝波)和法布里-珀罗腔振荡等现象。

第22章 偏振与双折射

对于产生不规则折射的另外一种发射，我曾希望试用椭圆波，或更确切些，回转椭球波来做。我假设这些波在弥漫于晶体的以太物质中和在构成晶体的微粒中都将一样地传播，而这种传播相较于规则折射中的发射传播完全不同。

——克里斯蒂安·惠更斯

重要的里程碑

1669年 伊拉斯莫斯·巴托莱纳斯(Erasmus Bartholinus)发现了方解石中的双折射。

1678年 在与巴黎科学院沟通讨论光的理论时，克里斯蒂安·惠更斯(Christiaan Huygens)提出了解释巴托莱纳斯发现的方解石中双折射现象的理论。

1809年 马吕斯(Malus)证明了反射时光的偏振理论。

1811年 戴维·布儒斯特(David Brewster)声明发现了“布鲁斯特定律”。

1828年 威廉·尼科尔(William Nicol)发明了可以产生偏振光的棱镜——这种棱镜被命名为“尼科尔棱镜”。

1929年 美国科学家及发明家埃德温·兰德(Edwin Land)申请了Polaroid(偏振片)的专利，这种偏振片是用来命名一种产生偏振光的合成塑料薄片。

22.1 引言

如果使一根弦的一端上、下运动，就可以产生一列横波(如图22.1(a))。弦上的每一点都在平行于 x 轴方向的直线上做正弦振动，因此称为线偏振波。由于这根弦总是被限制在 x-z 平面内，所以这种波也叫做平面偏振波。这种波的位移可以写为

$$\begin{cases} x(z,t) = a\cos(kz - \omega t + \phi_1) \\ y(z,t) = 0 \end{cases} \tag{22.1}$$

式中 a 表示波的振幅，ϕ_1 是由边界条件决定的相位常数；且波在 y 轴方向的位移总是零。在任一时刻的位移是如图22.1(a)所示的一条余弦曲线。此外，在任意一点 $z=z_0$ 处，都将做振幅为 a 的简谐运动。同理，可以使弦在 y-z 平面振动，如图22.1(b)所示，其位移可以表示为

$$\begin{cases} x(z,t) = 0 \\ y(z,t) = a\cos(kz - \omega t + \phi_2) \end{cases} \tag{22.2}$$

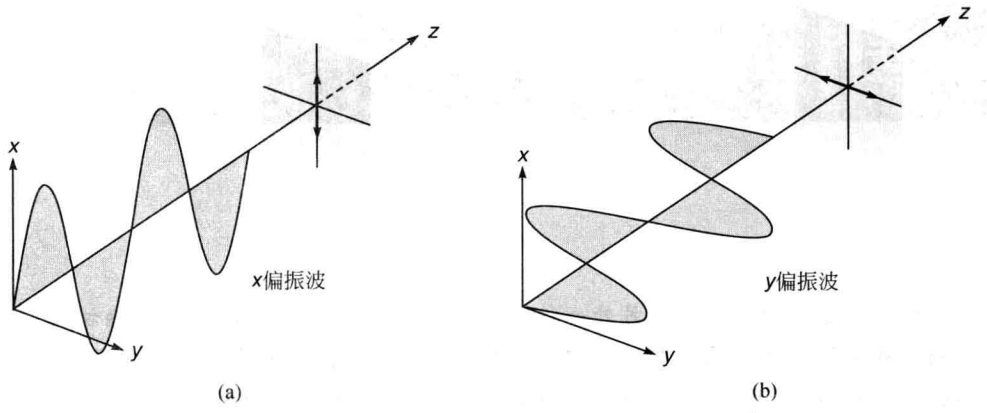


图 22.1

(a) 位移限制在 x-z 平面的弦上的线偏振波；(b) 位移限制在 y-z 平面的线上的线偏振波

在一般情况下，可以使弦在包含 z 轴的任一平面内振动。如果使弦的一端在一个圆周上运动，那么，弦的每一点都将在一个圆形的路径上运动，如图 22.2 所示，这样的波叫做圆偏振波，其位移可以表示为

$$\begin{cases} x(z,t) = a\cos(kz - \omega t + \phi) \\ y(z,t) = a\sin(kz - \omega t + \phi) \end{cases} \tag{22.3}$$

所以，$x^2 + y^2$ 为一个常数 a^2。

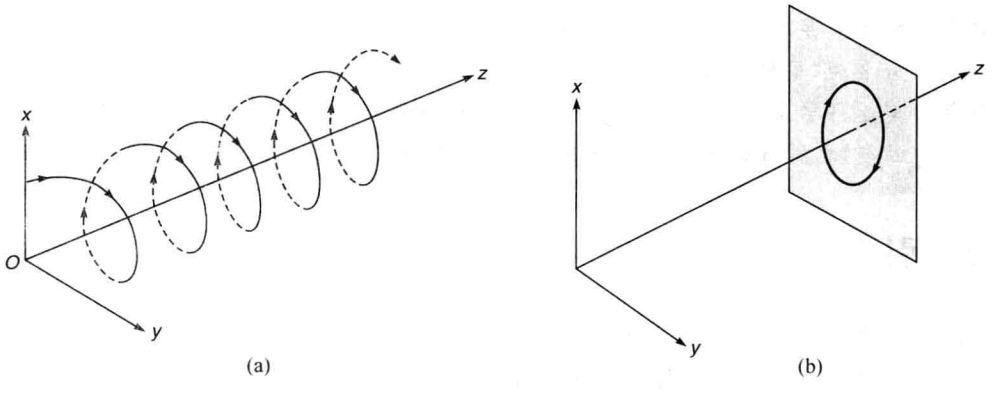


图 22.2

(a) 对应于圆偏振波的位移情况，弦上的所有点到 z 轴的距离都相等；(b) 弦上的每一点均在圆周上转动

接下来考虑在弦的路径上放置一个狭缝，如图 22.3 所示。如果狭缝沿着振动的方向，那么，波的全部振幅都可以传播过去，如图 22.3(a)所示。另一方面，如果狭缝的方向与振动的方向垂直，那么，几乎没有波可以传播到狭缝的另一边去，如图 22.3(b)所示。这是由于狭缝只允许沿着其方向的振动分量通过。在此必须指出，如果在弦上传播的是纵波，那么，不论狭缝沿着什么方向，通过狭缝后，波的振幅均相等。因此，波的振幅随着狭缝方向的改变而改变的现象，是源于横波的特性。事实上，一个在原理上与上述讨论十分类似的实验证实了光波的横波特性。但是，在讨论这个利用光波所作的实验之前，应当先定义非偏振波的概念。

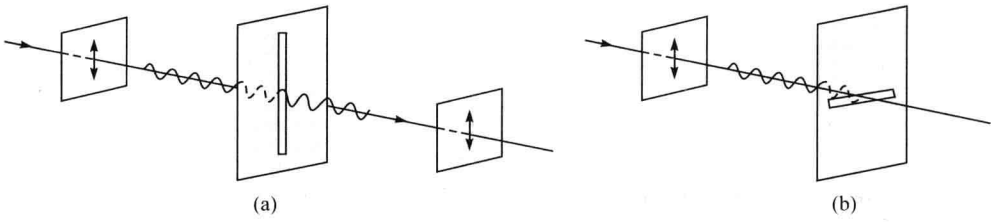


图 22.3　(在弦上传播的)线性偏振横波通过狭缝时

(a) 只有沿着狭缝方向的偏振分量可以通过；(b) 垂直于狭缝方向的波几乎无法通过

再一次考虑在弦的一端激发的横波。如果振动平面的方向在很短的时间间隔内随机改变，那么这种波称为非偏振波[①]。如果一个非偏振波入射到狭缝 S_1(如图 22.4)，透射波的振动方向将沿着狭缝的方向，并且当狭缝的方向旋转时，尽管透射波振动的方向会随着狭缝方向的改变而改变，却不会对波的振幅产生影响。这样，透射波将成为线性偏振波，而狭缝 S_1 起到了一个起偏器的作用。如果这个偏振波通过另一个狭缝 S_2(见图 22.4)，通过旋转狭缝 S_2 就可以观测到透射波的振幅发生变化，如前所述，S_2 就起着检偏器的作用。

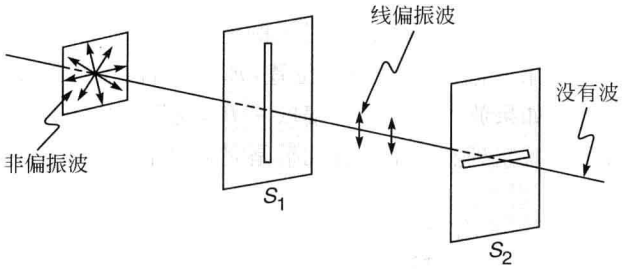


图 22.4　一束弦上传播的非偏振波入射到狭缝 S_1 后，透射波成为线偏振波，其振幅与 S_1 的方向无关。如果线偏振波再通过另一个狭缝 S_2，透射波的振幅由 S_1 和 S_2 的相对方向决定。

光波的横波特性在 19 世纪初就已经被人们所了解，但是，与光波相联系的位移的本质是在麦克斯韦提出了其著名的电磁理论之后，才为人所知。将在第 23 章讨论基本的电磁理论，并证明与平面电磁波相联系的有电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$，且相互垂直。对于沿 z 轴传播的线偏振波(如图 22.5 所示)，其电场和磁场可以写为以下形式

$$E_x = E_0\cos(kz - \omega t), \quad E_y = 0, \quad E_z = 0 \tag{22.4}$$

$$B_x = 0, \quad B_y = B_0\cos(kz - \omega t), \quad B_z = 0 \tag{22.5}$$

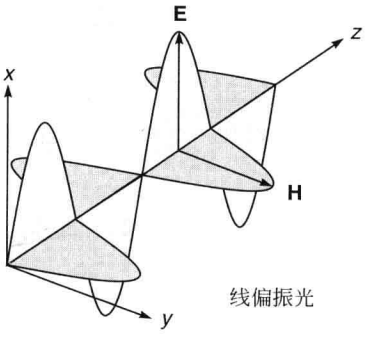


图 22.5　沿 x 方向偏振的电磁波沿 z 方向传播

式中

① 所谓的短时间间隔，是指与探测时间相比足够短；然而，对于具有一个特定频率 ν 的波而言，这个时间间隔要比 $1/\nu$ 大得多，因此，在这个短的时间间隔里仍有大量的振动发生(见 17.1 节)。

$$k = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \tag{22.6}$$

且

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{22.7}$$

表示波的速度，ε 和 μ 分别为媒质的介电常数(或电容率)和磁导率。由于 $E_z=0$ 且 $B_z=0$，所以波为横波。式(22.4)和式(22.5)表明，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是相互垂直的，且均垂直于波传播的方向。事实上，波是沿着矢量($\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$)的方向传播的。电磁理论还表明(见式(23.33))

$$B_0 = \frac{1}{v}E_0 \tag{22.8}$$

接下来考虑一束自然光入射到偏振片 P_1 的情况，如图 22.6(a)所示。偏振片是一种用来产生偏振光的类似塑料的材料，这将在后面的小节中详细论述。一般而言，一束自然光(比如钠灯或者太阳发出的光)是非偏振的，即，其电场矢量(在垂直于传播方向的平面上)不断随机地变化方向(见图 22.7(a))。当这种光入射到偏振片上时，产生的光波是线偏振的，电场方向是在一个特定的方向，如图 22.7(b)所示，且透射光的电矢量方向取决于偏振片的方向。正如 22.2 节中将要提到的，电场 $\boldsymbol{E}$ 沿某一特定方向的分量会被偏振片吸收掉，而与这个分量垂直的另一分量可以通过，那么，透射光的电矢量方向通常叫做这个偏振片的透光轴。如图 22.6(a)所示，如果眼睛处于图中的位置，那么，当偏振片绕 z 轴旋转时，人眼将观测不到光强的变化。但是，如果放入另外一个偏振片 P_2(见图 22.6(b))，而后旋转 P_2，就会观察到光强的变化，而且可以观察到有两个位置几乎是完全黑暗的情况(见图 22.6(c))。类似的

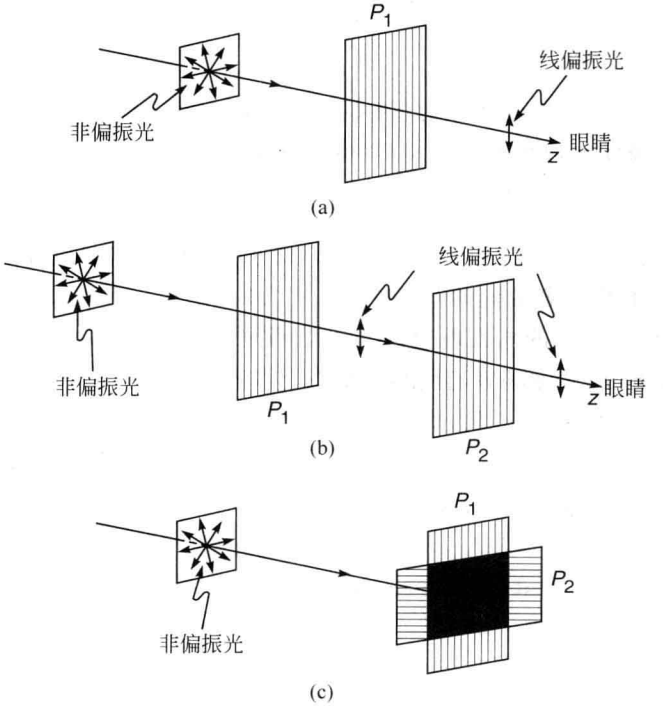


图 22.6

(a) 如果一束自然光入射到一个偏振片 P_1 上，则透射光为线偏振光；

(b)和(c) 如果放入另一个偏振片 P_2，则透射光强与两偏振片 P_1 和 P_2 之间的相对方向有关。

现象在 P_2 静止而旋转 P_1 的时候也可以观察到。在前面讨论的基础上可知，这种现象表明了光波的横波特性，即，光波的振动与传播方向垂直。偏振片 P_1 起到一个起偏器的作用，其透射光为线偏振光，P_2 则起到检偏器的作用。

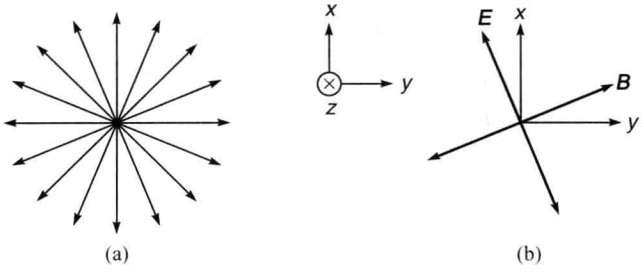


图　22.7

(a) 非偏振光沿 z 轴传播，其电矢量方向(处于 x-y 平面)不断随机变化；
(b) 对一个线性偏振光，其电矢量(或磁矢量)沿特定的方向振动。

22.2　偏振光的产生

在本节中将讨论产生线偏振光的不同方法。

22.2.1　线栅起偏器与偏振片

线栅起偏器的工作原理可能是最容易理解的。线栅起偏器实质上是由大量相互平行的细铜线组成，如图 22.8 所示。当一束非偏振电磁波入射到线栅起偏器上时，电矢量沿细铜线长度方向的分量被吸收了，这是由于电场的这一分量对铜线中的电子做功，电场的能量变成金属丝的焦耳热消耗掉了。另一方面，(既然假设金属丝是非常细的)电矢量沿 x 轴方向的分量没有受到很大的衰减就通过去，因此，透射波是线偏振的，且电矢量沿 x 轴方向。但是为了使这个系统有效地起到起偏器的作用(即 E_y 分量几乎完全衰减)，金属丝的间隔应当$\lesssim\lambda$。显然，对于波长为 3cm 的微波，制造这样的起偏器是相对容易地，因为其细线间隔能够达到$\lesssim$3cm。另一方面，由于光波波长很短($\sim 5\times10^{-5}$ cm)，要制造间隔$\lesssim 5\times10^{-5}$ cm 的线栅起偏器是非常困难的。尽管如此，伯德(Bird)和帕里什(Parrish)成功地在 1in (=25.4mm)的范围内放入了 30000 根线[①]。制作这种线栅的细节在本书中也有讨论。伯德和帕里什最初的工作发表于 1950 年(见参考文献[2])。

正如已经指出的，制作对于可见光十分有效的线栅起偏器是十分困难地。但是，除了使用细长的线栅，也可以使用长链聚合物分子材料，这些分子由在长链方向具有很高电导率的原子(例如碘)组成。这些长链分子被排列得几乎相互平行。由于碘原子的高电导率，平行于分子链的电场将被吸收。一片包含这种(几乎相互平行排列的)长链聚合分子的薄片称为偏振片。当光束入射到这种偏振片上时，(相互平行的)分子由于碘原子提供的高电导率吸收了平行于分子链方向的电场分量；而垂直于分子链方向的电场分量则可以通过。所以，这种导电分子链就如同线栅起偏器中的线栅一样，而且由于分子链之间的距离与光波长相比

① 进一步的细节，详见参考文献[1]。

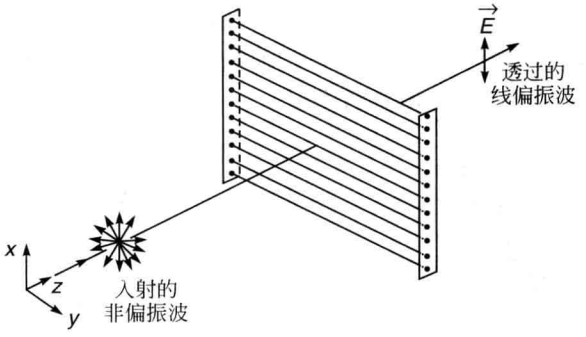


图 22.8　线栅起偏器

足够小,所以,这种偏振片用于产生偏振光十分有效,且将这种导电的长分子链规则排列并不十分困难[①]。

22.2.2　反射产生偏振光

考虑一列平面电磁波入射到电介质上,假设与入射波相关联的电矢量方向处于入射面内,如图 22.9(a)所示。在 24.2 节中将会证明,当入射角为

$$\theta = \theta_p = \arctan\frac{n_2}{n_1} \tag{22.9}$$

时,反射率为零。这样,当一束非偏振光以这个角度入射时,反射光将是线偏振光,且电矢量方向垂直于入射面,如图 22.9(b)所示。式(22.9)即为布儒斯特定律,且当以这个角度入射时,反射波与透射波互相垂直,θ_p 称为起偏角或布儒斯特角。

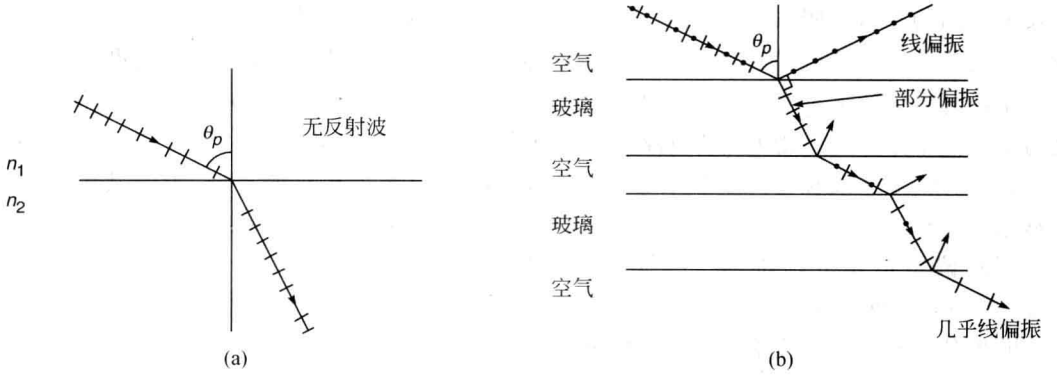


图　22.9

(a) 若一束线性偏振光入射到两媒质的交界面上($\boldsymbol{E}$ 位于入射平面内),且入射角为 $\theta_p(=\arctan n_2/n_1)$,其反射率为零;(b) 当非偏振光以这个角度入射时,反射光为线性偏振光,且电矢量垂直于入射面,透射光为部分偏振光;如果光束经过了几次反射面,则透射光是几乎电矢量处于入射面的平面偏振光。

对于空气和玻璃界面,$n_1=1$ 和 $n_2\approx1.5$,可以给出 $\theta_p=57°$,透射光为部分偏振光;若使用大量的反射界面,可以得到一束几乎是平面偏振光的透射光,如图 22.9(b)所示。

① 制作这种偏振片的实验细节详见参考文献[1]。

对于空气和水的界面，$n_1=1$ 和 $n_2\approx1.33$，起偏角 $\theta_p=53°$。当太阳光以接近于起偏角的角度入射到海平面时，反射光将几乎是线偏振光（如图 22.10 所示）。如果通过一个旋转的偏振片观察反射光，当偏振片遮挡了反射光后，海水会变得更加透明。如图 22.11 所示为阳光入射到水表面时，其反射光是几乎线偏振的。若偏振片允许反射光（几乎是线偏振的）通过，可以看到水面上的炫光，见图 22.11(a)；用一个透光方向是竖直的偏振片可以屏蔽掉反射的炫光，就能看到水下面的情景，见图 22.11(b)和文前附录图表页中的图 26。

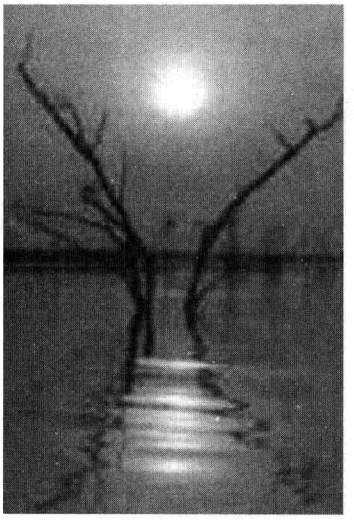
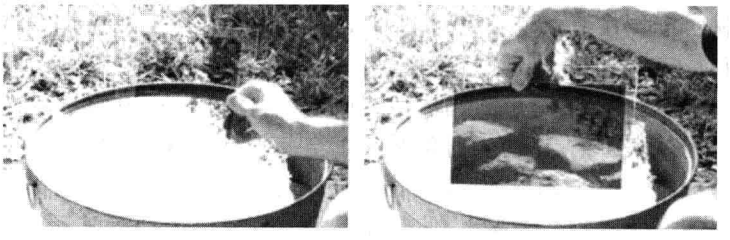


图 22.10　当阳光以接近起偏振角的角及入射到海平面时，反射光将几乎是线偏振光。如果通过一个旋转的偏振片来观察水面，则在偏振片遮挡了反射的炫光后，海水会变得更加透明。图片引自 http://polarization.com/water/water.html。彩图见文前附录图表页的图 25。①



(a)　　(b)

图 22.11　当太阳光以接近于起偏振角的角度入射到水面时，反射光将几乎是线偏振光。

(a) 若偏振片允许(几乎是线偏振的)反射光通过，可以看到水面上的炫光；(b) 用一个透光方向竖直的偏振片可以屏蔽掉反射的炫光，就能看到水下面的情景。图片引自 http://polarization.com/water/water.html。彩图见文前附录图表页的图 26。②

22.2.3　双折射产生偏振光

在 22.5 节和 22.12 节中，将讨论双折射的现象，并证明当一束非偏振光入射到一个各

① 原书为“图 27”

② 原书为“图 28”

向异性晶体中时,会分为两束光,每一束光均可以由一个特定的偏振态所表征。若通过某些方法消除其中的一束光,就能得到一束线偏振光。

一个简单的消除其中一列光束的方法是利用选择性吸收,这种选择性吸收的特性称作二向色性。像电气石这样的晶体,对于一束入射光分解的两个线偏振光分量具有不同的吸收系数,所以,一个分量的光被迅速吸收,而另一分量的光则可以没有过多衰减地通过。因此,如果一束非偏振光通过一个电气石晶体后,其透射光将成为线偏振光,如图 22.12 所示。

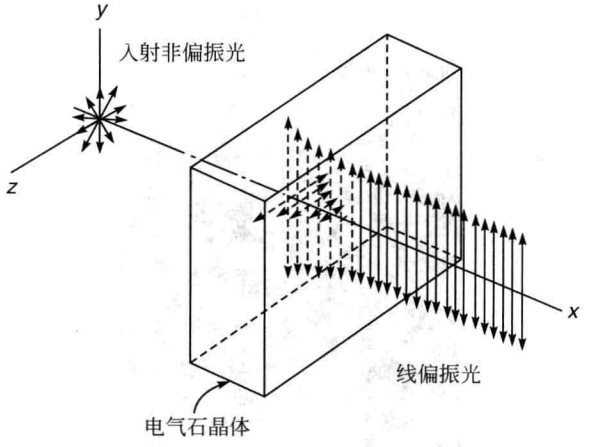


图 22.12 当非偏振光入射到如电气石这样的二色性晶体时,将会分为两个线性偏振分量,其中一个分量的光被迅速吸收,而另一分量的光则可以没有过多衰减地通过(图片来自参考文献[3],获得了使用许可)。

另一种消除其中一束偏振光的方法是通过全反射。将在 22.5 节和 22.12 节中证明,如果两束光具有不同的速度,则相应的折射率也会不同。如果可以将一个折射率介于其他两个媒质之间的材料层夹在两个媒质中间,那么,对于其中一束光来说,将是从光疏媒质入射到光密媒质,而对于另一束光来说,将是从光密媒质入射到光疏媒质。此原理被用于尼克尔棱镜中,尼克尔棱镜是由一块方解石晶体切割而成,对于方解石中的一束光而言,其中间的夹层媒质是一个光疏媒质,光束的入射角略大于全反射临界角,因此,这束特定的光可以通过全反射被消除掉。如图 22.13 所示,用适当的方式(不同的角度)切割方解石晶体,两块切开的晶体之间用加拿大树胶粘合起来,使其让寻常光分量经历全反射,而让非常光分量可以通过,透射出晶体,成为线偏振光。

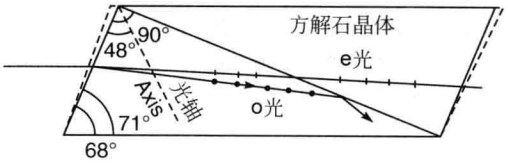


图 22.13 尼克尔棱镜。虚线框表示原来天然的方解石晶体,晶体被切割,使寻常光在加拿大树胶层处经历全反射。

22.2.4 散射产生偏振光

若一束非偏振光照射到气体上,则相对于入射光成 90°的散射光将成为线偏振光。可

以从以下事实加以说明：在 y 方向传播的波是由电偶极振荡在 x 方向的分量产生的(见图 22.14)。而电偶极振荡在 y 方向的分量不会产生 y 方向的波场(见 23.4 节)。在此值得提及的是，通过散射实验，才使 Barkla 建立了 X 射线的横波特性图像。很显然，如果入射光是 x 方向线偏振的，则在 x 轴方向不会有散射光。这样，可以通过进一步的散射实验对散射光进行分析(见图 22.14(b))。

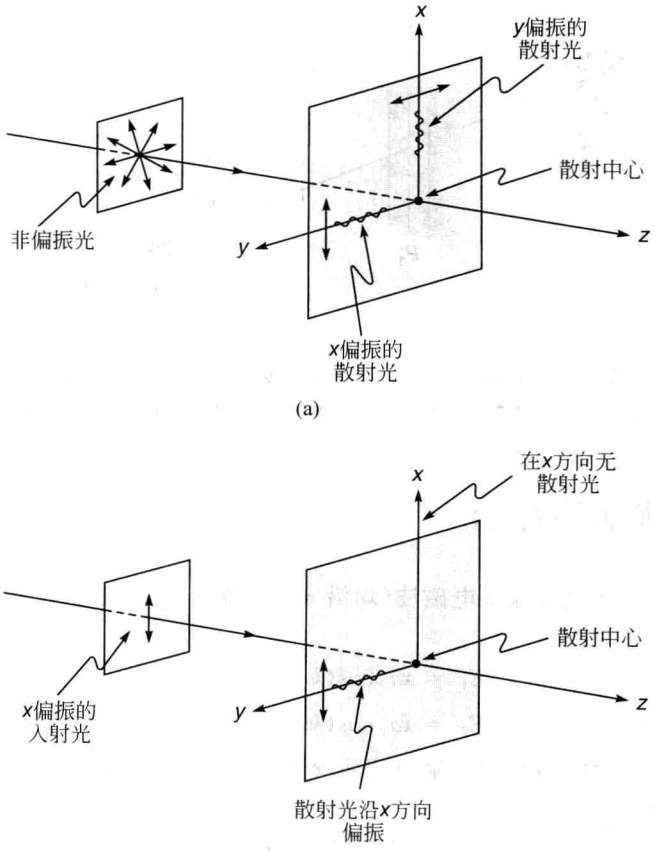


图　22.14

(a) 若电磁波沿 z 轴方向传播，则在垂直 z 轴的任意方向的散射波为线偏振波；

(b) 如果一束线偏振波(电场沿 x 方向振动)入射到作为散射中心的电偶极子，则在 x 方向没有散射波。

22.3　马吕斯定律

考虑一透光轴平行于 x 轴的起偏器 P_1(如图 22.15 所示)，即，如果一束沿 z 轴传播的非偏振光入射到起偏器上，则透射光的电矢量将沿 x 轴方向振动。应当注意到，如果起偏器是一个偏振片，若想令透光轴沿 x 方向，则长分子链必须沿 y 轴方向排列。接下来考虑沿 x 轴方向偏振的光束入射到一个透光轴与 P_1 成 θ 角的偏振片 P_2 的情况(见图 22.15)。若入射光电场强度的振幅为 E_0，则透射光的振幅为 $E_0\cos\theta$，则透射光光强为

$$I = I_0\cos^2\theta \tag{22.10}$$

式中 I_0 为当 P_2 的透光轴沿 x 轴方向时(即 $\theta=0$ 时)透射光的光强。式(22.10)即为马吕斯定律。由此,若一束线偏振光入射到一偏振片上,并且让偏振片绕 z 轴旋转,则透射光的光强将遵循上述定律变化。例如,如图 22.15 所示的偏振片 P_2 顺时针旋转,则光强将持续增加,直至透光轴平行于 x 轴方向;继续旋转,将使光强减弱直至透光轴与 y 轴平行,此时光强几乎为零;如果继续旋转,则光强将再次经历一个最大值及最小值之后,回到初始状态。

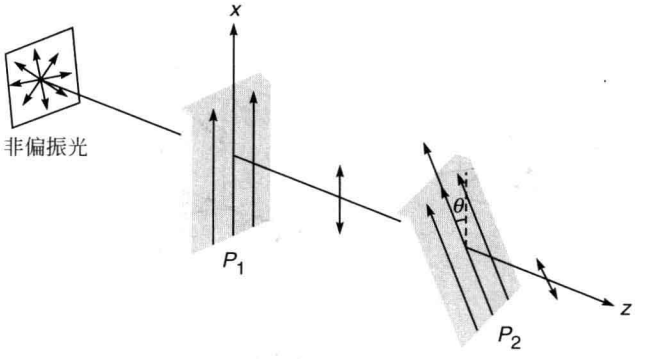


图 22.15 一束非偏振光通过偏振片 P_1 后,成为沿 x 轴方向偏振的线偏振光,第二个偏振片 P_2 的透光轴与 P_1 成 θ 角,则透射光的强度按 $\cos^2\theta$ 的规律变化。

22.4 两个扰动的叠加

考虑同时传播的两列线偏振电磁波(均沿 z 轴传播),其电矢量均沿 x 轴方向振动。两列波的电场可以分别写为

$$\boldsymbol{E}_1 = \hat{\boldsymbol{x}} a_1 \cos(kz - \omega t + \theta_1) \tag{22.11}$$

$$\boldsymbol{E}_2 = \hat{\boldsymbol{x}} a_2 \cos(kz - \omega t + \theta_2) \tag{22.12}$$

式中 a_1 和 a_2 分别表示两列波的振幅,$\hat{\boldsymbol{x}}$表示 x 轴方向的单位矢量,θ_1 和 θ_2 表示相位常数。两波叠加的合成波为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 \tag{22.13}$$

而 $\boldsymbol{E}$ 总可以写为

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{x}} a \cos(kz - \omega t + \theta) \tag{22.14}$$

式中

$$a = [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]^{1/2} \tag{22.15}$$

表示合成波的振幅。式(22.14)表明叠加后的合成波依然是线偏振波,且其电矢量沿着相同的轴振动。

接下来考虑两列沿 z 轴传播的正交偏振的线偏振波的叠加。有

$$\boldsymbol{E}_1 = \hat{\boldsymbol{x}} a_1 \cos(kz - \omega t) \tag{22.16}$$

$$\boldsymbol{E}_2 = \hat{\boldsymbol{y}} a_2 \cos(kz - \omega t + \theta) \tag{22.17}$$

当 $\theta=n\pi$ 时,叠加的合成波也为线偏振波,电场矢量沿着与 x 轴成特定夹角的方向振动。这个夹角由 a_1 与 a_2 相对值决定。

为确定合成波的偏振态,考虑在垂直于 z 轴的一个任意平面内合成电场强度的时变情况,不失一般性,假设该平面位于 $z=0$。若 E_x 和 E_y 表示合成电场强度 $\boldsymbol{E}(=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2)$ 的 x

和 y 分量，则

$$E_x = a_1 \cos\omega t \tag{22.18}$$

$$E_y = a_2 \cos(\omega t - \theta) \tag{22.19}$$

式中应用了式(22.16)和式(22.17)，且取 $z=0$。当 $\theta=n\pi$ 时，上式可简化为

$$\begin{aligned} E_x &= a_1 \cos\omega t \\ E_y &= (-1)^n a_2 \cos\omega t \end{aligned} \tag{22.20}$$

由此，可得

$$\frac{E_y}{E_x} = \pm \frac{a_2}{a_1} \quad (\text{与 } t \text{ 无关}) \tag{22.21}$$

式中的正负号由 n 的奇偶决定(偶为正，奇为负)。在 E_x-E_y 平面，式(22.21)表示直线。这条线与 x 轴的夹角(ϕ)由 a_2/a_1 决定。实际上，有

$$\phi = \arctan\left(\pm \frac{a_2}{a_1}\right) \tag{22.22}$$

条件 $\theta=n\pi$ 表明两个振动同相($n=0,2,4,\cdots$)或反相($n=1,3,5,\cdots$)。由此，两列同相且正交的线偏振波，叠加后的合成波还是一线偏振波，其电场矢量的振动方向，一般而言，与参与叠加的两线偏振波电场的振动方向都不同。如图 22.16 所示为 a_2/a_1 取不同值时，由式(22.20)决定的合成波电场矢量的情况。电矢量的末端沿图中的粗线振动(角频率为 ω)。直线方程由式(22.21)决定。

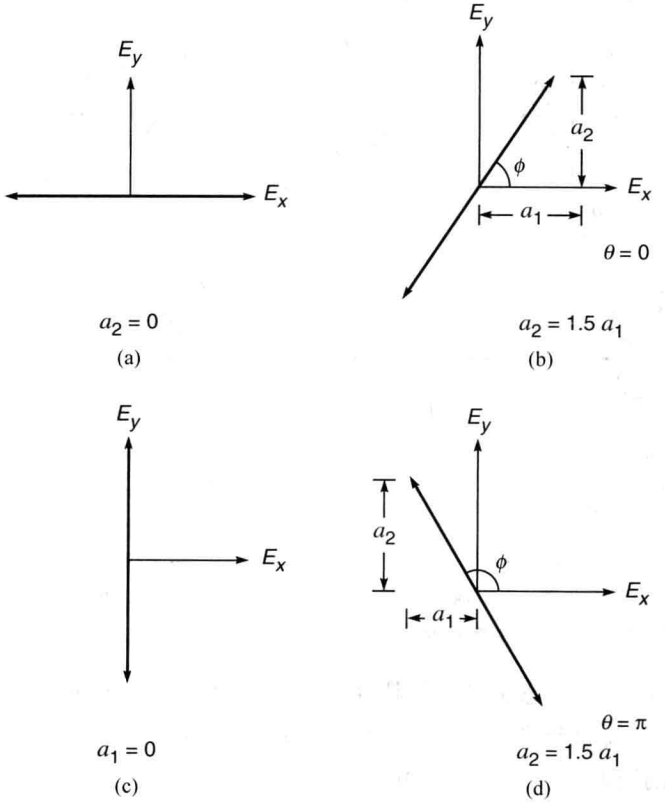


图 22.16　两列线偏振波的叠加，其电场同相，且分别在 x 轴方向和 y 轴方向振动。叠加后的合成波也是线偏振波，其电场矢量振动方向与 x 轴间的夹角为 ϕ。

当 $\theta \neq n\pi(n=0,1,2,\cdots)$ 时，一般而言，合成波的电矢量不再沿直线振动。首先考虑 $\theta=\pi/2$，且 $a_1=a_2$ 的简单情况。由此

$$E_x = a_1\cos\omega t \tag{22.23}$$

$$E_y = a_1\sin\omega t \tag{22.24}$$

若绘出 x 与 y 分量由式(22.23)和式(22.24)给出的合成波的电场矢量的变化情况，可以发现，该电场矢量的末端沿着一个圆周(半径为 a_1)逆时针旋转(如图 22.17(c)所示)，其传播的 $+z$ 轴方向指向纸外。这样的偏振波称为右旋圆偏振波(简写为 *RCP* 波)[①]。合成电场矢量的末端位于一个圆周上，显然，该圆周满足

$$E_x^2 + E_y^2 = a_1^2 \quad (\text{与 } t \text{ 无关})$$

对于 $\theta=3\pi/2$，可得到

$$E_x = a_1\cos\omega t \tag{22.25}$$

$$E_y = -a_1\sin\omega t \tag{22.26}$$

这依然表示一圆偏振光，但其电场矢量沿顺时针方向旋转(见图 22.17(g))，这样的波称为左旋圆偏振波(简写为 LCP 波)。

对于 $\theta \neq m\pi/2(m=0,1,2,\cdots)$ 的情况，电场矢量的末端在一个椭圆上转动(见图 22.17，对应于不同的 θ)。如图 22.17 所示，当 θ 为 $\pi/2$ 的偶数或奇数倍的时候，椭圆偏振波退化为线偏振或圆偏振波。一般情况下，当 $a_1 \neq a_2$ 时，得到椭圆偏振光，而在 $\theta=0,\pi,2\pi,\cdots$ 时，退化为线偏振光。在 22.4.1 节中将进行数学推导。

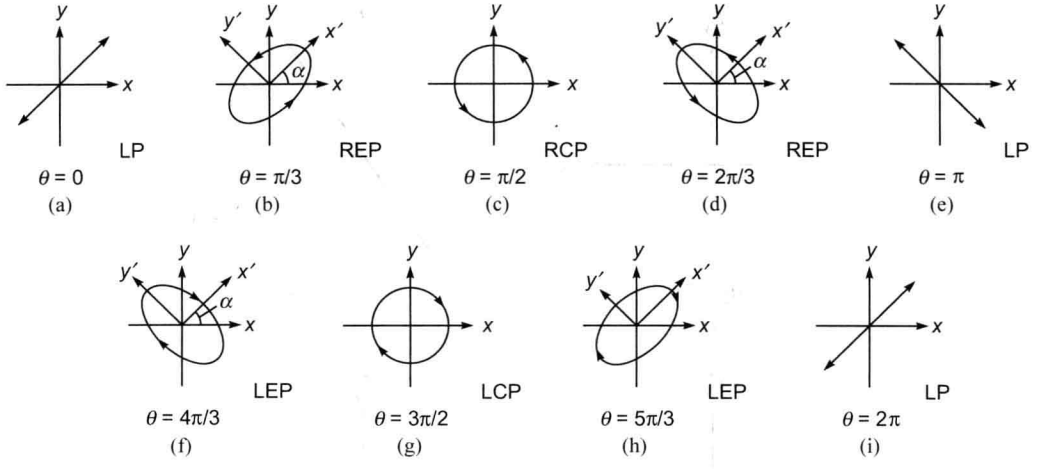


图 22.17　$a_1=a_2$ 的情况下，θ 取不同值时的偏振态(见式(22.18)和式(22.19))。例如，(c)和(g)分别表示右旋和左旋圆偏振光；类似地，(b)和(d)表示右旋椭圆偏振光(REP)，(f)和(h)表示左旋椭圆偏振光(LEP)。波的传播方向为由纸面指向纸外。

提醒一下，不同的偏振态是横波的特性。例如，如同 22.1 节中讨论过的，若上、下移动拉紧的弦，将产生一线偏振波，其位移限制在竖直平面内的。同理，也可以产生一位移限制在水平面内的线偏振波(见如图 22.1(b))。更进一步，将弦的一端在一个圆或椭圆上旋转，

① 本书左旋与右旋的规定方式与文献[4]的用法相一致，但是有些书采用的是相反的规定方式。

产生圆偏振波或椭圆偏振波。与电磁波情况相似，可以通过两束线偏振波在弦上传播来产生椭圆偏振波，且对于这种波来说，弦上的质元实际上在圆（或椭圆）上移动。而另一方面，对于椭圆偏振电磁波来说，是电场（或者磁场）在一个特定点改变它的大小和方向；这种场的存在可以通过它与带电粒子的相互作用而感受到。特别对于圆偏振波而言，场的大小保持不变，而方向以角频率 ω 变化。另一方面，对于线偏振波，场的方向不变，而大小在零值附近以波的角频率振荡。

22.4.1　数学分析

在本节中将证明式(22.18)和式(22.19)表示椭圆偏振波。重写式(22.18)和式(22.19)，可得

$$\begin{cases} E_x = a_1 \cos\omega t \\ E_y = a_2 \cos(\omega t - \theta) \end{cases} \tag{22.27}$$

假设椭圆的主轴沿着 x' 轴或 y' 轴，且 x' 轴与 x 轴之间的夹角为 α（见图 22.17(b)），则

$$E'_x = E_1 \cos(\omega t - \phi) \tag{22.28}$$

$$E'_y = E_2 \sin(\omega t - \phi) \tag{22.29}$$

很显然，有

$$\left(\frac{E'_x}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{E'_y}{E_2}\right)^2 = 1$$

上式表示一椭圆方程。现在，对于旋转的坐标系，有

$$E_x = E'_x \cos\alpha - E'_y \sin\alpha$$

$$E_y = E'_x \sin\alpha + E'_y \cos\alpha$$

若在第一式乘以 $\cos\alpha$，并在第二式乘以 $\sin\alpha$，然后两式相加，可得

$$E'_x = E_x \cos\alpha + E_y \cos\alpha \tag{22.30}$$

同理，有

$$E'_y = -E_x \sin\alpha + E_y \sin\alpha \tag{22.31}$$

将式(22.18)、式(22.19)、式(22.28)、式(22.29)代入式(22.30)、式(22.31)，可得

$$E_1 \cos(\omega t - \phi) = a_1 \cos\omega t \cos\alpha + a_2 \cos(\omega t - \theta)\sin\alpha$$

$$E_2 \sin(\omega t - \phi) = -a_1 \cos\omega t \sin\alpha + a_2 \cos(\omega t - \theta)\cos\alpha$$

上面两式在任何时候均需成立，由此，令方程两边 $\cos\omega t$ 与 $\sin\omega t$ 的系数相等，可得

$$E_1 \cos\phi = a_1 \cos\alpha + a_2 \cos\theta \sin\alpha$$

$$E_1 \sin\phi = a_2 \sin\theta \sin\alpha$$

$$-E_2 \sin\phi = -a_1 \sin\alpha + a_2 \cos\theta \cos\alpha$$

$$E_2 \cos\phi = a_2 \sin\theta \cos\alpha$$

上面 4 个方程平方并相加，有

$$E_1^2 + E_2^2 = a_1^2 + a_2^2$$

这个结果正是所期待的，因为两束波的总强度应该相等。进一步，有

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{a_2 \sin\theta \cos\alpha}{a_1 \cos\alpha + a_2 \cos\theta \sin\alpha} = \frac{a_1 \sin\alpha - a_2 \cos\theta \cos\alpha}{a_2 \sin\theta \sin\alpha} \tag{22.32}$$

因此，有

$$a_2^2\sin^2\theta\sin\alpha\cos\alpha = a_1^2\sin\alpha\cos\alpha - a_2^2\cos^2\theta\sin\alpha\cos\alpha - a_1a_2\cos\theta(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

简化后,可得

$$\tan 2\alpha = \frac{2a_1a_2\cos\theta}{a_1^2 - a_2^2} \tag{22.33}$$

下面考虑一些简单的例子。

对于

$$a_1 = a_2, \quad 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \tag{22.34}$$

意味着椭圆的长轴(或短轴)与 x 轴成 45°(见图 22.17(b))。进一步,有

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2} \tag{22.35}$$

因此,对于 $a_1=a_2$,且对于

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$$

有

$$\frac{E_2}{E_1} = +0.577, 1, 1.732, -1.732, -1, -0.577$$

分别对应于 REP,RCP,REP,LEP,LCP,LEP,如图 22.17 所示。例如,对于 $\theta=\frac{4\pi}{3}$,有

$$E'_x = E_1\cos(\omega t - \phi)$$
$$E'_y = -1.732E_1\sin(\omega t - \phi)$$

此时,椭圆的长轴沿着 y' 轴。为了确定偏振态,不失一般性,选择在 $t=0$ 的瞬间,$\phi=0$,则

$$E'_x = E_1\cos\omega t$$
$$E'_y = -1.732E_1\sin\omega t$$

此时在

$$t = 0, \quad E'_x = E_1, \quad E'_y = 0$$
$$t = \frac{\pi}{2\omega}, \quad E'_x = 0, \quad E'_y = -1.732E_1$$
$$t = \frac{\pi}{\omega}, \quad E'_x = -E_1, \quad E'_y = 0$$

如此类推,电场矢量将顺时针方向旋转,如图 22.17(f)所示。

22.5 双折射现象

当一束非偏振光入射到方解石晶体表面时,通常被分为两束线偏振光,如图 22.18(a)所示。传播方向不改变的光束称为寻常光(一般简写为 o 光),它遵循斯涅耳折射定律。另一方面,第二束光一般不遵循斯涅耳定律,称为非常光(一般简写为 e 光)。两束光的出现是,源于双折射现象,像方解石这样的晶体一般称为双折射晶体(见图 22.19)。若在方解石晶体后面放置一个偏振片 PP',并(绕 NN' 轴)旋转,则偏振片存在两个位置,一方面,(当透光轴垂直于纸平面时)使得 e 光完全被阻挡,只有 o 光通过;另一方面,当透光轴在纸平面内时(即沿着直线 PP' 方向),o 光将被完全阻挡,只有 e 光通过。此外,若绕 NN' 轴旋转晶体,

则 e 光将绕着 NN' 轴旋转(见图 22.18(b))。

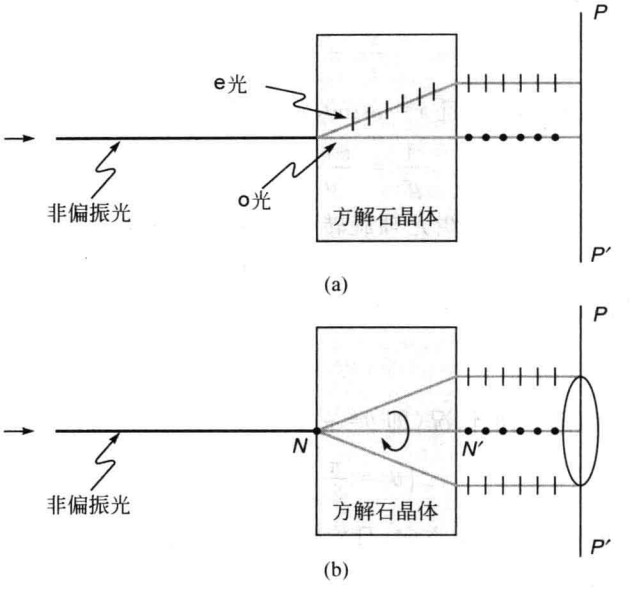


图　22.18

(a) 当非偏振光入射到方解石晶体时,一般被分为两束线偏振光;
(b) 若沿 NN' 轴旋转晶体,则 e 光也将沿着 NN' 轴旋转。



图 22.19　一块方解石晶体放置在纸上方,有些字母显示出双折射。
图片引自 http://en.wikipedia.org/wiki/Photon_polari-zation。彩图见文前附录图表页的图 27。①

在 22.12 节中将证明寻常光在所有方向的速度都是相等的,非常光的速度在不同方向是不等的,这种具有在不同方向表现不同性质的物质(像方解石、石英)叫做各向异性物质。沿着某些特定的方向(在晶体内是固定的),两束光的速度是相等的,这个方向叫做晶体的光轴。对于方解石等晶体,两束光只有沿着唯一的一个方向才会速度相等(即光轴方向),这种晶体称为单轴晶体②。寻常光和非常光的速度可由下列等式表示(见式(22.123))

$$v_{ro}=\frac{c}{n_o}\quad \text{寻常光} \tag{22.36}$$

$$\frac{1}{v_{re}^2}=\frac{\sin^2\theta}{(c/n_e)^2}+\frac{\cos^2\theta}{(c/n_o)^2}\quad \text{非常光} \tag{22.37}$$

① 原书为"29"。

② 对于一般的晶体,晶体内存在两个方向,两束光沿这两个方向传播时有相等的速度,这种晶体称为双轴晶体。关于双轴晶体的分析相当复杂,有兴趣的读者请参看文献[5,6]。

式中 n_o 与 n_e 为晶体的常数，θ 为光束与光轴的夹角，假设光轴与 z 轴平行。由此，c/n_o 与 c/n_e 为当非常光沿着光轴方向和垂直于光轴方向传播时的速度。(在 z-x 平面)椭圆方程为

$$\frac{z^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \tag{22.38}$$

若(ρ,θ)表示极坐标，有 $z=\rho\cos\theta$ 且 $x=\rho\sin\theta$，则椭圆方程可写为

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2} \tag{22.39}$$

在三维空间，式(22.39)表示一个绕光轴旋转而成的旋转椭球面，因此，绘制出 v_{re} 作为 θ 函数的变化，将得到一个非常光的旋转椭球面；另一方面，又因为 v_{ro} 与 θ 无关，如果绘出 v_{ro} 作为 θ 函数的变化，将得到一个寻常光的球面。沿着光轴方向，$\theta=0$，且

$$v_{ro}=v_{re}=\frac{c}{n_o}$$

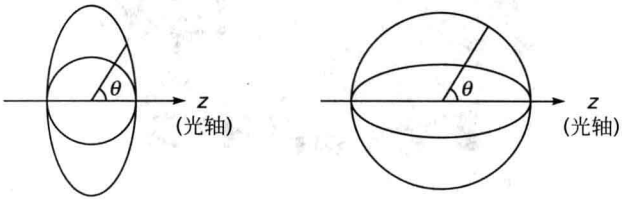
接下来考虑垂直光轴时的 v_{re} 值情况(即 $\theta=\pi/2$)。对于负晶体，有 $n_e<n_o$，且

$$v_{re}\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)=\frac{c}{n_e}>v_{ro} \tag{22.40}$$

由此，旋转椭球的短轴将沿着光轴方向，且旋转椭球面位于球面外面(如图 22.20(a)所示)。另一方面，对正晶体，有 $n_e>n_o$，且

$$v_{re}\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)=\frac{c}{n_e}<v_{ro} \tag{22.41}$$

则旋转椭球的长轴将沿着光轴方向，且旋转椭球面位于球面内部(如图 22.20(b)所示)。上面提到的旋转椭球面与球面称为射线速度曲面。



负晶体 (a)　　正晶体 (b)

图　22.20

(a) 对于负晶体，旋转椭球面(对应于非常光)位于球面外，球面对应于寻常光；

(b) 对于正晶体，旋转椭球面(对应于非常光)位于球面内，球面对应于寻常光。

接下来考虑一非偏振的平面波入射到方解石晶体上的情况。该平面波将分为两束平面波，一束为寻常光，另一束为非常光。对于这两束光，电磁矢量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 随时间和空间的变化可以假设为如下形式

$$e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

式中 $\boldsymbol{k}$ 为传播矢量(也称为波矢量)，表示等相面的法线方向。一般而言，o 光和 e 光的 $\boldsymbol{k}$ 有所不同。在 22.12 节，将证明以下性质。

(1) 寻常光和非常光均为线偏振光。

(2) 对寻常光和非常光，均有

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{k}=0 \tag{22.42}$$

由此，$\boldsymbol{D}$ 总是与 $\boldsymbol{k}$ 垂直，且由于这个原因，$\boldsymbol{D}$ 被选为“振动”的方向。

(3) 假设 z 轴与光轴平行，对于 o 光则有

$$\boldsymbol{D}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}=0 \quad (\text{且有 } \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{k}=0) \tag{22.43}$$

由此，对于 o 光，$\boldsymbol{D}$ 既与光轴垂直，又与 $\boldsymbol{k}$ 垂直。

(4) 另一方面，对于 e 光，$\boldsymbol{D}$ 位于 $\boldsymbol{k}$ 与光轴组成的平面内，有

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{k}=0 \tag{22.44}$$

根据上面给出的单轴晶体双折射的性质小结，下面将考察平面电磁波入射到如方解石这样的负晶体时的折射情况，类似的分析也可以应用到正晶体上。

22.5.1　正入射

首先假设一列平面波正入射到单轴晶体上，如图 22.21 所示。不失一般性，总是选择光轴位于纸平面内，如图 22.21 所示的虚线表示光轴的方向。为了确定寻常光线，绘出一个以点 B 为圆心，半径为 c/n_o 的球面。同理，以点 D 为圆心(相同的半径)绘出另一个球面。两个球面共同的切面为 OO'，表示寻常光的波前。需要注意的，图中的点子表示“振动”的方向($\boldsymbol{D}$ 的方向)，垂直于 $\boldsymbol{k}$ 和光轴(见式(22.43))。

为了确定非常光的方向，(以点 B 为中心)绘一个椭圆，短轴($=c/n_o$)沿光轴方向，长轴等于 c/n_e。绕光轴旋转椭圆，就可以得到旋转椭球面。同理，以 D 为中心绘出另一个椭球面。共同的切面(垂直于 $\boldsymbol{k}$)为 EE'，如图 22.21 所示。

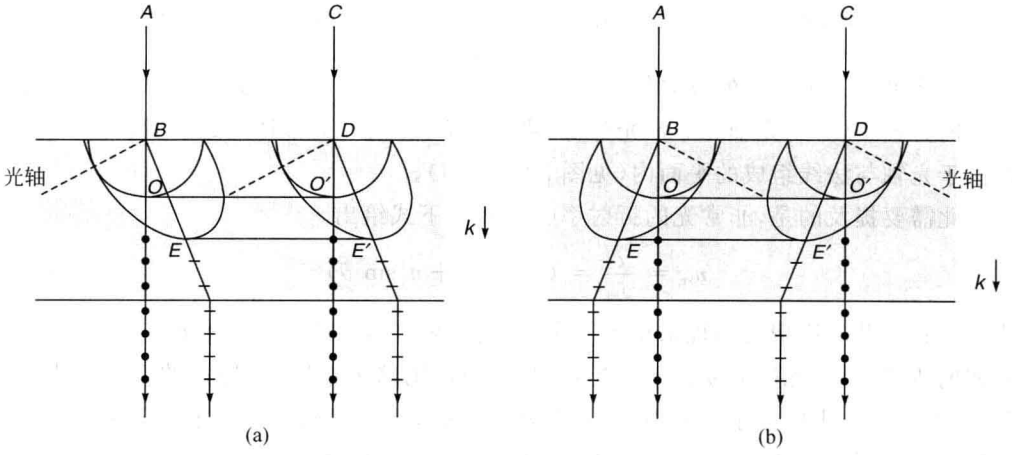


图 22.21　平面波正入射到一负晶体上的折射情况，光轴沿虚线方向。

如果连接点 B 与切点 O，则对应于入射光线 AB，寻常光线将沿着 BO 方向传播。同理，如果连接点 B 与切点 E(切面与旋转椭球面的交点 E，E' 之中一点)，则对应于入射光线 AB，非常光线的方向将沿着 BE。

在此应该注意到，o 光和 e 光的 $\boldsymbol{k}$ 的方向都相同，即，都沿着 BO 方向。如果有一束很细的光束如 AB 一样入射，则寻常光线将沿 BO 传播，非常光将沿着一个不同的方向 BE 传播，如图 22.18(a)和图 22.21(a)所示。

显然，如果光轴的方向不同(如图 22.21(b)所示)，则尽管寻常光线的方向保持不变，但

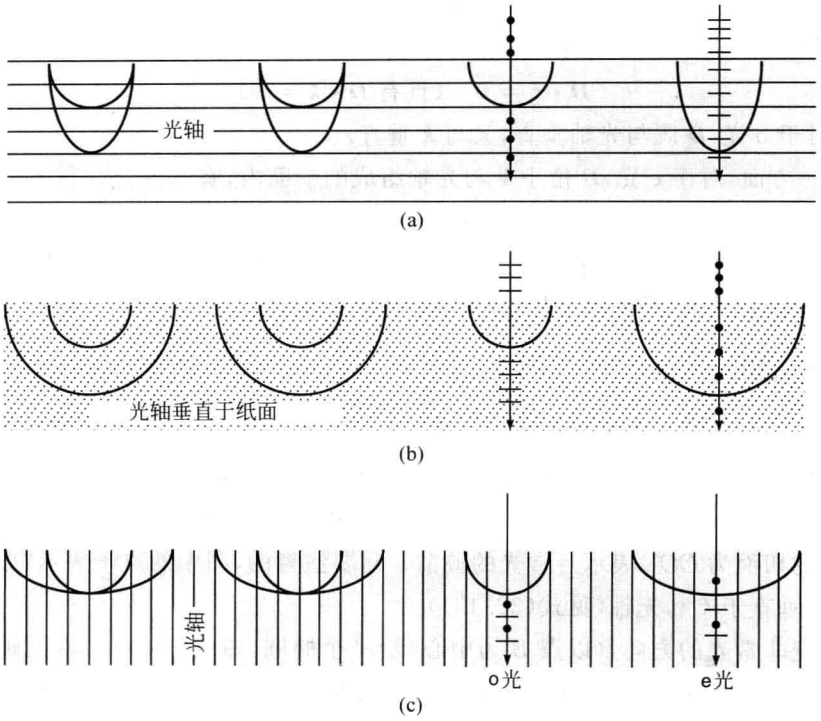


图 22.22　一列平面波正入射到一负晶体上。在(a)与(c)中,光轴表示为平行的直线,而在(b)中,光轴表示为垂直于纸平面的圆点。每一种情况下,寻常光与非常光均沿相同方向传播。

非常光线将沿另一个不同的方向传播。因此,如果一束光正入射到方解石晶体上,且晶体以法线方向为轴旋转,则光轴和非常光都将(绕法线方向)沿一圆锥体的边沿旋转。任意时刻,光线位于光轴与法线组成的平面内(见图 22.18(b))。

在此需要提及的是,非常光的折射率(n_{re})将由下式给出

$$n_{re} = \frac{c}{v_{re}} = (n_o^2\cos^2\theta + n_e^2\sin^2\theta)^{1/2} \tag{22.45}$$

由式(22.45),并应用费马原理来求折射光线,其结果将与本节中得到的相同(见 3.5 节)。

如前所述,寻常光的振动方向与光轴和 $\boldsymbol{k}$ 垂直,则这种情况下,振动的方向将垂直于纸平面,见图 22.21 中的点子。同理,由于非常光的振动方向垂直于 $\boldsymbol{k}$,并位于非常光与光轴组成的平面内,如图 22.21 所示的在非常光线上所画的短直线。由此,入射光将被分为两束传播方向不同的波,且当光线离开晶体时,可以得到两束线偏振光。

对于上面的例子中,假设光轴与界面法线成任意的 α。对于特殊的情况 $\alpha=0$ 及 $\alpha=\pi/2$,寻常光和非常光在相同的方向传播,如图 22.22(a)、(b)和(c)所示。如图 22.22(b)所示为对应于光轴与纸面垂直的情况,此时,非常光的波前在纸面内的部分为一个圆,且寻常光与非常光传播方向相同。需要注意一下,如图 22.22(a)和(b)所示的结构是相同的,在两种情况下,光轴均平行于纸面,但事实上,它们表示同一组球面和椭球面波前的两个不同的截面。

如图 22.22(a)和(b)所示,如果入射光垂直于光轴偏振,则为寻常光,传播速度为 c/n_o。另一方面,如果入射光平行于光轴偏振,则为非常光,传播速度为 c/n_e。如图 22.22(c)所示,光

轴垂直于晶体表面，则 o 光和 e 光将以相等的速度传播。

要注意，如图 22.22(a)和(b)所示，尽管两束光传播方向相同，但是它们的传播速度不等。此现象被应用于四分之一波片和半波片的制造中（见 22.6 节）。另一方面，如图 22.22(c)所示的结构，两束光不但传播方向相同，传播速度也相等。

22.5.2　斜入射

接下来考虑一束平面波斜入射到负晶体上的情况（见图 22.23(a)）。再次根据惠更斯原理来确定折射波波前的情况。令 BD 表示入射波前。如果扰动从点 D 到点 F 的时间为 t，则以点 B 为中心画一个半径为 $(c/n_o)t$ 的球面，以及一个半短轴和半长轴分别为 $(c/n_o)t$ 和 $(c/n_e)t$ 的旋转椭球面，半短轴沿着光轴的方向。由点 F 画 FO 和 FE 分别与球面和旋转椭球面相切，则这两个切面分别表示寻常光和非常光的波前。若切点分别为点 O 和点 E，则寻常光和非常光分别沿 BO 和 BE 传播；这同样可以通过费马原理推出（见 3.5 节）。这些光线的振动方向在图中由点子和短线分别表示，其方向是通过前面讨论过的性质获得的。而对应于 $\alpha=0$，与 $\alpha=\pi/2$ 两种特殊情况时的折射波前的形状可以非常简单地画出来。

如图 22.23(b)所示，对应于光轴与入射面垂直的情况。此时，两束光的波前的截面均为圆形，且非常光也满足斯涅耳定律，有

$$\frac{\sin i}{\sin r}=n_e \quad （光轴垂直于入射面时，e 光）\tag{22.46}$$

对于寻常光，有

$$\frac{\sin i}{\sin r}=n_o \tag{22.47}$$

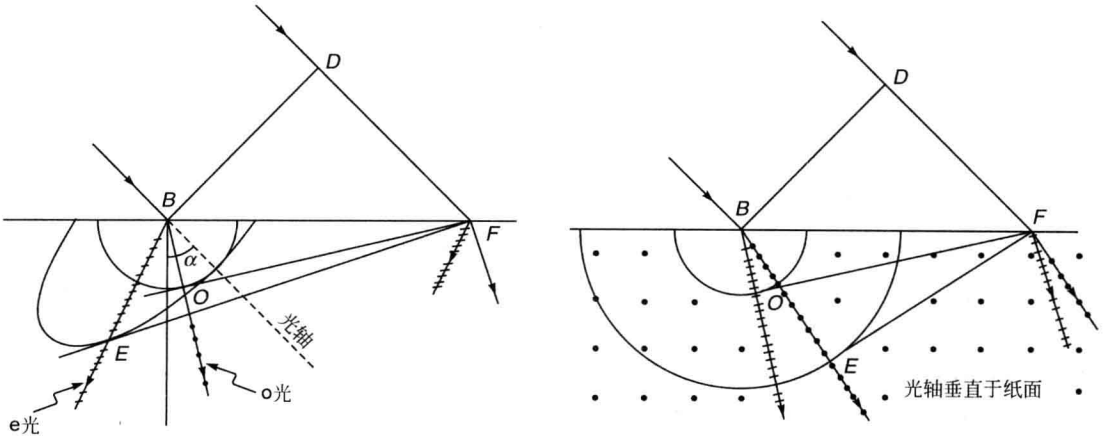


图 22.23　一平面波斜入射到负单轴晶体上时的折射情况。
(a) 光轴沿虚线方向；(b) 光轴垂直于纸面

22.6 偏振光干涉：四分之一波片与半波片

在前面的章节中，考虑了(入射到双折射晶体)平面电磁波如何分为两束具有特定偏振态的波的情况。与寻常光和非常光相联系的振动方向可由性质小结中的式(22.43)与式(22.44)得出。在本节中将考虑当平面电磁波正入射到光轴与晶体表面平行的方解石晶体上的情况，如图22.24所示，将研究从晶体出射光波的偏振态。假设 z 轴沿着光轴方向。如前所述，如果入射光是 y 方向偏振的，则为寻常光，此时非常光不存在。同理，如果入射光为 z 方向偏振的，则为非常光，寻常光不存在。对于任何其他偏振态的入射波而言，寻常光和非常光分量都是存在的。对于像方解石这样的负晶体，$n_e<n_o$，非常光传播速度比寻常光快，对于这种情况，如图22.24所示，用s(慢)和f(快)标出。

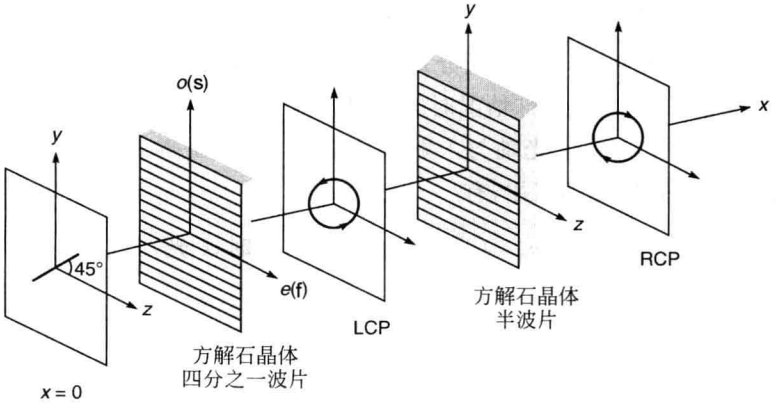


图22.24 一个与 z 轴夹角为45°线偏振光通过用方解石晶体制作的四分之一波片，出射后变为左旋圆偏振光；再通过半波片，左旋圆偏振光变为右旋圆偏振光。四分之一波片与半波片的光轴用平行于 z 轴的直线表示，均沿 z 轴方向。

令与入射光相联系的电场矢量(振幅为 E_0)方向与 z 轴之间的夹角为 ϕ，如图22.24所示，$\phi=45°$。但为了保持分析的普适性，假设 ϕ 为任意角度。此时，光束可以看作是(以同相位振动的)两束线偏振光的叠加，这两束光沿 y 与 z 方向偏振，其振幅幅度分别为 $E_0\sin\phi$ 与 $E_0\cos\phi$。波的 z 方向分量(振幅为 $E_0\cos\phi$)为非常光，传播速度为 c/n_e；波的 y 方向分量(振幅为 $E_0\sin\phi$)为寻常光，传播速度为 c/n_o。又有 $n_e\neq n_o$，两束光以不等的速度传播，则当它们从晶体出射时，不再同相位，出射光(两束光的叠加)一般将变为椭圆偏振光。

令平面 $x=0$ 表示晶体的入射表面。入射光的 y 与 z 分量可写为

$$\begin{cases} E_y = E_0\sin\phi\cos(kx-\omega t) \\ E_z = E_0\cos\phi\cos(kx-\omega t) \end{cases} \tag{22.48}$$

式中 $k(=\omega/c)$ 为自由空间中的波数。因此，$x=0$ 时，有

$$\begin{cases} E_y(x=0) = E_0\sin\phi\cos\omega t \\ E_z(x=0) = E_0\cos\phi\cos\omega t \end{cases}$$

在晶体内部，两个分量变为

$$E_y = E_0\sin\phi\cos(n_o kx-\omega t) \quad (\text{寻常光})$$

$$E_z = E_0\cos\phi\cos(n_e kx - \omega t) \quad (\text{非常光})$$

如果晶体厚度为 d，则在出射的表面，有

$$\begin{cases} E_y = E_0\sin\phi\cos(\omega t - \theta_o) \\ E_z = E_0\cos\phi\cos(\omega t - \theta_e) \end{cases}$$

式中 $\theta_o = n_o kd$，$\theta_e = n_e kd$。选取适当的时刻 $t=0$，两个分量可以写为

$$\begin{cases} E_y = E_0\sin\phi\cos(\omega t - \theta) \\ E_z = E_0\cos\phi\cos\omega t \end{cases} \tag{22.49}$$

式中

$$\theta = \theta_o - \theta_e = kd(n_o - n_e) = \frac{\omega}{c}(n_o - n_e)d \tag{22.50}$$

表示寻常光与非常光经历的相位差。显然，如果晶体的厚度使得 $\theta = 2\pi, 4\pi, \cdots$ 则出射光将保持入射光一样的偏振态。如果晶体的厚度使得 $\theta = \pi/2$，则称晶体为四分之一波片（简写为 QWP）——相位差为 $\theta = \pi/2$ 意味着光程差为四分之一波长。另一方面，如果晶体的厚度使得 $\theta = \pi$，则称晶体为半波片（简写为 HWP）。对于一般的 θ，其偏振态的讨论见 22.4.1 节。

作为例子，考虑 $\phi = \pi/4$ 以及 $\theta = \pi/2$ 的情况，此时，入射波的 y 分量与 z 分量等振幅，且由晶体引入的相位差为 $\pi/2$（见图 22.24）。因此，对于出射波，有

$$E_y = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\sin\omega t, \quad E_z = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\cos\omega t \tag{22.51}$$

上式表示的是圆偏振光，因为

$$E_y^2 + E_z^2 = \frac{E_0^2}{\sqrt{2}}$$

为了确定电场矢量旋转的方向，注意到当 $t=0$ 时，有

$$E_y = 0, \quad E_z = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$$

当 $t = \Delta t$ 时，有

$$E_y \approx \frac{E_0}{\sqrt{2}}\omega\Delta t, \quad E_z \approx \frac{E_0}{\sqrt{2}}$$

上式表明随着时间的增长，电场矢量逆时针旋转，故光束为左旋圆偏振光，如图 22.24 所示。为引入 $\pi/2$ 的相位差，晶体的厚度必须满足

$$d = \frac{c}{\omega(n_o - n_e)}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}\frac{\lambda_0}{n_o - n_e} \tag{22.52}$$

式中 λ_0 为自由空间中的波长。对于方解石，当 $\lambda_0 = 589.3\text{nm}$，18℃时，折射率为

$$n_o = 1.65836, \quad n_e = 1.48641$$

代入式(22.52)，可得

$$d = \frac{5893\times10^{-8}}{4\times0.17195}\text{cm} \approx 0.000857\text{mm}$$

因此，用方解石制作的四分之一波片（对于 $\lambda_0 = 589.3\text{nm}$）的厚度为 0.000857mm，且光轴平行于表面。这样的四分之一波片将对于波长为 $\lambda_0 = 589.3\text{nm}$ 的寻常光分量和非常光分量之间引入 $\pi/2$ 的相位差。如果厚度取上述值的奇数倍，即

$$d = (2m+1)\frac{1}{4}\frac{\lambda_0}{(n_o - n_e)}, \quad m = 0,1,2,\cdots \tag{22.53}$$

根据前面讨论的例子(即,$\phi=\pi/4$),可以容易地得出结论:当 $m=0,2,4,\cdots$ 时,出射光为左旋圆偏振光;当 $m=1,3,5,\cdots$ 时,出射光为右旋圆偏振光。需要在此提及的是,方解石中 y 偏振的 o 光具有较小的速度($v=c/n_o$),为慢光,如图 22.24 与图 22.25 所示中标示为o(s);类似地,非常光为快光(在方解石中),标示为 e(f)。

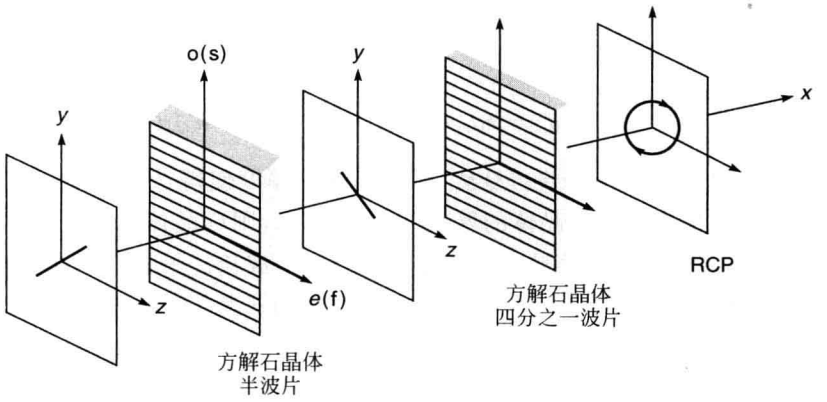


图 22.25 如果线偏振光以与 z 轴为 45°方位角入射到半波片,则偏振平面旋转 90°;再通过一个四分之一波片,变为右旋圆偏振光。半波片与四分之一波片的光轴方向沿着 z 方向,用平行于 z 轴的直线来表示。

接下来考虑线偏振光($\phi=\pi/4$)入射到半波片的情况(即 $\theta=\pi$)。此时,入射光的 y 分量与 z 分量具有相等的振幅,晶体引入的相位差为 π,(见图 22.25)。由此,对于出射波,有

$$E_y = -\frac{E_0}{\sqrt{2}}\cos\omega t, \quad E_z = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\cos\omega t$$

表示方位角(与 z 轴)为 135°的线偏振光(见图 22.25)。如果令这束光通过方解石四分之一波片,则出射光为右旋圆偏振光,如图 22.25 所示。另一方面,如果一束左旋圆偏振光入射到方解石半波片,则出射光为右旋圆偏振光,如图 22.24 所示。

因此,半波片的厚度(对于负晶体)为

$$d = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2(n_o - n_e)}$$

需要提及的是,如果取晶体厚度使得 $\theta\neq\pi/2,\pi,3\pi/2,2\pi,\cdots$ 时,出射波为一般的椭圆偏振光,这与如图 22.17 所示的类似(当然,如图 22.17 所示是沿 z 轴传播,在这里是沿 x 轴传播)。

对于正晶体(如石英),$n_e>n_o$,式(22.49)应写为

$$\begin{cases} E_y = E_0\sin\phi\cos(\omega t+\theta') \\ E_z = E_0\cos\phi\cos\omega t \end{cases} \tag{22.54}$$

式中

$$\theta' = \frac{\omega}{c}d(n_e - n_o)$$

对于四分之一波片,有

$$d=(2m+1)\frac{\lambda_0}{4(n_e-n_o)},\quad m=0,1,2,\cdots$$

因此，如果如图 22.24 所示，方解石四分之一波片被替换为石英四分之一波片，出射波将变为右旋圆偏振光。

例 22.1　一束左旋圆偏振光($\lambda_0=589.3\text{nm}$)正入射到方解石晶体上(切割使光轴与其表面平行)，厚度为 0.005141mm。则出射波的偏振态是什么？

解　入射波在 $x=0$ 处的电场为

$$E_y=\frac{E_0}{\sqrt{2}}\sin\omega t,\quad E_z=\frac{E_0}{\sqrt{2}}\cos\omega t \tag{22.55}$$

又

$$\theta=\frac{(n_o-n_e)d\times 2\pi}{\lambda_0}=\frac{0.17195\times 0.005141\times 2\pi}{5893\times 10^{-7}}\approx 3\pi$$

则出射波为(见式(22.49))

$$E_y=\frac{E_0}{\sqrt{2}}\sin(\omega t-3\pi)=-\frac{E_0}{\sqrt{2}}\sin\omega t$$

$$E_z=\frac{E_0}{\sqrt{2}}\cos\omega t$$

表明出射光为右旋圆偏振光。

例 22.2　一束左旋圆偏振光($\lambda_0=589.3\text{nm}$)正入射到石英晶体(切割使光轴与其表面平行)，厚度为 0.025mm。确定出射波的偏振态。假设 n_o 与 n_e 分别为 1.54425 和 1.55336。

解　类似于前面的例子。入射波在 $x=0$ 处的电场为式(22.55)。又有

$$\theta'=\frac{(n_e-n_o)d\times 2\pi}{\lambda_0}=\frac{0.00911\times 0.025\times 2\pi}{5893\times 10^{-7}}\approx 0.77\pi$$

则出射波为

$$E_y=\frac{E_0}{\sqrt{2}}\cos(\omega t+0.77\pi),\quad E_z=\frac{E_0}{\sqrt{2}}\cos\omega t$$

表明出射光为右旋椭圆偏振光。

22.7　偏振光的分析

如前所述，可知平面电磁波可以分为不同的偏振态，共有如下几种：①线偏振态；②圆偏振态；③椭圆偏振态；④非偏振态；⑤线偏振与非偏振的混合态；⑥圆偏振与非偏振的混合态；⑦椭圆偏振与非偏振的混合态。

用裸眼去看，不同的偏振态显示不出差别。在本节中将讨论确定光束偏振态的方法。

若在光束行进的路径中放入一个偏振片，并且以光束传播的方向为轴进行旋转，则有以下三种情况可能出现。

(1) 如果在偏振片旋转中存在两个位置，在该位置光束完全消光，则该光束是线性偏振光。

(2) 如果在偏振片旋转中光强没有变化，则光束为非偏振光，或者圆偏振光，或者非偏

振光与圆偏振光的混合态。在偏振片前放入一个四分之一波片。若旋转偏振片光强还没有变化,则入射光为非偏振光;若在偏振片旋转中存在两个位置,在该位置光束完全消光,则入射光束为圆偏振光(这是因为四分之一波片使圆偏振光变为线偏振光);若旋转偏振片光强存在变化(但不存在完全消光的情况),则入射光为圆偏振光与非偏振光的混合态。

(3) 如果在偏振片旋转中光强存在变化(但不存在完全消光的情况),则入射光为椭圆偏振光,或者线性偏振光与非偏振光的混合态,或者椭圆偏振光与非偏振光的混合态。在偏振片前放入一个四分之一波片,并使其光轴与前面透射光光强最大时的偏振片透光轴的方向平行。此时,椭圆偏振光将变为线偏振光。因此,若旋转偏振片存在两个完全消光的位置,则入射光为椭圆偏振光。若不出现完全消光的情况,且出现最大透射光强时,偏振片的方向与前一致,则入射光为线偏振光与非偏振光的混合态。若最大透射光强出现在偏振片原取向的不同方向,则入射光为椭圆偏振光与非偏振光的混合态。

22.8 光学旋光

如果一束线偏振光穿过一个如糖水一样的"光学旋光"媒质,则在光束传播的过程中,其偏振面发生旋转。这种旋转的大小正比于光束在媒质中传播的距离,也正比于溶液中糖的浓度。实际上,可以通过测量偏振面旋转过的角度准确测量出溶液中糖的浓度。

这种偏振面的旋转是由于光学旋光媒质中存在左旋圆偏振(LCP)和右旋圆偏振(RCP)两个"模式",且这两个"模式"的传播速度有所不同引起的(见22.16节)。所谓"模式"是说,如果一束左旋圆偏振光入射到旋光物质中,则左旋圆偏振光可以作为一个基模传播;同理,如果一束右旋圆偏振光入射到旋光物质中,则右旋圆偏振光也可以作为一个基模传播,但是以稍微不同的速度传播。因此,如果一束线性偏振光入射,则必须要将其分解为一束左旋圆偏振光与一束右旋圆偏振光的叠加,然后分别考虑它们的传播。下面通过一个例子来加以说明。

考虑一束右旋圆偏振光沿$+z$方向传播,有

$$\begin{cases} E_x^{\mathrm{r}} = E_0\cos(k_{\mathrm{r}}z-\omega t) \\ E_y^{\mathrm{r}} = -E_0\sin(k_{\mathrm{r}}z-\omega t) \end{cases} \tag{22.56}$$

式中$k_{\mathrm{r}}=\dfrac{\omega}{c}n_{\mathrm{r}}$,下标(及上标)r代表右旋圆偏振光。同理,左旋圆偏振光(振幅相同)在$+z$方向传播时,有

$$\begin{cases} E_x^{\mathrm{l}} = E_0\cos(k_{\mathrm{l}}z-\omega t) \\ E_y^{\mathrm{l}} = E_0\sin(k_{\mathrm{l}}z-\omega t) \end{cases} \tag{22.57}$$

式中$k_{\mathrm{l}}=\dfrac{\omega}{c}n_{\mathrm{l}}$。$n_{\mathrm{r}}$和$n_{\mathrm{l}}$分别表示对应于右旋圆偏振光和左旋圆偏振光的折射率。假设两束光同时传播,则x与y分量可以表示为

$$E_x = E_0[\cos(k_{\mathrm{r}}z-\omega t)+\cos(k_{\mathrm{l}}z-\omega t)]$$

或者

$$E_x = 2E_0\cos\left[\frac{1}{2}(k_{\mathrm{l}}-k_{\mathrm{r}})z\right]\cos[\omega t-\theta(z)]$$

同理,有

$$E_y = 2E_0 \sin\left[\frac{1}{2}(k_l - k_r)z\right]\cos[\omega t - \theta(z)]$$

式中

$$\theta(z) = \frac{1}{2}(k_l + k_r)z$$

由此产生的波总是线偏振波，且其平面绕着 z 轴旋转。若电场矢量的振动方向与 x 轴夹角为 ϕ，则(见图 22.26)

$$\phi(z) = \frac{1}{2}(k_l - k_r)z$$

或者

$$\phi(z) = \frac{\pi}{\lambda_0}(n_l - n_r)z = \frac{\omega}{2c}(n_l - n_r)z \tag{22.58}$$

式中 λ_0 为真空中的波长。现在，若

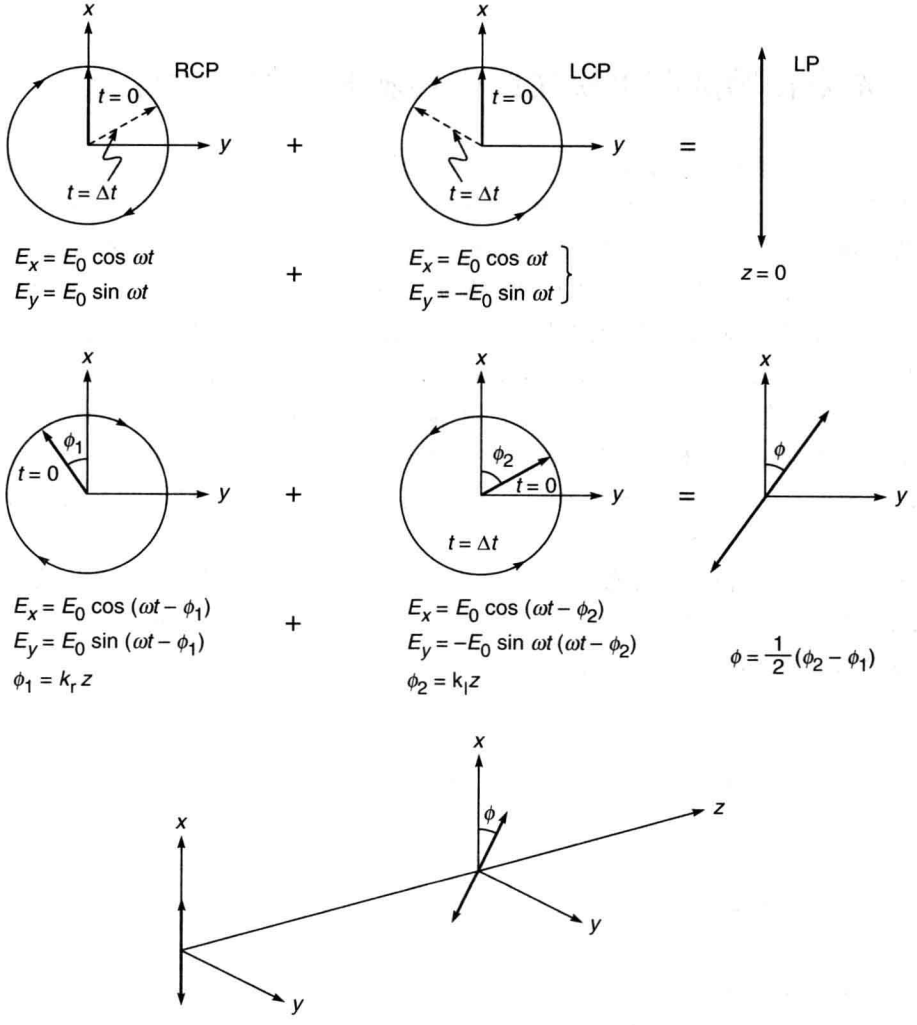


图 22.26　线偏振光在一个“右旋”光学旋光媒质中传播时，偏振面“顺时针”旋转。

$$n_l > n_r \Leftrightarrow \text{光学旋光媒质称为是右手的或右旋的}$$

$$n_r > n_l \Leftrightarrow \text{光学旋光媒质称为是左手的或左旋的}$$

例如,对于松脂,厚度 $z=10\text{cm}$,有

$$\phi = +37^\circ$$

如前所述,可以在糖溶液中观察到光学旋光现象,这是由糖分子的螺旋结构决定的。通过测量偏振面旋转来确定糖溶液浓度的方法已经在工业中广泛应用。可以注意到,如果 $n_l = n_r$(各向同性媒质)则 $\phi(z)=0$,且线偏振光束依然是线偏振光束,并保持在相同方向偏振。光学旋光也存在于晶体中,例如,对于沿石英晶体光轴方向传播[①]的线偏振光,其偏振面将发生旋转。实际上,当 $z=0.1\text{cm}$,$\lambda_0 = 6000\text{Å}$ 时,由

$$|n_l - n_r| \approx 7 \times 10^{-5}$$

可得

$$\phi \approx \frac{7}{60}\pi = 21^\circ$$

22.9 光束在椭圆芯单模光纤中传输时偏振态的变化

一个非常有意思的现象是偏振光在椭圆芯光纤中的传播。第27章和第29章中将简单地讨论光纤,可以说,一根普通光纤具有一圆柱状的纤芯(截面是圆形的),并有一个媒质折射率稍低的包层。光纤对于光束的导引是源于全反射现象(见图27.2和图27.7)。由于光纤具有圆形的对称性,如果入射光以任意的偏振态入射入光纤[②],都可以在传输过程中保持该偏振态。现在,如果使用一个椭圆纤芯的光纤(见图22.27(a)),则在该光纤中的传输模式(近似)为 x 和 y 方向线偏振;换言之,如果以 x 偏振光入射到光纤中,则在传输过程中,其偏振态将不会有任何改变,且具有确定的相速度 ω/β_x。同理,入射为 y 偏振的光束在光纤中也将以 y 方向偏振的模式传输,并具有传播速度 ω/β_y。现在,如果令一束圆偏振光入射到光纤入射面 $z=0$ 处,将其分解为 x、y 方向偏振的两束光,且传输速度不同。因此,有

$$\boldsymbol{E}(x,y,z) = \psi(x,y)[\hat{\boldsymbol{x}}\cos(\beta_x z - \omega t) + \hat{\boldsymbol{y}}\sin(\beta_y z - \omega t)] \tag{22.59}$$

式中 $\psi(x,y)$ 为基模的横向场分布,一般假设在 x 与 y 方向偏振的场分布(几乎)是完全相同的(见28.5节)。容易看出,如果 $\beta_x = \beta_y$(对于圆芯光纤成立),则光束传输到任意 z 都将保持圆偏振状态。现在,对于 $z=0$,有

$$\begin{aligned} E_x &= \psi(x,y)\cos\omega t \\ E_y &= -\psi(x,y)\sin\omega t \end{aligned} \tag{22.60}$$

式(22.60)表示一束左旋圆偏振光(见图22.27(b))。在位置

$$z = z_1 = \frac{\pi}{2(\beta_y - \beta_x)} \tag{22.61}$$

即,当 $\beta_y z_1 = \beta_x z_1 + \pi/2$ 时,有

---

① 严格来说,与方解石晶体不同,当光沿着石英晶体的光轴方向传播时,其模式不是线性偏振的,而是左旋圆偏振光与右旋圆偏振光的模式,且它们以略微不同的速度传播。

② 这里考虑的是单模光纤,因此,不论入射场分布是什么,将迅速转变为横向的基模场分布,其传播速度为 ω/β_0,该速度与输入光的偏振态无关。

$$E_x = \psi(x,y)\cos(\phi_1 - \omega t) = +\psi(x,y)\cos(\omega t - \phi_1)$$

$$E_y = \psi(x,y)\sin\left(\phi_1 + \frac{\pi}{2} - \omega t\right) = +\psi(x,y)\cos(\omega t - \phi_1)$$

式中

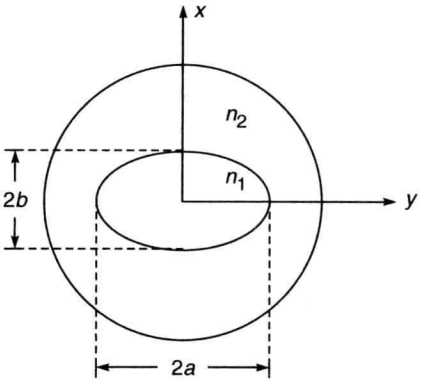
$$\phi_1 = \beta_x z_1$$

上式表示一束线偏振光(见图 22.27(b))。假设此时 $\boldsymbol{E}$ 的方向沿着 y'轴。同理,在位置

$$z = z_2 = \frac{\pi}{\beta_y - \beta_x} = 2z_1$$

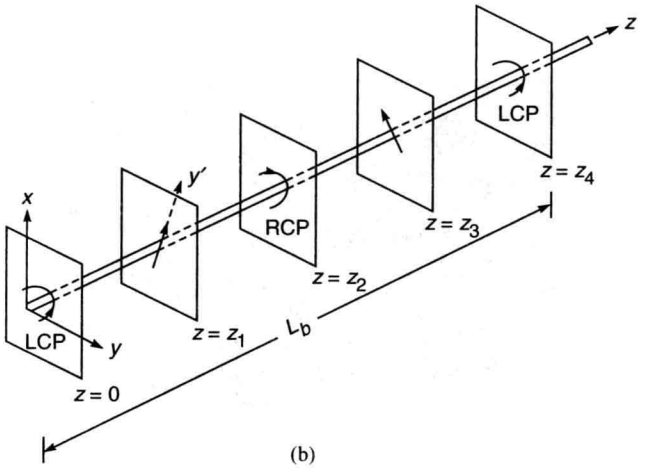
有

$$\begin{cases} E_x = \psi(x,y)\cos(\phi_2 - \omega t) = \psi(x,y)\cos(\omega t - \phi_2) \\ E_y = \psi(x,y)\sin(\phi_2 + \pi - \omega t) = \psi(x,y)\sin(\omega t - \phi_2) \end{cases} \tag{22.62}$$



椭圆纤芯光纤

(a)



(b)

图　22.27

(a) 一椭圆芯光纤的横截面,其"模式"(近似)为 x 偏振和 y 偏振;(b) 一束左旋圆偏振光在椭圆芯光纤中的传播。若沿 y'轴观察,则在 $z=z_1, 5z_1, 9z_1, \cdots$处观察到暗点。

式中

$$\phi_2 = \beta_x z_2$$

这样,光波变为右旋圆偏振波(见图 22.27(b))。在位置

$$z = z_3 = \frac{3\pi}{2(\beta_x - \beta_y)} = 3z_1$$

有

$$E_x = \psi(x,y)\cos(\phi_3 - \omega t) = \psi(x,y)\cos(\omega t - \phi_3)$$

$$E_y = \psi(x,y)\sin\left(\phi_3 + \frac{3\pi}{2} - \omega t\right) = -\psi(x,y)\cos(\omega t - \phi_3)$$

式中

$$\phi_3 = \beta_x z_3$$

这样,光波将再次变为线偏振光,但是其电矢量的振动方向与在 $z=z_1$ 处的方向垂直。应用类似的方法,可以很容易地继续确定光波接下来的偏振态。因此,在位置 $z=5z_1, 9z_1, 13z_1, \cdots$ 处,光束的偏振态与在 $z=z_1$ 处的偏振态相同;而在位置 $z=7z_1, 11z_1, 15z_1, \cdots$ 处,偏振态与在 $z=3z_1$ 处的偏振态相同。类似地,在位置 $z=4z_1, 8z_1, 12z_1, \cdots$ 处,光束将为左旋圆偏振光;在位置 $z=2z_1, 6z_1, 10z_1, \cdots$ 处,光束将为右旋圆偏振光。

现在,令光纤旋转到使 y' 轴沿竖直方向(假设 x' 轴与 z 轴位于水平面)。如果此时我们的眼睛位于光纤的正上方并竖直向下观察,则在 $z=z_1, 5z_1, 9z_1, \cdots$ 处将显示黑暗(如图 22.28 所示)。这是由于在这些区域,电场在 y' 方向振动(竖直方向),且我们知道,当偶极子沿 y' 方向振动时,在这个特定方向上没有辐射发出(见图 22.14 和 23.4 节)。因此,通过测量连续两个暗点之间的距离($=4z_1$)可以计算出 z_1 的大小,并由此算出 $\beta_y - \beta_x$。移动眼睛到水平面,即,沿着 x' 方向观察,可以看到,在 $z=z_1, 5z_1, 9z_1, \cdots$ 处显示为明亮,并在 $z=3z_1, 7z_1, 11z_1, \cdots$ 出现黑暗。因此,这个实验不仅可以帮助理解光束在双折射光纤中偏振态的变化,同时也可以帮助理解偶极子振动的辐射模式。

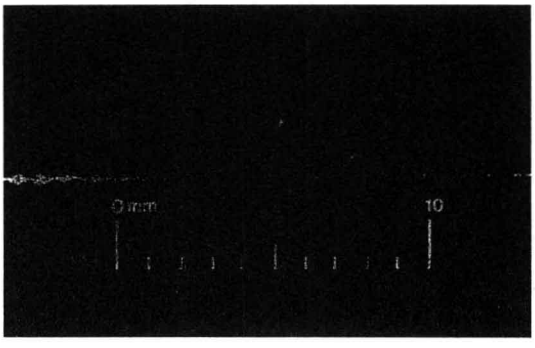


图 22.28 一束圆偏振光正入射到椭圆芯光纤,当从顶端观察光纤时,光强的变化。此图为位于美国伊里诺斯州 Orland Park 的 Andrew 公司拍摄,引自参考文献[13]。

作为一个数值的例子,考虑一椭圆芯光纤参数为

$$2a = 2.14\mu\text{m}, \quad 2b = 8.85\mu\text{m}$$

$$n_1 = 1.535, \quad n_2 = 1.47$$

(见图 22.27(a))对于这样的光纤,且工作于 $\lambda_0=6328\text{Å}$($k_0\approx 9.929\times 10^4\,\text{cm}^{-1}$),有

$$\frac{\beta_x}{k_0}\approx 1.506845,\quad \frac{\beta_y}{k_0}\approx 1.507716$$

则

$$L_b=\frac{2\pi}{\Delta\beta}=\frac{2\pi}{\beta_y-\beta_x}\approx 0.727\text{mm}$$

称为耦合长度。

22.10　渥拉斯顿棱镜

渥拉斯顿棱镜(Wollaston prism)可以用来产生两束线偏振光。渥拉斯顿棱镜由两个相似的棱镜(比如方解石棱镜)组成,如图 22.29 所示,第一个棱镜的光轴平行于表面,第二个棱镜的光轴平行于棱镜的边。首先考虑一束 z 方向偏振的入射光,如图 22.29(a)所示。这束光在第一个棱镜中为 o 光(因为振动方向垂直于光轴),折射率为 n_o。进入第二个棱镜后,将变为 e 光,折射率为 n_e。对于方解石,$n_o>n_e$,因此,该光束将远法线偏折。既然光轴与入射平面垂直,折射光遵从斯涅耳定律(见图 22.23(b)),折射角为

$$n_o\sin 20^\circ=n_e\sin r_1$$

其中假设棱镜角为 20°(见图 22.29)。假设 $n_o\approx 1.658$,$n_e\approx 1.486$,有

$$r_1\approx 22.43^\circ$$

因此,对于第二个表面,入射角为 $i_1=22.43^\circ-20^\circ=2.43^\circ$。出射角 θ_1 通过计算 $n_e\sin 2.43^\circ=\sin\theta_1$,得出 $\theta_1=3.61^\circ$。

接下来考虑入射光为 y 偏振的光束,如图 22.29(b)所示。光束在第一个棱镜中作为 e 光传播,并在第二个棱镜中作为 o 光传播。折射角为

$$n_e\sin 20^\circ=n_o\sin r_2\Rightarrow r_2\approx 17.85^\circ$$

因此,对于第二个棱镜,入射角为

$$i_2=20^\circ-17.85^\circ=2.15^\circ$$

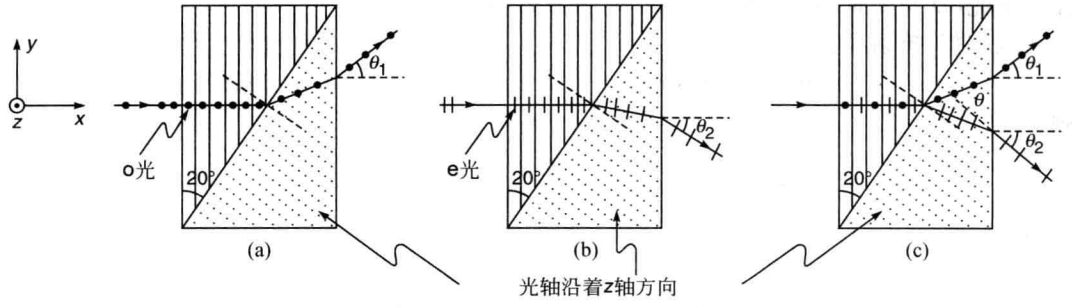


图 22.29　一个渥拉斯顿棱镜。第一个棱镜的光轴沿 y 轴,第二个棱镜的光轴沿 z 轴。

(a) 如果入射光为 z 方向偏振,则在第一个棱镜中为 o 光,进入第二个棱镜将变为 e 光;(b) 如果入射光为 y 方向偏振,则在第一个棱镜中为 e 光,进入第二个棱镜将变为 o 光;(c) 对于正入射的非偏振光,将被分为两束正交线偏振光,且沿不同方向传播。图中光线路径均是棱镜为方解石晶体的情况。

出射角 θ_2 可由下式得到

$$n_o \sin 2.15^\circ = \sin\theta_2 \Rightarrow \theta_2 \approx 3.57^\circ$$

因此,如果一束非偏振光入射到渥拉斯顿棱镜上,两束正交偏振光分开的角度为 $\theta = \theta_1 + \theta_2 \approx 7.18^\circ$,见图 22.30 和文前附录图表页中的图 28。

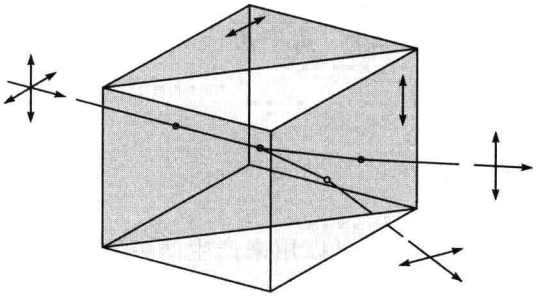


图 22.30 渥拉斯顿棱镜将随机偏振的或非偏振光分为两束正交的线偏振光输出。它由两个正交的方解石棱镜在其基底粘合(一般用加拿大树胶)而成,两个棱镜的光轴相互垂直。输出光从棱镜出射后分开,给出两束正交偏振光,光束的分离角与棱镜的楔形角大小及光波长有关。一般商用的棱镜可以提供 15°～45°的分离角。引自 http://en.wikipedia.org/wiki/wollaston_prism。彩图见文前附录图表页的图 28[①]。

22.11 罗雄棱镜

接下来考虑由两个相似的方解石棱镜组成的罗雄棱镜(Rochon prism)。第一个棱镜的光轴与棱镜表面垂直,第二个棱镜的光轴与边缘平行,如图 22.31 所示。在第一个棱镜中,两光束的折射率相同,均为 n_o,这是由于寻常光和非常光沿光轴传播时的速度相等($=c/n_o$)。

当光束进入第二个棱镜时,寻常光(***D*** 垂直于光轴)经历的折射率不变,并不发生偏折,如图 22.31 所示。而非常光(***D*** 与光轴平行)经历的折射率变为 n_e,将发生远法线偏折,折射角由下式确定

$$n_o \sin 18^\circ = n_e \sin r$$

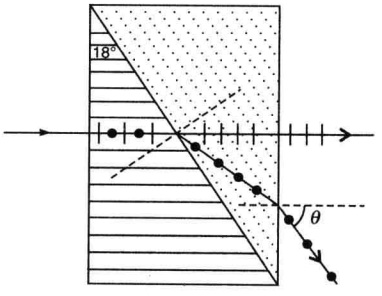


图 22.31 通过罗雄棱镜产生两束正交偏振的偏振光。

则

$$\sin r = \frac{n_o}{n_e}\sin 18^\circ = \frac{1.658}{1.486} \times 0.309 \approx 0.345$$

可得

$$r = 20.2^\circ$$

因此,相对于第二个表面,入射角为 $20.2^\circ - 18^\circ = 2.2^\circ$。则透射角为

$$\sin\theta = n_e \sin 2.2^\circ \approx 0.057$$

$$\theta \approx 3.3^\circ$$

① 原书为"图 30"。

22.12　各向异性媒质中平面电磁波的传播

在本节中将讨论麦克斯韦方程组在各向异性媒质中的平面波的解，并证明在 22.5 节中提出的各种假设。各向同性媒质与各向异性媒质的区别表现在电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 与电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 之间的关系，电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 将在 23.9 节中定义。在各向同性媒质中，$\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的方向相同，并可以写为

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{22.63}$$

式中 ε 为媒质的介电常数或者电容率。在各向异性媒质中，一般情况下，$\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的方向不一致，它们的关系可以写为

$$\begin{cases} D_x=\varepsilon_{xx}E_x+\varepsilon_{xy}E_y+\varepsilon_{xz}E_z \\ D_y=\varepsilon_{yx}E_x+\varepsilon_{yy}E_y+\varepsilon_{yz}E_z \\ D_z=\varepsilon_{zx}E_x+\varepsilon_{zy}E_y+\varepsilon_{zz}E_z \end{cases} \tag{22.64}$$

式中 $\varepsilon_{xx},\varepsilon_{xy},\cdots$ 为常数。可以证明[①]

$$\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx},\quad \varepsilon_{xz}=\varepsilon_{zx},\quad \varepsilon_{yz}=\varepsilon_{zy} \tag{22.65}$$

则总可以选择一个坐标系（即，在晶体内部适当地选择 x,y,z 轴的方向）使得

$$\begin{cases} D_x=\varepsilon_xE_x \\ D_y=\varepsilon_yE_y \\ D_z=\varepsilon_zE_z \end{cases} \tag{22.66}$$

将这个坐标系称作主轴坐标系，$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z$ 为媒质的主介电常数。如果有

$$\varepsilon_x\neq\varepsilon_y\neq\varepsilon_z\quad\text{（双轴）} \tag{22.67}$$

则称该媒质为双轴晶体媒质，且

$$n_x=\sqrt{\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_0}},\quad n_y=\sqrt{\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_0}},\quad n_z=\sqrt{\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_0}} \tag{22.68}$$

称为媒质的主折射率；在式(22.68)中，ε_0 表示真空中的介电常数($=8.8542\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/(N\cdot m^2)}$)。如果有

$$\varepsilon_x=\varepsilon_y\neq\varepsilon_z\quad\text{（单轴）} \tag{22.69}$$

则称该媒质为单轴晶体媒质，且 z 轴表示媒质的光轴。且

$$\begin{aligned} n_o&=\sqrt{\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_0}}=\sqrt{\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_0}}, \\ n_e&=n_z=\sqrt{\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_0}} \end{aligned} \tag{22.70}$$

称为寻常光与非常光的折射率，一些单轴晶体的典型值在表 22.1 中给出。对于单轴晶体，有 $\varepsilon_x=\varepsilon_y$，则 x 与 y 方向可以在垂直光轴的方向任意选取，即，任意两个互相垂直的轴(均垂

① 见参考文献[5]。

直于z轴)均可作为媒质的主轴[①②]。另一方面,如果

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z \quad \text{(光学各向同性)} \tag{22.71}$$

则称该媒质为各向同性媒质,且可以任意选择三个互相垂直的轴作为主轴坐标系[③]。

假设各向异性媒质为非磁性媒质,则有

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$$

式中μ_0为真空中的磁导率。

表22.1 单轴晶体中寻常光与非常光的折射率(引自文献[6,7])

晶体	波长/Å	n_o	n_e
方解石	4046	1.68134	1.49694
	5890	1.65835	1.48640
	7065	1.65207	1.48359
石英	5890	1.54424	1.55335
铌酸锂	6000	2.2967	2.2082
KDP	6328	1.50737	1.46685
ADP	6328	1.52166	1.47685

考虑一列平面电磁波的传播。对于这样的波,电磁矢量$\boldsymbol{E},\boldsymbol{H},\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{B}$均与$e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$成正比。则

$$\begin{cases} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, & \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \\ \boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, & \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \end{cases} \tag{22.72}$$

式中矢量$\boldsymbol{E}_0,\boldsymbol{H}_0,\boldsymbol{D}_0,\boldsymbol{B}_0$是与空间和时间无关的量,$\boldsymbol{k}$表示波的传播矢量,$\omega$为角频率。波的速度$v_w$(也称为相速度)以及波的折射率$n_w$由下式定义

$$v_w = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n_w} \tag{22.73}$$

由此,有

$$|\boldsymbol{k}| = k = \frac{\omega}{c} n_w \tag{22.74}$$

在本节的目的是确定波在各向异性媒质中传播时,n_w的可能值。现在,在某一媒质中,有

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = 0 \tag{22.75}$$

---

① 这是基于以下事实:对于单轴晶体,有

$$D_x = \varepsilon_x E_x, \quad D_y = \varepsilon_y E_y = \varepsilon_x E_y$$

现在,(绕z轴)将x-y轴旋转θ,将旋转后的轴称为x'轴和y'轴,则

$$D_{x'} = D_x\cos\theta + D_y\sin\theta = \varepsilon_x(E_x\cos\theta + E_y\sin\theta) = \varepsilon_x E_{x'}$$

同理,可以得到$D_{y'} = \varepsilon_x E_{y'}$,表明$x'$轴与$y'$轴同样可以被选作主轴。

② 译者不完全赞同原作者上面的结论。晶体的主轴坐标系一般在晶体的晶胞基矢量基础上定义,其选取与晶轴方向有关。如果考虑非线性效应,比如,电光效应(为二阶非线性效应),晶体的主轴坐标系就不能任意选取。读者可以参阅文章:张晓光,"关于KDP晶体在电光效应中两个二阶轴对称性的讨论",《大学物理》,Vol.15, No.3,1996.译者注。

③ 基于同样的原因,译者不完全同意主轴坐标系可以任意选择的说法。比如,砷化镓晶体属于立方晶系,是光学各项同性的,但是用于做电光效应实验时,就不再是各项同性的了。译者注。

或者

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=0$$

对于如式(22.72)给出的平面波，上式可变为

$$\mathrm{i}(k_xD_x+k_yD_y+k_zD_z)=0$$

或者

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{k}=0 \tag{22.76}$$

这表明 $\boldsymbol{D}$ 总是垂直于 $\boldsymbol{k}$(见式(22.44))。同理，由于在非磁性媒质中有 $\mathrm{div}\boldsymbol{H}=0$，则

$$\boldsymbol{H}\text{ 总是垂直于 }\boldsymbol{k} \tag{22.77}$$

当媒质中不存在任何电流时，(即，$\boldsymbol{J}=0$)，麦克斯韦方程组中的旋度方程可变为(见式(23.7)和式(23.8))

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\mathrm{i}\omega\boldsymbol{B}=\mathrm{i}\omega\mu_0\boldsymbol{H} \tag{22.78}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{D} \tag{22.79}$$

其中假设媒质为非磁性媒质(即，$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$)。如果

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

则有

$$\begin{aligned}(\nabla\times\boldsymbol{E})_x&=\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=(\mathrm{i}k_yE_{0z}-\mathrm{i}k_zE_{0y})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\\&=\mathrm{i}(k_yE_z-k_zE_y)=\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})_x\end{aligned}$$

因此

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})=\mathrm{i}\omega\mu_0\boldsymbol{H}$$

得到

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\omega\mu_0}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}) \tag{22.80}$$

以及

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H})=-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{D}$$

得到

$$\boldsymbol{D}=\frac{1}{\omega}(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{k}) \tag{22.81}$$

式(22.80)与式(22.81)表明

$$\boldsymbol{H}\text{ 总是与 }\boldsymbol{k},\boldsymbol{E},\boldsymbol{D}\text{ 垂直} \tag{22.82}$$

也意味着

$$\boldsymbol{k},\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}\text{ 总是在同一平面内}$$

进一步(见式(22.76))

$$\boldsymbol{D}\text{ 与 }\boldsymbol{k}\text{ 垂直} \tag{22.83}$$

将 $\boldsymbol{H}$ 的表达式代入式(22.81)，有

$$\boldsymbol{D}=\frac{1}{\omega^2\mu_0}[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{k}] \tag{22.84}$$

其中用到了矢量恒等式

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$$

因此,有

$$\boldsymbol{D}=\frac{k^2}{\omega^2\mu_0}[\boldsymbol{E}-(\hat{\boldsymbol{\kappa}}\cdot\boldsymbol{E})\hat{\boldsymbol{\kappa}}]=\frac{n_w^2}{c^2\mu_0}[\boldsymbol{E}-(\hat{\boldsymbol{\kappa}}\cdot\boldsymbol{E})\hat{\boldsymbol{\kappa}}] \tag{22.85}$$

式中

$$\hat{\boldsymbol{\kappa}}=\frac{\boldsymbol{k}}{k} \tag{22.86}$$

表示 $\boldsymbol{k}$ 方向的单位矢量(见图 22.32)。又有

$$D_x=\varepsilon_x E_x=\varepsilon_0 n_x^2 E_x$$

可得式(22.85)中的 x 分量

$$\frac{\varepsilon_0\mu_0 c^2 n_x^2}{n_w^2}E_x=E_x-\kappa_x(\kappa_x E_x+\kappa_y E_y+\kappa_z E_z)$$

又 $c^2=1/(\varepsilon_0\mu_0)$,有

$$\left(\frac{n_x^2}{n_w^2}-\kappa_y^2-\kappa_z^2\right)E_x+\kappa_x\kappa_y E_y+\kappa_x\kappa_z E_z=0 \tag{22.87}$$

其中用到了关系式 $\kappa_x^2+\kappa_y^2+\kappa_z^2=1$(由于$\hat{\boldsymbol{\kappa}}$为单位矢量)。同理,有

$$\kappa_x\kappa_y E_x+\left(\frac{n_y^2}{n_w^2}-\kappa_x^2-\kappa_z^2\right)E_y+\kappa_y\kappa_z E_z=0 \tag{22.88}$$

$$\kappa_x\kappa_z E_x+\kappa_y\kappa_z E_y+\left(\frac{n_z^2}{n_w^2}-\kappa_x^2-\kappa_y^2\right)E_z=0 \tag{22.89}$$

式(22.87)~式(22.89)构成一组齐次方程,如果方程有非零解,则

$$\begin{vmatrix} \dfrac{n_x^2}{n_w^2}-\kappa_y^2-\kappa_z^2 & \kappa_x\kappa_y & \kappa_x\kappa_z \\ \kappa_x\kappa_y & \dfrac{n_y^2}{n_w^2}-\kappa_x^2-\kappa_z^2 & \kappa_y\kappa_z \\ \kappa_x\kappa_z & \kappa_y\kappa_z & \dfrac{n_z^2}{n_w^2}-\kappa_x^2-\kappa_y^2 \end{vmatrix}=0 \tag{22.90}$$

应该记住,目前仍然还不知道 n_w 的可能值,需要求解上式。实际上,对于一个给定的传播方向(即,给定的 κ_x,κ_y 和 κ_z),式(22.90)的解会给出两个 n_w 的允许值。需要注意的是,由式(22.90)可以得到一个关于 n_w^2 的立方的方程,这样,似乎将得到 n_w^2 的三个解。但由于 n_w^6 的系数将总为零,结果只有两个解。下面,将以在单轴晶体中的传播为例,加以说明。

22.12.1 在单轴晶体中的传播

在本节中将讨论完全限制在单轴晶体中进行,有

$$n_x=n_y=n_o,\quad n_z=n_e \tag{22.91}$$

如前所述,对于单轴晶体,x 轴与 y 轴的方向可以选择垂直于光轴的任意方向。现在,对于一列沿着任意方向 $\boldsymbol{k}$ 传播的波,选择 y 轴,使之垂直于 $\boldsymbol{k}$,即,y 轴垂直于 $\boldsymbol{k}$ 与 z 轴组成的平面。显然,x 轴将位于这一平面内(如图 22.32 所示)。因此,有

$$\kappa_x=\sin\psi,\quad \kappa_y=0,\quad \kappa_z=\cos\psi$$

式中 ψ 为 $\boldsymbol{k}$ 与光轴的夹角(如图 22.32 所示)。则式(22.87)~式(22.89)可变为

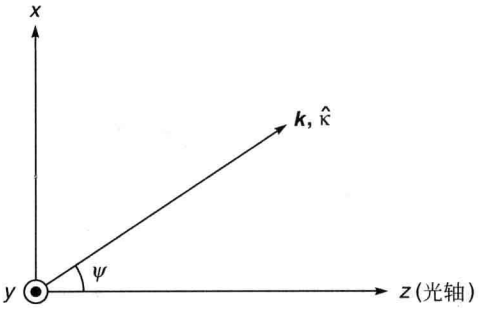


图 22.32　在单轴晶体中，假设光轴沿 z 轴方向，总可以选择 y 轴，使得 $\kappa_y=0$。如果 ψ 为 $\boldsymbol{k}$ 与光轴的夹角，则 $\kappa_x=\kappa\sin\psi$，$\kappa_z=\kappa\cos\psi$。

$$\left(\frac{n_o^2}{n_w^2}-\cos^2\psi\right)E_x+\sin\psi\cos\psi E_z=0 \tag{22.92}$$

$$\left(\frac{n_o^2}{n_w^2}-1\right)E_y=0 \tag{22.93}$$

$$\sin\psi\cos\psi E_x+\left(\frac{n_e^2}{n_w^2}-\sin^2\psi\right)E_z=0 \tag{22.94}$$

再次得到了 3 个齐次方程，为了得到非零解，其行列式必须为零。但是，由于其中两个等式只含有 E_x 和 E_z，另一个等式只含有 E_y，则有下面两组独立的解。

第一组解：假设 $E_y\neq0$ 则 $E_x=E_z=0$。由式(22.93)，可得

$$n_w=n_{wo}=n_o\quad(\text{为寻常光}) \tag{22.95}$$

相应的波速为

$$v_w=v_{wo}=\frac{c}{n_o}\quad(\text{o 光为 } y \text{ 偏振}) \tag{22.96}$$

既然波速与波传播的方向无关，则它表示寻常光，上式中的下标 o 表示 o 光。更进一步，对于 o 光，$\boldsymbol{D}$(以及 $\boldsymbol{E}$)是 y 方向偏振的。因此，对于 o 光，$\boldsymbol{D}$(以及 $\boldsymbol{E}$)垂直于包含 $\boldsymbol{k}$ 和光轴的平面(如图 22.33 所示)，即性质小结中式(22.43)。

第二组解：式(22.92)～式(22.94)的第二组解对应于

$$E_y=0,\quad E_x,\quad E_z\neq0 \tag{22.97}$$

由式(22.92)～式(22.94)，可得

$$\frac{E_z}{E_x}=-\frac{\dfrac{n_o^2}{n_w^2}-\cos^2\psi}{\sin\psi\cos\psi}=-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\dfrac{n_e^2}{n_w^2}-\sin^2\psi}$$

经过简单地计算，可得

$$\frac{1}{n_w^2}=\frac{1}{n_{we}^2}=\frac{\cos^2\psi}{n_o^2}+\frac{\sin^2\psi}{n_e^2} \tag{22.98}$$

式中下标 e 表明该波的折射率对应于非常光。相应的波速为

$$v_{we}^2=\frac{c^2}{n_{we}^2}=\frac{c^2}{n_o^2}\cos^2\psi+\frac{c^2}{n_e^2}\sin^2\psi \tag{22.99}$$

既然波速与波的传播方向相关，则其表示非常光，因此使用了下标 e。当然，对于非常光，有

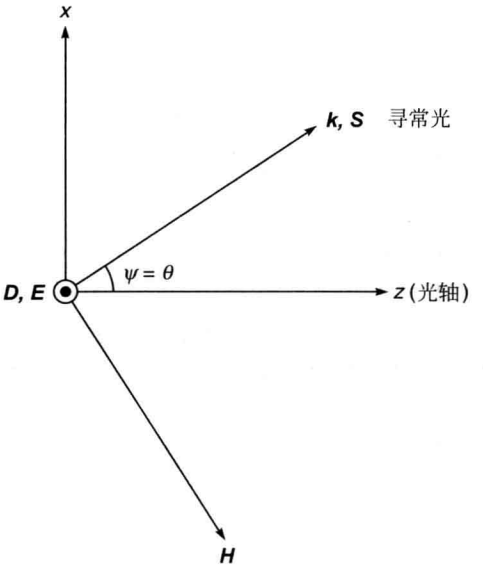


图 22.33　对于寻常光(单轴晶体中),$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 在 y 方向;$\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 沿 x-z 平面内的同一方向,且 $\boldsymbol{H}$ 也位于 x-z 平面内。

$$D_y = \varepsilon_y E_y = 0$$

由上式及式(22.81),波的电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 垂直于 y 轴和 $\boldsymbol{k}$,这意味着 e 光的电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 位于包含波矢 $\boldsymbol{k}$ 和光轴的平面内,并垂直于 $\boldsymbol{k}$(见图 22.34),即性质小结中式(22.44)。如图 22.34 所示,同时绘出了表示能量传播方向的坡印亭矢量 $\boldsymbol{S}(=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$(即 e 光的传播方向)。如图 22.21(a)和(b)所示的短线表示 $\boldsymbol{D}$ 的方向。令 ϕ 与 θ 分别表示 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 与光轴的夹角(见图 22.34)[①]。为了确定 ϕ,注意到

$$\frac{\varepsilon_z E_z}{\varepsilon_x E_x} = \frac{D_z}{D_x} = -\tan\psi$$

且又有

$$\frac{E_z}{E_x} = -\tan(\phi+\psi) \tag{22.100}$$

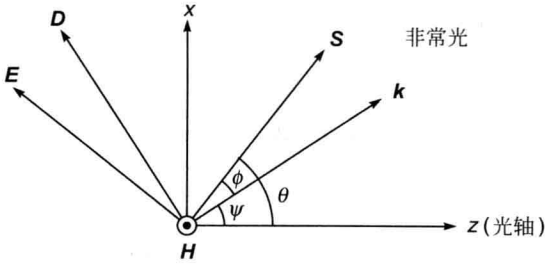


图 22.34　对于非常光(单轴晶体中),$\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{D}$,$\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 均位于 x-z 平面内,$\boldsymbol{H}$ 沿着 y 方向。$\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 垂直,$\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 垂直。

① 原书为“图 22.33”。

可得

$$\frac{n_e^2}{n_o^2}\tan(\phi+\psi)=\tan\psi$$

或者

$$\phi=\arctan\left(\frac{n_o^2}{n_e^2}\tan\psi\right)-\psi$$

显然，对于负晶体，$n_o>n_e$，则 ϕ 为正，光射线的方向为远离光轴，如图 22.34 所示。相反，对于正晶体，$n_o<n_e$，则 ϕ 为负，光射线的方向为靠近光轴。

例 22.3　考虑方解石晶体($\lambda=5893$Å 且 18℃)，有

$$n_o=1.65835,\quad n_e=1.48640$$

如果 $\boldsymbol{k}$ 与光轴成 30°，则 $\psi=30°$，通过基本的计算，可得 $\phi=5.7°$。

22.13　射线速度与射线折射率

能量传播的方向(或者射线方向)沿着坡印亭矢量 $\boldsymbol{S}$ 的方向，其中

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\tag{22.101}$$

因此，既然包含矢量 $\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的平面与 $\boldsymbol{H}$ 垂直，$\boldsymbol{S}$ 也将位于这个平面内(见图 22.33 和图 22.34)。对于非常光，波传播的方向($\hat{\boldsymbol{\kappa}}$)并不沿着能量传播的方向($\hat{\boldsymbol{s}}$)，式中$\hat{\boldsymbol{s}}$为 $\boldsymbol{S}$ 方向的单位矢量。射线速度(或能量传播速度)v_r 定义为

$$v_r=\frac{S}{u}\tag{22.102}$$

式中 u 为能量密度，有

$$u=\frac{1}{2}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}+\mu_0\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H})\tag{22.103}$$

见式(23.58)。将式(22.80)与式(22.81)中的 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 代入，则有

$$\begin{aligned}u&=\frac{1}{2\omega}[(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{H}]\\&=\frac{1}{2\omega}[\boldsymbol{k}\cdot(E\times\boldsymbol{H})+\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})]\\&=\frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{S}\end{aligned}\tag{22.104}$$

因此，式(22.102)变为

$$v_r=\frac{\omega S}{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{S}}=\frac{\omega}{k\cos\phi}=\frac{v_w}{\cos\phi}\tag{22.105}$$

式中 ϕ 为$\hat{\boldsymbol{\kappa}}$与$\hat{\boldsymbol{s}}$的夹角(见图 22.34)。射线折射率 n_r 定义为

$$n_r=\frac{c}{v_r}=\frac{c}{v_w}\cos\phi=n_w\cos\phi\tag{22.106}$$

为了用 $\boldsymbol{D}$ 表示 $\boldsymbol{E}$，如图 22.34 所示，写出

$$\boldsymbol{D}=(\boldsymbol{D}\cdot\hat{\boldsymbol{e}})\,\hat{\boldsymbol{e}}+(\boldsymbol{D}\cdot\hat{\boldsymbol{s}})\,\hat{\boldsymbol{s}}$$

式中$\hat{\boldsymbol{e}}$为电矢量 $\boldsymbol{E}$ 方向的单位矢量。因此，有

$$\boldsymbol{D}-(\boldsymbol{D}\cdot\hat{\boldsymbol{s}})\,\hat{\boldsymbol{s}}=(\boldsymbol{D}\cdot\hat{\boldsymbol{e}})\,\hat{\boldsymbol{e}}=(D\cos\phi)\,\frac{\boldsymbol{E}}{E}\tag{22.107}$$

同理,有

$$\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{d}})\,\hat{\boldsymbol{d}}+(\boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{\kappa}})\,\hat{\boldsymbol{\kappa}} \tag{22.108}$$

式中$\hat{\boldsymbol{d}}$表示沿着$\boldsymbol{D}$方向的单位矢量(见图22.34)。如果将$\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{\kappa}})\hat{\boldsymbol{\kappa}}$代入式(22.85),可得

$$\boldsymbol{D}=\frac{n_w^2}{\mu_0 c^2}(\boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{d}})\,\hat{\boldsymbol{d}}$$

或者

$$D=\frac{n_w^2}{\mu_0 c^2}E\cos\phi \tag{22.109}$$

代入式(22.107),可得

$$\boldsymbol{D}-(\boldsymbol{D}\cdot\hat{\boldsymbol{s}})\,\hat{\boldsymbol{s}}=\frac{n_w^2}{\mu_0 c^2}\cos^2\phi\boldsymbol{E}=\frac{n_r^2}{\mu_0 c^2}\boldsymbol{E}$$

在最后一步,用到了式(22.106)。取上式的x分量(这里x表示一个主轴的方向),得到

$$D_x-(D_x s_x+D_y s_y+D_z s_z)s_x=\frac{n_r^2}{\mu_0 c^2}E_x=\frac{n_r^2}{\mu_0 c^2\varepsilon_x}D_x$$

又有

$$n_x^2=\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_0},c^2=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0},\quad s_x^2+s_y^2+s_z^2=1$$

可得

$$\left(\frac{n_r^2}{n_x^2}-s_y^2-s_z^2\right)D_x+s_x s_y D_y+s_x s_z D_z=0 \tag{22.110}$$

同理,有

$$s_x s_y D_x+\left(\frac{n_r^2}{n_y^2}-s_x^2-s_z^2\right)D_y+s_y s_z D_z=0 \tag{22.111}$$

$$s_x s_z D_x+s_y s_z D_y+\left(\frac{n_r^2}{n_z^2}-s_x^2-s_y^2\right)D_z=0 \tag{22.112}$$

如前所述,式(22.110)~式(22.112)为一组齐次方程,对于非零解,必须有

$$\begin{vmatrix}\dfrac{n_r^2}{n_x^2}-s_y^2-s_z^2 & s_x s_y & s_x s_z\\ s_x s_y & \dfrac{n_r^2}{n_y^2}-s_x^2-s_z^2 & s_y s_z\\ s_x s_z & s_y s_z & \dfrac{n_r^2}{n_z^2}-s_x^2-s_y^2\end{vmatrix}=0 \tag{22.113}$$

目前仍然还不知道n_r的可能值,需要求解式(22.113)。实际上,对于一个给定的射线方向(即,给定的s_x,s_y,s_z),方程的解为两个n_r,随着有两个射线速度的可能值。下面,将以在单轴晶体中的传播为例,加以说明。

22.13.1 单轴晶体中的射线传播

接下来考虑一个光轴沿着z方向的单轴晶体,因此,有

$$n_x=n_y=n_o,\quad n_z=n_e \tag{22.114}$$

如前所述,x轴和y轴方向可以选择垂直于z轴的任意方向,则选择y轴,使得射线在x-z平面内沿着与z轴成θ角的方向传播(见图22.34)。因此,有

$$s_x = \sin\theta, \quad s_y = 0, \quad s_z = \cos\theta \tag{22.115}$$

式(22.100)～式(22.102)可变为

$$\left(\frac{n_r^2}{n_o^2} - \cos^2\theta\right)D_x + \sin\theta\cos\theta D_z = 0 \tag{22.116}$$

$$\left(\frac{n_r^2}{n_o^2} - 1\right)D_y = 0 \tag{22.117}$$

$$\sin\theta\cos\theta D_x + \left(\frac{n_r^2}{n_e^2} - \sin^2\theta\right)D_z = 0 \tag{22.118}$$

显然，上面方程组的一个根为

$$n_r = n_{ro} = n_o$$

且

$$D_x = 0 = D_z \quad (y \text{ 方向偏振}) \tag{22.119}$$

相应的射线速度为

$$v_r = v_{ro} = \frac{c}{n_{ro}} = \frac{c}{n_o} \quad (\text{寻常光}) \tag{22.120}$$

既然射线速度与方向无关，可知为寻常光，因此，在 v_r 和 n_r 引入了下标 o。

为了得到另外的解，根据式(22.116)和式(22.118)，可得

$$\frac{D_z}{D_x} = -\frac{\dfrac{n_r^2}{n_o^2} - \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = -\frac{\sin\theta\cos\theta}{\dfrac{n_r^2}{n_o^2} - \sin^2\theta}$$

显然，有

$$D_y = 0$$

经过简单地计算，可得

$$n_r^2 = n_{re}^2 = n_o^2\cos^2\theta + n_e^2\sin^2\theta \quad (\text{非常光}) \tag{22.121}$$

且

$$\frac{D_z/n_e^2}{D_x/n_o^2} = \frac{E_z}{E_x} = -\tan\theta \quad (D_y = 0) \tag{22.122}$$

相应的射线速度为(比照式(22.37))

$$\frac{1}{v_r^2} = \frac{1}{v_{re}^2} = \frac{n_{re}^2}{c^2} = \frac{\cos^2\theta}{c^2/n_o^2} + \frac{\sin^2\theta}{c^2/n_e^2} \tag{22.123}$$

可知其对应于非常光，所以 v_r 和 n_r 引入下标 e。如同在 22.5 节中讨论的，式(22.123)表示一个椭圆，如果使其绕 z 轴(即光轴)旋转，可以得到旋转椭球。在讨论光在单轴晶体中传播时，这些射线速度曲面被用来构造惠更斯次级子波。例如，如图 22.21(a)所示，令平面电磁波垂直入射，寻常光依然沿着与表面垂直的方向传播，但非常光将沿着 BE 和 DE' 方向传播，且 EE' 表示非常光的波前。回到式(22.120)，可得(见图 22.34)

$$\tan\theta = -\frac{D_z/n_e^2}{D_x/n_o^2} = \frac{n_o^2}{n_e^2}\tan\psi \tag{22.124}$$

因此，当光波沿着与光轴成 ψ 的方向传播时，光射线的传播方向为

$$\theta = \arctan\left(\frac{n_o^2}{n_e^2}\tan\psi\right) \tag{22.125}$$

例如,对于方解石,有

$$n_o = 1.65836, \quad n_e = 1.48641, \quad \psi = 30^\circ$$

可得 $\theta \approx 35.7^\circ$。因此,该射线的方向为远离光轴,与如图 22.21 所示一致。需要注意到,$\theta = \phi + \psi$(见例 22.3)。

22.14 琼斯运算法

利用琼斯运算法,计算通过起偏器或相位延迟器(比如 QWP 或 HWP)后,透射光的偏振态将更为直接。下面通过一些简单的例子来加以说明。应用指数表示法,例如,一个 y 方向偏振光(沿 x 方向传播),可以写为

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{y}} E_0 \cos(kx - \omega t) = \hat{\boldsymbol{y}} \mathrm{Re}\left[E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\right] \tag{22.126}$$

这样的波可以用一个矢量来表示

$$|\, y \text{ 偏振} \rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} E_0 \tag{22.127}$$

同理,对于 z 方向偏振光,有

$$|\, z \text{ 偏振} \rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} E_0 \tag{22.128}$$

对于一束右旋圆偏振光(沿 x 方向传播)可以写为

$$E_y = E_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$E_z = -E_0 \sin(kx - \omega t)$$

将上式写为指数表示

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{y}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} + \hat{\boldsymbol{z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t+\pi/2)}$$

忽略共同的相位因子,有

$$|\, \mathrm{RCP} \rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} \end{bmatrix} E_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} E_0 \tag{22.129}$$

同理,有

$$|\, \mathrm{LCP} \rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix} E_0 \tag{22.130}$$

接下来考虑像 QWP 或 HWP 这样的相位延迟器,或者椭圆芯的光纤的琼斯表示法。如前所述,这类器件中的波的"模式"为沿着快轴和慢轴的线偏振光,如图 22.24 所示。沿着快轴和慢轴方向的电场分别记成 E_f 和 E_s,下标 f 和 s 表示快轴和慢轴。例如,考虑一个方解石四分之一波片(QWP),$n_o > n_e$。非常光沿 z 方向偏振(即沿着光轴方向)时,其速度($=c/n_e$)比 o 光的速度($=c/n_o$)[①]快。因此,(对于方解石相位延迟器)快轴是沿着 z 轴方向,慢轴沿着 y 轴方向,如图 22.24 所示。

快和慢两个分量即为延迟波片的模式,即,通过延迟波片后(厚度为 d),波场将变为

$$E'_\mathrm{s} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mathrm{s}d} E_\mathrm{s}$$

$$E'_\mathrm{f} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mathrm{f}d} E_\mathrm{f}$$

① 原书为 c/n_e。

式中

$$k_s = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_s, \quad k_f = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_f$$

(对于方解石,波长为 $\lambda = 5893\text{Å}$ 时,有 $n_s = n_o = 1.65836$, $n_f = n_e = 1.48641$)。既然只有相对相位差是有意义的,可以写为

$$E'_s = e^{i\Phi} E_s$$
$$E'_f = E_f$$

式中

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_s - n_f)d$$

为相位延迟器引入的相位差。由此,方解石波片可以通过下面的矩阵表示

$$\begin{bmatrix} e^{i\Phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由此,可以写为

$$\begin{bmatrix} E'_s \\ E'_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\Phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_s \\ E_f \end{bmatrix}$$

如前所述,y 轴和 z 轴为慢轴和快轴。则

$$\begin{bmatrix} E'_y \\ E'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\Phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

对于 y 方向的偏振光,有

$$E_y = E_0, E_z = 0$$

则 y 方向的偏振波将保持其偏振态不变(除了相位发生改变)。同理,z 方向偏振波也将保持其偏振态不变——即相位延迟器的模式。现在,对于一个四分之一波片,$\Phi = \frac{\pi}{2}$,有

$$\begin{bmatrix} E'_y \\ E'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iE_y \\ iE_z \end{bmatrix}$$

对于一列线偏振波,$\boldsymbol{E}$ 与 y 轴和 z 轴夹角均为 $\pi/4$ 的情况下,有

$$E_y = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0, \quad E_z = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0$$

因此,有

$$\begin{bmatrix} E'_y \\ E'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \frac{E_0}{\sqrt{2}}$$

这是一束左旋圆偏振光。如果这束左旋圆偏振光入射到相同取向的方解石四分之一波片上,则透射波为

$$\begin{bmatrix} E''_y \\ E''_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \frac{E_0}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{E_0}{\sqrt{2}}$$

表示一束 $\boldsymbol{E}$ 的振动方向与入射光垂直的线偏振光。应该注意到,两个四分之一波片级联,可以组成一个半波片。

考虑入射光为一束左旋椭圆偏振光,即

$$E_y = \frac{E_0}{2}\cos(kx - \omega t)$$

$$E_z = \frac{\sqrt{3}}{2}E_0\sin(kx - \omega t) = \frac{\sqrt{3}}{2}E_0\,\mathrm{Re}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(kx-\omega t-\frac{\pi}{2}\right)}$$

则通过一个四分之一波片后,透射光为

$$\begin{bmatrix} E'_y \\ E'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} E_0 = \mathrm{i} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} E_0$$

表示 $\boldsymbol{E}$ 与 y 轴夹角为 120°的线偏振光。

根据琼斯矩阵,可以简化更复杂的情况,比如,可以用来处理两个存在一定夹角的四分之一波片级联的情况。

22.15 法拉第旋光

考虑一束线偏振光在媒质中传播。如果沿着偏振波传播的方向加载一个磁场,则偏振平面将发生旋转——这种旋转通常称为法拉第旋光,该现象是由著名物理学家迈克尔·法拉第(Michael Faraday)于1845年发现的。当存在一个(纵向的)磁场时,则传播的模式是左旋圆偏振光(LCP)和右旋圆偏振光(RCP)(见22.16.2节)。由于这种情况与22.8节中讨论的光学旋光的现象相似,偏振面旋转的角度 θ 可以由以下经验公式给出

$$\theta = VHl$$

式中 H 表示加载磁场的强度,l 为媒质的长度,V 称为韦尔代(Verdet)常量。对于二氧化硅,$V \approx 2.64\times10^{-4}(°)/\mathrm{A} \approx 4.6\times10^{-6}\,\mathrm{rad/A}$。

法拉第旋光的一个重要应用是利用单模光纤来测量大电流。考虑一根很长的单模光纤围绕一个带电流的导体缠绕多圈(见图22.35和文前附录图表页中的图41)。如果电流 I 通过导体,则由安培定律,有

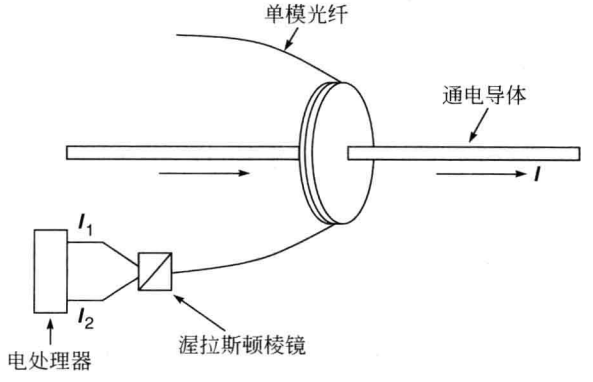


图22.35 一根单模光纤围绕一个通电流的导体螺旋形缠绕多圈。偏振平面的旋转通过一个渥拉斯顿棱镜来测量,再通过一个电处理器来进行测量。彩图见文前附录图表页中的图41。

$$\int \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = NI$$

式中 N 表示光纤缠绕的圈数。因此，如果一束线偏振光入射到光纤中，则其偏振平面的旋转角度为

$$\theta = VNI$$

且 θ 与缠绕的形状无关。例如，对于 $I=200\mathrm{A}$，$N=50$，$\theta \approx 0.26°$。并将光纤的出射光入射到一个渥拉斯顿棱镜上，对两束出射光分别进行测量，则法拉第旋转角为

$$\theta = \text{常数}\frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}$$

式中 I_1 和 I_2 为由渥拉斯顿棱镜的两束出射光在电处理器中产生的电流。如图 22.36 所示为导体中电流实际输出值的变化曲线。这样的装置可以用来测量非常高的电流（～10000A）。

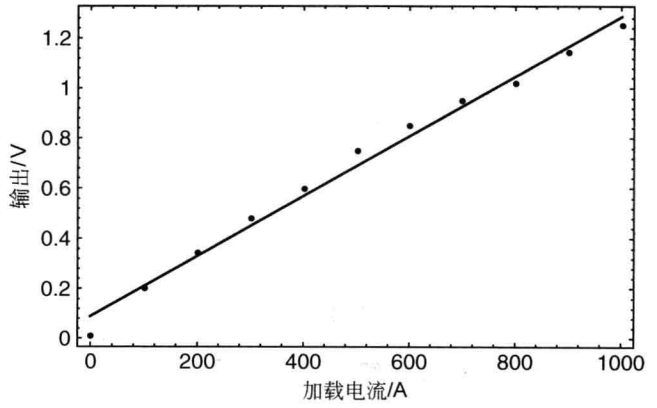


图 22.36　输出信号相对于电流的典型变化曲线（图片由 Parthasarathi Palai 博士提供）。

22.16　光学旋光理论

如前所述，对于各向同性媒质，$\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的方向相同，有

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 n^2 \boldsymbol{E} \tag{22.131}$$

式中 ε_0（$=8.854\times10^{-12}$MKS 单位）为自由空间中的介电常数，n（$=\sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$）为媒质折射率。如果蔗糖溶解在水中，则媒质仍为各向同性媒质。由于糖分子的结构为螺旋形，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 遵循下列关系

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 n^2 \boldsymbol{E} + \mathrm{i}g\hat{\boldsymbol{\kappa}} \times \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 n^2 (\boldsymbol{E} + \mathrm{i}\alpha \hat{\boldsymbol{\kappa}} \times \boldsymbol{E}) \tag{22.132}$$

式中

$$\alpha = \frac{g}{\varepsilon_0 n^2}$$

且 $\hat{\boldsymbol{\kappa}}$ 为沿着波传播方向的单位矢量。参数 α 可以为正，也可以为负，但通常为一个小量（$\ll 1$）。忽略一般的损耗，可以假设光沿着 z 轴传播，以致 $\kappa_x = \kappa_y = 0$，$\kappa_z = 1$，则

$$\hat{\boldsymbol{\kappa}}\times\boldsymbol{E}=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}}\\ 0 & 0 & 1\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix}=-\hat{\boldsymbol{x}}E_y+\hat{\boldsymbol{y}}E_x$$

因此,有

$$\begin{bmatrix}D_x\\ D_y\\ D_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_0 n^2 & -\mathrm{i}g & 0\\ \mathrm{i}g & \varepsilon_0 n^2 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_0 n^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{bmatrix} \tag{22.133}$$

此 ε 矩阵为厄米矩阵,但对角线元素外存在少量虚元素。正是这些对角线外的虚元素导致了光学旋光。将式(22.85)改写为

$$\frac{n_w^2}{c^2\mu_0}[\boldsymbol{E}-(\hat{\boldsymbol{\kappa}}\cdot\boldsymbol{E})\hat{\boldsymbol{\kappa}}]=\boldsymbol{D}$$

写出上式的 x 和 y 分量,又有 $\kappa_x=\kappa_y=0$,$\kappa_z=1$,则

$$\frac{n_w^2}{c^2\mu_0}E_x=D_x=\varepsilon_0 n^2E_x-\mathrm{i}gE_y$$

$$\frac{n_w^2}{c^2\mu_0}E_y=D_y=\mathrm{i}gE_x+\varepsilon_0 n^2E_y$$

因此,有

$$\left(\frac{n_w^2}{n^2}-1\right)E_x=-\mathrm{i}\alpha E_y$$

$$\left(\frac{n_w^2}{n^2}-1\right)E_y=\mathrm{i}\alpha E_x$$

其中用到了 $c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$。为了得到非零解,有

$$\left(\frac{n_w^2}{n^2}-1\right)^2=\alpha^2$$

则

$$n_w=n\sqrt{1\pm\alpha} \tag{22.134}$$

$$E_y=\pm\mathrm{i}E_x \tag{22.135}$$

将两个解写为 $n_\mathrm{r}(=n\sqrt{1+\alpha})$和 $n_\mathrm{l}(=n\sqrt{1-\alpha})$。相应的传播常数为

$$k=k_\mathrm{r}=\frac{\omega}{c}n_\mathrm{r}=\frac{\omega}{c}n\sqrt{1+\alpha} \tag{22.136}$$

$$k=k_\mathrm{l}=\frac{\omega}{c}n_\mathrm{l}=\frac{\omega}{c}n\sqrt{1-\alpha} \tag{22.137}$$

对于 $n_w=n_\mathrm{r}$,如果

$$E_x=E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_\mathrm{r}z-\omega t)}$$

则有

$$E_y=+\mathrm{i}E_x=E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k_\mathrm{r}z-\omega t+\frac{\pi}{2}\right)}$$

该解为右旋圆偏振光,因此带有下标 r。同理,对于 $n_w=n_\mathrm{l}$,如果

$$E_x=E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_\mathrm{l}z-\omega t)}$$

则有

$$E_y=-\mathrm{i}E_x=E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(k_\mathrm{l}z-\omega t-\frac{\pi}{2}\right)}$$

该解为左旋圆偏振光，因此带有下标 l。右旋圆偏振光和左旋圆偏振光为光学旋光物质的两个“模式”。对于任意的入射偏振态，必须将其写为这两个模式的叠加，并分别加以研究（见 22.8 节）。有

$$n_r - n_l = n(\sqrt{1+\alpha} - \sqrt{1-\alpha}) \approx n\alpha \tag{22.138}$$

如果将质量为 d 的纯净的糖溶解在 100g 的水溶液中，则对于 $\lambda=5893$Å（钠灯），有

$$n_r - n_l \approx 2.2 \times 10^{-6} d$$

因此，如果 $d=5$g，则 $n_r - n_l \approx 1.1 \times 10^{-5}$ 且 $\alpha \approx 0.83 \times 10^{-5}$，其中假设了 $n \approx 4/3$。更进一步，旋转的角度为（见式(22.58)）

$$\phi = \frac{\pi}{\lambda_0}(n_l - n_r)z^{①} \tag{22.139}$$

定义旋光率 ρ 为光波传播 1cm 时，偏振面旋转的角度，有

$$\rho = \frac{\pi}{\lambda_0}(n_l - n_r) \tag{22.140}$$

式中 λ_0 的单位为 cm。对于前面提到的糖溶液（5g 纯净的糖溶解在 100g 的水溶液中），有

$$\rho \approx -0.59\text{rad/cm}$$

负号表示偏振方向沿逆时针方向旋转。

22.16.1　石英中的光学旋光

当一平面偏振波沿石英晶体光轴传播时，可以观察到光学旋光现象。电磁波在这种晶体中传播的一般理论很复杂，但是，如果传播不是沿着光轴方向，其模式非常接近于线偏振波，就可以根据 22.12 节中的分析进行讨论。如果传播沿着 z 轴，则有（见式(22.133)）

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 n_o^2 & -\mathrm{i}g & 0 \\ \mathrm{i}g & \varepsilon_0 n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 n_e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \tag{22.141}$$

式中 n_o 和 n_e 为晶体的常数。进行如上相同的分析，有

$$n_r \approx n_o\left(1 + \frac{1}{2}\alpha\right)$$

$$n_l \approx n_o\left(1 - \frac{1}{2}\alpha\right)$$

则

$$n_r - n_l \approx n_o\alpha$$

$$\rho = \frac{\pi}{\lambda_0}(n_r - n_l) \approx \frac{\pi n_o \alpha}{\lambda_0}$$

式中 λ_0 的单位为 cm。对于石英晶体，有

$$\rho \approx \pm 8.54\text{rad/cm}, \text{当 } \lambda_0 = 4046.56\text{Å}$$

$$\rho \approx \pm 3.79\text{rad/cm}, \text{当 } \lambda_0 = 5892.90\text{Å}$$

$$\rho \approx \pm 2.43\text{rad/cm}, \text{当 } \lambda_0 = 7281.35\text{Å}$$

（数据引自文献[7]）对于石英晶体，既可以有 $n_r > n_l$ 也可以有 $n_r < n_l$。对于 $\lambda_0=4046.56$Å，

① 原书为“Φ”。

容易得到

$$|n_l - n_r| \approx 1.1 \times 10^{-4}$$

将这个值与 $n_e - n_o \approx 0.9 \times 10^{-2}$ 进行比较。对于较长的波长而言，$|n_l - n_r|$ 的值更小些。

22.16.2 法拉第旋光理论

正如在7.5节中讨论过的，当存在外电场 $\boldsymbol{E}$ 时，电子的运动方程为(见式(7.62))

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\boldsymbol{r} = -\frac{q}{m}\boldsymbol{E} \tag{22.142}$$

当存在一稳定的磁场 $\boldsymbol{B}$ 时，可以得到附加的($\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$)项

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\boldsymbol{r} + \frac{q}{m}\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B} = -\frac{q}{m}\boldsymbol{E} \tag{22.143}$$

式中 $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$ 表示电子的位置矢量，$\hat{\boldsymbol{x}}$，$\hat{\boldsymbol{y}}$，$\hat{\boldsymbol{z}}$ 为单位矢量，$q(=+1.6\times10^{-19}\mathrm{C})$ 为电子电荷量。假设磁场沿着 z 方向，即

$$B_x = 0 = B_y, \quad B_z = B_0 \tag{22.144}$$

因此，有

$$\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} & \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = \left[\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right]B_0 \tag{22.145}$$

对于一束沿 z 方向传播的圆偏振光，有

$$\boldsymbol{E}_\pm = (\hat{\boldsymbol{x}} \pm \mathrm{i}\,\hat{\boldsymbol{y}})E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} \tag{22.146}$$

式中的加号、减号分别对应右旋、左旋圆偏振光。分别写出式(22.143)的 x，y 的分量，有

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x + \frac{qB_0}{m}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{q}{m}E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} \tag{22.147}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 y - \frac{qB_0}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mp\mathrm{i}\frac{q}{m}E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} \tag{22.148}$$

式中的减号、加号代表右旋、左旋圆偏振光。如果

$$x = x_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}, \quad y = y_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$$

则

$$(\omega^2 - \omega_0^2)x_0 + \mathrm{i}\omega_c\omega y_0 = +\frac{q}{m}E_0 \quad \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\end{matrix}}\right\}\times(\omega^2-\omega_0^2) \tag{22.149}$$

$$(\omega^2 - \omega_0^2)y_0 - \mathrm{i}\omega_c\omega x_0 = \pm\mathrm{i}\frac{q}{m}E_0 \quad \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\end{matrix}}\right\}\times -\mathrm{i}\omega_c\omega \tag{22.150}$$

式中

$$\omega_c = \frac{qB_0}{m}$$

为电子回旋的频率。如果将式(22.149)乘以$(\omega^2-\omega_0^2)$，式(22.150)乘以$-\mathrm{i}\omega_c\omega$，并将两式相加，可得

$$[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 - \omega_c^2\omega^2]x_0 = \frac{q}{m}E_0[(\omega^2 - \omega_0^2) \pm \omega_c\omega]$$

则

$$x_0 = \frac{qE_0}{m[(\omega^2 - \omega_0^2) \mp \omega_c\omega]}$$

同理，有

$$y_0 = \pm \mathrm{i}\frac{qE_0}{m[(\omega^2 - \omega_0^2) \mp \omega_c\omega]} = \pm \mathrm{i}x_0$$

因此，电极化矢量为

$$\boldsymbol{P} = -Nq\boldsymbol{r} = -Nq\frac{qE_0(\hat{\boldsymbol{x}} \pm \mathrm{i}\hat{\boldsymbol{y}})}{m[(\omega^2 - \omega_0^2) \mp \omega_c\omega]}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} = \chi\boldsymbol{E}_{\pm}$$

式中极化系数 χ 为

$$\chi = \frac{Nq^2}{m}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) \pm \omega_c\omega}$$

因此，两模式是圆偏振的，相应的折射率为(见式(7.86))

$$n_{\pm}^2 = 1 + \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) \pm \omega_c\omega}$$

式中的正号和负号分别代表右旋和左旋圆偏振光。

小　结

- 对于沿 z 轴传播的电磁波，令其 x 和 y 分量为

$$E_x = a_1\cos(kz - \omega t)$$

$$E_y = a_2\cos(kz - \omega t + \theta)$$

(1) 若 $a_2 = 0$，得到 x 方向线偏振波。若 $a_1 = 0$，得到 y 方向线偏振波。当 $\theta = n\pi$，$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 时，为线偏振波，其电矢量与 x 轴的夹角为 $+\arctan\frac{a_2}{a_1}$ 或 $-\arctan\frac{a_2}{a_1}$。

(2) 如果 $a_1 = a_2$，且 $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \cdots$ 得到右旋圆偏振波；如果 $a_1 = a_2$，且 $\theta = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \cdots$ 得到左旋圆偏振波。

(3) 一般情况下，为左旋椭圆偏振波或右旋椭圆偏振波。

- 线偏振波可以通过许多种方法获得，比如：

① 让非偏振光通过偏振片；

② 让非偏振光以布儒斯特角 $\theta_p\left(=\arctan\frac{n_2}{n_1}\right)$ 入射到媒质表面，经历反射；

③ 让非偏振光通过尼克尔棱镜。

- 如果一束非偏振波入射到单轴晶体，则平面波被分为两束波。一束为寻常光(通常缩写成 o 光)，另一束为非常光(通常缩写成 e 光)。对于这两束波，$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}$ 依赖于时间和空间的关系具有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$ 的形式，式中 $\boldsymbol{k}$ 表示传播矢量，因子 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ 表明波传播的方向垂直于等相面。一般来说，o 光和 e 光的 $\boldsymbol{k}$ 矢量不同。此外，有以下性质：

① 寻常光与非常光均为线偏振光；

② 对于o光和e光均有 $\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{k}=0$；

③ 对于o光，$\boldsymbol{D}$ 与光轴和 $\boldsymbol{k}$ 垂直；

④ 对于e光，$\boldsymbol{D}$ 位于 $\boldsymbol{k}$ 和光轴组成的平面内，且 $\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{k}=0$。

- 考虑一个单轴晶体，光轴方向在晶体表面内。如果晶体的厚度使o光和e光产生相位差 $\frac{\pi}{2}$，则波片称为四分之一波片(QWP)。如果一束线性偏振光($\boldsymbol{E}$ 与光轴夹角为45°)正入射到QWP，则输出为圆偏振光。
- 当一束线偏振光在光学旋光媒质中传播，比如糖溶液中，光束在传播过程中，其偏振面会发生旋转。
- 在单轴晶体中，寻常光和非常光的波速为

$$v_w = v_{wo} = \frac{c}{n_o} \quad (\text{o光})$$

$$v_{we}^2 = \frac{c^2}{n_{we}^2} = \frac{c^2}{n_o^2}\cos^2\psi + \frac{c^2}{n_e^2}\sin^2\psi \quad (\text{e光})$$

式中 ψ 为 $\boldsymbol{k}$ 与光轴的夹角，n_o 和 n_e 为晶体的主折射率。另一方面，相应的射线速度为

$$v_r = v_{ro} = \frac{c}{n_o} \quad (\text{o光})$$

$$\frac{1}{v_r^2} = \frac{1}{v_{re}^2} = \frac{n_{re}^2}{c^2} = \frac{\cos^2\theta}{c^2/n_o^2} + \frac{\sin^2\theta}{c^2/n_e^2} \quad (\text{e光})$$

式中 θ 为能量传播的方向(坡印亭矢量)与光轴的夹角。

习　题

22.1 讨论当光的 x、y 分量为如下形式的偏振态

(1) $\begin{cases} E_x = E_0\cos(\omega t + kz) \\ E_y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}E_0\cos(\omega t + kz + \pi) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} E_x = E_0\sin(\omega t + kz) \\ E_y = E_0\cos(\omega t + kz) \end{cases}$

(3) $\begin{cases} E_x = E_0\sin\left(kz - \omega t + \dfrac{\pi}{3}\right) \\ E_y = E_0\sin\left(kz - \omega t - \dfrac{\pi}{6}\right) \end{cases}$

(4) $\begin{cases} E_x = E_0\sin\left(kz - \omega t + \dfrac{\pi}{4}\right) \\ E_y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}E_0\sin(kz - \omega t) \end{cases}$

对于每种情况，绘出电矢量末端在 $z=0$ 平面内变化的情况。

[**答案**：(1) 线性偏振；(2) 右旋圆偏振；(3) 左旋圆偏振；(4) 左旋椭圆偏振]

22.2　一平面电磁波的电矢量为

$$E_x = 2E_0\cos(\omega t - kz + \phi),\quad E_y = E_0\sin(\omega t - kz)$$

当(1)$\phi=0$；(2)$\phi=\pi/2$；(3)$\phi=\pi/4$ 时，分别绘出其表示的偏振态的图(即，圆、平面、椭圆或非偏振)。

22.3　根据表 22.1 的数据，计算 $\lambda_0=5890$Å 时，石英半波片的厚度。

[**答案**：32.34μm]

22.4　一束右旋圆偏振光入射到一个方解石半波片，证明：出射波将为左旋圆偏振光。

22.5　对于放在水($n=4/3$)中的玻璃板($n=1.5$)，其布儒斯特角为多少？

[**答案**：48.4°]

22.6　考虑一束平面电磁波正入射到一个光轴平行于表面的石英四分之一波片上(见图 22.24)。此时，光轴沿着 z 轴，光束沿 x 轴传播。试证明 E_y 为 o 光，E_z 为 e 光。

(1) 假设在 $x=0$ 处，有

$$\begin{cases} E_y = E_0\cos\omega t \\ E_z = E_0\cos\omega t \end{cases}$$

证明：透射光为右旋圆偏振光。

(2) 假设在 $x=0$ 处，有

$$\begin{cases} E_y = E_0\sin\omega t \\ E_z = E_0\cos\omega t \end{cases}$$

证明：透射光为线偏振光。

22.7　证明 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 之间的夹角与坡印亭矢量 $\boldsymbol{S}$ 和传播矢量 $\boldsymbol{k}$ 之间的夹角相等。

22.8　考虑非常光在 KDP 晶体中的传播。如果波矢量与光轴夹角 45°，计算 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 的夹角。对于 $LiNbO_3$ 的情况，重复以上计算。$LiNbO_3$ 和 KDP 的 n_o 和 n_e 的值在表 22.1 中给出。

[**答案**：1.56°和 2.25°]

22.9　证明：当入射角为布儒斯特角时，反射光和折射光之间成直角。

22.10　(1) 考虑两个相互垂直放置的偏振片放在一束光强为 I_0 的非偏振光的传播路径上(见图 22.6)。如果放置第三个偏振片在它们之间，一般来说，总有一些光将透过。解释这个现象。

(2) 假设第三个偏振片的透过轴与另两个夹角均为 45°，计算透射光的强度。假设所有偏振片为理想的。

[**答案**：$I_0/8$]

22.11　一个四分之一波片在两个相互垂直放置的偏振片中，并旋转。如果一束非偏振光入射到第一个偏振片上，讨论当四分之一波片旋转时，透射光强的变化情况。若将四分之一波片替换为半波片，将发生什么情况？

22.12　在习题 22.11 中，若四分之一波片的光轴与每个偏振片的透光轴成 45°，证明：只有四分之一的入射光强透过。若将四分之一波片换为半波片，证明：有一半的入射光强可以透过。

22.13　对于方解石，当波长为 $\lambda_0=4046$Å 时，$n_o=1.68134$，$n_e=1.49694$；在 $\lambda_0=7065$Å 时，$n_o=1.65207$，$n_e=1.48359$。有一个对应于波长 $\lambda_0=4046$Å 的四分之一波片。如果

波长 $\lambda_0=7065\text{Å}$ 的左旋圆偏振光入射到这个波片上,说明透射光的偏振态。

22.14 一个半波片(HWP)在两个垂直放置的偏振片 P_1 和 P_2 中间。光轴与 P_1 的透过轴成 15°,如图 22.37(a)和(b)所示。若一束光强为 I_0 的非偏振光正入射到 P_1,I_1,I_2 和 I_3 分别表示通过 P_1,半波片和 P_2 后的透射光强,计算 I_1/I_0,I_2/I_0 和 I_3/I_0。

[**答案**:1/2,1/2,1/8]

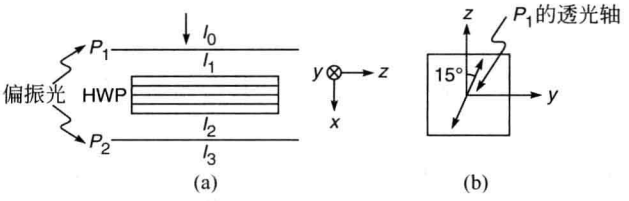


图 22.37 习题 22.14 图

22.15 两个方解石棱镜($n_o>n_e$)粘合在一起,如图 22.38 所示,组成一个正方体,短线和点子分别表示光轴的方向。一束非偏振光从区域Ⅰ正入射到正方体。假设棱镜角为 12°。确定在区域Ⅱ,Ⅲ和Ⅳ中,光束的路径和振动方向(即 $\boldsymbol{D}$ 的方向)。

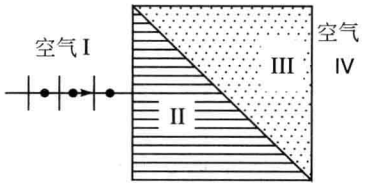


图 22.38 习题 22.15 图

22.16 一个六分之一波片放置在两个交叉放置的偏振片中,光轴与第一个偏振片透过轴夹角为 45°(见图 22.39)。考虑一束光强为 I_0 的非偏振光正入射到偏振片上。假设光轴沿着 z 轴,光束沿 x 轴传播。求出光通过(1)P_1;(2)六分之一波片;(3)P_2 后,y 和 z 分量的电矢量(及相应光强)。

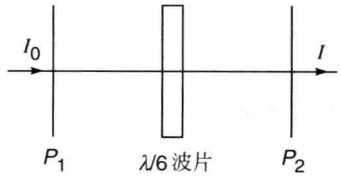


图 22.39 习题 22.16 图

22.17 一束光通过一个起偏器。如果起偏器以光束为轴旋转,透射光强 I 不变。则入射光可能的偏振态是什么?借助一个给定偏振片和一个四分之一波片,如何确定入射光的偏振态?

22.18 考虑一个由两个相似的方解石棱镜($n_o=1.66$,$n_e=1.49$)组成的渥拉斯顿棱镜,如图 22.29 所示,棱镜角为 25°。试计算两束透射光的分离角。

22.19 (1) 考虑一列平面电磁波正入射到一个光轴与表面法线成 20°的方解石晶体上(见图 22.21(a))。因此,$\psi=20°$。计算坡印亭矢量与晶体表面法线之间的夹角。假设

$n_o \approx 1.66$ 和 $n_e \approx 1.49$。

(2) 在(1)中，如果将晶体换为石英($n_o = 1.544, n_e = 1.553$)，情况如何？

[**答案**：(1) 4.31°]

22.20 考虑一束如下式的右旋椭圆偏振光，在 $z=0$ 平面入射到糖溶液中

$$E_x = 5\cos\omega t, \quad E_y = 4\sin\omega t$$

波长 $\lambda_0 = 6328\text{Å}$，假设

$$n_l - n_r = 10^{-5}, \quad n_l = 4/3$$

研究光束偏振态的变化。

22.21 考虑习题 22.20 中的偏振光入射到椭圆芯光纤中的情况

$$\frac{\beta_x}{k_0} \approx 1.506845, \quad \frac{\beta_y}{k_0} \approx 1.507716$$

计算在 $z = 0.25L_b, 0.5L_b, 0.75L_b, L_b$ 处的偏振态。

22.22 当光轴在晶体表面内时，(通过几何关系)证明寻常光和非常光的折射角(用 r_o 和 r_e 表示)有如下关系

$$\frac{\tan r_o}{\tan r_e} = \frac{n_o}{n_e}$$

参考文献和推荐读物

1. W. A. Shurcliff and S. S. Ballard, *Polarized Light*, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, USA (1964).
2. G. R. Bird and M. P. Parrish, *The wire grid as a near infrared polarizer*, J. Opt. Soc. Am (1960), **50**, 886.
3. M. Alonso and E. J. Finn, *Physics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, USA (1970).
4. R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. I, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, USA (1963).
5. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford, England (1970).
6. A. K. Ghatak and K. Thyagarajan, *Optical Electronics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1989). [Reprinted by Foundation Books, New Delhi]
7. F. A. Jenkins and H. E. White, *Fundamentals of Optics*, McGraw-Hill, New York, USA (1976).
8. *Polarized Light: Selected Reprints*, American Institute of Physics, New York, USA (1963).
9. S. Chandrashekhar, *Simple model for optical activity*, Amer. J. Phys, **24**, 503 (1956).
10. P. Gay, *An Introduction to Crystal Optics*, Longmans Green and Co, London, England (1967).
11. T. H. Waterman, *Polarized light and animal navigation*, Scien. Amer (July, 1955).
12. E. A. Wood, *Crystals and Light*, Van Nostrand Momentum Book No. 5, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, USA (1964).
13. L.B. Jeunhomme, *Single mode fiber optics*, Marcel Dekker, New York (1983).

第23章 电 磁 波

上帝说“要有光”；
于是就有了光。

——创世纪

自然和自然的法则隐藏在黑暗之中。
上帝说，让牛顿出世吧，
于是一切豁然开朗。

——亚历山大·蒲柏

当麦克斯韦完成他的发现时，可能说，“要有电和磁，然后就有了光”。

——理查德·费曼

23.1 麦克斯韦方程组

所有的电磁现象都可以说是遵循麦克斯韦方程组的。麦克斯韦方程组基于实验观测，由以下各式组成

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\rho \tag{23.1}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0 \tag{23.2}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial E_z}{\partial y}-\dfrac{\partial E_y}{\partial z}=-\dfrac{\partial B_x}{\partial t}\\[2ex] \dfrac{\partial E_x}{\partial z}-\dfrac{\partial E_z}{\partial x}=-\dfrac{\partial B_y}{\partial t}\\[2ex] \dfrac{\partial E_y}{\partial x}-\dfrac{\partial E_x}{\partial y}=-\dfrac{\partial B_z}{\partial t}\end{cases} \tag{22.3}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H_z}{\partial y}-\dfrac{\partial H_y}{\partial z}=J_x+\dfrac{\partial D_x}{\partial t}\\[2ex] \dfrac{\partial H_x}{\partial z}-\dfrac{\partial H_z}{\partial x}=J_y+\dfrac{\partial D_y}{\partial t}\\[2ex] \dfrac{\partial H_y}{\partial x}-\dfrac{\partial H_x}{\partial y}=J_z+\dfrac{\partial D_z}{\partial t}\end{cases} \tag{23.4}$$

式中 ρ 表示电荷密度，$\boldsymbol{J}$ 表示电流密度，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分别表示电场强度、电位移矢量、磁感应强度和磁场强度。在 23.9 节中将分别讨论每个方程的物理意义，如果使用矢量写法，以上各方程可以写为以下紧凑的形式

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D}=\rho \tag{23.5}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B}=0 \tag{23.6}$$

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{23.7}$$

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{23.8}$$

只有当已知 $\boldsymbol{D}$ 相对于 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ 相对于 $\boldsymbol{H}$ 以及 $\boldsymbol{J}$ 相对于 $\boldsymbol{E}$ 的“本构关系式”已知时，以上方程才有解。对于线性、各向同性以及均匀的媒质，其“本构关系式”[①]由以下方程给出[②]

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{23.9}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H} \tag{23.10}$$

$$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E} \tag{23.11}$$

式中，ε，μ 和 σ 分别表示媒质的介电常数（也叫电容率）、磁导率和电导率。

23.2　电介质中的平面波

对于一个其中不存在电荷和电流的电介质，有

$$\rho=0 \tag{23.12}$$

$$\boldsymbol{J}=0 \tag{23.13}$$

此外，根据“本构关系式”（式(23.9)～式(23.11)），则式(23.1)～式(23.4)变为

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0 \tag{23.14}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0 \tag{23.15}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial E_z}{\partial y}-\dfrac{\partial E_y}{\partial z}=-\mu\dfrac{\partial H_x}{\partial t}\\[2ex] \dfrac{\partial E_x}{\partial z}-\dfrac{\partial E_z}{\partial x}=-\mu\dfrac{\partial H_y}{\partial t}\\[2ex] \dfrac{\partial E_y}{\partial y}-\dfrac{\partial E_x}{\partial y}=-\mu\dfrac{\partial H_z}{\partial t}\end{cases} \tag{23.16}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H_z}{\partial y}-\dfrac{\partial H_y}{\partial z}=\varepsilon\dfrac{\partial E_x}{\partial t}\\[2ex] \dfrac{\partial H_x}{\partial z}-\dfrac{\partial H_z}{\partial x}=\varepsilon\dfrac{\partial E_y}{\partial t}\\[2ex] \dfrac{\partial H_y}{\partial y}-\dfrac{\partial H_x}{\partial y}=\varepsilon\dfrac{\partial E_z}{\partial t}\end{cases} \tag{23.17}$$

在 23.3 节中将（根据上式）推导出波动方程，但在本节中，先假设电磁波是存在的，并研究平面电磁波的性质。对于沿着 $+z$ 方向传播的平面波，其电场和磁场可以写为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\exp[\mathrm{i}(kz-\omega t)] \tag{23.18}$$

---

① 一般将这种“本构关系式”称为“物质方程”。译者注。

② 应该指出，所谓的“本构关系式”取决于媒质的性质、场强大小等。例如，对于各向异性媒质而言，ε 是一个二阶张量（见 22.8 节）；对于强场，ε 自身依赖于 $\boldsymbol{E}$（见 18.10 节）等。

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0\exp[\mathrm{i}(kz-\omega t)] \tag{23.19}$$

式中 $\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{H}_0$ 是与空间和时间无关的矢量,但通常来说是复数。既然 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 与 x 和 y 无关,式(23.14)和式(23.15)可得出

$$\begin{cases}\dfrac{\partial E_z}{\partial z}=0\\[2ex]\dfrac{\partial H_z}{\partial z}=0\end{cases} \tag{23.20}$$

由于希望得到的表达式由式(23.18)和式(23.19)给出的平面波解,则必须有[①]

$$E_z=0,\quad H_z=0 \tag{23.21}$$

因此,场纵向分量为零,所得的波是横波。为不失一般性,选取 $\boldsymbol{E}$ 的方向沿 x 轴,于是可假设

$$E_y=0 \tag{23.22}$$

根据式(23.18),式(23.19),式(23.21)和式(23.22),式(23.16)和式(23.17)可简化为

$$0=\mathrm{i}\omega\mu H_{0x} \tag{23.23}$$

$$\mathrm{i}kE_{0x}=\mathrm{i}\omega\mu H_{0y} \tag{23.24}$$

$$-\mathrm{i}kH_{0y}=\mathrm{i}\omega\varepsilon E_{0x} \tag{23.25}$$

$$\mathrm{i}kH_{0x}=0 \tag{23.26}$$

式中

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_0=\hat{\boldsymbol{x}}E_{0x}+\hat{\boldsymbol{y}}E_{0y}+\hat{\boldsymbol{z}}E_{0z}\\ \boldsymbol{H}_0=\hat{\boldsymbol{x}}H_{0x}+\hat{\boldsymbol{y}}H_{0y}+\hat{\boldsymbol{z}}H_{0z}\end{cases} \tag{23.27}$$

即 E_{0x},E_{0y}和 E_{0z}分别是 $\boldsymbol{E}_0$ 的 x,y 和 z 分量,如此类推。式(23.23)~式(23.26)可得出

$$\begin{cases}H_{0x}=0\\[2ex]\dfrac{H_{0y}}{E_{0x}}=\dfrac{k}{\omega\mu}=\dfrac{\omega\varepsilon}{k}\end{cases} \tag{23.28}$$

这样,由式(23.18)和式(23.19)表示的平面波确实满足麦克斯韦方程组,只要

$$k^2=\omega^2\varepsilon\mu \tag{23.29}$$

这些波在性质上是横波,而且,如果假设电矢量沿着 x 轴方向,则磁矢量将沿着 y 轴方向,因此,可以写出

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{x}}E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\\ \boldsymbol{H}=\hat{\boldsymbol{y}}H_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\end{cases} \tag{23.30}$$

式中

$$H_0=\frac{k}{\omega\mu}E_0 \tag{23.31}$$

因此,磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{y}}B_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} \tag{23.32}$$

式中

$$B_0=\frac{k}{\omega}E_0=\sqrt{\varepsilon\mu}E_0=\frac{1}{v}E_0 \tag{23.33}$$

① 式(23.21)并不是式(23.20)唯一的解。例如,可以取 $E_z=$常数这样的解,但这样的场解并不代表波。

$v\left(=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)$[①]为电磁波传播的速度(见式(23.35))。在自由空间中,有

$$B_0 = \frac{1}{c}E_0 \tag{23.34}$$

综合以上各式,可以得出关于平面电磁波的一些推论。

(1) $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都与传播方向垂直,因此,平面电磁波是横波(见图 23.1)。

(2) $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 之间互相垂直,因而,如果波沿着 z 轴方向传播,且假设 $\boldsymbol{E}$ 指向 x 轴方向,则 $\boldsymbol{H}$ 将指向 y 轴方向(见图 23.1)。

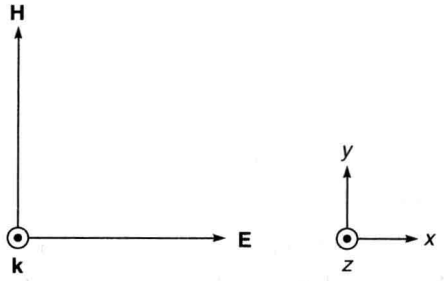


图 23.1　如果平面电磁波沿 z 方向传播(由纸面向外),且任意时刻电矢量沿着 x 轴方向,则磁矢量将沿着 y 轴方向。

(3) 由于$\frac{k}{\omega\mu}$是实数,所以,电矢量和磁矢量同相位,即,在任何时刻,$\boldsymbol{E}$ 为零时,$\boldsymbol{H}$ 亦为零,同理,当 $\boldsymbol{E}$ 达到最大值时,$\boldsymbol{H}$ 也达到最大值,如此类推。

(4) 电磁波的传输速度 $v\left(=\frac{\omega}{k}\right)$由以下式子给出

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{23.35}$$

在自由空间中

$$\begin{cases}\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.8542\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/(N\cdot m^2)}\\ \mu = \mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{N\cdot s^2\cdot C^2}\end{cases} \tag{23.36}$$

因此,有

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{\sqrt{8.8542\times10^{-12}\times4\pi\times10^{-7}}}\\ &= 2.99794\times10^{8}\,\mathrm{m/s}\end{aligned} \tag{23.37}$$

表示电磁波在自由空间中的传播速度。值得一提的是,式(23.5)～式(23.7)所描述的物理定律在麦克斯韦之前就已经为人所知了,麦克斯韦所做的工作仅仅在式(23.8)中引入了$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$这一项(见 23.9 节)。而正是这一项的出现,导致了麦克斯韦对于电磁波存在的预言[②]。麦

① 原书为"$v\left(=\frac{1}{\varepsilon\mu}\right)$"

② 容易看出,当式(23.17)右边不存在项 $\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$时,式(23.18)和式(23.19)描述的平面波并不是式(23.14)～式(23.17)的解。

克斯韦根据已知的 ε_0 值,计算出电磁波的传播速度应该是 $3.1074\times10^8\,\mathrm{m/s}$,这与当时已知的光速值 $3.14858\times10^8\,\mathrm{m/s}$(斐索于 1849 年的测量值)非常接近。仅仅是基于这两个数字的接近以及"笃信自然界的合理性",麦克斯韦提出了光的电磁波理论,并预言,光必然是一种电磁波。用他自己的话说

"由科尔劳什(Kohlrausch)和韦伯(Weber)利用电磁测量得出的电磁波的速度,与斐索(M. Fizeau)利用光学测量得出的光速如此相符,我们几乎无可避免地得出推论:光是存在于同一媒质里的横向波动,而这种波动,恰好是电与磁现象的起因。"

(5) 电介质的折射率(n)(以介电常数 ε 和磁导率 μ 表征)由下式给出

$$n=\frac{n}{v}=\left(\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}\right)^{1/2} \tag{23.38}$$

对于大多数电介质,有 $\mu\approx\mu_0$,因而得到

$$n=\sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}=\sqrt{\kappa} \tag{23.39}$$

式中 $\kappa(=\varepsilon/\varepsilon_0)$ 被称为电介质的相对介电常数。

(6) 电场波和磁场波是相互依存的,相互之间不能独立存在。从物理上解释,一个随时间变化的电场产生了一个随空间和时间变化的磁场,这个变化的磁场又产生了一个随空间和时间变化的电场,如此类推。电场和磁场的这种相互产生的过程,形成了电磁波的传播。

(7) 既然麦克斯韦方程组对于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 而言是线性的,因此,如果($\boldsymbol{E}_1$,$\boldsymbol{H}_1$)和($\boldsymbol{E}_2$,$\boldsymbol{H}_2$)是麦克斯韦方程组两组独立的解,则($\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$,$\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2$)也是麦克斯韦方程组的解。这就是叠加原理,根据叠加原理,两个独立扰动所产生的合位移等于两个扰动单独产生位移的矢量和[①](见第 13 章)。

(8) 由式(23.30)所表示的平面电磁波被称为是线偏振的,是由于电矢量总是沿着 x 轴方向振动,同理,磁矢量也总是沿着 y 轴方向(见图 23.2)。

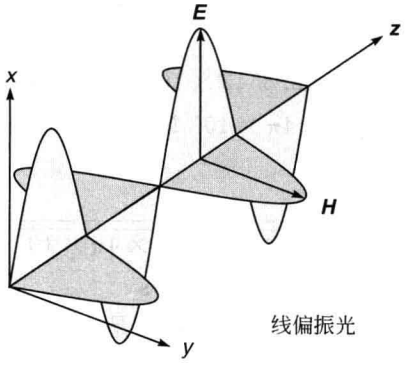


图 23.2 线偏振光 x 方向偏振波(在某个特定的时刻)的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$。
电矢量总是位于 x-z 平面内,磁矢量总是位于 y-z 平面内。

① 因此叠加原理是麦克斯韦方程组线性性的结果。但当与电磁波相联的场足够强,以至于电介质的介电常数 ε 与 $\boldsymbol{E}$ 本身相关时,麦克斯韦方程组将变为非线性的,此时叠加原理就不再适用了。事实上,讨论任何一种非线性现象时,叠加原理都不再成立。

然而，考虑两个独立的平面电磁波的解[①]

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_1 = \hat{\boldsymbol{x}} E_0 \cos(kz - \omega t) \\ \boldsymbol{H}_1 = \hat{\boldsymbol{y}} H_0 \cos(kz - \omega t) \end{cases} \tag{23.40}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_2 = \hat{\boldsymbol{y}} E_0 \cos\left(kz - \omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) = \hat{\boldsymbol{y}} E_0 \sin(kz - \omega t) \\ \boldsymbol{H}_2 = -\hat{\boldsymbol{x}} H_0 \cos\left(kz - \omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\hat{\boldsymbol{x}} H_0 \sin(kz - \omega t) \end{cases} \tag{23.41}$$

则

$$\begin{cases} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = E_0[\hat{\boldsymbol{x}}\cos(kz - \omega t) + \hat{\boldsymbol{y}}\sin(kz - \omega t)] \\ \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2 = H_0[\hat{\boldsymbol{y}}\cos(kz - \omega t) - \hat{\boldsymbol{x}}\sin(kz - \omega t)] \end{cases} \tag{23.42}$$

也是方程的一个解，它表示一个左旋圆偏振波[②]。

(9) 电磁波的频率(和波长)可以在一个宽广的范围内连续变化。电磁波谱如图 23.3 所示。无线电波的波长在 10～1000m 范围，而 X 光的波长在埃的量级($1\text{Å} = 10^{-10}\text{m}$)。各种不同电磁波的波长范围如图 23.3 所示。我们可以看到的可见光的范围($4\times10^{-5}\text{cm} < \lambda < 7\times10^{-5}\text{cm}$)仅占了电磁波谱的很小一部分。(还可参见文前附录图表页的图 29)。不同种类的波的产生方法是不同的，例如，X 光通常是利用电子的突然停止或者方向偏转实现的，而无线电波可以通过天线上电荷的变化来产生。但是，所有波长的电磁波在真空中都以相同的速度传播，且总是由具有加速度的电荷来产生。

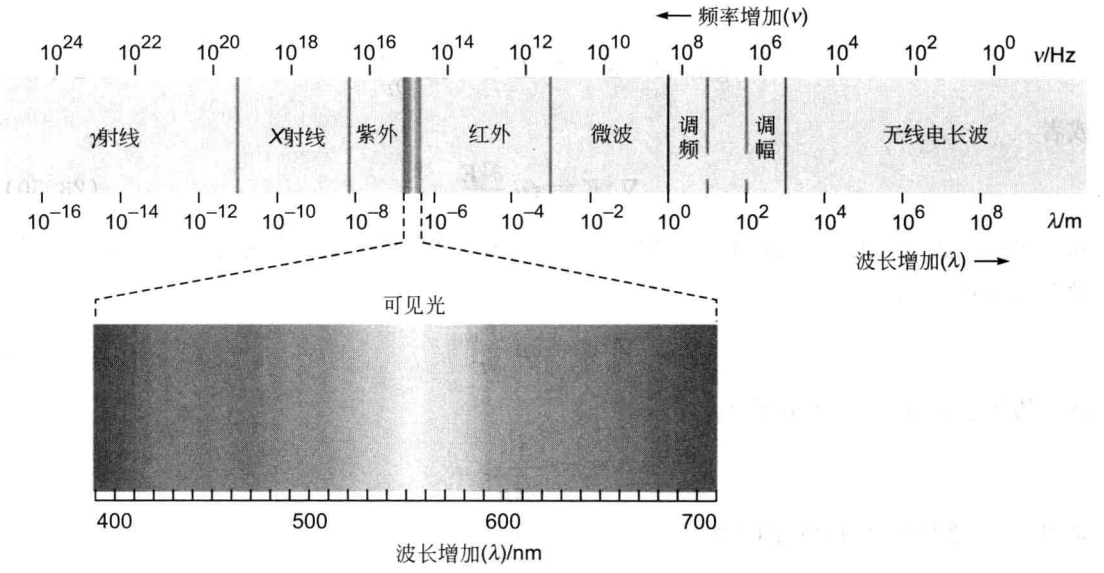


图 23.3　电磁波谱，可见光仅占整个电磁波谱的一小部分。

图片取自 http://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnetic_waves。彩图见文前附录图表页的图 29。

① 考察的是式(23.30)右边的复指数函数的实部。

② 见 22.4 节。

23.3 电介质中的三维波动方程

再一次来讨论电介质中无电荷、无电流($\rho=0$,$\boldsymbol{J}=0$)的情况。在此情况下,根据"本构关系式",已经得出式(23.14)～式(23.17)。利用矢量的表示,这些方程可以写为以下简洁的形式

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E}=0 \tag{23.43}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{H}=0 \tag{23.44}$$

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{E}=-\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{23.45}$$

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{H}=\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{23.46}$$

在23.2节中已证明,平面波解满足上面的方程组。在本节中将证明根据上面的方程组,可以推导出波动方程。

对式(23.45)求旋度,可得

$$\mathrm{curl}\ \mathrm{curl}\boldsymbol{E}=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{curl}\boldsymbol{H}=-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{23.47}$$

其中用到了式(23.46)。又由矢量恒等式[①]

$$\mathrm{curl}\ \mathrm{curl}\ \boldsymbol{E}=\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{E}-\nabla^2\boldsymbol{E} \tag{23.48}$$

可得

$$\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{E}-\nabla^2\boldsymbol{E}=-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{23.49}$$

或者

$$\nabla^2\boldsymbol{E}=\varepsilon\mu\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{23.50}$$

其中用到了式(23.43)。式(23.50)被称为三维波动方程,$\boldsymbol{E}$的每一个笛卡儿分量都满足标量波动方程(见11.9节)

$$\nabla^2\psi=\varepsilon\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{23.51}$$

该波的传播速度(v)由下式给出

$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{23.52}$$

同理,可以推导出$\boldsymbol{H}$所满足的波动方程

---

① 需要指出的是,算符∇^2由下式定义:

$$\nabla^2\boldsymbol{E}\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{E}-\mathrm{curl}\ \mathrm{curl}\ \boldsymbol{E}$$

但

$$(\nabla^2\boldsymbol{E})_x\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ E_x=\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$$

即,$\nabla^2\boldsymbol{E}$的一个笛卡儿分量是其笛卡儿分量的梯度的散度,但是对非笛卡儿坐标

$$(\nabla^2\boldsymbol{E})_r\neq\mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ E_r$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} \tag{23.53}$$

容易看出，只要满足

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{\varepsilon\mu} \tag{23.54}$$

由式(23.18)和式(23.19)表示的平面波解确实满足式(23.50)和式(23.53)。

在此需要提及的是，在 1931 年(麦克斯韦诞生 100 周年)，马克斯·普朗克(Max Planck)赞道："(麦克斯韦方程组)……是人类智慧的伟大胜利之一，且这一认可将持续下去，直到永远"。阿尔伯特·爱因斯坦(Albert Einstein)评价说："(麦克斯韦的工作是)……自牛顿以后物理学得到的意义最为深远的和最富有成效的工作"。

23.4　坡印亭矢量

考虑式(23.7)和式(23.8)

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

则

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) &= \boldsymbol{H} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{H} \\ &= -\boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \end{aligned} \tag{23.55}$$

对于线性材料，有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} &= \mu \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \varepsilon \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \\ &= \frac{1}{2}\mu \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}) + \frac{1}{2}\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} + \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}) \end{aligned}$$

因此，式(23.55)可以改写为以下形式

$$\operatorname{div} \boldsymbol{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} \tag{23.56}$$

式中

$$\boldsymbol{S} \overset{\text{def}}{=\!=} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{23.57}$$

称为坡印亭矢量[①]，式中

$$u = \frac{1}{2}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} + \frac{1}{2}\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} \tag{23.58}$$

---

① 式(23.58)对各向异性的电介质也是成立的，由于在主轴坐标系统中(见式(22.64))

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} &= \frac{1}{2}\varepsilon_x \frac{\partial E_x^2}{\partial t} + \frac{1}{2}\varepsilon_y \frac{\partial E_y^2}{\partial t} + \frac{1}{2}\varepsilon_z \frac{\partial E_z^2}{\partial t} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(D_x E_x + D_y E_y + D_z E_z) \end{aligned}$$

式(23.56)类似于连续性方程,作为一种物理解释,注意到,如果速度为 v 的电荷 q 受到电磁场的作用,那么,当运动电荷通过距离 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 时,场所做的功为 $\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$。因此,单位时间所做的功为

$$\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=(q\boldsymbol{E}+q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}=q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v} \tag{23.59}$$

如果单位体积内有 N 个带电粒子,每个粒子带一个电荷 q,则场在单位体积内做功为

$$Nq\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E} \tag{23.60}$$

式中 $\boldsymbol{J}$ 表示电流密度。能量是以带电粒子的动能(或热能)的形式表现的。因此,$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}$ 表示熟悉的焦耳损耗,则式(23.56)右边出现的 $\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}$ 表示场在单位时间单位体积做功产生的能量。因此,可以把式(23.56)解释为能量的连续性方程[①],式中 u 表示单位体积内的能量(即能量密度)。物理量 $\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}$ 和 $\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}$ 分别表示单位体积内的电能量和磁能量。进一步,把 $\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 解释为单位时间内通过单位面积 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 的电磁能(即电磁能量流)。对于电介质中的平面电磁波,可以写出

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{x}}E_0\cos(kz-\omega t)\\ \boldsymbol{H}=\hat{\boldsymbol{y}}H_0\cos(kz-\omega t)=\hat{\boldsymbol{y}}\dfrac{k}{\omega\mu}E_0\cos(kz-\omega t)\end{cases} \tag{23.61}$$

则

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\hat{\boldsymbol{z}}\frac{k}{\omega\mu}E_0^2\cos^2(kz-\omega t) \tag{23.62}$$

式(23.62)表明,能量流沿着 z 方向传播(表示波的传播方向),且单位时间内通过单位面积(垂直于 z 轴)的能量为

$$\frac{k}{\omega\mu}E_0^2\cos^2(kz-\omega t)$$

对于光波来说,$\omega\approx10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$,$\cos^2$ 项变化极快[②],任何探测器都只能记录下它时间的平均值。又有

$$\langle\cos^2(kz-\omega t)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\cos^2(kz-\omega t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$$

可得

$$\langle\boldsymbol{S}\rangle=\hat{\boldsymbol{z}}\frac{k}{2\omega\mu}E_0^2 \tag{23.63}$$

式中〈…〉表示求角括号里量的时间平均值(见17.5节)。

一般而言,对于平面电磁波,有

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]$$
$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]$$

根据等式 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$,可得

---

① 能量的连续性方程一般写作以下形式

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

式中 ρ 表示电荷密度,$\boldsymbol{J}$ 表示电流密度,即 $\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 表示单位时间内通过面积 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 的电荷量。

② 见14.3节和14.6节

$$\mathrm{i}(k_x E_{0x} + k_y E_{0y} + k_z E_{0z}) = 0$$

即

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{23.64}$$

同理，由等式$\nabla \cdot \boldsymbol{H}=0$，可得

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{23.65}$$

式(23.64)和式(23.65)给出了电磁波是横波的本质。既然

$$(\nabla \times \boldsymbol{E})_x = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) = \mathrm{i}(k_y E_{0z} - k_z E_{0y}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} = \mathrm{i}(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E})_x$$[①]

由式(23.45)得出

$$\mathrm{i}(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}) = \mathrm{i}\omega\mu \boldsymbol{H} \Rightarrow \boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}}{\omega\mu} \tag{23.66}$$

同理，式(23.46)得出

$$\mathrm{i}(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H}) = -\mathrm{i}\omega\varepsilon \boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H}}{\omega\varepsilon} \tag{23.67}$$

上式显示了 $\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 之间互相垂直。坡印亭矢量 $\boldsymbol{S}$ 实际上是 $\boldsymbol{k}$ 的方向。

必须指出，$\boldsymbol{S} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 并不总是表示单位时间内通过面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 的能量流。例如，对于静电场和静磁场，$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ 并不为零，但在这种情况下并没有能量流。而对于一个闭合面积分

$$\oint \boldsymbol{S} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

严格地表示了单位时间内流出该闭合面的净能量。对式(23.56)进行体积分，可以得到结论

$$\int \mathrm{div}\, \boldsymbol{S} \mathrm{d}V + \frac{\partial}{\partial t}\int u \mathrm{d}V = -\int \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}V$$

或者

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int u \mathrm{d}V = \oint \boldsymbol{S} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} + \int \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}V$$

其中用到了散度定理(即数学上的高斯定理)。上式左边的量表示单位时间内总能量的减少率，它必须等于焦耳损耗加上单位时间内从该闭合面所包围体积流出的净能量。

23.4.1　振荡电偶极子

考虑一个沿 z 方向振荡的电偶极子

$$\boldsymbol{P} = p_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \hat{\boldsymbol{z}}$$

距离此电偶极子足够远处的场可以表示为[②](见图 23.4)

$$\boldsymbol{E} = -\left(\frac{k^2 p_0}{4\pi\varepsilon_0}\right) \sin\theta \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r} \hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{23.68}$$

$$\boldsymbol{H} = -\left(\frac{\omega k p_0}{4\pi}\right) \sin\theta \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r} \hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{23.69}$$

式中 $k=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$，其他符号的意义如前所述。注意，电场和磁场都随着 $1/r$ 减小且同相位。此外，磁场和电场的振幅比为

① 原书为"$\mathrm{i}(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E})$"

② 可以参考参考文献[8]的 256 页。

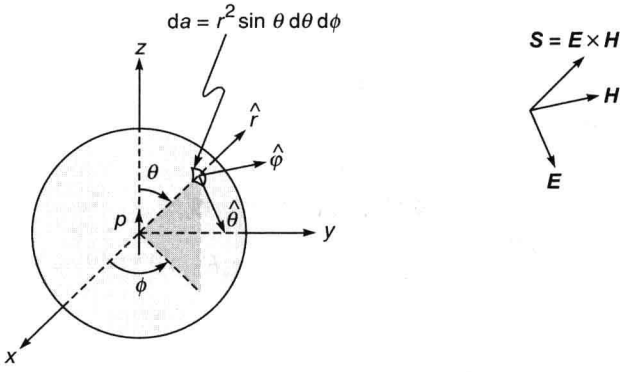


图 23.4　振荡电偶极子的电场和磁场方向，以及坡印亭矢量方向。为了计算单位时间内辐射的总能量，必须把坡印亭矢量对球面积分。

$$\frac{\omega k p_0/4\pi}{k^2 p_0/4\pi\varepsilon_0}=\frac{\omega\varepsilon_0}{k}=\frac{k}{\omega\mu_0} \tag{23.70}$$

式(23.70)与式(23.28)是一致。由于式(23.68)和式(23.69)中的 $\sin\theta$ 因子，电偶极子不会在其振荡的方向产生电场和磁场(见 22.2.4 节和 22.8 节)。因此[①]，有

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\frac{\omega k^3 p_0^2}{16\pi^2\varepsilon_0}\sin^2\theta\,\frac{\cos^2(kr-\omega t)}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{r}} \tag{23.71}$$

式(23.71)表明，$\boldsymbol{S}$ 随着 $1/r^2$ 减小，实际上对于一个球面波理当如此（这就是平方反比律）。如果对一个半径为 r 的球面做积分，可得

$$\begin{aligned}P&=\oint\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}=r^2\iint\boldsymbol{S}\cdot\hat{\mathbf{r}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\\&=\frac{\omega k^3 p_0^2}{16\pi^2\varepsilon_0}\cos^2(kr-\omega t)\int_0^{\pi}\sin^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\\&=\frac{\omega k^3 p_0^2}{6\pi\varepsilon_0}\cos^2(kr-\omega t)\end{aligned} \tag{23.72}$$

式中 P 表示瞬时辐射功率。由于 $\cos^2$ 项随时间变化很快，所以，平均辐射功率由下式给出

$$\bar{P}=\frac{\omega k^3 p_0^2}{12\pi\varepsilon_0} \tag{23.73}$$

23.5　电磁波的能量密度和强度

在 23.4 节中已经证明，与平面电磁波相联系的单位体积内的能量由下式给出

$$u=\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}+\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{H}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2+\frac{1}{2\mu}B^2 \tag{23.74}$$

对于线偏振的平面电磁波，可以写出

---

① 为了计算坡印亭矢量。必须计算 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 实部的积。注意，对于复数加法，如果 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$，则

$$\mathrm{Re}(\boldsymbol{E})=\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}_1)+\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}_2)$$

但是对于复数乘法

$$\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}_1)\times\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}_2)\neq\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{E}_2)$$

$$E_x = E_0\cos(kz-\omega t),\quad E_y = 0,\quad E_z = 0 \tag{23.75}$$

$$B_x = 0,\quad B_y = B_0\cos(kz-\omega t),\quad B_z = 0 \tag{23.76}$$

因此，有

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2\cos^2(kz-\omega t) + \frac{1}{2\mu}B_0^2\cos^2(kz-\omega t)$$

又有

$$B_0 = \sqrt{\varepsilon\mu}E_0$$

（见式(23.33)）可得

$$\frac{B_0^2}{2\mu} = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2$$

因此，与电场相联系的能量等于与磁场相联系的能量。如果对 $\cos^2$ 项求时间平均值，则得到

$$\langle u\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2 \tag{23.77}$$

此外，为了得到波束的强度，必须将$\langle u\rangle$乘以传播速度，以得到单位时间内通过单位面积的能量。因此，强度表示为

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon v E_0^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon/\mu}E_0^2 \tag{23.78}$$

此结果应该与式(23.63)一致。实际上，如果在式(23.63)中代入 $k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$，就得到了式(23.78)。在自由空间中，有

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 cE_0^2 = \frac{1}{2}(8.854\times10^{-12}\mathrm{C^2/(N\cdot m^2)})\times(3\times10^8\mathrm{m/s})E_0^2$$

$$= (1.33\times10^{-3}\mathrm{W/V^2})E_0^2$$

例如，对于一盏 100W 的灯，在距离它 10m 处的强度为

$$I = \frac{100}{4\pi\times(10)^2} \approx 7.96\times10^{-2}\mathrm{W/m^2}$$

其中假设灯光在各个方向的照射是均匀的，则

$$E_0 = \left(\frac{7.96\times10^{-2}}{1.33\times10^{-3}}\right)^{1/2} \approx 7.74\mathrm{V/m}$$

在此值得一提的是，由于激光光束几乎接近平行，因此能够被透镜聚焦到一个比 $10^{-6}\mathrm{cm^2}$ 还小的横截面上（见 18.4.1 节），这样，对于 10^5W 的激光光束，焦平面的强度为

$$I = \frac{10^5}{10^{-10}} = 10^{15}\mathrm{W/m^2}$$

因此，有

$$E_0 = \left(\frac{10^{15}}{1.33\times10^{-3}}\right)^{1/2} \approx 0.87\times10^9\mathrm{V/m}$$

这样高的电场能够产生极高的温度，会导致照射目标的燃烧（见图 18.18 和图 18.19）。

23.6 辐射压强[①]

考虑一个沿着+z轴方向传播的线偏振电磁波,假定电场沿着x方向,磁场沿着y方向(见图23.1)。假设电磁波与一电荷q相互作用,电场使电荷在x轴方向上、下运动。这样,电荷在x方向获得了一定速度,且由于磁场沿着y方向,有一个力

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{23.79}$$

将作用在电荷q上。这个力的方向沿着z轴[②](即沿着波的传播方向),构成了所谓的"辐射压强"。则

$$\boldsymbol{F} = qvB\,\hat{\boldsymbol{z}} \tag{23.80}$$

$$B = \frac{E}{c} \tag{23.81}$$

(见式(23.33))。因此,有

$$\boldsymbol{F} = \frac{qEv}{c}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{23.82}$$

qEv表示单位时间内场对电荷做的功(见23.4节)。因此,如果考虑一个单位体积,则单位时间内场对单位体积的电荷做功等于能量密度的时间增加率,即

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{23.83}$$

但是力等于单位时间内动量的变化,则与平面电磁波相联系的单位体积的动量为

$$\boldsymbol{p} = \frac{u}{c}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{23.84}$$

在第25章中将证明光本质上是由被称为光子的微粒组成的。每个光子携带$h\nu$的能量,因此,光子的动量为

$$p = \frac{h\nu}{c} \tag{23.85}$$

考虑一列平面波正入射到一个理想吸收体的情况。如果吸收体表面的一个面积元为dS,在

---

① 参见文献[4]的34.9节。严格的分析见文献[8]的第12章。

② 根据7.5节的分析,可以证明,在场$\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{x}}E_0\cos(kz-\omega t)$存在时,电荷位移由下式给出

$$\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}}qE_0A\cos(kz-\omega t+\phi)$$

其中已经明确地证明了振幅q和E_0成正比。因此,有

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \hat{\boldsymbol{x}}qE_0A\omega\sin(kz-\omega t+\phi)$$

而

$$\boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{y}}B_0\cos(kz-\omega t) = \hat{\boldsymbol{y}}\frac{E_0}{c}\cos(kz-\omega t)$$

因此,有

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} = +\hat{\boldsymbol{z}}q^2\frac{E_0^2\omega}{c}A[\cos(kz-\omega t)][\sin(kz-\omega t)\cos\phi+\cos(kz-\omega t)\sin\phi]$$

如果取时间平均值,则

$$\langle\boldsymbol{F}\rangle = \hat{\boldsymbol{z}}\frac{q^2E_0^2\omega}{2c}A\sin\phi = \hat{\boldsymbol{z}}\frac{1}{c}\langle q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}\rangle$$

由于$\sin\phi$总是正值(见式(8.22)和式(8.51)),则力总是沿着z方向。

时间 dt 内传递到面积元 dS 的动量为

$$p\,dS\,c\,dt$$

上式表示一个圆柱体 $dS\,c\,dt$ 内包含的动量(见图 23.5),则作用在面积元 dS 的力为

$$pc\ dS$$

因此,有

$$P_{rad} = cp = u \tag{23.86}$$

式中 P_{rad} 表示由于平面波入射到理想吸收体上产生的辐射压强。另一方面,对于理想反射体,反射波的动量与入射波的数值相等,方向相反。因此,传递的动量是式(23.86)的两倍,即

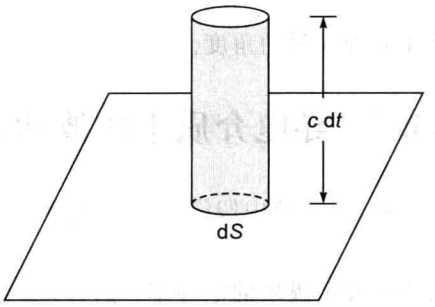


图 23.5　计算辐射压强用的圆柱体

$$P_{rad} = 2cp = 2u \tag{23.87}$$

为了对辐射压强的数量级有所了解,考虑一束强度为 $I=3000\mathrm{W/m^2}$ 的光照在理想反射镜面。由于 $I=cu$,可得

$$u = \frac{3000\mathrm{W/m^2}}{3\times10^8\mathrm{m/s}} = 10^{-5}\mathrm{J/m^3}$$

辐射压强为

$$10^{-5}\mathrm{N/m^2}$$

它的值可与大气压强相比拟($\approx10^{-5}\mathrm{N/m^2}$)。

通过让一束光照射到一面高度抛光的镜面 M 上来测量辐射压强是可行的(如图 23.6 所示)[①]。辐射压强将引起悬架扭转,从而测出这个压强。光束的强度可以通过把光照射到一个吸收体(比如涂黑的板)上通过测量升高的温度测出。在某次实验中,测出的辐射压强约为 $7.01\times10^{-6}\mathrm{N/m^2}$,这与之前的预测值 $7.05\times10^{-6}\mathrm{N/m^2}$ 相近。

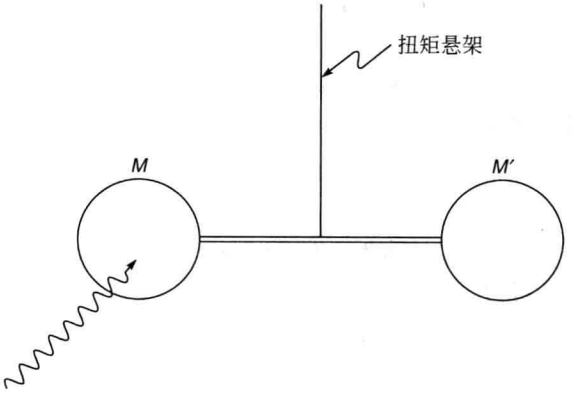


图 23.6　测量辐射压强的实验装置

对于斜入射到理想反射体的情况,其单位体积动量的改变为 $2p\cos\theta$,则辐射压强为

① 这个实验首先由俄国的列别捷夫(Lebedev)在 1899 年完成。如图 23.6 所示的实验装置与 1901 年尼克尔斯(Nichols)和赫耳(Hull)的实验相似,这个实验证明了辐射压强的预言。

$$P_{\text{rad}} = 2cp\cos^2\theta = 2u\cos^2\theta \tag{23.88}$$

式中 θ 为入射的角度。

23.7 导电介质中的波动方程

在23.3节中假设 $\boldsymbol{J}=0$。对于一个导电介质,有

$$\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E} \tag{23.89}$$

式中 σ 表示媒质的电导率。这样,麦克斯韦方程组可变为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0 \tag{23.90}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0 \tag{23.91}$$

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{23.92}$$

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{H} = \sigma\boldsymbol{E} + \varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{23.93}$$

对式(23.92)求旋度,可得

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl}\boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\operatorname{curl}\boldsymbol{H}$$

或者

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E} - \nabla^2\boldsymbol{E} = -\mu\sigma\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

根据式(23.90),可得

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \mu\sigma\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{23.94}$$

这就是导电介质的波动方程。对于下面类型的平面电磁波

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\exp[\mathrm{i}(kz - \omega t)] \tag{23.95}$$

可得

$$-k^2 + \mathrm{i}\omega\mu\sigma + \omega^2\varepsilon\mu = 0 \tag{23.96}$$

这表明 k 一定是个复数,如果写为

$$k = \alpha + \mathrm{i}\beta \tag{23.97}$$

则

$$-(\alpha^2 + 2\mathrm{i}\alpha\beta - \beta^2) + \mathrm{i}\omega\mu\sigma + \omega^2\varepsilon\mu = 0$$

使实部和虚部分别相等,可得

$$\alpha^2 - \beta^2 = \omega^2\varepsilon\mu \tag{23.98}$$

$$\beta = \frac{\omega\mu\sigma}{2\alpha} \tag{23.99}$$

将 β 代入式(23.98),解出 α,得

$$\alpha = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\left[\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}\right)^{1/2}\right]^{1/2} \tag{23.100}$$

必须选择正号,因为负号可能使 α 变为复数。则

$$\begin{cases}\alpha=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\left[\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}\right)^{1/2}\right]^{1/2}\\ \beta=\dfrac{\omega\mu\sigma}{2\alpha}\end{cases}\tag{23.101}$$

而当 k 是复数时，式(23.95)变为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\exp(-\beta z)\exp[\mathrm{i}(\alpha z-\omega t)]\tag{23.102}$$

表示一个衰减波。衰减是由焦耳损耗引起的。对于良导体①，有

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\gg 1\tag{23.103}$$

从而得到

$$\alpha\approx\beta\approx\left(\frac{\omega\mu\sigma}{2}\right)^{1/2}\tag{23.104}$$

实际上，如果$\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\ll 1$(比方说$\leqslant 0.01$)，媒质就归类于绝缘体；如果$\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\gg 1$(比方说$\geqslant 100$)，媒质就能被归类于导体。若

$$0.01\leqslant\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\leqslant 100$$

媒质被称为准导体。因此，随着频率变化，一种给定的媒质能够表现得像绝缘体或者像导体。例如，对于淡水而言$\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\approx 80$，且 $\sigma\approx 10^{-3}\,\mathrm{S/m}$②。($\varepsilon$ 和 σ 在低频时都能被看作是常数)。因此，有

$$\frac{\sigma}{\varepsilon}\approx\frac{10^{-3}}{80\times 8.85\times 10^{-12}}\approx 1.4\times 10^{6}\,\mathrm{s^{-1}}$$

当 $\omega=2\pi\times 10\,\mathrm{s^{-1}}$时，有

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\approx 2\times 10^{4}$$

而当 $\omega=2\pi\times 10^{10}\,\mathrm{s^{-1}}$，有

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\approx 2\times 10^{-5}$$

因此，当 $\nu\leqslant 10^{3}\,\mathrm{s^{-1}}$时，淡水表现为一种良导体；而当 $\nu\geqslant 10^{7}\,\mathrm{s^{-1}}$时，表现为一种绝缘体。另一方面，对于铜，假设 $\varepsilon\approx\varepsilon_0$，且 $\sigma=5.8\times 10^{7}\,\mathrm{S/m}$。当 $\omega\approx 2\pi\times 10^{10}\,\mathrm{s^{-1}}$时，有

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\approx\frac{5.8\times 10^{7}}{2\pi\times 10^{10}\times 8.9\times 10^{-12}}\approx 10^{8}$$

可见，即使在这么高的频率下，仍然表现为一种极优良的导体。

由式(23.102)可以看出，当波贯穿到距离为

$$\delta=\frac{1}{\beta}$$

---

① 相应于绝缘体的表达式在习题 23.8 中给出。

② 电导率为电阻率的倒数。过去电导的单位为“姆欧”mho，由“欧姆”ohm 字母顺序颠倒过来而得到。现在国际单位制中电导率的单位是西门子/米(S/m)＝姆欧/米(mho/m)。作者在本书对电导率所用的单位是 mho/m，译本均改为 S/m。译者注。

时,场强减小到1/e,这个距离被称为穿透深度。对铜而言,有

$$\mu \approx \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{N/A^2}$$

且

$$\delta \approx \left(\frac{2}{\omega\mu\sigma}\right)^{1/2} \approx \left(\frac{2}{2\pi\nu \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^{7}}\right)^{1/2} \approx \frac{0.065}{\sqrt{\nu}}(\mathrm{m})$$

因此,当 $\nu \approx 100\mathrm{s}^{-1}$ 时,$\delta \approx 0.0065\mathrm{m} = 0.65\mathrm{cm}$;而当 $\nu \approx 10^{8}\mathrm{s}^{-1}$ 时,$\delta \approx 6.5 \times 10^{-6}\mathrm{m}$。这表明穿透深度随着频率的增加而减小。

23.8 连续性条件[①]

在本节中将推导两个媒质分界面处的电场和磁场的连续性条件。首先考虑方程

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \tag{23.105}$$

在两个媒质的分界处,考虑包围住分界面一块面积 ΔS 的柱状盒(见图23.7)。设盒子的高度为 l。

现在,如果将 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}$ 对整个柱状体积积分,根据高斯定理,可得

$$0 = \int \mathrm{div}\boldsymbol{B}\mathrm{d}V = \oint_{S_1} \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} + \oint_{S_2} \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} + \oint_{S_3} \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

式中 S_1 和 S_2 表示柱状盒的两个底面,S_3 表示柱状盒的曲状侧面。如果 $l \to 0$,第三个积分趋于零,且有

$$\oint_{S_1} \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} = -\oint_{S_2} \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

或者

$$\boldsymbol{B}_1\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_1\Delta S = -\boldsymbol{B}_2\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_2\Delta S \tag{23.106}$$

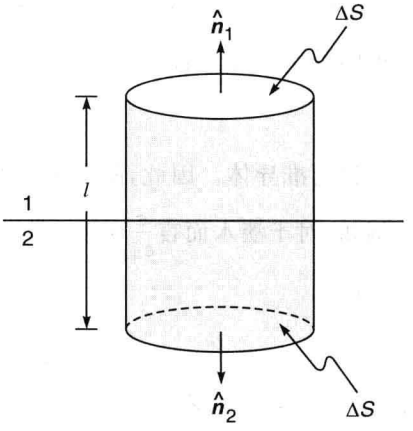


图23.7 处于两电介质分界面上的柱状盒

或者

$$B_{1n} = B_{2n} \tag{23.107}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{n}}_1$ 和 $\hat{\boldsymbol{n}}_2$ 的方向如图23.7所示。因此,$\boldsymbol{B}$ 的法线方向分量在跨越分界面时连续。

同理,在没有自由电荷的情况下,有

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = 0$$

可得[②]

$$D_{1n} = D_{2n} \tag{23.108}$$

证明 $\boldsymbol{D}$ 的法线方向分量在跨越分界面时也是连续的。

考虑方程

$$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$

---

① 此处的"连续性条件"在电磁学中一般称为"边界条件"。译者注。

② 严格地说

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma$$

式中 σ 为面电荷密度。

考虑如图 23.8 所示的一个矩形环 $ABCD$，则

$$0=\oint_S \operatorname{curl}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}+\oint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{23.109}$$

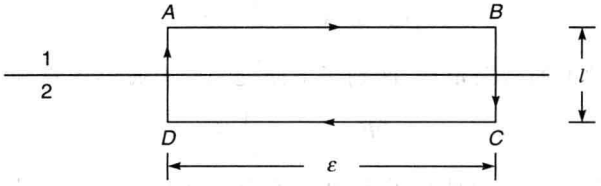


图 23.8　两电介质分解面的矩形环路径

其中的面积分是在以环 $ABCD$ 为边界的任何一个面求得。利用斯托克斯定理，可得

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{23.110}$$

或者

$$\left(\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD}+\int_{DA}\right)\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

如果令 $l\to 0$，则沿着 BC 和 DA 的积分趋于 0。又由环的面积也趋于 0，则等式右边的积分也为 0。可得

$$\int_{AB}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{CD}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$

或者

$$(\boldsymbol{E}_1\cdot \hat{\boldsymbol{t}})\varepsilon+[\boldsymbol{E}_2\cdot(-\hat{\boldsymbol{t}})]\varepsilon=0$$

或者

$$E_{1t}=E_{2t}$$

式中 E_{1t} 和 E_{2t} 表示 $\boldsymbol{E}$ 的切向分量。跨越分界面时，$\boldsymbol{E}$ 的切向分量是连续的。

同理，可以从式(23.8)得出[①]

$$H_{1t}=H_{2t}$$

总而言之，在分界面没有任何面电流和面电荷分布的情况下，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的法线方向分量以及 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的切线方向分量在跨越媒质分界面时是连续的。

23.9　麦克斯韦方程组的物理意义

首先考虑方程

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D}=\rho \tag{23.111}$$

在自由空间中，有

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E} \tag{23.112}$$

则式(23.111)变为

① 更严格地说，$H_{1t}-H_{2t}$ 等于面电流密度在以 $ABCD$ 环为边界的小面积的法向分量。然而，如果不存在面电流(大多数情况下都是如此)，$H_{1t}=H_{2t}$。

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{23.113}$$

如果将上面的方程对体积 V 积分,可得

$$\int \operatorname{div} \boldsymbol{E} \mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho \mathrm{d}V$$

应用散度定理(即数学上的高斯定理,区别于下面提到的电磁学中物理上的高斯定理),可得

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \boldsymbol{Q} \tag{23.114}$$

这就是高斯定理[①],即,通过闭合曲面的电通量等于曲面包围的体积内的总带电量除以 ε_0。同理,由方程

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \tag{23.115}$$

可得出

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = 0 \tag{23.116}$$

即,通过闭合曲面的磁通量总是为零,这表明磁单极子是不存在的。

下面考虑方程

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{23.117}$$

式(23.117)把与空间和时间相关的电场与变化的磁场联系起来。由斯托克斯定理可知

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{S} \operatorname{curl} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{23.118}$$

式(23.118)的左边表示在闭合路径 Γ 上的线积分,右边表示在以闭合路径 Γ 为边界的任意面上的面积分。因此,有

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{S} \operatorname{curl} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = -\int \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{23.119}$$

或者

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{S} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{23.120}$$

在最后一步推导中使用了面 S 是固定(即不随时间变化)的这一事实[②]。式(23.120)表明闭合电流回路里的感应电动势等于通过回路的磁通量变化的负值,这就是著名的法拉第

---

① 电介质中的高斯定理为

$$\oint \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{Q}$$

式中

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$$

$\boldsymbol{P}$ 为极化强度,等于单位体积内的电偶极矩矢量和。对于线性均匀媒质,有

$$\boldsymbol{P} = \chi \boldsymbol{E}$$

式中 χ 称为极化率。因此,有

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

式中

$$\varepsilon \overset{\text{def}}{=\!=} \varepsilon_0 + \chi$$

被称为媒质的介电常数。

② 式(23.120)对运动系统不成立(见参考文献[3],第526页)。

电磁感应定律。虽然这个定律是由法拉第发现的，但麦克斯韦把它写成了微分的形式（见式(23.117)）。

现在再来看麦克斯韦方程组的最后一个方程，即[①]

$$\text{crul}\ \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{23.121}$$

当安培环路定律（在麦克斯韦之前就已为人所知）被表示为微分方程时[②]，有下面的形式

$$\text{curl}\ \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{23.122}$$

这意味着磁场只能由电流产生。例如，如果有一根带有电流的长导线，它将产生磁场。由于任何矢量的旋度的散度为零，可得

$$\text{div}\ \boldsymbol{J} = 0 \tag{23.123}$$

将它与连续性方程

$$\text{div}\ \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{23.124}$$

加以比较，则，式(23.122)仅在$\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$时成立。因此，为了使安培环路定律与连续性方程一致，麦克斯韦认为在式(23.122)的右边应该有额外的一项[③]。

项$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$（被称为位移电流密度）的引入带来了物理学的大变革。物理上讲，它表明不仅仅是电流产生磁场，一个变化的电场也能产生磁场（正如在电容器充电和放电过程中发生的那样）[④]。可以说，正是由于项$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$的存在，才推导出了波动方程（见 23.3 节），也因此，才有了电磁波的预测。因此，在物理学的基础上，提出了一个变化的电场产生一个在空间和时间上变化的磁场，而这个磁场又产生了在空间和时间上变化的电场，如此继续。电场和磁场的这种相互产生的过程形成了电磁波的传播。

小　结

- 在均匀电介质中（介电常数为 ε），麦克斯韦方程组可以表示为

$$\text{div}\ \boldsymbol{E} = 0$$

$$\text{div}\ \boldsymbol{H} = 0$$

---

① $\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}$，式中 $\boldsymbol{M}$ 是磁化强度，等于单位体积内的磁矩矢量和。对于线性材料，有 $\boldsymbol{M}=\chi_m\boldsymbol{H}$，因此，$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$，其中 $\mu=\mu_0(1+\chi_m)$。

② 再次强调，正是麦克斯韦，把安培环路定律写成了微分形式。

③ 结果

$$\text{div curl}\ \boldsymbol{H} = 0 = \text{div}\ \boldsymbol{J} + \frac{\partial}{\partial t}\text{div}\ \boldsymbol{D}$$

或者

$$0 = \text{div}\boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

这正好是连续性方程（这里使用了式(23.111)）。

④ 对于静电场，有$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=0$，即回到以前的安培环路定律。

$$\text{curl}\,\boldsymbol{E}=-\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$\text{curl}\,\boldsymbol{H}=\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

其中假设了媒质是非磁性的，则 $\mu\approx\mu_0=4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{N\cdot s^2/C^2}$。第三个方程即法拉第电磁感应定律。第四个方程的右边是麦克斯韦引入的位移电流密度项。引入位移电流密度项，使得麦克斯韦能够推出波动方程

$$\nabla^2\boldsymbol{E}=\varepsilon\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

- 在自由空间中，$\varepsilon=\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/(N\cdot m^2)}$，因此，自由空间中电磁波的速度为

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\approx3\times10^8\,\mathrm{m/s}$$

（准确的值为 $2.99792458\times10^8\,\mathrm{m/s}$）。麦克斯韦发现电磁波的速度与当时测出的光速十分接近。由于他“笃信自然界的合理性”，促使他认为光是一种电磁波。

- 对于沿+z方向传播的沿x方向偏振的电磁波，可以写为

$$\boldsymbol{E}=\hat{\boldsymbol{x}}E_0\cos(kz-\omega t)$$

$$\boldsymbol{H}=\hat{\boldsymbol{y}}H_0\cos(kz-\omega t)$$

式中 $H_0=\dfrac{k}{\omega\mu_0}E_0$，$\dfrac{\omega}{k}=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_0}}=v=\dfrac{c}{n}$，且 $n=\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$ 表示电介质的折射率。与之相联系的平均能量密度为

$$\langle u\rangle=\frac{1}{2}\varepsilon E_0^2,\mathrm{J/m^3}$$

强度为

$$I=\frac{1}{2}\varepsilon vE_0^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0 cnE_0^2,\mathrm{W/m^2}$$

当 $I=10^{15}\,\mathrm{W/m^2}$ 时，$E_0\approx0.9\times10^9\,\mathrm{V/m}$，这样强的电场能够在空气产生火花。

- 与平面波相联系的动量为

$$\boldsymbol{p}=\frac{u}{c}\hat{\boldsymbol{z}}$$

习　题

23.1 在地球表面上，每平方米约接收 1.33kW 的太阳能。试计算地球表面与太阳光相联系的电场的大小。假设太阳光是 $\lambda=6000\text{Å}$ 的单色光。

[**答案**：~1000V/m]

23.2 (1) 在地球的表面，接收约 $1370\,\mathrm{W/m^2}$ 的能量。试证明：相对应的辐射压强约为 $4.6\mu\mathrm{Pa}$（$1\mathrm{Pa}\approx10^{-5}\,\mathrm{N/m^2}$）。

(2) 假设一个 100W 的钠灯（$\lambda\approx5890\text{Å}$）向各个方向均匀发光。试求离灯 10m 处一平面镜上的辐射压强为多少？

23.3　一台 1kW 的发射机向各个方向均匀发射电磁波(波长为 40m)。计算距离发射机 1km 处的电场。

23.4　假设海水为非磁性电介质，$\kappa\left(=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)=80$，$\sigma=4.3\text{S/m}$。(1)计算穿透深度为 10cm 时电磁波的频率。(2)证明频率小于 10^8s^{-1} 时，海水可以看作是一种良导体。

[**答案**：(1)$\sim 6\times 10^6\text{s}^{-1}$]

23.5　设银的 $\mu=\mu_0$，且 $\sigma\approx 3\times 10^7\text{S/m}$。试计算频率在 10^8s^{-1} 时，银的穿透深度。

[**答案**：$\approx 9\times 10^{-4}\text{cm}$]

23.6　证明当频率$\leqslant 10^8\text{s}^{-1}$ 时，一硅样品将起良导体的作用。设硅的 $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\approx 12$，且 $\sigma\approx 2\text{S/m}$。另外计算出当 $\nu=10^6\text{s}^{-1}$ 时，此样品的穿透深度。

23.7　证明：在导电介质中，$\boldsymbol{H}$ 也满足类似于式(23.94)的一个方程。

23.8　根据 23.7 节的分析，假设 $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\ll 1$(对于绝缘体成立)，证明：

$$\alpha\approx\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\left[1+\frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]=\frac{2\pi}{\lambda_0}n\left[1+\frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]$$

$$\beta\approx\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\left(\frac{1}{2}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)=\frac{2\pi}{\lambda_0}n\left(\frac{1}{2}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$$

式中 $n=\sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$。

23.9　对于通常工作在 $\lambda_0=8500\text{Å}$ 的玻璃光纤，$n=\sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}=1.46$，$\sigma\approx 3.4\times 10^{-6}\text{S/m}$。计算 $\sigma/\omega\varepsilon$ 的值，并证明上题的结论同样适用。计算 β 和以 dB/km 为单位的损耗。(**提示**：功率会随着 $\exp(-2\beta z)$ 衰减；以 dB/km 为单位的损耗在 27.8 节有定义。)

[**答案**：$\sigma/\omega\varepsilon\approx 8\times 10^{-11}$，$\beta\approx 4.3\times 10^{-4}\text{m}^{-1}$，损耗$\approx 3.7\text{dB/km}$]

参考文献和推荐读物

见第 24 章末尾。

第24章 电磁波的反射与折射

所有的电磁学规律都包含在麦克斯韦方程组中了……。无数的实验已经验证了它的正确性。如果我们抛开他用来构建这个方程组的那些内容，我们会发现，麦克斯韦的美丽大厦的基础是坚实的。

——理查德·费曼

24.1 引言

在第23章中，讨论了麦克斯韦方程组，并且证明了电磁波的存在，还证明了在一分界面上，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$ 的切向分量和 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{D}$ 的法向分量一定是连续的。在本章中将运用这些连续性条件，研究两种电介质的分界面(见24.2节)以及电介质与金属的分界面(见24.3节)上平面波的反射和折射。在24.4节中将讨论电介质膜的反射率(及透射率)。

24.2 两电介质分界面上的反射

考虑一列线偏振的电磁波入射到两媒质的分界面上，设 $x=0$ 平面表示分界面，令(ε_1，μ_1)和(ε_2，μ_2)分别表示在平面 $x=0$ 下面和上面两种媒质的介电常数和磁导率。假设两种媒质都是无损电介质，导体表面上的反射将在24.3节中讨论。令 $\boldsymbol{E}_1$，$\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{E}_3$ 分别表示与入射波、折射波和反射波相关联的电场，则对于一列入射的平面波，这些电场可以写为以下形式

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_{10}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]\\ \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}_{20}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega_2 t)]\\ \boldsymbol{E}_3 = \boldsymbol{E}_{30}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_3\cdot\boldsymbol{r}-\omega_3 t)]\end{cases} \tag{24.1}$$

式中 $\boldsymbol{E}_{10}$，$\boldsymbol{E}_{20}$ 和 $\boldsymbol{E}_{30}$ 在时间和空间上是独立变化的，一般是复数。$\boldsymbol{k}_1$，$\boldsymbol{k}_2$ 和 $\boldsymbol{k}_3$ 分别表示与入射波、折射波和反射波相关联的传播矢量。由于这些场必须满足麦克斯韦方程组，必然有(见23.2节)

$$\begin{cases}\boldsymbol{k}_1^2 = \omega^2\varepsilon_1\mu_1\\ \boldsymbol{k}_2^2 = \omega_2^2\varepsilon_2\mu_2\\ \boldsymbol{k}_3^2 = \omega_3^2\varepsilon_3\mu_3\end{cases} \tag{24.2}$$

正如23.9节中讨论的那样，在分界面上(相应于 $x=0$ 平面)，这些场必须要满足特定的边界条件(对应 $x=0$)，则在该平面上，方程(24.1)取以下形式

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_{10}\exp[\mathrm{i}(k_{1y}y + k_{1z}z - \omega t)] \\ \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}_{20}\exp[\mathrm{i}(k_{2y}y + k_{2z}z - \omega_2 t)] \\ \boldsymbol{E}_3 = \boldsymbol{E}_{30}\exp[\mathrm{i}(k_{3y}y + k_{3z}z - \omega_3 t)] \end{cases}$$

式中 k_{1x}，k_{1y} 和 k_{1z} 表示 $\boldsymbol{k}_1$ 在 x，y，z 三个方向的分量，对 $\boldsymbol{k}_2$ 和 $\boldsymbol{k}_3$，有类似地解释。例如，电场的 z 分量（切向分量）在 $x=0$ 平面处一定是连续的，对于所有 y，z 和 t 都应该成立。因此，上面的方程的指数部分中，y，z 和 t 的系数一定是相等的，即

$$\omega = \omega_2 = \omega_3 \tag{24.3}$$

这说明所有波都具有相同的频率。则式(24.2)可以简化为

$$\boldsymbol{k}_1^2 = \omega^2\varepsilon_1\mu_1 = \boldsymbol{k}_3^2 \tag{24.4}$$

$$\boldsymbol{k}_2^2 = \omega^2\varepsilon_2\mu_2 \tag{24.5}$$

此外，有

$$k_{1y} = k_{2y} = k_{3y} \tag{24.6}$$

$$k_{1z} = k_{2z} = k_{3z} \tag{24.7}$$

为不失一般性，选择 y 轴，使得

$$k_{1y} = 0$$

（即，假设 $\boldsymbol{k}_1$ 在平面 x-z 内，如图 24.1 所示）从而，有

$$k_{2y} = k_{3y} = 0 \tag{24.8}$$

式(24.8)意味着 $\boldsymbol{k}_1$，$\boldsymbol{k}_2$ 和 $\boldsymbol{k}_3$ 位于同一平面内，由式(24.7)，可得

$$k_1\sin\theta_1 = k_2\sin\theta_2 = k_3\sin\theta_3 \tag{24.9}$$

由 $k_1=k_3$（见式(24.4)），可以推得 $\theta_1=\theta_3$，即，入射角等于反射角。进而有

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \left(\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}\right)^{1/2} \tag{24.10}$$

如果 $v_1\left(=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}\right)$ 和 $v_2\left(=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}\right)$ 表示波在媒质 1 和媒质 2 中的传播速度，则[①]

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \tag{24.11}$$

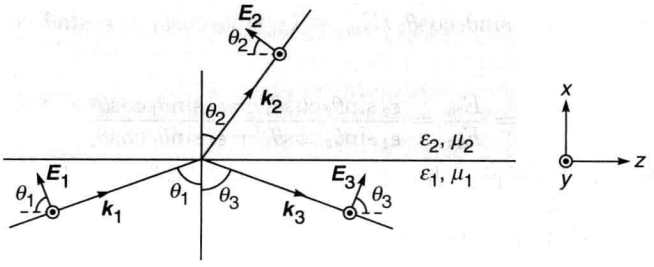


图 24.1　电矢量平行于入射面时，平面波的反射。

① 即使第二媒质是各向异性的，式(24.1)依然成立。作为一个简单的例子，如果假设第二媒质是单轴晶体，且光轴沿法线方向，则对于非常波，有

$$n_1\sin\theta = n_{we}(\theta_2)\sin\theta_2$$

式中 n_{we} 可以在式(22.98)中将 ψ 替换为 θ_2；θ_2 表示 $\boldsymbol{k}_2$ 的方向，而不是光线的方向。由上式可以确定 θ_2。（见文献[5]的第 3 章）。

式中

$$\begin{cases} n_1 \left(= \dfrac{c}{v_1} = c\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \right) \\ n_2 \left(= \dfrac{c}{v_2} = c\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \right) \end{cases} \tag{24.12}$$

分别表示媒质1和媒质2的折射率。式(24.11)即是熟知的斯涅耳定律。

下面推导当线偏振波入射到两电介质的分界面上,反射系数与透射系数的表达式。先考虑电矢量在入射面内的情况,随后再考虑电矢量垂直于入射面的情况。

1. $\boldsymbol{E}$ 平行于入射面

如图24.1所示,假设电矢量在入射面内[①],则磁矢量沿着 y 轴方向。显然,电场的 z 分量表示分界面上的切向分量,因此,一定连续。有

$$E_{1z} + E_{3z} = E_{2z}$$

或者

$$-E_1\cos\theta_1 + E_3\cos\theta_1 = -E_2\cos\theta_2 \tag{24.13}$$

$$\begin{aligned} &\left[-E_{10}\exp\{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)\} + E_{30}\exp\{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_3 \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)\}\right]_{x=0}\cos\theta_1 \\ &= \left[-E_{20}\exp\{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_2 \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)\}\right]_{x=0}\cos\theta_2 \end{aligned} \tag{24.14}$$

再次申明,既然对于 $x=0$ 平面内的所有点在任意时间都要满足这个条件,则式(24.14)的指数因子都一样,正是出于这个考虑,推导出了式(24.3)、式(24.6)、式(24.7)。因此,有

$$(E_{10} - E_{30})\cos\theta_1 = E_{20}\cos\theta_2 \tag{24.15}$$

再者,$\boldsymbol{D}$ 的法向分量也必须是连续的,并根据 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$,可得

$$\varepsilon_1 E_{1x} + \varepsilon_1 E_{3x} = \varepsilon_2 E_{2x}$$

或者

$$\varepsilon_1(E_{10} + E_{30})\sin\theta_1 = \varepsilon_2 E_{20}\sin\theta_2 \tag{24.16}$$

将式(24.15)中 E_{20} 代入,可得

$$\varepsilon_1(E_{10} + E_{30})\sin\theta_1 = \varepsilon_2\sin\theta_2 \frac{E_{10} - E_{30}}{\cos\theta_2}\cos\theta_1$$

或者

$$(\varepsilon_2\sin\theta_2\cos\theta_1 + \varepsilon_1\sin\theta_1\cos\theta_2)E_{30} = (\varepsilon_2\sin\theta_2\cos\theta_1 - \varepsilon_1\sin\theta_1\cos\theta_2)E_{10}$$

因此,有

$$r_{\parallel} = \frac{E_{30}}{E_{10}} = \frac{\varepsilon_2\sin\theta_2\cos\theta_1 - \varepsilon_1\sin\theta_1\cos\theta_2}{\varepsilon_2\sin\theta_2\cos\theta_1 + \varepsilon_1\sin\theta_1\cos\theta_2} \tag{24.17}$$

式中 $r_{\parallel}$ 表示振幅反射系数,下标 $\parallel$ 表示此式对应于平行偏振的情况。如果把式(24.15)除以 E_{10},并将式(24.17)的 $\dfrac{E_{30}}{E_{10}}$ 表达式代入,可得

$$\left(1 - \frac{\varepsilon_2\sin\theta_2\cos\theta_1 - \varepsilon_1\sin\theta_1\cos\theta_2}{\varepsilon_2\sin\theta_2\cos\theta_1 + \varepsilon_1\sin\theta_1\cos\theta_2}\right)\cos\theta_1 = \frac{E_{20}}{E_{10}}\cos\theta_2$$

或者

---

① 将在后面证明:如果与入射波相关联的电矢量在入射面内,则与反射波和透射波相关联的电矢量也将位于入射面内。同理,如果与入射波相关联的电矢量垂直于入射面,则与反射波和透射波相关联的电矢量也将垂直于入射面,见例24.5前面的讨论。

$$t_{\parallel} = \frac{E_{20}}{E_{10}} = \frac{2\varepsilon_1 \sin\theta_1 \cos\theta_1}{\varepsilon_2 \sin\theta_2 \cos\theta_1 + \varepsilon_1 \sin\theta_1 \cos\theta_2} \tag{24.18}$$

式中 $t_{\parallel}$ 表示振幅透射系数。

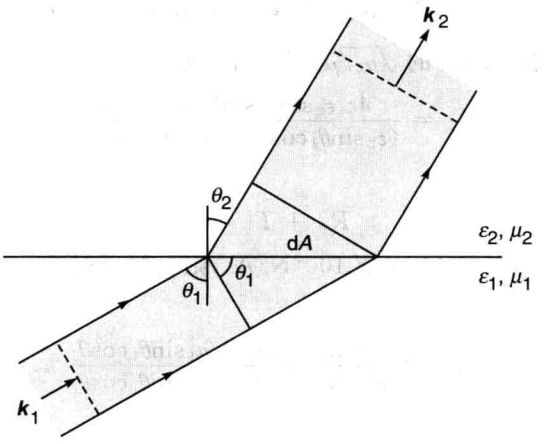


图 24.2　如果入射光束的横截面为 $dA\cos\theta_1$，则透射光束的横截面为 $dA\cos\theta_2$，式中 θ_1 和 θ_2 分别表示入射角和折射角。

为了计算反射率[①]，必须计算出与反射波和透射波相关的坡印亭矢量（见 23.4 节）的 x 分量的比率。取这个比率的 x 分量，如图 24.2 所示，S_1 表示入射波的坡印亭矢量的大小，则单位时间内入射到面元 dA（在 $x=0$ 面上）的能量是 $S_{1x}dA = S_1 dA\cos\theta_1$。同理，单位时间内透射过面元 dA 的能量为

$$S_{2x}dA = S_2\cos\theta_2 dA$$

并且单位时间内从面元 dA 反射的能量为

$$S_{3x}dA = S_3\cos\theta_1 dA$$

如果用 $R_{\parallel}$ 和 $T_{\parallel}$ 分别表示反射率和透射率，则[②]

$$\begin{aligned} R_{\parallel} &= \frac{S_{3x}}{S_{1x}} = \frac{S_3\cos\theta_1}{S_1\cos\theta_1} \\ &= \frac{\langle \boldsymbol{E}_3 \times \boldsymbol{H}_3 \rangle}{\langle \boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_1 \rangle} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\,|\,E_{30}\,|^2}{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\,|\,E_{10}\,|^2} \quad (\text{见 } 20.4 \text{ 节}) \\ &= \left|\frac{E_{30}}{E_{10}}\right|^2 \end{aligned} \tag{24.19}$$

或者

$$R_{\parallel} = \left(\frac{\varepsilon_2 \sin\theta_2 \cos\theta_1 - \varepsilon_1 \sin\theta_1 \cos\theta_2}{\varepsilon_2 \sin\theta_2 \cos\theta_1 + \varepsilon_1 \sin\theta_1 \cos\theta_2}\right)^2 \tag{24.20}$$

① 本书将 r 和 t 称为振幅反射系数（amplitude reflection coefficient）和振幅透射系数（amplitude transmission coefficient），反映的是反射和透射后复振幅的变化；而将 R 与 T 称为反射系数（reflection coefficient）与透射系数（transmission coefficient），反映的是反射与透射后光强的变化。根据中文教科书的习惯，将后两个量翻译成反射率与透射率。译者注。

② 为了计算坡印亭矢量，必须取 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的实部，见 20.4 节。

$$T_{\parallel}=\frac{S_{2x}}{S_{1x}}=\frac{S_2\cos\theta_2}{S_1\cos\theta_1}=\frac{\langle \boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{H}_2\rangle\cos\theta_2}{\langle \boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_1\rangle\cos\theta_1}=\frac{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}\mid E_{20}\mid^2\cos\theta_2}{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\mid E_{10}\mid^2\cos\theta_1}$$

$$=\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\times\left(\frac{2\varepsilon_1\sin\theta_1\cos\theta_1}{\varepsilon_2\sin\theta_2\cos\theta_1+\varepsilon_1\sin\theta_1\cos\theta_2}\right)^2\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$$

其中,将式(24.11)和式(24.12)的$\sqrt{\mu_1/\mu_2}$代入了,则

$$T_{\parallel}=\frac{4\varepsilon_1\varepsilon_2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_1\cos\theta_2}{(\varepsilon_2\sin\theta_2\cos\theta_1+\varepsilon_1\sin\theta_1\cos\theta_2)^2} \tag{24.21}$$

很容易看出

$$R_{\parallel}+T_{\parallel}=1 \tag{24.22}$$

对于非磁性媒质,有$\mu_1\approx\mu_2\approx\mu_0=4\pi\times10^{-7}\mathrm{N/A^2}$,则振幅反射系数(式(24.17))的表达式可简化为[①]

$$r_{\parallel}=\frac{n_2^2\sin\theta_2\cos\theta_1-n_1^2\sin\theta_1\cos\theta_2}{n_2^2\sin\theta_2\cos\theta_1+n_1^2\sin\theta_1\cos\theta_2}$$

又由

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2 \tag{24.23}$$

可得

$$r_{\parallel}=\frac{n_2\cos\theta_1-n_1\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_1+n_1\cos\theta_2} \tag{24.24a}$$

$$=\frac{\sin\theta_1\cos\theta_1-\sin\theta_2\cos\theta_2}{\sin\theta_1\cos\theta_1+\sin\theta_2\cos\theta_2} \tag{24.24b}$$

或者

$$r_{\parallel}=\frac{\sin2\theta_1-\sin2\theta_2}{\sin2\theta_1+\sin2\theta_2}$$

$$=\frac{2\cos(\theta_1+\theta_2)\sin(\theta_1-\theta_2)}{2\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)}$$

$$=\frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)} \tag{24.24c}$$

同理,由式(24.18)出发,容易得到

$$t_{\parallel}=\frac{2\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)} \tag{24.25}$$

由式(24.24)和式(24.25)可以得到以下推论。

(1) 当$n_1=n_2$时,不发生反射

当$n_2=n_1$,$\theta_2=\theta_1$时,有

$$r_{\parallel}=0,\quad t_{\parallel}=1$$

即,当第2媒质与第1媒质的折射率相同时,不发生反射(这是显然的!)。因此,如果将一个

① 在此,用到了对于非磁性媒质,有

$$n=\frac{c}{v}=\sqrt{\varepsilon\mu/\varepsilon_0\mu_0}\approx\sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$$

则

$$n^2=\varepsilon/\varepsilon_0$$

透明的固体浸没在与它具有相同折射率的液体中时，将会看不见这个固体。

(2) 反射引起的偏振，布儒斯特定律

如果入射角满足

$$\theta_2+\theta_1=\frac{\pi}{2},\quad \text{则 } r_{\parallel}=0$$

即，此时不存在反射光[①]。因此，如果一束非偏振光(自然光)入射，且入射角满足 $\theta_2+\theta_1=\frac{\pi}{2}$，则 $\boldsymbol{E}$ 的平行于入射面的分量不会被反射，这样反射光将变为线偏振光，$\boldsymbol{E}$ 垂直于入射面(见图 24.3)。这就是著名的布儒斯特定律，相应的入射角称为布儒斯特角(或起偏角)，常用 θ_p 表示。

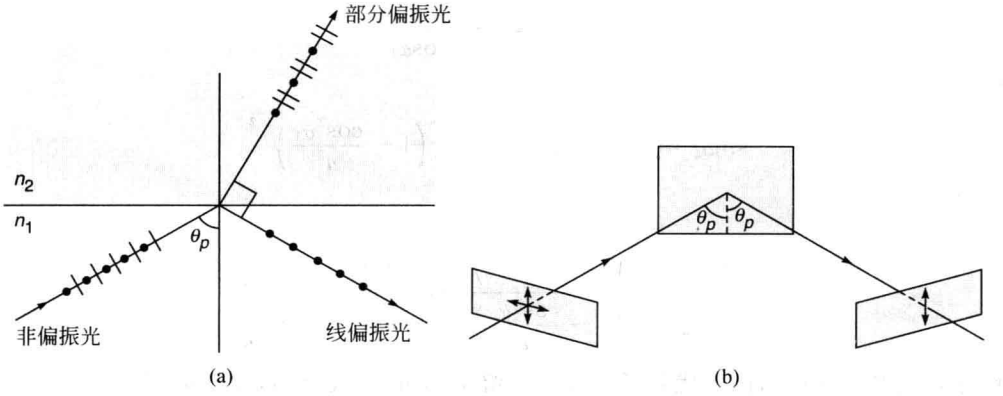


图　24.3

(a) 当一个自然光以起偏角入射于媒质表面时(即，入射角等于 $\arctan(n_2/n_1)$)，则反射光是线(平面)偏振的，且 $\boldsymbol{E}$ 垂直于入射面，透射光则是部分偏振的；(b) 中的虚线是反射面的法线。

值得注意的是，折射角是 $\frac{\pi}{2}-\theta_p$，因此，斯涅耳定律可以写为以下形式

$$\frac{n_2}{n_1}=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{\sin\theta_p}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_p\right)}=\tan\theta_p \tag{24.26}$$

或者

$$\theta_p=\arctan\frac{n_2}{n_1} \tag{24.27}$$

因此，当入射角等于 $\arctan\frac{n_2}{n_1}$ 时，反射光束是线偏振的，且此时的透射光束是部分偏振的。容易看出，在起偏角下，反射光线与折射光线成直角关系[②]。

(3) 反射时的相位变化和斯托克斯关系

当入射光从光疏媒质进入光密媒质时，$\theta_2<\theta_1$，且当 $\theta+\theta_2>\frac{\pi}{2}$(即 $\theta_1>\theta_p$)时，$r_{\parallel}$ 是负的，这说明反射光的相位有 π 的改变。然而，对于 $\theta_1<\theta_p$ 的情况，反射光没有相位改变。稍后

① 所有的入射光能量都将出现在透射光中，但是 $t_{\parallel}=2\cos^2\theta_1$，为什么如此(见图 24.2)？

② 在文献[4]中，给出了一个为什么当入射角为布儒斯特角时，反射光束应该是线偏振的精彩的论据。

会对此进行详细讨论。

振幅反射系数和振幅透射系数满足斯托克斯关系(见例24.1)。

(4) 掠入射情况下的反射光

对于掠入射$\left(\theta_1 \approx \frac{\pi}{2}\right)$的情况,式(24.23)可以改写为[①]

$$r_{\parallel} = \frac{\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2}{\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2} = \frac{n\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2}{n\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2} \tag{24.28}$$

式中$n=\frac{n_2}{n_1}$,$\alpha_1=\frac{\pi}{2}-\theta_1$,$\alpha_2=\frac{\pi}{2}-\theta_2$,在掠入射的情况下,这些角度将变得很小。又由

$$n = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}$$

或者

$$\sin\alpha_2 = (1-\cos^2\alpha_2)^{1/2} = \left(1-\frac{\cos^2\alpha_1}{n^2}\right)^{1/2}$$

因此,有

$$r_{\parallel} = \frac{n\sin\alpha_1 - \left(1-\frac{\cos^2\alpha_1}{n^2}\right)^{1/2}}{n\sin\alpha_1 + \left(1-\frac{\cos^2\alpha_1}{n^2}\right)^{1/2}} \approx \frac{n\alpha_1 - \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}}{n\alpha_1 + \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}} \tag{24.29}$$

这里用α_1代替了$\sin\alpha_1$,用1代替了$\cos\alpha_1$(保留了α_1的一次方项,而忽略了高阶项,这在α_1很小时是成立的)。因此,有

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &\approx -\left[1-\frac{n\alpha_1}{\sqrt{(n^2-1)/n^2}}\right]\left[1+\frac{n\alpha_1}{\sqrt{(n^2-1)/n^2}}\right]^{-1} \\ &\approx -\left(1-\frac{2n^2\alpha_1}{\sqrt{n^2-1}}\right) \xrightarrow{\text{当}\ \alpha_1 \to 0} -1 \end{aligned} \tag{24.30}$$

这说明在掠入射的情况下,光束几乎完全被反射。此时振幅透射系数趋近于零,这是式(24.25)的一个显然结果。因此,如果把一块玻璃片水平地举到眼睛的高度(见图24.4),入射角将接近$\pi/2$,此时玻璃片的作用就相当于镜子。

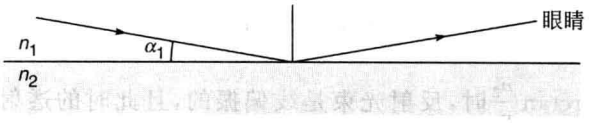


图24.4 当光以掠射角(即$\alpha_1 \approx 0$)入射时,反射几乎是全部的。

(5) 全内反射

当电磁波从光密媒质入射进光疏媒质($n_2 < n_1$)时,则$\theta_2 > \theta_1$,斯涅耳定律(式(24.12))可以改写为

① 第2媒质必须是光密媒质(即$n_2 > n_1$),否则将经历全反射(见(5)部分)。

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 = \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}\sin\theta_1 \tag{24.31}$$

其中已经假设是非磁性媒质，即，已经假设

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_0}\ , \quad n_2 = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_0} \tag{24.32}$$

很显然，当

$$\theta_1 > \theta_c , \quad \sin\theta_2 > 1$$

式中

$$\theta_c = \arcsin(n_2/n_1) = \arcsin\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1} \tag{24.33}$$

θ_c 称为临界角。对于非磁性媒质，振幅反射系数将为(见式(24.17))

$$r_{\parallel} = \frac{\varepsilon_2\cos\theta_1\sin\theta_2 - \varepsilon_1\sin\theta_1\cos\theta_2}{\varepsilon_2\cos\theta_1\sin\theta_2 + \varepsilon_1\sin\theta_1\cos\theta_2} = \frac{\cos\theta_1 - \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}\ \sqrt{1-\sin^2\theta_2}}{\cos\theta_1 + \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}\ \sqrt{1-\sin^2\theta_2}}$$

$$= \frac{\cos\theta_1 - (\varepsilon_1/\varepsilon_2)\ \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1 - \sin^2\theta_1}}{\cos\theta_1 + (\varepsilon_1/\varepsilon_2)\ \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1 - \sin^2\theta_1}} \tag{24.34}$$

或者

$$r_{\parallel} = \frac{\cos\theta_1 - (\varepsilon_1/\varepsilon_2)\ \sqrt{\sin^2\theta_c - \sin^2\theta_1}}{\cos\theta_1 + (\varepsilon_1/\varepsilon_2)\ \sqrt{\sin^2\theta_c - \sin^2\theta_1}} \tag{24.35}$$

其中的推导用到了式(24.31)和式(24.33)。很显然，当 $\theta_1 > \theta_c$ 时，平方根里面的量是负的，可以写为

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sqrt{\sin^2\theta_c - \sin^2\theta_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sqrt{(\varepsilon_2/\varepsilon_1) - \sin^2\theta_1} = \mathrm{i}\gamma \tag{24.36}$$

式中 γ 是实数，代入式(24.35)，可得

$$r_{\parallel} = \frac{\cos\theta_1 - \mathrm{i}\gamma}{\cos\theta_1 + \mathrm{i}\gamma} \tag{24.37}$$

此时，反射率为

$$R = |\ r_{\parallel}\ |^2 = 1 \tag{24.38}$$

这证明了全部能量被反射回第一个媒质。这就是熟知的“全内反射”现象。但是要注意以下两点：

① 既然 $r_{\parallel}$ 是个复数，反射时会有相位变化(见例 24.3 和例 24.6)。

② 振幅透射系数：

$$t_{\parallel} = \frac{2\varepsilon_1\sin\theta_1\cos\theta_1}{\varepsilon_1\sin\theta_1\cos\theta_2 + \varepsilon_2\cos\theta_1\sin\theta_2}$$

此时不为零，说明在光疏媒质中，光场不为零(见例 24.4)。

例 24.1　如图 24.5 所示，如果两种媒质互换位置，则入射角和折射角将反过来。如果用 $r'_{\parallel}$ 与 $t'_{\parallel}$ 分别表示如图 24.5(b)所示的振幅反射系数和振幅透射系数，则

$$1 + r_{\parallel}r'_{\parallel} = t_{\parallel}t'_{\parallel} \tag{24.39}$$

(这是斯托克斯关系之一，见 14.12 节)。

解　$r_{\parallel}$ 可以由式(24.17)给出。为了计算 $r'_{\parallel}$，式(24.17)中用 ε_2 代替 ε_1，θ_2 代替 θ_1 以及 θ_1 代替 θ_2(见图 24.5)，可得

$$r'_{\parallel} = -r_{\parallel} \tag{24.40}$$

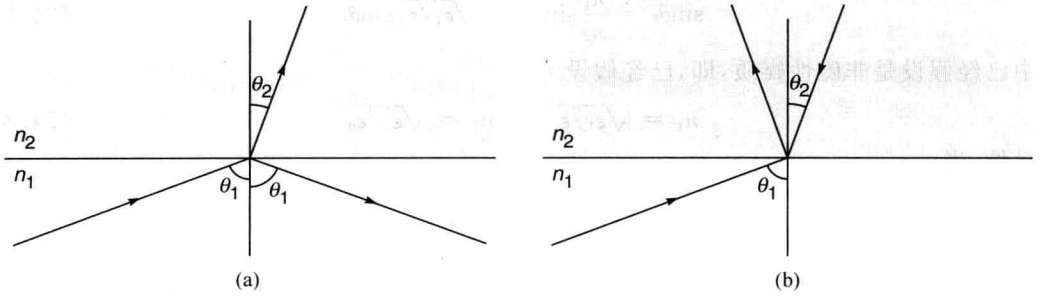


图 24.5　如果媒质互换，则入射角和折射角互换。

因此，有

$$1+r_{\parallel}r'_{\parallel}=1-r_{\parallel}^2=1-\frac{(\varepsilon_2\cos\theta_1\sin\theta_2-\varepsilon_1\sin\theta_1\cos\theta_2)^2}{(\varepsilon_2\cos\theta_1\sin\theta_2+\varepsilon_1\sin\theta_1\cos\theta_2)^2}$$

$$=\frac{4\varepsilon_1\varepsilon_2\sin\theta_1\cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_2}{(\varepsilon_2\sin\theta_2\cos\theta_1+\varepsilon_1\cos\theta_2\sin\theta_1)^2}$$

$t_{\parallel}$ 由式(24.18)给出，再运用上面提到的所有替代关系，则

$$t'_{\parallel}=\frac{2\varepsilon_2\sin\theta_2\cos\theta_2}{\varepsilon_1\sin\theta_1\cos\theta_2+\varepsilon_2\cos\theta_1\sin\theta_2} \tag{24.41}$$

把 $t'_{\parallel}$ 的表达式乘以式(24.18)，可得式(24.39)。

例 24.2　在推导反射率和透射率时，如果不用 $\boldsymbol{D}$ 的法向分量连续性的假设，而利用 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量连续性的假设，试证明所得到的反射率和透射率的结果是相同的。

解　如图 24.1 所示，磁场的方向是沿着 y 方向的[①]，显然，也是其切向分量。因此，如果 $\boldsymbol{H}_1$，$\boldsymbol{H}_2$ 和 $\boldsymbol{H}_3$ 分别表示入射波、透射波和反射波的磁场，则可以写出

$$\begin{cases}\boldsymbol{H}_1=\hat{\boldsymbol{y}}H_{10}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]\\ \boldsymbol{H}_2=\hat{\boldsymbol{y}}H_{20}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]\\ \boldsymbol{H}_3=\hat{\boldsymbol{y}}H_{30}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_3\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]\end{cases} \tag{24.42}$$

根据磁场的 y 分量的连续性，可得

$$H_{10}+H_{30}=H_{20} \tag{24.43}$$

又有

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}}{\omega\mu} \tag{24.44}$$

则

$$\frac{k_1}{\omega\mu_1}(E_{10}+E_{30})=\frac{k_2}{\omega\mu_2}E_{20} \tag{24.45}$$

$\boldsymbol{E}$ 的切向分量的连续性给出(见式(24.15))

$$(E_{10}-E_{30})\cos\theta_1=E_{20}\cos\theta_2=\frac{k_1}{k_2}\frac{\mu_2}{\mu_1}(E_{10}+E_{30})\cos\theta_2$$

① $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 沿着传播方向。

则

$$r_{\parallel}=\frac{E_{30}}{E_{10}}=\frac{\dfrac{k_2}{\mu_2}\cos\theta_1-\dfrac{k_1}{\mu_1}\cos\theta_2}{\dfrac{k_2}{\mu_2}\cos\theta_1+\dfrac{k_1}{\mu_1}\cos\theta_2} \tag{24.46}$$

$$=\frac{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}\cos\theta_1-\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\theta_2}{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}\cos\theta_1+\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\theta_2} \tag{24.47}$$

根据斯涅耳定律，即

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\left(\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}\right)^{1/2}$$

可得式(24.17)。然而，由式(24.47)，可以得到正入射时的振幅反射系数为

$$r_{\parallel}=\frac{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}-\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}+\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}}\approx\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1} \tag{24.48}$$

最后一个关系式只是在非磁性媒介的情况下($\mu_2\approx\mu_1\approx\mu_0$)成立。有

$$R=\left|\frac{E_{30}}{E_{10}}\right|^2=\left(\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1}\right)^2 \tag{24.49}$$

对于光束从空气入射到玻璃界面，有 $n_1=1.0$，$n_2=1.5$，因此，有

$$R=0.04 \tag{24.50}$$

即约有 4%的光被反射，而 96%的光透射入玻璃。

例 24.3　计算光束经历全内反射时发生的相变。

解

$$r_{\parallel}=\frac{\cos\theta_1-\mathrm{i}\gamma}{\cos\theta_1+\mathrm{i}\gamma}=\frac{A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}}{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}=\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\phi} \tag{24.51}$$

式中

$$A=(\cos^2\theta_1+\gamma^2)^{1/2}$$

$$\cos\phi=\frac{\cos\theta_1}{(\cos^2\theta_1+\gamma^2)^{1/2}},\quad \sin\phi=\frac{\gamma}{(\cos^2\theta_1+\gamma^2)^{1/2}}$$

因此

$$E_{30}=E_{10}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\phi} \tag{24.52}$$

相变(Δ)由下式给出

$$\Delta=2\phi=2\arctan\frac{\gamma}{\cos\theta_1}=2\arctan\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{\sqrt{\sin^2\theta_1-\sin^2\theta_c}}{\cos\theta_1}\right) \tag{24.53}$$

例 24.4　试分析光束经历全内反射后，透射波的性质。

解　与透射波相关的电场由下式给出(见式(24.1))

$$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_{20}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]=\boldsymbol{E}_{20}\exp[\mathrm{i}(k_{2x}x+k_{2z}\cdot z-\omega t)]$$

$$=\boldsymbol{E}_{20}\exp[\mathrm{i}(k_2x\cdot\cos\theta_2+k_2z\sin\theta_2-\omega t)] \tag{24.54}$$

(见图 24.1)又有

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

$$\sin\theta_2=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\theta_1$$

而

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\mathrm{i}\gamma$$

因此,有

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}_{20}\mathrm{e}^{-\beta x}\exp\left\{\mathrm{i}\left[\left(k_2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\theta_1\right)z-\omega t\right]\right\} \tag{24.55}$$

式中

$$\beta = k_2\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\gamma = \frac{\omega}{c}\sqrt{n_1^2\sin^2\theta_1 - n_2^2} \tag{24.56}$$

式(24.55)给出的场表示一个沿$+z$方向传播,但振幅在x方向按照指数规律衰减的波。这种波称为"表面波"或"隐失波"(见图24.6),有许多有趣的应用[①]。

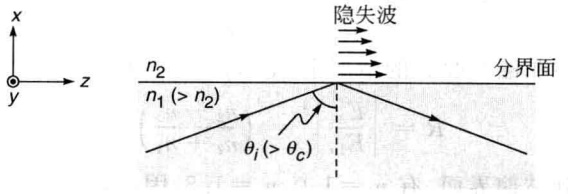


图24.6 光束经历全内反射,在光疏媒质中会产生一个隐失波。
隐失波沿z轴传播,但振幅沿x轴衰减。

2. E垂直于入射面

接下来考察电矢量垂直入射面的线偏振平面波的反射和折射,假设是在两种电介质的分界面上发生的反射。这样,电矢量将沿着y轴(见图24.7),并且可以写出

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_1 = \hat{\boldsymbol{y}}E_{10}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]\\ \boldsymbol{E}_2 = \hat{\boldsymbol{y}}E_{20}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]\\ \boldsymbol{E}_3 = \hat{\boldsymbol{y}}E_{30}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_3\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]\end{cases} \tag{24.57}$$

式中$\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{E}_2$和$\boldsymbol{E}_3$分别表示入射波、透射波和反射波的电矢量。因为y轴与分界面相切,所以,$\boldsymbol{E}$的y分量在分界面两侧必须连续,有

$$E_{10} + E_{30} = E_{20} \tag{24.58}$$

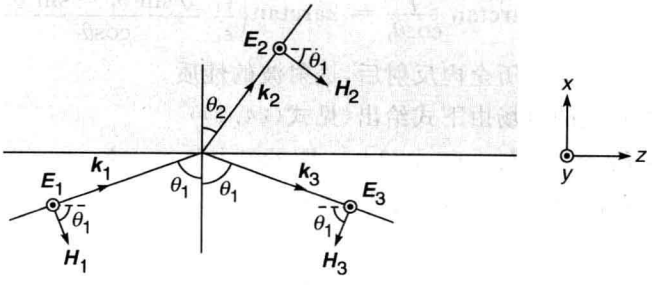


图24.7 电矢量垂直于入射面的平面波在界面的反射和折射。

① 比如,见文献[2]。

如图 24.7 所示为磁场的方向[①]。磁场处在入射面内，且由下式给出

$$\begin{cases} \boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}_{10}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)] = \dfrac{\boldsymbol{k}_1\times\boldsymbol{E}_{10}}{\omega\mu_1}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)] \\ \boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{H}_{20}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)] = \dfrac{\boldsymbol{k}_2\times\boldsymbol{E}_{20}}{\omega\mu_2}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)] \\ \boldsymbol{H}_3 = \boldsymbol{H}_{30}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_3\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)] = \dfrac{\boldsymbol{k}_3\times\boldsymbol{E}_{30}}{\omega\mu_1}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_3\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)] \end{cases} \tag{24.59}$$

（请注意，$\boldsymbol{H}$ 在入射面内）因为 $\boldsymbol{k}_1$ 垂直于 $\boldsymbol{E}_{10}$，所以，$\boldsymbol{H}_{10}$ 的大小简单的就等于 $\dfrac{k_1E_{10}}{\omega\mu_1}$，$\boldsymbol{H}_{20}$ 和 $\boldsymbol{H}_{30}$ 也可以如此类推。如图 24.7 所示，很显然，磁场的 z 分量是连续的，因此，必须有

$$H_{10}\cos\theta_1 - H_{30}\cos\theta_1 = H_{20}\cos\theta_2 \tag{24.60}$$

或者

$$\frac{k_1}{\omega\mu_1}(E_{10}-E_{30})\cos\theta_1 = \frac{k_2}{\omega\mu_2}E_{20}\cos\theta_2 \tag{24.61}$$

将式(24.58)中的 E_{20} 表示式代入式(24.61)，可得

$$\frac{k_1}{\omega\mu_1}(E_{10}-E_{30})\cos\theta_1 = \frac{k_2}{\omega\mu_2}(E_{10}+E_{30})\cos\theta_2$$

移项后，可得

$$r_\perp = \frac{E_{30}}{E_{10}} = \frac{\dfrac{k_1}{\omega\mu_1}\cos\theta_1 - \dfrac{k_2}{\omega\mu_2}\cos\theta_2}{\dfrac{k_1}{\omega\mu_1}\cos\theta_1 + \dfrac{k_2}{\omega\mu_2}\cos\theta_2} \tag{24.62}$$

$$= \frac{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\theta_1 - \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}\cos\theta_2}{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\theta_1 + \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}\cos\theta_2} \tag{24.63}$$

$$\approx \frac{\sin\theta_2\cos\theta_1 - \sin\theta_1\cos\theta_2}{\sin\theta_2\cos\theta_1 + \sin\theta_1\cos\theta_2}$$

$$= -\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \tag{24.64}$$

此外，有

$$t_\perp = \frac{E_{20}}{E_{10}} = 1+\frac{E_{30}}{E_{10}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\theta_1}{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}\cos\theta_1 + \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}\cos\theta_2} \tag{24.65}$$

$$\approx \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \tag{24.66}$$

式中 r 和 t 的下面的下标 $\perp$ 表示讨论的是 $\boldsymbol{E}$ 垂直于入射面的偏振状态。需要指出的是，式(24.62)、式(24.63)和式(24.65)是精确的，而式(24.64)和式(24.66)只对于非磁性媒质才成立。同样，可以再次证明，当 $\theta_1>\theta_c$ 时，将发生内全反射，并且在掠入射时，反射是全部的。

正如早先提到的，r 和 t 的下标 $\parallel$ 意味着对应于平行于入射面的偏振状态。通常用 p 来表示，其中 p 是德文 parallel 的首字母。类似地，r 和 t 的下标 $\perp$ 意味对应于垂直偏振态，常

① 需要注意的是，此时电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 在分界面的法向没有分量，因此，$\boldsymbol{D}$ 的法向连续给不出任何公式。

用s来表明,其中s是德文senkrecht的首字母,意思是垂直[①]。

现在,可以把上述两种情况下振幅反射系数和振幅透射系数做一个总结。注意,所得结论只对于非磁性媒质适用

$$r_p = r_{\parallel} = \frac{n_2\cos\theta_1 - n_1\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2}$$

$$= \frac{(n_2/n_1)^2\cos\theta_1 - \sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2\theta_1}}{(n_2/n_1)^2\cos\theta_1 + \sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2\theta_1}} \tag{24.67}$$

$$= \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \tag{24.68}$$

$$r_s = t_{\perp} = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2}$$

$$= \frac{\cos\theta_1 - \sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2\theta_1}}{\cos\theta_1 + \sqrt{(n_2/n_1)^2 - \sin^2\theta_1}} \tag{24.69}$$

$$= -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \tag{24.70}$$

$$t_p = t_{\parallel} = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2}$$

$$= \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin\theta_1\cos\theta_1 + \sin\theta_2\cos\theta_2} \tag{24.71}$$

$$t_s = t_{\perp} = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2} = \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \tag{24.72}$$

式(24.67)～式(24.72)称为菲涅耳公式[②]。将振幅反射系数写成模与相位变化分开的形式为

$$r = |r| e^{i\phi} \tag{24.73}$$

如图24.8和图24.9所示为在$n_2/n_1 = 1.5$的情况下,$|r_{\parallel}|$,$|r_{\perp}|$,$\phi_{\parallel}$和$\phi_{\perp}$的变化图,而反射波中$\boldsymbol{E}$的两个分量的方向,如图24.10所示。

如图24.8所示,当

$$\theta_1 = \theta_p = \arctan\frac{n_2}{n_1} \approx 56^\circ, \quad |r_{\parallel}| = 0$$

时,这就是布儒斯特角。在掠入射时(即当$\theta_1 \to 90^\circ$),$|r_{\perp}|$和$|r_{\parallel}|$都趋向于1,这意味着此时接近全反射。在正入射下(即$\theta_1 = 0$),任何偏振态都可以认为是平行偏振的或垂直偏振的[③],因此,可以预料到$r_{\perp}$和$r_{\parallel}$会给出同样的结果。如图24.8所示,$|r_{\perp}|$和$|r_{\parallel}|$在正入射时有相等的值;而如

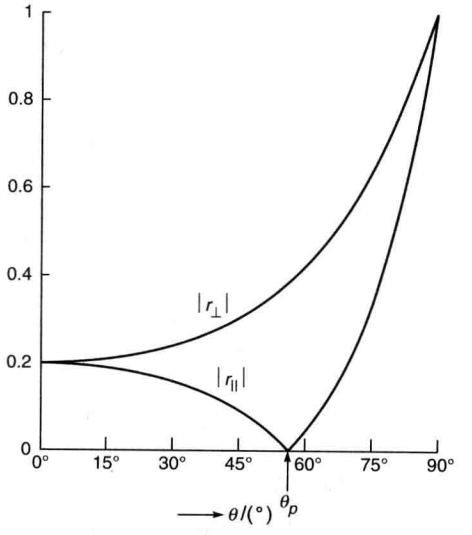


图24.8 当$n_1 = 1.0$,$n_2 = 1.5$时,$|r_{\parallel}|$和$|r_{\perp}|$随入射角的变化。

① 平行偏振波(或者叫p偏振波)也叫做横磁波(或者叫TM波),因为其磁场垂直于入射平面;另一方面,垂直偏振波(或者叫s偏振波)也叫做横电波(或者叫TE波),因为其电场垂直于入射面。

② 关于菲涅耳公式的另一种推导方法可以参见文献[4]。

③ 这是因为波传播的正入射方向与反射界面法向是一致的,任意包含法线的平面都可以认为是入射面。

图 24.9 所示，垂直分量有 π 的相位变化，平行分量没有相位变化。如果研究正入射时反射光的电矢量方向(见图 24.10(b)和(d))，就会明白这是没有矛盾的。

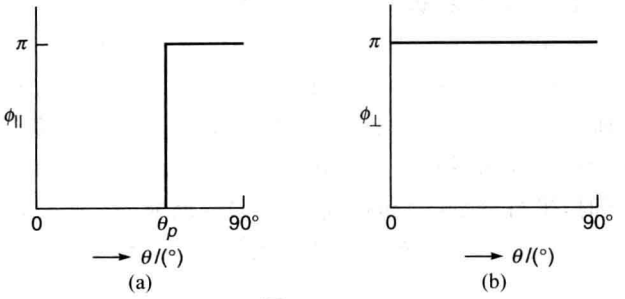


图　24.9

当 $n_1=1.0$，$n_2=1.5$ 时，(a) 平行分量反射时的相变；(b) 垂直分量反射时的相变；不论 θ 为何值，都有 $\phi_{\perp}=\pi$。

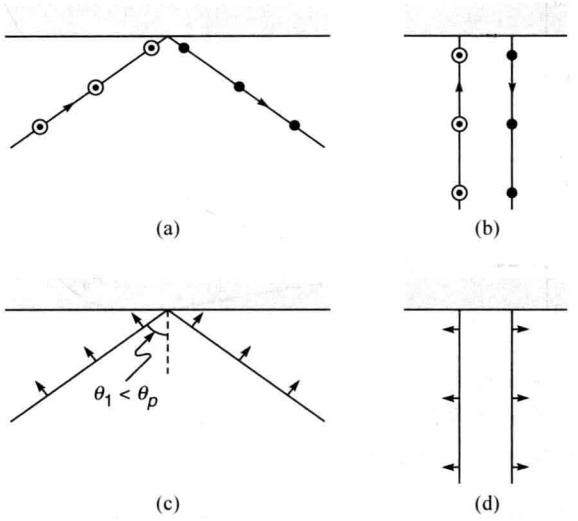


图 24.10　垂直分量不论在什么角度下都有 π 的相变((a)和(b))。平行分量当 $\theta_1<\theta_p$ 时，没有相变((c)和(d))。注意正入射时，电矢量在两种情况下都改变了方向。

现在必须进行一个概述。首先考虑当入射波的电场在入射面内时，则反射波和透射波的电场也在这个平面内，因此，如果假设电磁场在界面的反射所产生的透射波和反射波的电场，其方向沿 y 轴方向(E_{2y} 和 E_{3y})，则 E_y 和 H_z 在 $x=0$ 处将存在关系(由于连续性)

$$E_{3y} = E_{2y}$$

$$\frac{k_{3x}E_{3y}}{\omega\mu_0} = \frac{k_{2x}E_{2y}}{\omega\mu_0}$$

可得

$$-n_1\cos\theta_1 E_{3y} = n_2\cos\theta_2 E_{2y}$$

根据以上两个等式，立刻得出 $E_{3y}=E_{2y}=0$。可以得出结论：如果入射波的电场在入射面内，则反射波和透射波的电场一定也在入射面内。同理，如果入射波的电场垂直于入射面，则反射波和透射波的电场也将垂直于入射面。一般而言，对于任意偏振态下的入射波，

必须将入射波电场分解为平行和垂直于入射面的分量,且分别考察每个分量的反射(和透射)的偏振变化,并通过叠加,得到最终的偏振态(见例24.9)。实际上,通过研究反射波的偏振特性,可以确定所研究材料的(复)折射率,这就是所谓的"椭(圆)偏(振)测量术"——一门具有深远意义的学科(见参考文献[1])。将在24.3节中讨论一个具有复折射率材料的反射。

如图24.11所示为光从空气入射到一个折射率为2.0的光密媒质时,平行分量(p)和垂直分量(s)的反射率曲线。需要注意的是,当以布儒斯特角(或起偏角)入射时,$R_p=0$,说明在此入射角下,反射光总是s偏振的。另一方面,如图24.12所示,为光从折射率为2.0的光密媒质入射到空气时,平行分量(p)和垂直分量(s)的反射率。需要注意的是,当入射角大于临界角时,$R_s=R_p=1$。进而,当以布儒斯特角入射时,$R_p=0$,说明在此入射角下,反射光也是s偏振的。

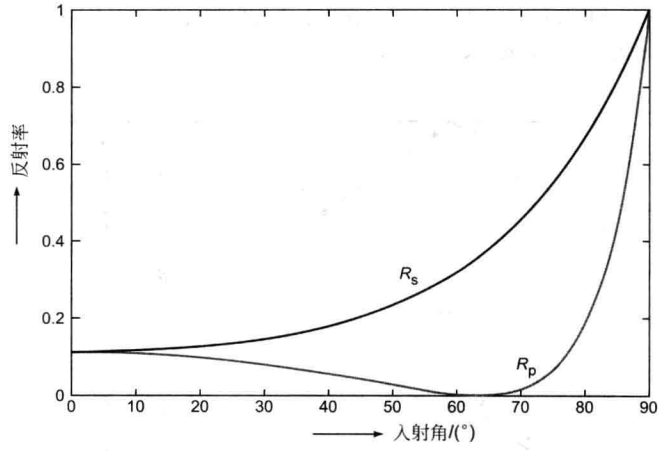


图24.11 一束光从光疏媒质(折射率为1.0)入射到到折射率为2.0的光密媒质上,电场的平行分量(p)和垂直分量(s)的反射率曲线。布儒斯特角是63.43°,在该入射角下,$R_p=0$,此时反射波是s偏振的。

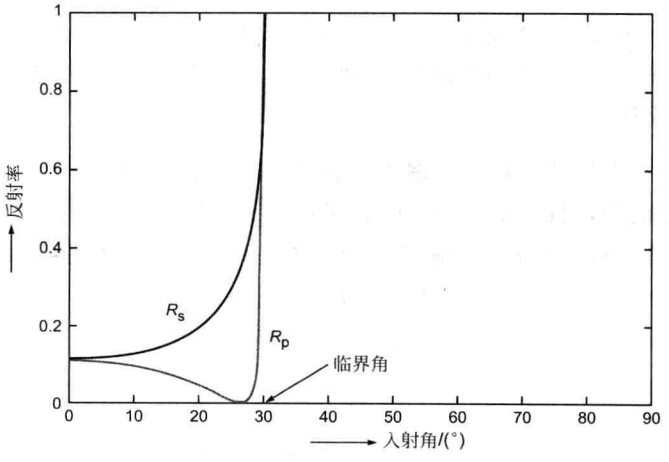


图24.12 一束光从光密媒质(折射率为2.0)入射到折射率为1.0的光疏媒质上,电场的平行分量(p)和垂直分量(s)的反射率曲线。布儒斯特角是26.56°,在此角度下,$R_p=0$,此时反射波是s偏振的。临界角是30°,当入射角超过临界角时,反射比为1。

例 24.5　考虑一列平面电磁波入射到空气-玻璃界面上的情况(见图 24.1)。此时，$n_1=1.0, n_2=1.5$，给出

$$\theta_p = \arctan(1.5) \approx 56.31^\circ$$

当 $\theta_1=30^\circ$时，$\theta_2\approx 19.47^\circ$，可得

$$r_\parallel \approx 0.1589, \quad t_\parallel \approx 0.7725$$

$$r_\perp \approx -0.2404, \quad t_\perp \approx 0.7596$$

此外，当 $\theta_1=89^\circ$(掠入射)时，$\theta_2=41.80^\circ$，且

$$r_\parallel \approx -0.9321 \quad (\sim 87\% \text{ 的能量反射}), \quad t_\parallel \approx 0.0452$$

$$r_\perp \approx -0.9693, \quad t_\perp \approx 0.0307$$

例 24.6　考虑一列平面电磁波入射到玻璃-空气界面时的情况(见图 24.1)。此时 $n_1=1.5, n_2=1.0$，给出

$$\theta_p = \arctan\left(\frac{1}{1.5}\right) \approx 33.69^\circ, \quad \theta_c = \arcsin\left(\frac{1}{1.5}\right) \approx 41.81^\circ$$

(1) 当 $\theta_1=30^\circ, \theta_2=48.59^\circ$，以及

$$r_\parallel \approx -0.06788, \quad t_\parallel \approx +1.3982$$

$$r_\perp \approx +0.3252, \quad t_\perp \approx +1.3252$$

(2) 当 $\theta_1=60^\circ, \cos\theta_2=\mathrm{i}\alpha, \alpha\approx 0.82916$，因此，有

$$r_\parallel = \frac{n_2\cos\theta_1 - n_1\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2} = \frac{0.5 - \mathrm{i}1.5\alpha}{0.5 + \mathrm{i}1.5\alpha}$$

$$\approx -0.7217 - \mathrm{i}0.6922 \approx \mathrm{e}^{-0.7567\pi\mathrm{i}}$$

(实际上，根据式(24.53)，也可以得到相同的结果)

$$t_\parallel = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2} \approx \frac{1.5}{0.5 + \mathrm{i}1.5\alpha}$$

$$\approx 0.41739 - \mathrm{i}1.0382 \approx 1.1190\mathrm{e}^{-0.3783\pi\mathrm{i}}$$

$$r_\perp = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2} \approx \frac{0.75 - \mathrm{i}\alpha}{0.75 + \mathrm{i}\alpha}$$

$$\approx -0.1 - \mathrm{i}0.9950 \approx \mathrm{e}^{-0.532\pi\mathrm{i}}$$

(注意这里 $|r_\parallel|=|r_\perp|=1$)

$$t_\perp = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2} \approx 0.9 - \mathrm{i}0.995 \approx 1.3416\mathrm{e}^{-0.266\pi\mathrm{i}}$$

例 24.7　考虑一列线偏振的电磁波(其电矢量沿 y 方向偏振，量值为 5V/m)在真空中传播，以 30°入射位于 $x=0$ 的电介质表面。波的频率为 6×10^{14} Hz。电介质的折射率为 1.5。试写出入射波、反射波及透射波的电场和磁场的完整表达式。

解　入射波矢量为

$$\boldsymbol{k}_1 = (k_0\cos 30^\circ)\,\hat{\boldsymbol{x}} + (k_0\sin 30^\circ)\,\hat{\boldsymbol{z}} = \frac{\sqrt{3}}{2}k_0\,\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2}k_0\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

因此，有

$$\boldsymbol{E}_1 = \hat{\boldsymbol{y}}5\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_0 x + \frac{1}{2}k_0 z - \omega t\right)\right], \mathrm{V/m}$$

式中

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = 4\pi \times 10^6 \mathrm{m}^{-1}, \quad \omega = 12\pi \times 10^{14} \mathrm{Hz}$$

又有

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1 \sin\theta_1}{n_2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

则

$$r_\perp = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2} = -0.2404$$

可得

$$R_s = R_\perp = 0.057796$$

以及

$$t_\perp = \frac{2\cos\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} = 0.7596$$

则

$$T_s = T_\perp = \frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1} \mid t_\perp \mid^2 = 0.942204$$

可得 $R_\perp + T_\perp = 1$,且

$$\boldsymbol{k}_2 = \hat{\boldsymbol{x}}(n_2 k_0 \cos\theta_2) + \hat{\boldsymbol{z}}(n_2 k_0 \sin\theta_2) = \hat{\boldsymbol{x}}(\sqrt{2}k_0) + \hat{\boldsymbol{z}}\left(\frac{1}{2}k_0\right)$$

以及

$$\boldsymbol{k}_3 = -\hat{\boldsymbol{x}}k_0\cos\theta_1 + \hat{\boldsymbol{z}}(k_0\sin\theta_1) = -\hat{\boldsymbol{x}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_0\right) + \hat{\boldsymbol{z}}\left(\frac{1}{2}k_0\right)$$

则透射波和反射波的电场分别为

$$\boldsymbol{E}_2 = 3.8\,\hat{\boldsymbol{y}}\exp\left[\mathrm{i}\left(\sqrt{2}k_0 x + \frac{1}{2}k_0 z - \omega t\right)\right], \mathrm{V/m}$$

$$\boldsymbol{E}_3 = -1.2\,\hat{\boldsymbol{y}}\exp\left[\mathrm{i}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}k_0 x + \frac{1}{2}k_0 z - \omega t\right)\right], \mathrm{V/m}$$

注意 $\boldsymbol{E}_1$,$\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{E}_3$ 中的 k_z 都是相同的(见式(24.7))。根据式(24.59),可得出相应的磁场的公式为

$$\boldsymbol{H}_1 = 5\frac{k_1}{\omega\mu_0}(-\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta_1 + \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta_1)\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_0 x + \frac{1}{2}k_0 z - \omega t\right)\right]$$

$$\boldsymbol{H}_2 = 3.8\frac{k_2}{\omega\mu_0}(-\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta_2 + \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta_2)\exp\left[\mathrm{i}\left(\sqrt{2}k_0 x + \frac{1}{2}k_0 z - \omega t\right)\right]$$

$$\boldsymbol{H}_3 = -1.2\frac{k_1}{\omega\mu_0}(-\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta_1 - \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta_1)\exp\left[\mathrm{i}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}k_0 x + \frac{1}{2}k_0 z - \omega t\right)\right]$$

式中

$$\frac{k_1}{\omega\mu_0} = \frac{k_0}{\omega\mu_0} = \frac{1}{c\mu_0} = \frac{1}{120\pi} \quad (\text{MKS 单位})$$

$$\frac{k_2}{\omega\mu_0} = \frac{k_0 n_2}{\omega\mu_0} = \frac{n_2}{c\mu_0} = \frac{1}{80\pi} \quad (\text{MKS 单位})$$

例 24.8　再次考虑例 24.7 描述的情况，只是磁场矢量沿着 y 轴方向。试写出入射波、反射波和透射波电场的完整表达式。

解　如图 24.1 所示，有

$$\boldsymbol{E}_1 = 5\left(\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\boldsymbol{z}}\right)\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_0 x + \frac{1}{2}k_0 z - \omega t\right)\right], \mathrm{V/m}$$

此时，有

$$r_{\parallel} = \frac{n_2\cos\theta_1 - n_1\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2} = 0.1589$$

可得

$$R_{\parallel} = 0.02525$$

以及

$$t_{\parallel} = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2} = 0.7726$$

则

$$T_{\parallel} = \frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}\,|\,t_{\parallel}\,|^2 = 0.97475$$

可得 $R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1$，而且

$$\boldsymbol{E}_2 = 3.863\left(\frac{1}{3}\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{\sqrt{8}}{3}\hat{\boldsymbol{z}}\right)\exp\left[\mathrm{i}\left(\sqrt{2}k_0 x + \frac{1}{2}k_0 z - \omega t\right)\right], \mathrm{V/m}$$

$$\boldsymbol{E}_3 = 0.7945\left(\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\boldsymbol{z}}\right)\exp\left[\mathrm{i}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}k_0 x + \frac{1}{2}k_0 z - \omega t\right)\right], \mathrm{V/m}$$

例 24.9　对于例 24.7 描述的情况，考虑一右旋圆偏振波以 $\theta = 30°$ 入射到空气-玻璃界面，确定反射波和透射波的偏振态。

解　如图 24.13 所示，把电场分解为平行于入射面和垂直于入射面的分量。忽略表示式中的空域部分，则入射波的 y 分量为

$$E_{\perp} = E_y = E_0\cos\omega t$$

对于右旋圆偏振波，其平行分量为

$$E_{\parallel} = E_0\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -E_0\sin\omega t$$

“平行轴”的方向定义如图 24.13(b)所示，这与如图 24.1 所示是一致的，则

$$E_x = E_{\parallel}\sin\theta_1 = -E_0\sin\theta_1\sin\omega t$$

$$E_z = -E_{\parallel}\cos\theta_1 = +E_0\cos\theta_1\sin\omega t$$

对于反射波场，“平行分量”将沿着如图 24.13(c)所示的方向，这与如图 24.1 所示的方向是一致的。则与反射波相联系的分量为

$$E_y = E_{\perp} = r_{\perp}E_0\cos\omega t \approx -0.24E_0\cos\omega t$$

$$E_{\parallel} = -r_{\parallel}E_0\sin\omega t \approx -0.16E_0\sin\omega t$$

如图 24.13(c)所示，电矢量将沿着顺时针方向旋转，传播方向为垂直纸面向外，反射波为左旋椭圆偏振波。同理可以证明，透射波是右旋椭圆偏振波。

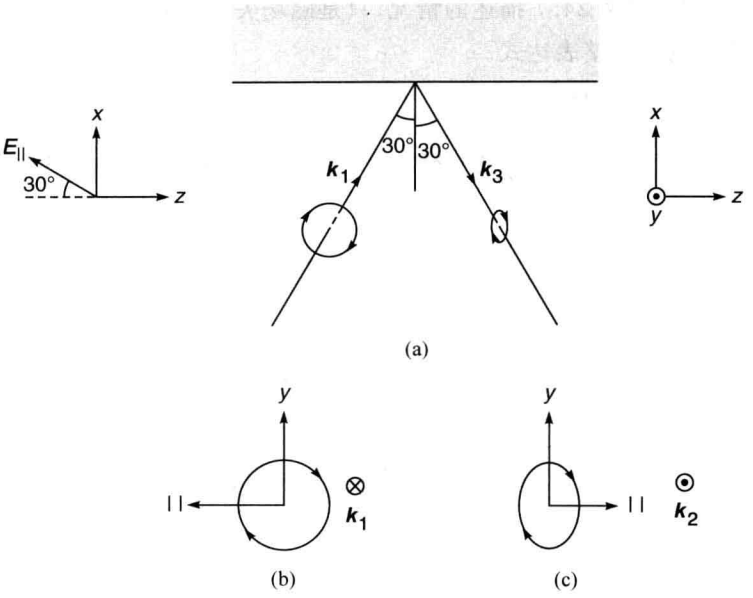


图 24.13

(a) 一个右旋圆偏振光束以 30°角入射到空气-玻璃界面上,反射光束是左旋椭圆偏振;(b) 显示了入射波 $\boldsymbol{E}$ 的旋转方向。传播方向垂直纸面向里(用⊗表示);(c) 显示了反射波 $\boldsymbol{E}$ 的旋转方向。传播方向垂直纸面向外(用⊙表示)。

24.3 导电介质的反射

考察一列平面波从电介质入射到(电导率为 δ)的导电介质上的情况,那么,关于 E_{20}/E_{10} 和 E_{30}/E_{10} 的表达式将仍然相同,只是在导电介质的情况下,k_2 是一个复数(见 23.7 节),斯涅尔定律

$$k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2 \tag{24.74}$$

也仍然适用,但由于 k_2 为复数,所以 $\sin\theta_2$ 也为复数。

如果考察电场垂直于入射面的情况(见图 24.7),可得(见式(24.62))

$$r_{\perp} = \frac{E_{30}}{E_{10}} = \frac{\dfrac{k_1}{\omega\mu_1}\cos\theta_1 - \dfrac{k_2}{\omega\mu_2}\cos\theta_2}{\dfrac{k_1}{\omega\mu_1}\cos\theta_1 + \dfrac{k_2}{\omega\mu_2}\cos\theta_2} \tag{24.75}$$

其中令

$$k_2 = \alpha + \mathrm{i}\beta \tag{24.76}$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + (\sigma/\omega\varepsilon_2)^2}\right]^{1/2}$$

$$\beta = \frac{\omega\sigma\mu_2}{2\alpha} \tag{24.77}$$

(见例 23.7)对于正入射,有

$$r_{\perp}=\frac{E_{30}}{E_{10}}=\frac{1-\dfrac{\alpha+\mathrm{i}\beta}{\omega}\dfrac{\mu_1}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}\dfrac{\mu_1}{\mu_2}}{1+\dfrac{\alpha+\mathrm{i}\beta}{\omega}\dfrac{\mu_1}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}\dfrac{\mu_1}{\mu_2}} \tag{24.78}$$

$$t_{\perp}=\frac{E_{20}}{E_{10}}=1+r_{\perp}=\frac{2}{1+\dfrac{\alpha+\mathrm{i}\beta}{\omega}\dfrac{\mu_1}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}\dfrac{\mu_1}{\mu_2}} \tag{24.79}$$

对于良导体，$\dfrac{\sigma}{\varepsilon\omega}\gg 1$，有

$$\alpha\approx\beta\approx\left(\frac{\omega\sigma\mu_2}{2}\right)^{1/2} \tag{24.80}$$

则

$$r_{\perp}=\frac{E_{30}}{E_{10}}\approx\frac{1-(1+\mathrm{i})\Delta}{1+(1+\mathrm{i})\Delta} \tag{24.81}$$

$$t_{\perp}=\frac{E_{20}}{E_{10}}\approx\frac{2}{1+(1+\mathrm{i})\Delta} \tag{24.82}$$

式中

$$\Delta=\left(\frac{\sigma\mu_1}{2\mu_2\varepsilon_1\omega}\right)^{1/2} \tag{24.83}$$

当电导率无限大时，$\Delta\to\infty$，则

$$E_{30}=-E_{10},\quad E_{20}=0 \tag{24.84}$$

这表明反射时有 π 的相位变化，且能量能完全被反射回去，导体内部的场恒等于零[①]。当 σ 为有限值(但是还是比较大)时，可得反射率的近似表示式为

$$\begin{aligned}R=\left|\frac{E_{30}}{E_{10}}\right|^2&=\left|-\frac{1-\dfrac{1}{(1+\mathrm{i})\Delta}}{1+\dfrac{1}{(1+\mathrm{i})\Delta}}\right|^2\\&\approx\left|\left(1-\frac{1}{(1+\mathrm{i})\Delta}\right)\left(1-\frac{1}{(1+\mathrm{i})\Delta}\right)\right|^2\\&\approx\left|1-\frac{2}{(1+\mathrm{i})\Delta}\right|^2\approx 1-\frac{2}{\Delta}\\&\approx 1-2\left(\frac{2\mu_2\varepsilon_1\omega}{\sigma\mu_1}\right)^{1/2}\end{aligned} \tag{24.85}$$

对于非磁性媒质，有

$$\varepsilon_1\approx\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}\mathrm{C}^2/(\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2)$$

$$\omega\approx 2\pi\times10^{10}\mathrm{s}^{-1},\quad \sigma\approx 3\times10^{7}\mathrm{S/m}(\text{银})$$

$$R\approx 0.9996$$

因此，约 99.96%的光被反射。这就是为什么一些金属是优良反射体的原因，请注意，反射率随着频率的降低而增大。

① 需要注意，如果 $\sigma\to\infty$(即对于理想的良导体)时，即使在非正入射下，也有 $r_{\parallel}\to+1$ 和 $r_{\perp}\to-1$(见式(24.46)和式(24.75))。因此，一右旋圆偏振波入射到理想的良导体时，则反射光将变成左旋圆偏振波。

如果不是正入射,必须用下面的表达式代替 $\cos\theta_2$

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1-\sin^2\theta_2} = \sqrt{1-(k_1/k_2)^2\sin^2\theta_1} = \left[1-\frac{\omega^2\varepsilon_1\mu_1}{(\alpha+\mathrm{i}\beta)^2}\sin^2\theta_1\right]^{1/2}$$

$$\approx 1-\frac{1}{2}\frac{\omega^2\varepsilon_1\mu_1\sin^2\theta_1}{\frac{\omega^2\sigma^2\mu_2^2}{4}(1+\mathrm{i})^2} \approx 1$$

最后一步只在良导体时成立。因此,对于透射波,可以写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_2 &= \boldsymbol{E}_{20}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]\\ &= \boldsymbol{E}_{20}\exp[\mathrm{i}(k_2\cos\theta_2 x + k_2\sin\theta_2 z-\omega t)]\\ &= \boldsymbol{E}_{20}\exp\{\mathrm{i}[\alpha(1+\mathrm{i})x + k_1\sin\theta_1 z-\omega t]\}\\ &\approx \boldsymbol{E}_{20}\exp(-\alpha x)\exp[\mathrm{i}(\alpha x + k_1\sin\theta_1 z-\omega t)]\end{aligned} \tag{24.86}$$

因此,对于良导体,$\alpha \gg k_1$,透射波沿 x 轴方向传播,其振幅在 x 方向指数衰减。

24.4 电介质薄膜上的反射

在本节中将计算一个平面波正入射到电介质薄膜上的情况,并确定电介质薄膜厚度,从而使薄膜起减反射作用,并且将其与15.4节中的结果作比较。在习题24.9中,将分析结果应用到法布里-珀罗干涉仪中(见16.2节)。

考虑到一平面波正入射到厚度为 d 电介质膜上(见图24.14)。为不失一般性,假设电场方向沿着 y 轴。在媒质1、媒质2和媒质3中的电场可以表示为

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_1 = \hat{\boldsymbol{y}}E_{10}^{+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x-\omega t)} + \hat{\boldsymbol{y}}E_{10}^{-}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_1x+\omega t)}\\ \boldsymbol{E}_2 = \hat{\boldsymbol{y}}E_{20}^{+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2x-\omega t)} + \hat{\boldsymbol{y}}E_{20}^{-}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_2x+\omega t)}\\ \boldsymbol{E}_3 = \hat{\boldsymbol{y}}E_{30}^{+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_3(x-d)-\omega t]}\end{cases} \tag{24.87}$$

式中 E_{10}^{+} 和 E_{10}^{-} 分别表示在区域1内向前和向后传播光波的振幅,对于其他区域内的光波振幅的表示,如此类推。由于第3个媒质的厚度趋于无限大,因此,在第3个区域内没有向后传输的光波。对于 $\boldsymbol{E}_3$,为了方便起见,引入相位因子 $-\mathrm{i}k_3d$,这个因子的引入使得分析更易于让人理解。

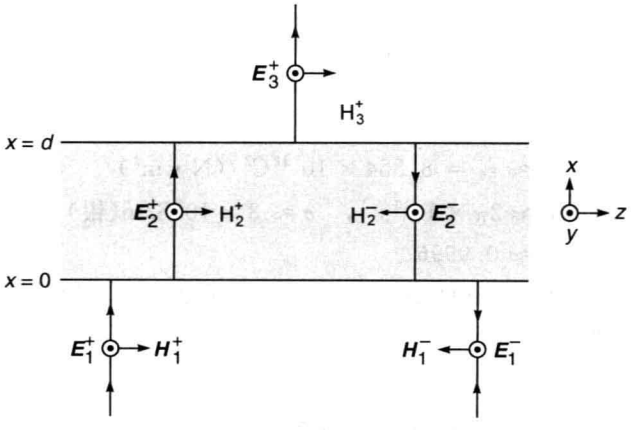


图24.14 一列平面波正入射到厚度为 d 的电介质膜上时的反射。

磁场可以用相应的电场表示出来(见式(23.66))

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}}{\omega\mu} \tag{24.88}$$

式中

$$\begin{cases}\boldsymbol{k}=k\hat{\boldsymbol{x}} & (\text{沿}+x\text{方向传输的光波})\\ \boldsymbol{k}=-k\hat{\boldsymbol{x}} & (\text{沿}-x\text{方向传输的光波})\end{cases}$$

因此,有

$$\begin{cases}\boldsymbol{H}_1=\hat{\boldsymbol{z}}\dfrac{k_1}{\omega\mu_0}\left[E_{10}^{+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x-\omega t)}-E_{10}^{-}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_1x+\omega t)}\right]\\ \boldsymbol{H}_2=\hat{\boldsymbol{z}}\dfrac{k_2}{\omega\mu_0}\left[E_{20}^{+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2x-\omega t)}-E_{20}^{-}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_2x+\omega t)}\right]\\ \boldsymbol{H}_3=\hat{\boldsymbol{z}}\dfrac{k_3}{\omega\mu_0}E_{30}^{+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_3(x-d)-\omega t]}\end{cases} \tag{24.89}$$

由于 E_y 和 H_z 都表示切线分量,则 E_y 和 H_z 在 $x=0$ 和 $x=d$ 界面必须连续。由 $x=0$ 的连续条件可给出

$$E_{10}^{+}+E_{10}^{-}=E_{20}^{+}+E_{20}^{-}$$

$$\frac{k_1}{\omega\mu_0}(E_{10}^{+}-E_{10}^{-})=\frac{k_2}{\omega\mu_0}(E_{20}^{+}-E_{20}^{-})$$

或者

$$E_{10}^{+}-E_{10}^{-}=\frac{n_2}{n_1}(E_{20}^{+}-E_{20}^{-})$$

其中利用了关系式

$$k_1=\frac{\omega}{c}n_1,\quad k_2=\frac{\omega}{c}n_2$$

进行简单的推导,可得

$$\begin{bmatrix}E_{10}^{+}\\ E_{10}^{-}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{n_1+n_2}{2n_1} & \dfrac{n_1-n_2}{2n_1}\\ \dfrac{n_1-n_2}{2n_1} & \dfrac{n_1+n_2}{2n_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_{20}^{+}\\ E_{20}^{-}\end{bmatrix} \tag{24.90}$$

同理,由 E_y 和 H_z 在 $x=d$ 处的连续性,可得

$$E_{20}^{+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}+E_{20}^{-}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}=E_{30}^{+}$$

$$E_{20}^{+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}-E_{20}^{-}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}=\frac{n_3}{n_2}E_{30}^{+}$$

式中 $\delta=k_2d$,经过简单地推导,可得

$$\begin{bmatrix}E_{20}^{+}\\ E_{20}^{-}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{n_2+n_3}{2n_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}\\ \dfrac{n_2-n_3}{2n_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}\end{bmatrix}E_{30}^{+} \tag{24.91}$$

联立式(24.90)和式(24.91),可得

$$E_{10}^{+}=\left[\left(\frac{n_1+n_2}{2n_1}\right)\left(\frac{n_2+n_3}{2n_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}\right)+\left(\frac{n_1-n_2}{2n_1}\right)\left(\frac{n_2-n_3}{2n_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}\right)\right]E_{30}^{+} \tag{24.92}$$

$$E_{10}^{-}=\left[\left(\frac{n_1-n_2}{2n_1}\right)\left(\frac{n_2+n_3}{2n_2}e^{-i\delta}\right)+\left(\frac{n_1+n_2}{2n_1}\right)\left(\frac{n_2-n_3}{2n_2}e^{i\delta}\right)\right]E_{30}^{+} \tag{24.93}$$

将式(24.93)除以式(24.92),可以得到振幅反射系数为

$$r=\frac{E_{10}^{-}}{E_{10}^{+}}=\frac{r_1e^{-i\delta}+r_2e^{i\delta}}{e^{-i\delta}+r_1r_2e^{i\delta}} \tag{24.94}$$

式中

$$r_1=\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2} \tag{24.95}$$

$$r_2=\frac{n_2-n_3}{n_2+n_3} \tag{24.96}$$

分别表示在第一界面和第二界面的菲涅尔振幅反射系数。则总的反射比为

$$R=|r|^2=\frac{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos2\delta}{1+r_1^2r_2^2+2r_1r_2\cos2\delta} \tag{24.97}$$

在16.2节～16.4节中曾经仔细地讨论过 $r_2=r_1$ 时,上面的表达式。但这里的 δ 与第16章中定义的 δ 差了一个因子2(见习题24.10)。在此必须提及,作为更一般地分析证明,上式甚至对斜入射的情况也适用,只要使 $\delta=k_2d\cos\theta_2$,θ_2 是位于第2媒质内的折射角,而 r_1 和 r_2 分别表示相应于特定入射角和特定偏振态的菲涅尔振幅反射系数。

小　结

- 考虑一个线偏振的电磁波入射到两个电介质分界面上(假设分界面位于 $x=0$);假设 x-z 是入射面。令 $n_1\left(=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}}\right)$ 和 $n_2\left(=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}}\right)$ 分别表示两个媒质的折射率。入射波、折射波和反射波可以写为

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_{10}\exp[i(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)] & (\text{入射波})\\ \boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_{20}\exp[i(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)] & (\text{折射波})\\ \boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{E}_{30}\exp[i(\boldsymbol{k}_3\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)] & (\text{反射波})\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{E}_{10}$,$\boldsymbol{E}_{20}$ 和 $\boldsymbol{E}_{30}$ 在时间上和空间上是独立的,式中

$$k_1=\frac{\omega}{c}n_1=k_3,\quad k_2=\frac{\omega}{c}n_2$$

$$k_1\sin\theta_1=k_2\sin\theta_2=k_3\sin\theta_3$$

式中 θ_1,θ_2 和 θ_3 分别表示入射角、折射角和反射角。由以上方程也可推出

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2\quad(\text{斯涅尔公式})$$

且

$$\theta_1=\theta_3$$

- 当 $\boldsymbol{E}_1$ 在 x-z 平面内(该平面为入射面)时,有

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_{10}=E_{10}(\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta_1-\hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta_1)\\ \boldsymbol{E}_{20}=t_{\parallel}E_{10}(\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta_2-\hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta_2)\\ \boldsymbol{E}_{30}=r_{\parallel}E_{10}(\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta_1+\hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta_1)\end{cases}$$

$$r_{\parallel}=\frac{n_2\cos\theta_1-n_1\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_1+n_1\cos\theta_2}=\frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)}$$

$$t_{\parallel}=\frac{2n_1\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_1+n_1\cos\theta_2}$$

$$=\frac{2\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)}$$

注意，当 $\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$ 时，$r_{\parallel}=0$，此时

$$\theta_1=\theta_p=\arctan(n_2/n_1)$$

这就是布儒斯特角。

- 当 $\boldsymbol{E}_1$ 垂直入射平面(即沿着 y 轴方向)时，有

$$\boldsymbol{E}_{10}=E_{10}\,\hat{\boldsymbol{y}},\quad \boldsymbol{E}_{20}=t_{\perp}E_{10}\,\hat{\boldsymbol{y}},\quad \boldsymbol{E}_{30}=r_{\perp}E_{10}\,\hat{\boldsymbol{y}}$$

式中

$$r_{\perp}=\frac{n_1\cos\theta_1-n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1+n_2\cos\theta_2}=-\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$$

$$t_{\perp}=\frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1+n_2\cos\theta_2}=\frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$$

- 在上述两种情况下，如果 $n_2<n_1$ 以及 $\theta_1>\theta_c=\arcsin\frac{n_2}{n_1}$，会发生全内反射。同样也能使用上述 $r_{\parallel}$，$t_{\parallel}$，$r_{\perp}$ 和 $t_{\perp}$ 的表达式，但是必须记着以下的改动

$$\sin\theta_2=\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1>1$$

且

$$\cos\theta_2=\sqrt{1-\sin^2\theta_2}=\mathrm{i}\alpha$$

将是纯虚数。$r_{\parallel}$，$t_{\parallel}$，$r_{\perp}$ 和 $t_{\perp}$ 将是复数，且 $|r_{\parallel}|=|r_{\perp}|=1$，说明全部能量被反射；而在第 2 个媒质中，将产生一个沿 x 轴方向指数衰减，沿 z 轴方向传播的隐失波。

习　题

24.1　证明当 $\theta_1\to 0$(即正入射)时，平行偏振和垂直偏振的反射率相等。

24.2　考虑磁导率满足 $\mu/\mu_0=\varepsilon/\varepsilon_0$ 的磁性电介质，证明：正入射到这种材料上时，反射率恒等于零。这一事实等价于在两条传输线的接头处阻抗匹配的情况(物理量 $\sqrt{\mu/\varepsilon}$ 可以看作媒质的固有阻抗)。

24.3　一束右旋圆偏振光以 45°入射到理想导体上，证明：反射光束为左旋圆偏振光。

24.4　假设 $n_1=1.5$，$n_2=1.0$(见例 24.6)

(1) 设 $\theta_1=45°$，证明

$$r_{\parallel}=+0.28-\mathrm{i}0.96,\quad t_{\parallel}=1.92-\mathrm{i}1.44$$

同理，也可以计算出 $r_{\perp}$ 和 $t_{\perp}$。

(2) 另一方面，当 $\theta_1=33.69°$，证明此时

$$r_{\parallel}=0,\quad t_{\parallel}=1.5$$

$$r_{\perp}=+0.3846,\quad t_{\perp}=1.3846$$

24.5 一束右旋圆偏振光以60°入射到折射率为1.6的媒质上。计算$r_{\parallel}$,$r_{\perp}$,并证明反射光是长轴远远长于短轴的右旋椭圆偏振光。在入射角为58°时,又将怎样?

[**答案**:$r_{\parallel}=-0.0249$,$r_{\perp}=-0.4581$]

24.6 考虑一沿y轴偏振的波以$\theta_1=45°$和$\theta_1=80°$入射到玻璃-空气媒质界面时($n_1=1.5$,$n_2=1.0$),写出透射光场的完整表达式,并证明后一种情况会产生穿透深度($=1/\beta$)等于8.8×10^{-8}m的隐失波;设$\lambda=6000$Å。

24.7 黄金在波长为$\lambda_0=6530$Å的复折射率为$n_2=0.166+3.15$i。试计算k_2,并证明正入射时,反射率约为94%。(提示:直接利用式(24.75))。另一方面,在$\lambda_0=4000$Å时,$n_2=1.658+1.956$i,证明反射率仅为39%。

24.8 当$\delta=0$时,试证明式(24.97)具有以下形式

$$R=\left(\frac{n_1-n_3}{n_1+n_3}\right)^2 \tag{24.98}$$

实际上,这是界面上的反射率的形式。

24.9 根据24.4节相应的公式,计算透射率,并证明

$$T=\frac{\frac{1}{2}n_3\mid E_3^+\mid^2}{\frac{1}{2}n_1\mid E_1^+\mid^2}=1-R$$

24.10 如图24.14所示,假设第3媒质与第1媒质完全相同,即$n_3=n_1$,则

$$r_2=-r_1=-\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}$$

并根据式(24.97),证明

$$R=\frac{F\sin^2\delta}{1+F\sin^2\delta} \tag{24.99}$$

式中

$$F=\frac{4r_1^2}{(1-r_1^2)^2} \tag{24.100}$$

被称为锐度系数。式(24.99)与在16.2节中讨论法布里-珀罗干涉仪时所得到的结果是一致的,但这里定义因子δ与第16章中定义的δ差一个因子2。

参考文献和推荐读物

1. J.M. Bennett and H.E. Bennett, 'Polarization' in *Handbook of Optics* (Ed. W.J. Driscoll), McGraw-Hill, New York, 1978.
2. O. Bryngdahl, 'Evanescent Waves in Optical Imaging', *Progress in Optics* (Ed. E. Wolf), Vol. XI, North-Holland, Amsterdam, 1973.
3. D.R. Corson and P. Lorrain, *Introduction to Electromagnetic Fields and Waves*, W.H. Freeman and Co., San Francisco, 1962.
4. R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. I, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1964.
5. A. Ghatak, and K. Thyagarajan, *Optical Electronics*, Cambridge University Press, 1989. [Reprinted by Foundation Books, New Delhi].
6. J.R. Heirtzler, 'The Largest Electromagnetic Waves', *Scientific American*, Vol. 206, 128, September 1962.
7. E.C. Jordon and K.G. Balmain, *Electromagnetic Waves and Radiating Systems*, Prentice-Hall, N.J., USA 1970.
8. W.K.H. Panofsky and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962.
9. J.R. Reitz and F.J. Milford, *Foundations of Electromagnetic Theory*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962.
10. H.S. Sandhu and G.B. Friendmann, 'Change of Phase on Reflection', *American Journal of Physics*, Vol. **39**, 388, 1971.

第六部分

光　　子

这部分只有 1 章，是关于辐射的粒子模型。(由赫兹于 1888 年发现的)光电效应的独特性是不能用波动理论来解释的。1905 年，爱因斯坦提出了一个简单的粒子解释方法，他假设光是由具有能量为 $h\nu$ 的能量子组成(其中 ν 是频率)，光电子的发射是单个量子(即光子)与一个电子相互作用的结果。由于这一贡献，爱因斯坦获得 1921 年的诺贝尔物理学奖。本章还讨论了康普顿效应(由此贡献，康普顿教授获得 1927 年诺贝尔物理学奖)，康普顿效应指出，光子具有 h/λ 的动量。

第25章 辐射的粒子性

光线不是从发光物体发出的小粒子吗？

——艾萨克·牛顿，《光学》[1]

不可否认，确实存在大量的有关辐射的数据显示光具有这样的基本性质，站在牛顿的辐射(粒子)理论的观点上来解释比站在波动理论观点上来解释更易于理解。以我的观点，理论物理下一阶段的发展所带给我们的是，光的理论可以看成是一种波动与粒子辐射理论的融合。

——阿尔伯特·爱因斯坦 (1909 年)[2]

重要的里程碑

1887 年　海因里希·赫兹(Heinrich Hertz)在用一个具有间隙的线圈接收到电磁波时，发现了间隙打火花，并且当把装置放置在一黑盒子里面时，发现间隙火花的最大长度变短了。

1897 年　J. J. 汤姆孙(J. J. Thomson)发现了电子。

1899 年　J. J. 汤姆孙证实了当一束光照射在金属表面时，会有电子发射出来，这种电子称为光电子。

1900 年　为了推导黑体辐射的公式，普朗克大胆假设振子的能量只能是离散的。

1902 年　菲利普·雷纳德(Philip Lenard)观察到出射光电子的动能与入射光的强度无关，而是随入射光频率的增大而增大。

1905 年　在一篇名为《关于光的产生和转换的启发式观点》的文章中，爱因斯坦引入了光量子的概念。这篇文章中，他写道："为了解释像黑体辐射、紫外光产生光电子(即光电效应)等现象，有必要假设当从一点开始的光线传播时，能量并不是连续地分布到逐渐增加的体积中，而是由定域在空间中的有限数量的能量子组成的，它们在运动中不会分开，且只能作为一个整体被吸收或发射。"因为对理论物理所作的贡献，特别是对光电效应的成功解释，爱因斯坦于 1921 年获得诺贝尔物理学奖。

1923 年　康普顿(Compton)报道了他对于固体材料(主要是石墨)造成 X 射线散射的研究，证明了散射光子波长的改变可以用假设光子具有动量 h/λ 来解释。康普顿因为发现了以他名字命名的康普顿效应，而获得了 1927 年诺贝尔物理学奖。

1926 年　一个美国化学家，吉尔伯特·刘易斯(Gilbert Lewis)创造出"光子(photon)"这个词来描述爱因斯坦的定域能量子。

---

① 引自文献[1]。

② 引自文献[2]。

25.1 引言

在前面的各章中讨论了光的干涉、衍射和偏振。所有这些现象都能够在光的波动理论的基础上圆满地得到解释。也讨论了光波的电磁特性(见第 22 章和第 23 章),并且证明,电磁理论能够成功地解释折射率的起源(见第 7 章)、双折射现象(见第 22 章)和许多其他实验的结果。但还是存在着大量的实验现象,只有以辐射的微粒性为基础才能加以解释。在本章中将讨论光电效应和康普顿效应,这两个效应的解释确立了光的粒子特性,而波动模型完全不能解释这类的效应。在第 2 章中已经简明地讨论了如何以量子理论为基础来调和辐射双重特性(即波动性和粒子性之间的调和问题)。

25.2 光电效应

1887 年,当赫兹在用一个具有间隙的线圈接收到电磁波时,发现了间隙打火花,并且当把装置放置在一黑盒子里面时,发现间隙火花的最大长度变短了。这是由现在已知的光电效应造成的,黑盒子吸收了紫外线,从而帮助电子穿过间隙。赫兹报告了这一观察,但并没有继续深入追究,也没有试图对其进行解释。1897 年,J. J. 汤姆孙发现了电子,并于 1899 年证明了当一束光照射在金属表面时,会有电子发出,这些电子现在被称作光电子。1902 年,菲利普·雷纳德观察到:①出射电子的动能与入射光的强度无关;②出射电子的动能随入射光频率的增大而增大。后来,密立根(Millikan)仔细地设计了光电效应的实验,采用类似于如图 25.1 所示的装置,光电子在 P_1 和 P_2 两个平板间形成电流,并可以用安培计 A 测量。当跨越两个金属板的电压发生变化时,电流也在变化,光电流随电压变化的典型曲线如图 25.2 所示,这是对应于一定波长的单色光测得的,不同曲线对应了照射光束的不同强度。根据光电流随电压变化的典型曲线,可以得到以下结论。

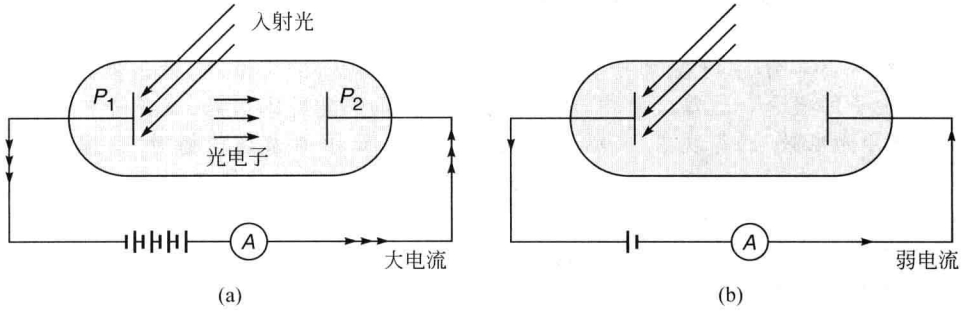


图 25.1 如果让(一特定频率)的光照射到像钠之类的金属上时,会发射出电子,这些电子会被金属片 P_2 收集。(a)和(b)分别对应加到 P_2 极上的电压是正电压和负电压两种情况,即使 P_2 极保持一个微小的负电位时,仍能测到很小的电流。

(1) 当电压为零时,也有一定的电流存在,这表明一些发出的光电子到达了金属表面 P_2。

(2) 当电压增大时,电流也增大,直至达到某一饱和值。这时发出的光电子全部被 P_2

极收集。

(3) 在 P_2 极保持微小的负电位时，仍然存在微弱的电流，这意味着有些光电子的确到设法达了 P_2 极。但是当 P_2 极的电位比某一数值(如图 25.2 所示的 $-V_c$)更低时，电流为零。V_c 称为遏止电压，而 $|q|V_c$ 表示光电子的最大动能(q 表示电子的电荷)。例如，对于钠 $V_c=2.3\text{V}$，而铜的 $V_c\approx4.7\text{V}$。

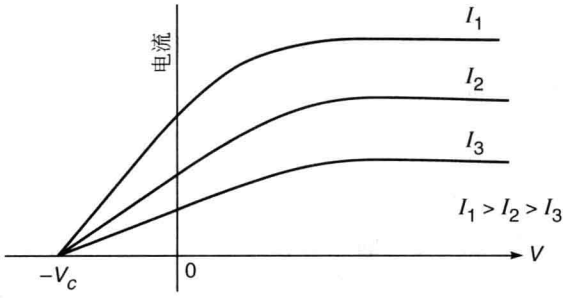


图 25.2　光电流随电压的典型变化，不同曲线对应于不同强度(但频率相等)的入射光

(4) 如果不改变入射光的波长，但使其强度增大，则电流也会增大，如图 25.2 所示，这表明发射出更多的光电子。请注意：遏止电压的值保持不变。这个重要的结果表明发射的光电子的最大动能不依赖于入射光的强度。

(5) 如果提高入射光的频率，遏止电压以及发射的光电子的最大动能($=|q|V_c$)将随着频率线性增大，如图 25.3 所示。此外，当频率低于某一临界值(如图 25.3 所示的 V_c)时，无论入射光的强度多么大，都没有光电子发射出来。

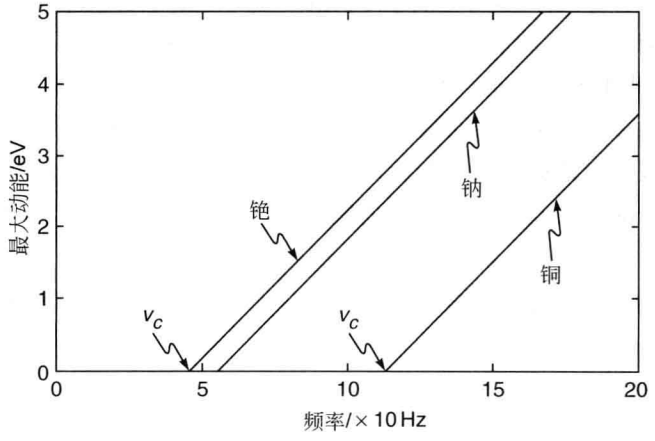


图 25.3　光电子的最大动能随入射光的频率而变化

乍一看来，由于电磁波携带能量，光的波动模型应该能够解释金属表面发射光电子的现象。但是，光电效应的某些特性并不能用波动模型令人满意地加以解释。

(1) 第一个特性是光电子的最大动能不依赖于入射光的强度，只依赖于入射光的频率；再者，较大的强度只产生更多的光电子，从而形成更强的光电流。因此，一束强度微弱的紫光在金属表面所击发出的光电子的动能却比一束很强的黄光所击发出的大，虽然后者能产生更多的光电子。可是，波动模型却预言，强度大的入射光将产生动能较大的光电子。

(2) 第二个特性是从入射光照射金属到光电子被逐出几乎没有时间间隔。而波动理论预言,当入射光束的强度很弱时,为了让电子吸收到足够的能量以脱离金属表面,需要有相当长的时间。这里举个简单的例子来说明,当用强度弱到 $10^{-10}\,\mathrm{W/cm^2}$ 的紫光来照明金属钠的表面时,也能探测到光电流。十层钠原子包含约

$$\frac{6\times10^{23}\times10\times10^{-8}}{23}\approx2\times10^{15}\,\mathrm{atom/cm^2}$$

其中已假设钠的密度约为 $1\mathrm{g/cm^3}$,假设能量被金属钠的最上面的十层原子均匀地吸收,则每个原子吸收能量的速率近似为

$$\frac{10^{-10}}{2\times10^{15}}\approx5\times10^{-26}\mathrm{J/s}\approx3\times10^{-7}\mathrm{eV/s}$$

假设一个电子需要有约 1eV 的能量才能溢出金属表面,则应该期待有数量级约 $10^7\mathrm{s}$(~几个月)的时间间隔。但实验指出,在光的照射和光电子的发射之间没有探测出来可观测到的时间间隔。1928 年,劳伦斯(Lawrence)和比姆斯(Beams)设计出一个实验发现,其时间滞后$\leqslant3\times10^{-9}\mathrm{s}$。这个实验结果对波动理论的解释无疑是负面的。

1905 年,爱因斯坦对上述的这些特性给出了一个简单的解释。他主张光是由能量为 $h\nu$ 的能量子组成的(式中 ν 是频率),而发射出的光电子是由于单个量子(即光子)和一个电子的相互作用造成的。爱因斯坦在他 1905 年的论文(见参考文献[3])中写道:

单频辐射表现得就像它是由相互独立的、能量大小为 $h\nu$ 的能量子组成的。

爱因斯坦的理论满意地解释了光电效应。根据这一理论,一束光(频率为 ν)本质上是由一些独立的、被称为光子的粒子组成的。值得一提的是,正是在 1926 年,由一位美国化学家吉尔伯特·刘易斯(Gilbert Lewis)用单词"光子(photon)"来命名爱因斯坦的"定域能量子"。每个光子都携带着 $h\nu$ 的能量,而这个微粒模型可以解释上面讨论的所有观察。因此,当光子的频率低于截止频率 ν_c 时,每个光子的能量不能达到 $h\nu_c$,不足以将电子从金属中驱逐出来。当频率 $\nu\geqslant\nu_c$ 时,超过的能量[$=h(\nu-\nu_c)$]的主要部分将作为发射电子的动能。而且,光照射与电子被逐出之间的时间间隔测不出的这一结果,这也符合辐射的粒子性。实际上,观察到的光电子的最大动能与入射光的频率呈线性关系,可以写为(见图 25.3)

$$T_{\max}=-B+h\nu=h(\nu-\nu_c)\tag{25.1}$$

式中 $B(=h\nu_c)$是常数,h 为普朗克常量($=6.627\times10^{-27}\,\mathrm{erg\cdot s}$)。$\nu_c$ 表示截止频率,它是金属的特性,例如:

铯:$B\approx1.9\mathrm{eV}\Rightarrow\nu_c\approx4.6\times10^{14}\,\mathrm{Hz}$

钠:$B\approx2.3\mathrm{eV}\Rightarrow\nu_c\approx5.6\times10^{14}\,\mathrm{Hz}$

铜:$B\approx4.7\mathrm{eV}\Rightarrow\nu_c\approx11.4\times10^{14}\,\mathrm{Hz}$

如图 25.3 所示,ν_c 是水平坐标轴上的截距,1909 年爱因斯坦写道(见文献[1]):

不可否认,确实存在着大量的有关辐射的数据,显示光具有这样的基本性质,站在牛顿的辐射(粒子)理论的观点上来解释比站在波动理论观点上来解释更易于理解。以我的观点,理论物理下一阶段的发展所带给我们的是,光的理论可以看成是一种波动与粒子辐射理论的融合。

人们关注了爱因斯坦的预言。爱因斯坦于 1921 年凭借《光电效应规律的发现》获得诺贝尔物理学奖。这里引用 Max Jammer 的话(见参考文献[4]):

正是由于爱因斯坦 1905 年的论文,物理学家将光电效应作为光子存在的无可辩驳的主要证据。因此,爱因斯坦对于光电效应的解释,在量子力学概念的发展中起了重要作用。

密立根设计了一系列完美的实验,证明了式(25.1)的正确性。密立根还是第一次直接给出普朗克常数 h 测量值的人。在他的诺贝尔演讲中(见参考文献[5]),他说道:

经过 10 年不停的测试、改变、学习,有时甚至会犯一些不该有的错误,但是我们一直努力着。从第一次实验开始,直至完成发射出的光电子能量的精确测量。目前为止我们测量了它与温度、波长、材料(即接触电动势)的关系。这一工作结果,与我自己的预期相反,却第一次(1914 年)在实验误差之内,直接通过实验精确地验证了爱因斯坦方程(式(25.1)),也第一次确定了普朗克常数 h 的值。

密立根进一步写道:

爱因斯坦方程是精确的(总是在目前的实验能达到的误差范围之内)和广泛适用的。它也许是过去的 10 年里实验物理最引人注目的成就。

在密立根的实验之后,杜安(Duane)和他的助手又发现了一个具有明确证据的关系,该关系是爱因斯坦提出的光电效应的逆效应。他们用已知的固定能量的电子轰击金属靶,发现出射的 X 射线的最大频率,精确地符合

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu \tag{25.2}$$

为了将普朗克的量子化谐振子与辐射量子联系起来,爱因斯坦建立了一个非常重要的概念转换,即引入了辐射表现出粒子行为的概念。虽然牛顿曾经将光描述为一个粒子流,但这个观点已经被光的波动图像完全取代了,并在麦克斯韦提出电磁理论时达到顶峰。而今粒子理论的复活也随之带来了严重的概念问题,即,如何将辐射的粒子属性和波动属性协调统一起来。人们很快认识到物质表现出波粒二象性,比如,电子具有确定的质量和电荷,但同时它也会经历衍射,而衍射是类似光波的行为——波粒二象性推动了测不准原理和量子理论的发展。

在 25.3 节中将讨论由亚瑟·康普顿(Arthur Compton)所做的一个非常重要的实验,而这个实验只有当假设光的动量等于 $h\nu/c$ 时,才能被满意地解释。

25.3　康普顿效应

爱因斯坦对光电效应的解释,意味着光量子(光子)携带着确定值的能量。而康普顿效应提供了一个明确的辐射过程的例子,在该过程中,既携带能量,又携带动量的辐射量子可以散射出一个电子(见图 25.4)。如果用 u 表示与一列平面电磁波相联系的每单位体积的能量,则麦克斯韦方程组预言,电磁波每单位体积的动量将是 u/c,式中 c 表示光在自由空间中的速度。既然每个光子具有能量 $h\nu$,则动量为

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \tag{25.3}$$

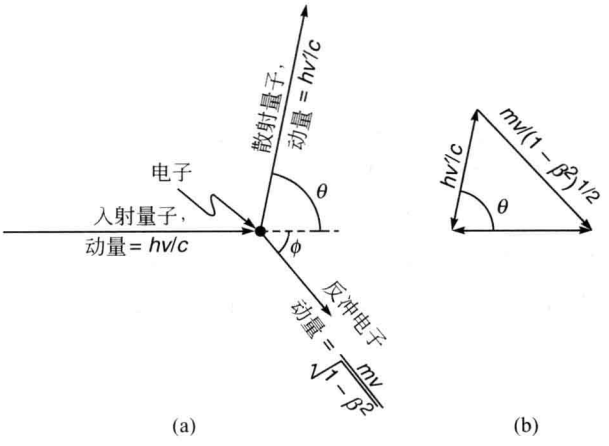


图 25.4　一个光子的康普顿散射。入射光子(频率为 ν)照射在电子上，散射光子(频率减小到 ν')将沿着与原方向呈 θ 的方向传播，且电子获得动量。图片选自亚瑟·康普顿的论文(见参考文献[9])。

1923 年，康普顿观察了石蜡块对 X 射线的散射情况，发现从 90°散射的 X 射线的波长大于入射 X 射线的波长。换言之，被散射辐射的频率 ν' 小于入射波的频率。康普顿能将其定量地解释为[①]能量为 $E=h\nu$，动量等于式(25.3)的光子与电子的弹性碰撞。康普顿也由于发现了以他命名的康普顿效应而获得了 1927 年的诺贝尔物理学奖。

光子将其部分能量传给电子，并显示出自己能量减少。这样，被散射的辐射具有较低的频率。这个碰撞动力学[②]过程可以利用最基本的能量守恒定律和动量守恒定律推导出来(见 25.3.1 节)。经过相应的计算，可以得出散射波长的改变为

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{m_0 c}\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{25.4}$$

式中 θ 为光量子的散射角(见图 25.4)，m_0 表示电子的静止质量。如果把 h，m_0 和 c 的值代入，可得

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 0.0485\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{25.5}$$

式(25.5)中 λ 的单位为 Å。式(25.5)显示出波长变化的最大值为 0.05Å，这样，为了更好地测量波长的变化，最好使用短波长的辐射。如图 25.5 所示，给出了测量康普顿波长变化的实验装置的原理图。一束单色的 X 射线(或者 γ 射线)照射到散射样本上，散射光子由晶体光谱仪检测。对于给定的散射角 θ，晶体光谱仪可以测出(作为 λ 的函数)强度随波长的分布。如图 25.6 所示为 1923 年康普顿在他的原始实验中(见参考文献[7])测量到的相对于不同角度的入射光，散射光子的波长的变化曲线。其中实线对应于式(25.5)取 $\lambda=0.022$Å

① 如果用经典理论去解释康普顿散射，则电子在入射电磁辐射的电场下经历振荡，因此，加速的电子将发射电磁波，并且由于电子运动的多普勒效应，发射出来的电磁波的波长与入射波长不同。但经典理论预言：对于一个给定的散射角，散射波波长将分布在一个连续的范围内。这与实验的发现是相左的。更详细的分析见文献[5]的 2.9 节。

② 原文为“Kinematics”运动学，实际上应该是“Dynamics or Kinetics”动力学。译者注。

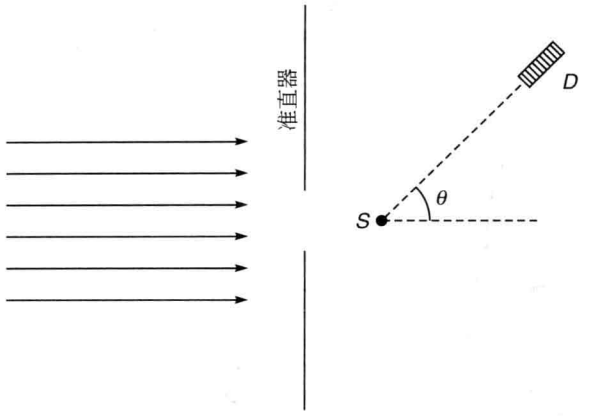


图 25.5　测量康普顿频移的实验装置的简略图。一束准直的单色 X 射线被散射体 S 散射，散射光子的波长由检测器 D 来测量。

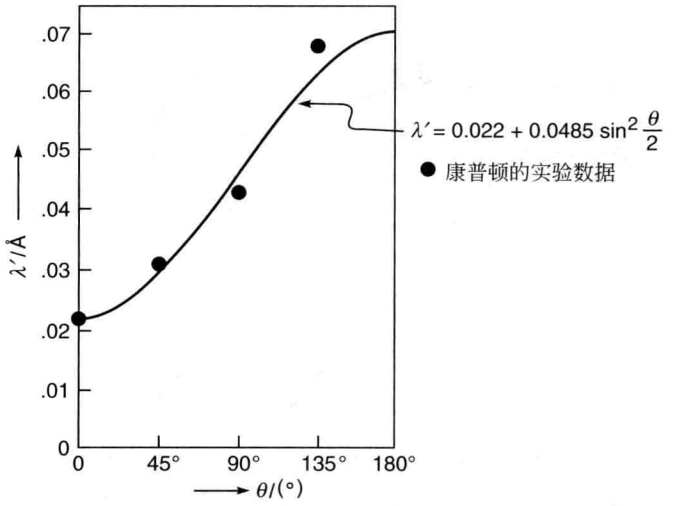


图 25.6　散射光的波长随着散射角度的变化图，实线对应于式(25.5)，且 $\lambda=0.022$Å，圆点表示康普顿实验中得到的实验数据点。图片引自康普顿的原始论文(见参考文献[9])。

的情况。注意，相应光子的能量为

$$\sim \frac{6.6\times10^{-27}(\text{erg}\cdot\text{s})\times3\times10^{10}(\text{cm/s})}{2.2\times10^{-10}(\text{cm})}\text{erg}\approx0.5\text{MeV}$$

这个能量对应于 γ 射线。理论和实验很好的一致性证实了辐射的表现就像它是由能量为 $h\nu$，动量为 $h\nu/c$ 的粒子组成的。

康普顿的实验装置和实验结果如图 25.7 和图 25.8 所示，实验用的光源是钼的 K_α 线($\lambda=0.711$Å)，用石墨作散射样本。注意，对应于每一个散射角 θ，散射光光谱有两个峰。第一个峰出现在与原光束的波长相一致的地方，这个峰对应于光子被整个原子散射，因此，式(25.4)中 m_0 不是电子的质量，而是碳原子的质量(是电子质量的 22000 倍)，这样，

散射波长的改变是忽略不计的。第二个峰对应于康普顿频移,光谱中的两条竖线分别对应于不变的波长和根据式(25.5)变化的波长。可以看出,预期值与测量值符合得非常好。

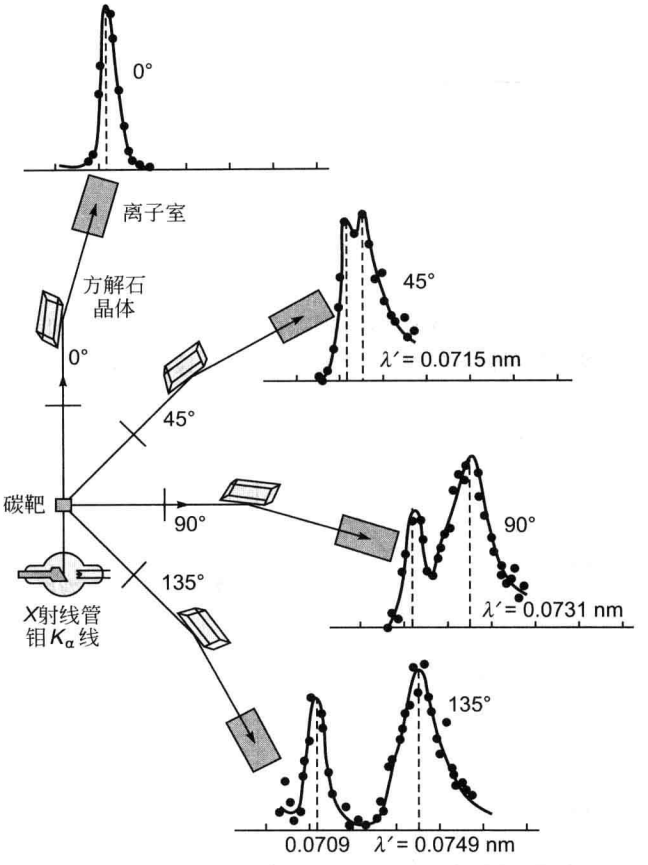


图 25.7　康普顿的原始实验使用了钼的 K_α X 射线,波长为 0.0709nm。入射光由碳靶对其散射,并利用布拉格光谱仪在不同散射角处进行观察。实验数据引自康普顿的原始论文(见图 25.8),本图引自佐治亚手里大学 Rod Nave 教授所作的图,图片引自 http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hframe.html。彩图见文前附录图表页的图 31。①

康普顿和西蒙(Simon)所做的 X 射线通过过饱和水汽散射的实验为证明上述理论的正确性提供了更进一步的证据。在这个散射过程中,反冲的电子在凝结液滴中形成了轨迹,而光量子没有留下任何轨迹。如果光量子经历第二次散射,则由第二次散射反冲电子的运动轨迹就可以确定光量子的轨迹,该轨迹是两次电子轨迹的起始点的连线。虽然在分析实验数据时有可观的不确定性(因为存在很多的轨迹),康普顿和西蒙仍得到了与理论分析一致的实验数据。

① 原书为“图 35”。

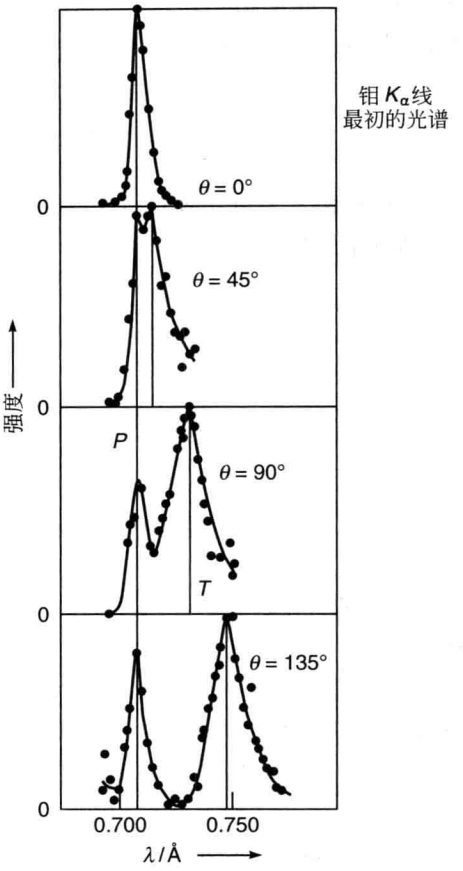


图 25.8　散射光子的强度随波长的变化。(标有 P 的)竖线对应着最初的波长为 $\lambda = 0.711$Å,(标有 T 的)第二竖线对应于式(25.5)预测的改变后的波长。图片引自康普顿的原始论文(见参考文献[10])。

25.3.1　康普顿散射的动力学描述[①]

接下来考虑如图 25.4 所示的光子被电子散射的情况,假设散射后光子频率为 ν'。则能量为

$$h\nu = h\nu' + E_k \tag{25.6}$$

式中 E_k 表示电子获得的动能。考虑动量在 x, y 方向上的分量守恒,有

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\theta + p\cos\phi \tag{25.7}$$

$$0 = \frac{h\nu'}{c}\sin\theta - p\sin\phi \tag{25.8}$$

式中 p 表示电子碰撞后的动量,θ 和 ϕ 分别表示散射光子和电子的运动方向与入射光子原方向的夹角(见图 25.4)。下面将证明,能够测量到的康普顿效应,频率 ν 应该处于 X 射线

① 原文为"Kinematics"运动学,实际上应该是"Dynamics or Kinetics"动力学。译者注。

或者γ射线范围(对于X射线,$\lambda \leqslant 1\text{Å}$ 或者 $h\nu \geqslant 10^4\text{eV}$)。对于这样的高能量的光子,电子获得的速度大到可以与光速相比拟,因此,对于 E_k 和 p 的表达式必须用相对论的表达形式。根据相对论,散射电子的动能 E_k 为

$$E_k = E - m_0c^2 = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0c^2 \tag{25.9}$$

式中 $\beta = v/c$,m_0 表示电子的静止质量,v 为电子速度,c 为真空中的光速,E 和 m_0c^2 分别表示总能量和电子的静止能量,则电子动量表示为

$$p = mv = \frac{m_0v}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{25.10}$$

则

$$p^2c^2 + m_0^2c^4 = \frac{m_0^2v^2c^4}{1-v^2/c^2} + m_0^2c^4 = \frac{m_0^2c^4}{1-v^2/c^2} = m^2c^4$$

或者

$$p^2c^2 + m_0^2c^4 = E^2 = (E_k + m_0c^2)^2 = E_k^2 + m_0^2c^4 + 2E_km_0c^2$$

因此,有

$$E_k^2 + 2E_km_0c^2 = p^2c^2$$

把式(25.6)中的 E_k 代入,可得

$$h^2(\nu - \nu')^2 + 2h(\nu - \nu')m_0c^2 = p^2c^2 \tag{25.11}$$

则式(25.7)和式(25.8)可以写为如下形式

$$p\cos\phi = \frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c}\cos\theta \tag{25.12}$$

$$p\sin\phi = \frac{h\nu'}{c}\sin\theta \tag{25.13}$$

为了消除 ϕ,进行平方和,可得

$$p^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - \frac{2h^2\nu'}{c^2}\cos\theta \tag{25.14}$$

代入式(25.11),可得

$$h^2(\nu^2 - 2\nu\nu' + \nu'^2) + 2h(\nu - \nu')m_0c^2 = h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu'\cos\theta$$

或者

$$\frac{2h(\nu - \nu')m_0c^2}{2\nu\nu'} = h^2(1 - \cos\theta)$$

或者

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta)$$

或者

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{m_0c}\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{25.15}$$

这就是康普顿频移[①]。

① 在康普顿频移的推导中,假设初始时电子处于自由状态。虽然已知电子是被原子束缚的,但由于原子对于电子的束缚能(≈几个eV)比起光子能量(≳1000eV)通常非常小,因此,自由电子假设也是合理的。

25.4　光子质量

由于光子具有能量($=h\nu$),假设光子的惯性质量为

$$m=\frac{h\nu}{c^2} \tag{25.16}$$

当光束从大质量星体旁经过时,它的轨迹应该发生偏转。的确,已有实验观测到当由遥远星体发出的光经过太阳附近时,轨迹会发生轻微的偏转。

同样,可以预测,当光子离开星体时,由于引力场的作用,它的能量也会降低。事实上,这种情况确实发生了,并以光子自身的频率降低显现出来,这种频率降低的现象被称作"引力红移"。可以通过计算星体表面的引力势能来近似地计算红移量

$$V\approx-\frac{GMm}{R}=-\frac{GM}{R}\cdot\frac{h\nu}{c^2} \tag{25.17}$$

式中 M 是星体的质量,R 是它的半径,G 为万有引力常数。当光束到达地球时,它的频率为

$$h\nu'=h\nu-\frac{GM}{R}\frac{h\nu}{c^2}$$

或者

$$\frac{\Delta\nu}{\nu}=\frac{\nu-\nu'}{\nu}=\frac{GM}{Rc^2} \tag{25.18}$$

(在此忽略地球的引力场)。从上述公式可以看出,如果该星体的质量非常大,以至于公式右边的值超过 1 的话,光束将不能从该星体逃脱——这就是黑洞。必须提醒一下,当讨论黑洞时,必须应用广义相对论,从而得到该星体的极限半径值为

$$R_s=\frac{2GM}{c^2} \tag{25.19}$$

这个半径称为史瓦西(Schwarschild)半径。如果具有一定质量的星体其半径小于史瓦西半径,即

$$R<R_s$$

光束将不能脱离该星体,则该星体就是所谓的黑洞。因此,如果星体的质量约为

$$M\approx 10M_\odot\approx 2\times10^{34}\text{g}$$

式中 $M_\odot$($\approx2\times10^{33}$g)表示太阳的质量,则史瓦西半径为

$$R_s\approx\frac{2\times6.67\times10^{-8}\times2\times10^{34}}{(3\times10^{10})^2}\text{cm}=30\text{km}$$

事实上,如今已经观测到了半径为 10km 的黑洞。

25.5　光子的角动量

考虑一列电磁波(沿 x 轴方向传播)通过一个偏振方向为 y' 的偏振片(见图 25.9),则沿着 y 轴和 z 轴的电场分量为

$$E_y=E_{y'}\cos\theta,\quad E_z=E_{y'}\sin\theta$$

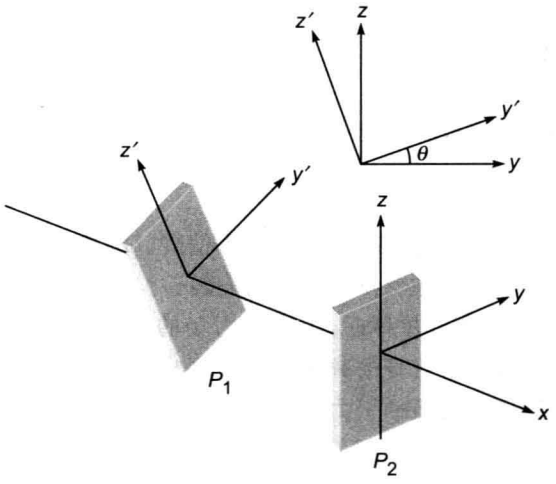


图 25.9　偏振片 P_1 的偏振化方向为 y'，偏振片 P_2 的偏振化方向为 y，光传播方向为 x 轴。

因此，当沿 y'偏振的光透过沿着 y 方向偏振的偏振片时(见图 25.9)，透过的电场分量为 $\cos\theta$，其光强将减小为原来的 $\cos^2\theta$ 倍——这就是马吕斯定律(见 22.3 节)。同理，对于沿着 z'方向偏振的光，有

$$E_y = -E_{z'}\sin\theta, \quad E_z = E_{z'}\cos\theta$$

一般地，可以写为

$$E_y = E_{y'}\cos\theta - E_{z'}\sin\theta$$
$$E_z = E_{y'}\sin\theta + E_{z'}\cos\theta$$

则上述方程写成矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix} E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}) \begin{bmatrix} E_{y'} \\ E_{z'} \end{bmatrix} \tag{25.20}$$

式中

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{25.21}$$

是从 y'-z'坐标系到 y-z 坐标系的旋转矩阵。由上述公式，可得

$$E_{y'} = E_y\cos\theta + E_z\sin\theta$$
$$E_{z'} = -E_y\sin\theta + E_z\cos\theta$$

因此，有

$$\begin{bmatrix} E_{y'} \\ E_{z'} \end{bmatrix} = \boldsymbol{S}^{\dagger}(\boldsymbol{\theta}) \begin{bmatrix} E_y \\ E_z \end{bmatrix} \tag{25.22}$$

式中

$$\boldsymbol{S}^{\dagger}(\boldsymbol{\theta}) \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{25.23}$$

为从 y-z 坐标系到 y'-z'坐标系的旋转矩阵。显然，有

$$\boldsymbol{S}^{\dagger}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{S}^{\dagger}(\boldsymbol{\theta}) = 1 \tag{25.24}$$

在 2.9 节中讨论过光子的偏振，光子沿 y 轴的偏振可以表示为“单位”矢量(见 22.14 节)

$$|y\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

同理，光子沿 z 轴的偏振也表示为“单位”矢量

$$|z\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

对于坐标系的旋转有(见图 25.9)

$$\begin{bmatrix} |y\rangle \\ |z\rangle \end{bmatrix} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}) \begin{bmatrix} |y'\rangle \\ |z'\rangle \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} |y'\rangle \\ |z'\rangle \end{bmatrix} = \boldsymbol{S}^{\dagger}(\boldsymbol{\theta}) \begin{bmatrix} |y\rangle \\ |z\rangle \end{bmatrix}$$

进而，一个右旋圆偏振光子的“单位”矢量可以表示为

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|y\rangle + \mathrm{i}\,|z\rangle) \tag{25.25}$$

同理，一个左旋圆偏振光子的“单位”矢量表示为

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|y\rangle - \mathrm{i}\,|z\rangle) \tag{25.26}$$

通过旋转矩阵，右旋圆偏振 $|R\rangle$ 可以转换为

$$\begin{aligned} |R'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|y'\rangle + \mathrm{i}\,|z'\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\cos\theta\,|y\rangle + \sin\theta\,|z\rangle) + \mathrm{i}(-\sin\theta\,|y\rangle + \cos\theta\,|z\rangle)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} (|y\rangle + \mathrm{i}\,|z\rangle) \end{aligned}$$

或者

$$|R'\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\,|R\rangle \tag{25.27}$$

因此，经过坐标系旋转，圆偏振光仍然是圆偏振光，只不过是相位发生了变化。根据量子力学，如果 $\mathcal{R}_x(\theta)$ 表示对应于绕 x 轴旋转 θ 的旋转算符，则(见文献[11,12])

$$\mathcal{R}_x(\theta) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\theta J_x\right) \tag{25.28}$$

式中

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

h 为普朗克常数，J_x 表示角动量的 x 分量。于是，有

$$\mathcal{R}_x(\theta)\,|R\rangle = |R'\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\,|R\rangle \tag{25.29}$$

或者

$$\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\theta J_x\right]|R\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\,|R\rangle \tag{25.30}$$

一个算子 O 指数可以表示为

$$e^{O} \xlongequal{\text{def}} 1+\frac{O}{1!}+\frac{O^2}{2!}+\frac{O^3}{3!}+\cdots$$

将式(25.30)两边的指数展开,又由式(25.30)对所有的θ都有效,则有[①]

$$J_x\,|R\rangle = +\hbar|R\rangle \tag{25.31}$$

如果对左旋圆偏振光作类似分析,则

$$J_x\,|L\rangle = -\hbar|L\rangle \tag{25.32}$$

式(25.31)和式(25.32)通常被称为常说的"本征值方程",左旋圆偏振态和右旋圆偏振态被称为旋转算符J_x的"本征态",对应的本征值分别是$-\hbar$和$+\hbar$。根据量子力学理论,如果测量右旋圆偏振光子的J_x,则总是会得到$+\hbar$;同理,如果测量左旋圆偏振光子的J_x,则总是会得到$-\hbar$。对于任意一个偏振态,如果测量J_x,则会得到二者中的一个本征值,即,或者得到$+\hbar$,或者得到$-\hbar$。为求出得到$+\hbar$或$-\hbar$的概率,该偏振态应该表示成右旋圆偏振态或左旋圆偏振态这样的"本征态的"叠加。例如,一个y方向的线偏振态可以表示为

$$|y\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle+|L\rangle)$$

因此,如果测量y方向线偏振态(或z方向线偏振态)的角动量的x分量J_x,会有一半的概率得到$+\hbar$,一半的概率得到$-\hbar$。我们不可能预测某一次实验的确切结果[②]。正如在2.6节~2.9节中讨论过的,这就是量子力学的典型特征,即,物理学不再能预测确定的结果——只能预期某一次实验会出某一特定结果的概率。作为另一个例子,对于22.14节中讨论过的左旋椭圆偏振态,有

$$|LEP\rangle = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ -\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix} = a\,|R\rangle + b\,|L\rangle = \frac{a}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix} + \frac{b}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix}$$

经过简单地计算,得

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \approx -0.2588$$

$$b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \approx +0.9659$$

因此,如果测量该左旋椭圆偏振态的J_x,将会得到两个本征值其中的一个:得到$+\hbar$的可能性为0.0670,而得到$-\hbar$的可能性为0.933。

小　结

- 1887年,赫兹在用一个具有间隙的线圈接收到电磁波时,发现了间隙打火花,且当把装置放置在一黑盒子里面时,间隙火花的最大长度变短了。这是由现在已知的光电效应造成的,黑盒子吸收了紫外线,从而帮助电子穿过间隙。赫兹报告了这一观

① 比如,$J_x^3|R\rangle = J_xJ_xJ_x|R\rangle = \hbar|R\rangle$。

② 对于任意偏振态,必须将其表示成$|R\rangle$和$|L\rangle$的线性叠加。

察，但并没有继续深入探究，也没有试图对其进行解释。1897 年，J. J. 汤姆孙发现了电子，并于 1899 年证明了当一束光照射在金属表面时，有电子发出。这些电子现在被称作光电子，而该现象被称为光电效应。

- 与光电效应相关的一些特殊特性用以波动理论为基础的观点是不能解释的。例如，微弱紫色光逐出的电子具有比强黄色光逐出的电子具有更大的动能，但后者逐出的电子数量更多。1905 年，爱因斯坦对以上提到的这些特性提出了一个简单的解释。他假设，光是由能量为 $h\nu$（其中 ν 是光的频率）的光量子组成的，而光电子的发射是由单个能量子（即光子）和一个电子的相互作用导致的。爱因斯坦在他 1905 年的论文中写道："单频辐射表现得就像它是由相互独立的、能量大小为 $h\nu$ 的能量子组成的。"
- 1923 年，康普顿报道了他对于 X 射线被固体材料（主要是石墨）散射的研究，证明了散射光子波长的变化可以由假设光子具有动量 h/λ 来解释。康普顿效应给出了一个既具有能量、也具有动量的辐射量子可以散射电子的一个明确无误的例子。根据散射过程的动力学理论可以给出，散射波长改变的表达式为

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{m_0 c}\sin^2\frac{\theta}{2} \approx 0.0485\sin^2\frac{\theta}{2}$$

式中 θ 是光量子被散射的角度，m_0 表示电子的静止质量，$\Delta\lambda$ 的单位为 Å。康普顿发现上面的公式与他的实验测量结果符合得非常好。

习　题

25.1　（1）试计算一台 5mW 的激光器每秒钟发射的光子数，假设它发射光的波长为 6328Å。

[**答案**：1.6×10^{16}]

（2）让这束光正入射到一平面镜上，试计算光束作用在镜子上的力。

[**答案**：3.3×10^{-11}N]

25.2　假定一盏 40W 的钠光灯（$\lambda\approx5893$Å）向所有方向发光。试计算在离光源 10m 处，单位时间内光子通过与光束垂直的单位横截面积的数目（即光子流密度）。

[**答案**：$\approx10^{17}$个光子/($m^2\cdot s$)]

25.3　在光电效应中，一个光子完全被电子吸收。试证明：如果假设吸收光子的电子是自由的，能量守恒定律和动量守恒定律不能同时得到满足。（因此，电子必须被一个原子束缚，而当电子被逐出时，这个原子经受反冲。但由于原子的质量远大于电子质量，原子只获得很小一部分能量。这有点像一个乒乓球打到墙上，球的返回动量方向与初始相反，大小相等，且它的能量几乎保持不变。）

25.4　试证明：在康普顿散射实验中，光子能量损失的百分比随波长的缩短而增加。并计算当 $\lambda\approx0.711$Å 和 $\lambda\approx0.02$Å 时，能量损失百分比的最大值。前一波长对应于钼发射 X 射线的 K_α 线，后一波长对应于 RaC 发射的 γ 射线。

25.5　如果光电子是用蓝色光从某一金属表面击出的，那能否肯定地说，用黄色光或者用紫色光也能发生光电效应？

参考文献和推荐读物

1. F.G. Smith and T.A. King, *Optics & Photonics*, John Wiley, Chicester, 2000.
2. W. H. Cropper, *The Quantum Physicists and an Introduc-tion to Their Physics*, Oxford University Press, New York, 1970.
3. A. Einstein, 'On a heuristic point of view concerning the production and transformation of light', *Annalen der Physik*, Vol. **17**, 132, 1905.
4. M. Jammer, *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1965.
5. R.A. Millikan, *The Electron and the light-quanta from the experimental point of view*, Nobel Lecture delivered in May 1924, Reprinted in *Nobel Lectures in Physics*, Elsevier Publishing Co., Amsterdam, 1965.
6. Bohm, *Quantum Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1951.
7. R.S. Shankland (Editor), *Scientific Papers of A. H. Compton: X-ray and Other Studies*, University of Chicago Press, Chicago; 1975. [Most of the papers of A.H. Compton are reprinted here].
8. M. Born, *Atomic Physics*, Blackie & Son, London, 1962.
9. A.H. Compton, *A Quantum theory on the scattering of X-rays by light elements*, Physical Review, Vol. **21**, 483, 1923, Reprinted in Ref. 7.
10. A.H. Compton, *The Spectrum of Scattered X-rays*, Physical Review, Vol. **22**, 409, 1923. Reprinted in Ref. 7.
11. J. Townsend, *A Modern Approach to Quantum Mechanics*, McGraw-Hill Inc., New York (1992).
12. G. Baym, *Lectures on Quantum Mechanics*, W.A. Benjamin, Inc., New York (1969).

第七部分

激光与光纤光学

这一部分包含 4 章。第 26 章是关于激光器的讨论，1960 年发明的激光器已经大量应用于许多不同领域。第 26 章中讨论了激光器的基本物理原理以及激光器的特殊性质。接下来的 3 章是关于光纤光学和波导理论的内容，这个领域在 35 年来的发展，导致了通信系统的革命性变化。

第26章 激光导论

写于世纪之交的《世界大战》中，H.G.Wells讲述了火星人侵略并几乎征服地球的虚幻故事，他们的武器是一种神秘的“心之剑”，从中发射“光束幽灵”，所到之处，逃跑的人群一片片倒地，铅化为水，到处一片火海。今天，Wells的心之剑将在激光器中实现……

——托马斯·梅洛伊(Thomas Meloy)

重要的里程碑

1917年 爱因斯坦提出了受激辐射理论。

1954年 查尔斯·汤斯于1954年第一次利用受激辐射现象研制出一个叫做maser(取自microwave amplification by stimulated emission of radiation的首字母)的微波激射器，苏联的普罗霍罗夫和巴索夫也研制出相似的器件。

1958年 1958年，肖洛和汤斯将maser的理论延伸到光频段，为随后实现的名为laser的激光器器件打下了基础。汤斯、巴索夫和普罗霍罗夫由于他们在量子电子学领域基础工作上的贡献，获得1964年诺贝尔物理学奖。他们的工作为研制基于光波激射-微波激射原理的振荡器与放大器奠定了基础。

1960年 西奥多·梅曼用红宝石晶体第一次成功实现激光器在波长$\lambda\sim0.6943\mu m$的运行。

1961年 实现红宝石激光器运行几个月后，阿里·贾万和他的助手研制出第一台工作在$\lambda\sim0.6328\mu m$的气体激光器，即氦-氖激光器。

1961年 伊莱亚斯·史尼泽研制了第一台光纤激光器(用掺杂钕离子的冕牌玻璃作为增益媒质)。

1962年 四个独立的研究小组发明了半导体激光器(现在广泛地应用于光纤通信系统中)。

1963年 帕特尔发明了二氧化碳激光器($\lambda\sim10.6\mu m$)。

1964年 布里奇斯发明了氩离子激光器($\lambda\sim0.515\mu m$)。

戈依西克(J. E. Geusic)与他的合作者发明了掺钕钇铝石榴石激光器(Nd: YAG laser)($\lambda\sim0.515\mu m$)。

从此，利用各种如液体、离子气体、染料、半导体等材料研制的激光器不断出现。

26.1 引言

LASER是英文light amplification by stimulated emission of radiation的首字母缩写。从激光器中发射的光都有以下非常特殊的性质。

(1) 方向性好：激光束的发散通常只受到衍射的限制(见18.4节)，实际的发散角度要小于10^{-5}rad。利用方向性好的特点，激光器可用在勘测、远程传感、激光雷达等领域。

(2) 功率高：连续波激光器的功率～10^5W，脉冲激光器脉冲的总能量～50000J，可以用在焊接、切割、激光聚变等领域。

(3) 聚焦性好：由于激光束有很好的方向性，能量可以被聚焦在很小的区域～几个$(\mu m)^2$内，因此，可以用在外科手术、材料加工、光碟读写等领域。

(4) 单色性好：激光束只有非常窄的频谱宽度($\Delta\lambda$～10^{-6}Å)，可以用在全息术、光纤通信、光谱分析等领域。

由于激光束有如此独特的性质，从而在很多不同领域都有着重要的应用，因此，可以说有了激光器的发明，光学才成为非常重要的研究领域。例如，在例18.5中，证明了一个2mW的衍射极限激光束直射眼睛，在视网膜上能产生大约是10^6W/m^{2}的强度，这个强度会对视网膜造成损伤。直视一个500W的灯泡是安全地，而直视一个5mW的激光束却是相当危险。实际上，由于激光束能够聚焦在非常狭小的区域内，因此，激光被广泛应用在眼外科手术、激光切割等领域。

激光激射的基本机制是受激辐射现象，由爱因斯坦在1917年预言的(见文献[5][①])。在26.1节中，将首先讨论受激辐射现象，接下来对激光器的主要组成部分做简单讨论，以及介绍激光器工作的基本原理。26.2节将简单讨论光纤激光器的工作原理；26.3节中将讨论世界上第一台激光器——红宝石激光器的工作原理；26.4节将讨论氦-氖激光器；在26.5节中，将稍微详细讨论一下谐振腔；26.6节中讨论爱因斯坦系数和光放大；26.7节讨论激光线型函数；在最后的26.8节，讨论激光束的单色性。

26.1.1 自发辐射和受激辐射

原子具有分立能级的特性。爱因斯坦提出，一个原子与电磁辐射的相互作用有三种不同的途径。

(1) 自发辐射：处于上能级E_2的原子会(自发地)向下能级E_1跃迁，并发射出频率等于

$$\omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \tag{26.1}$$

的辐射，式中

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1.0546 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$$

h($\approx 6.626\times10^{-34}$J·s)是普朗克常量，由于这个过程无需其他任何辐射的诱导而存在，所以称作自发辐射(见图26.1(a))。自发辐射率正比于处在激发态的原子数目。

① 文献[5]是爱因斯坦原论文的重印本。

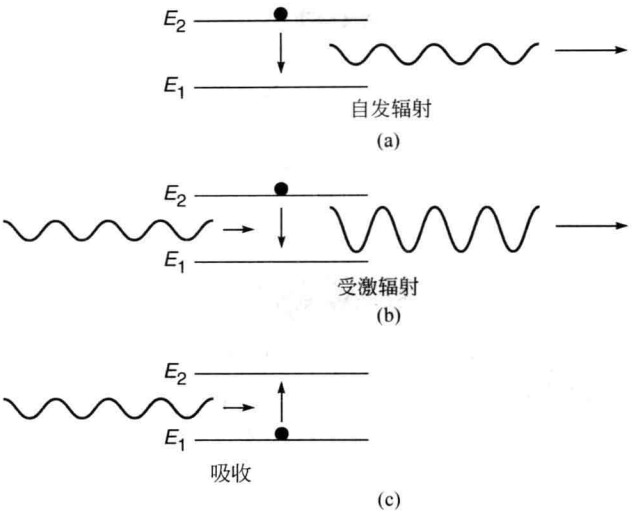


图　26.1

(a) 自发辐射；(b) 受激辐射；(c) 受激吸收

(2) 受激辐射：这种辐射方式是由爱因斯坦提出的。当原子处在激发态时，也可以通过受激辐射的方式跃迁到低能态，此时需要借助一具有合适频率的入射光的诱导，处于激发态的原子才发出辐射。这将导致对入射光进行放大(见图 26.1(b))。受激辐射率既依赖于外场的强度，也依赖于处于激发态原子的数目。

(3) 受激吸收：受激吸收(或简单地称为吸收)是具有特定频率(对应于两个原子能级的能量差)的电磁辐射场将原子泵浦到它的激发态的过程(见图 26.1(c))。受激吸收率既取决于外场强度，也取决于处于下能级的原子数目。

当大量原子处在热平衡状态时，更多的原子是处于低能态，因此，参与受激吸收的原子要多于参与受激辐射的原子，从而致使光束能量的衰减(见图 26.2(a))；另一方面，如果能够形成粒子数反转[①]，使更多的原子处于高能态，则参与受激辐射的原子将超过参与受激吸收的原子，光束将得到(光)放大(见图 26.2(b))。源于受激辐射的光放大过程是相位相干的，即，由分子系统发出辐射与激励辐射具有一样的场分布和辐射频率(引自文献[1])。

26.1.2　激光器主要组成部分

激光器由以下三部分组成(见图 26.3)。

(1) 激活媒质：激活媒质是原子、分子、离子的集合(可以是固体、液体或是气体形式)，它们都有放大光波的能力。在通常情况下，处在下能级的原子数目要多于处在上能级的原子。当电磁波通过时，能量都会衰减(将在 26.6 节中详细讨论)，为了实现光放大，媒质必须要保持粒子数反转的状态，即，要保持上能级的原子数目多于下能级原子数目的状态——为了保持该状态，要通过能量泵浦来实现。

(2) 泵浦源：利用泵浦机制，可以实现原子系统能级的两个能级间的粒子数反转状态。当获得粒子数反转状态后，入射光束会在受激辐射作用下得到放大(见图 26.4)。

① 也称为布居数反转。译者注。

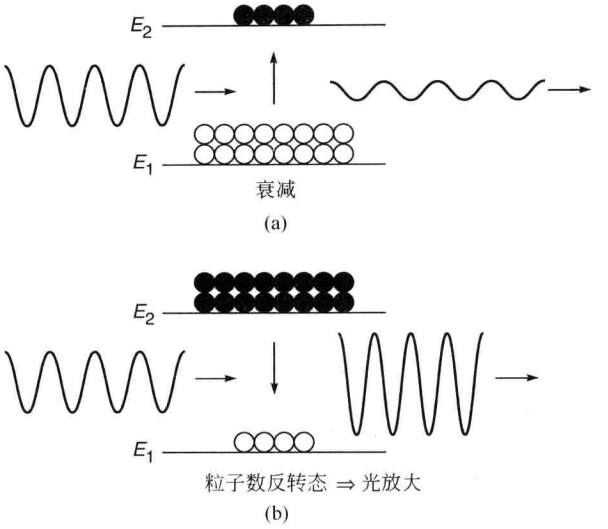


图 26.2

(a) 大量原子处于低能态,导致光束衰减;

(b) 大量原子处于高能态(即所谓粒子数反转分布),导致光束放大。

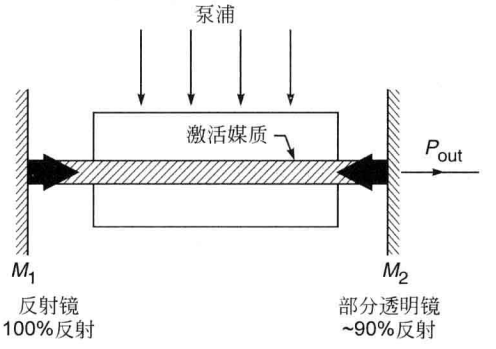


图 26.3 激光器的三个基本组成部分为:(1)激活媒质(提供放大媒质);(2)谐振腔(供选频和光学反馈);(3)泵浦(向激活媒质提供能量,达到布居数反转)。

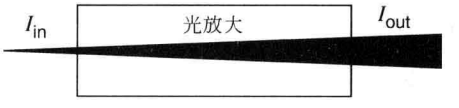


图 26.4 激活媒质本质上是由粒子数反转的一群原子组成,它们可以通过受激辐射放大入射光(或者在谐振腔中放大自发辐射种子光),这个过程称为光放大。

(3) 光学谐振腔:实现粒子数反转的媒质具有光放大的能力。但为了形成光振荡,一部分输出能量必须反馈回系统[①],这样,反馈循环可以通过将激活媒质放入谐振腔中来实现,这种谐振腔可以只是由一对彼此相对的镜面组成。

① 既然一部分能量耦合反馈回系统,因此可以称其为振荡器。实际上,在激光器研究的早期阶段,曾经有提议将其名称改成 LOSER,即 light oscillation by stimulated emission of radiation 的缩写。由于预测很难获得关于 LOSER 项目的研究经费支持,因此,大家决定仍然保留 LASER 的称谓。

需要在此提及的是，尽管爱因斯坦在 1917 年就已经提出了受激辐射理论，但粒子数反转放大光束的概念却是很久以后才出现，根据查尔斯·汤斯的说法[①]：

激光器的发明，是源于我非常希望能制造一个频率能达到红外光的激射器，来延伸我在微波频谱范围激射器的研究。我尝试了好几种方案，但都不能奏效。那时，我还担任一个为海军研制短波激射器方法的委员会的主席。1951 年，在华盛顿召开的委员会最后一天会议的早晨，由于工作屡屡失败的困扰，我早早地起床。穿戴完毕，我踱步到富兰克林公园，坐在长凳上欣赏着杜鹃花，并思索着我们的问题。

为什么不考虑一些工作在高频的物质呢？我梳理着各种选择的可能性，当然，应该包括能在高频振荡的分子。尽管我以前考虑过分子，但由于热力学的一系列定律[②]，我放弃了这样的想法。此时，我突然意识到："嗨，当分子处于非平衡状态时，不一定要遵守这些定律。"我立即从我的口袋中拿出一张纸，写下一些公式，如果选用分子束方法产生受激分子，是否能产生足够多的分子提供反馈振荡。哇！看起来是可行的。

我回到旅馆，遇到亚瑟·肖洛，将我的想法告诉了他……在我与肖洛于贝尔实验室持续合作，成功研制出令人兴奋的微波激射器 Maser 的几年后，微波激射器向光频延伸的工作获得成功。我相信，在激光器发明中的一个基本要素是，我在工程与物理上的双重经验：我既懂得量子力学，同时我又熟知反馈振荡器的运行机制及其重要性。

26.1.3　通过 EDFA 理解光放大

也许理解光放大的最简单方法是讨论一下 EDFA(掺铒光纤放大器)的工作原理。如图 26.5 所示，EDFA 本质上由一段 20～40m 长的纤芯掺有氧化铒(Er_2O_3)的二氧化硅光纤构成。在第 27 章和第 29 章中会详细讨论光纤的理论，此时只要知道，光在光纤中是通过全反射方式导光传播的就足够了(见图 27.7)。光纤纤芯直径的典型值是 2～3μm，铒离子的浓度约为 10^{25}个离子/m^3，如图 26.6 所示，给出了掺杂在宿主二氧化硅玻璃中 Er^{3+} 离子的第一个三能级结构。事实上，如图 26.6 所示的每个能级都由大量间隔很近的能级簇组成，为了分析简单，将其看成一个单能级。E_1(基态能级)和 E_3 的能级差对应的波长大约是 980nm，而 E_1 和 E_2 的能级差对应的波长约为 1530nm，也可表示为 $E_3-E_1\approx1.3\text{eV}$，$E_2-E_1\approx0.81\text{eV}$。

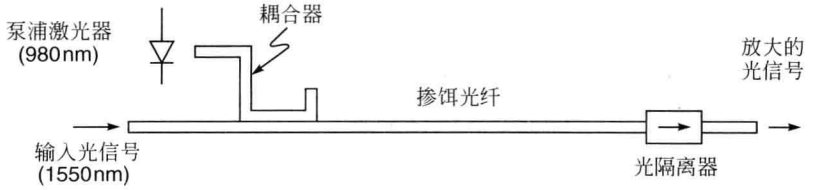


图 26.5　1550nm 的光脉冲输入掺铒光纤放大器(EDFA)，经过受激辐射得到放大。

当一束波长是 980nm 的激光束通过掺铒光纤时，处于基态 E_1 的原子吸收辐射能量跃迁到能态 E_3，由于这个激光束的作用是将原子抽运到高能态 E_3，通常称其为泵浦光。而处

① 查尔斯·汤斯，《激光与光纤光学》(短文)，参考网址：http://www.greatachievments.orgid=3717。

② 他在诺贝尔讲演稿(文献[4]是重印稿)中写道："为什么不利用大自然已经给我们准备好的原子和分子振荡器呢？该思想被人们重复地拒绝，已成为习惯。从热力学观点看，在任何温度下的电磁波与物质相互作用都不能产生放大。"然而汤斯认识到，当用某种方法实现粒子数反转分布时，辐射可以放大。再次引用汤斯的话："实现粒子数反转分布的条件无疑是分子群体处于一种非平衡态，因此，能够成功消除黑体辐射的极限。"

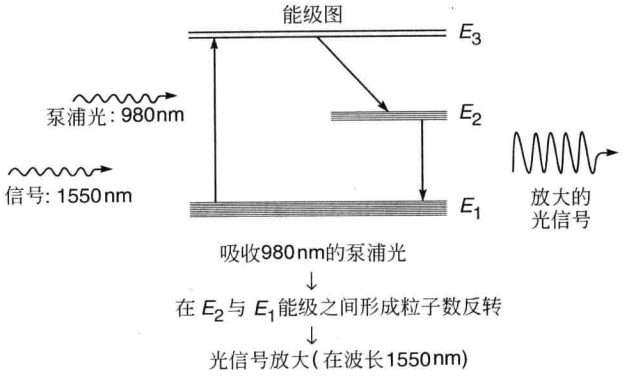


图 26.6　在二氧化硅中掺杂的铒原子能级图

于 E_3 能态上的原子总是立刻以非辐射的方式跃迁到 E_2 能态，且在非辐射跃迁中，没有光子发射，其能量的释放可以转化为宿主媒质的振动能量，导致媒质发热。E_2 能态是一个亚稳态，其特点是寿命长(几毫秒左右)，因此，虽然处于 E_2 能态上的铒原子可以通过自发辐射跃迁的方式到达 E_1 能态，然而由于寿命较长，原子可以在激发态上停留一段较长时间，才自发辐射跃迁到 E_1 能态。此时如果泵浦光的能量很大，积累到 E_2 能态上的铒原子的概率就很高，这样就能在 E_1 和 E_2 能级之间形成粒子数反转状态，即，处在 E_2 能态上的铒原子数目要多于处在 E_1 能态上的铒原子数目。一旦实现粒子数反转，波长为 1550nm 的信号光束会因受激辐射的存在而得到放大——这就是光放大的基本原理，也就是受激辐射光放大(见图 26.4)。相反地，如果处在 E_2 能态上的原子数要少于 E_1 能态上的原子数，此时，受激吸收的概率要超越受激辐射，导致 1550nm 的信号光衰减。如图 26.7 所示为泵浦光与信

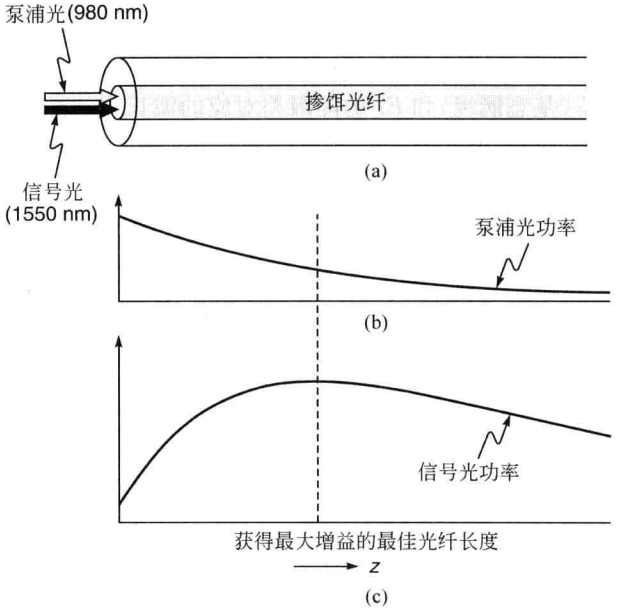


图　26.7

(a) 泵浦光(波长 980nm)与信号光(波长 1550nm)在掺饵光纤纤芯内的传输；
(b)和(c) 当泵浦光与信号光在掺饵光纤中传输时，其光功率随光纤长度的变化

号光强度随掺杂光纤长度的变化。注意到，由于能量被铒原子吸收，泵浦光能量会沿着掺饵光纤的传输逐渐衰减。通过这种吸收，这些铒原子形成粒子数反转态，使 1550nm 的信号光得到放大。然而，由于泵浦光随传播减弱，后面的铒原子不能再形成粒子数反转态，这样，信号光由于铒原子的吸收又逐渐衰减。因此，对于一个给定强度的泵浦光，存在一个最佳的掺铒光纤的长度，在此处会得到最大的光放大倍数。对于典型的掺铒光纤，有 Er^{3+} 离子浓度约为 7×10^{24} 个离子/m^3，泵浦光功率约为 5mW。掺铒光纤的最佳长度约为 7m。

EDFA 的典型增益谱(采用 50mW，980nm 的泵浦光)，如图 26.8(a)所示。增益通常用 dB 为单位，增益定义为

$$\text{增益(dB)} = 10\lg\frac{P_{\text{output}}}{P_{\text{input}}}$$

(对应最佳光纤长度的)增益一般在 20～30dB 之间。20dB 的增益等效于功率放大 100 倍，而 30dB 意味着功率放大 1000 倍。如果泵浦光的功率增加，最佳光纤长度和增益也会相应增加。此外，还可以通过多种技术使得增益谱在一定波长区域内变平(比如在 EDFA

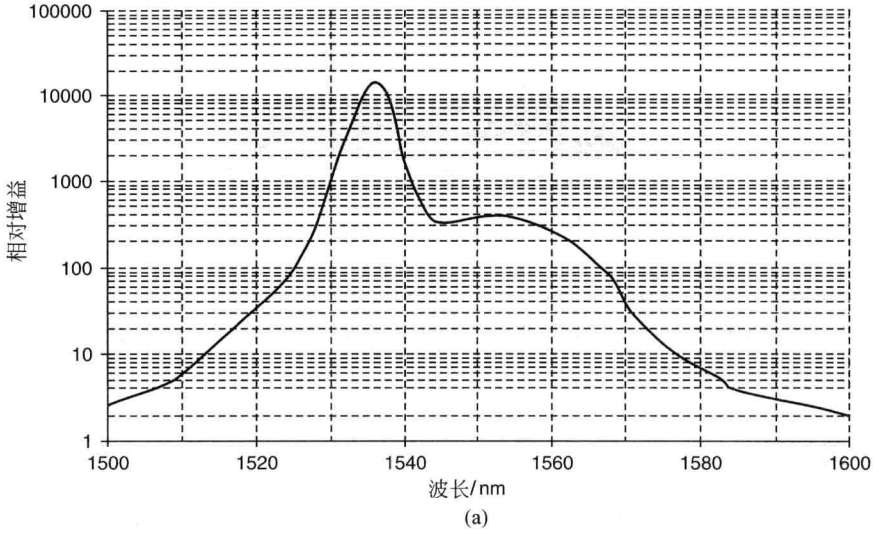


图　26.8

(a) 一个典型掺铒光纤放大器的增益谱，泵浦源为 50mW，980nm(改编自文献[10])；(b) 通过各种机制，可以将 EDFA 增益谱变平。对应于一个波长范围是 1530～1560nm 几乎平坦的 EDFA 增益谱(改编自文献[11])

后加一个适当的滤波器)。如图26.8(b)所示的EDFA的增益谱在1530～1560nm间几乎是一直线(增益约为28dB),28dB的增益对应功率放大631倍。1530nm<λ<1560nm的波长区域对于光通信是非常重要的波长范围(见第27章)[①]。

需要在此提及,也可以用两个激光二极管为掺铒光纤提供泵浦功率(见图26.9),对于商用的EDFA及其特点,将在26.10节中讨论。

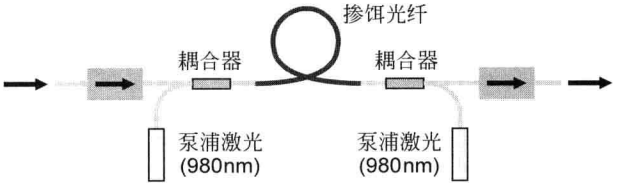


图26.9　一个简单的掺铒光纤放大器的原理图,其中用了两个激光二极管(LD)为掺饵光纤提供泵浦功率。图片引自http://www.rp-hotonics.com/erbium_doped_fiber_amplifiers.html。彩图见文前附录图表页的图30。



图26.10　位于加尔各答的CGCRI公司与位于科钦(位于印度的西南岸)的NeST公司联合开发的掺铒光纤放大器,其主要特性为:在1532～1565nm范围内能同时放大32个波长的光信号,(每个信道)的入射功率在－4dBm(≈0.4mW)到＋3dBm(≈2mW)之间,输出功率总是18dBm(≈63mW),增益平坦度为±0.5dB(照片得到CGCRI公司的Shyamal Bhadra博士与NeST公司的Suresh Nair博士的许可)。

26.1.4　谐振腔

前面提到,处于粒子数反转的媒质具有放大的能力,但是为了利用该媒质形成谐振,必须有一部分输出的能量反馈回系统。这样的反馈过程可以通过将激活媒质放入一对相向的镜面来实现(见图26.3)。像这样,由一对镜面组成的系统称为谐振腔,对于谐振腔稍微更详细的讨论将在26.5节中给出。由于腔的侧面通常是开放的,这样的谐振腔又称为开腔。一个腔内可以有多个特征的谐振模式存在,这些模式对应于不同的场分布和不同的频率[②]。可以将一个模式形象化为具有明确定义的横向幅度分布的波,该分布构成驻波。基模的横向强度分布通常是高斯型的(见式(26.13))。腔的开放特性使得能量在镜面处有衍射溢出,因此,所有的模式都存在着有限的损失。在这个基础损失以外,激光媒质的散射、镜面吸收和镜面处的耦合输出,也对谐振腔的损耗有贡献。在实际的激光器中,只有那些增益大于损耗的模式才能够维持谐振。当激光器谐振达到稳定状态时,损耗恰好被增益补偿。因为媒质增益决定于粒子数反转的程度,因此,每一个模式都有一个粒子数反转的临界值(称为粒

① 关于EDFA更多的细节,请参考文献[7,8]。

② 更详细的讨论,见文献[9]。

子数反转阈值），低于这个临界值，该模式将停止谐振。

26.1.5　激射过程

在激光器腔内的起振过程可以作如下理解：通过泵浦机制，建立起谐振腔系统内放置的激光媒质的粒子数反转分布状态，从而使媒质为能够在一特定频率范围进行相干放大做准备。谐振腔内存在的自发辐射激发出一系列的模式。对于给定的粒子数反转分布态，每个模式由源于增益的特定放大系数和源于腔内损耗的特定衰减系数来表征。其中那些损耗大于增益的模式将消失；而那些增益大于损耗的模式将从激光媒质获得能量而得到放大。这些模式的幅度急剧地增加，直到上能级的粒子布居数达到一稳定值，使增益等于损耗，此时，该模式的谐振在一个稳定状态上。当激光谐振达到稳定状态后，损耗恰好能被从媒质中获得的增益补偿，此时激光器的出射波可以由一连续波来表示。

26.2　光纤激光器

如果把掺杂的光纤放在两个镜面之间（如同一个谐振腔），则在适当的泵浦下形成一个光纤激光器（如图 26.11 所示）。实际上，在 1961 年，伊莱亚斯·史尼泽将一个闪光灯泡缠绕在一根玻璃光纤上（纤芯直径是 300μm，掺杂了 Nd^{3+} 离子，包层是折射率略低的玻璃）。当适当的反馈起作用时，第一台光纤激光器诞生了（见文献[12]）。在西奥多·梅曼演示他的第一台激光器不到一年后，光纤激光器就制作成功了。现如今，光纤激光器已实现商用，并由于其柔韧性和能输出高功率，在很多不同领域都有应用。如图 26.12 所示中位置略低的曲线是 EDFA 开始激射前的输出光谱；随着泵浦光的增加，EDFA 开始激射，尖峰对应着不同的谐振模式，光纤的两端面形成谐振腔。



图 26.11　一个简单的光纤激光器的结构。泵浦光通过左边分色镜注入掺杂光纤的纤芯，产生的激光在右边输出。图片引自网页 http://www.rp-photonics.com/fiber_lasers.html。

目前，光纤激光器在焊接、切割、钻孔以及医学手术等领域有着广泛的应用。如图 26.13 所示是一个安装在机器人系统上的 2kW 光纤激光器在切割低碳钢。

26.2.1　MOPA[①]（主振功率放大器）

主振功率放大器（MOPA）的结构包括一个主激光器（或称为种子激光器）和一个光放大器来提升输出功率。MOPA 的一个特例是主振光纤放大器（MOFA），其功率放大部分是一个光纤元件。尽管从原理上讲，与能直接产生所需输出功率的激光器相比，MOPA 的结

① 第一遍阅读时，可以跳过这一节。本节的文字内容及图 26.14～图 26.16 是由加尔各答 CGCRI 公司的 Mrinmay Pal 先生和 Kamal Dasgupta 先生提供的。

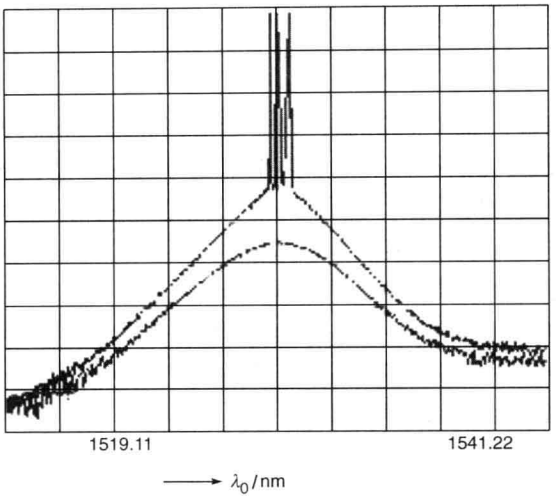


图 26.12　位置低和位置高的曲线分别对应于激射前和激射后 EDFA 的输出光光谱。图片由 Thyagarajan 教授和 Mandeep Singh 提供。

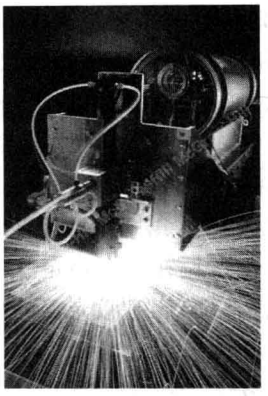


图 26.13　一个安装在机器人系统上的 2kW 光纤激光器在切割低碳钢。图片下载于因特网,彩图见文前附录图表页的图 33。

构更为复杂,但它的优势是更容易达到所需要的输出激光束性能。例如,即便在要求非常高的输出功率前提下,MOPA 输出的激光束仍能满足线宽、光束品质或者脉冲宽度方面的性能要求。在 MOPA 结构中(如图 26.14 所示),种子激光器由一个 54.7cm 的掺饵光纤(EDF)及两个高反射率的光纤布拉格光栅(FBG: Fiber Bragg Gratings)构成。在 15.6 节中已经讨论过 FBG,它在某一特定波长上具有高反射率,但带宽很窄。因此,两个 FBG 之间能够构成一个谐振腔。表 26.1 中列出了两个光栅的特性。掺饵光纤 EDF 具有 0.18NA 的数值孔径,光纤芯中铒离子的掺杂浓度为 500ppm。谐振腔中的 EDF 的泵浦源是一个波长为 976nm,功率为 100mW 激光二极管,通过波分复用耦合器将泵浦光耦合进 EDF。当阈值得到满足时,处于增益谱峰值处的波长开始激射。由于两个 FBG 的峰值波长存在微小的错位,需要将 FBG-Ⅱ轻微拉伸来与 FBG-Ⅰ进行峰值波长匹配。当两个峰值波长重合时,从 FBG-Ⅱ方向出射的激光束输出的功率最大、且光束品质非常好。如图 26.15 所示的 MOPA,种子激光器的激射波长是 1549.45nm、出射功率为 1mW。为了进一步放大激光输出功率,在谐振腔后面额外连接一个长 15m 的 EDF。用 976nm 激光二极管的剩余功率来泵浦。将一个光隔离器放在放大器后以避免背向反射,否则会劣化噪声指数。出射端的光功率可达到 16.05dBm(≈40mW)(见图 26.16),如果增加泵浦光功率,激光的出射功率会进一步增加。

表 26.1　MOPA 中的两个光纤布拉格光栅的特性

参数	FBG-Ⅰ	FBG-Ⅱ
峰值波长/nm	1549.456	1549.168
3dB 带宽/nm	0.344	0.216
反射率/%	99	90

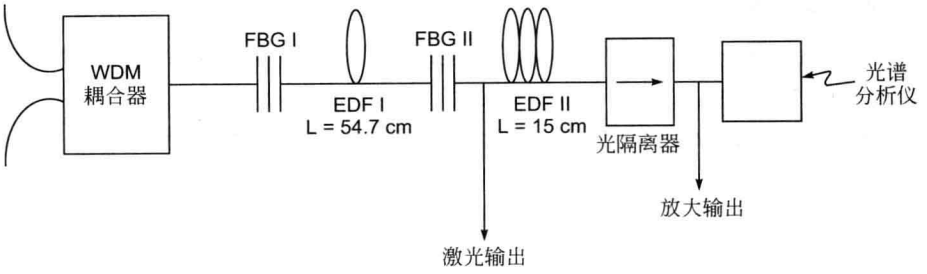


图 26.14　主振功率放大器(MOPA)的结构。

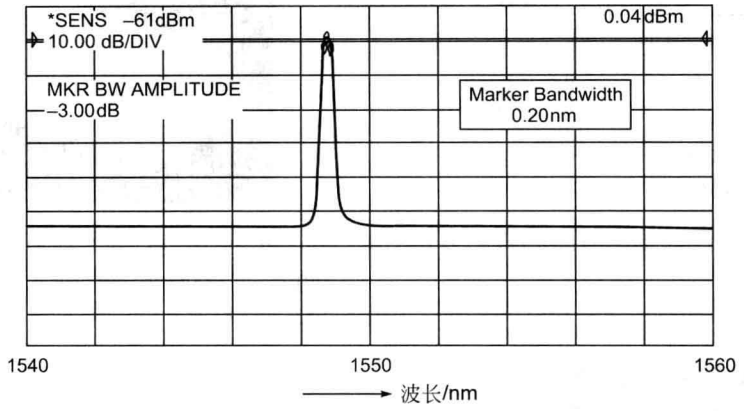


图 26.15　种子激光光谱，峰值波长为 1548.73nm，峰值功率为 −0.05dBm，激光谱宽 0.225nm。图片获得了加尔各答 CGCRI 公司的 Mrinmay Pal 先生和 Kamal Dasgupta 先生允许。

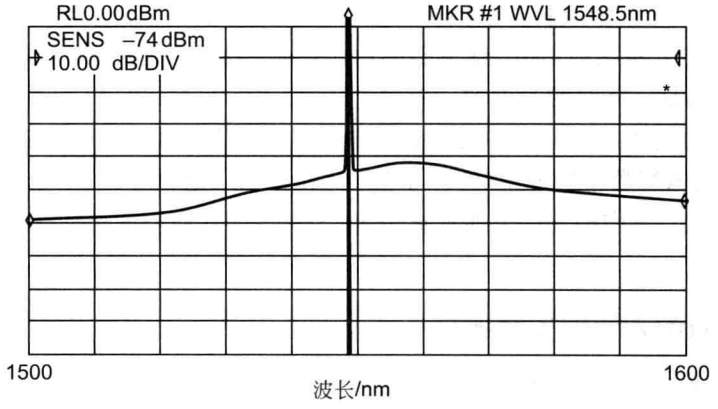


图 26.16　MOPA 输出的激光谱。

26.3　红宝石激光器

世界上第一台激光器是梅曼在 1960 年研制的(见文献[13])，该激光器是通过以下方式来实现粒子数反转分布状态的。将一个圆柱形的红宝石晶体棒两端切割成平面，一端全镀

银,另一端半镀银(见图 26.17 和图 26.18)。红宝石棒的成分是 Al_2O_3,其中有部分铝原子被铬原子替代[①]。如图 26.19 所示为铬离子的能级图。铬离子能级的主要特点是标记为 E_1 能带和标记为 E_2 能带的寿命$\sim 10^{-8}$ s,而标记为 M 能态的寿命$\sim 3\times 10^{-3}$ s。能态的寿命是指一个原子在跃迁到低能态之前,能够处在此激发态上的平均时间。具有这样长寿命的能态被称为亚稳态。

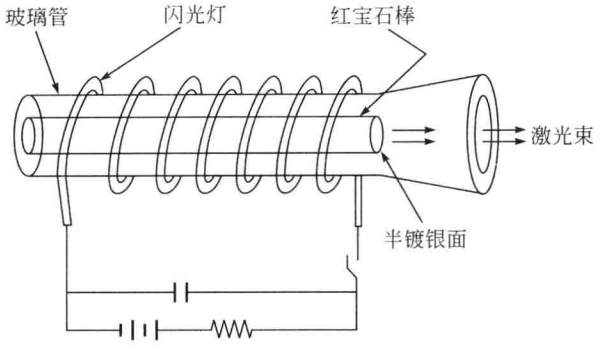


图 26.17　红宝石激光器。

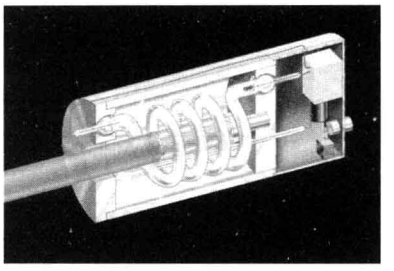


图 26.18　第一台红宝石激光器,图片引自 http://en.wikipedia.org/Ruby_laser。彩图见文前附录图表页的图 34。

处在基态的铬离子可以吸收一个光子($\lambda\sim 6600$Å)跃迁到 E_1 能带中的一个态;也可以吸收一个 $\lambda\sim 4000$Å 的光子跃迁到 E_2 能带中的一个态,这就是所谓的光泵浦,而被铬离子吸收的光子是由闪光灯产生的(见图 26.17)。不论上述的哪一种跃迁发生,都会立即($\sim 10^{-8}$ s)通过无辐射跃迁到亚稳态 M,在无辐射跃迁中,所产生的能量会被晶格吸收而不会以电磁辐射的形式出现。再者,由于 M 能态有非常长的寿命,处于 M 能态的原子数会持续增加,就会在 M 与 G 能态之间形成粒子数反转。这样,就在 M 与 G 能态上聚集了大量的原子,一旦实现粒子数反转分布状态,加上红宝石的两个反射端面形成的谐振腔,光放大就可以实现。红宝石激光器是三能级激光器的一个例子。

在梅曼最初的装置中,闪光灯(充满氙气)与一个充值到几千伏电压的电容器相连(见图 26.17),存储在电容器中的能量(约几千焦耳)可以在几毫秒穿过氙气灯放电,这将导致几兆瓦的功率产生。其中的一部分能量被铬离子吸收,导致向高能态的激发,以及随后的激射行为。

26.3.1　红宝石激光器的尖峰现象

闪光灯的闪光行为可以使激光器产生脉冲状的输出。即使在红宝石激射为几十毫秒的短时间段内,还是可以看到激光辐射是由许多高强度的尖峰组成的,如图 26.20 所示。这种现象称为尖峰现象,它可以按如下的解释。当泵浦过程突然启动且超过激射门限的值时,粒子数反转随之形成且超过阈值。作为结果,快速产生的光子数要远远高于稳态值。既然快

① 作为掺杂铬离子的媒质,Al_2O_3 晶体称为宿主晶体。宿主晶体的特性影响着激射过程,也会引起激活铬原子能级的展宽。为达到最佳的激射过程,红宝石晶体内包含(以重量计)0.05%的铬。掺杂更高浓度铬的红宝石棒也已被使用。对于宿主晶体的更详细讨论参见文献[14]。

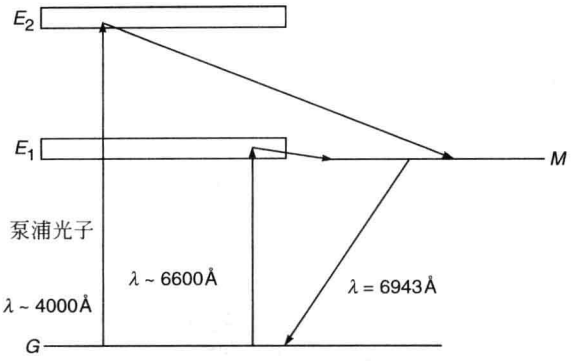


图 26.19　铬离子的能级图，G 和 M 分别表示基态和亚稳态

速产生的光子数要远远高于稳态值，处于上能级的原子数减少率要远远大于泵浦导致的增加率，结果，粒子数反转分布变得低于阈值，从而激射停止。这样，辐射会暂停几微秒。但在此时，闪光灯的泵浦作用再次将原子从基态泵浦到高能级，激光激射再次开始。这种过程自发地不断重复，直到闪光灯的功率降到阈值以下，随之激射过程停止（见图 26.20）。

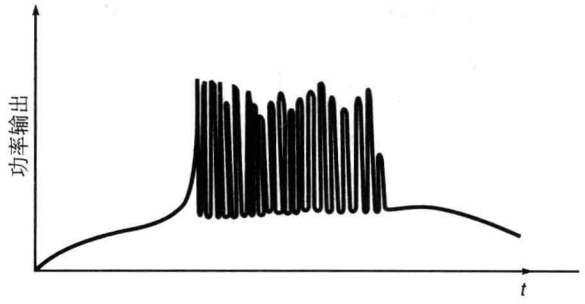


图 26.20　红宝石激光器的尖峰现象

26.4　氦-氖激光器

本节将简单地讨论一下氦-氖激光器，氦-氖激光器是由阿里·贾万和他的同事在贝尔电话实验室研制成功的（见文献[15]），同时，这也是第一台成功运行的气体激光器。

氦-氖激光器是将氦气和氖气 10∶1 的混合气体注入一根细长的放电管中（见图 26.21 和图 26.22）。放电管内的压强约为 1 托[①]。此系统的气体被两端的一对平面镜或一对凹面镜包围，从而形成一个谐振系统。其中一个镜面有非常高的反射率，而另一个镜面是部分透明的，以便使能量可以从系统中耦合出来。

氦和氖原子的头几个能级如图 26.23 所示。当电流通过气体放电时，电子沿着放电管运动并与氦原子发生碰撞，将氦原子（从基态 F_1）激发到标记为 F_2 和 F_3 的能级上。这些能级都是亚稳态，即，氦原子激发到这些能级，并能够在该能级上停留足够长的时间，才会通过

① 一托＝1mmHg＝133Pa≈133×10^{-5}N/m^2；单位“托(Torr)”来源于托里切利(Torricelli)的名字，他是 17 世纪意大利的数学家，发明了水银气压计。

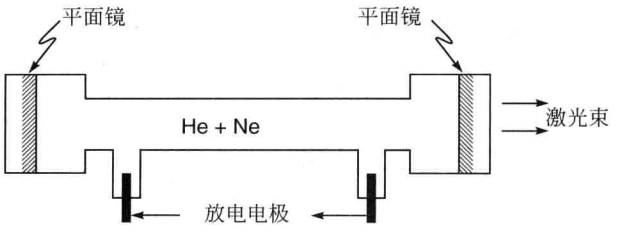


图 26.21　氦-氖激光器。

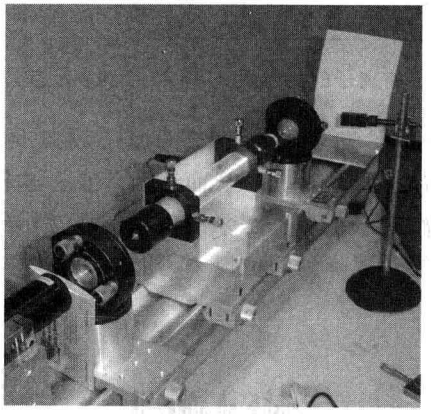


图 26.22　在巴黎大学 Kastler-Brossel 实验室展示的氦-氖激光器。管中心的辉光是像氖灯一样的电子放电发光,气体中的氖是激光穿过时的增益媒质。可以从管侧面看到的放电发光不是激光束本身,管外的激光束穿过空气在右侧的屏幕上打上了一个红点。图片引自 http://en.wikipedia.org/wiki/laser。彩图见文前附录图表页的图 35。

原子的碰撞丧失能量。氖原子通过碰撞将被激发到标记为 E_4 和 E_6 能级上,它们与氦原子的 F_2 和 F_3 能级具有几乎相等的能量。因此,处于 F_2 和 F_3 能级的氦原子与未激发的氖原子碰撞时,会将氖原子分别激发到 E_4 和 E_6 能级上。总结起来,将经历以下两个过程。

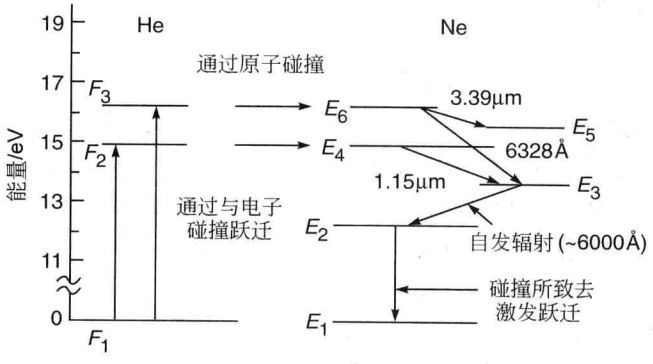


图 26.23　氦和氖的相关能级

(1) 处在基态 F_1 上的氦原子+与电子碰撞→处在激发态(F_2 或 F_3 上)的氦原子+动能更低的电子。

(2) 氦原子的激发态(F_2 和 F_3)是亚稳态[①]——不会通过自发辐射迅速丧失能量(激发态的辐射寿命可以达约 1h)。然而,它们可以通过与氖原子的碰撞来迅速释放能量:

处于激发态 F_3 上的氦原子+处于基态上的氖原子→处于基态的氦原子+处于激发态 E_6 上的氖原子。

同理,有:

处于激发态 F_2 上的氦原子+处于基态上的氖原子→处于基态上氦原子+处于激发态 E_4 上的氖原子。

这导致在能级 E_4 和 E_6 上有相当大数目的原子布居数,处于这些能级上的原子布居数恰好远远大于处于低能级 E_3 和 E_5 能级上的原子布居数。这样,粒子数反转分布状态(布居数反转态)就得以实现,此时,任何自发辐射的光子都可以触发如图 26.23 所示的任意三种跃迁[②]的激射过程。氖原子将从激射过程跃迁后的低能级通过自发辐射掉到 E_2 能级,氖原子又通过与管壁的碰撞从 E_2 能级回到基态。从 E_6 到 E_5,E_4 到 E_3 和 E_6 到 E_3 的跃迁分别对应着波长为 3.39μm,1.15μm 和 6328Å 的激光辐射。注意,波长为 3.39μm,1.15μm 的激光跃迁不处于可见光区域,6328Å 的跃迁对应的是众所周知的氦-氖激光器发出的红色激光。在不同频率的激光中选择所要的激光,可以通过选择采用对所需激光的波长段有很高反射率的端面腔镜来实现。对氦和氖两种气体压强的选择要确保持续粒子数反转的条件,这就需要有氦原子向氖原子转移足够能量的条件。此外,由于 E_2 能级是亚稳态,电子与处在 E_2 能级上的原子碰撞后,会有可能激发到 E_3 能级上,从而减少了粒子数反转率。因为承载氦-氖混合气体的放电管做的很细,可以使处在 E_2 能级上的氖[③]原子与管壁碰撞产生去激发效应。如图 26.23 所示,标记 E_2,E_3,E_4,E_5 和 E_6 的能级附近实际上存在着大量精细的能级组群,而只有重要的激光跃迁对应的能级加以了标记[④]。

总体来说,气体激光器发出的激光具有更好的方向性和更好的单色性。这是因为气体激光器中不存在所谓的晶格缺陷、热变形和散射效应,而这些效应存在于固体激光器中。此外,气体激光器无需冷却就可以连续工作。

26.5　光学谐振腔

在 26.1 节中已经简单讨论过一束光通过一个处于粒子数反转分布状态的合适媒质,则这束光将得到放大。为构造一个谐振器,它可以作为光源提供光能量,那么,就必须将一部分输出光反馈耦合进入媒质。可以通过将激活媒质放在两个镜面之间来实现,镜面能将大部分的出射能量反射回系统,见图 26.3。这样的具有两个镜面的系统称为谐振腔。

为了使系统能够输出光束,其中一个镜面需要做成是部分反射的。试想,一个光波从一个镜面开始向另一个镜面传播,在经过激活媒质后,光得到放大。如果第二个镜面是部分反射的,那么,光波会部分地透射过去,而剩余部分被反射回第一个镜面。在向第一个镜面传

① 在光谱学上,能态 F_1,F_2 和 F_3 分别记为 1^1S_0,2^3S_1 和 2^1S_0。

② 即 E_6→E_5、E_6→E_3 和 E_4→E_3 的跃迁。译者注。

③ 原文是氦原子。译者注。

④ 关于氦-氖激光器更详细的讨论,可以参考文献[16,17]。

播时,光波再次得到放大,且回到开始位置。这样,在两个镜面之间,同时存在两个相向传播的光波。如果形成谐振,需要满足条件:光波经历一圈的传播回到原始位置,且与此处已存在的光波同相位。为了满足这一条件,光波完成一圈传播,导致的总相位变化必须是 2π 的整数倍,这样才能在腔内形成驻波。用 d 表示腔的长度,则该条件可以写为

$$\frac{2\pi}{\lambda}\times 2d = 2m\pi, \quad m = 1,2,3,\cdots \tag{26.2}$$

式中 λ 是腔内媒质辐射的波长。如果用 n_0 表示腔内媒质的折射率,则

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n_0} \tag{26.3}$$

如果将 $\lambda_0 = c/\nu$ 代入,式(26.2)可变为

$$\nu = \nu_m = m\frac{c}{2n_0 d} \tag{26.4}$$

它给出了不同模式谐振的分立的频率值。如果假设

$$n_0 \approx 1$$

(如氦-氖激光器的情形)式(26.4)可以简化为

$$\nu = \nu_m = m\frac{c}{2d} \tag{26.5}$$

不同的 m 给出了不同的谐振频率,可以形成腔的纵模。对于纵模更加详细的讨论以及称其为纵模的原因介绍,可以参考其他任何一本关于激光器的教材[①]。相邻的两个纵模之间的频率间隔可以表示为

$$\delta\nu = \frac{c}{2d} \tag{26.6}$$

回到式(26.4),对于一个实际的光学谐振腔,m 是一个非常大的数,例如,对于一个长度 $d\approx 60\text{cm}$ 的光学谐振腔,工作频率为 $\nu\approx 5\times 10^{14}\,\text{Hz}$(对应波长为 $\lambda\approx 6000\text{Å}$),可以得到

$$m \approx \frac{5\times 10^{14}\times 2\times 60}{3\times 10^{10}} = 2\times 10^{6}$$

由式(26.4)可知,谐振腔只支持激发那些经历一圈传播后相位变化是 2π 的整数倍频率。在此需要提出的是,两个相对的平镜面组成的开放谐振腔正是在第16章中讨论的法布里-珀罗干涉仪。它们之间最大的区别是,法布里-珀罗干涉仪的两镜面间距远小于镜面的横向尺寸,而光学谐振腔的情形恰好相反。在16.3节中已经证明,当一束光正入射到法布里-珀罗干涉仪上时,形成传输谐振的条件是

$$\delta = \frac{4\pi d}{\lambda_0} = 2m\pi, \quad m = 1,2,3,\cdots \tag{26.7}$$

其中已假设 $n_0 = 1$,且由于是正入射,所以 $\cos\theta = 1$。比较式(26.2)和式(26.7),可得出在腔内能存在的传输谐振模式。

例 26.1 考虑一束中心频率 $\nu = \nu_0 = 6\times 10^{14}\,\text{Hz}$,频谱宽度 7000MHz 的光,正入射在如图 26.24 所示的谐振腔上,其中 $n_0 = 1$,$d = 10\text{cm}$,则相邻两个模式的频率间隔为

$$\delta\nu = \frac{c}{2d} = 1500\text{MHz} \tag{26.8}$$

① 比如,参见文献[4,9,14,16,17]。

因此，输出光中将有以下几个频率

$$\nu_0 - 2\delta\nu, \quad \nu_0 - \delta\nu, \quad \nu_0, \quad \nu_0 + \delta\nu, \quad \nu_0 + 2\delta\nu \tag{26.9}$$

对应的 m 分别为

$$399998, 399999, 400000, 400001, 400002 \tag{26.10}$$

在例 26.1 中，如果一个镜面的反射率是 $R=0.95$，对应的其中一个模式的输出功率是 1mW，则在腔内该模式对应的功率是 1mW/(1−0.95)=20mW。

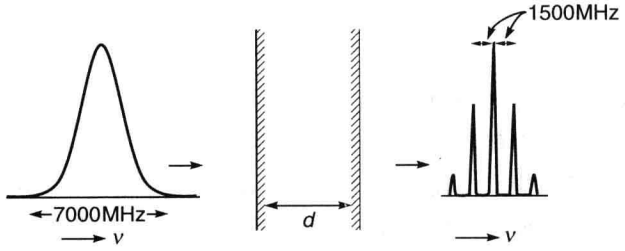


图 26.24　左侧是一中心频率为 $\nu=\nu_0=6\times10^{14}$ Hz、谱宽为 7000MHz 的光束，正入射到一谐振腔上，右侧是对应光学谐振腔内不同谐振频率的输出光束的频谱。

如图 26.25(b)所示为一个典型的多纵模(MLM)激光器的输出光谱，相邻两个模式的波长间隔大约为 0.005μm。

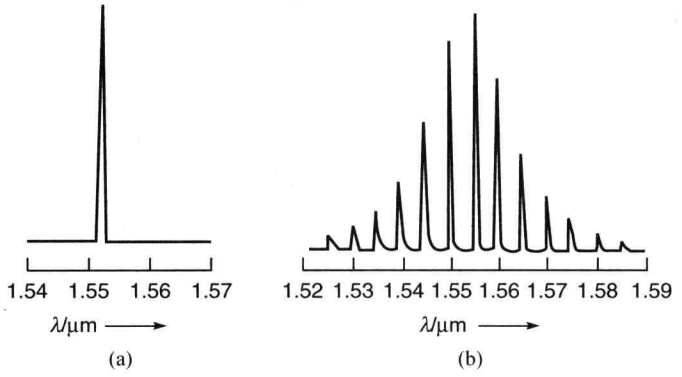


图　26.25

(a) 一个典型的单纵模激光器的输出光谱；(b) 一个典型的多纵模(MLM)激光器的输出光谱。

式(26.4)决定了谐振腔中不同的谐振频率，在得到该式时，我们假设了平面波可以在谐振腔内不受限制地往复传播，这在实际中是不可能实现的，这是因为任何一个实际的谐振腔系统，其镜面的横向尺寸都是有限的。因此光波中只有那些投射到镜面上的部分会被镜面反射，而那些位于镜面横向尺寸外的波的部分将从谐振腔中溢出。传播回到第一个镜面的光波有有限的横向尺寸，这由镜面的横向尺寸决定。正如在第 18 章和第 20 章中已经讨论的，一个具有有限横向尺寸的光束在传播过程中将发生衍射。所以，当光束传播回第一个镜面时，其横向尺寸会比镜面尺寸大。此外，既然光波中只有被镜面阻挡的那部分被反射回来，而其余在镜面尺寸外的部分因溢出损失了，这就构成了基本的损耗机制，称为衍射损耗。

考虑一个谐振腔，镜面横向尺寸为 a，镜面间隔为 d，由式(18.26)可知，经过一个镜面反射后，光波将产生一个衍射发散角$\sim\lambda/a$，而一个镜面对应于另一个镜面的张角是$\sim a/d$，因此，衍射损耗是很低的，有

$$\frac{\lambda}{a} \ll \frac{a}{d}$$

或者

$$\frac{a^2}{\lambda d} \gg 1 \tag{26.11}$$

$a^2/\lambda d$ 称为菲涅耳系数。例如,若谐振腔的镜面尺寸为 1cm,镜面间隔为 60cm,相对于波长为 5000Å 的光,有

$$\frac{a^2}{\lambda d} \approx 330 \gg 1$$

衍射损耗非常小。由两个相互平行的平镜面组成的谐振腔,其损耗对两个镜面间的平行度有非常大的敏感性,因此,一个小角度的不平行就将导致很大部分的光能量溢出谐振腔。利用球面镜构成的谐振腔可以降低能量损耗(见图 26.26)。球面镜有助于会聚光束,从而大大降低因衍射溢出造成的损耗。可以证明,只有将球面镜弧度和镜面间距进行一些特定的综合组合,才能保证谐振腔的低衍射损耗,这样的谐振腔称之为稳定腔。谐振腔的稳定条件表示为

$$0 \leqslant \left(1-\frac{d}{R_1}\right)\left(1-\frac{d}{R_2}\right) \leqslant 1 \tag{26.12}$$

式中 R_1 和 R_2 分别为两镜面的曲率半径。如图 26.27 所示为几种不同的谐振腔结构。如图 26.28 所示为腔的稳定区域图,阴影区域对应于稳定腔结构。在一个稳定腔中,光线具有可以在两镜面间来回地反射,却不会逃离腔的束缚的特点。如图 26.28 所示,像平面平行腔、

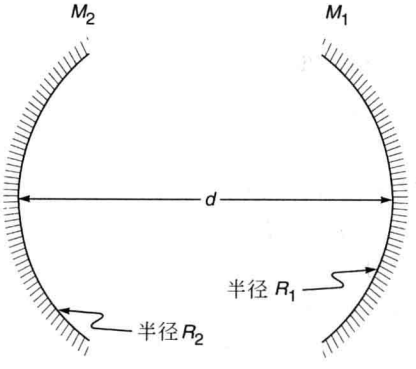


图 26.26 由两个球面腔组成的谐振腔

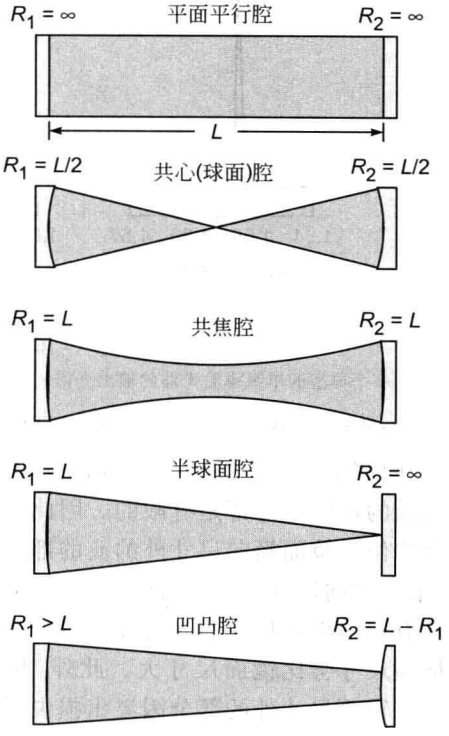


图 26.27 不同结构的光学谐振腔。图片引自网页 http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Optical-cavity1.png。彩图见文前附录图表页的图 36。

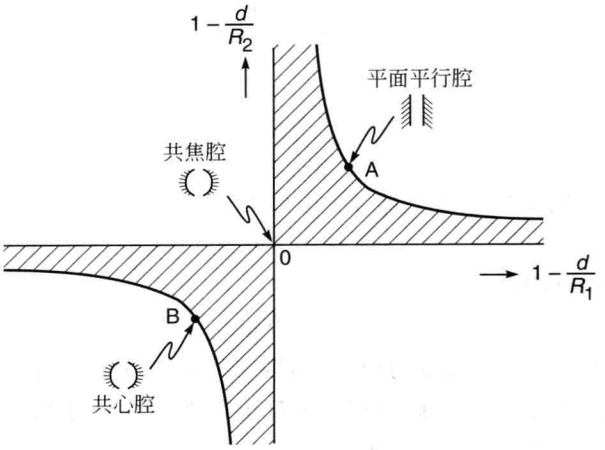


图 26.28　光学谐振腔的稳区图，阴影区域对应于稳定腔结构

共焦腔、共心腔的结构处于稳定图像的边缘上，因此，只要其参数有一个微小的变化就会导致系统不稳定。所以，要尽量使用位于阴影区内的那些腔结构，它们有很小的衍射损耗。

可以证明，在一个稳定的光学谐振腔中，只有具备一些特定的横向场分布结构，当光波在腔内连续传播几个来回后，仍能保持其场分布不变。这些场分布结构称为谐振腔的横向模式。既然只有当那些经过连续几次反射之后不会有额外能量损失的模式才会产生激光振荡，因此，很显然，可以产生振荡的模式几乎是沿着谐振腔的轴线传播的，因为只有这样，在两反射镜间传播时，才不会产生可观的衍射损耗。通过详细的数学分析可以证明，对于满足 $a^2/\lambda d \gg 1$ 的谐振腔，其基横模近似为一个高斯场分布，即

$$\psi(x,y) = \psi_0 \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}\right) \tag{26.13}$$

式中 w_0 表示光束的光斑尺寸。（在 18.5 节中，已经详细研究了这种高斯光束的衍射问题）

式(26.4)给出了谐振腔的不同谐振频率，且不同的谐振频率与谐振腔的不同横向模式相对应。通常而言，对应这些模式的谐振频率都有一个有限的频谱宽度，这是由于腔内存在着许多损耗机制造成的，比如衍射损耗、吸收损耗、反射损耗等。

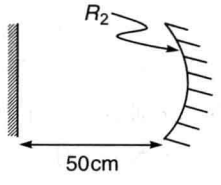


图 26.29　一个简单的谐振腔由一个平面镜和一个半径为 $R_2\left(\approx d\left(1+\frac{\pi^2 w_0^4}{\lambda^2 d^2}\right)\right)$ 的凹面镜组成。

如图 26.29 所示为一个简单的谐振腔结构，由一个平面镜和一个球面镜组成，距离为 d，实际上，红宝石激光器就是采用这种结构来产生单横模振荡。考虑一个高斯光束在两镜面处的等相位面与镜面都重合，且假设在 $z=0$ 处，波前为平面，如果（在 $z=0$ 处）光斑尺寸为 w_0，则传输距离 z 以后，波前的曲率半径为（见 20.5.2 节）

$$R \approx z\left(1+\frac{\pi^2 w_0^4}{\lambda^2 z^2}\right) \tag{26.14}$$

如果用 R_2 表示凹面镜的曲率半径，则当在等相位面与凹面镜重合时，必须有

$$R_2 \approx d\left(1+\frac{\pi^2 w_0^4}{\lambda^2 d^2}\right) \tag{26.15}$$

整理后,有

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda d}{\pi}}\left(\frac{R_2}{d}-1\right)^{\frac{1}{4}} \tag{26.16}$$

例 26.2 对于经典的氦-氖激光器($\lambda=0.6328\mu m$),$d\approx 50cm$,$R_2=100cm$,有

$$w_0 \approx 0.32mm$$

如果将 R_2 增加到 200cm,则

$$w_0 \approx 0.38mm$$

观察可以发现,当 $R_2<d$ 时,w_0 将变为虚数,谐振腔将会变得不再稳定。

对于一个闭合谐振腔系统,(可以得到放大且可以在实际尺寸的谐振腔内振荡的)模式的数目将会变得很大,以至于输出光远非单色光。为了克服这个问题,可以采用开腔结构。开腔结构只可能存在少数模式甚至单模(可以起振)的情况。此外,在谐振腔的开面可以用来进行光泵浦,比如红宝石激光器就是这样的。由于是开腔,在腔镜面处因衍射有能量的溢出,所有的模式都有一定的损耗。在此基础损耗外,激光器媒质对光波的散射、镜面处的吸收以及耦合输出都会引起腔损耗。可以将模式形象化成一个波动,它具有确定的振幅横向分布,该分布形成驻波图样。在实际的激光器中,可以维持振荡的模式,其由激光媒质获得的增益可以补偿腔损耗。当激光器振荡进入稳定的状态后,增益刚好补偿损耗。既然由媒质提供的增益依赖于粒子数反转分布的程度,则对于每一个模式,都存在着一个粒子数反转分布的临界值(称为粒子数反转阈值),当对应于某一特定模式的粒子数反转分布低于阈值时,该模式在激光器中将停止振荡。

26.6 爱因斯坦系数和光放大

爱因斯坦在考虑对原子和辐射场之间的热力学平衡如何进行描述过程中,产生了受激辐射过程的预言。设想一个原子有两个能量状态,用 N_1 和 N_2 分别表示处于状态 1 和状态 2 上(单位体积)的原子数目,对应的能级是 E_1 和 E_2(如图 26.30 所示)。如前所述,处于下能级的原子可以吸收辐射同时激发到上能级 E_2 上。这个激发过程只有遇到辐射时才能发生,且吸收的速率取决于具有特定频率的辐射场密度,该辐射场的频率与两个能级间的能量差相对应。因此,如果有

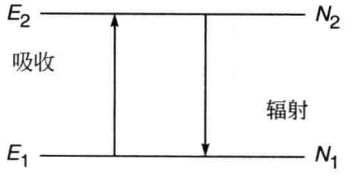


图 26.30 E_1 和 E_2 表示原子的两个能级,N_1 和 N_2 表示分别处于能级 E_1 和能级 E_2(单位体积内)的原子数。

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega \tag{26.17}$$

则该吸收过程就取决于具有频率为 ω 的辐射场的能量密度,该能量密度用 $u(\omega)$ 表示,并定义

在频率区间 $\omega \sim \omega+d\omega$ 内,单位体积的辐射场能量 $= u(\omega)d\omega$

吸收速率正比于 N_1，同时也正比于 $u(\omega)$，可以写为

$$\text{单位时间单位体积内发生吸收的原子数目} = N_1 B_{12} u(\omega) \tag{26.18}$$

式中 B_{12} 是比例系数，反映了能级的特性。

现在考虑相反的过程，即，原子以去激发的方式从能级 E_2 跃迁到 E_1，产生频率为 ω 的辐射发射的过程。正如 26.1 节中提到的，一个处在激发态的原子可以通过自发辐射或是受激辐射的方式之一，辐射跃迁到低能态上。如果是通过自发辐射发生的跃迁，单位时间内原子向下跃迁的概率与辐射场的能量密度无关，而只取决于和辐射跃迁相关的能级。（单位体积内）从能级 E_2 跃迁到 E_1 的自发辐射速率正比于 N_2，且有

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = -A_{21} N_2 = -\frac{N_2}{t_{sp}} \tag{26.19}$$

式中 A_{21} 表示比例系数，称为爱因斯坦 A 系数，它与参与跃迁的能级对有关。且有

$$t_{sp} = \frac{1}{A_{21}} \tag{26.20}$$

表示上能级的自发辐射寿命。式(26.19)的解为

$$N_2(t) = N_2(0)\mathrm{e}^{-\frac{t}{t_{sp}}} \tag{26.21}$$

意味着在 t_{sp} 时间内能级 2 上的原子布居数降低到原来的 1/e。例如，对于氢原子 $2P \rightarrow 1S$ 的跃迁，$A \approx 6\times10^8\,\mathrm{s}^{-1}$，得到其平均寿命($\approx 1/A$)为 $1.6\times10^{-9}\,\mathrm{s}$[①]。如果是通过受激辐射发生的跃迁，向下能级跃迁的速率正比于处于上能级的原子数，同时还正比于具有频率为 ω 的辐射能量密度，即

$$\text{（单位时间单位体积内）发生受激辐射的原子数目} = N_2 B_{21} u(\omega)$$

式中 B_{21} 表示相应的比例常数。A_{21}，B_{12} 和 B_{21} 称为爱因斯坦系数，由原子系统决定。在热平衡下，向上迁移的原子数必然等于向下跃迁的原子数，可得(热平衡条件下)

$$N_1 B_{12} u(\omega) = N_2 A_{21} + N_2 B_{21} u(\omega)$$

或者

$$u(\omega) = \frac{A_{21}}{\frac{N_1}{N_2} B_{12} - B_{21}} \tag{26.22}$$

根据热力学的基本原理，热平衡时，处于两个能级的原子布居数的比值存在如下关系

$$\frac{N_1}{N_2} = \exp\left(\frac{E_2 - E_1}{k_B T}\right) = \exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) \tag{26.23}$$

k_B($=1.38\times10^{-23}\,\mathrm{J/K}$)表示玻尔兹曼常数，$T$ 表示绝对温度。式(26.23)称为玻尔兹曼定律(严格来说，应为玻尔兹曼分布律)。因而，有

$$u(\omega) = \frac{A_{21}}{B_{12}\mathrm{e}^{\hbar\omega/(k_B T)} - B_{21}} \tag{26.24}$$

在热平衡时，还可以由普朗克黑体辐射定律得到辐射能量密度为

$$u(\omega) = \frac{\hbar\omega^3 n_0^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/(k_B T)} - 1} \tag{26.25}$$

① 见文献[19]的第 26 章和第 27 章。

式中 n_0 为媒质的折射率，比较式(26.24)和式(26.25)，可得[①]

$$B_{12} = B_{21} = B \tag{26.26}$$

且有

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{\hbar\omega^3 n_0^3}{\pi^2 c^3} \tag{26.27}$$

请注意，如果不做出受激辐射存在的假设，就不能得到与普朗克黑体辐射定律一样的 $u(\omega)$ 表达式。爱因斯坦早在1917年就预言了受激辐射的存在，该预言其后被严格的量子理论所证实。(见参考文献[19]的第27章)

注意一下，在热平衡条件下，参与自发辐射的原子数与参与受激辐射的原子数之比为

$$\frac{A_{21}}{B_{21}u(\omega)} = \mathrm{e}^{\hbar\omega/(k_B T)} - 1 \tag{26.28}$$

可以得出以下两个要点。

(1) 对于普通光源，$T \sim 10^3\,\mathrm{K}$，$\omega \approx 3\times10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$(对应波长为 $\lambda \approx 6000\,\text{Å}$)，有

$$\frac{\hbar\omega}{k_B T} \approx \frac{1.054\times10^{-34}\,(\mathrm{J\cdot s})\times 3\times10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}}{1.38\times10^{-23}\,(\mathrm{J/K})\times10^3\,\mathrm{K}} \approx 23$$

可得

$$\frac{A_{21}}{B_{21}u(\omega)} = 10^{10}$$

所以，当原子系统处于热平衡时，源于自发辐射跃迁的(光频)辐射占主导地位，这样，普通光源的辐射都是非相干的。

(2) 由式(26.27)可知，B_{21} 与 ω^3 成反比，表明激光器在更高频率的运转会变得更加困难。

26.6.1 粒子数反转

在前面的章节中假设原子只能与特定频率为 ω 的辐射相互作用。但是在观察一群原子自发辐射频谱时，发现频谱并非是单色的，而是有一定频率范围的展宽，这意味着能级有一定的宽度，原子可以覆盖的频率范围与辐射相互作用。例如，如图26.31所示，氢原子的 $2P$ 能级有一定的宽度 $\Delta E(=\hbar\Delta\omega)$，因此，原子可以覆盖一定频率范围 $\Delta\omega$ 吸收或发射辐射。对于 $2P\rightarrow 1S$ 的跃迁，有

$$\Delta E \approx 4\times10^{-7}\,\mathrm{eV} \Rightarrow \Delta\omega \approx 6\times10^8\,\mathrm{s}^{-1}$$

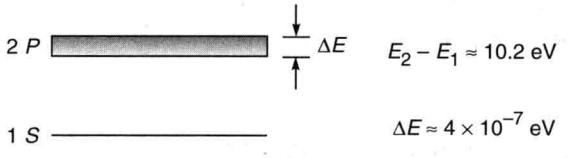


图 26.31　氢原子的 $2P$ 能级具有一定的宽度 $\Delta E(=\hbar\Delta\omega)$，因此，原子可以覆盖一定频率范围 $\Delta\omega$ 吸收或发射辐射。

① 如果能级1和能级2具有简并度 g_1 和 g_2，则 $N_1/N_2 = (g_1/g_2)\exp(\hbar\omega/k_B T)$，$B_{12} = B_{21}(g_2/g_1)$ 和 $A_{21}/B_{21} = n_0^3\,\hbar\omega^3/\pi^2 c^3$。

由 $\omega_0 \approx 1.55\times10^{16}\,\mathrm{s}^{-1}$，可得

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx 4\times10^{-8}$$

在通常情况下，$\Delta\omega \ll \omega_0$ 表示光源的谱纯度（单色性好）。引入归一化线性函数 $g(\omega)$，从而有

单位时间单位体积内参与频率位于 $\omega\sim\omega+\mathrm{d}\omega$ 的自发辐射的原子数

$$= N_2 A_{21} g(\omega)\mathrm{d}\omega$$

同理，有

单位时间单位体积内参与频率位于 $\omega\sim\omega+\mathrm{d}\omega$ 的受激辐射的原子数

$$= N_2 B_{21} u(\omega) g(\omega)\mathrm{d}\omega$$

单位时间单位体积内参与频率位于 $\omega\sim\omega+\mathrm{d}\omega$ 的受激吸收的原子数

$$= N_1 B_{12} u(\omega) g(\omega)\mathrm{d}\omega$$

因此，在单位时间单位体积内参与受激辐射的总原子数目可以写为

$$W_{21} = N_2\int_0^\infty B_{21}u(\omega)g(\omega)\mathrm{d}\omega = N_2\frac{\pi^2c^3}{\hbar t_{sp}n_0^3}\int_0^\infty\frac{u(\omega)}{\omega^3}g(\omega)\mathrm{d}\omega$$

其中的推导用到了式(26.27)和式(26.20)。对于一个接近单色的辐射场（比如实际激光器所输出的光场），$u(\omega)$在一个特定频率值 ω（比如 ω'）处出现非常尖锐的尖峰。在计算上式的积分时，在 $u(\omega)$具有明显值的范围内，$g(\omega)/\omega^3$ 可以假设为常数，从而有

$$W_{21} \approx N_2\frac{\pi^2c^3}{\hbar t_{sp}n_0^3}\frac{g(\omega')}{\omega'^3}U \tag{26.29}$$

式中 $g(\omega')$表示线型函数在辐射频率为 ω'处的值，U 表示与辐射场相连的能量密度，有[①]

$$U = \int_0^\infty u(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{26.30}$$

能量密度 U 与强度 I_ω 的关系式为[②]（见式(20.78)）

$$I_\omega = vU = \frac{c}{n_0}U \tag{26.31}$$

式中的 $v(=c/n_0)$表示辐射场在媒质中的传播速度，n_0 表示折射率。（I_ω 表示单位时间内穿过单位截面积的能量，其 MKS 单位制的单位是 $\mathrm{J/(m^2\cdot s)}$。需要提醒一下，这里的 U 在 23.5 节中曾用$\langle u\rangle$表示）。所以，在单位时间单位体积内参与受激辐射的总原子数目可以表示为

$$W_{21} = N_2\frac{\pi^2c^2}{\hbar t_{sp}n_0^2}\frac{g(\omega)}{\omega^3}I_\omega \tag{26.32}$$

其中拿掉了 ω 上的一撇。同理，在单位时间单位体积内参与受激吸收的总原子数目为

$$W_{12} = N_1\frac{\pi^2c^2}{\hbar t_{sp}n_0^2}\frac{g(\omega)}{\omega^3}I_\omega \tag{26.33}$$

下面考虑一群原子，有一束沿 z 方向传播且频率为 ω 的近单色光束从其中穿过。为了获得

---

① 这里的论证本质上意味着

$$u(\omega)\approx U\delta(\omega-\omega')$$

式中 $\delta(\omega-\omega')$是狄拉克 δ 函数。

② 该关系类似于粒子密度和粒子流密度的关系式 $J=\rho v$，式中 ρ 表示单位体积内的粒子数（所有粒子以速度 v 传播），J 表示单位时间内穿过与传播方向垂直的单位面积的粒子数。这个关系很容易证明，因为能够在单位时间内穿过单位面积的粒子数是那些位于底边为单位横截面，长度为速度 v 的柱体体积内的粒子。

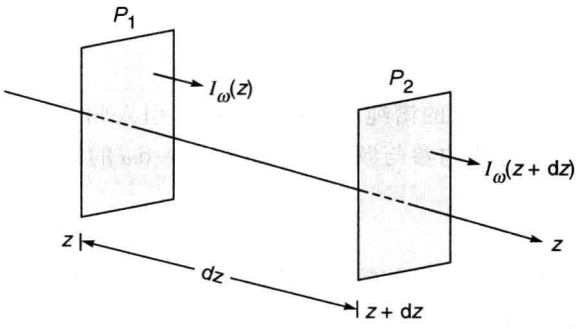


图 26.32　沿 z 轴传播的电磁波穿过一群原子

该光束传播过程中强度的变化率表达式,考虑沿着 z 方向位于 z 和 $z+\mathrm{d}z$ 处分别放置的面积为 S 且与 z 方向垂直的平面(如图 26.32 所示)。则充满平面 P_1 和 P_2 之间的媒质的体积为 $S\mathrm{d}z$,因此,单位时间内发生受激吸收的原子数为 $W_{12}S\mathrm{d}z$。既然单个光子的能量为 $\hbar\omega$,则单位时间在 $S\mathrm{d}z$ 体积元内吸收的能量为

$$W_{12}\ \hbar\omega S\mathrm{d}z$$

同理,相应(因受激辐射)获得的能量增益为

$$W_{21}\ \hbar\omega S\mathrm{d}z$$

在推导中忽略了自发辐射的影响,这是因为自发辐射的传播方向是随机分布的,且通常都会从该定向光束中四散溢出。因此,单位时间在 $S\mathrm{d}z$ 体积元内吸收的能量净增值为

$$(W_{12}-W_{21})\ \hbar\omega S\mathrm{d}z$$

如果用 $I_\omega(z)$ 表示光束位于平面 P_1 处的强度,则单位时间由平面 P_1 进入体积元 $S\mathrm{d}z$ 的总能量为

$$I_\omega(z)S$$

同理,如果用 $I_\omega(z+\mathrm{d}z)S$ 表示光束位于平面 P_2 处的强度,则在单位时间内由平面 P_2 离开体积元的总能量为

$$I_\omega(z+\mathrm{d}z)S=I_\omega(z)S+\frac{\partial I_\omega}{\partial z}\mathrm{d}zS$$

因此,在单位时间内从 $S\mathrm{d}z$ 体积元的能量净流失为

$$\frac{\partial I_\omega}{\partial z}\mathrm{d}zS$$

这必然等于在 $z\sim z+\mathrm{d}z$ 之间媒质所吸收能量的负值。即

$$\frac{\partial I_\omega}{\partial z}\mathrm{d}zS=-(W_{12}-W_{21})\ \hbar\omega S\mathrm{d}z=-\frac{\pi^2c^2}{\hbar t_{sp}\omega^3n_0^2}g(\omega)I_\omega\ \hbar\omega S\mathrm{d}z(N_1-N_2)$$

或者

$$\frac{I}{I_\omega}\frac{\partial I_\omega}{\partial z}=\gamma \tag{26.34}$$

式中

$$\gamma=\frac{\pi^2c^2}{\omega^2t_{sp}n_0^2}(N_2-N_1)g(\omega) \tag{26.35}$$

由于线型函数 $g(\omega)$是尖峰型的(见 26.7 节),则函数 γ 也是尖峰型的。所以,通过对式(26.34)积分,可得[①]

$$I_\omega(z) = I_\omega(0)\mathrm{e}^{\gamma z} \tag{26.36}$$

因此,如果 $N_1 > N_2$,γ 是负值,光束的能量随 z 呈指数衰减,且在 $z=1/|\gamma|$ 时,能量衰减为 $z=0$ 处的 1/e。在热平衡条件下,由于处于下能级的原子数大于处于上能级的原子数,(在媒质中传输的)光束的强度呈指数衰减。反之,如果处于上能级的原子数多于下能级的原子数(即出现粒子数反转状态),则 $\gamma>0$,光束强度将呈指数增加,这个过程称为光放大过程。

26.6.2　腔寿命

在一个实际的激光器系统中,激活媒质(具有放大功能)放置在一对镜面间形成谐振腔(见 26.5 节)。腔内维持持续振荡的基本要求就是光束在腔内的净损耗可以由从媒质获得的增益补偿。当达到阈值条件并且进入稳定运行时,损耗和补偿恰好平衡。为了获得阈值条件,首先计算无源腔的寿命 t_c,t_c 定义为在没有放大媒质条件下,(无源)腔内的能量 $W(t)$ 衰减为 1/e 所需的时间

$$W(t) = W(0)\exp(-t/t_c) \tag{26.37}$$

用 d 表示激活媒质的长度,则光束在腔内循环一周,在激活媒质中传播 $2d$ 的距离,得到衰减因子为

$$R_1R_2\exp(-2\alpha_c d)$$

式中 R_1 和 R_2 是谐振腔两端镜面的反射率,而 $\exp(-2\alpha_c d)$表示由吸收、散射、衍射等因素引起的损耗。循环一周所需要的时间为

$$t = \frac{2d}{c/n_0}$$

因此,有

$$\exp\left[-\frac{2d}{(c/n_0)t_c}\right] = R_1R_2\exp(-2\alpha_c d) \tag{26.38}$$

从而给出无源腔的寿命为

$$\frac{1}{t_c} = \frac{c/n_0}{2d}[2\alpha_c d - \ln(R_1R_2)] \tag{26.39}$$

容易看出,腔寿命还可以表示为

$$t_c = \frac{2n_0 d}{c\ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right)} \tag{26.40}$$

式中

$$x = 1 - R_1R_2\mathrm{e}^{-2\alpha_c d} \tag{26.41}$$

表示循环一周的损耗比例。

23.6.3　阈值条件

在粒子数反转状态下,经过一周循环后,光束放大 $\exp(2\gamma d)$倍,因此,要发生激光器振

① 在由式(26.34)到式(26.36)的推导过程中,需要假定 N_1-N_2(即 γ)与 I_ω 无关。这个近似只有在 I_ω 很小时才成立。对于强光束(I_ω 非常大),将发生能级饱和,则衰减是线性的,而不是指数下降的(见参考文献[4]的 4.2 节和 4.3 节)。

荡,必须满足

$$e^{2\gamma d}(R_1R_2e^{-2\alpha_c d})\geqslant 1 \tag{26.42}$$

可整理为如下形式

$$e^{2\gamma d}\exp\left[-\frac{2d}{(c/n_0)t_c}\right]\geqslant 1$$

或者

$$\gamma\geqslant\frac{1}{(c/n_0)t_c} \tag{26.43}$$

将式(26.35)的 γ 表示式代入,有

$$N_2-N_1\geqslant\frac{\omega^2 n_0^3 t_{sp}}{\pi^2 c^3 t_c g(\omega)} \tag{26.44}$$

式(26.44)中的等号给出了发生激光振荡时所需要的粒子数反转阈值。因此,当频率为 ω 时,粒子数反转阈值为

$$(N_2-N_1)_{\text{th}}=\frac{\omega^2 n_0^3 t_{sp}}{\pi^2 c^3 t_c g(\omega)} \tag{26.45}$$

在26.7节中将证明对于氦-氖激光器,$g(\omega)$的形式为

$$g(\omega)\mathrm{d}\omega=\frac{2}{\Delta\omega_D}\left(\frac{\ln 2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-4\ln 2\frac{(\omega-\omega_0)^2}{(\Delta\omega_D)^2}\right]\mathrm{d}\omega \tag{26.46}$$

式中

$$\Delta\omega_D=2\omega_0\left(\frac{2k_BT}{Mc^2}\ln 2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{26.47}$$

表示激光谱线的半高全宽(FWHM)。式(26.47)中,T 为气体的绝对温度,M 为参与激光振荡跃迁的原子的质量(在氦-氖激光器中是氖原子)。式(26.46)描述了因多普勒效应展宽造成的线型函数,如图26.33所示。如图26.34所示为氦-氖激光器的实际光谱,可以看出,相较于其他多数激光器而言,氦-氖激光器发出的光具有很窄的固有谱线宽度。并可以注意到以下问题。

(1) N_2-N_1 的最小阈值对应于线型的中间位置,此处 $g(\omega)$ 是最大值。在多普勒展宽的情况下,其最大值由式(26.48)给出

$$g(\omega_0)=\frac{2}{\Delta\omega_D}\left(\frac{\ln 2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{26.48}$$

由于激光线宽 $\Delta\omega_D$ 很小,导致阈值 N_2-N_1 也很小。此外,随着激光媒质被泵浦导致的激活状态越来越高,两能级间的布居反转也会不断增加。最接近原子系统谐振频率的模式将最先达到阈值,并开始振荡。随着泵浦的进一步加强,附近的模式也将达到阈值并开始振荡。

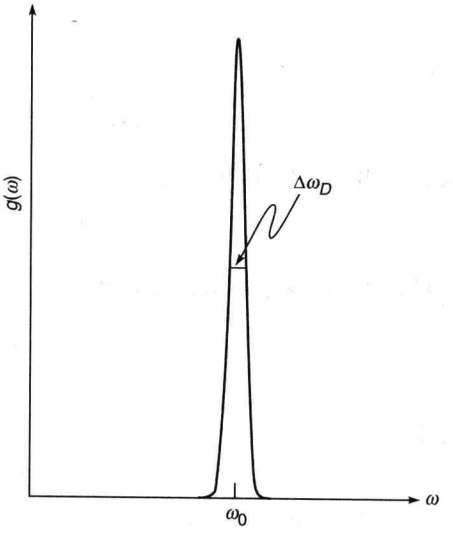


图26.33 氦-氖激光器输出的激光是高斯型线型函数

(2) 由式(26.45)可知,由于粒子数反转阈值 N_2-N_1 很小,t_{sp} 也必然很小,这意味着允

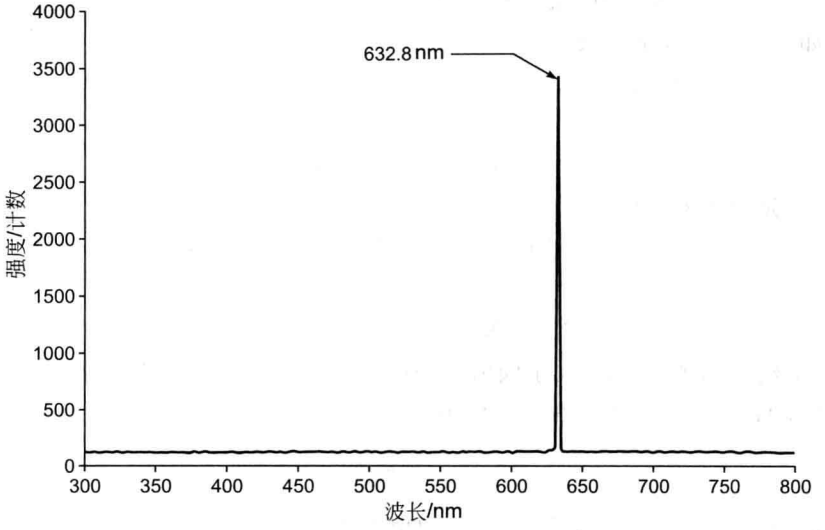


图 26.34　氦-氖激光器的光谱显示出，相较于其他激光器而言，氦-氖激光器发出的光具有非常窄的固有谱线宽度。图片引自 http://en.wikipedia.org/wiki/Helium-neon laser。彩图见文前附录图表页的图 37。

许跃迁的(自发辐射)概率将很大。但允许跃迁概率大意味着需要更大的泵浦功率。通常情况下，对应大的 t_{sp}，粒子数反转将更容易实现。

例 26.3　氦-氖激光器的典型参数

考虑一个氦-氖激光器，假设温度 $T\approx 300\mathrm{K}$，则对于波长 $\lambda_0\approx 6328\text{Å}$ 的辐射，有

$$\begin{aligned}\Delta\omega_D &= \frac{2\omega_{21}}{c}\left(\frac{2k_BT}{M}\ln 2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \frac{4\pi}{\lambda_0}\left[\frac{2\times 1.38\times 10^{-23}(\mathrm{J\cdot K^{-1}})\times 300(\mathrm{K})\times 0.693}{20\times 1.67\times 10^{-27}(\mathrm{kg})}\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\approx 8230\mathrm{MHz}\end{aligned}$$

则有

$$\Delta\nu_D = \frac{\Delta\omega_D}{2\pi}\approx 1300\mathrm{MHz}$$

其中假设

$$M_{\mathrm{Ne}}\approx 20M_{\mathrm{H}}\approx 3.34\times 10^{-26}\mathrm{kg}$$

线型函数 $g(\omega)$ 随频率的变化如图 26.33 所示，对应于 $\lambda_0\approx 6328\text{Å}$，有

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_0}\approx 2.98\times 10^{15}\mathrm{s^{-1}}$$

则

$$\frac{\Delta\omega_D}{\omega}\approx 2.8\times 10^{-6}$$

这显示线型函数通常是一个非常锐利的峰函数。此时，有

$$g(\omega_0) = \frac{2}{\Delta\omega_D}\left(\frac{\ln 2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\approx 1.1\times 10^{-10}\mathrm{s} \tag{26.49}$$

(在26.7.3节中将证明对于氦-氖激光器,相较于自然展宽和碰撞展宽,多普勒展宽占主导地位)。假如一个腔有如下参数

$$d = 60\text{cm}, \quad n_0 \approx 1, \quad R_1 \approx 1, \quad R_2 \approx 0.98, \quad \alpha_c \approx 0$$

则

$$t_c \approx 20 \times 10^{-8}\text{s}$$

此外,对于氦-氖激光器,有

$$t_{sp} \approx 10^{-7}\text{s}, \quad n_0 \approx 1, \quad \lambda_0 \approx 6328\text{Å}$$

则

$$(N_2 - N_1)_{th} \approx 1.5 \times 10^8\,\text{cm}^{-3}$$

对于一个给定的 $N_2 - N_1$(大于阈值),如图26.35所示为一个典型的增益曲线 $\gamma(\nu)$(带宽约为1300MHz),其中的水平线高度值为

$$\frac{1}{(c/n_0)t_c} \tag{26.50}$$

当 $n_0 \approx 1$, $t_c \approx 2 \times 10^{-7}$ s 时,式(26.50)的值为 $1.7 \times 10^{-4}\,\text{cm}^{-1}$。假设氦-氖激光器的长度是60cm,则纵模间隔为

$$\delta\nu = \frac{c}{2d} \approx 250\text{MHz} \tag{26.51}$$

如图26.35所示,存在7个纵模的增益大于损耗,可以起振。而当 $d = 10$cm 时,则

$$\delta\nu = 1500\text{MHz}$$

此时,只有一个模式可以振荡。t_c 及如图26.35所示的水平线的高度值将有微小的改变。

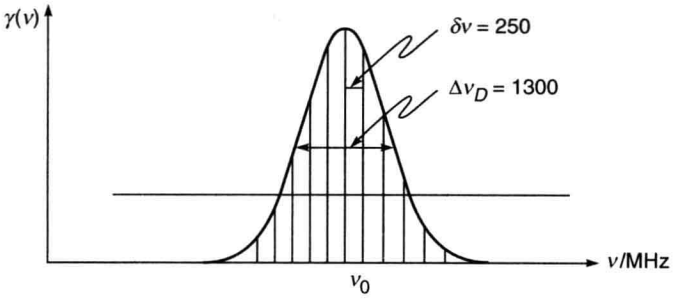


图26.35 对于一个给定的 $N_2 - N_1$,一个典型的增益曲线 $\gamma(\nu)$,竖线代表腔的纵模。

26.7 线型函数

由于线型函数 $g(\omega)$ 决定了粒子数反转的阈值(见式(26.45)),现在离开正题,先讨论一下在不同条件下 $g(\omega)$ 的典型形式。

首先考虑由于气体原子的热运动导致的多普勒展宽。氦-氖激光器(几乎是最常用的激光器)的谱线展宽主要是源于多普勒展宽。

26.7.1 多普勒展宽

在天文学中,可以通过测量光谱线的多普勒频移来确定恒星和星系的运动(不论是远离

而去或是向着而来)。当 $v/c \ll 1$,有

$$\omega - \omega_0 = \pm \omega_0 \frac{v}{c} \tag{26.52}$$

正号表示光源向观察者运动,负号表示光源背离观察者运动。当恒星运动背离观察者而去时,测量到的频率要稍稍小于实际值,产生著名的谱线红移现象。对于原子,从统计角度看,速度在 z 方向的分量处于 $v_z \sim v_z + \mathrm{d}v_z$ 区间的概率满足麦克斯韦分布即

$$P(v_z)\mathrm{d}v_z = \left(\frac{M}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{Mv_z^2}{2k_B T}\right)\mathrm{d}v_z \tag{26.53}$$

式中 M 表示原子质量,T 表示气体的绝对温度。又有(根据附录 A 中的公式)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(v_z)\mathrm{d}v_z = 1$$

实际上这是必须的。当跃迁频率位于 $\omega \sim \omega + \mathrm{d}\omega$ 区间时,$g(\omega)\mathrm{d}\omega$ 的概率等于原子速度在 z 方向的分量处于 $v_z \sim v_z + \mathrm{d}v_z$ 区间内的概率,式中 v_z 满足

$$v_z = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} c \tag{26.54}$$

则

$$g(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{c}{\omega_0}\left(\frac{M}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{Mc^2}{2k_B T}\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\omega_0^2}\right]\mathrm{d}\omega \tag{26.55}$$

这是一个高斯分布。其线型函数的峰值在 ω_0 处,FWHM(半高全宽)为

$$\Delta\omega_D = 2\omega_0\left(\frac{2k_B T}{Mc^2}\ln 2\right)^{1/2} \tag{26.56}$$

下标的 D 表示是多普勒效应引起的展宽。根据 $\Delta\omega_D$ 的表达式,可将式(26.55)改写为

$$g(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{2}{\Delta\omega_D}\left(\frac{\ln 2}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left[-4\ln 2\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\Delta\omega_D^2}\right]\mathrm{d}\omega \tag{26.57}$$

如图 26.33 所示为氦-氖激光器的典型的高斯线型函数图。

26.7.2　自然展宽

与自发辐射相关的频谱展宽由洛伦兹线型函数描述

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi t_{sp}} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \dfrac{1}{4t_{sp}^2}} \tag{26.58}$$

式中

$$t_{sp} = \frac{1}{A_{21}} \tag{26.59}$$

表示自发辐射寿命。洛伦兹线型的半高全宽(FWHM)为

$$\Delta\omega = \frac{1}{t_{sp}} = A_{21} \tag{26.60}$$

利用 $\Delta\omega$ 的形式,式(26.58)可以改写为

$$g(\omega) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\dfrac{\Delta\omega}{2}\right)^2} \tag{26.61}$$

得到线型函数的峰值为

$$g(\omega_0) = \frac{2}{\pi(\Delta\omega)} \tag{26.62}$$

$$\int_0^{\infty} g(\omega)\mathrm{d}\omega \approx \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\mathrm{d}\omega = 1 \tag{26.63}$$

26.7.3 碰撞展宽

气体中,各原子间存在着随机碰撞。在这样的碰撞过程中,当原子间距离很近时,经过之间的相互作用,会改变原子的能级结构,导致谱线呈洛伦兹线型函数的结构

$$g(\omega) = \frac{\tau_0}{\pi} \frac{1}{1+(\omega-\omega_0)^2\tau_0^2} \tag{26.64}$$

式中 τ_0 表示平均碰撞时间[①],则函数的半高全宽为

$$\Delta\omega_c = \frac{2}{\tau_0}$$

对于一个典型的气体激光器,有 $\tau_0 \sim 10^{-6}\mathrm{s}$,对应谱宽为

$$\Delta\omega_c \approx 2\mathrm{MHz}$$

或者

$$\Delta\nu_c \approx 0.3\mathrm{MHz}$$

对于氦-氖激光器,多普勒线宽约为 1300MHz(见例 26.3);另一方面,自然展宽约为 20MHz,在气压为 0.5 托时的碰撞展宽为 0.64MHz。因此,对于典型的氦-氖激光器参数,多普勒展宽占主导地位,远远大于自然展宽和碰撞展宽。

对于众多的线型展宽机制,可以粗略地将其分为均匀展宽和非均匀展宽两类。对某种线型展宽机制,如碰撞展宽或自然展宽,每个原子的响应都遵循同样的形式。像这类的展宽机制归类为均匀展宽。另一方面,多普勒展宽,源于局部晶格的不均匀引起的展宽,这种局部晶格的不均匀使得每一局部个体原子以不同大小的响应表现出在中心频率附近的不同的漂移,从而造成原子系统整体的响应,而表现出频谱的整体展宽,这种形式的展宽属于非均匀展宽。如果造成非均匀展宽效应的来源是随机的,则展宽线型是高斯型的。相反,一般而言,均匀展宽表现为洛伦兹线型。

再回头看式(26.45),注意到,要使原子系统粒子数反转的阈值降低,需要以下条件。

(1) t_c 应该大,即,腔的损耗必须小。

(2) 在线型函数中心处,对于洛伦兹线型,有 $g(\omega)\approx 0.64/\Delta\omega$;对于高斯线型,有 $g(\omega)\approx 0.94/\Delta\omega$(见式(26.62)和式(26.48)),因此,(线宽)$\Delta\omega$ 越小,粒子数反转阈值越低。

(3) t_{sp} 很小(即跃迁概率高)也会降低粒子数反转的阈值。但必须注意,弛豫过程越短,要保持一个给定数目的粒子数反转状态所需要的泵浦功率越大。一般而言,跃迁的弛豫时间越长,粒子数反转状态越容易实现。

(4) 在线型中心处,$g(\omega)$ 与 $\Delta\omega$ 成反比,因而(比如,对于多普勒展宽)$g(\omega)$ 反比于 ω(见式(26.48)和式(26.47))。这样,粒子数反转阈值大约正比于 ω^3(忽略与频率相关的其他因素)。所以,在红外波段比在紫外波段更容易实现激光振荡。

① 式(26.64)的推导在许多参考书中都可以找到,比如,见参考文献[20]的 8.8.2 节。

26.8　红宝石激光器的典型参数

数值上了解激光振荡需要的粒子数反转强度，考虑一个红宝石激光器。（见 26.3 节）。考虑激光器在对应于辐射谱线峰值频率下的振荡。假定晶体中 Cr^{3+} 离子的浓度为 0.05%，对应的布居数为

$$N = 1.6 \times 10^{19} \text{ 个 } Cr^{3+} \text{ 离子 } /\text{cm}^3$$

对于红宝石激光器，线型是均匀展宽的，则在峰值处 $g(\omega)=2/(\pi\Delta\omega)$。因此，粒子数反转的阈值为

$$(N_2 - N_1)_{th} = \frac{\omega^2 n_0^3 t_{sp}}{\pi^2 c^3 t_c g(\omega)} = \frac{4\pi^2 n_0^3}{\lambda_0^3} \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega} \cdot \frac{t_{sp}}{t_c} \tag{26.65}$$

式中 λ_0 为自由空间的波长，t_{sp} 为激光上能级自发辐射的弛豫时间，t_c 为腔寿命。对红宝石激光器的跃迁，有

$$\lambda_0 = 6943\text{Å} \Rightarrow \omega \approx 2.715 \times 10^{15}\,\text{s}^{-1}$$

$$\Delta\omega \approx 9.4 \times 10^{11}\,\text{s}^{-1}, \quad t_{sp} \approx 3 \times 10^{-3}\,\text{s}, \quad n_0 \approx 1.76$$

式中 $n_0(\approx 1.76)$ 表示红宝石的折射率。如果假设腔的长度为 5cm，激光循环一次的损耗为 10%，则 $x=0.1$，根据式(26.40)，可得

$$t_c \approx 6 \times 10^{-9}\,\text{s}$$

将这些参数代入式(26.65)，可以计算出粒子数反转密度的阈值为

$$(N_2 - N_1)_{th} \approx 1.1 \times 10^{17} \text{ 个 } Cr^{3+} \text{ 离子 } /\text{cm}^3$$

由于红宝石中 Cr^{3+} 离子的总密度约为 $1.6\times10^{19}\,\text{cm}^{-3}$，所需的粒子布居数只占很少的一部分。

下面将近似地计算要保持粒子数反转分布所需要的最小功率。既然 t_{sp} 表示激光上能级自发辐射的弛豫时间，则单位时间内从激光上能级上减少的原子数约为 N_2/t_{sp}。要将一个原子泵浦到能级 2，至少需要数量为 $h\nu_p$ 大小的能量，ν_p 为平均泵浦频率。因此，为保持处于能级 2 的原子数 N_2，需要消耗的（单位体积的激活媒质）最小光功率 P 为

$$P = \frac{N_2 h\nu_p}{t_{sp}} \tag{26.66}$$

此时，既然 $(N_2-N_1)_{th} \ll N$（N 表示单位体积内的总原子数），可以有

$$N_2 \approx \frac{N}{2} \tag{26.67}$$

所以，在一个三能级系统中，单位体积内保持一定的粒子数反转所需要的最小泵浦功率为

$$P_{th} = \frac{Nh\nu_p}{2t_{sp}} \tag{26.68}$$

取平均泵浦频率为

$$\nu_p \approx 6.25 \times 10^{14}\,\text{Hz}$$

（即在绿光到紫光的吸收频带上的平均）因此，有

$$P_{th} \approx \frac{1.6\times10^{19}}{2} \times \frac{6.6\times10^{-34}\times6.25\times10^{14}}{3\times10^{-3}} \approx 1100\,\text{W/cm}^3$$

如果假设泵浦源的利用率为 25%，并且穿过红宝石棒只有 25%被吸收，消耗在激活媒质上

的相应的电功率阈值为 $18kW/cm^3$，这与实验中得到的阈值功率符合得很好。

对于红宝石激光器，由于只牵涉三个能级，阈值功率的计算特别简单。而普遍的情况是，为计算出(给定的泵浦效率下)涉及激光激射的跃迁能级间的布居数差的稳定值，跃迁时能达到的粒子数反转密度，以及可能的话，计算维持激光器的连续波运行所需的最小泵浦功率，就必须求解激光辐射存在时，描述不同能级的粒子布居数变化规律的方程组。该方程组称为"速率方程组"，在很多文献中都有讨论，比如，见文献[4,9,16,17]。必须指出，即使对于三能级激光系统，方程 $N_2 \approx N/2$ 只是近似成立(见式(26.67)，无需解速率方程组)。如果想要得到更加精确的表示式，就必须求解速率方程。

26.9 激光束的单色性

如图 26.36 所示为与一个激光器相关的不同的线宽概念。展宽的实曲线代表源于激光媒质多普勒展宽的频谱宽度。以工作频率在 6328Å 的氦-氖激光器为例，多普勒展宽约为 1300MHz。位于展宽曲线下的是表示腔模式的尖峰。相邻两个模式间的频率间隔为 $c/2d$ (见式(26.6)和式(26.51))，一个典型的激光腔长为 60cm，其对应的间隔为 250MHz，比多普勒展宽要小很多(见例 26.3)。前面已经提到过，腔内的各种损耗也会导致腔模式的展宽。因此，一个 60cm 的腔循环一周损耗的比例为 1/400，腔模式的展宽约为 1.5MHz。这比两个相邻腔模式的频率间隔也小很多。当腔内损耗能被置于腔内的激活媒质的放大作用补偿时，辐射曲线变得非常窄，且只受自发辐射(是随机的)和谐振腔参数起伏的影响。当只考虑受随机的自发辐射的影响时，起振激光的最终线宽可以表示为①

$$(\delta\nu)_{sp} \approx \frac{2\pi(\Delta\nu_p)^2 h\nu_0}{P^0}$$

式中 ν_0 为谐振频率，P^0 为输出功率，此外，有

$$\Delta\nu_p = \frac{1}{2\pi t_c}$$

称为无源腔线宽，t_c 为腔寿命(见 26.6.2 节)。下标"sp"表示线宽源于自发辐射。$(\delta\nu)_{sp}$ 随输出功率的增大而减小，这是因为在镜面的透射率给定后，P^0 的增大就意味着谐振腔内激

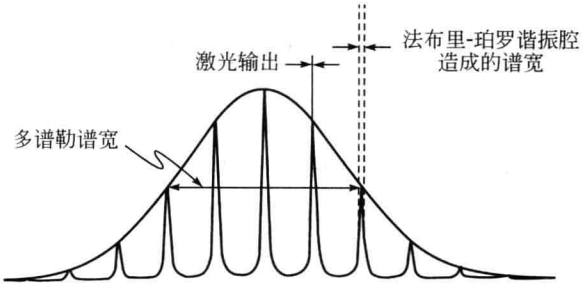


图 26.36 实线表示一个典型的多普勒展宽谱线，间隔很近的腔模式表现为实线下的窄尖峰。激光器输出的线宽非常窄(见文献[21])。

① 见文献[22]。

光功率的增大，这样，受激辐射就超越自发辐射占主导地位了。

作为一个典型的例子，$\Delta\nu_p = 1\text{MHz}$，$P^0 = 1\text{mW} = 10^{-3}\text{W}$，$h\nu = 2\times10^{-19}\text{J}$（对应于红色光谱区域），可以得到$(\delta\nu)_{sp} \approx 10^{-3}\text{Hz}$，这确实是一个非常小的量！因此，激光器最终的单色性是由腔内的自发辐射决定的，这是由于自发辐射引起的辐射是非相干的。而在实际中，激光器的单色性还会受到许多其他外部因素的限制，像温度的起伏、光学谐振腔的机械振动等。例如，假设一个模式的谐振频率由式(26.4)给出，当长度变化为 Δd 时，引起的频率变化量 $\Delta\nu$ 为

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta d}{d}$$

因此，当 $d \approx 50\text{cm}$ 时，假定 Δd 可以稳定在 1Å 以内，则对于 $\nu \approx 5\times10^{14}\text{Hz}$ 的激光，有

$$\Delta\nu \approx 10^5\text{Hz}$$

这个展宽比$(\delta\nu)_{sp}$大很多。在此需要提及，$\Delta\nu \approx 10^5\text{Hz}$ 的频率范围对应的波长范围是 $\Delta\lambda \approx 10^{-6}$Å。确实，一个单模的氦-氖激光器，其线宽能达到 $\Delta\nu \approx 10^5\text{Hz}$。另一方面，对于一个多模氦-氖激光器，$\Delta\lambda \sim 0.02$Å，这意味着其相干长度是 20cm。

26.10　拉曼放大和拉曼激光器

首先讨论拉曼散射效应的物理现象。当一束单色光被一透明媒质散射时，将观察到以下现象。

(1) 超过 99%的散射光束与入射光束有相等的频率，这就是在 7.6 节中已经讨论过的瑞利散射。天空呈现蓝色是源于瑞利散射，光从光纤的侧面出射（见图 27.2）也是源于瑞利散射。

(2) 有一小部分散射光束与入射光束的频率不等，主要原因包括以下三种。

① 入射光引起分子的平动——这会导致频率移动。该频移通常非常小，且很难测量出，这种散射称为布里渊散射[①]。

② 入射光子的能量 $h\nu$ 的一部分以转动（或者振动）的形式转移给了分子，于是，散射光子的能量变小为 $h\nu'$，产生所谓的拉曼-斯托克斯线（见图 26.37(a)和图 26.38）。

③ 另一方面，光子由一个已在激发态的分子引起散射，该分子去激发回到一个低能态。在这个过程中，入射光子占有这个多余的能量，散射光子的频率升高。产生所谓的拉曼-反斯托克斯线（见图 26.37(b)和图 26.38）。

拉曼-斯托克斯线和拉曼-反斯托克斯线的能量差分别为 $h\nu - h\nu'$ 和 $h\nu' - h\nu$，对应着分子转动（或振动）能级之间的差别，反映了分子自身的特点。

$h\nu - h\nu'$ 和 $h\nu' - h\nu$ 通常称作拉曼频移（见图 26.38），与入射光的频率无关。通过对拉曼光谱的仔细分析可以获知分子的结构，这说明了拉曼效应有多么重要。如图 26.38 所示为 CCl_4 分子的拉曼光谱的强度分布。

在光谱学中，原子或者分子的能级，以及光子的能量可以用波数单位来表示，波数单位

① 频率移动一般用 $\Delta\bar{\nu}$ 表示，单位是波数。该单位在本节后面会有阐述。对于布里渊散射，$\Delta\bar{\nu} \leqslant$（应该是小于约等于符号）$0.1\text{cm}^{-1}$；而拉曼散射 $\Delta\bar{\nu} \leqslant$（应该是小于约等于符号）$10^4\text{cm}^{-1}$。

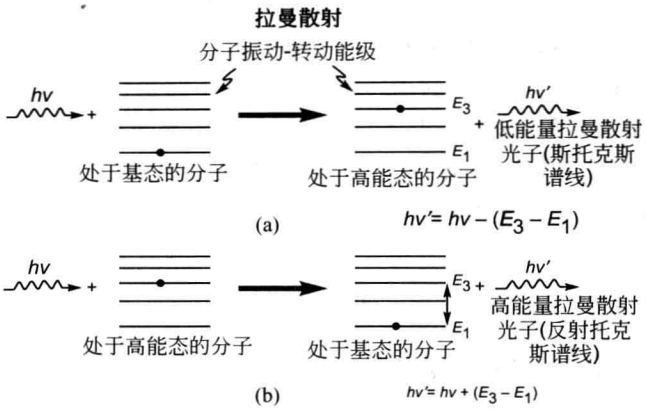


图 26.37　拉曼散射斯托克斯线与反斯托克斯线的产生

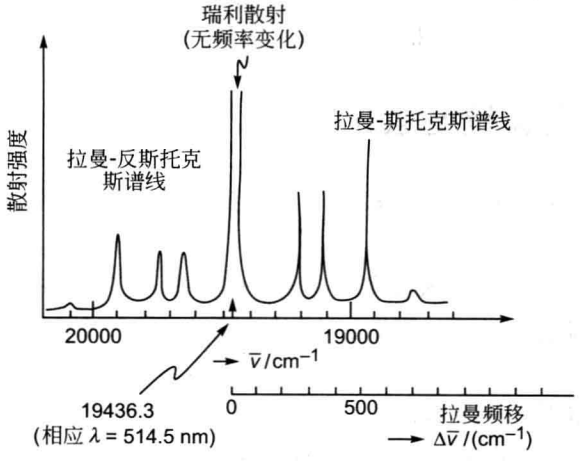


图 26.38　CCl_4 分子被氩离子激光器输出的 514.5nm 激光激发的拉曼光谱
引自 http://epsc.wustl.edu/Haskin-group/Raman/faps.htm

定义为原子、分子能级，或光子能量与 hc 的比值，式中 $h(\approx 6.56\times10^{-27}\,\text{erg}\cdot\text{s})$是普朗克常量，$c(\approx 3\times10^{10}\,\text{cm/s})$为自由空间的光速(在光谱学中常采用 CGS 单位制)。以波数单位表示的分子(或原子)能级通常用符号 T_n 表示

$$T_n = \frac{E_n}{hc}$$

光子能量为 $h\nu$，因此，用波数单位表示为

$$\frac{h\nu}{hc} = \frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda}$$

恰好是波长的倒数，通常用符号 $\bar{\nu}$ 表示，有

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda}$$

氢原子的能级用波数单位表示为

$$T_n = \frac{E_n}{hc} = -\frac{R}{n^2}, \quad n = 1,2,3,\cdots$$

式中 $R(\approx 109678\text{cm}^{-1})$称作里德伯常数，$n(=1,2,3,\cdots)$是能态的总量子数目。因此，对应于从 $n=3$ 到 $n=2$ 的跃迁(巴莫尔线系的一条谱线)，将发射一个光子，其波数为

$$\bar{\nu} = -R\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{36}\times 109678 \approx 15233\text{cm}^{-1}$$

其倒数$(6.56\times10^{-5}\text{cm})$表示发射光子的波长。

如图 26.38 所示为当氩离子激光器输出的波长为 5.145×10^{-5}cm 激光(用波数表示为 19436.3cm^{-1})作为入射光时，CCl_4 分子[①]的拉曼光谱的强度分布。光谱图中心的尖峰对应于瑞利散射光的波长。斯托克斯线的频移与反斯托克斯线的频移相等，只是反斯托克斯线强度上弱很多。这是因为在室温下，处于基态的分子要远远大于处于激发态的分子，从而导致反斯托克斯线的强度很低。如图 26.39 所示为 CCl_4 分子在汞灯的 4046Å 谱线照射下的实际拉曼谱。该图源于 C. V. 拉曼于 1930 年诺贝尔颁奖典礼上的讲演报告。在此简述一下，发现拉曼效应的过程是很有趣的。1928 年 2 月 28 日，克利施南(K. S. Krishman)和拉曼(C. V. Raman)利用像戊烷之类的多种有机气体做实验，观测到了“拉曼效应”，他们称为“新散射辐射”。拉曼于 2 月 29 日在报纸上做了声明，并于 3 月 8 日向《自然》杂志提交了题为《光散射中的波长变化》的文章。文章在 4 月 21 日得到发表。尽管在文章中，拉曼承认此现象是由克利施南和自己共同发现的，但由于拉曼是作者，所以这种现象被命名为拉曼效应，但还有许多科学家(尤其是印度科学家)一直称为拉曼-克利施南效应。随后，拉曼和克利施南又写了几篇相关文章。拉曼在 1930 年“因为他在光散射方面的工作，并发现了以他命名的拉曼效应”获得诺贝尔奖。几乎是在同时，苏联的兰兹贝格(Landsberg)和曼德尔施塔姆(Mandel'shtam)也正在做光散射方面的工作，根据曼德尔施塔姆的说法，他们在 1928 年 2 月 21 日就发现了“拉曼线”，但是完整的实验结果在 1928 年 4 月才陆陆续续呈现出来，直到 5 月 6 日他们才将他们的结果提交给《自然科学期刊》(Naturwissenschaften)，但这一切都太迟了。很久以后，前苏联与俄罗斯的科学家们一直称拉曼散射为曼德尔施塔姆-拉曼散射。为了更好地了解拉曼散射的历史，建议读者可以阅读 G. Venkataraman 的书《走进光：拉曼的生命与科学》，由 Penguin Books 出版社发行(1994 年)。

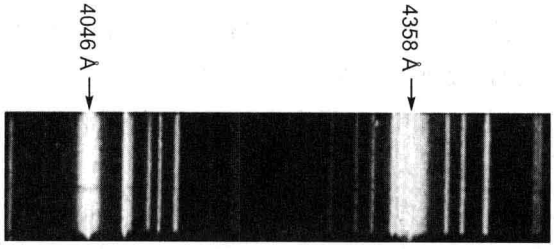


图 26.39　观测到的 CCl_4 分子在汞灯输出的 4046Å 和 4358Å 谱线照射下的实际的拉曼散射谱

在发现拉曼效应 30 年后的 1958 年，拉曼为大英百科全书写了一篇关于“拉曼效应”的文章。在文章中提到：“气体中分子的转动能级使拉曼效应更容易观测到。一系列十分接

① 氢和氘混合气体(在 $\lambda=488$nm 的激光束照射下)的拉曼光谱在文献[23]中有详细讨论。

近的,然而确实是分离的拉曼谱线分布在入射谱线的两边。对于液体,在同一个区域内,只能观测到一连续的谱线翼或者说是谱线带,这显示出密度大的液体中,分子的转动受到了分子间碰撞的阻碍。另一方面,分子内部的振动在任何情况下都会造成较大的波长移动,与其相应的拉曼谱线与原来母线明显地分开,从而使得更加容易识别与测量。”

在受激拉曼辐射中,由普通拉曼效应产生的辐射去激发进一步的拉曼辐射,这个效应可以导致通常所说的光束拉曼放大。

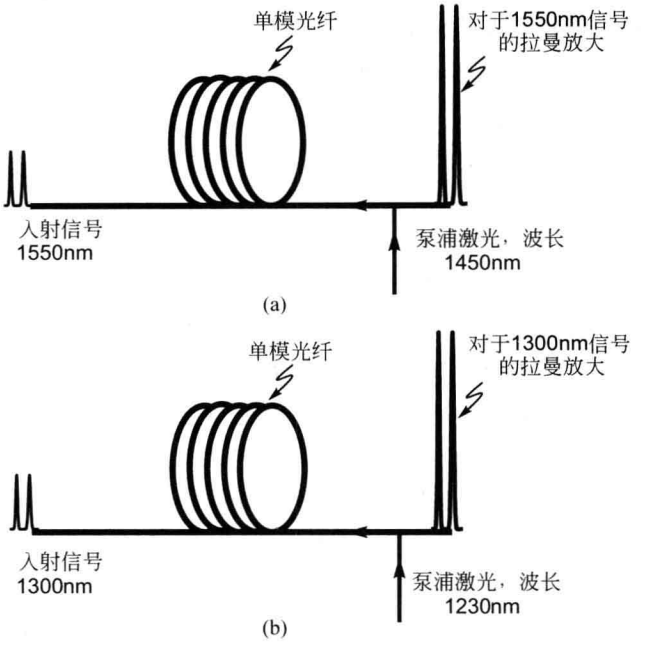


图 26.40　在光纤中对波长为 1550nm 和 1300nm 的信号进行拉曼放大

在熔融石英中,由于相邻 SiO_2 分子间的相互作用,振动能带非常宽,这导致了一个非常宽的,介于 430～470cm^{-1} 的拉曼频移区(对应的拉曼频移位于 13～14THz(1THz＝10^{12}Hz))。如果利用一个波长为 1450nm($\bar{\nu}$＝6897cm^{-1})的泵浦光,此时波长为 1550nm($\bar{\nu}$＝6452cm^{-1})的输入光束因受激拉曼散射($\Delta\bar{\nu}$＝445cm^{-1})而放大,如图 26.40(a)所示。在一条长为 30km 的商用单模光纤中,在强度为 500mW 的泵浦激光下,可以得到大约 15dB 的拉曼增益(即,放大了约 30 倍)。

同理,如果想要放大一个波长为 1300nm($\bar{\nu}$＝7692cm^{-1})的入射光,则泵浦光源的波长必须约为 1230nm($\bar{\nu}$＝8130cm^{-1}),如图 26.40(b)所示。这是拉曼光纤放大器的最大优点,即,只要选择频率相差 13.5THz(等价于波数间隔约为 450cm^{-1})的泵浦光,就可以放大任何波长的入射光。另一方面,回顾一下掺铒光纤放大器(EDFA),它只能放大波长位于 1550nm 附近的信号,但其所需的激光器功率要小很多。

根据以上原理可以制造出级联的拉曼激光器(见图 26.41)。垂直的短线标记表示光纤布拉格光栅(FBG),每个光栅对其上标记的波长的光有很强的反射效果(见 15.6.1 节对 FBG 的简单介绍)。因此,入射波长为 1100nm(≈9091cm^{-1})的光将产生波长为 1155nm

($\approx 8658cm^{-1}$，拉曼频移约为 $433cm^{-1}$)的拉曼散射谱线。这种在两个 FBG 之间的谐振在 1155nm 处有最大的反射率。现在，波长为 1155nm($\approx 8658cm^{-1}$)的光束产生波长为 1218nm($\approx 8210cm^{-1}$，意味着拉曼频移为 $448cm^{-1}$)的拉曼散射谱线，而两个 FBG 之间的谐振在 1218nm 处有最大的反射，如此类推。用这种方法可以使激光器从 1100～1600nm 产生多个波长的输出(见图 26.41)。

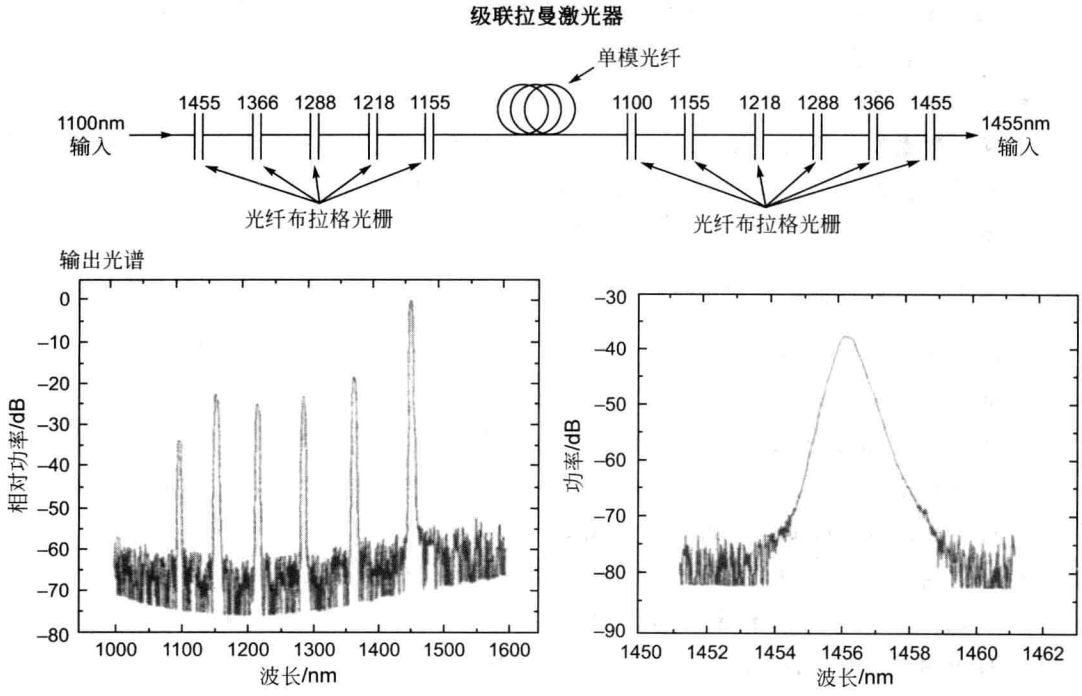


图 26.41　级联拉曼激光器，可以产生 1100～1600nm 的多个波长输出。引自 K. Rottwitt 关于“光纤拉曼放大器”的讲义。K. Rottwitt 供职于位于加尔各答的 CGCRI 公司。

小　结

- 激光器“LASER”取名于 light amplification by stimulated emission of radiation 的首字母缩写。激光器输出的光具有一些非常特殊的性质，其中有①方向性好：因为激光光束可以被聚集在只有几个平方微米的区域，从而可以用来进行外科手术、材料加工、光碟读写等。②功率高：连续波激光器的功率可以达到～10^5 W 的水平，脉冲激光器的脉冲总能量可以达到～50000J 的水平，可以用于焊接、切割和激光聚变等。③光谱单色性好：激光束可以有非常窄的谱线宽度 $\Delta\lambda$，可以用在全息术、光通信和光谱分析等领域。
- 爱因斯坦提出，当一个原子处在激发态时，除了有自发辐射外，也可以通过受激辐射的方式跃迁到低能态，这个过程需要由一个频率合适的入射信号光引发，结果使得入射光得到放大。如果能够实现粒子数反转状态，也就是处于原子上能级的布居数

大于处于下能级的布居数，则受激辐射强度要超过受激吸收强度，从而实现对光束的光放大。

- 任意一个激光器都由以下三个部分组成。

  (1) 激活媒质：可以是原子、分子或离子(以固体、液体或是气体形式)的集合。激活媒质具有放大光波的能力。

  (2) 泵浦机制：可以使激活媒质的原子系统的两个能级实现粒子数反转态。

  (3) 光学谐振腔：实现反馈作用。

- 通过泵浦机制，可以建立激光器谐振腔内激活媒质的粒子数反转态。谐振腔内的自发辐射激发了不同的腔模式。那些从激光器激活媒质中获得的增益大于损耗的模式可以得到放大。模式的幅度快速增长，直到上能级粒子布居数达到一个临界值，使增益等于损耗，此时模式将进入稳定振荡状态。

- 两个相对的镜面组成一个谐振腔。腔模式的离散频率由 $\nu=\nu_m=m\frac{c}{2d}$ 给出。不同的 m 对应于不同的谐振频率，从而形成了腔的不同纵模。例如，谐振腔的长度 $d=60\text{cm}$，工作频率为 $\nu\approx5\times10^{14}\,\text{Hz}$(对应波长为 $\lambda=6000\text{Å}$)，可以得到 $m\approx2\times10^6$。

- 西奥多·梅曼于1960年用红宝石成功实现了第一台激光器的成功运转($\lambda\sim0.694\mu\text{m}$[①])。几个月后，阿里·贾万和他的助手实现了第一台气体激光器的运转($\lambda\sim0.633\mu\text{m}$)，命名为氦-氖激光器。

- 如果将一根光纤(掺杂铒或者钕)放在两个镜面(充当谐振腔)之间，再加上合适的泵浦，就形成了一个光纤激光器。1961年，第一台光纤激光器(用掺杂钕离子的冕牌玻璃制成增益媒质)由伊莱亚斯·史尼泽制造成功。

- 激光器谐振所需的粒子数反转阈值由下式给出

$$(N_2-N_1)_{th}=\frac{\omega^2 n_0^3 t_{sp}}{\pi^2 c^3 t_c g(\omega)}$$

式中 t_{sp} 为自发辐射寿命，t_c 为无源腔的寿命，$g(\omega)$ 为线型函数。对于氦-氖激光器，有

$$g(\omega)=\frac{2}{\Delta\omega_D}\left(\frac{\ln2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-4\ln2\,\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\Delta\omega_D}\right]$$

式中的 $\Delta\omega_D=2\omega_0\left(\frac{2k_BT}{Mc^2}\ln2\right)^{\frac{1}{2}}$ 表示半高全宽(FWHM, full width at half maximum)，k_B 为玻尔兹曼常数，T 为气体的绝对温度，M 为参与激射过程的原子的质量(比如氦-氖激光器中的氖原子)。注意到，N_2-N_1 的最小阈值对应线型的中心，此处 $g(\omega)$ 为最大值。对于氦-氖激光器，$T=300\text{K}$，$\Delta\omega_D\approx8230\text{MHz}$，得出 $g(\omega_0)\approx1.1\times10^{-10}\text{s}$。假设 $M=20M_H\approx3.3\times10^{-23}\text{g}$，$t_c\approx10^{-7}\text{s}\approx t_{sp}$，$n_0\approx1$，可得 $(N_2-N_1)_{th}\approx4\times10^8\text{cm}^{-3}$。

① 原书为0.684μm错误，应为0.694μm。

习　题

26.1　在 MKS 单位制下确定 $u(\omega)$，u_ω，A 和 B 的单位。

[**答案**：$J \cdot s \cdot m^{-3}$；$J \cdot m^{-3}$；s^{-1}；$m^3 \cdot J^{-1} \cdot s^{-2}$]

26.2　氢原子 $2P \rightarrow 1S$ 的跃迁，计算发射光子频率 ω。假设 $2P$ 态的自发辐射寿命为 1.6ns，$n_0 \approx 1$，计算爱因斯坦 B 系数。

[**答案**：$\omega \approx 1.5 \times 10^{16}\,Hz$，$B_{21} \approx 4.2 \times 10^{20}\,m^3 \cdot J^{-1} \cdot s^{-2}$]

26.3　(1) 考虑一个氦-氖激光器的腔寿命 $t_c \approx 5 \times 10^{-8}\,s$，如果 $R_1 = 1.0$，$R_2 = 0.98$，$n_0 \approx 1$，计算腔长度。

(2) 计算 $\Delta\nu_p$，并与纵模间隔 $\delta\nu$ 进行比较。

[**答案**：(1) $d \approx 15cm$；(2) $\Delta\nu_p \approx 3.2MHz$；$\delta\nu \approx 1GHz$]

26.4　一个典型的氦-氖激光器($\lambda = 6328Å$)，其参数为 $d \approx 20cm$，$R_1 \approx R_2 \approx 0.98$，$\alpha_c \approx 0$，$t_{sp} \approx 10^{-7}\,s$，$\Delta\nu_D \approx 1.3 \times 10^9\,Hz$，$n_0 = 1$。计算 t_c 和 $(N_2 - N_1)_{th}$。

[**答案**：33ns；$8.8 \times 10^8\,cm^{-3}$]

26.5　考虑钠光的 D_1 线($\lambda \approx 5890Å$)

(1) 自发辐射寿命为 $t_{sp} \approx 16ns$。试计算 $\Delta\nu_N$ 和 $\Delta\lambda_N$。

(2) 假设 $T = 500K$，计算 $\Delta\nu_D$ 和 $\Delta\lambda_D$。

($k_B \approx 1.38 \times 10^{-23}\,J/K$，$M_{Na} \approx 23M_H$，$M_H \approx 1.67 \times 10^{-27}\,kg$)

[**答案**：$\Delta\lambda_N \approx 10^{-4}Å$；$\Delta\lambda_D \approx 0.02Å$]

26.6　CO_2 激光器中($\lambda \approx 10.6\mu m$)，激射跃迁发生在 CO_2 分子的两个振动能级之间。在 $T \approx 300K$ 时，计算多普勒线宽 $\Delta\nu_D$ 和 $\Delta\lambda_D$($M_{CO_2} \approx 44M_H$)。

[**答案**：$\Delta\nu_D \approx 53MHz$；$\Delta\lambda_D \approx 0.2Å$]

26.7　考虑一光束所有频率位于 $\nu = \nu_0 = 5.0 \times 10^{14}\,Hz$ 到 $\nu = 5.00002 \times 10^{14}\,Hz$ 之间，正入射到一个 $R = 0.95$ 的谐振腔上(见图 26.24)，$n_0 = 1$，$d = 25cm$。计算(在上述频率范围内)从谐振腔输出的光频率，以及相应的模式数。

[**答案**：$\nu = \nu_0 + 400MHz\ (m = 833334)$；
$\nu = \nu_0 + 1000MHz\ (m = 833335)$；
$\nu = \nu_0 + 1600MHz\ (m = 833336)$]

26.8　如图 26.26 所示，如果 $d = 2R_1 = 2R_2$，证明所有通过反射镜共同曲率中心的光线将追溯它们原来通过的路径，因此被捕获在腔内。

26.9　考虑一个氦-氖激光器($\lambda_0 = 0.6328\mu m$)，$d = 30cm$，$n_0 \approx 1$，$R_1 \approx 1$，$R_2 \approx 0.99$。计算无源腔的线宽 $\Delta\nu_p$ 和无源腔的寿命 t_c。假设 $\alpha_c \approx 0$。

[**答案**：0.8MHz；$0.2\mu s$]

26.10　(1) 对于习题 26.9 中的氦-氖激光器，如果输出功率为 0.5mW，计算最终线宽 $(\delta\nu)_{sp}$。

(2) 讨论为了得到上述最终线宽的腔反射镜位置的稳定性，即，位置涨落 Δd 的最大范围。

参考文献和推荐读物

1. C. H. Townes, 'Production of Coherent Radiation by Atoms and Molecules' in *Nobel Lectures in Physics (1963–1970)*, Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 1972. (Reprinted in Ref. 4).
2. N. G. Basov, 'Semiconductor Lasers' in *Nobel Lectures in Physics (1963–1970)*, Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 1972. (Reprinted in Ref. 4).
3. A. M. Prochorov, 'Quantum Electronics' in *Nobel Lectures in Physics (1963–1970)*, Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 1972. (Reprinted in Ref. 4).
4. K. Thyagarajan and A. K. Ghatak, *Lasers: Theory and Applications*, Plenum Press, New York, 1981. (Reprinted by Macmillan India, New Delhi).
5. A. Einstein, 'On the Quantum Theory of Radiation', *Physikalische Zeitschrift*, Vol. 18, 121, 1917 [Reprinted in Ref. 6].
6. D. Ter Haar, *The Old Quantum Theory*, Pergamon Press, Oxford, 1967.
7. A. Ghatak and K. Thyagarajan, *Introduction to Fiber Optics*, Cambridge University Press, 1998.
8. E. Desurvire, *Erbium Doped Fiber Amplifiers*, John Wiley, New York, 1994.
9. A.E Siegman, *Lasers*, Oxford University Press, Oxford, 1986.
10. W. Johnstone, *Erbium Doped Fiber Amplifiers*, Unpublished lecture notes.
11. S. Yoshida, S. Kuwano and K. Iwashita, 'Gain Flattened EDFA with high Al-concentration for multistage repeated WDM transmission experiments', *Electronics Letters*, Vol. **31**, 1765, 1995.
12. E. Snitzer, 'Optical Maser Action of Nd^{+3} in a Barium Crown Glass', *Physical Review Letters*, Vol. **7**, 444–446, 1961.
13. T.H. Maiman, 'Stimulated Optical Radiation in Ruby', *Nature*, Vol. **187**, 493–494, 1960.
14. R. Brown, *Lasers, A Survey of Their Performance and Applications*, Business Books, London, 1969.
15. A. Javan, W. R. Bennett Jr. and D. R. Herriott, 'Population Inversion and Continuous Optical Maser Oscillation in a Gas Discharge Containing a He–Ne Mixture', *Physical Review Letters*, Vol. **6**, 106–110, 1961.
16. C. C. Davis, *Lasers and Electro-Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
17. J. T. Verdeyen, *Laser Electronics*, Prentice-Hall, Englewoodcliffs, N. J, 1989.
18. C. Lin, 'Optical Communications: single mode optical fiber transmission systems', in *Optoelectronic Technology and Lightwave Communication Systems*, Ed. C. Lin, Van Nostrand Reinhold, New York, 1989.
19. A. K. Ghatak and S. Lokanathan, *Quantum Mechanics*, 5th Edition, Macmillan India, New Delhi, 2004. [Also published by Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004].
20. A. K. Ghatak and K. Thyagarajan, *Optical Electronics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
21. D. R. Herriot, 'Optical Properties of a Continuous He–Ne Optical Maser', *Journal of the Optical Society of America*, USA, Vol. **52**, p. 31, 1962.
22. A. Maitland and M. H. Dunn, *Laser Physics*, North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1969.
23. A. Ghatak and K. Thyagarajan, *Fiber Optics & Lasers: The Two Revolutions*, Macmillan India Ltd. New Delhi, 2006.

第27章 光纤光学Ⅰ：基本概念和射线光学

“我听到了光线的笑声和歌唱声。我们可以通过光在任意可见的距离内交谈而不需一根导线。”

——亚历山大·格雷厄姆·贝尔(1880年)

(在利用光作为载波将语音信号成功传输超过200m后的讲演)

重要的里程碑[①]

1841年 丹尼尔·克拉顿(Daniel Colladon)(在日内瓦)演示了喷射水流中的光的传导。

1842年 雅克·巴比涅(Jaques Babinet)(在巴黎)演示了喷射的水流中，以及弯曲的玻璃棒中的光的传导。

1854年 约翰·廷德尔(John Tyndall)演示了喷射的水流中的光的传导，重复了巴比涅同样的工作，但是这一点他并不承认。

1880年 亚历山大·格雷厄姆·贝尔(Alexander Graham Bell)在华盛顿发明了光话机。

1926年 汉塞尔(C. W. Hansell)概述了光纤成像束的原理。

1930年 慕尼黑医学院学生海因里希·拉姆(Heinrich Lamm)首次制作了透明的光纤束，实现了图像的传输。

1954年 荷兰的范·黑尔(Van Heel)和英国人霍普金斯(Hopkins)、卡帕尼(Kapany)共同提出了给光纤增加包层将会改善光纤的传输特性。

1960年 梅曼(Maiman)制造了第一台激光器。

1961年 史尼泽(Snitzer)发表单模光纤理论，并制造出第一台光纤激光器(工作物质是掺有Nd^{3+}离子的钡冕玻璃)

1966年 高锟和霍克汉姆(Hockham)预言了如果能制造出损耗小于20dB/km的玻璃纤维，光纤将会与传统通信系统的传输媒质相媲美。

1970年 卡普隆(Kapron)、凯克(Keck)和毛瑞尔(Maurer)(美国康宁玻璃公司)成功制造出损耗大约为17dB/km的二氧化硅光纤。

1970年 列宁格勒的阿尔费罗夫(Alferov)、贝尔实验室的潘尼斯(Panish)和林严雄(Hayashi)实现了室温下工作的半导体激光器。

1975年 常温下工作的连续波半导体激光器实现商用。

1975年 佩恩(Payne)和甘柏林(Gambling)发现(二氧化硅材料)在1.27μm处的脉冲色散非常小。

① 参考文献[1]对光纤发展的历史给出了很好的回顾，上表给出的一些事件的年代出自文献[1,2]。

1976年	贝尔实验室在抛物线型折射率分布光纤中进行了光通信系统实验,传输速度达到45Mbit/s。
1978年	NTT(日本)用渐变折射率光纤在1.3μm工作波长上实现了53km,32Mbit/s码速率的传输。
1987年	佩恩(Payne)、米尔斯(Mears)、里奇(Reekie)(南安普顿大学)和戴瑟瓦尔(Desurvire)、贝克(Becker)、辛普森(Simpson)(AT&T的贝尔实验室)开发出在1.55μm波长处工作的掺铒光纤放大器。
1988年	第一根贯穿大西洋的光缆系统建成,采用工作在1.3μm处的单模光纤。
1996年	富士通、NTT和贝尔实验室分别独立报道了通过波分复用技术,在一根单模光纤上实现的太比特每秒传输的实验。

27.1 引言

光纤传输损耗的急剧降低,以及与此同样重要的光源和探测器领域的发展,使得在过去三十年里,光纤产业有了前所未有的发展。光纤通信的诞生与1970年低损耗光纤的成功制造以及半导体激光器的室温运转密不可分。从那时算起,在短短的30年里,光纤传输领域的科技日新月异,使得光纤通信系统已发展到第五代。最近,随着光放大器和波分复用技术(WDM)的发展,我们已能实现近乎零损耗和无限带宽的通信系统。的确,光通信系统满足着日益增长的通信连接的需求,特别是因特网蓬勃发展的需求。尽管光纤主要应用于电信领域,但在一些新的相关领域,如光纤传感、非线性光纤光学、光纤器件和组件以及集成光学等,光纤的应用有着显著增长[①]。

本章将介绍光纤光学的基础知识,着重介绍光纤在通信和传感领域的应用特性。在历史回顾之后,将讨论光在光纤中导光的基本原理和两个重要的特性:损耗和脉冲色散。还将简要讨论光纤光学传感器和塑料光纤。光纤放大器和光纤激光器已在第26章中做过非常简要的介绍。

27.2 一些历史评论

通信就是将信息从一点传输到另一点。如果是在一定距离内传输诸如语音、图像、数据等信息时,通常用到"载波通信"的概念。在该系统中,将待传输信息调制到无线电波、微波等作为载波的电磁波上。被调制后的载波通过信道传输到接收端,接收端再从接受到的载波中解调恢复出所需信息。例如,AM(调幅)广播通常覆盖从600kHz～2MHz左右的波段(amplitude modulated wave,AM wave)。假设音乐中所含最高的频率为20kHz,载波的频率为1.5MHz,那么,AM波的频率将在1.48～1.52MHz之间变化——带宽为40kHz。因此在整个600kHz～2MHz的AM波段,至多有30个频道。实际上,如果每个频道占用了更多的带宽,那么,频道数将相应减少。另一方面,考虑到在电视传输中需要扫描图像,则有

① 文献[3]是一本全面总结导波光学器件和组件最新进展的专题论文集。

更多的信息需要传送，因此需要更大的信道带宽（5MHz），这意味着更高的载波频率，电视信号的载波频率从 500～900MHz。

由于光波的频率在 10^{14}～10^{15} Hz 之间，利用光波作为载波的系统与利用无线电波或微波作为载波的系统相比，传输容量有着显著的提高。正是由于光波有着如此大的信息承载容量，吸引着通信工程师们建立起利用光波作为载波的通信系统。

我们知道，在传统的电话装置中，声音信号通过麦克风转化为相应的电信号，并经金属线（铜或铝）传送到本地的电话交换中心。之后，信号接着以电流的形式在金属电缆（或者是通过无线电或微波长距离传输到另一个电话交换中心）传输，中间通常有一些中继器用来放大信号。经过接收端的本地电话交换中心，信号经过金属双绞线传到接听者的电话，在此转换回相应的声波。通过这种双绞线电缆通信系统，最多可以同时传播 48 路通话。相比之下，如果是在一个光通信系统中，利用玻璃纤维作为传输媒质，光波作为载波，则在头发丝细的光纤中（于 2001 年）可以在 1s 内传输 1Tb 的信息（大约相当于同时实现 1500 万路电话通话）。这绝对是 20 世纪最重要的技术成就之一。

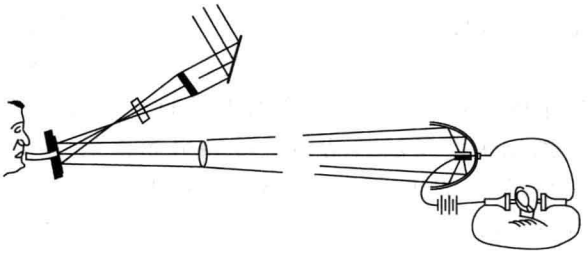


图 27.1　光话机结构示意图，摘自亚历山大·格雷厄姆·贝尔于 1880 年在《美国科学期刊》（第三系列，××，#118 卷，第 305—324 页，1880 年 10 月）上发表的文章《光波对声音信息的制造和再生》。该系统中，振动膜调制的太阳光在空气中传播 200m 后，被含有硒光电管的接收端接收，并连接到听筒上。图片引自文献[4]。

利用光波通信的想法可以追溯到 19 世纪 80 年代，亚历山大·格雷厄姆·贝尔在 1876 年发明电话[①]后不久，又发明了光话机（见图 27.1）。在这个伟大的实验中，话音调制在光束上，并在空气中实现了传输。它的发射端包含一个柔韧弹性的反射振动膜，膜可以在声音激发下振动，并反射太阳光。反射光经过透镜准直并被一个放置在一定距离的抛物面反射器接收。抛物面反射器将光聚集在硒光电元件上，它和电源、耳机形成闭合回路，用来恢复声音信号。在振动膜附近的声波使膜发生振动，导致被振动膜反射的光随之发生变化。变化的光束照到硒光电元件上，其变化将改变光电元件的电导，随之改变了电路中的电流。变化的电流在耳机中再生出声音信号。下面的记述引自文献[4]：

光话机由亚历山大·格雷厄姆·贝尔和他的助手查尔斯·萨姆纳·泰恩特于 1880 年 2 月 19 日共同发明……。这个装置允许声音在光束上传播。1880 年 6 月 3 日，贝尔在新发明的光话机上传输了第一个无线电话消息。光话机用单晶硒光电元件作为接收器，该材料的电阻随着光照逆向变化，即，在黑暗中电阻更高，在光照时电阻较小。光话机的思想就是

① 据最近的报纸报道（发表于 2002 年 6 月），是意大利移民安东尼奥·梅乌奇（Antonio Meucci）发明了电话。根据这篇报道，安东尼奥·梅乌奇早在 1860 年就在纽约展示了他的“teletrfono”。而亚历山大·格雷厄姆·贝尔是在 16 年后申请的专利。这一历史显然已得到美国国会的认可。

调制光束：接收端接收到强度变化的光，引发硒光电元件电阻的变化。这种电阻变化可以被接收端的电话机用来再生捕捉到的声音信号。对光束的调制可以通过振动的镜面实现：薄镜面可以实现凹面和凸面之间的转换，从而汇聚或发散来自光源的光。光话机与电话的功能相似，不同之处在于光话机使用光传输信息，而电话则用电。

下面的记述引自文献[5]：

1880年，他(格雷厄姆·贝尔)在生命的最后阶段制造出了“光话机”，他坚信“……这是我至今最伟大的发明，比电话还要重要……”。不同于电话，光话机没有形成商业价值。

对于光频段的载波通信来说，其发展的推动力源自1960年激光器的发明。因为在更早时候，没有一个合适的光源可稳定用做信息载体①。另一方面，几乎是同时，电信业务量的迅猛增长使人们认识到，基于同轴电缆、无线电、微波、双绞线电缆等的传统媒介的通信系统即将达到饱和点。所以，激光器的出现立即引发了大量旨在探讨、建造与传统通信系统类似的光通信系统的可能性的研究。第一个现代光通信实验是利用激光束在大气中传播。但很快研究人员就意识到，承载信息的激光束并不能够像长波长区的微波和无线电波那样，在空气中进行远距离传输。这是因为光束(波长约为1μm)在大气传输中受到的散射和吸收而会发生严重的衰减和畸变。为了在陆地环境下实现可靠的光通信，提供一种传输媒质来保护载波信号不受变幻无常的大气的影响是非常必要的。这种导引媒质正是光纤，它细如头发丝般的结构可以导引光束从一个地方传到另一个地方(如图27.2和图27.3所示)。光束之所以能被导引在光纤中传播是源于全反射现象，这个现象将在下面章节中讨论。

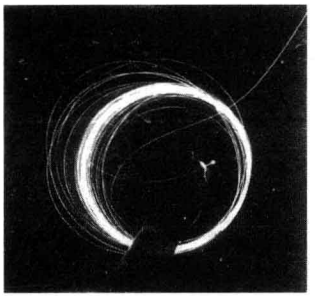


图27.2　一根传输着光束的细长光纤。图片引自文献[3]，照片由Chynoweth博士提供。

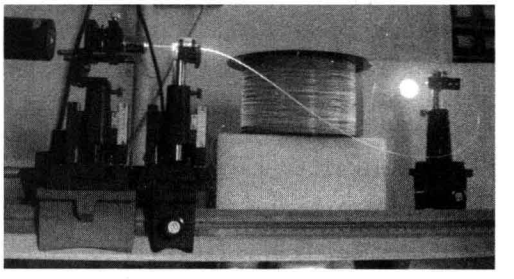


图27.3　氦-氖激光器的光束入射一根阶跃折射率多模光纤，并在终端产生输出光斑。可以从侧面看到光纤中的光主要是由于瑞利散射的存在。图中光纤是由位于印度加尔各答的CGCRI公司的拉丝装置制造，照片由Shyamal Bhadra博士和Atasi Pal女士提供。彩图见文前附录图表页的图38。

除承载信息的容量巨大外，在新技术下制造的光纤，其损耗(<0.25dB/km)已降得非常小②，这样，两个相邻的中继器(用来放大和整形衰减的信号)之间的光纤长度可以达到

① 需要指出的是，尽管非相干光源，如发光二极管(LED)，同样用在目前的光通信系统中，但要知道，正是激光器的发现，首次引发了发展光通信系统的浓厚兴趣。

② 损耗的大小通常用dB来衡量，已在27.8节中给出了定义。这里的0.25dB/km表示信号在传播12km后，光功率减少为开始的一半。

250km。应该指出的是，正是高锟和霍克汉姆在 1966 年发表的重要论文（文献[7]）中提到，如果能将金属杂质和其他杂质去除，基于二氧化硅玻璃的光纤将能作为所需的传输媒质。下面是从高锟和霍克汉姆于 1966 年发表的文章中摘录的一段话：

理论和实验研究指出，将纤芯直径为 λ_0 的玻璃光纤套上包层，且总直径为 $1000\lambda_0$，这样结构的光纤很可能成为实用的光波导，并成为一种潜在的新形式通信媒质。纤芯的折射率要比包层大 1%。其损耗应该约在 20dB/km，这还远远高于导致损耗的关键机制所决定的损耗因子的下限。

正是 1966 年的这篇文章引发了对低损耗光纤各种研究。1970 年，卡普隆、凯克和毛瑞尔（美国康宁玻璃公司）成功制造出在波长 0.633μm 处损耗约为 17dB/km 的二氧化硅光纤（见文献[8]）。此后，技术发展更为迅速。到 1985 年，已能制造出极小损耗（<0.25dB/km）的玻璃光纤。如图 27.4 所示为一个典型的光纤通信系统，包含一个发射端，发射端可以是激光二极管或 LED，其发出的光耦合进入光纤中。沿着光纤链路，有很多连接点，它们是光纤跨段之间以及光纤与中继器之间的固定焊接接头。中继器的作用是放大信号和纠正沿着光纤链路积累的信号畸变。在链路的终端，光电探测器接收光信号，经电域处理后恢复成原来的信号。

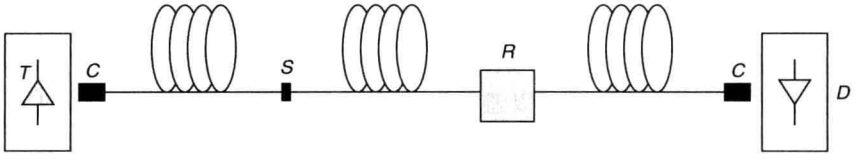


图 27.4　典型的光纤传输系统，包含一个发射端，发射端可以是激光二极管或 LED，其发出的光耦合进入光纤中。沿着光纤链路，有很多连接点，它们是光纤跨段之间以及光纤与中继器之间的固定焊接接头。中继器的作用是放大信号和纠正沿着光纤链路积累的信号畸变。在链路的终端，光电探测器接收光信号，经电域处理后恢复成原来的信号。

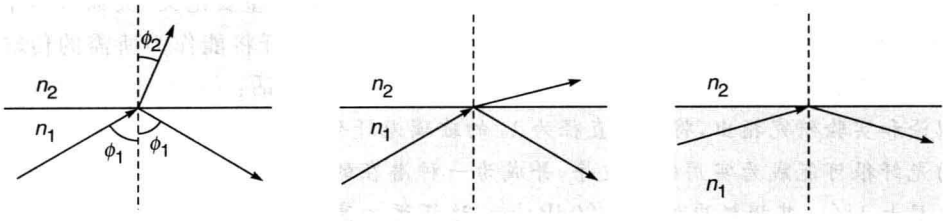
27.3　全反射

光通信系统的核心部分是光纤，它为载有信息的光束传输提供通道。如前所述，光束（通过光纤）传导是由于全反射现象（total internal reflection，TIR）的存在。假设一束光从光密媒质入射到光疏媒质（$n_2<n_1$），那么，光线将远离法线方向弯曲发生折射（见图 27.5(b)）。当折射角是 90°时，对应的入射角称为临界角，用 ϕ_c 表示。即，当

$$\phi_1 = \phi_c = \arcsin\frac{n_2}{n_1} \tag{27.1}$$

时，$\phi_2=90°$。当入射角大于临界角时（即 $\phi_1>\phi_c$），将没有折射光线，这就是所谓的全反射[①]（见图 27.5(c)）。

① 在这里需要提及的是，如例 24.4 所示，能量确实穿入了光疏媒质中形成隐失波。但无论如何，反射率是 1，也可以参考 28.2 节。



(a) (b) (c)

图 27.5

(a) 光从光疏射向光密媒质($n_2>n_1$),折射角小于入射角;(b) 光从光密射向光疏媒质($n_2<n_1$),折射角大于入射角;(c) 当入射角大于临界角时,将发生全反射

例 27.1 对玻璃-空气界面,$n_1=1.5$,$n_2=1.0$,可以计算得出临界角为

$$\phi_c = \arcsin\frac{1}{1.5} \approx 41.8°$$

另一方面,对于玻璃-水界面,$n_1=1.5$,$n_2=4/3$,有

$$\phi_c = \arcsin\frac{4/3}{1.5} \approx 62.7°$$

全反射现象可以用如图 27.6 所示的简单实验来证实。将一个很厚的半圆玻璃盘浸在一个装满水的玻璃容器中,将一束氦-氖激光,或简单地将一个激光笔对准半圆盘的中心入射,使入射光沿玻璃表面的法向入射以避免激光束发生偏折。(在玻璃与水的界面上的)入射角可以随着玻璃盘绕盘心点 O 转动而从小变大,最后当入射角大于临界角时($\approx$62.7°),从顶部可以清楚地看到激光束发生全内反射。如果向水中加入一点墨水,光路看上去将特别漂亮!这个实验非常简单,我们建议读者用一个激光笔去做一做。

第一个验证全反射的实验是将光束投射入喷射的水流,该实验由丹尼尔·克拉顿于 1841 年首先演示,雅克·巴比涅于同年重复了该实验。其演示实验的示意图,如图 27.7 所示。当水流从被照亮的容器中泄出时,光在水和空气的界面上发生全反射,并沿着水流的弯曲路径传播。在此要提到约翰·廷德尔,通常认为是他首次演示了喷射的水流能够导光。但是,约翰·廷德尔是于 1855 年才演示了这个实验,实际上是重复了巴比涅的工作,且并没有致谢巴比涅。要了解其中原委,读者可以见参考文献[1]。

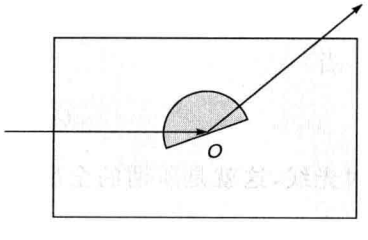


图 27.6 一个简单的演示全反射现象的实验

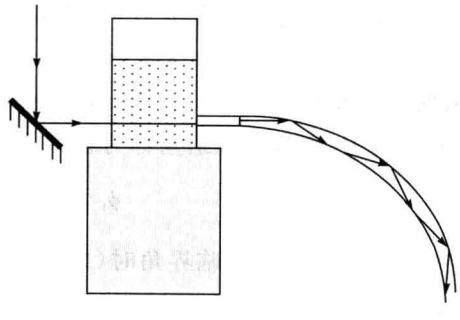


图 27.7 喷射水流中的导光现象,这证实了全内反射现象的存在,该实验由丹尼尔·克拉顿于 1841 年首次演示。

27.4　光纤

如图 27.8(a)所示为光纤的结构，由(圆柱形的)中心电介质纤芯和包围纤芯的折射率稍低的材料包层组成。相应的折射率分布(沿横向)表示为

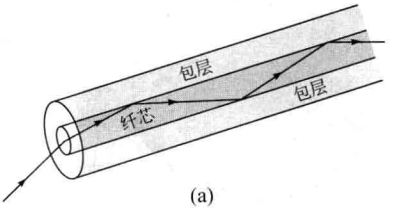
$$\begin{cases} n = n_1, & 0 < r < a \\ n = n_2, & r > a \end{cases} \tag{27.2}$$

式中的 n_1 和 n_2($<n_1$)分别为纤芯和包层的折射率，a 为纤芯的半径。定义一个参量 Δ

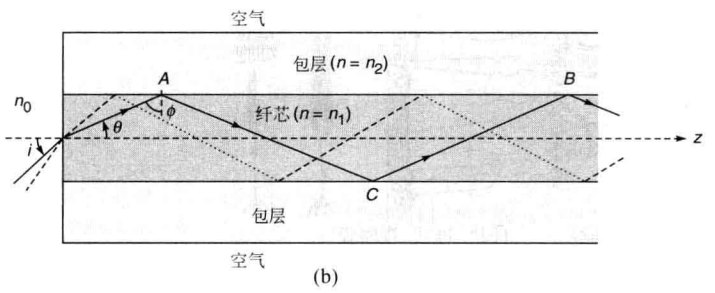
$$\Delta \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \tag{27.3}$$

当 $n_2 \approx n_1$，即，$\Delta \ll 1$ 时(这是大多数二氧化硅光纤的真实情况)，有

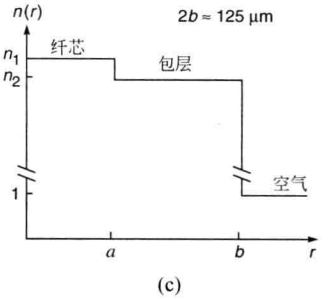
$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}\frac{n_1 + n_2}{2n_1} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_2} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1} \tag{27.4}$$



(a)



(b)



(c)

图　27.8

(a) 玻璃光纤是圆柱形的纤芯被折射率稍低的材料包裹；(b) 当光线入射到纤芯-包层界面，入射角大于临界角时，光线将被束缚在纤芯中；(c) 阶跃型折射率光纤的折射率分布图

对于典型的(多模)光纤，$a \approx 25\mu m$，$n_2 \approx 1.45$(纯二氧化硅)及 $\Delta \approx 0.01$，可得纤芯折射率为 $n_1 \approx 1.465$。包层通常是纯二氧化硅，纤芯通常是掺锗的二氧化硅，通过掺锗，可以使纤芯折射率增加。

当一束光进入光纤时，如果入射角(在纤芯和包层界面)大于临界角 ϕ_c，光线将在界面处发生全反射。此外，由于光纤是圆柱形的对称结构，光线还将在下面的界面处发生全反射，因此，光线经历不断重复的全反射，在纤芯中导引向前。甚至对于弯曲的光纤，光纤的导引作用也可以通过多次的全反射实现(如图 27.2 和图 27.7 所示)。如图 27.2 和图 27.3 所示为光线在光纤中导引传播的实际情况。在照片中，我们之所以可以看到光纤中的光束，是因为有光从光纤的侧面出射，这主要是由于光的瑞利散射的原因，这和天空显蓝色，日出和日落时太阳显红色是同一种现象。

光纤需要包层,而不是采用无包层的裸纤芯,对此的第一感觉是因为光从一个地方传到另一个地方时,光纤需要支撑,且普通的支撑结构会使光纤变形而影响光波的传导作用,这个问题可以选择裹以足够厚的包层来避免。此外,对于光纤束,光纤如果没有包层,光会从一根光纤泄露到另一根光纤。给光纤加装一层玻璃(即包层)的想法是由英国人霍普金斯和卡帕尼于 1955 年提出的,但是,那个年代的光纤主要是用于图像传输而非通信。实际上,由于霍普金斯和卡帕尼以及荷兰的范·黑尔(在 20 世纪 50 年代)对光纤光学的早期开拓性工作,促成光纤在光学器件上的应用。

这里,作者有兴趣介绍一下人眼的视网膜,它是由大量的类似于光纤结构的杆状细胞和锥状细胞组成,即,它们是由柱状电介质杆及其周围折射率略低的电介质组成(见图 27.9)。杆芯直径约几个微米,光在这些"光导"中被吸收后产生电信号,再通过大量的神经传给大脑。

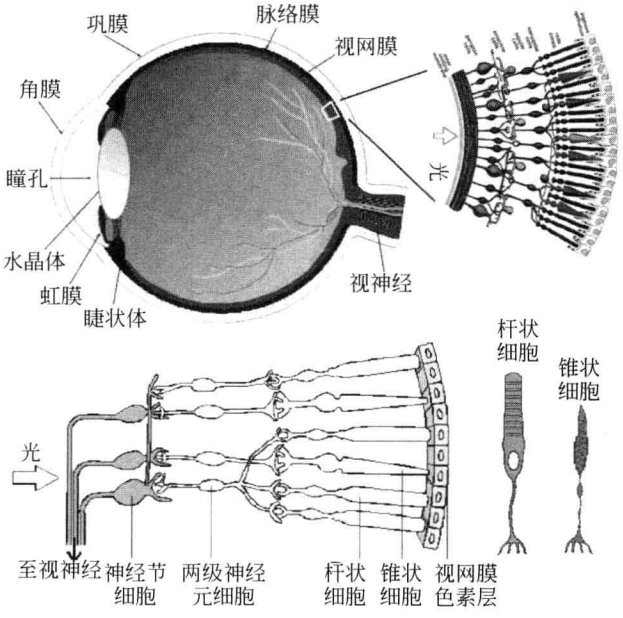


图 27.9　眼球中的杆状细胞和锥状细胞,图片引自网站 http://www.biologymad.com/nervoussystem/eyenote.htm。彩图见文前附录图表页的图 42。

27.5　为什么是玻璃纤维

为什么用玻璃来制造光纤?用光纤光学领域先驱者之一——W. A. 甘柏林教授(见文献[2])的话来说:

我们注意到玻璃是一种不同寻常的材料,它以纯净的形式使用至少 9000 年了。几千年来,它的组分相对来说没有变化,并被广泛使用。玻璃的三个最重要的特性使得它有着空前的价值。

(1) 在能达到的很宽的温度范围里,玻璃的粘性可变、可控,这不同于水、金属等很多材料。这些材料在温度降至固化温度之前一直保持液体状态,到达临界温度后,就突然固化。而对于玻璃材料而言,它不是在一个特定的凝固温度固化,而是随着温度的降低逐渐变硬,并最终变为固体。在这个过渡区内,可以很容易的把玻璃拉成纤维。

(2) 高纯度的二氧化硅的损耗是极低的，也就是说，它是高度透明的。目前，大多数商用的二氧化硅光纤在传输 1km 以后，还有 96%的剩余功率的光仍能继续传输。

(3) 玻璃的内在强度，其强度约为 2000000lb/in^2 ($\approx 1.41\times10^9$kg/m^2)，所以，在电话网络中使用的玻璃光纤，虽然直径只是头发丝的两倍左右 (125μm)，却可以承受 40lb ($\approx 1.78\times10^2$N) 的载荷。

27.6　相干光纤束

将大量的光纤放在一起，将形成所谓的光纤束。如果光纤不是整齐有序地排列，而是混乱地扎在一起，形成的光纤束称为非相干光纤束。如果将光纤规则地有序排列，即，光纤在入射端和出射端的相对位置相同，则称为相干光纤束。假如将光耦合到一根特定光纤的一端，那么，同一根光纤的另一端将出现一个亮的光斑。所以，相干光纤束可以实现端对端的图像传输(见图 27.10)。

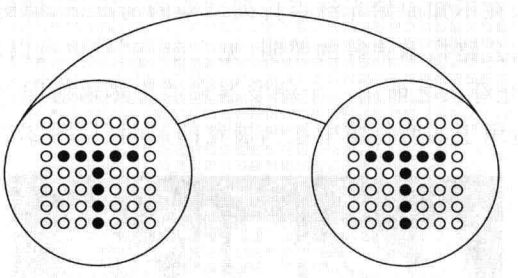
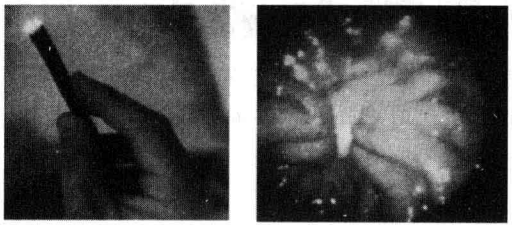


图 27.10　阵列光纤束，光纤输入端的亮斑(或暗斑)和从另一端输出时产生的相对应的亮斑(暗斑)，因此，图像可以通过光纤阵列进行传输。

相干光纤束最重要的应用之一是光纤内窥镜，借助于伸入人体的内窥镜，可从体外观测到体内情况。为了照亮待观察部位，装在保护套内的光纤束将照明光从外部引导到体内(见图 27.11 和文前附录图表页中的图 40)。当前使用的光纤图像显示镜，其光纤束包含 10000 根光纤，而直径却只有 1mm 左右，分辨率可达到 70μm。如图 27.12 所示为一个低分辨率的光纤图像显示镜(约有 6000 根光纤)观察一个老式机械钟的内部结构的照片。注意，由于单根光纤只传送一种颜色，因此，图像中每一根光纤都可以辨认出来。



(a)　(b)

图　27.11

(a) 称为内窥镜的医用光纤探测器，可以使医生检查到人体的内部情况；(b) 内窥镜下观察的胃溃疡。图片由设在新德里的美国信息服务部提供。彩图见文前附录图表页的图 40。

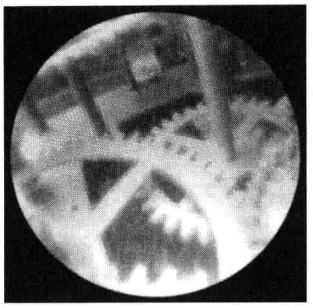


图 27.12　用一个低分辨率的光纤图像显示镜(约有 6000 根光纤)观察一个老式机械钟的内部结构。注意,由于单根光纤只传送一种颜色,因此,图像中每一根光纤都可辨认出来。图片引自 http://en.wikipedia.org/wiki/fiberscope. 彩图见文前附录图表页的图 39。

另一方面,非相干光纤束输出的图像是杂乱无章的。由于该性质,非相干光纤束可以用作编码器。在出射端,传输的图像可以用与编码器相同的光纤束解码获得。一个光纤束中可以有着几十万根光纤,在不知原始光纤束排列结构的情况下,解码将异常困难。非相干光纤束也可以用在交通灯、公路指示牌等的照明(见文献[9]),也可以用作冷光源(光源只发光不产热),只要在光进入光纤束之前用一个滤波器来消除热辐射即可。光纤束中的出射光也能不含紫外辐射,从而适用于如博物馆中绘画展览的照明(见图 27.13)。



图 27.13　在光纤束照明下的微型油画的展览情况。用这样的光束照明微型油画时,排除了紫外和红外辐射损害的影响。采用光纤束照明系统,温度只上升了 1℃。图片引自 http://spie.org/x8862.xml。照片由 Krzysztof Zaremba 拍摄。

27.7　数值孔径

如图 27.8 所示,光线入射到光纤入射端,与光纤轴线之间的夹角为 i,折射光与轴线之间的夹角为 θ。假设光纤外部媒质的折射率为 n_0(大多数实际情况下取 1),可得

$$\frac{\sin i}{\sin\theta}=\frac{n_1}{n_0}\quad\text{（原书有误）}$$

很明显，如果该光线在纤芯和包层界面上发生全反射，则有

$$\sin\phi(=\cos\theta)>\frac{n_2}{n_1} \tag{27.5}$$

因此，有

$$\sin\theta<\left[1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right]^{1/2}$$

则

$$i<i_m$$

式中

$$\sin i_m=(n_1^2-n_2^2)^{1/2}=n_1\sqrt{2\Delta}$$

此处已假设 $n_0=1$，即，假设外层媒质是空气。因此，如果一道锥形光束照射在光纤的一端上，则光锥束的半角宽度要小于 i_m，光束才能在光纤中传导。该角度用来衡量光纤集光能力的大小，因此，用式(27.6)来定义光纤的数值孔径(NA)

$$\mathrm{NA}=\sin i_m=\sqrt{n_1^2-n_2^2} \tag{27.6}$$

例 27.2　对于典型的阶跃型折射率(多模)光纤，$n_1\approx1.45$，$\Delta\approx0.01$，可以计算出

$$\sin i_m\approx0.205\Rightarrow i_m\approx12^\circ$$

考虑一段很短的光纤，如果所有的入射光线介于 $i=0$ 到 $i=i_m$ 之间，那么，从光纤末端出射的光也会发散为一个半角大小为 i_m 的锥体。如果使该光束垂直投射到一张白纸上(如图 27.14 所示)，测量光斑的直径，就可以轻松计算出光纤的数值孔径 NA。这使可以通过非常简单的实验估算出光纤的数值孔径，流程如下所述。

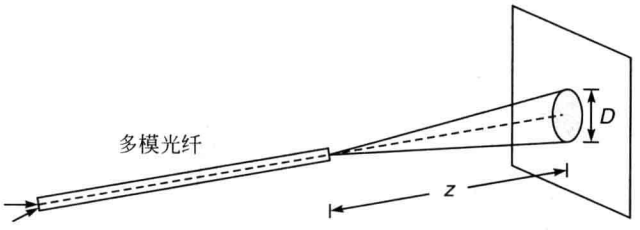


图 27.14　在光纤输出端远场距离 z 处放一屏幕，测量输出光束的光斑直径，可以用来测量光纤的数值孔径 NA(引自文献[12])。

在纸屏上画出一系列直径从 0.5～1.5cm 的同心圆，并将纸屏置于远场处，使出射端光纤的轴线恰好垂直穿过屏上的圆心。光纤末端安装在 XYZ 调节架上，并将其稍微移向或移离屏幕，使光纤射出的远场光斑恰好与屏上的一个圆重合。准确测量光纤末端与屏幕之间的距离 z，以及重合圆的直径 D，根据式(27.7)，可以计算出数值孔径(NA)

$$\mathrm{NA}=\sin i_m=\sin\left(\arctan\frac{D}{2z}\right) \tag{27.7}$$

27.8 光纤的损耗

损耗和脉冲色散是光纤两个最重要的特性,它们决定了光通信系统的信息传输容量。很明显,降低损耗(同样降低色散)就可以增大中继的间隔,通信系统的成本就会随之降低。在27.9节中将讨论脉冲色散,本节中将简单讨论一下光纤中存在的几种损耗机制。

光束的损耗通常用分贝(dB)来表示。假设入射光功率为 P_1,出射光功率为 P_2,那么,损耗用分贝可以表示为

$$\alpha = 10\lg\left(\frac{P_{\text{input}}}{P_{\text{output}}}\right) \tag{27.8}$$

那么,可以看出:

(1) 如果出射光功率恰好等于入射光功率,那么,损耗等于0dB。

(2) 如果出射光功率只是入射光功率的1/10,那么,损耗等于10dB。

(3) 如果出射光功率是入射光功率的1/100,那么,损耗等于20dB。

(4) 如果出射光功率是入射光功率的1/1000,那么,损耗等于30dB,如此类推。

同理,如果出射光功率是入射光功率的1/2时,损耗为 $10\lg 2 \approx 3$dB。此外,如果96%的光通过了光纤,则损耗就约为0.18dB。对于一个典型的光纤放大器,功率可以放大1000倍,这就意味着功率增益是30dB。

如图27.15所示为一个典型的二氧化硅材料的光纤在不同波长下衰减系数(即单位长度下的损耗)的变化曲线。可以注意到有两个损耗的低窗口,一个在1300nm附近,另一个在1550nm附近。这两个窗口典型的损耗分别是0.8dB/km和0.25dB/km。这就是为什么大多数光通信系统中的工作波长为1300nm或1550nm的原因。后一个窗口由于与光纤放大器的工作波段相重合,而变得异常重要。

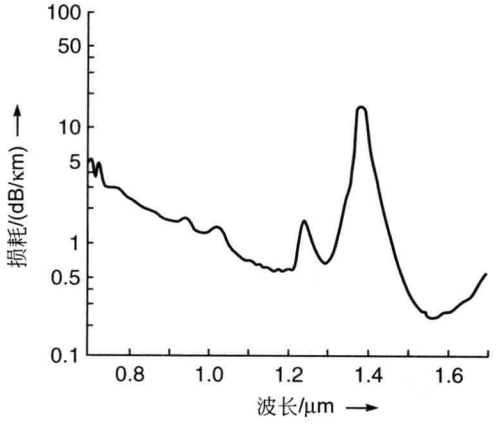


图27.15 典型的二氧化硅材料的光纤在不同波长下衰减系数的变化曲线,可以看到,损耗的最低点在1550nm处(引自文献[12])。

光纤损耗由多种机制形成,如瑞利散射、金属杂质吸收、水峰吸收和硅分子本征吸收等。在1100nm处,即使1ppm(百万分之一)的铁杂质也会造成0.68dB/km的损耗。同样浓度的 OH^- 离子在1380nm处引起的损耗为4dB/km。可以看出,材料的纯度水平决定了光纤

损耗的水平。还有一个有趣的现象，在远距离传输时，瑞利散射是与波长相关的。将白光（钨丝卤素灯发出的光）耦合进入一个长度约为 1km 的多模光纤中，观察出射光以及光的颜色。然后，将光纤砍断只留下 1m 的长度，再做同样的实验。观察发现，前一个试验中出射光是偏红色的，而后一个实验中出射光是白色的。出现这种差别是由于瑞利散射中，波长越长，损耗越低；这说明，接近蓝光区波长的光在光纤中比红光区受到的散射更大。因此，即使在入射端所有的波长均耦合进入光纤，在出射端，红光区的功率更高，表现为偏红色的出射光。

例 27.3　损耗用 dB 表示后，计算将变得非常简单。例如，假设一个长 40km 的链路（损耗为 0.4dB/km）中有 3 个连接器，假设每个连接器的损耗为 1.8dB，那么，总的损耗将是 0.4dB/km×40km+3×1.8dB=21.4dB。

例 27.4　假设一个功率是 5mW 的激光束，经过 40km 的光纤传输后，功率降为 30μW。光纤的衰减系数为[10log(166.7)]/40≈0.56dB/km。

通常用 dBm 来衡量光束的功率，计算将非常方便，dBm 定义为

$$P(\text{dBm}) = 10\lg P(\text{mW}) \tag{27.9}$$

可以有以下对应关系：

$$1\text{mW} \Leftrightarrow 0\text{dBm}$$
$$1\text{W} \Leftrightarrow 30\text{dBm}$$
$$1\mu\text{W} \Leftrightarrow -30\text{dBm}$$
$$1\text{nW} \Leftrightarrow -60\text{dBm}$$

同理，有

$$0.2\text{W} = 200\text{mW} \Leftrightarrow \approx 23\text{dBm} \quad \text{（原书 2.3dBm 错了）}$$

根据 dBm 的定义，式(27.8)可以重新表示为

$$\alpha = P_{\text{input}}(\text{dBm}) - P_{\text{output}}(\text{dBm}) \tag{27.10}$$

或是

$$P_{\text{output}}(\text{dBm}) = P_{\text{input}}(\text{dBm}) - \alpha(\text{dB}) \tag{27.11}$$

由上式可见，采用 dB 表示后，对功率损耗的计算将变得非常简单，从例 27.5 中也可以看出这一点。

例 27.5　考虑一个 5mW 的激光束在衰减系数为 0.5dB/km 的光纤中传输 40km，总的损失为 20dB。入射光功率为 6.99dBm，出射端的光功率就是−13.01dBm，即，0.05mW。

在激光源和探测器之间，两根光纤结合处的焊接点为接头，用 N_s 表示接头的数目，每个点的损耗用 l_s(dB)表示。同理，用 N_c 表示连接器的数目，每个连接器的损耗为 l_c(dB)，则接收端探测器接收到的光功率为

$$P_{\text{received}} = P_{\text{input}} - N_c l_c - N_s l_s - L\alpha$$

式中 α 为光纤的衰减系数，dB/km；L 为光纤长度，km。

例 27.6　设 $P_{\text{input}}=1\text{mW}\Leftrightarrow 0\text{dBm}$，$l_c=1$dB/连接器，$N_c=2$，$l_s=0.5$dB/接头，$N_s=4$，$\alpha=0.5$dB/km，$L=40$km，那么，光纤总的损耗为 20dB，则

$$P_{\text{received}} = 0-2-2-20 = -24\text{dBm} \Leftrightarrow 4\mu\text{W}$$

例 27.7 对于一个典型的光纤通信系统,其中各器件参数如下。

激光器输出功率	0dBm(1mW)
激光器波长	1.3μm
光纤损耗	1dB/km
要求的链路长度	20km
接头(每5km)损耗	0.5dB/接头
激光器到光纤的耦合损耗	8dB
光纤到探测器的耦合损耗	2dB
光纤总损耗 20×1dB/km	20dB
接头总损耗 3×0.5dB	1.5dB
总损耗	31.5dB

那么,探测器接接收到的功率为−31.5dBm(≈0.708μW)。如果探测器功率极限是−40dBm(即,探测器能够探测到的最低功率是−40dBm(=0.1μW)),那么,对于探测器还有额外的8.5dBm的功率余量。以上计算的过程是一个典型的功率分配计算。

27.9 损耗极限

用 N_p 表示极限光子数目(光子数/每比特信息),即,一个光脉冲被探测到所需的最少光子数目。则探测器接收到对应的平均功率为

$$P_{\min} = \frac{1}{2} N_p B E$$

式中 $E = h\nu$ = 光子能量,B 为通信系统的比特率(bit/s)。典型值是 $N_p \approx 1000$,$B \approx 2.5\text{Gbit/s}$。

例 27.8 对波长 $\lambda_0 \approx 1300\text{nm}$,有

$$E = h\nu = hc/\lambda_0 \approx 1.53 \times 10^{-19}\text{J}$$

可得

$$P_{\min} = \frac{1}{2} N_P B E = \frac{1}{2} \times 1000 \times (2.5 \times 10^9) \times 1.53 \times 10^{-19}\text{W}$$

$$\approx 0.19\mu\text{W}(\approx -37.2\text{dBm})$$

因此,如果入射光功率 $P_{in} = 1\text{mW}(=0\text{dBm})$,那么,系统允许的最大损耗约为38dB。如果忽略接头和连接器带来的损耗,只考虑光纤损耗,则对于 $\alpha = 0.5\text{dB/km}$ 的光纤,可传输的最大距离为 $L_{\max} = 93\text{km}$。

例 27.9 对波长 $\lambda_0 \approx 1550\text{nm}$,有

$$E = h\nu = hc/\lambda_0 \approx 1.28 \times 10^{-19}\text{J}$$

可得

$$P_{\min} = \frac{1}{2} N_P B E = \frac{1}{2} \times 1000 \times (2.5 \times 10^9) \times 1.28 \times 10^{-19}\text{W}$$

$$\approx 0.16\mu\text{W}(\approx -38\text{dBm})$$

因此,如果入射光功率 $P_{in} \approx 1\text{mW}(=0\text{dBm})$,则系统允许的最大损耗约为38dB。如果

忽略接头和连接器带来的损耗，只考虑光纤损耗，则对于 $\alpha=0.2\text{dB/km}$ 的光纤，可传输的最大距离 $L_{\max}=190\text{km}$。

27.10　多模光纤中的脉冲色散

数字光通信系统中，信息的传输首先对一串光脉冲进行编码，接着，光脉冲从发射端传输到接收端，经解码后恢复信息。单位时间内传送的脉冲数目越大，在接收端能够分辨的情况下，系统的传输容量越大。进入光纤的光脉冲随着在光纤中的传输引起脉冲在时域的展宽，这种现象叫做脉冲色散。造成脉冲色散的主要原因有以下几点。

(1) 在多模光纤中，通过一段长度给定的光纤，不同光线经历的时间各不相同。在本节和随后的几节中，将讨论阶跃型折射率光纤和抛物线型折射率光纤的情况。用波动光学的术语来说，这种因为不同模式的传播速度不一样导致的现象叫模式色散。

(2) 任何一个光源发出的光都包含一定的波长范围。源于光纤材料的内在特性不同，不同的波长经历同一段光纤所需的时间不同，这种现象称为材料色散。很显然，在单模光纤和多模光纤中都存在材料色散。

(3) 另一方面，既然单模光纤中只有一个模式，不存在模式色散。而由于光纤的几何结构，存在着所谓的波导色散。在第 29 章中将详细讨论单模光纤和波导色散。显然，多模光纤中也存在波导色散，只是其影响较小，可以忽略。

27.10.1　多模阶跃型光纤中的射线色散

首先分析一下在阶跃型折射率光纤(step-index fiber，SIF)中的光线路径，如图 27.8 所示，可以看到，与光纤轴线夹角越大的光线(虚线表示的光线)在光纤中需要走的路径越长，到达出射端需要的时间也越长。

下面将推导阶跃折射率光纤模式色散的表达式。如图 27.8 所示，入射光线与光纤轴线之间的夹角为 θ，传播 $\overline{AB}$ 需要的时间为

$$t_{AB}=\frac{\overline{AC}+\overline{CB}}{c/n_1}=\frac{\overline{AB}/\cos\theta}{c/n_1} \tag{27.12}$$

或者

$$t_{AB}=\frac{n_1\overline{AB}}{c\cos\theta} \tag{27.13}$$

式中 c/n_1 表示光在折射率为 n_1 的媒质中的传播速度，c 为光在自由空间中的传播速度。由于经历全反射光线的路径不断重复，则经过一段 L 的光纤所用的时间为

$$t_L=\frac{n_1L}{c\cos\theta} \tag{27.14}$$

由式(27.14)可以看出，光线在光纤中传播所需的时间的是光线与 z 轴夹角的函数。式(27.14)描述了脉冲色散。假设所有入射光线覆盖了从 $\theta=0$ 到 $\theta=\arccos(n_2/n_1)$(见式(27.5))的所有角度，则光纤传输 L 所经历时间的两个极值分别为

$$t_{\min}=\frac{n_1L}{c},\quad \theta=0 \tag{27.15}$$

$$t_{\max}=\frac{n_1^2L}{cn_2},\quad \theta=\theta_c=\arccos(n_2/n_1) \tag{27.16}$$

如果所有的光线在入射端同时开始激励,那么,这些光线相继到达接收端所需的时间间隔为

$$\Delta\tau_{\mathrm{i}}=t_{\max}-t_{\min}=\frac{n_1L}{c}\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)-1\right]$$

或者

$$\Delta\tau_{\mathrm{i}}\approx\frac{n_1L}{c}\Delta\approx\frac{L}{2n_1c}(\mathrm{NA})^2\quad \text{阶跃型折射率光纤的模式色散} \tag{27.17}$$

式中 Δ 如前定义(见式(27.3)和式(27.4)),且用到了式(27.6)。$\Delta\tau_{\mathrm{i}}$ 表示由于不同光线在光纤传输所需时间的不同导致的脉冲色散。从波动光学的角度,$\Delta\tau_{\mathrm{i}}$ 就是模式色散(intermodal dispersion)的量度,故用下标 i 表示。注意到脉冲色散与$(\mathrm{NA})^2$成正比,因此,要减少色散,就必须减小 NA,但这同时也会造成光纤接收光线角度的减小,即,收集光线的能力减弱。假设在入射端,入射脉冲宽度为 τ_1,则在光纤中传播 L 后,脉冲宽度将变为

$$\tau_2^2=\tau_1^2+\Delta\tau_{\mathrm{i}}^2 \tag{27.18}$$

即,脉冲经过光纤传输后展宽了。这样,在入射端两个原本可以很好分辨的脉冲到达出射端时可能无法分辨了。

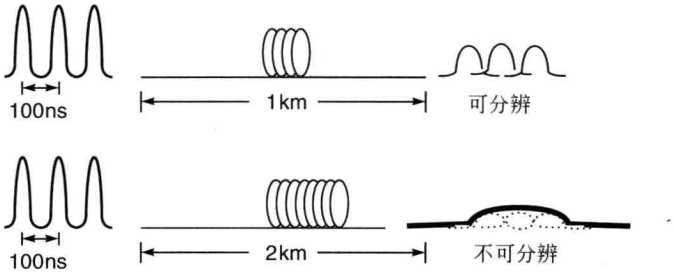


图 27.16 入射脉冲间隔为 100ns,在传输 1km 后,脉冲还可以分辨出来;在传输 2km 后,脉冲就无法分辨了(引自文献[11])。

例 27.10 对一典型的(多模)阶跃型折射率光纤,假设折射率 $n_1=1.5$,$\Delta=0.01$,$L=1\mathrm{km}$,可以计算出

$$\Delta\tau_{\mathrm{i}}=\frac{1.5\times1000}{3\times10^8}\times0.01=50\mathrm{ns/km} \tag{27.19}$$

即,脉冲在光纤中传播 1km 后,脉冲展宽为 50ns。假设在入射端两个脉冲间隔为 500ns,那么,在传输了 1km 后,脉冲仍可以分辨。假设在入射端两个脉冲间隔为 10ns,那么,在传输 1km 后将无法分辨。在一个 1Mbit/s 的光纤系统中,每个脉冲宽度是 10^{-6}s,对于 50ns/km 色散的光纤,每隔 3~4km 就需要一个中继器。对一个 1Gbit/s 的光纤通信系统而言,脉冲宽度只有 10^{-9}s,对于 50ns/km 色散的光纤,即使只传输了 50m,其脉冲展宽就无法忍受了。从通信系统的角度看,这就显得效率低下,同时也不经济。

当接收端脉冲无法分辨时,信息将无法恢复。因此,脉冲色散越小,系统承载的信息容量越大。

由例 27.10 的讨论可知，对于一个承载大容量的信息传输系统而言，必须要减少系统的脉冲色散。当前有两种供选择的解决方案：一是使用抛物线型折射率光纤；二是采用单模光纤。

27.10.2　抛物线型折射率光纤(PIF)

在阶跃型折射率光纤中，如图 27.8 所示，纤芯的折射率是一个常数。与此相对应的，在抛物线型折射率光纤中，纤芯的折射率从中心的最大值逐渐减小到纤芯-包层界面的常数。折射率的变化可由下式表述

$$\begin{cases} n^2(r) = n_1^2\left[1-2\Delta\left(\dfrac{r}{a}\right)^2\right], & 0<r<a(\text{纤芯}) \\ n^2(r) = n_2^2 = n_1^2(1-2\Delta), & r>a(\text{包层}) \end{cases} \tag{27.20}$$

Δ 的定义见式(27.4)。对于一个典型的(多模)抛物线型折射率的二氧化硅材料光纤，有 $\Delta\approx 0.01$，$n_2\approx 1.45$，$a\approx 25\mu\text{m}$。在 3.4.1 节中已经提到，光线在抛物线型折射率波导中的传播路径是正弦曲线(见图 27.17)。

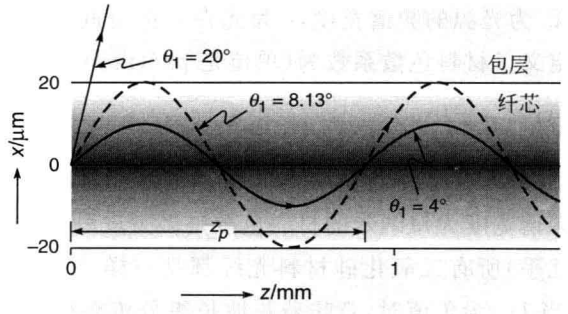


图 27.17　光线在抛物线型折射率光纤中的传播路径

如图 27.17 所示，即使那些与光纤轴线夹角很大的入射光线需要走更多的路程，但由于边缘折射率低(传播速度快)，因而，长路程光线用更快的平均传播速度来补偿，所以，所有光线在光纤中的传播几乎经历相等的时间。在 3.4.2 节中已经详细计算了一条光线在抛物线型折射率波导中的传播时间，模式色散的最终结果表述如下

$$\Delta\tau_{\text{i}} = \frac{n_2 L}{2c}\left(\frac{n_1-n_2}{n_2}\right)^2 \approx \frac{n_2 L}{2c}\Delta^2 \approx \frac{L}{8cn_1^3}(\text{NA})^4 \quad \text{多模抛物线型光纤的脉冲色散} \tag{27.21}$$

注意，与阶跃型折射率光纤相比，抛物线型折射率光纤脉冲色散正比于$(\text{NA})^4$。对一个典型的(多模抛物线型折射率)光纤，有 $n_2\approx 1.45$，$\Delta\approx 0.01$，可以计算出

$$\Delta\tau_{\text{i}} \approx 0.25\text{ns/km} \tag{27.22}$$

与式(27.19)相比，抛物线型折射率光纤的脉冲色散是阶跃型折射率光纤的 1/200。正是由于这个原因，第一代和第二代的光通信系统都采用了接近抛物线型折射率光纤。而为

① 译者注：译者对于抛物线型折射率光纤模式色散也有研究。有兴趣的读者可参阅“A Comprehensive Ray Approach for Teaching Intermodal Dispersion of a Parabolic Index Profile Fiber,” IEEE Transactions on Education, Vol. 42, No. 4, pp. 271-275。

了进一步降低脉冲色散,就必须使用单模光纤,因为单模光纤只有一个模式,因此不存在模式色散。但是,在所有的光纤通信系统中都存在着材料色散,这是光纤材料自身的属性,与波导结构无关,在27.10.3节中将对此讨论。

27.10.3 材料色散

前面的几节中,已经考察了当通过一段长度的光纤时,光脉冲由于不同光线在光纤中传播经历的时间不同而导致展宽。另一方面,每一个光源发出的光都有一定的波长范围,称之为光源的频谱宽度。如白光光源(如太阳光)的频谱宽度接近300nm,一个LED光源的频谱宽度为25nm,而工作在1300nm处的激光二极管的频宽就只有2nm,甚至更小。在第10章中讨论过媒质的折射率(因此群速度 v_g)随波长的变化。所以,每个波长组分在光纤中传输时,群速度也略有不同,这也将造成脉冲的展宽。在第10章中也给出了(由折射率随波长变化导致的)脉冲展宽公式为

$$\Delta\tau_{\mathrm{m}} = -\frac{L\Delta\lambda_0}{\lambda_0 c}\left(\lambda_0^2\frac{\mathrm{d}^2 n}{\mathrm{d}\lambda_0^2}\right) \tag{27.23}$$

式中 L 为光纤长度,$\Delta\lambda_0$ 为光源的频谱宽度,c 为光在自由空间的速度,下标 m 表示考虑的色散是材料色散。还定义了材料色散系数为(单位是 ps/(nm·km))

$$D_{\mathrm{m}} = \frac{\Delta\tau_{\mathrm{m}}}{L\Delta\lambda_0} = -\frac{10^4}{3\lambda_0}\left(\lambda_0^2\frac{d^2 n}{d\lambda_0^2}\right)(\mathrm{ps/(nm\cdot km)}) \tag{27.24}$$

其中用到 $c=3\times10^{-7}\mathrm{km/ps}$,$\lambda_0$ 的单位是 μm,括号内的量无量纲。D_{m} 为材料色散,表示传输每公里长度且光源频谱宽度为每纳米的材料色散是多少皮秒。对于一个特定的波长,D_{m} 反映材料特性,并对(几乎)所有二氧化硅材料光纤都是一样的。(纯二氧化硅)的 D_{m} 随波长的变化见表10.1。当 D_{m} 为负值时,意味着长波长组分传播得更快;同理,D_{m} 为正值,表示短波长组分传播得更快。

例27.11 在早期光纤通信系统中,应用LED作光源,频谱宽度 $\Delta\lambda_0\approx20\mathrm{nm}$,中心频率为825nm,在此波长下,$D_{\mathrm{m}}\approx84.2\mathrm{ps/(km\cdot nm)}$,在光纤中传输1km后,脉冲展宽为

$$\begin{aligned}\Delta\tau_{\mathrm{m}} &= D_{\mathrm{m}}\times L\times\Delta\lambda\\ &= 84(\mathrm{ps/(km\cdot nm)})\times1(\mathrm{km})\times20(\mathrm{nm})\\ &\approx 1700\mathrm{ps} = 1.7\mathrm{ns}\end{aligned}$$

有意思的是,在波长 $\lambda_0\approx1300\mathrm{nm}$ 附近(此时的 $D_{\mathrm{m}}\approx2.4\mathrm{ps/(km\cdot nm)}$)进行同样的计算,将得到非常小的 $\Delta\tau_{\mathrm{m}}$,在光纤中传输1km后,脉冲展宽为

$$\Delta\tau_{\mathrm{m}} = D_{\mathrm{m}}\times L\times\Delta\lambda = 2.4(\mathrm{ps/(km\cdot nm)})\times1(\mathrm{km})\times20(\mathrm{nm})\sim0.05\mathrm{ns}$$

有这样小的 $\Delta\tau_{\mathrm{m}}$ 是因为群折射率 n_g 在 $\lambda_0\approx1300\mathrm{nm}$ 附近几乎是常数,如图10.6所示。而在实际中,$\lambda_0\approx1270\mathrm{nm}$ 才是零色散波长。正是由于这个波长附近非常小的色散,光通信系统将工作波长从850nm移到了 $\lambda_0\approx1300\mathrm{nm}$ 附近。

例27.12 在目前的光纤通信系统中,利用工作波长为 $\lambda_0\approx1550\mathrm{nm}$ 的激光二极管作为光源,频谱宽度约为2nm,在光纤中传播1km后,因材料色散展宽为

$$\Delta\tau_{\mathrm{m}} = D_{\mathrm{m}}\times L\times\Delta\lambda = 21.5(\mathrm{ps/(km\cdot nm)})\times1(\mathrm{km})\times2(\mathrm{nm})\sim43\mathrm{ps}$$

$\Delta\tau_{\mathrm{m}}$ 取正值表示长波长组分比短波长传播要慢(从表10.1中可以看出,$\lambda_0\geqslant1300\mathrm{nm}$ 时,n_g

随着 λ_0 的增大而增大)。

27.11　色散和最大比特率

在本节中将简单讨论，在光脉冲传输的数字光通信系统中，脉冲展宽使相邻脉冲之间发生重叠，降低了探测分辨能力而导致误码。脉冲展宽是光纤通信链路限制中继距离的机制之一(另一个机制是损耗)。很明显，脉冲展宽越大，链路中每秒能够传送的脉冲数越少。对于一个给定脉冲色散的传输系统，基于不同的考虑，用来估算最大允许比特率距离积[①]的判据(B_{max})将有所不同，但可以认为它具有 $1/\tau$ 的数量级。对一种广泛应用的编码(称为 NRZ 码(非归零码))，有

$$B_{max} \approx \frac{0.7}{\Delta\tau} \tag{27.25}$$

式(27.25)只(近似)考虑了光纤脉冲色散的影响。而在实际光纤链路中，在估算最大比特率时，还要考虑光源和探测器特性带来的影响。这里还要指出，造成脉冲色散的机制有好几种，一般包括模式色散、材料色散和波导色散。而波导色散只是在单模光纤中比较重要，在多模光纤分析中会忽略它。因此，(在考虑多模光纤时)用 $\Delta\tau_i$ 和 $\Delta\tau_m$ 表示模式色散和材料色散，则总色散为

$$\Delta\tau = \sqrt{(\Delta\tau_i)^2 + (\Delta\tau_m)^2} \tag{27.26}$$

例 27.13　考虑阶跃型折射率多模光纤，有 $n_1 = 1.46$，$\Delta = 0.01$，设工作波长为 850nm，在传输 1km 后，光纤的模式色散为

$$\Delta\tau_i = \frac{n_1 L\Delta}{c} \approx \frac{1.46 \times 1000 \times 0.01}{3 \times 10^8} \approx 49\text{ns}$$

通常写成

$$\Delta\tau_i \approx 49\text{ns/km}$$

如果光源是带宽为 $\Delta\lambda = 20$nm 的 LED，参考表 10.1，材料色散 $\Delta\tau_m$ 为 1.7ns/km(见例 27.11)。因此，在阶跃型折射率多模光纤中，脉冲色散主要来源于模式色散。总色散为

$$\Delta\tau = \sqrt{(\Delta\tau_i)^2 + (\Delta\tau_m)^2} = 49\text{ns/km} = 49 \times 10^{-9}\text{s/km}$$

根据式(27.25)，最大允许比特率距离积大约为

$$B_{max} \approx \frac{0.7}{\Delta\tau} = \frac{0.7}{49 \times 10^{-9}}(\text{bit} \cdot \text{km})/\text{s} \approx 14\text{Mbit} \cdot \text{km/s}$$

那么，一个 10km 长的光纤链路至多可以支持 1.4Mbit/s。

例 27.14　考虑抛物线型折射率多模光纤，有 $n_1 = 1.46$，$\Delta = 0.01$，设工作波长在 850nm，光源是带宽为 20nm 的 LED，则光纤的模式色散为(根据式(27.21))

$$\Delta\tau_i = \frac{n_1 L}{2c}\Delta^2 \approx 0.24\text{ns/km}$$

材料色散同样是 1.7ns/km。那么这种情况下，起主要作用的是材料色散而不是模式色散，

① 译者注：原文为 the maximum permissible bit rate。实际上比特率与传输距离要同时考虑。

总色散为

$$\Delta\tau = \sqrt{0.24^2 + 1.7^2} = 1.72\text{ns/km}$$

最大允许比特率距离积约为

$$B_{\max} \approx \frac{0.7}{\Delta\tau} = \frac{0.7}{1.72 \times 10^{-9}}(\text{bit} \cdot \text{km})/\text{s} \approx 400\text{Mbit} \cdot \text{km/s}$$

一个20km的链路,最大可传输比特率为20Mbit/s。实际上(1977年左右)工作在0.85μm的光纤通信系统用的就是LED光源和抛物线型折射率光纤,可支持的传输速率为45Mbit/s,中继距离为10km。

例27.15 如果将工作波长移到1300nm处,仍使用例27.15中的抛物线型折射率多模光纤,可以发现,模式色散仍为0.24ns/km,而材料色散(仍使用带宽$\Delta\lambda = 20$nm的LED光源)就变成了0.05ns/km。与模式色散相比,材料色散可以忽略了。这时,总色散和最大比特率距离积都可以分别计算出来

$$\Delta\tau = \sqrt{0.24^2 + 0.05^2} = 0.25\text{ns/km}$$

$$B_{\max} \approx 2.8\text{Gbit} \cdot \text{km/s}$$

实际上(1981年左右)工作在1.3μm的光纤通信系统就采用抛物线型折射率多模光纤,传输速率仍是45Mbit/s,但中继距离达到30km,这意味着比特率距离积为1.35Gbit·km/s。

需要重申的是,上述例题中讨论的最大传输比特率距离积只考虑了光纤的影响,但对于实际的通信链路,光源和探测器的影响都要考虑进来。

27.12 光纤传感器[①]

尽管光纤多数的重要应用是在信息传输领域,但由于光纤是物理参数非常敏感的器件,并且能随之产生相应的变化信息,使得光纤作为传感器得到广泛的应用。光纤在传感应用方面有着与在通信领域一样的优点:低损耗、小尺寸、准确、灵活和可靠。与传统的电传感器相比,光纤传感器对外部电磁干扰有更强的抵抗能力,而且可以用在危险和爆破环境下。光纤传感器一个重要特征是它的几何构造本身具有实现分布式传感和准分布式传感的可能性,而利用传统传感器进行分布式传感不是太昂贵,就是系统结构太复杂。利用光纤传感器可以准确快速地测量压力、温度、电流、旋转、应变、化学和生物参数等。正是由于这些优点,越来越多的民用设施将光纤传感器作为设施的一部分整合在内,像桥梁、隧道、加工业、医疗器械、飞机、导弹甚至是汽车制造中都用到光纤传感器。

光纤传感器大体上可以分为两类:非本征光纤传感器和本征光纤传感器。非本征光纤传感器,就是光纤仅作为一个器件传送和收集某一敏感元件光的变化,其核心与光纤本身无关。敏感元件响应外部的扰动,其特性随之发生改变,这种改变可以通过光纤传回基地进行分析。光纤在此仅仅是充当着传输光束的角色。而本征光纤传感器,物理参量的变化直接改变了光纤的特性,继而改变了光纤中所传输光束的强度、偏振态、相位等

① 本节摘自于K. Thyagarajan教授未出版的讲稿。

性质。

当前，已有大量的各种各样的光纤传感器在实验室中得以应用，其中一部分已经安装在实际系统中使用。在 15.6.1 节中，曾经讨论将（光纤布拉格光栅）温度传感器安装在电力变电站的供电导线上，用以监测导线温度。在 22.15 节中还讨论了基于光纤传感器的大电流测量方法。

一种有趣的传感器是如图 27.18 所示的液体水位传感器。光沿着光纤向下传播，经过一个小玻璃棱镜全反射耦合到回路光纤。只要棱镜外面是空气，那么，入射进入棱镜的光线在棱镜-空气界面上，入射角大于临界角，光将经历全反射。当棱镜与液体接触时，棱镜与水界面的临界角将变大（原书在此有误），光线将折射入液体，致使信号有损失。所以，通过对棱镜材料的适当选择，这种的传感器可以用来测量各种液体的水位，如水、汽油、酸、油等。更多关于光纤传感器的知识见参考文献[13～15]。

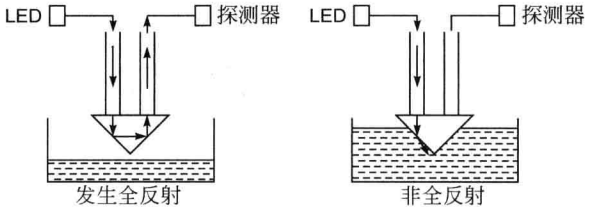


图 27.18　液体水位传感器，其原理是利用水面上升导致的临界角变化来实现传感（引自参考文献[11]）。

习　题

27.1　一阶跃型折射率多模光纤，有 $n_1=1.5$，$\Delta=0.015$。试计算 n_2，NA 和最大可接收角。

[**答案**：1.477；0.26；15°]

27.2　接习题 27.1，同样的光纤浸放在折射率为 1.33 的水中，计算最大可接收角。

27.3　一功率为 2mW 的激光束经过 25km 单模光纤传输后，减少到 15μW，计算光纤的损耗。

[**答案**：0.85dB/km]

27.4　一 5mW 的激光束经过损耗为 0.2dB/km 的光纤传输 26km，计算输出端光功率。

[**答案**：1.5mW]

27.5　考察一阶跃型折射率光纤，有 $n_1=1.5$，$a=40\mu$m，$\Delta=0.015$，光源工作波长为 850nm，谱线宽度为 50nm。（1）该光纤是单模还是多模的？（2）计算材料色散、模式色散和总脉冲色散。

[**答案**：（2）4.2ns/km，75ns/km，75.1ns/km]

27.6　接习题 27.5，考察一抛物线型折射率光纤，有 $n_1=1.5$，$a=40\mu$m，$\Delta=0.015$，光源工作波长为 850nm，谱线宽度为 50nm。（1）该光纤是单模还是多模的？（2）计算材料色散、模式色散和总脉冲色散。

[**答案**：（2）4.2ns/km，0.6ns/km，4.2ns/km]

参考文献和推荐读物

1. J. Hecht, *City of Light*, Oxford (1999).
2. W.A. Gambling, *Glass, light, and the information revolution*, Ninth W.E.S. Turner Memorial Lecture, Glass Technology Vol. 27 (6), 179, (1986).
3. B.P. Pal (Ed.), *Guided Wave Optical Components and Devices: Basics, Technology and Applications*, Academic Press (2006).
4. http://en.wikipedia.org/wiki/Photophone
5. D.J.H. Maclean, *Optical Line Systems*, John Wiley, Chichester, 1996.
6. A.G. Chynoweth, *Lightwave Communications: The fiber lightguide*, Phys.Today, 29(5), 28 (1976).
7. C.K. Kao and G.A. Hockham, *Dielectric-fibre surface waveguides for optical frequencies*, Proc. IEE, Vol. 113 (7), 1151, (1966).
8. F. P. Kapron, D. B. Keck and R. D. Maurer, *Radiation losses in glass optical waveguides*, Appl. Phys. Lett., Vol. 17, 423 (1970).
9. *Schott is lighting the way home*, Fiberoptic Product News, February, 1997, p. 13.
10. *Fiber optic Technology put to work-Big time*, Photonics Spectra, August 1994, p. 114.
11. A. Ghatak and K. Thyagarajan, *Optical Waveguides and Fibers* in *Fundamentals of Photonics* (Editors: A. Guenther, L. Pedrotti and C Roychoudhuri), Materials developed under project STEP (Scientific and Technology Education in Photonics) by University of Connecticut and CORD, National Science Foundation, USA.
12. T. Miya, Y. Terunama, T. Hosaka, and T. Miyashita, *An ultimate low loss single mode fiber at 1.55 mm*, Electron.Letts. vol. 15, 106 (1979).
13. A. Ghatak and K. Thyagarajan, *Introduction to Fiber Optics*, Cambridge University Press, Cambridge (1998).
14. B. Culshaw, *Principles of Fiber Optic Sensors*, in *Guided Wave Optical Components and Devices* (Ed. B. P. Pal), Academic Press, Amsterdam (2006).
15. B.D. Gupta, *Fiber Optic Sensors: Principles and Applications*, New India Publishing Agency, New Delhi (2006).

第28章 光纤光学Ⅱ：波导的基本理论与模式的概念

28.1 引言

在光通信系统的设计中，深入理解光纤的传输特性非常重要。在第 27 章中，用射线光学的方法来理解光纤的传输特性。对于能够支持多种模式在其中传输的光纤[①]，这种方法是很有效的。但在今天，光通信系统中广泛使用的是单模光纤。在单模光纤中，射线光学就不再适用了，需要求解麦克斯韦方程组来确定波导的模式。因此，首先要做的就是理解模式的概念，这正是本章计划讲解的内容。为了理解模式的概念，最好从考察最简单的平面光波导开始，这种光波导由一层媒质薄膜(dielectric film)夹在两层折射率稍低的材料之间构成(见图 28.1)，其折射率分布可以用式(28.1)来描述

$$n(x)=\begin{cases} n_1, & |x|<\dfrac{d}{2} \\ n_2, & |x|>\dfrac{d}{2} \end{cases} \tag{28.1}$$

式中 $n_1>n_2$。式(28.1)所描述的波导通常称为阶跃型折射率分布波导。假设波导的空间分布在 y 和 z 方向上无限延伸，首先考虑一个更为普遍的情况，即，折射率的分布仅取决于 x 坐标

$$n^2=n^2(x) \tag{28.2}$$

当折射率变化仅与 x 坐标有关时，可以总是选取 z 轴为波的传播方向，且为不失一般性，把麦克斯韦方程组的解写为如下形式

$$\mathscr{E}=\boldsymbol{E}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta z)} \tag{28.3}$$

$$\mathscr{H}=\boldsymbol{H}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta z)} \tag{28.4}$$

上式定义了波导系统的模式。因此：

模式代表的是横向场的分布，当电磁波在波导中沿 z 方向传播时，仅有相位的变化。

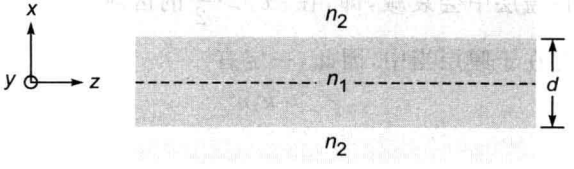


图 28.1 (沿 x 方向)厚度为 d 的平面媒质波导，在 y 方向上无限延伸。光沿着 z 方向传播。

① 即多模光纤，译者注。

当电磁场沿着波导传播时，由 $\boldsymbol{E}(x)$ 和 $\boldsymbol{H}(x)$ 描述的横向场分布并没有改变。β 表示模式的传播常数。如果把上述解代入麦克斯韦方程组，就可以得到两组独立的方程(见附录D)。第一组方程对应于 E_y，H_x 和 H_z 不为零，而 E_x，E_z 和 H_y 为零的情况，即所谓的 TE 模式，该情况下电场只有横向分量。第二组方程相应于 E_x，E_z 和 H_y 不为零，而 E_y，H_x 和 H_z 为零的情况，即所谓的 TM 模式，该情况下磁场只有横向分量。

对于 TE 模式，已经在附录 D 中证明了 $E_y(x)$ 满足以下的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2E_y}{\mathrm{d}x^2}+[k_0^2n^2(x)-\beta^2]E_y=0 \tag{28.5}$$

式中

$$k_0=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}=\frac{\omega}{c} \tag{28.6}$$

为真空中的波数，$c\left(=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\right)$ 为真空中的光速。当 $E_y(x)$ 已知，可以通过下面两式(见附录D)得到 H_x 和 H_z

$$H_x=-\frac{\beta}{\omega\mu_0}E_y(x),\quad H_z=\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu_0}\frac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}x} \tag{28.7}$$

应该指出，只要折射率分布仅与 x 有关，上述方程就是严格成立的。

28.2 对称平面阶跃型波导的 TE 模式[①]

到目前为止的分析对折射率横向变化是 x 的任意函数都是有效的。现在假设折射率的变化由式(28.1)给出(见图 28.1)，将其替换式(28.5)中的 $n(x)$，可得

$$\frac{\mathrm{d}^2E_y}{\mathrm{d}x^2}+(k_0^2n_1^2-\beta^2)E_y=0,\quad |x|<\frac{d}{2}\quad(\text{膜层中}) \tag{28.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2E_y}{\mathrm{d}x^2}+(k_0^2n_2^2-\beta^2)E_y=0,\quad |x|>\frac{d}{2}\quad(\text{盖层中}) \tag{28.9}$$

通过使用恰当的边界条件和连续性条件，可以求解式(28.8)和式(28.9)。由于在 $x=\pm d/2$ 的平面上，E_y 和 H_z 表示切向分量，所以，在 $x=\pm d/2$ 处，E_y 和 H_z 必须连续，既然 H_z 与 $\mathrm{d}E_y/\mathrm{d}x$ 成比例(见式(28.7))，那么，一定有

$$E_y\text{ 和}\frac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}x}\text{ 在 }x=\pm d/2\text{ 处连续} \tag{28.10}$$

上述为所需满足的连续性条件[②]。现在，导模(也称导引模)是那些主要被限制在膜层中的模式，因此，它们的场在盖层中会衰减，即，在 $|x|>\dfrac{d}{2}$ 的区域，场发生衰减。以至于大部分与模式有关的能量都存在于膜层当中，因此，一定有

$$\beta^2>k_0^2n_2^2 \tag{28.11}$$

---

① 关于波导模式的更多细节问题，可以查阅文献[1～4]。

② E_y 满足式(28.5)的事实也表明，除非 $n^2(x)$ 含有一个无穷不连续点(an infinite discontinuity)的情况，E_y 和 $\mathrm{d}E_y/\mathrm{d}x$ 都是连续的。这是由于如果 $\mathrm{d}E_y/\mathrm{d}x$ 不连续，那么，$\mathrm{d}^2E_y/\mathrm{d}x^2$ 将会是一个冲激函数(见习题 9.5)，且式(28.5)将会导致一个前后矛盾的方程。

当 $\beta^2 < k_0^2 n_2^2$ 时，所得的解在 $|x| > \frac{d}{2}$ 的区域内是振荡的形式，相应于所谓的波导辐射模式。这些辐射模式对应于光线在膜层-盖层的交界面处发生了折射（而不是全反射）的情况，且当这些模式一旦被激发，就会从波导的芯层迅速地泄露出去。再者，还必须有 $\beta^2 < k_0^2 n_1^2$，否则，在 $x = \pm d/2$ 处，边界条件就无法满足了[①]。因此，对于导模，一定有

$$n_2^2 < \frac{\beta^2}{k_0^2} < n_1^2 \quad \text{（导模）} \tag{28.12}$$

此时，再回忆一下 3.4 节中所做的一些讨论是很有价值的，在 3.4 节中提出，对于一个光波导，导波光线（guided rays）对应于

$$n_2 < \tilde{\beta} < n_1 \quad \text{（导波光线）} \tag{28.13}$$

而折射光线（refracting rays）对应于 $\tilde{\beta} < n_2$。此外，对于 $\tilde{\beta} > n_1$ 的情况不存在任何光线。那么，$\tilde{\beta}$（在射线光学中）对应于波动光学中的 β/k_0，即

$$\tilde{\beta} \Leftrightarrow \frac{\beta}{k_0} \tag{28.14}$$

根据式(28.12)，可以将式(28.8)和式(28.9)写成如下形式

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_y}{\mathrm{d}x^2} + \kappa^2 E_y = 0, \quad |x| < \frac{d}{2} \quad \text{（膜层）} \tag{28.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_y}{\mathrm{d}x^2} - \gamma^2 E_y = 0, \quad |x| > \frac{d}{2} \quad \text{（盖层）} \tag{28.16}$$

式中

$$\kappa^2 = k_0^2 n_1^2 - \beta^2 \tag{28.17}$$

$$\gamma^2 = \beta^2 - k_0^2 n_2^2 \tag{28.18}$$

现在，当折射率分布关于 $x=0$ 对称，也就是当

$$n^2(-x) = n^2(x) \tag{28.19}$$

时，所得到的解的形式关于 x 是对称的，或者是反对称的[②]（见习题 28.7）。因此，一定有

$$E_y(-x) = E_y(x) \quad \text{（对称模式）} \tag{28.20}$$

$$E_y(-x) = -E_y(x) \quad \text{（反对称模式）} \tag{28.21}$$

对于对称模式，一定有

$$E_y(x) = \begin{cases} A\cos\kappa x, & |x| < \frac{d}{2} \\ C\mathrm{e}^{-\gamma|x|}, & |x| > \frac{d}{2} \end{cases} \tag{28.22}$$

其中忽略了在 $|x| > \frac{d}{2}$ 区域内以指数形式增大的解。由 $E_y(x)$ 和 $\mathrm{d}E_y/\mathrm{d}x$ 在 $x = \pm d/2$ 处的连续性，可得

$$A\cos\left(\frac{\kappa d}{2}\right) = C\mathrm{e}^{-\frac{\gamma d}{2}} \tag{28.23}$$

---

① 此处作为一个练习题留给读者去证明：如果假设 $\beta^2 > k_0^2 n_1^2$，并假设衰减场在 $|x| > \frac{d}{2}$ 的区域内存在，那么，在 $x = +d/2$ 和 $x = -d/2$ 处的边界条件不可能同时满足。

② 同样的情况也存在与量子力学中，见文献[5]. pp. 155-157。

$$-\kappa A\sin\left(\frac{\kappa d}{2}\right)=-\gamma C\mathrm{e}^{-\frac{\gamma d}{2}} \tag{28.24}$$

用式(28.24)除以式(28.23),可得

$$\xi\tan\xi=\frac{\gamma d}{2} \tag{28.25}$$

式中

$$\xi\overset{\text{def}}{=\!=}\frac{\kappa d}{2} \tag{28.26}$$

现在,如果将式(28.17)与式(28.18)相加,可得

$$(\kappa^2+\gamma^2)\frac{d^2}{4}=\frac{1}{4}[k_0^2d^2(n_1^2-n_2^2)]=\frac{1}{4}V^2 \tag{28.27}$$

式中

$$V=k_0d\sqrt{n_1^2-n_2^2} \tag{28.28}$$

这是一个无量纲的波导参数[①],且在波导理论中极为重要。则

$$\frac{\gamma d}{2}=\sqrt{\frac{1}{4}V^2-\xi^2} \tag{28.29}$$

并且式(28.25)可以写为如下形式

$$\xi\tan\xi=\sqrt{\frac{1}{4}V^2-\xi^2} \tag{28.30}$$

同理,对于反对称模式,有

$$E_y(x)=\begin{cases}B\sin\kappa x, & |x|<\dfrac{d}{2}\\ D\mathrm{e}^{-\gamma x}, & x>\dfrac{d}{2}\\ -D\mathrm{e}^{\gamma x}, & x<-\dfrac{d}{2}\end{cases} \tag{28.31}$$

采用极类似的处理方法,可得

$$-\xi\cot\xi=\sqrt{\frac{1}{4}V^2-\xi^2} \tag{28.32}$$

因此,有

$$\xi\tan\xi=\sqrt{\frac{1}{4}V^2-\xi^2}\quad\text{(对称模式)} \tag{28.33}$$

$$-\xi\cot\xi=\sqrt{\frac{1}{4}V^2-\xi^2}\quad\text{(反对称模式)} \tag{28.34}$$

则

$$\eta=\sqrt{\left(\frac{V}{2}\right)^2-\xi^2} \tag{28.35}$$

(ξ取正值时)式(28.35)在ξ-η平面[②]内表示一个(半径为$V/2$的)圆在第一象限的部分,对ξ

① 这个无量纲参数与通常称为归一化频率的量是一回事,归一化频率是它的$\frac{1}{2}$。译者注。

② 这是因为对式(28.35)平方,可得$\eta^2+\xi^2=\left(\frac{V}{2}\right)^2$,表示一个半径为$V/2$的圆。

的允许取值进行数值估计(进而对传播常数进行估计)还是相当简单地。如图 28.2 所示，绘出了 $\xi\tan\xi$(实线)和 $-\xi\cot\xi$(虚线)作为 ξ 的函数的曲线。对于一个给定的 V，所允许的 ξ(是离散的)将由这些曲线与 1/4 圆的交点所决定。如图 28.2 所示的两个圆对应于 $V/2=2$ 和 $V/2=5$ 的情况。很显然，当 $V=4$ 时，可以得到一个对称的和一个反对称的模式；而当 $V=10$ 时，可以得到两个对称和两个反对称模式[①]。

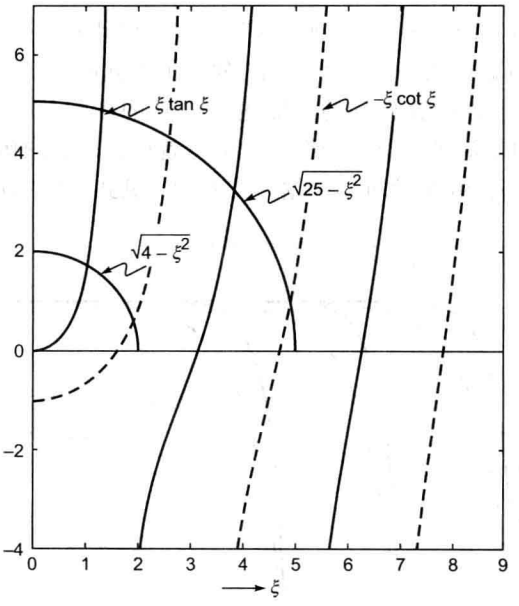


图 28.2　$\xi\tan\xi$(实线)和 $-\xi\cot\xi$(虚线)作为 ξ 的函数的曲线，这些曲线与半径为 $V/2$ 圆的交点决定了波导的传播常数的离散取值。

通常为了方便，定义一个无量纲的传播常数

$$b \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{\beta^2/k_0^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \tag{28.36}$$

则

$$b = \frac{\beta^2 - k_0^2 n_2^2}{k_0^2(n_1^2 - n_2^2)} = \frac{\gamma^2 d^2}{V^2}$$

给出

$$\frac{\gamma d}{2} = \frac{1}{2} V\sqrt{b} \tag{28.37}$$

再根据式(28.27)和式(28.37)，可以写出

$$\xi = \frac{\kappa d}{2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}V^2 - \frac{\gamma^2 d^2}{4}\right)} = \frac{1}{2}V\sqrt{1-b} \tag{28.38}$$

则式(28.33)和式(28.34)可以写为如下形式

① 对于基础量子力学比较熟悉的读者可能会注意到，确定平面波导中离散的 TE 模式的方法类似于解一维薛定谔方程得到的离散能量本征值和本征函数的方法。类似地，对抛物线型折射率的平面波导的分析也几乎与量子力学中线性谐振子问题一致(见 28.6 节)。

$$\left(\frac{1}{2}V\sqrt{1-b}\right)\tan\left(\frac{1}{2}V\sqrt{1-b}\right)=\frac{1}{2}V\sqrt{b}\quad\text{(对称模式)}\tag{28.39}$$

$$-\left(\frac{1}{2}V\sqrt{1-b}\right)\cot\left(\frac{1}{2}V\sqrt{1-b}\right)=\frac{1}{2}V\sqrt{b}\quad\text{(反对称模式)}\tag{28.40}$$

显然,基于式(28.12),对于导模,有

$$0<b<1\tag{28.41}$$

对于给定的 V,从式(28.39)和式(28.40)的解中可以得到 b 的一些离散的值;其中第 m 个解($m=0,1,2,\cdots$)即为 TE_m 模式。在表28.1中,列出了不同的 V 所对应的离散的 b,这些离散的值是使用文献[7]中的软件计算得到的。描述 b 与 V 的依赖关系的通用曲线如图28.3所示。对于任何给定的(阶跃型)波导,仅需要计算出 V,就可以通过求解式(28.39)和式(28.40),或者根据表28.1而得到 b。由 b,就可以根据式(28.42)(见式(28.36))得到传播常数

$$\frac{\beta}{k_0}=\sqrt{[n_2^2+b(n_1^2-n_2^2)]}\tag{28.42}$$

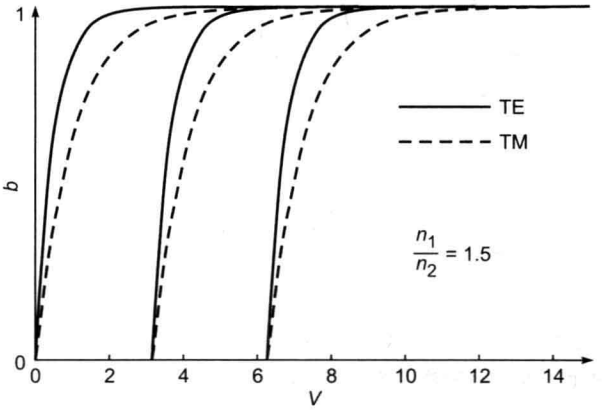


图28.3 阶跃型平面波导中,b 与 V 的关系。由于对于TE模式,b-V 曲线具有普遍性;但对于TM模式,确定 b-V 曲线还需要 n_1/n_2 的值,引自文献[2]。

如图28.4所示为阶跃型波导的一些低阶 TE_m 模式的场的典型分布形式。

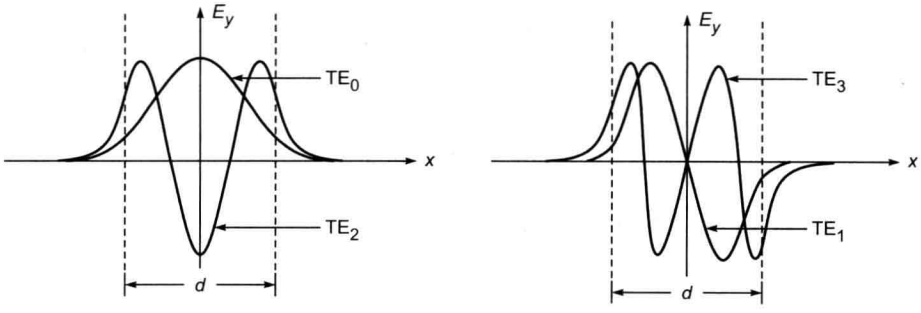


图28.4 在阶跃型平面波导中,TE模式的典型场分布。TE_0 模和 TE_2 模关于 x 对称,且称为偶模式;TE_1 模和 TE_3 模关于 x 反对称,且称为奇模式。

例28.1 考虑一个 $d=3\mu m$,$n_1=1.5$,$n_2=1.49153$ 的阶跃型平面波导。所选的 n_2 满足 $\sqrt{n_1^2-n_2^2}=\frac{1}{2\pi}$,那么,有 $V=\frac{2\pi}{\lambda_0}d\sqrt{n_1^2-n_2^2}=\frac{d}{\lambda_0}=\frac{3}{\lambda_0}$(其中 λ_0 的单位为 μm),以及

$$\frac{\beta}{k_0}=\sqrt{n_2^2+\frac{b}{4\pi^2}}$$

对于 $\lambda_0=1.5\mu m$，$V=2.0$，且从表 28.1 中可知，仅存在一个 $b=0.453753$ 的 TE 模式，相应地，有 $\beta/k_0\approx1.49538$。在 $\lambda_0=1\mu m$ 处进行同样的波导计算，可以得到 $V=3.0$，通过查表 28.1 可以看到，也仅存在一个 $b=0.628017$ 的 TE 模式，相应地，有 $\beta/k\approx1.49686$。对于 $\lambda_0=0.6\mu m$，$V=5.0$，则存在两个 TE 模式，其中一个 $b=0.802683$（TE_0 模式），另一个 $b=0.277265$（TE_1 模式），相应地，有 $\frac{\beta}{k_0}\approx1.49833$ 和 1.49389。对于 $\lambda_0=0.4286\mu m$，$V=7.0$，有 $b=0.879298$（TE_0 模式），$b=0.533727$（TE_1 模式）和 $b=0.061106$（TE_2 模式）的三个 TE 模式，相应地，有 $\beta/k_0\approx1.4990$，1.49606 和 1.49205。注意，所有的 β/k_0 都介于 n_1 与 n_2 之间。这里需要说明一下，对于每一种情况，波导支持相同数目的 TM 模式（见 28.5 节）。更进一步，当波导中入射更小波长的光波时，波导可以支持更多数量的模式，并且在入射波长趋近于 0 的极限情况下，会得到连续分布的模式，而此时，波导光学退化为射线光学。

表 28.1　对称平面波导归一化的传播常数值（TE 模式）

V	$b(TE_0)$	$b(TE_1)$	V	$b(TE_0)$	$b(TE_1)$	$b(TE_2)$
1.000	.189339		4.000	.734844	.101775	
1.125	.225643		4.125	.745021	.123903	
1.250	.281714		4.250	.754647	.146349	
1.375	.297049		4.375	.763756	.168864	
1.500	.331290		4.500	.772384	.191259	
1.625	.364196		4.625	.780563	.213390	
1.750	.395818		4.750	.788321	.235151	
1.875	.425479		4.875	.795686	.256461	
2.000	.453753		5.000	.802683	.277265	
2.125	.480453		5.125	.809335	.297523	
2.250	.505616		5.250	.815663	.317210	
2.375	.529300		5.375	.821689	.336310	
2.500	.551571		5.500	.827429	.354817	
2.625	.572502		5.625	.832902	.372371	
2.750	.592169		5.750	.838123	.390056	
2.875	.610649		5.875	.843107	.406800	
3.000	.628017		6.000	.847869	.422976	
3.125	.644344		6.125	.852420	.438596	
3.250	.659701	.002702	6.250	.856772	.453876	
3.375	.674151	.011415	6.375	.860938	.468231	.001845
3.500	.687758	.024612	6.500	.864926	.482278	.008819
3.625	.700579	.041077	6.625	.868748	.495834	.019189
3.750	.712687	.059875	6.750	.872412	.508916	.031806
3.875	.724073	.080292	6.875	.875926	.521541	.045942
4.000	.734844	.101775	7.000	.879298	.533727	.061106

注：这些值是使用文献[7]中的软件计算得到的。注意，在 $V<\pi$ 时，仅有一个关于 x 对称的 TE 模式；而对于 $\pi<V<2\pi$，有 2 个 TE 模式，其中一个关于 x 对称，另一个关于 x 反对称。

例 28.2 考虑一个 $d=2.5\mu m$，$n_1=1.5$ 和 $n_2=1.47$ 的阶跃型平面波导。假设入射光波长为 $\lambda_0=1.0\mu m$，可以得到 $V=4.6888$。如果进行线性插值，可以得到对于 TE_0 模式，有

$$b=0.780563+\frac{0.788321-0.780563}{0.125}\times 0.0638\approx 0.78452$$

因此，可得

$$\frac{\beta}{k_0}\approx 1.49359$$

同理，对于 TE_1 模式，有

$$b=0.213390+\frac{0.235151-0.213390}{0.125}\times 0.0638\approx 0.22450$$

可得

$$\beta/k_0\approx 1.47679$$

28.3 模式的物理意义

为了从物理上理解模式，考虑膜层($-d/2<x<d/2$)中电场的分布情况。例如，对于一个对称的 TE 模式，其电场可以用(见式(28.22))$E_y(x)=A\cos\kappa x$ 表示。那么，膜层中完整的场可以由下式给出

$$\mathscr{E}_y(x)=A\cos\kappa x\,e^{i(\omega t-\beta z)}=\frac{1}{2}Ae^{i(\omega t-\beta z-\kappa x)}+\frac{1}{2}Ae^{i(\omega t-\beta z+\kappa x)} \tag{28.43}$$

此时

$$\exp[i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]=\exp[i(\omega t-k_x x-k_y y-k_z z)]$$

表示一个沿 $\boldsymbol{k}$ 方向传播的波，其波矢 $\boldsymbol{k}$ 的 x,y,z 分量分别为 k_x，k_y 和 k_z。因此，对式(28.43)右边的两项，有

$$k_x=\kappa,\quad k_y=0,\quad k_z=\beta \tag{28.44}$$

$$k_x=-\kappa,\quad k_y=0,\quad k_z=\beta \tag{28.45}$$

表示传播矢量与 x-z 平面平行并与 z 轴夹角为$+\theta$ 和$-\theta$ 的平面波(见图 28.5)，其中

$$\tan\theta=\frac{k_x}{k_z}=\frac{\kappa}{\beta}$$

或者

$$\cos\beta=\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+\kappa^2}}=\frac{\beta}{k_0 n_1} \tag{28.46}$$

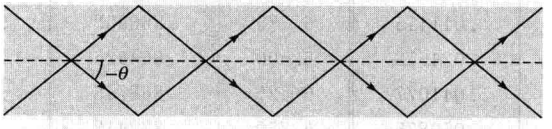


图 28.5 在阶跃型波导中，传播方向与 z 轴夹角为$\pm\theta$ 的两个平面波叠加而形成的导模。

那么，导模可以理解为：

由传播方向与 z 轴夹角为 $\pm\arccos\dfrac{\beta}{k_0 n_1}$ 的平面波叠加而成。

(见图 28.5)。参考例 28.1 中讨论的波导，在 $\lambda_0=0.6\mu m$ 处，$V=5.0$，且有 2 个 $\beta/k_0\approx 1.49833$ 和 1.49389 的 TE 模式。又 $n_1=1.5$ 时，$\cos\theta=0.99889$ 和 0.99593，则

$$\theta\approx 2.70°, 5.17°$$

分别对应于对称的 TE_0 模式和反对称的 TE_1 模式。因此，每一个模式都可以用一个离散的 θ_m 来描述。这里应当指出，根据射线光学，θ 可以取从 0(对应于光线平行于 z 轴传播)到 $\arccos(n_2/n_1)$(相应于以临界角入射到芯层-包层界面上的光线)。但发现，根据波动光学，只允许有离散的 θ，且每一条“离散”的光线路径都对应着波导的一个模式。这也是用棱镜-薄膜波导耦合技术来确定该光波导的(离散)传播常数的基本原理(见图 28.6)。这种方法是把一个棱镜(其折射率大于波导膜层折射率)贴近波导膜层。由于棱镜的存在，光线经过折射[①]并从波导中泄露出去了。光束经棱镜后的出射方向直接取决于 θ_m。测得的 θ_m，根据式(28.47)，可以得到传播常数 β 的离散值

$$\beta = k_0 n_1 \cos\theta \tag{28.47}$$

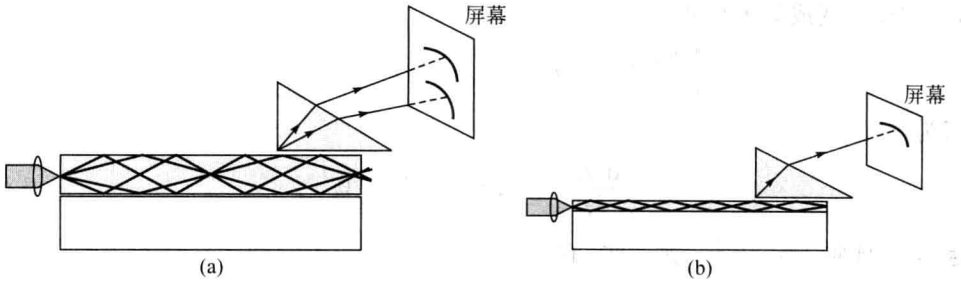


图 28.6　用来确定一个光波导(离散的)传播常数的棱镜-薄膜波导耦合技术。

这里应当指出，对于一个给定的波导，如果 λ_0 趋近于 0，则 V 变得很大，可以支持非常多的模式。在这一极限情况下，可以假设 θ 可以连续取值，这时使用射线光学来研究波导的传播特性也是适用的。

如图 28.3 所示，可以推出以下几点关于 TE 模式的结论(对于 TM 模式，可以进行类似地讨论，见 28.5 节)。

(1) 当 $0<V/2<\pi/2$，即

$$0 < V < \pi \tag{28.48}$$

时，只能得到波导的一个离散的(TE)模式，且此模式是关于 x 对称的。当出现这种情况时，称这样的波导为单模波导。在例 28.1 中，对于 $\lambda_0>0.955\mu m$，波导就变成单模的了。则这个波长(对于该波长，$V=\pi$)称为该波导的截止波长[②]。

(2) 如图 28.2 所示，如果 $\pi/2<V/2<\pi$(即，$\pi<V<2\pi$)，会得到一个对称的和一个反对称的 TE 模式。一般地，如果

$$2m\pi < V < (2m+1)\pi, \quad m = 0,1,2,\cdots \tag{28.49}$$

① 这里的折射波实际上是倏逝波，译者注。

② 实际上对于 $V<\pi$，波导可以支持一个 TE 模式和一个 TM 模式(见 28.5 节)，并且当 n_1 与 n_2 非常接近的时候，这两个模式的传播常数几乎相等。

将有 $m+1$ 个对称模式和 m 个反对称模式。如果

$$(2m+1)\pi < V < (2m+2)\pi, \quad m = 0,1,2,\cdots \tag{28.50}$$

将有$(m+1)$个对称模式和$(m+1)$个反对称模式。因此,模式的总数是最接近于并且大于 V/π 的整数。

(3) 当波导能够支持许多模式时(即 $V \gg 1$),(如图 28.2 所示)交点将会非常接近 $\xi=\pi/2$, $3\pi/2$,…因此,最开始的几个模式的传播常数可以由式(28.51)近似得到

$$\xi = \xi_m = \sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta_m^2}\,\frac{d}{2} \approx (m+1)\,\frac{\pi}{2}, \quad V \gg 1 \tag{28.51}$$

式中,$m=0,2,4,\cdots$对应于对称模式;$m=1,3,5,\cdots$对应于反对称模式。

28.4 折射率分布为抛物线型的平面波导中的 TE 模式

作为另一个例子,考虑折射率为抛物型形式分布的平面波导(见 3.4.1 节)

$$n^2(x) = n_1^2 - \gamma^2 x^2 \tag{28.52}$$

因此,式(28.5)变成如下形式

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_y}{\mathrm{d}x^2} + [(k_0^2 n_1^2 - \beta^2) - k_0^2 \gamma^2 x^2]E_y = 0 \tag{28.53}$$

又可写为

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_y}{\mathrm{d}\xi^2} + (\Lambda - \xi^2)E_y = 0 \tag{28.54}$$

式中 $\xi=\alpha x$,且使 $\alpha=\sqrt{k_0\gamma}$。进一步,有

$$\Lambda = \frac{k_0^2 n_1^2 - \beta^2}{\alpha^2} = \frac{k_0^2 n_1^2 - \beta^2}{k_0\gamma} \tag{28.55}$$

式(28.54)与线性谐振子问题(见参考文献[5,6])中求解一维薛定谔方程得到的方程具有相同的形式。为了使波函数在 $x=\pm\infty$(表示边界条件)处不会变成无穷大,Λ 必须取奇数,即

$$\Lambda = \frac{k_0^2 n_1^2 - \beta^2}{k_0\gamma} = 2m+1, \quad m = 0,1,2,\cdots \tag{28.56}$$

式(28.56)也给出了离散的传播常数的表达式

$$\beta = \beta_m = k_0 n_1\left[1 - \frac{(2m+1)\gamma}{k_0 n_1^2}\right]^{1/2}, \quad m = 0,1,2,\cdots \tag{28.57}$$

相应的模场分布为厄米高斯函数

$$E_y(x) = NH_m(\xi)\exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right), \quad m = 0,1,2,\cdots \tag{28.58}$$

式中 N 为常数,$H_m(\xi)$是厄米多项式

$$H_0(\xi) = 1, \quad H_1(\xi) = 2\xi, \quad H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2, \quad H_3(\xi) = 8\xi - 12\xi^3, \quad \cdots \tag{28.59}$$

注意,当 m 为偶数时,模式关于 x 轴对称;m 为奇数时,模式关于 x 轴反对称。这是因为折射率的变化 $n^2(x)$ 关于 x 轴对称引起的。应该指出,从严格意义上讲,式(28.57)和式(28.58)所表示的传播常数以及场的分布形式只在无限延展的抛物线型折射率媒质中(对于 TE 模式)才成立。当然,这种折射率分布的实际波导是不存在的,更切实际的波导折射

率分布形式为(见 3.4.1 节)

$$\begin{cases} n^2(x) = n_1^2\left[1-2\Delta\left(\dfrac{x}{a}\right)\right]^2, & |x|<a(\text{芯层}) \\ n^2(x) = n_2^2 = n_1^2(1-2\Delta), & |x|>a(\text{包层}) \end{cases} \tag{28.60}$$

$|x|<a$ 的区域为波导的芯层，$|x|>a$ 的区域为波导的包层。因此，有

$$\gamma = \frac{n_1\sqrt{2\Delta}}{a}, \quad \Delta = \frac{n_1^2-n_2^2}{2n_1^2} \tag{28.61}$$

波导参数由式(28.62)给出

$$V = k_0 a\sqrt{n_1^2-n_2^2} = k_0 a n_1\sqrt{2\Delta} \tag{28.62}$$

在一个典型的抛物线型折射率媒质中，有

$$n_1 \approx 1.5, \quad \Delta \approx 0.01, \quad a \approx 20\mu\text{m} \tag{28.63}$$

则 $n_2 \approx 1.485$，$\gamma \approx 1.0607\times10^4\,\text{m}^{-1}$。对于离散的导模，一定有

$$n_2^2 < \frac{\beta^2}{k_0^2} < n_1^2 \tag{28.64}$$

并且，m 的最大值将会对应于 $\beta=\beta_m=\beta_{\min}=k_0 n$。事实上，当波导可以支持大量模式存在时，低阶的模式可以由式(28.57)准确地给出。当 $\dfrac{\gamma}{k_0 n_1^2} \ll 1$，且对于不太大的 m，对式(28.57)作二项式展开，可得

$$\beta = \beta_m \approx k_0 n_1 - \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\gamma}{n_1} \approx \frac{\omega}{c}n_1 - \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\gamma}{n_1}, \quad m=0,1,2,3,\cdots \tag{28.65}$$

因此，模式的群速度 v_g 可以由式(28.66)给出

$$\frac{1}{v_g} = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega} \approx \frac{n_1}{c} \tag{28.66}$$

式(28.66)与模式号无关！因此，在这一近似下，所有的模式都以相同的速度传播。实际上，根据射线光学，已在 3.4 节中证明了所有的光线在抛物线型折射率波导中传输一段距离所用的时间近似相等。也正是这个原因，抛物线型折射率波导常用于光纤通信系统当中。

这里可以指出，对于一个有包层的光波导，如果假设式(28.57)是有效的，那么，可以很容易地计算出总的模式数量。因为 $\beta_{\min}=k_0 n_2$，则

$$\frac{k_0^2(n_1^2-n_2^2)}{k_0\gamma} = (2m_{\max}+1),\cdots \tag{28.67}$$

式中 $m_{\max}$ 表示 m 的最大值。因此，模式的总数量由式(28.68)给出

$$N \approx 2m_{\max} \approx V \tag{28.68}$$

其中，用到了式(28.60)～式(28.62)，以及 TM 模式数相等这一点。对于由式(28.63)给出的参数，可以得出，$N\approx27$。

28.5　对称的阶跃型平面波导的 TM 模式

在上面的讨论中，考虑了波导的 TE 模式。对于 TM 模式，可以进行一个非常相似的分析(参考文献[2]中给出了详细过程)。对于一个阶跃型波导(见式(28.1))，在 $|x|<\dfrac{d}{2}$ 和

$|x|>\frac{d}{2}$的区域，$H_y(x)$分别满足式(28.15)和式(28.16)，但此时的连续条件为

$$H_y \text{ 和} \frac{1}{n^2}\frac{\mathrm{d}H_y}{\mathrm{d}x} \text{ 在 } x=\pm d/2 \text{ 处连续} \tag{28.69}$$

如果加上这些连续条件，那么，可以得到下面的超越方程

$$\xi\tan\xi=\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\sqrt{\left(\frac{V}{2}\right)^2-\xi^2} \quad \text{(对称的 TM 模式)} \tag{28.70}$$

同理，有

$$-\xi\cot\xi=\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\sqrt{\left(\frac{V}{2}\right)^2-\xi^2} \quad \text{(反对称的 TM 模式)} \tag{28.71}$$

式中的ξ和V如前定义。对于TM模式，可以再利用绘图的方法来确定其离散的传播常数。就b和V而言，有

$$\left(\frac{1}{2}V\sqrt{1-b}\right)\tan\left(\frac{1}{2}V\sqrt{1-b}\right)=\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\frac{1}{2}V\sqrt{b} \quad \text{(对称的 TM 模式)} \tag{28.72}$$

$$-\left(\frac{1}{2}V\sqrt{1-b}\right)\cot\left(\frac{1}{2}V\sqrt{1-b}\right)=\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\frac{1}{2}V\sqrt{b} \quad \text{(反对称的 TM 模式)} \tag{28.73}$$

现在需要知道$\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2$来作出$b-V$曲线(见图28.3)。显然，如果$n_1$非常接近于$n_2$，那么，$\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2$就非常接近于1，且TM模式的传播常数也会非常接近于TE模式的传播常数——这就是弱导近似。

28.6 波导理论和量子力学

在28.3节中证明了对于一个给定的波导，如果使$\lambda_0\to 0$，则V就会变得很大，且波导将可以支持大量的模式。在这一极限情况下，假设θ可以连续取值，这时使用射线光学来研究波导的传播特性也是适用的。

在本节中将证明，对于一个给定的量子阱结构，如果令$\hbar\to 0$，则该量子阱结构将会有非常多数量的束缚态。在这一极限情况下，可以假设能量能连续取值，这样就与使用经典力学得到的结果一致了。进一步看，一维薛定谔方程与TE模式的波动方程也很类似，前一个方程给出量子力学问题中的束缚态，后一个方程给出波导问题中的导模。显然，处理两个方程的方法是一致的。实际上，对阶跃型平面波导的模式分析与求解与对称势阱的一维薛定谔方程的求解过程几乎一致。类似地，对于抛物线型折射率平面波导的模式分析与求解量子力学中的线性谐振子问题几乎一致(见参考文献[5,6])。因此，可以通过学习光纤光学来更容易地理解量子力学中的概念，反之亦然。可以进一步说：

几何光学与波动光学的关系非常类似于经典力学与量子力学的关系。在$\lambda_0\to 0$这一极限情况下，波动光学就变成了射线光学；而当$\hbar\to 0$时，量子力学也就变为了经典力学。

现在，对于一个质量为μ的粒子，一维薛定谔方程由式(28.74)给出

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}[E-V(x)]\psi(x)=0 \tag{28.74}$$

考虑一个由式(28.75)给出的势能函数(与式(28.1)比较)

$$V(x)=\begin{cases}0, & |x|<\dfrac{d}{2}\\ V_0, & |x|>\dfrac{d}{2}\end{cases} \tag{28.75}$$

那么，薛定谔方程可以写为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\kappa^2\psi(x)=0, & |x|<\dfrac{d}{2} \quad (28.76)\\ \dfrac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}-\gamma^2\psi(x)=0, & |x|>\dfrac{d}{2} \quad (28.77)\end{cases}$$

式中

$$\kappa^2=\frac{2\mu E}{\hbar^2} \tag{28.78}$$

$$\gamma^2=\frac{2\mu}{\hbar^2}(V_0-E) \tag{28.79}$$

正如在波导问题中利用恰当的边界条件和连续性条件来求解式(28.76)和式(28.77)，连续性条件为

$$\psi\text{和}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\text{在}x=\pm d/2\text{处连续} \tag{28.80}$$

现在，对于一个束缚态，其波函数主要被限制在势阱中，因此，它应该在$|x|>\dfrac{d}{2}$的区域内衰减，导致在势阱中发现粒子的概率大。因此，一定有

$$E<V_0$$

当 $E>V_0$ 时，方程的解在$|x|>\dfrac{d}{2}$的区域内是振荡的，且对应于所谓的散射态(scattering state)。更进一步看，E 不能小于 $V(x)$ 的最小值(在此最小值为 0)，否则，在 $x=\pm d/2$ 处，边界条件无法满足。因此，对于束缚态，一定有

$$0<E<V_0 \quad \text{(束缚态)} \tag{28.81}$$

现在，当势能变化关于 $x=0$ 对称时，即

$$V(-x)=V(x) \tag{28.82}$$

的解要么是关于 x 的对称函数，要么是关于 x 的反对称函数(见参考文献[2]的第 126—127 页)，因此，有

$$\psi(-x)=\psi(x) \quad \text{(对称态)} \tag{28.83}$$

$$\psi(-x)=-\psi(x) \quad \text{(反对称态)} \tag{28.84}$$

类似于 28.2 节中的分析讨论，可以发现，对称态的波函数形式与式(28.22)一致，而反对称态的波函数形式与式(28.31)一致。由 ψ 和$\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}$在 $x=\pm d/2$ 处的连续性，可得

$$\xi\tan\xi=\sqrt{\alpha^2-\xi^2} \quad \text{(对称态)} \tag{28.85}$$

$$-\xi\cot\xi=\sqrt{\alpha^2-\xi^2} \quad \text{(反对称态)} \tag{28.86}$$

式中

$$\alpha \xlongequal{\text{def}} \sqrt{\frac{2\mu V_0 d^2}{\hbar^2}} \tag{28.87}$$

对于一个给定的 α，式(28.85)与式(28.86)的解 ξ 将给出式(28.75)所描述的势阱问题的一系列束缚态解。显然，当 $\alpha<\pi/2$ 时，只能有一个束缚态解，这类似于单模波导条件。当 $\hbar\to 0$ 时，对于给定的 V_0，μ 和 d，α 将会变得非常大，并能得到连续的态，这意味着所有的能级都是可能的。因此，在 $\hbar\to 0$ 这一极限情况下，将得到经典力学的结果。

当 $E<V_0$ 时，在 $x>d/2$ 的区域内有一定的发现粒子的概率，而这一区域在经典力学中，粒子是被禁止存在的，因为总能量 E 小于势能($=V_0$)，并且此时动能是负的。类似地，在波导问题中，光线在芯层和包层的界面上发生全反射，在光疏媒质中不会存在几何光线。另一方面，当求解式(28.16)时，在 $|x|>d/2$ 的区域，可以得到隐失波(也叫倏逝波)。确实，当一光束以大于临界角的入射角入射到低折射率层时，光束的一部分就会“隧穿”光疏媒质，并出现在如图 28.7(a)所示的第三媒质中，这种现象被称为受抑全内反射(frustrated total internal reflection，FTIR)，它是光疏媒质中存在隐失波的结果。这种隧道效应(tunneling)在几何光学中是不允许的，因为光束在第一个界面上就已经发生了全反射。量子力学中有几乎一样的情况：当一个能量为 $E(<V_0)$ 的粒子入射到势垒(高度为 V_0)上时，就会像如图 28.7(b)所示，有一定概率的隧穿效应，但这种隧穿效应在经典力学中是不可能的。因此，正如在几乎所有关于量子力学的书中所证明的，当 $\hbar\to 0$ 时，隧穿概率将会趋于 0。

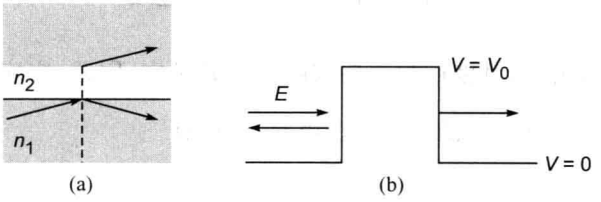


图 28.7

(a) 当一束光以大于临界角的角度入射到低折射率层时，光束的一部分将像穿过隧道一样透射到第3层媒质，这种现象称为受抑全内反射(FTIR)，是光疏媒质存在隐失波的结果；
(b) 具有能量 $E(<V_0)$ 的一粒子入射到一势垒上(高度为 V_0)，将有一定概率的粒子穿过势垒。

最后，考虑量子力学中的线性谐振子问题，其势能函数为

$$V(x)=\frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2 \tag{28.88}$$

且薛定谔方程(式(28.74))变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\xi^2}+(\Lambda-\xi^2)\psi=0 \tag{28.89}$$

式中 $\xi=\alpha x$，且令

$$\alpha=\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}$$

则

$$\Lambda \xlongequal{\text{def}} \frac{2E}{\hbar\omega} \tag{28.90}$$

为了使波函数在 $x=\pm\infty$ 处为有限值(边界条件)，Λ 必须取奇数，即

$$\Lambda \xlongequal{\text{def}} \frac{2E}{\hbar\omega}=2m+1,\quad m=0,1,2,3,\cdots \tag{28.91}$$

由式(28.91)可得出离散的能量本征值的表达式

$$E = E_m = \left(m + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad m = 0,1,2,3,\cdots \tag{28.92}$$

文献[6]中细致地讨论了量子力学振子与经典振子之间的关系，文献[2]中讨论了对于抛物线型折射率波导，射线光学与模式理论所推得的结果之间的关系。

习　题

28.1 考虑一个 $n_1=1.50, n_2=1.46, d=4\mu m$ 的对称阶跃型折射率波导(见式(28.1))，工作在 $\lambda_0=0.6328\mu m$ 处。计算 TE 模式和 TM 模式的数量。

28.2 考虑一个 $n_1=1.50, n_2=1.46, a=2\mu m$ 的抛物线型折射率波导(见式(28.60))，工作在 $\lambda_0=0.6328\mu m$ 处。假设式(28.57)有效，并且对于离散的导模，有 $n_2^2<\frac{\beta^2}{k_0^2}<n_1^2$。计算 m 的最大值，以及 TE 模式的总数。

28.3 考虑一个 $n_1=1.50, n_2=1.48$ 的阶跃型折射率的对称波导，工作在 $\lambda_0=0.6328\mu m$ 处。计算当 $V=6$ 时的 d。根据表 28.1，计算 b，相应的 $\frac{\beta}{k_0}$，以及其分量波(component wave)[①]与 z 轴的夹角。

[**答案**：$d=2.4752\mu m$]

28.4 考虑与习题 28.3 中一样的波导。工作在什么波长处时，$V=3$。根据表 28.1，计算 b 以及相应的 $\frac{\beta}{k_0}$。

28.5 (1) 考虑一个 $n_1=1.49, n_2=1.46, d=4\mu m$ 的阶跃型对称波导(见式(28.1))，工作在 $\lambda_0=0.6328\mu m$ 处。根据表 28.1 和线性插值法，计算 $\frac{\beta}{k_0}$。

(2) 计算相应的 θ_m。

[**答案**：(1) $\frac{\beta}{k_0}=1.4885, 1.4839, 1.4765, 1.4668$；

(2) $\theta_1\approx2.6°$, $\theta_2\approx5.2°$, $\theta_3\approx7.7°$, $\theta_4\approx10.1°$]

28.6 (1) 考虑一个 $n_1=1.503, n_2=1.500, d=4\mu m$ 的阶跃型对称波导。对于 $\lambda_0=1\mu m$，计算 V，并根据表 28.1，运用线性插值来计算 $\frac{\beta}{k_0}$。

(2) 如果工作波长变为 $0.5\mu m$，证明 $V=4.771$，并根据表 28.1，运用线性插值计算离散的 $\frac{\beta}{k_0}$ 以及相应的波与 z 轴的夹角。

[**答案**：(1) $\frac{\beta}{k_0}\approx1.5016$；(2) $\frac{\beta}{k_0}\approx1.5024$ 和 1.5007]

28.7 在式(28.5)中，做 $x\to -x$ 的变换，并假设 $n^2(-x)=n^2(x)$，证明 $E_y(-x)$ 与 $E_y(x)$

① 以译者的理解，这里分量波是指能与各模式相应的平面波，见 28.3 节。

满足相同的方程,因此,一定有 $E_y(-x)=\lambda E_y(x)$。再次进行 $x\to -x$ 的变换,来证明方程的解要么是 x 的对称函数,要么是 x 的反对称函数(即,证明式(28.20)和式(28.21))。

参考文献和推荐读物

1. A. W. Snyder and J. D. Love, *Optical Waveguide Theory*, Chapman and Hall, London (1983).
2. A. Ghatak and K. Thyagarajan, *Introduction to Fiber Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1998); reprinted in India by Foundation Books, New Delhi.
3. D. K. Mynbaev and L.L. Scheiner, *Fiber-Optic Communications Technology*, Prentice Hall, USA (2001).
4. B.E. A. Saleh and M.C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, John Wiley, New York (1991).
5. B. H. Bransen and C. J. Joachain, *Introduction to Quantum Mechanics*, Longman Group, UK (1989).
6. A. Ghatak and S Lokanathan, *Quantum Mechanics: Theory and Applications*, 5th Edition, Macmillan India, New Delhi (2004).
7. A. Ghatak, I. C. Goyal and R. Varshney, *FIBER OPTICA : A software for characterizing fiber and integrated-optic waveguides*, Viva Books, New Delhi (1999).

第29章 光纤光学Ⅲ：单模光纤

一个新的纪元在西方迎来黎明——光的纪元。在城市街道下、深海中、商业摩天大楼里，大量基于激光、超纯净光纤以及新奇材料的新技术，正在对传统电子器件创造的已有奇迹进行着挑战……这些新技术发展之迅速，使我们从电子时代步入光子时代。而在这个光子时代，围绕光束设计新巧的器件几乎是必不可少的。

——时代周刊，1986 年 10 月 6 日

29.1 引言

光通信系统的核心是光纤，它扮演着为承载信息的光束提供传输信道的角色。根据射线光学的理论，由于全内反射（TIR）现象，光束被光纤约束导引向前传播。这已经在第 27 章中讨论过了。然而，对于单模光纤（目前广泛应用于光纤通信系统中），纤芯直径非常小（大约只有几微米），从而射线光学理论不再适用，将根据麦克斯韦电磁场理论来研究光在单模光纤中的传输特性。在第 28 章中已经对平面波导模进行了模式分析，简单理解了模式的概念。在本章中将对阶跃型折射率光纤进行模式分析，这将有助于光纤通信系统的设计。

29.2 基本方程

最简单的光纤折射率分布方式是阶跃型折射率分布，其分布特征如下式（见图 29.1）

$$\begin{cases} n(r) = n_1, & 0 < r < a(\text{纤芯}) \\ n(r) = n_2, & r > a(\text{包层}) \end{cases} \tag{29.1}$$

其中使用了柱坐标系(r,ϕ,z)。对于实际的光纤，有

$$\frac{n_1 - n_2}{n_2} \leqslant 0.01 \tag{29.2}$$

这就允许使用所谓的标量波近似（也是所熟知的弱导近似[①]）。在这种近似下，波导中的模式几乎是横向分布的，并且可以有任意偏振态。因此，可以假设两个相互独立的模式分别是 x 方向偏振和 y 方向偏振，并在弱导近似的条件下，有相等的传播常数。这些模式统称为 LP 模式（LP 表示线偏振）。可以比较在 28.5 节中提出的，当 $n_1 \approx n_2$ 时，波导中的模式几乎都是横向的，且 TE 模式和 TM 模式的传播常数几乎相等，说法是类似的。在弱导近似条件下，电场的横向分量（E_x 或 E_y）满足标量的波动方程

① 对于弱导近似更详细的内容见文献[1,2]。

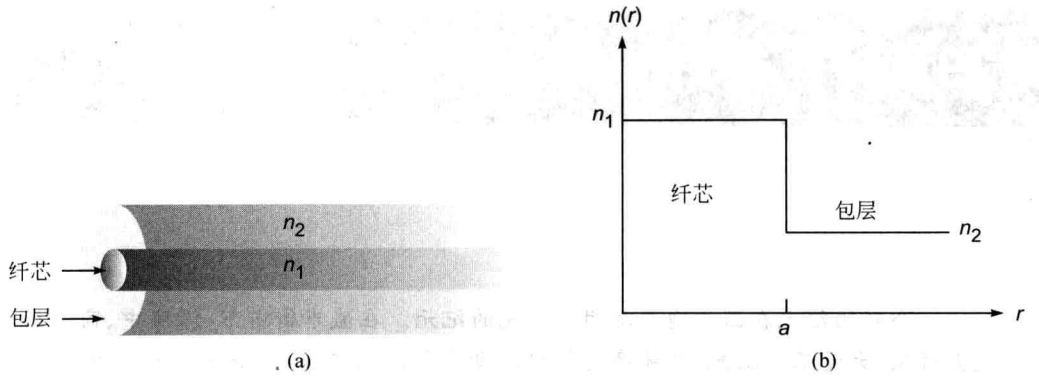


图 29.1

(a) 阶跃型折射率光纤的圆柱形结构,$0<r<a$ 部分的折射率为 n_1,$r>a$ 部分的折射率为 n_2;

(b) 阶跃型折射率光纤的折射率分布图

$$\nabla^2\Psi=\varepsilon_0\mu_0 n^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \tag{29.3}$$

式中 $c\left(=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\right)\approx 3\times10^8\,\mathrm{m/s}$ 为光在真空中传播的速度。在大多数的实际光纤中,n^2 只与柱坐标系中的 r 有关,因此,使用柱坐标系(r,ϕ,z)是十分方便地。在柱坐标系下,式(29.3)的解可以写为如下形式

$$\Psi(r,\phi,z,t)=\psi(r,\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta z)} \tag{29.4}$$①

式中 ω 为角频率,β 为传播常数。式(29.4)定义了系统的模式。由于 $\psi(r,\phi)$只与横向坐标 r 和 ϕ 有关,则

模式表示的是横向场的不同分布,当电磁波沿着光纤传播时,除了相位变化外,这种分布不会变化。

在柱坐标系(r,ϕ,z)中,有

$$\nabla^2\Psi=\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} \tag{29.5}$$

由式(29.4)可得

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=-\omega^2\Psi=-\omega^2\psi(r,\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta z)} \tag{29.6}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=-\beta^2\Psi=-\beta^2\psi(r,\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta z)} \tag{29.7}$$

将式(29.4)代入式(29.3),并代入式(29.5)~式(29.7),可得

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+[k_0n^2(r)-\beta^2]\psi=0 \tag{29.8}$$

式中

$$k_0=\frac{\omega}{c}=\frac{2\pi}{\lambda_0}$$

为自由空间的波数。由于媒质具有柱对称性,即,n^2 只与柱坐标 r 有关,因此,可以采用分

① 请读者注意,区别含时的波函数 $\Psi(r,\phi,z,t)$ 与不含时的波函数 $\psi(r,\phi)$ 之间的区别。原书印刷时有多处混淆。译者注。

离变量法来求解式(29.8)

$$\psi(r,\phi) = R(r)\Phi(\phi)$$

做相应地替换，并除以 $\psi(r,\phi)/r^2$，可得

$$\frac{r^2}{R}\left(\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+r^2[n^2(r)k_0^2-\beta^2]=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=l^2 \tag{29.9}$$

因此，变量就被分离出来了，并令方程的两边都等于一个常数($=l^2$)。求解只含有变量 ϕ 的方程，会发现与 ϕ 相关的解具有 $\cos l\phi$ 或 $\sin l\phi$ 的形式，且由于函数应为单值函数(即，$\Phi(\phi+2\pi)=\Phi(\phi)$)，$l$ 必须满足

$$l = 0,1,2,\cdots$$

l 取负值时，对应相同的分布。因此，完整的横向场分布由式(29.10)给出

$$\Psi(r,\phi,z,t) = R(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta z)}\begin{bmatrix}\cos l\phi\\ \sin l\phi\end{bmatrix},\quad l=0,1,2,\cdots \tag{29.10}$$

式中 $R(r)$ 满足如下的径向部分方程

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+\{[k_0^2n^2(r)-\beta^2]r^2-l^2\}R=0 \tag{29.11}$$

由于对于每一个 l，都会有两个相互独立的偏振态，因此，对于 $l\geqslant 1$ 的模式，都是四重简并(对应两个相互正交的偏振态和与 ϕ 相关的 $\cos l\phi$ 和 $\sin l\phi$ 两种解形式)。$l=0$ 对应的模式与 ϕ 无关，因此，是二重简并的[①]。这里有一点需要注意的是，不能令式(29.9)右侧等于一个负的常数，否则，场对于 ϕ 的依赖关系就不满足单值性了。在 29.3 节中，将给出式(29.11)在阶跃型折射率光纤的解。而对于任意的具有柱对称折射率变化的光纤，其折射率从轴上的 n_1 到 $r=a$，即纤芯-包层界面以外的 n_2 单调减小(见图 29.2)，可以大致看出，式(29.11)的解可以分成完全不同的两类(与 28.2 节中的相关讨论比较)。第一类解对应于

$$n_2^2<\frac{\beta^2}{k_0^2}<n_1^2 \quad (\text{导模}) \tag{29.12}$$

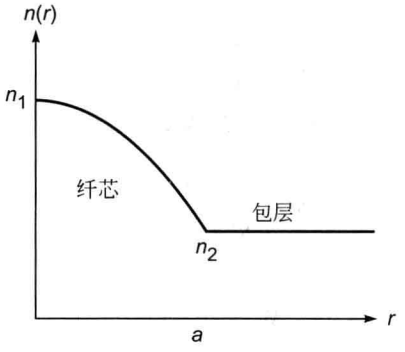


图 29.2　一段任意的具有柱对称的光纤，它的折射率沿着坐标轴从纤芯中心到纤芯与包层接触面的 $r=a$ 处从 n_1 单调下降到 n_2。

① “简并”这个词意为，对应于相同的传播常数，有多于一个的场分布。对应于 $l=0$ 的模式，有两个独立偏振态，因此，该模式称为是二重简并的。另一方面，对应于 $l=1,2,3,\cdots$ 的模式是四重简并的，因为(对应于相同的 β^2)模式有两个可能的场分布，一个正比于 $\cos l\phi$，另一个正比于 $\sin l\phi$，且对于每一个分布，有两个独立偏振态。

当 β^2 落在上面的范围内时，场 $R(r)$ 在纤芯内振荡，而在包层处衰减，且 β^2 只能取几个特定的离散值，即，波导的导模。对于给定的 l，可以得到有限数目的导模，记为 LP_{lm} 模($m=1,2,3,\cdots$)。第二类解对应于

$$\beta^2 < k_0^2 n_2^2 \quad (\text{辐射模}) \tag{29.13}$$

对于这些 β，甚至在包层中，模场也是振荡的，且 β 可以取连续值。这些模式就被称为辐射模[①]。

下面将详细讨论阶跃型折射率光纤中的导模。

29.3 阶跃型折射率光纤的导模

在本节中将得到阶跃型折射率光纤(折射率的变化情况如式(29.1)所示)对应导模的场分布和相应的传播常数。对这样的光纤，其导模 $\left(\beta^2 \text{ 满足 } n_2^2<\frac{\beta^2}{k_0^2}<n_1^2\right)$ 满足的式(29.11)可以写为

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+\left(U^2\frac{r^2}{a^2}-l^2\right)R=0,\quad 0<r<a \tag{29.14}$$

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}-\left(W^2\frac{r^2}{a^2}+l^2\right)R=0,\quad r>a \tag{29.15}$$

式中

$$U \overset{\text{def}}{=\!=} a\sqrt{k_0^2n_1^2-\beta^2} \tag{29.16}$$

$$W \overset{\text{def}}{=\!=} a\sqrt{\beta^2-k_0^2n_2^2} \tag{29.17}$$

由式(29.12)可知，U 和 W 均为实数。定义归一化的波导参数 V 为[②]

$$V=\sqrt{U^2+W^2}=k_0a\sqrt{n_1^2-n_2^2} \tag{29.18}$$

写为波长的表示形式为

$$V=\frac{2\pi}{\lambda_0}a\sqrt{n_1^2-n_2^2} \tag{29.19}$$

波导参数 V 是一个衡量光纤特性十分重要的参数。为了方便，定义归一化传播常数为

$$b=\frac{\dfrac{\beta^2}{k_0^2}-n_2^2}{n_1^2-n_2^2}=\frac{W^2}{V^2} \tag{29.20}$$

因而，有

$$W=V\sqrt{b} \tag{29.21}$$

$$U=V\sqrt{1-b} \tag{29.22}$$

由式(29.12)可知，对于导模，有 $0<b<1$。式(29.14)的两个相互独立的解为 $J_l(Ur/a)$ 和 $Y_l(Ur/a)$(见文献[4～6])。而由于解 $Y_l(Ur/a)$ 在 $r\to0$ 时发散，应该舍弃。式(29.15)的解为变形贝塞尔函数 $K_l(Wr/a)$ 和 $I_l(Wr/a)$，由于解 $I_l(Wr/a)$ 当 $r\to\infty$ 时发散，应该舍

① 想了解更多关于辐射模或称为泄露模，见文献[1,3]。

② 通常也称为归一化频率，译者注。

弃。因此，对于导模，决定于横向坐标的模场分布可以写为

$$\psi(r,\phi)=\begin{cases}\dfrac{A}{J_l(U)}J_l\left(\dfrac{Ur}{a}\right)\begin{bmatrix}\cos l\phi\\ \sin l\phi\end{bmatrix}, & r<a\\ \dfrac{A}{K_l(W)}K_l\left(\dfrac{Wr}{a}\right)\begin{bmatrix}\cos l\phi\\ \sin l\phi\end{bmatrix}, & r>a\end{cases}\tag{29.23}$$

式中 A 为常数，且已经假设了 ψ 在纤芯和包层的分界面处（$r=a$）是连续的，$\partial\psi/\partial r$ 在 $r=a$ 处也是连续的，根据贝塞尔函数恒等式（见文献[3]），可以得到下面的一系列超越方程，用这些方程可以确定对应于 LP_{lm} 传导模式允许取的归一化传播常数 b 的分立值

$$V(1-b)^{1/2}\frac{J_{l-1}[V(1-b)^{1/2}]}{J_l[V(1-b)^{1/2}]}=-Vb^{1/2}\frac{K_{l-1}(Vb^{1/2})}{K_l(Vb^{1/2})},\quad l\geqslant 1\tag{29.24}$$

$$V(1-b)^{1/2}\frac{J_1[V(1-b)^{1/2}]}{J_0[V(1-b)^{1/2}]}=Vb^{1/2}\frac{K_1(Vb^{1/2})}{K_0(Vb^{1/2})},\quad l=0\tag{29.25}$$

上面的超越方程的解可以给出 b 关于 V 的（进而也有 U 和 W）普适曲线。对一个给定的 l，会有有限数量的解，并且第 m（$m=1,2,3,\cdots$）个解对应于 LP_{lm} 模式。如图 29.3 所示为 b 随 V 的变化而形成的一组普适曲线。表 29.1 给出了 V 在 1.0～2.5，b 的计算结果（仅对应于 LP_{0m} 模式）。

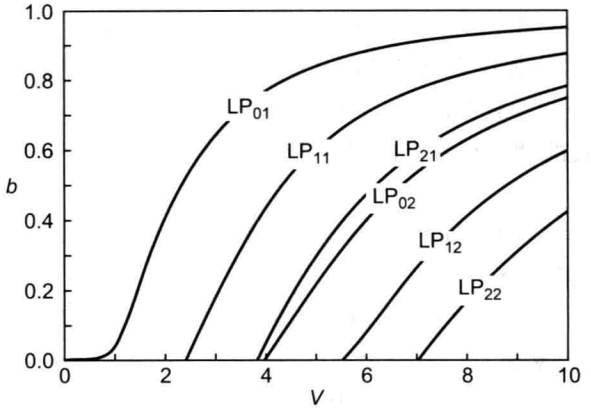


图 29.3　在一些低阶模式下，归一化传播常数 b 与归一化的波导参数 V 的变化关系曲线。引自参考文献[2]。

表 29.1　对于阶跃型折射率光纤，b，$(bV)'$ 和 $V(bV)''$ 随 V 变化的值

V	b	b（根据式(29.30)计算）	$\dfrac{d}{dV}(bV)$	$V(bV)''$
1.5	0.229248	0.229249	0.849	1.063
1.6	0.270063	0.270712	0.913	0.919
1.7	0.309467	0.310157	0.965	0.785
1.8	0.347068	0.347471	1.006	0.664
1.9	0.382660	0.382653	1.039	0.556
2.0	0.416163	0.415767	1.065	0.462
2.1	0.447581	0.446911	1.086	0.380
2.2	0.476969	0.476200	1.102	0.309

续表

V	b	b(根据式(29.30)计算)	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}(bV)$	$V(bV)''$
2.3	0.504416	0.503754	1.114	0.248
2.4	0.530026	0.529693	1.124	0.195
2.5	0.553915	0.554131		

注：第2列，第4列和第5列是利用文献[7,8]中的软件解式(29.25)得到的值。

29.3.1 截止频率

如图29.3所示，当V减小时，b也随之减小。对于每一种模式，都会有一个V使$b=0$$\left(\text{对应于}\frac{\beta}{k_0}=n_2\right)$，此时，这个模式不再是导模。使得$b=0$的$V$被称为该模式的截止频率。现在，对于一给定的阶跃型折射率光纤，当增大波长时，V减小(见式(29.19))。使$b=0$的波长就是该模式下的截止波长。

由式(29.25)可知，LP_{0m}模式的截止频率发生在使$J_1(V)=0$处，即

$$V=0(LP_{01}),3.8317(LP_{02}),7.0156(LP_{03}),10.1735(LP_{04}),\cdots$$

同理，由式(29.24)可知，LP_{1m}模式的截止频率发生在使$J_0(V)=0$处，即

$$V=2.4048(LP_{11}),5.5201(LP_{12}),8.6537(LP_{13}),11.7915(LP_{14}),\cdots$$

LP_{2m}模式的截止频率发生在使$J_1(V)=0$处(除了使$V=0$的值)，即

$$V=3.8317(LP_{21}),7.0156(LP_{22}),10.1735(LP_{23}),\cdots$$

对$l\geqslant 1$，LP_{lm}模式的截止频率会出现在$J_{l-1}(V)=0$处(除了使$V=0$的值)；因此，LP_{3m}模式的截止频率为

$$V=5.1356(LP_{31}),8.4172(LP_{32}),11.6198(LP_{33}),\cdots$$

LP_{4m}模式的截止频率为

$$V=6.3802(LP_{41}),9.7610(LP_{42}),13.015(LP_{43}),\cdots$$

LP_{5m}模式的截止频率为

$$V=7.5883(LP_{51}),11.0647(LP_{52}),\cdots$$

LP_{6m}模式的截止频率为

$$V=8.7715(LP_{61}),12.3386(LP_{62}),\cdots$$

如图29.3所示，还可以看出：

当$0<V<2.4048$时，光纤中将只有LP_{01}模式(称为基模)存在；$V=2.4048$是LP_{11}模式的截止频率，此时(对于LP_{11}模式)$b=0$，即$\frac{\beta}{k_0}=n_2$。

当$2.4048<V<3.8317$时，光纤中将只有LP_{01}模式和LP_{11}模式；$V=3.8317$是LP_{02}模式和LP_{21}模式的截止频率，此时(LP_{02}模式和LP_{21}模式)$b=0$，即$\frac{\beta}{k_0}=n_2$。

当$3.8317<V<5.1356$时，光纤中将只有LP_{01}，LP_{02}，LP_{11}和LP_{21}模式；$V=5.1356$是LP_{31}模式的截止频率。

因此，对于一个特定的V，光纤中只能存在有限数目的模式。这里必须指出，每一个LP_{0m}模式都是二重简并的，即，对于同一个b，有两个相互独立的模式，且这两个模式对应的

是两个相互独立的偏振态。进而每一个 LP_{lm} 模式($l>1$)都是四重简并的，即，对于同一个 b，有四个相互独立的模式，它们对应着与 ϕ 相关的 $\cos l\phi$、$\sin l\phi$ 两种场分布，每种场分布又分别包括两个相互独立的偏振态。

例 29.1　考虑一阶跃型折射率光纤，有 $n_1=1.5$，$n_2=1.49$，纤芯半径为 $a=3.0\mu m$，则

$$V=\frac{2\pi}{\lambda_0}a\sqrt{n_1^2-n_2^2}=\frac{3.2594}{\lambda_0}$$

其中 λ_0 的单位为 μm。因此，LP_{11} 模式的截止波长为 $1.355\mu m$，LP_{21} 模式和 LP_{02} 模式的截止波长为 $0.8506\mu m$，LP_{31} 模式的截止波长为 $0.6347\mu m$，…

LP_{01} 模式没有截止波长，因此，当 $\lambda_0>1.355\mu m$ 时，光纤中将只存在 LP_{01} 模式，当 $0.8506\mu m<\lambda_0<1.355\mu m$ 时，光纤中将存在 LP_{01} 模式和 LP_{11} 模式。当 $0.6347\mu m<\lambda_0<0.8506\mu m$ 时，光纤中将存在 LP_{01}，LP_{11}，LP_{21} 和 LP_{02} 模式。

这里应该提及的是，光纤制造商总会给出光纤的截止波长作为规格，然而，这个截止波长对应的是 LP_{11} 模式的截止波长。在例 29.1 中，光纤的截止波长将为 $1.355\mu m$，因为对于所有大于此的波长，光纤是只支持 LP_{01} 模式传输的单模光纤。因此，

光纤中只存在 LP_{01} 模式时的最小波长(对于阶跃型折射率光纤，有 $V=2.4045$)[①]称为光纤的截止波长，记为 λ_c。

在石英光纤的规格数据清单中，几乎总要提到这个 λ_c(见参考文献[11])。

例 29.2　考虑一阶跃型折射率光纤，有 $n_1=1.5$，$n_2=1.48$，纤芯半径 $a=6.0\mu m$。设入射光波长为 $\lambda_0=1.3\mu m$，则可得 $V=7.0796$。因此，光纤中将有二重简并的 LP_{01}，LP_{02} 和 LP_{03} 模式，四重简并的 LP_{11}，LP_{12}，LP_{21}，LP_{22}，LP_{31} 和 LP_{41} 模式，一共 30 种模式。在高阶($V\geqslant10$)阶跃型折射率多模光纤中，总模式数近似由下式给出

$$N\approx\frac{1}{2}V^2 \tag{29.26}$$

对于 $V=7.0796$，有 $N\approx25$。对于更大的 V，式(28.26)得出的数值更接近于精确值(见习题 29.3)。

29.3.2　幂率折射率剖面的渐变折射率光纤

这里需要指出一大类多模渐变折射率光纤，可用下面的折射率分布式描述(见图 29.4)

$$\begin{cases}n^2(r)=n_1^2\left[1-2\Delta\left(\dfrac{r}{a}\right)^q\right], & 0<r<a\\ n^2(r)=n_2^2=n_1^2(1-2\Delta), & r>a\end{cases} \tag{29.27}$$

式中 r 表示柱坐标系下的半径，n_1 表示光纤芯轴线上(即在 $r=0$ 处)的折射率，n_2 表示包层的折射率。式(29.27)描述的就是常说的幂率折射率剖面，或者 q 剖面。$q=1$，$q=2$ 和 $q=\infty$ 分别对应于线型折射率剖面、抛物线型折射率剖面和阶跃型折射率剖面的光纤(见图 29.4)。由式(29.27)描述的渐变折射率多模光纤中传输的总模式数近似由下式给出(文献[12]，也可见文献[3])

$$N\approx\frac{q}{2(2+q)}V^2 \tag{29.28}$$

① 对于纤芯折射率渐变的渐变折射率光纤，截止频率对应为相应的 $V=3.518$(见参考文献[10])。

因此,抛物线型渐变折射率光纤($q=2$)当$V=10$时将能支持将近25种模式。同理,阶跃型折射率光纤($q=\infty$)当$V=10$时将能支持将近50种模式。当光纤中能支持大量的模式时,根据射线光学方法计算脉冲色散将能够得到准确结果。现在,在多模光纤中,除了材料色散(见27.10.3节),还有由于不同模式传播速度不同导致的模式色散。参考文献[12](和文献[3])中证明了对于支持大量模式的渐变折射率光纤,根据波动理论得出的模式色散和根据射线分析得出的模式色散在数值上是几乎一致的。在第27章中,已经根据射线光学理论计算出了阶跃型折射率光纤和抛物线型渐变折射率光纤的模式色散。上述分析方法得到的结果对$V\geqslant 10$的多模光纤足够精确。

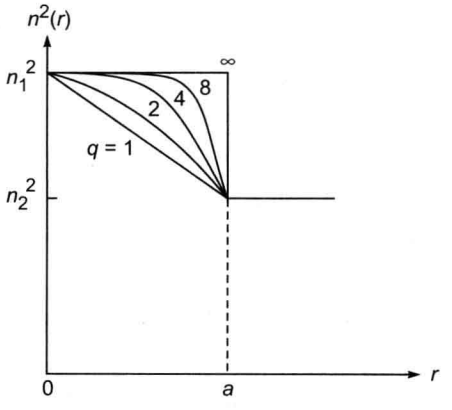


图29.4　对于由式(29.27)给出的渐变折射率光纤的幂率描述

29.4　单模光纤

LP_{01}模式($l=0,m=1$)为光纤的基模。如前所述,对于阶跃型折射率光纤,当$0<V<2.4048$时,光纤中将只有基模。在这种情况下,光纤被称为单模光纤,单模光纤被广泛地应用于光纤通信系统中。对于基模,不同的V对应b的实际值列于表29.1中。因此,对于工作在特定波长的阶跃型折射率光纤,只需计算V,再根据表29.1,通过简单的插值法就可以计算出b。通过b和式(29.29),就可以得到相对应的传播常数(见式(29.20))

$$\frac{\beta}{k_0}=\sqrt{n_2^2+b(n_1^2-n_2^2)}\approx n_2\sqrt{1+(2\Delta)b} \tag{29.29}$$

其中在最后一步,假设$n_1\approx n_2$。

例29.3　考虑一阶跃型折射率光纤,有$n_2=1.447$,$\Delta=0.003$和$a=4.2\mu m$,经计算可得$V=\dfrac{2.958}{\lambda_0}$,其中$\lambda_0$的单位用$\mu m$。因此,当$\lambda_0>1.23\mu m$时,光纤是单模传输。即$V=2.4045$时,光纤的截止波长$\lambda_c$为$1.23\mu m$。假设光纤传输光的波长为$\lambda_0=1.479\mu m$,此时$V=2.0$,因此,(由表29.1)有

$$b\approx 0.4162\Rightarrow\frac{\beta}{k_0}\approx n_2\sqrt{1+(2\Delta)b}\approx 1.4488$$

$$\Rightarrow\beta\approx 6.1549\times 10^6\,m^{-1}$$

例29.4　接例29.3,考虑一相同的阶跃型折射率光纤($n_2=1.447$,$\Delta=0.003$和$a=$

4.2μm)，现在假设光纤工作波长为 $\lambda_0=1.55\mu m$，此时 $V\approx 1.908$，在这种情况下，光纤仍是单模传输。查表 29.1 并进行线性插值，可得

$$b\approx 0.382660+\frac{0.416163-0.382660}{0.1}\times 0.008\approx 0.38534$$

$$\Rightarrow \frac{\beta}{k_0}\approx n_2\sqrt{1+(2\Delta)b}\approx 1.4487$$

$$\Rightarrow \beta\approx 5.8725\times 10^6\,m^{-1}$$

例 29.5　为了后面将要讨论的原因，第四代光纤通信系统(工作于 1.55μm)采用的光纤，其纤芯半径很小，而 Δ 较大。(工作于 1.55μm)典型的光纤参数为 $n_2=1.444$，$\Delta=0.0075$ 和 $a=2.3\mu m$。因此，在 $\lambda_0=1.55\mu m$，有

$$V=\frac{2\pi}{1.55}\times 2.3\times 1.444\times\sqrt{0.015}\approx 1.649$$

此时，在 1.55μm 光纤中为单模传输，且

$$b\approx 0.270063+\frac{0.309467-0.270063}{0.1}\times 0.049\approx 0.28937$$

$$\Rightarrow \frac{\beta}{k_0}\approx n_2\sqrt{1+(2\Delta)b}\approx 1.44713$$

则对于这种给定的光纤，有

$$V=\frac{2.556}{\lambda_0}$$

因此，该光纤的截止波长为

$$\lambda_c=2.556/2.4045\approx 1.06(\mu m)$$

29.4.1　归一化传播常数的经验公式

对于一阶跃型折射率单模光纤，有一个计算 $b(V)$ 的方便经验公式为

$$b(V)=\left(A-\frac{B}{V}\right)^2,\quad 1.5\leqslant V\leqslant 2.5 \tag{29.30}$$

式中 $A\approx 1.1428$，$B\approx 0.996$。式(29.30)给出的 b 与精确值误差在 0.2%左右(见表 29.1)。

29.4.2　基模的模场直径

如前所述，单模光纤中只支持一种传输模式，也称为光纤的基模。单模光纤中，基模的横向场分布是一个十分重要的物理量，它决定了光纤的许多重要参数，如光纤接头的连接损耗、传输效率和弯曲损耗等。对于阶跃型折射率光纤，其基模场分布的解析表达式是贝塞尔函数(见 29.3 节)。但对于大多数的单模光纤，基模场分布可以用高斯函数来近似，写为

$$\Psi(x,y)=Ae^{-\frac{x^2+y^2}{w^2}}=Ae^{-\frac{r^2}{w^2}} \tag{29.31}$$

式中 w 为模场的光斑尺寸，$2w$ 被称作模场直径(MFD)。MFD 是普通单模光纤的一个十分重要的特征参数。对于阶跃型折射率光纤，有一个计算 w 的经验公式(见文献[13])

$$\frac{w}{a}\approx 0.65+\frac{1.619}{V^{3/2}}+\frac{2.879}{V^6},\quad 0.8\leqslant V\leqslant 2.5 \tag{29.32}$$

式中 a 为纤芯半径。虽然在大多数光纤通信系统中采用的光纤都不是阶跃型折射率分布光纤,事实上,它们都有非常特殊的折射率分布,但模场分布十分接近于高斯分布,因此,仍常用模场直径来描述光纤的特性。值得注意的是,氦-氖激光器(或者是激光笔)输出光的光强,其横向场分布与从单模光纤输出的场分布非常类似,只是模场半径要大得多。

例 29.6 考虑一阶跃型折射率光纤(工作波长为 1300nm),有 $n_2=1.447$,$\Delta=0.003$ 和 $a=4.2\mu m$(见例 29.2)。因此,有 $V\approx2.28$,$w\approx4.8\mu m$。当工作波长为 $\lambda_0=1550nm$ 时,有 $V\approx1.908$,$w\approx5.5\mu m$。由此可见,模场大小随波长的增大而增大。

例 29.7 设一阶跃型折射率光纤(工作波长为 $\lambda_0=1550nm$),有 $n_2=1.444$,$\Delta=0.0075$ 和 $a=2.3\mu m$(见例 29.5)。因此,有 $V\approx1.65$,$w\approx3.6\mu m$。当工作波长为 $\lambda_0=1300nm$ 时,有 $V\approx1.97$,$w\approx3.0\mu m$。

29.4.3 光纤横向偏离引起的光纤连接损耗

在两根相似光纤的接头处,最常见的一种偏离是如图 29.5 所示的横向偏移。与横向偏移量 u 相对应的连接损耗,以 dB 为单位时,可表示为(见习题 29.6)

$$\alpha\approx4.34(u/w)^2 \tag{29.33}$$

因此,增大 w,可以增加光纤对横向偏移的容差。对于 $w\approx5\mu m$,连接处的横向偏移量为 $1\mu m$ 时,产生的连接损耗约为 0.17dB;对于 $w\approx3\mu m$,$1\mu m$ 的偏移量,将引起的损耗达 0.5dB。



图 29.5 两根光纤的横向偏移将导致光束的损失。

例 29.8 一根工作于 1300nm 的单模光纤,$w\approx5\mu m$,为了使其接头损耗低于 0.1dB,则由式(29.33)可以计算出 $u<0.76\mu m$。因此,为了实现低损耗连接,光纤横向对准非常关键。而对于单模光纤,要求其连接器对接头进行精确匹配和位置对准。

许多描述商用光纤的规格数据清单中,并不总是给出光纤折射率的实际剖面形状,而是给出多个波长下的模场直径,以及截止波长(见参考文献[11]中的例子)。例如,G.652 标准单模光纤在 $1.3\mu m$ 处,MFD 设计为 $(9.2\pm0.4)\mu m$;当工作波长为 $1.55\mu m$ 时,MFD 为 $(10.4\pm0.8)\mu m$。

29.5 单模光纤中的脉冲色散

在单模光纤中,只有一种传输模式,因此没有模式色散,但光纤中(除了材料色散)还存在波导色散。波导色散是由于光纤的横向折射率变化引起的[①]。在 27.10.2 节和 27.10.3 节中已经讨论了材料色散。在本节中将证明即使 n_1 和 n_2 与波长无关(即,甚至不存在材料色散),光纤中特定模式的群速度也与波长相关,这将导致所谓的波导色散。

① 在高比特率传输系统中,还存在所谓的偏振模色散(PMD)。PMD 可能是由于多种因素引起的,比如,光纤的纤芯偏离理想的圆而呈现椭圆,这使得两个正交偏振态产生群速度的略微不同而引起 PMD。这种现象在高速传输(速率大于 40Gbit/s)中十分重要。对于 PMD 的全面综述可见文献[14],想了解 PMD 的更多细节,请参考列出的参考文献。

由于 β 表示光纤的传播常数，对于某一模式的群速度，可以表示为（见 10.2 节和 10.3 节中的分析）

$$\frac{1}{v_g}=\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega} \tag{29.34}$$

由式(29.20)，有

$$b=\frac{\dfrac{\beta}{k_0}-n_2}{n_1-n_2}\,\frac{\dfrac{\beta}{k_0}+n_2}{n_1+n_2} \tag{29.35}$$

对于导模，有 β/k_0 位于 n_1 和 n_2 之间，而对于大多数实际的光纤，n_1 与 n_2 十分接近（见例 29.6 与例 29.7），则式(29.35)可写为

$$b=\frac{\dfrac{\beta}{k_0}-n_2}{n_1-n_2} \tag{29.36}$$

因此，有

$$\beta=\frac{\omega}{c}[n_2+(n_1-n_2)b(V)] \tag{29.37}$$

假设 n_1 和 n_2 不随 ω 变化，并计算群速度

$$\frac{1}{v_g}=\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega}=\frac{1}{c}[n_2+(n_1-n_2)b(V)]+\frac{\omega}{c}(n_1-n_2)\,\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}V}\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\omega} \tag{29.38}$$

又有

$$V=\frac{2\pi}{\lambda_0}a\sqrt{n_1^2-n_2^2}=\frac{\omega}{c}a\sqrt{n_1^2-n_2^2} \tag{29.39}$$

所以，有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\omega}=\frac{V}{\omega} \tag{29.40}$$

代入式(29.38)，有

$$\frac{1}{v_g}=\frac{1}{c}[n_2+(n_1-n_2)b(V)]+\frac{1}{c}(n_1-n_2)V\,\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}V} \tag{29.41}$$

或者

$$\frac{1}{v_g}=\frac{n_2}{c}+\frac{n_1-n_2}{c}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}(bV)\right] \tag{29.42}$$

因此，脉冲在光纤中传输长度 L 所需的时间为

$$\tau=\frac{L}{v_g}=\frac{L}{c}n_2\left[1+\Delta\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}(bV)\right] \tag{29.43}$$

式中

$$\Delta\overset{\text{def}}{=\!=}\frac{n_1^2-n_2^2}{2n_1^2}\approx\frac{n_1-n_2}{n_2}$$

或者

$$\Delta\overset{\text{def}}{=\!=}\frac{n_1^2-n_2^2}{2n_1^2}\approx\frac{n_1-n_2}{n_2} \tag{29.44}$$

这里假设 $n_1\approx n_2$。由式(29.43)可知，即使 n_1 和 n_2 与波长无关（即，不存在材料色散），群速度（因而 τ）也将与 ω 有关，这是因为如图 29.3 所示（或式(29.30)），可以明显看出 b 与 V 相

关,这就是所谓的波导色散。从物理上看,波导色散的出现是由于光纤中的模场光斑尺寸与波长有关(见例29.6和例29.7)。对于谱宽为$\Delta\lambda_0$的光源,相应的波导色散为(见式(10.16)和式(10.17))

$$\Delta\tau_w = \frac{d\tau}{d\lambda_0}\Delta\lambda_0 \approx \frac{L}{c}n_2\Delta\frac{d^2}{dV^2}(bV)\frac{dV}{d\lambda_0}\Delta\lambda_0 \tag{29.45}$$

由式(29.39),可知

$$\frac{dV}{d\lambda_0} = -\frac{V}{\lambda_0} \tag{29.46}$$

因此,有

$$\Delta\tau_w = -\frac{Ln_2\Delta}{c}f(V)\Delta\lambda_0 \tag{29.47}$$

式中

$$f(V) \xlongequal{\text{def}} V\frac{d^2}{dV^2}(bV) \tag{29.48}$$

对于阶跃型折射率光纤,b和V的关系是一条普适曲线,事实上,这一点对满足如式(29.27)给出的幂率折射率剖面的光纤都成立。因此,$f(V)$随V的变化,对幂率折射率剖面光纤也是普适的(见表29.1)。对阶跃型折射率光纤有一个方便的经验公式(见文献[15])

$$f(V) \approx 0.080 + 0.549(2.834 - V)^2, \quad 1.3 < V < 2.4 \tag{29.49}$$

参考文献[3]对上述经验公式计算的结果与精确值进行了比较。因此,将式(29.49)代入式(29.47),有

$$\Delta\tau_w = -\frac{Ln_2\Delta}{c}[0.080 + 0.549 \times (2.834 - V)^2]\frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0}, \quad 1.3 < V < 2.4 \tag{29.50}$$

正如在10.2节中假设,$\Delta\lambda_0 = 1\text{nm} = 10^{-9}\text{m}$,以及$L = 1\text{km} = 1000\text{m}$,定义色散系数为

$$D_w \xlongequal{\text{def}} \frac{\Delta\tau_w}{L\Delta\lambda_0} \approx -\frac{n_2\Delta}{3\lambda_0} \times 10^7 \times [0.080 + 0.549 \times (2.834 - V)^2], \quad (\text{ps}/(\text{km} \cdot \text{nm})) \tag{29.51}$$

式中λ_0的单位为nm,$c = 3 \times 10^{-4}\text{m/ps}$。$D_w$称为波导色散系数(因为该色散源于光纤的波导结构特性),在D下面标注的w下标表示是波导引起。对于单模光纤,式(29.51)括号中的部分通常是正的,因此,波导色散为负,这意味着长波长的光波传播的更快。由于材料色散的正负取决于工作波长位于的区间,因此,有可能存在一个特定的波长,材料色散和波导色散引起的效应恰好完全抵消。这个特定的波长称为光纤的零色散波长(λ_{ZD}),是单模光纤的一个非常重要的参数。

光纤中的总色散可以由材料色散和波导色散之和求得①

$$D_{tot} = D_m + D_w \tag{29.52}$$

下面来分析在例29.6和例29.7中讨论过的两种单模光纤。

---

① 严格来说,材料色散和波导色散是不可加的。对于给定的折射率分布$n^2(r)$,应该在将光纤折射率与波长有关考虑在内情况下,在不同的波长求解式(29.11),进而得出β随λ_0的函数关系,从而求出总色散。参考文献[8]中的软件正是这么做的。

29.5.1　传统单模光纤(G.652 光纤)

考虑在例 29.6 中讨论的光纤，有 $n_2=1.447$，$\Delta=0.003$，$a=4.2\mu m$，从而有 $V=2958/\lambda_0$，式中 λ_0 的单位为 nm。代入式(29.51)，有

$$D_w=-\frac{1.447\times10^4}{\lambda_0}\times\left[0.080+0.549\times\left(2.834-\frac{2958}{\lambda_0}\right)^2\right](ps/(km\cdot nm))$$

经过简单计算，表明当 $\lambda_0\approx1300nm$ 时，$D_w=-2.8ps/(km\cdot nm)$。D_m，D_w 与 D_{tot} 随 λ_0 的变化关系，如图 29.6 所示。材料色散 D_m 的变化关系可由式(27.24)和表 10.1 计算得到。总色散在 $\lambda_0\approx1300nm$ 附近穿过零点，称为零总色散波长，它是光纤十分重要的参数。这类零总色散波长在 1300nm 附近的光纤，称为传统单模光纤(或 G.652 光纤)，在光纤通信系统中得到广泛采用。

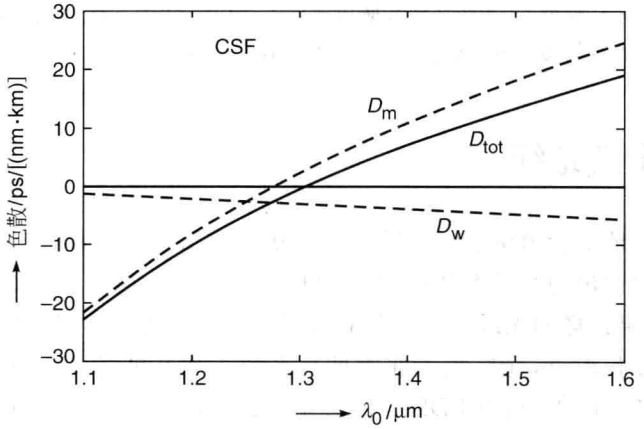


图 29.6　参数如例 29.6 所给出的传统单模光纤(CSF)，其 D_m，D_w 和 D_{tot} 随波长的变化曲线。总色散在 1300nm 附近穿过零点，该波长称为零总色散波长。

29.5.2　色散位移光纤(G.653 光纤)

下面考虑在例 29.7 中讨论的光纤，有 $n_2=1.444$，$\Delta=0.0075$，$a=2.3\mu m$，从而有 $V=2556/\lambda_0$，其中 λ_0 的单位为 nm。代入式(29.51)，有

$$D_w=-\frac{3.61\times10^4}{\lambda_0}\times\left[0.080+0.549\times\left(2.834-\frac{2556}{\lambda_0}\right)^2\right](ps/(km\cdot nm))$$

因此，对于波长 $\lambda_0\approx1550nm$，有

$$D_w=-20ps/(km\cdot nm)$$

另一方面，在这一波长处，光纤的材料色散为(见表 10.1)

$$D_m=+20ps/(km\cdot nm)$$

可看到，D_w 与 D_m 的符号相反，且几乎可以相互抵消。从物理上讲，由于波导色散中长波长比短波长传播速度慢；而材料色散中长波长比短波长传播速度快——这两个效应可以互相补偿，从而使在 $\lambda_0\approx1550nm$ 附近，总色散为零。D_m，D_w 与 D_{tot} 随 λ_0 的变化曲线，如图 29.7 所示。可以看出，可以通过调整光纤的参数来移动零色散波长的位置，这类光纤被称为色散位移光纤。因此，色散位移光纤是那些零色散波长位置移动了的光纤。这里要强

调的是,色散位移光纤(DSF,也称为G.653光纤)其折射率通常不是阶跃型变化的。

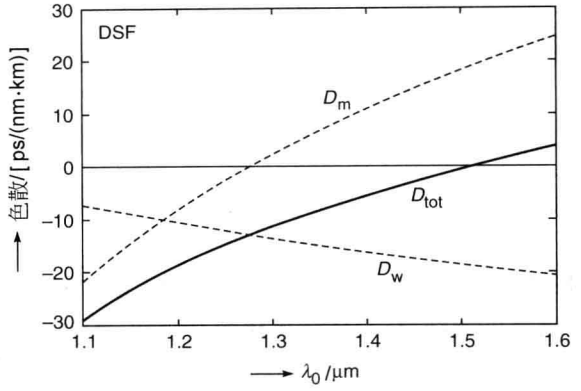


图29.7 参数如例29.7所示的色散位移光纤(DSF),其D_m,D_w和D_{tot}随波长的变化曲线。总色散在1550nm附近穿过零点。

29.6 色散补偿光纤

在许多国家,在地下管道里已经铺设了几百万公里、工作在1310nm的传统普通单模光纤(即,在例29.6中讨论的光纤类型)。正如29.5.1节所述,这些光纤在1310nm附近有非常低的色散值。如果这样的光纤系统工作在波长1550nm附近,可以极大地提升系统的传输容量(因为在此波长附近,光纤损耗非常低),系统工作在波长1550nm附近的另一优势是,可以在这个波长范围内,利用EDFA(掺铒光纤放大器)来做光放大(见26.1.3节)。但如果传统单模光纤工作在1550nm附近时,会有很显著的残余色散,正如29.5.1节中讨论的那样,这种残余色散可以达到20ps/(km·nm),这么大的色散将会导致通信系统承载信息的能力显著下降。另一方面,如果用色散位移光纤来替换原来的普通单模光纤,成本又太高了。因此,最近几年,大量的研究工作投入在如何将原来在1310nm波长处进行最佳设计的普通光纤链路升级到在1550nm附近工作。这一难题已经通过成功研制出大负色散系数的光纤解决了。其方案是在光纤链路中,用几百米到一公里的大负色散系数的光纤去补偿几十公里普通光纤产生的色散。

在29.5.1节和29.5.2节中已知,可以通过改变光纤的折射率分布来改变波导色散,进而改变总色散。事实上,采用特殊工艺制造在1550nm波长处大的负色散系数(D_{tot})的光纤是可能的。一种典型的折射率剖面设计使约在1550nm波长附近有$D_{tot}\approx-1800$ps/(km·nm)的色散,如图29.8(见参考文献[16])所示①。这种类型的光纤称为色散补偿光纤(DCF)。一段不长的DCF与在1310nm波长处进行最佳设计的光纤结合在一起,可以使链路终端显示的总色散非常小(见图29.9)。

为了理解这种现象,如图29.10所示(见实线),一零色散波长在1310nm附近的普通单模光纤(CSF)的群速度v_g与波长的典型变化曲线。如图29.10所示,群速度v_g在零色散

① 参考文献[16]中使用的光纤折射率分布是基于参考文献[17]中建议的分布。

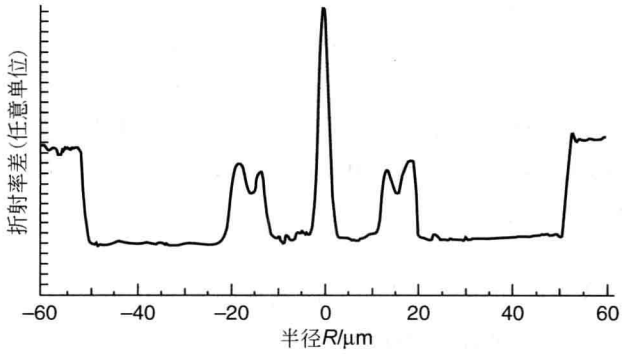


图 29.8　一段典型的色散补偿光纤(DCF)的折射率分布剖面(在 1550nm 波长处，有 $D_{tot}\approx-200$ps/(km·nm))。引自参考文献[12]。

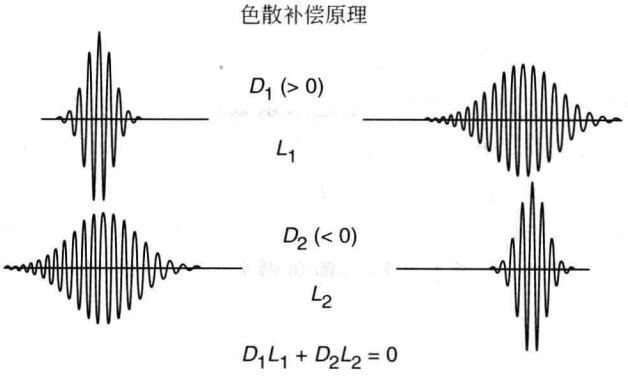


图 29.9　一段不长的 DCF 与工作波长为 1310nm 的光纤结合在一起，可以使链路终端显示的总色散非常小。

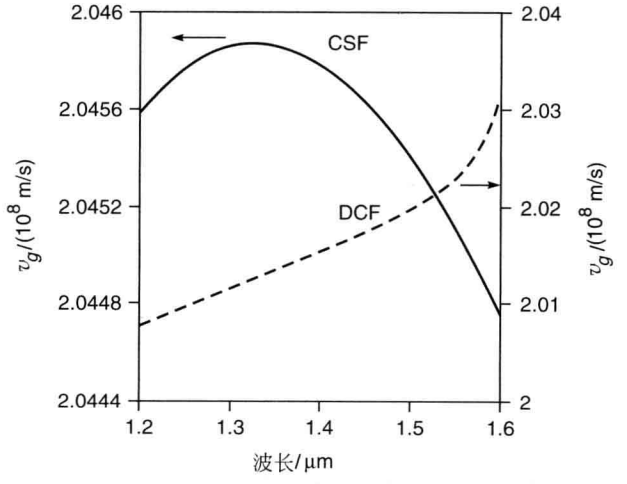


图 29.10　在色散补偿光纤和传统单模光纤中脉冲的群速度随波长的变化曲线

波长处达到最大值;而在两侧 v_g 均单调下降。因此,如果入射脉冲中心波长在1550nm附近,则脉冲中的低频成分(长波长成分)将比高频成分(短波长成分)传播的慢,从而脉冲将被展宽。当脉冲在CSF中传过一定长度 L_1 后,再让其进入DCF中传播一定长度 L_2。DCF中的群速度 v_g 随波长的变化如图29.10所示中的虚线。脉冲中的低频成分(长波长成分)将比高频成分(短波长成分)传播速度快,从而脉冲将有恢复原始形状的趋势。事实上,如果两段光纤长度(L_1 和 L_2)满足

$$D_1L_1 + D_2L_2 = 0 \tag{29.53}$$

则从第二段光纤出射的光脉冲将与射入第一段光纤的脉冲几乎相同,如图29.9所示。

需要在此指出的是,光纤通信系统近来的趋势是应用DWDM(密集波分复用)系统。在该系统中,许多波长间隔非常近的光(波长范围为1530～1565nm)同时在光纤中传输,并被EDFA放大。这样,如果光纤工作在零色散波长处,由于没有色散,邻近波长的光将以同样的群速度传播,从而相互作用,产生新的频率分量——这就是所谓的四波混频(FWM)。为了克服这个难题,有人提出采用小色散系数的光纤,其色散系数的典型范围为2～8ps/(km·nm)。这样,不同的频率分量就以不同的群速度传输,从而能够避免产生不需要的频率分量。如图29.11所示的内插图中,给出了典型的小色散系数光纤的折射率剖面分布,这种小色散系数光纤称为小残余色散光纤(SRDF)[①]。同时,也给出了总色散(D_N)随波长的变化曲线,折射率剖面的微小变化引起的色散偏差,由虚线表示。但是,如果想要做到长距离无中继传输,在这些光纤中的残余色散(2～8ps/(km·nm))也会积累,并限制每个波长能够传输的比特数。为了克服这一困难,不得不使用一段色散补偿光纤同时补偿所有的波长处积累的色散。这样的DCF的设计必须能够适应小残余色散光纤。如图29.12所示的内插图中,给出了这样的DCF的折射率剖面分布,还给出了总色散(D_C)随波长的变化曲线,其色散斜率也做了调整,以便用一小段DCF近似同时补偿SRDF中所有波长处积累的色散。如图29.13所示,绘制了色散补偿后有效色散 D_E 曲线,其定义为

$$D_E = (L_1D_N + L_2D_C)/(L_1 + L_2) \tag{29.54}$$

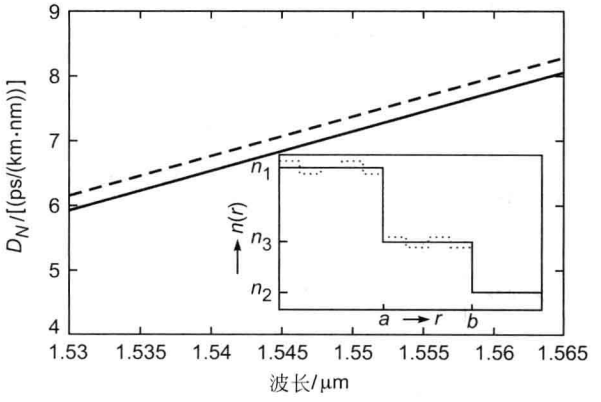


图29.11 SRDF光纤的总色散(D_N)随波长的变化曲线。实线与虚线分别对应于建议的和有扰动的折射率剖面分布(见内插图)(引自参考文献[18])。

① 也称非零色散光纤(no-zero dispersion shifted fiber),ITU-T为其制定了G.655标准。译者注。

式中 $L_1=36.74L_2$，D_N 与 D_C 分别表示 SRDF 与 DCF 的色散系数。需要注意到，补偿后有效色散的最大值小于 0.08ps/(km·nm)。

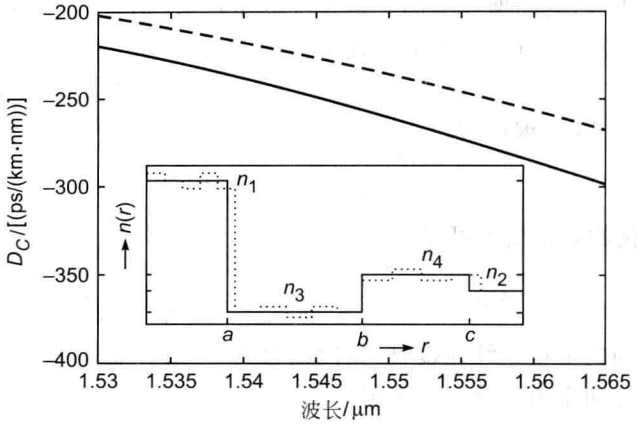


图 29.12　DCF 光纤的总色散(D_C)随波长的变化曲线。实线与虚线分别对应于建议的和有扰动的折射率剖面分布(见内插图)。引自参考文献[18]。

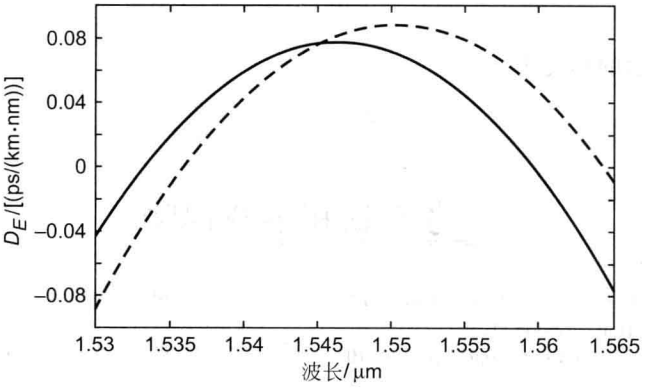


图 29.13　系统的有效色散(D_E)随波长的变化曲线。引自参考文献[18]。

习　题

29.1　考虑一阶跃型折射率光纤，有 $n_1=1.474$，$n_2=1.470$，且纤芯半径为 $a=4.5\mu m$。试计算截止波长。

[**答案**：$\lambda_c=1.28\mu m$]

29.2　考虑一阶跃型折射率光纤，有 $n_1=1.5$，$n_2=1.48$，且纤芯半径为 $a=6.0\mu m$。试计算 $V=8$ 的情况下的工作波长 λ_0。

[**答案**：$\lambda_0=1.15\mu m$]

29.3　接习题 29.2，(1)计算 $V=8$ 的情况下光纤中的模式总数。(2)与式(29.28)得出的近似解作比较。

[**答案**：(1) 34；(2) 32]

29.4 考虑一单模光纤，有 $a=3\mu m$，$V\approx 2.3$。试计算基模的模场直径。

[**答案**：$3.4\mu m$]

29.5 设一段单模光纤，其高斯模场的光斑尺寸为 $w=4.5\mu m$。计算两段相同光纤当横向偏离为 $1\mu m$，$2\mu m$，$3\mu m$ 时，引起的连接损耗。

[**答案**：0.21dB，0.86dB，1.93dB]

29.6 当模场满足下式时，被称为归一化模场

$$\iint |\psi(x,y)|^2 dxdy = 1$$

证明：归一化的高斯模场可以表示为

$$\psi(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{w}e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{w}e^{-\frac{r^2}{w^2}}$$

29.7 假设两段相同的单模光纤连接时，横向偏移为 u(沿 x 轴方向)。耦合到第二根光纤基模中的部分功率由交叠积分表示

$$T = \left|\iint \psi_1(x,y)\psi_2(x,y)dxdy\right|^2$$

证明

$$T = \exp\left(-\frac{u^2}{w^2}\right)$$

则用 dB 表示的损耗为

$$10\lg T = 4.34\left(\frac{u}{w}\right)^2$$

参考文献和推荐读物

1. A. W. Snyder and J. D. Love, *Optical Waveguide Theory*, Chapman & Hall, London (1983).
2. D. Gloge, *Weakly Guiding Fibers*, Appl. Opt. **Vol. 10**, 2252, (1971).
3. A. Ghatak and K. Thyagarajan, *Introduction to Fiber Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, (1998).
4. J. Irving and N. Mullineux, *Mathematics in Physics and Engineering*, Academic Press, New York (1959).
5. G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Second Edition, Academic press, New York (1970).
6. A. K. Ghatak, I.C. Goyal and S. J. Chua, *Mathematical Physics*, Macmillan India, New Delhi (1985).
7. A. Ghatak, A. Sharma and R. Tewari, *Fiber Optics on a PC*, Viva Books, New Delhi (1994).
8. A. Ghatak, I. C. Goyal and R. Varshney, *FIBER OPTICA : A software for characterizing fiber and integrated-optic waveguides*, Viva Books, New Delhi (1999).
9. M. Abramowitz and I Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, Washington DC, (1965).
10. T.I. Lukowski and F. P. Kapron, *Parabolic fiber cutoffs: a comparison of theories*, J. Opt. Soc. Am. **Vol. 67**, 1185 (1977).
11. D. K. Mynbaev and L.L. Scheiner, *Fiber-Optic Communications Technology*, Prentice Hall, USA (2001).
12. D. Gloge and E.A.J. Marcatili, *Multimode theory of graded-core fibers*, Bell. Syst. Tech. J., Vol. 52, 1563, (1973).
13. D. Marcuse, *Gaussian approximation of the fundamental modes of a graded index fibers*, J. Opt. Soc. Am. **Vol. 68**, 103 (1978).
14. Arun Kumar, *Polarization Effects in Single Mode Optical Fibers*, in *Guided Wave Optics* (Ed: Anurag Sharma), Viva Books, New Delhi (2005).
15. D. Marcuse, *Interdependence of waveguide and material dispersion*, App. Opt., **Vol. 18**, pp. 2930-2932, (1979).
16. J.L. Auguste,R. Jindal, J.M. Blondy, Clapeau, J. Marcou, B. Dussardier, G. Monnom, D.B. Ostrowsky, B.P. Pal and K. Thyagarajan, *Electron. Lett.*, **Vol. 36**, 1689, (2000).
17. K. Thyagarajan, R.Varshney, P. Palai, A. Ghatak and I. C. Goyal, *A novel design of a dispersion compensating fiber*, Photon. Tech. Letts.,**Vol. 8**, 1510, (1996).
18. I.C. Goyal, R.K. Varshney and A. K. Ghatak, *Design of a Small Residual Dispersion Fiber and a Corresponding Dispersion Compensating Fiber for DWDM Systems*, Optical Engineering, **42**, pp 977-980, (2003).

附录A 伽马函数和与高斯函数相关的积分

首先证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2+\beta x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right), \quad \mathrm{Re}\,\alpha > 0 \tag{A.1}$$

考虑积分

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \tag{A.2}$$

因此，有

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

转换成球坐标，有

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r^2} r\mathrm{d}r \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta = \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right)\Big|_0^{\infty} \times 2\pi = \pi$$

因此，有

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \tag{A.3}$$

则

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2+\beta x}\,\mathrm{d}x &= \exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\alpha\left(x-\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2\right]\mathrm{d}x \\ &= \exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha z^2}\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

式中 $z=x-\frac{\beta}{2\alpha}$。根据式(A.3)，可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha z^2}\,\mathrm{d}z = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{A.4}$$

根据式(A.4)，可以得到式(A.1)。还可以得到

$$\sqrt{\pi} = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} y^{-1/2}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y$$

因此，有

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{A.5}$$

式中 $\Gamma(z)$ 由下式定义

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{Re}\,z > 0 \tag{A.6}$$

对于 $\mathrm{Re}\,z>0$，进行分部积分，可得

$$\Gamma(z)=(z-1)\Gamma(z-1) \tag{A.7}$$

又由

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1$$

可得

$$\Gamma(n+1)=n!,\quad n=0,1,2,\cdots \tag{A.8}$$

更进一步,由 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$,可得

$$\begin{cases}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\\ \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\end{cases} \tag{A.9}$$

如此类推。最后,对于 $n=1,2,\cdots$ 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n} \tag{A.10}$$

以及

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2n+1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=0 \tag{A.11}$$

附录B 积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin gx}{x}\mathrm{d}x$

函数 $f(x)$的拉普拉斯变换由式(B.1)定义

$$F(p)=L[f(x)]=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-px}f(x)\mathrm{d}x \tag{B.1}$$

则

$$\int_s^{\infty}F(p)\mathrm{d}p=\int_s^{\infty}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-px}f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}p=\int_0^{\infty}f(x)\left[\int_s^{\infty}\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}p\right]\mathrm{d}x$$

对 p 积分,可得

$$\int_s^{\infty}F(p)\mathrm{d}p=\int_0^{\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x \tag{B.2}$$

当 $s\to 0$ 时,有

$$\int_0^{\infty}F(p)\mathrm{d}p=\int_0^{\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x \tag{B.3}$$

假设

$$f(x)=\sin gx,\quad g>0 \tag{B.4}$$

则

$$F(p)=\int_0^{\infty}\sin gx\,\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^{\infty}[\mathrm{e}^{-(p-\mathrm{i}g)x}-\mathrm{e}^{-(p+\mathrm{i}g)x}]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{p-\mathrm{i}g}-\frac{1}{p+\mathrm{i}g}\right)=\frac{g}{p^2+g^2}$$

因此,有

$$\int_0^{\infty}F(p)\mathrm{d}p=g\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}p}{p^2+g^2}=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2},\quad x=\frac{p}{g}$$

$$=\arctan x\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2},\quad g>0 \tag{B.5}$$

很明显,当 $g<0$ 时,上述积分等于$-\pi/2$。因此,根据式(B.3),可得

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin gx}{x}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & g>0\\ 0, & g=0\\ -\dfrac{\pi}{2}, & g<0\end{cases} \tag{B.6}$$

上述积分中的函数是 x 的偶函数,因此有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin gx}{\pi x}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin gx}{x}\mathrm{d}x=1,\quad g>0 \tag{B.7}$$

附录C 高斯光束的衍射

如果在平面 $z=0$ 处的振幅与相位分布由 $A(\xi,\eta)$ 表示，则其衍射图样由式(C.1)给出(见式(20.23))

$$u(x,y,z)\approx-\frac{\mathrm{i}}{\lambda z}\exp(\mathrm{i}kz)\iint A(\xi,\eta)\exp\left\{+\frac{\mathrm{i}k}{2z}[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\right\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{C.1}$$

考虑一沿 z 轴传播的高斯光束，其在平面 $z=0$ 处的振幅相位分布为

$$A(\xi,\eta)=a\exp\left(-\frac{\xi^2+\eta^2}{w_0^2}\right) \tag{C.2}$$

说明其等相面就是 $z=0$ 平面，因此，在离轴距离为 w_0 时，振幅下降 1/e 因子(即，其强度下降 $1/\mathrm{e}^2$ 因子)。w_0 称为光束的光斑尺寸。将式(C.2)代入式(C.1)，可得

$$u(x,y,z)\approx-\frac{\mathrm{i}a}{\lambda z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2z}(x-\xi)^2-\frac{\xi^2}{w_0^2}\right]\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2z}(y-\eta)^2-\frac{\eta^2}{w_0^2}\right]\mathrm{d}\eta$$

或者

$$u(x,y,z)\approx-\frac{\mathrm{i}a\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}}{\lambda z}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k}{2z}(x^2+y^2)}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha\xi^2+\beta_1\xi}\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha\eta^2+\beta_2\eta}\mathrm{d}\eta \tag{C.3}$$

式中

$$\alpha=\frac{1}{w_0^2}-\frac{\mathrm{i}k}{2z}=-\frac{\mathrm{i}k}{2z}(1+\mathrm{i}\gamma) \tag{C.4}$$

$$\gamma=\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \tag{C.5}$$

$$\beta_1=-\frac{\mathrm{i}kx}{z},\quad \beta_2=-\frac{\mathrm{i}ky}{z}$$

又由积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x^2+\beta x}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \tag{C.6}$$

可得

$$u(x,y,z)\approx\frac{a}{(1+\mathrm{i}\gamma)}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi} \tag{C.7}$$

式中

$$w(z)=w_0(1+\gamma^2)^{1/2}=w_0\left(1+\frac{\lambda^2z^2}{\pi^2w_0^4}\right)^{1/2} \tag{C.8}$$

及

$$\Phi=kz+\frac{k}{2z}(x^2+y^2)-\frac{k(x^2+y^2)}{2z(1+\gamma^2)}=kz+\frac{k}{2R(z)}(x^2+y^2) \tag{C.9}$$

式中

$$R(z)\overset{\text{def}}{=\!=}z\left(1+\frac{1}{\gamma^2}\right)=z\left(1+\frac{\pi^2w_0^4}{\lambda_2z^2}\right) \tag{C.10}$$

附录D 平板波导的TE模式与TM模式

在本附录中，将推导作为模式分析起点的一些方程。由麦克斯韦方程组出发。当媒质具有各项同性的、线性的、非导电的和非铁磁的特性时，麦克斯韦方程组具有以下形式

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\mathrm{i}\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{D.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = -\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 n^2 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{D.2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 \tag{D.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{D.4}$$

其中用到了本构关系式

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{D.5}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 n^2 \boldsymbol{E} \tag{D.6}$$

式中 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分别表示电场矢量、电位移矢量、磁感应强度矢量和磁场强度矢量，μ_0（$=4\pi\times10^{-7}\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}^2/\mathrm{C}^2$）表示自由空间的磁导率，$\varepsilon$（$=\varepsilon_0 n^2$）表示媒质的介电常数，$n$ 为媒质折射率，ε_0 为自由空间的介电常数。如果折射率只在 x 方向有变化，即

$$n^2 = n^2(x) \tag{D.7}$$

选 z 轴为波的传播方向，不失一般性，可以将式(D.1)和式(D.2)的解写为

$$\mathscr{E} = \boldsymbol{E}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta z)} \tag{D.8}$$

$$\mathscr{H} = \boldsymbol{H}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta z)} \tag{D.9}$$

式中 β 被称为传播常数。式(D.8)和式(D.9)定义了系统的模式，因此，模式表示了光场的横向分布，光波模式在波导中沿 z 方向传输时，改变的只是相位，而由 $\boldsymbol{E}(x)$ 和 $\boldsymbol{H}(x)$ 所描述的光场横向分布在波导传输过程中并不改变。β 表示模式的传播常数。将式(D.8)和式(D.9)用分量形式写为

$$\mathscr{E}_j = E_j(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta z)}, \quad j = x,y,z \tag{D.10}$$

$$\mathscr{H}_j = H_j(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta z)}, \quad j = x,y,z \tag{D.11}$$

将上面电场与磁场的表示式代入式(D.1)和式(D.2)，并求出其 x,y,z 分量

$$\mathrm{i}\beta E_y = -\mathrm{i}\omega\mu_0 H_x \tag{D.12}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mathrm{i}\omega\mu_0 H_z \tag{D.13}$$

$$-\mathrm{i}\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \mathrm{i}\omega\varepsilon_0 n^2(x) E_y \tag{D.14}$$

$$\mathrm{i}\beta H_y = \mathrm{i}\omega\varepsilon_0 n^2(x) E_x \tag{D.15}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \mathrm{i}\omega\varepsilon_0 n^2(x) E_z \tag{D.16}$$

$$-\mathrm{i}\beta E_x-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\mathrm{i}\omega\mu_0 H_y \tag{D.17}$$

可以看出,式(D.12)～式(D.14)为只包含 E_y,H_x 和 H_z 的显式,式(D.15)～式(D.17)为只包含 E_x,E_z 和 H_y 的显式。因此,对于这样的波导结构,麦克斯韦方程组可简化成两组相互独立的方程组。第一组包含 E_y,H_x 和 H_z 而不包含 E_x,E_z 和 H_y 的方程,将给出所谓的 TE 模式,因为其电场只有横向分量;而第二组包含 E_x,E_z 和 H_y 而不包含 E_y,H_x 和 H_z 的方程给出了所谓的 TM 模式,因为此时磁场只有横向分量。因此,在这样的平面波导中,传播的光波可通过 TE 模式和 TM 模式来描述。

TE 模式

首先考察 TE 模式。将式(D.12)和式(D.13)中的 H_x 和 H_z 代入式(D.14),可得

$$\frac{\mathrm{d}^2E_y}{\mathrm{d}x^2}+[k_0^2n^2(x)-\beta^2]E_y=0 \tag{D.18}$$

式中

$$k_0=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}=\frac{\omega}{c} \tag{D.19}$$

为自由空间的波数,$c\left(=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\right)$为自由空间中的光速。对于一个给定变化规律的折射率 $n^2(x)$,式(D.18)(在适当的边界条件和连续性条件下)将给出相应于波导 TE 模式的场变化包络。既然 E_y 对于波导来说是切向分量,因此,在分界面处应该连续,进而由 $\mathrm{d}E_y/\mathrm{d}x$ 正比于 H_z(它也是切向分量),也应该在分界面处连续。一旦得到 $E_y(x)$的解,则可以由式(D.12)和式(D.13)分别求得 $H_x(x)$和 $H_z(x)$的解。在 28.2 节和 28.4 节中分别对一个折射率是对称阶跃型分布,以及对一个折射率是抛物线型分布的波导求解式(D.18)。

TM 模式

TM 模式的特征是只有场分量 E_x,E_z 和 H_y(见式(D.15)和式(D.16))。如果将式(D.15)和式(D.16)中的 E_x 和 E_z 代入式(D.17),可得

$$n^2(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{n^2(x)}\frac{\mathrm{d}H_y}{\mathrm{d}x}\right]+[k_0^2n^2(x)-\beta^2]H_y(x)=0 \tag{D.20}$$

式(D.20)与 TE 模式中 E_y 满足的方程有所不同(见式(D.18))。则如图 28.1 所示的阶跃型折射率波导,在每个区域内折射率为常数。则有

$$\frac{\mathrm{d}^2H_y}{\mathrm{d}x^2}+(k_0^2n_i^2-\beta^2)H_y(x)=0 \tag{D.21}$$

则在每个分界面处

$$H_y \quad 和 \quad \frac{1}{n^2(x)}\frac{\mathrm{d}H_y}{\mathrm{d}x} \tag{D.22}$$

必须连续,这是源于 $H_y(x)$是波导的切向分量,在界面处应该连续。进而,又由 $\dfrac{1}{n^2(x)}\dfrac{\mathrm{d}H_y}{\mathrm{d}x}$ 正比于 E_z(波导的切向分量),在任何界面处也应该连续。

清华大学出版社数字出版网站
WQBook 书文局泉
www.wqbook.com

Mc Graw Hill Education
http://www.mheducation.com

ISBN 978-7-302-33948-9
9 787302 339489 >
定价：98.00元