

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

国家级精品资源共享课主讲教材

OPTICS

光 学（第三版）

郭永康 主 编

朱建华 副主编

高等教育出版社



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材
国家级精品资源共享课主讲教材

OPTICS
光 学（第三版）

郭永康 主 编
朱建华 副主编
郭永康 朱建华 王 磊 张怡霄 编著

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是在“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材《光学》(第二版)的基础上修订而成的，主要包括几何光学和波动光学的内容。本书系统透彻地介绍了光学的基本概念、规律、原理、分析方法及重要应用。全书在精选传统内容的基础上，适度引入了一些与传统内容密切结合的反映现代光学新成就的内容。每章末编有精选的思考题、习题和模拟计算题。

本书按照新形态教材的要求，将纸质版和网络新媒体教学资源有机结合，在纸质版教材中新增了46个视频动画资源的二维码，在课程网站中新增加了一些视频动画和新的拓展阅读资料。

本书概念准确，物理图像清晰，取材新颖，逻辑体系严谨，数学运算简洁，适用性强，既可作为高等学校物理类专业的教材，也可作为理工科相关专业的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

光学/郭永康主编．--3版．--北京：高等教育出版社，2017.8

ISBN 978-7-04-048366-6

Ⅰ.①光… Ⅱ.①郭… Ⅲ.①光学-高等学校-教材 Ⅳ.①O43

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第198048号

Guang xue

策划编辑 高聚平	责任编辑 高聚平	封面设计 张 楠	版式设计 张 杰
插图绘制 杜晓丹	责任校对 刘春萍	责任印制 赵义民	

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印 刷	三河市潮河印业有限公司		http://www.hepmall.com
开 本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印 张	22.5		
字 数	540千字	版 次	2005年12月第1版
插 页	1		2017年8月第3版
购书热线	010-58581118	印 次	2017年8月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	42.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 48366-00

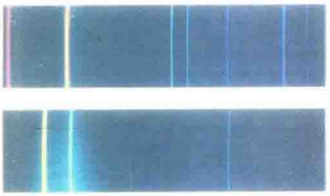


(a)　　(b)

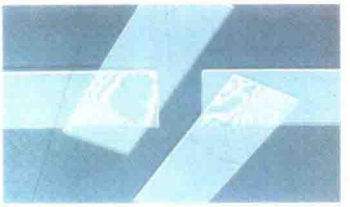
▲图 1　(a) 彩虹;(b) 白光经棱镜的色散



◀图 2　光栅产生的 H、He、Hg 的光谱



▶图 3　(a) 玻璃片间的空气薄膜产生的彩色干涉条纹;(b) 彩色牛顿环

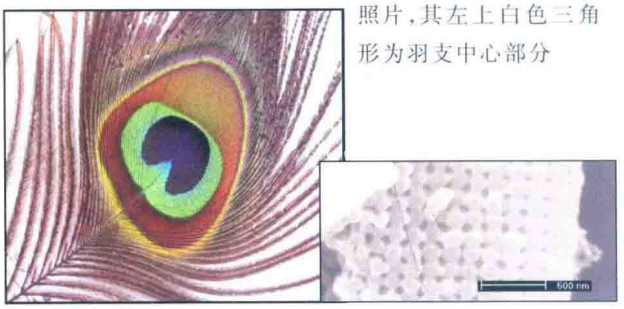


(a)

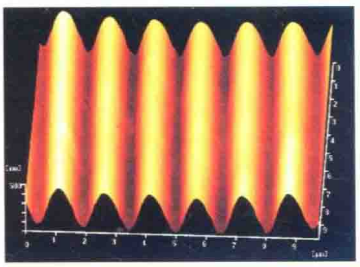


(b)

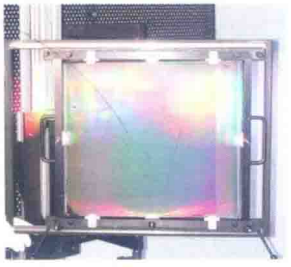
▼图 4　孔雀羽毛的黄、褐、绿、蓝四色形成“眼”。右下为绿色区域的羽支横截面上的 nm 尺度周期结构的显微照片,其左上白色三角形为羽支中心部分

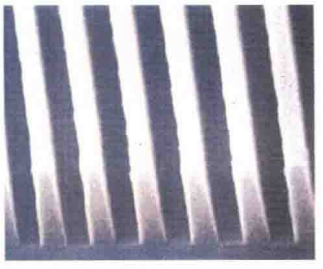


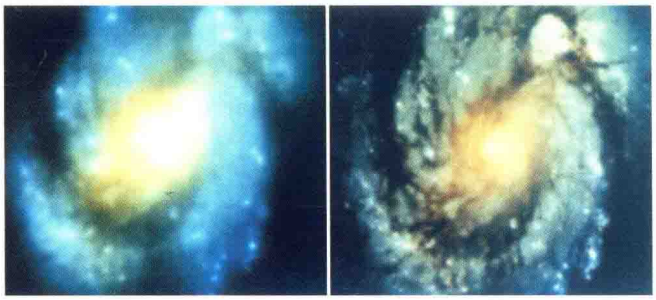
▼图 5　用原子力显微镜获得的正弦相位光栅的浮雕轮廓



▼图 6　大口径全息光栅及其沟槽的部分显微照片

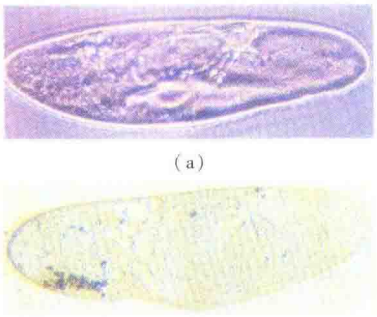






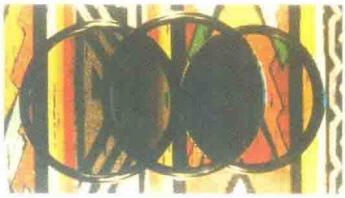
(a)　　(b)

◀图 7　地面望远镜所拍摄的星系照片[图(a)]和哈勃太空望远镜拍摄的同一星系的照片[图(b)],后者具有更多的细节

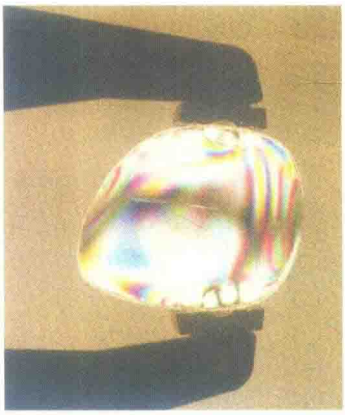


(a)　　(b)

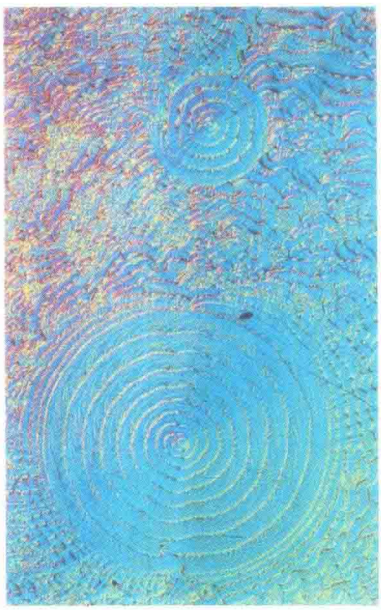
▲图 8　(a) 在普通显微镜下看到的没有染色的草履虫的像;(b) 用相衬显微镜观察同样的物体可得到更高的对比度



▶图 9　一个偏振片放在另两个偏振片上,居中者的透振轴分别与左右二者的正交和平行

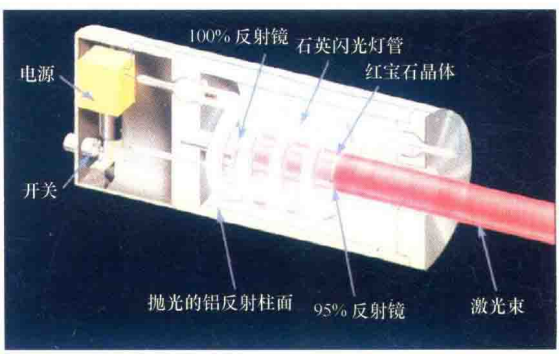


▶图 10　塑料透镜在压力作用下产生的光弹效应



◀图 11　旋光物质在偏光显微镜下可产生绚丽的色彩和高对比度。图中显示的是超导陶瓷的照片

▼图 12　第一台红宝石激光器



光 学（第三版）
数字课程

郭永康

高等教育理工易课程网

易课程 course

与本书配套的数字课程资源发布在高等教育出版社易课程网站，请登录网站后开始课程学习。

一、网站登录

1. 注册 / 登录

访问 http://abook.hep.com.cn/，点击“ 注册 ”。在注册页面输入用户名、密码及常用的邮箱进行注册。已注册的用户直接输入用户名和密码登录即可进入“ 我的课程 ”界面。

2. 课程绑定

点击“ 我的课程 ”页面右上方“ 绑定课程 ”，正确输入教材封底防伪标签上的 20 位密码，点击“ 确定 ”完成课程绑定。

3. 访问课程

在“ 正在学习 ”列表中选定已经绑定的课程，点击“ 进入课程 ”即可浏览与本书配套的课程资源。刚绑定的课程请在“ 申请学习 ”列表中选择相应课程并点击“ 进入课程 ”。

账号自登录之日起一年内有效，过期作废。如有账号问题，请发邮件至：abook@hep.com.cn。



第三版前言

本书作者多年以来主讲四川大学物理科学与技术学院本科生的光学课程. 该课程于 1989 年获首届国家级优秀教学成果奖,2009 年入选国家级精品课程,2013 年又获得国家级精品资源共享课程立项. 本书第一版、第二版分别于 2005 年和 2014 年入选普通高等教育"十五"国家级规划教材和"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材,出版以来被多所高校和研究所选作教材或研究生入学考试指定参考书.

为了适应新形势下教学改革的要求,根据《高等学校物理学本科指导性专业规范》以及《高等学校物理学类专业本科生教学质量国家标准》的要求,参阅了国内外的多部同类的优秀教材,充分考虑了使用过本教材的师生们的宝贵意见,在保留第二版的基本结构和特点的情况下作了如下修订:

1. 对原书各章节作了全面校订. 为了使教材内容更加新颖和充实、物理概念更加准确、文字表述更加流畅和简洁,改编了原书的 § 1.5、§ 3.4、§ 5.6 及第 8 章,修订和新增加了 23 幅插图. 鉴于现代光学发展中涉及更多的光与物质相互作用的问题,通过改编第 8 章及新增" § 5.13 近场光学简介"强化了相关的光学基础.

2. 本书改版后按照新形态教材的要求实现了纸质版和网络新媒体教学资源的有机结合. 纸质版中包含了课程内容、思考题、习题、模拟计算题、习题参考答案等部分,网络资源中包含了课程的教学大纲、教学计划、授课教案、授课录像、演示文稿、拓展资料等内容.

为了满足物理学实验班及其他学有余力的同学深入学习和进一步探讨课程内容的要求,本次修订在纸质版教材中新增了 46 个视频动画资源的二维码,读者可通过扫描二维码或通过封底的密码登录 http://abook.hep.com.cn/观看相关的视频动画. 在爱课程网站(http://www.icourses.cn/coursestatic/course_6043.html)及四川大学课程中心网站(http://cc.scu.edu.cn/G2S/Template/View.aspx? action=view&courseType=0&courseId=19) 增加了与深入研讨教学内容相关的反映现代光学新成就的拓展阅读材料.

在本书修订过程中,杜惊雷、高福华教授,粟敬钦研究员,姚欣博士提出了宝贵意见. 彭杰、郭建、张诚等研究生做了大量技术性的工作. 高等教育出版社高聚平编辑为本书的出版付出了大量心血. 编者谨对他们深表谢意.

编者

2017 年 3 月

第二版前言

本书第一版作为普通高等教育“十五”国家级规划教材自2005年出版以来，为多所高校和科研单位选作教材或研究生入学考试指定参考书. 使用过该书的老师和同学提出了十分宝贵的意见，编者由衷表示感谢.

按照新时期人才培养的要求，根据读者的意见和我们在教学中发现的问题，编者在保留原书的基本结构及内容新颖、概念准确、物理图像清晰、逻辑体系严谨和数学运算简洁等特点的情况下作了如下修订：

1. 基于近年来光学学科的进展，改写了第一版中的§3.6、§6.6、§9.4等若干节；

2. 为了更好地适应不同专业和不同学时数的要求，删减了第一版中用小字排印的§5.11、§5.13、§6.7、§6.8、§6.9和§7.7，并将其中的某些重要物理思想融入了基础内容中；

3. 订正了原书文字和插图中的一些错误和版误.

高等教育出版社的刘伟、高聚平同志为本书的出版付出了大量心血，作者谨深致谢忱.

本书虽经修订，错误和不妥之处在所难免，祈请读者批评指正.

编者

2012年2月

第一版前言

本书的前身《光学教程》(四川大学出版社)自1989年出版以来,为多所高校和科研单位选作教材或研究生入学考试的指定参考书,已重印多次.多年来使用该书的老师和学生提出了许多十分宝贵的意见,本书就是根据这些意见,并汲取近十多年来光学的最新发展和教学研究的新成果,学习和参考了国内外近期出版的光学教材,对原书作了较大的增删和修改而成的.

光学是物理类及相关专业的一门重要基础课.本书以介绍几何光学和波动光学内容为主,力图系统、透彻地讲解光学的基本概念、规律和分析方法及其重要应用,为学生进一步学习和开展研究工作打下坚实的基础.本书在修订过程中保留了原书的基本构架及物理概念准确、图像清晰、取材新颖、逻辑体系严谨、数学运算简洁等风格.

自从20世纪40年代开始,特别是1960年激光的发明,使光学产生了革命性变化,出现了许多新的学科分支,光电子学和光子学的发展使光学已成为现代高新技术的基础,对20世纪人类文明作出了巨大贡献.教学内容的更新是教学改革的永恒主题,本书在精选传统内容的基础上,力图适度反映现代光学特别是近十多年来的某些新成就、新面貌,用现代光学的新观点去重新审视和发展传统内容.为此,本书中增加了以下新内容:偏振梯度场、光学相干层析术、负折射率介质、哈勃空间望远镜、计算全息和数字全息、光的吸收和散射在环境监测中的应用、激光冷却原子、激光核聚变等,它们都是和传统内容密切结合的一些新概念、新现象、新技术.本书作为一本专业基础课教材只能讲授和它们相关的光学基础,而不能涉及更深的理论和技术.作者希望通过这些内容的引入,使读者能从一个新的视角去认识传统内容,并将它们作为了解光学和物理学发展新面貌的"窗口"和进一步学习与研究它们的"接口".

为了适应不同专业和不同学时数的要求,反映现代光学中某些新概念、新面貌的内容的安排和编写有相对的独立性,并标以"*"号,以小字排印,便于任课教师灵活选用.各章末都编有精选的思考题和习题.为了从低年级开始培养学生使用计算机解题的能力,在一些章末增加了少量用计算机进行模拟和计算的习题,可供有条件者选用.

本书由郭永康负责全书的策划和统稿,并编写绪论、第1、2、3、4章;第5、6、8章由朱建华编写;第7、9章由王磊编写;张怡霄选编了全部模拟计算习题,并指导几位学生进行了书稿录入和插图绘制工作.

本书的部分彩图选自College Physics, Paul Pater Urone, 2nd ed., 2001.复旦大学资剑教授提供了彩图4.深圳泛彩溢公司范诚博士为本书赠送了专门设计、制作的精美模压全息图(封三).在本书的编写过程中,电子科技大学王仕璠教授与编者进行了多次讨论,提出了许多宝贵的意见.高等教育出版社的胡凯飞、刘伟同志为本书的出版付出了大量心血,编者谨深致谢忱.由于作者水平有限,书中错误和不妥之处在所难免,祈请读者批评和指正.

编著者于四川大学

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话　(010)58581999　58582371　58582488

反盗版举报传真　(010)82086060

反盗版举报邮箱　dd@ hep. com. cn

通信地址　北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社法律事务与版权管理部

邮政编码　100120

防伪查询说明

用户购书后刮开封底防伪涂层，利用手机微信等软件扫描二维码，会跳转至防伪查询网页，获得所购图书详细信息。也可将防伪二维码下的20位密码按从左到右、从上到下的顺序发送短信至106695881280，免费查询所购图书真伪。

反盗版短信举报

编辑短信"JB，图书名称，出版社，购买地点"发送至10669588128

防伪客服电话

(010)58582300

学习卡账号使用说明

一、注册/登录

访问 http://abook. hep. com. cn/sve，点击"注册"，在注册页面输入用户名、密码及常用的邮箱进行注册。已注册的用户直接输入用户名和密码登录即可进入"我的课程"页面。

二、课程绑定

点击"我的课程"页面右上方"绑定课程"，正确输入教材封底防伪标签上的20位密码，点击"确定"完成课程绑定。

三、访问课程

在"正在学习"列表中选择已绑定的课程，点击"进入课程"即可浏览或下载与本书配套的课程资源。刚绑定的课程请在"申请学习"列表中选择相应课程并点击"进入课程"。如有账号问题，请发邮件至：4a_admin_zz@ pub.hep.cn。

目　录

绪论 …… 1

第一章　几何光学的基本原理 …… 5

§1.1　几何光学的基本定律 …… 5
§1.2　费马原理 …… 11
§1.3　成像的基本概念 …… 15
§1.4　光在平面上的反射和折射 …… 18
§1.5　光导纤维 …… 21
§1.6　棱镜 …… 24
§1.7　光在单球面上的折射和反射 …… 27
§1.8　薄透镜 …… 36
§1.9　共轴球面系统的逐次成像法 …… 40
§1.10　*共轴球面系统傍轴成像的矩阵方法 …… 43
思考题 …… 49
习题 …… 50
模拟计算习题 …… 52

第二章　光阑、像差和成像光学仪器 …… 54

§2.1　光阑 …… 54
§2.2　像差 …… 58
§2.3　人眼的光学系统 …… 62
§2.4　放大镜和目镜 …… 65
§2.5　显微镜 …… 68
§2.6　望远镜 …… 69
思考题 …… 72
习题 …… 73

第三章　光波及其在各向同性介质界面的反射和折射 …… 75

§3.1　光波 …… 75

§3.2 光波场的数学描述 …… 77
§3.3 波函数的复数表示 复振幅 …… 84
§3.4 光波的偏振态 …… 86
§3.5 光在各向同性介质界面的反射和折射 …… 91
*§3.6 负折射率介质 …… 101
思考题 …… 103
习题 …… 104

第四章 光的干涉 …… 107

§4.1 波的叠加和干涉 …… 107
§4.2 光波相干的条件和产生方法 …… 109
§4.3 杨氏实验 …… 110
§4.4 其他几种两光束分波前干涉装置 …… 115
§4.5 两束平行光的干涉 …… 118
§4.6 光源的光谱展宽对干涉条纹可见度的影响 光场的时间相干性 …… 120
§4.7 光源的空间展宽对干涉条纹可见度的影响 光场的空间相干性 部分相干性 …… 125
§4.8 薄膜干涉(一):等倾干涉 …… 130
§4.9 薄膜干涉(二):等厚干涉 …… 136
§4.10 薄膜干涉(三):应用举例 …… 142
§4.11 迈克耳孙干涉仪 …… 145
*§4.12 傅里叶变换光谱仪 光学相干层析术 …… 148
§4.13 多光束干涉 …… 150
§4.14 法布里-珀罗干涉仪 …… 155
思考题 …… 161
习题 …… 162
模拟计算习题 …… 165

第五章 光的衍射 …… 170

§5.1 光的衍射现象 …… 170
§5.2 惠更斯-菲涅耳原理 …… 173
§5.3 狭缝和矩孔的夫琅禾费衍射 …… 176
§5.4 圆孔、圆环和多边形孔的夫琅禾费衍射 …… 181
§5.5 互补屏 巴比涅原理 …… 183
§5.6 成像仪器的像分辨率 …… 183
§5.7 振幅型平面透射光栅 …… 189
§5.8 光栅光谱仪的特性 …… 193
§5.9 正弦型振幅光栅 …… 196

§5.10　闪耀光栅 …… 197
§5.11　菲涅耳衍射 …… 199
§5.12　波带片 …… 206
§5.13　近场光学简介 …… 212
思考题 …… 215
习题 …… 216
模拟计算习题 …… 218

第六章　光信息处理及全息术 …… 221

§6.1　傅里叶变换 …… 221
§6.2　衍射理论中的傅里叶方法 …… 225
§6.3　理想薄透镜的傅里叶变换作用 …… 231
§6.4　阿贝成像原理 …… 234
§6.5　空间频率滤波 …… 236
§6.6　光全息术 …… 240
思考题 …… 246
习题 …… 247
模拟计算习题 …… 247

第七章　光在晶体中的传播 …… 250

§7.1　晶体的双折射和双反射 …… 250
§7.2　产生线偏振光的元件 …… 257
§7.3　相位延迟器 …… 260
§7.4　偏振光通过波晶片后偏振态的变化 …… 264
§7.5　偏振光的干涉 …… 268
§7.6　旋光及圆二色性 …… 275
§7.7　光调制器 …… 279
*§7.8　偏振态及其变换的矩阵描述 …… 284
思考题 …… 289
习题 …… 290

第八章　光的吸收、色散和散射 …… 294

§8.1　光的吸收 …… 294
§8.2　光的色散 …… 298
§8.3　光的相速和群速 …… 304
§8.4　光的散射 …… 306

*§ 8.5 光的吸收及散射在环境监测中的应用 …… 314
思考题 …… 318
习题 …… 318
模拟计算习题 …… 319

第九章 激光与非线性光学 …… 320

§ 9.1 光与原子系统的相互作用 …… 320
§ 9.2 激光的原理 …… 323
§ 9.3 激光器 …… 328
§ 9.4 激光的应用 …… 331
§ 9.5 光学倍频和混频效应 …… 333
§ 9.6 光学相位共轭 …… 336
思考题 …… 338
习题 …… 338

习题参考答案 …… 339

拓展阅读资料 …… 342

视频二维码 …… 343

绪　论

一、光学研究的内容

光学是物理学的重要组成部分，它研究的内容包括光的产生、传播、操控、检测，以及光和物质相互作用的物理规律及其应用.

麦克斯韦电磁理论认为，光是一种电磁波. 在真空中，可见光的波长范围约在 390～760 nm 之间. 各种色视觉对应的波长和频率范围见下表：

色视觉	频率/Hz	真空中波长/nm
红	$(3.9\sim4.8)\times10^{14}$	760～630
橙	$(4.8\sim5.0)\times10^{14}$	630～600
黄	$(5.0\sim5.3)\times10^{14}$	600～570
绿	$(5.3\sim6.0)\times10^{14}$	570～500
青	$(6.0\sim6.7)\times10^{14}$	500～450
蓝	$(6.7\sim7.0)\times10^{14}$	450～430
紫	$(7.0\sim7.7)\times10^{14}$	430～390

从量子观点看，光场是由一个个光子组成的. 光子是光的最小单位，每个光子的能量 ε 和它的频率 ν 之间的关系为

$$\varepsilon = h\nu$$

式中 h 是**普朗克常量**，其数值为

$$h = 6.626\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$$

光子也具有动量 p，它的方向为光子的运动方向（即光的传播方向），其值为

$$p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

式中 c 为真空中的光速，1983 年第十七届国际计量大会通过其值为

$$c = 299\ 792\ 458\ \mathrm{m/s}$$

光既有波动性也有粒子性，即具有波粒二象性. 普朗克常量非常小，一个光子的能量也非常小. 一般情况下我们遇到的都是极大数量的光子，明显表现出波动性. 只有在光极其弱的情况下，以及光和物质相互作用的某些特殊情况下，其量子特性才会明显地表现出来. 所以光的波动性和粒子性分别都只是光的本性的近似描述和模型.

在基础光学中，通常对不同的现象采用不同的模型去描述. 根据所采用模型的不同，光学一般分为**几何光学**和**物理光学**两部分，后者又分为**波动光学**和**量子光学**. 几何光学以光的直线传播

性质为基础,根据实验总结的几个基本定律研究光线在透明介质中的传播问题. 波动光学以光的波动性为基础,研究光的传播、光和物质相互作用的规律. 但是,光的发射以及光和物质相互作用的某些问题,必须用量子理论才能较圆满地解释. 光的严格理论是量子电动力学.

二、光学发展史简述

我们生活的这个世界充满了光,它给人类带来热和光明,是人类赖以生存的重要条件. 光不仅是能量的载体,而且也是信息的载体. 携带有物体信息的光波进入人眼后,为视网膜上的视神经细胞所接收,对信息作初步处理后,再传给大脑作进一步处理,我们才能感觉到周围世界的五彩缤纷和斑驳陆离. 由于光和人们的各种生活、生产活动息息相关,因此光学和力学一样是物理学中发展最早的一部分. 关于光的几何性质较为系统的最早记载,见于公元前 400 多年先秦时代的《墨经》[①]中. 古希腊数学家欧几里得(约公元前 330—前 275 年)也曾注意到光的传播的直线性,在其著作中记录了反射角等于入射角,但比《墨经》晚 100 多年. 由于光的物理本性不容易被认识,古代对光的研究基本上停留在现象的描述与简单规律的总结. 人们对光的本性的认识经历了漫长的过程,直到 17 世纪中叶才开始了对它的认真探讨,当时存在着以牛顿为代表的微粒说和以惠更斯为代表的波动说的争论.

笛卡儿(1596—1690)最早对光的微粒模型作了研究,他把光比作小球来解释光的反射定律和折射定律. 牛顿(1643—1727)不仅对力学、数学、天文学的发展作出了巨大贡献,在光学领域也取得了重要成就. 他发展了笛卡儿的模型,提出了光是微粒流的理论,但是,正是牛顿做了一些光具有波动性的著名实验(如著名的三棱镜色散实验,1666 年),仔细研究了后来称为牛顿环的薄膜干涉、衍射(当时称为拐折)、偏振现象. 他的这些工作总结在《光学》(1704 年)[②]一书中. 牛顿的研究工作既涉及光的微粒性又涉及波动性,他在光的本性问题上犹豫了很久. 微粒说可以解释光的直线传播、反射和折射定律,而波动说当时还不能解释光的直线传播及光的偏振现象,所以牛顿最后倾向于微粒说.

大约与牛顿倡导微粒说的同时,惠更斯(1629—1695)等人则主张波动说. 惠更斯认为光是"以太"中传播的波. 利用惠更斯原理可以解释光的反射和折射定律、双折射现象. 然而惠更斯的波动说很不完善,他错误地把光看做像声波一样的纵波,又由于牛顿在力学上伟大成就的影响,所以当时虽然存在着两种学说的争论,但在相当长的一段时间内微粒说占着统治地位,这使得整个 18 世纪人们对光的本性的认识几乎未取得进展.

19 世纪是波动说的全盛时期. 1801 年杨氏演示了著名的双孔干涉实验,并用波动理论做了很好的解释,初步测定了光波波长,使光的波动说重新兴起. 菲涅耳(1788—1827)等人的大量实验和理论工作合理地解释了光的干涉、衍射、偏振现象,为波动光学奠定了基础. 根据波动说,光在光疏介质中的速度应大于光密介质中的速度,而根据微粒说则得出相反的结果[③]. 1850 年傅科测得光在水中的速度比在空气中小,证明了波动说所得出的结论的正确性. 遗憾的是,这只是一个迟到的判决. 但无论惠更斯还是菲涅耳,他们都把光波看成弹性介质中的机械波.

1845 年法拉第(1791—1867)发现了光波振动面的磁致旋转,建立了光与电磁现象之间的联

---

① 钱临照. 论墨经中关于形学、力学和光学的知识[J]. 物理通报,1951,1(3).

② 参阅中译文,周岳明等译. 合肥:中国科学技术出版社,1987.

③ 钟锡华. 现代光学基础[M]. 北京:北京大学出版社,2003:2-3.

系. 麦克斯韦(1831—1879)在总结安培、韦伯、法拉第等人对电磁现象研究成果的基础上,于1865年在英国皇家学会上发表《电磁场的动力学理论》一文,提出了麦克斯韦方程组,概括了电磁场的基本性质和规律,建立了完整的经典电磁场理论体系,建立了电磁理论. 根据麦克斯韦的理论,电磁波在真空中的传播速度为 $c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$,式中 ε_0、μ_0 为真空中的介电常量和磁导率. 为了得出 c 的值,麦克斯韦利用韦伯和柯耳劳斯等在1856年通过实验所测得的结果 $\varepsilon_0\mu_0\approx 11.12\times 10^{-18}\,s^2/m^2$,得出 $c\approx 3\times 10^8$ m/s. 这个值与菲索1849年用旋转齿轮法测得的光速值 $c=3.133\times 10^8$ m/s 相当符合,由此麦克斯韦指出光是一种电磁波. 1888年赫兹用一系列实验证实了麦克斯韦的假设,于是产生了光的电磁理论. 19世纪末以光的电磁理论为基础建立了经典光学,并推动了整个物理学的发展. 尽管在20世纪光学已经有了很大发展,但是电磁理论仍然是处理经典光学及近代光学中大量问题的理论基础.

光波既然是横波,似乎必须承认一种传播横波的介质——"以太"的存在. 为了解释光波的传播速度很大,还必须赋予以太一些不可思议的矛盾的属性:密度极小而弹性模量极大. 光的电磁理论的建立,用"电磁以太"代替了"机械以太". 1887年迈克耳孙和莫雷利用迈克耳孙干涉仪试图探测地球在"以太"中的绝对运动,然而他们却得到了零结果,从而动摇了作为光波载体的"以太"假说,以静止以太为背景的绝对时空观遇到了根本困难. 1905年爱因斯坦建立了狭义相对论,在这个理论中,他也独立地否定了以太的假说. 这些结果表明电磁波能够通过自由空间传播,电磁场本身就是一种物理实在.

20世纪是光学大发展的一百年. 19世纪末至20世纪初,光学已深入研究光的发射、光和物质相互作用的微观机理. 为了解释光和物质相互作用的某些现象,光的电磁理论遇到了困难. 为了解释黑体辐射能量按波长的分布公式,1900年普朗克(1858—1947)提出了量子论. 1905年爱因斯坦(1879—1955)发展了普朗克的量子论,提出了光量子的假说,对光电效应的规律作了解释和预言. 1927年康普顿散射实验进一步证明了爱因斯坦理论的正确性. 量子论和光子学说的提出是人们对光的本性认识的又一次飞跃,它标志着近代光学的诞生.

光的干涉、衍射、偏振表明光的波动性,光电效应等表明光的粒子性,即光具有波粒二象性. 1924年德布罗意指出波粒二象性是微观粒子的普遍属性. 20世纪30年代发展起来的量子电动力学认为光子是电磁波能量和动量的量子化,电磁波振幅的平方表示光子出现的概率,即电磁波是光子的概率波,从而将光的波粒二象性很好地统一起来.

自20世纪中叶开始,光学研究的观念、方法、技术和设备条件等方面都产生了一系列重大突破,1935年泽尼克提出了相衬原理,1948年伽柏发明全息术,50年代通信理论和光学的结合,产生了傅里叶光学,为光学信息处理的理论和技术奠定了基础. 90年代迅速发展的分数傅里叶光学是傅里叶光学的发展和延拓,为光学信息处理开辟了更广的领域.

1960年第一台红宝石激光器的发明是光学发展史的一个新里程碑,它是20世纪继原子能、半导体、计算机之后的又一重大发明. 计算机延伸了人的大脑,而激光延伸了人的感官,成为探索大自然奥秘的"超级探针". 激光的发明及其应用使沉睡多时的光学产生了革命性变化,使光学面貌焕然一新,它标志着从20世纪中叶开始萌芽的现代光学的兴起.

激光是相干性好、方向性强、亮度高的新型光源,特别是相干性,是其区别于普通光源的重要特性. 激光打破了普通光源的局限,已广泛应用于激光通信、激光分离同位素、激光核聚变、激光冷却、激光加工、激光医疗、激光育种、激光照排和打印等领域.

在激光作用下，人们观察到许多新现象，加深了对物质及其运动规律的认识，推动了物理学、化学、生物学及光学自身的发展，一些分支学科和交叉学科如雨后春笋般诞生，例如非线性光学、导波光学、集成光学、激光光谱学、二元光学、瞬态光学、量子光学、原子光学、激光物理、激光化学、激光生物学等. 大量分支和交叉学科的涌现是20世纪现代光学发展的重要标志.

电子学和光学以及材料科学的结合产生了光电子学这个具有深远意义的交叉学科. 多种类型的高灵敏度、高性能的光电子器件如光电二极管、半导体激光器、电荷耦合器件、光电传感器、红外探测器等的研制成功，使光电子器件和光电子技术已成为高新技术的基础，并推动着传统光学仪器的光机电一体化、智能化，使其产生划时代变化.

20世纪70年代以后，由于半导体激光器和光纤技术的重大突破，促进了以光纤通信为代表的光信息技术的蓬勃发展，并形成光子学这门新的分支学科. 光子学的研究内容是作为信息载体和能量载体的光子的产生、传输、控制和探测以及光子和光子、光子和电子相互作用的规律. 20世纪90年代光纤通信和计算机技术的结合发展了互联网，它是信息技术发展过程中的“革命性”转折，光纤通信技术在传输速率和容量方面的快速增长，支撑和满足了呈指数增长的互联网通信的持续发展. 比起历史上铁路、电力、汽车的发明，其影响更加空前，使人类从此开始进入信息时代. 应用光子学技术可使基准时钟稳定性确保在1亿年以上的周期内误差低于1秒. 精准的基钟时针为全球定位系统(GPS)提供了难以置信的广泛应用.

光学作为一门学科诞生已有340年. 现代光学和光子学的应用已涵盖工业、农业、科技、国防和人民生活的各个领域. 光学的发展史是人类对光的本性不断探索、不断深入认识的过程中闪烁着非凡智慧和创造力的历史，也是对物理学及其他学科的发展、社会进步和人类文明作出巨大贡献的历史. 20世纪光学和光子学的巨大成就，将在新的世纪发出更加灿烂的光辉.

第一章　几何光学的基本原理

几何光学是光学中发展最早的一部分，它所研究的中心问题是物体经光学系统成像的问题. 在几何光学中，撇开光的本性，不考虑光和物质的相互作用，只是以光线的概念为基础，根据实验观测总结所得到的几个基本定律，通过三角计算、矩阵运算或几何作图法来讨论物体经光学系统的成像规律.

本章中将首先介绍几何光学的基本定律及描述光线传播行为的基本原理——费马原理，然后讨论有关成像的基本概念，平面、球面、薄透镜以及共轴球面系统的傍轴成像理论.

§1.1　几何光学的基本定律

1.1.1　光源和光线

从物理学的观点来看，凡自身能发光的物体都可以叫做**光源**. 自 1879 年爱迪生发明白炽灯以来，用于照明的电光源，按照发光原理可分为热辐射、气体放电、固体发光三类. 它们的发展过程经历了热辐射光源（如白炽灯、碘钨灯），低压气体放电光源（如荧光灯、水银灯），高压气体放电光源（如高压钠灯、高压金卤灯），固体发光光源（如半导体发光二极管，简称 LED）四代. 第四代的发光二极管，从根本上改变了光源发光的机理，从而具有光效高、发光均匀、光色全、寿命长、环保、尺寸小等优点，能应用在各种彩色和白色照明领域，是电光源发展的一次全新重大突破. 光源不仅用来照明，为了科学研究的需要，人们常使用各种类型的特殊光源，例如各种电弧和放电管. 1960 年问世的激光器则是一种与过去所有的光源性质不同的相干光源. 紧接激光器之后，同年又出现了同步辐射光源.

在几何光学中，我们把凡是发出光线的物体，不论它本身是发光体或是因为被照明而漫反射光的物体，都称为光源. 如果某光源可看成几何光学上的点，它只占有空间位置而无体积和线度，则称为**点光源**. 自然界中并不存在真正的点光源，与力学中的质点一样，它只是为了讨论问题方便而引入的一个抽象概念. 但是，只要一个光源的线度与它所发射光能的作用距离相比可以忽略时，就可把它看作是点光源. 例如体积超过太阳系的恒星，由于它到地球的距离比它自身的线度大得多，故地球上的观察者就可把恒星看做点光源.

光线是表示光能传播方向的几何线. 有一定关系的一些光线的集合称为**光束**. 若在光束传播的路径中放入一个孔径可变的圆孔光阑，就可从光束中分离出狭窄的光束. 但由于衍射的存在（见 §5.1），当进一步缩小孔径时，光束不仅不会缩小，反而会扩大. 不过当光的波长趋于零时，这些衍射效应也趋于零. 所以光线和点光源一样，也是一个抽象的概念，它只不过是实际光束在光

的波长 $\lambda \to 0$ 的极限情况下光能流的传播方向. 然而引入点光源和光线的概念以后,却可以用几何方法来讨论系统的成像规律,这就可使问题大为简化. 而且一般光学仪器的通光孔径都比光的波长大得多,衍射效应通常并不明显,由几何光学所得的结果与实际情况符合得相当好,所以几何光学有着重要的实际意义,它是光学仪器设计理论的基础. 当然,以后将见到,对于像的一些精细问题(例如光学仪器的分辨本领)的研究,须用波动理论才能解决.

1.1.2　几何光学的基本定律

大量事实总结出来的几何光学三个基本定律,指出了在不考虑衍射情况下光传播所遵循的规律,它们是光学系统成像理论的基础,以下分别讲述.

1. 光的直线传播定律:**光在均匀介质中沿直线传播**

点光源照明不透明物体时生成阴影(图 1.1-1)是光在均匀介质中沿直线传播的极好例证. 根据光的直线传播定律,容易解释日食、月食等现象. 但是必须注意,光只有在均匀介质中才沿直线传播,在非均匀介质中,光线将发生弯曲. 例如来自太阳的光线穿过地球大气层时,由于大气层密度不均匀,光线发生了弯曲,所以当太阳实际已落到地平线之下时,我们仍然能看见它(图 1.1-2).

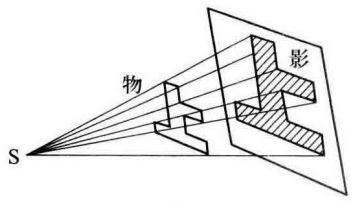


图 1.1-1　影的形成

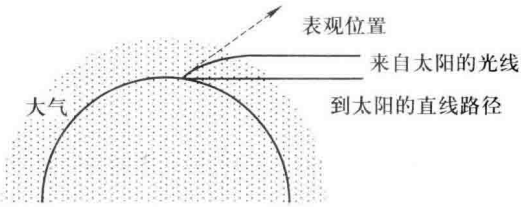


图 1.1-2　太阳光通过大气层时发生弯曲

2. 光的反射定律:如图 1.1-3 所示,当一束光射到两种透明介质的光滑界面上时,一部分光从界面上反射形成反射线,入射线与其入射点处界面的法线所构成的平面称为入射面,法线与入射线和反射线所构成的夹角 i_1 和 i_1' 分别称为入射角和反射角. 实验表明,反射线的方向遵守反射定律:

(1) **反射线在入射面内,并和入射线分别在法线的两侧;**

(2) **反射角等于入射角,即**

$$i_1 = i_1' \tag{1.1-1}$$

若反射界面凹凸不平的线度大于入射光波长时,则不会产生单向反射而会形成漫反射. 例如,在暗室里让一束平行光线投射在一张白纸上,这时从各个方向都能看见这张被照亮的白纸,说明投射到纸上的光线是朝着各个方向反射出去的. 而且反射界面的线度必须远大于入射光波长,否则入射光束将在界面上产生明显的衍射或散射效应.

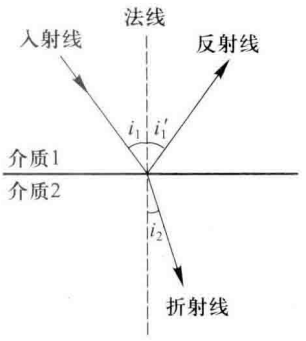


图 1.1-3　光的反射和折射

3. 光的折射定律:1621 年,斯涅耳(W.Snell)从实验上发现了折射定律. 在图 1.1-3 中,入射光线除了一部分反射外,其余部分将进入第 2 介质形成折射线,在界面光滑且界面线度大于光波长的情况下,它的方向遵守折射定律:

(1) **折射线在入射面内，并且和入射线分别在法线的两侧；**

(2) **对于单色光而言，入射角 i_1 的正弦与折射角 i_2 的正弦之比是一个常数，即**

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2}=n_{21} \tag{1.1-2}$$

比例常数 n_{21} 决定于入射光的波长和界面两侧介质的性质，与入射角无关，称为第 2 介质对第 1 介质的相对折射率. 若第 1 介质为真空，上式可写为

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2}=n_2 \tag{1.1-3}$$

式中 n_2 为第 2 介质对真空的相对折射率，称为介质的**绝对折射率**，简称折射率. 通常介质对于空气的相对折射率与其绝对折射率相差甚小，故实际上常常不加区分.

1.1.3 折射率

折射率是表征介质光学性质的重要参量，它决定于光波在介质中的传播速度. 如图 1.1-4 所示，设入射光是一束平行光，经界面折射后，平行光束的方向产生了偏折. 按照振动与波中讲过的惠更斯原理，入射波面 OQ 上各点都可以看作是新的次波源，当 Q 点发出的次波在第 1 介质中经时间 t 传到 Q' 点时，O 点发出的次波在相同时间 t 内在第 2 介质中传到了 O' 点，$O'Q'$ 即为折射波面. 若用 v_1、v_2 分别表示光波在第 1、2 介质中的传播速度，则

$$QQ'=v_1t, \quad OO'=v_2t$$

由 $\triangle OQQ'$ 和 $\triangle OO'Q'$ 可知，

$$\sin i_1=\frac{QQ'}{OQ'}, \quad \sin i_2=\frac{OO'}{OQ'}$$

两式相除并代入(1.1-2)式得

$$n_{21}=\frac{v_1}{v_2} \tag{1.1-4}$$

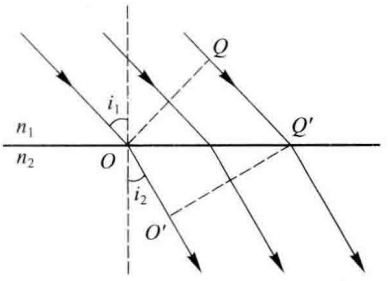


图 1.1-4 平行光的折射

即是说，第 2 介质对第 1 介质的相对折射率，等于光波在第 1 介质与第 2 介质中传播的相速度之比. 如果光线是从真空射到某种介质里，它在真空中的传播速度为 c(其值约为 3×10^8 m/s)，在介质中的传播速度为 v，则该种介质的绝对折射率

$$n=\frac{c}{v}$$

因此介质的折射率是光通过介质时在该介质中速度减小程度的量度，图 1.1-4 中第 1 和第 2 介质的绝对折射率分别为

$$n_1=\frac{c_1}{v_1}, \quad n_2=\frac{c_2}{v_2}$$

于是可得

$$n_{21}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{n_2}{n_1} \tag{1.1-5}$$

即第 2 介质对第 1 介质的相对折射率等于第 2 介质的绝对折射率与第 1 介质的绝对折射率之比. 若将 1、2 两种介质互换，由上式不难看出第 1 介质对第 2 介质的相对折射率与第 2 介质对第 1 介质的相对折射率互为倒数，即 $n_{21}=1/n_{12}$.

两种介质相比较，折射率较大者，光波在其中传播速度较慢，称为**光密介质**；反之则称为**光疏介质**.

我们已知，在同一介质中，不同波长的光传播速度不同，即介质折射率的大小是与入射光波长有关的. 当不同波长的光线以相同方向入射时，它们将有不同的折射方向. 若入射光为一束白光，折射光线将分散开而形成一连续光谱（图 1.1-5）. 这种复色光分解成单色光的现象称为**色散**. 例如太阳光经水滴折射而形成的彩虹，如彩图 1（a）所示. 除了折射以外，干涉和衍射也可引起色散，我们将分别在第四章和第五章讨论.

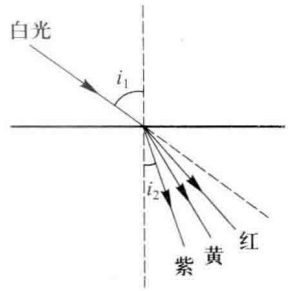


图 1.1-5　白光的色散

折射率与波长的关系可用柯西色散公式（详见 §8.2）表示为

$$n=A+\frac{B}{\lambda^2} \qquad (1.1-6)$$

式中 λ 为入射光在真空中的波长，A、B 为与介质有关的常量，可由实验测得. 由上式可知，在正常情况下介质的折射率随光波长的增加而减小.

夫琅禾费（Fraunhofer）仔细观测了太阳光谱中的暗线，精确测定了一些最强谱线的波长，并用字母 A 到 K 来标记其中最主要的几条线，称为**夫琅禾费线**. 光谱学中常用夫琅禾费线作波长的基准标志. 习惯上常用某几条夫琅禾费线所对应的波长来标明材料的折射率，表 1.1-A 列出了某几条夫琅禾费线所对应的波长及某些典型玻璃对这些波长的折射率. 在光学仪器的设计中，光学材料的折射率通常都是对钠灯的黄光即夫琅禾费 D 线（$\lambda=589.3$ nm）而言的. 本书中所说的折射率，如不特别指明，就是对这个波长而言的，表 1.1-B 列出了一些气体和液体对于波长 $\lambda=589.3$ nm 的光的折射率.

表 1.1-A　常用无色光学玻璃的折射率

谱线标识符号	—	h	G	F	e	D	C	A′	—
波长/nm	365.0	404.7	435.8	486.1	546.1	589.3	656.3	766.5	950.0
色视觉	（紫外）	蓝	青	青绿	绿	黄	橙红	红	（红外）
冕玻璃（K_9）	1.535 82	1.529 82	1.526 26	1.521 95	1.518 29	1.516 30	1.513 89	1.511 04	1.507 78
钡冕玻璃（BaK_7）	1.594 17	1.586 20	1.581 54	1.575 97	1.571 30	1.568 80	1.565 82	1.562 38	1.558 66
轻火石玻璃（QF_3）	1.611 97	1.599 68	1.592 80	1.584 81	1.578 32	1.574 90	1.570 89	1.566 38	1.561 72
重火石玻璃（ZF_1）	1.700 22	1.682 29	1.672 45	1.661 19	1.652 18	1.647 50	1.642 07	1.636 09	1.630 07

表 1.1-B 一些液体和气体的折射率(对 $\lambda=589.3$ nm)

物质名称	分子式	密度/(10^3kg·m^{-3})	温度/℃	折射率
丙 酮	CH_3COCH_3	0.791	20	1.359 30
甲 醇	CH_3OH	0.794	20	1.329 00
乙 醇	C_2H_5OH	0.800	20	1.361 80
苯	C_6H_6	0.880	20	1.501 20
二硫化碳	CS_2	1.263	20	1.625 50
四氯化碳	CCL_4	1.591	20	1.460 70
三氯甲烷	$CHCL_3$	1.489	20	1.446 70
乙 醚	$C_2H_5OC_2H_5$	0.715	20	1.353 80
甘 油	$C_3H_8O_3$	1.260	20	1.473 00
松节油		0.87	20.7	1.472 10
橄榄油		0.92	0	1.476 30
水	H_2O	1.00	20	1.333 00
空 气		在 0℃ 和 1.013×10^5 Pa 条件下		1.000 293
氢 气	H_2			1.000 132
氮 气	N_2			1.000 296
氧 气	O_2			1.000 271
二氧化碳	CO_2			1.000 448
甲 烷	CH_4			1.000 444

1.1.4 光的可逆性

利用相对折射率与绝对折射率的关系,可将折射定律写为对称形式,从而可方便地得出折射时光路的可逆性. 将(1.1-5)式代入(1.1-2)式得

$$n_1\sin i_1=n_2\sin i_2 \tag{1.1-7}$$

上式表明,若光线在第 2 介质中沿原折射线相反的方向入射,则经界面折射后,它必将在第 1 介质中逆原入射线方向折射[图 1.1-6(a)]. 同理,由反射定律不难看出,如果光线沿原反射线相反方向入射,则经界面反射后,它必逆原入射线方向反射[图 1.1-6(b)]. 总之,**当光线沿着和原来相反的方向传播时,其路径不变**,这就是**光的可逆性**. 这个性质不仅对于单个面的反射或折射成立,对于复杂的系统也是成立的. 在某些成像问题中,应用它会给我们带来方便. 例如,在一个系统中,物和像是可以互换的. 光的可逆性还表明,在不考虑介质吸收所引起的损耗时,波动现象是一个可逆过程.

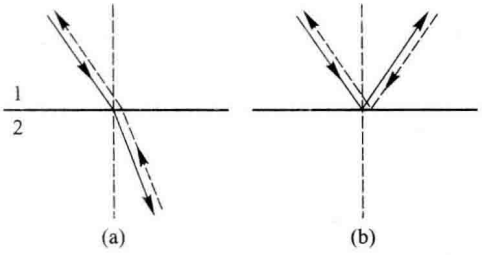


图 1.1-6 光的可逆性

例 1.1-1 一介质的折射率沿介质表面的法线方向连续变化,光线斜入射,求在介质中光线路径的方程.

解 如图 1.1-7,设介质的折射率沿 x 方向连续变化,可以认为它是由许多折射率递减的薄层所组成. 当薄

层的厚度趋于零、层数趋于无限多时就过渡到连续变化. 在每个交界面上,光线满足折射定律

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2=n_3\sin\theta_3=\cdots$$

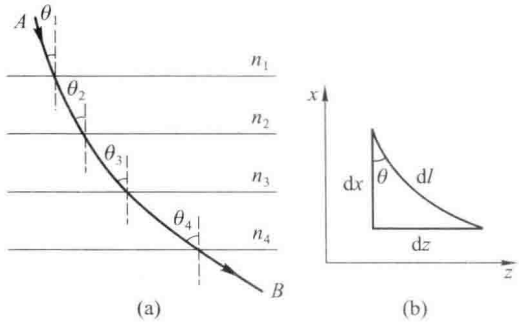


图 1.1-7　折射率分层连续介质中的光线

在折射率连续变化的极限情形下,上式可写为

$$n(x)\sin\theta(x)=n_1\sin\theta_1 \tag{1.1-8}$$

式中 θ_1 为光线在折射率为 n_1 点的入射角. 由于折射率连续变化,图 1.1-7(a)所示折线变成了一条连续的曲线. 若 $\mathrm{d}l$ 表示曲线上一段无限小的弧长,由图 1.1-7(b)可见

$$(\mathrm{d}l)^2=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}z)^2,\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l}=\sin\theta,$$

由以上二式得

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2+1=\left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}z}\right)^2=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

则由(1.1-8)式及上式得

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^2=\frac{n^2(x)}{n_1^2\sin^2\theta_1}-1 \tag{1.1-9}$$

当 $n(x)$ 已知时,上述方程的解给出 x 随 z 的变化,即在折射率按 $n(x)$ 形式变化的介质中光线的路径. 将上式对 z 求微商得

$$2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2}=\frac{1}{n_1^2\sin^2\theta_1}\frac{\mathrm{d}n^2(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2}=\frac{1}{2n_1^2\sin^2\theta_1}\frac{\mathrm{d}n^2(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1.1-10}$$

上式即为介质中光线路径的方程. 由上式不难看出,在均匀介质中光沿直线传播.

例 1.1-2　一自聚焦光纤的折射率分布函数为

$$n^2(x)=n_0^2-n_2x^2 \tag{1.1-11}$$

式中 n_0 表示 $x=0$ 处的折射率,n_2 为一常数,求光线的路径.

解　将(1.1-11)式代入(1.1-10)式得光线方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2}=-\frac{n_2}{n_0^2\sin^2\theta_1}x(z)$$

式中 θ_1 为 $x=0$ 处光线与 x 轴夹角. 上述方程的解是

$$x(z)=A\sin\left(\frac{\sqrt{n_2}}{n_0\sin\theta_1}z+\varphi_0\right) \tag{1.1-12}$$

常数 A 和 φ_0 由光线初始方向和初始入射点的坐标确定. 上式表明光线的路径为正弦曲线,周期与投射角 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\theta_1$ 有关,图 1.1-8 示出 α 分别取 10°、20°、30°的三条曲线. 当 α 很小时,$\sin\theta_1\approx 1$ 为常数,所有这些傍轴光线有相同的周期,光纤有聚焦作用.

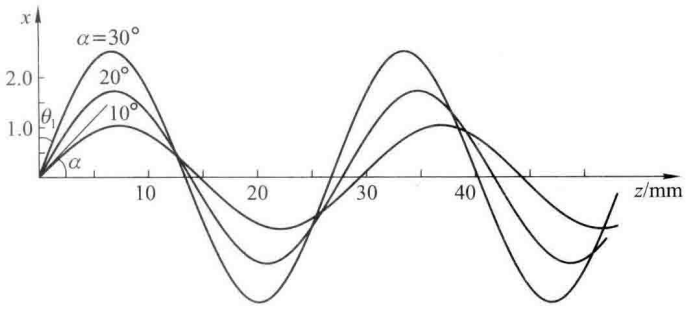


图 1.1-8 在平方律介质中光线的路径

§1.2 费马原理

1.2.1 光程

在均匀介质中,光程[l]为光在介质中通过的几何路程 l 与该介质折射率 n 的乘积,即

$$[l]=nl \tag{1.2-1}$$

因为 $n=\frac{c}{v}$,于是得

$$\frac{[l]}{c}=\frac{l}{v} \tag{1.2-2}$$

上式左端表示光在真空中通过光程[l]所需的时间,而右端则表示在介质中通过真实路程 l 所需的时间. 由此可见,**光程表示光在介质中通过真实路程所需时间内,在真空中所能传播的路程.** 借助光程这个概念,可将光在各种介质中所通过的路程折算为真空中的路程,这样便于比较光在不同介质中通过一定路程所用时间的长短.

在线性介质的光场中,光振动的频率为光源的本征频率,在传播过程中它始终不变,即

$$\nu=\frac{c}{\lambda}=\frac{v}{\lambda_n}$$

式中 λ、λ_n 分别为频率为 ν 的光在真空和介质中的波长,(1.2-2)式可改写为

$$nl=\frac{c}{v}l=\frac{\lambda}{\lambda_n}l \tag{1.2-3}$$

当光线通过几种不同的均匀介质由 A 传到 B 点时(图 1.1-7),在折射率为 n_i 的介质中通过的路程为 l_i,则 A、B 之间的光程为

$$[l] = \sum_i n_i l_i$$

若 A 点到 B 点之间介质的折射率是逐点连续改变的,则光程应为

$$[l] = \int_A^B n(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}l$$

上式是一个路径积分,其中 $\boldsymbol{r}$ 是空间点的位置矢量,$n(\boldsymbol{r})$ 是随位置而变化的介质折射率.

1.2.2　费马原理的表述

1657 年,费马提出一个描述光传播行为的普遍原理,这个原理现在常表述为:**在 A、B 两点间光线传播的实际路径与任何其他可能路径相比,其光程为极值**. 简言之,在两点之间光沿着光程为极大值或极小值或恒定值的路径传播,即在光线的实际路径上光程的变分为零:

$$\delta[l] = \delta\int_A^B n\mathrm{d}l = 0 \tag{1.2-4}$$

由于光从 A 点传播到 B 点这段路程 l 所需的时间 t 与该段路程相应的光程 $[l]$ 有简单的比例关系

$$t=\frac{[l]}{c}$$

式中 c 为真空中的光速,故费马原理又可表述为:**在两点之间光沿着所需时间为极值的路径传播**.

1.2.3　费马原理的应用

从费马原理可导出与光的传播路径有关的直线传播定律、反射定律、折射定律以及光的可逆性原理. 在此我们只讨论从费马原理导出直线传播定律及折射定律,关于反射定律则留作习题.

在均匀介质中,折射率 n 为一常数,A、B 两点间光程取极值即相当于 A、B 两点间几何路程取极值. 然而两点之间直线为最短,所以光在均匀介质中沿直线传播是费马原理的显然推论.

图 1.2-1(a)中,A 为点光源,其坐标为 $(x_1,0,z_1)$;B 为接收器,其坐标为 $(x_2,0,z_2)$;折射界面为一平面,即 $z=0$ 平面,其两侧介质的折射率分别为 n_1 和 n_2. 设 P 点为入射线与折射界面的交点,其坐标为 $(x,y,0)$,并令 $AP=l_1$,$PB=l_2$,则由 A 点到 B 点的光程为

$$[APB]=n_1l_1+n_2l_2$$

其中

$$\left.\begin{aligned} l_1&=\sqrt{z_1^2+(x-x_1)^2+y^2}\\ l_2&=\sqrt{z_2^2+(x-x_2)^2+y^2}\end{aligned}\right\} \tag{1.2-5}$$

由 A 点到 B 点的光线究竟选取什么路径呢? 按照费马原理,P 点的位置应使光程 $[APB]$ 为极值,根据微分学的方法,即应令

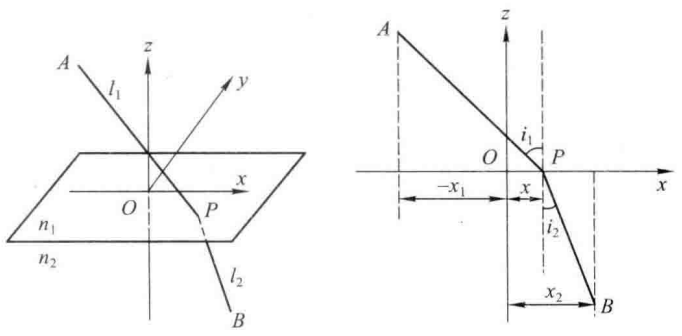


图 1.2-1 由费马原理导出折射定律

$$\frac{\partial}{\partial y}(n_1l_1+n_2l_2)=0 \tag{1.2-6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(n_1l_1+n_2l_2)=0 \tag{1.2-7}$$

将(1.2-5)式代入(1.2-6)式得

$$\frac{\partial}{\partial y}(n_1l_1+n_2l_2)=\frac{n_1y}{l_1}+\frac{n_2y}{l_2}=0$$

因为折射率和路程长度均为正数,所以只有当 $y=0$ 时上式才能成立,这就意味着 P 点位于过 A、B 点且垂直于折射界面的平面内,即入射线、法线、折射线三者在同一平面内. 此即折射定律的第一部分.

将(1.2-5)式代入(1.2-7)式得

$$\frac{\partial}{\partial x}(n_1l_1+n_2l_2)=n_1\frac{x-x_1}{l_1}+n_2\frac{x-x_2}{l_2}=0$$

由图 1.2-1(b)可知

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\sin i_1,\quad \frac{x_2-x}{l_2}=\sin i_2$$

代入上式得折射定律的第二部分

$$n_1\sin i_1=n_2\sin i_2$$

费马原理只涉及光传播的路径,而不管光沿哪个方向传播. 光从 A 点传到 B 点或从 B 点传到 A 点,光程为极值的条件是相同的,因此两种情况下光将沿同一路径传播,这就是说费马原理本身包含了光的可逆性.

迄今我们所讨论的都是光程取极小值的情况,费马最初提出其原理时也认为"自然界总是按最短的路径运行",然而他并未料到在许多情况下光却是沿着光程为极大值或恒定值的路径传播.

如图 1.2-2(a)所示为一椭球反射面,F 和 F'为其焦点. 由椭球面的性质可知,从 F 点向各方

向发出的光线经反射后都将会聚于 F' 点，而且所有这些路径的光程相等（例如 $FM+MF'=FN+NF'$），这就是在 F 和 F' 两点之间光程取恒定值的情况. 这样的反射面称为 F 和 F' 点的等光程面. 如果有另一反射镜 PQ 和椭球面相切于点 M[图 1.2-2(b)]，光线由 F 经 PQ 反射到 F' 所取的路径为 FMF'. 连接 F 与反射镜上另一点 N，延长 FN 与椭球面相交于 M'，因为 PQ 位于椭球面内，$[FNF']<[FM'F']$，而 $[FMF']=[FM'F']$，则 $[FNF']<[FMF']$. 即光线传播的实际路径和其他相邻的可能路径相比，其光程为极大值.

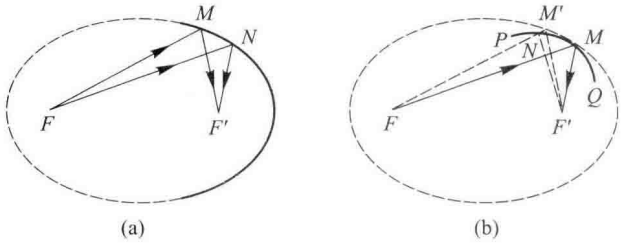


图 1.2-2

（a）光线在椭球面上的反射，$[FMF']=[FNF']$；（b）光线在 PQ 面上的反射，$[FMF']>[FNF']$

费马原理概括了光线传播的规律，是几何光学的基本原理. 根据费马原理可导出光线方程，从而可确定光在非均匀介质中的传播路径，所以它在变折射率光学中有十分重要的应用. 费马原理的重要意义不仅存在于光学领域，它对于 18 世纪 80 年代分析力学中哈密顿最小作用原理的建立、20 世纪 20 年代德布罗意物质波概念的提出以及对 20 世纪 40 年代费曼提出量子力学中的路径积分理论均有重要的启发. 费马原理在物理学发展史上的贡献，在于开创了以“路径积分、变分原理”表述物理规律的新思路.

例 1.2-1　一束平行于光轴的光线入射到抛物面镜上反射后会聚于焦点 F. 试证所有这些光线到达焦点上的光程相等.

解　图 1.2-3 所示为抛物面反射镜的截面，F 为其焦点，MN 为抛物线的准线，A_1B_1 为入射光线的垂线. 选择任意两条入射光线 A_1P_1 和 A_2P_2，它们的延长线和准线相交于 Q_1 和 Q_2 点，根据抛物线的性质

$$P_1F=P_1Q_1,\quad P_2F=P_2Q_2$$

则

$$A_1P_1+P_1F=A_2P_2+P_2F$$

即

$$[A_1P_1F]=[A_2P_2F]$$

上式表明平行于光轴的各光线到达焦点的光程相等.

如果将点光源置于焦点 F 处，由光的可逆性可知，光源发出的光线经抛物面镜反射后成为平行于光轴的平行光束. 抛物面镜主要用于接收来自远处的辐射或者将辐射集中在一个方向而使其传输较远的距离，例如用作射电望远镜天线、光学望远镜的反射物镜、探照灯或汽车前灯的反射镜等.

例 1.2-2　如图 1.2-4 所示，折射率分别为 n_1 和 n_2 的两种介质的界面为 Σ，$n_1>n_2$. 在折射率为 n_1 的介质中有一点光源 S，它与界面顶点 O 相距为 d. 设 S 发出的球面波经界面折射后成为平面波，试求界面 Σ 的形状.

解　已知从 S 发出的球面波经 Σ 面折射后成为一平面波，这样就有很多条光线的路径. 按照费马原理，这些路径的光程应相等. 在 Σ 面右侧作折射光线的波面 $M'N'$. 比较 SPQ' 和 SOO' 两条光线的路径可知，前者的几何路程长于后者，因而前者应在折射率较大的 n_1 介质中通过较短的几何路程，即 Σ 面应凹向 n_1 介质.

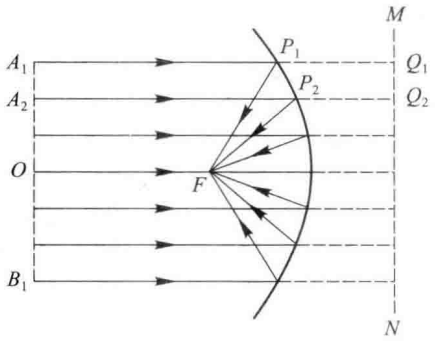


图 1.2-3 抛物面反射镜

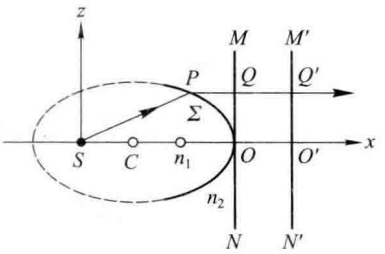


图 1.2-4

过 Σ 面顶点 O 作波面 MN，以 S 为原点建立坐标系，面 Σ 上任意点 P 的坐标为 (x,z). 根据费马原理可得

$$n_1 \cdot SP+n_2 \cdot PQ=n_1 \cdot SO$$

即

$$n_1(x^2+z^2)^{1/2}+n_2(d-x)=n_1 d$$

通过一系列代数运算，上式可化为

$$\frac{[x-n_2 d/(n_1+n_2)]^2}{d^2 n_1^2/(n_1+n_2)^2}+\frac{z^2}{(n_1-n_2)d^2/(n_1+n_2)}=1$$

上式表明，Σ 面与 xz 平面的交线是椭圆的一部分. 椭圆的几何参量如下：中心坐标为 $[n_2 d/(n_1+n_2),O]$，半长轴和半短轴分别为 $a=n_1 d/(n_1+n_2)$，$b=d\sqrt{(n_1-n_2)/(n_1+n_2)}$，焦距为 $2c=2\sqrt{a^2-b^2}=2n_2 d/(n_1+n_2)$，$S$ 为椭圆的一个焦点，偏心率 $e=c/a=n_2/n_1<1$. 将椭圆以 x 为轴旋转可得 Σ 面为一旋转椭球面.

§ 1.3 成像的基本概念

本节中我们讨论与成像有关的几个概念.

1.3.1 同心光束和像散光束

如果一光束中各光线或其延长线相交于一点，则称此光束为**同心光束**，如图 1.3-1 所示. 图中(a)和(b)是会聚光束，(c)和(d)是发散光束. 平行光束是同心光束的一种特殊情形，它的中心在无限远处. 点光源发出的则是以其自身为中心的发散同心光束[图(c)].

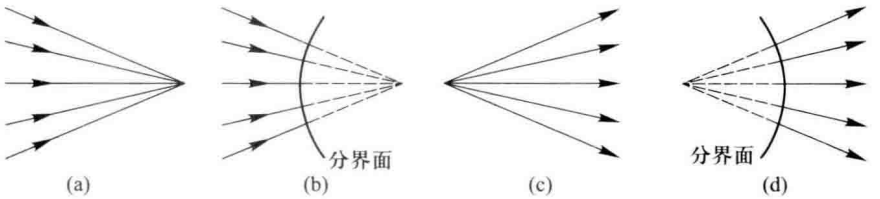


图 1.3-1 同心光束

同心光束经光学系统反射或折射后，往往不再是同心光束，其各条光线彼此既不平行又不完全相交于一点，这种光束称为**像散光束**（见图 2.2-5）.

1.3.2　物和像　物空间和像空间

如图 1.3-2 所示，括号表示一个光学系统，S 为入射同心光束的顶点. 此光束通过系统后形成中心在 S' 的同心光束，我们称此新的中心 S' 点为 S 点的**像**. 在图(a)和(c)中，出射同心光束首先会聚到像 S' 然后再发散，我们称出射同心光束顶点 S' 为 S 点的**实像**. 将一观察屏置于 S' 处，该点受会聚光束的照射后发生漫反射，因而可以看见屏上的亮点. 在图(b)和(d)中，出射同心光束是发散光束，各光线的反向延长线交于 S' 点，它是 S 点的**虚像**. 虚像不能在屏上显现出来，但可以通过眼睛观察到.

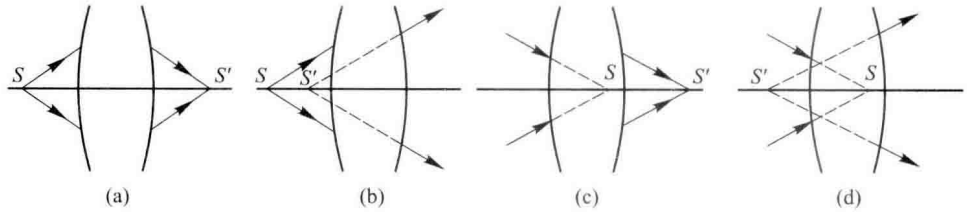


图 1.3-2　同心光束通过光学系统后生成点像

在图(a)和(b)中，入射到系统上的同心光束是发散的，相应的发散中心称为**实物点**. 在图(c)和(d)中，入射到系统上的同心光束是会聚的，而且在尚未会聚于中心 S 点时就与光学系统相遇改变了方向，因此会聚点 S 不是实际光线的交点，而是入射光线延长线的交点，相应的会聚中心 S 称为系统的**虚物点**.

物点（包括实和虚物点）所有可能位置组成的空间称为**物空间**（物方），像点（包括实和虚像点）所有可能位置组成的空间称为**像空间**（像方）. 应当注意，物空间不仅是光学系统前面的那部分空间，它还要延拓到光学系统之后，同样的，像空间不仅是光学系统后面的那部分空间，它还要延拓到光学系统之前，所以物空间和像空间实际上是相互重叠的. 在一个问题中区分某个点属于物空间或像空间，要看它是入射光束的顶点还是出射光束的顶点，而不能看它是在系统之前还是之后.

1.3.3　理想光学系统　物像之间的共轭性

若一个光学系统能在任意大的空间范围内用任意宽的光束成完善的像，即任何同心光束通过系统后仍能保持为同心光束，则称该系统为理想光学系统. 它具有以下性质：

（1）物空间每个点对应像空间一个点；

（2）物空间每条直线对应像空间一条直线；

（3）物空间每个平面对应像空间一个平面.

物空间和像空间的这种点点、线线、面面的一一对应关系称为**共轭性**. 对应的点、线、面分别称为共轭点、共轭线和共轭面.

后面将讲到，除平面反射镜外任何实际的光学系统都不可能完全达到理想成像的要求，但共轴球面系统在傍轴条件下可近似地看作是理想光学系统. 研究理想光学系统的成像特性对于寻

求某些方面接近于理想系统的实际系统或对其成像质量作出评估都是有益的.

1.3.4 物像之间的等光程性

理想光学系统成像时有一个重要的性质,即从物点 S 到像点 S'的各光线的光程相等,称为物像之间的等光程性. 用费马原理很容易证明物像之间的等光程性. 在图 1.3-2(a)中,物点 S 发出的同心光束通过系统后成为中心在像点 S'的同心光束,在此同心光束中连续分布着无穷多条实际的光线路径. 根据费马原理,它们的光程应取极大值或极小值,或恒定值,对于这些连续分布的实际光线而言,其光程都取极大值或极小值是不可能的,唯一的可能性是光程取恒定值,即它们的光程都相等.

1.3.5 等光程面

设计一个系统使之能对有限大小的物体成完善像是非常困难的,但是对一个物点成完善像只需用单个反射面或折射面便可实现. 根据物像之间的等光程性,这样的面称为该对物像共轭点的**等光程面**.

在上节中已指出,以 F 和 F'为焦点的旋转椭球面[图 1.2-2(a)]是 F 和 F'点的反射等光程面. 在图 1.2-3 中,平行于光轴的各入射光线到达抛物面镜焦点 F 的光程相等,所以它是 F 及无穷远处共轭物点的反射等光程面.

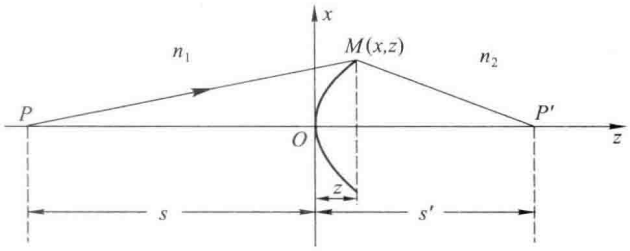


图 1.3-3 折射等光程面

在图 1.3-3 中,折射面两侧介质的折射率分别为 n_1 和 n_2,物点 P 经折射面成像于 P'. 取直角坐标系如图所示,折射面上 M 点坐标为(x,z),并令 $PO=s$,$OP'=s'$. 根据物像之间的等光程性,

$$n_1PM+n_2MP'=n_1s+n_2s'$$

即
$$n_1\sqrt{(s+z)^2+x^2}+n_2\sqrt{(s'-z)^2+x^2}=n_1s+n_2s'$$

或
$$n_2\left(s'-\sqrt{(s'-z)^2+x^2}\right)+n_1\left(s-\sqrt{(s+z)^2+x^2}\right)=0$$

上式是一个四次曲线方程,为卵形线,将此曲线绕光轴 z 旋转而成的曲面称为笛卡儿卵形面,它就是 P 和 P'点的折射等光程面.

上述卵形面是轴上物点的等光程面,对轴外物点并不满足等光程条件,所以对有限大小的物体并不能完善成像. 而且由于卵形面加工困难,实际上使用的大都是球面系统,当满足一定条件时,它们能对光轴附近的小物体成像.

§1.4　光在平面上的反射和折射

光学仪器的种类很多，结构可能很复杂，但把它们分解开来看，就可以知道它们通常都是由反射镜、棱镜、透镜、光阑、光纤等光学元件配置而成. 为了制作方便，反射镜、棱镜、透镜等元件又大都是由平面或球面所组成，所以研究光在平面及球面上的反射和折射是几何光学中的基本问题.

1.4.1　光在平面上的反射

在自然界中有许多天然平面，静止的液面（忽略边缘因表面张力而产生的弯曲）、晶体的解理面都呈平面. 光学仪器中则常使用精密磨制的平面，为了提高反射能力，可在平基片上镀一层反光物质（如银、铝、铬等）作为平面反射镜，根据镀层情况的不同，可以反射百分之几到百分之九十以上的入射光.

从任一点光源 S 发出的光束（图 1.4-1）经平面反射后的各反射光线的延长线相交于 S' 点，S' 点即为 S 点的虚像. 由此可见，同心光束经平面反射后仍然保持为同心光束，平面反射只改变光束的前进方向，所以它能生成点物的点像，即是说反射平面是一个最简单的理想光学系统.

如果射向平面的是一会聚同心光束（图 1.4-2），其顶点 S 为虚物点，它经平面反射后生成一实像点 S'.

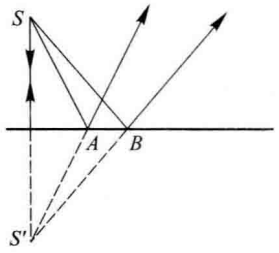


图 1.4-1　平面的反射

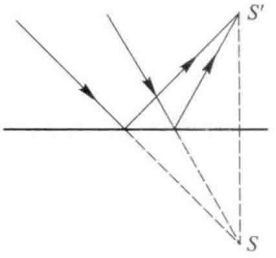


图 1.4-2　虚物经平面反射生成实像

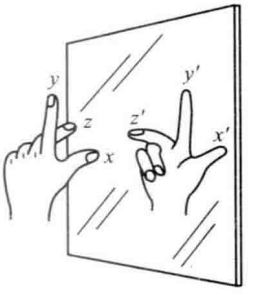


图 1.4-3　物与像关于镜面对称

有一定大小的物体经平面反射所成的像与原物大小相等，且物与像对镜面对称. 如果物体为左手坐标系 xyz，其像则为右手坐标系 $x'y'z'$，如图 1.4-3 所示. 这种物像关系称为镜像反演.

为了说明平面镜反射成像时物像之间的等光程性，需要引入虚光程的概念. 在图 1.4-1 中，AS' 及 BS' 是实际光线的延长线，相应的光程称为虚光程，并规定其光程取负值，如果物空间介质的折射率为 n，对于反射镜上任意选定的两点 A、B，物像之间的光程为

$$[SAS'] = n(SA - AS') = 0$$

$$[SBS'] = n(SB - BS') = 0$$

这表明物像之间各光线的光程相等，反射平面是 S 和 S' 的等光程面. 同理，等光程原理也可用于图 1.4-2 所示的虚物成像的情况.

1.4.2 光在平面上的折射

图 1.4-4 中界面两侧介质的折射率分别为 n_1 和 n_2，且 $n_1>n_2$，在第 1 介质中有一点光源 S，它到折射界面的垂线为 SA. 作一条任意的入射线 SM，其入射角为 i_1，折射线为 MP，折射角为 i_2，将 PM 反向延长与 SA 交于 S'点. 在 $\triangle SMA$ 及 $\triangle S'MA$ 中，$\angle MSA=i_1$，$\angle MS'A=i_2$，于是

$$AM=AS\tan i_1=AS'\tan i_2$$

或

$$AS'=AS\frac{\tan i_1}{\tan i_2}=AS\frac{\sin i_1\cos i_2}{\sin i_2\cos i_1}$$

利用折射定律得

$$AS'=AS\frac{n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1} \tag{1.4-1}$$

上式中的余弦比值与 i_1 有关，而 AS'则随 i_1 作相应的变化. 由此可知点光源 S 发出的同心光束经平面折射后不再是交于一点的同心光束，而成为像散光束. 即是说，平面折射一般不能成像. 这就是我们在上节已得出的结论.

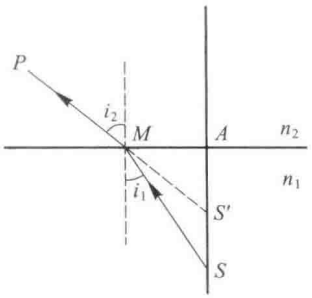


图 1.4-4 平面的折射

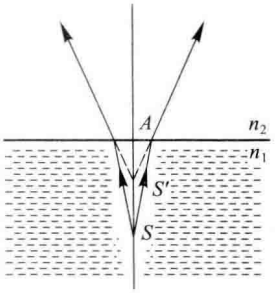


图 1.4-5 平面折射傍轴成像

如果我们把眼睛放在垂直于表面的方向观察点光源 S(图 1.4-5)，由于人眼的瞳孔很小，射入眼睛的只是垂线 SA 附近的光线，它们的入射角 i_1 和折射角 i_2 都很小，将 i_1(或 i_2)的正弦、正切和余弦函数展开为泰勒级数：

$$\sin i_1=i_1-\frac{i_1^3}{3!}+\frac{i_1^5}{5!}-\cdots$$

$$\cos i_1=1-\frac{i_1^2}{2!}+\frac{i_1^4}{4!}-\cdots$$

$$\tan i_1=i_1+\frac{i_1^3}{3}+\frac{2i_1^5}{15}+\cdots$$

在上面各式中取一级近似，从而角的正弦和正切值可用角的弧度值代替，角的余弦值可用 1 代替，这称为傍轴近似. 例如 i 为 10°时，其弧度值和正弦值之差小于千分之一，尚能很好地满足这些条件. 在傍轴近似条件下，由(1.4-1)式可得

$$AS'=AS\frac{n_2}{n_1} \tag{1.4-2}$$

也即 AS' 近似地与 i_1 无关，折射光束是近似的同心光束，S' 可视作 S 的像. 从上式还可看出，虚像 S' 到界面的距离是点光源 S 到界面的距离的 n_2/n_1 倍，例如我们从空气中垂直地观察水中物体时，因为 $n_1=4/3$，$n_2=1$，所以水中物体的表观深度是实际深度的 3/4 左右. 因此，有经验的渔民叉鱼时，总是对准水中所见到的鱼的下方将鱼叉掷出去.

1.4.3　全反射

一般情况下反射和折射是同时发生的，进一步的观察还发现，介质一定时，随着入射角的增加，反射光线愈来愈强，折射光线愈来愈弱. 在介质完全不吸收光能的情况下，反射光和折射光的能量之和应等于入射光的能量.

当光由光密介质（例如水）射向光疏介质（例如空气）时，$n_2<n_1$，所产生的反射称为**内反射**，反之则称为**外反射**. 内反射时其折射角总是大于入射角的，如图 1.4-6 所示. 因此当入射角达到某一角度 i_c 时，折射角等于 90°. 若入射角大于 i_c，就不再有折射光线，入射光的能量全部反射回第一介质，这种现象就叫做**全反射**，而 i_c 则称为全反射的**临界角**.

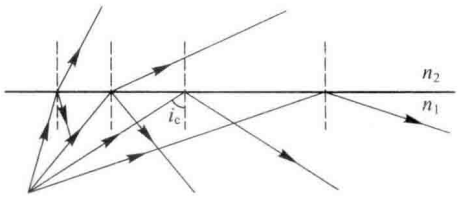


图 1.4-6　光的全反射

如果让光线由光疏介质射向光密介质，$n_1<n_2$，随着入射角的增加，尽管折射光线也逐渐减弱，但总有折射光线存在，不会产生全反射. 由此可见，只有在光线从光密介质射向光疏介质，且入射角大于临界角时，才会产生全反射现象.

如上所述，所谓临界角是指**能产生全反射的最小入射角**. 由于临界角对应的折射角是 90°，故根据折射定律可求得计算临界角的公式：

$$\sin i_c=\frac{n_2}{n_1} \tag{1.4-3}$$

对于不同的介质，临界角的大小不同. 由上式可以得出，水对空气的临界角约为 48.5°，普通玻璃对空气的临界角约为 42°. 钻石的折射率大（例如金刚石，$n=2.417$），相应的临界角小，容易发生全反射. 如果在切割时经过特别考虑，使进入钻石的光线均经全反射后自其顶部射出，看起来就会显得光彩夺目.

按照波动理论，产生全反射时除反射波外，在光疏介质中并非完全不存在透射波. 只不过它沿界面方向传播，且其振幅在垂直界面方向按指数衰减，透入深度只有波长量级，称为**隐失波**. 但平均说来，光波的能量全部返回光密介质，所以在光疏介质中并不形成透射光束（见 §3.5.6）.

海市蜃楼幻景也是由于大气密度不均匀和全反射所引起的. 在大海的水面上，由于水蒸气浓度的逐层变化，致使接近海面的空气密度较大，折射率也较大；愈往上空气密度愈小，折射率也愈小. 来自远处海面上船只或岛屿上的景物的光线向上传播时，由光密介质逐渐进入光疏介质而受到折射，终因全反射而进入另一船上或岸边观察者的眼中，使人看见有船只或景物倒挂于天空. 同样，在热天的沙漠中或柏油路上，也会出现同类现象，称为沙漠幻景，只不过因为近地面热空气密度小而折射率低，愈往上折射率增高，所以观察者感觉景物存在于地面以下. 我国河北北戴河的东联峰山，江苏连云港的海州湾，山东蓬莱的蓬莱阁和渤海长岛县在历史上就曾多次出现过海市蜃楼现象.

§1.5 光导纤维

1. 光纤的结构和种类

早在1870年丁铎尔(J.Tyndall)在英国皇家学会的一次演讲中就演示了光线能通过全反射沿着抛物线状水柱传播. 但是直到20世纪50年代才形成了以光信息在透明光导纤维中的传输规律为研究内容的新学科——光纤光学.

光导纤维是圆柱形介质细丝,简称光纤. 通常使用的光纤其基本结构由纤芯、包层和套层三部分组成,如图1.5-1所示. 纤芯由高纯度的熔融石英(SiO_2)、多组分玻璃或特制塑料精细加工而成. 纤芯的直径为1~130 μm. 在熔融石英中掺杂少量GeO_2或其他介质,可调节纤芯材料的折射率,从而改变光波的传输参数. 纤芯外面的包层是另一层具有不同掺杂的SiO_2,其折射率稍微低于纤芯的折射率. 纤芯和包层之间有良好的光学接触,形成良好的光学界面. 包层与纤芯构成光波导,同时也起着保护纤芯壁不受污染或损坏. 套层是由耐损耗的柔软材料构成,起着保护光纤、增强其机械性能的作用. 将数根甚至上百万根的光纤组合会形成光缆,光缆传输光信息的作用类似于电缆传输电信号的作用.

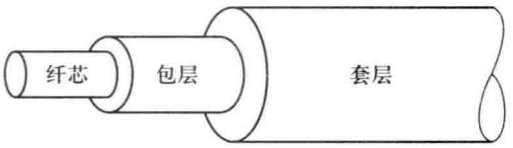


图1.5-1 单根光纤结构简图

随着光纤广泛应用的需求,人们发展出了多种类型的光纤. 按纤芯材料的折射率分布,光纤可分为阶跃折射率型和渐变折射率型两类. 具有一定频率、一定偏振态和传播方向的光波称为光波的一种模式. 按光纤中光波的传输模式,光纤可分为单模光纤和多模光纤. 只允许传输一个模式光波的光纤称为单模光纤,其纤芯直径一般为9~10 μm,适用于远程通信. 允许同时传输多个模式光波的光纤称为多模光纤,其纤芯直径为50~62.5 μm,多模光纤传输光波的距离比较近,一般只有几千米. 此外,还有具有某种特殊性能的特种光纤,例如红外光纤、保偏光纤、发光光纤等.

2. 光纤的数值孔径

阶跃折射率光纤是最基本的一种光纤,其材料的折射率分布如图1.5-2(b)所示. 由于其纤芯的直径(30~100 μm)远大于光波长,可以用几何光学中的全反射原理来描述光在光纤中的传输过程. 若光纤的直径为光波长量级时,就必须用波导理论来处理.

图1.5-2(a)所示为通过光纤中心轴的任一个平面,称为子午面,而位于子午面内的光线就称为子午光线. 子午光线经过多次全反射始终在子午面内,图中n_1、n_2和n_0分别为纤芯、包层和光纤周围介质的折射率. 设光线在光纤断面的入射角为φ,折入纤芯中入射到纤芯内壁界面上的B点的入射角为ψ,若满足条件$n_1\sin\psi=n_2\sin90°$,则ψ就是全反射临界角,记为ψ_c,

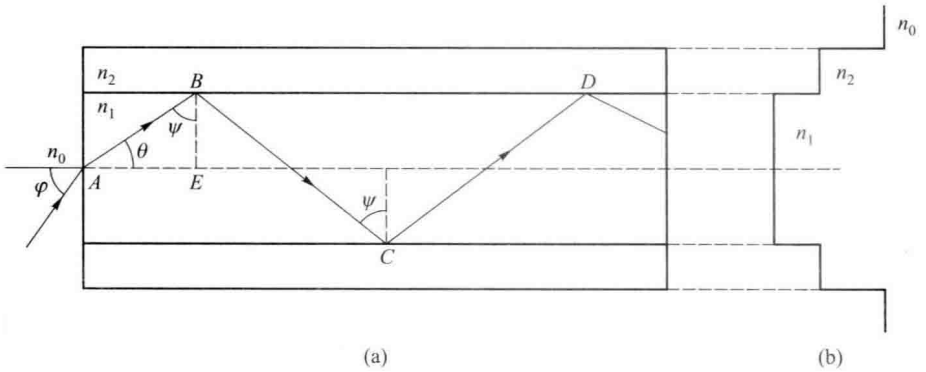


图 1.5-2

(a) 光纤的全反射界面;(b) 折射率分布

则得

$$\sin\psi_c = \frac{n_2}{n_1}$$

由于 $\theta_c = 90° - \psi_c$，θ_c 的脚标 c 表示与临界角相对应的角度，由正弦和余弦函数间的关系可得 $\cos\theta_c = \frac{n_2}{n_1}$，则

$$\sin\theta_c = \sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

又因为 $n_0\sin\varphi = n_1\sin\theta$，则

$$\begin{aligned} n_0\sin\varphi_c &= n_1\sin\theta_c = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \\ \sin\varphi_c &= \frac{1}{n_0}\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \end{aligned} \tag{1.5-1}$$

上述计算表明，若使子午光线能以全反射形式传输，则光线的入射角必须满足全反射条件 $\psi \geqslant \psi_c$，相应的有 $\theta \leqslant \theta_c$，也就是在纤芯断面的入射角 $\varphi \leqslant \varphi_c$ 的光线才能在光线中传输. 入射角大于临界角($\varphi > \varphi_c$)的光线，其能量由于折射而损耗，不能在光纤中传输. 通常称临界角 φ_c 为孔径角. 由(1.5-1)式定义的数值孔径为

$$\text{N.A.} = n_0\sin\varphi_c = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \tag{1.5-2}$$

当 n_0 一定时，N.A.决定了光能在光纤中传输入射光束的最大半孔径角为 φ_c，因此它是表示光纤集光本领大小的重要参数.

由于光纤的 N.A.只决定于纤芯与包层的折射率，而与光纤的尺寸无关，于是可将其 N.A.做得很大，而截面积很小(为使光纤柔软易弯曲)，这是一般的球面镜、透镜等光学元件不能相比的. 考虑到拉制工艺的限制和光纤的其他性能，一般选用 N.A.在零点几到 1.4 之间.

3. 光纤的应用

光纤柔软可弯曲，因而就像电缆传输电流那样，可沿弯曲路径传输光能和信息. 在传输光能

时,将许多根光纤聚集在一起构成传光束. 如果使纤维束中各根纤维在两端的排列顺序完全相同,这样就构成了能传递图像的传像束(图 1.5-3). 传像束中每根光纤分别传送一个像元,整个图像就被这些光纤分解后传送到另一端. 将传光束和传像束配上合适的物镜和目镜或其他元件就可做成各种传感器、内窥镜. 光纤传感器、内窥镜是光纤十分重要的应用领域. 工业内窥镜可用于观察和检查复杂机器内部的工作状态,例如观察火箭筒,引擎的内壁,可不接近危险区而把像传到外部. 广泛使用的医用内窥镜(OCT 扫描仪、胃镜、支气管镜、膀胱镜),可使医学诊断更为精准.

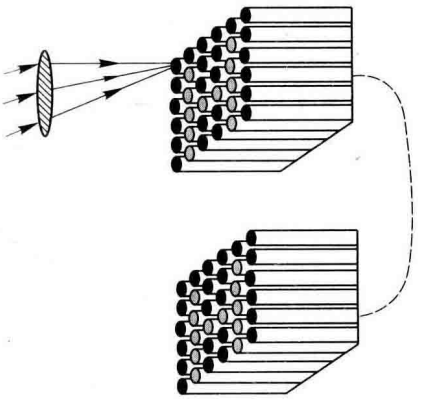


图 1.5-3 光纤传输像"H"

目前光纤最广泛最重要的应用在光通信领域. 但是在 20 世纪 60 年代用光学玻璃制作的普通光纤的吸收损耗仍然很高,通常为 1 000 dB/km,这就大大限制了光纤的使用长度. 1966 年高锟(K.C.Kao)及 T.M.Devies 在其著名论文《光频介质纤维表面波导》中创造性地提出,光纤的高损耗并不是本征的,只要玻璃中的过渡族金属离子(如 Cu^{2+}、V^{2+}、Cr^{3+}、Mn^{3+}、Fe^{2+}、Co^{2+}、Ni^{2+})的含量下降到 10^{-8}(重量比)以下时,光纤的吸收损耗就有可能降低到 10 dB/km 以下. 高锟等人的科学论断,对于光纤的发展具有划时代的历史意义. 1970 年美国康宁公司制作出损耗为 20 dB/km 的光纤,证实了高锟等人的设想. 目前光纤的损耗可低达 0.2 dB/km. 低损耗低色散光纤及 20 世纪 80 年代末掺铒光纤放大器的问世,大大推动了光纤通信技术的发展. 光纤通信与无线电通信相比有许多优点:具有极高的载波频率以提供巨大的传输带宽,通信容量大,传输距离远,信号串扰小,保密性强,能抗电磁干扰,传输质量佳,体积小重量轻,能节省大量的有色金属铜和铝等. 所以许多国家都大力发展光纤通信. 光纤通信为人们搭建起一种容量庞大且覆盖面极其广泛的连接架构,成为全球发展互联网的基础. 目前光纤通信传输容量已达 100 Tb/s,人们可在瞬间将文本、音乐、图像、视频传到世界各地. 2000 年前后,互联网通信一跃成为规模最大的通信方式,如今互联网的通信量已占了主导地位. 目前,光纤技术几乎是所有信息实现远距离海量传输的唯一方式. 随着光纤技术的进一步发展,人们有望迎来光纤传输速率的下一个 100 倍增长. 由于在有关光在光纤中的传输以用于光通信方面取得了突破性成就,高锟获得了 2009 年度诺贝尔物理学奖.

例 1.5-1 如图 1.5-4 所示,设光导纤维芯料和涂层的折射率分别为 n_1 和 n_2,入射端外介质的折射率是 n_0,试求,能使光线在纤维内芯料与涂层界面上发生全反射时,入射光束的最大孔径角 i_0 是多少?

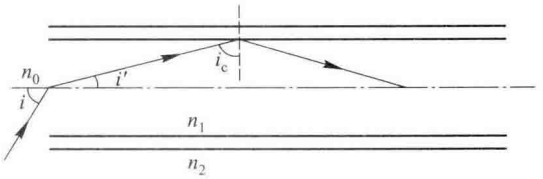


图 1.5-4

解 设光线在纤维端面的入射角为 i,折射角为 i',芯料和涂层界面上全反射的临界角为 i_c,则发生全反射的条件为

$$\frac{\pi}{2}-i'\geqslant i_c$$

即

$$i'\leqslant\frac{\pi}{2}-i_c$$

按折射定律：$n_0\sin i=n_1\sin i'$，可得发生全反射的条件为

$$n_0\sin i\leqslant n_1\cos i_c=n_1\sqrt{1-\sin^2 i_c}=\sqrt{n_1^2-n_2^2}$$

由此可得入射光束的最大孔径角

$$i_0=\arcsin\left(\frac{1}{n_0}\sqrt{n_1^2-n_2^2}\right)$$

$n_0\sin i_0$ 称为光学纤维的数值孔径，记为 N.A.，数值孔径越大，通过光学纤维的光功率就越大.

§1.6　棱　　镜

棱镜是由平面组成的光学元件，它有许多用途，但就其在光学系统中的功能而言，主要有两个方面：第一，偏向，即改变光束的传播方向或像的取向；第二，色散. 此外它还可用作分束器、起偏器等. 通常又可把棱镜分为折射棱镜和反射棱镜两类.

1.6.1　折射棱镜

图 1.6-1(a)所示为一个三棱镜，$AA'B'B$ 和 $AA'C'C$ 是两个工作面，$B'BCC'$ 是底面. 两工作面的交线 AA' 称为折射棱，两工作面间的夹角称为棱镜的顶角或折射棱角，垂直于折射棱的平面称为**主截面**. 为简单起见，我们只研究光线在主截面内折射的情况.

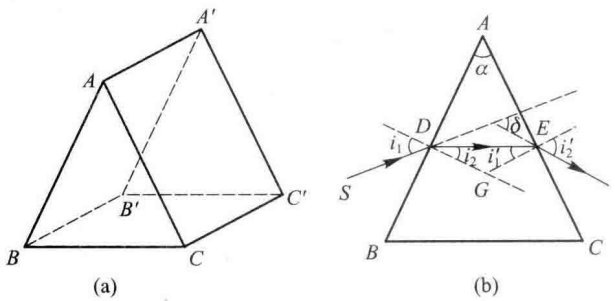


图 1.6-1　三棱镜和它的主截面

一束沿主截面入射的单色光 SD 与 AB 相交于 D 点[图 1.6-1(b)]，经棱镜两工作面折射后以折射角 i_2' 射出. 出射光线与入射光线之间的夹角称为入射光的**偏向角**. 由图可见，入射光线 SD 在第一次折射时偏折一个角度 (i_1-i_2)，在第二次折射时又偏折一个角度 $(i_2'-i_1')$，因此总偏向角度

$$\delta=(i_1-i_2)+(i_2'-i_1')$$

由于四边形 $ADGE$ 中包含两个直角，所以 $\angle DGE$ 必定是顶角 α 的补角，于是得

$$\alpha=i_1'+i_2 \tag{1.6-1}$$

故总偏向角 δ 又可写作

$$\delta = i_1 + i_2' - \alpha \tag{1.6-2}$$

设棱镜材料的折射率为 n，由折射定律可知

$$\sin i_1 = n\sin i_2, \quad \sin i_2' = n\sin i_1'$$

将以上二式相加，并利用三角函数公式中和化为积的形式可得

$$\sin\frac{i_1+i_2'}{2}\cos\frac{i_1-i_2'}{2} = n\sin\frac{i_2+i_1'}{2}\cos\frac{i_2-i_1'}{2}$$

将(1.6-1)和(1.6-2)式代入上式得

$$\sin\frac{1}{2}(\alpha+\delta) = \frac{n\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{1}{2}(i_2-i_1')}{\cos\dfrac{1}{2}(i_1-i_2')} \tag{1.6-3}$$

由上式可知，偏向角 δ 是 i_1、α 和 n 的函数. 对于材料和顶角已知的棱镜，实验测得 δ 随 i_1 而变化的曲线如图 1.6-2 所示. 由图可见，δ 开始随入射角的增加而减小到一最小值 δ_m，然后随入射角的增加而增加. 由(1.6-2)式取 δ 对 i_1 的一阶和二阶导数，并令一阶导数为零，可以证明，当

$$i_1 = i_2', \quad i_1' = i_2 \tag{1.6-4}$$

即在棱镜内折射光线平行于底面通过时，偏向角最小. 因计算过程太繁，这里不列出. 现在用一简单方法证明如下：设一光线以 i_1 入射时的偏向角最小，假若在此情况下，$i_1 \neq i_2'$，根据光的可逆性，则把光线反向时，它将沿同样的路径返回. 因此 $\delta = \delta_m$ 不会改变. 这就意味着以 i_1、i_2' 两个不同的入射角入射都能产生最小偏向，可是实际上只有一个入射角能产生最小偏向，所以(1.6-4)式必定成立.

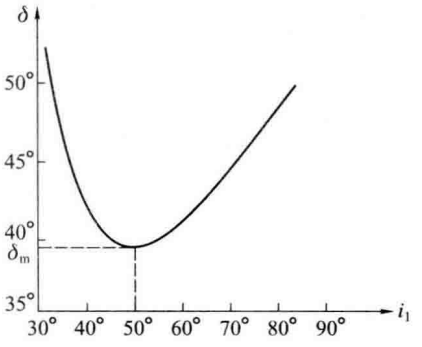


图 1.6-2　偏向角随入射角而变化的曲线

将(1.6-4)式代入(1.6-3)式得

$$n = \frac{\sin\dfrac{\delta_m+\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} \tag{1.6-5}$$

根据上式可准确地测定材料的折射率，为此须将待测材料做成一块棱镜(或用平板玻璃做成空心棱镜，内盛待测液体或高压气体)，然后测出 α 和 δ_m，就可由上式求得 n 值. 测量折射率时利用最小偏向角而不用任意偏向角，是由于最小偏向的位置在实验中容易准确地确定.

顶角 α 很小的棱镜称为光楔，如图 1.6-3(a)所示，当光线垂直或接近垂直射入光楔时，(1.6-3)式中的余弦值可用 1 代替，正弦值可用角度的弧度代替，则得

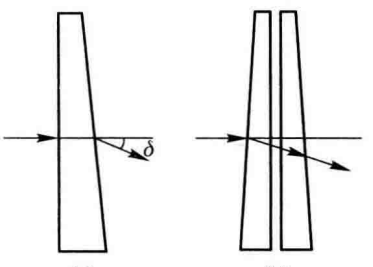


图 1.6-3　光楔

$$\delta=(n-1)\alpha \tag{1.6-6}$$

上式表明，此时所产生的偏向角仅决定于光楔的顶角和材料的折射率. 在光学仪器中常把两块相同的光楔组合在一起[图 1.6-3(b)]，转动其中一块，就可产生不同的偏向角.

由(1.6-5)式可知，当复色光入射到棱镜时，由于组成它的不同波长成分的折射率不同，经过棱镜后就有不同的偏向角，从而可把不同波长成分在空间上分解开产生色散. 若入射为白光，则可得一连续光谱[见彩图 1(b)]. 利用棱镜的色散作用可做成分析光源中谱分布的棱镜光谱仪，如图 1.6-4 所示. 图中两个物镜 L_1、L_2 置于棱镜的两侧，L_1 把通过狭缝的光变为平行光，再经棱镜折射后成为具有各种偏向角的平行单色光，L_2 把这些不同方向的平行单色光聚焦成各色光的狭缝像，即得所要观察的光谱.

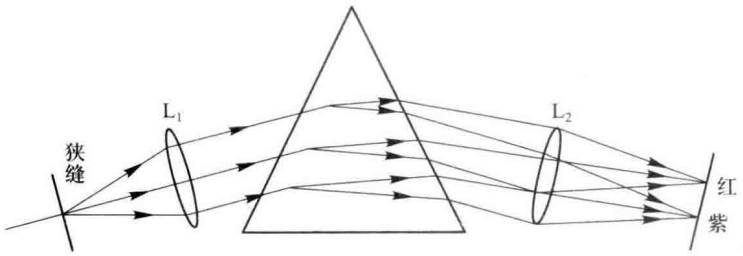


图 1.6-4　棱镜光谱仪

1.6.2　反射棱镜

由于平面反射镜多为薄板，装配时容易变形，影响成像质量，特别是要进行多次反射时，平面反射镜组合更为困难，所以在光学仪器中常使用反射棱镜来改变光束的传播方向. 反射棱镜的类型很多，以下介绍几种较重要者，如图 1.6-5 所示.

(a) 全反射棱镜　它是一个等腰直角棱镜. 垂直入射的光线在斜面上发生全反射后从另一直角面射出，入射光线发生了 90°的偏折，分别沿着入射和出射光线去看，若物体是一右手坐标系，而像却是一左手坐标系，因而它是一个反演系统.

(b) 波罗棱镜　结构同(a)，只不过在不同方向上使用，光线垂直斜面入射，经两次全反射后沿与入射方向相反的方向射出，光线偏了 180°. 分别沿着入射和出射光线去看，物为右手坐标系，像也为右手坐标系，但像相对于物实际上是上下倒转了的.

(c) 五角棱镜　两个反射面是镀银的，垂直入射的光线经棱镜后偏折 90°，但与(a)不同，像相对于出射光线的取向和物相对于入射光线的取向是相同的.

(d) 后向反射镜　也称三垂面反射镜，形如用一个平面切割下立方体的一隅，且顶角的中线垂直于切割平面. 入射光线经三个互相垂直的面相继全反射，若把其中每两个面的交线作为直角坐标系的一个轴，并将入射光线视为一矢量，则经每一面反射时其一个分量反号，经三个面相继反射后，出射光线与入射光线的方向正相反. 在 1967 年阿波罗 11 号登月飞行时，在月球上曾放置了一个“月球激光反射器”，它是由 100 块这样的棱镜排成的阵列，作为地面射向月球的激光的反射器，用以精确地测定月—地距离.

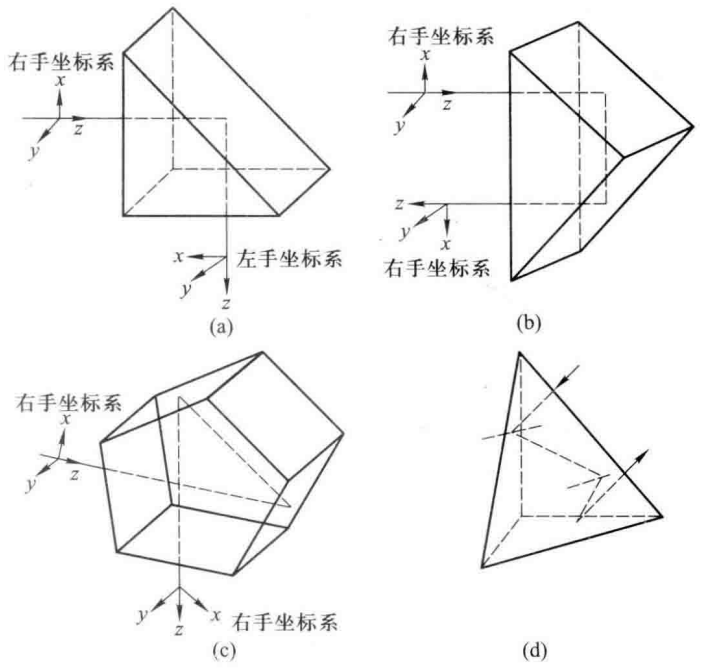


图 1.6-5　反射棱镜

§ 1.7　光在单球面上的折射和反射

设有两种均匀透明的介质，其折射率分别为 n 和 n'，它们被曲率半径为 r 的球面所隔开（图 1.7-1），连接点物 P 和球面曲率中心 C 的直线称为**主光轴**，简称**主轴**. 主光轴和球面的交点 O 称为球面的顶点. 通常入射光线自左方向右方传播. 在 § 1.3 中已指出，两点之间的折射等光程面是卵形面，因而从物点 P 发出的同心宽光束除物位于个别特殊点以外（习题 1.9），经球面折射后一般不再相交于一点而成为像散光束. 但是，从主光轴上任意物点 P 发出的傍轴光束，经球面折射后却能相交于主光轴上一点 P' 成像.

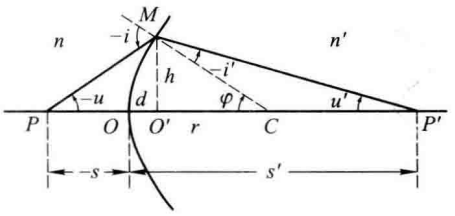


图 1.7-1　光在单球面上的折射

1.7.1　符号规则

为了求出物点和它相应像点位置之间的关系式，我们需要选择一定的基准点和基准线以确定点的位置和光线的方向，并且还应对距离和角度的正负加以规定. 对于单球面系统，通常选择球面顶点作为基准点，而选择主光轴或法线作为基准线，至于距离和角度的正负则作如下规定：

1. 距离

（1）轴向距离（物距、像距、焦距、曲率半径等）从基准点量起，顺入射光方向（习惯上是自左

向右)为正,逆入射光方向为负.

(2) 垂直距离(高度)在主光轴之上为正,在主光轴之下为负.

2. 从基准线向光线转一锐角,旋转方向为顺时针者,该角度为正,反之为负.

3. 图中仅标记距离和角度的绝对值,若用字母所表示的量实际为负量,则字母前应加负号.

1.7.2　由费马原理导出物像距公式

在图 1.7-1 中,我们考虑从 P 点发出的傍轴光线 PM,它经球面折射后与主光轴交于 P'点. 根据上述符号规则,图中各量一律以绝对值表示,所以物距 OP 用 $-s$ 表示,像距 OP'用 s'表示,曲率半径 OC 用 r 表示,根据折射定律和图中的几何关系即可得出物像距关系. 这种推导过程在一般的光学教材中均可找到,以下由费马原理导出物像距公式.

从物点 P 经 M 到像点 P'的光程

$$[PMP'] = nPM + n'MP' \tag{1.7-1}$$

由 $\triangle MO'C$ 中的几何关系可得

$$h^2 = r^2 - (r-d)^2 = d(2r-d)$$

由 $\triangle PMO'$得

$$\begin{aligned} PM &= [(-s+d)^2 + h^2]^{1/2} \\ &= [s^2 + 2d(r-s)]^{1/2} \\ &= (-s)\left[1 + \frac{d(r-s)}{s^2} - \frac{d^2(r-s)^2}{2s^4} + \cdots\right] \end{aligned}$$

根据符号规则,上式中$(-s)$为正值. 同理,由 $\triangle MO'P'$可得

$$MP' = s'\left[1 + \frac{d(r-s')}{s'^2} - \frac{d^2(r-s')^2}{2s'^4} + \cdots\right]$$

在傍轴条件下,$d \ll |s|, s', r$,略去以上二式中二阶以上无穷小量并代入(1.7-1)式得

$$[PMP'] = n(-s)\left[1 + \frac{d(r-s)}{s^2}\right] + n's'\left[1 + \frac{d(r-s')}{s'^2}\right] \tag{1.7-2}$$

根据费马原理的推论,若 P'为 P 点的像,P 和 P'之间各光线的光程应相等,$[PMP'] = [POP']$,即

$$n(-s)\left[1 + \frac{d(r-s)}{s^2}\right] + n's'\left[1 + \frac{d(r-s')}{s'^2}\right] = n(-s) + n's' \tag{1.7-3}$$

化简后得

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{r} \tag{1.7-4}$$

球面两侧的介质和球面的曲率一定时,上式右端是一个常量. 若物距 s 为已知,根据上式即可求出像距 s',从而可确定像点 P'的位置. 由此式可见,在一级近似条件下,O 至 P'点的距离 s'与入射

光线的倾角无关，所以从物点发出的所有傍轴光线经球面折射后与主光轴相交于同一点 P'. 也就是说入射的傍轴同心光束经球面折射后仍为同心光束，出射光束的顶点 P' 即为 P 点的共轭像点. 上式即为单折射球面成像时物像距之间的基本关系式.

对于倾角较大的非傍轴光线，在 PM 和 MP' 的展开式中不能忽略高次项，将它们代入(1.7-1)式中经计算可知，s' 的大小与 d 从而与 h 有关，入射同心光束经球面折射后不再保持为同心光束，即不能成像.

1.7.3 高斯公式和牛顿公式

将(1.7-4)式右端记为

$$\Phi=\frac{n'-n}{r} \tag{1.7-5}$$

称为球面的**光焦度**，单位为 m^{-1}，它表征球面屈折光线的本领. $\Phi>0$ 表示球面使入射光束会聚，$\Phi<0$ 则表示球面使入射光束发散. 通常用屈光度 D(diopter)作为光焦度的单位，1 D = 1 m^{-1}. 例如，对于 $n'=1.5$，$n=1.0$ 和 $r=100$ mm 的球面，其光焦度 $\Phi=5$ D. 实用上常以 1 D 的 1/100 来表示光焦度的大小，称为 1 **度**.

如果位于主光轴上的物点的位置发生改变，则与之共轭的像点的位置也相应改变. 当物点位于光轴上的无穷远即入射光平行于主光轴时，所得像点称为**像方焦点**，记为 F'[图 1.7-2(a)]. 从球面顶点到像方焦点的距离 f' 称为**像方焦距**. 也就是说像方焦距是实物点在无穷远时的特殊像距，由(1.7-4)式可得

$$f'=s'\big|_{-s=\infty}=\frac{n'}{n'-n}r \tag{1.7-6a}$$

如果物点位于主光轴上某一点时，它发出的光束经球面折射后平行于主光轴，这一物点称为**物方焦点**，记为 F[图 1.7-2(b)]. 从球面顶点到物方焦点的距离 f 称为**物方焦距**. 也就是说物方焦距是像点在无穷远时的特殊物距. 由(1.7-4)式可得

$$f=s\big|_{s'=\infty}=-\frac{n}{n'-n}r \tag{1.7-6b}$$

由(1.7-6a)及(1.7-6b)式可知，物方和像方焦点的位置决定于球面的曲率半径和球面两侧介质的折射率. 显然，物方和像方焦点与物点和像点一样，可以是实焦点，也可以是虚焦点，读者不难证明，如果折射球面的凹面向着折射率较小的介质，则两个焦点都是虚焦点.

在图 1.7-2(a)中，与光轴相距为 h 的平行光线的偏向角为

$$\delta=\frac{h}{f'} \tag{1.7-7}$$

上式表明，所有平行于光轴的傍轴入射光线在焦点会聚的必要条件是每一光线的偏向角正比于该光线离光轴的距离. 这个条件对于任何类似的聚焦问题都成立.

通过焦点 F、F' 分别作一平面垂直于主光轴，在傍轴条件下，这两个平面分别称为**物方焦平面**和**像方焦平面**. 从物方焦平面上但不在光轴上的一点 P 发出的光线，经球面折射后成为倾斜方向的平行光束，而一束倾斜的平行光线，经折射后会聚于像方焦平面上一点 P'(图 1.7-3).

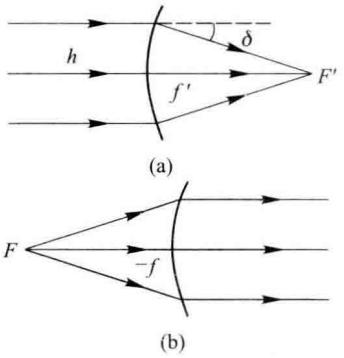


图 1.7-2　物方焦点和像方焦点

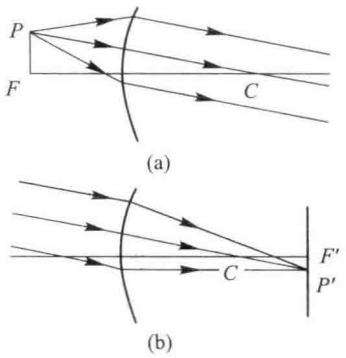


图 1.7-3　物方焦面和像方焦面

由(1.7-6a)和(1.7-6b)式可求得物方和像方焦距的相互关系为

$$\frac{f'}{f}=-\frac{n'}{n} \tag{1.7-8}$$

因为 $n\neq n'$,所以折射球面的两个焦距是不可能相等的,式中右端的负号表明两个焦点总是位于折射面的两侧.

将(1.7-6a)与(1.7-6b)式代入(1.7-5)式可得两个焦距与光焦度的关系为

$$\Phi=\frac{n'}{f'}=-\frac{n}{f} \tag{1.7-9}$$

利用上述焦距公式,可将(1.7-4)式所示的物像距公式用另外两种完全等效的形式来表示. 以$\frac{n'-n}{r}$除(1.7-4)式两端,并以(1.7-6a)和(1.7-6b)式代入,则得

$$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1 \tag{1.7-10}$$

上式称为**高斯公式**.

如果我们不以球面顶点而分别选择物方和像方焦点作为量度物距和像距的基准点,即物距从 F 量起,记为 x,称为**焦物距**,像距从 F'量起,记为 x',称为**焦像距**,则可得物像距公式的另一形式. 由图 1.7-4 可知

$$x=s-f,\quad x'=s'-f' \tag{1.7-11}$$

将上式代入(1.7-10)式,则得

$$xx'=ff' \tag{1.7-12}$$

上式称为**牛顿公式**,式中的焦距仍以球面顶点为基准点. (1.7-11)式则为高斯公式和牛顿公式中物距和像距的变换关系式. 公式(1.7-4)、(1.7-10)、(1.7-12)是完全等效的,应用其中任一个,都可由物点的位置求出其像点的位置.

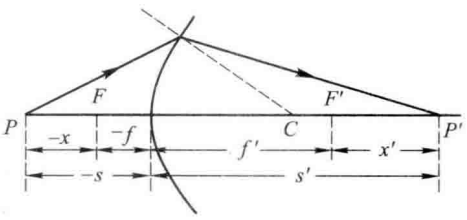


图 1.7-4　高斯公式和牛顿公式物像距的关系

1.7.4 傍轴小平面物体的细光束成像 放大率

在图 1.7-5 中，P'是 P 的傍轴像. 以 C 为中心将主光轴在图面内旋转一小角度 θ，则 P 点转至 Q_1 点，P'转至 Q_1'点. 然后以 CP 为轴，CQ_1 为母线旋转一周，则 PQ_1 将描出半径为 $r-s$ 的球面元 ΔS，相应的 $P'Q_1'$ 也描出半径为 $s'-r$ 的球面元 $\Delta S'$，这两个球面元具有共同的曲率中心 C. 在靠近 C 处放一小光阑 DD'，使通过它的光线都是主光轴附近的细光线，于是 ΔS 上任何一点都按(1.7-4)式生成相应的像点. 因为对于 ΔS 上的所有各点来说，物距 s 都相同，所以它们的像点都具有相同的像距，即是说球面元 $\Delta S'$就是球面元 ΔS 的像. 由于 ΔS 和 $\Delta S'$都很小，我们可以用垂直于主光轴的平面元来代替球面元. 因此对于折射球面，只有当物体处在傍轴区并用细光束成像时，才能获得点成点像、直线成直线像、平面成平面像.

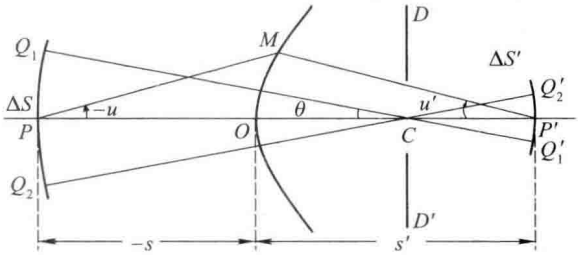


图 1.7-5 小平面物体的细光束成像

设垂直于主光轴的小线段 PQ 高为 y，它的共轭像 $P'Q'$高为 y'(图 1.7-6)，像高与物高的比值称为**横向放大率**或**垂轴放大率**：

$$\beta=\frac{y'}{y} \tag{1.7-13}$$

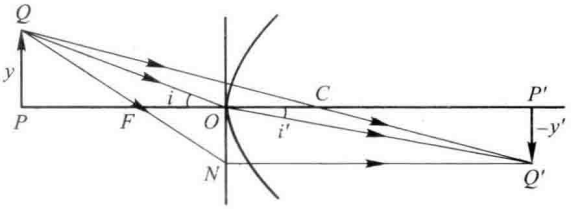


图 1.7-6 横向放大率

过球面顶点 O 作平面垂直于光轴，在傍轴条件下球面上的折射可看作在该平面上的折射. 因为 $\triangle PQF \backsim \triangle NOF$，则有

$$\frac{-y'}{y}=\frac{-f}{-x}$$

于是可得

$$\beta=\frac{y'}{y}=-\frac{f}{x} \tag{1.7-14}$$

应用牛顿公式(1.7-12)式，上式又可写成

$$\beta=-\frac{x'}{f'} \tag{1.7-15}$$

从 Q 作 O 点的入射线 QO，其折射线是 OQ'. 由图 1.7-6 可知

$$\frac{y}{-s}=\tan i,\quad \frac{-y'}{s'}=\tan i'$$

当 PQ 和 $P'Q'$ 很小时

$$\frac{\tan i}{\tan i'}\approx\frac{\sin i}{\sin i'}=\frac{n'}{n}$$

于是可得

$$\frac{ny}{-s}=-\frac{n'y'}{s'}$$

或

$$\beta=\frac{y'}{y}=\frac{ns'}{n's} \tag{1.7-16}$$

上式表明，在球面系统一定的情形下，横向放大率仅仅决定于像距与物距的比值，即决定于物平面与像平面这对共轭面的位置. 在同一对共轭面上放大率为常数，故像必和物相似. 对单折射球面，上式不仅可以说明物像大小的比例，而且还可以说明像的虚实、倒正等性质. 当 $\beta>0$ 时，y' 与 y 同号. 物正立时像也是正立的. 而且此时 s' 与 s 必然具有相同的符号，物与像在同一介质内，即物是实物时，像必定是虚像，反之，当物是虚物时，像必定是实像. 同理可知，当 $\beta<0$ 时，物和像在主光轴的异侧，而且当物是实物时，生成的像也是实像，当物是虚物时，生成的像也是虚像. 总之，当 $\beta>0$ 时，物和像一定是一实一虚；当 $\beta<0$ 时，物和像的虚实相同.

在图 1.7-5 中，P 和 P' 是主光轴上一对共轭点，从物点发出的傍轴光线 PM 与主光轴的夹角为 u，其共轭光线与主光轴的夹角为 u'，这样一对共轭光线与主光轴夹角的比值称为这对光线的**角放大率**：

$$\gamma=\frac{u'}{u} \tag{1.7-17}$$

它表示折射球面改变同心光束张角大小的能力. 在角度很小时，利用关系式 $h=us=u's'$，上式可改写为

$$\gamma=\frac{s}{s'} \tag{1.7-18}$$

由上式并利用(1.7-14)至(1.7-16)式和(1.7-8)式可得

$$\gamma=\frac{u'}{u}=\frac{s}{s'}=\frac{x}{f'}=\frac{f}{x'} \tag{1.7-19}$$

将(1.7-18)式代入(1.7-16)式得

$$\beta=\frac{n}{n'}\cdot\frac{1}{\gamma} \tag{1.7-20}$$

对于给定的两种介质而言，比值$\frac{n}{n'}$不变，所以横向放大率与角放大率成反比. 当像放大时，成像光束与入射光束相比，其张角缩小，当像缩小时，成像光束张角增大.

将(1.7-19)式中的$\frac{s}{s'}=\frac{u'}{u}$代入(1.7-16)式中得

$$nyu=n'y'u' \tag{1.7-21}$$

上式称为**拉格朗日-亥姆霍兹恒等式**，简称**拉-亥公式**. 它表示在傍轴区域内成像时，物空间和像空间的各共轭量之间必须遵守的制约关系.

1.7.5　作图法

利用作图法可以很方便地确定像. 我们已知从任一物点发出的所有傍轴光线经球面折射后都将通过其像点，因此只要找出来自物点的任意两条光线的折射线(或其延长线)的交点，就可以将像点确定下来. 对于单球面折射系统，有下列特殊共轭光线对可供选择：

(1) 平行于主光轴的入射光线，折射后通过像方焦点 F'；

(2) 通过物方焦点 F 的入射光线，折射后平行于主光轴；

(3) 通过球面曲率中心 C 的光线，折射后不改变方向.

图 1.7-7 是用作图法求像的几个例子，其中分别为：(a) 实物成实像；(b) 虚物成实像；(c) 实物成虚像；(d) 虚物成虚像. 图中的数字①、②、③…表示习惯上画线的先后次序. 应当注意，由于球面折射在傍轴近似条件下才能成像，而傍轴光线的折射发生在球面顶点及其附近的小区域，因此我们应把球面的折射画为通过顶点垂直于光轴的平面上的折射.

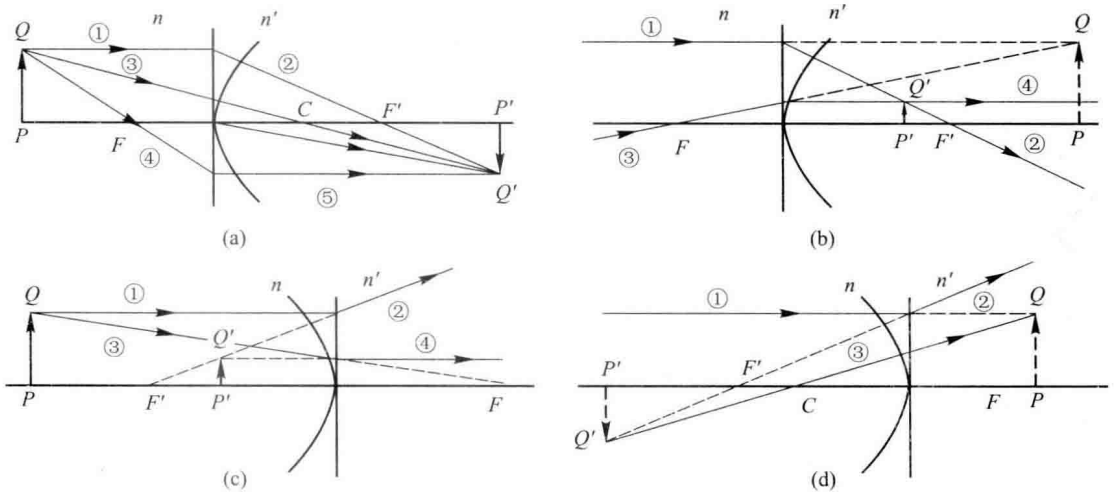


图 1.7-7　作图法求像的几个例子

如果要求位于主光轴上的点物所成的像，此时上述三条可供选择的典型光线互相重合，作图时应利用对主轴倾斜的光线. 如图 1.7-8 所示，从轴上物点 P 引斜光线 PM，过物方焦点引辅助光线 FN 平行于 PM，FN 经球面折射后成为平行于主光轴的光线，且与像方焦面交于 Q 点，连接 MQ 与主光轴的交点 P'即为 P 点的像. 同理，利用像方焦面的特性作辅助线，也可求得像点 P'.

1.7.6　球面反射镜

上述球面折射公式很容易推广到球面反射的情况. 如图 1.7-9 所示,设一光线在球面上的入射角为 i,反射角为 i',按照我们约定的符号规则,i'应为负数. 于是反射定律应写为

$$i=-i'$$

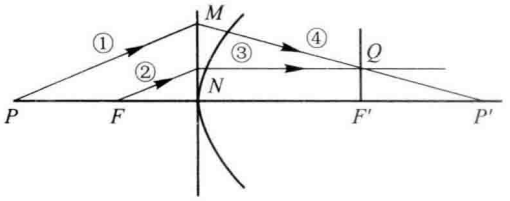


图 1.7-8　轴上物点成像作图法

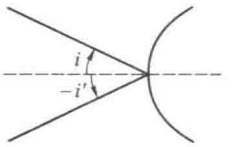


图 1.7-9　光在球面上的反射

在傍轴区域内折射定律则应写为

$$ni=n'i'$$

上式中 i'为折射角,如果将反射看作是折射的特殊情况,即将 $i=-i'$代入上式,则得

$$n'=-n$$

由此可见,反射可看成是从折射率为 n 的介质到折射率为 $-n$ 的介质的特殊折射. 将上式代入(1.7-4)式,得球面反射的物像距公式

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{2}{r} \tag{1.7-22}$$

在上述单球面折射的各公式中,只需形式地令 $n'=-n$ 就可得出球面反射镜的相应公式. 为简明计,我们把它们列于表 1.7-A 中.

表 1.7-A　球面折射和球面反射公式对照表

	球面折射成像公式	球面反射成像公式	
物像距	$\frac{n'}{s'}-\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}$	$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{2}{r}$	(1.7-22)
	$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1$	$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{f}$	(1.7-23)
	$xx'=ff'$	$xx'=f^2$	(1.7-24)
焦距和光焦度	$\Phi=\frac{n'-n}{r}$	$\Phi=\frac{-2n}{r}$	(1.7-25)
	$f'=\frac{n'}{n'-n}r$	$f'=\frac{r}{2}$	(1.7-26a)
	$f=-\frac{n}{n'-n}r$	$f=\frac{r}{2}$	(1.7-26b)
	$\frac{f'}{f}=-\frac{n'}{n}$	$\frac{f'}{f}=+1$	(1.7-26c)

续表

	球面折射成像公式	球面反射成像公式	
横向放大率	$\beta=\dfrac{ns'}{n's}$	$\beta=-\dfrac{s'}{s}$	(1.7-27)

由(1.7-22)式可知,球面反射镜成像情况与所处的介质无关,(1.7-26)式则表明球面反射镜的物空间与像空间重合,其焦点位于 $r/2$ 处.

表 1.7-A 所列球面折射和反射成像公式均为傍轴条件下得出的. 由费马原理可以证明抛物面、椭球面、双曲面等非球面镜具有优于球面镜的成像特性(例 1.2-1、1.2-2),但其加工和检测颇为困难且价格昂贵. 随着电子计算机控制的研磨技术的发展和检测技术的提高,非球面镜的应用也日益增加,如现代大型天文望远镜、侦察相机中的主镜均采用非球面镜.

例 1.7-1 设有一半径为 3 cm 的凹球面,球面两侧介质的折射率分别为 $n=1$ 和 $n'=1.5$,一会聚光束入射到界面上,光束的顶点在球面右侧距球面顶点 3 cm 处,求像的位置.

解 由(1.7-4)式

$$\frac{n'}{s'}-\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}$$

将 $n=1, n'=1.5, r=-3$ cm, $s=3$ cm 代入上式,则得

$$s'=9 \text{ cm}$$

即在球面右侧距顶点 9 cm 处生成一实像(图 1.7-10).

本题中 P 点是入射会聚同心光束的顶点,如果折射球面不存在,入射光束将在 P 点会聚. 然而由于折射球面的作用,入射光束在尚未会聚到 P 点之前就被球面折射了,因此 P 点是虚物点.

应当注意,因为虚物点位于球面的右侧,故在上面的计算中物距 s 取正值,而入射光束在球面左侧,所以物空间的折射率应取 $n=1$.

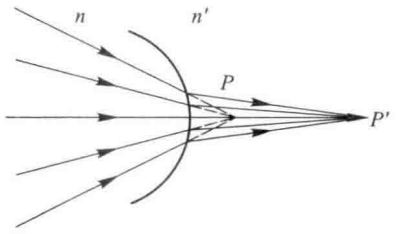


图 1.7-10 虚物成实像

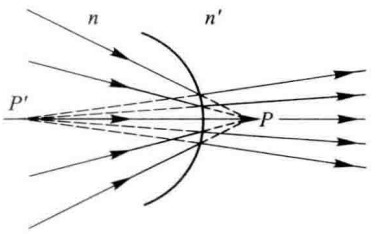


图 1.7-11 虚物成虚像

例 1.7-2 同上题,设会聚光束顶点在球面右侧距球面顶点 12 cm 处,求像的位置.

解 由(1.7-4)式

$$\frac{n'}{s'}-\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}$$

将 $n=1, n'=1.5, r=-3$ cm, $s=12$ cm 代入上式,则得

$$s'=-18 \text{ cm}$$

即在球面左侧距顶点 18 cm 处生成一虚像(图 1.7-11).

例 1.7-1 表明虚物成实像的情况,例 1.7-2 则表明虚物成虚像的情况. 虚物和实物一样,都是和一定的入射

光束相对应的，所以它既能成实像也能成虚像. 还应注意，虚像 P' 虽然位于折射球面左侧，但因经球面折射后的成像光束是处在折射球面的右侧，所以像空间折射率应取为 $n'=1.5$.

§1.8 薄　透　镜

两个折射面包围一种透明介质而成的光学元件称为**透镜**. 折射面可以是球面或非球面，尽管折射球面的光学性质并不十分理想，但是由于非球面的加工和检验颇为困难，所以绝大多数透镜皆为两个共轴球面组成，只是在一些特殊情况下才使用非球面透镜.

球面透镜的两个球面顶点间的轴向距离称为透镜的厚度 d. 如果透镜的厚度与其和成像性质相关的距离（例如物距、像距、焦距、曲率半径）相比小得多，从而可以略去不计时，称之为**薄透镜**，否则称为**厚透镜**. 对于薄透镜，两个球面的顶点可以近似认为是与其中心即薄透镜的**光心**重合的. 薄透镜的种类很多，按其形状的不同，可以分为凸和凹两类，前者的中央较边缘厚，而后者的边缘较中央厚，如图 1.8-1 所示.

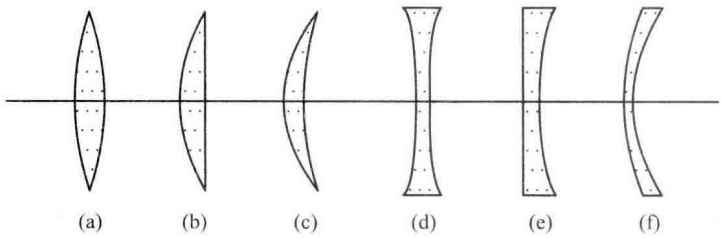


图 1.8-1　各种形状的薄透镜

(a) 双凸；(b) 平凸；(c) 正新月形；(d) 双凹；(e) 平凹；(f) 负新月形

1.8.1 物像距公式

图 1.8-2 为一薄凸透镜，设 n_0 为透镜材料的折射率，r_1 和 r_2 为第一和第二球面的曲率半径，n 和 n' 为透镜物空间和像空间介质的折射率. 物体通过透镜成像，就是由物体发出的光束在它的两个球面上相继折射的结果. 设在透镜主光轴上有一点物 P，它经第一球面成像于 P'，P' 可看作第二球面的物，再经第二球面成像于 P''，它也就是 P 点经透镜所成的像. 选取透镜的中心作为量度轴向距离的基准点，则按 (1.7-4) 式可对两个球面分别写出

$$\frac{n_1'}{s_1'}-\frac{n_1}{s_1}=\frac{n_1'-n_1}{r_1},\qquad \frac{n_2'}{s_2'}-\frac{n_2}{s_2}=\frac{n_2'-n_2}{r_2}$$

将 $s_1=s,s_2'=s',s_1'=s_2,n_1'=n_2=n_0,n_1=n,n_2'=n'$ 分别代入上面两式并相加得

$$\frac{n'}{s'}-\frac{n}{s}=\frac{n_0-n}{r_1}+\frac{n'-n_0}{r_2}\qquad (1.8-1)$$

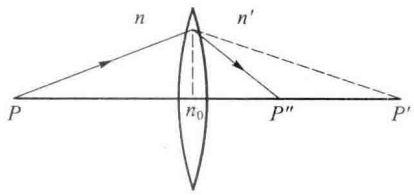


图 1.8-2　薄透镜成像

上式即为薄透镜成像的物像距公式.

1.8.2 焦点、焦距、光焦度 高斯公式与牛顿公式

与单球面折射相类似，可以引入焦距或光焦度来表示透镜的特性. 平行于主光轴入射的平行光束经透镜折射后与主光轴的交点 F' 称为透镜的像方焦点. 从透镜中心到像方焦点的距离称为像方焦距 f'，在(1.8-1)式中，令 $-s=\infty$ 得

$$f'=\frac{n'}{\dfrac{n_0-n}{r_1}+\dfrac{n'-n_0}{r_2}} \tag{1.8-2}$$

若从置于主光轴上某点 F 的点物发出的同心光束经透镜折射后成为平行于主光轴的平行光束，则 F 点称为透镜的物方焦点. 从透镜中心到物方焦点的距离 f 称为物方焦距，在(1.8-1)式中令 $s'=\infty$ 得

$$f=\frac{-n}{\dfrac{n_0-n}{r_1}+\dfrac{n'-n_0}{r_2}} \tag{1.8-3}$$

由(1.8-2)和(1.8-3)式得

$$\frac{f'}{f}=-\frac{n'}{n} \tag{1.8-4}$$

上式表明薄透镜的两个焦距恒异号，因此两焦点一定分布在透镜的两侧. 由(1.8-2)与(1.8-3)式可见，薄透镜的焦距除了取决于透镜的几何形状(r_1，r_2)和材料(n_0)外，还和它两侧介质的折射率(n，n')有关. 我们定义比值 $\dfrac{n'}{f'}$ 为透镜的光焦度，记为 Φ，即

$$\Phi=\frac{n'}{f'}=-\frac{n}{f}=\frac{n_0-n}{r_1}+\frac{n'-n_0}{r_2} \tag{1.8-5}$$

当 $\Phi>0$ 时($f'>0$)，F 和 F' 是实焦点，此透镜系统是会聚系统；当 $\Phi<0$ 时($f'<0$)，F 和 F' 是虚焦点，此透镜系统是发散系统.

通过焦点 F 和 F' 分别作一平面垂直于主光轴，在傍轴条件下，这两个平面分别称为物方焦平面和像方焦平面，它们的共轭面分别是像空间和物空间内无限远处的垂轴平面.

以 $\left(\dfrac{n_0-n}{r_1}+\dfrac{n'-n_0}{r_2}\right)$ 除(1.8-1)式各项得

$$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1 \tag{1.8-6}$$

上式即为高斯公式. 若以 F 和 F' 分别作为计算物距和像距的基准点，则可得牛顿公式

$$xx'=ff' \tag{1.8-7}$$

通常情况下薄透镜置于空气中，$n=n'=1$，则焦距公式(1.8-2)和(1.8-3)式及光焦度公式(1.8-5)式成为

$$f'=-f=\frac{1}{(n_0-1)\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)} \tag{1.8-8}$$

$$\Phi=(n_0-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) \tag{1.8-9}$$

当$\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}>0$时，$\Phi>0$，薄透镜是凸透镜[图 1.8-1(a)、(b)、(c)]；当$\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}<0$时，$\Phi<0$，薄透镜是凹透镜[图 1.8-1(d)、(e)、(f)]. 而这时高斯公式和牛顿公式则成为

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \tag{1.8-10}$$

$$xx'=-f'^2 \tag{1.8-11}$$

1.8.3　放大率

设物高为 y，第一球面所生成的像高为 y_1'，透镜最后所生成的像高为 y'，由(1.7-16)式，透镜两球面的横向放大率为

$$\beta_1=\frac{y_1'}{y}=\frac{n_1}{n_1'}\cdot\frac{s_1'}{s_1},\quad \beta_2=\frac{y'}{y_1'}=\frac{n_2}{n_2'}\cdot\frac{s_2'}{s_2}$$

则透镜的横向放大率为

$$\beta=\frac{y'}{y}=\beta_1\beta_2=\frac{n_1n_2}{n_1'n_2'}\cdot\frac{s_1's_2'}{s_1s_2}$$

在上式中令 $s_1=s$，$s_2=s_1'$，$s_2'=s'$，$n_1=n$，$n_2'=n'$，$n_1'=n_2=n_0$，则得

$$\beta=\frac{n}{n'}\cdot\frac{s'}{s}=-\frac{f}{f'}\cdot\frac{s'}{s} \tag{1.8-12}$$

设透镜物空间和像空间的折射率相等，即 $n=n'$，则(1.8-12)式成为

$$\beta=\frac{s'}{s} \tag{1.8-13}$$

若以 x 和 x' 分别表示物距和像距，由图 1.8-3 可得

$$\beta=\frac{y'}{y}=-\frac{f}{x}=-\frac{x'}{f'} \tag{1.8-14}$$

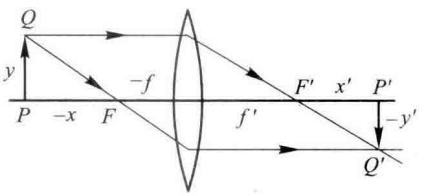


图 1.8-3　垂轴放大率

一个三维物体可视为由许多点物所组成，每一点物经透镜生成一点像，因此三维物体的像也应占据一个三维空间区域. 设物空间中的轴向方向一无穷小线段长度为 $\mathrm{d}x$，其对应的像的长度为 $\mathrm{d}x'$，则称其比值

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}x} \tag{1.8-15}$$

为透镜的**纵向放大率**. 对牛顿公式(1.8-11)两端取微分可得

$$\alpha=\frac{f'^2}{x^2}=\beta^2$$

因 α 恒为正，由(1.8-15)式可知，正的 $\mathrm{d}x$ 对应于正的 $\mathrm{d}x'$，反之亦然. 换言之，物在光轴方向指向透镜时，其像的指向则是离开透镜，如图 1.8-4 中的中指所示.

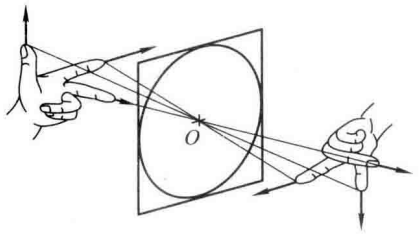


图 1.8-4 纵向放大率

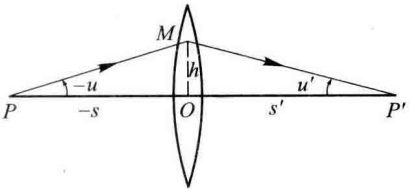


图 1.8-5 角放大率

在图 1.8-5 中，u 和 u' 为一对共轭光线与主光轴的夹角，于是角放大率为

$$\gamma=\frac{u'}{u}$$

因为薄透镜的厚度可视为零，光线在透镜中的偏折可不予考虑. 由 $\triangle POM$ 及 $\triangle P'OM$ 可得 $h=(-u)(-s)=u's'$，则

$$\gamma=\frac{u'}{u}=\frac{s}{s'} \tag{1.8-16}$$

由(1.8-12)及(1.8-16)式得

$$\gamma=\frac{n}{n'}\cdot\frac{1}{\beta} \tag{1.8-17}$$

例 1.8-1 一双凸透镜两球面的曲率半径都是 12 cm，透镜玻璃的折射率为 1.5，若将此透镜(1) 置于空气中，(2) 置于折射率为 1.62 的 CS_2 中，求透镜的焦距.

解 (1) 若将透镜置于空气中，将 $r_1=12$ cm，$r_2=-12$ cm，$n_0=1.5$ 代入(1.8-8)式，得

$$f'=-f=\frac{1}{(n_0-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}=\frac{1}{(1.5-1)\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{-12}\right)}\ \text{cm}=12\ \text{cm}$$

(2) 若将透镜置于 CS_2 中，由(1.8-2)与(1.8-3)式

$$f'=-f=\frac{n}{(n_0-n)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}=\frac{1.62}{(-0.12)\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{-12}\right)}\ \text{cm}=-81\ \text{cm}$$

由此可见，透镜置于不同介质中时其焦距不同，而且当凸透镜置于其折射率比透镜本身材料的折射率大的介质中时，透镜的像方焦距(或光焦度)为负，它是一个发散透镜.

例 1.8-2 一双凸薄透镜两球面的曲率半径均为 100 cm，一高为 2 cm 的物体在光轴上距透镜 20 cm，透镜材料折射率 $n_0=1.5$，物方为空气，$n=1.00$，像方为水，$n'=1.33$，求物体经透镜所成的像，并作图.

解 已知 $r_1=100$ cm，$r_2=-100$ cm，$n_0=1.5$，$n=1.00$，$n'=1.33$，代入(1.8-2)和(1.8-3)式得

$$f'=\frac{n'}{\frac{n_0-n}{r_1}+\frac{n'-n_0}{r_2}}=\frac{1.33}{\frac{0.50}{100}+\frac{1.33-1.50}{-100}}\ \text{cm}=198.5\ \text{cm}$$

$$f=\frac{-n}{\frac{n_0-n}{r_1}+\frac{n'-n_0}{r_2}}=\frac{-1}{\frac{0.50}{100}+\frac{1.33-1.50}{-100}}\ \text{cm}=-149.2\ \text{cm}$$

已知 $s=-20$ cm，由(1.8-6)式得

$$s'=\frac{f'}{1-\dfrac{f}{s}}=\frac{198.5}{1-\left(\dfrac{-149.2}{-20}\right)}\ \text{cm}=-30.7\ \text{cm}$$

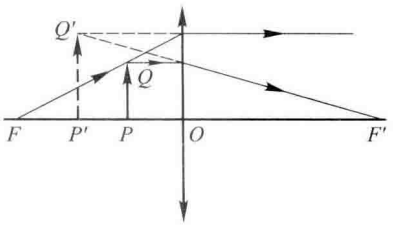


图 1.8-6

由(1.8-13)式得

$$y'=\beta y=\frac{ns'}{n's}\cdot y=\frac{-30.7}{-20\times1.33}\times2\ \text{cm}=2.31\ \text{cm}$$

即在透镜左侧 30.7 cm 处生成 2.31 cm 高的虚像. 因为透镜物像空间介质折射率不等，由图 1.8-6 可见，从物顶端 Q 发出通过透镜中心 O 的入射线的延长线并不通过像的顶端 Q'.

§1.9　共轴球面系统的逐次成像法

上节讨论了两个球面所组成的薄透镜，大多数实际的光学系统都含有多个折射(或反射)球面. 如果所有这些球面的中心都在一条直线上，则称之为共轴球面系统，这条直线称为系统的**主光轴**. 在 §1.4 中已指出，在傍轴近似条件下，共轴球面系统可近似看作理想光学系统，因而可以成像.

图 1.9-1 所示为一含有 m 个球面的共轴球面折射系统. 为了求出物体 PQ 经整个系统所成的像，可用逐次成像法. 首先用物像距公式或作图法求出它经第一球面 Σ_1 所成的像 $P'Q'$，此时假定其他折射面都不存在，然后把 $P'Q'$ 当作第二球面 Σ_2 的物，求 Σ_2 所成的像 $P''Q''$，再将 $P''Q''$ 作为第三球面的物……如此下去经最后一个球面所成的像 $P^{m}Q^{m}$ 就是物体 PQ 经整个系统所成的像.

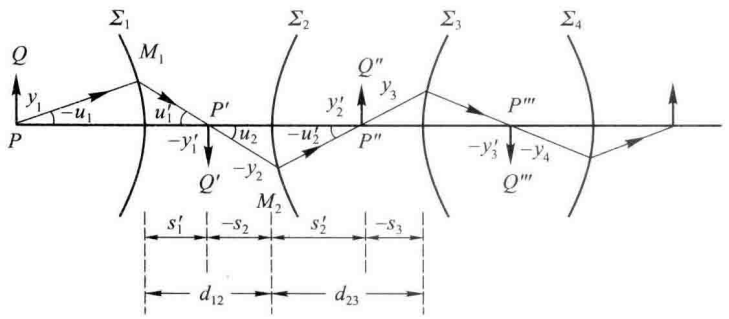


图 1.9-1　共轴球面折射系统

对每一个球面写出物像距公式

$$\left.\begin{aligned}&\frac{n_1'}{s_1'}-\frac{n_1}{s_1}=\frac{n_1'-n_1}{r_1}\\&\qquad\vdots\\&\frac{n_m'}{s_m'}-\frac{n_m}{s_m}=\frac{n_m'-n_m}{r_m}\end{aligned}\right\}\ \text{共 } m \text{ 个}\qquad(1.9\text{-}1)$$

相邻两球面顶点之间的距离为

$$d_{12}=s_1'-s_2,\quad d_{23}=s_2'-s_3,\quad \cdots,\quad d_{(m-1)(m)}=s_{m-1}'-s_m \tag{1.9-2}$$

在系统一定的情况下，每个球面的半径和它两侧空间介质的折射率是已知的，对于给定的 s_1，上列两组方程式中未知量的个数和方程式数目相等，因此从原则上讲总可以由它们求出最后的像距 s_m'.

像的垂轴放大率为

$$\beta=\frac{y_m'}{y_1}$$

因为 $y_1'=y_2, y_2'=y_3, \cdots$，上式可写为

$$\beta=\frac{y_m'}{y_1}=\frac{y_1'y_2'}{y_1y_2}\cdots\frac{y_m'}{y_m}=\beta_1\cdot\beta_2\cdot\cdots\cdot\beta_m \tag{1.9-3}$$

即**总的垂轴放大率是各个球面垂轴放大率的乘积.**

在 § 1.7 中已指出，每一个球面折射成像必然遵守拉-亥公式(1.7-21)式，即

$$n_1y_1u_1=n_1'y_1'u_1',\quad n_2y_2u_2=n_2'y_2'u_2',\quad \cdots,\quad n_my_mu_m=n_m'y_m'u_m'$$

对其中任意第 i 面，有下列关系

$$n_{i-1}'=n_i,\quad u_{i-1}'=u_i,\quad y_{i-1}'=y_i$$

于是有

$$n_1y_1u_1=n_1'y_1'u_1'=n_2y_2u_2=\cdots=n_m'y_m'u_m'$$

也即

$$n_1y_1u_1=n_m'y_m'u_m' \tag{1.9-4}$$

上式左端为系统物空间的量，右端为像空间的相应量. 上式表明，系统成像时物像空间的 nyu 是一个常量.

例 1.9-1 设空气中两个薄透镜 L_1 和 L_2 的光焦度分别为 Φ_1 和 Φ_2，将它们密切接触，求组合系统的光焦度.

解 两薄透镜密切接触形成的组合，可以起一个单透镜的作用，其物方和像方主焦点对称地位于系统中心两侧的 F 和 F'. 如图 1.9-2 所示，一束平行于光轴的光线入射到 L_1，经折射后会聚于其像方焦点 F_1'，再经 L_2 折射后会聚于组合系统的像方焦点 F'. 按照逐次成像法，平行光经 L_1 所成的像点 F_1' 即为 L_2 的物点. 对 L_2 应用高斯公式，将 $s_2=f_1', s_2'=f'$ 代入(1.8-10)式得

$$\frac{1}{f_1'}+\frac{1}{f_2'}=\frac{1}{f'}\quad 或\quad \Phi=\Phi_1+\Phi_2 \tag{1.9-5}$$

上式表明**密接薄透镜组的光焦度等于各透镜的光焦度之和.**

用逐次成像法还可以证明，空气中相距为 d 的两薄透镜组合的光焦度为

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2-d\Phi_1\Phi_2 \tag{1.9-6}$$

厚透镜的光焦度则为

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2-(d/n)\Phi_1\Phi_2 \tag{1.9-7}$$

式中 Φ_1 和 Φ_2 分别为厚透镜第 1、2 球面的光焦度，d 为厚透镜两折射面顶点之间的距离，n 为透镜材料的折射率.

例 1.9-2 有一玻璃半球，折射率为 1.5，球面半径为 5.0 cm，平面镀银. 在球面顶点前方10.0 cm处有一小物

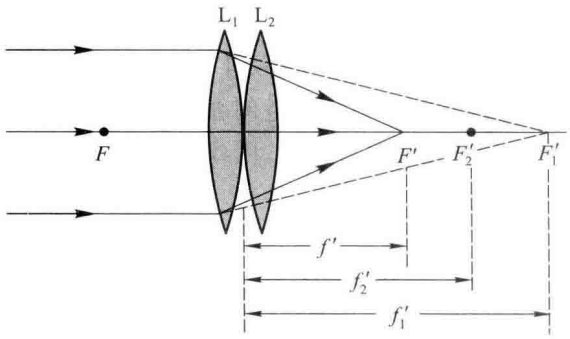


图 1.9-2　密接薄透镜组

体，用逐次成像法求它经这个系统最后所成的像.

解　第一步，求物体经凸球面折射所成的像. 由(1.7-4)式

$$\frac{n_1'}{s_1'}-\frac{n_1}{s_1}=\frac{n_1'-n_1}{r_1}$$

将 $n_1=1, n_1'=1.5, r_1=5.0\ \text{cm}, s_1=-10\ \text{cm}$ 代入上式得 $s_1'=+\infty$. 这表明物体位于球面的物方焦面上，物体上各点发出的光线经凸球面折射后成为平行光线入射到平面上.

第二步，求平面反射所成的像. 入射到平面上的平行光束反射后仍为平行光束. 即反射平面右方 $+\infty$ 处的虚物经反射后在左方 $-\infty$ 处成实像，垂轴放大率 $\beta=+1$.

第三步，求平面反射回来的光线经凹面折射所成的像. 应当注意，现在光线是自右向左入射，左方无穷远处的物体是凹折射面的虚物. 将 $n_3=1.5, n_3'=1, r_3=-5.0\ \text{cm}, s_3=+\infty$ 代入(1.7-4)式得

$$s_3'=\frac{n_3'}{n_3'-n_3}\cdot r_3=\frac{1}{1-1.5}\cdot(-5)\ \text{cm}=10\ \text{cm}$$

总的垂轴放大率

$$\beta=\beta_1\beta_2\beta_3=\frac{n_1 s_1'}{n_1' s_1}\times 1\times\frac{n_3 s_3'}{n_3' s_3}=-1$$

即最后在物体原位置处生成与物体等大而倒立的实像(图 1.9-3).

例 1.9-3　一个凹面镜焦距为 125 mm，水平放置，凹面向上，并在凹面上注以 CS_2 液体，液体中心厚度为 7 mm，当一个发光点放在光轴上距液面 150 mm 时，其像点与物点重合，试求 CS_2 的折射率(图 1.9-4).

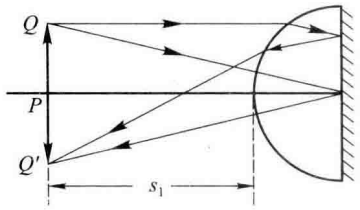


图 1.9-3

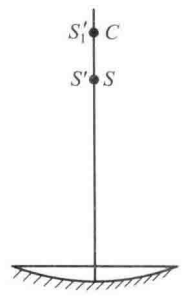


图 1.9-4

解　物点 S 经平面折射所成的像作为球面镜的物，经球面镜反射后再经平面折射生成最后像. 按照光的可逆性，仅当物点 S 经平面折射所成的像 S_1' 在凹面反射镜的曲率中心 C 处时，通过凹面镜反射的光线沿原路返回，再经平面折射最后所成的像 S' 才能与物点 S 重合. 已知物点到液面距离 $s=150\ \text{mm}$，S_1' 到液面距离 $s'=2\times125\ \text{mm}$

$-7\ \text{mm}=243\ \text{mm}$，物空间折射率 $n=1$，由(1.4-2)式得

$$n'=n\times\frac{s'}{s}=\frac{243}{150}=1.62$$

即 CS_2 折射率为 1.62，读者可用逐次成像法验证以上结论.

§ 1.10　共轴球面系统傍轴成像的矩阵方法

早在 20 世纪 30 年代初，T. Smith 就指出，无像差系统是一个线性系统，可用矩阵运算来追踪光线相继通过各折射面的路径. 由于这种方法特别适合于用计算机作运算，所以直到 60 年代以后随着电子计算机的发展才充分显示出了其优越性. 下面讨论用矩阵方法处理共轴球面系统的傍轴成像问题.

1.10.1　状态矩阵、折射矩阵和平移矩阵

在共轴球面系统中，通过空间某点 M 沿某方向传播的光线的位置即是它的状态，可用 M 点离光轴的高度 y 和光线相对于光轴的倾角 u 两个参量确定(图 1.10-1). 不过光线在界面上的折射与界面两侧介质折射率有关，为了运算上的方便，我们采用光线与光轴的倾角和光线所在介质的折射率 n 的乘积 nu 代替 u 来描写光线的状态. 例如图中过球面 M 点的入射线 SM 的状态可表示为 (nu,y)，折射线 MS' 的状态可表示为 $(n'u',y')$.

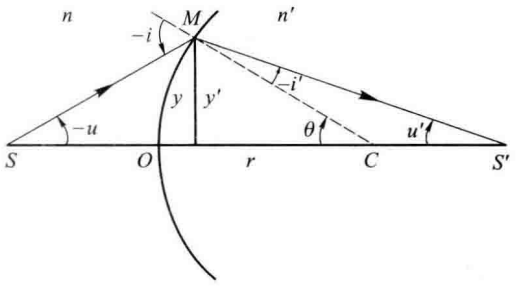


图 1.10-1　折射过程中光线状态的变换

光线在共轴球面折射系统中的传播，不外乎是在介质分界面上的折射和同一介质中的平移两种过程，下面我们讨论在折射和平移过程中光线状态变换的规律.

如图 1.10-1 所示，入射光线在球面上 M 点折射，在傍轴条件下折射定律可写为

$$n'(-i')=n(-i)$$

即

$$n'(\theta-u')=n(\theta-u)$$

设在 M 点入射线和折射线离光轴高度为 y 和 y'，则

$$\theta=\frac{y}{r},\quad y'=y$$

于是可将过 M 点的入射和折射线状态的变换用下式表示：

$$\left.\begin{aligned}n'u'&=nu+\Phi y\\ y'&=0+y\end{aligned}\right\}\tag{1.10-1}$$

式中 $\Phi=\dfrac{n'-n}{r}$ 是折射球面的光焦度. 上式表明折射线状态参量 $(n'u',y')$ 和入射线状态参量 $(nu,$

y)之间的变换是线性的,因此可用矩阵算符表示为

$$\begin{bmatrix} n'u' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Phi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} nu \\ y \end{bmatrix} \tag{1.10-2}$$

上式中的两个二维列矩阵分别表示入射线和折射线的状态,称为**状态矩阵**,记为

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} nu \\ y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L}' = \begin{bmatrix} n'u' \\ y' \end{bmatrix} \tag{1.10-3}$$

(1.10-2)式中的二行二列矩阵表示光焦度为 Φ 的折射球面对入射光线状态的变换作用,称为**折射矩阵**,记为

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 & \Phi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.10-4}$$

而且它的行列式

$$\det \boldsymbol{R} = 1$$

于是(1.10-2)式可写为

$$\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{R}\boldsymbol{L} \tag{1.10-5}$$

上式表明,只要将折射矩阵 $\boldsymbol{R}$ 对入射线状态矩阵 $\boldsymbol{L}$ 作用,便可得到折射线的状态矩阵 $\boldsymbol{L}'$.

在图 1.10-2 中,O_1 和 O_2 是相邻两共轴球面,在两折射球面之间,光线是在同一种均匀介质中沿直线 M_1M_2 传播. O_1 球面上 M_1 点的折射线状态矩阵 $\boldsymbol{L}_1'$ 和 O_2 球面上 M_2 点的入射线状态矩阵 $\boldsymbol{L}_2$ 分别为

$$\boldsymbol{L}_1' = \begin{bmatrix} n_1'u_1' \\ y_1' \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L}_2 = \begin{bmatrix} n_2u_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

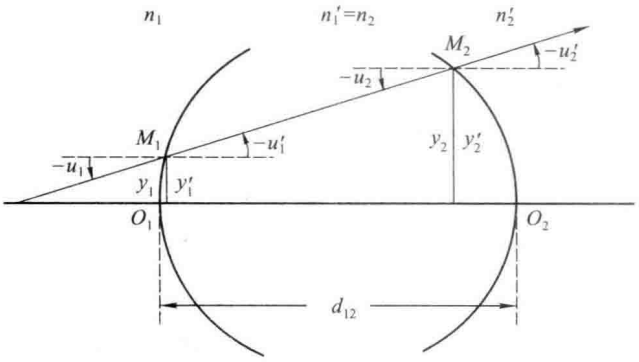


图 1.10-2　平移过程中光线状态的变换

由于 $n_1'=n_2$,$u_1'=u_2$,并考虑到傍轴近似,应有

$$n_2u_2 = n_1'u_1'$$

$$y_2 = d_{12}(-u_1') + y_1' = -\frac{d_{12}}{n_1'}n_1'u_1' + y_1'$$

即

$$\left.\begin{aligned} n_2u_2 &= n_1'u_1'+0 \\ y_2 &= -\frac{d_{12}}{n_1'}n_1'u_1'+y_1' \end{aligned}\right\} \tag{1.10-6}$$

上式表示光线在平移过程中其状态参量的变换也是个线性变换，同样可以用矩阵符号表示为

$$\begin{bmatrix} n_2u_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{d_{12}}{n_1'} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1'u_1' \\ y_1' \end{bmatrix} \tag{1.10-7}$$

上式中的二行二列矩阵称为**平移矩阵**，记为

$$\boldsymbol{T}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{d_{12}}{n_1'} & 1 \end{bmatrix} \tag{1.10-8}$$

而且它的行列式

$$\det \boldsymbol{T}_{21} = 1$$

(1.10-7)式可写为

$$\boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{T}_{21}\boldsymbol{L}_1' \tag{1.10-9}$$

由上式可见，只要将平移矩阵 $\boldsymbol{T}_{21}$ 对平移前光线状态矩阵 $\boldsymbol{L}_1'$ 作用，便可得平移后的光线状态矩阵 $\boldsymbol{L}_2$.

1.10.2　系统的传递矩阵

图 1.10-3 所示为由 m 个折射球面组成的共轴系统. 在傍轴近似条件下，O_1 球面上 M_1 点入射线和 O_m 球面上 M_m 点出(折)射线状态矩阵分别为

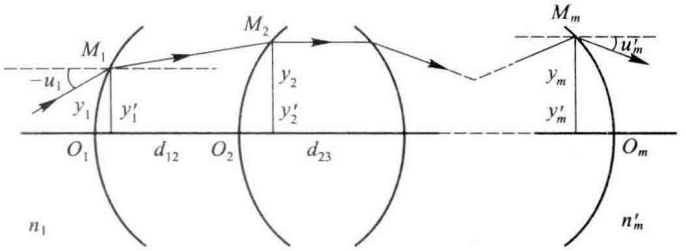


图 1.10-3　光线经共轴球面系统的状态变换

$$\boldsymbol{L}_1 = \begin{bmatrix} n_1u_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L}_m' = \begin{bmatrix} n_m'u_m' \\ y_m' \end{bmatrix}$$

入射线进入系统，经过 m 次折射和 $m-1$ 次平移，最后成为出射线. 令 $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \cdots, \boldsymbol{R}_m$ 表示第 1，第 2，…，第 m 个折射球面的折射矩阵；$T_{21}, T_{32}, \cdots, T_{(m)(m-1)}$，分别表示第 1、2 球面间，第 2、3 球面间，…，第 $m-1$、m 球面间的平移矩阵. 通过 O_1 球面上 M_1 点的折射线的状态矩阵为

$$\boldsymbol{L}_1' = \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{L}_1$$

通过 O_2 球面上 M_2 点的入射线的状态矩阵为

$$\boldsymbol{L}_2=\boldsymbol{T}_{21}\boldsymbol{L}_1'=\boldsymbol{T}_{21}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{L}_1$$

通过 O_2 球面上 M_2 点的折射线的状态矩阵为

$$\boldsymbol{L}_2'=\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{L}_2=\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{T}_{21}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{L}_1$$

依此类推，可得出系统最后折射球面上 M_m 点的出射线的状态矩阵为

$$\boldsymbol{L}_m'=\boldsymbol{R}_m\boldsymbol{T}_{(m)(m-1)}\boldsymbol{R}_{m-1}\cdots\boldsymbol{R}_3\boldsymbol{T}_{32}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{T}_{21}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{L}_1 \tag{1.10-10}$$

上式右端各折射矩阵和平移矩阵的乘积称为系统的**传递矩阵**或**系统矩阵**，它决定一条光线在系统内的路径，记为 $\boldsymbol{S}$：

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{R}_m\boldsymbol{T}_{(m)(m-1)}\boldsymbol{R}_{m-1}\cdots\boldsymbol{R}_3\boldsymbol{T}_{32}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{T}_{21}\boldsymbol{R}_1 \tag{1.10-11}$$

因为折射矩阵和平移矩阵的矩阵元只与共轴系统的结构参数有关而与光线的状态参数无关，所以系统的传递矩阵也只与系统的结构参数有关. 而且由于折射矩阵和平移矩阵都是二行二列矩阵，所以系统的传递矩阵也是二行二列矩阵，它可写为

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12}\\ S_{21} & S_{22}\end{bmatrix} \tag{1.10-12}$$

式中 S_{ij} 称为传递矩阵的第 i 行第 j 列矩阵元，这四个数称为**高斯常数**. 于是(1.10-10)式可写为

$$\boldsymbol{L}_m'=\boldsymbol{S}\boldsymbol{L}_1 \tag{1.10-13}$$

当系统的传递矩阵为已知时，由上式便可将入射线状态 $\boldsymbol{L}_1$ 变换为出射线状态 $\boldsymbol{L}_m'$. 当入射线状态已知时，传递矩阵完全决定了出射线状态.

在计算传递矩阵时应注意两点：

(1) 矩阵的乘法是不满足交换律的，所以(1.10-11)式右端必须按逆入射光传播方向的顺序取各元矩阵，依次排列；

(2) 由于折射矩阵和平移矩阵的行列式均等于 1，按矩阵乘积的行列式等于各矩阵行列式的乘积这一性质，传递矩阵的行列式必为 1，即

$$\det\boldsymbol{S}=\det\boldsymbol{R}_m\cdot\det\boldsymbol{T}_{(m)(m-1)}\cdot\cdots\cdot\det\boldsymbol{R}_1=1$$

$$S_{11}S_{22}-S_{12}S_{21}=1 \tag{1.10-14}$$

这表明四个传递矩阵元中只有三个是独立的. 根据上式可验算所求传递矩阵元是否有误.

设一厚透镜材料折射率为 n_0，厚度为 d，物空间和像空间折射率分别为 n 和 n'(图1.10-4)，按(1.10-11)式厚透镜的传递矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}&=\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{T}_{21}\boldsymbol{R}_1\\&=\begin{bmatrix}1 & \Phi_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{d}{n_0} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \Phi_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1-\dfrac{d}{n_0}\Phi_2 & \Phi_1+\Phi_2-\dfrac{d}{n_0}\Phi_1\Phi_2\\ -\dfrac{d}{n_0} & 1-\dfrac{d}{n_0}\Phi_1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{1.10-15}$$

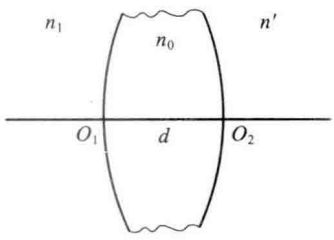


图 1.10-4　厚透镜

在上式中令 $d=0$，便得薄透镜的传递矩阵

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}1 & \Phi_1+\Phi_2\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1.10-16}$$

如果令上式中的 $\Phi_2=0$，则得单折射球面的传递矩阵即折射矩阵

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}1 & \Phi_1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1.10-17}$$

由(1.10-15)至(1.10-17)式可见，厚透镜、薄透镜、单折射球面的传递矩阵元 S_{12} 恒等于它们的光焦度，即

$$S_{12}\equiv\Phi \tag{1.10-18}$$

后面将见到，上述结论对复杂的共轴球面系统也是成立的.

1.10.3　物像矩阵和物像关系

图 1.10-5 所示为 m 个折射球面组成的共轴系统，系统的传递矩阵 $\boldsymbol{S}$ 为已知，物 PQ 生成理想的像 $P'Q'$. 为了求物像之间的关系，需要求通过 Q 点的入射线及其共轭点 Q' 的出射线的状态矩阵 $\boldsymbol{L}_Q$ 和 $\boldsymbol{L}'_{Q'}$ 之间的关系，为此，应将 Q 点到 M_1 点和 M_m 到 Q' 点的平移矩阵按相应顺序乘以系统的传递矩阵. 令 l 表示第一球面顶点至物点 P 的距离，称为**顶物距**，即 $l=O_1P$；l' 表示最末球面顶点 O_m 至像点 P' 的距离，称为**顶像距**，即 $l'=O_mP'$. 它们的正负号规则同前. 由(1.10-3)式，通过物点 Q 的入射线 QM_1 和通过 Q' 的共轭出射线 M_mQ' 的状态矩阵为

$$\boldsymbol{L}_Q=\begin{bmatrix}n_1u_1\\ y\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{L}'_{Q'}=\begin{bmatrix}n'_mu'_m\\ y'\end{bmatrix} \tag{1.10-19}$$

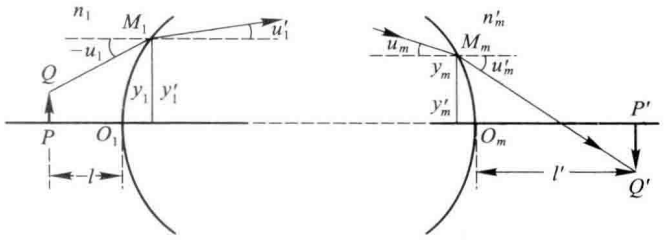


图 1.10-5　物像关系

从 Q 点到 M_1 点和从 M_m 点到 Q' 点的平移矩阵分别为

$$\boldsymbol{T}_{1Q}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{(-l)}{n_1} & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{T}_{Q'm}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{l'}{n'_m} & 1\end{bmatrix} \tag{1.10-20}$$

由(1.10-13)和(1.10-11)式可知

$$\boldsymbol{L}'_{Q'}=\boldsymbol{T}_{Q'm}\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}_{1Q}\boldsymbol{L}_{Q}$$

$$\begin{bmatrix} n'_m u'_m \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{l'}{n'_m} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{l}{n_1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_1 u_1 \\ y \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} S_{11}+\dfrac{l}{n_1}S_{12} & S_{12} \\ S_{21}+\dfrac{l}{n_1}S_{22}-\dfrac{l'}{n'_m}S_{11}-\dfrac{l'l}{n_1 n'_m}S_{12} & S_{22}-\dfrac{l'}{n'_m}S_{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_1 u_1 \\ y \end{bmatrix} \tag{1.10-21}$$

上式右端的两行两列矩阵称为**物像矩阵**，记为 $\boldsymbol{A}$. 于是上式可写为

$$\boldsymbol{L}'_{Q'}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{L}_{Q} \tag{1.10-22}$$

由(1.10-21)式可得

$$y'=\left(S_{21}+\frac{l}{n_1}S_{22}-\frac{l'}{n'_m}S_{11}-\frac{l'l}{n_1 n'_m}S_{12}\right)n_1 u_1+\left(S_{22}-\frac{l'}{n'_m}S_{12}\right)y$$

在理想成像条件下 y' 应该与 u_1 无关，因此要求

$$S_{21}+\frac{l}{n_1}S_{22}-\frac{l'}{n'_m}S_{11}-\frac{l'l}{n_1 n'_m}S_{12}=0 \tag{1.10-23}$$

则

$$y'=\left(S_{22}-\frac{l'}{n'_m}S_{12}\right)y \tag{1.10-24}$$

由(1.10-23)式可得物像位置关系式

$$\frac{l'}{n'_m}=\frac{S_{21}+\left(\dfrac{l}{n_1}\right)S_{22}}{S_{11}+\left(\dfrac{l}{n_1}\right)S_{12}} \tag{1.10-25}$$

因为上式中顶物距 l 和顶像距 l' 各以顶点 O_1、O_m 为原点，所以对折射系统而言，$l<0$ 为实物，$l>0$ 为虚物；$l'>0$ 为实像，$l'<0$ 为虚像.

在(1.10-21)式中，物像矩阵的行列式应等于 1，而且它应满足(1.10-23)式的要求，则得

$$\left(S_{11}+\frac{l}{n_1}S_{12}\right)\left(S_{22}-\frac{l'}{n'_m}S_{12}\right)=1 \tag{1.10-26}$$

由(1.10-24)式可得系统的横向放大率

$$\beta=\frac{y'}{y}=S_{22}-\frac{l'}{n'_m}S_{12} \tag{1.10-27}$$

将(1.10-26)式代入得

$$\beta=\frac{1}{S_{11}+\left(\dfrac{l}{n_1}\right)S_{12}} \tag{1.10-28}$$

于是,物像矩阵可简写为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\beta} & \Phi\\ 0 & \beta\end{bmatrix} \tag{1.10-29}$$

例 1.10-1 一个置于空气中的望远系统由两个凸透镜 L_1 和 L_2 构成共焦组合,它们的光焦度分别为 Φ_1 和 Φ_2,试用矩阵方法求系统的光焦度及系统对任一对轴上共轭点的横向放大率和角放大率.

解 望远系统两透镜间的间隔

$$d=f_1'+f_2'=\frac{1}{\Phi_1}+\frac{1}{\Phi_2}$$

由(1.10-11)式可求得系统的传递矩阵

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}1 & \Phi_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -d & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \Phi_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \Phi_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\left(\dfrac{1}{\Phi_1}+\dfrac{1}{\Phi_2}\right) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \Phi_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\dfrac{\Phi_2}{\Phi_1} & 0\\ -\left(\dfrac{1}{\Phi_1}+\dfrac{1}{\Phi_2}\right) & -\dfrac{\Phi_1}{\Phi_2}\end{bmatrix}$$

对于顶物距和顶像距分别为 l 和 l' 的任一对共轭点,其物像矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -l' & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\dfrac{\Phi_2}{\Phi_1} & 0\\ -\left(\dfrac{1}{\Phi_1}+\dfrac{1}{\Phi_2}\right) & -\dfrac{\Phi_1}{\Phi_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ l & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{\Phi_2}{\Phi_1} & 0\\ l'\dfrac{\Phi_2}{\Phi_1}-l\dfrac{\Phi_1}{\Phi_2}-\left(\dfrac{1}{\Phi_1}+\dfrac{1}{\Phi_2}\right) & -\dfrac{\Phi_1}{\Phi_2}\end{bmatrix}$$

将以上二式与(1.10-29)式比较得望远系统的光学特性

$$\Phi=\frac{1}{f'}=0,\quad \beta=-\frac{\Phi_1}{\Phi_2}=-\frac{f_2'}{f_1'},\quad \gamma=\frac{1}{\beta}=-\frac{\Phi_2}{\Phi_1}=-\frac{f_1'}{f_2'}$$

思 考 题

1.1 当一束光从空气进入水中时,光束的截面积发生怎样的变化?

1.2 为什么日出或日落时太阳看起来是扁的?

1.3 一束在空气中波长为 589.3 nm 的钠黄光从空气进入水中时,它的波长将变为多少?在水中观察这束光时其颜色会改变吗?

1.4 图 1.1 为光线斜入射于一块平行平面玻璃板的光路,问 A、B 两点之间的光程是极大还是极小?

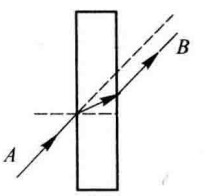


图 1.1

1.5 平面镜生成的像同物之间左右互易,但为什么并不上下颠倒?

1.6 同一物体经针孔或平面镜所成的像有何不同?

1.7 在夜晚的江面上,为什么路灯生成的倒影是拉得很长的一条光带?

1.8 下雨后,树叶上的水珠为什么显得很亮?如果光线在水珠内作全反射,则水珠

内的入射光线和通过入射点的直径之间的夹角不能小于多少度？

1.9　当逆着光线的方向观察时能看到实像和虚像吗？凭眼睛看能否辨别是实像还是虚像？能否拍摄虚像的照片？

1.10　通常认为 $\Phi>0$ 为会聚系统，$\Phi<0$ 为发散系统，那么对于 $\Phi=0$ 的单折射面是会聚系统还是发散系统？

1.11　球面镜的焦距和光焦度与所在介质的折射率是否有关？

1.12　晴天时，利用日光和一块凹面镜就能点火，利用凸面镜能点火吗？

1.13　人眼能观察虚物吗？能否拍摄虚物的照片？

1.14　薄透镜的焦距与它所在介质是否有关？凸透镜一定是会聚透镜吗？凹透镜一定是发散透镜吗？

1.15　为什么人眼在水中成为远视眼而鱼眼在空气中则成为近视眼？

1.16　水中的球形空气泡能起透镜的作用，它是会聚透镜还是发散透镜？其焦距和气泡半径的关系如何？

1.17　置于空气中的两个光焦度大于零的薄透镜可否组成一个光焦度小于零的共轴球面系统？

1.18　试求平面反射镜的系统传递矩阵.

1.19　为什么在共轴系统的任意两个面之间的系统传递矩阵中最多只有两个矩阵元为零？而且若有两个矩阵元为零，它们一定在矩阵的对角线上.

习　题

1.1　试由费马原理导出光的反射定律.

1.2　巨蟹星座中心有一颗脉冲星，其辐射的光频信号和射频信号到达地球有 1.27 s 的时差，且光波快于射电波.

(1) 求光波和射电波从脉冲星到地球的光程差；

(2) 试计算这两种电磁波传播于宇宙空间中的折射率之差的数量级，已知这颗脉冲星与地球相距约 6 300 光年(约 6×10^{15} km).

1.3　在圆柱形木塞的圆心，垂直于圆平面插入一根大头针，然后把木塞倒放浮在水面上，调节针插入木塞的深度，使观察者在水面上方不论什么位置都刚好看不到水下的大头针(图 1.2). 如果测得大头针露出来的长度为 h，木塞直径为 d，求水的折射率.

1.4　在充满水的容器底部放一平面反射镜，人在水面上正视镜子看自己的像. 若眼睛高出水面 $h_1=5.00$ cm，水深 $h_2=8.00$ cm，求眼睛的像和眼睛相距多远？像的大小如何？设水的折射率 $n=1.33$.

1.5　试用作图法证明：人通过一个平面镜看到自己的全身，则平面镜的长度至少要有人身体长度的一半.

1.6　试证：当平面镜的法线以入射点为心在入射面内转过 θ 角时，反射光线将改变 2θ 角.

1.7　如图 1.3 所示，一条光线射入折射率为 n 的一球形水滴，求：

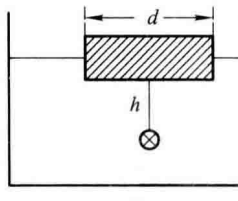


图 1.2

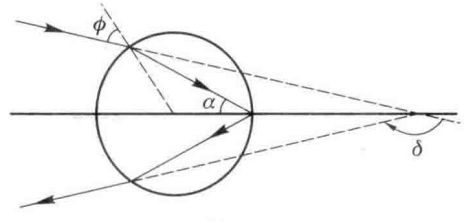


图 1.3

(1) 此光线在水滴内球面另一侧的入射角 α；这条光线是被全反射还是部分反射？

(2) 偏向角(出射光线与入射光线之间的夹角)δ 的表示式.

(3) 偏向角 δ 为最小时，入射角 ϕ 应为多少？

1.8 一个顶角为 60° 的冕玻璃棱镜，对钠黄光的折射率为 1.62，已知光线在棱镜第一面上的入射角 $i_1=70°$，求：

(1) 在第一面上的偏向角；

(2) 在第二面上的偏向角；

(3) 总偏向角.

1.9 在单球面折射系统中，除球心外还有一对共轭点 P 和 P' 可用宽光束严格成像(图 1.4)，这一对共轭点称为齐明点或不晕点(aplanatic points)．试证齐明点的物距和像距满足下列关系：

$$s=\left(1+\frac{n'}{n}\right)r,\quad s'=\left(1+\frac{n}{n'}\right)r$$

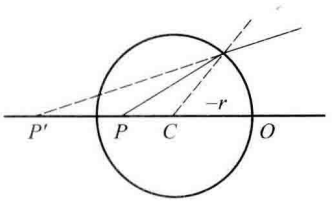


图 1.4

1.10 试由费马原理导出球面镜、薄透镜的物像距公式.

1.11 一根长玻璃棒的折射率为 1.635 0，将它的左端研磨并抛光成半径为 2.50 cm 的凸球面，在空气中有一小物体位于光轴上距球面顶点 9.0 cm 处. 求：

(1) 球面的物方焦距和像方焦距；

(2) 光焦度；

(3) 像距；

(4) 横向放大率；

(5) 用作图法求像.

1.12 将一根 40 cm 长的透明棒的一端切平，另一端磨成半径为 12 cm 的半球面. 有一小物体沿棒轴嵌在棒内，并与棒的两端等距. 当从棒的平端看去时，物的表观深度为12.5 cm.求从半球端看去时，它的表观深度为多少？

1.13 在一个直径为 30 cm 的球形玻璃鱼缸中盛满水，鱼缸中心处有一尾小鱼. 若鱼缸薄壁的影响可以忽略不计，求缸外面的观察者所看到的鱼的表观位置及横向放大率.

1.14 为了把仪器刻度放大 3 倍，在它上面置一平凸透镜，并让透镜的平面与刻度紧贴. 假设刻度与球面顶点距离为 30 mm，玻璃的折射率为 1.5，求凸面的半径应为多少？

1.15 在半径为 20 cm 的凸面镜右侧距顶点 5 cm 处有一高为 2 cm 的虚物，试求像的位置和大小，并作图. 虚物的位置应在什么范围内才能形成实像？

1.16 盛有水银的容器以角速度 ω 绕竖直轴匀速旋转，水银表面成为抛物面反射镜，求此镜的焦距. 提示：先求出水银表面的方程 $x^2=2py$，得焦点 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$.

1.17 一烧杯内水深 4 cm，杯底有一枚硬币，在水面上方放置一焦距为 30 cm 的薄透镜，硬币中心位于透镜光轴上，若透镜上方的观察者通过透镜观察到硬币的像就在原处，求透镜应置于距水面多高的位置.

1.18 一薄凸透镜使物体在屏上成像，像高为 a，若屏和物体不动，将透镜向屏移动，使屏上第二次清晰成像时，像高为 b，求物体的高度.

1.19 一双凸透镜的球面半径为 20 cm，透镜材料的折射率为 1.5，一面浸在水中，另一面置于空气中，试求透镜的物方焦距和像方焦距.

1.20 用一薄凸透镜 L_1 在屏上生成物体的清晰像，然后将另一个焦距为 10 cm 的薄凸透镜 L_2 放入会聚光束中距屏 30 cm 处，问现在应将屏移至距 L_2 多远的地方才能在屏上生成物体的清晰像？

1.21 两薄透镜的焦距为 $f_1'=5.0$ cm，$f_2'=10.0$ cm，相距 5.0 cm，若一高为 2.50 cm 的物体位于第一透镜前 15.0 cm 处，求最后所成像的位置和大小，并作出成像的光路图.

1.22　一物体经两个凸透镜折射成像，所得的是在物体位置处与物体同大的倒立虚像. 设第一透镜的焦距 f_1' 为已知，求物体的位置、第二透镜的焦距及两透镜间的距离.（注：本题有多解.）

1.23　一平凸透镜焦距为 f'，平面镀银（图 1.5），在其前 $2f$ 处放一物体，高度为 h. 求物体所成的最后像，并作图.

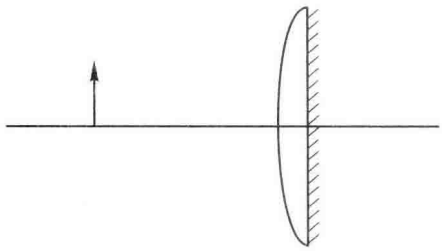


图 1.5

1.24　将一曲率半径分别为 $r_1=-30$ cm 和 $r_2=-60$ cm，折射率为 1.50 cm 的弯月形薄凹透镜凹面向上水平放置，然后用折射率为 1.60 的透明油填满该凹面. 若上述系统放在空气中，在透镜前 100 cm 处有一小物体，求：

（1）系统的焦距；

（2）物体经系统所成的最后像.

1.25　将焦距 $f'=-10$ cm 的平凹薄透镜（折射率 $n=1.57$）水平放置，凹面向上并注入水，试求此系统的光焦度.

1.26　一厚透镜两球面的光焦度分别为 5 m^{-1} 和 8 m^{-1}，折射率为 1.50，中心厚度为18.75 cm，试用矩阵法求此厚透镜的光焦度.

1.27　两薄透镜相距 80 cm，它们的光焦度分别为 6 m^{-1} 和 -8 m^{-1}，用矩阵法求组合系统的光焦度.

1.28　设有置于空气中的两薄透镜 L_1 和 L_2，凸透镜 L_1 的焦距为 12 cm，凹透镜 L_2 的焦距为 8 cm，它们相距 16 cm，一高为 3 cm 的物体 PQ 位于 L_1 前 30 cm 处，用矩阵法求物体经系统所成的像的位置和大小，并用作图法验证结果.

1.29　试证明一个平凸透镜的平表面对系统矩阵没有贡献.

1.30　计算一块厚双凸透镜的系统矩阵，其折射率为 1.5，曲率半径为 0.5 及 0.25，厚为 0.3（单位任意），验证 $|A|=1$.

模拟计算习题

已知柱透镜口径 $d=100$ mm$\times$100 mm，焦距 $f=400$ mm，玻璃折射率 $n=1.5$. 求柱透镜的最大厚度 h_0 和曲率半径 R，并根据柱透镜的厚度函数模拟柱透镜曲面的三维轮廓. 图 1.6 为柱透镜的横截面示意图，图 1.7 为柱透镜三维轮廓示意图.

柱透镜厚度函数：

$$\begin{aligned} t(x,y)=AB&=h_0-O'C=h_0-(R-OC)\\ &=h_0-R+(OA^2-AC^2)^{1/2}\\ &=h_0-R+(R^2-x^2)^{1/2} \end{aligned}$$

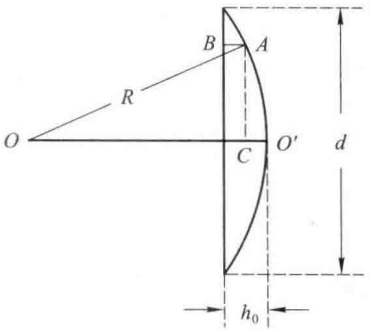


图 1.6 柱透镜横截面示意图

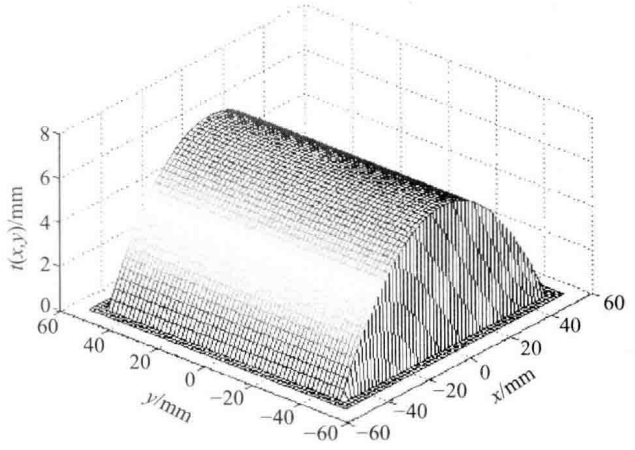


图 1.7 柱透镜三维轮廓示意图

第二章　光阑、像差和成像光学仪器

在上一章中讨论了几何光学的基本原理，研究了共轴球面系统中物像的位置和大小关系，这些内容是光学仪器理论的基础. 但是对于一个实际的光学系统而言，还必须研究像的完善程度、亮度以及物面上有多大范围可以成像，这些问题与系统的结构、光束在系统内受限制的情况有关. 本章中首先讨论限制光束的元件——光阑，然后介绍光学系统的像差.

成像光学仪器可以帮助提高人眼的视力. 传统光学仪器离不开人的操作、观测或记录. 20 世纪 70 年代以来，光电子器件和计算机技术的发展，使光学仪器发生了“革命”性变化. 现代光学仪器的操作、检测和数据处理由计算机控制，向着自动化、数字化、智能化方向发展. 虽然如此，成像光学仪器的核心部分的基本原理并未改变. 在本章的最后将讨论几种常用成像光学仪器的原理.

§2.1　光　　阑

在一般的光学系统中，除了透镜、棱镜和反射镜外，往往还放置着一些中央开孔的不透明屏，只让一定范围的光线通过，这种带孔的屏称为**光阑**. 此外，所有光学元件的尺寸都是有限的，它们对光束的大小都有限制作用，因此，每一个光学元件的边缘也相当于一个光阑.

2.1.1　孔径光阑和视场光阑

在一个光学系统中，光阑对光束的限制作用包含两方面的内容：(1) 限制成像光束口径的大小，从而可影响像的照度、清晰程度以及景深；(2) 限制成像范围的大小. 根据光阑对光束限制作用的不同，可将其分为**孔径光阑**和**视场光阑**两类. 至于在光学系统中起特殊作用的光阑(如空间滤波光阑)，本节不予讨论.

在图 2.1-1 中，物体 PQ 上各点都能通过透镜 L 成像，但光阑 DD 对来自物体上各点的成像光束口径的限制最大，即控制着到达像面的光能，这种光阑称为**孔径光阑**，记为 A. S. . 然而在图 2.1-2 中，对物体 PQ 而言，只有其上一部分 PQ_1 能通过系统成像，物体其余 Q_1Q 部分发出的光线被光阑 DD 挡着不能到达像面，这种光阑限制着物面上能成像的范围，即限制着视场的大小，称为**视场光阑**，记为 F. S. .

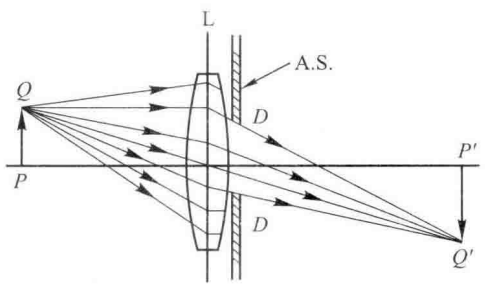


图 2.1-1　孔径光阑

2.1.2 光阑限制的共轭原理

如图 2.1-3，Σ 为一共轴球面系统，轴上任意一物点 P 经系统成像于 P' 点. 光阑 DD 位于系统的像空间，它的反向光线通过它前面的系统在系统的物空间成像 $D'D'$. 来自 P 点的任意入射线 PM 与 $D'D'$ 相交于 M 点，M 点的共轭点为 M'，则连线 $P'M'$ 必为 PM 的共轭出射线. 因此，如果任意入射线 PM 与 $D'D'$ 的边框部分相交，其共轭出射线 $P'M'$ 必被 DD 阻挡；同理，另一入射线 PN 能“通过” $D'D'$，其共轭出射线 $P'N'$ 必能通过 DD. 换言之，**光阑（或其像）对入射光束的限制与光阑的像（或光阑）对其共轭出射光束的限制，两者完全等价.**

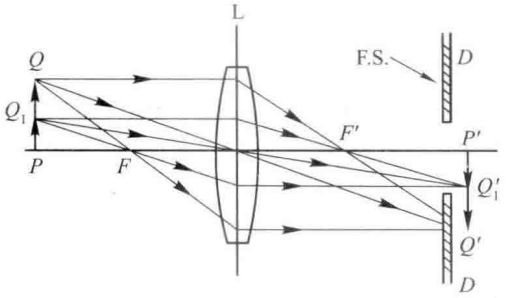


图 2.1-2 视场光阑

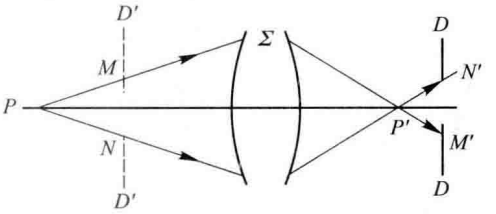


图 2.1-3 光束限制的共轭原理

2.1.3 孔径光阑的确定方法 入瞳和出瞳

在一个复杂的光学系统中可能有许多光阑，为了确定孔径光阑，应找出其中对光束口径限制最大者. 根据光束限制的共轭原理，在比较各光阑对光束限制的大小时，可用各光阑的反向光线经它前面系统所成的像对物点的张角来衡量.

图 2.1-4 所示为圆孔光阑 DD 和薄透镜 L 所组成的简单系统. DD 位于 L 的像方焦点内，而且前者的口径较后者小. 物点 P 位于 L 的物方焦点上，L 经它前面系统成的像就是它自身. 将 DD 的反向光线经 L 成像，得虚像 $D'D'$. 从物点 P 看 $D'D'$ 的张角就是由 DD 所限制的进入系统的光束的立体角，它较物点 P 对 L 边缘所张的立体角小，对光束的限制作用较 L 大，所以 DD 为系统的孔径光阑，记为 A.S.. 应当注意，系统的孔径光阑总是相对于一定的物点而言的. 物点在轴上的位置改变，孔径光阑也可能相应变化. 物点位置确定后，孔径光阑则取决于系统中各光阑的相对位置和大小.

根据以上分析可得出确定系统孔径光阑的方法如下：**将系统中各光阑逐个地通过其前面的光学系统成像，由轴上物点对各光阑的像作张角，找出其中张角最小者，则张角最小的那个像所对应的光阑就是孔径光阑.**

孔径光阑通过它前面系统所成的像称为**入射光瞳**，简称**入瞳**，记为 En. P.，它决定着进入系统光束的大小，如图 2.1-4 中的 $D'D'$. 孔径光阑通过它后面系统所成的像称为**出射光瞳**，简称**出瞳**，记为 Ex. P.，它

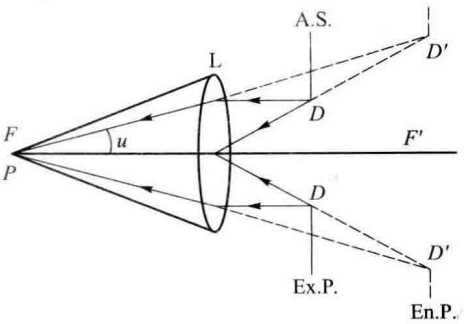


图 2.1-4 孔径光阑的确定

决定着从系统出射光束的大小，如图 2.1-4 中的 DD. 由轴上物点对入瞳半径的张角 u 叫**入射孔径角**. 出瞳半径对轴上的共轭像点所形成的张角 u' 叫**出射孔径角**. 它们的大小是光学仪器的重要参数.

通过某物点和入瞳中心的光线称为该物点的**主光线**(chief ray). 轴上物点的主光线就是光轴. 因为出瞳是入瞳经过整个系统所成的像，即**入瞳、孔径光阑、出瞳三者相互共轭**. 所以主光线先通过入瞳中心进入系统，然后通过孔径光阑中心，再通过出瞳中心离开系统. 通过某物点和入瞳边缘的光线称为该物点的边缘光线(marginal ray). 由入瞳、孔径光阑、出瞳的共轭性可知，边缘光线必通过孔径光阑和出瞳的边缘. 主光线和边缘光线为作图求像提供了另外两条可供选择的特殊光线(见习题 2.3).

2.1.4　视场光阑的确定方法　入窗和出窗

在图 2.1-5 中，DD 为孔径光阑和出瞳，$D'D'$为它经透镜所成的像即入瞳. 如图所示，轴上物点 P 的主光线和边缘光线都能通过系统，但是轴外物点却并非如此. 作入瞳中心 O_2'和透镜边缘 E 的连线 $O_2'E$ 和物 PQ 交于 Q_1 点，再作过 Q_1 点的边缘光线即通过入瞳边缘和 Q_1 点的入射光线 Q_1A. 这两条光线经系统折射后必通过出瞳的中心和边缘，它们的延长线的交点 Q_1'就是 Q_1 点的像. 由图可见，物 PQ 上位于 Q_1 点以上各点的主光线(例如 QB)将被透镜边框挡住而不能通过系统. 透镜的边框限制着通过系统的主光线，从而限制着物面上能成像的范围，所以称为视场光阑. 我们称能进入系统的主光线相应的物点在物面上的范围为**物方视场**(PQ_1)，其共轭像点在像面上的范围为**像方视场**($P'Q_1'$). 通过视场边缘物点 Q_1 的主光线 Q_1E 与光轴的夹角称为**物方视场角** ω_0，它的共轭光线 EO_2 与光轴的夹角称为**像方视场角** ω_0'.

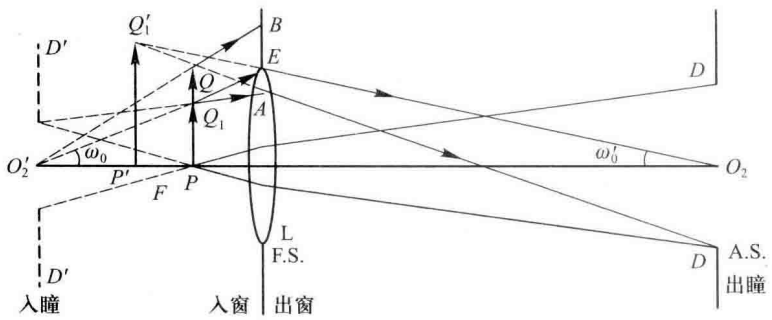


图 2.1-5　视场光阑

应当注意，视场以外各点的主光线被视场光阑挡住不能进入系统成像，并不是视场外物点的所有光线都不能进入系统，例如图中物 Q_1Q 上各点仍有部分光线可以进入系统. 不过物点离光轴愈远，参加成像的光束愈来愈细，从而形成的像点逐渐变暗，这种现象称为**渐晕**. 因此，我们舍去像面上那些太暗的点，规定以其主光线能通过光学系统的物点为视场的边缘点.

对于任何一个光学系统，确定视场光阑的方法如下：**将系统中各光阑逐个地对它前面的系统成像，求出系统的入瞳，然后将所有这些像对入瞳中心作张角，找出其中张角最小者，这个像所对应的光阑即为系统的视场光阑.**

视场光阑经它前面系统所成的像称为**入窗**；视场光阑经它后面系统所成的像称为**出窗**.

入窗限制了物方视场的大小，出窗限制了像方视场的大小. **入窗、视场光阑、出窗三者相互共轭**. 入窗半径对入瞳中心的张角就是**物方视场角**，出窗半径对出瞳中心的张角就是**像方视场角**.

2.1.5 光阑与景深

孔径光阑起着限制成像光束口径大小的作用，因而可以影响像的亮度、像差和景深. 下面介绍景深的概念.

一般的光学仪器都是在平面（照相底片或 CCD 的接收面）上成像，而物体在大多数情况下都是三维的，其上各点不能在同一平面上生成清晰的像. 为了提高像的清晰度，可用光阑对成像光束的口径加以限制. 为简单计，我们以单透镜为例加以说明. 图 2.1-6 中 L 为一薄透镜，DD 为圆孔光阑，A、O、B 为处于不同位置的三个物点，它们的共轭点分别为 A'、O'、B'. 将成像屏置于过 O' 的垂轴平面内，O 点将在屏上生成清晰的点像 O'，而 A、B 则在屏上生成圆形的光斑. 因为对于直径约小于 0.1 mm 的光斑，人眼看起来好像是一点，所以若在透镜后加光阑，使光束在屏上生成的光斑直径小于 0.1 mm，它们生成的像点可以认为是清晰的. 但是光束直径小于 0.1 mm 的范围是存在于一定的空间区域的. 如果在 O 点前后一段距离 dx 内，物体上各点在屏上生成的像都可看作是清晰的，则物空间内这一段距离 dx 称为**景深**. 像空间内相应的距离则称为**焦深**. 显然，光阑愈小，光束愈细，景深愈长，反之，光阑愈大，景深愈短.

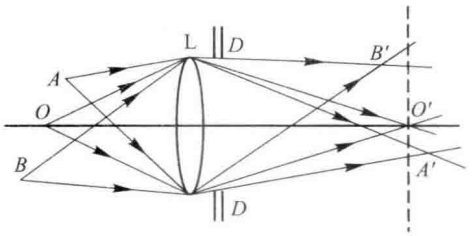


图 2.1-6 光阑与景深

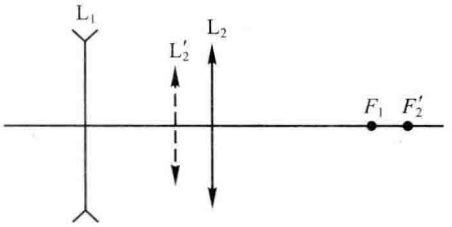


图 2.1-7

例 2.1-1 如图 2.1-7 所示，两个薄透镜 L_1、L_2 的孔径均为 4.0 cm，L_1 为凹透镜，F_1 为其物方焦点，L_2 为凸透镜，F_2' 为其像方焦点. 它们的焦距分别为 8 cm 和 6 cm，镜间距离为3 cm，光线平行于光轴入射. 求系统的孔径光阑、入瞳和出瞳及视场光阑.

解 首先将 L_1 和 L_2 分别对它们前面的系统成像，而 L_1 对其前面系统所成的像就是它本身，所以只需计算 L_2 经 L_1 所成的像. 将 $s=-3$ cm，$f'=-8$ cm 代入(1.8-6)及(1.8-13)式得

$$s'=\frac{sf'}{s+f'}=\frac{(-3)\times(-8)}{-3-8}\ \text{cm}=-2.2\ \text{cm}$$

$$\beta=\frac{s'}{s}=\frac{-2.2}{-3}=0.71$$

$$y'=0.71\times 4.0\ \text{cm}=2.9\ \text{cm}$$

即在 L_1 的右侧 2.2 cm 处生成 2.9 cm 高的缩小的虚像 L_2'.

因为入射光为平行光，L_2'的孔径较 L_1 小，所以 L_2 是孔径光阑又是出瞳，L_2'则为入瞳. 又因为 L_1 对 L_2'中心的张角较 L_2'自身对其中心的张角小，所以 L_1 为视场光阑.

§2.2　像　　差

前已指出，除平面反射镜而外，实际的光学系统不可能完全满足理想成像的要求，共轴球面系统在傍轴条件下也只能近似实现理想成像. 然而对于实际的成像系统而言，傍轴条件常常不能满足，例如要使显微镜所成的像清晰而明亮，就不得不加大成像光束的口径；又如在拍摄大视场的景物时，物体和它发出的光线都不是傍轴的. 由于实际光学系统的成像条件不满足理想成像的要求，点物形成一弥散斑，物体不能生成清晰的像，或者所成的像与原物不相似，这种偏离理想成像的现象称为**像差**. 元件材料的光学性质不均匀，或加工不良，或环境条件的变化也会引起像差，但这种像差是不规则的，本书一般不予讨论.

光学系统的像差可分为两类：一类是单色光所产生的，称为**单色像差**，它包括球差、彗差、像散、像场弯曲、畸变；另外大多数光学系统都对白光成像，白光由不同波长的单色光所组成，而光学材料对不同波长的光线又具有不同的折射率，因此不同波长光线的成像位置和大小都是不同的，这种现象称为**色像差**，简称**色差**，它包括位置色差和放大率色差.

上面所举的像差若是根据几何光学理论进行讨论，则称为**几何像差**，若根据波动理论进行讨论，则称为**波像差**. 光束的传播相当于波面的传播，由于实际光学系统存在像差，通过它的波面要发生改变，变了形的实际波面与理想波面之间的光程差可用来表示波像差. 即使系统的像差已经校正，由于衍射效应，理想成像条件仍不能满足，这时像的质量评估就必须用波动理论才能解决.

本书中仅以透镜为例对各种像差作简单介绍.

2.2.1　单色像差

1. 球差

如图 2.2-1 所示，点物 P 位于薄透镜 L 的光轴上，透镜 L 前加一个光阑，它可以让不同环带的光束通过透镜. 如果只有中心附近的傍轴光线通过，它经透镜后会聚于 P' 点，其像距为 s'. 如果只有最靠近透镜边缘的光束通过，它们将会聚于 P'' 点，O 至 P'' 的距离为 s''. 至于中央和边缘之间不同环带的其他光束，将会聚于 P' 和 P'' 之间不同的点. 但是若让从物点 P 发出的宽光束无遮拦地照射在透镜上，则经过透镜后并不会聚于一点，无论将屏置于光轴上何处，屏上出现的都是大小不同的弥散圆斑. 这种现象称为球面像差，简称**球差**. 球差的大小可用 s' 与 s'' 的差值 $\delta s = s' - s''$ 来量度，即对于会聚透镜，$\delta s > 0$，对于发散透镜，$\delta s < 0$（图2.2-2）. 球差的产生是由于透镜不同环带折光能力不同，入射到不同环带上的光线折射后不再交于一点所致[见(1.7-7)式]. 而透镜的折光能力与透镜材料的折射率 n_0 和透镜两表面的曲率半径 r_1、r_2 有关，因此对于给定材料、孔径和焦距的单个透镜，可以选择不同的形状即曲率半径的不同值，使球差达到最小，这种减小单个透镜球差的方法称为**配曲法**. 图 2.2-3 示出用平行光入射时透镜的球差与其形状之间关系的曲线，图中纵坐标表示球差，横坐标表示与形状有关的因子 $\rho = \dfrac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1}$. 由图可见，透镜取(e)所示形状时球差最小. 由(b)和(f)可知，同一块平凸透镜的凸面迎着入射光时较平面迎着入射光时的球差要小得多.

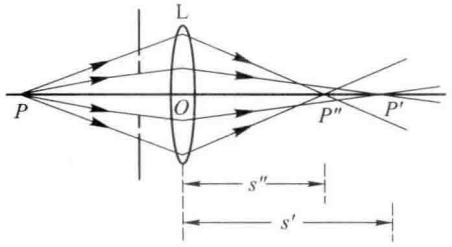


图 2.2-1　球差

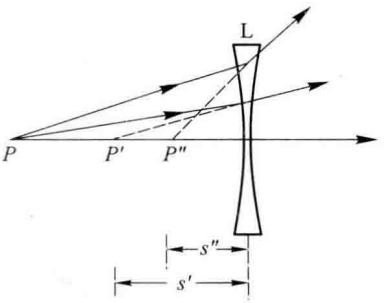


图 2.2-2　凹透镜的球差

因为会聚透镜的球差和发散透镜的球差有相反的符号，所以可把会聚透镜和发散透镜黏合在一起，组成一个复合透镜来消除球差. 有时为了某种特殊需要，也可使用非球面透镜.

2. 彗差

轴外傍轴物点发出的宽光束经透镜折射后，在像平面上不再交于一点，而是生成状如彗星的亮斑，称为**彗差**.

如前所述，轴上物点发出的宽光束通过透镜不同环带区后，将在像平面上生成大小不等的同心圆盘. 对于轴外傍轴物点发出的宽光束，它们通过透镜不同环带所生成的圆盘彼此逐渐错开，半径愈大的圆盘离光轴愈远. 这些不同心圆盘部分重叠就形成了前部最亮的彗星状光斑，如图 2.2-4所示. 球差和彗差往往混在一起，只有当轴上物点的球差已消除时，才能明显地观察到傍轴物点的彗差.

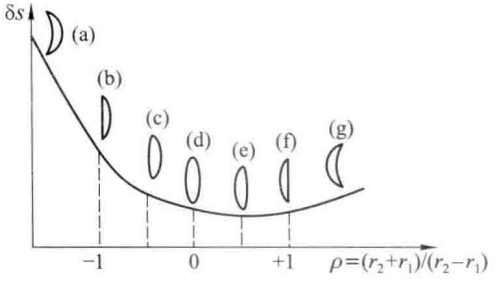


图 2.2-3　球差与透镜形状之间的关系

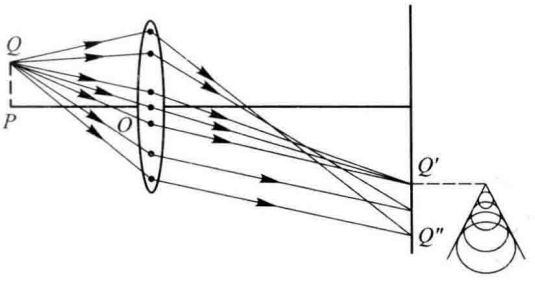


图 2.2-4　彗差

可以证明，在轴上已消除球差的前提下，傍轴物点以大口径光束成像的条件是：

$$ny\sin u = n'y'\sin u' \tag{2.2-1}$$

式中 n 为物方折射率，y 为物高，u 为物方孔径角；n'、y'、u'为像方的相应量. 上式称为阿贝正弦条件，满足此条件的一对共轭点能够消除彗差，它们是一对等光程点.

利用配曲法可以消除单个透镜的彗差，也可利用胶合透镜来消除彗差.

3. 像散

对于离轴较远的物点 P，即使它发出的是窄光束，由于入射到透镜上是不对称的，经透镜后也得不到点像，而会产生**像散**现象. 如图 2.2-5 所示，像散光束的截面一般呈椭圆形，但在两处蜕化为直线，分别称为子午焦线（垂直图平面）和弧矢焦线（在图平面内），在两焦线之间某处，光束截面呈圆形，称为明晰圆，可以认为是光束聚焦最清晰的地方.

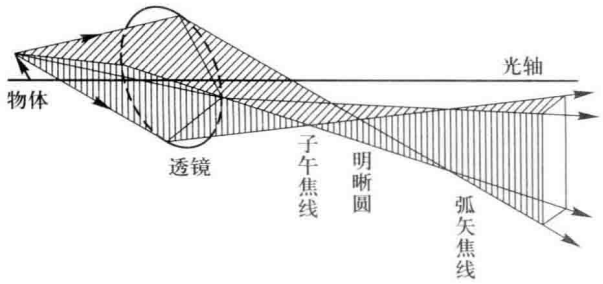


图 2.2-5　像散

4. 像场弯曲

在 § 1.7 中讲过，垂直于光轴的一个平面物体，只有在傍轴区域内才近似地成像为一个平面. 对于较大的物面，即使系统的像散已消除，像面也不是平面而是曲面，称为**像场弯曲**，简称**场曲**. 由于场曲的存在，在平面屏幕上观察不到整个平面物体清晰的像，当某一部分的像清晰时，另一部分的像却变得模糊. 像散和场曲的校正都需使用复杂的透镜组.

5. 畸变

当物体发出的光线和光轴成较大角度时，即使是狭窄的光束，所成的像与原物也不相似，称为**畸变**. 畸变与球差、彗差和像散不同，它并不破坏光束的同心性，因而不影响像的清晰度. 引起畸变的原因是由于透镜对不同高度物体的垂轴放大率不同，破坏了像和物的几何相似性. 若放大率随高度的增大而增大，则视场的边缘部分较中心部分放大得多，一正方形网状物的像成为图 2.2-6(b)所示形状，这种畸变称为枕形畸变. 若放大率随高度的增大而减少，则视场的中心部分较边缘放大得多，网状物体的像如图 2.2-6(c)所示，这种畸变称为桶形畸变. 图 2.2-7 为照相机里所采用的消畸变物镜，它是由对称放置的两组透镜中间加入一个光阑而成.

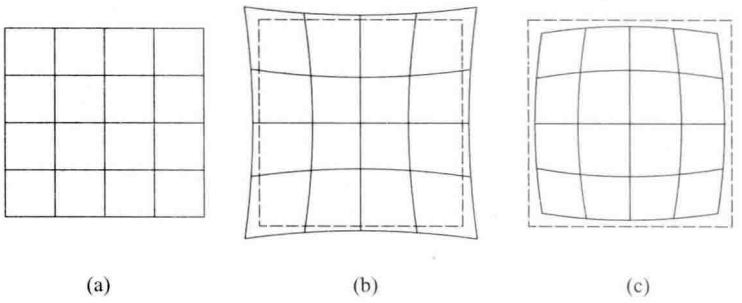


图 2.2-6　畸变

(a) 物；(b) 枕形畸变；(c) 桶形畸变

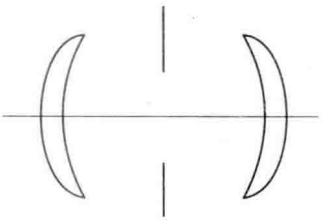


图 2.2-7　无畸变物镜

畸变使物体变形，所以对于测量仪器的影响特别大，编绘地图所用的航空摄影镜头就要求尽量矫正这类像差. 然而由于畸变不影响像的清晰度，只影响像和物的几何相似性，在一些实际光学系统中有时也让其产生畸变以达到其他目的. 拍摄宽银幕电影时，摄影机镜头用的是柱面透镜，使物体所成的像产生畸变在水平方向变窄，例如一个“曰”字形变成了“日”字，这样可使水平方向较大范围的景物缩窄在普通的电影胶片上，放映时只需用柱面透镜产生相反的畸变，就可把它变宽在宽银幕上，还原为原来的景象.

2.2.2 色差

1. 光的色视觉

不考虑不同人的眼睛对各种色光感觉灵敏度的差异，光的色视觉是由光波的频率决定的. 因为光波的频率与它在真空中的波长 λ 之间有下列关系：$\lambda=\frac{c}{\nu}$，所以也常说光的色视觉由光波长决定.

理想的单色光是不可能获得的，任何实际光源发出的光都包含一定的波长范围，这个范围愈小，光的单色性愈好. 复色光所引起的人眼颜色感觉是各单色光叠加在一起的效果. 假如两种色光以适当比例混合在一起使人产生白光的感觉，就称这两种色为**互补色**. 例如红与青、绿与品红、蓝与黄皆为互补色. 实验表明，红(R)、绿(G)、蓝(B)三色光按不同比例混合能配出大部分常见的颜色，所以称它们为**三原色**. 三原色可与三种纯光谱色相对应，按照国际照明委员会制定的标准，1931CIE－RGB 系统三原色波长为 700 nm、546.1 nm、435.8 nm，1964CIE-RGB 系统为 645.2 nm、526.3 nm、444.4 nm.

应当注意，把几种色光相加所得的色视觉和将几种颜料混合起来所得的色视觉是不同的. 大部分物体的颜色是选择吸收的结果，白光照射在红颜料上，它反射红光而吸收白光中的其他色光，绿颜料则反射绿光而吸收其他色光等. 当红、绿、蓝三种颜料混合在一起时，由于各色光都被吸收，因而呈黑色.

2. 透镜的色差

在 §1.2 中已指出，透明介质的折射率与入射光波长有关，通常情况下折射率随波长的增加而减小. 由薄透镜的物像距公式和放大率公式

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}=(n_0-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right),\quad \beta=-\frac{x'}{f'}$$

可知，来自同一物体的不同色光所成的像，无论位置和大小都不相同，这种现象称为**色差**. 前者称为**位置色差**，后者称为**放大率色差**. 如图 2.2-8 所示，来自物体 PQ 的紫光经透镜成像为 $P'_vQ'_v$，来自物体 PQ 的红光，将成像为 $P'_rQ'_r$，因此，如果物体 PQ 发白光，透镜后将接收到一个模糊的彩色像.

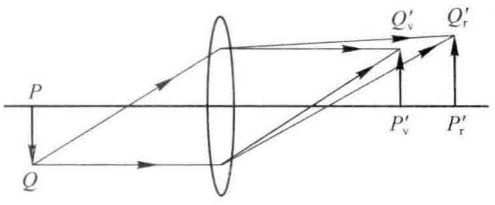


图 2.2-8　色差

单个透镜的色差是无法消除的. 由于凸透镜可使光会聚，凹透镜可使光发散，将两个用不同材料做成的凸透镜和凹透镜粘合起来，利用它们色散能力和折光能力不同以相互调节，从而可以对选定的两种波长消色差，如果将相同材料做成的两个薄透镜组合起来，使其间距 d 等于两透镜焦距和$(f'_1+f'_2)$的一半，即

$$d=\frac{f'_1+f'_2}{2} \tag{2.2-2}$$

也可对某波长附近的光消除放大率色差.

在上节和本节我们简单地介绍了各种像差,为了讲述的方便,我们讨论某种像差时假定了其他像差都不存在. 但对于一个实际的光学系统来说,这些像差可能是同时存在的. 要将所有的像差完全消除是不可能的,也是不必要的,因为各种光学仪器都有特定的用途,各种像差的影响也就不同. 例如,望远镜物镜的视场通常很小,主要应考虑消除球差、彗差及色差. 然而对于优良照相机的物镜,口径及视场较大,影响成像质量的则主要是像散、场曲及畸变. 总之,对于每种光学仪器,只需将某些像差消除到一定程度,就可以满足实际的需要.

§2.3　人眼的光学系统

人眼是十分重要的感官. 人们日常所接收的各种信息,平均有80%以上要靠视神经传递. 目视仪器的设计和使用,都必须与人眼功能相适应.

2.3.1　人眼的构造

人眼大体为球形,直径约25 mm,图2.3-1所示为人眼的水平截面图. 眼球外围包有一层坚韧的膜,起保护作用,叫巩膜. 巩膜的前方有一透明部分叫角膜,不透明部分常称为眼白. 巩膜里面紧接着是一层脉络膜,在它上面充满着色素和微血管. 这层膜伸到眼睛前面的部分叫虹膜,其中央部分有一透光圆孔称为瞳孔,随着被观察物体亮暗程度的不同,它的大小可在2~8 mm范围内自动改变,以便调节进入眼的光量的大小. 角膜和虹膜包围的区域叫前房,其中充满了折射率为1.337的水状液,称为前房液. 虹膜后面是透明的晶状体,称为眼珠,它由2万2千多层薄膜构成,各层的折射率不同,其形状如双凸透镜,晶状体支承在睫状肌上,其表面曲率由睫状肌来控制,从而可改变它的焦距. 晶状体和巩膜之间的区域称为后房,其中充满折射率为1.336的玻璃状液. 视网膜紧贴在脉络膜里面,在眼底部位的视网膜上布满了两类感受光的细胞——杆状细胞和锥状细胞. 锥状细胞只对强光起反应,而且三种不同类型的锥状细胞分别含有三种不同的视色素,分别对红、绿、蓝三种颜色敏感. 杆状细胞有上亿个,它在很暗的光照下还能起作用,但不能区别颜色,给出的像的轮廓不够清晰. 大约在视网膜的中部有一个直径为2.5~3 mm的小区域叫黄

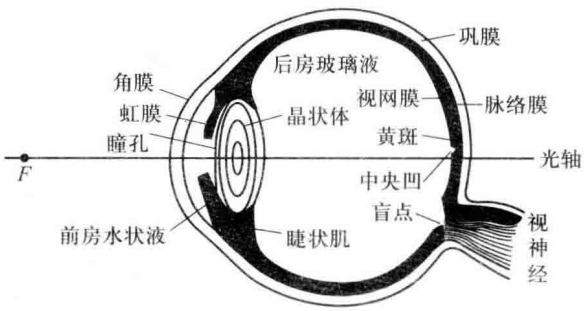


图2.3-1　眼球结构

斑(或中央凹),在黄斑的中心有一个直径约0.25 mm的凹部叫中央凹,在这里密集分布了大量的锥状细胞,是视觉最灵敏的地方,观察景物时,眼球会本能地转动,使中央凹对正目标.

2.3.2 人眼的调节

进入人眼的光线通过瞳孔后,经眼珠折射在视网膜上成像. 视网膜上所成的像是倒像,但我们的感觉仍是正立的,这是由于神经系统内部作用的结果. 当我们观察物体时,在睫状肌的作用下,眼珠可适当地改变它的曲率,从而改变其光焦度,使一定远近范围的物体能成像在视网膜上,这称之为人眼的调节. 为了看清远方的物体,睫状肌要松弛,使焦距增大. 当肌肉完全松弛时,人眼能清楚看到的点称为它调节范围的**远点**. 为了看清近处的物体,睫状肌要收缩,使焦距变小,当肌肉最大限度地收缩时,人眼能清楚看到的点称为它调节范围的**近点**. 正常眼的近点约在离眼10 cm处,远点则在无穷远处. 随着年龄的增长,近点逐渐变远,远点逐渐变近,调节范围变小. 一般人阅读或操作时将物体放在距眼20~30 cm左右,眼在不很紧张的情况下能在视网膜上形成清晰的像,观察起来不易感到疲劳,因而通常规定25 cm为人眼的**明视距离**. 近视眼的眼球过长,当肌肉完全松弛时,无穷远的物体成像在视网膜之前,它的远点在有限远位置. 矫正近视眼应该使用发散透镜. 远视眼的眼球过短,无穷远的物体成像在视网膜之后,它的近点比正常眼要远,矫正时应该使用会聚透镜.

人眼观察物体引起视觉的过程不单纯是光学成像,还有更重要的光信息处理的过程. 视网膜上的感光细胞接受光脉冲后转换成电脉冲,经过初步的处理再传送到大脑作进一步的处理. 大脑把需要的信息存储起来或作出某种反应. 不过视神经系统的构造和功能实在太复杂,我们对信息处理过程的了解还不十分清楚. 例如,物体发出的光线进入眼中,由眼珠在视网膜上生成倒像,但人却产生了正立的感觉. 这种"自动矫正"来自神经系统的作用.

2.3.3 简化眼模型

人眼是十分复杂的共轴系统,入射光进入人眼要经过多次折射才能到达视网膜成像. 为了讨论问题和计算上的方便,可把人眼简化成由折射率为1.33的介质构成的单折射球面系统. 球面的曲率半径约为5.7 mm,在这个半径下物体通过球面所成的像与大多数正常人眼在视网膜上实际所成的像一致. 图2.3-2为简化眼的示意图,图中 C 为折射球面的曲率中心,虚线表示简化眼的视网膜位置与真实眼的视网膜位置重合时真实眼的角膜位置. 表2.3-A列出了简化眼的光学常数.

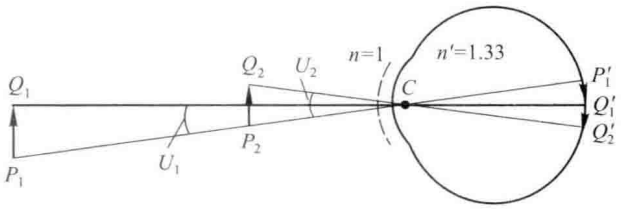


图 2.3-2 简化眼和视角

表 2.3-A 简化眼光学常数

折射率 n'	球面半径	物方焦距	像方焦距	光焦度	视网膜曲率半径
1.33	5.7 mm	17.1 mm	22.8 mm	54.48 m^{-1}	9.7 mm

2.3.4　视见函数

单位时间内光通过某面元的各种波长的总电磁辐射称为通过该面元的**辐射能通量**. 人眼对光的亮暗感觉不只和光的辐射能通量有关,还和光的波长有关. 也就是说,即使两种波长的单色光的辐射能通量相同,人眼感觉的亮暗程度也是不相同的. 在光线充足(明视觉)的条件下,人眼对 550 nm 左右的黄绿光最敏感;在光照微弱(暗视觉)条件下,则对 510 nm 左右的蓝绿光最敏感. 所以在夜色朦胧之夜,我们总感到周围的世界笼罩了一层蓝绿的色彩.

我们凭视觉虽然不能定量地比较明亮感觉的程度,但可用逐阶比较方法相当精确地判断两种颜色的明亮感觉是否相同. 假设波长是 550 nm 和 λ 的两种光引起相同的明亮感觉,它们分别需要辐射能通量 Φ_{550} 和 Φ_{λ},我们将它们之比称为对该波长 λ 的**视见函数**

$$V(\lambda)=\frac{\Phi_{550}}{\Phi_{\lambda}} \tag{2.3-1}$$

即视见函数表示人眼对各种波长光的相对敏感程度. 它是一个量纲为 1 的量,对 550 nm 黄绿光 $V(\lambda)=1$,对其他可见光波长在 0 和 1 之间. 例如实验表明,1.6 mW 的 600 nm 的红光才能与 1 mW 的 550 nm 绿色光产生相同的明亮感觉,于是波长 600 nm 光的视见函数值为 $V(600\ \text{nm})=1/1.6=0.631$,也就是说人的视觉对 600 nm 红光的敏感程度只有 550 nm 黄绿光的 1/1.6.红外光和紫外光无论具有多大功率也不能引起人眼视觉的反应,其视见函数值为零,所以称为不可见光.

视见函数的值是因人而异的,根据对大量正常眼的测量值统计平均的结果,1971 年国际照明委员会规定了视见函数的标准值,将这些值画成曲线如图2.3-3 所示,图中实线和虚线分别表示明视觉和暗视觉条件下的视见函数.

除了人眼以外,其他的光检测器,诸如光电池、光电倍增管、磁头、感光乳胶等也只能感受一定范围的波长,并且对每种波长的响应程度(反应的灵敏度)也不同. 它们对不同波长的这种选择特性可用与视见函数曲线类似的光谱响应曲线来表征. 图 2.3-4 画出了几种接收器的光谱响应曲线:1 是锑铯光电管,不能感受 600 nm 以上的红光,2 是人眼,3 是硅光电池,4 是热敏元件,对所有波段无选择地接收,灵敏度相等.

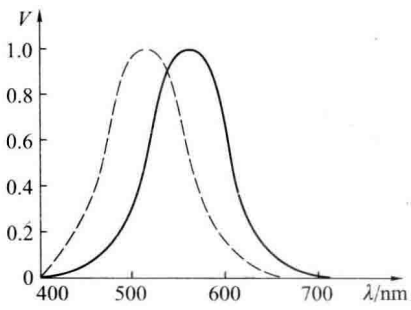


图 2.3-3　视见函数曲线

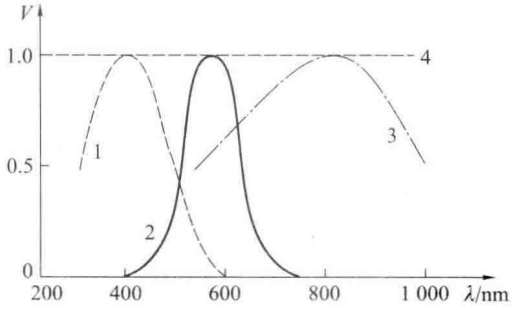


图 2.3-4　光谱响应曲线

§2.4 放大镜和目镜

2.4.1 视角和视角放大率

物体对简化眼的折射球面曲率中心的张角称为**视角**，记为 U. 视角愈大，物体在视网膜上生成的像愈大(例如图 2.3-2 中的 $U_2>U_1$，$P_1'Q_2'>P_1'Q_1'$)，视网膜上受到激发的感光细胞愈多，人眼对物体的感觉也愈大，对物体的细微部分也分辨得愈清楚. 放大镜、显微镜、望远镜等助视光学仪器就是为增大物体对人眼的视角而设计的.

设人眼直接观察物体时视角为 U，物体在视网膜上生成的像高为 Y；物体通过助视仪器生成的像的视角为 U'，在视网膜上的像高为 Y'. 我们定义用仪器时像的视角的正切与不用仪器直接观察物体的视角的正切之比为仪器的**视角放大率**，简称仪器的放大率：

$$M=\frac{\tan U'}{\tan U}=\frac{Y'}{Y} \tag{2.4-1}$$

应当注意，上式中计算 U 和 Y 时，对于放大镜或显微镜，物体在明视距离处；对于望远镜，物体在所观察的位置，通常在无穷远处. 而且式中的 U 与 U'或 Y 与 Y'分别是在两种状态下的视角或视网膜上的像高，因而不是共轭量.

2.4.2 放大镜

最简单的放大镜就是一个短焦距的会聚透镜. 如图 2.4-1(a)所示，将高为 y 的待测物体 PQ 放在透镜物方焦点的内侧，经透镜成一放大的高为 y'的正立虚像 $P'Q'$，此虚像又经眼睛在视网膜上生成实像 $P''Q''$. 设 $P'Q'$至透镜的距离为 s'，对眼的视角为 U'，简化眼曲率中心 C 至透镜的距离为 d，则

$$\tan U'=\frac{y'}{-s'+d}$$

若不用透镜而用眼直接观察放在明视距离 l_0 处的物体[图 2.4-1(b)]，物体对眼的视角为 U，则

$$\tan U=\frac{y}{l_0}$$

因此放大镜的放大率为

$$M=\frac{\tan U'}{\tan U}=\frac{y'}{-s'+d}\cdot\frac{l_0}{y}=\beta\frac{l_0}{d-s'}$$

由图 2.4-1(a)可知

$$\beta=\frac{y'}{y}=-\frac{x'}{f'}=\frac{f'-s'}{f'}$$

将此式代入上式得

$$M=\frac{l_0}{f'}\cdot\frac{f'-s'}{d-s'} \tag{2.4-2}$$

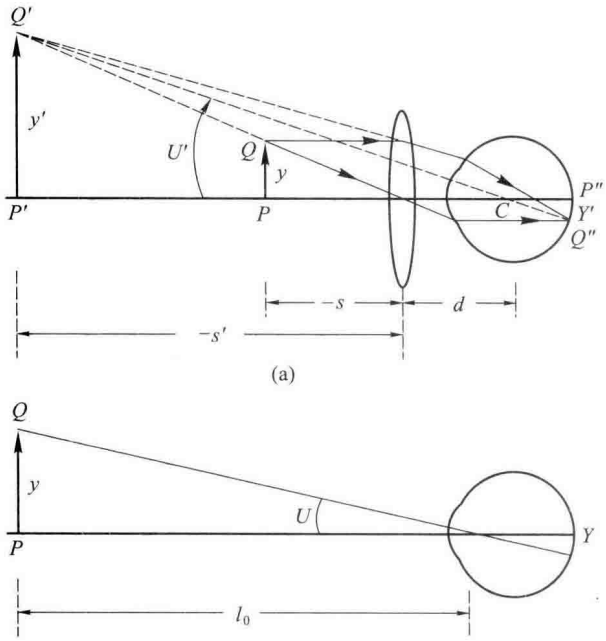


图 2.4-1　放大镜的放大率

上式表明，放大镜的放大率除了与透镜的焦距 f' 和明视距离 l_0 有关外，还取决于与使用放大镜方法有关的量——距离 d 和 s'.

若将物体置于放大镜的物方焦面上，则它所成的像在无穷远处，在(2.4-2)式中代入 $s'=-\infty$ 得

$$M=\frac{l_0}{f'}=\frac{25}{f'}\quad (f'\text{的单位为 cm}) \tag{2.4-3}$$

此时放大率 M 与放大镜到眼的距离无关.

若将放大镜的虚像调节在明视距离处，即 $d-s'=l_0$，则由(2.4-2)式得

$$M=\frac{f'-s'}{f'}=\frac{f'+(l_0-d)}{f'}=\left(\frac{l_0}{f'}+1\right)-\frac{d}{f'} \tag{2.4-4}$$

如果让放大镜紧挨着眼睛，即 $d=0$，由上式可得

$$M=\frac{l_0}{f'}+1 \tag{2.4-5}$$

由此可见，按上述两种方式($s'=-\infty$ 和 $s'=-l_0, d\approx 0$)使用放大镜时，它们的放大率差 1.然而事实上 d 不可能为零，所以它们几乎是相同的，以后我们只用(2.4-3)式表示放大镜的放大率.

为了增加放大镜的放大率，应减小凸透镜的焦距. 但对单透镜而言，减小焦距就应减小透镜表面的曲率半径. 例如，对于 $n_0=1.5, r_1=-r_2=r$ 的双凸透镜，由(1.8-8)式得 $f'=r$，当 $M=10$ 时，

由(2.4-3)式得 $r=2.5$ cm. 这样小的曲率半径不仅给磨制工作带来困难,而且半径愈小,像差愈大,所以由单个透镜做成的放大镜其放大率通常只有几倍,如果采用复合透镜,像差减小,放大率可达 20 倍(记为 20×)左右.

2.4.3 目镜

目镜的作用相当于一个放大镜. 不过放大镜通常是用来观察实物的,而目镜则是用来观察物镜所生成的物体的中间像. 一般对目镜的要求除了较高的放大率外,还要有较大的视场角和尽可能地校正各种像差. 为此,目镜通常是由两个或更多透镜组成,在目镜系统中,接近物镜的那个透镜称为**场镜**,接近眼睛的则称为**接目镜**. 目镜的种类很多,下面讨论最常用的两种:惠更斯目镜和冉斯登目镜.

1. 惠更斯目镜

惠更斯目镜由两个相同材料的平凸透镜组成,凸面都迎着光线. 场镜 L_1 的焦距f_1'与接目镜 L_2 的焦距f_2'之比约为 1.5 至 3.0,两透镜光心之间的距离 $d=(f_1'+f_2')/2$,即满足消放大率色差的条件. 图 2.4-2 为 $f_1'=3a$,$f_2'=a$,$d=2a$ 的惠更斯目镜的光路图. 采用逐次成像法可求组合系统的焦点.

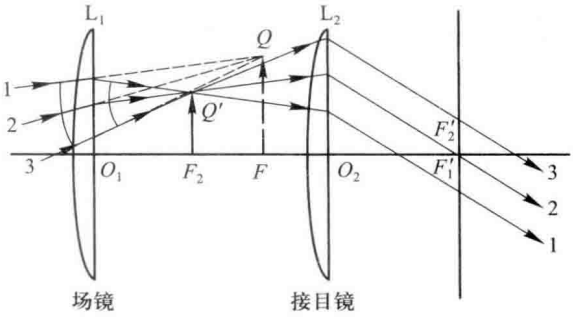


图 2.4-2 惠更斯目镜

物体经物镜本应成像于目镜物方焦平面上 FQ 处,但它还未来得及成像时就被场镜折射而成像于接目镜物方焦面上 F_2Q'处,所以 FQ 是虚物. 图中画出了入射会聚光束中的 1、2、3 三条光线,它们经场镜折射后相交于 Q'点即为 Q 点的像. F_2Q'再经接目镜成虚像于无穷远处. 如欲配置叉丝或标尺,则应放在 F_2Q'处,使它们的像和观察物体的像在视网膜上同一处出现. 在这种情况下,标尺只通过接目镜成像,所以标尺像是未消色差的,可见惠更斯目镜不宜用在测量仪器中. 不过由于它结构简单,视场比较大,常用于生物显微镜和金相显微镜等观察仪器中.

2. 冉斯登目镜

冉斯登目镜由两个相同材料的平凸镜组成,凸面相向,平面向外,如图 2.4-3 所示,其一种结构形式为 $f_1'=f_2'=a$,两透镜光心之间距离 $d=2a/3$.这种结构形式不满足消放大率色差的条件.

来自物镜的会聚光束成实像于目镜的物方焦面上,再经场镜成虚像于接目镜的物方焦面 F_2Q'上,然后经接目镜成虚像于无穷远处. 由于冉斯登目镜的物方焦面在场镜之外. 因而它可单独用作放大镜观察实物,而惠更斯目镜却只能用来观察像. 在冉斯登目镜物方焦面上加一标尺,可对被观察的物体或物体生成的实像进行长度测量. 因此冉斯登目镜常用于测量仪器中.

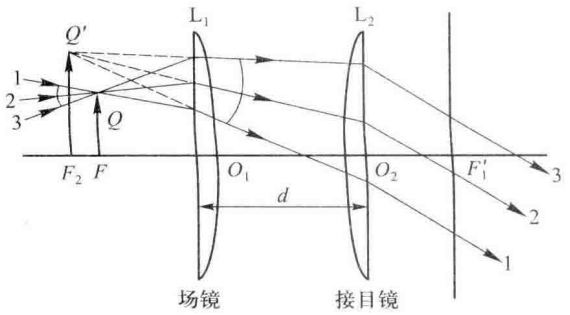


图 2.4-3　冉斯登目镜

§2.5　显　微　镜

早在 16 世纪中叶，斯泰卢蒂(F. Stellutil)就利用透镜做成 5×和 10×的放大镜，即所谓的单式显微镜. 1590 年左右，荷兰的两位眼镜制造商詹森兄弟(H. Janssen 和 Z. Janssen)制造了由多个会聚透镜组成的第一台复式显微镜. 1648 年胡克(Hooke)借助显微镜发现了动物和植物组织内的细胞. 后来人们使用显微镜在生物学、医学、材料等科学领域又有许多重要发现. 光学显微镜经过几百年的发展，性能不断提高，现在已成为一种用途十分广泛的助视仪器.

显微镜的光学结构包括两组透镜：一组为焦距极短的物镜 L_o，另一组为目镜 L_e. 为了消除像差，物镜和目镜都是复杂的透镜组. 在研究显微镜的成像原理时，我们可用单透镜来表示物镜和目镜. 如图 2.5-1 所示，被观察的物体 PQ 高为 y，位于物镜 L_o 物方焦点 F_o 外侧附近，经物镜生成高为 y'的放大实像 F_eQ'. 当显微镜正常调节时，中间像位于目镜的物方焦面上，再经目镜生成放大虚像于无穷远处. 也可调节显微镜，使最后像位于明视距离处. 以下计算显微镜的放大率时，假设它是正常调节的情况.

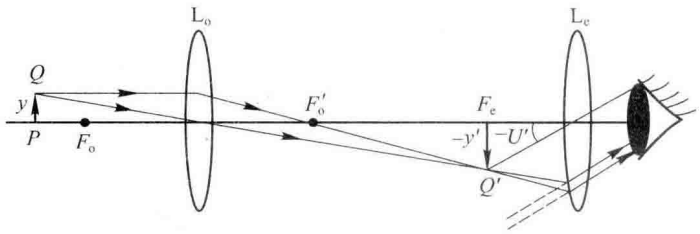


图 2.5-1　显微镜光路

设物镜和目镜的像方焦距分别为 f_o'和 f_e'，由图可知，最后像对人眼的视角与中间像对目镜中心的张角相等，即

$$\tan(-U')=\frac{-y'}{f_e'}$$

将物体放在明视距离处用眼直接观察时，视角 U 的正切为

$$\tan U=\frac{y}{l_0}$$

则

$$M=\frac{\tan U'}{\tan U}=\frac{y'l_0}{yf'_e}=\beta_0 M_e \tag{2.5-1}$$

即显微镜的视角放大率是物镜的垂轴放大率 β_0 与目镜的视角放大率 M_e 之乘积. 由于经过物镜和目镜的两次放大,所以显微镜和目镜相比可以具有高得多的放大率.

物镜像方焦点 F'_0 到目镜物方焦点 F_e 的距离称为光学间隔,记为 Δ,通常也称它为显微镜的光学筒长,则

$$\beta_0=-\frac{x'_0}{f'_0}=-\frac{\Delta}{f'_0}$$

式中 x'_0 为物镜像方焦点 F'_0 到它所生成的像 $P'Q'$ 的距离,将上式及(2.4-3)式代入(2.5-1)式得

$$M=-\frac{\Delta l_0}{f'_0 f'_e}=\frac{l_0}{f'} \tag{2.5-2}$$

式中 $f'=\frac{f'_0 f'_e}{-\Delta}$ 为系统的焦距. 上式表明,显微镜的放大率与光学筒长成正比,与物镜和目镜的焦距成反比,选用短焦距的物镜和目镜,可获得较大的放大率,式中负号则表明显微镜生成的是倒像. 显微镜的另一重要特性参量——分辨率将在第五章中讨论.

§2.6 望 远 镜

望远镜也是由物镜和目镜所组成. 显微镜用于观察近处的小物体,望远镜则用于观察远处的大物体. 望远镜用于观看无限远处的物体时,物镜的像方焦点与目镜的物方焦点重合,即光学间隔为零,因而系统的焦点在无限远处. 用于观看有限远物体时(例如大地测量望远镜或观剧镜),光学间隔不为零但很小. 作为一般原理的讨论,我们研究光学间隔为零的情况.

图 2.6-1 所示为开普勒望远镜的光路图. 从远处物上一点 Q 射来的平行光束,经物镜成像于其像方焦面上 Q' 点,再经目镜成为一束平行于直线 $Q'O_2$ 的平行光束. 它所成的最后像位于无穷远处.

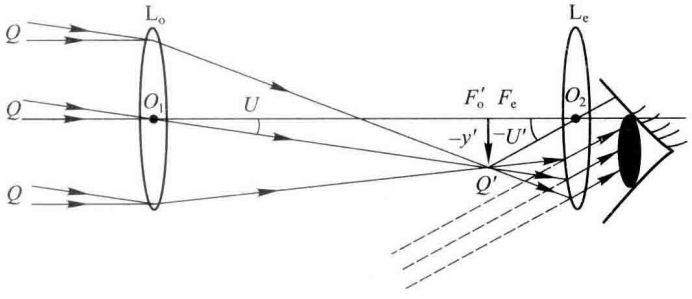


图 2.6-1 开普勒望远镜光路

根据定义，望远镜的放大率等于它的最后像对人眼视角的正切和位于无穷远物体对人眼视角正切之比，物对眼的视角可近似地用物对物镜中心的张角表示，由图可知

$$\tan U=\frac{-y'}{f'_o}$$

最后像对眼视角的正切为

$$\tan(-U')=-\frac{y'}{f'_e}$$

则

$$M=\frac{\tan U'}{\tan U}=-\frac{f'_o}{f'_e} \tag{2.6-1}$$

即物镜焦距愈长，目镜焦距愈短，放大率愈大. 式中负号表示开普勒望远镜生成的是倒像，而且上式中的 U 和 U' 是一对共轭量，即望远系统的角放大率与视角放大率相等.

如图 2.6-2 所示，望远系统没有专门设置孔径光阑，物镜边缘就是孔径光阑，也是入射光瞳. 物镜边缘对目镜所成的像即为出射光瞳，位于目镜像方焦点之外，观察者就在出瞳处观察物体所成的像. 视场光阑设在物镜和目镜的公共焦点处. 入窗和出窗分别位于系统的物方和像方无限远处，即各与物平面和像平面重合，这样可消除像的渐晕现象. 由图中的几何关系容易看出，入射光瞳直径 D 和出射光瞳直径 ρ 之比等于物镜像方焦距 f'_o 与目镜像方焦距 f'_e 之比

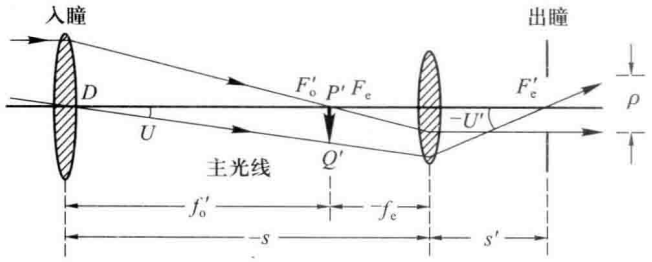


图 2.6-2　望远镜的入瞳和出瞳

$$M=-\frac{f'_o}{f'_e}=-\frac{D}{\rho} \tag{2.6-2}$$

即望远镜物镜的孔径愈大，出射光瞳孔径愈小，放大率愈大. 根据上式可以测定目镜是会聚透镜的望远镜的放大率，方法如下：先将望远镜对准无穷远调焦，再在目镜后面放一张白纸片，前后移动白纸片，使它上面的光斑达到最清晰，此时光斑为物镜经目镜所成的像，即表示出瞳. 测量物镜的孔径和光斑的大小，就可决定望远镜的放大率.

开普勒望远镜生成的是倒像. 为了得到正像，可将目镜换为发散透镜，这样便成为伽利略望远镜，如图 2.6-3 所示. 上述放大率公式的推导对伽利略望远镜完全适用，伽利略望远镜的物镜和目镜之间的距离是 $f'_o-|f'_e|$，其筒长较短，结构简单，故常用作观察镜. 它的公共焦点在目镜之外，因此不能在其公共焦面上安放分划板和视场光阑，从而限制了它的应用范围. 然而它的焦点不在望远镜内，这对于用作激光扩束器是适合的，因为若焦点在望远镜内，高功率激光束将会

使焦点附近空气电离而产生不良结果. 伽利略望远镜的出瞳是虚像,位于 L_o 和 L_e 之间,人眼不能处于出瞳处接收成像光束,人眼可能的最好观察位置是紧贴目镜. 进入眼瞳的斜光束只局限于很小的视场范围,所以它的视场较开普勒望远镜小.

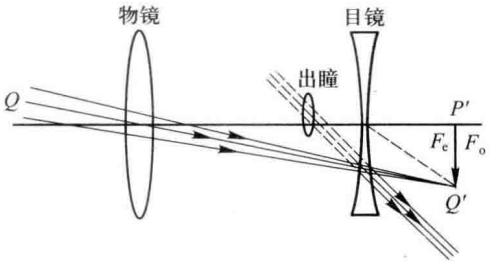


图 2.6-3 伽利略望远镜光路

使用望远镜观察远处物体时,若调节望远镜使最后像不是生成在无限远而是在明视距离处(图 2.6-4),则最后像对人眼的视角可近似取作对目镜中心的张角,即

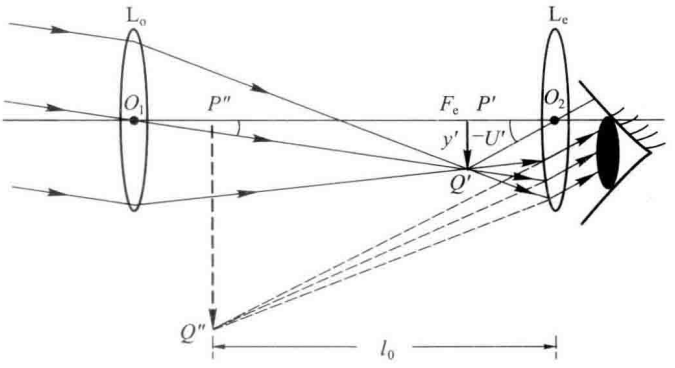


图 2.6-4 开普勒望远镜调节在明视距离

$$\tan(-U') \approx \frac{y'}{s_e}$$

式中 $s_e = O_2P'$. 对 L_e 应用(1.8-10)式得

$$\frac{1}{-l_0} - \frac{1}{s_e} = \frac{1}{f'_e}$$

则

$$\frac{1}{s_e} = -\left(\frac{1}{f'_e} + \frac{1}{l_0}\right)$$

而

$$\tan U \approx \frac{y'}{f'_o}$$

于是得

$$M=\frac{\tan U'}{\tan U}=\frac{\frac{y'}{s_e}}{\frac{y'}{f'_0}}=\frac{f'_0}{s_e}=-\frac{f'_0}{f'_e}\left(1+\frac{f'_e}{l_0}\right) \tag{2.6-3}$$

上式表明，望远镜最后像调节在明视距离处的放大率较在无限远处大$(1+f'_e/l_0)$倍.

为了提高望远镜放大率，由(2.6-2)式应增大物镜的孔径. 不过要制造优良的大孔径透镜十分困难，而增大反射式物镜孔径的困难要少一些. 再者反射式物镜对于较宽光谱范围的入射光都不产生色差，光路可折叠，所以大型天文望远镜的物镜一般都做成反射式的，这种望远镜称为反射望远镜，反射面可采用平面、抛物面、双曲面、椭球面等不同形式. 如图 2.6-5 所示，牛顿物镜是由抛物面反射镜和对光轴倾斜 45°的平面反射镜组成. 如图 2.6-6 所示，卡塞格林(Cassegarain)物镜是由抛物面反射镜和双曲面反射镜构成. 图中平行光轴的入射线经抛物面镜反射后会聚在抛物面的焦点 F'_1上，而该焦点又与双曲面的一个焦点重合，所以物镜的像方焦点位于双曲面的另一个焦点 F'_0上.

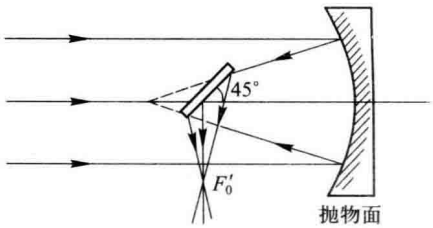


图 2.6-5　牛顿物镜

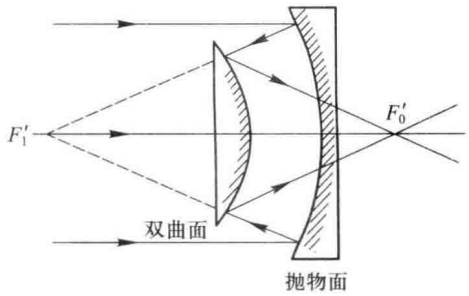


图 2.6-6　卡塞格林物镜

此外，由于通常的玻璃透镜对紫外线和红外线的吸收都比较强烈，而镀铝反射镜对可见光、紫外线、红外线的反射率都较高，所以有些红外仪器和光电测量仪器也采用反射式物镜.

反射式物镜的最大缺点是稳定性差. 温度的变化和物镜自重所引起的镜面变形对成像质量有较大的影响. 反射镀层的反射率也将随时间的推移而逐渐下降. 反射式物镜采用了非球面，加工、检验、装配、校正都比球面困难. 为了克服反射式物镜的这些缺点，可以采用折反式物镜，它是由透镜和反射镜组合而成，其中的反射面通常是球面，透镜则仅仅用于补偿球面反射镜的像差. 采用这种物镜的望远镜称为折反射望远镜.

思　考　题

2.1　试举一简单系统，说明系统的孔径光阑可以随物点在轴上位置的变化而变化.

2.2　当物点在垂直光轴方向上下移动时，系统的孔径光阑是否改变？

2.3　光学系统的孔径光阑和视场光阑两者能否合一？

2.4　放大镜通光口径的大小是限制被观察物面的大小，还是控制到达像面各点光束的大小？

2.5　为什么在汽车上和十字路口安装的都是球面反射镜而不是平面反射镜？

2.6　为什么在十字路口的球面反射镜比汽车的后视镜要大得多？

2.7　鱼缸盛满了水，当观赏其中的鱼时，只有在几乎和鱼缸玻璃壁垂直的方向观察才能看得清楚，为什么以倾斜角度去看，鱼就显得模糊？当鱼看你时也有同样的问题吗？

2.8　反射镜是否会产生色差？通过一个凸透镜观察物体的虚像时，能否看到透镜产生的色差？

2.9　用红、绿、蓝三块滤色玻璃分别盖住三个幻灯机的镜头，如果将这三个幻灯机照射屏幕上同一位置，屏幕上被照明处呈何色？如果将这三块玻璃同时盖住一个幻灯的镜头，从它出射的光又呈何色？

2.10　凹透镜可否单独用作放大镜？

2.11　为什么调节显微镜是改变镜筒与载物台的相对位置而不改变筒长，调节望远镜时则需要调节目镜相对于物镜的距离？

2.12　将一具已正常调节的望远镜用来观察地面上的建筑物，怎样调节镜筒的长度？

2.13　远视眼和近视眼的观众用伽利略望远镜看戏时，各自应怎样调节镜筒？

2.14　变焦距镜头广泛用于普通的照相机和电视摄像机中，其焦距的改变是通过组成镜头的各透镜间的相对移动来实现的. 试设计一种方案以实现这种作用.

习　题

2.1　两个薄凸透镜 L_1 和 L_2 的口径均为 4 cm，L_1 的焦距为 8 cm，L_2 的焦距为 3 cm，L_2 在 L_1 之后 5 cm，对于平行于光轴入射的光线，求系统的孔径光阑、入射光瞳和出射光瞳.

2.2　两个薄透镜 L_1 和 L_2 的口径分别是 6 cm 和 4 cm，它们的焦距是 $f_1'=9$ cm 和 $f_2'=5$ cm，相距 5 cm，在 L_1 和 L_2 之间距离 L_2 为 2 cm 处放入一个带有直径为 6 cm 的小孔的光阑. 物点位于 L_1 前方 12 cm 处，求孔径光阑、入射光瞳和出射光瞳.

2.3　如图 2.1 所示为一透镜系统和相应的光瞳，试用作图法求物体 PQ 的像. 提示：从物体顶端至入瞳中心和边缘引主光线和边缘光线.

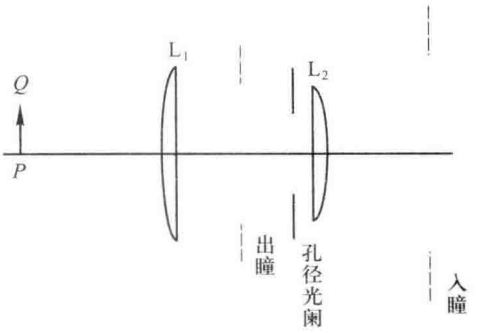


图 2.1

2.4　试证两个相同材料的薄凸透镜组合消除放大率色差的条件是：

$$d=\frac{f_1'+f_2'}{2}$$

2.5　用一正常调节的开普勒望远镜观察远处的星，设望远镜的物镜和目镜都可看作是单个薄透镜，物镜焦距 $f_o'=80$ mm，相对孔径 $D/f_o'=0.5$，目镜焦距 $f_e'=10$ mm，位于物镜后焦面上的分划板直径为 10 mm，物镜为孔径光阑，分划板通光孔为视场光阑. 试求：

(1) 出瞳的位置和大小;

(2) 视角放大率;

(3) 入窗和出窗的位置;

(4) 物方视场角及像方视场角的大小.

2.6 一架显微镜物镜 L_o 的焦距为 1 cm,目镜 L_e 的焦距为 3 cm,物镜与目镜之间的间距为 20 cm.

(1) 若使最后像生成在无穷远处,物体应放在距物镜多远处? 此时显微镜的放大率是多少? 出瞳的位置在何处?

(2) 若将 L_e 和 L_o 推近一个小距离,使最后像成在明视距离处,求推近的距离应为多少?

2.7 一开普勒望远镜焦距为 40 cm,相对孔径为 $f'/5.0$(即 $D/f'=1/5.0$),今测得出射光瞳直径为 2 cm,试求望远镜的放大率和目镜焦距.

2.8 物镜焦距 $f'_o=50$ cm 的望远镜已正常调节,为了清楚看到 50 m 处的物体,应将目镜移动多少距离?

第三章　光波及其在各向同性介质界面的反射和折射

在几何光学中，我们基于光线的概念讨论光学系统的成像问题时，并未涉及光的本性. 但是光是电磁波，用几何光学定律不能解释表现光的波动特性的诸如光的干涉、衍射、偏振等各种现象. 为了解释这些现象，必须涉及光的本性. 波动光学就是从光是电磁波这一基本观点出发来讨论各种条件下光传播的规律，例如数列相干光波在传播路径中相遇而产生的干涉，光波在传播路径中波前受限而产生的衍射，光波在各向异性的晶体中的传播，以及光和物质相互作用时发生的某些现象等.

本章中将首先介绍光波场的数学描述和光波的偏振态，然后讨论在各向同性介质界面的反射和折射，为后继的波动光学各章作准备，最后介绍负折射率介质.

§3.1　光　　波

我们已知一个物理量在其平衡位置（或平均值）附近做周期变化称为**振动**，振动在空间的传播形成**波**，凡波动所及空间称为**波场**.

按照经典电磁理论，光源中大量分子、原子形成的电偶极子的振动引起电场强度 $\boldsymbol{E}$（简称电矢量）和磁场强度 $\boldsymbol{H}$（简称磁矢量）的周期变化，从而产生光波. 光波存在的区域形成光波场. 在无限大均匀介质中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 同相且互相垂直，它们又都与传播方向垂直，组成右手螺旋系统，如图 3.1-1 所示. 图中实线表示矢量 $\boldsymbol{E}$ 在 Oxz 面内振动，虚线表示矢量 $\boldsymbol{H}$ 在 Oyz 面内振动. 光波是一种横波，其电场和磁场的大小有下列关系

$$\sqrt{\varepsilon}E=\sqrt{\mu}H \tag{3.1-1}$$

式中 ε、μ 为光波所在介质的介电常量和磁导率. 在介质中光传播的速度

$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{3.1-2}$$

设真空的介电常量和磁导率为 ε_0、μ_0，则介质的折射率

$$n=\frac{c}{v}=\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} \tag{3.1-3}$$

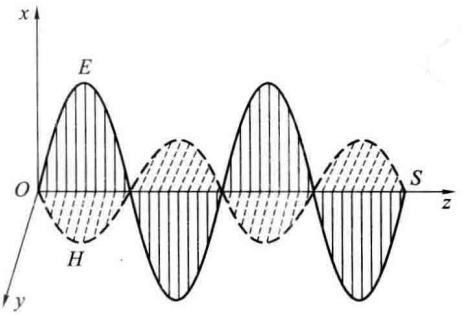


图 3.1-1　矢量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 和传播方向组成右手螺旋系统

对于大多数电介质，$\mu \approx \mu_0$，于是上式可写为

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\varepsilon_r} \tag{3.1-4}$$

式中 ε_r 为相对介电常量.

大量实验证明，各种检测光的元件（例如感光胶片、光电池、光电倍增管）对光的反应以及光化学作用、光合作用、眼睛的视觉等，主要是由电磁波中的电场所引起.这是因为在光和物质相互作用的过程中，通常情况下，物质中带电粒子受电磁场的电场力作用比磁场力大得多.因此，我们选择电场强度 $\boldsymbol{E}$ 表示光场，并把电矢量 $\boldsymbol{E}$ 叫作光矢量（光通过旋光物质或某些人工电磁介质的情形除外）①.

光波的能量是存在于电磁场中的，电磁场的能量密度即单位体积中的能量为

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2 \tag{3.1-5}$$

式中 $\frac{1}{2}\varepsilon E^2$ 和 $\frac{1}{2}\mu H^2$ 分别为电场和磁场的能量密度. 在光波传播过程中同时伴随有能量传输，波的强弱可用单位时间内通过垂直于传播方向单位面积的能量即能流密度 S 来衡量. 在不考虑介质吸收的情况下，

$$S = wv = \frac{v}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)$$

将(3.1-1)和(3.1-2)式代入上式得

$$S = v\varepsilon E^2 = v\mu H^2 = EH \tag{3.1-6}$$

在各向同性介质中，光能沿波的传播方向流动，而且 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 垂直于波的传播方向，并与传播方向构成右手螺旋系，于是可将 S 写为矢量：

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{3.1-7}$$

这个矢量称为**能流密度矢量**，又常称为**坡印廷**（Poynting）**矢量**，它是光学中的一个重要物理量，其矢量方向代表光能量的传播方向，它的大小表示能流密度的瞬时值.

对于电矢量振幅为 A、沿 z 方向传播的简谐平面光波，通过 P 点的瞬时能流密度为

$$S = v\varepsilon A^2 \cos^2(\omega t - kz)$$

对于光波来说，电场和磁场的变化频率在 10^{14} Hz 量级，$\boldsymbol{S}$ 随 t 变化非常快，它的瞬时值是无法直接测量的，人眼、感光板、光电管等接收器都只能对它在一定时间间隔 τ 内的平均值产生响应. 通过光场中某处 P 的平均能流密度或光功率面密度称为该点的**光强**，用符号 I 表示，单位为 $\mathrm{W/m^2}$. 将上式从 t' 到 $t'+\tau$ 的时间间隔内求平均，并用符号$<S>$表示坡印廷矢量的时间平均值，则

$$I = <S> = \frac{v\varepsilon A^2}{\tau}\int_{t'}^{t'+\tau} \cos^2(\omega t - kz)\,\mathrm{d}t \tag{3.1-8}$$

因为

$$\cos^2(\omega t - kz) = \frac{1}{2}[1 + \cos 2(\omega t - kz)]$$

---

① 姚欣，朱建华，郭永康. 关于用电矢量表示光矢量问题的探讨. 大学物理，2013，32(6)：1-4.

代入上式得

$$I=\frac{v\varepsilon A^2}{\tau}\int_{t'}^{t'+\tau}\frac{1}{2}[1+\cos 2(\omega t-kz)]\,\mathrm{d}t$$

式中方括弧内第一项积分很简单：

$$\int_{t'}^{t'+\tau}\mathrm{d}t=\tau$$

对于第二项积分，因为周期为 T 的余弦函数在一段 $\tau\gg T$ 的区间中积分时，正半周与负半周的面积抵消后，剩下的面积不会大于周期 T 与振幅的乘积之半（图 3.1-2），所以远小于 τ，即此项积分相对于第一项可以忽略，于是有

$$I=\frac{v\varepsilon}{2}A^2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}A^2=\frac{1}{2}n\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}A^2 \quad (3.1-9)$$

上式表明，光场中某点的光强与介质的折射率和光振动振幅的平方成正比，也就是说测量光强的接收器只能给出关于光波振幅的信息，而不能反映光波的相位. 在实际工作中经常测量和研究的是同一介质中某接收面上的相对光强分布，因而常将上式中的常数略去而写为

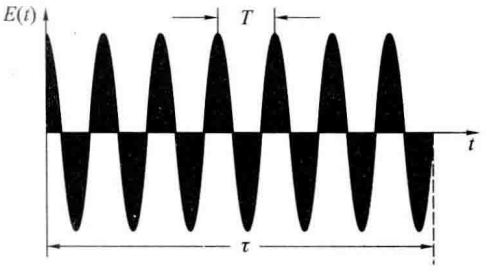


图 3.1-2 余弦函数在 τ 时间内的积分

$$I=A^2 \quad (3.1-10)$$

如果在不同介质中比较光强时，则应写为

$$I=nA^2 \quad (3.1-11)$$

§3.2 光波场的数学描述

普通光源发出的光波具有十分复杂的性质，本节中我们主要讨论简谐光波或称单色光波的数学描述. 首先，单色光波是许多实际光波的近似抽象，例如各种单色光源发出的光波，尤其是激光可以很接近单色光；其次，按照傅里叶定理，任何函数在满足一定条件下都可展开为一个包含许多不同频率的简谐函数的积分，即各种光波场都可分解为许多简谐波场的叠加. 因此研究简谐光波具有最基本的意义.

波场中各点的位移（或其他物理量）随时间做周期性的变化，而每一瞬时波场中各点的位移（或其他物理量）的空间分布也必呈现一定的周期性，即是说波动具有时空双重周期性. 用来描写光波场中各点电场随时间变化规律的数学表达式称为光波的**波函数**或波方程式. 如果描写波场的波函数必须用矢量时，则相应的波称为**矢量波**；如果波场可用标量描写，则相应的波称为**标量波**. 例如声波是标量波，电磁波是矢量波，然而在很多情况下可把光波近似作为标量波处理. 下面分别讨论一维和三维单色光波场的数学描述.

3.2.1 一维单色平面光波场

一维单色平面光波是指沿某一轴线传播的简谐平面波，轴线上各点作振幅相等频率相同的

简谐振动. 沿 z 方向传播的一维平面简谐波的波函数可写为

$$E(P,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)+\varphi_0\right] \tag{3.2-1}$$

式中 A 为振幅，ω 为圆频率，v 为波速或称相速，φ_0 为振源的初相. 可以证明，它是下列波动方程

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

的解. 若再用 λ 表示波长，ν 表示频率，T 表示周期，k 表示波数(或称传播数)①，并利用已知关系

$$\nu=\frac{1}{T},\quad \omega=2\pi\nu,\quad v=\frac{\lambda}{T},\quad k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

可将(3.2-1)式改写为

$$E(P,t)=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{z}{\lambda}\right)+\varphi_0\right] \tag{3.2-2}$$

$$=A\cos(\omega t-kz+\varphi_0) \tag{3.2-3}$$

$$=A\cos\left[2\pi\left(\nu t-\frac{z}{\lambda}\right)+\varphi_0\right] \tag{3.2-4}$$

上式表明，单色平面光波场是在时间和空间上都无限延伸的且具有周期性的波场. 描写时间周期性的参量为周期(T)、频率(ν)和圆频率(ω)，与此相应，我们把波长(λ)称作波场的空间周期，其倒数 $f=\frac{1}{\lambda}$ 则称为**空间频率**，它表示传播方向上单位长度内的波长数，而波数 k 表示沿传播方向 2π 长度内的波长数，所以称为**空间圆频率**. 必须注意，这里的空间周期、空间频率、空间圆频率的定义是只对传播方向而言的，后面将讲到，在三维波场中这些参量将随考察方向不同而改变. 利用空间频率，(3.2-4)式还可改写为

$$E(P,t)=A\cos[2\pi(\nu t-fz)+\varphi_0] \tag{3.2-5}$$

由(3.2-2)、(3.2-3)和(3.2-5)式可明显地看出，简谐波函数中描写时间周期性和空间周期性的两组参量处于对称的地位，它们的对应关系见表 3.2-A.

表 3.2-A　描写一维简谐波场的两组参量

时间周期性			空间周期性		
名称	符号	关系式	名称	符号	关系式
频率	ν	$\nu=\frac{1}{T}$ $\omega=\frac{2\pi}{T}$	空间频率	f	$f=\frac{1}{\lambda}$ $k=\frac{2\pi}{\lambda}$
周期	T		空间周期	λ	
圆频率	ω		空间圆频率	k	
两者联系			$\lambda=vT,\quad f=\frac{\nu}{v},\quad k=\frac{\omega}{v}$		

① 在光谱学中把 $1/\lambda$ 称为波数，我们按照光学中的习惯称 $k=2\pi/\lambda$ 为波数.

3.2.2 三维单色光波场

实际的光波大多是在三维空间传播的，从而实际的光波场也大多是三维的，因此需要将上节的讨论推广到三维的情况.

1. 平面光波场

(1) 波函数

设有一列沿任意方向传播的单色平面光波，为了求出其波函数，通过坐标原点作一矢量 $\boldsymbol{k}$（图 3.2-1），它的方向就是波的传播方向，它的大小等于波数 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$，这个矢量称为**波矢量**或**传播矢量**. 平面波的波面是垂直于矢量 $\boldsymbol{k}$ 的平面. 对于单色平面波，场中各点的振幅相同，而且在波面上各点相位相同. 因此某一时刻波场中任一点 $P(x,y,z)$ 的振动应与通过 P 点的波面与矢量 $\boldsymbol{k}$ 的交点 P_0 处的振动相同. 于是 P 点的振动可写为

$$E(P,t)=A\cos(\omega t-kr_0+\varphi_0) \qquad (3.2-6)$$

式中 r_0 为原点 O 至 P_0 点的距离. 若设原点 O 至 P 点的径矢为 $\boldsymbol{r}$，由图 3.2-1 可得

$$r_0=\boldsymbol{r}\cdot\frac{\boldsymbol{k}}{k}$$

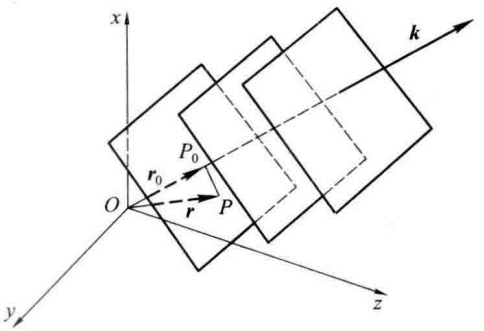


图 3.2-1 平面波的传播

将上式代入(3.2-6)式得

$$E(P,t)=A\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0) \qquad (3.2-7)$$

上式即为沿 $\boldsymbol{k}$ 方向传播的单色平面光波波函数的表示式，它是三维波动方程

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

的解. 若传播方向的方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的三个分量

$$k_x=k\cos\alpha,\quad k_y=k\cos\beta,\quad k_z=k\cos\gamma \qquad (3.2-8)$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}&=k_x x+k_y y+k_z z\\&=k(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\end{aligned}$$

将上式代入(3.2-7)式得

$$\begin{aligned}E(P,t)&=A\cos[\omega t+\varphi(P)]\\&=A\cos[\omega t-k(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)+\varphi_0]\end{aligned} \qquad (3.2-9)$$

综上所述，可知平面波函数具有两个特点：(1) 振幅 A 是与场点坐标无关的常数；(2) 初相位或相位的空间分布 $\varphi(P)$ 是直角坐标的线性函数，即

$$\varphi(P)=-k(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)+\varphi_0 \qquad (3.2-10)$$

当入射光波长 λ、传播方向的方向余弦以及光源的初相 φ_0 给定时，由(3.2-9)式即可求出波场中任一点 P 的振动.

(2) 波场的空间频率

从三维平面波函数(3.2-9)式可知,波场中某点的振动随时间做简谐变化的关系与一维情况一样比较简单,但是描述波场中振动空间周期性分布的参量却与考察的方向有关,因而三维的问题较为复杂.

为了说明问题的方便起见,我们假定平面波只沿 xz 面内某方向传播,它的波矢为 $\boldsymbol{k}$,传播方向的方向余弦为$(\cos\alpha,\cos\gamma)$,如图 3.2-2 所示. 图中画出了几条与 $\boldsymbol{k}$ 垂直的平行线表示等相位线,相邻的线所对应的相位值依次相差 2π,因此两线间的距离为 λ. 即平面波沿传播方向的空间周期为 λ,空间频率则为 $1/\lambda$,这就是我们在上节一维情况下所得出的结论.

若我们选择与传播方向夹角为 θ 的 ON 方向来考察,由图 3.2-2 可见,在 ON 方向上相邻两等相位线间的距离即波场的空间周期为

$$d_\theta=\frac{\lambda}{\cos\theta} \tag{3.2-11}$$

也就是说假想沿 $\boldsymbol{k}$ 方向前进,从一个波峰到另一个波峰所经路程为 λ,则沿 ON 方向前进时,在相邻两波峰间所经路程却为$\dfrac{\lambda}{\cos\theta}$,于是在 ON 方向上的空间频率为

$$f_\theta=\frac{\cos\theta}{\lambda} \tag{3.2-12}$$

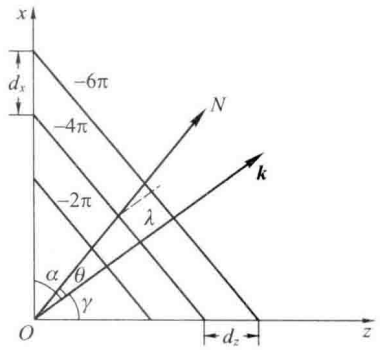


图 3.2-2　二维平面波的空间周期

它表示在 ON 方向上单位长度内等相位点重复数. 上式表明,对于一个确定的平面波场,空间频率 f_θ 随考察方向的不同而不同,即光波的空间频率是考察方向的方向角的"函数". 当 $\theta<\dfrac{\pi}{2}$时,$f_\theta>0$;$\theta>\dfrac{\pi}{2}$时,$f_\theta<0$.可见空间频率可正可负,而空间频率的正负只是说明考察方向与波传播方向之间的相对方位.

若将考察方向分别选作 x 和 z 轴,由(3.2-11)和(3.2-12)式可得此二方向上的空间周期和空间频率为

$$d_x=\frac{\lambda}{\cos\alpha},\quad d_z=\frac{\lambda}{\cos\gamma} \tag{3.2-13}$$

$$f_x=\frac{\cos\alpha}{\lambda},\quad f_z=\frac{\cos\gamma}{\lambda} \tag{3.2-14}$$

上述讨论可推广到三维波场的情况. 若将考察方向 ON 分别选作直角坐标系的 x,y,z 轴,则对于传播方向余弦为$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$的平面波,在三个坐标轴方向上的空间周期和空间频率为

$$d_x=\frac{\lambda}{\cos\alpha},\quad d_y=\frac{\lambda}{\cos\beta},\quad d_z=\frac{\lambda}{\cos\gamma} \tag{3.2-15}$$

$$f_x=\frac{\cos\alpha}{\lambda},\quad f_y=\frac{\cos\beta}{\lambda},\quad f_z=\frac{\cos\gamma}{\lambda} \tag{3.2-16}$$

将(3.2-16)式与(3.2-8)式比较可知,波矢 $\boldsymbol{k}$ 在某方向上的分量与该方向的空间频率之间只差一个常数因子 2π,于是我们可以引入**空间频率矢量** $\boldsymbol{f}$ 来描写波场的空间周期性:

$$\boldsymbol{f}=\frac{1}{2\pi}\boldsymbol{k} \tag{3.2-17}$$

即空间频率矢量的方向就沿波传播的方向,它在某一方向的分量就等于在该方向上波场的空间频率. 因此由一组空间频率分量就可确定平面波的传播方向.

当波场确定时,由(3.2-16)式所表示的三个分量中只有两个是独立的,因为

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

由此可得

$$|f|=(f_x^2+f_y^2+f_z^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\lambda} \tag{3.2-18}$$

所以将某两个分量代入上式即可求得第三个分量.

根据(3.2-17)式

$$\boldsymbol{k}=2\pi\boldsymbol{f}$$

与 $\omega=2\pi\nu$ 类似,称为**空间圆频率矢量**,它的三个分量 k_x,k_y,k_z 分别表示波长沿三个坐标轴方向上变化的圆频率. 由(3.2-8)式可得

$$k=(k_x^2+k_y^2+k_z^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\omega}{v}$$

所以 $\boldsymbol{k}$ 的三个分量中也只有两个是独立的.

若用空间频率表示,则平面波函数(3.2-7)式可写为

$$\begin{aligned}E(P,t)&=A\cos(\omega t-2\pi\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0)\\&=A\cos[\omega t-2\pi(f_x x+f_y y+f_z z)+\varphi_0]\end{aligned} \tag{3.2-19}$$

由上式可知,振幅 A 和波长 λ 已知的单色平面波的波函数可由一组空间频率 (f_x,f_y,f_z) 来确定,所以一组空间频率对应于沿一定方向传播的一列单色平面波,或者说一列平面波的空间传播特性可用一组空间频率来描述.

应该指出,空间频率的概念完全可应用于随空间坐标作周期变化的其他物理量. 例如我们在讨论两光束干涉仪中接收面上的光强分布时,就可用空间频率来描写接收面上干涉场的空间分布.

例 3.2-1 一单色平面光波的时间频率为 6×10^{14} Hz,在真空中沿 xy 面内传播,在一定的时刻波场中相位相差 2π 的等相位线的分布如图 3.2-3 所示. 已知沿 x 方向等相位线的间隔为 1 μm,求:

(1) 在传播方向上波场的空间频率;

(2) x,y 方向的空间频率;

(3) 传播方向与 x,y 轴夹角.

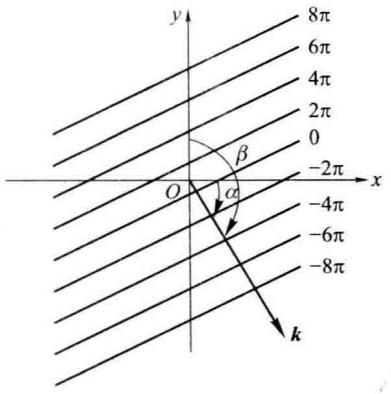


图 3.2-3

解 (1) 传播方向上的空间频率等于波长的倒数,即

$$f=\frac{1}{\lambda}=\frac{\nu}{c}=\frac{6\times10^{14}}{3\times10^{14}}\ \mu\mathrm{m}^{-1}=2\ \mu\mathrm{m}^{-1}$$

(2) 由(3.2-10)式得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=-k\cos\alpha=-2\pi f_x,\quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y}=-k\cos\beta=-2\pi f_y$$

由图可见,沿 x 方向坐标增加,相位减少;沿 y 方向坐标增加,相位增加,即$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}<0$,$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y}>0$,因此$f_x>0$,$f_y<0$,则

$$f_x=\frac{1}{d_x}=1\ \mu\mathrm{m}^{-1},\quad f_y=-\sqrt{f^2-f_x^2}=-\sqrt{3}\ \mu\mathrm{m}^{-1}$$

(3) 由(3.2-16)式得　　$\cos\alpha=\lambda f_x=\frac{1}{2},\quad \alpha=60°$

$$\cos\beta=\lambda f_y=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \beta=150°$$

即平面波的传播方向在第二、四象限,传播矢量与 x 轴夹角为 60°,与 y 轴夹角为 150°.

2. 球面光波场

一个理想单色点光源发出的光波在均匀各向同性介质中向四面八方传播时,将形成一个单色球面光波场.

设波源 O 的初相位为 φ_0,因为球面波沿径向方向向外传播时在同一时刻离波源 r 处 P 点的相位比 O 处落后 kr,则 P 点的相位为

$$\varphi(P,t)=\omega t+\varphi(P)=\omega t-kr+\varphi_0 \tag{3.2-20}$$

由此可知,在 r 相同的地方振动有相同的相位,所以球面波的波面是以波源为心的同心球面. 再者,球面波由中心向外传播时,扰动的空间范围愈来愈大,它的振幅应随 r 的增大而减小. 根据能量守恒定律的要求可知,球面波的振幅应与 r 成反比. 从上述球面波的振幅与 r 成反比和相位与 r 呈线性关系这两个特点,可写出其波函数为

$$E(P,t)=\frac{A}{r}\cos(\omega t-kr+\varphi_0) \tag{3.2-21}$$

式中 A 称为**波源强度**,它表示单位距离处球面波的振幅.

对于由外向球心传播的会聚球面波,距球心 r 处 P 点的相位较球心处超前 kr,若仍设球心处初相位为 φ_0,则此会聚球面波的波函数为

$$E(P,t)=\frac{A}{r}\cos(\omega t+kr+\varphi_0) \tag{3.2-22}$$

球面波的振幅是随 r 增大而单调减小的,所以振幅的空间分布并无周期性可言,波场的空间周期性表现在相位分布上. 由(3.2-20)式得 $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|=\frac{2\pi}{\lambda}$,当 r 改变 λ 时相位改变 2π,所以球面波沿半径方向上相位分布的周期为 λ,相应的空间频率为$\frac{1}{\lambda}$. 在图 3.2-4 中,一组同心圆弧表示相位依次相差 2π 的波面与 xz 平面的交线. 由图可见在 r 方向上(图中的 ON)两波面之间的距离相等,但若任意选择一方向,例如与 x 轴平行的 x'轴线上来看,相邻两波面之间的距离是依次逐渐减小的. 也就是说,在球面波场中沿任意方向考察时,一般情况下相位的分布也不具有周期性.

3. 柱面光波场

一个各向同性的无限长线光源向外发射的是柱面波，它的波面是以光源为中心轴随着距离的增大而逐渐扩展开的同轴圆柱面. 当离光源的距离 r 足够大时，柱面光波的波函数可近似地写为

$$E(P,t)=\frac{A}{\sqrt{r}}\cos(\omega t-kr+\varphi_0) \tag{3.2-23}$$

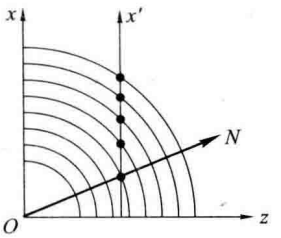


图 3.2-4 球面波场中等相位线的空间分布

4. 高斯光波场

前面讨论的平面波、球面波和柱面波在波面上各点的振幅相等，称之为**均匀波**. 若波面上各点振幅不相等，则称为**非均匀波**. 基模激光所形成的高斯光束就是一种非均匀波.

高斯波场的波函数的振幅因子和相位因子在横向都是高斯型函数（即负二次型的指数函数），具有如下形式：

$$A(P)=\frac{A_0}{w(z)}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}\right] \tag{3.2-24}$$

$$\varphi(P)=k\left[z+\frac{x^2+y^2}{2r(z)}\right]-\varphi_0(z) \tag{3.2-25}$$

上面二式中 $w(z)$ 和 $r(z)$ 是 z 的函数

$$w(z)=w_0\left(1+\frac{\lambda^2z^2}{\pi w_0^4}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.2-26}$$

$$r(z)=z\left(1+\frac{\pi^2w_0^4}{\lambda^2z^2}\right) \tag{3.2-27}$$

w 的大小表示光束的有效半径. 当 $z=0$ 时，即用 xy 平面和光束相截，则该平面上光场的振幅和相位分布为

$$A(x,y,0)=\frac{A}{w_0}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}\right) \tag{3.2-28}$$

$$\varphi(x,y,0)=-\varphi_0(0)$$

上式表明，在 $z=0$ 的截面上任一点的相位都是相等的. 在此，高斯光束的波面为平面，此处称为高斯光束的腰，w_0 为腰粗. 在 $z\neq0$ 处用一平面和 z 轴垂直相截，在截面的不同圆上 x^2+y^2 有不同取值，因而相位值不同，所以垂直 z 轴的平面（$z\neq0$）不是波场的等相位面，即高斯光束不是平面波. 但是在傍轴区域内，高斯光束的等相位面近似为曲率半径为 $r(z)$ 的球面，这些球面的曲率中心并不重合. 在远场区域，当 $\lambda^2z^2\geqslant\pi^2w_0^2$ 时，(3.2-27)式中的 $r(z)\approx z$，高斯光束才过渡到通常的球面波（图 3.2-5）.

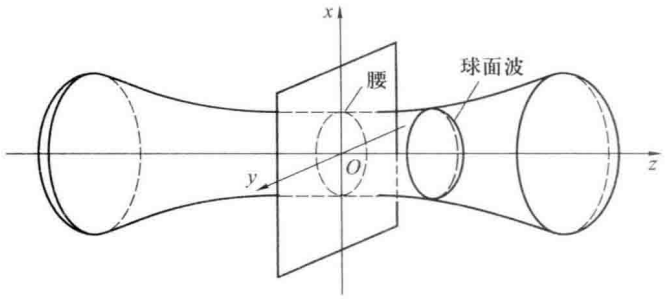


图 3.2-5　高斯光束的结构

§3.3　波函数的复数表示　复振幅

3.3.1　波函数的复数表示

用余弦(或正弦)函数来描写简谐波在运算上有时并不方便. 例如当涉及多个简谐函数的相加、微分或积分时,运算就十分麻烦. 如果采用波函数的复数表示法,将会使运算变得简单. 我们已知复数 E 的表示形式为

$$E=x+\mathrm{i}y \tag{3.3-1}$$

式中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$,x 和 y 分别是复数 E 的实部和虚部,它们本身都是实数. 由图3.3-1中的极坐标(r,α)可得

$$x=r\cos\alpha,\quad y=r\sin\alpha$$

因此

$$E=x+\mathrm{i}y=r(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha) \tag{3.3-2}$$

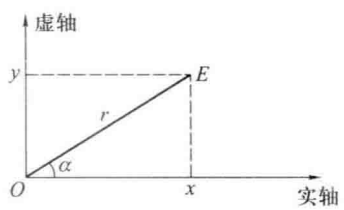


图 3.3-1　复数的图示

由欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha \tag{3.3-3}$$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}=\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha \tag{3.3-4}$$

则

$$E=r(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \tag{3.3-5}$$

$$E^{*}=r(\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha)=r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \tag{3.3-6}$$

式中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 称为复数的模,$\alpha=\arctan\dfrac{y}{x}$ 称为辐角.

由(3.3-5)和(3.3-6)式可以看出,$r\cos\alpha$ 是复数 $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ 或 $r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$ 的实部,即

$$r\cos\alpha=\mathrm{Re}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}) \tag{3.3-7a}$$

$$r\cos\alpha=\mathrm{Re}(r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}) \tag{3.3-7b}$$

符号 Re 表示取复数的实部. 同理 $r\sin\alpha$ 和 $-r\sin\alpha$ 分别是复数 $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ 和 $r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$ 的虚部,即

$$r\sin\alpha=\mathrm{Im}(re^{i\alpha}) \tag{3.3-8a}$$

$$-r\sin\alpha=\mathrm{Im}(re^{-i\alpha}) \tag{3.3-8b}$$

符号 Im 表示取复数的虚部.

由此可见简谐函数和复指数函数之间存在着对应关系,因此可用复指数函数来表示简谐函数,而且不论复指数函数的实部或虚部都可以用来描写简谐波,但是习惯上都选用其实部即余弦函数,再者采用(3.3-7a)或(3.3-7b)式两种表示法中任何一种是完全等效的. 本书中采用大多数文献所采用的后一种表示法. 于是可把(3.2-7)式所示平面波波函数写为

$$\begin{aligned}E(P,t)&=A\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0)\\&=\mathrm{Re}\{A\exp[-\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0)]\}\end{aligned} \tag{3.3-9}$$

为了简单起见,可以省去表示实部的符号 Re,将上式写为

$$E(P,t)=A\exp[-\mathrm{i}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0)] \tag{3.3-10}$$

应当指出,我们所需要的波函数只是上式右端的实部,于是在作简谐波函数的线性运算(加、减、乘常数、微分、积分)时,可用复指数函数来表示波函数,并通过复数运算后从计算的最后结果取相应的实部即为所求.

3.3.2 复振幅

对于单色光波,其频率是已知的. 除平面波的振幅是常数外,其他简谐波的振幅是随位置而变的. 所以单色波场中某点在时刻 t 的振动完全由该点的振幅和初相位所决定,因此在描写单色光波场和进行线性运算时,我们主要关心这两个量. (3.3-10)式可改写为

$$E(P,t)=Ae^{\mathrm{i}(k\cdot r-\varphi_0)}\cdot e^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{3.3-11}$$

上式表明,用复指数函数表示波函数,可将空间位置坐标决定的初相位 $-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\varphi_0)$ 和由时间决定的相位 ωt 分开. 将上式中含时间 t 的指数因子略去不写,令

$$\tilde{E}(P)=Ae^{-\mathrm{i}\varphi(P)}=Ae^{\mathrm{i}(k\cdot r-\varphi_0)} \tag{3.3-12}$$

称为平面光波场中任一点 P 的**复振幅**. 若用空间频率表示,上式可写为

$$\tilde{E}(P)=Ae^{\mathrm{i}(2\pi f\cdot r-\varphi_0)}=A\exp\{\mathrm{i}[2\pi(f_x x+f_y y+f_z z)-\varphi_0]\} \tag{3.3-13}$$

对于沿 x 方向传播的一维平面波,其复振幅为

$$\tilde{E}(P)=Ae^{\mathrm{i}(kz-\varphi_0)} \tag{3.3-14}$$

对于球面波,其复振幅为

$$\tilde{E}(P)=\frac{A}{r}e^{\mathrm{i}(kr-\varphi_0)} \tag{3.3-15}$$

对于高斯波束,其复振幅可表示为

$$\tilde{E}(P)=\frac{A_0}{w(z)}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}\right]\cdot\exp\left\{-\mathrm{i}k\left[z+\frac{x^2+y^2}{2r(z)}\right]+\mathrm{i}\varphi_0(z)\right\} \tag{3.3-16}$$

总之,复振幅是一个复数,其模表示波场中某点的振幅,其辐角表示该点初相位的负值. 复振幅包含了我们所关心的振幅和相位两个空间分布,所以可以用它来描写单色光波场.

3.3.3　共轭波

设某一波的复振幅为

$$\tilde{E}(P)=A(P)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot r} \tag{3.3-17}$$

其复共轭函数为

$$\tilde{E}^{*}(P)=A(P)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot r} \tag{3.3-18}$$

则称上式对应的波为(3.3-17)式对应的原波的**共轭波**. 由以上两式可见,共轭波与原波是互为共轭的,它们的实振幅空间分布相同,只是其波矢量由$\boldsymbol{k}$变为$-\boldsymbol{k}$,即传播方向反转. 例如发散的球面波,其共轭波变成了会聚球面波.

3.3.4　光强的复振幅表示

在干涉和衍射问题中,常常要处理单色光波场的叠加. 用复指数函数表示波函数时,可以把共同的时间因子$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$提出去,而只对复振幅进行运算. 这样既可简化运算,又可突出影响结果的振幅和空间相位因子两个量.

应当注意,复指数函数和简谐函数之间只是一个对应关系而不是相等关系,唯有进行线性运算时,其实部和虚部互不干扰,在最后的结果中取相应的实部(或虚部)才有效. 例如设两个复函数为

$$E_1=A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1},\quad E_2=A_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$$

它们的积

$$E=E_1E_2=A_1A_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$$

而

$$\mathrm{Re}(E_1E_2)\neq\mathrm{Re}\,E_1\cdot\mathrm{Re}\,E_2$$

即一般情况下复函数的积的实部不等于它们实部的积,因此当两个波函数相乘时,我们不能用它们相应的复函数之积取实部来表示. 根据复函数的运算规则

$$|EE^{*}|=|E|^{2}$$

即复函数和它的共轭量之积等于复函数模的平方,因此光强表示式(3.1-10)可用复函数表为

$$I=A^{2}=\tilde{E}\tilde{E}^{*} \tag{3.3-19}$$

上式是常用的用复振幅求光强分布的公式.

§3.4　光波的偏振态

波动有横波和纵波两类. 横波的振动方向与传播方向垂直,其振动可在垂直传播方向的某些方向较强,在另一些方向较弱,这种现象称为波的**偏振**. 纵波的振动方向与波的传播方向一致,在垂直于波传播方向的各个方向去考察纵波,情况是完全相同的. 纵波具有对称性,即纵波不产生偏振. 因此偏振是横波区别于纵波的标志.

电磁理论表明，电磁波是横波. 光波是特定频率范围的电磁波，显然光波也是一种横波，其光矢量 $\boldsymbol{E}$ 的振动方向应与光波的传播方向垂直. 但是在垂直于传播方向的平面内，光矢量还可能有各种不同的振动状态. 我们称光矢量的这些振动状态为光波的偏振态. 通常光波的偏振态计有 3 类 7 种：(1) 完全偏振(线偏振、圆偏振、椭圆偏振)；(2) 非偏振；(3) 部分偏振(部分线偏振、部分圆偏振、部分椭圆偏振).

1. 椭圆偏振光

设平面光波沿 z 方向传播，光矢量为

$$E=A\cos(\omega t-kz+\delta) \tag{3.4-1}$$

为了分析该光波的偏振特性，可将其表示为沿 x、y 方向振动的两个独立分量的线性组合(图 3.4-1)，即

$$E=\mathrm{i}E_x+\mathrm{j}E_y \tag{3.4-2}$$

其中

$$E_x=A_x\cos(\omega t-kz)$$

$$E_y=A_y\cos(\omega t-kz+\delta)$$

式中 δ 为 y 方向的振动超前于 x 方向的相位，从以上两式中消去参数 t，即得合成的光矢量 $\boldsymbol{E}$ 末端的轨迹方程

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2+\left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2-2\left(\frac{E_x}{A_x}\right)\left(\frac{E_y}{A_y}\right)\cos\delta=\sin^2\delta \tag{3.4-3}$$

这是一个二元二次方程，它表示 E 末端的轨迹是限制在边长分别为 $2A_x$ 和 $2A_y$ 的矩形框内的椭圆. E_x 和 E_y 二分量的相位差 δ 及振幅比 A_y/A_x 决定了椭圆的形状和空间取向. 由解析几何知识可计算得到椭圆二主轴分别与两个坐标轴之间的夹角 ψ 满足下式：

$$\tan 2\psi=\frac{2A_xA_y\cos\delta}{A_x^2-A_y^2} \tag{3.4-4}$$

在一般情况下，光矢量在垂直传播方向的平面内大小和方向都改变，它的末端轨迹是由(3.4-1)式决定的椭圆，故称为椭圆偏振光. 在某一时刻，传播方向上各点对应的光矢量末端分布在具有椭

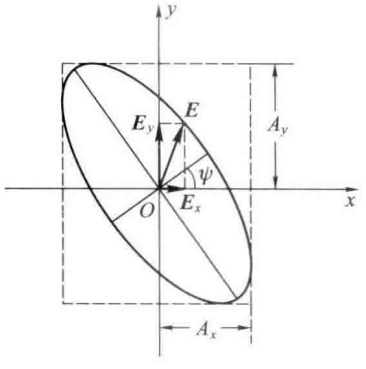


图 3.4-1 椭圆偏振光的参量

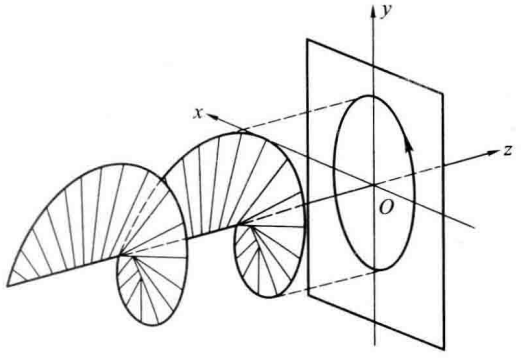


图 3.4-2 某一时刻椭圆偏振光的光矢量末端分布在螺线上

圆截面的螺线上，随着时间的推移，整个螺线以相速度向前推移，在某一时刻各光矢量末端在 xy 面上的投影是一个椭圆，如图 3.4-2 所示. 椭圆的长、短半轴和取向与二分量 E_x、E_y 的振幅和相位差有关. 其旋向取决于相位差 δ；当 $2m\pi<\delta<(2m+1)\pi$（$m=0,1,2,\cdots$）时，迎着光的传播方向看，光矢量沿顺时针方向旋转，称为右旋椭圆偏振光；当 $(2m-1)\pi<\delta<2m\pi$（$m=1,2,3,\cdots$）时，迎着光的传播方向看，光矢量沿反时针方向旋转，称为左旋椭圆偏振光.

图 3.4-3 中画出了几种不同 δ 值的椭圆偏振态. 在一定条件下，线偏振态和圆偏振态都可以看作椭圆偏振态的特例.

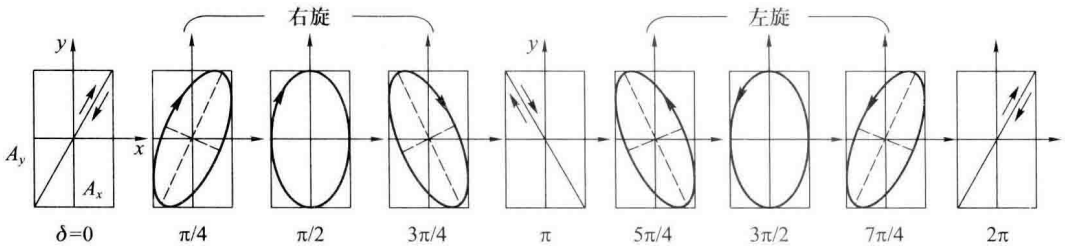


图 3.4-3　各种 δ 对应的椭圆振动

2. 圆偏振光

在(3.4-3)式中，当 E_x、E_y 的振幅相等($A_x=A_y=A$)，二分量的相位差为 $\pi/2$ 的奇数倍，即 $\delta=m\pi/2$($m=\pm1,\pm3,\pm5,\cdots$)时，椭圆方程退化为圆方程

$$E_x^2+E_y^2=A^2 \tag{3.4-5}$$

在垂直传播方向的某一平面内，光矢量以圆频率 ω 旋转，而它的大小不变. 其末端轨迹描出一个圆，这种光称为**圆偏振光**，如图 3.4-4 所示.

若 $\delta=m\pi/2$ 中的 m 取**正**号，即 y 方向的振动相位超前于 x 方向 $\pi/2$，迎着光的传播方向看，光矢量沿顺时针方向旋转，为**右旋圆偏振光**；$\delta=m\pi/2$ 中的 m 取**负**号，即 y 方向振动相位落后于 x 方向 $\pi/2$，迎着光的传播方向看，光矢量沿反时针方向旋转，为**左旋圆偏振光**.

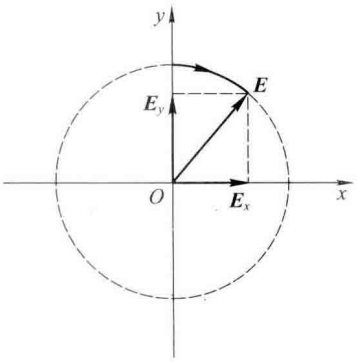


图 3.4-4　圆偏振光通过垂直于传播方向某一平面时，光矢量末端描出一个圆

在某一时刻 t_0，传播方向上各点对应的光矢量末端则分布在一个螺旋曲线上，随着时间推移，整个螺线以相速度向前移动，各光矢量在 xy 面内的投影是一个圆，如图 3.4-4 所示.

3. 线偏振光

在(3.4-3)式中，当 E_x 和 E_y 二分量的相位差为零或 2π 的整数倍，即 $\delta=m\pi$($m=0,\pm1,\pm2,\cdots$)，椭圆方程退化为一直线. 此时，(3.4-3)式表示为

$$\frac{E_x}{E_y}=\pm\frac{A_x}{A_y} \tag{3.4-6}$$

当 $m=0$ 或偶数时，光振动方向在Ⅰ、Ⅲ象限内，当 m 为奇数时，光振动方向在Ⅱ、Ⅳ象限内(见图 3.4-3 中 $\delta=0$ 和 $\delta=\pi$ 的两图). 当光波通过的时候，在垂直于传播方向的某一平面内，光矢量只改变大小而不改变方位，它的末端的轨迹是一直线，这种光称为**线偏振光**. 在同一时刻，光传播方

向上各点的光矢量都分布在同一平面内，所以又称之为**平面偏振光**. 包含光矢量和传播矢量的平面则称为**振动面**.

4. 自然光

一个原子发射的光波是一些断续的互不相关的线偏振波列，每一波列的持续时间约为 10^{-8} s. 普通光源包含着为数很多的原子和分子，它们各自无规则地发射着振动方向、初相各不相同的光波. 这种由大量独立发光基元发射的光波的集合称为**自然光**. 由于同时存在着大量原子和分子的无规发射，每一基元的发射又迅速无规地变化，所以可将自然光看作沿同一方向传播的许多线偏振光的集合. 它在垂直传播方向的平面内，具有一切可能的振动方向，没有哪一个方向更占优势，各方向上振动的振幅在观察时间内平均值相等，初相位却完全彼此无关. 因此，自然光中光矢量的分布从统计平均来看，对传播方向是完全对称的，如图 3.4-5 所示.

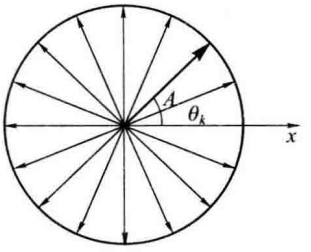


图 3.4-5 自然光中电矢量的分布

为了在实际问题中处理自然光时比较方便，我们要赋予它一个更简单的等效模型. 在自然光中任取一个线偏振成分，其光矢量与 x 轴的夹角为 θ_k，如图 3.4-5 中的粗矢量所示. 此方向上振动之振幅为 A_k、初相为 φ_k，因此其振动方程可用复振幅表为

$$\widetilde{E}_k = A_k e^{i\varphi_k}$$

将此振动分解在 x，y 方向得

$$\widetilde{E}_{kx} = A_{kx} e^{i\varphi_k}, \widetilde{E}_{ky} = A_{ky} e^{i\varphi_k}$$

其中

$$A_{kx} = A_k \cos\theta, A_{ky} = A_{ky} \sin\theta \tag{3.4-7}$$

将自然光中每一振动成分分解在 x，y 方向，并将 x 和 y 方向上所有的分振动分别相加，则得

$$\widetilde{E}_x = \sum_{k=1}^{m} A_{kx} e^{i\varphi_k}, \quad \widetilde{E}_y = \sum_{k=1}^{m} A_{ky} e^{i\varphi_k}$$

上式中的 m 表示项数. 于是 x 方向上的光强为

$$\begin{aligned} I_x &= \widetilde{E}_x \widetilde{E}_x^* = (A_{1x} e^{i\varphi_1} + A_{2x} e^{i\varphi_2} + \cdots + A_{mx} e^{i\varphi_m})(A_{1x} e^{-i\varphi_1} + A_{2x} e^{-i\varphi_2} + \cdots + A_{mx} e^{-i\varphi_m}) \\ &= (A_{1x}^2 + A_{2x}^2 + \cdots + A_{mx}^2) + (A_{1x}^2 A_{2x}^2 e^{i\varphi_1} e^{-i\varphi_2} + A_{1x}^2 A_{2x}^2 e^{-i\varphi_1} e^{i\varphi_2} + \cdots) \end{aligned}$$

因为自然光中各振动成分的振幅相等，即 $A_1 = A_2 = \cdots = A_m = A$，并注意到(3.4-7)式，则上式中的两项可分别写为

$$\text{第一项} = A^2(\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cdots + \cos^2\theta_m)$$

因为 m 是一个极大的数，上式中的 θ 可取 0 与 2π 间各种值，而 $\cos^2\theta$ 则取 0 与 1 间各种值，所以上式括号内之和应为 $\frac{m}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{第二项} &= A^2[\cos\theta_1 \cos\theta_2 e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + \cos\theta_1 \cos\theta_2 e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} + \cdots] \\ &= A^2[2\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + 2\cos\theta_2 \cos\theta_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + \cdots] \end{aligned}$$

上式括号中的每一项都属于 $\cos\theta_i \cos\theta_k \cos(\varphi_i - \varphi_k)$ 型，因为 θ 可取 0 与 2π 间各种值，这种形式的

项可取+1 与-1 间各种值，因此上式括号内之和应等于零. 所以

$$I_x=\frac{1}{2}mA^2$$

同理可得

$$I_y=\frac{1}{2}mA^2$$

由此可见，自然光可以看作是振动方向互相垂直的、振幅或强度相等而相位完全无关两个线偏振光的合成.

5. 部分偏振光

偏振态介于线偏振和自然光之间的是部分偏振光，在垂直光传播方向的平面内，光矢量具有各种方向，但各不同方向上的振幅大小不同，它不具有轴对称性，见图 3.4-6. 部分偏振光可看作是完全偏振光和自然光的混合. 当分别用线偏振光、圆偏振光、椭圆偏振光和自然光混合时，则相应地得到部分线偏振光、部分圆偏振光、部分椭圆偏振光. 因为在大多数情况下遇到的都是部分线偏振光，今后如不特别指明，讲到部分偏振光时，都是指部分线偏振光.

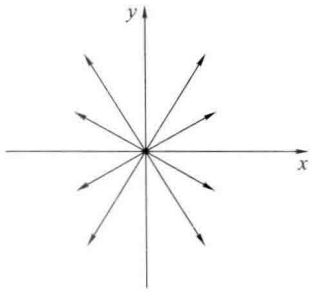


图 3.4-6　部分偏振光

部分线偏振光也可看作是两个振动方向互相垂直的线偏振光的合成，但它们的振幅不等，相位也完全无关.

为了描述部分偏振光的偏振程度，我们定义部分偏振光的总强度中完全偏振光所占的百分比为**偏振度**，用符号 P 表示. 设部分偏振光的总强度为 I，其中自然光的强度为 I_n，偏振光的强度为 I_p，则

$$P=\frac{I_p}{I}=\frac{I_p}{I_p+I_n} \tag{3.4-8}$$

对于完全偏振光 $I_n=0$，则 $P=1$；对于自然光，$I_p=0$，则 $P=0$，所以也叫作非偏振光. 对于部分线偏振光，上式可写为

$$P=\frac{I_M-I_m}{I_M+I_m} \tag{3.4-9}$$

式中 I_M 和 I_m 分别为两个正交方向上光强的极大值和极小值.

例 3.4-1　试讨论两列频率相同、振动方向相互垂直、传播方向相反的线偏振光叠加的合成光场的偏振特性.

两列频率相同、振动方向互相垂直、传播方向相反的线偏振光的波函数的标量形式可写为

$$E_1=A_x\cos(\omega t-kz) \tag{3.4-10}$$

$$E_2=A_y\cos(\omega t+kz+\delta_0) \tag{3.4-11}$$

式中 A_x、A_y 分别表示 x、y 方向的振幅，选择沿 z 方向传播的波在 $z=0$ 处的初相为零，(3.4-11)式中之 δ_0 即为在 $z=0$ 处，E_2 相对于 E_1 的相位差. 上述两列波在叠加区域中的合成光场的偏振态决定于两列波在场点 z 处的相位差

$$\delta=2kz+\delta_0 \tag{3.4-12}$$

令 $z=z_0$ 处 $\delta=2\pi$，则该处的合成光场为线偏振态. 若 $z=z_0+\frac{\lambda}{8}$，则 $\delta=2\pi+\frac{\pi}{2}$. 这是由于向 z 正方向传播至该

处的光波光程增加$\frac{\lambda}{8}$，相应的相位增加 $\pi/4$；而向 z 负方向传播至 z 处的光波相对于 z_0 处而言光程减少$\frac{\lambda}{8}$，相应的相位减少 $\pi/4$，二者的相位差为 $\pi/2$，合成光场为正椭圆偏振态，若 $A_x=A_y$，则为圆偏振. 若 $z=z_0+\frac{\lambda}{4}$，$\delta=2\pi+\pi$，则合成光场仍为线偏振，只是其振动方向由原来的 1、3 象限变为 2、4 象限. 对 z 轴上其他位置作类似分析不难得出：频率相同、振动方向相互垂直、反向传播的两列线偏振波叠加区域中，合成光场为一系列椭圆偏振光，这些椭圆的空间取向沿 z 轴逐点变化，在特殊情况下为线偏振或圆偏振. 其偏振态的变化如图 3.4-4 所示，每隔$\frac{\lambda}{2}$光程，重复这种变化（图 3.4-7），这种光场称为**偏振梯度场**.

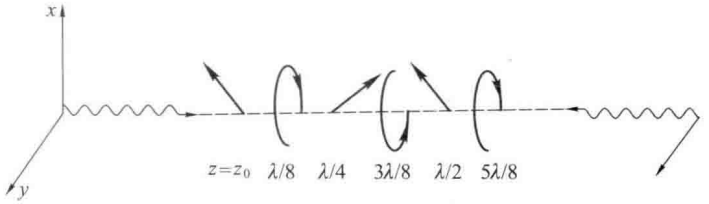


图 3.4-7 偏振梯度效应

在 20 世纪 90 年代成功实现的玻色-爱因斯坦凝聚实验中（见本书 9.4.1 节），偏振梯度冷却是一种最重要的冷却机制，将它和其他冷却机制相结合形成“光学黏胶”，使原子的运动减速，获得了若干 nK 的极低温度.

§3.5 光在各向同性介质界面的反射和折射

一列光波射到两种不同介质界面上时，将分成反射波和折射波. 根据电磁场的麦克斯韦方程和边界条件，可以得到反射定律和折射定律以及菲涅耳公式，从而能够决定反射波、折射波的传播方向和偏振态以及反射波、折射波和入射波之间的振幅和相位关系. 这里我们不作这种推导，而直接写出菲涅耳公式，然后根据它去讨论在电介质界面反射和折射的主要性质.

3.5.1 菲涅耳公式 振幅反射率和透射率

设两种电介质的折射率分别为 n_1 和 n_2，它们由水平界面分开，平行光从介质 1 射入介质 2，入射角、反射角和折射角分别为 i_1、i_1' 和 i_2（图 3.5-1）.

将入射波、反射波和折射波的光矢量分解为在入射面内和垂直于入射面的两个分量，前者称为平行分量，用“p”表示；后者称为垂直分量，用“s”表示. 设 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{E}_1'$、$\boldsymbol{E}_2$ 分别表示入射波、反射波和折射波在入射点处的光场，相应的 p 分量可写为 E_{1p}、E_{1p}' 和 E_{2p}，相应的 s 分量可写为 E_{1s}、E_{1s}' 和 E_{2s}. 为了描述各光波中光矢量的分量，我们还需建立坐标系. 如图 3.5-1 所示，我们规定各 p 分量和 s 分量与相应的光的传播方向构成右手正交系. s 分量的正方向是由纸面内垂直指向纸面外，图中用“⊙”表示. 由 s 分量的正方向和光波的传播方向及右手螺旋法则可确定 p 分量的正方向，图中用箭头表示. 应当注意，图中的箭头和“⊙”都应画在入射点的位置上，只

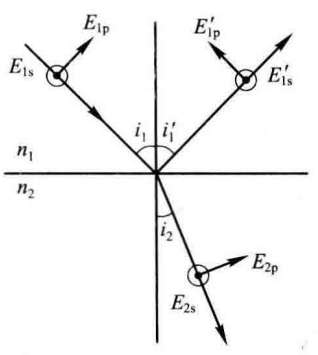


图 3.5-1 坐标系的建立

是为了看起来明显一些而把它们画在远离入射点处了.

根据电磁理论和以上关于方向的约定,可以得出在界面两侧邻近点的入射场、反射场和折射场的各分量之间满足以下关系:

$$r_p=\frac{E'_{1p}}{E_{1p}}=\frac{n_2\cos i_1-n_1\cos i_2}{n_2\cos i_1+n_1\cos i_2}=\frac{\tan(i_1-i_2)}{\tan(i_1+i_2)} \tag{3.5-1}$$

$$r_s=\frac{E'_{1s}}{E_{1s}}=\frac{n_1\cos i_1-n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1+n_2\cos i_2}=-\frac{\sin(i_1-i_2)}{\sin(i_1+i_2)} \tag{3.5-2}$$

$$t_p=\frac{E_{2p}}{E_{1p}}=\frac{2n_1\cos i_1}{n_2\cos i_1+n_1\cos i_2}=\frac{2\cos i_1\sin i_2}{\sin(i_1+i_2)\cos(i_1-i_2)} \tag{3.5-3}$$

$$t_s=\frac{E_{2s}}{E_{1s}}=\frac{2n_1\cos i_1}{n_1\cos i_1+n_2\cos i_2}=\frac{2\cos i_1\sin i_2}{\sin(i_1+i_2)} \tag{3.5-4}$$

上述式中的 r_p 和 r_s 分别称为 p 分量和 s 分量的**振幅反射率**;t_p 和 t_s 分别称为 p 分量和 s 分量的**振幅透射率**. 菲涅耳最先从光的弹性以太理论得出了一组类似以上各式的公式,后来人们由电磁理论得到了相同的结果,所以(3.5-1)至(3.5-4)式称为**菲涅耳公式**.

当光波正入射时,$i_1=i_2=0$,则得

$$r_p=-r_s=\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1} \tag{3.5-5}$$

$$t_p=t_s=\frac{2n_1}{n_2+n_1} \tag{3.5-6}$$

菲涅耳公式表明,反射、折射光波的 p 分量和 s 分量只分别与入射光里的 p 分量和 s 分量有关. 这就是说,在反射和折射过程中 p、s 两个分量的振动是相互独立的. 如果 n_1、n_2 和入射角 i_1 已知,就可由折射定律求出折射角 i_2,从而可由菲涅耳公式求出振幅反射率和透射率. 利用菲涅耳公式可以说明在介质界面反射和折射的许多重要特性.

3.5.2　能流反射率和透射率

现在讨论反射光、折射光和入射光间的能量关系. 设 I_1、I'_1、I_2 分别表示入射、反射、折射光强,w_1、w'_1、w_2 分别表示入射、反射、折射光的能流,入射光束在界面上所照射的面积为 σ(图 3.5-2),我们已知光强表示单位时间内通过垂直于传播方向单位面积的光能量值. 由(3.1-11)式,将式中的振幅 A 改写为 E_0,得 $I=nE_0^2$,则通过面积 σ 的入射、反射、折射光的能流和入射、反射、折射光强之间有下列关系:

$$w_1=I_1\sigma\cos i_1=\frac{n_1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_1^2\sigma\cos i_1$$

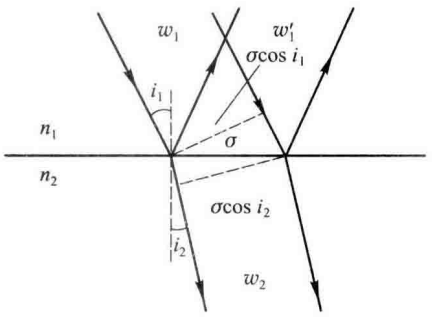


图 3.5-2　光束截面在反射和折射时的变化

$$w_1' = I_1' \sigma \cos i_1 = \frac{n_1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_1'^2 \sigma \cos i_1$$

$$w_2 = I_2 \sigma \cos i_2 = \frac{n_2}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_2^2 \sigma \cos i_2$$

我们定义反射、折射光的能流与入射光能流的比值为**能流反射率**和**能流透射率**，通常简称为**反射率**和**透射率**，分别记为 R 和 T，则入射光场的 p 分量、s 分量的能流反射率和透射率分别为

$$R_s = \frac{w_{1s}'}{w_{1s}} = \left|\frac{E_{1s}'}{E_{1s}}\right|^2 = r_s^2 = \frac{\sin^2(i_1 - i_2)}{\sin^2(i_1 + i_2)} \tag{3.5-7}$$

$$R_p = \frac{w_{1p}'}{w_{1p}} = \left|\frac{E_{1p}'}{E_{1p}}\right|^2 = r_p^2 = \frac{\tan^2(i_1 - i_2)}{\tan^2(i_1 + i_2)} \tag{3.5-8}$$

$$T_s = \frac{w_{2s}}{w_{1s}} = \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1}\left|\frac{E_{2s}}{E_{1s}}\right|^2 = \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1} t_s^2 \tag{3.5-9}$$

$$T_p = \frac{w_{2p}}{w_{1p}} = \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1}\left|\frac{E_{2p}}{E_{1p}}\right|^2 = \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1} t_p^2 \tag{3.5-10}$$

若入射光为自然光或圆偏振光，它可分解为振动面相互垂直的两线偏振光，其 s 分量和 p 分量的振幅相等，从而其能流相等且为入射能流的一半，即

$$w_{1s} = w_{1p} = \frac{1}{2} w_1$$

则自然光或圆偏振光的能流反射率为

$$R = \frac{w_1'}{w_1} = \frac{w_{1s}' + w_{1p}'}{w_{1s} + w_{1p}} = \frac{w_{1s}'}{2w_{1s}} + \frac{w_{1p}'}{2w_{1p}} = \frac{1}{2}(R_s + R_p)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin^2(i_1 - i_2)}{\sin^2(i_1 + i_2)} + \frac{\tan^2(i_1 - i_2)}{\tan^2(i_1 + i_2)}\right] \tag{3.5-11}$$

根据能量守恒定律，透射率为

$$T = 1 - R \tag{3.5-12}$$

以上二式表明反射率及透射率随界面两侧介质的折射率 n_1、n_2 及入射角 i_1 而变化. 图 3.5-3 (a)和(b)所示为空气($n=1$)/玻璃($n=1.5$)界面外反射及内反射时的反射率及透射率(R_s、R_p、R 和 T)随入射角而变化的曲线，其中虚线是对自然光入射而言的. 从图中的曲线可以看出：

(1) 当光波正入射或入射角很小时($i_1 \approx 0$)，无论外反射或内反射均有

$$R_s = R_p = R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \tag{3.5-13}$$

$$T = 1 - R = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \tag{3.5-14}$$

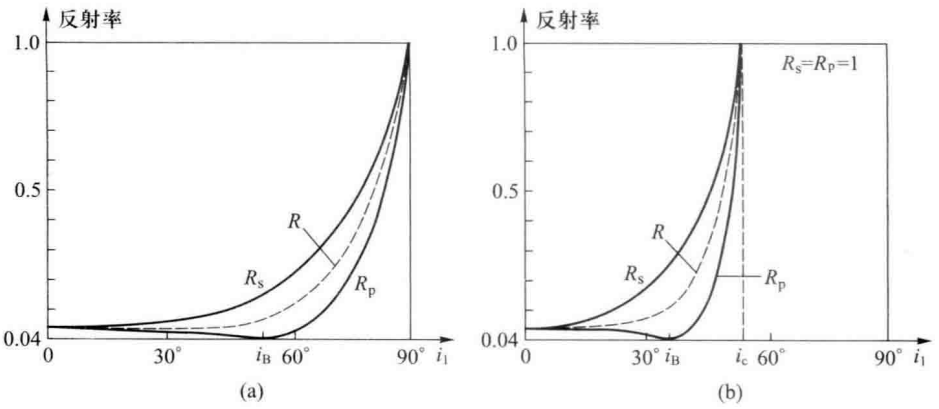


图 3.5-3　空气/玻璃界面的反射率及透射率

(a) 外反射;(b) 内反射

(2) 随着入射角的增加,无论内反射还是外反射,R_s 总是单调地增加,而 R_p 先下降,在特殊角 i_B 处降到 0,然后再上升. i_B 称为**布儒斯特角**.

(3) 当 $i_1<i_B$ 时,反射率变化缓慢,当 $i_1>i_B$ 时,R 变化急剧增大. 对于内反射,当 $i_1=i_c=\arcsin n_{21}$ 时,$R=1$,i_c 称为全反射临界角;对于外反射,当接近掠入射即 $i_1\to 90°$ 时,$R\to 1$,入射光几乎被全部反射. 我们在湖岸能清楚地看到并能拍摄下对岸景物的倒影,就是因为对岸景物发出的光在湖面上有较大入射角,反射光很强.

3.5.3　斯托克斯公式

英国物理学家斯托克斯(Stokes,1819—1903)提出了一种处理界面上反射和折射问题的有趣方法,得出了一组很有用的公式,后来称为**斯托克斯公式**. 虽然斯托克斯处理法是在菲涅耳公式发表以后提出的(1835 年),而且由菲涅耳公式也可直接导出斯托克斯公式,但它仍以其别具一格的简捷处理方法和鲜明的物理图像著称于世.

如图 3.5-4(a)所示,MN 为 1、2 两种介质的界面,它们的折射率分别为 n_1 和 n_2. 入射光 AO 投射到界面上产生反射光 OR 和折射光 OT,入射角为 i_1,折射角为 i_2. 设入射光振幅为 a,反射光与折射光的振幅分别为 ra 与 ta,其中 r 和 t 分别表示从第 1 介质向第 2 介质入射时的振幅反射率和振幅透射率.

现在再来考察反射光 OR 与折射光 OT 逆转时发生的情况. 如图 3.5-4(b)所示,当原来的反射光 OR 现在作为入射光 RO 射到界面 MN 时,它产生的反射光和折射光的振幅分别为 rra 和 tra. 同时,当原来的折射光 OT 作为入射光 TO 射到介质的分界面上时,若从第 2 介质射向第 1 介质的振幅反射率为 r',振幅透射率为 t',则 TO 产生的反射光振幅为 $r'ta$,透射光振幅为 $t'ta$. 为了醒目起见,将左上角和左下角两条光线错开来画. 倘若不考虑光传播过程中能量被吸收而产生的损耗,根据光的可逆性原理,原反射光 OR 和折射光 OT 逆转为入射光 RO 和 TO 时,其合成的总效应应该是只在第 1 介质中产生一个光波 OA,它的振幅应与原入射波的振幅相同,传播方向与原入射波相反,图 3.5-4(b)中左下方的那两列光波则应相消. 因此可得

$$r^2a+t't a=a,\quad tra+r'ta=0$$

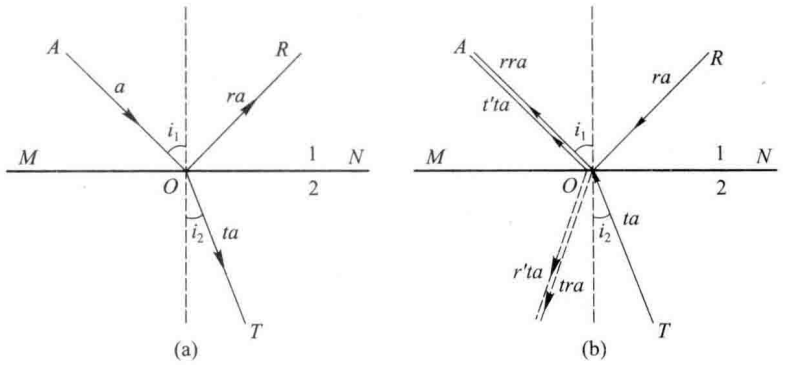


图 3.5-4 斯托克斯关于反射和折射的处理方法

应当注意,振幅反射率和透射率都是入射角的函数,于是以上二式可写为

$$r^2(i_1)+t'(i_2)t(i_1)=1 \tag{3.5-15}$$

$$r(i_1)=-r'(i_2) \tag{3.5-16}$$

以上二式称为**斯托克斯公式**. 式中 r、t 与入射角 i_1 对应,r'、t' 与入射角 i_2 对应,而 i_1 和 i_2 则是满足折射定律 $n_1\sin i_1=n_2\sin i_2$ 的入射角和折射角.

在(3.5-15)式中,$r^2=R$ 为反射率. 由菲涅耳公式可以证明

$$tt'=\frac{\cos i_2}{\cos i_1}\frac{n_2}{n_1}t^2=T \tag{3.5-17}$$

因此(3.5-15)式可写为 $R+T=1$,它表明入射光的能流等于反射光与透射光的能流之和,即能流守恒. 因为 $A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t+\pi)}=-A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$,即两同频率振动的振幅反号相当于它们的相位相差 π,因此(3.5-16)式表明,有两列光波,一列从光疏介质以 i_1 角向光密介质入射,另一列从光密介质以 i_2 角向光疏介质入射,而且它们的入射角 i_1 和 i_2 满足折射定律,如果两入射光波在入射点处同时刻相比是同相位的话,则两反射光于入射点处同时刻相比必定是反相位的. 至于此相位差异 π 是怎样发生的,可应用菲涅耳公式并根据实际情况去分析才能作出判断.

3.5.4 反射光的相位变化

将 3.5.1 小节菲涅耳公式中的各场分量 E_s、E_p 看做复振幅,则表示反射波、折射波的复振幅与入射波的复振幅之比的 r、t 各量一般也应为复数,于是复振幅反射率 $\tilde{r}=E_1'/E_1$ 的辐角 $\arg r$ 的负值就是在入射点处 E_1' 和 E_1 间的相位差,或称为反射光的附加相移;复振幅透射率 $\tilde{t}=E_2/E_1$ 的辐角 $\arg t$ 的负值就是在入射点处 E_2 和 E_1 间的相位差. 由(3.5-3)和(3.5-4)式可知,t_p 和 t_s 总是正实数,即它们的辐角为零,这表明折射波和入射波在界面处是同相位的,然而反射波和入射波的相位关系却比较复杂,这在一些专著和文章中有详细讨论. 下面我们仅讨论反射时的相移曲线及半波损失.

1. 相移变化曲线

将反射光的 s 分量和 p 分量的复振幅反射率记为

$$\tilde{r}_s=r_s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_s},\quad \tilde{r}_p=r_p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_p} \tag{3.5-18}$$

则空气/玻璃界面上反射光的 δ_s 和 δ_p 随入射角度变化的曲线如图 3.5-5 所示. 图(a)为外反射，即 $n_1<n_2, i_1>i_2$，由(3.5-1)和(3.5-2)式可知，δ_s、δ_p 取值为 0 或 π. 图(b)为内反射，即 $n_1>n_2, i_1<i_2$. 当入射角 i_1 小于临界角 i_c 时，δ_s、δ_p 取值为 0 或 π；当 $i_1>i_c$ 时，δ_s、δ_p 取值由 0 连续变化直至 π，其数值由下式给出

$$\tan\frac{\delta_p}{2}=\frac{n_1\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i_1\right)^2-1}}{n_2\qquad\cos i_1} \tag{3.5-19}$$

$$\tan\frac{\delta_s}{2}=\frac{n_2\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i_1\right)^2-1}}{n_1\qquad\cos i_1} \tag{3.5-20}$$

由以上二式得

$$\tan\frac{\delta_p}{2}=\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\tan\frac{\delta_s}{2} \tag{3.5-21}$$

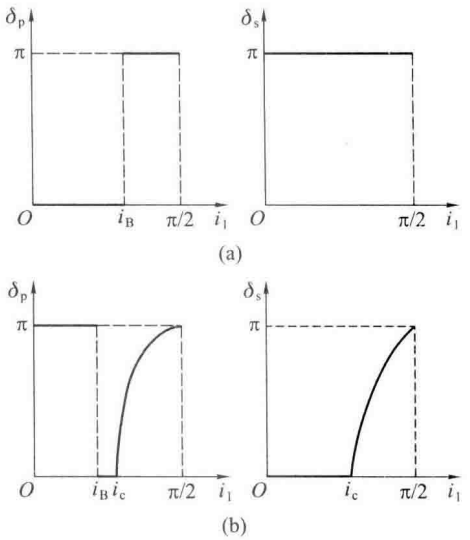


图 3.5-5　相移变化曲线

(a) $n_1<n_2, n_1=1.0, n_2=1.5$；

(b) $n_1>n_2, n_1=1.5, n_2=1.0$

2. 相位突变

(1) 近于正入射的外反射

已知 $n_1<n_2, i_1\approx 0$，由(3.5-5)式可得

$$|r_p|=|r_s|=\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1},\quad r_p>0,\quad r_s<0$$

如图 3.5-6，将入射场分解为 p 和 s 分量. 按照对场分量方向的约定，上式中的 $r_s<0$ 表示反射波中的 s 分量 E'_{1s} 与约定的方向相反(垂直纸面向内)，$r_p>0$ 表示反射波中的 p 分量 E'_{1p} 与约定方向相同(对着反射光线看指向右侧)，但因反射光线与入射光线的传播方向近于相反，所以 E_{1p} 与 E'_{1p} 的方向对观者来说实际相反. 由图可见，反射光中的 p 和 s 分量都与入射光相反，所以它们合成的反射光波的光矢量 $\boldsymbol{E}'_1$ 与入射光波光矢量 $\boldsymbol{E}_1$ 方向相反，反射光波在界面处发生了相位为 π 的突变. 总之，我们得出结论，在近于正入射的外反射情况下，将反射光波和入射光波在入射点处同时进行比较，二者相位相反，反射光波在反射时发生相位为 π 的突变，或称半波突变，习惯上也称发生了半波损失.

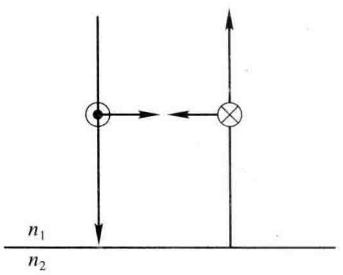


图 3.5-6　正入射的相位突变(外反射)

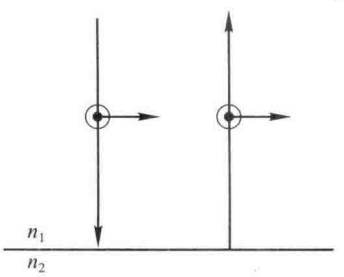


图 3.5-7　正入射无相位突变(内反射)

(2) 近于正入射的内反射

已知 $n_1>n_2, i_1\approx 0$，由(3.5-5)式可得 $|r_p|=|r_s|, r_p<0, r_s>0$. 入射点处反射光波 $\boldsymbol{E}'_1$ 和入射光波 $\boldsymbol{E}_1$ 的 p、s 分量的分布如图 3.5-7 所示. 因为 $r_p<0$ 表示 E_{1p} 的方向与约定的方向相反，但是反

射光与入射光方向相反，所以 E'_{1p} 与 E_{1p} 的方向相同. 又因为 E'_{1s} 与 E_{1s} 方向相同，所以合光矢量 $\boldsymbol{E}'_1$ 与 $\boldsymbol{E}_1$ 同方向. 即是说在近于正入射的内反射情况下，将反射光波和入射光波在入射点处同时刻进行比较，二者相位相同，反射光波没有半波突变.

(3) 掠入射的外反射

已知 $n_1<n_2$，$i_1\approx 90°$，由(3.5-1)和(3.5-2)式可得 $|r_p|=|r_s|$，$r_p<0$，$r_s<0$，$\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}'_1$ 的 p、s 分量的分布如图 3.5-8 所示. 由图可见，反射光中的 p、s 分量都与入射光相反，所以 $\boldsymbol{E}'_1$ 与 $\boldsymbol{E}_1$ 方向相反. 即是说在掠入射的外反射情况下，将反射光波和入射光波在入射点处同时刻进行比较，反射光波在反射时有半波突变.

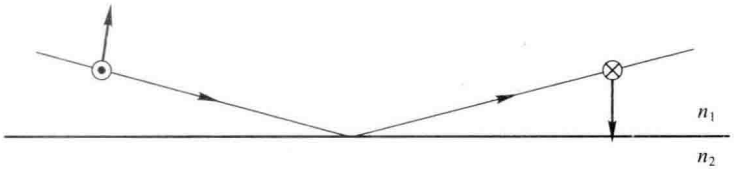


图 3.5-8 掠入射时的相位突变(外反射)

(4) 薄膜上下表面的反射

上面我们讨论了在一些特殊情况下从单个界面上反射光的相位突变. 在第四章中我们要研究薄膜上下两表面的反射光的干涉问题，根据(3.5-1)和(3.5-2)式，我们可以得出图 3.5-9 所示几种情形下从平行平面薄膜两表面反射的 1、2 两光束的 p、s 分量的实际方向. 可以看出，就 1、2 两束反射光而言，其 p、s 分量的方向总是相反的，因此在薄膜上下两侧介质相同情况下计算上下两表面反射光束叠加时的相位差，除了计及光程差而产生的相位差外，还应附加 $\pm\pi$ 的相位差.

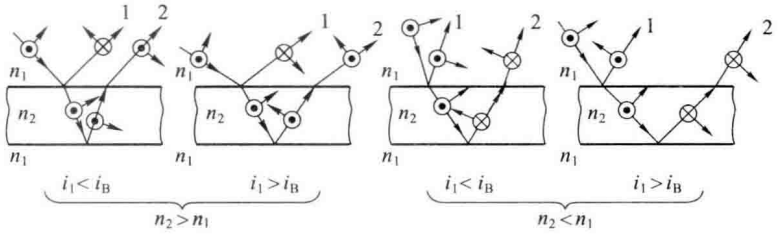


图 3.5-9 薄膜上下表面反射光的 p、s 分量的分布

3.5.5 反射和折射致偏振

首先考虑自然光入射的情况. 由图 3.5-3 可见，自然光正入射和掠入射时 $R_s=R_p$，即 $E'_{1s}=E'_{1p}$，反射光和折射光仍为自然光. 一般入射角情况下 $R_s\neq R_p$，反射光和折射光都是部分偏振光，且反射光中垂直于入射面的振动占优势，折射光中平行于入射面的振动占优势. 当入射角满足 $i_1+i_2=\pi/2$ 时，由(3.5-8)式得 $R_p=0$，反射光中没有振动平行于入射面的分量，因而反射光是振动面垂直于入射面的线偏振光，这时的入射角即为布儒斯特角 i_B. 换言之，当入射角为布儒斯特角时，反射光与折射光的传播方向相互垂直. 将 $i_B+i_2=\pi/2$ 代入折射定律得

$$n_1\sin i_B=n_2\sin i_2=n_2\sin\left(\frac{\pi}{2}-i_B\right)=n_2\cos i_B$$

则
$$\tan i_B = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} \tag{3.5-22}$$

上式称为**布儒斯特定律**. 已知两种介质的相对折射率时,可由上式计算布儒斯特角. 例如光由空气向玻璃($n=1.52$)入射时,$i_B = 56°40'$. 实际上任意偏振态的光以布儒斯特角 i_B 入射时,反射光皆为垂直于入射面振动的线偏振光.

自然光以布儒斯特角入射时折射光仍为部分线偏振光,因 s 分量减少从而 p 分量占优势,而且这时的偏振度 P 最大(空气入射到玻璃时,偏振度约为 8%),如图 3.5-10 所示,图中的圆点和横线分别表示垂直和平行于入射面的振动.

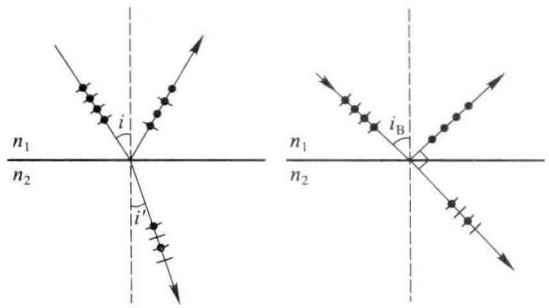


图 3.5-10　反射和折射致偏振及布儒斯特定律图

若入射光为圆偏振光,在正入射时反射光仍为圆偏振光,只是其旋转方向与入射圆偏振光的旋转方向相反. 一般情况下,由于 $|r_s| \neq |r_p|$,反射光将变为椭圆偏振光,其旋向与入射光旋向的关系则由 r_s、r_p 的符号而定.

若入射光为线偏振光,一般情况下反射和折射光仍为线偏振光. 在内反射情况下,若入射角大于全反射临界角,则反射光为椭圆偏振光.

反射和折射致偏振的特性可用以产生偏振光. 但由单次反射来产生偏振光有其严重缺点:光束的高强度与高偏振度两者不可兼得. 例如以布儒斯特角在玻璃表面上单次反射时,反射光为线偏振光,$P=1$,但光强仅为原入射自然光强度的 7.5%($R_s = 15\%$);折射光光强虽很大,偏振度又太低,无实用价值. 但在红外和紫外波段,用其他方法起偏很困难,这却是行之有效的方法. 为了克服上述矛盾,可采用玻片堆,它是由一组平行平面玻璃片(或其他透明的薄片)叠在一起构成的,如图 3.5-11 所示. 自然光以布儒斯特角入射,在每一界面上 15%的 s 分量被反射掉,而 p 分量却 100%地透过. 通过多次的反射和折射,s 分量被反射殆尽,从玻片堆透射出来的几乎是 100%的在入射面内振动的线偏振光.

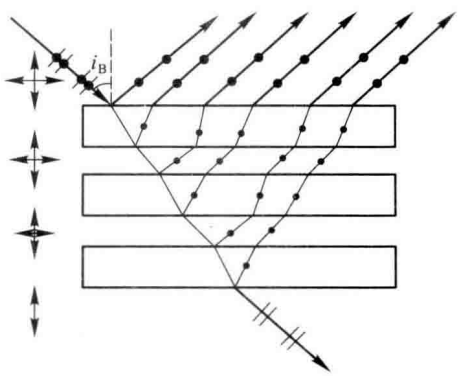


图 3.5-11　玻片堆起偏

在外腔式激光器中,为了减少窗片表面反射光的损失,常采用布儒斯特窗. 如图 3.5-12 所示,窗片表面与光轴成一倾角,使入射角为布儒斯特角,于是激光的轴线与窗表面的夹角为 $90°-i_B$. 在这种情况下,s 分量在每一窗面上反射时损失 15%,因而不可能起振,

但 p 分量却没有反射损失，衰减很小，可以在管内形成稳定的振荡，并从反射镜射出. 所以这种外腔式激光器输出的是线偏振光.

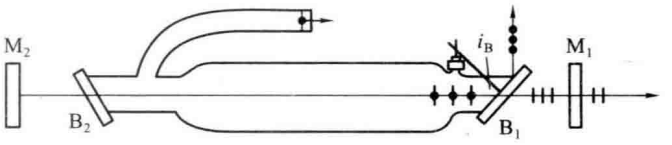


图 3.5-12 布儒斯特窗

*3.5.6 全反射与隐失波①

在内反射时，若入射角大于临界角，将出现全反射现象，实验观测和理论计算均表明，此时反射光强 I_1' 等于入射光强 I_1，即光线全部反射回第一介质. 但是，这显然不能满足光波场(电磁场)的边值关系，根据 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 的切向连续性，下表面也应有波场存在，即波场将延伸到第二介质中. 为了说明此问题，以下用与普通折射相同的方式写出透射波的一般表达式，然后用复数运算求得透射波函数的具体形式进行分析(图 3.5-13).

第二介质中透射波函数为

$$E(r,t)=\tilde{E}_{20}e^{i(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)},\quad \boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}=k_{2x}x+k_{2y}y+k_{2z}z$$

为了满足波动方程给定的波速要求，有

$$\frac{\omega}{k_2}=\frac{c}{n_2},\text{即 } k_2=n_2k$$

其中 $k=\dfrac{\omega}{c}=\dfrac{2\pi}{\lambda}$. 为了满足电磁场边值关系，有

$$k_{2x}=k_{1x}$$

而

$$k_{1x}=k_1\sin i_1=n_1k\sin i_1$$

$$k_{2y}=k_{1y}=0,$$

于是波矢 $\boldsymbol{k}_2$ 的第三个分量 k_{2z} 由下式决定：

$$k_{2z}=\sqrt{k_2^2-(k_{2x}^2+k_{2y}^2)}=\sqrt{n_2^2-(n_1\sin i_1)^2}\,k\text{②}\qquad(3.5\text{-}23)$$

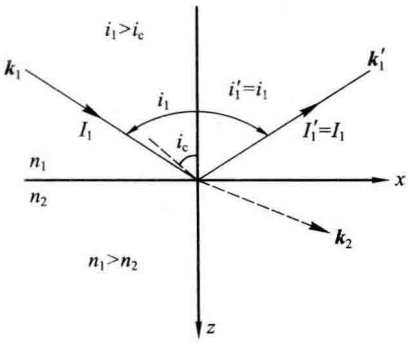


图 3.5-13 计算全反射时的透射场用的坐标系

当 $n_1\sin i_1<n_2$，即入射角小于全反射临界角时，k_{2z} 为实数，此为正常情形，意味着透射区间中有一列折射行波；当 $n_1\sin i_1>n_2$，即入射角大于临界角时，k_{2z} 为虚数，这是异常情况. 引入虚数单位 i 并将 k_{2z} 改写为

$$k_{2z}=\mathrm{i}\beta k,\quad \beta=\sqrt{(n_1\sin i_1)^2-n_2^2}\qquad(3.5\text{-}24)$$

这里 β 为实数. 由(3.5-20)式得大于临界角时的透射场波函数为

$$E_z(r,t)=\tilde{E}_{20}\cdot e^{-\beta k\cdot z}\cdot e^{i(k_{2x}x-\omega t)}\qquad(3.5\text{-}25)$$

式中第一个因子是复振幅矢量，可由菲涅耳公式给出；第二个因子表示在第二介质中仍有光场存在，但振幅沿 z 方向急剧衰减，且失去空间周期性，也就失去了波动性；第三个因子具有通常行波的时空周期性，它表示一列沿 x 方向传播的行波，由于其振幅沿 z 方向急剧衰减，被称作隐失波(evanescent wave)，其穿透深度 d 定义为使振幅衰减为原来的 1/e 的空间距离，则

$$d=\frac{1}{k\beta}=\frac{\lambda}{2\pi\sqrt{(n_1\sin i_1)^2-n_2^2}}=\frac{\lambda}{2\pi n_1}\frac{1}{\sqrt{\sin^2 i_1-\sin^2 i_c}}\qquad(3.5\text{-}26)$$

① 钟锡华. 现代光学基础. 北京：北京大学出版社，2003：135.

② 单从数学上考虑，根号前可取±号两种结果. 如果我们取负号，它将导致辐射发散，这不符合物理实情，所以只取正号.

式中 i_c 为临界角. 当 i_1 不太接近 i_c 时,穿透深度 d 很小,大小为波长的数量级.

隐失波的波动性仅体现在沿界面 x 方向为行波,而沿纵深 z 方向无波动性,其等幅面与等相面并不一致,两者恰巧正交,如图 3.5-14 所示,它是一种典型的非均匀波(inhomogeneous wave). 理论计算得出,在穿透深度内 z 方向的瞬时能流不为零,但平均能流为零. 这表明全反射时的反射率为 1,入射光能流全部反射回第一介质,但不是在严格的界面上全部反射的,而是穿透到第二介质波长量级的深度内逐渐反射的.

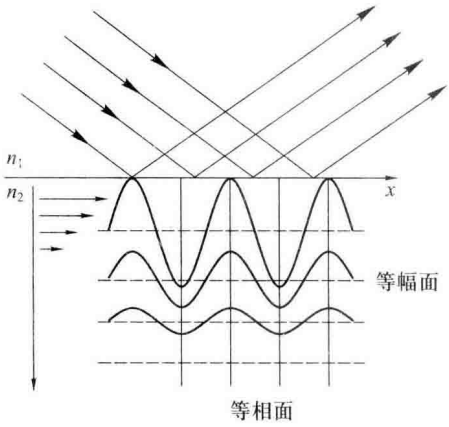


图 3.5-14　隐失波图像

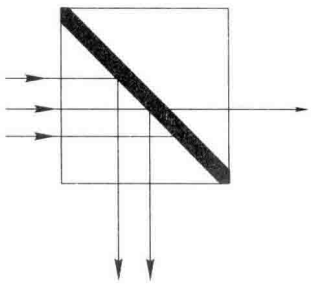


图 3.5-15　光学隧道效应

如图 3.5-15 所示,一束光以大于临界角射入一棱镜发生全反射,再取另一个棱镜逐渐接近但不接触第一个棱镜界面,于是出现原全反射方向光强下降,而在入射光直进方向生成一束光,从第二个棱镜射出. 若让第二个棱镜更靠近第一个棱镜一点,则原全反射方向光强进一步减弱,而直射光强随之增强. 这一现象称为受抑全反射,它是一种**光学隧道效应**. 这一现象的产生是由于全内反射时在界面外侧空气中存在一隐失波场,当第二个棱镜界面接近第一个棱镜界面而进入这隐失波场时,便在第二棱镜中发生一行波. 简言之,这是通过隐失波场的耦合而改变了行波的能流分配. 在光纤通信、集成光波导、隐失波全息术、近场光学显微术中,光学隧道效应有着重要应用.

例 3.5-1　为了使线偏振的激光束通过红宝石棒时在棒的端面上没有反射损失,问棒端面对棒轴的倾角 α 应取何值? 光束入射角 i_1 应为多大? 入射光的振动方向应如何? 已知红宝石的折射率为 1.76,光束在棒内沿棒轴方向传播.

解　当入射角为布儒斯特角 i_B 时,反射光为只含 s 分量的线偏振光. 若将只含 p 分量的线偏振光以 $i_1=i_B$ 角入射,则将无反射光出现,即无反射损失.

由(3.5-19)式可得光由空气向红宝石入射时的布儒斯特角为

$$i_B=\arctan\frac{n_2}{n_1}=\arctan\ 1.76=60°23'44''$$

因以布儒斯特角 i_B 入射时反射光与折射光传播方向互相垂直,令棒端面对棒轴的倾角为 α,由图 3.5-16,则有

$$\alpha+\beta=90°$$

而

$$i_1'+\beta=90°$$

所以

$$\alpha=i_1'=i_1=i_B=60°23'44''$$

入射光的振动方向在入射面内.

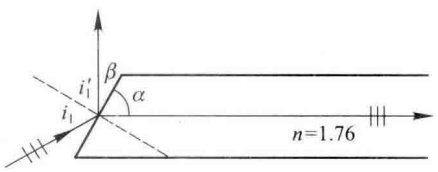


图 3.5-16

例 3.5-2　一双胶合物镜由折射率分别为 $n_1=1.52$ 和 $n_2=1.60$ 的两块透镜组成,采用 $n_3=1.54$ 的加拿大树胶黏合. 设光在透镜上的入射角很小,试比较黏合前后光能的损失各为多少.

解 由于光线入射角很小，可视为正入射，即 $i_1 \approx i_2 \approx 0$. 由(3.5-13)式可得

$$R = R_p = R_s = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2$$

当用树胶黏合时，两块透镜的四个界面的反射率分别为

$$R_1 = \left(\frac{1.52-1.00}{1.52+1.00}\right)^2 = 0.042\ 6, \quad R_2 = \left(\frac{1.54-1.52}{1.54+1.52}\right)^2 = 0.000\ 043$$

$$R_3 = \left(\frac{1.60-1.54}{1.60+1.54}\right)^2 = 0.000\ 365 \quad R_4 = \left(\frac{1.60-1.00}{1.60+1.00}\right)^2 = 0.053\ 3$$

通过四个界面后总透射光能流占入射光能流的百分比为

$$\begin{aligned} T &= T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot T_4 \\ &= (1-R_1)(1-R_2)(1-R_3)(1-R_4) \\ &\approx (1-R_1)(1-R_4) = 0.957\ 4 \times 0.946\ 7 = 90.64\% \end{aligned}$$

即反射损失光能流 9.36%.

若不用树胶黏合，两透镜间为空气层，通过上述步骤可得

$$R_1' = R_2' = 0.042\ 6, \quad R_3' = R_4' = 0.053\ 3$$

总透过光能流为 82.15%，反射损失光能流 17.85%，比用胶粘情况损失大得多.

例 3.5-3 波长为 632.8 nm 的 He-Ne 激光以 45°入射角由玻璃($n = 1.5$)射入空气($n = 1$)，在界面产生全反射，试估算隐失波的穿透深度.

解 已知 $n_1 = 1.5, n_2 = 1, i_1 = 45°, \lambda = 632.8$ nm，则

$$\sin i_c = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{1.5} = 0.667$$

将已知各量代入(3.5-26)式得

$$d = \frac{\lambda}{2\pi n_1} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 i_1 - \sin^2 i_c}} \approx 286 \text{ nm}$$

*§ 3.6 负折射率介质

3.6.1 什么是负折射率介质

我们知道，电介质的介电常量 ε 和磁导率 μ 是描述物质电磁性质的两个基本物理量，决定着电磁波在物质中的传播特性、对于一般电介质而言，ε 和 μ 都是非负的常量，故其折射率 $n = \sqrt{\varepsilon\mu} > 0$. 对于通常的正折射率介质而言，其电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$、磁场强度矢量 $\boldsymbol{H}$ 和波矢 $\boldsymbol{k}$ 三者构成右手螺旋关系，我们称这样的物质为**右手介质或右手材料**.

早在 1968 年，苏联物理学家 V.G.Veselago 在理论上预言在一个具有负介电常量和负磁导率的介质中，电磁波传播的相速度方向与群速度方向是相反的，即波矢 $\boldsymbol{k}$ 与坡印廷矢量 $\boldsymbol{S}$ 方向相反. 于是电磁波的电场矢量，磁场矢量和波矢量构成左手螺旋关系，这样一种材料被称为**左手材料**(图 3.6-1). Veselago 进一步论证了这种左手材料的折射率是负的，故又称为**负折射率介质**. 由电磁波在负折射率介质中的这种特性，可分析得出电磁波在其中传播时将产生一些奇异现象，例如负折射、逆切连科夫效应、反多普勒效应，等.

由于迄今尚未在自然界中发现负折射率介质，Veselago 的理论 30 年来一直未受到重视.直到 2001 年，D. R. Smith 等人在 J. B. Pendry 等人工作的基础上，制作了第一块 ε 和 μ 同时为负的微波波段人造负折射率材料，并通过实验观测到负折射现象.近年来，已相继研制成功用人工微结构构造的 X 射线、红外和光频段的负折射率介质. 负折射率介质的提出和人工实现，突破了人们对 ε 和 μ 两个物理量的传统认识，昭示人们可以在不违背基本物理规律的前提下，人工获得具有与自然界中存在的介质迥然不同的特殊物理性质的“新材料”，对电磁学、光学、材料科学将产生深刻影响.

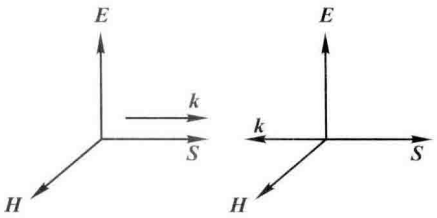


图 3.6-1　平面电磁波在右手介质(左图)和左手介质(右图)中传播时，矢量 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H},\boldsymbol{k},\boldsymbol{S}$ 的方向

3.6.2　负折射率介质中电磁波传播的异常性质

1. 负折射现象

如图 3.6-2 所示，假设一束单色平面波由介质 1 入射到与介质 2 界面，在介质 1 和介质 2 均为常规材料的情况下，其反射和折射光线方向分别满足反射定律和斯涅耳定律，在图中由 2 和 4 给出，我们称这种折射为“正折射”.

如果介质 1 仍然为正折射率介质($\varepsilon>0,\mu>0$)，而介质 2 为负折射率介质($\varepsilon<0,\mu<0$)，通过求解麦克斯韦方程可以得到：折射角大小仍由斯涅耳定律确定，但折射光线与入射光线不是分别位于界面法线两侧，却是位于界面法线同侧，而且波矢 $\boldsymbol{k}$ 的方向与 $\boldsymbol{S}$ 相反，如图 3.6-2 中光线 3 的反方向.我们把这种折射称为光线的“负折射”.

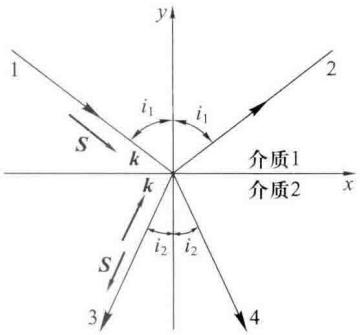


图 3.6-2　光线在两种介质界面上反射和折射

1—入射光；2—反射光；3—当介质 2 为左手介质时的折射光；4—当介质 2 为右手介质时的折射光

2. 反常成像透镜

由于左手介质对光线存在负折射，因而用它制作的透镜与普通玻璃透镜相比有完全相反的效果. 如图 3.6-3 所示，用左手介质制作的凸透镜和凹透镜分别对光线有发散作用(相当于通常的凹透镜)和汇聚作用(相当于通常的凸透镜)，左手介质制作的平板则具有成像功能.

3. 逆多普勒效应

由于左手介质中波矢 $\boldsymbol{k}$ 的方向与光线的传播方向相反，因此同右手介质相比，在左手介质中将呈现逆多普勒效应.如图 3.6-4 所示，如果探测器向着靠近光源(发射角频率为 ω_0 的电磁波)方向运动，那么在右手介质中探测到的频率会比 ω_0 高，而在左手介质中探测到的频率则会比 ω_0 低；当探测器远离光源运动时则相反，即在右手介质中探测到的频率会比 ω_0 低，而在左手介质中探测到的频率则会比 ω_0 高.

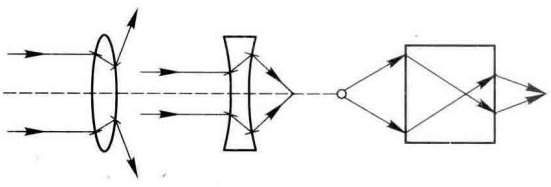


图 3.6-3　左手介质透镜

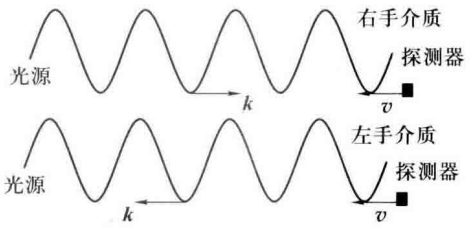


图 3.6-4　逆多普勒效应

3.6.3 负折射率介质的人工制备及实验证明

如前所述,尽管在理论上研究了负折射率介质,但自然界中却尚未发现,只有通过人工合成来制备这种材料.J. B. Pendry 等人于 1996 年提出并用周期排列的细金属棒(Rod)阵列实现了负等效介电常量特性,并于 1999 年提出利用开环谐振器(Split Ring Resonator,SRR)实现负磁导率(如图 3.6-5 所示),为负折射率材料的构造奠定了重要基础. 2001 年,D.R. Smith 等人采用集成电路板印制技术,将 Rod 和 SRR 分别制作在电路版的两侧,通过切割组合构成二维媒质.在微波段其等效 ε 和 μ 同时为负值,成功制作了负折射率介质样品,如图 3.6-6 所示. 样品单元尺寸为 5 mm,整体厚度为 1.2 cm.

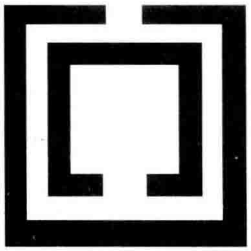


图 3.6-5 用于产生负磁导率的开环谐振器

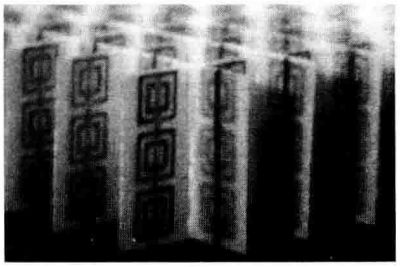


图 3.6-6 人工构造的负折射率介质样品

为了在实验上验证负折射现象,Smith 等人设计了著名的棱镜折射实验,其装置如图 3.6-7 所示,其中负折射率介质"棱镜"制作成直角三角形,放在两块圆形铝块(直径为 30 cm)之间,板距为 1.2 cm.入射源采用 10.5 GHz的微波,波长 2.8 cm,入射波从棱镜的长直角边垂直入射,以其斜边作为折射界面,粗箭头表示入射波方向和折射波(按 $n>0$)方向.他们分别对常规正折射率介质和人工构造的负折射率介质测量不同角度的出射辐射功率,实验结果如图 3.6-8 所示,常规材料(聚四氟乙烯)峰值发生在 27°处,对应于 $n=1.4\pm0.1$;对负折射率介质,峰值发生在大约-61°处,对应于 $n=-2.7\pm0.1$,负折射率介质与常规材料的折射角相差 88°,实验结果有力地证明了负折射率介质的存在.

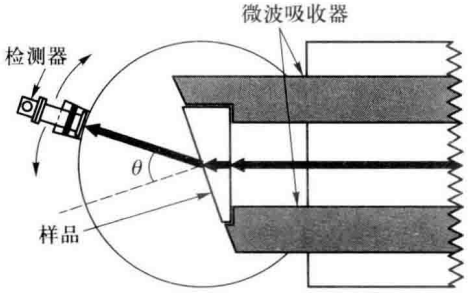


图 3.6-7 负折射现象的实验验证装置

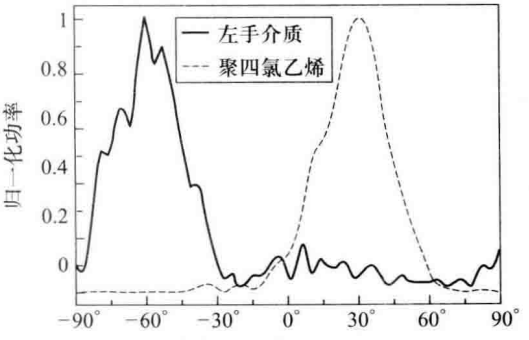


图 3.6-8 负折射现象的实验测量结果

人们在制作负折射率材料的同时,对其潜在的应用也开展了许多研究,例如用于制造聚焦微波波束的指向性的天线,超高分辨率的扁平光学透镜,高存储容量的新型光学存储系统,高性能的新型光子器件等等.

思 考 题

3.1 一维简谐平面波函数 $E(P,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)\right]$ 中,$\frac{z}{v}$ 表示什么? 如果把波函数写为 $E(P,t)=$

$A\cos\left(\omega t-\dfrac{\omega z}{v}\right)$，$\dfrac{\omega z}{v}$又表示什么？

3.2　复振幅$\tilde{E}(P)=Ae^{+ikz}$中的模和辐角各有什么物理意义？

3.3　复振幅$\tilde{E}(P)=Ae^{+ikz}$中的指数因子是表示P点的相位较原点超前还是落后kz？分别就$z>0$和$z<0$两种情况讨论.

3.4　平面波函数的复振幅可写为

$$\tilde{E}(P)=A\exp\{i[2\pi(f_x x+f_y y+f_z z)]\}$$

式中f_x,f_y,f_z为三个坐标轴方向的空间频率，而且它们组成空间频率矢量$\boldsymbol{f}=f_x\boldsymbol{i}+f_y\boldsymbol{j}+f_z\boldsymbol{k}$. 已知在三个坐标轴上的空间周期$d_x=\dfrac{1}{f_x},d_y=\dfrac{1}{f_y},d_z=\dfrac{1}{f_z}$，它们可否组成空间周期矢量$\boldsymbol{d}=d_x\boldsymbol{i}+d_y\boldsymbol{j}+d_z\boldsymbol{k}$？

3.5　(1) 为什么球面波的振幅与r成反比？(2) 写出球面波波面的方程式；(3) 由中心向外发散的球面波和由外向中心会聚的球面波的波函数有何不同？

3.6　三维空间中的平面波有一个确定的共轭波，而且只能有一个；对于一个平面内的复振幅分布，与其共轭复振幅分布相联系的共轭波却有两个，试解释之.

3.7　理想单色平面光波是否一定是线偏振的？

3.8　自然光和圆偏振光都可看成是振幅相等、振动方向垂直的两线偏振光的合成，它们之间的主要区别是什么？

3.9　试指出下列波函数所表示的偏振态

$$\boldsymbol{E}=E_{0x}\cos(\omega t-kz)\boldsymbol{i}+E_{0y}\cos\left(\omega t-kz+\frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{j}$$

3.10　无须借助其他的仪器，你能用什么简易方法判断一块偏振片的透振方向？

3.11　已知水的折射率为1.33，试问一个人戴上偏振片做成的眼镜后，在什么角度下能完全看不到水面反射的光？偏振片的透振方向应取何方位？

3.12　试讨论分别以线偏振光、圆偏振光、自然光入射到介质界面时，反射光的偏振态发生怎样的改变？

3.13　光由光密介质向光疏介质入射时，其布儒斯特角能否大于全反射的临界角？

3.14　线偏振光由光密介质向光疏介质入射且入射角大于临界角时，反射光的偏振态一般发生怎样的改变？

3.15　能量守恒($w_1=w_1'+w_2$)是否即为光强守恒($I_1=I_1'+I_2$)？

3.16　振幅反射率和振幅透射率$|r_s|,|r_p|,|t_s|,|t_p|$能否大于1？透射光强和反射光强能否大于入射光强？

3.17　低头洗脸时，很难看到自己脸部经水面反射所成的像；站在广阔平静湖面的岸边，却可以看到对岸景物明亮的反射倒像. 这是为什么？试解释之.

习　题

3.1　有两个一维简谐平面波的波函数为

$$E_1(P,t)=4\cos 2\pi(3t-0.2z)$$

$$E_2(P,t)=\frac{1}{2.5}\cos 2\pi(3.5t-7z)$$

式中振幅以cm为单位，t以s为单位，E以V/m为单位，z以m为单位. 试分别求它们的：(1) 振幅；(2) 频率；

(3) 周期;(4) 波长;(5) 相速度;(6) 传播方向.

3.2 对于频率为 6×10^{14} Hz,相速为 3×10^{8} m/s 的光波,在传播方向上相位差为 60°的任意两点之间的最短距离是多少?

3.3 平面波波函数的复振幅为 $\tilde{E}=Ae^{i\varphi}$,试证:

(1) 当相位改变 2π 时,$\tilde{E}$ 保持不变;

(2) 用 $\pm i$ 乘波函数 $\tilde{E}$,等效于它的相位改变 $\pm\frac{\pi}{2}$.

3.4 在玻璃中 z 方向上传播的单色平面波的波函数为

$$E(P,t)=10^{2}\exp\left\{-i\left[\pi\times10^{15}\left(t-\frac{z}{0.65c}\right)\right]\right\}$$

式中 c 为真空中光速,t 以 s 为单位,E 以 V/m 为单位,z 以 m 为单位. 试求:

(1) 光波的振幅和时间频率;

(2) 玻璃的折射率;

(3) z 方向上的空间频率;

(4) 在 xz 面内与 x 轴成 45°角方向上的空间频率.

3.5 一平面波的波函数为

$$E(P,t)=A\cos[5t-(2x-3y+4z)]$$

式中 x,y,z 以 cm 为单位,t 以 s 为单位. 试求:(1) 时间频率;(2) 波长;(3) 空间频率矢量的大小和方向.

3.6 一平面波函数的复振幅为

$$\tilde{E}(P)=A\exp\left[i\left(\frac{k}{\sqrt{14}}x+\frac{2k}{\sqrt{14}}y+\frac{3k}{\sqrt{14}}z\right)\right]$$

试求波的传播方向.

3.7 一台 3 kW 的 CO_2 激光器发出的光束被聚焦成直径为 10 μm 的光斑,求焦点处的光强 I 及光场的振幅值 A(假设 $n=1$,不计光束的损失).

3.8 地球表面每平方米接收到来自太阳光的能量约为 1.33 kW,试计算投射到地球表面的太阳光的电场强度振幅.

3.9 用 K_9 玻璃($n=1.516\ 3$)制成 He-Ne 激光器腔管上的布儒斯特窗片,试问窗片的法线与激光轴夹角应为多大?

3.10 如图 3.1,已知一束自然光入射到折射率 $n=\frac{4}{3}$ 的水面上时反射光是线偏振的,一块折射率 $n=\frac{3}{2}$ 的平面玻璃浸在水面下,若要使玻璃表面的反射光 $O'N'$ 也是线偏振的,则玻璃表面与水平面夹角 φ 应为多大?

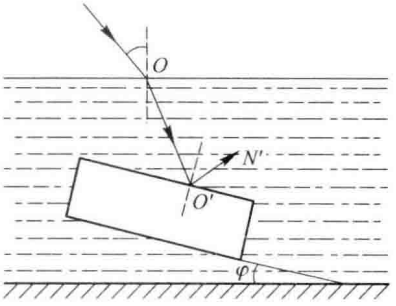


图 3.1

3.11　利用布儒斯特定律可以测定不透明电介质的折射率，今测得釉质的起偏角为 58°，试求它的折射率.

3.12　若光在某种介质中的全反射临界角为 45°，求光从空气射到该介质界面时的布儒斯特角.

3.13　计算光波垂直入射到折射率为 $n=1.33$ 的深水表面的反射光和入射光强度之比.

3.14　一束自然光由折射率为 n_1 的介质以布儒斯特角向折射率为 n_2 的介质入射，试证折射光的偏振度为

$$P=\frac{(n_1^2-n_2^2)^2}{(n_1^2+n_2^2)^2+4n_1^2n_2^2}$$

3.15　一光学系统由两枚分离的透镜组成，透镜的折射率分别为 1.5 和 1.7.求此系统在光束接近正入射情况下反射光能的损失. 如透镜表面镀上增透膜使表面反射率降为 1%，问此系统的反射光能损失又是多少？

第四章　光的干涉

干涉是一切波动都可能产生的现象，在历史上人们就是最先通过对光的干涉现象的研究认识到光的波动性. 现在光的干涉已广泛地应用于科学技术的许多部门. 本章中将讨论波的叠加原理、光场的相干性、各种光干涉装置及所产生的干涉图样的特征及其应用.

§4.1　波的叠加和干涉

当两列或多列波同时在同一空间传播时，波场中各点都要参与每列波在该点引起的振动，但是每列波却自行传播互不干扰，就像另一列波完全不存在一样. 根据波独立传播的大量事实，人们总结出了叠加原理：**当两列或多列波同时在同一介质中传播时，在它们交叠区域内各点的振动是各列波单独在该点所产生的振动的合成**. 设各列波在场点 P 产生的振动分别为 $E_1(P,t)$，$E_2(P,t)$，…，根据叠加原理，P 点的合场为

$$E(P,t)=E_1(P,t)+E_2(P,t)+\cdots$$

波的叠加原理将动力学问题简化成了运动学问题，反映了波动过程与粒子运动遵循完全不同的规律，叠加原理是波动光学的基本原理. 满足叠加原理的介质称为线性介质. 在线性介质中，介质对光场的响应与场量呈线性关系，这种系统称为线性光学系统. 真空及在普通光强照明下的一般介质均可认为是线性系统. 但是一般介质在强激光作用下，或某些特殊材料（例如光折变晶体铌酸锂）在普通光强照明下，将会出现一系列违背叠加原理的非线性光学现象，本书将在第九章中予以介绍.

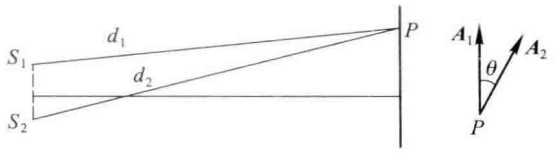


图 4.1-1　两列简谐波的叠加

叠加原理对于线性介质中传播的各种波的叠加都是适合的，作为其应用的一例，我们讨论两列同频率的线偏振简谐波的叠加. 如图 4.1-1 所示，设 S_1 和 S_2 是两个点源，它们发出频率相同、振动方向夹角为 θ 的两列线偏振简谐波. 场点 P 离点源很远，因而可以认为 S_1、S_2 在 P 点产生的是平面波，于是，两列波在 P 点所产生的振动为

$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{A}_1\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{d_1}{\lambda}\right)+\varphi_{01}\right]$$
$$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{A}_2\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{d_2}{\lambda}\right)+\varphi_{02}\right] \tag{4.1-1}$$

式中 $d_1=S_1P$, $d_2=S_2P$, φ_{01} 和 φ_{02} 分别为振源 S_1 和 S_2 的振动初相位. 为书写简单起见,令

$$\varphi_1=-\frac{2\pi d_1}{\lambda}+\varphi_{01},\quad \varphi_2=-\frac{2\pi d_2}{\lambda}+\varphi_{02} \tag{4.1-2}$$

(4.1-1)式可改写为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}_1&=\boldsymbol{A}_1\cos(\omega t+\varphi_1)\\ \boldsymbol{E}_2&=\boldsymbol{A}_2\cos(\omega t+\varphi_2)\end{aligned}\right\} \tag{4.1-3}$$

根据波的叠加原理,P 点的合场

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$$

而

$$|\boldsymbol{E}|^2=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*=|\boldsymbol{E}_1|^2+|\boldsymbol{E}_2|^2+2|\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2|$$

将上式两端对观察时间求平均得

$$I=I_1+I_2+I_{12} \tag{4.1-4}$$

上式中 $I_1=\langle|\boldsymbol{E}_1|^2\rangle=\frac{A_1^2}{2}$, $I_2=\langle|\boldsymbol{E}_2|^2\rangle=\frac{A_2^2}{2}$,第三项为交叉项,即

$$I_{12}=\langle 2\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2\rangle=\langle 2\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{A}_2\cos(\omega t+\varphi_1)\cos(\omega t+\varphi_2)\rangle$$

利用三角恒等式,并将上式求平均值得

$$\begin{aligned}I_{12}&=A_1A_2\cos\theta\cos(\varphi_1-\varphi_2)\\&=A_1A_2\cos\theta\cos\delta\end{aligned} \tag{4.1-5}$$

δ 为 S_1、S_2 在 P 点产生的振动的相位差,即

$$\delta=\varphi_1-\varphi_2=\frac{2\pi}{\lambda}(d_2-d_1)+(\varphi_{01}-\varphi_{02}) \tag{4.1-6}$$

于是(4.1-4)式可写为

$$I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\theta\cos\delta \tag{4.1-7}$$

如果 S_1 和 S_2 在 P 点的振动方向相同(例如垂直于纸面),$\theta=0$,上式成为

$$I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\delta \tag{4.1-8}$$

上式表明场中任意点 P 的强度决定于两列波在 P 点的相位差 δ. 由(4.1-6)式,δ 决定于两振源的初相差和它们到 P 点的光程差. 对于场中不同的点,d_2-d_1 不同,强度也不同. 因为余弦值可取+1 和-1 之间各种值,所以场中某些点的强度将大于两列波在该点单独产生的强度之和,而在另外一些点的强度则小于两列波单独产生的强度之和,这种因波的叠加而引起强度相长或相消的现象称为**波的干涉现象**,能够产生干涉的两列或数列波称为相干波. (4.1-4)式中的交叉项

则称为干涉项，这种干涉项不为零的叠加，称为**相干叠加**；反之，若叠加区域中任一点的干涉项皆为零，即 $I=I_1+I_2$，则称为**非相干叠加**.

§4.2 光波相干的条件和产生方法

阳光照射在水面的油膜上，在油膜表面可观察到美丽的彩色图样，在§4.9中将说明，这是由于油膜上下两表面反射光的干涉所产生的. 然而通常两个独立光源发出的光波却不能产生干涉，由此可见，相干光波必须满足一定的条件. 这些条件是：(1) 振动方向相同或有方向相同的振动分量；(2) 振动频率相同；(3) 相位差稳定. 下面我们分析为什么上述三个条件是相干光波的必要条件.

首先，假设图4.1-1中的波源 S_1 和 S_2 发出振动方向相互垂直的简谐波，将 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 代入(4.1-7)式得

$$I(P)=I_1(P)+I_2(P)$$

上式表明两垂直振动的叠加是非相干叠加，不产生干涉效应.

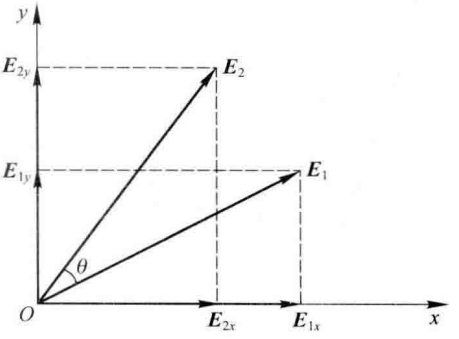


图 4.2-1 振动方向成一角度的两振动的合成

倘若两列波的振动方向成一角度 θ，如图4.2-1所示，$\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 均可在互相垂直的 x 和 y 方向分解，振动方向互相平行的两组分量（$\boldsymbol{E}_{1x}$ 和 $\boldsymbol{E}_{2x}$，$\boldsymbol{E}_{1y}$ 和 $\boldsymbol{E}_{2y}$）将各自产生相干叠加，x、y 方向的合振动将产生非相干叠加.

其次，假设 S_1 和 S_2 发出振动方向相同而频率不等的简谐波，它们在真空中传播，其波函数可写为标量形式

$$E_1(P,t)=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$$
$$E_2(P,t)=A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$

根据叠加原理，在场中任一点 P 的合振动为

$$E(P,t)=E_1+E_2=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$

P 点的光强为

$$\begin{aligned}I(P)&=\langle E^2\rangle=\langle(E_1+E_2)^2\rangle=\langle E_1^2\rangle+\langle E_2^2\rangle+\langle 2E_1E_2\rangle\\&=I_1(P)+I_2(P)+\langle 2E_1E_2\rangle\end{aligned}$$

下面我们讨论上式右端的第三项即交叉项. 因为

$$\begin{aligned}2E_1E_2&=2A_1A_2\cos(\omega_1 t+\varphi_1)\cos(\omega_2 t+\varphi_2)\\&=A_1A_2\{\cos[(\omega_1+\omega_2)t+(\varphi_1+\varphi_2)]\\&\quad+\cos[(\omega_1-\omega_2)t+(\varphi_1-\varphi_2)]\}\end{aligned}$$

对上式右端在观察时间 τ 内求平均值，其中第一项显然为零，对于第二项当 $\omega_1\neq\omega_2$ 时其值也为零，即

$$\langle 2E_1E_2\rangle=0$$

则

$$I(P)=I_1(P)+I_2(P)$$

上式说明频率不同的两列简谐波的叠加是非相干叠加.

再次,即使两列波的振动方向和频率相同,如果它们在场点的相位差随时间改变,场点的光强也就随时间不断变化,因此为了观察到稳定的光强相长和相消的干涉现象,它们的相位差必须维持稳定.

在上节中讨论的两列同频率同振动方向的线偏振简谐波满足相干条件,因而是相干波,但那是一种理想的情况. 实际上通常两个独立光源甚至两个原子发射的光波都是不相干的. 为了说明此问题以及怎样来产生相干光波,须讨论光源发光的微观机理.

从经典物理的观点来看,光波是光源中大量分子、原子的振动而发射的电磁波. 因为大部分物体发光属原子发光类型,所以以下只讨论原子的辐射. 当原子发光时,由于辐射造成的能量损失以及发光的分子或原子受到其他分子或原子的作用,它们所发出的光波不可能是理想的单色光,而是一些断断续续的波列. 即使在非常稀薄的气体中,各原子间的相互作用几乎可以完全忽略的情况下,它们发射的波列的持续时间也不会超过一亿分之几秒(约 10^{-8} s),相应的波列长度小于米的量级. 在一次发射过程终止以后,原子又能够重新开始发光,但此时所发光波已具有新的振动方向和相位. 由于普通光源中原子的发射是一种随机过程,每一个原子先后发射的波列之间以及不同原子发射的波列之间在振动方向和相位上都没有什么联系,因此由两个独立光源或一光源两部分发出的光波,即使它们的振动方向和频率相同,由于相位差不稳定,它们在场中任一点叠加的结果是一会儿相长,一会儿相消,所给出的瞬时干涉图样迅速而毫无规则地改变,干涉图样的维持时间比通常探测仪器的响应时间短得多(例如人眼的响应时间为 0.1 s,普通胶片的响应时间约为 10^{-3} s),以致我们只能观察到或用仪器记录到强度的时间平均值. 即是说由于相位差的无规变化,(4.1-5)式中的干涉项在观察时间内的平均值为零,则

$$I(P)=I_1(P)+I_2(P)$$

因此两个独立光源或一光源的两部分发出的光波是完全不相干的.

为了产生相干光波,可以利用光学方法将每一发光原子(或一般说点源)发出的一列波分成两束(或多束),由于其初相位相同,它们经过不同光程后相遇,在场点 P 将保持稳定的相位差,从而可以产生干涉现象. 将一列光波分为两列相干光波的方法有三种:(1) 分波前法;(2) 分振幅法;(3) 分振动面法. 本章中将讨论前两者,最后一种方法将在第七章中讨论.

最后要指出,由于普通光源的发光主要是利用光源内原子、分子的自发发射,而激光则主要是受激发射,所以激光器可以产生相干性很好即波列长度很长的光波. 另一方面,由于近年来光电探测器响应能力的提高,例如纳秒光电器件的响应时间 $\tau\approx10^{-9}$ s,可以记录下在极短时间内发生的瞬态干涉. 对于瞬态干涉并不要求两列光波的频率完全相同及相位差完全恒定,只需要在观察时间中干涉项不为零. 但是通常我们所见到的干涉现象都是由同一列波分为两列相干光波而产生的,所以我们下面主要仔细讨论这种获得相干光波的方法.

§4.3 杨氏实验

在现代光学中,习惯上将光波场中接收面上的光场称为**光波前**,因为它直接决定光波被吸收

的效果. 接收面是光波场中任一特定的平面或曲面,例如人眼视网膜、屏幕、感光胶片或干板、光纤面板、CCD 面阵等. 在同一光源发出的光波波前上分割出两部分,并使分割出的两束光经过不同的光程后相遇而产生干涉,这种方法称为**分波前法**. 实现两光束分波前干涉的装置很多,由于杨氏实验在光学发展史上的卓越贡献及其典型性,本节中将其作为两光束分波前干涉的代表而加以仔细讨论.

4.3.1 干涉装置分析

1801 年杨氏首先用阳光演示了光的干涉实验,为光的波动理论的确立奠定了基础.

杨氏实验装置如图 4.3-1 所示,光波通过小孔 S 照射到双孔屏上,屏上的光场即为波前,双孔 S_1、S_2 将波前分割为两部分,在双孔屏后面的接收屏上可观察到一系列明暗相间的干涉条纹. 如果用单色光源(例如激光器或钠光灯)照明小孔 S,则小孔 S 可近似看成一个单色点光源,它发出的光波波面是球面. 双孔 S_1 和 S_2 所在的平面不在 S 的波面上,而在波前上. 根据惠更斯原理,两个小孔 S_1、S_2 可看作两个新的波源. 因为 S_1 和 S_2 是由同一点光源 S 所形成的两个次级光源,它们的初相位分别为

$$\varphi_{01}=\varphi_0(t)-\frac{2\pi}{\lambda}R_1$$

$$\varphi_{02}=\varphi_0(t)-\frac{2\pi}{\lambda}R_2$$

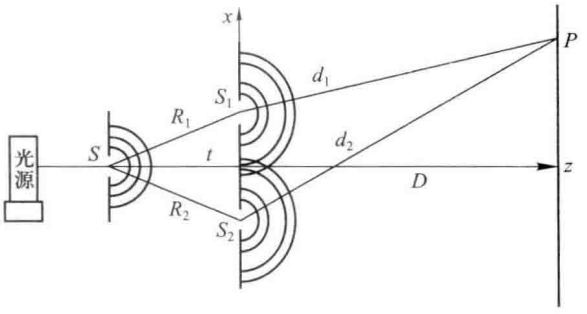


图 4.3-1 杨氏实验

式中 $\varphi_0(t)$ 是波源 S 的初相位,$R_1=SS_1$,$R_2=SS_2$. 于是 S_1 和 S_2 的初相位差为

$$\varphi_{01}-\varphi_{02}=\frac{2\pi}{\lambda}(R_2-R_1) \tag{4.3-1}$$

上式表明,尽管 S 的初相位 φ_0 随时间作无规变化,从而 φ_{01} 和 φ_{02} 也随时间做无规变化,但 φ_{01} 和 φ_{02} 之差却只与 R_2-R_1 有关而和时间无关,因而 S_1 和 S_2 是一对相干光源,它们发出的次波叠加形成干涉场,在垂直于光轴放置的接收屏上将获得一组稳定的亮暗相间的条纹. 杨氏实验的关键在于光通过小孔 S 照射到双孔 S_1、S_2 上,这样简单而巧妙地用双孔实现波前分割,并锁定了两光源 S_1 和 S_2 之间的相位关系,获得了两相干光源. 实际上为了提高干涉条纹的亮度,常用三个互相平行的狭缝代替针孔 S 和 S_1、S_2;为了更清晰地观察干涉条纹,可用目镜观察代替屏幕接收. 前后移动接收屏或目镜,在干涉场中都可接收到清晰的干涉图样,我们称这种干涉为**非定域的**.

4.3.2 干涉光强分布

在图 4.3-1 所示装置中，双孔 S_1 和 S_2 之间的距离为 t. 为简单计，假设 S_1 和 S_2 在 P 点产生的振动方向相同. 由(4.1-8)式，屏上任一点 P 的光强为

$$I(P)=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\delta$$

式中 δ 为 S_1 和 S_2 在 P 点的相位差，A_1 和 A_2 分别为 S_1 和 S_2 在 P 点振动的振幅. 在屏中心附近可认为两束光的振幅相同，即 $A_1=A_2=A$，于是上式可写为

$$I(P)=4A^2\cos^2\frac{\delta}{2} \tag{4.3-2}$$

若光传播路径上介质的折射率为 n，真空中波长为 λ 的单色光波在这种介质中的波长为 λ_n，S_1 和 S_2 至 P 点的距离 $S_1P=d_1$，$S_2P=d_2$，上式中的 δ 则为

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda_n}(d_2-d_1)$$

因为 $\lambda_n=\dfrac{\lambda}{n}$，则

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}n(d_2-d_1)=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta \tag{4.3-3}$$

即两个相干点源在 P 点产生的振动的相位差等于光程差 Δ 和波数$\dfrac{2\pi}{\lambda}$的乘积. 如果相干光波在空气中传播，光程差可用路程差代替. 在讨论光的干涉问题时，这个公式是一个基本关系式.

由(4.3-2)和(4.3-3)式可见，在光程差为波长整数倍的地方，即

$$\Delta=K\lambda \text{ 或 } \delta=2K\pi \quad (K=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{4.3-4}$$

两光波的相位相同，干涉相长产生极大的光强 $I_M=4A^2$.

在光程差为半波长奇数倍的地方，即

$$\Delta=\left(K+\frac{1}{2}\right)\lambda \text{ 或 } \delta=(2K+1)\pi \quad (K=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{4.3-5}$$

两光波相位相反，干涉相消产生极小光强 $I_m=0$，场中其余点的光强则在 0 与 $4A^2$ 之间.

如图 4.3-1，S_1、S_2 发出的向各方向传播的光波所产生的干涉场中，等强度点的轨迹就是对 S_1 和 S_2 的等光程差点的轨迹. 等光程差点应满足

$$d_2-d_1=\text{常量}$$

根据解析几何知识可知，若空间的一个动点 P 到两定点 S_1、S_2 的距离之差为一常量，则此动点的轨迹是以 S_1 和 S_2 为焦点，S_1 和 S_2 的连线为旋转轴的双叶双曲面，如图 4.3-2 所示. 图中不同偏心率双曲面与不同的程差值相对应，平面与零程差值相对应. 平行于 S_1S_2 放置的接收屏与双曲面族相交所成的双曲线就是屏上接收到的干涉图样，在偏心率很小的情况下，可视为一簇平行直线.

为了确定接收屏上亮纹和暗纹的位置，应将光强分布公式表示为坐标的函数. 我们选择如图 4.3-3 所示的坐标系 $Oxyz$，原点在 S_1、S_2 连线的中点，x 轴的方向为 S_1、S_2 连线的方向，垂直于 z 轴放置的接收屏距 S_1S_2 的距离为 D，于是屏上 P 点的坐标为 (x,y,D). S_1 和 S_2 到 P 点的距离可

分别写为

$$d_1^2=\left(x-\frac{t}{2}\right)^2+y^2+D^2,\quad d_2^2=\left(x+\frac{t}{2}\right)^2+y^2+D^2$$

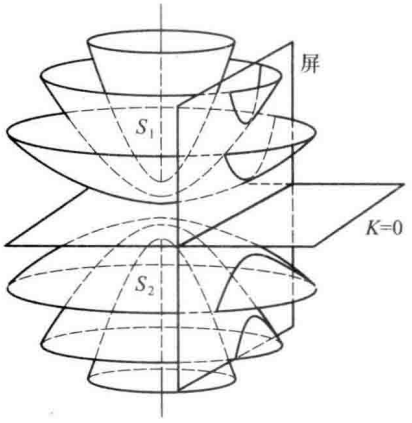


图 4.3-2 两点光源的等光程差面

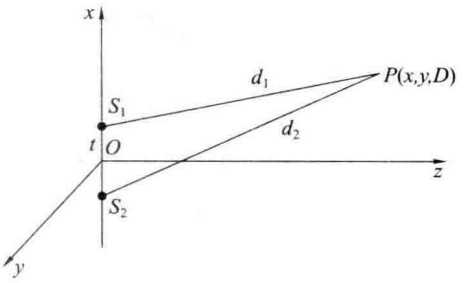


图 4.3-3 坐标系

两式相减得

$$d_2^2-d_1^2=2xt$$

则

$$d_2-d_1=\frac{2xt}{d_2+d_1}$$

通常的实验条件下，接收屏至双孔的距离远大于双孔间距，而且是在傍轴区域内接收干涉条纹，即 $D\gg t, D\gg x, D\gg y$，于是可将上式中的 d_1+d_2 近似用 $2D$ 代替，则得

$$\Delta=d_2-d_1=\frac{t}{D}x \tag{4.3-6}$$

代入(4.3-2)式则得

$$I=4A^2\cos^2\left(\frac{\pi t}{\lambda D}x\right) \tag{4.3-7}$$

上式所示 I 随 x 变化的关系可用图 4.3-4 中的曲线表示，由此可见在通常的实验条件下屏幕上生成的干涉图样是一系列平行而等距排列的明暗相间的直条纹. 应当注意，在 x 方向上光强随余弦平方而变化，但习惯上只计算亮纹和暗纹的位置，即强度极大和极小的位置.

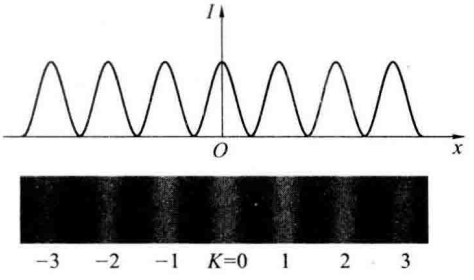


图 4.3-4 杨氏干涉条纹

由(4.3-4)和(4.3-6)式，强度极大点的位置决定于

$$x=K\frac{D}{t}\lambda\quad(K=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{4.3-8}$$

式中 K 称为**干涉级**，它表示该极大值处的光程差是真空中波长的 K 倍，因此可用 K 来标识各干涉条纹. 例如，$K=0$ 表示零级亮纹.

由(4.3-5)和(4.3-6)式，强度为极小点的位置决定于

$$x=\left(K+\frac{1}{2}\right)\frac{D}{t}\lambda \quad (K=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{4.3-9}$$

相邻两个极大值或极小值之间的距离称为**条纹间距**，由(4.3-8)或(4.3-9)式可得

$$\Delta x=\frac{D}{t}\lambda \tag{4.3-10}$$

上式说明条纹间距与干涉级次 K 无关，在给定 λ 的情况下，Δx 与 D 成正比，与 t 成反比，t 越大，Δx 越小，条纹越密，D 越大，条纹越稀.

若用不同波长的单色光照明单孔 S，就可得到间距不同的干涉条纹，波长越短，条纹越密，例如蓝色光的条纹比红色光的密. 因此用白光照射时，除中央零级极大是白色以外，其他各级条纹均带有色彩. 在同一级次的各色条纹中，波长较短的距中心较近，如图 4.3-5 所示，图中曲线上方的数字表示干涉级.

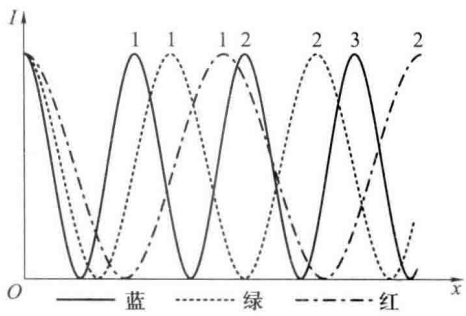


图 4.3-5　不同波长的单色光的干涉条纹

在实验中可以测量 D、t、Δx，从而根据(4.3-10)式计算出光波长，这是历史上最早测定光波长的方法之一. 当然用这种方法测量的结果并不十分精确，因为从亮纹到暗纹光强是逐渐变化的，用测微目镜的十字叉丝对准强度极大或极小点的位置颇为困难.

在上面的讨论中，我们假定了 S_1 和 S_2 为无限小的针孔，实际上 S_1 和 S_2 的有限大小将引起衍射现象，这方面的问题留待下章讨论.

4.3.3　干涉条纹的可见度

在上节中我们讨论了相干光波的必要条件，但是即使两列波满足了这些条件，它们叠加以后产生的干涉现象还不一定明显可见. 为了使干涉条纹明显可见，尚有若干实际问题需要考虑，为此我们先引入一个用以描写干涉现象是否明显的物理量. 设干涉场中某处附近光强的极大值为 I_M，极小值为 I_m，我们称光强变化的幅值与平均值之比为该处干涉条纹的**可见度**(或称为衬比度，对比度)：

$$\gamma=\frac{I_M-I_m}{I_M+I_m} \tag{4.3-11}$$

可见度是一个量纲为 1 的量，它的取值范围在 0 与 1 之间. 当光强极小值为零时($I_m=0$)，$\gamma=1$，可见度最大，条纹十分明显. 当光强极大值和极小值相差不多时($I_M\approx I_m$)，γ 趋于零，干涉条纹完全不可辨认.

对于两个理想的单色相干点源发出的振动方向相同的光波，它们叠加以后的光强

$$I=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\delta$$

当 $\delta=2K\pi(K=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，$I=I_M=(A_1+A_2)^2$；当 $\delta=(2K+1)\pi(K=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，$I=I_m=(A_1-A_2)^2$，代入(4.3-11)式得

$$\gamma=\frac{2A_1A_2}{A_1^2+A_2^2}=\frac{\dfrac{2A_1}{A_2}}{1+\left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)^2} \tag{4.3-12}$$

可见对于两个单色相干点源，其干涉条纹的可见度决定于它们的振幅比，若 $A_1=A_2$，则 $\gamma=1$，可见度最大，若 $A_1\gg A_2$（或 $A_2\gg A_1$），则 $\gamma\approx0$. 因此，为了使干涉条纹明显可见，两相干光波的振幅不能相差太大.

若令 $I_0=I_1+I_2=A_1^2+A_2^2$，干涉光强分布公式可写为

$$I=I_0(1+\gamma\cos\delta) \tag{4.3-13}$$

在本节的讨论中，我们曾假定 S_1 和 S_2 在 P 点所产生的振动是线偏振的，而且振动方向平行，但是本节所推导的公式对自然光同样可以适用. 自然光的光矢量可以分解为 p、s 两个分量，在接收屏距双孔很远而且在傍轴区域观察的条件下，来自两个小孔的元振动的 s 分量方向相同，p 分量的夹角也很小，对干涉条纹可见度的影响可以略去不计.

此外，光源的有限大小和光的非单色性对可见度都有影响，我们将在 §4.6 和 §4.7 中讨论.

例 4.3-1 在杨氏双缝干涉装置中，已知 $t=1$ mm，$D=50$ cm. 将一折射率 $n=1.50$ 的薄玻璃片盖在其中一个缝上，加上玻片后零级亮纹的位移为 0.2 cm. 试求玻片的厚度.

解 在图 4.3-1 中，将厚为 d 的薄玻片盖在缝 S_1 上，S_2 和 S_1 至场中 P 点的光程差恰为零，即

$$[S_2P]-[S_1P]=S_2P-S_1P-(n-1)d=0$$

而 $S_2P-S_1P=\dfrac{t}{D}x$，代入上式并整理得

$$d=\frac{t}{(n-1)D}x$$

已知 $t=1$ mm，$n=1.5$，$D=50$ cm，$x=0.2$ cm，代入上式得

$$d=\frac{1\times2}{(1.5-1)\times500}\ \text{mm}=8\times10^{-3}\ \text{mm}$$

§4.4 其他几种两光束分波前干涉装置

本节中将讨论另外几种在光学发展史上影响较大或在实验室中常见的观察两光束分波前干涉的实验装置.

4.4.1 菲涅耳双面镜

如图 4.4-1 所示，菲涅耳双面镜由两块彼此夹角很小的平面反射镜 AM 和 BM 组成. 从点光源（或狭缝）S 发射出来的光波受遮光屏 K 的阻挡，不能直接到达屏上，而是经两块平面镜反射被分割为两束相干光，在它们叠加的区域置一观察屏，就可在屏上 FG 区域内接收到干涉条纹. 从双面镜反射的两束相干光可以看成是 S 在双面镜中形成的虚像 S_1 和 S_2 发出的，因而 S_1 和 S_2 相

当于一对相干光源，其位置可按反射定律确定. 图 4.4-1 中双面镜的交线和图平面相交于 M，$SM=l$，则 $S_1M=S_2M=l$，所以 S_1S_2 的垂直平分线也通过 M 点. 因为平面镜转过 θ 角时反射光线将改变 2θ 角，所以 S_1M 和 S_2M 之间的夹角为 2θ，S_1 和 S_2 之间的距离为

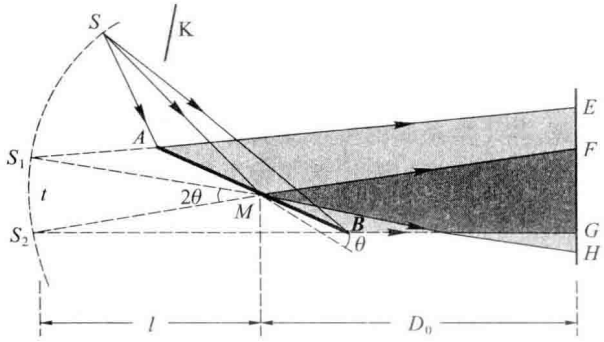


图 4.4-1　菲涅耳双面镜

$$t=2l\sin\theta\approx 2l\theta \tag{4.4-1}$$

设接收屏到两镜面交线的距离为 D_0，则连线 S_1S_2 到接收屏的距离 $D=l+D_0$. 于是接收屏上干涉条纹的间距

$$\Delta x=\frac{D}{t}\lambda=\frac{D_0+l}{2l\theta}\lambda \tag{4.4-2}$$

两镜的夹角 θ 越小，干涉条纹的间距就越大. 在一般情况下 $\theta<30'$，否则所产生的干涉条纹就太密了.

4.4.2　菲涅耳双棱镜

如图 4.4-2 所示，菲涅耳双棱镜由两个相同的薄棱镜组成，棱镜的顶角 α 很小，一般约为 $30'$. 实际制作时，可将一薄平板玻璃的一面研磨成两个斜面即成. 从点光源 S 发出的光波经双棱镜折射分割成为两列相干光波，它们宛如 S 经双棱镜两表面折射后形成的两个虚像 S_1 和 S_2 发出的一样，在它们交叠的区域内将产生干涉. 如将光阑 M 放在图中所示位置，则只在接收屏上 FG 区域内可观察到干涉条纹. 如将 M 撤去，则在整个 EH 区域内都可观察到干涉条纹. 设棱镜材料的折射率为 n，它对入射光产生的偏向角 $\beta\approx(n-1)\alpha$，由图可见两相干光源之间的距离为

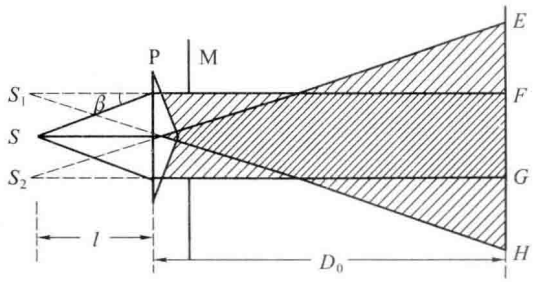


图 4.4-2　菲涅耳双棱镜

$$t=S_1S_2=2l\beta=2l(n-1)\alpha \tag{4.4-3}$$

式中 l 为 S 到双棱镜的距离. 若接收屏至双棱镜的距离为 D_0，根据(4.3-10)式，接收屏上干涉条纹的间距为

$$\Delta x=\frac{(l+D_0)}{2(n-1)\alpha l}\lambda \tag{4.4-4}$$

例如，设 $n=1.5,\alpha=30'\approx8.7\times10^{-3}$ rad，$l=2$ cm，$D_0=50$ cm，$\lambda=6\times10^{-5}$ cm，代入上式得 $\Delta x\approx0.3$ cm.

4.4.3 比耶对切透镜

如图 4.4-3 所示，将一枚薄凸透镜切开成两半，沿垂直于光轴方向拉开一点距离，其间的空隙用不透光屏 K 挡住，就构成比耶(Billet)对切透镜. 点光源 S 经透镜的两半产生两个实像 S_1 和 S_2，它们就可看作一对相干光源，来自 S_1 和 S_2 的相干光波可在屏上产生干涉条纹. S_1、S_2 到透镜的距离可由薄透镜成像的高斯公式和放大率公式求出.

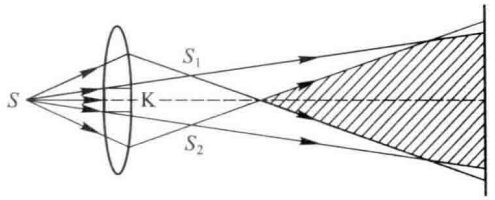


图 4.4-3 比耶对切透镜

4.4.4 劳埃德镜

在劳埃德(Lloyd)镜实验中(图 4.4-4)，点光源 S_1 放在离平面镜 K 相当远并且接近镜平面的地方，S_1 发出的光波一部分直接射到接收屏上，另一部分以差不多 90°的角度(掠射)入射到平面镜 K 上，再经平面镜反射到接收屏，和直接射来的光波叠加产生干涉. S_1 和它在平面镜中的虚像 S_2 构成一对相干光源. 接收屏上干涉条纹的间距为

$$\Delta x=\frac{D}{2h}\lambda \tag{4.4-5}$$

式中 h 为 S_1 至镜面的距离，D 为 S_1 至接收屏的距离.

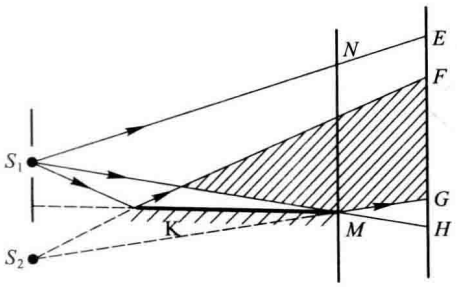


图 4.4-4 劳埃德镜

在这一实验中，接收屏上生成的干涉图样有两个明显的特征：第一，干涉场只在镜面之上，因而干涉图样对镜面而言是不对称的；第二，当接收屏与镜端接触时(图 4.4-4 中的 MN 位置)，在 M 点入射光与反射光的路程相同，因而 M 点似乎应为亮纹的中心，而实际上它却位于暗纹中心. 这说明两光束之一的相位变化了 π. 因为直接射来的光绝不可能有这种变化，所以这个事实表明光从空气掠入射到玻璃表面上时，表面上的反射光波的相位突变了 π，这在 §3.5 中已作了讨论(图 3.5-8).

例 4.4-1 设双面镜的夹角 $\theta=10^{-3}$ rad，波长 $\lambda=500$ nm 的单色缝光源 S 与两镜交线 M 的距离 $l=0.5$ m，在

与 M 相距为 $D_0=1.5$ m 的屏上出现明暗相间的干涉条纹(如图4.4-5所示,为清楚起见图中已将 θ 角放大). 求:

(1) 干涉条纹的间距;

(2) 在屏上最多可以看到几条亮纹?

解　(1) 由(4.4-2)式

$$\Delta x=\frac{D_0+l}{2l\theta}\lambda$$

将题设各量代入上式得

$$\Delta x=\frac{1.5+0.5}{2\times10^{-3}\times0.5}\times5\times10^{-5}\ \text{cm}=0.1\ \text{cm}$$

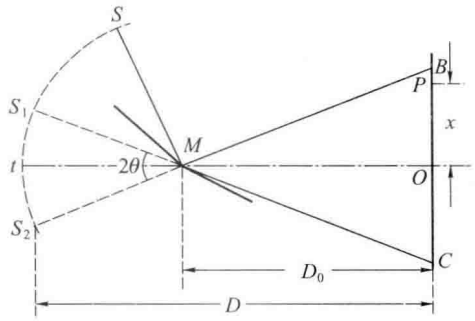


图 4.4-5

(2) 在用理想单色狭缝光源照明的条件下,屏上可能出现的条纹数目决定于虚光源 S_1 和 S_2 发出的光波在屏上叠加的区域,即干涉场的范围. 将 S_1M 和 S_2M 分别延长与接收屏相交于 B 点和 C 点,若双面镜足够长,BC 即为此范围. 从图上可以看出

$$BO=MO\tan\theta=1.5\times10^{-3}\ \text{m}=0.15\ \text{cm}$$

由此可见,屏上除 O 处为零级亮纹外,在其两侧各有一条亮纹,总共最多出现三条亮纹.

§4.5　两束平行光的干涉

上一节中讨论了两列球面波的干涉,本节将讨论两列平面波即两束平行光的干涉. 实现两束平行光干涉的装置很多,我们以菲涅耳双面镜为例进行讨论.

如图 4.5-1(a)所示,激光器发出的单色光经过准直后成为平行光照射在望远镜的目镜 L_e 上,从物镜 L_o 出射的平行光经双面镜分成两束相干的平行光 aa' 和 bb',它们和接收平面 xy(y 轴垂直纸面)法线的夹角分别为 θ_1 和 θ_2. 角的正负由光线转向法线的方向确定,顺时针为正,逆时针为负. 光束 aa' 和 bb' 在接收屏上叠加生成干涉条纹. 图中的望远镜有两个作用,一是扩展光束的截面,二是压缩光束的发散角. 望远镜系统的光轴应位于两平面镜法线所决定的平面内.

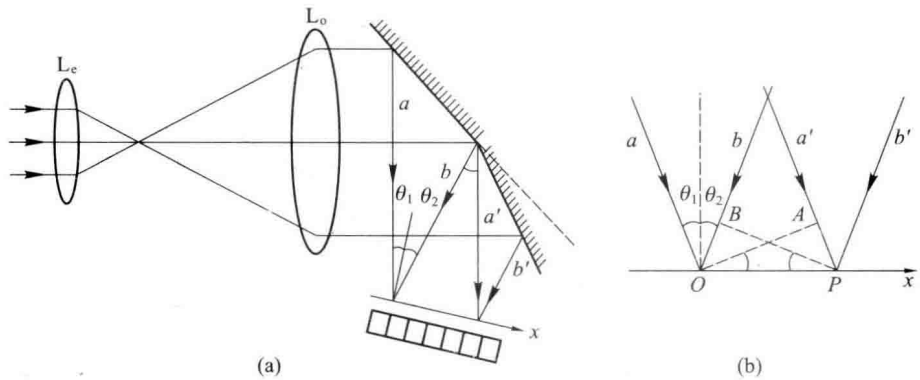


图 4.5-1　两束平行光的干涉

在图 4.5-1(b)中,假设接收屏上的 O 点为零级亮纹的中心,P 为屏上距 O 为 x 的一点,OA 和 PB 分别为 aa'和 bb'的波面. 在 O 点,a、b 两光波的相位相同. 对于光束 aa'而言,O 点与 A 点同相位,设 AP 的长度为 Δ_1,则 P 点较 O 点落后的相位为

$$\delta_1=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta_1=\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta_1$$

对于光束 bb'而言,设 BO 的长度为 Δ_2,则 P 点较 O 点超前的相位为

$$\delta_2=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta_2=\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta_2$$

因此在 P 点叠加的 a'、b'两光波的相位差为

$$\delta=\delta_1-\delta_2=\frac{2\pi}{\lambda}x(\sin\theta_1-\sin\theta_2)$$

上式中的 θ_2 为负值. 当 $\delta=2K\pi$ 时,P 点为第 K 级亮纹中心,即

$$\frac{2\pi}{\lambda}x(\sin\theta_1-\sin\theta_2)=2K\pi$$

则第 K 级亮纹至 O 点的距离

$$x=\frac{K\lambda}{\sin\theta_1-\sin\theta_2}\quad(K=0,\pm1,\pm2,\cdots)\tag{4.5-1}$$

干涉条纹的间距

$$\Delta x=x_{K+1}-x_K=\frac{\lambda}{\sin\theta_1-\sin\theta_2}\tag{4.5-2}$$

若接收屏法线与两束光夹角的等分线平行,即 $\theta_1=-\theta_2=\theta$,式中 θ 为两双面镜夹角,则上式成为

$$\Delta x=\frac{\lambda}{2\sin\theta}\tag{4.5-3}$$

上式表明,双面镜产生的平行光干涉场中,条纹间距与波长成正比,与双面镜夹角的正弦成反比,而与接收屏至双面镜的距离无关,向前或向后移动接收屏,干涉条纹间距不变. 读者不难证明,当 $l\to\infty$,θ 很小时,(4.4-2)与(4.5-3)式相等.

例 4.5-1 一束波长 $\lambda=630$ nm 的平行激光束通过分束板 B 分成互相垂直的两束光 a 和 b,M_1 和 M_2 是由玻璃做成的两个反射面,光束 a 和 b 都以布儒斯特角 $i_B=52°30'$分别入射到 M_1 和 M_2 上,经反射后得到强度相等的两束平行光 a'和 b',在它们的重叠区放一观察屏 Σ,并使其法线与光束 a'和 b'对称,如图 4.5-2 所示. 试求:

(1) 屏 Σ 上干涉条纹的间距 Δx 与条纹的可见度 γ;

(2) 为了使条纹可见度降为$\frac{2}{3}$,在 b'光束中垂直放入一块偏振片,它的透振方向应取何方位?

解 (1) 如图 4.5-2 所示,a'和 b'两束相干的平行光为振动面垂直于纸面的线偏振光,它们之间的夹角为

$$2\theta=360°-90°-4\times52°30'=60°$$

由(4.5-3)式,屏 Σ 上干涉条纹的间距为

$$\Delta x=\frac{\lambda}{2\sin\theta}=\frac{630\ \text{nm}}{2\times\sin 30^\circ}=630\ \text{nm}$$

因为光束 a' 和 b' 的强度相等，故条纹可见度 $\gamma=1$.

(2) 在光束 b' 中插入一块偏振片 P，使 b' 的振动方向与 P 的透振方向成 α 角，如图 4.5-3 所示. 设光束 a' 和 b' 的振幅为 A，透过偏振片的线偏振光及其两个正交分量的振幅分别为 A_1、A_{1s}、A_{1p}，则

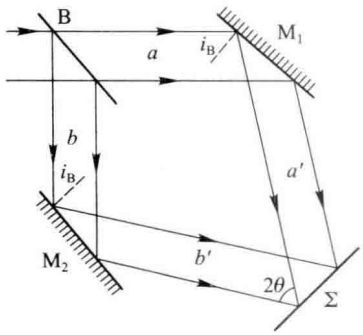


图 4.5-2

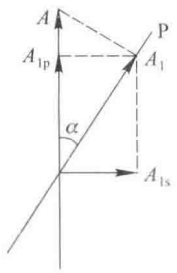


图 4.5-3

$$A_1=A\cos\alpha,\quad A_{1s}=A\cos\alpha\sin\alpha,\quad A_{1p}=A\cos^2\alpha$$

屏 Σ 上光强的极大值和极小值为

$$\begin{aligned}I_M&=(A+A_{1p})^2+A_{1s}^2\\&=A^2(1+\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\cos^4\alpha+2\cos^2\alpha)\\I_m&=(A-A_{1p})^2+A_{1s}^2\\&=A^2(1+\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\cos^4\alpha-2\cos^2\alpha)\end{aligned}$$

由(4.3-11)式

$$\gamma=\frac{I_M-I_m}{I_M+I_m}=\frac{2\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}=\frac{2}{3}$$

解得

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \alpha=45^\circ$$

即偏振片的透振方向应与光束 b' 的振动方向成 45° 角.

§4.6　光源的光谱展宽对干涉条纹可见度的影响　光场的时间相干性

前面讨论干涉现象的规律时，曾假定光源是理想的单色点光源，但是这种理想的情况实际上并不存在，任何实际的光源总有一定的大小并包含有一定的光谱成分. 在本节和下节中将分别研究光源的光谱展宽和空间展宽对干涉条纹可见度的影响，并由此讨论光场的时间相干性和空间相干性.

在杨氏双缝干涉实验装置中，用普通红色透明纸包裹着的单丝灯作为光源. 接收屏上的干涉

条纹中央最清晰，从中央到两端条纹逐渐模糊，在边缘区域条纹完全模糊不清. 若换用氦-氖激光作为光源，接收屏上的干涉条纹从中央到边缘都很清晰，这个实验说明干涉条纹的可见度和光源的光谱展宽即非单色性密切相关. 为了研究这种关系，我们首先引入表征光源单色性的几个概念.

4.6.1 相干时间与相干长度

在§4.2中已经指出，任何实际光源发出的光波都不可能是在时间和空间上无限延续的简谐波，而是一些断断续续的波列，假设光源中原子每次发光的持续时间为τ_0，相应的波列长度为L_0，则它们之间的关系为

$$L_0 = c\tau_0 \tag{4.6-1}$$

式中c为光波在真空中的传播速度.

由于原子的发光是完全无规的，它相继发射的各波列之间完全没有确定的相位关系，为了用普通光源产生干涉现象，必须将同一原子发出的一列波一分为二(例如通过双缝，如图4.6-1所示)，使它们经过不同的光程后再相遇. 但是只有当它们到达P点的光程差小于波列长度，或者说它们到达P点的时间间隔小于波列的持续时间时，一波列尚未完全通过P点时另一波列的前端已到达P点，这两列波才能产生干涉. 因此我们称τ_0为**相干时间**，L_0为**相干长度**.

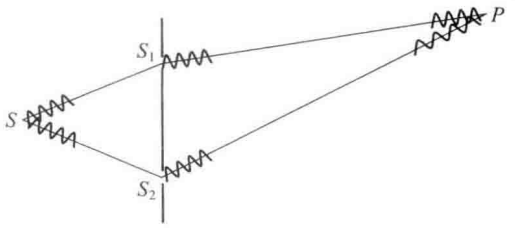


图4.6-1 光程差小于波列长度才能产生干涉

4.6.2 相干长度与谱线宽度的关系

实际上使用的各种单色光源都包含有一定的波长成分，或者说有一定的光谱宽度. 例如钠光灯的黄光包含着中心波长分别为$\lambda_{D_1}=589.6$ nm和$\lambda_{D_2}=589.0$ nm的两条谱线，每一条谱线又都包含很小的波长范围. 低压汞灯光包含了中心波长为577 nm，579 nm，546.1 nm，435.8 nm，404.7 nm的几条谱线，每一条谱线也都包含很小的波长范围. 如果光波中包含的波长范围$\Delta\lambda$与中心波长λ相比甚小，即$\Delta\lambda \ll \lambda$，这种光波称为**准单色光**. 下面我们讨论准单色光的波长范围和相干长度之间的关系.

作为一种理想化的情形，假设光源中原子在一次持续发光时间内发出的光波是一段有限长的简谐波列[图4.6-2(a)]，波列的持续时间为τ_0. 根据傅里叶分析可以证明(见§6.2)，这种有限长的波列可以看成许多单色光波的叠加，这些光波的频率连续分布在中心频率ν_0的两侧，各种频率成分的光强如图4.6-2(b)所示. 设中心频率ν_0对应的光强为I_0，由I_0沿曲线两侧下降到零时的频率为ν_1和ν_2，我们称$\Delta\nu=(\nu_2-\nu_1)/2$为**频谱宽度**，简称**频宽**. 计算表明，频宽和相干时间有下列关系：

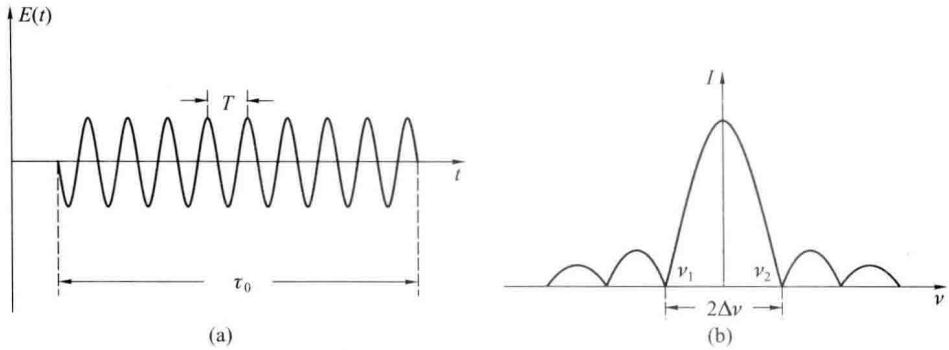


图 4.6-2 波列长度和频谱宽度的关系

$$\tau_0 \Delta\nu = 1 \tag{4.6-2}$$

上式表明相干时间和频宽成反比. 例如,对于在室温下氖光源发出的 632.8 nm 谱线,$\Delta\nu \approx 1.8\times 10^9$ Hz,因此$\tau_0 \approx 0.5\times 10^{-9}$ s.

因为 $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$,则

$$\Delta\nu = -\frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda \tag{4.6-3}$$

式中 $\Delta\lambda$ 为与 $\Delta\nu$ 相应的波长范围,称为**谱线宽度**,简称**线宽**. 略去上式中的负号不写,并和(4.6-1)式一并代入(4.6-2)式得

$$L_0 = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \tag{4.6-4}$$

(4.6-2)和(4.6-4)式说明,线宽(或频宽)愈小,相干长度(或相干时间)愈长,光源的时间相干性(或单色性)愈好. 对于 643.8 nm 镉红线,$\Delta\lambda \approx 0.001$ nm,由上式可得 $L_0 \approx 30$ cm. 对于钠黄线,$\Delta\lambda \approx 0.01$ nm,因而 $L_0 \approx 3$ cm. 然而对于 $\Delta\nu \approx 2\times 10^4$ Hz 的商品激光器,$\tau_0 \approx 50$ μs,对应的相干长度竟是 15 km. 由于多种原因,实验室中使用的普通激光器的相干长度要短得多. 综上所述,相干长度和谱线宽度这两个物理量描写的是光源发光的同一性质,即原子发光的断续性,因此"波列长度是有限的"和"光是非单色的"两种说法完全等效.

4.6.3 光源的光谱展宽对干涉条纹可见度的影响

假设在杨氏双缝实验装置中,光源发出中心波长为 λ、线宽为 $\Delta\lambda$ 的准单色光,而且各波长成分有相同的强度. 由于不同波长的光是不相干的,所以接收屏上任一点的光强是各种波长成分各自形成的干涉条纹在该点的光强的非相干叠加,图 4.6-3(a)所示为分布在 $\lambda_1 = \lambda - \dfrac{\Delta\lambda}{2}$与 $\lambda_2 = \lambda + \dfrac{\Delta\lambda}{2}$之间各波长成分的光强分布曲线,图中纵坐标表示光强,横坐标表示离屏中心的距离 x,各波长成分的干涉条纹可见度都为 1. 因为光程差 Δ 与 x 成正比,所以横坐标也可表示光程差 Δ. 在 $x=0$处,各种波长成分的零级极大互相重合. 除零级以外,不同波长的同级极大都互相错开,干涉级愈高,错开的距离愈大. 为清楚起见,图中只画出了 λ_1 和 λ_2 两边缘波长的完整光强分布曲线,

曲线上方的数字表示这两种波长的干涉级,其他各波长的曲线应布满整个阴影区,将横坐标上各点所对应的各曲线的光强值相加,就得到合光强分布曲线,如图 4.6-3(b)所示. 在图中只画出了零级极大一侧的光强分布曲线,因为在 x 与 $-x$ 处的光强相同,所以另一侧的情况完全一样. 由图可见,在中央零级亮纹附近,合成光强分布的极大值与极小值的差别较大,随着 x(或 Δ)的增加,这种差别逐渐减小,下面我们估算可见度与 Δ 的关系.

缝光源发出的准单色光经双缝后在干涉场中 P 点产生的强度是各个波长在该点产生的强度之和,即应对波长求积分. 光源的光谱分布可用光强谱密度 $i(x)=\mathrm{d}I(\lambda)/\mathrm{d}\lambda$ 表示,其中 $\mathrm{d}I(\lambda)$ 是在 λ 附近的 $\lambda\sim\lambda+\mathrm{d}\lambda$ 区间中的辐射光强. 为了计算方便起见,选择波数 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ 作为自变量. 函数 $i(\lambda)$ 或 $i(k)$ 的形式称光谱线型. 波数 k_0 附近的波数元 $\mathrm{d}k$ 在场点 P 产生的干涉光强为

$$\mathrm{d}I(k)=2i(k)[1+\cos(k\Delta)]\mathrm{d}k$$

式中 Δ 为 P 点对应的光程差,$i(k)\mathrm{d}k$ 表示 $k\sim k+\mathrm{d}k$ 范围内的窄带光通过单缝在 P 点产生的光强,P 点总的光强为

$$\begin{aligned} I(P)&=\int\mathrm{d}I(k)=\int_0^\infty 2i(k)[1+\cos(k\Delta)]\mathrm{d}k \\ &=2I_0+2\int_0^\infty i(k)\cos(k\Delta)\mathrm{d}k \end{aligned} \tag{4.6-5}$$

式中

$$I_0=\int_0^\infty i(k)\mathrm{d}k$$

表示单缝在 P 点产生的总强度,而 $2I_0$ 显然为干涉场中的平均强度. 为简单计,假设光源光谱线型为矩形,即在 $k_0-\dfrac{\delta k}{2}\sim k_0+\dfrac{\delta k}{2}$ 范围内光谱强度分布均匀,为满足上式,取为

$$i(k)=\begin{cases} I_0/\delta k, & k_0-\dfrac{\delta k}{2}\leqslant k\leqslant k_0+\dfrac{\delta k}{2} \\ 0, & k_0\text{ 为其他值} \end{cases}$$

代入(4.6-5)式,并将积分限取为 $k_0-\dfrac{\delta k}{2}\sim k_0+\dfrac{\delta k}{2}$,可得

$$I(P)=2I_0\left[1+\frac{2}{\delta k\cdot\Delta}\sin\left(\frac{\delta k}{2}\Delta\right)\cos(k_0\Delta)\right]$$

上式表明干涉场中的不同点对应不同的光程差,有不同的强度. 因为 $k_0\gg\delta k$,上式中的正弦因子随 Δ 的变化与余弦因子随 Δ 的变化相比可以忽略,因此强度的极大值和极小值为

$$I_M=2I_0\left[1+\left|\frac{2}{\delta k\Delta}\sin\left(\frac{\delta k}{2}\Delta\right)\right|\right],\quad I_m=2I_0\left[1-\left|\frac{2}{\delta k\Delta}\sin\left(\frac{\delta k}{2}\Delta\right)\right|\right]$$

代入(4.3-11)式得条纹的可见度

$$\gamma=\frac{|\sin(\delta k\cdot\Delta/2)|}{|\delta k\cdot\Delta/2|} \tag{4.6-6}$$

γ 随 Δ 而变化的曲线如图 4.6-3(c)所示. 由图可见,随着 Δ 的增加,可见度下降,当光程差满足

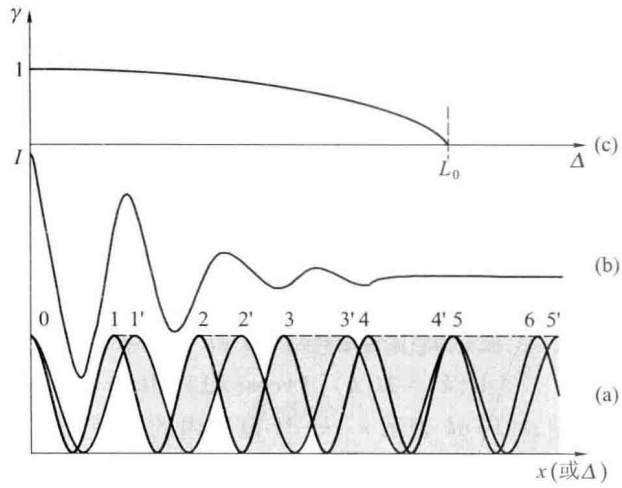


图 4.6-3

(a) 各种波长光干涉条纹的光强分布;(b) 非单色光干涉条纹的合成光强分布;
(c) 干涉条纹的可见度随光程差变化的关系

$$\Delta=\frac{2\pi}{\delta k} \tag{4.6-7}$$

时,$\gamma=0$. 光程差继续增加时,γ 虽有小的起伏,但因其值太小,实际上观察不到条纹. 因此可以认为上式表示能产生干涉的最大光程差,由 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ 两端求导并略去负号得

$$\delta k=\frac{2\pi}{\lambda^2}\Delta\lambda \tag{4.6-8}$$

代入(4.6-7)式得

$$\Delta_M=\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \tag{4.6-9}$$

将上式与(4.6-4)式比较可得,此最大光程差即波列的相干长度 L_0.

4.6.4　光场的时间相干性

我们考察非单色点光源的光场中任一点 P 在两个不同时刻 t_1 和 t_2 的振动. 因为点光源在相干时间 τ_0 内不同时刻发出的光波才是相干的,若 $t_2-t_1\geqslant\tau_0$,则光波在 t_1 和 t_2 两个时刻通过 P 点的不是同一个波列,P 点在 t_1 和 t_2 两个时刻的振动不相关. 若 $t_2-t_1<\tau_0$,则 P 点在 t_1 和 t_2 两个时刻的振动是相关的. 相干时间(或相干长度)愈长,通过场中任一点的振动保持相关的时间间隔也愈长,我们说光场的时间相干性好,即是说光场的时间相干性是场中同一点在两个不同时刻振动相关程度的描述. 光场的时间相干性和光源的单色性密切相关,可用三个等效物理量来描写:(1) 相干时间 τ_0;(2) 频谱宽度 $\Delta\nu$,(或谱线宽度 $\Delta\lambda$);(3) 相干长度 L_0. 光源的单色性愈好,L_0 和 τ_0 愈大,$\Delta\nu$(或 $\Delta\lambda$)愈小,光场的时间相干性愈好,因此(4.6-2)式称为**时间相干性反比公式**.

§4.7 光源的空间展宽对干涉条纹可见度的影响 光场的空间相干性 部分相干性

4.7.1 点光源位置移动对干涉条纹的影响

为了讨论光源空间展宽的影响，我们首先讨论点光源沿垂直光轴方向作微小移动时所引起的干涉条纹的变化. 在图 4.7-1 所示杨氏实验装置中，当点光源 S 位于 z 轴上时，在接收屏上生成的干涉图样的零级亮纹中心在 P_0 点，干涉条纹对称分布在 yz 平面的上下两侧. 将点光源沿 x 方向移至 S'处，因为 S'至 S_1、S_2 的距离不等，所以次级相干光源 S_1 和 S_2 的初相位不同，但它们的初相差是一常量. 此时接收屏上光强分布的形式没有变化，只是整个图样在 x 方向上产生了平移，因此我们只需研究任一级极大（例如零级极大）位置的变化，就可得知整个图样移动的情况. 设 S 移至 S'处时，P_0 移至 P_0' 了，因为从光源 S'经 S_1 和 S_2 至零级亮纹中心的光程差应为零，即

$$\Delta(P_0') = R_1 + d_1 - (R_2 + d_2) = 0$$

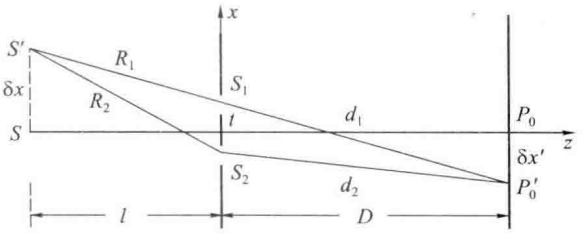


图 4.7-1 杨氏实验装置中点光源移至轴外

或

$$R_2 - R_1 = d_1 - d_2 \tag{4.7-1}$$

由上式可知，当点源 S 沿 x 方向向上平移时，$R_1 < R_2$，则 $d_2 < d_1$，干涉条纹向下移动. 反之，当点光源 S 向下移动时，$R_1 > R_2$，则 $d_2 > d_1$，干涉条纹向上移动. 设光源和条纹移动的距离分别为 $SS' = \delta x$，$P_0P_0' = \delta x'$，在傍轴条件下按照推导（4.3-6）式的类似计算可得

$$R_2 - R_1 \approx \frac{t\delta x}{l}, \quad d_1 - d_2 \approx \frac{t\delta x'}{D}$$

代入（4.7-1）式得

$$\delta x' = \frac{D}{l}\delta x \tag{4.7-2}$$

由此可见，在光源和屏至双孔距离一定的条件下，条纹平移的距离和光源平移的距离成正比，条纹移动的方向和光源移动的方向则相反.

从上面的讨论还可以看出，由于干涉条纹的取向沿 y 方向，当点光源沿 y 方向平移时，不会引起干涉条纹的变动. 因此将点光源换为平行于狭缝的线状光源时，在傍轴近似条件下，线光源上各点所产生的干涉条纹彼此重叠. 即用线光源时可以增加条纹的可见度，却不至于引起条纹位

置的变化，所以在通常的实验中都采用狭缝光源.

对于其他两光束分波前干涉装置，同样可以用上述方法分析点光源移动所引起的条纹变化. 但须注意，在某些装置中（例如劳埃德镜），点源移动时将引起两相干光源距离的变化，从而将引起条纹间距的改变.

4.7.2 光源空间展宽对干涉条纹可见度的影响

如果光源有一定的宽度，它对干涉条纹的可见度有什么影响呢？我们仍以杨氏实验为例进行讨论.

首先，假设杨氏实验装置中的光源只包含两个强度相等的发光点 S 和 S'，因为 S 和 S' 是不相干的，它们将在屏上各自产生一组条纹. 从上面的讨论可知，两组条纹的间距相等，但彼此有位移. 如果两组条纹恰好相对平移了半个条纹，如图 4.7-2 所示，图中实曲线表示 S 产生的强度分布，虚线则表示 S' 产生的强度分布，这时一组条纹的极大值刚好落在另一组条纹的极小值上，这两组条纹相加，使屏上处处强度相等，因此条纹可见度下降为零，不可能观察到干涉图样.

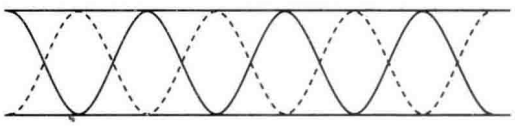


图 4.7-2 两个点源产生的两组条纹相对平移半个条纹

其次，假设光源是以 S 为中心、宽度为 b 的面光源，或称扩展光源（图 4.7-3），它可以看作由许多点光源所组成，每一点光源在接收屏上产生一组干涉条纹. 由于各点光源位置不同，它们在 S_1 和 S_2 的振动相位不同，因而产生的各组干涉条纹之间有一定的位移. 干涉场中任一点的强度可由各组干涉条纹在该点的强度直接相加而求得，这种非相干叠加的结果是最小值的强度不再为零，条纹的可见度下降，如图 4.7-4 所示. 如果选择扩展光源的宽度 b，使得它的边缘点 S' 和中心点 S 所产生的两组条纹的位移等于半个条纹间距，即光源边缘两点 S' 和 S'' 所产生的两组条纹的位移等于一个条纹间距，我们则可将 $S'S''$ 分为许多相距为 $\dfrac{b}{2}$ 的点对，每一点对产生的条纹的可见度都为零，整个屏上干涉条纹的可见度为零，这时光源的宽度称为**临界宽度**. 根据（4.3-10）式，干涉条纹间距

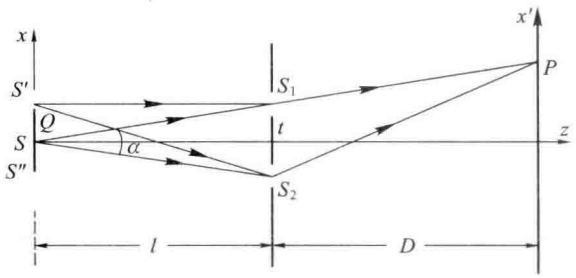


图 4.7-3 扩展光源照明杨氏实验中的双孔

$$\Delta x=\frac{D}{t}\lambda \tag{4.7-3}$$

将(4.7-2)式中的 δx 用 $\frac{b}{2}$ 代入得

$$\delta x'=\frac{D}{l}\delta x=\frac{D}{l}\cdot\frac{b}{2} \tag{4.7-4}$$

若令 $\delta x'=\frac{1}{2}\Delta x$，并将(4.7-3)式一并代入上式整理得光源的临界宽度

$$b=\frac{l}{t}\lambda \tag{4.7-5}$$

将上式改写为

$$t=\frac{l}{b}\lambda \tag{4.7-6}$$

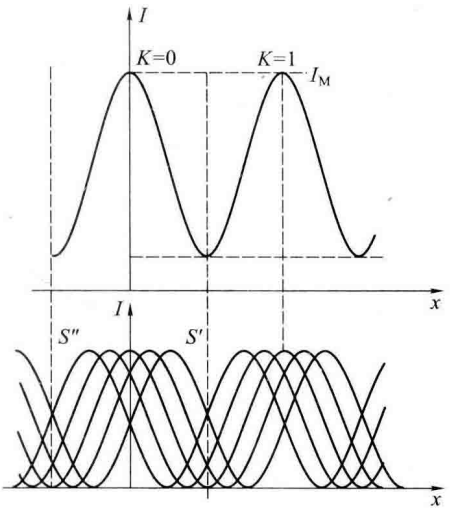


图 4.7-4 扩展光源产生的强度分布

上式表明，对于给定的 b、l、λ，只要双孔间距 $t<\frac{l}{b}\lambda$，在双孔前方任一屏上都可以得到干涉条纹，由上式所决定的 t 称为**相干间距**. 换言之，上式中的 t 表示光场中保持相干性的两点最大横向线度，它对光源中心的张角 α 称为**干涉孔径角**，由图可见

$$\alpha=\frac{t}{l}$$

代入(4.7-5)式得

$$b\alpha=\lambda \tag{4.7-7}$$

上式表明光源宽度愈大，干涉孔径角愈小. 应当指出，上式是对于杨氏实验装置得出的，但是可以证明[①]，它对于任何将一个光源生成两个像作为相干光源的双像系统都是适合的，而一般的干涉装置(双面镜、双棱镜、劳埃德镜、对切透镜以及后面将要讲到的薄膜干涉等)都是这种双像系统.

下面我们进一步估算干涉条纹的可见度与光源宽度的关系. 如图 4.7-3，在光源上距 z 轴为 x 处的 Q 点取小线元 $\mathrm{d}x$，它发出的光波经 S_1 和 S_2 到达接收屏上距离 z 轴为 x' 处的 P 点的光程差为

$$\Delta=\frac{t}{l}x+\frac{t}{D}x'$$

相位差为

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{l}x+\frac{t}{D}x'\right)$$

它们在 P 点叠加干涉产生的光强为

① 参阅 A. H. 查哈里也夫斯基著，谢勤等译的《干涉仪》，61、62、63、83 页.

$$\mathrm{d}I = 2I_0\left\{1+\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{l}x+\frac{t}{D}x'\right)\right]\right\}\mathrm{d}x$$

式中 I_0 为一常量，它在数值上等于单位宽度的光源发出的光通过一个缝在接收屏上 $P(x')$ 点产生的光强. 为求 P 处的总光强，应将上式由 $-\frac{b}{2}$ 到 $+\frac{b}{2}$ 积分，即

$$I(P) = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} 2I_0\left\{1+\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{t}{l}x+\frac{t}{D}x'\right)\right]\right\}\mathrm{d}x$$

将上式中除 x 以外的各量视作常量，计算积分得

$$I(P) = 2I_0 b\left[1+\frac{\sin\left(\frac{\pi bt}{l\lambda}\right)}{\frac{\pi bt}{l\lambda}}\cdot\cos\frac{2\pi tx'}{\lambda D}\right]$$

令 $u=\frac{\pi bt}{l\lambda}$，$f=\frac{t}{D\lambda}=\frac{1}{\Delta x'}$，后者为屏上生成的干涉条纹间距的倒数，即条纹空间频率，上式可写为

$$I(P) = 2I_0 b\left(1+\frac{\sin u}{u}\cos 2\pi fx'\right)$$

令 $\cos 2\pi fx' = +1$ 和 -1，可分别得到光强

$$I_{\mathrm{M}} = 2I_0 b\left(1+\left|\frac{\sin u}{u}\right|\right),\quad I_{\mathrm{m}} = 2I_0 b\left(1-\left|\frac{\sin u}{u}\right|\right)$$

代入(4.3-11)式得

$$\gamma=\frac{I_{\mathrm{M}}-I_{\mathrm{m}}}{I_{\mathrm{M}}+I_{\mathrm{m}}}=\left|\frac{\sin u}{u}\right|=\left|\frac{\sin\frac{\pi b\alpha}{\lambda}}{\frac{\pi b\alpha}{\lambda}}\right| \tag{4.7-8}$$

将上式作成曲线，如图 4.7-5 所示. 由图可见，当光源宽度增加时，可见度逐渐减小. 当光源宽度增至 $\frac{\lambda}{\alpha}$ 时，可见度减小为零. 此后继续增加光源的宽度，虽然又有条纹出现，但因可见度很小，实际上分辨不清，所以 $b=\frac{\lambda}{\alpha}$ 称为光源的**临界宽度**. 从图中曲线还可以看出，当光源宽度不超过临界宽度 $\frac{1}{4}$ 时，可见度 $\gamma>0.9$，条纹仍明显可见，因此通常将临界宽度的 $\frac{1}{4}$ 称为光源的**许可宽度**，即

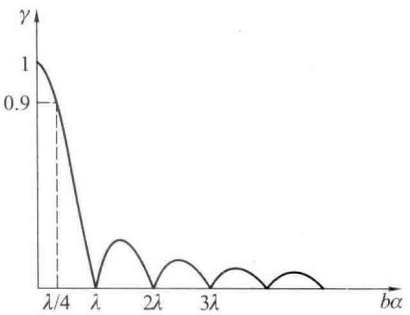


图 4.7-5 可见度随光源宽度变化的曲线

$$b_P=\frac{\lambda}{4\alpha} \tag{4.7-9}$$

上式常用来计算干涉装置中光源线度的容许值.

4.7.3 光场的空间相干性

从上面的讨论可知,在以 S 为中心的扩展光源 $S'S''$所产生的光场中,对于与光源相距为 l 且与传播方向垂直的面上相距为 t 的两点 S_1、S_2 而言,若光源宽度 $b>\frac{l}{t}\lambda$,则通过 S_1 和 S_2 两点的光波在空间相遇而叠加时,可认为其干涉条纹的可见度 $\gamma=0$,我们称光场中两点 S_1 和 S_2 是空间不相干的. 反之,若 $b<\frac{l}{t}\lambda$,通过 S_1、S_2 两点的光波在空间相遇叠加时,$\gamma>0$,我们称 S_1 和 S_2 两点是空间相干的. 光源宽度 b 愈小,干涉孔径角 α 愈大,可见度 γ 愈大,光场的空间相干性愈好. 对于点光源产生的干涉条纹,$\gamma=1$,其光场具有完全的空间相干性. 所以(4.7-7)式称为**空间相干性反比公式**. 单模激光束截面上各点具有完全确定的相位关系,此种激光场具有很好的空间相干性.

总之,光场的空间相干性是光场中两点在同时刻的振动相关程度的描写,接收屏上干涉条纹的可见度就可以定量地表示场中两点振动的相关程度. 空间相干性问题是由于空间展宽的光源上各点发出的光波不相干所引起的. 普通光源的空间展宽愈大,其光场的空间相干范围愈小.

4.7.4 光场的部分相干性

在前面的讨论中,我们把波的叠加分为相干叠加和不相干叠加两种极端情况,然而实际情形并不如此简单,下面仍以杨氏实验为例来说明. 若用单色点光源照明杨氏实验装置,则接收屏上干涉条纹可见度 $\gamma=1$,两个次波源 S_1 和 S_2 是完全相干的. 若用扩展光源照明双缝,当光源宽度超过临界宽度时,$\gamma=0$,两个次波源 S_1 和 S_2 是完全不相干的. 当光源宽度小于临界宽度时,$0<\gamma<1$,此时在干涉场中 P 点叠加的光波有相干成分(来自光源上同一点所分出的两列波)和不相干成分(来自光源上不同点),我们称次波源 S_1 和 S_2 是部分相干的. 同样,若用准单色点光源照明杨氏实验装置,当光程差大于波列长度,即 $\Delta>L_0$ 时,$\gamma=0$,次波源是完全不相干的. 当 $\Delta<L_0$ 时,$0<\gamma<1$,在 P 点叠加的有相干成分(来自同一频率成分分成的两列)和不相干成分(来自不同频率成分),我们称 S_1 和 S_2 是部分相干的.

总之,当两列光波叠加时,若它们的振幅相等,则两列波的相干程度可用干涉条纹的可见度来衡量:

$$\begin{cases}\gamma=1,\text{完全相干}\\ \gamma=0,\text{完全不相干}\\ 0<\gamma<1,\text{部分相干,它是完全相干叠加和完全不相干叠加的一种混合}\end{cases}$$

以上为了讨论问题的方便起见,分别研究了光场的时间相干性和空间相干性,但是对于一个实际光场来说,二者常常是同时存在的,光场相干性的研究,在现代光学中具有十分重要的理论和实际意义.

例 4.7-1 在杨氏双缝实验装置中(图 4.7-3),已知 $l=20$ cm,$t=0.5$ mm,$\lambda=500$ nm,求光源缝 S 的许可

宽度.

解 光源缝的许可宽度

$$b_{\mathrm{p}} \leqslant \frac{l\lambda}{4t}$$

将各已知量代入得

$$b_{\mathrm{p}} \leqslant 0.05\ \mathrm{mm}$$

即是说为了获得大于90%的可见度,光源缝 S 的宽度不应超过 0.05 mm.

§4.8 薄膜干涉(一):等倾干涉

4.8.1 概述

如图 4.8-1 所示,MM′是透明介质薄膜,一束光 OA 入射到薄膜上 A 点,它产生反射光束 1 和折射光束 AB. 光束 AB 入射到薄膜下表面上 B 点,一部分反射,一部分折射,形成反射光束 BC 和透射光束 1′. 光束 BC 在上表面的 C 点一部分反射后形成透射光束 2′,另一部分折回薄膜上侧形成光束 2. 这些反射和折射的光束是从同一光束分出来的,因而是相干的,它们在 P 和 P' 点相遇时就会产生干涉. 这种由薄膜两表面反射或透射出去的光所产生的干涉,通常称为**薄膜干涉**. 因为入射光在界面反射和折射时所携带的能量一部分反射回来,一部分透射出去,透射光和反射光的能流都比入射光的能流小,而能流密度正比于振幅的平方,所以可形象地说成是振幅被"分割"了. 这种由薄膜表面的反射和折射将一束光分成两束(或多束)相干光的方法称为**分振幅法**.

实际上一束光入射到薄膜上时,它将在表面上相继产生多次反射和折射而形成多束反射光和透射光. 但是通常的介质膜的反射率都很低,在这多束光中,除起初两条外其余都很弱,它们对干涉场的贡献很小,因而可以忽略不计(详见 §4.13). 例如一束光接近正入射到平行平面玻璃上时(见图 4.8-2,图中的入射角是夸大了的),反射率约为 4%,各反射光束和透射光束的光强见表 4.8-A. 由表可见,对于这种玻璃板所分割出的多光束叠加而产生的干涉,可以只考虑初始两条,从而作为两光束干涉处理.

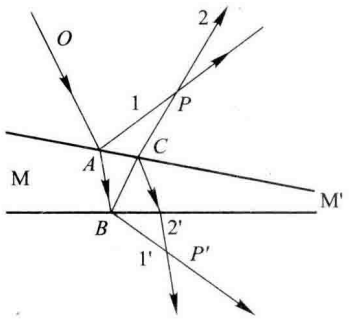


图 4.8-1 分振幅干涉

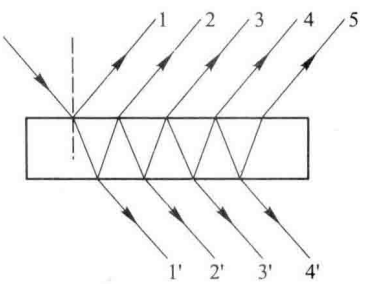


图 4.8-2 平行平面玻璃产生的多束相干光

表 4.8-A 反射率为 4%的平行平面玻璃上的反射光强和透射光强(设入射光强为 100)

光线号	反射光强	透射光强
1	4.0	92.2
2	3.69	0.014 7
3	0.005 9	2.36×10^{-4}
4	9.44×10^{-6}	3.77×10^{-7}
5	1.51×10^{-8}	6.05×10^{-10}

在我们的周围可以见到许多种薄膜干涉现象. 例如肥皂泡和在平静水面上的油膜表面的彩色图样,金属或半导体经高温处理后,表面的氧化层所呈现的彩色,以及许多昆虫(蝉、蜻蜓)翅翼上所见的缤纷色彩等,皆是薄膜前后表面反射光的干涉所致. 近来发现,孔雀羽毛的美丽色彩源于其羽支内周期性排列的纳米尺度微小结构①(见彩图 4).

薄膜干涉通常分为平行平面膜产生的等倾干涉和非平行平面膜产生的等厚干涉两种类型,我们分别在本节和下节讨论.

4.8.2 光程差公式

如图 4.8-3,设有一均匀透明的平行平面介质膜,其折射率为 n,厚为 h,放在折射率为 n_0 的透明介质中.波长为 λ 的单色光入射到薄膜的上表面,入射角为 i,折射角为 i',经膜的上、下表面反射后生成一对相干的平行光束 1 和 2,下面我们称这两束相干光为反射光线对. 这一对反射光只有在无穷远处才能相交,若用一个会聚透镜 L,则可使它们在其焦平面上 P 点叠加产生干涉. P 点的光强为

$$I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\delta \tag{4.8-1}$$

式中 I_1、I_2 为两束反射光单独产生的光强. 当 $\delta=2K\pi$ 时,P 点干涉相长,当 $\delta=(2K+1)\pi$ 时,P 点干涉相消.

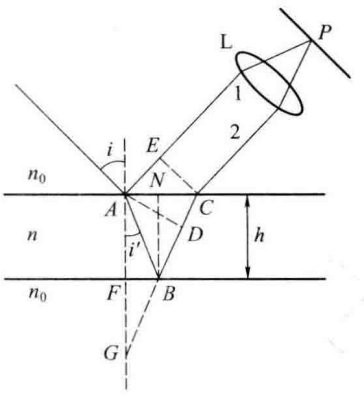


图 4.8-3 光程差的计算

为了求 P 点的光强,还需计算 1、2 两反射光到达 P 点的相位差. 在图4.8-3 中,从 C 点作 $CE\perp AE$,从 A 点作 $AD\perp BC$,根据透镜成像的等光程性,在从 CE 到 P 点的这段路程中,两光束的光程相等,即 $[CP]=[EP]$,不会产生相位差. 而两光束在 A 点分开时的相位是相同的,所以它们在 P 点的相位差来源于 AE 和 ABC 这两段路程之间的光程差,即

$$\Delta=n(AB+BC)-n_0AE$$

由 A 点和 B 点分别向薄膜的下表面和上表面引垂直线 AF 和 BN,延长 AF 和 CB 相交于 G,由图可见

① Zi J, et al. Proc. Natl. Sci., 2003, 100: 12576.

$$\angle FAB=\angle ABN=\angle NBC=i',\quad \angle ABF=\frac{\pi}{2}-i'$$

而

$$\angle GBF=\pi-(\angle ABF+\angle ABN+\angle NBC)$$

$$=\pi-\left[\left(\frac{\pi}{2}-i'\right)+i'+i'\right]=\frac{\pi}{2}-i'=\angle ABF$$

因此

$$AB=GB,\quad AF=FG=h$$

则 1、2 两光束的光程差

$$\begin{aligned}\Delta&=n(AB+BC)-n_0AE\\&=n(GB+BC)-n_0AE\\&=nGD+(nDC-n_0AE)\end{aligned}$$

由 $\triangle AGD$、$\triangle ADC$、$\triangle AEC$，可知

$$GD=2h\cos i',\quad DC=AC\sin i',\quad AE=AC\sin i$$

则得

$$\Delta=2nh\cos i'+AC(n\sin i'-n_0\sin i)$$

根据折射定律

$$n_0\sin i=n\sin i' \tag{4.8-2}$$

上式可改写为

$$\Delta=2nh\cos i'=2h\sqrt{n^2-n_0^2\sin^2 i} \tag{4.8-3}$$

按照 §3.5 所述，当介质薄膜上下两侧处于同种介质中时，在 1、2 两束反射光线对之间有附加的相位差 π，即除了计算它们真实路径引起的光程差之外，还应计及附加的光程差 $\frac{\lambda}{2}$，则

$$\Delta=2nh\cos i'\pm\frac{\lambda}{2} \tag{4.8-4}$$

相应的相位差则为

$$\delta=\frac{4\pi}{\lambda}nh\cos i'\pm\pi \tag{4.8-5}$$

上式中的 π[或(4.8-4)式中的 $\frac{\lambda}{2}$]前应取正号或负号，理论上无从得出明确的结果. 而且从实用观点看也无必要去追究，因为取正号或负号的差别仅仅在于干涉条纹的干涉级相差 1 级，对条纹的其他特征(如形状、间距、可见度)并无影响. 而且在实际测量中，通常都只计算干涉级的变化，只有少数情况需要确定条纹的绝对级数，所以上面两式中取正号或负号一般并不重要，但是为了计算上的方便，我们按照习惯约定：若薄膜置于某种透明介质中，当薄膜的折射率大于周围介质的折射率，即 $n>n_0$ 时，上面两式中取负号，反之当 $n<n_0$ 时，取正号. 如果薄膜上下两侧介质不同，情况则比较复杂，可以根据菲涅耳公式去分析.

综上所述可知，P 点的干涉光强决定于 1、2 两束光的光程差，而光程差又决定于入射光波长 λ、薄膜的折射率 n 和厚度 h 以及入射角 i. 在 λ、n、h 一定的情况下，光程差仅仅决定于入射角 i. 由于入射角相同的各光线经膜两表面所形成的各反射光线对到达透镜的焦平面上叠加时有相同的光程差，从而会有相同的干涉结果，即相同的光强. 因为光强相同点的轨迹就是干涉条纹，而平行平面膜

产生的各干涉条纹是由各种入射角相同的光形成的,所以我们称这种干涉为**等倾干涉**.

4.8.3 观察等倾干涉的装置和光路

按照等倾干涉的定义,为了获得等倾干涉条纹,必须具备两个条件:一是要有厚度均匀的薄膜;二是入射到薄膜上的光束要有各种不同的入射角. 图4.8-4是一种常用的观察等倾干涉的实验装置的示意图. 图中会聚透镜L的光轴与薄膜F表面的法线重合,与薄膜表面成45°角放置的分束镜M可使入射光一半反射一半透射. 用扩展光源照明时,接收屏P置于透镜L的焦平面内,若用眼睛直接观察,则需调焦在无穷远处.

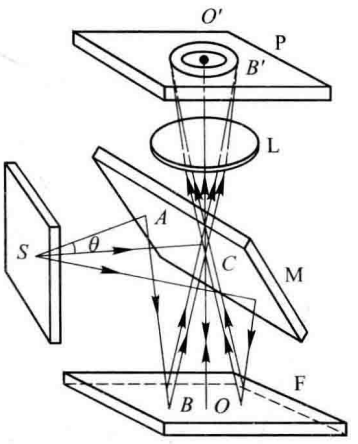


图 4.8-4 观察等倾干涉的实验装置

扩展光源可看成是由许许多多点光源所组成,下面我们首先讨论光源面上一点S发出的光波所形成的干涉图样. 如图所示,从点S发出沿水平方向前进的光线SC,经分束镜反射后正入射到薄膜O处,经膜两表面反射后沿原路径到达分束镜上C点,然后穿过分束镜和透镜的中心与接收屏交于O'点. 从S发出的与水平方向成任意角θ的入射光线SA经分束镜反射后以入射角i入射到薄膜上的B处,再经膜两表面反射形成反射光线对(为了简洁,图中未画出膜内的折射和下表面上的反射),穿过分束镜和透镜在屏上的B'点叠加产生干涉,干涉结果决定于这对光线到达B'点的光程差. 以SC为轴线,SA为母线画一圆锥面,沿此圆锥面入射的光线经分束镜反射后入射到薄膜上以O为心,OB为半径的圆周上. 每一入射线经膜两表面反射后形成一对反射线,这些反射光线对分别交于接收屏上以O'为圆心,$O'B'$为半径的圆周上. 因为凡是入射角相同的光线所形成的反射光线对在接收屏上叠加时有相同的光程差,从而有相同的干涉结果,所以此圆周上各点有相同的光强. 再考虑从S发出的以θ为顶角的一光锥,在此光锥内的光线可看成是分布于顶角在0到θ范围内连续变化的各圆锥面上. 沿同一圆锥面入射的光线有相同的入射角,经反射后形成的各反射光线对在接收屏上各自相交于具有相等光强的同一圆环上. 因为入射角是连续变化的,由(4.8-1)及(4.8-3)式可知,这些圆环的光强也是连续变化的,即接收屏上生成的干涉图样是以O'为圆心,强度连续变化的一系列明暗相间的同心圆环,如图4.8-5所示.

由图4.8-6可以看出,从面光源上不同点S、S'发出的光线中(实线表示S发出的光线,虚线表示S'发出的光线),方向相同的光线SA和$S'A'$经膜上下表面反射后所形成的两对反射光线仍互相平行,最后它们将被透镜会聚到焦平面上同一点P. 因为SA和$S'A'$到薄膜上的入射角相同,所以它们相应的反射光线对到达P点的光程差相同. 从S和S'发出的另一方向的平行光线SB和$S'B'$. 经膜反射后生成的两反射光线对也互相平行,它们经透镜会聚在焦平面上的Q点,产生相同的干涉结果. 但是由于SA和SB的入射角不同,所以P点和Q点的强度也不相同. 这就是说,扩展光源上每一点在接收屏上各自产生一组干涉条纹,而各点所产生的条纹完全重合,它们非相干叠加的结果将使亮纹更加明亮,暗纹则仍是暗的,即等倾条纹的位置只与形成条纹的光束入射角有关,而与光源的位置无关. 因为在等倾干涉装置中干涉孔径角为零,光源的许可宽度很大,所以采用扩展光源与用点光源相比可以增加焦平面内亮纹的强度,却不会减少条纹的可见度.

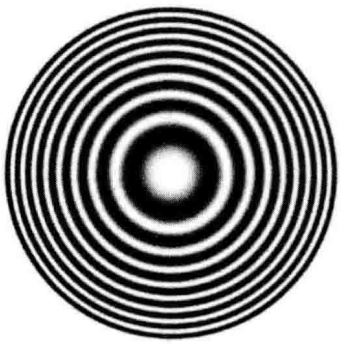


图 4.8-5　等倾干涉图样

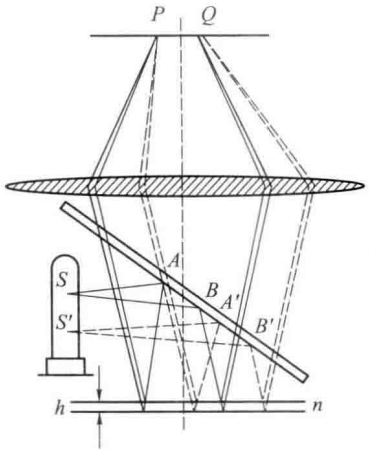


图 4.8-6　观察等倾干涉装置平面图

如果接收屏不放在透镜的焦平面内，光源面上各点所产生的干涉图样彼此错开，它们非相干叠加的结果使可见度下降，干涉图样模糊不清甚至完全消失. 也就是说，使用扩展光源时只有在无穷远处或透镜的焦平面内可见度最大，可以接收到清晰的干涉图样，我们称这种干涉是**定域的**. 干涉图样可见度最大的位置称为条纹的定域中心. 然而若用点光源照明平行薄膜（例如用激光照明云母片），从点光源经薄膜上、下表面反射形成的两相干光源到空间任一点 P 只能各引一条光线，它们的光程差是唯一的. 当光源位置一定时，空间各点的干涉效应也就定了，将接收屏放在整个光束叠加区域内的任何位置，只要光源足够强，都可以接收到清晰的干涉图样，因此点光源照明时产生的是非定域干涉.

4.8.4　等倾干涉圆条纹的性质

在后面将要讲到的干涉仪的应用中，要利用等倾条纹进行测量，因此应了解等倾条纹的性质.

1. 从中心到边缘干涉级逐渐减小

如图 4.8-7 所示，假设在薄膜上入射角为 i 的光束在屏上 P 点生成第 K 级极大，则 P 点的光程差满足

$$2h\sqrt{n^2-n_0^2\sin^2 i}-\frac{\lambda}{2}=K\lambda$$

上式说明，$i=0$ 时，K 最大，i 增加，则 K 减小，即等倾干涉环中心的干涉级最高，从中心到边缘干涉级逐渐减小.

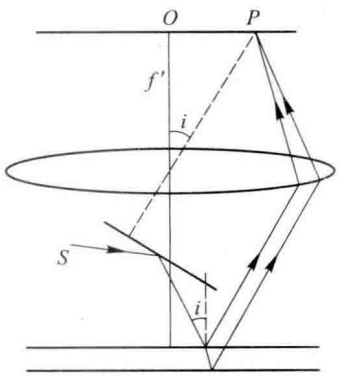


图 4.8-7　等倾干涉环半径和入射角关系

2. 干涉环的角半径和半径

为了简便起见，我们首先假定干涉环中心恰为干涉极大，其干涉级为 K_0，则

$$2nh-\frac{\lambda}{2}=K_0\lambda \qquad (4.8\text{-}6)$$

第 K 级极大对应的膜内折射角为 i',则

$$2nh\cos i'-\frac{\lambda}{2}=K\lambda \tag{4.8-7}$$

两式相减得

$$1-\cos i'=-\frac{(K_0-K)\lambda}{2nh}$$

在 i'很小的情况下,可将 $\cos i'$展开为级数并取前两项得 $\cos i'=1-\frac{i'^2}{2}$,代入上式整理得

$$i'=\sqrt{\frac{(K_0-K)\lambda}{nh}}$$

当 i 和 i'很小时,折射定律可写为 $n_0 i=ni'$,代入上式中消去 i'得第 K 级亮环的角半径

$$i=\frac{1}{n_0}\sqrt{(K_0-K)\frac{n\lambda}{h}} \tag{4.8-8}$$

由图 4.8-7,第 K 级亮环的半径 OP 为

$$r_K=f'\tan i\approx f'i$$

式中 f'为透镜的焦距,将(4.8-8)式代入上式得

$$r_K=\frac{f'}{n_0}\sqrt{(K_0-K)\frac{n\lambda}{h}} \tag{4.8-9}$$

设从中央亮点向外第一亮纹开始数起的各亮环的序号为 $1,2,\cdots,m,\cdots$它们相应的干涉级为 $K_0-1,K_0-2,\cdots,K_0-K,\cdots$即第 K 级极大的序号为 $m=K_0-K$,则从中央向外从第一条开始数起的第 m 条亮环的角半径和半径为

$$i=\frac{1}{n_0}\sqrt{m\frac{n\lambda}{h}} \tag{4.8-10}$$

$$r_m=\frac{f'}{n_0}\sqrt{m\frac{n\lambda}{h}} \tag{4.8-11}$$

上式表明干涉环的半径和序数 m 的平方根成正比.

在上面的讨论中,为了简单,令 K_0 为整数,实际上干涉环中心未必是最亮点(干涉极大),一般情况下中心点光程差可写为

$$2nh-\frac{\lambda}{2}=(K_1+\varepsilon)\lambda$$

式中 K_1 是最靠近中心的整数级,ε 是小于 1 的正数,由中心向外数的第 m 个极大的干涉级显然是 $K_1-(m-1)$. 将(4.8-6)和(4.8-7)式中的 K_0 和 K 分别用$(K_1+\varepsilon)$和 $K_1-(m-1)$代替,即可得出从最靠近中央的极大数起的第 m 个极大的半径为

$$r_m=\frac{f'}{n_0}\sqrt{\frac{n\lambda}{h}}\cdot\sqrt{(m-1)+\varepsilon}$$

3. 干涉环的角间距和间距

将(4.8-10)式对 m 求微商得

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}m}=\frac{1}{2n_0}\sqrt{\frac{n\lambda}{mh}}$$

令 $\mathrm{d}m=1$ 得干涉环的角间距

$$\mathrm{d}i=\frac{1}{2n_0}\sqrt{\frac{n\lambda}{mh}}=\frac{1}{2n_0}\sqrt{\frac{n\lambda}{(K_0-K)h}} \tag{4.8-12}$$

同理,由(4.8-11)式可得干涉环的间距

$$\mathrm{d}r=\frac{f'}{2n_0}\sqrt{\frac{n\lambda}{(K_0-K)h}} \tag{4.8-13}$$

由此可见,从中心愈往外走,K 愈小,干涉环分布愈密.

4.8.5 透射光的干涉条纹

在图 4.8-2 中,从薄膜下表面透射出来的光束也是相干的,因此从膜的下方也应观察到干涉条纹. 不过当薄膜上下两侧处于同种介质中时,1′和 2′两光束之间没有附加的光程差,所以反射光和透射光的干涉图样是互补的,而且由表 4.8-A 可见,1′和 2′两束光的振幅相差很大,所以透射光干涉图样的可见度很低.

§4.9 薄膜干涉(二):等厚干涉

上一节中我们研究了平行平面薄膜所产生的等倾干涉,现在我们讨论两反射面不平行的薄膜所产生的等厚干涉.

4.9.1 观察等厚干涉的实验装置

如图 4.9-1(a)所示,点光源 S 照明尖劈形薄膜,从两表面反射的光波叠加形成干涉场. 若要计算从 S 经两表面到场中任一点 P 的光程差是颇为复杂的,我们仅限于讨论膜很薄且位于薄膜表面附近场点的干涉. 如图 4.9-1(b)所示,当膜很薄时,图中的 A、P 两点相距很近,在 AP 区间内膜厚可视为相等,从 S 发出经两表面反射到达 P 点的一对相干光线的光程差仍可由

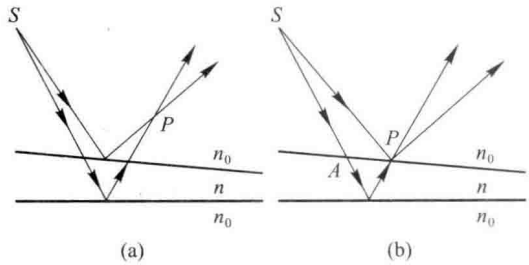


图 4.9-1 非平行平面薄膜产生的干涉

$$\Delta=2nh\cos i'-\frac{\lambda}{2}$$

$$=2h\sqrt{n^2-n_0^2\sin^2 i}-\frac{\lambda}{2} \tag{4.9-1}$$

近似表示,式中 i 为 A 处入射角,h 为 A 处膜厚. 如果用入射角完全相同的单色光投射到薄膜上,则光程差仅仅决定于薄膜的厚度. 在薄膜厚度相同的地方,反射光线对所产生的光程差相同,从而有相同的干涉结果,这种干涉称为**等厚干涉**. 等厚干涉条纹的形状取决于薄膜上厚度相同点的轨迹.

为了能产生等厚干涉条纹,应具备两个必要条件:一是要有两表面不平行的薄膜;二是入射到薄膜上的各光线有相同的入射角. 图 4.9-2 所示为通常观察等厚干涉的实验装置,图中 S 为一准单色光源(钠光灯,或加滤光片后的白炽灯),D 为放在凸透镜 L_1 焦点上的带孔光阑,M 是与水平方向成 45°角的半反射镜,来自 D 的光线经 L_1 后成为沿水平方向的平行光线,被 M 反射后沿竖直方向射到薄膜上,这样就使得投射到薄膜上的光线的入射角都相同($i\approx 0$). 这些光线经膜两表面反射后形成反射光线对在表面相交,然后穿过 M 和 L_2 进入人眼. 因为人眼瞳孔很小,不能直接接收透过 M 的全部光束,所以在 M 之上放一会聚透镜 L_2,将它调焦到薄膜表面上,这样一来,在薄膜表面上各点 $P_1,P_2,\cdots$ 相遇的各反射光线对就可通过 L_2 在视网膜上的 $P_1',P_2',\cdots$ 点相遇,即视网膜和薄膜表面构成一对共轭面,因而可观察到薄膜表面上形成的干涉图样. 如果需要对干涉条纹做记录和定量测量,只需用 CCD 相机代替 L_2 和人眼,并将 CCD 调节至与薄膜表面共轭.

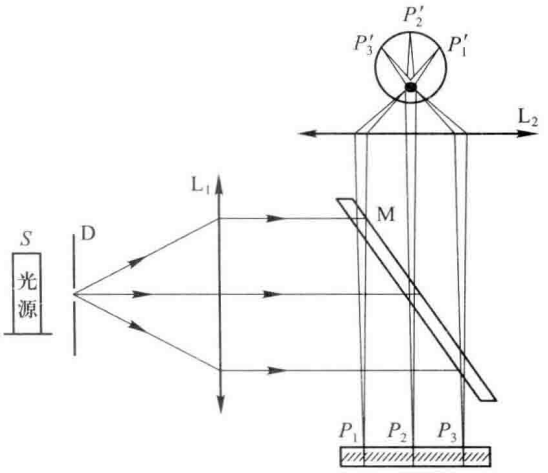


图 4.9-2 观察等厚干涉的实验装置

上面描述的是精密测量等厚条纹的装置,在要求不太高时,这个装置还可以简化. 由(4.9-1)式可知,在薄膜和它周围介质一定时,光程差仅随入射角和膜厚而变,将此式两端取全微分得

$$\mathrm{d}\Delta=2\sqrt{n^2-n_0^2\sin^2 i}\,\mathrm{d}h+\frac{h(-n_0^2\sin 2i)}{\sqrt{n^2-n_0^2\sin^2 i}}\mathrm{d}i \tag{4.9-2}$$

因为膜厚 h 通常是一个很小的量(例如~10λ 量级),所以上式中 $\mathrm{d}i$ 前面的因子远小于 $\mathrm{d}h$ 前面的因子,即厚度的变化较角度的变化对光程差的影响大得多. 因此即使入射光束不一定严格平行,光源是扩展的,只要接收系统的入射光瞳很小,都可以接收到近似的等厚干涉图样.

4.9.2　干涉条纹的定域

如果用点光源照明薄膜，它发出的球面波经两表面反射后在其交叠区域内形成干涉场，对于场中任一点，皆可以找到经两表面反射的一对相干光线通过它（图 4.9-3）. 只要求出这对光线的光程差，即可确定该点的干涉光强. 对于任意选定的场点，此光程差是唯一的，而对于不同的场点，例如图中的 P_1、P_2，光程差各不相同，整个干涉场中形成稳定的光强分布. 所以用点光源照明时，产生不定域干涉. 在此情况下，干涉场中光程差相同的点（在同一条纹上）并不一定对应同一倾角或同一厚度，因此除了个别特殊位置外，既不是等倾也不是等厚干涉，而是混合型干涉.

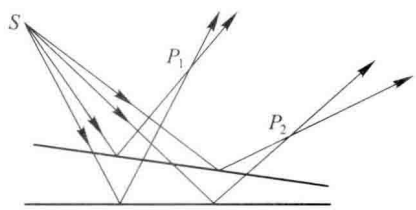


图 4.9-3　点光源产生不定域干涉

如果用扩展光源照明薄膜［图 4.9-4（a）］，从光源上某一点 S_1 发出的两束相干光经膜两表面反射后相交于空间某点 P，在此点的干涉效应由它们的光程差 Δ_1 决定，而 Δ_1 与两束光的入射角和入射点处膜厚有关，从光源上另一点 S_2 发出的两束相干光经膜上下表面反射后也相交于 P 点，其干涉效应则由它们的光程差 Δ_2 决定. 一般情况下 $\Delta_1 \neq \Delta_2$，所以从 S_1、S_2 两点来的相干光在 P 点产生的干涉效应不同. 扩展光源可看成是由连续分布的无数的点光源组成，这些点光源是非相干的，所以 P 点的光强是这些点光源各自产生的干涉光强之和. 在干涉场中通过 P 点放一接收屏，屏上各点的光强都是光源面上各点在该点分别产生的干涉光强之和，因而观察不到强度的相长和相消现象. 即是说，光源面上各点在接收屏上各自生成一组干涉条纹，由于各点光源位置不同，它们产生的干涉图样彼此错开，使得可见度下降为零，接收屏上观察不到干涉图样.

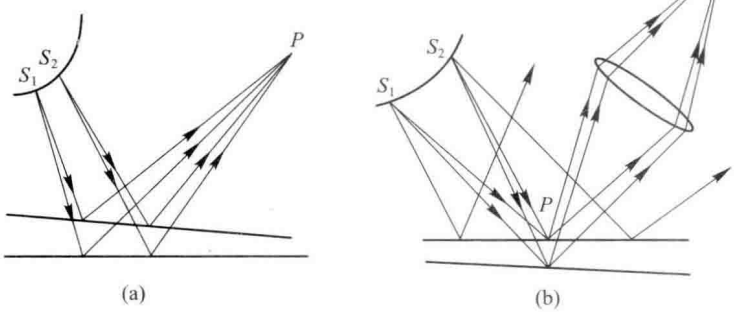


图 4.9-4　扩展光源产生定域干涉

但是当 P 点在薄膜表面附近时［图 4.9-4（b）］，只要接收系统的入射光瞳很小（人眼或低倍显微镜），从扩展光源上各点发出的在 P 处反射后又能进入系统的光线，其入射角的变化不大，而且由（4.9-2）式已知，在膜厚很小的情况下，入射角的变化较膜厚的变化对光程差的影响很小，所以对于薄膜表面附近的点而言，从扩展光源上各点来的各对相干光线有近乎相同的入射角和膜厚，从而有近乎相同的光程差，产生相近的干涉效应，因此在膜表面附近有等厚干涉图样出现，将接收器对薄膜表面调焦，就可在其共轭面内呈现干涉图样，所以使用扩展光源时等厚干涉图样

定域在薄膜表面附近. 干涉条纹的定域来源于光场的空间相干性,其定域中心可由干涉孔径角 $\alpha=0$ 确定.

4.9.3 尖劈和牛顿环

下面我们研究两种典型的等厚干涉现象.

1. 尖劈形薄膜

图 4.9-5 所示为折射率为 n 的尖劈形薄膜,放于空气中,上下两表面的交线称为棱边,它们的夹角 θ 称为顶角. 单色平行光沿竖直方向入射到薄膜上,因为 θ 很小,入射角可视为零,而且可忽略在膜内折射光线的偏折而视为正入射到下表面上,于是从薄膜两表面产生的反射光线对在膜的上表面叠加产生干涉. 由(4.9-1)式,反射光线对的光程差为

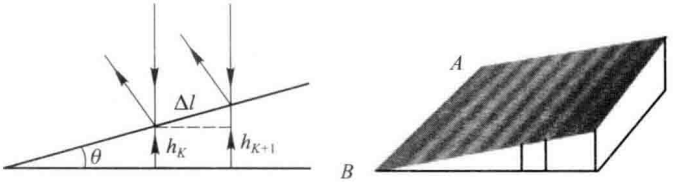


图 4.9-5 尖劈形薄膜的等厚干涉条纹

$$\Delta=2nh-\frac{\lambda}{2}$$

式中附加光程差$\frac{\lambda}{2}$前为负号,是因为光从光疏介质正入射到光密介质时反射光产生半波损失,即相位突变发生在薄膜上表面. 对于平行于棱边的直线上各点,薄膜厚度相等,所以尖劈形薄膜的等厚干涉图样是一系列平行于棱边的直线.

当 $\Delta=K\lambda$,即 $2nh=\left(K+\frac{1}{2}\right)\lambda\ (K=0,1,2,\cdots)$ 时,形成亮纹. 设 h_K 和 h_{K+1} 分别为第 K 和 $K+1$ 级亮纹对应的膜厚,则

$$2nh_K=\left(K+\frac{1}{2}\right)\lambda,\quad 2nh_{K+1}=\left(K+\frac{3}{2}\right)\lambda$$

两式相减得相邻两亮纹对应的膜厚之差

$$\Delta h=h_{K+1}-h_K=\frac{\lambda}{2n} \tag{4.9-3}$$

用 Δl 表示相邻两亮纹(或暗纹)之间的距离,由图 4.9-5 可见

$$\Delta l\approx\frac{\Delta h}{\theta}=\frac{\lambda}{2n\theta} \tag{4.9-4}$$

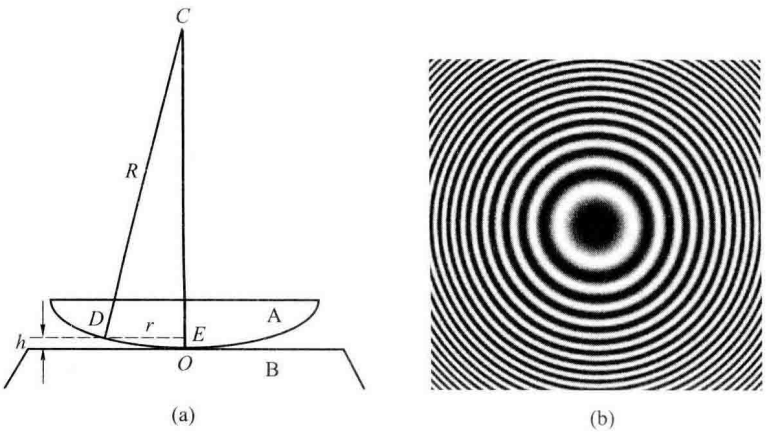
上式表明,劈形薄膜产生的等厚干涉条纹间距与干涉级无关,条纹是等距排列的,θ 愈大,条纹愈密. 如果在实验中测出 Δl 之值,利用上式就可确定尖劈的顶角. 因为光波波长数值很小,所以利用这种方法可以测量非常微小的角度.

若用复色光照明，每一单色成分将各自形成一套干涉条纹，并且在同一级中波长愈长对应于厚度 h 愈大的位置. 若用白光照明，则可在接近劈棱的地方观察到彩色条纹，在同级条纹中由劈棱朝厚度增加的方向是按由紫到红的色序排列.

用一根铁丝做成矩形框，放入肥皂水中，然后再竖起来，这时框中形成一层肥皂液的薄膜，在重力作用下成为上薄下厚的尖劈状，在阳光照射下就可看到一组横向排列的彩带.

2. 牛顿环

将一个球面曲率半径很大的平凸透镜 A 的凸面紧贴在一块平板玻璃 B 上，球面和平面相切于 O 点[图 4.9-6(a)]，在它们之间形成一空气薄膜，从切点到边缘膜的厚度逐渐增加. 在以切点为中心的圆周上，空气层的厚度相等，将它们放在图 4.9-2 所示观察装置中，让单色光正投射于其上，从反射光中就可观察到以 O 为中心的一系列明暗相间的同心圆环[图 4.9-6(b)].



(a)　　(b)

图 4.9-6　牛顿环

在图 4.9-6 中，设透镜的曲率半径为 R，对应于某干涉环的空气层厚度为 h，该环的半径为 r. 在光线正入射时，由(4.9-1)式可得从空气层两表面反射的相干光线的光程差为

$$\Delta = 2h + \frac{\lambda}{2} \tag{4.9-5}$$

式中$\frac{\lambda}{2}$前为正号，是因为相位突变发生在空气膜的下表面，由 $\triangle CDE$ 可得

$$R^2 = r^2 + (R-h)^2$$

化简得

$$r^2 = 2hR - h^2 = h(2R-h)$$

由于 $2R \gg h$，上式可以继续化简为 $r^2 = 2hR$ 或

$$h = \frac{r^2}{2R}$$

将上式代入(4.9-5)式得

$$\Delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda}{2}$$

当 $\Delta = K\lambda$ 时，由上式可得第 K 级亮环的半径

$$r=\sqrt{\left(K-\frac{1}{2}\right)\lambda R}\quad (K=1,2,3,\cdots) \tag{4.9-6}$$

当 $\Delta=\left(K+\frac{1}{2}\right)\lambda$ 时,可得第 K 级暗环的半径

$$r=\sqrt{K\lambda R}\quad (K=1,2,3,\cdots) \tag{4.9-7}$$

当 $K=0$ 时,$r=0$,与环中心对应,即牛顿环中心为一暗点,它来源于空气层下表面反射光的相位跃变.

由(4.9-7)式可知,干涉暗环的半径与自然数的平方根成正比,即它与等倾干涉圆环有相似的图样,从中心到边缘干涉环的分布越来越密集. 但是牛顿环与等倾干涉环不同,它是愈往外干涉级愈高.

若用复色光照明则可得到一系列彩色环(见彩图 3),由(4.9-6)式可知,在同级干涉环中波长短的距中心较近.

在实验室中用读数显微镜可测出干涉环的半径,若入射单色光波长已知,即可确定透镜凸面的曲率半径.

例 4.9-1 在两玻璃板之间夹一细丝形成劈形空气膜,如图4.9-7 所示,用波长为500 nm 的单色光垂直照射时,测得干涉条纹间距为 0.5 mm. 劈棱至细丝的距离是 5 cm,求细丝的直径 d. 若将细丝向棱边靠近或移远,干涉条纹有何变化?

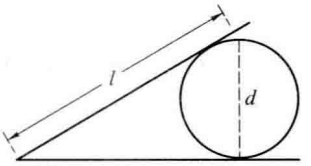


图 4.9-7

解 由(4.9-3)式,在劈形空气膜上相邻两亮纹之间所对应的膜厚之差为 $\frac{\lambda}{2}$,从劈棱到细丝之间的距离 l 内干涉亮纹的数目为

$$N=\frac{d}{\frac{\lambda}{2}}$$

另一方面,若设干涉条纹间距为 Δl,则距离 l 内干涉亮纹的数目为

$$N=\frac{l}{\Delta l}$$

代入上式得

$$d=\frac{l\lambda}{2\Delta l}$$

已知 $l=50$ mm,$\lambda=0.5$ μm,$\Delta l=0.5$ mm,代入上式得

$$d=\frac{50\times0.5}{2\times0.5}\ \mu\text{m}=25\ \mu\text{m}$$

若将细丝向劈棱靠近或移远,劈的顶角将增大或减小,干涉条纹的间距将减小或增加,而在劈棱至细丝范围内干涉条纹的数目是不变的.

例 4.9-2 用紫色光($\lambda=400$ nm)观察牛顿环时,测得某暗环的半径为 $r_K=4$ mm,由此环再往外数第 5 暗环的半径 $r_{K+5}=6$ mm,求透镜凸面的曲率半径.

解 由(4.9-7)式得

$$r_K^2=K\lambda R,\quad r_{K+5}^2=(K+5)\lambda R$$

两式相减得

$$R=\frac{r_{K+5}^2-r_K^2}{5\lambda}=\frac{36-16}{5\times4\times10^{-4}}\ \text{mm}=10\ \text{m}$$

由于透镜的凸面和平面不可能理想接触于一点，实际上观察到的牛顿环中心是一暗斑. 根据(4.9-7)式测量半径时，很难读准暗环的序数，本题说明可以不必知道暗环的序数，只需测出任意两环的半径和它们的序数之差即可求出透镜的曲率半径.

§4.10 薄膜干涉(三)：应用举例

薄膜干涉原理在生产技术中有着相当广泛的应用，例如可以制作各种类型的增透膜、增反膜，利用等厚干涉条纹可以精密测量微小的角度和长度，精密检测各种光学元件表面的质量等.

4.10.1 透镜表面质量的检测

在光学冷加工车间中，为了检测透镜表面的研磨质量，可将玻璃样板与待测透镜表面紧贴，用单色平行光正入射于其上，在反射光中就可观察到样板表面与透镜表面之间的空气层所形成的与牛顿环类似的等厚干涉环(图4.10-1). 这些干涉环通常称为“光圈”，根据光圈的形状、数目以及用手加压后条纹的移动情况，就可检验出透镜表面与样板表面的偏差.

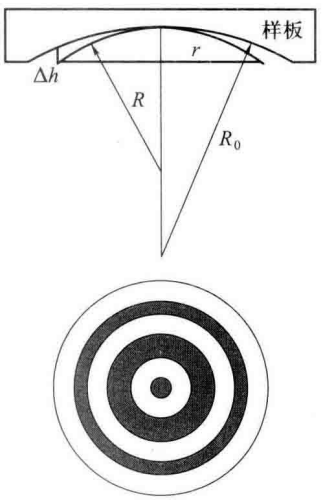


图 4.10-1 光圈数与曲率差的关系

如果被检透镜表面与样板表面的形状和曲率完全相同，两表面完全贴合，整个表面呈均匀照明，不产生干涉条纹. 如果产生一些规则的同心环状干涉条纹，则表示透镜表面的曲率与样板相比尚有偏差，偏差的大小可由光圈的多少来确定. 如果干涉条纹在某处偏离圆形，说明透镜表面在该处有不规则起伏. 设透镜球面的曲率半径为 R，样板的曲率半径为 R_0，透镜孔径的半径为 r，两表面所夹空气层的最大厚度为 Δh，根据图4.10-1中的几何关系可得

$$\Delta h=\frac{r^2}{2}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_0}\right)$$

假如在半径为 r 的圆内包含 N 个光圈，因为相邻两圆所对应的膜厚之差为 $\lambda/2$，则

$$\Delta h=N\cdot\frac{\lambda}{2}$$

由上式可得

$$\frac{1}{R}-\frac{1}{R_0}=\frac{N\lambda}{r^2} \tag{4.10-1}$$

上式表示光圈数愈多，曲率的偏差愈大，将上式改写为

$$\frac{R_0-R}{R_0R}=\frac{N\lambda}{r^2}$$

在上式分母中用 R_0 代替 R,则得样板与透镜表面曲率半径之差

$$\Delta R=R_0-R=\frac{R_0^2N\lambda}{r^2} \tag{4.10-2}$$

根据光圈的多少虽然可以判断透镜表面与样板表面曲率偏差的多少,但仅仅根据光圈数尚不能确定它是偏大还是偏小,为此只需轻轻压一下样板边缘,根据光圈移动的情况就可作出判断. 如图 4.10-2 所示,如果透镜表面曲率偏大,空气层边缘部分较中心厚,轻轻下压样板边缘,空气层厚度减小,相应各点光程差也变小,与中心相距一定距离处条纹的干涉级降低,所以原来靠近中心的低级次圆环就要向边缘移动. 反之,若透镜表面曲率偏小,空气层的中央比边缘厚,轻轻下压样板时,干涉环向中心收缩. 因此根据干涉环的移动情况,就可以断定应进一步研磨透镜表面的中心还是边缘部分.

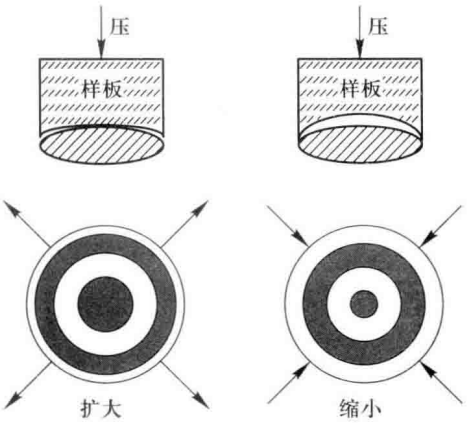


图 4.10-2 用光圈检验透镜表面曲率

4.10.2 增透膜和增反膜

当光波入射到光学元件表面时,一部分能量因反射而损失. 在光学成像仪器中,为了校正各种像差,需要采用复合透镜. 表面很多时,反射光的损失是相当可观的,而且这些反射光还会在仪器中形成杂散光,使像的对比度下降. 例如,光波正入射到空气-玻璃界面的反射率为 0.04,即透过每一表面的光能只有入射在该面上光能的 0.96,因此经过 m 个表面后透过的光能流 w_2 与入射光能流 w_1 之比即透射率为

$$T=\frac{w_2}{w_1}=(0.96)^m$$

当 $m=4$ 时,$T=0.85$;$m=12$ 时,$T=0.61$,即损失大约为入射光能的 40%.

为了减少反射的损失,可在元件表面镀一层比玻璃折射率小的薄膜. 如果对薄膜的折射率和厚度选择得正确,对于某特定波长(通常选择人眼最敏感的 $\lambda=550$ nm 光波)可使从薄膜上下两表面的反射光干涉相消,从而增加透射光能,这种薄膜称为**增透膜**或消反射膜.

实际上光波入射到薄膜上产生多次反射而形成多束相干光，严格的理论应计算多束光的干涉，不过在薄膜折射率很低的情况下可以近似或等效作为两光束干涉处理，而且我们只讨论光波接近正入射的情况（图 4.10-3）. 为了使得薄膜上下表面的两反射光完全干涉相消，两光波的振幅应相等而且相位差必须为 π 或其奇数倍，根据理论计算得出，若要两光波的振幅相等，则

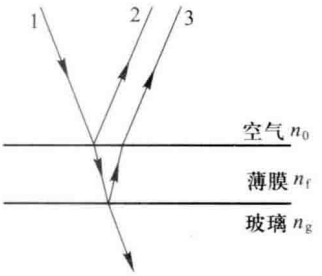


图 4.10-3　增透膜

$$n_f=\sqrt{n_0 n_g} \tag{4.10-3}$$

式中 n_0、n_f、n_g 分别为空气、增透膜和玻璃的折射率. 由（4.8-5）式，接近正入射时，图 4.10-3 中 2、3 两束反射光的相位差为

$$\delta=\frac{4\pi}{\lambda}n_f h$$

因为光波在薄膜上下表面都是由光疏介质入射到光密介质，两次反射都有 π 的相位突变，所以上式中无附加相位差 π. 当 $\delta=\pi$ 时，由上式得

$$h=\frac{\lambda}{4n_f} \tag{4.10-4}$$

这样的膜称为$\frac{\lambda}{4}$膜. 对于光学玻璃而言，其折射率 n_g 在 1.5～1.8 之间，相应增透膜的折射率 n_f 在 1.22～1.34 之间. 但目前还很难找到 $n_f<1.34$ 而又适合镀膜的材料，现在最常用的材料氟化镁（MgF_2）的折射率 $n_f=1.38$，它比（4.10-3）式所要求的值高，因而用它镀单层膜时只能使反射光减弱而不能完全消除. 例如在 $n_g=1.5$ 的玻璃上镀 MgF_2 膜后，反射率由原来的 0.04 降到 0.013. 为了进一步减弱反射光，需采用镀多层介质膜的方法.

倘若在表面上镀一层厚度也是$\frac{\lambda}{4n_f}$，而折射率大于玻璃折射率（$n_f>n_g$）的薄膜，则因光波接近正入射在薄膜-玻璃界面反射时无相位突变，在空气-薄膜界面反射时产生 π 的相位突变，所以薄膜两表面的反射光将产生相长干涉而增强反射光，这种薄膜称为**增反膜**. 常用的高折射率镀膜材料为硫化锌（ZnS，$n_f=2.38$）. 在$n=1.5$ 的玻璃上镀光学厚度为$\frac{\lambda}{4}$的单层硫化锌膜，可使反射率提高到 0.34 左右，在这样的薄膜上再依次相间地镀一层氟化镁和硫化锌的$\frac{\lambda}{4}$膜，可以进一步提高反射率. 对于十三层这样的膜系，反射率 R 可达 0.99 以上，因为这种多层介质膜比金属对光能的吸收少，所以被用作许多激光器的谐振腔.

早在 1891 年泰勒（Demis Tayler）就惊奇地发现，他的望远镜使用时间愈长，看到的像愈明亮. 他立即想到这是由于镜头表面受腐蚀而产生了折射率较低的薄膜所致，并利用化学腐蚀成功地制造了增透膜，成为发展光学薄膜的先驱. 除了增透膜和增反膜外，在现代科学技术中又提出了对各种膜系的要求. 为了各种应用的需要，利用高反射膜制造了偏振分光膜、彩色分光膜、冷光膜等，研究它们的物理性质及制作技术已构成了现代光学的一个分支——薄膜光学.

§4.11 迈克耳孙干涉仪

根据光的干涉原理组成一个仪器，通过对这个仪器所产生的干涉条纹的测量而达到某种测量目的，这样的光学仪器就是**干涉仪**. 干涉仪的种类很多，在科学研究、生产和计量部门都有广泛的应用，但各种干涉仪在光路结构上都存在某些相似之处，因此我们在这里介绍一种典型的两光束干涉仪——迈克耳孙干涉仪的原理及其广泛应用.

4.11.1 结构和原理

迈克耳孙干涉仪的结构如图 4.11-1(a)所示. M_1 与 M_2 是两块平面反射镜，其中 M_2 是固定的，M_1 可通过精密丝杆沿滑轨移动，M_1 和 M_2 的倾斜度还可由镜后的螺钉分别调节. G_1 和 G_2 是厚度和折射率都完全相同的一对平行平面玻璃板，其表面经精密抛光，平面度和两表面的平行度都很高，称为平晶. G_1 为分束板，在 G_1 的背面镀有半透明的薄膜 A[铝或银层，图(b)中用粗线标出]，使照射在 G_1 上的光线一半反射，一半透射. G_2 为补偿板，其作用将在后面讨论. G_1、G_2 均倾斜成 45°角.

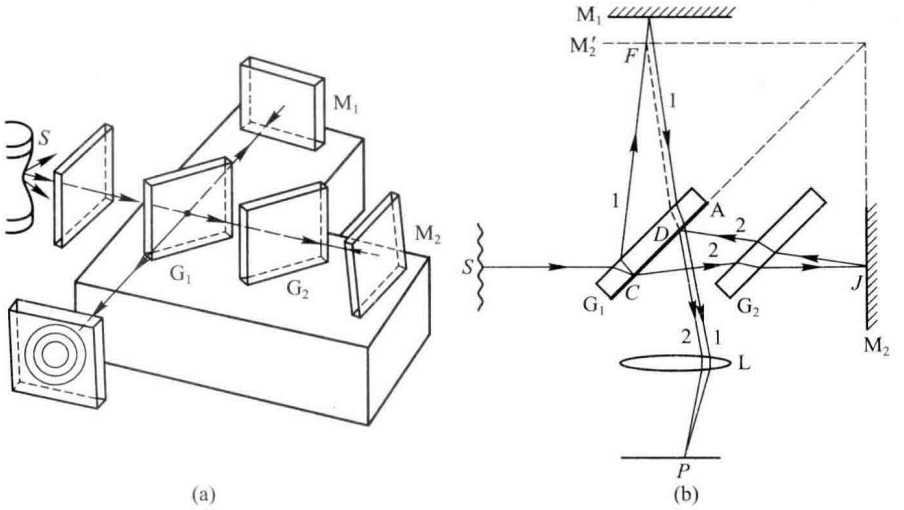


图 4.11-1 迈克耳孙干涉仪的结构和光路

从扩展光源 S 来的一束光在分束板背面的半反射面 A 上的 C 点分解为反射光束 1 和透射光束 2，反射光束 1 受到平面镜 M_1 反射后折回，再穿过 G_1 而进入眼睛或光电探测系统，透射光束 2 通过 G_2 后经平面镜 M_2 反射折回，再经过半反射面 A 在 D 点反射也进入人眼或探测器. 这两束光来自同一光束，因而是相干光束，在视网膜上或探测器内相遇产生干涉. 为了使干涉图样看得更清楚，也可用望远镜进行观察[图 4.11-1(b)].

4.11.2　干涉图样

在研究迈克耳孙干涉仪所形成的干涉图样时，为了容易理解起见，可以作出它的等效光路图. 在图 4.11-1(b)中 M_2' 为 M_2 通过半反射面 A 所生成的虚像，位置在 M_1 附近，它可以在 M_1 之前，也可以在 M_1 之后. 在 P 处观察时，将看到镜面 M_1 和 M_2 的虚像 M_2'. M_1 和 M_2' 两表面形成一假想的空气层，称为“虚膜”. 由图可见，从 S 沿 $SCJDP$ 路线达 P 点的光程等于沿 $SCFDP$ 路线到达 P 点的光程. 因此，可以认为由 M_1 和 M_2 两平面反射光所产生的干涉是实反射面 M_1 和虚反射面 M_2' 所构成的虚膜两表面反射光所产生的干涉，图 4.11-2 即为它的等效光路图. 因为空气的折射率 $n=1$，光束进入薄膜时不发生偏折，膜内的折射角就是 M_1 上的入射角 i，根据(4.8-3)式，1 和 2 两光束在 P 点的光程差为[①]

$$\Delta = 2h\cos i \qquad (4.11-1)$$

式中 h 为 M_1 和 M_2' 间的距离，调节 M_1 和 M_2 的相对位置和倾角，就可改变虚膜的厚度和顶角，从而可实现平面薄膜或尖劈形薄膜所产生的各种干涉.

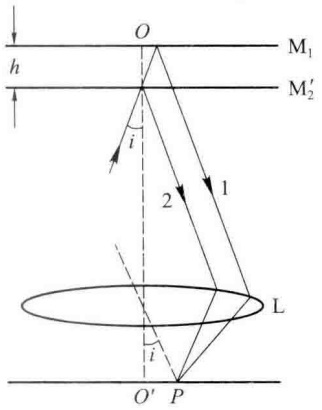


图 4.11-2　迈克耳孙干涉仪等效光路图

调节 M_2，使它的反射像 M_2' 与 M_1 平行，观察到的干涉图样是定域在无穷远处的一组等倾圆环条纹，它具有 §4.8 中所述等倾条纹的各种性质. 因为每一干涉环都有自己特定的干涉级 K，对于场中选定的某一干涉环而言，$K\lambda$ 保持不变. 当 M_1 移向 M_2' 时，h 减小，由 $2h\cos i = K\lambda$ 可知，为了保持 $K\lambda$ 不变，入射光的倾角 i 就要减小. 因此，将 M_1 移向 M_2' 的过程中干涉环的半径不断减小，圆环不断向中心收缩，条纹变稀变粗，同一视场中条纹数愈来愈少[图 4.11-3(a)和(b)]. 当 M_1 移至与 M_2' 重合时，整个视场一片均匀照亮[图 4.11-3(c)]. 如继续移动 M_1 使它逐渐离开 M_2'，h 不断增大，干涉环将不断地从中心冒出，条纹变细变密[图 4.11-3(d)和(e)]，随着 h 不断增大，干涉环的对比度也随之下降. 当 h 增至使得光程差超过光波的相干长度时，干涉图样完全消失.

在移动 M_1 的过程中，每当 h 增加(或减小)$\lambda/2$ 时，干涉图样中心点光程差改变 λ，相位差改变 2π，中心点的光强就有一次亮暗变化，例如从亮变到暗再变到亮. 因此测出视场中心处亮暗变化的次数，就可以求出反射镜 M_1 移过的距离，这是利用干涉法测量长度的依据.

当 M_1 和 M_2' 相当接近时，调节反射镜后的螺钉使 M_1 和 M_2' 相互倾斜成一很小的角度，这时的虚膜成为尖劈形空气膜，所观察到的干涉图样是定域在薄膜表面附近的等厚干涉条纹. 它们是一些平行于劈棱的等距排列的直线[图4.11-3(h)]，但是只有当空气膜很薄，而且观察面积很小时，才能观察到等厚条纹. 若用扩展光源照明，当 M_1 与 M_2' 的距离较大时，入射角和膜厚对光程差都有影响，这时条纹将偏离等厚线而发生弯曲，弯曲的方向是凸向劈棱一边[图4.11-3(g)和(i)].

由图 4.11-1(b)可见，从 C 点算起，光束 1 通过玻璃板 G_1 两次，而光束 2 未通过 G_1. 为使两

---

① 光在金属膜 A 表面反射时的相位变化颇为复杂，在此我们未计及. 由于实际测量中常常只关心条纹的相对移动，不考虑此相位变化，对这类测量并无影响.

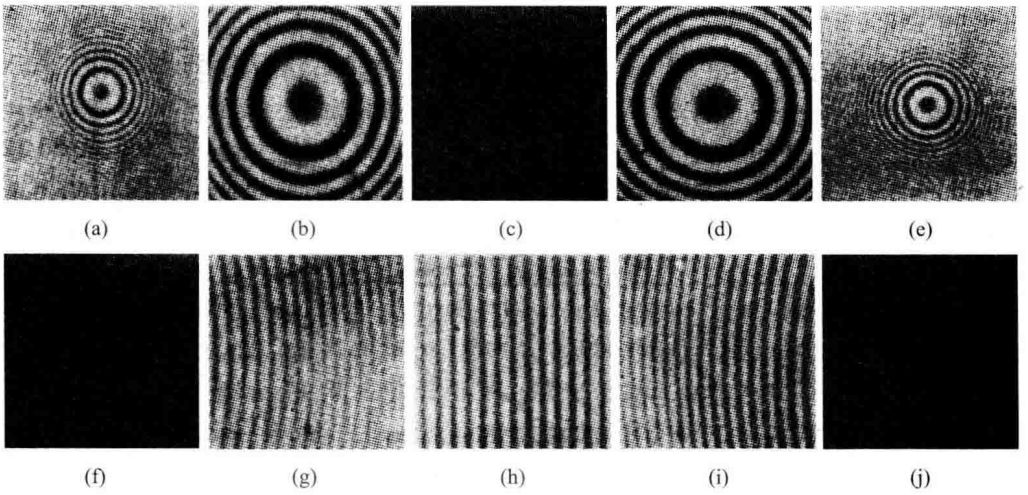


图 4.11-3 迈克耳孙干涉仪产生的各种条纹

光束在叠加时的光程差不致太大,在玻璃板内的光程应予补偿,因此在光束 2 的路径上安放一个和 G_1 完全一样的补偿板 G_2,使两光束在玻璃板内通过的光程相等. 如果光源是单色的,光束 1 通过玻璃板所增加的光程可以用在空气中的行程来补偿. 当用白光照明时,因为玻璃有色散,不同波长的光有不同的折射率,它们通过玻璃时增加的光程不同,这是无法用空气中的行程来补偿的,所以必须加入和 G_1 一样的 G_2 才能同时补偿各种波长的光程差.

用白光照明时通常很难观察到等倾圆环,却可以观察到零级条纹附近的少数几条等厚纹. 因为干涉仪中 M_1 和 M_2' 的相对位置是看不见的,所以只能从条纹的形状和变化规律反过来推断. 白光条纹就常用来确定干涉仪中两臂间光程差为零时反射镜的位置,精确地标定此位置对于精密测长是十分重要的.

4.11.3 应用

迈克耳孙于 1881 年发明的干涉仪的主要优点是它光路的两臂分得很开,便于在光路中安置被测量的样品,而且两束相干光的光程差可由移动一个反射镜来改变,调节十分容易,所以迈克耳孙干涉仪有着广泛的应用. 迈克耳孙用这种干涉仪做了物理史上极有价值的三个实验:测量以太漂移的实验(1887 年),研究光谱线的精细结构(1892 年),以镉红线波长为单位直接与米原器进行比较. 其中特别是他与莫雷合作试图探索地球相对于以太(绝对惯性系)运动速度的实验所得到的零结果,以及后来的一系列实验,成为爱因斯坦狭义相对论的重要实验基础,对 20 世纪初物理学的革命起了重要作用. 迈克耳孙因其发明的干涉仪及其在精密测量和实验方面的杰出成就,获得 1907 年诺贝尔物理学奖.

迈克耳孙干涉仪还可用于精密测定样品长度和介质的折射率. 以迈克耳孙干涉仪为原型发展了菲索干涉仪、泰曼-格林干涉仪等多种干涉仪,常用于平晶、棱镜、反射镜、透镜等光学元件质量的检测. 现代干涉仪大多与电子计算机数据处理系统相结合,可实现干涉图形的自动记录与处理.

*§4.12 傅里叶变换光谱仪 光学相干层析术

4.12.1 傅里叶变换光谱仪

傅里叶变换光谱仪(FTS)是在迈克耳孙干涉仪的基础上发展起来的,它和传统的色散型光谱仪(棱镜光谱仪以及后面将要讲到的法布里-珀罗干涉仪和光栅光谱仪)的工作原理完全不相同. 色散型光谱仪是将不同波长的光在空间中展开,然后测出不同波长成分的相对光强,从而得出其光谱图. 傅里叶变换光谱仪则是记录干涉场中某点(迈克耳孙干涉图样中心处)干涉光强在时间推移过程中随光程差的变化,然后通过计算机系统将所记录的干涉图转化为光谱图. 如图 4.12-1 所示,动镜 M_2 以速度 v 匀速平移,从而改变两相干光束的光程差. 干涉光强由探测器 D(光电二极管或光电倍增管)接收,转化为电信号输出.

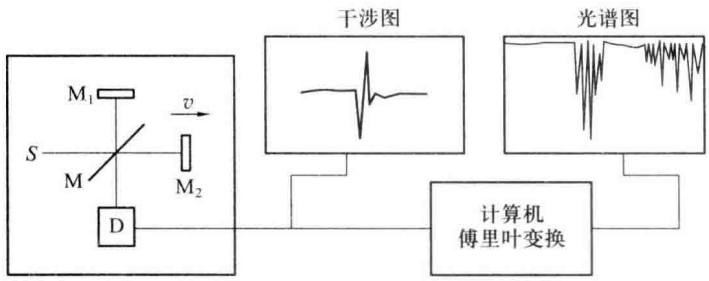


图 4.12-1 傅里叶变换光谱仪原理

由(4.3-13)式,探测器接收到的两光束干涉光强公式可写为

$$I_D = I_0(1+\gamma\cos\delta) = I_0\left[1+\gamma\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\right)\right] \tag{4.12-1}$$

式中 I_0 为到达接收点的两光束强度之和,γ 为可见度. 在迈克耳孙干涉仪中两相干光束的振幅近乎相等,探测器接收到的最大光强与光源的光强 I_0 成正比,γ 可取值为 1. 在光谱学中为了计算方便,习惯上不用波长而用波数 $\sigma=1/\lambda$ 描述光谱,故(4.12-1)式可写为

$$I_D(\Delta) = I_0(1+\cos 2\pi\sigma\Delta) \tag{4.12-2}$$

设 $t=0$ 时干涉仪的双臂等光程,则 t 时刻的光程差

$$\Delta = 2vt \tag{4.12-3}$$

设入射到干涉仪的光波含有多种波长成分,光谱强度的分布函数为 $B(\sigma)$,而且处于 σ 至 $\sigma+\Delta\sigma$ 间隔内的光强为 $B(\sigma)\mathrm{d}\sigma$(略去比例常数),以其代替(4.12-2)式中的 I_0,并对各种波长积分得所有光谱产生的干涉光强为

$$\begin{aligned} I_D(\Delta) &= \int_0^\infty B(\sigma)(1+\cos 2\pi\sigma\Delta)\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_0^\infty B(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma + \int_0^\infty B(\sigma)\cos 2\pi\sigma\Delta\,\mathrm{d}\sigma \end{aligned} \tag{4.12-4}$$

当 $\Delta=0$ 时,

$$I_0 = 2\int_0^\infty B(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$$

将上式代入(4.12-4)式,得干涉强度分布函数:

$$i(\Delta) = I_D(\Delta) - \frac{1}{2}I_0 = \int_0^\infty B(\sigma)\cos 2\pi\sigma\Delta\,\mathrm{d}\sigma \tag{4.12-5}$$

上式表明干涉光强信号是光源光谱分布函数 $B(\sigma)$ 的傅里叶余弦变换. 其逆变换可以写为

$$B(\sigma) = \int_0^\infty i(\Delta)\cos 2\pi\sigma\Delta \mathrm{d}\Delta \tag{4.12-6}$$

(4.12-5)与(4.12-6)式表明干涉强度分布函数 $i(\Delta)$ 与光谱分布函数 $B(\sigma)$ 互为傅里叶余弦变换.

在迈克耳孙干涉仪中连续移动反射镜 M_2,可实现连续改变光程差 Δ. 用同步记录系统记下探测器输出的强度信号,则记录下的是一条 $i(\Delta)$-Δ 曲线,称为干涉图,$i(\Delta)$ 则称为干涉图函数. (4.12-6)式所示的干涉图函数的傅里叶余弦变换由计算机来完成,最后直接显示出 $B(\sigma)$-σ 曲线,即为光谱图.

傅氏变换光谱仪具有信噪比高、分辨本领高、工作波段宽等优点,其工作波段从可见光区一直延伸到亚毫米区,特别是对光源通常很弱的中、远红外区,它较一般光谱仪更具有优越性.

4.12.2 光学相干层析术

光学相干层析术(Optical Coherence Tomography,简称 OCT)是基于低相干迈克耳孙干涉仪原理和光学超外差测量方法,于 20 世纪 90 年代初发展起来的一种探测组织断层微细结构的新的影像技术. 其原理如图 4.12-2 所示,低相干光入射到分束镜 M,被分为互相垂直的两束:一束为信号光,经聚焦后照射到样品内部而得到很弱的后向散射光,经分束镜 M 反射后进入探测器;另一束为参考光,经反射镜反射后进入探测器和信号光叠加. 由于光源的相干长度很短,只有信号光和参考光的光程几乎相等(或不大于光源的相干长度)时才会产生干涉,参考臂反射镜的某一位置与样品某一特定深度后向散射信号对应. 移动参考臂反射镜可改变参考光脉冲返回的迟滞时间,从而可对样品纵向深度扫描. 不同时间迟滞得到的干涉信号的强度带有样品纵向深度的信息,如果信号臂上的聚焦光斑进行横向扫描,检测相应的干涉信号就可得到样品二维(或三维)结构图像.

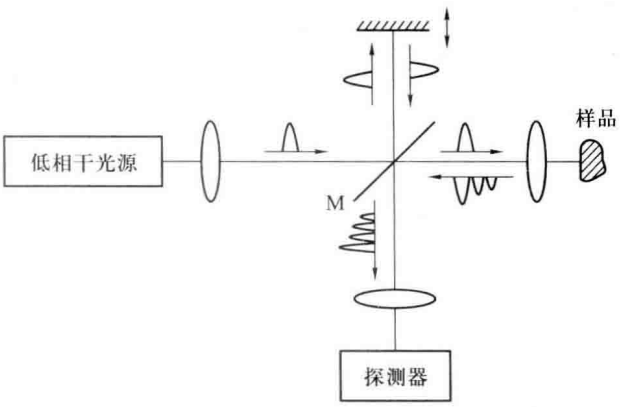


图 4.12-2 OCT 原理

目前实际使用的光学相干层析扫描仪是石英光纤结构的迈克耳孙干涉仪,如图 4.12-3 所示. 由宽带光源超发光二极管(SLD)或超短脉冲激光器发出的低相干光进入 2×2 光纤耦合器后被分成两束,分别进入参考臂和信号臂. 在参考臂设置一个调制器,利用多普勒效应或相位调制技术使参考光频率产生一微小移动,并与信号光形成固定的频差,通过测量二者的外差信号可获取 OCT 图像. 图 4.12-4(a)和(b)是用锁模钛宝石飞秒激光器和超发光二极管(SLD)所获得的生物细胞组织的 OCT 图像.

OCT 具有高时空分辨率、高探测灵敏度、无损伤成像、可在体检测等优点,例如 X 射线 CT 分辨本领为几十 μm~1 mm,核磁共振为 100 μm,OCT 则为 10~30 μm,用飞秒激光作光源可达 1~3 μm,所以 OCT 是继 X 射线 CT、核磁共振等成像技术之后又一新的层析成像技术. 尽管 OCT 在 1991 年提出至今时间不长,但发展十分迅速,已在眼科、牙科和皮肤科的临床诊断中获得应用. 它在材料检测,特别是生物活体组织的检测和成像以及癌症的早期诊断等方面有着重要的应用前景.

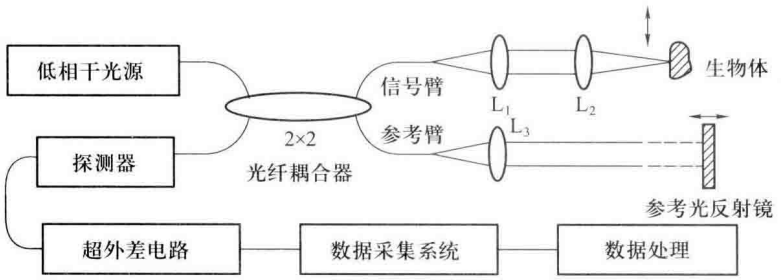


图 4.12-3 光纤式光学相干层析扫描仪原理

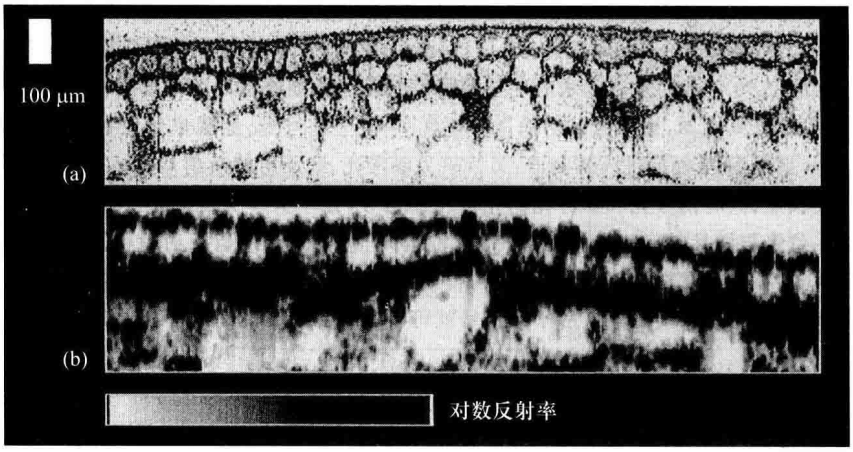


图 4.12-4 锁模钛宝石飞秒激光器和 SLD 的 OCT 成像图
(最上层的细胞壁厚度为 5 μm)

§4.13 多光束干涉

迄今我们所讨论的都是两光束干涉,它们的光强分布公式都是 $\cos^2(\delta/2)$ 型函数,光强随 δ 的变化较缓慢,干涉条纹较宽,在实验中很难准确找出光强极大或极小点的位置,从而会影响测量的精确度. 为了克服此缺点,可采用多光束的干涉. 本节讨论分振幅的多光束干涉,至于分波前的多光束干涉将在下章结合衍射问题讨论.

4.13.1 多光束干涉光强分布公式

设有一平行平面介质薄膜,厚为 h,折射率为 n,置于折射率为 n_0 的介质中(图 4.13-1). 一束光入射到薄膜上,经膜两表面反射和折射产生多束相干的反射光 1,2,3,…和透射光 1′,2′,3′,…, 用透镜 L 和 L′分别把它们会聚起来,就可以在它们的焦平面上产生干涉. 在 §4.8 中已经指出,如果薄膜表面的反射率很低,这些光束中除起初两条外其余都很弱,可以只考虑起初两条的贡献. 但是如果薄膜表面的反射率很高,除第一条反射光较强外,其余诸光束的强度变化不大. 例如薄膜两表面镀有反射率为 90% 的高反射膜时,各反射光束和透射光束的光强见表 4.13-A,

这时诸光束对场点的干涉效应都有贡献，不能忽略. 若用扩展光源照明，则可以得到定域在透镜焦平面上的多光束等倾干涉条纹.

为了计算在 P(或 P')点的多光束干涉光强，应先讨论诸相干光束的振幅和相位. 设入射光以不大的角度 i 投射到薄膜上，在膜内的折射角为 i'，相邻两光束到达 P 点的光程差为

$$\Delta = 2nh\cos i'$$

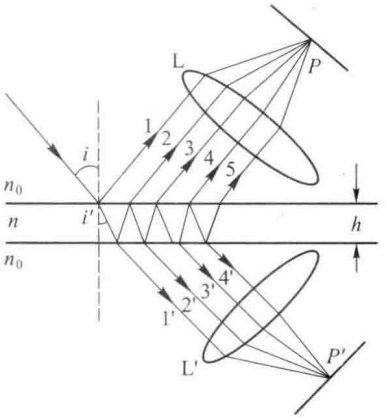


图 4.13-1 分振幅的多光束干涉

表 4.13-A 反射率为 90%的平行平板玻璃上的反射光强和透射光强(设入射光强为 100)

光线号	反射光强	透射光强
1	90.0	1.0
2	0.90	0.81
3	0.730	0.656
4	0.590	0.531
5	0.478	0.431
6	0.397	0.394

相邻两光束在 P 点的相位差，即每一光束较它前一光束落后的相位为

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} nh\cos i' \tag{4.13-1}$$

此外还必须考虑界面反射时的相位跃变. 因为薄膜上下两侧介质折射率相同，所以除了反射光束 1 和 2 以外，任何其他相邻两光束间没有因相位跃变而引起的附加相位差.

如图 4.13-2 所示，令光束从周围介质进入薄膜时的振幅反射率为 r，振幅透射率为 t；光束从薄膜进入周围介质时的振幅反射率为 r'，透射率为 t'；如果入射光振幅为 A，则从薄膜反射回来的光束 1,2,3,…的振幅依次为

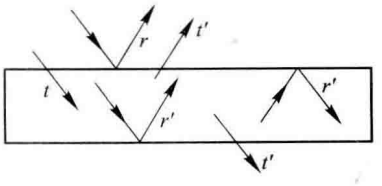


图 4.13-2 振幅反射率和透射率

$$rA, tt'r'A, tt'r'^3A, \cdots$$

从薄膜透射出来的各光束 1′,2′,3′,…的振幅依次为

$$tt'A, tt'r'^2A, tt'r'^4A, \cdots$$

由以上关于相位和振幅的分析,并将反射光束 1 和透射光束 1 的初相取为 0,可以写出各反射光束和透射光束的复振幅:

$$\text{反射光束}\begin{cases}\tilde{E}_1 = rA\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}\\ \tilde{E}_2 = tt'r'A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}\\ \tilde{E}_3 = tt'r'^3A\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\delta}\\ \tilde{E}_4 = tt'r'^5A\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\delta}\\ \cdots\cdots\end{cases}\qquad \text{透射光束}\begin{cases}\tilde{E}'_1 = tt'A\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}\\ \tilde{E}'_2 = tt'r'^2A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}\\ \tilde{E}'_3 = tt'r'^4A\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\delta}\\ \tilde{E}'_4 = tt'r'^6A\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\delta}\\ \cdots\cdots\end{cases}$$

根据叠加原理将这些复振幅加起来,就可以求得 P 和 P' 点合成振动的复振幅. 以下先求各透射光束合成振动的复振幅:

$$\tilde{E}_T = \sum \tilde{E}'_i = tt'A(1 + r'^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} + r'^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\delta} + r'^6\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\delta} + \cdots)$$

当薄膜足够长,光束入射角又不太大时,相干光束数很大. 在光束数趋于无限大的情况下,上式括号内是一个无穷项的递减等比级数,首项为 $tt'A$,公比为 $r'^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}$,根据无穷等比级数求和公式可得

$$\tilde{E}_T = \frac{tt'A}{1 - r'^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}$$

将 §3.5 中得出的斯托克斯公式(3.5-15)和(3.5-16)式

$$1 - r^2 = tt', \quad r = -r'$$

代入上式则得

$$\tilde{E}_T = \frac{(1 - r^2)A}{1 - r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}$$

因此 P' 点的光强

$$I_T = \tilde{E}_T\,\tilde{E}_T^* = \frac{(1 - r^2)A}{1 - r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}} \cdot \frac{(1 - r^2)A}{1 - r^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}} = \frac{(1 - r^2)^2A^2}{1 - 2r^2\cos\delta + r^4}$$

令 $R = r^2$ 表示反射率,$I_0 = A^2$ 表示入射光强,上式可写成

$$I_T = \frac{I_0}{1 + \dfrac{4R\sin^2(\delta/2)}{(1 - R)^2}} \tag{4.13-2}$$

因 P' 点为透镜 L′焦面上任一点,它与倾角为 i 的入射光对应,所以上式表示 L′焦面上的透射光强分布公式.

按照上述类似计算方法可得出反射光强分布公式,不过我们可采用更简单的方法. 由于薄膜两侧介质相同,入射光束和反射光束、透射光束的截面均相等,在此条件下由光能流守恒可导出光强守恒,即不考虑薄膜吸收的情况下,入射光强应等于反射光强和透射光强之和,即 $I_0 = I_T + I_R$,于是

$$I_R = I_0 - I_T = \frac{I_0}{1 + \dfrac{(1 - R)^2}{4R\sin^2(\delta/2)}} \tag{4.13-3}$$

为了讨论方便，引入参数

$$F=\frac{4R}{(1-R)^2} \tag{4.13-4}$$

称为**精细系数**，则(4.13-2)和(4.13-3)式可写为

$$I_T=I_0\frac{1}{1+F\sin^2(\delta/2)} \tag{4.13-5}$$

$$I_R=I_0\frac{F\sin^2(\delta/2)}{1+F\sin^2(\delta/2)} \tag{4.13-6}$$

上面这组公式通常称为**艾里公式**，它们说明 I_T、I_R 与 R 和 δ 有关. 以相邻两光束间的相位差 δ 为横坐标，相对光强 I_T/I_0 为纵坐标，对于给定的 R 值可作出一条 I_T/I_0 随 δ 而变化的曲线. 图 4.13-3 给出了一组 R 值不同的 I_T/I_0-δ 曲线. 由光强守恒可知，反射光强的地方透射光弱，反射光弱的地方透射光强，两者的干涉图样是互补的. 因此将图 4.13-3 的纵坐标倒过来从上往下看，就是 I_R/I_0 随 δ 变化的曲线.

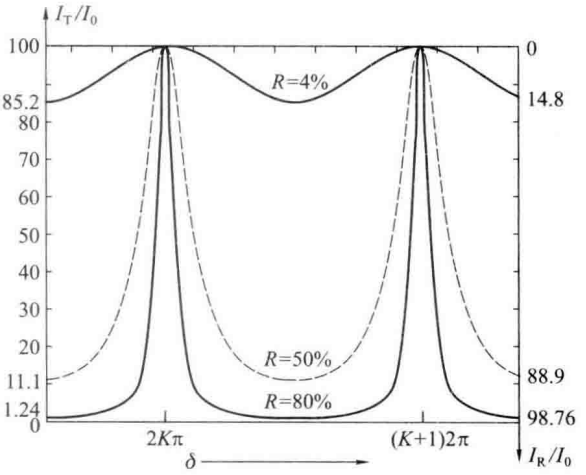


图 4.13-3 多光束干涉光强分布曲线

4.13.2 干涉条纹的特点

由(4.13-5)和(4.13-6)式及图 4.13-3 所示曲线可以看出，由平行平面薄膜产生的多光束干涉条纹除了等倾条纹的一般性质外，还有以下特点：

1. 干涉光强极大和极小值的位置由 δ 决定，与 R 无关

由(4.13-5)式可见，当 $\sin\delta/2=0$，即 $\delta=2K\pi$ 或 $2nh\cos i'=K\lambda$ ($K=0,1,2,\cdots$)时，透射光强有极大值且等于入射光强 I_0，此时反射光强显然为零. 当 $\sin\delta/2=1$，即 $\delta=(2K+1)\pi$ 或 $2nh\cos i'=(K+1/2)\lambda$ 时，透射光强有极小值，反射光强有极大值. 此时透射光强的极小值为

$$I_{Tm}=\frac{1}{1+F}I_0=\left(\frac{1-R}{1+R}\right)^2 I_0 \tag{4.13-7}$$

即多光束干涉透射光强的极小值由表面反射率 R 决定. R 愈大，极小值愈接近于零，但不为零. 反射光强的极大值为

$$I_{Rm}=\frac{4R}{(1+R)^2}I_0 \tag{4.13-8}$$

可见改变薄膜表面的反射率 R，干涉光强的分布要发生变化，但是极大值和极小值的位置仅由 δ 决定.

2. 干涉条纹的细锐程度由 $\boldsymbol{R}$ 决定

由图 4.13-3 可见，对于不同的 R 有不同的干涉光强分布. 当 $R\ll 1$ 时，将(4.13-3)式写为

$$I_R=\frac{4R\sin^2(\delta/2)}{(1-R)^2+4R\sin^2(\delta/2)}I_0$$

因为 $1-R\approx 1$，$4R\sin^2(\delta/2)\ll(1-R)^2$ 可以略去，则得

$$I_R=4RI_0\sin^2(\delta/2)$$

上式正是我们熟悉的振幅相等的两光束干涉光强分布公式. 这里为什么出现正弦函数而不是余弦函数，是由于与两光束分波前干涉不同，从薄膜上下表面反射的 1、2 两束反射光之间有附加相位差 π 的缘故. 由此可见，在 §4.8 中讨论薄膜干涉时，表面的反射率很小，把它作为两光束干涉处理是完全合理的.

随着 R 的增大，薄膜所分割出的相干光束中后面光束的作用愈来愈不可忽略，对于干涉效应产生贡献的光束数愈来愈多. 这将使透射光强的极小值降低，亮纹宽度变窄，条纹变锐. 当 $R\approx 1$ 时，$\dfrac{4R}{(1-R)^2}\gg 1$，由(4.13-2)式可知，一旦 δ 稍偏离 $2K\pi$，I_T 便从极大值急剧下降，使条纹十分细锐. 因此当 R 很大时，透射光的多光束干涉条纹是在几乎全黑背景上的一组窄亮纹，而反射光的干涉条纹则是在几乎均匀的亮背景上的窄暗纹. 其中后者不易辨认，故应用很少.

4.13.3　干涉条纹的半值宽度和精细度

多光束干涉的主要特点是它能产生十分细锐的干涉条纹. 怎样来定量描写条纹的细锐程度呢？由图 4.13-3 的曲线可见，光强极大值两侧没有零点，因此没有明确的边界可以计算条纹的宽窄. 为此我们引入条纹的**半值宽度**来描写条纹的细锐程度. 所谓半值宽度就是强度等于极大值强度一半的两点间的相位差，记为 ε，所以也称它为**半强相位宽度**. 如图 4.13-4 所示，对于第 K 级亮纹，两半强度点对应的相位差为

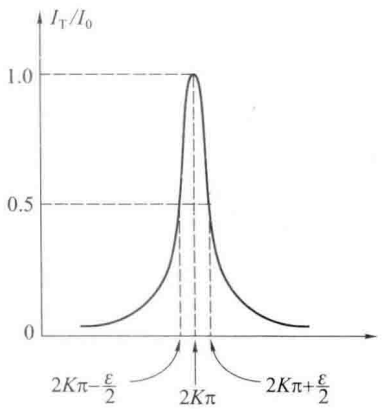


图 4.13-4　条纹的半宽度

$$\delta=2K\pi-\frac{\varepsilon}{2}\quad 和\quad \delta=2K\pi+\frac{\varepsilon}{2}$$

代入(4.13-5)式得

$$\frac{I_T}{I_0}=\frac{1}{1+F\sin^2\left[\dfrac{1}{2}\left(2K\pi\pm\dfrac{1}{2}\varepsilon\right)\right]}=\frac{1}{2}$$

而

$$\sin^2\left[\frac{1}{2}\left(2k\pi\pm\frac{1}{2}\varepsilon\right)\right]=\sin^2\left(\pm\frac{\varepsilon}{4}\right)\approx\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2$$

则

$$\varepsilon=\frac{4}{\sqrt{F}}=\frac{2(1-R)}{\sqrt{R}} \tag{4.13-9}$$

上式中的 ε 是以弧度计算的，R 愈大，ε 愈小；条纹愈窄. 这个条纹宽度是严格的单色光入射时由于干涉装置的干涉效应而产生的，故又称为“仪器宽度”，它不同于准单色光的谱线宽度. 下面计算半强相位宽度相应的角距离即半强角宽度. 在(4.13-1)式中，取 δ 因 i' 而变化的微分，

$$\mathrm{d}\delta=\frac{-4\pi nh\sin i'\mathrm{d}i'}{\lambda}$$

令 $\mathrm{d}\delta=\varepsilon$，将 $\mathrm{d}i'$ 写为 $\Delta i'_K$，表示它是与 i' 相应的第 K 级亮纹的半角宽度，得

$$\begin{aligned}\Delta i'_K&=\frac{-\lambda\varepsilon}{4\pi nh\sin i'_K}\\&=\frac{-\lambda}{2\pi nh\sin i'_K}\frac{1-R}{\sqrt{R}}\end{aligned}\tag{4.13-10}$$

上式表明，在 n、h、λ、i'_K 一定的情况下，R 愈大，ε 愈小，条纹愈窄；在 n、h、λ、R 一定的情况下，i'_K 愈大，离中心愈远，条纹也愈窄.

通常也用相邻两极大值间的相位间隔 2π 和条纹的半强相位宽度 ε 之比表示条纹的细锐程度，称为条纹的**精细度**，即

$$F'=\frac{2\pi}{\varepsilon}=\frac{\pi\sqrt{F}}{2}=\frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}\tag{4.13-11}$$

即 R 愈大，ε 愈小，F 值愈大，条纹愈细.

§4.14 法布里-珀罗干涉仪

4.14.1 结构

法布里-珀罗(Fabry-Perot)干涉仪(简称 F-P 干涉仪)是利用多光束干涉产生细锐条纹的典型仪器，其结构和光路见图 4.14-1. 仪器中最主要的部分是两块高精密磨光的石英板或玻璃板 G_1、G_2. 利用精密调节装置，可将它们调节成精确地互相平行，这样在它们之间形成了一个平行平面的空气层. 为了提高反射率，在这两个表面上镀有多层介质膜或金属膜. 另外为了避免 G_1、G_2 两板外表面(非工作表面)反射光所造成的干扰，每块板的两个表面并不严格平行，而是有微小角度(一般约为 5′~30′). 如果 G_1、G_2 两板间的距离用间隔器固定，则称为法布里-珀罗标准具. 如果 G_1、G_2 两板间的光程可以调节，则称为法布里-珀罗干涉仪.

扩展单色光源位于透镜 L 的物方焦面上，光源上某一点发出的光线经 L 后变为平行光入射到空气膜上，在 G_1、G_2 间反复反射后形成振幅递减的多束相干光. 相邻两束光的光程差为

$$\Delta=2nh\cos i'\tag{4.14-1}$$

相应的相位差为

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta=\frac{4\pi}{\lambda}nh\cos i'$$

式中 i' 是在空气膜内的折射角. 这些相干光透射出去，在置于 L′的像方焦面处的接收屏上形成等倾干涉条纹(图 4.14-2)，光强分布函数就是上节所讨论的(4.13-2)式. 这些条纹的形状与迈克

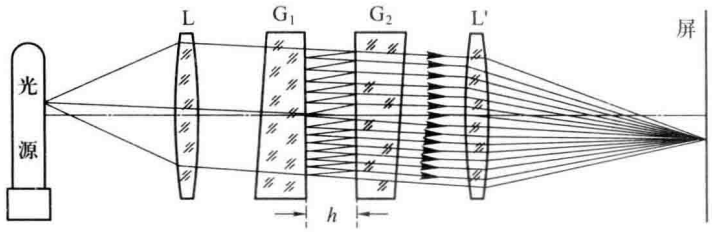


图 4.14-1 法布里-珀罗干涉仪

耳孙干涉仪产生的等倾条纹相似，也是同心环. 但是迈克耳孙干涉仪是两光束的干涉装置，而法布里-珀罗干涉仪是多光束干涉装置，所以后者比前者产生的干涉条纹要细锐得多，这正是法布里-珀罗干涉仪胜过迈克耳孙干涉仪的最大优点.

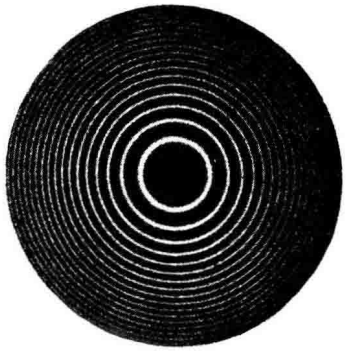


图 4.14-2 法布里-珀罗干涉条纹

如果 G_1 和 G_2 两板的内表面镀金属膜，光在其表面反射的情况是比较复杂的，但是只要两个膜层是相同的，(4.13-2)式仍然成立，只是 R 应理解为在金属膜内表面的反射率，而相邻两光束的相位差则为

$$\delta=\frac{4\pi}{\lambda}h\cos i'+2\varphi$$

式中 φ 是在金属膜内表面反射时的相位变化. 同时光通过金属膜时将会被强烈吸收，使得透射光干涉图样的峰值强度下降.

4.14.2 特性

F-P 干涉仪产生很细的条纹，它可用作高分辨本领的分光仪器，下面我们讨论它的分光特性.

1. 角色散率

设波长差为 $\mathrm{d}\lambda$ 的两同级主极大之间的角距离为 $\mathrm{d}i'$，定义**角色散率**为

$$D=\frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}\lambda} \tag{4.14-2}$$

它表示单位波长差的两谱线分开的角距离. 由(4.14-1)式，第 K 级主极大满足

$$2nh\cos i'=K\lambda$$

将上式两端求微分得

$$\frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{-K}{2nh\sin i'} \tag{4.14-3}$$

而 $K=\dfrac{2nh}{\lambda}\cos i'$，代入上式得

$$\frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}\lambda}=-\frac{1}{\lambda\tan i'} \tag{4.14-4}$$

上式表明角色散本领与间距 h 无关. 对一定的波长 λ 而言,i'愈小,干涉级愈高,角色散本领愈大;i'愈大,离中心愈远,干涉级愈低,角色散本领愈小.

2. 自由光谱范围

设想准单色光源含有 λ 至 $\lambda+\Delta\lambda$ 之间的波长成分. F-P 干涉仪将不同波长的同一级谱线分散在不同的观察方向上,那么就有可能在同一方向上出现 λ 的 K 级谱线和 $\lambda+\Delta\lambda$ 的 $K-1$ 级谱线重叠,即满足

$$2nh\cos i'=K\lambda=(K-1)(\lambda+\Delta\lambda) \tag{4.14-5}$$

这时凡是 λ 至 $\lambda+\Delta\lambda$ 范围内各波长的 $K-1$ 级主极大,一定落在 λ 的 $K-1$ 级和 K 级主极大之间,不会出现越级重叠现象. 我们称这个不产生越级重叠的最大波长范围为分光仪的**自由光谱范围**或**色散范围**. 由上式得

$$\Delta\lambda=\frac{\lambda}{K-1}$$

因为 $K\gg1$,将上式分母中的 1 略去,并将 $K=\dfrac{2nh}{\lambda}\cos i'$代入上式得

$$\Delta\lambda=\frac{\lambda}{K}=\frac{\lambda^2}{2nh\cos i'} \tag{4.14-6}$$

对于中心附近的干涉环,$\cos i'\approx1$,上式可写为

$$\Delta\lambda=\frac{\lambda^2}{2nh} \tag{4.14-7}$$

当 λ 一定时,间距愈大,色散范围愈小. 例如,设 $\lambda=632.8$ nm,$h=40$ cm,代入上式得 $\Delta\lambda=0.005$ nm,也就是说超过千分之五纳米,光谱线就要越级重叠了.

自由光谱范围是高分辨本领分光仪器的一个重要参量. 我们在使用高分辨仪器时,应当先估计一下光源的单色性是否在仪器的自由光谱范围之内.

3. 色分辨率

设想入射光中包含有两个十分接近的波长 λ 和 $\lambda+\Delta\lambda$,它所产生的干涉环具有稍微不同的半径,如图 4.14-3 中的实线和虚线所示. F-P 干涉环虽然十分细锐,但每条亮纹总还是占有一定的宽度,当两波长产生的邻近光谱线靠近到一定程度时,它们便会相互重叠而分辨不开是两条亮纹了. 设两种波长成分有相同的强度分布曲线,泰勒提出,当两波长成分的强度曲线在半强度点相交,使得合成曲线鞍点的强度等于任一波长成分的主极大强度时,这两条亮纹是恰可分辨的(图 4.14-4),这个判别标准称为**泰勒判据**.

设第 K 级亮纹的半强角宽度为 $\Delta i'_K$,λ 和 $\lambda+\Delta\lambda$ 的第 K 级主极大间的距离为 $\delta i'_K$. 按照泰勒判据,当$\delta i'_K>\Delta i'_K$时两亮纹完全可以分辨,当$\delta i'_K<\Delta i'_K$时不能分辨,当$\delta i'_K=\Delta i'_K$时恰可分辨. 将(4.14-3)式中的 $\mathrm{d}i'$和 $\mathrm{d}\lambda$ 分别记为$\delta i'_K$和 $\delta\lambda$,则得

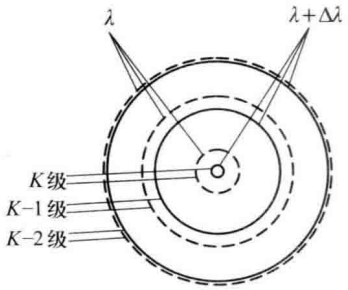


图 4.14-3 两种十分接近的波长产生的干涉环

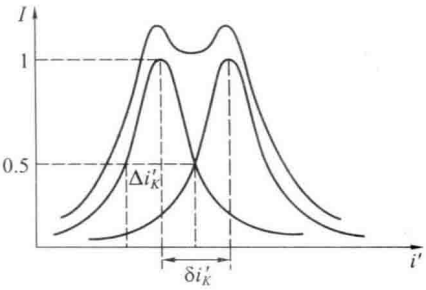


图 4.14-4 泰勒判据

$$\delta i'_K = \frac{-K}{2nh\sin i'}\delta\lambda \tag{4.14-8}$$

将上式与(4.13-11)式比较得

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{K\pi}\frac{1-R}{\sqrt{R}} \tag{4.14-9}$$

上式即为 F-P 干涉仪所能分辨的最小波长差,或称分辨极限. 例如,当 $\lambda = 632.8$ nm, $h = 40$ cm 时,干涉环中心处 K 高达 1.26×10^6,若 $R = 94.2\%$,精细度 $F = 52.6$,代入上式得 $\delta\lambda = 0.000\ 1$ nm. 也就是说,如果两条光谱线的波长差小于 0.000 1 nm,F-P 干涉仪在上述条件下是不能将它们分辨开的.

由上面讨论可知,分辨极限愈小,分辨能力愈高. 我们定义

$$A = \frac{\lambda}{\delta\lambda} \tag{4.14-10}$$

为分光仪器的**色分辨率**. 由(4.14-9)式得

$$A = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}K = \mathcal{F}K \tag{4.14-11}$$

因此,干涉级愈高,R 愈大,分辨本领愈高. 与 § 5.7 中的光栅分辨本领公式相比较,精细度$\mathcal{F}$又称为有效相干光束数.

F-P 干涉仪中,G_1 和 G_2 表面的反射率 R 很高(可高达 98%),这使干涉条纹非常细锐,而且 G_1 和 G_2 的间距 h 越大,干涉条纹的级数越高,角色散本领越大,这两者合起来可使仪器的分辨本领达到很高. 但是由(4.14-6)式可知,K 愈高,自由光谱范围 $\Delta\lambda$ 愈窄,愈容易产生不同波长条纹的越级重叠. 因此应当采用滤光器或其他分光仪器(棱镜或光栅光谱仪)作为前置滤波器,以便先分离出来较窄的波段再入射到 F-P 干涉仪上去.

F-P 干涉仪是高分辨本领的光谱仪,可用来精确地比较各光谱线的波长,用光波长来量度长

度,以及研究光谱线的超精细结构①. 1958 年法国人柯勒斯(Connes)提出了一种共焦球面干涉仪,它由两个曲率半径相同、镀有高反射膜层的球面镜组成,两反射镜的焦点重合,组成共焦系统,其工作原理与 F-P 干涉仪相同,但具有很多优点,被广泛用作激光器的谐振腔(见第九章).

*4.14.3 F-P 扫描干涉仪

F-P 扫描干涉仪装置如图 4.14-5 所示,装置中用点光源照明,入射光通过准直透镜和玻璃板 G_1、G_2 在聚焦透镜后焦面上生成一点,此点的强度用光电探测器接收. 干涉仪的输出采用扫描技术,扫描过程可由改变 G_1、G_2 两板间光程的方法来实现. 而改变光程的方法之一是利用压电陶瓷作为玻璃板的基座,将锯齿波电压加到压电陶瓷上产生压电效应来驱动和它相连的玻璃板,使两板间距改变,另一个方法是将两板间的空气抽空或加进高压气体,通过改变气压来改变折射率. 当改变两板间光程时,就可以使不同波长的光以最大透射率透射,实现光谱扫描,透射光经光电元件转换成电信号,再通过示波器或记录器输出.

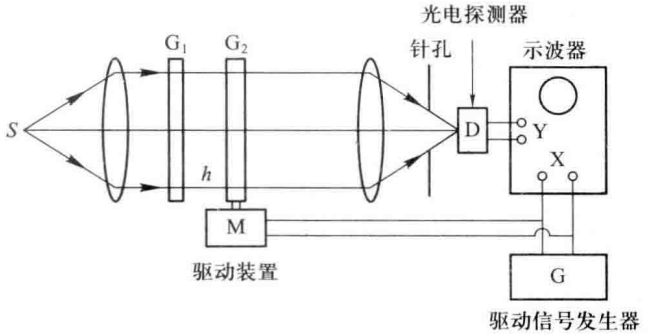


图 4.14-5 F-P 扫描干涉仪简图

4.14.4 干涉滤光器

常见的有色玻璃是吸收型滤光片,它能从白光连续光谱中分离出某种色光,其波长范围约为 50 nm. 为了获得透过的光谱范围为几纳米甚至更窄的光波,可使用干涉滤光器.

用一束准直的白光垂直照射 F-P 干涉仪($i' \approx 0$),则透射光形成一系列极大,各级极大所对应的波长为②

$$\lambda = \frac{2nh}{K} \tag{4.14-12}$$

若 h 很大,在可见光区可观察到许多极大. 例如,$h = 1$ cm,可观察到约 23 000 个极大. 如果把 h 缩小,则可以减少极大的数目. 例如,$n = 1.5$,$h = 6\times10^{-5}$ cm,在可见光区就只有两个极大,分别对应于 $\lambda = 600$ nm($K = 3$)和 $\lambda = 450$ nm($K = 4$). 两个极大之间的波长间隔很宽,因而可以用有色玻璃消除其中一种波长成分,使得只有另一种波长透过. 这样就从一束白光中滤出了一种特定的波长,这就是 F-P 型干涉滤光器的基本原理. F-P 型干涉滤光器结构如图 4.14-6(a)所示,在平板玻璃上镀一层高反射率的银膜 S,其上再镀一层介质膜 F 作为间隔层,然后再镀一层高反射率的

① 由于原子核磁矩的影响,有的光谱线分裂成几条十分相近的谱线,相差 $10^{-3}\sim10^{-4}$ nm 量级,这叫光谱线的超精细结构. 例如钠的 D_1 线(589.6 nm)实际是由波长差为 0.002 3 nm 的两线组成,D_2 线(589 nm)则是由波长差为 0.002 1 nm 的两线组成.

② 对于金属反射膜准光片,计算其极大值对应的波长时,还应考虑金属表面反射时的相位变化.

银膜 S′,最后加保护玻璃 G′.

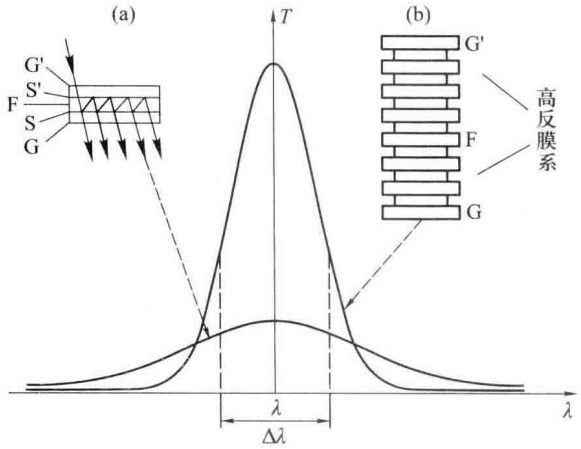


图 4.14-6 干涉滤光器

这种干涉滤光器实质上就是一种间隔很小的 F-P 标准具. 为了得到高反射率,可增加银膜的厚度,但由于银膜的吸收增加会降低透射光的强度. 为了克服这一困难,可用对光的吸收很小的多层介质膜来代替金属膜,如图 4.14-6(b). 图中还分别示出了银膜和多层介质膜的透射率曲线.

干涉滤光器的光学性能主要由以下三个参数表征:

1. 滤光器的中心波长 λ,即透射率最大的波长. 由(4.14-12)式可知,它决定于间隔层的光学厚度 nh 和干涉级 K.

2. 峰值透射率 T_M,即与透射率最大的中心波长相应的透射光强与入射光强之比. 由(4.13-6)式,在理论上它可达 100%,实际上由于膜层的吸收和散射,它将小于 100%,特别是金属膜吸收严重,峰值透射率一般在 30%以下.

3. 透射带半宽度 $\Delta\lambda$,即透射率为峰值之半所对应的波长范围. 对于中心波长为 λ 的 K 级极大,

$$\delta = 4\pi nh/\lambda$$

两端取微分并略去负号得

$$\Delta\delta = 4\pi nh\Delta\lambda/\lambda^2$$

由(4.13-9)式,半强相位宽度 $\varepsilon = \dfrac{4}{\sqrt{F}}$,代入上式得相应的波长范围为

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{4\pi nh}\frac{4}{\sqrt{F}}$$

由(4.14-12)式得

$$\Delta\lambda = \frac{2\lambda}{K\pi\sqrt{F}}$$

上式表明透射带的半宽度 $\Delta\lambda$ 与干涉级 K 和反射膜的反射率的关系. K 和 R(从而 F)愈大,$\Delta\lambda$ 愈小,透过光的单色性愈好.

思 考 题

4.1 波的叠加与干涉有何区别与联系？两列振幅相等的相干波发生相长干涉时，其强度是每列波单独产生的强度的4倍，这与能量守恒定律是否有矛盾？

4.2 试列举出一种不产生明暗相间条纹的光干涉现象.

4.3 在杨氏双缝干涉实验装置中，假定光源是单色缝光源，当装置作如下几种改变时，试简单描述屏上的干涉条纹将会怎样变化：

（1）将光源向上或向下平移；

（2）将光源缝向双缝移近；

（3）观察屏移离双缝；

（4）双缝间距加倍；

（5）将整个装置放入水中；

（6）光源缝慢慢地张开；

（7）换用两个独立光源，使其分别照明双缝之一.

4.4 在双波源干涉实验中，如果两波源的距离小于该波的半波长，能否观察到干涉条纹？

4.5 在比耶对切透镜干涉装置中，将光源置于透镜和它的物方焦点之间，接收屏上能否观察到干涉条纹？

4.6 试列举影响干涉条纹可见度的各种因素.

4.7 光源的光谱展宽和空间展宽对于干涉条纹可见度的影响有何不同？光的单色性可用哪三个等效物理量描述？试估算白光的相干长度.

4.8 观察尖劈形肥皂液膜所生成的彩色条纹时，为什么膜的上端光泽变暗，彩色消失时预示着肥皂膜即将破裂？

4.9 用钠光或激光照明，观察牛顿环干涉装置，我们能否观察到其平凸透镜玻璃两表面反射光所产生的等厚条纹？

4.10 入射角的微小变化对于很薄的膜的干涉条纹影响不大，但对于厚膜的影响却很大，为什么？

4.11 在观察凸透镜的凸面与平板玻璃相接触而产生的牛顿环时，反射光所产生的干涉条纹与透射光所产生的干涉条纹强度的极大值是否相同？为什么通常都用反射光观察？

4.12 将半圆柱面透镜的凸面紧贴于平板玻璃上，用单色平行光正入射，从反射光中观察到的等厚干涉图样呈何形状？若将柱面透镜一端略微垫高，干涉图样又呈何形状？将柱面紧贴于平凸镜的凸面上，干涉图样又呈何形状？

4.13 在光学冷加工车间中，为了检测透镜表面是否合格，常将样板（标准球面）紧贴在待测表面上，根据它们之间的空气层生成的光圈来作判断. 如果我们注视着这些光圈埋头时发现光圈向中心收缩，问应当进一步研磨透镜的边缘还是中央部分？为什么？

4.14 为什么照相机镜头表面看起来呈蓝紫色？

4.15 寒冬时节在汽车的窗玻璃上形成薄冰层$\left(n=\frac{4}{3}\right)$，透过它所见窗外的白色景物呈绿色，试估算冰层的最薄厚度.

4.16 在迈克耳孙干涉仪中，当M_1与M_2'不平行，且间距d不太大时，我们将看到呈弧状的干涉条纹，试解释为什么条纹凸向由M_1与M_2'组成的尖劈劈棱的一端？

4.17 在法布里-珀罗干涉仪中，两工作表面的反射率很高（例如95%以上），这就意味着反射光很强，而透

射光几乎为零，那么我们怎样能接收到透射光呢？

4.18　试将牛顿环、迈克耳孙干涉环、法布里-珀罗干涉环三种干涉条纹进行比较.

习　题

4.1　在杨氏实验装置中，两孔间的距离等于通过光孔的光波长的 100 倍，接收屏与双孔屏相距 50 cm. 求第 1 级和第 3 级亮纹在屏上的位置以及它们之间的距离.

4.2　在杨氏实验中双孔间距为 5.0 mm，孔与接收屏相距为 1.0 m. 入射光中包含波长为 480 nm 和 600 nm 的两种成分，因而看到屏上有两组干涉图样，试求这两种波长的第 2 级亮纹的距离.

4.3　在双缝干涉装置中，缝 S_1 和 S_2 后面分别放置透明的塑料薄片 T_1 和 T_2，当两薄片插入后，屏上中央零级亮纹向下移至原先的第 10 级亮纹位置上，已知入射光波长为 600 nm，T_1 和 T_2 厚均为 300 μm，T_2 的折射率为 1.52，求 T_1 的折射率.

4.4　波长为 λ 的平行单色光以小倾角 θ 斜入射到间距为 t 的双缝上，设接收屏到双缝距离为 D.

（1）求零级主极大的位置；

（2）假设在屏上到两缝的距离都相等的地方恰好出现暗条纹，倾角 θ 必须满足什么条件？

4.5　波长 $\lambda = 500$ nm 的单色平行光正入射到双孔平面上，已知双孔间距 $t = 0.5$ mm，在双孔屏另一侧 5 cm 处放置一枚像方焦距 $f' = 5$ cm 的理想薄透镜 L，并在 L 的像方焦平面处放置接收屏. 求：

（1）干涉条纹间距等于多少？

（2）将透镜往左移近双孔 2 cm，接收屏上干涉条纹间距又等于多少？

4.6　在杨氏双缝实验中，除了原有的光源缝 S 外，再在 S 的正上方开一狭缝 S'，如图4.1 所示.

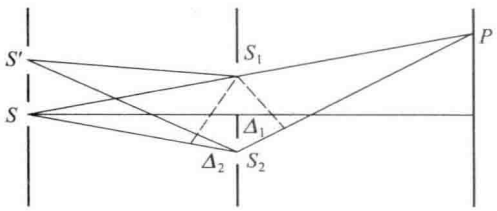


图 4.1

（1）若使 $S'S_2 - S'S_1 = \dfrac{\lambda}{2}$，试求单独打开 S 或 S'及同时打开 S 和 S'时屏上的光强分布；

（2）若 $S'S_2 - S'S_1 = \lambda$，S'和 S 同时打开时屏上的光强分布如何？

4.7　在杨氏双孔实验装置中，若在光源孔 S 后插入一块偏振片 P，其透振方向垂直图面，则接收屏上干涉条纹可见度为 1，若在 S_1 和 S_2 后分别插入两块偏振片 P_1 和 P_2，P_1 和 P 的透振方向平行，P_2 的透振方向和它们夹角为 θ，求屏上干涉条纹的可见度. 若将 S 后的偏振片去掉，可见度又为多少？

4.8　设菲涅耳双面镜的夹角为 15′，缝光源距双面镜交线 10 cm，接收屏与光源经双面镜所成的两个虚像连线平行，屏与双面镜交线距离为 210 cm，光波长为 600 nm，求：

（1）干涉条纹间距为多少？

（2）在屏上最多能看到几条干涉条纹？

（3）如果光源到双面镜交线距离增大一倍，干涉条纹有什么变化？

（4）如果光源与双面镜交线距离保持不变，而在横向有所移动，干涉条纹有什么变化？

（5）为保证屏上的干涉条纹有很好的可见度，允许缝光源的最大宽度为多少？

4.9 用波长 $\lambda=500$ nm 的单色平行光垂直入射到菲涅耳双棱镜上，棱镜由 $n=1.5$ 的玻璃制成. 已经测得干涉条纹间距为 0.5 mm，且前后移动接收屏位置时条纹间距不变，试求双棱镜的顶角.

4.10 一点光源置于薄透镜的焦点上(图 4.2)，薄透镜后放一双棱镜，设双棱镜的顶角为 3′30″，折射率为 1.5，屏与棱镜相距 5 m，光波长为 500 nm. 求：

(1) 屏上干涉条纹的间距是多少？

(2) 屏上能出现多少条纹？

(3) 若在双棱镜后的上半部分插入一极薄的玻璃片，屏上干涉条纹有什么变化？

(4) 若准单色光的相干长度为 1 cm，玻璃片的折射率为 1.5，当玻璃片至少为多厚时屏上中央处干涉现象完全消失？

4.11 将焦距 $f'=25$ cm 的薄透镜切去宽为 a 的中央部分，再将两半贴合，如图 4.3 所示，在透镜的一侧放置波长为 600 nm 的单色点光源，在另一侧放置接收屏观察干涉条纹，测得屏上两相邻亮纹间的距离为 $\Delta x=0.25$ mm，且当屏移远或移近时 Δx 不变. 试求：

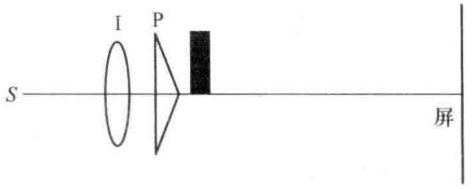


图 4.2

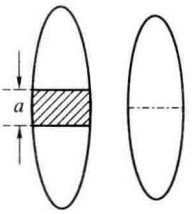


图 4.3

(1) 切去的宽度 a 为多少？

(2) 若透镜直径为 $d=5$ cm，屏移到何处时干涉条纹数最大？此最大条纹数是多少？

(3) 屏移到何处时干涉条纹消失？

4.12 由两个相干点光源 S_1 和 S_2 在屏 Σ 上生成干涉条纹(图 4.4)，屏 Σ 与 S_1、S_2 相距2 m，若在光源和屏之间置一焦距为 25 cm 的凸透镜 L，且 S_1 和 S_2 在 L 的焦平面上，求干涉条纹的间距将变化多少倍？

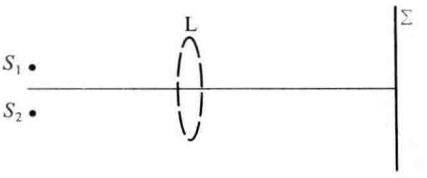


图 4.4

4.13 在劳埃德镜实验中，光源到观察屏的垂直距离为 1.5 m，光源到劳埃德镜面的垂直距离为 2 mm，劳埃德镜长 40 cm，置于光源和屏之间的中央位置.

(1) 确定屏上可以看见条纹区域的大小；

(2) 若光波波长 $\lambda=500$ nm，条纹间距是多少？

(3) 若将光源向上平移 1 mm，条纹间距又是多少？

4.14 在比耶对切透镜干涉装置中，透镜焦距 $f'=10$ cm，两半拉开的距离为 1 mm，若光源缝离透镜 20 cm，光波长为 500 nm，接收屏离透镜 450 cm，问：

(1) 屏上干涉条纹的间距是多少？

(2) 干涉条纹恰好消失时，光源缝的临界宽度是多少？

4.15 用波长为 500 nm 的单色光照明一个宽为 0.1 mm 的缝作为杨氏双缝干涉实验的光源，设光源缝至双缝距离为 0.5 m，试问恰能观察到干涉条纹时两缝间最大距离是多少？

4.16 波长为 632.8 nm 的 He-Ne 激光的谱线宽度 $\Delta\lambda=2\times10^{-4}$ nm，试计算它的频谱宽度 $\Delta\nu$、相干长度 L_0、相干时间 τ_0 各为多少？

4.17 在杨氏双缝实验装置中，双缝相距 0.5 mm，接收屏距双缝 1 m，点光源距双缝30 cm，它发射出 $\lambda=$

500 nm的单色光. 试求：

(1) 屏上干涉条纹间距；

(2) 若点光源由轴上向下平移 2 mm，屏上干涉条纹向什么方向移动？移动多少距离？

(3) 若点光源发出的光波为(500±2.5)nm 范围内的准单色光，求屏上能看到的干涉极大的最高级次；

(4) 若光源具有一定的宽度，当屏上干涉条纹消失时，它的临界宽度是多少？

4.18 若直接以月亮作为光源，在地面上做杨氏双孔实验，为了获得可见的干涉条纹，问双孔间距不能大于多少？已知月地距离为 3.8×10^5 km，月球直径为 3 477 km，光波长取为 550 nm.

4.19 两块 20 cm 长的平晶一端接触，另一端夹一直径 0.05 mm 的细丝，其间形成空气劈，用 $\lambda=680$ nm 的光垂直照射，问在整个玻板上可以看到多少亮纹？干涉条纹的间距是多少？

4.20 在阳光照射下，沿着与肥皂膜法线成 30°方向观察时，见膜呈绿色($\lambda=550$ nm)，设肥皂液的折射率为 1.33，求：

(1) 膜的最小厚度；

(2) 沿法线方向观察时是什么颜色？

4.21 将曲率半径为 1 m 的薄凸透镜紧贴在平晶上，并用钠光($\lambda=589.3$ nm)垂直照射，从反射光中观察牛顿环，然后在球面和平面之间的空气隙内充满四氯化碳液体($n=1.461$)，试求充液前后第 5 暗环的半径之比以及充液后第 5 暗环的半径等于多少？

4.22 将一金属框放入肥皂液中浸一下，然后取出保持在垂直面内，由于重力的作用形成一劈形薄膜，用氩离子激光($\lambda=514.53$ nm)近似垂直照射，每厘米内可观察到 12 根条纹，求肥皂膜的顶角.

4.23 将一平晶放在一块待测玻璃板上，其一端垫以小纸片，使其间形成空气劈，若玻璃板表面有一半圆柱形凹槽，凹槽方向与空气劈棱垂直，用 $\lambda=632.8$ nm 的 He-Ne 激光垂直照射，问：

(1) 反射光中观察到的干涉图样形状如何？

(2) 若表面凹槽引起的条纹的最大弯曲量为条纹间距的 2/5，凹槽的深度是多少？

4.24 将一个折射率 $n=1.5$ 的双凸透镜紧贴在一块平晶上，从钠光灯的反射光中观察牛顿环，测得从中心往外第一暗环开始数起的第 10 暗环的半径 $r_1=2$ mm，再将透镜另一表面紧贴在平晶上，测得同级暗环的半径 $r_2=4$ mm. 试求此薄透镜的焦距(钠光 $\lambda=589.3$ nm).

4.25 用彼此以凸面紧贴的两平凸透镜观察反射光所生成的牛顿环，两透镜的曲率半径分别为 R_1 和 R_2，所用光波波长为 λ，求第 K 暗环的半径. 若将曲率半径为 R_1 的平凸透镜凸面放在曲率半径为 R_2 的平凹透镜凹面上($R_2>R_1$)，第 K 暗环的半径又等于多少？

4.26 已知样板球面半径 $R_0=10$ cm，待测工作表面曲率半径为 R，并在垂直入射的红光($\lambda=650$ nm)下观察到第三个光圈的半径为 20 mm. 求工作表面与样板表面半径的偏差 $\Delta R=R_0-R$ 是多少？

4.27 已知钛酸锶的折射率为 $n_g=2.409$，若要在它上面镀一层消反射膜，薄膜材料的折射率和厚度应为多少？

4.28 在折射率为 1.5 的玻璃上镀一层折射率为 1.30 的透明薄膜，对于波长为 $\lambda=550$ nm 的入射光，膜厚应为多少才能使反射光干涉相消？镀膜后的反射率为多少？

4.29 用 He-Ne 激光照明迈克耳孙干涉仪，通过望远镜看到视场内有 20 个亮环，且中心是亮斑. 然后移动 M_1，看到环向中心收缩，并在中心消失了 20 环，此时视场内只有 10 个亮环. 试求：

(1) M_1 移动前中心亮斑的干涉级(设分束板 G_1 没有镀膜)；

(2) M_1 移动后第 5 亮环的角半径.

4.30 在迈克耳孙干涉仪的一臂放一长度 $l=5.00$ cm 的透明容器，容器两底与光线垂直，它的厚度忽略不计. 若把容器中空气缓缓抽空，看到在中心处吞入 49.5 个等倾圆环，设光波波长 $\lambda=589$ nm，求空气的折射率等于多少？

4.31 用水银灯发出的绿光($\lambda=546$ nm)照明迈克耳孙干涉仪，实验测得 M_1 和 M_2 相距 0.23 cm 时干涉条纹

消失，求光波的相干长度 L_0、谱线半宽度 $\Delta\lambda$、频谱宽度 $\Delta\nu$ 各是多少？

4.32 在迈克耳孙干涉仪的一臂上用凸面反射镜 M_2 代替平面镜（图 4.5），反射镜的曲率中心位于 OO_2 的延长线上，调节 M_1 的位置，使 $OO_1=OO_2$，假设半反射面 A 的镀膜恰使两相干光束的附加程差为零，用准直单色光照明，S 位于 L 的焦点上，问：

（1）观察到的干涉图样呈何形状？

（2）已知入射光波长 $\lambda=550$ nm，从中央往外数第 10 个暗纹的半径是 5 mm，则球面反射镜的曲率半径是多少？

（3）M_1 向分束板移近时干涉条纹如何变化？

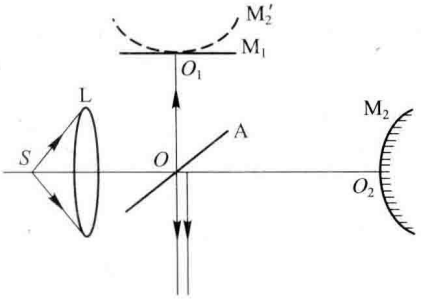


图 4.5

4.33 F-P 干涉仪工作表面的反射率为0.90，两反射表面相距 3 mm，用波长为 $\lambda=600$ nm 的单色光照明，求：

（1）精细系数 F、半强相位宽度 ε、精细度 F'；

（2）干涉条纹的最高级数 K 和中央往外数第 3 亮环的角半径.

4.34 F-P 干涉仪两工作表面的间距为 1 cm，其两侧各放一个焦距为 25 cm 的凸透镜 L_1 和 L_2，在 L_1 的焦平面上置一个直径为 2 cm的圆形面光源，光源中心在光轴上，它发射波长为 $\lambda=632.8$ nm 的单色光，空气的折射率取为 1，在 L_2 后焦面上放一接收屏，问：

（1）接收屏上中心点 F_2' 的干涉级是多少？屏上能观察到多少亮纹？其中半径最大条纹的干涉级和半径是多少？

（2）在两表面之间插入一块不透明薄板挡住表面的一半，干涉环将发生什么变化？

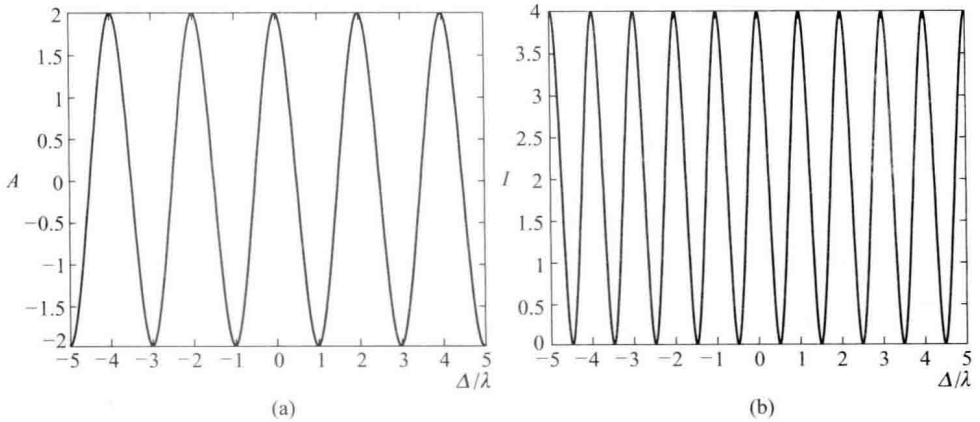
（3）用一块透明薄板代替上述不透明薄板，干涉环又将发生什么变化？

4.35 两光波的波长在 600 nm 附近相差 0.000 1 nm，要用 F-P 干涉仪把两谱线分辨开来，间隔至少需要多大？在这种情况下干涉仪的自由光谱范围是多少？设反射率$R=0.95$.

模拟计算习题

4.1 两光束干涉

已知入射光波长 $\lambda=632.8$ nm，两束光的振幅分别为 a 和 b. 根据下列两光束干涉的振幅和光强公式，模拟两光束干涉的合振幅和强度分布曲线. 图 4.6 为模拟结果示意图.



(a) (b)

图 4.6 模拟结果示意图

（a）$a=b=1$ 时，两光束干涉的振幅分布；（b）$a=b=1$ 时，两光束干涉的强度分布

振幅分布($a=b$)：　$A(\Delta)=2a\cos\left(\frac{k\cdot\Delta}{2}\right)$，$\Delta$ 为光程差

光强分布($a=b$)：　$I(\Delta)=2a^2[1+\cos(k\cdot\Delta)]$

光强分布($a\neq b$)：　$I(\Delta)=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos(k\cdot\Delta)$，其中 $I_1=a^2$，$I_2=b^2$

对比度：　$M=\frac{2\sqrt{I_1I_2}}{I_1+I_2}$

要求：改变振幅 a 或 b，观察两光束干涉条纹的对比度的变化.

4.2　多缝干涉

已知入射光波长 $\lambda=632.8$ nm，振幅 $a=1$，缝数 $N=3$. 根据下列公式，模拟多缝干涉的光强分布曲线. 图 4.7 为 $a=1$，$N=3$ 时的模拟结果示意图.

主极大相位半宽度：　$\delta(N)=2\pi/N$

光强分布：　$I=\left[a\cdot\frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}\right]^2$

要求：改变缝数 N，观察干涉条纹分布以及亮条纹锐度的变化.

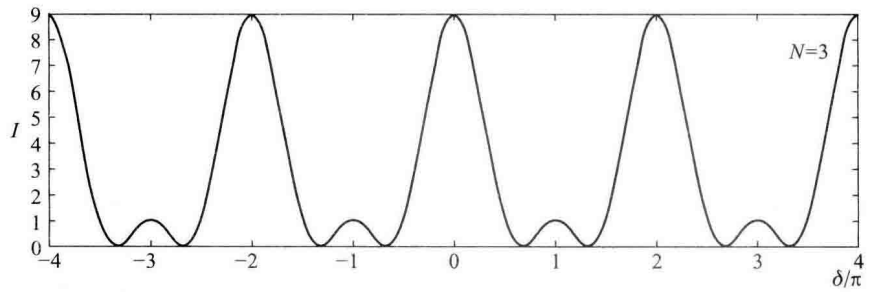


图 4.7　模拟结果示意图：$a=1$，$N=3$ 时的干涉光强分布

4.3　等厚干涉

将一个曲率半径为 $R=5$ m 的柱透镜的凸面紧贴在一块平板玻璃上，球面和平面相切于 O 点，如图 4.8(a)所示. 用波长为 $\lambda=632.8$ nm 的单位振幅平面波垂直照明，从反射光中可观察到等厚干涉条纹. 取 x、y 方向观察范围为：x 方向[−5 mm，5 mm]，y 方向[−5 mm，5 mm]，根据下列公式，模拟此时的等厚条纹分布.

空气层两表面反射的相干光线的光程差：$\Delta=2h+\frac{\lambda}{2}\approx\frac{x^2}{R}+\frac{\lambda}{2}$

第 K 级亮纹到中心的距离：$x_K=\sqrt{\left(K-\frac{1}{2}\right)\lambda R}$　$(K=1,2,3,\cdots)$

第 K 级暗纹到中心的距离：$x_K=\sqrt{K\lambda R}$　$(K=0,1,2,\cdots)$

两表面反射光的干涉光强分布：$I=4I_0\cos^2\left(\frac{k\Delta}{2}\right)=4I_0\cos^2\left[\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{x^2}{R}+\frac{\lambda}{2}\right)\right]$

要求：改变柱透镜曲率半径 R 和入射波长 λ 的大小，观察条纹分布的变化.

4.4　光场的时间相干性

已知杨氏双缝干涉实验中光源光谱为有一定带宽的均匀光谱，光源波长为 $\lambda_0=500$ nm，光源光谱带宽为 $\delta\lambda=\lambda_0/50$，光源波矢带宽为 $\delta k=k_0/50$，双缝中一缝的光强为 $I_0=1$. 以干涉条纹可见度来描述光源的时间相干性，根据下列光强和条纹可见度公式，模拟合光强和条纹可见度随光程差的变化曲线.

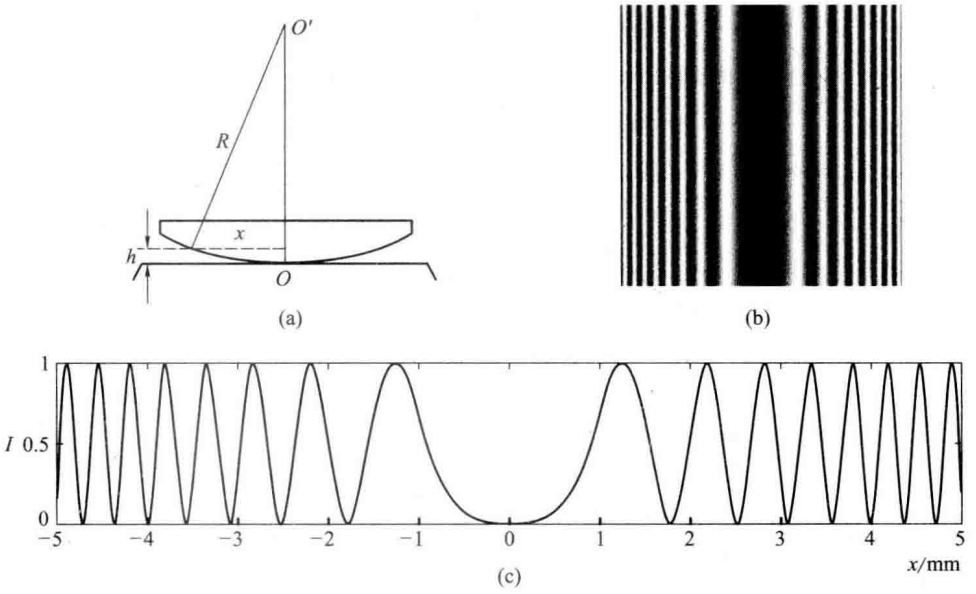


图 4.8 模拟结果示意图

(a) 柱透镜置于平板玻璃上的截面图;(b) 等厚干涉条纹($R=5$ m,$\lambda=632.8$ nm);
(c) 等厚干涉光强分布($R=5$ m,$\lambda=632.8$ nm)

缝光源所有点在观察屏处的合光强:

$$I=2I_0\left[1+\frac{2}{\delta k\cdot\Delta}\sin\left(\frac{\delta k}{2}\Delta\right)\cos(k_0\Delta)\right],\text{其中 }\delta k=\frac{2\pi}{\lambda^2}\cdot\delta\lambda$$

条纹可见度:

$$M=\left|\frac{\sin\left(\frac{\delta k}{2}\Delta\right)}{\frac{\delta k}{2}\Delta}\right|$$

波列的相干长度:

$$L=\frac{\lambda_0^2}{\delta\lambda}$$

4.5 光拍

设有两列由两个独立光源发出的、沿 z 方向传播的、频率相差很小的线偏振光波,其波函数为

$$E_1=a\cos(2\pi\nu_1 t-k_1 z+\varphi_1)$$

$$E_2=a\cos(2\pi\nu_2 t-k_2 z+\varphi_2)$$

为简单起见,假设这两列波的振动方向相同、振幅相等. 根据叠加原理,其合波场为

$$E=E_1+E_2=2a\cos\frac{1}{2}[2\pi(\nu_1+\nu_2)t-(k_1+k_2)z+(\varphi_1+\varphi_2)]$$

$$\times\cos\frac{1}{2}[2\pi(\nu_1-\nu_2)t-(k_1-k_2)z+(\varphi_1-\varphi_2)] \tag{1}$$

令

$$\bar{\nu}=\frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2),\quad \bar{k}=\frac{1}{2}(k_1+k_2),\quad \bar{\varphi}=\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)$$

$$\nu'=\frac{1}{2}(\nu_1-\nu_2),\quad k'=\frac{1}{2}(k_1-k_2),\quad \varphi'=\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)$$

其中，$\bar{\nu}$ 和 ν' 分别称为平均频率和调制频率，相应的 $\bar{k}$ 和 k' 则称为平均波数和调制波数，代入(1)式，得

$$E=2a\cos(2\pi\nu' t-k'z+\varphi')\cos(2\pi\bar{\nu}t-\bar{k}z+\bar{\varphi})$$

因为 $\nu_1-\nu_2\ll\nu_1$、ν_2，则 $\nu'\ll\bar{\nu}$，上式中的第一个余弦函数随时间的变化较第二个余弦函数缓慢得多，于是上式可写为

$$E=A(z,t)\cos(2\pi\bar{\nu}t-\bar{k}z+\bar{\varphi})$$

其中

$$A(z,t)=2a\cos(2\pi\nu' t-k'z+\varphi')$$

这表明上述两列频率相差很小的简谐波叠加后，其合成波可看作振动频率为 $\bar{\nu}$、振幅随时间作缓慢变化的向 z 方向传播的行波. 波的强度正比于振幅的平方，即

$$I(z,t)=[A(z,t)]^2=4a^2[1+\cos 2(2\pi\nu' t-k'z+\varphi')]$$

它在 $0\sim4a^2$ 之间按正弦曲线变化，其变化的频率为：$2\nu'=\nu_1-\nu_2$.

根据以上分析，如果使两个频率分别为 ν_1 和 ν_2 的音叉同时振动，就会听到一个频率约为 $\bar{\nu}$ 的时强时弱的声音，其强度变化的频率为 $\nu_1-\nu_2$. 这种现象称为**拍**，$\nu_1-\nu_2$ 则称为**拍频**. 如果用两列光波叠加，则称为**光拍**.

根据下表给出的参数和公式，模拟 $t=0$ 时刻由两个独立光源发出的、沿 x 方向传播的两光波的光拍的振幅和强度变化曲线. 图 4.9 为模拟结果示意图.

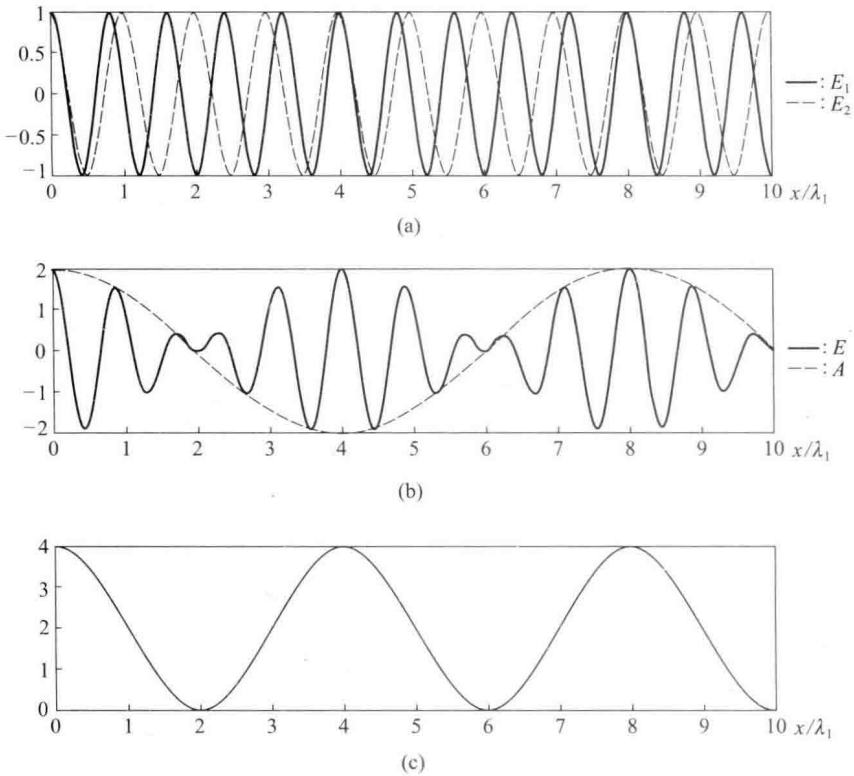


图 4.9　模拟结果示意图

(a) $t=0$ 时，波 1 和波 2 的波形；(b) $t=0$ 时，合波场波形和光拍的振幅变化曲线；(c) $t=0$ 时，光拍的强度变化曲线

要求:改变两光波振幅 a 或 b 的大小,模拟并观察不等振幅情况下光拍振幅的变化.

	波 1	波 2
振幅	$a=1$	$b=a=1$
波长	$\lambda_1=500\ \text{nm}$	$\lambda_2=0.8\lambda_1$
波数	$k_1=\dfrac{2\pi}{\lambda_1}$	$k_2=\dfrac{2\pi}{\lambda_2}$
波速	$v_1=3\times10^{11}\ \text{mm/s}$	$v_2=v_1=3\times10^{11}\ \text{mm/s}$
角频率	$\omega_1=k_1v_1$	$\omega_2=k_2v_2$
初相位	$\alpha_1=0$	$\alpha_2=0$
光波场的相位	$\varphi_1(x,t)=\omega_1t-k_1x+\alpha_1$	$\varphi_2(x,t)=\omega_2t-k_2x+\alpha_2$
光波场	$E_1(x,t)=a\cos\varphi_1$	$E_2(x,t)=b\cos\varphi_2$
光波合场	$E(x,t)=E_1(x,t)+E_2(x,t)$	
光拍的振幅	$A(x,t)=2a^2\cos\left(\dfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)$ $(a=b\text{ 时})$	
光拍的强度	$I(x,t)=A^2(x,t)$ $(a=b\text{ 时})$	

第五章　光的衍射

衍射和干涉一样是十分普遍的现象，是各种波诸如水波、声波、电磁波、物质波等都能表现出的现象. 声波、水波、无线电波的波长较长，衍射现象容易被察觉到. 例如窗户敞开时，我们可以在房间的角落里听到来自邻室的声音，无线电波可以绕过屏障被接收机所接收等都是极好的例证. 然而光波的波长较短，一般情况下光的衍射现象就不如声波或无线电波的衍射那样明显. 历史上最早对光的衍射现象作了记录的是格利马尔弟(F. M. Grimaldi，1618—1663)和胡克(R. Hooke，1635—1703). 在格利马尔弟的著作中仔细描述了用一个小光源照明小棍时，棍的阴影中出现光带的现象. 后来人们就是通过对干涉、衍射现象的长期研究，才逐渐认识到了光的波动性. 本章中我们将讨论各种衍射现象的规律以及它们的重要应用.

§5.1　光的衍射现象

5.1.1　什么是光的衍射

凡是不能用反射或折射予以解释的光偏离直线传播的现象称为**光的衍射**. 通常我们观察到的衍射现象是由不透明的障碍物引起的. 如图 5.1-1 所示，S 为点光源，D 为带有孔径可变的小圆孔的不透明屏，P 为接收屏. 当圆孔足够大时，在屏上生成一个均匀照明的光斑，光斑有清晰的边界，它的大小就是圆孔的几何投影. 随着圆孔逐渐缩小，开始光斑也相应地逐渐变小，然后光斑边缘开始模糊，并且在光斑周围出现若干比较淡的同心亮环. 此后若再缩小圆孔，光斑及圆环不但不跟着变小，反而会扩大. 上述实验表明，点光源 S 发出的光遇到障碍物后，进入了障碍物的几何阴影区域以内，引起障碍物后光场的重新分布，产生了衍射.

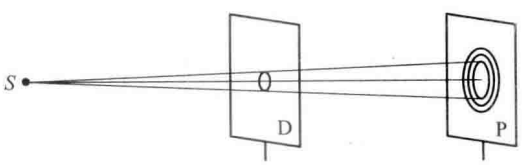


图 5.1-1　光的衍射现象

需要指出的是，不仅不透明的平面障碍物(如小圆孔、圆环、狭缝等)会产生衍射现象，光通过光学厚度(nh)不等的完全透明的三维障碍物(如带有空气泡的玻片、透明的生物标本等)时，在各处的相位延迟不一样，也会发生衍射现象. 例如，透过眼镜片上的小雨滴观看远处的路灯时，就可见到一系列亮暗相间的衍射环.

总之，当光波在传播路径中遇到障碍物时，不管障碍物是透明的或不透明的，只要波前受阻区域上的振幅和相位或二者之一的分布发生了改变，都会产生衍射现象.

5.1.2 衍射屏和屏函数

通常所研究的是具有各种形状的平面障碍物的衍射，我们把这些障碍物统称为**衍射屏**. 衍射屏将整个光波场分为前后两部分(图 5.1-2)，前场为入射场，它通常是比较简单的平面或球面波场；后场为衍射场，它一般是比较复杂的非均匀波场. 衍射屏的作用就在于引起了后场中光场的复振幅分布的改变. 若在衍射屏上建立一平面直角坐标系 Oxy，以 $\tilde{E}_i(x,y)$ 和 $\tilde{E}_t(x,y)$ 分别表示紧贴衍射屏前后两侧的入射场和衍射场的复振幅分布，则衍射屏的作用可用如下定义的**复振幅透射率函数**或**屏函数**表示：

$$\tilde{t}(x,y)=\frac{\tilde{E}_t(x,y)}{\tilde{E}_i(x,y)} \tag{5.1-1}$$

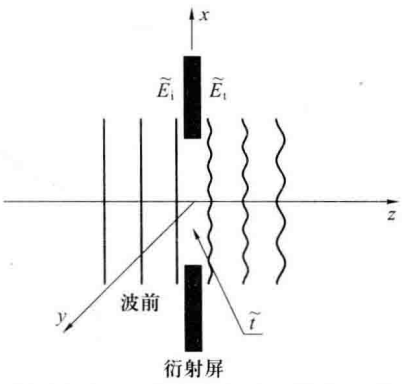


图 5.1-2 复振幅透射率函数的定义

屏函数 $\tilde{t}(x,y)$ 又称为**瞳函数**，一般为复函数. 它的模改变光场的振幅，它的辐角改变光场的相位. 如果它的辐角为常数，只改变光场振幅，这种衍射屏称为振幅型的；如果它的模为常数，只改变光场相位，则此衍射屏称为相位型的. 具有各种形状开孔(圆孔、矩孔、狭缝)的不透光屏是最简单的振幅型衍射屏，其屏函数的形式为：

$$\tilde{t}(x,y)=\begin{cases}1, & \text{透光部分}\\ 0, & \text{不透光部分}\end{cases} \tag{5.1-2}$$

各种相位波带片、相位光栅等则是相位型的衍射屏.

5.1.3 菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射

按照光源、衍射屏和接收屏三者之间的相对位置，可以将衍射现象分为两种类型：(1) 光源和接收屏或二者之一距离衍射屏为有限远时，所观察到的衍射称为**菲涅耳衍射**[图 5.1-3(a)]；

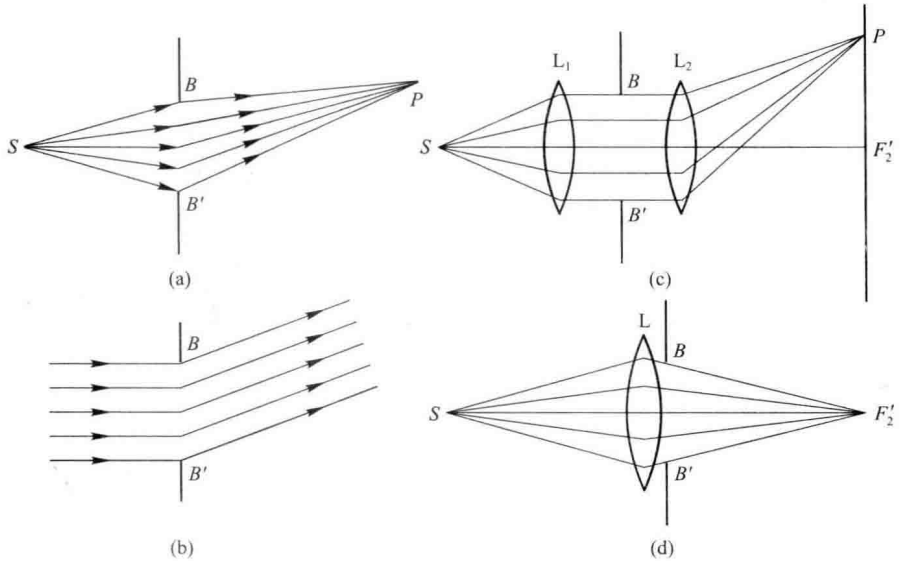


图 5.1-3 (a) 菲涅耳衍射；(b) 夫琅禾费衍射；(c)和(d) 观察夫琅禾费衍射的实验装置

(2) 光源和接收屏距离衍射屏都在无穷远或相当于无穷远,在衍射孔上的入射波和各方向的衍射波都可看成平面波,这时所观察到的衍射称为**夫琅禾费衍射**[图 5.1-3(b)]. 通常用远场接收或图 5.1-3(c)所示实验装置观察夫琅禾费衍射,其中光源 S 和接收屏分别置于透镜 L_1 和 L_2 的物方焦点和像方焦面上,因此它们距衍射屏等效于无限远. 在此装置中,F_2' 为 L_2 的像方焦点,也是 S 经 L_1 和 L_2 所成的共轭像点. 因为 S 发出的光线经 L_1 后成为平行光,将 L_1 和 L_2 靠近直至无限接近而成一个透镜[图 5.1-3(d)],L_2 后焦面上的衍射图样不会发生变化. 由此可见,在光源的共轭像面上也可观察到夫琅禾费衍射图样. 对此在 §6.2 中还将用波动理论予以证明.

图 5.1-4 所示为几种衍射孔和它们的菲涅耳衍射及夫琅禾费衍射图样照片. 由图可见,入射

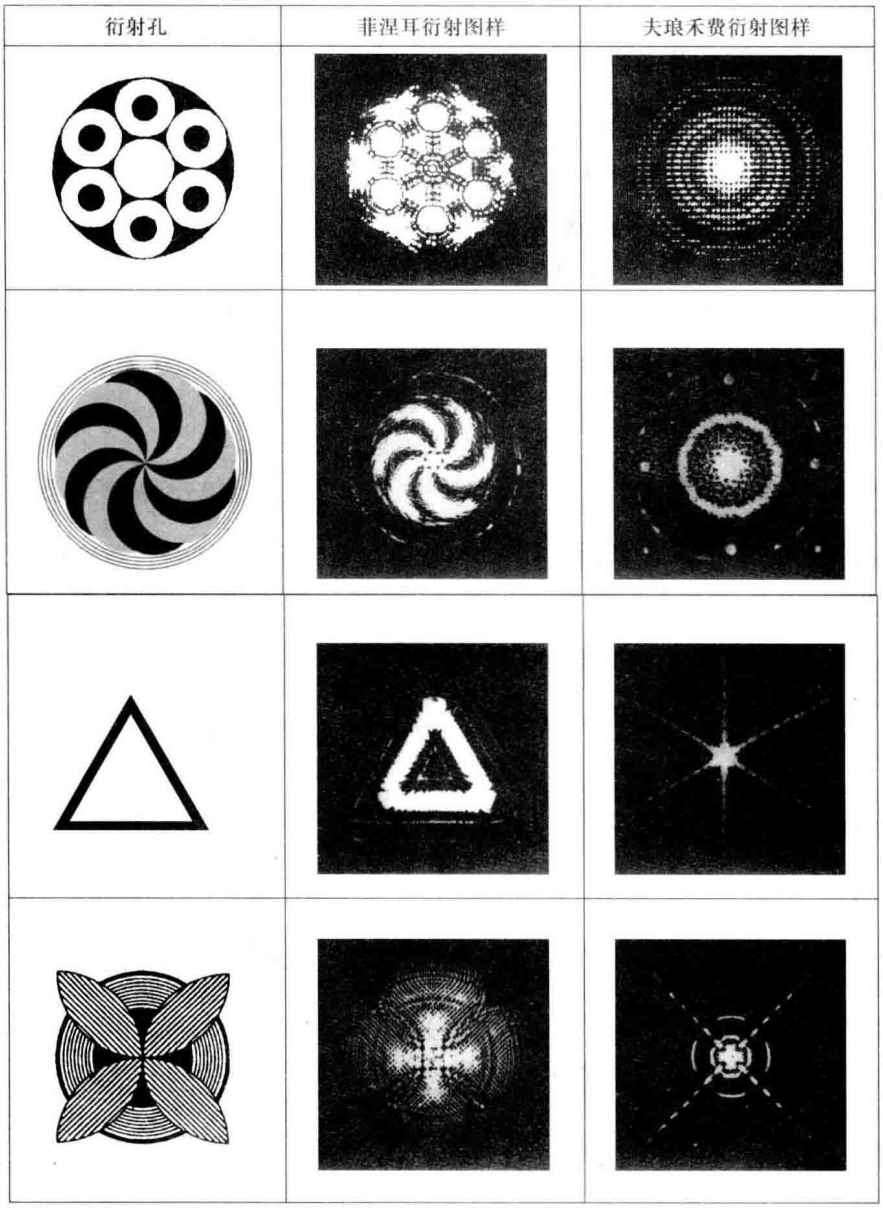


图 5.1-4 几种衍射孔和它们的菲涅耳衍射及夫琅禾费衍射图样照片

波前在什么方向受限制，衍射图样就沿该方向扩展，受限制愈严重方向上的扩展也愈厉害. 菲涅耳衍射图样是带衍射条纹的衍射孔的投影像；夫琅禾费衍射图样则是带衍射条纹的光源的投影像，它与衍射孔的形状很少相似或者完全不相似.

§5.2 惠更斯-菲涅耳原理

惠更斯-菲涅耳原理是波动光学的基本原理，是处理衍射问题的一种理论基础.

5.2.1 惠更斯原理及其困难

为了说明波从振源发出在空间传播的机理，惠更斯在1690年发表的《光论》一书中提出了一个原理，后来被称为惠更斯原理：波面上每一点都可看作一个次级扰动中心，它产生球面次波，这些次波的包络面就是次一时刻的波面. 图5.2-1示出用惠更斯原理说明球面波和平面波的传播情况，图中 v 表示波速，S 为 t 时刻的波面，S' 则为按照惠更斯原理作出的 $t+\Delta t$ 时刻的波面. 根据惠更斯原理可以由前一时刻波面的位置求出次一时刻波面的位置，在各向同性介质中波面的法线就是波的传播方向，所以惠更斯原理可以解决波面未受阻情况下均匀波的传播方向问题. 此外，还可由它导出反射和折射定律，解释方解石的双折射现象等. 但是原始形式的惠更斯原理有很大的局限性，用它不能说明干涉和衍射现象，而且由惠更斯原理还会得出实际并不存在的倒退波[图 5.2-1(a)中的 S'']. 为了避免倒退波的出现，惠更斯的理论中又引进了一些附加的假设.

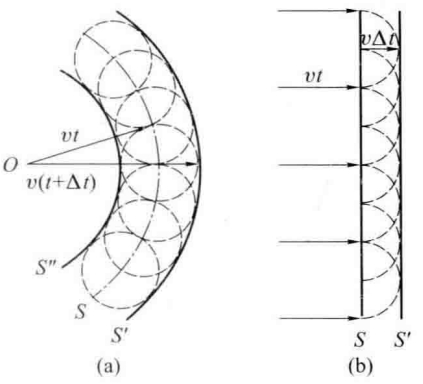


图 5.2-1 惠更斯原理

惠更斯原理为什么会存在这些困难呢？这是因为惠更斯只注意到了波是扰动的传播，而对波的时空周期性缺乏认识. 他把光看成像声波那样的纵波，他所谓的扰动只不过是一些非周期的无规脉冲. 惠更斯原理与波长这样一些描写波动时空周期性的物理量没有联系，但是，时空周期性已隐含了空间各次波源的相位的确定联系，因而不能根据这个原理去计算各个方向传播的波的振幅和相位，也就无法用它去解释干涉和衍射现象. 所以惠更斯原理只是对于波面传播的几何位置的定性描述，它实质上是一个几何光学原理，或者说是一种几何作图法.

5.2.2 惠更斯-菲涅耳原理

惠更斯原理提出后的一百多年时间里，波动说并未取得明显的进展，直到1801年杨氏作了著名的双缝干涉实验并用波动理论予以解释，才为波动说奠定了坚实的基础. 菲涅耳当时并不知道杨氏的工作，1818年巴黎科学院举办了一次以解释光的衍射现象为主题的科学竞赛，法国年轻物理学家菲涅耳(A.J.Fresnel，1788—1827)夺得了优胜. 他的主要成就在于对干涉现象作了广泛研究以后，认为惠更斯原理中提出的次波来自同一波源，它们应该是相干的. 菲涅耳汲取了惠更斯原理中的次波概念，并用次波相干的思想补充了惠更斯原理而发展成为**惠更斯-菲涅耳原**

理.这个原理可表述为:点光源 L 在空间某点 P 所产生的扰动可以看作是波前 S 上连续分布的假想的次波源在该点所产生的相干振动的叠加.

如图 5.2-2 所示,设波前 S 上任意点 Q 处的次波源 $\mathrm{d}S$ 在场点 P 所产生的振动的复振幅为 $\mathrm{d}\tilde{E}(P)$,则 P 点的扰动的复振幅是各面元对 P 点的贡献之和,于是可表示为

$$\tilde{E}(P)=\int_S \mathrm{d}\tilde{E}(P) \tag{5.2-1}$$

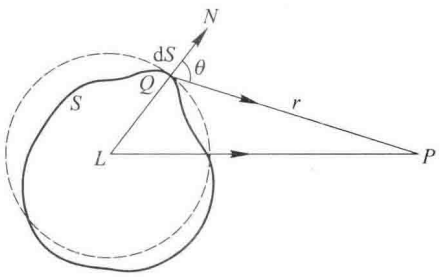


图 5.2-2　惠更斯-菲涅耳原理

上式即为惠更斯-菲涅耳原理的数学表示式.式中积分面 S 即波前,可取 L 和 P 之间的任意曲面,为计算简单计,常取点源 L 发出的光波的波面,即以 L 为中心的球面.既然次波源的振动来自初波,那么它们之间应有下列关系:(1) 球面次波的频率与初波相同;(2) 次波源的初相与初波到达 Q 点的相位相同;(3) 次波在 P 点的振幅与初波在 Q 点的振幅成正比.为了能用上式计算衍射场,菲涅耳又假定次波在 P 点的振幅与元波面 $\mathrm{d}S$ 的大小成正比,并与 Q 点到场点 P 的距离 r 成反比,还与元波面的法线和径矢 $\boldsymbol{r}$ 之间的夹角 θ 有关,它们的关系可用函数 $F(\theta)$ 来表示.即次波在 P 点的振幅正比于 $\mathrm{d}S$、$\frac{1}{r}$、$F(\theta)$,于是 $\mathrm{d}S$ 在 P 点的振动可表示为

$$\mathrm{d}\tilde{E}(P)=c\,\tilde{E}(Q)\frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}F(\theta)\,\mathrm{d}S \tag{5.2-2}$$

式中 c 为比例常数,$k=2\pi/\lambda$,$F(\theta)$ 称为倾斜因子,它是随 θ 而变的一个函数,$\tilde{E}(Q)$ 为 L 在 Q 点所产生的振动的复振幅,将上式代入(5.2-1)式得

$$\tilde{E}(P)=c\int_S \tilde{E}(Q)\frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}F(\theta)\,\mathrm{d}S \tag{5.2-3}$$

上式称为**菲涅耳衍射积分公式**.衍射所研究的基本问题就是根据光传播路径中某一面上(例如衍射屏)光场的复振幅分布求出其后一面上(例如接收屏)光场的复振幅分布,惠更斯-菲涅耳原理中的次波相干叠加思想把这两个面联系了起来,所以惠更斯-菲涅耳原理的意义就在于把波的传播问题转变成了易于处理的叠加问题.利用(5.2-3)式原则上可以计算各种衍射屏的衍射场,但是这一积分在一般情况下常常是很复杂的,只对某些简单情况才能严格求解,在大多数情况下实际应用的都是近似的数值解.

虽然利用惠更斯-菲涅耳原理可以计算某些简单形状开孔的衍射场,从而相当满意地解释许多衍射现象,但是它还存在两个主要问题:第一,按(5.2-3)式计算所得 P 点光振动的相位比它实际的相位落后 $\pi/2$,不过在大多数情况下我们只考察屏上的强度分布,$\pi/2$ 的相位差异对衍射图样并无影响;第二,为了解释没有所谓倒退波的存在,菲涅耳假设 $\theta=0$ 时 $F(\theta)=1$,而 $\theta>\pi/2$ 时 $F(\theta)=0$.这是在原理之外附加的假设,而且他没有给出 $F(\theta)$ 的具体形式.基尔霍夫的理论解决了这两个问题.

5.2.3 基尔霍夫衍射积分公式

惠更斯-菲涅耳原理最初是作为假设提出来的，并无任何理论证明. 1882 年基尔霍夫(Kirchhoff,1824—1887)证明，菲涅耳衍射积分公式可根据标量波动微分方程，运用数学中的格林定理和一些边界条件推导出来. 他得出单色点源 L 发出的球面波照射具有开孔 S_0 的衍射屏后，衍射场中任一点 P 的光振动可表示为

$$\tilde{E}(P)=\frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\iint_{S_0}\tilde{E}(Q)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\frac{\cos\theta_0+\cos\theta}{2}\mathrm{d}S \tag{5.2-4}$$

上式称为**基尔霍夫衍射积分公式**，式中 θ_0 和 θ 分别为 L 到 Q 的矢径和 Q 点到 P 点的矢径与 Q 点处面元 $\mathrm{d}S$ 的法线之间的夹角(图 5.2-3). 将(5.2-4)式与(5.2-3)式比较可以看出，两者基本上是一致的.

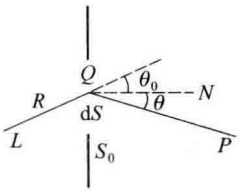


图 5.2-3 点光源 L 对衍射场中 P 点的作用

应当指出，在推导(5.2-4)式时并未引入次波的假设，如果把(5.2-4)式中的积分面元 $\mathrm{d}S$ 看作惠更斯-菲涅耳原理中的次波源，则它在 P 点所产生的元振动为

$$\mathrm{d}\tilde{E}(P)=\frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\tilde{E}(Q)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\frac{\cos\theta_0+\cos\theta}{2}\mathrm{d}S \tag{5.2-5}$$

将上式和(5.2-2)式比较可得出菲涅耳衍射积分公式中的倾斜因子和比例常数为

$$F(\theta_0,\theta)=\frac{\cos\theta_0+\cos\theta}{2},\quad c=\frac{1}{\mathrm{i}\lambda} \tag{5.2-6}$$

由此可知：首先，次波在各个方向上的振幅是不相等的，在平面波正入射的情况下 $\theta_0=0$，$F(\theta_0,\theta)=(1+\cos\theta)/2$，当 θ 从 0 增加到 π 时 $F(\theta)$ 从 1 减小到 0，即波法线方向上的振幅最大，其反方向的振幅为零，基尔霍夫公式不仅给出了倾斜因子的函数形式，而且说明了菲涅耳的假设[$\theta=\pi/2$ 时，$F(\theta)=0$]是不正确的；其次，因为 $\frac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$，这表明次波源的相位比入射波超前 $\pi/2$，由此计算所得场点的相位与实际情况符合；再者，(5.2-5)式表明次波的振幅还与入射光波长 λ 成反比. 总之，若把积分面元看作次波源，它应具有上述的三个性质. 然而这些性质都是真实点光源所不具有的，所以惠更斯-菲涅耳原理中的次波源并不是真实的点光源，它完全是为了处理衍射问题而引入的一种假设.

基尔霍夫衍射理论为惠更斯-菲涅耳原理奠定了理论基础，克服了惠更斯-菲涅耳原理所存在的问题. 但是在推导(5.2-4)式时所使用的边界条件只有在源点和场点到衍射屏的距离远大于光波长，以及衍射孔的线度(D)比光波长大得多的情况下($R\gg\lambda$，$r\gg\lambda$，$D>\lambda$)才近似成立，这也就是对基尔霍夫公式(当然也包括菲涅耳积分公式)适用范围的限制条件，不过这种条件在一般的光波衍射问题中都是满足的. 必须注意，基尔霍夫理论把光波当做标量波处理，即只考虑电场或磁场的一个横向分量的标量振幅，忽略了电场矢量和磁场矢量的各个分量是通过麦克斯韦方程组耦合起来的，不能独立处理. 严格的衍射理论是电磁场的矢量波理论，本书不拟讨论.

§5.3　狭缝和矩孔的夫琅禾费衍射

夫琅禾费衍射场的计算比菲涅耳衍射简单得多，而且实际上也十分重要. 本节我们讨论单狭缝和矩孔的夫琅禾费衍射.

5.3.1　单狭缝的夫琅禾费衍射

1. 实验装置和现象

观察夫琅禾费衍射的实验装置如图 5.3-1 所示. 图中点光源 S 置于透镜 L_1 的物方焦点上，接收屏置于透镜 L_2 的像方焦面内. 从 S 发出的球面波经 L_1 变成平面波照射到 L_2 上. 在衍射屏未插入时，由于透镜的通光孔径较大，可以忽略它的边框对入射波面的限制，于是在接收屏中央观察到点光源 S 的清晰的几何光学像点 S'.

如果在 L_1 和 L_2 之间插入一块开有狭缝的遮光板，缝的长度 b 比宽度 a 大得多，在接收屏上出现的不再是一个亮点，而是在与缝垂直方向上扩展开来的衍射图样. 图样中心是一个很亮的亮斑，中央亮斑的宽度为其他亮斑宽度的两倍，如图 5.3-2(a)所示.

若把点光源换成一个平行于狭缝的线光源，例如一单丝灯，而线光源可以看作是一系列非相干点光源的集合，其上任一点都产生一组独立的衍射斑，例如 S 和 S_1 分别产生中心在 S' 和 S_1' 的衍射斑. 各组衍射斑在线光源方向上有一平移，各个点源产生的衍射斑非相干地叠加在一起就得一组线状衍射条纹，如图 5.3-2(b)所示.

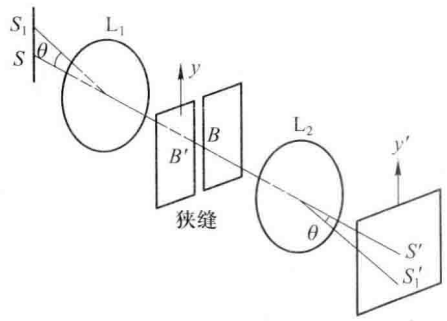


图 5.3-1　线光源上不同点生成的衍射斑

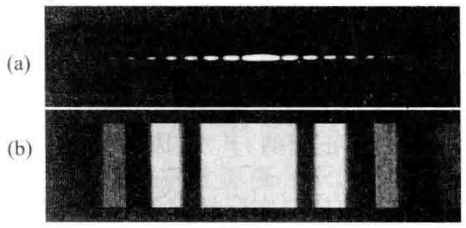


图 5.3-2　点光源和线光源照明狭缝产生的夫琅禾费衍射图样

2. 衍射光强分布公式

图 5.3-3 中，取坐标系 $Oxyz$ 的原点在狭缝中心，z 轴沿系统的光轴，y 轴沿狭缝的长方向，x 轴沿狭缝的宽方向. 一般说来，当衍射孔具有任意形状时，衍射图样是向各个方向扩展的. 但是在狭缝的长度 b 较宽度 a 大得多的情况下，衍射图样基本上只沿与狭缝垂直的方向扩展，因此计算接收屏上的夫琅禾费衍射场时，我们只需考虑 x 方向上光振动的复振幅分布，换句话说，可把它作为一维问题处理. 将入射波前经 BB' 缝露出部分分为许多平行于缝长方向的等宽窄条带 $\mathrm{d}S$，各带发出的衍射角为 θ 方向的次波经透镜 L_2 会聚于接收屏上的 P 点，因而 L_2 像方焦面上的一点是与一个衍射方向 θ 相对应的. 在缝内距原点为 x 的 Q 处取一宽为 $\mathrm{d}x$ 的窄条带作为积分面

元，即 $dS=b\,dx$，它到 P 点的光程为 r，按照菲涅耳-基尔霍夫公式(5.2-4)式，P 点的光场为

$$\tilde{E}(P)=\frac{1}{i\lambda}\iint_{S_0}\tilde{E}(Q)\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\cos\theta_0+\cos\theta}{2}dS$$

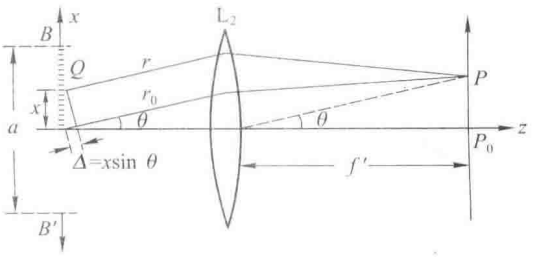


图 5.3-3 计算 P 点的复振幅用图

在傍轴条件下 $\cos\theta_0\approx\cos\theta\approx1$，而且被积函数分母中的 r 可用缝中心至 P 点的光程 r_0 代替. $\tilde{E}(Q)=\tilde{E}_0\tilde{t}(x)$，$\tilde{E}_0$ 为入射平面波在 BB' 上的复振幅，它是一个复常数. $\tilde{t}(x)$ 为单狭缝的复振幅透射率函数，它可以写作

$$t(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant a/2\\ 0, & |x|>a/2\end{cases}$$

于是则得

$$\tilde{E}(P)=\frac{b\tilde{E}_0}{i\lambda r_0}\int t(x)e^{ikr}dx \tag{5.3-1}$$

由图 5.3-3 可知 $\Delta=r_0-r=x\sin\theta$，于是(5.3-1)式可写为

$$\tilde{E}(P)=\frac{b\tilde{E}_0}{i\lambda r_0}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}t(x)e^{ik(r_0-x\sin\theta)}dx=\frac{b\tilde{E}_0e^{ikr_0}}{i\lambda r_0}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}t(x)e^{-ikx\sin\theta}dx$$

将上式中与 x 无关的量归并到一起用复常数 $\tilde{C}$ 表示，则得

$$\begin{aligned}\tilde{E}(P)&=\tilde{C}\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}}t(x)e^{-ikx\sin\theta}dx=\tilde{C}\frac{e^{-ikx\sin\theta}}{-ik\sin\theta}\Bigg|_{x=-a/2}^{x=+a/2}=\frac{2\tilde{C}\sin\frac{ka\sin\theta}{2}}{k\sin\theta}\\&=\tilde{C}a\frac{\sin\frac{ka\sin\theta}{2}}{\frac{ka\sin\theta}{2}}\end{aligned} \tag{5.3-2}$$

若令 $\alpha=\dfrac{ka\sin\theta}{2}=\dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$，它表示狭缝边缘两点在 P 点所产生的振动相位差之半，则得

$$\tilde{E}(P)=\tilde{A}_0\frac{\sin\alpha}{\alpha} \tag{5.3-3}$$

式中 $\tilde{A}_0=a\tilde{C}$，P 点的振幅为 $A(P)=A_0\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$，$P$ 点的光强则为

$$I(P)=\tilde{E}(P)\tilde{E}^{*}(P)=I_0\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2} \tag{5.3-4}$$

式中 $I_0=|\tilde{A}_0|^2=|a\tilde{C}|^2$，表示屏中心 P_0 处的光强. 上式即为单狭缝夫琅禾费衍射光强分布公式.

3. 光强分布公式的讨论

将(5.3-3)和(5.3-4)式用曲线表示，如图 5.3-4 所示. 图中横坐标表示 $\sin\theta$，纵坐标表示相对振幅$\frac{A_P}{A_0}=\frac{\sin\alpha}{\alpha}$及相对强度$\frac{I_P}{I_0}=\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}$，虚线表示相对振幅随 $\sin\theta$ 的变化，实线表示相对强度随 $\sin\theta$ 的变化.

当 $\theta=0$ 时，$\alpha=0$，(5.3-4)式成为不定式. 利用洛必达法则求极限值得

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}=1,\quad I=I_0$$

即各次波源在 $\theta=0$ 的方向上发出的衍射波在接收屏中央 P_0 点的相位差为零，它们叠加产生极大强度，称为中央主极大. 而且 P_0 点就是点光源 S 经 L_1、L_2 所生成的几何光学像点.

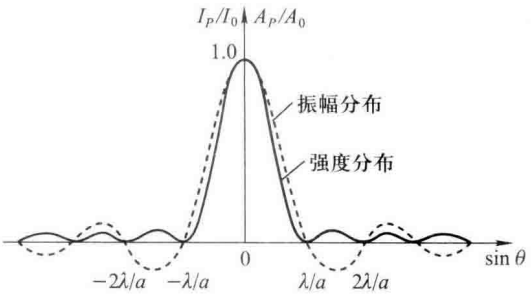


图 5.3-4　单缝衍射的振幅及强度分布曲线

图 5.3-4 表明，在中央主极大两侧还对称分布着一些强度为极值的点，可将(5.3-4)式求一阶导数并使之为零而求得它们的位置. 令

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha}=I_0\frac{2\sin\alpha(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)}{\alpha^3}=0 \tag{5.3-5}$$

因为上式分子中任一因子为零均可使分数为零，当 $\alpha\cos\alpha-\sin\alpha=0$，即

$$\alpha=\tan\alpha \tag{5.3-6}$$

时，强度也为极大值. 但因它们较主极大的强度弱得多，所以称为次极大. 上式是一个超越方程，解此方程须用图解法. 如图 5.3-5 所示，在同一坐标系中作曲线 $f_1(\alpha)=\tan\alpha$ 与直线 $f_2(\alpha)=\alpha$，它们的交点就是方程(5.3-6)式的解，再将这些解代入(5.3-4)式可得各次极大的强度值. 为简明计，将它们列于表 5.3-A 中. 由表可见，各次极大处于两极小中间略微偏向零级中央主极大的位置.

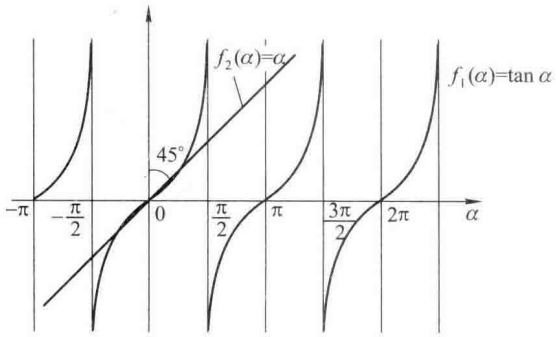


图 5.3-5　两条曲线的交点是方程(5.3-6)式的解

当 $\sin\alpha=0$，即 $\alpha=\pm K\pi(K=1,2,3,\cdots)$ 时，$I_P=0$. 即强度为零点的位置决定于下式：

$$\sin\theta=\pm\frac{K\lambda}{a}\quad(K=1,2,3,\cdots)\tag{5.3-7}$$

表 5.3-A 次极大的位置和相对强度

次极大的位置	α	$\pm1.43\pi$	$\pm2.46\pi$	$\pm3.47\pi$	$\pm4.48\pi$
	$\sin\theta$	$\pm1.43\ \lambda/a$	$\pm2.46\ \lambda/a$	$\pm3.47\ \lambda/a$	$\pm4.48\ \lambda/a$
次极大的相对强度 I/I_0		0.047 2	0.016 9	0.008 3	0.005 0

在傍轴近似条件下，上式可写作

$$\theta=\pm\frac{K\lambda}{a}\quad(K=1,2,3,\cdots)\tag{5.3-8}$$

我们用相邻两极小之间的角距离表示衍射亮斑的角宽度，则中央亮斑的半角宽度

$$\Delta\theta=\frac{\lambda}{a}\tag{5.3-9}$$

等于其他亮斑的角宽度，即零级衍射斑的角宽度为其他级衍射斑角宽度的两倍. 而且中央主极大的光强比次极大的光强大得多，在零级衍射斑内约集中了衍射光能的 93%.

由(5.3-9)式可知，当波长一定时，缝愈窄对光束限制愈大，衍射场愈弥散，衍射斑扩展得愈宽；反之，若缝愈宽，$\Delta\theta$ 愈小，各衍射斑向中心收缩，衍射效应愈不明显. 当缝很宽时($a\gg\lambda$)，衍射光能基本上集中在沿着直线传播的方向上，我们就看不到衍射现象了. 另一方面，在保持缝不变的条件下，$\Delta\theta$ 与 λ 成正比，波长愈长，衍射效应愈显著；波长愈短，衍射效应愈不明显. 因此可以认为几何光学是波动光学在波长趋于零时的极限情形.

5.3.2 矩孔的夫琅禾费衍射

在图 5.3-1 中将单狭缝换为矩孔，就可在接收屏上观察到矩孔的夫琅禾费衍射图样. 设矩孔的长为 b，宽为 a，取坐标原点位置在矩孔的中央，x 轴和 y 轴分别与它的两边平行(图 5.3-6). 根据菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式(5.2-4)，在傍轴近似条件下可求得接收屏上任一点 P 的复振幅为

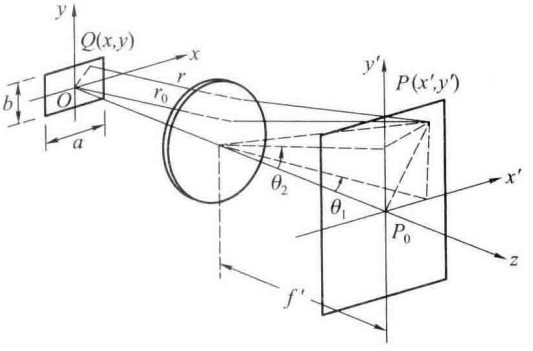


图 5.3-6 夫琅禾费矩孔衍射

$$\tilde{E}(P)=ab\tilde{C}'\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\beta} \tag{5.3-10}$$

其中$\tilde{C}'$为一复常数，α 和 β 决定于下式：

$$\alpha=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta_1=\frac{\pi a}{\lambda}\frac{x'}{f'},\quad \beta=\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta_2=\frac{\pi b}{\lambda}\frac{y'}{f'} \tag{5.3-11}$$

其中(x',y')为 P 点的坐标，θ_1 和 θ_2 为与 P 点对应的衍射方向的两个方向角的余角，它们都是从 z 轴量起并分别位于 $x'z$ 和 $y'z$ 面内，f'为 L_2 像方焦距，P 点的强度则为

$$I_P=I_0\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\cdot\frac{\sin^2\beta}{\beta^2} \tag{5.3-12}$$

上式表明矩孔衍射的相对光强 I_P/I_0 是两个单缝衍射强度因子的乘积. 由上式可知，当 θ_1 和 θ_2 为零时，即在正对矩孔中心的 P_0 处光强最大，称为中央主极大. 在 x'和 y'方向上有分别和$\frac{\sin\alpha}{\alpha}$和$\frac{\sin\beta}{\beta}$相对应的极小和次极大. 因为上式中任一因子为零处光强均为零，即当

$$\alpha=\pm K\pi,\quad \sin\theta_1=\pm\frac{K\lambda}{a}\quad (K=1,2,3,\cdots)$$

$$\text{或}\ \beta=\pm K'\pi,\quad \sin\theta_2=\pm\frac{K'\lambda}{b}\quad (K'=1,2,3,\cdots)$$

时，$I_P=0$，因此零强度点分布在与矩孔两边平行的两组直线上. 中央主极大旁的第一极小决定了中央亮斑的范围，大部分的衍射光能都集中在中央亮斑内. 在这两组强度为零的暗线所隔成的每一矩形中还有一次极大，但是除了在 x'和 y'轴上的那些次极大的强度稍大外，其余次极大的强度都很弱，所以衍射图样主要是分布在与孔两边平行的一个十字线上的亮斑(图 5.3-7). 此外，在中央亮斑附近还有一些很弱的亮斑.

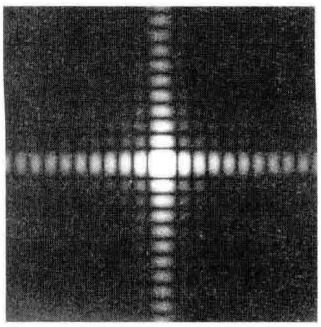


图 5.3-7　矩孔夫琅禾费衍射图样

如果孔的两边相等($a=b$)，则 x'和 y'两个方向上衍射斑点具有相同的角宽度. 如果孔的两边不等，则 x'和 y'两个方向上衍射斑点具有不同的角宽度，即

$$\Delta\theta_1=\frac{\lambda}{a}\text{和}\ \Delta\theta_2=\frac{\lambda}{b} \tag{5.3-13}$$

因为 $\Delta\theta_1$、$\Delta\theta_2$ 分别与 a 和 b 成反比，所以 y'方向上衍射斑的角宽度比 x'方向小 b/a 倍. 当 $b\gg a$ 时，衍射图样在 y'方向上紧缩得无限窄. 例如，有一矩孔长为5 mm，宽为 5 μm，光源发出的单色光波长为 500 nm，则由(5.3-13)式可得

$$\Delta\theta_1=\frac{\lambda}{a}=10^{-1}\text{rad}=5.7^\circ,\quad \Delta\theta_2=\frac{\lambda}{b}=10^{-4}\text{rad}=20''$$

即长方向的衍射斑比宽方向紧缩 1 000 倍，实际上已观察不到该方向上的衍射效应. 这就是在计算单狭缝的衍射场时把它作为一维问题处理的根据.

§5.4 圆孔、圆环和多边形孔的夫琅禾费衍射

5.4.1 圆孔的夫琅禾费衍射

将图5.3-1中的单狭缝换成圆孔，就可在接收屏上观察到圆孔的夫琅禾费衍射图样(图5.4-1)，它的中央是一个很亮的圆斑，外面分布着几圈很淡的亮环. 因为大多数光学仪器的通光孔都呈圆形，所以研究圆孔的夫琅禾费衍射有很重要的实际意义. 借用图5.3-3，设圆孔的半径为 R，与 P 点对应的衍射角为 θ，令

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}R\sin\theta$$

表示圆孔边缘和中心的次波源在 P 点所产生的振动的相位差，根据菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式，可求得 P 点的光强为

$$I_P=I_0\left[\frac{2\mathrm{J}_1(\delta)}{\delta}\right]^2 \qquad (5.4-1)$$

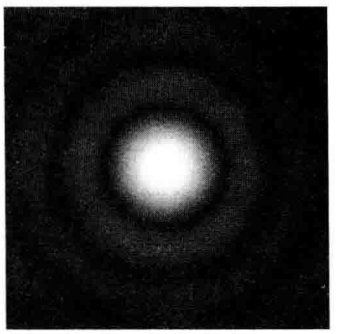


图 5.4-1 圆孔夫琅禾费衍射图样

式中 I_0 为图样中心 P_0 点的光强，$\mathrm{J}_1(\delta)$ 为一级贝塞尔函数，它是一个特殊函数，可以展开成级数

$$\mathrm{J}_1(\delta)=\frac{\delta}{2}-\frac{\delta^3}{2^2\cdot 4}+\frac{\delta^5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6}-\cdots$$

以 $\sin\theta$ 为横坐标，I_P/I_0 为纵坐标，可将(5.4-1)式用图5.4-2所示的曲线表示，其强度值是查贝塞尔函数表得出的. 表5.4-A列出了几个强度为极值的位置和相对强度.

由此可知，夫琅禾费圆孔衍射图样的中央是一个非常亮的圆斑，集中了衍射光能的83.8%. 因为(5.4-1)式最先是由艾里(Airy，1801—1892)计算出来的，所以通常称此零级衍射斑为**艾里斑**. 它的中心是点光源的几何光学像，它的半角宽度 θ_0 决定于第一极小的衍射角. 因为衍射角 θ 一般都较小，可取 $\sin\theta\approx\theta$，则

$$\theta_0=0.61\ \lambda/R=1.22\ \lambda/D \qquad (5.4-2)$$

式中 $D=2R$ 为圆孔的直径. 若 L_2 的焦距为 f'，则艾里斑的半径为

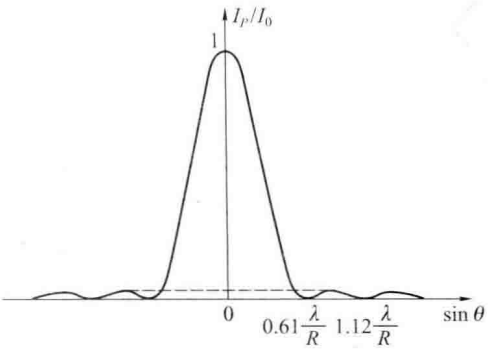


图 5.4-2 夫琅禾费圆孔衍射光强分布

$$r=\theta_0 f'=(1.22\ \lambda/D)f' \qquad (5.4-3)$$

表 5.4-A　圆孔夫琅禾费衍射强度分布的几个极值

	中央主极大	第一极小	第一次极大	第二极小	第二次极大	第三极小	第三次极大
$\sin\theta$	0	$0.61\lambda/R$	$0.81\lambda/R$	$1.12\lambda/R$	$1.33\lambda/R$	$1.62\lambda/R$	$1.85\lambda/R$
I_P/I_0	1	0	0.017 5	0	0.004 5	0	0.001 6

任何一个透镜、反射镜或其他光学元件总有一定的通光孔径，所以即使不加光阑，入射波前都要受到限制而产生衍射. 因此，即使将一个点光源置于理想透镜的焦点上，也不可能得到严格的平行光. 衍射光束的发散程度可用零级衍射斑的角宽度来量度，为了减少光束的发散应尽可能增大光束的初始直径，为此可应用各种扩束器. 例如可使平行光束从望远镜的目镜射入后从物镜射出以达到扩束的目的；例如在用激光测定月球和地球之间的距离时，就曾使用大型天文望远镜作扩束器.

5.4.2　圆环的夫琅禾费衍射

在反射式物镜中常常安装有圆环形光阑，讨论其夫琅禾费衍射是有实际意义的. 在一块不透光屏上开一个圆环形透光孔(图 5.4-3)，圆环的内半径为 R_1，外半径为 R_2，令 $\varepsilon=R_1/R_2$，则 $0<\varepsilon<1$. 将此衍射屏置于夫琅禾费衍射装置(图 5.3-1)中，根据叠加原理，接收屏上任一点 P 的场是半径为 R_2 和 R_1 的圆孔在该点所产生的衍射场之差，因此可得 P 点的强度为

$$I(P)=\frac{I_0}{(1-\varepsilon^2)^2}\left[\frac{2J_1(\delta_2)}{\delta_2}-\varepsilon^2\frac{2J_1(\delta_1)}{\delta_1}\right]^2 \tag{5.4-4}$$

式中 $\delta_1=\dfrac{2\pi R_1}{\lambda}\sin\theta$，$\delta_2=\dfrac{2\pi R_2}{\lambda}\sin\theta$. 当 $\varepsilon=0$ 时，上式即为圆孔的夫琅禾费衍射光强公式(5.4-1)式. 对不同的 ε 值作出的 $I(P)$-$\sin\theta$ 曲线如图 5.4-4 所示，图中 a、b、c 三条曲线分别表示 $\varepsilon=0$、0.5、0.8 三种情况. 由图可见，圆环的衍射图样与圆孔相似，中央是一亮斑，周围是一些亮暗相间的圆环. ε 愈大，中央亮斑愈小，圆环愈往内收缩，次极大的强度愈大.

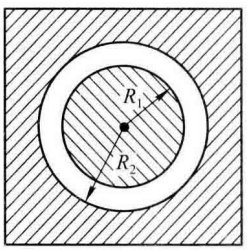


图 5.4-3　圆环

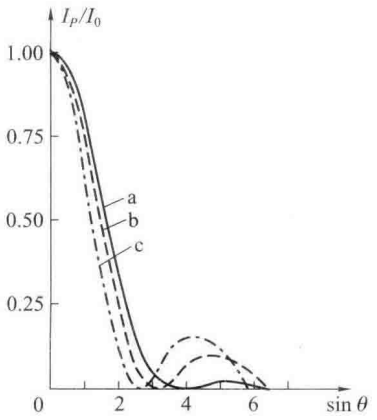


图 5.4-4　圆环的夫琅禾费衍射光强分布曲线

a：$\varepsilon=0$；b：$\varepsilon=0.5$；c：$\varepsilon=0.8$

5.4.3 多边形孔的夫琅禾费衍射

图 5.1-4 给出了多边形孔(如三角孔)及几种更复杂衍射孔的夫琅禾费衍射图样. 从这些衍射图样可以看出,振幅型衍射屏的夫琅禾费衍射图样具有下列明显特点:(1) 零级衍射斑的中心就是点光源的几何光学像点;(2) 不论孔的形状如何,衍射图样都有一对称中心,即绕此中心旋转 180°,衍射图样不变. 关于夫琅禾费衍射的特性,将在 §6.2 中详细讨论.

§5.5 互补屏 巴比涅原理

前面已经讨论了若干衍射孔的夫琅禾费衍射,根据本节所讲的原理,很容易知道它们的互补屏的夫琅禾费衍射图样.

若两个衍射屏 Σ_1 和 Σ_2 中一个的开孔部分正好与另一个的不透明部分对应,反之亦然,这样一对衍射屏称为**互补屏**,如图 5.5-1 所示. 设 $\tilde{E}_1(P)$ 和 $\tilde{E}_2(P)$ 分别表示 Σ_1 和 Σ_2 单独放在光源和接收屏之间时接收屏上 P 点的复振幅,$\tilde{E}_0(P)$ 表示无衍射屏时 P 点的复振幅. 根据惠更斯-菲涅耳原理,$\tilde{E}_1(P)$ 和 $\tilde{E}_2(P)$ 可表示成对 Σ_1 和 Σ_2 开孔部分的积分. 而两个屏的开孔部分加起来就不存在不透明的区域,因此

$$\tilde{E}_0(P)=\tilde{E}_1(P)+\tilde{E}_2(P) \qquad (5.5-1)$$

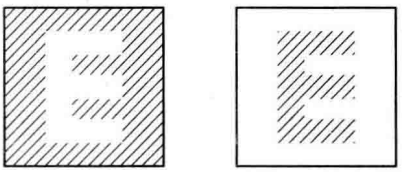


图 5.5-1 互补衍射屏

上式说明,两个互补屏在衍射场中某点单独产生的复振幅之和等于光波自由传播时该点的复振幅,这就是**巴比涅原理**. 因为光波自由传播时通常是满足几何光学定律的,波场的复振幅容易计算,所以利用巴比涅原理可以较方便地由一种衍射屏的衍射场求出其互补屏的衍射场.

由(5.5-1)式可得出两个有用的结论. 第一,若 $\tilde{E}_1(P)=0$,则 $\tilde{E}_2(P)=\tilde{E}_0(P)$. 因此,放上其中一个屏时强度为零的那些点,在换上它的互补屏时,强度与没有屏时一样. 第二,若 $\tilde{E}_0(P)=0$,则 $\tilde{E}_1(P)=-\tilde{E}_2(P)$. 这就意味着在 $\tilde{E}_0(P)=0$ 的那些点,$\tilde{E}_1(P)$ 和 $\tilde{E}_2(P)$ 的相位相差 π,强度 $I_1(P)=|\tilde{E}_1(P)|^2$ 和 $I_2(P)=|\tilde{E}_2(P)|^2$ 相等. 这就是说,两个互补屏不存在时光场中强度为零的那些点,互补屏产生完全相同的光强分布. 例如在图 5.3-1 所示装置中,无衍射屏时理想透镜 L_1 和 L_2 将点光源 S 成像在 P_0 点,在 P_0 点之外强度为零,分别插入互补屏时,除像点 P_0 之外,将观察到完全相同的衍射图样. 巴比涅原理为研究某些衍射问题提供了一个辅助方法,将它用于夫琅禾费衍射最为方便. 对于菲涅耳衍射,巴比涅原理虽然也成立,但两个互补屏的衍射图样则不相同.

§5.6 成像仪器的像分辨率

5.6.1 分辨率的概念 瑞利判据

所谓成像仪器的**像分辨率**(或称分辨本领)是指仪器分辨开相邻两个物点的像的能力. 对于

靠得很近的两物点，仪器所成的两个像还能分辨得开，我们就说它的分辨率高，反之则低. 从几何光学观点看，一个无像差光学系统的分辨率是无限的. 但是，实际上任何一个光学元件的通光孔都起着限制光束的光阑的作用. 即使所用元件的像差已经充分校正，由于衍射，点物也不能生成点像，而生成一个夫琅禾费衍射图样. 通常把衍射图样的中央亮纹或艾里斑称为衍射像. 如果两个物点的衍射像发生了部分重叠，则二者的中央主极大靠得愈近，就愈难分辨出是两个点，这样就限制了仪器的分辨率.

成像系统的分辨率，除了决定于系统本身的结构和性能外，还与照明和接收等复杂因素有关. 为简单计，我们只讨论系统的像差已得到充分校正，而且成像物体是亮度相等的两个非相干点光源的情况. 如图 5.6-1，S_1 和 S_2 为两个物点，所研究的光学系统用一个等效的透镜 L 表示. S_1 和 S_2 发出的光通过 L 在其像面上形成衍射图样 S_1' 和 S_2'，若 S_1 和 S_2 离得较开，两衍射像相距较远，我们可以分辨这是两个物点所成的像，如图 5.6-2(c)所示. 图中画出了两个衍射图样的光强分布曲线和它们的合成曲线. 若将 S_1 和 S_2 逐渐靠近，则两衍射像的中央主极大也逐渐接近，两衍射像的重叠部分逐渐增多. 当 S_1 和 S_2 靠得很近时，两衍射像重叠部分很多，从叠加的图样中无法辨认出有两个物点存在，如图 5.6-2(a)的曲线所示. 两个物点至少应相距多远，仪器才能够把它们分辨开呢？瑞利判据规定：如果一个物点衍射图样的中央主极大与另一个物点衍射图样的中央主极大旁的第一极小相重合时[图 5.6-2(b)]，这两个物点是恰可分辨的.

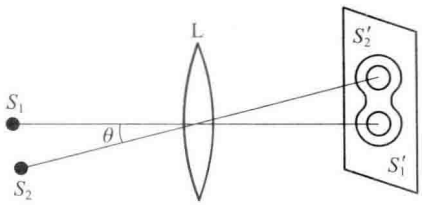


图 5.6-1　两物点生成的衍射像

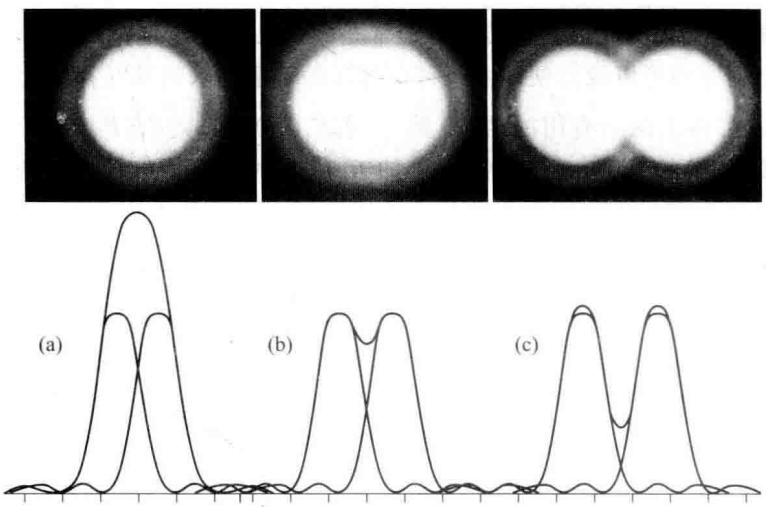


图 5.6-2　像分辨率

若我们所考察系统的通光孔是半径为 R（或直径为 D）的圆孔，根据瑞利判据，两物点恰可分辨时，它们的两衍射像中央主极大的角距离 θ_0 应恰等于艾里斑的半角宽度 $\Delta\theta$，则

$$\theta_0=\Delta\theta=0.61\frac{\lambda}{R}=1.22\frac{\lambda}{D} \tag{5.6-1}$$

上式表示恰可分辨的两衍射像的角距离或分辨极限角. 根据系统的具体布置,可以算出与之相应的恰可分辨的两物点的角距离(或线距离). 这个距离愈小,仪器的分辨率就愈高.

使用瑞利判据时应当注意:

1. 我们所讨论的两物点 S_1 和 S_2 是非相干的,若 S_1,S_2 为相干光源,它们的衍射图样之合成图样不能用强度直接相加方法求得. 随着二光源相位差的不同,分辨极限的差别很大.

2. 两个点光源的亮度应相等,如果不等,即使 S_1 和 S_2 更加接近,也能把它们分辨开.

3. 瑞利判据不是表示分辨极限的物理量,而只是一个大致的判断标准. 根据瑞利判据,当衍射孔为圆孔时,合成强度曲线的鞍值约为它两侧峰值的 74%,即强度的峰值和鞍值有 26% 的差异,如图 5.6-2(b)所示. 若衍射孔为单缝,合成强度曲线的鞍-峰值之比为 0.81. 可是,在照明良好的条件下,鞍-峰值之比为 0.97 时,也有人能将这两点分辨开,所以瑞利判据比实际可以分辨的极限要求更严.

除了瑞利判据和泰勒判据(见 §4.14)外,斯帕劳(Sparrow)提出了另一个判据:当两衍射图样的合成强度曲线中的鞍点刚刚消失时(图 5.6-3),两点恰不能被分辨. 在这三种判据中,瑞利判据在数学计算上很简便,所以被广泛地采用. 泰勒判据适用于强度分布极小值不为零的情况. 斯帕劳判据则可推广到分辨两相干光源.

5.6.2 人眼的分辨率

人眼的光学系统可看成一枚凸透镜,它的前表面有一个孔径可变的光阑,即瞳孔. 透镜的物空间为空气($n\approx1$),像空间为玻璃状液($n'=1.336$). 在图 5.6-4 中,相邻二物点 A、B 经透镜折射后在视网膜上生成二衍射像. 它们的中心为 A'、B'. A、B 和 A'、B' 对透镜光心的张角 θ 和 θ' 应满足折射定律,在傍轴近似条件下可写为

$$\theta=n'\theta' \tag{5.6-2}$$

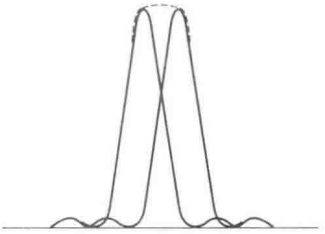


图 5.6-3 斯帕劳判据

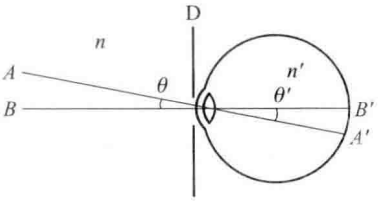


图 5.6-4 人眼的最小分辨角

根据瑞利判据,A 和 B 两点恰可分辨时,A'和 B'之间的角距离应等于艾里斑的半角宽度,即

$$\theta'=1.22\frac{\lambda_{n'}}{d}=1.22\frac{\lambda}{n'd} \tag{5.6-3}$$

式中 λ 为入射光在真空中的波长,$\lambda_{n'}$ 为玻璃液中的波长,d 为瞳孔的直径,约为 2~8 mm. 将上式代入(5.6-2)式得人眼对两物点的最小分辨角

$$\theta_0 = 1.22\frac{\lambda}{d} \tag{5.6-4}$$

在上式中，若将 λ 取作可见光的平均波长 550 nm，d 取作 2 mm，则得

$$\theta_0 = 1.22\times\frac{5.5\times10^{-4}}{2} \approx 3.4\times10^{-4}\ \text{rad} \approx 70''$$

即人眼的分辨极限角一般认为是 1′，假设瞳孔至视网膜间的距离为 $l=22$ mm，则视网膜上恰可分辨的两点 A'、B' 之间的距离为

$$A'B' = l\theta_0' = 22\times\frac{1.22\times5.5\times10^{-4}}{1.33\times2}\ \text{mm} \approx 5\times10^{-3}\ \text{mm}$$

人眼的分辨率除了取决于其折光系统的分辨率外，还取决于视网膜的分辨率. 而后者决定于网膜上视神经细胞的大小和密度. 如果要清楚地分辨开两点，它们的像至少应分别落在一个没有感光的细胞所隔开的两个细胞上. 在视觉最灵敏的黄斑上视神经细胞密度最大，每一个细胞的直径约为 2.5 μm. 在此隔开一个细胞的两个细胞中心的距离约为 2×2.5 μm. 这个数值正好和眼折光系统的分辨率相当. 因此视网膜的结构是能满足瞳孔分辨率要求的，它不会限制人眼的分辨率. 所以计算人眼的分辨率时，通常只考虑瞳孔的衍射效应.

5.6.3 照相物镜的分辨率

照相机的结构与人眼相似. 设照相物镜直径为 D，焦距为 f'，它在焦面上恰能分辨的两点间距离为

$$\delta y' = f'\theta_0 = 1.22\lambda\frac{f'}{D}$$

通常用焦面上单位长度内能分辨的线数表示照相物镜的分辨率，即

$$N = \frac{1}{\delta y'} = \frac{1}{1.22\lambda}\cdot\frac{D}{f'} \tag{5.6-5}$$

式中 D/f' 为物镜的相对孔径，其值愈大，分辨率愈高. 例如 $D/f'=1:35$ 的常用照相物镜，其 $N=402$. 相对孔径的倒数 f'/D 称为 f 数或光圈数，记为 $f/\#$. 例如 $f/5.6$ 表示焦距 f' 为入瞳直径 D 的 5.6 倍.

5.6.4 望远镜的分辨率

如图 5.6-5 所示，望远镜将很远处两个靠近的物体在物镜的后焦面上生成两个衍射像 P_0 和 P_0'. 根据瑞利判据，望远镜物镜的最小分辨角为

$$\theta_0 = \theta_0' = 1.22\frac{\lambda}{d} \tag{5.6-6}$$

式中 d 为物镜的直径. 通常望远镜物镜的边框就是望远镜的入瞳，它起着限制成像光束截面积大小的衍射孔的作用. 能够通过物镜的光束，必然都能通过目镜. 目镜对成像光束的大小没有限制，其作用只不过是把物镜所生成的衍射像再加以放大，因此望远镜的分辨率决定于其物镜的分辨率. 当物镜给定时，物体经望远镜所生成像的视角之大小取决于目镜的放大率. 然而我们却不能用增加目镜放大率的办法提高望远镜的分辨率. 因为在望远镜物镜后焦面上实际上是许多物

点生成的衍射斑的集合，若目镜的放大率大，虽然各几何光学像点之间的距离放大了，但每个像点的衍射斑也同样被放大了（图 5.6-6）. 所以放大率再大，也不可能显示出物镜后焦面上没有分辨出来的细微结构. 另一方面，如果目镜的放大率不足，则可能使物镜已经分辨开了的细节由于成像太小，眼睛或照相底片却不能分辨，这时为了充分利用物镜的分辨率，还可以再提高目镜的放大率. 总之，设计望远镜或其他光学仪器时，应使它的视角放大率和分辨率相适应. 对于助视仪器，若选择其放大率，使仪器的最小分辨角刚好放大到人眼所能分辨的最小角度，这个放大率称为仪器的**有效放大率**或**正常放大率**. 仪器的有效放大率保证了物镜分辨率的充分利用，不过因为人眼的分辨极限是 1′，所以按有效放大率设计的望远镜，观察者使用时会感到十分费劲，为了减轻观察者的疲劳，设计望远镜时宜使其工作放大率为有效放大率的 1.5～2 倍.

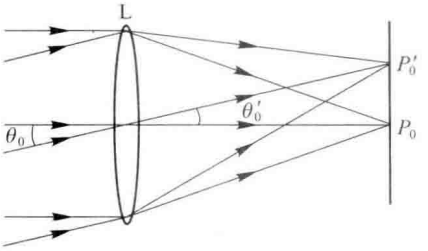


图 5.6-5 望远镜的分辨率

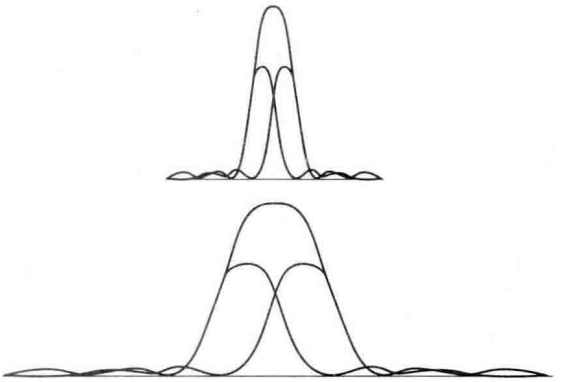


图 5.6-6 提高放大率不能解决分辨率不足的问题

从（5.6-6）式可知，望远镜物镜孔径愈大，它的分辨率愈高，同时增大物镜孔径还可以提高望远镜的放大率，增加接收到的光能，从而可记录更遥远和更弱的星. 所以大型天文望远镜物镜的孔径都很大. 目前世界上除已建成 13 架 8～10 m 孔径的天文望远镜外，一些国家的天文光学工作者正以极大的努力建造孔径为 22 m，30 m，39 m 的更大的巨型地面望远镜. 不过，当天文望远镜物镜的孔径超过一定数值后，由于大气密度不规则的起伏使成像质量变坏，它的分辨率不能随孔径的增大而相应地提高. 为了克服大气抖动的影响，提高望远镜的实际分辨率，近年来一些新的措施和方案相继问世. 第一，用现代空间技术把天文望远镜发送到外层空间的轨道上，以避免大气的影响（见彩图 7）. 但是这需要复杂的空间技术和昂贵的投资. 1990 年 4 月 24 日美国利用“发现号”航天飞机发送了孔径为 2.4 m 的哈勃（Hubble）空间望远镜，它运行二十多年来已探测到迄今温度最高的恒星和最古老的星系，证明了黑洞的存在，推算出宇宙年龄为 130 亿～140 亿年，并且发现了加速宇宙膨胀的神秘力量，为人类的天文探索、天体物理及宇宙学研究做出了卓越的贡献，被称作天文学界“皇冠上的明珠”. 第二，用光学信息处理或数字图像处理的方法来复原由于大气抖动而模糊了的图像. 第三，采用自适应光学（adaptive optics）技术，即将自动控制学科中的反馈控制的机理和技术引进光学系统，对发射或接收的光波波前的相位畸变实时地加以控制和校正.

5.6.5 显微镜的分辨率

显微镜的分辨率用其所能分辨的两物点间最小距离 δy 来表示. 图 5.6-7 中，O 为显微镜物

镜，它的半径为 R，物方和像方折射率为 n 和 n'. 对于单组的低倍物镜，其边缘就是孔径光阑，也是入射光瞳. S_1 和 S_2 是位于物镜 O 前焦点外相距为 δy 的相邻两物点，它们在目镜前焦面上生成中心相距为 $\delta y'$ 的衍射像 S_1' 和 S_2'. 当它们恰可分辨时，其角距离

$$\theta_0' = 0.61\frac{\lambda_{n'}}{R}$$

式中 $\lambda_{n'}$ 是在真空中波长为 λ 的单色入射光在物镜像方空间内的波长，即 $\lambda_{n'}=\dfrac{\lambda}{n}$；若设物镜至目镜前焦面距离为 d，则得 $\delta y' \approx \theta_0' d = 0.61\dfrac{\lambda d}{n'R}$，设物镜的物方和像方孔径角分别为 u 和 u'，由图可知 $\dfrac{R}{d}=\sin u'$，于是可得 $\delta y'=\dfrac{0.61\lambda}{n'\sin u'}$，由于显微镜物镜工作在齐明点，在这对共轭点上满足阿贝正弦条件 $n\delta y\sin u = n'\delta y'\sin u'$，代入上式则得

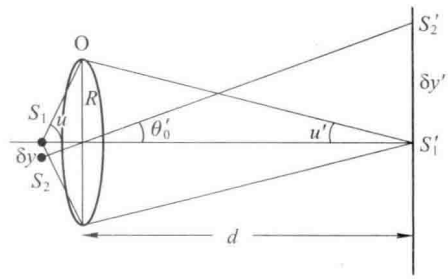


图 5.6-7　显微镜的分辨率

$$\delta y = \frac{0.61\lambda}{n\sin u} \tag{5.6-7}$$

上式中 $n\sin u$ 称为物镜的**数值孔径**，用 N.A.表示，它是显微物镜的一个重要指标，出厂时已在物镜上标明. 由上式可见，显微镜在像差校正良好时，对于一定波长的入射光的分辨率，完全取决于物镜的数值孔径. 数值孔径愈大，分辨率愈高. 为了增大数值孔径，一方面可减小物镜焦距，使入射孔径增加，但最多也只能接近 90°；另一方面可在物体与物镜第一片间浸以高折射率的油或其他液体（如杉木油 $n=1.517$，二碘甲烷 $n=1.741$），N.A.可达 1.5～1.6. 一般物镜的 N.A.值大，其放大倍数也大. 由上式，当 N.A.取值为 1.5 时，$\delta y \approx \lambda/2$. 即是说显微镜的分辨率极限约为照明光的半波长. 若用人眼最灵敏的绿光（$\lambda = 0.56$ nm）照明样品，则人眼识别时的分辨极限为 0.28 μm 左右.

使用波长更短的光波来照明，可进一步提高分辨率，例如用 200 到 250 nm 的紫外线照明，与可见光相比，分辨率可提高一倍左右. 当然，紫外显微镜的光学系统不能用普通玻璃而需用石英等材料制作，并且不能直接观察，只能照相记录. 由于能透过紫外线的材料有限，不能做成优良的消像差镜头，所以紫外显微镜的应用不多. 由近代物理学的发展得知，运动电子也具有波动性，电子显微镜就是利用电磁透镜来聚焦电子束成像. 电子波的波长 $\lambda=\dfrac{h}{mv}$，式中 $h=6.626\times10^{-34}$ J·s 为普朗克常量，$m=0.9\times10^{-30}$ kg 为电子的质量，v 为电子运动的速度，它和加速电位差 V 的关系为 $v=\sqrt{\dfrac{2eV}{m}}$. 计算可知，当 $V=150$ V 时，$\lambda\approx0.1$ nm；当 $V=50$ kV 时，$\lambda\approx0.005$ nm. 后者约为可见光波长的十万分之一，但是电子显微镜的分辨能力并不能相应地高出光学显微镜十万倍. 因为在电子显微镜中，为校正聚焦电子束的电磁透镜的各种像差，使电磁透镜的数值孔径只有光学显微镜的几百分之一. 所以电子显微镜的分辨率只可比光学显微镜提高千倍左右，于是它的极限放大率

也可提高千倍. 应当注意,电子显微镜和 X 射线显微镜是通过显著减小照明光波长来显著提高分辨率,但并未突破传统光学显微镜的衍射分辨极限. 目前已广泛使用透射电子显微镜(TEM)、扫描电子显微镜(SEM)等多种类型的电子显微镜,某些大型电子显微镜的分辨率已达 0.16 nm,放大率达到百万倍以上.

20 世纪末,随着激光技术、微电子技术及信息技术等学科领域研究工作的深入开展,更为主要的是随着各种全新的理论和方法的提出,出现了以扫描隧穿显微镜(STM)、原子力显微镜(AFM)、激光共焦扫描显微镜(LSCM)、扫描近场光学显微镜(SNOM)、超分辨荧光显微镜(SRFM)等为代表的新一代显微观测技术,使显微镜的分辨度达到了纳米尺度,大大推动了人类对微观世界的了解与研究,在物理、化学、生物、材料等科学研究领域获得了更为广泛的应用,促进了纳米技术等大量新兴学科的出现与蓬勃发展.

§5.7 振幅型平面透射光栅

任何一种衍射单元周期性地重复排列所形成的阵列,能对入射光的振幅和相位或二者之一产生空间调制的,都可以称为**衍射光栅**. 光栅的种类很多,有振幅型和相位型的,透射式和反射式的,平面的和凹面的等. 本节讨论振幅型平面透射光栅.

在一块平面光学玻璃上,用金刚石刀刻划出一系列平行的等宽等间距的刻线,就能对入射光的振幅产生调制. 其刻线部分将入射光散射而不能透光,刻线间的透明部分相当于通光狭缝,这样就得到一块振幅型平面透射光栅,又称为**龙基(Ronchi)光栅**,其振幅透射率是一矩形函数,如图 5.7-1 所示. 由于光栅的刻线很多很密(例如实验室研究工作中常用 600 条/mm 和 1 200 条/mm 的光栅,总缝数为 5×10^4 条),对缝的平行性和均匀性要求也很高,所以光栅的刻划是一项十分精密的工作,必须在专门的刻划机上进行. 刻划机可用电子计算机精确控制,一块光栅刻划完成后可用作母光栅进行复制,实际上大量使用的是复制光栅. 近年来采用全息曝光生成光刻胶掩模,再用离子束蚀刻技术将条纹转移到玻璃或石英基片上,此方法已成为生产光栅的主流技术.

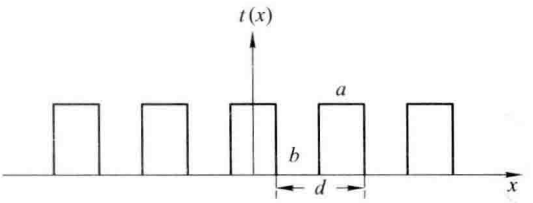


图 5.7-1 龙基光栅的振幅透射率

5.7.1 多缝衍射光强分布公式

观察光栅的夫琅禾费衍射的实验装置如图 5.7-2 所示. 单色点光源 S 发出的光波经 L_1 后成为平行光正入射到光栅 G 上,经光栅上多缝的衍射,在置于 L_2 后焦面的接收屏上将观察到一些细而亮的衍射斑. 若 S 为平行于缝的线光源,衍射图样则是一些细而亮的条纹.

在图 5.7-2 中,设光栅总缝数为 N,每个缝的宽度为 a,缝间不透光部分宽度为 b,光栅的周期 $d=a+b$ 称为**光栅常量**. 根据惠更斯-菲涅耳原理,缝上每一面元都可以看作一次波源,接收屏上任一点 P 的扰动就是各次波在该点所产生的相干振动的叠加. 由于在 P 点叠加的次波来自各个狭缝,每个狭缝又有一定的宽度,因此 P 点的振动决定于每一缝内无限多个次波源发出的次波的

干涉和来自各缝的光波之间的干涉，即是说它决定于单狭缝的衍射和多光束干涉两者共同的作用. 按照基尔霍夫积分公式，计算各面元的贡献之和即可求得 P 点的振动. 不过为了计算简单起见，可将每一狭缝的衍射光看作一单元光束而采用处理多光束叠加的有限项求和的方法.

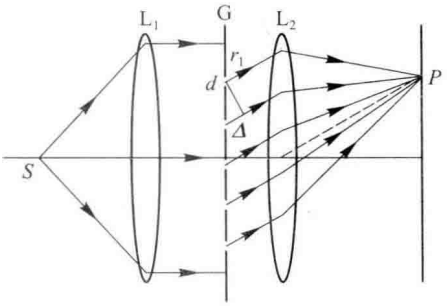


图 5.7-2　光栅的衍射

若第一缝中心至 P 点的光程为 r_1，根据(5.3-3)式，第一个缝在 P 点所产生振动的复振幅为

$$\tilde{E}_{1P}=\tilde{A}_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}=\tilde{a}_0 e^{ikr_1}\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

式中 $\tilde{a}_0=\dfrac{\tilde{A}_0}{e^{ikr_1}}$ 为复常数，$\alpha=\dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$. 因为在傍轴近似条件下各缝在 P 点所产生振动的振幅可视为相等，但是相邻两缝对应点至 P 点的光程差为 $\Delta=d\sin\theta$，相位差为 $\delta=kd\sin\theta$，因此第二、第三、……个缝在 P 点的振动为

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{E}_{2P}&=\tilde{a}_0 e^{ik(r_1+\Delta)}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=\tilde{A}_0 e^{i\delta}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\\
\tilde{E}_{3P}&=\tilde{a}_0 e^{ik(r_1+2\Delta)}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=\tilde{A}_0 e^{i2\delta}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\\
&\cdots\cdots\\
\tilde{E}_{NP}&=\tilde{A}_0 e^{i(N-1)\delta}\frac{\sin\alpha}{\alpha}
\end{aligned}\right\}$$

于是 P 点的合成振动的复振幅为

$$\tilde{E}_P=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{A}_0 e^{im\delta}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=\tilde{A}_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}\sum_{m=0}^{N-1}e^{im\delta}$$

上式是公比为 $e^{i\delta}$ 的几何级数，求和得

$$\tilde{E}_P=\tilde{A}_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{1-e^{iN\delta}}{1-e^{i\delta}}=\tilde{A}_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{\sin\dfrac{N\delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}e^{i(N-1)\frac{\delta}{2}}$$

令 $\beta=\dfrac{\delta}{2}=\dfrac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$，它表示相邻两缝对应点在 P 点振动的相位差之半，则得

$$I(P)=\tilde{E}_P\tilde{E}_P^*=I_0\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\frac{\sin^2 N\beta}{\sin^2\beta}\tag{5.7-1}$$

式中 I_0 为一个单缝在接收屏中心 P_0 点的光强. 上式表明，多缝衍射的光强分布比例于两个因子的乘积. 其中第一因子 $\dfrac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}$ 表示单狭缝所产生的衍射光强[图 5.7-3(a)]，称为衍射因子；第二个因子 $\dfrac{\sin^2 N\beta}{\sin^2\beta}$ 表示间隔相等的 N 个点源所产生的多光束干涉光强[图 5.7-3(b)]，称为干涉因

子. 即是说，多缝衍射光强分布是多光束干涉光强分布受单缝衍射光强分布调制的结果[图5.7-3(c)].

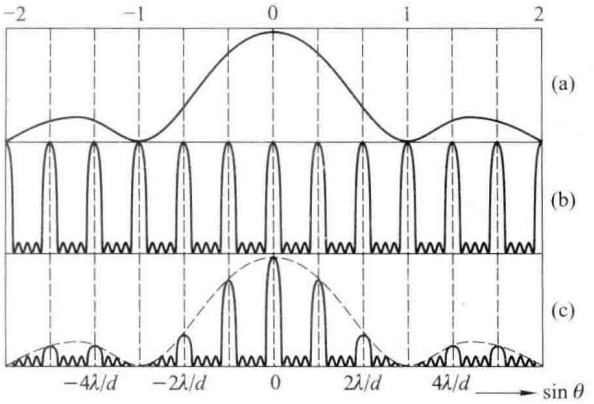


图 5.7-3 多缝夫琅禾费衍射的光强分布

(a) 单缝衍射；(b) 多光束干涉；(c) 多缝衍射

5.7.2 光强分布公式的讨论

1. 主极大

由干涉因子可知，当 $\beta=K\pi(K=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，即

$$d\sin\theta=K\lambda \tag{5.7-2}$$

时，因为 $\lim\limits_{\beta\to K\pi}\dfrac{\sin N\beta}{\sin\beta}=N$，(5.7-1)式成为

$$I=N^2I_0\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2} \tag{5.7-3}$$

式中 $\alpha=\dfrac{a\pi\sin\theta}{\lambda}=\dfrac{Ka\pi}{d}$，(5.7-2)式则称为**光栅方程**.

在衍射角 θ 满足光栅方程式的方向上将得到强度的极大值，称为主极大. 在这些极大值处各个单缝所产生的衍射场的相位是相同的，因此它们产生相长干涉. 合波场是每条缝所产生的场的 N 倍，强度则为 N^2 倍. 但是由于衍射因子的调制，各主极大的强度并不相等，即主极大位置决定于干涉因子，强度则受限于衍射因子.

2. 极小

在(5.7-1)式中的衍射因子或干涉因子为零都会使 P 点的光强为零. 当

$$a\sin\theta=K'\lambda \quad (K'=\pm1,\pm2,\cdots) \tag{5.7-4}$$

时，衍射因子为零，$I(P)=0$，由上式可确定与单缝衍射相应的零强度点的位置.

当 $\beta=\left(K+\dfrac{K''}{N}\right)\pi$ $(K=0,\pm1,\pm2,\cdots;K''=1,2,\cdots,N-1)$，即

$$\sin\theta=\left(K+\frac{K''}{N}\right)\frac{\lambda}{d} \tag{5.7-5}$$

时，干涉因子为零，合强度也为零. 由此可见在相邻两个主极大之间有 $N-1$ 个由多光束干涉产生的极小，分别对应于 $K''=1,2,\cdots,N-1$.

3. 次极大

在相邻两个极小值之间有一个极大值，除了满足(5.7-2)式的那些主极大外，其余极大值的强度弱得多，称之为次极大. 实际上光栅总缝数 N 是一个很大的数，干涉因子中的分子随 θ 的变化较分母快得多. 因此当 N 很大时，完全可近似地认为次极大位于 $\sin N\beta$ 取极大值的那些点，即

$$\beta\approx K\pi+\left(K''+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{N}\quad(K=0,\pm1,\pm2,\cdots;K''=1,2,\cdots,N-2)$$

或

$$\sin\theta\approx\left(K+\frac{2K''+1}{2N}\right)\frac{\lambda}{d}\tag{5.7-6}$$

由此可知在相邻两主极大之间有 $N-2$ 个次极大，例如在 0 和 1 级主极大之间，次极大分别位于

$$\sin\theta\approx\frac{3}{2N}\frac{\lambda}{d},\frac{5}{2N}\frac{\lambda}{d},\cdots,\frac{2N-1}{2N}\frac{\lambda}{d}$$

将上式各值依次代入(5.7-1)式得各次极大的强度与 0 级主极大强度之比为 $\frac{1}{22.2},\frac{1}{61.7},\frac{1}{121},\cdots$ 可见次极大的强度比主极大弱得多.

4. 缺级

(5.7-2)式只是产生主极大的必要条件，即使已满足此式应产生主极大，但若该点恰为单缝衍射的极小时，合成光强为零，这个主极大就会消失，称之为**缺级**. 由(5.7-2)和(5.7-4)式联立消去 θ 得缺级所满足的条件为

$$K=K'\frac{d}{a}\quad(K'=\pm1,\pm2,\cdots)\tag{5.7-7}$$

图 5.7-3 示出 $d/a=3$ 的情况，$K=\pm3,\pm6,\cdots$ 为缺级. 若 d/a 不为整数，缺级则发生在 $K'd/a$ 为整数的那些级次上，例如 $d/a=1.4$，缺级为 $\pm7,\pm14,\pm21,\cdots$.

5. 谱线的半角宽度

由(5.7-2)式，第 K 级主极大位置决定于

$$\sin\theta_K=\frac{K\lambda}{d}\tag{5.7-8}$$

而 K 级主极大旁的第一极小位置则决定于

$$\sin(\theta_K+\Delta\theta)=\frac{[K+(1/N)]\lambda}{d}\tag{5.7-9}$$

我们称主极大和它旁边的第一极小之间的角距离 $\Delta\theta$ 为谱线的**半角宽度**.因为

$$\sin(\theta_K+\Delta\theta)=\sin\theta_K\cos\Delta\theta+\cos\theta_K\sin\Delta\theta$$

当 N 很大时，$\Delta\theta$ 小，则

$$\sin(\theta_K+\Delta\theta)\approx\sin\theta_K+\Delta\theta\cos\theta_K$$

将(5.7-8)和(5.7-9)式代入上式得

$$\Delta\theta=\frac{\lambda}{Nd\cos\theta_K}\tag{5.7-10}$$

上式表明谱线的半角宽度与光栅宽度 Nd 成反比，当 d 一定时增加缝数 N，$\Delta\theta$ 将减小，亮纹变细.

综上所述可知，当狭缝数目增加时，衍射图样最显著的改变是：衍射光能向主极大集中，亮条纹变细，而主极大之间的次极大数增多. 当 N 很大时，实际上观察到的是在一片暗背景上出现的一些细而亮的条纹.

§5.8 光栅光谱仪的特性

光栅最重要的应用是作为分光元件，本节中首先介绍光栅的分光原理及其色散率、色分辨率和色散范围等特性参数，然后将其分光特性与棱镜作一个简单的比较.

5.8.1 光栅的分光原理

用单色光垂直照明光栅时，在满足光栅方程

$$d\sin\theta = K\lambda$$

的衍射方向都产生主极大，因而形成一系列亮纹，式中的 K 为衍射光谱的级次. 因为衍射角 θ 可由测量得到，于是可根据上式由已知的 d 测量 λ. 光栅产生的 H、He、Hg 的光谱见彩图 2. 若用白光照明，因为不同波长的同级谱线对应不同的衍射角，所以不同的波长成分将各自生成一套谱线，彼此错开一段距离. 图 5.8-1 所示为 λ 和 λ' 两种波长的光谱. 由于白光含有可见光谱中的各种波长，它的光栅光谱中除零级无色散故仍为一条白色亮线外，其他级的各色光谱线都排列成连续的光谱带，通常在三级以上有部分交叠，如图 5.8-2 所示. 由于光栅可以把光源中不同的波长成分在空间分开而形成光谱，所以它可作为一个时间频谱分析器. 对光谱线的位置和强度进行测量，就可确定光谱中对应元素的成分和含量，因此光栅被广泛用于光谱分析仪器中.

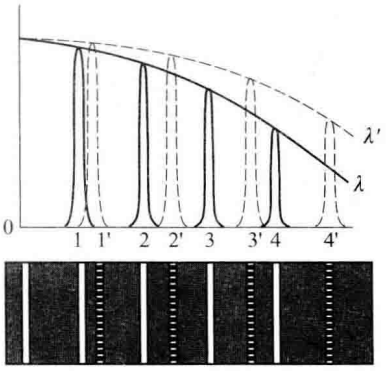


图 5.8-1 两种波长的光栅光谱

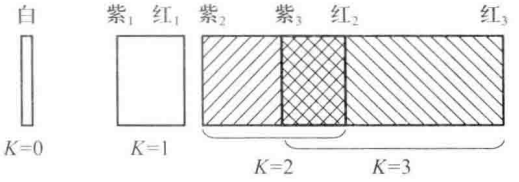


图 5.8-2 白光的连续光栅光谱

5.8.2 光栅光谱仪的性能参数

1. 色散率

它表征光谱仪将不同波长的同级主极大在空间分开的程度. 根据(4.14-2)式，**角色散率** $D=$

$\frac{\delta\theta}{\delta\lambda}$表示将波长差为单位长度的两个同级主极大分开的角距离. 将光栅方程 $d\sin\theta=K\lambda$ 两边微分可得

$$D=\frac{\delta\theta}{\delta\lambda}=\frac{K}{d\cos\theta} \tag{5.8-1}$$

即光栅常量 d 愈小,光谱级次 K 愈高,角色散率愈大. 当 θ 很小时,$\cos\theta\approx1$,对于某一确定的级次 K,$\frac{\delta\theta}{\delta\lambda}\approx\frac{K}{d}$为一与波长无关的常量,衍射角随波长作线性变化,所得光谱为匀排光谱. 这种简单的线性关系对于光谱仪器的波长标定十分方便,棱镜光谱则无此种优点.

实际工作中常常是观测接收屏上光谱线分开的线距离,因此需要引入**线色散率**,其定义为

$$D_l=\frac{\delta l}{\delta\lambda}$$

它表示波长差为单位长度的两同级主极大在接收屏上的线距离. 因为在 θ 较小时 $\delta l=f'\delta\theta$,则

$$D_l=\frac{Kf'}{d\cos\theta} \tag{5.8-2}$$

线色散率与透镜焦距成正比,所以一般都选用长焦距物镜,以使不同波长的谱线分得更开一些.

2. 色分辨率

色散率只表示两个主极大分开的程度. 由于衍射,每一谱线都具有一定宽度,当两谱线靠得较近时,尽管主极大分开了,它们还可能因彼此部分重叠而分辨不出是两条谱线,因此须引入色分辨率表征光栅对不同波长的谱线的分辨能力. 若光栅恰能分辨开的两条同级谱线的波长为 λ 和 $\lambda+\Delta\lambda$,则按(4.14-10)式光栅的色分辨率为

$$R=\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \tag{5.8-3}$$

上式中的 $\Delta\lambda$ 称为它的分辨极限. $\Delta\lambda$ 愈小,色分辨率愈高.

由(5.7-2)式,$\lambda+\Delta\lambda$ 的 K 级主极大满足下式

$$d\sin\theta=K(\lambda+\Delta\lambda) \tag{5.8-4}$$

而由(5.7-5)式,λ 的 K 级主极大旁的第一极小则应满足下式

$$d\sin\theta'=\left(K+\frac{1}{N}\right)\lambda \tag{5.8-5}$$

根据瑞利判据,当 $\lambda+\Delta\lambda$ 的 K 级主极大刚好落在 λ 的 K 级主极大旁的第一极小上时,这两条谱线恰可分辨(图 5.8-3),此时(5.8-4)式中的 θ 和(5.8-5)式中的 θ'应相等,两式相减得

$$R=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=KN \tag{5.8-6}$$

即光栅的色分辨率等于光谱级次和光栅总缝数之乘积. 一般光栅中使用的光谱级次为 1 到 3 级,但光栅总缝数很大,所以光栅有很高的分辨率. 例如对于

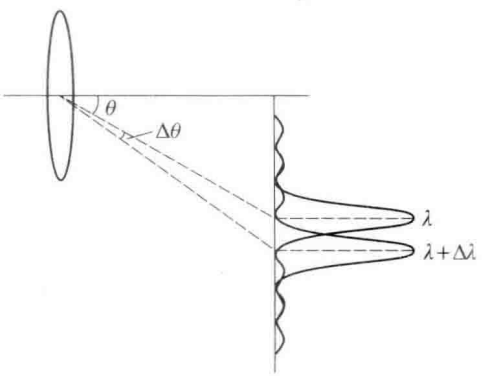


图 5.8-3　光栅的色分辨率

50 mm 长、每 mm 内有 1 200 条缝的光栅，其第一级光谱的 $R=6\times10^4$，在600 nm附近的分辨极限 $\Delta\lambda=0.01$ nm.

由(5.7-2)式得 $K=\dfrac{d\sin\theta}{\lambda}$，代入(5.8-6)式得

$$R=\frac{Nd\sin\theta}{\lambda} \tag{5.8-7}$$

式中 Nd 为光栅的宽度. 因此使用光栅时，一定要使光全部照满光栅的刻线面，否则分辨率要降低.

将(5.8-6)式与(4.14-11)式相比较可见，两式形式上完全一样，即 F-P 干涉仪的精细度相当于光栅的总缝数，所以又称为有效相干光束数. F-P 干涉仪的有效相干光束数不大(一般为 20~30)，但干涉级次很高，所以也有很高的分辨率.

3. 色散范围

由光栅方程可知，$\lambda+\Delta\lambda$ 的 K 级主极大与 λ 的 $K+1$ 级主极大重叠时，有

$$K(\lambda+\Delta\lambda)=(K+1)\lambda$$

因此可得光栅的第 K 级光谱线的**色散范围**或**自由光谱范围**

$$G=\Delta\lambda=\frac{\lambda}{K}=\frac{\lambda^2}{d\sin\theta} \tag{5.8-8}$$

它表示在满足上式的光谱范围 $\Delta\lambda$ 内，K 级光谱线不会与其他级谱线重叠.

由于光栅都是在低级次下使用，故其色散范围很大，在可见光范围内 G 值为几百纳米，所以它与棱镜一样可在广阔的光谱区使用. 而 F-P 干涉仪在使用时的干涉级均较高(一般为 10^5 量级)，因此只能在很窄的光谱区($\Delta\lambda\approx10^{-3}$ nm)使用.

综上所述，光栅的缝宽 a、周期 d 和缝数 N 对光栅特性的影响是各不相同的，缝宽决定对不同干涉级谱线强度的调制量，周期决定谱线位置，光栅的宽度则决定谱线的半角宽度.

5.8.3 光栅和棱镜光谱仪的分光特性比较

在 §1.6 中已讲过棱镜光谱仪的原理，其分光特性也可以用色散率、色分辨率、色散范围等参数来表示，其与光栅光谱仪分光特性的比较见表 5.8-A.

表 5.8-A 光栅和棱镜光谱仪的分光特性比较

	色散率 $D=\dfrac{\delta\theta}{\delta\lambda}$	色分辨率 $R=\dfrac{\lambda}{\Delta\lambda}$	色散范围 $G=\Delta\lambda$
光栅光谱仪	$\dfrac{K}{d\cos\theta}$ K 为衍射级次，d 为光栅周期，θ 为衍射角	KN N 为光栅总缝数	$G_K=\dfrac{\lambda}{K}=\dfrac{\lambda^2}{d\sin\theta}$
棱镜光谱仪	$\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}\cdot\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$ α 为棱镜顶角，n 为折射率，$\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda$ 为色散率	$t\cdot\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$ t 为棱镜底边长度	棱镜无不同波长谱线的越级重叠现象，色散范围仅决定于棱镜和透镜材料对光谱的吸收

§5.9　正弦型振幅光栅

本节讨论振幅透射率为正弦函数的正弦型振幅光栅的衍射规律.

将一束单色平行光经分束镜分为强度相等的两束光后再叠加产生干涉(如图 5.9-1 所示),其干涉场为一系列平行的明暗相间的等间距干涉条纹,其强度为正弦型分布,若底片垂直于两束光夹角的等分线,由(4.5-3)式,干涉条纹的间距

$$d=\frac{\lambda}{2\sin\theta}$$

式中 θ 为两平行光束夹角之半. 照相底片上的光强分布则为

$$I=I_0\left[1+\cos\left(2\pi\frac{x}{d}\right)\right]$$

式中 x 为距底片中心的距离. 用卤化银照相干版将此干涉图样拍摄下来并经过线性冲洗,使冲洗后底片的振幅透射率 $t(x)$ 与曝光时的光强呈线性关系,

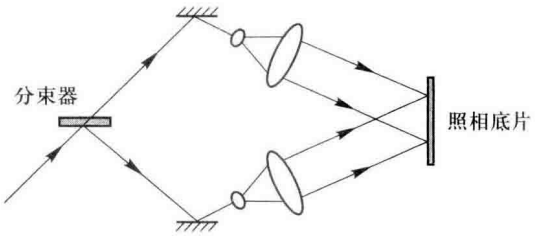


图 5.9-1　正弦型振幅光栅的记录光路

$$t(x)=a+bI=t_0+t_1\cos\left(2\pi\frac{x}{d}\right)\tag{5.9-1}$$

式中 $t_0=a+bI_0$, $t_1=bI_0$ 为比例常数,这样所得的底片就是一块周期为 d 的正弦型振幅光栅.

让一束单色平行光正入射到正弦光栅上(图 5.9-2),根据 §5.7 的讨论,透镜 L 后焦面上的光场分布应与单元衍射和多光束干涉光场分布的乘积成比例:

$$\tilde{E}(P)=\tilde{E}_d(P)\cdot\tilde{E}_N(P)$$

下面我们先计算正弦光栅一衍射单元的衍射场 $E_d(P)$. 根据欧拉公式,(5.9-1)式可写为

$$t(x)=t_0+\frac{t_1}{2}e^{i2\pi\frac{x}{d}}+\frac{t_1}{2}e^{-i2\pi\frac{x}{d}}\tag{5.9-2}$$

将单狭缝夫琅禾费衍射积分公式(5.3-1)式中的 $t(x)$ 用上式代入则得

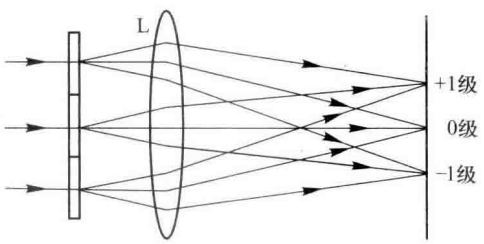


图 5.9-2　正弦型振幅光栅的衍射

$$\tilde{E}_d(P)=\frac{\tilde{E}_0e^{iKr_0}}{i\lambda r_0}\int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}}\left(t_0+\frac{t_1}{2}e^{i2\pi\frac{x}{d}}+\frac{t_1}{2}e^{-i2\pi\frac{x}{d}}\right)e^{ikx\sin\theta}dx$$

式中 $\tilde{E}_0$ 为入射平面波的复振幅,θ 为与场点 P 相应的衍射角,r_0 为衍射单元中心至 P 点的光程. 将与 x 无关的量合并为一新常数,并积分得

$$\tilde{E}_d(P)=\tilde{C}\left[\frac{\sin\alpha}{\alpha}+\frac{t_1}{2}\frac{\sin(\alpha+\pi)}{\alpha+\pi}+\right.$$

$$\frac{t_1}{2}\frac{\sin(\alpha-\pi)}{\alpha-\pi}\Bigg]$$

式中 $\alpha=\dfrac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$，上式说明正弦光栅的单元衍射因子是三个中心位置不同的$\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$函数[图 5.9-3(a)]之和. 已知多光束干涉因子为$\tilde{E}_N(P)=\dfrac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}$，如图 5.9-3(b). 于是 P 点的复振幅为

$$\tilde{E}(P)\propto\tilde{E}_d(P)\cdot\tilde{E}_N(P)=\left[t_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}+\frac{t_1}{2}\frac{\sin(\alpha+\pi)}{\alpha+\pi}+\frac{t_1}{2}\frac{\sin(\alpha-\pi)}{\alpha-\pi}\right]\cdot\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\qquad(5.9\text{-}3)$$

由上式可知，当 $\alpha=0$ 或$\pm\pi$ 时，上式中的三项分别为主极大值. 当 $\alpha=K\pi(K=\pm2,\pm3,\cdots)$时，干涉因子为主极大但衍射因子为零，因而形成缺级[图 5.9-3(c)]，即振幅型正弦光栅衍射只生成 0，±1 三级主极大，它们对应于三束平行光，一束沿原入射方向传播，另外两束与原方向的夹角

$$\theta=\arcsin\left(\pm\frac{\lambda}{d}\right)\qquad(5.9\text{-}4)$$

如图 5.7-1 所示，普通矩形光栅的振幅透射率函数为一矩形函数，如果把它展开为傅里叶级数，则矩形光栅就可看作许多具有不同周期的正弦型振幅光栅所组成. 因为每个正弦型振幅光栅都在不同位置上形成±1级衍射斑，所以矩形光栅有许多级衍射斑.

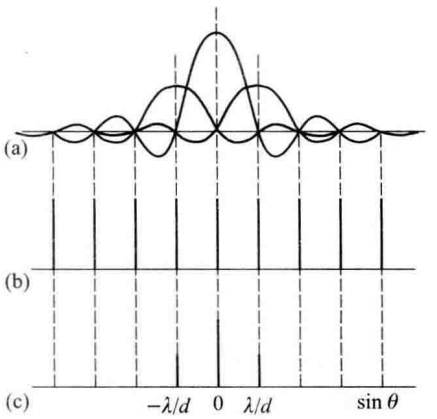


图 5.9-3 正弦型振幅光栅振幅的分布

§5.10 闪耀光栅

本节讨论一种相位型反射光栅——闪耀光栅.

光栅主要用作分光元件，但是由图 5.7-3 可见，各级光谱线的强度随级次的增加而减小，特别是无色散的零级占了大部分的光能量，而实际使用的非零级光谱的强度却比较弱. 这种强度分布形式是很不利的，我们应设法改变这种强度分布，使能量集中到有用的某一级上去.

光栅中决定各级光谱强度分布的是衍射因子. 对于振幅型透射光栅，因为单缝衍射与多光束干涉两个中央主极大重合，光能大部分集中到了无用的零级上. 如果能够使光栅本身在各个衍射单元处给入射光波引进附加的相位，就能把衍射的中央主极大转移到其他的干涉主极大上去. 闪耀光栅就是通过控制刻槽的形状来达到这一目的的.

图 5.10-1 是反射式闪耀光栅的截面图. 光栅的基坯是用光学玻璃或熔石英制成，其上镀了一层反射率很高的铝膜. 为了增强铝膜和玻璃板的结合力，在它们之间镀上一层铬膜或钛膜. 将金刚石刀磨成劈形，在铝平面上刻划出一道道平行的刻槽，刻槽为锯齿形，入射光波射到光栅上，刻槽上每一面元都可作为次波源沿反射一侧发出次波. 因为整个光栅面都有同样的反射率，因此可以忽略它对振幅的调制. 但由于光程的规则变化对相位产生了调制，所以这种光栅是相位型平

面反射光栅.

如图 5.10-1 所示,设光栅平面的法线方向为 N,槽面的法线方向为 n,刻槽宽度为 a,相邻两槽对应点之间的距离为 d. 波长为 λ 的单色平行光入射到光栅上,入射方向与 n 成 i 角,与 N 成 φ 角. 每一刻槽相当于一单缝,槽边两点 A、B 发出的与 n 成 i' 角方向的次波[图 5.10-2(a)]经透镜会聚后(图中未画出),到达透镜后焦面上会聚点 P 的光程差为

$$\Delta = BD - AC = a(\sin i - \sin i') \tag{5.10-1}$$

相应的相位差为

$$\delta = ka(\sin i - \sin i') \tag{5.10-2}$$

相邻两槽的对应点 E、F 发出的与 N 成 φ' 角方向的次波[图 5.10-2(b)]到达 P 点的光程差为

$$\Delta = FH - EG = d(\sin \varphi - \sin \varphi') \tag{5.10-3}$$

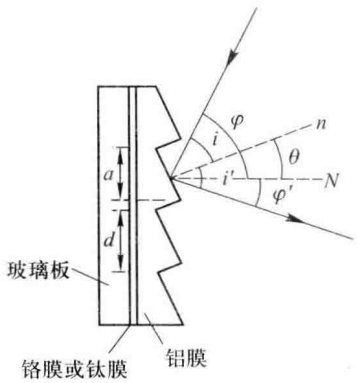


图 5.10-1 闪耀光栅

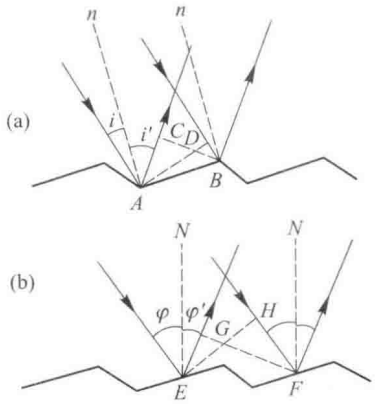


图 5.10-2 闪耀光栅光程差的计算

相应的相位差为

$$\delta' = kd(\sin \varphi - \sin \varphi') \tag{5.10-4}$$

以上各式中,规定入射角 i 和 φ 恒取正值. 衍射线与入射线在法线的同侧时,衍射角 i' 和 φ' 取负值,异侧时取正值.

根据惠更斯-菲涅耳原理,用复振幅积分法可求得其夫琅禾费衍射光强分布公式为:

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \frac{\sin^2 N\beta}{\sin^2 \beta} \tag{5.10-5}$$

式中 $\alpha = \dfrac{\delta}{2}$,$\beta = \dfrac{\delta'}{2}$,上式表明相位型反射光栅的光强分布比例于单槽衍射因子和槽间干涉因子的乘积.

当 $\beta = K\pi$($K = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$)时产生主极大,由此得平面反射光栅的光栅方程

$$d(\sin \varphi - \sin \varphi') = K\lambda \tag{5.10-6}$$

式中 K 为衍射光谱的级次. 上式表明入射单色光的某级谱线的位置由光栅常量 d 和入射角 φ 所决定,与刻槽形状无关.

当 $K = 0$ 时,$\varphi = \varphi'$,多槽干涉的零级光谱出现在对光栅平面满足反射定律的方向.

当 $\alpha = 0$ 时,$i = i'$,单槽衍射的中央主极大出现在对槽面满足反射定律的方向,它不与槽间干

涉的零级主极大重合，这样便实现了两个零级主极大的分离.

光栅的强度分布受单槽衍射因子的调制，在单槽衍射主极大方向的衍射光最强，这个方向叫作闪耀方向. 由图 5.10-1，$\varphi=i+\theta$，$\varphi'=i'-\theta$，则 $\Delta'=d[\sin(i+\theta)-\sin(i'-\theta)]$，对于闪耀方向 $i=i'$，得 $\Delta'=2d\cos i\sin\theta$，在此方向上产生多槽干涉的主极大的光谱级次由下式决定：

$$2d\cos i\sin\theta=K\lambda \tag{5.10-7}$$

式中的 K 称为**闪耀级次**. 以下讨论两种特殊情况：

(1) 若平行光束沿槽面法线 n 方向入射，$i=0$，(5.10-7)式成为

$$2d\sin\theta=K\lambda \tag{5.10-8}$$

即衍射的主极大转移到 λ 的 K 级谱线上. 又因为 $a\approx d$，对 λ 的其他级(包括 0 级)谱线都几乎落在单槽衍射的极小位置上形成缺级. 于是 80%～90%的光能集中到 λ 的 K 级谱线上，λ 称为闪耀波长. 图 5.10-3 所示为 $K=1$ 为闪耀级的情况. 选择不同的 θ 可使光栅对某一特定波段的某级光谱产生闪耀.

(2) 若使平行光沿光栅平面的法线 N 方向入射，经槽面沿满足反射定律方向反射的光线与入射方向有 2θ 的夹角. 这样相邻两槽面的对应点在此方向的次波的光程差为 $\Delta'=d\sin 2\theta$，当

$$d\sin 2\theta=K\lambda \tag{5.10-9}$$

时产生主极大，上式表示当 d 和 θ 给定时对于闪耀波长 λ 的闪耀级 K 应满足的关系式. 由于单槽衍射的中央主极大区域有一定的宽度，在闪耀波长附近一定波长范围内的同级谱线强度也都比较大，同时这些波长的其他级谱线也都较弱，所以反射定向光栅可以在一定波段内把光能集中到某一级光谱上去.

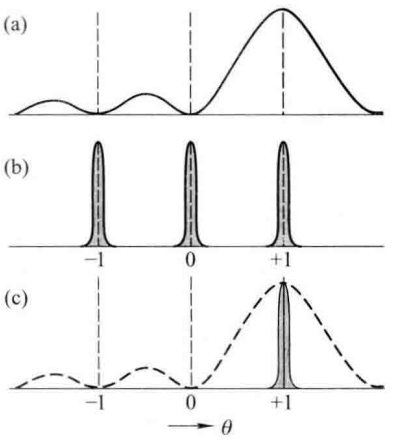


图 5.10-3

(a) 单槽衍射；(b) 槽间多光束干涉；(c) 单槽衍射的中央主极大与多光束干涉的第 1 级主极大重合

§ 5.11 菲涅耳衍射

前面已讨论了用菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式计算夫琅禾费衍射场，但是用该公式计算菲涅耳衍射场却十分复杂. 在衍射屏具有对称性的一些简单情况下，用代数加法或矢量加法代替积分运算，可以十分方便地对衍射现象作定性或半定量解释. 本节中将讨论菲涅耳半波带法和矢量图解法，并用它们去处理小圆孔和小圆屏的菲涅耳衍射.

5.11.1 菲涅耳半波带法

如图 5.11-1 所示，S 为一单色点光源，它发出的光波通过半径为 ρ 的小圆孔产生衍射，S 和衍射场中任一点 P 的连线与球面波在某一时刻的波面 S_0(半径为 R)相交于 O 点，OP 用 r_0 表示. 以 P 为

中心，$r_0+\frac{\lambda}{2}$，$r_0+\frac{2\lambda}{2}$，$r_0+\frac{3\lambda}{2}$，…为半径在波面上作圆，这些圆将波面露出小孔部分划分成了 n 个环带，其中每一环带的相应边缘两点或相邻带的对应点到 P 点的光程差为$\frac{\lambda}{2}$，所以把它们叫作**半波带**.

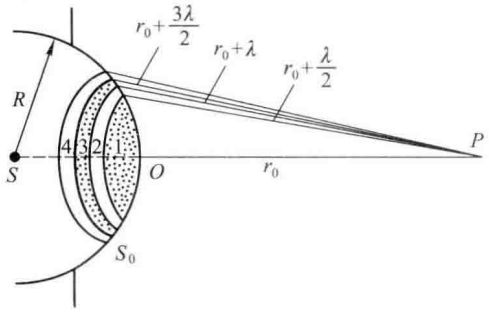


图 5.11-1　菲涅耳半波带

根据惠更斯-菲涅耳原理，S 在 P 点产生的振动应为波面上所有各带发出的子波在 P 点振动的叠加，设 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 分别表示第 1，第 2，第 3，…，第 n 半波带在 P 点的振幅，因为相邻带在 P 点产生的振动相位相反，则所有各带在 P 点产生的合振动之振幅为

$$A_n(P)=a_1-a_2+a_3-\cdots+(-1)^{n-1}a_n \quad (5.11-1)$$

根据菲涅耳理论，各带在 P 点产生的振动的振幅决定于带的面积、带至 P 点的距离和倾斜因子三项因素，下面来分析它们对第 K 半波带在 P 点产生振动的振幅的影响. 在图 5.11-2 中，第 K 半波带的半径

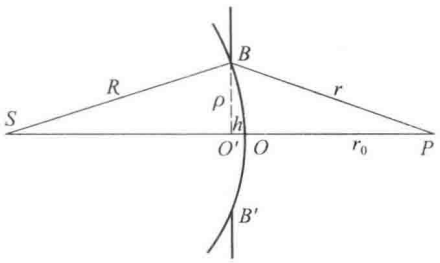


图 5.11-2　半波带面积的计算

$$\rho_K^2=R^2-(R-h)^2=\left(r_0+\frac{K\lambda}{2}\right)^2-(r_0+h)^2$$

式中 h 为 OO' 间距离，由上式得

$$\rho_K^2=2Rh-h^2=r_0K\lambda+\frac{K^2\lambda^2}{4}-2r_0h-h^2 \quad (5.11-2)$$

于是可得

$$h=\frac{r_0K\lambda+\frac{K^2\lambda^2}{4}}{2(R+r_0)} \quad (5.11-3)$$

包含 K 个半波带的球冠的面积为

$$S_K=2\pi Rh=\frac{\pi R}{R+r_0}\left(r_0K\lambda+\frac{K^2\lambda^2}{4}\right) \quad (5.11-4)$$

同理，包含 $K-1$ 个半波带的球冠面积为

$$S_{K-1}=\frac{\pi R}{R+r_0}\left[r_0(K-1)\lambda+\frac{(K-1)^2\lambda^2}{4}\right] \quad (5.11-5)$$

将(5.11-4)式减(5.11-5)式,并略去括号中的$\frac{\lambda^2}{4}$项,得第 K 个半波带面积

$$\Delta S_K = S_K - S_{K-1} = \frac{\pi R\lambda}{R+r_0}\left(r_0 + K\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{\pi R\lambda}{R+r_0} r_K \tag{5.11-6}$$

上式表明,随着波带序数 K 的增加,波带面积虽略有增加,但它到 P 点的距离也增大,任一半波带的面积和它至 P 点距离之比是一个与 K 无关的量. 因此,各半波带在 P 点振动的振幅之所以不同,就只与倾斜因子有关了.

当波面为球面时,$\theta_0 = 0$,(5.2-6)式成为 $F(\theta) = \frac{1+\cos\theta}{2}$. 随着倾角的增加,$F(\theta)$将逐渐减小. 当 $\theta = \pi$ 时,$F(\theta) = 0$,因此各半波带在 P 点产生的振幅应是一个单调下降的收敛数列,即

$$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n$$

于是(5.11-1)式可改写为

$$A_n(P) = \frac{a_1}{2} + \left(\frac{a_1}{2} - a_2 + \frac{a_3}{2}\right) + \left(\frac{a_3}{2} - a_4 + \frac{a_5}{2}\right) + \cdots \begin{cases} +\frac{a_n}{2}, & n \text{ 为奇数} \\ +\frac{a_{n-1}}{2}, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \tag{5.11-7}$$

对于单调下降的数列,近似地有下列关系

$$a_2 \approx \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2}, \quad a_4 \approx \frac{a_3}{2} + \frac{a_5}{2}, \cdots$$

因此(5.11-7)式括号中各项为零. 当 n 为奇数时,

$$A_n(P) \approx \frac{a_1}{2} + \frac{a_n}{2}$$

当 n 为偶数时

$$A_n(P) \approx \frac{a_1}{2} + \frac{a_{n-1}}{2} - a_n \approx \frac{a_1}{2} - \frac{a_n}{2}$$

上面两式可合并写为

$$A_n(P) \approx \frac{a_1}{2} \pm \frac{a_n}{2}, \quad n \text{ 为}\begin{pmatrix}\text{奇}\\ \text{偶}\end{pmatrix}\text{数} \tag{5.11-8}$$

对于自由空间传播的球面波,a_n 实际上为零,上式成为

$$A_n(P) = \frac{a_1}{2} \tag{5.11-9}$$

即球面波自由传播时整个波面上各次波源在 P 点产生的合振动之振幅等于第一半波带在同一点产生的振动振幅之半,强度则为$\frac{1}{4}$.

半波带法的优点是处理问题形象、直观,而且结果(5.11-8)式也很简单,缺点是适用范围较窄,因为对一定的观察点 P 来说,它要求波面恰好能分成若干个完整的半波带. 若半波带不完整,对半波带的面积需要重新估计,不易得到定量的结果,此时可用矢量图解法.

5.11.2　矢量图解法

为了得到比半波带法更为精细的结果，可将每一半波带分为更小的子带，用一个矢量表示每一子带对 P 点振动的贡献，然后用矢量合成图解法求出它们的合矢量，即得 P 的合振动. 例如在图 5.11-3 中，以 P 为中心，$r_0+\frac{\lambda}{2N}, r_0+\frac{2\lambda}{2N}, r_0+\frac{3\lambda}{2N}, \cdots, r_0+\frac{(N-1)\lambda}{2N}$ 为半径在波面上画圆，将第一半波带分成了 N 个子带. 各子带在 P 点产生的振动用矢量 $\Delta\boldsymbol{a}_1, \Delta\boldsymbol{a}_2, \cdots, \Delta\boldsymbol{a}_N$ 来表示，图5.11-4(a)示出这些矢量的合成图($N=6$). 图中取半波带中心处在 P 点产生的振动相位为零，因为相邻二带在 P 点振动的相位差为 $\frac{\pi}{N}$，所以各矢量的方向相继逐个转过一个小角度 $\frac{\pi}{N}$，到了 $\Delta\boldsymbol{a}_N$ 刚好转过角度 π. 又因为倾斜因子的影响，从中央开始各子带在 P 点振动的振幅是逐个减小的，因而各矢量的长度逐个减小. 由 $\Delta\boldsymbol{a}_1$ 的始端 O 到 $\Delta\boldsymbol{a}_N$ 的末端 M_1 引合矢量 $\boldsymbol{E}_1$，其长度 a_1 就是第一半波带在 P 点产生振动的振幅. 如果把第一半波带分成无限多个无限小的子带，图 5.11-4(a)的折线就过渡到图 5.11-4(b)所示与半圆形相差很小的弧线，而且弧线在 M_1 点的切线方向与 O 点的切线方向相反.

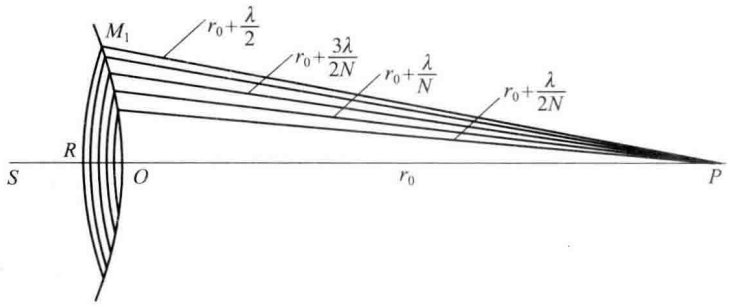


图 5.11-3　第一半波带分为 N 个子带

为了表示第二半波带对 P 点振动的贡献，只需在图 5.11-4(b)中以 M_1 为起点再画一个稍微小一些的和半圆稍有偏差的弧线，如图 5.11-4(c)所示. 图中 M_1M_2 就是第二带的合振幅矢量 $\boldsymbol{E}_2$，而 OM_2 则表示第一、第二两带在 P 点产生的振动的合振幅. 对于各后继波带，可按上述方法继续往下画，每增加一个波带就增加半圆，而且圈越缩越小，逐渐蜷曲成图 5.11-4(d)所示的螺线.

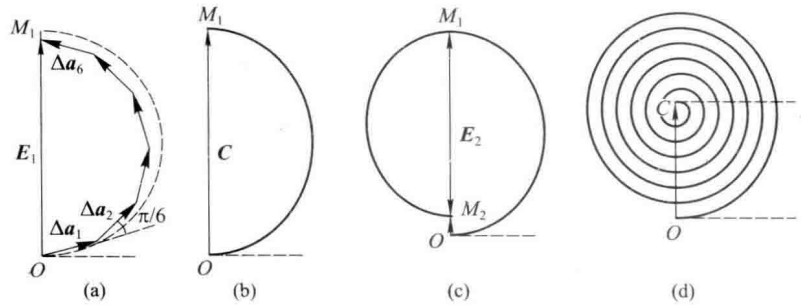


图 5.11-4　矢量合成图

在球面波自由传播的情形下，a_n 趋于零，螺线蜷曲至中心 C，于是可得出 $A_n \approx \frac{a_1}{2}$，与用半波带法所得结论相一致. 同时由图 5.11-4(d)可以看出，OC 与螺线在 O 点的切线垂直，这意味着由图解法所得 P 点合振动的相位较波带中心 O 处发出的次波在 P 点的相位滞后 90°，而在自由传播的情况下，P 点实际的相位应与 O 处发出的次波在 P 点的相位相同，这 90°的相位差异，正是惠更斯-菲涅耳原理的缺点之一.

5.11.3 小圆孔衍射

我们首先讨论图 5.11-2 中衍射场中心轴线(S 与小圆孔中心的连线)上任一点 P 的光强，为此需计算小孔露出的波面部分对 P 点所包含的半波带数 n. 因为 $r_0 \gg \lambda$，将(5.11-3)式中的 λ^2 项忽略，可得小孔中心至波面顶点的距离 $h=\frac{r_0 n\lambda}{2(R+r_0)}$，又因为 $R \gg h$，在(5.11-2)式中将 h^2 项忽略，并将上式代入得 $\rho^2=2Rh=\frac{Rr_0 n\lambda}{R+r_0}$，则

$$n=\frac{\rho^2(R+r_0)}{Rr_0\lambda} \tag{5.11-10}$$

如果我们把接收屏从远离小孔的某位置起向小孔移近，开始时从 P 点看小孔所露出的波面还不到一个半波带. 随着 P 点向小孔移近，露出的波带面积增加. 当 P 点移到某点，使小孔刚好露出一个半波带时，该点是一个亮点，由(5.11-8)式可知，$A(P)=a_1$. 即把波面大部分挡住而只保留第一个半波带时，P 点的光强为波面未受阻挡时该点光强的四倍，这个惊人的结果只有用波动理论才能解释. 继续把 P 点向内移动，光强变弱. 当移到刚好露出两个半波带时，P 点光强几乎为零. 此后再继续向内移动接收屏，由(5.11-10)式可知，n 将交替地出现奇数和偶数值，P 点的亮暗情况将交替地变化.

当 S 和 P 点固定不动时，即 R、r_0 不变，随着半径 ρ 的增加或缩小，n 也将交替地出现奇数和偶数值，P 点的亮暗也交替地变化(图 5.11-5). 而且由(5.11-10)式不难看出，改变 ρ 值比改变 r_0 的效果更大.

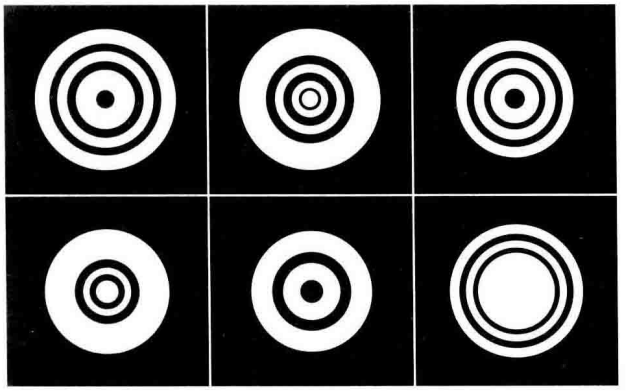


图 5.11-5 不同大小的圆孔所产生的菲涅耳衍射图样

如果小孔的半径远大于光波长($\rho \gg \lambda$),或接收屏离小孔很近(r_0 很小),则小孔所露出的波带数 n 很大,a_n 趋于零,$A_n \approx \frac{a_1}{2}$,轴线上各点的光强与小孔的大小无关,于是得到与几何光学一致的结论,因此我们可以说几何光学是波动光学的一种极限情形.

当光源置于无穷远处,即用平行光入射,且接收屏离衍射屏足够远(r_0 很大)时,小孔只露出一个半波带的一小部分. 再继续移远观察屏,小孔露出的波面不会大于一个半波带,P 点始终不会出现暗点,这时已进入夫琅禾费衍射区.

综上所述,若用平行光入射到衍射屏上,其后面的衍射场可分为三个区域:(1) 紧接着衍射屏的直线投影区;(2) 近场区或菲涅耳衍射区;(3) 远场区或夫琅禾费区. 因为在夫琅禾费区波面只露出一个半波带的一小部分,即

$$n=\frac{\rho^2}{\lambda r_0} \ll 1 \quad 或 \quad r_0 \gg \frac{\rho^2}{\lambda} \tag{5.11-11}$$

上式即为夫琅禾费区所应满足的条件. 在 §6.2 中将详细讨论衍射区的划分.

对于轴线外任一点的光强,也可以用同样方法讨论. 例如图 5.11-6(a)中,S 与轴外点 P_1 的连线 SP_1 交波面于 O_1 点,以 O_1 为中心作半波带,由于连线 SP_1 对圆孔已不对称,故小孔所露出的半波带如图 5.11-6(b)所示. 这些半波带对 P_1 点振动的贡献不仅取决于带的数目,而且与各带的残缺情况有关,因而不能再用(5.11-8)式. 从原则上讲,我们也可对图 5.11-6(b)中的那些带的面积进行计算,从而得到它们对 P_1 点振动的贡献,然而这是十分麻烦的,而且用处也不大,因此我们不拟仔细讨论.

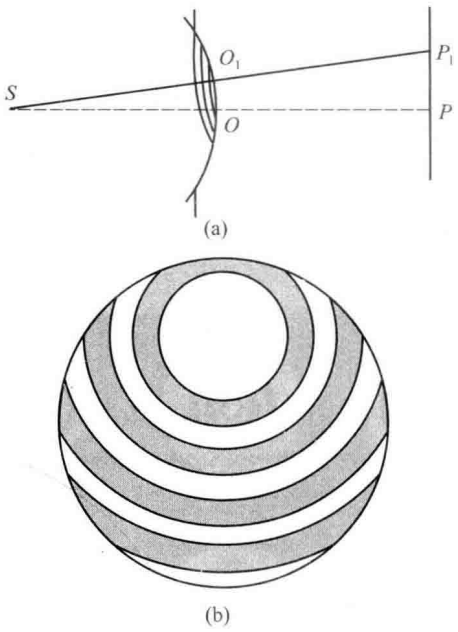


图 5.11-6　对轴线外点的半波带

5.11.4 小圆屏衍射

图 5.11-7 中，S 为点光源，BB'是一个不透明的小圆屏. 在 BB'后的接收屏上可观察到 BB'的几何投影中心 P 是一个亮点，它们周围尚有很少几圈很淡的同心亮环(见图 5.11-8)，假如以 P 为中心将到达圆屏处的波面分为若干半波带，此时圆屏遮住了开始的 m 个带，而且因为带的总数很大，最末一带对 P 点振动的贡献实际为零，即 $a_n \to 0$，于是由(5.11-8)式可得 P 点的振幅

$$A_P = \frac{a_{m+1}}{2}$$

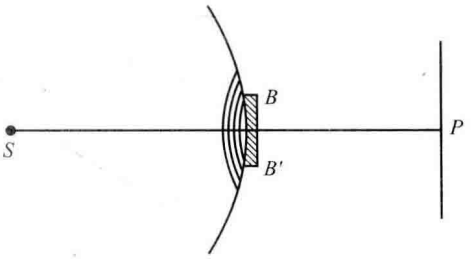


图 5.11-7 小圆屏衍射

由上式可知，当圆屏很小从而挡住的半波带很少时，除去紧挨着圆屏之后的地方外，无论把接收屏移近还是移远，轴线上 P 点总是一个亮点. 如图 5.11-9 所示矢量图中，M 点与小圆屏边缘 B 点对应，MC 的大小表示 P 点振动的振幅. 当圆屏半径增加或接收屏向圆屏移近时，圆屏所挡住的波带数增加，M 点绕逆时针方向沿螺线向中心 C 靠近，P 点的强度将逐渐下降而最后趋于零. 至于 P 点周围的圆环，可用分析小圆孔衍射相同的方法讨论.

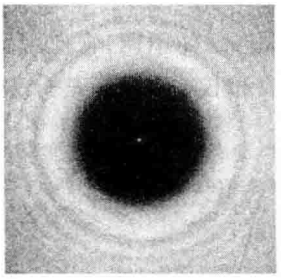


图 5.11-8 小圆屏的菲涅耳衍射图

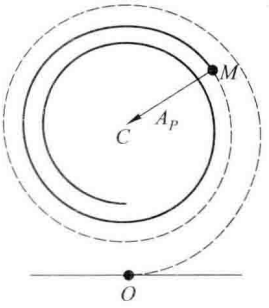


图 5.11-9 用于小圆屏衍射的矢量图

1818 年，菲涅耳参加法国科学院主办的一次竞赛，提出了关于衍射理论的著名论文. 泊松根据菲涅耳的理论推断出圆形障碍物阴影中心应出现一个亮点，后来称这个亮点为**泊松亮点**. 泊松错误地认为这是不可能的，并以此作为反对波动理论的重要论据. 不久阿拉果从实验上观察到了泊松预断的亮点，证明了菲涅耳理论的正确. 阿拉果的实验给波动理论以有力的支持.

用激光很容易演示小圆屏的衍射. 将一个直径为 2~3 mm 的小滚珠粘到一块平板薄玻璃或凸透镜上(或用细丝悬挂)，He-Ne 激光经针孔滤去其边缘不均匀部分后照射到滚珠上，滚珠距针孔约 30~40 cm. 因为滚珠有圆形投影，对波前的限制相当于一个小圆屏，所以在距离它数米远的屏上可看到泊松亮点和它周围的衍射环(图 5.11-8).

例 5.11-1 一不透明屏上有一直径为 2 mm 的圆孔，用波长为 500 nm 的单色平行光垂直入射到小圆孔上，沿其中心轴线移动一小探头，可测量光强. 试计算前三个光强极大值和极小值的位置.

解 由(5.11-10)式可得用平行光($R=\infty$)照明小孔时，小孔对其所露出的半波带数为 n 的 P 点与小孔的距离为 $r_0 = \dfrac{\rho^2}{n\lambda}$，已知 $\rho = 1$ mm，$\lambda = 5\times10^{-4}$ mm，代入上式可得

$$r_0=\frac{1}{n\times5\times10^{-4}}\ \text{mm}=\frac{1}{n}\times2\times10^{3}\ \text{mm}$$

当 $n=1$、3、5 时，得前三个光强极大值，由上式可得它们与小孔的距离分别为 2.0 m，0.67 m，0.40 m. 当 $n=2$、4、6 时，得前三个光强极小值，由上式可得它们与小孔的距离分别为 1.0 m，0.50 m，0.33 m.

例 5.11-2　波长 $\lambda=550$ nm 的单色平行光正入射到一直径 $D=1.1$ mm 的圆孔上，试求通过圆孔中心的轴线上与孔相距 33 cm 处 P 点的光强与光波自由传播时该点的光强之比.

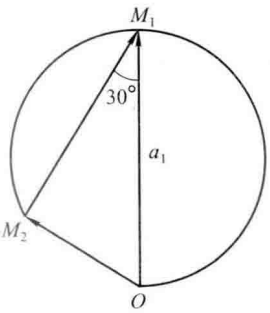


图 5.11-10

解　由(5.11-10)式，圆孔对 P 点露出的半波带数为

$$n=\frac{\rho^2}{\lambda r_0}=\frac{(0.55)^2}{5.5\times10^{-4}\times330}=1\frac{2}{3}$$

即圆孔对 P 点露出第一半波带和第二半波带的 $\frac{2}{3}$，因此 P 点的振幅矢量为 OM_2（图5.11-10），由图可知 $OM_2=OM_1\sin30°=\frac{a_1}{2}$，即 P 点的振幅为第一半波带所产生的振幅之半，其光强与光波自由传播时该点的光强相等.

§5.12　波　带　片

波带片是一种衍射成像元件，根据其振幅透射率函数形式的不同，常使用的有矩形波带片和正弦波带片两类. 根据它的作用是调制入射光的振幅或相位，又可将其分为振幅型和相位型两类.

5.12.1　矩形波带片

1. 制作原理

§5.11 中讨论半波带法（图 5.11-1）时已指出，相邻两带在 P 点振动的相位相反，它们对 P 点振动的贡献是相消的；而相隔一带的两带在 P 点振动的相位相同，它们对 P 点振动的贡献是相长的. 由此不难想到，如果在 O 处放一衍射屏将所有奇数带（或偶数带）全部挡掉，那么剩下的带在 P 点的光强将大大增加. 例如，假定圆孔对 P 点露出了 20 个半波带，在挡住全部偶数带后，P 点的振幅为

$$A_P=a_1+a_3+\cdots+a_{19}\approx10a_1$$

它几乎是波面全未受阻挡时振幅 $\frac{a_1}{2}$ 的 20 倍[见图 5.12-1(a)]，强度则增加到约 400 倍，结果使 P 点成为一个很亮的光点. 这种能将每隔一个半波带的光振动的复振幅（振幅或相位）加以改变的衍射屏称为**波带片**（图 5.12-2）.

用单色平行光正入射到一个半径为 ρ_K 的小圆孔上，由(5.11-10)式，并令 R 趋于 ∞，则对 P 点所露出的第 K 半波带的半径为

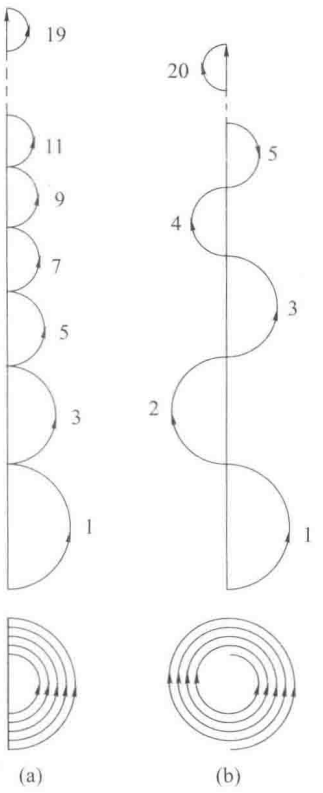


图 5.12-1

(a) 挡住偶数半波带的矢量图,为观察方便,将下图重绘成上图; (b) 用于相位波带片的矢量图

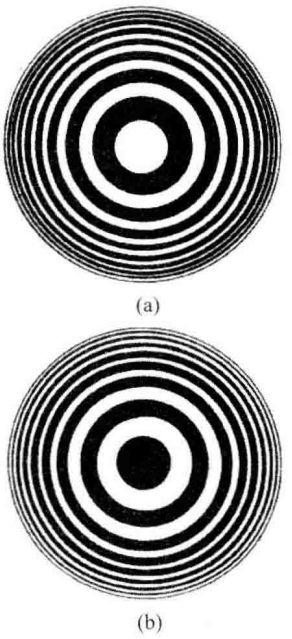


图 5.12-2 波带片

(a) 中心为开带;(b) 中心为闭带

$$\rho_K=\sqrt{K\lambda r_0}\propto\sqrt{K} \tag{5.12-1}$$

式中 K 取 1,2,3 等整数. 上式表明第 K 半波带外圆的半径与自然数的平方根成正比,在一张大白纸上画许多半径与自然数平方根成正比的同心圆(除了这种圆划分外,由于十字亮线便于对准,在激光准直中使用的波带片不少是作条带或方形划分的),然后把相同的一带涂黑,再用照相缩微的方法把它精缩制版,就可得到一块菲涅耳矩形波带片,或称黑白波带片. 一般的波带片至少有十几个环带,多的可达上百个环带. 环带愈多,P 处光点愈小,光强也愈大. 为了进一步提高波带片在 P 点产生的光强,可以不挡住相间的带,而在奇数(或偶数)带的位置镀一层透明薄膜,适当控制膜的厚度,使通过它的光波在 P 处产生的振动相位延迟 π,这样各带在 P 点所产生的振动相位相同,结果使 P 点光强增加,其矢量图如图 5.12-1(b)所示. 这种波带片称为**相位波带片**.

2. 波带片的焦点

若有一块矩形波带片 ZZ',其第 K 半波带外圆的半径为 ρ_K,在轴上总可以找到距波带片为 r_0 的 P_0 点满足式子 $r_0=\dfrac{\rho_K^2}{K\lambda}$,即用波长为 λ 的单色平面光波照射到 ZZ' 上(如图 5.12-3),将在 P_0 点

生成一亮点. 换言之,波带片宛如正透镜一样有聚光作用. 我们称 P_0 点为波带片的主焦点,r_0 为其主焦距,由于 r_0 与波长 λ 有关,用波带片聚焦时,和普通透镜一样也有色差现象. 但由(1.1-6)和(1.8-8)式,普通透镜的焦距将随 λ 的增大而增大;而由上式,波带片的焦距将随 λ 的增大而减小,利用这种相反的色散关系可将二者联合运用以校正纵向色差.

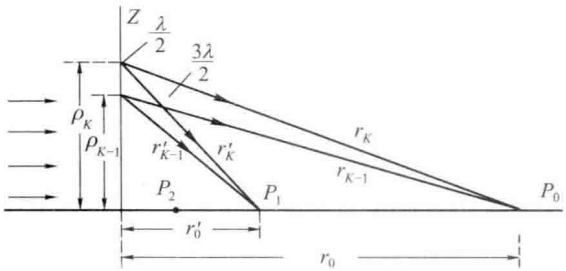


图 5.12-3 波带片的主焦点和次焦点

菲涅耳波带片与普通透镜不同,除了主焦点外,在 $\frac{r_0}{3},\frac{r_0}{5},\frac{r_0}{7},\cdots$ 处还有一系列强度较弱的次焦点 $P_1,P_2,P_3,\cdots$. 由图 5.12-3 知,在 $r_0 \gg \rho_1$ 的情况下,

$$r_K=(r_0^2+\rho_K^2)^{\frac{1}{2}}\approx r_0+\frac{\rho_K^2}{2r_0},\quad r_{K-1}=(r_0^2+\rho_{K-1}^2)^{\frac{1}{2}}\approx r_0+\frac{\rho_{K-1}^2}{2r_0}$$

两式相减得

$$r_K-r_{K-1}\approx\frac{\rho_K^2-\rho_{K-1}^2}{2r_0} \tag{5.12-2}$$

同理对第一次焦点 P_1 可得

$$r'_K-r'_{K-1}\approx\frac{\rho_K^2-\rho_{K-1}^2}{2r'_0} \tag{5.12-3}$$

因为 $r_K-r_{K-1}=\frac{\lambda}{2}$,而 $r'_0=\frac{r_0}{3}$,由以上两式可得 $r'_K-r'_{K-1}=\frac{3\lambda}{2}$. 因此对 P_0 点而言的一个半波带,对 P_1 点则包含了三个半波带. 波带片上相邻开带在 P_0 点产生振动的相位差为 2π,在 P_1 点则为 6π,各带在 P_1 点的振动也是同相位相干叠加而产生极大强度,因而形成一焦点. 不过因为其强度较 P_0 点弱,所以叫次焦点. 同理不难证明在 $\frac{r_0}{5},\frac{r_0}{7},\cdots$ 处也生成次焦点.

波带片除了具有上述一系列实焦点外,在相对于波带片与实焦点对称的位置上还有一系列虚焦点. 这可解释如下:在图 5.12-4 中,波带片 ZZ' 平面是入射平面波的波面,A 和 B 是波带片上相邻开带中的任意两个对应点. 由 P_0 和 P'_0 的对称性可知,$P'_0A-P'_0B=\lambda$. 如果以 P'_0 为中心,P'_0A 和 P'_0B 为半径作圆,分别交 P'_0A 和 P'_0B 的延长线于 A' 和 B' 点,由于 $AA'=P'_0A-P'_0A'=P'_0A-P'_0B=\lambda$,而 $AA'=BB'$,则 $BB'=\lambda$,因此衍射场中 A 和 B' 点相位相同. 这样以 P'_0 为中心的球面是同相位面,即衍射场中存在着以 P'_0 为中心的发散球面波,与负透镜类似,P'_0 为波带片的虚

焦点. 用相同的方法讨论可知,在与 $P_1,P_2,\cdots$ 对称的位置 $P_1',P_2',\cdots$ 还有一系列虚焦点.

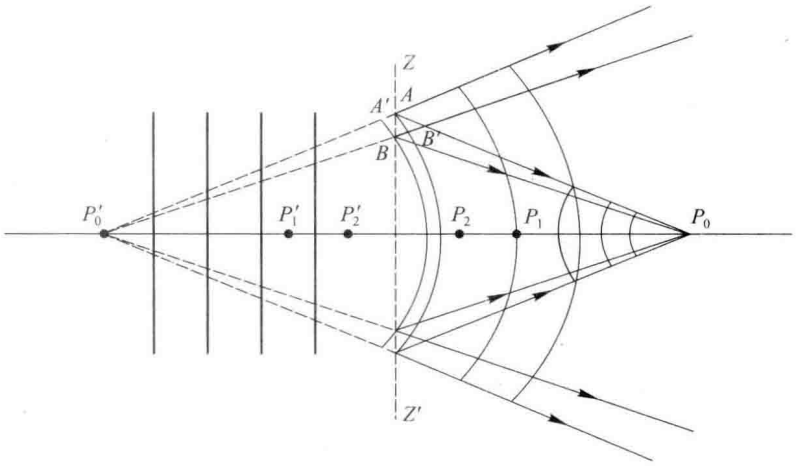


图 5.12-4 波带片的虚焦点

总之,平面波经波带片衍射后生成一复杂的衍射场,它包含有一系列中心在轴线上的会聚和发散的球面波.

3. 波带片对轴上物点成像的规律

若用点光源 S 照明波带片(图 5.12-5),则波带片平面 ZZ' 不再与入射波的波面重合,主焦点 P_0 点也不是亮点,然而却在 P 点生成亮点,它就是 S 的像. 假设第 K 半波带的外缘点为 Q,像点 P 应满足下式

$$(SQ+QP)-(SO+OP)=\frac{K\lambda}{2} \qquad (5.12-4)$$

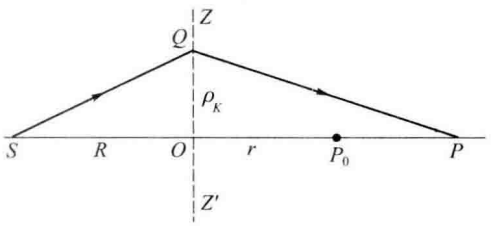


图 5.12-5 波带片对轴上物点成像

设 R 和 r 分别为波带片至光源 S 和像点 P 的距离,ρ_K 为第 K 半波带外圆的半径,在 $R、r_0 \gg \rho_K$ 的条件下可得 $SQ=(R^2+\rho_K^2)^{\frac{1}{2}}\approx R+\frac{\rho_K^2}{2R}$,$QP=(r^2+\rho_K^2)^{\frac{1}{2}}\approx r+\frac{\rho_K^2}{2r}$,将以上二式代入(5.12-4)式可得 $\frac{1}{R}+\frac{1}{r}=\frac{K\lambda}{\rho_K^2}$,令 $f'=r_0=\frac{\rho_K^2}{K\lambda}$ 表示波带片的主焦距,于是上式可写为

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{r}=\frac{1}{f'} \qquad (5.12-5)$$

式中 R 为物距,r 为像距,若再考虑到几何光学中的符号规则,R 应取负值,上式便与薄透镜成像高斯公式的形式完全相同,称为波带片的**类透镜物像距公式**.

应当注意,波带片与普通透镜的成像原理是不相同的. 前者是利用光的衍射,后者则是利用光的折射. 普通透镜成像时,从物点发出的各光线到像点的光程相等,而从物点发出的光波经波带片各带衍射后到达像点的相位差为 2π 的整数倍,因而产生同相位相干叠加. 若在(5.12-5)式

中将主焦距换为次焦距，则可得相应的次级像. 波带片可以同时生成多级像表明它同时具有多个正负透镜的作用，而普通透镜成像时，物和像是一一对应的.

5.12.2　正弦波带片

如图 5.12-6 所示，单色点光源 S 置于抛物面镜的焦点上，从 S 发出的球面波和经抛物面镜反射生成的平面波共同照射在与入射平行光束垂直放置的底片 Oxy 平面上. 球面波在底片上任一点 $P(x,y,0)$ 的复振幅为

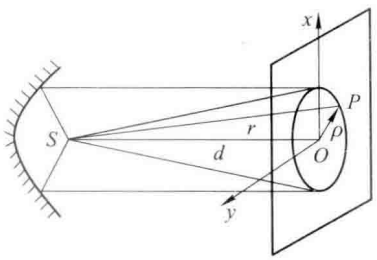


图 5.12-6　正弦波带片的制作

$$\tilde{E}_1(P)=\frac{A}{r}e^{ikr} \tag{5.12-6}$$

式中 A 为常数，r 为 S 至 P 点的距离，$k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$. 通常情况下 S 至底片的距离 $d \gg x, y$，则

$$r=(x^2+y^2+d^2)^{\frac{1}{2}}\approx d+\frac{x^2+y^2}{2d}$$

将(5.12-6)式分母中的 r 用 d 代替，指数中的 r 用上式代替，并令 $\rho^2=x^2+y^2$，则得

$$\tilde{E}_1(P)=\frac{A}{d}\exp\left[ik\left(d+\frac{\rho^2}{2d}\right)\right]$$

当点源 S 和底片位置一定后，d 为常量. 为了计算简单起见，我们假定球面波在 O 点的初相位为零而略去上式相位因子中的常量 kd，于是上式可写为

$$\tilde{E}_1(P)=\frac{A}{d}\exp\left(ik\frac{\rho^2}{2d}\right) \tag{5.12-7}$$

对于平面波，我们假设它在 O 点与球面波的初相位相同，则它在 xy 面上的复振幅为一常数

$$\tilde{E}_2(P)=B \tag{5.12-8}$$

根据(4.1-8)式，P 点的干涉光强为

$$I(P)=\frac{A^2}{d^2}+B^2+\frac{2AB}{d}\cos\frac{k\rho^2}{2d} \tag{5.12-9}$$

上式表明底片上所得的平面波与球面波的干涉图样是中心在原点的一系列同心圆环.

当 $\dfrac{k\rho^2}{2d}=2K\pi$ $(K=0,1,2,\cdots)$ 时得亮环，即第 K 级亮环的半径为

$$\rho_K=\sqrt{2K\lambda d} \tag{5.12-10}$$

当 $\dfrac{k\rho^2}{2d}=(2K-1)\pi$ $(K=1,2,3,\cdots)$ 时得暗环，即第 K 暗环的半径为

$$\rho_K=\sqrt{(2K-1)\lambda d} \tag{5.12-11}$$

以上二式表明亮环和暗环的半径分别与偶数和奇数的平方根成正比. 将底片上记录的干涉图样经线性曝光和冲洗后作为衍射屏,其振幅透射率函数为

$$t(\rho)=a+bI=a+b\left(\frac{A^2}{d^2}+B^2+\frac{2AB}{d}\cos\frac{k\rho^2}{2d}\right)=t_0+t_1\cos\frac{k\rho^2}{2d}$$

式中 $t_0=a+b\left(\frac{A^2}{d^2}+B^2\right)$, $t_1=\frac{2bAB}{d}$ 为常数. $t(\rho)$ 随 ρ 变化的曲线如图5.12-7所示. 这种衍射屏实际上是一块波带片,不过它与矩形波带片不同,其振幅透射率是 ρ^2 的余弦函数,习惯上称为正弦波带片.

用一束和制作波带片时波长相同的单色平面波正入射到波带片上(图 5.12-8),在波带片表面此照明光波的复振幅为 $\tilde{E}_i=B$. 由(5.1-1)式,波带片后表面上的衍射场

$$\tilde{E}_i=Bt(\rho)=B\left(t_0+t_1\cos\frac{k\rho^2}{2d}\right)=B\left(t_0+\frac{t_1}{2}e^{ik\frac{\rho^2}{2d}}+\frac{t_1}{2}e^{-ik\frac{\rho^2}{2d}}\right)$$

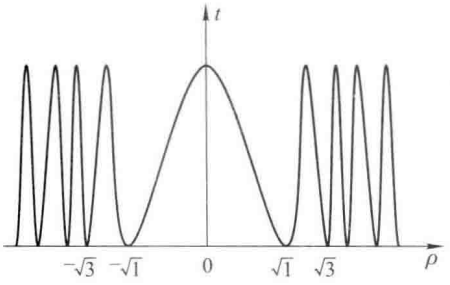


图 5.12-7 正弦波带片的振幅透射率

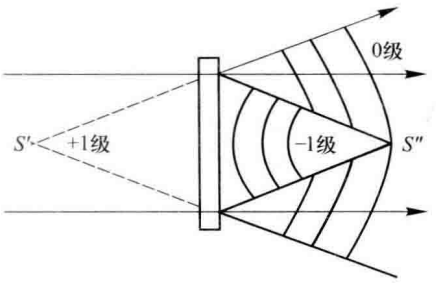


图 5.12-8 正弦波带片的衍射

根据惠更斯-菲涅耳原理,上式完全决定了波带片后面的衍射场分布,它包括了 0、±1 级衍射波. 式中右端第一项为与 x、y 无关的常数,表示零级衍射光即直接透射的平面波;第二项表示球心在波带片左方距波带片 d 处的发散球面波,即+1 级衍射波,迎着它可以观察到一个虚像 S';第三项表示球心在波带片右方 d 处的会聚球面波,即-1 级衍射波,它将形成实像 S'',换言之 S''和 S'为波带片的实焦点和虚焦点.

根据傅里叶分析方法,一个矩形函数可以分解为许多不同频率的简谐函数之和. 因此矩形波带片可以看作由许多正弦波带片组成,而每一正弦波带片有一个实焦点和一个虚焦点,所以矩形波带片存在多个实焦点和虚焦点.

波带片是瑞利在 1871 年首先制成的,它是半波带法原理的极好证明. 由于制作上的困难、衍射效率低及存在多级像等原因,长期以来波带片没有得到实际应用. 20 世纪 60 年代以后,激光和全息术的发展以及近年来低噪声高衍射效率记录介质的出现,才使得它有了较多的实际应用. 波带片和普通透镜相比,具有面积大、重量轻、可折叠等优点,特别是可制作用于微波、红外、紫外、X 射线等波段的波带片,为不可见光的成像提供了新的途径,更使它具有了广阔的应用前景.

§5.13　近场光学简介

5.13.1　什么是近场光学

物体外的光场可分为近场和远场两个区域. 从物体表面到距离表面一个(或几个)波长内的区域称为近场,从近场以外延伸到无穷远处则称为远场. 传统的光学,如几何光学、物理光学等,通常只研究远场区内的光学现象,一般统称为远场光学.

随着科学技术的发展,以及人们对物质介观和微观认识不断深入,对成像光学系统分辨率提出了更高的要求. 但是在§5.6中已指出,由于衍射效应的影响,显微镜的分辨率极限约为 $\delta y \approx \lambda/2$,使用常规显微镜不可能分辨比 $\lambda/2$ 更小的物体信息.

1928年英国科学家申奇(E.H.Synge)提出了一个突破衍射分辨极限的构想:以极小的针孔(直径约为10 nm),在极近距离(孔与样品之间距离为10 nm),对样品进行极小步距(10 nm)的逐点扫描,以获取高分辨率的图像. 但由于当时的工艺条件无法解决这三个10 nm的问题,因而这个构想未能实现. 直到1972年,E.A.Ash等人应用近场的概念,在微波波段($\lambda = 3$ cm)实现了 $\lambda/60$ 的分辨率. 自此以后,相关的研究有了较大发展.

在20世纪80年代,出现了一种新型学科——近场光学. 它对于传统光学成像系统的分辨率极限产生了革命性的突破,将显微术的空间分辨率提高到小于1 nm. 随着近场光学的迅速发展,其研究内容已包括:超衍射分辨率极限的光学问题,以及与隐失波有关的光学现象、理论和技术等. 近场光学是正在发展中的学科,有很好的发展前景.

5.13.2　隐失波与衍射分辨率极限的突破

由发光过程的电磁理论知道,物体内的电子流或电子密度分布与物体外的电磁场分布密切相关. 因此,物体发出的光波携带了物体的形貌信息,可以通过探测物体外的电磁场分布获取物体表面的结构信息. 下面将以正弦振幅型光栅为例讨论近场光学原理及其探测方法.

假设正弦振幅型光栅周期为 d,周期方向与 x 轴夹角为 θ,则其振幅透射率可表示为

$$t(x,y) = t_0 + t_1\cos(2\pi f_x x + 2\pi f_y y)$$

$$f_x = \frac{1}{d_x} = \frac{\cos\theta}{d}, \quad f_y = \frac{1}{d_y} = \frac{\sin\theta}{d}$$

如图5.13-1所示,设振幅为 E_0 的平面光波沿 z 方向传播,正入射透过光栅,在其表面($z=0$)形成拥有光栅信息的光场分布,该场的特性可用复振幅 $\tilde{E}(x,y,0)$ 来表示:

$$\begin{aligned}\tilde{E}(x,y,0) &= E_0 t(x,y)\\ &= E_0[t_0 + t_1\cos(2\pi f_x x + 2\pi f_y y)] \end{aligned} \tag{5.13-1}$$

根据欧拉公式,

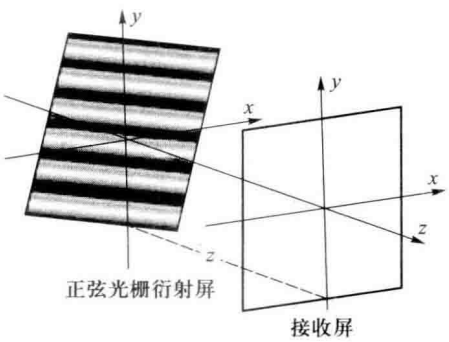


图5.13-1　正弦光栅近场衍射示意图

$$\tilde{E}(x,y,0)=E_0t_0+\frac{1}{2}E_0t_1\{\exp[\mathrm{i}(2\pi f_x x+2\pi f_y y)]+\exp[-\mathrm{i}(2\pi f_x x+2\pi f_y y)]\}$$

$$=\tilde{U}_0(x,y,0)+\tilde{U}_{+1}(x,y,0)+\tilde{U}_{-1}(x,y,0) \tag{5.13-2}$$

其中

$$\tilde{U}_0(x,y,0)=E_0t_0$$

$$\tilde{U}_{+1}(x,y,0)=\frac{1}{2}E_0t_1\exp[\mathrm{i}(2\pi f_x x+2\pi f_y y)]$$

$$\tilde{U}_{-1}(x,y,0)=\frac{1}{2}E_0t_1\exp[-\mathrm{i}(2\pi f_x x+2\pi f_y y)]$$

由(3.2-19)式可知,一组空间频率对应于沿一定方向传播的一列单色平面波. 上式表明,从正弦光栅输出的光波可视为三列平面波组成,其中$\tilde{U}_0$沿原入射光方向(z轴正向)传播,而U_{+1}和U_{-1}是一对共轭波. 它们的方向角分别满足下式:

$$\cos\alpha_0=0,\quad \cos\alpha_{\pm1}=\pm\lambda f_x$$

$$\cos\beta_0=0,\quad \cos\beta_{\pm1}=\pm\lambda f_y$$

$$\cos\gamma_0=1,\quad \cos\gamma_{\pm1}=\sqrt{1-\cos^2\alpha_{\pm1}-\cos^2\beta_{\pm1}}=\sqrt{1-\lambda^2(f_x^2+f_y^2)}$$

上述各平面波分量沿不同方向传播到探测平面时,其振幅不受影响,只是各方向上的传播距离不同而产生不同的相移. 正弦光栅的零级光沿z方向传播,±1级衍射波的方向角的大小相同. 它们产生的相移因子为

$$\varphi(z)=k_z z=\frac{2\pi z}{\lambda}\cos\gamma=\begin{cases}\dfrac{2\pi z}{\lambda}, & 0\text{级}\\ \dfrac{2\pi z}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2(f_x^2+f_y^2)}, & \pm1\text{级}\end{cases} \tag{5.13-3}$$

因此,探测面z上的光场的复振幅$\tilde{E}(x,y,z)$是$z=0$平面上的各平面波复振幅乘以相移因子后的线性叠加.

$$\tilde{E}(x,y,z)=\tilde{U}_0(x,y,z)+\tilde{U}_{+1}(x,y,z)+\tilde{U}_{-1}(x,y,z) \tag{5.13-4}$$

其中

$$\tilde{U}_0(x,y,z)=E_0t_0\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi z}{\lambda}\right)$$

$$\tilde{U}_{+1}(x,y,z)=\frac{1}{2}E_0t_1\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi z}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2(f_x^2+f_y^2)}\right)\exp[\mathrm{i}(2\pi f_x x+2\pi f_y y)]$$

$$\tilde{U}_{-1}(x,y,z)=\frac{1}{2}E_0t_1\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi z}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2(f_x^2+f_y^2)}\right)\exp[-\mathrm{i}(2\pi f_x x+2\pi f_y y)]$$

1. 当正弦光栅周期$d\geqslant\lambda$时

$$\lambda^2(f_x^2+f_y^2)=\lambda^2\left(\frac{\cos^2\theta}{d^2}+\frac{\sin^2\theta}{d^2}\right)=\frac{\lambda^2}{d^2}\leqslant1$$

即光栅衍射场的指数相移因子$\frac{2\pi z}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2(f_x^2+f_y^2)}$为实数. 这时,通过光栅后的衍射场$U_{+1}$和$U_{-1}$

是行波场，此衍射波可向远处传播.

2. 当正弦光栅周期 $d<\lambda$ 时

$$\lambda^2(f_x^2+f_y^2)=\lambda^2\left(\frac{\cos^2\theta}{d^2}+\frac{\sin^2\theta}{d^2}\right)=\frac{\lambda^2}{d^2}>1$$

则光栅衍射场的指数相移因子 $\frac{2\pi z}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2(f_x^2+f_y^2)}$ 为虚数，所以通过光栅后的衍射场

$$\tilde{U}_{\pm1}(x,y,z)=\frac{1}{2}E_0t_1\exp(-\eta z)\exp[\pm\mathrm{i}(2\pi f_x x+2\pi f_y y)] \tag{5.13-5}$$

式中

$$\eta=\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\lambda^2(f_x^2+f_y^2)-1}$$

即 $\tilde{U}_{+1}$ 和 $\tilde{U}_{-1}$ 是沿 xy 平面传播，而其振幅则以指数规律沿 z 方向迅速衰减，这称为隐失波. 一般定义振幅衰减至 1/e 时的距离为衰减长度

$$R_d=\frac{1}{\eta}=\frac{\lambda}{2\pi\sqrt{\lambda^2(f_x^2+f_y^2)-1}}$$

由于物体表面可视作由若干周期不等的正弦光栅所组成，从以上对正弦振幅型光栅衍射场的分析可知，在物体表面附近的近场光波包含两部分：① $d>\lambda$ 的光栅结构产生的衍射波为一种可以向远处传播的行波，仅含光场的低空间频率部分，不包含物体的亚波长结构信息，它只能将大于衍射分辨极限结构的信息传播到远场. ② $d<\lambda$ 的光栅结构产生的衍射波为局域于物体表面的隐失波，仅含光场高空间频率部分. 物体亚波长结构的信息隐藏在隐失波中.

隐失波是近场光学研究的主要内容之一. 理论与实验表明，隐失波具有如下特性：

(1) 隐失波不能独立地存在于自由空间，仅存在于距离物体表面小于一个波长的近场中，其强度随距物体表面的距离的增加呈指数衰减，距离表面越近，隐失波越强；

(2) 凡具有亚波长微小结构的物体，用传播波照明或是隐失波照明，都会产生隐失波；

(3) 根据互易性原理，借助于亚波长的结构，又可将隐失波转换成行波，并将超分辨极限的信息传播到远场用仪器探测；

(4) 从隐失波到传播波的转换是线性的，新的传播波能再现隐失波的局域振荡特性.

因此，实现超衍射分辨极限的关键是成像系统必须用隐失波，通过检测近场区的隐失波，才能获得超衍射分辨极限的信息.

5.13.3 扫描近场光学显微镜

扫描近场光学显微镜(SNOM)是获取近场超分辨信息的基本工具. 它与一般光学成像系统可以同时获取面上各点的像不同，SNOM 获取物体超分辨信息的基本方法是将具有亚波长结构的光学探针引入样品近场区，在样品表面逐点扫描而获取物体表面整体的超分辨信息.

图 5.13-2 是一种典型的 SNOM 总体结构示意图，主要包括光学探针、探针扫描控制器(包括探针-样品间距控制、x-y 扫描驱动器)、光输入系统、信号采集及处理系统、平台.

图中具有纳米尺寸小孔的光学探针和样品间距保持在纳米量级，入射光经过探针的小孔照明样品. 由于探针的孔径为亚波长，从光学探针发出的照明光波主要为隐失波. 照明的隐失波与样品表面的亚波长结构相互作用，可以将隐失波转换为具有超分辨信息的行波，而且这种转换过

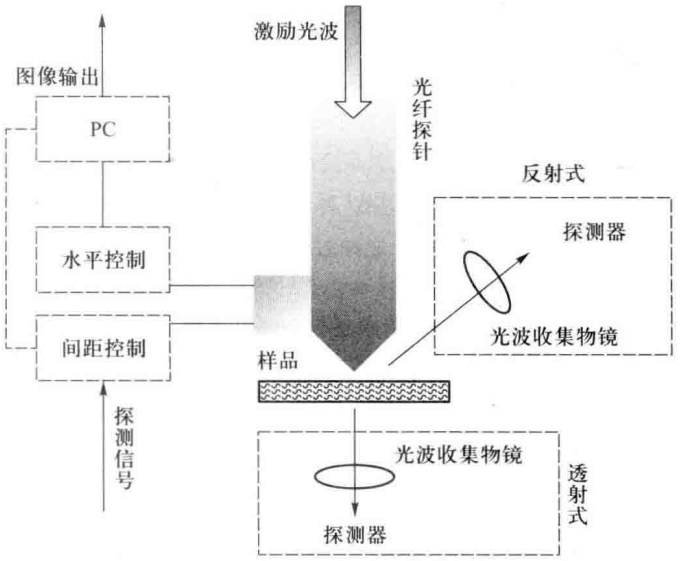


图 5.13-2 扫描近场光学显微镜结构示意图

程是线性的. 通过探测器进行记录,并经光电倍增管放大,再输入计算机进行处理,即可绘制成被测表面的形态图. 在探测中,样品和光学探针在水平方向作相对运动,相当于探针在样品表面进行扫描. 相应于探针在样品表面的不同位置,样品的表面形貌不同,样品和探针的耦合程度不同,远程探测到的信号也不同. 所以,远场探测信号的变化反映了样品表面的亚波长的结构信息.

近场扫描光学显微镜对隐失波探测的分辨率已达到 nm 量级. 这将为纳米科技及科学研究的其他诸多领域提供有力的测量方法和探测系统,其应用范围正在不断扩大,例如超分辨率成像、nm 光刻、超高密度近场光存储、nm 尺度粒子的捕获与操控等.

思 考 题

5.1 惠更斯-菲涅耳原理中引入的次波源为什么不能看作真实的点光源?

5.2 在晚间,通过张开在眼前的手帕去观看远处的白炽灯或高压水银灯,你将会看到什么景象?

5.3 假如人眼只能感受波长为毫米量级的电磁波而看不见波长为 400 nm 至 760 nm 的光波,则人眼观察到的外部世界是什么景象? 假如人耳只能听到波长为毫米量级的"声波",则人所听到的又将是什么情况?

5.4 为什么实际上不可能获得理想的平行光束? 要使光束发散得少一些,应采取什么办法?

5.5 如图 5.1 所示,用会聚球面波照明圆孔屏,P 为会聚球面波的顶点,问在过 P 点垂直于光轴的屏上观察到的圆孔的衍射图样是菲涅耳型还是夫琅禾费型?

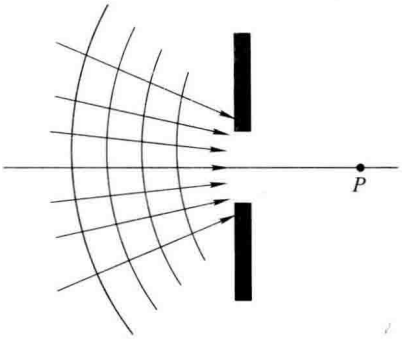


图 5.1

5.6 在图 5.3-1 所示观察单缝夫琅禾费衍射实验的装置中作如下变动,衍射图样有什么变化?

(1) 将点光源向下平移少许;

(2) 将单狭缝沿入射光传播方向或沿图中 x 轴移动少许;

(3) 将单狭缝绕入射光传播方向旋转一小角度;

(4) 增大缝宽;

(5) 增大透镜 L_2 的口径或焦距;

(6) 将点光源换为平行于狭缝的理想线光源;

(7) 在(6)情况下将单狭缝旋转 90°.

5.7 在杨氏双缝干涉实验装置中,用平行白光照明双缝,接收屏距离双缝相当远,并以红色和蓝色滤光片各遮住一条缝,问在接收屏上产生的是否为双缝干涉条纹?

5.8 什么是光学仪器的像分辨率?若光的衍射现象完全可以忽略,对理想光学系统成像来说,还存在分辨率这个问题吗?望远镜、显微镜和照相物镜的分辨率各用什么量表示?决定于什么?

5.9 试估计在离地面 1 km 高处飞翔的鹰能否看清地面上 5 cm 长的小老鼠?

5.10 平面透射光栅的三个结构参数为缝宽 a、光栅常量 d 及缝数 N,试分别讨论每一参数的变化如何影响主极大的位置、强度和半角宽度.

5.11 现有一台光栅光谱仪,备有同样大小的三块光栅:1 200 条/mm,600 条/mm,90 条/mm. 试讨论:

(1) 当光谱范围在可见光部分,应选用哪块光栅?为什么?

(2) 当光谱范围在红外 3~10 μm 波段,应选用哪块光栅?

5.12 在衍射光栅实验中,把光栅遮掉一半,衍射图样会发生什么变化?

5.13 试将棱镜、法布里-珀罗干涉仪、衍射光栅的分光特性作一比较.

5.14 一圆屏与一半径相同的圆孔屏构成一对互补屏,分别观察它们的菲涅耳衍射时,圆孔屏轴线上的衍射光强有亮暗的交替变化,而圆屏轴线上的衍射光强却作单调变化,用巴比涅原理应怎样解释?

5.15 将牛顿环拍摄下来就可得到一块波带片,这种波带片与菲涅耳黑白波带片有何不同?

习 题

5.1 一束单色平行光($\lambda = 500$ nm)正入射到宽为 0.2 mm 的狭缝上,在狭缝后的透镜的像方焦面上观察夫琅禾费衍射图样,已知透镜的焦距为 20 cm,试求屏上最初两个极小和两个次极大之间的距离.

5.2 一单缝由含有波长为 λ_1 和 λ_2 两种成分的光波所照射,如果产生的衍射图样中 λ_1 的第一极小与 λ_2 的第二极小重合. 试问:

(1) 这两种波长之间有何关系?

(2) 是否还会有其他极小也重合?

5.3 今测得一细丝的夫琅禾费衍射零级衍射纹的宽度为 1 cm,已知入射光波长为630 nm,透镜焦距为 50 cm,求细丝的直径.

5.4 一束直径为 2 mm 的氦氖激光($\lambda = 632.8$ nm)自地面射向月球,已知月球离地面的距离为 3.76×10^5 km,问在月球上得到的光斑有多大(不计大气的影响)?若把这样的激光束经扩束器扩大到直径为 2 m 和 5 m 后再发射,月球上的光斑各有多大?

5.5 航天飞机上的宇航员声称他恰好能分辨在他下面 100 km 远的地面上的某两个点光源,设光源发出光波的波长为 550 nm,瞳孔直径为 4 mm,求在理想条件下这两个点光源的间距是多少?

5.6 一台天文望远镜物镜的直径为 5 m,对于平均波长 $\lambda = 550$ nm 的可见光,试计算其最小分辨角和正常放大率.

5.7 已知人眼可以看清 400 m 距离处坦克上的编号,若用望远镜在距离 2 km 处也能看清它,求所用望远镜

的放大倍数.

5.8 请提出适于作下述目视研究的显微镜的数值孔径和放大倍数：

（1）直径为 7 μm 的红细胞；

（2）直径为 1 μm 的乳胶中的卤化银颗粒.

5.9 （1）用于波长 $\lambda=400$ nm 的显微物镜的数值孔径为 0.85，求它能分辨的两点间的最小距离是多少？

（2）若利用油浸物镜使该显微镜的数值孔径增大到 1.45，求分辨率提高多少倍？显微镜的放大率应设计成多大？

5.10 一照相物镜的相对孔径为 1∶3.5，用 $\lambda=546$ nm 的汞绿光照明，问用分辨率为 500 线/mm 的底片来记录物镜的像是否合适？

5.11 欲使双缝夫琅禾费衍射的中央峰内恰好含有 11 条干涉亮纹，则缝宽和缝间距需要满足什么条件？

5.12 用波长为 624 nm 的单色光照射一光栅，已知该光栅的缝宽 $a=0.012$ mm，不透明部分 $b=0.029$ mm，缝数 $N=10^3$ 条. 试求：

（1）中央峰的角宽度；

（2）中央峰内干涉主极大的数目；

（3）谱线的半角宽度.

5.13 一光栅的光栅常量 $d=4$ μm，总宽度 $W=10$ cm，现有波长为 500 nm 和500.01 nm的平面波垂直照射到这块光栅上，选定光栅在第 2 级工作，问这两条谱线分开多大的角度？能否分辨此双线？

5.14 一光栅宽为 5 cm，每毫米内有 400 条刻线，当波长为 500 nm 的平行光垂直入射时，第 4 级衍射光谱在单缝衍射的第一极小位置. 试求：

（1）每缝（透光部分）的宽度；

（2）第 2 级衍射光谱的半角宽度；

（3）第 2 级可分辨的最小波长差；

（4）若入射光改为与光栅平面法线成 30°方向斜入射时，光栅能分辨的谱线的最小波长差又为多少？

5.15 一棱镜材料的折射率 $n=1.5$，色散率 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda=0.6\times10^{-6}\ \mathrm{nm}^{-1}$，顶角 $\alpha=60°$，底边长 $t=5$ cm，试求棱镜的角色散本领和色分辨率.

5.16 有 $2N$ 条平行狭缝，缝宽都是 a，缝间不透光部分的宽度作周期性变化：$a,3a,a,3a,\cdots$（见图 5.2），单色平行光正入射到多缝上，求下列各种情形中的夫琅禾费衍射光强分布：

（1）遮住偶数缝；

（2）遮住奇数缝；

（3）全开放.

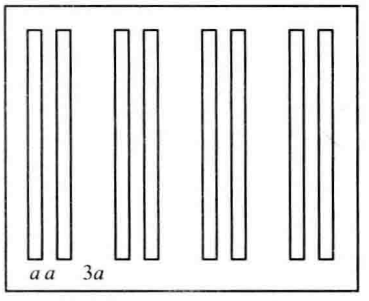


图 5.2

5.17 一闪耀光栅刻线数为 100 条/mm，用 $\lambda=600$ nm 的单色平行光垂直入射到光栅平面，若第 2 级光谱闪耀，闪耀角应为多大？

5.18 一波长 589 nm 的单色平行光照明一直径为 $D=2.6$ mm 的小圆孔，接收屏距孔1.5 m，问轴线与屏的交点是亮点还是暗点？当孔的直径改变为多大时，该点的光强发生相反的变化.

5.19 针孔照相机不用透镜而是由一个带针孔的长为 10 cm 的暗盒所构成，试问用它拍摄太阳时要得到最清晰明亮的像，小孔直径应为多少？

5.20 平行光照明如图 5.3 所示的衍射屏，图中标出的是该处到场点的光程，r_0 是中心到场点的光程，用矢量图解法求轴上场点的光强比自由传播时小多少倍（忽略距离和倾斜因子对振幅的影响）？

5.21 波长 632.8 nm 的单色平行光垂直入射到一小圆孔屏上，在孔后中心轴上距圆孔 $r_0=1$ m 处的 P_0 点出现一个亮点，假定这时小圆孔对 P_0 点恰好露出第一个菲涅耳半波带. 试求：

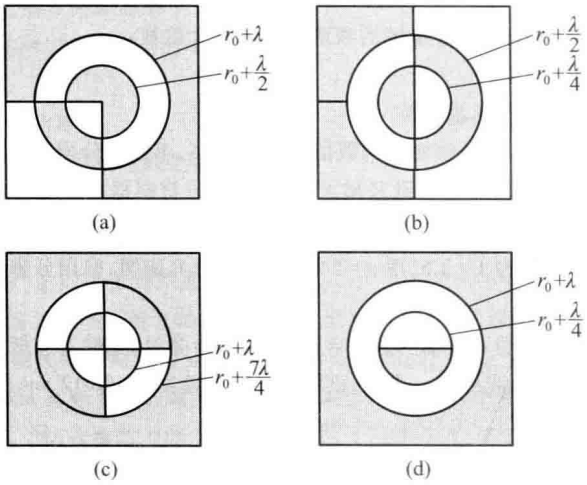


图 5.3

(1) 小圆孔的半径 ρ;

(2) 由 P_0 点沿中心轴从远处向圆孔移动时,第一个暗点至圆孔的距离.

5.22 单色平面光波波长为 500 nm,正入射到如图 5.4 所示的衍射屏上,$r_1=\sqrt{2}$ mm,$r_2=1$ mm,轴上观察点离衍射屏 2 m,计算观察点处的振幅和强度.

5.23 一块菲涅耳波带片对波长为 500 nm 的衍射光的焦距是 10 m,假设它的中心为开带:

(1) 求波带片上第 4 开带外圆的半径;

(2) 将一点光源置于距波带片中心 2 m 处,求它的+1 级像.

5.24 设波带片第 5 环半径为 1.5 mm,求波带片对于波长 500 nm 的单色光的焦距 f 和第 1 环半径 r;若波带片与屏幕之间充以折射率为 n 的介质,将发生什么变化?

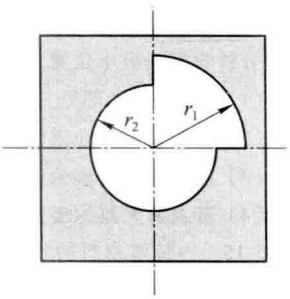


图 5.4

模拟计算习题

5.1 夫琅禾费单缝衍射、矩孔衍射

以波长为 $\lambda=632.8$ nm 的单位振幅平面波照射一狭缝,狭缝 x 方向缝宽远小于 y 方向缝长(即只考虑一维情况),x 方向缝宽 $a=1$ mm. 根据下列公式,模拟夫琅禾费单缝衍射的光强分布. 矩孔衍射为单缝衍射的 2-D 推广. 图 5.5 为模拟结果示意图.

狭缝两边缘相位差之半: $\alpha(\theta)=\dfrac{ka\sin\theta}{2}$

光强分布: $I=I_0\left[\dfrac{\sin\alpha(\theta)}{\alpha(\theta)}\right]^2$,其中 $I_0=|aA_0|^2$,$A_0=1$

要求:

(1) 改变缝宽 a 或矩孔 x、y 方向的开孔大小,观察单缝和矩孔衍射花样的变化;

(2) 改变入射光波长,观察单缝和矩孔衍射花样的变化.

5.2 龙基光栅的夫琅禾费衍射

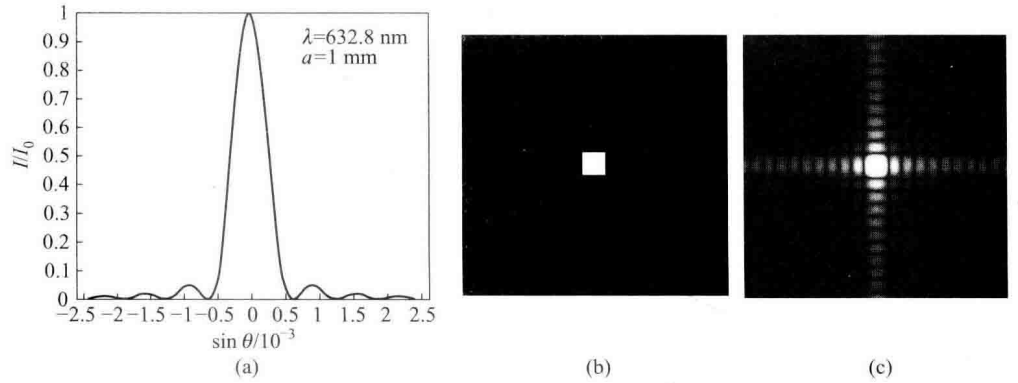


图 5.5 模拟结果示意图

(a) 单缝的夫琅禾费衍射光强分布;(b) 二维方孔示意图;(c) 方孔的夫琅禾费衍射花样

龙基光栅的振幅透过率为矩形函数,如图 5.6 所示. 以波长为 $\lambda = 500$ nm 的单位振幅平面波入射,龙基光栅的光栅常量 $d = 30$ μm,缝宽 $a = 15$ μm,缝数 $N = 10$. 根据下列公式,模拟此光栅夫琅禾费衍射的光强分布曲线. 图 5.7 为模拟结果示意图.

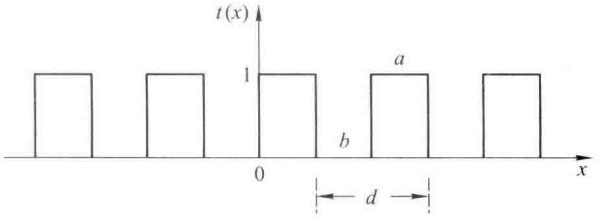


图 5.6 龙基光栅的振幅透过率

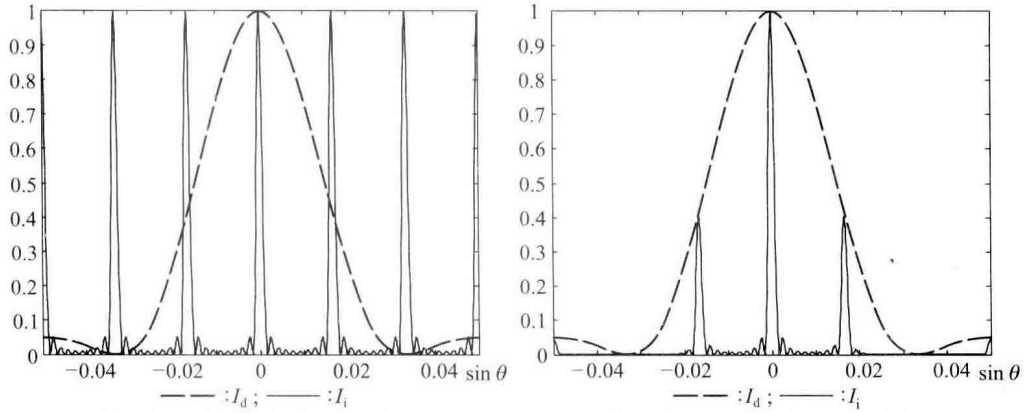


图 5.7 模拟结果示意图

(a) 干涉因子和衍射因子;(b) 光强分布

相邻两缝的相位差: $\delta(\theta) = kd\sin\theta$

相邻两缝边缘相位差之半: $\alpha(\theta) = \dfrac{ka\sin\theta}{2}$

衍射因子：$I_d=\left[\frac{\sin\alpha(\theta)}{\alpha(\theta)}\right]^2$

干涉因子：$I_i=\left[\frac{\sin N\beta(\theta)}{\sin\beta(\theta)}\right]^2$，其中 $\beta(\theta)=\frac{\delta(\theta)}{2}$

光强分布：$I=A_0^2\cdot I_d\cdot I_i=\left[A_0\cdot\frac{\sin\alpha(\theta)}{\alpha(\theta)}\cdot\frac{\sin N\beta(\theta)}{\sin\beta(\theta)}\right]^2$

缺级条件：$K=K'\frac{d}{a}$ $(K'=\pm1,\pm2,\cdots)$

要求：

(1) 观察衍射因子和干涉因子对光栅衍射条纹的影响，即光栅衍射光强的分布是多光束干涉光强分布受单缝衍射光强分布调制的结果，主极大的位置决定于干涉因子，强度则受限于衍射因子；

(2) 改变缝数 N，观察各主极大宽度的变化；

(3) 改变光栅常量 d，观察各主极大位置的变化；

(4) 改变缝宽 a，观察衍射因子极小位置的变化；

(5) 改变光栅常量 d 和缝宽 a，观察缺级级次的变化.

第六章　光信息处理及全息术

光信息处理具有二维、高速、并行等特点，特别适合于大信息量的光学图像及数据的处理. 20世纪40年代末，通信理论中的一些观点、概念和方法移植到了光学中，从而产生了傅里叶光学，它以傅里叶分析和线性系统理论为基础，讨论光的传播、衍射、成像等问题. 傅里叶光学的基本特点是用空间频谱的概念分析和处理光信息，因此光信息处理和全息术是傅里叶光学的重要内容. 本章不拟全面介绍傅里叶光学，而只讨论傅里叶光学的一些基础知识及其重要应用.

§6.1　傅里叶变换

6.1.1　傅里叶级数

设一个周期函数 $g(x)$ 的周期为 d，满足狄利克雷条件，即在一个周期内：(1) 单值；(2) 只有有限个极值点和不连续点. 则 $g(x)$ 可以展开为下列三角级数：

$$g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{2\pi}{d}mx+b_m\sin\frac{2\pi}{d}mx\right) \tag{6.1-1}$$

这个三角级数就称为傅里叶级数，式中 a_m、b_m 称为傅里叶系数，它们可由下式求得：

$$\left.\begin{aligned}a_m&=\frac{2}{d}\int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}}g(x)\cos\frac{2\pi mx}{d}\mathrm{d}x\qquad(m=0,1,2,\cdots)\\b_m&=\frac{2}{d}\int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}}g(x)\sin\frac{2\pi mx}{d}\mathrm{d}x\qquad(m=1,2,3,\cdots)\end{aligned}\right\} \tag{6.1-2}$$

上式中的积分限改为从 0 到 d 或从 x_0 到 x_0+d 也可得到同样的结果.

在光学中研究的函数 $g(x)$ 通常是空间函数，因而空间周期的倒数 $f_0=\frac{1}{d}$ 即为空间频率，$k_0=\frac{2\pi}{d}$ 则为空间圆频率，于是(6.1-1)式可写为

$$g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mk_0x+b_m\sin mk_0x) \tag{6.1-3}$$

上式表明，周期函数 $g(x)$ 可以表示为一系列频率为原函数频率 f_0 整数倍的简谐函数的线性组合，f_0 称为基频，其他频率 $f=mf_0$ 称为谐频或倍频.

根据三角函数公式，可将 m 次谐频成分写为

$$a_m\cos mk_0x+b_m\sin mk_0x=A_m\cos(mk_0x+\delta_m) \tag{6.1-4}$$

式中

$$A_m=\sqrt{a_m^2+b_m^2},\quad \delta_m=\arctan\left(-\frac{b_m}{a_m}\right) \tag{6.1-5}$$

则(6.1-3)式可写成

$$g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}A_m\cos(mk_0x+\delta_m) \tag{6.1-6}$$

将描述一个周期性的物理现象的方程按(6.1-6)式展开后，每一种频率成分 mf_0 对应一个振幅系数 A_m，它表示该谐频成分的权重因子，这样的函数称为**频谱函数**. 以频率为横坐标，在零频、基频及其他谐频上都画上垂直线，每线的长度由该频率成分对应的振幅 A_m 确定，这样的图形称为该物理现象的**振幅频谱图**，通常简称为**频谱图**. 如果标出频率与相位的关系，则称为**相位频谱**，不过它用得不多.

傅里叶级数可以表示为复数形式. 根据欧拉公式

$$\cos mk_0x=\frac{1}{2}(e^{imk_0x}+e^{-imk_0x}),\quad \sin mk_0x=\frac{1}{2i}(e^{imk_0x}-e^{-imk_0x})$$

代入(6.1-3)式得

$$g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(\frac{a_m-ib_m}{2}\right)e^{imk_0x}+\left(\frac{a_m+ib_m}{2}\right)e^{-imk_0x}\right] \tag{6.1-7}$$

由(6.1-2)式可得

$$\frac{a_m+ib_m}{2}=\frac{1}{d}\int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}}g(x)e^{imk_0x}dx,\quad \frac{a_m-ib_m}{2}=\frac{1}{d}\int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}}g(x)e^{-imk_0x}dx \tag{6.1-8}$$

若令

$$c_m=\frac{a_m-ib_m}{2},\quad c_{-m}=\frac{a_m+ib_m}{2},\quad c_0=\frac{a_0}{2} \tag{6.1-9}$$

则(6.1-1)式可写为

$$g(x)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}c_me^{imk_0x} \tag{6.1-10}$$

上式即为傅里叶级数的复数形式. 应当注意上式中的 m 已不是从 1 而是从 $-\infty$ 开始，在累加过程中经过 0(常数项)到 $+\infty$.

由(6.1-9)和(6.1-5)式得

$$|c_m|=\frac{1}{2}\sqrt{a_m^2+b_m^2}=\frac{1}{2}A_m \tag{6.1-11}$$

即傅里叶系数的模 $|c_m|$ 等于 m 次频谱分量振幅的半值.

6.1.2　傅里叶变换

对于非周期函数 $g(x)$，如果它满足狄利克雷条件，并在无穷区间 $(-\infty,+\infty)$ 绝对可积，也可

将它表示成一系列基元函数的线性积分形式，

$$g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi fx}\mathrm{d}f \tag{6.1-12}$$

$G(f)$由下式求得：

$$G(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi fx}\mathrm{d}x \tag{6.1-13}$$

(6.1-13)式称为傅里叶积分公式，读作“$G(f)$是$g(x)$的傅里叶变换”，可记为

$$G(f)=\mathscr{F}\{g(x)\} \tag{6.1-14}$$

(6.1-12)式读作“$g(x)$是$G(f)$的傅里叶逆变换”，可记为

$$g(x)=\mathscr{F}^{-1}\{G(f)\} \tag{6.1-15}$$

(6.1-12)式表示将非周期函数$g(x)$分解为$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi fx}$为基元函数的线性组合. $G(f)$为频率f附近单位频率间隔的振幅，它表征该成分对$g(x)$贡献的大小，即权重因子，$G(f)$-f曲线就反映了振幅随频率的分布，所以将$G(f)$称为$g(x)$的频谱函数. 当$g(x)$为周期函数时，得到的是等间隔的离散的线状谱. 而当$g(x)$为非周期函数时，得到的是连续频谱.

傅里叶变换提供的是将函数$g(x)$分解成一系列基元函数的线性组合的方法，对于能够应用叠加原理的物理系统即线性系统(许多光学系统都可视为这种系统)是十分有用的. 为了得到一个复杂输入激励引起的输出响应，可将激励分解为一系列简单得多的基元函数的线性组合，然后分别计算系统对每个基元输入的响应，再把所有基元响应叠加起来，便得到总响应.

在前面各章讨论光的干涉、衍射及成像问题时，都是研究光场的复振幅或光强随空间坐标的分布. 这种以空间坐标作为自变量来表示光场分布称为空间域的描述，如果以空间频率作为自变量来表示光场分布则称为空间频率域的描述，傅里叶变换和它的逆变换式指出了空域和频域两种描述中物函数和它相应的频谱函数之间的联系.

光学图像通常是二维空间函数，所以光学中需用二维傅里叶变换式. 若函数$g(x,y)$的频谱函数为$G(f_x,f_y)$，则其傅里叶变换式为

$$G(f_x,f_y)=\mathscr{F}\{g(x,y)\}=\iint_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(f_xx+f_yy)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6.1-16}$$

傅里叶逆变换式为

$$g(x,y)=\mathscr{F}^{-1}\{G(f_x,f_y)\}=\iint_{-\infty}^{+\infty}G(f_x,f_y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(f_xx+f_yy)}\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \tag{6.1-17}$$

表6.1-A中列出了光学中常用的几个函数及其频谱函数.

表6.1-A 常用傅里叶变换对

原 函 数	频 谱 函 数
缝函数 $\mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)=\begin{cases}1 & \lvert x\rvert<\frac{a}{2}\\ 0 & \lvert x\rvert>\frac{a}{2}\end{cases}$	$\frac{a\sin\pi af}{\pi af}$

续表

原　函　数	频 谱 函 数
二维矩形函数 $\operatorname{rect}\left(\frac{x}{a}\right)\operatorname{rect}\left(\frac{y}{b}\right)=\begin{cases}1 & \lvert x\rvert<\frac{a}{2},\lvert y\rvert<\frac{b}{2}\\ 0 & \text{其他各处}\end{cases}$	$ab\,\frac{\sin \pi a f_x}{\pi a f_x}\,\frac{\sin \pi b f_y}{\pi b f_y}$
圆函数 $\operatorname{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)=\begin{cases}1 & \sqrt{x^2+y^2}\leqslant a\\ 0 & \text{其他各处}\end{cases}$	$\frac{aJ_1(2\pi a\sqrt{f_x^2+f_y^2})}{\sqrt{f_x^2+f_y^2}}$
函数 $g(x)=1+\cos 2\pi f_0 x$	$\delta(f)+\frac{1}{2}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\delta(f+f_0)$
高斯函数 $g(x)=\exp(-ax^2)$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{a}\right)$
δ 函数* $\delta(x)$	1
常数 1	$\delta(f)$

* δ 函数的定义为 $\delta(x)=\begin{cases}\infty, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,dx=1$，它可看作单缝函数在缝宽趋于零时的极限，δ 函数常用来表示光学中的点光源.

6.1.3　傅里叶变换举例——准单色光波的分解

在第四章中已指出，由于光源中原子发光的无规性和连续性，即使是通常所说的“单色光源”发出的光波，也不可能是在时间和空间上无限延续的简谱波，而是一些断续的有限长波列. 首先我们假定，这些波列是持续时间为 τ_0 的简谱波的一段[图 4.6-2(a)]，即场中某点在 τ_0 时间内作简谐运动，其振动函数为

$$E(t)=\begin{cases}E_0 e^{-i2\pi\nu_0 t}, & |t|\leqslant\frac{\tau_0}{2}\\ 0, & |t|>\frac{\tau_0}{2}\end{cases}\tag{6.1-18}$$

图 4.6-2(a)表示此振动函数的实部. 根据傅里叶变换式(6.1-12)，可将它分解为许多不同频率的简谐运动的叠加：

$$E(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu$$

根据(6.1-13)式，对振动函数的时间变量 t 作傅里叶变换，可得关于时间的频谱函数

$$G(\nu)=E_0\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{+\frac{\tau_0}{2}}e^{-i2\pi(\nu-\nu_0)t}dt=E_0\tau_0\frac{\sin[\pi(\nu-\nu_0)\tau_0]}{\pi(\nu-\nu_0)\tau_0}$$

$G(\nu)$为频率ν附近单位频率间隔的振幅,因此可得功率谱为

$$|G(\nu)|^2=(E_0\tau_0)^2\left\{\frac{\sin[\pi(\nu-\nu_0)\tau_0]}{\pi(\nu-\nu_0)\tau_0}\right\}^2 \tag{6.1-19}$$

$|G(\nu)|^2$随ν的变化曲线如图4.6-2(b)所示. 当$\nu=\nu_0$时,得主极大值$|G(\nu)|^2=(E_0\tau_0)^2$,其两侧的第一极小位于$\nu=\nu_0\pm\frac{1}{\tau_0}$处. 令$\Delta\nu=\nu-\nu_0$,称为谱线的半宽度,于是可得时间相干性反比公式:

$$\Delta\nu\tau_0=1 \tag{6.1-20}$$

§6.2 衍射理论中的傅里叶方法

在第五章中我们已对衍射问题作了详细的讨论,本节中我们从傅里叶分析的观点重新认识衍射问题.

6.2.1 衍射区域的划分

下面我们从基尔霍夫公式出发,讨论衍射场的划分. 如图6.2-1所示,假定无限大不透明衍射屏上有一小孔S_0,其上任一点Q的坐标为(x_0,y_0),在距衍射屏z处放置一与之平行的接收屏,其上任一点P的坐标为(x,y). 用单色平行光正入射照明小孔,在衍射屏上入射场的复振幅$\tilde{E}_i(x_0,y_0)=\tilde{E}_0$,式中$\tilde{E}_0$为复常数. 根据基尔霍夫衍射积分公式,$P$点光场的复振幅为

$$\tilde{E}(P)=\frac{1}{i\lambda}\iint_{S_0}\tilde{E}(x_0,y_0)\frac{e^{ikr}}{r}\frac{1+\cos\theta}{2}dS \tag{6.2-1}$$

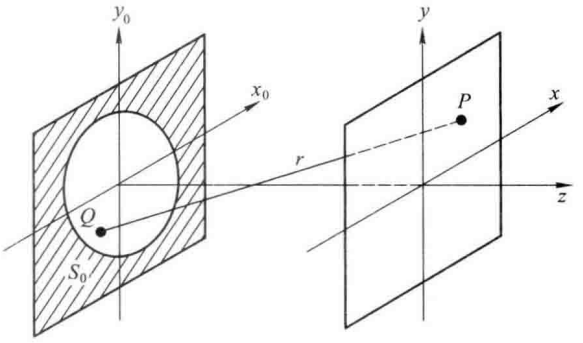


图6.2-1 衍射屏和接收屏坐标的选取

设衍射屏的复振幅透射率函数为$\tilde{t}(x_0,y_0)$,则上式中的$\tilde{E}(x_0,y_0)$可写为

$$\tilde{E}(x_0,y_0)=\tilde{t}(x_0,y_0)\tilde{E}_i(x_0,y_0)=\tilde{E}_0\tilde{t}(x_0,y_0)$$

因为在衍射孔S_0外$\tilde{t}(x_0,y_0)=0$,(6.2-1)式中的积分限可扩展到$\pm\infty$,同时积分面元可改写为$dS=dx_0dy_0$,于是(6.2-1)式可写为

$$\tilde{E}(P)=\frac{\tilde{E}_0}{\mathrm{i}\lambda}\iint_{-\infty}^{+\infty}\tilde{t}(x_0,y_0)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\frac{1+\cos\theta}{2}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{6.2-2}$$

为了用上式进行计算，还须作适当的近似处理. 在通常的实验条件下，接收屏与衍射屏的距离远大于衍射孔的线度（孔上离得最远两点间的距离）和接收屏上观察区域的线度，衍射角 θ 很小，按照傍轴近似，$\cos\theta=1$，而且上式分母中的 r 可用 z 代替；但是光波长是一很小的量，$k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ 很大，因而上式复指数中的 r 不能用 z 近似代替. 根据以上初步近似，上式可写为

$$\tilde{E}(P)=\frac{\tilde{E}_0}{\mathrm{i}\lambda z}\iint_{-\infty}^{+\infty}\tilde{t}(x_0,y_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{6.2-3}$$

为了能用上式计算衍射场，还须对上式复指数中的 r 作进一步近似. 由图6.2-1 可知

$$r=\sqrt{z^2+(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=z\left[1+\left(\frac{x-x_0}{z}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

在傍轴区域 $z^2\gg(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$. 按二项式定理将上式中的根式展开得

$$r=z\left\{1+\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2z^2}-\frac{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^2}{8z^4}+\cdots\right\} \tag{6.2-4}$$

当衍射孔和观察范围确定以后，只要 z 值足够大，r 只取上式中的前两项而略去其余高次项不会引起明显的相位误差，这时复指数中的 r 可近似表示为含 x_0 和 y_0 的线性项和二次项，

$$r\approx z\left[1+\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2z^2}\right]=z+\frac{x^2+y^2}{2z}-\frac{xx_0+yy_0}{z}+\frac{x_0^2+y_0^2}{2z} \tag{6.2-5}$$

这个近似称为**菲涅耳近似**. 在 r 的展开式(6.2-4)式被略去的高次项中，起决定作用的是该式右端第三项. 如果它所引起的相位变化的影响可以略去不计，则必须使 $[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]$ 取最大值时，其相应的相位变化仍远小于 2π，即

$$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^2}{8z^3}\ll 2\pi$$

则

$$z^3\gg\frac{1}{8\lambda}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^2_{\max} \tag{6.2-6}$$

上式表明菲涅耳近似成立时 z 值的范围，在此区域内的衍射称为菲涅耳衍射. 在菲涅耳近似条件下，由(6.2-3)式可得**菲涅耳衍射积分公式**

$$\tilde{E}(P)=\frac{\tilde{E}_0}{\mathrm{i}\lambda z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\iint_{-\infty}^{+\infty}\tilde{t}(x_0,y_0)\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{2z}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{6.2-7}$$

如果接收屏离得更远，z 值进一步增大，在一定的观察视场角情况下，(x,y) 之值仍比 z 小但却可

以比(x_0,y_0)大得多,(6.2-5)式中的第四项对相位的影响也可略去不计,即对于$(x_0^2+y_0^2)$一切可能值中的最大值有

$$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{(x_0^2+y_0^2)_{\max}}{2z}\ll 2\pi$$

即

$$z\gg\frac{1}{2\lambda}(x_0^2+y_0^2)_{\max} \tag{6.2-8}$$

在此条件下(6.2-5)式可进一步近似为只含 x_0 和 y_0 的线性项

$$r\approx z+\frac{x^2+y^2}{2z}-\frac{xx_0+yy_0}{z} \tag{6.2-9}$$

这个近似称为**夫琅禾费近似**,满足(6.2-8)式的 z 值范围内的衍射称为夫琅禾费衍射. 在夫琅禾费近似条件下,基尔霍夫积分公式进一步简化为

$$\tilde{E}(x,y)=\frac{\tilde{E}_0}{\mathrm{i}\lambda z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k}{2z}(x^2+y^2)}\iint_{-\infty}^{+\infty}\tilde{t}(x_0,y_0)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}k}{z}(xx_0+yy_0)\right]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{6.2-10}$$

上式称为**夫琅禾费衍射积分公式**. 由于夫琅禾费近似是在菲涅耳近似基础上的进一步近似,所以菲涅耳衍射区应包含夫琅禾费衍射区,菲涅耳衍射积分公式也就可用于计算夫琅禾费衍射. 不过由于夫琅禾费衍射公式较菲涅耳衍射公式简单,通常无此必要. 图 6.2-2 示出平行光通过小圆孔后,在孔后面衍射场中衍射区域的划分,为近场区、菲涅耳区、夫琅禾费区三个区域. 如上所述,菲涅耳区包含了夫琅禾费区.

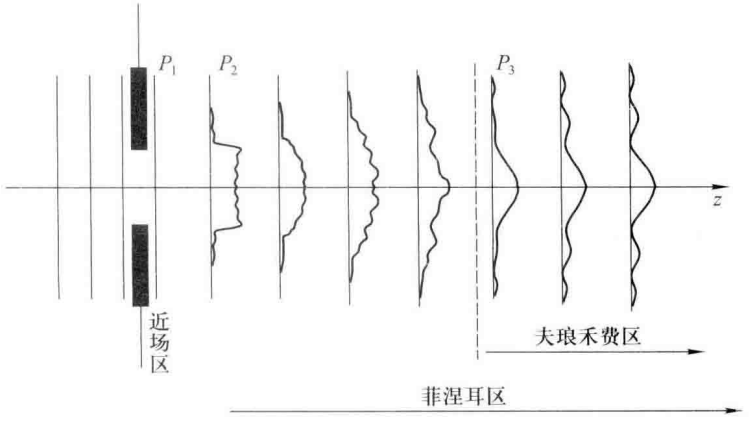


图 6.2-2 衍射区的划分

例 6.2-1 波长为 500 nm 的平行光垂直入射到半径为 0.5 mm 的圆孔衍射屏上,问孔后多远以外属于夫琅禾费衍射区?

解 根据(6.2-8)式可确定夫琅禾费衍射区 z 值的范围. 但是当问题要求的精度不同时,确定的 z 值是不同的. 通常用(6.2-5)式取夫琅禾费近似(6.2-9)式时,略去的二次项引起的相位变化小于$\frac{\pi}{10}$作为标准,即

$$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{(x_0^2+y_0^2)_{\max}}{2z}\leqslant\frac{\pi}{10}$$

已知 $x_0^2+y_0^2=(0.5\ \text{mm})^2$，$\lambda=5\times10^{-4}\ \text{mm}$，代入上式得 $z\geqslant5\ \text{m}$，即在孔后 5 m 以外观察到夫琅禾费衍射.

例 6.2-2　试证在点光源的共轭像面上接收到的是夫琅禾费衍射场.

解　如图 6.2-3 所示，点光源 S 经透镜 L 成像于 S'. 在 L 后插入屏函数为 $\tilde{t}(x_0,y_0)$ 的衍射屏，并在像面上接收衍射图样. 由于照射在衍射屏上的是在 S' 点会聚的球面波，所以衍射屏不再是等相面，在傍轴近似条件下，入射会聚波在衍射屏上的复振幅分布为

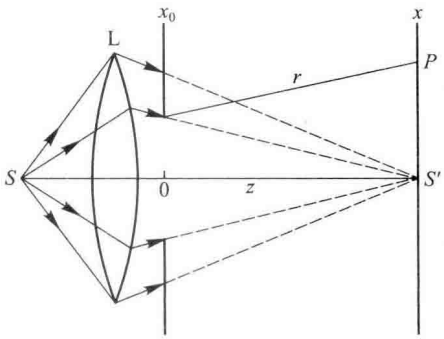


图 6.2-3　像面接收的夫琅禾费衍射场

$$\tilde{E}_i(x_0,y_0)\approx\frac{A}{z}\exp\left(-ik\frac{x_0^2+y_0^2}{2z}\right)$$

在衍射屏另一侧的透射波的复振幅分布为

$$\tilde{E}(x_0,y_0)=\frac{A}{z}\exp\left(-ik\frac{x_0^2+y_0^2}{2z}\right)\tilde{t}(x_0,y_0)\qquad(6.2-11)$$

在傍轴条件下的菲涅耳衍射积分为

$$\tilde{E}(x,y)=\frac{1}{i\lambda z}e^{ikz}\iint_{-\infty}^{+\infty}\tilde{E}(x_0,y_0)\exp\left\{\frac{ik}{2z}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\}dx_0dy_0$$

$$=\frac{1}{i\lambda z}e^{ikz}e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)}\iint_{-\infty}^{+\infty}\tilde{E}(x_0,y_0)\exp\left[\frac{ik}{2z}(x_0^2+y_0^2)\right]\exp\left[-\frac{ik}{z}(xx_0+yy_0)\right]dx_0dy_0$$

将(6.2-11)式代入上式，并注意到积分号内二次相位因子 $\exp\left(ik\frac{x_0^2+y_0^2}{2z}\right)$ 的指数正负相消得

$$\tilde{E}(x,y)=\frac{Ae^{ikz}}{i\lambda z^2}e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)}\iint_{-\infty}^{+\infty}\tilde{t}(x_0,y_0)\cdot\exp\left[-\frac{ik}{z}(xx_0+yy_0)\right]dx_0dy_0$$

上式即为夫琅禾费衍射积分公式. 由此可见，即使在有限距离的近场区内，只要在像面上接收，傍轴条件下就可以获得夫琅禾费衍射场. 若离开像面，积分号内前后出现的两项二次相位因子不能抵消，因此不能获得夫琅禾费衍射场.

6.2.2　夫琅禾费衍射实现屏函数的傅里叶变换

在夫琅禾费衍射积分公式(6.2-10)中，设入射单色平面波的复振幅 $\tilde{E}_0=1$，并令接收屏上空域坐标和频域坐标之间有下列关系：

$$f_x=\frac{x}{\lambda z},\quad f_y=\frac{y}{\lambda z}\qquad(6.2-12)$$

于是(6.2-10)式可写为

$$\tilde{E}(x,y)=\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)}\iint_{-\infty}^{+\infty}\tilde{t}(x_0,y_0)\exp[-i2\pi(f_xx_0+f_yy_0)]dx_0dy_0$$

$$=\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)}\mathscr{F}\{\tilde{t}(x_0,y_0)\}\qquad(6.2-13)$$

将上式与(6.1-16)式比较可见,除了积分号前的因子外,两式完全相似. 而因子$\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}$对于衍射场的相对分布是无关紧要的,通常可略去不计. 由此可知,**夫琅禾费衍射场的复振幅分布等于屏函数的傅里叶变换与一个二次相位因子的乘积**. 如果在衍射屏后直接接收夫琅禾费衍射场的强度分布,二次相位因子不起作用,即

$$I(x,y)=\tilde{E}(x,y)\tilde{E}^{*}(x,y)=\mathscr{F}\{\tilde{t}(x_0,y_0)\}\mathscr{F}^{*}\{\tilde{t}(x_0,y_0)\} \tag{6.2-14}$$

上式表明,**夫琅禾费衍射的强度分布等于屏函数的功率谱**. 因此夫琅禾费衍射装置实际上是一个空间频谱分析仪.

下节将证明,如果将衍射屏放在透镜的前焦面上,且在后焦面上接收,由于透镜的相位变换作用,(6.2-13)式积分号前的二次相位因子将消去,从而可实现准确的傅里叶变换.

在夫琅禾费衍射中,傅里叶变换关系的确立有着重要的意义,一方面它为实现运算函数的傅里叶变换提供了一种物理方法,这种方法具有二维并行和实时变换的优点,由此开拓出一个新的技术领域——相干光学计算技术;另一方面它为研究夫琅禾费衍射提供了一种新的观点和有力的数学工具,从而产生了新的认识,发展了新的应用.

6.2.3 夫琅禾费衍射的性质

下面我们根据傅里叶变换的数学性质,来分析夫琅禾费衍射的物理特性.

(1) 线性　傅里叶变换是一种线性变换,它适用于线性系统. 若

$$\tilde{g}_1(x,y)\leftrightarrow\tilde{G}_1(f_x,f_y),\quad \tilde{g}_2(x,y)\leftrightarrow\tilde{G}_2(f_x,f_y)$$

且 a_1,a_2 为实常数,则有

$$a_1\tilde{g}_1(x,y)+a_2\tilde{g}_2(x,y)\leftrightarrow a_1\tilde{G}_1(f_x,f_y)+a_2\tilde{G}_2(f_x,f_y) \tag{6.2-15}$$

因为在傍轴条件下的夫琅禾费衍射装置是一种线性系统,上式表明相加图像的频谱等于单个图像频谱的线性和.

(2) 尺度缩放　空域中坐标的伸展或压缩,将导致频域中坐标的压缩或伸展,若

$$\tilde{g}(x,y)\leftrightarrow\tilde{G}(f_x,f_y)$$

且 m,n 为实常数,则

$$\tilde{g}(mx,ny)\leftrightarrow\frac{1}{mn}\tilde{G}\left(\frac{f_x}{m},\frac{f_y}{n}\right) \tag{6.2-16}$$

这表明衍射孔沿任一方向扩大或收缩时,相应的夫琅禾费衍射图样沿同一方向收缩或扩大.

(3) 平移　原函数在空域中平移,将导致频谱函数在频域中产生线性相移;反之,当原函数有线性相移时,频谱将产生平移. 若

$$\tilde{g}(x,y)\leftrightarrow\tilde{G}(f_x,f_y)$$

则

$$\tilde{g}(x\pm x_0,y\pm y_0)\leftrightarrow\exp[\pm i2\pi(f_x x_0+f_y y_0)]\tilde{G}(f_x,f_y) \tag{6.2-17}$$

$$\exp[\pm \mathrm{i}2\pi(f_{0x}x+f_{0y}y)]\tilde{g}(x,y)\leftrightarrow\tilde{G}(f_x\mp f_{0x},f_y\mp f_{0y}) \tag{6.2-18}$$

因为衍射图样的强度分布与相位因子无关，上式表明当衍射孔在其平面内平移时，衍射场中各点相位有了变化，但其强度分布不变. 另一方面，若平面波由正入射改为斜入射，衍射屏上各点的入射场将产生相移，从而衍射图样将产生平移.

(4) 反转　空域中原函数的坐标反转，将导致频域中相应函数的坐标反转. 若

$$\tilde{g}(x,y)\leftrightarrow\tilde{G}(f_x,f_y)$$

则

$$\tilde{g}(-x,-y)\leftrightarrow\tilde{G}(-f_x,-f_y) \tag{6.2-19}$$

如果原函数为偶函数，即

$$\tilde{g}(x,y)=\tilde{g}(-x,-y)$$

则

$$\tilde{G}(f_x,f_y)=\tilde{G}(-f_x,-f_y) \tag{6.2-20}$$

如果原函数为奇函数，即

$$\tilde{g}(x,y)=-\tilde{g}(-x,-y)$$

则

$$\tilde{G}(f_x,f_y)=-\tilde{G}(-f_x,-f_y) \tag{6.2-21}$$

即衍射屏函数为偶/奇函数，则它的频谱函数也为偶/奇函数.

(5) 对称性　由(6.2-14)式，夫琅禾费衍射场的强度分布为

$$I(x,y)=\iint_{-\infty}^{+\infty}\tilde{t}(x_0,y_0)\exp[-\mathrm{i}2\pi(f_xx_0+f_yy_0)]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0\cdot$$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty}\tilde{t}^*(x_0,y_0)\exp[\mathrm{i}2\pi(f_xx_0+f_yy_0)]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0$$

在上式中将(f_x,f_y)换为$(-f_x,-f_y)$，即将(x,y)换为$(-x,-y)$[见(6.2-11)式]，只要$\tilde{t}(x_0,y_0)$不含相位因子，即为实函数，则得

$$I(x,y)=I(-x,-y)$$

上式表明，对振幅型衍射屏，夫琅禾费衍射图样有一对称中心，即将衍射图样绕中心旋转180°，衍射图样完全一样，具体衍射图样见第五章图5.1-4.

(6) 守恒　原函数的模平方在空域中的积分值等于其频谱的模平方在相应频域内的积分值. 若

$$\tilde{g}(x,y)\leftrightarrow\tilde{G}(f_x,f_y)$$

则

$$\iint_{-\infty}^{+\infty}|\tilde{g}(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{-\infty}^{+\infty}|\tilde{G}(f_x,f_y)|^2\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \tag{6.2-22}$$

若$\tilde{g}(x,y)$表示衍射屏上的复振幅分布，$\tilde{G}(f_x,f_y)$为频谱面上的复振幅分布，$|\tilde{g}(x,y)|^2$和$|\tilde{G}(f_x,f_y)|^2$分别与衍射屏和频谱面上的光功率密度成正比. 上式表明通过衍射屏的光功率和通过透镜后焦面的光功率相等.

§6.3 理想薄透镜的傅里叶变换作用

在光学系统中,透镜主要有两种作用:成像和相位变换. 前者在第一章中已作过讨论. 本节中将研究透镜的相位变换作用及其产生傅里叶变换的条件. 正是由于透镜在一定条件下能实现傅里叶变换,才使得傅里叶分析方法在光学中取得有效的应用.

6.3.1 薄透镜的相位变换作用

设一束单色平行光沿光轴方向入射到理想薄透镜上,由几何光学可知,它经透镜后将会聚于像方焦点 F'. 然而从波动光学的观点来看,在此情形中透镜将入射平面波变换成了出射的球面波(图 6.3-1),即是说透镜具有改变波面形状的作用. 我们已知波面形状决定于光场中相位值相同点的轨迹,因此改变波面形状就会改变光场的复振幅分布. 为了定量描述透镜对光场复振幅分布改变的影响,我们紧贴透镜前后各作一参考平面 L 和 L' 垂直于光轴(图 6.3-2),然后讨论 L 和 L' 上光场的复振幅分布的对应关系.

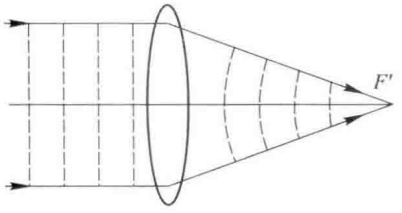


图 6.3-1 透镜将平面波变成球面波

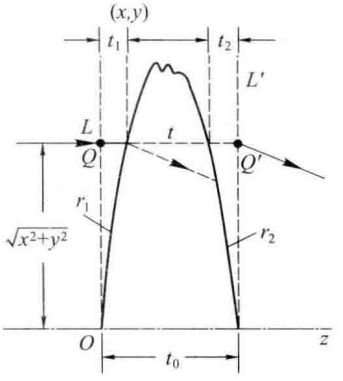


图 6.3-2 导出透镜相位变换函数

对于薄透镜,可以不考虑光线在透镜内部的偏折,而认为入射到透镜上的任一光线的入射点(例如图中的 Q 点)的高度与出射点(Q'点)的高度相同,即任一光线在薄透镜中通过的路程与入射点处透镜厚度相同. 而且我们不考虑光能量通过透镜时的损失,在 L 和 L' 平面上对应点光场的振幅值相等. 于是透镜对入射波相位的调制作用可用如下的复振幅透射率来描写

$$\tilde{t}(x,y)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(x,y)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda}[QQ']} \tag{6.3-1}$$

式中 $\phi(x,y)$ 称为相位变换函数.

在图 6.3-2 中,透镜材料折射率为 n_0,前后表面的半径分别为 r_1、r_2,中心处厚度为 t_0,t_1、t_2、t 的意义如图所示,则光程 $[QQ']$ 为

$$\begin{aligned}[QQ']&=t_1+n_0t+t_2=t_1+t_2+n_0(t_0-t_1-t_2)\\&=n_0t_0-(n_0-1)(t_1+t_2)\end{aligned}$$

于是可得

$$\phi(x,y)=\frac{2\pi}{\lambda}[n_0t_0-(n_0-1)(t_1+t_2)] \tag{6.3-2}$$

在傍轴近似条件下透镜前后两段空气隙厚度

$$\left.\begin{aligned} t_1&=r_1-\sqrt{r_1^2-(x^2+y^2)}\approx\frac{x^2+y^2}{2r_1}\\ t_2&=(-r_2)-\sqrt{r_2^2-(x^2+y^2)}\approx-\frac{x^2+y^2}{2r_2}\end{aligned}\right\} \tag{6.3-3}$$

上式中的 r_1 和 r_2 都是代数量. 在(6.3-2)式中,第一项$\frac{2\pi n_0t_0}{\lambda}$不随$(x,y)$坐标而变化,是常相位项,故可略去. 将(6.3-3)式代入得

$$\phi(x,y)=-\frac{\pi}{\lambda}(n_0-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)(x^2+y^2)$$

由几何光学可知薄透镜的像方焦距为

$$\frac{1}{f'}=(n_0-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

则得

$$\phi(x,y)=-\frac{k(x^2+y^2)}{2f'} \tag{6.3-4}$$

$$\tilde{t}(x,y)=\exp\left[-\frac{\mathrm{i}k(x^2+y^2)}{2f'}\right] \tag{6.3-5}$$

上式表明,在傍轴条件下理想薄透镜的相位变换函数具有纯二次型的相位因子. 入射光波通过薄透镜后,原波面上的各点都发生相位延迟. 会聚透镜的中心点相位延迟最多,其值为 kt_0,远离中心的 Q 点相位延迟较中心处减少$\frac{k(x^2+y^2)}{2f'}$,而发散透镜的情况正相反.

设入射平面波振幅为 A,并将 L 平面处相位取作零,则经透镜后出射光波的复振幅为

$$\tilde{E}'_{\mathrm{L}}=A\tilde{t}(x,y)=A\exp\left[-\frac{\mathrm{i}k(x^2+y^2)}{2f'}\right] \tag{6.3-6}$$

对于会聚透镜,$f'>0$,上式表示一会聚球面波,会聚中心在光轴上与透镜相距为 f' 处,对于发散透镜,$f'<0$,上式表示中心在光轴上距透镜 f' 处的发散球面波. 这与几何光学中得出的结论一致.

6.3.2　薄透镜的傅里叶变换特性

会聚透镜最有用的特性之一是具有进行二维傅里叶变换的功能. 图 6.3-3 所示为一种利用透镜构成二维傅里叶变换的系统. 物平面距透镜 d_0,在透镜后焦面接收,物平面、透镜前后表面、接收面的坐标分别为(x_0,y_0),(x,y),(x',y'). 入射平面波振幅为 A,物体的振幅透射率函数为 $\tilde{t}(x_0,y_0)$,故输入光场(通过物平面后的光场)为

$$\tilde{E}_0(x_0,y_0)=A\tilde{t}(x_0,y_0) \tag{6.3-7}$$

光波由物平面到透镜前表面的传播，可由菲涅耳衍射积分公式(6.2-7)式计算，即透镜前表面的光场为

$$\tilde{E}_{\mathrm{L}}(x,y)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kd_0}}{\mathrm{i}\lambda d_0}\iint_{-\infty}^{+\infty}\tilde{E}_0(x_0,y_0)\cdot \exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{2d_0}\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]\right\}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{6.3-8}$$

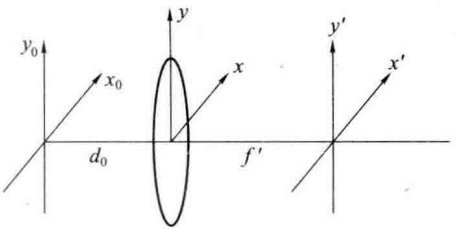


图 6.3-3 物放在透镜前的傅里叶变换

假设透镜的孔径为无穷大，通过透镜后的光场为

$$\tilde{E}'_{\mathrm{L}}(x,y)=\tilde{E}_{\mathrm{L}}(x,y)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}k(x^2+y^2)}{2f'}\right] \tag{6.3-9}$$

从透镜后表面到后焦面即输出面的传播，同样可按菲涅耳衍射处理，于是可得输出面上的光场为

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{F'}(x',y')&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kf'}}{\mathrm{i}\lambda f'}\iint_{-\infty}^{+\infty}\tilde{E}'_{\mathrm{L}}(x,y)\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{2f'}\left[(x'-x)^2+(y'-y)^2\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kf'}}{\mathrm{i}\lambda f'}\exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2f'}(x'^2+y'^2)\right]\iint_{-\infty}^{+\infty}E'_{\mathrm{L}}(x,y)\exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2f'}(x^2+y^2)\right]\cdot\\&\quad\exp\left[-\mathrm{i}2\pi\left(\frac{xx'}{\lambda f'}+\frac{yy'}{\lambda f'}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{6.3-10}$$

将(6.3-9)、(6.3-8)、(6.3-7)式代入上式，对积分项作适当整理后得到下式：

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{F'}(x',y')&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(f'+d_0)}}{\mathrm{i}\lambda f'}\exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2f'}\left(1-\frac{d_0}{f'}\right)(x'^2+y'^2)\right]\cdot\\&\quad\iint_{-\infty}^{+\infty}\tilde{t}(x_0,y_0)\exp\left[-\mathrm{i}2\pi\left(\frac{x_0x'}{\lambda f'}+\frac{y_0y'}{\lambda f'}\right)\right]\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0\\&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(f'+d_0)}}{\mathrm{i}\lambda f'}\exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2f'}\left(1-\frac{d_0}{f'}\right)(x'^2+y'^2)\right]\mathscr{F}\{\tilde{t}(x_0,y_0)\}\end{aligned} \tag{6.3-11}$$

如果物平面位于透镜前表面，$d_0=0$，上式成为

$$\tilde{E}_{F'}(x',y')=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kf'}}{\mathrm{i}\lambda f'}\exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2f'}(x'^2+y'^2)\right]\mathscr{F}\{\tilde{t}(x_0,y_0)\} \tag{6.3-12}$$

如果物平面位于透镜和输出平面之间(图 6.3-4)，计算表明，输出平面上的光场为

$$\tilde{E}_{F'}(x',y')=\frac{\exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2d}(x'^2+y'^2)\right]}{\mathrm{i}\lambda d}\cdot\frac{f'}{d}\mathscr{F}\{\tilde{t}(x_0,y_0)\} \tag{6.3-13}$$

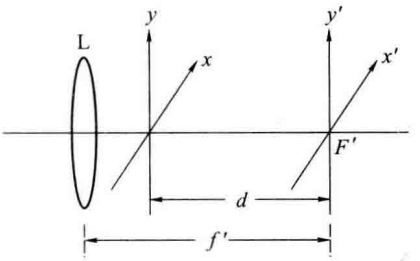


图 6.3-4 物在透镜后的傅里叶变换

(6.3-11)至(6.3-13)式表明，**一般情况下用相干平面波照**

明物平面时，透镜后焦面上光场的复振幅分布正比于物函数的傅里叶变换和一个二次相位因子的乘积. 即输出面上光场的复振幅分布和物函数的准确傅里叶变换相比，产生了相位弯曲. 但是由于式中的二次相位因子对强度的计算没有影响，若把输出面上(x',y')点的相对光强记为$I(P)$，则

$$I(P)=|\tilde{E}_{F'}(x',y')|^2=|\mathscr{F}\{\tilde{t}(x_0,y_0)\}|^2 \tag{6.3-14}$$

这表明**透镜后焦面上的光强分布是物函数的傅里叶变换的模的平方**. 光强分布是可测量的，由测量结果即可得知物体的功率谱.

若物平面位于透镜的物方焦面上，则$d_0=f'$，(6.3-11)式成为

$$\tilde{E}_{F'}(x',y')=\frac{e^{i2kf'}}{i\lambda f'}\mathscr{F}\{\tilde{t}(x_0,y_0)\} \tag{6.3-15}$$

式中$\frac{e^{i2kf'}}{i\lambda f'}$为一复常数. 上式表明，**当物体位于正透镜的物方焦面上，在相干平面波照明的条件下，像方焦面上任意点**(x',y')**光场的复振幅**$\tilde{E}_{F'}(x',y')$**就是物函数在该点的二维傅里叶变换**$\mathscr{F}\{\tilde{t}(x_0,y_0)\}$.或者说，正透镜像方焦面上光场的复振幅分布是物方焦面上光场复振幅分布的傅里叶变换在空间频率$f_x=\frac{x'}{\lambda f'}$，$f_y=\frac{y'}{\lambda f'}$处的取值，因此我们把正透镜的像方焦面叫做傅里叶变换平面，又因为该平面上显示的是物方焦面上景物的空间频率分布，所以该平面又称为空间频谱平面.

以上讨论中，我们都是假设透镜的孔径无限大，实际上当透镜孔径有限大时，它将限制空间频率值较高(即衍射角较大)的成分通过透镜到达输出面，所以薄透镜是低通滤波器.

§6.4　阿贝成像原理

阿贝(Abbe，1840—1905)在德国蔡斯(Zeiss)公司任职期间，研究如何提高显微镜的分辨本领问题时，于1873年对相干光照明的物体提出了两步衍射成像原理，其基本思想可用图6.4-1所示的显微系统来说明. 图中O为物平面，为简单计，可假设它为一块正弦光栅. L为物镜，F'为物镜的像方焦面，I'为与物面O共轭的像面. 用一束平行相干光照明物面，此系统则成为相干成像系统.

按照几何光学的观点，物面上各点例如A、B、C发出的球面波，经透镜分别会聚到相应的像点A'、B'、C'，这些像点的集合就形成了物体的像. 按照阿贝原理，相干成像过程分两步完成：第一步，入射平面波经光栅衍射在L的后焦面F'上形成夫琅禾费衍射图样，其各级主极大在图中用S_{-1}，S_0，S_{+1}表示；第二步，这些衍射斑可视为L的虚

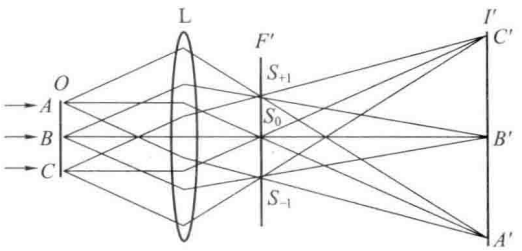


图6.4-1　阿贝成像原理

物，来自各虚物点的光波由于透镜孔径的限制，经第二次衍射在 I' 面上成像，也就是 F' 面上各衍射斑作为新的次波源发出相干次波在 I' 面上产生干涉而形成物体的像. 图 6.4-2 中，(a) 为零级衍射光在像面 I' 上产生的均匀光场分布；(b) 为 S_{+1} 和 S_{-1} 两个相干点源发出的子波在 I' 面上干涉形成的光场分布；(c) 为 S_0, S_{+1}, S_{-1} 三个点源干涉的结果，形成正弦形变化的光场分布即正弦光栅的像. 如果透镜孔径不够大，其衍射角 $\theta \geqslant \arcsin\dfrac{\lambda}{d}$（$d$ 为光栅周期）的光波从透镜边缘以外漏掉，则在 F' 面上只有零级衍射斑，在 I' 面上是一片均匀亮度的光场，不能形成光栅的像.

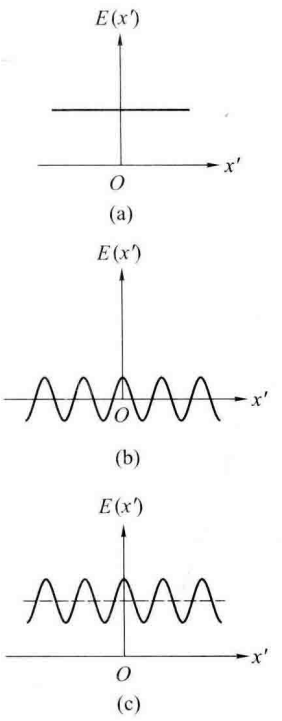


图 6.4-2 正弦光栅像的形成

如果物为一黑白光栅，在 F' 面上将形成 0，±1，±2 级……一系列衍射斑，透镜孔径愈大，能参与成像的衍射斑愈多，I' 面上生成的像与物愈相似.

按照傅里叶光学的观点，用频谱语言来描述，物体相干成像过程的第一步夫琅禾费衍射起分频作用，它将各种空间频率的平面波分开，在 L 后焦面上形成频谱；第二步干涉起综合作用. 因此，计算像面上某点光场的复振幅时，既要考虑物面上每点对频谱面上各点的贡献，又要考虑频谱面上各点对像面上该点的贡献. 以下说明物体经透镜成像的两次衍射过程可以用两次相继的傅里叶变换来描述. 设物面的复振幅透射率函数为 $\tilde{t}(x_0, y_0)$，按照 (6.2-13) 式，入射平面波经物面衍射在透镜后焦面上形成的夫琅禾费衍射场分布就等于 $\tilde{t}(x_0, y_0)$ 的傅里叶变换（略去积分号前的常数和相位因子），即

$$\tilde{E}(x,y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{t}(x_0,y_0)\exp[-\mathrm{i}2\pi(f_x x_0 + f_y y_0)]\,\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{6.4-1}$$

其中

$$f_x = \frac{x}{\lambda f'}, \quad f_y = \frac{y}{\lambda f'} \tag{6.4-2}$$

上式表明，在焦面上坐标 (x,y) 处的振幅和相位由物函数中所含的空间频率为 $f_x = \dfrac{x}{\lambda f'}, f_y = \dfrac{y}{\lambda f'}$ 的傅里叶分量的振幅和相位决定.

光波从焦面 F' 到像面 I' 的传播可用菲涅耳衍射积分公式描述. 然而对于显微系统，物面在物镜的物方焦点附近，其像面 I' 与焦面 F' 的距离为 d，相距很远，物镜的孔径 r 又很小，$d \gg r$. 为了简化计算，光波由 F' 到 I' 面的传播也可以近似用夫琅禾费衍射积分公式描述. 即 I' 面上光场的复振幅分布就等于物镜焦面上光场分布函数的傅里叶变换（如果坐标反转则为逆变换）

$$\tilde{E}(x',y') = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(x,y)\exp[-\mathrm{i}2\pi(f_{x'}x + f_{y'}y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6.4-3}$$

其中

$$f_{x'} = \frac{x'}{\lambda d}, \quad f_{y'} = \frac{y'}{\lambda d} \tag{6.4-4}$$

根据牛顿放大率公式

$$\beta=\frac{x'}{x}=-\frac{d}{f'},\quad \beta=\frac{y'}{y}=-\frac{d}{f'},\text{即 } x'=-\frac{d}{f'}x,\quad y'=-\frac{d}{f'}y \tag{6.4-5}$$

将(6.4-2)、(6.4-4)、(6.4-5)三式代入(6.4-3)式得

$$\tilde{E}(x',y')=(\lambda f')^2\iint_{-\infty}^{+\infty}\tilde{E}(x,y)\exp[\mathrm{i}2\pi(f_x x+f_y y)]\,\mathrm{d}f_x\,\mathrm{d}f_y \tag{6.4-6}$$

则像面的光强分布为

$$I(x',y')=|(\lambda f')^2\mathscr{F}^{-1}\{\tilde{E}(x,y)\}|^2$$

而物面上的光强分布为

$$I(x,y)=|\tilde{t}(x_0,y_0)|^2=|\mathscr{F}^{-1}\{\tilde{E}(x,y)\}|^2=\frac{I(x',y')}{(\lambda f')^4}$$

上式表明，当透镜孔径为无限大时，物面的所有频谱都参与综合成像，物面与像面对应点光强之比为常数，两者的光强分布完全相同，物与像几何相似. 然而实际透镜的口径是有限的，物函数所含有的频率超过一定限度的信息，将因衍射角过大而丢失. 失去高频成分的信息再综合到一起时，像的细节将被“平滑”而变模糊，棱角也就不很分明了. 因此，要提高系统的成像质量，应扩大透镜的口径，减少高频信息的损失. 而在阿贝原理提出以前，人们并未清楚认识到衍射对于相干光成像的重要意义. 阿贝原理的提出，不仅使人们对物体的成像过程有了更深刻的认识，而且启迪人们用改变频谱的手段来改造图像. 由此可见，一百多年以前阿贝提出的原理已为今天的光学信息处理在概念上奠定了基础.

§6.5　空间频率滤波

6.5.1　相干光学图像处理系统

根据上节所述阿贝原理，在图 6.4-1 所示装置里的频谱面上插入各种结构的光阑改变频谱，就可以达到改造输出图像的目的，因此称这种装置为相干光学图像处理系统或光学空间滤波系统. 实际上除了这种单透镜系统外，在讨论空间频率滤波原理时，还常使用图 6.5-1 所示的双透镜系统即 4F 系统. 图中 L_1 和 L_2 是两个相同的像差校正良好并有足够大孔径的正透镜，常称为傅里叶透镜，它们构成共焦组合，物平面即输入平面 $O(x_0,y_0)$ 位于透镜 L_1 的前焦面，像平面即输出平面 $I'(x',y')$ 位于透镜 L_2 的后焦面. 共焦面 $T(x,y)$ 称为变换平面，在此插入各种光阑进行选频，滤去不需要的空间频率. 这些光阑称为空间频率滤波器.

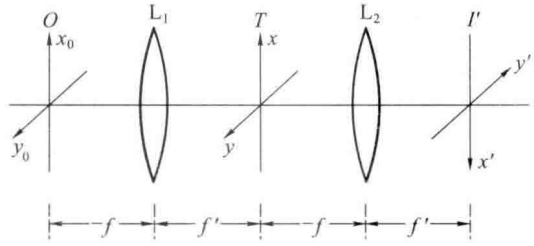


图 6.5-1　相干光图像处理系统

如前所述，从物面到变换平面以及从变换平

面到像面的传播都可以用傅里叶变换描写. 计算表明,物函数通过两次傅里叶变换得到了原物函数,只是坐标反转. 即采用上述 4F 系统所得的输出图像是输入图像绕光轴转 π 弧度的结果,实际上根据几何光学原理可得出 4F 系统是 $\beta=-1$ 的成像系统,但是用几何光学原理不能回答在变换平面插入滤波器后图像将要发生怎样的变化.

6.5.2 空间频率滤波举例

空间频率滤波的应用很多,它可以实现图像的加、减、微分、增强、消模糊、特征识别、假彩色化等,下面介绍几个简单的实验.

(1) 网格实验 1906 年波特(Porter)从实验上证实了阿贝两步衍射成像理论,也对傅里叶分析的最基本原理提供了有力的证明. 在图 6.5-1 所示装置中,将两张正交密接的黑白光栅形成网格状物作为输入图像,用相干光照明. 在变换平面 T 上生成网格的夫琅禾费衍射图样,它是二维点阵的衍射斑. 在输出面 I' 上将复现网格的像[图 6.5-2(a)]. 严格说来,由于透镜孔径有限,会丢失一些高频信息,像的边界会变得不如原物那样清晰,不过只要透镜孔径足够大,细小的差别人眼是察觉不出来的. 如果在 T 平面上插入一个具有水平狭缝的滤波器,仅保留沿水平轴的一纵列衍射斑,如图 6.5-2(b)所示,这时沿竖直方向只能通过低频傅里叶分量,而水平方向则通过了频谱中的全部傅里叶分量. 于是在输出面 I' 上所成的像中损失了竖直方向的细节而保存了水平方向的细节,使得竖直方向上的邻近像点不能再分辨而连成了竖直的线条. 如果将上述具有狭缝的滤波器转 90°,只保留沿竖直轴的一横列衍射斑,则在 I' 面上得到损失了水平方向上细节的一系列水平线条[图 6.5-2(c)]. 若旋转滤波器成 45°角,仅保留一斜排衍射斑[图 6.5-2(d)],输出图像为一组与衍射斑扩展方向正交的斜向条纹,而且条纹的间距较前两种情况小.

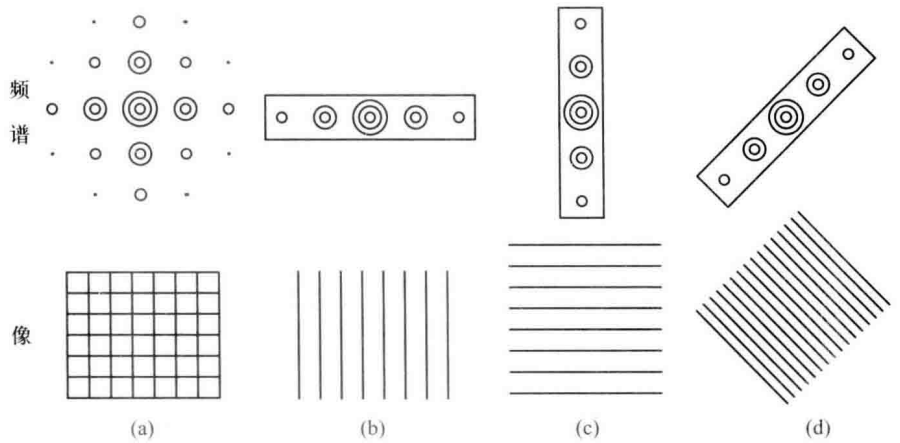


图 6.5-2 波特实验

如果输入图像的网格中还有若干污点,可以用滤波方法从输出图像中抹掉这些污点或网格的像. 首先我们制作网格频谱的二维透光点阵作为滤波器,插入变换平面并让透光孔对准相应的衍射斑. 由于网格的频谱是规则的二维点阵,而污点的频谱是无规弥漫分布的,它们的差别较大,滤波器让网格的频谱顺利通过,而污点的频谱大多被吸收,能通过的频谱其强度也很弱,这时的输出图像就是没有显著污点的网格的像. 反之,若用上述二维透光点阵的负片作为滤波器,只让

污点的信息通过，则输出图像就只有若干污点.

（2）θ 调制实验　这是一类用白光照射透明物体，在输出面上却可以得到彩色图像的有趣实验. 如图 6.5-3（a）所示，输入图像用取向各不相同的三块光栅片拼成，这些光栅是从一块 50 线/mm或 100 线/mm 的正弦光栅上剪裁下来的. 将此光栅片拼成的物置于 4F 系统的输入面，用白光照明，在变换平面上将出现三列分别与光栅条纹方向垂直的 0，±1 级彩色衍射斑，而且每个亮斑中波长较短的蓝色距中心较近［图（b）］. 再将一张黑纸放在变换平面上，并在适当地方开些窗口，让每一列衍射斑中所需颜色的 0，±1 级衍射光通过［图（c）］，这样在输出面上生成的图像的相应部分就可以得到所期望的色彩［图（d）］.

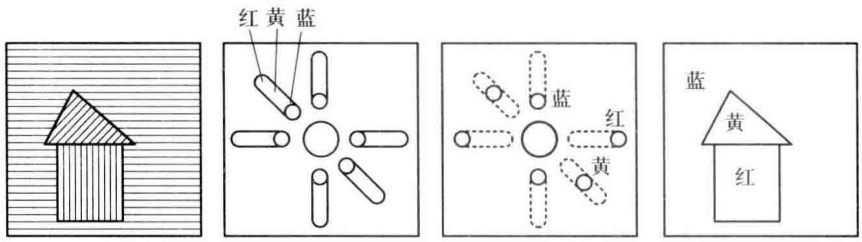


图 6.5-3　θ 调制实验

（3）相衬法　生物细胞切片或晶片这类透明物体对光的吸收非常小，因而光波通过它们以后振幅改变很小，看起来似乎没有变化. 但是这类物体的不同部分将引起不同的相位改变. 凡是只改变入射光波相位的物体称为相位物体. 如果光波经物体反射或透射以后，只改变其振幅，则称为振幅物体. 人眼等接收器可以感受或检测来自物体各处光强度的差别却不能感受或检测其相位的差别，所以人眼无法观察到相位物体的内部结构，这种情况下普通的显微镜也失去助视的功能. 但是这些相位分布常常反映着物体的某些重要特性，为此可利用相位反衬法（简称相衬法），通过相位滤波器将相位分布转换为振幅分布，即利用相位信息来调制像面上的光强分布，从而可观察到相位物体的某些细节.

为了说明相衬原理，假设物体为纯相位物体，其复振幅透射率函数为

$$\tilde{t}_0(x_0,y_0)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(x_0,y_0)} \tag{6.5-1}$$

如果将物体置于物镜前焦面处，则在物镜后焦面上将得到物函数的傅里叶变换

$$\begin{aligned}\tilde{E}(x,y)&=\mathscr{F}\{\tilde{t}_0(x_0,y_0)\}\\&=\iint_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(x_0,y_0)}\exp[-\mathrm{i}2\pi(f_x x_0+f_y y_0)]\,\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0\end{aligned} \tag{6.5-2}$$

式中 $f_x=\dfrac{x}{\lambda f'}$，$f_y=\dfrac{y}{\lambda f'}$. 如果相位变化 $\phi(x_0,y_0)$ 很小，则可将（6.5-1）式展开取一级近似得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(x_0,y_0)}\approx 1+\mathrm{i}\phi(x_0,y_0) \tag{6.5-3}$$

将上式代入（6.5-2）式积分得

$$\tilde{E}(x,y)=\delta(x,y)+\mathrm{i}\Phi(x,y) \tag{6.5-4}$$

上式中第一项为零级频谱，它表示在物平面处相位物体不存在时，平面波受透镜限制而产生的零级衍射斑. 第二项 $\Phi(x,y)$ 则表示相位物体产生的弥散分布的频谱，通常含有较高的空间频率，式中的系数 i 则表示以上二者之间的相位相差 $\frac{\pi}{2}$.

根据阿贝原理，像面上的场分布应为频谱函数的傅里叶逆变换，则像面上的光强分布为

$$I(x',y')=|\tilde{E}(x',y')|^2=|\mathscr{F}^{-1}\{\tilde{E}(x,y)\}|^2=|1+\mathrm{i}\phi(x',y')|^2\approx 1$$

这表明略去 $\phi(x,y)$ 的二次项不计，相位物体在像面上产生几乎均匀的光强分布，无法观察其细节. 在变换平面上插入一相位滤波器，使零级分量相对于其他频率分量产生一相位延迟 $\pi/2$. 这种滤波器也称为**相位板**，具体做法是在一块玻璃基坯的中心滴一液滴或蒸镀一小块薄膜，其光学厚度满足 $(n-1)d=\lambda/4$，然后将其放入物镜后焦面，并使其对准零级频谱，这样滤波后的频谱为

$$\tilde{E}'(x,y)=\mathrm{i}\delta(x,y)+\mathrm{i}\Phi(x,y)$$

像面上的光强分布为

$$I(x',y')=|\tilde{E}(x',y')|^2=|\mathscr{F}^{-1}\{\tilde{E}'(x,y)\}|^2=|1+2\phi(x',y')|^2 \tag{6.5-5}$$

上式表明加入相位板后利用相位信息调制了像面上的强度分布，使像面上的强度分布与物体上相位变化呈线性关系，从而将相位信息转换成了振幅信息. 用相衬法使原来看不见的结构成为可见的，但所看见的图像究竟意味着什么，需仔细加以研究.

在上面的讨论中，假设相位板使中心零级频谱的相位延迟 $\pi/2$，这时物体光学厚度大的地方相应的 ϕ 也大，像点的光强度也大，而且大于平均强度，称为**亮场相衬**，若使中心零级频谱的相位延迟 $3\pi/2$，容易得出像面的强度分布为

$$I(x,y)=1-2\phi(x',y')$$

这时物体光学厚度大的地方像的强度低，而且低于平均强度，看起来较暗，称为**暗场相衬**.

相位板除了使零级频谱产生 $\pi/2$ 的相移外，还可削弱零频项从而改善像面上的反衬度. 设相位板的透射率为 $\alpha(0<\alpha<1)$，则其复振幅透射率函数为

$$\tilde{t}(x,y)=\begin{cases}\mathrm{i}\alpha, & \text{在 } \delta(x,y) \text{ 范围内}\\ 1, & \text{其他}\end{cases}$$

经相位板滤波后的频谱为

$$\tilde{E}'(x,y)=\mathrm{i}\alpha\delta(x,y)+\mathrm{i}\Phi(x,y)$$

像面上的光强分布为

$$I(x',y')=|\mathscr{F}^{-1}\{\tilde{E}'(x,y)\}|^2\approx\alpha^2+2\alpha\phi(x',y')$$

式中 α^2 为背景强度，像面上的反衬度

$$M'=\frac{\text{在}(x',y')\text{点的强度}-\text{背景强度}}{\text{背景强度}}=\frac{\alpha^2+2\alpha\phi(x',y')-\alpha^2}{\alpha^2}=\frac{2\phi(x',y')}{\alpha}$$

上式表明相位板的透射率 α 愈小，像面光强分布的反衬度愈大. 可见相位板的作用并不只是产生一定的相移，而且还吸收一部分直射的零级光，提高了像面上的反衬度.

相衬法是泽尼克(Zernike)在 1935 年提出，并制成相衬显微镜用于结晶学、生物学、医学研究中对相位物体的观察(见彩图 8). 在此以前观察细菌、细胞等相位物体时须使用染色法，而在染色过程中常常引起它们死亡，这对于研究其生命过程是不利的. 泽尼克的相衬原理开创了光学信息处理和空间频率滤波步入实际应用的先河，为此他获得了 1953 年诺贝尔物理学奖.

§6.6　光 全 息 术

6.6.1　什么是全息照相

1948 年英籍匈牙利科学家伽柏(Gabor)在研究改善电子显微镜的分辨本领时，提出了全息照相(holography)原理，但是由于当时缺乏相干性好亮度又高的光源，在光学领域未能得到很快的发展. 1955—1961 年间，它的发展主要在雷达技术方面. 1960 年激光问世为全息照相提供了十分理想的光源. 1962 年利思(Leith)等人对伽柏方法提出了开拓性的改进意见，拍摄了离轴全息图，从此全息技术进入了长足发展的阶段. 1962 年丹尼修克(Denisyuk)提出了白光再现的反射全息原理，特别是 1969 年本顿(Benton)提出彩虹全息术，更使全息术的发展进入了一个新阶段. 由于全息术的发明及后来的发展，伽柏获得了 1971 年诺贝尔物理学奖.

普通照相是根据几何光学原理，利用透镜光学系统成像. 然而普通黑白照相底片只记录了物光波的强度(即振幅信息)，相位信息完全丢失掉了，所以只能在底片上显示出物体的平面图像. 全息照相则是利用光的干涉原理把物光波的振幅和相位同时记录下来，再利用光的衍射原理使之在一定条件下再现，从而可以获得十分逼真的三维图像.

全息照相是一种“无透镜”的成像法，其过程可分为两步：干涉记录和衍射再现.

1. 干涉记录　人眼能看到一个物体，是因为物体发出的光波的特定波前为人眼所接收. 描写单色光波波前的复振幅由波前上各点光场的振幅和相位来决定. 但是由于光波频率很高，现有的接收器都只能记录振幅平方的平均值即光强，而不能直接记录相位. 因此要用底片记录光波的相位，必须设法把它转换成相应的光强分布. 如图 6.6-1 所示，使来自物体的散射光波与另一束与之相干的参考光波同时照射在全息底片(全息干板)上，物光与参考光在底片上叠加产生干涉，其干涉光强分布不仅取决于它们的振幅，而且取决于它们的相位差，于是干涉图样通过强度将物光的振幅和相位信息都记录下来. 这张记录有干涉图样的底片经过适当冲洗以后，就是一张全息照片，或称为**全息图**. 与普通照相底片不同，全息图是干涉图样，它与物体没有什么相似之处.

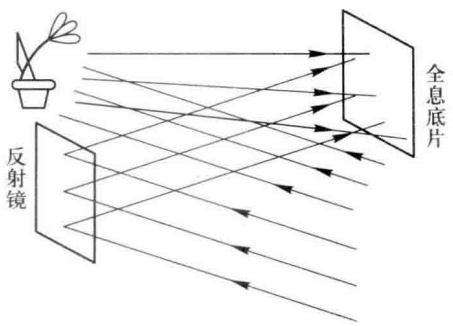


图 6.6-1　全息图的记录

2. 衍射再现　为了观察所记录的景物的图像，通常需用相干的再现光波照明全息图(图 6.6-2). 记录有干涉图样的全息图可看作一块复杂的光栅，再现光波

经全息图衍射后，衍射场中包含有再现的物光波场. 观察者迎着再现光波的方向，透过全息图可观察到物体的虚像，宛如透过窗口观察景物一样. 这个虚像具有原物的特征，所以称它为**原像**. 假如观察者移动他的眼睛（即改变观察角度），可以看到物体不同侧面的形象，甚至转到某一位置可以看到在另一位置时被前面物体挡住的后面的景物. 在相对于底片与虚像对称的位置上还有一个实像，称为**共轭像**. 如果参考光波和再现光波不是平面波，原像和共轭像也可能都是实像或虚像.

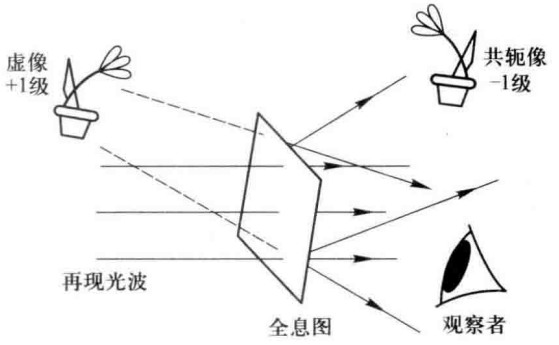


图 6.6-2 全息图的再现

实际上 §5.12 中所讨论的正弦波带片的制作和衍射就是全息照相的记录和再现过程. 若将图 5.12-6 中的点源 S 发出的球面波看作物光波，平面光波视为参考波，则所得正弦波带片就是点物的全息图. 用平面光波照明波带片所生成的 0 级衍射波是直接透射光，+1 级衍射波就是再现的物光波，迎着它可以观察到一个虚像 S'，-1 级衍射波将形成实像 S''（图 5.12-8）.

对于有限大小的物体，可把它视为大量物点的集合，其中每一个点都在全息底片上生成与之相应的波带片，彼此错开一个位置. 它们的集合所形成的复杂的干涉图样就是物体的全息图，再现时每一波带片都生成单个物点的像，整个全息图就逐点再现出整个物体的像.

6.6.2 全息照相的原理

设物光波在底片即 xy 面上任一点 $P(x,y)$ 的复振幅为

$$\tilde{E}_0(x,y)=A_0(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_0(x,y)} \tag{6.6-1}$$

参考光波在 P 点的复振幅为

$$\tilde{E}_R(x,y)=A_R(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_R(x,y)} \tag{6.6-2}$$

这两束光在 P 点的干涉光强为

$$I(x,y)=A_R^2+A_0^2+A_RA_0[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_0-\phi_R)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\phi_0-\phi_R)}]=A_R^2+A_0^2+2A_RA_0\cos(\phi_0-\phi_R)$$

由此可见底片上的光强分布与物光、参考光的振幅和相位差有关，物光波的相位是以相对于参考光波相位的形式（即 $\phi_0-\phi_R$）被记录下来. 将底片经线性曝光冲洗后所得全息图的振幅透射率为

$$t(x,y)=t_0+t_1I(x,y)=t_0+t_1[A_R^2+A_0^2+A_RA_0e^{i(\phi_0-\phi_R)}+A_RA_0e^{-i(\phi_0-\phi_R)}]$$

式中 t_0、t_1 为与 x、y 无关的常数，t_0 称为底片的灰雾度. 当 $t_1<0$ 时，光强 I 愈大，t 愈小，相应于负片；而 $t_1>0$ 则相应于正片.

如图 6.6-2 所示，用和参考光波完全相同的再现光波 $\tilde{E}_i$ 照明全息图，即 $\tilde{E}_i=\tilde{E}_R=A_Re^{i\phi_R}$，则全息图后表面上的衍射场

$$\tilde{E}_t(x,y)=t(x,y)\tilde{E}_R=(t_0+t_1A_R^2)\tilde{E}_R+t_1A_0^2\tilde{E}_R+t_1A_R^2\tilde{E}_0+t_1A_R^2\tilde{E}_0^*$$

根据惠更斯-菲涅耳原理，全息图后表面上的衍射场复振幅分布完全决定了全息图后面的衍射场分布. 下面对上式右端的四项分别讨论：

第一项 $(t_0+t_1A_R^2)\tilde{E}_R$ 表示沿再现光波传播方向的零级衍射光.

第二项 $t_1A_0^2\tilde{E}_R$ 表示振幅受到调制的再现光波. 其中 $A_0^2(x,y)$ 为记录全息图时物光波在底片上的强度分布，它是不均匀的，再现时它表现为杂散的“噪声”信息. 通常 $A_R^2\gg A_0^2$，它的干扰不大.

第三项 $t_1A_R^2\tilde{E}_0$ 表示再现的物光波，它在物体原位置上生成虚像.

第四项 $t_1A_R^2\tilde{E}_0^*$ 正比于物光波的共轭波函数，它表示再现的共轭像. 当参考光波和再现光波都是平面波时，它是一个实像，可以用屏接收. 共轭像是赝视像，即像和物体在空间深度上反转了（图 6.6-2）. 例如观察人脸的赝视像时，看上去鼻子不像通常那样凸起来，而是向里凹进去了.

实际上再现光波可以不必和原参考光波相同，若再现光波的波长或方向改变，则将引起再现像的大小或位置发生改变.

由上述分析可知，利用二维的全息图可以观察到物体的三维图像，是因为全息图对再现光波的调制作用，使得衍射波场中产生了所记录的物光波前. 因此所谓波前再现，实际上是模拟再现，或者说是物光波前的重建.

6.6.3　全息图的基本类型

从不同的角度考虑，全息图有不同的分类方法. 从物光与参考光是否同轴考虑，可以分为同轴全息图和离轴全息图；从记录时物体与全息干板的相对位置考虑，可以分为菲涅耳全息图、像面全息图和傅里叶变换全息图；从记录介质的厚度考虑，可以分为平面全息图和体积全息图.

1. 同轴全息图　1948 年伽柏最初提出和实现的全息图，记录时物光与参考光同轴，再现时四项场分量都在同一方向上传播. 其中的直接透射光大大降低了像的衬度，且实像与虚像构成不可分离的孪生像，大大降低了全息图像的质量.

2. 离轴全息图　为消除同轴全息图中孪生像的干扰，1962 年美国密执安大学雷达实验室的利思等人提出了离轴全息图，也称为偏斜参考光全息图. 记录时参考光以一定的角度投射到全息干板上，再现时物波波前 O 及其共轭波前 O^* 具有不同的传播方向，并且与直接透射光分开. 由于成像光波不会与背景光干涉叠加，因此可以得到和原物衬度相同的像.

3. 菲涅耳全息图　记录平面位于物体衍射光场的菲涅耳衍射区，物光由物体直接照到全息

干板上.

4. 傅里叶变换全息图 不是记录物光波本身,而是记录物光波的傅里叶频谱. 利用透镜的傅里叶变换性质,将物体置于透镜的前焦面,在照明光源的共轭像面位置就得到物光波的傅里叶频谱,再引入参考光与之干涉,则在干涉图样中就记录了物光波傅里叶变换光场的全部信息,包括傅里叶变换的振幅和相位. 为了得到物体的再现像,必须对全息图的透射光场作一次傅里叶逆变换.

5. 像全息图 物体靠近记录介质,或利用成像系统使物体成像在记录介质附近,或者使一个全息图再现的实像靠近记录介质,都可以得到像全息图. 其主要特点是可以用扩展的白光光源照明再现,因此广泛用于全息显示.

6. 彩虹全息图 记录时在光路的适当位置添加狭缝,再现时同时再现狭缝像,观察再现像时将受到狭缝再现像的限制. 当用白光照明再现时,对不同颜色的光,狭缝和物体的再现像位置都不同,在不同的位置将看到不同颜色的像,颜色的排列顺序与波长顺序相同,有如彩虹一样,因此称为彩虹全息.

7. 体积全息图 当记录材料的厚度是条纹间距的若干倍时,则在记录材料体积内将记录下干涉条纹的空间三维分布,这样就形成体积全息. 按物光和参考光入射方向和再现方式的不同,体积全息可分为两种:一种是物光和参考光在记录介质的同一侧入射,得到透射全息图,再现时由照明光的透射光成像;另一种是物光和参考光从记录介质的两侧入射,得到反射体积全息图,再现时由照明光的反射光成像. 体积全息可用白光再现.

6.6.4 全息照相的特点

全息照相与普通照相相比,除了所记录的是物光波的全部信息、原物具有三维结构时再现像也有三维特性外,还有下列特点:

① 普通照相过程中物像之间是点点对应的关系,即一个物点对应像平面中的一个像点. 而由散射物体所产生的全息图与物体之间是点面对应关系,即每个物点散射的光束直接落在整个底片上;另一个方面,全息图中每一局部都包含了来自物体上各点的光信息. 因此全息图被打碎以后,每一碎片都仍能再现原物的基本形状. 不过由于全息图面积减小,将导致像的细节成分不同程度地丢失. 宛如光栅宽度 Nd 减小时谱线的半角宽度增加,分辨能力下降一样.

② 普通照相经曝光冲洗后所得的负片须翻印成正片后才能显示与原物相同的光强分布. 对于全息照相,无论正片还是负片,对照明光波的衍射作用完全一样,都能再现原物的像.

③ 普通照相在一张底片上只能拍摄一个场景,而全息照相却可以采取对不同景物用不同角度入射参考光的方法,在同一底片上记录许多场景,再现时各场景相应的衍射光波沿不同方向传播,它们可以互不干扰.

④ 全息照相记录的是干涉图样,对光源的相干性、底片的分辨本领(普通照相底片为 200~300 线/mm,全息照相底片为 800~4 000 线/mm)、拍摄装置的稳定性等都有较高的要求.

6.6.5 全息照相的应用

自从伽柏发明全息照相以来,经过几十年的发展,已在许多方面取得应用,从 20 个世纪 80 年代初期开始在一些国家已兴起全息产业. 目前全息照相的应用主要在以下几个方面:

1. 全息显示　全息图最吸引人的性质之一是它能再现物体的三维图像. 采用卤化银乳胶、重铬酸盐明胶、光聚物材料制成的全息图在显示方面的应用十分广泛,例如用于广告、橱窗(文物、工艺品、工业品、建筑物的展示)、纪念章、壁挂、桌饰、耳环、胸饰等.

2. 模压全息　1970 年 RCA(美国无线电公司)的 Bartolini 等人提出用模压方法复制全息图. 模压全息术与凸版印刷术类似,所以又称之为全息印刷术. 它是建立在激光全息术、计算机辅助成图技术、制板技术、表面物理、电化学、精密机械加工等多学科基础上的一种新的微细加工技术. 全息印刷术的发明,解决了全息图的大批量复制问题,成本低、售价廉、可大规模生产. 制作模压全息图需要昂贵的设备和高科技,而且可用多种方法加密,难以仿制,所以它目前最成功最大量的应用就是作为各种保密和防伪标记. 例如用作防伪商标,用于各种信用卡、钞票、身份证、护照签证上的防伪标志. 模压全息还广泛用作书刊的封面(见本书封三)和插图、明信片、邮票、年历、贺卡、广告,以及包装和装饰材料. 模压全息开辟了用压印方法复制三维信息的一种新途径.

3. 全息光学元件　全息光学元件是用全息方法记录或复制的衍射光学元件. 全息元件重量轻、成本低,特别适用于激光系统. 采用不同的制作方法,可使它具有成像、调制、滤波等多种功能. 除了全息光栅(见彩图 5、6)、全息透镜、全息滤波器等常用元件外,近年来又开拓出许多新型元件. 例如用于战斗机上的平视显示器、条形码读出器中的全息扫描器、全息光盘读出头、全息关联存储器、光互联元件等.

4. 全息干涉计量　全息干涉是将不同时刻的物波前记录在同一张干板上,同时再现发生干涉,根据干涉条纹的形状、间距等即可定性或定量分析出物体的形变、位移、振动状态等信息,它是干涉计量术的新发展,是全息术的应用比较成熟的领域. 普通干涉方法只能测量抛光的透明物体或反射面,而全息干涉方法不仅可以测量透明物体、也可以测量不透明物体和散射体,因此其应用的灵活性大大增强. 目前已发展的全息干涉方法包括单次曝光法、二次曝光法、时间平均法等,已广泛应用于汽车、飞机、机床等工业中. 全息干涉和散斑干涉相结合,光电结合提高测量精度及速度,利用计算机处理数据作定量计算等,是全息干涉计量术发展的主要特点和技术方向.

5. 全息信息存储　21 世纪是高度信息化的社会,信息存储的高密度化和数据处理的快速化将是推动社会发展的关键技术. 光盘作为比较成熟的大容量存储器件,目前其面存储密度已接近光学极限 $1/\lambda^2$,因此迫切需要开发具有更高速度、更大存储密度及容量的下一代海量存储技术. 全息存储是目前国内外正在大力发展的几种存储技术之一,和磁存储技术及光盘存储技术相比,全息存储具有以下优点:(1) 高存储容量,全息信息存储多采用傅里叶变换全息图记录信息的频谱,这样全息图的面积较小,有助于增大存储容量,体全息存储为三维记录,其存储密度与 $1/\lambda^3$ 成正比,利用体积全息图严格的布拉格匹配条件采用角度复用、波长复用等存储技术还可将存储容量提高 1~2 个数量级;(2) 高冗余度,与光盘按位存储不同,全息以分布式的方式存储信息,记录介质局部的缺陷和损伤不会引起信息的丢失;(3) 高数据传输速率,与光盘按位串行读写的通信方式不同,全息存储的写和读均采用页面式的并行方式,每个数据页可包含多达 1 Mbit 的信息,而采用非机械、无惯性光束偏转寻址,页面寻址时间可小于100 μs.目前国内外相关科研机构均已开发出小型的全息存储装置,1999 年美国加州理工大学利用空间-角度复用技术在一块 1 cm^3 掺铁铌酸锂晶体中存储了 26 000 幅全息图,斯坦福大学把数字化的压缩图像和视频数据存

储在一个全息存储器中并高质量地复现了这些图像，美国 Northrop 公司在掺铁铌酸锂晶体中存储了取自计算机的 1 000 页数字数据，并无任何错误地将若干部分复制回计算机，这表明全息存储具有足够高的精度及与数字计算机良好的兼容性，以上这些研究工作预示了全息存储技术光明的发展前景.

6.6.6 全息术的新进展

以上我们讨论的都是用参考光、物光干涉记录的方法制作全息图，称为光学全息图.制作光学全息图时需有真实的记录物体存在，需要激光光源、全息防震平台、光学元件、全息记录材料等硬件条件，对记录环境条件（振动、噪音等）也有较高的要求，这些均给全息图的制作质量与重复性带来不少问题.

随着计算机技术、数字化绘图及显示设备的高速发展，一方面，人们已可以不用光学干涉记录而用人工的方法，即使用计算机与绘图仪，根据物波的数学描述，将其振幅和相位以一定的编码方式记录下来形成全息图，这就是计算全息图（CGH）；而采用光敏电子元件代替普通照相干板，并将记录的全息图输入计算机，再通过数字技术进行图像重建、在计算机屏幕上显示出来，这就是数字全息术.计算全息和数字全息在技术上突破了光学全息的某些限制和不足，特别是它们均建立在现代高性能数字计算、图像显示及处理技术的基础上，有利于实现光学技术与计算机技术、电子技术的有机结合，有利于改善光学技术的处理精度、可靠性、技术复杂性等，是对光学全息的重要发展和未来全息技术重要的发展方向.

下面简要介绍计算全息和数字全息的基本概念、制作方法及应用领域等.

1. 计算全息图　计算全息图不同于光学全息图，它不需要实际的记录物体存在，而是把物光波的数学表达式输入计算机，通过一定的编码方法将物光波编码成全息图的透过率变化，然后用绘图仪或打印机绘出全息图的原图，最后将全息图原图照相缩版到需要的尺寸，记录在银盐照相干板或胶片上，就制成了实用的全息图.根据制作的计算全息图类型，采样适当的光学再现装置即可再现出所设计的物图像.

自从 1965 年在 IBM 工作的罗曼（Lohmann）制作成功世界上第一个计算全息图后，很多科学工作者在编码技术、制作方法、应用领域等方面作了大量的研究工作，极大地推动了计算全息技术的发展.在编码技术上已先后提出了迂回相位编码（罗曼Ⅰ型、罗曼Ⅱ型、罗曼Ⅲ型）、修正离轴参考光（博奇型、黄氏型、李维汉型）、计算全息图干涉图、相息图等方法.制作的计算全息图类型也多种多样，根据编码方式可分为迂回相位型计算全息图、修正离轴参考光计算全息图、计算全息干涉图、相息图等；根据物面与全息图面的相对位置可分为像面计算全息图、傅里叶变换计算全息图、菲涅耳计算全息图等；根据全息图的透过率变化特征可分为二元计算全息图、灰阶计算全息图等.

目前计算全息技术已经在全息干涉计量、光学信息处理、三维全息显示、激光扫描器等方面获得成功应用.例如在全息干涉计量方面，由于利用计算全息技术可以方便灵活地产生一些特殊形式的光学参考波面，在干涉测试中用于检测有特殊相位变化（如非球面）的光学元件，而这种参考波面往往是难以用其他光学制作技术来生成的；而在光学信息处理方面，利用计算全息图可以很方便地制作各种空间滤波器，在图像边缘增强、图像消模糊、特征识别等方面有重要的应用价值；计算全息图还可以在光学系统中用作像差补偿器或校正板，只要对系统进行像差分析得出

要补偿的波像差函数，就可以制作出计算全息图；另外在制作红外全息光学元件时也可用计算全息图校正板来消除记录和再现波长不同而引入的像差.

2. 数字全息图　数字全息技术早在 1967 年即由古德曼(Goodman)提出，其记录光路与普通光全息术类似，不同之处在于采用光敏电子元件(如电荷耦合成像器件 CCD)代替普通照相干板来记录全息图，并且采用数字再现技术代替光学方法进行图像重建，由于采用数字化记录及图像显示技术，避免了光学全息术繁琐的物理、化学处理过程，可大大提高工作效率，应用相对方便.但由于当时计算机技术和电子记录器材的制约，多年来一直没有重要进展.近年来随着数字计算机和高质量面阵数字光敏元件的技术进步，研究工作逐渐增多.CCD 的分辨率通常低于传统的全息记录介质一个数量级，目前的数字全息技术通常采用同轴记录装置来克服 CCD 分辨率的限制，从而再现像受到直透光和共轭像的严重干扰，特别是零级像，由于占据了大部分能量而在图像的当中形成一个又大又亮的亮斑，使得重建图像的质量不高.解决的办法之一是采用数字频域滤波方法，该方法仅适用于离轴全息图，首先利用计算机对记录的离轴数字全息图进行离散傅里叶变换，在频谱面上得到分离的共轭像、原始像及零级衍射像的频谱；再用窗口函数对频谱面进行滤波操作，将共轭像和零级光的频谱消除，只留下原始像的频谱；最后对原始像的频谱进行逆傅里叶变换，即可获得清晰无干扰的物图像信息.第二种解决办法是采用 1997 年由日本科学家 Yamaguchi 等提出的相移技术，通过改变参考光束的相位并记录多幅相应的数字全息图，再通过计算机数字相减技术，可以很好地去除直透光和共轭像的影响，获得高质量的数字图像.

数字全息术采用 CCD 等光敏器件代替普通全息记录材料来记录全息图，用计算机数字再现取代光学衍射来再现物波场，实现了全息图记录、存储、处理和再现全过程的数字化，给全息技术的发展和应用增加了新的方法，并可以有效消除像差、噪声及记录处理过程中底片非线性等因素的影响，整个过程简单、速度快、灵活性大，更便于进行定量分析与测量.目前已发展的数字再现方法主要有菲涅耳变换法、傅里叶变换法、小波变换法、卷积法、角谱法等，已可以达到小于 1 μm 的横向分辨率和 nm 量级的纵向分辨率，研究领域非常广泛，涵盖了表面形貌测量、位移和形变测量、振动分析与测量、流场与粒子场测定、生物粒子监视、构件缺陷检测等诸多方向，在 3D 物体显示及表面轮廓重建，以及微电路检测、生物医学诊断等小视场、小孔径的微观测量领域有着明显的技术优势和广泛的应用前景.

思　考　题

6.1　单色平行光正入射照明一衍射光栅，光栅常量为 d，缝宽 $a=d/3$，紧挨焦距为 f_2' 的透镜 L_2 放置. 在 L_2 的后焦面上安放另一个焦距为 $f_3'=f_2'/2$ 的透镜 L_3，并在与 L_3 距离为 f_2' 处放接收屏. 试讨论在下面三种情形下，接收屏上观察到什么现象：

(1) 只让零级衍射斑通过 L_3；

(2) 只让±1 级衍射斑通过 L_3；

(3) 所有衍射斑都通过.

6.2　在光栅光谱仪的透镜后焦面上获得的是时间频谱还是空间频谱？

6.3 普通录音带记录的是否为声音的“全息”？

6.4 全息图的一块碎片和整块全息图再现的图像是否完全相同？

6.5 伽柏最先拍摄全息图的装置中，物光和参考光源均位于全息图平面的同一法线上，称之为共轴全息图．这种全息图在再现时有什么缺点？

6.6 全息图有哪些基本类型？哪些全息图必须用激光再现，哪些可以用白光再现？

6.7 试讨论计算全息、数字全息与光学全息的相同点及不同点．

习　题

6.1 He-Ne 激光器发出的平行光（$\lambda=632.8$ nm）垂直照射在一圆孔衍射屏上，孔的半径为 1.25 mm，为了观察夫琅禾费衍射，观察屏大约必须放多远？

6.2 今有宽度为 a 的单狭缝夫琅禾费衍射装置，在缝的宽度方向 x 由 $(-a/2)$ 到 $(+a/2)$ 的缝平面上覆盖着振幅透射率为 $t(x)=\cos(\pi x/a)$ 的膜片．试求夫琅禾费衍射场的振幅分布，并和无膜片时的衍射场振幅分布作比较．

6.3 一块透明片的振幅透射率为 $t(x)=\exp(-\pi x^2)$（高斯分布），将其置于透镜的前焦面上，并用单位振幅的单色光垂直照明，求透镜后焦面上的振幅分布．

6.4 利用傅里叶变换方法，求包含 N 个狭缝的衍射光栅的夫琅禾费衍射图样强度分布公式，设狭缝宽度为 a，光栅常数为 d，光栅由单位振幅的单色光垂直照明．

6.5 一柱面透镜（如图 6.1 所示）的一个表面为柱面的一部分，另一面为平面．柱面的曲率半径为 R，透镜的最大厚度为 d_0，材料的折射率为 n．试证透镜的相位变换函数为 $\tilde{t}(x,y)=\exp(\mathrm{i}knd_0)\exp\left(-\mathrm{i}k\dfrac{x^2}{2f'}\right)$．［注：柱面透镜的焦距 $\dfrac{1}{f'}=(n-1)\cdot\dfrac{1}{R}$．］

6.6 在龙基光栅的夫琅禾费衍射装置中，光栅与透镜 L_2 相距为 d，透镜半径为 r，入射光波长为 λ，试求透镜的截止频率（即能通过透镜的最大空间频率）．

6.7 将一宽为 $a=2$ cm 的单缝衍射屏置于直径为 5 cm，焦距为 60 cm 的透镜的前焦面上，波长为 600 nm 的单色光正入射到衍射屏上，求系统的截止频率．

6.8 光波长为 632.8 nm 的平行光正入射到龙基光栅上，观察其傅里叶频谱，光栅每毫米内有 100 条刻线，为了使傅氏面上至少能够获得±5 级衍射斑，并要求相邻衍射斑的间隔不小于 2 mm，透镜焦距及口径至少要多大？

6.9 利用阿贝成像原理导出在相干照明条件下显微镜的最小分辨距离公式，并同非相干照明的最小分辨距离公式比较．

6.10 若一平面物体的全息图记录在一个与物平行的平面上，证明再现像必定成在一个与全息图平行的平面内．

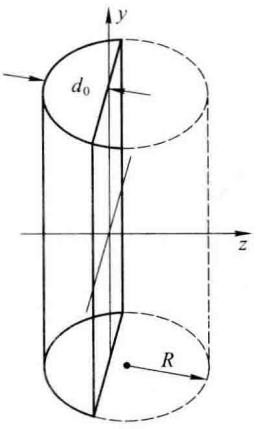


图 6.1

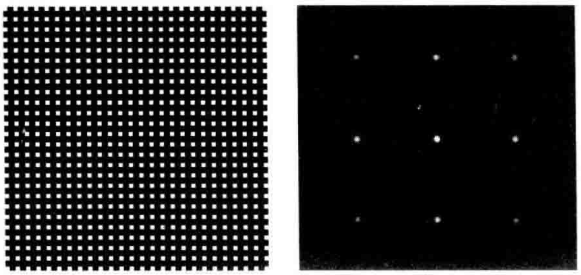
模拟计算习题

6.1 阿贝成像原理——网格物体的空间滤波模拟

网格状物体可由两块正交密接的黑白光栅形成，如图 6.2(a)所示．已知网格 x 和 y 方向的周期为 $d_x=d_y=$

30 μm，根据傅里叶变换公式，模拟此网格物体的空间频谱分布. 在频谱面上加入图 6.5-2(b)—(d)所示的各种滤波器(其中白色表示透光部分，黑色表示不透光部分)，模拟滤波后像面光强的分布.

要求：改变网格 x 和 y 方向的周期 d_x、d_y，观察空间频谱的变化.



(a)　　(b)

图 6.2　模拟结果示意图

(a) 网格物体示意图；(b) 网格物体的频谱

6.2　准单色光波的分解

已知一中心波长为 $\lambda_0=632.8$ nm 的准单色光波，其光场中某点在持续时间 $\tau_0=0.5\times10^{-9}$ s 内作振幅衰减的简谐运动，图 6.3 为其波形示意，振幅初始值为 $E_0=1$，衰减系数为 $\alpha=1/\tau_0$. 根据其振动函数和傅里叶变换公式，模拟此准单色光波对应的功率谱分布.

振动函数：$E(t)=E_0\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\nu_0 t}\ (t>0)$

要求：改变衰减系数 α，观察功率谱的变化.

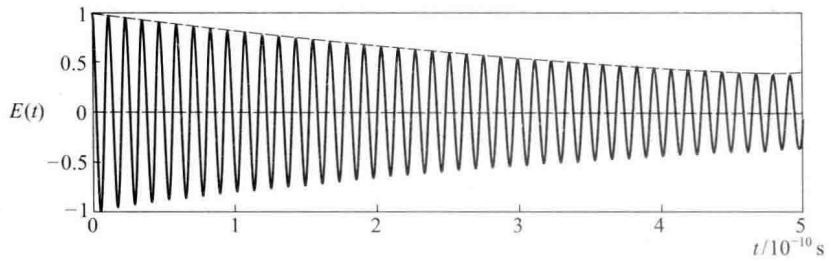


图 6.3　振幅衰减的简谐运动波形

6.3　矩形函数的分解

一龙基光栅周期为 $d=30$ μm，透光部分宽度为 $d/2$，其振幅透过率函数为

$$t(x)=\begin{cases}1, & md\leqslant x\leqslant md+\dfrac{d}{2}, \quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

将其展开为傅里叶级数，可得

$$t(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\left[\sin\left(\frac{2\pi x}{d}\right)+\frac{1}{3}\sin\left(3\times\frac{2\pi x}{d}\right)+\frac{1}{5}\sin\left(5\times\frac{2\pi x}{d}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2m+1}\sin\left((2m+1)\times\frac{2\pi x}{d}\right)+\cdots\right] \qquad m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

上式表明，矩形函数可通过傅里叶级数展开为一系列具有不同频率和振幅的简谐函数，上式右端所取的项数越

多,其和越接近于矩形函数. 根据上式,模拟画出至少五个谐波的波形以及相应 $t(x)$ 的波形. 图 6.4 为模拟结果示意图.

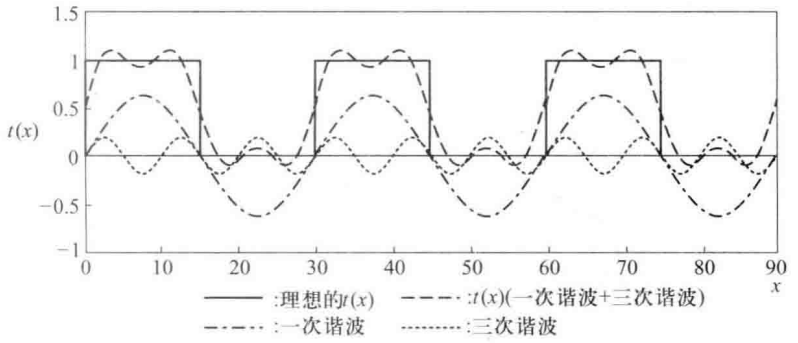


图 6.4 模拟结果示意图:矩形函数的分解

第七章　光在晶体中的传播

本章将讨论光在各向异性晶体中的传播特性，介绍几种晶体光学器件，并着重讨论光通过一些晶体光学器件后偏振态的改变以及几种光偏振调制器，最后引入偏振态及其转换的矩阵描述.

§7.1　晶体的双折射和双反射

7.1.1　晶体的双折射现象

晶体是物质的一种特殊的凝聚态，一般呈现固相，其外形具有一定的规则性，内部原子（离子、分子）排列呈现空间周期性. 晶体微观结构上的周期性或对称性导致晶体在物性上的各向异性，例如晶体的热传导、导电、电极化和磁化的各向异性以及光在晶体中传播速度的各向异性. 在整体结构上保持空间有序结构的晶体称为单晶体. 由大量单晶体或晶粒无规则排列组成的晶体称为多晶体. 晶体中只有立方晶系（例如食盐 NaCl 晶粒）是各向同性的.

当一束光由空气射到各向异性的晶体（例如方解石）表面时，在晶体中将产生两束折射光线，通过晶体观看英文字母时，如图 7.1-1 所示，将看到双像，这种现象称为**双折射**. 双折射产生的两束光线中，其中一束的传播方向遵从折射定律，称为**寻常光线**，简称 o 光；而另一束不遵从折射定律，即折射光线一般不在入射面内，并且当两种介质一定时，$\dfrac{\sin i_1}{\sin i_2}\neq$ 常数，这束光线称为**非常光线**，简称 e 光. 如果平行光束正入射于方解石表面（$i_1=0$），在晶体内 o 光沿原入射方向传播（$i_2=0$），而 e 光却偏离原来的方向（$i_2\neq 0$），它的折射方向不仅取决于入射光的方向，而且与晶体的取向有关. 以入射光线为轴旋转方解石，在接收屏上将看到 e 光的光点绕着 o 光的光点旋转. 应当注意，所谓 o 光和 e 光只有在晶体中才有意义.

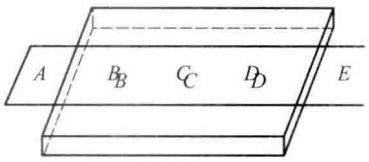


图 7.1-1　双折射现象

晶体中存在一个特殊的方向，沿此方向传播的光不发生双折射，这一特殊的方向称为晶体的**光轴**. 光轴既然表示晶体中的一个方向，所以在晶体中平行于这个方向的任何直线都是晶体的光轴.

只有一个光轴的晶体称为**单轴晶体**. 三角晶系、四角晶系和六角晶系均属单轴晶体，例如石英、方解石、红宝石、冰、金红石等. 有两个光轴的晶体称为**双轴晶体**，例如蓝宝石、云母、正方铅矿、硫黄、石膏等. 本书只讨论单轴晶体.

方解石和石英是两种常用的单轴晶体. 方解石化学成分为碳酸钙（$CaCO_3$），它容易裂开，形成的光滑表面称为解理面，其天然晶体外形为平行六面体，每个表面都是平行四边形，各面锐角

为78°8′,六面体的八个棱角中有一对钝角,它的三个平面角均为102°. 通过这对钝角顶点并与三个界面成等角的直线方向,就是方解石晶体的光轴方向,其结构见图7.1-2.石英又称水晶,化学成分是二氧化硅(SiO_2),其外形如图7.6-2所示.

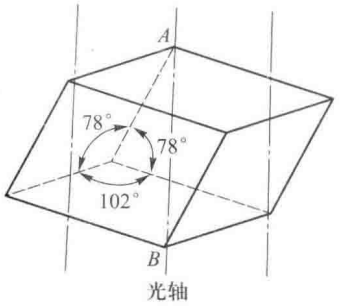


图7.1-2 方解石

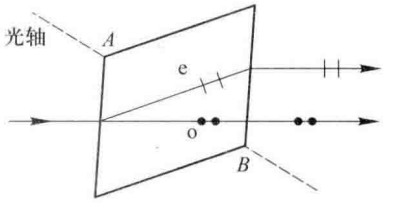


图7.1-3 方解石内o光和e光的偏振态

包含晶体光轴及晶体表面(晶体的解理面)法线的平面叫做晶体的**主截面**,它由晶体的自身结构决定.

光轴与晶体内某一条光线所组成的平面,称为这条光线的**主平面**. 由光轴和o光组成的平面为o光的主平面,由光轴和e光组成的平面为e光的主平面. 由于o光总在入射面内,而e光一般情况下不在入射面内,因此除特殊情况外(入射光线在晶体主截面内时),o光和e光的主平面不重合.

用检偏器来检测,可以发现o光和e光都是线偏振光,但其光矢量的振动方向各不相同. o光的振动方向垂直于o光的主平面,而e光的振动方向则在自己的主平面内. 仅当入射面与晶体的主截面重合时,o光和e光的主平面完全重合,于是o光和e光的光矢量振动方向垂直. 图7.1-3所示为方解石内o光和e光的偏振态.

当自然光垂直照射到单轴晶体上时,假设晶体不吸收光能量,则o光和e光具有相同的强度. 但是当以线偏振光入射时,它在晶体内所分解成的o光和e光的强度就不一定相等,而是随入射光振动面与晶体主截面间的夹角θ而变化. 如图7.1-4所示,设振幅为A的线偏振光正入射于晶体表面,晶体主截面与入射面重合,入射光的振动矢量A与晶体主截面的夹角为θ. 在晶体内,它可分解为振动垂直于主截面的o光和在主截面内的e光,它们的振幅A_o和A_e分别为

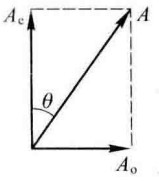


图7.1-4 线偏振光在晶体内的分解

$$A_o = A\sin\theta, \quad A_e = A\cos\theta \tag{7.1-1}$$

于是o光和e光的强度分别为

$$I_o = A^2\sin^2\theta, \quad I_e = A^2\cos^2\theta \tag{7.1-2}$$

上式即为**马吕斯定律**,它表示了o光、e光的强度随入射光的振动面和主截面之间的夹角θ变化的关系. $\theta=0$或$\theta=180°$时,$I_o=0$,$I_e=A^2=I$,晶体内只有一束e光;当$\theta=90°$或$\theta=270°$时,$I_e=0$,$I_o=A^2=I$,晶体内只有一束o光;当θ为其他值,$I_o+I_e=A^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=I$,即不考虑晶体反射、吸收等损失时,晶体的o光和e光的强度之和为入射光强度.

7.1.2 双反射现象

将一块方解石切割成如图7.1-5所示的形状,图中MN面与晶体的光轴垂直,并与NP面成

45°角. 一束单色自然光正入射到 MN 面,在晶体中沿光轴方向传播到 NP 面上全反射而形成两束反射光,这种现象称为**双反射**. 其中一束满足反射定律,称为 o 光;另一束不满足反射定律,称为 e 光. 实验发现,它们都是线偏振光. 在图示情况下,o 光的振动面垂直于晶体的主截面,e 光的振动面在晶体的主截面内.

7.1.3　单轴晶体中的复合波面

双折射现象产生的原因是由于晶体结构特性的影响,光在晶体中传播时,在各个方向的传播速度不同,o 光与 e 光两种振动分别形成两个波面,o 光波面为球面,e 光波面为以光轴为旋转轴的旋转椭球面,它们在晶体光轴上相切,形成复合波面,如图 7.1-6 所示. 所谓波面是指晶体中点光源激发的扰动同时到达的空间各点轨迹,亦即等相面. o 光波面为球面,意味着在晶体中 o 光的传播规律与在各向同性介质中的一样,它沿各个方向的速度均相同,记为 v_o. e 光的波面为旋转椭球面,它体现了在晶体中 e 光沿各个方向传播速度不同. 两波面在光轴上相切,表明 e 光和 o 光在光轴方向上传播速度相同,在垂直光轴方向相差最大.

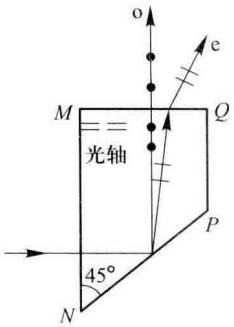
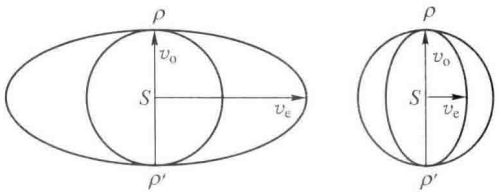


图 7.1-5　方解石中的双反射



(a)　(b)

图 7.1-6　单轴晶体中的复合波面

(a) 方解石;(b) 石英

介质的折射率为真空中的光速 c 与介质中的相速之比. 对于 o 光,$n_o=\dfrac{c}{v_o}$ 为一常值;对于 e 光,不同方向上其相速不同,折射率也就不同. 我们令 v_e 为 e 光在垂直于光轴方向的传播速度,则 $n_e=\dfrac{c}{v_e}$ 为 e 光在垂直于光轴方向的折射率,n_o 和 n_e 称为晶体的**主折射率**. e 光在光轴方向上的折射率为 n_o,在其他方向的折射率介于 n_o 和 n_e 之间. 表 7.1-A 为部分单轴晶体的主折射率. 只有在平行和垂直光轴方向传播时,e 光才满足折射定律.

表 7.1-A　单轴晶体的主折射率

晶体种类及名称		入射光波长/nm	n_o	n_e	晶体种类及名称		入射光波长/nm	n_o	n_e
正晶体	石英	589.3	1.544 24	1.553 35	负晶体	方解石	589.3	1.658 4	1.486 4
	冰	589.3	1.309	1.310		电气石	589.3	1.699	1.638
	金红石	589.3	2.616	2.903		硝酸钠	589.3	1.585 4	1.336 9
	锆石	589.3	1.923	1.968		红宝石	700.0	1.769	1.761

有一类单轴晶体中 $v_o>v_e$，$n_o<n_e$，其波面图中旋转椭球面的半长轴与球面的半径相等，椭球面被球面包住[图 7.1-6(b)]，这种晶体称为**正晶体**，如石英等. 另一类单轴晶体中 $v_o<v_e$，$n_o>n_e$，其波面图中旋转椭球面的短半轴与球面半径相等，椭球面包住球面[图 7.1-6(a)]，这种晶体称为**负晶体**，如方解石等.

7.1.4 平面波在单轴晶体中的传播——惠更斯作图法

当光束在单轴晶体内传播时，波面上的每一点都可以视为次波源，利用上述波面图和惠更斯作图法，可以确定晶体内 o 光和 e 光的传播方向. 设有一方解石晶体，其表面为一平面，光轴在入射面内且与晶体表面成一倾角，平面波斜入射于晶体表面，如图 7.1-7 所示，则入射面与晶体主截面重合于纸面. 为求 o 光和 e 光的传播方向，作图的具体步骤如下：

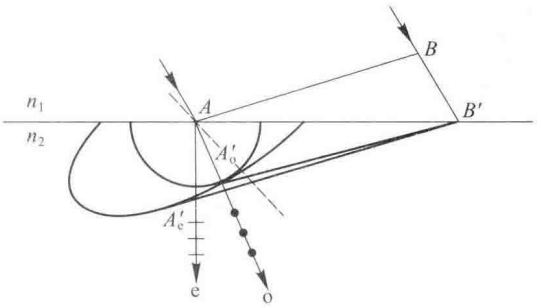


图 7.1-7 平面波在方解石中的传播

(1) 平面波斜入射到方解石晶体表面，当波面 AB 的左端 A 点传到界面后，经过时间 t 其右端 B 点传播到界面 B' 点，作出此时 A 点在晶体内形成的两个波面：一个以 $v_o t$ 为半径的半球面为 o 光次波面；另一个与球面在光轴方向相切的旋转椭球面为 e 光次波面，它与光轴垂直的那个半轴长为 $v_e t$. 在相同的时间内，A、B'之间各点在晶体中形成较小的次波面.

(2) 过 B'作球面的切面 $B'A'_o$ 和椭球面的切面 $B'A'_e$，这两个平面就是界面 AB'上各点所发出的次波波面的包络面，即为晶体中 o 光和 e 光的折射波面.

(3) 从 A 点分别连接折射波面与子波波面的切点 A'_o 与 A'_e，则连线 AA'_o 与 AA'_e 就分别表示晶体中的 o 光和 e 光的传播方向.

当入射线不在晶体主截面内，即光轴不在入射面内时，若仍以图面表示入射面，则光轴与 e 光波面的相交点便不在图面内，因此 e 光主平面也不在图面内，它不再与方解石主截面或 o 光主平面重合.

下面讨论平面波通过厚度均匀的方解石晶片传播的几种特殊情况：

(1) 平面波斜入射，光轴平行于界面并垂直于纸面. 如图 7.1-8(a)所示，按照惠更斯作图法，在 A、B 之间的各点产生的两种次波面在纸面的截线是两个同心圆. 在这种特殊情况下 o 光和 e 光都遵从折射定律，只是其折射率分别为 n_o 和 n_e. 从晶片出射的为两束传播方向相同、振动方向互相垂直的线偏振光.

(2) 平面波正入射，光轴平行于界面并垂直于纸面。如图 7.1-8(b)所示，在 A、B 之间各点产生的两种次波面与图面相截是两组同心圆，在晶体内 o 光和 e 光的传播方向相同，振动方向垂

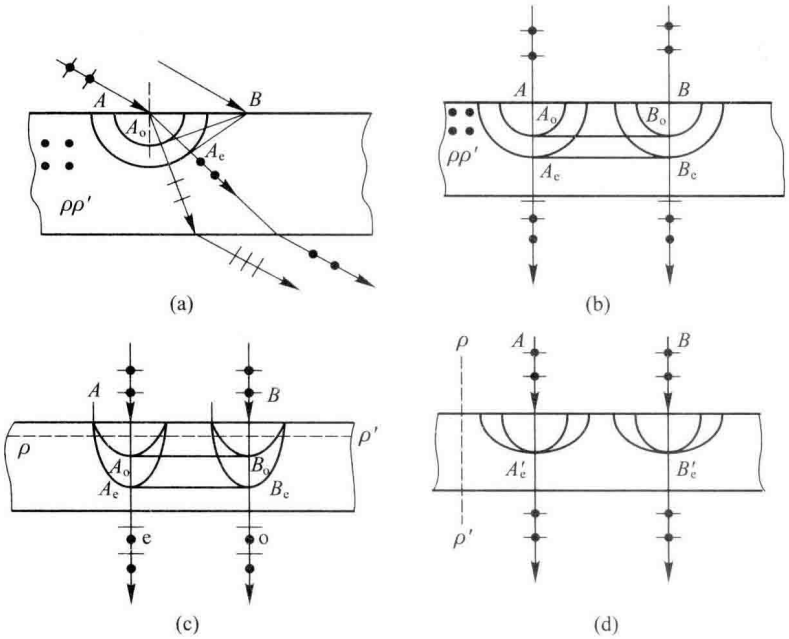


图 7.1-8　平面波在方解石晶体中传播的作图法特例

直，传播速度不同，因此，在晶体内在同一点处二者的相位延迟不相同.

(3) 平面波正入射，光轴平行于界面且在纸面内. 如图 7.1-8(c)所示，因为 o 光和 e 光的波面在光轴上相切，按照惠更斯作图法，在 A、B 之间各点发出的 o 光和 e 光的次波面均在界面上相切. 从晶片出射的两种垂直振动的光线传播方向相同，但传播速度不同，与图(b)的情况相似.

(4) 平面波正入射，光轴垂直于界面且在纸面内. 如图 7.1-8(d)所示，因为 o 光和 e 光在传播方向上速度相同，此时不产生双折射.

*7.1.5　单轴晶体中的射线速度 v_r、法线速度 v_N 和射线面、法线面

在各向同性介质中，点源的波面为球面，波的传播方向沿着波面的法线，用波矢 $\boldsymbol{k}$ 表示，它既是波面向前推移的方向，也是能流传播的方向，波速就是**相速**，即波面法线推移的速度，$v=\lambda/T=\omega/k$.

在各向异性介质中，次级扰动中心将产生复合波面. o 光的波面与在各向同性介质中一样为球面，而 e 光波面则为绕光轴旋转而得的旋转椭球面. 为了给出单轴晶体中 e 光传播速度各向异性的表示，图 7.1-9 中以负晶体为例画出点源 O 在单轴晶体中产生的 e 光的两个波面. 由于这些波面是以光轴(取为 z 轴)为旋转轴的旋转椭球面，故只需在 xz 平面内讨论即可. 光轴沿 z 轴，在 xz 平面内 e 光沿 z 轴的传播速度为 v_o，沿 x 轴的传播速度 v_e. 在 t 时刻相位为 φ 的等相面 $\Sigma(t)$ 即该椭圆绕 z 轴旋转而得的旋转椭球面，在波面上选择一点 P，令次波中心 O 与场点 P 连线的径矢为 $\boldsymbol{r}$，令波面在场点 P 的法线方向为 N. 经 Δt 后，等相面推移到 Σ'面. ζ 和 θ 分别为 $\boldsymbol{r}$ 和 N 与光轴的夹角，两者之间的夹角 $\alpha=\zeta-\theta$. 为了反映波面随时间在空间推移，选择两个特殊方向来考察波的传播速度. 定义**射线速度**(或**光线速度**)为

$$v_r=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \tag{7.1-3}$$

因为射线速度方向即光振动的传播方向，所以射线速度表示振动的传播速度，即能量传播速度.

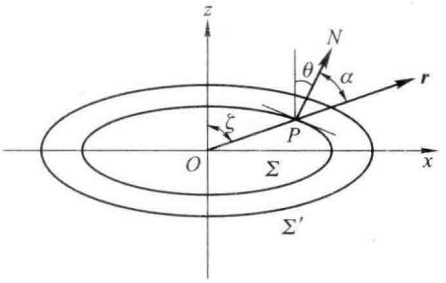


图 7.1-9 射线速度与法线速度的方向

设 r_N 为振动沿法线方向传播的距离，定义**波法线速度**（简称**法线速度**）为

$$v_N=\frac{\mathrm{d}r_N}{\mathrm{d}t} \tag{7.1-4}$$

由图 7.1-9 可知，v_N 与 v_r 的数值关系为

$$v_N=v_r\cos\alpha$$

t 时刻的 e 光波面可用椭圆方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

来表示，其中 $a=v_e t$，$b=v_o t$. 椭圆在 P 点的切线对 x 轴的斜率为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{b^2x}{a^2z}=-\frac{n_e^2}{n_o^2}\tan\zeta,\quad \tan\zeta=\frac{x}{z},$$

而法线对 z 轴的斜率 $\tan\theta=-\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，则

$$\tan\theta=\frac{n_e^2}{n_o^2}\tan\zeta \tag{7.1-5}$$

由此可见，知道法线方向或法线速度，便可由(7.1-3)、(7.1-4)和(7.1-5)式导出光线方向或光线速度，反之亦然. 例如，当平行光正入射于晶体表面，不论光轴在入射面内如何取向，由均匀性及对称分析便可以判定，波面仍然保持与表面平行的方向在晶体中传播，即波法线方向仍然沿原来的入射方向，此时 θ 角即可定出，按(7.1-5)式可算出 ζ 角，确定光线方向.

由(7.1-5)式，$\theta=0$ 时 $\zeta=0$；$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时 $\zeta=\dfrac{\pi}{2}$. 在这两个极端方向 $\alpha=0$. 可以证明当 θ 满足

$$\tan\theta=\frac{n_e}{n_o}$$

时，偏离角 α 最大，最大值 α_M 由下式给出

$$\tan\alpha_M=\frac{n_o^2-n_e^2}{2n_on_e} \tag{7.1-6}$$

可以证明，对于无色散的单轴晶体中的 e 光，其射线速度和法线速度的一般公式分别为

$$v_r^2(\zeta)=\frac{c^2}{n_o^2\cos^2\zeta+n_e^2\sin^2\beta\zeta} \tag{7.1-7}$$

$$v_N^2(\theta)=c^2\left(\frac{\cos^2\theta}{n_o^2}+\frac{\sin^2\theta}{n_e^2}\right) \tag{7.1-8}$$

(7.1-7)式表明,射线面是旋转椭球面,在 xz 平面内的截线是个椭圆,如图 7.1-10(a)所示;(7.1-8)式表明,法线面是四次曲面,为旋转卵形面,如图 7.1-10(c)所示;射线面和法线面在平行和垂直于光轴的方向相切,在这两个特殊方向 $v_r=v_N$,如图 7.1-10(d)所示. 射线面和法线面是反映射线速度和法线速度各向异性的几何面.

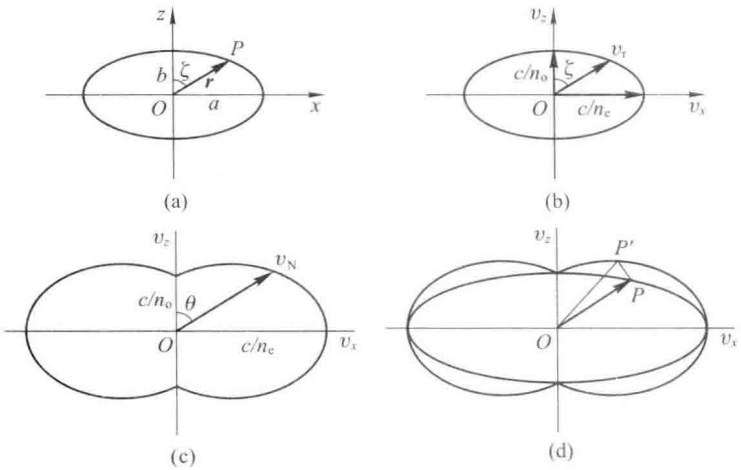


图 7.1-10　射线面与法线面

例 7.1-1　KDP(磷酸二氢钾)晶体的两个主折射率分别为 $n_o=1.512$, $n_e=1.470$. 一束单色光在空气中以 60°角入射到晶体表面. 设光轴与晶面平行,并垂直于入射面,求晶体中双折射光线 o 光和 e 光的夹角.

解　o 光和 e 光的波面与图面相截为同心圆,见图 7.1-8(a),它们均服从折射定律

$$n_o=\frac{\sin i_1}{\sin i_{2o}},\quad n_e=\frac{\sin i_1}{\sin i_{2e}}$$

$$i_{2o}=\arcsin\left(\frac{\sin 60^\circ}{1.512}\right)=34^\circ 56'$$

$$i_{2e}=\arcsin\left(\frac{\sin 60^\circ}{1.470}\right)=36^\circ 6'$$

因此晶体中两条折射光线的夹角为

$$\Delta i=i_{2e}-i_{2o}=1^\circ 10'$$

例 7.1-2　一束单色光在 KDP 晶体内沿光轴射向晶体表面,光轴在入射面内并与晶面成一定角度,该角度能使 o 光和 e 光在晶体表面产生全反射. 用作图法求双反射产生的两束反射光线的传播方向.

解　如图 7.1-11 所示,平面波 AB 在 KDP 晶体内沿光轴入射到晶体表面,该入射角能使 o 光和 e 光均发生全反射,作图步骤如下:

(1) 当波面 AB 的左端 A 点传到界面 t 时间后,其右端 B 点才传到界面 B'点. 此时 A 点产生了两个反射次波面:半径为 $v_o t$ 的半球面是 o 光次波面,半旋转椭球面是 e 光次波面,其半长轴垂直于光轴,长为 $v_e t$. 两个波面在光轴方向相切.

(2) 过 B'点作球面切平面 $A_o'B'$即为 o 光反射波面;过 B'点作椭球面的切平面 $A_e'B'$即为 e 光的反射波面.

(3) 将 A 点分别与切点 A_o' 和 A_e' 相连,则 AA_o' 为 o 光反射线,AA_e' 为 e 光反射线.

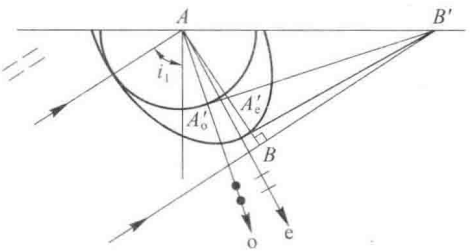


图 7.1-11

§7.2 产生线偏振光的元件

本节将讨论利用双折射和二向色性产生线偏振光的晶体光学元件.

7.2.1 偏振棱镜

利用单轴晶体中的双折射现象,将晶体制成各种棱镜,可以产生线偏振光,这类棱镜称为**偏振棱镜**. 它可分为两类:(1) 单束偏振棱镜,一束光通过这类棱镜后,因双折射而产生的振动方向垂直的两束线偏振光中,只有一束输出,另一束被反射或吸收;(2) 双束偏振棱镜,它输出两束传播方向有一定夹角的振动方向互相垂直的线偏振光,所以又称为偏振分束镜. 偏振棱镜可以获得偏振度很高的偏振光,被广泛用于高精度激光偏光技术中.

1. 双束偏振棱镜

(1) 塞那蒙特(Senarmont)棱镜 如图 7.2-1 所示,这种棱镜由两块直角方解石棱镜黏合而成,它们的光轴相互垂直,且前者的光轴与其表面 AB 垂直,后者的光轴与其表面 CD 平行.

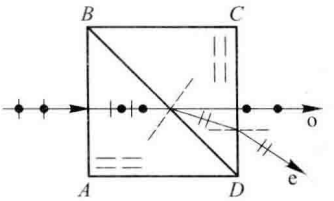


图 7.2-1 塞那蒙特棱镜

一束自然光垂直于 AB 面入射后仍沿光轴方向前进,不产生双折射. 在进入第二棱镜后,自然光分解为光矢量平行于其光轴的 e 光和垂直于其光轴的 o 光,对后者来说,其光矢量同时也垂直于第一棱镜的光轴,所以它在两个棱镜中都是 o 光,折射率均为 n_o,从第一棱镜进入第二棱镜时它不发生偏折,仍沿最初入射方向射出. 对于光矢量平行于第二棱镜光轴的 e 光,它的光矢量是垂直于第一棱镜光轴的,从第一棱镜经界面 BD 进入第二棱镜后,由 o 光变为 e 光. 因为对方解石而言,其 $n_o > n_e$,这束光就相当于从光密介质进入光疏介质,所以在界面上 e 光将远离法线折射. 经界面 CD 后,这束光的折射率从 n_e 变为 $n_{空}$,再次发生远离法线的折射,两束出射光便分得更开了,于是得到两束分开的光矢量相互垂直的线偏振光.

(2) 沃拉斯顿(Wollaston)棱镜 它由两个直角方解石棱镜组成,两个直角棱镜的光轴互相垂直,图 7.2-2(a)是它的主截面内光路图. 自然光垂直 AB 面入射后产生的 e 光和 o 光的传播速度不同,但传播方向仍不分开. 在界面 BD 上,o 光和 e 光均满足折射定律. 光线经界面 BD 后,o 光变成 e 光,e 光则变成 o 光. 前者将远离法线折射,后者将近法线折射,于是 e 光、o 光就分开传

播了. 这两束偏振光经 CD 面时,各自都发生远离法线偏折,彼此分开角度更大. 可以算出两束光出射方向的夹角为

$$\gamma = 2\arcsin\left[(n_o - n_e)\tan\alpha\right] \tag{7.2-1}$$

为了进一步增大两束出射偏振光之间的夹角,还可以在沃拉斯顿棱镜之后再加一个子棱镜,成为如图 7.2-2(b)所示的双沃拉斯顿棱镜.

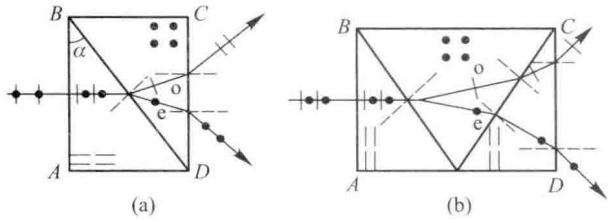


图 7.2-2

(a) 沃拉斯顿棱镜;(b) 双沃拉斯顿棱镜

2. 单束偏振棱镜

(1) 格兰-汤普森(Glam-Thompson)棱镜　格兰-汤普森棱镜由两个方解石直角子棱镜用胶黏合而成,它们的光轴互相平行且与棱镜表面 AB 平行,并都与光线传播方向垂直. 图 7.2-3 是其主截面内光路图,$n_e < n_{胶} < n_o$.

自然光进入第一棱镜后分解为 e 光和 o 光,它们的传播速度不同,但不分开. 由于棱镜黏合面 BD 的倾斜度刚好使得 o 光在界面 BD 的入射角大于它的全反射临界角($i_c = \arcsin\dfrac{n_{胶}}{n_o}$),于是 o 光将在胶层 BD 面发生全反射而被侧面吸收或从侧面射出. 而光矢量平行于光轴的线偏振光将沿入射方向射出.

如果同时接收侧面出射的一束线偏振光,便成为 e 光、o 光双输出棱镜.

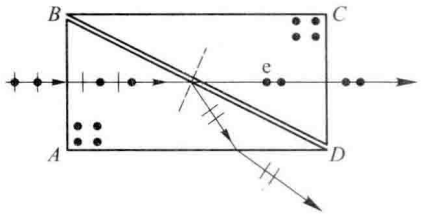


图 7.2-3　格兰-汤普森棱镜

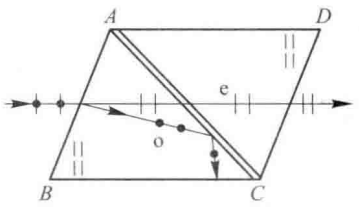


图 7.2-4　尼科耳棱镜

(2) 尼科耳(Nicol)棱镜　将一块长宽之比为 3∶1 的方解石晶体的两端磨去一部分,使其主截面内平行四边形 $ABCD$ 的 $\angle B$ 由 71°减为 68°,然后将晶体沿着垂直于 $ABCD$ 面和两端面的方向割成两块,将其剖面磨成光学平面后再用加拿大胶黏合起来. 图 7.2-4 为其主截面内光路图. 自然光进入第一棱镜后分解为 e 光和 o 光,o 光在黏合面 AC 上发生全反射后被侧壁吸收,只有光矢量平行于棱镜主截面的线偏振光从端面 CD 输出. 尼科耳棱镜在光学发展史上曾有着重要的地位,但近年来在激光技术应用和现代偏振技术中已由其他新型偏光棱镜取代.

7.2.2 利用二向色性制成的偏光元件

大多数双折射晶体对晶体中的 o 光和 e 光的吸收性质是相同的，即只具有一般的吸收性，但是某些双折射晶体和有机化合物对光矢量的振动方向互相垂直的两种偏振光具有强烈的选择吸收性，这种性质称为晶体的**二向色性**.

天然矿物电气石是一种典型的二向色性晶体，其化学成分是硅酸硼化物. 它对入射光中光矢量垂直于光轴的分量强烈吸收，吸收量与晶体的厚度成正比，用一块 1 mm 厚的电气石晶片已能将 o 光几乎全部吸收，而对光矢量平行于光轴的分量只吸收某些波长成分. 因此当自然光白光入射到图 7.2-5 所示的电气石片上，透射光为沿光轴方向振动的线偏振光，并呈绿色. 若将电气石晶体沿垂直光轴方向切割，入射光的光矢量的振动方向均与光轴垂直，无光透射，电气石片呈黑色，如图 7.2-5(b)所示.

利用电气石这类有二向色性的晶体，可制成偏振器. 但因它略带颜色，且大小有限，所以用得不多. 目前使用较多的偏振元件是人造偏振片，它可用不同材料制成，其中 H 偏振片是把一片聚乙烯醇薄膜加热后，沿一个方向拉伸 3~4 倍，再放入碘溶液. 经浸泡后碘附着在直线形长链聚合分子上，形成一条碘链，碘中所含的传导电子可沿着链运动. 自然光射入后，光矢量平行于链的分量对电子做功而被强烈吸收，只有垂直于薄膜拉伸方向的分量可以透过薄膜，即透振方向垂直于拉伸方向，这种偏振片并不含有二向色性晶体，而是其分子排列类似线栅，使聚乙烯醇膜具有二向色性. 此外还有 K 偏振片和 J 偏振片等.

设光强为 I_0 的自然光入射到偏振片上，因为光矢量中两个正交的分量成分被吸收了一个，所以透射光强为 $I_0/2$. 如图 7.2-6，两个正交偏振片都成灰色，因为它吸收了一半的入射光，正交部分无光透过，呈黑色(见彩图 9). 薄膜偏振片轻便，成本低、可大量生产，有接近 180°的孔径，可做成较大的面积；其缺点是透射光强较弱，其偏振度不如偏振棱镜的出射光高.

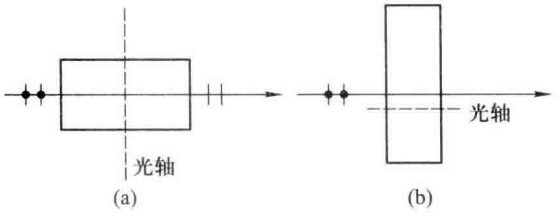


图 7.2-5 二向色性晶体

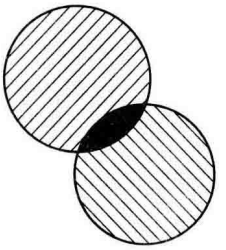


图 7.2-6 正交偏振片

例 7.2-1 如图 7.2-7，用正单轴晶体(如石英)制成塞那蒙特棱镜. 每块直角棱镜的顶角 α 都为 20°，光束正入射. 已知 $n_o=1.544$，$n_e=1.553$，求经该棱镜出射的两束线偏振光的分束角.

解 在第一棱镜中，光线沿光轴传播，不发生双折射. 对于垂直图面的振动，在第二棱镜中为 o 光，在第一棱镜中也是 o 光，其折射率 n_o 不变，所以它仍沿入射方向射出. 第二棱镜中的 e 光在第一棱镜中仍为 o 光，从图可见，在 BD 界面，它满足折射定律. 对于石英，$n_o<n_e$，所以经界面 BD 后产生近法线折射，其折射角为 i_e'，可由折射定律 $n_o\sin\alpha=n_e\sin i_e'$ 得出

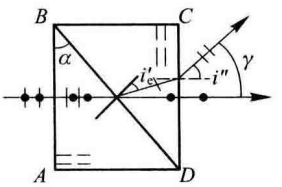


图 7.2-7 塞那蒙特棱镜

$$i'_e=\arcsin\left(\frac{n_o}{n_e}\sin\alpha\right)=\arcsin\left(\frac{1.544}{1.553}\sin 20°\right)=19.87°$$

第二棱镜中的 e 光经界面 CD 后出射角为 i''并满足折射定律，有 $n_e\sin(\alpha-i'_e)=n_{空}\sin i''$，则

$$i''=\arcsin[n_e\sin(\alpha-i'_e)]=\arcsin[1.553\sin(20°-19.87°)]=0.2°=12'$$

即分束角 $\gamma=i''=12'$.

例 7.2-2　用 KDP 晶体制成顶角为 60°的棱镜，光轴平行于折射棱，如图 7.2-8 所示. 对于$\lambda=546.0$ nm 的汞绿光，晶体的主折射率为 $n_o=1.512$，$n_e=1.470$. 若入射光以最小偏向角的方向在棱镜中折射，用焦距为 0.1 m 的透镜对棱镜射出的 e 光和 o 光聚焦，在谱面形成的谱线的间距是多少？

解　因为 KDP 晶体的光轴平行于折射棱，亦即光轴垂直于入射面，此时 e 光和 o 光均满足折射定律. 对 e 光和 o 光分别使用最小偏向角公式(1.6-5)式得

$$n_o=\frac{\sin\frac{(\alpha+\delta_o)}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=1.512,\quad n_e=\frac{\sin\frac{(\alpha+\delta_e)}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=1.470$$

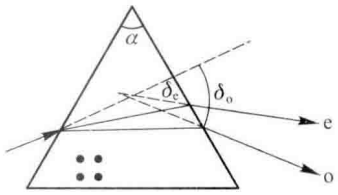


图 7.2-8　KDP 晶体棱镜

将 $\alpha=60°$代入以上二式得

$$\delta_o=38.2°,\quad \delta_e=34.6°$$

所以　$\Delta\delta=\delta_o-\delta_e=38.2°-34.6°=3.6°=0.062\ 8$ rad

因 $f'=100$ mm，所以谱面上 e 光和 o 光两谱线间距为

$$\Delta l=f'\Delta\delta=6.28\ \text{mm}$$

§7.3　相位延迟器

利用晶体中 n_o 和 n_e 的差别，使得 e 光和 o 光经过相同的路程后产生不同的相位延迟，从而可改变入射偏振光的偏振态，这种器件称为**相位延迟器**，它包括产生一定相位延迟的波晶片和连续变化相位延迟的补偿器.

7.3.1　波晶片

1. 波片的相位延迟

波晶片是将单轴晶体沿其光轴方向切制而成的厚度均匀的平行平面薄片. 如图 7.3-1 所示，一束波长为 λ 的平行线偏振光正入射于波晶片 C，在波晶片 C 内生成的 e 光和 o 光的传播方向相同，但传播速度不同，其主折射率分别为 n_o 和 n_e. 在入射面 a 处，e 光和 o 光振动的相位相同，通过厚度为 d 的晶片后，它们的相位延迟不一样，在出射面 b 处它们相对于 a 处的相位延迟分别为

$$\varphi_o=-\frac{2\pi}{\lambda}n_o d,\quad \varphi_e=-\frac{2\pi}{\lambda}n_e d \tag{7.3-1}$$

则在出射面处，e 光的相位较 o 光的相位多延迟了 $\delta=\varphi_e-\varphi_o$，即它们相应的相位差为

$$\delta=\varphi_e-\varphi_o=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d \tag{7.3-2}$$

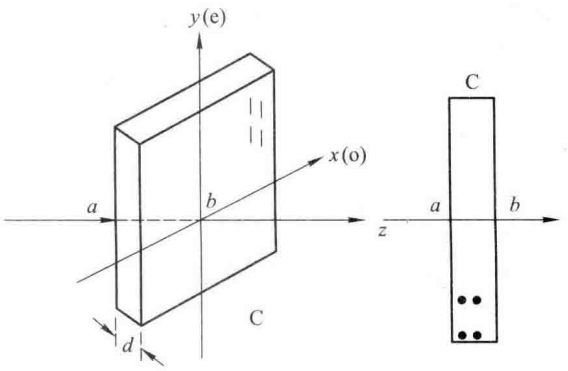


图 7.3-1 波晶片

对于负晶体，$v_e>v_o$，$n_o>n_e$，在出射面处 o 光相位落后较多，e 光相位超前；对于正晶体 $v_o>v_e$，$n_e>n_o$，在出射面处 e 光相位落后较多，o 光相位超前. 我们把传播较快的那束光的光矢量振动方向称为**快轴**，传播较慢的那束光的光矢量振动方向称为**慢轴**. 对于负晶体，光轴为快轴. 对于正晶体，光轴为慢轴.

我们在 §3.4 中已经指出，由(3.4-6)式所示的椭圆轨迹方程中的 δ 即可判断椭圆(圆)偏振光的光矢量旋转方向以及退化成的线偏振光的光矢量所在的象限. 应当注意，该处 δ 是指 y 方向超前于 x 方向的振动相位. 我们在晶体表面建立 $Oxyz$ 坐标系，为了使用 §3.4 所得出的结论，对于负晶体，应将光轴(即 e 轴)取作 y 轴；对于正晶体，则应将 e 轴取为 x 轴.

(7.3-2)式表明，随着厚度 d 的增加，从入射面 a 点开始，e 光和 o 光振动的相位差 δ 连续增加，合光场沿 z 轴方向是一系列椭圆偏振光，其椭圆的空间取向逐点连续变化，它们形成如 §3.4 中的例 3.4-1 所述的偏振梯度场.

2. 几种常见的波晶片

基于波晶片内偏振梯度场中椭圆空间取向连续变化并周期性重复，在特殊条件下退化为圆偏振或线偏振的特性，选取波晶片的特殊厚度，可获得所需的各种偏振态的出射光. 以下介绍最常用的几种波晶片.

(1) 全波片(λ 片) 对于波长为 λ 的单色光选择波晶片厚度，使 e 光和 o 光的光程差为波长的整数倍，即

$$\Delta=(n_o-n_e)d=K\lambda,\quad K=0,1,2,3,\cdots$$

相应的相位差为

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d=2K\pi,\quad K=0,1,2,3,\cdots \tag{7.3-3}$$

这样的波片称为全波片. 一束偏振光经过全波片后，其偏振状态不发生改变.

(2) 二分之一波片($\lambda/2$ 片) 对于波长为 λ 的单色光选择波晶片厚度，使 e 光和 o 光的光程差为半波长的奇数倍，即

$$\Delta=(n_o-n_e)d=(2K+1)\frac{\lambda}{2},\quad K=0,1,2,3,\cdots$$

相应的相位差为

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d=(2K+1)\pi,\quad K=0,1,2,3,\cdots \tag{7.3-4}$$

这样的波晶片称为 $\lambda/2$ 片，它使 e 光和 o 光之间产生的相位差为 π 的奇数倍. 一束线偏振光经 $\lambda/2$ 偏振片后，仍为线偏振光. 若入射光振动面与晶体主截面的夹角为 θ，则出射光的振动面相对于入射光振动面转过 2θ 角，如图 7.3-2 所示.

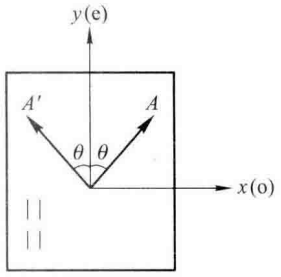


图 7.3-2　$\lambda/2$ 片使线偏振光振动面转动 2θ

(3) 四分之一波片($\lambda/4$ 片)　对波长为 λ 的单色光，选择波片厚度，使得 e 光和 o 光的光程差为

$$\Delta=(n_o-n_e)d=(2K+1)\frac{\lambda}{4},\quad K=0,1,2,3,\cdots$$

相应的相位差为

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d=(2K+1)\frac{\pi}{2},\quad K=0,1,2,3,\cdots \tag{7.3-5}$$

由于相位值相差为 2π 整数倍的两点是同相位的，$\lambda/4$ 片只能使 e 光和 o 光产生 $\pm\pi/2$ 的相位差. 常见的 $\lambda/4$ 片的最小厚度为

$$d=\frac{\lambda}{4|n_o-n_e|} \tag{7.3-6}$$

当入射光为线偏振光，经 $\lambda/4$ 片后出射光一般为正椭圆偏振光，其长轴或短轴与晶片的光轴重合. 当入射光为椭圆偏振光，椭圆的长轴或短轴正好与晶片的光轴重合时，出射光为线偏振光.

由于相位差与波长相关，各种波晶片是对特定波长而言的. 例如钠黄光的 $\lambda/4$ 片使钠黄光的 e 光和 o 光产生 $\pi/2$ 的相位延迟. 另外 (n_o-n_e) 在整个可见光谱区域变化不大，故可近似地将它视为常量.

对于非偏振光，任何波晶片都不能将它转换成偏振光.

7.3.2　补偿器

补偿器是可以连续改变 o、e 光相位差的装置. 它可以看作是一种有效厚度可变的波晶片. 最简单的是**巴比涅补偿器**. 如图 7.3-3，它由两个方解石或石英劈组成，两个劈的光轴相互垂直. 当线偏振光射入补偿器后，产生传播方向相同，振动方向垂直的 e 光和 o 光. 在上劈中的 o 光(e 光)，进入下劈就成了 e 光(o 光)，与沃拉斯顿棱镜不同的是，劈尖 α 角很小($2°\sim3°$)，所以在两个劈的界面上产生的 e 光和 o 光的偏折角可忽略.

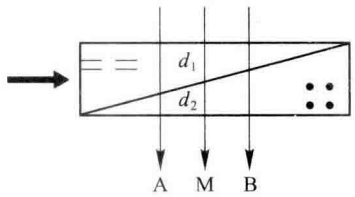


图 7.3-3　巴比涅补偿器

在入射光通过两劈厚度相等处($d_1=d_2$，如光线 M)，从补偿器出射的振动方向垂直的两束光之间相位差为零；在入射光通过两劈的厚度不相等处($d_1>d_2$，如光线 A，$d_1<d_2$，如光线 B)，从补偿器出射的振动方向垂直的两束光之间产生了相位差. 因为上劈中的 e 光在下劈中变成了 o 光，它通过上下劈的总光程为 $(n_e d_1+n_o d_2)$. 另一方面，上劈中的 o 光在下劈中变成了 e 光，通过上下劈的总光程为 $(n_o d_1+n_e d_2)$. 于是从补偿器出来时，这两束振动方向垂

直的线偏振光之间的相位差为

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}[(n_e d_1+n_o d_2)-(n_o d_1+n_e d_2)]$$

$$=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)(d_2-d_1) \tag{7.3-7}$$

当入射光从补偿器上方不同位置射入时，相应的 d_2-d_1 值不同，δ 值也就不同；或当上劈沿图 7.3-3 中的箭头移动时，对于同一条入射线，d_2-d_1 的值也随上劈的移动而变化，故 δ 值随之变化. 所以调整 d_2-d_1 值，便可得到任意 δ 值.

巴比涅补偿器的缺点是必须使用极细的入射光束，因为宽光束的不同部分会产生不同的相位差 δ. 采用图 7.3-4 所示的**索累补偿器**可弥补这个不足. 它由两个石英直角劈和一个石英平行平面薄板组成，两个石英劈的光轴平行且在图面内，石英板的光轴垂直于图面，微动螺旋可使上劈平行移动. 当波长为 λ 的单色光正入射到补偿器上表面时，振动方向在图面内的光在石英劈中为 e 光，进入石英板后变成 o 光. 振动方向与图面垂直的光则相反，在石英劈中为 o 光，在石英板中成为 e 光，且它们的传播方向均与入射光方向相同. 设入射光通过两石英劈和石英板的厚度分别为 d_1 和 d_2，补偿器对于这两种线偏振光产生的光程差分别为

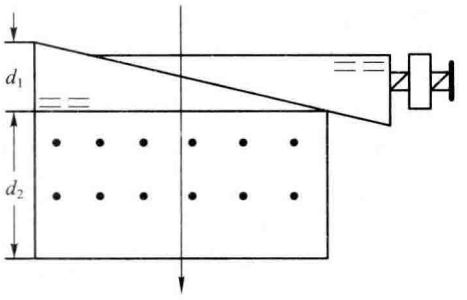


图 7.3-4 索累补偿器

$$\Delta_{/\!/}=n_e d_1+n_o d_2,\quad \Delta_{\perp}=n_o d_1+n_e d_2$$

由补偿器所引入的这两种光之间的相位差则为

$$\delta_c=\frac{2\pi}{\lambda}[(n_e d_1+n_o d_2)-(n_o d_1+n_e d_2)]$$

$$=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)(d_2-d_1) \tag{7.3-8}$$

通过改变 d_1，可任意调整补偿器的有效厚度 (d_2-d_1)，从而连续改变 δ_c 值.

例 7.3-1 如图 7.3-5 所示，P_1、P_2 为透振方向平行的偏振片，K 是主折射率为 n_o 和 n_e 的波晶片，其光轴平行于折射表面. 若波长为 λ 的入射光经该系统后被消光，求此晶片的光轴方向和厚度.

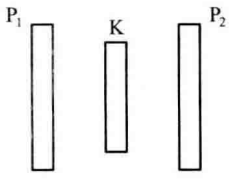


图 7.3-5

解 入射光经 P_1 变为线偏振光，经 K 后能被 P_2 消光，说明其振动面转过 90°. 因 $\lambda/2$ 片可使线偏振光振动面转过 2θ，故晶片为 $\lambda/2$ 片，其光轴与 P_1 成 $\theta=45°$，最小厚度为 $d=\dfrac{\lambda}{2(n_o-n_e)}$.

例 7.3-2 试问对于波长为 $\lambda=404.6$ nm 的方解石 $\lambda/4$ 片，相对于波长为 $\lambda=706.5$ nm 的光为何种晶片？若波长 $\lambda=706.5$ nm 的左旋椭圆偏振光正入射到该晶片上，试求出射光的偏振态. 已知方解石对 $\lambda=404.6$ nm 光的主折射率为 $n_o=1.681\ 3$，$n_e=1.496\ 9$；对 $\lambda=706.5$ nm 光的主折射率为 $n_o'=1.652\ 1$，$n_e'=1.483\ 6$.

解 对 $\lambda_1=404.6$ nm 的 $\lambda/4$ 片的厚度

$$d=\frac{\lambda_1}{4(n_o-n_e)}=\frac{\delta_1\lambda_1}{2\pi(n_o-n_e)}$$

其中

$$\delta_1=\frac{2\pi d}{\lambda_1}(n_o-n_e)=\frac{\pi}{2}$$

波长为 $\lambda_2=706.5$ nm 的单色光通过该晶片产生的相位差

$$\delta_2=\frac{2\pi d}{\lambda_2}(n_o'-n_e')=\frac{2\pi}{\lambda_2}\frac{\delta_1\lambda_1}{2\pi(n_o-n_e)}(n_o'-n_e')$$

$$=\frac{\delta_1\lambda_1}{\lambda_2}\frac{(n_o'-n_e')}{(n_o-n_e)}=\frac{4\ 046\times\frac{\pi}{2}(1.652\ 1-1.483\ 6)}{7\ 065\times(1.681\ 3-1.496\ 9)}=0.26\ \pi\approx\frac{\pi}{4}$$

即对 $\lambda_2=706.5$ nm 的光，该晶片为 $\lambda/8$ 片. 入射左旋正椭圆偏振光，其分解的两垂直振动相位差 $\delta_0=-\frac{\pi}{2}$，经该晶片出射的 e 光和 o 光的相位差为

$$\delta'=\delta_0+\delta_2=\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$$

故出射的光为主轴之一位于Ⅰ、Ⅲ象限的左旋椭圆偏振光.

§7.4　偏振光通过波晶片后偏振态的变化

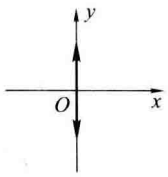
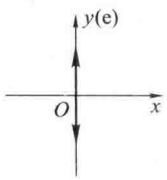
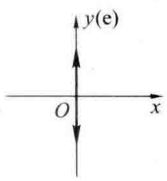
为了鉴别一束光属于线偏振光、圆偏振光、椭圆偏振光、部分偏振光和自然光等五种光中的哪一种，我们需对它们通过 $\lambda/4$、$\lambda/2$ 片和检偏器后的特性进行分析，从而确定鉴别它们的方法.

7.4.1　偏振光通过 λ/4、λ/2 片后的偏振态的变化

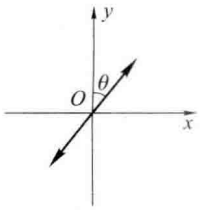
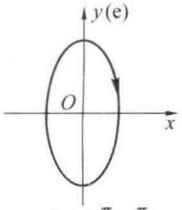
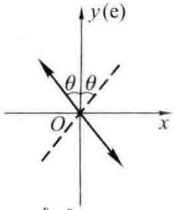
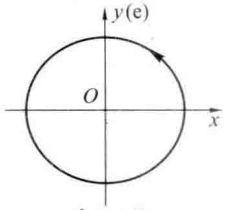
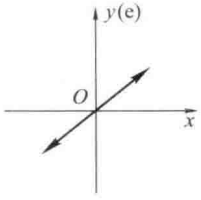
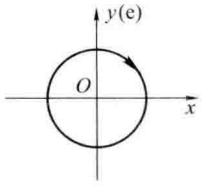
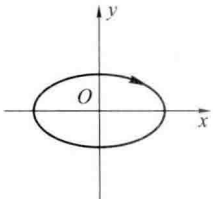
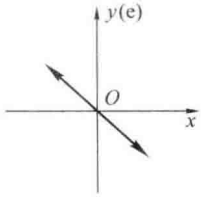
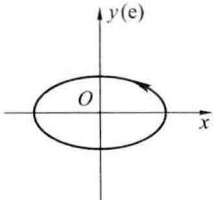
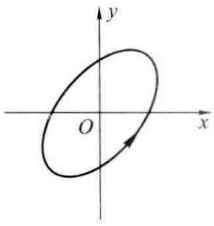
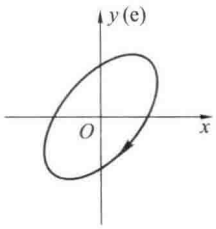
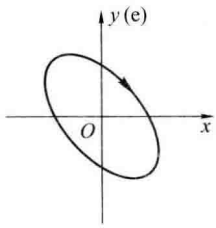
设偏振光射入晶体表面时分解成的 e 光和 o 光之间具有初相位差 δ_0，经过波晶片后引起的相位差为 δ_c，则出射光中两垂直振动相位差为 $\delta=\delta_0+\delta_c$.

为简单起见，将几种偏振光经过方解石制成的 $\lambda/4$ 片、$\lambda/2$ 片后偏振态的变化情况列在表 7.4-A 中.

表 7.4-A　偏振光经 λ/4 片、λ/2 片后偏振态的变化

入射光的偏振态	经 λ/4 片后	经 λ/2 片后
		

续表

入射光的偏振态	经 $\lambda/4$ 片后	经 $\lambda/2$ 片后
 $\delta_0=0$	 $\delta=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$	 $\delta=0+\pi=\pi$
 $\delta_0=-\pi/2$	 $\delta_0=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=0$	 $\delta=-\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{\pi}{2}$
 $\delta_0=\frac{\pi}{2}$	 $\delta=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$	 $\delta=\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2}$
 $\frac{3\pi}{2}<\delta_0<2\pi$	 $0<\delta=\delta_0+\delta_c<\frac{\pi}{2}$	 $\frac{\pi}{2}<\delta<\pi$

7.4.2 对圆偏振光与自然光、椭圆偏振光与部分偏振光的鉴别

为了将圆偏振光与自然光以及椭圆偏振光与部分偏振光区别开来，可用一个 $\lambda/4$ 片和一个偏振片（检偏器）构成**圆检偏器**，如图 7.4-1 所示. 鉴别圆偏振光时，$\lambda/4$ 片的光轴方向可任意放置. 鉴别椭圆偏振光时，$\lambda/4$ 片的光轴需与椭圆的一主轴重合.

这样放置 $\lambda/4$ 片后，自然光通过 $\lambda/4$ 片后仍是自然光. 圆偏振光或椭圆偏振光都将成为线

偏振光，将 $\lambda/4$ 片后面放置的检偏器旋转一周将看到出射光强有强弱变化以及消光的现象. 而自然光或部分偏振光经 $\lambda/4$ 片后状态不变，将其后的检偏片旋转一周，不会出现消光现象，因此圆偏振光和自然光以及椭圆偏振光与部分偏振光可以区分了.

利用图 7.4-1 的装置，还可进一步对椭圆(圆)偏振光的光矢量旋转方向进行鉴别. 若入射是右旋椭圆(圆)偏振光，在以波片光轴为 y 轴的坐标系中，两垂直振动之间有初相位差 $\delta_0=\pi/2$，经方解石制成的 $\lambda/4$ 片后，它们的相位差为 $\delta=\pi/2+\pi/2=\pi$. 故出射光为在Ⅱ、Ⅳ象限的线偏振光. 旋转 $\lambda/4$ 片后的检偏器，相应的出射光强分布图为Ⅱ、Ⅳ象限的“8”字. 同理，左旋椭圆(圆)偏振光($\delta_0=-\pi/2$)经图 7.4-1 的装置后，出射光的 y 方向和 x 方向振动的相位差为零，光强分布图为Ⅰ、Ⅲ象限的“8”字.

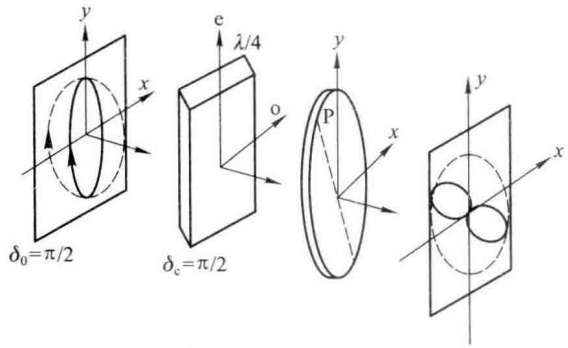


图 7.4-1　椭圆(圆)偏振光的鉴别与光矢量旋转方向的判别

因此测出椭圆(圆)偏振光经上述装置的光强分布，根据“8”字的取向，即可鉴别出光矢量的旋转方向.

7.4.3　圆起偏器

如果将圆检偏器的原输出端作为输入端，将其原输入端作为输出端来使用，圆检偏器即成为**圆起偏器**. 一束单色自然光通过偏振片 P 后成为线偏振光，设线偏振光的光振动振幅为 A，$\lambda/4$ 片的光轴方向与偏振片透振方向的夹角为 θ，如图 7.4-2 所示. 线偏振光在 $\lambda/4$ 片的入射面内分解成振幅分别为 $A_e=A\cos\theta$，$A_o=A\sin\theta$ 的 e 光和 o 光，它们在入射面上相位差为零，而在 $\lambda/4$ 片的出射面上相位差为 $\delta=(2K+1)\pi/2$. 出射光是一椭圆偏振光，当 $\theta=45°$ 时为圆偏振光.

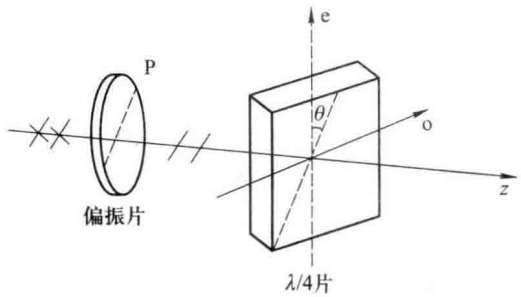


图 7.4-2　圆起偏器原理

根据 $\lambda/4$ 片的晶体快慢轴位置，$\delta=\pm\pi/2$，可如前分析出射的两垂直偏振光束的相位超前或落后，从而判断获得的是左旋还是右旋椭圆偏振光.

7.4.4 五种光的检验步骤

在上面的分析中，分别讨论了光通过各种偏振片以及波晶片后的变化，在此基础上总结出偏振光的检验方法，如表 7.4-B 所示.

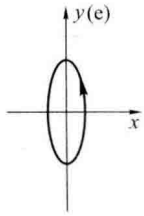
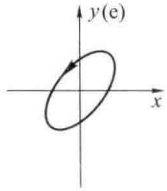
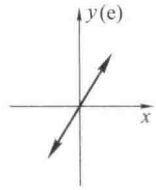
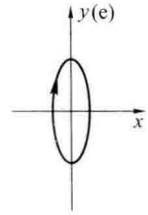
表 7.4-B 五种偏振光的鉴别

步骤 1	透射光强	结论 1	步骤 2	透射光强	结论 2	步骤 3	透射光强	结论 3
使待测平行光垂直入射检偏器 P，将 P 旋转一周	两次极大两次为零	线偏振光						
	不变	自然光或圆偏振光	在 P 前插入 $\lambda/4$ 片，再将 P 旋转一周	仍不变	自然光			
				两次极大两次为零	圆偏振光	在 P 后置辐射光度计，再将 P 旋转一周	$\lambda/4$ 片快轴为 y 轴的坐标系中为 Ⅱ、Ⅳ 象限中的“8”字	右旋圆偏振光
							$\lambda/4$ 片快轴为 y 轴的坐标系中为 Ⅰ、Ⅲ 象限中的“8”字	左旋圆偏振光
	两次极大两次极小	部分线偏振光或椭圆偏振光	在 P 前插入 $\lambda/4$ 片，使光轴方向与步骤 1 中的光强极大方向重合，再将 P 旋转一周	两次极大两次极小，极大方向与步骤 1 中的极大方向重合	部分线偏振光			
				两次极大两次为零	椭圆偏振光	在 P 后置辐射光度计，再将 P 旋转一周	$\lambda/4$ 片快轴为 y 轴的坐标系中为 Ⅱ、Ⅳ 象限中的“8”字	右旋椭圆偏振光
							$\lambda/4$ 片快轴为 y 轴的坐标系中为 Ⅰ、Ⅲ 象限中的“8”字	左旋椭圆偏振光

例 7.4-1 一束主轴之一在波晶片光轴方向的左旋椭圆偏振光，分别垂直入射到 $\lambda/8$ 片，$\lambda/4$ 片，$\lambda/2$ 片上，试分别画出各出射光的偏振态.

解 入射光及各出射光的偏振态如表 7.4-C 所示.

表 7.4-C

入射光偏振态	出射光偏振态		
	经 $\lambda/8$ 片	经 $\lambda/4$ 片	经 $\lambda/2$ 片
			
$\delta_0=\frac{3}{2}\pi$	$\delta=\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{7}{4}\pi$	$\delta=\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{2}=2\pi$	$\delta=2\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{5}{2}\pi$

例 7.4-2　单色平行自然光相继垂直照射到一透明物 P 及一 $\lambda/4$ 片 Q 上，如图 7.4-3 所示，P 和 Q 无论怎样绕 OO' 轴旋转，总可在偏振片 N 后得到消光位置. 问：

(1) 入射到 Q 上的是什么光？

(2) P 是什么偏振器件？

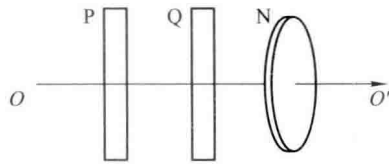


图 7.4-3

解　(1) P、Q 绕 OO' 旋转时可得到消光位置，说明入射到 N 上，即 $\lambda/4$ 片 Q 出射的是线偏振光，则入射到 Q 上的光可能是圆偏振光或主轴之一在 $\lambda/4$ 片光轴上的椭圆偏振光. 然而 P、Q 无论怎样旋转总可以在 N 后得到消光位置，故入射到 Q 上的只能是圆偏振光.

(2) 能将自然光转变为圆偏振光的装置是由偏振片与 $\lambda/4$ 片构成的圆偏振器.

例 7.4-3　调节单色扩展光源照明下的迈克耳孙干涉仪，以获得最大光强为 I_0、可见度为 1.0 的等倾干涉圆条纹. 将一块 $\lambda/4$ 片插入干涉仪的一个光臂中，试问视场中的最大光强和可见度如何变化？若插入 $\lambda/2$ 片情况如何？

解　自然光可视为沿波晶片光轴方向振动的 e 光和垂直于光轴方向振动的 o 光的非相干叠加. 在未插入波晶片前，相当于这两个线偏振光的等倾条纹完全重合，最大光强为 I_0，可见度为 1.

在干涉仪的一光臂中插入 $\lambda/4$ 片后，o 光增加的光程为 $2(n_o-1)d$，o 光条纹将移动一定距离；e 光增加的光程为 $2(n_e-1)d$，e 光条纹也将移动一定距离. o 光和 e 光之间的光程差为 $2|n_o-n_e|d=2\cdot\lambda/4=\lambda/2$，所以 o 光和 e 光两套条纹将错开半个条纹间距，即 e 光亮纹刚好移到 o 光的暗纹上，结果整个视场的条纹消失，呈现一片均匀亮度，条纹可见度为零. 而视场的光强就是 o 光和 e 光亮纹的亮度，为未插入波片时最大光强 I_0 的一半.

若插入 $\lambda/2$ 片，则 o 光和 e 光之间的光程差为 $2|n_o-n_e|d=2\cdot\lambda/2=\lambda$，两套圆条纹刚好错开一个条纹间距，若忽略其微小位移，可认为两套条纹仍然重合，结果整个视场光强分布不变，条纹可见度仍为 1.

§7.5　偏振光的干涉

在 §4.2 中已经指出，两束光产生干涉的三个必要条件是：它们的光矢量具有平行的振动分量，频率相同，相位差恒定. 然而一束线偏振光经过晶片 C 后分解成的 e 光和 o 光的振动方向互

相垂直，但频率相同，相位差恒定，这两束光一般合成为一束椭圆偏振光. 如果我们在晶片后放置一个偏振片，就可以使 e 光和 o 光在其透振方向产生分量，于是产生振动方向相同的两束偏振光，从而满足干涉的三个必要条件，由此产生的干涉现象称为**偏振光的干涉**. 这种将一束线偏振光分解为振动面相互垂直的两束光，然后通过一定装置，产生振动方向相平行的分量，从而获得相干光的方法称为**分振动面法**. 偏振光的干涉分为平行偏振光的干涉和会聚偏振光的干涉两种.

7.5.1 平行偏振光的干涉

1. 干涉装置及干涉光强分布式的计算

(1) 平行偏振光干涉装置

图 7.5-1 中，一束平行自然光入射到偏振片 P_1 上，经偏振片 P_1 后变成了线偏振光(光矢量用 $\boldsymbol{E}$ 表示). 这就保证了进入波晶片后分解的 e 光(光矢量由 $\boldsymbol{E}_e$ 表示)和 o 光(光矢量由 $\boldsymbol{E}_o$ 表示)在传播方向的任一点具有固定的相位关系. 在此波晶片的作用有两个：一是分振动面，将线偏振光分为振动面互相垂直、振幅不同的 e 光和 o 光；二是产生固定的相位差，使 e 光和 o 光从厚度为 d 的波晶片 C 出射时具有相位差 $\delta_c=\dfrac{2\pi(n_o-n_e)d}{\lambda}$；偏振片 P_2 的作用是从振动面互相垂直的两束光中分别取出振动方向与其透振方向相同的分量 $\boldsymbol{E}_{e2}$ 和 $\boldsymbol{E}_{o2}$，从而获得两束相干光，它们叠加时将发生干涉.

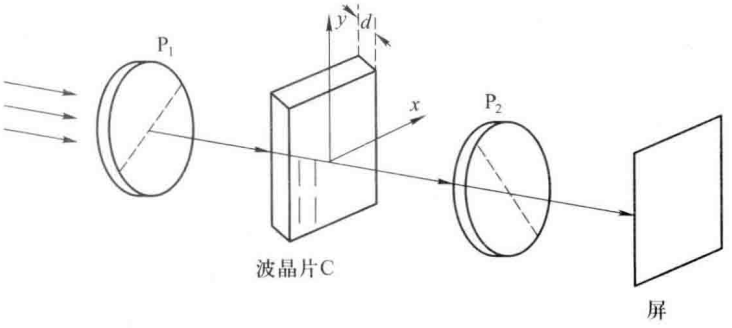


图 7.5-1 平行偏振光干涉装置

(2) 干涉光强分布公式

在第四章已指出，两光束干涉光强公式为

$$I=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\delta \tag{7.5-1}$$

式中 A_1、A_2 分别为两束光的振幅，δ 为它们的相位差. 下面对上式中各量分别进行计算.

如图 7.5-2(a)，在与波晶片表面平行的平面上建立平面直角坐标系 Oxy(y 轴沿光轴)，P_1、P_2 分别表示两个偏振片的透振方向，它们与 Oy 夹角分别为 θ 和 φ. 设经 P_1 出射的线偏振光振幅为 A，则在波晶片中它所分解的 e 光和 o 光振幅分别为

$$A_e=A\cos\theta,\quad A_o=A\sin\theta$$

振幅为 A_e 和 A_o 的 e 光和 o 光在偏振片 P_2 的透振方向上的分量各为

$$\left.\begin{aligned}A_1=A_{e2}=A_e\cos\varphi=A\cos\theta\cos\varphi\\A_2=A_{o2}=A_o\sin\varphi=A\sin\theta\sin\varphi\end{aligned}\right\} \tag{7.5-2}$$

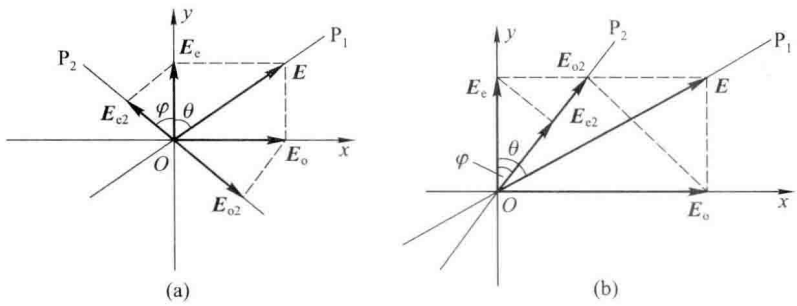


图 7.5-2

入射到波晶片前表面线偏振光的 o、e 分量的初始相位相同，则从 P_2 出射时两个分振动的相位差决定于两个因素：

① e 光和 o 光经厚度为 d 的波晶片后引起的相位差

$$\delta_c=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d$$

② 入射线偏振光经波晶片和偏振片两次分解投影而引起的附加相位差 δ'. 若波晶片光轴在两偏振片透振方向 P_1、P_2 之间[图 7.5-2(a)]，$\boldsymbol{E}$ 振动矢量经两次投影后得到的 $\boldsymbol{E}_{e2}$ 和 $\boldsymbol{E}_{o2}$ 方向相反，表示它们之间有附加相位差 $\delta'=\pi$；若波晶片光轴位于两偏振片透振方向 P_1、P_2 之外[图 7.5-2(b)]，则 $\boldsymbol{E}$ 振动矢量经两次投影后得到的 $\boldsymbol{E}_{e2}$ 和 $\boldsymbol{E}_{o2}$ 方向相同，没有附加相位差，$\delta'=0$.

因此两个分振动 $\boldsymbol{E}_{e2}$、$\boldsymbol{E}_{o2}$ 之间的总相位差

$$\delta=\delta_c+\delta'=\delta_c+\begin{cases}\pi & \text{（波晶片光轴位于 } P_1\text{、}P_2\text{ 之间）}\\ 0 & \text{（波晶片光轴位于 } P_1\text{、}P_2\text{ 之外）}\end{cases}\tag{7.5-3}$$

将(7.5-2)式代入(7.5-1)式，则得干涉光强分布公式

$$I=A^2(\cos^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\theta\sin^2\varphi+2\cos\theta\cos\varphi\sin\theta\sin\varphi\cos\delta)\tag{7.5-4}$$

由上式可见，平行偏振光干涉的光强分布与两个偏振片的相对方位(θ,φ)及相位差 δ 有关. 当$\delta=\pi$[或 $\delta=(2K+1)\pi$，$K=0,1,2,\cdots$]时，干涉相消，干涉光强为 I_m. 一般情况下 $I_m\neq0$，要使 $I_m=0$，须使 $A_{e2}=A_{o2}$，即 $\theta=\varphi=45°$.

2. 讨论几种特殊情况

(1) $P_1\perp P_2$，$\theta=\varphi=45°$

两偏振片透振方向垂直，简称为两偏振片正交. 波晶片光轴 Oy 位于 P_1、P_2 之间并与它们分别成 45°角，$A_{e2}=A_{o2}$. 由(7.5-3)式可知，$\delta=\delta_c+\pi$，由(7.5-4)式经化简得干涉光强

$$I_\perp=\frac{A^2}{2}(1+\cos\delta)=\frac{A^2}{2}(1-\cos\delta_c)\tag{7.5-5}$$

(2) $P_1/\!/P_2$，$\theta=\varphi=45°$

偏振片 P_1、P_2 透振方向平行，简称两偏振片平行. 波晶片光轴 Oy 位于 P_1、P_2 之外，并与它们呈 45°角. 同样由(7.5-2)至(7.5-4)式分别可得 $A_{e2}=A_{o2}$，$\delta=\delta_c$ 及干涉光强

$$I_{/\!/}=\frac{A^2}{2}(1+\cos\delta_c)\tag{7.5-6}$$

比较以上两种情况可以看出，在 δ_c 相同的情况下，两偏振片平行或正交时出射的两束相干光总相位差相差 π. 由(7.5-5)和(7.5-6)两式可知，两种情况的干涉光强互补，即 $I_{\perp}+I_{/\!/}=A^2$. 对于一定的 δ_c 值，若两偏振片正交时的光强为最大值，即 $I_{\perp}=I_M=A^2$；两偏振片平行时的光强为最小值，即 $I_{/\!/}=I_m=0$，则转动 P_2 使它和 P_1 由正交变为平行时，接收屏上的光强将由最大变为消光.

3. 偏振光经劈尖状晶片后的干涉

用单色光照明，若波晶片为一块厚度均匀的平行平面薄片，则从波晶片后表面各处出射的 o 光、e 光的相位差 δ 都相同. 整个屏幕上呈现均匀干涉光强分布. 转动任一个元件，各元件间的相对方位(θ,φ)的改变将引起 A_{e2}、A_{o2} 和 δ 的改变，所以屏上强度的大小相应发生改变.

若波晶片 C 为上薄下厚呈尖劈状，如图 7.5-3 所示. 这时用单色平行光正入射，光束透过 P_1 后变成线偏振光，在晶片 C 中分解成 e 光和 o 光，虽然两者的传播方向在晶体内并未分离，但从后表面出射进入空气时，就成为两束沿不同方向传播且振动方向相互垂直的线偏振光，它们相对于入射方向的偏向角分别为

$$\left.\begin{aligned}\delta_o &\approx (n_o-1)\alpha\\ \delta_e &\approx (n_e-1)\alpha\end{aligned}\right\} \tag{7.5-7}$$

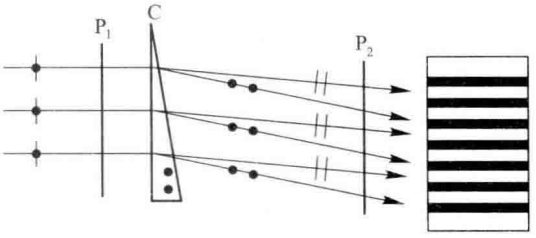


图 7.5-3 尖劈形波晶片产生的干涉

其中 α 为尖劈形晶片顶角. 这两束线偏振光通过偏振片 P_2 后产生相同振动方向的分量，在接收屏上可得到等距的干涉条纹，条纹的取向与劈棱方向平行，条纹间距则为

$$\Delta x=\frac{\lambda}{|\sin\delta_o-\sin\delta_e|}\approx\frac{\lambda}{|\delta_o-\delta_e|}=\frac{\lambda}{|(n_o-n_e)\alpha|} \tag{7.5-8}$$

4. 光弹性效应

玻璃或塑料在制作过程中若退火不好，就会有局域的内应力“冻结”在里边，内应力将引起一定程度的各向异性. 例如将普通的塑料三角板或塑料透镜(彩图 10)置于两正交偏振片间，很容易观察到这种内应力分布所致的干涉图样. 若玻璃或塑料在制作过程中退火良好，不存在内应力，它们是各向同性的. 但是某些各向同性介质在外界施加局域机械压力或拉力的作用下，也将导致内应力的出现，使介质变为各向异性，从而产生双折射，这种现象称为**光弹性效应**或**应力双折射**. 应力的方向相当于晶体的光轴方向. 设 p 为应力，沿应力方向的折射率为 n_e，垂直于该方向的折射率为 n_o，则

$$(n_o-n_e)=Kp \tag{7.5-9}$$

式中 K 为常量. 通常在介质受压力时 $(n_e-n_o)<0$，在受拉力时 $(n_e-n_o)>0$，故可取常量 K 为正，并规定压力 p 为正，拉力 p 为负. 因此通过厚度为 d 的介质时，两偏振光的相位差为

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d=\frac{2\pi}{\lambda}Kpd \tag{7.5-10}$$

利用光弹性效应，可以研究受力物体内部的应力分布，其方法是将待分析的物体（例如飞机、汽车、桥梁、水坝等大型机器或工程构件）用透明介质材料（如环氧树脂）制成按一定比例缩小的模型，再将模型置于正交偏振片之间，对模型按实际受力情况加上同倍缩小的应力. 于是可产生偏振光干涉，其干涉的条纹分布即可明显地显示出在外力作用下构件内应力分布情况. 利用光弹性效应，提供了一种检测构件材料内应力分布的简便而有效的方法，由此发展了力学的一门学科分支——光测弹性学.

5. 显色偏振

用白光照明，若波晶片厚度各处相等，则白光中不同波长成分从波晶片出射时，其 e 光和 o 光之间的相位差 δ_e 随波长而改变. 如入射白光中的某一波长为 λ 的光通过波晶片和两个偏振片后，其相位 δ 满足干涉相长，相应颜色的光强达到最大值 I_M；而入射光中另一波长为 λ' 的光，其 e 光和 o 光之间相位差 δ 满足干涉相消，相应颜色的光强为最小值. 在 $\theta=\varphi=45°$ 时，$I_m=0$，则波长为 λ' 的光在屏上消失. 白光中缺少某种波长为 λ' 的光，则混合色不再是白色，而是波长为 λ' 光的互补色光，于是整个屏上呈现出某种颜色，称为干涉色. 转动装置中任一元件，屏上颜色都会发生变化，这种现象称为**显色偏振**.

将待测薄片置于两个正交偏振片之间，可以根据是否出现显色偏振现象来判断这个薄片是否是波晶片. 若为波晶片，可根据屏上呈现的颜色判断出发生干涉相消的光波长 λ'，从而求出波晶片的 (n_o-n_e) 或 d 值.

若波晶片为尖劈形状，用白光照明时，在某种波长出现暗纹的地方，就显示出它的互补色. 若波晶片厚度不均匀，则整个屏上呈现不规则的彩色花样，转动任何一个元件，彩色都会随之发生改变.

*7.5.2　会聚偏振光的干涉

1. 装置和干涉现象

会聚偏振光的实验装置如图 7.5-4 所示. 图中 S 是点光源，L_1、L_2、L_3、L_4 是会聚透镜，P_1、P_2 是正交偏振片，C 是光轴与晶体表面垂直的波晶片，短焦距透镜 L_2 将 P_1 出射的平行偏振光会聚到波晶片 C 上，从 C 出射的光同样经透镜 L_3 变成平行光投射到 P_2 上，最后由透镜 L_4 把 L_3 的后焦面成像在屏上. 凡是通过波晶片 C 的各平行光线最终会聚到屏上一点. 当 $P_1\perp P_2$ 时，干涉图样如图 7.5-5 所示，它们是一组以透镜光心为中心的明暗相间的同心圆环，圆环中还有一个与 P_1 方向平行及垂直的十字图形. $P_1\perp P_2$ 时为黑十字，$P_1//P_2$ 时为亮十字. 当以白光照明时，干涉图样呈彩色.

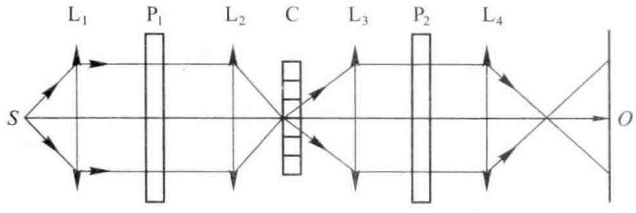


图 7.5-4　会聚偏振光的干涉装置

2. 对干涉图样的解释

(1) 明暗相间的同心圆环的形成

如图 7.5-6(a)所示，从 L_2 出射的会聚光锥顶点落在波晶片表面 Q 点. 在晶体中，光锥的中心光线沿光轴方向传播，不发生双折射，e 光和 o 光的相位差 $\delta_c=0$. 光锥中其余光线随光线与光轴的夹角 i_2 不同，e 光和 o 光在晶片中经过的距离 d 就不同，故相位差 δ_c 也不同. 一般情况下，对于同一入射角 i_1，$i_{2e}\neq i_{2o}$. 但会聚光顶角不大时，可近似认为 $i_{2e}=i_{2o}=i_2$，所以 $d'=\dfrac{d}{\cos i_2}$. 于是相位差随光线顶角的改变而改变，即

$$\delta_c=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d'=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)\frac{d}{\cos i_2} \tag{7.5-11}$$

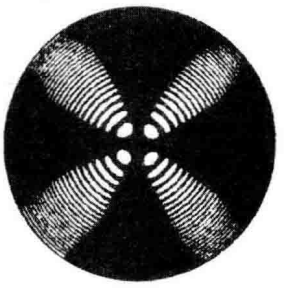


图 7.5-5 会聚偏振光的干涉图样

如图 7.5-6(b)，以 Q 点为顶点、相同倾角 i_2 为顶角的圆锥面上的光线，在晶片中经过的距离 d' 相同，因此它们的相位差 δ_c 相同. 这些具有相同 δ 的光线在屏上形成一个圆环，圆环上各点具有相同的干涉情况. 对于倾角不同的光线，δ_c 不同，它们在屏上形成的干涉圆环大小和亮暗情况均不同，因此屏上呈现出一组以 O 为中心的明暗相间的同心圆环，越往外的圆环分布越密. 这些圆环称为**等色线**.

(2) 十字线的形成

上述同心圆环的分布与等倾干涉圆环相类似，不同的是这里明暗相间的圆环上还有十字出现. 这是由于参与干涉的两条光线的振幅 A_{e2} 和 A_{o2} 均随入射光振动面与晶片主截面夹角 θ 的不同而改变引起的. 如图 7.5-6(c)所示，晶片上入射光振幅为 A，在晶片中分解为 e 光和 o 光的振幅分别为 $A_e=A\cos\theta$，$A_o=A\sin\theta$. 经 P_2 后，再沿 P_2 透振方向分解得 $A_{e2}=A\cos\theta\sin\theta$，$A_{o2}=A\sin\theta\cos\theta$. 它们相干叠加在屏上的干涉光强为

$$I=A_{e2}^2+A_{o2}^2+2A_{e2}A_{o2}\cos\delta$$

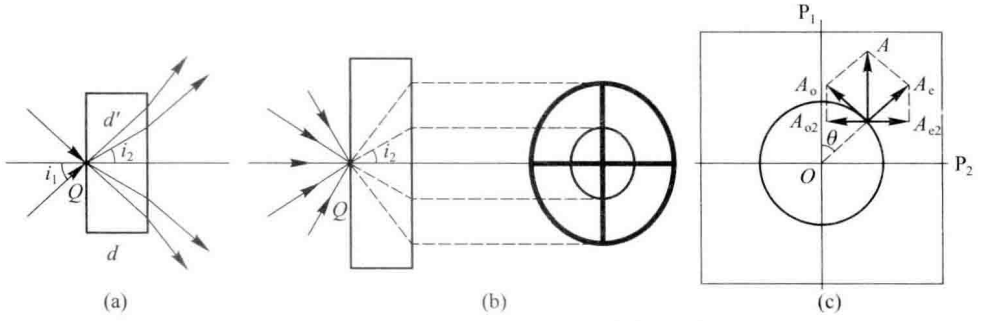


图 7.5-6 会聚偏振光相位差与光矢量图

如果 $P_1\perp P_2$，则 $\delta=\delta_c+\pi$，将 A_{e2}、A_{o2} 代入上式得

$$\begin{aligned}I&=A_{e2}^2+A_{o2}^2+2A_{e2}A_{o2}\cos(\delta_c+\pi)\\&=\frac{A^2\sin^2 2\theta(1-\cos\delta_c)}{2}\end{aligned} \tag{7.5-12}$$

因为沿着同心圆的半径方向入射光线的倾角 i_2 不断增大，δ_c 也随之增加，因此 $(1-\cos\delta_c)$ 随 δ_c 作周期性变化，于是这组同心圆环的光强发生明暗交替的变化. 又因为在 $\theta=0°,90°,180°,270°$ 处 $\sin 2\theta=0$，则 $I=0$. 当 $P_1\perp P_2$ 时，干涉圆环上与 P_1 平行及垂直的方向出现黑十字；而当 $P_1/\!/P_2$ 时其干涉图样在黑十字的位置出现亮十字. 若以白光照明，$P_1/\!/P_2$ 时在屏幕上各圆环的颜色为 $P_1\perp P_2$ 时的互补色.

例 7.5-1 厚为 0.025 mm 的方解石晶片，光轴平行于其表面，置于正交偏振片 P_1、P_2 之间，晶片的主截面与

它们呈 45°角. 试问：

(1) 在可见光范围内，哪些波长的光不能通过？

(2) 若使两偏振片平行，转动第二个偏振片，哪些波长的光不能通过？

解 (1) 这是一个由偏振光干涉引起的显色问题. 因为 n_o-n_e 随波长的变化很小，可以不考虑其色散. 当 $P_1 \perp P_2$ 时，两个分振动的相位差为

$$\delta=\delta_c+\delta'=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d+\pi$$

当 $\delta=(2K+1)\pi$ 时，两分振动干涉相消，无光通过 P_2. 由此得

$$\lambda_K=\frac{(n_o-n_e)d}{K} \tag{7.5-13}$$

因为钠黄光通过此晶片后 e 光和 o 光的光程差为

$(n_o-n_e)d=(1.658\ 4-1.486\ 4)\times0.025\times10^6\text{nm}=4\ 298.8\ \text{nm}$，将其值代入(7.5-13)式并对 K 取不同值，得不可能通过的可见光波长为

$$\lambda_{11}=390.8\ \text{nm},\quad \lambda_{10}=429.9\ \text{nm},\quad \lambda_9=477.6\ \text{nm}$$
$$\lambda_8=537.3\ \text{nm},\quad \lambda_7=614.1\ \text{nm},\quad \lambda_6=716.5\ \text{nm}$$

(2) 若使 $P_1 /\!/ P_2$，则

$$\delta=\delta_c+0=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d$$

为使此时两分振动满足干涉相消，则

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d=(2K+1)\pi,\quad K=0,1,2,3,\cdots$$

即

$$\lambda_K=\frac{(n_o-n_e)d}{\left(K+\frac{1}{2}\right)}=\frac{4\ 298.8\ \text{nm}}{\left(K+\frac{1}{2}\right)}$$

在可见光中，下列波长光不能通过

$$\lambda'_{10}=409.4\ \text{nm},\quad \lambda'_9=452.5\ \text{nm},\quad \lambda'_8=505.7\ \text{nm}$$
$$\lambda'_7=573.2\ \text{nm},\quad \lambda'_6=661.3\ \text{nm},\quad \lambda'_5=781.6\ \text{nm}$$

例 7.5-2 两个偏振片的透振方向夹角为 60°，将一块楔角 $\alpha=0.5°$ 的石英尖劈置于两偏振片之间，其光轴与两偏振片透振方向均呈 30°角，如图 7.5-7 所示，用一波长 $\lambda=589.3$ nm的平行钠黄光照明. 已知石英的主折射率 $n_o=1.544\ 2$，$n_e=1.553\ 3$，试求干涉条纹间距以及条纹可见度.

解 由图 7.5-3 和(7.5-8)式可得干涉条纹间距为

$$\Delta x=x_1-x_0=\frac{\lambda}{|(n_o-n_e)\alpha|}$$
$$=\frac{5\ 893\times10^{-7}}{(1.544\ 2-1.553\ 3)\times0.87}\ \text{mm}=7.41\ \text{mm}$$

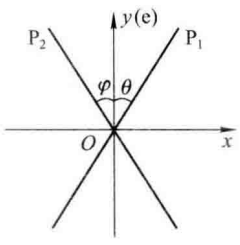


图 7.5-7

由(7.5-4)式，偏振光干涉的强度分布为

$$I=A^2(\cos^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\theta\sin^2\varphi+2\cos\theta\cos\varphi\sin\theta\sin\varphi\cos\delta)$$

凡石英厚度 d 使 $\delta=(2K+1)\pi$ 的位置处将出现暗纹，已知 $\varphi=\theta=30°$，则暗纹强度为

$$I_m = A^2(\cos^2 30°\cos^2 30° + \sin^2 30°\sin^2 30° - 2\cos 30°\cos 30°\sin 30°\sin 30°) = \frac{A^2}{4}$$

凡石英厚度 d 使 $\delta = 2K\pi$ 的位置处将出现亮纹，亮纹强度为

$$I_M = A^2(\cos^2 30°\cos^2 30° + \sin^2 30°\sin^2 30° + 2\cos 30°\cos 30°\sin 30°\sin 30°) = A^2$$

因此条纹可见度为

$$\gamma = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} = 0.6$$

当两偏振光平行或正交时，$I_m = 0$，条纹可见度为 1.

§7.6 旋光及圆二色性

7.6.1 旋光现象

当线偏振光沿某些晶体（如石英）的光轴方向传播，或通过某些溶液（如蔗糖、酒石酸溶液）时，它的振动面将以光的传播方向为轴旋转，这种现象称为**旋光现象**，物质的这种属性称为**旋光性**. 凡是具有旋光性的物质，称为**旋光物质**.

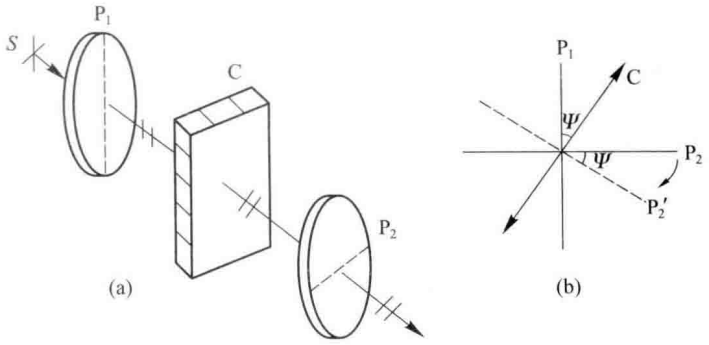


图 7.6-1 石英的旋光现象

我们以石英为例来研究旋光现象. 如图 7.6-1，P_1，P_2 是正交偏振片，C 是石英薄片，其光轴垂直于晶体表面，未将 C 插入 P_1 和 P_2 之间时，P_2 后的视场是全暗的. 将 C 插入 P_1 和 P_2 之间，可看到视场由暗变亮. 若将偏振片 P_2 旋转一角度 Ψ，视场又转为全暗. 这表明从石英片透射的仍是线偏振光，不过其振动面旋转了一个角度 Ψ，如图 7.6-1(b)所示. 振动面旋转的角度称为**旋光度**，用 Ψ 表示，单位是度(°).

实验证明，偏振光振动面旋转的角度 Ψ 与旋光物质的厚度 d 成正比. 若旋光物质为晶体，则

$$\Psi = \alpha d \tag{7.6-1}$$

若旋光物质是溶液，则

$$\Psi = [\alpha]cd \tag{7.6-2}$$

(7.6-1)式中的比例系数 α 称为该晶体的**旋光率**，单位是(°)/mm，它等于该物质中光通过单位长度时振动面转过的角度. (7.6-2)式中的比例系数 $[\alpha]$ 称为该溶液的**比旋光率**，单位是(°)/

[dm·(g/ml)],它等于光通过浓度为 c 的单位长度溶液时,振动面转过的角度.

表 7.6-A　旋光率与波长的关系

波长/nm	589.3(钠黄光)	404.7(紫光)	214.7(紫外线)
旋光率/[(°)/mm]	21.7	48.9	236

对于厚度一定的旋光物质,不同波长的偏振光其振动面将旋转不同的角度(参见表 7.6-A),这种现象称为**旋光色散**. 在图 7.6-1(a)所示实验装置中,用白光照明时由于其中某些波长成分的振动面旋转后刚好与偏振片 P_2 的透振方向垂直,发生消光,所以在 P_2 后面呈现一定的彩色(彩图 11). 转动装置中任何一个元件,P_2 后面的色彩都会发生变化. 利用旋光色散,可用一定厚度的旋光物质制成滤波器,使白光中某些波长成分的透射率最大,而另一些波长成分的透射率为零.

迎着光的传播方向看,使振动面沿顺时针方向旋转的物质称为**右旋物质**,逆时针方向旋转的称为**左旋物质**. 例如葡萄糖为右旋,果糖为左旋. 天然石英晶体也有右旋石英和左旋石英两类,它们的旋光率相等但符号相反,其一个的分子排列正好是另一个的反射镜像,因而其外形也是镜像对称的,如图 7.6-2 所示.

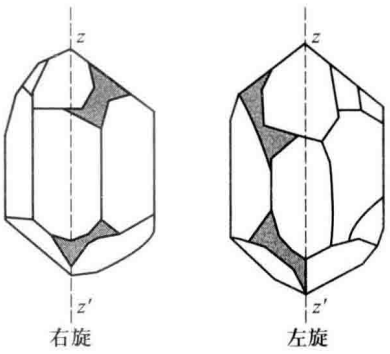


图 7.6-2　右旋和左旋石英晶体

7.6.2　用圆双折射解释旋光现象

任何一个直线简谐运动都可分解成两个频率和振幅都相同但旋转方向相反的圆运动,所以一束线偏振光可视为频率振幅都相等的右旋和左旋圆偏振光的合成. 按照菲涅耳假设,晶体中的旋光现象可视为一种特殊的双折射——**圆双折射**. 菲涅耳认为,在各向同性介质中,线偏振光所分解成的左旋、右旋圆偏振光(L 光和 R 光)的传播速度 v_L 和 v_R 相等,因而其相应的折射率 $n_L=\dfrac{c}{v_L}$ 和 $n_R=\dfrac{c}{v_R}$ 相等. 在旋光晶体中,L 光和 R 光的传播速度不同,其相应的折射率也不相等,$n_L\neq n_R$. 在右旋晶体中,右旋圆偏振光传播速度较快,$v_L<v_R$($n_L>n_R$);在左旋晶体中,左旋圆偏振光传播速度较快,$v_L>v_R$($n_L<n_R$). 根据以上假设,即可唯象地解释旋光现象.

左旋圆偏振光和右旋圆偏振光经过厚度为 d 的旋光晶片后,引起的相位滞后分别为

$$\varphi_L=\frac{2\pi}{\lambda}n_L d,\quad \varphi_R=\frac{2\pi}{\lambda}n_R d \tag{7.6-3}$$

在图 7.6-3(a)中,设某一时刻入射到旋光晶体表面的线偏振光的振动面沿竖直方向 OE,它的初相位为零,即入射光的光矢量 $\boldsymbol{E}$ 方向向上且具最大值. 此时它所分解成的左旋、右旋圆偏振光相应的一对旋转矢量 $\boldsymbol{E}_L$ 和 $\boldsymbol{E}_R$ 均与 $\boldsymbol{E}$ 的方向相同. 因为圆偏振光的相位即旋转矢量的角位移,相位滞后相应于旋转矢量倒转一个角度,因此晶体出射面上旋转矢量 $\boldsymbol{E}'_L$ 和 $\boldsymbol{E}'_R$ 与入射面上同一时刻旋转矢量 $\boldsymbol{E}_L$ 和 $\boldsymbol{E}_R$ 相比,分别向右和向左转了一个角度 φ_L 和 φ_R,如图 7.6-3(b)所示. $\boldsymbol{E}'_L$ 和 $\boldsymbol{E}'_R$ 的合成矢量 $\boldsymbol{E}'$即为出射线偏振光的光矢量.

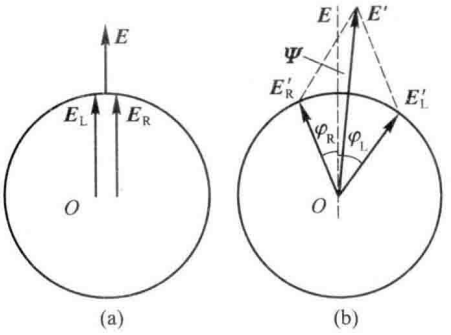


图 7.6-3 对旋光性的解释

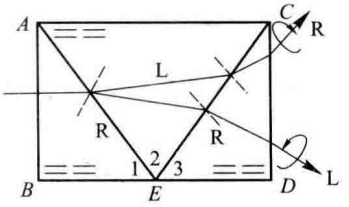


图 7.6-4 菲涅耳棱镜组

由图可见,出射光振动面与入射光振动面相比,转过角度 Ψ. 关于角度的符号,这里约定:以竖直向上方向为参考方向,光矢量顺时针旋转的角度为正,即 $\Psi>0$,逆时针旋转的角度为负,即 $\Psi<0$. 由(7.6-3)式可得

$$\Psi=\frac{1}{2}[\varphi_L+(-\varphi_R)]=\frac{\pi}{\lambda}[n_L-n_R]d \tag{7.6-4}$$

上式表明偏振光振动面旋转的角度 Ψ 与通过晶体的厚度 d 成正比. 对于左旋晶体,$n_L<n_R$,即 $v_L>v_R$, $\Psi<0$,故偏振光振动面逆时针旋转;对于右旋晶体,$n_L>n_R$,即 $v_L<v_R$,$\Psi>0$,故偏振光振动面顺时针旋转.

菲涅耳为了验证关于圆双折射的假设,曾设计了一个棱镜组,如图 7.6-4 所示. 这个棱镜的前后是两个右旋石英直角棱镜,中间是左旋石英等腰棱镜,三者粘在一起,它们的光轴均与入射面 AB 垂直. 单色线偏振光射入 AB 面,在棱镜 1 中沿光轴的方向传播. 它所分解成的左旋圆偏振光和右旋圆偏振光的速度不同,$v_L<v_R$,即 $n_L>n_R$;而在棱镜 2 中 $v_L>v_R$,即 $n_L<n_R$;在棱镜 3 中,$v_L<v_R$,即 $n_L>n_R$. 所以在界面 AE 上,左旋光发生远法线折射,右旋光发生近法线折射,于是左旋光和右旋光分开了. 在第二界面 CE 上,左旋光发生近法线折射,同理,右旋光发生远法线折射,于是两束光分得更开了. 在折射面 CD 上,两束光折射后进一步分开. 通过对这两束光的实验鉴别,证实了它们确为圆双折射理论所预料的左旋圆偏振光和右旋圆偏振光.

7.6.3 圆二色性

旋光物质对入射的某种波长的线偏振光所分解成的左旋、右旋圆偏振光的吸收率(详见第八章)A_L 和 A_R 并不完全相同,我们称这种旋光物质对圆偏振光的吸收各向异性为**圆二色性**. 这两个吸收率的差值 $\Delta A=A_L-A_R$ 可用来定量地描写圆二色性.

如果入射线偏振光的波长正好能产生圆二色性,则它通过厚度为 d 的旋光物质后,出射的两束圆偏振光的相位差为 $\Delta\varphi=2\pi(n_L-n_R)d/\lambda$,而它们的振幅不再相等,因此出射的两束频率相同、振幅不等、有一定相位差的左旋、右旋圆偏振光将合成为椭圆偏振光. 为了说明这个结论,我们仍可使用旋转矢量图,在图 7.6-5 中,两个长度不等的矢量 $\boldsymbol{E}_L$ 和 $\boldsymbol{E}_R$ 分别表示左旋、右旋圆偏振光的旋转矢量,这两个矢量有共同的原点,以相同的角速度沿反方向旋转,两矢量的端点各扫出一个圆. 根据矢量合成法则,可求出合矢量端点的轨迹是一个椭圆,图中用虚线表示. 为了表示椭圆的特征,我们定义椭圆值

$$\theta=\arctan\frac{b(\text{椭圆短轴})}{a(\text{椭圆长轴})}$$

式中长轴 $a=|\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}|+|\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}|$，短轴 $b=|\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}|-|\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}|$. 长轴与入射线偏振光振动面的夹角即该时刻的旋光角. 理论计算表明 $\theta\propto(A_{\mathrm{L}}-A_{\mathrm{R}})$，即椭圆值 θ 和吸收率差 ΔA 都可以用来描写圆二色性.

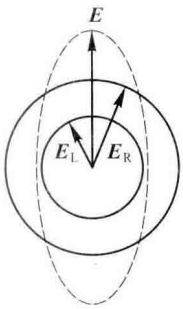


图 7.6-5　两振幅不等的左、右圆偏振光的合成

综上所述，当线偏振光通过旋光物质时，如果它们分解成的两圆偏振光的传播速度不等，出射线偏振光的振动面将发生旋转. 如果对两圆偏振光的吸收率不同，出射光一般为椭圆偏振光.

利用旋光现象，通过测定旋光溶液使入射线偏振光振动面旋转的角度 Ψ，可以确定溶液所含旋光物质的浓度，这种方法在制糖、制药、化学工业中普遍使用. 旋光色散和圆二色性可用于研究分子结构的不对称性、检测生物大分子样品在溶液状态下的构像，在分子生物学中有广泛应用.

自然界、实验室中存在大量的旋光异构体，它们是指一对化学成分相同、结构互为镜像、且分别具有左旋性和右旋性的物质，习惯上将它们表示为 L(左旋)型和 D(右旋)型. 天然糖都是 D 型的，自然界中的蛋白质都是由氨基酸构成的，除简单的甘氨酸外，组成天然蛋白质的氨基酸都是 L 型的. 为解释为何人工合成的糖和氨基酸都是 L 型和 D 型各占一半，不具旋光性，而自然界的糖和氨基酸都只具有单一的旋光性，人们假设是酶这种生物体内的催化剂在起作用. 酶本身也是一种特殊的蛋白质，它具有 L 型和 D 型之分. 生物体内的酶都是 L 型的，它只消化和产生 L 型氨基酸，对 D 型氨基酸不起作用，因而酶使得生物体内的蛋白质旋光性不对称或不平衡. 一旦生物肌体老化或死亡，生物体内的氨基酸从不平衡变到平衡，实际上是一种熵增加的过程. 当生物体中只有 L 型氨基酸时，熵最小，而 L 型和 D 型平衡时熵最大.

例 7.6-1　在两个偏振片之间插入一块石英旋光晶片，可以消除眼睛最敏感的黄绿光($\lambda=550.0$ nm)，设对此波长的旋光率为 24 (°)/mm，求下列情况下晶片的厚度：

(1) 两偏振片相互正交，$P_1\perp P_2$；

(2) 两偏振片相互平行，$P_1/\!/P_2$.

解　(1) 若 $P_1\perp P_2$，要消除黄绿光，应该使该波长的光在通过石英旋光晶片后振动面旋转 180°，则

$$d=\frac{\Psi}{\alpha}=\frac{180^\circ}{24(^\circ)/\mathrm{mm}}=7.5\ \mathrm{mm}$$

(2) 若 $P_1/\!/P_2$，应使黄绿光通过石英片后振动面旋转 90°，则

$$d=\frac{\Psi}{\alpha}=\frac{90^\circ}{24(^\circ)/\mathrm{mm}}=3.75\ \mathrm{mm}$$

即晶片厚度为 3.75 mm 的奇数倍时能对此波长消光.

例 7.6-2　用一个白光光源和两个偏振片确定一块厚度为 1 mm 的石英旋光片是左旋的还是右旋的.

解　旋光率 α 是波长 λ 的函数，由表 7.6-A 可知，旋光率随波长增大而减小，而且当旋光片厚度不超过 1 mm时光矢量的旋转角度不会超过 90°.

利用旋光色散，将待测旋光片 C 置于两平行偏振片 P_1 和 P_2 之间，用白光照明，如图7.6-6所示，其中 λ_{R} 和 λ_{V} 分别为红光和紫光的波长. 若 C 为右旋石英片，则可见光中各种波长的光矢量经 C 后都向右旋转，且波长越短的光其光矢量旋转的角度越大. 这时若将偏振片 P_2 向右旋转，就会看到 P_2 后的透射光的颜色随 P_2 的旋转向短波方面变化，即红→橙→黄→蓝→紫. 若 C 为左旋石英片，则须将 P_2 向左旋转才能见到 P_2 后颜色向短波方面变化. 于是根据上述过程中 P_2 的旋转方向可以判别 C 的旋光方向.

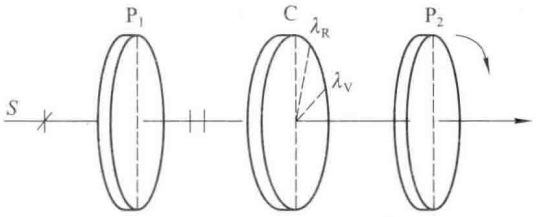


图 7.6-6

§7.7 光调制器

光调制器是利用光和物质相互作用所产生的效应来控制光波的强度或相位的器件. 根据对光场施加调制的方式不同,有磁光调制、电光调制、声光调制等多种. 光调制器在光通信、光信息传递及处理等光子技术中有广泛应用. 光调制器的主要性能指标是调制的频率范围和所需的驱动功率. 本节中将介绍几种光调制器的光学原理.

7.7.1 磁光调制器

在强磁场作用下产生的线偏振光的振动面旋转的现象称为**磁致旋光效应**. 这里主要介绍一种较为重要的**法拉第效应**.

在图 7.7-1 中,在两个正交的偏振片 P_1、P_2 之间放置一个带孔的电磁铁或螺线管,使光沿着或逆着外磁场方向通过样品. 当激励线圈不通电时,无光从 P_2 射出;当激励线圈通电产生磁场后,则有光从 P_2 射出,将 P_2 转过一个角度,又出现消光,这表明其振动面转过了一个角度. 实验表明:

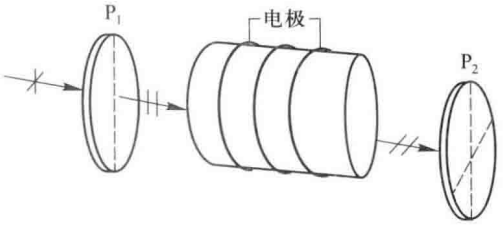


图 7.7-1 法拉第磁致旋光效应

(1) 对于给定的介质,振动面的转角与样品长度 d 和磁感应强度 B 成正比

$$\psi = VdB \tag{7.7-1}$$

式中的比例系数 V 称为**韦尔代(Verdet)常量**. 一般物质的韦尔代常量都比较小(见表 7.7-A).

表 7.7-A 几种物质的韦尔代常量

物质	温度/℃	V/[rad/(T·m)]
磷晃玻璃	18	4.86

续表

物质	温度/℃	V/[rad/(T·m)]
轻火石玻璃	18	9.22
水晶(垂直光轴)	20	4.83
食盐	16	10.44
水	20	3.81
二硫化碳	20	12.30
空气*	0	0.001 82

* $\lambda=578.0$ nm, $p=1.013\times10^5$ Pa

(2) 磁致旋光的方向取决于外加磁场的方向,与光的传播方向无关. 这与光通过天然旋光物质的情况不同,例如线偏振光通过天然右旋物质时,迎着光看,振动面总是向右旋转,所以从右旋天然物质出射的光沿原路返回时,振动面将回到初始位置. 当线偏振光沿磁场方向通过磁光介质时,迎着光看振动面向右旋转角度 ψ,但当光束沿反方向传播时,振动面仍沿原方向旋转,即迎着光看振动面就向左旋转角度 ψ. 所以光沿原路返回,来回两次通过磁光介质,振动面比初始位置旋转了 2ψ 的角度.

在激光作光源的光学系统中,为了避免各界面的反射光对激光光源产生干扰,可利用法拉第效应制成**光隔离器**,只允许光从一个方向通过而不能从反方向通过. 如图 7.7-2 所示,让偏振片 P_1 与 P_2 的透振方向呈 45°角,调整磁感应强度 B,使法拉第盒出来的光振动面转过 45°,于是光刚好通过 P_2,但对从后面光学系统中各界面反射回来逆向传播的光,它通过 P_2 后再经过法拉第盒,其振动方向转得与 P_1 透振方向垂直,因此被隔离而不能到达光源处. 这样法拉第盒起到了使一个方向的光通过,而不让反方向光通过的作用,类似一个单向闸门.

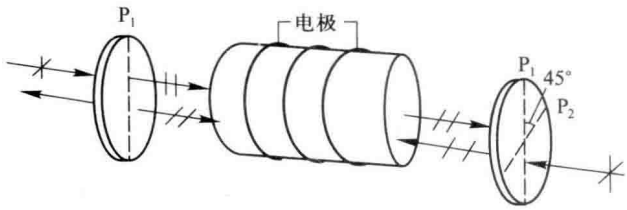


图 7.7-2　法拉第盒光隔离器

利用磁致旋光效应可制作磁光调制器,实现光强度调制. 例如在平行偏振片 P_1 和 P_2 之间放上韦尔代常数较大的人工钇钕石榴石磁性晶体(YIG),同时对晶体加上恒定磁场和调制磁场后,总磁化强度矢量将随调制信号而变化. 从 P_1 出来的线偏振光经过这种磁致旋光晶体后,其光矢量旋转角度 θ 将随外加调制信号而变化,从而使这束线偏振光经 P_2 出射的光强随 θ 的变化而变化,即 $I=I_0\cos^2\theta$,以此实现强度调制.

7.7.2　电光调制器

各向同性的电光材料在电场作用下产生双折射现象,称为**电光效应**. 电光效应有两种:**克尔**

(Kerr)**效应和泡克耳斯**(Pockels)**效应**. 电光效应可导致光的强度或相位变化,从而实现电光调制.

1. 克尔效应

克尔在1875年首先发现,许多液体电介质(例如硝基苯)在电场的作用下变成各向异性,介质具有单轴晶体的特征,其光轴在电场方向上.

实验表明,沿光轴(电场)方向和垂直于光轴(电场)方向的折射率之差,与电场强度或电压平方成正比,因此称为二级电光效应,即

$$(n_o - n_e) = \lambda K E^2 = \lambda K \frac{V^2}{d^2} \tag{7.7-2}$$

相应的两偏振光的相位差为

$$\delta = 2\pi K l \frac{V^2}{d^2} \tag{7.7-3}$$

式中 K 为**克尔常量**,V 为外加电压,d 为平板电容器板间距,l 为光在克尔盒中通过的距离.

克尔盒可作光电开关. 如图7.7-3所示,将克尔盒置于正交偏振片 P_1 和 P_2 之间,P_1 和 P_2 的透振方向与电场方向分别呈45°. 以光照射偏振片 P_1,未加电场时无光透过偏振片 P_2,相当于电光开关关闭. 加上电压 V,使 $\delta=\pi$ 时(此时克尔盒等效于光轴与 P_1 成45°的$\frac{\lambda}{2}$片),出射偏振光与 P_2 透振方向一致,出射光强达最大,相当于电光开关全开. 令(7.7-3)式中 $\delta=\pi$,得 $V_{\frac{\lambda}{2}}=\frac{d}{\sqrt{2Kl}}$称为半波电压. 使电压取0和 $V_{\frac{\lambda}{2}}$,则克尔盒可作电光开关. 克尔效应的最大优点是无时间延迟,故在克尔盒电极上加调制信号电压,则 P_2 后面的光强信号相应变化. 克尔盒光调制器可用于高速摄影、激光通信、激光电视等方面.

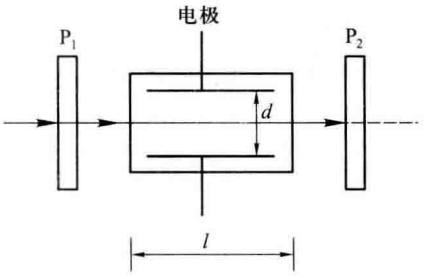


图7.7-3 克尔效应

2. 泡克耳斯效应

常用的克尔盒有若干缺点,例如硝基苯有毒、对其纯度要求很高、携带不方便等. 随着激光技术的进一步发展,对电光开关和电光调制器的要求越来越高,克尔盒逐渐被某些电光晶体[例如磷酸二氢钾(KDP)、磷酸二氢铵(ADP)]所取代.

1893年泡克耳斯发现某些单轴晶体在外电场作用下将变成双轴晶体,这种感生双折射的效应称为**泡克耳斯效应**.

如图7.7-4所示,一块KDP晶体置于正交偏振片 P_1、P_2 之间,晶体原光轴方向、光束传播方向和外加电场方向三者一致,均在 z 方向. 这就是说,泡克耳斯盒的两个端面既要透光又要导电,故它们常用金属氧化物,如CdO、SnO、InO等. 实验表明,无外加电压时,该系统输出光强为零. 在沿光传播方向的电场作用下,KDP晶体的光轴方向发生了改变,而在正方形入射端面的斜对角线 x 和 y 方向形成两个主振动方向,即KDP晶体由单轴晶体转化为双轴晶体. 设光矢量平行于 x

和 y 方向的偏振光在晶体中传播时，相应的主折射率为 n_x、n_y，则 $\Delta n=n_x-n_y$ 称为感生折射率之差，于是沿 z 方向传播的线偏振光被泡克耳斯盒分解为两个相互垂直的振动 $\boldsymbol{E}_x$ 和 $\boldsymbol{E}_y$，它们以不同的速度传播，使出射光成为一椭圆偏振光. 进一步实验表明，Δn 与电场强度一次方成正比，故泡克耳斯效应为一级电光效应，即

$$n_x-n_y=n_o^3\gamma E \tag{7.7-4}$$

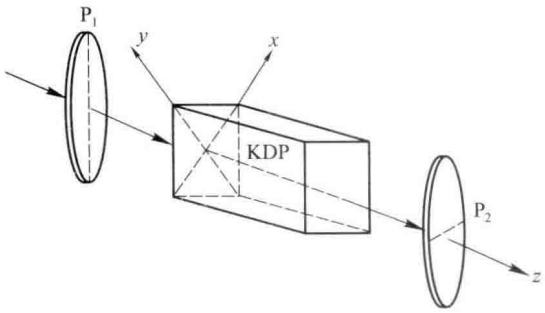


图 7.7-4　泡克耳斯效应

上式中 n_o 是未加电场时晶体中寻常光的折射率，E 是电场强度，γ 是一系数，称为电光系数，单位是“m/V”. 假设电场是均匀的，则有 $E=\dfrac{V}{d}$，相应的从晶体出来的两个振动面正交的线偏振光的相位差为

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}(n_x-n_y)d=\frac{2\pi}{\lambda}n_o^3\gamma dE=\frac{2\pi}{\lambda}n_o^3\gamma V \tag{7.7-5}$$

式中 d 为光通过晶体的长度，即两电极的距离，V 为两电极相应的电压，加上适当电压使 KDP 晶体产生相位差 $\delta=\pi$（因为 x 与 y 均与 P_1 呈 45°角，此时 KDP 晶体也等效于一个光轴与 P_1 呈 45°角的 $\lambda/2$ 片），则从 P_2 出射的光强最大. 使晶体产生相位差 π 所附加的电压即半波电压 $V_{\frac{\lambda}{2}}$. 它越小，晶体的电光性能越好. 表 7.7-B 中列出了几种材料的电光系数及半波电压.

表 7.7-B　几种材料的电光系数及半波电压

晶体	$\gamma/(10^{-12}\text{m}\cdot\text{V}^{-1})$	n_o	$V_{\frac{\lambda}{2}}$/V
ADP($NH_4H_2PO_4$)	8.5	1.52	9.2
KDP(KH_2PO_4)	10.6	1.51	7.6
KDA(KH_2AsO_4)	~13.0	1.57	~6.2
KD*P(KD_2PO_4)	~23.3	1.52	~3.4

利用泡克耳斯效应制成的泡克耳斯盒也被用作超快开关、激光器 Q 开关和从直流到 3×10^{10}Hz的光调制器. 例如利用 KD*P（磷酸二氘钾）制成的电光开关，其响应时间可小于 1 ns. 近年来发展的集成光学技术可以把电光调制器集成化，调制的频率可达 100 GHz.

7.7.3 空间光调制器

近代光学中除了能实现光波强度随时间变化的调制外，还能实现对二维空间各点光强进行调制，相应的器件称为**空间光调制器**. 通过控制信号源的信号，空间光调制器能对光波的某个参量进行调制，例如通过吸收调制振幅、通过折射率调制相位、通过偏振面的旋转调制偏振态等，将信号源的信息写进入射光波中. 信号源的信号可以是光学信号或电学信号，因此空间光调制器分成光寻址和电寻址两类.

这里介绍最常见的一种空间光调制器——**液晶光阀(LCLV)**. 这是一种利用液晶对偏振光的作用而制成的空间光调制器，是常用的非相干光-相干光图像转换器. 通常写入光可以是非相干光，而读出光则为相干光.

液晶光阀的结构如图 7.7-5 所示. 图中 C 为液晶层，作为光调制层；F 为光电导层，为光敏材料，当外界光写入时，它的电阻就急剧下降；E 为阻挡层，用来分离读出光和写入光，使它们之间互不影响；D 是介质反射镜，用来反射读出光；光阀两端的 A 和 B 是加以一定电压的透明导电膜. 在无写入光时，光电导层的电阻率很高，光阀上所加的电压几乎全部落在光电导层上，液晶层的电场很小. 当有外界光写入时，由于光电导层的电阻率急剧下降，外加电压将穿过光电导层直接加在液晶上，使液晶的光轴在电压的作用下偏转，从而引起双折射效应. 如果在读出端加上起偏镜和检偏镜(常使用偏振分光棱镜)，可以观察到读出光的亮暗变化从而实现光调制. 由于液晶层和光电导层的电阻率相对较高，横向相邻点间的亮暗变化引起的电位变化不会相互影响，因此当写入一幅图像时，液晶层的读出光也会输出一幅图像. 液晶光阀的响应时间在数十毫秒左右，其分辨率可达 30~50 线对/mm 之间，图像的反差可达六到八级.

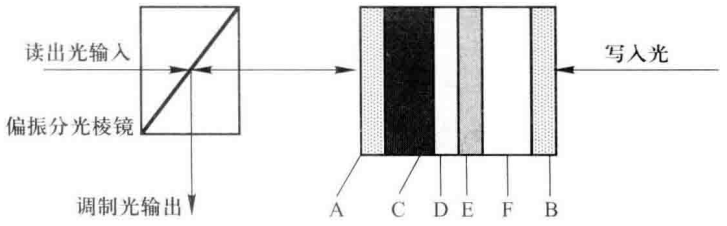


图 7.7-5 液晶光阀

液晶光阀不仅可以将弱光图像转变为强光图像，把可见光图像转变为红外光图像，而且可以将自然光图像转变为偏振光图像，把普通光源的图像转变为激光的图像等. 液晶光阀利用光-光直接转换，使得其效率高、能耗低、速度快、质量好. 它可以广泛地应用到光计算、模式识别、信息处理、显示等领域，具有广阔的应用前景.

当各种空间光调制器研发出来以后，其他形式的信号，例如电信号、视频信号等可以通过空间光调制器输入光学系统进行处理. 例如最常见的液晶大屏幕投影电视(LCD-PTV)，它的写入信号可以是电视信号、计算机、录像带或 VCD 输出的信号，它的体积、重量比常规电视机小得多，而屏幕可达到 100 英寸(对角线)以上，并且不存在大屏幕电视机的辐射危害. 它的清晰度、反衬度等性能可与普通电视机相比，且其亮度、色饱和度等性能也有较大增加. LCD-PTV 已发展成为大屏幕的高清晰度电视(HDTV).

*§7.8　偏振态及其变换的矩阵描述

美国科学家琼斯(R. C. Jones)在1941年提出一种用矩阵描述光的偏振态及光通过偏振器件后偏振态的变换的计算方法,这就是琼斯矢量和琼斯矩阵法. 用矩阵来描述光的偏振态及其变换,不仅形式简洁,而且便于用计算机进行计算,可以方便地得出由偏振器件组成的复杂系统的出射光的最后状态.

7.8.1　偏振态的描述　琼斯矢量

取单色波的传播方向为 z 轴,一般的椭圆偏振光的光矢量在 x、y 坐标轴上的分量分别为

$$\left.\begin{aligned} E_x &= E_{0x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-kz+\varphi_{0x})} = E_{0x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_x} \\ E_y &= E_{0y}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-kz+\varphi_{0y})} = E_{0y}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_y} \end{aligned}\right\} \tag{7.8-1}$$

上式中 $\varphi_x = kz-\varphi_{0x}$,$\varphi_y = kz-\varphi_{0y}$,用复振幅表示为

$$\tilde{E}_x = E_{0x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_x},\quad \tilde{E}_y = E_{0y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_y} \tag{7.8-2}$$

由于任意二维矢量都可以用它的两个直角分量构成一个矩阵,所以任意状态的偏振光也可以用它的光矢量在平面直角坐标系上的两个分量构成一个列矩阵来表示. 这个列矩阵称为**琼斯矢量**,表示为

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \\ \tilde{E}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_x} \\ \\ E_{0y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_y} \end{bmatrix} \tag{7.8-3}$$

我们关心的是二分量之间的相位差 $\varphi = \varphi_y - \varphi_x$ 和振幅比 $E_0 = E_{0y}/E_{0x}$,所以将上式中的公因子提出后,可表示为

$$\boldsymbol{E} = E_{0x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_x}\begin{bmatrix} 1 \\ \\ \dfrac{E_{0y}}{E_{0x}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_y-\varphi_x)} \end{bmatrix} = E_{0x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_x}\begin{bmatrix} 1 \\ \\ E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \end{bmatrix} \tag{7.8-4}$$

从(7.8-3)式,我们可以直接算出该偏振光的强度

$$I = |\tilde{E}_x|^2 + |\tilde{E}_y|^2 = \tilde{E}_x\tilde{E}_x^* + \tilde{E}_y\tilde{E}_y^* = E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \tag{7.8-5}$$

因为我们通常研究的是相对强度,所以可以将偏振光的列阵归一化. 即用 $\sqrt{E_{0x}^2+E_{0y}^2}$ 除以(7.8-3)式的各项,便得到琼斯矢量的归一化形式

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\sqrt{E_{0x}^2+E_{0y}^2}}\begin{bmatrix} E_{0x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_x} \\ \\ E_{0y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_y} \end{bmatrix} \tag{7.8-6}$$

下面介绍几种偏振态的琼斯矢量表示式:

1. 线偏振光

两垂直分量的相位差 $\varphi = \varphi_y - \varphi_x = 0$ 或 π,这里设 $\varphi = 0$,即 $\varphi_y = \varphi_x$,令光矢量与 x 轴夹角为 α,振幅为 E_0,由此可得

$$\tilde{E}_x = E_{0x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_x} = E_0\cos\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_x},\quad \tilde{E}_y = E_{0y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_y} = E_0\sin\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_y},$$

$$|\tilde{E}_x|^2+|\tilde{E}_y|^2=E_0^2,\quad \varphi_y=\varphi_x$$

归一化琼斯矢量为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{E_0}\begin{bmatrix}E_0\cos\alpha e^{i\varphi_x}\\ E_0\sin\alpha e^{i\varphi_x}\end{bmatrix}=e^{i\varphi_x}\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{bmatrix}$$

略去公因子 $e^{i\varphi_x}$，得

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{bmatrix}$$

(1) 当 $\alpha=0$ 时，为沿 x 轴的线偏振光，归一化琼斯矩阵 $\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$；

(2) 当 $\alpha=45°$ 时，为光矢量与 x 轴成 45° 角的线偏振光，归一化琼斯矩阵为 $\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$；

(3) 当 $\alpha=90°$ 时，为光矢量沿 y 轴的线偏振光，其归一化琼斯矩阵为 $\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

2. 椭圆偏振光

$$\varphi=\varphi_y-\varphi_x\neq 0$$

(1) $\varphi=\frac{\pi}{2}$，$E_{0x}=E_{0y}=E_0$，为右旋圆偏振光.

$$\tilde{E}_x=E_0e^{i\varphi_x},\quad \tilde{E}_y=E_0e^{i\left(\varphi_x-\frac{\pi}{2}\right)}\ ①;$$

$$|\tilde{E}_{0x}|^2+|\tilde{E}_{0y}|^2=2E_0^2$$

归一化琼斯矢量为

$$\boldsymbol{E}_R=\frac{1}{\sqrt{2}E_0}\begin{bmatrix}E_0e^{i\varphi_x}\\ E_0e^{i\left(\varphi_x-\frac{\pi}{2}\right)}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\varphi_x}\begin{bmatrix}1\\ e^{-i\frac{\pi}{2}}\end{bmatrix}$$

略去公因子 $e^{i\varphi_x}$，并由 $e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i$ 得 $\boldsymbol{E}_R=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$.

(2) $\varphi=\frac{3\pi}{2}$，$E_{0x}=E_{0y}=E_0$，为左旋圆偏振光，归一化琼斯矩阵为 $\boldsymbol{E}_L=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$.

7.8.2 正交偏振矩阵

如果两束线偏振光的光矢量相互垂直，则称它们为**正交偏振光**. 设两正交偏振光的琼斯矩阵分别为

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}a_1\\ b_1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}a_2\\ b_2\end{bmatrix}$$

不难证明它们必须满足下列关系

① 由于相位因子为 $e^{-i(\omega t-kz+\varphi_0)}$ 的形式，所以 y 分量超前 x 分量 $\frac{\pi}{2}$ 表示为 $\left(\varphi_x-\frac{\pi}{2}\right)$.

$$\boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2^* = 0 \tag{7.8-7}$$

$$a_1 a_2^* + b_1 b_2^* = 0 \tag{7.8-8}$$

若 a_1, a_2, b_1, b_2 均为实数，上式为

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$$

这与相互垂直的两个普通二维矢量正交的条件是相同的. 如光矢量沿 x 和 y 轴的两束线偏振光互为正交，它们的琼斯矢量必须满足(7.8-7)和(7.8-8)两式：

$$\boldsymbol{E}_{\alpha=0} \cdot \boldsymbol{E}_{\alpha=90^\circ} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^* = (1)(0)^* + (0)(1)^* = 0$$

现在我们把正交偏振的意义加以推广：任何两个偏振态，只要它们的琼斯矢量满足(7.8-7)和(7.8-8)两式，就称它们是正交偏振的. 例如右旋偏振光和左旋偏振光互为正交.

$$\boldsymbol{E}_R \cdot \boldsymbol{E}_L^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}^* = \frac{1}{2}[(1)(1)^* + (-\mathrm{i})(\mathrm{i})^*] = 0$$

可以证明，任何偏振光都可以分解成两个正交的偏振光，即偏振光 $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 可分解为一组正交的线偏振光

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

也可分解成一组正交的圆偏振光

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(a + \mathrm{i}b) \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(a - \mathrm{i}b) \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}$$

7.8.3　偏振态变换的描述　琼斯矩阵

1. 琼斯矩阵

因为偏振态的变换是二维复矢量的变换，所以对光的偏振态作各种线性变换的器件都可以用一个 2×2 矩阵表示，称为偏振器件的**琼斯矩阵**，表示为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

设入射偏振光的琼斯矢量为 $\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{bmatrix}$，经偏振器件后，出射偏振光的琼斯矢量为 $\boldsymbol{E}' = \begin{bmatrix} \tilde{E}'_x \\ \tilde{E}'_y \end{bmatrix}$. 若其偏振态的变换是线性的，则这个变换可表示为 $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}$，即

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}'_x \\ \tilde{E}'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{bmatrix}$$

如果偏振光通过 N 个偏振器件组成的光学系统，各器件的琼斯矩阵依次表示为 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_N$，则其系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 N 个矩阵的乘积

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_N \cdots \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{A}_1$$

出射光为

$$\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}_N\cdots\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{E}$$

下面介绍如何求线偏振器件的琼斯矩阵. 设有一块 $\lambda/4$ 片,其快轴为 y 方向,其作用是使偏振光的 y 分量超前于 x 分量 $\pi/2$ 的相位. 入射光和出射光之间的关系可表示为

$$\tilde{E}'_x=1\cdot\tilde{E}_x+0\cdot\tilde{E}_y$$

$$\tilde{E}'_y=0\cdot\tilde{E}_x+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\tilde{E}_y$$

表示为矩阵形式:

$$\begin{bmatrix}\tilde{E}'_x\\ \tilde{E}'_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -\mathrm{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{E}_x\\ \tilde{E}_y\end{bmatrix}$$

式中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -\mathrm{i}\end{bmatrix}$$

快慢轴分别为 y 轴和 x 轴. 用同样的方法可求出其他偏振器件的琼斯矩阵.

现将几种偏振光的琼斯矢量表示和偏振器件的琼斯矩阵列于表 7.8-A 中.

表 7.8-A 偏振态的琼斯矢量和偏振器件的琼斯矩阵

一、光的偏振态		琼斯矢量
线偏振光	光矢量沿 x 轴	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
	光矢量沿 y 轴	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
	光矢量与 x 轴呈±45°角	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\\pm1\end{bmatrix}$
	光矢量与 x 轴呈±α 角	$\begin{bmatrix}\cos\alpha\\\pm\sin\alpha\end{bmatrix}$
圆偏振光	右旋圆偏振光	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-\mathrm{i}\end{bmatrix}$
	左旋圆偏振光	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\\mathrm{i}\end{bmatrix}$
二、偏振器件		琼斯矩阵
线起偏器	透振方向沿 x 轴	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$
	透振方向沿 y 轴	$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

续表

二、偏振器件		琼斯矩阵
线起偏器	透振方向与 x 轴呈±45°角	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & \pm1\\ \pm1 & 1\end{bmatrix}$
	透振方向与 x 轴呈 α 角	$\begin{bmatrix}\cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha\\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha\end{bmatrix}$
$\frac{\lambda}{4}$ 片	快轴沿 x 轴	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{i}\end{bmatrix}$
	快轴沿 y 轴	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -\mathrm{i}\end{bmatrix}$
	快轴与 x 轴呈±45°角	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & \pm\mathrm{i}\\ \pm\mathrm{i} & 1\end{bmatrix}$
$\frac{\lambda}{2}$ 片	快轴沿 x 轴或 y 轴	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$
	快轴与 x 轴呈±45°角	$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$
圆起偏器	右旋	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & \mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 1\end{bmatrix}$
	左旋	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 1\end{bmatrix}$

注：由于要满足光矢量振幅 A 的归一化要求，即 $A^2=(A_x^2+A_y^2)^{1/2}=1$，表中出现了 $1/2$ 和 $1\sqrt{2}$。

2. 偏振态变换的矩阵描述

(1) 线偏振光通过 $\lambda/4$ 片

设线偏振光光矢量与 x 轴呈 45°角，其琼斯矢量为 $\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$y$ 轴为快轴的 $\lambda/4$ 片的琼斯矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -\mathrm{i}\end{bmatrix}$，出射光的偏振态为

$$\boldsymbol{E}'=\begin{bmatrix}\widetilde{E}'_x\\ \widetilde{E}'_y\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -\mathrm{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-\mathrm{i}\end{bmatrix}$$

即出射光为右旋圆偏振光.

(2) 圆偏振光通过 $\lambda/4$ 片

左旋圆偏振光的琼斯矢量为 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{bmatrix}$，快轴沿 x 方向的 $\frac{\lambda}{4}$ 片的琼斯矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{i}\end{bmatrix}$，则出射光的琼斯矩阵为

$$\boldsymbol{E}'=\begin{bmatrix}\tilde{E}'_x\\ \tilde{E}'_y\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

即出射光为光矢量与 x 轴呈 135°角的线偏振光.

例 7.8-1 在正交偏振片之间放一个 $\lambda/4$ 片，以自然光入射，当波晶片光轴与偏振片 P_1 的夹角 $\theta=90°$ 时将发生消光现象，用矩阵法证明之.

解 如图 7.8-1，令 $\lambda/4$ 片的快轴沿 y 轴方向，偏振片 P_1、P_2 分别沿 x、y 轴方向.

自然光从偏振片出来后成为光矢量沿 x 轴的线偏振光，其琼斯矢量为 $\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$，经 $\lambda/4$ 片后，出射的 $\boldsymbol{E}'_1$ 的琼斯矢量为 $\boldsymbol{E}'_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -\mathrm{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$，即仍为沿 x 轴方向的线偏振光. 再经偏振片 P_2 后，出射光的琼斯矢量为

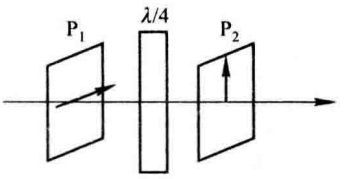


图 7.8-1

$$\boldsymbol{E}'_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

即出射光复振幅在 x、y 轴方向的分量均为零，故无光出射，在 P_2 后发生消光. 若 $\lambda/4$ 片的快轴沿 x 轴，用同样方法计算，可得到 P_2 后消光.

思 考 题

7.1 为什么通过平面平行双折射晶片观察远方物体时只看到一个像，而不是如同物体放在近处那样看到两个像？

7.2 为了使单轴晶体中 o 光和 e 光的偏离角最大，在正入射的情况下，晶体应如何切割？

7.3 如果把方解石分割成厚度相等的 A、B 两块并移开一点距离(图 7.1)，一束自然光通过这两块方解石后有几条光线射出来？如果把方解石 B 绕光线转过一个角度，此时有几条光线从 B 射出来？为什么？

7.4 试根据图 7.2 中所画的折射线情况，判断晶体的正负.

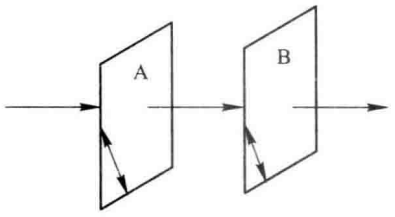


图 7.1

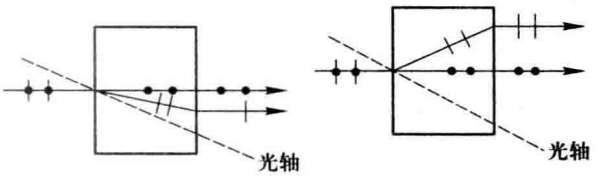


图 7.2

7.5 如图 7.3 所示棱镜是一个由负晶体直角棱镜(光轴垂直于图面)和一个玻璃直角棱镜(折射率为 n)组

成，试就下列情况讨论自然光经棱镜后双折射光线的传播方向：

(1) $n=n_o$；(2) $n=n_e$；(3) $n>n_o$；(4) $n_o>n>n_e$.

7.6　从尼科耳棱镜射出的非常光入射到各向同性的介质中，是否遵从折射定律？

7.7　一束右旋圆偏振光正入射到一玻璃表面，反射光是右旋还是左旋？

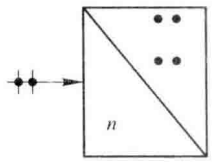


图 7.3

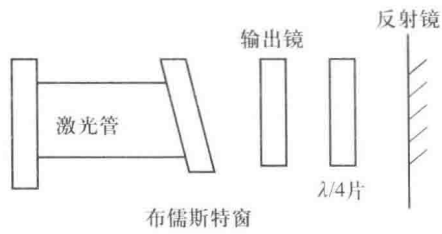


图 7.4

7.8　有哪些方法可以使一束线偏振光的振动面旋转 90°？

7.9　在正交偏振片之间放一块 $\lambda/4$ 片，以自然光入射，旋转 $\lambda/4$ 片时出射光强有何变化？如果有强度极大或消光现象，它们在 $\lambda/4$ 片光轴处于什么位置时出现？

7.10　用什么方法区别 $\lambda/2$ 片和 $\lambda/4$ 片？

7.11　如图 7.4 所示，在使用激光器发出的平面偏振光的各种仪器上，为了避免激光返回谐振腔，在激光器输出镜端放一 $\lambda/4$ 片，并且其主截面与光振动面成 45°角. 试说明此波片的作用.

7.12　为了确定一束圆偏振光的旋转方向，可将 $\lambda/4$ 片置于检偏器前，再将检偏器转到消光位置，这时发现 $\lambda/4$ 片的快轴的方位须沿着顺时针方向转 45°才能与检偏器的透振方向重合. 问该圆偏振光是左旋还是右旋？

7.13　怎样用两个偏振片和一个白色光源来区分垂直于光轴和平行于光轴切出的两块石英晶片？

习　　题

7.1　用方解石制成的三棱镜，其光轴平行于棱，问自然光入射角在什么范围内时，出射光是线偏振光，并画出其振动方向，指出其对顶角大小的要求.

7.2　一束线偏振光垂直入射到一块方解石晶体上，光振动面与晶体主截面呈 20°角，试计算 e 光和 o 光的相对振幅和强度.

7.3　一束钠黄光以 50°的入射角入射到方解石平板上，设光轴与表面平行，并垂直于入射面，问在晶体中 e 光和 o 光的夹角为多少？

7.4　如图 7.5 所示，沃拉斯顿棱镜的顶角 $\alpha=15°$ 时，两出射光的夹角为多少？

7.5　单色线偏振光垂直射入光轴与表面平行的方解石晶体，其振动方向与主截面呈 30°，两折射光再经过方解石后面的偏振片，偏振片透振方向与原入射光振动方向呈 50°，求最后两条光线的相对强度.

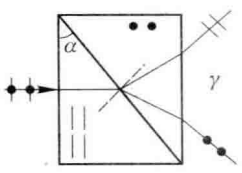


图 7.5

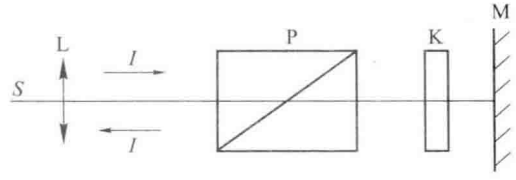


图 7.6

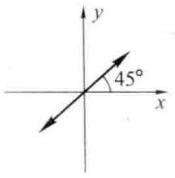
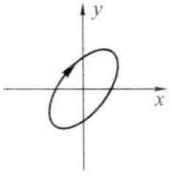
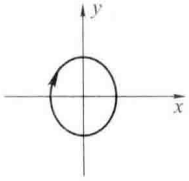
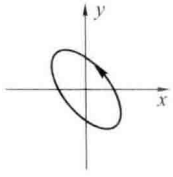
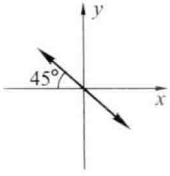
7.6　若将一线偏振光入射到以光束为轴以角速度 ω_0 转动的半波片上，出射光的偏振态如何？其光矢量如何变化？

7.7　在图 7.6 所示装置中，S 为单色光源，置于透镜 L 的焦点处；P 为偏振器；K 为单色光的 $\lambda/4$ 片，其快轴与偏振器的透光轴成 α 角；M 为平面反射镜. 已知入射到偏振器的光强度为 I_0，通过分析光束经过各元件后的光振动状态，求出射光束返回 L 处的光强（以 I_0 和 α 表示，不计反射、吸收等损失）.

7.8　用一石英薄片来产生一束椭圆偏振光，要使椭圆的长轴或短轴在光轴方向，长短轴之比为 2∶1，而且是左旋的，问石英片应为多厚？如何放置？（$\lambda = 589.3\ \text{nm}$，$n_o = 1.544\ 2$，$n_e = 1.553\ 4$.）

7.9　在表 7-A 中，画出正入射的各偏振光经方解石制成的各种波片后出射光的偏振态.

表 7-A

入射光偏振态	经 $\lambda/8$ 片后	经 $\lambda/4$ 片后	经 $\lambda/2$ 片后	经全波片后
				
				
				
				
				

7.10　两块偏振片透振方向夹角为 60°，中间插入一块 $\lambda/4$ 片，波片主截面平分上述夹角，光强为 I_0 的自然光入射，求通过第二个偏振片的光强.

7.11　两偏振片之间有一 $\lambda/2$ 片，波片的快轴与 P_1 的透振方向呈 38°. 设波长为 $\lambda=632.8$ nm 的光垂直射到 P_1 上，要使透射光有最大振幅，P_2 应如何放置？若晶片的折射率 $n_o=1.52$，$n_e=1.48$，试计算此晶片的最小厚度.

7.12　一块厚度为 0.04 mm 的方解石晶片，其光轴平行于表面，将它插入正交偏振片之间，且使主截面与第一偏振片的透振方向呈角度 $\theta(\theta\neq0°,90°)$，试问哪些光不能透过该装置？

7.13　在两个正交偏振片之间有一石英巴比涅补偿器（$n_o=1.544\ 2$，$n_e=1.553\ 3$），石英的光轴与偏振片的透振方向均呈 45°. 问：

（1）用平行钠光照明（$\lambda=589.3$ nm），在第二个偏振片后面会看到什么现象？

（2）若楔角 $\alpha=2.75°$，求干涉条纹间距.

（3）云母是双轴晶体，很薄时可按单轴晶体处理. 令一云母片的快慢轴与巴比涅补偿器的快慢轴方向一致，将其放在补偿器上，所有暗纹移动 1/4 条纹间距，试求云母片产生的光程差.

7.14　如图 7.7 所示，平行单色光照射到杨氏双缝上，在屏幕上得到一组干涉条纹. 现在双缝后放一偏振片 P，干涉条纹有何变化？若在一个缝的偏振片后再添置一个 $\lambda/2$ 片，使其光轴与偏振片透振方向呈 45°，则屏幕上条纹又如何变化？若将 $\lambda/2$ 片绕光线传播方向旋转一周，屏幕上干涉条纹发生什么变化？

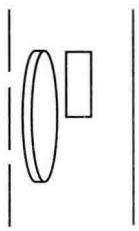


图 7.7

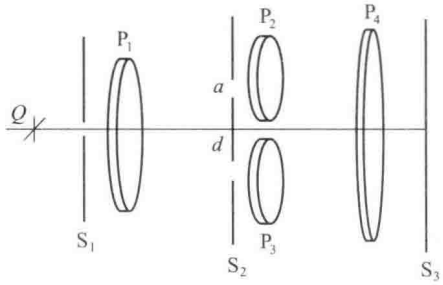


图 7.8

7.15　考虑一个改进的杨氏双缝装置（图 7.8），Q 是一个波长为 λ 的单色点光源，S_1 是一个开有长狭缝的屏，S_2 是一个开有相距为 d 的双缝的屏，$d\gg a$. P_1、P_2、P_3 和 P_4 都是偏振片. 对于下面几种情况，试描述并简要解释接收屏 S_3 上的干涉图样及强度.

（1）移去所有的偏振片；

（2）移去 P_1，使 P_2 和 P_3 透振方向正交，P_2 与 P_4 透振方向呈 45°；

（3）移去 P_4，其他同（2）；

（4）P_1 与 P_2 透振方向呈 45°，P_2 和 P_3 仍然正交，P_4 垂直于 P_1.

7.16　将一石英尖劈置于两正交偏振片 P_1 和 P_2 之间，劈角为 0.5°，光轴与劈棱平行，其主截面与任一偏振片的透振方向呈 45°，平行单色光入射到 P_1 上. 求：

（1）在 P_2 后的屏上观察到的干涉图样是何形状？

（2）计算相邻两暗纹的间距（$\lambda=600$ nm，$n_o=1.544\ 2$，$n_e=1.553\ 3$）；

（3）若将劈棱绕入射光方向转过 90°，P_2 后的屏上将有什么变化？

7.17　一束波长为 λ 的右旋圆偏振平行光，正入射到一块两表面平行的方解石晶片上，且充满整个晶片，如图 7.9 所示. 晶片的光轴平行于表面（图中 y 方向），晶片中斜线部分 A 为 $\lambda/4$ 片，其余部分为 $\lambda/2$ 片.

（1）分别画出通过晶片 A、B 两部分出射光的偏振态；

（2）从晶片出射的光再通过偏振片 P（P 的透光轴与 y 轴呈 45°），在屏上可看见什么现象？

（3）将 P 绕光线方向旋转 360°过程中，屏上光强将发生什么变化？

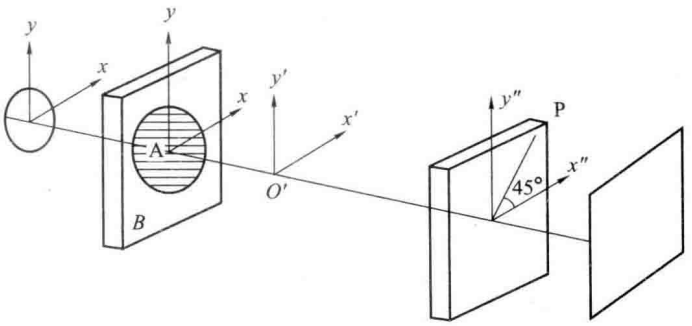


图 7.9

7.18　纯蔗糖溶液的比旋光率$[\alpha]=6.65(°)/[\mathrm{cm}\cdot(\mathrm{g/cm^3})]$，今有不知纯度的蔗糖溶液，浓度为 20%（即每 100 $\mathrm{cm^3}$ 中有 20 g 蔗糖），溶液的厚度为 20 cm，对一线偏振光振动面产生 25°角的旋转. 求这种蔗糖溶液的纯度（即纯糖占蔗糖的百分比）.

7.19　在两个透振方向平行的偏振片 P_1、P_2 之间放一 $\lambda/2$ 片，其主截面沿 P_1 透振方向右旋 27°，$\lambda/2$ 片后再放一右旋石英片，其旋光率为 $\alpha=18(°)/\mathrm{mm}$，用波长为 λ 的单色光入射到 P_1 上，求 P_2 后消光时石英片的厚度为多少？

7.20　将厚度为 1 mm 的沿垂直光轴方向切出的石英片放在正交偏振片之间，为什么入射光的波长无论为何值时晶片总是亮的？

7.21　垂直于光轴切出厚度为 1 mm 的石英片，如何用两个偏振片和一个单色光源确定晶片是右旋还是左旋的？

7.22　垂直于光轴切出厚度为 1 mm 的石英片，将其放在透光方向平行的偏振片之间，对某一波长偏振面旋转 20°. 试问石英晶片的厚度为多少时，该波长的光完全消失？

7.23　写出习题 7.9 中第一、第三、第五种入射偏振光的琼斯矢量.

7.24　试求右旋圆起偏器的琼斯矩阵，并证明左旋圆偏振光不能通过右旋圆起偏器.

第八章　光的吸收、色散和散射

本章将讨论光在各向同性介质中传播时与物质相互作用产生的吸收、色散和散射等现象的规律及其理论解释. 最后简要介绍近场拉曼散射及基于光的吸收及散射现象而发展起来的差分光学吸收光谱系统及激光雷达系统的基本原理、仪器结构及其在环境监测中的应用.

§8.1　光 的 吸 收

8.1.1　吸收定律

光波通过介质时,其能量被介质吸收并转化为其他形式的能量,从而引起光的强度随进入介质的深度而减弱的现象,称为**光的吸收**. 光波在任何介质中传播时,其能量都会被介质吸收一部分,完全没有吸收的绝对透明介质是不存在的.

如图 8.1-1,设在均匀各向同性介质中,光强为 I_0 的单色平行光束沿 z 方向传播,通过距离为 z 处附近厚度为 $\mathrm{d}z$ 的介质薄层后,因介质的吸收,光的强度由 I_z 衰减成 $I_z-\mathrm{d}I$. 实验证明,若入射光不是很强,则光强的相对减少量 $-\dfrac{\mathrm{d}I}{I_z}$ 与介质薄层厚度成正比,与入射光强的大小无关,即

$$-\frac{\mathrm{d}I}{I_z}=\alpha\mathrm{d}z \tag{8.1-1}$$

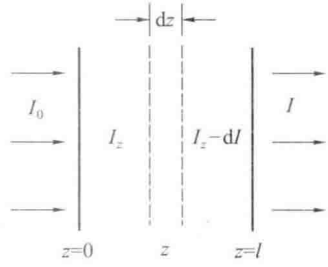


图 8.1-1　光的吸收

式中比例系数 α 是与光强无关的量,称为该物质的**吸收系数**,负号表示随传播距离的增加,光强随之减小.

对于通过厚度为 l 的介质后光强的大小,只须对(8.1-1)式积分即可求得. 令 $z=0$ 处和 $z=l$ 处光强分别为 I_0 和 I,则积分式为

$$-\int_{I_0}^{I}\frac{\mathrm{d}I}{I_z}=\alpha\int_0^l\mathrm{d}z$$

即得

$$I=I_0\mathrm{e}^{-\alpha l} \tag{8.1-2}$$

上式由布格(Bouguer)在 1729 年推出,称为**布格定律**. 1760 年经朗伯作了详细说明,又称为**朗伯定律**. 由此式可见,吸收系数 α 的量纲为长度量纲的倒数,单位是 cm^{-1},它表示因介质的吸收,光强衰减到原来的 $\mathrm{e}^{-1}\approx36.8\%$ 时,光所通过的介质的厚度的倒数. 在线性光学范围内,这个反映光

的吸收的规律相当精确，但对于强激光源，上述规律不再成立，须用非线性光学理论处理.

对于溶液，吸收系数 α 与其浓度 C 成正比，有 $\alpha=AC$，A 只与吸收物质的分子特性有关而与溶液浓度无关. 于是(8.1-2)式可表示为

$$I=I_0e^{-ACl} \tag{8.1-3}$$

上式由比尔(Beer)在 1852 年推出，称为**比尔定律**. 它表示溶液吸收的光能与溶液中吸收物质的分子数成正比. 比尔定律仅在溶液浓度较小时成立，在溶液浓度相当大时，分子间平均距离减小，每个分子对光能的吸收能力都受到邻近分子的影响，比尔定律不再成立. 在比尔定律成立的情况下，可根据(8.1-3)式，测量出经溶液后透射光强的大小，从而确定溶液的浓度.

为了说明介质的吸收，还可引入衰减系数 κ，它与吸收系数 α 的关系为

$$\alpha=\frac{4\pi}{\lambda_n}\kappa=\frac{4\pi}{\lambda}n\kappa \tag{8.1-4}$$

式中 λ_n 和 λ 分别为入射光在介质中和在真空中的波长，n 为介质折射率，于是布格定律可表示为

$$I=I_0e^{-\frac{4\pi}{\lambda}n\kappa l} \tag{8.1-5}$$

8.1.2 复折射率

从(8.1-2)式和(8.1-5)式可知，平面光波在折射率为 n 的介质中沿 z 方向传播，因介质的吸收，其振幅将随 z 的增加而衰减，即

$$A=E_0e^{-\frac{1}{2}\alpha z}=E_0e^{-\frac{2\pi}{\lambda}n\kappa z}=E_0e^{-\frac{\omega}{c}n\kappa z}$$

则该平面波函数为

$$E=E_0e^{-\frac{\omega}{c}n\kappa z}e^{-i\omega\left(t-\frac{n}{c}z\right)}$$

上式表明，它是一列以相速度 $\frac{c}{n}$ 沿 z 方向传播、振幅 $E_0e^{-\frac{\omega}{c}n\kappa z}$ 随传播距离 z 的增加呈指数衰减的平面波. 上式又可表示为

$$E=E_0e^{-i\omega\left(t-\frac{n(1+i\kappa)}{c}z\right)}=E_0e^{-i\omega\left(t-\frac{\tilde{n}}{c}z\right)} \tag{8.1-6}$$

其中复数

$$\tilde{n}=n(1+i\kappa) \tag{8.1-7}$$

称为复折射率. 它的实部为介质的折射率，它的虚部 $n\kappa$ 反映了电磁波被介质吸收后产生的衰减，$n\kappa$ 与 α 的关系，见(8.1-4)式.

8.1.3 吸收光谱

如果介质对各种波长的光具有几乎相同的吸收程度，即介质的吸收系数 α 与光的波长无关，称为**一般吸收**. 如果介质对某些波长的光具有强烈的吸收，则称为**选择吸收**. 一般吸收的光谱是连续光谱，而选择吸收的光谱则为线光谱、带光谱或部分连续光谱. 让具有连续谱的光通过吸收

介质后，再由光谱仪将不同波长的光被吸收的情况显示出来，就得到该介质的吸收光谱. 利用图 8.1-2所示的装置，可以观察各种物质的吸收光谱. 图 8.1-3 是钠蒸气的吸收光谱. 吸收的波长范围愈窄，吸收光谱愈呈线状. 不同物质的吸收光谱都具有各自的特征，通过观察物质的吸收光谱，可以进行物质成分的分析.

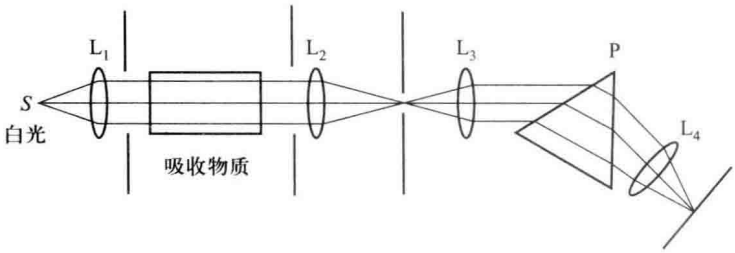


图 8.1-2　观察吸收光谱的试验装置

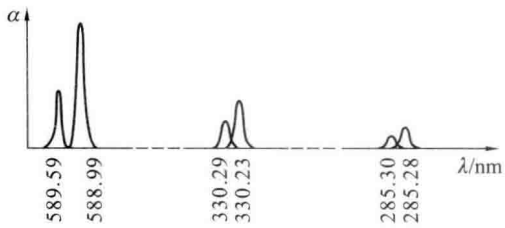


图 8.1-3　钠蒸气的吸收光谱

一些在可见光范围产生一般吸收的物质，如空气、纯水、无色玻璃等，在红外和紫外区则产生选择吸收. 所以选择吸收是电磁波与物质相互作用的普遍规律. 例如地球大气对可见光和 300 nm以上的紫外光是透明的，但对红外光的某些波段有吸收. 电磁波中对大气透明度高的波段称为“大气窗口”，如图 8.1-4 所示，这是红外遥感、红外跟踪、红外导航等技术中采用的波段.

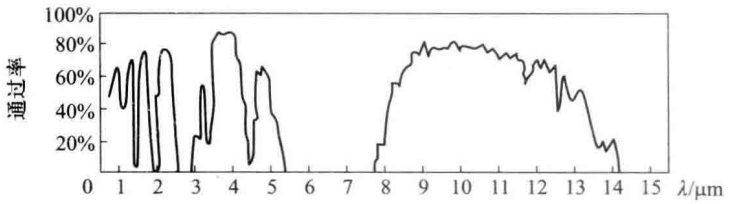


图 8.1-4　“大气窗口”对应的波段

分光仪器中透光元件的光学材料，对所用的波段必须是透明的. 由于物质的选择吸收，任何光学材料都有一定的透光极限，波长在透光极限以外的电磁波将被材料强烈吸收. 表 8.1-A 是一些光学材料的透光极限.

太阳发射连续光谱，但在其连续光谱上出现许多暗线，这些暗线是原子气体的线状吸收光谱. 19 世纪，夫琅禾费、基尔霍夫和本生等人先后研究了这一现象并分析了这些吸收谱线，发现太阳的吸收谱线是其周围温度较低的太阳大气中的原子对炽热的内核发射出的连续光谱选择吸收的结果. 表 8.1-B 列出了太阳光谱的一些吸收谱线. 表中字母是夫琅禾费给吸收线的标志. 在

标明介质折射率对应的波长时，一般也用这些字母来表示，如 n_e 表示介质对波长为 656.28 nm 的光的折射率，n_{D1} 表示介质对波长为 589.6 nm 的钠光的折射率等.

表 8.1-A 常用光学材料的透光极限

材料	透光极限(波长/nm)	
	紫外	红外
冕玻璃	350	2 000
火石玻璃	380	2 500
石英(SiO_2)	180	4 000
氯化钾(KCl)	180	2 300
岩盐(NaCl)	175	14 500
氟化锂(LiF)	110	7 000

表 8.1-B 太阳光谱的一些吸收谱线及吸收元素

符号	波长/nm	吸收元素	符号	波长/nm	吸收元素
A	759.4~762.1	O	b_1	518.362	Mg
B	686.7~688.4	O	F	486.133	H
C	656.282	H	G	430.791	Fe
D_1	589.592	Na	G	430.774	Ca
D_2	588.995	Na	g	422.673	Ca
D_3	587.562	He	H	396.849	Ca
E	526.954	Fe	K	399.368	Ca

自然界各种物质对可见光的选择吸收，使它们呈现出不同的颜色，形成了五彩缤纷的世界. 例如白光照明下，由于水对红光的吸收较强，所以水呈现出蓝绿色；红色物体吸收蓝绿光，而反射红光；蓝色物体吸收红黄色而反射绿光、蓝光、紫光；黄色物体吸收蓝绿色而反射黄光、橙光、红光等等.

例 8.1-1 玻璃的吸收系数为 $10^{-2}\ \mathrm{cm}^{-1}$，空气吸收系数为 $10^{-5}\ \mathrm{cm}^{-1}$. 问 1 cm 厚的玻璃所吸收的光，相当于多厚的空气层所吸收的光?

解 由朗伯定律，物质所吸收的光强为

$$I_0-I=I_0(1-\mathrm{e}^{-\alpha l})$$

在 I_0 相同情况下，要使玻璃和空气吸收的光强相等，则有

$$1-\mathrm{e}^{-\alpha l}=1-\mathrm{e}^{-\alpha' l'}$$

式中 α、α'、l、l' 分别为玻璃和空气的吸收系数和厚度. 于是 $\alpha l=\alpha' l'$

则有

$$l'=\frac{\alpha l}{\alpha'}=\frac{10^{-2}\times 1}{10^{-5}}\ \mathrm{cm}=10^3\ \mathrm{cm}=10\ \mathrm{m}$$

即 1 cm 厚的玻璃所吸收的光能，相当于 10 m 厚的空气层吸收的光能.

§8.2　光的色散

8.2.1　色散和色散率

介质中的光速亦即是介质的折射率随入射光波长而变化的现象称为**色散**. 反映折射率与波长的函数关系 $n=f(\lambda)$ 的曲线称为色散曲线. 利用棱镜测出不同波长的入射光的最小偏向角,再根据最小偏向角与材料折射率的关系,可得到棱镜材料的色散曲线,图 8.2-1 是在可见光范围内,几种透明介质的色散曲线.

介质折射率 n 在波长 λ 附近随波长的变化率,称为**色散率** ν,即

$$\nu=\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{\mathrm{d}f(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} \tag{8.2-1}$$

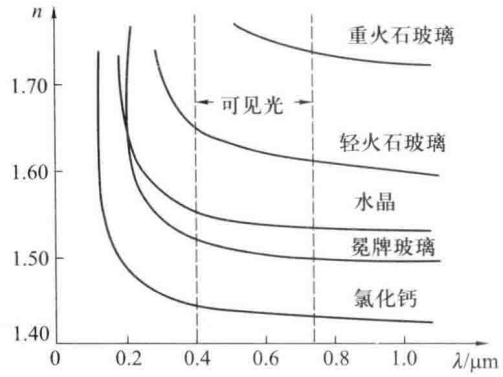


图 8.2-1　几种光学材料的色散曲线

8.2.2　正常色散和反常色散

从图 8.2-1 可见,这些介质的色散曲线具有如下特点:

(1) 折射率 n 随波长 λ 的增大而单调下降;

(2) 色散率 $\nu=\left|\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right|$ 随波长 λ 的增大而单调下降;

(3) 在波长 λ 一定时,折射率 n 愈大的物质,其色散率 $\left|\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right|$ 也愈大.

凡具有上述(1)、(2)两个特点的色散为**正常色散**. 1836 年,柯西(Cauchy)用下列经验公式描述正常色散,称为**柯西公式**:

$$n=f(\lambda)=A+\frac{B}{\lambda^2}+\frac{C}{\lambda^4} \tag{8.2-2}$$

式中 λ 是光在真空中的波长,A、B、C 是与介质有关的常数,均可由实验测得. 上式在可见光区域

对正常色散相当准确，当 λ 变化范围不大时，上式只取前两项即可：

$$n=A+\frac{B}{\lambda^2} \tag{8.2-3}$$

色散率 ν 亦可表示为

$$\nu=\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}=-\frac{2B}{\lambda^3} \tag{8.2-4}$$

牛顿用正交棱镜法观察了棱镜介质的色散. 实验装置如图 8.2-2 所示. 三棱镜 P_1 和 P_2 的折射棱（c_1c_1'，c_2c_2'）互相垂直. 白光经狭缝 S 和透镜 L_1 后成为平行光，若不放置 P_2，则光屏上得到垂直于 c_1c_1' 的水平连续光谱 ab；若置入 P_2，使通过 P_1 后的光束再向下，即垂直于 c_2c_2' 的方向偏折，于是光屏上出现倾斜彩带 $a'b'$. 若棱镜 P_1、P_2 的材料相同，则光谱 $a'b'$ 是直的，与 ab 成一倾角；若 P_1、P_2 材料不同，则 $a'b'$ 呈弯曲状，而且光谱弯曲的形状粗略地反映了 $n=f(\lambda)$ 的图形. 利用最小偏向角，通过实验测出棱镜物质对不同单色光的折射率，可以准确地求出 $n=f(\lambda)$ 的函数关系.

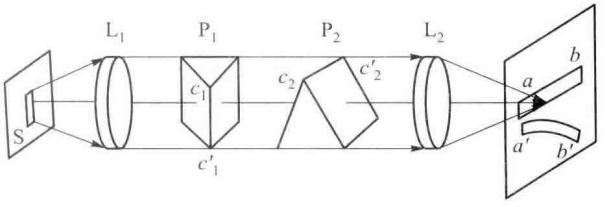


图 8.2-2 用正交棱镜观察色散

对于强烈吸收波段，介质折射率随波长的变化不再具有上述(1)、(2)两个特点. 1862 年，勒鲁(F. P. Leroux)用三棱柱形容器充以碘蒸气观察光的色散，发现紫光的偏折比红光的偏折小，他称这种折射率随波长的减小而减小的现象为反常色散. 这个名词一直沿用至今，其实反常色散并不反常，它是任何物质在吸收带附近所共有的现象，即反常色散的起因是由于介质对光的选择性吸收. 由于选择吸收是所有物质的共性，所以“反常”色散也是物质共有的普遍性质.

图 8.2-3 是石英的色散曲线，石英在可见光区是透明的，若把色散曲线的测量向吸收区延伸，则会发现测量结果与由柯西公式得出的计算结果不符. 如图 8.2-3 所示曲线 PQR 段，测量结果与计算结果完全一致. 从 R 开始向吸收区延伸时，n 值的测量结果比计算结果下降要快得多. 图中实线是测量结果，虚线是计算结果. 而且在吸收区实际上无光通过，n 值也就测不出来. 当入射光波长越过吸收区后，又有光通过，这时折射率数值很大，且随波长的增加而急剧下降. 在远离吸收带时，n 值变化减慢，这时又进入了另一个正常色散区，即曲线中的 ST 段，又满足柯西公式，只是在各段曲线相应的常数 A、B 的值也随之改变. 在吸收区附近色散曲线

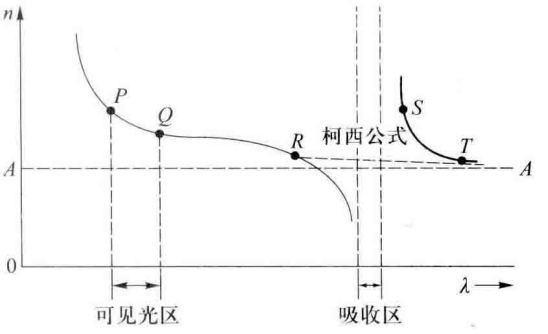


图 8.2-3 石英的色散曲线

明显的不连续，且吸收区长波端的折射率明显地大于短波端的折射率，这显然有别于正常色散，故称为反常色散.

用正交棱镜法观察钠蒸气的反常色散的实验装置如图 8.2-4 所示. 图中 T 为一水平钢管，两端带有水冷玻璃窗，沿管底置放金属钠，管内抽成真空. 在管下面加热，同时冷却其上部. 钠蒸气从管底向顶部扩散，管内钠蒸气密度从下至上逐渐减小，其作用与图中虚线所示的折射棱位于水平方向的棱镜等效. 整个装置的原理与图 8.2-2 所示装置的原理相同. 管子未加热时，管内气体均匀，从 S_1 射入的白光经 T 时不发生偏折，仅从 S_2 进入棱镜分光仪 P.S.(由 S_2、L_3、P、L_4 构成)后，在光屏上得到一水平连续光谱带. 当管子被加热时，由于管内钠蒸气棱镜的色散作用，使水平光谱带向下偏折，并在钠的吸收带处水平谱带中断.

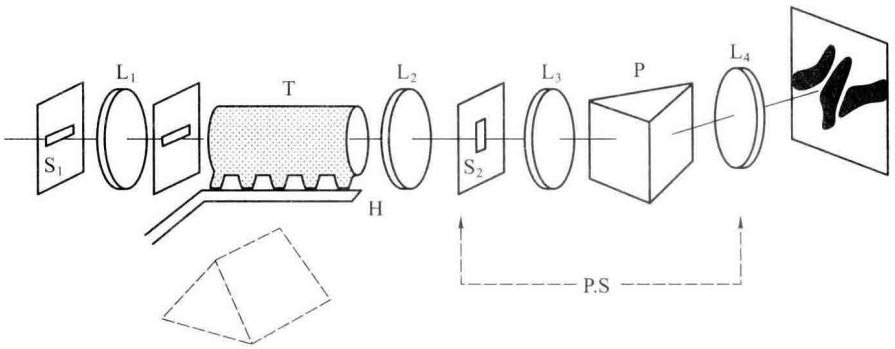


图 8.2-4　用正交棱镜装置观察钠蒸气的反常色散

8.2.3　吸收和色散的经典电子理论

如前所述，麦克斯韦电磁理论最重要的成就之一就是将电磁现象与光现象联系起来. 光的电磁理论可以很好地解释光在介质中传播以及光与介质相互作用产生的某些重要现象. 但是，麦克斯韦电磁理论在说明光和物质相互作用时，忽略了组成介质的原子分子的电结构，粗略地把介质看成连续结构，得出了在介质中光速不随光波频率改变的错误结论，从而使得用麦克斯韦电磁理论完满解释光的吸收、色散和散射现象时遇到困难. 为了克服这种困难，必须考虑组成介质的原子和分子的电结构，正确地描述介质中原子和分子的运动规律，即必须用量子理论才能解释，但已超出本书的范围. 下面简要介绍洛伦兹(Lorentz)从原子分子观点提出的建立在经典理论基础上的电子论.

洛伦兹把构成物质的原子或分子的体系视为振子，其中的电子受到一个准弹性力(束缚力)作用被维系在其平衡位置附近，以一定的固有频率振动. 此外，电子还受到一个阻尼力，且认为与电子的速度成正比. 由于带有正电荷的原子核质量比电子质量大许多倍，可视为正电荷中心不动，而负电荷相对于正电荷作振动，正负电荷量的绝对值相同，构成了一个电偶极子. 电子在入射光场的周期性驱动力(磁场对电子的作用力很小，可略去不计，只考虑电场对电子的作用力 $e\boldsymbol{E}$)的作用下，按入射光频率作受迫振动，从光波中吸收能量，并发出与入射光同频率的次波. 利用这种极化和辐射的偶极子模型，可以比较粗浅地描述光的吸收、色散和散射.

为简单起见，采用单振子模型，假设在所研究的均匀介质中，只有一种分子，并且不考虑分子

间的相互作用,每个分子内只有一个电子作强迫振动,所构成的电偶极子的电偶极矩为

$$p=-er \tag{8.2-5}$$

其中,$-e$ 是电子电荷;r 是电子在光波场作用下离开平衡位置的距离.

如果单位体积中有 N 个分子,则单位体积内的平均电偶极矩(极化强度)为

$$P=Np=-Ner \tag{8.2-6}$$

根据牛顿定律,作强迫振动的电子的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=-eE-fr-g\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \tag{8.2-7}$$

其中,等号右边的三项分别为电子受到的入射光电场的强迫力、准弹性力和阻尼力,f 是弹性系数、g 是阻尼系数、E 是入射光场,且

$$E=\widetilde{E}(z)\exp(-\mathrm{i}\omega t) \tag{8.2-8}$$

引入衰减系数 $\gamma=g/m$、电子的固有振动频率 $\omega_0=\sqrt{f/m}$,(8.2-7)式成为

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}+\gamma\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2r=-\frac{eE}{m} \tag{8.2-9}$$

上式是描述光与物质相互作用的经典理论的基本方程. 从求解该方程入手,依次导出:束缚电子的偶极矩 $p\rightarrow$极化强度矢量 $\boldsymbol{P}\rightarrow$电极化率 $\chi(\omega)\rightarrow$折射率 $n(\omega)$,从而给出介质的色散关系,这就是经典色散理论的基本思路.

将(8.2-8)式代入(8.2-9)式,可以求解得到电子在光场作用下的位移为

$$r(t)=\frac{-e/m}{(\omega_0^2-\omega^2)-\mathrm{i}\gamma\omega}\widetilde{E}(z)\exp(-\mathrm{i}\omega t) \tag{8.2-10}$$

可见 $r(t)$ 为一复数,表明电子的受迫振动与入射光振动存在一定的相位差.

将(8.2-10)式代入(8.2-6)式中,可得极化强度的表达式

$$P=-Ner=\frac{Ne^2/m}{(\omega_0^2-\omega^2)-\mathrm{i}\gamma\omega}\widetilde{E}(z)\exp(-\mathrm{i}\omega t) \tag{8.2-11}$$

由电磁场理论,极化强度与电场有以下关系:

$$P=\varepsilon_0\chi E \tag{8.2-12}$$

式中 χ 为描述介质极化特性的电极化率,比较(8.2-11)式与(8.2-12)式可得

$$\chi=\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)-\mathrm{i}\gamma\omega} \tag{8.2-13}$$

因相对电容率 $\varepsilon=1+\chi$,折射率 $n=\sqrt{\varepsilon}$,并由(8.2-13)式,即得到位移 r 与折射率 n 的关系. 将(8.2-10)式代入,可得

$$\widetilde{n}^2=\varepsilon=1+\chi=1+\left(\frac{P}{\varepsilon_0 E}\right)=1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\gamma\omega)} \tag{8.2-14}$$

现将上式右端的实部和虚部分开

$$1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\gamma\omega)}=\left[1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}\right]+\mathrm{i}\left[\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}\right] \tag{8.2-15}$$

由(8.1-7)式,(8.2-14)式左端为

$$\tilde{n}^2=[n(1+\mathrm{i}\kappa)]^2=n^2(1-\kappa^2)+\mathrm{i}2n^2\kappa \tag{8.2-16}$$

式中 κ 为衰减系数,因(8.2-14)式两端的实部和虚部应分别相等,从(8.2-15)、(8.2-16)式得

$$n^2(1-\kappa^2)=1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} \tag{8.2-17}$$

$$2n^2\kappa=\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} \tag{8.2-18}$$

上两式称为**亥姆霍兹方程**. 其中(8.2-17)式和(8.2-18)式,分别为复折射率 $\tilde{n}$ 的实部和虚部. 它们所反映的 n 和 $n\kappa$ 与入射光频率 ω 的关系,如图 8.2-5 的色散曲线(实线)和吸收曲线(虚线)所示. 从亥姆霍兹方程和图 8.2-5 可见:

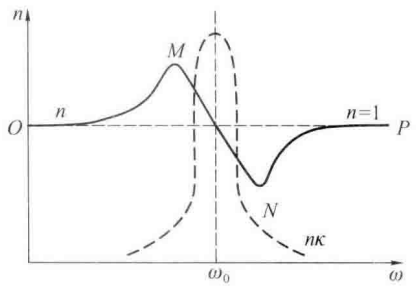


图 8.2-5　n、$n\kappa$ 随 ω 的变化关系

(1) 在 OM 段,$n>1$,且 n 随入射光频率 ω 的增加而增加,这是正常色散区域. 该区域内,$\kappa\to 0$,吸收很小. 因此衰减系数 γ 可忽略不计. 这时(8.2-17)式可简化为

$$n^2=1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2} \tag{8.2-19}$$

这就是亥姆霍兹方程在正常色散区域内的特例,称为**塞耳迈耶尔**(**Seilmeier**)方程.

(2) 当 $\omega=\omega_0$ 时,$n\kappa$ 达最大值,产生共振吸收,吸收区 MN 内,n 随 ω 的增加而减少,这是反常色散区域. 即反常色散的起因是由于介质的吸收.

(3) 在 NP 段, $n<1$,例如 X 射线作为入射光时,$n=0.999\,999$,这是正常色散区域,该区域内 $\kappa\to 0$.

由此可见,亥姆霍兹方程通过复折射率把光的色散与吸收联系起来.

在前面的讨论中,我们把问题简单化了,即假设物质中的电子只有一个固有振动频率,更普遍的模型应该是认为有多重振子. 设第 j 种振子的电荷与质量分别为 e_j 和 m_j,对应的固有频率和衰减系数分别为 ω_{0j} 和 γ_j,单位体积内谐振子数为 N_j,这时对应于(8.2-14)式的复折射率 $\tilde{n}$ 的表达式应该改写为

$$\tilde{n}^2=1+\sum_j\frac{N_j e_j^2}{\varepsilon_0 m_j}\frac{1}{(\omega_{0j}^2-\omega^2)-\mathrm{i}\gamma_j\omega} \tag{8.2-20}$$

上式表明,对于一般介质,在全波段范围内不只有一个吸收带,而是有多个吸收带. 这一点已

由它的吸收光谱所证实. 上式相应的色散曲线如图 8.2-6 所示,它表示了介质在整个波段内的色散特性.

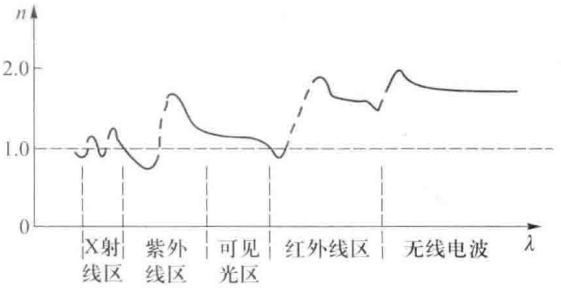


图 8.2-6 全波段的色散曲线

由图 8.2-6 可见,在反常色散区域的短波部分,出现介质的折射率 $n<1$ 的情况,即介质中的光速大于真空中的光速. 这似乎是与相对论中"任何速度都不可能超过真空中的光速"的结论相违背的. 实际上,相对论中指出的任何速度都不可能超过真空中的光速,指的是能量传播速度. 而上图中的折射率所对应的光速是光波的等相位面的传播速度,与相对论的结论并不矛盾.

例 8.2-1 常温下,在 0.4 μm 到 9 μm 之间,氢气的色散可以表示为

$$n^2=1+2.721\times10^{-4}+\frac{2.11}{\lambda^2}\times10^{-18}\quad(\lambda\text{ 的单位是 m})$$

如将此式与(8.2-14)式联系起来,把它写成如下形式:

$$n^2=1+A\left(1+\frac{B}{\lambda^2}\right)$$

求出 A、B 之值,并证明本征频率位于紫外区.

解 (8.2-14)式可化为

$$n^2=1+\frac{Nzq^2}{4\pi^2\varepsilon_0 m\nu_0^2}\frac{1}{\left(1-\dfrac{\nu^2}{\nu_0^2}\right)}\approx1+\frac{Nzq^2}{4\pi^2\varepsilon_0 m\nu_0^2}\left(1+\frac{\nu^2}{\nu_0^2}\right)$$

因为 $\lambda=\dfrac{c}{\nu}$,$\lambda_0=\dfrac{c}{\nu_0}$,若将上式表为 $n^2=1+A\left(1+\dfrac{B}{\lambda^2}\right)$ 则其中

$$A=\frac{Nzq^2}{4\pi^2\varepsilon_0 m\nu_0^2},\quad B=\frac{\nu^2}{\nu_0^2}\lambda^2=\lambda_0^2$$

将题上所给二式系数作比较,可得

$$A=2.721\times10^{-4},\quad B=\frac{2.11\times10^{-14}}{2.721}\text{ m}^2=0.78\times10^{-14}\text{ m}^2=\lambda_0^2$$

故 $\lambda_0=\sqrt{0.78}\times10^{-7}\text{ m}=0.9\times10^{-7}\text{ m}=90\text{ nm}$,即本征频率位于远紫外区.

例 8.2-2 光学玻璃对汞蓝光 435.8 nm 和绿光 546.1 nm 的折射率分别为 1.652 5 和 1.624 5. 用柯西公式计算:(1) 此玻璃的 A 和 B;(2) 它对钠黄光 589 nm 的折射率;(3) 对钠黄光的色散.

解 (1) 由柯西公式,忽略第三项以后各项,即

$$n=A+\frac{B}{\lambda^2}$$

将 $\lambda_1=435.8\ \text{nm}$，$n_1=1.652\ 5$ 和 $\lambda_2=546.1\ \text{nm}$，$n_2=1.624\ 5$ 分别代入上式，得

$$1.652\ 5=A+\frac{B}{(435.8\ \text{nm})^2},\quad 1.624\ 5=A+\frac{B}{(546.1\ \text{nm})^2}$$

解之得 $B=14\ 643\ \text{nm}^2$，$A=1.575\ 4$.

（2）将此玻璃的 A、B 代入柯西公式，求得它对钠黄光 589 nm 的折射率为

$$n=A+\frac{B}{\lambda^2}=1.617\ 6$$

（3）在 589 nm 处的色散为

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}=-\frac{2B}{\lambda^3}=-1.433\ 2\times10^{-4}\ \text{nm}^{-1}$$

§8.3　光的相速和群速

19 世纪末，人们在测定介质折射率时，发现用不同方法测出的结果不同. 1885 年，迈克耳孙根据 $n=c/v$，测出了空气和水中光速之比即水的折射率为 1.33. 这与傅科 1860 年测得的上述比值为 4/3 相当吻合. 迈克耳孙还测定了空气和二硫化碳（CS_2）中光速之比即其折射率为 1.758. 然而根据折射定律用折射法测出的 CS_2 的折射率却为 1.64，两者的结果相差甚大. 但是这并非实验的误差所致，瑞利对光速的概念进行了深入详尽的研究，提出群速的概念，解决了这个矛盾.

如前所述，所谓波速，是指等相位面传播的速度，即**相速** v_p，

$$v=v_p=\frac{\lambda}{T}=\frac{\omega}{k}\tag{8.3-1}$$

在真空中，各单色光均以相同相速 c 传播，而复色光可视为若干单色波列的叠加，所以复色光在真空中传播的相速就等于单色光在真空中传播的相速，其波形在传播过程中不会发生变化. 在介质中，各单色光以不同的相速传播，复色光的传播速度问题也随之复杂化，其波形也会发生变化. 为简明起见，假设复色光由两列单色光波组成，其振幅均为 a，频率分别为 $\omega_1=\omega_0+\mathrm{d}\omega$，$\omega_2=\omega_0-\mathrm{d}\omega$；波数分别为 $k_1=k_0+\mathrm{d}k$，$k_2=k_0-\mathrm{d}k$，这两列单色光波分别为

$$E_1=a\cos(\omega_1 t-k_1 z),\quad E_2=a\cos(\omega_2 t-k_2 z)\tag{8.3-2}$$

其合成光场为

$$E=E_1+E_2=A(z,t)\cos(\omega_0 t-k_0 z)\tag{8.3-3}$$

式中

$$A(z,t)=2\cos(\mathrm{d}\omega\cdot t-\mathrm{d}k\cdot z)\tag{8.3-4}$$

即合成波函数(8.3-4)式中的振幅 $A(z,t)$ 不是常数，而是随 z、t 缓慢变化的余弦函数，如图 8.3-1 所示. 图中实线表示合成波，通常把这样由不同频率的单色波组成的波列称为**波包**；虚线表示合成波的振幅变化. 合成波的速度，即波包上任一点的前移速度，亦即波包上等振幅面向前推进的

速度，它代表着波包具有的能量传播速度. 这个速度就是整个波包传播的速度，称为**群速** v_g.

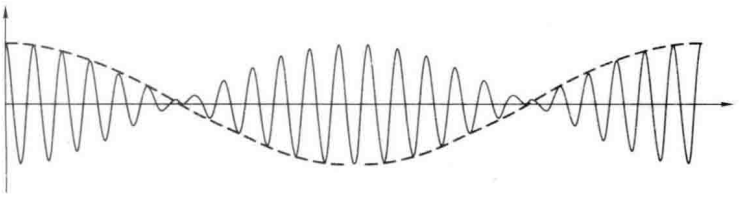


图 8.3-1 两列单色光波的合成波形图

由(8.3-4)式，振幅恒定的条件为：$(\mathrm{d}\omega \cdot t - \mathrm{d}k \cdot z)=$ 常数. 因 $\mathrm{d}\omega$ 和 $\mathrm{d}k$ 不随 t、z 而变，微分上式得：$\mathrm{d}\omega \mathrm{d}t - \mathrm{d}k\mathrm{d}z = 0$，所以群速为

$$v_g = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \tag{8.3-5}$$

将(8.3-5)式与(8.3-1)式比较可以看出：单色光或波包的等相位面的移动速度就是相速；而波包的等幅面的移动速度就是波包的群速，二者关系为

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}(v_p k)}{\mathrm{d}k} = v_p + k\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}k} \tag{8.3-6}$$

由 $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$，$\mathrm{d}k = -\left(\dfrac{2\pi}{\lambda^2}\right)\mathrm{d}\lambda$，上式可化为

$$v_g = v_p - \lambda\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\lambda} \tag{8.3-7}$$

上式即瑞利的**群速公式**. 由上式，在真空中无色散，$\dfrac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\lambda} = 0$，$v_g = v_p$，群速等于相速. 在正常色散区域，$\dfrac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\lambda} > 0$，$v_g < v_p$，群速小于相速；在反常色散区域，由于折射率随波长变化很快，不同波长的单色光之间的相位差很大，这时群速也不再有实际意义了.

根据折射定律，相对折射率等于光在第 1 和第 2 介质中的相速度之比，$n_{21} = \sin i_1 / \sin i_2 = v_1 / v_2$. 因此，用光线折射法，通过测入射角 i_1 及折射角 i_2 而得到的折射率，实际上是它们的相速之比. 而通过测光在不同介质中速度之比来确定折射率，则不论用哪种实验方法测得的光在介质中的速度，实际上是群速而不是相速①. 因此后者测得的 $n_g \neq n_p$. 因为水的色散小，$v_g \approx v_p$，所以 $n_g \approx n_p \approx 1.33$，用不同方法测得的数值比较一致；二硫化碳色散大，$v_g < v_p$，所以 $n_p = \dfrac{c}{v_p} = 1.629$，$n_g = \dfrac{c}{v_g} = 1.725$，其差值就很大.

例 8.3-1 已知冕玻璃对波长为 398.8 nm 光的折射率 $n = 1.525\ 46$，色散为 $\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} = -1.26\times10^{-4}\ \mathrm{nm}^{-1}$，求群速和

① 严格地说，实际上测得的是信号速度，或粗略地说是能量的传播速度. 对于吸收系数很小的介质，能量传播速度等于群速.

相速.

解　(1) 求相速

$$v_p=\frac{c}{n}=\frac{2.997\ 625\times10^8}{1.525\ 46}=1.965\ 06\times10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

(2) 求群速,由 $v_p=\frac{c}{n}$ 得 $\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}n}=-\frac{c}{n^2}=-\frac{v_p}{n}$,而 $\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$

所以

$$v_g=v_p-\lambda\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\lambda}=v_p-\lambda\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}=v_p-\lambda\left(-\frac{v_p}{n}\right)\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}=v_p\left(1+\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)$$

代入数值,得

$$v_g=1.900\ 52\times10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

由此可见,群速小于相速,因而有 $\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\lambda}>0$,属于正常色散区.

§8.4　光的散射

8.4.1　光散射现象

介质对光的散射与对光的吸收、色散一样,都是光与物质相互作用的基本过程. 当光束通过均匀的透明介质时,除传播方向外,是看不到光的. 而光束通过浑浊的液体或穿过灰尘弥漫的空间时,就可在侧面看到光束的轨迹,即在光线原传播方向以外接收到光能. 这种因光束通过非均匀介质所产生的偏离原传播方向,向四周弥散的现象,称为**光的散射**. 这里所谓的介质不均匀,指的是气体中有随机运动的原子、分子或雾、尘埃,液体中混入微粒,晶体中有瑕疵等. 散射光出现的根本原因是介质中出现光学不均匀性.

光的散射是物质改变光线,包括改变其波长和传播方向的一种过程. 在入射光作用下,原子、分子或散射介质的电子作受迫振动并辐射次波. 对于光学均匀介质,各次波源间相位差恒定,各次波相干叠加的结果,只在原入射光方向(若在介质界面上,则只在服从几何光学定律的反射、折射方向)发生干涉相长,其余方向都发生干涉相消,所以在光学均匀介质中不产生光散射现象. 对于光学非均匀介质,其折射率不为常数. 这可能是均匀介质中存在着折射率不同的悬浮微粒所引起的,也可能是介质本身的密度起伏等原因所引起的. 这种光学性质的非均匀性使各次波之间无固定相位差,因而发生非相干叠加,不会产生干涉相消. 结果,各个方向都有光线传播,出现了光的散射现象.

通常,根据散射光的波矢 k 和波长的变化与否,将散射分为两大类:一类散射是散射波矢 k 方向变化,但波长不变化,属于这一类散射的有瑞利散射、米氏散射和分子散射;另一类是散射波矢 k 的方向和波长均变化,属于这类散射的有拉曼散射、布里渊散射等.

8.4.2　瑞利散射

1. 瑞利散射定律

瑞利在 1871 年提出,如果混浊介质的悬浮微粒线度为入射光波长的 1/10,不吸收光能,为电

各向同性，那么在与入射光传播方向成 θ 角的方向上，单位介质中散射光强度为

$$I_\theta = \alpha \frac{N_0 V^2}{r^2 \lambda^4} I_0 (1+\cos^2\theta) \tag{8.4-1}$$

式中 α 是表征混浊介质光学性质非均匀性程度的因子，与悬浮微粒的折射率 n_2 和均匀介质的折射率 n_1 有关. 若 $n_1 \neq n_2$，$\alpha \neq 0$，在 θ 方向产生的散射光强度为 I_θ. 若 $n_1 = n_2$，$\alpha = 0$，则不发生光散射现象. N_0 为单位体积介质中悬浮微粒的数目，V 为一个悬浮微粒的体积，r 为散射微粒到观察点的距离，λ 为入射光的波长，I_0 为入射光强度.

从上式可见，在其他条件相同的情况下，散射光强度与光波长的四次方成反比，即

$$I_0 \propto \frac{1}{\lambda^4} \tag{8.4-2}$$

上式称为**瑞利散射定律**. 它说明光波长愈短，其散射光强度愈大.

利用瑞利散射定律，可以解释若干自然现象. 由于大气对阳光的散射，才使整个天空呈现光亮. 如果没有大气层，白昼的天空也将是一片漆黑. 一个宇航员曾这样描述大气层以外的天空："太阳在高空悬挂着，像一个金色的大圆盘，而天空却像一面黑色天鹅绒的幕布，一颗颗星星就像镶在黑幕布上的宝石，闪闪发光."

天空为什么呈现蓝色呢？根据瑞利散射定律，散射光中短波占优势. 例如红光波长（λ = 720 nm）为紫光波长（λ = 400 nm）的 1.8 倍，则紫光散射光强度约为红光的 $(1.8)^4 \approx 10$ 倍. 所以，太阳的散射光在大气层外层部分呈紫蓝色；在大气层内层，蓝光的成分比红光多，使天空呈蔚蓝色.

正午的太阳基本上呈白色，而旭日和夕阳却呈红色. 如图 8.4-1，正午太阳直射，穿过大气层的厚度最小，阳光中被散射掉的短波成分不太多，因此垂直透过大气层后的阳光基本上是白色或略带黄橙色. 早晚阳光斜射，穿过大气层的厚度比正午时厚得多，被大气散射掉的短波成分也多得多，仅剩下长波成分透过大气到达观察者，所以旭日和夕阳呈红色.

因为红光透过散射物的穿透力比蓝光强，在拍摄薄雾景色时可在相机物镜前加上红色滤光片以获得更清晰的照片，红外线穿透力比可见光强，被用于远距离照相或遥感技术.

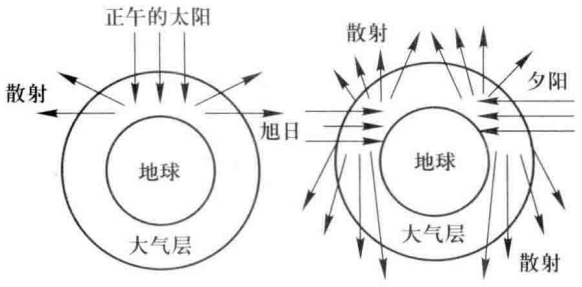


图 8.4-1 太阳光的颜色

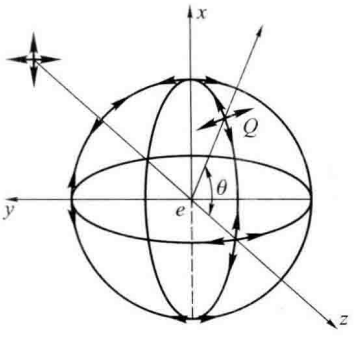


图 8.4-2 散射光的偏振态

2. 瑞利散射光强度的角分布

从(8.4-1)式可以看出，发生瑞利散射时，散射光强度是随散射方向不同而变化的.

如图 8.4-2，设自然光沿 z 方向入射到介质中带电微粒 e 上，使其作受迫振动，由于自然光可以视为两个振幅相等、振动方向相互垂直但无固定相位关系的光振动，例如图 8.4-2 中沿 x 方向和 y 方向的两个光振动，令 x、y 方向的振幅分别为 A_x 与 A_y，则 $A_x=A_y=A$. 于是带电微粒 e 的受迫振动的方向以及 e 因受迫振动而辐射的球面波的光振动方向，都沿着 x、y 这两个方向.

因为光波是横波，其光振动方向总是与其传播方向相垂直. 因此，任意一个散射方向的光振动方向都与其散射光传播方向相垂直. 而散射光的振幅是 e 点的振幅在散射光振动方向上的投影. 如图 8.4-2，假设我们在 Q 点观察散射光，Q 点位于 xez 平面，散射方向 eQ 与原入射光方向 z 成 θ 角. e 沿 y 方向的光振动，经 eQ 方向传播到 Q 点时，在 Q 点的光振动仍与 y 方向平行. 所以这个光振动在 Q 点的振幅 A'_y 就等于它在 e 点的振幅 A_y，即 $E'_y=E_y=E$. 但是沿 x 方向的光振动，并不和散射方向 eQ 垂直，因此在 Q 点，该光振动的方向为 xez 平面上以 e 为中心过 Q 点的圆的切线方向. 振幅 A'_x 为 e 点沿 x 方向光振动的振幅 A_x 在这个切线方向上的投影，如图 8.4-3 所示. 即 $A'_x=A_x\cos\theta=A\cos\theta$. 于是传播到 Q 点的散射光强度 I_θ 为 e 点沿 y 方向的光振动在 Q 点产生的强度 I'_y 与沿 x 方向的光振动在 Q 点的强度 I'_x 之和

$$I_\theta=I'_y+I'_x=E^2(1+\cos^2\theta)=I(1+\cos^2\theta) \tag{8.4-3}$$

从上式可见：散射光强 I_θ 随散射角 θ 不同而变化，在 xez 平面内，散射光强的角分布如图 8.4-4 所示. 在三维空间，它是一个以入射光方向（z 轴）为转轴的旋转面.

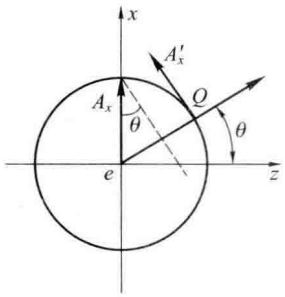


图 8.4-3　散射光的振幅

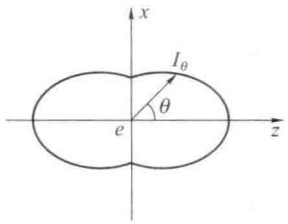


图 8.4-4　自然光产生的散射光强的角分布

3. 瑞利散射光的偏振态

瑞利散射还有一个重要特点，即不同方向的散射光具有不同的偏振态. 这是因为 I'_x、I'_y 的大小与散射方向有关. 在图 8.4-2 中，沿入射光方向（$\theta=0$）或逆入射光方向上（$\theta=\pi$），$I'_x=I'_y$，散射光均为自然光. 在垂直于入射光方向的 x 轴或 y 轴上，$I'_x=0$ 或 $I'_y=0$，散射光为线偏振光. 由于散射光的分布是以入射光方向为轴旋转对称的，所以在 xez 平面内，沿任何方向的散射光都是线偏振的. 在其他方向上，$I'_x\neq I'_y\neq 0$，散射光为部分偏振光. 不同方向散射光的偏振度为

$$P=\frac{I_M-I_m}{I_M+I_m}=\frac{I-I\cos^2\theta}{I+I\cos^2\theta}=\frac{\sin^2\theta}{1+\cos^2\theta} \tag{8.4-4}$$

上式表明，$\theta=0$ 或 π 时，$P=0$，即沿着或逆着入射光方向的散射光为自然光；$\theta=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 时，$P=1$，即与入射光垂直的方向上，散射光为线偏振光；其余方向上的散射光为部分偏振光.

如果散射分子是各向异性的，则其电极化矢量一般与入射光光矢量方向不一致. 沿 z 方向的入射光为线偏振光时，正侧面散射光是偏振度 $P<1$ 的部分偏振光，即出现退偏振现象.

令散射光沿 x 轴和 y 轴的强度分别为 I_x，I_y，则在 z 方向观察到的部分偏振光的偏振度为

$$P=\left|\frac{I_y-I_x}{I_y+I_x}\right| \tag{8.4-5}$$

为了表征各向异性分子使正侧面散射光偏振度退化的程度，定义退偏振度为

$$\Delta=1-P \tag{8.4-6}$$

通过测量退偏振度，可判断分子各向异性程度及分子结构.

8.4.3 米氏散射

米氏散射(Mie scattering)又称为大粒子散射，其散射微粒的直径与入射光波长接近甚至更大. 米氏散射将散射粒子看作是导电小球，它们与光波的电场作用产生极化而向外辐射电磁波，如云雾中的小水滴就是这种米氏散射微粒. 米氏散射的特点：

(1) 散射光强度与偏振特性随散射粒子的尺寸变化.

(2) 散射光强度随波长的变化，不是与波长 λ 的四次方成反比，而是与波长 λ 的较低幂次成反比. 因此，散射光强与光波长的关系不如瑞利散射那样密切.

$$I(\theta)\propto\frac{1}{\lambda^n} \tag{8.4-7}$$

其中，$n<4$，n 的具体值取决于微粒尺寸.

(3) 散射光的偏振度随 d/λ 的增加而减小，这里 d 是散射粒子的直径，λ 是入射光波长.

(4) 散射光强度分布也随 d/λ 而变化，和瑞利散射相比，其前向散射加强，后向散射减弱. 当微粒直径约为 1/4 波长时，散射光强度角分布如图 8.4-5(a)所示，此时 $I(\theta)$ 在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 处的差别尚不很明显. 当微粒线度继续增大时，在 $\theta=0$ 方向，即前向的散射光强明显占优势，并在侧向产生一系列次极大值，如图 8.4-5(b)所示.

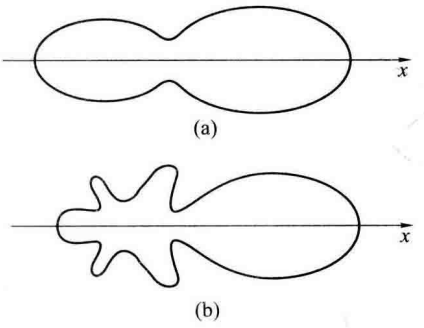


图 8.4-5 米氏散射光强的角分布

利用米氏散射也可以解释许多自然现象. 例如，蓝天中漂浮着白云，是因为组成白云的小水滴和冰晶粒子直径大于可见光波长，可见光在小水滴和冰晶粒子上产生的散射属于米氏散射，其散射光强与波长关系不大，太阳光的散射光主要是白色的，而不是蓝色，所以白云呈现白色. 我们所看到的雾也是白色的，也是因为米氏散射的缘故.

“浑浊介质”(例如含有烟、雾、液态微滴的大气，乳状胶液等)中存在着许多直径与光波长相当甚至更大，相互之间的距离大于波长且位置随机分布的杂质微粒. 当可见光或红外光照射到这些微粒将产生米氏散射.

8.4.4　分子散射

在通常情况下，纯净介质中由于分子热运动产生密度起伏引起折射率不均匀的区域的线度比可见光波长小得多，所以分子散射中，散射光强与散射角的关系与瑞利散射相同. 例如理想气体对自然光的分子散射的光强 I_θ 为

$$I_\theta=\frac{2\pi^2(n-1)^2}{r^2N_0\lambda^4}I_0(1+\cos^2\theta) \tag{8.4-8}$$

式中 n 为气体折射率，N_0 为单位体积气体中的分子数目，r 为散射点到考察点的距离，I_0 为入射光强度. 从上式可见，仍有 $I_0\propto 1/\lambda^4$ 关系. 由各向异性起伏产生的分子散射光强，比密度起伏产生的分子散射光强还要弱得多.

8.4.5　拉曼散射

1. 拉曼散射

1928 年，印度科学家拉曼(C. V. Raman)在研究光通过苯、甲苯、水等多种液体和晶体时，首先发现散射光中除有与入射光频率 ν_0 相同的瑞利散射线外，在其两侧还伴有频率为 $\nu_0\pm\nu_1$，$\nu_0\pm\nu_2$，…的散射线. 这种散射光的频率和方向相对于原入射光均发生改变的现象称为拉曼散射(Raman scattering). 拉曼这一开拓性的发现，为人们洞察微观分子世界的结构打开了一扇新的窗户，为此获得了 1930 年诺贝尔物理学奖.

图 8.4-6(a)是测量拉曼光谱的一种早期实验装置，其中 A 是一汞弧灯，它被装在一暗箱内，上部有一个与灯管平行的长方形开口；B 是一支盛满水的玻璃管而成为一个柱形透镜，它将弧光聚焦在 C 管的轴上(焦线)；C 管充有散射物质液体或气体，其一端面为窗口，散射光通过此窗口射出而进入摄谱仪，另一端被拉成尖角并涂黑，使反射光多次反射被吸收，以防止其进入摄谱仪；在 C 管上方可以放置一反射镜 R，以增强 C 管内的照明. 图 8.4-6(b)是其光谱的示意图.

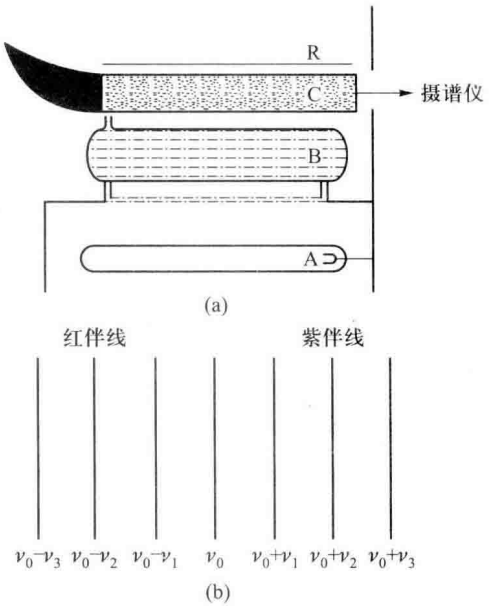


图 8.4-6　拉曼散射的实验装置及其光谱

拉曼散射的特点是：

① 每一条原入射光的谱线两侧都伴有散射线(图 8.4-6)，在其长波长方向的散射谱线称为红伴线或斯托克斯线(Stokes)，在短波长方向上的散射线称为紫伴线或反斯托克斯线，他们各自和原始入射光的频率差相同，只是反斯托克斯线相对斯托克斯线出现得少而弱.

② 这些频率差的数值与入射光频率无关，只与散射介质有关.

③ 每种散射介质有它自己的一套频率差 $\Delta\nu_1'=\nu_0-\nu_1$，$\Delta\nu_2'=\nu_0-\nu_2$，$\Delta\nu_3'=\nu_0-\nu_3$，…，其中有些

和红外吸收的频率相等，它们表征了散射介质的分子振动频率.

2. 拉曼散射的经典电磁理论解释

从经典电磁理论的观点看，分子在光的作用下发生极化，极化率的大小随分子热运动产生变化，并引起介质折射率的起伏，使光学均匀性受到破坏，从而产生光的散射. 由于散射光的频率与入射光频率 ν_0 和分子固有振动频率 ν 二者相关，因而拉曼散射又叫联合散射.

设入射光电场为

$$E=E_0\cos 2\pi\nu_0 t \tag{8.4-9}$$

分子因电场作用而产生的感应电偶极矩为

$$P=\varepsilon_0\chi E \tag{8.4-10}$$

式中，χ 为分子极化率. 若 χ 不随时间变化，则 P 以入射光频率 ν_0 作周期性变化，由此得到的散射光频率也为 ν_0，这就是瑞利散射. 若分子以固有频率 ν 振动，则分子极化率不再为常数，也随 ν 作周期性变化，可表示为

$$\chi=\chi_0+\chi_\nu\cos 2\pi\nu t \tag{8.4-11}$$

式中，χ_0 为分子静止时的极化率，χ_ν 为相应于分子振动所引起的变化着的极化率的振幅. 上式表明拉曼散射是由分子极化率的变化引起的. 将此式带入(8.4-10)式，得

$$\begin{aligned}P&=\chi_0\varepsilon_0E_0\cos 2\pi\nu_0 t+\chi_\nu\varepsilon_0E_0\cos 2\pi\nu_0 t\cos 2\pi\nu t\\&=\chi_0\varepsilon_0E_0\cos 2\pi\nu_0 t+\frac{1}{2}\chi_\nu\varepsilon_0E_0[\cos 2\pi(\nu_0+\nu)t+\cos 2\pi(\nu_0-\nu)t]\end{aligned} \tag{8.4-12}$$

上式表明，感应电偶极矩 P 的频率有三种：ν_0，$\nu_0\pm\nu$，所以散射光的频率也有三种. 频率为 ν_0 的谱线为瑞利散射线；频率为 $\nu_0-\nu$ 和 $\nu_0+\nu$ 的谱线分别称为斯托克斯线和反斯托克斯线.

若分子的固有频率不止一个，有 ν_1，ν_2，ν_3，…，则拉曼散射线中也将产生频率为 $\nu_0\pm\nu_1$，$\nu_0\pm\nu_2$，$\nu_0\pm\nu_3$ 等谱线. 实验发现，反斯托克斯线出现得少、且强度很弱. 利用经典电子理论无法解释拉曼散射光的强度问题.

拉曼散射的经典理论是不够完善的，特别是它不能解释为什么斯托克斯线比反斯托克斯线强得多的事实，只有量子理论才能作出圆满的解释.

*3. 拉曼散射的量子理论解释

量子理论把散射过程解释为光子与分子作用中入射光子更换为散射光子的过程，当频率为 ν_0 的入射光子通过介质时，将与分子发生碰撞. 如果碰撞是弹性的，则光子的能量和动量维持不变，因而散射光的频率仍然是 ν_0，这就是瑞利散射. 当碰撞是“非弹性”的，分子可能失去或者获得能量，达到另一个状态. 拉曼散射的机制和荧光现象不同，并不是吸收激发光，因此不能用实际上的上能级来解释. 为了说明这种过程中的能量关系，黄昆等提出用虚的上能级概念来说明拉曼散射，即认为分子在散射过程中可经历一种中间能态(称为虚能态)，以完成光子的更换. 可用图 8.4-7 所示的能级跃迁图来表示拉曼散射过程. 图中可用 E_N，E_M 来表示两个振动能级，当入射光子 $h\nu_0$ 和处于低能级 E_N 的分子作用时，可以使分子向上跃迁到虚能级 E_α 和处于低能级 E_N 的分子作用时，再向下跃迁到高能级 E_M，发出散射光子 $h\nu'$. 这时有

$$\nu'=\nu_0-\frac{E_M-E_N}{h} \tag{8.4-13}$$

这就是拉曼散射的斯托克斯线，如图 8.4-7(a)所示. 如果入射光子 $h\nu_0$ 和处于高能级 E_M 的分子作用，使之向上

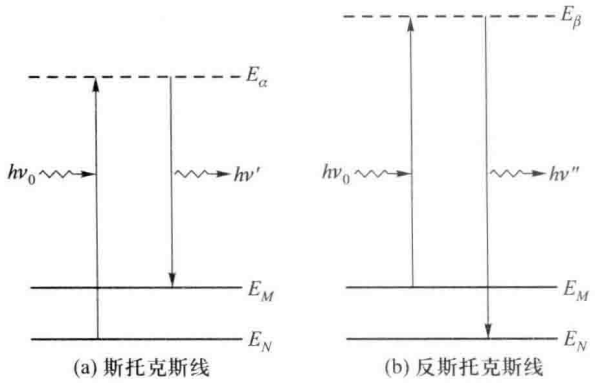


图 8.4-7　拉曼散射

跃迁到虚能级 E_β，再向下越过低能级 E_N，发出散射光子 $h\nu''$，则有

$$\nu''=\nu_0+\frac{E_M-E_N}{h} \tag{8.4-14}$$

这就是拉曼散射的反斯托克斯线，如图 8.4-7(b)所示. 一般处于高能级的分子数较低能级的少，所以反斯托克斯线总是较斯托克斯线为弱. 随着温度的升高，反斯托克斯线将会增强.

4. 受激拉曼散射

拉曼光谱是分子振动而产生的散射光谱. 利用拉曼光谱可以确定分子的固有振动频率，研究分子结构及分子动力学等问题，所以拉曼散射是探测分子信息的重要工具. 但是，拉曼散射是非常弱的过程，一般情况下散射光强仅约为入射光强的 10^{-10}，所以拉曼信号都很弱. 由于早期的拉曼光谱仪普遍使用汞弧灯作为光源，其光强和单色性都较差，使得被检物质的拉曼光谱的强度和分辨率都极低，拉曼光谱技术的发展受到了阻碍. 1960 年激光的发明，为拉曼散射的研究提供了新的光源. 用激光作光源，拉曼散射谱的瑞利线很细，其两侧频率差很小的拉曼散射线也能观察到. 当激光强度增大到一定程度时，产生非线性效应，出现受激拉曼散射，而上述拉曼散射相应称为自发拉曼散射. 二者差别在于，自发拉曼散射光是不相干的，且其光强度也很低；而受激拉曼散射光具有很高的空间相干性和时间相干性，强度也大得多，受激拉曼散射可用于研究生物分子结构、测量大气污染等，它属于非线性光学范畴.

5. 近场拉曼散射

(1) 表面增强拉曼散射

1974 年 Fleischmann 等人对光滑银电极表面进行粗糙化处理后，首次将单分子层吡啶分子吸附在银电极表面上，获得高质量和高强度拉曼光谱. 随后 Van Duyne 等通过系统的实验和计算，发现吸附在粗糙银表面上的每个吡啶分子的拉曼散射信号与溶液相中的吡啶的拉曼散射信号相比，增强约 10^6 倍，并指出这是一种与粗糙表面相关的**表面增强拉曼散射**(Surface-Enhanced Raman Scattering，简称为 SERS).

在 20 世纪 90 年代后期，SERS 的研究取得一些突破性进展，在银纳米粒子上发现具有 10^{14} 倍增强效应. 由于 SERS 效应的强弱与纳米尺度下的表面粗糙度密切相关，它表明 SERS 不仅是表面科学，而且是纳米科学的一个重要现象. SERS 效应的发现有效地解决了拉曼光谱在表面科学和痕量分析中存在的低灵敏度问题，能够在单分子水平研究物质结构的信息. 但是，其空间分

辨率不够高. 此后,又陆续发展了表面增强红外光谱、荧光光谱等多种光谱技术. 在化学和生物传感、生物医学检测…等方面得到广泛应用.

(2) 针尖增强拉曼散射

由于受光波衍射极限分辨率的限制,拉曼光谱的空间分辨率无法优于激发光的半波长. 为了突破这一"不可逾越"的分辨率极限,不同国家的几个小组于 2000 年前后将扫描探针显微镜(SQM)(例如原子力显微镜、扫描近场光学显微镜、扫描隧穿显微镜等)和拉曼光谱技术相结合,获得了分子水平的**针尖增强拉曼光谱**(Tip-Enhanced Raman Spectroscopy,简称 TERS). TERS 系统的典型结构主要由扫描探针显微镜、显微光路、光谱仪等组成(图 8.4-8). 将一根尖端直径为几十纳米的金属探针(银或金、或光纤表面镀银或金的锥形针尖),利用扫描探针显微镜的控制系统,将探针针尖控制在距离样品表面几个纳米的近场区. 显微物镜将适当波长和偏振态的激发光束聚焦在探针针尖尖端,在局域表面等离激元共振效应的作用下,在针尖附近几纳米到几十纳米内产生强烈的局域电磁场增强. 此时的金属针尖可视为具有极高功率密度的纳米光源,用于激发针尖下方样品产生增强的拉曼信号,实验中测得的拉曼信号增强可达 $10^3 \sim 10^6$ 量级. 探测中,控制探针在水平方向相对于样品表面进行移动扫描,相当于探针在样品表面不同位置探测. 通过物镜收集针尖散射的拉曼信号和探针移动产生的表面信号,并将信号引入拉曼光谱仪进行光谱分析. 最后由电子学控制系统完成拉曼样品表面形貌和拉曼光谱的测量和空间对应指认.

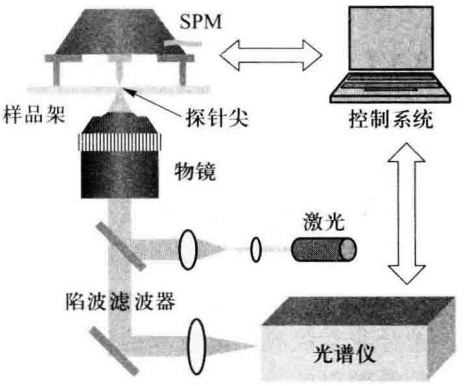


图 8.4-8 TERS 系统结构示意图

近十多年来,TERS 以其超衍射极限的极高空间分辨率和极高探测灵敏度,能够实现对样品表面纳米尺度的形貌表征、纳米局域拉曼光谱以及单分子的探测. 为物理学、化学、纳米科学、生命科学、半导体科学、医学检测等学科的研究提供了强有力的工具,并取得了很多有意义的结果. 以 TERS 为代表的多种针尖增强光谱技术仍是目前进行极高空间分辨率和极高灵敏度光谱探测的首选方法. 但是,TERS 的机理涉及近场光学的一些问题,其解释非常复杂,相关的理论研究相对滞后,尚有待深入.

例 8.4-1 若白光中波长为 $\lambda_1 = 600$ nm 红光和 $\lambda_2 = 450$ nm 的蓝光强度相等. 问散射光中二者比例为多少?

解 由瑞利定律 $I \propto \dfrac{1}{\lambda^4}$,设红光和蓝光的散射光强分别为 I_1、I_2,则有

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\lambda_2^4}{\lambda_1^4} = \frac{450^4}{600^4} = 0.32$$

所以散射光呈蓝青色.

§8.5　光的吸收及散射在环境监测中的应用

近年来随着人类工业生产、社会生活中大量化石能源的消耗及大量污染气体的排放，环境污染，尤其是大气污染问题（如酸雨、光化学烟雾、大气温室效应等）日益严重，已直接影响到人类的生存质量和经济的可持续发展，大气污染监测及环境保护已成为世界各国都十分关注的热点问题.

以连续宽光谱光源或激光作为探测光源，利用其在大气中传播时的选择性吸收及光散射现象，人们已成功制作成差分光学吸收光谱系统及多种激光雷达系统，在污染气体成分以及气溶胶密度、能见度、温度等大气环境参数的监测及分析方面获得了广泛的应用. 本节我们对其基本原理、仪器结构、探测过程等作一个简单的介绍.

8.5.1　差分光学吸收光谱技术

差分光学吸收光谱技术在 1979 年由德国科学家 U.Platt 提出，它利用空气中的气体分子在紫外到可见光波段的窄带吸收特性来鉴别大气中 NO_2、NO、SO_2、O_3 等有害痕量气体成分，并根据窄带吸收强度来推演出气体的浓度. 与传统的电化学采样检测方法相比，该技术的优点主要有以下几点：非接触性测量、探测灵敏度高、实时在线高速测量、可同时测量多种气体成分等.

1. 差分光学吸收光谱技术的基本原理

差分光学吸收光谱技术的理论基础是著名的 Lambert-Beer 定律，由于光在大气传输过程中的吸收及散射等过程，宽带光源的光强分布 $I_0(\lambda)$ 在经过光程 L 后的光强度 $I(\lambda)$ 衰减为

$$I(\lambda)=I_0(\lambda)\exp\{-L[\varepsilon_R(\lambda)+\varepsilon_M(\lambda)+\sigma(\lambda)C]\} \tag{8.5-1}$$

其中 λ 表示波长，C 为气体的浓度，$\varepsilon_R(\lambda)$、$\varepsilon_M(\lambda)$ 表示大气中小尺寸的气体分子的瑞利散射及较大尺寸的悬浮微粒的米氏散射对入射光强的衰减作用，分别称为**瑞利散射消光系数和米氏散射消光系数**；$\sigma(\lambda)$ 表示气体分子的吸收对入射光强的衰减作用，称为气体的**吸收截面**，它主要由两部分构成，

$$\sigma(\lambda)=\sigma_0(\lambda)+\sigma'(\lambda)$$

其中 $\sigma_0(\lambda)$ 随波长作缓慢的变化，为气体吸收截面中的宽带部分；$\sigma'(\lambda)$ 随波长作快速变化、对应气体的窄带吸收特性，称为气体的**差分吸收截面**，不同气体分子的差分吸收截面均存在显著的差别，它是进行气体成分鉴别及浓度测量的主要依据.

在差分光学吸收光谱技术中，$\varepsilon_R(\lambda)$、$\varepsilon_M(\lambda)$、$\sigma_0(\lambda)$ 等对应的宽带光谱成分是不需要测定的，通过引入差分吸收密度 $D'(\lambda)$，式(8.5-1)可改写为

$$D'(\lambda)=\ln[I_0(\lambda)/I(\lambda)/I_{poly}]=LC\sigma'(\lambda) \tag{8.5-2}$$

I_{poly} 代表吸收光谱中所有的宽带贡献，可通过对测量的吸收光谱进行 3~5 阶多项式最小二乘拟合求得. 经过以上的数学处理后，得到的差分吸收密度即与分子浓度成正比. 由于不同的气体分子具有不同的特征差分吸收光谱（图 8.5-1 为实验测得的 NO_2 气体的差分吸收截面），通过与实验室中已知浓度的气体分子的标准差分吸收截面进行比较，即可求出大气中特定吸收分子的平均光程浓度；若同时对多种气体分子的参考光谱进行拟合，还可同时求出多种气体成分的浓度.

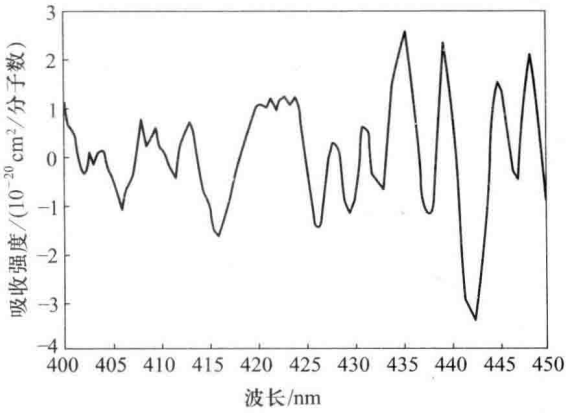


图 8.5-1 NO_2 气体的差分吸收截面

2. 差分光学吸收光谱系统结构及工作原理

图 8.5-2 为差分光学吸收光谱系统的结构示意图，通常由光源和发射光学系统、望远接收光学系统、光谱测量系统、信号采集及处理系统等四部分组成. 宽带光源(通常为高压氙灯)产生光辐射，经发射光学系统准直后射向大气目标，在气体光路上传输一段距离之后，通过在光路另一端放置的溯源反射镜将光信号反射回来，由望远镜接收后耦合进入接收光纤，光纤将光导入光谱仪得到吸收光谱，光电探测器将光学信号转化为电信号，由安装在计算机上的 A/D 数据采集卡采集数据送入计算机，再按前面给出的数学计算方法进行光谱数据的处理、分析后确定大气中的气体成分及浓度.

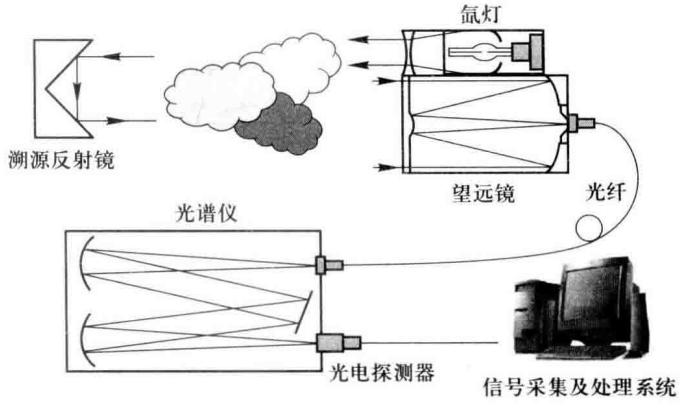


图 8.5-2 差分光学吸收光谱系统的结构示意图

差分光学吸收光谱系统除了用于城市空气污染监测之外，也被广泛用于污染源的监测，如对化工厂、水泥厂的生产过程和气体排放进行监测. 通过机载、星载等手段，还可将其用于臭氧层监测及对流层、平流层气体成分分析等领域.

8.5.2 米氏散射激光雷达技术

激光雷达是现代遥感领域的最新技术之一，它与无线电雷达的工作原理基本相同，由于以能

量密度高、方向性好的激光束代替无线电雷达中的射频电磁波束或微波束，因而具有更高的测距及测角精度，且激光雷达系统的体积小、重量轻，更适合机载、空载等进行机动测量. 基于光的散射及吸收现象，目前已先后研制了测量大气气溶胶分布及大气能见度的米氏散射激光雷达系统、测量大气中二氧化氮等污染物浓度的差分吸收激光雷达系统、测量大气温度分布的纯转动拉曼散射激光雷达系统等，广泛应用于各种大气环境参数的测量与研究. 其中，米氏散射激光雷达主要用于探测低空大气中的尘埃、云雾等气溶胶粒子，由于大气中的这些气溶胶粒子对激光的散射机制主要表现为米氏散射，故称为米氏散射激光雷达. 大气气溶胶粒子散射和吸收入射的太阳光辐射，它还作为凝结核参与云、雾、雨、雪的形成，从而对大气的辐射平衡、化学过程、气候变化乃至人们的日常生活都有着重要的影响，因此大气气溶胶分布是气象学家及大气科学家均十分关注的一个重要的大气光学参数. 下面介绍米氏散射激光雷达的工作原理及探测过程.

1. 米氏散射激光雷达方程

米氏散射激光雷达的探测原理可以用激光雷达方程来说明. 激光雷达方程是表示发射功率与接收到的回波功率之间关系的方程：

$$P(r)=P_0\frac{C\tau}{2}A\frac{\beta(r)}{r^2}\exp\left[-2\int_0^r\sigma(r')\,\mathrm{d}r'\right] \tag{8.5-3}$$

其中 $P(r)$ 为 t 时刻接收到的回波功率，P_0 为 t_0 时刻的发射功率，C 为光速，τ 为脉冲宽度，A 为有效接收面积，$r=C(t-t_0)/2$ 表示激光脉冲的传输距离，$\beta(r)$ 和 $\sigma(r)$ 分别为 r 处的大气背散射系数和大气消光系数.

发射激光脉冲在大气传播过程中，与大气中的气体分子及气溶胶粒子发生相互作用，一部分被大气吸收，一部分被反射或散射后产生回波信号. 气溶胶粒子密度小的地方散射回波信号弱，而密度大的地方回波信号较强，图 8.5-3 为典型的回波探测信号的空间分布曲线，从回波信号的强度分布即可直观地确定云层高度、厚度及定性地了解气溶胶粒子的空间分布等情况.

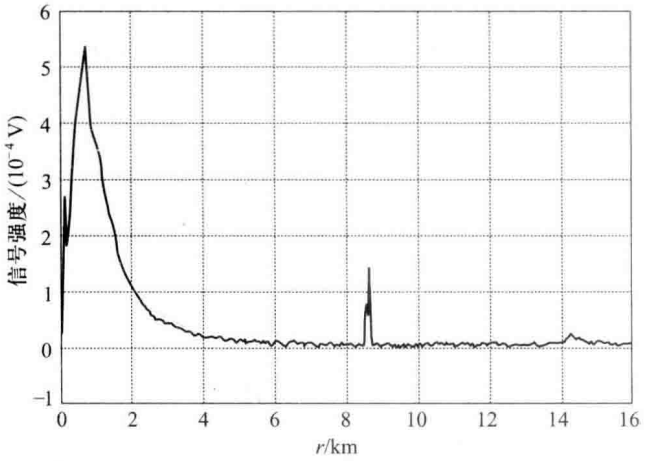


图 8.5-3　米氏散射激光雷达的回波信号分布图

若要对气溶胶的光学参数如背散射系数 $\beta(r)$ 和消光系数 $\sigma(r)$ 进行定量探测，则需进行如下的反演数学处理. 首先令：

$$S(r)=\ln[r^2P(r)] \tag{8.5-4}$$

$S(r)$称为高度修正后的对数回波功率，由激光雷达方程[(8.5-3)式]，则有：

$$S(r)-S(r_0)=\ln\frac{\beta(r)}{\beta(r_0)}-2\int_{r_0}^{r}\sigma(r')\mathrm{d}r' \tag{8.5-5}$$

r_0为参考高度. 上式的微分公式表示为

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}=\frac{1}{\beta(r)}\frac{\mathrm{d}\beta(r)}{\mathrm{d}r}-2\sigma(r) \tag{8.5-6}$$

对于特定的大气环境，$\beta(r)$ 和 $\sigma(r)$之间存在一定的对应关系，故在已知激光雷达比 $\sigma(r)/\beta(r)$的情况下，上式即可求解.

对均匀大气介质而言，其气溶胶处于均匀状态，散射系数不随高度变化，有 $\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}r=0$，从而消光系数可以求得，为

$$\sigma(r)=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} \tag{8.5-7}$$

即气溶胶的消光系数为激光雷达的高度修正对数回波曲线斜率之半，故称这种求解激光雷达方程的方法为斜率反演法.

实际大气环境下的气溶胶多数处于非均匀分布的状态，通常有 $\beta=b\sigma^k$，b 为常数，$0.67\leqslant k\leqslant 1$，这时有

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}=\frac{k}{\sigma(r)}\frac{\mathrm{d}\sigma(r)}{\mathrm{d}r}-2\sigma(r) \tag{8.5-8}$$

对应的大气消光系数反演方程为

$$\sigma(r)=\frac{\exp\{[S(r)-S(r_0)]/k\}}{\sigma(r_0)^{-1}-\frac{2}{k}\int_{r_0}^{r}\exp\{[S(r')-S(r_0)]/k\}\mathrm{d}r'} \tag{8.5-9}$$

由实际探测的米氏散射激光雷达的回波信号利用上式即可反演计算出大气消光系数，进而可导出大气的光学厚度以及大气能见度等一些物理参量.

2. 米氏散射激光雷达系统结构及工作原理

米氏散射激光雷达系统主要由四个部分组成：激光发射系统、光学接收系统、光电探测器、数据采集及处理系统. 它是综合运用光、电、机械和数字处理技术的复杂的系统，原理图如图 8.5-4 所示.

从脉冲固体激光器输出的倍频激光束(波长通常为 532 nm，脉冲能量为 100 mJ 量级、脉冲重复频率为 10 Hz 左右)，经过扩束器扩束准直后射向大气目标. 由大气目标返回的背向散射回波信号经望远镜接收后，由反射镜将信号光束转向探测单元，先通过中心波长为 532 nm、带通宽度为 0.5 nm 的窄带干涉滤光片滤掉背景杂散光，再聚焦到光电倍增管上进行光电信号转换，转换后的模拟电信号由安装于计算机中的高速 A/D 数据采集卡转换成数字信号后采集及存储，最后由计算机反演计算出大气气溶胶的消光系数及确定大气中气溶胶密度分布及云层高度分布等大气参数. 采用该激光雷达系统进行空间多角度扫描及多点移动测量，即可获得大空间范围、三维全场的大气参数分布数据.

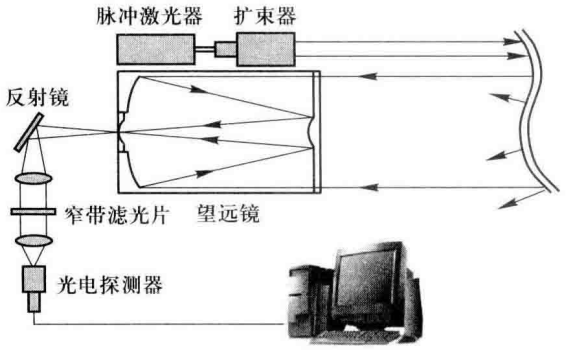


图 8.5-4　米氏散射激光雷达系统的结构示意图

思　考　题

8.1　在大风天和雾天，为了避免和对面来的车相碰，汽车必须打开雾灯. 试解释：为什么雾灯是橘红色的？

8.2　有些地方刮大风时，天空会呈现黄色，称为“黄风天”，试解释原因.

8.3　云和雾为什么是白色的？

8.4　为什么点燃的香烟冒出的烟是淡蓝色的，而吸烟者口中吐出的烟却是白色的？

习　　题

8.1　一均匀介质的吸收系数 $\alpha=0.32\ \mathrm{cm}^{-1}$，求出射光强为入射光强的 0.1、0.2、0.5 时介质的厚度.

8.2　设海水的吸收系数为 $\alpha=2\ \mathrm{m}^{-1}$，而人眼能感觉到的光强为太阳强度的 10^{-18}. 试问在水面下多深处，人眼还能看见亮光？

8.3　试证当介质厚度 $l=1$ cm，且吸收系数 α 很小很小时，吸收率 $G=\dfrac{I_0-I}{I_0}$ 在数值上就等于吸收系数本身.

8.4　用 $A=1.539\ 74$ 和 $B=4.652\ 8\times10^4$ nm 的玻璃做成 50°棱角的棱镜，当其对 550 nm 入射光处于最小偏向角位置时，求其角色散为多少弧度/nm？

8.5　某种玻璃对不同波长的折射率在 $\lambda=400$ nm 时，$n=1.63$；$\lambda=500$ nm 时，$n=1.58$. 假定柯西公式 $n=A+\dfrac{B}{\lambda^2}$ 适用，求此种玻璃在 600 nm 时的色散 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda$.

8.6　已知相速 v_p，K 为常数，计算下列各情况下的群速.

(1) $v_p=K$，无色散介质，如空气中的声波；

(2) $v_p=K\lambda$；

(3) $v_p=K\sqrt{\lambda}$，重力在水面上所引起的波；

(4) $v_p=K/\sqrt{\lambda}$ 在水面上的表面张力波；

(5) $v_p=K/\lambda$ 弹性薄片在弯曲时所产生的波.

8.7　证明介质的群速折射率为 $n_g=c/v_g=n_p-\lambda\dfrac{\mathrm{d}n_p}{\mathrm{d}\lambda}$，式中 n_g、n_p 分别为群速折射率和相速折射率.

8.8 同时考虑介质对光的吸收和散射时，吸收系数 $\alpha=\alpha_a+\alpha_s$，其中 α_a 为真正吸收系数，α_s 为散射系数. 朗伯定律为 $I=I_0\exp[-(\alpha_a+\alpha_s)l]$，若光经过一定厚度的某种介质后，只有 20% 的光强透过，已知该介质的散射系数 α_s 为真正吸收系数 α_a 的 1/2，若不考虑散射时，则透射光强可增加多少？

8.9 计算波长为 253.6 nm 和 546.1 nm 的两条谱线瑞利散射的强度之比.

8.10 一束光通过液体，用偏振片正对这束光观察. 当偏振片透振方向在竖直方向时，光强达最大值，当偏振片透振方向在水平方向时，光强为零. 再从正侧面观察散射光，在偏振片分别置于上述两个位置时，光强之比为 20∶1. 计算散射光的退偏振度.

模拟计算习题

8.1 群速和相速

假设一复色光由以下三列单位振幅的单色光波组成，根据下表中的公式和参数，求出群速并模拟三列波的波形及合波场的波形. 图 8.1 为模拟结果示意图.

要求：改变三列光波的波长及相速，观察群速的变化.

	波 1	波 2	波 3
波长	$\lambda_1=0.5\ \mu m$	$\lambda_2=0.9\lambda_1$	$\lambda_3=0.8\lambda_1$
波数	$k_1=\dfrac{2\pi}{\lambda_1}$	$k_2=\dfrac{2\pi}{\lambda_2}$	$k_3=\dfrac{2\pi}{\lambda_3}$
相速	$v_1=2\times10^{10}\ mm/s$	$v_2=0.95v_1$	$v_3=0.90v_1$
角频率	$\omega_1=k_1v_1$	$\omega_2=k_2v_2$	$\omega_3=k_3v_3$
初相位	$\alpha_1=0$	$\alpha_2=0$	$\alpha_3=0$
光波场的相位	$\phi_1(x,t)=\omega_1t-k_1x+\alpha_1$	$\phi_2(x,t)=\omega_2t-k_2x+\alpha_2$	$\phi_3(x,t)=\omega_3t-k_3x+\alpha_3$
光波场	$E_1(x,t)=\cos\phi_1$	$E_2(x,t)=\cos\phi_2$	$E_3(x,t)=\cos\phi_3$
光波合场	$E(x,t)=E_1(x,t)+E_2(x,t)+E_3(x,t)$		

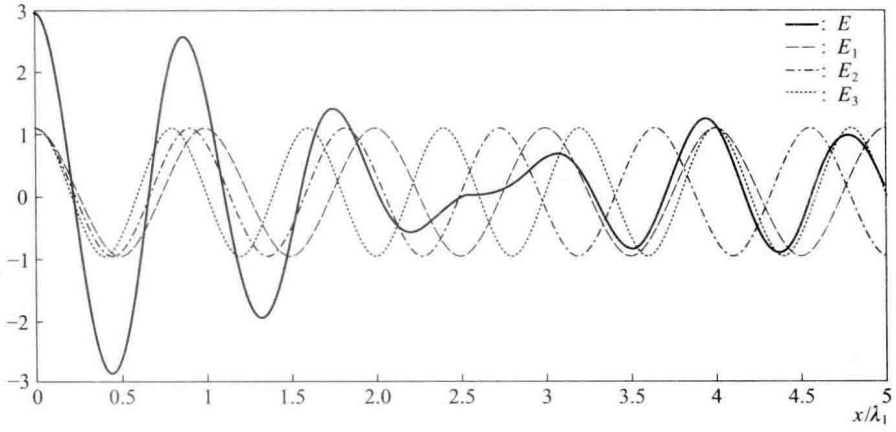


图 8.1 模拟结果示意图：起始时刻（$t=0$ 时），三列波的波形及合波场的波形

第九章　激光与非线性光学

激光是英文 laser 一词的意译，它是短语“light amplification by stimulated emission of radiation”的缩写，其意为“通过辐射的受激发射而产生的光放大”. 早在 1917 年，爱因斯坦在他的辐射理论中就提出了“受激发射”的概念，1951—1954 年间，哥伦比亚大学的汤斯(C. H. Townes)等人制造成功第一台微波激射器(Maser)，1958 年肖洛(A. L. Schawlow)和汤斯提出了激光原理，1960 年美国休斯飞机公司实验室的梅曼(T. H. Maiman)研制了第一台红宝石激光器. 激光是与普通光源性质完全不同的相干光源，它的诞生是光学发展史上的一个新里程碑. 经过数十年的发展，它已经使光学技术产生了革命性变化，对光学理论产生了深刻的影响，其应用已遍及人们生产和生活的各个领域，所以它是 20 世纪继原子能、半导体、计算机之后的又一重大发明.

本章中将介绍激光的原理和特征以及激光器的结构、种类和应用，并讨论几种重要的非线性光学现象.

§9.1　光与原子系统的相互作用

9.1.1　原子能级及粒子数正常分布

在量子化的原子体系中，原子能量状态 $E_1, E_2, \cdots$ 为一系列分立的取值. 原子的每一个能量状态称为原子的一个能级，其中最低的能级称为**基态**，如图9.1-1中的 E_1，高于基态的其余各能级称为**激发态**，如图9.1-1 中的 E_2.

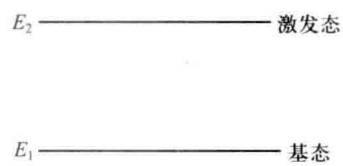


图 9.1-1　原子能级

若原子处于热平衡状态，各能级上的粒子数目分布将服从一定的统计规律，这就是玻耳兹曼正则分布律. 设原子体系的热平衡热力学温度为 T，在能级 E_n 上的粒子数为 N_n，则玻耳兹曼分布律指出

$$N_n \propto \mathrm{e}^{-\frac{E_n}{kT}}$$

即随着能级的增高，能级上的粒子 N_n 按指数规律减少，式中 k 为玻耳兹曼常量. 按照这个正则分布规律，能级 E_2、E_1 上的粒子数之比为

$$\frac{N_2}{N_1}=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{E_2}{kT}}}{\mathrm{e}^{-\frac{E_1}{kT}}}=\mathrm{e}^{-\frac{E_2-E_1}{kT}}<1 \tag{9.1-1}$$

上式说明，在热平衡状态中，高能级上的粒子数 N_2 一定小于低能级上的粒子数 N_1，两者比例由

体系温度决定. 在室温 $T=300$ K 时，$kT=4.2\times10^{-21}$ J，$E_1=0$，原子最低激发态能量约为 $E_2\approx2\times10^{-19}$ J，因而 $N_2/N_1=10^{-21}$，即室温下绝大部分原子处于基态.

9.1.2 光的自发发射、受激发射和受激吸收

1. 自发发射

如图 9.1-2，处于高能级 E_2 的原子总是会自发地跃迁到低能级 E_1 上，并且辐射一个频率为 ν 的光子，光子能量 ε 和频率 ν 分别满足

$$\varepsilon=h\nu=E_2-E_1 \tag{9.1-2}$$

$$\nu=(E_2-E_1)/h \tag{9.1-3}$$

这个过程称为光的**自发发射**. 自发发射是个随机过程，处于高能级的各个原子随时、独立地自发发射光子，形成一串串波列，这些波列在相位、偏振态和传播方向上都彼此无关，所以自发发射的光波是非相干的.

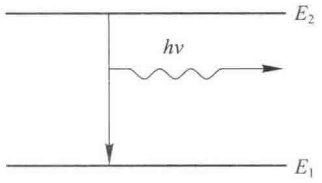


图 9.1-2 自发发射

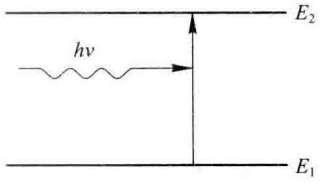


图 9.1-3 受激吸收

2. 受激吸收

如图 9.1-3，处于低能级 E_1 的原子受到频率为 ν 的外来入射光照射时，可以吸收光子能量 $\varepsilon=h\nu=E_2-E_1$ 而跃迁到高能级 E_2 上. 这个过程称为**受激吸收**.

3. 受激发射

如图 9.1-4，处于激发态 E_2 的原子在受到频率 ν 刚好满足 $h\nu=E_2-E_1$ 的外来光子激励时，可以由高能级 E_2 跃迁到低能级 E_1，并发射出一个同频率的光子，这个过程称为**受激发射**. 与自发发射不同的是，受激发射光子与入射光有相同的模式，即受激发射的光波在频率、相位、偏振态等方面都与外来光相同，所以受激发射光波是相干的.

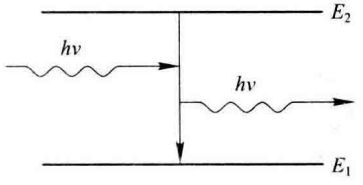


图 9.1-4 受激发射

9.1.3 爱因斯坦公式

自发发射过程中，单位时间从高能级 E_2 跃迁到低能级 E_1 的粒子总数 $\mathrm{d}N_{21}/\mathrm{d}t$ 只与始态 E_2 上的粒子数 N_2 成正比，与辐射场无关，比例常数用 A_{21} 表示，即

$$\frac{\mathrm{d}N_{21}}{\mathrm{d}t}=A_{21}N_2 \tag{9.1-4}$$

对于受激吸收过程，单位时间从低能级 E_1 跃迁到高能级 E_2 的粒子总数 $\mathrm{d}N_{12}/\mathrm{d}t$ 除了与始态上的粒子数 N_1 有关，还与频率满足(9.1-3)式的外来光的光子数密度 $u(\nu)$ 成正比，比例常数用

B_{12}表示，即

$$\frac{\mathrm{d}N_{12}}{\mathrm{d}t}=B_{12}u(\nu)N_1 \tag{9.1-5}$$

对于受激发射过程，单位时间从 E_2 能级向 E_1 能级跃迁的粒子数则应满足

$$\frac{\mathrm{d}N_{21}}{\mathrm{d}t}=B_{21}u(\nu)N_2 \tag{9.1-6}$$

以上三式中比例常数 A_{21}、B_{12}、B_{21}统称为**爱因斯坦系数**.

理论计算表明，爱因斯坦系数之间有如下关系：

$$B_{12}=B_{21}=B \tag{9.1-7}$$

$$\frac{A_{21}}{B}=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \tag{9.1-8}$$

以上两式称为**爱因斯坦公式**. 虽然这两个式子是在热平衡条件下推出的，但由于 A_{21}、B_{21}、B_{12}与分布状态无关，所以这两个式子也适用于普遍情况.

9.1.4　光的吸收和增益

当一束频率为 ν 的光通过具有能级 E_2 和 E_1（$E_2-E_1=h\nu$）的介质时，将同时发生受激吸收和受激发射过程. 前一种过程使入射光减弱，后一种过程使入射光加强. 若在 $\mathrm{d}t$ 时间内单位体积受激吸收的光子数为 $\mathrm{d}N_{12}$，受激发射的光子数为 $\mathrm{d}N_{21}$，则由(9.1-6)式和(9.1-5)式，有

$$\mathrm{d}N_{21}=B_{21}u(\nu)N_2\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}N_{12}=B_{12}u(\nu)N_1\mathrm{d}t$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}N_{21}}{\mathrm{d}N_{12}}=\frac{B_{21}u(\nu)N_2\mathrm{d}t}{B_{12}u(\nu)N_1\mathrm{d}t}\propto\frac{N_2}{N_1} \tag{9.1-9}$$

(1) 当 $N_2/N_1<1$ 时，高能级 E_2 上的粒子数 N_2 小于低能级 E_1 上的粒子数 N_1，这正是热平衡时粒子数按玻耳兹曼正则分布的情况. 此时有 $\mathrm{d}N_{12}>\mathrm{d}N_{21}$，即光经介质传播的过程中，受激吸收的光子数大于受激发射的光子数，宏观效果表现为光被吸收.

(2) 当 $N_2/N_1>1$ 时，高能级 E_2 上的粒子数 N_2 大于低能级 E_1 上的粒子数 N_1，出现所谓的**“粒子数布居反转分布”**，简称为**反转分布**. 这时 $\mathrm{d}N_{21}>\mathrm{d}N_{12}$，即光经介质传播的过程中，受激发射的光子数大于受激吸收的光子数，宏观效果表现为光被放大，或称**光增益**. 能造成粒子数反转分布的介质称为**激活介质**或**增益介质**.

由此可见，实现粒子数反转分布只有在非热平衡状态下才能达到.

9.1.5　能级的寿命

粒子在 E_2 能级上停留的平均时间，称为粒子在该能级上的**平均寿命**，简称**寿命**. 设 $\mathrm{d}t$ 时间

内高能级 E_2 上粒子数的改变量为 $-\mathrm{d}N_2$，负号表示因自发发射 E_2 上的粒子数随时间减少，则

$$-\mathrm{d}N_2 = -\mathrm{d}N_{21} = -A_{21}N_2\mathrm{d}t,$$

积分后得

$$N_2 = N_{20}\mathrm{e}^{-A_{21}t} \tag{9.1-10}$$

上式中 N_{20} 为 $t=0$ 时 E_2 上的粒子数. 上式表明，N_2 减少的快慢与 A_{21} 有关. 自发发射系数 A_{21} 愈大，自发发射过程愈快，经过相同时间 t 后，留在 E_2 上的粒子数 N_2 就愈少. 因为 A_{21} 具有时间倒数的量纲，令

$$\tau = \frac{1}{A_{21}} \tag{9.1-11}$$

τ 反映了粒子平均在 E_2 能级上停留时间的长短，即粒子在 E_2 能级上的寿命. 它恰好是 E_2 上粒子数减少为初始时的 1/e（约 36%）所用的时间. 将(9.1-11)式代入(9.1-9)式即有

$$N_2 = N_{20}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{9.1-12}$$

从(9.1-10)式和(9.1-12)式可以看出，自发发射系数小，自发发射的过程就慢，粒子在 E_2 能级的寿命就长，原子处在这种状态就比较稳定. 寿命特别长的激发态称为**亚稳态**，其寿命可达 $10^{-3}\sim1$ s，而一般激发态寿命仅有 10^{-8} s. 实际上因原子的撞碰和外界的干扰，能级的实际寿命比上述理论结果（相应称为自然寿命）还要小几个数量级.

§9.2 激光的原理

9.2.1 激光器的基本结构

激光器通常由工作物质、激励源和谐振腔三部分构成，如图 9.2-1 所示.

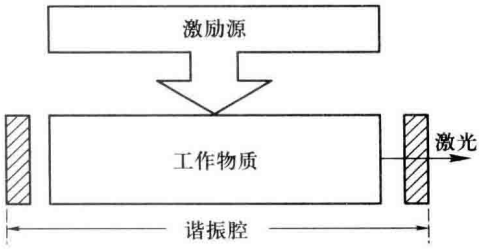


图 9.2-1 激光器的基本组成

工作物质（即**激活介质**）是激光器中产生受激发射的物质，其作用是使入射光得到放大，是激光器的核心. 它应满足的条件是：具有一对能产生激光的能级，其中高能级应有足够长的寿命，以使得粒子被激发到该能级后能滞留较长的时间，从而在这能级上积累较多的粒子，与低能级之间形成粒子数反转.

激励源（又称**泵浦**）的作用是供给工作物质能量，使介质中处于基态的粒子获得能量后被

“抽运”到高能级，形成粒子数反转. 激励源通常是电源或光源，其供给能量的过程称为**光抽运**.

谐振腔是位于激光器两端的一对反射镜，其结构相当于一个 F-P 标准具，其中一个为全反射镜，反射率 R 接近 100%，另一个为部分反射镜，反射率 R 仅有 80%左右，它可使激光部分透过并输出. 由于受激发的光子是向各个方向发射的，谐振腔的作用就是只让与反射镜轴向平行的光束能在工作物质中来回地反射，链锁式地放大，最后形成稳定的激光输出，偏离轴向的光则很快从侧面逸出. 谐振腔对光束方向的选择，保证了激光器输出的激光具有极好的方向性. 经谐振腔反射回来的光对工作物质的作用称为**光反馈**，激光器实际上就是一个正反馈放大器，若反射镜安置在激光管两端面，则为内腔式激光器，若反射镜安置在激光管两端之外，则为外腔式激光器.

9.2.2　工作物质的粒子数反转和增益作用

为了说明激活介质造成粒子数反转的物理过程，我们用能级图作简要描述. 光抽运可以将粒子从低能级抽运到高能级. 在双能级系统中，由于发生受激吸收和受激发射的概率是相同的（$B_{12}=B_{21}$），最终只能达到两个能级的粒子数相等而使系统趋向稳定，所以不能实现粒子数反转. 若在高低能级之间还有一个或两个中间能级，且它们之间的相对间隔满足一定关系，即形成三能级系统或四能级系统，这样就能使中间能级与低能级之间实现粒子数反转，从而使受激发射占优势，实现光放大.

图 9.2-2 为激活介质的三能级图. E_1 为基态，E_2、E_3 为激发态，中间能级 E_2 为亚稳态. 在激励源的作用下，基态 E_1 的粒子被抽到激发态 E_3 上，E_1 上的粒子数 N_1 随之减少. 但由于 E_3 能级的寿命很短，粒子将很快地通过碰撞交出部分能量以无发射跃迁方式转移到亚稳态 E_2 上. E_2 寿命较长，即粒子在 E_2 上停留时间较长，于是在基态粒子数 N_1 减少的同时，E_2 上的粒子不断积累，使 N_2 随之增大. 当达到 N_2 大于 N_1 时，就实现了亚稳态 E_2 和基态 E_1 之间的粒子数反转分布. 三能级激光器的效率不高，原因是抽运前几乎全部粒子都处于基态，只有激励源很强而且抽运很快，才可使 $N_2>N_1$ 实现粒子数反转.

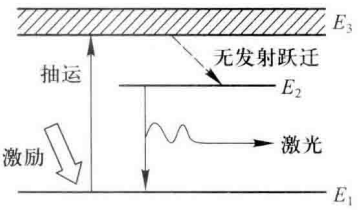


图 9.2-2　三能级图

图 9.2-3 为激活介质的四能级图，它使系统在两个激发态 E_3、E_2 之间实现粒子数反转. 因为这时低能级 E_2 不是基态而是激发态，其上粒子数本来就极少，所以只要亚稳态 E_3 上的粒子数稍有积累，就容易达到 N_3 大于 N_2，实现粒子数反转分布，在能级 E_3、E_2 之间产生激光. 于是 E_4 上的粒子向 E_3 跃迁，E_2 上的粒子向 E_1 过渡，整个过程容易形成连续反转，因而四能级系统比三能级系统的效率高.

总之，要实现粒子数反转，工作物质内必须存在亚稳态，必须有激励源供给能量，粒子输运的全过程必须是一个循环往复的非平衡过程.

下面讨论工作物质的增益. 在激活介质中，个别处于高能级的粒子自发发射频率为 ν 的光子并跃迁到低能级. 这些自发发射产生的光子将作为外来入射光在该介质中传播. 由于这时激活介质已实现粒子数反转分布，所以频率为 ν 的光通过该介质后将获得增益，越走越强. 如图 9.2-4所示，设在激活介质 z 处光强为$I(z)$，经 $\mathrm{d}z$ 距离后，$I(z)$的改变量为 $\mathrm{d}I(z)$，则有

$$\mathrm{d}I(z)=GI(z)\,\mathrm{d}z$$

式中 G 为**增益系数**，表示介质对光的放大能力. 设在光的传播过程中 G 不变，将上式积分后得

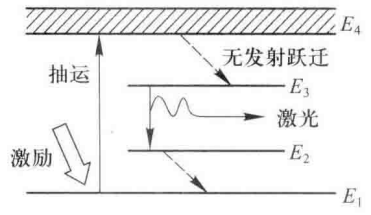


图 9.2-3 四能级图

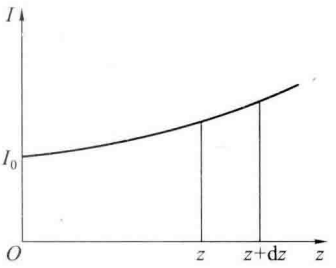


图 9.2-4 介质的增益

$$I(z)=I_0(z)\,e^{Gz} \tag{9.2-1}$$

即 $I(z)$将随着传播距离 z 的增加呈指数增长.

9.2.3 谐振腔和阈值

有了激活介质和谐振腔,还不一定能输出激光. 这是因为激光在谐振腔内来回反射的过程中,一方面激活介质使光得到增益,光强变大. 另一方面,光在端面上的反射、透射等会产生光能损耗,使光强变小. 若光的增益小于其损耗,就没有激光输出. 因此必须使增益大于损耗,光在谐振腔内来回反射时,其光强才能不断增大,最后才有稳定的激光束输出.

如图 9.2-5 所示,设工作物质的长度,亦即谐振腔长为 L,增益系数为 G,左、右端面两个反射镜 M_1、M_2 的反射率分别为 R_1、R_2,透射率分别为 T_1、T_2. 在 M_1 处的光强为 I_1,经工作物质到达 M_2 时,光强增加为

$$I_2=I_1e^{GL}$$

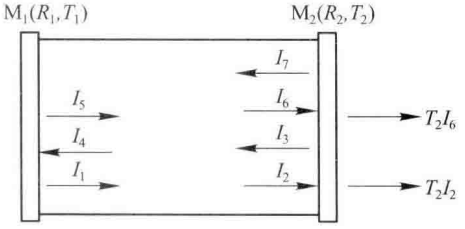


图 9.2-5 谐振腔内光的传播

经 M_2 反射后,光强减少为

$$I_3=R_2I_2$$

M_2 的反射光经介质到达 M_1 时,光强增加为

$$I_4=I_3e^{GL}=R_2I_1e^{2GL}$$

再经 M_1 反射,光强减少为

$$I_5=R_1I_4=R_2R_1I_1e^{2GL}$$

这时光在工作物质中正好来回一次. 要使光在这个过程中产生的增益大于其损耗,则必须保证

$$R_2R_1I_1e^{2GL}\geqslant I_1$$

即

$$R_2R_1e^{2GL}\geqslant 1 \tag{9.2-2}$$

对于给定的谐振腔，R_1、R_2、L 是一定的. 从上式可见，要使其左端大于或等于 1，必须使增益系数 G 大于某个最低数值 G_m. 这个使(9.2-2)式成立的 G_m 值就是谐振腔的**阈值增益**，(9.2-2)式称为谐振腔的**阈值条件**. 由此可得谐振腔的阈值增益为

$$G_m=\frac{1}{2L}\ln\frac{1}{R_1R_2}=-\frac{1}{2L}\ln R_2R_1 \tag{9.2-3}$$

实际上，在 $G>G_m$ 时，随着光强的增大，工作物质的实际增益 G 将下降，直至 $G=G_m$ 时，光强就维持稳定.

综上所述，形成激光的必要条件有两个：一个是在激光器工作物质内的某些能级间实现粒子数反转分布，另一个就是激光器必须满足阈值条件.

9.2.4　激光的纵模和横模

谐振腔不仅使激光具有极好的方向性，同时还起着频率选择器的作用，使激光具有极好的单色性.

光波在两个反射镜之间来回反射，腔内存在着反向传播的两列相干波，当其波长 λ 满足干涉相长条件时，就以驻波形式在腔内稳定存在. 即

$$2nL=K\lambda,\quad K=0,1,2,\cdots \tag{9.2-4}$$

式中 L 为腔长，n 为工作物质折射率，K 为正整数，表示腔内的波节数或波腹数. 由 $\lambda=c/\nu$，上式可化为

$$\nu_K=\frac{Kc}{2nL} \tag{9.2-5}$$

上式说明，只有满足这个频率关系的光波，才能以驻波形式存在于谐振腔中. 光场沿轴向传播的振动模式称为**纵模**. 由于 K 的取值不止一个，因而满足上述关系的频率也不止一个. 而那些不满足这个频率关系的光波，就不能形成驻波，即不能产生谐振，也就不能形成激光. 从(9.2-5)式可见，腔长 L 起着对频率的选择作用.

分别对(9.2-4)式和(9.2-5)式微分，即得相邻两个谐振的波长差和频率差

$$\Delta\lambda_K=\frac{\lambda^2}{2nL} \tag{9.2-6}$$

$$\Delta\nu_K=\frac{c}{2nL} \tag{9.2-7}$$

由此可见谐振频率是一系列分立的频率，其间隔 $\Delta\nu_K$ 称为**纵模间隔**. 但是这只是谐振腔允许的频率，而谐振模的谱线频宽 $\Delta\nu_K$ 要比原子自发辐射谱线的频宽 $\Delta\nu$ 窄很多，这些谐振模中只有落在激活介质所发射谱线的线宽范围 $\Delta\nu$ 内，并同时满足阈值条件的那些谐振频率，才能形成激光，成为纵模频率. 所以，从激光器输出频率的个数 N(即纵模数)由激活介质的频宽 $\Delta\nu$ 和纵模间隔 $\Delta\nu_K$ 的比值决定，即

$$N=\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_K} \tag{9.2-8}$$

上式说明，激活介质发射的谱线频宽 $\Delta\nu$ 愈大，可能出现的纵模数 N 愈多；而纵模间隔 $\Delta\nu_K$ 愈小（即腔长 L 愈大），在同样的频宽内可容纳的纵模数愈多，如图 9.2-6 所示. 例如氦－氖激光器的氖放电管中，频率为 $\nu_0=4.74\times10^{14}$ Hz（$\lambda=632.8$ nm）的谱线频宽为 $\Delta\nu=1.5\times10^9$ Hz，$n\approx1$，若激光器腔长 $L=30$ cm，由（9.2-7）式可求得其纵模频率间隔 $\Delta\nu_K=5.0\times10^8$ Hz，所以长 30 cm 的氦－氖激光器输出的纵模数为 $N=\dfrac{1.5\times10^9}{5.0\times10^8}=3$. 这种激光器称为多纵模（或多频）激光. 若腔长 $L=10$ cm，则 $\Delta\nu_K=1.5\times10^9$ Hz，于是 $N=\dfrac{1.5\times10^9}{1.5\times10^9}=1$，即在长 10 cm 的氦－氖激光器中，虽然满足谐振条件的频率很多，但形成的激光只有一个频率，这种激光器为单纵模（或单频）激光器.

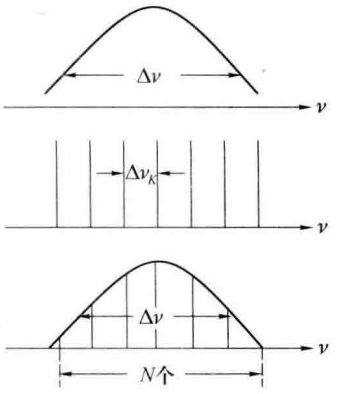


图 9.2-6 激光的纵模

激光腔内与轴向垂直的横截面内的稳定光场分布称为激光的**横模**. 用接收屏观察激光器输出光束在屏上形成的光斑，有时会出现如图 9.2-7 所示的光斑图形，它是激光的几种横模图形. 按其对称性可分为**轴对称横模**［图（a）］和**旋转对称横模**［图（b）］.

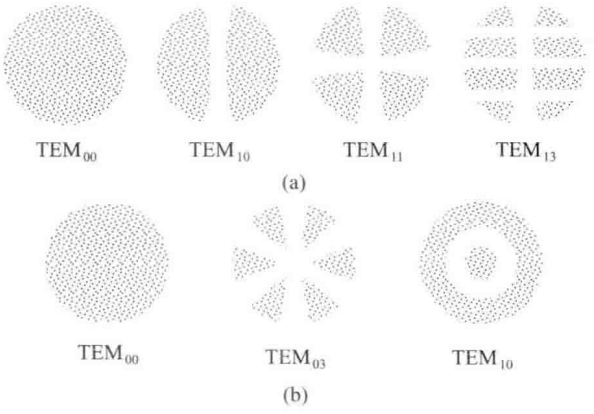


图 9.2-7 激光的横模

激光的模式一般用 TEM_{mnk} 表示，其中 TEM 是电磁横波缩写，k 为纵模数. 在轴对称横模中，m、n 分别表示光束横截面内在 x 方向和 y 方向出现的暗区数（即节点数）. 例如 TEM_{13}，在 x 方向有 1 个暗区，在 y 方向有 3 个暗区；在旋转对称横模中，m 表示沿半径方向出现的暗环数，n 表示圆中出现的暗直径条数. 如 TEM_{03}，图中无暗环，有 3 条暗直径.

横模的形成可视为光波衍射的结果. 光波在谐振腔内来回反射时，只有落在直径为 d 的镜面上那部分才能被反射，这相当于光通过直径为 d 的圆孔. 由于圆孔的衍射作用，使光的波前发生畸变，边缘部分的光将偏离原子束传播方向. 在光束第二次通过圆孔时，边缘部分将受阻被挡. 每经过一次反射，相当于发生一次衍射，光波前的边缘部分受到一次削弱. 光在经过几百次反射后，就形成如图 9.2-7 所示的分布，其特点是光能集中在光斑的中心部分，边缘光强很小，它在反射

镜之间来回反射时可保持其稳定的横向光场分布. 因此,激光的纵模和横模实际上就是从不同侧面反映了谐振腔所允许的光场的各种纵向和横向的稳定分布.

9.2.5　激光的特性

激光与普通光源发射的光相比,具有方向性好,相干性好,亮度高的特性.

1. 方向性

从激光器射出的光束基本上沿激光器轴向传播,其发散的立体角约为$10^{-5}\sim10^{-8}$ sr,而普通点光源是在4π立体角中发射,面光源是在2π立体角中发射,激光束的发散立体角比普通光源发散立体角小得多,可以将能量高度集中在很小的立体角以内.

2. 相干性

(1) 时间相干性　激光的线宽很窄,即单色性很好. 例如对白光可取$\lambda=550$ nm,$\Delta\lambda=300$ nm,由(4.6-4)式得相干长度$L_0\approx0.001$ mm,而对于一般的氦-氖激光器频宽约为$\Delta\nu=10^6$ Hz,其相干时间τ_0为10^{-6} s,相干长度$L_0\approx300$ m. 由于多种原因,实验室中激光器的相干长度要短得多,但仍是普通光源不可比拟的.

(2) 空间相干性　普通光源发出的光子分别属于各种不同的模式,而激光光子则属于一个或少数几个模式. 由于各个模式的光子是不相干的,所以普通光源的光只有在一定空间范围即相干孔径角α以内才相干;而激光仅有几个模存在,其空间相干性可以相当好. 若是单模式激光器,则其激光束截面上各点都是相干的,具有完全的空间相干性.

3. 亮度

激光的方向性好,能量被高度集中在很小的立体角$\Delta\Omega$内,激光的单色性好,能量被高度压缩在很窄的频率范围$\Delta\nu$内. 由于把能量在空间和时间上高度集中,所以激光的亮度可以比普通光源高出很多. 例如一脉冲激光器,发出的脉冲能量为$\Delta E=1$ J,脉冲宽度$\Delta t=10^{-9}$ s,带宽$\Delta\nu=10^9$ Hz,光束发散立体角$\Delta\Omega=\pi\times10^{-6}$;另一普通白炽灯,功率为1 W,在$\Delta t=1$ s内发射的能量也为$\Delta E=1$ J,光谱宽度$\Delta\nu=10^{14}$ Hz,光束发散立体角$\Delta\Omega=2\pi$,两者的光谱亮度相差2×10^{20}倍.

§9.3　激　光　器

自1960年第一台红宝石激光器问世以来,经过50多年的发展,已研制出适合各种用途的很多种激光器. 就其工作物质而言,有固体、半导体、气体、液体、染料激光器;各种激光器发射的谱线范围已涵盖了短至13 nm的极紫外(EUV)到774 μm的远红外;按工作方式可分为连续波和脉冲波两种,现已获得4.5 fs的超短脉冲;激光器的输出功率低至10^{-6} W量级,高可达10^{13} W. 下面我们介绍几种典型的激光器.

9.3.1　气体激光器

气体激光器是目前应用最广泛的一类激光器,其工作物质是气体状态的原子、分子或离子,如氦氖激光器、二氧化碳激光器、氮分子激光器、氩离子激光器等. 图9.3-1是氦氖激光器结构简图. 它的工作物质是按8∶1比例混合密封在放电管A内的氦氖混合气体,激励源是接放电管电

极 C、C′的 2～3 kV 的高压电源，谐振腔由全反射镜 M_1 和部分反射镜 M_2 组成，B、B′为布儒斯特窗.

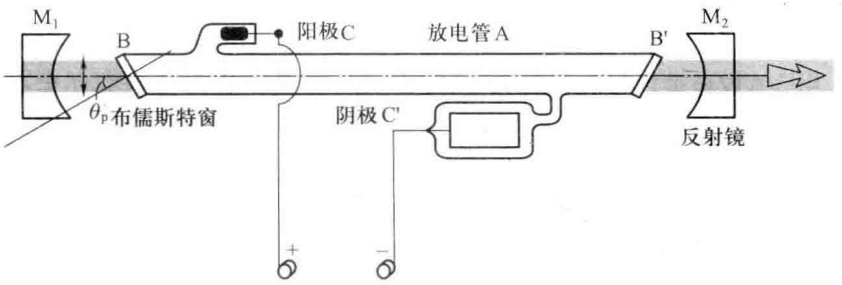


图 9.3-1 氦氖激光器的结构

氦氖激光器是四能级的激光器，如图 9.3-2 所示，涉及激光产生的四个能级分别为：E_1(1^1S 态)，E_2(2p 和 3p 态)，E_3(2s 和 3s 态)和 E_4(2^1S 和 2^3S 态). 气体激光器激发的方式一般为气体放电. 在放电中，被加速的电子撞击氦原子，使其从基态 1^1S 跃迁到 2^3S 和 2^1S 这两个亚稳态上. 从图中可见，氦的 2^3S、2^1S 亚稳态能级与氖的 2s 和 3s 态能级相近，位于这两个亚稳态上的氦原子很容易与基态氖原子相碰，放出能量返回基态，而将氖原子激发，即

$$He^* + Ne \longrightarrow He + Ne^* + \Delta E$$

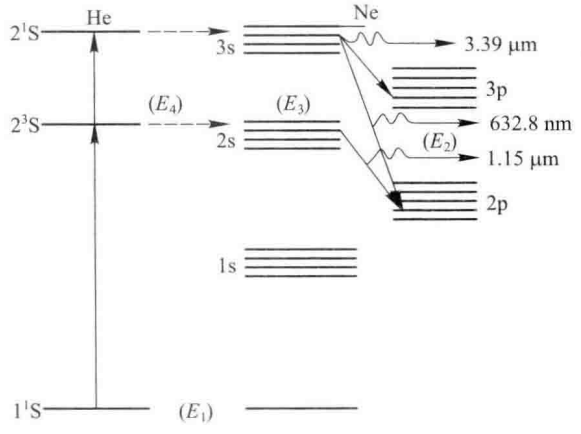


图 9.3-2 氦氖能级图

式中标 * 者表示该原子处于激发态. 若两种气体原子能级高度大致相同，相差值 ΔE 很小，就会因碰撞发生能量交换，这种过程称为**共振转移**. 共振转移的结果使氖原子激发到 2s、3s 态；低能级 2p 和 3p 为激发态，其上粒子数本来就少，所以 2s、3s 态上只要有少量粒子，就可以与低能级 2p、3p 态之间实现粒子数反转，产生受激发射. 受激发射产生的谱线分别是

由 $3s_2 \longrightarrow 3p_4$ 跃迁，发射 $\lambda = 3.39\ \mu m$ 谱线；

$3s_2 \longrightarrow 2p_4$ 跃迁，发射 $\lambda = 633\ nm$ 谱线；

$2s_2 \longrightarrow 2p_4$ 跃迁，发射 $\lambda = 1.15\ \mu m$ 谱线.

工作物质发射的光波在谐振腔内形成光振荡，在满足阈值的条件下输出激光. 气体激光器的优点是

能连续工作，输出光束的波长很丰富，单色性、相干性、稳定性都比其他激光器好，而且结构简单，造价低廉，操作方便，不足的是瞬时功率不高.

9.3.2　固体激光器

工作物质为晶体或玻璃的激光器统称固体激光器. 常见的工作物质有红宝石、钕玻璃、钇铝石榴石(YAG)等. 例如第一台红宝石激光器(见彩图 12)，其工作物质是掺有铬离子 Cr^{3+} 的三氧化二铝晶体，呈粉红色，激励源是脉冲氙灯. 它是三能级系统激光器，如图 9.3-3 所示，氙灯闪光时，处于基态的 Cr^{3+} 吸收光能跃迁到 E_3 能级，处于 E_3 能级的粒子寿命很短(约 10^{-9} s)，很快通过无发射跃迁方式到达 E_2 能级，粒子在 E_2 能级的寿命很长，达 3×10^{-3} s，能够在 E_2 能级积累大量粒子，从而在 E_2 和 E_1 两能级之间形成粒子数反转，由 E_2 能级向 E_1 能级跃迁，产生受激发射，发出 $\lambda=694.3$ nm 和 $\lambda=692.0$ nm 的谱线.

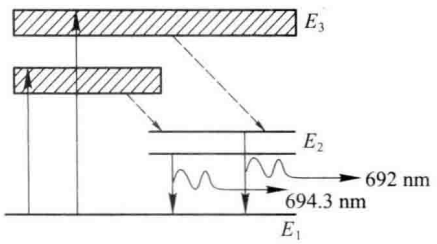


图 9.3-3　红宝石激光器三能级图

固体激光物质能储存较多的能量，比较能够获得大能量、大功率的激光脉冲. 固体工作物质体积小、机械强度好、使用方便，但在效率和输出激光的频率稳定性、相干性方面都不如气体激光器.

9.3.3　半导体激光器

半导体激光器以半导体材料，如砷化镓、硫化镉、锑化铟等作为工作物质. 如图 9.3-4 所示，在半导体中一系列间距相隔很小的能级组成能带. 电子处于束缚状态时能量低，这个能量范围称为**价带**. 由于光或电的激发电子由价带跃迁到较高能带，有了一定导电能力，这个能量范围称为**导带**. 价带和导带之间有一个能量间隔，电子不存在这些能量状态，这个能量间隔称为**禁带**，用 E_g 表示. E_g 的大小代表着系统的导电能力，$E_g=0$ 为金属，E_g 很大为绝缘体，E_g 较小为半导体. 激发到导带中的电子按一定规律分布在带底 E_c 以上的一个区域. 电子占据概率为 1/2 的位置 E_{Fc} 为**电子的准费米能级**；在 E_{Fc} 以上，电子占据概率小于1/2；在 E_{Fc} 以下到 E_c 区域内，电子占据概率大于 1/2. 同样，在价带内，电子被激发后留下相应的空穴，空穴占据概率为 1/2 的位置 E_{Fv} 为**空穴的准费米能级**，愈向下，空穴占据概率愈小；从 E_{Fv} 以上到 E_v 区域内，空穴占据概率大于 1/2. 在 E_{Fc} 到 E_{Fv} 这一区域内，当导带的电子数多于价带的电子数时，在半导体中就实现了粒子数反转，并在 E_{Fc} 和 E_{Fv} 之间产生受激发射.

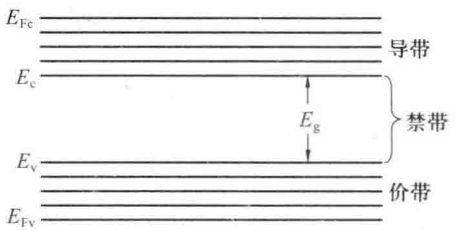


图 9.3-4　半导体激光器能带图

早在1961年和1962年,苏联和美国科学家分别宣布在化合物半导体GaAs中实现了受激光发射,但这种同质结半导体激光器只能在低温条件下产生脉冲激光.

1970年半导体激光器中引入双异质结构,实现了室温状态下的连续激光发射,使半导体激光器走向实际应用.

半导体异质结的进一步发展,产生了量子阱激光器.更低维量子结构的应用,发展了性能更优越的量子线与量子点的半导体激光器.

半导体激光器的特点是体积小、重量轻、高效率、长寿命、高重复频率、波长可调.半导体激光器的应用,使光通信、光存储、光信息处理等都进入了新时期.另外,如前所述半导体发光二极管(LED)从根本上改变了前三代照明光源的发光机理,已日益普及成为第四代照明光源.

在众多的激光器中,全固态激光器,即由半导体激光器泵浦的固体激光器(广义地讲,还包括半导体激光器泵浦的光纤激光器和大功率半导体激光器),集中了半导体激光器、固体激光器和光纤激光器三者的全部优势,具有逐步取代气体、液体及传统固体激光器的可能性,是当今激光器的主要发展方向.

§9.4 激光的应用

激光束具有高亮度、高单色性和高相干性、高定向性,其应用已遍及工业、农业、医疗、科学、军事等各种技术领域,例如激光通信、激光雷达、激光加工、激光测距、激光准直、激光计量、激光育种、激光全息、激光大屏幕显示、激光手术、激光武器……这方面的专著和文献很多,读者不难查到.下面仅就激光冷却和激光受控核聚变作简单介绍.

9.4.1 激光冷却和捕陷原子

操纵和控制孤立的原子一直是物理学家追求的目标.由于原子不停地运动,要想对其操纵和控制,必须降低其速度至极低,即将原子冷却,才能将其约束在某个空间小区域内.早在1975年,汉斯(Hansch)和肖洛就提出了用两束互相对射的激光冷却中性原子的建议.

如图9.4-1所示,设一原子质量为m,以速度v沿$-x$方向运动,激光束沿$+x$方向迎面射向原子,设原子静止时的吸收频率为ν_0,由于多普勒效应及$v \ll c$(光速),使光频略低于原子的共振频率(负失谐),原子共振吸收光子的概率最大,即

$$\nu = \nu_0(1 - v/c) \tag{9.4-1}$$

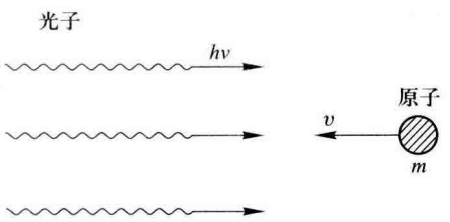


图9.4-1 多普勒冷却

原子吸收光子后以自发发射的方式发射出光子回到基态,然后再吸收光子,再自发发射……一般原子每秒可吸收、自发发射上千万个光子.原子每次吸收一个光子,都得到与其运动方向相反的动量;而由于自发发射的各向同性,每次自发发射的光子的方向都是随机的,多次重复下来,吸收时得到的动量随吸收次数增加,而自发发射损失的动量平均为零,因此被减速.平均每一次吸收-自发发射过程,原子速度减少

$$\Delta v=\frac{h\nu_0}{mc} \tag{9.4-2}$$

由于原子每秒吸收和自发发射光子的次数很多,这种减速力是很大的,例如对 Na 原子的 589 nm 共振光而言,其减速效果相当于十万倍的重力加速度,从而可使原子冷却到极低温度. 这种冷却称为**多普勒冷却**. 所有用激光冷却、捕陷原子的过程都是基于原子对光子的吸收、再发射而导致的反冲.

若原子沿 x 轴作一维无规运动,其速度的大小和正负无规变化,用沿 x 正负方向的两束相对的负失谐激光照射,原子优先吸收迎面而来的激光光子,而原子所受力的方向总是与速度方向相反,因而是阻尼力,原子速度就会逐渐减小而趋于零.

1985 年在贝尔实验室的朱棣文小组用上下左右前后 6 束激光照射到从原子束上减速下来的钠原子团上,测量了 6 束激光交汇处冷却下来的原子团温度,结果由 100 mK 降至 240 μK. 在 6 束激光交汇区,原子-光子不断吸收发射,交换动量,处于互相胶着的状态,它们分别作类似于布朗运动的无规行走,从一处扩散到别处. 朱棣文把这种原子光子的胶着状态称为**光学粘胶**(optical molasses),因为它犹如一团糖浆,糖分子在其中作扩散运动而无法逃脱. 1987 年美国国家标准局菲利浦斯小组重复了他的试验,测得的温度竟低达约 40 μK. 为了对原子进一步冷却,还需采用其他技术,例如利用 6 束激光交汇处形成的偏振梯度场产生偏振梯度冷却,以及激光原子阱等. 在 20 世纪 90 年代初,原子冷却温度达到 100 nK,1995 年已达几 nK.

美国斯坦福大学的朱棣文、法国巴黎高等师范学院的 C. C. 塔努吉、美国国家标准与技术研究所的 W. D. 菲利浦斯因发明用激光冷却和捕陷原子的方法而获得 1997 年诺贝尔物理学奖.在以上工作基础上,美国国家标准与技术研究所的 E. A. 康奈尔、美国科罗拉多大学的 C. E. 维曼、美国麻省理工学院的 W. 克特勒因实现在铷(Rb)、钠(Na)等碱金属原子稀薄气体中的玻色-爱因斯坦凝聚态(Bose-Einstein Condensation,简写为 BEC)而获得 2001 年诺贝尔物理学奖.BEC 是玻色和爱因斯坦在 1924 年预言的原子在接近绝对零度时凝结在一起所形成的既非液体又非固体的新的物质状态,用合适的方法将 BEC 中的原子从原子阱中耦合出来,可形成相干的原子束,这好比激光束的光子,因而称为**原子激射**(atom laser).它是在 20 世纪继 maser 和 laser 之后实现的第三种激射.BEC 的成功实现和原子激射的诞生,开辟了“原子光学”研究的新领域.

9.4.2 激光核聚变

核聚变是两个轻的原子核结合成一个较重的原子核的核反应过程. 核聚变反应能释放巨大的能量,而且由于这种能源干净、安全,且以用之不竭的海水作为原料,因此受控热核聚变能是人类下一世纪能源的主要希望所在. 在地球上主要有磁约束和惯性约束两种方法可实现受控热核聚变. 早在 1963 年和 1964 年,巴索夫(Basov)、道森(Dawson)和王淦昌分别独立地提出激光惯性约束核聚变(Inertial Confinement Fusion,简称 ICF)的建议. 如图 9.4-2 所示,惯性约束核聚变的反应过程分为以下四步:(1) 用高功率激光束均匀辐照氘氚等热核燃料组成的微型靶丸,在极短时间里将靶丸表面物质离化形成包围靶芯的高温等离子体;(2) 等离子体膨胀向外爆炸的反作用力会产生极大的向心聚爆的压力压缩靶丸,这个压力大约相当于地球上大气压力的十亿倍;(3) 由于这么巨大的压力作用,在压缩的后期氘氚等离子体被压缩到极高密度(为一般固体密度

的$10^3 \sim 10^4$倍)和极高温度(10^8℃),约束时间在 10^{-9} s 量级,从而在靶丸中心产生"热斑";(4) 实现氘氚燃料的聚变反应,并释放能量燃烧起来.

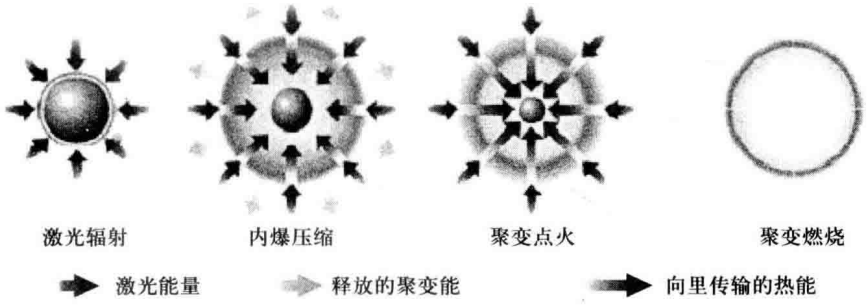


图 9.4-2 惯性约束核聚变的四个阶段

与磁约束核聚变反应不同的是,惯性约束聚变的等离子体并不需要任何外力对其约束,而是依靠燃料自身的惯性,在高温高压下,氘氚燃料在还未来得及飞散之前的短暂时间内将引发核聚变反应.

为了研究激光驱动的惯性约束聚变,要求激光脉冲宽度达 ns 和亚 nm 量级,功率密度达 $10^{12} \sim 10^{15}$ W/cm^2,脉冲能量达 10^6 J. 美、英、法、日、俄等国已竞相研制成功多台用于 ICF 研究的高功率激光器,目前运用最广泛的是钕玻璃激光器. 不过世界上现已建成的激光器还没有达到 ICF 应用所要求的参数水平,所以各大国正在研制更大功率的激光器,其中美国国家点火装置(简称 NIF)为在建中最大的激光器,也是世界上最大的光学工程,耗资数十亿美元,计划于 2010 年建成,其参数如下:激光束数——192 束;脉冲能量——1.82 MJ;峰值功率——500 TW;波长——0.35 μm.

§9.5 光学倍频和混频效应

9.5.1 非线性光学概述

我们在前面讨论光的干涉、衍射以及光的偏振时都用到光波的叠加原理,即无论在真空或介质中,当两列或更多列光波相遇时总光场等于各列波单独产生的光场的线性叠加,与光扰动之间的乘积或高阶项无关. 叠加原理描述了各个扰动的独立性. 介质中光波的叠加原理之所以能成立,是基于假设介质的折射率是与光强无关的常数. 实际上,当光强很大时折射率与光强的关系就不能忽略了,这时光学中的非线性现象十分明显,叠加原理不再成立.

非线性实际上是光学现象的内在规律. 在经典光学中的非线性现象表现在如介质折射率可受到电场影响而改变(泡克尔斯效应、克尔效应)等. 在极高频率电磁场(光场)作用下的非线性现象是在激光出现后,在强光作用下才被大量发现,例如光学倍频和混频、相位共轭、参量放大及振荡、自聚焦、自透明、光学双稳、多光子吸收等. 后来人们又发现某些材料(例如光折变材料铌酸锂)在普通光强下也能产生非线性现象,更加促进了非线性光学的发展及应用,使之成为光学中的一个重要分支学科. 以下我们将介绍几种典型的非线性光学效应.

9.5.2　光学倍频效应

1961 年，弗兰肯(Franken)等人将 3 kW 红宝石激光器发出的波长为694.3 nm的激光束聚焦到石英晶片上(图 9.5-1)，在输出光束中除了原波长谱线外，还发现微弱的 347.15 nm 紫外光谱线，它的频率正好是输入激光频率的两倍，即产生了二次谐波，或称之为**光学倍频效应**. 它是激光出现以后最先被发现的非线性效应.

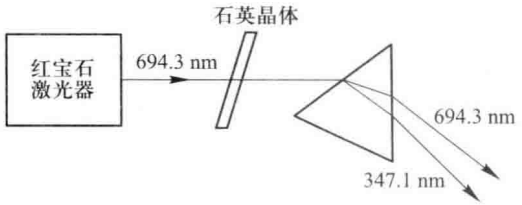


图 9.5-1　弗兰肯倍频实验装置

按照经典电磁理论，原子中束缚不紧密的价电子在电磁场的作用下将产生相对位移，引起感应电极化效应. 电极化强度矢量 $\boldsymbol{P}$ 在空间的分布称为极化场，极化场周期性地迅速变化，将产生相应频率的光波. 这就是说，光在介质中的传播过程，可以看作是介质感生偶极子和偶极子发射次级电磁辐射的过程.

首先假设介质是各向同性的电介质，在普通光源照明情况下，光波中的电场很弱，引起的介质极化强度矢量平行于电场并与其大小成正比，即 $\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\chi\boldsymbol{E}$，式中 χ 为线性电极化率，与外场无关，而 $n^2=\varepsilon_r=1+\chi$，则 n 与外场无关. 如果入射光强很大，介质的电极化强度矢量和外电场不再保持线性关系，这时可将电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 按电场 $\boldsymbol{E}$ 作幂级数展开为

$$\boldsymbol{P}=\varepsilon_0(\chi_1\boldsymbol{E}+\chi_2\boldsymbol{E}^2+\chi_3\boldsymbol{E}^3+\cdots) \tag{9.5-1}$$

式中系数 $\chi_1,\chi_2,\chi_3,\cdots$ 分别为一阶、二阶、三阶极化率……量子论指出，它们衰减得很快，后一项的系数比前一项小得多，它们之比 $\dfrac{\chi_2}{\chi_1}=\dfrac{\chi_3}{\chi_2}=\cdots=\dfrac{1}{E_a}$，式中 E_a 为原子内的场强，其量级为 10^{10} V/m. 所以只有当外场 $\boldsymbol{E}$ 很强时，非线性项的贡献才能表现出来.

在极化强度的展开式中，一次项的作用是产生和入射光频率相同的基波，我们只考虑其二阶极化强度就可以解释倍频效应. 对于各向同性介质，可以写为

$$\boldsymbol{P}^{(2)}=\varepsilon_0\chi_2\boldsymbol{E}^2 \tag{9.5-2}$$

对于各向异性的晶体，$\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的方向一般是不同的，二阶极化强度矢量与电场强度矢量的关系须用三阶张量来联系. 但是，如果我们只考虑二阶极化强度的大小时，上式仍可应用，不过应将式中的 χ_2 理解为二阶有效极化率 χ_{eff}，它不仅随晶体而异，也随光在晶体中的传播方向而改变. 在下面的讨论中，为书写简单计，我们略去脚标 eff.

现在设圆频率为 ω 的单色光射入晶体介质，其光矢量为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\cos\,\omega t$$

代入(9.5-2)式可得

$$\boldsymbol{P}^{(2)}=\varepsilon_0\chi_2\boldsymbol{E}_0^2\cos^2\omega t=\frac{\varepsilon_0}{2}\chi_2\boldsymbol{E}_0^2(1+\cos 2\omega t) \tag{9.5-3}$$

上式右端第一项为不随时间变化的“直流”项，它表明一束很强的单色平面偏振光穿过一块适当的晶片时，将产生恒定的电极化，即在晶片两表面间形成与入射光强 E_0^2 成正比的电位差，可称为光学整流. 在倍频效应发现后不久，已观察到这种效应. 上式右端第二项为频率等于入射光频率两倍的极化场，它将产生次级二次谐波即倍频光的辐射.

常用的倍频晶体材料有：KDP（磷酸二氢钾）、ADP（磷酸二氢铵）、$LiNbO_3$（铌酸锂）、$LiIO_3$（碘酸锂）、$Ba_2NaNb_5O_{15}$（铌酸钡钠）等.

1961 年弗兰肯等人所作的实验中，入射光的能量只有约 $1/10^8$ 转换为二次谐波的能量，转换效率相当低. 这是因为入射光在晶体中沿途诱发二阶偶极矩作为能辐射二次谐波的相干子波源，它们各自发出的二次谐波到达出射面时，可以有各自不同的相位，相互叠加的结果会产生部分的甚至完全的相消干涉. 要使这些二次谐波完全地相长干涉，就必须让它们有相同的相位，这称为**相位匹配**.

设晶体中基波和二次谐波的波数分别为 k_1 和 k_2，有

$$k_1=2\pi n_1/\lambda_1,\quad k_2=2\pi n_2/\lambda_2$$

式中 λ_1、λ_2 分别为基波和二次谐波在真空中的波长，n_1 和 n_2 分别为在晶体中在它们的传播方向上的折射率. 理论分析表明，当

$$\Delta k=k_2-2k_1=0,\quad n_1=n_2 \tag{9.5-4}$$

时将有最强的倍频光. (9.5-4)式称为**相位匹配条件**或**折射率匹配条件**，满足此条件时，基频光与倍频光在介质中有相等的传播速度，即 $c/n_1=c/n_2$，于是基频光和它在晶体中各处激发的倍频光传播到出射面时有相同的相位，因而干涉加强产生最大光强.

从量子观点看，倍频效应是两个能量同为 $\hbar\omega$ 的光子在介质中结合起来形成一个能量为 $2\hbar\omega$ 的光子. 因为微观粒子在相互作用过程中要满足能量转化与守恒定律和动量守恒定律，即

$$\hbar\omega_1+\hbar\omega_1=\hbar\omega_2 \tag{9.5-5}$$

$$hk_1+hk_1=hk_2 \tag{9.5-6}$$

由(9.5-5)式可得频率关系 $\omega_2=2\omega_1$，而(9.5-6)式即为相位匹配条件(9.5-4)式，其中 $\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$.

实现相位匹配的方法有多种. 例如对于各向异性晶体，在其中沿同一波法线方向传播的两个振动方向互相垂直的光波，其折射率并不相等，但在某些特定方向上，其一的 o 光和另一的 e 光折射率可能相同，从而使基频光和倍频光传播的相速度相等以实现相位匹配.

9.5.3 光学混频效应

设有两束振动方向相同的单色线偏振光，它们的圆频率不等，分别为 ω_1 和 ω_2，在同时入射到非线性介质上时得到的光场将为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{01}\cos\omega_1 t+\boldsymbol{E}_{02}\cos\omega_2 t$$

$$\boldsymbol{P}^{(2)}=\varepsilon_0\chi_2(\boldsymbol{E}_{01}\cos\omega_1 t+\boldsymbol{E}_{02}\cos\omega_2 t)^2$$

$$=\frac{\varepsilon_0}{2}\chi_2 E_{01}^2(1+\cos 2\omega_1 t)+\frac{\varepsilon_0}{2}\chi_2 E_{02}^2(1+\cos 2\omega_2 t)$$

$$+\varepsilon_0\chi_2 \boldsymbol{E}_{01}\cdot\boldsymbol{E}_{02}\cos(\omega_1+\omega_2)t+\varepsilon_0\chi_2\boldsymbol{E}_{01}\cdot\boldsymbol{E}_{02}\cos(\omega_1-\omega_2)t$$

上式表明，极化场除了直流成分和 ω_1、ω_2 的倍频成分外，还出现圆频率为 $\omega_1+\omega_2$ 和 $\omega_1-\omega_2$ 的成分. 它们将分别辐射出圆频率为 $\omega_1+\omega_2$ 和 $\omega_1-\omega_2$ 的光波. 前者称为**光学和频效应**，后者称为**光学差频效应**.

从量子观点看，和频效应是能量为 $\hbar\omega_1$ 和 $\hbar\omega_2$ 的光子结合成一个能量为 $\hbar(\omega_1+\omega_2)$ 的光子. 而差频效应则是能量为 $\hbar\omega_1$ 和 $\hbar\omega_2$ 的两个光子相互作用时，能量转变中较高频的 $\hbar\omega_1$ 光子湮灭，生成两个新的光子 $\hbar\omega_2$ 和 $\hbar(\omega_1-\omega_2)$.

利用和频和差频效应可在多种晶体内实现频率的上转换和下转换. 例如将红宝石激光器输出的 694.3 nm 激光和 He-Ne 激光器输出的 3.39 μm 激光同时输入 $LiIO_3$ 晶体，可产生 576.0 nm 的和频绿光. 为了观察到这些效应，同样必须满足相位匹配条件.

§9.6　光学相位共轭

9.6.1　什么是光学相位共轭

在 §3.3.3 中已指出，设两列波的波函数互为复共轭函数，即它们的复振幅分别为

$$\tilde{E}(P)=A(P)e^{ik\cdot r},\quad \tilde{E}^*(P)=A(P)e^{-ik\cdot r} \tag{9.6-1}$$

则称之为互为共轭波. 由此可见，信号波的共轭波在数学上是信号波的时间反演波. 在 $t=0$ 时刻，它们具有完全相同的表达式，在其后的时间里，观察相位共轭波就好似追溯信号波的过去，如图 9.6-1 所示.

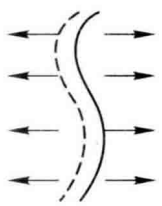


图 9.6-1　共轭波（虚线）追溯信号波的过去

利用光学非线性效应，使任意光束中的每一个平面波分量的传播方向及其在任一处的相位因子发生反演，这种技术称为**光学相位共轭**. 产生这样一种相位共轭的器件或装置称为相位共轭镜. 平面波经共轭镜反射后，其入射波的波矢 $\boldsymbol{k}$ 变成 $-\boldsymbol{k}$，如图 9.6-2 所示. 发散的球面波由共轭镜反射后变成沿原路返回的会聚波，如图 9.6-3 所示.

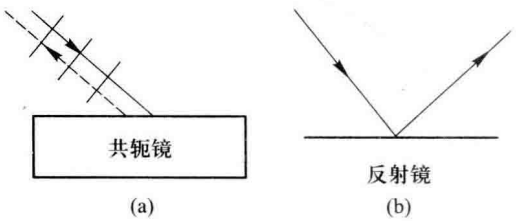


图 9.6-2　平面波在共轭镜和普通反射镜面的反射

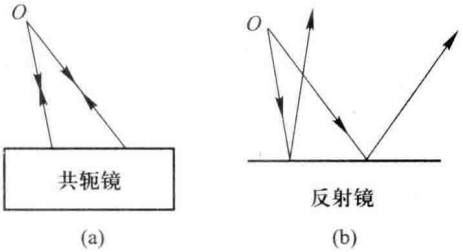


图 9.6-3　球面波在共轭镜和反射镜上的反射

9.6.2 简并四波混频产生相位共轭

迄今发现产生相位共轭的方法包括最常见的四波混频、受激布里渊散射以及其他非线性效应，例如二波混频、三波混频、受激拉曼散射、光子回波、双光子吸收等. 本节中讨论简并四波混频法.

让三束频率相同的相干光（例如 Ar^+ 激光）进入非线性介质（例如光折变晶体 $BaTiO_3$），如图 9.6-4所示.图中 E_1、E_2 为传播方向相反的两束强光，通常称之为泵浦光，E_3 为信号光，由非线性介质输出与 E_3 方向相反的 E_4 就是 E_3 的共轭光. 所谓简并，是指三束输入光和输出的共轭光的频率都相同. 一般情况下，四束光的频率可以不同.

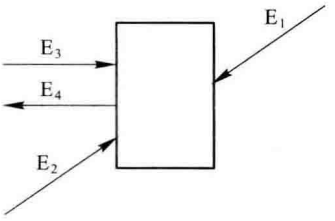


图 9.6-4 简并四波混频产生共轭波示意图

简并四波混频产生的相位共轭可用实时全息模型作解释，即把 E_1（或 E_2）看作参考光，E_3 看作物光，这两束光在非线性介质中产生干涉. 在干涉相长的位置，电场强、光强大，这些区域的介质受到强光的作用引起介质的光学性质发生变化. 而在干涉相消的位置处，光强为零或者很弱，介质性质不发生变化. 这个过程与全息照相记录过程相似，不过全息照相在记录时，光强大的位置引起的记录介质变化被保存了下来；而这里介质性质变化是暂时的，入射光去掉以后介质又恢复原来状态，所以可以称之为动态全息图. 参考光束 E_2（或 E_1）的作用是作为再现光，不过它是从相反方向入射，在介质中不同折射率的区域受到散射，散射光再叠加干涉，由 §6.6，结果将形成与原物光束共轭的光束. 用全息模型解释相位共轭是不全面的，只有用非线性理论来解释才更完善和准确，本书对此不作讨论.

9.6.3 相位共轭的应用

在激光系统中由于各类热畸变、退偏效应以及激活介质材料缺陷等造成光束质量降低，可以使光束两次或多次通过同一激活介质，利用光束的相位共轭特性，使光路中的相位畸变得到矫正或改善.

利用相位共轭的再成像特性，可使返回的相位共轭波在无须使用透镜的条件下形成一共轭像. 这类系统可用作光学信息处理系统中的各种无透镜成像，从而使模板成像时免受由成像口径所带来的分辨率限制，而使之成为一种高分辨率的成像方法.

当光路中存在相位干扰或畸变，特别是当干扰为随机时变的情况下，可以利用相位共轭波两次通过畸变介质而使畸变得到矫正，例如带相位共轭镜的泰曼或迈克耳孙干涉仪、地对空信号传递时对大气扰动的矫正、激光打靶装置中对不稳定靶的自动跟踪及生物显微镜中相位共轭光镊对显微对象的自动跟踪等. 当畸变为快速变化时，还可作快变物体的监测.

对于多模光纤传输的脉冲信号，由于模色散而造成脉冲展宽，可以利用相位共轭波再次通过同类或同一光纤时得到补偿而重新获得窄脉冲. 在光纤用作图像传输时，也可利用类似原理改善由于模色散造成的图像模糊.

思 考 题

9.1 实现粒子数反转的条件是什么?

9.2 谐振腔在激光形成中起什么作用?

习 题

9.1 一台 He-Ne 激光器发射波长为 632.8 nm 的基横模激光,腔长 25.00 cm. 试求:

(1) 腔内稳定驻波的波腹数;

(2) 纵模间隔.

9.2 钠低压放电管发出 $\lambda = 589.0$ nm 的黄光,其谱线宽为 $\Delta\lambda = 0.001\ 94$ nm,试计算黄光频率、频宽及其相干长度. 又一氦-氖激光器发射波长为 632.8 nm 的红光,设其半强度宽为 $\Delta\lambda = 10^{-8}$ nm,求此激光器的相干长度.

9.3 设氩离子激光器输出的 488.0 nm 基模的频率范围为 4 000 MHz,求腔长为 1 m 时,光束中含几个纵波?相邻近波长相隔多少?

9.4 如果光在增益介质中通过 1 m 后,光强增大至两倍,试求介质增益系数.

9.5 氦氖气体激光器以 TEM_{00} 模振荡,中心波长 $\lambda = 632.8$ nm. 若该谱线的荧光线宽为 1 700 MHz,激光器谐振腔腔长为 1 m,求:

(1) 激光器纵模频率间隔;

(2) 激光器中可能同时激发起的纵模数;

(3) 若采用缩短腔长法获得单纵模振荡,估计激光器谐振腔腔长的最大允许值.

9.6 在二阶非线性介质输入端输入 $\boldsymbol{E}(0,t) = \boldsymbol{E}_0 e^{i\omega t}$ 的平面波作基频波,求介质中 z 处的二阶非线性极化强度 $\boldsymbol{P}^2(z,t)$.

习题参考答案

第一章

1.2 (1) 3.81×10^{8} m;(2) 6.35×10^{-11}.

1.3 $n=\sqrt{\dfrac{4h^2+d^2}{d^2}}$.

1.4 22.03 cm.

1.7 (2) $\delta=\pi+2\phi-4\arcsin\left(\dfrac{1}{n}\sin\phi\right)$;

(3) $\phi=\arcsin\left(\pm\sqrt{\dfrac{4-n^2}{3}}\right)$.

1.8 (1) 34°32′;(2) 17°55′;(3) 52°27′.

1.11 (1) −3.94 cm,6.44 cm;

(2) 25.4 m^{-1};(3) 11.4 cm;

(4) −0.775.

1.12 33.3 cm.

1.13 −15 cm,1.33.

1.14 −15 mm.

1.15 −10 cm,4 cm;$0<s<r/2$.

1.16 $f=\dfrac{g}{2\omega^2}$.

1.17 2 cm.

1.18 $h=\sqrt{ab}$.

1.19 $f'=30$ cm,$f=-40$ cm.

1.20 7.5 cm.

1.21 在 L_2 右侧 2 cm 处生成高 1 cm 的倒像.

1.22 $\beta=\beta_1\cdot\beta_2=-1$,令 $\beta_1=-0.5$,$\beta_2=2$ 可得

$S_1=-3f_1'$,$d=6f_1'$,$f_2'=9f_1'$.

1.23 $2f'/3$.

1.24 (1) 85.4 cm;

(2) 在透镜后 6 cm 处生成放大 6 倍的倒立实像.

1.25 -4.21 m^{-1}.

1.26 8 m^{-1}.

1.27 $\Phi=36.4$ m^{-1}.

1.28 在 L_2 右侧 8 cm 处生成 4 cm 高的倒立像.

第二章

2.1 L_1 为 A. S. 与入瞳;出瞳位于 L_2 右侧 7.5 cm 处,口径为 6 cm.

2.2 L_2 为 A. S. 与出瞳;入瞳位于 L_1 右侧 11.25 cm 处,口径为 9 cm.

2.5 (1) 出瞳位于目镜像方焦点右侧1.25 mm处,口径为 5 mm;

(2) −8;

(3) 入窗与出窗分别在物面及像方无穷远处;

(4) 物方视场角 3.58°,像方视场角 26.57°.

2.6 (1) 物体在 F_0 外 0.06 cm 处,$M=-133$;

(2) 推近 0.32 cm.

2.7 $M=-4$,$f_2'=10.0$ cm.

2.8 0.5 m.

第三章

3.1 (1) 4 cm,0.4 cm;(2) 3 Hz,0.56 Hz;

(3) $\dfrac{1}{3}$ s,1.79 s;(4) 5 cm,0.9 cm;

(5) 15 cm/s,0.5 cm/s;(6) 均为沿 z 轴正方向传播.

3.2 83.3 nm.

3.4 (1) 10^2 V/m,5×10^{14} Hz;(2) 1.54;

(3) 2.56×10^{6} m^{-1};(4) 1.81×10^{6} m^{-1}.

3.5 (1) $\dfrac{5}{2\pi}$ Hz;(2) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{29}}$ cm;

(3) 传播方向的方向余弦为

$\left(\dfrac{2}{\sqrt{29}},\dfrac{-3}{\sqrt{29}},\dfrac{4}{\sqrt{29}}\right)$,大小为$\dfrac{\sqrt{29}}{2\pi}$ cm^{-1}.

3.6 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{14}},\dfrac{2}{\sqrt{14}},\dfrac{3}{\sqrt{14}}\right)$.

3.7 $I=3.82\times10^{13}$ J/(s·m^2),

$A=1.69\times10^{8}$ V/m.

3.8 10^{3} V/m.

3.9 56°35′.

3.10 11°30′.

3.11 1.60.

3.12 $i_B=\arctan\sqrt{2}$.

3.13 0.02.

3.15 20%,4%

第四章

4.1 0.5 cm,1.5 cm,1 cm.

4.2 0.048 mm.

4.3 1.5.

4.4 (1) $x=D\theta$;

(2) $\theta=\left(K+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{t}$,$K=0,1,2,\cdots$.

4.5 (1) 50 μm;(2) 58 μm.

4.6 (1) 单开 S 缝:$I_1=4A^2\cos^2\frac{\delta_1}{2}$,$\delta_1=\frac{2\pi}{\lambda}(S_2P-S_1P)$;

单开 S' 缝:$I_2=4A^2\sin^2\frac{\delta_1}{2}$,$\delta_1=\frac{2\pi}{\lambda}(S_2P-S_1P)$;

同时打开 S 和 S' 缝:$I=I_1+I_2=4A^2$;

(2) $I=8A^2\cos^2\frac{\delta_1}{2}$.

4.7 $2\cos^2\theta/(1+\cos^2\theta)$,$\cos\theta$.

4.8 (1) 1.51 mm;(2) $N=13$;

(3) $\Delta x'=0.79$ mm,$N'=23$;

(5) 0.072 mm.

4.9 10^{-3} rad.

4.10 (1) 0.49 mm;(2) 11;(4) 2 cm.

4.11 (1) 0.60 mm;(2) 10.4 m,101;

(3) 20.8 m.

4.12 间距缩为未放置透镜时的 1/8.

4.13 (1) 2.29 mm;(2) 0.19 mm.

(3) 0.125 mm

4.14 (1) 1.08 mm;(2) 4.76×10^{-2} mm.

4.15 2.5 mm.

4.16 1.5×10^{8} Hz,6.7×10^{-9} s,2 m.

4.17 (1) 1 mm;(2) 6.67 mm;(3) 100;

(4) 0.3 mm.

4.18 0.06 mm.

4.19 147 条,1.36 mm.

4.20 (1) 0.112 μm;(2) 595.8 nm(黄色).

4.21 1.21,1.420 mm.

4.22 2.30×10^{-4} rad.

4.23 (2) 126.6 nm.

4.24 1.810×10^{3} mm.

4.25 $r_K=\sqrt{K\lambda\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right)}$,

$r_K=\sqrt{K\lambda\left(\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}\right)}$.

4.26 49 μm.

4.27 1.552,0.089 μm.

4.28 105.8 nm,0.37%.

4.29 (1) 40;(2) 0.707 rad.

4.30 1.000 291.

4.31 4.6 mm,0.064 8 nm,6.52×10^{10} Hz.

4.32 (2) 4.33 m.

4.33 (1) 360,0.21 rad,29.8;

(2) 10^{4},2.45×10^{-2} rad.

4.34 (1) 31 605,25 条,31 581,1 cm.

4.35 2.94 cm,6×10^{-3} nm.

第五章

5.1 0.05 cm,0.051 5 cm.

5.2 (1) $\lambda_1=2\lambda_2$;

(2) $K_2=2K_1$ 时两者的极小重合.

5.3 63 μm.

5.4 290 km,290 m,116 m.

5.5 16.8 m.

5.6 1.34×10^{-7} rad,2.16×10^{3}.

5.7 5×.

5.8 (1) 10×;(2) 73×.

5.9 (1) 287 nm;(2) 1.7,432.

5.10 物镜分辨本领为 429 线/mm.

5.11 $5<d/a\leqslant6$.

5.12 (1) $2\theta=0.104$ rad;(2) 5;

(3) 1.52×10^{-5} rad.

5.13 5×10^{-6} rad,可分辨.

5.14 (1) 0.625×10^{-3} mm;(2) 10^{-5} rad;

(3) 1.25×10^{-2} nm;

(4) 0.36×10^{-2} nm.

5.15 0.31′/nm,3×10^{3}.

5.16 (1) $I=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin 6N\alpha}{\sin 6\alpha}\right)^2$;

(2) $I=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin 6N\alpha}{\sin 6\alpha}\right)^2$;

(3) $I=4I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos 2\alpha\right)^2\left(\frac{\sin 6N\alpha}{\sin 6\alpha}\right)^2$.

5.17 3°27′.

5.18 暗点,3.26 mm 或 1.88 mm.

5.19 0.47 mm.

5.20 9/16,1/4,1/2,1/2.

5.21 (1) 0.795 mm;(2) 500 mm.

5.22 $A'=3A/2, I'=9I/4$.

5.23 (1) 5.92 mm;(2) −2.5 m.

5.24 900 mm,0.67 mm,焦距变长.

第六章

6.1 24.69 m.

6.2 衍射场 $E(P)=c\left(\frac{a}{2}\right)\left[\frac{\sin\left(u+\frac{\pi}{2}\right)}{u+\frac{\pi}{2}}+\frac{\sin\left(u-\frac{\pi}{2}\right)}{u-\frac{\pi}{2}}\right], u=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$.

6.3 $E(P)=\exp\left[-\pi\left(\frac{x}{f'\lambda}\right)^2\right]$.

6.4 $I=a^2\frac{\sin^2(\pi af_x)}{(\pi af_x)^2}\cdot\frac{\sin^2(N\pi f_x d)}{\sin^2(\pi f_x d)}$.

6.6 $f_M\leqslant\frac{r}{\lambda d}$.

6.7 42 mm^{-1}.

6.8 32 mm,20.2 mm.

6.9 $2\lambda\left(\frac{D}{f'}\right)^{-1}$.

第七章

7.1 对顶角要求 $37°5'<\alpha<42°17'$.

7.2 $\frac{A_e}{A_o}=2.75, \frac{I_e}{I_o}=7.55$.

7.3 $i'_e=31°, i'_o=27°30', i'_e-i'_o=3°30'$.

7.4 $5.28°\approx5°6'28''$.

7.5 $\frac{I_2}{I_1}=10.72$.

7.6 透射光仍为线偏振光,振动方向以 $2\omega_0$ 的角速度变化.

7.7 $I=\frac{1}{2}I_0\cos^2 2\alpha$.

7.8 $\theta=26.565°, d=0.016\ 1$ mm.

7.10 $\frac{5I_0}{16}$.

7.11 P_1 与 P_2 的透振方向成 $2\theta=76°$; $d=7.91\times10^{-3}$ mm.

7.12 $\lambda_9=764.4$ nm, $\lambda_{10}=688.0$ nm. $\lambda_{11}=625.5$ nm, $\lambda_{12}=573.3$ nm, $\lambda_{13}=529.2$ nm, $\lambda_{14}=491.4$ nm, $\lambda_{15}=458.7$ nm, $\lambda_{16}=430.0$ nm, $\lambda_{17}=404.7$ nm.

7.13 (2) $\Delta x=0.67$ mm;

(3) $\Delta=147.3$ nm.

7.16 (2) $\Delta x=0.76$ mm.

7.18 94%.

7.19 2 mm.

7.22 4.5 mm.

7.23 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$.

7.24 $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & i\\-i & 1\end{bmatrix}$.

第八章

8.1 $l_1=7.2$ cm, $l_2=5.03$ cm, $l_3=2.17$ cm.

8.2 20.7 m.

8.4 $-6.769\ 4\times10^{-4}$ rad/nm.

8.5 -2.06×10^{-4} nm^{-1}.

8.6 (1) $v_g=v_p$;(2) $v_g=0$;

(3) $v_g=\frac{1}{2}v_p$;(4) $v_g=\frac{3}{2}v_p$;

(5) $v_g=2v_p$.

8.8 增加 14%.

8.9 21.5.

8.10 9.5%.

第九章

9.2 $L=c\Delta t=17.8$ cm,激光器相干长度为 40 km.

9.3 $\Delta K=26.6, \Delta\lambda=0.000\ 12$ nm.

9.4 $G=0.693\times10^{-3}$ mm^{-1}.

9.5 (1) $\Delta\nu_K=1.5\times10^8$ Hz;

(2) $N=11$;(3) $d<0.088$ m.

拓展阅读资料



视频二维码

本书搭配的知识点动画、文档及视频请访问以下网站：

1：数字课程网站　（先注册用户，然后通过密码绑定课程，密码请刮开书后的防伪涂层）

http://abook.hep.com.cn/

2：四川大学课程中心网站《光学》课程网址：

http://cc.scu.edu.cn/G2S/Template/View.aspx?action=view&courseType=0&courseId=19

3：爱课程网站《光学》国家精品资源共享课程网址：

http://www.icourses.cn/coursestatic/course_6043.html

（1）文档

文档：惠更斯	文档：托马斯杨	文档：菲涅耳	文档：夫琅禾费	文档：爱因斯坦	文档：伦琴

（2）动画及视频

第一章　几何光学的基本原理

动画 光的反射和折射	动画 球面折射成像	动画 凹面镜成像原理	动画 凸面镜成像原理	动画 相机变焦镜头原理	彩虹
海市蜃楼	布洛肯幽灵（佛光）				

第二章　光阑、像差和成像光学仪器

动画 眼睛的成像原理	动画 近视眼	动画 远视眼	眼睛-成像	眼球的构造	眼球的视觉系统

续表

电子显微镜	扫描电子显微镜	扫描隧穿显微镜	HET 望远镜	哈勃望远镜	哈勃望远镜 -巨型摄像机
第三章　光波及其在各向同性介质界面的反射和折射					
动画 光的偏振	动画 玻璃片堆	动画 半波损失	光的偏振及应用		
第四章　光的干涉					
动画 光的干涉和衍射	动画 杨氏双缝干涉	动画 杨氏双缝 干涉波面图	动画 迈克耳 孙干涉仪	动画 迈克耳孙 干涉环的吞吐	动画 劈尖等厚干涉
第五章　光的衍射					
动画 惠更斯原理	动画 单孔衍射光斑 强度分布	动画 圆孔的夫琅 禾费衍射	动画 像分辨本领	动画 光栅夫琅 禾费衍射	
第六章　光信息处理及全息术					
动画 全息照相原理	动画 全息照相光路图				
第七章　光在晶体中的传播					
动画 晶体的双折射	动画 用惠更斯原理 解释双折射	动画 尼科尔棱镜	动画 旋光效应		

续表

第八章　光的吸收、色散和散射					
 光的反射和吸收	 光的色散	 光的散射	 利用激光雷达探测沙尘微粒		
第九章　激光与非线性光学					
 激光的工作原理					

光学课程推荐教材

978-704015562-4	新概念物理教程——光学	赵凯华
978-704040082-3	光学教程（第五版）	姚启钧
978-704048366-6	光学（第三版）	郭永康
978-704019268-1	光学	赵建林
978-704027951-1	光学（第三版）	章志鸣
978-704011842-1	光学	游璞
978-704017772-5	普通物理学——光学（第四分册）（第三版）	梁绍荣 等
978-704015576-1	光学（第四版）（改编版）	Eugene Hecht 原著 张存林 改编

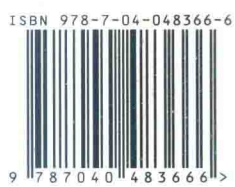


数字课程网站

网址：http://abook.hep.com.cn/1244303
http://abook.hep.edu.cn/1244303

数字课程账号　使用说明详见书内数字课程说明页

ISBN 978-7-04-048366-6



定价 42.60 元