诺贝尔物理学奖获得者 **玻恩** 经典名著

Born & Wolf

Principles of Optics

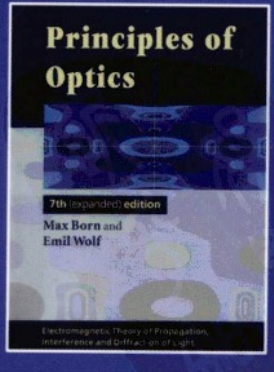
Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light, Seventh (expanded) Edition

光学原理

(第七版)

[德] 马科斯·玻恩
[美] 埃米尔·沃耳夫
杨葭荪 译

光的传播、干涉和衍射的电磁理论



電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http: //www.phei.com.cn

欢迎登录 免费 获取优质教学资源
http://www.hxedu.com.cn

光学原理
(第七版)

新版《光学原理》为有志于攀登光学高峰的年轻人提供了一架云梯，如果不是圣经的话；新版《光学原理》昭示人们，掌握基础理论才是发展和创新的根本，根深叶茂，本固枝荣。

—— 中国科学院院士、中国光学学会理事长 母国光

本书首次出版于1959年，其前身是诺贝尔奖得主马科斯·玻恩（Max Born）的*Optik*一书，目前的最新版本是1999年第七版。《光学原理》一书在国外被广泛称为“Born & Wolf'”，已经销售超过30万册。事实上，每一个科班出身学习光学的人都研读过这本书并深受其影响。近半个世纪以来，“Born & Wolf'”一直是物理书架上必不可少的作品，并成为光学领域的奠基性教科书。

★20世纪经典光学著作之一的最新版，修订及扩充规模之大前所未有。

★新增题材包括列入CAT扫描（计算机轴向层析术）。

★衍射一章新增一节，将瑞利－索末菲理论包含进来。

★通过宽带光杨氏干涉实验，剖析光的空间相干性对其频谱的影响（光的空－频域相干效应）。

★新增标量散射和电磁散射一章，内容包括：

- 推导并讨论光学截面定理；
- 推演玻恩级数和Rytov级数；
- 衍射层析术概要介绍。

★ 新增附录包括：

- 推导标量波场中的能量守恒；
- 关于某些积分渐近行为的琼斯引理。

策划编辑：谭海平
责任编辑：谭海平
封面设计：孙焱津

本书贴有激光防伪标志，凡没有防伪标志者，属盗版图书。

ISBN 978-7-121-09514-6
9 787121 095146 >
定价：89.00元

光 学 原 理

（第七版）

Principles of Optics

Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light, Seventh (expanded) Edition

［德］ 马科斯·玻恩

［美］ 埃米尔·沃耳夫 著

杨葭荪 译

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书是一部经典光学世界名著。全书以麦克斯韦宏观电磁理论为基础，系统阐述光在各种媒质中的传播规律，包括反射、折射、偏振、干涉、衍射、散射以及金属光学(吸收媒质)和晶体光学(各向异性媒质)等。几何光学也作为极限情况(波长$\lambda \to 0$)而纳入麦克斯韦方程系统，并从衍射观点讨论了光学成像的像差问题。新版增加了计算机层析术、宽带光干涉、非均匀媒质光散射等内容。

本书引文丰富且所涉广泛，上溯历史，下至近代，旁及有关学科和应用，故能于一专著中给读者以宽阔视野与充分求索之空间。全书共十五章，前半部分为基础内容，后半部分层次较深。

本书基础性、系统性和学术性兼备，可供光学教学与研究人员包括高年级本科生、研究生等阅读和参考。

This work is an authorized translation of the 2002 reprint, with corrections, of the seventh (expanded) edition published by Cambridge University Press in 1999.

© Estate of Max Born and Emil Wolf 1999.

本书中文简体版专有出版权由 Cambridge University Press 授予电子工业出版社，未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

版权贸易合同登记号　图字：01-2004-0903

图书在版编目(CIP)数据

光学原理：光的传播、干涉和衍射的电磁理论：第7版/(德)玻恩(Born, M.)，(美)沃耳夫(Wolf, E.)著；杨葭荪译. —北京：电子工业出版社，2009.10

书名原文：Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light

ISBN 978-7-121-09514-6

I. 光…　II. ①玻…②沃…③杨…　III. 光学　IV. O43

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 161807 号

策划编辑：谭海平
责任编辑：谭海平
印　　刷：北京天宇星印刷厂
装　　订：三河市皇庄路通装订厂
出版发行：电子工业出版社
　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：53.5　字数：1369 千字
印　　次：2009 年 10 月第 1 次印刷
定　　价：89.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：(010) 88258888。

译 者 序

一个多世纪以前，麦克斯韦建立了经典电磁理论，证明光是一种电磁波，由此产生了光的电磁理论。光和电的统一，加速了光学及整个物理学的发展。上世纪 60 年代激光的出现，更标志着光学进入了一个新的发展阶段。虽然现代光学中的许多问题需要应用量子理论来处理，但经典电磁理论并未因此而失去它的价值和光彩，它仍然是我们掌握现代科学技术不可缺少的基础。

《光学原理》正是光的电磁理论方面一本时及近代、夙享盛誉的基本参考书，它是在 M·玻恩 *Optik*(1933)的基础上改编扩充写成的。*Optik* 一书内容由宏观而微观，体系严谨，叙理明要，是当时公认的经典光学名著。《光学原理》初版于 1959 年——激光问世前一年，主要阐述宏观电磁理论，系统讨论光在各种媒质中传播的**基本规律**，包括反射、折射、干涉和衍射等。“部分相干”一章是其特色所在，为著者 E·沃耳夫的专门贡献，而编入加伯“波前重建(全息术)”一节尤具卓见。四十年来，光学因激光而多方面获得惊人发展，本书原有内容已显不够充分，但始终未失其基本参考价值。这次第七版(扩充版)增加了若干章节，共近 80 页(详见第七版序言)，基础前沿兼备，面貌为之一新。

《光学原理》曾有过中译本，出版于 1978—1985 年间，系据原书第五版、第六版分上下册译出[①]。这次根据其最新版(第七版)在参照前译基础上重新译出，错误之处诚望读者指正。

译本是献给读者的，也包含对昔日师长的感激和怀念。

杨葭荪

2004 年 7 月

中译本校订版序

乘译本第二次印刷之机，对前版中所发现的若干错误，包括译文及排版的错误以及名词译名的不统一与不规范问题等等作了改正；并在此对一些给予指正的读者表示衷心感谢。

杨葭荪

2007 年 3 月

① M·玻恩，E·沃耳夫著，杨葭荪、张合义、王国文、钱士雄等译校，《光学原理(上册)》，科学出版社，1978，1985。
M·玻恩，E·沃耳夫著，黄乐天、陈熙谋、陈秉乾译校，《光学原理(下册)》，科学出版社，1981。

目　录

历史引言 …… I

第 1 章　电磁场的基本性质 …… 1

1.1　电磁场 …… 1

1.1.1　麦克斯韦方程 …… 1

1.1.2　物质方程 …… 2

1.1.3　突变面处的边界条件 …… 3

1.1.4　电磁场的能量定律 …… 6

1.2　波动方程和光速 …… 9

1.3　标量波 …… 12

1.3.1　平面波 …… 12

1.3.2　球面波 …… 13

1.3.3　谐波和相速 …… 14

1.3.4　波包和群速 …… 16

1.4　矢量波 …… 20

1.4.1　一般的电磁平面波 …… 20

1.4.2　谐电磁平面波 …… 21

(a) 椭圆偏振 …… 21

(b) 线偏振和圆偏振 …… 25

(c) 偏振态的表征——斯托克斯参量 …… 26

1.4.3　任意形式的谐矢量波 …… 28

1.5　平面波的反射和折射 …… 32

1.5.1　反射定律和折射定律 …… 32

1.5.2　菲涅耳公式 …… 34

1.5.3　反射率和透射率;反射和折射产生的偏振 …… 36

1.5.4　全反射 …… 41

1.6　波在分层媒质中的传播和介质膜理论 …… 45

1.6.1　基本微分方程 …… 46

1.6.2　分层媒质的特性矩阵 …… 49

(a) 均匀介质膜 …… 51

(b) 分层媒质作为均匀薄膜的膜堆 …… 52

1.6.3　反射系数和透射系数 …… 53

1.6.4　均匀介质膜 …… 54

1.6.5　周期性分层媒质 …… 59

第 2 章　电磁势和电磁极化 …… 64
2.1　真空中的电动势 …… 65
2.1.1　矢势和标势 …… 65
2.1.2　推迟势 …… 66
2.2　极化和磁化 …… 68
2.2.1　用极化强度和磁化强度表示矢势和标势 …… 68
2.2.2　赫兹矢量 …… 72
2.2.3　一个线性电偶极子的场 …… 73
2.3　洛伦兹-洛伦茨公式和初等色散理论 …… 76
2.3.1　介电极化率和磁极化率 …… 76
2.3.2　有效场 …… 77
2.3.3　平均极化率:洛伦兹-洛伦茨公式 …… 78
2.3.4　初等色散理论 …… 81
2.4　用积分方程处理电磁波的传播 …… 88
2.4.1　基本积分方程 …… 88
2.4.2　埃瓦尔德-欧西恩消光定理和洛伦兹-洛伦茨公式的严格推导 …… 89
2.4.3　借助埃瓦尔德-欧西恩消光定理处理平面波的折射和反射 …… 93

第 3 章　几何光学基础 …… 98
3.1　对于极短波长的近似处理 …… 98
3.1.1　程函方程的推导 …… 99
3.1.2　光线和几何光学的强度定律 …… 101
3.1.3　振幅矢量的传播 …… 105
3.1.4　推广和几何光学的适用范围 …… 107
3.2　光线的一般性质 …… 109
3.2.1　光线的微分方程 …… 109
3.2.2　折射定律和反射定律 …… 111
3.2.3　光线汇及其焦点特性 …… 113
3.3　几何光学的其他基本定理 …… 114
3.3.1　拉格朗日积分不变式 …… 114
3.3.2　费马原理 …… 115
3.3.3　马吕斯和杜平定理及一些有关定理 …… 117

第 4 章　光学成像的几何理论 …… 120
4.1　哈密顿特征函数 …… 120
4.1.1　点特征函数 …… 120
4.1.2　混合特征函数 …… 122
4.1.3　角特征函数 …… 123
4.1.4　旋转折射面的角特征函数近似形式 …… 124

4.1.5 旋转反射面的角特征函数近似形式 …… 127
4.2 理想成像 …… 129
4.2.1 一般定理 …… 129
4.2.2 麦克斯韦“鱼眼” …… 133
4.2.3 面的无像散成像 …… 135
4.3 具有轴对称的射影变换(直射变换) …… 136
4.3.1 一般公式 …… 136
4.3.2 远焦情况 …… 139
4.3.3 射影变换的分类 …… 140
4.3.4 射影变换的组合 …… 141
4.4 高斯光学 …… 142
4.4.1 旋转折射面 …… 142
4.4.2 旋转反射面 …… 145
4.4.3 厚透镜 …… 145
4.4.4 薄透镜 …… 148
4.4.5 一般共轴系统 …… 148
4.5 广角光锥的无像散成像 …… 151
4.5.1 正弦条件 …… 152
4.5.2 赫谢耳条件 …… 153
4.6 像散光锥 …… 153
4.6.1 细光锥的焦点特性 …… 154
4.6.2 细光锥的折射 …… 155
4.7 色差和棱镜的色散 …… 158
4.7.1 色差 …… 158
4.7.2 棱镜的色散 …… 161
4.8 辐射度量学和孔径 …… 164
4.8.1 辐射度量学的基本概念 …… 164
4.8.2 光阑和光瞳 …… 168
4.8.3 像的亮度和照度 …… 170
4.9 光线追迹 …… 172
4.9.1 斜子午光线 …… 172
4.9.2 傍轴光线 …… 174
4.9.3 不交轴光线 …… 175
4.10 非球面的设计 …… 178
4.10.1 轴上无像散的实现 …… 178
4.10.2 不晕的实现 …… 181
4.11 投影法图像重建(计算机层析术) …… 183

4.11.1 引言 …… 183
4.11.2 吸收媒质中的光束传播 …… 184
4.11.3 射线积分和投影 …… 185
4.11.4 N 维 Radon 变换 …… 186
4.11.5 计算机层析术的截面重建和投影-层析定理(projection-slice theorem)…… 188

第 5 章 像差的几何理论 …… 192
5.1 波像差和光线像差;像差函数 …… 192
5.2 施瓦茨蔡耳德微扰程函 …… 196
5.3 初级(赛德尔)像差 …… 199
5.4 初级像差的相加定理 …… 205
5.5 一般共轴透镜系统的初级像差系数 …… 207
5.5.1 利用两条傍轴光线表示的赛德尔公式 …… 207
5.5.2 利用一条傍轴光线表示的赛德尔公式 …… 211
5.5.3 佩茨瓦尔定理 …… 212
5.6 例子:一个薄透镜的初级像差 …… 213
5.7 一般共轴透镜系统的色差 …… 217

第 6 章 成像仪器 …… 220
6.1 眼睛 …… 220
6.2 照相机 …… 221
6.3 折射望远镜 …… 225
6.4 反射望远镜 …… 230
6.5 照明仪器 …… 233
6.6 显微镜 …… 235

第 7 章 干涉理论基础和干涉仪 …… 239
7.1 引言 …… 239
7.2 两个单色波的干涉 …… 239
7.3 双光束干涉:波阵面分割 …… 242
7.3.1 杨氏实验 …… 242
7.3.2 菲涅耳双面镜和类似装置 …… 244
7.3.3 准单色光条纹和白光条纹 …… 246
7.3.4 使用狭缝光源;条纹的可见度 …… 247
7.3.5 应用于测量光程差:瑞利干涉仪 …… 250
7.3.6 应用于测量光源的角幅度:迈克耳孙测星干涉仪 …… 252
7.4 驻波 …… 257
7.5 双光束干涉:振幅分割 …… 261
7.5.1 平行平面板产生的条纹 …… 261
7.5.2 薄膜产生的条纹;斐索干涉仪 …… 265

7.5.3 条纹的定域 …… 270
7.5.4 迈克耳孙干涉仪 …… 278
7.5.5 特怀曼(Twyman)-格林(Green)干涉仪和有关干涉仪 …… 280
7.5.6 两块全同板产生的条纹:雅满(Jamin)干涉仪和干涉显微镜 …… 284
7.5.7 马赫-曾德尔干涉仪;贝茨波阵面切变干涉仪 …… 289
7.5.8 相干长度;双光束干涉在研究光谱线精细结构中的应用 …… 293
7.6 多光束干涉 …… 299
7.6.1 平行平面板的多光束干涉条纹 …… 299
7.6.2 法布里-珀罗干涉仪 …… 304
7.6.3 应用法布里-珀罗干涉仪研究光谱线的精细结构 …… 308
7.6.4 应用法布里-珀罗干涉仪比较波长 …… 313
7.6.5 陆末-格尔克干涉仪 …… 316
7.6.6 干涉滤波器 …… 321
7.6.7 薄膜多光束干涉条纹 …… 324
7.6.8 两块平行平面板产生的多光束条纹 …… 333
(a) 单色光和准单色光生成的条纹 …… 333
(b) 叠加条纹 …… 336
7.7 波长与标准米的比较 …… 340
第 8 章 衍射理论基础 …… 342
8.1 引言 …… 342
8.2 惠更斯-菲涅耳原理 …… 342
8.3 基尔霍夫衍射理论 …… 347
8.3.1 基尔霍夫积分定理 …… 347
8.3.2 基尔霍夫衍射理论 …… 349
8.3.3 夫琅禾费衍射和菲涅耳衍射 …… 353
8.4 过渡到标量理论 …… 357
8.4.1 单色振子产生的像场 …… 357
8.4.2 总像场 …… 360
8.5 各种形状光孔上的夫琅禾费衍射 …… 362
8.5.1 矩孔和狭缝 …… 362
8.5.2 圆孔 …… 365
8.5.3 其他形状的孔 …… 368
8.6 光学仪器中的夫琅禾费衍射 …… 371
8.6.1 衍射光栅 …… 371
(a) 衍射光栅原理 …… 371
(b) 光栅的类型 …… 376
(c) 光栅摄谱仪 …… 380

8.6.2 成像系统的分辨本领 …… 382
8.6.3 显微镜中的成像 …… 385
(a) 不相干照明 …… 386
(b) 相干照明——阿贝理论 …… 387
(c) 相干照明——泽尼克相衬观察法 …… 391
8.7 直边菲涅耳衍射 …… 395
8.7.1 衍射积分 …… 395
8.7.2 菲涅耳积分 …… 397
8.7.3 直边菲涅耳衍射 …… 400
8.8 焦点附近的三维光分布状态 …… 401
8.8.1 用洛默尔函数计算衍射积分 …… 402
8.8.2 强度分布 …… 406
(a) 几何焦平面上的强度分布 …… 407
(b) 轴上的强度分布 …… 408
(c) 几何阴影边界上的强度分布 …… 408
8.8.3 积分强度 …… 409
8.8.4 位相特性 …… 411
8.9 边界衍射波 …… 415
8.10 加伯波前重建成像法(全息学) …… 418
8.10.1 正全息图的制作 …… 419
8.10.2 重建 …… 420
8.11 瑞利-索末菲衍射积分 …… 425
8.11.1 瑞利衍射积分 …… 425
8.11.2 瑞利-索末菲衍射积分 …… 427

第 9 章 像差的衍射理论 …… 429
9.1 存在像差时的衍射积分 …… 430
9.1.1 衍射积分 …… 430
9.1.2 位移定理;参考球的更换 …… 431
9.1.3 强度和波阵面平均形变之间的关系 …… 433
9.2 像差函数的展开 …… 433
9.2.1 泽尼克圆多项式 …… 433
9.2.2 像差函数的展开 …… 436
9.3 初级像差的容限条件 …… 438
9.4 单种像差衍射图样 …… 442
9.4.1 初级球差 …… 444
9.4.2 初级彗差 …… 447
9.4.3 初级像散 …… 447

9.5 广延物的成像 …… 450
9.5.1 相干照明 …… 450
9.5.2 不相干照明 …… 453

第 10 章 部分相干光的干涉和衍射 …… 459
10.1 引言 …… 459
10.2 实多色场的复数表示 …… 461
10.3 光束的关联函数 …… 466
10.3.1 两束部分相干光的干涉;互相干函数和复相干度 …… 466
10.3.2 互相干的谱表示 …… 469
10.4 准单色光的干涉和衍射 …… 471
10.4.1 准单色光的干涉;互强度 …… 472
10.4.2 扩展不相干准单色光源光场互强度和相干度的计算 …… 474
(a) 范西特-泽尼克定理 …… 474
(b) 霍普金斯公式 …… 478
10.4.3 一个例子 …… 479
10.4.4 互强度的传播 …… 484
10.5 宽带光的干涉和谱相干度;关联感生的光谱改变 …… 486
10.6 几项应用 …… 491
10.6.1 扩展不相干准单色光源像中的相干度 …… 491
10.6.2 聚光器对显微镜分辨率的影响 …… 494
(a) 中肯照明 …… 494
(b) 科勒照明 …… 496
10.6.3 部分相干准单色照明成像 …… 498
(a) 互强度在光学系统中的传输 …… 498
(b) 透射照明下物的成像 …… 500
10.7 有关互相干的几个定理 …… 503
10.7.1 不相干光源光场互相干的计算 …… 503
10.7.2 互相干的传播 …… 505
10.8 严格的部分相干性理论 …… 506
10.8.1 互相干的波动方程 …… 506
10.8.2 互相干传播定律的严格表述 …… 508
10.8.3 相干时间和有效光谱宽度 …… 511
10.9 准单色光的偏振特性 …… 514
10.9.1 准单色平面波的相干矩阵 …… 515
(a) 完全非偏振光(自然光) …… 519
(b) 完全偏振光 …… 519

10.9.2 几种等效表示;光波的偏振度 …… 520
10.9.3 准单色平面波的斯托克斯参量 …… 523

第 11 章 严格的衍射理论 …… 526
11.1 引言 …… 526
11.2 边界条件和表面电流 …… 527
11.3 平面屏衍射;电磁形式的巴比涅原理 …… 529
11.4 平面屏产生的二维衍射 …… 530
11.4.1 二维电磁场的标量性质 …… 530
11.4.2 平面波组成的角谱 …… 530
11.4.3 对偶积分方程形式的表述 …… 533
11.5 平面波的半平面二维衍射 …… 534
11.5.1 *E* 偏振情况的对偶积分方程之解 …… 534
11.5.2 解的菲涅耳积分表示 …… 536
11.5.3 解的性质 …… 539
11.5.4 *H* 偏振情况的解 …… 543
11.5.5 一些数值计算 …… 544
11.5.6 与近似理论和实验结果的比较 …… 546
11.6 平面波的半平面三维衍射 …… 547
11.7 定域光源所产生的场在半平面上的衍射 …… 550
11.7.1 一个平行于衍射边的线电流 …… 550
11.7.2 一个偶极子 …… 554
11.8 其他问题 …… 556
11.8.1 两个平行半平面 …… 556
11.8.2 平行错位叠加半平面的无穷堆垛 …… 558
11.8.3 一条窄带 …… 559
11.8.4 其他相关问题 …… 560
11.9 解的惟一性 …… 561

第 12 章 光在超声波上的衍射 …… 562
12.1 现象的定性描述和麦克斯韦微分方程的理论处理(概述) …… 562
12.1.1 现象的定性描述 …… 562
12.1.2 麦克斯韦方程的理论处理(概述) …… 564
12.2 超声衍射的积分方程处理方法 …… 567
12.2.1 *E* 偏振情况的积分方程 …… 568
12.2.2 积分方程的试探解 …… 569
12.2.3 衍射谱中和反射谱中的光波振幅表达式 …… 572
12.2.4 逐次逼近法的方程解 …… 572

12.2.5 一些特别情况的一级和二级谱线强度表达式 …… 575
(a) $\delta/\xi \ll 1$ 并且 ξ 远大于 1 …… 575
(b) $\xi \approx \frac{1}{2}, \delta \ll 1$ …… 575
(c) 正入射($\xi = 0$), $\delta \ll 1$ …… 576
12.2.6 一些定性结果 …… 576
12.2.7 拉曼-纳斯近似 …… 578

第 13 章 不均匀媒质产生的散射 …… 580
13.1 标量散射理论基础 …… 580
13.1.1 基本积分方程的推导 …… 580
13.1.2 一级玻恩近似 …… 583
13.1.3 周期势产生的散射 …… 587
13.1.4 多重散射 …… 590
13.2 散射势重建衍射层析术原理 …… 592
13.2.1 散射场的角谱表示 …… 593
13.2.2 衍射层析术的基本定理 …… 595
13.3 光学截面定理 …… 598
13.4 倒易关系 …… 604
13.5 Rytov 级数 …… 606
13.6 电磁波的散射 …… 608
13.6.1 电磁散射理论的积分-微分方程 …… 608
13.6.2 远场 …… 609
13.6.3 电磁波散射的光学截面定理 …… 611

第 14 章 金属光学 …… 614
14.1 波在导体中的传播 …… 614
14.2 金属面的反射和折射 …… 618
14.3 金属光学常数电子论初探 …… 626
14.4 波在分层导电媒质中的传播;金属膜理论 …… 628
14.4.1 透明基片上的单层吸收膜 …… 629
14.4.2 吸收基片上的单层透明膜 …… 633
14.5 导电球产生的衍射;米氏理论 …… 634
14.5.1 问题的数学解 …… 635
(a) 场的德拜势表示 …… 635
(b) 场分量的级数展开式 …… 639
(c) 缔合勒让德函数和柱面函数有关公式一览 …… 646
14.5.2 米氏公式的一些结果 …… 647
(a) 分波 …… 647

(b) 两种极端情况 …… 648
(c) 散射光的强度和偏振 …… 652
14.5.3 总散射和消光 …… 656
(a) 某些一般考虑 …… 656
(b) 计算结果 …… 657

第 15 章 晶体光学 …… 661
15.1 各向异性媒质的介电常数 …… 661
15.2 各向异性媒质中单色平面波的结构 …… 663
15.2.1 相速度和光线速度 …… 663
15.2.2 光在晶体中传播的菲涅耳公式 …… 666
15.2.3 确定传播速度和振动方向的几何作图法 …… 669
(a) 波法线椭球 …… 669
(b) 光线椭球 …… 671
(c) 法线曲面和光线曲面 …… 672
15.3 单轴晶体和双轴晶体的光学特性 …… 673
15.3.1 晶体的光学分类 …… 673
15.3.2 光在单轴晶体中的传播 …… 674
15.3.3 光在双轴晶体中的传播 …… 676
15.3.4 晶体折射 …… 679
(a) 双折射 …… 679
(b) 圆锥折射 …… 681
15.4 晶体光学测量 …… 686
15.4.1 尼科耳棱镜 …… 686
15.4.2 补偿器 …… 687
(a) 1/4 波片 …… 687
(b) 巴比涅补偿器 …… 688
(c) 索累补偿器 …… 689
(d) Berek 补偿器 …… 690
15.4.3 晶片干涉 …… 690
15.4.4 单轴晶片的干涉图 …… 694
15.4.5 双轴晶片的干涉图 …… 696
15.4.6 晶体媒质的光轴定位和主折射率测定 …… 698
15.5 应力双折射和形序双折射 …… 699
15.5.1 应力双折射 …… 699
15.5.2 形序双折射 …… 702
15.6 吸收晶体 …… 704
15.6.1 光在吸收型各向异性媒质中的传播 …… 704

15.6.2 吸收晶片的干涉图 …… 709
(a) 单轴晶体 …… 709
(b) 双轴晶体 …… 710
15.6.3 二向色性偏振器 …… 711

附录 A 变分法 …… 714
A.1 欧拉方程——极值的必要条件 …… 714
A.2 希尔伯特独立性积分和哈密顿-雅可比方程 …… 715
A.3 致极曲线场 …… 717
A.4 从哈密顿-雅可比方程的解确定全部致极曲线 …… 719
A.5 哈密顿正则方程 …… 720
A.6 自变量不显现在被积函数中时的特殊情况 …… 721
A.7 不连续地段 …… 722
A.8 Weierstrass 条件和勒让德条件(极值的充分性条件) …… 724
A.9 当路线的一端点被约束在一曲面上时变分积分的极小值 …… 726
A.10 雅可比极小值判据 …… 727
A.11 例一:光学 …… 727
A.12 例二:质点力学 …… 729

附录 B 光学、电子光学和波动力学 …… 732
B.1 基本形式的哈密顿类似 …… 732
B.2 变分形式的哈密顿类似 …… 734
B.3 自由电子的波动力学 …… 737
B.4 光学原理对电子光学的应用 …… 738

附录 C 积分的渐近近似 …… 740
C.1 最陡下降法 …… 740
C.2 稳定相法 …… 744
C.3 二重积分 …… 745

附录 D 狄拉克 δ 函数 …… 747

附录 E 洛伦兹-洛伦茨定律严格推导所用的一个数学引理(2.4.2 节) …… 752

附录 F 电磁场中不连续态的传播(3.1.1 节) …… 754
F.1 各场矢量中不连续变化的相互关系 …… 754
F.2 运动不连续面处的场 …… 756

附录 G 泽尼克圆多项式(9.2.1 节) …… 758
G.1 一些一般考虑 …… 758
G.2 径向多项式 $R_n^{\pm m}(\rho)$的显表达式 …… 760

附录 H　谱相干度不等式 $|\mu_{12}(\nu)| \leqslant 1$ 的证明(10.5 节) …… 764
附录 I　倒易不等式的证明(10.8.3 节) …… 765
附录 J　两个积分的计算(12.2.2 节) …… 767
附录 K　标量波场中的能量守恒(13.3 节) …… 770
附录 L　琼斯引理的证明(13.3 节) …… 772
著者索引 …… 774
英汉内容索引 …… 790

第 1 章　电磁场的基本性质

1.1　电磁场

1.1.1　麦克斯韦方程

在空间中，由于电荷的存在而建立起的激发状态，谓之构成一**电磁场**。它由两个矢量，**E** 和 **B** 表示，分别叫做**电矢量**和**磁感应强度**[①]。

要描写场对物质客体的作用，须引进第二组矢量，这就是**电流密度 j**，**电位移 D** 和**磁矢量 H**。

这 5 个矢量的空间和时间微商是由下列**麦克斯韦方程**联系起来的：

$$\operatorname{curl}\mathbf{H}-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{D}}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{1}$$

$$\operatorname{curl}\mathbf{E}+\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}}=0 \tag{2}$$

点“·”表示对时间取微商。上述方程适用于这样的点，即在其附近媒质的物理性质是连续的那些点[②]。

(1)和(2)两式还要补充两个标量关系式：

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi\rho \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0 \tag{4}$$

(3)式可以看做是电荷密度 ρ 的定义方程，(4)式可以说意味着不存在自由磁极。

从(1)式可以得到(因为 div curl≡0)

$$\operatorname{div}\mathbf{j}=-\frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\dot{\mathbf{D}}$$

利用(3)式，此即

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{j}=0 \tag{5}$$

类比于流体力学中遇到的一个同样关系，(5)式叫做**连续方程式**。它表明在任何点附近电荷都守恒这一事实。因为如果就任一空间区域对(5)式进行积分，则借助高斯定理可以得到

---

① 由于历史原因，在初等考虑中，通常把 **E** 和 **H** 看做是基本场矢量，而把 **D** 和 **B** 看做是描写物质的影响。然而在一般理论中，由于和运动媒质电动力学有关的原因，非按本处说明不可。

4 个麦克斯韦方程(1)～(4)可分成两组：一组包括两个齐次方程(右边为零)，含 **E** 和 **B**；另一组包括两个非齐次方程(右边不为零)，含 **D** 和 **H**。如果进行一个空间和时间的坐标变换(相对论的洛伦兹变换)，则各组方程同时一起变换，而如果 **j**/c 和 ρ 作为一个 4-矢量，**E**，**B** 和 **D**，**H** 两对矢量各作为一个 6-矢量(二阶反对称张量)进行变换，则各方程在形式上保持不变。因为非齐次方程组包含电荷和电流(它们代表物质的影响)，所以必须把相应的一对矢量(**D**，**H**)归属于物质的影响。然而习惯上是把 **H** 而不是把 **B** 作为**磁场矢量**；当无混淆之虑时，我们将按这一术语使用。

② 这里采用所谓高斯单位制，即电的量(**E**，**D**，**j**，)以静电单位计，磁的量(**H** 和 **B**)以电磁单位计。(1)和(2)两式中的常数 c 是这两个单位制中单位电荷之比；它是真空中的光速，约等于 3×10^{10} 厘米/秒(较准确的数值见 1.2 节)。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\rho\,\mathrm{d}V+\int\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S=0 \tag{6}$$

式中第二个积分遍及该空间区域的整个界面,第一个积分则遍及它的整个体积,$\mathbf{n}$ 代表单位外向法线。这个方程意味着,区域内所包含的总电荷

$$e=\int\rho\,\mathrm{d}V \tag{7}$$

的增加,只能是由于电流的净流入

$$\mathcal{J}=\int\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \tag{8}$$

如果所有场量都不随时间改变,而且还没有电流($\mathbf{j}=0$),则我们说场是**静态的**。如果所有场量都不随时间改变,但存在电流($\mathbf{j}\neq0$),则我们说场是**定态的**。在光学中,场矢量是时间的函数,变化非常之快,但是场源通常是这样,当对任何宏观时间间隔取平均而不是着眼于瞬时值时,可发现场的性质与取平均的时刻无关。"**定态的**"这个词常在更广的意义上来使用,以描写这种类型的场。例如,稳恒的辐射流(譬如说来自遥远的星)通过一个光学系统时所构成的场就是一个定态场。

1.1.2 物质方程

麦克斯韦方程(1)~(4)描写了5个基本量 $\mathbf{E},\mathbf{H},\mathbf{B},\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{j}$ 之间的关系。要能从给定的电流和电荷分布惟一地定出场矢量,还必须给这些方程补充这样的关系式,它们描写物质在场影响下的特性。这些关系式称为**物质方程**[①](或**本构关系式**)。一般地说,它们颇为复杂。但是如果场是时谐的(见1.4.3节),并且如果物体彼此相对静止不动,或者运动非常缓慢,而且物质是**各向同性的**(即它每一点的物理性质不随方向改变),则它们通常呈如下比较简单的形式[②]:

$$\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E} \tag{9}$$

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E} \tag{10}$$

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H} \tag{11}$$

式中 σ 叫做**电导率**,ε 称为**介电常数**(即电容率),μ 叫做**磁导率**。

(9)式是微分形式的欧姆定律。$\sigma\neq0$(更准确地说,σ 不是小得可以忽略;然而这句话的确切意思这里不能讨论)的物质叫做**导体**。金属是很好的导体,但还有其他导电良好的材料,如离子溶液和离子固溶体。金属的电导率随温度的增高而减小。然而,另种称为**半导体**的材料(例如锗),电导率在很大温度范围内系随温度而增加。

σ 小到可以忽略的材料叫做**绝缘体**或**介电体**,它们的电学性质和磁学性质就完全由 ε 和 μ 来决定。大多数物质的磁导率 μ 实际上等于1。μ 和1相差可观的物质则叫做**磁性**物质,其中 $\mu>1$ 的称为**顺磁**物质(如铂、氧、二氧化氮),而 $\mu<1$ 的称为**逆磁**物质(如铋、铜、氢、水)。

---

① 还有另一种描写物质特性的方程。它不是采用 $\varepsilon=D/E$ 和 $\mu=B/H$ 这两个量,而是采用差 $\mathbf{D}-\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}-\mathbf{H}$。这些差具有比较简单的物理意义,我们将在第2章中加以讨论。

② 更普遍的、对运动媒质也适用的关系式,在相对论中研究。后面,我们只需要用到由更普遍理论得到的如下结果:在电荷运动的情况下,除传导电流 $\sigma\mathbf{E}$ 外,还存在一个运流电流 $\rho\mathbf{v}$,其中 $\mathbf{v}$ 是运动电荷的速度,ρ 是电荷密度(参见第7页)。

如果场异常之强，例如像激光器产生的光经聚焦之后所形成的场，则物质方程式右边可能需要再增加一些幂级高于 1 的场矢分量乘积项①。

在许多情况下，σ，ε 和 μ 各量将不随场强而改变；然而，在其他情况下，材料的特性不能如此简单描写。例如，在自由离子的气体中，在任何时刻，电流（取决于离子的平均速度）都不依赖于当时的 **E** 值，而是与 **E** 过去所有的值有关。再如，在所谓**铁磁**物质（磁性非常强的物质，如铁、钴、镍）中，磁感应强度 **B** 的值也取决于磁场 **H** 过去的历史而不是取决于它当时的值。因此人们说这类物质出现**滞后现象**。在某些介电材料中，电位移也有同样依赖于历史的性质。所幸，对于光学中遇到的高频场来说，滞后效应甚少重要。

有些物质，光可进入其中而不发生可察觉的减弱（例如空气，玻璃）。这种物质叫做**透明体**，它们在电学上必定是非导体（$\sigma=0$），因为导电要释放焦耳热（见 1.1.4 节），因而要损失电磁能。本书的主要部分将研究光在透明物质中的传播。导电媒质的光学性质将在第 14 章中讨论。

1.1.3　突变面处的边界条件

前已说明，麦克斯韦方程只适用于媒质物理性质（由 ε 和 μ 来表征）处处连续的空间区域。但是，光学中经常遇到的情况是，媒质的这些性质在一个面或多个面处有突变。这时，可以预期，矢量 **E**，**H**，**B** 和 **D** 也要变成为不连续的，而 ρ 和 **j** 将退化成相应的面量。现在我们来推导场从这种突变面通过时所服从的各个关系式。

让我们用一个很薄的过渡层来代替锐的突变面 T，在这个过渡层内，ε 和 μ 改变很快，但是是连续地从它们靠 T 这边的值改变到它们靠 T 那边的值。在这个过渡层内，作一个小的近似圆柱体，以 T 的法线立栅作为柱壁，以小面积 δA_1 和 δA_2 作为柱顶和柱底，δA_1 和 δA_2 分别在 T 两侧，同 T 的距离沿它们共同法线来量是一常值（见图 1.1）。因为在整个圆柱体内 **B** 和它的微商都可以设为是连续的，所以可以把高斯定理应用到对整个圆柱体体积的 div **B** 积分，并由(4)式得到

$$\int \operatorname{div}\mathbf{B}\,\mathrm{d}V=\int \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S=0 \tag{12}$$

第二个积分遍及整个圆柱体表面，**n** 是单位外向法线。

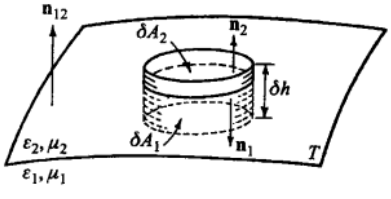


图 1.1　**B** 和 **D** 法线分量边界条件的推导

① 电位移矢量 **D** 和电场 **E** 的非线性关系首先由下列作者证明如此：P. A. Franken, A. E. Hill, C. W. Peters and G. Weinrich, *Phys. Rev. Lett.*, **7**(1961), 118。
关于非线性效应的系统论述，可见 N. Bloembergen, *Nonlinear Optics* (New York, W. A. Benjamin, Inc., 1965), P. N. Butcher and D. Cotter, *The Elements of Nonlinear Optics* (Cambridge, Cambridge University Press, 1990)或 R. W. Boyd, *Nonlinear Optics* (Boston, Academic Press, 1992)。

因为假设面积 δA_1 和 δA_2 很小,所以可以认为 $\mathbf{B}$ 在 δA_1 和 δA_2 上的值 $\mathbf{B}^{(1)}$ 和 $\mathbf{B}^{(2)}$ 是常数,于是(12)式可以改写成

$$\mathbf{B}^{(1)}\cdot\mathbf{n}_1\,\delta A_1+\mathbf{B}^{(2)}\cdot\mathbf{n}_2\,\delta A_2+\text{壁的贡献}=0 \tag{13}$$

如果圆柱体的高 δh 向零减小,则过渡层收缩成面,圆柱壁的贡献就趋向于零,但要没有面磁感应通量。这种通量从不发生,因而在极限情况下,

$$(\mathbf{B}^{(1)}\cdot\mathbf{n}_1+\mathbf{B}^{(2)}\cdot\mathbf{n}_2)\delta A=0 \tag{14}$$

δA 是圆柱体和 T 的截面面积。如果 $\mathbf{n}_{12}$ 是单位法线,从媒质 1 指向媒质 2,则 $\mathbf{n}_1=-\mathbf{n}_{12}$,$\mathbf{n}_2=\mathbf{n}_{12}$,由(14)式得到

$$\mathbf{n}_{12}\cdot(\mathbf{B}^{(2)}-\mathbf{B}^{(1)})=0 \tag{15}$$

即在通过突变面时磁感应强度法线分量是连续的。

电位移 $\mathbf{D}$ 可用同样方法加以处理,但是如果有电荷存在,这里就要另加一项。现在由(3)式出发,取代(12)式而得到

$$\int\operatorname{div}\mathbf{D}\,\mathrm{d}V=\int\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S=4\pi\int\rho\,\mathrm{d}V \tag{16}$$

当面积 δA_1 和 δA_2 向一起靠拢时,总电荷保持有限,以致体密度变成无穷大。因此必须用**面电荷密度** $\hat{\rho}$ 的概念来代替体电荷密度 ρ。$\hat{\rho}$ 的定义如下①:

$$\lim_{\delta h\to 0}\int\rho\,\mathrm{d}V=\int\hat{\rho}\,\mathrm{d}A \tag{17}$$

后面还要用到**面电流密度** $\hat{\mathbf{j}}$ 的概念,它用同样方式定义:

$$\lim_{\delta h\to 0}\int\mathbf{j}\,\mathrm{d}V=\int\hat{\mathbf{j}}\,\mathrm{d}A \tag{18}$$

如果面积 δA 和高度 δh 都取得足够小,则(16)式给出

$$\mathbf{D}^{(1)}\cdot\mathbf{n}_1\,\delta A_1+\mathbf{D}^{(2)}\cdot\mathbf{n}_2\,\delta A_2+\text{壁的贡献}=4\pi\hat{\rho}\,\delta A$$

壁的贡献随 δh 趋向于零,因此得到,在极限情况下当 $\delta h\to 0$ 时,

$$\mathbf{n}_{12}\cdot(\mathbf{D}^{(2)}-\mathbf{D}^{(1)})=4\pi\hat{\rho} \tag{19}$$

即当面上存在一层面电荷密度 $\hat{\rho}$ 时,电位移法线分量通过此面时要发生突变,改变量等于 $4\pi\hat{\rho}$。

下面来看看切线分量的行为。仍然用一个连续的过渡层代替锐的突变面,但是把图 1.1 的圆柱体换成一个"长方形"面积,令其四边分别与 T 平行和垂直(见图 1.2)。

---

① 为了以后使用,我们注明一种用狄拉克 δ 函数(见附录 D)表示面电荷密度和面电流密度的方法。设突变面的方程是 $F(x,y,z)=0$,则

$$\rho=\hat{\rho}|\operatorname{grad}F|\delta(F) \tag{17a}$$

$$\mathbf{j}=\hat{\mathbf{j}}|\operatorname{grad}F|\delta(F) \tag{18a}$$

把(17a)和(18a)两式分别代入(17)和(18)两式,并利用关系式 $\mathrm{d}F=|\operatorname{grad}F|\,\mathrm{d}h$ 和 δ 函数的筛选性质,即可验证(17a)和(18a)两式。

令 **b** 为垂直于长方形平面的单位矢量。则由(2)式并根据斯托克斯定理可以得到

$$\int \operatorname{curl}\mathbf{E}\cdot\mathbf{b}\,\mathrm{d}S=\int\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=-\frac{1}{c}\int\dot{\mathbf{B}}\cdot\mathbf{b}\,\mathrm{d}S \tag{20}$$

第一个积分和第三个积分遍及整个长方形面积,而第二个积分则沿着它的周界。如果长度 $P_1Q_1(=\delta s_1)$和 $P_2Q_2(=\delta s_2)$很小,则沿这两个线段 **E** 可各用常值 $\mathbf{E}^{(1)}$ 和 $\mathbf{E}^{(2)}$ 来代替。同样,$\dot{\mathbf{B}}$ 也可以用一常值代替。于是由(20)式得到

$$\mathbf{E}^{(1)}\cdot\mathbf{t}_1\,\delta s_1+\mathbf{E}^{(2)}\cdot\mathbf{t}_2\,\delta s_2+\text{两端的贡献}=-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}}\cdot\mathbf{b}\,\delta s\delta h \tag{21}$$

式中 δs 是长方形和面 T 交截的线元。现在如果令长方形的高 δh 逐渐减少,则 P_1P_2 和 Q_1Q_2 两端的贡献将趋向于零,但要 **E** 在极限时不获得足够锐的奇异性。这个可能性将被排除。设 $\dot{\mathbf{B}}$ 也保持有限,得到在极限情况下当 $\delta h\to 0$ 时,

$$(\mathbf{E}^{(1)}\cdot\mathbf{t}_1+\mathbf{E}^{(2)}\cdot\mathbf{t}_2)\delta s=0 \tag{22}$$

如果 **t** 是面的单位切线,则(见图 1.2)$\mathbf{t}_1=-\mathbf{t}=-\mathbf{b}\times\mathbf{n}_{12}$,$\mathbf{t}_2=\mathbf{t}=\mathbf{b}\times\mathbf{n}_{12}$,由(22)式得到

$$\mathbf{b}\cdot[\mathbf{n}_{12}\times(\mathbf{E}^{(2)}-\mathbf{E}^{(1)})]=0$$

因为长方形的取向是任意的,因而单位矢量 **b** 的取向也任意,所以得到

$$\mathbf{n}_{12}\times(\mathbf{E}^{(2)}-\mathbf{E}^{(1)})=0 \tag{23}$$

即在通过突变面时电矢量切线分量是连续的。

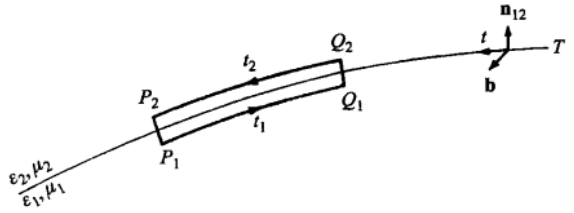


图 1.2　**E** 和 **H** 切线分量边界条件的推导

最后考虑磁矢量切线分量的行为。分析方法与前面类似,但是如果有电流存在则要另加一项。这时取代(21)式而得到

$$\mathbf{H}^{(1)}\cdot\mathbf{t}_1\,\delta s_1+\mathbf{H}^{(2)}\cdot\mathbf{t}_2\,\delta s_2+\text{两端的贡献}=\frac{1}{c}\dot{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{b}\,\delta s\,\delta h+\frac{4\pi}{c}\hat{\mathbf{j}}\cdot\mathbf{b}\,\delta s \tag{24}$$

同前,取极限 $\delta h\to 0$,得到

$$\mathbf{n}_{12}\times(\mathbf{H}^{(2)}-\mathbf{H}^{(1)})=\frac{4\pi}{c}\hat{\mathbf{j}} \tag{25}$$

由此可见,当存在面电流密度 $\hat{\mathbf{j}}$ 时,磁矢量切线分量(作为矢量看待)发生突变,突变量为 $(4\pi/c)\hat{\mathbf{j}}\times\mathbf{n}_{12}$。

除去由于媒质的物理性质突变造成不连续性以外,源的存在也可能造成场矢量的不连续。设在某一时刻 $t=t_0$,某源开始辐射,扰动开始向周围空间散播,而在这之后任何时刻 $t_1(t_1>t_0)$,

扰动将充满一个完全确定的区域。通过这个区域的(运动着的)边界时,场矢量将有一突变,从边界上的有限值,一下子变到边界之外的零。

各种不连续情况可以通过把麦克斯韦方程写成积分形式而统统包括进来[①]。一般的不连续条件也可以写成简单差分方程的形式。这些方程的推导在附录 F 中给出。

1.1.4 电磁场的能量定律

电磁理论把光的强度解释成是场的能通量,因此有必要来回顾一下麦克斯韦理论的能量定律 。

由(1)和(2)两式可以得到

$$\mathbf{E}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{H}-\mathbf{H}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{E}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}}+\frac{1}{c}\mathbf{H}\cdot\dot{\mathbf{B}} \tag{26}$$

利用大家熟知的矢量恒等式,左边的项又可以表示为 **H** 和 **E** 矢积的散度:

$$\mathbf{E}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{H}-\mathbf{H}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{E}=-\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) \tag{27}$$

由(26)和(27)两式,有

$$\frac{1}{c}(\mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}}+\mathbf{H}\cdot\dot{\mathbf{B}})+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}+\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=0 \tag{28}$$

以 $c/4\pi$ 乘此方程,而后对任一体积进行积分并应用高斯定理,从而得到

$$\frac{1}{4\pi}\int(\mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}}+\mathbf{H}\cdot\dot{\mathbf{B}})\mathrm{d}V+\int\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}V+\frac{c}{4\pi}\int(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S=0 \tag{29}$$

式中最后一项积分遍及该体积的周界,**n** 是单位外向法线。

(29)式是麦克斯韦方程的直接结果,因而不管物质方程(9)~(11)成立与否,它都是有效的。我们将看到,它代表了电磁场的**能量定律**。这里将仅就物质方程(9)~(11)被满足的情况加以讨论。对各向异性媒质的推广以后再行考虑(见第 15 章),那里物质方程的形式比较复杂。

引用物质方程后,则有

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}(\mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}})&=\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\mathbf{E})=\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\mathbf{E}^2)=\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}),\\ \frac{1}{4\pi}(\mathbf{H}\cdot\dot{\mathbf{B}})&=\frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\mu\mathbf{H})=\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\mu\mathbf{H}^2)=\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}).\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

令

$$w_e=\frac{1}{8\pi}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D},\qquad w_m=\frac{1}{8\pi}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B} \tag{31}$$

和

$$W=\int(w_e+w_m)\mathrm{d}V \tag{32}$$

则(29)式变成

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}+\int\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}V+\frac{c}{4\pi}\int(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S=0 \tag{33}$$

---

① 例如,见 A. Sommerfeld, *Electrodynamics* (New York, Academic Press, 1952), p. 11;或 J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory* (New York, McGraw-Hill, 1941), p. 6。

我们将证明 W 代表体积内所包含的总能量，所以可以认为 w_e 就是场的**电能密度**，而 w_m 就是场的**磁能密度**[①]。

要证明 W 是总能量，必须证明，对于一个闭合系统（即界面上的场可予忽略的系统），上面所定义的 W 的改变等于场对这个系统中带电物质体所做的功。这只要对物质体运动缓慢的情况进行证明就足够了，并且可以假设各物质体本身如此之小，以致可把它们看做是点电荷 $e_k(k=1,2,\cdots)$。设电荷 e_k 的速度为 $\mathbf{v}_k(|\mathbf{v}_k| \ll c)$。

当电荷 e 以速度 $\mathbf{v}$ 运动时，场$(\mathbf{E},\mathbf{B})$对它所施加的力由所谓**洛伦兹定律**给出：

$$\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right) \tag{34}$$

这个定律是以经验为根据的。由此得到，如果所有电荷 e_k 在 δt 时间内位移了 $\delta\mathbf{x}_k(k=1,2,\cdots)$，则场所做的总功为

$$\delta A = \sum_k \mathbf{F}_k\cdot\delta\mathbf{x}_k = \sum_k e_k\left(\mathbf{E}_k + \frac{1}{c}\mathbf{v}_k\times\mathbf{B}\right)\cdot\delta\mathbf{x}_k$$

$$= \sum_k e_k\mathbf{E}_k\cdot\delta\mathbf{x}_k = \sum_k e_k\mathbf{E}_k\cdot\mathbf{v}_k\,\delta t$$

因为 $\delta\mathbf{x}_k = \mathbf{v}_k\delta t$。如果带电粒子数目很大，则可以认为粒子分布是连续的，并引进电荷密度 ρ（即每单位体积内的总电荷），于是上一方程变成

$$\delta A = \delta t\int\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}V \tag{35}$$

该积分是对任意体积来进行的，速度 $\mathbf{v}$ 这个量没有出现在麦克斯韦方程之中，但是可以利用伦琴所得到的一个实验结果[②]把它引进来。按照这一结果，**运流电流**（即一组运动着的电荷）同导线中的**传导电流**具有同样的电磁效应。因此，麦克斯韦方程中的电流密度 $\mathbf{j}$ 可分成两部分

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_c + \mathbf{j}_v \tag{36}$$

其中

$$\mathbf{j}_c = \sigma\mathbf{E}$$

是传导电流密度，而

$$\mathbf{j}_v = \rho\mathbf{v}$$

代表运流电流密度。(35)式因此可以写成为

$$\delta A = \delta t\int\mathbf{j}_v\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}V \tag{37}$$

现在用下列关系式来定义一个矢量 $\mathbf{S}$ 和一个标量 Q：

---

① 在一般情况下，这两个能量密度由下列二式定义：

$$w_e = \frac{1}{4\pi}\int\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{D},\qquad w_m = \frac{1}{4\pi}\int\mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{B}$$

当 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{D}$、$\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{B}$ 的关系是这里所假定的那种线性关系时，这些表达式即化为(31)式。

② W. C. Röntgen, *Ann. d. Physik*, **35**(1888), 264; **40**(1890), 93。

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) \tag{38}$$

$$Q=\int \mathbf{j}_c\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}V=\int \sigma\mathbf{E}^2\,\mathrm{d}V \tag{39}$$

于是由(36)、(37)和(39)三式,

$$\int \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}V=Q+\int \mathbf{j}_v\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}V=Q+\frac{\delta A}{\delta t} \tag{40}$$

其中函数 $\delta A/\delta t$ 当然不是空间-时间函数的全微商。(33)式现在可以写成如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=-\frac{\delta A}{\delta t}-Q-\int \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \tag{41}$$

对于非导体($\sigma=0$),$Q=0$。此外,假定界面离得很远,以致内部电磁过程在它上面产生的场可予忽略;于是 $\int \mathbf{S}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S=0$,由(41)式积分得到

$$W+A=\text{常数} \tag{42}$$

因此,对于一个孤立系统,每单位时间内 W 的增加是由于在这个时间内对该系统所做的功。这个结果证明,用(32)式来定义电磁能是正确的。

Q 这一项代表导体($\sigma\neq0$)中电阻的能量消耗(叫做**焦耳热**)。按照(41)式,如果场的范围扩大到界面,则能量还要进一步减少。因此面积分必须代表通过这个界面的能流。矢量 **S** 通常称为**坡印廷矢量**,它代表在垂直于 **E** 和 **H** 方向的单位面积上每秒通过的能量。

应该注意,把 **S** 解释为能流(更确切地说,是能流密度)是一种抽象概念,它带有一定程度的任意性。因为,按照(41)式,有物理意义的量并不是 **S** 本身,而是对一个闭合面的 $\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}$ 的积分。很清楚,从该积分的值并不能够得出关于 **S** 分布细目的确定无疑的结论,因而其他的能通量密度定义也是可能的。总可以在 **S** 上加上一个任意矢量的旋度,因为从高斯定理和恒等式 $\mathrm{div}\,\mathrm{curl}\equiv0$ 能够看出,这样的项对面积分将没有贡献[①]。然而,当谨慎地应用这个定义,特别是对很小但有限的空间或时间范围取平均值时,还未曾发现它和实验有过矛盾。因此,我们将采纳上面坡印廷矢量所表示的能流密度定义。

最后指出,在不导电媒质中($\sigma=0$),当不做机械功时($A=0$),能量定律可以写成不可压缩流体所具有的那种流体动力学连续方程的形式:

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\mathrm{div}\,\mathbf{S}=0 \qquad (w=w_e+w_m) \tag{43}$$

借用流体动力学模型来描述光的传播常常是有帮助的,特别是在几何光学领域和标量衍射场方面,因为这个模型简单而形象地描绘出了能量的输运。在光学中,(平均)坡印廷矢量是一个最重要的量。坡印廷矢量的大小是光强的一个量度,而它的方向代表着光的传播方向。

---

① 按照近代场论,这一任意性甚至更大,能量密度和能流二者都允许表成他种形式,但要同拉格朗日密度附加一个 4-散度的改变相协合。关于这一问题的讨论,可参看例如 G. Wentzel, *Quantum Theory of Fields* (New York, Interscience Publishers, 1949),特别是 § 2,或参看 J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (New York, J. Wiley and Sons, 2nd ed. 1975), Sec. 12.10,特别是第 602 页。

1.2　波动方程和光速

麦克斯韦方程组以联立微分方程关联了各场矢量。通过消元，就得到每个矢量所必须单独满足的微分方程。我们将单单注意场中不含电荷和电流即 $\mathbf{j}=0$ 和 $\rho=0$ 的那种地区。

把物质方程 § 1.1(11)[§ 1.1(11)表示 1.1 节中的(11)式。本书以下内容均使用此种表达方法]的 **B** 代入第二个麦克斯韦方程 § 1.1(2)，而后两边除以 μ 并运用算符 curl，由此得出

$$\operatorname{curl}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{curl}\mathbf{E}\right)+\frac{1}{c}\operatorname{curl}\dot{\mathbf{H}}=0 \tag{1}$$

然后取第一个麦克斯韦方程 § 1.1(1)对时间的微商，用物质方程 § 1.1(10)代换 **D**，并消去所得方程和(1)式的 curl $\dot{\mathbf{H}}$，由此得出

$$\operatorname{curl}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{curl}\mathbf{E}\right)+\frac{\varepsilon}{c^2}\ddot{\mathbf{E}}=0 \tag{2}$$

如果利用恒等式 curl $u\mathbf{v}=u$ curl $\mathbf{v}+(\operatorname{grad}u)\times\mathbf{v}$ 和 curl curl = grad div $-\nabla^2$，则(2)式变成

$$\nabla^2\mathbf{E}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\ddot{\mathbf{E}}+(\operatorname{grad}\ln\mu)\times\operatorname{curl}\mathbf{E}-\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E}=0 \tag{3}$$

此外，从 § 1.1(3)式出发，再利用物质方程代 **D** 并应用恒等式 div $u\mathbf{v}=u$ div $\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}u$，即得到

$$\varepsilon\operatorname{div}\mathbf{E}+\mathbf{E}\cdot\operatorname{grad}\varepsilon=0 \tag{4}$$

因此，(3)式可以写成如下形式：

$$\nabla^2\mathbf{E}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\ddot{\mathbf{E}}+(\operatorname{grad}\ln\mu)\times\operatorname{curl}\mathbf{E}+\operatorname{grad}(\mathbf{E}\cdot\operatorname{grad}\ln\varepsilon)=0 \tag{5}$$

用同样方法可得到单独的 **H** 方程：

$$\nabla^2\mathbf{H}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\ddot{\mathbf{H}}+(\operatorname{grad}\ln\varepsilon)\times\operatorname{curl}\mathbf{H}+\operatorname{grad}(\mathbf{H}\cdot\operatorname{grad}\ln\mu)=0 \tag{6}$$

特别说来，如果媒质是均匀的，则 grad lnε = grad ln $\mu=0$，(5)式和(6)式遂化为

$$\nabla^2\mathbf{E}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\ddot{\mathbf{E}}=0,\qquad\nabla^2\mathbf{H}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\ddot{\mathbf{H}}=0 \tag{7}$$

这些是标准的波动方程，它们意味着有电磁波存在，其传播速度[①]

$$v=c/\sqrt{\varepsilon\mu} \tag{8}$$

常数 c 首先由科耳劳什和韦伯于 1856 年从测量电容器的静电单位电容和电磁单位电容之比定出。结果发现，它和光在自由空间中的速度相同。麦克斯韦利用这一结果，创立了光的电磁理论，预言有电磁波存在。这个预言的正确性后为赫兹的著名实验所证实(见本书“历史引言”部分)。

---

① 电磁波的速度的概念，只有在类型非常简单的波中，例如平面波，实际才具有明确的意义。v 并不代表(7)式的任意解的传播速度，这是很明显的，如果我们记得这些方程也允许有驻波解的话。
在这一简介性的一节中，假定读者对平面波的概念是熟悉的，并把 v 看成是这种波前进的速度。平面波的表达将在 1.3 节和 1.4 节中讨论。

在所有光的波动理论中,引起光的感觉的那个基本过程都被看成是一个空间-时间上的谐波(在1.3节和1.4节中研究它最简单的形式)。如果它的频率在大约 $4\times10^{14}\sim7.5\times10^{14}\,s^{-1}$ 范围,它就产生一定颜色的生理感觉(但反过来说并不正确,主观感觉上的某种色光可以是许多谐波的混合物,其频率分布可差异甚大)。颜色和频率之间的实际关系是很复杂的,本书将不去研究①。

第一个光速测定②是由罗麦于1675年从木卫一星蚀观测做出的,后来布雷德利于1728年又用不同方法(从恒星光行差)做了测定。

第一个对地面光源光速的测量是由斐索于1849年实现的。这必须采用一个光调制器,以标截出一段光束③,为此斐索用了一个转轮。后来的方法采用了转镜或电子光闸。转镜方法是惠斯通(C. Wheatstone)于1834年提出来的,1860年为傅科所采用。之后迈克耳孙用多年时间把它加以系统发展。根据迈克耳孙大约200次测量的平均值,得到 c 为299 796 km/s。采用克尔盒的光闸方法由卡罗卢斯(A. Karolus)和米特耳斯泰特(O. Mittelstaedt, 1928)、安德森(Anderson, 1937)和赫特耳(A. Hüttel, 1940)发展起来。这些测量所得到的 c 值,同间接方法如测量静电单位和电磁单位的电荷之比所提供的 c 值,符合得非常好。例如,罗沙(Rosa)和多尔赛(Dorsey, 1907)用这种间接方法得到 c 为299 784 km/s。梅塞(Mercier, 1923)测量了电磁波在导线上的速度,得到 c 值等于299 782 km/s。第15届权度大会④所采纳的数值是

$$c = 299\,792.458\ \text{km/s} \tag{9}$$

从各种各样不同测量(在一些情况下使用的辐射的频率和光学测量中所用的要差几十万倍)得到的 c 值如此接近一致,这使麦克斯韦理论得到了有力的证明。

介电常数 ε 通常大于1,而磁导率 μ 对于透明物质来说实际上等于1,所以按照(8)式这时速度 v 要小于真空速度 c。1850年傅科和斐索首先对水中光速进行了测量,从而证实了这一结论。

v 值通常不是直接测定的,而只是依靠折射定律确定它和 c 的比。按照这一定律,如果一平面电磁波射到两个均匀媒质之间的界平面上,则入射波法线与界面法线夹角 θ_1 的正弦同折射波法线与界面法线夹角 θ_2 的正弦之比是一常数(见图1.3),这个常数等于两个媒质中的传播速度 v_1 和 v_2 之比:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2} \tag{10}$$

这个结果将在1.5节中推导。这里仅仅指出,这就等于假定波阵面在界面处是连续的(虽然有一折),即入射波阵面与界面的截线同折射波阵面与界面的截线以同一速度(譬如说 v')前进。于是,

---

① 然而,4.8.1节中将简单讨论一下人的眼睛对不同颜色的灵敏度。

② 关于各种光速测定方法的叙述,见例如 E. Bergstrand, *Encyclopedia of Physics*, ed. S. Flügge, Vol. 24 (Berlin, Springer 1956), p. 1。
对不同方法所得结果的详细分析,也由 R. T. Birge 给出,见 *Rep. Progr. Phys.* (London, The Physical Society), **8** (1941), 90。

③ 这种测定实质上给出的是群速(见1.3.4节)。在标准温度和标准压力的空气中,群速和相速之差大约是1/50 000。

④ Conférence Générale des Poids et Mesures, XV, Paris, 1975, Comptes Rendus des Séances (Paris, Bureau International des Poids et Mesures, 1976)。

$$v_1 = v' \sin\theta_1, \qquad v_2 = v' \sin\theta_2 \tag{11}$$

从上面两式中消去 v'，即得到(10)式。这一论证，形式上再稍微精加工后，常作为惠更斯作图法(见 3.3 节)的一个举例说明。

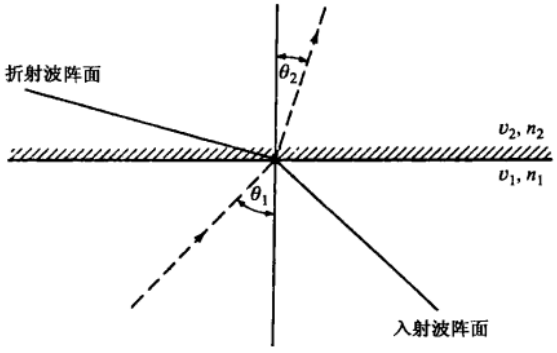


图 1.3　平面波折射图示

(10)式中的常数比值通常用 n_{12} 代表，叫做**折射率**，它是对第一媒质到第二媒质的折射来说的。此外还给媒质定义一个“**绝对折射率**” n：它是从真空折射到这个媒质时的折射率，

$$n = \frac{c}{v} \tag{12}$$

如果 n_1 和 n_2 是两个媒质的绝对折射率，则从第一媒质折射到第二媒质时的(相对)折射率

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} \tag{13}$$

把(12)式和(8)式比较一下，就得到下列麦克斯韦公式：

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} \tag{14}$$

因为对于所有将要涉及到的物质来说，μ 实际上都是 1(非磁性物质)，所以这时折射率 n 应等于介电常数 ε 的平方根，这个 ε 我们曾假设它是物质的一个常数。但是另一方面，众所周知的由牛顿首先作出的三棱镜分光实验表明，折射率是随光的颜色，即随光的频率而改变的。如果要保留麦克斯韦公式，则必须假设 ε 不是物质的一个特征常数，而是场的频率的函数。ε 对频率的依赖关系只有把物质的原子结构考虑进来才能处理，我们将在 2.3 节中加以简单讨论。

麦克斯韦公式(令其中 ε 等于静介电常数时)对某些物质有很好的近似。这些物质，例如一些化学结构简单的气体，对光实际没有色散作用，即它们的光学性质同光的颜色关系不大。表 1.1 给出早期玻尔兹曼[①] 对这种气体测量的一些结果。对于液体烃，(14)式也有很好的近似；例如，苯 C_6H_6 对黄光的 $n = 1.482$，而$\sqrt{\varepsilon} = 1.489$。另一方面，对于许多固体(如玻璃)和一些液体，情况和(14)式有很大的偏离，如表 1.2 所示。

① L. Boltzmann, *Wien. Ber.*, **69**(1874), 795; *Pogg. Ann.*, **155**(1875), 403; *Wiss. Abh. Physik-techn. Reichsanst.*, **1** Nr. 26, 537。

表 1.1 某些气体的折射率和静介电常数

	n(黄光)	$\sqrt{\varepsilon}$
空气	1.000 294	1.000 295
氢 H_2	1.000 138	1.000 132
二氧化碳 CO_2	1.000 449	1.000 473
一氧化碳 CO	1.000 340	1.000 345

表 1.2 某些液体的折射率和静介电常数

	n(黄光)	$\sqrt{\varepsilon}$
甲醇 CH_3OH	1.34	5.7
乙醇 C_2H_5OH	1.36	5.0
水 H_2O	1.33	9.0

1.3 标量波

在一个均匀媒质中,在没有电流和电荷的区域,按照 §1.2(7),场矢量的每个直角分量 $V(\mathbf{r},t)$ 都满足齐次波动方程

$$\nabla^2 V - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

现在我们来简略地考查一下这个方程最简单的解。

1.3.1 平面波

令 $\mathbf{r}(x,y,z)$为空间某一点 P 的位置矢量,$\mathbf{s}(s_x,s_y,s_z)$为某一固定方向上的单位矢量。任何属于

$$V = V(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s},\ t) \tag{2}$$

这种函数形式的(1)式解,我们都说它代表一个**平面波**,因为在各个时刻,在与单位矢量 $\mathbf{s}$ 相垂直的各个平面

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{s} = 常数$$

上,V 是一常数。

方便的做法是选取一组新的笛卡儿坐标轴 $O\xi, O\eta, O\zeta$,使 $O\zeta$ 在 $\mathbf{s}$ 方向上。于是(见图 1.4)

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{s} = \zeta \tag{3}$$

并且

$$\frac{\partial}{\partial x} = s_x\frac{\partial}{\partial \zeta},\qquad \frac{\partial}{\partial y} = s_y\frac{\partial}{\partial \zeta},\qquad \frac{\partial}{\partial z} = s_z\frac{\partial}{\partial \zeta}$$

从这些关系很容易得到

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2} \tag{4}$$

因而(1)式变成为

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \tag{5}$$

如果令

$$\zeta - vt = p, \qquad \zeta + vt = q \tag{6}$$

则(5)式呈

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p \partial q} = 0 \tag{7}$$

这个方程的普遍解是

$$\begin{aligned} V &= V_1(p) + V_2(q) \\ &= V_1(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s} - vt) + V_2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s} + vt) \end{aligned} \tag{8}$$

式中 V_1 和 V_2 是两个任意函数。

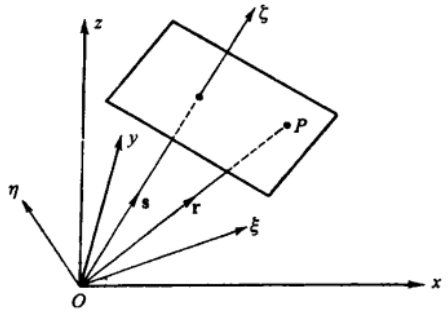


图 1.4　平面波的传播

我们看到,当把(ζ, t)换成$(\zeta + v\tau, t + \tau)$时,其中 τ 为任意,则 V_1 的宗量不变 。因此 V_1 代表一个沿正 ζ 方向、以速度 v 传播的扰动。同样,$V_2(\zeta + vt)$代表一个沿负 ζ 方向以速度 v 传播的扰动。

1.3.2　球面波

其次,考虑代表球面波的解,即

$$V = V(r, t) \tag{9}$$

这种形式的解,其中 $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$。

利用关系式 $\partial/\partial x = (\partial r/\partial x)(\partial/\partial r) = (x/r)(\partial/\partial r)$,等等,经过一步步计算,可得到

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rV) \tag{10}$$

因而波动方程(1)现在变成为

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rV) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rV) = 0 \tag{11}$$

这个方程和(5)式相同,只要把(5)式中的 ζ 换成 r, V 换成 rV。因此(11)式的解可立即据(8)式写出:

$$V=\frac{V_1(r-vt)}{r}+\frac{V_2(r+vt)}{r} \tag{12}$$

V_1 和 V_2 仍然是两个任意函数。(12)式右边第一项代表一个从原点向四外发散的球面波,第二项则代表一个向原点会聚的球面波,两种情况的传播速度都是 v。

1.3.3 谐波和相速

在空间某一点 $\mathbf{r}_0$,波扰动只是时间的函数:

$$V(\mathbf{r}_0,\ t)=F(t) \tag{13}$$

从前面关于颜色的说明显然可见,F 是周期函数的情况特别重要。因此我们讨论

$$F(t)=a\cos(\omega t+\delta) \tag{14}$$

时的情况。式中 $a(>0)$叫做**振幅**,余弦项的宗量 $\omega t+\delta$ 叫做**位相**,或简称**相**。量

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{T} \tag{15}$$

叫做**频率**,代表每秒振动次数。ω 叫做**角**频率,是 2π 秒内的振动次数。因为当 t 换成 $t+T$ 时 F 保持不变,所以 T 是振动的**周期**。属于(14)式这种形式的波函数(即波动方程的解),我们称为时**谐**波函数。

首先考虑,一个**谐平面波**沿单位矢量 $\mathbf{s}$ 规定的方向传播时波函数的形式。按照 1.3.1 节,把(14)式中的 t 换成 $t-\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}/v$,即可得到这一波函数:

$$V(\mathbf{r},\ t)=a\cos\left[\omega\left(t-\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}}{v}\right)+\delta\right] \tag{16}$$

方程(16)在 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}$ 被换成 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}+\lambda$ 时保持不变,其中

$$\lambda=v\frac{2\pi}{\omega}=vT \tag{17}$$

长度 λ 叫做**波长**。亦可定义一个**约化波长** λ_0:

$$\lambda_0=cT=n\lambda \tag{18}$$

它以后要用。这是同频率的谐波在**真空**中传播时的相应波长。在光谱学上还采用**波数**[①] κ 的概念,它是每单位长度(厘米)的**真空**波长数:

$$\kappa=\frac{1}{\lambda_0}=\frac{\nu}{c} \tag{19}$$

此外为方便起见,在传播方向 $\mathbf{s}$ 上定义两个矢量 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{k}_0$,长度分别为

$$k_0=2\pi\kappa=\frac{2\pi}{\lambda_0}=\frac{\omega}{c} \tag{20}$$

和

$$k=nk_0=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{n\omega}{c}=\frac{\omega}{v} \tag{21}$$

矢量 $\mathbf{k}=k\mathbf{s}$ 叫做媒质中的**波矢量**或**传播矢量**,$\mathbf{k}_0=k_0\mathbf{s}$ 则是真空中的相应矢量。

① 我们将以 κ 作为"光谱学波数",而按光学中的习惯,把"波数"一词保留给(20)式和(21)式所定义的 k_0 或 k。

常数 δ 也可用**程长** l 的概念来代替，它是当位相增加 δ 时某一波阵面所后退的距离：

$$l=\frac{v}{\omega}\delta=\frac{\lambda}{2\pi}\delta=\frac{\lambda_0}{2\pi n}\delta \tag{22}$$

现在考虑形式更复杂的时间谐波。一个普遍的频率为 ω 的实标量时间谐波，可定义为波动方程的下列形式的实解：

$$V(\mathbf{r},t)=a(\mathbf{r})\cos[\omega t-g(\mathbf{r})] \tag{23}$$

$a(>0)$和 g 是位置的实标量函数。面

$$g(\mathbf{r})=\text{常数} \tag{24}$$

叫做**等相面**或**波面**。与前一情况大为不同，波(23)式的等幅面和等相面一般不相重合。这样的波称为**非均匀**波。

用指数函数代替三角函数，可简化对谐波的计算。(23)式可写成为

$$V(\mathbf{r},t)=\mathcal{R}\{U(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\} \tag{25}$$

式中

$$U(\mathbf{r})=a(\mathbf{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}g(\mathbf{r})} \tag{26}$$

而$\mathcal{R}$代表实部。将(25)式代入波动方程(1)，得到 U 必须满足方程

$$\nabla^2U+n^2k_0{}^2U=0 \tag{27}$$

U 叫做波的**复振幅**[①]。特别来说，对于平面波，则有

$$g(\mathbf{r})=\omega\left(\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}}{v}\right)-\delta=k(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s})-\delta=\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\delta \tag{28}$$

如果对 V 的运算都是线性的，则可取消(25)式中的符号$\mathcal{R}$而直接用复函数运算，这时最后式子的实部即代表所求的物理量。然而，当处理包含像平方等这种非线性运算的式子时(例如在计算电能密度或磁能密度时)，一般就必须先取实部而后再行运算[②]。

与平面谐波不同，更普遍的波(25)式在空间上不是周期的。然而，可以看出，假如 $\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}\mathbf{r}$ 满足

$$\omega\,\mathrm{d}t-(\operatorname{grad}g)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=0 \tag{29}$$

则位相 $\omega t-g(\mathbf{r})$在$(\mathbf{r},t)$和$(\mathbf{r}+\mathrm{d}\mathbf{r},t+\mathrm{d}t)$是相同的。设 $\mathbf{q}$ 代表 $\mathrm{d}\mathbf{r}$ 方向上的单位矢量，并写成 $\mathrm{d}\mathbf{r}=\mathbf{q}\,\mathrm{d}s$，则由(29)式可得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\omega}{\mathbf{q}\cdot\operatorname{grad}g} \tag{30}$$

当 $\mathbf{q}$ 垂直于等相面，即 $\mathbf{q}=\operatorname{grad}g/|\operatorname{grad}g|$时，(30)式的数值将最小，其值为

$$v^{(p)}(\mathbf{r})=\frac{\omega}{|\operatorname{grad}g|} \tag{31}$$

$v^{(p)}(\mathbf{r})$叫做**相速**，是各个等相面前进的速度。对于平面电磁波，由(28)式可得 $\operatorname{grad}g=\mathbf{k}$，因此

① 在平面波情况下，常把常数因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}$单独分出，而只以变数部分 $a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$归入复振幅。

② 当只要求二次式的时间平均值时，这并非必要[见 1.4 节，(54)～(56)式]。

$$v^{(p)}=\frac{\omega}{k}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

其中利用了(21)式。对于形式更为复杂的波,相速 $v^{(p)}$ 一般将不等于 $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$,即使在均匀媒质中,它也将逐点改变。然而,后面将要看到(见 3.1.2 节),当频率足够大时,即使对于等相面不是平面的这种波,相速也**近似地**等于 $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$。

必须指出,(30)式所给出的 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ 表达式并不是相速在 $\mathbf{q}$ 方向的分解,即相速不能作为一个矢量。反之,它的倒数,即量

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathbf{q}\cdot\operatorname{grad}g}{\omega} \tag{32}$$

可以看出是矢量(grad g)/ω 在 $\mathbf{q}$ 方向上的分量。矢量(grad g)/ω 有时叫做**相慢度**(phase slowness)。

相速在某些情况下可大于 c。对于平面波,当 $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$ 小于 1 时,例如在色散媒质的所谓反常色散区[①](见 2.3.4 节),相速即大于 c。按照相对论,信号的传播速度决不能超过 c。这就意味着相速不能承当信号的传播速度。事实上很容易看出,相速不能从实验上测定,因而必须认为它缺乏任何直接物理意义。因为要测量这个速度,就需要在这无限延展、光滑的波上做一个记号,去测量它的速度。然而,这样做就要把无限长的谐波波列变换成另一个空间和时间的函数了。

1.3.4 波包和群速

前节中所讨论的单色波是理想化的波,实际上决不可能严格实现。根据傅里叶定理,任何波 $V(\mathbf{r},t)$(假定它满足某些很一般的条件)都可以看成是不同频率的单色波的叠加:

$$V(\mathbf{r},t)=\int_0^\infty a_\omega(\mathbf{r})\cos[\omega t-g_\omega(\mathbf{r})]\,\mathrm{d}\omega \tag{33}$$

方便的做法还是采用复数表示,把 V 看做是一个缔合复波[②]的实部:

$$V(\mathbf{r},t)=\mathcal{R}\int_0^\infty a_\omega(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega t-g_\omega(\mathbf{r})]}\,\mathrm{d}\omega \tag{33a}$$

一个波,如果它的傅里叶振幅 a_ω 只是在平均频率 $\bar{\omega}$ 两旁很窄的范围

$$\bar{\omega}-\tfrac{1}{2}\Delta\omega\leqslant\omega\leqslant\bar{\omega}+\tfrac{1}{2}\Delta\omega\qquad(\Delta\omega/\bar{\omega}\ll1)$$

才显著不为零,则可说它是"近乎单色的"。这种情况就是通常所说的**波群**或**波包**[③]。

为了说明波群的一些主要性质,先讨论两个平面单色波叠加形成的波,这两个平面单色波振幅相同,而频率和波数各相差少许,并且都沿 z 轴方向传播:

---

① 关于电磁信号在色散媒质中的传播问题,下列经典论文曾对之做了研究:A. Sommerfeld, *Ann. d. Physik*, **44**(1914), 177; L. Brillouin, *ibid*., **44**(1914), 203。这两篇论文的英译文收进在 L. Brillouin, *Wave Propagation and Group Velocity*(New York, Academic Press, 1960), pp. 17, 43。关于瞬态电磁场在既有色散又有吸收的介电媒质中的传播,系统的探讨可见 K. E. Oughstun and G. C. Sherman, *Electromagnetic Pulse Propagation in Causal Dielectrics*(Berlin and New York, Springer, 1994)。

② 关于实多色波的复数表示,更为详细的讨论见 10.2 节。

③ 严格地说,要 V 能显示通常归属于波群的那些性质,还应假定在整个有效频率范围内位相函数 g_ω 可近似地表成为 ω 的线性函数。

$$V(z,\ t) = a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - kz)} + a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[(\omega+\delta\omega)t-(k+\delta k)z]} \tag{34}$$

这里，按照前面说明的惯例，略去了符号$\mathcal{R}$。(34)式可以写成下列形式：

$$\begin{aligned} V(z,\ t) &= a[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}(t\delta\omega - z\delta k)} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}(t\delta\omega - z\delta k)}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\bar{\omega}t - \bar{k}z)} \\ &= 2a\cos[\tfrac{1}{2}(t\delta\omega - z\delta k)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\bar{\omega}t - \bar{k}z)} \end{aligned} \tag{35}$$

式中

$$\bar{\omega} = \omega + \tfrac{1}{2}\delta\omega, \qquad \bar{k} = k + \tfrac{1}{2}\delta k \tag{36}$$

分别是平均频率和平均波数。(35)式可解释成是代表一个频率为 $\bar{\omega}$、波长为 $2\pi/\bar{k}$、沿 z 方向传播的平面波。然而这个波的振幅不是常量，而是随时间和位置在 $2a$ 和 0 之间改变(见图 1.5)，产生众所周知的拍的现象。振幅函数有一系列极大，相互间隔为

$$\delta t = \frac{4\pi}{\delta\omega}\ (z \text{ 固定}) \text{ 或 } \delta z = \frac{4\pi}{\delta k}\ (t \text{ 固定}) \tag{37}$$

而位相函数的各个极大相隔为

$$\delta t = \frac{2\pi}{\bar{\omega}}\ (z \text{ 固定}) \text{ 或 } \delta z = \frac{2\pi}{\bar{k}}\ (t \text{ 固定}) \tag{38}$$

因为 $\delta\omega/\bar{\omega}$ 和 $\delta k/\bar{k}$ 假设比 1 小得多，所以振幅的改变比另一项要缓慢。

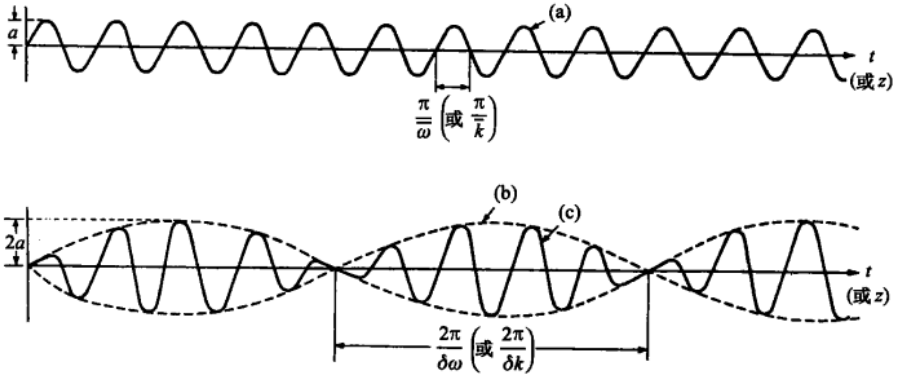


图 1.5　一个简单的波群：(a)波 $a\cos(\bar{\omega}t - \bar{k}z)$；(b)波 $2a\cos[\frac{1}{2}(t\delta\omega - z\delta k)]$；(c)波群 $2a\cos[\frac{1}{2}(t\delta\omega - z\delta k)]\cos(\bar{\omega}t - \bar{k}z)$。横坐标代表两个自变数中的一个($t$ 或 z)，而另一个保持不变

由(35)式可知，等幅平面(特别地说，振幅极大)的传播速度

$$v^{(g)} = \frac{\delta\omega}{\delta k} \tag{39}$$

而等相平面的传播速度

$$v^{(p)} = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}} \tag{40}$$

$v^{(g)}$ 叫做波的**群速**。因为 V 遵守波动方程，故频率 ω 和波数 k 有关联，在一个折射率为 n 的媒质中，有[见(21)式]

$$k = n(\omega)\frac{\omega}{c} \tag{41}$$

式中 $n(\omega)$是折射率函数。(41)式表明波的**色散**。在非色散媒质中，n 不随 ω 改变，于是相速 $v^{(p)}$和群速 $v^{(g)}$都等于 c/n。然而，在色散媒质中，这两个速度一般将不相同。

由于 $\delta\omega$ 设为很小，$\delta\omega/\delta k$ 可用微商 $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$ 代替，因此群速表达式可写成

$$v^{(g)} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \tag{42}$$

事实上，这个关系在更普遍的情况下也仍然有效，现在就来证明这一点。考虑一个一维波群

$$V(z,\ t) = \int_{(\Delta\omega)} a_\omega \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - kz)}\,\mathrm{d}\omega \tag{43}$$

式中 $\Delta\omega$ 代表 a_ω 显著不为零的频率区间，范围很小，其平均频率为 $\bar{\omega}$ ($\Delta\omega/\bar{\omega} \ll 1$)。设 $\bar{k} = n(\bar{\omega})\bar{\omega}/c$ 为相应的波数。于是(43)式可表成下列形式：

$$V(z,\ t) = A(z,\ t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\bar{\omega}t - \bar{k}z)} \tag{44}$$

式中

$$A(z,\ t) = \int_{(\Delta\omega)} a_\omega \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[(\omega-\bar{\omega})t-(k-\bar{k})z]}\,\mathrm{d}\omega \approx \int_{(\Delta\omega)} a_\omega \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left[(\omega-\bar{\omega})\left\{t-\left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\bar{\omega}}z\right\}\right]}\,\mathrm{d}\omega \tag{45}$$

如果 $\Delta\omega$ 足够小。V 仍然可以解释成是一个变幅平面波，其频率为 $\bar{\omega}$，波数为 $\bar{k}$，沿 z 方向传播。振幅 $A(z,t)$被表成为频率为 $\omega - \bar{\omega}$ 的各谐波的叠加。因为假设 $\Delta\omega/\bar{\omega}$ 比 1 小得多，所以 A 的改变比另一项要缓慢。一般 A 是复数，因而对位相 $\bar{\omega}t - \bar{k}z$ 有贡献($\arg A$)。可以看到，面

$$t = \left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\bar{\omega}} z \tag{46}$$

具有特别的意义：在每个这样的面上，$A(z,t)$是常量。因此，一定 A 值(其中包括$|A|$的极大)的前进速度就是**群速**

$$v^{(g)} = \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{\bar{k}} \tag{47}$$

结果同前。

可以看出，群速和相速有下列关系：

$$v^{(g)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}(v^{(p)}k) = v^{(p)} + k\frac{\mathrm{d}v^{(p)}}{\mathrm{d}k} = v^{(p)} - \lambda\frac{\mathrm{d}v^{(p)}}{\mathrm{d}\lambda} \tag{48}$$

式中所有的量都是对平均频率 $\bar{\omega}$ 来说的。

最后来讨论一般的三维波群

$$V(\mathbf{r},\ t) = \mathcal{R}\int_{(\Delta\omega)} a_\omega(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega t - g_\omega(\mathbf{r})]}\,\mathrm{d}\omega \tag{49}$$

同(43)式类比，把对应于平均频率 $\bar{\omega}$ 的那一项单分出来，写成

$$V(\mathbf{r},\ t) = A(\mathbf{r},\ t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\bar{\omega}t - g_{\bar{\omega}}(\mathbf{r})]} \tag{50}$$

式中

$$A(\mathbf{r},\ t)=\int_{(\Delta\omega)}a_\omega(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\{(\omega-\overline{\omega})t-[g_\omega(\mathbf{r})-g_{\overline{\omega}}(\mathbf{r})]\}}\,\mathrm{d}\omega\approx\int_{(\Delta\omega)}a_\omega(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left\{(\omega-\overline{\omega})\left[t-\left(\frac{\partial g(\mathbf{r})}{\partial\omega}\right)_{\overline{\omega}}\right]\right\}}\,\mathrm{d}\omega \tag{51}$$

如果 $\Delta\omega$ 足够小。方程(50)代表一个频率为 $\bar{\omega}$ 的波，它的振幅 $A(\mathbf{r},t)$(一般是复的) 在空间和时间上都是变化的，这个变化仍然比另一项缓慢。同(46)式类比，可以预期，面

$$t=\left[\frac{\partial g(\mathbf{r})}{\partial\omega}\right]_{\overline{\omega}} \tag{52}$$

具有特别的意义。然而，这里在每个这样的面上，振幅函数 A 不一定是常量，因为傅里叶振幅 a_ω 这时不仅是频率的函数，而且也是位置的函数。(52)式的意义通过对振幅绝对值 $M=|A|$ 的分析即可看到。取 M 平方，有

$$M^2(\mathbf{r},\ t)=A(\mathbf{r},\ t)A^{\star}(\mathbf{r},\ t)=\int_{(\Delta\omega)}\int_{(\Delta\omega)}a_\omega(\mathbf{r})a_{\omega'}(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left\{(\omega-\omega')\left[t-\left(\frac{\partial g(\mathbf{r})}{\partial\omega}\right)_{\overline{\omega}}\right]\right\}}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega' \tag{53}$$

显然，这个重积分的虚部等于零，因为 M^2 是实的(从公式上看，把两个自变数 ω 和 ω' 进行交换并注意这时被积函数的虚部易号，即可证明)。因此

$$M^2(\mathbf{r},\ t)=\int_{(\Delta\omega)}\int_{(\Delta\omega)}a_\omega(\mathbf{r})a_{\omega'}(\mathbf{r})\cos\left\{(\omega-\omega')\left[t-\left(\frac{\partial g(\mathbf{r})}{\partial\omega}\right)_{\overline{\omega}}\right]\right\}\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\omega' \tag{54}$$

如果我们盯住任一特别点 $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0$，并记住 a_ω 非正即零，则可看出，当余弦项的宗量为零即 $t=(\partial g(\mathbf{r}_0)/\partial\omega)_{\overline{\omega}}$ 时，$M^2(\mathbf{r}_0,t)$ 达到其极大。由此可见，(52)式代表这样一些面，这些面上的振幅绝对值，像刚才所解释的那样在时间 t 达到它的极大。因此，把一般三维波群的群速定义为这些面的前进速度是适宜的。如果取一个很小的位移 $\delta\mathbf{r}=\mathbf{q}\delta s$，其中 $\mathbf{q}$ 是与该面垂直的单位矢量，则由(52)式得到相应的改变 δt 为

$$\delta t=\delta s\left|\operatorname{grad}\left(\frac{\partial g(\mathbf{r})}{\partial\omega}\right)_{\overline{\omega}}\right| \tag{55}$$

因而一般三维波群的群速

$$v^{(g)}=\frac{1}{\left|\operatorname{grad}\left(\frac{\partial g}{\partial\omega}\right)_{\overline{\omega}}\right|} \tag{56}$$

读者可将此式与一般谐波的相速表达式(31)

$$v^{(p)}=\frac{1}{\left|\operatorname{grad}\frac{g}{\omega}\right|} \tag{57}$$

进行比较。在特别情况下，当波群系由沿 z 方向传播的平面波组成时，$g_\omega=kz$，(56)式遂化为(47)式。

从以上讨论显然可见，有效频率范围 $\Delta\omega$ 是有关波群的一个重要参量；正是这个量，它实际上决定着振幅和位相的涨落快慢。如果媒质没有强烈的色散，一个波群将能传播相当长一段距离而不发生显著的改变。在这种情况下，可以认为群速是波群作为一个整体传播的速度，

它也将代表能量传播的速度[①]。然而,一般来说这是不正确的。特别是,在反常色散(见2.3.4节)区域,群速可超过真空中的光速或变成负的[②],但这同特殊相对论并无冲突[③]。

1.4 矢量波

1.4.1 一般的电磁平面波

最简单的电磁场是一个平面波的电磁场;这时,按照1.3.1节,场矢量的各个笛卡儿分量以及因此 **E** 和 **H** 都只是变数 $u = \mathbf{r}\cdot\mathbf{s} - vt$ 的函数:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s} - vt), \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s} - vt) \tag{1}$$

同前,式中 **s** 代表传播方向上的单位矢量。

设用一点"·"表示对 t 微商,用一撇"′"表示对 u 微商,则有

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= -v\mathbf{E}', \\ (\operatorname{curl}\mathbf{E})_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = E'_z s_y - E'_y s_z = (\mathbf{s}\times\mathbf{E}')_x. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

把这些式子代入麦克斯韦方程 §1.1(1)、§1.1(2),令其中 $\mathbf{j}=0$,并应用物质方程 §1.1(10),§1.1(11),得到

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{s}\times\mathbf{H}' + \frac{\varepsilon v}{c}\mathbf{E}' &= 0, \\ \mathbf{s}\times\mathbf{E}' - \frac{\mu v}{c}\mathbf{H}' &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

如果令附加的积分常数等于零(即略去一个在空间上不变的场),并且同前令 $v/c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$,则由(3)式积分得到

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\mathbf{s}\times\mathbf{H}, \\ \mathbf{H} &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathbf{s}\times\mathbf{E}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

以 **s** 标乘上式两边,得到

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{s} = \mathbf{H}\cdot\mathbf{s} = 0 \tag{5}$$

这一关系表明了场的"横向性",即电场矢量和磁场矢量都处在与传播方向相垂直的平面上。由(4)式和(5)式可以看到,**E**,**H** 和 **s** 形成一右手正交三矢量系统。此外由(4)式可得

$$\sqrt{\mu}H = \sqrt{\varepsilon}E \tag{6}$$

式中 $E = |\mathbf{E}|$,$H = |\mathbf{H}|$。

现在让我们看看,在单位时间内从垂直于传播方向的面元上通过的能量。试想像一个圆

---

① 例如,见 F. Borgnis, Z. *Phys.*, **117**(1941), 642; L. J. F. Broer, *Appl. Sci. Res.*, **A2**(1951), 329。

② L. J. Wang, A. Kuzmich and A. Dogariu, *Nature*, **406**(2000), 277。

③ R. Y. Chiao and A. M. Steinberg in *Progress in Optics* Vol. XXXVII, ed. E. Wolf(Amsterdam, Elsevier, 1997), p. 345 *et seq*。

柱体，柱轴平行于 **s**，而横截面等于 1。于是，在单位时间内从该圆柱底通过的能量，等于长度为 v 的一段圆柱体中所包含的能量。因此能流等于 vw，其中 w 是能量密度。按照(6)式和 §1.1(31)，能量密度

$$w=\frac{\varepsilon}{4\pi}E^2=\frac{\mu}{4\pi}H^2 \tag{7}$$

另一方面，按照 §1.1(38)，坡印廷矢量为

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}EH\mathbf{s}=\frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2\mathbf{s}=\frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H^2\mathbf{s} \tag{8}$$

把(7)式和(8)式相比较，可以看出

$$\mathbf{S}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}w\mathbf{s}=vw\mathbf{s} \tag{9}$$

我们看到，同 1.1.4 节相一致，坡印廷矢量代表了能量的流动——能流，包括它的大小和传播方向。

1.4.2　谐电磁平面波

当平面波是时间谐波时，即当 **E** 和 **H** 各个笛卡儿分量为下列形式时，情况特别重要：

$$a\cos(\tau+\delta)=\mathcal{R}\{ae^{-i(\tau+\delta)}\}\qquad(a>0) \tag{10}$$

式中 τ 代表位相因子的变数部分，即

$$\tau=\omega\left(t-\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}}{v}\right)=\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \tag{11}$$

设选择 z 轴在 **s** 方向。因为按照(5)式场是横向的，所以这时 **E** 和 **H** 只有 x 分量和 y 分量不等于零。现在看看在空间某一代表点上电矢量端点所描绘的曲线的性质。这个曲线是下列坐标点 (E_x, E_y) 的轨迹：

$$\left.\begin{aligned}E_x&=a_1\cos(\tau+\delta_1),\\E_y&=a_2\cos(\tau+\delta_2).\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

(a) 椭圆偏振

为了从(12)式中消去 τ，把它们改写成下列形式：

$$\left.\begin{aligned}\frac{E_x}{a_1}&=\cos\tau\cos\delta_1-\sin\tau\sin\delta_1,\\\frac{E_y}{a_2}&=\cos\tau\cos\delta_2-\sin\tau\sin\delta_2.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

因此

$$\left.\begin{aligned}\frac{E_x}{a_1}\sin\delta_2-\frac{E_y}{a_2}\sin\delta_1&=\cos\tau\sin(\delta_2-\delta_1),\\\frac{E_x}{a_1}\cos\delta_2-\frac{E_y}{a_2}\cos\delta_1&=\sin\tau\sin(\delta_2-\delta_1).\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

将二式平方相加，得到

$$\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2+\left(\frac{E_y}{a_2}\right)^2-2\frac{E_x}{a_1}\frac{E_y}{a_2}\cos\delta=\sin^2\delta \tag{15}$$

式中

$$\delta=\delta_2-\delta_1 \tag{16}$$

(15)式是圆锥方程式。它是一个椭圆,因为其缔合行列式不是负的:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1^2} & -\frac{\cos\delta}{a_1a_2} \\ -\frac{\cos\delta}{a_1a_2} & \frac{1}{a_2^2} \end{vmatrix}=\frac{1}{a_1^2a_2^2}(1-\cos^2\delta)=\frac{\sin^2\delta}{a_1^2a_2^2}\geqslant 0$$

该椭圆内接于一长方形,长方形各边与坐标轴平行,边长为 $2a_1$ 和 $2a_2$(见图 1.6)。椭圆和各边相切于点$(\pm a_1,\pm a_2\cos\delta)$和$(\pm a_1\cos\delta,\pm a_2)$。

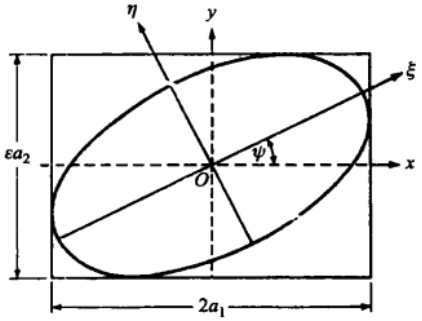


图 1.6 椭圆偏振波。电矢量振动椭圆

因此,(12)式所代表的波称为**椭圆偏振波**。很容易看出,同磁矢量相联系的波也是椭圆偏振的。因为由(5)式和(12)式,

$$\left.\begin{aligned} H_x&=-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_y=-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}a_2\cos(\tau+\delta_2),\\ H_y&=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_x=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}a_1\cos(\tau+\delta_1). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

所以磁矢量端点描绘的也是一个椭圆,该椭圆内接于一长方形,其各边分别与 x, y 方向平行,边长为 $2\sqrt{\varepsilon/\mu}a_2$,$2\sqrt{\varepsilon/\mu}a_1$。

一般,椭圆的两个轴并不在 Ox 和 Oy 方向。设 $O\xi$, $O\eta$ 为一组沿椭圆长、短轴方向的新坐标轴,并设$\psi(0\leqslant\psi<\pi)$为 Ox 和椭圆长轴方向 $O\xi$ 的夹角(见图 1.6)。于是 E_ξ 和 E_η 分量同 E_x 和 E_y 分量的关系如下:

$$\left.\begin{aligned} E_\xi&=E_x\cos\psi+E_y\sin\psi,\\ E_\eta&=-E_x\sin\psi+E_y\cos\psi. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

如果 $2a$ 和 $2b(a\geqslant b)$是椭圆的轴长,则 $O\xi$, $O\eta$ 坐标中的椭圆方程是

$$\left.\begin{aligned} E_\xi &= a\cos(\tau+\delta_0),\\ E_\eta &= \pm b\sin(\tau+\delta_0). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

正、负两种符号是区别电矢量端点描绘该椭圆时所可采取的两种可能方向。

为了定出 a 和 b，把(18)、(19)两式相比较并应用(13)式：

$$\begin{aligned} a(\cos\tau\cos\delta_0-\sin\tau\sin\delta_0) &= a_1(\cos\tau\cos\delta_1-\sin\tau\sin\delta_1)\cos\psi\\ &\quad + a_2(\cos\tau\cos\delta_2-\sin\tau\sin\delta_2)\sin\psi;\\ \pm b(\sin\tau\cos\delta_0+\cos\tau\sin\delta_0) &= -a_1(\cos\tau\cos\delta_1-\sin\tau\sin\delta_1)\sin\psi\\ &\quad + a_2(\cos\tau\cos\delta_2-\sin\tau\sin\delta_2)\cos\psi \end{aligned}$$

然后，令各方程中 $\cos\tau$ 和 $\sin\tau$ 的系数分别相等：

$$a\cos\delta_0 = a_1\cos\delta_1\cos\psi + a_2\cos\delta_2\sin\psi \tag{20a}$$

$$a\sin\delta_0 = a_1\sin\delta_1\cos\psi + a_2\sin\delta_2\sin\psi \tag{20b}$$

$$\pm b\cos\delta_0 = a_1\sin\delta_1\sin\psi - a_2\sin\delta_2\cos\psi \tag{21a}$$

$$\pm b\sin\delta_0 = -a_1\cos\delta_1\sin\psi + a_2\cos\delta_2\cos\psi \tag{21b}$$

将(20a)式和(20b)式平方相加并应用(16)式，得到

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= a_1^2\cos^2\psi + a_2^2\sin^2\psi + 2a_1a_2\cos\psi\sin\psi\cos\delta,\\ \text{同样由(21a)和(21b)两式，}\\ b^2 &= a_1^2\sin^2\psi + a_2^2\cos^2\psi - 2a_1a_2\cos\psi\sin\psi\cos\delta. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

因此

$$a^2+b^2 = a_1^2+a_2^2 \tag{23}$$

其次，以(21a)式乘(20a)式，以(21b)式乘(20b)式，而后相加，由此得到

$$\mp ab = a_1a_2\sin\delta \tag{24}$$

再以(20a)式除(21a)式，以(20b)式除(21b)式，得到

$$\pm\frac{b}{a} = \frac{a_1\sin\delta_1\sin\psi - a_2\sin\delta_2\cos\psi}{a_1\cos\delta_1\cos\psi + a_2\cos\delta_2\sin\psi} = \frac{-a_1\cos\delta_1\sin\psi + a_2\cos\delta_2\cos\psi}{a_1\sin\delta_1\cos\psi + a_2\sin\delta_2\sin\psi}$$

从这些关系可得到下列ψ的方程：

$$(a_1^2-a_2^2)\sin 2\psi = 2a_1a_2\cos\delta\cos 2\psi$$

方便的做法是引进一个辅助角 $\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2)$，使得

$$\frac{a_2}{a_1} = \tan\alpha \tag{25}$$

于是前一方程变成

$$\tan 2\psi = \frac{2a_1a_2}{a_1^2-a_2^2}\cos\delta = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\cos\delta$$

即

$$\tan 2\psi = (\tan 2\alpha)\cos\delta \tag{26}$$

此外,由(23)和(24)两式又可得到

$$\mp\frac{2ab}{a^2+b^2}=\frac{2a_1a_2}{a_1^2+a_2^2}\sin\delta=(\sin 2\alpha)\sin\delta \tag{27}$$

设χ($-\pi/4\leqslant\chi\leqslant\pi/4$)为另一辅助角,使得

$$\mp\frac{b}{a}=\tan\chi \tag{28}$$

$\tan\chi$ 的数值代表椭圆轴长之比,而χ 的符号则区别描绘椭圆所可采取的两种方向。(27)式可写成下列形式:

$$\sin 2\chi=(\sin 2\alpha)\sin\delta \tag{29}$$

把结果概括一下将是有益的。如果给定任意一组坐标轴中的 a_1,a_2 和位相差 δ,而且如果令 $\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2)$代表一个角,使得

$$\tan\alpha=\frac{a_2}{a_1} \tag{30}$$

则椭圆的主半轴 a 和b,以及长轴与 Ox 的夹角$\psi(0\leqslant\psi<\pi)$由下列公式确定:

$$a^2+b^2=a_1^2+a_2^2 \tag{31a}$$

$$\tan 2\psi=(\tan 2\alpha)\cos\delta \tag{31b}$$

$$\sin 2\chi=(\sin 2\alpha)\sin\delta \tag{31c}$$

式中χ($-\pi/4\leqslant\chi<\pi/4$)是一个辅助角,它确定振动椭圆的形状和转向:

$$\tan\chi=\mp b/a \tag{32}$$

反过来,如果知道椭圆的轴长 a,b 和取向(即给定 a,b,ψ),则从这些公式能够求出振幅 a_1,a_2 和位相差 δ。这些量可以直接测定,我们将在第 15 章描述所用的一些仪器。

在讨论一些重要的特殊情况之前,必须首先简单讲讲一些专业名词。我们根据电矢量端点描绘椭圆的转向来区分两种偏振情况。若 **E** 的旋转与传播方向构成右手螺旋的叫做右旋偏振,而构成左手螺旋的叫做左旋偏振,这似乎很自然。但是传统名词叫法正好相反——因为它是以观察者迎面去"看"时 **E** 的表观行为为判据的。本书通篇将遵循这一习惯用法。这样,当观察者迎着来光看去,电矢量端点是按顺时针方向画椭圆时,我们说该偏振是**右旋的**。如果分析一下(12)式在相隔 1/4 周期的两个时刻的值,则可看出在右旋情况下 $\sin\delta>0$,利用(29)式,即有 $0<\chi\leqslant\pi/4$,对于**左旋**偏振,情况相反,即当观察者迎着来光看去时,电矢量将按逆时针画椭圆;在这一情况下,$\sin\delta<0$,因而 $-\pi/4\leqslant\chi<0$。

由于同光学发展历史有关的原因,人们常把磁矢量的方向叫做**偏振方向**,并把磁矢量和传播方向所决定的平面叫做**偏振面**。然而,这些名词并没有被所有作者采纳,一些作者定义这些名词是对电矢量说的,而不是对磁矢量。之所以发生这种不一致,部分原因是由于这个事实,即,没有一个单独的物理机体能够称为"光矢量"而无含糊之处。当特别注意场矢量的物理作用时,实际上可有若干理由认为 **E** 是光矢量。因为每一个作用都是电磁场驱动基本带电粒子(电子,原子核)运动的结果。场作用在粒子上的机械力 **F** 由洛伦兹定律 § 1.1(34)给出:

$$\mathbf{F}=e\left(\mathbf{E}+\frac{\mu}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right)$$

式中 e 是粒子的电荷，$\mathbf{v}$ 是粒子的速度。由此可见，电矢量即使当粒子静止时也发生作用。反之，磁矢量只有当粒子在运动时才参与行动；然而，因 v/c 通常比 1 小得多，这个作用常可予以忽略。虽然如此，通常还是把“偏振方向”和“偏振面”与磁矢量联系在一起。这么叫的原因在下节讨论反射产生的偏振时就会明白。

为避免混淆，我们将按照较近的习惯，不用“偏振方向”和“偏振面”这两个名词，而只说**振动方向**和**振动面**，以表示场矢量的方向和场矢量与传播方向所构成的平面，所说矢量则在各情况中具体指明。

(b) 线偏振和圆偏振

有两个特别情况非常重要，这就是偏振椭圆退化成一条直线或一个圆。

按照(12)式，当

$$\delta = \delta_2 - \delta_1 = m\pi \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{33}$$

时，椭圆将退化成一条直线。这时

$$\frac{E_y}{E_x} = (-1)^m \frac{a_2}{a_1} \tag{34}$$

我们说 $\mathbf{E}$ 是**线偏振**的[①]。可以把某一坐标轴，如 x，选在这条直线上。于是只剩下一个分量 (E_x)。而且，由于电矢量和磁矢量正交并同处在与 z 方向垂直的平面上，所以 H_x 分量这时等于零，因而 $\mathbf{H}$ 是沿 y 方向线偏振的。

另一个重要的特别情况是**圆偏振**波的情况，这时椭圆退化成一个圆。很明显，产生圆偏振的一个必要条件是外切长方形应该变成一正方形：

$$a_1 = a_2 = a \tag{35}$$

还有，当 $\mathbf{E}$ 的一个分量达到极值时，另一分量必须为零，这就要求

$$\delta = \delta_2 - \delta_1 = m\pi/2 \qquad (m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots) \tag{36}$$

这时(15)式化为圆方程

$$E_x^2 + E_y^2 = a^2 \tag{37}$$

当偏振是**右旋**时，$\sin\delta > 0$，因而

$$\delta = \frac{\pi}{2} + 2m\pi \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{38}$$

$$\left.\begin{aligned} E_x &= a\cos(\tau + \delta_1), \\ E_y &= a\cos(\tau + \delta_1 + \pi/2) = -a\sin(\tau + \delta_1). \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

对于**左旋偏振**，$\sin\delta < 0$，因而

$$\delta = -\frac{\pi}{2} + 2m\pi \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{40}$$

$$\left.\begin{aligned} E_x &= a\cos(\tau + \delta_1), \\ E_y &= a\cos(\tau + \delta_1 - \pi/2) = a\sin(\tau + \delta_1). \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

① 也有叫**平面偏振**的，但此词较欠妥当。

如果把实表示换成复表示[即把(12)式中的余弦函数改写成指数函数],则

$$\frac{E_y}{E_x}=\frac{a_2}{a_1}e^{i(\delta_1-\delta_2)}=\frac{a_2}{a_1}e^{-i\delta} \tag{42}$$

从这个比的值可立即定出偏振的性质。各种情况的结果如下:

(i) **线偏振电波**($\delta=m\pi, m=0,\pm1,\pm2,\cdots$):

$$E_y/E_x=(-1)^m\frac{a_2}{a_1}$$

(ii) **右旋圆偏振电波**[①] ($a_1=a_2, \delta=\pi/2$):

$$E_y/E_x=e^{-i\pi/2}=-i$$

(iii) **左旋圆偏振电波**($a_1=a_2, \delta=-\pi/2$):

$$E_y/E_x=e^{i\pi/2}=i$$

在更为一般的情况下,可以证明右旋椭圆偏振的 E_y/E_x 虚部为负,而左旋椭圆偏振的 E_y/E_x 虚部为正。

图 1.7 说明偏振椭圆如何随 δ 的改变而变化。

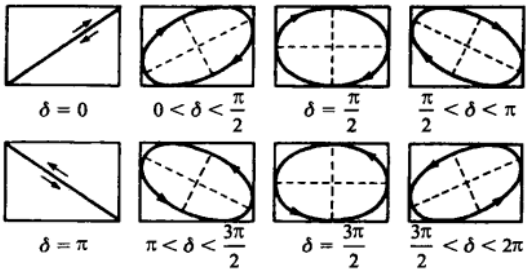


图 1.7 位相差 δ 取不同值时的椭圆偏振

(c) *偏振态的表征——斯托克斯参量*

表征椭圆偏振,必定需要三个独立的量,例如振幅 a_1, a_2 和位相差 δ,或长短轴 a, b 和表明椭圆取向的 ψ 角。在实用上,用某些物理因次全一样的参量——斯托克斯参量来表征偏振态更为便利。这些参量是斯托克斯于 1852 年在关于部分偏振光的研究中引进的。后面 10.9.3 节将在完全普遍的情况下给它们下定义。那里还将证明,对于任何给定的波,这些参量都可以由简单的实验加以测定。

一个平面单色波的**斯托克斯**参量是下列 4 个量:

$$\left.\begin{aligned} s_0&=a_1^2+a_2^2,\\ s_1&=a_1^2-a_2^2,\\ s_2&=2a_1a_2\cos\delta,\\ s_3&=2a_1a_2\sin\delta. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

① 注意,这里右旋是按传统名词的叫法,而不是按自然叫法。

其中只有三个是独立的，因为它们之间存在下列恒等式关系：

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \tag{44}$$

参量 s_0 显然正比于波的强度。参量 s_1，s_2 和 s_3 与表明椭圆取向的ψ角($0 \leqslant \psi < \pi$)和表征椭圆率以及椭圆转向的χ 角($-\pi/4 \leqslant \chi \leqslant \pi/4$)有简单的关系。事实上下列关系式成立：

$$s_1 = s_0 \cos 2\chi \cos 2\psi \tag{45a}$$

$$s_2 = s_0 \cos 2\chi \sin 2\psi \tag{45b}$$

$$s_3 = s_0 \sin 2\chi \tag{45c}$$

关系式(45c)可由(25)和(29)两式得到。要推导其他两个关系，可注意，按照(26)式前面一个方程，有

$$s_2 = s_1 \tan 2\psi \tag{46}$$

把(46)和(45c)两式代入(44)式，可得到关系式(45a)。最后，把(45a)式代入(46)式，即得到(45b)式。

关系式(45)表明所有各式各样的偏振态可用一个简单的几何图形来表示：s_1，s_2 和 s_3 可以看成是一个半径为 s_0 的球 Σ 上某点 P 的笛卡儿坐标，而 2χ 和 2ψ 则是这点的相应球面角坐标(见图 1.8)。这样，**一个平面单色波，当其强度给定时(s_0 = 常数)，对它每一个可能的偏振态，Σ 上都有一点与之对应，反之亦然**。因为当偏振是右旋时χ 为正，而左旋时χ 为负，所以，从(45c)式可知，右旋偏振由 Σ 上赤道面(xy 平面)上面的点来代表，而左旋偏振由赤道面下面的点来代表。再有，对于线偏振光，位相差 δ 是零或 π 的整数倍，按照(43)式，斯托克斯参量 s_3 这时为零，所以线偏振由赤道面上的点来代表。对于圆偏振，$a_1 = a_2$，并且看偏振是右旋还是左旋，$\delta = +\pi/2$ 或 $-\pi/2$，因此右旋圆偏振由北极($s_1 = s_2 = 0$，$s_3 = s_0$)代表，而左旋圆偏振由南极($s_1 = s_2 = 0$，$s_3 = -s_0$)代表。这个用球面各点代表不同偏振态的几何表示方法创始于邦加[①]，它在晶体光学中非常有用，可决定当光穿经晶体媒质时后者对它偏振态的影响[②]。这个 Σ 球叫做**邦加球**。

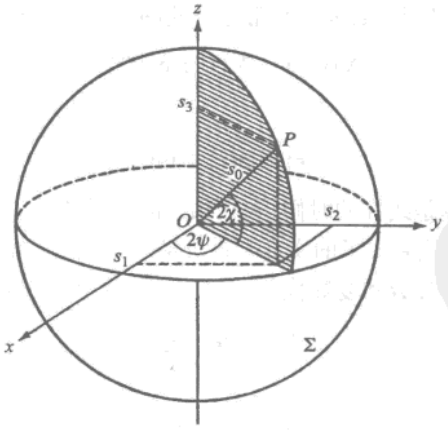


图 1.8　单色波偏振态的邦加表示(邦加球)

① H. Poincaré, *Théorie Mathématique de la Lumière*, Vol. 2 (Paris, Georges Carré, 1892) Chap. 12。

② 关于本法的一些示例和有关文献的引录，见 H. G. Jerrard, *J. Opt. Soc. Amer.*, **44** (1954), 634。亦见 10.9.3 节中所引 M. J. Walker 的论文和 S. Pancharatnam, *Proc. Ind. Acad. Sci.*, A, **44** (1956), 247。

1.4.3 任意形式的谐矢量波

前几节的主要结果很容易扩大到形式更为复杂的时间谐波。

一个一般的实矢量时间谐波 $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ 是矢量波动方程这样的一个解,其笛卡儿分量 V_x, V_y, V_z 各由 § 1.3(23)形式的式子来代表:

$$\left.\begin{aligned} V_x(\mathbf{r}, t) &= a_1(\mathbf{r})\cos[\omega t - g_1(\mathbf{r})], \\ V_y(\mathbf{r}, t) &= a_2(\mathbf{r})\cos[\omega t - g_2(\mathbf{r})], \\ V_z(\mathbf{r}, t) &= a_3(\mathbf{r})\cos[\omega t - g_3(\mathbf{r})], \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

式中 a_s 和 g_s $(s = 1,2,3)$ 都是位置的实函数。对于前节所考虑的谐平面波,各个 a 是常数,而 $g_s(\mathbf{r}) = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \delta_s$。

方便的做法是把(47)式写成下列形式:

$$V_x(\mathbf{r}, t) = p_x(\mathbf{r})\cos\omega t + q_x(\mathbf{r})\sin\omega t \text{ 等}, \tag{48}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} p_x(\mathbf{r}) &= a_1(\mathbf{r})\cos g_1(\mathbf{r}), \\ q_x(\mathbf{r}) &= a_1(\mathbf{r})\sin g_1(\mathbf{r}). \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

如果选取一组新坐标轴,则 $\mathbf{V}$ 在新坐标中的各个分量将还是(47)式这种形式,因为各新分量是旧分量的线性组合,因而它可以只包括 $\cos\omega t$ 项和 $\sin\omega t$ 项之和。

可以把 (p_x, p_y, p_z) 和 (q_x, q_y, q_z) 看做是两个实矢量 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{q}$ 的分量。于是

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}(\mathbf{r})\cos\omega t + \mathbf{q}(\mathbf{r})\sin\omega t \tag{50}$$

根据傅里叶分析,一个任意的矢量波可以表成为许多这样的波的叠加。

和标量波情况中一样,采用复数表示常常是方便的。把(50)式写成如下形式:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{R}\{\mathbf{U}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\} \tag{51}$$

式中 $\mathbf{U}$ 是复矢量

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}) = \mathbf{p}(\mathbf{r}) + i\mathbf{q}(\mathbf{r}) \tag{52}$$

$\mathcal{R}$ 表示实部。当对 $\mathbf{V}$ 的运算是线性的时候,和在相应的标量情况中一样,可以直接对复量进行运算而把符号 $\mathcal{R}$ 统统去掉。最后式子的实部则被理解为代表所求的物理量。

复矢量的运算遵守矢量代数和复数代数的常用规则,例如,$\mathbf{U}$ 的共轭矢量是

$$\mathbf{U}^\star = \mathbf{p} - i\mathbf{q}$$

同样

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{U}\cdot\mathbf{U} = \mathbf{p}^2 - \mathbf{q}^2 + 2i\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}$$

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{U}^\star = (\mathbf{p} + i\mathbf{q})\cdot(\mathbf{p} - i\mathbf{q}) = \mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2$$

等等。

为了说明复矢量的运算,下面来推导以后要用到的两个公式:时谐电磁场的能量密度公式和坡印廷矢量公式。这时电矢量和磁矢量的表达形式为

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)&=\mathcal{R}\{\mathbf{E}_0(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\}=\tfrac{1}{2}[\mathbf{E}_0(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+\mathbf{E}_0^{\star}(\mathbf{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}],\\ \mathbf{H}(\mathbf{r},t)&=\mathcal{R}\{\mathbf{H}_0(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\}=\tfrac{1}{2}[\mathbf{H}_0(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+\mathbf{H}_0^{\star}(\mathbf{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}],\end{aligned}\right\}\tag{53}$$

$\mathbf{E}_0$ 和 $\mathbf{H}_0$ 都是位置的复矢量函数。因为光学频率非常之大(ω 的数量级是 $10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$),我们不能观测任何振动很快的量的瞬时值,而只能观测它们在某时间间隔(比如说 $-T'\leqslant t\leqslant T'$)内的时间平均值,该间隔比基本周期 $T=2\pi/\omega$ 要大得多。具体说,时间平均的电能密度是

$$\langle w_e\rangle=\frac{1}{2T'}\int_{-T'}^{T'}\frac{\varepsilon}{8\pi}\mathbf{E}^2\,\mathrm{d}t=\frac{\varepsilon}{8\pi}\frac{1}{2T'}\int_{-T'}^{T'}\tfrac{1}{4}[\mathbf{E}_0^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t}+2\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{E}_0^{\star}+\mathbf{E}_0^{\star 2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t}]\mathrm{d}t$$

现在

$$\frac{1}{2T'}\int_{-T'}^{T'}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{4\mathrm{i}\omega T'}[\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t}]_{-T'}^{T'}=\frac{1}{4\pi}\frac{T}{T'}\sin 2\omega T'$$

因为 T' 设比 T 大得多,T/T' 将比 1 小得多,所以含 $\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t}$ 的积分可以忽略不计。同样,含 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t}$ 的积分也可略去,最后得到

$$\langle w_e\rangle=\frac{\varepsilon}{16\pi}\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{E}_0^{\star}\tag{54}$$

用同样的方法可以求得磁能密度的时间平均值为

$$\langle w_m\rangle=\frac{\mu}{16\pi}\mathbf{H}_0\cdot\mathbf{H}_0^{\star}\tag{55}$$

坡印廷矢量的时间平均值得之如下:

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{S}\rangle&=\frac{1}{2T'}\int_{-T'}^{T}\frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\mathrm{d}t\\&=\frac{c}{4\pi}\frac{1}{2T'}\int_{-T'}^{T}\tfrac{1}{4}[\mathbf{E}_0\times\mathbf{H}_0\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t}+\mathbf{E}_0\times\mathbf{H}_0^{\star}+\mathbf{E}_0^{\star}\times\mathbf{H}_0+\mathbf{E}_0^{\star}\times\mathbf{H}_0^{\star}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t}]\mathrm{d}t\\&\approx\frac{c}{16\pi}(\mathbf{E}_0\times\mathbf{H}_0^{\star}+\mathbf{E}_0^{\star}\times\mathbf{H}_0)\\&=\frac{c}{8\pi}\mathcal{R}(\mathbf{E}_0\times\mathbf{H}_0^{\star})\end{aligned}\tag{56}$$

能量守恒定律也获得简单的形式。对于不导电媒质($\sigma=0$),当其中没有做机械功时,取 § 1.1(43)的时间平均值,可得到

$$\operatorname{div}\langle\mathbf{S}\rangle=0\tag{57}$$

如果对一个不包含能量辐射子或能量吸收子的任意体积取(57)式的积分,并应用高斯定理,则有

$$\int\langle\mathbf{S}\rangle\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S=0\tag{58}$$

式中 $\mathbf{n}$ 是界面的外向法线;而积分是对整个界面进行的。这样,通过任何闭合面的总能流平均为零。

现在回到一般的时谐矢量波(50),并讨论空间某一点 $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0$ 处 $\mathbf{V}$ 的行为。一般,当时间改变时,$\mathbf{V}$ 的端点画一个椭圆,所以,波(50)像平面波一样,一般也是椭圆偏振的。要证明这一点,首先注意,随着时间的改变,$\mathbf{V}$ 的端点在 $\mathbf{p}(\mathbf{r}_0)$ 和 $\mathbf{q}(\mathbf{r}_0)$ 所决定的平面上画曲线。因为

V 是周期的,所以这个曲线必然是闭合的。现在可以令

$$(\mathbf{p}+\mathrm{i}\mathbf{q})=(\mathbf{a}+\mathrm{i}\mathbf{b})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon} \tag{59}$$

式中 ε 是任一标量。用 **p**,**q** 和 ε 来表示 **a**,**b**,则

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{a}&=\mathbf{p}\cos\varepsilon+\mathbf{q}\sin\varepsilon,\\ \mathbf{b}&=-\mathbf{p}\sin\varepsilon+\mathbf{q}\cos\varepsilon.\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

让我们如此选择 ε,使得矢量 **a** 和 **b** 相互垂直,并设 $|\mathbf{a}|\geqslant|\mathbf{b}|$。为使 **a** 和 **b** 正交,$\varepsilon$ 必须满足方程

$$(\mathbf{p}\cos\varepsilon+\mathbf{q}\sin\varepsilon)\cdot(-\mathbf{p}\sin\varepsilon+\mathbf{q}\cos\varepsilon)=0 \tag{61}$$

即

$$\tan 2\varepsilon=\frac{2\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{\mathbf{p}^2-\mathbf{q}^2} \tag{62}$$

现在用正交矢量 **a** 和 **b** 的 5 个独立分量和相应的位相因子 ε 代替 **p** 和 **q** 的 6 个直角分量,作为确定波的参量。于是由(51)、(52)和(59)三式,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}&=\mathcal{R}\{(\mathbf{a}+\mathrm{i}\mathbf{b})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\varepsilon)}\}\\ &=\mathbf{a}\cos(\omega t-\varepsilon)+\mathbf{b}\sin(\omega t-\varepsilon)\end{aligned} \tag{63}$$

如果把笛卡儿坐标轴的原点取在 $\mathbf{r}_0$ 处,并使其 x 方向和 y 方向沿着 **a** 和 **b**,则

$$V_x=a\cos(\omega t-\varepsilon),\qquad V_y=b\sin(\omega t-\varepsilon),\qquad V_z=0 \tag{64}$$

这代表一个**椭圆(偏振**椭圆)

$$\frac{V_x^2}{a^2}+\frac{V_y^2}{b^2}=1 \tag{65}$$

它的两个半轴沿着 x 轴和 y 轴,长度为 a 和 b。由初等几何可以证明,**p** 和 **q** 是椭圆的一对共轭半直径。

同平面波情况中一样,这个椭圆的描绘也有两种可能的转向,分别对应于左旋偏振和右旋偏振;它们由三重标积 $[\mathbf{a},\mathbf{b},\nabla\varepsilon]=[\mathbf{p},\mathbf{q},\nabla\varepsilon]$ 的符号来区别。

偏振椭圆的半轴长度很容易从(60)和(62)两式求得。从(60)式得到

$$\begin{aligned}a^2&=p^2\cos^2\varepsilon+q^2\sin^2\varepsilon+2\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\sin\varepsilon\cos\varepsilon\\ &=\tfrac{1}{2}(p^2+q^2)+\tfrac{1}{2}(p^2-q^2)\cos 2\varepsilon+\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\sin 2\varepsilon\end{aligned}$$

从(62)式得到

$$\sin 2\varepsilon=\frac{2\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{\sqrt{(p^2-q^2)^2+4(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})^2}},\qquad \cos 2\varepsilon=\frac{p^2-q^2}{\sqrt{(p^2-q^2)^2+4(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})^2}}$$

因此,

$$\left.\begin{aligned}a^2&=\tfrac{1}{2}\left[p^2+q^2+\sqrt{(p^2-q^2)^2+4(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})^2}\right].\\ \text{同样可求得}\\ b^2&=\tfrac{1}{2}\left[p^2+q^2-\sqrt{(p^2-q^2)^2+4(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})^2}\right].\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

为了求出 **a** 和 **p** 的夹角表达式，把椭圆方程表成下列参量形式：

$$V_x = a\cos\phi, \qquad V_y = b\sin\phi \tag{67}$$

式中ϕ是偏心角(见图 1.9)。从初等几何我们知道，这个角和点(V_x, V_y)的极角 θ 有如下关系：

$$\tan\theta = \frac{b}{a}\tan\phi \tag{68}$$

比较一下(64)和(67)两式可以看出，在本例情况下，$\phi = \omega t - \varepsilon$。现在按照(50)式，当 $t = 0$ 时，$\mathbf{V} = \mathbf{p}$，所以 **p** 的偏心角是 $-\varepsilon$。因此 **p** 和 **a** 的夹角ψ由下式给出：

$$\tan\psi = \frac{b}{a}\tan\varepsilon \tag{69}$$

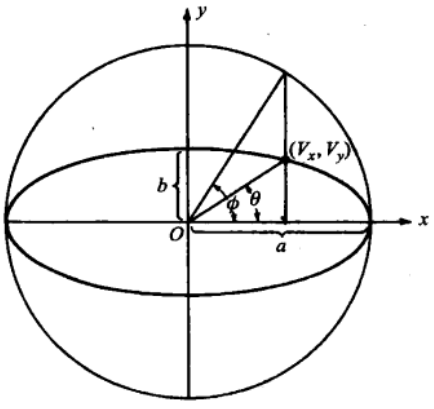


图 1.9　关于(67)和(68)两式的符号图示

如果令 γ 表示 **p** 和 **q** 的夹角，并引进一辅助角 β，使得

$$\frac{q}{p} = \tan\beta \tag{70}$$

则(62)式变成

$$\begin{aligned}\tan 2\varepsilon &= \frac{2pq}{p^2 - q^2}\cos\gamma \\ &= \tan 2\beta\cos\gamma\end{aligned} \tag{71}$$

让我们把以上结果再概括说一遍：如果给定了 **p** 和 **q**，而 γ 代表这两个矢量的夹角，β 代表(70)式所定义的辅助角，则椭圆的两个主半轴和长轴与 **p** 的夹角ψ由下列各式求出：

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= \tfrac{1}{2}\left[p^2 + q^2 + \sqrt{(p^2 - q^2)^2 + 4p^2q^2\cos^2\gamma}\right], \\ b^2 &= \tfrac{1}{2}\left[p^2 + q^2 - \sqrt{(p^2 - q^2)^2 + 4p^2q^2\cos^2\gamma}\right], \\ \tan\psi &= \frac{b}{a}\tan\varepsilon, \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

式中 ε 满足

$$\tan 2\varepsilon = \tan 2\beta \cos\gamma \tag{73}$$

同平面波时一样,有两种情况特别重要,这就是椭圆退化成一个圆或一条直线。对于**圆偏振**波,**a** 和 **b** 以及因而 ε 都是不定的。按(62)式,要使情况如此,须

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} = \mathbf{p}^2 - \mathbf{q}^2 = 0 \tag{74}$$

对于**线偏振**波,短轴为零($b^2 = 0$),这时由(66)式得到

$$p^2 q^2 = (\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})^2 \tag{75}$$

最后我们强调指出,**偏振**一词指的是场中某一特别**点**处的行为,因而在场中不同地点偏振态一般将不相同。这样,一个波可以在某些点是线偏振的或圆偏振的,而在其他点是椭圆偏振[①]。只有在特别情况下,例如像均匀平面波,场中各点的偏振态才会都一样。

1.5 平面波的反射和折射

在 1.1.3 节中,我们推导了各场矢量在通过突变面时所必须满足的关系式,该突变面是媒质的物理性质突变的地方。现在应用这些公式来研究一个平面波入射到两个各向同性均匀媒质分界平面上的传播情况。

1.5.1 反射定律和折射定律

当一个平面波射到光学性质不同的两个媒质的界面上时,它将分成为两个波:一个透射波和一个反射波,透射波进入第二媒质内,反射波传回到第一媒质中,这两个波的存在可从边界条件上加以论证,因为很容易看出,如果不假定透射和反射两个波,边界条件就不能得到满足。我们将根据推测假定这些波也是平面波,并来推导其传播方向和振幅的表达式。

一个平面波,沿着单位矢量 $\mathbf{s}^{(i)}$[②] 规定的方向传播,如果知道了它在空间某点的时间行为,这个波就完全确定。因为,如果$\mathbf{F}(t)$代表任何一点的时间行为,则在与这点相距为 $\mathbf{r}$ 的另一点,时间行为即由 $\mathbf{F}[t - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{s})/v]$给出。在两个媒质的界面上,次级场的时间变化将同入射初级场的一样。因此,如果令 $\mathbf{s}^{(r)}$ 和 $\mathbf{s}^{(t)}$ 代表反射波和折射波传播方向上的单位矢量,并令三个波函数在界平面 $z = 0$ 上某点 $\mathbf{r}$ 的宗量相等,则有:

$$t - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}^{(i)}}{v_1} = t - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}^{(r)}}{v_1} = t - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}^{(t)}}{v_2} \tag{1}$$

v_1 和 v_2 是两个媒质中的传播速度。用直角坐标表出,以 $\mathbf{r} \equiv x, y, 0$ 代入,则有

$$\frac{xs_x^{(i)} + ys_y^{(i)}}{v_1} = \frac{xs_x^{(r)} + ys_y^{(r)}}{v_1} = \frac{xs_x^{(t)} + ys_y^{(t)}}{v_2} \tag{2}$$

因为(2)式对界面上所有的 x, y 都必须成立,所以

$$\frac{s_x^{(i)}}{v_1} = \frac{s_x^{(r)}}{v_1} = \frac{s_x^{(t)}}{v_2}, \qquad \frac{s_y^{(i)}}{v_1} = \frac{s_y^{(r)}}{v_1} = \frac{s_y^{(t)}}{v_2} \tag{3}$$

① A. Nisbet 和 E. Wolf 曾研究了这样一种时谐电磁波的一般性质,它的形式任意,但场矢量至少有一个是线偏振的,见 *Proc, Camb. Phil. Soc.*, **50**(1954), 614。

② 我们始终以附标 i, r 和 t 分别代表入射波、反射波和透射(折射)波。

$\mathbf{s}^{(i)}$ 和界面法线所决定的平面叫做**入射面**。(3)式表明，$\mathbf{s}^{(i)}$ 和 $\mathbf{s}^{(r)}$ 二者都在入射面上。

如果以入射面为 xz 平面，并用 θ_i，θ_r 和 θ_t 代表 $\mathbf{s}^{(i)}$，$\mathbf{s}^{(r)}$ 和 $\mathbf{s}^{(t)}$ 与 Oz 所形成的角度，则有(见图 1.10)

$$\left.\begin{aligned} s_x^{(i)} &= \sin\theta_i, \quad s_y^{(i)} = 0, \quad s_z^{(i)} = \cos\theta_i, \\ s_x^{(r)} &= \sin\theta_r, \quad s_y^{(r)} = 0, \quad s_z^{(r)} = \cos\theta_r, \\ s_x^{(t)} &= \sin\theta_t, \quad s_y^{(t)} = 0, \quad s_z^{(t)} = \cos\theta_t. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

当波从第一媒质向第二媒质传播时，$\mathbf{s}$ 矢量的 z 分量为正；当波沿相反方向传播时，该分量为负：

$$s_z^{(i)} = \cos\theta_i \geqslant 0, \qquad s_z^{(r)} = \cos\theta_r \leqslant 0, \qquad s_z^{(t)} = \cos\theta_t \geqslant 0 \tag{5}$$

把(4)式代入(3)式之第一组，得到

$$\frac{\sin\theta_i}{v_1} = \frac{\sin\theta_r}{v_1} = \frac{\sin\theta_t}{v_2} \tag{6}$$

因此，$\sin\theta_r = \sin\theta_i$，而且，再利用(5)式，得到 $\cos\theta_r = -\cos\theta_i$，所以

$$\theta_r = \pi - \theta_i \tag{7}$$

这一关系，加上反射波法线 $\mathbf{s}^{(r)}$ 在入射面上这一叙述，即构成**反射定律**。

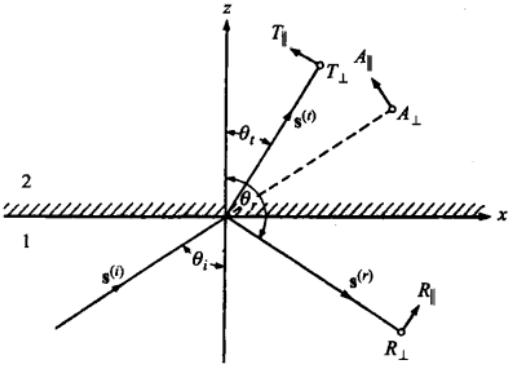


图 1.10　平面波的折射和反射。入射面

由(6)式，利用折射率和介电常数之间的麦克斯韦关系 § 1.2(14)，又可得到

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12} \tag{8}$$

$\sin\theta_i/\sin\theta_t = n_2/n_1$ 这一关系，加上折射波法线 $\mathbf{s}^{(t)}$ 在入射面上这一叙述，即构成**折射定律**(或称斯涅耳定律)。

当 $n_2 > n_1$ 时，$n_{12} > 1$，我们说第二媒质和第一媒质相比是光密的，在这一情况下，由(8)式可知

$$\sin\theta_t = \frac{1}{n_{12}}\sin\theta_i < \sin\theta_i \tag{9}$$

所以，每一个入射角 θ_i 都有一个实折射角 θ_t 与之对应。然而，如果第二媒质和第一媒质相比是

光疏的(即如果 $n_{12}<1$),则只有当入射角 θ_i 满足 $\sin\theta_i \leqslant n_{12}$ 时 θ_t 才可能有实值。入射角再大时,就要发生所谓**全反射**。我们将在 1.5.4 节中对它单独加以处理。

1.5.2 菲涅耳公式

其次,考虑反射波和透射波的振幅。我们将假定,这两个(均匀的各向同性的)媒质都是电导率为零,因而都是完全透明的;它们的磁导率这时实际上和 1 相差甚微,差值可予忽略,因此取 $\mu_1=\mu_2=1$。

设 A 为入射场电矢量的振幅。取 A 为复数,令其位相等于波函数宗量的常数部分。变数部分是

$$\tau_i=\omega\left(t-\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}^{(i)}}{v_1}\right)=\omega\left(t-\frac{x\sin\theta_i+z\cos\theta_i}{v_1}\right) \tag{10}$$

把每个场矢量分解成平行于入射面(用下角标 $\parallel$ 表示)和垂直于入射面(用下角标 $\perp$ 表示)的两个分量。各平行分量正方向的选取如图 1.10 所示。垂直分量必须想像成与图平面成直角。

于是入射场电矢量的各分量为

$$E_x^{(i)}=-A_\parallel\cos\theta_i e^{-i\tau_i},\quad E_y^{(i)}=A_\perp e^{-i\tau_i},\quad E_z^{(i)}=A_\parallel\sin\theta_i e^{-i\tau_i} \tag{11}$$

磁矢量的各分量利用 § 1.4(4)(令 $\mu=1$)

$$\mathbf{H}=\sqrt{\varepsilon}\mathbf{s}\times\mathbf{E} \tag{12}$$

可立即得到,结果如下:

$$H_x^{(i)}=-A_\perp\cos\theta_i\sqrt{\varepsilon_1}e^{-i\tau_i},\ H_y^{(i)}=-A_\parallel\sqrt{\varepsilon_1}e^{-i\tau_i},\ H_z^{(i)}=A_\perp\sin\theta_i\sqrt{\varepsilon_1}e^{-i\tau_i} \tag{13}$$

同样,设 T 和 R 是透射波和反射波的复振幅,则相应的电矢量分量和磁矢量分量为:

透射场

$$\left.\begin{aligned} &E_x^{(t)}=-T_\parallel\cos\theta_t e^{-i\tau_t}, && E_y^{(t)}=T_\perp e^{-i\tau_t}, && E_z^{(t)}=T_\parallel\sin\theta_t e^{-i\tau_t},\\ &H_x^{(t)}=-T_\perp\cos\theta_t\sqrt{\varepsilon_2}e^{-i\tau_t}, && H_y^{(t)}=-T_\parallel\sqrt{\varepsilon_2}e^{-i\tau_t}, && H_z^{(t)}=T_\perp\sin\theta_t\sqrt{\varepsilon_2}e^{-i\tau_t}, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

其中

$$\tau_t=\omega\left(t-\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}^{(t)}}{v_2}\right)=\omega\left(t-\frac{x\sin\theta_t+z\cos\theta_t}{v_2}\right) \tag{15}$$

反射场

$$\left.\begin{aligned} &E_x^{(r)}=-R_\parallel\cos\theta_r e^{-i\tau_r}, && E_y^{(r)}=R_\perp e^{-i\tau_r}, && E_z^{(r)}=R_\parallel\sin\theta_r e^{-i\tau_r},\\ &H_x^{(r)}=-R_\perp\cos\theta_r\sqrt{\varepsilon_1}e^{-i\tau_r}, && H_y^{(r)}=-R_\parallel\sqrt{\varepsilon_1}e^{-i\tau_r}, && H_z^{(r)}=R_\perp\sin\theta_r\sqrt{\varepsilon_1}e^{-i\tau_r}, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

其中

$$\tau_r=\omega\left(t-\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}^{(r)}}{v_1}\right)=\omega\left(t-\frac{x\sin\theta_r+z\cos\theta_r}{v_1}\right) \tag{17}$$

边界条件 § 1.1(23), § 1.1(25)两式要求,界面两边 $\mathbf{E},\mathbf{H}$ 的切线分量应该是连续的。因此必须有

$$\left.\begin{aligned} E_x^{(i)} + E_x^{(r)} &= E_x^{(t)}, \quad E_y^{(i)} + E_y^{(r)} = E_y^{(t)}, \\ H_x^{(i)} + H_x^{(r)} &= H_x^{(t)}, \quad H_y^{(i)} + H_y^{(r)} = H_y^{(t)}, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

B 和 **D** 的法线分量这时自动满足边界条件 § 1.1(15)和 § 1.1(19)。把所有分量代入(18)式，并利用 $\cos\theta_r = \cos(\pi - \theta_i) = -\cos\theta_i$ 这一结果，就得到下列 4 个关系式：

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_i(A_\parallel - R_\parallel) &= \cos\theta_t T_\parallel, \\ A_\perp + R_\perp &= T_\perp, \\ \sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_i(A_\perp - R_\perp) &= \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_t T_\perp, \\ \sqrt{\varepsilon_1}(A_\parallel + R_\parallel) &= \sqrt{\varepsilon_2} T_\parallel. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

可以注意，(19)式的 4 个方程自然分成两组，一组只包含平行于入射面的分量，而另一组只包含垂直于入射面的分量。**因此，这两种波是彼此独立无关的。**

可以设入射波各分量为已知，从(19)式解出反射波和透射波各分量，结果得到(再次应用麦克斯韦关系 $n = \sqrt{\varepsilon}$)

$$\left.\begin{aligned} T_\parallel &= \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t} A_\parallel, \\ T_\perp &= \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t} A_\perp, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} R_\parallel &= \frac{n_2\cos\theta_i - n_1\cos\theta_t}{n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t} A_\parallel, \\ R_\perp &= \frac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t} A_\perp. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

(20)和(21)两式叫做**菲涅耳公式**，是首先由菲涅耳于 1823 年根据他的光的弹性理论，以略欠普遍的形式推导出来的。这些公式通常写成如下另一种形式，可用折射定律(8)代入(20)和(21)两式而得到：

$$\left.\begin{aligned} T_\parallel &= \frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)\cos(\theta_i - \theta_t)} A_\parallel, \\ T_\perp &= \frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} A_\perp, \end{aligned}\right\} \tag{20a}$$

$$\left.\begin{aligned} R_\parallel &= \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} A_\parallel, \\ R_\perp &= -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} A_\perp. \end{aligned}\right\} \tag{21a}$$

因为 θ_i 和 θ_t 是实的(全反射情况现在不考虑)，(20a)和(21a)两式右边的三角因子也将是实的。因此，反射波和折射波各分量的位相与入射波相应分量的位相，或是相等，或是相差 π。因为 $T_\parallel$ 和 $T_\perp$ 与 $A_\parallel$ 和 $A_\perp$ 同号，所以透射波的位相总与入射波的相等。但是，反射波的位相与 θ_i 和 θ_t 的相对大小有关。因为，如果第二媒质比第一媒质光密($\varepsilon_2 > \varepsilon_1$)，则 $\theta_t < \theta_i$；按(21)

式,$R_\perp$和$A_\perp$异号,因此两个位相差π[①]。在相同情况下,$\tan(\theta_i-\theta_t)$为正,但分母$\tan(\theta_i+\theta_t)$在$\theta_i+\theta_t>\pi/2$时变负,$R_\parallel$和$A_\parallel$的位相这时相差π。当第二媒质比第一媒质光疏时,可如法加以分析。

在**正入射**下,$\theta_i=0$,因而$\theta_t=0$,(20)和(21)两式化为

$$\left.\begin{aligned} T_\parallel &= \frac{2}{n+1}A_\parallel,\\ T_\perp &= \frac{2}{n+1}A_\perp, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned} R_\parallel &= \frac{n-1}{n+1}A_\parallel,\\ R_\perp &= -\frac{n-1}{n+1}A_\perp, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

式中$n=n_2/n_1$。

1.5.3 反射率和透射率;反射和折射产生的偏振

现在考察入射场的能量如何分配给两个次级场。

按照§1.4(8),光强系由下式给出(仍设$\mu=1$):

$$S=\frac{c}{4\pi}\sqrt{\varepsilon}E^2=\frac{cn}{4\pi}E^2 \tag{24}$$

因此,初级波每秒入射到界面单位面积上的能量是

$$J^{(i)}=S^{(i)}\cos\theta_i=\frac{cn_1}{4\pi}|A|^2\cos\theta_i \tag{25}$$

类此,反射波和透射波每秒从界面单位面积带走的能量是

$$\left.\begin{aligned} J^{(r)} &= S^{(r)}\cos\theta_i=\frac{cn_1}{4\pi}|R|^2\cos\theta_i,\\ J^{(t)} &= S^{(t)}\cos\theta_t=\frac{cn_2}{4\pi}|T|^2\cos\theta_t. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$J^{(r)}$与$J^{(i)}$之比和$J^{(t)}$与$J^{(i)}$之比

$$\mathcal{R}=\frac{J^{(r)}}{J^{(i)}}=\frac{|R|^2}{|A|^2}\quad\text{和}\quad\mathcal{T}=\frac{J^{(t)}}{J^{(i)}}=\frac{n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i}\frac{|T|^2}{|A|^2} \tag{27}$$

分别叫做**反射率**和**透射率**[②]。很容易证明,和能量守恒定律一致,有

$$\mathcal{R}+\mathcal{T}=1 \tag{28}$$

---

① 由(11)和(16)两式可知,在平面$z=0$上,

$$\frac{E_y^{(r)}}{E_y^{(i)}}=\frac{R_\perp}{A_\perp},\qquad\frac{E_x^{(r)}}{E_x^{(i)}}=-\frac{R_\parallel}{A_\parallel}$$

这个结果意味着,在平面$z=0$上,$E_y^{(r)}$和$E_y^{(i)}$的位相差π,$E_x^{(r)}$和$E_x^{(i)}$的位相相等。y分量和x分量位相性质的这种差别实属形式,是由反射角θ_r定义方式造成的(见图1.10)。

② 如$\mu\neq1$,则$\mathcal{T}$式中的n_2/n_1因子必须换成为$\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}\big/\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}$,这从§1.4(8)可立即看出。

反射率$\mathcal{R}$和透射率$\mathcal{T}$与入射波的偏振状态有关。可以分别用平行分量和垂直分量的反射率$\mathcal{R}_{\parallel}$,$\mathcal{R}_{\perp}$和透射率$\mathcal{T}_{\parallel}$,$\mathcal{T}_{\perp}$表示出$\mathcal{R}$和$\mathcal{T}$。

设α_i为入射波电矢量$\mathbf{E}$与入射面所作之角。于是

$$A_{\parallel}=A\cos\alpha_i,\qquad A_{\perp}=A\sin\alpha_i \tag{29}$$

设

$$\left.\begin{aligned}J_{\parallel}^{(i)}&=\frac{cn_1}{4\pi}|A_{\parallel}|^2\cos\theta_i=J^{(i)}\cos^2\alpha_i,\\ J_{\perp}^{(i)}&=\frac{cn_1}{4\pi}|A_{\perp}|^2\cos\theta_i=J^{(i)}\sin^2\alpha_i,\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

和

$$\left.\begin{aligned}J_{\parallel}^{(r)}&=\frac{cn_1}{4\pi}|R_{\parallel}|^2\cos\theta_i,\\ J_{\perp}^{(r)}&=\frac{cn_1}{4\pi}|R_{\perp}|^2\cos\theta_i.\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

于是

$$\begin{aligned}\mathcal{R}=\frac{J^{(r)}}{J^{(i)}}&=\frac{J_{\parallel}^{(r)}+J_{\perp}^{(r)}}{J^{(i)}}=\frac{J_{\parallel}^{(r)}}{J_{\parallel}^{(i)}}\cos^2\alpha_i+\frac{J_{\perp}^{(r)}}{J_{\perp}^{(i)}}\sin^2\alpha_i\\ &=\mathcal{R}_{\parallel}\cos^2\alpha_i+\mathcal{R}_{\perp}\sin^2\alpha_i,\end{aligned} \tag{32}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{R}_{\parallel}&=\frac{J_{\parallel}^{(r)}}{J_{\parallel}^{(i)}}=\frac{|R_{\parallel}|^2}{|A_{\parallel}|^2}=\frac{\tan^2(\theta_i-\theta_t)}{\tan^2(\theta_i+\theta_t)},\\ \mathcal{R}_{\perp}&=\frac{J_{\perp}^{(r)}}{J_{\perp}^{(i)}}=\frac{|R_{\perp}|^2}{|A_{\perp}|^2}=\frac{\sin^2(\theta_i-\theta_t)}{\sin^2(\theta_i+\theta_t)}.\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

用同样方法可以得到

$$\mathcal{T}=\frac{J^{(t)}}{J^{(i)}}=\mathcal{T}_{\parallel}\cos^2\alpha_i+\mathcal{T}_{\perp}\sin^2\alpha_i \tag{34}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{T}_{\parallel}&=\frac{J_{\parallel}^{(t)}}{J_{\parallel}^{(i)}}=\frac{n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i}\frac{|T_{\parallel}|^2}{|A_{\parallel}|^2}=\frac{\sin2\theta_i\sin2\theta_t}{\sin^2(\theta_i+\theta_t)\cos^2(\theta_i-\theta_t)},\\ \mathcal{T}_{\perp}&=\frac{J_{\perp}^{(t)}}{J_{\perp}^{(i)}}=\frac{n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i}\frac{|T_{\perp}|^2}{|A_{\perp}|^2}=\frac{\sin2\theta_i\sin2\theta_t}{\sin^2(\theta_i+\theta_t)}.\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

仍可证明

$$\mathcal{R}_{\parallel}+\mathcal{T}_{\parallel}=1,\qquad \mathcal{R}_{\perp}+\mathcal{T}_{\perp}=1 \tag{36}$$

在**正入射**下,平行分量和垂直分量的区别消失,从(22)、(23)和(27)三式可得

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{R}&=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2,\\ \mathcal{T}&=\frac{4n}{(n+1)^2}.\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

由(37)式可见

$$\lim_{n\to 1}\mathcal{R}=0,\qquad \lim_{n\to 1}\mathcal{T}=1 \tag{38}$$

$\mathcal{R}_{\parallel}$,$\mathcal{T}_{\parallel}$和$\mathcal{R}_{\perp}$,$\mathcal{T}_{\perp}$的极限值也具有同样的结果,这从(33)和(35)两式很容易看出。因为,按照折射定律,当 $n\to 1$ 时,$\theta_t\to\theta_i$,利用这一事实,即可证明。因此,两个媒质的光密度相差越小,反射波所带走的能量就越少。

除去当 $\theta_i+\theta_t=\pi/2$ 以外,(33)和(35)两式中的分母都是有限的。当 $\theta_i+\theta_t=\pi/2$ 时,$\tan(\theta_i+\theta_t)=\infty$,因而$\mathcal{R}_{\parallel}=0$。在这一情况下(见图 1.11),反射光线与透射光线相互垂直,从折射定律可以得到(因为这时 $\sin\theta_t=\sin[(\pi/2)-\theta_i]=\cos\theta_i$)

$$\tan\theta_i=n \tag{39}$$

(39)式所决定的 θ_i 角,叫做**起偏角**或**布儒斯特角**;它的意义是首先由布儒斯特(D. Brewster,1781—1868)在 1815 年指出的,这就是:**如果光在这个角度下入射,则反射光的电矢量没有入射面上的分量**。通常说光这时是"在入射面上"偏振的。按照这一传统名词,偏振面就是磁矢量和传播方向所构成的平面了。然而,由于 1.4.2 节中已经解释过的原因,还是以不用这个名词为好,上述结果常常叫做**布儒斯特定律**。

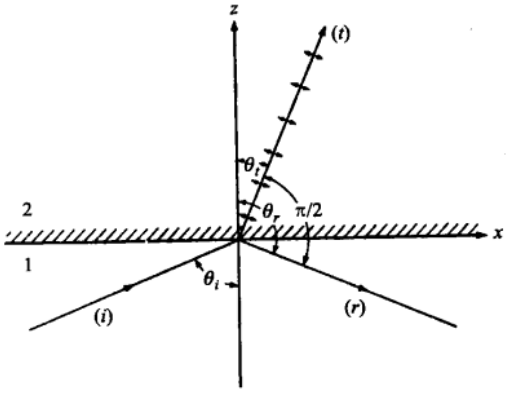


图 1.11 起偏角(布儒斯特角)图示

图 1.12 绘出玻璃反射率对入射角 θ_i 的关系曲线,玻璃的折射率为 1.52。上端一行数字给出的是折射角 θ_t。曲线(a)(对$\mathcal{R}_{\parallel}$)的零值对应于起偏角 arc tan 1.52 = 56°40′。

在光学波长,媒质对空气的折射率通常是 1.5 左右,但是在无线电波长它们要大得多,起偏角在这里就相应地增大。例如,在光学波长,水的折射率约为 1.3,偏振角大约是 53°。而在无线电波长,水的折射率约为 9,这时偏振角在 84°附近。

按照(32)式,可以看出图 1.12 中的曲线(b)对应于 $\alpha=45°$。现在我们来证明,这同一条曲线也代表对自然光的反射率$\overline{\mathcal{R}}$。自然光就是一个物体被加温到白热化时所产生的光。它的振动方向在迅速地改变,杂乱无章。相应的反射率$\overline{\mathcal{R}}$可通过对所有振动方向取平均而得到。因为 $\sin^2\alpha$ 和 $\cos^2\alpha$ 的平均值都是 1/2,所以 $J_{\parallel}^{(i)}$和 $J_{\perp}^{(i)}$的平均值获得如下关系:

$$\overline{J}_{\parallel}^{(i)}=\overline{J}_{\perp}^{(i)}=\tfrac{1}{2}J^{(i)} \tag{40}$$

然而对于反射光,两个分量一般将不相同。因为,利用(40)式,有

$$\left.\begin{aligned}\overline{J}_{\parallel}^{(r)} &= \frac{1}{2}\frac{\overline{J}_{\parallel}^{(r)}}{\overline{J}_{\parallel}^{(i)}}J^{(i)} = \frac{1}{2}\mathcal{R}_{\parallel}J^{(i)},\\ \overline{J}_{\perp}^{(r)} &= \frac{1}{2}\frac{\overline{J}_{\perp}^{(r)}}{\overline{J}_{\perp}^{(i)}}J^{(i)} = \frac{1}{2}\mathcal{R}_{\perp}J^{(i)}.\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

这时我们说反射光是部分偏振的，其**偏振度** P 可定义为[①]

$$P = \left|\frac{\mathcal{R}_{\parallel} - \mathcal{R}_{\perp}}{\mathcal{R}_{\parallel} + \mathcal{R}_{\perp}}\right| \tag{42}$$

反射率$\overline{\mathcal{R}}$这时由下式给出：

$$\overline{\mathcal{R}} = \frac{\overline{J}^{(r)}}{\overline{J}^{(i)}} = \frac{\overline{J}_{\parallel}^{(r)} + \overline{J}_{\perp}^{(r)}}{\overline{J}^{(i)}} = \frac{1}{2}(\mathcal{R}_{\parallel} + \mathcal{R}_{\perp}) \tag{43}$$

因此，图 1.12 中的曲线(b)也代表$\overline{\mathcal{R}}$。偏振度现在可以表成如下形式：

$$P = \frac{1}{\overline{\mathcal{R}}}\frac{1}{2}\{|\mathcal{R}_{\parallel} - \mathcal{R}_{\perp}|\}$$

大括弧里的量有时叫做反射光的**偏振部分**(polarized proportion)。

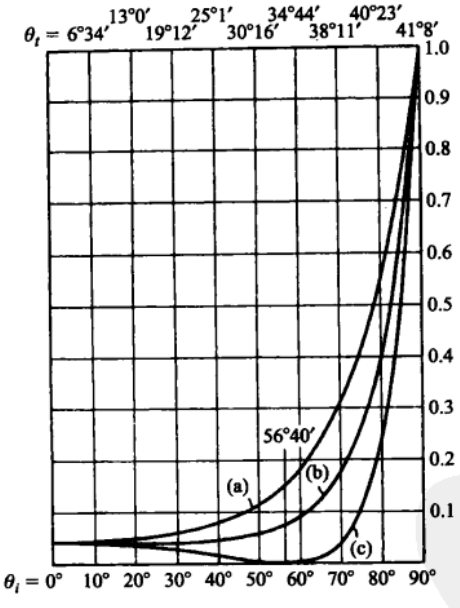


图 1.12　反射光强度随入射角的变化关系：(a)$\mathcal{R}_{\perp}$；(b)$\frac{1}{2}(\mathcal{R}_{\parallel} + \mathcal{R}_{\perp})$；(c)$\mathcal{R}_{\parallel}$[引自 O. D. Chwolson, *Lehrb. d. Physik* (Braunschweig, Vieweg), Bd.2.2 Aufl. (1922), p.716]

透射光方面有同样结果。此外，对于自然光，亦有

$$\overline{\mathcal{R}} + \overline{\mathcal{T}} = 1 \tag{44}$$

① 更为普遍的**偏振度**定义在 10.9.2 节中给出，该节还讨论了偏振度的物理意义。

现在回到入射光是线偏振光的情况。可以看出,这时反射光和透射光也都是线偏振光,因为相变只是 0 或 π。但是,反射光和透射光的振动方向,以入射光的为参考时,是向相反方向转动的。现证之于下:

α 所代表的角,即振动面与入射面的夹角,可以叫做振动的**方位角**。我们将认为,当振动面绕传播方向顺时针转动时,方位角为正(见图 1.13)。可以假设,方位角的变化范围是从 $-\pi/2$ 到 $\pi/2$。对于入射、反射和透射三个电波,分别有

$$\tan\alpha_i = \frac{A_\perp}{A_\parallel}, \qquad \tan\alpha_r = \frac{R_\perp}{R_\parallel}, \qquad \tan\alpha_t = \frac{T_\perp}{T_\parallel} \tag{45}$$

利用菲涅耳公式(20)和(21),则

$$\tan\alpha_r = -\frac{\cos(\theta_i - \theta_t)}{\cos(\theta_i + \theta_t)}\tan\alpha_i \tag{46}$$

$$\tan\alpha_t = \cos(\theta_i - \theta_t)\tan\alpha_i \tag{47}$$

因为 $0 \leqslant \theta_i \leqslant \pi/2, 0 < \theta_t < \pi/2$,所以

$$|\tan\alpha_r| \geqslant |\tan\alpha_i| \tag{48}$$

$$|\tan\alpha_t| \leqslant |\tan\alpha_i| \tag{49}$$

(48)式中的等号只是对正入射或掠入射($\theta_i = \theta_t = 0$,或 $\theta_i = \pi/2$)才成立;(49)式中的等号只是对正入射才成立。两个不等式暗示,反射时振动面向偏离入射面方向转动,而透射时振动面向靠拢入射面方向转动。图 1.14 说明了 α_r 和 α_t 随入射角的变化关系,其中取 $n = 1.52$, $\alpha_i = 45°$。我们看到,当 θ_i 等于起偏角 56°40′ 时,$\alpha_r = 90°$。事实上,按照(46)式,当 $\theta_i + \theta_i = \pi/2$ 时,不管 α_i 多大,$\tan\alpha_r$ 都等于 ∞(即 $\alpha_r = \pi/2$)。

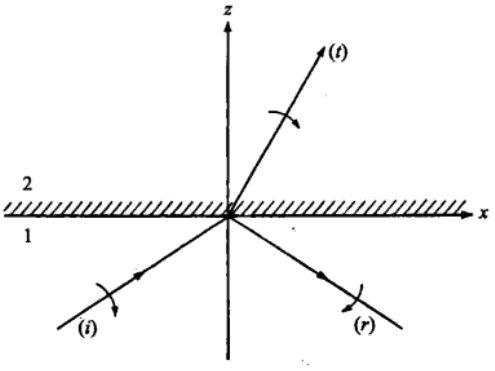


图 1.13 方位角符号图示

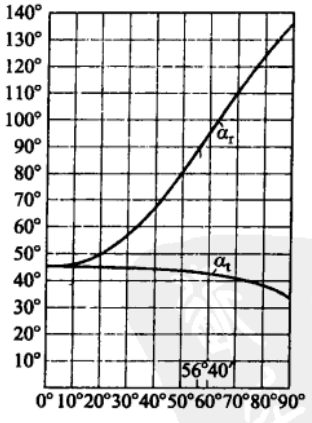


图 1.14 方位角随入射角的变化关系[引自 O.D. Chwolson, *Lehrb. d. Physik* (Braunschweig, Vieweg), Bd.2.2 Aufl.(1922), p.716]

从布儒斯特定律可以看到,可以用一种简单的方法产生线偏振光,这就是让光在起偏角下发生反射。所谓诺伦伯格(Nörrenberg)**反射偏振计**(研制人诺伦伯格,1787—1862)就是根据这

一原理，它是最古老的仪器之一。这个偏振计主要由两片玻璃构成(见图 1.15)，光线在起偏角下与之相遇。第一片玻璃起着**起偏器**的作用，即把非偏振光变成线偏振光；第二片玻璃起**检偏器**作用，即用来检查线偏振光。不过，诺伦伯格反射偏振计有几个缺点，主要是，在起偏角下反射光占的比例比较小，而且光线从仪器里经过的路线颇为复杂。最好是采用这样的仪器，它使入射光产生偏振，但并不改变它的传播方向。这是能够做到的，例如使用由许多**薄的平行平面片组成的片堆**。如果让一束非偏振光入射到片堆上，它每经一次折射就产生一次部分偏振，因而甚至用很少几片就能获得相当高的偏振度。光从一片的两个界面通过后，两个分量的强度之比是

$$\left(\frac{\mathcal{T}_{\perp}}{\mathcal{T}_{\parallel}}\right)^2 = \cos^4(\theta_i - \theta_t) < 1 \tag{50}$$

这一结果由连续两次运用(35)式即可得到。它表明，在射出薄片后，平行分量比垂直分量强，θ_i 越大，偏振度越高。如果 θ_i 等于起偏角，$\theta_i + \theta_t = \pi/2$，$\tan\theta_i = n$，则

$$\left(\frac{\mathcal{T}_{\perp}}{\mathcal{T}_{\parallel}}\right)^2 = \sin^4 2\theta_i = \left(\frac{2n}{1+n^2}\right)^4 \tag{51}$$

当 $n = 1.5$ 时，上式等于 0.73。因此，如果光共通过譬如说 5 片，则两个分量的强度之比为 $0.73^5 \approx 0.2$。

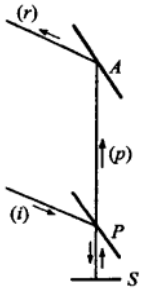


图 1.15　诺伦伯格反射偏振计原理：P = 起偏玻璃片；S = 反射镜；A = 检偏器；i = 入射光束；p = 偏振光束；r = A反射的光束

以前，偏振光的产生大多都借助方解石或石英晶体的双折射效应，如后面 15.4.1 节所述。现今，最方便的方法是采用所谓**偏振片**。它的作用是根据一种叫做**二向色性**的物质特性。某些材料对不同偏振方向的光具有不同的吸收系数，二向色性就是指这些材料所表现的这种特性。例如，经碘浸染过的聚乙烯醇膜就是这种制品，它能让振动平行于某一平面的偏振光透过近 80%，而让振动垂直此平面的偏振光透过不到 1%。这个效应的原理将在 15.6.3 节中简单加以讨论。

1.5.4　全反射

一直我们排除了当折射定律

$$\sin\theta_t = \frac{\sin\theta_i}{n_{12}} \tag{52}$$

所给出的折射角 θ_t 不是实角时的情况,现在对此进行考查。这一情况发生在光从光密媒质传播到光疏媒质,即

$$n_{12}=\frac{n_2}{n_1}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}}<1$$

的时候,而且要求入射角 θ_i 超过下式所给定的临界角 $\overline{\theta}_i$:

$$\sin\overline{\theta}_i=n_{12} \tag{53}$$

当 $\theta_i=\overline{\theta}_i$ 时,$\sin\theta_t=1$,即 $\theta_t=90°$,因而光沿着和界面相切的方向射出。如果 θ_i 超过了这个极限值 $\overline{\theta}_i$,就没有光进入第二媒质。所有入射光这时全部被反射回第一媒质,因此我们说它是**全反射**。

虽然如此,第二媒质中的电磁场并未化为乌有,只不过是不再有能量流过界面。因为,如果(略去 n_{12} 的下标 12)令透射波位相因子(15)式中的

$$\sin\theta_t=\frac{\sin\theta_i}{n},\qquad \cos\theta_t=\pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{\sin^2\theta_i}{n^2}-1} \tag{54}$$

则有

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau_t}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{x\sin\theta_i}{nv_2}\right)}\mathrm{e}^{\mp\frac{\omega z}{v_2}\sqrt{\frac{\sin^2\theta_i}{n^2}-1}} \tag{55}$$

(55)式代表一个非均匀波,它沿着入射面上的媒质边界(即 x 方向)传播,而振幅随离界面的距离 z 呈指数改变。当然,只有(55)式中平方根前的负号才符合物理状况,因为不然振幅就要随距离 z 的增加而趋向无穷了。可以看出,振幅随进入深度 z 减小得非常快。有效进入深度大约是 $v_2/\omega=\lambda_2/2\pi$,即大约是一个波长。这个波不是横波,因为电矢量在传播方向上的分量不为零,这一点下面即可看到。

从实验上验证第二(光疏)媒质中的扰动颇为困难,因为任何检定这个扰动的装置都将干扰边界条件。粗略的证明可用下法获得:使另一折射媒质向发生全反射的界面靠拢,到相距大约 1/4 波长以内,并同时观测辐射进入此折射媒质的情况①。

为了把菲涅耳公式(21a)应用到全反射情况,把它们改写成如下形式:

$$\left.\begin{aligned}R_{\parallel}&=\frac{\sin\theta_i\cos\theta_i-\sin\theta_t\cos\theta_t}{\sin\theta_i\cos\theta_i+\sin\theta_t\cos\theta_t}A_{\parallel},\\ R_{\perp}&=-\frac{\sin\theta_i\cos\theta_t-\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin\theta_i\cos\theta_t+\sin\theta_t\cos\theta_i}A_{\perp},\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

把(54)式代入,想到其中平方根前要取正号,于是得到

$$\left.\begin{aligned}R_{\parallel}&=\frac{n^2\cos\theta_i-\mathrm{i}\sqrt{\sin^2\theta_i-n^2}}{n^2\cos\theta_i+\mathrm{i}\sqrt{\sin^2\theta_i-n^2}}A_{\parallel},\\ R_{\perp}&=\frac{\cos\theta_i-\mathrm{i}\sqrt{\sin^2\theta_i-n^2}}{\cos\theta_i+\mathrm{i}\sqrt{\sin^2\theta_i-n^2}}A_{\perp}.\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

① W. Culshaw and D. S. Jones, *Proc. Phys. Soc.*, B, **66**(1953), 859 曾描述了进行这个验证的一个很高明的方法,他们采用用电学方法产生的波,波长为 1.25 cm。

因此

$$|R_{\parallel}| = |A_{\parallel}|, \qquad |R_{\perp}| = |A_{\perp}| \tag{58}$$

即，对于每个分量，全反射光的强度都等于入射光的强度。

虽然在第二媒质之中有场存在，但是很容易看出，并没有能量流过界面。更正确地说，虽然坡印廷矢量的界面法线方向上的分量一般是有限的，但它的时间平均值为零；这就意味着，能量往返流来流去，但是没有持续不断的能流流进第二媒质，这一点下面就来给以证明。

写下透射场的 x 分量和 y 分量，取坐标 $z=0$，并利用(54)式(这时 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 必须用实表达式，因为能流是 $\mathbf{E},\mathbf{H}$ 分量的二次函数)。用星号表示复量共轭，则由(14)式有

$$\begin{aligned}
E_x^{(t)} &= -\tfrac{1}{2}(T_{\parallel}\cos\theta_t e^{-i\tau_t^o} + T_{\parallel}^{\star}\cos^{\star}\theta_t e^{+i\tau_t^o}) \\
&= -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\sin^2\theta_i}{n^2}-1}\left(T_{\parallel}e^{-i\tau_t^o} - T_{\parallel}^{\star}e^{+i\tau_t^o}\right), \\
E_y^{(t)} &= \tfrac{1}{2}(T_{\perp}e^{-i\tau_t^o} + T_{\perp}^{\star}e^{+i\tau_t^o}), \\
H_x^{(t)} &= -\tfrac{1}{2}(T_{\perp}\cos\theta_t\sqrt{\varepsilon_2}e^{-i\tau_t^o} + T_{\perp}^{\star}\cos^{\star}\theta_t\sqrt{\varepsilon_2}e^{+i\tau_t^o}) \\
&= -\frac{i}{2}\sqrt{\varepsilon_2}\sqrt{\frac{\sin^2\theta_i}{n^2}-1}\left(T_{\perp}e^{-i\tau_t^o} - T_{\perp}^{\star}e^{+i\tau_t^o}\right), \\
H_y^{(t)} &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_2}(T_{\parallel}e^{-i\tau_t^o} + T_{\parallel}^{\star}e^{+i\tau_t^o}),
\end{aligned}$$

式中

$$\tau_t^o = \omega\left(t - \frac{x\sin\theta_i}{nv_2}\right)$$

如果取

$$S_z^{(t)} = \frac{c}{4\pi}(E_x^{(t)}H_y^{(t)} - E_y^{(t)}H_x^{(t)})$$

在时间间隔 $-t' \leqslant t \leqslant t'$ 内的平均，其中 t' 比周期 $T = 2\pi/\omega$ 大得多，则对于 $z=0$ 两项都化为零；因为其中一项包含因子

$$\frac{1}{2t'}\int_{-t'}^{t'}(T_{\parallel}^2 e^{-2i\tau_t^o} - T_{\parallel}^{\star 2}e^{+2i\tau_t^o})dt = \left(T_{\parallel}^2 e^{+\frac{2i\omega x\sin\theta_i}{nv_2}} - T_{\parallel}^{\star 2}e^{-\frac{2i\omega x\sin\theta_i}{nv_2}}\right)O\left(\frac{T}{t'}\right)$$

它在 $t' \gg T$ 时小得可以忽略；另一项包含一个同样的因子，只是以 $T_{\perp}$ 代替 $T_{\parallel}$。

相反，如果取 $z=0$，计算 $\mathbf{S}^{(t)}$ 的其他两个分量，即 $S_x^{(t)}$ 和 $S_y^{(t)}$，则可发现它们的时间平均值一般是有限的。因此，能量并不进入第二媒质，而是沿着入射面上的边界流动。

上面的分析适用于稳定状态，而且是建立在这样的假设上，即界面和波阵面都是无限扩展的。它没有说明能量最初怎样进入第二媒质。在实际实验中，入射波在空间和时间上将都是有界的①；在过程开始之时，少量能量将进入第二媒质中，并将在那里产生一个场。

最后，我们求反射波和入射波各分量的位相变化。由于(58)式，可令

---

① 有限截面的光束的全反射问题近来因所谓 Goos-Hänchen 效应而备受关注。对于一些有关文献的述评，见 H. K. V. Lotsch, *Optik*, **32**(1970), 116, 189, 299, 553。

$$\frac{R_{\parallel}}{A_{\parallel}}=e^{i\delta_{\parallel}},\qquad \frac{R_{\perp}}{A_{\perp}}=e^{i\delta_{\perp}} \tag{59}$$

按(57)式,$R_{\parallel}/A_{\parallel}$ 和 $R_{\perp}/A_{\perp}$ 都属于 $z(z^{\star})^{-1}$ 这种形式。因此,如果 α 是 z 的辐角(即 $z=ae^{i\alpha}$,其中 a,α 都是实的),则

$$e^{i\delta}=z(z^{\star})^{-1}=e^{2i\alpha},\qquad 即\qquad \tan\frac{\delta}{2}=\tan\alpha$$

因此

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{\delta_{\parallel}}{2}&=-\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i-n^2}}{n^2\cos\theta_i},\\ \tan\frac{\delta_{\perp}}{2}&=-\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i-n^2}}{\cos\theta_i}.\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

由此可见,两个分量受到不同的位相跃变。因此,线偏振光经全反射后将变成椭圆偏振光。

此外可立即写下相对位相差 $\delta=\delta_{\perp}-\delta_{\parallel}$ 的表达式:

$$\tan\frac{\delta}{2}=\frac{\tan\frac{\delta_{\perp}}{2}-\tan\frac{\delta_{\parallel}}{2}}{1+\tan\frac{\delta_{\perp}}{2}\tan\frac{\delta_{\parallel}}{2}}=\frac{\left(\frac{1}{n^2}-1\right)\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i-n^2}}{\cos\theta_i}}{1+\frac{\sin^2\theta_i-n^2}{n^2\cos^2\theta_i}}$$

即

$$\tan\frac{\delta}{2}=\frac{\cos\theta_i\sqrt{\sin^2\theta_i-n^2}}{\sin^2\theta_i} \tag{61}$$

在掠入射($\theta_i=\pi/2$)时和在临界角$\overline{\theta}_i$($\sin\overline{\theta}_i=n$)下入射时,上式均为零。所以,在此二值之间,相对位相差有一极大值,可由下列方程决定:

$$\frac{d}{d\theta_i}(\tan\delta/2)=\frac{2n^2-(1+n^2)\sin^2\theta_i}{\sin^3\theta_i\sqrt{\sin^2\theta_i-n^2}}=0$$

此式之解为

$$\sin^2\theta_i=\frac{2n^2}{1+n^2} \tag{62}$$

把(62)式代入(61)式,得到相对位相差 δ 的极大值δ_m 表达式为

$$\tan\frac{\delta_m}{2}=\frac{1-n^2}{2n} \tag{63}$$

从(61)式可以看出,当 n 给定时,每一个 δ 值相应有两个入射角 θ_i。

全反射时发生的相变,可以用来(正如菲涅耳早已证明的)把线偏振光变成圆偏振光。令入射光的偏振方向与入射面法线成45°角(即 $\alpha_i=45°$),以使它的两个振幅分量相等($|A_{\parallel}|=|A_{\perp}|$)。于是,由(58)式,$|R_{\parallel}|=|R_{\perp}|$。此外,再如此选择 n 和θ_i,使相对位相差 δ 等于90°。要由单次反射获得90°的 δ,则按(63)式,就需要

$$\tan\frac{\pi}{4}=1<\frac{1-n^2}{2n}$$

即

$$n=n_{12}<\sqrt{2}-1=0.414$$

这就是说，光密媒质对光疏媒质的折射率 $n_{21}=1/n$ 不得小于 2.41。这个值过大，虽然有些无吸收物质的折射率接近、甚至超过此值。菲涅耳当时利用了两次玻璃上的全反射。按照(62)和(63)两式，当 $n_{21}=1.51$ 时，最大相对位相差 $\delta_m=45°56'$，这时入射角 θ_i 应等于 51°20′。因此，用下列二入射角中的任何一个，都正好能得到 $\delta=45°$：

$$\theta_i=48°37',\qquad \theta_i=54°37'$$

所以，如在其中某一角度下接连全反射两次，则可获得 90°的位相差。图 1.16 所示的玻璃块即用于此，称为**菲涅耳菱体**。

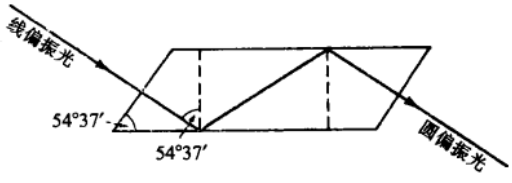


图 1.16　菲涅耳菱体

当然，菲涅耳菱体也可以用来产生椭圆偏振光；这时须令入射(线偏振)光的方位角不等于 45°。也还可以把程序反过来，用菲涅耳菱体把椭圆偏振光转变成线偏振光。

由于 $n=\sin\overline{\theta}_i$，所以测量临界角 $\overline{\theta}_i$ 可测定折射率 n。这方法既方便又准确。作这种测量用的仪器叫做**折射计**。

1.6　波在分层媒质中的传播和介质膜理论

一个媒质，如果它的性质在与某一固定方向相垂直的各个平面上到处一样，就称其为**分层媒质**。设将笛卡儿参考系的 z 轴取在这个特别方向，则

$$\varepsilon=\varepsilon(z),\qquad \mu=\mu(z)\tag{1}$$

我们将讨论一个平面时谐电磁波在这种媒质中的传播，这是前节所处理的简单情况的自然推广。

分层媒质理论在光学上相当重要，因为它与**多层膜**，即平行平面薄膜系列有关。这种薄膜可借助高真空蒸发技术来制备，而且它们的厚度可以控制得非常准确。它们有许多重要应用。例如，像后面要证明的，可用作**减反射膜**——一种使表面反射率减小的敷层。另一方面，在适当条件下，薄膜又可使反射率**增大**，因而当淀积在玻璃面上时可用作分束器。这是干涉量度学上用的一种把入射光束一分为二的元件。在适当条件下，多层膜还可用作滤波器，只让选定范围的波谱透过(或反射)。此外，多层膜还可用作偏振器。

关于介质膜和金属膜问题，科学文献中论述甚广，提出有很多方案计算多层膜的光学效

应。我们将扼要介绍艾贝耳(F. Abelès)[①] 在他卓越而重要的研究中所发展的一般理论,并将详细讨论某些特别重要的特别情况。对于处理只包括很少几层膜的问题,当然不一定要动用一般理论,因此我们将在后面 7.6 节介绍另一种比较古老的、以多次反射概念为基础的方法。

这一节将只讨论介质分层媒质,14.4 节将把分析扩大到导电媒质。

1.6.1 基本微分方程

考虑一个平面时谐电磁波从一分层媒质内传播通过的情形。在特别情况下,当波是线偏振波并且电矢量垂直于入射面时,我们将称之为**横电波**(用 *TE* 代表);当波是线偏振波,但磁矢量垂直于入射面时,我们将称之为**横磁波**(以 *TM* 代表)[②]。任何平面波,不论其偏振如何,都可以分解成 *TE* 和 *TM* 两个波。因为,按照 1.5 节,垂直分量和平行分量在突变面处的边界条件是相互独立的,所以这两个波将亦彼此无关。此外,如果把麦克斯韦方程中 **E** 和 **H**、ε 和 $-\mu$ 同时相互对调,则方程保持不变。这样,有关 *TM* 波的任何定理,均可由 *TE* 波的相应结果经此置换而立即导出。因此,只要详细研究 *TE* 波即可。

取入射面为 yz 平面[③],z 是分层层次方向。对于 *TE* 波,$E_y = E_z = 0$,麦克斯韦方程化为下列 6 个标量方程[设时间因子为 $\exp(-i\omega t)$]:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} + \frac{i\varepsilon\omega}{c} E_x = 0, \qquad (1a) \qquad \frac{i\omega\mu}{c} H_x = 0, \qquad (2a)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0, \qquad (1b) \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{i\omega\mu}{c} H_y = 0, \qquad (2b)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0, \qquad (1c) \qquad \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{i\omega\mu}{c} H_z = 0. \qquad (2c)$$

这些方程表明,H_y,H_z 和 E_x 只是 y 和 z 的函数。从(1a)、(2b)和(2c)三式中消去 H_y 和 H_z[或者取 E 的波动方程 § 1.2(5)的 x 分量],得到

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + n^2 k_0^2 E_x = \frac{\mathrm{d}(\ln\mu)}{\mathrm{d}z} \frac{\partial E_x}{\partial z} \qquad (3)$$

式中

$$n^2 = \varepsilon\mu, \qquad k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \qquad (4)$$

为解(3)式,设两个函数——一个只含 y,另一个只含 z——之积作为试探解:

$$E_x(y, z) = Y(y)U(z) \qquad (5)$$

这时(3)式变成

---

① F. Abelès, *Ann. de Physique*, **5**(1950), 596 – 640 and 706 – 782。关于薄膜问题的详细讨论,可参见比较专门的著作,例如:H. Mayer, *Physik dünner Schichten* (Stuttgart, Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, 1950);S. Methfessel, *Dünne Schichten* (Halle (Saale), VEB Wilhelm Knapp Verlag, 1953);或 O. S. Heavens, *Optical Properties of Thin Solid Films* (London, Butterworths Scientific Publications, 1955)。

② 也有用"*E* 偏振"和"*H* 偏振"这两个名词的(见 11.4.1 节)。应该提及,"横电波"和"横磁波"这两个名词在波导理论中具有不同的意义。

③ 不再像前节中那样取为 xz 平面。

$$\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}=-\frac{1}{U}\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}z^2}-n^2k_0^2+\frac{\mathrm{d}(\ln\mu)}{\mathrm{d}z}\frac{1}{U}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z} \tag{6}$$

左边一项只是 y 的函数，而右边各项仅与 z 有关。因此只有当两边同等于某一常数（譬如说 $-K^2$）时，(6)式才能成立：

$$\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}=-K^2 \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}z^2}-\frac{\mathrm{d}(\ln\mu)}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z}+n^2k_0^2U=K^2U \tag{8}$$

方便的做法是令

$$K^2=k_0^2\alpha^2 \tag{9}$$

于是由(7)式得到

$$Y=\text{常数}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0\alpha y}$$

因而 E_x 的形式为

$$E_x=U(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0\alpha y-\omega t)} \tag{10}$$

式中 $U(z)$ 是 z 的函数（可能是复函数）。由(2b)和(2c)两式可以看出，H_y 和 H_z 的表达式和(10)式形式相同：

$$H_y=V(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0\alpha y-\omega t)} \tag{11}$$

$$H_z=W(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0\alpha y-\omega t)} \tag{12}$$

由于(1a)、(2b)和(2c)三式，U，V 和 W 这三个幅函数有下列方程关系：

$$V'=\mathrm{i}k_0(\alpha W+\varepsilon U) \tag{13a}$$

$$U'=\mathrm{i}k_0\mu V \tag{13b}$$

$$\alpha U+\mu W=0 \tag{13c}$$

一撇表示对 z 微商。把(13c)式的 W 代入(13a)式，和(13b)式组成一对 U 和 V 的一阶联立微分方程[①]：

$$\left.\begin{aligned}U'&=\mathrm{i}k_0\mu V,\\ V'&=\mathrm{i}k_0\left(\varepsilon-\frac{\alpha^2}{\mu}\right)U.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

从这两个方程分别消去 U 和 V，最后得到 U，V 的二阶线性微分方程如下：

---

① 方程(14)和下列电输送线方程形式相同：

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}=-ZI,\qquad\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z}=-YV$$

式中 V 是输送线跨压，I 是线中电流，Z 是串联阻抗，Y 是分路导纳。因此，分层媒质理论可完全类比于电输送线理论来加以发展。一些作者就是这样做的，例如，R. B. Muchmore, *J. Opt. Soc. Amer.*, **38**(1948), 20; K. Schuster, *Ann. d. Physik*(6), **4**(1949), 352; R. Kronig, R. S. Blaisse and J. J. v. d. Sande, *J. Appl. Sci. Res.*, **B**, **1**(1947), 63。

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}z^2}-\frac{\mathrm{d}(\ln\mu)}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z}+k_0^2(n^2-\alpha^2)U=0 \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}z^2}-\frac{\mathrm{d}\left[\ln\left(\varepsilon-\frac{\alpha^2}{\mu}\right)\right]}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}+k_0^2(n^2-\alpha^2)V=0 \tag{16}$$

按照代换规则(它是麦克斯韦方程对称性的一个结果),可立即获得 *TM* **波**($H_y=H_z=0$)场矢量的非零分量,其形式为

$$H_x=U(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0\alpha y-\omega t)} \tag{17}$$

$$E_y=-V(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0\alpha y-\omega t)} \tag{18}$$

$$E_z=-W(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0\alpha y-\omega t)} \tag{19}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}U'&=\mathrm{i}k_0\varepsilon V,\\ V'&=\mathrm{i}k_0\left(\mu-\frac{\alpha^2}{\varepsilon}\right)U,\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

而 W 和 U 有下列方程关系:

$$\alpha U+\varepsilon W=0 \tag{21}$$

U 和 V 这时满足下面的二阶线性微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}z^2}-\frac{\mathrm{d}(\ln\varepsilon)}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z}+k_0^2(n^2-\alpha^2)U=0 \tag{22}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}z^2}-\frac{\mathrm{d}\left[\ln\left(\mu-\frac{\alpha^2}{\varepsilon}\right)\right]}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}+k_0^2(n^2-\alpha^2)V=0 \tag{23}$$

U, V 和 W 一般是 z 的复函数。E_x 的等幅面由

$$|U(z)|=\text{常数}$$

给出,而等相面的方程为

$$\phi(z)+k_0\alpha y=\text{常数}$$

式中$\phi(z)$是 U 的位相。一般,这两组面不重合,所以 E_x(同样 H_y 和 H_z)是一个非均匀波。若沿某等相面做一很小位移$(\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$,则$\phi'(z)\mathrm{d}z+k_0\alpha\mathrm{d}y=0$;因此,如果以 θ 代表等相面法线与 OZ 的夹角,则

$$\tan\theta=-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=\frac{k_0\alpha}{\phi'(z)}$$

在特别情况下,当波是均匀平面波时,

$$\phi(z)=k_0nz\cos\theta,\qquad \alpha=n\sin\theta \tag{24}$$

因此(9)式所附加的关系

$$\alpha=\text{常数}$$

可以看做是**斯涅耳折射定律**对分层媒质的推广。

1.6.2　分层媒质的特性矩阵

上面所推导的这些微分方程在适当边界条件下的解，以及有关分层媒质的种种定理，用矩阵来表示最为方便。因此，在讨论这些方程的各个结果之前，我们将先对有关矩阵的一些主要定义作一简单说明。

I. 一个矩阵，就是指一组排成长方阵列或正方阵列的实数或复数：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{ij}代表第 i 行第 j 列元素。此矩阵在符号上用 $\boldsymbol{A}$ 或$[a_{ij}]$表示，称为 m 乘 n 矩阵(或 $m \times n$ 矩阵)，因为它包括 m 行和 n 列。在特别情况下，当 $m = n$ 时，$\boldsymbol{A}$ 称为 m 级**方阵**。如果 $\boldsymbol{A}$ 为一方阵，则按 $\boldsymbol{A}$ 的元素和元素位置列阵的行列式称为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式**，用$|\boldsymbol{A}|$或$|a_{ij}|$表示。如果 $|\boldsymbol{A}| = 1$，则 $\boldsymbol{A}$ 称为**单位模矩阵**。

由定义，只有当两个矩阵行数(m)相同，列数(n)相同，并且相应元素相等时，这两个矩阵才是**相等**的。如果 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$和 $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$是两个行数列数都相同的矩阵，则它们的**和** $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ 被定义为矩阵 $\boldsymbol{C}$，其元素 $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$。同样，它们的**差** $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ 被定义为矩阵 $\boldsymbol{D}$，其元素 $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$。

一个矩阵，如果其每个元素都是零，就叫做**零矩阵**。一个方阵，如果它的各元素是，当 $i \neq j$ 时，$a_{ij} = 0$，而对于每一 i 值，$a_{ii} = 1$，就叫它**单位矩阵**，并用 $\boldsymbol{I}$ 代表。

一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和一个数 λ(实数或复数)的积被定义为矩阵 $\boldsymbol{B}$，其元素 $b_{ij} = \lambda a_{ij}$。

两个矩阵的积 $\boldsymbol{AB}$ 只有当 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数时才有定义。如果 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m \times p$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是一个 $p \times n$ 矩阵，则由定义，二者之积是一个 $m \times n$ 矩阵，其元素

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

这样，两个矩阵的乘法步骤与同级行列式乘法的行、列相乘规则类似，一般，$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$。例如，

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

而

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

在特别情况下，当 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 称为**可易矩阵**。

上述矩阵的各项定义和性质仅仅是这里所要用到的一些。所以，现在可回过来继续讨论电磁波在分层媒质中的传播。

II. 因为 1.6.1 节中的两个函数 $U(z)$和 $V(z)$各满足一个二阶线性微分方程[(15)和(16)两式]，所以 U 和 V 可各表成为两个特解，譬如说 U_1, U_2 和 V_1, V_2 的线性组合。但这些特解

不得任意,它们之间必须满足一阶微分方程(14)的关系:

$$\left.\begin{aligned} U_1' &= \mathrm{i}k_0\mu V_1, \\ V_1' &= \mathrm{i}k_0\left(\varepsilon - \frac{\alpha^2}{\mu}\right)U_1, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} U_2' &= \mathrm{i}k_0\mu V_2, \\ V_2' &= \mathrm{i}k_0\left(\varepsilon - \frac{\alpha^2}{\mu}\right)U_2. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

从这些关系可以得到

$$V_1U_2' - U_1'V_2 = 0, \qquad U_1V_2' - V_1'U_2 = 0$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(U_1V_2 - U_2V_1) = 0$$

这一关系意味着,用(14)式任何两组任意解($U_1, V_1; U_2, V_2$)组成的**行列式**

$$D = \begin{vmatrix} U_1 & V_1 \\ U_2 & V_2 \end{vmatrix} \tag{26}$$

都是一常数,即 D 是我们方程系统的一个不变量①。

为了我们的目的,选择下列两组特解最为合宜:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= f(z), \quad U_2 = F(z), \\ V_1 &= g(z), \quad V_2 = G(z), \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

它们应满足

$$f(0) = G(0) = 0 \quad \text{和} \quad F(0) = g(0) = 1 \tag{28}$$

于是,满足

$$U(0) = U_0, \qquad V(0) = V_0 \tag{29}$$

的解(U, V)可以表成如下形式:

$$\left.\begin{aligned} U &= FU_0 + fV_0, \\ V &= GU_0 + gV_0, \end{aligned}\right\}$$

或者采用矩阵符号,写成

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{Q}_0 \tag{30}$$

式中

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} U(z) \\ V(z) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q}_0 = \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} F(z) & f(z) \\ G(z) & g(z) \end{bmatrix} \tag{31}$$

由于 D = 常数这一关系,方阵 $\boldsymbol{N}$ 的行列式是一常数。令 $z = 0$,即可得到这一常数,结果是

$$|\boldsymbol{N}| = Fg - fG = 1$$

---

① 这一结果也可从二阶线性微分方程的伏龙斯基行列式的一个共知特性得到。此外,还可证明,如果 U_1 为已知,则可通过积分由下列关系求得 U_2:

$$U_2 = \mathrm{i}kDU_1\int\frac{\mu}{U_1^2}\,\mathrm{d}z$$

见 F. Abelès, *Ann. de Physique*, **5**(1950), 603。

通常，把 U_0 和 V_0 表成 $U(z)$和 $V(z)$的函数更有方便之处。解 U_0 和 V_0，得到

$$\boldsymbol{Q}_0 = \boldsymbol{M}\boldsymbol{Q} \tag{32}$$

式中

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} g(z) & -f(z) \\ -G(z) & F(z) \end{bmatrix} \tag{33}$$

这个矩阵也是单位模矩阵，

$$|\boldsymbol{M}| = 1 \tag{34}$$

$\boldsymbol{M}$ 的意义很清楚：它使 $z=0$ 平面上电(或磁)矢量的 x 分量和 y 分量，同任意平面($z=$常数)上的分量建立起关系。前面我们看到，知道 U 和 V 就足以完全确定场。因此，**为了决定一个平面单色波在分层媒质中的传播，只需要给这个媒质确定一个适当的 2×2 单位模矩阵 $\boldsymbol{M}$。**因为这个缘故，我们将把 $\boldsymbol{M}$ 叫做分层媒质的**特性矩阵**。可以证明，行列式 $|\boldsymbol{M}|$ 的常数性质意味着能量守恒[①]。

现在来看看几种特别重要情况的特性矩阵形式。

(a) 均匀介质膜

在此情况下，ε，μ 和 $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$ 都是常数。如果以 θ 代表波法线与 z 轴的夹角，则由(24)式，

$$\alpha = n\sin\theta$$

对于 *TE* 波，按照(15)和(16)两式，有

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}z^2} + (k_0^2n^2\cos^2\theta)U = 0, \\ \frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}z^2} + (k_0^2n^2\cos^2\theta)V = 0. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

很容易看出，这些方程的解满足关系式(14)的是

$$\left.\begin{aligned} U(z) &= A\cos(k_0nz\cos\theta) + B\sin(k_0nz\cos\theta), \\ V(z) &= \frac{1}{\mathrm{i}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\theta[B\cos(k_0nz\cos\theta) - A\sin(k_0nz\cos\theta)]. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

因此满足边界条件(28)的那些特解(27)是

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= f(z) = \frac{\mathrm{i}}{\cos\theta}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sin(k_0nz\cos\theta), \\ V_1 &= g(z) = \cos(k_0nz\cos\theta), \\ U_2 &= F(z) = \cos(k_0nz\cos\theta), \\ V_2 &= G(z) = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\theta\sin(k_0nz\cos\theta). \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

如果令

---

① 要证明这一点，可先计算出(51)式的反射率 $\mathcal{R}$ 和透射率 $\mathcal{T}$，用特性矩阵 $\boldsymbol{M}$ 各元素表示，再利用(45)式所给的无吸收媒质特性矩阵这一形式，即可看到，如果 $|\boldsymbol{M}|=1$，能量守恒定律 $\mathcal{R}+\mathcal{T}=1$ 将得到满足。

$$p = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\theta \tag{38}$$

则可看到特性矩阵是

$$\boldsymbol{M}(z) = \begin{bmatrix} \cos(k_0 nz\cos\theta) & -\dfrac{\mathrm{i}}{p}\sin(k_0 nz\cos\theta) \\ -\mathrm{i}p\sin(k_0 nz\cos\theta) & \cos(k_0 nz\cos\theta) \end{bmatrix} \tag{39}$$

对于 *TM* 波,上面这些方程仍然适用,只要把其中的 p 换成

$$q = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\cos\theta \tag{40}$$

(b) 分层媒质作为均匀薄膜的膜堆

考虑两个接邻的分层媒质,第一个的区域从 $z=0$ 到 $z=z_1$,第二个从 $z=z_1$ 到 $z=z_2$。如果 $\boldsymbol{M}_1(z)$和 $\boldsymbol{M}_2(z)$是这两个媒质的特性矩阵,则

$$\boldsymbol{Q}_0 = \boldsymbol{M}_1(z_1)\boldsymbol{Q}(z_1), \qquad \boldsymbol{Q}(z_1) = \boldsymbol{M}_2(z_2 - z_1)\boldsymbol{Q}(z_2)$$

所以

$$\boldsymbol{Q}_0 = \boldsymbol{M}(z_2)\boldsymbol{Q}(z_2)$$

式中

$$\boldsymbol{M}(z_2) = \boldsymbol{M}_1(z_1)\boldsymbol{M}_2(z_2 - z_1)$$

这个结果可立即推广到一连串分层媒质以 $0 \leqslant z \leqslant z_1$, $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$, $\cdots$, $z_{N-1} \leqslant z \leqslant z_N$ 为界域的情况。设这些分层媒质的特性矩阵是 $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \cdots, \boldsymbol{M}_N$,则

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{Q}_0 &= \boldsymbol{M}(z_N)\boldsymbol{Q}(z_N), \\ \text{式中}\qquad \boldsymbol{M}(z_N) &= \boldsymbol{M}_1(z_1)\boldsymbol{M}_2(z_2 - z_1)\cdots\boldsymbol{M}_N(z_N - z_{N-1}). \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

借助(41)式,可以很容易推导出任何分层媒质的特性矩阵的近似表达式[①]:我们把这些媒质看成由大量薄膜组成,各膜的厚度为 $\delta z_1, \delta z_2, \delta z_3, \cdots, \delta z_n$。如果最大的厚度足够小,则 ε, μ 和 n 在各个薄膜内可看成常数。由(39)式可知,第 j 个膜的特性矩阵这时可近似地表成为

$$\boldsymbol{M}_j = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{\mathrm{i}}{p_j}k_0 n_j \delta z_j \cos\theta_j \\ -\mathrm{i}p_j k_0 n_j \delta z_j \cos\theta, & 1 \end{bmatrix}$$

因此,整个媒质作为薄膜堆来看,其特性矩阵近似地等于(仍然只保留到 δz 的一次项)

$$\boldsymbol{M} = \prod_{j=1}^{N}\boldsymbol{M}_j = \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i}k_0 B \\ -\mathrm{i}k_0 A & 1 \end{bmatrix} \tag{42}$$

式中

① 关于折射率连续改变的分层媒质,较为详细的讨论见 R. Jacobsson, *Progress in Optics*, Vol. 5, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1965), p. 247。

$$A=\sum_{j=1}^{N}p_jn_j\delta z_j\cos\theta_j=\sum_{j=1}^{N}\left(\varepsilon_j-\frac{\alpha^2}{\mu_j}\right)\delta z_j,$$

$$B=\sum_{j=1}^{N}\frac{n_j}{p_j}\delta z_j\cos\theta_j=\sum_{j=1}^{N}\mu_j\delta z_j$$

过渡到极限，令 $N\to\infty$ 而同时最大的 $|\delta z_j|\to 0$，得到

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & -\mathrm{i}k_0\mathcal{B}\\ -\mathrm{i}k_0\mathcal{A} & 1\end{bmatrix} \tag{43}$$

式中

$$\mathcal{A}=\int\left(\varepsilon-\frac{\alpha^2}{\mu}\right)\mathrm{d}z,\qquad \mathcal{B}=\int\mu\mathrm{d}z \tag{44}$$

积分是对整个 z 区域进行的。(43)式给出了任意分层媒质的特性矩阵的一级近似。高级近似可以通过在 $\cos(k_0n\delta z\cos\theta)$ 和 $\sin(k_0n\delta z\cos\theta)$ 的展开式中和在(42)式的乘式中保留更高次项而得到[①]。

因为，对于无吸收媒质，ε 和 μ 都是实数，故亦可知，**无吸收分层媒质的特性矩阵具有如下形式：**

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}a & \mathrm{i}b\\ \mathrm{i}c & d\end{bmatrix} \tag{45}$$

式中 a，b，c 和 d 都是实数。

1.6.3　反射系数和透射系数

考虑一个平面波入射到一分层媒质上，这个分层媒质的区域从 $z=0$ 到 $z=z_1$，两边各与一个均匀的半无穷大媒质接界。现在来推导反射波和透射波的振幅和强度表达式[②]。

同前，设 A、R 和 T 代表入射波、反射波和折射波的电矢量振幅(可能是复数)。此外，设 ε_1，μ_1 和 ε_l，μ_l 为第一媒质和最后一个媒质的介电常数和磁导率，并设 θ_1 和 θ_l 为入射波法线和透射波法线与 z 方向(分层层次方向)的夹角。

1.1 节的边界条件要求，$\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 在通过分层媒质两个边界中的每一个时，其切线分量应该连续。把这些条件用到 *TE* 波，并应用 § 1.4(4)

$$\mathbf{H}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathbf{s}\times\mathbf{E}$$

即可得到下列两组振幅方程：

$$\left.\begin{aligned}U_0&=A+R, & U(z_1)&=T,\\ V_0&=p_1(A-R), & V(z_1)&=p_lT,\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

式中

① F. Abelès, *Ann. d. Physique*, **5**(1950), 611，这篇论文对此做了详细讨论。

② 当研究 *TE* 波时，考虑的是电矢量振幅，而研究 *TM* 波时，考虑的是磁矢量振幅。

$$p_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta_1, \qquad p_l = \sqrt{\frac{\varepsilon_l}{\mu_l}}\cos\theta_l \tag{47}$$

(46)式中 U_0, V_0, U 和 V 这 4 个量是通过基本关系式(32)相互联系的;因此

$$\left.\begin{aligned} A + R &= (m'_{11} + m'_{12}p_l)T, \\ p_1(A - R) &= (m'_{21} + m'_{22}p_l)T, \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

m'_{ij} 是媒质的特性矩阵的元素,取 $z = z_1$ 处的值。

从(48)式得到分层媒质——膜的反射系数和透射系数:

$$r = \frac{R}{A} = \frac{(m'_{11} + m'_{12}p_l)p_1 - (m'_{21} + m'_{22}p_l)}{(m'_{11} + m'_{12}p_l)p_1 + (m'_{21} + m'_{22}p_l)} \tag{49}$$

$$t = \frac{T}{A} = \frac{2p_1}{(m'_{11} + m'_{12}p_l)p_1 + (m'_{21} + m'_{22}p_l)} \tag{50}$$

用 r 和 t 表示时,**反射率**和**透射率**是

$$\mathcal{R} = |r|^2, \qquad \mathcal{T} = \frac{p_l}{p_1}|t|^2 \tag{51}$$

r 的位相 δ_r 可以叫做**反射相变**,而 t 的位相 δ_t 可以叫做**透射相变**。相变 δ_r 是对第一个突变面来说的,而相变 δ_t 是对分层媒质同最后半无穷大媒质的界平面来说的。

TM 波的相应公式可由(49)~(51)式经代换立即得到,其中 p_1 和 p_l 这两个量要换成

$$q_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\cos\theta_1, \qquad q_l = \sqrt{\frac{\mu_l}{\varepsilon_l}}\cos\theta_l \tag{52}$$

这时 r 和 t 是磁矢量的振幅之比,而不是电矢量的振幅之比。

1.6.4 均匀介质膜[①]

在光学上,处于两个均匀媒质之间的均匀介质膜的性质特别重要,因此我们将更详细地研究这一情况。我们假定,所有媒质都是非磁性的($\mu = 1$)。

单个均匀介质膜的特性矩阵已由(39)式给出。现在用下标 1,2,3 表示同这三个媒质有关的量(见图 1.17),并用 h 表示膜厚,则

$$m'_{11} = m'_{22} = \cos\beta, \qquad m'_{12} = -\frac{\mathrm{i}}{p_2}\sin\beta, \qquad m'_{21} = -\mathrm{i}p_2\sin\beta \tag{53}$$

式中

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_0}n_2 h\cos\theta_2$$

并且

$$p_j = n_j\cos\theta_j \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{54}$$

---

① 单层介质膜特性的主要公式的另一种推导方法可见 7.6.1 节。当然,通过把 1.1.3 节的边界条件应用于膜的各个边界,也可直接推导出这些公式[见 M. Born, *Optik* (Berlin, Springer, 1933, reprinted 1965), p. 125; 或 H. Mayer, *Physik dünner Schichten* (Stuttgart, Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft 1950), p. 145]。

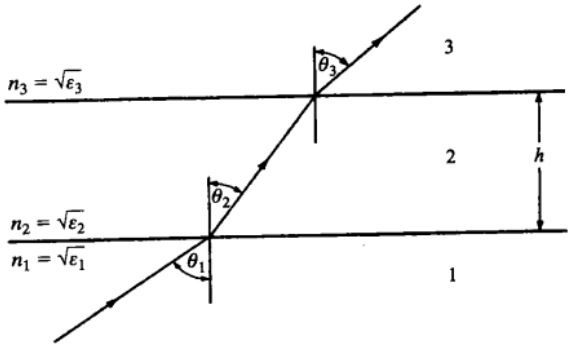


图 1.17　电磁波通过一个均匀膜的传播

把这些式子代入(49)和(50)两式,令其中 $l=3$,即可得到反射系数 r 和透射系数 t。所得公式可以用第一和第二两面各自的反射系数和透射系数 r_{12}, t_{12} 和 r_{23}, t_{23} 方便地表出。按照菲涅耳公式 § 1.5(20)和 § 1.5(21),对于 *TE* 波,

$$r_{12}=\frac{n_1\cos\theta_1-n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1+n_2\cos\theta_2}=\frac{p_1-p_2}{p_1+p_2} \tag{55}$$

$$t_{12}=\frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1+n_2\cos\theta_2}=\frac{2p_1}{p_1+p_2} \tag{56}$$

r_{23} 和 t_{23} 的式子与此类似。用 $r_{12}, r_{23}, t_{12}, t_{23}$ 表示时,r 和 t 的公式变成[①]

$$r=\frac{r_{12}+r_{23}e^{2i\beta}}{1+r_{12}r_{23}e^{2i\beta}} \tag{57}$$

$$t=\frac{t_{12}t_{23}e^{i\beta}}{1+r_{12}r_{23}e^{2i\beta}} \tag{58}$$

由此得到反射率和透射率为

$$\mathcal{R}=|r|^2=\frac{r_{12}^2+r_{23}^2+2r_{12}r_{23}\cos 2\beta}{1+r_{12}^2r_{23}^2+2r_{12}r_{23}\cos 2\beta} \tag{59}$$

$$\mathcal{T}=\frac{p_3}{p_1}|t|^2=\frac{n_3\cos\theta_3}{n_1\cos\theta_1}\frac{t_{12}^2t_{23}^2}{1+r_{12}^2r_{23}^2+2r_{12}r_{23}\cos 2\beta} \tag{60}$$

通过一步步计算,如所预料,可以得到

$$\mathcal{R}+\mathcal{T}=1$$

相变 δ_r 和 δ_t 从(57)和(58)两式也很容易算出,结果得到

$$\tan\delta_r=\tan(\arg r)=\frac{r_{23}(1-r_{12}^2)\sin 2\beta}{r_{12}(1+r_{23}^2)+r_{23}(1+r_{12}^2)\cos 2\beta} \tag{61}$$

$$\tan\delta_t=\tan(\arg t)=\frac{1-r_{12}r_{23}}{1+r_{12}r_{23}}\tan\beta \tag{62}$$

① 这些公式首先由 G.B.Airy 用不同方法导出,见 *Phil. Mag.*,**2**(1833),20;又见 *Ann. Phys. und Chem.*(Ed. J.C. Poggendorff),**41**(1837),512。

现在让我们简单地看一看这些公式的含义。首先可注意,当(59)和(60)两式中的 β 换成 $\beta+\pi$ 时,即当 h 换成 $h+\Delta h$,其中

$$\Delta h=\frac{\lambda_0}{2n_2\cos\theta_2} \tag{63}$$

时,两式都保持不变。因此,**厚度上相差 $\lambda_0/2n_2\cos\theta_2$ 整数倍的那些介质膜,它们的反射率和透射率是一样的。**

其次,我们求反射系数为极大或极小时膜的光学厚度。如果令

$$H=n_2h \tag{64}$$

则从(59)式得到,当 $\sin 2\beta=0$,即

$$H=\frac{m\lambda_0}{4\cos\theta_2},\qquad (m=0,1,2,\cdots)$$

时,

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{R}}{\mathrm{d}H}=0$$

必须区分两种情况:

(1) m 是**奇数**,即膜的光学厚度

$$H=\frac{\lambda_0}{4\cos\theta_2},\qquad \frac{3\lambda_0}{4\cos\theta_2},\qquad \frac{5\lambda_0}{4\cos\theta_2},\cdots$$

这时,$\cos 2\beta=-1$,(59)式化为

$$\mathcal{R}=\left(\frac{r_{12}-r_{23}}{1-r_{12}r_{23}}\right)^2 \tag{65}$$

特别在**正入射**时,由(55)式可得到

$$r_{12}=\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2},\qquad r_{23}=\frac{n_2-n_3}{n_2+n_3} \tag{66}$$

而(65)式则变成

$$\mathcal{R}=\left(\frac{n_1n_3-n_2^2}{n_1n_3+n_2^2}\right)^2 \tag{67}$$

(2) m 是**偶数**,即膜的光学厚度

$$H=\frac{\lambda_0}{2\cos\theta_2},\qquad \frac{2\lambda_0}{2\cos\theta_2},\qquad \frac{3\lambda_0}{2\cos\theta_2},\cdots$$

这时,$\cos 2\beta=1$,(59)式化为

$$\mathcal{R}=\left(\frac{r_{12}+r_{23}}{1+r_{12}r_{23}}\right)^2 \tag{68}$$

特别是,在**正入射**时,此式变成

$$\mathcal{R}=\left(\frac{n_1-n_3}{n_1+n_3}\right)^2 \tag{69}$$

和 n_2 无关。在斜入射情况下，惟一的差别是所有公式中的 n_j 被换成 $n_j\cos\theta_j(j=1,2,3,\cdots)$；因此，**光学厚度为 $m\lambda_0/2\cos\theta_2(m=1,2,3,\cdots)$的膜片对反射(或透射)辐射的强度没有影响。**

其次，必须确定这些极值的性质。经过一步步运算后可以得到，当 $H=m\lambda_0/4\cos\theta_2(m=1,2,\cdots)$时，如果

$$\left.\begin{aligned}&(-1)^m r_{12}r_{23}(1+r_{12}^2r_{23}^2-r_{12}^2-r_{23}^2)\lesseqgtr 0,\\ \text{则}\quad&\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{R}}{\mathrm{d}H^2}\right)\gtreqless 0\end{aligned}\right\}\tag{70}$$

所以前式中“<”符号对应于极小，“>”符号对应于极大。特别在**正入射**时，r_{12} 和 r_{23} 系由(66)式表出，结果有：

$$\left.\begin{aligned}&\text{极大，如果 } (-1)^m(n_1-n_2)(n_2-n_3)>0,\\ &\text{极小，如果 } (-1)^m(n_1-n_2)(n_2-n_3)<0.\end{aligned}\right\}\tag{71}$$

通常，第一媒质是空气($n_1\approx1$)，因而可以看出，**当膜的光学厚度取 $\lambda_0/4,3\lambda_0/4,5\lambda_0/4\cdots\cdots$诸值中任一值时，反射率是一极大还是一极小，其情况视膜的折射率是大于还是小于第三媒质的折射率而定；当膜的光学厚度取 $\lambda_0/2,2\lambda_0/2,3\lambda_0/2\cdots\cdots$诸值中任一值时，情况相反。**

这些结果表示在图 1.18 中，它们同实验[①]很好地一致。

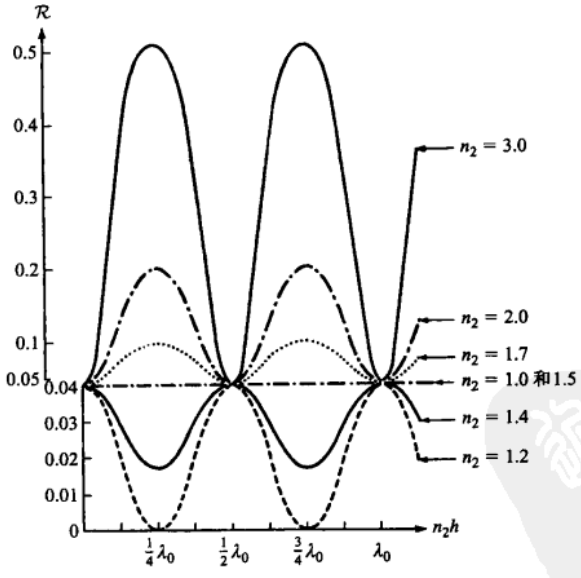


图 1.18　介质膜的反射率随其光学厚度的变化关系，膜的折射率为 $n_2(\theta_1=0,$ $n_1=1.0,n_3=1.5)$[引自 R. Messner, *Zeiss Nachr.*, **4**(H9)(1943), 253]

① 例如，见 K. Hammer, *Z. tech. Phys.*, **24**(1943), 169。

从以上分析显然可见,一个光学厚度为 1/4 波长而折射率足够低的膜片,可用来作为**减反射膜**,使表面反射率降低[这时人们说表面被"敷霜"(bloomed)]。做减反射膜最通用的两种材料是冰晶石($n\approx1.35$)和氟化镁(MgF_2,$n\approx1.38$)①。

按照(67)式,如果

$$n_2=\sqrt{n_1n_3} \tag{72}$$

则正入射的反射率严格为零。当 $n_1=1$,$n_3=1.5$ 时,这要求 $n_2\approx1.22$。这个条件实际上是不能满足的。然而,对(59)式进行比较详细的分析可以看到,在斜入射下,对于 *TM* 波(电矢量平行于入射面),反射率有可能等于零,但 *TE* 波(电矢量垂直于入射面)不行。这就是说,在适当条件下,能同时使$\mathcal{R}_{\parallel}=0$,$\mathcal{R}_{\perp}\neq0$。因此,一个介电材料合适的薄膜,还可以用作反射式**偏振器**。这种偏振器可看作是前面讨论布儒斯特角时所说的那种简单装置的推广。要获得大的$\mathcal{R}_{\perp}$(同时$\mathcal{R}_{\parallel}=0$),薄膜的折射率 n_2 必须尽可能地大②。例如,当 $n_1=1$,$n_2=2.5$,$n_3=1.53$ 时,得到在 $\theta_1=74°30'$ 时,$\mathcal{R}_{\parallel}=0$,$\mathcal{R}_{\perp}=0.79$。

如果在一个玻璃表面上敷一层折射率足够高的材料,按照前面的分析,该玻璃表面的反射率将大大增高(见图 1.18 和图 1.19)。因此该表面可作为一个很好的分束器。二氧化钛(TiO_2,$n\approx2.45$)或硫化锌(ZnS,$n\approx2.3$)敷层用作此途非常相宜,反射率最高可达约 30%。还有一些高折射率材料,但它们对入射光有些吸收。例如,用三硫化二锑(Sb_2S_3,$n\approx2.8$)敷层能够得到$\mathcal{R}=\mathcal{T}=0.46$,但这时入射光有 8%被薄膜吸收。

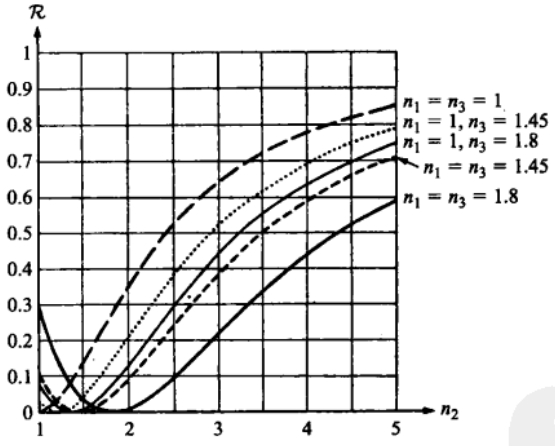


图 1.19 1/4 波长膜($n_2h=\lambda_0/4$)的正入射反射率随膜折射率 n_2 的变化关系[引自 K. Hammer, *Z. tech. Phys.*, **24**, (1943), 169]

现在看看第一个边界上发生全反射时情况如何,这也是有意义的。在这一情况下,

$$n_1\sin\theta_1>n_2,\qquad n_1\sin\theta_1<n_3$$

① 关于多层减反射膜的设计和性能,A. Musset 和 A. Thelen 曾进行了讨论,见 *Progress in Optics*, Vol. 8, ed. E. Wolf (Amsterdam, North-Holland Publishing Company and New York, American Elsevier Publishing Company, 1970), p. 201。

② 见 H. Schröder, *Optik* **3**(1948), 499。

并且[见 § 1.5(54)]

$$n_2\cos\theta_2 = \mathrm{i}\sqrt{n_1^2\sin^2\theta_1 - n_2^2} \tag{73}$$

这时,两个边界各自的反射系数[见 § 1.5(21)]为

$$\left.\begin{aligned} r_{12} &= \frac{n_1\cos\theta_1 - \mathrm{i}\sqrt{n_1^2\sin^2\theta_1 - n_2^2}}{n_1\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sqrt{n_1^2\sin^2\theta_1 - n_2^2}}, \\ r_{23} &= \frac{\mathrm{i}\sqrt{n_1^2\sin^2\theta_1 - n_2^2} - n_3\cos\theta_3}{\mathrm{i}\sqrt{n_1^2\sin^2\theta_1 - n_2^2} + n_3\cos\theta_3}. \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

如果令

$$k_0 n_2 h\cos\theta_2 = \mathrm{i}b \tag{75}$$

按照(73)式,其中

$$b = \frac{2\pi}{\lambda_0}h\sqrt{n_1^2\sin^2\theta_1 - n_2^2} \tag{76}$$

则反射系数公式(57)变成

$$r = \frac{r_{12} + r_{23}\mathrm{e}^{-2b}}{1 + r_{12}r_{23}\mathrm{e}^{-2b}} \tag{77}$$

因为 $|r_{12}| = |r_{23}| = 1$,所以 r_{12} 和 r_{23} 的形式是

$$r_{12} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{12}}, \qquad r_{23} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{23}} \tag{78}$$

式中 ϕ_{12} 和 ϕ_{13} 都是实数;因此反射率

$$\mathcal{R} = |r|^2 = \frac{\mathrm{e}^{2b} + \mathrm{e}^{-2b} + 2\cos(\phi_{12} - \phi_{23})}{\mathrm{e}^{2b} + \mathrm{e}^{-2b} + 2\cos(\phi_{12} + \phi_{23})} \tag{79}$$

和前一情况相反,现在 $\mathcal{R}$ 不再是膜厚的周期函数。(76)式表明,如果忽略折射率对波长的依赖关系,则 b 与波长成反比。因为当 b 足够大时 $\mathcal{R}$ 实际上等于 1,所以较短的波长将不得通过;该膜因此就相当于一个**低通滤波器**——一种只让长波通过的器件。

以上我们看到,利用材料合适的介质膜,可获得多种功效。显然,如以若干这样的膜排成序列,则所需性能仍可进一步增强。这种**多层膜**的特性矩阵可借助(41)式所表达的定理求得[①]。下面我们只详细讨论周期性多层膜的情况。

1.6.5　周期性分层媒质

一个周期为 h 的周期性分层媒质,其特性是它的介电常数 ε 和磁导率 μ 不仅只是 z 的函数,而且

$$\varepsilon(z + jh) = \varepsilon(z), \qquad \mu(z + jh) = \mu(z)$$

其中 j 是某固定范围 $1 \leqslant j \leqslant N$ 内的任一整数。

---

① 有关多层膜的公式已由许多作者给出,例如,R. L. Mooney, *J. Opt. Soc. Amer.*, **36** (1946), 256; W. Weinstein, *ibid*, **37** (1947), 576。

设 $\boldsymbol{M}(h)$是对应于一个周期的特性矩阵,并令[①]

$$\boldsymbol{M}(h)=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \tag{80}$$

按照(41)式并考虑到周期性因素,有

$$\boldsymbol{M}(Nh)=\underbrace{\boldsymbol{M}(h)\cdot\boldsymbol{M}(h)\cdots\boldsymbol{M}(h)}_{N\text{次}}=[\boldsymbol{M}(h)]^N \tag{81}$$

为了计算矩阵 $\boldsymbol{M}(Nh)$的各个元素,我们利用矩阵论的一个结果,按照这个结果,单位模矩阵 $\boldsymbol{M}(h)$的 N 次方[②]

$$[\boldsymbol{M}(h)]^N=\begin{bmatrix} m_{11}\mathcal{U}_{N-1}(a)-\mathcal{U}_{N-2}(a) & m_{12}\mathcal{U}_{N-1}(a) \\ m_{21}\mathcal{U}_{N-1}(a) & m_{22}\mathcal{U}_{N-1}(a)-\mathcal{U}_{N-2}(a) \end{bmatrix} \tag{82}$$

式中

$$a=\tfrac{1}{2}(m_{11}+m_{22}) \tag{83}$$

而$\mathcal{U}_N$是第二类**切比雪夫**(Chebyshev)**多项式**[③]:

$$\mathcal{U}_N(x)=\frac{\sin[(N+1)\cos^{-1}x]}{\sqrt{1-x^2}} \tag{84}$$

多层膜通常由一系列折射率一高(n_3)一低(n_2)交替相间的均匀膜层构成,高折射率膜层的厚度为 h_3,低折射率膜层的厚度为 h_2,整个系列置于折射率为 n_1 和 n_l 的两个均匀媒质之间(见图 1.20)。仍然假定所有媒质都是非磁性的($\mu=1$),并令

$$\left.\begin{aligned} &\beta_2=\frac{2\pi}{\lambda_0}n_2h_2\cos\theta_2, \qquad \beta_3=\frac{2\pi}{\lambda_0}n_3h_3\cos\theta_3, \\ &p_2=n_2\cos\theta_2, \qquad\qquad p_3=n_3\cos\theta_3, \\ &\qquad\qquad h=h_2+h_3. \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

---

① 现在把各矩阵元素上的一撇略去。

② 这个结果的正确性可利用下列递推公式用演绎法加以证明:

$$\mathcal{U}_j(x)=2x\mathcal{U}_{j-1}(x)-\mathcal{U}_{j-2}(x)$$

此式作为一个恒等式可得自切比雪夫多项式定义。

直接的矩阵论证明则由 F. Abelès, *Ann. de Physique*, **5**(1950), 777 给出。

③ 这些多项式满足下列正交归一化条件:

$$\int_{-1}^{+1}\mathcal{U}_n(x)\mathcal{U}_m(x)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=0 \quad \text{当} \quad n\neq m$$

$$=\frac{\pi}{2} \quad \text{当} \quad n=m$$

现将前 6 个多项式的显式录列于下:

$$\mathcal{U}_0(x)=1, \qquad \mathcal{U}_3(x)=8x^3-4x,$$

$$\mathcal{U}_1(x)=2x, \qquad \mathcal{U}_4(x)=16x^4-12x^2+1,$$

$$\mathcal{U}_2(x)=4x^2-1, \quad \mathcal{U}_5(x)=32x^5-32x^3+6x$$

切比雪夫多项式表已由 National Bureau of Standards Washington (Applied Mathematics Series **9**(1952))出版,多项式的各项重要性质书中亦予列出,又见 *Higher Transcendental Functions* [Bateman Manuscript Project (New York, McGraw-Hill, Vol. 2 1953), p. 183]。

按照(39)和(41)两式,这时一个周期的特性矩阵是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_2(h)&=\begin{bmatrix}\cos\beta_2 & -\dfrac{\mathrm{i}}{p_2}\sin\beta_2\\ -\mathrm{i}p_2\sin\beta_2 & \cos\beta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta_3 & -\dfrac{\mathrm{i}}{p_3}\sin\beta_3\\ -\mathrm{i}p_3\sin\beta_3 & \cos\beta_3\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\cos\beta_2\cos\beta_3-\dfrac{p_3}{p_2}\sin\beta_2\sin\beta_3 & -\dfrac{\mathrm{i}}{p_3}\cos\beta_2\sin\beta_3-\dfrac{\mathrm{i}}{p_2}\sin\beta_2\cos\beta_3\\ -\mathrm{i}p_2\sin\beta_2\cos\beta_3-\mathrm{i}p_3\cos\beta_2\sin\beta_3 & \cos\beta_2\cos\beta_3-\dfrac{p_2}{p_3}\sin\beta_2\sin\beta_3\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{86}$$

因此,按照(81)式,多层膜(共有 $2N$ 层膜)的特性矩阵 $\boldsymbol{M}_{2N}(Nh)$ 由下列公式(出自 Abelès)给出:

$$\boldsymbol{M}_{2N}(Nh)=\begin{bmatrix}\mathcal{M}_{11} & \mathcal{M}_{12}\\ \mathcal{M}_{21} & \mathcal{M}_{22}\end{bmatrix}\tag{87}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{M}_{11}&=\left(\cos\beta_2\cos\beta_3-\frac{p_3}{p_2}\sin\beta_2\sin\beta_3\right)\mathcal{U}_{N-1}(a)-\mathcal{U}_{N-2}(a),\\ \mathcal{M}_{12}&=-\mathrm{i}\left(\frac{1}{p_3}\cos\beta_2\sin\beta_3+\frac{1}{p_2}\sin\beta_2\cos\beta_3\right)\mathcal{U}_{N-1}(a),\\ \mathcal{M}_{21}&=-\mathrm{i}(p_2\sin\beta_2\cos\beta_3+p_3\cos\beta_2\sin\beta_3)\mathcal{U}_{N-1}(a),\\ \mathcal{M}_{22}&=\left(\cos\beta_2\cos\beta_3-\frac{p_2}{p_3}\sin\beta_2\sin\beta_3\right)\mathcal{U}_{N-1}(a)-\mathcal{U}_{N-2}(a),\end{aligned}\right\}\tag{88}$$

而

$$a=\cos\beta_2\cos\beta_3-\frac{1}{2}\left(\frac{p_2}{p_3}+\frac{p_3}{p_2}\right)\sin\beta_2\sin\beta_3\tag{89}$$

把这些式子代入(49)和(50)两式,就得到多层膜的反射系数和透射系数。

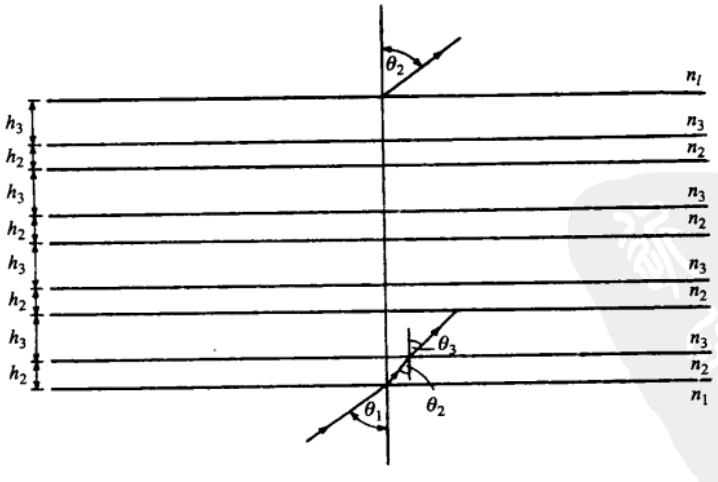


图 1.20　周期性多层膜

特别常见的情况是两个基膜的光学厚度相同(通常为 $\lambda_0/4$),即

$$n_2h_2 = n_3h_3 \tag{90}$$

并且是正入射($\theta_1 = 0$)。这时,

$$\beta_2 = \beta_3 = \frac{2\pi}{\lambda_0}n_2h_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0}n_3h_3 \tag{91}$$

如果用 β 代表这个共同值,则切比雪夫多项式的自变量化为

$$a = \cos^2\beta - \frac{1}{2}\left(\frac{n_2}{n_3} + \frac{n_3}{n_2}\right)\sin^2\beta \tag{92}$$

可以看出,a 不能超过 1,但是对于某些 β 值,它可以变成小于 -1。这时,$\cos^{-1}a$ 是虚数,并且由于对于任何 χ,

$$\sin i\chi = i\sinh\chi = i\frac{e^{\chi} - e^{-\chi}}{2}$$

因而 U_N 这时是指数性质的。结果,这种多层膜的反射率将随膜层周期数目迅速增高。

对于**四分之一波长膜**($n_2h_2 = n_3h_3 = \lambda_0/4$),在正入射下(仍然假定非磁性媒质),

$$\beta = \pi/2, \qquad p_2 = n_2, \qquad p_3 = n_3 \tag{93}$$

(86)式化为

$$\boldsymbol{M}_2(h) = \begin{bmatrix} -\dfrac{n_3}{n_2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{n_2}{n_3} \end{bmatrix} \tag{94}$$

以这种双层膜作为基本周期的多层膜,其特性矩阵(87)式是

$$\boldsymbol{M}_{2N}(Nh) = \begin{bmatrix} \left(-\dfrac{n_3}{n_2}\right)^N & 0 \\ 0 & \left(-\dfrac{n_2}{n_3}\right)^N \end{bmatrix} \tag{95}$$

可由(94)式自乘 N 次直接证明。按照(49)和(51)两式,反射率为

$$\mathcal{R}_{2N} = \left(\frac{1 - \dfrac{n_l}{n_1}\left(\dfrac{n_2}{n_3}\right)^{2N}}{1 + \dfrac{n_l}{n_1}\left(\dfrac{n_2}{n_3}\right)^{2N}}\right)^2 \tag{96}$$

此式表明,当双层膜的数目 N 固定时,$\mathcal{R}_{2N}$ 随比值 n_2/n_3 增大;而当 n_2/n_3 固定时,$\mathcal{R}_{2N}$ 随 N 增大[①]。

有时,例如用作法布里-珀罗干涉仪(见 7.6 节)板的敷层时,膜层排列次序的特点是折射率顺序为 $n_2, n_3, n_2, n_3, \cdots, n_2, n_3, n_2$。这种多层膜的特性矩阵是

$$\boldsymbol{M}_{2N+1} = \boldsymbol{M}_{2N} \cdot \boldsymbol{M} \tag{97}$$

式中 $\boldsymbol{M}_{2N}$ 由(87)式给出,而 $\boldsymbol{M}$ 是序列中最末一个薄膜的特性矩阵。特别是,对于四分之一波

① 关于双层膜系统的特性,详尽讨论可见 C. Dufour and A. Herpin 的一篇论文,载于 *Rev. Opt.*, **32**(1953), 321。

长膜系，在正入射下，$\boldsymbol{M}_{2N}$化为(95)式，$\beta_2=\pi/2$，(97)式这时变成

$$\boldsymbol{M}_{2N+1}=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{\mathrm{i}}{n_2}\left(-\dfrac{n_3}{n_2}\right)^N\\ -\mathrm{i}n_2\left(-\dfrac{n_2}{n_3}\right)^N & 0\end{bmatrix} \tag{98}$$

代入(49)和(51)两式，得到所求的反射率：

$$\mathcal{R}_{2N+1}=\left(\frac{1-\left(\dfrac{n_2}{n_1}\right)\left(\dfrac{n_2}{n_l}\right)\left(\dfrac{n_2}{n_3}\right)^{2N}}{1+\left(\dfrac{n_2}{n_1}\right)\left(\dfrac{n_2}{n_l}\right)\left(\dfrac{n_2}{n_3}\right)^{2N}}\right)^2 \tag{99}$$

可见，反射率随比值 n_2/n_3 和 N 而迅速增加(见表 1.3)。

表 1.3　正入射下四分之一波长硫化锌膜和四分之一波长冰晶石膜交替序列所构成的多层膜的反射率$\mathcal{R}_{2N+1}$($n_1=1, n_2=2.3, n_3=1.35, n_l=1.52, n_2h_2=n_3h_3=\lambda_0/4, \lambda_0=5460\text{Å}, \theta_1=0$)。括弧中数值是 P．Giacomo 所得的实验结果[引自 *Compt．Rend．Acad．Sci．, Paris*, **235**(1952), 1627]

N	$\mathcal{R}_{2N+1}$
0	0.306
1	0.672
2	0.872(0.865)
3	0.954(0.945)
4	0.984(0.97)

第 2 章　电磁势和电磁极化

在前一章中，物质对电磁场的作用是用几个宏观常数来表示的。但这些常数的有效范围仅属有限，事实上它们不适合用来描述诸如光的发射、吸收和色散这样一些过程。完善地说明这些现象，要涉及对微观理论的广泛研究，因而已超出本书的范围。

不过，还是能够借助一个简单的模型来描述场和物质的相互作用，这个模型完全适用于光学的大多数分支。为此目的，把矢量 **D** 和 **B** 各表成为二项之和[①]；其中一项当做真空场，而另一项则看做是出自物质的影响。这样就导致引进下面两个新矢量以描述物质的作用：**电极化强度**(**P**)和**磁极化强度**即**磁化强度**(**M**)。先前使 **D**,**B** 同 **E**,**H** 关联的那些物质方程[见 §1.1(10)和 §1.1(11)]，现在则为 **P**,**M** 同 **E**,**H** 的关系方程所取代。这些新方程具有更直接的物理意义，使我们对电磁场在物质中的传播获得下列这样的概念：

电磁场在给定体积元产生一定的极化强度 **P** 和 **M**。在一级近似下，**P** 和 **M** 与场成正比，比例常数是物质对场的反作用大小的量度。每个体积元这时各成为一个新波源，发射出次级子波即散射子波，其强度同 **P** 和 **M** 有着简单的关系。所有这些次波相互合并，并同入射场组合，形成总波场，这就是整个考虑一开始所设的那个场。用数学表达出这个等同，就得到两个积分方程[②]，可以证明这两个方程与麦克斯韦微分方程等效，但是它们对电磁场传播的描述突出了与原子物质结构的关系。

从这一理论将获得两个重要结果，即洛伦兹-洛伦茨公式和所谓埃瓦尔德-欧西恩(Ewald-Oseen)消光定理。洛伦兹-洛伦茨公式使媒质的宏观光学性质同散射粒子的数目和性质相关联，而埃瓦尔德-欧西恩消光定理证明，一个以真空光速进行传播的外来电磁扰动如何在物质中被完全抵消掉，而由传播速度适当小一些的次级扰动所取代。

这个理论给我们提供了另一条数学途径去处理电磁理论的某些问题。这将通过本章 2.4.3 节对折射定律、反射定律和菲涅耳公式的推导，和进一步通过第 12 章中对一个更复杂问题的处理得到说明。

推导这些结果，要用到某些新的数学工具。因此，我们将首先讨论借助所谓推迟势来表示电磁场的表述方法，该推迟势是众所周知的静电势的推广。推迟势用极化强度矢量来表示，就引出另一组称为赫兹矢量的辅助量。2.1 节和 2.2 节先讨论这些数学预备知识，2.3 节再简单地解释一下一些基本物理概念。上面提到的那两个积分方程和那两个基本定理则于 2.4 节中导出。

---

① 按照 1.1.1 节中的注释，将 **B** 改为 **H** 更适宜。这里之所以没有依照一般理论，是为了方便一点，以使 §2.2(2)右边各项合乎惯例而皆为正。

② 在非磁性物质的情况下，只有一个积分方程。第二个积分方程化为一个相对简单的磁场表达式，并且当求得第一个方程的解时，即可算出第二个方程的值。
这里所讨论的“物质”积分方程，同处理某些衍射问题时所采用的“几何”积分方程(见第 11 章)必须加以区别。

2.1　真空中的电动势

2.1.1　矢势和标势

让我们考虑在真空之中由给定电荷分布 $\rho(\mathbf{r},t)$和电流分布 $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$产生的电磁场。这一电磁场服从麦克斯韦方程 § 1.1(1) ~ § 1.1(4),而这些方程现可写成如下形式(因为在真空中 $\mathbf{D}=\mathbf{E},\mathbf{B}=\mathbf{H}$):

$$\operatorname{curl}\mathbf{B}-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{E}}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{1}$$

$$\operatorname{curl}\mathbf{E}+\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}}=0 \tag{2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0 \tag{4}$$

因为对任何矢量的旋度取散度都得零,所以如令

$$\mathbf{B}=\operatorname{curl}\mathbf{A} \tag{5}$$

其中 $\mathbf{A}$ 是一个任意的位置和时间的矢函数,则(4)式将被满足。以(5)式代入麦克斯韦的第二个方程,则有

$$\operatorname{curl}\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}\right)=0 \tag{6}$$

如令

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}-\operatorname{grad}\phi \tag{7}$$

其中ϕ是一个任意标函数,则(6)式成立。现在必须使其余的两个麦克斯韦方程(1)和(3)也得到满足以决定 $\mathbf{A}$ 和ϕ。

将(5)和(7)两式代入(1)和(3)两式,并利用恒等式 $\operatorname{curl}\operatorname{curl}\equiv\operatorname{grad}\operatorname{div}-\nabla^2$ 和 $\operatorname{div}\operatorname{grad}\equiv\nabla^2$,得到

$$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{A}}-\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\mathbf{A}+\frac{1}{c}\dot{\phi}\right)=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{8}$$

和

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\ddot{\phi}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\mathbf{A}+\frac{1}{c}\dot{\phi}\right)=-4\pi\rho \tag{9}$$

如果给 $\mathbf{A}$ 和ϕ之间规定如下关系:

$$\operatorname{div}\mathbf{A}+\frac{1}{c}\dot{\phi}=0 \tag{10}$$

则(8)和(9)两式化为非齐次波动方程

$$\nabla^2\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{A}}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{11}$$

和

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\ddot{\phi} = -4\pi\rho \tag{12}$$

由关系式(5)和(7),**B** 和 **E** 可由 **A** 和ϕ两函数得出,**A** 和ϕ分别称为**磁矢势**和**电标势**。**A** 和ϕ满足的关系式(10)叫做**洛伦兹条件**。可以指出,这个条件同连续方程 § 1.1(5)

$$\dot{\rho} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0 \tag{13}$$

是协调一致的。

需要注意,(11),(12)和(10)三式并没有惟一地确定 **A** 和ϕ。因为,如给 **A** 加上矢量 grad χ,其中χ 为任意,**B** 将保持不变;而如若同时再把ϕ换成$\phi - \dot{\chi}/c$,**E** 也将保持不变。换句话说,**B** 和 **E** 在变换

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad}\chi \tag{14a}$$

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c}\dot{\chi} \tag{14b}$$

之下是不变的。由(10)和(14)两式,

$$\operatorname{div}\mathbf{A}' + \frac{1}{c}\dot{\phi}' - \left(\nabla^2\chi - \frac{1}{c^2}\ddot{\chi}\right) = 0 \tag{15}$$

因此,如果对χ 加以下列条件:

$$\nabla^2\chi - \frac{1}{c^2}\ddot{\chi} = 0 \tag{16}$$

则 **A**′和ϕ'也将满足洛伦兹关系。

方程(14),附加以条件(16)式,表示了所谓**规范变换**。规范变换可用来简化场矢表达式。例如,在电荷密度 ρ 为零的区域里,ϕ满足齐次波动方程

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\ddot{\phi} = 0 \tag{17}$$

这时可选择χ,使标势ϕ为零。按照(14b)和(16)两式,这只须取

$$\chi = c\int\phi\,\mathrm{d}t \tag{18}$$

于是单从矢势 **A**[①] 即可导出场 **B** 和 **E**,关系式如下(取消 **A** 上的一撇):

$$\mathbf{B} = \operatorname{curl}\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}} \tag{19}$$

而洛伦兹条件这时化为

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0 \tag{20}$$

2.1.2 推迟势

现在讨论矢势和标势的非齐次波动方程(11)和(12)的解[服从于关系式(10)],并首先证

① 方程(19)用三个标量波函数(**A** 的三个笛卡儿分量)表出真空中无电荷区中的场。然而,由于(20)式的关系,这三个标量波函数不是独立的。可以证明,在这种区域中,场确实单单从两个实标量波函数即可导出[例如,见 S. A. Schelkunoff, *Electromagnetic Waves* (New York, Van Nostrand, 1943) p. 382; H. S. Green and E. Wolf, *Proc. Phys. Soc.*, A, **66** (1953), 1129; A. Nisbet, *Proc. Roy. Soc.*, A, **231** (1955), 251]。

明，这些方程为下列函数所满足：

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},\ t)=\frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',\ t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}V' \tag{21}$$

$$\phi(\mathbf{r},\ t)=\int\frac{\rho(\mathbf{r}',\ t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}V' \tag{22}$$

式中

$$R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2} \tag{23}$$

是 $\mathbf{r}(x,y,z)$点到 $\mathbf{r}'(x',y',z')$点体积元 $\mathrm{d}V'$的距离，而积分遍及整个空间。

为证明(22)式满足标势的非齐次波动方程，设想以 $\mathbf{r}$ 点为中心，以 a 为半径作一小球，而把(22)式分成两部分：

$$\phi=\phi_1+\phi_2 \tag{24}$$

其中 ϕ_1 代表球内地区对积分的贡献，而 ϕ_2 代表其余空间的贡献。因为对于球外每一点 $\mathbf{r}'(x',y',z')$，$R\neq 0$，故可在积分号下对 ϕ_2 进行微商。通过一步步计算即可证明，ϕ_2 满足齐次波动方程

$$\nabla^2\phi_2-\frac{1}{c^2}\ddot{\phi}_2=0 \tag{25}$$

这原应如此，因为 ϕ_2 系由一组球面波叠加组成[见 §1.3(12)]。ϕ_1 情况则须另行处理，因为被积函数在球心 $R=0$ 有一奇异点。

可以注意，如果使小球半径足够小，就能让(假设 ρ 是 $\mathbf{r}$ 和 t 的连续函数)球内所有各点 $\mathbf{r}'$ 的 $\rho(\mathbf{r}',t-R/c)$和球心的 $\rho(\mathbf{r},t)$之差小于任何预定值。因此，当半径 a 趋向于零时，$\nabla^2\phi_1$ 将越来越接近一个电荷密度为 ρ 的均匀带电球体的静电势，即当 a 足够小时，

$$\nabla^2\phi_1=-4\pi\rho(\mathbf{r},\ t) \tag{26}$$

又，当 $a\to 0$ 时，$\ddot{\phi}_1\to 0$。因为，如果 a 足够小，$\ddot{\phi}_1$ 就可写成

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}_1&=\ddot{\rho}(\mathbf{r},\ t)\int_{R\leqslant a}\frac{\mathrm{d}V'}{R}\\&=4\pi\ddot{\rho}\int_0^a R\,\mathrm{d}r\\&=2\pi a^2\ddot{\rho}\end{aligned} \tag{27}$$

而此值随 a 趋向于零，因此由(24)～(26)式得到，当 $a\to 0$ 时，

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\ddot{\phi}=\nabla^2(\phi_1+\phi_2)-\frac{1}{c^2}(\ddot{\phi}_1+\ddot{\phi}_2)\to-4\pi\rho(\mathbf{r},\ t) \tag{28}$$

所以(22)式满足标势的非齐次波动方程。以完全类似的方式可以证明，(21)式的各个笛卡儿分量是相应标量波动方程的一个解，这个标量波动方程的非齐次项含的不是 ρ，而是 $\mathbf{j}/c$ 的相应分量。因此，(21)式满足矢势的非齐次波动方程。此外，由于连续方程(13)，这些解也满足洛伦兹关系式(10)。

(21)和(22)两式有一个简单的物理解释。它们表明，$\mathbf{A}$ 和 ϕ 可以看成是由空间各个体积元的贡献所产生，其中体积元 $\mathrm{d}V'$ 对 $\mathbf{A}$ 和 ϕ 的贡献分别为

$$\frac{1}{c}\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} \quad \text{和} \quad \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R/c)}{R}$$

这里 R/c 正好是光从 $\mathbf{r}'$ 点传播到 $\mathbf{r}$ 点所需的时间,所以每个贡献必须在前这个时间离开体积元才能在规定时间 t 到达观察点。由于这个原因,人们把(21)和(22)两式叫做**推迟势**①。

(21)和(22)两式代表波动方程(11)和(12)的一个特解,即同给定电流和给定电荷相关联的解。(11)和(12)两式的通解由这个特解加上齐次波动方程

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{A}} = 0 \tag{29}$$

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\ddot{\phi} = 0 \tag{30}$$

的通解(仍旧要服从洛伦兹条件)而得到。

2.2 极化和磁化

2.2.1 用极化强度和磁化强度表示矢势和标势

在第 1 章中,对场的研究是借助于物质关系式 $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$。这些关系式的含义是:场 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 在物质中每一点产生某些位移 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{B}$,这些位移和它们成正比。现在把这些"乘式关系"放在一边,而借助下列"加式关系"来描写物质和场的相互作用:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \tag{1}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M} \tag{2}$$

式中 $\mathbf{P}$ 叫做**电极化强度**,$\mathbf{M}$ 叫做**磁极化强度**或**磁化强度**。这两个量的物理意义稍后将予说明;这里我们仅仅看到,$\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{M}$ 在真空中都等于零,因此这些量简单而直观地代表着物质对场的影响。

假定物质是不导电的($\sigma = 0$),并且只考虑无电流无电荷($\rho = \mathbf{j} = 0$)地区中的场。借助(1)和(2)两式从麦克斯韦方程 § 1.1(1) ~ § 1.1(4)中消去 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{H}$,得到

$$\operatorname{curl}\mathbf{B} - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{c}\tilde{\mathbf{j}} \tag{3}$$

$$\operatorname{curl}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}} = 0 \tag{4}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\tilde{\rho} \tag{5}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \tag{6}$$

式中**自由电流密度** $\tilde{\mathbf{j}}$ 和**自由电荷密度** $\tilde{\rho}$ 的定义如下:

---

① 从方程上看,把解设成**超前势**形式(以 $t + R/c$ 代替 $t - R/c$)也是可能的。超前势代表收拢来的球面波的效应,而推迟势代表发出去的球面波的效应。

如果牺牲某种形式上的对称性,我们可以只注意推迟势形式的解。当从热力学方面来考虑物质和辐射的相互作用时,则可看到物理状态有一不对称性,它支持了这一选择[见 M. Born, *Natural Philosophy of Cause and Chance* (Oxford, Clarendon Press, 1949; New York, Dover Publications, 1964),特别是第 26 页]。

$$\tilde{\mathbf{j}} = \dot{\mathbf{P}} + c\,\mathrm{curl}\,\mathbf{M} \tag{7}$$

$$\tilde{\rho} = -\mathrm{div}\,\mathbf{P} \tag{8}$$

方程(3)~(6)**在形式上等同于前节所讨论的真空中的场方程**。因此,和真空情况中一样,可以引进一个矢势 $\mathbf{A}$ 和一个标势 ϕ,使得

$$\mathbf{B} = \mathrm{curl}\,\mathbf{A} \tag{9}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}} - \mathrm{grad}\,\phi \tag{10}$$

此外,如果同前,再引进洛伦兹条件

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} + \frac{1}{c}\dot{\phi} = 0 \tag{11}$$

则对照 § 2.1(11)和 § 2.1(12)两式,即可写出 $\mathbf{A}$ 和 ϕ 的方程如下:

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{A}} = -\frac{4\pi}{c}\tilde{\mathbf{j}} \tag{12}$$

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\ddot{\phi} = -4\pi\tilde{\rho} \tag{13}$$

条件(11)式与方程(12)和(13)是一致的,只要

$$\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} + \mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{j}} = 0 \tag{14}$$

以(7)和(8)两式代入,并利用矢量恒等式 $\mathrm{div}\,\mathrm{curl} \equiv 0$,即可看到此式可恒等满足。

方程(12)和(13)的解可以用极化强度和磁化强度表出。从 § 2.1(21)和 § 2.1(22)两式出发,将(7)和(8)两式代入,得到

$$\phi = -\int \frac{1}{R}[\mathrm{div}'\,\mathbf{P}]\,\mathrm{d}V' \tag{15}$$

$$\mathbf{A} = \int \frac{1}{R}\left[\mathrm{curl}'\,\mathbf{M} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{P}}\right]\mathrm{d}V' \tag{16}$$

式中微分算符 div' 和 curl' 是对体积元 $\mathrm{d}V'$ 所在积分变点 $\mathbf{r}'$ 的坐标(x', y', z')来运算的,而方括号表示**推迟值**,意指在各括号内自变量 t 须以 $t - R/c$ 代替。

通过一步步计算,可证明下列二恒等式成立:

$$\mathrm{div}'\,[\mathbf{P}] = [\mathrm{div}'\,\mathbf{P}] + \frac{1}{cR}\mathbf{R}\cdot[\dot{\mathbf{P}}] \tag{17a}$$

$$\mathrm{curl}'\,[\mathbf{M}] = [\mathrm{curl}'\,\mathbf{M}] + \frac{1}{cR}\mathbf{R}\times[\dot{\mathbf{M}}] \tag{17b}$$

式中

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' \tag{18}$$

因此(15)和(16)两式可以写为

$$\phi = -\int\left\{\frac{1}{R}\,\mathrm{div}'\,[\mathbf{P}] - \frac{1}{cR^2}\mathbf{R}\cdot[\dot{\mathbf{P}}]\right\}\mathrm{d}V' \tag{19}$$

$$\mathbf{A}=\int\left\{\frac{1}{R}\operatorname{curl}'[\mathbf{M}]-\frac{1}{cR^2}\mathbf{R}\times[\dot{\mathbf{M}}]+\frac{1}{cR}[\dot{\mathbf{P}}]\right\}\mathrm{d}V' \tag{20}$$

从上面各个积分的第一项可以分出一个界面积分。为此,利用矢量恒等式

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{R}\mathbf{P}\right)=\frac{1}{R}\operatorname{div}\mathbf{P}+\mathbf{P}\cdot\operatorname{grad}\frac{1}{R} \tag{21a}$$

$$\operatorname{curl}\left(\frac{1}{R}\mathbf{M}\right)=\frac{1}{R}\operatorname{curl}\mathbf{M}-\mathbf{M}\times\operatorname{grad}\frac{1}{R} \tag{21b}$$

取一任意有限域,对这些关系式进行积分,并应用高斯定理,从而得到

$$\int\frac{1}{R}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{P})\,\mathrm{d}S=\int\left\{\frac{1}{R}\operatorname{div}\mathbf{P}+\mathbf{P}\cdot\operatorname{grad}\frac{1}{R}\right\}\mathrm{d}V \tag{22a}$$

$$\int\frac{1}{R}(\mathbf{n}\times\mathbf{M})\,\mathrm{d}S=\int\left\{\frac{1}{R}\operatorname{curl}\mathbf{M}-\mathbf{M}\times\operatorname{grad}\frac{1}{R}\right\}\mathrm{d}V \tag{22b}$$

左边的积分遍及域的整个界面,$\mathbf{n}$ 是界面的单位外向法线。

现在假定物质(即 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{M}$ 不等于零的空间区域)保持在一个有限的闭合面内。如果这时积分(19)和(20)遍及该闭合面内的整个体积,则(22)式中的面积分为零,(19)和(20)两式遂可表成如下形式:

$$\phi=\int\left\{[\mathbf{P}]\cdot\operatorname{grad}'\frac{1}{R}+\frac{1}{cR^2}\mathbf{R}\cdot[\dot{\mathbf{P}}]\right\}\mathrm{d}V' \tag{23}$$

$$\mathbf{A}=\int\left\{[\mathbf{M}]\times\operatorname{grad}'\frac{1}{R}-\frac{1}{cR^2}\mathbf{R}\times[\dot{\mathbf{M}}]+\frac{1}{cR}[\dot{\mathbf{P}}]\right\}\mathrm{d}V' \tag{24}$$

从(23)和(24)两式能察及 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{M}$ 的物理意义。为了说明此点,考虑这样一种情况,其中 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{M}$ 仅在 $\mathbf{r}_0(x_0,y_0,z_0)$ 点的一个无限小的体积元内不为零,而在其他各处皆为零。这个假定在形式上可借助狄拉克 δ 函数(见附录 D)表出:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}',t)=\mathbf{p}(t)\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0) \tag{25}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}',t)=\mathbf{m}(t)\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0) \tag{26}$$

(23)和(24)两式这时变成

$$\phi=[\mathbf{p}]\cdot\operatorname{grad}_0\frac{1}{R}+\frac{1}{cR^2}\mathbf{R}\cdot[\dot{\mathbf{p}}] \tag{27}$$

$$\mathbf{A}=[\mathbf{m}]\times\operatorname{grad}_0\frac{1}{R}-\frac{1}{cR^2}\mathbf{R}\times[\dot{\mathbf{m}}]+\frac{1}{cR}[\dot{\mathbf{p}}] \tag{28}$$

现在式中

$$\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\qquad R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \tag{29}$$

而 grad_0 意指算符 grad 是对 $\mathbf{r}_0$ 点的坐标 x_0,y_0,z_0 来运算的。

方程(27)和(28)有一个简单的解释。考虑两个固定电荷 $-\mathrm{e}$ 和 $+\mathrm{e}$ 的静电势,这两个电荷所在之点相对于某固定点 $Q_0(\mathbf{r}_0)$ 的位置分别是 $-\frac{1}{2}\mathbf{a}$ 和 $\frac{1}{2}\mathbf{a}$。两个电荷产生的库伦势 $\phi(\mathbf{R})$ 为(见图 2.1)

$$\phi = \frac{e}{R_2} - \frac{e}{R_1} \tag{30}$$

如果 a 足够小，则可按 $\mathbf{a}$ 分量的幂级将 $1/R_2$ 展开，从而得到

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} + \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{R_1} + \cdots \tag{31}$$

式中算符 grad 是对电荷 $-e$ 所在点的坐标来运算的。如果略去(31)式中的各高次项，则(30)式变成

$$\phi = e\mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{R_1} = e\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{R}_1}{R_1^3} \tag{32}$$

现在假设 a 逐渐减小而同时 e 无限增大，使得 $e\mathbf{a}$ 趋近一定值 $\mathbf{p}$：

$$\lim_{a \to 0} e\mathbf{a} = \mathbf{p} \tag{33}$$

这时 R_1 趋近 R，因而(32)式在极限下变成为

$$\phi = \mathbf{p} \cdot \operatorname{grad}_0 \frac{1}{R} \tag{34}$$

此式就是(27)式在 $\mathbf{p}$ 与时间无关这一特别情况下的结果。

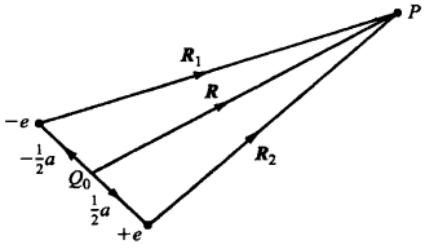


图 2.1　电偶极子电势计算中所用的符号

如果这两个电荷随时间改变，但在各个时刻仅仅符号不同，则(30)式易为

$$\phi = \frac{e(t - R_2/c)}{R_2} - \frac{e(t - R_1/c)}{R_1} \tag{35}$$

通过同样的取极限步骤，得到

$$\phi = [\mathbf{p}] \cdot \operatorname{grad}_0 \frac{1}{R} + \frac{1}{cR^2}\mathbf{R} \cdot [\dot{\mathbf{p}}]$$

这正是(27)式。这样，(23)式可以解释成是**一个每单位体积电矩为 P 的电偶极子分布**所产生的标势。(28)式中的最后一项可以证明是这些偶极子所产生的磁势。

同样可以证明，(28)式是一个磁矩为 $\mathbf{m}(t)$ 的磁偶极子的矢势，当然，这种磁偶极子等效于一个无限小的闭合电路，其面积 A 与 $\mathbf{m}$ 垂直，载有电流 $c\mathbf{m}/A$[①]。因此，(24)式中的前两项可以解释成是**一个每单位体积磁矩为 M 的磁偶极子分布**所产生的矢势。

① 关于安培无限小电流的讨论，可见任何标准电学教本，或 Max Born, *Optik* (Berlin, Springer, 1933, reprinted 1965), pp. 305—306。

2.2.2 赫兹矢量

可以不用矢势 **A** 和标势 ϕ,而借助另一对同 **P** 和 **M** 关系要简单得多的势函数 $\mathbf{\Pi}_e$ 和 $\mathbf{\Pi}_m$ 来表示场。它们通常称为**赫兹矢量**或**极化势**[①],可由下列关系引进之:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\dot{\mathbf{\Pi}}_e + \operatorname{curl}\mathbf{\Pi}_m \tag{36}$$

$$\phi = -\operatorname{div}\mathbf{\Pi}_e \tag{37}$$

可见,$\mathbf{\Pi}_e$,$\mathbf{\Pi}_m$ 和 **A**,ϕ的数学关系,与 **P**,**M** 和 $\tilde{\mathbf{j}}/c$、$\tilde{\rho}$ 的数学关系相同。

洛伦兹条件现在自动就满足了,而 **A** 和ϕ的方程(12)和(13)也将得到满足 ,只要 $\mathbf{\Pi}_e$ 和 $\mathbf{\Pi}_m$ 是下列非齐次波动方程的解:

$$\nabla^2\mathbf{\Pi}_e - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{\Pi}}_e = -4\pi\mathbf{P} \tag{38}$$

$$\nabla^2\mathbf{\Pi}_m - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{\Pi}}_m = -4\pi\mathbf{M} \tag{39}$$

按照 2.1 节,这两个方程的特解可表成推迟势形式如下:

$$\mathbf{\Pi}_e = \int \frac{[\mathbf{P}]}{R}\,\mathrm{d}V' \tag{40}$$

$$\mathbf{\Pi}_m = \int \frac{[\mathbf{M}]}{R}\,\mathrm{d}V' \tag{41}$$

场矢量可直接用 $\mathbf{\Pi}_e$ 和 $\mathbf{\Pi}_m$ 通过简单微商来表出。由(9)和(36)两式,有

$$\mathbf{B} = \operatorname{curl}\left(\frac{1}{c}\dot{\mathbf{\Pi}}_e + \operatorname{curl}\mathbf{\Pi}_m\right) \tag{42}$$

而由(10)、(36)和(37)三式,有

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\dot{\mathbf{\Pi}}_e + \operatorname{curl}\mathbf{\Pi}_m\right) + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}_e \\ &= \operatorname{curl}\left(-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{\Pi}}_m + \operatorname{curl}\mathbf{\Pi}_e\right) + \left(\nabla^2\mathbf{\Pi}_e - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{\Pi}}_e\right)\end{aligned} \tag{43}$$

其中利用了恒等式 $\operatorname{grad}\operatorname{div} \equiv \operatorname{curl}\operatorname{curl} + \nabla^2$。按(38)式,第二个括弧里的项等于 $-4\pi\mathbf{P}$;因此,利用(1)式即可得到

$$\mathbf{D} = \operatorname{curl}\left(-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{\Pi}}_m + \operatorname{curl}\mathbf{\Pi}_e\right) \tag{44}$$

---

① $\mathbf{\Pi}_e$ 和 $\mathbf{\Pi}_m$ 的变换性质与 **E** 和 **B**(或 **D** 和 **H**)相同,即它们构成一个 **6-矢量**(二秩反对称张量)。原先,赫兹引进了某一势函数来表示一个振动偶极子的电磁场[H. Hertz, *Ann. d. Physik*., **36**(1889),1。],$\mathbf{\Pi}_e$ 和 $\mathbf{\Pi}_m$ 乃是这一势函数的推广。赫兹势的矢量性质系由 A. Righi, *Nuovo Cimento*, **2**(1901),104 指出,他并且引进了对应的磁势。赫兹矢量的一般理论和相关规范变换则归于 F. Kottler, *Ann. d. Physik*(4), **71**(1923),462 和 *Progress in Optics*, Vol. 6, ed. E. Wolf (Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1967), p. 331(Appendix B)。亦见 A. Nisbet, *Proc. Roy. Soc.*, A **231**(1955), 250; W. H. McCrea, *ibid*., **240** (1957),447。

最后，由(2)、(42)和(39)三式，得出

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \operatorname{curl}\left(\frac{1}{c}\dot{\mathbf{\Pi}}_e + \operatorname{curl}\mathbf{\Pi}_m\right) + \left(\nabla^2\mathbf{\Pi}_m - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{\Pi}}_m\right)\\ &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{\Pi}}_m + \operatorname{curl}\mathbf{\Pi}_e\right) + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}_m\end{aligned} \tag{45}$$

2.1 节中已经证明，当场给定时，与它相关联的势——**A** 和 ϕ 不是惟一的；从可能的一对 $(\mathbf{A},\phi)$ 通过规范变换 § 2.1(14) 而导出的任何其他一对 $(\mathbf{A}',\phi')$，都将代表同一个场。赫兹矢量也不是惟一的。它们可以经受下列变换而使场矢量同时保持不变：

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{\Pi}'_e &= \mathbf{\Pi}_e + \operatorname{curl}\mathbf{F} - \operatorname{grad}G,\\ \mathbf{\Pi}'_m &= \mathbf{\Pi}_m - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{F}},\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

式中矢函数 **F** 和标函数 G 是齐次波动方程

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{F} - \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{F}} &= 0,\\ \nabla^2 G - \frac{1}{c^2}\ddot{G} &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

的任何解。将(46)式代入(36)和(37)两式，可立即证明场矢量在变换(46)式之下不变。**A** 和 ϕ 这时依照 § 2.1(14) 被变换成 **A**′和 ϕ'，其中

$$\chi = -\frac{1}{c}\dot{G}$$

此外，把(46)式代入(38)和(39)两式，可证 $\mathbf{\Pi}'_e$ 和 $\mathbf{\Pi}'_m$ 也满足赫兹矢量的非齐次波动方程。

2.2.3　一个线性电偶极子的场

为了后面的应用，现在考虑一个线性电偶极子在真空中产生的场，写下其场方程的完全显式解。设此电偶极子位于 $\mathbf{r}_0$ 点，并沿着单位矢量 **n** 所规定的固定方向振动。这样一个偶极子可以用一个电极化强度

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},\ t) = p(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} \tag{48}$$

来表征，其中 p 是一个时间函数，δ 是狄拉克 delta 函数。一般的偶极子，其取向 **n** 也是时间的函数，这种偶极子等效于三个线性偶极子，它们的矩矢量朝着三个相互垂直的方向。

按照(40)式，与(48)式相关联的电赫兹矢量是

$$\mathbf{\Pi}_e = \frac{p(t - R/c)}{R}\mathbf{n} \tag{49}$$

式中 R 是 **r** 点离 $\mathbf{r}_0$ 点的距离。

因为 $\mathbf{\Pi}_m = 0$，而 $\mathbf{\Pi}_e$ 满足(除在原点外)真空的齐次波动方程，所以(42) ~ (45)式变成

$$\mathbf{E} = \mathbf{D} = \operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{\Pi}_e \tag{50}$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{H}=\frac{1}{c}\operatorname{curl}\dot{\mathbf{\Pi}}_e \tag{51}$$

利用恒等式 curl curl≡grad div $-\nabla^2$ 和关系式$\nabla^2\mathbf{\Pi}_e=(1/c^2)\ddot{\mathbf{\Pi}}_e$,(50)式可改写成如下形式:

$$\mathbf{E}=\mathbf{D}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}_e-\frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{\Pi}}_e \tag{52}$$

由(49)式,经过简单计算,可得

$$\operatorname{div}\mathbf{\Pi}_e=-\left\{\frac{[p]}{R^3}+\frac{[\dot{p}]}{cR^2}\right\}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{R}),$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}_e=\left\{\frac{3[p]}{R^5}+\frac{3[\dot{p}]}{cR^4}+\frac{[\ddot{p}]}{c^2R^3}\right\}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{R})\mathbf{R}-\left\{\frac{[p]}{R^3}+\frac{[\dot{p}]}{cR^2}\right\}\mathbf{n},$$

$$\operatorname{curl}\mathbf{\Pi}_e=\left\{\frac{[p]}{R^3}+\frac{[\dot{p}]}{cR^2}\right\}(\mathbf{n}\times\mathbf{R})$$

同前,式中方括号表示推迟值。代入(52)和(51)两式,就得到所求的场矢量公式:

$$\mathbf{E}=\mathbf{D}=\left\{\frac{3[p]}{R^5}+\frac{3[\dot{p}]}{cR^4}+\frac{[\ddot{p}]}{c^2R^3}\right\}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{R})\mathbf{R}-\left\{\frac{[p]}{R^3}+\frac{[\dot{p}]}{cR^2}+\frac{[\ddot{p}]}{c^2R}\right\}\mathbf{n} \tag{53}$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{H}=\left\{\frac{[\dot{p}]}{cR^3}+\frac{[\ddot{p}]}{c^2R^2}\right\}(\mathbf{n}\times\mathbf{R}) \tag{54}$$

以后也要用到球面极坐标的 **E**,**H** 表达式。设以 **n** 方向为 z 轴(见图 2.2),并以 $\mathbf{i}_R$,$\mathbf{i}_\theta$ 和 $\mathbf{i}_\psi$ 分别代表 R,θ 和 ψ 增大方向上的单位矢量,则

$$\begin{aligned}&\mathbf{R}=R\mathbf{i}_R,\qquad \mathbf{n}=(\cos\theta)\mathbf{i}_R-(\sin\theta)\mathbf{i}_\theta,\\&(\mathbf{n}\cdot\mathbf{R})=R\cos\theta,\qquad (\mathbf{n}\times\mathbf{R})=(R\sin\theta)\mathbf{i}_\psi\end{aligned} \tag{55}$$

并由(53)和(54)两式得到

$$\mathbf{E}=E_R\mathbf{i}_R+E_\theta\mathbf{i}_\theta,\qquad \mathbf{H}=H_\psi\mathbf{i}_\psi \tag{56}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}E_R&=2\left(\frac{[p]}{R^3}+\frac{[\dot{p}]}{cR^2}\right)\cos\theta,\\E_\theta&=\left(\frac{[p]}{R^3}+\frac{[\dot{p}]}{cR^2}+\frac{[\ddot{p}]}{c^2R}\right)\sin\theta,\\H_\psi&=\left(\frac{[\dot{p}]}{cR^2}+\frac{[\ddot{p}]}{c^2R}\right)\sin\theta.\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

这样,电矢量处在通过偶极子轴的子午面上,而磁矢量与此面垂直。

特别重要的是,场所在地区距离偶极子非常远,以致上列各式中除 $1/R$ 项以外,其他均可略去。这个**波带**(或**辐射带**)由下列条件来表征:

$$R\gg c\left|\frac{p}{\dot{p}}\right|,\qquad R\gg c\left|\frac{\dot{p}}{\ddot{p}}\right| \tag{58}$$

在这个区域内,

$$E_\theta \approx H_\psi \approx \frac{[\ddot{p}]}{c^2 R}\sin\theta \tag{59}$$

其他分量可以略去。因此，在波带中，**E** 和 **H** 大小相等，方向相互垂直，并同垂直于径矢 **R**，而 **R** 现在和坡印廷矢量方向一致。因此，在这个波带内，线性电偶极子场的结构同平面波的相似。不过，在各“波面”(以 $\mathbf{r}_0$ 点为中心的球面)上，场矢量现在是逐点改变的，其大小从赤道到两极逐渐减小，至振子轴方向而为零。因此偶极子在其轴的方向上不发射能量。

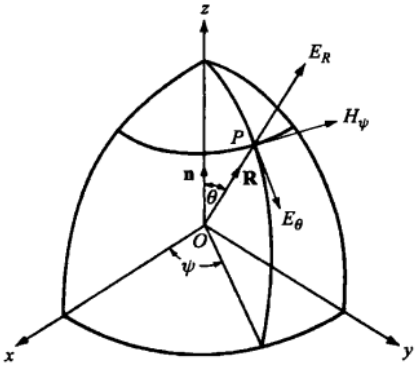


图 2.2　线性电偶极子的计算，偶极子矩矢量沿 z 轴

现在计算每秒通过各球波面所辐射的能量。这用坡印廷矢量的大小 S 对此球面进行积分即可求得。在波带内，

$$S = \frac{c}{4\pi}|\mathbf{E}\times\mathbf{H}| = \frac{c}{4\pi}|E_\theta H_\psi| = \frac{[\ddot{p}]^2}{4\pi c^3 R^2}\sin^2\theta \tag{60}$$

因此每秒通过球面所辐射的能量总计为($\mathrm{d}\sigma$ 代表球面元)

$$\begin{aligned}\int S\,\mathrm{d}\sigma &= \frac{[\ddot{p}]^2}{4\pi c^3 R^2}\int_0^\pi \sin^2\theta\cdot 2\pi R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{2[\ddot{p}]^2}{3c^3}\end{aligned} \tag{61}$$

现考虑一特别情况，即 $p(t)$ 是正弦周期函数，其角频率为 ω：

$$p(t) = p_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{62}$$

式中 p_0 是一复常数，而根据约定，(62)式的实部代表 p。(58)式的两个条件现在简化成单一条件

$$R \gg \lambda/2\pi \qquad (\lambda = 2\pi c/\omega) \tag{63}$$

而由(59)式得到，波带中场的非零分量为

$$E_\theta = H_\psi \approx -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p_0\sin\theta\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-R/c)}}{R} \tag{64}$$

根据约定，这里应取右边式子的实部。在波带中，每秒通过球面单位面积的能量是

$$S=\frac{c}{4\pi}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4\frac{|p_0|^2}{R^2}\sin^2\theta\cos^2[\omega(t-R/c)-\alpha] \tag{65}$$

式中 α 是 p_0 的位相。

对一个比周期 $T=2\pi/\omega$ 大得多的时间间隔取时间平均,则(65)式化为

$$\langle S\rangle=\frac{|p_0|^2}{8\pi R^2}\frac{\omega^4}{c^3}\sin^2\theta \tag{66}$$

因此每秒通过整个球面的能量(时间平均值)是

$$\int\langle S\rangle\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{3}\frac{|p_0|^2\omega^4}{c^3} \tag{67}$$

2.3 洛伦兹-洛伦茨公式和初等色散理论[①]

2.3.1 介电极化率和磁极化率

用极化和磁化的观念说明电势,在物质的原子理论中极为重要。从这种理论的观点看来,联系 **E** 同 **D**、**P**,**H** 同 **B**、**M** 的那两个"加式关系" §2.2(1)和 §2.2(2),比物质方程的"乘式关系"[§1.1(10)和 §1.1(11)]具有更直接的物理意义。

在原子理论中,物质被看成是由处于真空之中、相互作用着的粒子(原子和分子)所组成。这些物理客体产生的场,在物质内部局部变化甚大。这个内场将被任何外加场所调变;这时,通过对物质内总场取平均,可推导出物质的性质。只要取平均的区域比粒子的线度大得多,每个粒子的电磁性质就可以简单地用一个电偶极子和一个磁偶极子来描写;这时次级场就是这些偶极子产生的场(具有推迟效应)。这其实正是我们刚才把物质看做是一个连续分布同场相互作用时所描述的情况:它相当于原子理论的一级近似(用于缓慢的空间变化)。在这一近似下,当场足够弱时[②],可假定 **P** 和 **M** 分别与 **E** 和 **H** 成正比:

$$\mathbf{P}=\eta\mathbf{E},\qquad \mathbf{M}=\chi\mathbf{H} \tag{1}$$

因子 η 叫做**介电极化率**,χ 叫做**磁极化率**,后者是实用磁学里通用的一个概念。以(1)式代入 §2.2(1)和 §2.2(2),并同物质方程 §1.1(10)和 §1.1(11)相比较,即可看到介电常数 ε 和磁导率 μ 分别与介电极化率和磁极化率有下列关系:

$$\varepsilon=1+4\pi\eta,\qquad \mu=1+4\pi\chi \tag{2}$$

通过(2)式,"乘式"和"加式"两种处理方法在形式上即完全等效。但是对各个常数的这种形式比较,并没有利用到微观结构的任何结果。虽然涉及微观理论结果的详细讨论已越出本书的范围,但介绍一些有关的概念和公式亦将有益。依靠这些概念和公式,我们对后面 2.4 节引进的那两个积分方程(代替常用的麦克斯韦微分方程)的物理内容,将可获得一个比较清楚的了解。

---

① 这一节,我们离开了我们演绎的处理方法,以便在表述那些代替麦克斯韦微分方程的积分方程(将引进于 2.4 节)之前,能对各现象获得一个比较清楚的了解。这节着重说明而不求严格,因为严格的论述要涉及大部分微观物质理论,将远远超出本书的合理界限。

② 从原子水准来衡量,一个场的强度如果能使其中一个电子的静电能在原子直径距离上改变之量接近原子电离电势量级,即达到每厘米数百万伏时,这个场就是强场。实际材料在小得多的场强下即已发生电击穿。

最简单的假设，向微观理论进入一步的，是把物质看做由某种可极化的物理客体——分子——所组成，因而这些客体在外场作用下就带有了电矩和磁矩。在一级近似下，可以假定这些矩的分量是场的分量的线性函数；一般，矩矢的方向和场的方向并不重合。这个假设有许多结果，这里只能简略加以研究。我们将限于讨论各向同性的非磁性物质，并将首先考查在一个由同样分子组成的物质中，电学常数对密度的依赖关系。我们还将研究折射率对频率的依赖关系。所作论证都只能大加简化。但后面 2.4 节将对主要结果——洛伦兹-洛伦茨公式给出一个严格的、虽然是比较形式的推导。

2.3.2　有效场

首先，必须把作用在一个分子上的**有效场 E′，H′**和**平均场**即**宏观场 E，H** 加以区别，后者是对包括大量分子的区域取平均而得到的场。这两个场之差是由分子间隙造成的，因此它依赖于每单位体积的分子数(分子数密度 N)。

为估计 **E′**和 **E** 之差，现考虑一个特别的分子，并设想以它为中心作一小球，但球的半径比分子的线度要大得多。我们将分别考虑球内物质和球外物质对中心分子所产生的作用。

在确定球**外**物质的作用时，完全可以忽略物质的分子结构，而把它作为连续体处理。于是可以假定，在球外，平均电场产生的极化强度 **P** 是常量。至于球**内**分子的作用，我们将假定，它们在中心分子上不产生任何合场，这可就一些重要的特别情况(包括无规分布情况)加以证明。因此，可以把中心分子看做是处在这样一个球区之中：区内是真空，区外是被均匀极化的媒质。然后，我们须确定这个构型的电势 ϕ，它是球形突变面上自由电荷产生的电势，因为 **P** 值在面内为零，在面外为常数。

为确定 ϕ，引入“互补”构型，即一个四周为真空所包围的均匀极化小球，来考虑它的电势 $\tilde{\phi}$。这两个构型合在一起，是一个均匀极化物质，无边无界。因此，边界产生的电势为零，因而

$$\phi + \tilde{\phi} = 0 \tag{3}$$

现在电势 $\tilde{\phi}$ 由 §2.2(23)立即可得(令其中 **P** 为常数)。由此

$$\phi = -\tilde{\phi} = -\mathbf{P} \cdot \int \operatorname{grad}' \frac{1}{R} \, \mathrm{d}V' \tag{4}$$

因为

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

所以(4)式中 grad′可换成 − grad 即

$$\phi = -\tilde{\phi} = \mathbf{P} \cdot \operatorname{grad} \int \frac{\mathrm{d}V'}{R} = -\mathbf{P} \cdot \operatorname{grad} \phi_0 \tag{5}$$

式中

$$\phi_0 = -\int \frac{\mathrm{d}V'}{R} \tag{6}$$

(6)式可以解释成是一个电荷密度为 − 1 的均匀带电球体的电势。因此它满足泊松方程

$$\nabla^2 \phi_0 = 4\pi \tag{7}$$

同电势(5)式相关联的场强，其各个分量为

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(P_x\frac{\partial \phi_0}{\partial x}+P_y\frac{\partial \phi_0}{\partial y}+P_z\frac{\partial \phi_0}{\partial z}\right)$$

$$=P_x\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}+P_y\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x\partial y}+P_z\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x\partial z} \tag{8}$$

等等。在球心处,由于对称性,

$$\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z\partial x}=0 \tag{9}$$

而

$$\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2} \tag{10}$$

利用(7)式,可知(10)式中各项均等于$4\pi/3$;于是(8)式表明,球外物质对有效场场强的贡献为

$$-\nabla\phi=\frac{4\pi}{3}\mathbf{P} \tag{11}$$

这个场加上平均场 **E**,就是球心地方的总场,它也就是作用在中心分子上的有效场。因此得到

$$\mathbf{E}'=\mathbf{E}+\frac{4\pi}{3}\mathbf{P} \tag{12}$$

对于可磁化物质,$\mathbf{H}'$,**H** 和 **M** 之间有一个相应的关系。然而,因为我们将只讨论非磁性物质,所以总是取 $\mathbf{H}'=\mathbf{H}$。

下一步,必须使极化强度 **P** 同密度建立起关系。

2.3.3 平均极化率:洛伦兹-洛伦茨公式

下面将假定,正如已经解释过的那样,每个分子在场作用下所建立的电偶极矩 **p**,与有效场 $\mathbf{E}'$成正比[①]:

$$\mathbf{p}=\alpha\mathbf{E}' \tag{13}$$

这里假定分子是各向同性的[②];但是,由于我们注意的只是所有可能分子取向的平均效果,所以并不一定要假定各个**单个**分子是各向同性的。因此 α 将被看成是代表**平均极化率**。因为 **p** 的量纲是$[el]$,$\mathbf{E}'$的量纲是$[el^{-2}]$(e = 电荷,l = 长度),故可知 α 的量纲是$[l^3]$,即体积的量纲。

同前,设 N 是每单位体积的分子数,则**每单位体积 P 的总电矩**

$$\mathbf{P}=N\mathbf{p}=N\alpha\mathbf{E}' \tag{14}$$

从(12)和(14)两式消去 $\mathbf{E}'$,得到(1)式的第一式,同时介电极化率获得下列显式表达:

$$\eta=\frac{N\alpha}{1-\frac{4\pi}{3}N\alpha} \tag{15}$$

① 我们只限于讨论所谓无极分子,这种分子没有永偶极矩,即当场不存在时,其矩为零。

② 一般,极化率 α 是一个二秩张量。

把这个 η 再代入(2)式的第一式,就得到介电常数表达式如下:

$$\varepsilon=\frac{1+\frac{8\pi}{3}N\alpha}{1-\frac{4\pi}{3}N\alpha} \tag{16}$$

反过来,从(16)式可得知平均极化率对 ε 和 N,或(如果采用麦克斯韦关系式 $\varepsilon=n^2$)对 n 和 N 的依赖关系:

$$\alpha=\frac{3}{4\pi N}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}=\frac{3}{4\pi N}\frac{n^2-1}{n^2+2} \tag{17}$$

出于奇特的巧合,关系式(17)是由两个几乎同名[①]的科学家——洛伦兹和洛伦茨独立发现的,而且实际上是同时的,因此这个关系式叫做**洛伦兹-洛伦茨公式**。可以看出,这个公式是连接麦克斯韦唯象理论同微观物质理论的一个桥梁。

人们常常不用平均极化率 α 而采用另一个叫做**克分子折射度**的量 A(在单原子物质的情况下,这个量又叫做**原子折射度**)。这个量实质上是一个克分子[②]物质的总极化率,其定义为

$$A=\frac{4\pi}{3}N_m\alpha \tag{18}$$

式中 $N_m=6.02\times10^{23}$ 是阿氏常数[③],即一个克分子中所包含的分子数。设 W 是分子量,ρ 是密度,p 是压力,T 是绝对温度,则克分子体积是

$$\frac{N_m}{N}=\frac{W}{\rho}=\frac{RT}{p} \tag{19}$$

其中应用了玻意耳定律。因此克分子折射度可以写成另一种形式:

$$A=\frac{W}{\rho}\frac{n^2-1}{n^2+2}=\frac{RT}{p}\frac{n^2-1}{n^2+2} \tag{20}$$

此式表明,A 的量纲和数量级是克分子体积。

对于气体,n^2 近于 1,所以

$$\alpha\approx\frac{n^2-1}{4\pi N},\qquad A\approx\frac{W}{\rho}\frac{n^2-1}{3}=\frac{RT}{p}\frac{n^2-1}{3} \tag{21}$$

(20)式给出折射率(对任一特别颜色的光而言)对密度的显依赖关系。当密度改变时,倘若各向同性保持不变,则此式仍应成立。在**气体**情况下,确实看到 n^2-1 和 ρ 非常接近(21)式中第二式所要求的正比关系。而即使在高压下,当 n 和 1 相差已趋可观时,克分子折射

① H. A. Lorentz, *Wiedem. Ann.*, **9**(1880), 641; L. Lorenz, *Wiedem. Ann.*, **11**(1881), 70。
在这之前, R. Clausius, *Mechanische Wärmetheorie*, Vol. 2(Braunschweig, 2nd ed. 1879), p. 62 和 O. F. Mossotti, *Mem. Soc. Sci. Modena*, **14**(1850), 49, 曾分别对静场情况推导出一个类似公式。这些作者假设,原子是小的导电球体,它们在介质中的相互距离比它们的直径大得多;他们试图根据这个假设来解释绝缘体的介电性质,从而导出了下列表达式,用介电常数 ε 表出小球的数密度 g:

$$g=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}$$

② 一个克分子,或称为一个摩尔(mole),是物质的一种计量,当以克为单位时,其重量等于物质的分子量。

③ 这是国际采纳的名字;然而,德文文献中采用的是 Loschmidt **常数**,这是为了纪念首先从实验数据估计出此常数数值的物理学家 Loschmidt。

度也基本保持不变,如表 2.1 所示。当气体凝聚成液体时,发现克分子折射度实际还保持不变(见表 2.2)。

表 2.1 空气在不同压力下和 14.5℃左右的克分子折射度 A(钠 D光)

压力(大气压)	n	A
1.00	1.000 292 9	4.606
42.13	1.012 41	4.661
96.16	1.028 42	4.713
136.21	1.040 27	4.743
176.27	1.052 13	4.772

表 2.2 不同化合物的克分子折射度 A(钠 D 光):n 和 A 两行中记录值第一个是液态的,第二个是蒸气的。蒸气的密度没有给出,而是由已知的氢气密度根据理想气体定律算出

物 质	化学式	W	n	ρ	A
氧	O_2	32	1.221 1.000 271	1.124	4.00 4.05
盐酸	HCl	36.5	1.245 1.000 447	0.95	5.95 6.68
水	H_2O	18	1.334 1.000 249	1.00	3.71 3.72
二硫化碳	CS_2	76	1.628 1.001 47	1.264	21.33 21.99
丙酮	C_3H_6O	58	1.3589 1.001 08	0.791	16.14 16.16

从(20)式可以证明,在良好的近似程度上,两种物质的混合物的克分子折射度,等于各物质的贡献之和。这样,如果使折射度为 A_1 和 A_2 的两种液体混合在一起,并设在单位体积内第一种液体的分子有 N_1 个,第二种有 N_2 个,则混合物的克分子折射度将是

$$A = \frac{N_1A_1 + N_2A_2}{N_1 + N_2} \tag{22}$$

这个结果经鉴定证明,同实验符合得也相当好(见表 2.3)。

表 2.3 水和硫酸混合物在 15℃条件下的克分子折射度(钠 D光)

重量(%)	$\frac{N_1}{N_1+N_2}$	W	n	ρ	A[由(22)式内插得到]	A[由(20)式计算得到]
0	0	18.00	1.3336	0.9991	3.72	3.72
19.98	0.044	21.52	1.3578	1.1381	4.19	4.15
39.76	0.109	26.72	1.3817	1.2936	4.80	4.81
59.98	0.216	35.28	1.4065	1.4803	5.86	5.86
80.10	0.425	52.00	1.4308	1.6955	7.95	7.93
100	1	98	1.4277	1.8417	13.68	13.68

最后，我们看看化合物的克分子折射度 A 对其原子成员的原子折射度的依赖关系。设分子中包含 $\mathcal{N}_1$ 个折射度 A_1 的原子，$\mathcal{N}_2$ 个折射度 A_2 的原子，等等，显然

$$A = \mathcal{N}_1 A_1 + \mathcal{N}_2 A_2 \tag{23}$$

这个公式同实验符合得也挺好，如表 2.5 中所见。各原子成员的折射度列于表 2.4。

表 2.4　各种元素的原子折射度(钠 D光)

元　素	化学式	原子量	A
氢	H	1	1.02
碳	C	12	2.11
氧	O	16	2.01
硫	S	32	8.23
氯	Cl	35.5	5.72

表 2.5　各种化合物的克分子折射度(钠 D光)

物　质	化学式	A[由(20)式计算]	A[由(23)式计算]
盐酸	HCl	6.68	6.74
水	H_2O	3.72	4.05
二硫化碳	CS_2	21.97	18.57
丙酮	C_3H_6O	16.14	14.46

此项结果符合程度之良好，以我们简单的考虑而论，实已超过原所预料。另一方面，在一些情况下，事实上有必要做某些修正；例如，在氮的情况，就必须按照氮原子所进入的化合 物而给以不同的原子折射度。极化率 α 这个量，包括必要的修正在内，是一个十分确定的原 子参量，它亦可用在其他现象，如范德瓦耳斯内聚力、表面附现象等的研究。不过，这些只有用量子力学来处理方能圆满。

2.3.4　初等色散理论

1.2 节中曾经指出，相速以及折射率不能像早先形式考虑所提示的那样，是媒质的常数，而根据事实，这两个量应该同频率有关。折射率随频率的改变，构成了**色散**现象。要对色散进行充分探讨，需要深入研究物质的原子理论，但是利用关于分子结构的一两个基本结果，可以给出一个简化的色散介质模型(主要出自洛伦兹)。

一个分子是由若干重粒子(形成分子的那些原子的原子核)和围绕它们旋转的一些轻粒子(电子)所组成。电子带负电，原子核带正电。在中性分子中，电子的电荷和原子核的电荷正好抵消。然而，正(核的)电荷中心和负(电子的)电荷中心可能不相重合：这种系统就具有一电偶极子，因而称之为**极**分子。为简单起见，这里将不讨论极分子，虽然它们在许多物理现象和化学现象中起着重要作用。

如果一个无极分子被置于电场作用之下，则电子和核发生位移，由而产生一偶极矩。单位体积内所有分子偶极矩的矢量和，实质就是前一节形式上引进的那个极化强度矢量 $\mathbf{P}$。

为了确定极化强度和折射率对场频的依赖关系，必须首先求出各个带电粒子离开它平衡位置的位移 $\mathbf{r}$。可以假定，每个电子受到下列洛伦兹力 $\mathbf{F}$[见 § 1.1(34)]的作用：

$$\mathbf{F}=\mathrm{e}\left(\mathbf{E}'+\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}'\right)$$

式中 e 是电子的电荷,v 是电子的速度。我们将假定,电子的速度比真空中的光速 c 小得多,因而在洛伦兹力表达式中,磁场的贡献可予忽略。严格定出核和电子在电力作用下的有效位移是一个复杂的量子力学问题。然而,有一点看来是合理的,而且实际它也被严格的理论所确认,这就是:电子的行为,在很好的近似上,好像它是被一个准弹性恢复力

$$\mathbf{Q}=-q\mathbf{r}$$

束缚到平衡位置上。因此,设 m 代表电子的质量,则电子的运动方程为

$$m\ddot{\mathbf{r}}+q\mathbf{r}=\mathrm{e}\mathbf{E}' \tag{24}$$

设 ω 为入射场的角频率,

$$\mathbf{E}'=\mathbf{E}_0'\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{25}$$

并以

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{26}$$

作为(24)式的试探解,由而得到所求的稳定解为

$$\mathbf{r}=\frac{\mathrm{e}\mathbf{E}'}{m(\omega_0^2-\omega^2)} \tag{27}$$

式中

$$\omega_0=\sqrt{\frac{q}{m}} \tag{28}$$

叫做**共振(或吸收)频率**。按照(27)式,电子是随入射场的频率来振动的。

每一电子对极化强度各贡献一个电矩 $\mathbf{p}=\mathrm{e}\mathbf{r}$。原子核也会有贡献;但因核的质量比电子的质量大得多,故其贡献在一级近似下可予忽略。另暂假定,一个分子中只有一个有效电子,其共振频率为 ω_0,则总极化强度 $\mathbf{P}$ 为

$$\mathbf{P}=N\mathbf{p}=N\mathrm{e}\mathbf{r}=N\frac{\mathrm{e}^2}{m}\frac{\mathbf{E}'}{(\omega_0^2-\omega^2)} \tag{29}$$

将(29)式同(14)式相比较,得到

$$N\alpha=N\frac{\mathrm{e}^2}{m(\omega_0^2-\omega^2)} \tag{30}$$

从而用原子参量表出"极化率密度"。由此可见,原来 α 这个量并非常数,不是像在(17)式那样,如果 ε 代表的是静介电常数,α 就该是一常量。方便的办法是引进一个与频率有关的介电常数 $\varepsilon(\omega)$,由麦克斯韦关系式 $\varepsilon=n^2$ 来定义,其中 n 是折射率,是一个 ω 的函数——$n(\omega)$。这样,静介电常数就是 $\varepsilon(0)=n^2(0)$;按照(17)式,它对应于极限值 $N\alpha(0)$,而由(30)式,

$$N\alpha(0)=\frac{N\mathrm{e}^2}{m\omega_0^2}$$

如以此代入(16)式,即得到静介电常数 $\varepsilon(0)$。

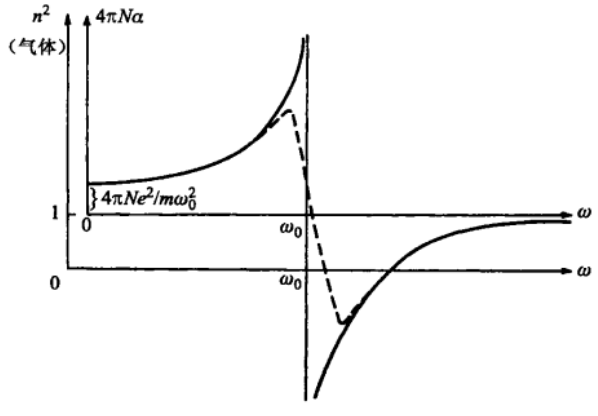
当 $\omega \neq 0$ 时，按照(30)式，函数 $N\alpha(\omega)$ 随 ω 单调增大，而在 $\omega = \omega_0$ 时变成无穷大(共振点)；当 $\omega > \omega_0$ 时，它随着 ω 的增大而从负方趋近于 0。把(30)式代入(17)式，得到折射率对频率的显依赖关系如下：

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{4\pi}{3}\frac{Ne^2}{m(\omega_0^2-\omega^2)} \tag{31}$$

对于气体，n 接近 1，故可令左边分母中的 $n^2+2 \approx 3$，由此得到

$$n^2 - 1 \approx 4\pi N\alpha = \frac{4\pi Ne^2}{m(\omega_0^2-\omega^2)} \tag{32}$$

可见，n 是频率的递增函数。这种色散称为**正常色散**。此外，当 $\omega \leqslant \omega_0$ 时，$n \geqslant 1$，并且 n 随 ω 的增大而趋近于 1(见图 2.3)。



实线：略去了阻尼作用

虚线：考虑了阻尼作用(二纵坐标各代表 n^2 和 $4\pi N\alpha$ 的实部)

图 2.3　色散曲线

在共振频率($\omega = \omega_0$)处，n 和 α 实际上不是像我们的公式所提示的，变成无穷大。这个奇异点的产生仅仅是形式上的，因为我们忽略了阻尼的作用。事实上，阻尼是整个过程中一个必不可少的因素，因为振动的电子要发射电磁波，而波要带走能量。但是也还有其他一些原因可造成能量的损耗(例如，由于原子之间的碰撞)。在形式上，阻尼的计入可以通过在运动方程(24)中加上一项代表阻力的项 $g\dot{\mathbf{r}}$ 而达到：

$$m\ddot{\mathbf{r}} + g\dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{r} = e\mathbf{E}' \tag{33}$$

这时取代(27)式而得到

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}'}{m(\omega_0^2-\omega^2) - i\omega g} \tag{34}$$

极化强度，因而还有 $N\alpha$，变成一个复量。可以证明(参见金属理论中的类似情况，那里采用一个复折射率——第 14 章)，这个复函数的模(除去一个由于吸收引起的小因子)是实际的“极化率密度”，这在图 2.3 中用虚线画出。此曲线在 ω 略小于 ω_0 的地方有一个很锐的极大，而在

ω 略大于 ω_0 的地方有一个很锐的极小。在极大和极小之间,函数随频率的增加而减小,我们称之为**反常色散**区。这里,波长短的光线比波长长的光线要折射得少一些,这导致一种与通常情况相反的棱镜色序。对于我们的目的来说,反常色散区并不重要,因为自由原子的吸收频率几乎全都落在紫外光谱区。因此,可见光谱区的折射率总大于 1。

以上我们假定,系统只有一个共振频率。一般说来,即使是在同种分子组成的体系中,也会有许多这种频率。这时,(31)和(32)两式不再适用,必须由更普遍的表达式来代替。如果仍然暂且略去原子核的运动,则取代(31)式而有

$$\frac{4\pi}{3}N\alpha=\frac{n^2-1}{n^2+2}=\frac{4\pi}{3}N\frac{e^2}{m}\sum_k\frac{f_k}{\omega_k^2-\omega^2} \tag{35}$$

式中 Nf_k 是对应于共振频率 ω_k 的电子数。对于气体($n\approx1$),(35)式可改写成如下形式:

$$n^2-1=4\pi N\alpha=\sum_k\frac{\rho_k}{\nu_k^2-\nu^2}=\sum_k\frac{\rho_k}{c^2}\frac{\lambda^2\lambda_k^2}{\lambda^2-\lambda_k^2} \tag{36}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&\rho_k=N\frac{e^2}{\pi m}f_k,\\&\nu_k=\frac{\omega_k}{2\pi}=\frac{c}{\lambda_k},\qquad \nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{c}{\lambda}.\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

利用恒等式

$$\frac{\lambda^2}{\lambda^2-\lambda_k^2}=1+\frac{\lambda_k^2}{\lambda^2-\lambda_k^2}$$

则(36)式变成

$$n^2-1=a+\sum_k\frac{b_k}{\lambda^2-\lambda_k^2} \tag{38}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&a=\sum_k\frac{\rho_k}{\nu_k^2}=\frac{1}{c^2}\sum_k\rho_k\lambda_k^2,\\&b_k=\frac{c^2\rho_k}{\nu_k^4}=\frac{1}{c^2}\rho_k\lambda_k^4.\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

为了表示出整个可见范围的折射率,通常取一两个紫外共振即可。例如,科赫(J. Koch)[①]曾发现,在 $\lambda=0.436\ \mu m$ 到 $\lambda=8.68\ \mu m$ 之间,氢、氧和空气的折射率服从下列公式:

$$n^2-1=a+\frac{b}{\lambda^2-\lambda_0^2} \tag{40}$$

式中 a,b 和 λ_0 各常数列于表 2.6 中。

① J. Koch, *Nov. Act. Soc. Ups.* (4), **2**(1909), 61。

表 2.6　氢、氧以及空气在 0℃和 760 mm Hg 下的色散常数，波长范围从 $\lambda = 0.436\ \mu m$ 到 $\lambda = 8.68\ \mu m$

气　体	$a \times 10^8$	$b \times 10^8$	$\lambda_0^2(10^{-8}cm^2)$	$\nu_0(10^{15}s^{-1})$
氢	27 216	211.2	0.007 760	3.40
氧	52 842	369.9	0.007 000	3.55
空气	57 642	327.7	0.005 685	3.98

在不含共振频率的光谱范围，公式(38)可再行简化而同时保持良好的准确性。对于所有眼睛看起来是透明的物质，**可见**光谱区就是这种光谱范围。设以 ν_v 代表短波(紫色)一边的各个吸收频率，以 ν_r 代表长波(红色)一边的各个吸收频率，并将(36)式分别展成 ν 和 λ 的幂级数，则

$$\left.\begin{aligned} n^2 - 1 &= A + B\nu^2 + C\nu^4 + \cdots - \frac{B'}{\nu^2} - \frac{C'}{\nu^4} - \cdots \\ &= A + \frac{Bc^2}{\lambda^2} + \frac{Cc^4}{\lambda^4} + \cdots - \frac{B'\lambda^2}{c^2} - \frac{C'\lambda^4}{c^4} - \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} A &= \sum_v \frac{\rho_v}{\nu_v^2}, \qquad B = \sum_v \frac{\rho_v}{\nu_v^4}, \quad C = \sum_v \frac{\rho_v}{\nu_v^6}, \cdots \\ B' &= \sum_r \rho_r, \qquad C' = \sum_r \rho_r \nu_r^2, \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

在这种无吸收的光谱范围，对于气体来说，n 和 1 差得很小，故可以用 $2(n-1)$ 代替 (n^2-1)。此外，红外共振频率所致各项 B'，C'，……通常没有明显作用。因此，如果只保留到 $1/\lambda^2$ 项，则(41)式化为**柯西公式**[①]

$$n - 1 = A_1\left(1 + \frac{B_1}{\lambda^2}\right) \tag{43}$$

式中

$$A_1 = \frac{A}{2}, \qquad B_1 = \frac{Bc^2}{A} \tag{44}$$

表 2.7 给出了一些比较重要的气体的 A_1 值和 B_1 值。另外，为了说明柯西公式的准确性，表 2.8 将空气折射率的观测值和柯西公式计算值进行了比较。

表 2.7　各种气体柯西色散公式常数 A_1 和 B_1

气　体	$A_1 \times 10^5$	$B_1 \times 10^{11}cm^{-2}$
氩	27.92	5.6
氮	29.19	7.7
氦	3.48	2.3
氢	13.6	7.7
氧	26.63	5.07
空气	28.79	5.67
乙烷	73.65	9.08
甲烷	42.6	14.41

① L. Cauchy, *Bull. des. sc. math.*, **14**(1830), 9; Sur la dispersion de la lumière(*Nouv. exerc. de math.*, 1836)。

表 2.8 空气折射率的观测值和柯西色散公式(43)计算值

$\lambda\times10^5$ cm	$(n-1)\times10^4$ 观测值	$(n-1)\times10^4$ 计算值	差
7.594	2.905	2.907	0.002
6.563	2.916	2.917	0.001
5.896	2.926	2.926	0.000
5.378	2.935	2.935	0.000
5.184	2.940	2.940	0.000
4.861	2.948	2.948	0.000
4.677	2.951	2.954	0.003
4.308	2.966	2.967	0.001
3.969	2.983	2.983	0.000
3.728	2.995	2.996	0.001
3.441	3.016	3.017	0.001
3.180	3.040	3.041	0.001
3.021	3.056	3.058	0.002
2.948	3.065	3.067	0.002

在高密度物质,即流体或固体情况下,在(35)式第二项的分母中,n 不再允许用 1 代替。但仍然能够把(35)式化为同前形式。因为

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}=\frac{4\pi}{3}N\alpha$$

故

$$n^2-1=\frac{12\pi N\alpha}{3-4\pi N\alpha} \tag{45}$$

式中

$$4\pi N\alpha=\frac{Ne^2}{\pi m}\sum_k\frac{f_k}{\nu_k^2-\nu^2}=\sum_k\frac{\rho_k}{\nu_k^2-\nu^2} \tag{46}$$

通常,只要计入有限几个吸收频率即可,结果(45)式的 n^2-1 是一个 ν^2 的有理函数,因此可被分解成部分分式。为此须求出分母的零值,即下列方程的根:

$$3-4\pi N\alpha=3-\sum_k\frac{\rho_k}{\nu_k^2-\nu^2}=0 \tag{47}$$

如果以 $\bar{\nu}_k$ 代表各根,则(45)式可化为如下形式:

$$n^2-1=\sum_k\frac{\bar{\rho}_k}{\bar{\nu}_k^2-\nu^2} \tag{48}$$

此式在形式上和气体公式(36)相同。

例如,如果只有一个吸收频率 $\bar{\nu}_1$,则频率 $\bar{\nu}_1$ 将是方程

$$3-\frac{\rho_1}{\nu_1^2-\nu^2}=0 \tag{49}$$

的根,由此

$$\left.\begin{aligned}\bar{\nu}_1^2&=\nu_1^2-\tfrac{1}{3}\rho_1,\\ \bar{\rho}_1&=\rho_1.\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

(48)式称为塞耳迈尔(Sellmeir)**色散公式**,它也可写成(38)式的形式。

到现在，我们一直忽略了核运动的作用。事实上，它只有在很长波长(红外)才重要。理由很简单。电矩和平均极化率可近似地分成两部分，一部分同电子相联系，另一部分同原子核相联系，即

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_e + \mathbf{p}_n \tag{51}$$

其中

$$\mathbf{p}_e = \alpha_e \mathbf{E}', \qquad \mathbf{p}_n = \alpha_n \mathbf{E}' \tag{52}$$

电子将紧跟场的步调，几无间顿，一直可达颇高频率，在许多情况下整个可见光谱的频率都包括在内。相反，原子核的质量非常大，它们在高频区跟不上场的变化，也就是说，对于可见光，$\alpha_n \approx 0$。这由色散公式(41)也可看出。在这一公式中，$n^2 - 1$ 由两组项表出，一组属于高频(紫)振动 ν_v，另一组属于低频(红)振动 ν_r。现在假定，原子核和电子所受的准弹性束缚力，数量级全都相同。这个假定是合理的，它也由量子力学严格得到。因此，电子和原子核振动频率的数量级将有如下关系：

$$m\nu_e^2 \approx M\nu_n^2 \tag{53}$$

其中 m 是电子质量，M 是原子核质量，ν_e 和 ν_n 分别是电子和原子核的振动频率。为了扩大(41)和(42)两式的范围，把核的运动也包括进来，可以简单地假定，紫振动属于电子，而红振动属于原子核。这时，(37)式的因子 ρ_k 也必须分做两类，一类归于电子振动，一类归于原子核振动，二者的数量级关系为

$$m\rho_e \approx M\rho_n \tag{54}$$

因此，色散公式(41)的各个系数(42)数量级如下：

$$\left.\begin{aligned} B &\approx \frac{A}{\nu_e^2}, & C &\approx \frac{A}{\nu_e^4}, \\ B' &\approx \frac{m}{M} A\nu_e^2, & C' &\approx \frac{m}{M} A\nu_e^4, \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

结果，

$$n^2 - 1 \approx A\left[1 + a\frac{\nu^2}{\nu_e^2} + b\frac{\nu^4}{\nu_e^4} + \cdots - \frac{m}{M}\left(a'\frac{\nu_e^2}{\nu^2} + b'\frac{\nu_e^4}{\nu^4} + \cdots\right)\right] \tag{56}$$

式中 $a, b, \cdots, a', b', \cdots$ 都是 1 左右的数值。前一行诸项对应于电子部分的极化率 α_e，后一行诸项则对应于原子核部分的极化率 α_n；因为 m/M 很小(约为 1/1840)，可见后一行各项可予以忽略，如果频率 ν 和紫外共振频率 ν_e 之比不是非常小的话。

因此，对于光学频率(即对应可见光的频率)，极化强度主要只来自 α_e(正如前面计算所假定的)，而对于静电场，极化强度来自于 $\alpha_e + \alpha_n$。

这一节的论述是完全以经典力学为基础的。当根据量子力学进行类似计算时，场和物质的相互作用仍然可以用虚振子的观念来描述，但是，这时即使只有一个电子，振子数也有无穷多个。方程(35)仍然适用，但强度因子 f_k 不再是指某一类电子的数目，而是指属于某一电子或某一组电子的虚振子数。在大多数情况下，只有有限几个 f_k 因子具有显著的值，其他均可略去。事实上，全部形式理论几乎没有由于量子力学的引进而受到影响，只不过是，依靠量子力学，可以计算给定电子系统的 f_k 因子。

2.4 用积分方程处理电磁波的传播[①]

在本章之初,我们扼要介绍了一种用积分方程处理电磁波传播的方法,此后几节,我们引入了进行这种处理所要用到的几个辅助量。现在来表述这些积分方程,并讨论它们的一些结果。这完全可以在本书通篇所涉及的宏观理论范围内来进行。在这一范围内,这些积分方程是和麦克斯韦方程等效的,它们是从跨越有限距离相互作用(这些相互作用的传递当然需要时间)的观点对电磁现象所给的数学描写。在一些情况下,这一处理方法较之大家比较习惯的微分方程处理方法可更具成效。一个确定的优点是,它使宏观现象和前节所讨论的那些分子现象联系起来。

如前所述,一个物质可以认为是由这样性质的分子所组成的,它们对入射波作用的反应像偶极子一样。所发射的偶极波,都将在任何其他偶极子上产生作用力,并且还将决定可测量的平 均场。我们将假定这些偶极子均匀地分布于媒质各处,而且将以它们每单位体积的电矩平均值 $\mathbf{P}$ 作为基本量。实际上,分子在媒质内的分布决不会是完全均匀的(即有密度涨落),因而各个粒子的合电矩围绕平均值有涨落。由此产生的现象,在本理论中通过进一步计算(即不仅计算平均值,而且计算其均方偏差)可给予说明。这种计算在某些问题中是很重要的,例如,像瑞利首先对天空蓝色所做的解释[②]。但是,理论的这一扩大这里就不能讨论了[③]。

2.4.1 基本积分方程

考虑电磁波在一个均匀的、各向同性的、非磁性媒质中的传播。在媒质内部,作用在第 j 个偶极子上的电场 $\mathbf{E}'_j$ 和磁场 $\mathbf{H}'_j$ 可分成两部分,一部分是入射场 $\mathbf{E}^{(i)}$,$\mathbf{H}^{(i)}$(它以真空速度 c 进行传播),一部分是所有偶极子的贡献:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}'_j &= \mathbf{E}^{(i)} + \sum_l{}' \mathbf{E}_{jl},\\ \mathbf{H}'_j &= \mathbf{H}^{(i)} + \sum_l{}' \mathbf{H}_{jl},\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

取和范围包括除去第 j 个偶极子以外的所有其他偶极子。在第 j 个偶极子的所在点 $\mathbf{r}_j$,第 l 个偶极子产生的场可由 §2.2(49) ~ §2.2(51)得到:

---

① 本节所述理论主要出自下列作者:W. Esmarch, *Ann. d. Physik*, **42**(1913), 1257; C. W. Oseen, *ibid.*, **48**(1915), 1; W. Boethe, Beiträge zur Theorie der Brechung und Reflexion (Dissertation, Berlin, 1914), and *Ann. d. Physik*, **64**(1921), 693。R. Lundblad 曾对该理论做过一个详细报告,载于 *Univ, Arsskrift, Upsala* (1920). 又见, C. G. Darwin, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, **23** (1924), 137, 和 H. Hoek. Algemeene theorie der optische activiteit van isotrope media(Thesis, Leiden, 1939)。J. van Kranendonk 和 J. E. Sipe 对本项工作及其新近发展做了广泛评述,载于 *Progress in Optics* Vol. 15, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1977), p. 245。
N. Bloembergen and P. S. Pershan, *Phys, Rev.*, **128**(1962), 619 曾讨论了这一理论的某些推广,其中考虑了媒质的非线性性质(发生在场特别强的时候)。

② 后面 14.5 节讨论球形粒子(处于真空之中)的光散射时,还要提到瑞利理论。如果粒子很小,则散射辐射强度对波长的依赖关系,和本处均匀媒质中自发密度涨落的情况相同(即与波长 4 次方成反比)。不过,涨落理论除了提供这一结果外,还给出散射强度对密度涨落的依赖关系。

③ 它的讨论可见 M. Born, *Optik* (Berlin, Springer, 1933, reprinted 1965), § 81。

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}_{jl} &= \operatorname{curl}\operatorname{curl}\frac{\mathbf{p}_l(t-R_{jl}/c)}{R_{jl}},\\ \mathbf{H}_{jl} &= \frac{1}{c}\operatorname{curl}\frac{\dot{\mathbf{p}}_l(t-R_{jl}/c)}{R_{jl}},\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

式中 $\mathbf{p}_l(t)$代表第 l 个偶极子的电矩，$R_{jl}=|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_l|$，而算符 curl 是对第 j 个偶极子的坐标 x_j，y_j，z 来运算的。

如前所说，偶极子的分布在良好近似上可作为连续分布来处理，即可以认为各偶极子的电矩是位置(和时间)的连续函数：$\mathbf{p}=\mathbf{p}(\mathbf{r},t)$。同样，也可以假定分子数密度 N 是位置的连续函数 $N(\mathbf{r})$。于是，每单位体积的总电矩 $\mathbf{P}$ 由 §2.3(14)给出：

$$\mathbf{P}=N\mathbf{p}=N\alpha\mathbf{E}' \tag{3}$$

由于 2.3 节中所解释的原因，磁力的贡献在(3)式中已予忽略。又由于假定物质是非磁性的(即 $\mathbf{M}=0$)，因而在即将建立的动态平衡条件中，将不牵涉有效场 $\mathbf{H}'$。

以(2)式代入(1)式，并利用(3)式过渡到连续分布，得到①

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}^{(i)}+\int\operatorname{curl}\operatorname{curl}N\alpha\frac{\mathbf{E}'(\mathbf{r}',t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}V' \tag{4}$$

$$\mathbf{H}'(\mathbf{r},t)=\mathbf{H}^{(i)}+\frac{1}{c}\int\operatorname{curl}N\alpha\frac{\dot{\mathbf{E}}'(\mathbf{r}',t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}V' \tag{5}$$

式中

$$R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$$

如果观察点 $\mathbf{r}$ 在媒质外边，则积分范围包括整个媒质。如果观察点在媒质里边，则被原子占据的那个小地区必须先排除在外；我们设想它是一个半径为 a 的小球 σ。最后再按通常方法过渡到极限 $a\to 0$。

方程(4)是一个 $\mathbf{E}'$的积分-微分方程。当解得 $\mathbf{E}'$时，即可由(5)式得到 $\mathbf{H}'$。这两个方程和各向同性非磁性物质的麦克斯韦方程实质上是等效的。对磁性物质的推广可借助第二赫兹矢量得到。

2.4.2　埃瓦尔德-欧西恩消光定理和洛伦兹-洛伦茨公式的严格推导

方程(4)中有效电场同入射电场的关系颇为复杂，只有在特别情况下这一方程才可有显解。不过，从它还是能导出一些基本结果，如洛伦兹-洛伦茨公式，反射定律和折射定律，菲涅耳公 式。在证明此点之前，我们将先建立关于(4)式之解的一个重要的一般定理。

设 Σ 代表媒质的界面。对于媒质里边的观察点，基本方程(4)可以写成

$$\mathbf{P}=N\alpha(\mathbf{E}^{(i)}+\mathbf{E}^{(d)}) \tag{6}$$

式中 $\mathbf{E}^{(d)}$代表各偶极子的贡献：

---

① 这里须取各场之和而不得用势相加，即(4)式中算符 curl curl 须置于积分号内而不得放在积分号外。作用在分子上的场[(3)式中所示]是由全部个场取和得到。个场相应有一个势，由于场在场源处的奇异点，导致个场之和同个势之和(即总势)所对应的场之间有一差值，见下文(15)式。

$$\mathbf{E}^{(d)}=\int_{\sigma}^{\Sigma}\operatorname{curl}\operatorname{curl}\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}',\,t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}V' \tag{7}$$

积分所包括的体积的界面已于式中标明。

下面假设入射场 $\mathbf{E}^{(i)}$ 是单色的,角频率为 ω,即

$$\mathbf{E}^{(i)}=\mathbf{A}^{(i)}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{8}$$

并取这样一个波作为 $\mathbf{P}$ 的试探解,它也是单色的,且频率相同,但传播速度不同(设为 c/n):

$$\mathbf{P}=(n^2-1)k_0^2\mathbf{Q}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{9}$$

式中 k_0 同前,等于 ω/c,而 $\mathbf{Q}$ 满足

$$\nabla^2\mathbf{Q}+n^2k_0^2\mathbf{Q}=0 \tag{10}$$

(9)式中常数因子 $(n^2-1)k_0^2$ 的引入是为了简化后面的公式。常数 n 必须看成是一个未知数,而定出这个常数乃是本节分析的主要目的之一。

此外假设,$\mathbf{Q}$ 在媒质中没有源,即在媒质里边

$$\operatorname{div}\mathbf{Q}=0 \tag{11}$$

乍一看来,基本积分-微分方程(6)有(9)式这种形式的解,似乎有点奇怪,因为 $\mathbf{E}^{(i)}$ 代表一个以真空速度 c 传播的波,而(9)式中 $\mathbf{P}$ 的传播速度却又设为 c/n。然而,下面即将证明,偶极场 $\mathbf{E}^{(d)}$ 可以表成为两项之和,其中一项服从真空波动方程,正好抵消掉入射波,而另一项满足传播速度是 c/n 的波动方程。因此,可以认为,入射波在媒质内任一点因同偶极场相互干涉而被消灭,取而代之的另一个波具有不同的传播速度(一般说,传播方向也不同)。这个结果称为**消光定理**,是首先由埃瓦尔德[①]和欧西恩[②]建立的,但埃瓦尔德讨论的是晶体媒质,而欧西恩讨论的是各向同性媒质。近年来,赛恩(J. J. Sein)等先后证明,在麦克斯韦电磁理论[③]、标量波理论[④]和非相对论量子力学[⑤]各框架内,也都可以表述出一个类似的消光定理。

为证明消光定理,我们把(6)式改写成不含时间的形式:

$$\mathbf{Q}=N\alpha\left[\frac{1}{(n^2-1)k_0^2}\mathbf{A}^{(i)}+\mathbf{A}^{(d)}\right] \tag{12}$$

式中

---

① P. P. Ewald (Dissertation, München, 1912); *Ann. d. Physik*, **49**(1916), 1。

② C. W. Oseen, *Ann. d. Physik*, **48**(1915), 1。

③ J. J. Sein, *Opt. Comm.*, **2**(1970), 170; J. de Goede and P. Mazur, *Physica*, **58**(1972), 568; D. N. Pattanayak and E. Wolf, *Opt. Comm.*, **6**(1972), 217; E. Wolf in *Coherence and Quantum Optics*, eds. L. Mandel and E. Wolf (New York, Plenum Press, 1973), p. 339。又见 H. Fearn, D. F. V. James and P. Milonni, *Am. J. Phys.*, **64**(1996), 986。
D. N. Pattanayak 和 E. Wolf 亦曾在非相对论量子力学理论范围表述出消光定理,见 *Phys. Rev. D*, **13**(1976), 913; *ibid.*, **13**(1976), 2287。

④ T. D. Visser, P. S. Carney and E. Wolf, *Phys. Letts.* A **249**(1998), 243; 亦见 T. D. Visser and E. Wolf, *Phys. Rev.* E **59**(1999) 2355, Sec. IV。

⑤ D. N. Pattanayak and E. Wolf, *Phys. Rev.* **D13**(1976), 913; *ibid.* **13**(1976), 2287。又见 E. Wolf, *loc. cit*。

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}^{(d)} &= (n^2-1)k_0^2\mathbf{A}^{(d)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},\\ \mathbf{A}^{(d)} &= \int_\sigma^\Sigma \operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{Q}(\mathbf{r}')G(R)\,\mathrm{d}V',\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

而

$$G = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0R}}{R} \tag{14}$$

附录 E 证明，当小球 σ 的半径足够小时，

$$\int_\sigma^\Sigma \operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{Q}(\mathbf{r}')G(R)\,\mathrm{d}V' = \operatorname{curl}\operatorname{curl}\int_\sigma^\Sigma \mathbf{Q}(\mathbf{r}')G(R)\,\mathrm{d}V' - \frac{8\pi}{3}\mathbf{Q}(\mathbf{r}) \tag{15}$$

函数 G 代表一个真空中的球面波，所以它满足亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 G + k_0^2 G = 0 \tag{16}$$

$R=0$ 时除外。因此，由(10)和(16)两式可知，(15)式右边积分号内的 $\mathbf{Q}G$ 可表成如下形式：

$$\mathbf{Q}G = \frac{1}{(n^2-1)k_0^2}(\mathbf{Q}\nabla^2 G - G\nabla^2\mathbf{Q}) \tag{17}$$

积分并利用格林定理，得到

$$\begin{aligned}&\int_\sigma^\Sigma \mathbf{Q}(\mathbf{r}')G(R)\,\mathrm{d}V' =\\ &\qquad\frac{1}{(n^2-1)k_0^2}\left[\int_\Sigma\left(\mathbf{Q}\frac{\partial G}{\partial\nu'} - G\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\nu'}\right)\mathrm{d}S' - \int_\sigma\left(\mathbf{Q}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}R} - G\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial R}\right)\mathrm{d}S'\right]\end{aligned} \tag{18}$$

式中 $\partial/\partial\nu'$ 表示沿界面 Σ 的外向法线取微商。经过一步步计算，得到(见 8.3.1 节)当 $a\to 0$ 时，σ 面积分项的极限值为 $-4\pi\mathbf{Q}(\mathbf{r})$，所以

$$\int_\sigma^\Sigma \mathbf{Q}(\mathbf{r}')G(R)\,\mathrm{d}V' \to \frac{1}{(n^2-1)k_0^2}\left[\int_\Sigma\left(\mathbf{Q}\frac{\partial G}{\partial\nu'} - G\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\nu'}\right)\mathrm{d}S' + 4\pi\mathbf{Q}\right] \tag{19}$$

从(13)，(15)和(19)三式得到，在极限时

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{(d)} &= \int_\sigma^\Sigma \operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{Q}(\mathbf{r}')G(R)\,\mathrm{d}V'\\ &= \frac{1}{(n^2-1)k_0^2}\left[4\pi\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{Q} + \operatorname{curl}\operatorname{curl}\int_\Sigma\left(\mathbf{Q}\frac{\partial G}{\partial\nu'} - G\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\nu'}\right)\mathrm{d}S'\right] - \frac{8\pi}{3}\mathbf{Q}(\mathbf{r})\end{aligned} \tag{20}$$

下一步我们利用恒等式

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{Q} \equiv \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{Q} - \nabla^2\mathbf{Q}$$

右边第一项因(11)式而为零，而第二项由(10)式等于 $n^2k_0^2\mathbf{Q}$。以此代入(20)式，最后得到偶极场表达式如下：

$$\mathbf{A}^{(d)} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{n^2+2}{n^2-1}\right)\mathbf{Q} + \frac{1}{(n^2-1)k_0^2}\operatorname{curl}\operatorname{curl}\int_\Sigma\left(\mathbf{Q}\frac{\partial G}{\partial\nu'} - G\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\nu'}\right)\mathrm{d}S' \tag{21}$$

右边第一项按照(10)式代表一个以速度 c/n 传播的波,而第二项可以看出是代表一个和 G 一样以真空速度 c 传播的波。因此,如前所说,基本方程(12)各项分成了两组,每组代表一个波,各以不同的速度进行传播。这只有当每组分别为零时才有可能,因此

$$\frac{4\pi}{3}N\alpha=\frac{n^2-1}{n^2+2} \tag{22}$$

并且

$$\mathbf{A}^{(i)}+\operatorname{curl}\operatorname{curl}\int_{\Sigma}\left(\mathbf{Q}\frac{\partial G}{\partial \nu'}-G\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \nu'}\right)\mathrm{d}S'=0 \tag{23}$$

关系式(23)表明,在媒质内任一点,入射波

$$\mathbf{E}^{(i)}=\mathbf{A}^{(i)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

通过同一部分偶极场相互干涉而**消光**。取而代之的是另一个波,即

$$\mathbf{E}'=\frac{1}{N\alpha}\mathbf{P}=\frac{1}{N\alpha}(n^2-1)k_0^2\mathbf{Q}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}=\frac{4\pi}{3}(n^2+2)k_0^2\mathbf{Q}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{24}$$

这个波在媒质内传播,速度为 c/n。n 则由(22)式用分子数密度 N 和极化率 α 表出。我们将认得,这个关系式就是 2.3.3 节中试行引进的那个**洛伦兹-洛伦茨公式**。

现在,必须使有效场 $\mathbf{E}'$ 同麦克斯韦理论的普通场 $\mathbf{E}$ 联系起来。为此,我们写下电位移 $\mathbf{D}$ 的两个定义:

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}=n^2\mathbf{E} \tag{25a}$$

和

$$\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P} \tag{25b}$$

消去 $\mathbf{D}$,得到

$$\mathbf{E}=\frac{4\pi}{n^2-1}\mathbf{P} \tag{26}$$

另由(3)和(22)两式,

$$\mathbf{E}'=\frac{1}{N\alpha}\mathbf{P}=\frac{4\pi}{3}\frac{n^2+2}{n^2-1}\mathbf{P}$$

所以,利用(26)式,得到

$$\mathbf{E}'=\mathbf{E}+\frac{4\pi}{3}\mathbf{P} \tag{27}$$

结果和 §2.3(12)一致。最后由(26)和(9)两式可以看出,当用 $\mathbf{Q}$ 表示时,**媒质**($n\neq1$)**里边**的电场

$$\mathbf{E}=4\pi k_0^2\mathbf{Q}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{28}$$

要决定**媒质外边**的电场,须回到(4)式。这时,方程中的积分范围包括整个媒质,所以算符 curl curl 可拿到相应积分号外边。此外,因为在媒质外边 $\mathbf{D}=\mathbf{E}$,所以在那里 $\mathbf{P}=0$,因而由(27)式可知,在形式上 $\mathbf{E}'=\mathbf{E}$。这时,取代(6)式得到

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{E}=\mathbf{E}^{(i)}+\mathbf{E}^{(r)},\\ &\mathbf{E}^{(r)}=\operatorname{curl}\operatorname{curl}\int\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}',\ t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}V'.\end{aligned}\right\}\tag{29}$$

其中

同前，仍讨论时谐情况，以(9)式代入，并利用(17)式和格林定理，则

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{E}^{(r)}=\mathbf{A}^{(r)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},\\ &\mathbf{A}^{(r)}=\operatorname{curl}\operatorname{curl}\int_{\Sigma}\left(\mathbf{Q}\frac{\partial G}{\partial \nu'}-G\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \nu'}\right)\mathrm{d}S',\end{aligned}\right\}\tag{30}$$

式中

$\mathbf{Q}$ 就是前面 Σ 面上的那一函数。

以上仅仅讨论了电场。要求出磁场，只须把 $\mathbf{E}'$ 代入(5)式，计算其中积分即可。这可按照上列计算如法炮制，但这时计算稍稍简单一些，因为(5)式中算符 curl 可拿到积分号外边，这一点由附录 E 的讨论显然可见。当把所得到的 $\mathbf{H}$ 表达式同 $\mathbf{E}$ 表达式进行比较时，我们发现这些解同麦克斯韦方程一致。因为这些计算并无疑难之处，而且也没有揭示出任何重要的新特性，所以这里不再给出。

从物理上看，物质中的场由极化强度来表征，比由电位移来表征更为自然。而具有巨大意义的是，上面根据这一物理见解所进行的探讨，其方法如此绝妙，使我们通过积分-微分方程(4)，严格推导出了洛伦兹-洛伦茨公式和消光定理。这个卓有成效的方法迄今很少用于处理更为专门的问题[①]，但是第 14 章将给出它的一个应用实例。

2.4.3　借助埃瓦尔德-欧西恩消光定理处理平面波的折射和反射

现在把(23)式所表达的埃瓦尔德-欧西恩消光定理应用到平面单色波进入一均匀媒质时的情况，这个媒质占据 $z<0$ 那半个空间。我们将看到，它导致折射定律和反射定律，并导致菲涅耳公式。

设入射波取如下形式：

$$\mathbf{E}^{(i)}=\mathbf{A}^{(i)}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}=\mathbf{A}_0^{(i)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_0(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}^{(i)})-\omega t]}\tag{31}$$

式中 $k_0=\omega/c$，$\mathbf{A}_0^{(i)}$ 是一常矢量，$\mathbf{s}^{(i)}$ 是传播方向上的单位矢量。

我们选取 z 轴通过观察点 P，并先假定 P 点在媒质内，离界面 Σ 的距离为 r(见图 2.4)。然后选取 x 轴，使 $\mathbf{s}^{(i)}$ 在 xz 平面上。因此，如果 θ_i 代表入射角，则

$$s_x^{(i)}=-\sin\theta_i,\qquad s_y^{(i)}=0,\qquad s_z^{(i)}=-\cos\theta_i\tag{32}$$

按照前节分析，我们将假定透射波的频率和入射波的一样，但速度不同，是 c/n，这里 n 已给定，由洛伦兹-洛伦茨公式用极化率和密度表出。取一个平面波作为透射波的试探解，用单位矢量 $\mathbf{s}^{(t)}$ 代表这个波的传播方向，并假定 $\mathbf{s}^{(t)}$ 在 xz 平面上：

$$s_x^{(t)}=-\sin\theta_t,\qquad s_y^{(t)}=0,\qquad s_z^{(t)}=-\cos\theta_t\tag{33}$$

---

① D. R. Hartree, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **25**(1929), 97 曾经把这个方法应用到电磁波在分层媒质中的传播。

于是(28)式变成

$$\mathbf{E} = 4\pi k_0^2 \mathbf{Q}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = 4\pi k_0^2 \mathbf{Q}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}[k_0 n(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}^{(t)})-\omega t]} \tag{34}$$

式中 $\mathbf{Q}_0$ 是一常矢量。由于条件(11)式,$\mathbf{Q}_0$ 和 $\mathbf{s}^{(t)}$ 是正交的。

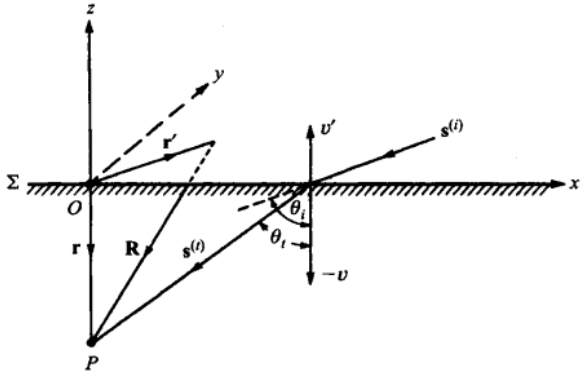


图 2.4 平面波进入作为偶极子系统的均匀媒质

如果只考虑这样的观察点 P,它们离界面 $z=0$ 的距离要比波长大得多,即如果设

$$\frac{2\pi r}{\lambda} = k_0 r \gg 1 \tag{35}$$

则积分-微分方程的解很容易得到。这个条件仅为简化计算而设,并非对该积分-微分方程的物理效用加以限制①。

现在,Σ 面积分中的两项微商为

$$\frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{r}')}{\partial \nu'} = \frac{\partial}{\partial \nu'} \mathbf{Q}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nk_0(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{s}^{(t)})} = \mathrm{i}nk_0 \left(\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \nu'}\cdot \mathbf{s}^{(t)}\right) \mathbf{Q}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nk_0(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{s}^{(t)})} \tag{36a}$$

$$\frac{\partial G(R)}{\partial \nu'} = \frac{\partial}{\partial \nu'} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 R}}{R} = \mathrm{i}k_0 \frac{\partial R}{\partial \nu'} G\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{k_0 R}\right) \tag{36b}$$

(36b)式中最后一项由于条件(35)式可予以忽略,因而(23)式中的积分变成

$$\mathbf{J} = \int_\Sigma \left(\mathbf{Q}\frac{\partial G}{\partial \nu'} - G\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \nu'}\right) \mathrm{d}S' = \mathrm{i}k_0 \mathbf{Q}_0 \int_\Sigma \left[\frac{\partial R}{\partial \nu'} - n\left(\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \nu'}\cdot \mathbf{s}^{(t)}\right)\right] \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0[R+n(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{s}^{(t)})]}}{R}\, \mathrm{d}S' \tag{37}$$

矢量 $\mathbf{r}$,$\mathbf{r}'$和 $\mathbf{R}$ 的各个分量是(见图 2.4)

$$\begin{array}{lccc} \mathbf{r}: & 0, & 0, & -r \\ \mathbf{r}': & x', & y', & 0 \\ \mathbf{R}: & -x', & -y', & -r \end{array}$$

所以

$$\left.\begin{array}{ll} R = \sqrt{x'^2 + y'^2 + r^2}, & \mathbf{r}'\cdot\mathbf{s}^{(t)} = -x'\sin\theta_t, \\ \dfrac{\partial R}{\partial \nu'} = \dfrac{r}{R}, & \dfrac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \nu'}\cdot\mathbf{s}^{(t)} = s_z^{(t)} = -\cos\theta_t. \end{array}\right\} \tag{38}$$

① 对于折射和反射问题,积分-微分方程(23)的精确解已由 É. Lalor 和 E. Wolf 给出,见 *J. Opt. Soc. Amer.*, **62**(1972), 1165。

代入(37)式,则

$$\mathbf{J}=\mathrm{i}k_0\mathbf{Q}_0\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{R}\left(\frac{r}{R}+n\cos\theta_t\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0(R-nx'\sin\theta_t)}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' \tag{39}$$

为便于分析,现引进一个角ϕ和一个相关联的单位矢量 s,其定义为

$$n\sin\theta_t=\sin\phi \tag{40}$$

$$s_x=-\sin\phi,\qquad s_y=0,\qquad s_z=-\cos\phi \tag{41}$$

因为 k_0r 已假定比 1 大得多,所以(39)式中的指数也要比 1 大得多,而当(x',y')在积分区内逐点变动时,指数项将振荡得很快并多次易号。在这些条件下,可应用下列公式[得自稳定相原理,见附录 C(20)式]求得 J 的良好近似值:

$$\iint_D g(x',y')\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0f(x',y')}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\approx\frac{2\pi\mathrm{i}}{k_0}\sum_j\frac{\sigma_j}{\sqrt{|\alpha_j\beta_j-\gamma_j^2|}}g(x_j',y_j')\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0f(x_j',y_j')} \tag{42}$$

式中(x_j',y_j')是积分区 D 中f具有稳定值的那些点,而

$$\alpha_j=\left(\frac{\partial^2f}{\partial x'^2}\right)_{x_j',y_j'},\qquad\beta_j=\left(\frac{\partial^2f}{\partial y'^2}\right)_{x_j',y_j'},\qquad\gamma_j=\left(\frac{\partial^2f}{\partial x_j'\partial y_j'}\right)_{x_j',y_j'} \tag{43a}$$

和

$$\sigma_j=\begin{cases}+1 & \text{当}\quad \alpha_j\beta_j>\gamma_j^2,\quad \alpha_j>0,\\ -1 & \text{当}\quad \alpha_j\beta_j>\gamma_j^2,\quad \alpha_j<0,\\ -\mathrm{i} & \text{当}\quad \alpha_j\beta_j<\gamma_j^2\end{cases} \tag{43b}$$

在本例情况下,如果采用(40)和(41)两式,则

$$g=\frac{1}{R}\left(\frac{r}{R}+\frac{\sin\phi}{\sin\theta_t}\cos\theta_t\right),\qquad f=R-x'\sin\phi \tag{44}$$

因而

$$\frac{\partial f}{\partial x'}=\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+r^2}}-\sin\phi,\quad\frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+r^2}}$$

要使f是稳定的,须

$$\frac{\partial f}{\partial x'}=\frac{\partial f}{\partial y'}=0$$

由此可见(注意,在计算偏微商时,平方根须取正号),只有当

$$x'=x_1',\qquad y'=y_1'$$

其中

$$x_1'=r\tan\phi,\qquad y_1'=0 \tag{45}$$

时,f才是稳定的。在这一点,(43)和(44)中各式的值如下:

$$\alpha_1=\left(\frac{\partial^2f}{\partial x'^2}\right)_{x_1',y_1'}=\frac{\cos^3\phi}{r},\qquad\beta_1=\left(\frac{\partial^2f}{\partial y'^2}\right)_{x_1',y_1'}=\frac{\cos\phi}{r},\qquad\gamma_1=0 \tag{46a}$$

$$\sigma_1 = 1 \tag{46b}$$

$$R_1 = (R)_{x_1', y_1'} = \frac{r}{\cos\phi} \tag{46c}$$

$$f(x_1', y_1') = r\cos\phi = \mathbf{r}\cdot\mathbf{s} \tag{46d}$$

$$g(x_1', y_1') = \frac{\cos\phi}{r}\frac{\sin(\phi+\theta_t)}{\sin\theta_t} \tag{46e}$$

这时由公式(42)得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{R}\left(\frac{r}{R}+n\cos\theta_t\right)e^{ik_0(R-nx'\sin\theta_t)}\,dx'\,dy' = \frac{2\pi i}{k_0}\frac{\sin(\phi+\theta_t)}{\cos\phi\sin\theta_t}e^{ik_0(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s})}$$

所以(39)式变成

$$\mathbf{J} = \int_\Sigma\left(\mathbf{Q}\frac{\partial G}{\partial \nu'} - G\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \nu'}\right)dS' = -2\pi\frac{\sin(\phi+\theta_t)}{\cos\phi\sin\theta_t}\mathbf{Q}_0 e^{ik_0(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s})} \tag{47}$$

现在把此式代入表达入射波消光的积分-微分方程(23)。由于

$$\operatorname{curl}\mathbf{Q}_0 e^{ik_0(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s})} = ik_0(\mathbf{s}\times\mathbf{Q}_0)e^{ik_0(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s})},$$

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{Q}_0 e^{ik_0(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s})} = -k_0^2\mathbf{s}\times(\mathbf{s}\times\mathbf{Q}_0)e^{ik_0(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s})}$$

因此(23)式化为

$$\mathbf{A}_0^{(i)}e^{ik_0(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}^{(i)})} = -2\pi k_0^2\frac{\sin(\phi+\theta_t)}{\cos\phi\sin\theta_t}\mathbf{s}\times(\mathbf{s}\times\mathbf{Q}_0)e^{ik_0(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s})} \tag{48}$$

此式对于界面上所有 $\mathbf{r}$ 点都必须是一个恒等式,因此

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}^{(i)} \tag{49}$$

而

$$\mathbf{A}_0^{(i)} = -2\pi k_0^2\frac{\sin(\phi+\theta_t)}{\cos\phi\sin\theta_t}[\mathbf{s}^{(i)}\times(\mathbf{s}^{(i)}\times\mathbf{Q}_0)] \tag{50}$$

(49)式表达了**折射定律** §1.5(8)。因为它意指

$$\phi = \theta_i \tag{51}$$

由(40)式即有

$$n\sin\theta_t = \sin\theta_i \tag{52}$$

此外,(41)和(32)两式表明,矢量 $\mathbf{s}^{(t)}$ 在 $\mathbf{s}^{(i)}$ 和 Σ 面法线所决定的平面上。

(50)式表达了入射波(31)式和透射波(34)式的振幅关系。设以 $\mathbf{T}_0$ 代表透射波的(矢量)振幅,

$$\mathbf{T}_0 = 4\pi k_0^2\mathbf{Q}_0 \tag{53}$$

并展开矢量三重积 $\mathbf{s}^{(i)}\times(\mathbf{s}^{(i)}\times\mathbf{Q}_0)$,则(50)式变成

$$\mathbf{A}_0^{(i)} = \frac{1}{2}\frac{\sin(\theta_i+\theta_t)}{\cos\theta_i\sin\theta_t}[\mathbf{T}_0 - \mathbf{s}^{(i)}(\mathbf{s}^{(i)}\cdot\mathbf{T}_0)] \tag{54}$$

设 $A_\perp, A_\parallel$ 和 $T_\perp, T_\parallel$ 分别代表 $\mathbf{A}_0^{(i)}$ 和 $\mathbf{T}_0$ 对入射面的垂直分量和平行分量。忆及 $\mathbf{A}_0^{(i)}$ 和 $\mathbf{s}^{(i)}$

正交，$\mathbf{T}_0$ 和 $\mathbf{s}^{(t)}$ 正交，而 $\mathbf{s}^{(i)}$ 和 $\mathbf{s}^{(t)}$ 相互倾斜成一个角度$(\theta_i - \theta_t)$，则由(54)式得到

$$A_\perp = \frac{1}{2}\frac{\sin(\theta_i + \theta_t)}{\cos\theta_i \sin\theta_t} T_\perp \tag{55a}$$

$$A_\parallel = \frac{1}{2}\frac{\sin(\theta_i + \theta_t)\cos(\theta_i - \theta_t)}{\cos\theta_i \sin\theta_t} T_\parallel \tag{55b}$$

我们会认得，这些关系式就是**折射的菲涅耳公式** § 1.5(20a)。

最后讨论观察点在媒质外边时($z > 0$)的情况。计算是完全类似的，只是这时在相应各式中 $z' = -r$ 须换成 $z' = r$。这就等于把(46d)式中的 s_z 换成 $-s_z$，即$\phi = \theta_r$ 换成$\phi = \theta_i$，其中

$$\theta_r = \pi - \theta_i \tag{56}$$

这时不用单位矢量 $\mathbf{s} = \mathbf{s}^{(i)}$ 而引进单位矢量 $\mathbf{s}^{(r)}$，其各分量为

$$s_x^{(r)} = -\sin\theta_r = -\sin\theta_i, \quad s_y^{(r)} = 0, \quad s_z^{(r)} = -\cos\theta_r = \cos\theta_i \tag{57}$$

因而取代(47)式得到

$$\mathbf{J}' = \int_\Sigma \left(\mathbf{Q}\frac{\partial G}{\partial \nu'} - G\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \nu'}\right) \mathrm{d}S' = -2\pi \frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\cos\theta_i \sin\theta_t} \mathbf{Q}_0 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}^{(r)})} \tag{58}$$

这时由(30)式得到反射波不含时间的部分为

$$\mathbf{A}_0^{(r)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}^{(r)})} = 2\pi k_0^2 \frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\cos\theta_i \sin\theta_t} [\mathbf{s}^{(r)} \times (\mathbf{s}^{(r)} \times \mathbf{Q}_0)] \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}^{(r)})} \tag{59}$$

(59)式代表一个平面波，它沿单位矢量 $\mathbf{s}^{(r)}$ 所规定的方向传播，这个方向和入射波方向 $\mathbf{s}^{(i)}$ 的关系由(56)式给定；(56)式表达了**反射定律**，和 § 1.5(7)一致。

反射波的振幅 $\mathbf{A}_0^{(r)}$ 用透射波的振幅表示时为

$$\mathbf{A}_0^{(r)} = -\frac{1}{2}\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\cos\theta_i \sin\theta_t} [\mathbf{T}_0 - \mathbf{s}^{(r)}(\mathbf{s}^{(r)} \cdot \mathbf{T}_0)] \tag{60}$$

设以 $R_\perp$ 和 $R_\parallel$ 代表 $\mathbf{A}_0^{(r)}$ 对入射面的垂直分量和平行分量，并利用(55)式，由而得到

$$R_\perp = -\frac{1}{2}\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\cos\theta_i \sin\theta_t} T_\perp = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} A_\perp \tag{61a}$$

而

$$R_\parallel = -\frac{1}{2}\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)\cos(\theta_r - \theta_t)}{\cos\theta_i \sin\theta_t} T_\parallel = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} A_\parallel \tag{61b}$$

(61)式就是**反射的菲涅耳公式** § 1.5(21a)。

第3章　几何光学基础

3.1　对于极短波长的近似处理

与可见光传播相关联的电磁场，其特点是振动非常之快（频率数量级为 $10^{14}\ s^{-1}$），或者说是波长非常之短（数量级为 10^{-5} cm）。因此可以预期，在这种情况下，完全忽略波长的有限大小，可以得到光传播定律的良好一级近似。人们发现，对很多光学问题而言，这样处理是完全适合的；事实上，那些偏离这个近似理论的现象（所谓衍射现象，在第8章中研究），只有通过细心安排的实验才能观察到。

在光学中，可以忽略波长、即相当于 $\lambda_0 \to 0$ 极限情况的这一分支，通常称为**几何光学**[①]，因为在这种近似处理下，光学定律可以用几何学的语言来表述。这时，能量可以看做是沿着一定的曲线（光线）传输。光线锥（简称光锥）的物理模型可以这样得到，即取一个幅度可忽略的光源，让它的光通过不透明屏上一个很小的开孔。到达屏后空间的光将充满一个区域，它的边界（光锥的边）乍看起来好像很锐。但是更仔细地考察就会发现，在边界附近，从阴影到照明区，光强是迅速而又连续地由暗变亮，同时这种变化不是单调的，而是具有一种振荡特征，表现在出现一系列亮带和暗带，称为衍射条纹。光强发生这种迅速变化的区域，大小只有波长的数量级。因此，只要这个区域的大小与孔的尺度相比可以忽略，就可以说光锥的边是锐的[②]。当把孔的大小减到波长尺度时，就出现需要更细致研究的现象，然而，如果只考虑波长可予忽略的极限情况，则对孔的大小就无须加以限制，这时可以说，一个无限小的孔定义一个无限细的光锥——光线。后面将证明，光锥的横截面变化是光的强度变化的一个量度。此外还将看到，可给予每条光线一个偏振态，并研究它沿光线的变化。

我们还将看到，当波长很小时，场的一般性质和平面波的相同，而且在几何光学近似范围内，以前对入射到界平面上的平面波所确立的那个折射定律和反射定律，在更普遍条件下也仍然有效。因此，如果一条光线射到一个锐界面（例如透镜表面）上，它就分裂成一条反射光线和一条透射光线，并且偏振态的变化以及反射率和透射率都可以用相应的平面波公式来计算。

上面所谈各点意味着，当波长足够小时，所有光学现象全都可以由几何学的考虑导出，方

---

① 关于光学的历史发展，下列著作有所介绍：M. Herzberger, *Strahlenoptik*（Berlin, Springer, 1931）, p. 179; *Z. Instrumentenkunde*, **52**(1932), 429—435, 485—493, 534—542, C. Carathéodory, *Geometrische Optik*（Berlin, Springer, 1937）和 E. Mach, *The Principles of Physical Optics, A Historical and Philosophical Treatment*（First German edition 1913, English translation: London, Methuen, 1926; reprinted by Dover Publications, New York, 1953）。

② 在 $\lambda_0 \to 0$ 极限情况下边缘变锐这一点，是基尔霍夫首先指出的，见 G. Kirchhoff, *Vorlesungen ü. Math. Phys.*, Vol. 2(*Mathematische Optik*)(Leipzig, Tuebner, 1891), p. 33。亦见 B. B. Baker and E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle*（Oxford, Clarendon Press, 2nd edition, 1950）, p. 79 和 A. Sommerfeld, *Optics*（New York, Academic Press, 1954）, § 35。

法是定出光线的路径，并计算出相关联的强度和偏振。现在来看看当 $\lambda_0 \to 0$ 时麦克斯韦方程组所包含的结果[①]，从而表述出相应的各项定律。

3.1.1　程函方程的推导

现在考虑各向同性非导体媒质中一个一般的时谐场：

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r},\,t) &= \mathbf{E}_0(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},\\ \mathbf{H}(\mathbf{r},\,t) &= \mathbf{H}_0(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中 $\mathbf{E}_0$ 和 $\mathbf{H}_0$ 代表位置的复矢函数，并且像 1.4.3 节中所解释的那样，应以右边各式的实部代表场。

复矢量 $\mathbf{E}_0$ 和 $\mathbf{H}_0$ 将满足不含时间的麦克斯韦方程组，这组方程用(1)式代入 §1.1(1)～§1.1(4)即可得到。在没有电流和电荷的区域($\mathbf{j}=\rho=0$)，这些方程是

$$\operatorname{curl}\mathbf{H}_0 + \mathrm{i}k_0\varepsilon\mathbf{E}_0 = 0 \tag{2}$$

$$\operatorname{curl}\mathbf{E}_0 - \mathrm{i}k_0\mu\mathbf{H}_0 = 0 \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E}_0 = 0 \tag{4}$$

$$\operatorname{div}\mu\mathbf{H}_0 = 0 \tag{5}$$

式中利用了物质关系式 $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$，$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$，并且同前，$k_0=\omega/c=2\pi/\lambda_0$，$\lambda_0$ 是真空波长。

在第 1 章中我们看到，在折射率 $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$ 的媒质中，一个均匀平面波沿单位矢量 $\mathbf{s}$ 规定的方向传播时，其表达式为

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 n(\mathbf{s}\cdot\mathbf{r})}, \qquad \mathbf{H}_0 = \mathbf{h}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 n(\mathbf{s}\cdot\mathbf{r})} \tag{6}$$

式中 $\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{h}$ 是常矢量，一般是复矢量。对真空中的一(单色)电偶极场，则有(见 2.2 节)

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r}, \qquad \mathbf{H}_0 = \mathbf{h}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 r} \tag{7}$$

r 是距偶极子的距离。这里 $\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{h}$ 不再是常矢量，但是在距偶极子足够远的地方($r \gg \lambda_0$)，如果使偶极矩适当地归一化，这些矢量就与 k_0 无关。

这些例子提示我们，在距离场源很多波长的地区，场的更普遍类型可表成如下形式：

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}(\mathbf{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0\mathcal{S}(\mathbf{r})}, \qquad \mathbf{H}_0 = \mathbf{h}(\mathbf{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0\mathcal{S}(\mathbf{r})} \tag{8}$$

其中 $\mathcal{S}(\mathbf{r})$ 为“光程”，是位置的实标函数，而 $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ 和 $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ 是位置的矢函数，它们一般可能是复数[②]。以(8)式作为麦克斯韦方程组的试探解，即可得到 $\mathbf{e}$，$\mathbf{h}$ 和 $\mathcal{S}$ 的一组关系式。下面将要证明，当 k_0 很大(波长很小)时，这些关系式要求 $\mathcal{S}$ 应满足某一微分方程，这个方程和振幅矢量 $\mathbf{e}$，$\mathbf{h}$ 无关。

利用熟知的矢量恒等式，由(8)式得到

---

① 索末菲等采用了 Debye 的建议，首先证明几何光学的基本方程[程函方程(15b)]可由 $\lambda_0 \to 0$ 极限情况的(标量)波动方程导出，见 A. Sommerfeld and J. Runge, *Ann. d. Physik*, **35**(1911), 289。对这个证明的推广(考虑了电磁场的矢量特性)则出自 W. S. Ignatowsky, *Trans. State Opt. Institute*(*Petrograd*), **1**(1919), No 3, 30; V. A. Fock, *ibid.*, **3**(1924), 3; S. M. Rytov, *Compt. Rend.*(*Doklady*) *Acad. Sci. URSS*, **18**(1938), 263; N. Arley, *Det. Kgl. Danske Videns Selsk.*, **22**(1945), No. 8; F. G. Friedlander, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **43**(1947), 284; K. Suchy, *Ann. d. Physik.*, **11**(1952), 113, *ibid.*, **12**(1953), 423, and *ibid.*, **13**(1953), 178; R. S. Ingarden and A. Krzywicki, *Acta Phys. Polonica*, **14**(1955), 255。

② 如果需要把所有可能的偏振态包括进来，复数的 $\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{h}$ 就是必要的。按照 §1.4(75)，实数的 $\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{h}$ 对应于线偏振的场。

$$\operatorname{curl}\mathbf{H}_0=(\operatorname{curl}\mathbf{h}+\mathrm{i}k_0\operatorname{grad}\mathcal{S}\times\mathbf{h})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0\mathcal{S}} \tag{9}$$

$$\operatorname{div}\mu\mathbf{H}_0=(\mu\operatorname{div}\mathbf{h}+\mathbf{h}\cdot\operatorname{grad}\mu+\mathrm{i}k_0\mu\mathbf{h}\cdot\operatorname{grad}\mathcal{S})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0\mathcal{S}} \tag{10}$$

curl $\mathbf{E}_0$ 和 div $\varepsilon\mathbf{E}_0$ 的展式与此类似。因此,(2)~(5)式变成

$$\operatorname{grad}\mathcal{S}\times\mathbf{h}+\varepsilon\mathbf{e}=-\frac{1}{\mathrm{i}k_0}\operatorname{curl}\mathbf{h} \tag{11}$$

$$\operatorname{grad}\mathcal{S}\times\mathbf{e}-\mu\mathbf{h}=-\frac{1}{\mathrm{i}k_0}\operatorname{curl}\mathbf{e} \tag{12}$$

$$\mathbf{e}\cdot\operatorname{grad}\mathcal{S}=-\frac{1}{\mathrm{i}k_0}(\mathbf{e}\cdot\operatorname{grad}\ln\varepsilon+\operatorname{div}\mathbf{e}) \tag{13}$$

$$\mathbf{h}\cdot\operatorname{grad}\mathcal{S}=-\frac{1}{\mathrm{i}k_0}(\mathbf{h}\cdot\operatorname{grad}\ln\mu+\operatorname{div}\mathbf{h}) \tag{14}$$

我们对 k_0 非常大时的解感兴趣。因此,只要方程右边 $1/\mathrm{i}k_0$ 的乘积因子不是特别大,就可以把它们统统略掉,这时各方程化为

$$\operatorname{grad}\mathcal{S}\times\mathbf{h}+\varepsilon\mathbf{e}=0 \tag{11a}$$

$$\operatorname{grad}\mathcal{S}\times\mathbf{e}-\mu\mathbf{h}=0 \tag{12a}$$

$$\mathbf{e}\cdot\operatorname{grad}\mathcal{S}=0 \tag{13a}$$

$$\mathbf{h}\cdot\operatorname{grad}\mathcal{S}=0 \tag{14a}$$

可以只注意(11a)和(12a)两式,因为以 grad $\mathcal{S}$ 标乘这两式就得到(13a)和(14a)两式。(11a)和(12a)两式可以看做是 $\mathbf{e},\mathbf{h}$ 的笛卡儿分量 $e_x,h_x,\cdots$ 的 6 个联立线性齐次标量方程。只有满足相容条件(其结合行列式为零),这些联立方程才有非零解。从(11a)和(12a)两式中消去 $\mathbf{e}$ 或 $\mathbf{h}$,即可直接得到这个条件。以(12a)式的 $\mathbf{h}$ 代入(11a)式,得到

$$\frac{1}{\mu}[(\mathbf{e}\cdot\operatorname{grad}\mathcal{S})\operatorname{grad}\mathcal{S}-\mathbf{e}(\operatorname{grad}\mathcal{S})^2]+\varepsilon\mathbf{e}=0$$

式中第一项因(13a)式而为零,而由于 $\mathbf{e}$ 不处处为零,因而方程化为

$$(\operatorname{grad}\mathcal{S})^2=n^2 \tag{15a}$$

写成显式,即

$$\left(\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial z}\right)^2=n^2(x,y,z) \tag{15b}$$

同前,这里 $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$ 代表折射率。函数 $\mathcal{S}$ 常叫做**程函**①,而(15b)式称为**程函方程**;它是几何光学的基本方程②。而

---

① 程函(eikonal)这个名词(出自希腊文 $\varepsilon\iota\kappa\tilde{\omega}\nu$ = 像)是 H. Bruns 于 1895 年引入的,用以描写某些有关的函数(见第 120 页),而今这个名词已在更广的意义上来使用。

② 程函方程也可看做是 1.2 节中 E 和 H 的波动方程(5)和(6)的特征线方程,并且它严格描写了这些波动方程的解的不连续态的传播。然而,在几何光学中,不涉及不连续态的传播,而只研究时谐解(或近乎时谐的解)。附录 F 证明,这两种解释在数学表达形式上是等同的。

还可认为,程函方程就是变分问题 $\delta\int n\,\mathrm{d}s=0$ 的哈密顿-雅可比方程。在光学方面,相应问题可一直追溯到费马(见 3.3.2 节和附录 A)。

$$\mathcal{S}(\mathbf{r}) = 常数$$

可称为**几何波面**或**几何波阵面**[①]。

这里，程函方程是用一阶的麦克斯韦方程组推导出来的，但是它也可以由电场矢量或磁场矢量的二阶波动方程来推导。为此，将(1)和(8)两式代入 1.2 节中波动方程(5)，经过一步步计算，最后得到

$$\boldsymbol{K}(\mathbf{e}, \mathcal{S}, n) + \frac{1}{\mathrm{i}k_0}\boldsymbol{L}(\mathbf{e}, \mathcal{S}, n, \mu) + \frac{1}{(\mathrm{i}k_0)^2}\boldsymbol{M}(\mathbf{e}, \varepsilon, \mu) = 0 \tag{16}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}(\mathbf{e}, \mathcal{S}, n) &= [n^2 - (\operatorname{grad}\mathcal{S})^2]\mathbf{e},\\ \boldsymbol{L}(\mathbf{e}, \mathcal{S}, n, \mu) &= [\operatorname{grad}\mathcal{S}\cdot\operatorname{grad}\ln\mu - \nabla^2\mathcal{S}]\mathbf{e} - 2[\mathbf{e}\cdot\operatorname{grad}\ln n]\operatorname{grad}\mathcal{S}\\ &\quad - 2[\operatorname{grad}\mathcal{S}\cdot\operatorname{grad}]\mathbf{e},\\ \boldsymbol{M}(\mathbf{e}, \varepsilon, \mu) &= \operatorname{curl}\mathbf{e}\times\operatorname{grad}\ln\mu - \nabla^2\mathbf{e} - \operatorname{grad}(\mathbf{e}\cdot\operatorname{grad}\ln\varepsilon)\end{aligned}$$

类此，将(1)和(8)两式代入 1.2 节中 **H** 的波动方程(6)，就得到含 **h** 的相应方程(或者更简单地，利用 **E** 和 **H**，ε 和 $-\mu$ 同时互换时麦克斯韦方程保持不变这一特性)，结果是

$$\boldsymbol{K}(\mathbf{h}, \mathcal{S}, n) + \frac{1}{\mathrm{i}k_0}\boldsymbol{L}(\mathbf{h}, \mathcal{S}, n, \varepsilon) + \frac{1}{(\mathrm{i}k_0)^2}\boldsymbol{M}(\mathbf{h}, \mu, \varepsilon) = 0 \tag{17}$$

当 k_0 足够大时，第二项和第三项一般可以忽略；因而 $\boldsymbol{K} = 0$，再次给出程函方程。后面将看到，(16)和(17)两式中 $1/\mathrm{i}k_0$ 的一次幂项也具有一物理解释。

可以证明，在许多重要情况下，场矢量的空间部分 $\mathbf{E}_0$ 和 $\mathbf{H}_0$ 可展成渐近级数，形式如下[②]：

$$\mathbf{E}_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0\mathcal{S}}\sum_{m\geqslant 0}\frac{\mathbf{e}^{(m)}}{(\mathrm{i}k_0)^m}, \qquad \mathbf{H}_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0\mathcal{S}}\sum_{m\geqslant 0}\frac{\mathbf{h}^{(m)}}{(\mathrm{i}k_0)^m} \tag{18}$$

式中 $\mathbf{e}^{(m)}$ 和 $\mathbf{h}^{(m)}$ 是位置的函数，而函数 $\mathcal{S}$ 同前[③]。几何光学则对应于这些展开式的首项。

3.1.2　光线和几何光学的强度定律

由(8)式，以及由 §1.4(54)和 §1.4(55)可以得到，电能密度和磁能密度的时间平均值 $\langle w_e\rangle$ 和 $\langle w_m\rangle$ 为

$$\langle w_e\rangle = \frac{\varepsilon}{16\pi}\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^{\star}, \qquad \langle w_m\rangle = \frac{\mu}{16\pi}\mathbf{h}\cdot\mathbf{h}^{\star} \tag{19}$$

分别用(11a)和(12a)两式代替上式的 $\mathbf{e}^{\star}$ 和 **h**，得到

---

① 以后，当无混淆之弊时，我们将去掉“几何”二字。

② 这里我们假定，每一点只有一个几何波阵面通过。在某些情况下，例如当媒质中存在障碍物，波在它们上面发生反射时，每一点就可能有几个波阵面通过。这时，合场由上列类型的各个级数相加来表示。

③ 这种渐近展开式的理论主要出自 Luneburg 的工作，见其《电磁波的传播》讲义[R. K. Luneburg, *Propagation of Electromagnetic Waves* (mimeographed lecture notes, New York University, 1947—1948)]。亦见 M. Kline, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **4**(1951), 225; *ibid.*, **8**(1955), 595 和 W. Braunbek, *Z. Naturforsch.*, **6**(1951), 672。M. Kline 和 I. W. Kay《电磁理论和几何光学》一书对此理论做了详细介绍[M. Kline and I. W. Kay, *Electromagnetic Theory and Geometrical Optics* (New York, Interscience Publishers, (1965)]。

$$\langle w_e\rangle = \langle w_m\rangle = \frac{1}{16\pi}[\mathbf{e}, \mathbf{h}^\star, \operatorname{grad}\mathcal{S}] \tag{20}$$

方括号表示标量三重积,因此,**在几何光学的精度范围内,电能密度和磁能密度的时间平均值是相等的。**

坡印廷矢量的时间平均值可由(8)式和§1.4(56)得到:

$$\langle \mathbf{S}\rangle = \frac{c}{8\pi}\mathcal{R}(\mathbf{e}\times\mathbf{h}^\star)$$

利用(12a)式,则

$$\langle \mathbf{S}\rangle = \frac{c}{8\pi\mu}\{(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^\star)\operatorname{grad}\mathcal{S} - (\mathbf{e}\cdot\operatorname{grad}\mathcal{S})\mathbf{e}^\star\}$$

后一项因(13a)式而为零,剩下前一项以$\langle w_e\rangle$表达式(19)和麦克斯韦关系式$\varepsilon\mu = n^2$代入,即有

$$\langle \mathbf{S}\rangle = \frac{2c}{n^2}\langle w_e\rangle \operatorname{grad}\mathcal{S} \tag{21}$$

因为$\langle w_e\rangle = \langle w_m\rangle$,故$2\langle w_e\rangle$代表总能量密度的时间平均值$\langle w\rangle$(即$\langle w\rangle = \langle w_e\rangle + \langle w_m\rangle$)。此外,由于程函方程,$(\operatorname{grad}\mathcal{S})/n$是一单位矢量,设为$\mathbf{s}$:

$$\mathbf{s} = \frac{\operatorname{grad}\mathcal{S}}{n} = \frac{\operatorname{grad}\mathcal{S}}{|\operatorname{grad}\mathcal{S}|} \tag{22}$$

而(21)式表明,$\mathbf{s}$是在平均坡印廷矢量的方向上,同前,令$c/n = v$,则(21)式变成

$$\langle \mathbf{S}\rangle = v\langle w\rangle\mathbf{s} \tag{23}$$

因此,**平均坡印廷矢量的方向垂直于几何波阵面,而它的大小等于平均能量密度和速度$v = c/n$之积。**这个结果类似于平面波的关系式§1.4(9),它表明,**在几何光学的精度范围内,平均能量密度是以速度$v = c/n$来传播的。**

现在,可把**几何光线**定义为几何波阵面$\mathcal{S}$ = 常数的正交轨线。我们将把它们看做是一些定向曲线,它们的方向处处都与平均坡印廷矢量的方向相重合[①]。设$\mathbf{r}(s)$代表某一光线上点P的位置矢量,并作为光线弧长s的函数,则$\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}s = \mathbf{s}$,而光线方程可写成为

$$n\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \operatorname{grad}\mathcal{S} \tag{24}$$

从(13a)和(14a)两式可以看出,**电矢量和磁矢量在每一点都和光线垂直。**

(24)式的意义从下列说明可以看得更加清楚。考虑相邻两个波阵面$\mathcal{S}$ = 常数和$\mathcal{S} + \mathrm{d}\mathcal{S}$ = 常数(见图3.1)。于是

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{S}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\cdot\operatorname{grad}\mathcal{S} = n \tag{25}$$

因此,这两个波阵面之间的法线距离$\mathrm{d}s$与折射率成反比,即与v成正比。

现沿某一曲线C取积分$\int_C n\mathrm{d}s$,此积分称为曲线C的**光学长度**。设用方括号表示连接P_1, P_2两点的**光线**的光学长度,则

① 这个光线定义只适用于各向同性媒质。后面(见第15章)我们将看到,在各向异性媒质中,波阵面法线的方向和坡印廷矢量的方向,一般说来并不重合。

$$[P_1P_2]=\int_{P_1}^{P_2} n\,\mathrm{d}s=\mathcal{S}(P_2)-\mathcal{S}(P_1) \tag{26}$$

我们已经看到，平均能量密度是以速度 $v=c/n$ 沿光线传播的，因而

$$n\,\mathrm{d}s=\frac{c}{v}\,\mathrm{d}s=c\,\mathrm{d}t$$

式中 $\mathrm{d}t$ 是能量沿光线行经距离 $\mathrm{d}s$ 所需的时间。因此

$$[P_1P_2]=c\int_{P_1}^{P_2}\mathrm{d}t \tag{27}$$

即光学长度 $[P_1P_2]$ 等于光的真空速度和光从 P_1 传播到 P_2 所需时间之积。

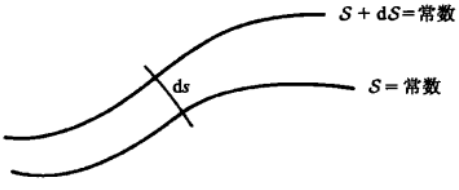


图 3.1　关系式 $n\mathbf{s}=\mathrm{grad}\,\mathcal{S}$ 的意义图示

光的强度 I 前已定义为坡印廷矢量的时间平均的绝对值。因此由(23)式有

$$I=|\langle\mathbf{S}\rangle|=v\langle w\rangle \tag{28}$$

而能量守恒定律 § 1.4(57)给出

$$\mathrm{div}\,(I\mathbf{s})=0 \tag{29}$$

为了说明这个关系式的含义，在某一波阵面 $\mathcal{S}(\mathbf{r})=a_1$（$a_1$ 是一常数）上取一面元 $\mathrm{d}S_1$，用它所发出的所有光线构成一个窄管，这些光线和另一波阵 $\mathcal{S}(\mathbf{r})=a_2$ 相交的相应面元设为 $\mathrm{d}S_2$（见图 3.2）。对窄管体积取(29)式的积分，并应用高斯定理，得到

$$\int I\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nu}\,\mathrm{d}S=0 \tag{30}$$

$\boldsymbol{\nu}$ 代表窄管表面的外向法线。由于

$$\begin{aligned}&\text{在 } \mathrm{d}S_2 \text{ 上，}\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nu}=1\\&\text{在 } \mathrm{d}S_1 \text{ 上，}\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nu}=-1\\&\text{在其他各处，}\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nu}=0\end{aligned}$$

因而(30)式化为

$$I_1\,\mathrm{d}S_1=I_2\,\mathrm{d}S_2 \tag{31}$$

I_1 和 I_2 分别代表 $\mathrm{d}S_1$ 和 $\mathrm{d}S_2$ 上的强度。由此可见，$I\mathrm{d}S$ **沿一个光线管保持不变**。这个结果表达了**几何光学**的强度定律。

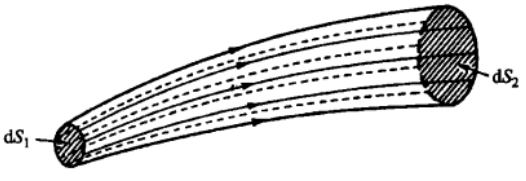


图 3.2　几何光学的强度定律图示

后面将看到,在均匀媒质中,光线是直线。这时强度定律可表成稍微不同的形式。先假定 dS_1 以及 dS_2 的周界是由曲率线线段组成的(见图 3.3)。设 R_1 和 R_1' 是线段 A_1B_1 和 B_1C_1 的主曲率半径(见 4.6.1 节),则

$$A_1B_1 = R_1\,d\theta, \qquad B_1C_1 = R_1'\,d\phi$$

式中 $d\theta$ 和 $d\phi$ 是 A_1B_1 和 B_1C_1 对各自曲率中心 Q 和 Q' 的张角。因此

$$dS_1 = A_1B_1 \cdot B_1C_1 = R_1R_1'\,d\theta\,d\phi \tag{32}$$

同样,对于 dS_2(通过 dS_1 的这束光线和波阵面族中另一个面所交的面元),有

$$dS_2 = A_2B_2 \cdot B_2C_2 = R_2R_2'\,d\theta\,d\phi \tag{33}$$

设 l 是 dS_1 和 dS_2 之间的光线长度,则

$$R_2 = R_1 + l, \qquad R_2' = R_1' + l$$

结果

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{dS_1}{dS_2} = \frac{R_1R_1'}{R_2R_2'} = \frac{R_1R_1'}{(R_1 + l)(R_1' + l)} \tag{34}$$

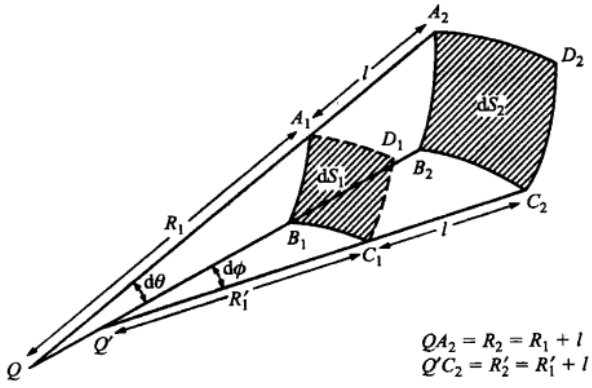


图 3.3 直线光线情况下几何光学的强度定律图示

如果面元 dS_1 和 dS_2 的周界是由任意曲线组成的,则(34)式将依然有效。这一点可立即看出,只要把这种面元再分成若干小面元,令每个小面元的周界由曲率线线段组成,而后将这些小面元的贡献相加。

如 $R_1 \ll l, R_1' \ll l$,则(34)式化为

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1R_1'}{l^2} \tag{35}$$

这个公式在讨论辐射散射问题时有时要用到。

两个主曲率半径之积的倒数 $1/RR'$ 叫做曲面的**高斯曲率**(或第二曲率)。(34)式表明,**直线光线上任一点的强度系与通过该点的波阵面的高斯曲率成正比**。特别是,如果所有(直线)光线有一公共交点,则波阵面都是球面,以该交点为共同球心。这时,$R_1 = R_1'$, $R_2 = R_2'$,就得到(抹去下标)**平方反比定律**

$$I = \frac{\text{常数}}{R^2} \tag{36}$$

现在回到一般情况，考虑任意一束光线（曲线的或直线的）。我们可写出一个显式，用函数 $\mathcal{S}$ 表示出沿每条光线的强度变化。以(22)式的 **s** 代入(29)式，并利用恒等式 div $u\mathbf{v} = u$ div $\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot$grad u 和 div grad $= \nabla^2$，由而得到

$$\frac{I}{n}\nabla^2\mathcal{S} + \operatorname{grad}\mathcal{S}\cdot\operatorname{grad}\frac{I}{n} = 0$$

此式又可写成

$$\nabla^2\mathcal{S} + \operatorname{grad}\mathcal{S}\cdot\operatorname{grad}\ln\frac{I}{n} = 0 \tag{37}$$

现在让我们引入算符

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = \operatorname{grad}\mathcal{S}\cdot\operatorname{grad} \tag{38}$$

式中 τ 是一个参量，它确定光线上各点的位置。于是(37)式可写成为

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\ln\frac{I}{n} = -\nabla^2\mathcal{S}$$

由此进行积分，得到

$$I = n\mathrm{e}^{-\int^{\tau}\nabla^2\mathcal{S}\,\mathrm{d}\tau}$$

但是由(38)，(15)和(25)三式可知

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}\mathcal{S}}{(\operatorname{grad}\mathcal{S})^2} = \frac{1}{n^2}\,\mathrm{d}\mathcal{S} = \frac{1}{n}\,\mathrm{d}s \tag{39}$$

所以，最后得到一条光线上任意两点的强度之比如下：

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{n_2}{n_1}\,\mathrm{e}^{-\int_{\mathcal{S}_1}^{\mathcal{S}_2}\frac{\nabla^2\mathcal{S}}{n^2}\mathrm{d}\mathcal{S}} = \frac{n_2}{n_1}\,\mathrm{e}^{-\int_{s_1}^{s_2}\frac{\nabla^2\mathcal{S}}{n}\mathrm{d}s} \tag{40}$$

式中积分是沿该光线来取的[①]。

3.1.3　振幅矢量的传播

我们已经看到，当波长足够小时，能量的传输可用一个简单的流体动力学模型来代表，而这个模型又可完全用实标函数 $\mathcal{S}$ 来描写，函数 $\mathcal{S}$ 则是程函方程(15)的解。几何光学，按照它的传统词义，就是指这种近似的能量传播图像，它只采用了光线和波阵面的概念。换句话说，偏振性质被排除在外。之所以有此局限，无疑是由于这一事实，即关于光线和波阵面的简单几何学定律，人们早在光的电磁理论建立之前，就由实验得知了。然而，可以（而且从我们的观点来看，这也十分自然）把几何光学的含义加以扩大，以便把有关“振幅矢量”**e** 和 **h** 传播的某些几何定律也包括进来。这些定律很容易从波动方程(16)～(17)导出。

---

① M. Kline 曾经证明，强度之比(40)式可以用另一个包含相关波阵面主曲率半径的积分来表出，见 M. Kline, *Comm. Pure and Appl. Maths.*, **14**(1961), 473。Kline 的公式是(34)式对非均匀媒质的自然推广。亦见 M. Kline and I. W. Kay, *ibid*, 184。

因$\mathcal{S}$满足程函方程,故$\boldsymbol{K}=0$,可见当k_0足够大(λ_0足够小)时,(16)和(17)两式中只需保留$\boldsymbol{L}$项。因此,在这一近似下,振幅矢量和程函通过关系式$\boldsymbol{L}=0$相联系。如果再采用(38)式所引入的算符$\partial/\partial\tau$,则方程$\boldsymbol{L}(\mathbf{e},s,n,\mu)=0$和$\boldsymbol{L}(\mathbf{h},s,n,\varepsilon)=0$变成

$$\frac{\partial\mathbf{e}}{\partial\tau}+\frac{1}{2}\left(\nabla^2\mathcal{S}-\frac{\partial\ln\mu}{\partial\tau}\right)\mathbf{e}+(\mathbf{e}\cdot\operatorname{grad}\ln n)\operatorname{grad}\mathcal{S}=0 \tag{41}$$

$$\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\tau}+\frac{1}{2}\left(\nabla^2\mathcal{S}-\frac{\partial\ln\varepsilon}{\partial\tau}\right)\mathbf{h}+(\mathbf{h}\cdot\operatorname{grad}\ln n)\operatorname{grad}\mathcal{S}=0 \tag{42}$$

这些就是所求的**振幅输运方程**,它们决定$\mathbf{e}$和$\mathbf{h}$沿每条光线的变化。下面分别来考查这些矢量的大小变化和方向变化,这样能够对这些方程的含义得到最好的了解。

以$\mathbf{e}^\star$标乘(41)式,将所得方程和其复共轭方程相加,由而得到

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^\star)+\left(\nabla^2\mathcal{S}-\frac{\partial\ln\mu}{\partial\tau}\right)\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^\star=0 \tag{43}$$

由于恒等式 $\operatorname{div}\ u\mathbf{v}=u\ \operatorname{div}\ \mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\ u$,上式圆括弧内两项可合并如下:

$$\nabla^2\mathcal{S}-\frac{\partial\ln\mu}{\partial\tau'}=\nabla^2\mathcal{S}-\operatorname{grad}\mathcal{S}\cdot\operatorname{grad}\ln\mu=\mu\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{grad}\mathcal{S}\right) \tag{44}$$

沿某一光线取(43)式的积分,得到该光线上任意两点的$\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^\star$之比如下①:

$$\frac{(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^\star)_2}{(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^\star)_1}=\mathrm{e}^{-\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mu\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{grad}\mathcal{S}\right)\mathrm{d}\tau}=\mathrm{e}^{-\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{grad}\mathcal{S}\right)\mathrm{d}s} \tag{45}$$

同样,

$$\frac{(\mathbf{h}\cdot\mathbf{h}^\star)_2}{(\mathbf{h}\cdot\mathbf{h}^\star)_1}=\mathrm{e}^{-\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\operatorname{div}\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}\mathcal{S}\right)\mathrm{d}s} \tag{46}$$

其次,考虑复单位矢量

$$\mathbf{u}=\frac{\mathbf{e}}{\sqrt{\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^\star}},\qquad \mathbf{v}=\frac{\mathbf{h}}{\sqrt{\mathbf{h}\cdot\mathbf{h}^\star}} \tag{47}$$

沿每条光线的变化。将(47)式代入(41)式,得到

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\tau}+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\ln(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^\star)}{\partial\tau}+\nabla^2\mathcal{S}-\frac{\partial\ln\mu}{\partial\tau}\right]\mathbf{u}+(\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad}\ln n)\operatorname{grad}\mathcal{S}=0$$

---

① 此式也可写成另一形式:

$$\left(\frac{\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^\star}{\mu}\right)_2=\left(\frac{\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^\star}{\mu}\right)_1\mathrm{e}^{-\int_{s_1}^{s_2}\frac{\nabla^2\mathcal{S}}{n}\mathrm{d}s} \tag{45a}$$

将(43)式改写成

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\ln\left(\frac{\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^\star}{\mu}\right)\right]=-\nabla^2\mathcal{S}$$

并沿某一光线取积分,即可得到(45a)式。事实上,(45a)式只是强度变化关系(40)式的另一表达形式,因为如果以

$$I=\frac{2c}{n}\langle w_e\rangle=\frac{c\varepsilon}{8\pi n}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^\star)$$

和麦克斯韦公式$\varepsilon\mu=n^2$代入(40)式,即得到(45a)式。

方括号内诸项因(43)式而为零,结果

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}\tau} \equiv n\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}s} = -(\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad}\ln n)\operatorname{grad}\mathcal{S} \tag{48}$$

同样,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}\tau} \equiv n\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}s} = -(\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\ln n)\operatorname{grad}\mathcal{S} \tag{49}$$

这就是所求的 **u** 和 **v** 沿每条光线变化的定律[①]。特别是,**对于一个均匀媒质**(n = 常数),(48)和(49)两式化为 $\mathrm{d}\mathbf{u}/\mathrm{d}s = \mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}s = 0$,**因而这时 u 和 v 沿各条光线保持不变。**

最后指出,对均匀媒质中的时谐均匀平面波而言,$\mathcal{S} = n\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}$,并且 **e**,**h**,$\varepsilon$ 和 μ 都是常数,因而(16)式中 $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{L} = \boldsymbol{M} \equiv 0$。因此这种波不管频率如何,总严格遵守几何光学的各项定律。

3.1.4　推广和几何光学的适用范围

前几节的讨论只适用于严格的单色场。这种场可以看做是一任意场的某一傅里叶分量,由一个谐振子或一组频率相同的谐振子所产生。

在光学中,通常遇到的是这样的光源,它所发射的光,频率范围虽然很窄,但仍有一定的宽度。这种光可以看成是由频率落在这一范围的大量谐振子所组成。要得到场中某代表点 P 处的强度,必须把各个振子(元光源)所产生的场一一相加:

$$\mathbf{E} = \sum_n \mathbf{E}_n, \qquad \mathbf{H} = \sum_n \mathbf{H}_n \tag{50}$$

于是强度(用实数表示)

$$\begin{aligned} I(P) = |\langle\mathbf{S}\rangle| &= \frac{c}{4\pi}|\langle\mathbf{E}\times\mathbf{H}\rangle| = \frac{c}{4\pi}\left|\sum_{n,m}\langle\mathbf{E}_n\times\mathbf{H}_m\rangle\right| \\ &= \frac{c}{4\pi}\left|\sum_n\langle\mathbf{E}_n\times\mathbf{H}_n\rangle + \sum_{n\neq m}\langle\mathbf{E}_n\times\mathbf{H}_m\rangle\right| \end{aligned} \tag{51}$$

在许多光学问题中,通常可设(51)式中第二项和为零(这时我们说各个振子的场是不相干的),因而

$$I(P) = \frac{c}{4\pi}\left|\sum_n\langle\mathbf{E}_n\times\mathbf{H}_n\rangle\right| = \left|\sum_n\langle\mathbf{S}_n\rangle\right| \tag{52}$$

---

① 从非欧几里得几何学来看,关系式(48)和(49)有一个重要解释。如果考虑相关的非欧几里得空间,其线元

$$\mathrm{d}s' = n\,\mathrm{d}s = n\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}$$

则几何光线相当于这个空间中的短程线,并且从(48)和(49)两式可以证明,**u** 和 **v** 二矢量沿每条光线传递时各与其自身平行(在 Levi-Civita 平行性的意义上)。参见 E. Bortolotti, *Rend. R. Acc. Naz. Linc.*, 6a, **4**(1926), 552; S. M. Rytov, *Compt. Rend.* (*Doklady*) *Acad. Sci.* URSS, **18**(1938), 263; R. K. Luneburg, *Mathematical Theory of Optics* (Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1964), pp. 51—55; M. Kline and I. W. Kay, *Electromagnetic Theory and Geometrical Optics* (New York, Interscience Publishers, 1965), pp. 180—183。

近来发现,Levi-Civita 平行性在有关所谓几何相,即 Berry 相方面起重要作用,几何相出现于某些量子态在参量空间中输运的过程[见,例如 A. Shapere and F. Wilczek (eds.) *Geometric Phases in Physics*, (Singapore, World Scientific, 1989)。对此问题的历史记述,见 M. Berry, *Physics Today*, Dec. (1990), 34 和 I. Bialynicki-Birula, *ibid.*, July (1991), 83]。

式中 $\mathbf{S}_n$ 代表第 n 个元光源所属的坡印廷矢量。更普遍的情形是(51)式右边第二项的值不为零,这时须用光的相干性理论(见第 10 章)来分析。

设 δS 是与某一特定元光源相关联的一个波阵面的一小部分。每一元光源各向 δS 发去一束光线,各光束的中心光线形成一个圆锥,设其立体角为 $\delta\Omega$(见图 3.4)。如果这个圆锥的半对顶角足够小,则可忽略 $\mathbf{S}_n$ 的方向变化,(52)式即可写成

$$I(P)=\sum_n|\langle\mathbf{S}_n\rangle|=\sum_n I_n \tag{53}$$

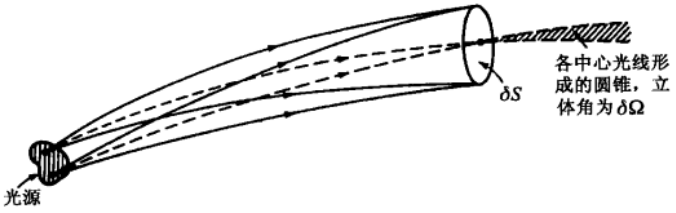


图 3.4 非相干扩展光源情况下几何光学的强度定律图示

可以认为元光源(振子)的数目如此之大,以致把它们作为连续分布来处理不会产生什么误差。这时,每个元光源的贡献为无穷小,但总效应是有限的。这时,(53)式的和(积分)$I(P)$与 $\delta\Omega$ 成正比:

$$I(P)=B\delta\Omega$$

而每单位时间内通过面元 δS 的总能流(取时间平均)

$$\delta F=B\delta\Omega\delta S \tag{54}$$

这个公式在辐射度量学里是很重要的,我们将在 4.8.1 节回到这个公式。

现在必须简单谈谈几何光学的适用范围。在推导程函方程时,我们曾假设(11)和(12)两式右边的项可以忽略。假定 ε,μ 和 $|\operatorname{grad}\mathcal{S}|$ 这三个无量纲量都在 1 左右,则可看出,只要在线度为波长量级的区域内,$\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{h}$ 改变之量比 $\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{h}$ 本身的大小小得多,这种忽略就是合理的。但这个条件在某些地区,例如在阴影边界处是不成立的,因为这种边界两边强度变化很大,因而 $\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{h}$ 变化也很大。在强度分布形成很锐极大的那些点附近(例如,在焦点处,见 8.8 节),同样可以预期几何光学不能正确描述场的特性。

在推导复振幅矢量 $\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{h}$ 的输运方程(41)和(42)时,我们曾假定$\mathcal{S}$满足程函方程,并且 $\lambda_0|M(\mathbf{e},\varepsilon,\mu)|$ 和 $\lambda_0|M(\mathbf{h},\varepsilon,\mu)|$ 分别比 $|L(\mathbf{e},\mathcal{S},n,\mu)|$ 和 $|L(\mathbf{h},\mathcal{S},n,\varepsilon)|$ 小得多。这就不仅要求对 $\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{h}$ 的一阶微商,而且还要求对它们的二阶微商加上某些限制。这些条件颇为复杂,此处不拟加以研究。

当然,可以在场矢量展开式(18)中保留一些高次项,以获得更高级近似[①]。然而,在仪器

① J. B. Keller 发展了一种理论,将一些高次项考虑进来,通称为**衍射的几何理论**。其中心概念是衍射光线,这种光线服从推广的费马原理。有关综述见 J. B. Keller, *J. Opt. Soc. Amer.*, **52**(1962), 116。另有一论文集,收录了这方面几篇文章,见 R. C. Hansen(ed.), *Geometrical Theory of Diffraction*(New York, J. Wiley, 1981)。理论的一些应用,见于 G. L. James, *Geometrical Theory of Diffraction for Electromagnetic Waves*(London and New York, The Institute of Electrical Engineers, 1976; revised edition 1980)。

光学问题中，这样做的实际好处是有疑问的，因为离特殊地区越近，须包括的项就越多，而在特别重要的那些点（例如，焦点或焦散面），这些展开式通常完全失效。研究这种地区的强度分布，更行之有效的方法将在衍射各章中加以讨论。

最后，我们着重指出，几何光学模型的简单性基本上出自这一事实，即场的**局部**行为一般来说像一个平面波。在光学波长范围，简单几何模型不适用的那种地区只是少数例外。事实上，对于大多数光学问题来说，几何光学至少能给更精细的探讨提供一个很好的起点。

3.2　光线的一般性质

3.2.1　光线的微分方程

前面把光线定义为几何波阵面$\mathcal{S}(x,y,z)$等于常数的正交轨线，并且我们看到，如果 $\mathbf{r}$ 是一条光线上某代表点的位置矢量，s 是从它上面某固定点量起时光线的长度，则

$$n\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}=\operatorname{grad}\mathcal{S} \tag{1}$$

这个方程用函数$\mathcal{S}$确定光线，但是从这个方程很容易推导出另一个微分方程，它直接用折射率函数 $n(\mathbf{r})$来确定光线。

取(1)式对 s 的微商，得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\right)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\operatorname{grad}\mathcal{S})\\&=\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\cdot\operatorname{grad}(\operatorname{grad}\mathcal{S})\\&=\frac{1}{n}\operatorname{grad}\mathcal{S}\cdot\operatorname{grad}(\operatorname{grad}\mathcal{S})\qquad[\text{由 (1)}]\\&=\frac{1}{2n}\operatorname{grad}[(\operatorname{grad}\mathcal{S})^2]\\&=\frac{1}{2n}\operatorname{grad}n^2\qquad[\text{由 §3.1 (15)}]\end{aligned}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\right)=\operatorname{grad}n \tag{2}$$

这是矢量形式的光线微分方程。特别来说，**在一均匀媒质中**，n = 常数，则(2)式化为

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}s^2}=0$$

因此

$$\mathbf{r}=s\mathbf{a}+\mathbf{b} \tag{3}$$

$\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 是常矢量。方程(3)是一个矢量直线方程，该直线沿着矢量 $\mathbf{a}$ 的方向并通过点 $\mathbf{r}=\mathbf{b}$。因此，**在均匀媒质中，光线的形状是直线。**

作为一个颇有意思的例子，看看球面对称媒质中的光线形状如何。所谓球面对称，就是指媒质各点的折射率仅仅依赖于各点离某固定点 O 的距离 r：

$$n = n(r) \tag{4}$$

实际上,如果把地球的曲率考虑进来的话,地球大气就近似这种情况。

考虑矢量 $\mathbf{r}\times[n(\mathbf{r})\mathbf{s}]$沿光线的变化,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathbf{r}\times n\mathbf{s}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\times n\mathbf{s} + \mathbf{r}\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(n\mathbf{s}) \tag{5}$$

因 $\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}s = \mathbf{s}$,故右边第一项为零。第二项由于(2)式可写成 $\mathbf{r}\times\operatorname{grad} n$。但由(4)式,

$$\operatorname{grad} n = \frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}$$

因而(5)式右边第二项也为零。因此

$$\mathbf{r}\times n\mathbf{s} = 常数 \tag{6}$$

这个关系式意味着,所有光线都是平行曲线,所在平面皆通过原点 O,并且沿每条光线,

$$nr\sin\phi = 常数 \tag{7}$$

式中ϕ是位置矢量 $\mathbf{r}$ 和光线上 $\mathbf{r}$ 点处切线的夹角(见图 3.5)。因为 $r\sin\phi$代表从原点到该切线的垂直距离 d,故(7)式也可写成

$$nd = 常数 \tag{8}$$

这个关系有时叫做**布格(Bouguer)公式**,它和动力学中著名的角动量守恒公式(一个质点在中心力场中运动时的角动量守恒)形式类似。

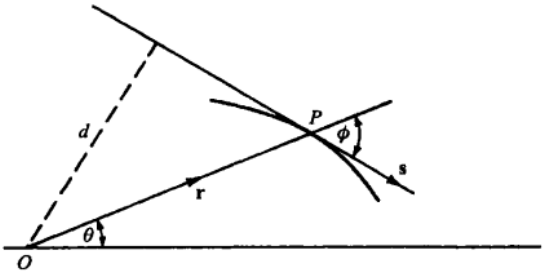


图 3.5 球面对称媒质中光线的布格公式 nd = 常数图示

为获得球面对称媒质中光线的显表达式,回顾一下在初等几何中,如果(r,θ)是一平面曲线的极坐标,则曲线上某点 P 的矢径与 P 点切线的夹角ϕ由下式给出[①]:

$$\sin\phi = \frac{r(\theta)}{\sqrt{r^2(\theta) + \left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}} \tag{9}$$

由(7)和(9)两式,

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{r}{c}\sqrt{n^2r^2 - c^2} \tag{10}$$

式中 c 为一常数。因此,球面对称媒质中的光线方程可写成如下形式:

① 例如,见 R. Courant, *Differential and Integral Calculus*, Vol. I(Glasgow, Blackie, 2nd edition, 1942), p. 265。

$$\theta = c\int^{r} \frac{\mathrm{d}r}{r\sqrt{n^2r^2 - c^2}} \tag{11}$$

现在让我们回到一般情况，考虑一条光线的**曲率矢量**，即矢量

$$\mathbf{K} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nu} \tag{12}$$

它的大小 $1/\rho$ 是曲率半径的倒数；$\boldsymbol{\nu}$ 是光线上某代表点处的单位主法线。

由(2)和(12)两式可以得到

$$n\mathbf{K} = \operatorname{grad} n - \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s}\mathbf{s} \tag{13}$$

此式表明，**折射率梯度矢量位于光线的密切平面上**。

如以 $\mathbf{K}$ 标乘(13)式并应用(12)式，则可得到

$$|\mathbf{K}| = \frac{1}{\rho} = \boldsymbol{\nu}\cdot\operatorname{grad}\ln n \tag{14}$$

因 ρ 总是正的，故此式表示沿主法线前进时，折射率是增大的，即**光线弯向折射率高的一边**(见图 3.6)。

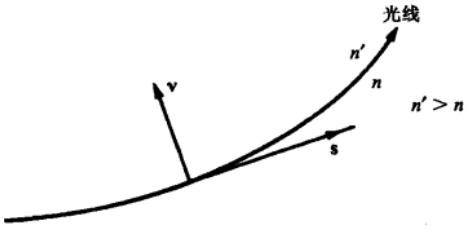


图 3.6　非均匀媒质中光线的弯曲

3.2.2　折射定律和反射定律

前面我们一直假定，折射率函数 n 是连续的。现在要讨论光线通过折射率不同的两个均匀媒质分界面时的行径。1.1.3 节曾经推导了关于场矢量通过突变面时变化的边界条件。索末菲和朗格(J. Runge)指出[①]，用与此类似的论证很容易确定出相应的光线行径。

由(1)式利用恒等式 curl grad ≡ 0 可以得到，矢量 $n\mathbf{s} = n\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}s$(有时称为**光线矢量**)满足关系式

$$\operatorname{curl}\, n\mathbf{s} = 0 \tag{15}$$

像 1.1.3 节中一样，用一过渡层代替突变面 T，在这个过渡层中，ε，μ 和 n 迅速而连续地从它们靠 T 这边的值改变到它们靠 T 那边的值。然后，取一个平面元面积，令其 P_1Q_1，P_2Q_2 二边平行于 T；P_1P_2，Q_1Q_2 二边垂直于 T(见图 3.7)。设 $\mathbf{b}$ 代表此元面积的单位法线，并对此面积取(15)式的积分，再应用斯托克斯定理，则有

$$\int(\operatorname{curl} n\mathbf{s})\cdot\mathbf{b}\,\mathrm{d}S = \int n\mathbf{s}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = 0 \tag{16}$$

① Sommerfeld and Runge, *loc cit*。

第二个积分沿边界曲线 $P_1Q_1Q_2P_2$。与推导 §1.1(23)做法完全相似,过渡到极限,令高度 $\delta h \to 0$,由而得到

$$\mathbf{n}_{12} \times (n_2\mathbf{s}_2 - n_1\mathbf{s}_1) = 0 \tag{17}$$

式中 $\mathbf{n}_{12}$是界面的单位法线,由第一媒质指向第二媒质。(17)式意指,**光线矢量 $n\mathbf{s}$ 在通过界面时其切线分量是连续的**,换句话说,**矢量 $\mathbf{N}_{12} = n_2\mathbf{s}_2 - n_1\mathbf{s}_1$ 垂直于界面**。

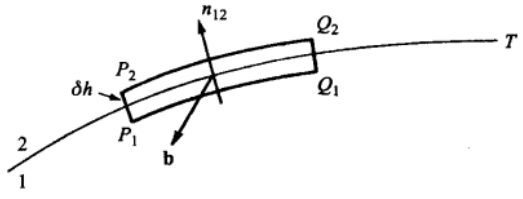


图 3.7 折射定律和反射定律的推导

设 θ_1 和 θ_2 分别代表入射光线和折射光线与界面法线 $\mathbf{n}_{12}$的夹角[见图 3.8(a)]。由(17)式得到

$$n_2(\mathbf{n}_{12} \times \mathbf{s}_2) = n_1(\mathbf{n}_{12} \times \mathbf{s}_1) \tag{18}$$

因而

$$n_2 \sin\theta_2 = n_1 \sin\theta_1 \tag{19}$$

(18)式意指,**折射光线位于入射光线和界面法线所在的平面(入射面)上**,而(19)式表明,**折射角的正弦与入射角的正弦之比等于二折射率之比** n_1/n_2。这两个结果表达了**折射定律(斯涅耳定律)**。这个定律已在 1.5 节中就平面波这一特殊情况做过推导。但那时讨论的是一个波长**任意**的平面波射到一个平的折射面上,而这里的分析可应用于形状更一般的波和折射面,只要波长足够小($\lambda_0 \to 0$)。这一条件意味着,在实用上,入射波和界面的曲率半径都必须比入射光的波长大得多。

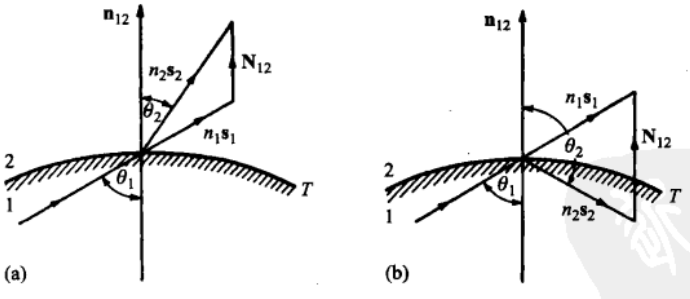


图 3.8 (a)折射定律图示;(b)反射定律图示

和 1.5 节所处理的情况一样,还须预期将有另一个波——反射波传播回到第一媒质中。令(18)和(19)两式中的 $n_2 = n_1$[见图 3.8(b)],结果得到,**反射光线在入射面上**,并且 $\sin\theta_2 = \sin\theta_1$;因此

$$\theta_2 = \pi - \theta_1 \tag{20}$$

最后两个结果表达了**反射定律**。

3.2.3　光线汇及其焦点特性

在各向同性媒质中，所有能实现的光线系统都要满足关系式(15)，即

$$\operatorname{curl} n\mathbf{s}=0 \tag{21}$$

它们以此与其他更一般的曲线族相区别。在均匀各向同性媒质中，n 是常数，因而(21)式化为

$$\operatorname{curl}\mathbf{s}=0 \tag{22}$$

在非均匀各向同性媒质中，光线也可用一个与 n 无关的关系式来表征。将(21)式按恒等式 $\operatorname{curl} n\mathbf{s}=n\operatorname{curl}\mathbf{s}+(\operatorname{grad} n)\times\mathbf{s}$ 展开，并以 $\mathbf{s}$ 标乘两边，即可得之。因此，在任何**各向同性**媒质中，光线系统必须满足关系式

$$\mathbf{s}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{s}=0 \tag{23}$$

一个曲线系统，如果在它所分布的那部分空间中每点一般只有一条曲线通过，该曲线系统就叫做**线汇**。如果还存在一个面族，与线汇中每条曲线相正交，该线汇就称为**法线汇**；如果不存在这种面族，就称之为**斜线汇**。对普通几何光学(光传播)来说，只有法线汇具有重要性，但是在电子光学(见附录 B)中，斜线汇也起着重要作用。

如果线汇的每条曲线都是直线，则称之为**直线汇**；(23)和(22)两式分别是曲线为**法线汇**和**法直线汇**的必要而且充分的条件[①]。

让我们在某一正交曲面($\mathcal{S}(x,y,z)=$ 常数)上选择一组曲线坐标线 u,v。对于该曲面上每一点 $Q(u,v)$，线汇中都有一条曲线与之对应，这就是和$\mathcal{S}$相交于 Q 点的那条曲线。设 $\mathbf{r}$ 代表该曲线上某点 P 的位置坐标，则 $\mathbf{r}$ 可看做是坐标(u,v)和 Q,P 间曲线弧长 s 的函数(见图 3.9)。

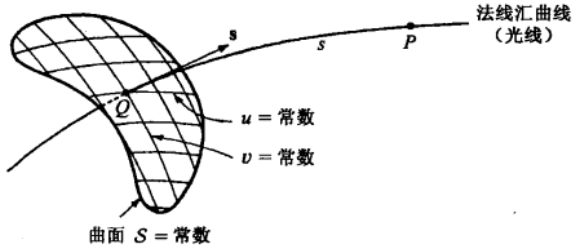


图 3.9　关于法线汇的符号

考虑线汇中相邻的两条曲线，它们分别通过$\mathcal{S}$上的(u,v)点和$(u+\mathrm{d}u,v+\mathrm{d}v)$点，并来考查这两条曲线上是否具有相距为二级小或更高级小的点(人们说两曲线在这种点是一级切割的)。这种性质的点叫做**焦点**，它们必须在一级程度上满足方程

$$\mathbf{r}(u,v,s)=\mathbf{r}(u+\mathrm{d}u,v+\mathrm{d}v,s+\mathrm{d}s) \tag{24}$$

将(24)式展开，得到

$$\mathbf{r}_u\,\mathrm{d}u+\mathbf{r}_v\,\mathrm{d}v+\mathbf{s}\,\mathrm{d}s=0 \tag{25}$$

式中 $\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v$是对 u,v的偏微商。条件(25)式表示，$\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v$和 $\mathbf{s}$ 应该是三个共面矢量。这就是说，

① 关于曲线线汇，更为详细的讨论可见 C. E. Weatherburn, *Differential Geometry of Three Dimensions* (Cambridge, Cambridge University Press), Vol. I(1927), Chapter X; Vol. II (1930), Chapter XIII。

这三个矢量的成标三重积为零。即

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{s}] = 0 \tag{26}$$

在给定的一条曲线(u, v)上,焦点的个数取决于满足(26)式的 s 值的数目。设 $\mathbf{r}$ 是 s 的 m 次多项式,则因 $\mathbf{s} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}s$,可见(26)式是 s 的 $3m-1$ 次方程。特别来说,当线汇是直线汇时,$\mathbf{r}$ 是 s 的线性函数($m=1$),这表明**直线汇的每条光线有两个焦点**。

如果 u 和 v 取所有可能值,则焦点将描绘出一个曲面,由(26)式代表,称为**焦面**(focal surface);在光学中,它叫做**焦散面**(caustic surface)。线汇的任一曲线在它各个焦点处与焦面相切。焦面上任何一点的切面称为**焦平面**(focal plane)。

我们将主要研究均匀媒质中的光线,即直线汇。这种线汇的某些其他性质将在 4.6 节和像散光锥问题结合起来讨论。

3.3 几何光学的其他基本定理

现在借助前几节所建立的各个关系式来推导有关光线和波阵面的一些定理。

3.3.1 拉格朗日积分不变式

先假定折射率 n 是位置的连续函数。然后如 §3.2(16),对任一开曲面取 curl $n\mathbf{s}$ 法线分量的积分,并应用斯托克斯定理,由而得到

$$\oint n\mathbf{s} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0 \tag{1}$$

式中积分环绕曲面的闭合边界 C。(1)式称为**拉格朗日积分不变式**[①],它意指**场中任意两点 P_1, P_2 之间的积分**

$$\int_{P_1}^{P_2} n\mathbf{s} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{2}$$

与积分路线无关。

借助折射定律很容易证明,当曲线 C 从折射率不同的两个均匀媒质分界面上穿过时,(1)式也仍然成立。为证明此点,设 C_1 和 C_2 是曲线 C 在折射面 T 两边的部分(见图 3.10),并用折射面 T 上另一条曲线 K 把 C 同面 T 的两个交点连接起来。分别对回路 C_1K 和 C_2K 取积分(1),而后相加,结果得到

$$\int_{C_1} n_1\mathbf{s}_1 \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{C_2} n_2\mathbf{s}_2 \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_K (n_2\mathbf{s}_2 - n_1\mathbf{s}_1) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0 \tag{3}$$

沿 K 的那个积分为零,因为按照折射定律,矢量 $\mathbf{N}_{12} = n_1\mathbf{s}_1 - n_2\mathbf{s}_2$ 在 K 上每一点都垂直于面 T,结果(3)式化为(1)式。

---

① 有时叫**邦加不变式**。事实上,它只是邦加所讨论的更普遍得多的积分不变式的一维特殊情况。邦加的讨论见其所作 *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Vol.3(Paris, Gauthier-Villars, 1899)。见 E. Cartan, *Lecons sur les Invariants Integraux*(Paris, Hermann, 1922)。亦见本书附录 A,(85)式。

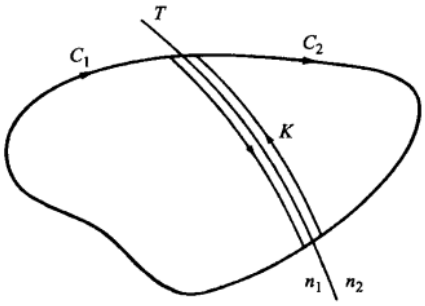


图 3.10　当存在折射率突变面时拉格朗日积分不变式的推导

3.3.2　费马原理

费马原理通常又叫做**最短**光程原理[①]。这一原理说道：**一条实际光线在任何两点 P_1 和 P_2 之间的光学长度**

$$\int_{P_1}^{P_2} n\,\mathrm{d}s \tag{4}$$

比连接这两点的任何其他曲线的光学长度都要短，这些比较曲线应该在属于这条光线的某正则邻域内。所谓正则邻域，是指可以被光线这样覆盖的一个邻域，其中每一点有一条（也只有一条）光线通过。例如，在点源 P_1 周围，在没有光线因折射或反射，或弯曲而相互交叉的区域，就形成这种覆盖。

在证明这一定理之前可提及一点，即费马原理可表述成一种较弱的、但适用范围更广的形式。按照这个表述，实际光线和其他曲线（不再限制处于正则邻域）的区别在于其积分是一个**稳定值**[②]。

为证明费马原理，取一光线锥，并将光线 $\overline{C}$ 的 P_1P_2 段与连接 P_1，P_2 的任一其他曲线 C 进行比较（见图 3.11）。设光锥的两个相邻正交轨线（波阵面）与曲线 C 相交于 Q_1 和 Q_2，与光线 $\overline{C}$ 相交于 $\overline{Q}_1$ 和 $\overline{Q}_2$。此外，设 Q_2' 是轨线 $Q_2\overline{Q}_2$ 与通过 Q_1 的那条光线 $\overline{C}'$ 的交点。

对小三角形 $Q_1Q_2Q_2'$ 应用拉格朗日积分关系式，有

$$(n\mathbf{s}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r})_{Q_1Q_2}+(n\mathbf{s}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r})_{Q_2Q_2'}-(n\,\mathrm{d}s)_{Q_1Q_2'}=0 \tag{5}$$

由标积定义可知

$$(n\mathbf{s}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r})_{Q_1Q_2}\leqslant(n\,\mathrm{d}s)_{Q_1Q_2}$$

---

① 由 §3.1(27)，

$$\int_{P_1}^{P_2} n\,\mathrm{d}s=c\int_{P_1}^{P_2}\mathrm{d}t$$

因此它又称为**最小时间原理**。

② 要得到积分具有稳定值的曲线，一般须应用附录 A 中所介绍的变分法。该处证明，这种曲线满足欧拉微分方程（附录 A 之(7)式）。在本章情况下，这些方程就是光线方程 §3.2(2)，如附录 A 11 节所证。

C. Carathéodory（见前引文献）曾经强调，该稳定值决不是一个真的极大。因此，在费马原理的弱表述中，说稳定值而不说极值是合适的。相反，极小的表述则相当于雅可比意义上的“强极小”（附录 A 之 A.10 节）。

再者,由于 **s** 和波阵面上的 **dr** 相垂直,因而

$$(n\mathbf{s}\cdot\mathbf{dr})_{Q_2Q_2'}=0$$

又因 Q_1,Q_2'和 $\overline{Q}_1$,$\overline{Q}_2$ 分别是两波阵面上的对应点,故由 §3.1(25)可知

$$(n\,\mathrm{d}s)_{Q_1Q_2'}=(n\,\mathrm{d}s)_{\overline{Q}_1\overline{Q}_2}$$

将上列后三式代入(5)式,得到

$$(n\,\mathrm{d}s)_{\overline{Q}_1\overline{Q}_2}\leqslant(n\,\mathrm{d}s)_{Q_1Q_2} \tag{6}$$

经积分后,有

$$\int_{\overline{C}}n\,\mathrm{d}s\leqslant\int_{C}n\,\mathrm{d}s \tag{7}$$

式中等号只有当 C 上每一点 **s** 和 **dr** 的方向都重合时才能成立,即要求比较曲线是一条实在光线。但这一情况已被排除,因为假定邻域中任一点最多只有一条光线通过。因此光线的光学长度小于比较曲线的光学长度,这就是费马原理。

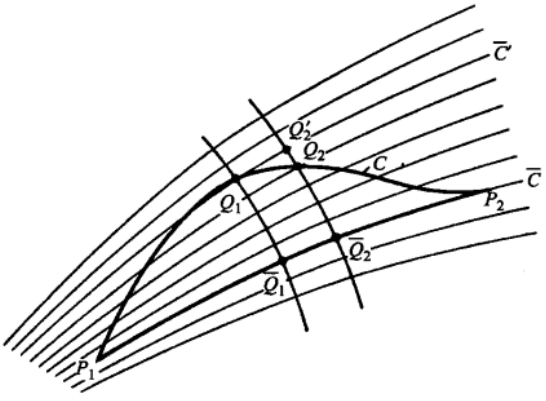


图 3.11 费马原理图示

很容易看出,当不满足正则条件时,光线的光学长度就可能不再是一个极小。例如,在均匀媒质中一个点源 P_1 经平面镜反射所产生的光线场(见图 3.12)。这时每一点 P_2 有两条光线通过;直接光线 P_1P_2 的光学长度是一个绝对极小,而反射光线 P_1MP_2 只有同它附近某有限邻域中的曲线相比,其光学长度才是一个极小。一般来说,当点源 P_1 的光线在均匀媒质边界上受到折射或反射时,正则领域将止于各光线所形成的包络面(焦散面)处。点源 P_1 的某条光线与包络面接触之点 P_1',叫做该光线上 P_1 的**共轭点**。要使光线 P_1P_2 的光学长度是极小,P_2 必须在 P_1 和 P_1'之间,即 P_1 和 P_2 必须在焦散面同侧。例如,拿一个未校正的透镜来说(见图 3.13),从 P_1 发出的中央光线只有在焦散面尖顶点(P_1')(P_1 的高斯像)之前,其光学长度才具有极小性质。对包络面后面的任何点 P_2 来说,直路 $P_1P_1'P_2$ 的光学长度大于折路 P_1ABP_2 的光学长度。

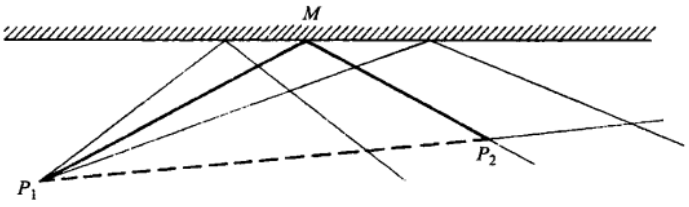


图 3.12　点源的光经平面镜反射所产生的光线场

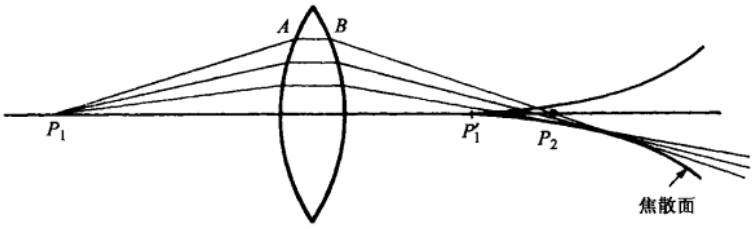


图 3.13　轴上点源的光线经一透镜后所形成的焦散面

3.3.3　马吕斯和杜平定理及一些有关定理

前面我们把光线定义为波面$\mathcal{S}(x,y,z)=$常数的正交轨线，$\mathcal{S}$则是程函方程 §3.1(15)的解。当几何光学的各项定律须由麦克斯韦方程导出时，这种引进光线的方法是很自然的。然而，在历史上，作为光线理论的几何光学，是在不同的光线定义上来发展的。那时，光线被定义为线积分 $\int n\mathrm{d}s$ 具有稳定值的曲线。在这种表述下，几何光学就可以完全沿着变分法的路线来发展[①]。

变分方法的分析十分重要，因为这种分析常常揭示出物理学不同学科之间的类似。特别来说，几何光学就和运动质点力学有密切的类似；这一点已由哈密顿的著名研究探讨得很清楚了。哈密顿的研究在近代物理学上，特别是在应用到德布罗意波动力学上，显示了巨大价值。为了不致打断这里的光学讨论，我们另辟几节（见附录 A、附录 B）去叙述变分学的有关部分和哈密顿类似。这里只证明，如何从拉格朗日积分不变式推导出在几何光学发展中起过重要作用的几个定理。

考虑均匀媒质中的一组光线：如果它们具有一个共同的交点，例如当它们发自一个点源时，我们就说它们形成一个**共心光锥**。这种光锥构成一个法线汇，因为以共同交点为中心的球面与此光锥的各条光线都是正交的。1808 年，马吕斯（Malus）[②]证明，直线光线的共心光锥经曲面折射或反射后，所产生的光锥（一般不再是共心光锥）将仍旧构成一法线汇。后来，杜平（Dupin，1816）、奎特勒特（Quetelet，1825）和格戈恩（Gergonne，1825）推广了马吕斯的结果。这些

① 关于这种处理，系统的论述可见，C. Carathéodory 著作（见前引文献）。

② E. Malus, Optique Dioptrique, *J. École polytechn.*, **7**(1808), 1—44, 84—129。又见其光学论文 Traité d'optique, *Mém. présent. à l'Institur par divers savants*, **2**(1811), 214—302。关于马吕斯-杜平定理的参考资料以及对其有趣历史的介绍，可见哈密顿数学论文集卷 1（几何光学）[*Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton*, Vol. 1 (*Geometrical Optics*), eds. A. W. Conway and J. L. Synge (Cambridge, Cambridge University Press, 1931), p. 463]。

研究导致下列定理,有时称为**马吕斯和杜平定理:一法直线汇经任意次折射或反射后仍然是一法线汇**[①]。

我们只要对单次折射证明该定理成立就足够了。设两均匀媒质以曲面 T 为界,折射率各为 n_1 和 n_2(见图 3.14),并设媒质(n_1)中有一束法直线汇的光线在界面 T 上受到折射。

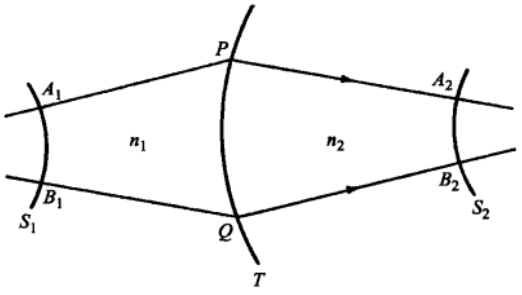


图 3.14 马吕斯和杜平定理图示

设 S_1 是第一区域中的某一正交轨面(波阵面),A_1 和 P 是第一媒质中某代表光线与 S_1 和 T 的交点,并设 A_2 是折射光线上的任一点。如果 A_1 点移到波阵面 S_1 上另一点 B_1,则 P 点将移到折射面上另一点 Q。现在在过 Q 点的折射光线上取一点 B_2,使得 B_1 到 B_2 的光程等于 A_1 到 A_2 的光程:

$$[A_1PA_2] = [B_1QB_2] \tag{8}$$

当 B_1 点在波阵面 S_1 上取所有可能位置时,B_2 点将描绘出一曲面 S_2。现在来证明折射光线 QB_2 垂直于这一曲面。

将拉格朗日积分不变式应用到闭合路线 $A_1PA_2B_2QB_1A_1$,结果

$$\int_{A_1PA_2} n\,\mathrm{d}s + \int_{A_2B_2} n\mathbf{s}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{B_2QB_1} n\,\mathrm{d}s + \int_{B_1A_1} n\mathbf{s}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = 0 \tag{9}$$

由(8)式,

$$\int_{A_1PA_2} n\,\mathrm{d}s + \int_{B_2QB_1} n\,\mathrm{d}s = 0 \tag{10}$$

此外,因为在 S_1 上单位矢量 $\mathbf{s}$ 处处和 S_1 正交,故

$$\int_{B_1A_1} n\mathbf{s}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = 0 \tag{11}$$

因而(9)式化为

$$\int_{A_2B_2} n\mathbf{s}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = 0 \tag{12}$$

这个关系式对 S_2 上每条曲线都须成立。这只有当 S_2 的每一线元 $\mathrm{d}\mathbf{r}$ 都满足 $\mathbf{s}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=0$ 时才有

① T. Levi-Civita *Rend. R. Acc. Naz. Linc.*, 9(1900), 237 建立了下列逆定理;一般地说,两个法直线汇可以经单次折射或单次反射而相互转换。

可能，即要求折射光线和曲面 S_2 正交；换句话说，**各折射光线应形成一法线汇**。反射情况的证明与此完全类似。

由于 $[A_1PA_2]=[B_1QB_2]$，所以，**在法线汇光线的任何两个正交曲面（波阵面）之间，所有光线的光程长度都相等**。显然，这一结果在接连多次折射或反射情况下也仍然成立，并且由 §3.1(26) 可立即看出，它也适用于折射率连续改变的媒质中的光线。这个定理称为**等光程原理**；它意味着，一束法线汇光线，或由接连多次折射或反射产生的若干束法线汇光线，其各正交轨面（几何波阵面）是相互“光学平行的”（见附录 A）。

另一有关的定理首先由惠更斯[①] 提出，这个定理说到：**一个波阵面的每个面元可各看做是一个产生球面子波的次级扰动中心；而且，以后任何时刻波阵面的位置是所有这种子波的包络面**。这个结果实质上是“光学平行 ”面的一个作图法则，所以有时叫做惠更斯作图法。如果媒质是均匀的，作图时即可采用有限半径的子波，不然的话，就必须分成无穷小，一步步来做。

惠更斯定理后来由菲涅耳加以扩充，表述成所谓惠更斯-菲涅耳原理，它在衍射理论中极为重要（见 8.2 节），可以认为是光的波动理论的基本假设。

① Chr. Huygens, *Traité de la Lumière* (Leyden, 1690)；由 S. P. Thompson 译成英文（*Treatise on Light*, London, Macmillan & Co., 1912）。

第 4 章　光学成像的几何理论

4.1　哈密顿特征函数

3.1 节业已证明，在几何光学近似范围内，场可用单一的标量函数$\mathcal{S}(\mathbf{r})$来表征。因为$\mathcal{S}(\mathbf{r})$满足程函方程 §3.1(15)，所以这个函数只要用折射率 $n(\mathbf{r})$加上适当的边界条件即可完全确定。

人们也常不用函数$\mathcal{S}(\mathbf{r})$而采用一些与其有密切关系的函数，即通常所说的媒质**特征函数**。这些函数是很早以前由哈密顿的一系列经典论文引进光学的[①]。由于代数上的复杂性，除最简单媒质外，其他所有情况均不可能确定其特征函数显式。虽然如此，哈密顿方法对于系统分析研究光学系统的一般性质来说，仍可作为一个有力的工具。

在讨论这些函数的性质及其应用时，将假定媒质是各向同性的，但一般是非均匀的。

4.1.1　点特征函数

设(x_0, y_0, z_0)和(x_1, y_1, z_1)分别是 P_0 和 P_1 两点的坐标，各以不同的一套直角坐标轴为参考系，两套轴互相平行[②]（见图 4.1）。设想这两点被所有可能的曲线连接起来，一般地说，其中会有一些线（光线）满足费马原理。现在假定，连接任意两点的光线不多于一条，则特征函数 V，即**点特征函数**，定义为**这两点之间光线的光学长度**$[P_0P_1]$，看作是这两点坐标的函数，

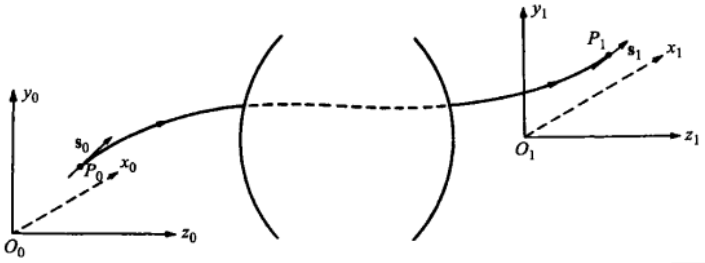


图 4.1　点特征函数定义图示

---

① W. R. Hamilton, *Trans. Roy. Irish Acad.*, **15**(1828), 69; *ibid.*, **16**(1830), 1; *ibid.*, **16**(1831), 93; *ibid.*, **17**(1837), 1。重印于 *The Mathematical Papers of Sir W. R. Hamilton*, Vol. I(*Geometrical Optics*), eds. A. W. Conway and J. L. Synge (Cambridge, Cambridge University Press, 1931)。
多年以后，Bruns 独立研究了类似的函数，他称之为**程函**[H. Bruns, *Abh. Kgl. Sächs. Ges. Wiss., math-phys. Kl.*, **21**(1895), 323]。第 100 页中已经提到，这个名词如今已在更广的意义上来使用。哈密顿特征函数本身就常被称为程函。
J. L. Synge 的专著，*Geometrical Optics* (Cambridge, Cambridge University Press, 1937)，概要介绍哈密顿方法，可资参考。哈密顿的工作和 Bruns 的工作的关系已有多人讨论过，见 F. Klein, *Z. Math. Phys.*, **46**(1901), 376 和 *Ges. Math. Abh.*, **2**(1922), 603, C. Carathéodory, *Geometrische Optik* (Berlin, Springer, 1937), p. 4, 以及 M. Herzberger 和 J. L. Synge 之间的一次争论，*J. Opt. Soc. Amer.*, **27**(1937), 75, 133, 138。

② 使用两套参考系，具有一些优点，因为 P_0 和 P_1 通常位于一个光学系统的不同区域，即分别位于它的物空间和像空间。

$$V(x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1) = \int_{P_0}^{P_1} n\,\mathrm{d}s \tag{1}$$

重要的是，要注意这个函数是由**媒质**确定的。

由(1)式和 § 3.1(26)得到，

$$V(x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1) = \mathcal{S}(x_1, y_1, z_1) - \mathcal{S}(x_0, y_0, z_0) \tag{2}$$

式中函数$\mathcal{S}$这时与通过 P_0 和 P_1 的自然光线所属的任一光锥(例如，P_0 处的点源所产生的一锥光线①)相关联。因此，利用 § 3.1(24)，P_0 和 P_1 处沿光线方向的单位矢量 $\mathbf{s}_0$ 和 $\mathbf{s}_1$ 由下式给出：

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{grad}^0\, V &= -n_0\mathbf{s}_0, \\ \mathrm{grad}^1\, V &= \quad n_1\mathbf{s}_1, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

上标 0 和 1 意指算符 grad 的运算分别对应于坐标(x_0, y_0, z_0)和(x_1, y_1, z_1)。

矢量

$$\mathbf{g} = n\mathbf{s} \tag{4}$$

有时称为**光线矢量**。设 α，β 和 γ 是光线矢量与各坐标轴的夹角，则光线矢量在各轴上的投影②

$$p = n\cos\alpha, \qquad q = n\cos\beta, \qquad m = n\cos\gamma \tag{5}$$

称为**光线分量**。由于恒等式

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

因此三个光线分量满足关系式

$$p^2 + q^2 + m^2 = n^2 \tag{6}$$

由(3)式得出，P_0 和 P_1 处的光线分量为

$$p_0 = -\frac{\partial V}{\partial x_0}, \qquad p_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1} \tag{7}$$

q_0, q_1 和 m_0, m_1 的表达式与此类似。这些关系式表明，知道了点特征函数，就可以直接确定连接媒质中任何两点的光线的分量。此外，由(6)和(7)两式得到，点特征函数满足两组变量的程函方程：

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_0}\right)^2 = n_0^2 \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_1}\right)^2 = n_1^2 \tag{9}$$

时常为了方便，不用点特征函数而采用一些与它有关的函数(也是由哈密顿引进的)，即通常所说的**混合特征函数**和**角特征函数**。这些函数可由点特征函数通过勒让德(A. M. Legendre)变换导出③；当 P_0 或 P_1，或这两点都在无穷远时，它们特别有用。

---

① 用变分法的数学语言来说，$\mathcal{S}$代表与费马变分问题相关联的哈密顿-雅可比方程的一种解，它包含一个二参量的致极曲线族(∞^2)。点特征函数 V 代表一般解，它包含全部(∞^4)致极曲级(见附录 A)。

② 这里故意选择这种"不对称"符号，以便提醒我们，由于恒等式(6)，只有两个光线分量是独立的。

③ 勒让德变换一般是把函数 $f(x, y)$变换为函数 $g(x, z)$，其中 $z = \partial f/\partial y$，而 g 对新变量 z 的导数须等于旧变量 y。

4.1.2 混合特征函数

混合特征函数 W 由下式来定义[①],

$$W = V - \Sigma p_1 x_1 \tag{10}$$

式中 Σ 表示对三个具有下标 1 的类似项求和。(10)式把 W 表示为 9 个变量的函数,但一般只有 6 个(在均匀媒质中只有 5 个)是独立的。要证明这一点,考虑点 P_0 和 P_1 的微小位移的影响。此时 W 的相应改变由下式给出:

$$\delta W = \delta V - \Sigma p_1 \delta x_1 - \Sigma x_1 \delta p_1 \tag{11}$$

现在利用(7)式,则

$$\delta V = \Sigma p_1 \delta x_1 - \Sigma p_0 \delta x_0 \tag{12}$$

将(12)式代入(11)式,得到

$$\delta W = -\Sigma p_0 \delta x_0 - \Sigma x_1 \delta p_1 \tag{13}$$

这个关系式表明,W 一般可表示为 6 个变量 x_0, y_0, z_0, p_1, q_1 和 m_1 的函数,并且当它如此表示时,

$$p_0 = -\frac{\partial W}{\partial x_0}, \qquad x_1 = -\frac{\partial W}{\partial p_1} \tag{14}$$

q_0, y_1, m_0 和 z_1 的表达式与此类似。由于(6)式,$W(x_0, y_0, z_0; p_1, q_1, m_1)$满足程函方程

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z_0}\right)^2 = n_0^2 \tag{15}$$

可以看到(见图 4.2),$\Sigma p_1 x_1$ 具有一种简单的几何解释:

$$\Sigma p_1 x_1 = n_1 d_1 \tag{16}$$

式中 $d_1 = Q_1 P_1$,是 $O_1 P_1$ 在光线 P_1 点切线上的投影。如果 P_1 位于均匀区,则靠近 P_1 的那一段光线与线段 $Q_1 P_1$ 重合;根据(10)和(16)两式,**W 这时代表光线从 P_0 到 Q_1 的光学长度,Q_1 是从原点 O_1 到光线末段的垂足**(见图 4.3):

$$W = [P_0 Q_1] \tag{17}$$

因为在这种情况下 P_1 附近的媒质折射率具有恒定值,由(6)式得到,

$$\delta m_1 = -\frac{p_1 \delta p_1 + q_1 \delta q_1}{m_1} \tag{18}$$

把(18)式代入(13)式,则(13)式变为[②]

---

① 为了更清楚地显示出它的物理意义,我们按照 Synge 的方式(见前引文献)来定义混合特征函数,其符号与哈密顿所用的相反。

也可以把混合特征函数定义为

$$W' = V + \Sigma p_0 x_0$$

Σ 为对具有下标 0 的类似项求和。W 和 W' 的性质当然完全类似。

② 如果函数所依赖的各个变量之间以(6)式那样的辅助关系式相联系,则有可能消去一些变量,或者有可能用这样的关系式把函数表示为对所有变量的齐次函数。哈密顿经常使用后一种方法,它有点更难以掌握。

$$\delta W = -\Sigma p_0 \delta x_0 - \left(x_1 - \frac{p_1}{m_1} z_1\right)\delta p_1 - \left(y_1 - \frac{q_1}{m_1} z_1\right)\delta q_1 \tag{19}$$

所以当末媒质均匀时，混合特征函数可表成为 5 个变量的函数：

$$W = W(x_0, y_0, z_0; p_1, q_1) \tag{20}$$

这时它的导数满足下列关系式：

$$p_0 = -\frac{\partial W}{\partial x_0}, \qquad q_0 = -\frac{\partial W}{\partial y_0}, \qquad m_0 = -\frac{\partial W}{\partial z_0} \tag{21}$$

$$x_1 - \frac{p_1}{m_1} z_1 = -\frac{\partial W}{\partial p_1}, \qquad y_1 - \frac{q_1}{m_1} z_1 = -\frac{\partial W}{\partial q_1} \tag{22}$$

(21)和(22)两式表明，如果给定始媒质内光线上的一点和末媒质内的光线分量，则知道了混合特征函数，就可以直接确定始媒质内的光线分量和末媒质内光线上的各点。

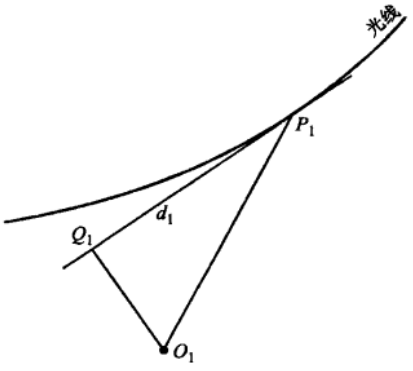


图 4.2　混合特征函数意义的图示

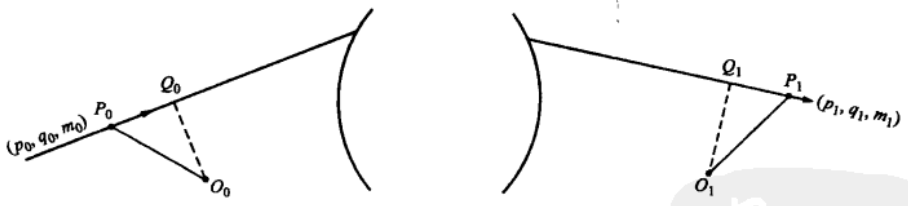


图 4.3　当始媒质和末媒质都均匀时，哈密顿特征函数 V, W, T 的几何意义：

$$V(x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1) = [P_0 P_1]$$

$$W(x_0, y_0, z_0; p_1, q_1) = [P_0 Q_1]$$

$$T(p_0, q_0; p_1, q_1) = [Q_0 Q_1]$$

4.1.3　角特征函数

角特征函数 T 可用下式来定义，

$$T = V + \Sigma p_0 x_0 - \Sigma p_1 x_1 \tag{23}$$

如果 P_0 和 P_1 稍有位移,则 T 的相应改变由下式给出,

$$\delta T = \Sigma x_0 \delta p_0 - \Sigma x_1 \delta p_1 \tag{24}$$

其中利用了(12)式,所以 T 可表成为 6 个光线分量的函数,当这样表示时,

$$x_0 = \frac{\partial T}{\partial p_0}, \qquad x_1 = -\frac{\partial T}{\partial p_1} \tag{25}$$

其他坐标也有类似的关系式。

由(23)式可以看出,**如果 P_0 和 P_1 所在的两区都是均匀的,则 T 代表光线在 Q_0 和 Q_1 之间的光学长度,Q_0 和 Q_1 分别是从 O_0 和 O_1 到光线始段和末段的垂足**(见图 4.3),

$$T = [Q_0 Q_1] \tag{26}$$

在这种情况下,角特征函数可表成为只有 4 个变量的函数。因为如果在(24)式中用(18)式代替 δm_1,用类似的关系代替 δm_0,则(24)式变为

$$\begin{aligned}\delta T = &\left(x_0 - \frac{p_0}{m_0} z_0\right)\delta p_0 + \left(y_0 - \frac{q_0}{m_0} z_0\right)\delta q_0 \\ &- \left(x_1 - \frac{p_1}{m_1} z_1\right)\delta p_1 - \left(y_1 - \frac{q_1}{m_1} z_1\right)\delta q_1\end{aligned} \tag{27}$$

这个关系式表明,**当始媒质和末媒质都均匀时,角特征函数可表示为 4 个变量 p_0, q_0, p_1 和 q_1 的函数:**

$$T = T(p_0, q_0; p_1, q_1) \tag{28}$$

这时它的导数满足下列关系式:

$$\left.\begin{aligned} x_0 - \frac{p_0}{m_0} z_0 &= \frac{\partial T}{\partial p_0}, & y_0 - \frac{q_0}{m_0} z_0 &= \frac{\partial T}{\partial q_0}, \\ x_1 - \frac{p_1}{m_1} z_1 &= -\frac{\partial T}{\partial p_1}, & y_1 - \frac{q_1}{m_1} z_1 &= -\frac{\partial T}{\partial q_1}. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

如果给定一条光线始段和末段的光线分量,则按(29)式,知道了角特征函数,就可以直接确定这两段光线上各点的坐标。

4.1.4 旋转折射面的角特征函数近似形式

设

$$z = c_2(x^2 + y^2) + c_4(x^2 + y^2)^2 + \cdots \tag{30}$$

式中 $c_2, c_4, \cdots$ 是常数。这是旋转折射面方程,以笛卡儿坐标轴为参考系,其原点 O 与这个面的轴点(称为极点)重合,其 z 方向沿着对称轴。设 r 代表这个面极点处的曲率半径(当这个面凸向来自负 z 方向的入射光时,其值设为正),则

$$c_2 = \frac{1}{2r} \tag{31}$$

对于半径为 r 的球面,$c_4 = 1/8r^3$。对于一般的旋转面,c_4 可写成

$$c_4 = \frac{1}{8r^3}(1+b) \tag{32}$$

常数 b(有时称为**形变系数**)是这个面偏离球面形状的一种粗略量度。用 r 和 b 表示时，

$$z = \frac{x^2+y^2}{2r} + \frac{(x^2+y^2)^2}{8r^3}(1+b) + \cdots \tag{33}$$

以下假定这个面两侧的区域都是均匀的，其折射率分别为 n_0 和 n_1。角特征函数在两侧取不同的参考系，其轴平行于 O 处的轴，其原点分别在轴点 $O_0(0,0,a_0)$ 和 $O_1(0,0,a_1)$(在图 4.4 中，$a_0<0, a_1>0, r>0$)。

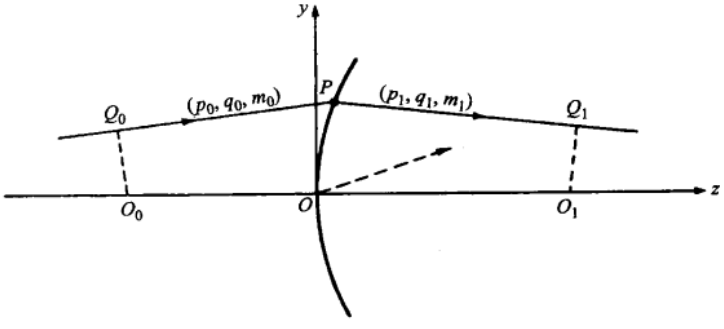


图 4.4　旋转折射面的角特征函数(O_0, O, O_1, Q_1, P, Q_0 各点不一定是共面的)

如果 P 是入射光线与折射面的交点，Q_0 和 Q_1 是从 O_0 和 O_1 到入射光线和折射光线的垂足，则根据(26)式，角特征函数 T 为：

$$\begin{aligned} T &= [Q_0P] + [PQ_1] \\ &= \{xp_0 + yq_0 + (z-a_0)m_0\} - \{xp_1 + yq_1 + (z-a_1)m_1\} \end{aligned} \tag{34}$$

式中，(x, y, z)是 P 相对于 O 处各轴的坐标，(p_0, q_0, m_0)和(p_1, q_1, m_1)是 P 处的入射光线和折射光线的光线分量。

利用折射定律，可从(34)式中消去坐标(x, y, z)。根据 3.2.2 节，折射定律与下述说法是等效的，即矢量 $\mathbf{N}(p_0-p_1, q_0-q_1, m_0-m_1)$在 P 处与折射面相垂直。所以，如果将(33)式写成下列形式：

$$F(x, y, z) \equiv z - \frac{x^2+y^2}{2r} - \frac{(x^2+y^2)^2}{8r^3}(1+b) - \cdots = 0 \tag{35}$$

则

$$\left.\begin{aligned} \lambda\frac{\partial F}{\partial x} &= -\lambda\left[\frac{x}{r} + \cdots\right] = p_0 - p_1, \\ \lambda\frac{\partial F}{\partial y} &= -\lambda\left[\frac{y}{r} + \cdots\right] = q_0 - q_1, \\ \lambda\frac{\partial F}{\partial z} &= \lambda \qquad\qquad = m_0 - m_1. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

这些方程的意思是

$$\left.\begin{aligned} x &= -r\frac{p_0 - p_1}{m_0 - m_1} + \Delta x, \\ y &= -r\frac{q_0 - q_1}{m_0 - m_1} + \Delta y, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

式中,Δx 和 Δy 是用 $p, q, x/r, y/r$ 表示的三阶量。为了用光线分量来表示 z,把(37)式代入(35)式,从而得到

$$\begin{aligned} z = {} & \frac{r}{2(m_1 - m_0)^2}[(p_0 - p_1)^2 + (q_0 - q_1)^2] + \frac{1}{m_1 - m_0}[\Delta x(p_0 - p_1) + \Delta y(q_0 - q_1)] \\ & + \frac{1}{8}\frac{r(1+b)}{(m_1 - m_0)^4}[(p_0 - p_1)^2 + (q_0 - q_1)^2]^2 + \cdots \end{aligned} \tag{38}$$

要求出 T 直到包含四阶项的展开式,不必去计算 Δx 和 Δy 的值;因为把(37)和(38)两式代入(34)式时,就会看到包含 Δx 和 Δy 的贡献是高于四阶的,因此可以忽略。这时(34)式变为

$$\begin{aligned} T(p_0, q_0, m_0; p_1, q_1, m_1) = {} & -m_0 a_0 + m_1 a_1 + \frac{r}{2(m_1 - m_0)}[(p_0 - p_1)^2 + (q_0 - q_1)^2] \\ & - \frac{1}{8}\frac{r(1+b)}{(m_1 - m_0)^3}[(p_0 - p_1)^2 + (q_0 - q_1)^2]^2 \end{aligned} \tag{39}$$

(39)式是角特征函数直到四阶的展开式,这里角特征函数被看作是所有 6 个光线分量的函数。利用恒等式(6),可消去其中两个分量。由(6)式得到

$$\left.\begin{aligned} m_0 &= n_0 - \frac{1}{2n_0}(p_0^2 + q_0^2) - \frac{1}{8n_0^3}(p_0^2 + q_0^2)^2 + \cdots \\ m_1 &= n_1 - \frac{1}{2n_1}(p_1^2 + q_1^2) - \frac{1}{8n_1^3}(p_1^2 + q_1^2)^2 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

因此,

$$\frac{1}{m_1 - m_0} = \frac{1}{n_1 - n_0}\left[1 - \frac{1}{2n_0(n_1 - n_0)}(p_0^2 + q_0^2) + \frac{1}{2n_1(n_1 - n_0)}(p_1^2 + q_1^2) + \cdots\right] \tag{41}$$

把(40)和(41)两式代入(39)式,得到

$$\begin{aligned} & T(p_0, q_0; p_1, q_1) = n_1 a_1 - n_0 a_0 \\ & + \frac{r}{2(n_1 - n_0)}[(p_0 - p_1)^2 + (q_0 - q_1)^2] + \frac{a_0}{2n_0}(p_0^2 + q_0^2) - \frac{a_1}{2n_1}(p_1^2 + q_1^2) \\ & - \frac{r}{4(n_1 - n_0)^2}[(p_0 - p_1)^2 + (q_0 - q_1)^2]\left[\frac{p_0^2 + q_0^2}{n_0} - \frac{p_1^2 + q_1^2}{n_1}\right] \\ & - \frac{(1+b)r}{8(n_1 - n_0)^3}[(p_0 - p_1)^2 + (q_0 - q_1)^2]^2 \\ & + \frac{a_0}{8n_0^3}(p_0^2 + q_0^2)^2 - \frac{a_1}{8n_1^3}(p_1^2 + q_1^2)^2 + \cdots \end{aligned} \tag{42}$$

可以看出，这 4 个变量 p_0, q_0, p_1 和 q_1 在这个表达式中只以三种组合的形式出现[①]：

$$p_0^2 + q_0^2 = u^2, \quad p_1^2 + q_1^2 = v^2, \quad \text{和} \quad p_0 p_1 + q_0 q_1 = w^2 \tag{43}$$

以此代入(42)式，按各阶分开后，得到

$$T(p_0, q_0; p_1, q_1) = T^{(0)} + T^{(2)} + T^{(4)} + \cdots$$

式中

$$\left.\begin{aligned} T^{(0)} &= n_1 a_1 - n_0 a_0, \\ T^{(2)} &= \mathcal{A}u^2 + \mathcal{B}v^2 + \mathcal{C}w^2, \\ T^{(4)} &= \mathcal{D}u^4 + \mathcal{E}v^4 + \mathcal{F}w^4 + \mathcal{G}u^2v^2 + \mathcal{H}u^2w^2 + \mathcal{K}v^2w^2, \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

而

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2}\left[\frac{r}{n_1 - n_0} + \frac{a_0}{n_0}\right], \\ \mathcal{B} &= \frac{1}{2}\left[\frac{r}{n_1 - n_0} - \frac{a_1}{n_1}\right], \\ \mathcal{C} &= -\frac{r}{n_1 - n_0}, \\ \mathcal{D} &= -\frac{r}{4(n_1 - n_0)^2}\left[\frac{1+b}{2(n_1 - n_0)} + \frac{1}{n_0}\right] + \frac{a_0}{8n_0^3}, \\ \mathcal{E} &= -\frac{r}{4(n_1 - n_0)^2}\left[\frac{1+b}{2(n_1 - n_0)} - \frac{1}{n_1}\right] - \frac{a_1}{8n_1^3}, \\ \mathcal{F} &= \frac{-(1+b)r}{2(n_1 - n_0)^3}, \\ \mathcal{G} &= -\frac{r}{4(n_1 - n_0)^2}\left[\frac{1+b}{n_1 - n_0} + \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_1}\right], \\ \mathcal{H} &= \frac{r}{2(n_1 - n_0)^2}\left[\frac{1+b}{n_1 - n_0} + \frac{1}{n_0}\right], \\ \mathcal{K} &= \frac{r}{2(n_1 - n_0)^2}\left[\frac{1+b}{n_1 - n_0} - \frac{1}{n_1}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

4.1.5　旋转反射面的角特征函数近似形式

与一个旋转反射面相关联的角特征函数直到四次方的展开式，可以用类似的方法导出，但是不必全部进行计算。使用与前一节相同的符号(见图 4.4 和图 4.5)，4.1.4 节中直到包括

① 可以更一般地证明，任何绕 z 轴旋转对称的媒质，其角特征函数的 4 个变量只以(43)式的三种组合形式出现。要看出这一点，可利用 5.1 节中证明的一个结果，根据这个结果，任何一个函数 $F(x_0, y_0; x_1, y_1)$，如果当 xy 平面上各轴绕原点转动时它保持不变，则它必定只依赖两个矢量 $\mathbf{r}_0(x_0, y_0)$和 $\mathbf{r}_1(x_1, y_1)$的三个标量积

$$\mathbf{r}_0^2 = x_0^2 + y_0^2, \quad \mathbf{r}_1^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_1 = x_0 x_1 + y_0 y_1$$

把 $\mathbf{r}_0$ 和 $\mathbf{r}_0$ 分别看作传播矢量 $\mathbf{g}_0(p_0, q_0, m_0)$和 $\mathbf{g}_1(p_1, q_1, m_1)$在 xy 平面上的投影，则得到(43)式的结果。

(39)式在内的所有方程,均可应用于本节反射情况而不作改变;因此,当(39)式**看作是所有 6 个光线分量的函数时,它也是旋转反射面的角特征函数**。但是,当利用光线分量之间的两个恒等式从(39)式中消去 m_0 和 m_1 时,这两种情况的 T 表达式(作为 4 个光线分量的函数)结果并不相同。用 n 表示光线所在媒质的折射率,这时取代(40)式而有

$$\left.\begin{aligned} m_0 &= n - \frac{1}{2n}(p_0^2+q_0^2) - \frac{1}{8n^3}(p_0^2+q_0^2)^2 + \cdots, \\ m_1 &= -\left[n - \frac{1}{2n}(p_1^2+q_1^2) - \frac{1}{8n^3}(p_1^2+q_1^2)^2 + \cdots\right]. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

在第二个关系式中,采取了负的平方根 $-\sqrt{n^2-(p^2+q^2)}$,因为我们假定,反射光线返回到光来自的那个区域($z<0$);所以反射光线相对于正 z 方向的方向余弦以及由此而得出的 m 都是负的。因为令(40)式中 $n_0 = -n_1 = n$ 即得到(46)式,可见**旋转反射面的角特征函数,作为 4 个光线分量 p_0,q_0,p_1 和 q_1 的函数,可以利用旋转折射面的角特征函数令 $n_0 = -n_1 = n$ 而求得**。所以对于反射的情况,有

$$\left.\begin{aligned} T^{(0)} &= -n(a_0+a_1), \\ T^{(2)} &= \mathcal{A}'u^2 + \mathcal{B}'v^2 + \mathcal{C}'w^2, \\ T^{(4)} &= \mathcal{D}'u^4 + \mathcal{E}'v^4 + \mathcal{F}'w^4 + \mathcal{G}'u^2v^2 + \mathcal{H}'u^2w^2 + \mathcal{K}'v^2w^2, \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A}' &= \frac{1}{2n}\left[-\tfrac{1}{2}r + a_0\right], \\ \mathcal{B}' &= \frac{1}{2n}\left[-\tfrac{1}{2}r + a_1\right], \\ \mathcal{C}' &= \frac{r}{2n}, \\ \mathcal{D}' &= -\frac{r}{16n^3}\left[-\frac{1+b}{4}+1\right] + \frac{a_0}{8n^3}, \\ \mathcal{E}' &= -\frac{r}{16n^3}\left[-\frac{1+b}{4}+1\right] + \frac{a_1}{8n^3}, \\ \mathcal{F}' &= \frac{(1+b)r}{16n^3}, \\ \mathcal{G}' &= \frac{r}{16n^3}\left[\frac{1+b}{2}-2\right], \\ \mathcal{H}' &= \frac{r}{8n^3}\left[-\frac{1+b}{2}+1\right], \\ \mathcal{K}' &= \frac{r}{8n^3}\left[-\frac{1+b}{2}+1\right]. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

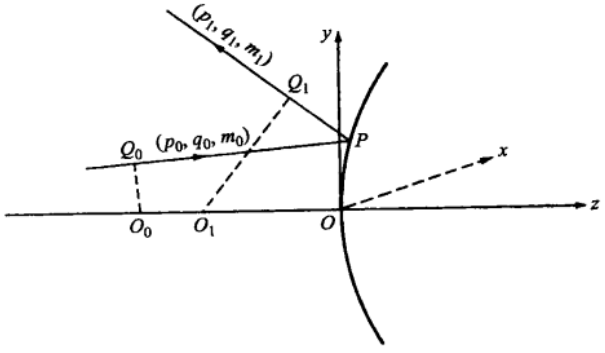


图 4.5　旋转反射面的角特征函数(O_0, O_1, O, Q_0, P, Q_1 各点不一定是共面的)

4.2　理想成像

现在考虑在折射率为 $n(x,y,z)$的媒质中一个点源所发射的光的传播情况,这里的媒质泛指折射率函数 $n(x,y,z)$所规定的光学空间。设该点源位于媒质内 P_0 点,这时从 P_0 将发出无限条光线,但在媒质其他任何点,一般而言,将只有有限条光线通过。然而,在特殊情况下,可能会找到一点 P_1,有无限条光线经它而过。这样的 P_1 点称为 P_0 点的一个**消散像**(无散像,共点像)(stigmatic image),或称**锐像**(sharp image)。

在一个理想的光学仪器中,有一个称为**物空间**的三维区域,其中每一点 P_0 都将产生一个消散像 P_1。全部像点所在区域定义为**像空间**。物空间和像空间中的这种对应点称为**共轭点**。从 P_0 发出的光线,一般不是全都能到达像空间的;例如,有些光线将被仪器的光阑遮挡在外,那些到达像空间的光线就称为**处在仪器的视场之中**。当 P_0 在物空间移动,描出一条曲线 C_0 时,P_1 将描出一条共轭曲线 C_1。这两条曲线不一定在几何上彼此相似。如果物空间的**每一条**曲线 C_0 都与它的像在几何上相似,我们就可以说,物空间和像空间之间的成像是**理想**的。我们也可以用类似的方法来定义两个面之间的理想成像。

符合上述理想成像定义的光学仪器是很令人关注的,因此我们将先表述关于三维区域理想成像(或至少是锐成像)的一些一般定理。关于二维区域(面)锐成像的一些结果,将在 4.2.3 节中简单加以讨论。

4.2.1　一般定理

一个能将三维区域无像散成像的光学系统$\mathcal{J}$,常称为**绝对仪器**。下面即将证明:**在一个绝对仪器中,物空间内任何一条曲线的光学长度,都等于其像的光学长度**。这一定理首先由麦克斯韦[①] 于 1858 年提出,但他讨论的是物、像二空间皆为均匀空间这一特殊情况。后来,布伦斯

① J.C.Maxwell, *Quart. J. Pure Appl. Maths.*, **2**(1858), p.233。又见于他的 *Scientific Papers*, Vol.1(Cambridge, Cambridge University Press, 1890), p.271。

(H. Bruns, 1895)、克莱茵(F. Klein, 1901)和利布曼(H. Liebmann, 1916)[①]给予了更严格的证明。

之后,卡拉西奥多里(C. Carathéodory)[②] 证明,这个定理并不限于均匀媒质,当媒质不均匀和各向异性时,它亦属有效。我们对这个定理的证明将采用卡拉西奥多里的方法,但讨论将限于物空间和像空间都是各向同性的(但一般而言是非均匀的)绝对仪器[③]。

设 A_0B_0 和 A_1B_1 是绝对仪器$\mathcal{J}$视场之中某条光线在物空间和像空间内的线段(见图 4.6)。其他任何一条光线,如果它有一个线元同 $A_0B_0A_1B_1$ 的一个线元在位置和方向上都没有明显的偏离,则这条光线也将在仪器的视场之中。

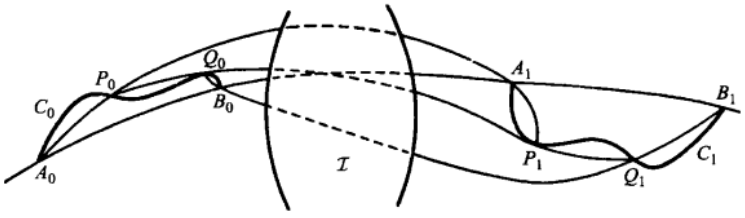


图 4.6 一个绝对光学仪器

一条曲线(假定它各点的切线方向是连续改变的),如果它的每一线元分别与完全在$\mathcal{J}$视场之中某条光线的一个线元重合,这条曲线就称为**切向地**处在$\mathcal{J}$的视场之中。如果有一个边数足够多的"多边形"内接于这样一条曲线,则多边形的每一边将同完全在仪器视场之中的某条光线的一个线元重合。

根据等光程原理(见 3.3.3 节),连接 A_0 及其像 A_1 的所有光线都具有相同的光学长度。我们将用 $V(A_0)$来表示这个光程长度,并且要证明它实际上与 A_0 无关。

设 B_0 和 B_1 是另外一对共轭点。则有(见图 4.6)

$$[A_1B_1] = [A_0B_0] + V(B_0) - V(A_0) \tag{1}$$

设 C_0 是一条连接 A_0 和 B_0 的曲线,它切向地处在仪器的视场之中,又设 C_1 是它的像。在 C_0 中内接一个多边形 $A_0P_0Q_0B_0$,并且用 P_1 和 Q_1 来表示 P_0 和 Q_0 的像点。这时,把(1)式应用于边 A_1P_1,则有

$$[A_1P_1] = [A_0P_0] + V(P_0) - V(A_0)$$

对其他各边,也类似地有

$$[P_1Q_1] = [P_0Q_0] + V(Q_0) - V(P_0)$$

---

① H. Bruns, "Das Eikonal", *Abh. Kgl. sächs. Ges. Wiss., math-phys. Kl.*, **21**(1895), 370; F. Klein, *Z. Math. Phys.*, **46**(1901), 376; *Ges. Math. Abh.*, **2**(1922), 607。又见于 E. T. Whittaker, *The Theory of Optical Instruments* (Cambridge, Cambridge University Press, 1907), p. 47; H. Liebmann, *Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss., Math-naturw. Abt.* (1916), 183。这些研究的报道也可在 H. Boegehold 的论文中找到,见 S. Czapski 和 O. Eppenstein, *Grundzüge der Optischen Instrumente nach Abbe* (Leipzig, Barth, 3rd edition, (1924), p. 213)。

② C. Carathéodory, *Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss. Math-naturw. Abt.*, **56**(1926), 1。

③ 在微波光学中,采用非均匀物质是很平常的[例如,见 J. Brown, *Microwave Lenses* (London, Methuen, 1953)]。在光波光学中,近来对非均匀物质也日益注意[见 E. W. Marchand, *Progress in Optics*, Vol. 11, ed; E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, American Elsevier Publishing Company, 1973), p. 305 and E. W. Marchand, *Gradient Index Optics* (New York, Academic Press, 1978)]。

和

$$[Q_1B_1]=[Q_0B_0]+V(B_0)-V(Q_0)$$

因此

$$[A_1P_1]+[P_1Q_1]+[Q_1B_1]=[A_0P_0]+[P_0Q_0]+[Q_0B_0]+V(B_0)-V(A_0)$$

显然，这个结果可以推广到具有任意边数 N 的多边形。到极限情况，当最长的边趋于零而 $N\to\infty$ 时，我们得到关系式

$$L_1=L_0+V(B_0)-V(A_0) \tag{2}$$

式中

$$L_0=\int_{C_0}n_0\,\mathrm{d}s_0,\qquad L_1=\int_{C_1}n_1\,\mathrm{d}s_1 \tag{3}$$

是曲线 C_0 和 C_1 的光学长度。下一步，将要证明 $V(B_0)=V(A_0)$。

这两条曲线的各点是一一对应的，它们可用如下的关系式来表示：

$$x_1=f(x_0,y_0,z_0),\qquad y_1=g(x_0,y_0,z_0),\qquad z_1=h(x_0,y_0,z_0) \tag{4}$$

C_1 的线元 $\mathrm{d}s_1$ 是对应的线元 $\mathrm{d}s_0$ 的函数，

$$\mathrm{d}s_1=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s_0}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}s_0}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}s_0}\right)^2}\,\mathrm{d}s_0 \tag{5}$$

因此

$$L_1=\int_{C_1}F\left(x_1,y_1,z_1,\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s_0},\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}s_0},\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}s_0}\right)\mathrm{d}s_0 \tag{6}$$

式中

$$F\left(x_1,y_1,z_1,\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s_0},\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}s_0},\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}s_0}\right)=n_1(x_1,y_1,z_1)\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s_0}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}s_0}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}s_0}\right)^2}$$

是导数 $\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}s_0$，$\mathrm{d}y_1/\mathrm{d}s_0$ 和 $\mathrm{d}z_1/\mathrm{d}s_0$ 的一次齐次函数；而且，当用 $-\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}s_0$ 等代替 $\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}s_0$ 等时，F 保持不变。现在由(4)式得出，

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s_0}=\frac{\partial f}{\partial x_0}\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}s_0}+\frac{\partial f}{\partial y_0}\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}s_0}+\frac{\partial f}{\partial z_0}\frac{\mathrm{d}z_0}{\mathrm{d}s_0} \tag{7}$$

对 $\mathrm{d}y_1/\mathrm{d}s_0$ 和 $\mathrm{d}z_1/\mathrm{d}s_0$，也有类似的表达式。因此利用(7)和(4)两式，$F$ 可以表成如下形式：

$$F\left(x_1,y_1,z_1,\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s_0},\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}s_0},\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}s_0}\right)=\Phi\left(x_0,y_0,z_0,\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}s_0},\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}s_0},\frac{\mathrm{d}z_0}{\mathrm{d}s_0}\right) \tag{8}$$

Φ 也是 $\mathrm{d}x_0/\mathrm{d}s_0$ 等的一次齐次函数；而且，当用 $-\mathrm{d}x_0/\mathrm{d}s_0$ 等代替 $\mathrm{d}x_0/\mathrm{d}s_0$ 等时，Φ 保持不变，

$$\Phi\left(x_0,y_0,z_0,-\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}s_0},-\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}s_0},-\frac{\mathrm{d}z_0}{\mathrm{d}s_0}\right)=\Phi\left(x_0,y_0,z_0,\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}s_0},\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}s_0},\frac{\mathrm{d}z_0}{\mathrm{d}s_0}\right) \tag{9}$$

由(2)、(6)和(8)三式得到

$$\int_{C_0}(n_0-\Phi)\,\mathrm{d}s_0=V(A_0)-V(B_0) \tag{10}$$

上式表明,式中曲线积分的值只取决于端点 A_0 和 B_0,而与 C_0 的选择无关。但曲线 C_0 也不是完全任意的,因为它必须切向地处在仪器的视场中。尽管如此,还是可以得出结论:$(n_0 - \Phi)\mathrm{d}s_0$ 必定是某一函数Ψ的全微分,

$$n_0 - \Phi = \frac{\partial \Psi}{\partial x_0}\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}s_0} + \frac{\partial \Psi}{\partial y_0}\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}s_0} + \frac{\partial \Psi}{\partial z_0}\frac{\mathrm{d}z_0}{\mathrm{d}s_0}$$

现在如果用 $-\mathrm{d}x_0/\mathrm{d}s_0$ 等代替导数 $\mathrm{d}x_0/\mathrm{d}s_0$ 等,则上式右边将改变符号,而左边由于(9)式将保持不变。这只有两边均为零(Ψ = 常数)才有可能;因此

$$\Phi = n_0 \tag{11}$$

(10)式表明,$V(A_0) = V(B_0)$,结果(2)式简化为关系式 $L_1 = L_0$。因此对于任何一条曲线,不管它是否切向地处在视场中,只要它有一个像,则

$$\int_{C_0} n_0 \,\mathrm{d}s_0 = \int_{C_1} n_1 \,\mathrm{d}s_1 \tag{12}$$

这就是**绝对仪器的麦克斯韦定理**①。

根据麦克斯韦定理,可以立即得出一些有意义的结论。考虑一个小三角形,其边长为 $\mathrm{d}s_0^{(1)}, \mathrm{d}s_0^{(2)}, \mathrm{d}s_0^{(3)}$,令 $\mathrm{d}s_1^{(1)}, \mathrm{d}s_1^{(2)}, \mathrm{d}s_1^{(3)}$ 是它由一个绝对仪器所形成的像的三个边。此外令 n_0 和 n_1 分别为这两个三角形所在区域的折射率。根据麦克斯韦定理,

---

① 楞次(W. Lenz)对麦克斯韦定理给出了一个不够普遍但很巧妙的证明[见 *Probleme der Modernen Physik*, ed. P. Debye (Leipzig, Hirzel, 1928), p. 198],证明如下:

假定从每一个物点发出的所有光线都到达它的像点,令(A_0, A_1)和(B_0, B_1)是两对共轭点。根据假设,光线 A_0B_0 必定通过 A_1 和 B_1。同样,B_0A_0 也必定通过这两点。因此,每一条光线都必定是一条封闭曲线,并且由等光程原理得到(见图 4.7):

$$[A_0A_1]_{\text{顺时针方向}} = [A_0A_1]_{\text{逆时针方向}}$$

和

$$[B_0B_1]_{\text{顺时针方向}} = [B_0B_1]_{\text{逆时针方向}}$$

令

$$[A_0B_0] = L_0, [A_1B_1] = L_1, [B_0A_1] = d, [B_1A_0] = d'$$

则上面两个式子变为

$$L_0 + d = d' + L_1,\ d + L_1 = L_0 + d'$$

两式相减,得到

$$L_0 = L_1$$

这就证明了在曲线为一段光线这种特殊情况下的麦克斯韦定理。把曲线看作是由大量光线线段所构成的多边形的一种极限形式,就可以推广到任意一条曲线,像在正文中所证明的那样。

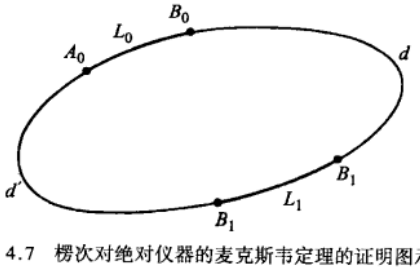


图 4.7 楞次对绝对仪器的麦克斯韦定理的证明图示

$$n_0\,\mathrm{d}s_0^{(1)} = n_1\,\mathrm{d}s_1^{(1)}, \qquad n_0\,\mathrm{d}s_0^{(2)} = n_1\,\mathrm{d}s_1^{(2)}, \qquad n_0\,\mathrm{d}s_0^{(3)} = n_1\,\mathrm{d}s_1^{(3)} \tag{13}$$

因此，这两个三角形彼此相似，其对应边与折射率成反比。所以，任何两条曲线之间的角度在成像时将保持不变，这就是说，成像必定是一个**共形变换**(conformal transformation，曾译为保角变换——译者注)。这里有一个由刘维(J. Liouville)提出的一般定理[①]，根据这个定理，三维区域到三维区域的共形变换只能是一个射影变换(projective transformation；又称直射变换，collineation)，或一个反演变换[②]，或这两种变换的组合。这样我们就证明了下列卡拉西奥多里定理：**一个绝对仪器的成像是一个射影变换，或者是一个反演，或者是这两者的组合。**

现在简略地考虑下列情况：物空间和像空间之间的成像不仅是无像散的(消散的)，而且是理想的，这就是任何一个图形都变换为一个在几何上与它相似的图形。显然，这种成像必定是一个射影变换，因为它把线变换为线[③]。此时由(13)式得出，**任何两个共轭线元之间的放大率** $\mathrm{d}s_1/\mathrm{d}s_0$，**等于折射率之比** n_0/n_1。特别是，如果 $n_0 = n_1 =$ 常数，则 $\mathrm{d}s_1/\mathrm{d}s_0 = 1$，因此**折射率相同的两个均匀空间之间的理想成像总是平常的(trivial)，所谓平常就是指所产生的像与物完全相同。**一块平面镜(或一组平面镜)就是产生这种成像的惟一已知仪器。

这些一般性的考虑意味着，为了在折射率相同的两个均匀空间之间获得不平常的成像，就必须取消对物和像之间精确无像散或严格相似的要求。

4.2.2　麦克斯韦“鱼眼”

现在给出绝对仪器的一个简单而有趣的例子，其中用以表征媒质的折射率函数为

$$n(r) = \frac{1}{1+(r/a)^2}\,n_0 \tag{14}$$

式中 r 代表从固定点 O 算起的距离，n_0 和 a 都是常数。它通常称为“鱼眼”，麦克斯韦首先对此进行了研究[④]。

3.2 节中已经证明，在球面对称媒质中，光线是平面曲线，位于通过原点的平面上，并且光线方程可写成下列形式[见 § 3.2(11)]：

---

① 例如，见 W. Blaschke, *Vorlesungen über Differential-Geometrie* I(Berlin, Springer, 2nd edition 1924), p. 68; (4th edition 1945), p. 101。

② 一个反演，就是把每一点 P_0 变换为另一点 P_1，P_1 位于 P_0 同原点 O(保持固定)的连线上，并且乘积 $OP_0 \cdot OP_1$ 为常数。

③ 参看 F. Klein, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, Vol. II(译自德文第三版，London, Macmillan, 1939, p. 89; 由 Dover Publications, New York 翻印)。

④ J. C. Maxwell, *Cambridge and Dublin Math. J.*, **8**(1854), 188; 也见于 *Scientific Papers*, Vol. I(Cambridge, Cambridge University Press), p. 76。
麦克斯韦“鱼眼”的一些有意义的推广，由下列作者获得，见 W. Lenz, *Probleme der Modernen Physik*, ed. P. Debye (Leipzig, Hirzel, 1928), p. 198 和 R. Stettler, *Optik*, **12**(1955), 529。后一篇文章还推广了一种所谓 Luneburg **透镜**，这种透镜由于能够作为广角扫描而在微波天线设计中获得重要应用。R. K. Luneburg 首先研究了这种透镜，见于他写的 *Mathematical Theory of Optics* (University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1964) § 29。它是一个不均匀球体，其折射率函数 $n(r) = \sqrt{2 - r^2}\,(0 \leqslant r \leqslant 1)$，可使每一束入射平行光线都锐聚焦。也见于 R. F. Rinehart, *J. Appl. Phys.*, **19**(1948), 860; A. Fletcher, T. Murphy and A. Young, *Proc. Roy. Soc.*, A **223**(1954), 216; 和 G. Toraldo di Francia, *Optica Acta*, **1**(1954—1955), 157。

$$\theta = c\int^{r} \frac{\mathrm{d}r}{r\sqrt{n^2(r)r^2 - c^2}}$$

c 是一个常数。把(14)式代入上式,并且令

$$\rho = \frac{r}{a}, \qquad K = \frac{c}{an_0} \tag{15}$$

得到

$$\theta = \int^{\rho} \frac{K(1+\rho^2)\,\mathrm{d}\rho}{\rho\sqrt{\rho^2 - K^2(1+\rho^2)^2}} \tag{16}$$

可以证明

$$\frac{K(1+\rho^2)}{\rho\sqrt{\rho^2 - K^2(1+\rho^2)^2}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left[\arcsin\left(\frac{K}{\sqrt{1-4K^2}}\frac{\rho^2-1}{\rho}\right)\right]$$

因此(16)式变为

$$\sin(\theta - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 n_0{}^2 - 4c^2}}\frac{r^2 - a^2}{ar} \tag{17}$$

式中 α 是一个积分常数。

(17)式是光线的极坐标方程。所以,通过一固定点 $P_0(r_0, \theta_0)$的单参量光线族由下式给出:

$$\frac{r^2 - a^2}{r\sin(\theta - \alpha)} = \frac{r_0{}^2 - a^2}{r_0\sin(\theta_0 - \alpha)} \tag{18}$$

可以看出,无论 α 值等于多少,这个方程均被 $r = r_1, \theta = \theta_1$ 所满足,其中

$$r_1 = \frac{a^2}{r_0}, \qquad \theta_1 = \pi + \theta_0 \tag{19}$$

(19)式表明,**来自一个任意点 P_0 的所有光线,均相交于 P_0 到 O 连线上的一点 P_1;P_0 和 P_1 分别在 O 的两边,并且 $OP_0 \cdot OP_1 = a^2$**。因此,"鱼眼"是一种绝对仪器,其中的成像是一个**反演**。

我们注意到,$r = a, \theta = \alpha$ 和 $r = a, \theta = \pi + \alpha$ 是满足(17)式的;因此每一条光线与固定圆 $r = a$ 相交于一直径的两端(见图 4.8)。

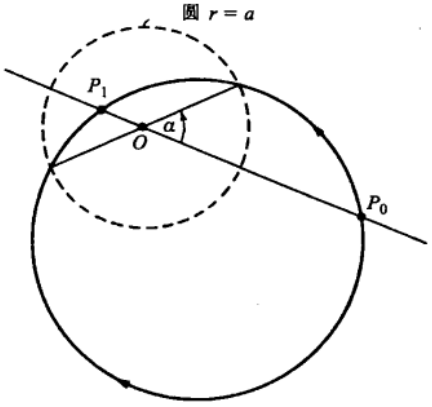


图 4.8 麦克斯韦"鱼眼"中的光线

为了得出光线的笛卡儿坐标方程，在(17)式中令 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，则有

$$y\cos\alpha - x\sin\alpha = \frac{c}{a\sqrt{a^2n_0^2 - 4c^2}}(x^2 + y^2 - a^2)$$

或

$$(x + b\sin\alpha)^2 + (y - b\cos\alpha)^2 = a^2 + b^2 \tag{20}$$

式中

$$b = \frac{a}{2c}\sqrt{a^2n_0^2 - 4c^2}$$

(20)式表明每一条光线都是一个圆。

4.2.3　面的无像散成像

以上只谈了三维区域的理想成像或锐成像。我们看到，当物空间和像空间都是均匀的并且具有相同折射率时，理想成像只能属于平常的类型，产生物的镜像而已。自然要问，当要求仪器只对某些面理想成像(或至少是锐成像)时，能不能得到不平常的成像呢？这个问题已经由一些作者研究过了[①]，他们发现，**当物空间和像空间都均匀时，一般[②]至少有两个面能被一个旋转对称系统锐成像**。关于这个定理的证明，可查阅伯格霍耳德(H. Boegehold)和赫兹伯格(M. Herzberger)的文章以及史密斯(T. Smith)的文章。这里只详细研究一个球面的锐成像这一简单情况，它在实用上是特别有意义的。

现在考虑一个实心均匀球 S 上的折射，球整个浸没于一均匀媒质中。设 O 是球心，r 是球的半径，n 和 n' 分别是球和周围媒质的折射率。此外，设 AQ 是入射到球上的一条光线。折射光线 QB 用如下的作图法可以容易地求得。

设 S_0 和 S_1 是两个球，球心均在 O 点，球的半径分别为

$$r_0 = \frac{n}{n'}r, \qquad r_1 = \frac{n'}{n}r \tag{21}$$

如果 P_0 是 AQ 与 S_0 的交点，P_1 是 OP_0 与 S_1 的交点，则 QP_1 就是折射光线。因为通过作图得出(见图 4.9)

$$\frac{OQ}{OP_0} = \frac{OP_1}{OQ} = \frac{n'}{n} \tag{22}$$

而且

$$\widehat{QOP_0} = \widehat{QOP_1} \tag{23}$$

所以三角形 OQP_0 和 OP_1Q 相似，由此得出

$$\frac{\sin\phi_0}{\sin\phi_1} = \frac{OP_0}{OQ} = \frac{n}{n'} \tag{24}$$

式中 $\phi_0 = \angle OQP_0$ 和 $\phi_1 = \angle OQP_1$ 分别是入射角和折射角。ϕ_0 和 ϕ_1 满足折射定律，因此 QP_1 就是折射光线。

---

① H. Boegehold and M. Herzberger, *Compositio Mathematica*, **1**(1935), 448; M. Herzberger, *Ann. New York Acad. Sci.*, **48**(1946), Atr. 1, 1; T. Smith, *Proc. Phys. Soc.*, **60**(1948), 293。又见 C. G. Wynne, *Proc. Phys. Soc.*, **65B**(1952), 436。

② “一般”，在这里的意思是要排除**全部**物空间锐成像(例如用一平面镜反射)一类退化情况。

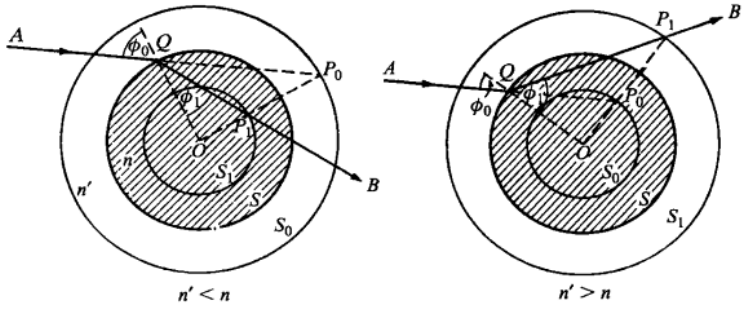


图 4.9 一个球面上的折射。不晕点

这一作图意味着,从 S_0 上的一点 P_0 发散的所有光线,将在半径 OP_0 与 S_1 的交点 P_1 处形成一个(虚的)消散像。因此,**球 S_1 就是 S_0 的一个消散像,反之亦然。**

为了后面之用,现将(24)式表成稍微不同的形式。如果用 θ_0 和 θ_1 来表示两条共轭光线与直线 P_0P_1 的夹角,即 $\theta_0 = \angle OP_0Q$,$\theta_1 = \angle OP_1Q$,则由于两个三角形相似,因此 $\theta_0 = \phi_1$,$\theta_1 = \phi_0$;所以

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_0} = \frac{n}{n'} = 常数 \tag{25}$$

(25)式是所谓**正弦条件**的特殊情况,它的意义将在 4.5 节中加以说明。按照 4.5 节的术语,P_0 和 P_1 称为球面 S 的**不晕点**。

球面折射存在的这种不晕点,已为某些显微镜物镜的构造所利用,后面 6.6 节将谈及此点。

4.3 具有轴对称的射影变换(直射变换)

前一节中已经证明,三维区域之间的理想成像必定是一个射影变换,因为它把线变换为线。但即使在不严格满足理想成像的要求时,射影变换的一些性质仍然至关重要。因为稍后将要看到,任何一个光学系统中的物像关系,**至少在一级近似上**都是这样一种变换。所以在导出实际仪器成像定律之前,先研究一下射影变换的一般性质将为适宜。虽然这一初步讨论基本上属于几何性质,但在可能之处保留光学用语将亦合宜。

4.3.1 一般公式

设(x, y, z)是物空间一点 P 的坐标,(x', y', z')是像空间一点 P'的坐标,两者此时均以同一套任意选定的笛卡儿直角坐标轴为参考系。物空间和像空间之间的射影关系,数学上用下列关系式来表示:

$$x' = \frac{F_1}{F_0}, \qquad y' = \frac{F_2}{F_0}, \qquad z' = \frac{F_3}{F_0} \tag{1}$$

式中

$$F_i = a_ix + b_iy + c_iz + d_i \qquad (i = 0, 1, 2, 3) \tag{2}$$

由(1)式联系的一对点,将谓之形成一共轭对。

从(1)式解 x, y, z，可得到相同形式的关系：

$$x = \frac{F_1'}{F_0'}, \qquad y = \frac{F_2'}{F_0'}, \qquad z = \frac{F_3'}{F_0'} \tag{3}$$

式中

$$F_i' = a_i'x' + b_i'y' + c_i'z' + d_i'$$

由(1)式得知，平面 $F_0 = 0$ 上任何一点的像均在无穷远处，与此类似，由(3)式可知，其像位于平面 $F_0' = 0$ 上的所有物点均在无穷远处。平面 $F_0 = 0$ 称为**物空间的焦平面**，平面 $F_0' = 0$ 则称为**像空间的焦平面**[①]。物空间中的平行光线将被变换为一组光线，相交于焦平面 $F_0' = 0$ 的一点。与此类似，从焦平面 $F_0 = 0$ 上的一点发出的光线将被变换为一束平行光线。在特殊情况下，这两个焦平面都可能位于无穷远处。这时，变换就称为**仿射变换**或**远焦变换**。此时有限值 (x, y, z) 与有限值 (x', y', z') 相对应，因此在一个远焦变换中总是 $F_0 \neq 0$ 和 $F_0' \neq 0$。显然，这只有在 $a_0 = b_0 = c_0 = 0$ 和 $a_0' = b_0' = c_0' = 0$ 时才可能成立。

对于光学特别重要的是**轴对称**情况，因为大多数光学系统是由一些共轴旋转面组成的[通常称为**共轴系统**(centred system)]。此时由对称性得知，每一点 P_0 的像总是位于包含 P_0 和轴的平面上，即在过 P_0 的**子午面**上。因此，在研究轴对称射影变换的性质时，可以只讨论某一子午面上的点。设此子午面是 yz 平面，并且取 z 轴沿着对称轴。此时物空间的一点 $(0, y, z)$ 将变换为像空间的一点 $(0, y', z')$，这里，

$$y' = \frac{b_2y + c_2z + d_2}{b_0y + c_0z + d_0}, \qquad z' = \frac{b_3y + c_3z + d_3}{b_0y + c_0z + d_0} \tag{4}$$

现在由对称性可知，当 y 变为 $-y$ 时，z' 保持不变。这一般只有在 $b_0 = b_3 = 0$ 时才有可能。此外由对称性得知，如果 $y \to -y$，则 $y' \to -y'$，这意味着 $c_2 = d_2 = 0$。因此(4)式简化为

$$y' = \frac{b_2y}{c_0z + d_0}, \qquad z' = \frac{c_3z + d_3}{c_0z + d_0} \tag{5}$$

这些方程含有 5 个常数，但只有它们的比值才有意义。所以**一个具有轴对称的投影变换由 4 个参量来表征**。

从(5)式解 y 和 z，得到

$$y = \frac{c_0d_3 - c_3d_0}{b_2}\frac{y'}{c_0z' - c_3}, \qquad z = \frac{-d_0z' + d_3}{c_0z' - c_3} \tag{6}$$

由(5)和(6)两式可以看出，焦平面由下式给出：

$$F_0 \equiv c_0z + d_0 = 0, \qquad F_0' \equiv c_0z' - c_3 = 0$$

所以焦平面与轴成直角相交，交点的横坐标分别是

$$z = -\frac{d_0}{c_0}, \qquad z' = \frac{c_3}{c_0} \tag{7}$$

这些点称为**主焦点**，在图 4.10 中用 F 和 F' 来表示。

---

① “焦平面”和“焦点”这两个名词在这里的含义与讨论法线汇(见 3.2.3 节)和像散光锥(见 4.6 节)时有所不同。

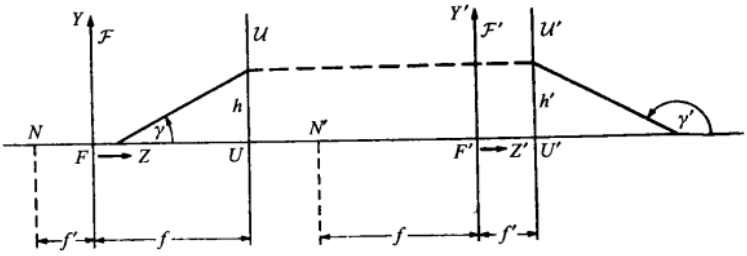


图 4.10 一个光学系统的基点和基面：F, F' = 焦点；U, U' = 主点(单位点)；N, N' = 节点；$\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ = 焦平面：$\mathcal{U}$, $\mathcal{U}'$ = 主平面(单位面)

为便于继续分析，现在对物空间和像空间引进各自的坐标系，将 z 坐标的测量各从其主焦点算起，即令

$$\left.\begin{aligned} y = Y, \quad & c_0 z + d_0 = c_0 Z, \\ y' = Y', \quad & c_0 z' - c_3 = c_0 Z'. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

则(5)式变为

$$Y' = \frac{b_2}{c_0}\frac{Y}{Z}, \qquad Z' = \frac{c_0 d_3 - c_3 d_0}{c_0^2 Z}$$

此外令

$$f = \frac{b_2}{c_0}, \qquad f' = \frac{c_0 d_3 - c_3 d_0}{b_2 c_0} \tag{9}$$

以此代入，则上列变换方程呈如下简单形式：

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{f}{Z} = \frac{Z'}{f'} \tag{10}$$

第二个关系式，$ZZ' = ff'$，通常称为**牛顿方程**。常数 f 称为**物空间的焦距**，f' 称为**像空间的焦距**。

由(10)式得到，对于固定的物平面和像平面，

$$\left(\frac{\mathrm{d}Y'}{\mathrm{d}Y}\right)_{Z=\text{常数}} = \frac{Y'}{Y} = \frac{f}{Z} = \frac{Z'}{f'} \tag{11}$$

这个量称为**横向放大率**，此外得到**轴向放大率**

$$\frac{\mathrm{d}Z'}{\mathrm{d}Z} = -\frac{Z'}{Z} = -\frac{ff'}{Z^2} = -\frac{Z'^2}{ff'} \tag{12}$$

它与 Y 和 Y' 无关。由(11)和(12)两式可以看出，这两种放大率有下列关系：

$$\frac{\mathrm{d}Z'}{\mathrm{d}Z} = -\frac{f'}{f}\left(\frac{\mathrm{d}Y'}{\mathrm{d}Y}\right)^2_{Z=\text{常数}} \tag{13}$$

因为横向放大率取决于 Z 而与 Y 无关，由此得到，位于一个垂直于轴的平面上的物，通过变换将形成一个在几何上与它相似的像。

当 $Z = f$ 和 $Z' = f'$ 时，**横向放大率**等于 1。这些平面称为**单位面**或**主平面**，在图 4.10 和图 4.11 中用字母$\mathcal{U}$和$\mathcal{U}'$来表示。这些平面与轴的交点 U 和 U' 称为**单位点**或**主点**。

现在从轴点(0,0,Z)作一条光线与物空间主平面相交，交点离轴距离设为 h。其共轭光

线与另一主平面相交，从轴到其交点的距离同为 h；这两条光线与轴的夹角 γ 和 γ' 由下式给出（见图 4.10）：

$$\tan\gamma = \frac{h}{f - Z}, \qquad \tan\gamma' = \frac{h}{f' - Z'}$$

两者的比值

$$\frac{\tan\gamma'}{\tan\gamma} = \frac{f - Z}{f' - Z'} = -\frac{Z}{f'} = -\frac{f}{Z'} \tag{14}$$

称为**角放大率**或**会聚比**。它与 h 和 h' 无关；当 $Z = -f'$ 和 $Z' = -f$ 时，它等于 1。由这两个式子规定的两个轴点 N 和 N'，称为**节点**。它们是两个共轭点，具有如下特性：通过它们的共轭光线是相互平行的。两个节点之间的距离等于两个主点之间的距离。当 $f = -f'$ 时，节点与主点重合。焦点、主点和节点称为这个变换的**基点**。

有时为了方便，距离测量不从焦平面而从主平面算起。这就是说，用变量

$$\zeta = Z - f, \qquad \zeta' = Z' - f' \tag{15}$$

来代替 Z 和 Z'。牛顿方程 $ZZ' = ff'$ 这时变为

$$\frac{f}{\zeta} + \frac{f'}{\zeta'} = -1 \tag{16}$$

利用焦点和主平面的性质，就可以通过简单的几何作图来求出一个已知点 P 的共轭点 P'。通过 P 画两条直线，一条与轴相平行，另一条通过焦点 F（见图 4.11）。设 A 和 B 分别是这两条直线与主平面 $\mathcal{U}$ 的交点。通过 A 和 B，平行于轴作两条直线，与 $\mathcal{U}'$ 相交于 A' 和 B'，则由主平面的性质可知，A' 和 B' 就是 A 和 B 的共轭点。而且，因为 PA 通过焦点 F，$P'A'$ 就必定与轴相平行，又因为 PB 与轴相平行，$P'B'$ 就必定通过另一个焦点 F'。所以像点 P' 就是 AA' 与 $B'F'$ 的交点。

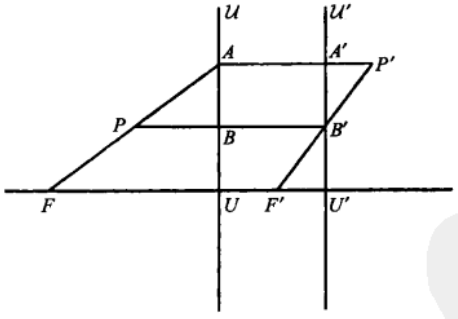


图 4.11　用作图法确定像点

4.3.2　远焦情况

现在考虑远焦（仿射）直射变换这种特殊情况。如前所述，这种情况的特征是两个焦平面均在无穷远。因此(5)和(6)两式中的系数 c_0 为零，而(5)式简化为

$$y' = \frac{b_2 y}{d_0}, \qquad z' = \frac{c_3 z + d_3}{d_0} \tag{17}$$

再次对物空间和像空间选取各自的坐标系。取任何一对共轭轴点作为两个坐标系的原点。以新坐标轴作为参考系,则变换方程呈如下简单形式:

$$Y' = \alpha Y, \qquad Z' = \beta Z \tag{18}$$

式中 $\alpha = b_2/d_0$, $\beta = c_3/d_0$。

这时,横向和轴向放大率都是常数。角放大率也是常数;要证明这一点,考虑两条共轭光线,把这两条光线与轴的交点取作两个坐标系的原点。则这两条光线的方程为

$$Y = Z\tan\gamma, \qquad Y' = Z'\tan\gamma' \tag{19}$$

所以

$$\frac{\tan\gamma'}{\tan\gamma} = \frac{Y'}{Z'}\frac{Z}{Y} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{b_2}{c_3} \tag{20}$$

虽然在远焦变换中 f 和 f' 两者都是无穷大,但必须留意 f' 与 f 之比 f'/f 却是有限的。因为根据(9)式,当 $c_0 \to 0$ 时,

$$\frac{f'}{f} \to -\frac{c_3 d_0}{b_2{}^2} = -\frac{\beta}{\alpha^2} \tag{21}$$

4.3.3 射影变换的分类

射影变换可以按照焦距的符号来分类。

当焦距 f 和 f' 符号相反时,$ff' < 0$,根据(12)式,$\mathrm{d}Z'/\mathrm{d}Z > 0$。这意味着,如果物的位置沿平行于 z 轴方向移动,则像的位移方向将与之相同。以后将要看到,由单纯折射或偶数次反射,或由二者组合所产生的像都属于这一类成像。这一类型的成像叫做**同向的**(concurrent)或**折射的**(dioptric)。

当焦距 f 和 f' 符号相同时,$ff' > 0$,$\mathrm{d}Z'/\mathrm{d}Z < 0$,因此,对于物平行于 z 轴方向的位移,像的相应位移方向则与之相反。这一类型的成像产生于奇数次反射,或奇数次反射与任何次折射的组合。这一类型的成像叫做**反向的**(contracurrent)或**反射的**(katoptric)。

在上述每一类型中,再按照焦距 f 的符号区分为两类变换。由(11)式可以看出,当 $Z > 0$ 时,横向放大率为正或为负,取决于 $f > 0$ 或 $f < 0$。因此,位于物空间右半边的物所具有的像,取向相同或颠倒,取决于 f 为正或为负。在前一种情况下,变换称为**会聚**的;在后一种情况下,变换称为**发散**的。这些术语出于下列事实:一束入射平行光线通过像空间的主平面以后,在前一种情况下变成会聚的,而在后一种情况下变成发散的。表 4.1 概括列出这 4 种情况。

表 4.1 射影变换的分类(笛卡儿符号规则)

	会 聚	发 散
同向(折射)	$f>0;f'<0$	$f<0;f'>0$
反向(反射)	$f>0;f'>0$	$f<0;f'<0$

在远焦变换这种特殊情况中,这 4 种类型用 α 和 β 的符号来区分。由(21)式得知,当 β 为正时,变换将是同向的;当 β 为负时,变换将是反向的。此外,由(18)式可以看出,变换是会聚的还是发散的,取决于 α 是正还是负。

4.3.4　射影变换的组合

现在考虑接连两个同轴旋转对称射影变换的组合情况。

令下标 0 指第一个变换，下标 1 指第二个变换，则确定这两个变换的方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{Y_0'}{Y_0}&=\frac{f_0}{Z_0}=\frac{Z_0'}{f_0'},\\ \frac{Y_1'}{Y_1}&=\frac{f_1}{Z_1}=\frac{Z_1'}{f_1'}.\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

设 c 是焦点 F_0' 和 F_1 之间的距离。因为第一个变换的像空间与第二个变换的物空间重合，所以

$$Z_1=Z_0'-c,\qquad Y_1=Y_0'\tag{23}$$

利用(23)式，从(22)式中消去中间空间的坐标(Y_0', Z_0')，得到

$$\left.\begin{aligned}Y_1'&=\frac{Z_1'Y_1}{f_1'}=\frac{Z_1'Y_0'}{f_1'}=\frac{Z_1'f_0Y_0}{f_1'Z_0}=\frac{f_0f_1Y_0}{f_0f_0'-cZ_0},\\ Z_1'&=\frac{f_1f_1'}{Z_1}=\frac{f_1f_1'}{Z_0'-c}=\frac{f_1f_1'}{\dfrac{f_0f_0'}{Z_0}-c}=\frac{f_1f_1'Z_0}{f_0f_0'-cZ_0}.\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

设

$$\left.\begin{aligned}Y&=Y_0,\quad Z=Z_0-\frac{f_0f_0'}{c},\\ Y'&=Y_1',\quad Z'=Z_1'+\frac{f_1f_1'}{c}.\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

(25)式表示一种坐标变换，两个坐标系的原点分别在 Z 方向上移动一个距离 $f_0'f_0/c$ 和 $-f_1'f_1/c$。用变量(Y, Z)和(Y', Z')表示时，组合变换的方程变为

$$\frac{Y'}{Y}=\frac{f}{Z}=\frac{Z'}{f'}\tag{26}$$

式中

$$f=-\frac{f_0f_1}{c},\qquad f'=\frac{f_0'f_1'}{c}\tag{27}$$

由(25)式可以看出，新旧坐标系原点之间的距离，即从原来单个变换的焦点到上述等效变换的焦点的距离 $\delta=F_0F$ 和 $\delta'=F_1'F'$，分别为

$$\delta=\frac{f_0f_0'}{c},\qquad \delta'=-\frac{f_1f_1'}{c}\tag{28}$$

如果 $c=0$，则 $f=f'=\infty$，因此这个等效直射变换是远焦的。此时(24)式简化为

$$\left.\begin{aligned}Y_1'&=\frac{f_1}{f_0'}Y_0,\\ Z_1'&=\frac{f_1f_1'}{f_0f_0'}Z_0;\end{aligned}\right\}\tag{29}$$

所以在这个等效变换中,对应于(18)式中的常数 α 和 β 为

$$\alpha=\frac{f_1}{f_0'},\qquad \beta=\frac{f_1f_1'}{f_0f_0'} \tag{30}$$

这里,角放大率为

$$\frac{\tan\gamma'}{\tan\gamma}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{f_0}{f_1'} \tag{31}$$

如果两个变换有一个或者两个同是远焦变换,则以上分析要有所修改。

4.4 高斯光学

现在我们来研究透镜、反射镜及其组合的基本性质。在这一基本理论中,将只考虑与轴紧邻的那些点和光线,因而计算中将略去离轴距离或光线与轴夹角的平方项和更高次项。由此产生的理论体系通称高斯光学①。

4.4.1 旋转折射面

考虑一光线锥入射到一个旋转折射面上,这个面分隔着折射率为 n_0 和 n_1 的两种均匀媒质。先对两种媒质中的点和光线采用同一个笛卡儿参考系,将其原点取在该面的极点 O,并令 z 方向沿着对称轴。

设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$和 $P_1(x_1,y_1,z_1)$分别是入射光线和折射光线上的点。忽略高于一次方的项,由 §4.1(29)、§4.1(40)和 §4.1(44)三式可以得出,这两点的坐标和这两条光线的分量通过下列关系式相联系:

$$\left.\begin{aligned} x_0-\frac{p_0}{n_0}z_0&=\frac{\partial T^{(2)}}{\partial p_0}=2\mathcal{A}p_0+\mathcal{C}p_1,\\ x_1-\frac{p_1}{n_1}z_1&=-\frac{\partial T^{(2)}}{\partial p_1}=-2\mathcal{B}p_1-\mathcal{C}p_0,\end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

$$\left.\begin{aligned} y_0-\frac{q_0}{n_0}z_0&=\frac{\partial T^{(2)}}{\partial q_0}=2\mathcal{A}q_0+\mathcal{C}q_1,\\ y_1-\frac{q_1}{n_1}z_1&=-\frac{\partial T^{(2)}}{\partial q_1}=-2\mathcal{B}q_1-\mathcal{C}q_0,\end{aligned}\right\} \tag{1b}$$

式中,根据 §4.1(45),

$$\mathcal{A}=\mathcal{B}=\frac{1}{2}\frac{r}{n_1-n_0},\qquad \mathcal{C}=-\frac{r}{n_1-n_0} \tag{2}$$

r 是旋转折射面的傍轴曲率半径。

让我们来研究在什么条件下,来自 P_0(它可假定位于平面 $x=0$ 上)的所有光线在折射以后都将通过 P_1。此时 P_1 的坐标将只取决于 P_0 的坐标,而与光线分量无关,因此,当从(1b)式

① 和前面一样,本节也采用解析几何学通常的符号规则(笛卡儿符号规则)。实际使用的各种符号规则在下列报告中有详细讨论,见 Report on the Teaching of Geometrical Optics, Physical Society(London), 1934。

中消去 q_1 时，q_0 也必须不出现。

现在由(1b)第一式

$$q_1 = \frac{1}{\mathcal{C}}\left[y_0 - q_0\left(2\mathcal{A} + \frac{1}{n_0}z_0\right)\right] \tag{3}$$

把上式代入(1b)第二式，得到

$$y_1 = -\left(2\mathcal{B} - \frac{1}{n_1}z_1\right)\frac{1}{\mathcal{C}}y_0 + \left[\frac{1}{\mathcal{C}}\left(2\mathcal{B} - \frac{1}{n_1}z_1\right)\left(2\mathcal{A} + \frac{1}{n_0}z_0\right) - \mathcal{C}\right]q_0 \tag{4}$$

所以，如果

$$\left(2\mathcal{A} + \frac{1}{n_0}z_0\right)\left(2\mathcal{B} - \frac{1}{n_1}z_1\right) = \mathcal{C}^2 \tag{5}$$

则 P_1 将是 P_0 的一个消散像。用(2)式代入(5)式，则消散成像条件为

$$\left(\frac{r}{n_1 - n_0} + \frac{z_0}{n_0}\right)\left(\frac{r}{n_1 - n_0} - \frac{z_1}{n_1}\right) = \frac{r^2}{(n_1 - n_0)^2} \tag{6}$$

(6)式可写成如下形式：

$$n_0\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{z_0}\right) = n_1\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{z_1}\right) \tag{7}$$

可以看出，在目前的近似程度范围，每一点都产生一个消散像；从折射面极点 O 到两个共轭平面的距离由(7)式相联系。而且，(4)式加上条件(5)，就意味着这个成像是一个**射影变换**。

(7)式每一边的表达式称为**阿贝(折射)不变量**，它在光学成像理论中起重要作用。(7)式也可以写成如下形式：

$$\frac{n_1}{z_1} - \frac{n_0}{z_0} = \frac{n_1 - n_0}{r} \tag{8}$$

$(n_1 - n_0)/r$ 这个量称为折射面的**光焦度**(power)，用$\mathcal{P}$来表示，

$$\mathcal{P} = \frac{n_1 - n_0}{r} \tag{9}$$

根据(4)和(5)两式，当 $z_1/n_1 = 2\mathcal{B} + \mathcal{C}$时，横向放大率 y_1/y_0 等于 1。但由(2)式，$2\mathcal{B} + \mathcal{C} = 0$。所以主点 U_0 和 U_1 由 $z_0 = z_1 = 0$ 给出，即**二主点与折射面的极点重合**。此外由(8)式得出，

$$z_0 \to -\frac{n_0 r}{n_1 - n_0} \qquad \text{当 } z_1 \to \infty$$

和

$$z_1 \to \frac{n_1 r}{n_1 - n_0} \qquad \text{当 } z_0 \to -\infty$$

因此焦点 F_0 和 F_1 的横坐标分别是 $-n_0 r/(n_1 - n_0)$和 $n_1 r/(n_1 - n_0)$。所以焦距 $f_0 = F_0U_0$ 和 $f_1 = F_1U_1$ 由下式给出：

$$\left.\begin{aligned} f_0 &= \frac{n_0 r}{n_1 - n_0} \\ \text{和} \qquad f_1 &= -\frac{n_1 r}{n_1 - n_0}; \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

用折射面的光焦度$\mathcal{P}$来表示[①] 时,即

$$\frac{n_0}{f_0}=-\frac{n_1}{f_1}=\mathcal{P} \tag{11}$$

因为f_0和f_1的符号不同,所以成像是**同向**的(见4.3.3节)。如果折射面凸向入射光($r>0$),并且$n_0<n_1$,则$f_0>0, f_1<0$,成像是会聚的。如果$r>0$和$n_0>n_1$,则成像是**发散**的(见图4.12)。当折射面凹向入射光时,情况相反。

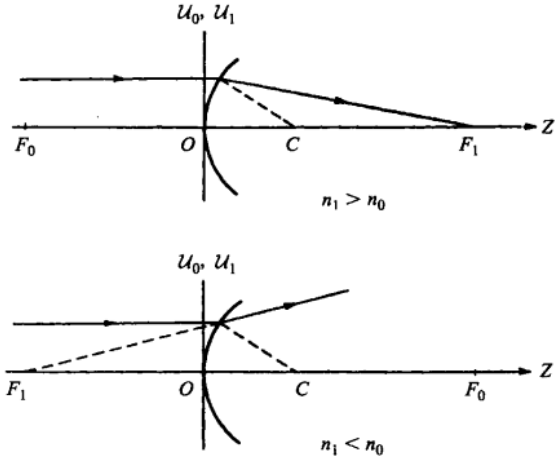


图4.12 单个旋转面折射成像的基点位置

利用焦距表达式(10),则(8)式变为

$$\frac{f_0}{z_0}+\frac{f_1}{z_1}=-1 \tag{12}$$

(2)式各个系数可写成如下形式:

$$\mathcal{A}=\frac{f_0}{2n_0},\qquad \mathcal{B}=-\frac{f_1}{2n_1},\qquad \mathcal{C}=-\frac{f_0}{n_0}=\frac{f_1}{n_1} \tag{13}$$

现在引入物空间和像空间各自的坐标系,令其原点分别在各自的焦点,轴分别平行于O处的轴:

$$X_0=x_0,\qquad X_1=x_1,$$
$$Y_0=y_0,\qquad Y_1=y_1,$$
$$Z_0=z_0+f_0,\qquad Z_1=z_1+f_1$$

于是,(4)式[加上条件(5)]和(12)式即简化为标准形式§4.3(10):

$$\frac{Y_1}{Y_0}=\frac{f_0}{Z_0}=\frac{Z_1}{f_1} \tag{14}$$

① 后面将看到,关系式$n_0/f_0=-n_1/f_1$不限于单个折射面,而是对任何一个共轴系统一般也成立,带有下标0的量是物空间的,带有下标1的量是像空间的。因此(11)式可看作是一般共轴系统的**光焦度**定义。光焦度的实用单位是**屈光度**(dioptre);当焦距用米表示时,它就是焦距的倒数。若系统是会聚的($f_0>0$),其光焦度为正;若系统是发散的($f_0<0$),其光焦度为负。

4.4.2　旋转反射面

可以看出，当旋转面上发生反射时，采用完全类似前节所用的符号，则方程(1a)和(1b)形式上仍然有效，只是这时系数$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$和$\mathcal{C}$要用 4.1.5 节中对应的系数$\mathcal{A}'$，$\mathcal{B}'$，$\mathcal{C}'$来代替。4.1.5 节中已经指出，从$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$和$\mathcal{C}$的表达式中，令 $n_0 = -n_1 = n$，就可以得到$\mathcal{A}'$，$\mathcal{B}'$和$\mathcal{C}'$。n 表示光线所在媒质的折射率。因此，在前面的公式中作此代换，即可立刻写下适用于反射的公式。特别是，由(7)式得到

$$\frac{1}{z_0}-\frac{1}{r}=-\frac{1}{z_1}+\frac{1}{r} \tag{15}$$

(15)式每一边的表达式就是**阿贝(反射)不变量**。(15)式也可以写成

$$\frac{1}{z_0}+\frac{1}{z_1}=\frac{2}{r} \tag{16}$$

现在，焦距 f_0 和 f_1 由下式给出：

$$f_0=f_1=-\frac{r}{2} \tag{17}$$

光焦度$\mathcal{P}$为

$$\mathcal{P}=-\frac{2n}{r} \tag{18}$$

因为 $f_0 f_1>0$，所以成像是**反向**(反射)的。当反射面凸向入射光时($r>0$)，$f_0<0$，则成像是发散的；当反射面凹向入射光时($r<0$)，$f_0>0$，则成像是会聚的(见图 4.13)。

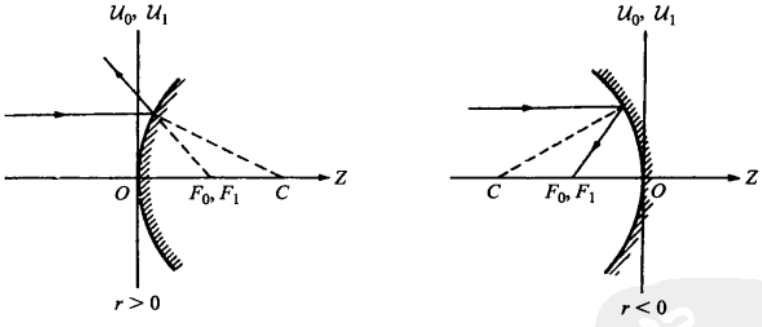


图 4.13　单个旋转镜面反射成像的基点位置

4.4.3　厚透镜

其次，我们来推导两个同轴旋转对称面的高斯成像公式。

设 n_0，n_1 和 n_2 分别是三个区域的折射率，以光通过它们的先后为序，又设 r_1 和 r_2 是这两个面在其轴点处的曲率半径，当曲面凸向入射光时，其曲率半径设为正。

由(10)式，第一个面的焦距为

$$f_0=\frac{n_0 r_1}{n_1-n_0},\qquad f_0'=-\frac{n_1 r_1}{n_1-n_0} \tag{19}$$

第二个面的焦距为

$$f_1 = \frac{n_1 r_2}{n_2 - n_1}, \qquad f_1' = -\frac{n_2 r_2}{n_2 - n_1} \tag{20}$$

根据§4.3(27),组合的焦距为

$$f = -\frac{f_0 f_1}{c}, \qquad f' = \frac{f_0' f_1'}{c} \tag{21}$$

式中的 c 是焦点 F_0' 和 F_1 之间的距离。设 t 是透镜的轴向厚度,即两个面的极点之间的距离;则有(见图4.14)

$$c = t + f_0' - f_1 \tag{22}$$

用 f_0' 和 f_1 的表达式代入(22)式,得到

$$c = \frac{D}{(n_1 - n_0)(n_2 - n_1)} \tag{23}$$

式中

$$D = (n_1 - n_0)(n_2 - n_1)t - n_1[(n_2 - n_1)r_1 + (n_1 - n_0)r_2] \tag{24}$$

现在把 f_0, f_1, f_0', f_1' 和 c 的表达式代入(21)式,就得到所要求的组合焦距表达式

$$f = -n_0 n_1 \frac{r_1 r_2}{D}; \qquad f' = n_1 n_2 \frac{r_1 r_2}{D} \tag{25}$$

因为 ff' 为负,所以成像是同向的。这种透镜的光焦度 $\mathcal{P}$ 为

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{n_0}{f} = -\frac{n_2}{f'} = -\frac{1}{n_1}\frac{D}{r_1 r_2} \\ &= \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 - \frac{t}{n_1}\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2, \end{aligned} \tag{26}$$

式中 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$ 分别是两个面的光焦度。

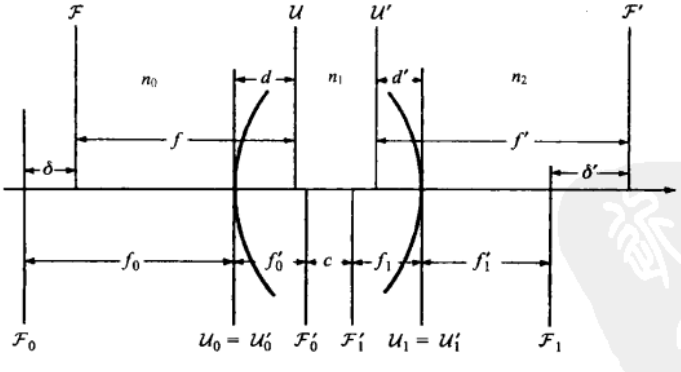


图 4.14 组合系统(厚透镜)的基点

由§4.3(28)可以得到,距离 $\delta = F_0 F$ 和 $\delta' = F_1' F'$ 为

$$\delta = -n_0 n_1 \frac{n_2 - n_1}{n_1 - n_0}\frac{r_1^2}{D}, \qquad \delta' = n_1 n_2 \frac{n_1 - n_0}{n_2 - n_1}\frac{r_2^2}{D} \tag{27}$$

从两个面的极点到主平面 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{U}'$ 的距离 d 和 d' 为(见图4.14)

$$\left.\begin{aligned} d &= \delta + f - f_0 = -n_0(n_2 - n_1)\frac{r_1 t}{D}, \\ d' &= \delta' + f' - f_1' = n_2(n_1 - n_0)\frac{r_2 t}{D}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

特别重要的是透镜两侧媒质的折射率相同，即 $n_2 = n_0$ 的情况，令 $n_1/n_0 = n_1/n_2 = n$，则上列各式简化为

$$\left.\begin{aligned} f &= -f' = -\frac{nr_1 r_2}{\Delta}, \\ \delta &= n\frac{{r_1}^2}{\Delta}, \qquad \delta' = -n\frac{{r_2}^2}{\Delta}, \\ d &= (n-1)\frac{r_1 t}{\Delta}, \qquad d' = (n-1)\frac{r_2 t}{\Delta}, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

式中

$$\Delta = (n-1)[n(r_1 - r_2) - (n-1)t] \tag{30}$$

以焦点 F 和 F' 处的轴为参考系，则主点的横坐标为 $Z = f$ 和 $Z' = f'$，节点的横坐标为 $Z = -f', Z = -f$。因为 $f = -f'$，所以这时主点和节点重合。从主平面到共轭平面的距离 ζ 和 ζ' 两者的关系式 §4.3(16)则变为

$$\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta'} = -\frac{1}{f} \tag{31}$$

透镜**会聚**($f>0$)或**发散**($f<0$)取决于

$$f = -n\frac{r_1 r_2}{\Delta} \gtrless 0 \tag{32}$$

即取决于

$$\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \lessgtr \frac{n-1}{n}\frac{t}{r_1 r_2} \tag{33}$$

当 $f \to \infty$ 时，就得到**远焦**成像这一中间情况。这时 $\Delta = 0$，即

$$r_1 - r_2 = \frac{n-1}{n}t \tag{34}$$

这三种情况可通过考察一个双凸透镜($r_1 > 0, r_2 < 0$)加以说明(见图 4.15)。为简单起见，假定两个半径在数值上相等，即 $r_1 = -r_2 = r$，则成像为会聚或为发散，取决于 $t \lessgtr 2nr/(n-1)$，当 $t = 2nr/(n-1)$ 时，则成像是远焦的。

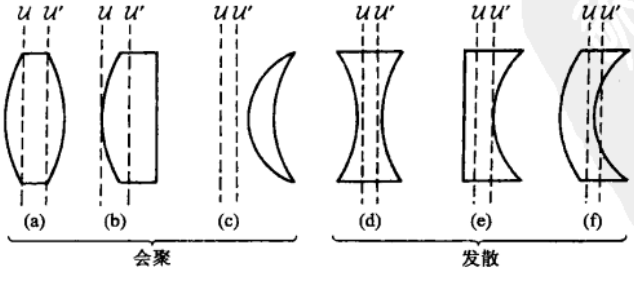


图 4.15　透镜的普通类型：(a)双凸；(b)平凸；(c)会聚弯月形；(d)双凹；(e)平凹；(f)发散弯月形。$\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{U}'$ 是主平面，假定光从左边入射

4.4.4 薄透镜

当透镜薄到轴向厚度 t 可以忽略时,前面的公式就获得特别简单的形式。这时,根据(28)式,$d = d' = 0$,因此两主平面通过(无限薄)透镜的轴点。结果,通过透镜中心的光线将没有任何偏转;这就意味着,**一个薄透镜成像是对透镜中心的中心投影。**

由(26)式,令 $t = 0$,得到

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \frac{n_1 - n_0}{r_1} + \frac{n_2 - n_1}{r_2} \tag{35}$$

即一个薄透镜的光焦度等于它的两个面的光焦度之和。

如果透镜两侧的媒质具有相同的折射率($n_0 = n_2$),则由(25)式得出,

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{36}$$

和前面一样,式中 $n = n_1/n_0 = n_1/n_2$。假定 $n > 1$(通常是这种情况),由此看出,f 为正或为负,取决于第一个面的曲率 $1/r_1$ 大于或小于第二个面的曲率 $1/r_2$(曲率要取适当的符号)。这就意味着,从中央到边缘厚度递减的薄透镜是会聚的,从中央到边缘厚度递增的薄透镜是发散的。

因为以后要用,在这里将写出由两个放在空气中的共轴薄透镜组成的系统的焦距 f 和 f' 的表达式。根据 §4.3(27),因为 $f_0 = -f'_0$,$f_1 = -f'_1$,所以

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{f'} = -\frac{c}{f_0 f_1} \tag{37}$$

c 是焦点 F'_0 和 F_1 之间的距离(见图 4.16)。设 l 是两个透镜之间的距离,则

$$l = f_0 + c + f_1 \tag{38}$$

因此,

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_0} + \frac{1}{f_1} - \frac{l}{f_0 f_1} \tag{39}$$

如果两个透镜相接触($l = 0$),则(39)式也可写成下列形式:$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$,因此这种组合的光焦度简单地等于两个透镜的光焦度之和。

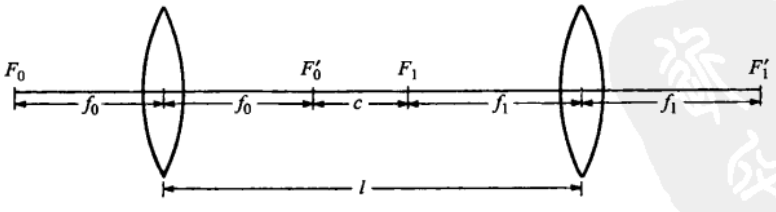


图 4.16 两个共轴薄透镜组成的系统

4.4.5 一般共轴系统

前面我们看到,在高斯理论的近似范围内,一个旋转面的折射或反射成像,在物空间和像

空间之间形成一种射影变换关系[①]。按照 4.3 节，接连进行两次射影变换，结果等效于一个单次射影变换，因此可以推知，在目前的近似程度上，一个共轴系统的成像也是这一类型的变换。这个等效变换的各个基点可以用 4.4.1 节、4.4.2 节和 4.3.4 节的公式求出。因此，本节的讨论将主要限于推导一个重要的不变量关系，这个关系（在目前的准确度范围内）对任何共轴系统均属有效。

设 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 是系统的各个面，按前后顺序排列，$f_0, f_1, \cdots, f_{m-1}$ 是相应的焦距，$n_0, n_1, \cdots, n_m$ 是顺序各空间的折射率（见图 4.17）。此外，设 P_0 和 $P_0^\star$ 是物空间中同一子午面上的两点，P_1 和 $P_1^\star$，P_2 和 $P_2^\star$，…是这两点由各面依次形成的像。以第一个面的两个焦点处的轴为参考系，则 $P_0, P_0^\star$ 和 $P_1, P_1^\star$ 的坐标以(14)式相联系，即

$$\frac{Y_1}{Y_0} = \frac{f_0}{Z_0} = \frac{Z_1}{f_1} \tag{40}$$

$$\frac{Y_1^\star}{Y_0^\star} = \frac{f_0}{Z_0^\star} = \frac{Z_1^\star}{f_1} \tag{41}$$

因此

$$\frac{Z_1^\star - Z_1}{f_1} = \frac{Y_1^\star}{Y_0^\star} - \frac{Y_1}{Y_0} = \frac{Y_0 Y_1^\star - Y_1 Y_0^\star}{Y_0 Y_0^\star} \tag{42}$$

$$\frac{Z_0^\star - Z_0}{f_0} = \frac{Y_0^\star}{Y_1^\star} - \frac{Y_0}{Y_1} = \frac{Y_1 Y_0^\star - Y_0 Y_1^\star}{Y_1 Y_1^\star} \tag{43}$$

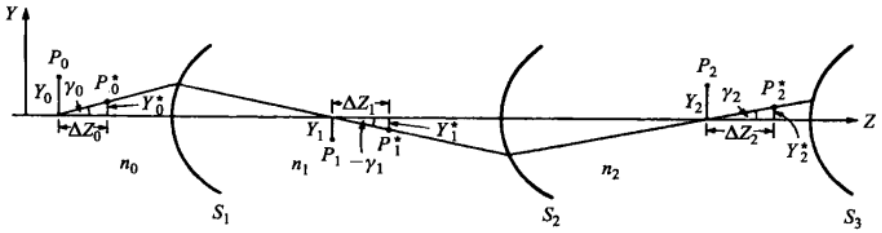


图 4.17　史密斯-亥母霍兹公式图示

设

$$\left.\begin{aligned} Z_0^\star - Z_0 &= \Delta Z_0, \\ Z_1^\star - Z_1 &= \Delta Z_1. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

则由(42)和(43)两式得到

$$\frac{f_0 Y_0 Y_0^\star}{\Delta Z_0} = -\frac{f_1 Y_1 Y_1^\star}{\Delta Z_1} \tag{45}$$

由(10)式，$f_0/f_1 = -n_0/n_1$，因此(45)式可写成

① 如同单个面的情况那样，物空间和像空间被看做是彼此重叠的，并且在所有方向上无界地扩展。以光通过系统时的先后为序，物空间位于第一个面前方的部分就称为物空间的实部，像空间位于最后一个面后方的部分就称为像空间的实部。物空间和像空间的其余部分就称为虚部。可以用类似的方法来定义系统的任一中间空间的实部和虚部。

$$\frac{n_0 Y_0 Y_0^{\star}}{\Delta Z_0} = \frac{n_1 Y_1 Y_1^{\star}}{\Delta Z_1} \tag{46}$$

与此类似,对于第二个面上的折射,

$$\frac{n_1 Y_1 Y_1^{\star}}{\Delta Z_1} = \frac{n_2 Y_2 Y_2^{\star}}{\Delta Z_2} \tag{47}$$

推广到一般,

$$\frac{n_{i-1} Y_{i-1} Y_{i-1}^{\star}}{\Delta Z_{i-1}} = \frac{n_i Y_i Y_i^{\star}}{\Delta Z_i} \qquad (1 \leqslant i \leqslant m) \tag{48}$$

因此,$n_i Y_i Y_i^{\star}/\Delta Z_i$ **就是依次变换中的一个不变量**。这个结果在成像的几何理论中起着重要作用。令 $Y_i^{\star}/\Delta Z_i = \tan\gamma_i$(见图 4.17),则(48)式变为

$$n_{i-1} Y_{i-1} \tan\gamma_{i-1} = n_i Y_i \tan\gamma_i$$

由于对目前的准确度来说,$\tan\gamma$ 和 $\tan\gamma'$ 可以分别用 γ 和 γ' 来代替,我们就得到了**史密斯-亥姆霍兹公式**[①]:

$$n_{i-1} Y_{i-1} \gamma_{i-1} = n_i Y_i \gamma_i \tag{49}$$

这个量 $n_i Y_i \gamma_i$ 称为**史密斯-亥姆霍兹不变量**。

由(48)和(49)两式可以得出一些重要结论。由于通常感兴趣的只是第一种媒质和最后一种媒质(物空间和像空间)各个量之间的关系,我们将去掉下标,而分别用不带撇和带撇的符号来表示物空间和像空间的各个量。

设(Y, Z)和$(Y+\delta Y, Z+\delta Z)$是物空间中两个邻点,(Y', Z')和$(Y'+\delta Y', Z'+\delta Z')$是它们的共轭点。依次利用史密斯-亥姆霍兹公式,得到下列关系:

$$\frac{nY(Y+\delta Y)}{\delta Z} = \frac{n'Y'(Y'+\delta Y')}{\delta Z'} \tag{50}$$

在 $\delta Y \to 0$ 和 $\delta Z \to 0$ 的极限情况下,上式化为

$$\frac{\mathrm{d}Z'}{\mathrm{d}Z} = \frac{n'}{n}\frac{Y'^2}{Y^2} \tag{51}$$

根据 §4.3(11),可写出 $Y'/Y = (\mathrm{d}Y'/\mathrm{d}Y)_{Z=常数}$,(51)式就变为

$$\frac{\mathrm{d}Z'}{\mathrm{d}Z} = \frac{n'}{n}\left(\frac{\mathrm{d}Y'}{\mathrm{d}Y}\right)^2_{Z=常数} \tag{52}$$

上式称为**麦克斯韦伸长公式**。它的意思是,**轴向放大率等于横向放大率的平方与折射率之比 n'/n 的乘积**。在 4.3 节中已经导出一个类似的公式(13),把两种放大率和焦距比联系起来。比较这两个公式,就可以看出:

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n} \tag{53}$$

即仪器焦距之比等于折射率之比 n'/n 取负号。

① 这个公式也以拉格朗日和克劳修斯的名字命名。实际上,更早的作者,例如惠更斯和科茨(Cotes),已经知道这个公式较局限的形式[见 Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, (5)**21**(1886), 466]。

由史密斯-亥母霍兹公式也可得出

$$\frac{\mathrm{d}Y'}{\mathrm{d}Y}\frac{\gamma'}{\gamma}=\frac{n}{n'} \tag{54}$$

它表明，**横向放大率和角放大率的乘积与共轭平面的选择无关。**

以上一直假定系统仅由折射面组成。如果其中有一个面(设为第 i 个面)是反射镜面，则(48)式易为

$$\frac{Y_{i-1}Y_{i-1}^{\star}}{\Delta Z_{i-1}}=-\frac{Y_iY_i^{\star}}{\Delta Z_i}$$

负号是由于反射时 $f_{i-1}/f_i=1$，而折射时 $f_{i-1}/f_i=-n_{i-1}/n_i$。结果在最后各公式中，n' 必须用 $-n'$ 来代替。更一般地说，当系统包含奇数个反射镜面时，n' 必须用 $-n'$ 来代替；当系统包含偶数个反射镜面时，最后各公式保持不变。

4.5　广角光锥的无像散成像

前面假定物的尺寸和光线与轴的夹角都足够小，从而导出高斯光学的各个定律。但还必须经常考虑这样的系统，其中物的线度很小，而光线的倾角并不小。关于这种仪器中的无像散成像[①]，有两个简单的判据，称为**正弦条件**[②]和**赫谢耳**(Herschel)**条件**[③]。

设 O_0 是在轴上的一个物点，P_0 是它邻近的任一点，不一定在轴上。假定系统使这两点无像散成像，O_1 和 P_1 是其无像散的像。

设(x_0,y_0,z_0)和(x_1,y_1,z_1)分别是 P_0 和 P_1 的坐标，P_0 和 P_1 分别以 O_0 和 O_1 处的直角坐标轴为参考系，两套轴互相平行，取 z 方向沿着该系统的轴(见图 4.18)。根据等光程原理，连接 P_0 和 P_1 的所有光线的程长都相等。因此，如果 V 表示媒质的点特征函数，则

$$V(x_0,y_0,z_0;x_1,y_1,z_1)-V(0,0,0;0,0,0)=F(x_0,y_0,z_0;x_1,y_1,z_1) \tag{1}$$

F 是与光线分量无关的某一函数。利用由点特征函数表示光线分量的基本关系式 §4.1(7)，并且忽略距离的高于一次方的项，则由(1)式得出：

$$(p_1^{(0)}x_1+q_1^{(0)}y_1+m_1^{(0)}z_1)-(p_0^{(0)}x_0+q_0^{(0)}y_0+m_0^{(0)}z_0)=F(x_0,y_0,z_0;x_1,y_1,z_1) \tag{2}$$

$(p_0^{(0)},q_0^{(0)},m_0^{(0)})$和$(p_1^{(0)},q_1^{(0)},m_1^{(0)})$是通过 O_0 和 O_1 的任一对对应光线的光线分量。必须注意，虽然假定点 P_0 和 P_1 在 O_0 和 O_1 近邻，但对光线分量的大小并没有加以限制。

有两种情况是特别有意义的，即(i) P_0 和 P_1 分别位于 $z_0=0$ 和 $z_1=0$ 平面上，(ii) P_0 和 P_1 在对称轴上。下面将分别讨论这两种情况。

---

① 即“消(像)散成像”或“共心成像”(《物理学名词》，1996)——译者注。

② 正弦条件首先由克劳修斯[R. Clausius, *Pogg. Ann.*, **121**(1864), 1]和亥姆霍兹[H. Helmholtz. *Pogg. Ann. Jubelband*(1874), 557]从热力学考虑导出。但一直到阿贝[E. Abbe. *Jenaisch. Ges. Med. Naturw.*(1879), 129 和 *Carl. Repert. Phys.*, **16**(1880), 303]重新发现时，才认识到它的重要性。这里给出的推导，基本出自 C. Hockin, *J. Roy. Micro. Soc.*(2)**4**(1884), 337。

③ J. F. W. Herschel, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **111**(1821), 226。

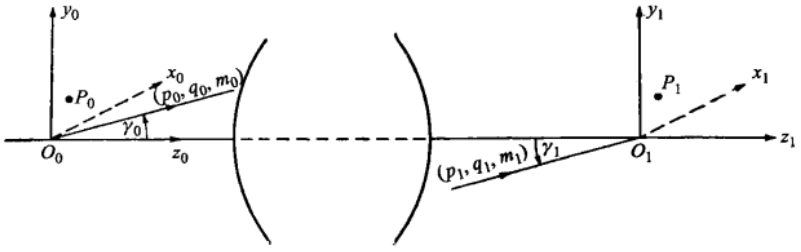


图 4.18 正弦条件和赫谢耳条件的图示

4.5.1 正弦条件

这里仍然可以只考虑子午面($x_0 = x_1 = 0$)上的那些点,这并不失其普遍性。如果 P_0 和 P_1 分别位于 $z_0 = 0$ 和 $z_1 = 0$ 平面上,则(2)式变为

$$q_1^{(0)} y_1 - q_0^{(0)} y_0 = F(0, y_0, 0; 0, y_1, 0) \tag{3}$$

这个关系式对每一对共轭光线都成立。因而,具体说来,它对于一对轴向光线 $p_0^{(0)} = q_0^{(0)} = 0$ 和 $p_1^{(0)} = q_1^{(0)} = 0$ 也必须成立。因此

$$F(0, y_0, 0; 0, y_1, 0) = 0 \tag{4}$$

(3)式变为

$$q_1^{(0)} y_1 = q_0^{(0)} y_0 \tag{5}$$

写成显式时,即

$$n_1 y_1 \sin\gamma_1 = n_0 y_0 \sin\gamma_0 \tag{6}$$

γ_0 和 γ_1 是通过 O_0 和 O_1 的对应光线与 z 轴的夹角,n_0 和 n_1 是物空间和像空间的折射率。(6)式称为**正弦条件**,它是物平面上轴点近邻的一个小区域通过任一角发散度的光锥锐成像所要求的条件。如果角发散度足够小,$\sin\gamma_0$ 和 $\sin\gamma_1$ 可分别用 γ_0 和 γ_1 来代替,正弦条件就化为史密斯-亥线霍兹公式 § 4.4(49)。

如果物位于无穷远,则正弦条件取不同的形式。先假定轴上一物点离第一个面很远。现在以第一焦点处的轴为参考系,设 Z_0 是这一物点的横坐标;又设这一点发出的一条光线与第一个面相交,其交点离轴的高度为 h_0;则 $\sin\gamma_0 \approx -h_0/Z_0$。更精确地说,当 $Z_0 \to -\infty$ 而 h 保持恒定时,$Z_0 \sin\gamma_0/h_0 \to -1$。因此,如果 Z_0 的绝对值足够大,则(6)式可写成

$$\frac{n_0}{n_1} h_0 = -\frac{y_1}{y_0} Z_0 \sin\gamma_1 \tag{7}$$

但由 § 4.3(10),$y_1 Z_0/y_0 = f_0$,此外由 § 4.4(53),$n_0/n_1 = -f_0/f_1$,因此在这种极限情况下,(6)式化为(见图 4.19):

$$\frac{h_0}{\sin\gamma_1} = f_1 \tag{8}$$

这意味着,每一条平行于轴方向的入射光线与其共轭光线相交于一个半径为 f_1 的球面上,其中心在焦点 F_1 处。

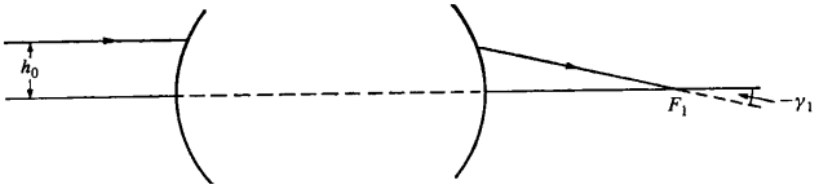


图 4.19　物在无穷远时的正弦条件

如果轴上有两个点，它们彼此互为消散像，而且通过它们的共轭光线满足正弦条件，则这两点称为一对**不晕点**。在讨论一个球面上的折射时，已经碰到过这样的点对了（见 4.2.3 节）。

在像差理论的术语中（见第 5 章），轴上无像散就意味着，在特征函数的展开式中所有与物离轴距离无关的项都不存在，即各级球面像差都不存在。如果此外还满足正弦条件，则在特征函数中所有与离轴距离一次方有关的项也必须为零，这些项所代表的像差称为**圆彗差**。

因为正弦条件用沿轴光锥的性质给出关于轴外像的质量情况，所以它对光学设计是很重要的。

4.5.2　赫谢耳条件

其次，考虑 P_0 和 P_1 位于系统轴上的情况（$x_0 = y_0 = 0, x_1 = y_1 = 0$）。这时，锐成像条件(2)式简化为

$$m_1^{(0)} z_1 - m_0^{(0)} z_0 = F(0, 0, z_0; 0, 0, z_1) \tag{9}$$

或用 γ_0 和 γ_1 来表示，

$$n_1 z_1 \cos\gamma_1 - n_0 z_0 \cos\gamma_0 = F(0, 0, z_0; 0, 0, z_1) \tag{10}$$

对于沿轴光线这一特殊情况，上式给出：

$$F(0, 0, z_0; 0, 0, z_1) = n_1 z_1 - n_0 z_0 \tag{11}$$

因此(10)式可以写成

$$n_1 z_1 \sin^2(\gamma_1/2) = n_0 z_0 \sin^2(\gamma_0/2) \tag{12}$$

这就是**赫谢耳条件**的一种形式。因为假定离开原点的距离是很小的，由 § 4.4(52)可得到

$$\frac{z_1}{z_0} = \frac{n_1}{n_0}\left(\frac{y_1}{y_0}\right)^2 \tag{13}$$

因此赫谢耳条件也可写成如下形式：

$$n_1 y_1 \sin(\gamma_1/2) = n_0 y_0 \sin(\gamma_0/2) \tag{14}$$

当满足赫谢耳条件时，一个紧挨着 O_0 的轴元将通过一光锥锐成像，而不管该光锥的角发散度如何。

必须注意，除非 $\gamma_1 = \gamma_0$，否则正弦条件和赫谢耳条件就不能同时成立。当 $\gamma_1 = \gamma_0$ 时，$y_1/y_0 = z_1/z_0 = n_0/n_1$，即这时轴向放大率和横向放大率均必定等于物空间和像空间的折射率之比。

4.6　像散光锥

有一公共点的直线光线所形成的光锥，称为**共心光锥**。相应的波阵面是以光线公共交点

为球心的球面。前面几节中所讨论的就是这种光锥。

一般地说,在折射或反射时,光锥的共心性遭到破坏。因此,研究更一般的直线光锥的特性是有用处的。

4.6.1 细光锥的焦点特性

设 S 代表一直线光锥的一个正交轨面(波阵面),P 是这个面上任一点(见图 4.20)。取一个包含 P 点光线的平面,这个平面与 S 相交的曲线记作 C。因为该锥光线都与 S 相垂直,所以 P 处的曲率圆心将位于通过 P 的那条光线上。

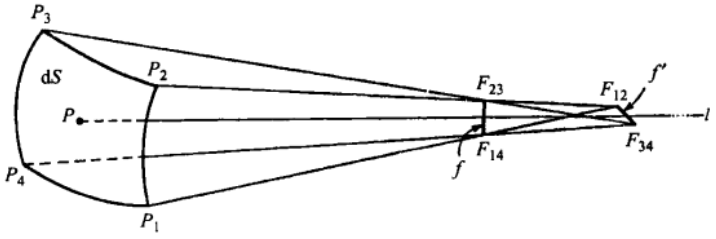


图 4.20 一个细光锥

如果让这个平面绕着这条光线逐渐转动,则曲线 C 及其曲率半径将连续改变。当这个平面转过 180°时,曲率半径必已先后通过其极大值和极小值。由基础几何学可以证明[①],包含最短或最长曲率半径的两个平面互相垂直。这两个平面称为 P 处的**主平面**[②],对应的半径称为**主曲率半径**。S 面上每点都与相应主平面相切的曲线,构成两个互相正交的曲线族,这些曲线称为**曲率线**。

一级近似时,一个面上相邻两点的法线一般不相交。但如果由一条曲率线上相邻各点引出法线,则在一级近似时,这些法线将相交,它们的交点就是由这些法线(光线)构成的线汇的一个焦点。因此,与 3.2.3 节中的一般性结论一致,每一条法线上有两个焦点,它们也就是两个主曲率中心。所以,直线光锥的焦散面一般有两个分支,并且,这个焦散面是波阵面的**渐屈面**(evolute);反过来说,波阵面则是焦散面的**渐展面**(involute)。如果波阵面是旋转面,则焦散面的一个分支退化为一段旋转轴;而另一分支为一旋转面,它的子午截线是波阵面子午截线的渐屈线。

考虑一个由与波阵面面元 dS 相交的所有光线组成的细光锥。为方便起见,取两对曲率线作为 dS 的边界,可假定这些曲率线为圆弧。其中两条(P_1P_2 和 P_4P_3)可取在垂直方向,另外两条(P_1P_4 和 P_2P_3)在水平方向(见图 4.20)。

在各微小量的一级近似下,通过弧 P_1P_2 的所有光线将相交于焦点 F_{12},而通过弧 P_3P_4 的所有光线将相交于 F_{34}。F_{12} 和 F_{34} 的连线 f' 称为光锥的**焦线**,它是水平的。与此类似,通过 P_1P_4 和 P_2P_3 的光线将产生垂直焦线 f。

如果在 dS 上任取一点 P',并过此点作 dS 的曲率线,则相应的两个焦点将位于上述二焦

① 例如,见 C. E. Weatherburn, *Differential Geometry of Three Dimensions* (Cambridge, Cambridge University Press, 1927), p. 185。

② 主平面和焦平面这两个名词现在的含义,与 4.3 节讨论射影变换时不同。

线上，且各居其一；反之依然成立。因此，**将两段相互正交（但不共面）线元的点全部一一配对连成直线，即构成一个近似的细光锥模型。**

通过中心点 P 的光线 l 称为光锥的**中央光线**（或**主光线**），两焦线沿这条光线的距离称为光锥的**像散焦差**（astigmatic focal distance）。由 f 和 l，和由 f' 和 l 所决定的两个平面称为光锥的**焦平面**，它们互相垂直。然而，焦线垂直于中央光线这种说法却不一定正确（文献中常常这样错误地断言）。例如，设想有一柱面对称波阵面族，以某一直线为旋转轴（见图 4.21）。设 $\mathrm{d}S$ 是其中一个波阵面的面元（假定它不含轴上的点），并设 $\mathrm{d}s$ 是 $\mathrm{d}S$ 与一个含轴平面的交线。显然，这时 $\mathrm{d}s$ 的曲率中心 K 处的焦线 f 垂直于这个平面。另一焦线 f' 则与 $\mathrm{d}s$ 两端法线所截出的一段轴重合。而这一焦线一般不垂直于 l。

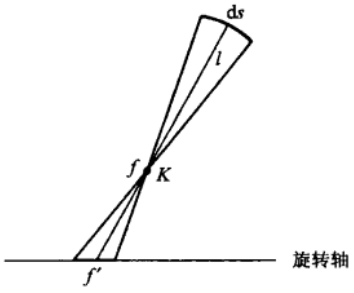


图 4.21　柱面对称波阵面的焦线

4.6.2　细光锥的折射

如上所见，一个细光锥是完全由它的中央光线和两条焦线来确定的。假定这样规定的一个光锥入射到一个折射面上，这时重要的是确定折射光锥的中央光线和两条焦线。我们将考虑在实际中特别重要的情况：即入射光锥的一个主平面，与折射面在 O 点（光锥中心光线与折射面的交点）的一个主曲率平面重合（见图 4.22）。

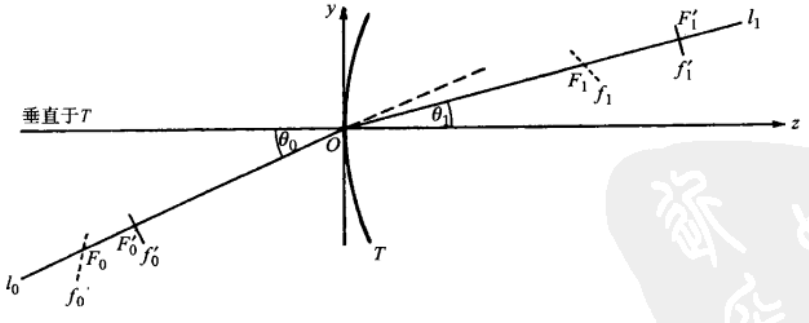


图 4.22　一个细像散光锥的折射

在 O 处取笛卡儿坐标轴，令 Oz 沿着 T 面的法线，Ox 和 Oy 分别在 T 的主曲率线方向上。

又设 θ_0 和 θ_1 是两个光锥的中央光线 l_0 和 l_1 与 Oz 的夹角。F_0 和 F_0' 是入射光锥的焦点，分别位于 $z=\zeta_0$ 和 $z=\zeta_0'$ 处。假定 F_0 处的焦线垂直于入射面，则 F_0 称为**第一焦点**，相应的焦线 f_0 称为**第一焦线**。焦点 F_0' 称为**第二焦点**，相应的焦线 f_0'（位于入射面上）称为**第二焦**

线。在共轴系统的情况下,中央光线位于子午面上的光锥的第一焦点和第二焦点,分别称为**切向焦点**和**弧矢焦点**。

为了找出折射光锥的焦线,必须先写出折射面的角特征函数表达式。如果折射面在主方向 Ox 和 Oy 上弧线的曲率半径分别为 r_x 和 r_y,则这个面的方程为

$$z=\frac{x^2}{2r_x}+\frac{y^2}{2r_y}+\cdots \tag{1}$$

根据 §4.1(34),以 O 处坐标轴为参考系的角特征函数为(取 $a_0=a_1=0$)

$$T=(p_0-p_1)x+(q_0-q_1)y+(m_0-m_1)z \tag{2}$$

用类似 4.1.4 节所描述的方法(它相当于 $r_x=r_y$ 的情况),借助折射定律,当只保留最低次项时,可得到

$$\left.\begin{aligned} x&=-r_x\frac{p_0-p_1}{m_0-m_1},\\ y&=-r_y\frac{q_0-q_1}{m_0-m_1}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

代入(1)式,得到

$$z=\frac{1}{2\mu^2}[r_x(p_0-p_1)^2+r_y(q_0-q_1)^2] \tag{4}$$

其中

$$\mu=m_1-m_0=n_1\cos\theta_1-n_0\cos\theta_0 \tag{5}$$

把(3)和(4)两式代入(2)式,则得到所要求的角特征函数表达式:

$$T(p_0,q_0;p_1,q_1)=\frac{1}{2\mu}[r_x(p_0-p_1)^2+r_y(q_0-q_1)^2]+\cdots \tag{6}$$

把此式用于 §4.1(29),就得到入射光线和折射光线的方程:

$$x_0-\frac{p_0}{m_0}z_0=\frac{1}{\mu}r_x(p_0-p_1) \tag{7}$$

$$x_1-\frac{p_1}{m_1}z_1=\frac{1}{\mu}r_x(p_0-p_1) \tag{8}$$

包含 y 坐标的相应方程完全类似。

现在考虑从中央光线过渡到一邻近光线时各个量的变化。由(7)和(8)两式得出

$$\delta x_0-\frac{p_0}{m_0}\delta z_0=z_0\delta\left(\frac{p_0}{m_0}\right)+r_x\left[\delta\left(\frac{p_0}{\mu}\right)-\delta\left(\frac{p_1}{\mu}\right)\right] \tag{9}$$

$$\delta x_1-\frac{p_1}{m_1}\delta z_1=z_1\delta\left(\frac{p_1}{m_1}\right)+r_x\left[\delta\left(\frac{p_0}{\mu}\right)-\delta\left(\frac{p_1}{\mu}\right)\right] \tag{10}$$

入射光锥中央光线的分量是

$$p_0=0,\qquad q_0=n_0\sin\theta_0,\qquad m_0=n_0\cos\theta_0 \tag{11}$$

因此

$$\delta\left(\frac{p_0}{m_0}\right)=\frac{1}{{m_0}^2}(m_0\delta p_0-p_0\delta m_0)=\frac{1}{n_0}\sec\theta_0\delta p_0 \tag{12}$$

$$\delta\left(\frac{q_0}{m_0}\right)=\frac{1}{{m_0}^2}(m_0\delta q_0-q_0\delta m_0)=\frac{1}{n_0}\sec^3\theta_0\delta q_0 \tag{13}$$

这里曾利用了恒等式 $m_0\delta m_0+p_0\delta p_0+q_0\delta q_0=0$。

(9)和(10)两式变为

$$\delta x_0=\frac{z_0}{n_0}\sec\theta_0\delta p_0-\frac{1}{\mu}r_x(\delta p_1-\delta p_0) \tag{14}$$

$$\delta x_1=\frac{z_1}{n_1}\sec\theta_1\delta p_1-\frac{1}{\mu}r_x(\delta p_1-\delta p_0) \tag{15}$$

推导(15)式时也曾利用了 $p_1=0$;这个结果得自折射定律和假设 $p_0=0$。用类似的方法可求得

$$\delta y_0-(\tan\theta_0)\delta z_0=\frac{z_0}{n_0}(\sec^3\theta_0)\delta q_0-r_y\left[\delta\left(\frac{q_1}{\mu}\right)-\delta\left(\frac{q_0}{\mu}\right)\right] \tag{16}$$

$$\delta y_1-(\tan\theta_1)\delta z_1=\frac{z_1}{n_1}(\sec^3\theta_1)\delta q_1-r_y\left[\delta\left(\frac{q_1}{\mu}\right)-\delta\left(\frac{q_0}{\mu}\right)\right] \tag{17}$$

现在考虑光锥中通过焦点 F_0 的那些光线。这时 $z_0=\zeta_0$，$\delta x_0=\delta y_0=\delta z_0=0$。因为所有这些光线也与焦线 f_0' 相交，$\delta p_0=0$。把上述各式代入(14)和(16)两式，得出

$$\delta p_1=0 \tag{14a}$$

$$\frac{\zeta_0}{n_0}\sec^3\theta_0\delta q_0-\frac{1}{\mu}r_y(\delta q_1-\delta q_0)=0 \tag{16a}$$

(14a)式表示相应的折射光线位于 yz 平面上。现在因为所有来自 F_0 的光线都通过焦点 $F_1(z_1=\zeta_1)$，这时，$z_1=\zeta_1$，$\delta x_1=\delta y_1=\delta z_1=0$，而且不管 δq_0 的值为多少，(17)式必须成立，所以

$$\frac{\zeta_1}{n_1}\sec^3\theta_1\delta q_1-\frac{1}{\mu}r_y(\delta q_1-\delta q_0)=0 \tag{17a}$$

只有

$$\frac{n_0\cos^3\theta_0}{\zeta_0}-\frac{n_1\cos^3\theta_1}{\zeta_1}=\frac{n_0\cos\theta_0-n_1\cos\theta_1}{r_y} \tag{18}$$

时，(16a)和(17a)两式才能对任一 δq_0 值同时成立。关系式(18)给出了折射光线焦点 F_1 的位置。从(14a)式可以看出，通过 F_1 的焦线垂直于 yz 平面，因此 F_1 是**第一焦点**。

为了找出另一个焦点的位置，考虑来自 F_0' 的光线。这时 $z_0=\zeta_0'$，$\delta x_0=\delta y_0=\delta z_0=0$。因为所有这些光线与焦线 f_0 相交，$\delta q_0=\delta m_0=0$。这时由(14)和(16)两式得出

$$\frac{\zeta_0'}{n_0}\sec\theta_0\delta p_0-\frac{1}{\mu}r_x(\delta p_1-\delta p_0)=0 \tag{14b}$$

$$\delta q_1=0 \tag{16b}$$

(16b)式表示折射光线现在位于 xz 平面上。所有这些光线将通过另一焦点 $F_1'(z_1=\zeta_1')$，

因此，$z_1 = \zeta_1'$，$\delta x_1 = \delta y_1 = \delta z_1 = 0$，不管 δp_0 的值为多少，(15)式必须成立。因此

$$\frac{\zeta_1'}{n_1}\sec\theta_1\delta p_1 - \frac{1}{\mu}r_x(\delta p_1 - \delta p_0) = 0 \tag{15b}$$

因为(15b)和(14b)两式对任一 δp_0 值同时成立，由此得出

$$\frac{n_0\cos\theta_0}{\zeta_0'} - \frac{n_1\cos\theta_1}{\zeta_1'} = \frac{n_0\cos\theta_0 - n_1\cos\theta_1}{r_x} \tag{19}$$

这个关系式给出了**第二焦点** F_1' 的位置。

通常用焦点离 O 点的距离来表示焦点的位置，这比用焦点的 z 坐标更为方便。设 $OF_0 = d_0^{(t)}$，$OF_0' = d_0^{(s)}$，$OF_1 = d_1^{(t)}$，$OF_1' = d_1^{(s)}$(图 4.22 中，$d_0^{(t)} < 0$，$d_0^{(s)} < 0$，$d_1^{(t)} > 0$，$d_1^{(s)} > 0$)，则

$$\left.\begin{aligned}\zeta_0 &= d_0^{(t)}\cos\theta_0, \quad \zeta_1 = d_1^{(t)}\cos\theta_1,\\ \zeta_0' &= d_0^{(s)}\cos\theta_0, \quad \zeta_1' = d_1^{(s)}\cos\theta_1,\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

而(18)和(19)两式变为

$$\frac{n_0\cos^2\theta_0}{d_0^{(t)}} - \frac{n_1\cos^2\theta_1}{d_1^{(t)}} = \frac{n_0\cos\theta_0 - n_1\cos\theta_1}{r_y} \tag{21}$$

和

$$\frac{n_0}{d_0^{(s)}} - \frac{n_1}{d_1^{(s)}} = \frac{n_0\cos\theta_0 - n_1\cos\theta_1}{r_x} \tag{22}$$

令 $n_1 = -n_0$，就可以得到反射的相应关系式。

4.7 色差和棱镜的色散

第 2 章中已经指出，折射率不是一个物质常数，而是随颜色，即随光的波长而变。现在讨论由此产生的关于透镜和棱镜性能的一些基本结果。

4.7.1 色差

设有一条多色光线入射到一个折射面上，它将分解为一组波长各不相同的光线。因此，这种光在通过一个光学系统时，在第一次折射后，不同的波长将沿着稍微不同的路径传播。结果，像就不是锐的了，这样的系统，谓之罹有**色差**。

我们仍然只注意紧挨着轴的那些点和光线，即假定每个波长的成像都遵守高斯光学的定律。这时的色差称为一级色差或初级色差。设 Q_α 和 Q_β 是同一点 P 由两种不同波长所成的像(见图 4.23)，$Q_\alpha Q_\beta$ 在平行和垂直于轴方向上的投影，分别称为**纵向**色差和**横向**色差。

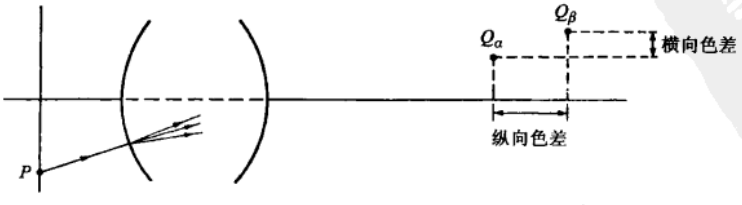


图 4.23 纵向色差和横向色差

考虑折射率改变 δn 所引起的薄透镜焦距改变量 δf。根据 § 4.4(36),对一个给定的透镜,量 $(n-1)f$ 将与波长无关。因此

$$\frac{\delta f}{f}+\frac{\delta n}{n-1}=0 \tag{1}$$

设 n_F, n_D 和 n_C 分别是对夫琅禾费 F, D 和 C 各谱线($\lambda=4861$ 埃,5893 埃,6593 埃)的折射率,则

$$\Delta=\frac{n_F-n_C}{n_D-1} \tag{2}$$

这个量是对玻璃色散特性的粗略度量,它称为**色散本领**。由(1)式可以看出,它近似地等于物在无穷远时红像和蓝像之间的距离与透镜焦距之比。光学系统中常用的各种玻璃的折射率随波长的变化,在图 4.24 中示出。相应的 Δ 值约在 1/60 和 1/30 之间。

要得到高质量的像,单色像差和色差都必须很小。因为一般不可能同时消去所有像差,通常不得不采取折中办法。往往只消去两个特定波长的色差就足够了。这些波长的选择当然要取决于设计此光学系统的目的;例如,因为普通的照相底板对于蓝区比人眼更灵敏,所以照相物镜通常要比目视仪器对更接近光谱蓝端的颜色"消色差"。对两个波长消色差,当然并不保证完全消除颜色误差。剩余的色差通常称为**次级光谱**。

现在来研究在什么条件下,两个薄透镜的组合对它们的焦距消色差。根据 § 4.4(39),两个薄透镜相距 l,其组合的焦距倒数为

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{l}{f_1 f_2} \tag{3}$$

可见,当

$$\frac{\delta f_1}{f_1^2}+\frac{\delta f_2}{f_2^2}-\frac{l}{f_1 f_2}\left(\frac{\delta f_1}{f_1}+\frac{\delta f_2}{f_2}\right)=0 \tag{4}$$

时,则 $\delta f=0$。如果对 C 和 F 谱线消色差,则由(1)和(2)两式,得出

$$l=\frac{\Delta_1 f_2+\Delta_2 f_1}{\Delta_1+\Delta_2} \tag{5}$$

式中的 Δ_1 和 Δ_2 是两个透镜的色散本领。

减小色差的一种方法是使用两个密合在一起的薄透镜(见图 4.25),一个材料用冕牌玻璃,另一个用火石玻璃。在这种情况下,因为 $l=0$,根据(5)式,则有

$$\frac{\Delta_1}{f_1}+\frac{\Delta_2}{f_2}=0 \tag{6}$$

由(6)和(3)两式(令 $l=0$)解 f_1 和 f_2,则有

$$\frac{1}{f_1}=\frac{1}{f}\frac{\Delta_2}{\Delta_2-\Delta_1},\qquad \frac{1}{f_2}=-\frac{1}{f}\frac{\Delta_1}{\Delta_2-\Delta_1} \tag{7}$$

对给定的玻璃,并且焦距 f 的值已经定好时,f_1 和 f_2 即由(7)式惟一确定。但是在透镜设计上,这时 f_1 和 f_2 还随三个曲率半径而定;因此有一个半径可任意选取。这个自由度有时用来使球面像差尽可能减小。

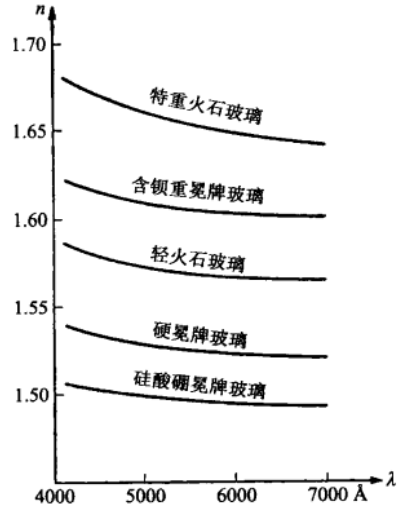


图 4.24 各种玻璃的典型色散曲线

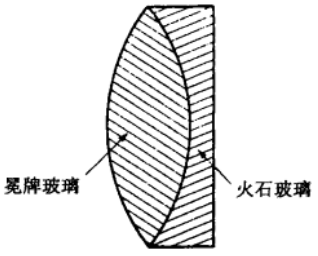


图 4.25 消色差双合透镜

获得消色差系统的另一种方法是使用玻璃相同的两个薄透镜($\Delta_1 = \Delta_2$),令其间距等于它们焦距之和的一半:

$$l = \tfrac{1}{2}(f_1 + f_2) \tag{8}$$

由(5)式可立即得知,这样的组合是消色差的。

由几个元件组成的仪器,一般不能对位置和放大率二者都消色差,除非每个元件本身做到对此二者都消色差。我们将对相距 l 的两个共轴薄透镜的情况证明这一点。根据 4.4.4 节,一个薄镜成像就是对透镜中心的中心投影,所以得出(见图 4.26)

$$\frac{Y_1'}{Y_1} = -\frac{\zeta_1'}{\zeta_1}, \qquad \frac{Y_2'}{Y_2} = -\frac{\zeta_2'}{\zeta_2} \tag{9}$$

因为 $Y_2 = Y_1'$,所以放大率为

$$\frac{Y_2'}{Y_1} = \frac{\zeta_1'}{\zeta_1}\frac{\zeta_2'}{\zeta_2} \tag{10}$$

当波长改变时,ζ_1 将保持不变;假定像的位置是消色差的,ζ_2' 也将保持不变。因此,放大率消色差的条件可用下式表示:

$$\delta\left(\frac{\zeta_1'}{\zeta_2}\right) = \frac{1}{\zeta_2^2}(\zeta_2\delta\zeta_1' - \zeta_1'\delta\zeta_2) = 0 \tag{11}$$

因为 $\zeta_1' + \zeta_2 = l$,$\delta\zeta_1' = -\delta\zeta_2$,可见只有在 $\delta\zeta_1' = \delta\zeta_2 = 0$ 即每个透镜都消色差时,(11)式才能满足。

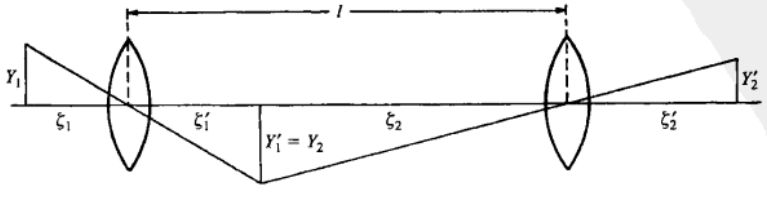


图 4.26 两个薄透镜消色差

以上只考虑了一个薄透镜以及两个薄透镜组合的初级色差。一般共轴系统的初级色差表达式将在第 5 章中导出。

4.7.2　棱镜的色散

现在简单讨论一下光通过棱镜的情况。

设 α 是棱镜两个面的夹角。假定这两个面相交的棱边 A 垂直于包含入射、透射和出射光线的平面(见图 4.27)。首先,假定光是严格单色的。

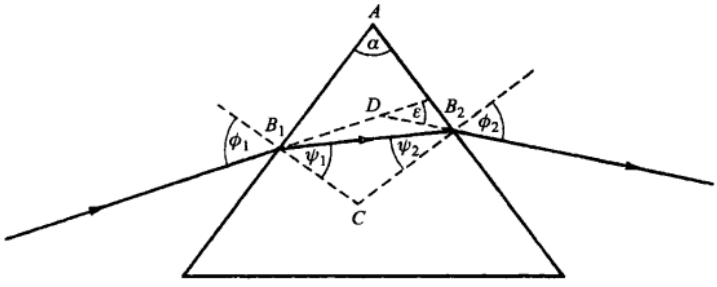


图 4.27　光线通过棱镜的情况

设 B_1 和 B_2 分别为入射光线和出射光线与这两个面的交点,ϕ_1 和 ψ_1 是 B_1 处的入射角和折射角,ψ_2 和 ϕ_2 是 B_2 处的面内角和面外角(即光线 B_1B_2 和出射光线分别与 B_2 处法线的夹角)。又设 C 是棱镜在 B_1 和 B_2 处法线的交点,D 是入射光线和出射光线二者延长线的交点。

设 ε 是**偏向角**,即出射光线与入射光线的夹角,则有

$$\phi_1 + \phi_2 = \varepsilon + \alpha \tag{12}$$

$$\psi_1 + \psi_2 = \alpha \tag{13}$$

此外,由折射定律,

$$\left.\begin{aligned} \sin\phi_1 &= n\sin\psi_1, \\ \sin\phi_2 &= n\sin\psi_2, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

式中 n 是玻璃对周围空气的折射率。当

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\phi_1} = 0 \tag{15}$$

时,偏向角 ε 将有一极值。利用(12)式,(15)式就意味着

$$\left(\frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}\phi_1}\right)_{\text{极值}} = -1 \tag{16}$$

由(13)和(14)两式得出

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}\phi_1} &= -\frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}\phi_1}, \\ \cos\phi_1 &= n\cos\psi_1\frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}\phi_1}, \\ \cos\phi_2\frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}\phi_1} &= n\cos\psi_2\frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}\phi_1}, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

经消元得到

$$\frac{d\phi_2}{d\phi_1}=-\frac{\cos\phi_1\cos\psi_2}{\cos\psi_1\cos\phi_2} \tag{18}$$

由(16)和(18)两式得到极值条件为

$$\frac{\cos\phi_1\cos\psi_2}{\cos\psi_1\cos\phi_2}=1 \tag{19}$$

将上式取平方,并利用(14)式,即有

$$\frac{1-\sin^2\phi_1}{n^2-\sin^2\phi_1}=\frac{1-\sin^2\phi_2}{n^2-\sin^2\phi_2} \tag{20}$$

这个方程的解是

这时

$$\left.\begin{aligned}\phi_1&=\phi_2;\\ \psi_1&=\psi_2.\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

要确定这个极值的性质,还必须计算 $d^2\varepsilon/d\phi_1^2$。由(12)和(18)两式

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varepsilon}{d\phi_1^2}&=\frac{d^2\phi_2}{d\phi_1^2}=\frac{d\phi_2}{d\phi_1}\frac{d}{d\phi_1}\left[\ln\left(-\frac{d\phi_2}{d\phi_1}\right)\right]\\&=\frac{d\phi_2}{d\phi_1}\left[-\tan\phi_1-\tan\psi_2\frac{d\psi_2}{d\phi_1}+\tan\psi_1\frac{d\psi_1}{d\phi_1}+\tan\phi_2\frac{d\phi_2}{d\phi_1}\right]\end{aligned} \tag{22}$$

当$\phi_1=\phi_2$,$\psi_1=\psi_2$时,利用(16)、(17)和(14)三式,上式变为

$$\left(\frac{d^2\varepsilon}{d\phi_1^2}\right)_{极值}=2\tan\phi_1-2\tan\psi_1\frac{\cos\phi_1}{n\cos\psi_1}=2\tan\phi_1\left(1-\frac{\tan^2\psi_1}{\tan^2\phi_1}\right) \tag{23}$$

因为 $n>1$,所以$\phi_1>\psi_1$;又因 $0<\phi_1<\pi/2$,所以 $\tan\phi_1>0$。由此得出$(d^2\varepsilon/d\phi_1^2)>0$,因此该**偏向角为一极小**。根据(21)式,这时光线穿过棱镜的通道是**对称的**。所以最小偏向角是

$$\varepsilon_{极小}=2\phi_1-\alpha \tag{24}$$

这时棱镜第一个面上的入射角和折射角,用 $\varepsilon_{极小}$ 和 α 表示时为

$$\phi_1=\tfrac{1}{2}(\varepsilon_{极小}+\alpha),\qquad \psi_1=\tfrac{1}{2}\alpha \tag{25}$$

因此

$$n=\frac{\sin\phi_1}{\sin\psi_1}=\frac{\sin[\frac{1}{2}(\varepsilon_{极小}+\alpha)]}{\sin(\frac{1}{2}\alpha)} \tag{26}$$

这个公式常被用来测定玻璃的折射率。利用分光计测出 $\varepsilon_{极小}$ 和 α,即可由(26)式算出 n。

现在来考虑一束平行光线(而不是一条光线)通过棱镜的情况(为获得平行光,可将一点光源 P 置于透镜 L_1 的焦点上)(见图 4.28),并且仍然假定光是单色的。设 B_1' 和 B_2' 分别是从 B_1 和 B_2 到通过棱边 A 的光线的垂足。这时 B_1B_1' 和 B_2B_2' 是两个波阵面与入射面(图平面)的交线。这两条线的夹角等于偏向角 ε。令

$$B_1B_1'=l_1,\qquad B_2B_2'=l_2',\qquad B_1B_2=t \tag{27}$$

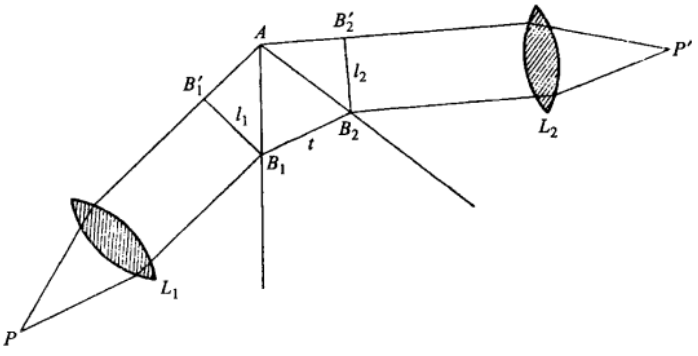


图 4.28　棱镜的色散

现在考虑多色的而不是单色的平行光束。如果透镜 L_1 已校正色差，则 B_1B_1' 仍在入射光束的波阵面上。而在另一侧，线 B_2B_2' 不再只有一条，它将随波长 λ 而异。因为棱镜折射率是波长的函数：

$$n = n(\lambda) \tag{28}$$

因此偏向角 ε 也随波长 λ 而异：

$$\varepsilon = \varepsilon(\lambda) \tag{29}$$

入射角 ϕ_1 恒定时形成的量

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} \tag{30}$$

常称为**棱镜的角色散**。在(30)式中，右边第一个因子完全取决于几何安排，而第二个因子则表征棱镜玻璃材料的色散本领。因为 ϕ_1 = 常数，由(12)和(13)两式可得出

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}n} = \frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}n}, \qquad \frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}n} = -\frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}n} \tag{31}$$

另由(14)式

$$\begin{aligned} \sin\psi_1 + n\cos\psi_1\frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}n} &= 0, \\ \cos\phi_2\frac{\mathrm{d}\phi_2}{\mathrm{d}n} &= \sin\psi_2 + n\cos\psi_2\frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}n} \end{aligned} \tag{32}$$

经消元得出

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}n} = \frac{\sin(\psi_1+\psi_2)}{\cos\phi_2\cos\psi_1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\phi_2\cos\psi_1} \tag{33}$$

利用正弦定理，由三角形 AB_1B_2 有

$$AB_2 = \frac{\cos\psi_1}{\sin\alpha}t \tag{34}$$

而由三角形 AB_2B_2' 有

$$AB_2 = l_2\sec\phi_2 \tag{35}$$

利用(34)和(35)两式,由(30)和(33)两式得出

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{t}{l_2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} \tag{36}$$

在最小偏向角位置,根据对称性,有 $l_1=l_2$。而且如果透镜足够大,使光束完全充满棱镜,则 t 将等于棱镜底边长度 b。这时,**角色散** $\delta\varepsilon$,即波长从 λ 变到 $\lambda+\delta\lambda$ 时出射波阵面转过的角度,可由(36)式得之如下:

$$\delta\varepsilon=\frac{b}{l_1}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\delta\lambda \tag{37}$$

4.8 辐射度量学和孔径

光学中关于光的测量这一分支,称为**辐射度量学**。严格地说,辐射度量学不属于几何光学,但由于在许多实际应用中,用光场的几何近似图像研究辐射度量学已经足够,因此在本章中简短地介绍一下辐射度量学,看来是恰当的。所以我们将继续采用几何模型,根据这个模型,光被看作是沿着几何光线流动的光能量流,并遵守几何学上的能量守恒定律,即在单位时间内,通过一个光线管中任一截面的能量是恒定的[见 § 3.1(31)]。

4.8.1 辐射度量学的基本概念[①]

在辐射度量学中,基本上考虑的是从面 S 的一部分射出的光能量。这个面可能是虚构的,也可能就是光源的真实辐射面,或固体的一个受照面。如果固体是不透明的,则考虑的是反射光;如果固体是透明或半透明的(这时有一部分的光被吸收或散射),通常测量的是透射光。

设 $P(\xi,\eta)$ 是 S 面上的一个代表点,以面上任一组方便的曲线为参考坐标。现在在 P 点取一面元 δS,并围绕极角 (α,β) 方向取一元立体角 $\delta\Omega$,另外设 (α,β) 方向与 δS 法线的夹角为 θ(见图 4.29),则在单位时间内由面元 δS 发射到 $\delta\Omega$ 内的能量(时间平均)值 δF,有时可表成如下形式:

$$\delta F=B\cos\theta\delta S\delta\Omega \tag{1}$$

它是 § 3.1(54)的推广[②]。式中 B 是一个因子,一般与 (ξ,η) 和 (α,β) 有关,即

$$B=B(\xi,\eta;\alpha,\beta) \tag{2}$$

(1)式中引入因子 $\cos\theta$,因为物理上有意义的量乃是 δS 在垂直于 (α,β) 方向的平面上的投影,而非 δS 本身。B 叫做 (ξ,η) 点处、(α,β) 方向上的**亮度**(brightness),有时也称为**辐射亮度**

---

① 只讨论辐射度量学的基本概念。进一步的知识和测光所用仪器的描述,可参看例如 J. W. T. Walsh, *Photometry* (London, Constable, 2nd edition, 1953)或 W. E Forsythe(ed.), *Measurement of Radiant Energy* (New York and London, McGraw-Hill, 1937),或 R. W. Boyd, *Radiometry and the Detection of Optical Radiation* (New York, J. Wiley and Sons, 1983)。

② 在 3.1 节中,从 § 3.1(51)过渡到 § 3.1(54)时已经提到,能流 δF 的表达式在普遍情况下并不成立,即使场的波长非常之短。关于这一点以及关于给辐射度量学奠定严密基础的诸多困难,可见 Wolf 的讨论[E. Wolf, *J. Opt. Soc. Amer.* **68**(1978),6]。A. T. Friberg (ed.)主编的论文选集 *Selected Papers on Coherence and Radiometry* (Bellingham, WA, SPIE Optical Engineering Press, 1993),收录有多篇有关辐射度量学基本问题的论文。L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge, Cambridge University Press, 1995)一书 Sec. 5.7 讨论了辐射度量学在有所限制情况下的基础理论。

(radiance)或**比强度**(specific intensity)。必须把亮度同亮度的视觉感觉区别开,二者一般是不同的,因为眼睛对各种颜色的灵敏度[①] 并不一样。这一点后面还要详细讨论。

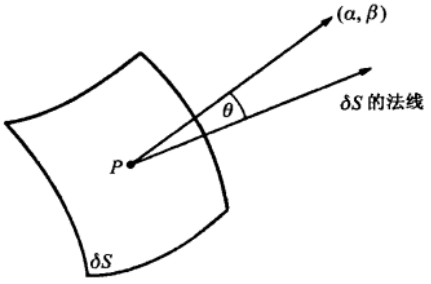


图 4.29　从一个面元传递能量

通常用两种不同的方式把 δF 分解为两个量的乘积,以表示它对 $\delta\Omega$ 和 δS 的显式关系:

$$\delta F = \delta I \delta\Omega = \delta E \delta S \tag{3}$$

比较(1)和(3)两式,得出

$$\delta I = \frac{\delta F}{\delta\Omega} = B\cos\theta\delta S \tag{4}$$

$$\delta E = \frac{\delta F}{\delta S} = B\cos\theta\delta\Omega \tag{5}$$

对一个面区取的积分

$$I(\alpha, \beta) = \int B\cos\theta \,\mathrm{d}S \tag{6}$$

称为(α, β)**方向的辐射强度**[②] (radiant intensity),而对一立体角取的积分

$$E(\xi, \eta) = \int B\cos\theta \,\mathrm{d}\Omega \tag{7}$$

称为(ξ, η)**点的辐射度量学照度**(radiometric illumination)。

B 随方向的变化取决于这个面的性质,特别是取决于它是粗糙的还是光滑的,它是自发光的还是透射或反射别的光。常常允许假定,在很好的近似下,B 与方向无关。这时辐射称为**各向同性的**。如果辐射是各向同性的,并且辐射面是平面,则(6)式简化为

$$I(\alpha, \beta) = I_0\cos\theta \tag{8}$$

式中

$$I_0 = \int B \,\mathrm{d}S$$

这时,在任何方向上的辐射强度随该方向与面法线间夹角的余弦而变化。(8)式通常称为**朗伯(余弦)定律**。当满足(8)式时,如果是发射面,则称为**漫发射**;如果是反射面,则称为**漫反射**。

---

① 当要强调其特定量之值系得自其目视效应,而非依据其真实物理效应时,常在该量名称前加上"光度学"(photometric)一词。

② 在第 1 章中,光强度曾定义为每秒通过垂直于光流方向单位面积的能量时间平均值。切不可把它与(6)式定义的辐射强度混淆。遗憾的是,用了同一个词来表示两个不同的量。除了本节以外,我们总是把"强度"理解为第 1 章中引进的量。如果 P 处的面元 δS 与坡印廷矢量正交,则第 1 章所定义的强度等于这里 P 处的照度 δE。

对 F,B,I 和 E 各量的测量,涉及到测定时间间隔、面积、方向、立体角和能量。其平均值通常很小,因此必须用灵敏的仪器,这些仪器基本上分为两类。第一类,对吸收媒质中所释放的热有反应(例如辐射热计和温差电偶等),主要用于研究热辐射(红外);第二类,根据(表面)光电效应,即光入射到金属表面上引起的金属电子发射现象[对单色光,发射的电子数(即产生的电流)与入射光的能量成正比]。这类仪器用途很多,例如用作照相术中的曝光计。

然而在实用辐射度量学中用的是间接测量方法。人们规定并制作一标准光源,它的光度学数据用绝对能量单位来表示。然后相对于这个光源进行比较测量,并常利用眼睛作为示零器,即作为等亮度指示器。这种比较是依据一个简单的定律,这一定律适用于很小的光源 Q 产生的照度[①],内容如下:

设 δS 是 P 处的面元,$QP=r$。又设 θ 是 QP 与 δS 的法线夹角(见图 4.30),则光源在单位时间内射过 δS 的能量是 $I\delta\Omega$,其中 I 是光源沿 QP 方向的辐射强度,$\delta\Omega$ 是 δS 对 Q 所张的立体角。由基础几何学,

$$\cos\theta\delta S = r^2\delta\Omega \tag{9}$$

由此,利用(3)式即可得出

$$E = \frac{I\cos\theta}{r^2} \tag{10}$$

(10)式就是实用辐射度量学的基本方程。它表达了所谓**照度余弦定律**(E 与 $\cos\theta$ 成正比),以及**平方反比定律**(E 与 r^2 成反比),用它再加上简单的几何学就能够比较光源的强度。如果面元 δS 被强度分别为 I_1 和 I_2 的两个点光源 Q_1 和 Q_2 照明,并且 δS 和光源的连线分别与 δS 的法线成 θ_1 和 θ_2 角(见图 4.31),则当照度相等时,得出

$$I_1 : I_2 = \frac{r_1^2}{\cos\theta_1} : \frac{r_2^2}{\cos\theta_2}. \tag{11}$$

利用(11)式,就可以通过与标准光源进行比较来测定所给定光源的强度了。

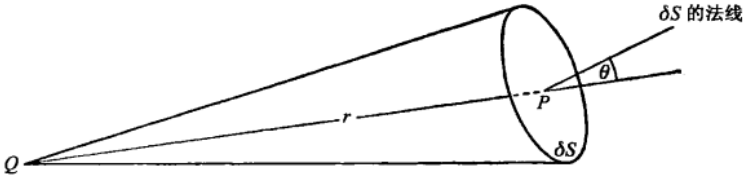


图 4.30 点光源产生的照度

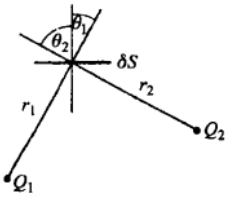


图 4.31 两个点光源强度的比较

① 一个点光源的辐射强度 I,可借助极限概念中经常采用的一种方法来定义。让我们假设面 S 的面积减小趋向零,而同时 B 增加趋向无穷大,使积分(6)保持有限值。则 I 就是 α 和 β 以及点光源位置的函数。
计算辐射度量学照度时,当光源的线度小于它与受照面距离的 1/20 左右,通常即可忽略这个光源的有限大小。

两个光源产生的照度是否相等，可以用物理方法或直接用眼睛来探测。当两个光源所发的光是单色的并且频率相等时，用眼睛来比较较为容易；但通常需要比较光谱成分不同的光源，而眼睛并不是对所有波长的光都一样灵敏，所以这种简单方法就不再适用了。这时必须改用一组滤光片，每一片只允许光谱中某一给定波长附近很窄范围的光透过；因此，测定不同颜色的照度相等与否，就变成测定相对的能量值，同时计及眼睛的**相对视见度曲线**。后者系以波长 λ 为横坐标，以产生相同亮度感觉的光通量倒数 K_λ 为纵坐标，并取极大值相对为 1 绘制而成。此曲线同照度强弱有某种程度的关系。对于强光，它在 550 纳米附近有一极大值（见图 4.32 和表 4.2）。当照度减弱时，曲线形状不变，但极大值移向光谱的蓝端，对于很弱的光，极大值约在 507 纳米处。这个现象称为**珀金杰**(Purkinje)**效应**。

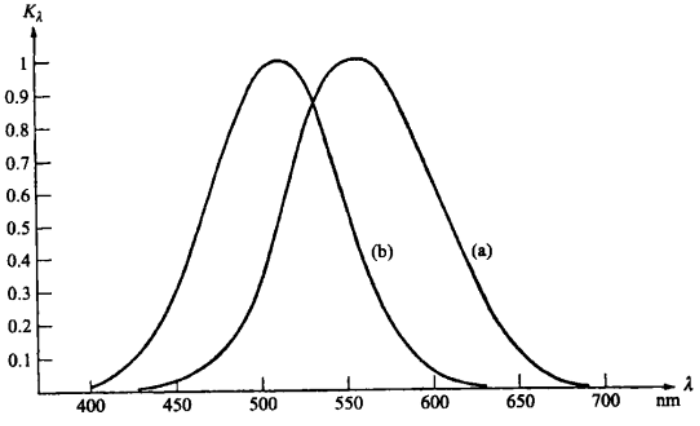


图 4.32　平均人眼的相对视见度曲线 K_λ：(a)强光；(b)很弱的光

表 4.2　平均人眼的相对视见度因子 K_λ(强光)

λ(nm)	K_λ	λ(nm)	K_λ
400	0.0004	600	0.631
410	0.0012	610	0.503
420	0.0040	620	0.381
430	0.0116	630	0.265
440	0.023	640	0.175
450	0.038	650	0.107
460	0.060	660	0.061
470	0.091	670	0.032
480	0.139	680	0.017
490	0.208	690	0.0082
500	0.323	700	0.0041
510	0.503	710	0.0021
520	0.710	720	0.001 05
530	0.862	730	0.000 52
540	0.954	740	0.000 25
550	0.995	750	0.000 12
560	0.995	760	0.000 06
570	0.952		
580	0.870		
590	0.757		

如果能通量的计算是根据它所产生的视觉,而不是根据它的真实物理量值,就要引入**光能**(luminous energy)F':

$$F' = \frac{\int K_\lambda F_\lambda \, d\lambda}{\int K_\lambda \, d\lambda} \tag{12}$$

$F_\lambda d\lambda$ 是在$(\lambda, \lambda + d\lambda)$范围内的能量值,$K_\lambda$ 是相对视见度,积分包括整个光谱范围。同(12)式 F 和 F'的关系式一样,B,I 和 E 也有这种对应量 B',I'和 E',通常分别称之为**亮度**(luminance)、**发光强度**(luminous intensity)[或烛光(candle power)]和**照度**(illumination)。这些概念在光度学中用得很广。

F',B',I'和E'四个量各有实用单位。因为发光强度的标准比光通量的标准较容易保存,所以通常把发光强度的单位作为基本光度学单位,而 F',B'和E'的单位用它来表示。过去有一时期曾经采用**国际烛光**作为发光强度的标准,它是利用存放在不同国家实验室中的一些碳灯来保存的一种标准。近来它已被一种称为**坎德拉**(candela,cd)的新标准所代替;一坎(cd)定义为,在铂凝固温度(约 2042 K)时黑体辐射器一平方厘米的发光强度的 1/60。对不同光谱成分的光,其发光强度值必须考虑到相对视见度曲线,用前面已说过的方法来计算。

光通量的单位称为**流明**(lumen),它等于发光强度为一坎(cd)的均匀点光源射在单位立体角中的光能量。

照度的单位随使用的长度单位而定。照度的米制单位是**勒克斯**(lux,lx),有时也称为**米烛光**;它等于一平方米面积接收到一流明光通量时的照度。旧英制单位是流明/英尺^2,以前称为**英尺烛光**(f.c.)。

亮度的单位是坎(cd)/厘米^2,称为**熙提**(stilb,sb),而坎(cd)/米^2 称为**尼特**(nit)。旧英制单位用的是坎(cd)/英寸^2,或坎(cd)/英尺^2。

也有使用其他单位的,它们的定义及其与上述单位的关系可参看辐射度量学和光度学的书籍。

4.8.2 光阑和光瞳[①]

到达光学系统像空间的光量,不仅取决于物的亮度,而且也取决于光学元件(透镜、反射镜)的大小和光阑的大小。光阑就是在不透明屏上开的一个孔,通常是圆的。屏的不透明部分挡住某些引起严重像差的光线,使之不能到达像上。为便于目前的讨论,我们将把透镜和反射镜的边缘以及上述的光阑统称为"光阑"。

考虑从轴上物点 P_0 发出的所有光线。决定成像光锥截面的光阑称为**孔径光阑**。要确定它的位置,就必须找出每个光阑在它前面那部分光学系统中所成的高斯像;对 P_0 张角最小的像称为**入射光瞳**。产生入射光瞳的实物光阑就是孔径光阑(如果孔径光阑位于第一个面的前方,则它与入射光瞳合一)。入射光瞳直径对 P_0 的张角 $2\theta_0$ 称为**物方的角孔径**,或简称为**角孔径**(见图 4.33)。

---

① 光阑理论已由阿贝(E. Abbe)加以公式化,*Jena Z. Naturwiss.*,**6**(1871),263,并由 M. von Rohr 加以推广,*Zentr. Ztg. Opt. Mech.*,**41**(1920),145,159,171。

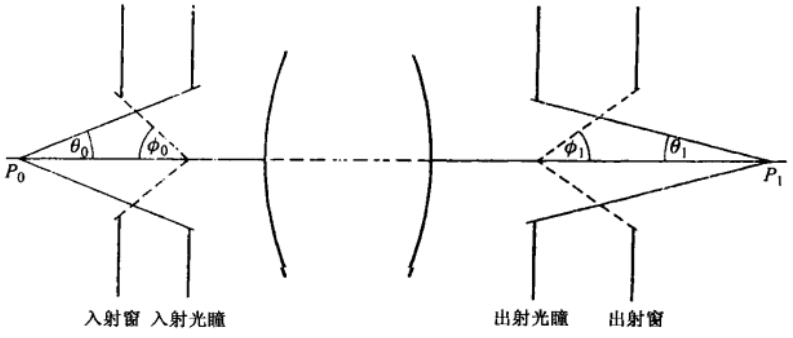


图 4.33　光阑和光瞳

孔径光阑由它后面那部分光学系统所成的像(亦即入射光瞳由整个光学系统所成的像),通常称为**出射光瞳**;它的直径对像 P_1 的张角 $2\theta_1$ 可称为**像方的角孔径**(有时也称为**投射角**)。

在每一物点发出的一锥光线中,应有一条光线通过入射光瞳的中心。这条特殊的光线通常称为光锥的**主光线**(或**参考光线**),它在像差理论中特别重要。没有像差时,主光线也将通过孔径光阑的中心和出射光瞳的中心。

如果孔径光阑位于它前面那部分光学系统的后焦平面上,则入射光瞳将在无穷远处,并且物空间中所有的主光线将平行于轴。这样一个系统称为**物方的焦阑系统**。如果孔径光阑位于它后面那部分光学系统的前焦平面上,则出射光瞳将在无穷远处,并且像空间中的主光线将平行于轴;这样一个系统称为**像方的焦阑系统**。焦阑装置在测量物的大小时是有用的。

如果别的参数保持固定,则角孔径就是通过系统的光量的一种量度。其他一些量也常用来确定光学系统的"集光本领",例如,显微镜物镜的**数值孔径**(NA),它定义为物空间中半个角孔径的正弦与物空间折射率的乘积:

$$\mathrm{NA} = n\sin\theta_0 \tag{13}$$

当所设计的系统适用于物在远距离处时,如望远镜或某些照相镜头,这时用所谓"F 数"或"**标称焦比**"来量度其集光本领是方便的。它等于系统焦距 f 与入射光瞳直径 d 之比:

$$F = f/d \tag{14}$$

因此,焦距为 10 厘米的透镜用 2 厘米孔径工作时,$F = 5$。它叫做 $f/5$ 透镜,也称做以 $f/5$ 的"速率"工作。

角孔径、数值孔径和 F 数这些量,可用来量度仪器的集光本领,它们常称为**相对孔径**。

光学系统除了有孔径光阑以外,还有**视场光阑**;它们决定广延物表面哪一部分被仪器成像。图 4.34 示出这两类光阑的区别。

要确定视场光阑,再次先找出每一个光阑在它前面那一部分光学系统中所成的像。对入射光瞳中心张角最小(图 4.33 中的 $2\phi_0$)的像,称为**入射窗**,角 $2\phi_0$ 称为**视场角**或**角视场**。入射窗对应的实物光阑就是所要求的视场光阑。

入射窗由仪器所成的像(亦即视场光阑由它后面那一部分光学系统所成的像),称为**出射窗**。出射窗直径对出射光瞳中心的张角(图 4.33 中的 $2\phi_1$)有时称为**像场角**。

可能出现这样的情况,虽然孔径光阑比透镜小,但有些光线完全落到透镜之外,而透镜的某些部分却完全没有接收到来自物的某些区域的光。这种效应称为**渐晕**,如图 4.35 所示。视场比较小的光学系统(如望远镜)中很少出现这种效应,但在别的仪器(如照相物镜)中却是重要的。设计者有时利用渐晕来消除不希望有的轴外像差。

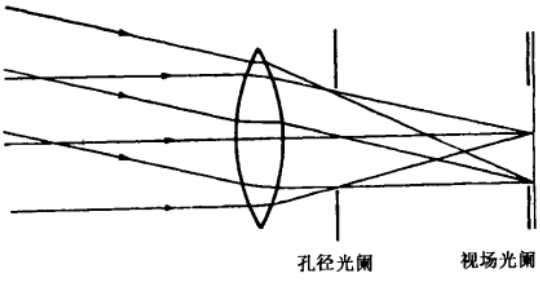


图 4.34 孔径光阑和视场光阑二者区别的图示

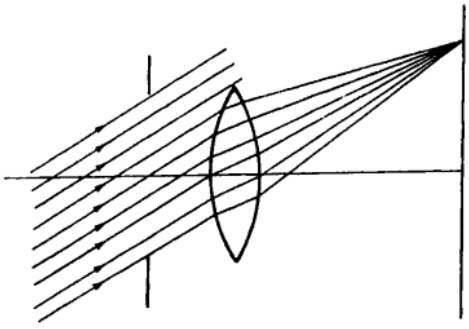


图 4.35 渐晕

4.8.3 像的亮度和照度

现在简单看看像空间和物空间中辐射基本度量方面有关各量的关系。

假定物是面积为 δS_0 的小平面元,垂直于轴,其辐射遵守朗伯定律。这时亮度 B_0 与方向无关。单位时间内射到入射光瞳中以轴为中心的一个环元上的能量 δF_0 为

$$\delta F_0 = B_0 \cos\gamma_0 \delta S_0 \delta\Omega_0 \tag{15}$$

式中

$$\delta\Omega_0 = 2\pi \sin\gamma_0 \delta\gamma_0 \tag{16}$$

γ_0 是通过此环元的一条代表光线与轴的夹角。如果仍用 θ_0 表示物方的半角孔径,则单位时间内射到入射光瞳上的总能通量为

$$F_0 = 2\pi B_0 \delta S_0 \int_0^{\theta_0} \sin\gamma_0 \cos\gamma_0 \, \mathrm{d}\gamma_0 = \pi B_0 \delta S_0 \sin^2\theta_0 \tag{17}$$

从出射光瞳射出的能通量 F_1 可表成类似的形式:

$$F_1 = \pi B_1 \delta S_1 \sin^2\theta_1 \tag{18}$$

F_1 不能超过 F_0,并且只有在光学系统内部没有反射、吸收或散射所引起的损失时,F_1 才能等于 F_0;因此

$$B_1 \sin^2\theta_1 \delta S_1 \leqslant B_0 \sin^2\theta_0 \delta S_0 \tag{19}$$

这里比值 $\delta S_1/\delta S_0$ 等于横向放大率 M 的平方:

$$\frac{\delta S_1}{\delta S_0} = M^2 \tag{20}$$

此外如果假定系统遵守正弦条件[§4.5(6)],

$$\frac{n_0 \sin\theta_0}{n_1 \sin\theta_1} = M \tag{21}$$

把(20)和(21)两式代入(19)式,由此得出

$$B_1 \leqslant \left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 B_0 \tag{22}$$

特别是,**如果物空间和像空间的折射率相等**,则根据(22)式,**像的亮度不能超过物的亮度,只有当光在系统内部的损失可以忽略时,二者才能相等。**

假定损失可以忽略,由(18)和(22)两式得到

$$F_1 = \pi\left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 B_0 \delta S_1 \sin^2\theta_1 \tag{23}$$

因此,轴上像点 P_1 的辐射度量学照度 $E_1 = F_1/\delta S_1$ 是

$$E_1 = \pi\left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 B_0 \sin^2\theta_1 \tag{24}$$

如果 θ_1 很小,则出射光瞳对 P_1 所张的立体角 Ω_1 近似等于 $\pi \sin^2\theta_1$,因此(24)式可写成

$$E_1 = \left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 B_0 \Omega_1 \tag{25}$$

这个关系式适用于轴上的像,但轴外的像也可用类似方法处理。设ϕ_1 是主光线 CQ_1 与轴的夹角(见图 4.36),则得出下式以代替(25)式,

$$E_1 = \left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 B_0 \Omega_1' \cos\phi_1 \tag{26}$$

Ω_1'是出射光瞳对 Q_1 所张的立体角。利用(9)式,得出

$$\frac{\Omega_1'}{\Omega_1} = \cos\phi_1 \left(\frac{CP_1}{CQ_1}\right)^2 = \cos^3\phi_1 \tag{27}$$

因此

$$E_1 = \left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 B_0 \Omega_1 \cos^4\phi_1 \tag{28}$$

这个公式表示,假定物的辐射遵照朗伯定律,光在系统内部没有损失,并且半角孔径 θ_1 很小,则**像的照度随** $\cos^4\phi_1$ **而减小,**ϕ_1**是通过像点的主光线与轴的夹角。**

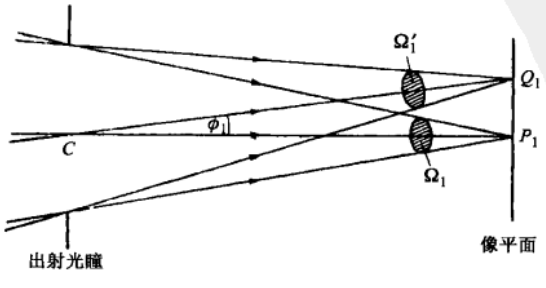


图 4.36　轴外像点上的照度

在应用上列公式时,必须记住它们是利用几何光学定律导出的。对于一个很小的光源,或者一个不是高度不相干的光源,这些公式就不再能给出良好的近似了。例如,一个点光源的像并不是一个点,而是由一些圆环围绕着的一个亮圆斑(爱里图样,见 8.5.2 节);这时,光分布在整个衍射图样上,结果几何焦点上的照度小于(24)式给出的数值。

4.9 光线追迹[①]

设计光学仪器时,必须比高斯光学结果更准确地定出光的路径。要做到这一点,可以通过代数分析,并把特征函数展开式中的更高次项考虑进来,这种方法将在下一章中讨论。也可以逐次应用折射(或反射)定律,借助于基础几何学来准确地定出光线的路径;现在简单叙述这种方法,它通常称为**光线追迹**,在实践中被广泛使用。

4.9.1 斜子午光线[②]

首先考虑一条斜子午光线,即一条来自轴外物点的子午光线的追迹。设 A 是系统第一个面的极点。又设此面是以 C 点为球心而半径为 r 的球形折射面,其两边媒质的折射率分别为 n 和 n'。子午面上的入射光线 OP(见图 4.37),由 OP 与轴夹角 U 以及极点 A 到 OP 与轴交点 B 的距离 $L = AB$ 来确定。设 I 是入射光线与法线 PC 的夹角,折射光线对应的量都用带撇的记号来表示。

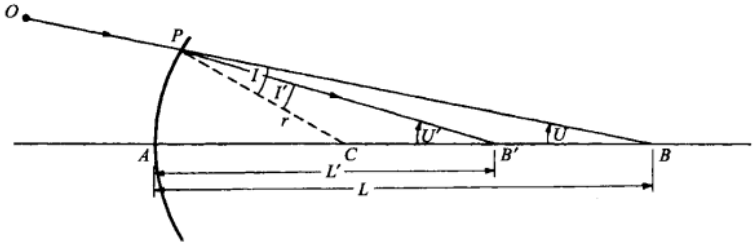


图 4.37 斜子午光线追迹所用的符号

所用的符号规则如下:假定光从左方入射,当 C,B 和 B' 在 A 的右方时,则 r,L 和 L' 为正。如果轴以 B(或 B')为中心,顺时针方向转动小于 90°,就能与光线 PB(或 PB')重合,则角度 U(或 U')为正。如果入射(或折射)光线以入射点 P 为中心,顺时针方向转动小于 90°,就能与法线 PC 重合,则角度 I(或 I')为正。

用来确定入射光线的量 L 和 U 可以假定是已知的,这时需要计算 L' 和 U'。目前假定 L 和 r 都是有限值,由三角形 PCB,得出

---

① 对光线追迹更为详细的讨论,可参看例如,A. E. Conrady, *Applied Optics and Optical Design*, Part I(Oxford, Oxford University Press, 1929;重印于 Dover Publications, Inc., New York, 1957);M. von Rohr, *The Geometrical Investigation of Formation of Images in Optical Systems*,由 R. Kanthack 译自德文(London, HM Stationery Office, 1920);M. Herzberger, *Modern Geometrical Optics*(New York, Interscience Publishers, 1958)。G. Black 叙述了利用电子计算机进行光线追迹的方法,见 *Proc. Phys. Soc.* B, **68**(1954), 569。T. Smith 提出了非球面的光线追迹方法,见 *Proc. Phys. Soc.*, **57**(1945), 286;又见 W. Weinstein, *Proc. Phys. Soc.* B, **65**(1952), 731。

② 在 4.9.1 节、4.9.2 节和 4.10 节中,用的是在子午光线追迹中常用的表示法和符号规则。对角度的符号规则与全书其他部分所用的笛卡儿符号规则不同;令 $U = -\gamma$, $U' = -\gamma'$,就换回到笛卡儿符号规则。

$$\sin I = \frac{L - r}{r} \sin U \tag{1}$$

利用折射定律：

$$\sin I' = \frac{n}{n'} \sin I \tag{2}$$

由图还得出

$$U' = U + I - I' \tag{3}$$

最后，由三角形 PCB'，得出

$$L' = \frac{\sin I'}{\sin U'} r + r \tag{4}$$

逐次应用**折射方程**(1)～(4)，就能得到用来确定折射光线 PB' 的量 L' 和 U'。

对于第二个面，折光线 PB' 就变成入射光线。把 L' 和 U' 改写为 L_1' 和 U_1'，用 L_2 和 U_2 表示其对应值，L_2 从第二个面的极点算起，于是得出**传递方程**：

$$L_2 = L_1' - d \tag{5}$$

$$U_2 = U_1' \tag{6}$$

式中 $d > 0$，是两个面的极点距离。

接着，把(5)和(6)两式给出的“入射值”代入折射方程(1)～(4)，解出带撇的量，这就得出通过第二个面的光线追迹了。用这种方法，重复应用折射方程和传递方程，就能得到光线在像空间中的 L' 和 U' 值。因此，这条光线与像平面的交点就可以确定了。在实践中，自然不只对一条光线，而是对若干条适当选择的光线，通过整个系统进行追迹；根据这些光线与像平面的交点，即可粗略估计这个系统的性能。

如果其中有一个面(譬如说，第 k 面)是反射镜面，则在上列公式中令 $n_k' = -n_k$，就可以从形式上推导出适用的公式。这时 d_k 必须取负值，而且以后所有的折射率和 d 值也必须取负值，除非发生第二次反射，这时折射率和 d 值又恢复正号。

其次，考虑前面一直排除了的两种特殊情况。如果入射光线平行于轴($L = \infty$)，则用下式

$$\sin I = \frac{Y}{r} \tag{7}$$

来代替(1)式，式中的 Y 是从轴到光线的距离[见图 4.38(a)]。

如果折射面是平面($r = \infty$)，则用下面的方程组代替(1)～(4)式[参看图 4.38(b)]：

$$I = -U \tag{8}$$

$$\sin U' = \frac{n}{n'} \sin U \tag{9}$$

$$I' = -U' \tag{10}$$

$$L' = \frac{\tan U}{\tan U'} L \tag{11}$$

利用(9)式，则(11)式也可以写成下列形式：

$$L' = \frac{n' \cos U'}{n \cos U} L \tag{11a}$$

当角度很小时,上式比(11)式更便于计算。

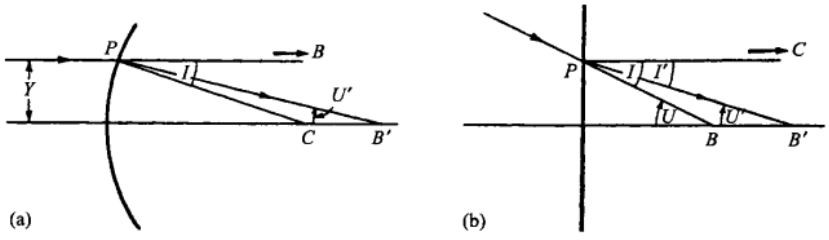


图 4.38 特殊情况:(a)$L=\infty$;(b)$r=\infty$

此外,定出第 k 面上入射点 P_k 的坐标(Y_k, Z_k)以及顺序两个入射点的距离 $D_k = P_kP_{k+1}$是有用的(见图 4.39)。

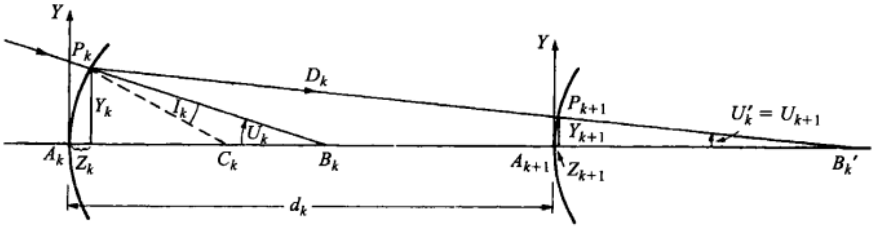


图 4.39 斜子午光线接连通过两个折射面时的追迹

由图得出:

$$Y_k = r_k \sin(U_k + I_k) \tag{12}$$

$$Z_k = r_k - r_k \cos(U_k + I_k) = \frac{{Y_k}^2}{[1 + \cos(U_k + I_k)]r_k} \tag{13}$$

$$D_k = (d_k + Z_{k+1} - Z_k)\sec U'_k \tag{14}$$

用 Y_k, Z_k 和 U'_k表出 L'_k,则有

$$L'_k = Z_k + \frac{Y_k}{\tan U'_k} \tag{15}$$

这个关系式可用来核对由(11a)式或(11)式算得的数值。

在 L_k 为无穷大的特殊情况下,$U_k = 0$,并且(12)~(15)式仍然成立。如果 r_k 为无穷大,则 Y_k 可由下式算出,

$$Y_k = L_k \tan U_k \tag{16}$$

这时 $Z_k = 0$。

4.9.2 傍轴光线

如果光线对轴的倾角足够小,则上述公式中各角的正弦可用各角本身来代替。这时,公式就简化为光路的高斯近似。在实践中,利用这种"**傍轴**光线追迹公式"来计算光学系统的高斯放大率和焦距。因此,这里将简短总结一下这些公式。

习惯上用小写字母来表示傍轴区域的量。折射方程(1)～(4)变为

$$i = \frac{l - r}{r} u \tag{17}$$

$$i' = \frac{n}{n'} i \tag{18}$$

$$u' = u + i - i' \tag{19}$$

$$l' = \frac{i'}{u'} r + r \tag{20}$$

传递方程(5)和(6)改写为

$$l_2 = l_1' - d \tag{21}$$

$$u_2 = u_1' \tag{22}$$

对 $L = \infty$ 以及 $r = \infty$ 的情况，傍轴方程可用类似的方法由(7)～(11a)式得出。

关于入射高度的傍轴方程(以后需用)，由(12)式得出：

$$y_k = r_k(u_k + i_k) \tag{23}$$

虽然关系式(17)～(20)中包含入射光线和折射光线与轴的夹角，但 l' 与这些量无关。由上列关系式消去 i，i' 和 u'，就得到这个结果，在 4.4.1 节中用不同的方法也得到了这个结果。这时 u 也不出现，得出

$$n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l'}\right) = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l}\right) \tag{24}$$

可以认出，这就是阿贝关系式 §4.4(7)。

要确定横向高斯放大率 M，只需对轴上物点发出的一条傍轴光线进行追迹。然后根据 §4.4(54)，

$$M = \frac{n_1}{n_l} \frac{u_1}{u_l} \tag{25}$$

式中的下标 1 和 l 分别指第一个和最后一个媒质。

系统的焦距 f' 则可通过对无穷远物所发的傍轴光线进行追迹而得到，傍轴光线高度 y_1 随宜。像空间中共轭光线的方程，以第二焦点处坐标轴为参考系时为 $y_l/z_l = -u_l'$，于是由 §4.3(10)即有

$$f' = -\frac{y_1}{u_l'} \tag{26}$$

4.9.3　不交轴光线

以上只考虑了位于子午面上的光线。现在简单讨论一下**不交轴**光线(即与轴不共面的光线)的追迹。这些光线的追迹麻烦得很，通常只在设计很大孔径的系统时才去做。

现在，光线将由它的方向余弦及其与系统中某一特定面的交点坐标来确定。在第一个面的极点 A_1 取笛卡儿直角坐标轴，令 Z 轴沿着系统的轴，设 L_1，M_1，N_1（$L_1^2 + M_1^2 + N_1^2 = 1$）是入射到 $P_1(X_1, Y_1, Z_1)$ 点的光线方向余弦(见图 4.40)。

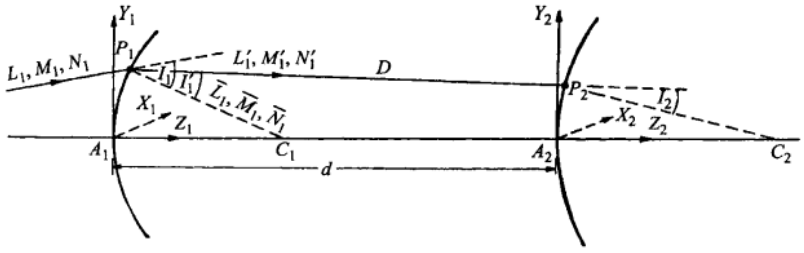


图 4.40 不交轴光线的追迹

第一步是计算入射角 I_1 的余弦值。设 r_1 为第一个面的半径,则 P_1 点的法线方向余弦是

$$\overline{L}_1 = -\frac{X_1}{r_1}, \qquad \overline{M}_1 = -\frac{Y_1}{r_1}, \qquad \overline{N}_1 = \frac{r_1 - Z_1}{r_1}$$

因此

$$\begin{aligned} \cos I_1 &= L_1\overline{L}_1 + M_1\overline{M}_1 + N_1\overline{N}_1 \\ &= N_1 - \frac{1}{r_1}(L_1X_1 + M_1Y_1 + N_1Z_1) \end{aligned} \tag{27}$$

第二步是确定折射光线的方向余弦 L_1', M_1', N_1'。这分成两步去做。首先利用下列形式的折射定律

$$n'\cos I_1' = \sqrt{n'^2 - n^2 + n^2\cos^2 I_1} \tag{28}$$

来计算折射角的余弦值。然后利用折射光线位于入射光线和折射面法线所规定的平面上这一事实。用 $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_1'$ 和 $\bar{\mathbf{s}}_1$ 分别表示沿着入射光线、折射光线和法线的单位矢量,即其分量分别为 (L_1, M_1, N_1), (L_1', M_1', N_1') 和 $(\overline{L}_1, \overline{M}_1, \overline{N}_1)$ 的矢量,则由共面条件得出

$$\mathbf{s}_1' = \lambda\mathbf{s}_1 + \mu\bar{\mathbf{s}}_1 \tag{29}$$

式中的 λ 和 μ 是两个标量函数。为了定出 λ 和 μ,先用 $\mathbf{s}_1$ 点乘(29)式,并利用(见图 4.40) $\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{s}_1' = \cos(I_1 - I_1')$, $\mathbf{s}_1\cdot\bar{\mathbf{s}}_1 = \cos I_1$。这就得出

$$\cos(I_1 - I_1') = \lambda + \mu\cos I_1$$

再用 $\bar{\mathbf{s}}_1$ 点乘(29)式,并利用关系式 $\bar{\mathbf{s}}_1\cdot\mathbf{s}_1' = \cos I_1'$, $\bar{\mathbf{s}}_1\cdot\mathbf{s}_1 = \cos I_1$。则得出

$$\cos I_1' = \lambda\cos I_1 + \mu$$

由最后两式得出

$$\lambda = \frac{\sin I_1'}{\sin I_1} = \frac{n}{n'}, \qquad \mu = \frac{1}{n'}(n'\cos I_1' - n\cos I_1)$$

代入(29)式,就得到折射光线方向余弦的三个方程如下:

$$\left.\begin{aligned} n'L_1' &= nL_1 - \sigma X_1, \\ n'M_1' &= nM_1 - \sigma Y_1, \\ n'N_1' &= nN_1 - \sigma(Z_1 - r_1), \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

式中

$$\sigma = \frac{1}{r_1}(n' \cos I_1' - n \cos I_1) \tag{31}$$

这样，借助于折射方程(27)、(28)、(30)和(31)，就完成了通过第一个面的光线追迹。

对第二个面，该折射光线就成为入射光线了。在第二个面的极点 A_2 另取坐标轴，方向与前者平行，则**方向余弦的传递方程**为

$$L_2 = L_1', \qquad M_2 = M_1', \qquad N_2 = N_1' \tag{32}$$

设 d 为两个面的极点距离 A_1A_2。用 X_1^+, Y_1^+, Z_1^+ 表示 P_1 点在 A_2 处各轴上的坐标，则**坐标的传递方程**为

$$X_1^+ = X_1, \qquad Y_1^+ = Y_1, \qquad Z_1^+ = Z_1 - d \tag{33}$$

其次，必须定出折射光线和第二个面交点 P_2 的坐标(X_2, Y_2, Z_2)。设 D 表示从 P_1 到 P_2 的距离，则有

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= X_1^+ + L_2 D, \\ Y_2 &= Y_1^+ + M_2 D, \\ Z_2 &= Z_1^+ + N_2 D. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

利用 P_2 位于第二个面上这一事实来定出 D。设 r_2 为这个面的半径，则有

$$X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 - 2Z_2 r_2 = 0 \tag{35}$$

把(34)式代入上式，就得到 D 的方程如下：

$$D^2 - 2Fr_2 D + Gr_2 = 0 \tag{36}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} F &= N_2 - \frac{1}{r_2}(L_2 X_1^+ + M_2 Y_1^+ + N_2 Z_1^+), \\ G &= \frac{1}{r_2}[(X_1^+)^2 + (Y_1^+)^2 + (Z_1^+)^2] - 2Z_1^+. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

对于沿轴光线，$D = d$，加上这一条件，则由(36)式得出 D 的表达式如下：

$$D = r_2\left(F - \sqrt{F^2 - \frac{1}{r_2}G}\right) \tag{38}$$

把 D 代入(34)式，就定出了 P_2 的坐标。

最后，要完成这一轮过程，还必须算出在第二个面上入射角 I_2 的余弦值。它由一个完全类似(27)式的关系式给出，即

$$\cos I_2 = N_2 - \frac{1}{r_2}(L_2 X_2 + M_2 Y_2 + N_2 Z_2) \tag{39}$$

或者，利用(34)和(38)两式，将上式表成

$$\cos I_2 = F - \frac{1}{r_2}D = \sqrt{F^2 - \frac{1}{r_2}G} \tag{40}$$

因此,最后一步包括对(40)、(38)和(34)三式的计算。

因为对一般不交轴光线的追迹很麻烦,有时就只限于计算紧靠一特定主光线的不交轴光线。这种不交轴光线通过整个系统的追迹,可利用类似于傍轴光线追迹的简化方法[①],这些简化方法也适用于确定弧矢焦面的位置。

4.10 非球面的设计

大多数光学系统所用的透镜和反射镜,其表面形状均为平面、球面或抛物面。之所以限于采用这种简单的面形,主要是因为制作面形比较复杂并且加工精度达到光学要求的镜面存在实际困难。可是,镜面只限采用简单面形,自然也就给传统设计的光学系统在性能上能够达到的档次高度设置了上限。因此之故,尽管制造上有困难,某些系统还是采用了面形比较复杂的镜面,称之为**非球面**。早在1905年,施瓦茨蔡耳德[②] 就研究过一种由两个非球面反射镜组成的望远镜物镜,并证明这种系统可以做到不晕。

1930年,汉堡的光学技师施密特(B. Schmidt)制作了一台新型的望远镜,它由一个球面镜和一个设计适当的非球面透镜组成,后者位于球面镜的曲率中心。结果发现这种系统的性能(在6.4节中再详细讨论)十分突出。用这种望远镜在一个底片上就可能拍摄天空的很大范围,比用通常设计的望远镜所能得到的要大几百倍。此后**施密特照相机**即成为天文学研究中的一种重要工具。利用施密特照相机原理的非球面系统,也已用于某些投影式电视接收机[③]、X射线荧光屏照相术以及某些快速的低色散摄谱仪。非球面也已有效地应用于显微术中(见6.6节)。

任何共轴系统中如有一个面做成非球面,一般即可确保轴上精确无像散;任何共轴系统中用上两个非球面,一般就可以做到不晕。本节将推导出设计这类非球面所用的公式。

4.10.1 轴上无像散的实现[④]

考虑轴上物点 P 所发出的光线。在光学系统的像空间中,通过出射光瞳不同环带的光线一般将与轴相交于不同点。设 $S^{(0)}$ 是系统中的最后一个面,O 是这个面的轴点(见图4.41)。下面将证明,通过修改 $S^{(0)}$ 面的外形,可精确补偿成像光锥的共心偏差;更确切地说,我们将证明,一般总可用一个新面 S 来代替 $S^{(0)}$,这个新面将确保像空间中所有光线都与轴相交于某一预定点 Q。

由于对称性,因此只需讨论子午光线。在最后一个面前面的空间中,每一条光线将由下列参量来确定:光线与轴的夹角 U 及其在 Y 轴上的截距 $H = OM$(见图4.41)。为方便起见,现将

---

① 见 H. H. Hopkins, *Proc. Phys. Soc.*, **58**(1946), 663;以及他的著作, *Wave Theory of Aberrations* (Oxford, Clarendon Press, 1950), pp. 59, 65。

② K. Schwarzschild, *Astr. Mitt. Königl. Sternwarte Göttingen* (1905)。翻印自 *Abh. Königl. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse*, **4**(1905—1906), No. 2。
后来制造了两台这一类的望远镜,一台在印第安纳大学,孔径为24英寸;另一台在布朗大学,孔径为12英寸。

③ 见,例如 I. G. Malloff and D. W. Epstein, *Electronics*, **17**(1944), 98。

④ 这里所讲的方法,引自 E. Wolf and W. S. Preddy, *Proc. Phys. Soc.*, **59**(1947), 704; E. Wolf, *Proc. Phys. Soc.*, **61**(1948), 494。类似的公式也出自 R. K. Luneburg, *Mathematical Theory of Optics* (Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1964), § 24。

光线编上标记：设 t 是某一个方便的参量，例如是物空间中相应光线与轴的夹角 U_0，或者是物空间中相应光线与第一个面交点的高度。这时，光锥可由下面两个函数关系式完全确定：

$$U = U(t), \qquad H = H(t) \tag{1}$$

对于沿轴光线，可假定 $t = 0$。通常不知道(1)式的显函数形式；然而给定任一组 t 值时，可由光线追迹得到相应的 U, H 数值表。

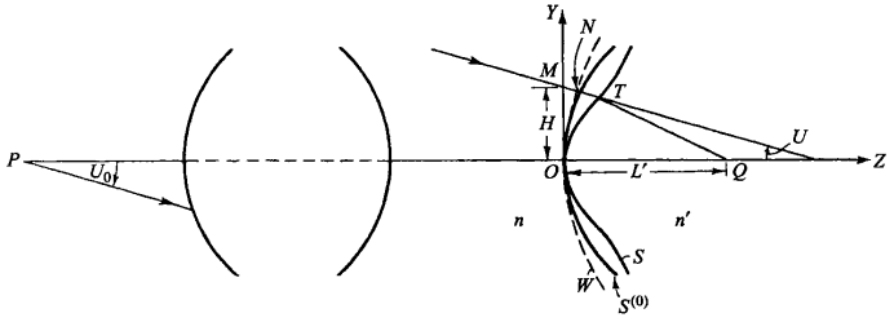


图 4.41　设计一个非球面来达到轴上无像散

设 W 是通过 O 点与光锥正交的面(波阵面，见图 4.41)，N 是通过 M 的光线与 W 面的交点。假设可以找到一个校正面 S 具有前面所要求的特性，则在已校正的系统中，从 N 到 Q 的光程长度必须等于从 O 到 Q 的光程长度。设 $T(Y, Z)$是光线与 S 面的交点，则

$$[NT] + [TQ] = [OQ] \tag{2}$$

设 n 是 S 前空间的折射率，n' 是像空间的折射率，则有[①]

$$\left.\begin{aligned} [NT] &= [MT] - [MN] = nZ\sec U - [MN], \\ [TQ] &= n'\sqrt{(L' - Z)^2 + (H - Z\tan U)^2}, \\ [OQ] &= n'L', \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

L' 表示从 O 到 Q 的距离。

在 $[NT]$ 表达式中出现的光程 $[MN]$，也可用已知量来计算。由 Y 轴上的线段 OM，光线的线段 MN 和波阵面 W 上的一段曲线 NO 组成一条封闭曲线，对此封闭曲线应用拉格朗日不变量关系式 § 3.3(1)，则有

$$\int_{OM} n\mathbf{s}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{MN} n\mathbf{s}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{NO} n\mathbf{s}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = 0 \tag{4}$$

式中 $\mathbf{s}$ 是沿光线方向的单位矢量，$\mathrm{d}\mathbf{r}$ 是积分的路程元。由图得出

$$\left.\begin{aligned} \int_{OM} n\mathbf{s}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= -n\int_0^H \sin U\,\mathrm{d}H = -n\int_0^t \sin U\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t, \\ \int_{MN} n\mathbf{s}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= [MN], \\ \int_{NO} n\mathbf{s}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

① 与 4.9.1 节一样，如果轴绕它与光线的交点顺时针方向转动小于 90°，就能与光线重合，则角度 U 为正。

代入(4)式,得出

$$[MN] = n\int_0^t \sin U \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

(6)式把[MN]表示为一个积分,可用 U 和 H 的数值表对此积分进行数值计算①。

把(3)和(6)两式代入(2)式,得到 Z 的方程如下:

$$\mathcal{A}Z^2 + 2\mathcal{B}Z\cos U + \mathcal{C}\cos^2 U = 0 \tag{7}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A} &= n'^2 - n^2, \\ \mathcal{B} &= n^2\int_0^t \sin U \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t - n'^2(L'\cos U + H\sin U) + nn'L', \\ \mathcal{C} &= n'^2H^2 - \left(n\int_0^t \sin U \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t\right)\left(n\int_0^t \sin U \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + 2n'L'\right). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

因此

$$Z = \frac{\cos U}{\mathcal{A}}[-\mathcal{B} \pm \sqrt{\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C}}] \tag{9}$$

由图还得出

$$Y = H - Z\tan U \tag{10}$$

因 $t=0$ 时,$Z = U = H = 0$,又因已设 L' 为正(见图 4.41),所以(9)式中的平方根前面必须取正号。最后,合并(9)和(10)两式,得到

$$Z + \mathrm{i}Y = \frac{-\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C}}}{\mathcal{A}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}U} + \mathrm{i}H \tag{11}$$

(11)式是非球面 S 用自由参量 t 表示的一个精确的参量方程。

焦点 Q 在无穷远($L' = \infty$)的特殊情况也是有意义的。为了推导出适当的公式,我们注意到$\mathcal{B}$和$\mathcal{C}$两者都只含有 L' 的一次项,因此当 L' 足够大时,

$$\begin{aligned} -\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C}} &= \mathcal{B}\left[-1 + \sqrt{1 - \frac{\mathcal{A}\mathcal{C}}{\mathcal{B}^2}}\right] \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{A}\mathcal{C}}{\mathcal{B}} - \frac{1}{8}\frac{\mathcal{A}^2\mathcal{C}^2}{\mathcal{B}^3} - \cdots \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{A}\mathcal{C}}{\mathcal{B}} + O\left(\frac{1}{L'}\right) \end{aligned}$$

在 $L' \to \infty$ 的极限情况下,(11)式则化为

$$Z + \mathrm{i}Y = \frac{n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}U}}{n - n'\cos U}\int_0^t \sin U \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}H \tag{12}$$

① 利用从 P 到 N 的光程等于从 P 到 O 的光程这一性质,自然能够直接从光线追迹算出[MN]。这时,

$$[MN] = [PO] - [PM]$$

我们只讨论了光学系统最后一个面是非球面时的情况，但这种方法可推广到位于光学系统内部的一个非球面的设计。然而在这种情况下计算麻烦得很，这里就不讨论了[①]。

4.10.2　不晕的实现[②]

我们已经看到，把光学系统的一个面做成非球面，就能够实现轴上精确地无像散。现在考虑设计两个非球面，要求它们不仅确保轴上无像散，而且保证满足正弦条件。

设 S 和 S' 是两个非球面，其表面形状有待确定。假定 S 和 S' 是系统中相邻的两个面[③]，但它们与物点或像点之间可隔着任意数目的折射面或反射面。仍然只考虑系统的最后校正，并假定除 S 和 S' 的表面形状外，所有设计数据均为已知。

引入两组笛卡儿直角坐标轴，令其原点分别在 S 和 S' 的极点 O 和 O'，其 Z 轴都沿着系统的轴。S 和 S' 面分别以 O 和 O' 处的坐标轴为参考系。

轴上物点 P 发出的光锥，在 S 面前面的空间中仍由下列形式的关系式（见图 4.42）

$$U = U(t), \qquad H = H(t) \tag{13}$$

来确定。在 S' 面后面的空间（在已校正的系统中），光锥将由类似的关系式

$$U' = U'(t'), \qquad H' = H'(t') \tag{14}$$

来确定。从选定的轴上像点 P' 进行反向光线追迹，就可得到(14)式的表格形式。

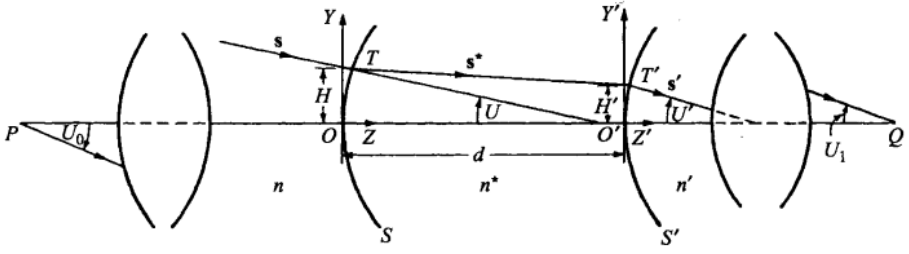


图 4.42　设计两个非球面来达到不晕

如果物距和像距都是有限值，则取物空间和像空间中的对应光线与系统轴的夹角正弦值为参量 t 和 t'[④]：

$$t = \sin U_0, \qquad t' = \sin U_1 \tag{15}$$

如果物在无穷远，则取物空间中相应光线离轴距离 H_0 为参量 t；如果像在无穷远，则取 $t' = H_1$，H_1 是像空间中相应光线离轴的距离。在每一种情况下，正弦条件都要求

$$\frac{t}{t'} = 常数 \tag{16}$$

---

① 详见 E. Wolf, *Proc. Phys. Soc.*, **61**(1948), 494。其他方法可参看 M. Herzberger and H. O. Hoadley, *J. Opt. Soc. Amer.*, **36**(1946), 334; 和 D. S. Volosov *J. Opt. Soc. Amer.*, **37**(1947), 342。

② 本节所讲的方法，出自 G. D. Wassermann and E. Wolf, *Proc. Phys. Soc.* B, **62**(1949), 2。

③ 推广到 S 和 S' 不是光学相邻面的光学系统，可参看 E. M. Vaskas, *J. Opt. Soc. Amer.*, **47**(1957), 669。

④ 如果我们希望（除了轴上无像散以外）满足赫谢耳条件而不是满足正弦条件，则应取

$$t = \sin U_0/2, t' = \sin U_1/2$$

现在,我们的问题可以表述如下:给出(13)和(14)两式后,要找出两个面 S 和 S',它们应保证光锥(U,H)在这两个面上依次折射后变为光锥(U',H');而且这两个光锥中的对应光线必须满足关系式(16)。

设 n 是 S 面前面空间的折射率,n' 是 S' 面后面空间的折射率,$n^\star$ 是介于这两个面的空间的折射率。又设 $\mathbf{s}$ 是沿 $T(Z,Y)$ 点入射光线方向的单位矢量,$\mathbf{s}^\star$ 是沿其折射光线方向的单位矢量(见图 4.42)。

根据折射定律(见 3.2.2 节),矢量 $\mathbf{N}=n\mathbf{s}-n^\star\mathbf{s}^\star$ 必在 T 处的面法线方向上。设 $\boldsymbol{\tau}$ 是此面的子午截线在 T 处的单位切线矢量,则有

$$(n\mathbf{s}-n^\star\mathbf{s}^\star)\cdot\boldsymbol{\tau}=0 \tag{17}$$

矢量 $\mathbf{s}$,$\mathbf{s}^\star$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 的分量是

$$\left.\begin{array}{lllll}\mathbf{s}: & 0, & -\sin U, & \cos U,\\ \mathbf{s}^\star: & 0, & -\sin U^\star, & \cos U^\star,\\ \boldsymbol{\tau}: & 0, & \dfrac{\dot{Y}}{\sqrt{\dot{Y}^2+\dot{Z}^2}}, & \dfrac{\dot{Z}}{\sqrt{\dot{Y}^2+\dot{Z}^2}};\end{array}\right\} \tag{18}$$

其中 $U^\star$ 是折射光线 TT' 与系统轴的夹角,点表示对参量 t 的导数。(17)式变成

$$n(\dot{Z}\cos U-\dot{Y}\sin U)=n^\star(\dot{Z}\cos U^\star-\dot{Y}\sin U^\star) \tag{19}$$

设 D 是从 T 到 T' 的距离,D_y 和 D_z 是 D 在 Y 轴和 Z 轴上的投影,d 是从 O 到 O' 的轴上距离,则有

$$\cos U^\star=\frac{D_z}{D},\qquad \sin U^\star=\frac{D_y}{D} \tag{20}$$

其中

$$D_y=Y-Y',\qquad D_z=d+Z'-Z,\qquad D=\sqrt{D_y{}^2+D_z{}^2} \tag{21}$$

由图还得出

$$Y=H-Z\tan U \tag{22}$$

$$Y'=H'-Z'\tan U' \tag{23}$$

(19)式中的 $\cos U^\star$ 和 $\sin U^\star$ 用(20)式代入。$\dot{Y}$ 用(22)式代入,由此得出

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{nD\cos U-n^\star D_z}{nD\sin U-n^\star D_y}+\tan U\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}-Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan U)\right) \tag{24}$$

与此类似,

$$\frac{\mathrm{d}Z'}{\mathrm{d}t'}=\left(\frac{n'D\cos U'-n^\star D_z}{n'D\sin U'-n^\star D_y}+\tan U'\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}H'}{\mathrm{d}t'}-Z'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(\tan U')\right) \tag{25}$$

由(21)~(25)式,加上条件(16)和边界条件:$t=t'=0$ 时,$Z=Z'=0$,就能完全算出两个校正面。因为用(21)、(22)和(23)三式可从(24)和(25)两式中消去 Y 和 Y';再利用(16)式就得到 Z 和 Z' 的两个一阶联立微分方程,其形式为

$$\frac{dZ}{dt} = f(Z, Z', t), \qquad \frac{dZ'}{dt} = g(Z, Z', t) \tag{26}$$

这两个方程可用标准方法进行积分①。然而，由于不仅需要对一个选定的 t 参量范围确定 Z 和 Z'，而且还要确定 Y 和 Y'，所以对未知量采用逐步求解比消去 Y 和 Y' 更为可取。

4.11　投影法图像重建(计算机层析术)

4.11.1　引言

截至目前，我们所考虑的成像理论主要是关于平面物的成像。如果物是三维的且是半透明的，它各个平面截面的像并不提供关于物的可靠信息。之所以如此，是因为从某截面传播到其像平面的光，途中必须先通过位于该截面前面的物体部位[见图 4.43(b)]，因而它所携带的信息将蒙受干扰而产生畸变。只有当光与它必须通过的物体部分相互作用足够弱时(显微术的情况常属如此，但并不总是这样)，这种畸变才可忽略。

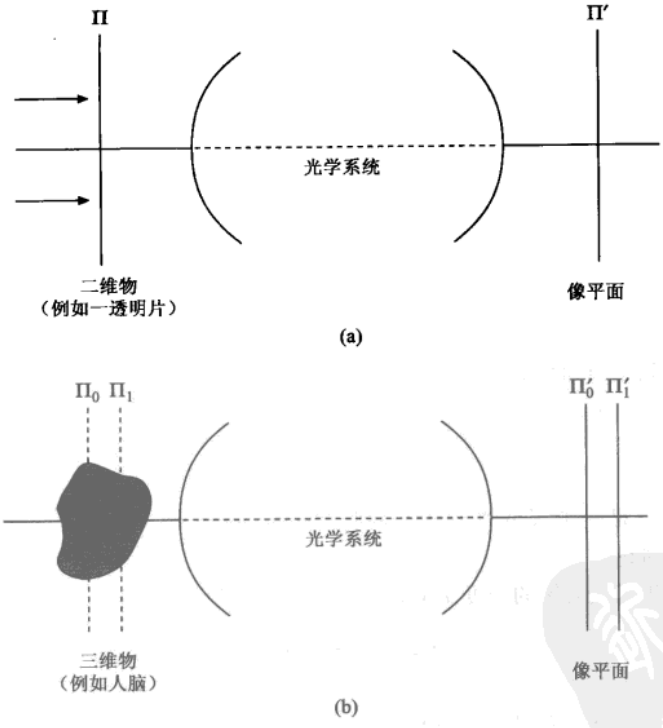


图 4.43　(a)二维物的成像；(b)三维物的成像

如何获得三维物体结构的可靠信息，这一问题发生在许多领域。它在诊断医学中特别重要，但这种问题也常常发生在许多其他领域。

① 例如，用 Adam 方法[见 E. T. Whittaker and G. Robinson, *The Calculus of Observations* (Glasgow, Blackie & Son, 4th edition, 1946), p.363]，或用 Runge 和 Kutta 方法[见 C. Runge and H. König, *Numerisches Rechnen*, (Berlin, Springer, 1924)]。

因为直接成像不能提供关于三维物体结构的可靠信息,所以必须采用某些间接方法。最古老而且在一些应用上无疑是最成功的方法,是所谓计算机轴向层析术(computerized axial tomography),或称计算(computed)轴向层析术,或者就说计算机层析术(computerized tomography),常缩写成 CAT 或 CT。这一技术的开发和使用原本出自 X 射线医学诊断学,但后来被修改作为其他应用,许多情况下采用了他种辐射,有的甚至采用了基本粒子。

在计算机层析术中,辐射在物体内传播的基本物理模型仍然是几何光学的,但重建过程所需要的数学方法比通常光学成像理论使用的要高深得多。本节我们将讲述这一重建技术。

4.11.2 吸收媒质中的光束传播

在考虑计算机层析术三维物体图像重建的主要问题之前,先来推导光束在弱吸收媒质中传播时的强度定律。如果媒质没有吸收,则媒质的折射率 n 是实的,现设为常数;而单色光束中每条光线的(复)电磁场,其空间依赖部分的变化规律由下列公式[见 § 3.1(6)]给出:

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1 e^{ik_0 nl}, \qquad \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1 e^{ik_0 nl} \tag{1}$$

式中 $k_0 = \omega/c$ 是自由空间波数(ω 是波场的频率),l 是光线上两个样点 P_1 和 P_2 之间的距离(见图 4.44);$\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$ 分别是 P_1 点和 P_2 点电场的空间依赖部分,$\mathbf{H}_1$ 和 $\mathbf{H}_2$ 是这两点磁场的空间依赖部分。

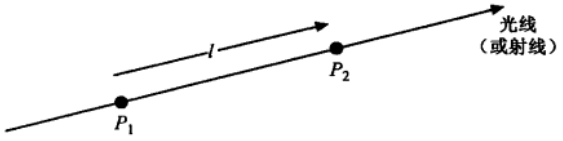


图 4.44 公式(1)的图示说明

现在假设媒质存在弱的吸收。在公式形式上,要考虑进吸收,只需将上式中的实折射率 n 换成一个复折射率 $\hat{n}$ 即可:

$$\hat{n} = n(1 + i\kappa) \tag{2}$$

式中 κ 同 n 一样,也是一个实常数。常数 κ 通常叫做媒质的**衰减指数**。有关复折射率 $\hat{n}$ 的理论将在 14.1 节中讨论。

同以前一样,我们认为场的强度 I 就是玻印廷矢量的绝对值[见 § 3.1(28)和 § 1.4(56)],即

$$I = \frac{c}{8\pi} |\mathcal{R}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)| \tag{3}$$

式中$\mathcal{R}$表示取实部。由(1)式,以 $\hat{n} = n(1 + i\kappa)$代替其中的 n,可以得到

$$\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2^* = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1^* e^{-2k_0 n\kappa l} \tag{4}$$

由(4)和(3)两式可以立即看出,P_1 和 P_2 两点间的强度关系为

$$I_2 = I_1 e^{-\alpha l} \tag{5}$$

式中常数

$$\alpha = 2k_0 n\kappa \tag{6}$$

叫做媒质的**吸收系数**。

现在假设吸收系数不是常数而是随位置改变。这时(5)式将被下列更一般的公式所取代：

$$I_2 = I_1 \exp\left(-\int_{P_1}^{P_2} \alpha(\mathbf{r})\,\mathrm{d}l\right) \tag{7}$$

式中积分沿着所选光线从起点 P_1 积到终点 P_2。(7)式常叫做**比尔(Beer)定律**，并且常导自辐射能量传递理论的准几何论证[①]。

4.11.3　射线积分和投影

设有一窄束 X 射线从人体某部位穿过。从人体物理结构性质变更的尺度衡量，X 射线的波长一般是非常短的，因此几何光学将适宜描写它在人体中的传播，并且比尔定律也可望有效。

可提供人体多种器官有关信息的主要物理量之一是吸收系数 $\alpha(\mathbf{r})$。知道了它的分布，放射学家和医生就能推论出关于器官结构的大量信息。设有一束近单色的 X 射线从源点 P_0 出发，穿过人体某个器官或组织而到达位于 P 点的探测器(见图 4.45)，后者用来测量射线的强度 I。从(7)式比尔定律可以得到

$$\int_{P_0}^{P} \alpha(\mathbf{r})\mathrm{d}s = -\ln\frac{I(P)}{I(P_0)} \tag{8}$$

因此，测量探测器处的强度 $I(P)$，再知道了源点 P_0 处的强度 $I(P_0)$，便可立即推算出(8)式左边吸收系数 $\alpha(\mathbf{r})$沿着射线从 P_0 到 P 的积分之值。此积分叫做**射线积分**，而适当的一组射线积分则谓之形成一个投影(projection)。图 4.46(a)和图 4.46(b)给出两种投影，分别叫做扇束投影和平行投影。

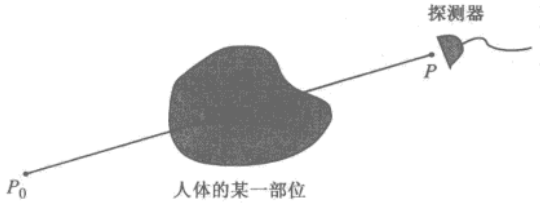


图 4.45　(8)式定义的光线积分示意图

计算机层析术的基本问题是：从足够数目的投影能否推算出人体某器官(或其他物体)各处吸收系数 $\alpha(\mathbf{r})$的空间分布？这个问题的答案是肯定的。此题的数学解已在多年之前由 J. Radon 给出[②]，但计算机层析术的开拓者们当初并不知情，大约半个世纪之后这一技术才被开发出来。我们将在 4.11.5 节末尾简短谈谈这一课题的历史背景和发展过程。

现在我们来介绍 Radon 在计算机层析术方面有关工作的大要。

---

① 见，例如 L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge, Cambridge University Press, 1995), Sec. 5.7.4。

② J. Radon, Ber. König. Säch. Akad. Wiss(Leipgzig), *Math. Phys. Klasse* **69**(1917), 262。这篇论文的英译文收录在 S. R. Deans, *The Radon Transform and some of its Applications* (New York, J. Wiley, 1983), pp. 204—217。

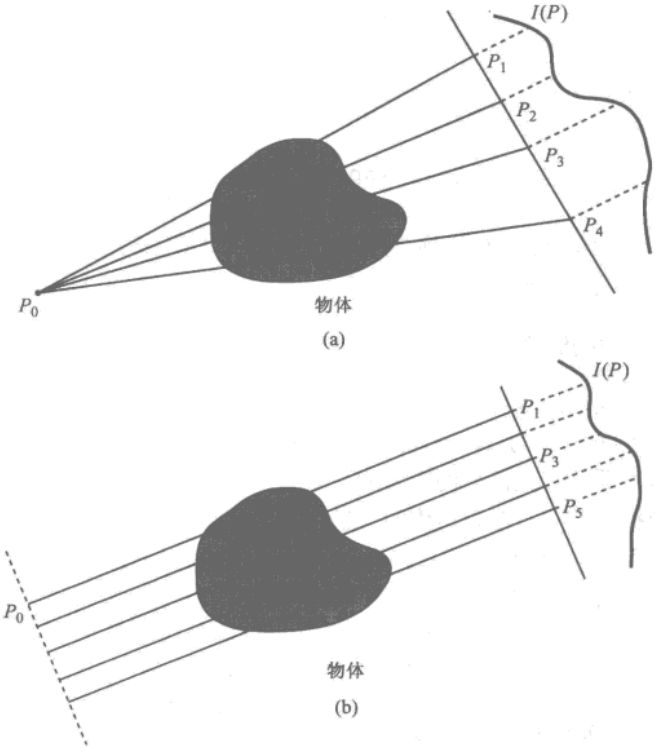


图 4.46 计算机层析术中普遍采用的投影类型:(a)扇束投影;(b)平行投影

4.11.4 *N* 维 Radon 变换

在计算机 X 射线层析术的医学诊断应用中,一般希望获得人体某一部位平面截面的有关信息。相反,在使用电子束的 CT 应用中,通常需要关于三维物体的信息。为了包括不同的情况,适宜的方法是先考虑任意维空间区域的重建步骤,之后再将结果用于二维特别情况。

设 $\mathbf{x}$ 和 $\boldsymbol{\xi}$ 是两个 N 维矢量,

$$\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \cdots, x_N),$$

$$\boldsymbol{\xi} \equiv (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N)$$

并且设

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x} \equiv \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_N x_N$$

是这两个矢量的标积。此外,设 $f(\mathbf{x})$ 是 $\mathbf{x}$ 的任一函数。Radon **变换**的定义式为

$$F(\boldsymbol{\xi}, p) = \int f(\mathbf{x}) \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) \, \mathrm{d}^N x \tag{9}$$

式中 δ 为一维狄拉克 δ 函数,p 为任一标量且积分遍及整个 $\mathbf{x}$ 空间。

在(9)式的被积函数中出现有 δ 函数,这意味着函数 $F(\boldsymbol{\xi}, p)$ 只包括来自 $f(\mathbf{x})$ 某特别区域的贡献,其中矢量 $\mathbf{x}$ 的端点被约束在

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x} = p \tag{10}$$

的轨迹上。在二维情况下，这一轨迹是一条直线；而在三维情况下，它是一个平面。在一般情况下，这一轨迹是 N 维空间中的一个$(N-1)$维超平面(hyperplane)。三维情况如图 4.47所示。矢量 $\mathbf{x}$ 端点被约束在的这个平面与矢量 $\boldsymbol{\xi}$ 垂直，并且与原点的距离(沿平面法线方向测量)为

$$d = \frac{p}{|\boldsymbol{\xi}|} \tag{11}$$

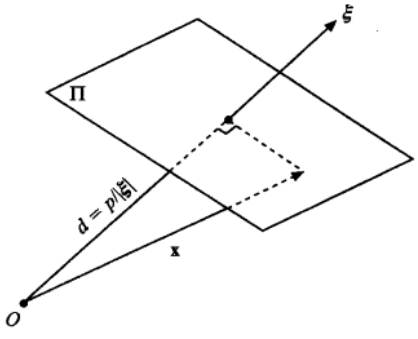


图 4.47　三维情况下(10)式的几何意义图示。$\mathbf{x}$ 的轨迹是平面Π，与原点 O 的距离$d = p/|\boldsymbol{\xi}|$，并垂直于矢量$\boldsymbol{\xi}$

Radon 变换有一个简单的特性后面要用到，现推导如下：设 β 是一个不为零的实参量，则

$$F(\beta\boldsymbol{\xi}, \beta p) = \int f(\mathbf{x})\delta(\beta p - \beta\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x})\,\mathrm{d}^N x \tag{12}$$

利用狄拉克 δ 函数的一个著名特性[附录 D 之(10)式]和 Radon 变换的定义(9)式，可由(12)式得到如下公式

$$F(\beta\boldsymbol{\xi}, \beta p) = \frac{1}{|\beta|}F(\boldsymbol{\xi}, p) \tag{13}$$

(13)式称为 Radon 变换的**标度律**(scaling law)。

由于(13)式这一简单特性，可以将 $\boldsymbol{\xi}$ 限定是一个 N 维实单位矢量 $\mathbf{n}\equiv(n_1, n_2, \cdots, n_N)$而并不失普遍性，$\mathbf{n}$ 则满足

$$\mathbf{n}^2 \equiv n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_N^2 = 1 \tag{14}$$

并可采用下式取代(9)式作为 Radon 变换的定义

$$F(\mathbf{n}, p) = \int f(\mathbf{x})\delta(p - \mathbf{n}\cdot\mathbf{x})\,\mathrm{d}^N x \tag{15}$$

这就是标准形式的 Radon 变换。

函数 $F(\mathbf{n}, p)$被称为是代表 $f(\mathbf{x})$**垂向**单位矢量 $\mathbf{n}$ 所指定方向的**投影**。当 $\mathbf{n}$ 固定时，它是一组积分，各积分的标记用 p 表示，积分区则遍及

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} = p, \qquad (\mathbf{n}^2 = 1) \tag{16}$$

所定义的超平面。

现在回到 4.11.3 节所讨论的重建问题。再看(8)式左边出现的那一积分。显然，如果令其积分路线所沿的直线垂直于单位矢量 $\mathbf{n}$，并与原点的距离为 p，则该积分就代表吸收系数

$\alpha(\mathbf{r})$的二维 Radon 变换。按照(8)式,这个射线积分的值可以从强度 $I(P)$的测量和初强度 $I(P_0)$的已知数据得到。因此,计算机层析术的重建问题,就是从函数 $f(\mathbf{x})$——常代表吸收系数$\alpha(\mathbf{r})$——的一组 Radon 变换,即 $f(\mathbf{x})$的一组投影(射线积分)的有关数据去确定 $f(\mathbf{x})$。现在我们来说明如何实现这一重建。

首先将(15)式右边被积函数中出现的狄拉克 δ 函数表示成一个傅里叶积分[见附录 D 之(23)式]

$$\delta(p-\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u(p-\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})}\,\mathrm{d}u \tag{17}$$

将(17)式代入(15)式并交换积分次序,得到

$$F(\mathbf{n},\,p)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(u\mathbf{n})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}up}\,\mathrm{d}u \tag{18}$$

式中 $\tilde{f}(\mathbf{K})$是 $f(\mathbf{x})$的 N 维傅里叶变换,即

$$\tilde{f}(\mathbf{K})=\int f(\mathbf{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{K}\cdot\mathbf{x}}\,\mathrm{d}^N x \tag{19}$$

取(18)式的傅里叶逆变换,得到

$$\tilde{f}(u\mathbf{n})=\int_{-\infty}^{\infty}F(\mathbf{n},\,p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}up}\,\mathrm{d}p \tag{20}$$

这是一个重要的公式。它表明,**未知函数 $f(\mathbf{x})$的 N 维傅里叶变换$\tilde{f}(\mathbf{K})$,其中 $\mathbf{K}=u\mathbf{n}$,正是$f(\mathbf{x})$的**Radon **变换 $F(\mathbf{n},p)$对标量参量 p 的一维傅里叶变换**。这一结果不论 $\mathbf{x}$ 空间维数多少,总告成立。

现在可以从 Radon 变换 $F(\mathbf{n},p)$的有关数据来实现 $f(\mathbf{x})$重建——$F(\mathbf{n},p)$就代表函数 $f(\mathbf{x})$垂向 $\mathbf{n}$ 方向的投影。因此,从 $f(\mathbf{x})$全部投影的实测数据[等同于 Radon 变换 $F(\mathbf{n},p)$在其自变量全部取值区域的实测数据],就可利用(20)式来计算全部傅里叶分量 $\tilde{f}(\mathbf{K})$。而知道了 $\tilde{f}(\mathbf{K})$后,应用(19)式的逆变换就能合成待求函数 $f(\mathbf{x})$[①]。

4.11.5 计算机层析术的截面重建和投影 – 层析定理(projection-slice theorem)

前面已经提到,在诊断医学中,人们常常希望测定人体某截面平面上吸收系数的变更情况。采用 X 射线计算机层析术常可获得此种信息。这时,实现重建所用的公式可由上面刚推导出的普遍结果应用到此种情况,令空间维数 $N=2$ 而立即得到。现在我们就来简短讨论一下这个重要的特别情况。

如前所说,通常采用的测量布局有几种类型(例如图 4.46 所示的两种)。我们将只考虑平行投影情况。这时,透射强度的测量路线垂直于射线方向,如图 4.48 所示。为方便起见,现用二维矢量 $\boldsymbol{\rho}$(对应一般情况的 $\mathbf{x}$)来定规物点的位置,并用 x 和 y(而非 x_1 和 x_2)表示它的两个笛卡儿分量,如图 4.48 所示。我们将把待定的函数 $f(\boldsymbol{\rho})$称为**物函数**,它可以是吸收系数(在 4.11.2 节中用 α 代表),或其他某有关量。

---

① 关于 Radon 变换及其某些应用,更为充分的讨论可见,例如 S. R. Deans, *loc. cit.* 或 H. H. Barrett, in *Progress in Optics*, Vol. XXI, E. Wolf, ed. (Amsterdam, Elsevier, 1984), p. 217。

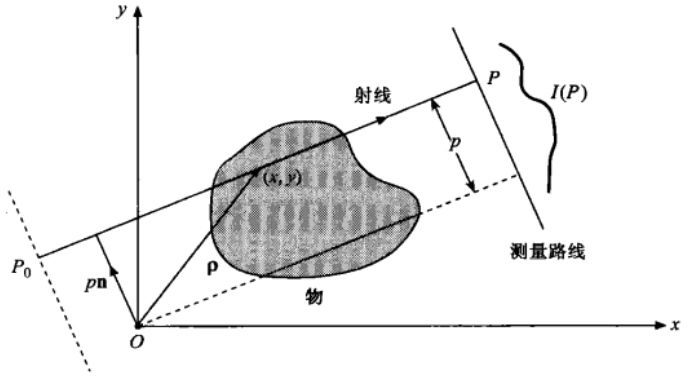


图 4.48　应用计算机层析术由平行投影测定二维物函数 $f(\boldsymbol{\rho})$的有关几何布局和符号

物函数 $f(\boldsymbol{\rho})$垂向 $\mathbf{n}$ 方向($\mathbf{n}^2=1$,并且 $\mathbf{n}$ 垂直于射线)的投影由二维 Radon 变换 $F(\mathbf{n},p)$给出如下:

$$F(\mathbf{n},\ p)=\int f(\boldsymbol{\rho})\delta(p-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\rho})\,\mathrm{d}^2\rho \tag{21}$$

让我们引进 $f(\boldsymbol{\rho})$的二维傅里叶变换 $\tilde{f}(\boldsymbol{\kappa})$($\boldsymbol{\kappa}$ 代表一个二维矢量,对应于傅里叶空间的 N 维矢量 $\mathbf{K}$):

$$\tilde{f}(\boldsymbol{\kappa})=\int f(\boldsymbol{\rho})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}}\,\mathrm{d}^2\rho \tag{22}$$

并引进 Radon 变换 $F(\mathbf{n},p)$对变量 p 的一维傅里叶变换,即

$$\tilde{F}(\mathbf{n},\ u)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\mathbf{n},\ p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}up}\,\mathrm{d}p \tag{23}$$

因此,方程(20)用于二维情况时,可写成下列紧凑形式

$$\tilde{f}(u\mathbf{n})=\tilde{F}(\mathbf{n},\ u) \tag{24}$$

函数 $\tilde{f}(u\mathbf{n})$常称为是物函数 $f(\boldsymbol{\rho})$的傅里叶域($\boldsymbol{\kappa}$ 平面)中沿着 $\mathbf{n}$ 方向的层析(slice),它是 $\mathbf{n}$ 保持固定而 u 值改变时全部$\tilde{f}(u\mathbf{n})$值的组合。因此,公式(24)可以说其含义是:物函数 $f(\boldsymbol{\rho})$垂向 $\mathbf{n}$ 的投影 $F(\mathbf{n},p)$的一维傅里叶变换 $\tilde{F}(\mathbf{n},u)$,就等于物沿着傅里叶域中过原点的直线 $\boldsymbol{\kappa}=u\mathbf{n}$ 所取的层析 $\tilde{f}(\boldsymbol{\kappa})$。这一陈述常称为计算机层析术的**投影-层析**(**projection-slice**)定理或傅里叶层析定理[①]。

利用(24)式,可将物函数 $f(\boldsymbol{\rho})$用其平行投影表成更为显明的形式,它在实际中常要用到。为此,在 xy 平面(物的截面)上选择一个固定的直角坐标系,令其二轴为 Ox_0,Oy_0,并用$\boldsymbol{\phi}$代表单位法向矢量 $\mathbf{n}$ 与正 x_0 轴的夹角(见图 4.49)。于是

$$\mathbf{n}=\hat{\mathbf{x}}_0\cos\boldsymbol{\phi}+\hat{\mathbf{y}}_0\sin\boldsymbol{\phi} \tag{25}$$

式中 $\hat{\mathbf{x}}_0$ 和 $\hat{\mathbf{y}}_0$ 分别是 x_0 和 y_0 方向上的单位矢量,并且

① A. C. Kak in *Array Signal Processing*, S. Haykin, ed. (Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1985), pp. 372—374。

$$\tilde{\mathrm{f}}(u\mathbf{n}) \equiv \tilde{f}(u\cos\phi,\ u\sin\phi) \tag{26}$$

(22)式的傅里叶逆变换,即 $f(\boldsymbol{\rho})$的傅里叶积分表达式可写成下列形式:

$$f(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\infty} \tilde{f}(u\cos\phi,\ u\sin\phi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\rho}} u\,\mathrm{d}u \tag{27}$$

利用关系式 $\cos(\phi+\pi) = -\cos\phi$, $\sin(\phi+\pi) = -\sin\phi$,并将基本关系式(24)代入右方的 $\tilde{f}$,则(27)式变成

$$f(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\pi} \mathrm{d}\phi \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\mathbf{n},\ u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\rho}}|u|\,\mathrm{d}u \tag{28}$$

式中 $\mathbf{n}$ 由(25)式给出。

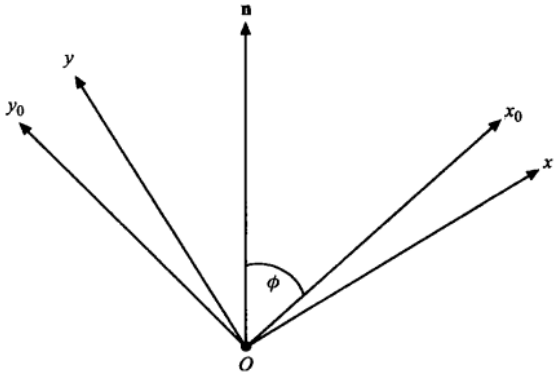


图 4.49 物函数 $f(\boldsymbol{\rho})$的平面截面重建有关符号图示

公式(28)习惯上用来测定未知物函数 $f(\boldsymbol{\rho})$,即从 $f(\boldsymbol{\rho})$的投影 $F(\mathbf{n},p)$的一维傅里叶变换 $\tilde{F}(\mathbf{n},u)$计算出整个 $\boldsymbol{\rho}$ 平面上的 $f(\boldsymbol{\rho})$。这个公式是所谓**平行投影情况背投影**(即反向投影)**计算法**的基础。

开创计算机层析术领域先河的荣誉,主要归于 A. Cormack 和 G. Hounsfield。1963 年,Cormarck[①] 介绍了一种数学算法,从一组线积分获得物的重建,并发表了由一个扫描装置得到的结果。该扫描装置采用了一台计算机来重建实验室测试物的图像。1970 年左右,第一台医用层析术扫描装置在 Hounsfield[②] 指导下装建完成,并于 1971 年首先用来检查一位被怀疑患了脑瘤的病人。重建像确定了瘤的存在。重建过程取了 180 个投影,每个投影包括 160 个射线积分,共采集 $160\times180 = 28\ 800$ 个数据。从那之后,计算机层析术课题发展成为一个庞大的工程技术领域。有许多类型的扫描装置被引进,有不计其数的方案被提出以处理大量数据。当这组数据被处理时,可获得分辨率为 1 mm^2 的图像,所使用的 X 射线能量在 20 ~ 150 keV 范围。图 4.50 给出层析术重建像的一个实例。尽管在这种测量中数据量如此之大,但 X 射线的总剂量,就典型情况而言,比普通放射科用的还要低。

① A. Cormack, *J. Appl. Phys.*, **34**(1963), 2722。

② G. N. Hounsfield, *British J. Radiol.*, **46**(1973), 1016。



图 4.50　肾脏的 CT 扫描。录自 G. N. Hounsfield 1979 年诺贝尔奖演讲[*Nobel Lectures*, *Physiology or Medicine*, *1971—1980*, J. Lindsten, ed. (World Scientific, Singapore, 1992), p. 569]

正如我们提到过的,计算机层析术当今已应用于许多不同的领域,并且还采用不同种类的辐射,甚至使用了基本粒子。它曾被应用于测定地下地质成分的研究,是石油勘探和矿物开采中危险地段探测所不可少的一步。它也用作材料的无损探伤,在全息干涉测量术中用来测定气体中温度变更造成的三维折射率分布等。

医学应用尤为丰富多彩。超声波计算机层析术被用来探测妇女胸部癌瘤。在核医学中,将放射性同位素引入病人体内,而后用层析术方法测定不同器官内放射性的分布。像的重建可提供所检器官中的分子分布图①。

计算机层析术用于电子显微术,导致分子生物学和组织结构测定方面的一些基本发现。在 A. Klug 及其合作者的前沿研究中,分辨率达到了 30 埃量级②。

计算机层析术的重要性可从诺贝尔奖的授予情况得到说明——先后有几次诺贝尔奖授予了它的发明和用它获得的发现:1979 年诺贝尔生物学和医学奖由 A. M. Cormack 和 G. N. Hounsfield 共同获得,而 1982 年诺贝尔化学奖则授予了 A. Klug。

最后我们要提到,在医学层析术之前,在一个完全不同的领域曾有过一位先驱人物。1956 年,Bracewell③ 得到了二维射电天空的一维投影,并由之测定了一个射电源面上的亮度分布。

---

① 关于计算机层析术在医学诊断学方面的全部发展历史,可参阅 S. Webb 书中的讲述:S. Webb, *From the Watching of Shadows* (Bristol, Adam Hilger, 1990)。

② D. J. de Rosier and A. Klug, *Nature*, **217** (1968), 130; R. A. Crowther, D. J. de Rosier and A. Klug, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A 317** (1970), 319; A. Klug and R. A. Crowther, *Nature*, **238** (1972), 435。

③ R. N. Bracewell, *Austral. J. Phys.*, **9** (1956), 198。又见 R. N. Bracewell and A. C. Riddle, *Astroph. J.*, **150** (1967), 427。

第5章　像差的几何理论

4.9节中已经讲过，在几何光学范围内，光线路径对高斯理论预期的偏离，既可以通过光线追迹来研究，也可以利用代数分析来研究。后一种处理方法是本章的研究课题。在这种方法中，要保留特征函数展开式中含有离轴距离高于二次方的项，这些项代表**几何像差**。

1839年，达格雷(Daguerre，1789—1851)发现了照相术，当初推广高斯理论的一些尝试，主要有赖于这一发现。在此以前，实用光学主要涉及望远物镜的构造，这时则面临制造大孔径大视场物镜这一新课题。匈利利数学家佩茨瓦尔(J. Petzval)相当成功地解决了一个与此有关的问题，即把含有光线对轴倾角高次方的项补充到高斯公式中，遗憾的是，佩茨瓦尔研究这个问题的大量手稿为盗贼所毁，现今所知主要得自其科普报告①。佩茨瓦尔在1840年左右制造一种著名的人像照相镜头[如图6.3(b)所示]，其性能远胜于当时的任何一种镜头，他以此证明他的计算的实际价值。最早对几何像差进行系统处理并详细发表的是赛德尔(L. Seidel)②，他考虑了一般共轴球面系统中所有的三次项。之后他的分析被很多作者加以推广和简化。

因为波阵面是光锥的正交轨面，由此可知，成像光锥不共心，则相关联的波阵面亦同时随之偏离球形。了解波阵面的形状，对于在衍射理论的基础上更精细地处理像差问题特别重要(见第9章)。由于这个原因，并且还由于光锥不共心与其波阵面非球面二者有密切的联系，因此我们将双管齐下，把这两种偏差并列考虑。我们的分析将部分根据施瓦茨蔡耳德的重要研究③，按照上述目的而略加改动。

5.1　波像差和光线像差；像差函数

考虑一个旋转对称的光学系统。设P_0'，P_1'和P_1是物点P_0发出的一条光线分别与入射光瞳平面、出射光瞳平面和高斯像平面的交点。如果$P_1^{\star}$是P_0的高斯像，则矢量$\boldsymbol{\delta}_1 = \overrightarrow{P_1^{\star}P_1}$称为**光线的像差**，或简称**光线像差**(见图5.1)。

设W是通过出射光瞳中心O_1'的波阵面，它与从P_0到达像空间的成像光锥相关联。在没有像差时，W与一个中心在高斯像点$P^{\star}$并通过O_1'的球面S重合。S称为**高斯参考球**(见图5.2)。

设Q和$\overline{Q}$分别是光线$P_1'P_1$与高斯参考球和与波阵面W的交点。光程长度$\Phi = [\overline{Q}Q]$可称为Q处波元的像差，或简称**波像差**。如果$\overline{Q}$和P_1分别位于Q的两边，该光程长度就作为正的。在普通的仪器中，波像差可大到40或50个波长，但在用于更精密工作的仪器中(例如天文望远镜或显微镜)，波像差必须减小到一个很小的数值，只有一个波长的几分之一。

---

① J. Petzval, *Bericht über die Ergebnisse einiger dioptrischer Untersuchungen* (Pesth, 1843)，以及 Bericht über optische Untersuchungen, *Ber. Kais. Akad. Wien, Math. naturwiss. Kl.*, **24**(1857), 50, 92, 129。

② L. Seidel, *Astr. Nachr.*, **43**(1856), No. 1027, 289, No. 1028, 305, No. 1029, 321。

③ K. Schwarzschild, *Abh. Königl. Ges. Wis. Göttingen. Math-phys. Kl.*, **4**(1905—1906), Nos. 1, 2, 3。重新发表于 *Astr. Mitt. Königl. Sternwarte Göttingen* (1905)。把 Schwarzschild 的分析推广到没有旋转对称的系统，见 G. D. Rabinovich, *Akad. Nauk. SSSR, Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **16**(1946), 161。

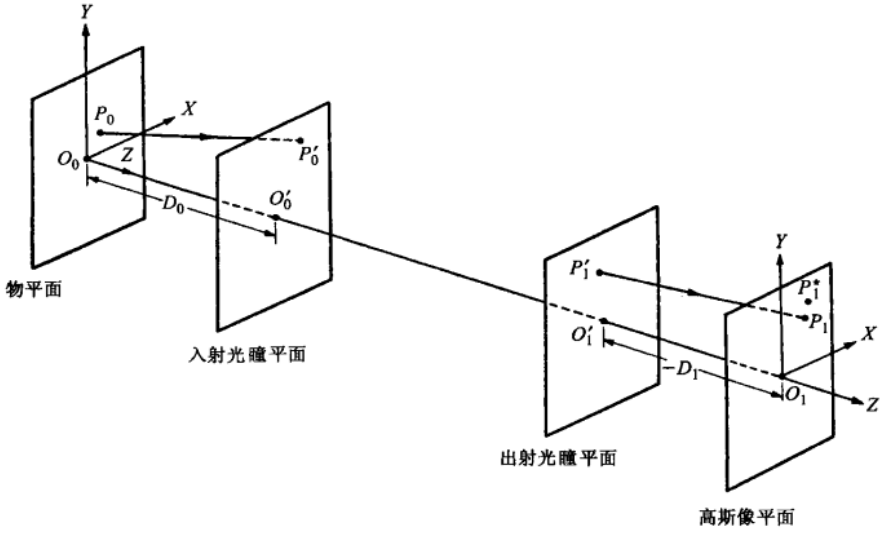


图 5.1　物平面、像平面和光瞳平面

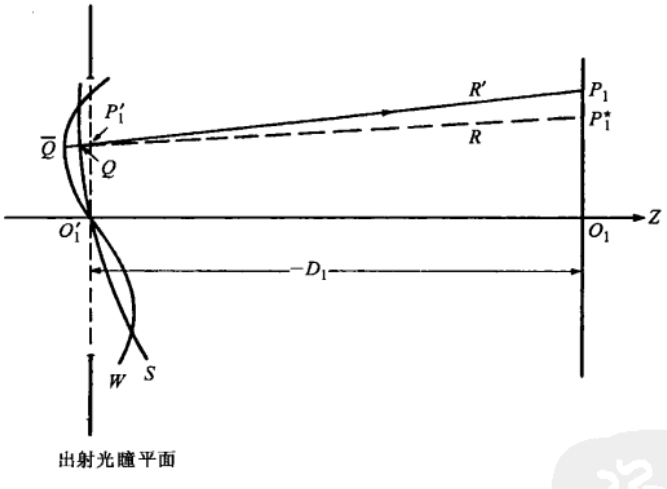


图 5.2　波像差和光线像差(光线 $\overline{Q}QP_1$ 不一定位于子午面 $O_1'O_1P_1^*$ 上)

利用该系统的哈密顿点特征函数,可以容易地导出波像差的表达式。同前,设用方括号[…]表示光程长度,则有

$$\begin{aligned}\Phi &= [\overline{Q}Q] \\ &= [P_0Q] - [P_0\overline{Q}] \\ &= [P_0Q] - [P_0O_1'] \end{aligned} \tag{1}$$

这里用到 $\overline{Q}$ 和 O_1' 位于同一波阵面上这一事实,因此 $[P_0\overline{Q}] = [P_0O_1']$。

引入两套互相平行的笛卡儿直角坐标轴,令其原点分别在物平面和像平面的轴点 O_0 和 O_1,而 Z 方向都沿着系统的轴。物空间的点以 O_0 处坐标轴为参考系,像空间的点以 O_1 处坐标轴为参考系。两个光瞳平面的 Z 坐标用 D_0 和 D_1 来表示(在图 5.1 中,D_1 是负的)。

根据(1)式,用点特征函数 V 表示的波像差为

$$\Phi = V(X_0, Y_0, 0; X, Y, Z) - V(X_0, Y_0, 0; 0, 0, D_1) \tag{2}$$

$(X_0, Y_0, 0)$是 P_0 的坐标,(X, Y, Z)是 Q 的坐标。这里,坐标(X, Y, Z)不是独立的,因为 Q 位于高斯参考球上,故(X, Y, Z)须满足关系式:

$$(X - X_1^\star)^2 + (Y - Y_1^\star)^2 + Z^2 = R^2 \tag{3}$$

这里

$$X_1^\star = MX_0, \qquad Y_1^\star = MY_0 \tag{4}$$

是高斯像点 $P_1^\star$ 的坐标,M 是物平面和像平面之间的高斯横向放大率,R 是高斯参考球的半径,

$$R = \sqrt{X_1^{\star 2} + Y_1^{\star 2} + D_1^2} \tag{5}$$

利用(3)式,可从(2)式中消去 Z,因此 Φ 可看做只是 X_0,Y_0,X 和 Y 的函数,即[①]

$$\Phi = \Phi(X_0, Y_0; X, Y)$$

利用像差函数 $\Phi(X_0, Y_0; X, Y)$,可得到光线像差的简单表达式。由(2)式,得出

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial X} \tag{6}$$

如果 α_1,β_1 和 γ_1 是光线 QP_1 与各轴的夹角,(X, Y, Z)和$(X_1, Y_1, 0)$分别是 Q 点和 P_1 点的坐标,根据 §4.1(7)以及图 5.2,则有

$$\frac{\partial V}{\partial X} = n_1 \cos\alpha_1 = n_1 \frac{X_1 - X}{R'}, \qquad \frac{\partial V}{\partial Z} = n_1 \cos\gamma_1 = -n_1 \frac{Z}{R'}. \tag{7}$$

式中

$$R' = \sqrt{(X_1 - X)^2 + (Y_1 - Y)^2 + Z^2} \tag{8}$$

是从 Q 到 P_1 的距离,n_1 是像空间的折射率。此外,由(3)式得出

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = -\frac{X - X_1^\star}{Z} \tag{9}$$

把(7)和(9)两式代入(6)式,就得到下列光线像差分量表达式:

$$\left.\begin{aligned} X_1 - X_1^\star &= \frac{R'}{n_1}\frac{\partial \Phi}{\partial X}, \\ \text{同样,} \qquad Y_1 - Y_1^\star &= \frac{R'}{n_1}\frac{\partial \Phi}{\partial Y}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

关系式(10)是精确的,但等式右边含有距离 R',而 R'本身取决于 P_1 的坐标,即取决于光

① 一种适合于讨论扩展物体成像的更为普遍的像差函数,已由下文给出:E. Wolf, *J. Opt. Soc. Amer.*, **42**(1952), 547。

线像差①。但对大多数实际场合而言，R' 可用高斯参考球的半径 R 或别的近似式[见下面的(15)式]来代替。

很容易看出，由于对称性，Φ 只是通过 $X_0^2+Y_0^2$，X^2+Y^2 和 X_0X+Y_0Y 这三种组合而依赖于它的 4 个变量的。因为如果在 XY 平面上引入极坐标，即如果令

$$\left.\begin{aligned} X_0 &= r_0\cos\theta_0, \qquad X = r\cos\theta, \\ Y_0 &= r_0\sin\theta_0, \qquad Y = r\sin\theta, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

则 Φ 变为 r_0，r，θ_0 和 θ 的函数，或者等效地说，变为 r_0，r，$\theta_0-\theta$ 和 θ 的函数。现在假定在 O_0 和 O_1 处的 X 轴和 Y 轴顺相同方向绕系统对称轴转过同一角度。这时，r_0，r 和 $\theta_0-\theta$ 保持不变，而 θ 增加一个转过的角度。因为 Φ 相对于这样的转动是不变的，它必须与最后一个变量 θ 无关，即它只随 r_0，r 和 $\theta_0-\theta$ 而定。因此，像差函数 Φ 可表示为两个矢量 $\mathbf{r}_0(X_0,Y_0)$ 和 $\mathbf{r}(X,Y)$ 的 3 个标积

$$\mathbf{r}_0{}^2 = X_0^2+Y_0^2, \quad \mathbf{r}^2 = X^2+Y^2 \quad 和 \quad \mathbf{r}_0\cdot\mathbf{r} = X_0X+Y_0Y \tag{12}$$

的函数。

由这个结果得出，如果把 Φ 展开成 4 个坐标的幂级数，这个展开式将只含有偶次方项。因为 $\Phi(0,0;0,0)=0$，所以没有零次方项。而且除了可能有正比于 $(X_0^2+Y_0^2)$ 的项以外，没有别的二次方项；因为根据(10)式，这些项所引起的光线像差同坐标的关系是线性的，这与 $P_1^\star$ 是 P_0 的高斯像这一事实相矛盾。因此展开式的形式为

$$\Phi = c(X_0^2+Y_0^2)+\Phi^{(4)}+\Phi^{(6)}+\cdots \tag{13}$$

式中 c 是一个常数，$\Phi^{(2k)}$ 是坐标的 $2k$ 次多项式，并且 $\Phi^{(2k)}$ 所包含的这些坐标只以(12)式的三个标量不变式的幂的形式出现。一个特定 $2k$ 次的项就称为代表一种 **$2k$ 级的波像差**。最低一级($2k=4$)的像差通常称为**初级像差**或**赛德尔像差**②，这将在 5.3 节中详细研究。

为了便于表明某些式子的数量级以及某些计算的近似程度，现引进一个参量 μ。它可以是任何一级量，例如系统的角孔径。于是可假定所有通过系统的光线与光轴的夹角为 $O(\mu)$，符号 $O(\mu)$ 的意思是“不超过 μ 的某一适中倍数”。

考虑在基本关系式(10)中用与 X_1 和 Y_1 无关的量代替 R' 而引起的误差。由(3)和(5)两式，

$$Z^2 = \mathrm{D}_1^2-(X^2+Y^2)+2(XX_1^\star+YY_1^\star) \tag{14}$$

代入(8)式就得出

$$\begin{aligned} R' &= -\mathrm{D}_1\left[1+\frac{X_1^2+Y_1^2-2X(X_1-X_1^\star)-2Y(Y_1-Y_1^\star)}{\mathrm{D}_1^2}\right]^{1/2} \\ &= -\mathrm{D}_1-\frac{X_1^{\star 2}+Y_1^{\star 2}}{2\mathrm{D}_1}+O(\mathrm{D}_1\mu^4) \end{aligned} \tag{15}$$

---

① 联系着光线像差和波像差的一对稍有不同的精确方程，已由下文导出，见 J. L. Rayces, *Optica Acta*, **11**(1964), 85。

② 因为与这一级波像差相关联的**光线像差**是坐标三次方项，所以有时也称它们为三级像差。

因此,光线像差分量的关系式(10)变成

$$X_1 - X_1^\star = -\frac{1}{n_1}\left(\mathrm{D}_1 + \frac{X_1^{\star 2} + Y_1^{\star 2}}{2\mathrm{D}_1}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial X} + O(\mathrm{D}_1\mu^7) \tag{16a}$$

$$= -\frac{\mathrm{D}_1}{n_1}\frac{\partial \Phi}{\partial X} + O(\mathrm{D}_1\mu^5), \tag{16b}$$

$$Y_1 - Y_1^\star = -\frac{1}{n_1}\left(\mathrm{D}_1 + \frac{X_1^{\star 2} + Y_1^{\star 2}}{2\mathrm{D}_1}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial Y} + O(\mathrm{D}_1\mu^7) \tag{17a}$$

$$= -\frac{\mathrm{D}_1}{n_1}\frac{\partial \Phi}{\partial Y} + O(\mathrm{D}_1\mu^5). \tag{17b}$$

5.2 施瓦茨蔡耳德微扰程函

施瓦茨蔡耳德研究几何像差时,使用了一种类似于天体力学中计算轨道根数所用的方法。这种计算所引进的变量在无微扰的运动中保持不变,而这些变量在实际运动中所经受的微小变化则利用一个微扰函数来确定。与这种方法类似,施瓦茨蔡耳德在前面所引的文中引进了一些变量,在高斯光学的精度范围内,这些变量沿着每一条光学系统的光线是不变的。然后他引进一微扰函数,称为**赛德尔程函**,用它来研究在特征函数展开式中考虑到四次方项时这些变量所经受的变化①。施瓦茨蔡耳德称这些特定的变量为**赛德尔变量**,因为他们与以前赛德尔使用过的那些变量有关。

在赛德尔理论的精度范围内,前一节所定义的像差函数 Φ 与施瓦茨蔡耳德微扰程函是密切相关的;严格按照施瓦茨蔡耳德方法,可导出任一共轴系统的像差函数展开式中四次方系数的表达式。这个推导将在 5.5 节中详细给出。这里将定义赛德尔变量,并将考察我们的像差函数与施瓦茨蔡耳德微扰函数之间的联系。

在物平面和高斯像平面上分别引入新的长度单位 l_0 和 l_1,使得

$$\frac{l_1}{l_0} = M \tag{1}$$

是这两个平面之间的横向高斯放大率。物平面上的点用坐标 x_0, y_0 来规定,像空间中的点用坐标 x_1, y_1 来规定,使得

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \mathrm{C}\frac{X_0}{l_0}, \quad & x_1 &= \mathrm{C}\frac{X_1}{l_1}, \\ y_0 &= \mathrm{C}\frac{Y_0}{l_0}, \quad & y_1 &= \mathrm{C}\frac{Y_1}{l_1}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

① Schwarzschild 也考虑了五级光线像差的一般类型。他的学生 A. Kohlschütter 在其论文(Göttingen, 1908)中首次给出了特征函数(Schwarzschild 微扰程函)展开式中与上述像差相关联的六次方系数的表达式。
研究过五级像差的还有:M. Herzberger, *J. Opt. Soc. Amer.*, **29**(1939), 395, 和他写的 *Modern Geometrical Optics*(New York, Interscience Publishers, 1958);H. A. Buchdahl, *Optical Aberration Coefficients*(Oxford, Oxford University Press, 1954);以及其他作者写的文章。对高级像差理论的评述,见 J. Focke, *Progress in Optics*, Vol. 4, ed. E. Wolf(Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1965), p. 1。

式中(X_0, Y_0)和(X_1, Y_1)是 P_0 和 P_1 的普通坐标(见图 5.1),C 是一个常数,稍后即将选定。在高斯光学的精度范围内,$x_1 = x_0, y_1 = y_0$。

由(X_0, Y_0)射出的光线与入射光瞳交点的坐标(X_0', Y_0'),与光线分量通过下列关系式相联系

$$\frac{X_0' - X_0}{D_0} = \frac{p_0}{\sqrt{n_0^2 - p_0^2 - q_0^2}}, \qquad \frac{Y_0' - Y_0}{D_0} = \frac{q_0}{\sqrt{n_0^2 - p_0^2 - q_0^2}} \tag{3}$$

光线与出射光瞳交点的表达式完全相似。在高斯光学的精度范围内,上式分母中的平方根可分别用 n_0 和 n_1 来代替,因此得到坐标之间的线性关系式如下:

$$\left.\begin{aligned} \frac{X_0' - X_0}{D_0} &= \frac{p_0}{n_0}, \quad \frac{X_1' - X_1}{D_1} = \frac{p_1}{n_1}, \\ \frac{Y_0' - Y_0}{D_0} &= \frac{q_0}{n_0}, \quad \frac{Y_1' - Y_1}{D_1} = \frac{q_1}{n_1}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其次在入射光瞳平面和出射光瞳平面上分别引入新的长度单位 λ_0 和 λ_1,使得

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = M' \tag{5}$$

是这两个平面之间的横向放大率。用下列变量来代替 X_0', Y_0', X_1', Y_1':

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{X_0'}{\lambda_0} = \frac{X_0}{\lambda_0} + \frac{D_0 p_0}{\lambda_0 n_0}, \quad \xi_1 = \frac{X_1'}{\lambda_1} = \frac{X_1}{\lambda_1} + \frac{D_1 p_1}{\lambda_1 n_1}, \\ \eta_0 &= \frac{Y_0'}{\lambda_0} = \frac{Y_0}{\lambda_0} + \frac{D_0 q_0}{\lambda_0 n_0}, \quad \eta_1 = \frac{Y_1'}{\lambda_1} = \frac{Y_1}{\lambda_1} + \frac{D_1 q_1}{\lambda_1 n_1}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

在高斯光学的精度范围内,$\xi_1 = \xi_0$, $\eta_1 = \eta_0$。

为了简化以后的计算,选择 C 为[①]

$$C = \frac{n_0 l_0 \lambda_0}{D_0} = \frac{n_1 l_1 \lambda_1}{D_1} \tag{7}$$

将为适宜。右边两项相等得自史密斯-亥姆霍兹公式[见 §4.4(48)]。

(2)和(6)两式所定义的这些量就是**赛德尔变量**。有时也需要反过来用赛德尔变量来表示旧变量。解(2)和(6)两式,得到其关系为

$$\left.\begin{aligned} X_0 &= \frac{D_0}{n_0 \lambda_0} x_0, \qquad X_1 = \frac{D_1}{n_1 \lambda_1} x_1, \\ Y_0 &= \frac{D_0}{n_0 \lambda_0} y_0, \qquad Y_1 = \frac{D_1}{n_1 \lambda_1} y_1, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

---

① C 的另一种选择是

$$C = k n_0 l_0 \sin\theta_0 = -k n_1 l_1 \sin\theta_1$$

这在衍射理论的基础上研究成像时常常是有用的。式中,k 是光的真空波数,$2\theta_0$ 和 $2\theta_1$ 是系统的角孔径,即入射光瞳和出射光瞳分别对轴上物点和像点的张角。利用 C 的这种选择,则有

$$x_0 = k n_0 X_0 \sin\theta_0, \qquad x_1 = -k n_1 X_1 \sin\theta_1$$
$$y_0 = k n_0 Y_0 \sin\theta_0, \qquad y_1 = -k n_1 Y_1 \sin\theta_1$$

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= \frac{n_0\lambda_0}{D_0}\xi_0 - \frac{1}{\lambda_0}x_0, \qquad p_1 = \frac{n_1\lambda_1}{D_1}\xi_1 - \frac{1}{\lambda_1}x_1, \\ q_0 &= \frac{n_0\lambda_0}{D_0}\eta_0 - \frac{1}{\lambda_0}y_0, \qquad q_1 = \frac{n_1\lambda_1}{D_1}\eta_1 - \frac{1}{\lambda_1}y_1. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

下一步是用赛德尔变量来表示像差函数。首先我们注意到,Φ 中的自变量 X 和 Y 可用 X_1' 和 Y_1' 代替,而并不改变 §5.1(16b)和 §5.1(17b)中的误差项,令 ϕ 代表以赛德尔变量为自变量时的像差函数:

$$\Phi(X_0, Y_0; X_1', Y_1') = \phi(x_0, y_0; \xi_1, \eta_1) \tag{10}$$

因此

$$\frac{\partial\Phi}{\partial X_1'} = \frac{\partial\phi}{\partial\xi_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial X_1'} = \frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial\phi}{\partial\xi_1} \tag{11a}$$

由(2)、(1)、(7)三式和 §5.1(4),

$$X_1 - X_1^{\star} = \frac{D_1}{n_1\lambda_1}(x_1 - x_0) \tag{11b}$$

借助方程(11),可由公式 §5.1(16b)和 §5.1(17b)得到

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_0 &= -\frac{\partial\phi}{\partial\xi_1} + O(D_1\mu^5), \\ y_1 - y_0 &= -\frac{\partial\phi}{\partial\eta_1} + O(D_1\mu^5). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

前面已经提到,在赛德尔理论的精度范围内,ϕ 是与施瓦茨蔡耳德引入并称之为**赛德尔程函**的微扰函数密切相关的。这一微扰函数定义为

$$\psi = T + \frac{D_0}{2n_0\lambda_0^2}(x_0^2 + y_0^2) - \frac{D_1}{2n_1\lambda_1^2}(x_1^2 + y_1^2) + x_0(\xi_1 - \xi_0) + y_0(\eta_1 - \eta_0) \tag{13}$$

式中 $T = T(p_0, q_0; p_1, q_1)$ 是角特征函数,以 O_0 和 O_1 为参考原点。现在考虑坐标微小变化产生的影响。根据 §4.1(27),令其中 $Z_0 = Z_1 = 0$,则 T 的相应变化为

$$\delta T = X_0\,\mathrm{d}p_0 + Y_0\,\mathrm{d}q_0 - X_1\,\mathrm{d}p_1 - Y_1\,\mathrm{d}q_1 \tag{14}$$

用赛德尔变量表示时,即

$$\begin{aligned} \delta T = {} & x_0\left(\mathrm{d}\xi_0 - \frac{D_0}{n_0\lambda_0^2}\,\mathrm{d}x_0\right) + y_0\left(\mathrm{d}\eta_0 - \frac{D_0}{n_0\lambda_0^2}\,\mathrm{d}y_0\right) \\ & - x_1\left(\mathrm{d}\xi_1 - \frac{D_1}{n_1\lambda_1^2}\,\mathrm{d}x_1\right) - y_1\left(\mathrm{d}\eta_1 - \frac{D_1}{n_1\lambda_1^2}\,\mathrm{d}y_1\right) \end{aligned} \tag{15}$$

利用(15)式,可由(13)式推导出变量有微小变化时 ψ 的相应变化为

$$\mathrm{d}\psi = (\xi_1 - \xi_0)\,\mathrm{d}x_0 + (\eta_1 - \eta_0)\,\mathrm{d}y_0 + (x_0 - x_1)\,\mathrm{d}\xi_1 + (y_0 - y_1)\,\mathrm{d}\eta_1 \tag{16}$$

因此 ψ 可表示为 x_0, y_0, ξ_1, η_1 的函数,并且可严格地得到

$$\left.\begin{aligned}\xi_1-\xi_0&=\frac{\partial\psi}{\partial x_0},\quad x_1-x_0=-\frac{\partial\psi}{\partial\xi_1},\\ \eta_1-\eta_0&=\frac{\partial\psi}{\partial y_0},\quad y_1-y_0=-\frac{\partial\psi}{\partial\eta_1}.\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

所以，如果知道ψ，则通过简单微分，可以定出像平面上和出射光瞳平面上的光线像差。

比较一下(17)和(12)两式，可知在赛德尔理论的精度范围内，$\phi-\psi$必须与 ξ_1 及 η_1 无关，即

$$\phi(x_0,\ y_0;\ \xi_1,\ \eta_1)=\psi(x_0,\ y_0;\ \xi_1,\ \eta_1)+\chi(x_0,\ y_0)+O(\mathrm{D}_1\mu^6)\tag{18}$$

式中 $\chi(x_0,y_0)$是 x_0 和 y_0 的某一函数。现根据ϕ的定义，$\phi(x_0,y_0;0,0)=0$。因此 $\chi(x_0,y_0)=-\psi(x_0,y_0;0,0)$，结果得出

$$\phi(x_0,\ y_0;\ \xi_1,\ \eta_1)=\psi(x_0,\ y_0;\ \xi_1,\ \eta_1)-\psi(x_0,\ y_0;\ 0,\ 0)+O(\mathrm{D}_1\mu^6)\tag{19}$$

在赛德尔理论的有效范围内，(12)式中的误差项可予略去。但如果要考虑高于四次方的项，则用像差函数ϕ表示光线像差分量的表达式更加复杂。另一方面，用微扰程函表示光线像差分量的简单关系式(17)是精确的；但微扰程函看来没有简单的物理意义。

除了最简单的情况以外，确定高于四次方的项全都很麻烦。由于这个原因，代数计算通常仅用于赛德尔理论的范围，在必要处辅之以光线追迹。

5.3　初级(赛德尔)像差

利用完全类似于 5.1 节关于像差函数的考虑，由对称性得出，施瓦茨蔡耳德微扰程函的幂级数展开式的形式为

$$\psi=\psi^{(0)}+\psi^{(4)}+\psi^{(6)}+\psi^{(8)}+\cdots\tag{1}$$

式中$\psi^{(2k)}$是 4 个变量的 $2k$ 次方的多项式；而且这 4 个变量只以三种组合出现：

$$\mathrm{r}^2=x_0^2+y_0^2,\qquad \rho^2=\xi_1^2+\eta_1^2,\qquad \kappa^2=x_0\xi_1+y_0\eta_1\tag{2}$$

在(1)式中没有二次方项，因为按照 §5.2(17)，二次方项的出现，与高斯光学精度范围的 $x_1=x_0,y_1=y_0,\xi_1=\xi_0,\eta_1=\eta_0$ 相矛盾。

因为 4 个变量只以(2)式的组合形式出现，由此得出，$\psi^{(4)}$必定呈下列形式：

$$\psi^{(4)}=-\tfrac{1}{4}A\mathrm{r}^4-\tfrac{1}{4}B\rho^4-C\kappa^4-\tfrac{1}{2}D\mathrm{r}^2\rho^2+E\mathrm{r}^2\kappa^2+F\rho^2\kappa^2\tag{3}$$

式中 $A,B,\cdots$是常数。(3)式中的符号及数值因子已按照通常习惯选择，这样可得到方便的光线像差表达式。5.5 节中将讨论对任一共轴系统的像差常数的计算。

显然，ϕ的幂级数展开式与(1)式的形式是一样的，但不包含零级项($\phi^{(0)}=0$)，并且首项$\phi^{(4)}$与$\psi^{(4)}$不同之处在于没有 $-\frac{1}{4}A\mathrm{r}^4$ 项，根据 §5.2(19)，这是很明显的。因此最低级(四级)波像差的一般表达式为

$$\phi^{(4)}=-\tfrac{1}{4}B\rho^4-C\kappa^4-\tfrac{1}{2}D\mathrm{r}^2\rho^2+E\mathrm{r}^2\kappa^2+F\rho^2\kappa^2\tag{4}$$

$B,C,\cdots$各系数与(3)式中相同。

把(4)式代入 §5.2(12)，就得出最低级(三级)光线像差分量的一般表达式：

$$\left.\begin{aligned}\Delta^{(3)}x &= x_1 - x_0 = \frac{n_1\lambda_1}{D_1}(X_1 - X_1^{\star}) \\ &= x_0(2C\kappa^2 - E\tau^2 - F\rho^2) + \xi_1(B\rho^2 + D\tau^2 - 2F\kappa^2), \\ \Delta^{(3)}y &= y_1 - y_0 = \frac{n_1\lambda_1}{D_1}(Y_1 - Y_1^{\star}) \\ &= y_0(2C\kappa^2 - E\tau^2 - F\rho^2) + \eta_1(B\rho^2 + D\tau^2 - 2F\kappa^2).\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

系数 A 不进入(4)和(5)两式,因此总共有 5 种类型的最低级像差,它们用 5 个系数 B, C, D, E 和 F 来表征。如前面第 195 页所述,这些像差通称**初级像差**或**赛德尔像差**。

为便于讨论赛德尔像差的影响,可这样选择坐标轴,使 yz 平面通过物点,因此 $x_0 = 0$。此外引入极坐标,使

$$\xi_1 = \rho\sin\theta, \qquad \eta_1 = \rho\cos\theta \tag{6}$$

(4)式变为

$$\phi^{(4)} = -\tfrac{1}{4}B\rho^4 - Cy_0^2\rho^2\cos^2\theta - \tfrac{1}{2}Dy_0{}^2\rho^2 + Ey_0^3\rho\cos\theta + Fy_0\rho^3\cos\theta. \tag{7}$$

而(5)式呈下列形式:

$$\left.\begin{aligned}\Delta^{(3)}x &= B\rho^3\sin\theta - 2Fy_0\rho^2\sin\theta\cos\theta + Dy_0^2\rho\sin\theta, \\ \Delta^{(3)}y &= B\rho^3\cos\theta - Fy_0\rho^2(1 + 2\cos^2\theta) + (2C + D)y_0^2\rho\cos\theta - Ey_0{}^3.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

在特殊情况下,(7)式中所有系数均为零,出射光瞳上的波阵面(在本节精度内)与高斯参考球重合(见图 5.2)。而在一般情况下,这些系数将具有有限值,每一项则代表波阵面对理想球面的一种特定类型的偏离。这 5 种不同的类型如图 5.3 所示。

光线像差的意义也可用图形,即所谓**像差曲线**(或称**物征曲线**)来说明。选定一物点,并在出射光瞳上以 ρ = 常数为半径作一环带,由此环带射出的所有光线在像平面上的交点轨迹就是像差曲线。对应所有可能的 ρ 值,各像差曲线所覆盖的区域就代表非理想的像。

下面将依次考虑每一种赛德尔像差[①]。

(a) 球面像差($B \neq 0$)

当除 B 以外所有系数均为零时,(8)式简化为

$$\left.\begin{aligned}\Delta^{(3)}x &= B\rho^3\sin\theta, \\ \Delta^{(3)}y &= B\rho^3\cos\theta\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

因此,这时像差曲线是同心圆,其中心在高斯像点处,其半径随环带半径 ρ 的三次方增大,但与物在视场中的位置(y_0)无关。像的这种缺陷通称**球面像差**(球差)。

球面像差与 y_0 无关,所以它对轴外像及轴上像均有影响。由轴上一物点射出并与轴成较大夹角的光线,在像空间中将与轴交于高斯焦点前方或后方(见图 5.4)。来自孔径边缘的光线与轴的交点,称为**边缘焦点**。如果在像区中垂直于轴放置一屏,则有一位置,使出现在屏上的圆像斑为极小;这个极小"像"称为**最小模糊圆**。

① 对涉及更高级像差的像差曲线的讨论,见 G. C. Steward, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, **23**(1926), 235, 以及 N. Chako, *Trans. Chalmers University of Technology* (Gothenburg), Nr. 191(1957)。

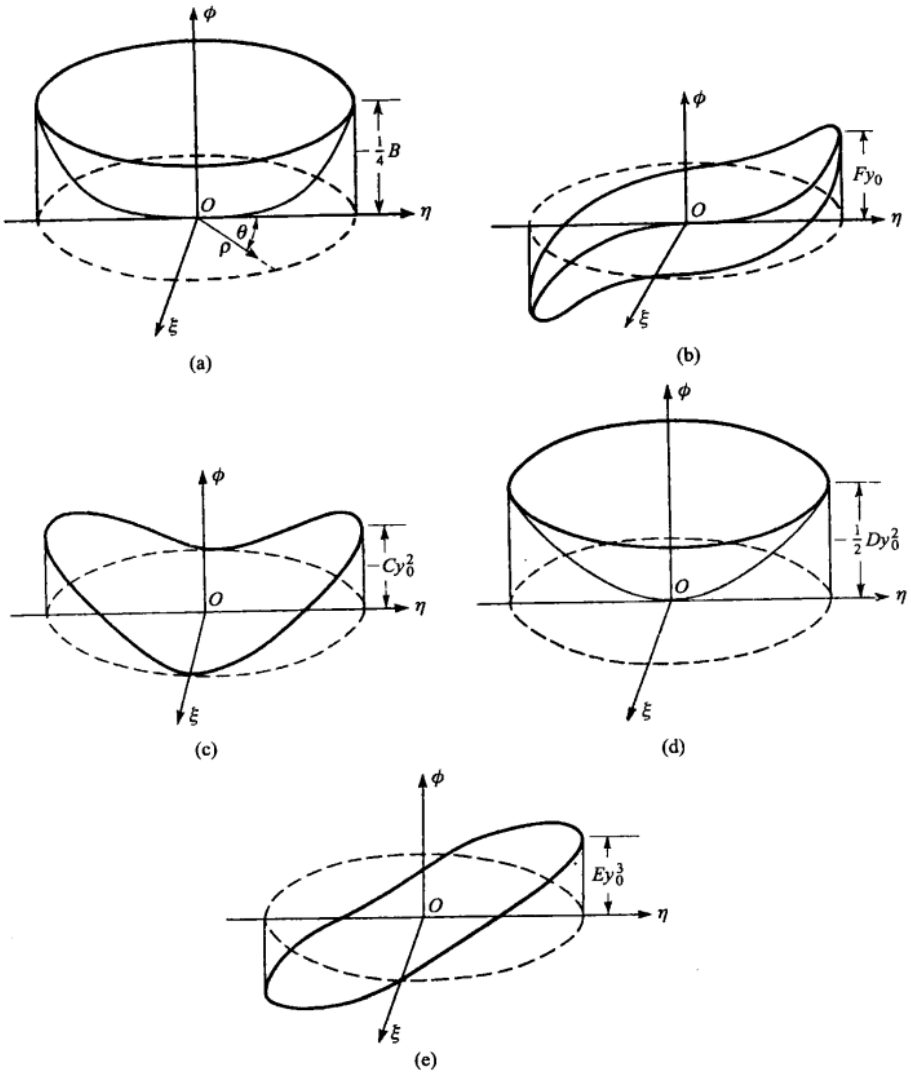


图 5.3　初级波像差:(a)球面像差 $\phi = -\frac{1}{4}B\rho^4$;(b)彗差 $\phi = Fy_0\rho^3\cos\theta$;(c)像散 $\phi = -Cy_0^2\rho^2\cos^2\theta$;(d)像场弯曲 $\phi = -\frac{1}{2}Dy_0^2\rho^2$;(e)畸变 $\phi = Ey_0^3\rho\cos\theta$

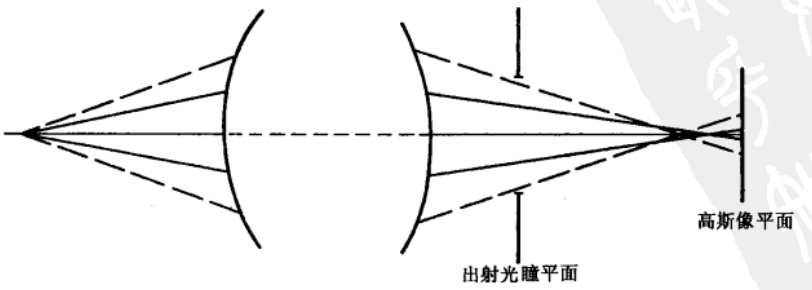


图 5.4　球面像差

(b) 彗差($F\neq0$)

系数 F 所表征的像差通称**彗差**。根据(8)式,这种情况下的光线像差分量为

$$\left.\begin{aligned}\Delta^{(3)}x &= -2F\rho^2 y_0 \sin\theta\cos\theta = -Fy_0\rho^2\sin 2\theta,\\ \Delta^{(3)}y &= -F\rho^2 y_0(1+2\cos^2\theta) = -Fy_0\rho^2(2+\cos 2\theta).\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

可以看出,如果 y_0 固定并且环带半径 ρ 保持不变,则 θ 转过 $0\leqslant\theta<2\pi$ 的范围时,P_1 点在像平面上沿着一个圆转过两圈,圆的半径为 $|Fy_0\rho^2|$,圆心在 y 方向上距高斯焦点 $-2F\rho^2 y_0$ 处。因此该圆与两条通过高斯像并对 y 轴成 30°角的直线相切。当 ρ 取所有可能值时,相应各圆铺盖成一彗形区域,以上述两条直线的线段和最大彗差圆的弧段为周界(见图 5.5),整个图形尺寸随物点离轴距离 y_0 线性增大。4.5 节已经证明,如果满足阿贝正弦条件,则物平面上紧邻于轴的一个面元将被系统锐成像。因此,在这种情况下,像差函数展开式不能含有随 y_0 线性变化的项。所以如果满足正弦条件,初级彗差尤其不会出现。

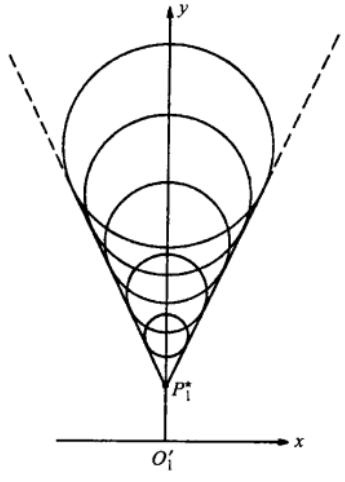


图 5.5 彗差

(c) 像散($C\neq0$)和像场弯曲($D\neq0$)

系数 C 和 D 所表征的两种像差的影响,最好能一起加以研究。如果其他所有系数均为零,则由(8)式得到

$$\left.\begin{aligned}\Delta^{(3)}x &= D\rho y_0^2\sin\theta,\\ \Delta^{(3)}y &= (2C+D)\rho y_0^2\cos\theta.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

为了看出这些像差的意义,首先假定成像光锥很窄。根据 4.6 节,这样的一锥光线相交成两条短线,其中一条(切向焦线)与子午面垂直,另一条(弧矢焦线)位于子午面上。现在考虑来自物平面一有限区域内所有各点的光。这时,像空间中的焦线形成两个曲面,即**切向焦面**和**弧矢焦面**。这些曲面在一级近似下可看作是球面。设 R_t 和 R_s 是它们的半径,当相应的曲率中心位于像平面的入射光一侧时,其半径作为正(在图 5.6 中,$R_t>0$,$R_s<0$)。

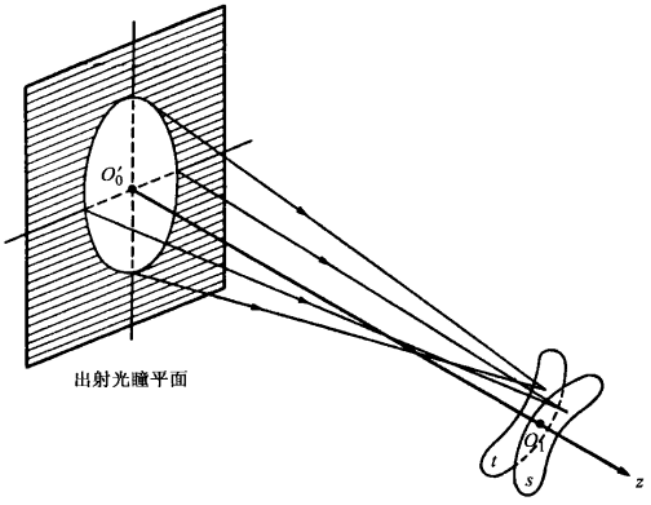


图 5.6　切向焦面和弧矢焦面

这两个曲率半径可用系数 C 和 D 来表示。为了证明这一点，先不用赛德尔坐标而采用普通坐标来计算只存在像场弯曲时的光线像差，将有方便之处。由图 5.7 可有

$$\frac{\Delta^{(3)}Y_1}{Y_1'}=\frac{u}{\mathrm{D}_1+u} \tag{12}$$

式中 u 是弧矢焦线和像平面之间的微小距离。设v表示这一焦线与轴的距离，则

$$R_t^2=v^2+(R_t-u)^2$$

即

$$v^2=2R_tu-u^2$$

如果把 u 看做一级小量，则在上式中v可用 Y_1 代替，并且 u^2 可略去，因此

$$u\approx\frac{Y_1^2}{2R_t} \tag{13}$$

如果 u 与 D_1 相比也可略去，则由(12)和(13)两式得到

$$\Delta^{(3)}Y_1=\frac{Y_1^2}{2R_t}\frac{Y_1'}{\mathrm{D}_1} \tag{14}$$

同样，

$$\Delta^{(3)}X_1=\frac{Y_1^2}{2R_s}\frac{X_1'}{\mathrm{D}_1} \tag{15}$$

下一步将用赛德尔变量来表示这些关系式。把 § 5.2(6)和 § 5.2(8)代入，结果为

$$\Delta^{(3)}y=\frac{n_1\lambda_1}{\mathrm{D}_1}\Delta^{(3)}Y_1=\frac{n_1\lambda_1}{\mathrm{D}_1}\frac{Y_1^2}{2R_t}\frac{Y_1'}{\mathrm{D}_1}=\frac{n_1\lambda_1}{2\mathrm{D}_1^2R_t}\frac{\mathrm{D}_1^2}{n_1^2\lambda_1^2}y_1^2\lambda_1\eta_1$$

即

$$\Delta^{(3)}y=\frac{y_1^2\eta_1}{2n_1R_t} \tag{16}$$

同样,

$$\Delta^{(3)}x=\frac{y_1^2\xi_1}{2n_1R_s} \tag{17}$$

在(16)和(17)两式中,y_1 可用 y_0 代替。与(11)式比较,并利用(6)式,最后得到

$$\frac{1}{R_t}=2n_1(2C+D),\qquad \frac{1}{R_s}=2n_1D \tag{18}$$

$(2C+D)$这个量称为**切向场曲**,D 称为**弧矢场曲**,而

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_t}+\frac{1}{R_s}\right)=2n_1(C+D) \tag{19}$$

这个量与上述二量的算术平均值成正比,它简称为**场曲**。

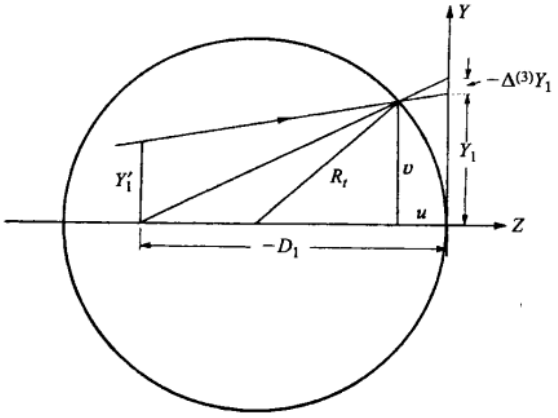


图 5.7 像散和像场弯曲

由(13)和(18)两式可以看出,在距轴的高度 Y_1 处,两个焦面的间距(即成像光锥的像散距离)为

$$\frac{Y_1^2}{2}\left(\frac{1}{R_t}-\frac{1}{R_s}\right)=2n_1CY_1^2 \tag{20}$$

而 $1/R_t$ 与 $1/R_s$ 差值之半

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_t}-\frac{1}{R_s}\right)=2n_1C \tag{21}$$

则称为**像散**。在无像散时($C=0$),$R_t=R_s=R$。5.5.3 节中将证明,这共同焦面的半径 R 可由一个简单公式算出,这个公式只包含系统中各面的曲率半径以及所有媒质的折射率。

(d) 畸变($E\neq0$)

如果只有系数 E 不为零,则根据(8)式,得出

$$\left.\begin{aligned}\Delta^{(3)}x&=0,\\ \Delta^{(3)}y&=-Ey_0^3.\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

因为这两个表达式与 ρ 及 θ 无关，所以成像将是无像散的，并且与出射光瞳半径无关；但是，像点的离轴距离不再与物点的离轴距离成正比，所以这种像差称为**畸变**。

如有畸变存在，则物平面上凡通过原点的直线，其像将亦为直线，而任何其他直线的像将发生弯曲。这种影响如图 5.8 所示。图 5.8(a)是一网状物，由平行于 x_0 轴 y_0 轴的等距直线构成。图 5.8(b)所列是所谓相**桶形畸变**，而图 5.8(c)是**枕形畸变**。

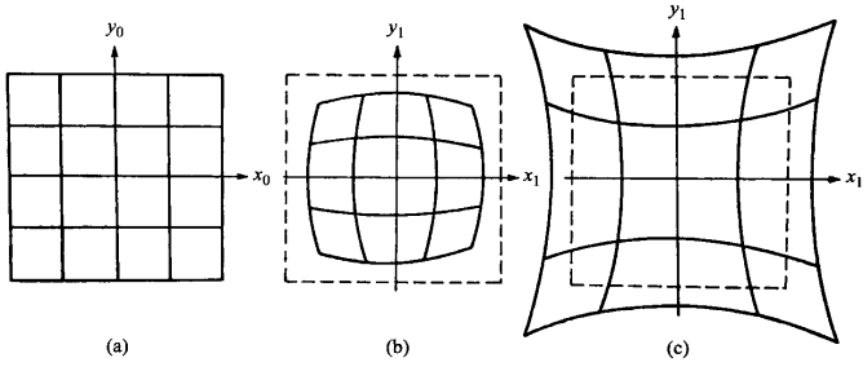


图 5.8　(a)物；(b)桶形畸变的像($E>0$)；(c)枕形畸变的像($E<0$)

上面已经看到，5 种赛德尔像差中，有 3 种(即球面像差、彗差和像散)使得像不清晰，另外两种(即像场变曲和畸变)关系到像的位置及形状。一般地说，设计一个系统使它什么像差都没有，既无各种初级像差又无高级像差，这是不可能的，因此必须对各种像差的相对大小作适当的折中。在某些情况下，减小赛德尔像差的影响要考虑到同高级像差的平衡。在另外一些情况下，必须完全消除某些像差，甚至以引进其他类型的像差为代价。例如，因为有彗差时像出现不对称，所以这种像差在望远镜中总须加以抑制，否则精密的位置测量就不能办到。而另一方面，一定数量的像场变曲和畸变则相对无害，因为它们可以用计算来消除。

以上仅在几何光学的基础上研究了像差的影响。但如果像差非常小(波像差是波长量级或者更小)，衍射就起着重要的作用。这时像差的几何理论必须用更精细的考虑来补充。这将在第 9 章中加以讨论。

5.4　初级像差的相加定理

前面讨论了初级像差的意义，现在必须把注意力转向更困难的课题，去计算一般共轴系统的初级像差系数。前面已经讲过，这相当于确定施瓦茨蔡耳德微扰程函幂级数展开式中的四次方项。为了不致中断主要的计算脉络，首先来考虑一个光学系统的微扰程函对系统每个面成像的微扰程函是什么依赖关系，这将是合宜的。

考虑由两个旋转面组成的共轴系统。设 O_0 是轴上物点，O_1 和 O_2 分别是它被第一个面和被两个面所成的高斯像。另外，设

$$T_1 = T_1(p_0, q_0; p_1, q_1) \tag{1}$$

是第一个面上折射的角特征函数，

$$T_2 = T_2(p_1, q_1; p_2, q_2) \tag{2}$$

是第二个面上折射的角特征函数,前者以 O_0 和 O_1 两处的坐标轴为参考系,后者以 O_1 和 O_2 两处的坐标轴为参考系,四处坐标轴相平行,并且 Z 轴都沿着系统的旋转对称轴。假定各媒质都是均匀的,则角特征函数代表从两个原点到光线始段和末段的垂足之间的光程(见图 4.3)。因此,系统的角特征函数 T 由 T_1 和 T_2 相加而成:

$$T = T_1 + T_2 \tag{3}$$

在这个表达式中,光线在中间空间所用的变量 p_1 和 q_1 必须借助每个面的成像公式来消去。方便的做法是用相应的微扰程函数关系式进行显函数消元。

根据 § 5.2(13),微扰程函 ψ_1 和 ψ_2 为

$$\psi_1 = T_1 + \frac{D_0}{2n_0\lambda_0^2}(x_0^2 + y_0^2) - \frac{D_1}{2n_1\lambda_1^2}(x_1^2 + y_1^2) + x_0(\xi_1 - \xi_0) + y_0(\eta_1 - \eta_0)$$

和

$$\psi_2 = T_2 + \frac{D_1}{2n_1\lambda_1^2}(x_1^2 + y_1^2) - \frac{D_2}{2n_2\lambda_2^2}(x_2^2 + y_2^2) + x_1(\xi_2 - \xi_1) + y_1(\eta_2 - \eta_1)$$

而组合的微扰程函 ψ 为

$$\psi = T + \frac{D_0}{2n_0\lambda_0^2}(x_0^2 + y_0^2) - \frac{D_2}{2n_2\lambda_2^2}(x_2^2 + y_2^2) + x_0(\xi_2 - \xi_0) + y_0(\eta_2 - \eta_0)$$

利用(3)式,可由上列三式得到

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + (x_0 - x_1)(\xi_2 - \xi_1) + (y_0 - y_1)(\eta_2 - \eta_1)$$

利用 § 5.2(17),即有

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \frac{\partial\psi_1}{\partial\xi_1}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_1}{\partial\eta_1}\frac{\partial\psi_2}{\partial y_1} \tag{4}$$

如果把 ψ_1 和 ψ_2 的幂级数展开式代入(4)式,这就得出[因按 § 5.3(1),这里没有二次方项],

$$\psi = \psi_1^{(0)} + \psi_2^{(0)} + \psi_1^{(4)} + \psi_2^{(4)} + \cdots \tag{5}$$

未写出来的各项是六次方及更高次方的项。显然,现在 $\psi_1^{(4)}$ 和 $\psi_2^{(4)}$ 中的自变量可用它们的高斯值来取代。因此可用下述方法消去与中间空间有关的变量:在 $\psi_1^{(4)}(x_0, y_0; \xi_1, \eta_1)$ 中用 ξ_2, η_2 代替 ξ_1, η_1,而在 $\psi_2^{(4)}(x_1, y_1; \xi_2, \eta_2)$ 中用 x_0, y_0 代替 x_1, y_1,并把得到的二式相加。结果就是所求的函数 $\psi^{(4)}(x_0, y_0; \xi_2, \eta_2)$,它以 $(x_0, y_0; \xi_2, \eta_2)$ 四者为变量。下面用 $\psi_1^{(4)}$ 和 $\psi_2^{(4)}$ 的显函数更清楚地表出这一消元过程。

根据 § 5.3(3),$\psi_1^{(4)}$ 和 $\psi_2^{(4)}$ 的形式为

$$\left.\begin{aligned} &\psi_1^{(4)} = -\tfrac{1}{4}A_1 r_0^4 - \tfrac{1}{4}B_1\rho_1^4 - C_1\kappa_{01}^4 - \tfrac{1}{2}D_1 r_0^2\rho_1^2 + E_1 r_0^2\kappa_{01}^2 + F_1\rho_1^2\kappa_{01}^2, \\ &\text{其中} \\ &r_0^2 = x_0^2 + y_0^2, \qquad \rho_1^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2, \qquad \kappa_{01}^2 = x_0\xi_1 + y_0\eta_1; \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} &\psi_2^{(4)} = -\tfrac{1}{4}A_2 r_1^4 - \tfrac{1}{4}B_2\rho_2^4 - C_2\kappa_{12}^4 - \tfrac{1}{2}D_2 r_1^2\rho_2^2 + E r_1^2\kappa_{12}^2 + F_2\rho_2^2\kappa_{12}^2, \\ &\text{其中} \\ &r_1^2 = x_1^2 + y_1^2, \qquad \rho_2^2 = \xi_2^2 + \eta_2^2, \qquad \kappa_{12}^2 = x_1\xi_2 + y_1\eta_2. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

用 ξ_2, η_2 代替 ξ_1, η_1，用 x_0, y_0 代替 x_1, y_1；即用 ρ_2 代替 ρ_1，用 r_0 代替 r_1，并且用

$$\kappa_{02}^2 = x_0\xi_2 + y_0\eta_2 \tag{8}$$

代替 κ_{12}^2 和 κ_{01}^2，再相加就得到

$$\begin{aligned}\psi^{(4)} = &-\tfrac{1}{4}(A_1 + A_2)\mathrm{r}_0^4 - \tfrac{1}{4}(B_1 + B_2)\rho_2^4 - (C_1 + C_2)\kappa_{02}^4 - \tfrac{1}{2}(D_1 + D_2)\mathrm{r}_0^2\rho_2^2 \\ &+ (E_1 + E_2)\mathrm{r}_0^2\kappa_{02}^2 + (F_1 + F_2)\rho_2^2\kappa_{02}^2\end{aligned} \tag{9}$$

对任意多个面组成的共轴系统，类似的结果显然也成立。因此就证明了下列定理：

一个共轴系统的每一种初级像差系数，是这个系统中各个面相应的像差系数之和。

正是在上述分析的这一点上，赛德尔变量的优越性特别明显；因为这一简单而重要的结果从根本上说是由于采用了赛德尔变量，要是采用普通变量就不会如此。

5.5　一般共轴透镜系统的初级像差系数

前一节中确立的定理，把决定一般共轴系统初级像差系数的问题简化为计算系统中各个面相应系数的问题。现在就来作此计算。

5.5.1　利用两条傍轴光线表示的赛德尔公式

我们还记得，赛德尔像差系数（除了简单的数值因子外）可以认为与施瓦茨蔡耳德微扰程函 Ψ 的幂级数展开式中的四次方项系数是一样的。根据 §5.2(13)，把角特征函数 T 与一些二次方项相加，并把所得到的式子用赛德尔变量来表示，就得到函数 ψ。因为赛德尔变量与光线分量之间的关系是线性的，所以由一组变量转换为另一组变量时各项的阶不变。因此

$$\psi^{(4)}(x_0, y_0; \xi_1, \eta_1) = T^{(4)}(p_0, q_0; p_1, q_1) \tag{1}$$

4.1 节已经推导出一个旋转折射面的角特征函数直到四次方项的展开式。根据 §4.1(42)，四次方项的贡献可写成下列形式[①]：

$$\begin{aligned}T^{(4)}(p_0, q_0; p_1, q_1) = &-\frac{r}{4(n_1 - n_0)^2}[(p_0 - p_1)^2 + (q_0 - q_1)^2] \\ &\times \left(\frac{p_0^2 + q_0^2}{n_0} - \frac{p_1^2 + q_1^2}{n_1}\right) \\ &- \frac{(1 + b)r}{8(n_1 - n_0)^3}[(p_0 - p_1)^2 + (q_0 - q_1)^2]^2 \\ &+ \frac{a_0}{8n_0^3}(p_0^2 + q_0^2)^2 - \frac{a_1}{8n_1^3}(p_1^2 + q_1^2)^2.\end{aligned} \tag{2}$$

为方便起见，选轴上的点 $z = a_0$ 和 $z = a_1$ 作为轴上物点和它的高斯像，并且令（见图 5.9）

$$s = a_0, \qquad s' = a_1, \qquad t = a_0 + \mathrm{D}_0, \qquad t' = a_1 + \mathrm{D}_1 \tag{3}$$

---

① 与 4.1 节一样，r 代表这个面的半径。这个符号不要与 §5.3(2) 中引入的符号 r 混淆，r 代表旋转不变量 $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$。

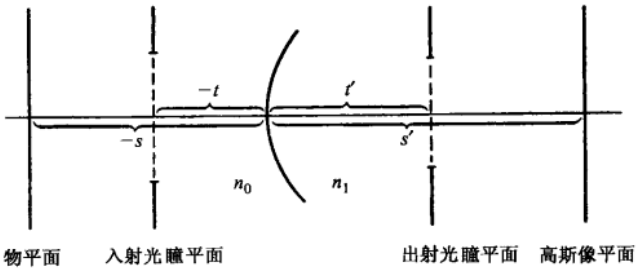


图 5.9 初级像差系数计算所用的符号

相应的阿贝不变量[§4.4(7)]将分别用 K 和 L 来表示:

$$n_0\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\right)=n_1\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right)=K \tag{4}$$

$$n_0\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{t}\right)=n_1\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{t'}\right)=L \tag{5}$$

在用赛德尔变量表示出各光线分量并代入(1)式中之前,有必要把(1)式改写成稍微不同的形式。由于(4)式,可有

$$\frac{r}{8(n_1-n_0)^3}[(p_0-p_1)^2+(q_0-q_1)^2]^2=$$

$$\frac{r^2}{8(n_1-n_0)^4}\left(\frac{n_1}{s'}-\frac{n_0}{s}\right)[(p_0-p_1)^2+(q_0-q_1)^2]^2$$

利用这一关系式,可将(2)式写成

$$\begin{aligned}T^{(4)}=&\frac{1}{8n_0s}\left\{\frac{n_0r}{(n_1-n_0)^2}[(p_0-p_1)^2+(q_0-q_1)^2]-\frac{s}{n_0}(p_0^2+q_0^2)\right\}^2\\&-\frac{1}{8n_1s'}\left\{\frac{n_1r}{(n_1-n_0)^2}[(p_0-p_1)^2+(q_0-q_1)^2]-\frac{s'}{n_1}(p_1^2+q_1^2)\right\}^2\\&-\frac{br}{8(n_1-n_0)^3}\{(p_0-p_1)^2+(q_0-q_1)^2\}^2.\end{aligned} \tag{6}$$

在(6)式中,各个自变量可用其高斯近似来代替;特别是,入射光线和折射光线上对应点的相应赛德尔变量可以互换。这样,为使 $\psi^{(4)}$ 作为 x_0, y_0, ξ_1 和 η_1 的函数,可用下式代替§5.2(9):

$$\left.\begin{aligned}p_0&=\frac{n_0\lambda_0}{D_0}\xi_1-\frac{1}{\lambda_0}x_0,\quad p_1=\frac{n_1\lambda_1}{D_1}\xi_1-\frac{1}{\lambda_1}x_0,\\q_0&=\frac{n_0\lambda_0}{D_0}\eta_1-\frac{1}{\lambda_0}y_0,\quad q_1=\frac{n_1\lambda_1}{D_1}\eta_1-\frac{1}{\lambda_1}y_0.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

还需对(7)式作进一步修改。物平面和像平面之间的高斯横向放大率(l_1/l_0),以及入射光瞳平面和出射光瞳平面之间的这一放大率(λ_1/λ_0),可由§4.4(14)和§4.4(10)得到,或者可由单球面成像是对球心投影这一几何关系更简单地得之如下:

$$\frac{l_1}{l_0}=\frac{r-s'}{r-s}=\frac{n_0 s'}{n_1 s},\qquad \frac{\lambda_1}{\lambda_0}=\frac{r-t'}{r-t}=\frac{n_0 t'}{n_1 t} \tag{8}$$

两式中第二个等号是由于利用了(4)和(5)两式。引入缩写符号

$$h=\frac{\lambda_0 s}{D_0}=\frac{\lambda_1 s'}{D_1},\qquad H=\frac{t}{\lambda_0 n_0}=\frac{t'}{\lambda_1 n_1} \tag{9}$$

其中用了(8)式和 §5.2(7)。这时(7)式变为

$$\left.\begin{aligned} p_0&=n_0\left(\frac{h}{s}\xi_1-\frac{H}{t}x_0\right),\quad p_1=n_1\left(\frac{h}{s'}\xi_1-\frac{H}{t'}x_0\right),\\ q_0&=n_0\left(\frac{h}{s}\eta_1-\frac{H}{t}y_0\right),\quad q_1=n_1\left(\frac{h}{s'}\eta_1-\frac{H}{t'}y_0\right).\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

如果与前面一样,用 r^2,ρ^2 和 κ^2 表示三个旋转不变量

$$\mathrm{r}^2=x_0^2+y_0^2,\qquad \rho^2=\xi_1^2+\eta_1^2,\qquad \kappa^2=x_0\xi_1+y_0\eta_1 \tag{11}$$

则(6)式中三个大括号项变为

$$(p_0-p_1)^2+(q_0-q_1)^2=\left(\frac{n_1-n_0}{\mathrm{r}}\right)^2(H^2\mathrm{r}^2+h^2\rho^2-2hH\kappa^2),$$

$$\frac{n_0 r}{(n_1-n_0)^2}[(p_0-p_1)^2+(q_0-q_1)^2]-\frac{s}{n_0}(p_0^2+q_0^2)$$
$$=H^2\mathrm{r}^2\left[L-(K-L)\frac{s}{t}\right]+h^2\rho^2K-2hH\kappa^2L$$

$$\frac{n_1 r}{(n_1-n_0)^2}[(p_0-p_1)^2+(q_0-q_1)^2]-\frac{s'}{n_1}(p_1^2+q_1^2)$$
$$=H^2\mathrm{r}^2\left[L-(K-L)\frac{s'}{t'}\right]+h^2\rho^2K-2hH\kappa^2L$$

把这些关系式代入(6)式,再回到(1)式,最后就得到所求的 $\psi^{(4)}$ 表达式:

$$\begin{aligned}\psi^{(4)}=&\frac{1}{8}\mathrm{r}^4H^4\left[\frac{b}{r^3}(n_0-n_1)+L^2\left(\frac{1}{n_0 s}-\frac{1}{n_1 s'}\right)-2L(K-L)\left(\frac{1}{n_0 t}-\frac{1}{n_1 t'}\right)\right.\\&\left.+(K-L)^2\left(\frac{s}{n_0 t^2}-\frac{s'}{n_1 t'^2}\right)\right]\\&+\frac{1}{8}\rho^4h^4\left[\frac{b}{r^3}(n_0-n_1)+K^2\left(\frac{1}{n_0 s}-\frac{1}{n_1 s'}\right)\right]\\&+\frac{1}{2}\kappa^4H^2h^2\left[\frac{b}{r^3}(n_0-n_1)+L^2\left(\frac{1}{n_0 s}-\frac{1}{n_1 s'}\right)\right]\\&+\frac{1}{4}\mathrm{r}^2\rho^2H^2h^2\left[\frac{b}{r^3}(n_0-n_1)+KL\left(\frac{1}{n_0 s}-\frac{1}{n_1 s'}\right)-K(K-L)\left(\frac{1}{n_0 t}-\frac{1}{n_1 t'}\right)\right]\\&-\frac{1}{2}\mathrm{r}^2\kappa^2H^3h\left[\frac{b}{r^3}(n_0-n_1)+L^2\left(\frac{1}{n_0 s}-\frac{1}{n_1 s'}\right)-L(K-L)\left(\frac{1}{n_0 t}-\frac{1}{n_1 t'}\right)\right]\\&-\frac{1}{2}\rho^2\kappa^2Hh^3\left[\frac{b}{r^3}(n_0-n_1)+KL\left(\frac{1}{n_0 s}-\frac{1}{n_1 s'}\right)\right]\end{aligned} \tag{12}$$

将此式与一般表达式 §5.3(3)相比较,就得到单个旋转折射面微扰程函四次方项的系数 $A, B, \cdots, F$。

现在将上一结果推广到任意个折射面组成的共轴系统是直截了当的。设用下标 i 表示属于第 i 个面的量,设 n_i 是第 i 个面后方媒质的折射率。利用 5.4 节的相加定理,并将(12)式和 §5.3(3)进行比较,即可得到

$$\left.\begin{aligned}
B &= \frac{1}{2}\sum_i h_i^4\left[\frac{b_i}{r_i^3}(n_i-n_{i-1})+K_i^2\left(\frac{1}{n_i s_i'}-\frac{1}{n_{i-1}s_i}\right)\right],\\
C &= \frac{1}{2}\sum_i H_i^2 h_i^2\left[\frac{b_i}{r_i^3}(n_i-n_{i-1})+L_i^2\left(\frac{1}{n_i s_i'}-\frac{1}{n_{i-1}s_i}\right)\right],\\
D &= \frac{1}{2}\sum_i H_i^2 h_i^2\left[\frac{b_i}{r_i^3}(n_i-n_{i-1})+K_iL_i\left(\frac{1}{n_i s_i'}-\frac{1}{n_{i-1}s_i}\right)\right.\\
&\qquad \left.-K_i(K_i-L_i)\left(\frac{1}{n_i t_i'}-\frac{1}{n_{i-1}t_i}\right)\right],\\
E &= \frac{1}{2}\sum_i H_i^3 h_i\left[\frac{b_i}{r_i^3}(n_i-n_{i-1})+L_i^2\left(\frac{1}{n_i s_i'}-\frac{1}{n_{i-1}s_i}\right)\right.\\
&\qquad \left.-L_i(K_i-L_i)\left(\frac{1}{n_i t_i'}-\frac{1}{n_{i-1}t_i}\right)\right],\\
F &= \frac{1}{2}\sum_i H_i h_i^3\left[\frac{b_i}{r_i^3}(n_i-n_{i-1})+K_iL_i\left(\frac{1}{n_i s_i'}-\frac{1}{n_{i-1}s_i}\right)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

这些就是一般共轴折射面系统初级像差系数的**赛德尔公式**[①]。

(13)式用系统中两条傍轴光线路径的标志数据表示出各初级像差系数,其中一条光线选自轴上物点,另一条选自入射光瞳中心。下面把同(13)式有关的各高斯公式概括列出,以便应用。设 d_i 是第 i 面和第 $(i+1)$ 面极点之间的距离。因为系统的前 i 个面所成的高斯像就是第 $(i+1)$ 面的物,所以得到传递公式

$$s_{i+1}=s_i'-d_i, \qquad t_{i+1}=t_i'-d_i \tag{14}$$

给出从第一面极点到物平面和入射光瞳平面的距离 s_1 和 t_1 之后,则可从阿贝关系式

$$\left.\begin{aligned}
n_{i-1}\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{s_i}\right) &= n_i\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{s_i'}\right)=K_i,\\
n_{i-1}\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{t_i}\right) &= n_i\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{t_i'}\right)=L_i
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

和(14)式,依次计算出距离 $s_1', t_1', s_2, t_2, s_2', t_2', \cdots$ 以及相应的数值 $K_1, L_1, K_2, L_2, \cdots$。我们还必须确定量 h_i 和 H_i。为简单起见,令入射光瞳平面上的任意长度 λ_0 等于 1,并利用关系式

① 赛德尔实际上只考虑了由球面组成的共轴系统。其后的作者考虑了非球面的影响(由常数 b_i 表征),[见 M. von Rohr, *Geometrical Investigation of Formation of Images in Optical Systems*, 由 R. Kanthack 译自德文(London, HM Stationery Office, 1920), p.344]。

$D_i = t_i' - s_i' = t_{i+1} - s_{i+1}$，则由(9)式可以看出，$h_i$ 和 H_i 可从关系式[①]

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= \frac{t_1}{n_0}, \qquad h_1 = \frac{s_1}{t_1 - s_1}, \\ \frac{H_{i+1}}{H_i} &= \frac{t_{i+1}}{t_i'}, \quad \frac{h_{i+1}}{h_i} = \frac{s_{i+1}}{s_i'}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

依次计算出来。由(9)式及阿贝关系式(4)和(5)，可得到下列关系式：

$$h_i H_i = \frac{s_i t_i}{n_{i-1}(t_i - s_i)} = \frac{s_i' t_i'}{n_i(t_i' - s_i')} = \frac{1}{L_i - K_i} \tag{17}$$

它可用来核对计算，而且后面还要用到。

5.5.2　利用一条傍轴光线表示的赛德尔公式

常常希望初级像差系数的表达形式能尽可能清楚地表明这些系数对光学系统特性参量的依赖关系，对此目的来说，(13)式不是最方便的一组公式。要计算(13)式，必须按照高斯光学定律对两条光线进行通过光学系统的追迹，其中一条光线选自轴上物点，另一条选自入射光瞳中心。然而当初赛德尔已然指出，可消去第二条光线的有关数据，从而用只与第一条光线有关的量来表示初级像差系数。当然，有一个同入射光瞳位置有关的量仍会保留在公式中，因为光阑位置的改变将明显地影响像差。

为了消去与来自入射光瞳中心的光线有关的数据，首先必须用 h_i 来表示高度 H_i。由(16)、(14)和(17)三式

$$\begin{aligned} \frac{H_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{H_i}{h_i} &= \frac{1}{h_i h_{i+1}} H_i h_i \left(\frac{t_{i+1}}{t_i'} - \frac{s_{i+1}}{s_i'}\right) \\ &= \frac{1}{h_i h_{i+1}} H_i h_i d_i \left(\frac{1}{s_i'} - \frac{1}{t_i'}\right) \\ &= \frac{d_i}{n_i h_i h_{i+1}} \end{aligned} \tag{18}$$

如果把 k_i 定义为

$$H_i = k_i h_i \tag{19}$$

则由(18)式得出

$$k_{i+1} = k_1 + \sum_{j=1}^{i} \frac{d_j}{n_j h_j h_{j+1}} \tag{20}$$

根据(16)式，这里

$$k_1 = \frac{H_1}{h_1} = \frac{t_1(t_1 - s_1)}{n_0 s_1} \tag{21}$$

(13)式中与来自入射光瞳中心的傍轴光线有关的其他各量，也可以很容易用与另一条光线有关的量来表示。由(17)和(19)两式

---

① 关系式 $h_{i+1}/h_i = s_{i+1}/s_i'$ 的含义是：设从轴上物点引一条傍轴光线，与第 i 面相交于某点，则 h_i 正比于此点的离轴高度。关系式 $H_{i+1}/H_i = t_{i+1}/t_i'$ 的意义对 H_i 来说与上类似，但这时傍轴光线引自入射光瞳中心。

$$L_i = K_i + \frac{1}{k_i h_i^2} \tag{22}$$

此外,由(15)和(22)两式

$$\begin{aligned}\frac{1}{n_i t_i'} - \frac{1}{n_{i-1} t_i} &= \frac{1}{n_i r_i} - \frac{1}{n_{i-1} r_i} - \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_{i-1}^2}\right) L_i \\ &= \frac{1}{n_i}\left(\frac{K_i}{n_i} + \frac{1}{s_i'}\right) - \frac{1}{n_{i-1}}\left(\frac{K_i}{n_{i-1}} + \frac{1}{s_i}\right) - \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_{i-1}^2}\right)\left(K_i + \frac{1}{k_i h_i^2}\right) \\ &= \frac{1}{n_i s_i'} - \frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{k_i h_i^2}\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_{i-1}^2}\right)\end{aligned} \tag{23}$$

把(19)、(22)和(23)三式代入(13)式,最后得出

$$\left.\begin{aligned}
B &= \frac{1}{2}\sum_i h_i^4 \frac{b_i}{r_i^3}(n_i - n_{i-1}) + h_i^4 K_i^2 \left(\frac{1}{n_i s_i'} - \frac{1}{n_{i-1} s_i}\right), \\
C &= \frac{1}{2}\sum_i h_i^4 k_i^2 \frac{b_i}{r_i^3}(n_i - n_{i-1}) + (1 + h_i^2 k_i K_i)^2 \left(\frac{1}{n_i s_i'} - \frac{1}{n_{i-1} s_i}\right), \\
D &= \frac{1}{2}\sum_i h_i^4 k_i^2 \frac{b_i}{r_i^3}(n_i - n_{i-1}) + h_i^2 k_i K_i (2 + h_i^2 k_i K_i)\left(\frac{1}{n_i s_i'} - \frac{1}{n_{i-1} s_i}\right) \\
&\quad - K_i \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_{i-1}^2}\right), \\
E &= \frac{1}{2}\sum_i h_i^4 k_i^3 \frac{b_i}{r_i^3}(n_i - n_{i-1}) + k_i (1 + h_i^2 k_i K_i)(2 + h_i^2 k_i K_i)\left(\frac{1}{n_i s_i'} - \frac{1}{n_{i-1} s_i}\right) \\
&\quad - \frac{1 + h_i^2 k_i K_i}{h_i^2}\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_{i-1}^2}\right), \\
F &= \frac{1}{2}\sum_i h_i^4 k_i \frac{b_i}{r_i^3}(n_i - n_{i-1}) + h_i^2 K_i (1 + k_i h_i^2 K_i)\left(\frac{1}{n_i s_i'} - \frac{1}{n_{i-1} s_i}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

这就是所求的赛德尔公式的形式。在这里,入射光瞳的位置只是通过因子 k_1 而引入式中。由(21)式,k_1 与从第一面的极点到入射光瞳平面的距离 t_1 有关。s_i, s_i', K_i 和 h_i 各量还是由(14)~(16)式中的适当关系式算出,而各个 k_i 则由(20)式定出。

5.5.3 佩茨瓦尔定理

由像散和像场弯曲系数的表达式可导出一个有意义的关系,它是由佩茨瓦尔给出的。现在有

$$\begin{aligned}C - D &= \frac{1}{2}\sum_i \left\{ [(1 + h_i^2 k_i K_i)^2 - 2h_i^2 k_i K_i - h_i^4 k_i^2 K_i^2] \left(\frac{1}{n_i s_i'} - \frac{1}{n_{i-1} s_i}\right) \right. \\ &\qquad \left. + K_i \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_{i-1}^2}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2}\sum_i \left\{ \frac{1}{n_i s_i'} - \frac{1}{n_{i-1} s_i} + K_i \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_{i-1}^2}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2}\sum_i \frac{1}{r_i}\left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_{i-1}}\right)\end{aligned} \tag{25}$$

其中曾用了(15)式。

根据 5.3 节，C 和 D 决定弧矢场曲和切向场曲。设 n_a 表示最后媒质的折射率，由 §5.3(18)和 §5.3(21)得出

$$C=\frac{1}{4n_a}\left(\frac{1}{R_t}-\frac{1}{R_s}\right),\qquad D=\frac{1}{2n_a}\frac{1}{R_s} \tag{26}$$

因此(25)式可写成

$$\frac{1}{R_t}-\frac{3}{R_s}=2n_a\sum_i\frac{1}{r_i}\left(\frac{1}{n_i}-\frac{1}{n_{i-1}}\right) \tag{27}$$

这样就得到两个焦面的曲率之间的关系式，它只包含系统各折射面的半径以及相应的折射率。如果该系统没有球面像差、彗差和像散，则在一个半径 $R_s=R_t=R$ 的曲面上形成一个锐像；根据(27)式，这一曲面的半径由

$$\frac{1}{R}=-n_a\sum_i\frac{1}{r_i}\left(\frac{1}{n_i}-\frac{1}{n_{i-1}}\right) \tag{28}$$

给出。这个结果称为**佩茨瓦尔定理**。

下一条件

$$\sum_i\frac{1}{r_i}\left(\frac{1}{n_i}-\frac{1}{n_{i-1}}\right)=0 \tag{29}$$

称为**佩茨瓦尔条件**，它是**像场为平面**的必要条件。但是应该记住，这个条件属于赛德尔理论的范围；超出这一范围就失去它的意义。

不论是否有像差，一个球面，如果它与两个焦面相切于其公共轴点，并且球面半径 R 由(28)式给出，则此球面称为**佩茨瓦尔面**。根据(27)和(28)两式，弧矢焦面、切向焦面和佩茨瓦尔面三者曲率半径的关系为

$$\frac{3}{R_s}-\frac{1}{R_t}=\frac{2}{R} \tag{30}$$

5.6　例子：一个薄透镜的初级像差

现在利用赛德尔公式去求一个放在空气(真空)中而折射率为 n 的薄透镜的初级像差系数。在这种情况下，

$$n_0=n_2=1,\qquad n_1=n \tag{1}$$

因透镜厚度 d 已假定可以忽略，则根据 §5.5(14)，有

$$s_2=s_1' \tag{2}$$

并且由 §5.5(15)得出

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{r_1}-\frac{1}{s_1}=n\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{s_1'}\right)=K_1,\\ n\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s_2}\right)=\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s_2'}\right)=K_2.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

另外,由 §5.5(16)、§5.5(21)和 §5.5(20),并利用(2)式,得出

$$\left.\begin{aligned} h_1 = h_2 = h, \qquad & k_1 = k_2 = k, \\ h = \frac{s_1}{t_1 - s_1}, \qquad & k = \frac{t_1(t_1 - s_1)}{s_1}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

式中

用一些简单的参量来表征该透镜将带来方便。设$\mathcal{P}$是透镜的光焦度[见 §4.4(35)和 §4.4(36)]

$$\mathcal{P} = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{5}$$

并且设

$$\sigma = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \tag{6}$$

由(3)式,

$$(n-1)\frac{1}{r_1} = \frac{n}{s_1'} - \frac{1}{s_1}, \qquad (n-1)\frac{1}{r_2} = \frac{n}{s_2} - \frac{1}{s_2'} \tag{7}$$

将二者相减,并应用(2)式,则有

$$\frac{1}{s_2'} - \frac{1}{s_1} = \mathcal{P} \tag{8}$$

这个关系式可写成

$$-\frac{1}{s_1} - \frac{\mathcal{P}}{2} = -\frac{1}{s_2'} + \frac{\mathcal{P}}{2} = \mathcal{K} \tag{9}$$

$\mathcal{K}$对该透镜所起的作用类似于 K 对单个面所起的作用。因此$\mathcal{K}$被称为**透镜的阿贝不变量**。

后面将看到,透镜两个面的形变系数 b_1 和 b_2 只通过量

$$\beta = (n-1)\left(\frac{b_1}{r_1^3} - \frac{b_2}{r_2^3}\right) \tag{10}$$

出现于公式中;这个量可称为**透镜的形变系数**。

现在用参量$\mathcal{P}$,σ,β 和$\mathcal{K}$来表示赛德尔公式 §5.5(24)中出现的各量。前三个参量是表征透镜的,最后一个参量确定物的位置。第一步,由(3)式得出

$$K_1 = \mathcal{K} + \frac{\sigma + n\mathcal{P}}{2(n-1)}, \qquad K_2 = \mathcal{K} + \frac{\sigma - n\mathcal{P}}{2(n-1)} \tag{11}$$

另外,

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{ns_1'} - \frac{1}{s_1} &= \frac{n^2-1}{n^2}\mathcal{K} + \frac{\sigma}{2n^2} + \frac{\mathcal{P}}{2}, \\ \frac{1}{s_2'} - \frac{1}{ns_2} &= -\frac{n^2-1}{n^2}\mathcal{K} - \frac{\sigma}{2n^2} + \frac{\mathcal{P}}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

代入赛德尔公式 §5.5(24),就得到一个薄透镜的初级像差系数表达式如下:

$$\left.\begin{aligned} B &= h^4 U, \\ F &= h^4 kU + h^2 V, \\ C &= h^4 k^2 U + 2h^2 kV + \tfrac{1}{2}\mathcal{P}, \\ D &= h^4 k^2 U + 2h^2 kV + \frac{n+1}{2n}\mathcal{P}, \\ E &= h^4 k^3 U + 3h^2 k^2 V + k\frac{3n+1}{2n}\mathcal{P}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\beta + \frac{n^2}{8(n-1)^2}\mathcal{P}^3 - \frac{n}{2(n+2)}\mathcal{K}^2\mathcal{P} \\ &\quad + \frac{1}{2n(n+2)}\mathcal{P}\left[\frac{n+2}{2(n-1)}\sigma + 2(n+1)\mathcal{K}\right]^2, \\ V &= \frac{1}{2n}\mathcal{P}\left[\frac{n+1}{2(n-1)}\sigma + (2n+1)\mathcal{K}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

这里将只考虑**入射光瞳与透镜重合**($t_1 = 0$)的情况。根据(4)式,这时

$$h = -1, \qquad k = 0$$

而(13)式变为

$$\left.\begin{aligned} B &= U, \\ F &= V, \\ \frac{1}{2}(C+D) &= \frac{2n+1}{4n}\mathcal{P}, \\ \frac{1}{2}(C-D) &= -\frac{1}{4n}\mathcal{P}, \\ E &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

可以看出,(14)式所定义的两个量 U 和 V,代表当光阑位于一个透镜的平面上时透镜的球面像差和彗差。这样的一个透镜没有畸变($E = 0$),但总存在像散和像场弯曲($C \neq 0, D \neq 0$)。

让我们考察一下,对于一个给定的透镜($\mathcal{P}, \sigma, \beta$ 即给定),当光阑置于其平面上时,看是否存在一对不晕点($B = F = 0$)。根据(15)式,要没有彗差,须使 $V = 0$,即必须

$$\frac{n+1}{2(n-1)}\sigma + (2n+1)\mathcal{K} = 0 \tag{16}$$

这时由(9)式得到物距 s_1 为:

$$\frac{1}{s_1} = -\frac{1}{2}\mathcal{P} + \frac{n+1}{2(n-1)(2n+1)}\sigma \tag{17}$$

如按此选择 s_1,透镜的球面像差就随之完全确定。因此对于给定的一个透镜,当光阑位于其平面上时,一般不存在一对不晕点。然而,如果只给定$\mathcal{P}$和 σ,则适当选择形变系数 β 可消去球面像差。

反过来说,如果给定物距 s_1 和焦距 $f=1/\mathcal{P}$,则第一步可根据无彗差这一要求来选择半径 r_1 和 r_2。按照(17)、(5)和(6)三式,在这种情况下,得到

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{r_1}&=\frac{2n+1}{n+1}\frac{1}{s_1}+\frac{n^2}{n^2-1}\mathcal{P},\\ \frac{1}{r_2}&=\frac{2n+1}{n+1}\frac{1}{s_1}+\frac{n^2-n-1}{n^2-1}\mathcal{P}.\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

例如,对于物在无穷远($s_1=\infty$),并且 $n=1.5$,上式给出,

$$r_1=\frac{5}{9}\frac{1}{\mathcal{P}}=\frac{5}{9}f,\qquad r_2=-5\frac{1}{\mathcal{P}}=-5f\tag{19}$$

图 5.10 示出这样一个无彗差透镜,图中的 C_1 和 C_2 是该透镜两个面的曲率中心。

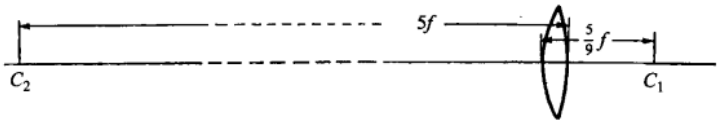


图 5.10 无彗差薄透镜(物在无穷远)

第二步,可适当选择 β 以消去球面像差。当物在无穷远时,根据(9)式则有$\mathcal{K}=-\mathcal{P}/2$,因此由(16)式得出 $\sigma=(2n+1)(n-1)\mathcal{P}/(n+1)$;于是,根据无球面像差的条件 $U=0$,就得到 β 的表达式如下:

$$-\frac{1}{2}\beta=\mathcal{P}^3\left\{\frac{n^2}{8(n-1)^2}-\frac{n}{8(n+2)}+\frac{1}{2n(n+2)}\left[\frac{(n+2)(2n+1)}{2(n+1)}-(n+1)\right]^2\right\}$$

由此得出

$$\beta=-\frac{n^3}{(n^2-1)^2}\mathcal{P}^3\tag{20}$$

当 $n=1.5$ 时,上式给出

$$\beta=-\tfrac{54}{25}\mathcal{P}^3\tag{21}$$

将上式和(19)式代入(10)式,消去两边共同因子$\mathcal{P}^3$,得到

$$729b_1+b_2=-540\tag{22}$$

这一条件可被满足,例如取 $b_1=b_2=-0.74$。

如果不消除彗差,则可首先设法尽量减小球面像差。这时可以发现,如果焦距是正的,则只有当物位于某一限定范围时,才能完全除去球面像差;当 $n=1.5$ 时,这一范围位于透镜后方 $0.36f$ 到 $0.44f$ 之间。物在其他任何位置时,总有一定数量的球面像差存在。

为了改善像场弯曲,透镜必须与一个放在适当位置的光阑一起使用,这个位置可由一般公式(13)定出。对于一个具有正焦距并且 $n=1.5$ 的透镜,只有当物位于透镜前方一焦距长度到透镜后方半焦距长度的范围内时,才能消去像场弯曲。

对于一个由若干透镜组成的系统,计算变得更加复杂。这时消除色差具有头等重要性。由两个薄透镜胶合组成的消色差望远物镜的初级像差,研究起来还比较容易一些,结果发现,

除了像散和像场弯曲以外，其他初级像差均可消去；因此它只可用于小视场范围（对一个 $f/10$ 系统，至多到 3°左右）。

5.7　一般共轴透镜系统的色差

4.7 节中已经简单讨论过色差。这里将利用前几节的一般公式系统，推导出像的位置色差和放大率色差的显表达式[①]。假定系统已对单色光作了精确校正。如果只考虑初级像差，这一理想化是许可的；因为与像差本身的大小相比，波长改变很小时相应单色像差的变化可假定很小；所以一般说来，这些变化与赛德尔理论中所忽略的项属于相同的数量级。

根据 § 5.5(15)和 § 5.5(14)，

$$n_{i-1}\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{s_i}\right)=n_i\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{s_i'}\right)=K_i \tag{1}$$

$$s_{i+1}=s_i'-d_i \tag{2}$$

如果用 δ 表示波长有微小改变 $\delta\lambda$ 时某个量的相应变化，则由(1)和(2)两式，得出

$$n_i\frac{\delta s_i'}{s_i'^2}-n_{i-1}\frac{\delta s_i}{s_i^2}=-\left(\frac{\delta n_i}{n_i}-\frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right)K_i \tag{3}$$

$$\delta s_{i+1}=\delta s_i' \tag{4}$$

用 h_i^2 乘以(3)式，并且利用关系式

$$\frac{h_{i+1}}{h_i}=\frac{s_{i+1}}{s_i'} \tag{5}$$

我们得到

$$n_i\left(\frac{h_{i+1}}{s_{i+1}}\right)^2\delta s_{i+1}-n_{i-1}\left(\frac{h_i}{s_i}\right)^2\delta s_i=-h_i^2K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i}-\frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right) \tag{6}$$

令 α 表示系统中的面数。把所有(6)式那样形式的方程加起来，就得到

$$n_\alpha\left(\frac{h_{\alpha+1}}{s_{\alpha+1}}\right)^2\delta s_{\alpha+1}=n_\alpha\left(\frac{h_\alpha}{s_\alpha'}\right)^2\delta s_\alpha'=n_0\left(\frac{h_1}{s_1}\right)^2\delta s_1-\sum_{i=1}^{\alpha}h_i^2K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i}-\frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right)$$

因为物的位置与波长无关，$\delta s_1=0$，所以就得到**像的位置色差** $\delta s_\alpha'$ 的表达式如下：

$$\delta s_\alpha'=-\frac{1}{n_\alpha}\left(\frac{s_\alpha'}{h_\alpha}\right)^2\sum_{i=1}^{\alpha}h_i^2K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i}-\frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right) \tag{7}$$

其次考虑系统放大率 M 的色差。已知

$$M=\frac{l_1}{l_0}\frac{l_2}{l_1}\frac{l_3}{l_2}\cdots\frac{l_\alpha}{l_{\alpha-1}} \tag{8}$$

现利用 § 5.5(8)，

---

① 本节内容仍大体依照 K. Schwarzschild 的分析，*Abh. Königl. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl.*, **4**(1905—1906), No.3。重印于 *Astr. Mitt. Königl. Sternwarte Göttingen*(1905)。

$$\frac{l_i}{l_{i-1}}=\frac{n_{i-1}}{n_i}\frac{s_i'}{s_i}$$

因此

$$M=\frac{n_0}{n_\alpha}\left(\frac{s_1'}{s_1}\frac{s_2'}{s_2}\frac{s_3'}{s_3}\cdots\frac{s_\alpha'}{s_\alpha}\right) \tag{9}$$

取对数,再微分,

$$\begin{aligned}\frac{\delta M}{M}&=\frac{\delta n_0}{n_0}-\frac{\delta n_\alpha}{n_\alpha}+\sum_{i=1}^{\alpha}\left(\frac{\delta s_i'}{s_i'}-\frac{\delta s_i}{s_i}\right)\\&=\left(\frac{\delta n_0}{n_0}-\frac{\delta n_\alpha}{n_\alpha}\right)+\frac{\delta s_\alpha'}{s_\alpha'}-\frac{\delta s_1}{s_1}-\sum_{i=2}^{\alpha}\delta s_i\left(\frac{1}{s_i}-\frac{1}{s_{i-1}'}\right)\end{aligned} \tag{10}$$

上式中的求和项可改写为

$$\sum_{i=2}^{\alpha}\delta s_i\left(\frac{1}{s_i}-\frac{1}{s_{i-1}'}\right)=\sum_{i=2}^{\alpha}\frac{d_{i-1}\delta s_i}{s_i s_{i-1}'}=\sum_{i=2}^{\alpha}\frac{d_{i-1}}{s_i^2}\frac{h_i}{h_{i-1}}\delta s_i$$

但由 § 5.5(18),

$$\frac{d_{i-1}}{h_{i-1}}=(k_i-k_{i-1})h_i n_{i-1}$$

因此

$$\sum_{i=2}^{\alpha}\delta s_i\left(\frac{1}{s_i}-\frac{1}{s_{i-1}'}\right)=\sum_{i=2}^{\alpha}h_i^2 n_{i-1}\left(\frac{k_i-k_{i-1}}{s_i^2}\right)\delta s_i$$

或者按 k_i 的顺序重新排列,

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{\alpha}\delta s_i\left(\frac{1}{s_i}-\frac{1}{s_{i-1}'}\right)=&-n_0\left(\frac{h_1}{s_1}\right)^2 k_1\delta s_1+n_\alpha\left(\frac{h_{\alpha+1}}{s_{\alpha+1}}\right)^2 k_\alpha\delta s_{\alpha+1}\\&-\sum_{i=1}^{\alpha}k_i\left[n_i\left(\frac{h_{i+1}}{s_{i+1}}\right)^2\delta s_{i+1}-n_{i-1}\left(\frac{h_i}{s_i}\right)^2\delta s_i\right]\end{aligned}$$

利用(4)和(5)两式改写等式右边第二项,利用(6)式改写最后一项,得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{\alpha}\delta s_i\left(\frac{1}{s_i}-\frac{1}{s_{i-1}'}\right)=&-n_0\left(\frac{h_1}{s_1}\right)^2 k_1\delta s_1+n_\alpha\left(\frac{h_\alpha}{s_\alpha'}\right)^2 k_\alpha\delta s_\alpha'\\&+\sum_{i=1}^{\alpha}h_i^2 k_i K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i}-\frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right)\end{aligned}$$

把上式代入(10)式,并利用 $\delta s_1=0$ 这一事实,就得到

$$\frac{\delta M}{M}=\left(\frac{\delta n_0}{n_0}-\frac{\delta n_\alpha}{n_\alpha}\right)+\frac{\delta s_\alpha'}{s_\alpha'}\left(1-\frac{n_\alpha}{s_\alpha'}h_\alpha{}^2 k_\alpha\right)-\sum_{i=1}^{\alpha}h_i^2 k_i K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i}-\frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right)$$

但由 § 5.5(22)和 § 5.5(15),

$$\frac{\delta s'_\alpha}{s'_\alpha}\left[1-\frac{n_\alpha}{s'_\alpha}h_\alpha^2 k_\alpha\right]=\frac{\delta s'_\alpha}{s'_\alpha}\left[1-\frac{n_\alpha}{s'_\alpha(L_\alpha-K_\alpha)}\right]$$

$$=\frac{\delta s'_\alpha}{s'_\alpha-t'_\alpha}$$

因此最后得到**放大率色差** δM 表达式如下：

$$\frac{\delta M}{M}=\left(\frac{\delta n_0}{n_0}-\frac{\delta n_\alpha}{n_\alpha}\right)+\frac{\delta s'_\alpha}{s'_\alpha-t'_\alpha}-\sum_{i=1}^{\alpha}h_i^2 k_i K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i}-\frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right) \tag{11}$$

如果物空间和像空间的折射率相等(通常正是这种情况)，则等式右边头两项就消去了。如果系统对像的位置是消色差的，则[由(7)式给出的]$\delta s'_\alpha$ 也为零，于是得到对像的位置和放大率消色差的两个条件如下：

$$\sum_{i=1}^{\alpha}h_i^2 K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i}-\frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right)=0 \tag{12}$$

和

$$\sum_{i=1}^{\alpha}h_i^2 k_i K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i}-\frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right)=0 \tag{13}$$

对于**一个在空气中的薄透镜**，利用 5.6 节中的适当公式，就得到这两个求和的表达式如下：

$$\Sigma h_i^2 K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i}-\frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right)=h^2\mathcal{P}\frac{\delta n}{n-1} \tag{14}$$

和

$$\Sigma h_i^2 k_i K_i\left(\frac{\delta n_i}{n_i}-\frac{\delta n_{i-1}}{n_{i-1}}\right)=h^2 k\mathcal{P}\frac{\delta n}{n-1} \tag{15}$$

式中的 h，k 和透镜光焦度 $\mathcal{P}$ 由 § 5.6(4)和 § 5.6(5)给出。把(14)式代入(7)式，把(15)式代入(11)式，就得到像的位置色差和放大率色差的相应表达式。

第6章　成像仪器

前面三章主要用高斯光学和赛德尔理论的逻辑推演来讲述光学成像的几何理论。这一光学分支极其有用，一个突出的例子就是它能以很直观的形式来说明光学仪器的工作原理。虽然光学系统的质量不能单独用高斯理论来估价，但可用高斯理论来指出各个光学元件所起的作用，因此常常不必涉及十分复杂的光学设计技术，就能得到一个简单（虽则有点近似）的图像来描述这个系统的作用。

在过去，光学仪器正是随着技术上困难的克服而得到发展的。由于下述两个原因，简直不可能一步步地叙述光学系统的设计。第一，对一已定方案的种种限制不是简单理论所能预测的；在一些特殊情况下，这需要补加更详细的分析，其中常包括冗长的计算。第二，种种实际困难使得本来很有价值的方案不能采用。因此，本章不打算讨论在各种情况下理论和实际上的种种限制，而只给出一些较重要的光学仪器装置所根据的基本原理，为以后更详细讨论光学成像理论的各章搭好一个骨架[①]。

6.1　眼睛

最简单的光学仪器，也许就是由单个会聚透镜的光敏面上形成物的实像那一类了。这类光学系统的例子在照相机和眼睛中就有（见图 6.1）。眼睛的后部内表面[②]称为**视网膜**，它由一层光敏细胞组成。因为眼睛构成了许多光学系统不可缺少的一部分，所以对眼睛特性的了解就成为仪器光学很重要的一部分。本节将描述眼睛的一些特性。

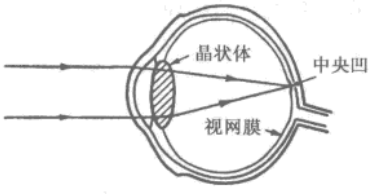


图 6.1　人的眼睛

眼睛内的折射主要发生在眼睛的第一个表面即**角膜**上，但也发生在眼睛的**晶状体**前后表面上，晶状体位于可收缩的**虹膜**后面。根据进入眼睛的总光通量的大小，虹膜的孔直径可依靠

---

① 对光学仪器更详细的讨论，可参见例如 R. Glazebrook (ed.), *Dictionary of Applied Physics*, Vol. IV (London, Macmillan, 1923); L. C. Martin, *An Introduction to Applied Optics*, Vol. II (London, Pitman, 1950); G. A. Boutry, *Optique Instrumentale* (Paris, Masson, 1946)。关于特殊类型仪器方面的参考书目和论文，可在 Jacobs 的书中找到，见 D. A. Jacobs, *Fundamentals of Optical Engineering* (New York, McGraw-Hill, 1943)。

② 对生理光学的详细讨论，读者可参见 H. Helmholtz 的标准著作，*Handbuch der Physiologischen Optik* (Hamburg and Leipzig); L. Voss, 3 Aufl., I (1909), II (1911), III (1910); 英译本编者 J. P. C. Southall (Optical Society of America 出版, 1924); 以及 J. P. C. Southall, *An Introduction to Physiological Optics* (Oxford, Oxford University Press, 1937)。

不自觉的肌肉作用而改变,其数值大约在1.5毫米到6毫米之间。晶状体是双凸的,它的密度以及折射率都不是均匀的,而是朝着外缘方向减小的。这在某种程度上足以校正球面像差(见5.3节)。晶状体的折射率平均值是1.44,而介于晶状体和视网膜之间的**玻璃状液**的折射率大约是1.34,接近于水的数值。

晶状体前后表面的曲率半径可依靠肌肉收缩而改变,以进行调焦。这种调焦的本领称为眼睛的**调节**,**正常**眼的明视最小距离是25厘米左右。眼睛的调节本领,因不同人而相差甚大,对于每个人又随年龄而变[①]。利用外加眼镜来校正过分偏离常态的眼睛,这成了**眼科**的课题。眼睛中发生的变态主要有三种:

(a) **近视** 这时来自无穷远物点的光线会聚的焦点落在视网膜的前面。这可用一个发散透镜放在眼睛前面加以校正。

(b) **远视** 这时一个无穷远物的真实焦点落在视网膜后面。可用一个会聚透镜加以校正。

(c) **像散** 这时眼睛的光焦度在包含其光轴的不同平面上是不同的。这种缺陷可用一个面是柱面或超环面的眼镜片加以校正。

视网膜含有两种主要类型的光敏细胞,**杆**状的和**锥**状的。根据通常的色视觉理论,锥状细胞可细分为三种色敏类型。它们在视网膜中部一小穴(**中央凹**)内占优势,具有最大的浓度。由中央凹确定的最明视场,决定视觉的**定像**,或者说决定眼睛"注视"的方向;这个最明视场的角范围略小于1度。在中央凹内的锥状细胞直径介于0.0015毫米和0.005毫米之间。杆状细胞对颜色范围的选择性不那么高,它们在视网膜外围部位占优势,对低强度的光源最敏感。这就是眼睛例如扫过夜空时出现"视觉转变"现象的原因。

无论用什么光学系统,能够分辨的细节是有一极限的。在8.6.2节中将看到,从根本上说,这一极限是由于光的波动性引起的。两个物点近到仍可用眼睛分辨的实际极限距离,称为眼睛的**视觉敏锐度**,这个量显然对光学设计者极有意义,因为目视仪器应达到的光学和机械容限都取决于这个量。对于一正常眼,用角度测量的这一极限角间隔约为1弧分,假定焦距为15毫米,这相当于视网膜上的间隔约0.0045毫米。当眼睛的孔径超过5毫米时,色差和球面像差的效应将使分辨本领降低。因此在设计目视仪器时,通常假定进入眼睛的光锥直径不大于4~5毫米。设计目视仪器以便补偿眼睛的缺陷,这种设计即使有,亦属罕见,因为眼睛中各种缺陷的大小因人而异。

6.2 照相机

在**照相机**中(见图6.2),利用一个透镜或一组透镜(常统称镜头——译者)在照相底片或底版的表面上形成物的一个倒立实像。物相对于照相机,可以是不动的,也可以是动的。在后一种情况,曝光时间一定要短;因此,为了收集足够的光,孔径必须尽可能大。由§4.8(24)可知,从一扩展物发射到像的单位面积上的光(照度E)与d^2/f^2成正比,d是入射光瞳的直径,f是焦距;即它与F数(标称焦比)的平方成反比。F数通常可用一可变**光阑**加以改变。

① 眼睛的光焦度在10岁时可包括14个屈光度的范围,25岁时可包括10个屈光度的范围,50岁时可包括2.5个屈光度的范围。

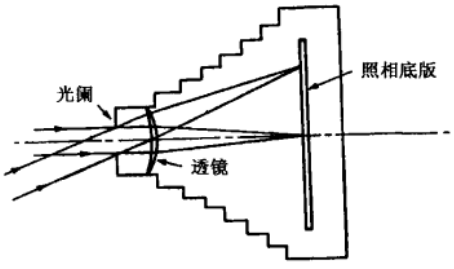


图 6.2 照相机

在无像差的情况下,一远物对第一节点的张角如为 $\delta\vartheta$,则其像的线大小为 $f\delta\vartheta$。因此,为了产生大的像,焦距一定要长。由此可见,照相机的两个主要特性就是它的光学系统的焦距以及它能使用的焦比范围。照相机另一个可能的要求就是它应能拍摄一个大的角视场。通常设计的照相机所拍摄的视场在 10°到 90°之间,所用的焦距在 1 英寸到 6 英尺之间。在天文照相术中需要更长的焦距(6 ~ 60 英尺),这时景场角度范围很小(约 1°)而所含有效点源个数多,常须予以高倍放大。

最简单的小照相机使用单个会聚透镜,通常是弯月形(凹凸)的,离透镜不远处有一光阑,如图 6.2 所示。对色差效应没有校正,因此,这种透镜当初还比较令人满意,因为那时照相乳胶一般只对光谱蓝端很窄范围(4000 ~ 4800 埃,1 埃 = 10^{-10} 米)灵敏。这种透镜现常用于较廉价的照相机中,焦比 $f/11$,视场 45°。

这种弯月形透镜一度称为**"观景透镜"**,首创于 1812 年左右,其后(在引入照相术后不久)出现舍伐列(Chevalier)消色差双合透镜[见图 6.3(a)]。这种消色差组合的目的在于使照相上有效光的焦点与目视光(λ = 5800 埃附近最亮)的重合;焦比低于 $f/16$ 就不能得到良好的像。人像照相术需要"快"得多的透镜(即具有更低焦比的透镜):结果导致**佩茨瓦尔人像透镜**被广泛使用,这种透镜首创于 1840 年前后[见图 6.3(b)],由两组分开的双合透镜组成。这种镜组所产生的像场面,曲率相当大,但视场在几度范围而焦比低至 $f/4$ 时仍可得到良好的清晰度。达耳迈耶(J. H. Dallmeyer)改进的佩茨瓦尔透镜现已广泛用于电影放映机中。

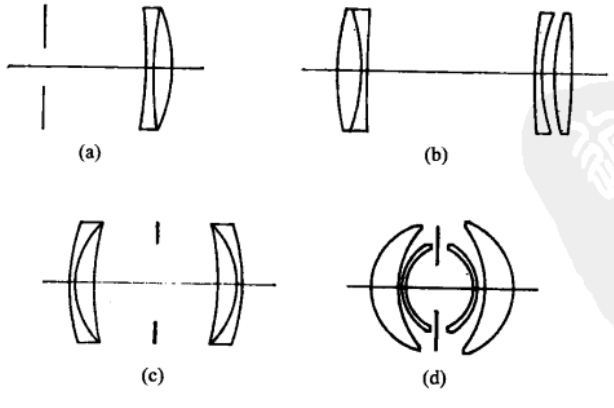


图 6.3 (a)舍伐列透镜;(b)佩茨瓦尔透镜;(c)快速直线透镜;(d)小孔径宽视场镜头

1841年前后已经知道,对称的透镜能自动消除畸变。这只有在放大率等于1的情况下才完全正确,不过对于其他的工作距离也基本上正确。这一原理已成为种种优质照相镜头系列的设计基础。Dallmeyer **快速直线透镜**(或译为快速消畸变镜头)[见图6.3(c)]首创于1866年,后为许多照相机所采用,但迟至1920年焦比才低至$f/8$,视场约45°。许多公司都制造这种透镜,后广为人知,通称"**不晕透镜**"(aplanat)。在拍摄很宽视场的透镜设计中,也继续遵守这一导致消除畸变的对称原理。这种透镜的最初形式是1900年**戈兹拟球心阑镜头**(Goerz Hypergon)(或译为对称弯月镜头),它在焦比约为25时像场平面可宽达150°,虽然通常在$f/16$时有90°就已经足够了。1933年出现的四元件**小孔径宽视场镜头**(Topogon)[见图6.3(d)],在$f/6.3$时可拍摄90°的视场,它代表着近代广角镜头的基本设计。

在19世纪的大部分时间内,透镜设计者只限于使用两种主要类型的玻璃:硅酸硼冕牌玻璃和重火石玻璃。1890年左右,耶拿(Jena)公司造出了一种全新类型的玻璃——钡冕玻璃,它的折射率高而色散本领低。在透镜系统中结合使用这种钡冕玻璃,可得到更高度的校正。耶拿的鲁道夫(P. Rudolph,他以创制多种照相镜头而著名)创造了"**消像散**"(anastigmatic)一词来描述透镜在某一离轴角上的像散可减小到零。先前,鲁道夫曾只利用较老类型的玻璃制成一种消像散透镜,后通称蔡斯(Zeiss)Protar镜头[见图6.4(a)]。这时,他利用三种类型的玻璃亦可制成一种消像散三合透镜。对称地使用两个这样的三合透镜,就构成高度校正的透镜组。这种透镜组,由蔡斯制成的称为**三合** Protar镜头,由戈兹制成的称为Dagor **镜头**或**双消像散镜头**[见图6.4(b)]。典型的这类透镜可工作于$f/4.5$,视场50°。鲁道夫进一步发现,如果每一半都由4个元件胶合组成,则这一系统成为"可变换的",即每一半各有不同的焦距。二者能分开单独使用或组合起来使用。1894年制成这样的透镜,称为**双** Protar镜头。

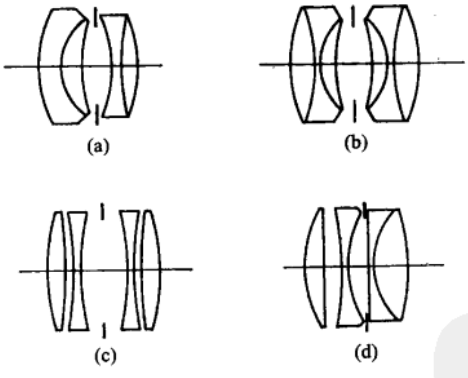


图6.4 (a)Protar镜头;(b)Dagor镜头;(c)Celor镜头;(d)Tessar镜头

1898年戈兹研制出一种由4个分立元件组成的透镜,称为Celor **镜头**[见图6.4(c)]。该镜头已成为设计焦比低至$f/4.5$的多种重要镜头的基础,例如斯坦海耳(H. A. Steinheil)的Unifocal镜头,以及用于航空照相术的Cooke **航摄透镜**,鲁道夫按照类似的方法设计,1902年制成Tessar镜头[见图6.4(d)]。这种镜头一直很著名,因为它比较便宜,焦比低至$f/3.5$而视场宽到60°时成像仍很好。现在已经能制造具有各种不同焦距的Tessar镜头。

鲁道夫的早期对称设计,即1895年制成的Planar镜头,用两个弯月形透镜作为其中第一个和最后一个元件[见图6.5(a)]。1920年以来,已研制出多种快速镜头,其中用弯月形透镜

作为第一个元件,而最后一个元件大多数用的是双合透镜,例如默特(Merté)的**蔡斯** Biotar 镜头[见图 6.5(b)]。

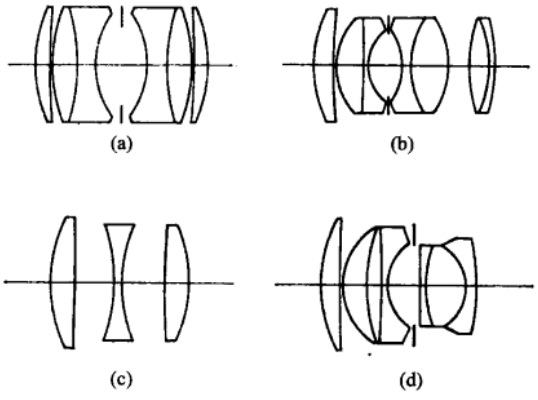


图 6.5 (a)Planar 镜头;(b)蔡斯 Biotar 镜头;(c)Cooke 三透镜镜头;(d)Sonnar 镜头

透镜设计中的元件分立趋势,起始于 1895 年泰勒(H. D. Taylor)研制的三透镜消像散镜头,或者称为**库克三透镜镜头**(Cooke Triplet)[见图 6.5(c)]。这时可利用在三个分立元件组成的系统中各个参量可以改变这一十分有利的条件。这种"消像散"设计已基本上取代了中档以下照相机内较老的快速直线型"不晕"透镜了。由库克三透镜镜头发展而成的高速型镜头[例如 Sonnar 镜头,f/1.5,见图 6.5(d)],已广泛用于电影摄影机和小型照相机中。在 Sonnar 镜头中,中央的负元件和第二个正元件均为三合透镜。

某些有特殊用途的照相机要求有效焦距长和相应视场小,则可采用一种光学布局,主要包括一个物镜和一个放大透镜。在**摄远镜头**中,放大透镜是一个放在原像前方的发散元件[见图 6.6(a)]。在**摄日仪**(photoheliograph,一种用于大尺度地拍摄太阳的仪器)中,放大透镜通常是一个会聚系统[见图 6.6(b)]。在这些系统中,有效焦距 f 由 §4.7(3)近似地给出:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{l}{f_1 f_2}$$

式中,f_1 和 f_2 分别是物镜和放大透镜的焦距,l 是两镜的距离。有效焦距比物镜到焦平面的总长度可大到 15 倍[①]。

最后应当注意,只有在扩展物的情况下,照相物镜的 F 数才是系统"作用速率"的近似量度。当物是点光源时(在天文照相中实际如此),在理想条件下,到达像平面的光将会聚在一个无限小的面积内,因此不用 F 数而用孔径直径的平方来表征它的集光本领。实际情况则比较复杂,因为有几个因素使得光散开到一个有限面积上(虽然这个面积常常很小)。其中主要的因素是衍射(见第 8 章)、照相乳胶成粒状以及大气的不稳定性。

---

① 关于照相透镜,更为详细的讨论可见 W. Merté, R. Richter and M. Von Rohr, *Das Photographische Objectiv* (Vienna, J. Springer, 1932)。较为新近的设计可参看下列论文:W. Taylor and H. W. Lee, *Proc. Phys. Soc.*, **47** (1935), 502; H. W. Lee, *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), **7** (1940), 130; R. Kingslake, *Proceedings of the London Conference on Optical Instruments* (London, Chapman & Hall, 1951), p. 1; C. G. Wynne, *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), **19** (1956), 298。关于照相透镜的历史记述,见 R. Kingslake, *A History of the Photographic Lens* (Academic Press, Boston, 1989)。

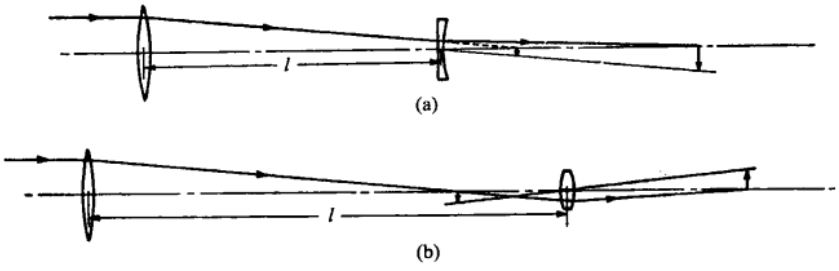


图 6.6 (a)远距照相镜;(b)摄日仪

6.3 折射望远镜[①]

望远镜是一种可用来看到远物放大像的光学系统。**天文折射望远镜**的原理如图 6.7 所示。它由两个会聚透镜组成;其中第一个称为**物镜**,通常是消色差双合透镜,它形成一个倒立实像 I;第二个透镜称为**目镜**,用来考察实像 I。在正常的调准状态下,物镜第二焦面与目镜第一焦面重合,因此入射平行光束亦以平行光束出射。利用一个辅助透镜就可使像正立。

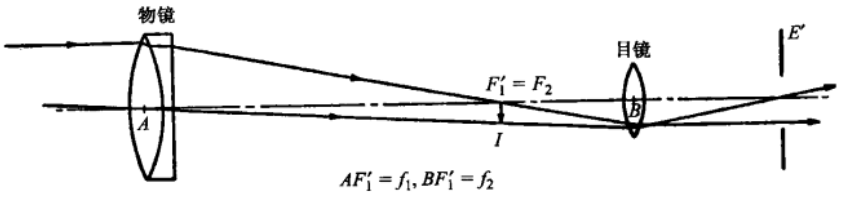


图 6.7 天文折射望远镜

此系统的入射光瞳与物镜重合;它由系统其余部分所成的像,即出射光瞳,在图 6.7 中用 E' 来表示。令眼睛的入射光瞳与 E' 重合;则所有沿不同离轴角进入物镜的光都能到达眼内。

用来观察无穷远物的仪器,其**放大率**定义为两个光瞳处的角放大率。利用史密斯-亥姆霍兹公式,即 §4.4(49),这等于两个光瞳平面上线性放大率的倒数,因此这种仪器的放大率等于入射光瞳半径与出射光瞳半径之比。由 §4.3(31)可直接得出这种仪器放大率的表达式,这时,因假定角度很小,所以可用 γ 和 γ' 来代替 $\tan\gamma$ 和 $\tan\gamma'$。这就给出了

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{f_1}{f_2'}$$

现在眼睛可调焦到非无穷远距离,并可调节望远镜以形成一虚像,与眼睛相距为 D[②]。但 D 不应小于 25 厘米左右,如前所述,这是正常眼可看清一物而不感疲劳的最近距离。

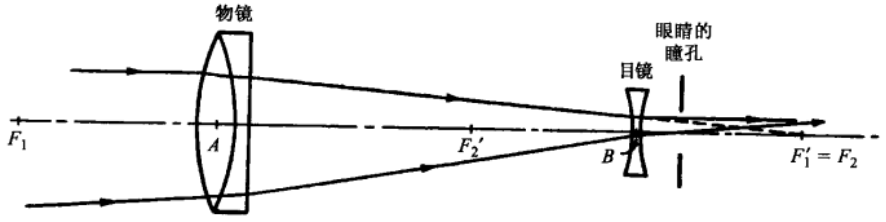
据确实记载,最早的望远镜是伽利略在 1609 年制成的。在这一系统中(见图 6.8),物镜是

① 关于这种望远镜,更为详细的讨论可参看,例如 A. Danjon and A. Couder, *Lunettes et Télescopes* (Paris, Revue d'Optique, 1935)。

② 这时,放大率变为

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{f_1}{f_2'} + \frac{f_1}{D}$$

一会聚透镜,而目镜是一发散透镜,位于原像前方,使得物镜和目镜的焦点在目镜后方重合。这时在无穷远处得到一正像,而没有中间像。这种望远镜通常称为**伽利略望远镜**。在这种望远镜中,孔径光阑不在物镜平面上,因为物镜被目镜所成的像位于两镜之间,所以这个像不能到达眼内。眼睛靠近目镜后方,因此眼睛的瞳孔就成为孔径光阑和出射光瞳。在视场界限上各点的主光线将从物镜边缘近旁通过,因此物镜是作为视场光阑而不是作为孔径光阑。



$AF_1 = f_1$, $AF_1' = f_1'$, $BF_2 = f_2$, $BF_2' = f_2'$

图 6.8 伽利略望远镜

伽利略望远镜的缺点是:视场限于很小,并且不具有一个可置以叉丝或标线的实像。另一方面,它的总长度小,并且给出正像,这就使得该系统非常适宜用于观剧镜,通常放大二至三倍。

在**双目望远镜**中,所用的光学装置与天文望远镜相似,但利用 4 次反射而得到一正像,如图 6.9所示。这 4 次反射都发生在所谓 Porro **棱镜**的玻璃-空气界面上,入射角为 45°;这个角度当然是超过临界角的。这种反射设计既方便又有效。常用于小型光学仪器中。另一种双目望远镜使用 König **正像棱镜**。该棱镜中使用了"屋脊"设计,屋脊前、后坡的两个反射面互成直角,误差不超过 1 弧秒,光束从脊下横向通过,如图 6.10 所示。然而,在通常的双目望远镜中,两个物镜的距离较大是有好处的,因为这能增大体视效应[①]。

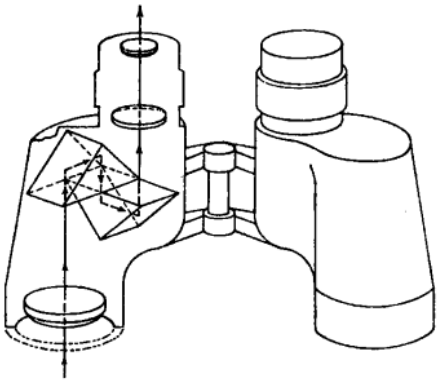


图 6.9 双目望远镜

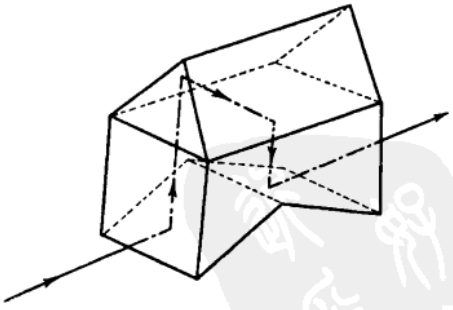


图 6.10 König 正像棱镜

地上望远镜一般类似于天文望远镜;但必须得到正像,其办法或者是像双目望远镜那样利用正像透镜,或者是利用附加透镜。一种典型的系统如图 6.11 所示。

① 关于双目望远镜,更为详细的论述见 M. von Rohr, *Die Binokularen Instrumente* (Berlin, J. Springer, 1920)。

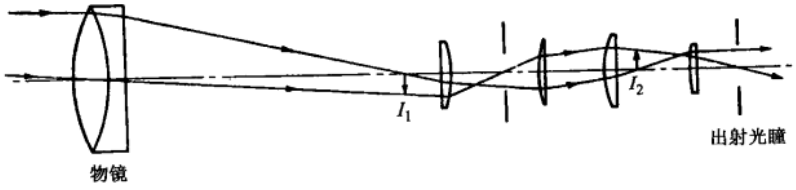


图 6.11 地上望远镜

望远物镜通常是一消色差双透镜组,适当选取各球面曲率半径,使球面像差很小。如果须采用胶合双透镜,则通常合适的设计是:其中第一个(冕牌玻璃)元件是等凸的,而第二个(火石玻璃)是平凹的[见图 6.12(a)]。如果要求既无彗差又无球面像差,如高质量天文望远镜中所用,则需要采用两个不胶合元件以利用其特有的布局灵活性,并选择好各球面半径以获得不晕设计。这种设计可近似图 6.12(b)所列,它包含一个凹凸火石玻璃元件。如果采用无彗差设计,并把某一面修琢为非球面以达到轴上消像散,则上述凹凸元件第一个面的陡凹曲面可以减小凹度。

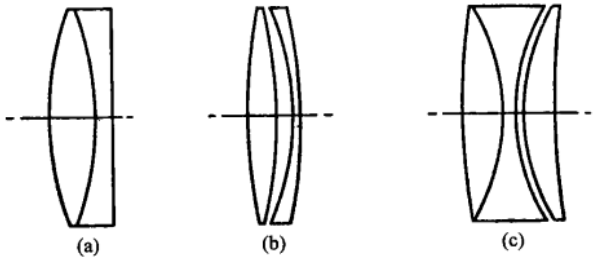


图 6.12 (a)胶合消色差透镜;(b)不晕消色差透镜;(c)照相-目视物镜

通常形式的物镜是把冕牌玻璃透镜放在前面,这种物镜最初称为**夫琅禾费物镜**。很少使用**"火石玻璃在前面"的物镜**,即**斯坦海耳**物镜,因为火石玻璃(不如冕牌玻璃稳定)易受大气侵蚀。

仿视照相物镜如图 6.12(c)所示,这是常用于折射望远镜中的第三种物镜。利用三种不同的玻璃,可在给定的光谱范围内大大减小焦点的色差。这种物镜对"照相"和"目视"的波长差不多一样好,曾一度广泛用于天文仪器中,其孔径达到 12 英寸左右。可是,中央元件两面陡凹,定心困难,以及早期使用各种不稳定的火石玻璃,都减损了这种镜头的价值。

目视望远镜的目镜,概括地说,必须满足两个要求。第一,它的焦距必须能产生所要求的放大率。第二,它必须具有足够大的孔径以收集来自扩展物的光。这些要求用单透镜就能达到,如图 6.13(a)所示;但更方便的是,也可以用两个较小的透镜,如图 6.13(b)所示的**冉斯登(Ramsden)目镜**的光学装置。

目镜应在一个便于放置眼睛的位置上形成孔径光阑的像。这个像在目镜后面,离目镜最后一个面的距离,称为**接目距离**(eye-relief)。

二元件目镜的第一个元件称为**场镜**,因为它通常很靠近原像。但它应与原像有一段距离,一方面免得看见这个透镜上的任何灰尘或缺陷,另一方面使得叉丝或标线能与像平面重合。第二个元件则称为**接目镜**。

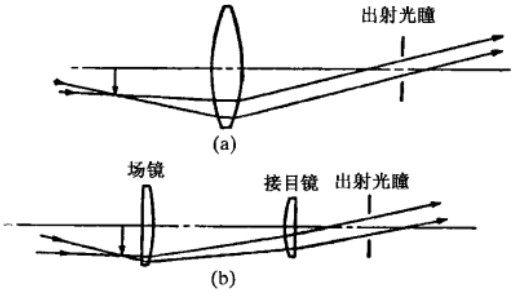


图 6.13 (a)单透镜目镜;(b)冉斯登目镜

最常用的目镜是冉斯登目镜;而另一主要类型是**惠更斯目镜**,如图 6.14(a)所示,它的场镜位于原像的前方。惠更斯目镜的缺点,首先是可得到的接目距离相当短,其次是它不能外加叉丝来使用。惠更斯目镜不能像冉斯登目镜那样对球面像差做高度校正,但它没有横向色差和轴外彗差。

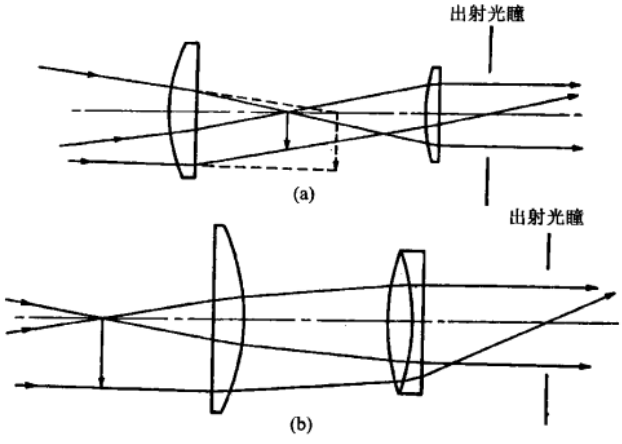


图 6.14 (a)惠更斯目镜;(b)Kellner 目镜

用两个透镜代替单透镜(见图 6.14),有助于排除有害的色差;而且,用双合透镜作为接目镜,可大大改善对冉斯登目镜的校正。更复杂的是"无畸变"目镜和"对称"目镜,它们各用 4 个元件,大体上类似于冉斯登目镜。它们对各种像差尤其是对畸变都校正得更好,并且对给定的光焦度可得到较长的接目距离。

潜望镜是一种仪器,用来观察被障碍物挡住而不能直接看见的物体,它的原理与望远镜的原理是一样的,但有两个要求使得这种仪器的设计更为复杂。第一,潜望镜的光路必须变曲才行,而像必须是正立、不反置的。要得到不反置的像,需用偶次反射或不用反射;图 6.15 示出两种简单装置,其中第一种使入射和出射光束方向平行,第二种使入射和出射光束方向逆平行。第一种须配合正像望远系统使用,第二种须配合倒像望远系统使用。另一种装置如图 6.16 所示,其中的出射光束方向是固定的,而第一个棱镜可转动,以便观察不同的方向。Dove **棱镜** *D* 内有一次反射,它的转速为顶部元件转速之半,以便保持正像。第 4 个元件是"屋脊"型(Amici)棱镜,以便总共发生 4 次反射。

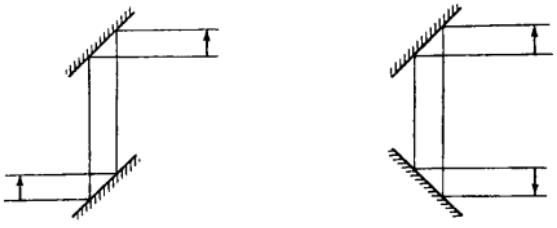


图 6.15　潜望镜

潜望镜的第二个复杂问题是这样引起的:虽然望远系统装在窄镜筒内,但希望有一个大的角视场。直径 8 英寸而长 40 英尺的镜筒,顶多只能有 2°的总视场。这个问题的解决办法是利用一系列透镜使光顺镜筒传下。这些透镜可以有不同的间距。图 6.17 示出一个三透镜系统的三种布局,系统的放大率为 1。

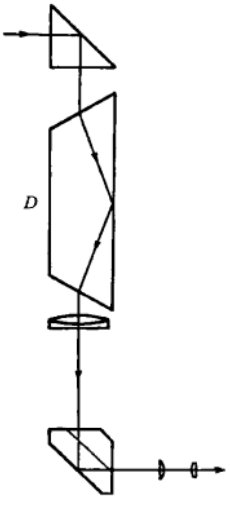


图 6.16　采用 Dove 棱镜的潜望镜

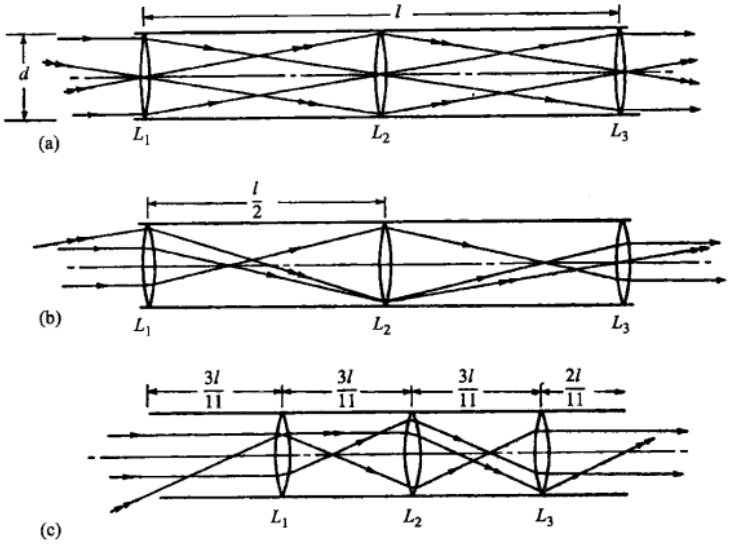


图 6.17　三透镜系统,放大率为 1

这三个系统的视场范围及其有效孔径如表 6.1 所示。很明显,透镜数目越多,各种可能组合的视场范围将越广[①]。

表 6.1　三透镜系统的一些性质

	透镜焦距			像	轴上孔径	视场(弧度)	视场边缘的渐晕
	L_1	L_2	L_3				
(a)	$l/2$	$l/4$	$l/2$	倒立	d	$2d/l$	0
(b)	$l/6$	$l/6$	$l/6$	正立	$d/2$	$2d/l$	100%
(c)	$l/11$	$l/11$	$l/11$	正立	$d/2$	$11d/2l$	~86%

① 更多的细节可参看 T. Smith, *Dictionary of Applied Physics*, ed. R. Glazebrook, Vol. IV, (London, Macmillan, 1923), p. 350。

6.4 反射望远镜[①]

在**天文反射望远镜**中,来自天体目标的光由一个凹面镜接收。此镜称为**主镜**(primary mirror),它的作用与折射望远镜中的物镜相同,即在其焦平面上形成物的一个实像。这个像或者直接接收在照相底版上,或者用目镜观察。这种类型的装置是现今使用的天文望远镜最普通的一种。同折射望远镜的情况一样,放大率等于物镜焦距与目镜焦距之比。

1668 年牛顿制成了第一台这种类型的望远镜。在他所用的装置中,主镜反射光线的路径上置有一小平面镜,将光线转向投到镜筒一侧成像,以便于观测(见图 6.18)。这种装置通称为**牛顿望远镜**。

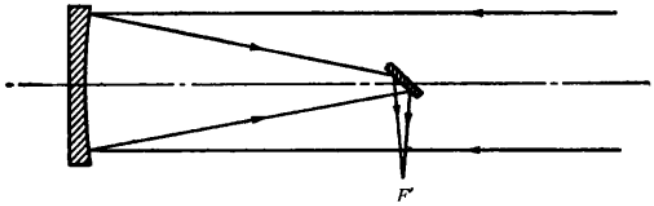


图 6.18 牛顿望远镜

为了获得一个消像散的轴上像,主镜的面形必须是抛物面。由于抛物面镜所成的轴外像因彗差而大大变坏,加上采用大的相对孔径,这就使得可用的视场范围很小。例如,一个 36 英寸 $f/6$ 的主镜,能拍摄的总视场仅约 20 弧分;而在 Hale 望远镜情况下,主镜直径达 200 英寸,视场的角直径约为 45 分[②]。

其他类型的反射望远镜采用两个反射镜——一个主镜(凹面镜)和一个副镜(secondary mirror)。在**卡塞格伦**(Cassegrain)**望远镜**中(见图 6.19),副镜为一凸面镜。在大型天文望远镜中,这种装置常取代牛顿装置被人选用,它可利用不同的反射镜来提供各种焦距。如果主镜的面形是抛物面,则副镜的面形必须是双曲的。还可给主、副二镜选取其他面形,以获得一个消像散的轴上像,同时伴有不同程度的轴外彗差。4.10 节中曾经提到,施瓦茨蔡耳德提出的二镜系统是不晕的,然而这两个镜子的面形更为复杂。卡塞格伦系统常用于地面观景望远镜中,因为它可使仪器具有长的焦距,但体积紧凑而价格低廉,同时能获得高放大率而不需要短的接目距离。

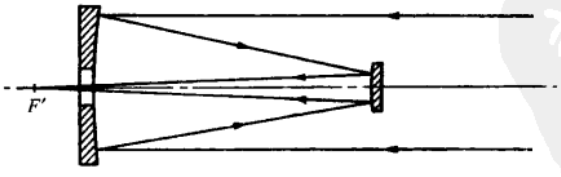


图 6.19 卡塞格伦望远镜

① 对反射望远镜的全面论述,包括其发展历史,可参见 R. N. Wilson, *Reflecting Telescope Optics*, Vol. I(1996), Vol. II(1999), (Berlin, Springer)。

② F. E. Ross, *Publ. Astr. Soc. Pac.*, **46**(1934), 342。对 200 英寸望远镜的一般论述,见 J. A. Anderson, *Publ. Astr. Soc. Pac.*, **60**(1948), 221,以及 B. Rule, *ibidem*, (1948), 225。

格雷果里(Gregorian)望远镜使用凹面镜作为副镜,把它放在主镜的主焦点以外。这种望远镜不如卡塞格伦望远镜常用。

在最大的反射望远镜中,可利用副镜得到很长的焦距,比最大的折射望远镜的焦距还要长。在 Coudé **装置**中,光束被第三平面镜反射,顺极轴而下(望远镜绕极轴转动),使得光束能射入一台固定的摄谱仪内。

反射望远镜的主要优点之一是它完全没有色差。这一点,以及它的镜面所需要的曲率比透镜小得多,就使得反射望远镜能具有比折射望远镜小得多的焦比。这不仅能得到更亮的像,而且形成紧凑得多的光学系统。此外,反射镜能制成比透镜更大的尺寸,因为镜体内部的光学不均匀性并无影响。

天文反射望远镜的缺点主要是:镜面和望远镜筒对热效应敏感,角视场小,取景范围不能大,以及制造足够稳固的底座在机械上有困难。事实上,这最后一点已成为 Hale 望远镜制造者面临的最困难问题。

用配置照相底版的反射望远镜进行拍照,要获得令人满意的图像,就切望能有较大的取景范围。增大有用视场的可行方法之一,是在照相底版正前面采用多个场镜。这些场镜有意设计成给系统引入这样的轴外彗差,使之补偿掉系统主要反射镜产生的彗差。一个 36 英寸反射望远镜以此方法可获得大约 $1\frac{1}{2}°$的视场①。

在用大反射系统拍摄宽角视场的尝试方面,施密特 1930 年左右所发明的光学装置,其成就更大得多,4.10 节中曾对此有所介绍②。虽然抛物面镜可使轴向光线理想成像,但离轴不远的地方,像质即因彗差而恶化;球面镜如在其曲率中心 C 加上一孔径光阑,虽可在与镜同心的宽球形像场面上均匀成像,但每个像都有显著球差。施密特则在该孔径光阑内镶入一个近乎平行平面的薄透明板,称为**校正板**,它的一个面为平面,而另一个面的面形经过修琢(见图 6.20,图 6.21)。这个板系用来对进入系统的平面波阵面进行"预校正",以精确补偿掉球面镜所引起的球差。

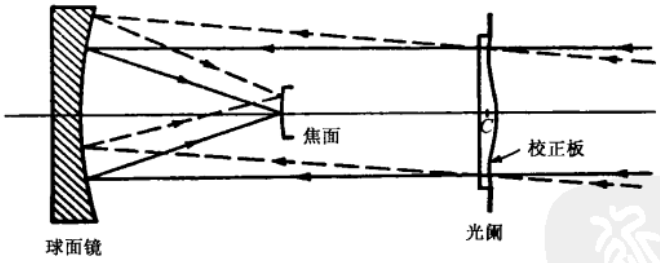


图 6.20　施密特照相机(校正板的修琢已大为夸大)

施密特照相机校正板的非球面轮廓表达式并不难推导。为此,让我们来比较球面镜和抛物面镜的表达式。半径 $R=2f$ 的球面镜方程为(见图 6.22):

① 见 F. E. Ross, *Astrophys. J.*, **81**(1935), 156。

② B. Schmidt, *Central-Zeitung f. Optik u. Mechanik*, **52**(1931), Heft 2 和 *Mitt. Hamburg. Sternw. Bergedorf*, **7**(1932), No. 36, 15。又见于 R. Schorr, *Zeitschr. f. Instrumkde*, **56**(1936), 336, *Mitt. Hamburg. Sternw. Bergedorf*, **7**(1936), Nr. 42, 175 和 *Astr. Nachr.*, **258**(1936), 45。

$$(z^{(s)}-2f)^2+y^2=(2f)^2$$

即

$$z^{(s)}=\frac{y^2}{4f}+\frac{y^4}{64f^3}+\cdots$$

而对于具有相同傍轴半径($R=2f$)的抛物面,

$$z^{(p)}=\frac{y^2}{4f}$$

沿轴方向入射的一束平行光线被抛物面反射后将成为消像散光锥(即共心光锥),因此在半径为 y 的环带上,必须加到球面镜入射波中的预校正量近似地等于

$$2(z^{(s)}-z^{(p)})=\frac{y^4}{32f^3}$$

其他含 y 六次方和更高次方的项均予忽略[①]。光线通过校正板后仍近乎平行,因此不管 y 是在镜上还是在板上测量,结果并无明显的差别。因此,如果设 n 是板的折射率,则在半径为 y 的环带上,板的厚度 $T(y)$必须大于其轴上厚度 $T(0)$,二者的差值由下式给出:

$$(n-1)[T(y)-T(0)]=2(z^{(s)}-z^{(p)})$$

即

$$T(y)-T(0)=\frac{y^4}{32(n-1)f^3} \tag{1}$$

这样一个校正板,其断面如图 6.21(a)所示。

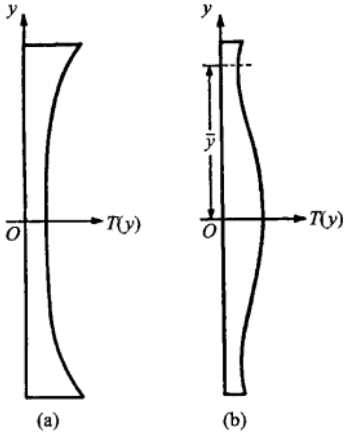


图 6.21 施密特校正板的断面图(其修琢已大为夸大)

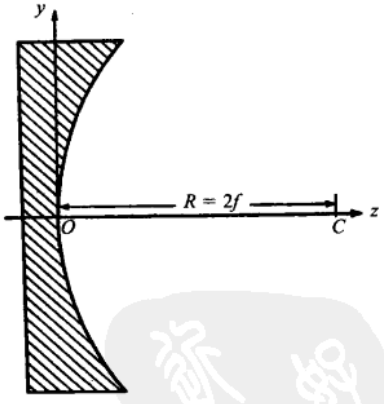


图 6.22 球面镜

校正板所要求的非球面性是很不显著的。例如,设有一个 $f/3.5$ 施密特照相机,其校正板的孔径直径 $2y_0=40$ 厘米,则 $f=140$ 厘米。设 $n=1.5$,则根据(1)式,最大非球面量$[T(y)-T(0)]_{极大}$等于 $y_0^4/32(n-1)f^3=0.0036$ 厘米。

这种校正可再推进一步。设球面镜用作比较的"参考抛物面"跟前例中稍微不同,其焦距

① 如果施密特照相机的焦比不低于 $f/3$ 左右,则可证明这一近似是容许的。

为 f' 而非 f，则 $z^{(p)} = y^2/4f'$，并且校正板的轮廓表达式不再是(1)式，而易为

$$T(y) - T(0) = \frac{y^4 - Ay^2}{32(n+1)f^3} \tag{2}$$

式中

$$A = 16f^3\left(\frac{1}{f'} - \frac{1}{f}\right)$$

采用一个按(2)式制作的校正板，这时平行于轴的入射光线通过系统后将会聚于一点，与镜的轴点距离为 f'。这一附加的自由度(f'的选择)可用来使板引入的色差减到最小。因为

$$\text{当 } y(2y^2 - A) = 0 \text{ 时，} \quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}y} = 0$$

由此得出，一条平行于轴并在高度 $\bar{y} = \sqrt{A/2}$ 处入射的光线，是不被校正板偏转的。半径 $\bar{y} = \sqrt{A/2}$ 的环带称为**中性带**。为了把色差减到最小，中性带必须相当靠近校正板的边缘①，如图 6.21(b)所示。

显然，校正板对倾斜通过它的光线所给予的修正量，与对垂直通过的光线并不精确等同。结果，系统去不掉轴外像差。不过，按通常标准来评价，在与镜同心的球形接收面上所成的像都是质量很好的②；甚至在低焦比和大视场的施密特照相机中也是如此，这种照相机工作的视场范围比通常设计的系统所能达到的范围要大许多倍。

采用施密特照相机原理的更复杂系统也已有人做过研究③，并且有些业已制成。其中最重要的有两种：一种是**施密特-卡塞格伦照相机**，它使用两个(球面或非球面)反射镜和一个校正板[见图 6.23(a)]；另一种是 Baker **超施密特照相机**，由一个球面镜、两个弯月镜和一个校正板[见图 6.23(b)]组成。前者的优点是，它以平像场面工作，与施密特照相机相比，其位置也可以设计得更便于操作；还有，这一系统的总长度比焦距相同的施密特照相机短。Baker 超施密特照相机则能以非常低的焦比工作。

6.5 照明仪器

照明仪器所起的作用是，从一个人造光源收集尽可能多的光，使之偏转进入光学系统的入射光瞳，并充满该光瞳所设定的接收角。光只能得自一个有限大小的光源，因而照明仪器的设计随光源的性质以及所要求的照明技术条件而定。

图 6.24 表示，一光学系统的入射光瞳直径为 r，系统所要求的照明角度范围同轴的最大夹角为 ϕ。设光源是圆形的，直径为 d。为获得最大效率，照明系统的工作放大率须为 r/d，而

---

① 更为准确地说，当中性带位于全板半径 y_0 的大约 0.87 处时，彩色模糊圈的直径可证明为最小。这相当于选取 $A = 3/2{y_0}^2$。对这一点的讨论，见 B. Strömgren, *Vierteljahrsschrift der Astr. Ges.*, **70**(1935), 82 和 E. H. Linfoot, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, **109**(1949), 279[又见于他写的 *Recent Advances in Optics*(Oxford, Clarendon Press, 1955), pp. 182, 192]。

② 这一点，部分原因在于场曲可被证明是这系统惟一的初级像差。(B. Strömgren, *loc. cit.*)对施密特照相机五级像差的研究，见 C. Carathéodory, *Elementare Theorie des Spiegelteleskops von B. Schmidt* (Leipzig, Teubner, 1940)，和 E. H. Linfoot, *loc. cit.*。

③ 对这类系统的评述，见 H. Slevogt, *Zeitschr. f. Instrumkde*, **62**(1942), 312; H. Kohler, *Astr. Nachr.*, **278**(1949), 1; E. H. Linfoot, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, **108**(1948), 81[又见于他写的 *Recent Advances in Optics*(Oxford, Clarendon Press, 1955) Chapter IV]。对 Baker 施密特照相机更详细的描述，见 F. L. Whipple, *Sky and Telescope*, **8**(1949), 90。

其孔径对光学系统入射光瞳的张角须为2ϕ,工作距离 w 则须大于某一规定值。由图 6.24 考虑可以看出,d 值较小时,**收集角** 2ψ 可较大,因而光的浪费可较少。此外,照明角大(ϕ大),常能使 w/r 值较小,因此能采用较大的光源而具有合理的效率。由此可见,在任一特定情况下,要使效率合理,光源的最大尺寸应有所限制;当需要大角度照明时,这一限制不那么严格。在照相放大机中($\phi\approx20°$),通常用大光源(毛灯泡或冷阴极管)提供效率合理的照明。在电影放映机中($\phi\approx5°$),要求有最大的亮度,用电灯丝是合适的。对探照灯来说,要求只在一两度范围内有一强光束,那就只能采用特别小而亮的光源,除非仪器尺寸大到不切实际。

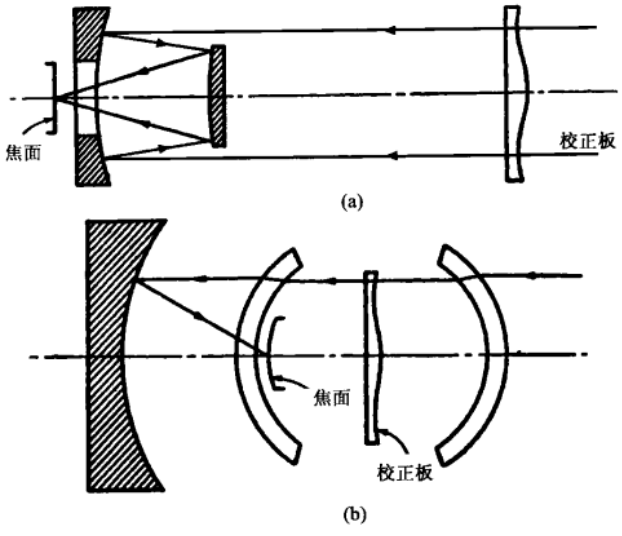


图 6.23 (a)施密特-卡塞格伦照相机;(b)Baker 超施密特照相机

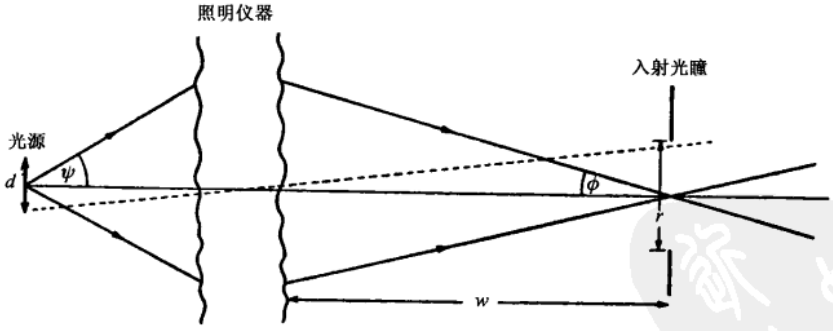


图 6.24 与照明仪器有关的符号

在许多仪器中,照明可以由一个合适的光源和一个聚光透镜来提供。这个透镜必须充分消除像差,以便能利用小光源的照明特点。每一聚光器可以说都具有一个"焦球"(focal sphere),它代表光源能够相应高效率使用的最小尺寸。双平凸透镜聚光器这种设计[见图 6.25(a)],通常使用已足够好,结果多令人满意,虽则有时还要采用三透镜聚光器[见图 6.25(b)]。在其他情况下,用单透镜可能就行了。

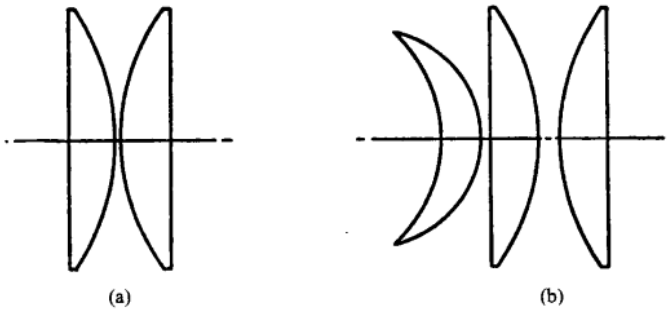


图 6.25 聚光透镜

显微镜所要求的照明涉及更复杂的考虑,以后将简要加以讨论(见 8.6.3 节和 10.6.2 节)。

6.6 显微镜

物体的表观大小是由它在视网膜上的像的大小来确定的。如果用眼睛直接观看,则物体的这一表观大小取决于它对眼睛的张角。如 6.1 节所述,对于正常眼,明视最小距离是 25 厘米左右,这是观察任何物体细节的最佳距离。如果在眼睛前面放一个会聚透镜,通过它去观看,则物体可显得被大为拉近;这是因为透镜在物体后面较远的地方形成它的一个虚像,一个放大的虚像(见图 6.26),眼睛这时所看到的正是这个虚像而并非物体本身。

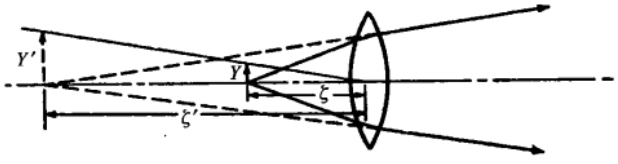


图 6.26 放大镜

观察近物所用的目视仪器,其**放大率**定义为两个张角 Ω' 和 Ω 之比,其中 Ω' 是物放在适当位置而像位于眼睛前方标准距离(通常为 25 厘米)时像对眼睛的张角,而 Ω 则是物在眼睛前方标准距离并直接观看时对眼睛的张角。这等效于把放大率 M 定义为当像位于仪器出射光瞳前方标准距离时普通的线性放大率。对于一个简单的透镜,即有(见图 6.26)

$$M=\frac{Y'}{Y}=\frac{\xi'}{\xi} \tag{1}$$

式中 $\xi'=25$ 厘米,是标准距离。利用 §4.4(31),

$$\frac{1}{\xi}-\frac{1}{\xi'}=\frac{1}{|f|} \tag{2}$$

因此

$$M=1+\frac{\xi'}{|f|}=1+\frac{25}{|f|} \tag{3}$$

在最后的表达式中,焦距 f 以厘米计。因 f 通常比 25 厘米小得多,故放大率可简单写成

$$M \approx \frac{25}{|f|} \tag{4}$$

放大镜有多种形式;在袖珍放大镜或钟表工人的眼镜中最常见的是简单双凸透镜或消色差双合透镜。也常采用一对分立的平凸透镜,它与冉斯登目镜相类似[见图 6.13(b)]。很明显,如果要求表观视场较大,并且放大率很高,则物和眼睛之间的距离将变得太短而很不方便。因此之故,人们发展了**显微镜**这种光学系统(伽利略发明于 1610 年左右),采用一个短焦距物镜和一个放大目镜,通过两级来实现高倍放大(见图 6.27)。

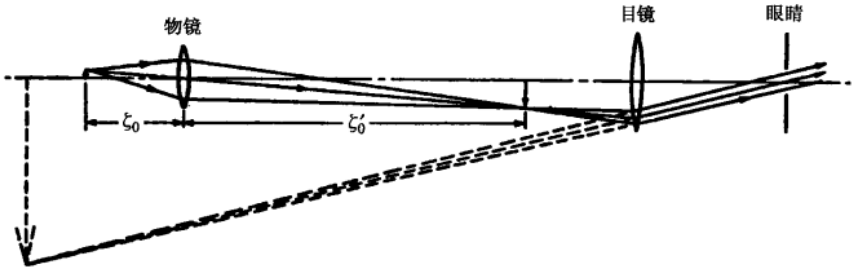


图 6.27 显微镜原理图示

显微镜的**物镜**形成物的一个放大像,其位置正好适合于眼睛通过**目镜**来观察。物镜的放大率为 $-\zeta_0'/\zeta_0$,其中 ζ_0 和 ζ_0' 是物镜的工作距离,二者满足(2)式。设 f_1 是以厘米计的目镜焦距,根据(4)式,目镜的放大率可写成 $25/|f_1|$。因此整个工作系统的放大率为

$$M = -\frac{25}{|f_1|}\frac{\zeta_0'}{\zeta_0}$$

负值表示像是倒立的。物镜和目镜的放大率通常分别写在显微镜的技术规格中。

在显微镜物镜一般技术规格中,另一个重要的量是它的**数值孔径**(NA),4.8.2 节已经给出它的定义为乘积 $n\sin\theta$,其中 θ 是物方的半角孔径(即来自轴上物点并被物镜接收的光线锥角之半),n 是物空间的媒质折射率。数值孔径这个量不仅是物镜集光本领的量度,而且也是它的分辨本领(即它所能达到的细节分辨极限)的量度,这一点将在 8.6.3 节中予以证明。这里,我们将讨论如何获得最大的数值孔径。

显微镜物镜一般必须高度校正球面像差和彗差以及色差,因为物镜接收光线的孔径范围要尽可能大。在低放大率(约 10×)的物镜中,可使用两个分立的胶合消色差透镜[见图 6.29(a)],并对整个组合校正球面像差和彗差。但这种透镜组不适宜作为高放大率(约 50× 以上)的物镜。这时,要使用不同的透镜系统,利用球面成像存在不晕点这一结果(见 4.2.3 节),方法如下:

物放在靠近平凸透镜的 P 点处[见图 6.28(a)],物和透镜之间的空间充满了油,其折射率大约等于透镜的折射率。设 C 是透镜弯曲部分的曲率中心,r 是它的曲率半径,则与 C 相距 r_1/n_1 的一点将在与 C 相距 $n_1 r_1$ 处形成一个虚像 P_1,并且这两点之间的成像是不晕的。在这种方法中,可使用较大的数值孔径,因为 P 点射出的光线的角散度在系统内被减小,故而并不引入单色像差。然而它引入了色差,这须由系统其余部分加以补偿。

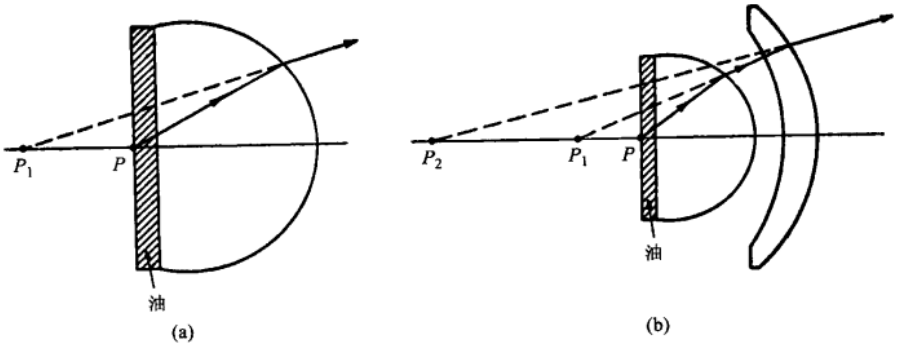


图 6.28 显微镜中,光线角散度的减小

光线的角散度还可以利用一个弯月形会聚透镜来进一步减小[①] [见图 6.28(b)]。弯月形透镜前表面的曲率中心在 P_1 点,而后表面的曲率半径使得 P 是相对于它的一个不晕点。光线经此面折射后在另一个不晕点 P_2 处形成一个虚像。进一步增加弯月形透镜的数目,可依次产生虚像 $P_3, P_4, \cdots$,后一个比前一个更远离 P 点,因此光线的角散度也一次比一次减小。不过,弯月形透镜数目很少有超过两个的,因为否则色差就不好补偿了。

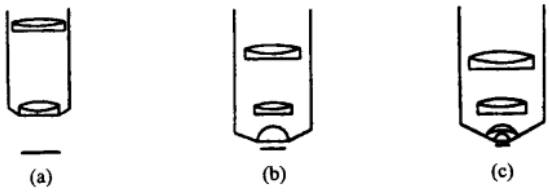


图 6.29 显微镜物镜:(a)低放大率;(b)中放大率;(c)高放大率

刚才描述的**油浸物镜**与直径相同的**干物镜**相比,可容纳更宽的光线锥。因为在干物镜的情况下,从保护物体的盖玻片出射的光线锥进入到空气中,结果光线由于折射而向外撇开,所以角散度就增大了;反之,在油浸物镜的情况下,光线从盖玻片出射时不折射。只有利用油浸物镜才能获得最大的数值孔径(约 1.4)。

有些显微镜物镜还要求对包括近紫外波长($\lambda \approx 2500$ 埃,1 埃 $= 10^{-10}$ 米)、可见波长和近红外波长的光均能工作。例如,当显微镜要同摄谱仪和光度学仪器联合使用时,就必须高度消色差。

伯奇(C. R. Burch)首先系统研究了无色差显微镜物镜,即反射显微镜物镜的设计[②],他以施瓦茨蔡耳德关于二反射镜不晕成像系统(4.10 节曾提到)的解析解为出发点。伯奇发现,如果数值孔径要超过 0.5,则至少必须要有一个反射镜为非球面。然而,采用反射系统,数值孔径无论如何也达不到最好的常规油浸物镜那样高。典型的伯奇无色差物镜的工作原理如图 6.30 所示。除无色差外,它的主要优点在于其工作距离(物与物镜最前头那个面的间距)很

① 这个方法出自 G. B. Amici, *Ann. de chim. et phys.* (3), **12**(1844), 117。

② C. R. Burch, *Proc. Phys. Soc.*, **59**(1947), 41; *ibid.*, **59**(1947), 47。第一篇文章还包括了对显微镜消色差物镜早期研究的评述。

大,可大到与物镜的焦距相当。它的一个缺点是副镜遮挡住一部分光,在数值孔径较低的球面系统中,光被遮挡可超过45%。

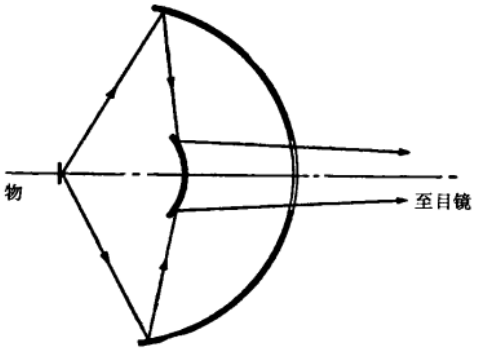


图 6.30 伯奇反射显微镜物镜

反射和折射相结合的显微镜物镜也有人做过研究。布沃思(A. Bouwers)[①] 曾按此制作过一个系统,其中反射发生在玻璃镜头内两个同心的球形界面上,反射面均镀了银,第二个面上的镀银呈如此分布,使遮光实际减小到20%。格雷(D. S. Grey)也描述过包括两个反射镜面并具有低遮光比的物镜[②]。它使用光焦度相当大的石英和萤石元件,虽然在整个紫外和可见光波长范围还要进行适当色差较正,但无须再对镜面施行修琢,否则这种修琢将必不可少。

在显微镜下观察的物体通常是不发光的,因此必须加以照明。在大多数情况下,物体呈薄片形状,材料透明。这时就用背后照明,即**透射照明**。对于低数值孔径的系统,环境的漫射光已足敷所需,可用一凹面镜倾斜收集并反射到观察物上,但在其他情况下则需用人造光源来照明。要得到足够强的光照,可采用辅助透镜系统——聚光器。照明方法有多种多样,其中两种将在第10章中介绍。

本节所谈仅仅是显微镜的基本原理。充分讨论显微镜中的成像情况,需要更为精细的方法(见8.6.3节,9.5节和10.6节)。

① A. Bouwers, *Achievements in Optics* (Amsterdam, Elsevier, 1946)。

② D. S. Grey, *Proceedings of the London Conference on Optical Instruments* (London, Chapman & Hall, 1951), p. 65。

第 7 章　干涉理论基础和干涉仪

7.1　引言

在第 3 章中，我们从电磁理论的基本方程导出了光的传播的几何模型，并且证明，当采取某些近似时，一束光中的强度变化可以用光线管横截面的变化来描述。当两个或两个以上的光束叠加在一起时，强度分布一般不能再用这样简单的方式来描写。例如，如果用适当的仪器把光源来的光分成两束，然后把它们叠加起来，就会发现叠加区域中的强度在极大与极小之间逐点变化：极大超过二光束强度之和，极小可能是零。这种现象称为**干涉**。下面就要看到，严格单色光束的叠加总能产生干涉。然而实际物理光源产生的光决不会是严格单色的，而是如我们从微观理论所得知，其振幅和位相都经受着极快的不规则涨落，以致眼睛和通常的物理探测仪器都跟不上。如果两束光来自同一光源，则这两束光中的涨落一般是关联的，完全关联的称为完全**相干**光束，部分关联的称为部分**相干**光束。在不同光源来的光束中，涨落是完全不关联的，这些光束就称为相互**不相干**的。当不同光源来的这种光束叠加在一起时，在通常实验条件下观察不到干涉，总强度处处都等于各束光强度之和。后面（见第 10 章）将看到，二光束中涨落之间存在的“关联度”，决定了这两束光叠加所产生的干涉图样的“调制深度”，反过来，关联度又通过干涉图样的“调制深度”表现出来。

从单个光束得到几个光束，有两种一般方法，人们根据这两种方法对产生干涉的装置进行分类。一种方法是，让光束通过并排放置的几个小孔。这种方法称为**波阵面分割**，它只适用于光源足够小的情况。另一种方法是采用一个或多个部分反射的表面，在各个表面上，一部分光被反射，一部分光被透射。这种方法称为**振幅分割**；它可用于扩展光源情况，因而效应的强度可比波阵面分割的大。无论哪种情况，把两个光束叠加产生的效应（**双光束干涉**）和两个以上光束叠加产生的效应（**多光束干涉**）分开考虑将有方便之处。

在历史上，干涉现象曾经是奠定光的波动性的基石（见“历史引言”），现今，它们在诸如光谱学和基本度量学中具有重要的实际应用。本章将主要讨论理想化情形，即来自理想单色光源的光束之间的干涉。初等单色理论足以描述大多数干涉实验仪器的作用。必要时，我们将借助傅里叶定理把实际光源并非单色的事实明确考虑进来；但是，这一事实总暗含在我们对扩展原光源的看法当中，我们认为这种光源系由大量互不相干的点源所组成。在全章中，凡可能时，都假定各光束遵守几何光学定律而忽略衍射效应，后者，如 3.1.4 节中所简单说明的，系发生在焦点或阴影边界附近。这些效应将在第 8 章中就单色光情况给以详细讨论。至于一般情况，即多色部分相干光的干涉和衍射，则在第 10 章中加以研究。

7.2　两个单色波的干涉

在前面，光的强度 I 是这样定义的，它等于在单位时间内、在垂直于能流方向的单位面积上通过的能量的时间平均值。对于平面波，根据 § 1.4(8)、§ 1.4(9)，

$$I = v\langle w\rangle = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\langle \mathbf{E}^2\rangle = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\langle \mathbf{H}^2\rangle \tag{1}$$

而且,在第 3 章中曾经看到,对于更一般类型的波,这些关系式也仍然有效,至少可作为近似表示。由于将对同一媒质中的强度进行比较,所以可以把能量$\langle \mathbf{E}^2\rangle$取做强度的量度。我们将主要讨论单色场,因而可把电矢量 **E** 表示成如下形式:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},\ t) = \mathcal{R}\{\mathbf{A}(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\} = \tfrac{1}{2}[\mathbf{A}(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \mathbf{A}^{\star}(\mathbf{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}] \tag{2}$$

式中 **A** 是一复矢量,它的三个笛卡儿直角分量为

$$A_x = a_1(\mathbf{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}g_1(\mathbf{r})}, \qquad A_y = a_2(\mathbf{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}g_2(\mathbf{r})}, \qquad A_z = a_3(\mathbf{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}g_3(\mathbf{r})} \tag{3}$$

式中的 a_j 和 $g_j(j=1,2,3)$都是实函数。对于一个均匀平面波,振幅 a_j 是常数,而相函数 g_j 的形式为 $g_j(\mathbf{r}) = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \delta_j$,其中 **k** 是传播矢量,$\delta_j$ 是决定偏振态的相常数。

从(2)式,

$$\mathbf{E}^2 = \tfrac{1}{4}(\mathbf{A}^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t} + \mathbf{A}^{\star 2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t} + 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{\star}) \tag{4}$$

对比周期 $T = 2\pi/\omega$ 大得多的时间间隔取平均,由而得到

$$\langle \mathbf{E}^2\rangle = \tfrac{1}{2}\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{\star} = \tfrac{1}{2}(|A_x|^2 + |A_y|^2 + |A_z|^2) = \tfrac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \tag{5}$$

现在假定,两个单色波 $\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$ 在某一点 P 叠加在一起。P 点的总电场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \tag{6}$$

因而

$$\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2 + 2\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2 \tag{7}$$

因此,P 点的总强度为

$$I = I_1 + I_2 + J_{12} \tag{8}$$

式中

$$I_1 = \langle \mathbf{E}_1{}^2\rangle, \qquad I_2 = \langle \mathbf{E}_2{}^2\rangle \tag{9a}$$

是这两个波的强度,而

$$J_{12} = 2\langle \mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2\rangle \tag{9b}$$

是**干涉项**。设 **A** 和 **B** 是这两个波的复振幅,其中

$$A_x = a_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}g_1}, \cdots, \qquad B_x = b_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}h_1}, \cdots \tag{10}$$

一般地讲,这两个波的(实)位相 g_j 和 h_j 是不同的,因为这两个波可以由不同的路径传到 P;但是,如果实验条件使得各个对应分量的**位相差**都一样,同等于 δ,则

$$g_1 - h_1 = g_2 - h_2 = g_3 - h_3 = \delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta\mathcal{S} \tag{11}$$

式中 $\Delta\mathcal{S}$是这两个波从它们的共同光源到 P 点的光程差,λ_0 是真空波长。用 **A** 和 **B** 表示时,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2 &= \tfrac{1}{4}(\mathbf{A}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \mathbf{A}^{\star}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})\cdot(\mathbf{B}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \mathbf{B}^{\star}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})\\ &= \tfrac{1}{4}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t} + \mathbf{A}^{\star}\cdot\mathbf{B}^{\star}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^{\star} + \mathbf{A}^{\star}\cdot\mathbf{B})\end{aligned} \tag{12}$$

因而

$$\begin{aligned} J_{12} &= 2\langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle = \tfrac{1}{2}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^{\star} + \mathbf{A}^{\star}\cdot\mathbf{B}) \\ &= a_1 b_1 \cos(g_1 - h_1) + a_2 b_2 \cos(g_2 - h_2) + a_3 b_3 \cos(g_3 - h_3) \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)\cos\delta \end{aligned} \tag{13}$$

此式表明了干涉项对两个波的振幅分量和位相差的依赖关系。

在(13)式的推导中,并没有用到电磁理论,尤其是没有用到振动是横向的这个事实。我们在"历史引言"中曾经提到菲涅耳和阿拉果当时发现偏振方向相互垂直的两束光不发生干涉,他们由此断定,光振动必定是横向的。这一结论很容易由(13)式证明。假定这两个波沿 z 方向传播,并设第一个波的电矢量位于 xz 平面内,第二个波的电矢量位于 yz 平面内。这时,

$$a_2 = 0, \qquad b_1 = 0$$

因而,根据(13)式,干涉项

$$J_{12} = a_3 b_3 \cos\delta$$

由于菲涅耳和阿拉果的观察证明在这些情况下不发生干涉,所以必须断定 $a_3 = b_3 = 0$,也就是说,这两个波的电矢量必定垂直于 z 方向。因此,光波必定是横波,这与早先从电磁理论的推论一致。

现在设两个线偏振波沿 z 方向传播,但 $\mathbf{E}$ 矢量同沿 x 轴,看它们叠加产生的强度分布如何。这时,

$$a_2 = a_3 = b_2 = b_3 = 0$$

所以,利用(5)、(9a)和(13)三式,则

$$\left.\begin{aligned} I_1 = \tfrac{1}{2}a_1^2, \qquad I_2 = \tfrac{1}{2}b_1^2, \\ J_{12} = a_1 b_1 \cos\delta = 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

因此,由(8)式得出总强度为

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta \tag{15}$$

显然,

$$\left.\begin{aligned} I_{\text{极大}} &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \\ \text{当}\quad |\delta| &= 0, 2\pi, 4\pi, \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{16a}$$

$$\left.\begin{aligned} I_{\text{极小}} &= I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \\ \text{当}\quad |\delta| &= \pi, 3\pi, \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{16b}$$

在 $I_1 = I_2$ 的特殊情形下,(15)式化为

$$I = 2I_1(1 + \cos\delta) = 4I_1 \cos^2\frac{\delta}{2} \tag{17}$$

因而,强度在极大值 $I_{\text{极大}} = 4I_1$ 和极小值 $I_{\text{极小}} = 0$ 之间变化(见图 7.1)。

同样的公式也适用于自然非偏振光,因为后面将看到(见 10.9.2 节),一束自然光可以表成为振动方向相互垂直的(比如说,沿 x 和 y 方向)、两束不相干的线偏光的叠加。因此,x 分

量间的干涉和 y 分量间的干涉可以分开考虑,这时,把各个强度加起来就得到总强度。因为各情况的 δ 相同,所以仍然得到上列公式。

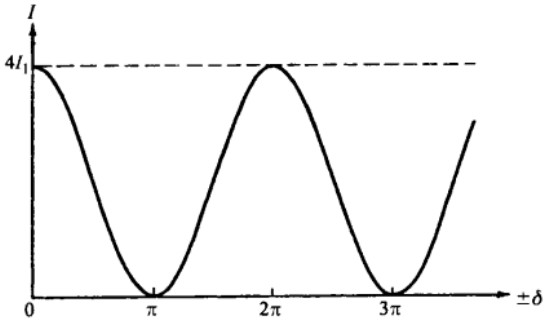


图 7.1 两个等强度光束的干涉;强度随位相差的变化

7.3 双光束干涉:波阵面分割

7.3.1 杨氏实验

最早的光的干涉演示装置是杨氏提出的。光从单色点光源 S 发出,射到屏$\mathcal{A}$的两个小孔 S_1 和 S_2 上;这两个孔靠得很近,并且与 S 等距离(见图 7.2),因而它们就成为两个同相的次级单色点光源①,从它们出来的光束在远离屏$\mathcal{A}$的区域叠加在一起,形成干涉图样。

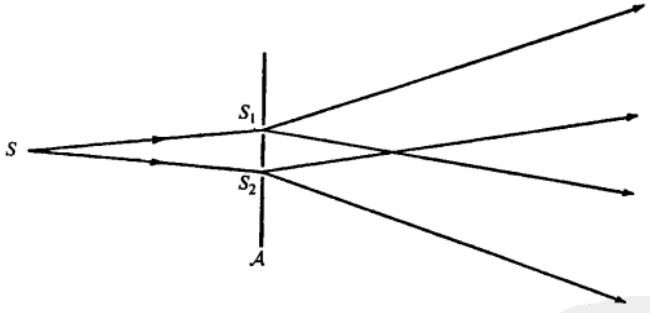


图 7.2 杨氏实验

设想所观察的干涉图样在 xOy 平面上,该平面与 S_1S_2 的垂直等分线 CO 正交,而 x 轴平行于 S_1S_2(见图 7.3)。设 d 为两个小孔的间隔,a 为两孔连线到观察面的距离。对于观察面上某一点 $P(x,y)$:

$$s_1 = S_1P = \sqrt{a^2 + y^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2} \tag{1a}$$

① 这些次级光源具有方向性,这将在衍射理论(见第 8 章)中详细讨论。

$$s_2 = S_2P = \sqrt{a^2 + y^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2} \tag{1b}$$

所以

$$s_2^2 - s_1^2 = 2xd \tag{2}$$

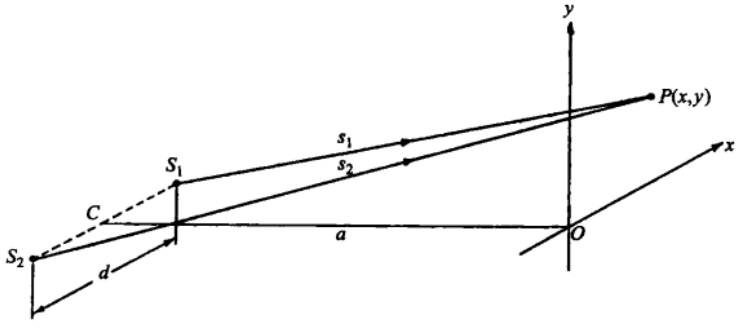


图 7.3　两个点光源产生干涉的几何图示

因此，从 S_2 和 S_1 到达 P 点的光的几何程差可以表成如下形式：

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \frac{2xd}{s_2 + s_1} \tag{3}$$

实际上，由于可见光的波长很短，只有当 d 比 a 小得多时，图样才便于观察。这时，如果 x 和 y 也比 a 小得多，则

$$s_2 + s_1 \approx 2a \tag{4}$$

所以，略去 d/a，x/a，y/a 的二次项和高次项，得到

$$\Delta s = \frac{xd}{a} \tag{5}$$

设 n 是实验所在媒质(假定是均匀的)的折射率，则从 S_2 和 S_1 到 P 点的光程差为

$$\Delta \mathcal{S} = n\Delta s = \frac{nxd}{a} \tag{6}$$

相应的位相差为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{nxd}{a} \tag{7}$$

由于角 S_1PS_2 很小，可以认为从 S_1 和 S_2 来的光波在 P 点沿同方向传播，所以强度可以由 §7.2(15)来计算；根据(7)式和 §7.2(16)，当

$$x = \frac{ma\lambda_0}{nd}, \qquad |m| = 0, 1, 2, \cdots \tag{8a}$$

时，强度为极大，而当

$$x = \frac{ma\lambda_0}{nd}, \qquad |m| = \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, \cdots \tag{8b}$$

时，强度为极小。这样，紧靠 O 点附近的干涉图样由一系列亮带和暗带组成，称为**干涉条纹**

(见图 7.4),它们是等距的,其走向与两光源连线 S_1S_2 相垂直。相邻亮带的间隔为 $a\lambda_0/nd$。在干涉图样的任意一点上,下式所定义的数 m 称为该点的**干涉序**:

$$m=\frac{\delta}{2\pi}=\frac{\Delta S}{\lambda_0} \tag{9}$$

这样,亮条纹对应于整数序。

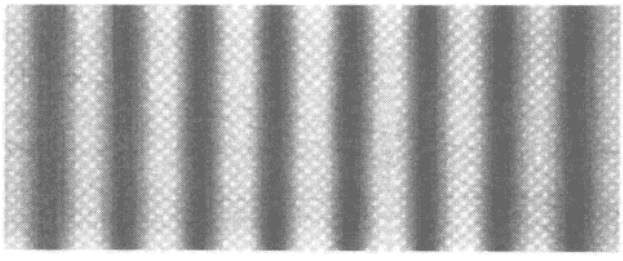


图 7.4 杨氏条纹

7.3.2 菲涅耳双面镜和类似装置

杨氏实验,作为建立光的波动学说的决定性一步,具有重要的历史意义。它也提供了一种用非常简单的设备测量单色光波长的方法,虽然精度很低;所需测量的只是 d,a 和条纹间距,它在空气($n\approx1$)中等于 $a\lambda_0/d$。然而,这里从原光源 S 到叠加区域,光的路径因有遮断不能直通,几何光学不能适用。这对产生干涉效应并非必要,为了证明此点,人们随后设计了若干产生两个相干光源的其他方法。

图 7.5 的装置是一个例子,它叫做**菲涅耳双面镜**。从点光源 S 来的光,入射到两个平面镜 M_1 和 M_2 上,它们相互倾斜成一个很小的角度;光在这两个镜面上反射后,产生 S 的两个虚像 S_1 和 S_2,它们就成为两个相干光源。显然,平面 SS_1S_2 垂直于二镜面的交线,与之相交于 A 点。设 $SA=b$,则

$$S_1A=S_2A=b$$

所以,S_1S_2 的垂直平分线也通过 A 点。S_1 和 S_2 的间隔是

$$d=2b\sin\alpha \tag{10}$$

式中 α 是两个镜面的夹角。

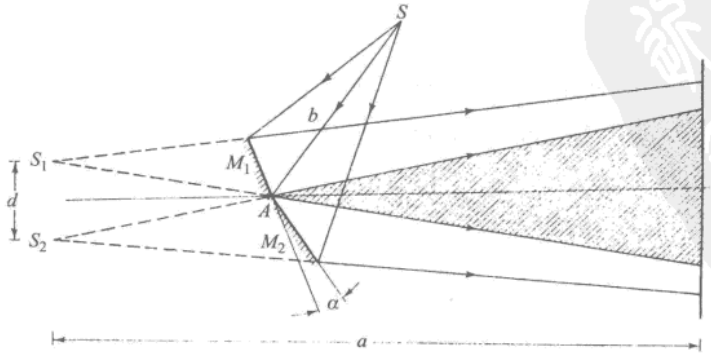


图 7.5 菲涅耳双面镜

比菲涅耳双面镜更加简单的装置是**劳埃德镜**(见图 7.6)。点光源 S_1 放在离平面镜 M 相当远并且接近镜平面的地方,使得光在几乎是掠入射下被反射。相干光源是原光源 S_1 和它在镜中的虚像 S_2。这时,S_1S_2 的垂直平分线位于镜面平面内。

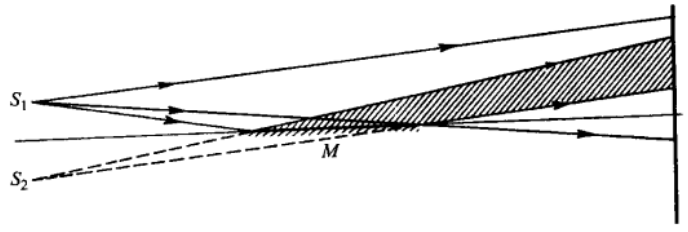


图 7.6　劳埃德镜

还可以提一下另外两种类似的装置。一种叫**菲涅耳双棱镜**(见图 7.7),它由两个相同的棱镜组成,棱镜的折射角很小,底贴着底,并且折射棱互相平行。从点光源 S 来的一束光,经折射后被分成为两束,相互交叠在一起。这两束折射光不是严格无像散的,但由于折射角和所用光束的角孔径都很小,所以可以忽略这一像差,而认为此二棱镜形成 S 的两个虚像 S_1 和 S_2。另一种叫**比累**(Billet)**剖开透镜**(见图 7.8),它由一个凸透镜沿直径剖成两半,并垂直于光轴拉开一点距离而构成。于是,从单个点光源 S 产生两个实像 S_1 和 S_2。

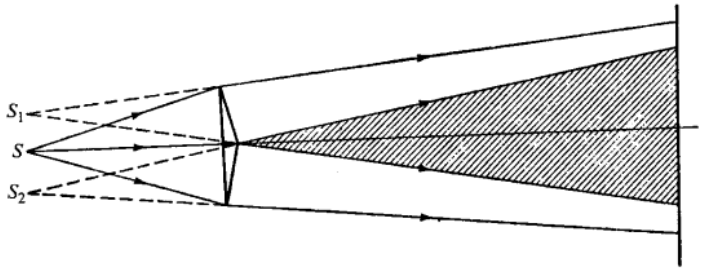


图 7.7　菲涅耳双棱镜

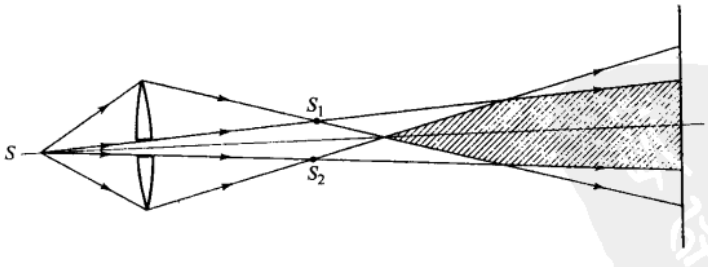


图 7.8　比累剖开透镜

在所有这些采用点原光源的装置中,在光源 S_1 和 S_2 的发散光束的公共区域(见图 7.5 到图 7.8 的斜线区域)内,在单色光下,任何平面上都可以看到存在干涉条纹。这种条纹称为**非定域条纹**。同前,用 s_1 和 s_2 表示距离 S_1P 和 S_2P,则从 S_2 和 S_1 到叠加地区,两波位相差为常数的那些点的轨迹是一个曲面,由下式确定:

$$s_2 - s_1 = 常数 \tag{11}$$

因此,合成强度的极大与极小组成一个以 S_1S_2 为转轴,以 S_1 和 S_2 为公焦点的旋转双曲面族。在与 S_1S_2 的垂直平分线 CO 正交的平面上,条纹是这些双曲面的截线,因而它们是双曲线;但是,正如在 7.3.1 节中所看到的,在 O 点附近,这些条纹近似为等距直线,走向与 S_1S_2 垂直。在垂直于 S_1S_2 的平面上,这些双曲面的截线是同心圆,但是这种条纹用上述各装置不能观察到。然而它们能在**梅斯林实验**中看到。梅斯林(G. Meslin)把比累剖开透镜的两半不是沿横向而是沿光轴拉开一个距离(见图 7.9)。这样一来,光源 S_1 和 S_2 就位于光轴上的不同点,并且相应光束的交叠区域发生在 S_1 和 S_2 两点之间。在这个区域可观察到条纹,而且在垂直 S_1S_2 的各个平面上,条纹是同心圆,圆心在光轴上;但只能看到半圆部分,因为二光束的公共区域以通过光轴的一个平面为界。

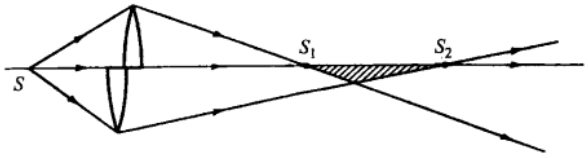


图 7.9 梅斯林实验

7.3.3 准单色光条纹和白光条纹

以上假定点原光源是单色的。现在去掉这个限制,而假定例如在菲涅耳双面镜(见图 7.5)实验中使用多色光的点光源 S。后面将看到(见 7.5.8 节),这种光可以用分布在某一频率范围互不相干的许多单色成分的组合来表示。每个成分各产生一个上述的干涉图样,各点的总强度是这些单色图样的强度之和。假定这些成分占据平均波长 $\overline{\lambda}_0$ 附近 $\Delta\lambda_0$ 的一个波长范围。所有单色图样的中央极大(距 S_1 和 S_2 路程相等)都通过 O 点互相重合,但在其他地方,各图样要相互错开,因为它们的尺度正比于波长;在观察面内,m 序各极大将排列开一段距离 Δx,由(8)式,

$$\Delta x = \frac{|m|a}{nd}\Delta\lambda_0 \tag{12}$$

首先考虑波长范围 $\Delta\lambda_0$ 比平均波长 $\overline{\lambda}_0$ 小得多的情形,即

$$\frac{\Delta\lambda_0}{\overline{\lambda}_0} \ll 1 \tag{13}$$

满足这种条件的光称为**准单色光**[①]。

在视场范围内,如果 m 满足下列条件

① 因为 $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$,所以(13)式也可以表成如下形式:

$$\frac{\Delta\omega_0}{\overline{\omega}_0} \ll 1$$

其中,$\Delta\omega_0$ 是有效频率范围,$\overline{\omega}_0$ 是平均频率。

$$|m| \ll \frac{\bar{\lambda}_0}{\Delta\lambda_0} \tag{14}$$

或者根据(9)式，如果

$$|\Delta S| \ll \frac{\bar{\lambda}_0^2}{\Delta\lambda_0} \tag{15}$$

则 Δx 与相邻极大的平均间隔 $a\,\bar{\lambda}_0/nd$ 相比即可忽略，因而可以认为各成分的图样是重合的。这时，观察面上条纹的情景同波长为 $\bar{\lambda}_0$ 的严格单色光源所给出的一样。

如果光是准单色的，但不满足(15)式，则条纹没有单色光条纹那样清晰，总强度取决于各单色成分的强度分布情况。

如果光不是准单色的，即如果不满足(13)式，则观察到的现象还依赖于所用辐射探测器的光谱响应度。一个实用上很重要的情形是，光为白色，观察为目视，这时有效波长范围从大约 4000 埃伸展到大约 7000 埃，因而 $\Delta\lambda_0/\bar{\lambda}_0$ 约为 $\frac{1}{2}$。这时，在零序单色条纹位置上有一个白色的中央条纹，两边各有几个彩色的极大和极小，再往外，眼睛看起来是均匀的白色照明。在离图样中央某距离处，此光并不是标准白光。例如，在距离中央条纹 x 处，按(8)式，对下列 λ。有强度极大：

$$\lambda_0 = \frac{nd}{a}\frac{x}{m}, \qquad |m| = 1, 2, 3, \cdots \tag{16a}$$

而对下列波长有强度极小：

$$\lambda_0 = \frac{nd}{a}\frac{x}{m}, \qquad |m| = \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, \cdots \tag{16b}$$

因此，如果让该光进入一分光镜，并令分光镜狭缝平行于单色条纹的方向，那么对于进入的光，x 是常数，光谱上就横排着一条条平行于狭缝的亮带和暗带——这是所谓**沟槽光谱**的一个例子。这些带在光谱波数($1/\lambda_0$)标尺上是等间隔的，相邻亮带的间隔为 $a/nd|x|$。

以后将看到，白光条纹图样在干涉量度学中是很有用的，因为在一些特殊情形下靠它能够认出对应程差为零的单色条纹。前面曾把菲涅耳双面镜所产生的中央条纹归入强度极大；菲涅耳双棱镜、比累剖开透镜以及杨氏实验的情况也是如此。然而，采用劳埃德镜时，镜平面上的条纹则是强度极小，当用白光光源时，它看起来是黑的。这是因为波从镜面反射时，不管波长如何，位相都要改变 π(反射相变，见 1.5.2 节)。在梅斯林实验中，图样中央也是强度极小，以后将看到(见 8.8.4 节)，这是由于光波在通过焦点时要经受一个 π 的相变的缘故。

7.3.4　使用狭缝光源；条纹的可见度

前面的讨论使用的都是一个点原光源，但是，由于实际光源都具有一定的大小，因而必须考虑光源的大小对条纹的影响。对实际物理光源的描述要涉及微观理论，这已超出了本书的范围，但是为了我们的目的，可以把情况理想化，把光源看做是由大量互不相干的点光源所组成。于是，波场中任何点的强度是各个点光源产生的强度之和。

在前面所描述的各个装置(梅斯林实验除外)中，条纹都垂直于包含点原光源 S 与派生光源 S_1 和 S_2 的那个平面，由此可知，如果 S 垂直于这一平面移动，则条纹只平行于它们的长度

移动。因此,可以把一个线光源——或实际上一个足够窄的狭缝光源——放在这一方向而不损害条纹的清晰度,至少在条纹弯曲可以忽略时是如此。同样,在杨氏实验中,两个小孔也可以用两条平行于狭缝光源的窄缝来代替。用这种方法能增加图样的强度,虽然同时也给实验带来一个困难,要使光源取向正确。

要在图样中得到更多的光,就必须增加光源狭缝的宽度,但是这样一来条纹就变得不太清晰了。拿菲涅耳双面镜来说,如果光源 S 在平面 SS_1S_2 内与 SA 成直角地位移到 S'(见图 7.10),则次级光源 S_1、S_2 位移到 S_1'、S_2',如果不考虑二次项,则它们的间隔 d 不变,因而条纹间距也不变;但是,中央条纹要从 O 位移到 O',因为它位于 $S_1'S_2'$ 的垂直平分线上,这条线还通过 A 点。设 $SS'=\zeta$(在图 7.10 中取为正),则 $S_1S_1'=S_2S_2'=\zeta$,所以

$$OO'=\frac{(a-b)\zeta}{b} \tag{17}$$

因此,在 P 点,如果从光源 S 来的光的光程差为 $\Delta\mathcal{S}$,则从光源 S' 来的光的光程差按(6)式为

$$\Delta\mathcal{S}'=\Delta\mathcal{S}-\frac{nd}{a}OO'=\Delta\mathcal{S}-D\zeta \tag{18}$$

式中

$$D=\frac{(a-b)nd}{ab} \tag{19}$$

相应的位相差是

$$\delta(\zeta,\Delta\mathcal{S})=\frac{2\pi}{\lambda_0}(\Delta\mathcal{S}-D\zeta) \tag{20}$$

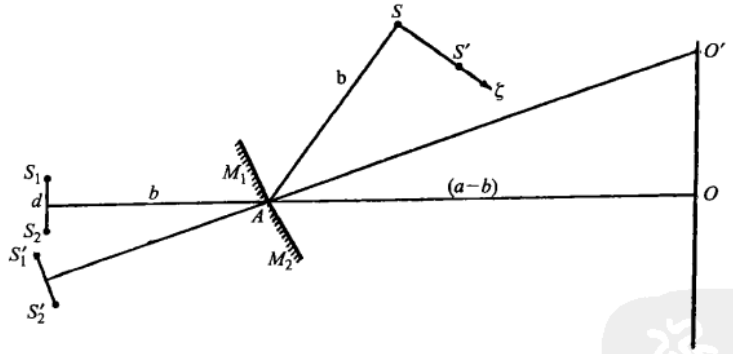


图 7.10 采用狭缝光源时菲涅耳双面镜图示

现在设光源是一个中心位于 S、宽度为 e 的狭缝。假定构成该狭缝光源的点源数目如此之多,以至于可以把它当作实际连续分布来处理,并且设想把它分成许多垂直于平面 SS_1S_2 的元条带。设 $i_1\,d\zeta$ 是一个元条带的光被一个镜面反射时在 P 点产生的强度,则通过 S' 的那个元条带在 P 点产生的干涉强度按 § 7.2(17)为

$$i(\zeta,\Delta\mathcal{S})\mathrm{d}\zeta=2i_1(1+\cos\delta)\mathrm{d}\zeta$$

因而 P 点的总强度由下式给出:

$$I(e,\Delta\mathcal{S})=2i_1\int_{-e/2}^{e/2}(1+\cos\delta)\mathrm{d}\xi \tag{21}$$

将(20)式代入(21)式,计算出积分,得到

$$I(e,\Delta\mathcal{S})=2I_1\left[1+\left(\frac{\sin\dfrac{\pi De}{\lambda_0}}{\dfrac{\pi De}{\lambda_0}}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta\mathcal{S}\right)\right] \tag{22}$$

式中 $I_1=i_1 e$。

仿照迈克耳孙,取下式所定义的**可见度**$\mathcal{V}$作为 P 点条纹清晰度的量度:

$$\mathcal{V}=\frac{I_{极大}-I_{极小}}{I_{极大}+I_{极小}} \tag{23}$$

式中 $I_{极大}$和$I_{极小}$是紧靠 P 点的极大强度和极小强度。显然,当 $I_{极小}=0$ 时,$\mathcal{V}$有极大值 1,两个相同的单色点光源所产生的条纹就属于这种情形,而当 $I_{极大}=I_{极小}$时,$\mathcal{V}$下降为零,条纹消失。在本例情况下,

$$I_{极大}=2I_1\left(1+\frac{\left|\sin\dfrac{\pi De}{\lambda_0}\right|}{\dfrac{\pi De}{\lambda_0}}\right),\qquad I_{极小}=2I_1\left(1-\frac{\left|\sin\dfrac{\pi De}{\lambda_0}\right|}{\dfrac{\pi De}{\lambda_0}}\right) \tag{24}$$

所以

$$\mathcal{V}=\frac{\left|\sin\dfrac{\pi De}{\lambda_0}\right|}{\dfrac{\pi De}{\lambda_0}} \tag{25}$$

图 7.11 给出了(25)式的可见度$\mathcal{V}$随光源宽度 e 的变化曲线。我们看到,当 e 不超过$\lambda_0/4D$ 时,或由(20)式,当 P 点对应光源各元条带的位相差范围不超过 $\pi/2$ 时,可见度大于大约 0.9。如果取这个条件来定义可产生良好条纹的最大缝宽(这带有点任意性),则由(19)式,有 $e\leqslant\lambda_0 ab/4(a-b)nd$,或利用(10)式,

$$e\leqslant\frac{\lambda_0 a}{8(a-b)n\sin\alpha} \tag{26}$$

同前,式中 α 是两个镜面的夹角,显然,当$(a-b)$减小时,即当观察面移向镜面连接处时,e 的容许值增加。例如,取典型值,令 $\alpha=2$ 弧分,$a=120$ 厘米,$b=100$ 厘米,$\lambda_0=5500$ 埃,$n=1$,则 $e\leqslant 0.7$ 毫米;按(8)和(10)两式,亮条纹的间距是 $a\lambda_0/2bn\sin\alpha$;在本例情况下,它等于 0.57 毫米。

同样的考虑适用于菲涅耳双棱镜、比累剖开透镜以及杨氏实验的光源宽度。对于劳埃德镜,情况则不同,因为这里光源 S 垂直于镜平面移动时,它的像向反方向移动。因此,当采用有限宽度的狭缝光源时,各个元图样的中央极小虽然重合在镜平面上,但它们的条纹间距不同,因而远离镜平面时,条纹可见度随之下降。

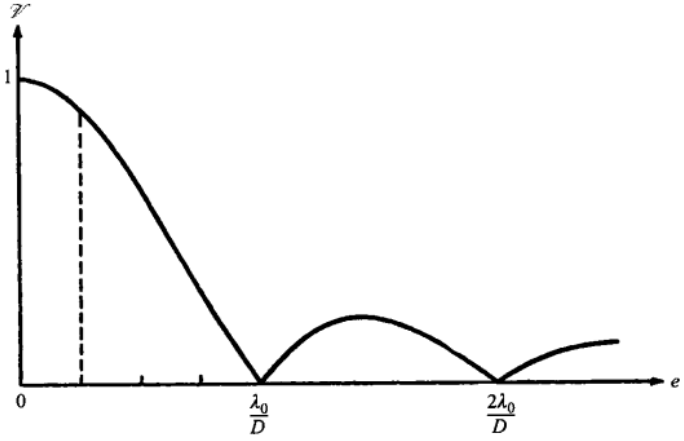


图 7.11 条纹可见度随光源狭缝宽度的变化(菲涅耳双面镜)

7.3.5 应用于测量光程差:瑞利干涉仪

这里需要提前说一下衍射理论的一个结果,即在杨氏实验中,次级光源 S_1 和 S_2 所发的光在原光源 S 的几何光线方向上强度最大。在杨氏实验中,这些光线在 S_1 和 S_2 后边是发散的,但是如果在这两个孔前面放上一个透镜(见图 7.12),则可以使这些光线会聚到透镜的 S 共轭点 O。这样 O 点附近干涉图样的强度就增加了,而且当加大 S_1,S_2 两孔距离时,还能观察到条纹。相邻亮条纹的间隔仍然是 $a\lambda_0/nd$,而且按照等光程原理,如果透镜对 S 是无像散的,则零序条纹在 O 点。如果透镜对 S 不是无像散的,则零序条纹将偏离 O 点,偏离之量取决于从 S 通过两孔到 O 的光程差;当光程差是 ΔS时,偏离之量等于相邻亮条纹间隔乘以 Δm,其中

$$\Delta m = \frac{\Delta S}{\lambda_0} \tag{27}$$

显然,正像迈克耳孙所做的那样[①],该装置可用作透镜性能的定量检验。如果让一个孔固定在这个透镜的中心上方,而令另一个孔处于不同径向位置来测量 Δm,即可知道从 S 来的波阵面在通过透镜后偏离球面的情况(波像差)。

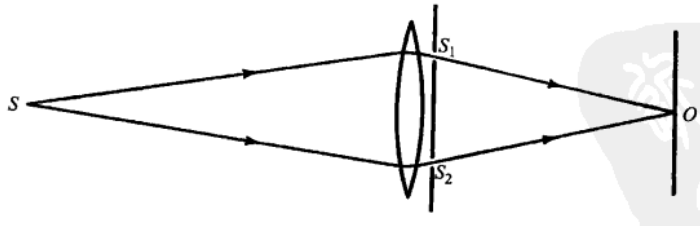


图 7.12 在杨氏装置中使用一个透镜的图示

类此,如果把一块厚度为 l,折射率为 n'的透明材料板插进 S_2O 的光路中,则光程[SS_2O]增加$(n'-n)l$,因而 O 点的干涉序将改变 Δm,

① A. A. Michelson, *Astrophys. J.*, **47**(1918), 283。

$$\Delta m = \frac{(n' - n)l}{\lambda_0} \tag{28}$$

从 Δm，l 和 λ_0 的测量可以测定该板与周围媒质的折射率差（$n' - n$）。这种装置构成**瑞利干涉仪**[①] 的基础。瑞利干涉仪是一种用于精确测定气体折射率的仪器，它的现代样式如图 7.13 中的平面图和侧面图所示。从狭缝光源 S 发出的光，经过透镜 L_1 准直后，落到平行于 S 的狭缝孔径 S_1 和 S_2 上；从 S_1 和 S_2 出来的几何光线再平行地穿过分开的气室 T_1 和 T_2，然后由透镜 L_2 又会聚到它的焦平面上，在此形成平行于狭缝的干涉条纹[②]。S_1 和 S_2 要分得很开以便能容下气室，所以条纹很密，需要高倍放大方能观测；而且，对光源狭缝 S 的宽度限制也就相应地严格起来，所以图样中的光量很小。因为只有在垂直于条纹的方向上需要放大，所以，用细玻璃棒做成一个柱面目镜，使它与条纹平行，效果最好。图样用这种方法观察时，看起来比用球面目镜亮得多，但是，使用柱面目镜还有一个更重要的优点。它能提供一个固定的副条纹系统作为基准标记，其间隔与主条纹系统的相同，但是是由从气室下面过来的 S_1 和 S_2 的光所形成。转动玻璃板 G，使基准系统垂直移动，直到它的上边缘与主系统的下边缘衔接，中间那一条很锐的分隔线是通过 L_2 观察到的 G 的边缘。这样，T_1 和 T_2 中光程变化所引起的主条纹系统的位移，靠眼睛的游标视锐度来检测。眼睛的这个视锐度很高，可检测出小到 1/40 序的位移。这时，光学系统的偶然位移也变得无关重要，只要两个条纹系统所受的影响程度相同。

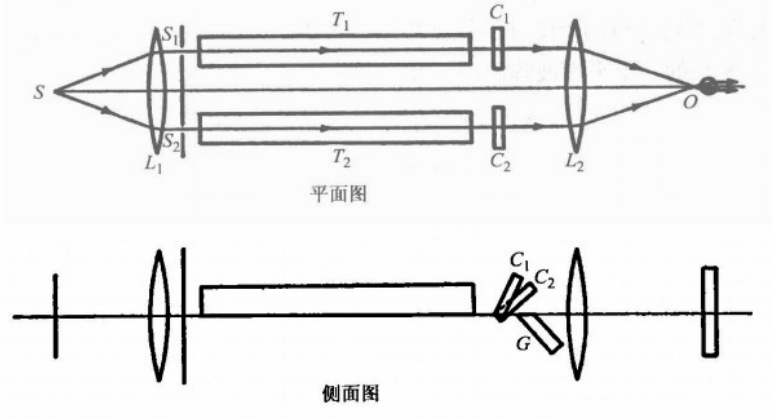


图 7.13　瑞利干涉仪

为了方便，工业上使用的瑞利干涉仪并不采用条纹计数，而是用补偿光程差。为此，让从气室出来的光通过两块薄玻璃板，其中一块 C_1 是固定的，而另一块 C_2 可绕水平轴转动，以使 S_2 来光的光程作可重复的改变。先用单色光校准补偿器，定出其相当于主系统位移 1 序的平均转角。然后用两个条纹系统作为光程[SS_1O]和[SS_2O]相等的示零器。在正常使用时，先把两个气室抽空，并采用白光用补偿器将主系统和基准系统的中央条纹调到大致相重。然后采用单色光将两个零序条纹调到严格重合。接着，将待测气体充入某一气室，再先采用白光，

① Lord Rayleigh, *Proc. Roy. Soc.*, **59**(1896), 198。F. Haber and F. Löwe, *Zeits. f. angew. Chem.*, **23**(1910), 1393。

② L_2 焦平面上的严格强度分布可由夫琅禾费衍射理论（见 8.5 节）得到。

后采用单色光,调节补偿器使零序条纹相重①。补偿器前后两次位置读数之差用其校准值折算后,就是主条纹系统因气室充气所产生的序位移 Δm,因而从(28)式即可得到气体的折射率 n':

$$(n'-1)=\frac{\lambda_0}{l}\Delta m \tag{29}$$

式中 l 是气室长度。取典型值,设 $l=100$ 厘米,$\lambda_0=5500$ 埃,位置读数可确定到 1/40 序,则可检测出大约 10^{-8} 的$(n'-1)$的变化②。

原则上,加长 l 可获得更高的灵敏度,但是,实际上这受温度控制困难的限制。由于同样原因,测量液体折射率差的这种仪器只使用短的样品室。此外,由于能加以补偿的光程差是有限的,所以,如果两个样品室中折射率相差很大,则样品室的长度必须按比例缩短。

7.3.6 应用于测量光源的角幅度:迈克耳孙测星干涉仪

我们已经看到(见 7.3.4 节),在杨氏实验中,条纹的清晰度要受到光源沿孔 S_1,S_2 连线方向扩展的影响。这个效应是小光源角幅度测量方法的基础。

假定用一个望远物镜加上一个双孔光阑来观察两个远距离的准单色点光源 S 和 S',光阑的两个小孔 S_1,S_2 形状大小相同,间距为 d,点源 S,S' 的有效波长为 λ_0,在两孔连线方向上的角间距为 θ(见图 7.14)。S 和 S' 在焦平面上各产生一个干涉图样,条纹间距相同,而如果 S 和 S' 是非相干光源,则每一点两个图样的强度相加就构成组合图样。设 N 是从 S_1 到 SS_2 的垂足,则 S_1N 位于从 S 来的一个平面波阵面内,所以,对于从 S 来的光,焦平面上 P 点处的光程差

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{S}&=[SS_2P]-[SS_1P]\\&=[NS_2]+[S_2P]-[S_1P]\end{aligned} \tag{30}$$

---

① 因为从 S_1 和 S_2 到主图样,两个光程途经不同色散的媒质,所以,与 7.3.3 节中讨论的简单情况不同,这里不同波长的零序一般不重合,因而当采用白光时,没有完全白色的条纹。颜色带得最少的条纹满足条件 $\partial m/\partial\lambda_0=0$,它发生在可见光谱中某一平均波长 $\lambda=\bar{\lambda}_0$ 处,这一波长与眼睛的波长响应度有关。仿照透镜上使用的"消色差"一词,人们称此条纹为**消色差条纹**。设补偿器所引进的光程差为 $\Delta\mathcal{S}$,则 O 点的干涉序为

$$m=[(n'-1)l+\Delta\mathcal{S}]\frac{1}{\lambda_0}$$

所以

$$\frac{\partial m}{\partial\lambda_0}=-\left(n'-1-\lambda_0\frac{\partial n'}{\partial\lambda_0}\right)\frac{l}{\lambda_0^2}-\left(\Delta\mathcal{S}-\lambda_0\frac{\partial}{\partial\lambda_0}(\Delta\mathcal{S})\right)\frac{1}{\lambda_0^2}$$

因此要消色差条纹位于 O 点,须

$$\left(\Delta\mathcal{S}-\lambda_0\frac{\partial}{\partial\lambda_0}(\Delta\mathcal{S})\right)_{\bar{\lambda}_0}=-l\left(n'-1-\lambda_0\frac{\partial n'}{\partial\lambda_0}\right)_{\bar{\lambda}_0}$$

当补偿器在此位置时,单色图样的零序一般不在 O 点,因为这要求

$$(\Delta\mathcal{S})_{\bar{\lambda}_0}=-l(n'-1)_{\bar{\lambda}_0}$$

该效应可大到使零序单色条纹的认证不能确定,这时就需要在低气压下或采用短的气室进行预测。还应注意,只有当图样中满足$(\partial m/\partial\lambda_0)_{\bar{\lambda}_0}=0$的那一点处对可见光谱各波长的 m 的范围足够小时,消色差条纹才可辨认。由于这个原因,在那些要求显示白光条纹的干涉仪中,要尽可能把相干涉的波安排在同色散的媒质中并具有相等的光程。

② 对于普通气体,$(n'-1)$值的数量级为 10^{-4}(见表 1.1)。

类此，设 N' 是从 S_1 到 $S'S_2$ 的垂足，则对于从 S' 来的光，P 点处的光程差是

$$\Delta\mathcal{S}' = [N'S_2] + [S_2P] - [S_1P] \tag{31}$$

因此，S' 和 S 所产生的图样相互位移 Δm 序，其中

$$\Delta m = \frac{|\Delta\mathcal{S}' - \Delta\mathcal{S}|}{\lambda_0} = \frac{|[N'S_2] - [NS_2]|}{\lambda_0} \tag{32}$$

当 $n \approx 1$ 并且 θ 很小时，

$$\Delta m \approx \frac{\theta d}{\lambda_0}$$

当

$$\Delta m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{33a}$$

时，S 和 S' 所产生的强度极大相重，组合图样中的条纹最清晰。反之，当

$$\Delta m = \tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{5}{2},\ \cdots \tag{33b}$$

时，S 产生的强度极大与 S' 产生的强度极小相重，组合图样的条纹这时最不清晰，如果 S 和 S' 产生的强度相等，则条纹这时消失。这样，当两孔间距从零开始增加时，条纹的清晰度将呈现周期性变化，特别是当

$$d = \frac{\lambda_0}{2\theta} \tag{34}$$

时，清晰度将出现第一个极小，因而当观察到了这一情况时，即可从 d 和 λ_0 定出 θ。

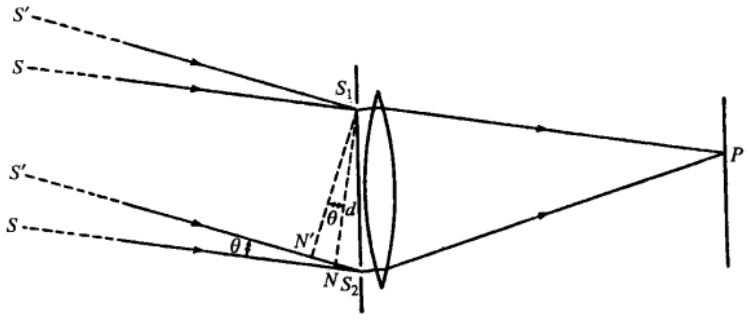


图 7.14　用加了双孔光阑的望远物镜观察两个远距离的点光源

现在考虑更一般的情形，设光源是一个以原点 S 为中心而扩展的准单色原光源。同前，可以认为这样的光源是由互不相干的点光源组成。可以设想把它分成许多垂直于 S_1 与 S_2 连线的元条带，并且可以把焦平面上 P 点的强度作为这些元条带的强度贡献之和。假定 $\Delta\mathcal{S}$ 是过原点 S 的那个元条带来的光在 P 点的光程差，则当 d 给定时，P 点的位置可由 $\Delta\mathcal{S}$ 确定。对于和 S 相距 α 角的另一元条带来的光，根据(32)式，P 点的光程差为 $\Delta\mathcal{S} + \alpha d$，而相应的位相差是

$$\delta(\alpha,\ \Delta\mathcal{S}) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(\Delta\mathcal{S} + \alpha d) \tag{35}$$

仍假定组成扩展光源的点光源数目如此之大，以至于可以把该扩展光源看作是实际连续的。因此，由 §7.2(15)，这时 P 点的总强度为

$$I(d,\Delta\mathcal{S})=\int i_1\mathrm{d}\alpha+\int i_2\mathrm{d}\alpha+2\int\sqrt{i_1 i_2}\cos\delta\,\mathrm{d}\alpha \tag{36}$$

式中 $i_1(\alpha,\Delta\mathcal{S})\mathrm{d}\alpha$ 和 $i_2(\alpha,\Delta\mathcal{S})\mathrm{d}\alpha$ 是一个元条带的光只通过二孔之一到达 P 点时的强度,而积分范围包括所有元光源的 α 值。

7.3.5 节中曾经提到,由于衍射效应,孔 S_1 和 S_2 所构成的次级光源具有方向性,但是,如果这些效应在(36)式所包括的 α 值范围内可予忽略[①],则可令

$$i_1(\alpha,\Delta\mathcal{S})=i_2(\alpha,\Delta\mathcal{S})=i(\alpha)f(\Delta\mathcal{S}) \tag{37}$$

式中 $i(\alpha)$是正比于光源相应条带的强度,而 $f(\Delta\mathcal{S})$表征 S_1(或 S_2)的方向性。由(36)式,利用(37)和(35)两式,则有

$$\begin{aligned}I(d,\Delta\mathcal{S})&=2f(\Delta\mathcal{S})\int i(\alpha)(1+\cos\delta)\mathrm{d}\alpha\\&=f(\Delta\mathcal{S})\left[P+C(d)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta\mathcal{S}\right)-S(d)\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta\mathcal{S}\right)\right]\end{aligned} \tag{38}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}P&=2\int i(\alpha)\mathrm{d}\alpha,\\C(d)&=2\int i(\alpha)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\alpha d\right)\mathrm{d}\alpha,\\S(d)&=2\int i(\alpha)\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\alpha d\right)\mathrm{d}\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

如果进一步假定 $f(\Delta\mathcal{S})$的变化比 $\cos(2\pi\Delta\mathcal{S}/\lambda_0)$和 $\sin(2\pi\Delta\mathcal{S}/\lambda_0)$缓慢[②],则 I 的极大位置和极小位置由下式给出:

$$\frac{\partial I}{\partial(\Delta\mathcal{S})}=0=-\frac{2\pi}{\lambda_0}\left[C\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta\mathcal{S}\right)+S\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta\mathcal{S}\right)\right]$$

即发生于

$$\tan\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta\mathcal{S}\right)=-\frac{S}{C} \tag{40}$$

由(38)和(40)两式可得到 I 的极值

$$I_{\text{极值}}=f(\Delta\mathcal{S})[P\pm\sqrt{C^2+S^2}] \tag{41}$$

因此,按(23)式定义,条纹的可见度

$$\mathcal{V}(d)=\frac{\sqrt{C^2+S^2}}{P} \tag{42}$$

函数$\mathcal{V}(d)$的曲线形式如图 7.15 所示,其中分别取了三种不同的 $i(\alpha)$函数。图 7.15(a)对

① 如果二孔足够窄,这一近似可证明是正确的,这一点到 8.5 节就会清楚了。

② 如果二孔足够窄,这一近似可证明是正确的,这一点到 8.5 节就会清楚了。

应两个点光源的情形，这就是在本节开始所简单讨论的。在图 7.15(b)中，光源的强度是均匀的，形状是矩形，上下两边平行于 S_1 和 S_2 的连线；显然，这种情形的$\mathcal{V}(d)$与图 7.11 的可见度函数相同。在图 7.15(c)中，光源是一个径向对称的圆盘；左边的曲线对应均匀强度，其余的对应从中心到边缘有不同程度的变暗。

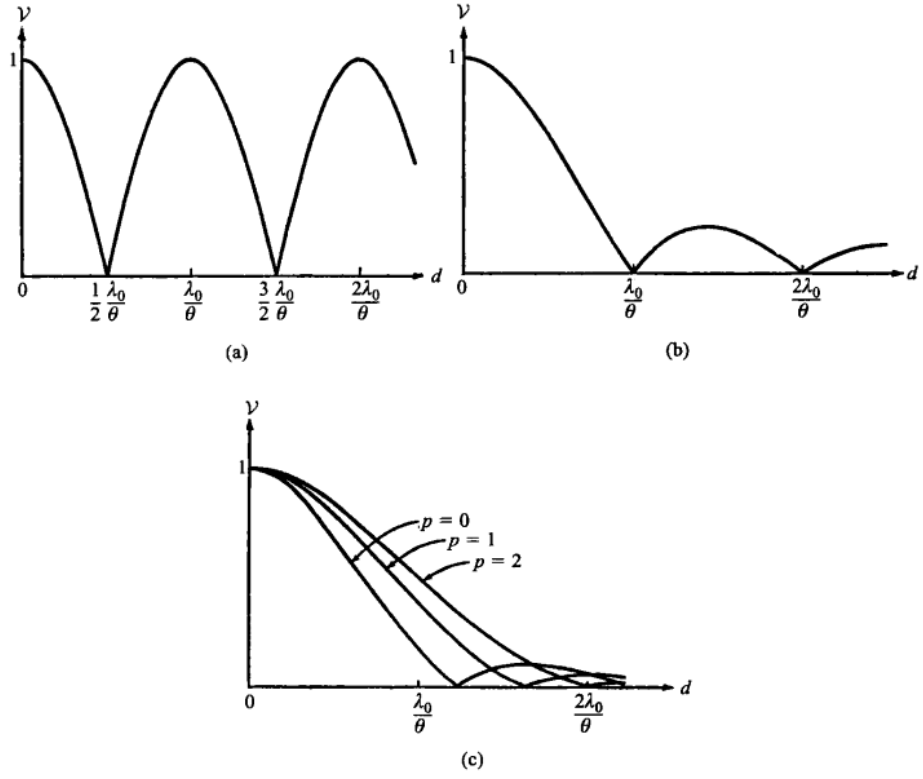


图 7.15　条纹可见度随两孔间距的变化(见图 7.14 的装置)：(a)两个相同的点光源，在两孔连线方向上的角间隔为 θ；(b)均匀的矩形光源，上下两边平行于两孔连线，角宽度为 θ；(c)圆盘光源，角直径 $\theta = 2\beta_0$，强度分布 $I(\beta) \propto (\beta_0^2 - \beta^2)^p$，式中 β 是离中心的角半径

反之，如果测量了条纹的位置及其可见度随两孔间距 d 的变化，则可由(40)和(42)两式求出函数 C 和 S，但比例常数因子 P 和符号待定；后者通常可从物理合理性考虑来确定。然后，由(39)式通过傅里叶反演即可得到光源的强度分布 $i(\alpha)$。这种测量虽然原则上是可能的，但是实际上很困难。不过，如果预先知道光源的形状属于图 7.15 所指的某一种，则它的角幅度可以简单地由观测条纹可见度为极小时的最小 d 值来决定，这个 d 满足下列关系

$$d = \frac{A\lambda_0}{\theta} \tag{43}$$

式中 A 是一常数。对于角间隔为 θ 的两个点光源，如我们在(34)式中看到的，$A = 0.5$；对于角直径为 θ 的均匀圆盘光源，$A = 1.22$；对于边缘比中心暗的圆盘光源，$A > 1.22$。

这种方法是斐索[①]和迈克耳孙[②]先后提出的,用来测定某些天体的角幅度,这些天体太小或太远,用不加光阑的望远镜不能测量(见 8.6.2 节)。这些天体发白光,而且由于强度上的考虑,必须采用白光条纹来进行观测[③]。因此,需要假定(43)式中的 λ_0 是一个有效波长,它取决于光强的波长分布情况和眼睛的色反应。尽管有这一限制,用这一方法还是成功地测量了行星卫星的角直径[④]和直径比间距小得多的双星的角距离[⑤],但是用它测量单星的尝试归于失败,因为它们的角直径太小,即使把两孔间距加大到当时望远镜所允许的最大限度,条纹仍然清晰如故。为了克服两孔间距上的这个限制,迈克耳孙[⑥]制造了他的**测星干涉仪**(见图 7.16)。望远镜的阑孔 S_1 和 S_2 是固定的,在它前面刚性梁上安装有一个由反射镜 M_1、M_2、M_3 和 M_4 组成的对称光学系统。光经此系统反射后到达二阑孔。里面两个镜子 M_3 和 M_4 是固定的,而外面两个镜子 M_1 和 M_2 可沿 S_1 和 S_2 连线方向对称地分开。如果光程[$M_1M_3S_1$]和[$M_2M_4S_2$]保持相等,则当光从远方点光源射来时,它在 S_1 和 S_2 上的光程差等于它在 M_1 和 M_2 上的光程差,所以,外面两个镜子起着斐索方法中两个可移阑孔的作用。这样一来,该装置能测量的最小角直径不是由望远镜物镜的直径来决定,而是由外面两个镜子的最大间隔来决定。此外还有一个优点,就是当二可移阑孔的间隔改变时,条纹间距保持不变,因为它只与 S_1 和 S_2 的间隔有关。该干涉仪当时装在威尔逊山天文台巨大的反射望远镜(直径 100 英寸)上,由于它机械强固,使用就很简便。孔 S_1 和 S_2 相距 114 厘米,在焦平面上产生的条纹间距约为 0.02 毫米。

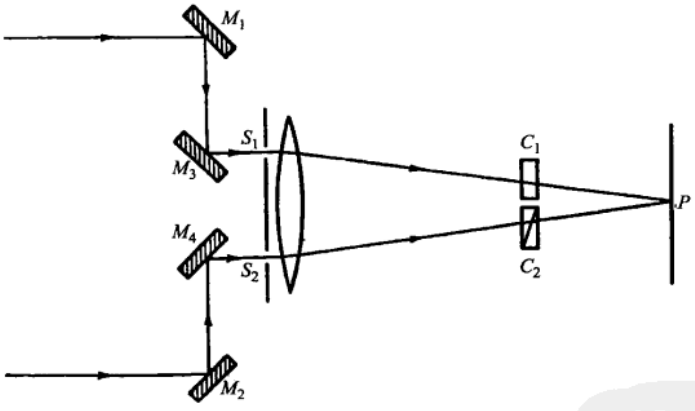


图 7.16 迈克耳孙测星干涉仪

外面两个镜子的最大间距是 6.1 米,所以角直径最小可测到(用 $\lambda_0 = 5500$ 埃)约 0.02 弧秒。由于不可避免的机械缺陷,必须用两个辅助元件,使外面两个镜子在各个方位上都能准确

① H. Fizeau, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **66**(1868), 934。

② A. A. Michelson, *Phil. Mag.*(5), **30**(1890), 1。

③ 波长范围有限的扩展光源所产生的条纹的一般性问题,用部分相干性理论(见第 10 章)来处理最为得当。10.4 节中从这一理论的观点简短讨论了迈克耳孙测星干涉仪的作用。

④ A. A. Michelson, *Nature, Lond.*, **45**(1891), 160。

⑤ J. A. Anderson, *Astrophys. J.*, **51**(1920), 263。

⑥ A. A. Michelson, *Astrophys. J.*, **51**(1920), 257; A. A. Michelson and F. G. Pease, *Astrophys. J.*, **53**(1921), 249。

调节。在 S_1P 光路中有一块平行平面玻璃板 C_1，它可在任意方向倾斜，系用来使 S_1 和 S_2 来的几何光束在焦平面上相重合。另一块平行平面板 C_2，厚度可变，用来补偿光程[$M_1M_3S_1$]和[$M_2M_4S_2$]的不等。这个补偿必不可少，因为白光条纹只有在零序附近才可看到，该补偿是通过用一小分光镜观察沟槽光谱来加以控制的。

第一颗角直径测量成功的星是参宿四(猎户座 α)，得到的结果是 0.047 弧秒。然后，根据这颗星到太阳的距离(用三角测量法测定)，求得其线直径为 4.1×10^8 千米，它约为太阳直径(1.4×10^6 千米)的 300 倍，并且超过了地球轨道的直径(3×10^8 千米)。另外还测量了几颗星，这些星全都像参宿四一样，是线直径比太阳大许多倍的巨星。测量数目之所以很少，部分原因是由于测量的固有困难，即大气扰动的干扰影响妨碍了测量，虽然迈克耳孙和皮斯(F. G. Pease)发现，这些影响比用大孔径望远镜进行普通观察时所遇到的为小。干涉仪小孔上方折射率的变化会使干涉图样整体移动，如果这移动很缓慢，则条纹仍然能观察到，而在同样条件下，全孔径望远镜所形成的星像就要受到严重损坏。但是，除去这些观察上的困难之外，对测量绝大多数直径与太阳差不多的星来说，外镜最大间距 6 米仍然嫌短，即使在最靠近的星球位置上，太阳视面的张角也只有 0.007 弧秒，因而要观察到条纹的第一次消失，镜的间距需要大约 20 米。近些年来，人们在迈克耳孙所引进的原理基础上，建造了其他的测星干涉仪[①]，应用于光学天文学和射电天文学两方面，并均取得成效[②]。

布朗(R. H. Brown)和特威斯(R. Q. Twiss)[③] 曾设计了一种射电干涉仪，他们把两个天线上的信号分开来探测，从测量两个信号强度涨落的关联随天线间隔的变化来求得射电源的角幅度。他们还证明[④]，同等的装置对可见光也可使用。从一个星来的光，用两个凹面镜收集，分别使之聚焦在两个光电管上，并改变镜子间距，同时测量两管光电流涨落的关联度。采用这种装置(称为**强度干涉仪**)，镜子间距可以达到很大而无任何困难，所以测量直径比以前小得多的星已成为可能，这个方法的原理从部分相干理论的观点来看是最好理解的，我们将在 10.4 节中加以简单讨论。

7.4　驻波

在以上所讨论的这些装置中，相互干涉的两个波在观察点是沿大致相同的方向传播的。现在，我们看看沿不同方向传播的两个波的干涉效应，作为例子，讨论一单色平面波射到一个高反射平面上时入射波与反射波所产生的干涉。

假定反射面是 $z=0$ 平面，z 的正方向指向入射波所在的媒质，同时，设 n_1 和 n_2 为两种媒质的折射率(见图 7.17)。

设 θ_i 为入射角，xz 平面为入射面。设 $\mathbf{E}^{(i)}$ 是入射波的电矢量，并且和 1.5.2 节中一样，用 $A_\parallel$ 和 $A_\perp$ 分别代表 $\mathbf{E}^{(i)}$ 对入射面的平行分量和垂直分量的振幅，则 $\mathbf{E}^{(i)}$ 的三个笛卡儿分量由

① 关于此类干涉仪情况的综合介绍，见 J. T. Armstrong, D. J. Hutter, K. J. Johnston and D. Mozurkewich, *Physics Today*, May (1995), 42。

② 见，例如，A. R. Thompson, J. M. Morgan and G. W. Swenson, *Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy* (New York, Wiley, 1986)。

③ R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, *Phil. Mag.* (7), **45** (1954), 663。

④ R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, *Nature*, **178** (1956), 1046; *Proc. Roy. Soc. A* **248** (1958), 199, 222。

§1.5(11)给出,只要以 $-z$ 代替其中的 z 即可,即

$$E_x^{(i)} = -A_{\parallel}\cos\theta_i e^{-i\tau_i},\quad E_y^{(i)} = A_{\perp}e^{-i\tau_i},\quad E_z^{(i)} = -A_{\parallel}\sin\theta_i e^{-i\tau_i} \tag{1}$$

(照例理解为取实部),式中

$$\tau_i = \omega\left(t - \frac{x\sin\theta_i - z\cos\theta_i}{v_1}\right) \tag{2}$$

其中 v_1 是第一媒质中的传播速度。反射波电矢量 $\mathbf{E}^{(r)}$ 的各笛卡儿分量由同样表达式给出[§1.5(16)],利用反射定律§1.5(7),则

$$E_x^{(r)} = R_{\parallel}\cos\theta_i e^{-i\tau_r},\quad E_y^{(r)} = R_{\perp}e^{-i\tau_r},\quad E_z^{(r)} = -R_{\parallel}\sin\theta_i e^{-i\tau_r} \tag{3}$$

式中

$$\tau_r = \omega\left(t - \frac{x\sin\theta_i + z\cos\theta_i}{v_1}\right) \tag{4}$$

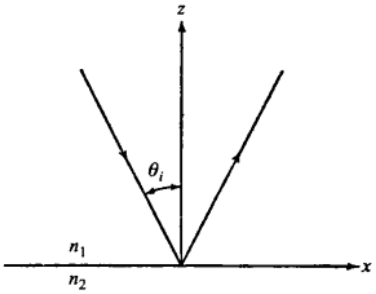


图 7.17 平面波在平面上的反射

反射波振幅 $R_{\parallel}$、$R_{\perp}$ 与入射波振幅 $A_{\parallel}$、$A_{\perp}$ 的关系由菲涅耳公式§1.5(21)表出,即

$$R_{\parallel} = \frac{n_2\cos\theta_i - n_1\cos\theta_t}{n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t}A_{\parallel},\qquad R_{\perp} = \frac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}A_{\perp} \tag{5}$$

为了简化讨论,假定 n_2/n_1 非常大,以致反射率可以取作1;所以在 $n_2/n_1\to\infty$ 极限时[①],由(5)式得到

$$R_{\parallel} = A_{\parallel},\qquad R_{\perp} = -A_{\perp} \tag{6}$$

将(6)式代入(3)式,并将入射场和反射场表达式相加,就得到总场。这样,总场电矢量的 x 分量是

$$\begin{aligned} E_x &= E_x^{(i)} + E_x^{(r)} \\ &= 2A_{\parallel}\cos\theta_i\left[\sin\left(\frac{\omega z\cos\theta_i}{v_1}\right)\right]e^{-i\left[\omega\left(t-\frac{x\sin\theta_i}{v_1}\right)-\frac{\pi}{2}\right]} \end{aligned} \tag{7a}$$

类此,

$$E_y = -2A_{\perp}\left[\sin\left(\frac{\omega z\cos\theta_i}{v_1}\right)\right]e^{-i\left[\omega\left(t-\frac{x\sin\theta_i}{v_1}\right)-\frac{\pi}{2}\right]} \tag{7b}$$

而

① 不考虑掠入射($\cos\theta_i\to 0$)情况。在掠入射时,即使 n_2/n_1 不大,反射率也接近1;在此情况下,(5)式给出 $R_{\parallel} = -A_{\parallel}$,$R_{\perp} = -A_{\perp}$。这相当于劳埃德镜的情况(见7.3.2节)。

$$E_z = -2A_{\parallel}\sin\theta_i\left[\cos\left(\frac{\omega z\cos\theta_i}{v_1}\right)\right]e^{-i[\omega(t-\frac{x\sin\theta_i}{v_1})]} \tag{7c}$$

用完全类似的方式，由 § 1.5(13)和 § 1.5(16)，可得到总场磁矢量的三个分量表达式如下：

$$H_x = -2A_{\perp}n_1\cos\theta_i\left[\cos\left(\frac{\omega z\cos\theta_i}{v_1}\right)\right]e^{-i[\omega(t-\frac{x\sin\theta_i}{v_1})]} \tag{8a}$$

$$H_y = -2A_{\parallel}n_1\left[\cos\left(\frac{\omega z\cos\theta_i}{v_1}\right)\right]e^{-i[\omega(t-\frac{x\sin\theta_i}{v_1})]} \tag{8b}$$

$$H_z = 2A_{\perp}n_1\sin\theta_i\left[\sin\left(\frac{\omega z\cos\theta_i}{v_1}\right)\right]e^{-i[\omega(t-\frac{x\sin\theta_i}{v_1})-\frac{\pi}{2}]} \tag{8c}$$

式中用了麦克斯韦关系式 $n_1=\sqrt{\varepsilon_1}$。(7)和(8)两式的每个表达式各代表一个沿 x 方向传播的波，传播速度为 $v_1/\sin\theta_i$。波的振幅不是常数，而是沿 z 方向周期地变化，周期为 $2\pi v_1/\omega\cos\theta_i=\lambda_0/n_1\cos\theta_i$，式中 λ_0 是真空波长。

正入射的情况($\theta_i=0$)具有特别意义。设 A_x，A_y 为电矢量的振幅分量，由(1)式，可令 $A_{\parallel}=-A_x$，$A_{\perp}=A_y$；则由(7)和(8)两式得到

$$\left.\begin{aligned}E_x &= -2A_x\left[\sin\left(\frac{\omega z}{v_1}\right)\right]e^{-i(\omega t-\frac{\pi}{2})},\\ E_y &= -2A_y\left[\sin\left(\frac{\omega z}{v_1}\right)\right]e^{-i(\omega t-\frac{\pi}{2})},\\ E_z &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}H_x &= -2A_yn_1\left[\cos\left(\frac{\omega z}{v_1}\right)\right]e^{-i\omega t},\\ H_y &= 2A_xn_1\left[\cos\left(\frac{\omega z}{v_1}\right)\right]e^{-i\omega t},\\ H_z &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

我们看到，在每一瞬间，位相在整个第一媒质中是常数。波没有有限的传播速度，因而称之为**驻波**。电矢量和磁矢量的振幅是 z 的周期函数；振幅为零的平面叫**波节**，振幅最大值所在的平面叫**波腹**。由(9)式可知，电场的波节发生在：

$$z=\frac{m\pi v_1}{\omega}=\frac{m\lambda_0}{2n_1},\qquad m=0,1,2,\cdots \tag{11a}$$

而波腹发生在：

$$z=\frac{m\lambda_0}{2n_1},\qquad m=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\cdots \tag{11b}$$

从(10)式可知，磁场的波节与电场的波腹重合，反之亦然。特别是，反射面是电场的一个波节，磁场的一个波腹。

维纳(O. Wiener)[①]首先在实验上证实了光驻波的存在。他的实验装置如图 7.18 所示，

① O. Wiener, *Ann. d. Physik*, **40**(1890), 203。

M 为一平面镜,前表面镀了银,由一束准单色平行光垂直照射。F 为一透明照相乳胶膜,涂在玻璃板 G 的平表面上,厚度不到 1/20 波长。乳胶膜 F 放在镜 M 之前,与 M 有一很小的倾角。乳胶经显影后,呈现变黑之处是一系列等距的平行带,而带与带之间是透明的。变得最黑的地方应是乳胶膜 F 与电场波腹面或磁场波腹面相交之处,二者当居其一。维纳进一步做了实验,把涂了乳胶的平板压在一个凸球面反射镜上,结果发现接触镜面地方的乳胶没有变黑。上面我们看到,这个地方是磁场的一个波腹①。因此,变黑的地区对应于电场的波腹,也就是说,**光化学作用直接与电矢量有关,而与磁矢量无关。**这个结论从电子论看来是理所当然的。照相过程是一个电离过程,其中一个电子从卤化银的一个原子键上被移走,而作用在静止带电粒子上的电磁力是与电矢量成正比[见 § 1.1(34)]。

有人用荧光薄膜②和光电发射薄膜③做过类似实验,他们用这些膜代替维纳的照相乳胶作为驻波探测器。在这两种情况下,仍然如电子论所预料的,发现最大响应位于电矢量波腹处。

光驻波是李普曼(G. Lippmann)④所发明的彩色照相法的基础。它是把涂有细粒照相乳胶的透明感光版放在照相机中曝光,但令乳胶面背向入射光,而与水银反射面相接触(见图 7.19)。为简单起见,假定感光版接受的是正入射的、波长为 λ_0 的准单色光。因为光化学作用在(11b)式所给出的电矢量波腹处最强,所以,在显过影的感光版中就形成了一系列等距的银层,这些银层平行于乳胶表面,光学间隔为 $\lambda_0/2$。现在,如果用白光垂直照射该底版,这些银层就成为部分反射面,因而反射光由一系列光束组成,它们的光程差为 λ_0 的整数倍。我们将在后面(见 7.6 节)讨论这样一系列光束的干涉。分析表明,对于波长 λ_0,合成强度有一个极大,而当光束数目很大时,该极大是十分锐的。这样,李普曼版就相当于一个选择反射器,对制备它时所用波长的光有强的反射。

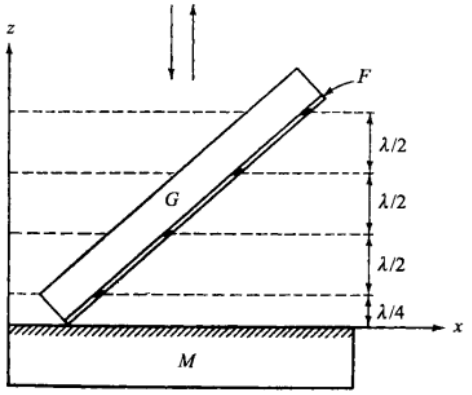


图 7.18 维纳驻波实验(图中大大夸大了照相版对镜子的倾斜)

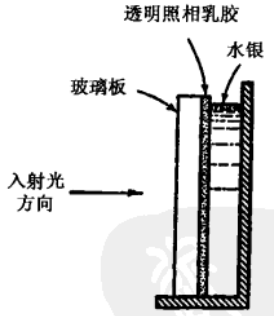


图 7.19 李普曼的彩色照相术装置

① 这里假定从电介体推导出来的(6)式对镀银反射面也适用。第 14 章讨论的金属反射理论证明,在维纳实验条件下,该假定是正确的。

② P. Drude and W. Nernst, *Wiedem. Ann.*, **45**(1892), 460。

③ H. E. Ives and T. C. Fry, *J. Opt. Soc. Amer.*, **23**(1933), 73。

④ G. Lippmann, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **112**(1891), 274。

维纳[①]还用他的装置考察了入射角为 45°、入射光为线偏振光时的干涉效应。他发现，当入射光电振动方向垂直于入射面时，乳胶变黑的地方是一系列等距的平行带；但是当入射光电振动方向在入射面上时，变黑是均匀的。这一结果再次证明与光化学效应直接有关的是电场，而不是磁场。因为，当电振动方向垂直入射面时，$A_{\parallel}=0$，在 $\theta_i=45°$时，(7)式给出

$$\begin{aligned} E_x &= 0, \\ E_y &= -2A_{\perp}\left[\sin\left(\frac{\omega z}{\sqrt{2}v_1}\right)\right]\exp\left\{-\mathrm{i}\left[\omega\left(t-\frac{x}{\sqrt{2}v_1}\right)-\frac{\pi}{2}\right]\right\} \end{aligned} \tag{12}$$

所以，电矢量的振幅以及电能密度的时间平均值沿 z 方向是周期变化的。当振动方向在入射面上时，$A_{\perp}=0$，由(7)式，得出

$$\begin{aligned} E_x &= \sqrt{2}A_{\parallel}\sin\left(\frac{\omega z}{\sqrt{2}v_1}\right)\exp\left\{-\mathrm{i}\left[\omega\left(t-\frac{x}{\sqrt{2}v_1}\right)-\frac{\pi}{2}\right]\right\} \\ E_y &= 0, \\ E_z &= -\sqrt{2}A_{\parallel}\cos\left(\frac{\omega z}{\sqrt{2}v_1}\right)\exp\left\{-\mathrm{i}\left[\omega\left(t-\frac{x}{\sqrt{2}v_1}\right)\right]\right\} \end{aligned} \tag{13}$$

由(13)式和 § 1.4(54)可知，在这情况下，时间平均电能密度等于

$$\langle w_e\rangle=\frac{{n_1}^2}{16\pi}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^{\star}=\frac{{n_1}^2}{16\pi}(E_xE_x^{\star}+E_zE_z^{\star})=\frac{{n_1}^2}{8\pi}A_{\parallel}A_{\parallel}^{\star} \tag{14}$$

所以，经时间平均后，电能密度与 z 无关。类似的结果对磁场也同样成立。从(8)式可知，当入射光磁振动方向垂直于入射面时，时间平均的磁能密度沿 z 方向是周期变化的，但是当入射光磁振动方向在入射面上时，磁能密度经时间平均后与 z 无关。

7.5　双光束干涉：振幅分割

7.5.1　平行平面板产生的条纹

设想用一个准单色的点光源 S 照射一块透明的平行平面板(见图 7.20)，并设观察点 P 和 S 在板同侧。不管点光源在什么位置，总有两条光线到达 P 点——一条是从板的上表面反射回来的，另一条是从下表面反射回来的——所以，在和 S 同侧的这一边，将产生一个非定域的干涉图样。由对称性考虑可知，在平行于板面的平面内，条纹是圆形的，以板法线 SN 为轴，所以，在任何 P 点位置，条纹的走向都垂直于平面 SNP。从 7.3.4 节的讨论可以预料，如果光源平行于平面 SNP 扩展开，条纹的可见度将会下降。但当 P 点在无穷远时情况例外——观察无穷远条纹可用眼睛放松远眺，也可借助一望远物镜成像于其焦平面上近观。这时，从 S 到 P 的两条光线，即 $SADP$ 和 $SABCEP$(见图 7.21)，起源于同一条入射光线，因而它们在离开平行平面板后相互平行。这两条光线的光程差是

$$\Delta\mathcal{S}=n'(AB+BC)-nAN \tag{1}$$

式中 n' 是板的折射率，n 是周围媒质的折射率，N 是 C 到 AD 的垂足。设板的厚度为 h，光线在上表面的入射角为 θ，折射角为 θ'，则

① O. Wiener, *loc. cit*。

$$AB = BC = \frac{h}{\cos\theta'} \tag{2}$$

$$AN = AC\sin\theta = 2h\tan\theta'\sin\theta \tag{3}$$

$$n'\sin\theta' = n\sin\theta \tag{4}$$

因此,由(1)~(4)式,

$$\Delta\mathcal{S} = 2n'h\cos\theta' \tag{5}$$

相应的位相差

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0}n'h\cos\theta' \tag{6}$$

这里还必须考虑到反射相变 π,按照菲涅耳公式 §1.5(21a),它发生在上表面或者下表面上。因此,P 点的总位相差

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0}n'h\cos\theta' \pm \pi \tag{7a}$$

$$= \frac{4\pi h}{\lambda_0}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\theta} \pm \pi \tag{7b}$$

式中的 θ 仅由 P 点在望远物镜焦平面上的位置来决定,所以 δ 与 S 的位置无关。由此可见,采用扩展光源时,条纹的清晰程度同使用点光源时一样。由于这只对某一个特殊的观察面才正确,所以,这些条纹称为**定域条纹**——在本例中,条纹定域在无穷远。

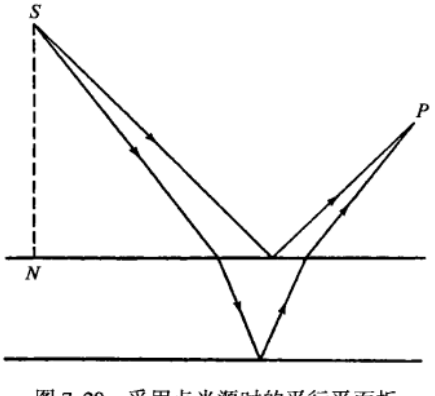


图 7.20 采用点光源时的平行平面板

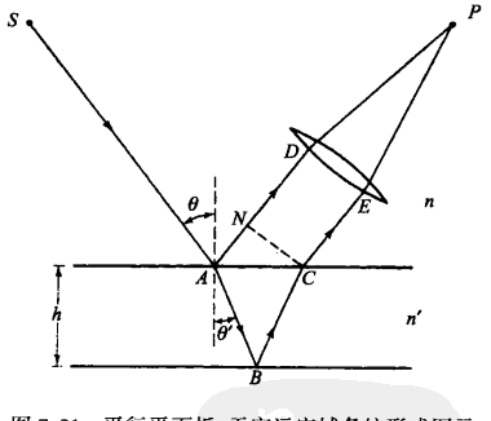


图 7.21 平行平面板:无穷远定域条纹形成图示

图样中的强度是按 §7.2(15)变化的;由(7)式和 §7.2(16),当

$$2n'h\cos\theta' \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0, \qquad m = 0, 1, 2, \cdots \tag{8a}$$

时,条纹是亮的,而当

$$2n'h\cos\theta' \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0, \qquad m = \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, \cdots \tag{8b}$$

时,条纹是暗的。这样,条纹的特点是每个条纹各对应一定的 θ'(以及 θ),因而形成各个条纹的光在板上的入射角是特定的。由于这个原因,这些条纹通常称为**等倾条纹**。当望远物镜的轴垂直于板时,条纹是一系列同心圆,圆心在正反射光($\theta = \theta' = 0$)的焦点处。图样中心的干涉

序最大，其值 m_0 由下式给出：

$$2n'h \pm \frac{\lambda_0}{2} = m_0\lambda_0 \tag{9}$$

m_0 不一定是整数，可以写成

$$m_0 = m_1 + e \tag{10}$$

式中 m_1 是最里面的亮条纹的整数序，而 e 小于 1，称为**中心小数序**。对于从中心数起第 p 个亮条纹，设其角半径为 θ_p，干涉序为 m_p，则根据(8a)式，有

$$\begin{aligned} 2n'h\cos\theta'_p \pm \frac{\lambda_0}{2} &= m_p\lambda_0 \\ &= [m_1 - (p-1)]\lambda_0 \end{aligned} \tag{11}$$

而且由(9)～(11)式，

$$2n'h(1-\cos\theta'_p) = (p-1+e)\lambda_0 \tag{12}$$

现在，如果 θ'_p 很小，则由折射定律可知，$n' \approx n\theta_p/\theta'_p$，因而 $1-\cos\theta'_p \approx \theta'^2_p/2 \approx n^2\theta_p^2/2n'^2$；因此，由(12)式，得出

$$\theta_p \approx \frac{1}{n}\sqrt{\frac{n'\lambda_0}{h}}\sqrt{p-1+e} \tag{13}$$

这样，图样的角尺度与$\sqrt{1/h}$成正比，如果 $e=0$，则中心是一个强度极大，亮条纹的半径与正整数的平方根成正比。

用两块透明板的平面隔成一平行空气层也可产生同样的无穷远定域条纹(见图 7.22)。用该装置可以观察当两板间距加大因而厚度 h 连续改变时条纹的变化情况。当 h 增加时，条纹从图样中心向外扩大，h 每增加 $\lambda_0/2$(取空气的 $n'=1$)，图样中心就出现一个新的条纹。为了避免外表面上反射的干扰影响，两块板都做成有点劈形。这时，对于外表面反射光，从 S 到 P 的光程差是随 S 的位置而变的，所以，当采用扩展光源时，由于平均作用，该光在焦平面上产生均匀的强度。由平行表面反射光所形成的条纹叠加在这背景上。

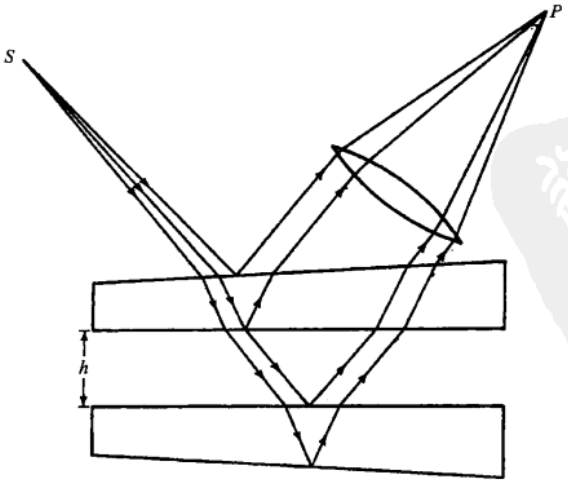


图 7.22　用平行平面空气层产生无穷远定域条纹图示

除非板(或层)非常之薄,这些条纹将对应很高的干涉序,因而在白光下将不能看到。例如,设 $h=1$ 厘米,$n'=1.5$,对于 $\lambda_0=4000$ 埃,中心干涉序约为 75 000 埃,而对于 $\lambda_0=7000$ 埃,则约为43 000;因此,在可见光谱区,约有 32 000 个波长的中心处产生强度极大。从(5)式和§7.3(15)可以显见,要使条纹清晰,则当板的光学厚度增加时,就越要严加限制光源偏离严格单色性的程度。后面将看到(见 7.5.8 节),用实际光源产生条纹,板的光学厚度有一个上限。

以上假定板的光学厚度各处都一样。实际上,用一光阑适当限制住板的受照面积,就可以检验这个假定。根据(8)式,光学厚度改变 $\Delta(n'h)$ 时,图样将位移 Δm 序,其中

$$\Delta m=\frac{2\cos\theta'}{\lambda_0}\Delta(n'h) \tag{14}$$

而在中心 $\theta'=0$ 处,有

$$\Delta m=\frac{2}{\lambda_0}\Delta(n'h) \tag{15}$$

这样,如果使板相对光阑运动,则可从中心干涉序的变化来测定 $n'h$ 的改变,这一方法在光学工厂里用来检验光学厚度要求均匀的平板[①]。

前面考虑的只是板的反射光,但是,很显然,对透射光也可采用同样的分析。在透射情况下(见图 7.23),也有两条光线从 S 到达望远物镜焦平面上 P 点,一条是直接透射的,另一条是经过两次内反射后透过的。用类似于(5)式的推导方法,可以得到这两条光线的光程差为

$$\Delta\mathcal{S}=2n'h\cos\theta' \tag{16}$$

所以相应的位相差

$$\delta=\frac{4\pi}{\lambda_0}n'h\cos\theta' \tag{17}$$

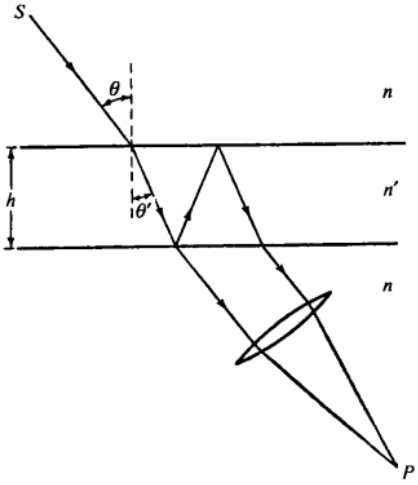


图 7.23 平行平面板:透射光无穷远定域条纹形成图示

① F. Twyman, *Prism and Lens Making* (London, Hilger and Watts Ltd., 2nd edition, 1952), p. 388。

这里不需要加上反射相变造成的位相差，因为两次内反射发生在情况完全相同的两个面上。当采用扩展光源时，也有一个干涉图样定域在无穷远处，而且，比较一下(17)和(7a)两式可以看出，透射光图样与反射光图样是互补的，这就是说，一个图样的亮条纹与另一个图样的暗条纹相对于板法线的角位置相同，然而，如果板面反射率很低(例如空气与玻璃界面，正入射下的反射率约为 0.04)，则形成透射图样的两束光的强度相差很大；依照 § 7.2(16)，这时强度极大与极小相差很小，因而条纹的可见度很低。

前面的讨论只是近似的，因为忽略了板内多次反射的效应，实际上，有一系列光束从 S 到达 P 点，而并不是像假定的那样只有两束。如果板面反射率很低，这近似是够好的，因为这时前两束以后各光束所携带的能量就可以忽略不计，从后面(见 7.6 节)更为严格的讨论将可看到，极大和极小的位置由(8)式正确地给出；但是，如果板面反射率很高，则多次反射将大大改变条纹的强度分布。

7.5.2　薄膜产生的条纹；斐索干涉仪

设有一个透明薄膜，两个反射面都是平的，但不一定相互平行，由一个准单色的点光源 S 来照射。在薄膜外，在与 S 同侧的任一点 P，都有两条从 S 来的光线[①]，即 SAP 和 $SBCDP$ (见图 7.24)，所以在该区域内有一个非定域的干涉图样，从 S 到 P 的这两个光程之差为

$$\Delta\mathcal{S} = n(SB + DP - SA - AP) + n'(BC + CD) \tag{18}$$

式中 n' 是薄膜的折射率，n 是周围媒质的折射率。$\Delta\mathcal{S}$ 的精确值一般很难计算，但是，如果膜足够薄，则上表面 B，A，D 三点紧挨在一起，所以

$$nSA \approx nSB + n'BN_1 \tag{19a}$$

并且

$$nAP \approx nDP + n'N_2D \tag{19b}$$

式中 AN_1 垂直于 BC，AN_2 垂直于 CD。由(18)和(19)两式，

$$\Delta\mathcal{S} \approx n'(N_1C + CN_2) \tag{20}$$

再有，如果薄膜两面夹角足够小，则

$$N_1C + CN_2 \approx N_1'C + CN_2' \tag{21}$$

式中 N_1' 是 E 到 BC 的垂足，N_2' 是 E 到 CD 的垂足，而 E 是下表面的 C 点法线与上表面的交点。由于

$$N_1'C = CN_2' = h\cos\theta' \tag{22}$$

式中 $h = CE$ 是薄膜在 C 点的厚度，以垂直于表面来量度，θ' 是薄膜中的反射角，因此，对于小角度薄膜，由(20) ~ (22)式，可以写下

$$\Delta\mathcal{S} = 2n'h\cos\theta' \tag{23}$$

因而，P 点相应的位相差为

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0}n'h\cos\theta' \tag{24}$$

① 仍然忽略多次反射，它们的效应以后再考虑(见 7.6 节)。

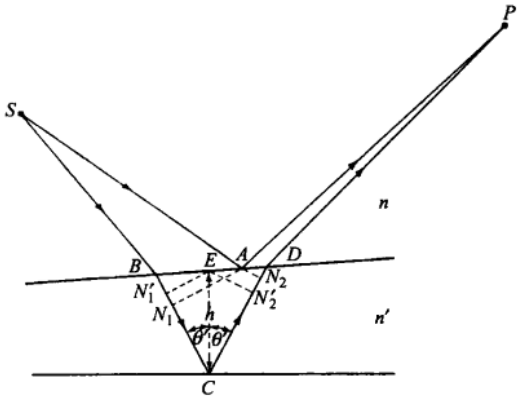


图 7.24 采用点光源时的薄膜

一般来说,当 P 点给定时,h 和 θ' 都随 S 的位置而变,因而光源稍有扩展就会使 P 点 δ 值的变化范围很大,以致条纹消失。但是 P 点在薄膜上时情况例外。当用显微镜聚焦在薄膜上,或用眼睛注视膜面观察时,就是这种情况。这时,对于从扩展光源到达 P' 点(P 的共轭点)的所有成对光线,h 实际上是相同的(见图 7.25),因而 P' 点 δ 的差主要是由于 $\cos\theta'$ 的不同。如果 $\cos\theta'$ 值的变化范围足够小,则 P' 点 δ 值的变化范围可以比 2π 小得多,甚至用一个相当大的扩展光源时也可如此,因而这时可看到有清晰的条纹定域在薄膜上。实际上,在正入射附近进行观察,并再限制入射光瞳(虽然肉眼的瞳孔本身可能已足够小),即可满足 $\cos\theta'$ 变化范围很小的条件。如果把薄膜某一表面上的反射相变 π 考虑进来,则根据(24)式和 §7.2(16),当

$$2n'h\overline{\cos\theta'} \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0, \qquad m = 0, 1, 2, \cdots \tag{25a}$$

时,P' 点将是强度极大(P 点显然如此),而当

$$2n'h\overline{\cos\theta'} \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0, \qquad m = \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, \cdots \tag{25b}$$

时,P' 点将是强度极小,式中 $\overline{\cos\theta'}$ 是 $\cos\theta'$ 的平均值,是对光源上对 P' 贡献光的那些点取平均。这些关系中所出现的量 $n'h$ 是 P 点膜的光学厚度;在我们的近似是正确的范围内,P 点的干涉状况不受他处膜厚的影响。由此可见,即使薄膜界面不是平面,只要其夹角保持很小,(25)式也仍然成立。这时,如果 $\overline{\cos\theta'}$ 实际上是常数,则条纹就是薄膜中光学厚度相等的那些点的轨迹,因此这种条纹通常称为**等厚条纹**(见图 7.26)。

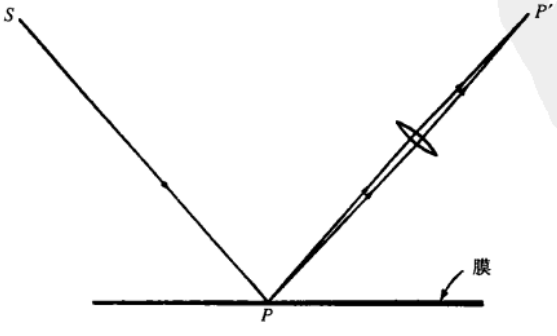


图 7.25 薄膜:定域在薄膜上的条纹形成图示

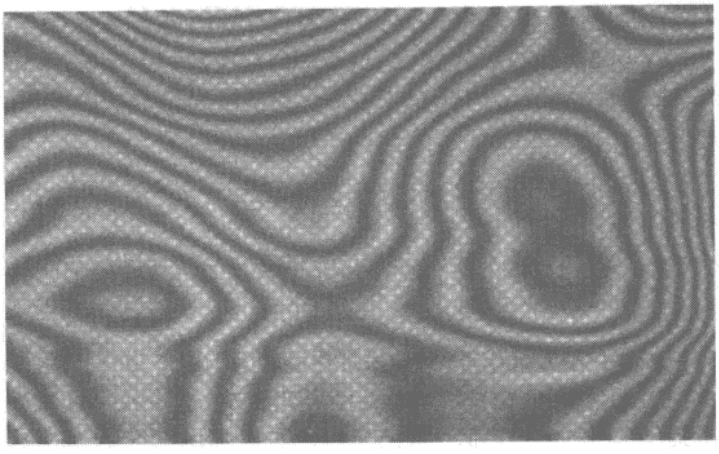


图 7.26　薄玻璃片产生的等厚条纹

等厚条纹可以在两块透明板的两个反射面间的空气薄膜中观察到。在正入射附近，令 $\overline{\cos\theta'}=1$，并采用空气中的波长 $\lambda=\lambda_0/n'$，则暗条纹条件(25b)式变成为

$$h=\frac{m\lambda}{2},\qquad m=0,1,2,\cdots \tag{26}$$

这样，这些条纹是薄膜的等厚线，厚度间隔为 $\lambda/2$。如果薄膜厚度是常数，则膜面上的强度是均匀的；通常用这个效应来检验光学表面的面型，办法是用一个曲率大小相等但符号相反的参考表面(样板)，观察它与被检表面间的薄膜。如果空气膜是一个劈形膜，由两个平面所形成，则条纹是等距直线，并且平行于劈棱。相邻亮条纹的间距为 $\lambda/2\alpha$，其中 α 是劈角；例如，当 $\alpha=1$ 弧分，$\lambda=5500$ 埃时，条纹间距约为 1.9 毫米。这表明，如果要条纹分开得相当大，则劈角必须很小。劈条纹可用来检验机械工厂里作为长度标准的端规。端规 G_1(见图 7.27)是一个钢块，上下两面经过抛光，是平行平面，规的长度即由此二面确定。检验时，将其中一个面和标准规 G_2(同一标定长度)的一个面贴紧在一钢质平台面上，并将一块透明板 T 平面向下放在二规的上端面上。一般，在板与各规之间形成有劈形空气膜，在单色光下可产生条纹。二规长度之差可以从它们的距离和条纹的间距求出[①]。

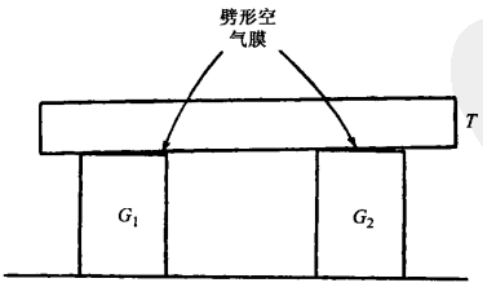


图 7.27　端规的干涉量度比较

① 金属表面上的反射相变，不是像(25)式中所假定的那样严格为 π，但这并不影响条纹间距。

另一个等厚条纹的例子是所谓**牛顿环**的条纹(见图 7.28),它与牛顿对光之本性的见解有关,因而具有历史意义。这种条纹形成在一个透镜的凸球面和一个与它接触的玻璃平面之间(见图 7.29)。条纹是以接触点 C 为中心的同心圆。设 R 是凸球面的曲率半径 OC,则在距 C 点 r 处,薄膜的厚度

$$h = R - \sqrt{R^2 - r^2} \approx \frac{r^2}{2R} \tag{27}$$

式中略去了四次方项。因此,在正入射时,根据(26)和(27)两式,暗条纹条件是

$$r = \sqrt{mR\lambda}, \qquad m = 0, 1, 2, \cdots \tag{28}$$

所以,暗条纹半径与正整数平方根成正比,如果将透镜和板的距离拉开,则膜上一定 h 的点向内移动,因而条纹向中心收缩,间距每增加 $\lambda/2$,中心就消失一个条纹。可注意的是,像杨氏实验一样,这种装置提供了一种测定近似光波波长的方法,而所用设备十分简单。

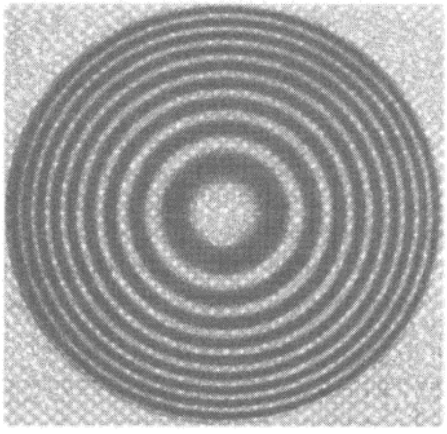


图 7.28 牛顿环

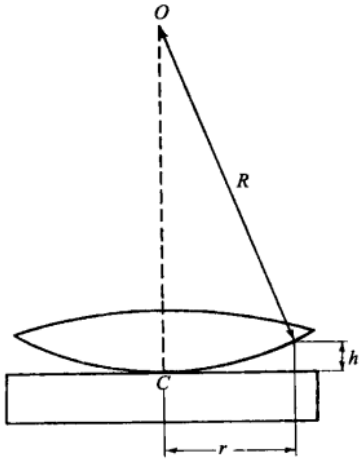


图 7.29 牛顿环形成图示

如果薄膜厚度只有几个半波长,则单色图样中的干涉序是很低的,因而采用白光光源时也可以看到条纹。肥皂泡和水面油膜反射光所显示的五颜六色就是这种条纹的例子。在观察牛顿环的装置中(见图 7.29),当透镜和板接触在一起时,对所有波长来说,中心处的位相差都是 π,所以在白光下中央斑点是黑的,从中心向外,光源不同单色成分形成的各个图样错开得越来越大;在目视观察下,紧靠中心周围有一些彩色圆环,颜色次序一定,称为**牛顿色序**,再往外,眼睛看起来是均匀的白色照明(见 7.3.3 节)。同样,劈形空气膜在白光下也有一个黑色条纹,这是劈棱所在之处。

以上讨论了膜的反射光,但是在透射光下也可以看到有一个定域在膜上的干涉图样。同平行平面板的情况一样,反射光图样和透射光图样是互补的;一个图样的亮条纹与另一个图样的暗条纹出现于膜上相同的位置。当表面反射率很低时,透射图样中条纹的可见度很低,因为两个干涉光束的强度相差悬殊。

我们已经看到，如果要条纹清晰，则膜上各点对应的 $\cos\theta'$ 值的变化范围必须加以限制，而且只有当 $\cos\theta' \approx 1$ 时，条纹才顺沿着等光学厚度线。在**斐索干涉仪**[①]（见图 7.30）中，这些条件可在很大的膜面上同时得到满足。光从准单色光源 S 发出，经一小镜反射后，被透镜 L 准直，然后近乎正入射地照射到膜 F 上。从膜两面反射回来的光穿过 L 后，会聚到 L 焦平面上的小孔 S' 上。把眼睛紧贴在 S' 后面，并注视着膜面，即可看到在 L 所照射的整个膜面上，布满顺沿着等光学厚度线的条纹。这些条纹通常称为**斐索条纹**。后面将看到（见 7.5.3 节），只要光源足够小，用不薄的膜也可产生斐索条纹，因而光学工厂里用这种干涉仪来检验透明平行平面板光学厚度的均匀性。在英国国立物理研究所（NPL），还用它来测量端规的长度[②]，其装置如图 7.31(a)所示。端规 G 的一个面紧贴在钢板 B 的抛光平面上，于是 B 和 G 的上表面相互平行，然后把一块下表面是平面的透明板 T 装在它们上面。一般在 T 和 G 之间、在 T 和 B 之间各形成一劈形空气膜，可各产生一个干涉图样。条纹都是平行直线，而且间距相同。然后调节 T 的倾角使条纹排成与端规一边垂直；这时视场情景如图 7.31(b)所示。如果在端规该边上某一点处，G 和 B 上空气膜的厚度分别为 h_1 和 h_2，而相应的干涉序为 m_1，m_2，则按(26)式，端规的长度

$$d = h_2 - h_1 = (m_2 - m_1)\frac{\lambda}{2} = \Delta m\frac{\lambda}{2} \tag{29}$$

式中 Δm 是两个图样的干涉序位移。这样(29)式可写成

$$d = (x + e)\frac{\lambda}{2} \tag{30}$$

式中 x 是一个未知整数，而 $e < 1$ 是序位移小数，可用内插法测量。x 的值则由**剩余小数法**求出，贝诺瓦[③]首先在干涉量度学中使用了这个方法，它采用 4 种已知波长的光来测量两个图样的序位移小数，这 4 种波长可发自一个适当的光源，但通过转动恒偏向色散棱镜 D［见图 7.31(a)］即可从中依次选出。这样就得到如下形式的关系

$$d = (x_1 + e_1)\frac{\lambda_1}{2} = (x_2 + e_2)\frac{\lambda_2}{2} = (x_3 + e_3)\frac{\lambda_3}{2} = (x_4 + e_4)\frac{\lambda_4}{2} \tag{31}$$

式中 x_1，x_2，x_3 和 x_4 是未知整数；这些关系式确定了 x_1，x_2，x_3 和 x_4 可能值的一组四元集合。用测微计近似测量 d 就足以决定这些四元集合中哪一个正确，从而得到精确的 d 值。如果测量十分细心，用本法能测量长度直到约 10 厘米的端规；如果小数序准到 0.1，则准确度对 $\lambda = 5000$ 埃来说为 $\pm 2.5 \times 10^{-6}$ 厘米。

显然，在斐索装置中，当光源 S（见图 7.30）缩小成一个点，使得膜上各点的 θ' 只有一个值时，便产生其极限情况。然而，在这种情况下，至少当膜面是平面时，条纹必定是非定域的，即在两反射光束所共有的任何平面上，条纹的清晰程度和膜上一样。因此，这就要更严密地研究条纹定域的概念和它与光源扩展的关系。

---

① H. Fizeau, *Ann. Chim. Phys.*, (3), **66**(1862), 429。

② F. H. Rolt, *Engineering*, **144**(1937), 162。

③ J. R. Benoit, *Journ. de Phys.* (3), **7**(1898), 57。

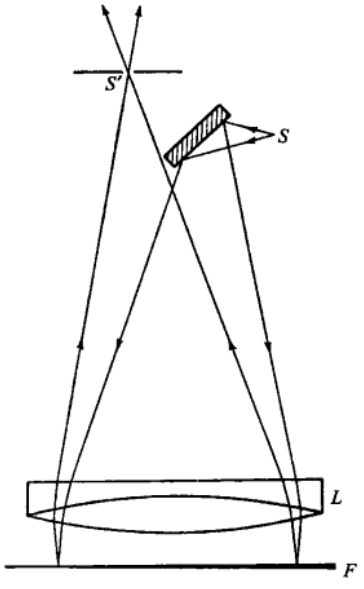


图 7.30 斐索干涉仪

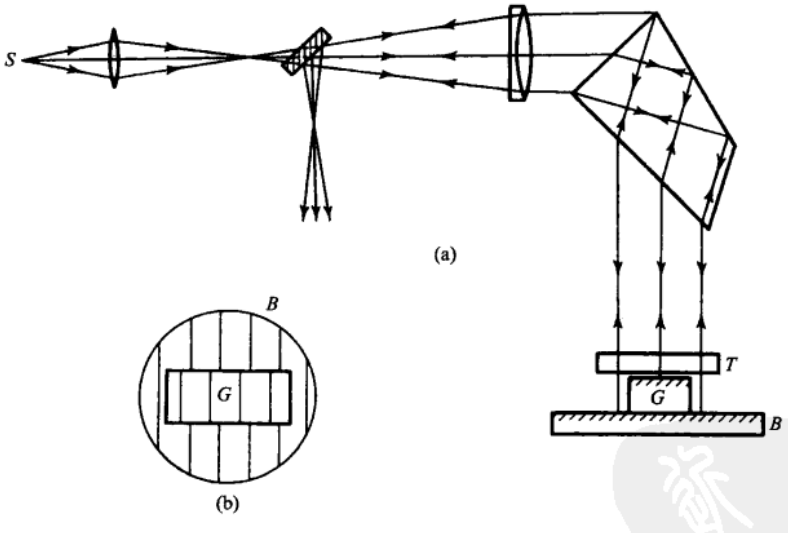


图 7.31 NPL 测规干涉仪:(a)装置;(b)视场

7.5.3 条纹的定域[①]

以上所讨论的产生干涉效应的各种装置,概括说来,都是使光从光源经过两条不同途径到达一空间区域内各点。设 P 是该区域内的一点,而且先假设光来自准单色点光源 S,波长为 λ_0。设 SA_1B_1P、SA_2B_2P 是从 S 到 P 的两条光线(见图 7.32),则 P 点的位相差

① 关于条纹定域问题,更为广泛的讨论可见 J. Macé de Lépinay and C. Fabry, *Journ. de Phys.* (2), **10**(1891), 5。

$$\delta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}\{[SA_2B_2P] - [SA_1B_1P]\} \tag{32}$$

δ_0 的值与 P 点的位置有关，但是所有 P 点的 δ_0 都只有一个值，所以，在来自 S 的两束光的公共区域内，任何平面上都形成有干涉条纹，它们是 δ_0 为常数的那些点的轨迹。我们说这种条纹是**非定域的**；它们的可见度仅仅取决于这两个波的相对强度。一个点光源产生的条纹总是非定域的。

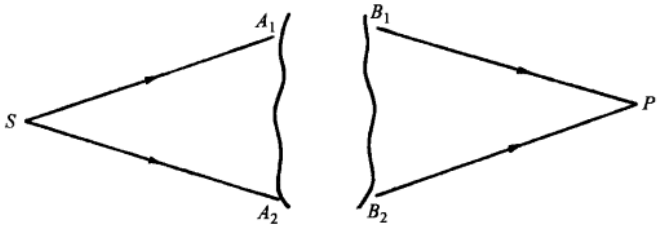


图 7.32　点光源的双光束干涉图示

现在假定，光源是一个以 S 为中心而扩展开的准单色原光源。同 7.3.4 节中一样，假定这种光源是由大量互不相干的点光源构成，每一个点光源各产生一个非定域的干涉图样；因此，在每一点，总强度是这些元图样的强度之和。如果扩展光源所有各点在 P 点产生的位相差不同，则 P 点附近各元图样相互位移，因而 P 点条纹的可见度比采用点光源时低。一般，正如后面将要看到的，当光源扩展时，相互位移增大，因而可见度不断下降，但位移增加的快慢依赖于 P 点的位置。这样，当光源围绕 S 扩展时，可见度在某些 P 点可以保持或接近点光源时的值，而在其他地方实际已下降到零。这时我们说这些条纹是**定域的**；这样的条纹为扩展光源所特有。

当光源的扩展给定时，可见度相应下降多少，这一般是很难计算的，因为它既取决于各元图样的相互位移，同时也取决于它们的相对强度。然而，我们能容易地识别两种极端情况。显然，当各元图样的相互位移比一个序小得多时，它对条纹的影响就很小；在图 7.11 所涉及的特殊情况下，我们曾看到，至少对目视观察来说，只要

$$\delta_{极大} - \delta_{极小} \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{33}$$

条纹可见度的损失仍然不大，式中 $\delta_{极大}$、$\delta_{极小}$ 是扩展光源各点在 P 点产生的最大和最小位相差。这一判据对图 7.15(b)、图 7.15(c)的光源分布也成立，因而可以假定它普遍适用。反之，

$$\delta_{极大} - \delta_{极小} \gg \pi \tag{34}$$

时，各元图样相互位移了许多序，条纹的可见度将非常小。

现在来考察扩展光源 S' 点所产生的 δ 如何依赖于 S' 相对于 S 的位置。S，P 两点是“共轭的”。这个“共轭”意指，如果在 P 点放上一个波长为 λ_0 的点光源，它将在 S 点产生位相差为 δ_0 的两个波。设 W_1，W_2 是这两个波通过 S 点的波阵面(见图 7.33)，则 W_1，W_2 分别垂直于 SA_1，SA_2；它们的曲率依赖于 S 和 P 的位置，而且依赖于具体装置的光学性质。设 N_1，N_2 分别为 S' 到 W_1，W_2 的垂足。N_1 到 P 的光程等于 $[SA_1B_1P]$，同样，N_2 到 P 的光程等于 $[SA_2B_2P]$，因此，在 P 点，与 S' 对应的位相差是

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda_0}\{[S'N_2]+[SA_2B_2P]-[S'N_1]-[SA_1B_1P]\} \tag{35}$$

或者由(32)式,

$$\delta-\delta_0=\frac{2\pi n}{\lambda_0}(s_2-s_1) \tag{36}$$

式中 $s_1=S'N_1$, $s_2=S'N_2$, n 是光源周围媒质的折射率。

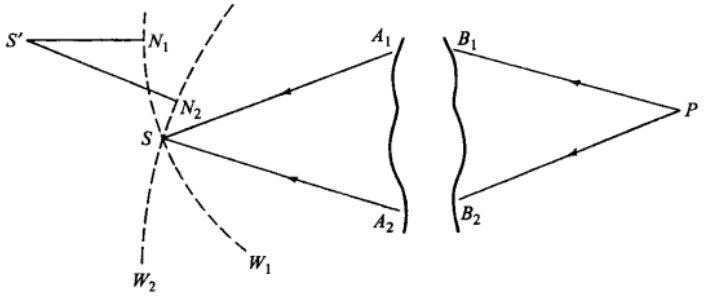


图 7.33 扩展光源的双光束干涉图示

设 S 为直角坐标轴 SX, SY, SZ 的原点,并令 SZ 和 SX 为角 A_1SA_2 的内等分线和外等分线(见图 7.34)。设 W_1, W_2 在平面 $S'SA_1$, $S'SA_2$ 内的曲率半径为 R_1, R_2,则相应的曲率中心 C_1, C_2 分别位于点 $\{R_1\sin(\beta/2), O, R_1\cos(\beta/2)\}$、$\{-R_2\sin(\beta/2), O, R_2\cos(\beta/2)\}$,其中 β 代表角 A_2SA_2。设 (x,y,z) 为 S' 点的坐标,则

$$\begin{aligned}C_1S'=s_1+R_1&=\sqrt{\left(x-R_1\sin\frac{\beta}{2}\right)^2+y^2+\left(z-R_1\cos\frac{\beta}{2}\right)^2}\\&=R_1\sqrt{1-\frac{2}{R_1}\left(x\sin\frac{\beta}{2}+z\cos\frac{\beta}{2}\right)+\frac{(x^2+y^2+z^2)}{R_1{}^2}}\end{aligned} \tag{37}$$

当光源的线度比 R_1 小得多时,可以略去 x/R_1, y/R_1, z/R_1 高于二次的项,所以

$$s_1\approx-x\sin\frac{\beta}{2}-z\cos\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2R_1}\left[x^2+y^2+z^2-\left(x\sin\frac{\beta}{2}+z\cos\frac{\beta}{2}\right)^2\right] \tag{38}$$

同样,

$$s_2\approx x\sin\frac{\beta}{2}-z\cos\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2R_2}\left[x^2+y^2+z^2-\left(x\sin\frac{\beta}{2}-z\cos\frac{\beta}{2}\right)^2\right] \tag{39}$$

在大多数有实际意义的情形中,β 是很小的,因而(38)和(39)二展开式中包含 β^2 和 $\beta x/R$ 的项可以忽略。于是从(36)、(38)和(39)三式得到

$$\delta-\delta_0\approx\frac{2\pi n}{\lambda_0}\left[\beta x+\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)(x^2+y^2)\right] \tag{40}$$

当(40)式中与 β 无关的项可以忽略时,

$$\delta - \delta_0 \approx \frac{2\pi n}{\lambda_0}\beta x \tag{41}$$

在这种近似下，当 $x=0$ 时，$\delta=\delta_0$，所以当光源在 YSZ 平面内扩展时，位相差的变化（因而可见度的减小）可以忽略。按照(33)和(41)两式，如果光源垂直于 YSZ 平面的扩展不超过 $\lambda_0/4n\beta$，则可见度减小不明显。SA_1 和 SA_2 的取向，因而我们所选择的坐标轴的取向，一般依赖于 P 点的位置。如果对应所有 P 点的各个 YSZ 平面有一公共交线，则沿该交线放上一个线光源（或实际上，一个宽度小于 $\lambda_0/4n\beta$ 的狭缝光源）时，它所产生的条纹的可见度各处都将同点光源时一样；这些条纹仍然是非定域的。7.3.2 节的那些装置（除梅斯林实验外）都是如此。例如，当采用菲涅耳双面镜时，不管 P 点在什么位置，平面 YSZ 总包含那条通过 S 且平行于镜面交线的直线，因而，正如在 7.3.4 节中看到的，沿这条直线放上一个狭缝光源时，将产生非定域条纹。很容易证明，缝宽表达式 §7.3(26)就等同于 $e\leqslant\lambda_0/4n\beta$。然而，一般说来，对应所有 P 点的各个 YSZ 平面没有共同交线。只是对某一个限定区域内的 P 点来说，一个线光源才可能是在对应于这些点的 YSZ 平面内；但是，对其他的点来说，该线光源扩展到 YSZ 平面之外，距离大大超过 $\lambda_0/2n\beta$，因而按照(34)和(41)两式，这意味着可见度很小。在这种情况下，狭缝光源产生的条纹是定域的，而且定域区域依赖于狭缝的取向。

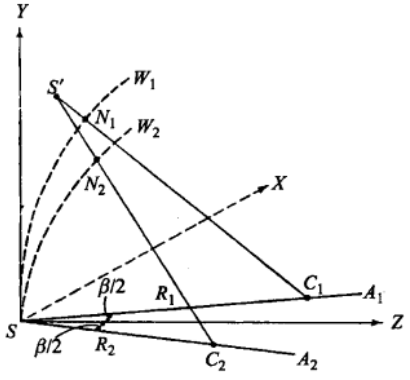


图 7.34　双光束干涉装置条纹定域讨论图示

β 的值依赖于 P 点的位置，而且按照(40)式，如果忽略 R_1 和 R_2 对 β 的依赖关系，则当 x 给定时，$\delta-\delta_0$ 随 β 的减小而减小。由此可见，当光源垂直于平面 YSZ 的扩展增加时，条纹变成为定域条纹，定域在对应于 β 值足够小的那些区域中。特别是，当 SA_1 和 SA_2 相重时，$\beta=0$；定域区域包括这样一些 P 点——如果存在的话——这些点均位于来自 S 的单条入射光线所派生的两条光线的交点上。在这些点附近，β 可以忽略，因而从(40)式得到

$$\delta - \delta_0 \approx \frac{\pi n}{\lambda_0}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)(x^2+y^2) \tag{42}$$

如果 W_1，W_2 是球面，则 R_1，R_2 与 x 和 y 无关，因而可见度的减小与光源在平面 YSZ 内的扩展方向无关。对于这一平面上的一个圆光源，按照(33)和(42)两式，如果其半径不超过大约 $\sqrt{\lambda_0 R_1 R_2/2n|R_1-R_2|}$，则可见度的减小并不明显。

在用望远镜观察平行平面板的情况下（见 7.5.1 节），当 P 点位于望远物镜焦平面上时，

$\beta=0$。这时,对于所有 S 位置,R_1 和 R_2 都是无穷大,所以按照(42)式,对于所有的 x 和 y,$\delta=\delta_0$。因此,不管光源的位置和扩展如何,物镜焦平面上条纹的可见度都不会减小。实际上,望远镜的孔径总是限制了光源的有效扩展。因此,当望远镜没有完全调好,以致所观察的条纹在物镜焦平面之外时,只要光源的这种有效扩展不超过(33)和(40)两式所容许的值,可见度的减小也仍不明显。

再举一个例子①,看看透明劈反射条纹的情况。设劈的折射率为 n',劈的两个平面形成一小角度 α,并设它周围媒质的折射率为 n。假定 S 为一准单色点光源,并考虑劈主截面(与劈棱垂直的截面)内的一条光线,它与劈的前表面交于 A 点(见图 7.35)。该入射光线产生一条反射光线 AP 和一条折射光线 AB,折射光线 AB 在后表面 B 点受到反射,又在前表面 C 点受到折射,然后沿 CP 射出,与反射光线 AP 相交于 P 点。当光源以 S 为中心而扩展时,平面 SAP 附近的条纹变成定域于 P 点附近。

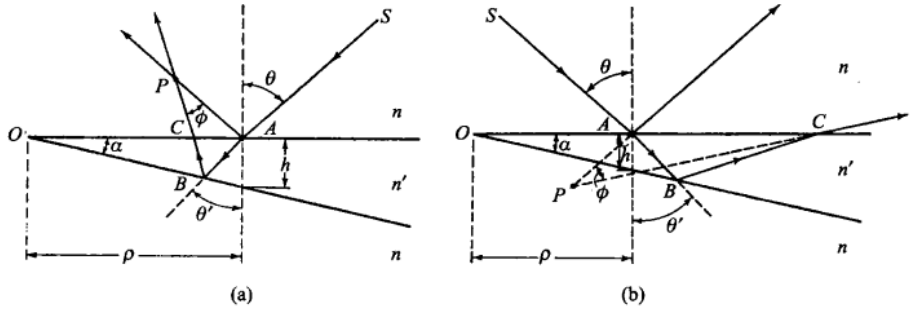


图 7.35 光线在平面劈表面上的反射和折射

设 ρ 为 A 点到劈棱 O 的距离;θ,θ' 分别为 A 点处的入射角和折射角;ϕ 为角 APC。从 A 点作一直线垂直于劈的前表面,当 B 和 O 位于此垂线的同侧时,P 点是实的[见图 7.35(a)];B 点处的反射角为 $(\theta'-\alpha)$,C 点处的出射角为 $(\theta-\phi)$,并且根据初等几何学可写出下列关系:

$$AB=\frac{\rho\sin\alpha}{\cos(\theta'-\alpha)} \tag{43}$$

$$\frac{BC}{AB}=\frac{\cos\theta'}{\cos(\theta'-2\alpha)} \tag{44}$$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{\sin 2(\theta'-\alpha)}{\cos(\theta'-2\alpha)} \tag{45}$$

$$\frac{AP}{AC}=\frac{\cos(\theta-\phi)}{\sin\phi} \tag{46}$$

$$\frac{CP}{AC}=\frac{\cos\theta}{\sin\phi} \tag{47}$$

① 关于平面劈产生的条纹,更充分的讨论可见 J. Macé de Lépinay, *Journ. de Phys.* (2), **9** (1890), 121; W. Feussner and L. Janicki, *Handbuch der Physikalischen Optik*, Vol. I, ed. E. Gehrcke (Leipzig, Barth, 1926), p. 396; G. F. C. Searle, *Phil. Mag.* (7), **37** (1946), 361。

此外，按斯涅耳定律，A，C 两点处的折射分别满足

$$n' \sin\theta' = n \sin\theta \tag{48}$$

$$n' \sin(\theta' - 2\alpha) = n \sin(\theta - \phi) \tag{49}$$

把(48)和(49)两式相减并利用恒等式

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

即可得到

$$\sin\frac{\phi}{2} = \frac{n' \sin\alpha\cos(\theta' - \alpha)}{n\cos\left(\theta - \frac{\phi}{2}\right)} \tag{50}$$

因而如果 θ 不太接近 $\pi/2$，则当 α 很小时，上式可以写成

$$\phi \approx \frac{2n'\alpha\cos\theta'}{n\cos\theta} \tag{51}$$

从(43)、(45)和(46)三式，

$$AP = \frac{2\rho\sin\alpha\sin(\theta' - \alpha)\cos(\theta - \phi)}{\cos(\theta' - 2\alpha)\sin\phi} \tag{52}$$

当 α 很小时，可以利用(51)式把(52)式按 α 的幂次展开。如果只保留其中的首项，并再利用(48)式，则可得到

$$AP \approx \frac{\rho n^2 \sin\theta\cos^2\theta}{n'^2 - n^2\sin^2\theta} \tag{53}$$

(53)式中所忽略的量是 $\rho\alpha$ 量级，即 A 点劈厚的量级。当 S 和 O 位于过 A 点的劈前表面法线的同侧时，P 点是虚的[见图 7.35(b)]，可是近似公式(53)仍然成立。

如果劈是两玻璃板间的空气膜，而且若忽略前板中折射的影响，则可令(53)式中 $n = n' = 1$，结果 $AP \approx \rho\sin\theta$，所以角 $OPA \approx \pi/2$。P 点的轨迹是一个圆，以 OS_1 为直径，这里 S_1 是 S 在劈前表面中的反射像(见图 7.36)。

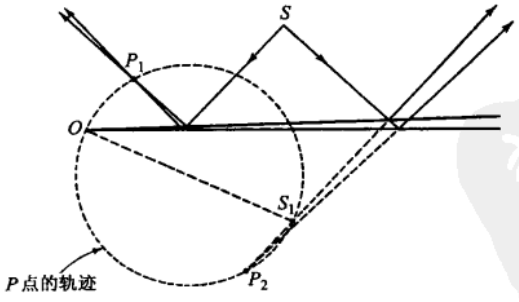


图 7.36　空气劈主截面内条纹的定域(忽略界面的折射影响)

如果 S 离劈很远，以致所有入射光线可以认为与 SA 平行[①]，则 θ 因而 θ' 及 ϕ 均与 ρ 无关，

① 在斐索装置中(见 7.5.2 节)，该条件是严格满足的。

并且从(52)式可以看到,AP 与 ρ 成正比。这时,P 点的轨迹是一个通过劈棱的平面(见图 7.37);利用(53)式和关系式 $AN=\rho\sin\theta$,可以求得该定域平面与垂直于反射光束的平面的夹角 γ 为

$$\tan\gamma=\frac{AN-AP}{ON}\approx\left(\frac{n'^2-n^2}{n'^2-n^2\sin^2\theta}\right)\tan\theta \tag{54}$$

显然,当 $\theta=0$ 时,$\gamma\approx0$,所以在正入射光下,定域平面与劈的前表面实际重合。

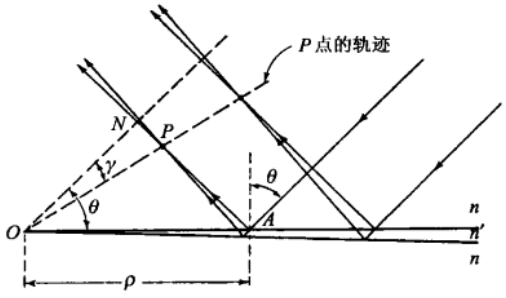


图 7.37 当光源在无穷远时劈条纹的定域

现在来考虑 P 点的光程差 $\Delta\mathcal{S}$。从图 7.35(a)可知,当 P 点是实点时,

$$\Delta\mathcal{S}=n'(AB+BC)+n(CP-AP) \tag{55}$$

利用(43)和(44)两式,当 α 很小而 θ' 不太接近 $\pi/2$ 时,

$$AB+BC=\frac{2\rho\sin\alpha\cos\alpha}{\cos(\theta'-2\alpha)}\approx\frac{2h}{\cos\theta'} \tag{56}$$

式中

$$h=\rho\tan\alpha \tag{57}$$

是劈在 A 点的厚度,并且在该近似式中略去了所有 α 的幂次项。类此,由(43)~(47)各式

$$CP-AP=\frac{-2\rho\sin\alpha\sin\left(\theta-\dfrac{\phi}{2}\right)\sin(\theta'-\alpha)}{\cos\dfrac{\phi}{2}\cos(\theta'-2\alpha)}\approx-\frac{2h\sin\theta\sin\theta'}{\cos\theta'} \tag{58}$$

因此,由(55)、(56)、(58)和(48)四式,得到

$$\Delta\mathcal{S}\approx2n'h\cos\theta' \tag{59}$$

而 P 点相应的位相差为

$$\delta\approx\frac{4\pi}{\lambda_0}n'h\cos\theta'=\frac{4\pi h}{\lambda_0}\sqrt{n'^2-n^2\sin^2\theta} \tag{60}$$

用同样方法可以证明,在图 7.35(b)的情况,即当 P 点是虚点时,上列近似式也仍然成立。当把劈的一个表面上发生的反射相变 π 考虑进来时,根据(60)式和 §7.2(16),当

$$2n'h\cos\theta'\pm\frac{\lambda_0}{2}=m\lambda_0,\qquad m=0,1,2,\cdots \tag{61a}$$

时,P 点强度是极大,而当

$$2n'h\cos\theta'\pm\frac{\lambda_0}{2}=m\lambda_0,\qquad m=\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},\tfrac{5}{2},\cdots \tag{61b}$$

时，P 点强度是极小。显然，在定域平面内，θ' 为定值的各条纹是等距的，而且平行于劈棱。

最后，看看光源可从 S 向外扩展到多大而仍不显著减小 P 点条纹的可见度。为此，设想把一个点光源放在 P 点，来决定光经劈前、后表面反射后到达 S 点时其波阵面 W_1，W_2 的曲率半径 R_1，R_2（见图 7.38）。W_1 是球面，它的曲率中心在 AS 上 P_1 点，这里 P_1 点是 P 在劈前表面中的反射像。因此，

$$R_1 = SP_1 = SA + AP \tag{62}$$

W_2 一般不是球面。先考虑它在劈主截面内的曲率半径。在 C 点折射后，曲率中心 P' 位于 BC 上，位置由 §4.6(21) 给出。采用 4.6 节的符号时，有 $n_0 = n$，$n_1 = n'$，$r_y = \infty$，$\theta_0 = \theta - \phi$，$\theta_1 = \theta' - 2\alpha$，$d_0^{(t)} = CP$，$d_1^{(t)} = CP'$，因而按 §4.6(21)，

$$\frac{CP'}{CP} = \frac{n'\cos^2(\theta' - 2\alpha)}{n\cos^2(\theta - \phi)} \tag{63}$$

在 B 点反射后，曲率中心位于 AB 上的 P'' 点，这里 P'' 是 P' 在劈后表面中的反射像；最后在 A 点折射后，曲率中心位于 AS 上的 P_2 点，这里，按 §4.6(21)（用 $n_0 = n'$，$n_1 = n$，$r_y = \infty$，$\theta_0 = \theta'$，$\theta_1 = \theta$，$d_0^{(t)} = AP''$，$d_1^{(t)} = AP_2$），

$$\frac{AP_2}{AP''} = \frac{n\cos^2\theta}{n'\cos^2\theta'} \tag{64}$$

因此，W_2 在劈主截面内的曲率半径 R_2 为

$$R_2 = SP_2 = SA + AP_2 \tag{65}$$

按(64)式和关系式 $AP'' = AB + BC + CP'$，上式中

$$AP_2 = \frac{n\cos^2\theta}{n'\cos^2\theta'}(AB + BC + CP') \tag{66}$$

用(63)式的 CP' 代入，即有

$$AP_2 = \frac{n\cos^2\theta}{n'\cos^2\theta'}(AB + BC) + \frac{\cos^2\theta\cos^2(\theta' - 2\alpha)}{\cos^2\theta'\cos^2(\theta - \phi)}CP \tag{67}$$

当 α 很小时，此式化为

$$\begin{aligned} AP_2 &\approx \frac{n\cos^2\theta}{n'\cos^2\theta'}(AB + BC) + CP \\ &\approx \frac{n\cos^2\theta}{n'\cos^2\theta'}\frac{2h}{\cos\theta'} + AP - \frac{2h\sin\theta\sin\theta'}{\cos\theta'} \end{aligned} \tag{68}$$

式中应用了(56)和(58)两式。最后从(62)、(65)和(68)三式得到

$$R_2 - R_1 \approx \frac{2h}{\cos\theta'}\left(\frac{n\cos^2\theta}{n'\cos^2\theta'} - \sin\theta\sin\theta'\right) \tag{69}$$

用类似方法可以推导 W_2 在垂直于劈主截面的截面内的相应表达式。这时必须用 §4.6(22) 来代替 §4.6(21)；因而(63)和(64)两式相应换成

$$\frac{CP'}{CP} = \frac{n'}{n}, \qquad \frac{AP_2}{AP''} = \frac{n}{n'} \tag{70}$$

由此得到,在垂直于劈主截面的截面内,W_2 与 W_1 的曲率半径之差

$$R_2 - R_1 \approx \frac{2h}{\cos\theta'}\left(\frac{n}{n'} - \sin\theta\sin\theta'\right) \tag{71}$$

正如前面所指出的,(33)和(42)两式表示,如果光源 SA 的径向扩展不超过$\sqrt{\lambda_0 R_1 R_2/2n|R_1 - R_2|}$,则 P 点的可见度减小得不明显。现在,当 θ 不太接近 $\pi/2$ 时,从(69)和(71)两式可以看出,$R_2 - R_1$ 是 h 的量级;因此,如果像斐索装置情况那样,R_1 比起 h 来足够大,则可取 $R_2/R_1 \approx 1$。在这一近似下,从 P_1 点来看,光源可容许的角半径为

$$\varepsilon \approx \frac{1}{R_1}\sqrt{\frac{\lambda_0 R_1 R_2}{2n|R_1 - R_2|}} \approx \sqrt{\frac{\lambda_0}{2n|R_1 - R_2|}} \tag{72}$$

特别是,在正入射附近,(69)和(71)两式给出 $R_2 - R_1 \approx 2hn/n'$,因而(72)式变成

$$\varepsilon \approx \frac{1}{2n}\sqrt{\frac{\lambda_0 n'}{h}} \tag{73}$$

对于一个薄空气膜,典型值是:$h = 0.01$ 厘米,$n' = n \approx 1$,$\lambda_0 = 5500$ 埃,这时(73)式给出 $\varepsilon \approx 2°$。显然,可容许的光源扩展正比于$\sqrt{1/h}$;例如,同样在上述情况,但令 $h = 1$ 厘米,则按(73)式,ε 约为 12 弧分。这样,正如在讨论斐索干涉仪时曾经说过的,当劈不薄时,只要光源足够小,仍可获得高可见度的条纹。

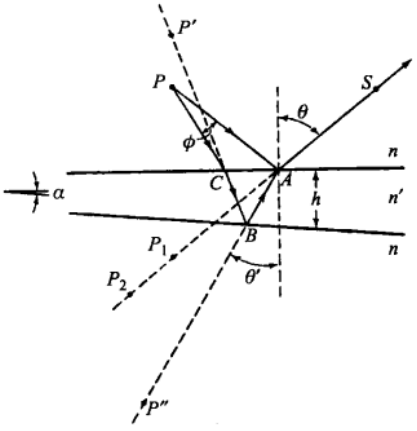


图 7.38 一个点光源的波阵面经平面劈表面反射和折射后的曲率中心

7.5.4 迈克耳孙干涉仪

在 7.5.1 节和 7.5.2 节的装置中,除去在板或膜界面之间的区域,都有两束光叠加。这对某些应用是很不便的;如果用一辅助半反射面来产生这些光束,就可避免这一点,这时两束光在重新会合以前可以完全分开。这种装置是**迈克耳孙干涉仪**[①]的基础。

该仪器的最简单形式如图 7.39 所示。从扩展光源 S 来的光,在平行平面玻璃板 D 的半反射面$\mathcal{A}$上分成相互垂直的两束光。这两束光分别从平面镜 M_1,M_2 上反射回到 D,在这里重

① A. A. Michelson, *Amer. J. Sci.* (3), **22**(1881), 120; *Phil. Mag.* (5), **13**(1882), 236。

新会合，进入观察望远镜 T。M_2 是固定的，而 M_1 安装在一个坐架上，靠调节测微螺旋能使它向 D 或离 D 移动。经 M_1 反射的那束光在到达 T 以前从 D 的色散材料中通过三次，相比之下，经 M_2 反射的那束光只通过一次。这种不对称性妨碍利用白光条纹，为了消除这种不对称性，在 D 和 M_2 之间放进一块补偿板 C，它的材料和厚度与 D 完全相同，而且板面与 D 平行。

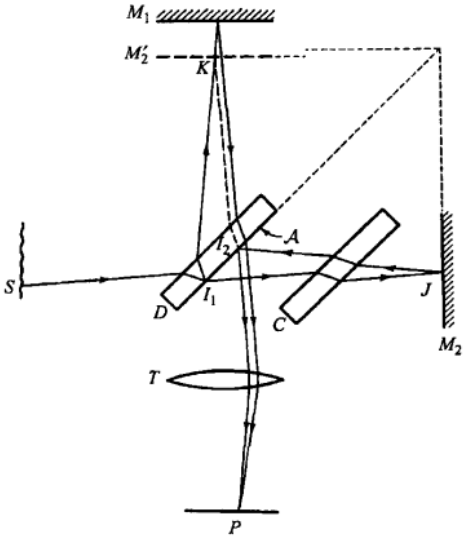


图 7.39　迈克耳孙干涉仪

设 M_2' 是 M_2 在分束器中的像。从 S 到 P，光线 SI_1JI_2P 经过 $\mathcal{A}$ 上的透射、M_2 上的反射，而光线 SI_1KI_2P 经过 $\mathcal{A}$ 上的反射、虚面 M_2' 上的反射，但二者光程相等。因此，可以认为，望远镜观察的干涉图样系由实反射面 M_1 和虚反射面 M_2' 之间的空气膜所产生，但是这里要给 M_2' 一个位相变化 ϕ，它等于 $\mathcal{A}$ 上外反射与内反射相变之差，ϕ 值取决于半反射镜 $\mathcal{A}$ 的性质。

当 M_1 和 M_2' 平行时，准单色光源所产生的条纹是圆形的，并且定域在无穷远。它们与 7.5.1 节中所讨论的等倾条纹的差别，仅在于这里没有多次反射，所以强度分布严格合乎 §7.2(15)。如果移动 M_1 使它趋近 M_2'，则条纹向中心收缩，而图样的角尺度增加，直到 M_1 与 M'_2 重合，视场照度均匀时为止，其亮暗程度取决于 ϕ。这时镜子 M_1 和 M_2 称为处于**光学接触**。当 M_1 和 M_2' 靠得很近但相互倾斜形成一个小角劈时，则有条纹定域在劈表面上或劈表面附近。如果 M_1 和 M_2' 间距足够小，则这些条纹是等厚条纹，因而是平行于劈棱的等距直线。然而，随着 M_1 和 M_2' 间距的增加，视场各点所对应的入射角的范围以及视场上平均入射角的变化，都不再可以忽略；这时条纹的可见度下降，而且条纹变弯曲，凸向劈棱一边。

不管 M_1 和 M_2' 是平行还是倾斜，当仪器二臂之一光程改变 $\Delta m \cdot \lambda_0$ 时，图样都将发生 Δm 序的位移。用目视观测时，位移可估计到约 1/20 序，然而，在某些情况下，用肯尼迪(R. J. Kennedy)[①] 方法可探测小到千分之一序的位移[②]。

① R. J. Kennedy, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **12**(1926), 621。

② K. K. Illingworth, *Phys. Rev.*(2), **30**(1927), 692。

当 M_1 和 M_2' 的间隔只有几个波长时,用白光能看到条纹。白光条纹可用来识别单色图样中的某一参考条纹。如果 $|\phi| = \pi$,则白光图样的中央条纹是暗的,它定出了 M_1 与 M_2' 的交线,所以,它与 $|m| = 1/2$ 的单色条纹位于同一位置;在其他情况下,白光的这一消色差条纹一般不与单色图样的某一亮条纹或暗条纹相重合,但是,如果白光图样与单色图样之间的转换条件前后一致的话,也不会给识别造成困难。

除了使用准直照明的那种变式(见 7.5.5 节)以外,迈克耳孙干涉仪现在已经淘汰,但是它仍闻名于世,这是因为迈克耳孙曾用它做了下列三个重要实验:迈克耳孙-莫雷(Morley)以太漂移实验[①](见"历史引言");首次系统研究光谱线的精细结构;以及首次直接将光谱线的波长与标准米进行比较[②]。在本书中,不讨论上述第一个实验,因为我们只注意静止媒质光学;而且也不打算介绍第三个实验,因为在那之后,已有其他方法(见 7.7 节)作了更为精确的测量。迈克耳孙分析光谱线的方法也已被更直接的方法所取代,但是由于它在理论上有重要意义,并且由于它与部分相干理论有关,所以我们将在后面(见 7.5.8 节)对它进行详细讨论。

7.5.5 特怀曼(Twyman)-格林(Green)干涉仪和有关干涉仪

如果迈克耳孙干涉仪用准单色点光源 S 照明,点光源置于精心校正的透镜 L_1 的焦点上,并且从干涉仪出来的光用另一块精心校正的透镜 L_2 加以会聚,则该装置就等效于斐索干涉仪,但是,这时两束光的光路被完全分开(见图 7.40)。设 W_1 是 M_1 反射光束中的一个平面波阵面,W_2 是 M_2 反射光束中与 W_1 对应的平面波阵面;并且设 W_1' 是 W_1 在分束器中的虚像。因此,在 W_2 上 P 点虚相交的两条出射光线之间的光程差为

$$\Delta\mathcal{S} = nh \tag{74}$$

式中 $h = PN$ 是从 W_1' 到 P 点的法线距离,n 是 W_1' 和 W_2 之间媒质的折射率。相应的位相差为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} nh \tag{75}$$

按照(75)式和 § 7.2(16),当眼睛放在 L_2 的焦平面上并聚焦于 W_2 上时(必要时借助一辅助透镜),如果

$$nh = m\lambda_0, \qquad |m| = 0, 1, 2, \cdots \tag{76a}$$

则将看到 P 点有一亮条纹,而如果

$$nh = m\lambda_0, \qquad |m| = \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, \cdots \tag{76b}$$

则 P 点有一暗条纹。这样,一般形成的是直线条纹,这些条纹与 W_1' 和 W_2 夹劈的劈棱平行;如果适当调节 M_1 的取向,使 W_1' 和 W_2 平行,则视场照明均匀。如果光源是一个点,则条纹是非定域的,但实际上,出于强度上的考虑,光源不能太小,因而扩展不能忽略。因为出射光线的光路相当于 M_2 和 M_1' 夹劈的反射,这里 M_1' 是 M_1 在分束器中的虚像,所以同斐索条纹情况(见第 269 页)一样,用扩展光源时,条纹虚定域于该劈附近;当 M_1' 和 M_2 相重时,可容许的光源扩展为最大。

① A. A. Michelson and E. W. Morley, *Phil. Mag.* (5), **24**(1887), 449。

② A. A. Michelson and J. R. Benoit, *Trav. et Mem. Int. Bur. Poids et Mes.*, **11**(1895), 1。

另一方面，由于光源偏离单色性，因而只有当两臂光程足够接近相等时，才看得到条纹。应该注意，如果装置对A不对称，则等光程条件与 M_1' 和 M_2 相重条件一般不能同时满足。

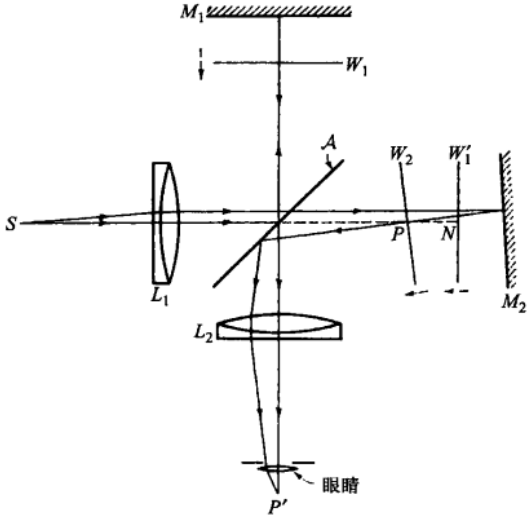


图 7.40　用准直光照明的迈克耳孙干涉仪

特怀曼和格林[①]首先对迈克耳孙干涉仪作了这一修改，用它来检验光学元件。元件插在臂 M_2 中，光路安排成这样：如果元件完美无缺，则返回的波阵面 W_2 应当是平面。因为按照(76)式，各亮条纹可以看做是以 W_1' 为基准时 W_2 的等高线，高度间隔为 λ_0(取空气的 $n=1$)，所以由此可以测量光通过元件两次所造成的 W_2 的畸变。畸变的正负可从 M_1 远离分束器时条纹的运动方向来定出。最小偏向位置上棱镜的检验装置[②]如图 7.41(a)所示。所观察到的条纹与棱镜的一个表面点点对应，可由观察者描绘于该处，作为下一步局部抛光的指导。用这种方法可补偿掉棱镜材料内部折射率的变更。图 7.41(b)是一个检验照相机透镜用的装置[③]。M_2 是一个凸球面反射镜，其曲率中心在被检验透镜 C 的焦点上。透镜 C 可绕垂直其光轴的一条线转动，以便能在不同倾斜度下进行检验，同时用一个机械联动装置使 M_2 的曲率中心在透镜转动时保持在其焦平面内。条纹所表明的缺陷对应透镜孔径上哪些点，这有一些不确定，因为当透镜有缺陷时，光线从中来回并不同路。如果使 M_2 的曲率半径尽可能大，并且再采用适当的光学系统来观察 M_2 表面上的虚条纹图样，则可减小这种不确定。这种条纹图样的照片与相应的计算图样一并列在图 7.42 中。

科斯特(Kösters)干涉仪[④]应用特怀曼-格林装置来测量端规的长度[见图 7.43(a)]。先把端规 G 与镜 M_2 贴紧；而后把镜 M_1 的位置调节到使等效虚反射面 M_1' 大致在 M_2 和 G 上表面的中间，并与它们倾斜成一个适当的小角度。这样，当采用准单色光源时，即可看到 M_2 和

① F. Twyman and A. Green, British Patent No. 103832(1916)。

② F. Twyman, *Phil. Mag.*(6), **35**(1918), 49。

③ F. Twyman, *Phil. Mag.*(6), **42**(1921), 777。

④ W. Kösters, *Handbuch der Physikalischen Optik*, Vol. I, ed. E. Gehrcke(Leipzig, Barth, 1927), p. 484。

G 上有平行等距条纹,其走向与 G 的一个边垂直[见图 7.43(b)]。G 的长度用剩余小数法求得,这在前面 7.5.2 节讨论英国国立物理研究所测规干涉仪时已经介绍过了。显然,这两种仪器十分相似①。

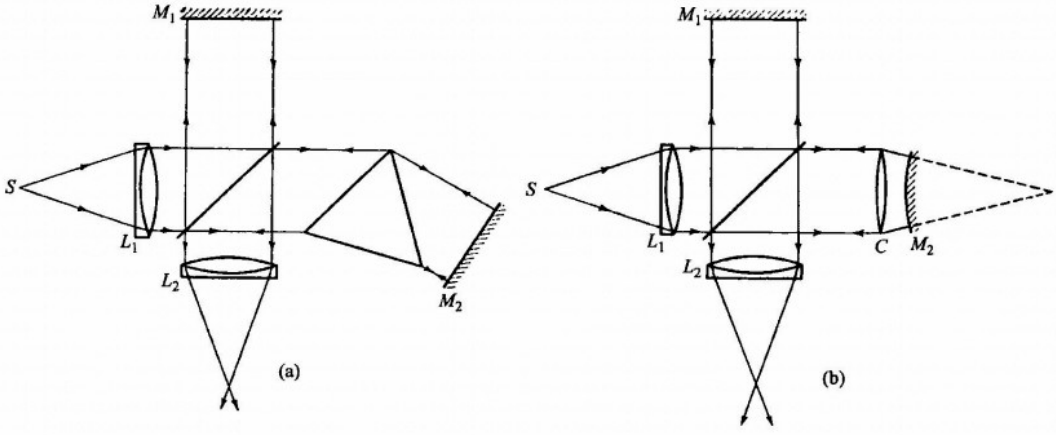


图 7.41 特怀曼-格林干涉仪:(a)检验棱镜的装置;(b)检验照相机透镜的装置

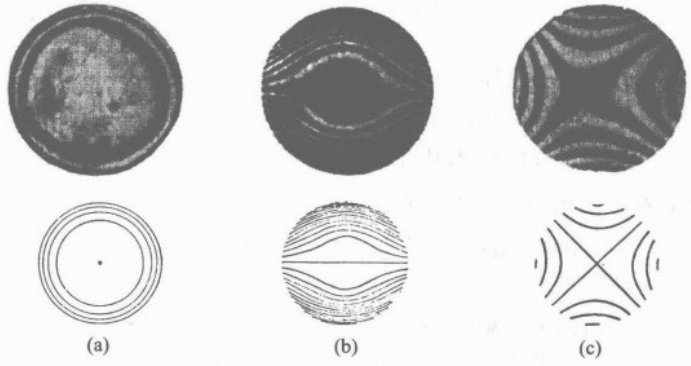


图 7.42 显示透镜初级像差的特怀曼-格林干涉图样。$\Phi_{极大}$ 是出射光瞳中的最大波像差。上面的图样是观察到的,下面的图样是计算得到的:(a)球面像差,$\Phi_{极大}=0.4\lambda_0$,高斯焦平面;(b)彗差,$\Phi_{极大}=2\lambda_0$,高斯焦平面;(c)像散差,$\Phi_{极大}=2.1\lambda_0$,中央平面[引自R. Kingslake, *Trans. Opt. Soc. London*, **27**(1927), 94]

这里还可以提一下一种类似的干涉仪——**多耳(Dowell)端规干涉仪**②[见图 7.44(a)]——它能比较两个端规的长度,而无须与一基准面贴紧。设 A'_1、A'_2 是规 G_1、G_2 的端面 A_1、A_2 在 M_1 中的虚像;B'_1、B'_2 是端面 B_1、B_2 在 M_2 和分束器中的虚像。4 个虚反射平面 A'_1、A'_2、B'_1、B'_2 安排得看上去是相互交叠的[见图 7.44(b)],而干涉效应可以认为是产生于它们之间的各个

① 在两种装置中,要能观察到所需可见度的条纹,各反射面的间距都有一个上限;它取决于光源的角幅度(见 7.5.3 节)和它对单色性的偏离程度(见 7.5.8 节)。由于科斯特装置允许辅助反射面 M'_1 位于规两端的中间,所以在同样的光源下,它能测量的最大端规长度比 NPL 仪器约大一倍。

② J. H. Dowell, British Patent No. 555672, (1942)。

劈形空气膜。调节 G_1，使得在单色光下在 A_1' 和 B_1' 的公共区域上产生水平条纹图样(i)，而后用白光辨认出其零序条纹，并将它调节到视场中央。接着调节 G_2，使 A_2' 与 A_1' 共面。这时，因为 B_2' 平行于 B_1'，所以在 B_2' 和 A_1'、A_2' 的公共区域上有同样的水平条纹图样(ii)、(iii)，二者零序条纹相重合。在这种情况下，B_2' 和 B_1' 之间的距离 d 就是两块端规的长度差，由 $d = \lambda_0 \Delta m/2n$ 给出，式中 Δm 是图样(i)与图样(ii)之间的序位移。采用剩余小数法时，该仪器还可以用来测量单个端规的长度。

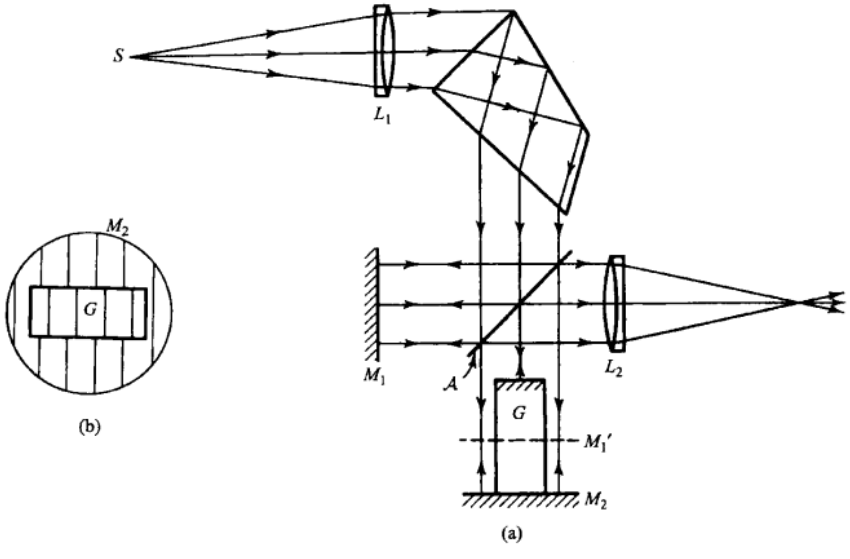
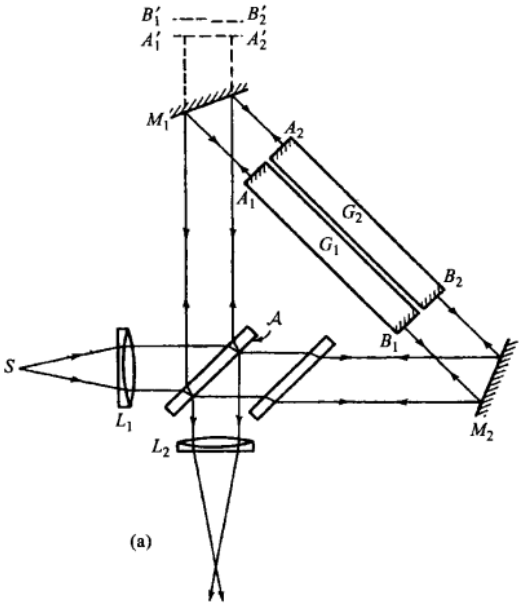


图 7.43　科斯特干涉仪：(a)装置；(b)视场



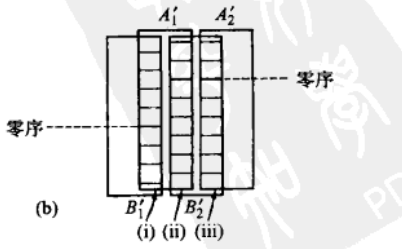


图 7.44　多耳端规干涉仪：(a)装置；(b)视场

7.5.6 两块全同板产生的条纹:雅满(Jamin)干涉仪和干涉显微镜

设用一个准单色点光源 S 照射两块透明的平行平面板,板的厚度都是 h,折射率都是 n',二者一前一后,相互倾斜成一个很小的角度 α(见图 7.45)。如果忽略经受两次以上板面反射的那些光线,则一条入射光线 SA 将产生两组平面透镜光线。第一组包括一条直接透射过来的光线和两条分别经上、下板两面反射过的光线。第二组包括 4 条光线,$SABDH$,$SABCFI$,$SABDEJ$ 和 $SABCFGK$,每条经上板和下板各反射一次。这 4 条光线从两板之间各通过三次,而且方向与第一组光线倾斜,夹角为 2α。

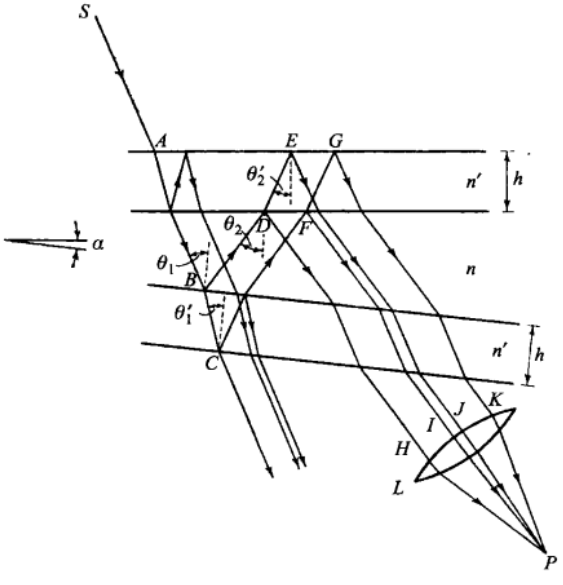


图 7.45 两块全同平行平面板:无穷远定域条纹形成图示

第二组光线可以在透镜 L 焦平面上的 P 点重新会合。如果用 $\mathcal{S}_1$,$\mathcal{S}_2$,$\mathcal{S}_3$ 和 $\mathcal{S}_4$ 分别表示这些光线从 S 到 P 的光程,则由 §7.5(5),有

$$\mathcal{S}_2 - \mathcal{S}_1 = \Delta\mathcal{S}_{21} = 2n'h\cos\theta_1' \tag{77a}$$

$$\mathcal{S}_3 - \mathcal{S}_2 = \Delta\mathcal{S}_{32} = 2n'h(\cos\theta_2' - \cos\theta_1') \tag{77b}$$

$$\mathcal{S}_4 - \mathcal{S}_3 = \Delta\mathcal{S}_{43} = 2n'h\cos\theta_1' \tag{77c}$$

式中 θ_1' 和 θ_2' 分别为第二块板中 B 点处的折射角和第一块板中 D 点的折射角。因为当 P 点给定时,角 θ_1' 和 θ_2' 只依赖于二板的取向,所以各光程差 $\Delta\mathcal{S}$ 与 S 的位置无关,因而采用扩展光源时,可有干涉图样形成在 L 的焦平面上。只要入射角的范围不太大,该图样就不会与第一组光线的光交叠。此外,因为 $\cos\theta_1' \approx \cos\theta_2'$,当 h 足够大时,$\Delta\mathcal{S}_{21}$ 和 $\Delta\mathcal{S}_{43}$ 比 $\Delta\mathcal{S}_{32}$ 大得多,所以可以使用这样一个光源,使得条纹清晰的条件 §7.3(15) 对 $\Delta\mathcal{S}_{32}$ 成立,而对 $\Delta\mathcal{S}_{21}$ 和 $\Delta\mathcal{S}_{43}$ 不成立。在这些情况下,可以认为条纹图样只与 $SABCFI$ 和 $SABDEJ$ 这样的光线有关;其他光线只产生实际均匀的背景,使条纹可见度有所下降而已。

由(77b)式，P 点对应于 ΔS_{32} 的位相差为

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} n' h(\cos\theta_2' - \cos\theta_1') \tag{78}$$

利用折射定律，此即

$$\delta = \frac{4\pi h}{\lambda_0}(\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\theta_2} - \sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\theta_1}) \tag{79}$$

式中 θ_1 和 θ_2 分别为 B 点和 D 点处的入射角，n 是板周围媒质的折射率。为了弄清楚条纹的形式，选取直角坐标轴 OX、OY、OZ，令其原点 O 位于透镜 L 的第二节点上，OZ 平行于二板夹劈的劈棱(见图 7.46)。设 XOY 平面上的 N_1 点是 B 点处正反射光($\theta_1 = 0$)的焦点；设 N_2 点(也在 XOY 平面上)是 D 点处正反射光($\theta_2 = 0$)的焦点；并设 OX 为 ON_1 和 ON_2 夹角的内等分线。因此，如果劈朝 OY 方向张开，则 ON_1 和 ON_2 的方向余弦分别为$\{\cos(\alpha/2), \sin(\alpha/2), 0\}$，$\{\cos(\alpha/2), -\sin(\alpha/2), 0\}$。设 OP 与平面 XOZ 成 ψ 角，并设 OP 在这平面上的投影与 OX 成 ϕ 角。OP 的方向余弦为$(\cos\psi\cos\phi, \sin\psi, \cos\psi\sin\phi)$，并因角 $PON_1 = \theta_1$，$PON_2 = \theta_2$，所以

$$\cos\theta_1 = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\psi\cos\phi + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\psi \tag{80a}$$

$$\cos\theta_2 = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\psi\cos\phi - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\psi \tag{80b}$$

当 α 角很小时，可以忽略 $\cos(\alpha/2)$ 和 $\sin(\alpha/2)$ 展开式中包含 α 二次幂和高次幂的项，所以从(80)式

$$\cos^2\theta_1 = \cos^2\psi\cos^2\phi + \alpha\sin\psi\cos\psi\cos\phi \tag{81a}$$

$$\cos^2\theta_2 = \cos^2\psi\cos^2\phi - \alpha\sin\psi\cos\psi\cos\phi \tag{81b}$$

因此，从(79)和(81)两式，得到

$$\begin{aligned}\delta = \frac{4\pi h}{\lambda_0}[&\sqrt{n'^2 - n^2(1 - \cos^2\psi\cos^2\phi + \alpha\sin\psi\cos\psi\cos\phi)} \\ &- \sqrt{n'^2 - n^2(1 - \cos^2\psi\cos^2\phi - \alpha\sin\psi\cos\psi\cos\phi)}]\end{aligned} \tag{82}$$

按 α 幂次展开并仍略去 α 一次幂以上各项，得到

$$\delta = -\frac{4\pi h}{\lambda_0}\frac{n^2\alpha\sin\psi\cos\psi\cos\phi}{\sqrt{n'^2 - n^2(1 - \cos^2\psi\cos^2\phi)}} \tag{83}$$

这样，按照(83)式和 §7.2(16)，当

$$\frac{\sin\psi\cos\psi\cos\phi}{\sqrt{n'^2 - n^2(1 - \cos^2\psi\cos^2\phi)}} = \frac{m\lambda_0}{2n^2h\alpha}, \qquad |m| = 0, 1, 2, \cdots \tag{84a}$$

时，P 点将产生一个亮条纹，而当

$$\frac{\sin\psi\cos\psi\cos\phi}{\sqrt{n'^2 - n^2(1 - \cos^2\psi\cos^2\phi)}} = \frac{m\lambda_0}{2n^2h\alpha}, \qquad |m| = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots \tag{84b}$$

时，P 点将产生一个暗条纹。

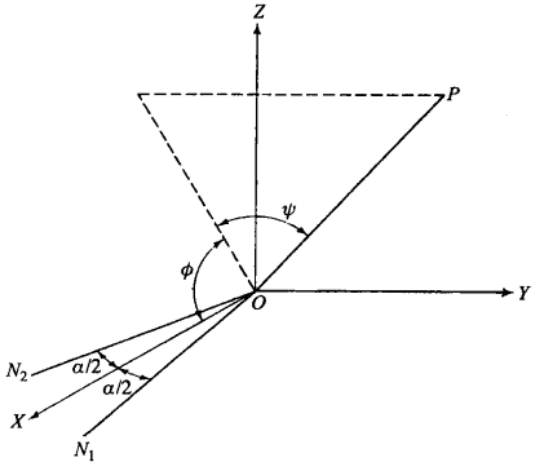


图 7.46 两块相互倾斜的平行平面板在无穷远处产生的条纹讨论图示

当 P 十分靠近平面 XOZ 以致ψ很小时,干涉序 m 很低,因而在该区域内,用白光能观察到条纹。中央白色条纹($m=0$)在平面 XOZ 内,是由 $\theta_1=\theta_2$ 的光所形成的。

在正入射附近观察的特殊情况下,ψ和ϕ都很小,因而可忽略ψ和ϕ的二次项和高次项,这时(84a)式化为

$$\psi=\frac{mn'\lambda_0}{2n^2h\alpha},\qquad |m|=0,1,2,\cdots \tag{85}$$

因此,准单色光的条纹是等距的直线,平行于两板夹劈的劈棱。相邻亮条纹的角距离与板的折射率成正比,与板的厚度和夹角成反比。这种条纹是布儒斯特首先观察到的,因而称为**布儒斯特条纹**。

雅满干涉仪采用的就是这类条纹[①]。这个干涉仪曾一度广泛用于测量气体的折射率,虽然它现在已被瑞利干涉仪(见 7.3.5 节)所取代。该仪器主要由两块同样厚度、同样折射率的平行平面玻璃板组成,板面 M_1,M_2 镀了不透明的银膜,其装置如图 7.47 所示。从扩展光源来的一束光,在大约 45°角下入射到第一块板上,最后产生两束光,一束光从第一块板的前表面上和第二块板的后表面上反射,另一束从第一块的后表面上和第二块的前表面上反射;这两束光在望远镜 T 的焦平面上重新会合,产生干涉图样。两板的厚度是这样大小,当加上适当的光阑时,二光束在两板之间可完全分开,可于其中放入类似于 7.3.5 节中所描述的气室 G_1,G_2 和补偿板 C_1,C_2。使用时,使两板倾斜,形成一个小角度的劈,并令劈棱平行于图 7.47 的平面,我们取此平面为水平面。板面是接近垂直的,所以,当采用图 7.46 的符号时,平面 XOZ 是接近水平的;这时观察区对应很小的ψ,因而由(84a)式,亮条纹由下式给出:

$$\frac{\cos\phi}{\sqrt{n'^2-n^2\sin^2\phi}}\psi=\frac{m\lambda_0}{2n^2h\alpha},\qquad |m|=0,1,2,\cdots \tag{86}$$

① J. Jamin, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **42**(1856), 482。

现在$\phi \approx 45°$，而且在小角度视场范围内，$\sin\phi$和$\cos\phi$的变化可以忽略，因此条纹顺沿着ψ = 常数的轨迹，即它们是水平的，而且是等距的。它们是低序的，因而通过适当调节可将零序条纹($\psi = 0$，可用白光条纹辨认)调到视场中央①。

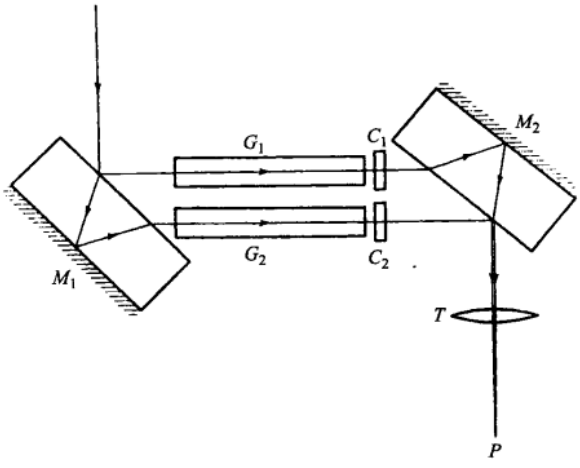


图 7.47　雅满干涉仪

雅满干涉仪的使用方法和以前所描述的瑞利干涉仪相似，所不同的是这里没有第二套条纹系统作为基准标记，而是靠望远镜中的十字叉丝来定位。因此此仪器比瑞利干涉仪光学系统容易受到干扰，因而测量精度较低。

瑟克斯(J. A. Sirks)②和普林谢姆(E. Pringsheim)③先后研制了雅满干涉仪的一种变式，用它来测量小物体的折射率，其中用两块稍带劈形的板取代了平行平面板。两块板安装成二劈棱反平行，朝里的两个未镀银面接近平行(见图 7.48)；照明用准直光。设 SA 是劈主截面内的一条入射光线，它产生 $SABCG$，$SADEF$ 两条光线，这两条光线离开第二块板后虚交于它后面某点 P；当光源是准单色的并且扩展不太大时，看起来有条纹定域在 P 点附近，可用显微镜 M 观察之。P 点条纹的走向垂直于两条出射光线所确定的平面，即平行于劈棱。待检物体 O 放在两板间光线 CG 的光路上。P 点在第二块板前表面中的像 P' 也在 CG 线上，具体位置取决于二板的倾角。据普林谢姆报道④，当两板朝里的面相互平行时，P' 点大约在它们的中间，但是，任一板绕平行于劈棱的轴作很小的转动，都将引起 P' 点可观的位移。通过这样的调节，可以使 P' 位于 O 上，这时，物和条纹系统就重叠出现在显微镜视场内。P' 点的干涉序因放进物体而引起的改变，可借助补偿板来测定。因此，如果知道了 P' 点物体的厚度，即可求出其折射率。

---

① 如果两板倾斜成这样，形成一个劈棱垂直的劈时，则 XOY 平面是水平的。这时，观察区对应很小的ϕ，强度极大由(84a)式给出：

$$\frac{\cos\psi \sin\psi}{\sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2\psi}} = \frac{m\lambda_0}{2n^2 h\alpha}, \qquad |m| = 0, 1, 2, \cdots$$

条纹仍顺沿着ψ = 常数的轨迹，但是这时它意指条纹是垂直的，而且在$\psi \approx 45°$时，干涉序不接近零，因此两板这样取向时不能产生白光条纹。

② J. A. Sirks, *Hd. Ned. Nat. en Geneesk. Congr.*, *Groningen* (1893), p. 92。

③ E. Pringsheim, *Verh. Phys. Ges. Berlin*, **17** (1898), 152。

④ E. Pringsheim, *loc. cit*。

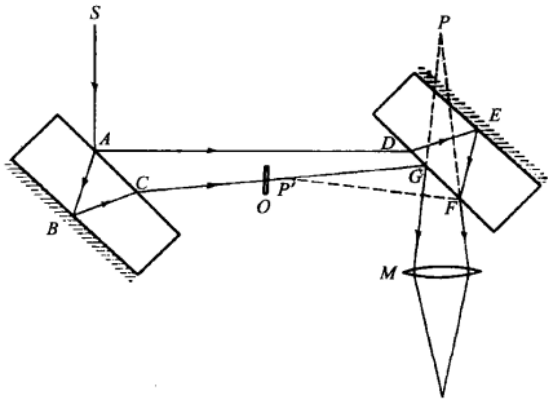


图 7.48 瑟克斯-普林谢姆干涉仪

新近,戴森(J. Dyson)[①]研制了一种类似的显微镜和干涉仪联合装置(见图 7.49)。待测物体装在一玻璃载片上,放在两块全同玻璃板 G_1,G_2 之间 O 点处,G_1,G_2 都是小角度的平面劈,劈棱相互反平行。下板 G_1 的上表面镀有部分透射的银膜,下表面中央有一个很小的、镀银的不透明斑点 C,它稍大于显微镜的视场。上板 G_2 两边都镀有部分透射的银膜。载物片与两玻璃板间的空间填充以与玻璃同样折射率的媒质。该装置由显微镜聚光器的光照明,聚光器使光在 O 点的平面上会聚成光源的像。一部分光——物光束——通过 O,经 G_2 上下表面反射后射出。另一部分光——参考光束——经 G_1 上表面反射后会聚到 C;它从 C 反射后,经过 O 的外围,直接透过 G_2,O 位于 C 的阴影中。G_2 与一玻璃块胶合在一起,玻璃块的上表面 R 是球面,镀有不透明的银膜,惟轴点处空有一小孔 A,玻璃块则设计成这样,使物光束和参考光束经 R 和 G_2 上表面反射后均会聚到 A。于是,在 A 附近,参考光束形成光源的一个实像 σ_1,物光束则形成光源的一个实像 σ_2,同时叠加有物平面的实像 Π。Π 用普通显微镜来观察[②]。

σ_1 和 σ_2 的对应点都是光源同一点的像,所以这些对应点就成为互相相干的次级光源。先调节该装置使这种点相重合。在未放物时,物光束和参考光束到 Π 上任一点 P 的光程是相等的,因而,如果忽略各镀银面上不同反射情况所引起的很小位相差,则 Π 上各点的干涉序均为零——这个情况用白光可以辨认。当将一物体放在 O 处时,物光束到 P 点的光程约增加 $(n'-n)l$,这里 n' 和 l 分别是物体在 P' 点的折射率和厚度,P' 是 P 的共轭点,n 是周围媒质的折射率。这样,物上 n' 和 l 的变化在准单色光下将引起 Π 上强度的变化,而在白光下将引起 Π 上颜色的变化。如果使板 G_1 垂直于劈棱和光轴而移动,则参考光束的光程发生变化,用这种方法可以补偿物光束光程的变化。G_1 的这个移动事先用单色光校准好,从而可测定出 $(n'-n)l$,由此,如 n 和 l 已知,即可得到 n'[③]。

① J. Dyson, *Proc. Roy. Soc.*, A, **204**(1950), 170。

② 对于上述以外的光束,A 完全为 C 的阴影所遮盖,所以这些光束的光不能进入显微镜。

③ 事实上,调节 σ_1 和 σ_2 相重合,不可能丝毫不差。而且,折射物的放入以及利用 G_1 作为补偿板,都将使 σ_1 和 σ_2 产生平行于光轴的相对位移。圆满说明当 σ_1 和 σ_2 的对应点不相重合时两个区域中的干涉效应,已超出本章初等讨论的范围;这可以用部分相干理论很好地加以处理(见第 10 章)。

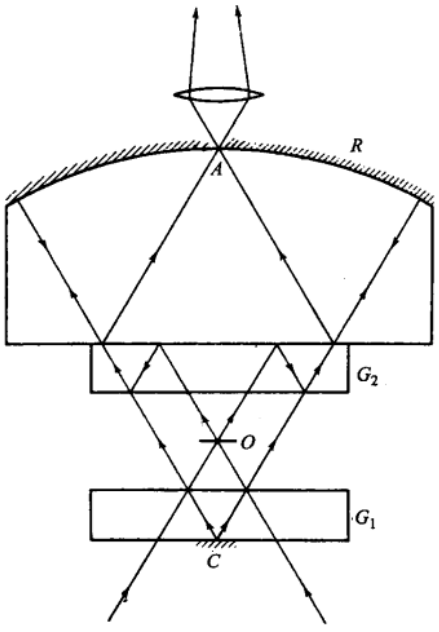


图 7.49　戴森干涉显微镜

7.5.7　马赫-曾德尔干涉仪;贝茨波阵面切变干涉仪

在雅满干涉仪中(见 7.5.6 节),两块板的前表面起分束器作用,后表面起平面镜作用,但是,这些元件不能独立调节,而且两束光的间距受到板厚的限制。如果分束器和反射镜是独立的元件,可使各束光分得很开,那么仪器的用途将会广泛得多。这就是**马赫-曾德尔干涉仪**(Mach-Zehnder)[①] 的基础,这种干涉仪是用来测量可压缩气流中折射率的变更,从而测量其中密度的变更。

马赫-曾德尔装置如图 7.50 所示。光源 S 位于精心校正的透镜 L_1 的焦平面上,从 S 发出的光在平行平面玻璃板 D_1 的半反射面 A_1 上分成两束,它们经平面镜 M_1,M_2 反射后在另一块全同平行平面板 D_2 的半反射面 A_2 上重新会合,并且射到精心校正的聚光透镜 L_2 上。4 个反射面通常安排成近乎平行,它们的中心分别位于一平行四边形的 4 个角上。假设光源是一个准单色的点光源。设 W_1 是 M_1 和 D_2 间光束的一个平面波阵面,W_2 是 M_2 和 D_2 间光束对应的平面波阵面,并设 W'_1 是 M_2 和 D_2 间的虚平面波阵面,它射出 D_2 时应和 W_1 相重合并且同相。因此,在 W_2 上某一 P 点处,两出射光束间的虚位相差为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} nh \tag{87}$$

式中 $h = PN$ 是从 P 点到 W'_1 的法线距离,n 是 W_2 和 W'_1 间媒质的折射率。在出射光束中与 P 点共轭的 P' 点处,按照 § 7.2(16),如果

① L. Zehnder, *Zeitschr. f. Instrkde*, **11**(1891), 275。L. Mach, *Zeitschr. f. Instrkde*, **12**(1892), 89。

$$nh = m\lambda_0, \qquad |m| = 0, 1, 2, \cdots \tag{88a}$$

则有一亮条纹,而如果

$$nh = m\lambda_0, \qquad |m| = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots \tag{88b}$$

则有一暗条纹。

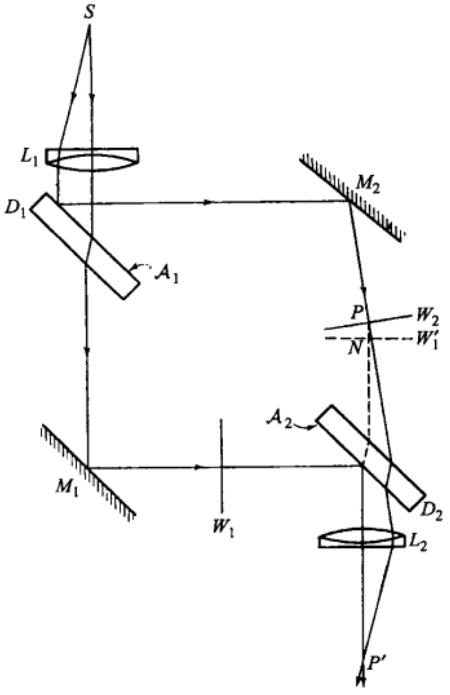


图 7.50 马赫-曾德尔干涉仪

当 W_1' 和 W_2 平行时,对于所有的 P 点,强度是相同的。在这种情况下,一个扩展光源应当在无穷远处(即在 L_2 的焦平面上)产生条纹,这与雅满干涉仪的条纹类似。然而,W_1' 和 W_2 一般是相互倾斜的,因而条纹是平行于它们交线的直线。检验气流时通常所用的就是这种劈条纹,而且由于强度上的考虑,希望在不损失可见度的情况下尽可能加大光源来形成劈条纹。正如在 7.5.3 节中所看到的,这时条纹变成定域在这样的区域,其中的相交光线在离开 S 时夹角最小。调配与 W_1' 和 W_2 相互倾斜状态有关元件的各个转角,可改变这一定域区域的位置。例如,设 4 个反射面起初是相互平行的,并且为简单起见,考虑转轴与各镜中心所在平面垂直的情况,这时当 M_2 转动时,虚的定域区域在 M_2 附近[见图 7.51(a)],但当 M_2 和 D_2 都转动时,虚的定域区域则位于 M_2 和 D_2 之间[见图 7.51(b)]。这一性质是马赫-曾德尔干涉仪的劈条纹与迈克耳孙干涉仪在准直光下(见 7.5.5 节)产生的劈条纹所不同之处,后者虚定域于镜面附近。

技术上使用该仪器时,将气流待查区域 C_1(通常是风洞或冲击波管的工作区)和一个补偿室 C_2 置于干涉仪两个相对的光臂中,并调节干涉仪使条纹干涉序接近于零,取向和间距合乎需要,并且虚定域在 C_1 内一个垂直于入射光的选定平面附近。用透镜 L_2 和一个高质量的照相机透镜把该平面成像在照相底版上。拍摄下有气流时和无气流时的条纹图样,并测量出两

个图样在像平面上各选定点 P' 处的序位移 Δm，必要时可采用白光条纹来鉴定相应的干涉序。设 n 为 C_1 中未受扰动气体的折射率，n' 为流动情况下的折射率，则

$$\Delta m = \frac{1}{\lambda_0}\int (n' - n)\mathrm{d}s \tag{89}$$

式中积分沿着通过 C_1 到达 P' 点那条光线的路径。设 Ox, Oy, Oz 是 C_1 中的直角坐标轴，原点 O 位于 C_1 中那个特选平面上，并且 OZ 沿入射光方向；并设当 C_1 中无气流时 P' 的共轭点为 P，其坐标为 (x, y, o)。因此，如果气流所引起的光线偏折可以忽略，则(89)式可以写成

$$\Delta m(x, y) = \frac{1}{\lambda_0}\int_0^s [n'(x, y, z) - n]\mathrm{d}z \tag{90}$$

式中 s 是 C_1 的长度；当气流满足某些对称条件时[①]，将 Δm 测量值代入(90)式即可解出 $(n' - n)$。由此可定出气流所引起的密度改变 $\Delta\rho$，因为 $\Delta\rho$ 与 $(n' - n)$ 成正比。

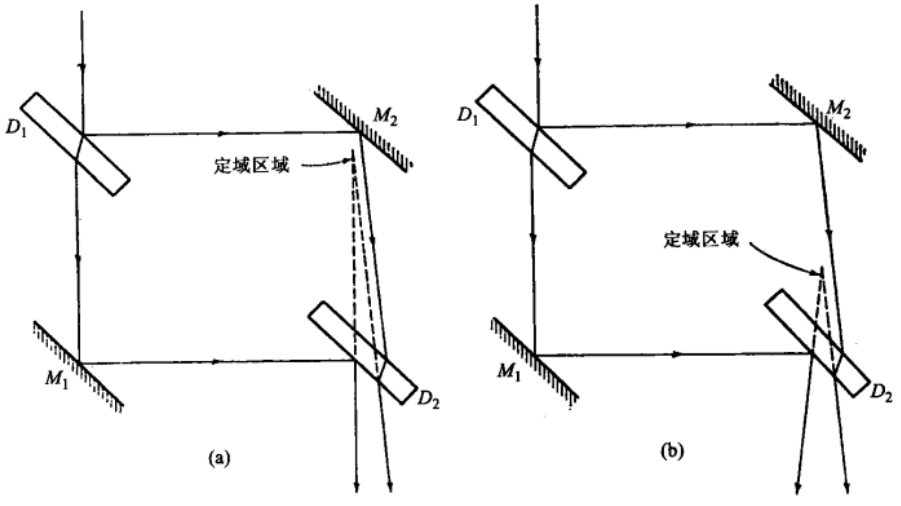


图 7.51　马赫-曾德尔干涉仪中的条纹定域图示

贝茨[②]修改了马赫-曾德尔装置，使它还可用来测量会聚波阵面的非球面性，而不需要一个基本没有误差的参考波阵面，这样的参考波阵面在特怀曼-格林方法中是必要的(见 7.5.5 节)。贝茨装置如图 7.52(a)所示，它特别便于检验大孔径系统的性能。设 OA 是被检验的会聚光束的主轴，现取为水平方向，该会聚光束在 D_1 上分成两束，分别会聚成光源的像 S_1, S_2，光源是一个足够小的准单色光源。起先，4 个反射面是垂直的并且相互平行，而且放置得使 S_1 和 S_2 重合在 D_2 的半反射面上。设 W 是入射波的一个波阵面，W_1 和 W_2 是两个出射波的相应虚波阵面，其主轴分别为 O_1S_1, O_2S_2，在上述条件下，W_1 和 W_2 是严格重合的，这时眼睛在 D_2 后面[见图 7.52(a) D_2 下方]将看到视场呈均匀照明。现在让 D_1 和 M_1 作为一个

① 例如，见 R. Ladenburg and D. Bershader, *Interferometry in High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion*, Vol. IX, *Physical Measurements in Gas Dynamics and Combustion* (London, Oxford University Press, 1955), Article A.3。

② W. J. Bates, *Proc. Phys. Soc.*, 59(1947), 940。

整体绕平行于 OA 的一个轴转动,使得 O_1S_1 与 O_2S_2 有一个很小的垂直分离。实质上这等效于使 W_2 绕一水平轴转成对 W_1 倾斜,因而视场内出现水平的等距条纹,在白光下也可看到。

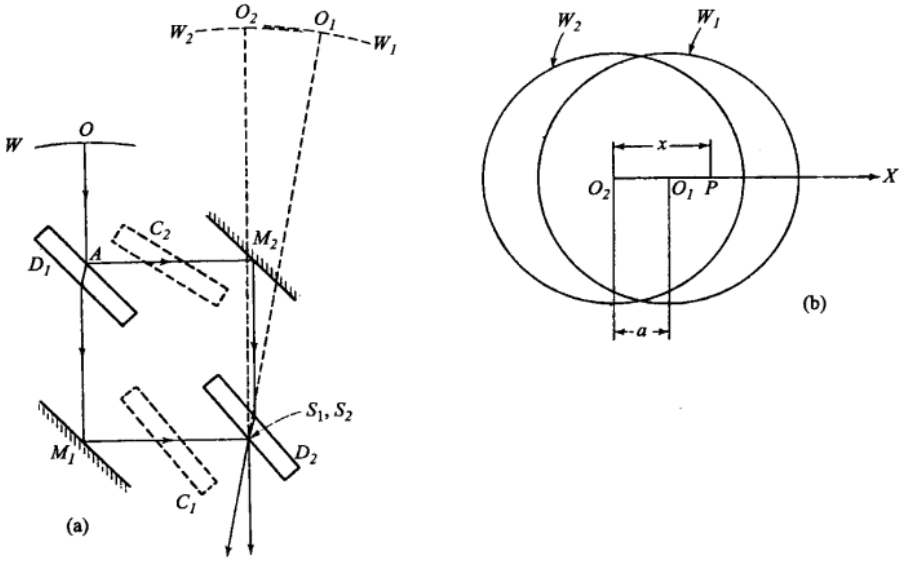


图 7.52 贝茨波阵面切变干涉仪:(a)装置;(b)波阵面受切变时的视场

现在假定让 D_2 绕通过 S_1 和 S_2 的一垂直轴转动,则 O_1S_1 在水平面内绕 S_1 转动,即 W_1 相对于 W_2 做切变运动。当 W_1 和 W_2 是理想球面时,在它们交叠的区域中条纹图样将不受切变的影响,否则,这些条纹将发生位移,位移大小则视 W 的非球面程度而定。这样,如果 O_2X 为切变方向上的坐标轴,而原点位于 O_2,则 P 点(坐标为 x)的序位移为

$$\Delta m(x;\ a)=\frac{1}{\lambda_0}[\mathcal{S}(x)-\mathcal{S}(x-a)] \tag{91}$$

式中$\mathcal{S}$是中心在 S_2、半径为 O_2S_2 的球面到 W_2 的光程,a 为切变距离[见图 7.52(b)]。因为在 O_2 点($x=0$)$\mathcal{S}$等于零,所以从(91)式得到

$$\Delta m(a;\ a)=\frac{1}{\lambda_0}\mathcal{S}(a) \tag{92a}$$

同样,

$$\Delta m(2a;\ a)=\frac{1}{\lambda_0}[\mathcal{S}(2a)-\mathcal{S}(a)]$$

所以

$$\Delta m(a;\ a)+\Delta m(2a;\ a)=\frac{1}{\lambda_0}\mathcal{S}(2a) \tag{92b}$$

同样可以求得$\mathcal{S}(3a)$,$\mathcal{S}(4a)$,…等表达式,由此看到,从 Δm 的测量能够每隔一个 a 定出一个$\mathcal{S}(x)$值。当 a 不太大时,(91)式可改写成

$$\Delta m(x;\ a)\approx\frac{a}{\lambda_0}\frac{\mathrm{d}\mathcal{S}(x)}{\mathrm{d}x} \tag{93}$$

此式表明，Δm 正比于离开 P 点的光线的角像差 $\mathrm{d}S/\mathrm{d}x$。显然，当整个波阵面不存在旋转对称时，原则上可以通过改变切变方向来加以检验。

当两个波阵面发生切变时，虚交在 P 点的两条出射光线在穿过相应分束器时角度不同，如果要使切变所引起的条纹位移只依赖于非球面性，则这种不同必须加以补偿。为此采用了两块补偿板 C_1 和 C_2，它们与用作分束器的板完全相同，分别置于干涉仪的两个光臂中。其中 C_1 固定与 D_2 平行，在调节切变时随 D_2 一起转动；另一块 C_2 通过一个机械联动装置与 D_2 相联，该装置使 C_2 以两倍于 D_2 的速率反方向转动。新近，德劳[①]（R. L. Drew）研制了一种形式较简单的切变干涉仪，它不需要补偿板。

7.5.8　相干长度；双光束干涉在研究光谱线精细结构中的应用

当一种气体，例如镉蒸气，在适当条件下用放电激发时，它就发射光，其光谱由很锐的亮线组成，亮线之间是暗区。这种光谱就是所谓**发射线状光谱**。如果把其中一条谱线的光单独分离出来，用它来照射例如迈克耳孙干涉仪，并调节干涉仪产生圆条纹，可以发现，如果两个干涉光束的光程近乎相等，那么条纹是清晰的；但是当光程差增加时，条纹的可见度下降（一般不是单调地），最后条纹消失。

可以用如下假定来解释条纹的消失：这条谱线的光不是严格单色的，而是由有限长度的一个个波列组成，**在作一次观测所需的时间内，有大量数目的波列以无规的时间间隔通过**。暂且假设所有这些波列是完全相同的。每一波列进入干涉仪后，分成长度相等的两个波列；而当干涉仪两臂的光程差大于波列长度时，这两个波列中一个尚未到达观察点 P 时另一个已经过去了。因此，产生于**同一**入射波列的一对对波列这时在 P 点不发生干涉；在任何时刻，在 P 点叠加的波列都是由**不同的**入射波列产生的，而且因为这些波列无规地迅速接连地到达，所以，在进行一次观测所需要的较长时间内，它们对干涉项的贡献平均为零。

我们可利用傅里叶积分分析方法把上面的解释换一个形式，它在数学上更便于描述条纹可见度随程差的变化。设 $F(t)$ 为单个波列在时间 t 在某点产生的光扰动。假定当 $|t| \geqslant t_0$ 时 F 为零，并把它表成为傅里叶积分

$$F(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\nu)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\nu t}\,\mathrm{d}\nu \tag{94}$$

按傅里叶反演定理，式中

$$f(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\nu t}\,\mathrm{d}t \tag{95}$$

如果在进行一次观测所需要的时间内，有 N 个这样的波列通过该点，则观察中包含的全部光扰动可以写成为

$$V(t)=\sum_{n=1}^{N} F(t-t_n) \tag{96}$$

---

① R. L. Drew, *Proc. Phys. Soc.* B, **64**(1951), 1005。
O. Bryngdahl 的一篇文章讨论了切变干涉仪的应用，见 *Progress in Optics*, Vol. 4, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1965), p. 37。

式中 t_n 表示第 n 个波列到达的时间。设一次观测所需的时间为 $2T$,并设 T 比每个波列的半持续时间 t_0 大得多,则 $2T$ 时间内的平均光强为

$$I=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|V(t)|^2\,\mathrm{d}t\approx\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{+\infty}|V(t)|^2\,\mathrm{d}t \tag{97}$$

现在从(94)和(96)两式得到

$$V(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\upsilon(\nu)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\nu t}\,\mathrm{d}\nu \tag{98}$$

式中

$$\upsilon(\nu)=f(\nu)\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\nu t_n} \tag{99}$$

所以按帕塞瓦尔(Parseval)定理,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|V(t)|^2\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}|\upsilon(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\nu)|^2\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\nu(t_n-t_m)}\mathrm{d}\nu \tag{100}$$

这里二重和

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\nu(t_n-t_m)}&=N+\sum_{n\neq m}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\nu(t_n-t_m)}\\&=N+2\sum_{n<m}\cos 2\pi\nu(t_n-t_m)\end{aligned} \tag{101}$$

因为 t_n 的分布是无规的,所以各余弦项正、负机率相等。因此,在大量同样的实验中,(100)式中二重和的平均值为 N,因而由(97)和(100)两式得到平均强度为

$$I=\frac{N}{2T}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu \tag{102}$$

这就是说,它与组成单个波列的各单色成分的强度 $i(\nu)=|f(\nu)|^2$ 的积分(非相干叠加)成正比[①]。在迈克耳孙干涉仪中,每个单色成分各产生一个如 7.5.4 节中所描述的干涉图样,而当程差从零增大时,由于波长不同,这些单色图样的相互位移也不断增大。因此条纹可见度下降,而当光程差足够大时,条纹即全部消失。

这两种解释都说明了为什么在程差足够大时不出现条纹,一种解释着眼于波列长度的有限和到来次序的无规,另一种解释着眼于频谱分布和各单色成分的非相干叠加。对大多数实际目的而言,这两种解释是等效的;从以上讨论当可期望,波列越长,具有足够强度的那些傅里叶成分所跨的频率范围就越窄。可以用一个简单的例子来说明这个关系。假定这些波列的持续时间都是 Δt,在这个时间内 $F(t)$是简单的周期函数,频率为 ν_0,即

① 这一结果的严格表述由 N. Campbell 定理给出,这一定理在无规噪声分析中,特别是在与散粒效应(真空管中电子流强度的涨落)有关的问题中为大家所熟知。见 S. O. Rice, *Bell Tech. J.*, **23**(1944), 282[转载于 *Selected Papers On Noise and Stochastic Processes*, ed. N. Wax(New York, Dover Publications, 1954), p. 133]。

$$\left.\begin{aligned} F(t) &= f_0 e^{-2\pi i \nu_0 t}, \quad \text{当} \quad |t| \leqslant \frac{\Delta t}{2}, \\ &= 0, \quad \text{当} \quad |t| > \frac{\Delta t}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

式中 f_0 是常数。这时从(95)和(103)两式，

$$\begin{aligned} f(\nu) &= f_0 \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} e^{2\pi i(\nu-\nu_0)t}\, dt \\ &= f_0 \Delta t \left[\frac{\sin\{\pi(\nu-\nu_0)\Delta t\}}{\pi(\nu-\nu_0)\Delta t}\right] \end{aligned} \tag{104}$$

函数$[\sin\{\pi(\nu-\nu_0)\Delta t\}/\pi(\nu-\nu_0)\Delta t]^2$ 决定(103)式的傅里叶成分的强度分布，其曲线如图 7.53 所示。可以称为有足够强度的频率间隔 $\nu_0 - \Delta\nu/2 \leqslant \nu \leqslant \nu_0 + \Delta\nu/2$ 是有些任意的，但因强度的第一个零值(发生在正弦项的变量等于 π 时)对应于 $\nu - \nu_0 = \pm 1/\Delta t$，所以显然

$$\Delta\nu \approx \frac{1}{\Delta t} \tag{105}$$

这样，傅里叶谱的有效频率范围约等于单个波列持续时间的倒数。

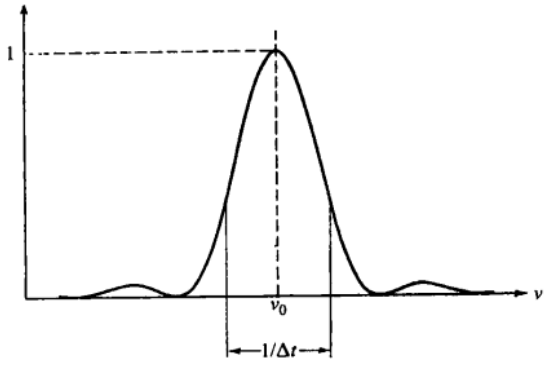


图 7.53　函数$\left\{\frac{\sin[\pi(\nu-\nu_0)\Delta t]}{\pi(\nu-\nu_0)\Delta t}\right\}^2$

这个例子仅仅是实际光源光的理想化，它假设所有波列全都相同，而且都具有简单形式。按照原子理论，原子在辐射时的能量损失将引起波列的减幅。此外，相对于观察者，各原子是处于无规热运动之中，所以所观测到的光谱要受多普勒效应调变。再者，原子在发光时要受到相邻原子的干扰，结果各波列受到无规则的调变。由于这些原因，对于实际的光，我们不能期望给“波列持续时间”和“傅里叶谱的频率范围”这些用词以简单的意义。然而，对于任何光扰动 $V(t)$及其傅里叶反演 $v(\nu)$，可以定义 Δt 和 $\Delta\nu$ 两个量，其中 Δt 可以看作是组成 V 的各个波列的平均持续时间，而 $\Delta\nu$ 可以看作是傅里叶谱的有效频率范围；而且可以证明，这两个平均量总满足下列倒易关系：

$$\Delta t \Delta\nu \geqslant \frac{1}{4\pi} \tag{106}$$

这个不等式在某种意义上类似于量子力学中的海森伯不确定关系。我们将在 10.8.3 节中对它进行推导和讨论,这里仅仅指出,在大多数有实际意义的情况下,(106)式中的不等关系可以用数量级符号来代替。

(106)式中的时间 Δt 称为光的**相干时间**;如果设 $\overline{\lambda_0}$ 为平均波长,则下式定义的长度 Δl 称为**相干长度**:

$$\Delta l = c\Delta t \approx \frac{c}{\Delta \nu} = \frac{\overline{\lambda}_0^2}{\Delta \lambda_0} \tag{107}$$

比较一下(107)式和 § 7.3(15)即可看出,早先对两束准单色光的程差的限制就是指程差必须比光的**相干长度**小得多。当光程差接近或大大超过相干长度时,干涉效应即不再可以察觉。

从以上所述显然可见,用适当的干涉实验观测条纹可见度随光程差的变化,必能获得关于所用光光谱强度分布的数据资料。斐索[①]最早做了这类观察。他用钠火焰的黄光照射他的干涉仪(见 7.5.2 节),得到牛顿环,并观察当透镜和板的间距加大时环的情景。他发现,虽然当透镜和板接触时,这些环是清晰的,可是在第 490 环位置附近,它们几乎看不出来了,但到了第 980 环附近,这些环几乎又恢复到它们原来的清晰程度;他一共能看到 52 次这种可见度的周期变化,每一周期大约包括 980 环。从这些观察,斐索正确地推断钠黄光有两个强度接近相等的成分。当程差为各个成分波长的整数倍时,条纹可见度达到极大,所以两个成分的波长之比大约是 981/980,他用棱镜分光镜进行直接观察,从而证实了这个结论。

后来,迈克耳孙做了更精细的观察[②],他测量了他的干涉仪中圆条纹的可见度,方法是把它们同一组可见度已知而且可变的圆条纹进行比较。使用这种方法,迈克耳孙对大量光谱线的光绘制了**可见度曲线**,即条纹可见度随程差的变化曲线。

让我们来看看可见度曲线与光谱强度分布的关系如何。为简单起见,假定两束干涉光的强度相等。当光程差为 $\Delta \mathcal{S}$ 时,位相差为

$$\delta(k_0, \Delta \mathcal{S}) = k_0 \Delta \mathcal{S} \tag{108}$$

式中 $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ 是波数;所以,按照 § 7.2(17),在波数区域元 $\mathrm{d}k_0$ 内,各成分产生的强度为

$$i(k_0, \Delta \mathcal{S})\mathrm{d}k_0 = 2i_1(k_0)[1 + \cos(k_0 \Delta \mathcal{S})]\mathrm{d}k_0 \tag{109}$$

式中 $i_1(k_0)$ 代表任一束光强度的光谱分布。前面已经证明,不同光谱成分相加是不相干的,所以干涉图样中的总强度为

$$I(\Delta \mathcal{S}) = 2\int i_1(k_0)[1 + \cos(k_0 \Delta \mathcal{S})]\mathrm{d}k_0 \tag{110}$$

对一条光谱线的光来说,在某一平均波数 $\overline{k}_0$ 附近很小的 k_0 范围以外,$i_1(k_0)$ 是可以忽略的。如果这时令

$$\left.\begin{aligned} x &= k_0 - \overline{k}_0, \\ j(x) &= i_1(\overline{k}_0 + x), \end{aligned}\right\} \tag{111}$$

① H. Fizeau, *Ann. Chim. Phys.* (3), **66**(1862), 429。

② A. A. Michelson, *Phil. Mag.* (5), **31**(1891), 338; *ibid.*, **34**(1892), 280。

就可以把(110)式改写成

$$I = 2\int j(x)\{1 + \cos[(\bar{k}_0 + x)\Delta\mathcal{S}]\}\mathrm{d}x \tag{112}$$

从这点来看，这里的分析与 7.3.6 节的分析(253 ~ 254 页)相类似。因此(112)式可以写成[见 §7.3(38)]

$$I(\Delta\mathcal{S}) = P + C(\Delta\mathcal{S})\cos(\bar{k}_0\Delta\mathcal{S}) - S(\Delta\mathcal{S})\sin(\bar{k}_0\Delta\mathcal{S}) \tag{113}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} P &= 2\int j(x)\mathrm{d}x, \\ C(\Delta\mathcal{S}) &= 2\int j(x)\cos(x\Delta\mathcal{S})\mathrm{d}x, \\ S(\Delta\mathcal{S}) &= 2\int j(x)\sin(x\Delta\mathcal{S})\mathrm{d}x. \end{aligned}\right\} \tag{114}$$

因为，对一条光谱线来说，$j(x)$仅仅在$|x| \ll \bar{k}_0$ 时才不为零，所以与 $\cos(\bar{k}_0\Delta\mathcal{S})$和 $\sin(\bar{k}_0\Delta\mathcal{S})$的变化相比，$C$ 和 S 的变化可以忽略，因此，在良好近似程度上，I 的极值位置可由下式给出：

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}(\Delta\mathcal{S})} = -\bar{k}_0[C\sin(\bar{k}_0\Delta\mathcal{S}) + S\cos(\bar{k}_0\Delta\mathcal{S})] = 0$$

即发生在

$$\tan(\bar{k}_0\Delta\mathcal{S}) = -\frac{S}{C} \tag{115}$$

由(113)和(115)两式，I 的极值是

$$I_{\text{极值}} = P \pm \sqrt{C^2 + S^2} \tag{116}$$

因此可见度曲线由下式给出：

$$\mathcal{V}(\Delta\mathcal{S}) = \frac{I_{\text{极大}} - I_{\text{极小}}}{I_{\text{极大}} + I_{\text{极小}}} = \frac{\sqrt{C^2 + S^2}}{P} \tag{117}$$

可以注意(113)式也可写成为

$$I = P\left[1 + \frac{\sqrt{C^2 + S^2}}{P}\cos(\phi + \bar{k}_0\Delta\mathcal{S})\right] \tag{118}$$

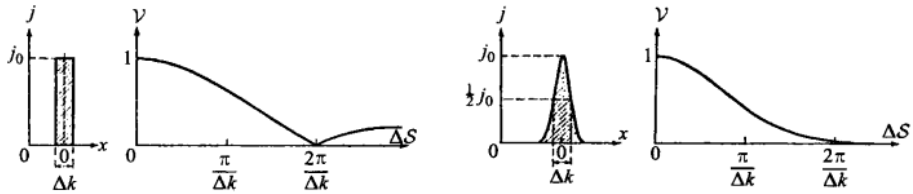
式中 $\tan\phi = S/C$，所以可见度曲线是归一化强度曲线 I/P 的包络。

图 7.54 给出了一些计算的可见度曲线，光谱强度分布 $j(x)$如图中所设。但是，实际问题正好相反，而是要从所观测的可见度曲线来决定光谱分布。如果 $j(x)$是对称的，则 $S = 0$，(117)式化为

$$\mathcal{V} = \frac{|C|}{P} \tag{119}$$

这时，由可见度曲线可决定 C(比例常数 P 和 C 的符号除外，C 的符号常可由物理合理性考虑来确定)；因而 $j(x)$可以从(114)式通过傅里叶反演得到。然而，在一般情况下，由可见度曲线只能决定$\left|\sqrt{C^2 + S^2}\right|$，因而单靠它一般不足以决定 $j(x)$，因为决定 $j(x)$需要分别知道 C 和 S

两个量。瑞利指出[①],如果不仅测量条纹的可见度,而且还测量它们的位置,则 C 和 S 都可以决定,因为按照(115)式,从条纹的位置应当能给出比率 C/S;但是这种测量做起来很困难[②]。



(a)

当 $|x| \leqslant \frac{1}{2}\Delta k$ 时, $j = j_0$

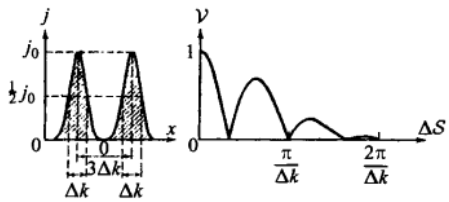
当 $|x| > \frac{1}{2}\Delta k$ 时, $j = 0$

$$\mathcal{V} = \frac{|\sin(\frac{1}{2}\Delta k \Delta \mathcal{S})|}{|\frac{1}{2}\Delta k \Delta \mathcal{S}|}.$$

(b)

$$j = j_0 e^{-\alpha^2 x^2},$$

$$\mathcal{V} \approx e^{-\left(\frac{\Delta \mathcal{S}}{2\alpha}\right)^2}.$$



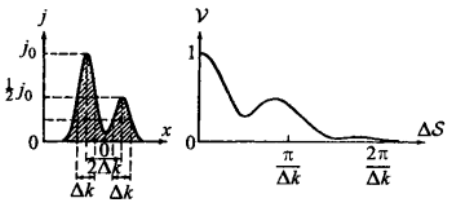
(c)

$$j = j_0 e^{-(\alpha x+\beta)^2} + j_0 e^{-(\alpha x-\beta)^2},$$

$$\mathcal{V} \approx e^{-\left(\frac{\Delta \mathcal{S}}{2\alpha}\right)^2} \left|\cos\left(\frac{\beta}{\alpha}\Delta \mathcal{S}\right)\right|,$$

用

$$\frac{\beta}{\alpha \Delta k} = \frac{3}{2}$$



(d)

$$j = j_0 e^{-(\alpha x+\beta)^2} + \frac{1}{2} j_0 e^{-(\alpha x-\beta)^2}$$

$$\mathcal{V} \approx \frac{1}{3} e^{-\left(\frac{\Delta \mathcal{S}}{2\alpha}\right)^2} \sqrt{5 + 4\cos\left(\frac{2\beta}{\alpha}\Delta \mathcal{S}\right)},$$

用

$$\frac{\beta}{\alpha \Delta k} = 1$$

图 7.54 对应各种光谱分布的可见度曲线($\mathcal{V}$的解析表达式是根据准单色光的假设推导出来的),在图(b)、(c)、(d)中,$\Delta k = 2\sqrt{\ln 2}/\alpha \approx 1.66/\alpha$

尽管有这个限制,迈克耳孙还是成功地推断出一些简单光谱线的结构,这些结构已为后来的工作所广泛证实。特别是,他发现,在他考查过的所有谱线当中,以镉红线($\lambda = 6438$ 埃)最接近单色;其可见度曲线(见图 7.55)相当于高斯型的对称光谱分布,半峰强度处的宽度仅为 0.013 埃,因而他能观察到程差超过 500 000 个波长(约 30 厘米)的条纹。

这种借助双光束干涉分析光谱线结构的方法,是光的干涉效应在分光学中的最早应用,因而具有重要历史意义,但是它已被多光束干涉的方法(见 7.6 节)所取代。然而,近些年来,由

① Lord Rayleigh, *Phil. Mag.* (5). **34**(1892), 407。又见 E. Wolf, *Proc. Phys. Soc.*, **80**(1962), 1269。

② A. Pérard 报导过一些这类测量, *Rev. d' Optique*, **7**(1928), 1; *Réunions, l'Institut d'Optique* (Paris: Revue d'Optique), 6 éme année, (1935), p. 10。

于技术原因，双光束方法在红外光谱区显示了它的优点，因而（部分原因）它的使用重又受到人们的注意①。

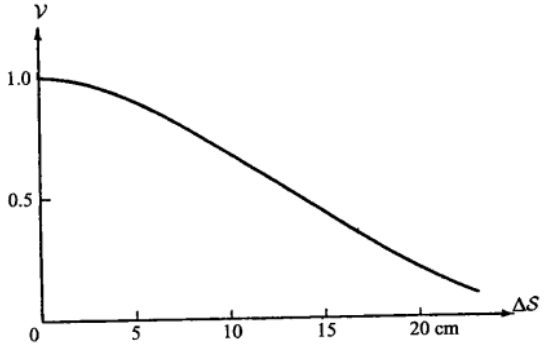


图 7.55　镉红线的可见度曲线[引自 A. A. Michelson, *Phil. Mag.* (5), **4**(1892), 291]

7.6　多光束干涉

当一束光入射到一块透明板上时，它在板的两面上将发生多次反射，结果有一系列光束由板的每边射出，振幅一个比一个减小。前面讨论这种板所产生的干涉效应时（见 7.5.1 节，7.5.2 节，7.5.6 节），略去了经受两次以上反射的那些光束对总强度的贡献。当两个面的反射率很低时，这种近似处理经证明是可行的。现在要考虑所有的反射光束：我们将看到，如果板面反射率很高，条纹图样强度分布将发生很大变化，并因此具有重要实际应用。

7.6.1　平行平面板的多光束干涉条纹

考虑一块平行平面透明板，其折射率为 n'，周围媒质的折射率为 n，并假设有一单色平面光波以 θ 角入射到板上。设光线 SB_1（见图 7.56）代表入射波的传播方向。在第一个面上，这个波分成两个平面波，一个被反射，方向为 B_1C_1，另一个透射进入板内，方向为 B_1D_1。这个透射波以 θ' 角入射到第二个面上，并且在这里再分成两个平面波，一个透射出板外，方向为 D_1E_1，另一个反射回板内，方向为 D_1B_2；留在板内的这个波继续不断分解，过程如图中所示。

设 $A^{(i)}$ 是入射波的电矢量振幅，并假定入射波是线偏振波，电矢量平行于入射面或垂直于入射面。如同 1.5.2 节中一样，取 $A^{(i)}$ 为复数，令其位相等于波函数位相的常数部分。无论在反射还是在透射这组波中，每个波和它前一个波的位相之差对应于板内两段“之”字形路程。按照 §7.5(6)，这一位相差为

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} n' h \cos\theta' \tag{1}$$

① 例如，见 P. Fellgett, *Journ. de Phys.*, **19**(1958), 187, 237。又见 G. A. Vanasse 和 H. Sakai 关于傅里叶光谱学的评述性论文，载于 *Progress in Optics*, Vol. 6, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1967), p. 259。

式中 h 是板的厚度,λ_0 是真空波长。设波从周围媒质进入板内时,反射系数(反射波振幅与入射波振幅之比)为 r,透射系数(透射波振幅与入射波振幅之比)为 t;而当波从板传播到周围媒质时,相应的系数为 r',t'。于是,从板反射回来的各个波的复振幅依次为

$$rA^{(i)},\qquad tt'r'A^{(i)}e^{i\delta},\qquad tt'r'^3A^{(i)}e^{2i\delta},\cdots,\qquad tt'r'^{(2p-3)}A^{(i)}e^{i(p-1)\delta},\cdots$$

同样,除去一个不重要的常数相因子以外,从板透射出来的各个波的复振幅依次为

$$tt'A^{(i)},\qquad tt'r'^2A^{(i)}e^{i\delta},\qquad tt'r'^4A^{(i)}e^{2i\delta},\cdots,\qquad tt'r'^{2(p-1)}A^{(i)}e^{i(p-1)\delta},\cdots$$

r,r',t,t' 各量可通过 1.5.2 节菲涅耳公式由 n,n',θ,θ' 表出。但是目前不需要这些显式,而只需要它们之间的关系式。例如,对于任一偏振分量,由 § 1.5(20a)和 § 1.5(35)可知,

$$tt'=\mathcal{T} \tag{2}$$

同样,利用方程 § 1.5(21a),有

$$r=-r' \tag{3}$$

因而,由 § 1.5(33)

$$r^2=r'^2=\mathcal{R} \tag{4}$$

式中$\mathcal{R}$和$\mathcal{T}$分别代表平板表面的反射率和透射率,二者之间存在下列关系:

$$\mathcal{R}+\mathcal{T}=1 \tag{5}$$

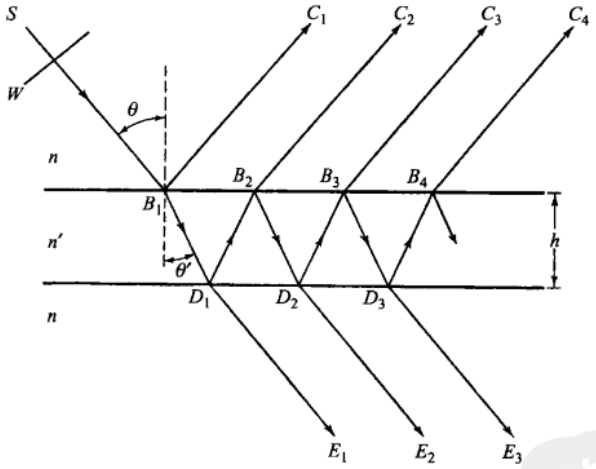


图 7.56 平面波在平行平面板中的反射

如果前 p 个反射波相叠加,则反射光电矢量振幅 $A^{(r)}(p)$ 由下式给出:

$$\begin{aligned}A^{(r)}(p)&=[r+tt'r'e^{i\delta}(1+r'^2e^{i\delta}+\cdots+r'^{2(p-2)}e^{i(p-2)\delta})]A^{(i)}\\&=\left[r+\left(\frac{1-r'^{2(p-1)}e^{i(p-1)\delta}}{1-r'^2e^{i\delta}}\right)tt'r'e^{i\delta}\right]A^{(i)}\end{aligned} \tag{6}$$

如果板足够长,反射波的数目就很大;在 $p\to\infty$ 的极限时,利用(3)式,由(6)式可得

$$A^{(r)}\equiv A^{(r)}(\infty)=-\frac{r'[1-(r'^2+tt')e^{i\delta}]}{1-r'^2e^{i\delta}}A^{(i)} \tag{7}$$

再利用(2)、(4)和(5)三式,从而得到

$$A^{(r)}=\frac{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta})\sqrt{\mathcal{R}}}{1-\mathcal{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}A^{(i)} \tag{8}$$

因而反射光的强度 $I^{(r)}=A^{(r)}A^{(r)\star}$ 为

$$I^{(r)}=\frac{(2-2\cos\delta)\mathcal{R}}{1+\mathcal{R}^2-2\mathcal{R}\cos\delta}I^{(i)}=\frac{4\mathcal{R}\sin^2\dfrac{\delta}{2}}{(1-\mathcal{R})^2+4\mathcal{R}\sin^2\dfrac{\delta}{2}}I^{(i)} \tag{9}$$

式中 $I^{(i)}=A^{(i)}A^{(i)\star}$ 是入射光的强度。

用同样方法可得到透射光振幅表达式如下:

$$\begin{aligned}A^{(t)}(p)&=tt'(1+r'^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}+\cdots+r'^{2(p-1)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-1)\delta})A^{(i)}\\&=\left(\frac{1-r'^{2p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\delta}}{1-r'^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}\right)tt'A^{(i)}\end{aligned} \tag{10}$$

在 $p\to\infty$ 的极限时,(10)式化为

$$A^{(t)}\equiv A^{(t)}(\infty)=\frac{tt'}{1-r'^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}A^{(i)} \tag{11}$$

利用(2)和(4)两式,得到

$$A^{(t)}=\frac{\mathcal{T}}{1-\mathcal{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}A^{(i)} \tag{12}$$

因而相应的透射光强度 $I^{(t)}=A^{(t)}A^{(t)\star}$ 为

$$I^{(t)}=\frac{\mathcal{T}^2}{1+\mathcal{R}^2-2\mathcal{R}\cos\delta}I^{(i)}=\frac{\mathcal{T}^2}{(1-\mathcal{R})^2+4\mathcal{R}\sin^2\dfrac{\delta}{2}}I^{(i)} \tag{13}$$

(9)和(13)两式称为**爱里**(Airy)**公式**,它们和 1.6 节分层媒质中光传播的一般理论所推得的结果是一致的;因为如果在 § 1.6(60)中令 $r_{12}=r$, $r_{23}=r'$, $t_{12}=t$, $t_{23}=t'$, $2\beta=\delta$,并利用上列关系式(2)和(3),就得到(9)和(13)两式①。

现在假设入射光是一组平面波,强度相等,而入射角分布在某一范围,并用一透镜 L 将透射光收集起来(见图 7.57)。透镜 L 焦平面上 P 点处的强度与平板移去后该点的强度之比为 $I^{(t)}/I^{(i)}$。因此,按照(13)式,当板存在时,并且当干涉序

$$m=\frac{\delta}{2\pi}=\frac{2n'h\cos\theta'}{\lambda_0} \tag{14}$$

是整数 1,2,…时,P 点的强度将是极大,而当 m 是半整数 1/2,3/2,5/2,…时,P 点的强度将是极小。显然,在透镜 L 的焦平面上,产生的是等倾条纹,各顺沿着 $\theta'=$ 常数(因而 $\theta=$ 常数)的一条轨迹。同样,如果用一个透镜 L' 将板的反射光收集起来,在 L' 的焦平面上也将产生等倾条纹;而且从(9)式可以看出,该反射图样的强度极大对应于半整数干涉序($m=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\cdots$),而强度

① 在进行这一比较时必须记住,符号$\mathcal{R}$和$\mathcal{T}$在 1.6 节中代表整个板的反射率和透射率,与这里代表的不同。

极小对应于整数干涉序($m=1,2,\cdots$)。这样,透射、反射两个图样的条纹都是在 7.5.1 节近似处理所给的位置上,在 7.5.1 节中,只考虑了从板每边射出的头两个光束。

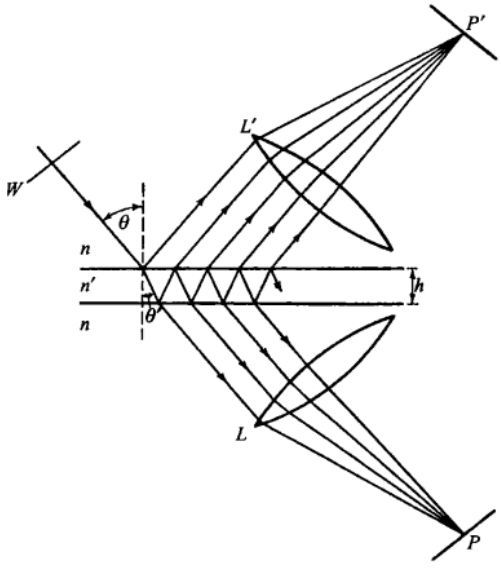


图 7.57 平行平面板多光束等倾条纹形成图示

反射图样和透射图样的强度分布由(9)和(13)两式给出。利用(5)式,可以把它们写成为

$$\frac{I^{(r)}}{I^{(i)}}=\frac{F\sin^2\frac{\delta}{2}}{1+F\sin^2\frac{\delta}{2}} \tag{15a}$$

$$\frac{I^{(t)}}{I^{(i)}}=\frac{1}{1+F\sin^2\frac{\delta}{2}} \tag{15b}$$

式中参量 F 的定义是

$$F=\frac{4\mathcal{R}}{(1-\mathcal{R})^2} \tag{16}$$

显然,两个图样是互补的,即

$$\frac{I^{(r)}}{I^{(i)}}+\frac{I^{(t)}}{I^{(i)}}=1 \tag{17}$$

图 7.58 画出了不同的 F 值下 $I^{(t)}/I^{(i)}$ 随位相差 δ 变化的特性曲线。当$\mathcal{R}$比 1 小得多时,F 也比 1 小得多,因而可以将(15)式中的 $1/(1+F\sin^2\frac{\delta}{2})$展开,并只保留到 F 的一次项,结果得到

$$\frac{I^{(r)}}{I^{(i)}}\approx F\sin^2\frac{\delta}{2}=\frac{F}{2}(1-\cos\delta) \tag{18a}$$

$$\frac{I^{(t)}}{I^{(i)}}\approx 1-F\sin^2\frac{\delta}{2}=1-\frac{F}{2}(1-\cos\delta) \tag{18b}$$

即强度变化是公式 § 7.2(15)这种双光束干涉所特有的形式。当$\mathcal{R}$增高时，透射图样极小的强度下降，而极大变锐，最后当$\mathcal{R}\to 1$使得 F 很大时，则除去紧靠这些极大的地区以外，其他各处透射光的强度都非常小。这时，透射光的干涉图样由一系列很窄的亮条纹组成，背景几乎完全黑暗。同样，反射光的干涉图样这时变成一系列很窄的暗条纹，背景则几乎一片均匀明亮。条纹的锐度用它们的**半强度宽度**，即**半宽度**来量度是很方便的。在透射光干涉图样情况下，半宽度是指极大两边强度下降到峰值一半时两点间的距离。相邻条纹的间隔与半宽度之比，我们称为条纹**细度**$\mathcal{F}$。对于整数序 m 的条纹，强度等于其峰值之半的那两点位于

$$\delta = 2m\pi \pm \frac{\varepsilon}{2} \tag{19}$$

其中 ε 由(15b)式应满足

$$\frac{1}{1 + F\sin^2\dfrac{\varepsilon}{4}} = \frac{1}{2} \tag{20}$$

而当 F 足够大时，ε 很小，可令(20)式中的 $\sin(\varepsilon/4) = \varepsilon/4$，从而得到半宽度为

$$\varepsilon = \frac{4}{\sqrt{F}} \tag{21}$$

因为相邻条纹的间隔相当于 δ 改变 2π，于是细度

$$\mathcal{F} = \frac{2\pi}{\varepsilon} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2} \tag{22}$$

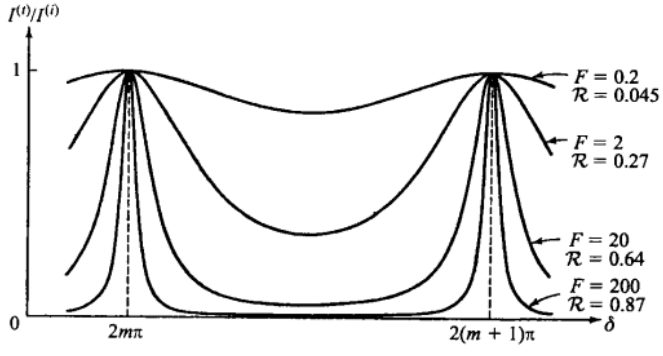


图 7.58　透射光情况下多光束等倾条纹：透射光和入射光强度之比 $I^{(t)}/I^{(i)}$ 随位相差 δ 的变化曲线（m 为一整数）

以上我们假定光是严格的单色光。采用准单色光时，强度分布等于各个单色成分产生的(15)式形式的强度分布之和；而如果这些成分的平均波长为$\overline{\lambda_0}$，波长分布间区为 $\Delta\lambda_0$，则 m 序各个极大铺开的范围相当于波长$\overline{\lambda_0}$的图样中位相改变一个$|\Delta\delta|$，可由(14)式求出。如果略去其中 $n'h$ 对波长的依赖关系，则$|\Delta\delta| = 2\pi m\Delta\lambda_0/\overline{\lambda_0}$。只要$|\Delta\delta|$与单色条纹的半宽度 ε 相比可以忽略，就可认为这些成分的图样是重合在一起的，而总的强度分布与波长为$\overline{\lambda_0}$的严格单色光源所产生的强度分布相同。由(22)式可知，这个条件是 $m\mathcal{F} \ll \overline{\lambda_0}/\Delta\lambda_0$，即

$$\mathcal{F}\Delta\mathcal{S} \ll \frac{\overline{\lambda_0}^2}{\Delta\lambda_0} \tag{23}$$

式中

$$\Delta S=\frac{\overline{\lambda_0}}{2\pi}\delta=m\overline{\lambda}_0 \tag{24}$$

是相邻二干涉光束的光程差;可以把(23)式同双光束干涉方面的类似不等式 §7.3(15)进行比较。可以认出,(23)式右边的量就是光的相干长度[见 §7.5(107)]。

从上面的讨论可以明显看出,当板面反射率——因而$\mathcal{F}$——增高时,强度分布变得更有利于测量条纹的位置,并且在透射图样中,不同单色成分的条纹可以完全分开。正是由于这些原因,多光束干涉量度学具有实际的重要性。在正入射下,在光学波长范围,就现在使用的介质而言,介质界面的反射率是很低的:例如,按照 §1.5(37),空气($n\approx1$)和玻璃($n'\approx1.5$)界面的$\mathcal{R}\approx0.04$。采用斜入射,可使反射率增高,而且如我们在 1.5 节中所看到的,当光密媒质中的传播方向趋近临界角时,$\mathcal{R}\to1$。将介质表面镀上多层适合的介质膜(如 1.6 节所说),或镀上一层部分透明的金属膜,也可使正入射附近的反射率趋近 1。介质基片金属膜理论在第 14 章中讨论。这里可以预先指出,这种膜对光有所吸收,并且反射相变不一定是 0 或 π,因而当膜两边交界介质的折射率不同时,膜两边的反射率和反射相变也将不同。因此,上面的分析对于镀金属膜的板是无效的。但是,当板两面上的膜相同时,(12)和(13)两式仍将成立,只要把其中$\mathcal{R}$解释为内反射的反射率,并把 δ 的定义从(1)式改为

$$\delta=\frac{4\pi}{\lambda_0}n'h\cos\theta'+2\phi \tag{25}$$

式中ϕ为内反射的相变。这时,如令

$$\mathcal{R}+\mathcal{T}+\mathcal{A}=1 \tag{26}$$

式中$\mathcal{A}$是光被金属膜吸收掉的部分,则利用(16)式,即可由(13)式得到

$$\frac{I^{(t)}}{I^{(i)}}=\left(1-\frac{\mathcal{A}}{1-\mathcal{R}}\right)^2\frac{1}{1+F\sin^2\dfrac{\delta}{2}} \tag{27}$$

比较一下(27)和(15b)两式,即可看到,当 F 给定时,吸收的影响是使透射图样的强度减小,因为因子$[1-\mathcal{A}/(1-\mathcal{R})]^2$ 小于 1[①]。在正入射附近,反射相变ϕ的效应等效于使板的光学厚度增加$\phi\lambda_0/2\pi$。在斜入射时,反射相变还与偏振态有关,情况就更为复杂。

7.6.2 法布里-珀罗干涉仪

法布里-珀罗干涉仪[②]采用平行平面板产生的多光束干涉条纹,光的照射在正入射附近。这一仪器主要由两块平面玻璃板或石英板 P_1,P_2 构成(见图 7.59)。两块板朝里的表面各镀有高反射率的部分透射膜,并且相互平行,因而当中形成一平行平面空气层。两块板本身各做成有点棱形,以避开未镀膜外表面上反射产生的干扰。在该仪器原来的形式中,一块板是固定的,另一块板安装在由螺旋控制的台架上,使板的间隔可连续改变。但是由于机械结构上的困难,这种装置已废弃不用,而改成用一个长短固定的间隔物 D 将两块板隔开。间隔物通常是

① 采用多层介质反射膜时,透射图样的强度分布仍然呈(27)式的形式,这时强度的减小主要由于散射:见 P. Giacomo, *Rev. d' Opt.*, **35**(1956), 442。

② C. Fabry and A. Perot, *Ann. Chim. Phys.* (7), **16**(1899), 115。

殷钢或硅土制的空心圆柱——俗称间隔圈，每端有三个小凸包，板则靠几个弹簧的压力顶在凸包上。间隔圈 D 用光学方法加工，使小凸包端点所确定的两个平面尽可能接近平行，而精细调节可通过改变弹簧的压力来达到。这种板间隔固定式的法布里-珀罗干涉仪通常称为**法布里-珀罗标准具**。

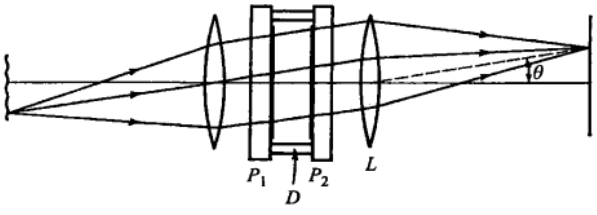


图 7.59　法布里-珀罗干涉仪

我们在上一节已经看到，一个准单色的扩展光源 S，如果满足(23)式条件，则在透镜 L 的焦平面上将形成一系列很窄的等倾亮条纹。由(25)式可知干涉序

$$m = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{2n'h\cos\theta'}{\lambda_0} + \frac{\phi}{\pi} \tag{28}$$

式中 n' 是板间空气的折射率，h 是二反射面的间隔，θ' 是反射角，而 ϕ 是反射相变。透镜的光轴通常与板垂直，因而这时对应于各个整数 m 的亮条纹是一组同心圆，圆心在正入射透射光的焦点上(见图 7.60)。在这一点，m 的值最大，设为 m_0，由下式给出：

$$m_0 = \frac{2n'h}{\lambda_0} + \frac{\phi}{\pi} \tag{29}$$

一般，m_0 不是整数，因而可写成为

$$m_0 = m_1 + \mathrm{e} \tag{30}$$

式中 m_1 是最里边那个亮条纹的整数序，而 e 小于 1，是中心的小数序。从(28)、(29)和(30)三式，使用与推导 §7.5(13)完全类似的方法，可得到从中心数起第 p 个亮条纹的角半径 θ_p，当 θ_p 不太大时，其结果为

$$\theta_p = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{n'\lambda_0}{h}}\sqrt{p-1+\mathrm{e}} \tag{31}$$

式中 n 是两板外边空气的折射率。因此，该条纹的直径 D_p 由下式给出：

$$D_p{}^2 = (2f\theta_p)^2 = \frac{4n'\lambda_0 f^2}{n^2 h}(p-1+\mathrm{e}) \tag{32}$$

式中 f 是透镜 L 的焦距。

在实际工作中，法布里-珀罗干涉仪有三个重要特性参量：第一，细度 $\mathcal{F}$，前已定义为条纹间距和半宽度之比；第二，**峰值透射率**

$$\tau = \left(\frac{I^{(t)}}{I^{(i)}}\right)_{\text{极大}} \tag{33}$$

第三，**衬比因子**

$$C=\left(\frac{I^{(t)}}{I^{(i)}}\right)_{\text{极大}}\Big/\left(\frac{I^{(t)}}{I^{(i)}}\right)_{\text{极小}} \tag{34}$$

式中 $I^{(t)}$ 是条纹图样的强度,而 $I^{(i)}$ 是干涉仪移去后的相应强度,如果暂且假定两板里表面是平行平面,并且略去外表面上的反射,则 $I^{(t)}/I^{(i)}$ 可由(27)式给出。将(27)式同(15b)式进行比较,可见细度$\mathcal{F}$仍由(22)式给出,如再利用(16)式,即有

$$\mathcal{F}=\frac{\pi\sqrt{\mathcal{R}}}{1-\mathcal{R}} \tag{35}$$

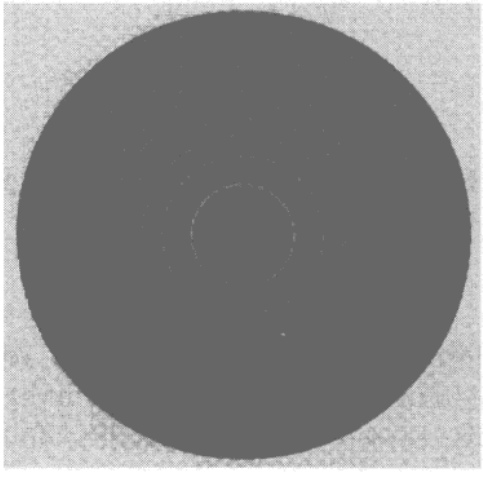


图 7.60 法布里-珀罗条纹

由(27)式,峰值透射率

$$\tau=\left(1-\frac{\mathcal{A}}{1-\mathcal{R}}\right)^2 \tag{36}$$

又从(34)、(27)、(22)和(16)四式,衬比因子

$$C=1+F=\left(\frac{1+\mathcal{R}}{1-\mathcal{R}}\right)^2=1+\frac{4\mathcal{F}^2}{\pi^2} \tag{37}$$

正如前一节中所指出的,板的敷层可以镀金属膜,通常是银膜或铝膜,也可以镀多层介质膜,即由多层高、低折射率物质——例如硫化锌和冰晶石——交替相间组成的膜系①,每层光学厚度均为 $\lambda_0/4$。这两类膜都是用真空热蒸发法制备。当波长给定时,一般来说,在金属膜,反射率$\mathcal{R}$随膜厚而增加,而在介质膜,反射率$\mathcal{R}$则随膜层层数的加多而增大(见 1.6 节,表 1.3)。但是,人们发现,在反射率$\mathcal{R}$很高时(实用情况),这两种敷层的$\mathcal{A}/(1-\mathcal{R})$都随$\mathcal{R}$的增大而增大,由(35)和(36)两式可知,此即表明,$\mathcal{F}$增加时,τ 减小。这样,同时要求峰值透射率和细度(或衬比因子)都很高是矛盾的,因而在实际工作中,须在二者之间有所取舍。图 7.61 给出了 τ 和$\mathcal{F}$的一些数值,是从所列典型膜层的测量结果推算出来的。我们看到,除红端波段以外,在同样

① 也有人采用金属膜和介质膜的组合:见 C. Dufour, *Ann. de physique*(12),**6**(1951),5。

的峰值透射率下，以采用介质膜时细度最高。然而，必须注意，多层介质膜的反射系数只有在波长 λ_0（各膜层的光学厚度是这个波长的 1/4）附近有限波长范围内才很高，所以，如果工作中光所包括的波长范围很广而又必须采用单个干涉仪，介质敷层就不适用了。在可见光谱波长范围，在同样的峰值透射率下，银膜比铝膜产生的条纹锐，但是在大约 4000 埃以下，情况则相反，因而铝敷层用于紫外工作，可一直到 2000 埃。

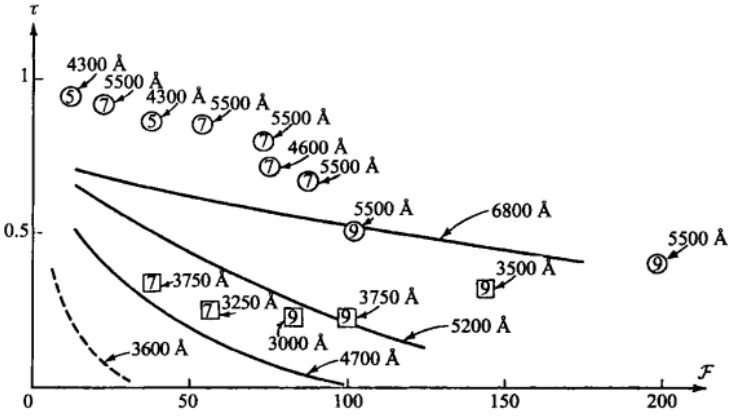


图 7.61　采用不同反射敷层时的峰值透射率 τ 和细度 $\mathcal{F}$，假定两个反射面是完全平的且相互平行。图例：— 新制银膜[引自 H.Kuhn and B.A.Wilson, *Proc. Phys. Soc.* B, **63** (1950), 745]。- - -铝膜[引自 J.C.Burridge, H. Kuhn and A.Pery, *Proc. Phys. Soc.* B, **66**(1953), 963]。○硫化锌-冰晶石多层膜[引自 P.Giacomo, *Rev. d' Opt.*, **35** (1956), 317。J.Ring and W.L.Wilcock, *Nature*, **171**(1953), 648; *ibid.* **173**(1954), 994]。□氯化铅-氟化镁多层膜[引自S.Penselin and A.Steudel, *Z. Phys.*, **142**(1955), 21。多层介质膜的层数和最佳波长标于图中]

上面讨论的是一个理想干涉仪的情形，其中两个反射面是完全平的且相互平行①。实际上，干涉仪两板表面不可能加工得完全平，因而板的间隔 h 在孔径范围内总是改变的。杜福（C.Dufour）和皮卡（R.Picca）②，还有查布耳（R.Chabbal）③都曾讨论过这种间隔变化的影响。他们证明，这时细度和峰值透射率总小于(35)和(36)两式所给的数值，并且当 $\mathcal{R}\to 1$ 时，细度趋近一极限 $\mathcal{F}_d$，它仅仅与两板的缺陷有关，这就是说，当两板给定时，条纹的锐度有一个上限，不管敷层的反射率多高，条纹锐度都不能超过此限。$\mathcal{F}_d$ 的值取决于板面偏离平行平面的形状和程度。例如，当板面有点球形弯曲，以致干涉仪孔径中心和边部之间光学厚度 $n'h$ 相差 λ_0/q 时，$\mathcal{F}_d = q/2$。作为示例，设一干涉仪 $q = 100$（即 $\mathcal{F}_d = 50$），敷层为新鲜银膜，用在 $\lambda \approx 5200$ 埃。表 7.1 列出了该干涉仪的细度和峰值透射率，并同时给出图 7.61 的相应数值以资比较。可以看到，当 $\mathcal{F} \gtrsim \mathcal{F}_d$ 时，反射率的增加导致峰值透射率下降，而同时细度却增加得很少，得不偿失。这个例子也说明，要充分利用所能达到的反射率，板面平度应高到什么程度。

① P.Connes 描述了另一种式样的法布里-珀罗干涉仪，他修改了原设计，用曲率半径相等的两个球面镜代替了平面镜，并且令二者焦点相重合，见 *Rev. d' Opt.*, **35**(1956), 37; *Journ. de Phys.*, **19**(1958), 262。这种类型的干涉仪可用作激光器谐振腔[例见，O.Svelto, *Principles of Lasers* (New York, Plenum Press, 4th edition 1998), Chapter 4]。

② C.Dufour and R.Picca, *Rev. d' Opt.*, **24**(1945), 19。

③ R.Chabbal, *J. Rech. Cent. Nat. Rech. Sci.*, Labs. Bellevue (Paris), No.24(1953), 138。

表 7.1 法布里-珀罗干涉仪(敷层为新鲜银膜,用于5200埃)的细度$\mathcal{F}$和峰值透射率 τ:(a)平面板,(b)板面有球形弯曲,中心和边之间 $n'h$ 相差 52 埃

(a)平面板		(b)球形弯曲板($\mathcal{F}_d=50$)	
$\mathcal{F}$	τ	$\mathcal{F}$	τ
25	0.59	22	0.55
50	0.44	36	0.34
75	0.30	42	0.20
100	0.20	45	0.11
125	0.13	46	0.06

(a)中各值引自图 7.61;(b)中各值引自 R. Chabbal 的理论曲线,见 *J. Rech. Cent. Nat. Rech. Sci.*, Labs. Bellevue(Paris), No. 24(1953), 138。

7.6.3 应用法布里-珀罗干涉仪研究光谱线的精细结构

法布里-珀罗干涉仪的准单色入射光不满足(23)式条件时,透射光的强度分布将不再是(27)式所给的形式,因而从这一分布可了解到入射光的光谱结构。特别来说,假设入射光有两个单色成分。如果我们想像它们的波长差在逐渐增加,而且假定它们的强度差得不太大,那么,最后当干涉图样中出现两套相互错开的极大时,就证明了它们的存在。这时,我们说这两个成分被干涉仪**分辨开**。1899 年,法布里和珀罗[①] 用这种方法直接观察到了以前迈克耳孙只能间接推断的(见 7.5.8 节)那些光谱线的精细结构,从此以后,法布里-珀罗干涉仪在光谱学的这一分支中占据了统治地位。

为了比较不同仪器对光谱结构的分辨能力,方便的办法是考虑两个成分强度相等时的情况,并且规定(带有几分任意)当两个成分可以说"刚刚被分辨开"时二者极大应该错开的距离。设 $\lambda_0 \pm \frac{1}{2}\Delta\lambda_0$ 是这两个成分的波长,$\lambda_0/\Delta\lambda_0$ 这个量就叫做仪器的**分辨本领**。这一分辨判据是瑞利[②] 首先在棱镜和光栅光谱学中引进的,那里单色光产生的强度分布形式为 $I(\delta) = [\sin(\delta/2)/(\delta/2)]^2 I_{极大}$。瑞利建议,在这种情况下,当两个等强度成分中一个的强度主极大同另一个的强度第一极小相重合时,这两个成分应当算是刚刚被分辨开(见图 7.62);这时,在合分布中,中点强度与极大点强度之比为 $8/\pi^2 = 0.811$。

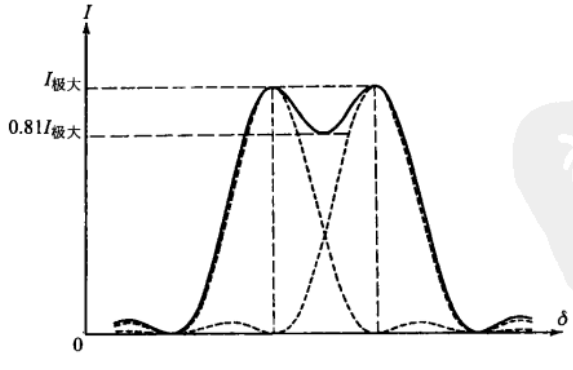


图 7.62 按照瑞利判据,两个刚刚被分辨开的单色光谱成分图示

① C. Fabry and A. Perot, *Ann. Chim. Phys.* (7), **16**(1899), 115。

② Lord Rayleigh, *Phil. Mag.* (5), **8**(1879), 261。

让我们也采用这个鞍-峰强度比作为法布里-珀罗干涉仪情况的分辨判据[①]。如果板面反射率不太高，因而板面缺陷没有很大影响，则由(27)式，一个单色成分产生的强度分布 $I(\delta)$ 可写成如下形式：

$$I(\delta)=\frac{I_0}{1+F\sin^2\dfrac{\delta}{2}} \tag{38}$$

而如果有两个这样的成分，它们的相对位移对应于 δ 改变 ε，则二者叠加后产生的总强度为

$$\begin{aligned} I_{总}(\delta,\varepsilon)&=I(\delta+\tfrac{1}{2}\varepsilon)+I(\delta-\tfrac{1}{2}\varepsilon)\\ &=\frac{I_0}{1+F\sin^2\dfrac{(\delta+\frac{1}{2}\varepsilon)}{2}}+\frac{I_0}{1+F\sin^2\dfrac{(\delta-\frac{1}{2}\varepsilon)}{2}} \end{aligned} \tag{39}$$

在两个成分的强度极大之间中点处，总强度是 $I_{总}(2m\pi,\varepsilon)$，其中 m 是一整数；此外，如果我们认为当这两个成分刚刚被分辨开时，总强度的极大与各成分的强度极大相重合，则此极大处的总强度是 $I_{总}(2m\pi\pm\frac{1}{2}\varepsilon,\varepsilon)$。因此，按照我们所选定的判据，两条线刚刚被分辨开时，ε 应满足下列方程：

$$\frac{2I_0}{1+F\sin^2\dfrac{\varepsilon}{4}}=0.81\left\{I_0+\frac{I_0}{1+F\sin^2\dfrac{\varepsilon}{2}}\right\} \tag{40}$$

如果条纹的细度很高，则(40)式中的 ε 比 $\pi/2$ 小得多，故可令 $\sin\varepsilon=\varepsilon$；于是(40)式化简为

$$F^2\varepsilon^4-15.5F\varepsilon^2-30=0$$

由此得到

$$\varepsilon=\frac{4.15}{\sqrt{F}}=\frac{2.07\pi}{\mathcal{F}} \tag{41}$$

其中利用了关系式(22)。

由(28)式，如果设折射率 n' 与波长无关，并且 h 很大，以致 $\boldsymbol{\phi}$ 与 δ 相比可以忽略，则

$$|\Delta\delta|=\frac{4\pi n'h\cos\theta'}{\lambda_0{}^2}\Delta\lambda_0=2\pi m\frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} \tag{42}$$

在分辨极限时，$|\Delta\delta|$ 等于(41)式的 ε，所以法布里-珀罗干涉仪的分辨本领为

$$\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0}=0.97m\mathcal{F} \tag{43}$$

此式和衍射光栅的分辨本领表达式 §8.6(14)相似——在衍射光栅中干涉光束强度**相等**而个数**有限**，对比之下，因子 $0.97\mathcal{F}$ 有时称为法布里-珀罗干涉仪的**有效光束数**。在正入射附近，$m\approx 2n'h/\lambda_0$，分辨本领可取作

$$\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0}\approx\frac{2\mathcal{F}n'h}{\lambda_0} \tag{44}$$

① 瑞利判据并无特别物理意义可言，人们也不时提出其他的分辨判据。用于比较不同仪器时，选择哪个判据并没有什么要紧。

这样,法布里-珀罗干涉仪的分辨本领正比于细度和板的光学间隔。举例来说,设$\mathcal{F}=30(\mathcal{R}\approx0.9)$,这在可见光谱范围是很容易达到的,则当 $n'h=4$ 毫米,$\lambda_0=5000$ 埃时,分辨本领约为 5×10^5。这个量级的分辨本领要用最大的线光栅才能达到。在光谱学上,采用光谱学波数($\kappa_0=1/\lambda_0$)来计算也是很方便的;当可分辨的最小波长差为 $\Delta\lambda_0$ 时,相应的波数差 $\Delta\kappa_0$ 为

$$\Delta\kappa_0=\frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0{}^2}\approx\frac{1}{2\mathcal{F}n'h} \tag{45}$$

(45)式中 $\Delta\kappa_0$ 这个量有时称为干涉仪的**分辨极限**。在上例中,分辨极限约为 0.04 厘米$^{-1}$。

如果两个成分的波长间隔足够大,以致两套图样的移错大于各图样中相邻极大的间距时,就发生所谓序的"交叠"。产生移错 1 序($|\Delta\delta|=2\pi$)的波长差$(\Delta\lambda_0)_{SR}$称为干涉仪的**光谱范围**;在正入射附近,由(42)式,

$$(\Delta\lambda_0)_{SR}=\frac{\lambda_0}{m}\approx\frac{\lambda_0^2}{2n'h} \tag{46}$$

用光谱学波数表示时,光谱范围为

$$(\Delta\kappa_0)_{SR}=\frac{(\Delta\lambda_0)_{SR}}{\lambda_0^2}\approx\frac{1}{2n'h} \tag{47}$$

可见,光谱范围反比于板的间隔。所以,增大板的间隔固然可提高分辨本领,但同时光谱范围却按同一比例减小。比较一下(44)和(46)两式还可看出,光谱范围$(\Delta\lambda_0)_{SR}$近似等于$\mathcal{F}$乘以可分辨的最小波长差。以实际所能达到的$\mathcal{F}$值而言,当分辨本领很高时,光谱范围是非常小的。在上述典型情况下($\mathcal{F}=30$,$n'h=4$ 毫米,$\lambda_0=5000$ 埃),$(\Delta\lambda_0)_{SR}\approx0.3$ 埃。在 7.6.8 节中我们将看到,将两个法布里-珀罗干涉仪串联使用可获得较大的光谱范围。虽然如此,当研究复杂光谱时,还必需借助辅助仪器将所有谱线(除最靠近的以外)的图样分开,下面即将说明这一点。

当两个很近的成分被分辨开时,从测量各环的直径和板的间隔很容易求出它们的光谱学波数差。由(29)和(30)两式,对于光谱学波数 κ_0,κ_0',我们可写下

$$m_1+e_1=2n'h\kappa_0+\frac{\phi}{\pi},\qquad m_1'+e_1'=2n'h\kappa_0'+\frac{\phi}{\pi} \tag{48}$$

式中 m_1,m_1'是两个成分第一个亮环的整数序,e_1,e_1'是中心的小数序,并假定ϕ在 κ_0 到κ_0'间隔内是常数。将(48)式中之二式相减,有

$$\kappa_0'-\kappa_0=\frac{(m_1'-m_1)+(e_1'-e_1)}{2n'h} \tag{49}$$

各谱线的中心小数序可以从测量两个亮环的直径来得到。由(32)式,第 p 环和第 q 环的直径 D_p 和 D_q 有如下关系:

$$\frac{D_p^2}{D_q^2}=\frac{p-1+e}{q-1+e}$$

由此,

$$e=\frac{(q-1)D_p^2-(p-1)D_q^2}{D_q^2-D_p^2} \tag{50}$$

如果测量了两个以上的环，则可用最小二乘法求出 e 的平均值。整数$(m_1' - m_1)$是两套图样错叠的序数，可由观测板间隔减小时图样的变化来决定。通常，序数间隔$(m_1' - m_1) + (e_1' - e_1)$的测量准确度不超过 0.1%；因为板的间隔很少用小于约 1 毫米的，所以 h 用测微计就可以测得足够准确了，而空气的折射率 n' 可取为 1。

上面曾经提到，由于干涉仪的光谱范围很小，因而除去靠得非常近的谱线以外，其他线的图样须予以分开。当采用照相观测时，通常是将干涉仪同一个无像散的棱镜摄谱仪或光栅摄谱仪“正交”来达到这一目的。一种装置如图 7.63 所示。光源 S 在透镜 L_1 的焦平面上，来自 S 的光将干涉仪 I 照明，所产生的干涉图样则通过一个精心校正的透镜 L_2 成像在摄谱仪狭缝平面上[①]。调节干涉仪取向，使干涉图样中心与狭缝中心相重合。这时，狭缝从光源各谱线的同心圆环上截出一条直径地带，摄谱仪的作用是将这些地带按粗略波长一一分开——谱线的精细结构则留在其同心圆环条纹系统之中。当待测光谱由发射线组成时，狭缝通常可以打开得比较宽。这时，摄谱仪焦平面上的图像如图 7.64 所示，竖条是各谱线的光所形成的狭缝像，条中横道（与狭缝像正交）是亮环条纹的短弧。对于吸收线，当各线所在连续背景的波长范围小于干涉仪的光谱范围时，将得到类似的图像（见图 7.65）。较宽的亮条纹系由背景产生，沿亮条纹中间划过的暗线则是吸收线。

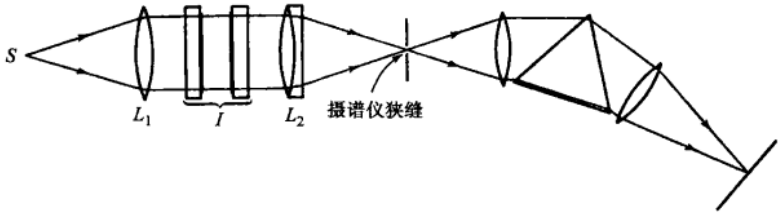


图 7.63　法布里-珀罗干涉仪和棱镜摄谱仪正交

当连续背景的光谱范围很宽时，例如像太阳光谱中那样，情况就更加复杂[②]。为了说明这一问题，暂先假设摄谱仪狭缝的宽度很小，可以忽略，并且摄谱仪的分辨本领这时为无限大。设 Ox，Oy 是摄谱仪焦平面上的直角坐标轴，原点 O 在谱线上由通过狭缝中心的光来确定，而 Oy 轴平行于狭缝。沿 x = 常数的直线上，波长 λ_0 是常数，强度极大位置由(28)式确定，它可写成为

$$\left(m - \frac{\phi}{\pi}\right)\lambda_0 = 2n'h\cos\theta' = 2n'h\left(1 - \frac{\theta'^2}{2}\right) = 2h\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right), \qquad m = 1, 2, \cdots \tag{51}$$

式中假定 θ' 很小，并且令空气折射率 $n' = n = 1$，θ 角是光在干涉仪上的出射角（$n'\theta' \approx n\theta$）。当 θ 很小时，θ 和坐标 y 的关系是 $y = Mf\theta$，其中 f 是透镜 L_2 的焦距，透镜 L_2 将条纹成像在狭缝上，参见图 7.63，而 M 是摄谱仪所引进的放大率。此外，λ_0 与坐标 x 有关，设为 $F(x) = \lambda_0$，函数 F 由摄谱仪的色散特性来决定。利用上述两个关系，从(51)式中消去 λ_0 和 θ，就得到当

① 干涉仪和摄谱仪的组合装置还有多种。对于某一特别目的，选择何种装置最为相宜，须考虑以下因素而定：安装紧凑，费用，光源的大小、强度和均匀性，以及系统中额外表面反射所造成的假图样的影响大小[见 S. Tolansky, *High Resolution Spectroscopy*, (London, Methuen, 1947), Chapter. 9]。

② C. Fabry and H. Buisson, *Journ. de Phys.* (4), **9**(1910), 197 首先讨论了这一情况。

光源发射连续光谱时强度极大的轨迹:

$$\left(m-\frac{\phi}{\pi}\right)F(x)=2h\left(1-\frac{y^2}{2M^2f^2}\right),\qquad m=1,2,\cdots \tag{52}$$

在这些极大之间,相对强度分布是干涉仪所特有的形式;这样,摄谱仪焦平面上的光谱是沟槽式的,在窄的亮条纹中间隔着宽的暗区。这些亮的沟槽对直线 $y=0$ 是对称的,并凸向长波一边,而在直线 $y=$ 常数上,它们的波长间隔等于干涉仪的光谱范围。在特别情况下,当 $F(x)$ 是 x 的线性函数时,各沟槽是抛物线。

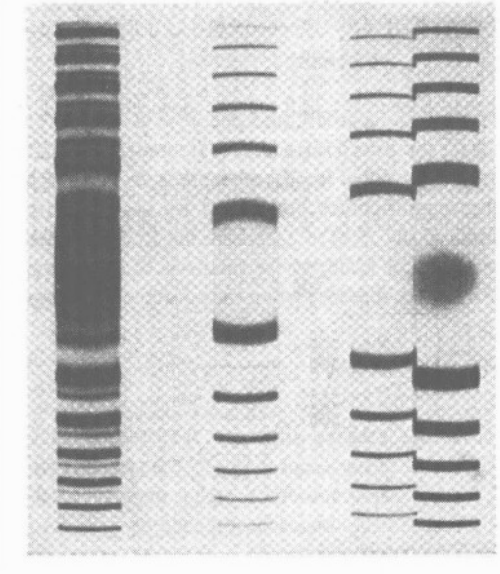


图 7.64 氦的发射光谱线形成的法布里-珀罗条纹(照相负片)[引自K.W.Meissner, *J. Opt. Soc. Amer.*, **31**(1941),416]

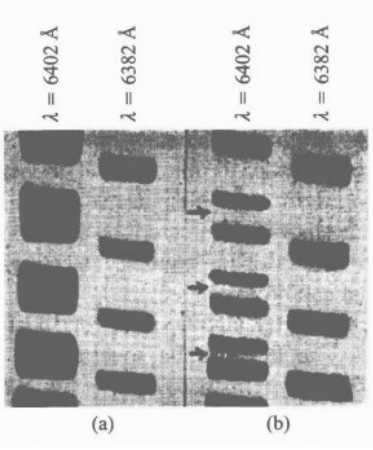


图 7.65 氖的两条光谱线形成的法布里-珀罗条纹(照相负片):(a)只有发射;(b)波长6402埃谱线中央有吸收,箭头所示处[引自K.W.Meissner, *J. Opt. Soc. Amer.*, **32**(1942),191]

当存在吸收线时,亮沟槽在与各吸收线相交之处即为暗点所割断,即如果把这些吸收线换成发射线而波长不变,则所产生的亮极大应和这些暗点位置相同。现在如果把狭缝对称地打开,则各暗点向 x 方向扩展,同时,各亮沟槽也同样沿 x 方向展宽,最后相互连成一片。在此条件下,光谱看起来是连续的,但上面有吸收线产生的暗"条纹"图样(见图 7.66),这种暗条纹图样可以按发射线的亮条纹图样那样,如法加以测量。实际上,由于衍射,摄谱仪的分辨本领不是无限大,因而任一一定波长的光一开始就要在 x 方向上铺展开一定的距离。这和打开狭缝效果类似,也就是使亮沟槽沿 x 方向展宽,并将发生交叠,除非摄谱仪能够把间隔等于相邻亮沟槽间隔的两个波长完全分辨开来。如前所说,这个间隔等于干涉仪的光谱范围,它随板间隔的增加而减小。这样,由于辅助仪器摄谱仪的分辨本领有限,它就决定了所能采用的板间隔的一个上限。

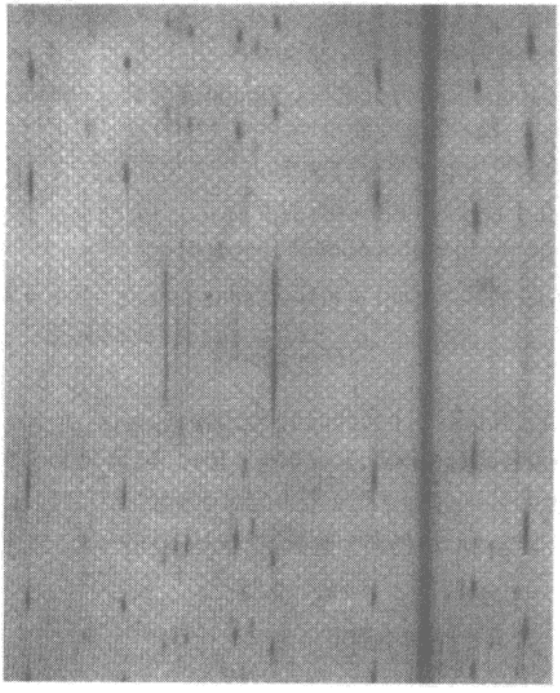


图 7.66　太阳光谱中吸收线形成的法布里-珀罗条纹[引自 H. D. Babcock, *Astrophys. J.*, **65**(1927), 140]

在光谱学上，也可以将法布里-珀罗干涉仪同光电探测器结合使用[①]。先用前级单色仪将待测谱线的光单独分出，而后送入干涉仪中，并将干涉图样的像投到一个与干涉环同心的环孔上，让一个序的一小部分光从中通过而到达光电管。改变干涉仪两板光学间隔，使各干涉环扩大或收缩，从环孔上一一掠过，由此即可测得干涉图样。这种装置在技术上颇为重要，因为，如杰奎诺特(P. Jacquinot)所曾指出[②]，在同样的分辨本领下，法布里-珀罗干涉仪所可通过的光通量比一般棱镜单色仪和光栅单色仪要大得多。

7.6.4　应用法布里-珀罗干涉仪比较波长

棱镜摄谱仪和光栅摄谱仪所产生的光谱，其波长是用内插法来测量的，任一谱线的波长可用相邻两条标准线的已知波长来表出。当使用大型摄谱仪进行这种比较时，准确度可达大约百万分之一(1×10^{-6})，因此标准线的相对波长值至少要准确到这个程度，而且还必须有足够多的标准线才便于内插。此外，因为波长是一个实在的长度，所以使波长和米建立起关系当为可取。这样，在光谱学上，建立一个圆满的波长系统，要包括下列两步：(1)选定一基准线，将它的波长同代表米的实物标准进行比较；(2)在全光谱各处选定一些其他谱线作为次级标准，将它们的波长同基准波长进行比较。1907 年选定的基准线是镉红线(6438 埃)[③]，激发条件有相

① P. Jacquinot and C. Dufour, *J. Rech. Cent. Nat. Rech. Sci.*, Labs. Bellevue (Paris), No. 6(1948), 91。

② P. Jacquinot, *J. Opt. Soc. Amer.*, **44**(1954), 761。

③ *Trans. Int. Union for Co-operation in Solar Research*, Vol. Ⅱ (Manchester, Manchesler Univ. Press, 1908), p. 17。

应规定[①]。测量这条线的波长合多少米,是一个基本度量学过程,需采用特别的方法,我们将在7.7节中加以介绍。所得到的数值是 6438.4696×10^{-10} 米,并取作 6438.4696 埃。这是埃的定义,它与 10^{-10} 米之差不超过三百万分之一。在如此定好波长基准之后,其他波长同它的比较就是一个纯光学过程了,这一直是法布里-珀罗干涉仪的重要应用之一。

用基准线和待测线的光照射干涉仪(最好同时),并借助适当装置将各个图样分开并拍照下来。设 λ_s 是标准线在干涉仪板间空气(折射率为 n')中的波长,同样设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 是待测线的波长。由(29)和(30)两式,如果忽略$\phi\lambda$ 随波长的变化,则

$$(m_{1s}+e_s)\lambda_s=(m_{11}+e_1)\lambda_1=(m_{12}+e_2)\lambda_2=\cdots=2H \tag{53a}$$

$$2H=2h+\frac{\phi\lambda}{\pi} \tag{53b}$$

式中 $m_{1s},m_{11},m_{12},\cdots$ 是各波长第一个亮环的整数序,而 $e_s,e_1,e_2,\cdots$ 是中心处的小数序。各波长的中心小数序可由测量各环直径得到,这在7.6.3节中(310页)已经介绍了。整数序 $m_{1s},m_{11},m_{12},\cdots$ 则可用剩余小数法求得,这在7.5.2节中(269页)也曾简单提及。这个方法先是用测微计测量两板间隔 h。最接近 $2h/\lambda_s$ 的那一整数 m'_{1s} 就是 m_{1s} 的一个近似值,可写成

$$m_{1s}=m'_{1s}+x \tag{54}$$

式中 x 是一未知整数。若 h 测量的不确定度是 Δh,则

$$|x|\leqslant\frac{2\Delta h}{\lambda_s} \tag{55}$$

例如,当 $\Delta h\approx0.01$ 毫米,$\lambda_s=6438$ 埃时,$|x|\leqslant30$。然后,以 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 的已知近似值 $\lambda'_1,\lambda'_2,\cdots$ 和 λ_s 的近似干涉序$(m'_{1s}+e_s)$代入(53a)式,计算各待测线相应的近似序 $m'_{11}+e'_1,\cdots$,关系如下:

$$\left.\begin{aligned}m'_{11}+e'_1&=(m'_{1s}+e_s)\frac{\lambda_s}{\lambda'_1},\\ m'_{12}+e'_2&=(m'_{1s}+e_s)\frac{\lambda_s}{\lambda'_2},\cdots\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

如果令 $\lambda_1=\lambda'_1+\Delta\lambda'_1$,则由(53a)和(54)两式,有

$$\begin{aligned}(m_{11}+e_1)(\lambda'_1+\Delta\lambda'_1)&=(m_{1s}+e_s)\lambda_s\\&=(m'_{1s}+x+e_s)\lambda_s\end{aligned} \tag{57}$$

由此,利用(56)式,得到

$$m_{11}+e_1=m'_{11}+x+\left[e'_1+\left(\frac{\lambda_s-\lambda'_1}{\lambda'_1}\right)x\right]-(m_{11}+e_1)\frac{\Delta\lambda'_1}{\lambda'_1} \tag{58}$$

现在,将(55)式所允许的各个可能的 x 值代入(58)式右边方括号项中,计算出它所贡献的小数序部分。x 值正确时,这个计算的小数序必须同(58)式左边测量的小数序 e_1 相一致,不确定度范围是$(m_{11}+e_1)\Delta\lambda'_1/\lambda'_1$。如果板的间隔足够小,这个不确定度与1相比是很小的。例如,以光栅测得的近似波长而言,$\Delta\lambda'_1/\lambda'_1\approx10^{-5}$,所以,当 $m_{11}\approx10^4$ 时,$(m_{11}+e_1)\Delta\lambda'_1/\lambda'_1\approx0.1$,在

① *Proc. Verb. Com. Int. Poids et Mes.*(2),**17**(1935),91。

可见光谱波长范围，这相当于 $h \approx m_{11}\lambda_1/2 \approx 3$ 毫米。于是，从小数序计算值和测量值的比较，可以看出某些 x 值是不可取的，再用其他近似波长 $\lambda_2', \lambda_3', \cdots$ 进行同样计算，即可将 x 确定无疑。通常有三条线即已足够，只要它们的波长适当分开，有时可用第 4 条线作为验证。

知道了 x 后，即可由(54)和(58)两式求出 $m_{1s}, m_{11}, m_{12}, \cdots$ 并从(53a)式得到

$$\lambda_1 = \frac{m_{1s} + e_s}{m_{11} + e_1}\lambda_s, \qquad \lambda_2 = \frac{m_{1s} + e_s}{m_{12} + e_2}\lambda_s, \cdots \tag{59}$$

因为整数序是没有疑问的，所以这些波长的不确定度 $\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2, \cdots$ 仅仅来自小数序测量值 e_s, $e_1, e_2, \cdots$ 的不确定度。如果后者在 ± 0.01 以内(这个精密度用高反射敷层是不难获得的)，并且 $m_{1s}, m_{11}, m_{12}, \cdots$ 像上例中那样，在 10^4 量级，则 $\Delta\lambda_1/\lambda_1, \Delta\lambda_2/\lambda_2, \cdots$ 量级是 10^{-6}，即该测量使 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ 各值的准确度提高约 10 倍。现在可用这些较准确的波长并加大板的间隔来重复本项实验，从而得到更准确的波长值，并可如此继续，一直到各待测线本身的锐度证明不再相宜为止。

上面曾经假定，除基准以外，其他波长的数据，相对地说，都不够准确[①]。一旦有了一些测量精确度接近基准的次级标准，测定其他波长就简单化了。这时用各标准波长和剩余小数法[②] 测定 $2H$，而 $2H$ 只需小到足以从近似波长 $\lambda_1', \lambda_2', \cdots$ 明确无误地定出 $m_{11}, m_{12}, \cdots$ 例如，由(53a)和(57)两式，

$$m_{11} + e_1 = \frac{2H}{\lambda_1'} - (m_{11} + e_1)\frac{\Delta\lambda_1'}{\lambda_1'} \tag{60}$$

当 $(m_{11} + e_1)\Delta\lambda_1'/\lambda_1'$ 譬如说 ≈ 0.3 时，m_{11} 即可明确无误地定出。如果同前 $\Delta\lambda_1'/\lambda_1' \approx 10^{-5}$，这就要求 $m_{11} \approx 3 \times 10^4$，在可见光谱波长范围，这相当于 $H \approx 10$ 毫米；当小数序 e_1 的测量准确度在 ± 0.01 以内时，波长 $\lambda_1 = 2H/(m_{11} + e_1)$ 的不确定度 $\Delta\lambda_1/\lambda_1$ 约为 3×10^{-7}，即用干涉仪测量一次，就使准确度提高约 30 倍。

实际上，如果被比较的各条线在光谱中隔得很宽，$\phi\lambda$ 与波长无关的假定就不见得成立。由此产生的系统误差，可以用两种间隔 h_{I} 和 h_{II} 进行测量来加以消除。因为这时由(29)式和(30)式，并采用(53)式中的同样符号，我们可写下

$$\left[(m_{1s} + e_s)_{\mathrm{I}} - \frac{\phi_s}{\pi}\right]\lambda_s = \left[(m_{11} + e_1)_{\mathrm{I}} - \frac{\phi_1}{\pi}\right]\lambda_1 = \cdots = 2h_{\mathrm{I}},$$

$$\left[(m_{1s} + e_s)_{\mathrm{II}} - \frac{\phi_s}{\pi}\right]\lambda_s = \left[(m_{11} + e_1)_{\mathrm{II}} - \frac{\phi_1}{\pi}\right]\lambda_1 = \cdots = 2h_{\mathrm{II}}$$

由此

$$\lambda_1 = \frac{(m_{1s} + e_s)_{\mathrm{II}} - (m_{1s} + e_s)_{\mathrm{I}}}{(m_{11} + e_1)_{\mathrm{II}} - (m_{11} + e_1)_{\mathrm{I}}}\lambda_s \tag{61}$$

---

① 法布里-珀罗[*Ann. Chim. Phys.*, **16**(1899), 289]最早几次将波长同镉红线波长进行比较时，采用了他们的滑板式干涉仪。他们利用了从双光束干涉量度学得到的[A. A. Michelson and J. R. Benoit, *Trav. et Mem. Bur. Int. Poids et Mes.*, **11**(1895), 1]准确的镉绿线(5086 埃)和镉蓝线(4800 埃)波长，并采用了所谓"**重合法**"来测定整数序。这个方法和我们上面所讲的剩余小数法原理相同，但是它需用目测，而且很费事。

② 如果各标准波长靠得足够近，则可很快地计算出 x 的一个近似值，从而可减少计算量[例如，见 C. V. Jackson, *Phil. Trans. Roy. Soc. A.*, **236**(1936), 1]。G. R. Harrison[*J. Opt. Soc. Amer.*, **36**(1946), 644]曾介绍了一种机器，可从干涉仪图样直接定出波长，所需计算皆自动完成。

各波长经相变修正后,其数值须化归到基准定义所规定的标准条件,即 15℃和 760 毫米汞压力的干燥空气,这就需要知道空气的色散。如果要再化为真空波长数值,则还须知道空气的折射率。足够准确可作此用的空气折射率和色散数据,已由多光束干涉方法测得(见 7.6.8 节)。

7.6.5 陆末-格尔克干涉仪

我们在 7.6.1 节中已经提到,当密媒质中入射角接近临界角时,介质界面的反射率将趋近 1。这一效应被陆末(Lummer)-格尔克(Gehrcke)应用于他们所设计的多光束干涉仪中[①]。此干涉仪主要由一块长的平行平面玻璃板或晶体石英板构成(见图 7.67)。板的一端固定有一个棱镜 P,光源放在板的长轴上,其光束经棱镜 P 进入板内,与板上下两面所形成的角度略小于临界角。于是,有一系列光束从板两边射出,出射角接近 90°。这些光束经透镜 L 收集后,在其焦平面上形成干涉图样。

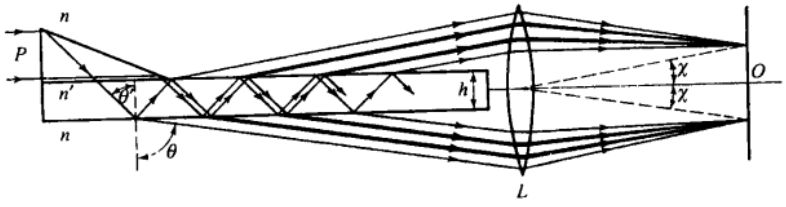


图 7.67 陆末-格尔克干涉仪

对波长 λ_0 的单色光来说,相邻两束光的位相差 δ 由(1)式给出,即

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} n' h \cos\theta' = \frac{4\pi h}{\lambda_0} \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2\theta} \tag{62}$$

式中 h 和 n' 是板的厚度和折射率,n 是周围空气的折射率,θ' 是板中反射角,θ 是出射角。相应的干涉序

$$m = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{2h}{\lambda_0} \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2\theta} \tag{63}$$

干涉条纹各对应于一定的 θ,它们形成一双曲线族,而在图样中心 O 附近,它们近似直线,方向与板面平行。由(63)式可知,图样中心($\theta = \pi/2$)的干涉序 m_0 为

$$m_0 = \frac{2h}{\lambda_0} \sqrt{n'^2 - n^2} \tag{64}$$

因而

$$m - m_0 = \frac{2h}{\lambda_0} (\sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2\theta} - \sqrt{n'^2 - n^2}) \tag{65}$$

如令 $\chi = (\pi/2) - \theta$,则 χ 在中心附近很小,因此可取 $\sin^2\theta = 1 - \chi^2$;然后将(65)式展开,并略去 χ 二次幂以上各项,得到

$$m - m_0 = \frac{n^2}{\sqrt{n'^2 - n^2}} \frac{h\chi^2}{\lambda_0} \tag{66}$$

① O. Lummer, *Verh. Deutsch. Phys. Ges.*, **3**(1901), 85。
O. Lummer and E. Gehrcke, *Ann. d. Physik*, (4), **10**(1903), 457。

从中心数起第 q 个亮条纹对应于整数序 m_q，相应的角度 χ_q 为

$$\chi_q = \frac{\sqrt[4]{n'^2 - n^2}}{n}\sqrt{\frac{\lambda_0}{h}}\sqrt{m_q - m_0} = \frac{\sqrt[4]{n'^2 - n^2}}{n}\sqrt{\frac{\lambda_0}{h}}\sqrt{q - e} \tag{67}$$

式中 e 是中心小数序。这样，图样的角尺度正比于 $\sqrt{\lambda_0/h}$，而当 $e=0$ 时，各亮条纹距轴的距离正比于正整数平方根。

干涉图样的强度分布与 7.6.1 节中所讨论的分布不同，因为这里没有板外表面反射的贡献。为了简化对这一点的讨论，分析图 7.68 的装置更为方便。这个装置用挡板 $\mathcal{AB}$ 围成一孔 JK，而让光经此孔折射到板中。显然，就板的作用而论，图 7.67 的棱镜也就相当于这样的孔，只是反射系数可以忽略而已[①]。设从板上、下两面以 θ 角射出的光分别聚于 L 的焦点 P' 和 P，并设当板取走时 P 处光的复振幅为 A。如果不考虑那个不重要的常数位相因子，则下组光束在 P 点的复振幅依次为（见 7.6.1 节）

$$tt'A, \qquad tt'r'^2Ae^{i\delta}, \qquad \cdots, \qquad tt'r'^{2(p-1)}Ae^{i(p-1)\delta}, \qquad \cdots\cdots$$

因此，前 p 束光在 P 点叠加产生的合振幅为

$$\begin{aligned} A^{(t)}(p) &= (1 + r'^2e^{i\delta} + \cdots + r'^{2(p-1)}e^{i(p-1)\delta})tt'A \\ &= \frac{1 - \mathcal{R}^p e^{ip\delta}}{1 - \mathcal{R}e^{i\delta}}\mathcal{T}A \end{aligned} \tag{68}$$

如果取极限，令光束数 $p \to \infty$，则

$$A^{(t)} \equiv A^{(t)}(\infty) = \frac{\mathcal{T}}{1 - \mathcal{R}e^{i\delta}}A \tag{69}$$

因而 P 点的强度 $I^{(t)} = A^{(t)}A^{(t)\star}$ 为

$$I^{(t)} \equiv I^{(t)}(\infty) = \frac{\mathcal{T}^2}{1 + \mathcal{R}^2 - 2\mathcal{R}\cos\delta}I = \frac{1}{1 + F\sin^2\dfrac{\delta}{2}}I \tag{70}$$

式中 $I = AA^\star$ 是当板取走时 P 点的强度。类此，上组光束在 P' 点的振幅依次为

$$tt'r'A, \qquad tt'r'^3e^{i\delta}A, \qquad \cdots, \qquad tt'(r')^{2p-1}e^{i(p-1)\delta}A, \qquad \cdots$$

所以前 p 束光在 P' 点叠加产生的合振幅为

$$\begin{aligned} A^{(r)}(p) &= (1 + r'^2e^{i\delta} + \cdots + r'^{2(p-1)}e^{i(p-1)\delta})tt'r'A \\ &= \frac{1 - \mathcal{R}^p e^{ip\delta}}{1 - \mathcal{R}e^{i\delta}}\sqrt{\mathcal{R}}\mathcal{T}A \end{aligned} \tag{71}$$

而在 $p \to \infty$ 时，P' 点的强度为

$$I^{(r)} \equiv I^{(r)}(\infty) = \frac{\mathcal{R}\mathcal{T}^2}{1 + \mathcal{R}^2 - 2\mathcal{R}\cos\delta}I = \mathcal{R}I^{(t)} \tag{72}$$

由(70)和(72)两式显然可见，上、下干涉图样的相应极大相对于板法线的角位置是相同的。

---

① 法布里-珀罗干涉仪实际也可实现类似装置，只要把它的一个反射敷层空出一孔而让光由此进入。C. Dufour 曾讨论了这种装置的特性，见 *Rev. d'Opt.*, **24**(1945), 11。

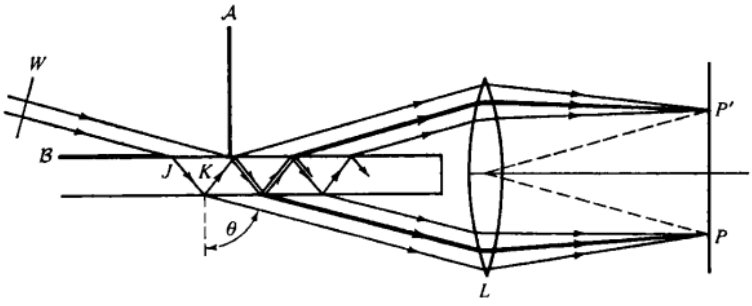


图 7.68 去掉外反射光束时平行平面板中多次反射图示

显然,同侧光束沿板长方向的间距为 $2h\tan\theta'$,所以如果板长为 l,则光束数

$$p\approx\frac{l}{2h}\cot\theta'=\frac{l}{2h}\sqrt{\frac{n'^2}{n^2\sin^2\theta}-1} \tag{73}$$

以 $\theta\approx\pi/2$,空气的 $n=1$ 代入,即有

$$p\approx\frac{l}{2h}\sqrt{n'^2-1} \tag{74}$$

当 θ' 趋近临界角时,$\mathcal{R}\to1$,$\mathcal{R}^p$ 不再可以忽略,因而这时使用 $p\to\infty$ 时的极限(70)和(72)两式就不对了。在这种情况下,下干涉图样的强度分布由(68)式可得:

$$\begin{aligned}I^{(t)}(p)&=\frac{1+\mathcal{R}^{2p}-2\mathcal{R}^p\cos p\delta}{1+\mathcal{R}^2-2\mathcal{R}\cos\delta}\mathcal{T}^2I\\&=\frac{(1-\mathcal{R}^p)^2+4\mathcal{R}^p\sin^2\dfrac{p\delta}{2}}{(1-\mathcal{R})^2+4\mathcal{R}\sin^2\dfrac{\delta}{2}}\mathcal{T}^2I\\&=\frac{1+G_p\sin^2\dfrac{p\delta}{2}}{1+F\sin^2\dfrac{\delta}{2}}(1-\mathcal{R}^p)^2I,\end{aligned} \tag{75}$$

式中

$$G_p=\frac{4\mathcal{R}^p}{(1-\mathcal{R}^p)^2} \tag{76}$$

而 F 由(16)式给出。这样,强度分布由函数$[1+G_p\sin^2(p\delta/2)]/[1+F\sin^2(\delta/2)]$来支配。这个函数和 $p\to\infty$ 时分布函数的不同之处,在于多了一项$[G_p\sin^2(p\delta/2)]/[1+F\sin^2(\delta/2)]$。这一项并不影响各绝对极大的位置,它们仍然在 $\delta/2=m\pi$ 处,其中 m 是一整数;但因这一项在 $\delta/2=(m+q/p)\pi$,$q=0,1,2,\cdots,p$ 时为零,而在其他 δ 时为正,故这些绝对极大比 $p\to\infty$ 时的宽,而且在它们之间还有一系列次极大(见图 7.69)。

陆末-格尔克干涉仪是专门用来研究谱线精细结构的,因此使用时亦须像法布里-珀罗干涉仪那样,配备一辅助色散仪器,该干涉仪的光谱范围可由(63)式求得。令其中 $n=1$,并写成

$$m^2\lambda_0^2=4h^2(n'^2-\sin^2\theta) \tag{77}$$

当 θ 给定时，波长改变 $\Delta\lambda_0$，干涉序相应改变 Δm；如果各小量都保留到一级，则由(77)式可得

$$\Delta m = \frac{4h^2 n' \dfrac{\mathrm{d}n'}{\mathrm{d}\lambda_0} - m^2\lambda_0}{m\lambda_0^2}\Delta\lambda_0 \tag{78}$$

光谱范围 $(\Delta\lambda_0)_{SR}$ 对应于 m 改变 1，因此

$$(\Delta\lambda_0)_{SR} = \frac{m\lambda_0^2}{\left|m^2\lambda_0 - 4h^2 n' \dfrac{\mathrm{d}n'}{\mathrm{d}\lambda_0}\right|} \tag{79}$$

如以(77)式的 m 代入，并令 $\sin\theta \approx 1$(接近掠出射)，则

$$(\Delta\lambda_0)_{SR} \approx \frac{\lambda_0^2}{2h}\frac{\sqrt{n'^2 - 1}}{\left|n'^2 - n'\lambda_0 \dfrac{\mathrm{d}n'}{\mathrm{d}\lambda_0} - 1\right|} \tag{80}$$

可见，$(\Delta\lambda_0)_{SR}$ 反比于板厚 h。对于石英，因子 $\sqrt{n'^2-1}/[n'^2 - n'\lambda_0(\mathrm{d}n'/\mathrm{d}\lambda_0) - 1]$ 在 $\lambda_0 = 2000 \sim 6000$ 埃范围从大约 0.6 改变到大约 0.8。

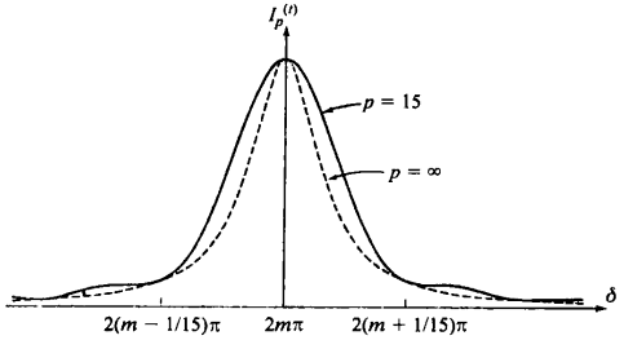


图 7.69　陆末-格尔克干涉仪条纹：强度随位相差 δ 的变化($\mathcal{R} = 0.87$)

由(75)式可知，如果设 $\mathcal{R}$ 为常数，则条纹图样中 $I^{(\prime)}(p)$ 下降到它极大值一半的那些点对应于 $\delta = 2m\pi \pm \varepsilon/2$($m$ 是整数)，其中 ε 满足

$$\frac{1 + G_p \sin^2\left(\dfrac{p\varepsilon}{4}\right)}{1 + F\sin^2\left(\dfrac{\varepsilon}{4}\right)} = \frac{1}{2}$$

即

$$\sin^2\left(\frac{p\varepsilon}{4}\right) - \frac{F}{2G_p}\sin^2\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) + \frac{1}{2G_p} = 0 \tag{81}$$

显然，细度 $\mathcal{F} = 2\pi/\varepsilon$ 依赖于 $\mathcal{R}$ 和 p 两个量。图 7.70 绘出了在不同 p 值下 $\mathcal{F}$ 随 $\mathcal{R}$ 的变化曲线。由(74)式可知，p 主要取决于 l/h。$\mathcal{R}$ 当然是 θ' 的函数，因而是 χ 的函数，并且当 χ 给定时，$\mathcal{R}_\perp > \mathcal{R}_\parallel$(在 $n' > n$ 情况下)；因此，选择振动垂直于入射面的偏振分量是有利的。极限情况 $p \to \infty$ 对应于一个无限长的板，相应的强度分布和法布里-珀罗干涉仪的相似[试比较(70)和(27)两式]；在此情况下，细度由(35)式给出。当 p 是有限时，图 7.70 表明，只要 $\mathcal{R}$ 不太大，$\mathcal{F}$ 值

就等同于 $p=\infty$ 时的相应值。当$\mathcal{R}$不太大时,$\mathcal{R}^p$(因而也有 G_p)可以忽略,所有进入板中的光基本上都又射出,参与了条纹的形成。$\mathcal{R}$再加大时,$\mathcal{F}$值小于 $p=\infty$ 时的相应值,而当$\mathcal{R}$趋近 1 时,$\mathcal{F}$趋近一最大值

$$\mathcal{F}_l=\frac{2\pi}{\varepsilon_l} \tag{82}$$

式中极限值 ε_l 可借助(81)式求得。为此,令$\mathcal{R}=1-\mathcal{T}$,因$\mathcal{T}$很小,故 $1-\mathcal{R}^p\approx p\,\mathcal{T}$,故 $F/G_p=(1-\mathcal{R}^p)^2/\mathcal{R}^{p-1}(1-\mathcal{R})^2\approx p^2/(1-\mathcal{T})^{p-1}$,而当$\mathcal{T}\to 0$ 时,$F/G_p\to p^2$;又因$\mathcal{T}\to 0$ 时,$1/G_p\to 0$,所以(81)式化为

$$\sin^2\left(\frac{p\varepsilon_l}{4}\right)-\frac{p^2}{2}\sin^2\left(\frac{\varepsilon_l}{4}\right)=0 \tag{83}$$

因 ε_l 很小,因此

$$\frac{\sin\dfrac{p\varepsilon_l}{4}}{\dfrac{p\varepsilon_l}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \frac{p\varepsilon_l}{4}=0.45\pi,\qquad \mathcal{F}_l=1.1p \tag{84}$$

然而,(75)式表明,当$\mathcal{R}\to 1$ 时,图样强度 $I^{(t)}(p)\to 0$;进入板中的光在最后一次反射后剩留的比例越来越大,结果都损失在板的另端。如果像通例那样,任何可观的光损失都是不可取的,该干涉仪就必须用在相当于 $p=\infty$ 时的$\mathcal{F}$值范围,而由图 7.70 可见,这个范围的最高$\mathcal{F}$值约为 $2\mathcal{F}_l/3\approx 0.7p$。在该范围内,相对强度分布的形式和法布里-珀罗干涉仪所给出的相似,因此,按 7.6.3 节中(310 页)所讲,可以取可分辨的最小波长差 $\Delta\lambda_0$ 近似地等于 $1/\mathcal{F}$ 乘以光谱范围 $(\Delta\lambda_0)_{SR}$。利用(74)和(80)两式,就得到$\mathcal{F}\approx 0.7p$ 时相应的分辨本领为

$$\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0}\approx\frac{0.7p\lambda_0}{(\Delta\lambda_0)_{SR}}\approx 0.7\frac{l}{\lambda_0}\left|n'^2-n'\lambda_0\frac{\mathrm{d}n'}{\mathrm{d}\lambda_0}-1\right| \tag{85}$$

(85)式所给出的分辨本领仅仅依赖于板长 l,与板厚 h 全然无关,但是我们必须记住,这个分辨本领是在某 θ 处达到的,当 l 加大时,θ 趋近 $\pi/2$。实际上,由于加工技术困难,板长 l 是有限制的。

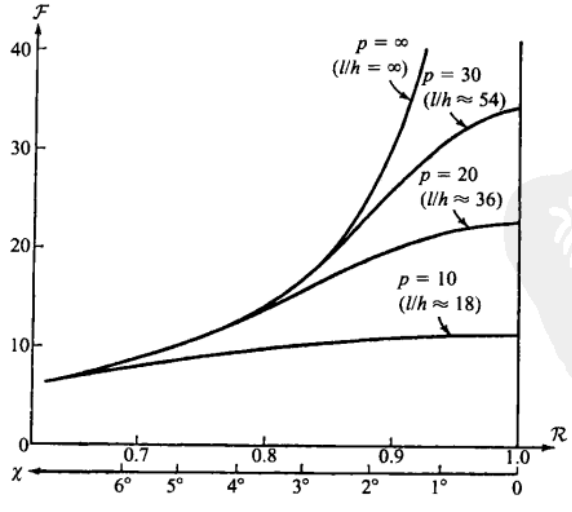


图 7.70 在陆末-格尔克干涉仪情况下,细度$\mathcal{F}$随反射率$\mathcal{R}$和反射次数 p 的变化曲线(为了比较,同时给出了离图样中心的角度χ 以及板长与板厚之比 l/h,系对石英板而言)

用晶体石英制作的陆末-格尔克干涉仪，短波一直可透明到 2000 埃左右，因此在很长时期内，它一直是紫外高分辨光谱学可利用的最佳干涉仪。但是，在研制出适用于法布里-珀罗干涉仪的紫外反射敷层和做成功反射阶梯光栅之后，这个优点就失去了。现在陆末-格尔克干涉仪在研究中已很少使用。

7.6.6　干涉滤波器

假设有一束平行白光，垂直射到一块两面反射率都很高的平行平面板上。从(27)式可知，当位相差 δ 是 2π 的整数倍时，或者由(25)式，当波长 $\lambda_0 = \lambda_0^{(m)}$，其中

$$\lambda_0^{(m)} = \frac{2n'h}{(m - \phi/\pi)}, \qquad m = 1, 2, \cdots \tag{86}$$

时，透射光的强度是极大；而且在各极大两边的波长处，透射光的强度急剧下降到很低。这样，该板的作用就是一个多通滤波器，它有多个透射带，每个带各对应一定的波长 $\lambda_0^{(m)}$ 和一个相应的整数干涉序 m，波长上相邻两个带的波长差

$$\Delta\lambda_0 \equiv \lambda_0^{(m+1)} - \lambda_0^{(m)} \approx \frac{2n'h}{m^2} = \frac{\lambda_0^{(m)}}{m}$$

(忽略ϕ和 n'对波长的依赖关系)[见(46)式]。特别是，在可见光谱区(4000 埃 ~ 8000 埃)，当板的光学厚度 $n'h$ 只有几个 1/2 波长时，各透射带的干涉序很低，波长上相隔很宽。例如，$n'h$ = 12 000 埃(1.2×10^{-4}微米)时，$\lambda^{(3)} \approx 8000$ 埃，$\lambda^{(4)} \approx 6000$ 埃，$\lambda^{(5)} \approx 4800$ 埃。因此，如再借助吸收型滤波器把其中某透射带加以吸收，或者依靠观测所用探测器对波长响应的选择性，通常即可做到将全部来光尽行抑制而仅让其中某一波长产生作用。

这种滤波器可用加膜方法制备于平玻璃面上(见图 7.71)，上、下为反射膜，中间为介质膜(间隔层)，通常称为干涉滤光片。如果要求滤波器在正入射下对波长 $\lambda_0^{(m)}$ 有一个 m 序透射带，则由(86)式可知，间隔层的光学厚度 $n'h$ 必须等于$(m - \phi/\pi)\lambda_0^{(m)}/2$。如采用金属反射膜，则$\phi$依赖于 λ_0 和膜厚(因而依赖于反射率$\mathcal{R}$)。如采用多层介质反射膜，则当每层膜的光学厚度为 $\lambda_0^{(m)}/4$ 时，$\mathcal{R}(\lambda_0^{(m)})$为极大，并且$\phi(\lambda_0^{(m)})$为零(见 1.6 节)；因此，这时间隔层的光学厚度应为 $m\lambda_0^{(m)}/2$。

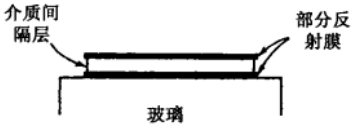


图 7.71　法布里-珀罗干涉仪滤波器

滤波器有两个重要的特性参量：**峰值透射率** τ 和波长**半宽度**$(\Delta\lambda_0)_{HW}$。τ 的定义和法布里-珀罗干涉仪的情况一样[见(33)式]，而半宽度$(\Delta\lambda_0)_{HW}$是指透射带中强度 $I^{(i)}/I^{(i)}$ 下降到其极大值一半时左右两边波长的间隔。如果在滤波器孔径范围内两反射面的光学间隔是常量，则 τ 由(36)式给出；并且由(21)式，$(\Delta\lambda_0)_{HW}$对应于δ 改变 $4/\sqrt{F}$，如果在该波长间隔内$\mathcal{R}$和$\mathcal{T}$随波长的变化可以忽略的话。由(25)式，在正入射下，当 λ_0 改变 $\Delta\lambda_0$ 时，δ 相应改变 $\Delta\delta$；如果忽略

间隔层中的色散,并且各小量保留到一级,则

$$\Delta\delta = \left(-\frac{4\pi}{\lambda_0^2}n'h + 2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda_0}\right)\Delta\lambda_0 \tag{87}$$

用(86)式 $n'h$ 代入,从而得到,在 m 序透射带附近,

$$\Delta\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0^{(m)}}\left\{-m + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_0}(\phi\lambda_0)\right]_{\lambda_0^{(m)}}\right\}\Delta\lambda_0 \tag{88}$$

刚才谈到,滤波器的波长半宽度对应于 δ 改变 $4/\sqrt{F}$,因此

$$(\Delta\lambda_0)_{HW} = \frac{2\lambda_0^{(m)}}{\pi\sqrt{F}\left|m - \frac{1}{\pi}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_0}(\phi\lambda_0)\right]_{\lambda_0^{(m)}}\right|} = \frac{\lambda_0^{(m)}}{\mathcal{F}\left|m - \frac{1}{\pi}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_0}(\phi\lambda_0)\right]_{\lambda_0^{(m)}}\right|} \tag{89}$$

式中利用了(22)式。当反射膜是金属膜时,$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\lambda_0$ 很小,以致 $\mathrm{d}(\phi\lambda_0)/\mathrm{d}\lambda_0 \approx \phi$。当反射膜由多层介质膜构成时,相变效应如何,杜福曾进行了讨论[①]。他给出如下结果:在可见光谱区,当以硫化锌和冰晶石为介质材料时,$(\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda_0)(\phi\lambda_0)/\pi$ 在大约 -1.0 和 -1.5 之间[②]。

我们曾经看到,不管采用现有的哪种反射膜,τ 均随 $\mathcal{F}$ 的增大而下降,因此滤波器在干涉序和制备材料一定时,半宽度越小,峰值透射率越低。实际上,正如法布里-珀罗干涉仪的情形一样,反射率太高没用,其上限取决于两个反射面的光学间隔在孔径范围内的不均匀情况。然而,在这个关系上,滤波器载片玻璃面的平度偏差影响并不重要,因为蒸发膜能适应加膜表面的"地形"。采用适当的制备装置,能使滤波器反射面光学间隔的不均匀程度,比法布里-珀罗干涉仪两个独立加工面可能产生的要小得多,因而可相应地采用较高的反射率。作为示例,下列两个表给出了一些滤波器的性能数据。表 7.2 是金属反射膜和金属-介质反射膜滤波器,表 7.3 是全介质滤波器。由表中所列可见,半宽度一样时,以介质层反射膜的滤波器峰值透射率最高。可以指出,由于这种膜的反射性质随波长的变化特点,采用这种反射膜的滤波器除去(86)式所给的主透射带以外,还具有若干次级透射带。

表 7.2 金属反射膜和金属-介质射膜干涉滤波器的性能。M 代表金属膜(银),L 代表 1/4 波长低折射率介质层(氟化镁),而 H 代表 1/4 波长高折射率介质层(硫化锌)

滤波器类型	极大透射率波长 $\lambda_0^{(m)}$(埃)	峰值透射率 τ	半宽度 $(\Delta\lambda_0)_{HW}$(埃)
M-2L-M	5310	0.30	130
M-4L-M	5350	0.26	70
MLH-2L-HLM	5470	0.43	48
MLHLH-2L-HLHLM	6050	0.38	20

[引自 A. F. Turner, *J. Phys.*, **11**(1950), 457]

① C. Dufour, *Rev. d'Opt.*, **31**(1952), 1。

② 在讨论法布里-珀罗干涉仪的分辨本领时,我们忽略了 ϕ 对波长的依赖关系[试比较(42)和(88)两式]。当 m 足够大时,这显然是合理的。

表 7.3　硫化锌-冰晶石干涉滤波器性能。L 代表 1/4 波长冰晶石层，H代表1/4波长硫化锌层

滤波器类型	极大透射率波长 $\lambda_0^{(m)}$(埃)	峰值透射率 τ	半宽度 $(\Delta\lambda_0)_{HW}$(埃)
HLH – 2L – HLH	5185	0.90	380
HLHLH – 2L – HLHLH	4750	0.85	110
HLHLHL – 2H – LHLHLH	6565	0.90	65
HLHLHLH – 2L – HLHLHLH	5200	0.70	40
HLHLHLHL – 2H – LHLHLHLH	6500	0.80	35
HLHLHLHLHL – 2H – LHLHLHLHLH	6600	0.50	20

[引自 P. H. Lissberger and J. Ring, *Optica Acta*, **2**(1955), 45]

因为通常要求滤波器透射某一特定波长，所以间隔层的光学厚度必须控制得很准。由(86)式可知，$n'h$ 改变 $\Delta(n'h)$ 时，m 序透射带的位置相应移动 $\Delta\lambda_0^{(m)}$，$\Delta\lambda_0^{(m)} = \lambda_0^{(m)}\Delta(n'h)/n'h$。以 $\lambda_0^{(m)} = 5000$ 埃为例，间隔层光学厚度有 1% 误差时，通带位置就要产生 50 埃的误差，这已大于窄带滤波器的半宽度了。格林兰(K. M. Greenland)和比林顿(C. Billington)[①]，贾科莫(P. Giacomo)和杰奎诺特[②]以及利斯伯格(P. H. Lissberger)和林[③](J. Ring)曾经介绍了在加膜过程中监控间隔层厚度的种种适当方法。从(25)式也可看出，把滤波器放斜，以使光偏离正入射，可将通带调节到较短波长。但是当倾斜度增大时，滤波器性能就要变劣。尤其是，当反射膜是金属膜时，光的电矢量平行于入射面和垂直于入射面这两种情况的相变 $\phi_\parallel$ 和 $\phi_\perp$ 不相等，因而这两个偏振分量的通带位于不同波长。在一定倾斜下，滤波器通带的波长位移依赖于间隔层中的反射角 θ'，而且间隔层折射率越高，这一位移越小。由于这个原因，当滤波器须在会聚光下使用时，选取高折射率材料做间隔层当为有利。

莱维甘斯(P. Leurgans)和特纳(A. F. Turner)[④]首先报道了另一种式样的干涉滤波器，即所谓**受抑全反射滤波器**。在这种滤波器中，反射膜各由一个夹于高折射率媒质之间的低折射率薄层构成。我们在 1.5.4 节中曾经看到，如果这种低折射率层足够薄，则当入射光的角度大于临界角时，也不发生全反射；仍有一部分光通过薄层。这样，它就是一个无吸收反射器，而通过调节层的厚度可得到所需要的任何反射率。这种滤波器的构造如图 7.72 所示。先在一块重玻璃棱镜的斜面上敷镀一层低折射率膜，而后镀上高折射率间隔层和另一低折射率膜；再用胶将另一块同样的棱镜粘到第一块棱镜上，胶的折射率应和玻璃的相同。棱镜角和棱镜折射率应如此选择，以使正入射到镜底面的光在射到低折射率层上时角度大于临界角。透射带的波长依赖于间隔层的光学厚度、层中的反射角和反射相变，反射率(因而一定干涉序的半宽度)则依赖于低折射率层的厚度。相变依赖于偏振态，因而振动平行入射面和垂直于入射面这两个分量的同序透射带位于不同波长。表 7.4 给出了可见光谱区使用的这种典型滤波器的性能数据。这种类型的滤波器在厘米波波段亦曾有使用[⑤]。

① K. M. Greenland and C. Billington, *Journ. de Phys.*, **11**(1950), 418。
② P. Giacomo and P. Jacquinot, *J. Phys.*, **13**(1952), 59A。
③ P. H. Lissberger and J. Ring, *Optica Acta*. **2**(1955), 42。
④ P. Leurgans and A. F. Turner, *J. Opt. Soc. Amer.*, **37**(1947), 983。
⑤ B. H. Billings, *J. Opt. Soc. Amer.*, **39**(1949), 634。

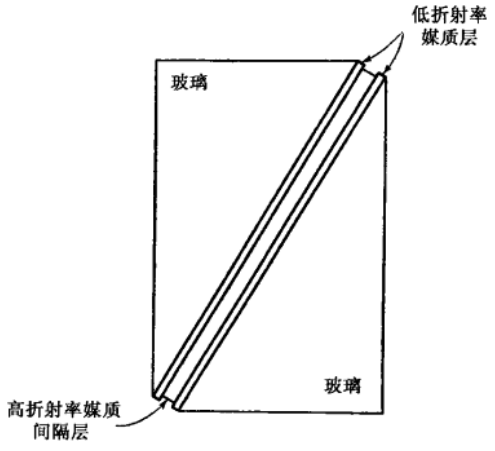


图 7.72 受抑全反射干涉滤波器

表 7.4 某些受抑全反射滤波器的性能数据,滤波器用重火石玻璃棱镜、氟化镁反射层和硫化锌间隔层

干涉序	1		2		1	
偏振态	∥	⊥	∥	⊥	∥	⊥
极大透射率波长 $\lambda_0^{(m)}$(埃)	4600	5300	4630	5080	—	5110
峰值透射率 τ	>0.93	>0.93	0.90	0.90	—	0.12
半宽度$(\Delta\lambda_0)_{HW}$(埃)	66	120	50	49	—	30

[引自 A. R. Turner, *J. Phys.*, **11**(1950), 458]

7.6.7 薄膜多光束干涉条纹

在 7.6.1 节中我们曾经看到,平行平面板的等倾条纹在板面反射率增高时大大变锐。反射率的增高,对薄膜斐索等厚条纹(见 7.5.2 节)的强度分布也有同样的效应,结果将薄膜等厚线图的细小结构显示了出来。

为简单起见,我们首先讨论劈形膜的情况,并假定膜的两面都是平面,相交成一个很小的角度 α,且入射光是单色平面波,传播方向与劈棱 O 垂直[①](见图 7.73)。由于两面之间的多次反射,透射光中遂形成一组传播方向不同的平面波。如果入射波经第一面折射后,射向第二面的路径和劈棱位于法线同侧,并且入射角为 θ',则由折射定律和反射定律可知,透射光中第 p 个波的出射角 θ_p 满足

$$n\sin\theta_p = n'\sin[\theta' + 2(p-1)\alpha] \tag{90}$$

式中 n' 是膜的折射率,n 是周围媒质的折射率。现在通过劈棱作各透射波的虚波阵面 W_1, W_2, …, W_p, …,假如没有反射相变,它们应该是等相的。因此,在第二面的 P 点处,第 p 个透射波和直接透射波($p=1$)的光程差

① 这里的分析主要出自 J. Brossel, *Proc. Phys. Soc.*, **59**(1947), 224。

$$\Delta\mathcal{S}_p = n(PN_p - PN_1) = n\rho\ (\sin\theta_p - \sin\theta_1) \tag{91}$$

式中 N_p, N_1 分别是 P 到 W_p, W_1 的垂足，ρ 是 P 离劈棱 O 的距离。如果劈面反射每次均产生一相变 ϕ，则第 p 个波和直接透射波的总位相差为

$$\delta_p = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta\mathcal{S}_p + 2(p-1)\phi,$$

以(90)和(91)两式代入，有

$$\begin{aligned}\delta_p &= \frac{2\pi}{\lambda_0}n'\rho\{\sin[\theta' + 2(p-1)\alpha] - \sin\theta'\} + 2(p-1)\phi \\ &= \frac{4\pi}{\lambda_0}n'h\cos\theta'\frac{\sin(p-1)\alpha}{\tan\alpha}\{\cos(p-1)\alpha - \tan\theta'\sin(p-1)\alpha\} + 2(p-1)\phi\end{aligned} \tag{92}$$

式中

$$h = \rho\tan\alpha$$

是 P 点的膜厚。如果入射波经第一面折射后，射向第二面的路径和劈棱分居法线两侧，则波阵面 W_1 是实的。在此情况下，δ_p 仍由(92)式给出，但 $\tan\theta'$ 项要改为正号。

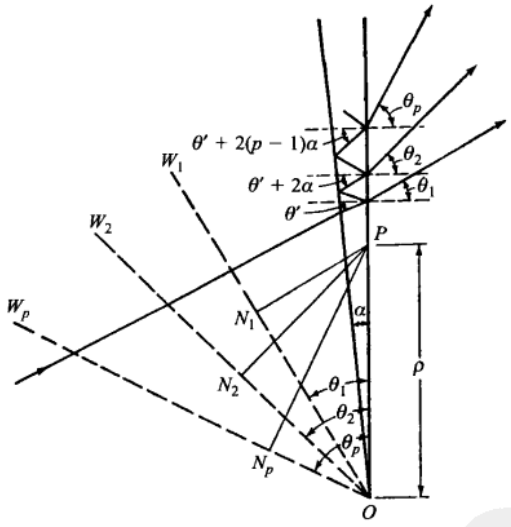


图 7.73　劈中多次反射图示

采用和 7.6.1 节同样的符号，各透射波的振幅依次为

$$tt'A^{(i)}e^{i\delta_1}, \qquad tt'r'^2A^{(i)}e^{i\delta_2}, \qquad \cdots, \qquad tt'r'^{2(p-1)}A^{(i)}e^{i\delta_p}, \qquad \cdots$$

无限多个这种波相叠加，在 P 点产生的合振幅为

$$A^{(t)} = A^{(i)}tt'\sum_{p=1}^{\infty}r'^{2(p-1)}e^{i\delta_p} = A^{(i)}\mathcal{T}\sum_{p=1}^{\infty}\mathcal{R}^{p-1}e^{i\delta_p} \tag{93}$$

相应的强度

$$I^{(t)} = I^{(i)}\mathcal{T}^2\left|\sum_{p=1}^{\infty}\mathcal{R}^{p-1}e^{i\delta_p}\right|^2 \tag{94}$$

让我们看看,在(93)和(94)两式的级数中只保留有限项数时结果如何。$|A^{(t)}|$不能大于$|A^{(i)}|\mathcal{T}/(1-\mathcal{R})$,如只取前 p 项,则 $A^{(t)}$的误差$|\Delta A^{(t)}|$不会超过$|A^{(i)}|\mathcal{T}\mathcal{R}^p/(1-\mathcal{R})$。相应的相对误差$|\Delta I^{(t)}|/I^{(t)}$满足下列关系:

$$\frac{|\Delta I^{(t)}|}{I^{(t)}} \leqslant 2\left|\frac{\Delta A^{(t)}}{A^{(t)}}\right| \leqslant 2\left|\frac{A^{(i)}}{A^{(t)}}\right|\frac{\mathcal{T}\mathcal{R}^p}{(1-\mathcal{R})} \tag{95}$$

下面即将看到,在实际最重要的条件下,$I^{(t)}$由爱里公式(13)来表示差不多足够了。按照这一公式,极小强度对应于$|A^{(t)}| = |A^{(i)}|\mathcal{T}/(1+\mathcal{R})$。这样,如果对于这一特定的$|A^{(t)}|$值,我们希望$|\Delta I^{(t)}|/I^{(t)}$不大于譬如说 0.01,这意味着在 $I^{(t)}$极大附近强度的相对误差将远远小于 0.01,则由(95)式可知,级数中须保留的项数 p 由下式给出:

$$\mathcal{R}^p \approx \frac{1}{200}\frac{1-\mathcal{R}}{1+\mathcal{R}} \tag{96}$$

例如,当$\mathcal{R} = 0.93$时,$p \approx 120$。

当(94)式的级数中只保留有限项数时,如果 α 足够小,就可将(92)式按 α 幂次展开,并只保留到二次项,从而得到

$$\begin{aligned}\delta_p = {} & (p-1)\left(\frac{4\pi}{\lambda_0}n'h\cos\theta' + 2\phi\right) - (p-1)^2\alpha\frac{4\pi}{\lambda_0}n'h\sin\theta' \\ & - \frac{(p-1)(2p^2-4p+3)\alpha^2}{3}\frac{4\pi n'h\cos\theta'}{\lambda_0}\end{aligned} \tag{97}$$

特别是,在正入射情况($\theta' = 0$)下,

$$\delta_p = (p-1)\left(\frac{4\pi n'h}{\lambda_0} + 2\phi\right) - \frac{(p-1)(2p^2-4p+3)\alpha^2}{3}\frac{4\pi n'h}{\lambda_0} \tag{98}$$

当(98)式中 α^2 项比 π 小得多时,可以把它忽略,并可认为相邻二波的位相差 $\delta_p - \delta_{p-1}$为常数,等于 $\delta = 4\pi n'h/\lambda_0 + 2\phi$。这时,$I^{(t)}$由爱里公式(13)表出,因而条纹虽然形成在劈平面上,但其强度分布和平行平面板在无穷远处产生的条纹强度分布(见图 7.58)相似。强度极大对应于 $\delta = 2m\pi$,其位置由下式决定:

$$2n'h = \left(m - \frac{\phi}{\pi}\right)\lambda_0, \qquad m = 1, 2, \cdots \tag{99}$$

这样,各条纹平行于劈棱,间距为 $\lambda_0/2n'\alpha$。如反射率很高($\mathcal{R} \gtrsim 0.9$),使得 p 很大,$(p-1)(2p^2-4p+3)$可用 $2p^3$ 代替,则(98)式中 α^2 项应比 π 小得多的条件要求

$$n'h \ll \frac{3\lambda_0}{8p^3\alpha^2} \tag{100}$$

当 α 的大小相当于约 1 厘米或者更小的条纹间隔时,这个条件对 $n'h$ 是一个严苛的限制,因而只有在劈棱附近膜的光学厚度仅为几个波长的地区,条纹的强度分布才是爱里分布。例如,当 $\alpha \approx 2.5\times10^{-4}$[在 $n' \approx 1$, $\lambda_0 = 5500$ 埃时,这相当于每毫米约 1 个条纹],$p \approx 50$($\mathcal{R} \approx 0.9$)时,

由(100)式得到$n'h \ll 50\lambda_0$。离劈棱再远,(98)式中 α^2 项就变得越来越重要,这时数字计算表明(见图 7.74)$I^{(t)}$开始受到下列三方面影响:极大强度变得小于爱里公式所给的数值,而同时半宽度变大;极大的位置偏离(99)式所给的数值,向远离劈棱一边移动;条纹变得不对称,并且在远离劈棱一边出现有一些次极大。

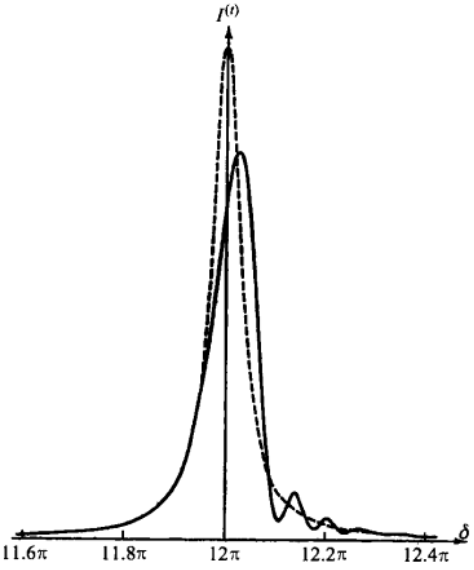


图 7.74　多光束斐索条纹强度分布(实线),与相应爱里分布(链线)比较[引自 K. Kinosita, *J. Phys. Soc. Japan*, **8**(1953), 219]

按照(99)式,当膜面为平面时,条纹顺沿着等光学厚度线。然而,条纹的重要实际应用是用来检查非平面膜的,因此现在必须研究在这种情况下,条纹跟等厚线接近到什么程度。要条纹丝毫不差地绘出不规则膜的等厚线,各 P 点的强度必须惟一决定于 P 点的膜厚 h,但一般并非如此。在 P 点,经过$2(p-1)$次反射后到达的光线[见图 7.75(a)],是在 A_1 点进入膜内并依次在 $B_1, C_1, \cdots, B_{p-1}, C_{p-1}$各点被反射的,因而这一光线对 P 点合振幅的贡献,就与 A_1 和 P 之间膜的光学厚度有关。这样,条纹就可能偏离实际的等光学厚度线,偏离的大小取决于 P 点附近膜的形状。显然,反射率越高,这一影响越大,但当反射率一定时,以膜最薄处和近正入射时影响最小。我们可以估计一下对 P 点强度有影响的膜区范围,如果假定这个地区的膜面为平面的话[见图 7.75(b)]。设 $A_1', A_1'', \cdots, A_{p-1}', A_{p-1}''$是 A_1 点在第二膜面上和第一膜面上接连各次的反射像。这些像处于通过 A_1 点的劈主截面内,并位于以劈棱 O 点为中心,以 $OA_1 = \rho'$为半径的圆上;而$\angle A_1 OA_{p-1}'' = 2(p-1)\alpha$。像点 A_{p-1}''和该光线的 $C_{p-1}P$ 段相关联,因此 $C_{p-1}P$ 延长线必定通过 A_{p-1}''。如果令 B_1 点的入射光线在劈主截面内,和 O 点在法线同侧,入射角为 θ',则当此光线抵达 P 点时,其入射角为 $\theta' + 2(p-1)\alpha$。因此在三角形$A_{p-1}'' PO$ 中,$OA_{p-1}'' = \rho'$,而

$$\angle A_p'' PO = \pi/2 - [\theta' + 2(p-1)\alpha], \quad \angle PA_p'' O = \pi/2 + (\theta' - \alpha)$$

所以如令 $OP = \rho$,则 $\rho'/\cos[\theta' + 2(p-1)\alpha] = \rho/\cos(\theta' - \alpha)$。由此

$$\Delta\rho = \rho - \rho' = \frac{h}{\tan\alpha}\left\{1 - \frac{\cos[\theta' + 2(p-1)\alpha]}{\cos(\theta' - \alpha)}\right\} \tag{101}$$

而当 $\theta' = 0$ 时,略去 α 一次方以上各项,上式化简为

$$\Delta\rho = \frac{4p^2 - 8p + 3}{2} h\alpha \tag{102}$$

这样,如果有 p 束光起作用,则可预期 P 点的强度要受到它周围 $2p^2 h\alpha$ 量级距离内膜厚的影响。当 h 只有几个可见光波长时,即使反射率非常高,这个距离也很小。例如,当 $p \approx 50$, $h = 2.5\times10^{-4}$ 厘米(约 5 个波长),而 $\alpha = 2.5\times10^{-4}$ 时,它约为 3×10^{-3} 毫米。所以只要对条纹的细小不规则变化给予小心说明,那么当膜足够薄时,即使是不规则的,条纹所描绘的也是等光学厚度线。

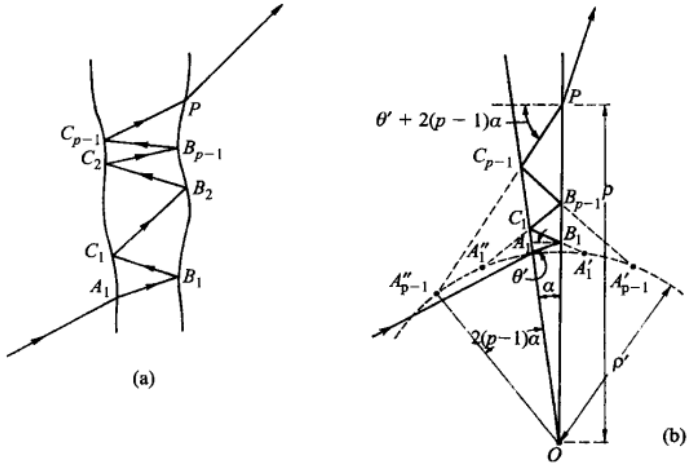


图 7.75 光线沿劈形膜多次反射时的位移图示:(a)劈面不规则;(b)劈面为平面

以上假定光源是一个点,但实际上出于强度方面的考虑,需要采用尽可能大的扩展光源。按照(97)式,若 α 项和 α^2 项可予略去,则非正入射时的强度极大发生在

$$2n'h\cos\theta' = \left(m - \frac{\phi}{\pi}\right)\lambda_0, \qquad m = 1, 2, \cdots \tag{103}$$

因此式系由略去劈角得来,所以它对所有入射面都有效。因此,如果光源周径加大,以致入射角分布在 $0 \leqslant \theta' \leqslant \varepsilon'$ 范围,则同一序的各个极大将排开一段距离,相当于干涉序改变 Δm,而当 ε' 很小时,由(103)式可知,

$$\Delta m = \frac{2}{\lambda_0} n'h|\Delta(\cos\theta')| = \frac{n'h\varepsilon'^2}{\lambda_0} \tag{104}$$

光源加大所引起的这种条纹展宽,其影响所及取决于单个元光源产生的条纹锐度 $\mathcal{F}$:当 $n'h\varepsilon'^2/\lambda_0 \ll 1/\mathcal{F}$ 时,ε' 的增加主要是使极大增强;而当 $n'h\varepsilon'^2/\lambda_0 \gg 1/\mathcal{F}$ 时,则主要是使条纹变宽。这个效应和法布里-珀罗条纹因干涉仪两板有球面弯曲而产生的展宽(见 7.6.2 节,307 ~ 308 页),在形式上是类似的。我们可利用这个类似性来进一步研究上述效应。将杜福和

皮卡[①]的结果作适当修改即可看到，$n'h\varepsilon'^2/\lambda_0$ 一超过 $1/\mathcal{F}$，极大的强度就很少增加，因而合理的判据是 $n'h\varepsilon'^2/\lambda_0$ 应取$\frac{1}{2}\mathcal{F}$，这时条纹比点源时的约宽 10%。如果再把第一膜面上的折射考虑进来，则光源角半径最大可取为

$$\varepsilon \approx \frac{n'\varepsilon'}{n} \approx \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\lambda_0 n'}{2h\mathcal{F}}} \tag{105}$$

这和双光束干涉方面的类似关系式 §7.5(73)差别不大。当 h 只有几个波长时，ε 并不很小；例如，当 $h \approx 5\lambda_0$，$\mathcal{F}=30(\mathcal{R}\approx 0.9)$，$n' \approx n \approx 1$ 时，由(105)式得到 $\varepsilon \approx 3°$。这样并不需要使入射光严格平行，而允许使用大一些的光源，对条纹的高倍放大观测甚为有利。

如果光是准单色的，平均波长为$\overline{\lambda_0}$，波长分布范围为 $\Delta\lambda_0$，则同一序的各个极大将排开一段距离，相当于干涉序改变 Δm，由(99)式可知，如果 n' 和ϕ对波长的依赖关系可予忽略，则 $\Delta m = 2n'h\Delta\lambda_0/\overline{\lambda_0^2}$。如果这个量比 $1/\mathcal{F}$小得多，即如果

$$\Delta\lambda_0 \ll \frac{(\overline{\lambda_0})^2}{2n'h\mathcal{F}} \tag{106}$$

则因光偏离严格单色性而引的条纹展宽并不重要，此外，当 $n'h$ 只有几个波长时，(106)式这一条件也并不严苛。例如，当 $n'h \approx 5\lambda_0$，$\mathcal{F}=30$，$\lambda_0 = 5500$ 埃时，由(106)式得到 $\Delta\lambda_0 \ll 18$ 埃。因此，这里不一定要用大程差干涉量度学中所常使用的那种光源，相反，可使用高压弧灯，这种灯非常亮，对高倍放大观测更属有利。

上面讨论了膜的透射光，但多光束薄膜干涉图样也可用反射光观察。当反射面没有吸收时，反射干涉图样和透射干涉图样是互补的，就是说二者的强度之和在各点都等于入射强度。实际的反射敷层总要有吸收，霍耳登(J. Holden)曾考虑了它的影响[②]。他指出，当采用反射高而吸收低的银敷层时，反射光的干涉图样由暗条纹构成，形成在一个近乎均匀的亮背景上，并且比透射光的相应亮条纹窄；但是反射图样的极小强度与膜前表面敷层的吸收有很大关系，如果这一吸收太高，条纹就看不到了。

多光束斐索条纹在光学工厂里用来检查高级光学平面(如法布里-珀罗干涉仪所需要的那种平面)的质量，而托兰斯基(S. Tolansky)和他的同事们曾大量应用这种条纹来研究近乎平面的晶体表面和金属表面的地形[③]。为此，他们将待测面和另一光学平面各敷镀上一层银反射膜，而后尽可能紧地贴在一起，在显微镜下观测它们之间空气膜的条纹，显微镜的角孔径要足够大，以便能收集进所有起作用的光束。这些条纹就是以光学平面为基准时待测面的等高线，高度间隔为 $\lambda/2$，其中 $\lambda = \lambda_0/n'$ 是空气中的波长。当两面夹角足使视场中产生数条条纹时(例如，见图 7.76)，通过测量各条纹与直线的偏离，可定量算出待测面的地形。如果表面有一坎坷，高度为 Δh，则条纹通过此处时将遭受侧移，相当于干涉序改变 Δm，Δh 和 Δm 的关系是

$$\Delta h = \frac{\lambda}{2}\Delta m \tag{107}$$

---

① C. Dufour and R. Picca, *Rev. d'Opt.*, **24**(1945), 19。

② J. Holden, *Proc. Phys. Soc. B*, **62**(1949), 405。

③ S. Tolansky, *Multiple-beam Interferometry of Surfaces and Films*(Oxford, Clarendon Press, 1948)。

所以,如果知道了 Δm,就可求出 Δh,而 Δm 等于(至少是近似地)条纹位移和相邻条纹间距之比。当反射率很高时,用这种方法可测量出高度非常小的表面坎坷。条纹位移等于半宽度时,还是很容易测出的,这相当于 $\Delta h = \lambda/2\mathcal{F}$,如取 $\lambda = 5500$ 埃,$\mathcal{F} = 40$,则此 Δh 仅约为 70 埃[①]。至于表面坎坷是凸起还是下凹,常能靠改变两面间隔同时观察条纹移动方向来决定,但一般至少需采用两种波长。采用透射光条纹时,几种波长可同时使用,而以汞的两条黄线 $\lambda = 5770$ 埃和 5790 埃为便。这时条纹成双出现,每对靠得很近,其间距随干涉序的增加而加大;这样,局部劈角的方位直接可见,而且如果条纹出现不连续(像通过晶体解理阶时那样)就可能决定出两边相对应的干涉序。

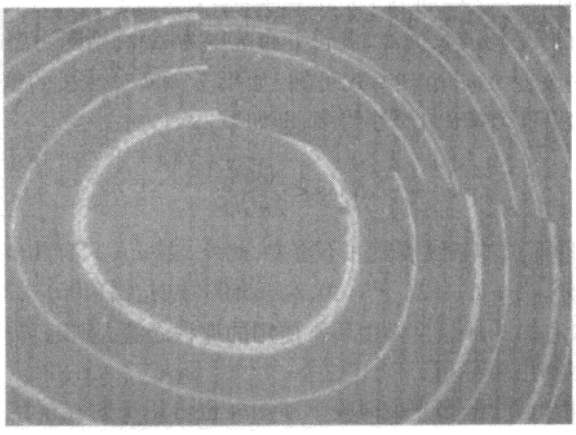


图 7.76 云母裂面上的多光束斐索条纹(透射光),包括三种波长:汞的绿线(5461 埃)和两条黄线(5770 埃,5790埃)(照片蒙允引自W. L. Wilcock)

如果待测面接近平面,则可使它对光学平面的倾角减小到整个视场只有一个条纹(例如,见图 7.77)。在这种情况下,极其微小的高度差可导致可察觉的强度变化。设 $I, I + \Delta I$ 是两个近邻地区上的强度,这两个地区有一个小的高度差 Δh,相当于 δ 改变 $\Delta\delta$。$|\Delta I|/I$ 叫做衬比。当调节 δ 使得 $|\mathrm{d}I/\mathrm{d}\delta|/I$ 为极大时,衬比 $|\Delta I|/I$ 也是极大。现在讨论透射光图样,由(27)式有

$$\frac{I^{(t)}}{I^{(t)}_{\text{极大}}} = \frac{1}{1 + F\sin^2\dfrac{\delta}{2}} \tag{108}$$

由此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\delta}\left(\frac{I^{(t)}}{I^{(t)}_{\text{极大}}}\right) = \frac{-F\sin\delta}{2\left(1 + F\sin^2\dfrac{\delta}{2}\right)^2} \tag{109}$$

因此

$$\frac{1}{I^{(t)}}\left|\frac{\mathrm{d}I^{(t)}}{\mathrm{d}\delta}\right| = \frac{F\sin\delta}{2\left(1 + F\sin^2\dfrac{\delta}{2}\right)} \tag{110}$$

① 虽然银敷层厚度有 500 埃左右,但已确定它在本法所可检测的精度范围内不改变表面地形。

所以要衬比为极大，须

$$2\left(1+F\sin^2\frac{\delta}{2}\right)\cos\delta-F\sin^2\delta=0 \tag{111}$$

当反射率很高时，F 很大，满足(111)式的 δ 值接近 2π 的整数倍，因而可令 $\delta=2m\pi\pm\varepsilon$，其中 m 为一整数，而 ε 比 $\pi/2$ 小得多。代入(111)式，略去 ε 的二次方以上各项，得到

$$\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{F+2}}\approx\frac{2}{\sqrt{F}} \tag{112}$$

这时(110)式给出

$$\frac{1}{I^{(t)}}\left|\frac{\mathrm{d}I^{(t)}}{\mathrm{d}\delta}\right|_{极大}\approx\frac{F\varepsilon}{2\left(1+\dfrac{F\varepsilon^2}{4}\right)}\approx\frac{\sqrt{F}}{2} \tag{113}$$

因此在一级程度上，极大衬比

$$\left|\frac{\Delta I^{(t)}}{I^{(t)}}\right|_{极大}=\frac{1}{I^{(t)}}\left|\frac{\mathrm{d}I^{(t)}}{\mathrm{d}\delta}\right|_{极大}|\Delta\delta|\approx\frac{\sqrt{F}}{2}|\Delta\delta| \tag{114}$$

由(99)式，$\Delta\delta$ 和 Δh 的关系是 $|\Delta\delta|=4\pi|\Delta h|/\lambda$，再应用关系式(22)，即可将极大衬比表成为

$$\left|\frac{\Delta I^{(t)}}{I^{(t)}}\right|_{极大}\approx\frac{4\mathcal{F}}{\lambda}|\Delta h| \tag{115}$$

当 $\lambda=5500$ 埃，$\mathcal{F}=40$，而 Δh 只有 ≈3.5 埃时，$|\Delta I^{(t)}/I^{(t)}|_{极大}\approx0.1$。3.5 埃已是分子大小的量级了。

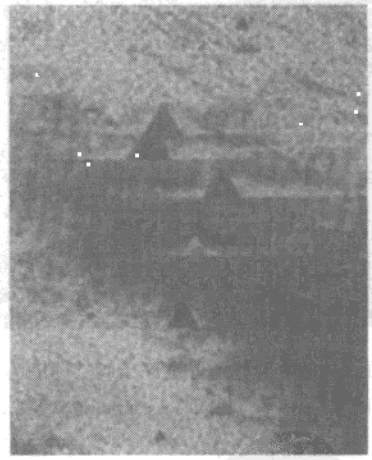


图 7.77　金刚石面上的多光束斐索条纹(照片蒙允引自W. L. Wilcock)

以上讨论了采用准单色光时的效应。现在假设膜用白光垂直照射，并用消色差透镜 L 使膜通过其透射光成像在摄谱仪的狭缝平面上(见图 7.78)。对每一波长成分而言，各光束到达狭缝上 P' 点时的位相关系，和在膜上 P 点(P' 的共轭点)时相同。因此，如果膜足够薄，满足(100)式条件，则按(99)式，P 点强度极大所在波长 $\lambda_0^{(m)}$ 满足下列关系：

$$\lambda_0^{(m)}=\frac{2n'h}{m-\dfrac{\phi}{\pi}},\qquad m=1,2,\cdots \tag{116}$$

式中 $n'h$ 是 P 点膜的光学厚度;这些极大之间各波长的强度由爱里公式给出。这样,当反射率很高时,摄谱仪焦平面上就形成沟槽光谱,在窄的亮条纹之间隔着很宽很宽的暗带,膜越薄,相邻条纹的波长间隔越大。

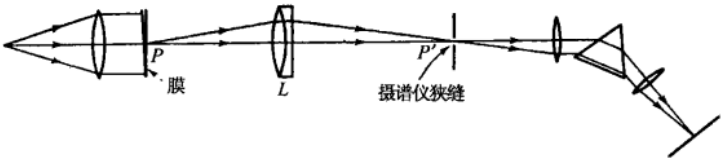


图 7.78 薄膜形成白光条纹的观测装置

在特别情况下,当 $n'h$ 为常数时,$\lambda_0^{(m)}$ 也是常数,条纹是平行于狭缝的直线。这种条纹有时叫做**埃德索-巴特勒**(Edser-Butler)**条纹**,如果ϕ与波长无关,这些条纹在光谱波数 $\kappa_0=1/\lambda_0$ 标尺上是等间距的,间隔 $\Delta\kappa_0=1/2n'h$。由于这种性质,它们对校准摄谱仪很有用,特别是在红外,因为这个光谱区的标准波长不很多。更常见的情况是,$\lambda_0^{(m)}$ 沿同一条纹是改变的,其状况取决于膜上与狭缝共轭地区光学厚度的变化情况。特别是,如果膜是由一待测面和一光学平面夹成的空气膜,这种条纹就提供了一个十分有效的测量方法,来测定待测面上选定地区的截面轮廓。这种条纹是托兰斯基首先报道的①,有时称为**等色序条纹**(见图 7.79)。

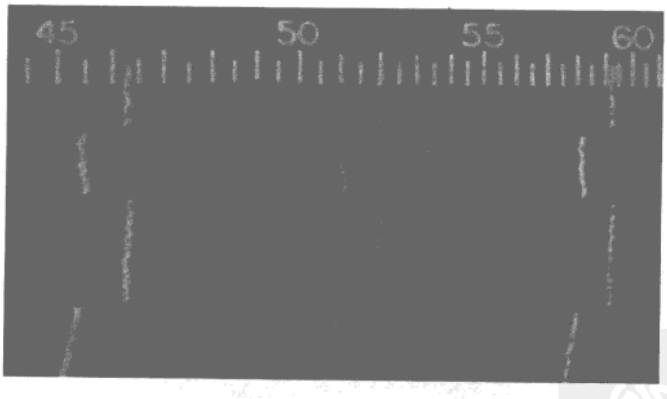


图 7.79 金刚石晶面某一地区产生的等色序条纹。标度为波长值,单位 100 埃
[引自S. Tolansky and W. L. Wilcock, *Proc. Roy. Soc.*, A, **191**(1947), 192]

设 P_1, P_2 两点的膜厚为 h_1, h_2,并设在狭缝上共轭点 P_1', P_2' 处,m 序极大的波长在空气中分别为 $\lambda_1^{(m)}$, $\lambda_2^{(m)}$。因 $\lambda^{(m)}=\lambda_0^{(m)}/n'$,于是利用(116)式可得到

$$\Delta h=h_2-h_1=\left(m-\frac{\phi_1}{\pi}\right)\frac{\lambda_2^{(m)}-\lambda_1^{(m)}}{2}+\frac{a}{2}\lambda_2^{(m)} \tag{117a}$$

① S. Tolansky, *Phil. Mag.* (7), **36**(1945), 225。

式中

$$a=\frac{\phi_1-\phi_2}{\pi} \tag{117b}$$

而ϕ_1,ϕ_2 是波长 $\lambda_1^{(m)}$,$\lambda_2^{(m)}$ 的反射相变。$(m-\phi_1/\pi)$这个量可由测量相邻条纹的波长间隔定出。例如,如果对于狭缝的 P_1'点,$(m+1)$序极大的波长为 $\lambda_1^{(m+1)}$,则由(116)式又有

$$\left(m-\frac{\phi_1}{\pi}\right)\lambda_1^{(m)}=\left(m+1-\frac{\phi_1'}{\pi}\right)\lambda_1^{(m+1)}$$

即

$$m-\frac{\phi_1}{\pi}=(1+b)\frac{\lambda_1^{(m+1)}}{\lambda_1^{(m)}-\lambda_1^{(m+1)}} \tag{118a}$$

式中

$$b=\frac{\phi_1-\phi_1'}{\pi} \tag{118b}$$

而ϕ_1'是波长 $\lambda_1^{(m+1)}$ 的反射相变。如果条纹是不连续的,则须测量不连续处各边相邻条纹的波长间隔以确定相对应的干涉序。由(117)和(118)两式,得出

$$\Delta h=(1+b)\frac{\lambda_1^{(m+1)}}{\lambda_1^{(m)}-\lambda_1^{(m+1)}}\frac{\lambda_2^{(m)}-\lambda_1^{(m)}}{2}+\frac{a}{2}\lambda_2^{(m)} \tag{119}$$

a,b 二量是因为相变随波长改变而引起的,当采用银反射敷层并且所涉及的波长间隔不太大时,这两个量可以忽略。这时,测量 $\lambda_1^{(m)}$,$\lambda_1^{(m+1)}$ 和 $\lambda_2^{(m)}$,即可求出 Δh;而(119)式表明,Δh 正比于$\lambda_2^{(m)}-\lambda_1^{(m)}$,因此,只要按波长比例尺绘出一条条纹,即可得到待测面上选定地区的截面轮廓。

7.6.8　两块平行平面板产生的多光束条纹

(a) 单色光和准单色光生成的条纹

设有两块表面反射率很高的平行平面板,一前一后放置,并由单色平面光波照射(图 7.80),现在来讨论它们产生的干涉条纹,如采用 7.6.1 节之符号,并用下标 1 和 2 区别二板,则按照(27)和(26)两式,第一块板透射光的强度

$$I_1^{(t)}=\frac{\mathcal{T}_1^2}{(1-\mathcal{R}_1)^2}\frac{1}{1+F_1\sin^2\dfrac{\delta_1}{2}}I^{(i)} \tag{120}$$

式中 $I^{(i)}$是入射光的强度。对第二块板来说,入射光的强度是 $I_1^{(t)}$,所以透射光的强度相应为

$$I_2^{(t)}=\frac{\mathcal{T}_2^2}{(1-\mathcal{R}_2)^2}\frac{1}{1+F_2\sin^2\dfrac{\delta_2}{2}}I_1^{(t)} \tag{121}$$

我们将假设,从第二块板反射回去、随后又从第一块板反射回来的光已被排除掉;这就意指,两块板的间距与它们孔径相比是足够大的,而且如果两块板相互平行,入射方向也是不太正的。因此总透射光的强度 $I^{(t)}$就等于 $I_2^{(t)}$,而且由(120)和(121)两式,得出

$$\frac{I^{(t)}}{I^{(i)}}=\frac{\mathcal{T}_1^2}{(1-\mathcal{R}_1)^2}\frac{\mathcal{T}_2^2}{(1-\mathcal{R}_2)^2}\frac{1}{\left(1+F_1\sin^2\dfrac{\delta_1}{2}\right)}\frac{1}{\left(1+F_2\sin^2\dfrac{\delta_2}{2}\right)} \tag{122}$$

这样,在透镜 L 的焦平面上,条纹的相对强度分布等于每块板单独产生的条纹的相对强度分布之积。

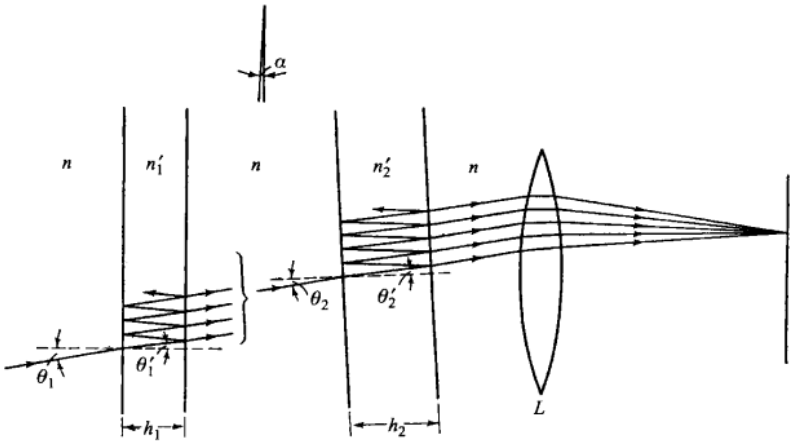


图 7.80 入射光在两块平行平面板内多次反射后于无穷远处产生条纹图示

按照(25)式,位相差 δ_1 和 δ_2 分别为

$$\delta_1=\frac{4\pi}{\lambda_0}n_1'h_1\cos\theta_1'+2\phi_1,\qquad \delta_2=\frac{4\pi}{\lambda_0}n_2'h_2\cos\theta_2'+2\phi_2 \tag{123}$$

让我们考虑两块板相互平行时的情况,这时每块板要是单独产生条纹,两套圆环将是同心的。当入射角 $\theta_1=\theta_2=\theta$ 很小时,$\cos\theta_1'\approx1-\theta_1'^2/2$,$\cos\theta_2'\approx1-\theta_2'^2/2$,并且由折射定律,$\theta_1'\approx n\theta/n_1'$,$\theta_2'\approx n\theta/n_2'$,式中 n 是周围媒质的折射率。因此由(123)式,保留到 θ 二次项时,有

$$\delta_1=\frac{4\pi}{\lambda_0}h_1\left(n_1'-\frac{n^2\theta^2}{2n_1'}\right)+2\phi_1,\qquad \delta_2=\frac{4\pi}{\lambda_0}h_2\left(n_2'-\frac{n^2\theta^2}{2n_2'}\right)+2\phi_2 \tag{124}$$

由(124)式可知,如果认为$\boldsymbol{\phi}_1$和$\boldsymbol{\phi}_2$与 θ 无关,则当 θ 改变一点时,两个 δ 相应改变之比为

$$\frac{\Delta\delta_2}{\Delta\delta_1}=\frac{n_1'h_2}{n_2'h_1} \tag{125}$$

如果折射率 n_1',n_2'和板厚 h_1,h_2 的大小使得在某一方向 $\theta=\theta_0$ 上,每块板的干涉序都是整数,即如果

$$\theta=\theta_0,\qquad \delta_1=2m_1\pi,\qquad \delta_2=2m_2\pi\qquad (m_1\text{和}m_2\text{为整数}) \tag{126}$$

则(122)式中 F_1 和 F_2 两项因子同时达到它们的极大值 1,因而在 $\theta=\theta_0$ 时,透射光强度有一个绝对极大。如果此外还有

$$\frac{n_1'h_2}{n_2'h_1}=a \tag{127}$$

式中 a 是正整数，则由(125)式可以看出，第二块板的整数序(m_2-a)，(m_2-2a)，…分别和第一块板的整数序(m_1-1)，(m_1-2)，…对应于相同的 θ，因而在这些 θ 方向，$I^{(t)}/I^{(i)}$ 也各存在一个绝对极大①。

透射光强度曲线的形状如图 7.81 所示。在接连两个主极大之间，有$(a-1)$个次极大，分别对应于第二块板的整数序(m_2-1)，(m_2-2)，…，(m_2-a+1)；但是，如果 F_1 很大而 a 不太大，则 F_1 所在项的相应各值比 1 小得多，因而次极大比主极大弱得多。

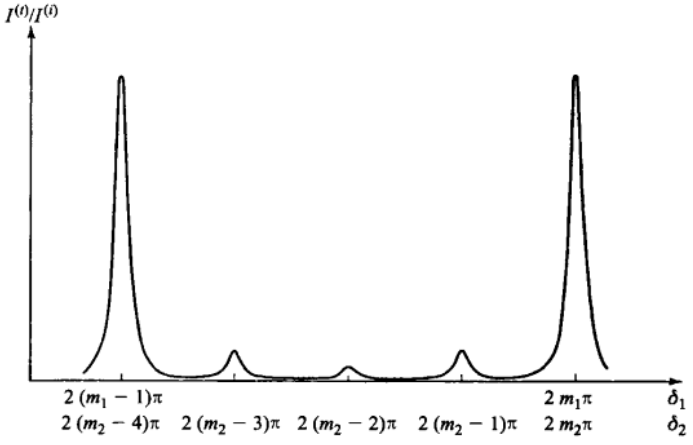


图 7.81　两块平行平面板产生的多光束等倾条纹：透射强度与入射强度之比随位相差 δ_1 和 δ_2 的变化曲线($\mathcal{R}_1=0.64$，$\mathcal{R}_2=0.64$，$a=4$)

人们曾应用这种两个法布里-珀罗干涉仪产生的条纹来研究光谱线的精细结构。先将两间隔圈加工到 h_2/h_1 接近所要的整数 a，而后作精细调节，将一个干涉仪封在空气密封器中，改变其中的空气压力，使其折射率改变，即可很方便地将 $n_1'h_2/n_2'h_1$ 调到等于 a②。

当 a 大于 1 时，这种组合与单个干涉仪相比，其优点是它在同样分辨本领下光谱范围较大③。当波长改变，使图样移动一个主极大间隔时，第一块板的干涉序相应改变 1，第二块板的

---

① 实际上，干涉序重合个数 p 只要求是有限的，因而如果在 $\delta_1=2(m_1-p)\pi$，$\delta_2=2(m_2-pa)\pi$ 处 F_1 项和 F_2 项极大的相对位移比它们的半宽度小得多，$n_1'h_2/n_2'h_1$ 就是充分接近整数 a 了。利用(125)和(21)两式，这些半宽度用 δ_2 标度表示出时为 $4n_1'h_2/n_2'h_1\sqrt{F_1}$，$4/\sqrt{F_2}$。因此，所要求的条件是

$$\left|\frac{n_1'h_2}{n_2'h_1}2p\pi-2pa\pi\right|\ll\frac{n_1'h_2}{n_2'h_1}\frac{4}{\sqrt{F_1}}+\frac{4}{\sqrt{F_2}}$$

因$(n_1'h_2/n_2'h_1)\approx a$，故上式可写成

$$\left|\frac{n_1'h_2}{n_2'h_1}-a\right|\ll\frac{1}{p}\left(\frac{a}{\mathcal{F}_1}+\frac{1}{\mathcal{F}_2}\right)\tag{126a}$$

式中$\mathcal{F}_1$，$\mathcal{F}_2$ 是每块板单独产生的条纹的细度。只要 p 不太大，并且第一块板的干涉序 m_1 不太小，关系式(126a)和(126)实际上可同时满足。例如，当$\mathcal{F}_1=\mathcal{F}_2=30$，$a=1$ 时，(126a)式要求$|(n_1'h_2/n_2'h_1)-1|\ll 1/15p$；而(126)式在 $n_2'h_2$ 改变 $\lambda_0/2$ 左右时总可满足，这时，$n_1'h_2/n_2'h_1$ 相应改变约为 $n_1'\lambda_0/2n_2'^2h_1\approx n_1'^2/n_2'^2m_1$，因为 $m_1\approx 2n_1'h_1/\lambda_0$。

② 改变一干涉仪对另一干涉仪的倾角，亦可进行精细调节，但是效果较差。

③ 首先介绍这种组合装置的是 W. V. Houston, *Phys. Rev.*(2), **29**(1927), 478 和 E. Gehrcke and E. Lau, *Zeits. f. tech. Physik*, **8**(1927), 157。

干涉序则改变 a。因此,各个波长的主极大不发生交叠的光谱范围,与薄干涉仪的光谱范围相等,而是厚干涉仪光谱范围的 a 倍[见(46)式]。主极大的半宽度对应于 $\delta_1 = 2m_1\pi \pm \varepsilon_1/2$ 或 $\delta_2 = 2m_2\pi \pm \varepsilon_2/2$($m_1$, m_2 为整数),其中 ε_1 和 ε_2 满足[由(122)式]

$$\left(1 + F_1 \sin^2 \frac{\varepsilon_1}{4}\right)\left(1 + F_2 \sin^2 \frac{\varepsilon_2}{4}\right) = 2$$

利用(125)和(127)两式,此即

$$\left(1 + F_1 \sin^2 \frac{\varepsilon_2}{4a}\right)\left(1 + F_2 \sin^2 \frac{\varepsilon_2}{4}\right) = 2 \tag{128}$$

当 F_2 足够大时,ε_2 比 $\pi/2$ 小得多,可取 $\sin\varepsilon_2 = \varepsilon_2$。于是(128)式化为

$$\left(\frac{4}{\varepsilon_2}\right)^4 - \left(F_2 + \frac{F_1}{a^2}\right)\left(\frac{4}{\varepsilon_2}\right)^2 - \frac{F_1F_2}{a^2} = 0 \tag{129}$$

由此,

$$\varepsilon_2 = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\left(F_2 + \frac{F_1}{a^2}\right) + \sqrt{F_2^2 + \frac{6F_1F_2}{a^2} + \frac{F_1^2}{a^4}}}} \tag{130}$$

当取走薄干涉仪时,$F_1 = 0$,(130)式化为 $\varepsilon_2 = 4/\sqrt{F_2}$,和(21)式一致;否则 ε_2 小于 $4/\sqrt{F_2}$,因而主极大的半宽度小于厚干涉仪条纹的半宽度。实用上取 a 等于 3 或者再大一些,所以由(130)式可以看出,增大 F_2 比同样增大 F_1 能更大地减小 ε_2。但是我们还须记住,组合的峰值透射率系等于两个干涉仪的峰值透射率之积 $\tau_1\tau_2$,这由(122)和(33)两式可以看出;另外在 7.6.2 节中我们曾经看到,以现有的反射敷层而言,增加$\mathcal{R}_1$和$\mathcal{R}_2$(因而增加了 F_1 和 F_2)时,τ_1 和 τ_2 随之下降。由于这些原因,有利的做法是使 F_1 不大于为把次极大压低到圆满程度所需的数值,而同时使 F_2 在强度考虑所允许的范围内尽量大。在这种情况下,F_1/a^2 比 F_2 小得多,因而 $\varepsilon_2 \approx 4/\sqrt{F_2}$,组合的分辨本领和厚干涉仪的接近相等。如果待测光源各光谱成分的强度相差悬殊,次极大的出现就很不相宜,因为弱成分的主极大会被强成分的次极大所混淆,用不同的厚度组合进行观测,可消除这种疑问。

当 $a = 1$ 时,没有次极大,并且由(122)和(34)两式可知,这时组合的衬比因子就等于两个干涉仪的衬比因子之积$\mathcal{C}_1\,\mathcal{C}_2$。在一定的峰值透射率下,组合的衬比因子可以比单个干涉仪的高得多,因而这种装置对观测光谱线的弱伴线很有价值[①]。

(b) 叠加条纹

现在设两块板相互倾斜成 α 角,照射光仍接近正入射,但远非单色,以致单独用哪一块板观测时都不能看到条纹,而这时却可观察到一种在实用上非常重要的条纹。为了解其缘由[②],先讨论波数 $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ 的单色波从一块板通过的情况。设 $A^{(i)}(k_0)$和 $A^{(t)}(k_0)$分别是入射波和透射波的复振幅。按照(10)式,如果把所有各次反射都考虑进来,并应用(2)和(4)两式,

① L. C. Bradley and H. Kuhn, *Nature*, *London*, **162**(1948), 412。C. Dufour, *Ann. de Physique*, *Paris*(12), **6**(1951), 5。

② 这里的分析主要仿照 J. R. Benoit, C. Fabry and A. Perot, *Trav. et Mem. Bur. Int. Poids et Mes.*, **15**(1913), 1。

则有

$$A^{(t)}(k_0)=A^{(i)}(k_0)\mathcal{T}\sum_{p=0}^{\infty}\mathcal{R}^p\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\delta} \tag{131}$$

所以透射光的强度 $I^{(t)}=A^{(t)}A^{(t)\star}$ 为

$$I^{(t)}(k_0)=I^{(i)}(k_0)\mathcal{T}^2\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{p'=0}^{\infty}\mathcal{R}^p\mathcal{R}^{p'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-p')\delta} \tag{132}$$

式中 $I^{(i)}=A^{(i)}A^{(i)\star}$ 是入射光的强度。如令 $|p-p'|=q$，则(132)式可写成如下形式：

$$\begin{aligned}I^{(t)}(k_0)&=I^{(i)}(k_0)\mathcal{T}^2\sum_{p=0}^{\infty}\mathcal{R}^{2p}\left\{1+\sum_{q=1}^{\infty}\mathcal{R}^q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}q\delta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\delta})\right\}\\&=I^{(i)}(k_0)\frac{\mathcal{T}^2}{1-\mathcal{R}^2}\left(1+2\sum_{q=1}^{\infty}\mathcal{R}^q\cos q\delta\right)\end{aligned} \tag{133}$$

两块板串联使用时，如果忽略它们之间回去回来的反射光，则单色光通过两板后强度为

$$\begin{aligned}I^{(t)}(k_0)=I^{(i)}(k_0)\frac{\mathcal{T}_1^2\mathcal{T}_2^2}{(1-\mathcal{R}_1^2)(1-\mathcal{R}_2^2)}&\left(1+2\sum_{r=1}^{\infty}\mathcal{R}_1^r\cos r\delta_1\right)\\&\times\left(1+2\sum_{s=1}^{\infty}\mathcal{R}_2^s\cos s\delta_2\right)\end{aligned} \tag{134}$$

式中下标 1 和 2 分别指第一块板和第二块板。位相差 δ_1 和 δ_2 则由下式给出：

$$\left.\begin{aligned}\delta_1&=k_0\Delta\mathcal{S}_1+2\phi_1=k_0 2n_1'h_1\cos\theta_1'+2\phi_1,\\\delta_2&=k_0\Delta\mathcal{S}_2+2\phi_2=k_0 2n_2'h_2\cos\theta_2'+2\phi_2,\end{aligned}\right\} \tag{135}$$

式中各项符号意义同前。

现在假设光不是单色的，我们可以把它看成是由频率不同的各个单色成分叠加而成。按照7.5.8 节，不同成分的相加是不相干的，所以总强度等于各个成分的强度和(积分)。于是由(134)式得到板透射光总强度表达式如下：

$$\begin{aligned}I^{(t)}=\int\frac{\mathcal{T}_1^2\mathcal{T}_2^2}{(1-\mathcal{R}_1^2)(1-\mathcal{R}_2^2)}i^{(i)}(k_0)&\left(1+2\sum_{r=1}^{\infty}\mathcal{R}_1^r\cos r\delta_1\right)\\&\times\left(1+2\sum_{s=1}^{\infty}\mathcal{R}_2^s\cos s\delta_2\right)\mathrm{d}k_0\end{aligned} \tag{136}$$

式中 $i^{(i)}(k_0)$ 代表入射光的光谱强度分布。$\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{T}$ 这两个量一般是 k_0 的函数，但是我们将假定，在 $i^{(i)}(k_0)$ 有可观大小的波数范围内，它们随 k_0 的变化可以忽略。于是(136)式中头几个因子可提到积分号外边，所得结果并可改写成如下形式：

$$I^{(t)}=\frac{\mathcal{T}_1^2\mathcal{T}_2^2}{(1-\mathcal{R}_1^2)(1-\mathcal{R}_2^2)}\int i^{(i)}(k_0)\{1+2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_{12}^{+}+\sigma_{12}^{-})\}\mathrm{d}k_0 \tag{137a}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \sum_{r=1}^{\infty}\mathcal{R}_1^r\cos r\delta_1,\\ \sigma_2 &= \sum_{s=1}^{\infty}\mathcal{R}_2^s\cos s\delta_2,\\ \sigma_{12}{}^{+} &= \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\mathcal{R}_1^r\mathcal{R}_2^s\cos(r\delta_1+s\delta_2),\\ \sigma_{12}{}^{-} &= \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\mathcal{R}_1^r\mathcal{R}_2^s\cos(r\delta_1-s\delta_2).\end{aligned}\right\} \tag{137b}$$

如果各单色成分的平均波长为$\overline{\lambda}_0$,所分布的波长范围为$\Delta\lambda_0$,则相应的波数范围Δk_0为$2\pi\Delta\lambda_0/\overline{\lambda}_0^2$,并且当$\Delta\mathcal{S}_1$和$\Delta\mathcal{S}_2$与相干长度$\overline{\lambda}_0^2/\Delta\lambda_0$相比足够大时,$\delta_1$和$\delta_2$的范围就比$2\pi$大得多[①]。在这种情况下,$\sigma_1$,$\sigma_2$和$\sigma_{12}^{+}$在积分区内将改变得很快,每一个都将反复多次易号。结果这些项对$I^{(t)}$没有什么贡献,(137)式遂化简为[②]

$$I^{(t)}\approx\frac{\mathcal{T}_1^2\mathcal{T}_2^2}{(1-\mathcal{R}_1^2)(1-\mathcal{R}_2^2)}\int i^{(i)}(k_0)\left(1+2\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\mathcal{R}_1^r\mathcal{R}_2^s\cos(r\delta_1-s\delta_2)\right)\mathrm{d}k_0 \tag{138}$$

一般,$r\delta_1-s\delta_2$各量至少也是δ_1或δ_2的量级,因而(138)式中余弦项的积分同样可以忽略,于是$I^{(t)}$实际与δ_1和δ_2无关。但是,有一例外,发生在

$$a\left(\Delta\mathcal{S}_1+\frac{2\phi_1}{k_0}\right)-b\left(\Delta\mathcal{S}_2+\frac{2\phi_2}{k_0}\right)=\varepsilon \tag{139}$$

式中a和b是两个没有公因子的小整数,而$|\varepsilon|$不大于$\overline{\lambda}_0^2/\Delta\lambda_0$。在此情况下,当

$$r=qa,\qquad s=qb\qquad(q=1,2,3,\cdots) \tag{140}$$

时,

$$r\delta_1-s\delta_2=qk_0\varepsilon \tag{141}$$

而$|r\delta_1-s\delta_2|$各值的范围是$|q\varepsilon\Delta k_0|$,不超过$2\pi q$;对r和s的这些值来说,(138)式中余弦项的积分不一定可以忽略,因而得到

$$I^{(t)}(\varepsilon)\approx\frac{\mathcal{T}_1^2\mathcal{T}_2^2}{(1-\mathcal{R}_1^2)(1-\mathcal{R}_2^2)}\int i^{(i)}(k_0)\left(1+2\sum_{q=1}^{\infty}(\mathcal{R}_1^a\mathcal{R}_2^b)^q\cos qk_0\varepsilon\right)\mathrm{d}k_0 \tag{142}$$

(142)式积分号内的级数,和单色波情况下单块板透射强度表达式(133)中所包含的那个级数是等同的,其闭合式已于7.6.1节中求得[见(13)式]。因此由比较可立即写出本处级数之和:

$$1+2\sum_{q=1}^{\infty}(\mathcal{R}_1^a\mathcal{R}_2^b)^q\cos qk_0\varepsilon=\frac{1-(\mathcal{R}_1^a\mathcal{R}_2^b)^2}{(1-\mathcal{R}_1^a\mathcal{R}_2^b)^2+4\mathcal{R}_1^a\mathcal{R}_2^b\sin^2\dfrac{k_0\varepsilon}{2}} \tag{143}$$

代入(142)式,得到

① 这时,如将(133)式对所有光谱成分进行积分,则可显见,δ的范围比2π大得多就意味着,不管用哪块板,透射强度实际均与δ无关,即没有条纹。

② 从(137a)式到(142)式,严格的证明需要更细致的考虑。

$$I^{(t)}(\varepsilon)=\frac{\mathcal{T}_1^2\mathcal{T}_2^2[1-(\mathcal{R}_1^a\mathcal{R}_2^b)^2]}{(1-\mathcal{R}_1^2)(1-\mathcal{R}_2^2)(1-\mathcal{R}_1^a\mathcal{R}_2^b)^2}\int\frac{i^{(i)}(k_0)}{1+B\sin^2\left(\dfrac{k_0\varepsilon}{2}\right)}\mathrm{d}k_0 \tag{144}$$

式中

$$B=\frac{4\mathcal{R}_1^a\mathcal{R}_2^b}{(1-\mathcal{R}_1^a\mathcal{R}_2^b)^2} \tag{145}$$

与(15b)式比较,我们看到强度分布(144)式等效于各单色强度分布的叠加,每一单色分布都是图 7.58 所示的那种形式。这些分布的强度极大发生在 $k_0\varepsilon$ 等于 2π 整数倍时,即

$$\varepsilon=m\lambda_0,\qquad |m|=0,1,2,\cdots \tag{146}$$

如果假设在(144)式所包含的光谱范围内,n_1',n_2',ϕ_1/k_0 和ϕ_2/k_0 均为常数,则各单色强度分布的零序极大($\varepsilon=0$)重合在一起,构成中央条纹。根据(139)和(135)两式,这个条纹在透镜 L 焦平面上的位置(见图 7.80)由下式决定:

$$\frac{n_2'h_2\cos\theta_2'+c_2}{n_1'h_1\cos\theta_1'+c_1}=\frac{a}{b} \tag{147}$$

式中 c_1,c_2 分别是ϕ_1/k_0,ϕ_2/k_0 的值。在中央条纹两边,当$|\varepsilon|$增加时,各成分的图样将相互错开,因为各个图样的尺度正比于波长,于是条纹的清晰度变差。采用白光观测时,在(147)式所给定的位置上有一条白色中央条纹,两边有若干彩色的极大和极小,再往外,眼睛看到的就是均匀照明了。这些条纹叫做**叠加条纹**,它们是多光束的布儒斯特条纹(见 7.5.6 节),像布儒斯特条纹一样,是一条条直线,平行于两板夹劈的劈棱,并且间距反比于劈角 α。

按照法布里和比松(H. Buisson)[①] 所提出的方法,叠加条纹可用来测定两个法布里-珀罗标准具的光学厚度差,这两个标准具的光学厚度之比非常接近整数 a。为此,将一标准具固定,另一标准具调斜到白色中央条纹通过 O,O 是透镜 L 对固定标准具正透射光的焦点(见图 7.80)。如果固定的是第一个标准具,则 $\theta_1=\theta_1'=0$,$\theta_2=\alpha$,α 是二标准具的夹角。因 α 很小,故由折射定律可知,$\theta_2'\approx n\alpha/n_2'$,式中 n 是标准具周围空气的折射率;$\cos\theta_2'\approx 1-\theta_2'^2/2\approx 1-n^2\alpha^2/2\,n_2'^2$;而由(147)式,取 $b=1$,保留到 α 二次项,有

$$(n_2'h_2+c_2)-a(n_1'h_1+c_1)=\frac{n^2h_2}{2n_2'}\alpha^2 \tag{148a}$$

换过来,如果固定的是第二个标准具,则当

$$a(n_1'h_1+c_1)-(n_2'h_2+c_2)=\frac{n^2ah_1}{2n_1'}\alpha^2 \tag{148b}$$

时,白色中央条纹出现于 O 点,只要$|a(n_1'h_1+c_1)-(n_2'h_2+c_2)|$这个差足够小,则即使像有时采取的那样,把标准具抽空,也可取 $n_1'=n_2'=n$。因而,测量了 α 即得到上述差值(以其中一个标准具的光学厚度为计算单位)。在这种测量中,a 值曾高达 10。

巴雷耳(H. Barrell)和西尔斯(J. E. Sears)曾采用一个类似的装置(只是两标准具的厚度接近

① C. Fabry and H. Buisson, *Journ. de Phys.* (5), **9**(1919), 189。

相等)来测定空气的折射率和色散[①]。测量时,先将两标准具抽空,将其一调斜,使得准单色光产生间距合适的条纹,然后将空气徐徐放入固定的标准具中,同时计下通过 O 点的条纹数 Δm。设准单色光的平均波长为$\bar{\lambda}_0$,固定标准具的厚度为 h,空气的折射率为 n,则空气的放入使 ϵ 发生改变 $\Delta\epsilon = 2(n-1)h$,而由(146)式,

$$\Delta m = \frac{\Delta\varepsilon}{\bar{\lambda}_0} = \frac{2(n-1)h}{\bar{\lambda}_0} \tag{149}$$

如果知道了 h 和$\bar{\lambda}_0$,即可由此得到$(n-1)$。

7.7 波长与标准米的比较

长度的标准以前是刻在一根铂-铱合金杆上的两条刻线在 0℃温度时的距离。这根合金杆保存在法国,称为**国际米原器**。正像我们在 7.6.4 节中说过的那样,光学波长与实际长度的关系,是通过将镉红线(6438 埃)波长与这一长度标准进行比较而建立起来的。1892 年,迈克耳孙和贝诺瓦(J. R. Benoit)[②]用一种迈克耳孙干涉仪首次作了这种比较,但 1905 年贝诺瓦、法布里和珀罗[③]又重复作了测量,并提高了测量准确度。他们用了 5 个法布里-珀罗标准具,长度分别近似为 6.25 厘米,12.5 厘米,25 厘米,50 厘米和 100 厘米。先用剩余小数法测定出最短标准具的长度合多少个镉红线波长,这个方法只需要知道足够精确的波长比(见 7.6.4 节),而不需要精确知道各波长的实际数值。然后,借助白光条纹将每个标准具的长度,按短长次序与后一个进行比较。在比较时,将两个标准具平行放置,用白光照射,并令其透射光通过两个半镀银平面所夹成的薄空气劈。在这种情况下,有类似于 §7.6.8(b)所描述的条纹定域在劈上,在中央条纹处,劈的厚度等于长标准具长度与两倍短标准具长度之差。劈的厚度事先已用镉红线校准好,于是这一差值合多少个镉红线波便可知道。经如此 4 次接替比较后,即可定出 100 厘米标准具的长度合多少个波长。最后,再测量这个标准具和一个米原器复制品的长度差。这部分实验包括用高质量的移测显微镜来测量米尺分度两端线与标准具两端板侧边上同样刻线的距离,后二刻线与标准具两反射面的各自距离则由另一补充实验测定。所得的最后结果是,在 15℃和 760 毫米汞压力的干燥空气中,镉红线的波长是 6438.4696×10^{-10} 米,其中干涉量度的概然误差约为千万分之一(1×10^{-7})。

后来,又有几家实行标准化的实验室对镉红线波长和米的关系进行了测量[④],采用的方法与贝诺瓦、法布里和珀罗的或相同,或原理相似。西尔斯和巴雷耳[⑤]的实验是很有意思的,因为他们能够直接测量真空波长。他们只用了三个法布里-珀罗标准具,最长的略大于 1 米,其余两个大约是它的 1/3 和 1/9。间隔圈是殷钢空心圆柱,和标准具板相贴的两个端面是光学平的,并且镀了铬,这样形成的接合是气密的,所以可将标准具抽空。最短标准具的长度合多少个波长用剩余小数法测定,而各标准具的接替比较则借助 7.6.8 节中所描述的叠加条纹。最

① H. Barrell and J. E. Sears, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A, **238**(1939), 1。

② A. A. Michelson and J. R. Benoit, *Trav. et Mem. Bur. Int. Poids et Mes.*, **11**(1895), 1。

③ J. R. Benoit, C. Fabry and A. Perot, *Trav. et Mem. Bur. Int. Poids et Mes.*, **15**(1913), 1。

④ 关于参考资料,见 H. Barrell, *Proc. Roy. Soc.*, A, **186**(1946), 164。

⑤ J. E. Sears and H. Barrell, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A, **231**(1932), 75; **233**(1934), 143。

长的标准具足以容纳一个标长为 1 米的钢质端规。端规抛光面与标准具反射面之间的距离是多少个波长，系由观测它们在无穷远处产生的反射条纹来测定。这样就得到了以镉红线波长计算的端规长度，准确度约为亿分之二(2×10^{-8})。最后，按端标准器和线标准器相比较的规范程序，将此端规和米的一个复制品进行比较①。

当将所有测定结果一律折合成标准空气(15℃和 760 毫米汞压力的空气，不含水蒸气，含 0.03%的二氧化碳)中的波长时，得到平均值为 6438.4696×10^{-10} 米，这碰巧就是用来定义埃(Ångström)的那个值。任何一个测定值跟平均值的最大偏差约为三百万分之一，即 1 米最大约差 3×10^{-4} 毫米。这比米原器及各实验所用复制品的分度线宽度都小得多，毫无疑问，它代表移测显微镜的测量误差范围。干涉量度的测量精密度可以高得多，所以人们很自然地就考虑用某光谱线的波长来定义米，以之取代实物基准。

1954 年，国际权度委员会采纳了这样的建议②，但是要求新的定义应与镉红线波长的数值 6438.4696×10^{-10} 米一致，以求尽可能保持长度标准的连续性。1958 年，该委员会决定③在可供选用的光谱线当中，以氪^{86} 6056 埃(对应于能级跃迁 $2p_{10}\sim5d_5$)这条线最为适当；而且根据 5 个不同实验室的测量，建议 1 米应定义为正好是这一辐射的 1 650 763.73 个真空波长。1960 年，第 11 届国际权度大会一致同意了这一定义④。因此，波长的基准和长度的基准现在是一个，而 1 埃正好是 10^{-10} 米。

① 详见 J. E. Sears, *Proc. Roy. Soc.*, A, **186**(1946), 152。

② *Proc. Verb. Com. Int. Poids et Mes.*, **24**(1954)2。

③ *Proc. Verb. Com. Int. Poids et Mes.*(2), **26 – B**(1958)M.30。

④ *C. R.* 11me *Conf. Gén. Poids et Mes.*(Paris, Gauthier-Villars, 1960)pp.51, 85。

第 8 章　衍射理论基础

8.1　引言

前面，从一般电磁场过渡到以很高频率（很短波长）为特点的光学场时，我们发现，在某些区域，能量传播的简单几何模型是不适用的。特别是，我们看到，在紧靠阴影边界的地方和在大量光线相遇的区域，必然要跟这个模型发生偏离。这些偏离表现在出现有亮带和暗带，即衍射条纹。衍射理论主要是讨论这些特殊地区中的场。由于这种区域包括了光学像所在的那部分空间（焦点区），因而它们具有重要的实际意义。

第一个提到衍射现象的，是达·芬奇（L. da Vinci，1452—1519）的著作。然而，这种现象是首先由格里马耳迪在他的书中给以准确描述的，这本书在他死后两年即 1665 年出版。当时，微粒理论已被人们广泛相信可以正确描述光的传播，但它不能解释衍射现象。第一个提出波动理论的惠更斯，似乎不曾知道格里马耳迪的发现，否则他无疑会引用来支持自己的见解。在大约 1818 年以前，一直没有人注意到有可能根据波动理论说明衍射效应。1818 年，菲涅耳的著名论文问世（见“历史引言”）。他在这篇论文中证明，应用惠更斯作图（见 3.3.3 节），结合干涉原理，能够解释衍射现象。菲涅耳的分析后来由基尔霍夫给以完善的数学基础（1882 年）。从此以后，许多作者对这个问题进行了广泛讨论[①]。

衍射问题是光学中遇到的最困难的问题之一。在衍射理论中，那种在某种意义上可以认为是严格的解，是很少有的。迟至 1896 年，才由索末菲给出了第一个这样的解，他在一篇重要论文中讨论了一个完全导电的半无限平面屏对平面波的衍射。此后，对少数其他衍射问题（主要是二维问题）也求得了严格解（见第 11 章）。但是，由于数学上的困难，在大多数有实际意义的情况中，还必须采用近似方法。在这些方法中，惠更斯-菲涅耳理论是最富成效的，它适用于处理仪器光学中所遇到的大多数问题。这个理论和它的某些应用构成本章的主要题材。

8.2　惠更斯-菲涅耳原理

按照惠更斯作图法（见 3.3.3 节），波阵面上的每一点可以认为是产生球面子波的一个次级扰动中心，而以后任何时刻的波阵面则可看做是这些子波的包络。菲涅耳对惠更斯作图法进行了补充，假定这些次级子波相互干涉，从而说明了衍射现象。惠更斯作图法加上干涉原理，就称为**惠更斯-菲涅耳原理**。在应用它来研究衍射效应之前，我们先来证明这个原理（再加上一些简单的假设）可正确描述光在自由空间的传播。

---

① 关于衍射问题的发展历史，更为完全的叙述，见 C. F. Meyer, *The Diffraction of Light, X-rays, and Material Particles* (Chicago, The University Press, 1934)。

设 S(见图 8.1)是从点源 P_0 发出的一个球面单色波阵面的瞬时位置,其半径为 r_0,并设 P 点是光扰动待定的一点。略去时间周期因子 $e^{-i\omega t}$,则波阵面 S 上某点 Q 的扰动可表成为 Ae^{ikr_0}/r_0,其中 A 是离点源单位距离处的振幅。按照惠更斯-菲涅耳原理,波阵面 S 上每一面元可看做是一个次级扰动的中心,这个扰动以球面子波的形式传播,这样便得到 Q 点 dS 面元对 P 点扰动的贡献

$$dU(P) = K(\chi)\frac{Ae^{ikr_0}}{r_0}\frac{e^{iks}}{s}dS$$

式中 $s = QP$,$K(\chi)$是一**倾斜因子**,描写次级波振幅随方向的变化,χ 是 Q 点法线与 QP 方向的夹角(常称为**衍射角**)。依照菲涅耳的做法,我们假定,在原来的传播方向上,即 $\chi = 0$ 时,K 最大,并假定 χ 增加时 K 迅速减小,在 QP 与波阵面相切,即 $\chi = \pi/2$ 时,K 为零;最后假定,如果 P_0 与 P 之间有障碍物,就只有未被挡住的那部分初级波 S' 才对 P 点的效应有贡献。因此,P 点的总扰动

$$U(P) = \frac{Ae^{ikr_0}}{r_0}\iint_S \frac{e^{iks}}{s}K(\chi)dS \tag{1}$$

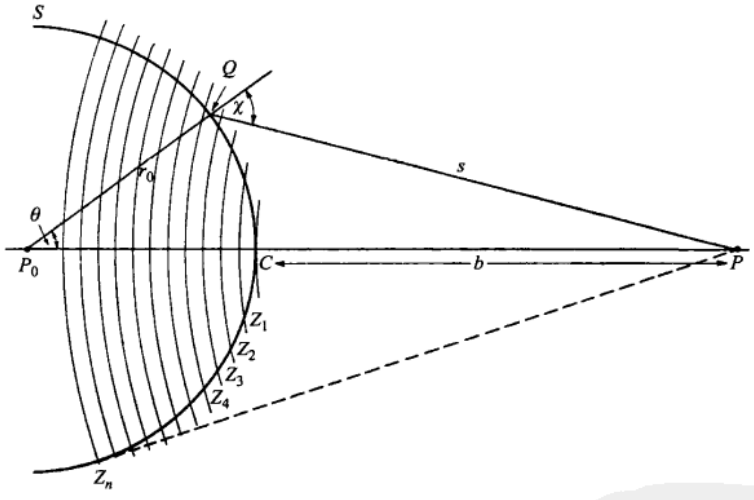


图 8.1　菲涅耳波带作图法

为了计算(1)式,采用所谓菲涅耳**波带作图法**。以 P 点为中心,作一组半径为

$$b,\quad b+\frac{\lambda}{2},\quad b+\frac{2\lambda}{2},\quad b+\frac{3\lambda}{2},\quad \cdots,\quad b+\frac{j\lambda}{2},\quad \cdots$$

的球面,其中 $b = CP$,C 是 P_0P 与波阵面 S 的交点(见图 8.1)。这些球面将 S 分成一组波带 $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots, Z_j, \cdots$。

我们假定,r_0 和 s 都比波长大得多;因此对于同一个波带上的点,可以假定 K 值相同,为 K_j。从图可知

$$s^2 = r_0^2 + (r_0 + b)^2 - 2r_0(r_0 + b)\cos\theta$$

因而

$$s\,\mathrm{d}s = r_0(r_0 + b)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{2}$$

所以

$$\mathrm{d}S = r_0^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \frac{r_0}{r_0 + b}s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\phi$$

ϕ是方位角。因此,第 j 个波带对 $U(P)$的贡献为

$$U_j(P) = 2\pi\frac{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}}{r_0 + b}K_j\int_{b+(j-1)\lambda/2}^{b+j\lambda/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks}\,\mathrm{d}s$$

$$= -\frac{2\pi i}{k}K_j\frac{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_0+b)}}{r_0 + b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kj\lambda/2}(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\lambda/2})$$

因 $k\lambda = 2\pi$,最后两个因子遂化为

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kj\lambda/2}(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\lambda/2}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi j}(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}) = (-1)^j 2$$

所以

$$U_j(P) = 2i\lambda(-1)^{j+1}K_j\frac{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_0+b)}}{r_0 + b} \tag{3}$$

可以注意,各波带的贡献是依次一正一负的。对所有贡献取和,就得到 P 点的总扰动:

$$U(P) = 2\mathrm{i}\lambda\frac{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_0+b)}}{r_0 + b}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}K_j \tag{4}$$

现在可以用舒斯特(Schuster)方法[①]对级数

$$\Sigma = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}K_j = K_1 - K_2 + K_3 - \cdots + (-1)^{n+1}K_n \tag{5}$$

近似求和。

首先将(5)式写成如下形式:

$$\Sigma = \frac{K_1}{2} + \left(\frac{K_1}{2} - K_2 + \frac{K_3}{2}\right) + \left(\frac{K_3}{2} - K_4 + \frac{K_5}{2}\right) + \cdots \tag{6}$$

最后一项为$\frac{1}{2}K_n$ 或$\frac{1}{2}K_{n-1} - K_n$,视 n 为奇数或偶数而定。关于方向变化的规律,暂先假定它是这样,即 K_j 大于它两个邻项 K_{j-1}和 K_{j+1}的算术平均值。于是,(6)式中各括号项都是负的,结果

$$\left.\begin{aligned}\Sigma &< \frac{K_1}{2} + \frac{K_n}{2}, && n\text{ 为奇数}\\ \Sigma &< \frac{K_1}{2} + \frac{K_{n-1}}{2} - K_n, && n\text{ 为偶数}\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

(5)式也可以写成这样的形式:

$$\Sigma = K_1 - \frac{K_2}{2} - \left(\frac{K_2}{2} - K_3 + \frac{K_4}{2}\right) - \left(\frac{K_4}{2} - K_5 + \frac{K_6}{2}\right) - \cdots \tag{8}$$

① A. Schuster, *Phil. Mag.* (5), **31** (1891), p. 77。

当 n 是奇数时，最后一项为 $-\frac{1}{2}K_{n-1}+K_n$，当 n 是偶数时为 $-\frac{1}{2}K_n$。因此

$$\left.\begin{aligned}\Sigma &> K_1-\frac{K_2}{2}-\frac{K_{n-1}}{2}+K_n \quad (n\text{为奇数})\\ \Sigma &> K_1-\frac{K_2}{2}-\frac{K_n}{2} \qquad\qquad (n\text{为偶数})\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

各个 K_j 和它的邻项 K_{j-1}，K_{j+1} 相差甚微，因而(7)和(9)两式中对应关系式的右边实际相等，因此近似地有

$$\left.\begin{aligned}\Sigma &= \frac{K_1}{2}+\frac{K_n}{2} \quad (n\text{为奇数})\\ \Sigma &= \frac{K_1}{2}-\frac{K_n}{2} \quad (n\text{为偶数})\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

当各个 K_j 小于它两个邻项的算术平均值，因而(6)和(8)两式中各括号项都是正的时候，也很容易证明(10)式仍然成立。此外，甚至当各括号项中只有一些是负的，而其余是正的时候，仍可期望(10)式有效，因为这时可以按照各括号项的正、负将级数分成两部分，而后对每部分进行同样的论证。因此，我们得出如下结论：(10)式给出了级数(5)的和，除非(6)和(8)两式中各括号项的符号改变得如此频繁，以致误差项加起来达到了可观的数值。如果我们排除后一种情况，则由(10)和(4)两式可以得到

$$U(P)=\mathrm{i}\lambda(K_1\pm K_n)\frac{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_0+b)}}{r_0+b} \tag{11}$$

当 n 是奇数时式中取正号，偶数时取负号。利用(3)式，可将(11)式写成

$$U(P)=\tfrac{1}{2}[U_1(P)+U_n(P)] \tag{12}$$

对于从 P 点能够看到的最后一个波带(Z_n)，QP 是与波阵面 S 相切的，即 $\chi=\pi/2$。如前所述，对此 χ 值，K 已假定为零。因此 $K_n=0$，(11)式化为

$$U(P)=\mathrm{i}\lambda K_1\frac{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_0+b)}}{r_0+b}=\tfrac{1}{2}U_1(P) \tag{13}$$

此式表明，P 点的总扰动等于第一个波带所产生的扰动之半。

如果设

$$\mathrm{i}\lambda K_1=1$$

即如果

$$K_1=-\frac{\mathrm{i}}{\lambda}=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}}{\lambda} \tag{14}$$

则方程(13)与球面波作用的表达式相一致。因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}$ 可以由假定次级波的振动位相与初级波差 1/4 周期来说明；另一因子则可由假定次级振动与初级振动振幅之比为 $1:\lambda$ 来解释。因此我们可得出结论：惠更斯-菲涅耳原理，加上关于次级波振幅和位相的这些假定，可导出球面波在自由空间传播的正确表达式。但是，这些附加假定必须看做纯粹是解释数学表达式的一种权宜之计，并无任何物理意义；因子(14)的证明后面(见 8.3 节)即可看到。

现在仍然依照菲涅耳的做法,用一个开有圆孔的平面屏放在 P_0 和 P 之间(与 P_0P 垂直,圆心在 P_0P 上)挡住某些波带,看 P 点的效应如何。这时,必须认为只有未被屏挡住的那些波带的子波才对 P 点的总扰动有贡献。如果各波带除第一个的一半以外,全都被屏遮住,则由(3)式取 $j=1$ 并乘以 1/2,得到

$$U(P)=\mathrm{i}\lambda K_1\frac{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_0+b)}}{r_0+b}=\frac{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_0+b)}}{r_0+b} \tag{15}$$

因此这时 P 点的扰动和没有屏时一样。如果留下第一个波带而遮住其他,则由(3)式得到

$$U(P)=2\mathrm{i}\lambda K_1\frac{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_0+b)}}{r_0+b}=2\frac{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_0+b)}}{r_0+b} \tag{16}$$

因而这时强度 $I(P)=|U(P)|^2$ 比没有屏时要大 3 倍。当圆孔再进一步增大时,强度 $I(P)$将下降,因为(4)式中头两项的符号相反。此外,由于 K_1 和 K_2 近乎相等,因而当圆孔近似等于头两个波带时,P 点将几乎完全黑暗。这样,当圆孔的大小改变时,P 点的强度呈现周期的亮暗变化。当固定圆孔的大小和点源 P_0,而令观察点 P 的位置沿轴线移动时,也可得到同样的结果;因为这时随着 P 向屏逐渐靠近,圆孔所容纳的波带数目不断增多。

当圆孔的半径比屏到观察点 P 的距离小得多时,圆孔所容纳的波带总数有一个简单的算式。举例来说,设圆孔半径为 a,圆心在 C 点,孔面垂直于 P_0P(见图 8.1)。这时圆孔内最靠外的菲涅耳波带(设为第 N 个)的作图半径($s=b+N\lambda/2$)和 P 点到孔边的距离大致相等,即

$$b+\frac{N\lambda}{2}=\sqrt{b^2+a^2} \tag{17}$$

当 $a\ll b$ 时,$\sqrt{b^2+a^2}\approx b+(b/2)(a/b)^2$。将此代入(17)式,得到

$$N=\frac{a^2}{b\lambda} \tag{18}$$

数 N 代表圆孔内的波带数,称为系统的**菲涅耳数**。这一参量在激光共振腔理论中亦有重要作用[①]。

所有这些结果都与实验很好地一致。当时,菲涅耳理论的一个预见,给他同时代的人留下了强烈的印象,事实上,它成为决定性因素之一,使得光的微粒理论和波动理论间的长期论战以后者获胜而暂告结束。它是关于当用一个小圆盘垂直于 P_0P 放置并挡掉第一个波带时所产生的效应。按照(5)式,这时 P 点的复振幅为

$$U(P)=2\mathrm{i}\lambda\frac{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_0+b)}}{r_0+b}[-K_2+K_3-K_4+\cdots] \tag{19}$$

按照和前面同样的论证,括号中级数的和为 $-K_2/2$。因为 K_2 假定和 $K_1=1/\mathrm{i}\lambda$ 相差甚微,所以结论是小圆盘几何阴影内应该有光,而且 P 点的强度和没有小圆盘时一样[②]。

---

① 见例如 A. E. Siegman, *Lasers* (Mill Valley, University Science Books, 1986), pp. 769—70。

② 泊松(S. D. Poisson)于 1818 年根据菲涅耳理论推断,在小圆盘阴影中心应该出现一个亮斑。当时,泊松是法国科学院菲涅耳获奖论文审查委员会的一名委员,他似乎已经认为这个结论与实验矛盾,因而可驳倒菲涅耳理论。但是,委员会的另一委员阿拉果做了这个实验,发现这一令人惊奇的预见是正确的。Maraldi 在一个世纪以前曾做过同样的观察,但是它已被人们遗忘了。

8.3　基尔霍夫衍射理论

8.3.1　基尔霍夫积分定理

惠更斯-菲涅耳理论的基本概念是，P 点的光扰动是由此点和光源之间某个面上所发的各个次级波叠加而成的。基尔霍夫给这个概念奠定了比较完善的数学基础①。他指出，惠更斯-菲涅耳原理可以看做是某种积分定理②的近似形式，这个积分定理将齐次波动方程在场中任一点 P 的解，用 P 点周围任一闭合面上所有各点的解及其一阶微商来表出。

首先考虑一个严格单色的标量波

$$V(x, y, z, t) = U(x, y, z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{1}$$

在真空中，与空间有关的部分 U 满足与时间无关的波动方程

$$(\nabla^2 + k^2)U = 0 \tag{2}$$

式中 $k = \omega/c$。方程(2)又称为亥姆霍兹(Helmholtz)方程。

设 v 是闭合面 S 所包围的体积，P 是 S 内任一点；假定 U 在 S 内和 S 上具有连续的一阶和二阶偏微商。如果 U' 是任一其他函数，和 U 满足同样的连续性条件，则由格林定理，有

$$\iiint_v (U\nabla^2 U' - U'\nabla^2 U)\mathrm{d}v = -\iint_S \left(U\frac{\partial U'}{\partial n} - U'\frac{\partial U}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \tag{3}$$

式中 $\partial/\partial n$ 表示沿 S 面**内向**法线的微商③。特别是，如果 U' 也满足与时间无关的波动方程，即如果

$$(\nabla^2 + k^2)U' = 0 \tag{4}$$

则由(2)和(4)两式可立即推出，(3)式左边被积函数在 v 的每一点都为零，因而

$$\iint_S \left(U\frac{\partial U'}{\partial n} - U'\frac{\partial U}{\partial n}\right)\mathrm{d}S = 0 \tag{5}$$

设 $U'(x, y, z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ks}/s$，其中 s 代表 P 点到 (x, y, z) 点的距离。这个函数于 $s = 0$ 时有一个奇异点。因为 U' 已假定是连续且可微商的，所以 P 点必须从积分中除掉。为此围绕 P 点作一个半径为 ϵ 的小球，而对面 S 和小球面 S' 之间的整个体积取积分(见图 8.2)。于是取代(5)式而有

$$\left\{\iint_S + \iint_{S'}\right\}\left[U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks}}{s}\right) - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks}}{s}\frac{\partial U}{\partial n}\right]\mathrm{d}S = 0$$

---

① G. Kirchhoff, *Berl. Ber.* (1882), 641; *Ann. d. Physik.* (2), **18** (1883), 663; *Ges. Abh. Nachtr.*, 22。
基尔霍夫理论适用于标量波的衍射。正如 8.4 节将要证明的，标量理论通常完全适用于处理仪器光学的大多数问题。
许多作者提出了惠更斯-菲涅耳原理的矢量推广。第一个圆满的推广出自 F. Kottler, *Ann. d. Physik*, **71** (1923), 457; **72** (1923), 320[见 B. B. Baker and E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle* (Oxford, Clarendon Press, 2nd edition, 1950), p. 114]。

② 单色波情况的这个定理在早些时候已由亥姆霍兹(H. von Helmholtz)在声学中导出，见 *J. f. math.*, **57** (1859), 7。

③ 格林定理通常是用外向法线来表示的，但是在本节应用中，采用内向法线更为方便。

由此,

$$\iint_S \left[U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{iks}}{s}\right)-\frac{e^{iks}}{s}\frac{\partial U}{\partial n}\right]dS=-\iint_{S'}\left[U\frac{e^{iks}}{s}\left(ik-\frac{1}{s}\right)-\frac{e^{iks}}{s}\frac{\partial U}{\partial n}\right]dS'$$
$$=-\iint_{\Omega}\left[U\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}\left(ik-\frac{1}{\varepsilon}\right)-\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}\frac{\partial U}{\partial s}\right]\varepsilon^2\,d\Omega \tag{6}$$

式中 $d\Omega$ 代表一个元立体角。因为对 S 的积分与 ε 无关,所以右边的积分可以用它在 $\varepsilon\to 0$ 时的极限值来代替;在极限时,该积分的第一项和第三项没有贡献,而第二项的总贡献是 $4\pi U(P)$。因此,

$$U(P)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{iks}}{s}\right)-\frac{e^{iks}}{s}\frac{\partial U}{\partial n}\right]dS \tag{7}$$

这是**亥姆霍兹-基尔霍夫积分定理**的一种形式[①]。

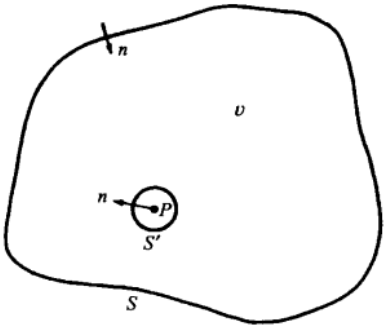


图 8.2 亥姆霍兹-基尔霍夫积分定理推导:积分区

可以注意,当 $k\to 0$ 时,与时间无关的波动方程(2)化为拉普拉斯方程 $\nabla^2 U=0$,(7)式则变成熟知的势论公式

$$U(P)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{s}\right)-\frac{1}{s}\frac{\partial U}{\partial n}\right]dS \tag{8}$$

设 P 点在 S 面外边,但仍假定 U 在 S 内是连续的,并且可微商到二阶,此外如果同前,仍取 $U'=e^{iks}/s$,则(3)式在 S 以内整个体积中都保持有效。按照(5)式,这时面积分为零。

亥姆霍兹-基尔霍夫定理还有一种与(7)式互补的形式,它属于这种情况:波源在闭合面 S 内,而 U 在 S **外**和 S 上是连续的,并且可微商到二阶。但是,正像波在无穷媒质中传播时的其他问题一样,这时 S 上的边值已不足以惟一地确定 P 点的解,还必须再对 $s\to\infty$ 时解的性质作某些假设。然而,关于这一情况的讨论,须请读者参阅它处[②]。

---

① 这个定理用 S 面上 U 和 $\partial U/\partial n$ 二者的值来表示 $U(P)$。然而,从格林函数理论可以证明,仅仅用 S 面上的 U 值或 $\partial U/\partial n$ 值就足以确定 S 内每一点 P 的 U 值[例如,见 F. Pockels: *Über die Partielle Differentialgleichung* $(\nabla^2+k^2)U=0$ (Leipzig, Teubner, 1891)]。然而,只有在最简单的情况,例如,当 S 是平面时,才可能决定出合适的格林函数[见 A. Sommerfeld, *Optics* (New York, Academic Press, 1954), p. 199]。这时所得到的 $U(P)$ 表达式称为瑞利衍射积分,有关推导见后面 8.11 节。

② 例如,见 B. B. Baker and E. T. Copson, *loc. cit.*, p. 26。

以上讨论的是严格单色波情况。现在来推导基尔霍夫定理的普遍形式，它可用于不一定是单色的波。

设 $V(x,y,z,t)$ 是波动方程

$$\nabla^2 V = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{9}$$

的一个解，并假定 V 可表成傅里叶积分的形式：

$$V(x,\ y,\ z,\ t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} U_\omega(x,\ y,\ z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{10}$$

于是，由傅里叶反演公式，

$$U_\omega(x,\ y,\ z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} V(x,\ y,\ z,\ t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{11}$$

因为 $V(x,y,z,t)$ 已假定满足波动方程(9)，所以 $U_\omega(x,y,z)$ 将满足与时间无关的波动方程(2)。此外，如果 V 在闭合面 S 内和 S 上服从适当的正则条件，就可以分别对各个傅里叶成分 $U_\omega(x,y,z)=U_\omega(P)$ 应用基尔霍夫公式：

$$U_\omega(P) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left\{U_\omega \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks}}{s}\right) - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks}}{s}\frac{\partial U_\omega}{\partial n}\right\}\mathrm{d}S \tag{12}$$

改变积分次序，并令 $k=\omega/c$，则(10)式变成

$$\begin{aligned} V(P,\ t) &= \frac{1}{4\pi}\iint_S \mathrm{d}S\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{U_\omega\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-s/c)}}{s}\right) - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-s/c)}}{s}\frac{\partial U_\omega}{\partial n}\right\}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{4\pi}\iint_S \mathrm{d}S\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{U_\omega\left\{\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{\mathrm{i}\omega}{sc}\frac{\partial s}{\partial n}\right\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-s/c)}\right. \\ &\qquad \left. - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-s/c)}}{s}\frac{\partial U_\omega}{\partial n}\right\}\mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

利用(10)式，即有

$$V(P,\ t) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left\{[V]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{cs}\frac{\partial s}{\partial n}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right] - \frac{1}{s}\left[\frac{\partial V}{\partial n}\right]\right\}\mathrm{d}S \tag{13}$$

式中方括号代表“推迟值”，即 $t-s/c$ 时刻的函数值。(13)式是**基尔霍夫定理**的普遍形式。

与前一情况相对比，同样可以看出，当 P 点在 S 面外时，(13)式中的积分为零。

(13)式中最后一项代表了一个波源分布的贡献，波源强度为每单位面积 $-(1/4\pi)(\partial V/\partial n)$，而头两项可以证明是代表一个偶极分布的贡献，偶极子的强度是每单位面积 $V/4\pi$，方向则与 S 面垂直。当然，这些波源和偶极子纯属虚构，这种解释的后面没有深刻的物理意义。

8.3.2　基尔霍夫衍射理论

虽然基尔霍夫积分定理具体表达出惠更斯-菲涅耳原理的基本概念，但不同面元的贡献所遵守的规律却比菲涅耳所假定的要复杂得多。不过，基尔霍夫证明，在许多情况下，这一定理可以化为一种近似但却大为简化的形式，它和菲涅耳的数学表述基本相同，但是它同时还给出了菲涅耳理论中尚未确定的那个倾斜因子。

考虑从点源 P_0 发出的一个单色波,它传播通过不透明平面屏上的一个开孔,并同前设 P 是光扰动待定的一点。假定开孔的线度比波长大,但比 P_0 和 P 到屏的距离都小得多。

为求得 P 点的扰动,围绕 P 点作一个闭合面 S,对它取基尔霍夫积分。闭合面 S 由三部分构成[见图 8.3(a)];(1)开孔$\mathcal{A}$,(2)不透明屏的部分背阴面$\mathcal{B}$,(3)以 P 为中心、R 为半径的大球的部分球面$\mathcal{C}$。

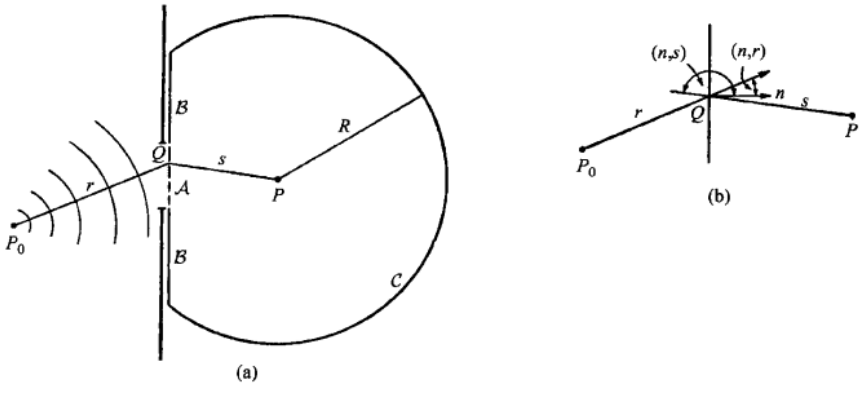


图 8.3 菲涅耳-基尔霍夫衍射公式推导图示

这时,(7)式所表达的基尔霍夫定理给出

$$U(P)=\frac{1}{4\pi}\left[\iint_{\mathcal{A}}+\iint_{\mathcal{B}}+\iint_{\mathcal{C}}\right]\left\{U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks}}{s}\right)-\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks}}{s}\right)\frac{\partial U}{\partial n}\right\}\mathrm{d}S \tag{14}$$

式中,同前,s 是 P 点到面元 $\mathrm{d}S$ 的距离,$\partial/\partial n$ 表示沿积分面内向法线取微商。

这里碰到一个困难,需要代入(14)式中的$\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$,$\mathcal{C}$上的 U 和 $\partial U/\partial n$ 值无法准确知道。不过可以假定,在$\mathcal{A}$上,除紧靠孔边以外,各点的 U 和 $\partial U/\partial n$ 同没有屏时的相差无几,而在$\mathcal{B}$上,这些量近似为零。因此,基尔霍夫令

$$\left.\begin{aligned}&\text{在}\mathcal{A}\text{上:}\ U=U^{(i)},\quad &\frac{\partial U}{\partial n}&=\frac{\partial U^{(i)}}{\partial n},\\&\text{在}\mathcal{B}\text{上:}\ U=0 &\frac{\partial U}{\partial n}&=0,\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

式中

$$U^{(i)}=\frac{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r},\qquad \frac{\partial U^{(i)}}{\partial n}=\frac{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\left[\mathrm{i}k-\frac{1}{r}\right]\cos(n,r) \tag{16}$$

是与入射场有关的值[见图 8.3(b)],A 是常数。(15)式的近似称为**基尔霍夫边界条件**,它们是**基尔霍夫衍射理论**的基础。

剩下要考虑球面部分$\mathcal{C}$的贡献。显然,使半径 R 取得足够大,可使$\mathcal{C}$上 U 和 $\partial U/\partial n$ 的值任意小。由此看来,$\mathcal{C}$的贡献似可忽略。但是,当让 R 无限增大时,$\mathcal{C}$的面积也将无限增大,所以,$R\to\infty$ 时 $U\to 0$ 和 $\partial U/\partial n\to 0$ 的条件并不足以使积分为零。因此,还必须对离屏很远处波函数的性质作更精密的假定,这一点我们在 8.3.1 节谈论无穷媒质问题中解的惟一性时已经碰到过了。从物理上看,显然可以假定,辐射场并非所有时刻都存在,而是由一个光源从某特定时

刻 $t = t_0$ 开始发射才产生的。这一假定足以作为将C的贡献忽略的理由[①]（当然，这也就意味着，我们现在偏离了严格的单色性，因为一个完全的单色场应该在所有时刻都存在）。因为，在 $t > t_0$ 的任何时刻，该场所布及的空间范围，其外边界距离 P_0 不超过 $c(t - t_0)$，c 是光速。因此，如果 R 选择得足够大，使得在讨论 P 点扰动之时，还没有C的贡献能到达 P 点（因为在再早一些的适当时刻，场还没有到达C这种遥远地区），则对C的积分将为零。将所有条件代入(14)式，并略去法线微商中的 $1/r$ 和 $1/s$ 项（因为它们比 k 小得多），最后得到

$$U(P) = -\frac{\mathrm{i}A}{2\lambda}\iint_{\mathcal{A}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r+s)}}{rs}[\cos(n, r) - \cos(n, s)]\mathrm{d}S \tag{17}$$

这称为**菲涅耳-基尔霍夫衍射公式**。

显然，任何其他开曲面，只要其边缘与孔边重合，就都可以用来代替$\mathcal{A}$。特别说来，可以选择图 8.4 的 W 和C来代替$\mathcal{A}$，其中 W 是一个入射波阵面的一部分，大小差不多正和孔径相配，而C是一个锥面的一部分，该锥的顶点在 P_0，各母线通过孔边。如果波的曲率半径足够大，则C的贡献显然可以忽略。此外，在 W 上，$\cos(n, r_0) = 1$。若再令 $\chi = \pi - (r_0, s)$，则取代(17)式而得到

$$U(P) = -\frac{\mathrm{i}}{2\lambda}\frac{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}}{r_0}\iint_W \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks}}{s}(1 + \cos\chi)\mathrm{d}S \tag{18}$$

式中 r_0 是波阵面 W 的半径。如果取

$$-\frac{\mathrm{i}}{2\lambda}\frac{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}}{r_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks}}{s}(1 + \cos\chi)\mathrm{d}S \tag{19}$$

作为波阵面面元 $\mathrm{d}W$ 的贡献，则(18)式和菲涅耳对惠更斯原理的数学表述相一致。比较一下(18)式和 §8.2(1)，就得到菲涅耳理论的倾斜因子[②]

$$K(\chi) = -\frac{\mathrm{i}}{2\lambda}(1 + \cos\chi) \tag{20}$$

对于中心波带，$\chi = 0$，(20)式给出 $K_1 = K(0) = -\mathrm{i}/\lambda$，与 §8.2(14)一致。然而，菲涅耳所假定的 $K(\pi/2) = 0$ 并不确实。

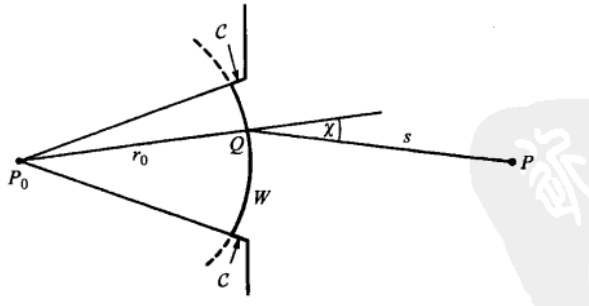


图 8.4　衍射公式(18)之图示

① 这个假定不是必要的，但是可缩短讨论。更正规的论证，见 M. Born, *Optik* (Berlin, Springer, 1933, reprinted 1965), p. 149，或 B. B. Baker and E. T. Copson, *loc. cit.*, p. 25。

② 倾斜因子表达式(20)是 G. G. Stokes 首先推导出的，见 *Trans. Camb. Phil. Soc.*, **9**(1849), 1；重印于其 *Math. and Phys. Papers*, Vol. 2 (Cambridge, Cambridge University Press, 1883), p. 243。

现在再回到菲涅耳-基尔霍夫衍射公式(17)。可以注意,这个公式对源和观测点是对称的。这意味着,**P_0 点点源在 P 点产生的效果,和 P 点同等强度的点源在 P_0 点所产生的效果相同**。这个结果有时称为**亥姆霍兹互易定理**(或**可逆定理**)。

以上我们假定,光在从光源到 P 点的路途中,除衍射屏以外,没有遇到其他任何面;这时入射波是球面的。该分析可很容易地加以推广,以包括波不再是这种简单形状的更复杂情况。结果发现,倘如波阵面各点的曲率半径比波长大得多,而所包含的角度又都足够小,则基尔霍夫理论的结果和惠更斯-菲涅耳原理推断的结果仍旧大体相同。

从上面的讨论还可立即得出关于互补屏衍射光分布情况的结论。互补屏是指这样两个屏,其中一个的开孔部分正好对应另一个的不透明部分,反之亦然,设 $U_1(P)$和 $U_2(P)$分别代表第一个屏和第二个屏单独放在光源和观察点 P 之间时的复位移,并设 $U(P)$是没有屏时的值。由于 U_1 和 U_2 可表成为对开孔部分的积分,而这两个屏开孔部分加起来正好是整个平面,因而

$$U_1 + U_2 = U \tag{21}$$

这一结果称为**巴比涅(A. Babinet)原理**[①]。

由**巴比涅**原理可立即得到两个结论:若 $U_1 = 0$,则 $U_2 = U$;因此,放上其中一个屏时强度为零的那些点,在换上另一个屏时,强度将跟没有屏时一样。此外,若 $U = 0$,则 $U_1 = -U_2$;这意味着,在 $U = 0$ 的那些点,U_1 和 U_2 的位相差 π,强度 $I_1 = |U_1|^2$ 和 $I_2 = |U_2|^2$ 相等。例如,当一个点源通过一理想透镜成像时,像平面上的光分布除点源像点 O 近旁以外,其他各处强度皆为零。这时,如果把互补屏分次一一放在物与像之间,则除 O 点附近以外,有 $I_1 = I_2$。

基尔霍夫理论基本近似(15)式的结果曾受到许多评论,例如,这些评论指出,基尔霍夫的解没有在孔平面上产生原来假定的值[②]。然而,最近沃耳夫和马钱德(E. W. Marchand)[③]证明,基尔霍夫理论可以作为另一类边值问题[边值条件与(15)和(16)两式有所不同]的严格解,从而在数学解释上成为自洽。事实表明,基尔霍夫理论完全适用于处理仪器光学中所遇到的大多数问题。这主要是因为光学波长比衍射障碍物的尺度小得多[④]。但是在其他问题中,诸如关于屏和障碍物近旁场的特性这样一些问题,就必须采用更为精确的方法;这时,必须把它们作为电磁理论的边值问题来处理,同时把源作为波函数的适当奇异点。只是在极少数情况才求得了这样的解;其中几个将在第 11 章中讨论。

---

① A. Babinet *Compt. Rend.*, **4**(1837), 638。11.3 节将给出一个类似的这种定理,它谈的是电磁场矢量,而不是单个标量 U,因而可以认为是巴比涅原理的严格表述。

② H. Poincaré, *Théorie mathématique de la lumière* [Paris, George Carré, II(1892)], pp. 187—8。又见 B. B. Baker and E. T. Copson, *loc. cit.*, pp. 71—72 和 G. Toraldo di Francia, *Atti Fond. Giorgio Ronchi*, **XI**(1956), §6。

③ E. Wolf and E. W. Marchand, *J. Opt. Soc. Amer.*, **56**(1966), 1712。此外, F. Kottler, *Ann. d. Physik*, **70**(1923), 405 也曾证明,可以认为基尔霍夫理论对某种不连续问题(Saltus problem)(给定问题的不连续条件而不是给定其边值条件)提供了一严格解。这一解释在黑屏(完全吸收屏)衍射问题上具有特别意义。[亦见 F. Kottler, *Progress in Optics*, Vol. 4, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1964), p. 281 和 B. B. Baker and E. T. Copson, *loc. cit.*, p. 98。]

C. J. Bouwkamp, *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), **17**(1954), 35 一文列有大量有关基尔霍夫理论各种修改的参考文献。

④ 见 S. Silver, *J. Opt. Soc. Amer.*, **52**(1962), 131。

8.3.3　夫琅禾费衍射和菲涅耳衍射

现在进一步细致地分析菲涅耳-基尔霍夫衍射积分(17)式

$$U(P)=-\frac{A\mathrm{i}}{2\lambda}\iint_A\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r+s)}}{rs}[\cos(n,r)-\cos(n,s)]\mathrm{d}S \tag{22}$$

当面元 $\mathrm{d}S$ 在积分区中扫动时，$r+s$ 一般将改变极多个波长，因而因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r+s)}$ 将振荡得很快。相反，如果 P_0 和 P 两点离屏的距离比孔的尺度大得多，则因子$[\cos(n,r)-\cos(n,s)]$在整个孔上变化并不显著。此外，假定直线 P_0O 和 OP 与 P_0P 的夹角都不太大，其中 O 是孔上任一点。于是可以用 $2\cos\delta$ 代替上一因子，其中 δ 是直线 P_0P 与屏法线的夹角。最后，因子 $1/rs$ 可用 $1/r's'$ 代替，其中 r' 和 s' 是 P_0 和 P 离原点的距离。于是(22)式化为

$$U(P)\approx-\frac{A\mathrm{i}}{\lambda}\frac{\cos\delta}{r's'}\iint_A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r+s)}\,\mathrm{d}S \tag{23}$$

现在取一直角参考坐标系，令原点在孔上，令 x 轴和 y 轴在孔平面上，并选取正 z 方向指向观察点 P 所在的那半空间(见图 8.5)。

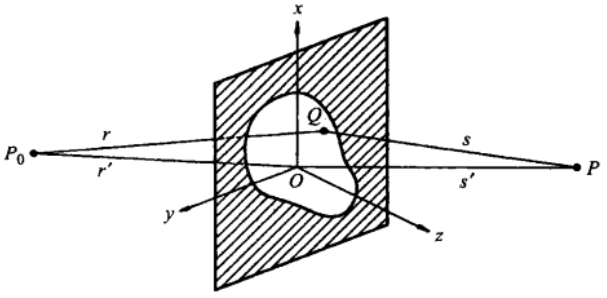


图 8.5　平面屏开孔上的衍射

设(x_0,y_0,z_0)和(x,y,z)分别是 P_0 和 P 的坐标，而(ξ,η)是孔上某点 Q 的坐标，则

$$\left.\begin{aligned}r^2&=(x_0-\xi)^2+(y_0-\eta)^2+z_0^2,\\ s^2&=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2,\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned}r'^2&=x_0^2+y_0^2+z_0^2,\\ s'^2&=x^2+y^2+z^2.\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

因此，

$$\left.\begin{aligned}r^2&=r'^2-2(x_0\xi+y_0\eta)+\xi^2+\eta^2,\\ s^2&=s'^2-2(x\xi+y\eta)+\xi^2+\eta^2.\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

由于已经假定孔的尺度比 r' 和 s' 都小得多，因而可将 r 和 s 展成 ξ/r'，η/r'，ξ/s' 和 η/s' 的幂级数。于是得到

$$\left.\begin{aligned}r&\approx r'-\frac{x_0\xi+y_0\eta}{r'}+\frac{\xi^2+\eta^2}{2r'}-\frac{(x_0\xi+y_0\eta)^2}{2r'^3}-\cdots,\\ s&\approx s'-\frac{x\xi+y\eta}{s'}+\frac{\xi^2+\eta^2}{2s'}-\frac{(x\xi+y\eta)^2}{2s'^3}-\cdots.\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

将(27)式代入(23)式,则

$$U(P)=-\frac{\mathrm{i}\cos\delta}{\lambda}\frac{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r'+s')}}{r's'}\iint_{\mathcal{A}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kf(\xi,\eta)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \tag{28}$$

式中

$$f(\xi,\eta)=-\frac{x_0\xi+y_0\eta}{r'}-\frac{x\xi+y\eta}{s'}+\frac{\xi^2+\eta^2}{2r'}+\frac{\xi^2+\eta^2}{2s'}$$
$$-\frac{(x_0\xi+y_0\eta)^2}{2r'^3}-\frac{(x\xi+y\eta)^2}{2s'^3}\cdots \tag{29}$$

设以(l_0,m_0)和(l,m)代表r'和s'的头两个方向余弦:

$$\left.\begin{aligned}l_0&=-\frac{x_0}{r'},\quad l=\frac{x}{s'},\\ m_0&=-\frac{y_0}{r'},\quad m=\frac{y}{s'},\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

则(29)式可以写成如下形式:

$$f(\xi,\eta)=(l_0-l)\xi+(m_0-m)\eta$$
$$+\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{s'}\right)(\xi^2+\eta^2)-\frac{(l_0\xi+m_0\eta)^2}{r'}-\frac{(l\xi+m\eta)^2}{s'}\right]\cdots \tag{31}$$

我们已经把求P点光扰动的问题化成为计算积分(28)式。当然,当f中ξ和η的二次项及高次项可以忽略时,这个计算比较简单。这种情况,人们称之为**夫琅禾费衍射**;而当二次项不能忽略时,人们称之为**菲涅耳衍射**。幸好,在光学中,比较简单的夫琅禾费衍射情况要重要得多。

严格地讲,只有在极限情况$r'\to\infty$,$s'\to\infty$,即光源和观察点都在无穷远时,二次项和高次项才消失(这时,积分号外的因子A须假定和$r's'$一样地趋于无穷大)。但是,如果

$$\tfrac{1}{2}k\left|\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{s'}\right)(\xi^2+\eta^2)-\frac{(l_0\xi+m_0\eta)^2}{r'}-\frac{(l\xi+m\eta)^2}{s'}\right|\ll 2\pi \tag{32}$$

则显然二次项对积分没有什么贡献。我们立即能看出满足(32)式的一些条件。利用不等式$(l_0\xi+m_0\eta)^2\leqslant(l_0^2+m_0^2)(\xi^2+\eta^2)$,并记及$l_0^2$,$m_0^2$,$l^2$和$m^2$不能超过1,则可发现,如果

$$|r'|\gg\frac{(\xi^2+\eta^2)_{\text{极大}}}{\lambda}\quad\text{并且}\quad|s'|\gg\frac{(\xi^2+\eta^2)_{\text{极大}}}{\lambda} \tag{33}$$

或者

$$\frac{1}{r'}+\frac{1}{s'}=0\quad\text{并且}\quad l_0^2,\ m_0^2,\ l^2,\ m^2\ll\frac{|r'|\lambda}{(\xi^2+\eta^2)_{\text{极大}}} \tag{34}$$

(32)式都将被满足。

从条件(33)能够估计距离r'和s'多大时可采用夫琅禾费表示。条件(34)则意味着,当观察点在平行于孔平面的某平面上时,若观察点和源都与z轴靠得足够近,则必将产生夫琅禾费衍射。这里可以区分两种情况:当r'为负时,入射到孔上的波阵面对传播方向是凹的,即P_0是入射波的会聚中心,而不是发散中心。这一情况具有很重要的实际意义。因为当用一个精心校正的共轴系统使离轴不远的点源成像时,像空间中即出现这种情况。这时,夫琅禾费衍射

图样形成在高斯像平面上，并且可以认为是由成像波在出射光瞳上衍射而产生。当 r' 为正时，波阵面对传播方向是凸的。衍射现象是虚的，表观上形成在通过源 P_0 的屏上。例如，拿一个孔放在观察远方光源的眼睛或望远物镜的前面，就会发生这种衍射情况。

为什么能在精心校正的透镜的焦平面上观察到夫琅禾费衍射现象呢？为了用较为物理的语言说明这一点，让我们先比较一下图 8.6 所表明的两种状况。在图 8.6(a)中，从无穷远一点向屏孔射来一束光线，其方向余弦为 l_0, m_0, n_0。在 l, m, n 方向上很远的一点 P，所观察到的效应可以看做是由一组起源于孔上各点并同沿这一方向传播的平面波叠加产生。这些波(它们在几何光学领域中是不存在的)可以叫做**衍射波**，相应的波法线可以叫做**衍射光线**。

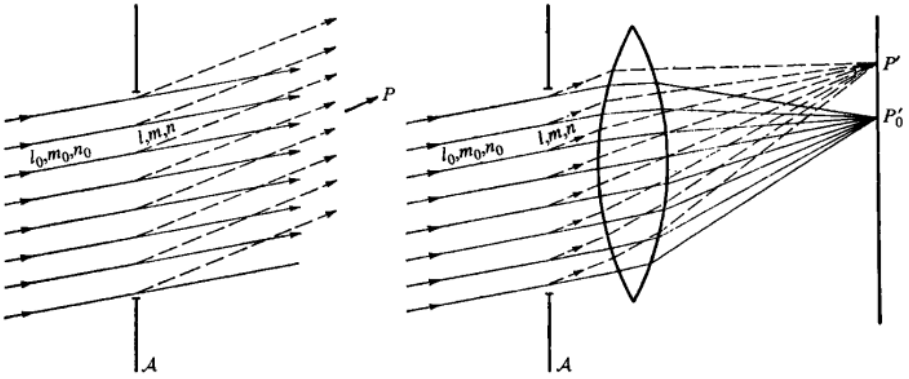


图 8.6　两种夫琅禾费衍射情况的比较

现在如果在屏后放上一块经过精心较正的透镜[见图 8.6(b)]，则(l, m, n)方向上的所有衍射光将会聚到透镜焦平面上一点 P'。因为从该衍射光束的某波阵面到 P' 点，所有光线的光程相等，所以所产生的干涉效应和第一种状况实质相同；当然，这里要假定所用透镜很大，没有引起另外的衍射。再普遍一些，平面波入射这一限制也就可以取消，只要从光源到 P' 点所有光线的光程长度实际相等。

在夫琅禾费衍射情况下，l_0, m_0, l, m 这 4 个量只是以下列组合形式出现于(31)式：

$$p = l - l_0, \qquad q = m - m_0 \tag{35}$$

因此在上述近似的有效范围内，当孔在自身平面上移动时，效应并不改变。

我们将把夫琅禾费衍射所服从的积分写成如下形式：

$$U(P) = C\iint_{\mathcal{A}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(p\xi+q\eta)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \tag{36}$$

式中 C 代表(28)式积分号前面的常数。C 是由与源和观察点位置有关的一些量来确定的，但实用上，用其他量来表示它常常更为方便。设$\mathcal{P}$是入射到孔上的总功率。按照能量守恒定律，到达观察面上的总功率必须也等于$\mathcal{P}$，所以有如下归一化条件：

$$R^2\iint |U(p, q)|^2\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q = \mathcal{P} \tag{37}$$

其中 R 是 O 点(见图 8.5)到 P_0O 与观察面交点的距离。(37)式的推导,利用了一个几何关系,即当衍射角很小时,$R^2\mathrm{d}p\mathrm{d}q$ 是衍射光线在观察面上形成的元面积,式中积分则遍及 p 和 q 的所有可能值。(36)式可改写成傅里叶积分的形式:

$$U(p,q)=\iint G(\xi,\eta)\mathrm{e}^{-\frac{2\pi i}{\lambda}(p\xi+q\eta)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \tag{38}$$

式中**光瞳函数**[①] G 为

$$\begin{aligned}G(\xi,\eta)&=\text{常数}(C)\text{(在开孔上各点)}\\&=0\qquad\quad\text{(在开孔外各点)}\end{aligned} \tag{39}$$

而积分遍及整个(ξ,η)平面。

根据傅里叶变换的帕塞瓦尔定理[②],

$$\iint|G(\xi,\eta)|^2\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2\iint|U(p,q)|^2\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q \tag{40}$$

以(37)和(39)两式代入,并以 D 代表开孔面积,即有

$$\frac{\mathcal{P}}{\lambda^2R^2}=|C|^2D \tag{41}$$

因此[③],

$$C=\frac{1}{\lambda R}\sqrt{\frac{\mathcal{P}}{D}} \tag{42}$$

于是,夫琅禾费衍射的基本积分呈如下形式:

$$U(p,q)=\frac{1}{\lambda R}\sqrt{\frac{\mathcal{P}}{D}}\iint_{\mathcal{A}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(p\xi+q\eta)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \tag{43}$$

可以注意,图样 $p=q=0$ 处的强度 $I_0=|U(0,0)|^2$ 为

$$I_0=\left(\frac{1}{\lambda R}\right)^2\frac{\mathcal{P}}{D}\left(\iint_{\mathcal{A}}\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\right)^2=\frac{\mathcal{P}D}{\lambda^2R^2}=C^2D^2 \tag{44}$$

前面推导(36)式时曾对 p 和 q 的范围做了某些限制,而这里在推导(43)式时对此项限制却置之而不顾。不过,(40)式中积分遍及所有 p 和 q 值所引进的误差是微不足道的,因为除 $p=q=0$ 附近以外,$U(p,q)$都非常小。

现在再回到基本衍射积分(28)式。当(ξ,η)点在积分区内扫动时,函数 $f(\xi,\eta)$将改变很多个波长,因而被积函数的实部和虚部都将反复多次改变符号。结果,不同面元的贡献一般将暗中相互抵消(相消干涉)。但是有一个面元情况不同,该面元中有一个特别的点,叫做**临界点**或**极点**,函数 $f(\xi,\eta)$在这个点是稳定的。在这里,被积函数变化缓慢得多,因而可以预期它将产生显著的贡献。因此,当波长足够小时,积分(28)式的值实际上取决于函数 f 在各极点附近

① 更普遍的光瞳函数将在 8.6 节和 9.5 节中讨论。

② 见 I. N. Sneddon, *Fourier Transforms* (New York, McGraw-Hill, 1951), pp. 25 and 44。

③ 这里略去了一个常数相因子,因为它对强度 $I=|U|^2$ 没有贡献。

的行为。这就是用来确定某类积分渐近行为的**稳定相方法**的原理，附录 C 中将对此给以比较详细的讨论。这里仅指出这一结果和衍射现象分类的关系：

比较一下(22)和(28)两式，可以看到 $r+s=r'+s'+f$，所以(见图 8.5)

$$f = P_0Q + QP + 常数 \tag{45}$$

显然，当 Q 与 P_0 和 P 三点共线时，f 作为 Q 点的函数将是稳定的。因此，对 P 点扰动的贡献，主要来自孔平面上 $\overline{Q}$ 点近旁地区，$\overline{Q}$ 是源点和观察点连线与孔平面的交点。在夫琅禾费衍射的特别情况下，P_0 和 P 实际上在无穷远，所以不存在择尤点 $\overline{Q}$。因此这时衍射积分的行为必定会有些例外。

在 8.5 节到 8.8 节中，我们将研究几种最重要的夫琅禾费衍射和菲涅耳衍射。但是，首先须要证明，在光强的计算中可采用单个标量波函数 U。

8.4　过渡到标量理论[①]

在推导基尔霍夫积分定理时所用的那个 U 函数，它惟一的性质是满足齐次标量波动方程。因此可以确定，这个定理和前节的结论可应用到无电流电荷区域中，场矢量、矢势、赫兹矢量等的各个笛卡儿分量。要获得对场的完全描述，必须分别对每个笛卡儿分量应用这一定理。所幸，经证明，在光学所遇到的大多数问题中，采用单个复标函数的近似描述即已足够。

对电磁场的完全描述，不但需要确定场矢量的大小，还需要确定它们的方向(偏振)，二者都是位置和时间的函数。但是，由于光学场的频率非常高(数量级为 10^{14}/秒)，所以我们不能测量这些量中任何一个的瞬时值，而只能测量在某时间间隔内的平均值，这个间隔要比光的周期大得多。此外，通常遇到的是自然光，所以可观测(宏观)场没有择尤的偏振方向。这时，首要的量是**强度** I。强度 I 的定义已见于 1.1.4 节，它是每单位时间每单位面积(在电矢量和磁矢量所决定的平面上)通过的能量的时间平均值：

$$I = \frac{c}{4\pi}|\langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle|$$

我们将证明，当自然光通过一个中等孔径和常规设计的光学仪器时，相关联的电磁场的强度可以用单个复标量波函数 U 借助下列公式近似表出[②]：

$$I = |U|^2$$

而且知道了该系统的程函，即可计算函数 U。

8.4.1　单色振子产生的像场

考虑一个对称的光学系统，在其中 P_0 点处有一点源(见图 8.7)，发射准单色的自然光，频率为 ω_0。我们假定，通过系统的各条光线对轴的倾角不大，譬如说，不大于 10°或 15°。在 P_0 点选取一组笛卡儿坐标轴(x_1, x_2, x_3)，并令 x_3 沿主光线方向。这一点源可看做是一偶极子，

① 本节基本上采用了 E. Wolf 等人的分析。见 O. Theimer, G. D. Wassermann and E. Wolf, *Proc. Roy. Soc.*, A, **212**(1952), 426。

② E. Wolf, *Proc. Phys. Soc.*, **74**(1959), 269 证明了更普遍的情况：在一个非偏振的准单色场中，(时间平均的)能量密度和能流二者总可从一个复时谐标量波函数导出。

其偶极矩 $\mathbf{Q}(t)$的大小和方向都随时间 t 而改变。$\mathbf{Q}(t)$在上述三个方向上的分量可以写成傅里叶积分形式:

$$Q_j(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}q_j(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \qquad (j=1,2,3) \tag{1}$$

因 $Q_j(t)$是实量,故可知复量 $q_j(\omega)$满足关系式

$$q_j(-\omega)=q_j^{\star}(\omega) \tag{2}$$

式中星号表示复共轭。因此(1)式可以写成为

$$Q_j(t)=\mathcal{R}\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}q_j(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega\right\} \qquad (j=1,2,3) \tag{3}$$

$\mathcal{R}$表示取实部。(3)式的每个傅里叶成分各代表一个单色赫兹振子,振子轴沿 x_j 方向。

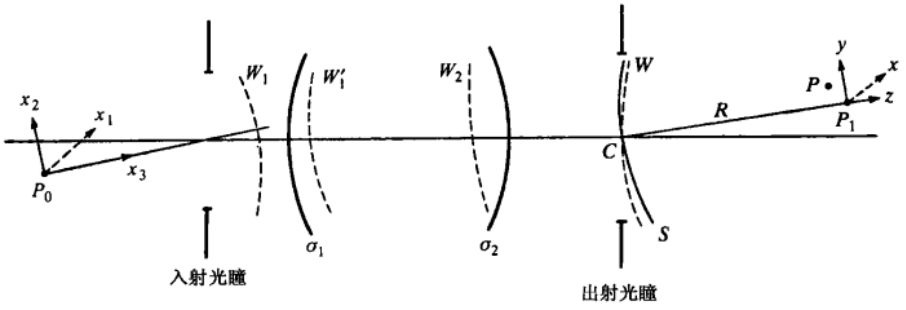


图 8.7 电磁波在光学系统中的传播

设$|q_j(\omega)|$和 $\delta_j(\omega)$是 $q_j(\omega)$的振幅和位相,

$$q_j(\omega)=|q_j(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_j(\omega)} \tag{4}$$

因为假定点源发射准单色光,所以,对于每个 j 来说,模$|q_j(\omega)|$只是在很窄的间隔$(\omega_0-\frac{1}{2}\Delta\omega,\ \omega_0+\frac{1}{2}\Delta\omega)$内才明显地不等于零。自然光这一假定则意味着,$\delta_j(\omega)$在整个频率范围内是迅速而又无规变化的函数[①]。

因为场可以看做是一组严格单色场的叠加,所以方便的做法是先考察 P_0 点单个单色赫兹振子的贡献。由于这种振子的场在其轴向附近很弱,而且入射光瞳的直径对 P_0 的张角又假定很小,因而实际上将只有 $\mathbf{Q}(t)$的 $Q_1(t)$和 $Q_2(t)$这两个分量对场有贡献。所以,我们将取轴在 x_1x_2 平面上的某一振子作为讨论典型。

设

$$\mathcal{R}\{q(\omega)\rho_0(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\} \tag{5}$$

是这个典型偶极子的矩,$\rho_0(\omega)$是其轴向上的单位矢量。在真空中,在距离 P_0 远大于波长 $\lambda=(2\pi c/\omega)$的 T 点,这样一个偶极子将产生下式所给的场[见 § 2.2(64)]:

① 关于此点,详细讨论可见 M. Planck, *Ann. d. Physik*(4),**1**(1900),61。

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}_\omega &= \mathcal{R}\left\{\frac{\omega^2}{c^2 r}|q(\omega)|\mathbf{r}_0 \times (\rho_0(\omega) \times \mathbf{r}_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\delta(\omega)-\omega(t-r/c)]}\right\},\\ \mathbf{H}_\omega &= \mathcal{R}\left\{\frac{\omega^2}{c^2 r}|q(\omega)|\mathbf{r}_0 \times \rho_0(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\delta(\omega)-\omega(t-r/c)]}\right\},\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

式中 $\mathbf{r}_0$ 代表单位径向矢量。

设 W_1 是物空间中一个典型的几何波阵面，和 P_0 的距离远大于波长。因为光线与系统轴的夹角假定很小，所以从(6)式立即可以知道，在任何特定时刻，矢量 $\mathbf{E}_\omega$ 和 $\mathbf{H}_\omega$ 的大小和方向在波阵面 W_1 上的变化不大。

第一个表面[①] σ_1 对入射场的影响有两方面。第一，场矢量的振幅因反射损失而减小；第二，振动方向发生改变。菲涅耳公式表明，这两个效应主要和入射角的大小有关。如果入射角很小(譬如说 10°左右)，则反射损失也很小(约为 5%)，并且振动面的转动不超过几度(见 1.5 节)。此外，这些效应在 σ_1 面上实际是均匀的。因为在波阵面 W_1 上，$\mathbf{E}_\omega$ 和 $\mathbf{H}_\omega$ 的时间无关部分随位置的变化不大，所以在 σ_1 面之后的折射波阵面 W_1' 上，它们的变化也不大(见图 8.7)。同样，在 σ_1 和第二个面 σ_2 之间的任何其他波阵面上，$\mathbf{E}_\omega$ 和 $\mathbf{H}_\omega$ 的行为也是如此。因为，如 3.1.3 节中所证，在一个均匀媒质中，振动方向沿每条光线保持不变，而且由于各个波阵面近似为球面(中心在第一个面所产生的 P_0 的高斯像点)，所以各点的振幅和波阵面的傍轴曲率半径差不多成反比而减小。

如此一一论证，最后到达通过出射光瞳中心 C 的波阵面 W，并且同样得到，在这个波阵面上，$\mathbf{E}_\omega$ 和 $\mathbf{H}_\omega$ 的时间无关部分也变化不大。从这个结果，我们立即能够写出像区域中场矢量的近似数学表示。

现在以 P_0 的高斯像 P_1 为原点，取一组直角笛卡儿坐标轴 (x, y, z)，令 z 轴沿 CP_1 方向。在孔径区域中，除紧靠孔径边缘处以外，其他各点的场可近似表成为(见第 3 章)

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}_\omega(x, y, z, t) &= \mathcal{R}\left\{\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{e}_\omega(x, y, z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\{\delta(\omega)-\omega[t-\frac{1}{c}\mathcal{S}_\omega(x,y,z)]\}}\right\},\\ \mathbf{H}_\omega(x, y, z, t) &= \mathcal{R}\left\{\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{h}_\omega(x, y, z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\{\delta(\omega)-\omega[t-\frac{1}{c}\mathcal{S}_\omega(x,y,z)]\}}\right\},\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

此式可以看做是(6)式的推广，其中 $\mathcal{S}_\omega(x, y, z)$ 是从物点到 (x, y, z) 点的光程，$\mathbf{e}_\omega(x, y, z)$ 和 $\mathbf{h}_\omega(x, y, z)$ 是两个相互正交的实矢量[②]。在一个折射率为 n 的非磁性均匀媒质中，这两个矢量满足关系式[见 § 3.1(19)和 § 3.1(20)]

$$|\mathbf{h}_\omega| = n|\mathbf{e}_\omega| \tag{8}$$

现在以 P_1 为中心作一参考球 S，令它通过出射光瞳中心 C，并用 R 表示它的半径 CP_1。实际上，S 和 W 之间的距离各处都不会超过几十个波长。因此，和 W 面上一样，S 面上振幅矢量 $\mathbf{e}_\omega$ 和 $\mathbf{h}_\omega$ 的大小和方向实际没有变化。

---

① 这里假定 σ_1 是一个折射面。如果 σ_1 是一反射镜，讨论亦无须做根本修改，这可从查阅菲涅耳公式得知。

② $\mathbf{e}_\omega$ 和 $\mathbf{h}_\omega$ 是实矢量这一点出于如下事实：(6)式中相应各矢量是实的(线偏振)，并且每次折射时，线偏振态仍旧是线偏振态(见 1.5.2 节)，此外，如 3.1.3 节所证，在任何前后两面之间，偏振态沿每条光线保持不变。

设 $P(X,Y,Z)$是像区域中强度待定的一点。如果出射光瞳的直径对 P 点的张角很小,就可以在前节所讲的那种近似下应用基尔霍夫公式。这时,以(7)式为入射场,对 S 上与出射光瞳大致吻合的那一地区 S' 取积分,并略去 S' 上倾斜因子的变化,即可得到

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}_\omega(X,Y,Z,t)&=\mathcal{R}\frac{\omega^3}{2\pi ic^3}e^{i[\delta(\omega)-\omega t]}\iint_{S'}\frac{1}{s}\mathbf{e}_\omega(x',y',z')e^{i\frac{\omega}{c}[S_\omega(x',y',z')+s]}\,dS,\\ \mathbf{H}_\omega(X,Y,Z,t)&=\mathcal{R}\frac{\omega^3}{2\pi ic^3}e^{i[\delta(\omega)-\omega t]}\iint_{S'}\frac{1}{s}\mathbf{h}_\omega(x',y',z')e^{i\frac{\omega}{c}[S_\omega(x',y',z')+s]}\,dS,\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

式中 s 是从参考球上一代表点(x',y',z')到 P 点的距离。

因为矢量 $\mathbf{e}_\omega(x',y',z')$和 $\mathbf{h}_\omega(x',y',z')$在积分面上变化不大,故可用它们在出射光瞳中心 C 处的值 $\mathbf{e}_\omega(0,0,-R)$和 $\mathbf{h}_\omega(0,0,-R)$来代替它们。由于这两个矢量相正交并且满足(8)式,所以如果再取 $n=1$,则可令

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{e}_\omega(0,0,-R)&=a(\omega)\boldsymbol{\alpha}(\omega),\\ \mathbf{h}_\omega(0,0,-R)&=a(\omega)\boldsymbol{\beta}(\omega),\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

式中 $\boldsymbol{\alpha}(\omega)$和 $\boldsymbol{\beta}(\omega)$是两个正交单位矢量,在垂直于 z 方向的平面上。于是(9)式变成为

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}_\omega(X,Y,Z,t)&=\mathcal{R}\left\{\frac{\omega^2}{c^2}U_\omega(X,Y,Z)a(\omega)\boldsymbol{\alpha}(\omega)e^{i[\delta(\omega)-\omega t]}\right\},\\ \mathbf{H}_\omega(X,Y,Z,t)&=\mathcal{R}\left\{\frac{\omega^2}{c^2}U_\omega(X,Y,Z)a(\omega)\boldsymbol{\beta}(\omega)e^{i[\delta(\omega)-\omega t]}\right\},\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

式中 U_ω 是标量波函数

$$U_\omega(X,Y,Z)=\frac{\omega}{2\pi ic}\iint_{S'}\frac{1}{s}e^{i\frac{\omega}{c}[S_\omega(x',y',z')+s]}\,dS\tag{12}$$

从(11)式,通过计算坡印廷矢量 $\mathbf{S}_\omega=c[\mathbf{E}_\omega\times\mathbf{H}_\omega]/4\pi$ 并取时间平均,可立即推出,P_0 点单个偶极子[由(5)式表示]在 $P(X,Y,Z)$点所产生的强度,正比于标量波函数 $U_\omega(X,Y,Z)$的模的平方。但是,要证明可采用单个标量波函数计算强度,还必须对总场而不是对单色成分求时间平均。

8.4.2 总像场

上面我们看到,各频率成分对总场的贡献可以看做基本上由 P_0 点的两个偶极子所产生,它们的轴分别沿 x_1 和 x_2 方向。因此,如果也用(2)式这种形式的关系来定义负频率成分的贡献,则从(1)和(11)两式可以得出,像区域中的总场可以近似表成如下形式:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}(X,Y,Z,t)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega^2}{c^2}U_\omega(X,Y,Z)[a_1(\omega)\boldsymbol{\alpha}_1(\omega)e^{i\delta_1(\omega)}\\ &\qquad+a_2(\omega)\boldsymbol{\alpha}_2(\omega)e^{i\delta_2(\omega)}]e^{-i\omega t}\,d\omega,\\ \mathbf{H}(X,Y,Z,t)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega^2}{c^2}U_\omega(X,Y,Z)[a_1(\omega)\boldsymbol{\beta}_1(\omega)e^{i\delta_1(\omega)}\\ &\qquad+a_2(\omega)\boldsymbol{\beta}_2(\omega)e^{i\delta_2(\omega)}]e^{-i\omega t}\,d\omega.\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

这里，下标 1 和 2 分别指轴沿 x_1 和 x_2 方向的振子的贡献。

为了确定像区域的强度，方便的做法是分别写出 **E** 和 **H** 的各个笛卡儿分量表达式。设 $\theta_1(\omega)$和 $\theta_2(\omega)$代表单位矢量 $\boldsymbol{\alpha}_1(\omega)$和 $\boldsymbol{\alpha}_2(\omega)$与像空间 x 方向的夹角。因为 $\boldsymbol{\alpha}_1(\omega)$和 $\boldsymbol{\beta}_1(\omega)$，$\boldsymbol{\alpha}_2(\omega)$和 $\boldsymbol{\beta}_2(\omega)$是相互正交的实矢量，位于与 z 方向垂直的平面上，所以从(13)式可知 **E** 和 **H** 各分量近似为①

$$\left.\begin{aligned} E_x(X,Y,Z,t) &= H_y(X,Y,Z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} U_\omega(X,Y,Z) f(\omega) e^{-i\omega t}\,d\omega, \\ E_y(X,Y,Z,t) &= -H_x(X,Y,Z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} U_\omega(X,Y,Z) g(\omega) e^{-i\omega t}\,d\omega, \\ E_z(X,Y,Z,t) &= H_z(X,Y,Z,t) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{\omega^2}{c^2}[a_1(\omega)\cos\theta_1(\omega)e^{i\delta_1(\omega)} + a_2(\omega)\cos\theta_2(\omega)e^{i\delta_2(\omega)}], \\ g(\omega) &= \frac{\omega^2}{c^2}[a_1(\omega)\sin\theta_1(\omega)e^{i\delta_1(\omega)} + a_2(\omega)\sin\theta_2(\omega)e^{i\delta_2(\omega)}]. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

由(14)式可知，坡印廷矢量 $\mathbf{S} = c[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]/4\pi$ 的大小可近似表达成如下形式：

$$|\mathbf{S}| = \frac{c}{4\pi}[E_x^2 + E_y^2] = \frac{c}{4\pi}[H_x^2 + H_y^2] \tag{16}$$

现在必须确定这个量的时间平均值。

为了收敛，假定辐射场仅存在于时刻 $t = -T$ 和 $t = T$ 之间，其中 $T \gg 2\pi/\omega_0$；然后很容易过渡到极限 $T\to\infty$。利用傅里叶反演定理，可由(14)式得到

$$U_\omega(X,Y,Z)f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^{T} E_x(X,Y,Z,t)e^{i\omega t}\,dt \tag{17}$$

E_y，H_x 和 H_y 方面各式与此类似。由(14)式，有

$$\langle E_x^2\rangle = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E_x^2\,dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E_x\,dt\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} U_\omega f(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega \tag{18}$$

交换积分次序，即有

$$\begin{aligned} \langle E_x^2\rangle &= \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{+\infty} U_\omega f(\omega)\,d\omega\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^{T} E_x e^{-i\omega t}\,dt \\ &= \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{+\infty} U_\omega f_\omega U_\omega^\star f_\omega^\star\,d\omega \qquad [由(17)式] \\ &= \frac{1}{T}\int_0^\infty |U_\omega|^2|f(\omega)|^2\,d\omega \end{aligned} \tag{19}$$

① 如果从(14)式得出结论，认为像区域中任何地方能流的方向都必定平行于 z，那是不正确的。因为，在强度很小的地区，例如在爱里图样的暗环附近，(14)式中的相对误差会大大影响方向的计算。

因为 $U_{-\omega}f(-\omega)=U_{\omega}^{\star}f^{\star}(\omega)$。类此

$$\langle E_y^2\rangle=\frac{1}{T}\int_0^{\infty}|U_{\omega}|^2|g(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega \tag{20}$$

因此,按照(16)、(19)和(20)三式,强度 $I(X,Y,Z)$——坡印廷矢量大小的时间平均值为

$$I(X,Y,Z)=\frac{c}{4\pi T}\int_0^{\infty}|U_{\omega}(X,Y,Z)|^2[|f(\omega)|^2+|g(\omega)|^2]\,\mathrm{d}\omega \tag{21}$$

如果$|\Delta\omega|$足够小,则在有效频率范围内,$|U_{\omega}|$将实际与 ω 无关,所以这时$|U_{\omega}|^2$ 可用$|U_{\omega_0}|^2$ 代替,并可取到积分号外边。余项

$$\frac{c}{4\pi T}\int_0^{\infty}\{|f(\omega)|^2+|g(\omega)|^2\}\mathrm{d}\omega \tag{22}$$

与 X,Y 和Z 无关,而且如果所观察的是稳定现象,则此项还必须与 T 无关[从(17)式可知 f 和 g 隐含 T]。因此(22)式必定是一常数(设为 C_0),因而强度 I 最后可写成如下形式:

$$I(X,Y,Z)=C_0|U_{\omega_0}(X,Y,Z)|^2 \tag{23}$$

常数 C_0 与光源和光学仪器有关,关系甚为复杂;但是通常人们所注意的只是强度的相对分布,而不是它的绝对值。这时强度可以简单地用$|U_{\omega_0}|^2$ 来量度。这样,对于一个自然光光源和一个中等数值孔径的光学成像系统,可采用复标量函数(12)式来计算像的强度分布。

8.5 各种形状光孔上的夫琅禾费衍射

现在来研究各种形状的光孔的夫琅禾费衍射图样。

8.5.1 矩孔和狭缝

首先讨论一个边长为 $2a$ 和 $2b$ 的矩孔。令原点 O 在矩孔中心,$O\xi$ 轴和 $O\eta$ 轴平行于孔边(见图 8.8),则夫琅禾费衍射积分 §8.3(36)变成

$$U(P)=C\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(p\xi+q\eta)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta=C\int_{-a}^{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kp\xi}\,\mathrm{d}\xi\int_{-b}^{b}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kq\eta}\,\mathrm{d}\eta$$

积分

$$\int_{-a}^{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kp\xi}\,\mathrm{d}\xi=-\frac{1}{\mathrm{i}kp}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kpa}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}kpa}]=2\frac{\sin kpa}{kp}$$

另一积分与此类似。因此强度

$$I(P)=|U(P)|^2=\left(\frac{\sin kpa}{kpa}\right)^2\left(\frac{\sin kqb}{kqb}\right)^2 I_0 \tag{1}$$

由 §8.3(44),式中 $I_0=C^2D^2=\mathcal{P}\,D/\lambda^2R^2$ 是图样中心处的强度,$\mathcal{P}$是入射到孔上的总功率,$D=4ab$ 是矩孔面积。

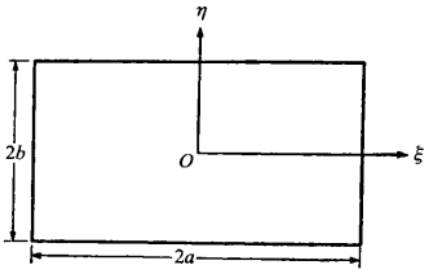


图 8.8　矩孔

函数 $y=(\sin x/x)^2$ 的曲线绘于图 8.9 中。在 $x=0$ 处，它有一主极大 $y=1$，而在 $x=\pm\pi$，$\pm 2\pi$，$\pm 3\pi$，…处，各有一极小 0。每二极小之间有一次极大，其位置由方程 $\tan x - x = 0$ 的各根给出(见表 8.1)。这些根的渐近值为 $x=(2m+1)\pi/2$，m 为整数。

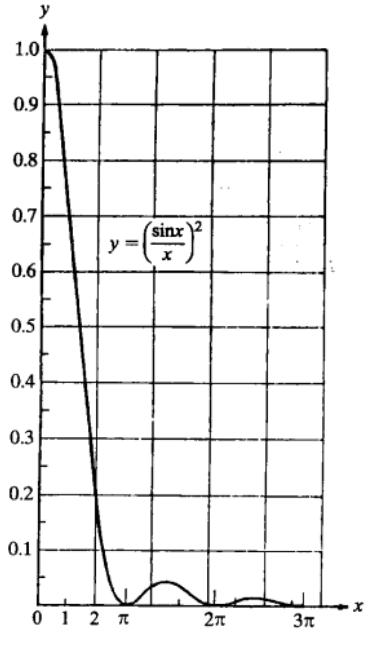


图 8.9　矩孔夫琅禾费衍射。函数 $y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$

表 8.1　函数 $y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ 的头 5 个极大

x	$y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$
0	1
$1.430\pi=4.493$	0.047 18
$2.459\pi=7.725$	0.016 48
$3.470\pi=10.90$	0.008 34
$4.479\pi=14.07$	0.005 03

由此可见,强度 $I(P)=0$ 的地方是两组和矩孔边平行的直线,由下列二式表出:

$$kpa=\pm u\pi, \qquad kqb=\pm v\pi \qquad (u, v=1, 2, 3, \cdots) \tag{2}$$

因为 $p=l-l_0$, $q=m-m_0$, $k=2\pi/\lambda$,此即

$$l-l_0=\pm\frac{u\lambda}{2a}, \qquad m-m_0=\pm\frac{v\lambda}{2b} \tag{3}$$

在这两组正交暗线所隔成的一个个矩形内,强度各上升到一个极大;但是所有这些极大都比中央极大弱得多,而且从中心往外,强度迅速下降(见图 8.10)。孔越大,衍射图样的有效尺寸越小。

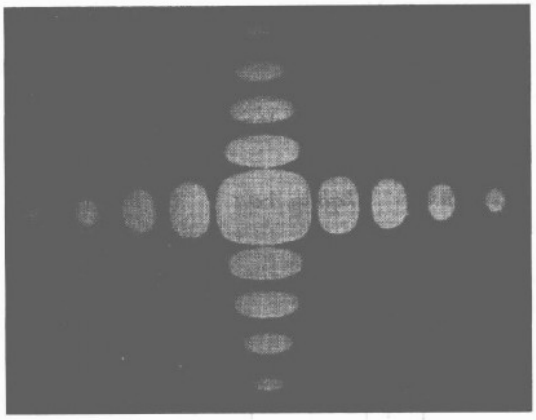


图 8.10 8 毫米 × 7 毫米矩孔的夫琅禾费衍射图样,放大 50 倍,汞黄光 $\lambda=5790$ 埃。为了显示出弱的次极大,中央部分已曝光过度(照片蒙H. Lipson, C. A. Taylor和B. J. Thompson惠允引用)

这是点源的相干光所形成的衍射图样。扩展光源所产生的衍射图样可由此基本衍射图样经积分而得到。如果该光源是相干的,则须对复振幅进行积分,如果光源是不相干的,则须对强度进行积分。部分相干光源产生的图样也可以由该基解通过积分处理来确定,但积分时要计及光源各点来光之间所存在的关联性(见第 10 章)。一个特别重要的情况是:光源是一个很长的、不相干的线光源(例如一个发光的金属丝),所发的光被一条和它平行的狭缝所衍射。为计算简单起见,假定发光金属丝以及狭缝在实效上都是无限长的,并令 y 轴沿线光源方向。因 $q=m-m_0$, m_0 代表一个点源的位置,所以求(1)式对 q 的积分,就得到线光源产生的强度 I':

$$I'=\int_{-\infty}^{+\infty}I(P)\mathrm{d}q=\frac{1}{kb}\left(\frac{\sin kpa}{kpa}\right)^2 I_0\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\mathrm{d}t$$

而[①]

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\mathrm{d}t=\pi$$

所以

① 例如,见 W. Gröbner and N. Hofreiter, *Integraltafel*, Vol. II (Wien, Springer, 1950), p. 333。

$$I' = \left(\frac{\sin kpa}{kpa}\right)^2 I'_0 \tag{4}$$

式中

$$I'_0 = \frac{\lambda}{2b} I_0 = \frac{2a\mathcal{P}}{\lambda R^2} \tag{5}$$

图样仍然由函数$[\sin(x)/x]^2$来表征，但是由一系列平行于线光源和狭缝的明暗条纹所组成。常数I'_0是中央位置$p=0$处的强度。

8.5.2　圆孔

用同样方法可以研究圆孔上的夫琅禾费衍射。这时用极坐标代替直角坐标更为适当。设(ρ,θ)是孔上某点的极坐标：

$$\rho\cos\theta = \xi, \qquad \rho\sin\theta = \eta \tag{6}$$

并设(w,Ψ)是衍射图样上以点源几何像为原点时 P 点的极坐标：

$$w\cos\psi = p, \qquad w\sin\psi = q \tag{7}$$

由 p 和 q 的定义可知，$w=\sqrt{p^2+q^2}$是(p,q)方向与中心方向 $p=q=0$ 夹角的正弦。设 a 为圆孔半径，则衍射积分 §8.3(36)这时变成

$$U(P) = C\int_0^a\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\rho w\cos(\theta-\psi)}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \tag{8}$$

根据大家熟知的贝塞尔函数 $J_n(z)$的积分表示[①]

$$\frac{\mathrm{i}^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cos\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}\,\mathrm{d}\alpha = J_n(x) \tag{9}$$

(8)式即化为

$$U(P) = 2\pi C\int_0^a J_0(k\rho w)\rho\,\mathrm{d}\rho \tag{10}$$

此外，根据熟知的递推关系[②]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{n+1}J_{n+1}(x)] = x^{n+1}J_n(x) \tag{11}$$

取 $n=0$，进行积分，有

$$\int_0^x x'J_0(x')\mathrm{d}x' = xJ_1(x) \tag{12}$$

由(10)和(12)两式即可得到

$$U(P) = CD\left[\frac{2J_1(kaw)}{kaw}\right] \tag{13}$$

---

① 例如，见 E. Jahnke and F. Emde, *Tables of Functions with Formulae and Curves* (Leipzig, Teubner, 1933; reprinted by Dover Publications, New York, 4th edition, 1945), p. 149; 或 G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (Cambridge, Cambridge University Press, 1922), p. 20, 方程 5(作一个明显的代换)。

② 例如，见 E. Jahnke and F. Emde, *loc. cit.*, p. 145 或 E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis* (Cambridge, Cambridge University Press, 4th edition, 1952), pp. 360—361。

式中 $D=\pi a^2$。因此强度

$$I(P)=|U(P)|^2=\left[\frac{2J_1(kaw)}{kaw}\right]^2 I_0 \tag{14}$$

式中,由 §8.3(44),$I_0=C^2D^2=\mathcal{P}\ D/\lambda^2R^2$。这是爱里以略为不同的形式首先推导出来的一个著名公式[①]。

几何像附近的强度分布由函数 $y=(2J_1(x)/x)^2$ 来表征;其曲线如图 8.11 所示。在 $x=0$ 处,$y=1$,是函数的主极大,而当 x 增加时,y 发生振荡,但振幅逐减小,和 8.5.1 节中所讨论的函数$[\sin(x)/x]^2$ 情况类似。当 x 满足 $J_1(x)=0$ 时,强度为零(极小)。各极小不再严格等距(见表 8.2)。次极大的位置由满足方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[J_1(x)/x]=0$$

的 x 值来决定,或者利用公式[②]［类似于(11)式］

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-n}J_n(x)]=-x^{-n}J_{n+1}(x) \tag{15}$$

由方程 $J_2(x)=0$ 的根给出。当 x 增加时,相邻两个极小或两个极大的间隔趋近于 π,和前例结果相同。

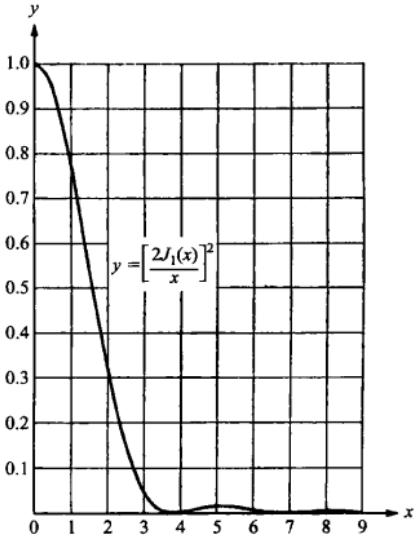


图 8.11 圆孔夫琅禾费衍射。函数 $y=\left[\frac{2J_1(x)}{x}\right]^2$

① G. B. Airy, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, **5**(1835), 283。几乎与爱里同时,Schwerd 用 180 边正多边形代替圆,从而得到了一近似解。

下列文献报道了对会聚球面波圆孔衍射问题的矢量处理(考虑了场的偏振性质):W. S. Ignatowski, *Trans. Opt. Inst. Petrograd.*, **1**(1919) No 4, 36; V. A. Fock, *ibid.*, **3**(1924), 24; H. H. Hopkins, *Proc. Phys. Soc.*, **55**(1943), 116; R. Burtin, *Optica Acta*, 3(1956), 104; B. Richards and E. Wolf, *Proc. Roy. Soc.*, A, **253**(1959), 358; A. Boivin and E. Wolf, *Phys. Rev.*, **138**(1965), B 1561; A. Boivin, J. Dow and E. Wolf, *J. Opt. Soc. Amer.*, **57** (1967), 1171。

② 例如,见 E. Jahnke and F. Emde, *loc. cit.*, p. 145,或 E. T. Whittaker and G. N. Waston, *loc. cit.*, p. 361。

表 8.2　函数 $y=\left[\frac{2J_1(x)}{x}\right]^2$ 的头几个极大和极小

x	$\left[\frac{2J_1(x)}{x}\right]^2$	
0	1	极大
$1.220\pi=3.833$	0	极小
$1.635\pi=5.136$	0.0175	极大
$2.233\pi=7.016$	0	极小
$2.679\pi=8.417$	0.0042	极大
$3.238\pi=10.174$	0	极小
$3.699\pi=11.620$	0.0016	极大

这些结果表明，衍射图样的中心（点源的几何像）$p=q=0$ 处是一亮斑，周围是一圈圈同心的明、暗圆环（见图 8.11 和图 8.12）。亮环的强度随着其半径的加大而急剧下降，通常只有头一两个环足够亮，可被肉眼看见。因 $x=2\pi aw/\lambda$，故由表 8.2 可知，各个暗环的半径是

$$w=\sqrt{p^2+q^2}=0.610\frac{\lambda}{a},\qquad 1.116\frac{\lambda}{a},\qquad 1.619\frac{\lambda}{a},\qquad \cdots \tag{16}$$

相邻两环的间隔渐近地趋近 $\lambda/2a$。可见，衍射图样的有效尺寸仍然反比于孔的尺度。

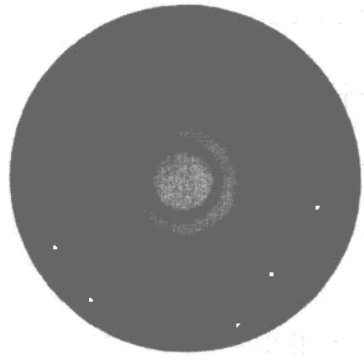


图 8.12　直径 6 毫米圆孔的夫琅禾费衍射图样（爱里图样），放大 50 倍，汞黄光 $\lambda=5790$ 埃。为了显示出弱的次极大，中央部分已曝光过度（照片蒙H. Lipson, C. A. Taylor和B. J. Thompson惠允引用）

现在来看看，在总入射能量中有多少落在衍射图样的中心部分，这也是有意义的。设在像平面上以几何像点为中心，以 w_0 为半径画一个圆，并以 $L(w_0)$ 代表落在此圆内的能量百分数，则

$$\begin{aligned}L(w_0)&=\frac{R^2}{\mathcal{P}}\int_0^{w_0}\int_0^{2\pi}I(w)w\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}\psi\\&=\frac{D}{\lambda^2}\int_0^{w_0}\int_0^{2\pi}\left[\frac{2J_1(kaw)}{kaw}\right]^2 w\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}\psi\\&=2\int_0^{kaw_0}\frac{J_1^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{17}$$

由(11)式,取 $n=0$,乘以 $J_1(x)$,并利用(15)式(取 $n=0$),可有

$$\frac{J_1^2(x)}{x}=J_0(x)J_1(x)-\frac{\mathrm{d}J_1(x)}{\mathrm{d}x}J_1(x)$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[J_0^2(x)+J_1^2(x)]$$

以此代入(17)式,记及 $J_0(0)=1$, $J_1(0)=0$,就得到瑞利所导出的公式[①]

$$L(w_0)=1-J_0^2(kaw_0)-J_1^2(kaw_0) \tag{18}$$

函数 $L(w_0)$的曲线如图 8.13 所示。对于各暗环,$J_1(kaw_0)=0$,所以落在任一暗环外边的能量百分数直接是 $J_0^2(kaw_0)$。对于第 1、第 2 和第 3 这三个暗环,$J_0^2(kaw_0)$分别等于 0.162,0.090 和 0.062。这样,有 90% 以上的光落在第二暗环所包围的圆面积之内。

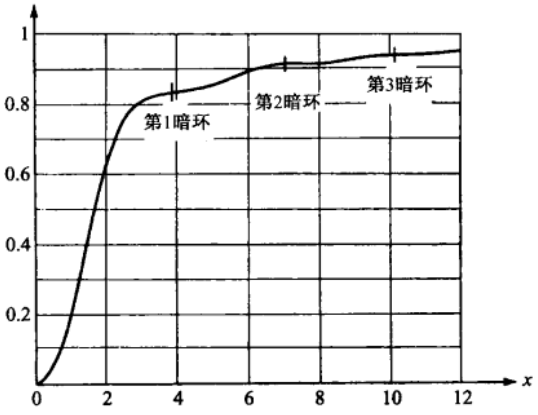


图 8.13 函数 $1-J_0^2(x)-J_1^2(x)$,代表夫琅禾费圆孔衍射图样中落在规定半径的各个圆内的能量百分数

8.5.3 其他形状的孔

其他形状光孔上的夫琅禾费衍射可以用同样方式加以研究。如果能够选用曲线坐标,使得一坐标线与孔的边界重合,计算将特别简单。这里不能详细讨论其他情况[②],但是将推导一个有用的定理,它说明当光孔沿某一方向均匀拉伸(或压缩)时衍射图样的变化规律,此外将讨论屏上包括好多一模一样的光孔时所产生的夫琅禾费衍射。

设$\mathcal{A}_1$ 和$\mathcal{A}_2$ 是两个这样的孔,其中$\mathcal{A}_2$ 沿某一方向($O\xi$)的尺寸是$\mathcal{A}_1$ 的 μ 倍。对于$\mathcal{A}_1$ 上的夫琅禾费衍射,可有

$$U_1(p,q)=C\iint_{\mathcal{A}_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(p\xi+q\eta)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \tag{19}$$

---

① Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*(5),**11**(1881),214。又见 *Scientific papers by John William Strutt, Baron Rayleigh*, Vol.1(Cambridge, Cambridge University Press,1899—1920),p.513。

② 8.6.2 节中在谈到分辨本领问题时将对环孔上的夫琅禾费衍射进行简短讨论。
在 J.Scheiner 和 S.Hirayama 的论文中,刊有各种光孔夫琅禾费衍射图样的照片,见 *Abh. d. Königl. Akad. Wissensch.*, Berlin(1894),Anhang I. Y. V. Kathavate 发表了各种菲涅耳衍射图样的照片,见 *Proc. Ind. Acad. Sci.*,**21**(1945),177—210。

同样，对于$\mathcal{A}_2$ 上的夫琅禾费衍射，

$$U_2(p,q)=C\iint_{\mathcal{A}_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(p\xi+q\eta)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \tag{20}$$

如果在(20)式中将积分变量(ξ,η)改成(ξ',η')，其中

$$\xi'=\frac{1}{\mu}\xi,\qquad \eta'=\eta \tag{21}$$

则得到

$$U_2(p,q)=\mu C\iint_{\mathcal{A}_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\mu p\xi'+q\eta')}\,\mathrm{d}\xi'\,\mathrm{d}\eta'=\mu U_1(\mu p,q) \tag{22}$$

这表明，**当孔沿某一方向按比例 μ:1 均匀拉伸时，则夫琅禾费图样在同一方向按比例 1:μ 收缩，同时新图样上各点的强度是原图样上对应点强度的 μ^2 倍**。利用这个结果，可以立即例如从圆孔和矩孔的夫琅禾费图样，分别确定出椭圆孔或平行四边形孔的夫琅禾费样。图 8.14 说明了椭圆孔的情况。

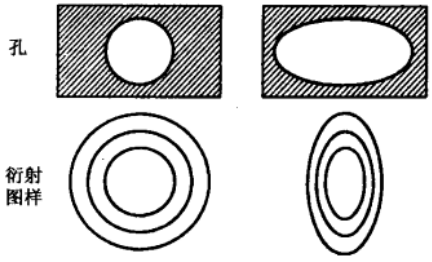


图 8.14　圆孔和椭圆孔夫琅禾费衍射的比较

现在来讨论重要的衍射情况——屏上包括大量形体相同、取向一致的光孔(按照巴比涅原理，所得结果将也可应用于互补的障碍物分布)。设 $O_1,O_2,\cdots,O_N$ 是一组位置相似的点，每个孔中一个，并设这些点在孔平面上两固定坐标轴中的坐标是$(\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2),\cdots,(\xi_N,\eta_N)$，则夫琅禾费衍射图样的光分布为

$$\begin{aligned}U(p,q)&=C\sum_n\iint_{\mathcal{A}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k[(\xi_n+\xi')p+(\eta_n+\eta')q]}\,\mathrm{d}\xi'\,\mathrm{d}\eta'\\&=C\sum_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k[p\xi_n+q\eta_n]}\iint_{\mathcal{A}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(p\xi'+q\eta')}\,\mathrm{d}\xi'\,\mathrm{d}\eta'\end{aligned} \tag{23}$$

式中积分区是组中任一孔$\mathcal{A}$。积分表达了单孔的作用，而取和代表了各相干衍射图样的叠加。如果 $I^{(0)}(p,q)$是单孔产生的强度分布，则按(23)式，总强度为

$$\begin{aligned}I(p,q)&=I^{(0)}(p,q)\left|\sum_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(p\xi_n+q\eta_n)}\right|^2\\&=I^{(0)}(p,q)\sum_n\sum_m\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k[p(\xi_n-\xi_m)+q(\eta_n-\eta_m)]}\end{aligned} \tag{24}$$

最简单的情况是两个孔,这在前面 7.2 节讲述干涉理论时业已讨论。不过,那里没有考虑 $I^{(0)}$ 对 p 和 q 的依赖关系(即每个孔的衍射效应),而只研究了叠加效应。很容易看出,以前的结果[见 §7.2(17)]和(24)式是一致的。因为,如 $N=2$,则(24)式化为

$$I = I^{(0)}\{2 + e^{-ik[p(\xi_1-\xi_2)+q(\eta_1-\eta_2)]} + e^{-ik[p(\xi_2-\xi_1)+q(\eta_2-\eta_1)]}\}$$
$$= 4I^{(0)}\cos^2\tfrac{1}{2}\delta$$

其中

$$\delta = k[p(\xi_2-\xi_1)+q(\eta_2-\eta_1)]$$

现在来讨论大量光孔的效应。我们将看到,孔在屏上有规则分布和无规则分布这两种情况的结果完全不同。

当屏上光孔的分布无规则时,在二重和中,m 和 n 取不同值时,m,n 不相同的那些项将在 +1 和 −1 之间很快地起落,结果这些项的和为零。其余各项($m=n$)均为 1。由此可知,除局部涨落外[①],总强度是单孔衍射光强度的 N 倍:

$$I(p,q) \approx NI^{(0)}(p,q) \tag{25}$$

这种衍射效应是很容易观察到的,更常见的是它的互补效应(从巴比涅原理的意义上说)。例如,用一块玻璃板,沾以石松粉,或涂以形状和大小都相同的其他微粒,执于远处来光之中,即可看到这一效应。将一片锡箔用针乱扎上许多小孔,也可作为上述类型的衍射屏。

当光孔的分布有规则时,结果完全不同。因为这时对于某些 p,q 值,$m\neq n$ 的项可以有显著的贡献。例如,如果 $O_1, O_2, \cdots, O_N$ 这些点的位置使得对于某些 p,q 值,所有 $m\neq n$ 的项的位相都是 2π 的整数倍,它们的和将等于 $N(N-1)$,因而当 N 很大时,它将接近 N^2。强度在某些特殊方向上的这种巨大增加,在图 8.15 中可以清楚地看到。下一节将看到,这一效应具有非常重要的实用价值。

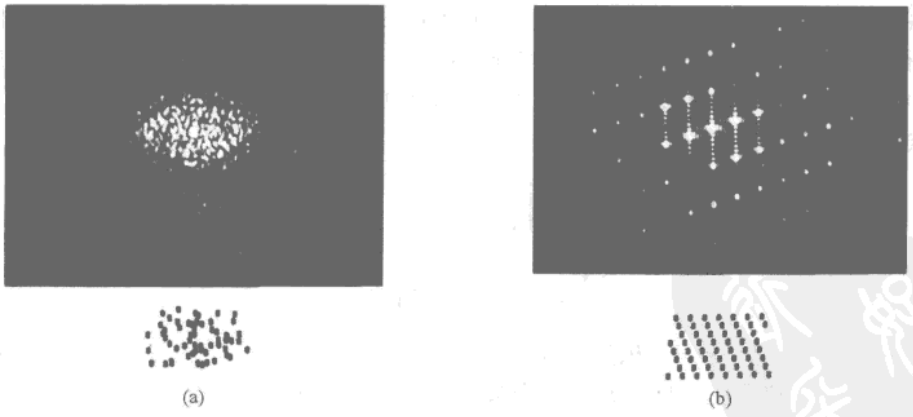


图 8.15 平面屏上 56 个体形相同、取向一致的光孔的夫琅禾费衍射图样:(a)无规则分布;(b)规则分布。光孔的形状和分布列于各图下方。光:汞黄光,λ = 5790埃(照片蒙允引自 H. Lipson, C. A. Taylor, and B. J. Thompson)

① 如果孔的形状不一样,但是分布是有规则的,或者服从某种统计规律,则涨落类型有所不同[见 M. v. Laue, *Berl. Ber.*, (1914),1144]。在液体 X 射线衍射方面观察到了类似的效应(见 J. A. Prins, *Naturwiss.*, **19**(1931),435)。

8.6　光学仪器中的夫琅禾费衍射

8.6.1　衍射光栅

(a) 衍射光栅原理

任何一种装置或结构，只要它能给入射光的振幅或位相，或者二者同时加上一个周期性的空间调制，都可以称为衍射光栅。任何一个光栅的特性都可以用它的**透射函数**来表征，透射函数的定义如下：

设一透明物体或半透明物体(并不一定是周期性的)遮住了虚构参考面 $\xi\eta$ 的一部分，并且由单色平面波照射，波的入射方向由方向余弦 l_0, m_0 标定。图 8.16 示出这一结构大意，η 轴垂直于纸面。假如物体不存在，$\xi\eta$ 平面上的扰动应由函数 $V_0(\xi,\eta) = A\ \exp[\mathrm{i}k(l_0\xi + m_0\eta)]$ 来表示。与往常一样，这里略去了因子 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$。由于物体的存在，该扰动将受到调制，并可用某一其他函数 $V(\xi,\eta)$来表示。物体的**透射函数**则定义为

$$F(\xi,\eta) = \frac{V(\xi,\eta)}{V_0(\xi,\eta)} \tag{1}$$

当然，一般 F 不仅依赖于 ξ 和 η，而且还与照射方向(l_0, m_0)有关。透射函数一般是复数，因为光通过物体时，其振幅和位相都可能改变。在特别情况下，当物体只改变入射波的振幅而不改变它的位相时(即 F 的幅角 $\equiv 0$)，我们称之为**幅物体**；如果只改变位相，而不改变振幅(即 $|F| = 1$)，则称之为**相物体**。

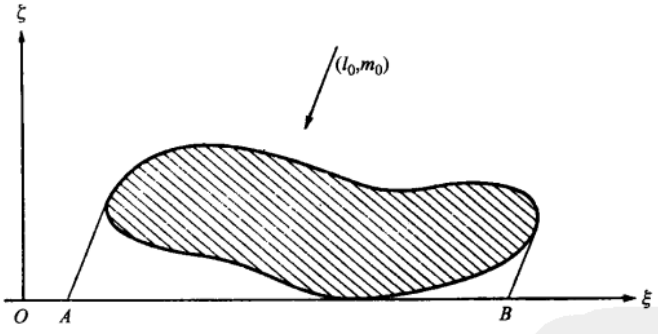


图 8.16　透射函数的定义

如果所讨论的是物体的反射光而不是物体的透射光，则采用**反射函数**一词更为恰当，它可用同样方式来定义，惟一差别是这时参考面和入射光在物体的同一侧。

对于物体几何投影区(其边界在图 8.16 中由 A 点和 B 点表示)外边的那些点，$|V/V_0|$ 实际上为 1。如果用一不透明屏遮住阴影区以外的部分，则该装置就成为一个光瞳函数不是常数的衍射孔$\mathcal{A}$[见 § 8.3(39)]。如果$\mathcal{A}$的尺度比波长大得多，而且在尺度与波长同数量级的地区内，F 相应无明显改变，则衍射公式 § 8.3(23)在同前条件下仍然有效，只要将衍射积分的被积函数乘以 F 即可。

现举一例,分析一种一维光栅,它由 N 条平行刻线构成,刻线断面形状可任意,刻在一块平行平面玻璃板的一个表面上。设 $\xi\eta$ 面与板的平表面重合,η 是刻线方向,并设 d 是 ξ 方向上的周期(见图 8.17)。

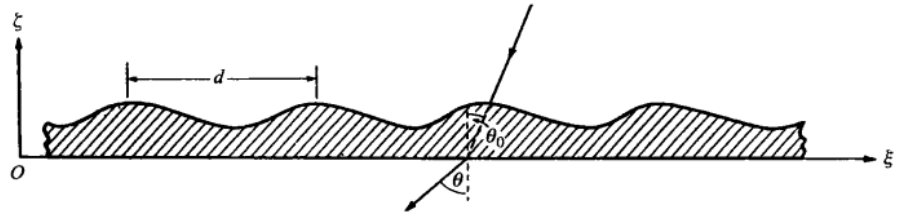


图 8.17 衍射光栅理论图示

假定光栅入射波的传播方向在图平面上,与 $O\zeta$ 成 θ_0 角,并设 θ 代表极远观察点 P 至光栅连线与 $O\zeta$ 的夹角。同前,令 $l_0=\sin\theta_0$, $l=\sin\theta$, $p=l-l_0=\sin\theta-\sin\theta_0$。于是,由 § 8.5(23),将其中被积函数乘以一个周期单元的透射函数 F,即可得到 P 点的复振幅。可以令 $q=0$,

$$\xi_n=nd,\qquad \eta_n=0\qquad (n=0,1,\cdots,N-1) \tag{2}$$

于是得到

$$U(p)=U^{(0)}(p)\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kndp}=U^{(0)}(p)\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Nkdp}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kdp}} \tag{3}$$

式中[①]

$$U^{(0)}(p)=C\int_A F(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kp\xi}\,\mathrm{d}\xi \tag{4}$$

因此

$$\begin{aligned}I(p)=|U(p)|^2&=\frac{(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Nkdp})}{(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kdp})}\cdot\frac{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nkdp})}{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}kdp})}|U^{(0)}(p)|^2\\&=\frac{1-\cos Nkdp}{1-\cos kdp}I^{(0)}(p)\end{aligned} \tag{5}$$

式中 $I^{(0)}(p)=|U^{(0)}(p)|^2$。如果引入函数

$$H(N,x)=\left(\frac{\sin Nx}{\sin x}\right)^2 \tag{6}$$

则强度公式(5)可写成为

$$I(p)=H\left(N,\frac{kdp}{2}\right)I^{(0)}(p) \tag{5a}$$

在讨论这个基本公式的含义之前,先请注意,按照(3)式,这一光分布等同于这样一组相干次级光源产生的分布,它们的振幅函数都是 $|U^{(0)}(p)|$,而位相差为 kdp 的整数倍。为了搞清

① 因为 F 依赖于 l_0,所以这里 $U^{(0)}$ 和 $I^{(0)}$ 这两个量依赖于 l 和 l_0,而不是只依赖于它们的差 $l-l_0$。由于只讨论入射方向固定时的效应,因而可以将 l_0 看做为常数而保留以前的符号。

楚这个位相差的意义，考虑光栅上相邻刻线的两个对应点 A 和 B（见图 8.18）。因为光栅的作用是给入射波加上一个周期性的空间调制，所以到达 A，B 两点的光，其程差和没有光栅时一样，即等于 $AK = d\sin\theta_0$，K 是从 B 点到 A 点入射光线的垂足。此外，在 θ 方向上，B 点的来光比 A 点的来光路程长 $BL = d\sin\theta$，L 是从 A 点到 B 点衍射光线（沿 θ 方向的）的垂足。因此，从相邻两条刻线的对应点到达遥远观察点的光，其总程差是

$$BL - AK = d(\sin\theta - \sin\theta_0) = dp \tag{7}$$

而相应的位相差就是 $2\pi dp/\lambda = kdp$。

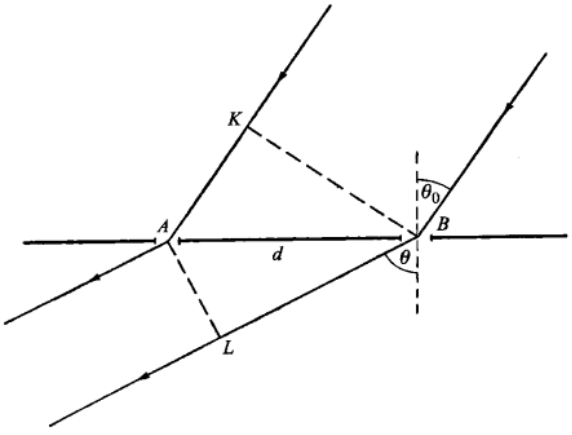


图 8.18　衍射光栅理论图示

公式(5a)将 $I(p)$ 表成为两个函数之积，其中函数 $I^{(0)}$ 代表光栅单个周期的衍射作用，而函数 H 代表不同周期来光的干涉效应。函数 $H(N, x)$ 在分母 $\sin^2 x$ 为零，即 x 为零或 π 整数倍的所有点上各有一极大值，高度均为 N^2。因此，当

$$p \equiv \sin\theta - \sin\theta_0 = \frac{m\lambda}{d} \qquad (m = 0, \pm1, \pm2, \cdots) \tag{8}$$

时，$H(N, kdp/2)$ 各有一高度为 N^2 的极大值。按照(7)式，整数 m 代表以波长为计量单位时，从相邻两条刻线对应点衍射到极大值方向的两条光线之间的程差。为了与早先的定义（见 7.3.1 节）一致，我们称 m 为**干涉序**。在这些主极大之间，还有许多弱的次极大[见图 8.19(a)]。当 N 很大时，第一个次极大的强度只有主极大的百分之几。每两个极大之间有一个强度为零的点，在 $x = kdp/2 = \pm n\pi/N$ 处，即在下式所规定的方向上：

$$p \equiv \sin\theta - \sin\theta_0 = \frac{n\lambda}{Nd} \qquad (n = \pm1, \pm2, \cdots) \tag{9}$$

其中 n/N 为整数的情况要除掉，因为这是极大所在[见(8)式]。

函数 $I^{(0)}(p)$ 与刻线的形状有关。假设它在某方向 $p = p'$ 有一主极大，并且在该极大两边，它比 H 下降得缓慢。这时，$I(p)$ 的形状将与干涉函数 H 大体相同，但为 $I^{(0)}$ 所“调制”。这样，$I(p)$ 在靠近 $p = m\lambda/d$ 这些方向仍将具有相当锐的极大。因为这些方向（$m = 0$ 时除外）与波长有关，可见，光栅将把一束非单色光分解成**各光谱序**。

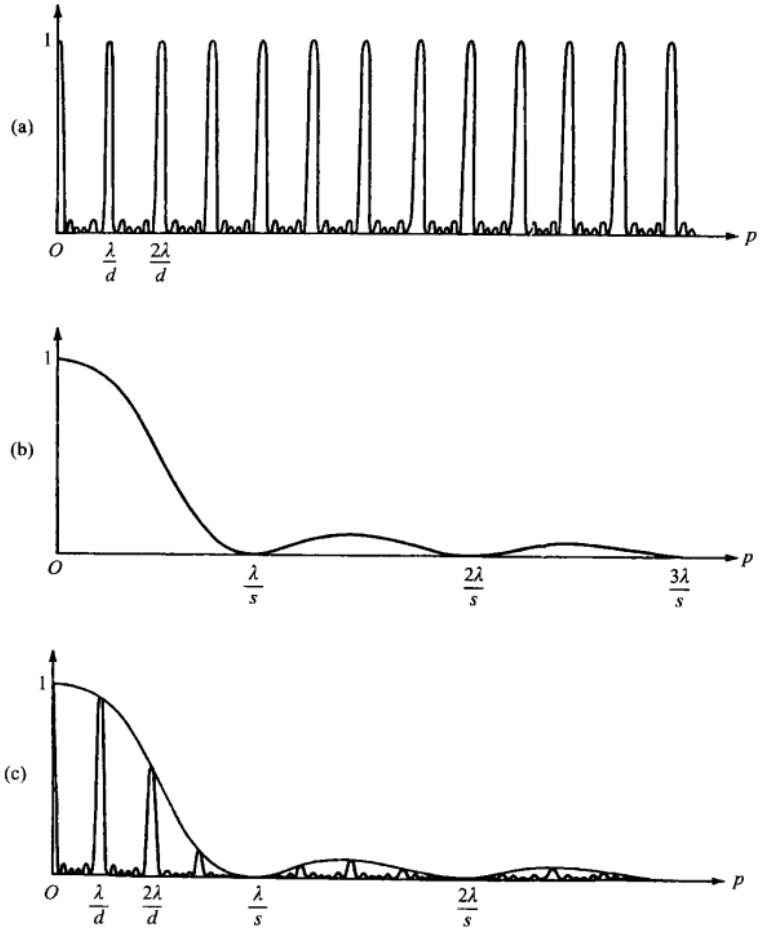


图 8.19 (a) 归一化干涉函数

$$\frac{1}{N^2}H(N,\ kdp/2)=\left[\frac{\sin(Nkdp/2)}{N\sin(kdp/2)}\right]^2$$

(b) 一条缝的归一化强度函数

$$I^{(0)}(p)=\left[\frac{\sin ksp/2}{ksp/2}\right]^2$$

(c) N 条同样的等距平行狭缝组成的光栅的归一化强度函数

$$\frac{1}{N^2}I(p)=\left[\frac{\sin(Nkdp/2)}{N\sin(kdp/2)}\right]^2\left[\frac{\sin ksp/2}{ksp/2}\right]^2$$

仅画出了 $p\geqslant 0$ 的范围,所有曲线都对垂直轴 $p=0$ 对称

为了说明上述各点,让我们例举一种光栅,它由不透明屏上 N 条等距长狭缝组成(见图 8.20),各缝的宽度为 s,长度为 L。如果用一个很远的平行于各缝的线光源来照射这个光

栅，则强度 $I^{(0)}$ 由 §8.5(4) 给出（令 $2a=s, 2b=L$）[①]，因而

$$I(p)=\frac{s\mathcal{P}}{\lambda R^2}\left(\frac{\sin\dfrac{Nkdp}{2}}{\sin\dfrac{kdp}{2}}\right)^2\left(\frac{\sin\dfrac{ksp}{2}}{\dfrac{ksp}{2}}\right)^2 \tag{10}$$

图 8.19 的三条曲线分别代表(10)式的两个因子和它们的乘积。后一个因子代表单缝的作用，它在 $p=0$ 处有一主极大，而在 $ksp/2=n\pi$ 即

$$p=\frac{n\lambda}{s},\qquad (n=\pm1,\pm2,\cdots) \tag{11}$$

处各有一极小，极小之间隔有弱的次极大。我们看到，如果 $\lambda/s \gg \lambda/d$，即如果每个缝的宽度比 d 小得多，则强度 $I(p)$ 除在 $p=0$ 处有一主极大以外，在它两边靠近(8)式所规定的那些方向，还有一系列锐的极大，但强度逐个减弱。

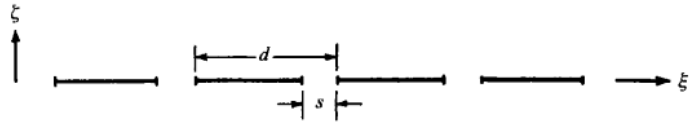


图 8.20　简单线光栅的断面

现在再回到一般情况。显然，如果各刻线的宽度非常小，只有一个波长左右（实际情况常是如此），则根据基尔霍夫近似推导出的公式(4)显然不再能期望成立。在这种情况下，必须进行更加细致的分析才能确定详细的强度分布。然而，可以预料，即使当刻线非常窄时，只要单个周期的强度函数在 $\Delta p=\lambda/d$ 量级的间隔内变化很慢，我们的基础理论所指出的那些主要性质特征仍将保留，即仍存在锐的极大，它们的位置实际上仍由干涉函数 H 来决定。

现在让我们看看一个光栅可能达到的分辨本领。按照(9)式，m 序主极大和相邻极小的间隔是

$$\Delta p=\frac{\lambda}{Nd} \tag{12}$$

按照(8)式，当波长改变 $\Delta\lambda$ 时，m 序极大将位移

$$\Delta' p=\frac{|m|}{d}\Delta\lambda \tag{13}$$

假定当波长 $\lambda+\frac{1}{2}\Delta\lambda$ 的极大和波长 $\lambda-\frac{1}{2}\Delta\lambda$ 的第一极小相重合时，它们的谱线刚刚能被分辨开（见 7.6.3 节，308 页），则对于 m 序的分辨极限，有 $\Delta p=\Delta' p$，即

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=|m|N \tag{14}$$

这样，**分辨本领等于序数 m 和刻线数 N 之积**。对于第 m 序，按照(8)式，有 $d(\sin\theta-\sin\theta_0)=m\lambda$，因而也可将分辨本领表成如下形式：

---

① 这里，原文叙述有欠周到。§8.5(4) 导自矩孔衍射强度公式 §8.5(1)，令其中 $2b\to\infty$（无限长狭缝）求积分而得，故(10)式中不出现 $2b=L$ 的相应因子——译者注。

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=\frac{Nd|\sin\theta-\sin\theta_0|}{\lambda} \tag{14a}$$

从(7)式看来,这就意味着,**光栅的分辨本领等于以波长为计量单位时,从光栅两端(相距为 Nd)衍射到 θ 方向的两条光线之间的程差**。须注意,因为 $|\sin\theta-\sin\theta_0|$ 不能超过 2,所以一个全宽为 w 的光栅,它能达到的分辨本领决不会超过 $2w/\lambda$。

让我们举一个例题来说明(14)式:设于可见光谱区中心附近,有两条谱线相隔十分之一埃,试求光栅分开这两条谱线所需的刻线数。这时,$\lambda\approx5500$ 埃,$\Delta\lambda=10^{-1}$ 埃,如果用第 2 序($m=2$)观测,则按(14)式,必须 $N\geq5.5\times10^3/2\times10^{-1}=27\,500$,即光栅刻线至少要 27 500 条。

为了比较,让我们看看一个棱镜处在最小偏向角位置时的分辨本领,设线光源(摄谱仪狭缝)和棱镜的 A 棱平行(见图 4.28)。当一束平行光线射到该棱镜上时,它将在宽度为 $l_1=l_2$ 的矩孔上产生衍射。按照 § 8.5(2),第一个强度极小离狭缝几何像的角距离(假定它很小)为

$$p=\frac{\lambda}{l_1} \tag{15}$$

根据 § 4.7(36),当波长改变 $\Delta\lambda$ 时,角色散相应改变

$$\Delta\varepsilon=\frac{t}{l_1}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\Delta\lambda \tag{16}$$

式中 t 是边缘光线之一从棱镜通过的最大宽度,而 n 是棱镜材料的折射率。因为在分辨极限时,$p\approx\Delta\varepsilon$,故棱镜的分辨本领为

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=t\left|\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right| \tag{17}$$

(17)式表明,**当玻璃给定时,一个棱镜的分辨本领仅仅依赖于光线所通过的那段棱镜的最大宽度;特别是,分辨本领与棱镜角无关**。作为一个例子,设棱镜底边长度等于 5 厘米,棱镜材料为重火石玻璃,在波长 $\lambda=5500$ 埃处,其色散 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda\approx1000$ 厘米$^{-1}$。如果该棱镜被光完全充满,则按(17)式,$\Delta\lambda\approx5.5\times10^{-5}$ 厘米$/5\times10^3=1.1$ 埃,即在可见区中心附近,它能分开相隔不小于 1.1 埃的两条谱线。由此可见,这样大小的棱镜和上述 27 500 条刻线光栅相比,分辨本领要小 10 倍。

以上只讨论了一维光栅,但这一分析很容易推广到二维或三维周期结构的衍射体。二维光栅(有时称为交叉光栅)还没有什么实际应用,虽然它们的效应常可见到,例如通过一细织物件(如手帕)去看一个亮光源。相反,三维光栅(有时称为空间光栅)的理论则非常重要,因为原子在晶体中的规则排列就形成这种光栅。晶格距离(相邻原子的距离)是 1 埃(10^{-8} 厘米)左右,这也是 X 射线波长的数量级。因此,使一束 X 射线通过晶体,可产生衍射图样,而且从分析这些图样可以了解晶体的结构。我们将在 13.1.3 节中简短讨论一下这一课题。

类光栅结构的另一个例子是液体中的超声波。超声波是由压电振荡器产生的弹性波,它和普通声波的区别仅在于频率已大大超过听觉上限。这种波使液体中产生稀疏和密集,它们对入射光的作用就像一个光栅。这种现象的理论在第 12 章中讨论,本节以下部分将只讨论光谱学工作中所用的各种一维光栅。

(b) 光栅的类型[①]

1785 年,里顿豪斯(D. Rittenhouse)[②] 发现了衍射光栅的原理,但是这个发现实际上没有引起人们注意。1819 年,夫琅禾费重新发现了这个原理[③]。夫琅禾费的头几个光栅是用很细的金属丝绕在两个平行螺丝之间做成的。由于这种绕线光栅制作比较容易,因而时至今日亦间有使用,特别是在长波(红外)范围。后来,夫琅禾费借助机器在玻璃板面的金淀积膜上刻制光栅;此外,他还用金刚石作为刻尖,直接在玻璃面上进行刻线。

罗兰(H. A. Rowland)[④] 使光栅制备技术取得了重大进展,他制造了几台性能优良的刻线机,并且还发明了所谓**凹面光栅**[在本节的(c)中讨论]。罗兰的机器能够刻 4 英寸高、6 英寸宽的光栅,他第一台机器每英寸能刻大约 14 000 条线,因而使分辨本领超过了 150 000。后来,迈克耳孙刻了更大的光栅,宽度大大超过 6 英寸,分辨本领接近 400 000。

早期的光栅大多刻在镜用合金和玻璃上,但是近代的工艺是在铝蒸发层上刻线。因为铝是一种软金属,它对刻尖(金刚石)的损害较小,而且在紫外区反射还比较好。

一个理想的光栅,它的全部刻线应该严格平行而且形状同一,但是实际上自然要发生误差。完全无规则的误差会使光谱变模糊,但这种误差不像系统误差,如间距的周期误差那样严重。这些系统误差造成光谱中的**伪线**,又称**鬼线**(ghost line)。它们同真线常常能区分开,只是很困难。

在光谱学应用中,高分辨本领并不永远是惟一重要的要求。当只有很少能量可予利用时,例如对于弱星光谱或星云光谱的研究,或者红外光谱区的工作,更重要的则是将尽可能多的光衍射到某一特定的序中。此外,对于精密的波长测量,就必须采用高色散的光栅。按照(8)式,当入射角固定时,角色散为

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{1}{\cos\theta}\frac{m}{d} \tag{18}$$

所以,要获得高的色散,间距 d 应该很小,或者须在高序(m 很大)进行观测。然而,如果光栅是由一系列不透明的和透明的(或反射的)长条所组成,则只有一小部分入射光被投到任何一序中。为了克服这个缺点,近代加工把光栅线槽刻成特定的形状。有一种光栅,其线槽形状如图 8.21 所示,采用这种刻线光栅,可使光大部分集中到中心像一边某一两个序中。这种类型的类栅,刻线相当粗,叫做**小阶梯光栅**,因为它们可以看做是介乎老式光栅和后面讨论的所谓**阶梯光栅**之间的一种形式。小阶梯光栅是伍德(R. W. Wood)[⑤] 首先刻制的,他用特选金刚砂晶体的天然棱边作为刻尖,在铜板上刻成这种光栅。后来,人们将金刚石棱边磨成所需形状,用来刻制。这种光栅每英寸有 2000 ~ 3000 条刻线,当用于可见光时,可将很大一部分光送到第 15 序或第 30 序附近的光谱群中。在红外光谱学中,小阶梯光栅具有重大价值。

---

① 关于光栅的制作方法和发展,比较详细的叙述见 G. R. Harrison, *J. Opt. Soc. Amer.*, **39**(1949), 413。

② D. Rittenhouse, *Trans. Amer. Phil. Soc.*, **2**(1786), 201。又见 T. D. Cope 的论文,发表于 *Journ. Franklin Inst.*, **214**(1932), 99。

③ J. Fraunhofer, *Denkschr. Akad. Wiss. München*, **8**(1821—1822), 1. *Ann. d. Physik*, **74**(1823), 337. Reprinted in his collected works(Munich, 1888), pp. 51, 117。

④ H. A. Rowland, *Phil. Mag.*(5), **13**(1882), 469. *Nature*, **26**(1882), 211. *Phil. Mag.*, **16**(1883), 297。

⑤ R. W. Wood, *Phil. Mag.*, **20**(1910), 770; *Ibid.* **23**(1912), 310; A. Trowbridge and R. W. Wood, *ibid.*, **20**(1910), 886, 898。

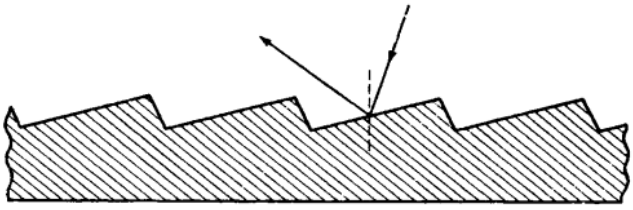


图 8.21 线槽形状特定的反射光栅

近来,对于刻线间距很小的光栅,也已研究出一些方法来控制线槽形状[①]。人们称之为**炫耀光栅**,它们的线槽形状和小阶梯光栅的相似,但是最强光谱所在的序却低得多(通常是第 1 序或第 2 序)。

看来,上述这类光栅的分辨本领,由于制作工艺所限,最高不能超过大约 400 000。某些应用,例如研究塞曼效应、超精细结构和同位素结构,需要分辨本领高于此值。为了获得如此高的分辨本领,哈里森(G. R. Harrison)[②] 设计了所谓**中阶梯光栅**,它的线槽宽而浅,在大于 45°的入射角下使用,入射方向要垂直于阶梯的窄边。这种光栅的工作序比较高($m \approx 1000$)。一个 10 英寸的中阶梯光栅,每英寸有 100 条刻线并且用于第 1000 序观测时,分辨本领为 1 000 000[③]。

因为制作高质量的光栅非常困难,所以人们常常采用原刻物的**复制品**[④]。这种复制品是从原刻母光栅上套模下来的。

最后有必要谈谈一种结构完全不同的"光栅",即迈克耳孙所发明的阶梯光栅[⑤]。它由一组完全一样的平行平面玻璃板排成阶梯而构成(因此得名),形状如图 8.22 所示。每个阶使通过它的光束所产生的滞后,相对于其邻阶来说,大小都是一样的。因为各阶的宽度比波长大得多,衍射效应被限制在很小的角度范围,所以光绝大部分集中在方向 $\theta = 0$ 附近某一两个光谱序中,而且其序数非常高,因为相邻光束的光程差达很多个波长。

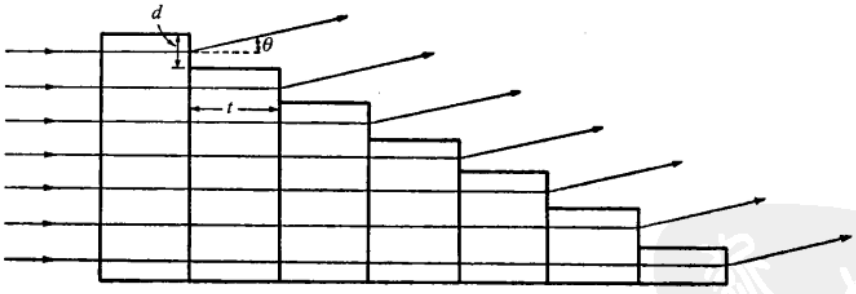


图 8.22 迈克耳孙阶梯光栅

① R. W. Wood, *Nature*, **140**(1937), 723; *J. Opt. Soc. Amer.*, **34**(1944), 509; H. Babcock, *ibid.*, **34**(1944), 1。

② G. R. Harrison, *J. Opt. Soc. Amer.*, **39**(1949), 522。

③ 关于高分辨光栅理论和制作的评论,见 G. W. Stroke, *Progress in Optics*, Vol. 2, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1963), p. 1。

④ 头几个复制品是 T. Thorp 制造的,见 British Patent No. 11, 460(1899);后来 R. J. Wallace[*Astrophys. J.*, **22**(1905), 123; *ibid.*, **23**(1906), 96]也进行了制造。T. Merton, *Proc. Roy. Soc. A*, **201**(1950), 187 介绍了改进的方法。

⑤ A. A. Michelson, *Astrophys. J.*, **8**(1898), 37; *Proc. Amer. Acad. Arts Sci.*, **35**(1899), 109。

阶梯光栅的分辨本领不仅依赖于光栅两端光线的光程差，而且依赖于(虽然程度差得多)光栅玻璃的色散。设 n 是折射率，t 是每个阶的厚度，d 是其宽度(见图 8.22)，则相邻二阶衍射光线的光程差显然是 $pd+(n-1)t$，其中假定 p 很小。因此主极大位置由下式给出：

$$pd+(n-1)t=m\lambda, \qquad (m=0,1,2,\cdots) \tag{19}$$

当波长改变 $\Delta\lambda$ 时，第 m 序极大将位移

$$\Delta' p=\left|m-t\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right|\frac{\Delta\lambda}{d} \tag{20}$$

m 序主极大和相邻极小的间隔 Δp 仍由(12)式给出，所以从分辨极限条件 $\Delta p=\Delta' p$ 得到

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=N\left|m-\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}t\right| \tag{21}$$

式中 m 可以用(19)式的近似值 $(n-1)t/\lambda$ 代替(略去其中 pd/λ 项)，因为具有显著强度的 p 值范围约为 λ/d，即 pd 的量级为 1 个波长，而 $(n-1)t$ 的量级为数千波长。这样，得到阶梯光栅分辨本领的表达式如下：

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\approx N\left|\frac{n-1}{\lambda}-\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right|t \tag{22}$$

比值 $(\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda)/[(n-1)/\lambda]$ 是很小的。对于火石玻璃，在可见区中心附近，此值在 $-0.05\sim-0.1$ 左右。因此，在这种情况下，一个阶梯光栅的分辨本领比一个线光栅[有 N 条刻线，也在 $m=(n-1)t/\lambda$ 序进行观测]的分辨本领高大约 5% ~ 10%。例如，一个迈克耳孙阶梯光栅由 20 块板组成，每块厚度 $t=18$ 毫米，每阶宽度 d 约 1 毫米。若取 $n=1.5$，则相邻光束的光程差(以绿光波长 $\lambda=5\times10^{-5}$ 厘米为计量单位时)为 $m\approx0.5\times1.8/5\times10^{-5}\approx20\,000$。假定 $(\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda)/[(n-1)/\lambda]=-0.1$，则此阶梯光栅的分辨本领约为 $20\times(20\,000+0.1\times20\,000)=440\,000$。

更重要的是**反射阶梯光栅**。这里，每个阶都镀有金属膜，反射很高，所观测的是反射光形成的光谱。反射阶梯光栅和同样尺寸的透射阶梯光栅相比，分辨本领要大 3 ~ 4 倍，因为这时每阶在相邻光束之间造成的光程差是 $2t$ 而不是 $(n-1)t\approx t/2$。像中阶梯光栅一样，反射阶梯光栅的分辨本领可超过 100 万。反射阶梯光栅超过透射阶梯光栅的另一个优点是，它可以用在玻璃有吸收的紫外光谱区。虽然当时迈克耳孙知道，使阶梯光栅采用反射光可获益甚多，但是技术上的困难使得反射阶梯光栅的制造长期不能过关近 30 年之久，一直到威廉姆斯(W. E. Williams)[①]才予以解决。由于将许多厚度相同的板在很窄的容许公差范围内装配在一起有困难，阶数实际限制在 40 左右。

最后有必要略谈一谈序的交叠问题。仅以可见区为例，即考虑 $\lambda_1=0.4$ 微米到 $\lambda_2=0.75$ 微米的波长范围。这时可以看出，第 1 序光谱和第 2 序光谱之间还有空隙，因为第 1 序光谱所跨的范围从 $p=\lambda_1/d$ 到 $p=\lambda_2/d=0.75\lambda_1/0.4d=1.8\lambda_1/d$，而第 2 序光谱从 $p=2\lambda_1/d$ 才开始。相反，第 2 序光谱和第 3 序光谱发生部分交叠，第 2 序从 $p=2\lambda_1/d$ 到 $p=2\lambda_2/d=2\times1.8\lambda_1/d$，而第 3 序在 $3\lambda_1/d$ 已经开始。当序增加时，邻序光谱交叠得越来越多(见图 8.23)。如果波长 λ 的第 $m+1$ 序光谱线和波长 $\lambda+\delta\lambda$ 的第 m 序光谱线重合在一起，则

① W. E. Williams, British Patent No. 312 534(1926); *Proc. Opt. Conv.*, **2**(1926), 982; *Proc. Phys. Soc.*, **45**(1933), 699。

$$(m+1)\lambda = m(\lambda + \delta\lambda)$$

即

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{m} \tag{23}$$

这样,"**自由光谱范围**"与序数成反比。

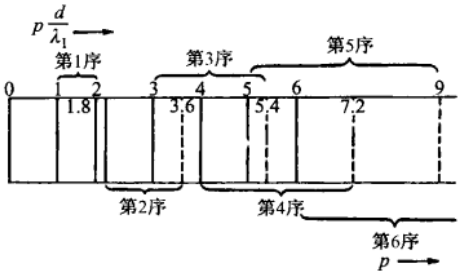


图 8.23 光栅光谱的交叠

序的重叠以前在所谓重合法(见 7.6.4 节,315 页)中用来比较波长;这一方法已被简单的内插法所取代,内插用的标准波长由干涉量度法测定。

最后总结一下各类光栅的主要特性。回想一下,根据(14)式,要获得高分辨本领,可令周期数很大而序数较低,或令周期数适中而序数很高。普通刻线光栅代表低序一端($m \approx 1$ 到 5),而阶梯光栅代表高序一端($m \approx 20\,000$)。中间是小阶梯光栅($m \approx 15$ 到 30)和中阶梯光栅($m \approx 1000$)。对于一些特殊应用,必须记住角色散与光谱序成正比,与周期成反比,而自由光谱范围与序数成反比。

(c) *光栅摄谱仪*

在光栅摄谱仪中,光栅将入射光分解成不同的光谱序,在每个序中产生狭缝光源的各个色像。图 8.24 示出一种简单装置。狭缝光源 S 在透镜 L 的焦平面上,光从 S 发出,经 L 变为平行,射到反射光栅 G 上,被衍射后,在望远镜 T 的焦平面 F 上形成 S 的各个像。这种装置的一种改进形式如图 8.25 所示,称为**利特罗(Littrow)装置**,它的优点是体积紧凑。这是一种自准直设计,它只需要一个透镜。狭缝紧挨着照相底版下面,透镜靠近光栅,光栅可相对入射光束方向转动一个指定的角度。

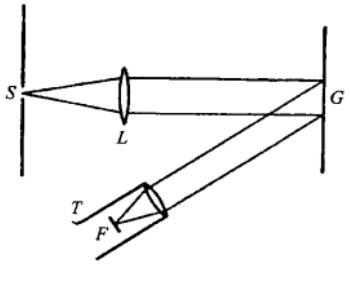


图 8.24 光栅摄谱仪

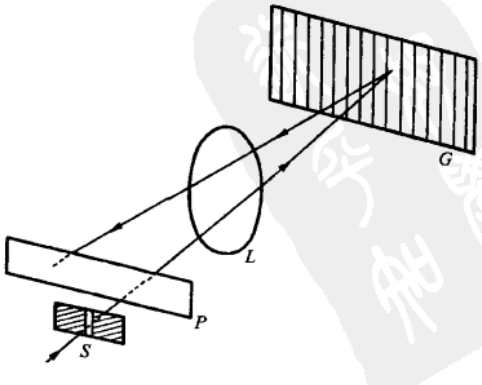


图 8.25 光栅摄谱仪:利特罗装置

为了避免用透镜聚焦时对衍射光线所造成的光损失，罗兰引进了**凹面光栅**。这种光栅刻在一个凹的高反射金属面（即凹面反射镜）上，各刻线在镜面某弦上的投影是等距的。从简单的几何定理可以知道狭缝和观察面相对光栅的适当位置：

设 Q 是光栅面的中点，C 是它的曲率中心，并以 QC 中点 O 为圆心，以 $r = OQ = OC$ 为半径作一个圆 K（见图 8.26）。现在我们来证明，从圆 K 上任一点 S 来的光将近似地被反射到圆上另一点 P，同时被衍射到圆上另一些点 P'，P''，…，这些点分别是各序衍射光线的焦点。为证明此点，作与入射光线 SQ 对应的反射光线 QP。设 $\alpha = \angle SQC$ 是入射角，则反射角 $\angle CQP$ 也等于 α，而且弧 SC 等于 CP。现在再来看从 S 入射到光栅上另一点 R 的一条光线。如果圆的直径足够大（实际一般为几英尺），假定 R 在圆 K 上就不致有多大误差。由于 C 是光栅的曲率中心，因而入射角 $\angle SRC$ 以及反射角仍然等于 α。此外，由于弧 CP 等于弧 SC，故可知 R 点的反射光线仍通过 P。

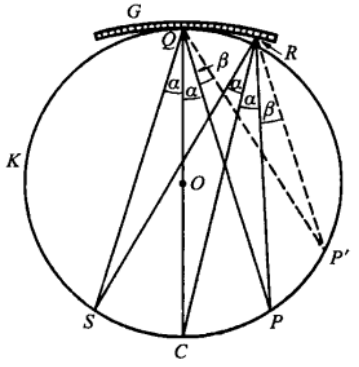


图 8.26　凹面光栅的聚焦作用（罗兰圆）

对衍射光线可采用同样的论证。设 β 是 Q 点某一衍射光线与 QP 的夹角。R 点相应同序衍射光线与 RP 的夹角将也是 β。因此，Q 点这条衍射光线与 SQ 的夹角，和 R 点这条衍射光线与 SR 的夹角相同，都是 $2\alpha + \beta$。所以这两条衍射光线相交于圆 K 上一点 P'。由此可见，**要得到很锐的线，狭缝、光栅和观察面（照相底版）三者应位于同一圆周上，其直径应等于凹面光栅的曲率半径。**

有几种装置都是根据这一原理设计的。罗兰本人所采用的装置如图 8.27 所示。其中光栅 G 和底版架 P 固定在一根可动横梁的两端，梁的长度等于光栅的曲率半径。横梁两端可沿互成直角的两个固定导轨自由滑动。狭缝 S 装在两导轨交点的紧上方，使垂直射到狭缝上的光可沿 SG 前进。这样，狭缝就位于以 PG 为直径的罗兰圆上，而底版上所接收到的光谱的序数取决于梁的位置。

另一种装置如图 8.28 所示，它避免使用可动部件。其中圆形钢轨系作为罗兰圆，狭缝 S 和光栅 G 都固定在圆钢轨上。环绕钢轨安装有一排底版架 P_0，P_1，P_{-1}，…，因而可同时拍摄几个序的光谱。这种装置叫做**帕邢**（F. Paschen）**装置**，它还具有稳定性高的优点。

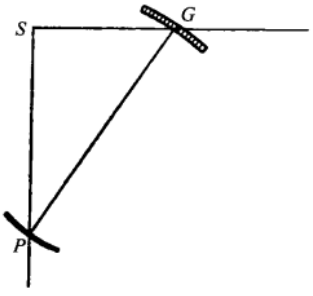


图 8.27 凹面光栅的罗兰装置

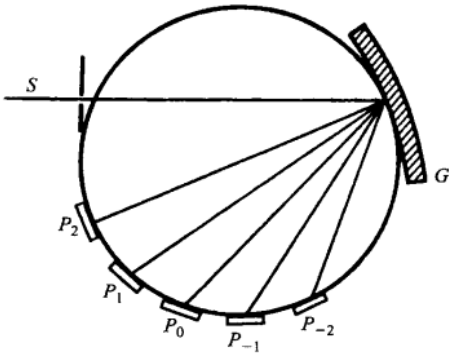


图 8.28 凹面光栅的帕邢装置

意格尔(A. Eagle)提出了另一种装置,它和平面光栅的利特罗装置一样,具有体积紧凑的优点。其中狭缝装在底版架中心的紧上方或紧下方(见图 8.29),也可装在边上而借助一小反射面将光投到所需方向。要观测光谱的不同部分,须将底版和光栅沿相反方向转动同一角度,并改变二者距离,使它们和罗兰圆总保持相切。所观测的光谱从光栅上衍射回来的角度几乎等于入射角。要使这个装置是严格自准直的,狭缝 S 应在底版中心。

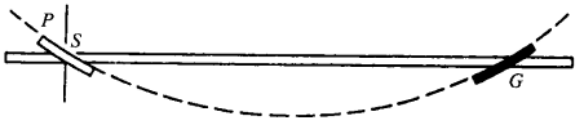


图 8.29 凹面光栅的意格尔装置

凹面光栅所产生的光谱线,和凹面反射镜成像有同样的像差,主要是像散。然而,如果在平行光下来使用凹面光栅,则可使用光栅法线方向上的像散为零,并使整个可用光谱范围像散非常小[①]。

8.6.2 成像系统的分辨本领

夫琅禾费衍射公式 §8.3(36)在光学系统**分辨本领**的计算中有着重要的应用。7.6.3 节讨论干涉光谱学时已经引入了分辨本领的概念,并且在前一节中计算了光栅和棱镜所能达到的分辨本领。现在把这个概念推广到成像系统。

在光谱仪器(例如,线光栅或法布里-珀罗干涉仪)中,分辨本领是衡量仪器分开波长相差很小的相邻两条谱线的能力。在成像系统中,分辨本领则是衡量分开相邻两个物点的像的能力。按照几何光学,当没有像差时,每个点物应该产生一个锐的点像。然而,由于衍射,实际的像总是一个有限大小的光斑。而如果有两个这样的像斑(衍射图样)发生了重叠,则二者中心强度极大靠得越近,就越难检查出有两个物。当然,眼睛能够分辨出两个物的极限,在某种程度上是一个实际经验问题。采用照相底版时,靠适当显影可提高反差,从而可降低分辨极限。

① 关于这种无像散装置,见 F. L. O. Wadsworth, *Astrophys. J.*, **3**(1896), 54。关于光栅像差理论和光栅装置的讨论,可见 W. T. Welford 的文章,载于 *Progress in Optics*, Vol. 4, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1965), p. 241。

虽然如此，人们还是希望有一个简单的判据，以便能对不同系统的相对功能进行粗略的比较，这仍可应用 7.6.3 节中所讨论的瑞利判据。按照这个判据，当一个像的主极大和另一个像的第一极小相重合时，这两个像算刚刚被分辨开。对于光谱仪器，分辨极限是某一波长差 $\Delta\lambda$，所以那时把分辨本领定义为 $\lambda/\Delta\lambda$。对于成像系统，分辨极限是某个距离 δx 或某个角度 $\delta\theta$，分辨本领则定义为这个量的倒数(即 $1/\delta x$ 或 $1/\delta\theta$)。

首先讨论望远镜的分辨极限。对于一个很远的物体来说，入射光瞳的边和物镜的圆边相重合，因而物镜就起着衍射孔的作用。设 a 是物镜孔径的半径，按照 § 8.5(16)，强度的第一极小相对于中心极大的位置是[①]

$$w = 0.61\frac{\lambda}{a} \tag{24}$$

这里 $w = \sqrt{p^2 + q^2}$ 代表方向 (p, q) 与中心方向 $p = q = 0$ 夹角 ϕ 的正弦。这个角通常很小，所以它的正弦可以用角度本身来代替。于是得到如下结论(根据瑞利判据)：**刚刚能被分辨开的两个星的角距离是** $0.61\lambda/a$。

当物镜给定时，眼睛所看到的像的角大小取决于目镜的放大率。然而，增加目镜的光焦度，并不可能显示出原像中不存在的细节结构，因为原像每个面元都是一个小衍射图样，而通过目镜看到的实际像只不过是这些图样放大像的集合。

以著名的帕洛玛山大望远镜为例，此镜的直径 $2a \approx 5$ 米。如果暂不考虑望远镜中中心遮挡物的影响，则可知其理论分辨极限(对可见区中心附近 $\lambda \approx 5.6\times10^{-5}$ 厘米的光来说)为

$$\phi \approx 0.61\frac{5.6\times10^{-5}\ \text{cm}}{2.5\times10^{2}\ \text{cm}} \approx 1.4\times10^{-7}$$

用弧秒表示时，即

$$\phi \approx 0.028''$$

在 6.1 节曾讲过眼睛的分辨极限是 1 弧分。现在可给以更精确的估计。因为眼睛瞳孔的直径与来光的强度有关，变化范围大约为 1.5 ~ 6 毫米，所以分辨极限的范围是(仍旧取 $\lambda = 5.6\times10^{-5}$ 厘米)

$$0.61\frac{5.6\times10^{-5}}{0.75\times10^{-1}} > \phi > 0.61\frac{5.6\times10^{-5}}{3\times10^{-1}}$$

即

$$4.55\times10^{-4} > \phi > 1.14\times10^{-4}$$

用分和秒表示时为

$$1'34'' > \phi > 0'24''$$

以上假定孔是圆的。但环孔情况也有重要意义，因为在许多望远镜中，例如，圆孔中心部分因存在第二个反射镜而被遮住。假设环孔周界是两个同心圆，半径分别为 a 和 ϵa，其中 ϵ 是某个小于 1 的正数。这时，夫琅禾费图样中的光分布状态仍由 § 8.5(8)形式的积分来表示，只是 ρ 的积分范围须换成 $\epsilon a \leqslant \rho \leqslant a$。于是，取代 § 8.5(13)而得到

---

① 按照 7.6.3 节，在狭缝衍射情况下，分辨极限时的鞍-峰强度比为 $8/\pi^2 = 0.811$。本处情况(圆孔)的相应值为 0.735。

$$U(P)=C\pi a^2\left[\frac{2J_1(kaw)}{kaw}\right]-C\pi\varepsilon^2a^2\left[\frac{2J_1(k\varepsilon aw)}{k\varepsilon aw}\right] \tag{25}$$

因此强度

$$I(P)=\frac{1}{(1-\varepsilon^2)^2}\left[\left(\frac{2J_1(kaw)}{kaw}\right)-\varepsilon^2\left(\frac{2J_1(k\varepsilon aw)}{k\varepsilon aw}\right)\right]^2 I_0 \tag{26}$$

式中 $I_0=|C|^2\pi^2a^4(1-\varepsilon^2)^2$ 是图样中心 $w=0$ 处的强度。这时,强度极小(零点)的位置由方程

$$J_1(kaw)-\varepsilon J_1(k\varepsilon aw)=0 \qquad (w\neq 0) \tag{27}$$

的根给出,而极大位置由

$$J_2(kaw)-\varepsilon^2J_2(k\varepsilon aw)=0 \tag{28}$$

的根给出。在推导(28)式时,同圆孔情况中一样,用了关系式 §8.5(15)。对于无遮挡的孔($\varepsilon=0$),(27)式的第一个根当然就是(24)式所给的值,即 $w=3.83/ka=0.61\lambda/a$。当 ε 增加时,(27)式的第一个根减小[①],例如,当 $\varepsilon=\frac{1}{2}$ 时,它略小于 $3.15/ka=0.50\lambda/a$。因主极大与 ε 无关,仍然在 $w=0$,由此可见,遮住孔的中心部分时,分辨本领将得到提高。然而,与此改进的同时,像的亮度将要下降,而且次极大要变得比较显著,以致反差降低。当 $\varepsilon=1/2$ 时,第一个次极大(在 $w=4.8/ka$)是主极大的 10%,与此相比,圆孔情况的这个值为 1.8%(在 $w=5.14/ka$ 处)(见图 8.30)。

遮挡住圆孔的中心部分,就相当于将光瞳函数[见 §8.3(39)]从

$$\begin{aligned} G(\xi,\eta)&=C \qquad (\text{当 } 0\leqslant\rho\leqslant a \text{ 时})\\ &=0 \qquad (\text{当 } \rho>a \text{ 时}) \end{aligned}$$

改变成

$$\begin{aligned} G(\xi,\eta)&=C \qquad (\text{当 } \varepsilon a\leqslant\rho\leqslant a \text{ 时})\\ &=0 \qquad (\text{当 } \rho<\varepsilon a,\rho>a \text{ 时}) \end{aligned}$$

自然,还可以用其他方法改变光瞳函数。修改光瞳函数的一般方法,是在系统的一个或多个面上淀积一层材料合适的部分透射薄膜。借助特殊构造的"滤波器"(例如用一个形状适当的空心透镜,充以一种吸收流体)可达到同样效果。问题在于,光瞳函数取什么形式,才能获得从某种公认意义上说是可能最好的像。这个问题已由一些作者加以研究[②]。特别令人感兴趣的是法朗西(T. di Francia)的结果[③]:光瞳函数可以选择成,使第一暗环的半径任意地小,同时使中心圆斑中的光越来越少,所以实际可采取的最小圆斑尺寸以及所能达到的分辨本领,要受到光量大小的限制。

---

① 由(26)式经简单计算可以得知,当 $\varepsilon\to1$ 时,$I/I_0\to J_0^2(kaw)$。因为方程 $J_0(x)=0$ 的第一个零点在 $x=2.40$,所以当 ε 增加时,第一暗环的半径趋近 $w=2.40/ka=0.38\lambda/a$ 所给的值。

② 例如,见 R. Straubel, *P. Zeeman Verh.* (Den Haag, Martinus Nijhoff, 1935), p. 302; R. K. Luneburg, *Mathematical Theory of Optics* (Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1964), §50; H. Osterberg and J. E. Wilkins, *J. Opt. Soc. Amer.*, **39** (1949), 553; G. Lansraux, *Rev. d'Optique*, **32** (1953), 475。
关于这一领域的研究,E. Wolf 有一篇简短述评,见 *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), **14** (1951), 109。

③ G. Toraldo di Francia, *Suppl. Nuovo Cimento*, **9** (1952), 426。

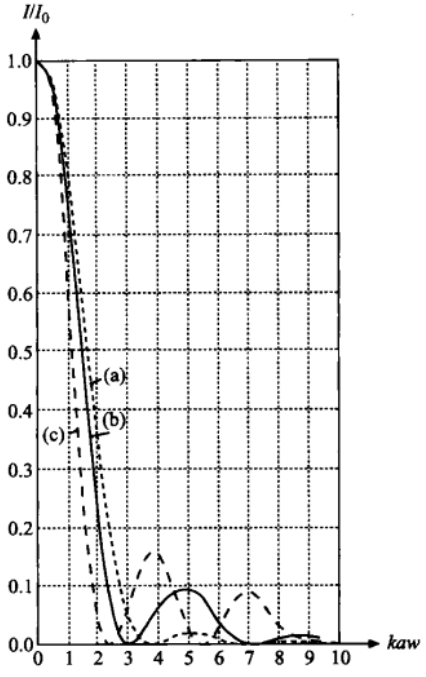


图 8.30　中心遮挡对分辨的影响图示。夫琅禾费图样归一化强度曲线:(a) 圆孔;(b)环孔,$\varepsilon = \frac{1}{2}$;(c)环孔,$\varepsilon \to 1$[引自,G. C. Steward, *The Symmetrical Optical System* (Cambridge, Cambridge University Press, 1928), p. 89]

适当修改光瞳函数以部分抑制次极大的方法,通常称为**变迹法**[①] (apodization)。在光谱学分析中,抑制次极大有利于对谱线伴线的探测,而在天文学应用中,它有利于分辨表观亮度相差可观的双星。

本节所概述的这种通行的分辨本领理论,特别适用于直接目视观测。当采用其他探测方法(如光度法)时,常可检查出角距离比瑞利判据所给值还小得多的两个物体。在这方面,将望远镜和迈克耳孙测星干涉仪(见 7.3.6 节)的相对分辨效能做一比较是很有意思的。如果以该干涉仪形成的条纹第一次消失作为存在两个星的判断标准,并设 d 是干涉仪靠外两个反射镜所能拉开的最大距离,则按照 § 7.3(34),该仪器可以探测出角距离小到$\phi \approx \frac{1}{2}\lambda/d$ 的双星。将此值与(24)式进行比较即可看出,如采用望远镜目测这种间距的双星,其物镜直径 $2a$ 须约为 $2.4d$。

8.6.3　显微镜中的成像

在上面所概述的分辨本领基础理论中,曾假定从两个物点来的光是不相干的。当两个物是自发光物体时,例如望远镜所观察的星星,这种假定是正确的。这时,在像平面上任何点所观测到的强度等于各物点在该点产生的强度之和。

---

① 关于本题的工作,全面的评述性文章见 P. Jacquinot and B. Roizen-Dossier in *Progress in Optics*, Vol. 3, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1964), p. 29。

在显微镜中,情况通常要复杂得多。显微镜所观测的物一般是不发光的,因而须用辅助系统加以照明。由于照明系统(聚光器)孔上的衍射,光源的每一体元将各在显微镜物平面上产生一衍射图样。中心点靠得足够近的那些衍射图样将部分重叠,结果物平面上相邻各点的光振动一般是部分关联的。此光有一些透过了物体,同时可产生一相变,其余部分则被散射、反射或吸收。因此,一般说来,依靠单次观测,即使使用某种特别装置,都不可能获得一个如实反映物体全部结构变化细节的放大图像。因此,人们研究出了各种观测方法,每种方法各适合于研究某些类型的物体,或用以显示特别的结构。

我们将简略说明显微镜成像理论的要点,首先只考虑完全不相干照明和完全相干照明这两种极端情况。部分相干照明情况将在 10.5.2 节中讨论。

(a) 不相干照明

首先讨论自发光物体(例如,电灯的白炽灯丝)。设 P 是物体的轴点,Q 是物平面上一个邻点,与 P 相距为 Y,并设 P'和 Q'是这两点的像(见图 8.31)。此外设 θ 和θ'是两个轴向光锥的边缘光线与轴的夹角。

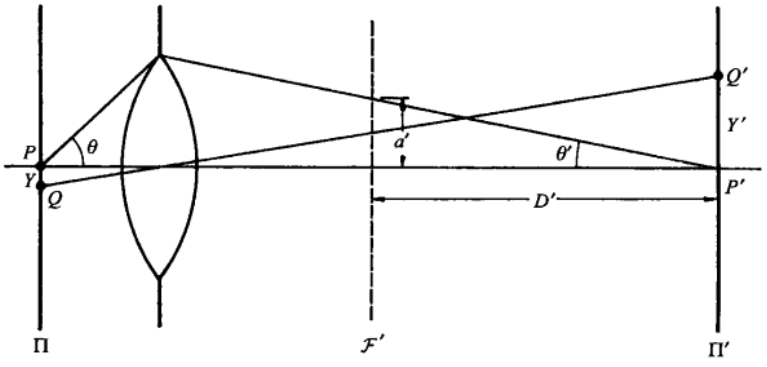


图 8.31 显微镜分辨本领理论图示

设 a'是会聚到P'点的光束与后焦面$\mathcal{F}'$相交区域(假定是圆形的)的半径,并设 D'是后焦面和像平面的距离,因 θ'很小,故

$$\theta' = \frac{a'}{D'} \tag{29}$$

此外,设 $w = \sqrt{p^2 + q^2}$是以"衍射单位"计量时 Q'和 P'的间距[见 §8.3(35)和 §8.5(7)],即 Q',P'两点对衍射孔中心张角的正弦,则在良好近似程度上有

$$Y' = w\mathrm{D}' \tag{30}$$

设 n 和 n'是物空间和像空间的折射率,λ 和 λ'是相应的波长,λ_0 是真空波长。按照 §8.5(16),P 的衍射图样的第一极小在 $w = 0.61\lambda'/a'$,因此在分辨极限时,有

$$Y' = 0.61\lambda'\frac{\mathrm{D}'}{a'} = 0.61\frac{\lambda'}{\theta'} = 0.61\frac{\lambda_0}{n'\theta'} \tag{31}$$

当然，一个显微镜必须设计成不仅使轴点，而且使物平面上相邻各点都能产生很锐的像。按照 4.5.1 节，这就要求满足正弦条件[①]

$$nY\sin\theta = -n'Y'\sin\theta'$$

因为 θ' 很小，故可用 θ' 代替 $\sin\theta'$。将 Y' 代入(31)式，最后得到

$$|Y| \approx 0.61\frac{\lambda_0}{n\sin\theta} \tag{32}$$

这个公式给出了在**不相干**照明和圆孔情况下，一个显微镜刚刚能分辨开的两个物点的距离。

(32)式中 $n\sin\theta$ 这个量是**数值孔径**[见 §4.8(13)]。因此，要达到高分辨本领，数值孔径必须很大。6.6 节中已经讨论过获得大数值孔的方法。

(b) 相干照明——**阿贝理论**

现在讨论另一种极端情况，即从物体发出的光可以作为完全相干光来处理。例如，一个结构比较简单的薄物体，由足够小的光源通过一低孔径聚光器来照明时，情况即近似如此(见 10.5.2 节)。

阿贝首先给出了圆满的相干照明分辨理论，并对之作了精彩的实验证明[②]。按照阿贝理论，物体就相当一个衍射光栅，因而在决定像平面上任一特定点的复振动时，不仅要考虑物镜孔径上每个面元的贡献，而且还要考虑物体上每个面元的贡献。用数学的话说就是，从物过渡到像，包括两个积分，一个对物平面，另一个对孔径平面。在阿贝理论中，先是计算物体所产生的衍射，第二步再考虑孔径的作用。也可以采取另一程序，将次序倒过来，所得结果当然相同[③]。

为了说明阿贝理论，首先讨论一个类光栅物体在平面波照明下的成像，波的入射方向与物平面垂直[科勒(Köhler)中央照明法]。这个波被该物体衍射后，在物镜后焦面 $\mathcal{F}'$ 上产生光栅的夫琅禾费衍射图样(见 8.6.1 节)。在图 8.32 中，这个衍射图样的各个极大(依次各序的谱)用 $\cdots, S_{-2}, S_{-1}, S_0, S_1, S_2, \cdots$ 代表。焦平面上的每一点可以认为各是一个相干次级扰动中心，扰动强度正比于该点的振幅。从这些次级光源送出去的各个光波将因此相互发生干涉，并将在物镜的像平面 Π' 上产生物体的像。要得到一个如实的像，所有的谱都必须参与像的形成。严格地讲，这决不可能，因为物镜孔径是有限的。后面将看到，删除掉某些谱会使像中出现完全虚假的细节。从实用目的上说，显然，孔径只要大得足以收进所有携有可观能量的那些谱就行了。

让我们更加精确地用计算表达出这些考虑，并且不仅仅限于类光栅物体。设 x, y 是物平面上某代表点的坐标，f 是焦平面 $\mathcal{F}'$ 离物镜透镜的距离，则 $\mathcal{F}'$ 平面上某点

$$\xi = pf, \qquad \eta = qf \tag{33}$$

(见图 8.32)的扰动由夫琅禾费公式表出如下：

---

① 这里出现负号是因为 θ' 对应于 4.5 节的 $-\gamma_1$。

② Ernst Abbe, *Archiv. f. Mikroskopische Anat.*, **9**(1873), 413。又见其 *Gesammelte Abhandlungen*, Vol. 1(Jena, G. Fischer, 1904), p. 45 和 O. Lummer and F. Reiche, *Die Lehre von der Bildentstehung im Mikroskop von Ernst Abbe*(Braunschweig, Vieweg, 1910)。A. B. Porter 也对阿贝理论做了很好的叙述，见 *Phil. Mag.*(6), **11**(1906), 154。

③ Lord Rayleigh 曾给出了一种与此处理等效的显微镜成像理论，见 *Phil. Mag.*(5), **42**(1896), 167；又见其 *Scientific Papers*, Vol. 4(Cambridge, Cambridge University Press, 1903), p. 235。

$$U(\xi,\eta)=C_1\iint_{\mathcal{A}}F(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\left[\frac{\xi}{f}x+\frac{\eta}{f}y\right]}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{34}$$

式中 F 是物体的透射函数，C_1 是常数，而积分是对物平面 Π 被物体覆盖的面积$\mathcal{A}$来进行的。

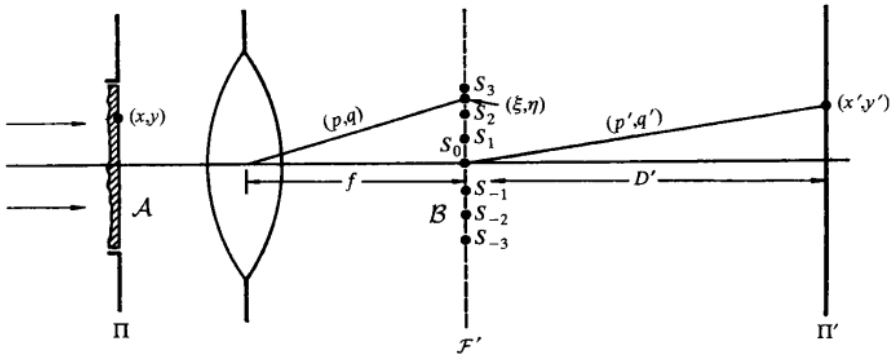


图 8.32 相干照明时显微镜成像的阿贝理论图示

下一步是从后焦面$\mathcal{F}'$过渡到像平面 Π′。如果同前令 D′代表$\mathcal{F}'$和 Π′的距离，$V(x',y')$是像平面上某代表点

$$x'=p'\mathrm{D}',\qquad y'=q'\mathrm{D}' \tag{35}$$

的扰动，则对于$\mathcal{F}'$上孔径$\mathcal{B}$产生的夫琅禾费衍射，有

$$V(x',y')=C_2\iint_{\mathcal{B}}U(\xi,\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\left[\frac{x'}{\mathrm{D}'}\xi+\frac{y'}{\mathrm{D}'}\eta\right]}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \tag{36}$$

其中假定 $a'/D'\ll 1$(见图 8.31)。将(34)式代入(36)式，得到

$$V(x',y')=C_1C_2\iint_{\mathcal{A}}\iint_{\mathcal{B}}F(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k}{f}\left[\left(x+\frac{f}{\mathrm{D}'}x'\right)\xi+\left(y+\frac{f}{\mathrm{D}'}y'\right)\eta\right]}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \tag{37}$$

如果对于物平面上$\mathcal{A}$外边的所有点，定义 $F(x,y)$为零，则对 x 和 y 的积分在形式上可扩大到从 $-\infty$到 $+\infty$。再者，如果孔径$\mathcal{B}$很大，使得对于$\mathcal{F}'$平面上$\mathcal{B}$外边的点，$|U(\xi,\eta)|$可以忽略，则 ξ 和 η 的积分范围同样可各扩大到从 $-\infty$到 $+\infty$。再注意到[见 §4.3(10)，其中 f'和 Z'分别对应于这里的f和 $-\mathrm{D}'$]

$$\frac{f}{\mathrm{D}'}=-\frac{1}{M} \tag{38}$$

式中 $M(<0)$是 Π 和 Π′之间的放大率，则由傅里叶积分定理[①]可以得到

$$V(x',y')=CF\left(\frac{x'}{M},\frac{y'}{M}\right)=CF(x,y) \tag{39}$$

其中(x,y)是和像点(x',y')对应的物点，而常数

$$C=C_1C_2\lambda^2f^2$$

① 见，例如 R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1 (New York, Interscience Publishers, 1953), p. 79。

因此，在所含的准确程度内[①]，只要孔径$\mathcal{B}$足够大，像和物是完全相似的(但是是倒像)。

为了证明当删除掉某些携有可观能量的谱时，像中会出现完全虚假的细节，我们讨论一个一维类光栅物体，它由 N 条等距全同狭缝组成，缝宽各为 s，缝间为不透明区，光栅周期为 d。为简单起见，假定后焦面$\mathcal{F}'$上的孔径$\mathcal{B}$为矩形，有两个边和类光栅物体的长条平行。

按照 §8.6(3)，

$$U(\xi)=C_1'\left(\frac{\sin\dfrac{k\xi s}{2f}}{\dfrac{k\xi s}{2f}}\right)\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Nkd\xi/f}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kd\xi/f}} \tag{40}$$

其中 $U^{(0)}$已用狭缝衍射表达式代入，C_1'是一常数(见 8.5.1 节)。如果矩孔$\mathcal{B}$在 ξ 方向上占据的范围为

$$-a\leqslant\xi\leqslant a$$

则由(36)和(40)两式可知，像平面上的扰动

$$V(x')=C'\int_{-a}^{a}\frac{\sin\dfrac{k\xi s}{2f}}{\dfrac{k\xi s}{2f}}\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Nkd\xi/f}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kd\xi/f}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx'\xi/D'}\,\mathrm{d}\xi \tag{41}$$

C'代表一常数，被积函数各主极大的位置由方程 $1-\exp[-\mathrm{i}kd\xi/f]=0$ 的根，即 $\xi=mf\lambda/d$ 给出，其中 m 是一整数。在这些主极大之间，还有一系列弱的次极大。如果 N 很大，主极大就非常锐，次极大相比可以忽略。这时，在良好近似程度上，上一积分可用一组积分之和来代替，其中各个积分依次从相邻两个主极大的间区中点 Q_m 积到下一个中点 Q_{m+1}。在各积分间区中，$\left(\sin\dfrac{ks\xi}{2f}\right)\Big/\dfrac{ks\xi}{2f}$和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx'\xi/D'}$ 中的变量可以用其中心值 $\xi=mf\lambda/d=2\pi mf/kd$ 来代替。由此得到 V 的表达式如下：

$$V(x')\approx V_0\sum_{-\overline{m}<m<\overline{m}}\frac{\sin\dfrac{m\pi s}{d}}{\dfrac{m\pi s}{d}}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}mx'}{d'}} \tag{42}$$

式中

$$\overline{m}=\frac{ad}{\lambda f},\qquad d'=Md=-\frac{D'}{f}d \tag{43}$$

而 V_0 代表下列积分：

$$V_0=C'\int_{Q_m}^{Q_{m+1}}\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Nkd\xi/f}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kd\xi/f}}\,\mathrm{d}\xi \tag{44}$$

这个积分除 m 很高时有小的修正项以外，实际上与 m 无关。级数(42)式可以改写成实数形式如下：

$$\frac{V(x')}{V_0}=1+2\sum_{1<m<\overline{m}}\frac{\sin\dfrac{m\pi s}{d}}{\dfrac{m\pi s}{d}}\cos\frac{2\pi mx'}{d'} \tag{45}$$

① 正如 8.3.3 节中(见 354 页)所指出的，这里所采用的夫琅禾费近似是限于物点和像点距轴都足够近的情况。

先假定孔径$\mathcal{B}$的宽度$2a$非常大。这时,求和在形式上或扩大到整个无穷范围($\bar{m}=\infty$),并且可以很容易证明,像和物是完全相似的。为此,将类光栅物体的透射函数(见图8.33)

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= F_0 \qquad 0<|x|<s/2 \\ &= 0 \qquad s/2<|x|<d/2 \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

展开成傅里叶级数

$$F(x)=c_0+2\sum_{m=1}^{\infty}c_m\cos\frac{2\pi mx}{d} \tag{47}$$

于是

$$c_0=\frac{F_0 s}{d},\qquad c_m=F_0\frac{\sin\dfrac{\pi ms}{d}}{\pi m}\qquad (m=1,2,3,\cdots) \tag{48}$$

可见,除常数因子外,该级数和(45)式相同。

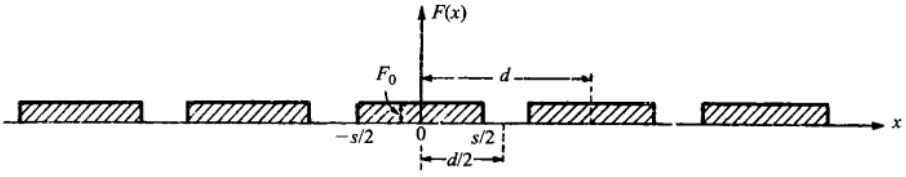


图8.33 一个类光栅物体

现在假定孔径$\mathcal{B}$的宽度$2a$减小。如果$2a$小到只有零序谱对像有贡献,即如果$\bar{m}=ad/\lambda f$只是一个小数,则按照(45)式,$V(x')$=常数,因而像平面只是被均匀照明。(当然,这个结果并不严格对,因为曾略去了某些误差项;实际上,强度朝边部方向有微弱下降。)

如果除零序谱以外,还可有两个第一序谱(S_1,S_{-1})从孔径通过,即$\bar{m}=ad/\lambda f$略大于1,则由(45)式可知

$$\frac{V(x')}{V_0}=1+2\frac{\sin\dfrac{\pi s}{d}}{\dfrac{\pi s}{d}}\cos\frac{2\pi x'}{d'} \tag{49}$$

这时像的周期$x'=d'$是正确的,但强度分布被大大拉平。使孔径越来越增大,像就越来越接近与物相似。

当去掉较低几序时,所得到的像将是完全虚假的。例如,如果除第二序以外,其他全部删除掉,则

$$\frac{V(x')}{V_0}=2\frac{\sin\dfrac{2\pi s}{d}}{\dfrac{2\pi s}{d}}\cos\frac{4\pi x'}{d'} \tag{50}$$

因而像的周期是$x'=d'/2$;"像"中线条数目为物中实有数目的两倍。

最后让我们估计一下分辨本领。回到图8.31所示的情况,但现在假定来自P,Q两点的光是相干的。这时,像平面上的分布主要由两个爱里衍射图样相干叠加而成,一个图样的中心在P'点,另一个在Q'点。在P'和Q'之间,距离P'为w_1(以"衍射单位"计量)的地点,复振幅为

$$U(w_1)=\left[\frac{2J_1(kaw_1)}{kaw_1}+\frac{2J_1[ka(w-w_1)]}{ka(w-w_1)}\right]U_0 \tag{51}$$

w 是 P' 和 Q' 的距离，其他符号意义同前。因此强度为

$$I(w_1)=\left[\frac{2J_1(kaw_1)}{kaw_1}+\frac{2J_1[ka(w-w_1)]}{ka(w-w_1)}\right]^2 I_0 \tag{52}$$

前面在非相干照明下，当一个图样的强度主极大与另一个的第一极小相重合时，P'，Q' 两点算是刚被分辨开。这时，在两个极大之间中点处（$kaw\approx 1.92$），强度等于 $2[2J_1(1.92)/1.92]^2\approx 0.735$ 乘上任一极大强度，即合强度曲线在两个主极大之间有一个大约 26.5% 的下陷（在缝孔情况下，此值为 19%，见图 7.62）。如果仍旧以这样大小的下陷来大体决定分辨极限，则临界间距 $w=2w_1$ 由下列关系求出：

$$\frac{I(w_1)}{I(0)}=0.735 \qquad (w=2w_1) \tag{53}$$

这个超越方程的第一个根是 $w_1\approx 2.57/ka$，所以临界间距以常用单位计量时为

$$Y'=2w_1\mathrm{D}'\approx\frac{2.57}{\pi}\frac{\mathrm{D}'\lambda'}{a}=\frac{0.82\lambda'}{\theta'}=\frac{0.82\lambda_0}{n'\theta'} \tag{54}$$

Y' 和物点 P，Q 相应间距 Y 的关系可通过正弦条件（取 $\sin\theta'\approx\theta'$ 近似）获得，从而最后得到**相干照明时的分辨极限**表达式如下：

$$|Y|=0.82\frac{\lambda_0}{n\sin\theta} \tag{55}$$

与非相干照明情况［见(32)式］相比，此式除数字因子较大外，其他都一样（这个数字因子无论如何是有些任意的，因为它和物的形状、孔径的形状以及接收器的灵敏度有关）。这样，当光的波长给定时，分辨本领实际上仍取决于物镜的数值孔径。

(c) 相干照明——泽尼克相衬观察法[①]

前已定义，**相物体**是一种只改变入射波位相而不改变入射波振幅的物体。这种物体的光学厚度是不均匀的，但它对入射光没有一点吸收。在生物学、晶体学和其他领域中常遇到这种物体。从前一讨论显然可见，采用通常方法来观察相物体，将看不到什么结构。因为，这时确定像平面上扰动的复振幅函数与物体透射函数相似[②]，而眼睛（或任何其他观察仪器）只能辨别强度上的变化，因而人们只能判断物体所导致的振幅变化如何，而不能判断物体导致的位相变化如何。

要了解相物体的结构，必须采用特殊的观察方法，例如，采用所谓**中心暗场观察法**（用光阑

① 关于相衬方法，比较详尽的讨论可见 M. Françon, *Le contraste de phase en optique et en microscopie* (Paris, Revue d'Optique, 1950)和 A. H. Bennett, H. Jupnik, H. Osterberg, and O. W. Richards, *Phase Microscopy* (New York, J. Wiley and Sons, 1952)。

② 只有当物镜孔径无穷大时，这两个函数实际才会严格相似。由于孔径总是有限的，因而可以看到相结构的一些细节。在某些情况下，牺牲分辨，将仪器稍稍散焦，可增加这种"像"的可见度［见 H. H. Hopkins, contribution in M. Françon, *Le contraste de phase et le contraste par interférences* (Paris, Revue d'Optique, 1952), p. 142］。

将中心序去掉),或**纹影法**(Schlieren)(将中心序一边所有光谱统统去掉)。最有效的方法是泽尼克的方法,它是泽尼克于1935年首先提出的[①],其优点是它可产生一个与物体所导致的位相变化成正比的强度分布。这个方法称为**相衬法**。1953年,泽尼克因此项发明而获得诺贝尔物理学奖。

为了说明相衬法的原理,首先讨论一个一维相光栅形式的透明物。这种物体的透射函数按定义[见8.6.1节(a)]呈如下形式:

$$F(x) = e^{i\phi(x)} \tag{56}$$

式中$\phi(x)$是一个实周期函数,其周期(设为d)等于光栅的周期。假定ϕ比1小得多,因而可将(56)式写成

$$F(x) \approx 1 + i\phi(x) \tag{57}$$

如果将F展成傅里叶级数

$$F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{\frac{2\pi i m x}{d}} \tag{58}$$

则[因为F是(56)式的形式,而且ϕ是实函数,数值比1小得多]

$$c_0 = 1, \qquad c_{-m} = -c_m^{\star} \qquad (m \neq 0) \tag{59}$$

第m序谱的强度正比于$|c_m|^2$。

在相衬观察法中,在物镜后面焦面$\mathcal{F}'$上放有一块用透明材料做的薄板,叫做**相板**,它的作用是使中心序(见图8.32中的S_0)的位相相对各衍射谱($S_1, S_{-1}, S_2, S_{-2}, \cdots$)滞后或超前1/4周期。这意味着,焦平面上的复振幅将从系数c_m所表征的那种分布,变成为下列系数c'_m所表征的分布:

$$c'_0 = c_0 e^{\pm i\pi/2} = \pm i, \qquad c'_m = c_m \qquad (m \neq 0) \tag{60}$$

式中取正号还是负号,视中心序位相是滞后还是超前而定。这时,像平面上产生的光分布不再代表相光栅(57)式,而是代表一个虚构的幅光栅

$$G(x) = \pm i + i\phi(x) \tag{61}$$

因此这时像平面上的强度将正比于(ϕ^2与1相比可予略去)

$$I(x') = |G(x)|^2 = 1 \pm 2\phi(x) \tag{62}$$

同前,式中$x' = Mx$,M是放大率。这个关系式表明,**在相衬观察法中,物体所导致的位相变化被转化成强度上的变化,像平面上任一点的强度(除多了一个常数项以外)系与物体相应面元上产生的位相变化成正比**[②]。当中心序的位相相对各衍射谱是滞后时[(61)式中的加号],物体上光学厚度比较大的地区,看起来将比平均照度亮,这种情况称为**亮相衬**;当中心序的位相是超前时,光学厚度较大的地区看起来将较暗,这种情况称为**暗相衬**(见图8.34和图8.35)。

---

① F. Zernike, *Z. Tech. Phys.*, **16**(1935), 454; *Phys. Z.*, **36**(1935), 848; *Physica*, **9**(1942), 686, 974。

② 下列几篇论文讨论了相衬法基础理论中所包含的近似:J. Picht, *Zeitschr. f. Instrkde*, **56**(1936), 481; *ibid.* **58**(1938), 1 和 F. D. Kahn, *Proc. Phys. Soc.*, B **68**(1955), 1073。

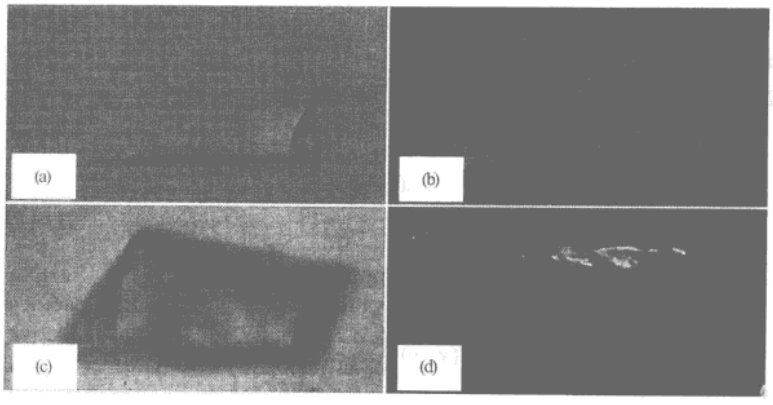


图 8.34　玻璃碎片($n=1.52$)的显微镜像,碎片放在特等载片($n=1.54$)上,放大 100 倍:(a)亮场像;(b)和(c)相衬像;(d)暗场像[引自 A. H. Bennett, H. Jupnik, H. Osterberg and O. W. Richards, *Trans. Amer. Microscop. Soc.*, **65**(1946), 126]

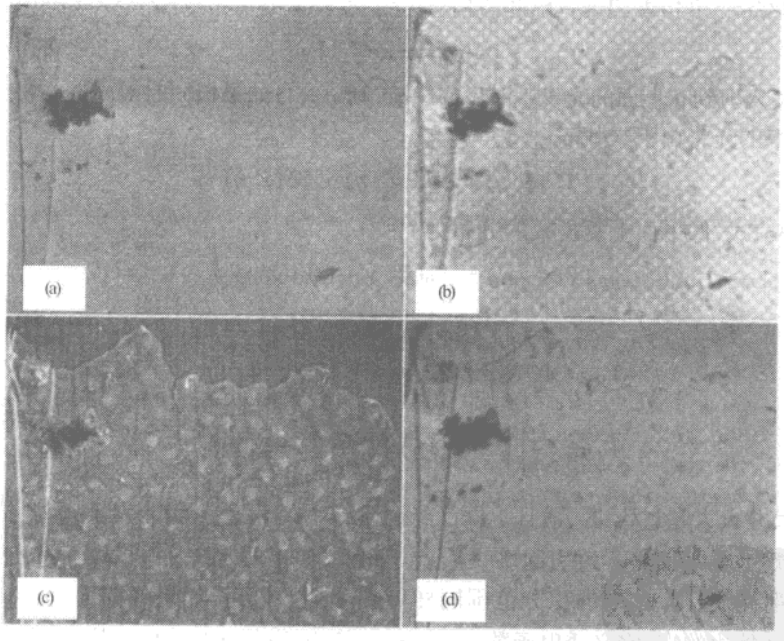


图 8.35　蛙瞬膜表皮的显微镜像,放大 100 倍:(a)全孔径亮场像,数值孔径(NA)=0.25;(b)孔径半遮时亮场像;(c)全孔径相衬像(亮衬);(d)全孔径相衬像(暗衬)[引自 A. H. Bennett, H. Jupnik, H. Osterberg and O. W. Richards, *Trans. Amer. Microscop. Soc.*, **65**(1946), 119]

为了获得好的分辨,照明系统的孔径常做成环形,而不做成圆形(见 8.6.2 节)。在这种情况下,$\mathcal{F}'$ 上直接(非衍射)光所通过的环形区就相当于图 8.32 中的中心序 S_0,这时正是这部分光,须予以滞后或超前 1/4 周期。

至于变相板,可由在玻璃基片上蒸发薄薄一层合适的介电质来制备。设 n 是该介电质的折射率,d 是层的厚度,则要产生 1/4 周期的滞后,须令 $d=\lambda/4(n-1)$。当然,中心序滞后 1/4

周期,等效于各衍射谱超前 3/4 周期,反之亦然。用略有吸收的敷层来代替介电质敷层,可提高本方法的灵敏度,下面还要再次谈到这一点。

剩下还需要证明,相衬法并不只限于周期结构的相物体。为此,将积分(34)式分成两部分:

$$U(\xi, \eta) = U_0(\xi, \eta) + U_1(\xi, \eta) \tag{63}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= C_1 \iint_{\mathcal{A}} e^{-\frac{ik}{f}[\xi x + \eta y]}\, dx\, dy, \\ U_1 &= C_1 \iint_{\mathcal{A}} [F(x, y) - 1] e^{-\frac{ik}{f}[\xi x + \eta y]}\, dx\, dy \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

U_0 代表没有物体时后焦面$\mathcal{F}'$上应有的光分布,而 U_1 代表衍射效应。"直接光" U_0(对应于图 8.32的中心序 S_0)将仅仅集中在$\mathcal{F}'$平面上轴点 $\xi = \eta = 0$ 周围一个很小的地区$\mathcal{B}_0$。相反,衍射光一般将只有极小部分到达这个地区,而大部分被衍射到这个平面的其他地区①。

现在假设用一块相板挡住直接光所通过的$\mathcal{B}_0$ 区。板的作用可用下列透射函数来描述:

$$A = a e^{i\alpha} \tag{65}$$

如果板仅仅使入射到它上面的光发生滞后或超前,则 $a = 1$;如果板同时对光还有吸收,则 $a < 1$。从孔径射出来的光将由下式代表:

$$U'(\xi, \eta) = AU_0(\xi, \eta) + U_1(\xi, \eta) \tag{66}$$

因而,根据(36)式,像平面上复振幅的分布为

$$V(x', y') = V_0(x', y') + V_1(x', y') \tag{67}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= AC_2 \iint_{\mathcal{B}} U_0(\xi, \eta) e^{-\frac{ik}{f}[x'\xi + y'\eta]}\, d\xi\, d\eta, \\ V_1 &= C_2 \iint_{\mathcal{B}} U_1(\xi, \eta) e^{-\frac{ik}{f}[x'\xi + y'\eta]}\, d\xi\, d\eta. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

由于孔径$\mathcal{B}$尺寸大大超过$\mathcal{B}_0$ 区,而且上面已经说明,U_0 在$\mathcal{B}_0$ 外边实际为零,因此把 V_0 中的积分区扩大到整个$\mathcal{F}'$平面将不致引起多大误差。此外,如果假定$\mathcal{B}$大得足以通过所携有任何可观能量的衍射光线,则 V_1 中的积分范围同样可到无穷。最后,如果像前面一样,对于物平面上物体覆盖区外边的点,定义透射函数 $F(x, y)$为零,则积分(64)式的范围也可取无穷。这时将(64)式代入(68)式,并利用傅里叶积分定理和关系式(38),即可得到

$$\left.\begin{aligned} V_0(x', y') &= CA, \\ V_1(x', y') &= C\left[F\left(\frac{x'}{M}, \frac{y'}{M}\right) - 1\right] = C[F(x, y) - 1]. \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

从(67)和(69)两式可知像平面上的强度

① 这一点 J. Picht 曾做了详细研究,见 *Zeitschr. f. Instrkde*, **58**(1938), 1。亦见 F. Zernike, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, **94**(1934), 382—383,他从稍许不同的方面讨论了这个问题。

$$I(x', y') = |V(x', y')|^2 = |C|^2|A + F(x, y) - 1|^2 \tag{70}$$

对于相物体，

$$F(x, y) = e^{i\phi(x,y)} \tag{71}$$

(70)式化为①

$$I(x', y') = |C|^2(a^2 + 2\{1 - a\cos\alpha - \cos\phi(x, y) + a\cos[\alpha - \phi(x, y)]\}) \tag{72}$$

因ϕ已假定很小，故(72)式可写成为

$$I(x', y') = |C|^2[a^2 + 2a\phi(x, y)\sin\alpha] \tag{73}$$

而且，如果相板引入的位相差代表 1/4 周期的滞后或超前，则 $\alpha = \pm\pi/2$，(73)式遂化为

$$I(x', y') = |C|^2[a^2 \pm 2a\phi(x, y)] \tag{74}$$

当相板对入射光没有一点吸收时($a = 1$)，结果重新得到(62)式。这时，强度变化正比于物体的位相变化。当相板对直接光有吸收($a < 1$)，透射率为 $a^2 \times 100\%$时，(74)式中第二项和第一项之比为 $\pm\phi/a$，因而像的衬比增加。例如，使直接光减弱到原来的 1/9，方法的灵敏度即可提高 3 倍。

8.7　直边菲涅耳衍射

8.7.1　衍射积分

前面讨论了夫琅禾费衍射的各种情况，现在转向讨论更一般的菲涅耳衍射情况。

基本衍射积分 § 8.3(28)可写成如下形式：

$$U(P) = B(C + iS) \tag{1}$$

其中

$$B = -A\frac{i}{\lambda}\cos\delta\frac{e^{ik(r'+s')}}{r's'} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} C &= \iint_{\mathcal{A}} \cos[kf(\xi, \eta)]\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta, \\ S &= \iint_{\mathcal{A}} \sin[kf(\xi, \eta)]\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

于是，在观察点 P，强度 $I(P) = |U(P)|^2$ 为

$$I(P) = |B|^2(C^2 + S^2) \tag{4}$$

现在，在 $f(\xi, \eta)$展开式 § 8.3(31)中，至少须保留到 ξ 和 η 的二次项。

同前，取孔$\mathcal{A}$平面为 xy 平面。为简化计算，选直线 P_0P 在孔平面上的投影作为 x 方向(见图 8.36)。这样，当点源 P_0 位置固定好时，我们的参考系一般将因观察点而异。

---

① $a = 0$ 的特殊情况相当于暗场观察法。按照(72)式，这时强度分布

$$I(x', y') = 2C^2[1 - \cos\phi(x, y)]$$

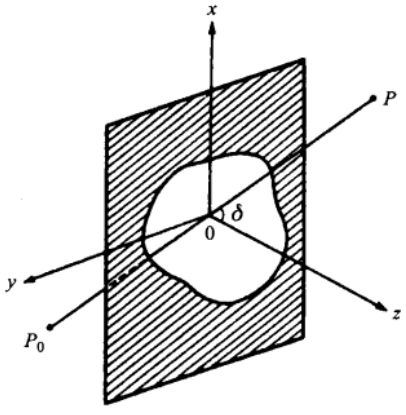


图 8.36 不透明平面屏上开孔的菲涅耳衍射

根据 § 8.3(30),这时,$l = l_0$,$m = m_0$,因而 $f(\xi, \eta)$展开式中的线性项消失。光线 P_0O 和 OP 的方向余弦是

$$\left.\begin{aligned} l &= l_0 = \sin\delta, \\ m &= m_0 = 0, \\ n &= n_0 = \cos\delta, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

同前,其中 δ 代表直线 P_0P 与 z 轴的夹角。于是,$f(\xi, \eta)$表达式 § 8.3(31)化为

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{s'}\right)(\xi^2 \cos^2\delta + \eta^2) + \cdots \tag{6}$$

如果忽略 ξ 和 η 的三次项和高次项,则积分(3)式变成

$$\left.\begin{aligned} C &= \iint_{\mathcal{A}} \cos\left[\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{s'}\right)(\xi^2 \cos^2\delta + \eta^2)\right] \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta, \\ S &= \iint_{\mathcal{A}} \sin\left[\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{s'}\right)(\xi^2 \cos^2\delta + \eta^2)\right] \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

这时,方便的做法是引进两个新的积分变量 u, v,定义为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{s'}\right)\xi^2 \cos^2\delta &= \frac{\pi}{2}u^2, \\ \frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{s'}\right)\eta^2 &= \frac{\pi}{2}v^2. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

于是,

$$\mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta = \frac{\lambda}{2} \frac{\mathrm{d}u\, \mathrm{d}v}{\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{s'}\right)\cos\delta}$$

而积分(7)式变成

$$\left.\begin{aligned} C &= b\iint_{A'} \cos\left[\frac{\pi}{2}(u^2+v^2)\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \\ S &= b\iint_{A'} \sin\left[\frac{\pi}{2}(u^2+v^2)\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

式中

$$b = \frac{\lambda}{2\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{s'}\right)\cos\delta} \tag{10}$$

现在积分范围是(u,v)平面上的$\mathcal{A}'$区，系由孔的$\mathcal{A}$区经(8)式变换而来。

8.7.2　菲涅耳积分

若$\mathcal{A}'$为一矩形，各边平行于 u 轴和 v 轴，则可借助下列恒等式使积分(9)式进一步简化：

$$\left.\begin{aligned} \cos\left[\frac{\pi}{2}(u^2+v^2)\right] &= \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right), \\ \sin\left[\frac{\pi}{2}(u^2+v^2)\right] &= \sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

在此情况下，计算(9)式须用到下列两个积分：

$$\left.\begin{aligned} C(w) &= \int_0^w \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)\mathrm{d}\tau, \\ S(w) &= \int_0^w \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)\mathrm{d}\tau. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$C(w)$和$S(w)$通常称为菲涅耳积分。这些积分对许多衍射问题是很重要的，人们曾对之做过广泛研究。我们必须简短讨论一下它们的某些性质[①]。

首先，推导$C(w)$和$S(w)$的级数表达式。将积分号内的余弦函数和正弦函数展成幂级数，并逐项积分，由而得到

$$\left.\begin{aligned} C(w) &= w\left[1 - \frac{1}{2!5}\left(\frac{\pi}{2}w^2\right)^2 + \frac{1}{4!9}\left(\frac{\pi}{2}w^2\right)^4 - \cdots\right], \\ S(w) &= w\left[\frac{1}{1!3}\left(\frac{\pi}{2}w^2\right) - \frac{1}{3!7}\left(\frac{\pi}{2}w^2\right)^3 + \frac{1}{5!11}\left(\frac{\pi}{2}w^2\right)^5 - \cdots\right]. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

级数(13)对所有 w 值都是收敛的，但是只有当 w 很小时才便于计算。当 w 很大时，可从 w 的负幂级数来计算此二积分。为此，把(12)式改写为

$$C(w) = C(\infty) - \int_w^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\sin\frac{\pi}{2}\tau^2\right)\frac{\mathrm{d}\tau}{\pi\tau} \tag{14}$$

---

① 关于菲涅耳积分数值表，可参考下列著作：British Association Report (Oxford, 1926), 273—275. E. Jahnke and F. Emde, *Tables of Functions with Formulae and Curves* (Leipzig and Berlin, Teubner; reprinted by Dover Publications, New York, 4th Ed., 1945), p. 35. G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (Cambridge, Cambridge University Press, 2nd Ed., 1944), p. 744. T. Pearcey, *Tables of Fresnel Integrals to Six Decimal Places* (Cambridge, Cambridge University Press, 1956)。

经分部积分后，

$$C(w)=C(\infty)+\frac{1}{\pi w}\sin\left(\frac{\pi}{2}w^2\right)+\int_w^\infty\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\cos\frac{\pi}{2}\tau^2\right)\frac{\mathrm{d}\tau}{\pi^2\tau^3}$$

再进行分部积分，并如此继续下去，最后得到

$$\left.\begin{aligned}C(w)&=C(\infty)-\frac{1}{\pi w}\left[P(w)\cos\left(\frac{\pi}{2}w^2\right)-Q(w)\sin\left(\frac{\pi}{2}w^2\right)\right],\\S(w)&=S(\infty)-\frac{1}{\pi w}\left[P(w)\sin\left(\frac{\pi}{2}w^2\right)+Q(w)\cos\left(\frac{\pi}{2}w^2\right)\right],\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}Q(w)&=1-\frac{1\times3}{(\pi w^2)^2}+\frac{1\times3\times5\times7}{(\pi w^2)^4}-\cdots,\\P(w)&=\frac{1}{\pi w^2}-\frac{1\times3\times5}{(\pi w^2)^3}+\frac{1\times3\times5\times7\times9}{(\pi w^2)^5}\cdots\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

为计算积分$C(\infty)$和$S(\infty)$，可把它们合并成一个复数积分

$$C(\infty)+\mathrm{i}S(\infty)=\int_0^\infty\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/2)\tau^2}\,\mathrm{d}\tau\tag{17}$$

并引入一个新的积分变量

$$\zeta=\tau\sqrt{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}=\tau\frac{\mathrm{i}-1}{2}\sqrt{\pi},\qquad\tau=-\zeta\frac{\mathrm{i}+1}{\sqrt{\pi}}$$

积分路线则相应地从实轴的$0\leqslant\tau\leqslant\infty$，变换成复平面$\zeta$上一条通过原点并与实轴成45°角的直线。这里很容易看出，如果积分沿平行于虚轴的直线来取，则随着离原点距离的增加，积分将趋于零。因此，从柯西留数定理可知，沿过原点任意斜线取积分时，结果等于沿实轴的积分。所以

$$C(\infty)+\mathrm{i}S(\infty)=\frac{\mathrm{i}+1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\zeta^2}\,\mathrm{d}\zeta=\frac{\mathrm{i}+1}{2}$$

（其中对ζ的实积分，是众所周知的高斯误差积分[①]，值为$\sqrt{\pi}/2$。）这样，

$$\left.\begin{aligned}C(\infty)&=\int_0^\infty\cos\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)\mathrm{d}\tau=\tfrac{1}{2},\\S(\infty)&=\int_0^\infty\sin\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)\mathrm{d}\tau=\tfrac{1}{2}\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

关系式(15)，加上(16)和(18)两式，把菲涅耳积分表成为w的负幂级数。这些级数是发散（渐近）级数，但是当w很大时，只要考虑其中有限几项，就可作为菲涅耳积分的良好近似值（见附录C）。

菲涅耳积分的特性可以用考纽(A. Cornu)的一个精致几何图形来说明[②]。这个图形以C和S作为某点P的直角坐标。当w取所有可能值时，P点即描绘出一条曲线。因$C(0)=S(0)=0$，故

① 见例如 R. Courant, *Differential and Integral Calculus*, Vol. 1 (London and Glasgow, Blackie and Sons Ltd, 2nd edition, 1942), p.496。

② A. Cornu, *Journ. de Phys.*, **3**(1874), 5, 44。

此曲线通过原点；又由于

$$C(-w)=-C(w),\qquad S(-w)=-S(w) \tag{19}$$

因而曲线对两个轴是反对称的。设 $\mathrm{d}l$ 代表曲线的元弧，则

$$\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}C^2+\mathrm{d}S^2=\left[\left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}w}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}w}\right)^2\right](\mathrm{d}w)^2$$

$$=\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{2}w^2\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}w^2\right)\right](\mathrm{d}w)^2$$

即

$$(\mathrm{d}l)^2=(\mathrm{d}w)^2 \tag{20}$$

因此，如果顺着 w 增大的方向来量 l，则参量 w 代表从原点量起时曲线的弧长。

设 θ 是曲线切线同C轴所成的角度，则

$$\tan\theta=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}C}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}w}}{\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}w}}=\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}w^2\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}w^2\right)}=\tan\left(\frac{\pi}{2}w^2\right)$$

即

$$\theta=\frac{\pi}{2}w^2 \tag{21}$$

这样，θ 随 $|w|$ 单调地增大，当 $w=0$ 时，$\theta=0$，所以在原点处，切线与C轴重合，当 $w^2=1$ 时，则 $\theta=\pi/2$，因而切线与C轴垂直。当 $w^2=2$ 时，$\theta=\pi$，切线再次平行于C轴，但指向为负。另外，根据(18)和(19)两式，$C(\infty)=-C(-\infty)=\frac{1}{2}$，$S(\infty)=-S(-\infty)=\frac{1}{2}$，所以曲线的两支分别趋向于坐标点 $P^+(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$和 $P^-(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$。这一曲线通常称为**考纽螺线**(见图 8.37)，它在讨论菲涅耳衍射图样的一般性质时是很有用的。

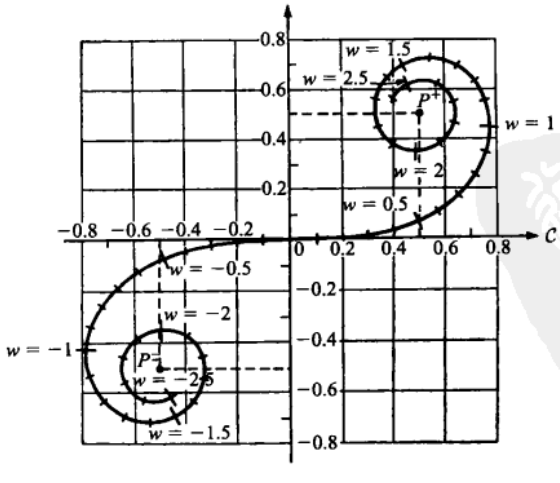


图 8.37　考纽螺线

8.7.3 直边菲涅耳衍射

现在讨论一个边界锐而直的半无限大平面上的菲涅耳衍射。这个问题对于几何阴影边界附近场的特性特别重要。这里只限于讨论直线 P_0P 及其在半平面上的投影(我们的 x 轴)垂直于直边的情况(见图 8.38)。设 x 是直边离原点的距离(原点在直线 P_0P 上),则积分范围为

$$-\infty<\xi<x, \qquad -\infty<\eta<\infty$$

用 u 和 v 为变量时,积分范围为

$$-\infty<u<w, \qquad -\infty<v<\infty \tag{22}$$

其中

$$w=\sqrt{\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{s'}\right)}x\cos\delta \tag{23}$$

观察点 P 是在照明区内还是在几何阴影区内,则视 $x>0$ 还是 $x<0$ 而定。

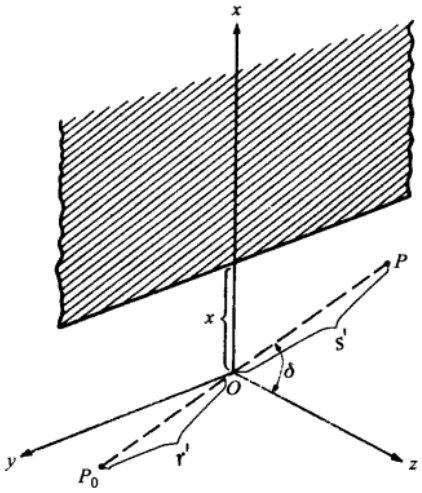


图 8.38 直边菲涅耳衍射

衍射积分(9)变成

$$\left.\begin{aligned} C&=b\int_{-\infty}^{w}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}v\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)\right],\\ S&=b\int_{-\infty}^{w}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}v\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}v^2\right)\right].\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

这里已违反了在推导(9)式时所用的一个条件,即积分范围的尺度应该比距离 P_0O 和 OP 小得多。要证明这些公式在本情况下亦近似成立,需要进一步仔细讨论误差项。然而,这里将略去这一讨论,因为关于半平面衍射问题,以后还将用严格的方法加以处理(见 11.5 节)。

由(18)和(19)两式,有

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{w}\cos\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{w}=C(\infty)+C(w)=\tfrac{1}{2}+C(w),\\&\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)\mathrm{d}\tau=1,\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

同样，

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{w}\sin\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)\mathrm{d}\tau=\tfrac{1}{2}+S(w),\\&\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right)\mathrm{d}\tau=1.\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

因此，(24)式变成

$$\left.\begin{aligned}C&=b\{[\tfrac{1}{2}+C(w)]-[\tfrac{1}{2}+S(w)]\},\\S&=b\{[\tfrac{1}{2}+C(w)]+[\tfrac{1}{2}+S(w)]\},\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

将(27)式代入(4)式，最后得到强度表达式如下：

$$I=\tfrac{1}{2}\{[\tfrac{1}{2}+C(w)]^2+[\tfrac{1}{2}+S(w)]^2\}I^{(0)}\tag{28}$$

式中

$$I^{(0)}=4|B|^2b^2=\frac{|A|^2}{(r'+s')^2}\tag{29}$$

强度函数(28)的特性可从考纽螺线推得。可以看出，$2I/I^{(0)}$ 这个量等于从渐近点 $P^-\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 到考纽螺线上点的距离平方。这样，在照明区内($w>0$)，当观察点 P 从几何阴影边界向外移动时，$I/I^{(0)}$ 是振荡的，但振幅逐渐减小，最后，正如从几何光学可以预期的那样，$I/I^{(0)}$ 渐近地趋向 1。强度的最大值并不在几何阴影边上，而是在直接照明区内稍为离开该边的地方(见图 8.39)。在几何阴影边上($w=0$)，$I/I^{(0)}=\frac{1}{4}$。在阴影区内($w<0$)，$I/I^{(0)}$ 单调地减小，一直到零。人们发现，这些结论和实验结果符合得很好。

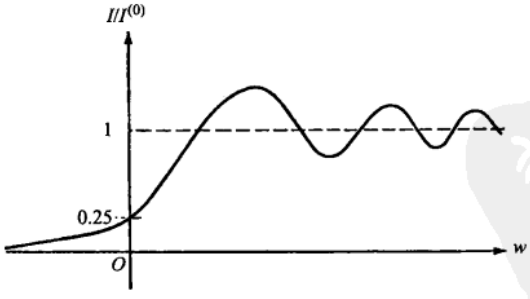


图 8.39　直边菲涅耳衍射图样的强度分布

8.8　焦点附近的三维光分布状态

8.3.3 节中曾经证明，一个经过精心校正的透镜，它焦平面上的分布本质上是由透镜孔上

的夫琅禾费衍射产生的。随后 8.5 节对各种开孔的夫琅禾费衍射图样进行了详细研究。要对光学像的结构获得更加完全的了解,不仅需要研究几何焦平面上的光分布,而且还必须研究这个平面附近的光分布。了解焦点附近的三维(菲涅耳)光分布状态,对于估计成像系统中接收平面的装配公差是特别重要的。

洛默尔(E. Lommel)在一篇经典性论文[①]中,第一个详细讨论了一个点光源的单色像由于圆孔衍射造成的离焦性质。他从惠更斯-菲涅耳积分出发,用贝塞尔函数的收敛级数,成功地表出了复扰动,并且还从实验上证实了根据这些计算所预期的种种现象。几乎与洛默尔同时,斯特拉夫(H. Struve)[②]发表了一篇类似的关于圆孔的分析,虽然论述不那么周详。他没有像洛默尔那样详细地计算出数值结果,但是他给出了几何阴影边附近有用的强度近似公式,而级数展开式在阴影边附近收敛颇为缓慢。若干年后,施瓦茨蔡耳德[③]推导了当观察点距离焦点很多个波长时有关的渐近近似表达式。

当时,洛默尔和斯特拉夫的研究很少引人注意,1909 年,德拜(P. Debye)[④]再次处理了这个问题,他的讨论确定了焦点附近和远离焦点处衍射场的某些一般特征。最近几十年,人们推广了这些作者的分析,并发表了一些线图,详细表出场在这个复杂区域内的结构;这些结果也已为光和微波(短无线电波)方面的实验所广泛证实[⑤]。

在讨论焦点附近的光分布状态时,我们将以洛默尔和斯特拉夫的分析作为起点,但是一开始先将惠更斯-菲涅耳原理的衍射场表成德拜所采用的积分形式,将更为适宜而有益。

8.8.1 用洛默尔函数计算衍射积分

考虑一个单色球面波,它通过一圆孔后,会聚于轴上焦点 O。我们将讨论焦点 O 附近某代表点 P 处的扰动 $U(P)$。设以矢量 $\mathbf{R}=\overrightarrow{OP}$ 表明 P 点相对于 O 点的位置,并假定距离 $R=OP$ 和圆孔半径 $a(\gg\lambda)$都比波阵面 W(正在穿过圆孔)的半径 $f=CO$ 小得多(见图 8.40)。

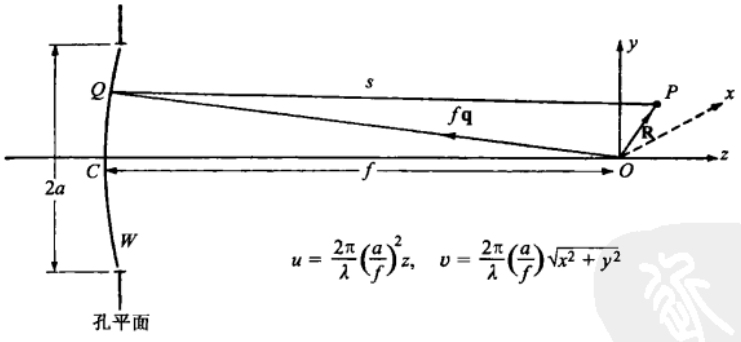


图 8.40 会聚球面波在圆孔上的衍射:符号

① E. Lommel, *Abh. Bayer. Akad.*, **15**, Abth. 2, (1885), 233;之后,另一篇论文(*ibid.* **15**, Abth. 3, (1886), 531)讨论了狭缝、不透明窄条和直边等衍射情况。

② H. Struve, *Mém. de l'Acad. de St. Petersbourgh* (7), **34** (1886), 1。

③ K. Schwarzschild, *Sitzb. München. Akad. Wiss., Math.-Phys. Kl.*, **28** (1898), 271。

④ P. Debye, *Ann. d. Physik.* (4), **30** (1909), 755。

⑤ 关于这一课题,周详的探讨见 J. J. Stamnes, *Waves in Focal Regions* (Bristol, Adam Hilger, 1986)。

设观察点 P 至波阵面 W 上某点 Q 的距离为 s，入射波在 Q 点的振幅为 A/f，应用惠更斯-菲涅耳原理，则

$$U(P)=-\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\frac{A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kf}}{f}\iint_W\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks}}{s}\mathrm{d}S \tag{1}$$

这里，由于所包括的角度都很小，因而式中忽略了波阵面上倾斜因子的变化。设 $\mathbf{q}$ 代表 OQ 方向上的单位矢量，则在良好近似程度上，有

$$s-f=-\mathbf{q}\cdot\mathbf{R} \tag{2}$$

此外，波阵面 W 的面元

$$\mathrm{d}S=f^2\mathrm{d}\Omega \tag{3}$$

其中 $\mathrm{d}\Omega$ 是 $\mathrm{d}S$ 对 O 点所张的元立体角。再则，在被积函数的分母中，用 f 代替 s，可不致产生显著误差。于是，(1)式变为

$$U(P)=-\frac{\mathrm{i}}{\lambda}A\iint_\Omega\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}}\,\mathrm{d}\Omega \tag{4}$$

这时积分遍及圆孔对焦点所张的立体角 Ω。方程(4)是**德拜积分**，它把场表成为不同传播方向的平面波的叠加(传播方向由 Ω 内各 $\mathbf{q}$ 矢量确定)。

在讨论德拜积分的计算之前，让我们指出下列重要事实：这一积分作为一系列基解(平面波)之和，代表了波动方程的一个严格解，它在 $f\to\infty$(圆孔在无穷远)极限时，在整个空间都是有效的。当然，(4)式不是我们原题的严格解，因为其中没有考虑屏的性质，而只是用基尔霍夫衍射理论的边界条件，作为严格边界条件的近似。我们问题的真正解不仅应包括在各个入射几何光线方向上传播的那些平面波的贡献，而且还应包括在所有可能方向上传播的各个平面波的贡献[①]。然而，如果 $f\gg a\gg\lambda$，并且除此之外，如果 $a^2/\lambda f\gg 1$，则可认为德拜积分是焦点区域光场分布的一个良好近似表示[②]。

为计算(4)式，首先将被积函数表成更明显的形式。在 O 点取一组笛卡儿坐标轴，令 z 轴沿 CO 方向。设 P 点的坐标为 (x,y,z)，Q 点的坐标为 (ξ,η,ζ)，并令

$$\left.\begin{aligned}\xi&=a\rho\sin\theta, & x&=r\sin\psi,\\ \eta&=a\rho\cos\theta, & y&=r\cos\psi.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

因 Q 点在球面波阵面 W 上，故

$$\zeta=-\sqrt{f^2-a^2\rho^2}=-f\left[1-\frac{1}{2}\frac{a^2\rho^2}{f^2}+\cdots\right] \tag{6}$$

于是，

---

① 这相当于用所谓平面波角谱来表示场。见 11.4.2 节和 13.2.1 节。

② Y. Li and E. Wolf, *Opt. Commun.*, **39**(1981), 205。另文，Y. Li and E. Wolf, *J. Opt. Soc. Amer. A*, **1**(1984), 801 讨论了当菲涅耳数 $N=a^2/\lambda f$(见 8.2 节)减小时焦点附近强度分布所经历的变化。位相方面的相应变化则讨论于 Y. Li, *J. Opt. Soc. Amer. A*, **10**(1985), 1667。低菲涅耳数聚焦系统中衍射图样的实验研究已在此前的一篇文章中做了报道，见 Y. Li and H. Platzer, *Optica Acta*, **30**(1983), 1621。

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}=\frac{x\xi+y\eta+z\zeta}{f}$$

$$=\frac{a\rho r\cos(\theta-\psi)}{f}-z\left[1-\frac{1}{2}\frac{a^2\rho^2}{f^2}+\cdots\right] \tag{7}$$

现在,引进下列两个无量纲变量 u 和 v,加上原有的ψ,来表示 P 点的位置,将更为有益:

$$u=\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{a}{f}\right)^2 z,\qquad v=\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{a}{f}\right)r=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{a}{f}\sqrt{x^2+y^2} \tag{8}$$

可以注意,当$|v/u|<1$时,P 点位于直接光束之中,而当$|v/u|>1$时,P 点在几何阴影区内。

由(7)和(8)两式,如果 $a\rho/f$ 二次幂以上各项和 1 相比可予略去,则

$$k\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}=v\rho\cos(\theta-\psi)-\left(\frac{f}{a}\right)^2 u+\tfrac{1}{2}u\rho^2 \tag{9}$$

再者,元立体角

$$\mathrm{d}\Omega=\frac{\mathrm{d}S}{f^2}=\frac{a^2\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta}{f^2} \tag{10}$$

因此,(4)式变为

$$U(P)=-\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\frac{a^2A}{f^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{f}{a})^2u}\int_0^1\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[v\rho\cos(\theta-\psi)+\frac{1}{2}u\rho^2]}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \tag{11}$$

式中对 θ 的积分,与我们在夫琅禾费圆孔衍射(见 8.5.2 节)中所遇到的相同。它等于 $2\pi J_0(v\rho)$,其中 $J_0(v\rho)$是零级贝塞尔函数。由此,(11)式变为

$$U(P)=-\frac{2\pi\mathrm{i}a^2A}{\lambda f^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{f}{a})^2u}\int_0^1 J_0(v\rho)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}u\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho \tag{12}$$

把这一积分实部和虚部分开计算较为方便。令

$$2\int_0^1 J_0(v\rho)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}u\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho=C(u,v)-\mathrm{i}S(u,v) \tag{13}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}C(u,v)&=2\int_0^1 J_0(v\rho)\cos(\tfrac{1}{2}u\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho,\\ S(u,v)&=2\int_0^1 J_0(v\rho)\sin(\tfrac{1}{2}u\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

这些积分可借用下列**洛默尔函数** $U_n(u,v)$和 $V_n(u,v)$计算之:

$$\left.\begin{aligned}U_n(u,v)&=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{u}{v}\right)^{n+2s}J_{n+2s}(v),\\ V_n(u,v)&=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{v}{u}\right)^{n+2s}J_{n+2s}(v),\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

这些函数是洛默尔为计算积分(14)而引进的①。利用关系式 § 8.5(11)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{n+1}J_{n+1}(x)] = x^{n+1}J_n(x)$$

$C(u,v)$可写成为

$$C(u,v) = \frac{2}{v}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}[\rho J_1(v\rho)]\cos(\tfrac{1}{2}u\rho^2)\mathrm{d}\rho$$

经分部积分后，

$$C(u,v) = \frac{2}{v}\left[J_1(v)\cos\tfrac{1}{2}u + u\int_0^1 \rho^2 J_1(v\rho)\sin(\tfrac{1}{2}u\rho^2)\mathrm{d}\rho\right] \tag{16}$$

再次利用关系式 § 8.5(11)，并进行分部积分，如此继续下去，最后得到

$$\begin{aligned} C(u,v) &= \frac{\cos\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}u}\left[\left(\frac{u}{v}\right)J_1(v) - \left(\frac{u}{v}\right)^3 J_3(v) + \cdots\right] \\ &\quad + \frac{\sin\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}u}\left[\left(\frac{u}{v}\right)^2 J_2(v) - \left(\frac{u}{v}\right)^4 J_4(v) + \cdots\right] \\ &= \frac{\cos\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}u}U_1(u,v) + \frac{\sin\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}u}U_2(u,v) \end{aligned} \tag{17a}$$

用同样方法可以得到

$$S(u,v) = \frac{\sin\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}u}U_1(u,v) - \frac{\cos\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}u}U_2(u,v) \tag{17b}$$

这些公式对焦点附近的所有点都是适用的，但是只有当$|u/v|<1$，即观察点位于几何阴影内时，它们才便于计算。当$|u/v|>1$，即观察点在照明区内时，采用 v/u 正幂次展开式就更为合适。用类似的方法，对三角函数项进行分部积分，即可导出这些展开式。第一步得到

$$\begin{aligned} C(u,v) &= \frac{2}{u}\int_0^1 J_0(v\rho)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}[\sin(\tfrac{1}{2}u\rho^2)]\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{2}{u}\left[J_0(v)\sin\tfrac{1}{2}u + v\int_0^1 J_1(v\rho)\sin(\tfrac{1}{2}u\rho^2)\mathrm{d}\rho\right] \end{aligned} \tag{18}$$

其中使用了关系式 § 8.5(15)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-n}J_n(x)] = -x^{-n}J_{n+1}(x)$$

再进行分部积分，并利用上一关系和下列共知公式[可从 $J_n(x)$的级数展开式导出]

① 关于这些函数，比较完全的讨论可参考 Lommel 论文(同前)和下列书籍：G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (Cambridge, Cambridge University Press, 1922), pp. 537—550; A. Gray, G. B. Mathews, and T. M. MacRobert, *A Treatise on Bessel Functions* (London, Macmillan, 2nd edition, 1922), Chapter XIV; 和 J. Walker, *The Analytical Theory of Light* (Cambridge, Cambridge University Press, 1904), p. 396。

$$\lim_{x\to 0}\frac{J_n(x)}{x^n}=\frac{1}{2^n n!} \tag{19}$$

可以得到

$$\begin{aligned}C(u,v)=&\frac{\sin\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}u}\left[J_0(v)-\left(\frac{v}{u}\right)^2 J_2(v)+\cdots\right]\\&-\frac{\cos\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}u}\left[\left(\frac{v}{u}\right)J_1(v)-\left(\frac{v}{u}\right)^3 J_3(v)+\cdots\right]\\&+\frac{2}{u}\left[\frac{v^2}{2u}-\frac{1}{3!}\left(\frac{v^2}{2u}\right)^3+\cdots\right]\end{aligned}$$

前两个方括号里的级数就是洛默尔函数 V_n 的 V_0 和 V_1，第三个方括号里的级数则是我们所熟悉的 $\sin(v^2/2u)$展开式，因此，

$$C(u,v)=\frac{2}{u}\sin\frac{v^2}{2u}+\frac{\sin\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}u}V_0(u,v)-\frac{\cos\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}u}V_1(u,v) \tag{20a}$$

用同样方法可得到另一积分的表达式为

$$S(u,v)=\frac{2}{u}\cos\frac{v^2}{2u}-\frac{\cos\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}u}V_0(u,v)-\frac{\sin\frac{1}{2}u}{\frac{1}{2}u}V_1(u,v) \tag{20b}$$

这就完成了我们问题的形式解。现在讨论这些公式的一些内涵。

8.8.2 强度分布

根据(12)、(13)、(17)和(20)各式，焦点附近的强度 $I=|U|^2$ 由下列两个等效表达式给出：

$$I(u,v)=\left(\frac{2}{u}\right)^2[U_1^2(u,v)+U_2^2(u,v)]I_0 \tag{21a}$$

和

$$\begin{aligned}I(u,v)=&\left(\frac{2}{u}\right)^2\left\{1+V_0^2(u,v)+V_1^2(u,v)\right.\\&\left.-2V_0(u,v)\cos\left[\frac{1}{2}\left(u+\frac{v^2}{u}\right)\right]-2V_1(u,v)\sin\left[\frac{1}{2}\left(u+\frac{v^2}{u}\right)\right]\right\}I_0\end{aligned} \tag{21b}$$

式中

$$I_0=\left(\frac{\pi a^2|A|}{\lambda f^2}\right)^2 \tag{22}$$

是几何焦点 $u=v=0$ 处的强度。

从(15)式可知，$U_1(-u,v)=-U_1(u,v)$，$U_2(-u,v)=U_2(u,v)$，$V_0(-u,v)=V_0(u,v)$，$V_1(-u,v)=-V_1(u,v)$。因此，当 u 换成 $-u$ 时，强度 $I(u,v)$保持不变。所以，**在焦点附**

近，强度分布对几何焦平面是对称的[①]。自然，该分布对 u 轴($v=0$)也是对称的。

洛默尔从(21)式出发，计算了焦点附近一些特定接收平面上的强度分布，并从实验上证实了一些预期结果[②]。根据洛默尔数据，可作出焦点附近的等强度线[或称**等照度线**(isophote)]，结果如图 8.41 所示[③]。

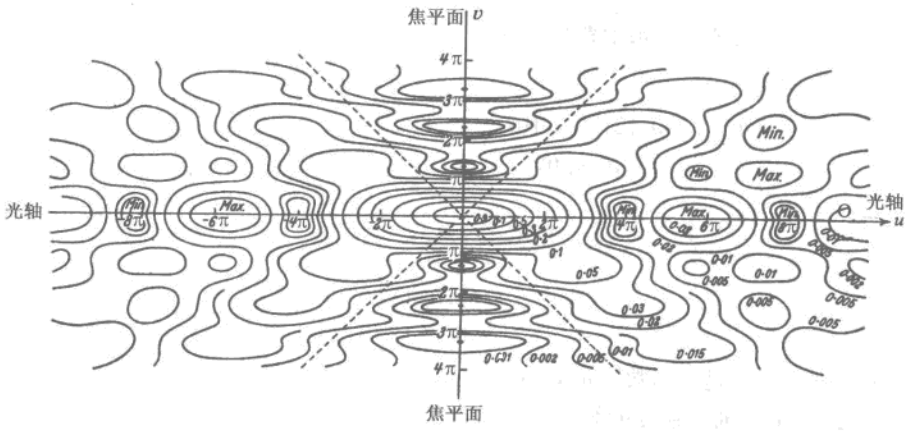


图 8.41　圆孔衍射会聚球面波子午面上焦点附近的等照度线[强度 $I(u,v)$的恒值线]。焦点的强度取作 1(归一化)。虚线代表几何阴影区的边界。当图形绕u轴转动时，v轴上的各极小值即产生爱里暗环。图中 max 代表极大，min代表极小[引自E. H. Linfoot and E. Wolf, *Proc. Phys. Soc.*, B, **69**(1956), 823加以改制]

特别重要的是，衍射像的亮中心具有管状结构，这在图中可以清楚地看到，而泰勒[④]在 1894 年就已根据实验提出过它。正是这个结构，决定着成像系统中接收面的装配公差。

现在我们来讨论几种重要的特别情况。

(a) 几何焦平面上的强度分布

当观察点在几何焦平面上时，$u=0$，(21a)式化为

$$I(0,v)=4\lim_{u\to 0}\left[\frac{U_1^2(u,v)+U_2^2(u,v)}{u^2}\right]I_0 \tag{23}$$

从函数 U_n 的定义方程可以得出

---

① 关于场在焦点区域内的对称分布性质，E. Collett 等所讨论的情况比这里普遍，见 E. Collett and E. Wolf, *Opt. Lett.*, **5**(1980), 264。

② 有关实验在下列文章中亦有报道：M. E. Hufford and H. T. Davis, *Phys. Rev.*, **33**(1926), 589；C. A. Taylor and B. J. Thompson, *J. Opt. Soc. Amer.*, **48**(1958), 844。在微波方面，也有人做了类似实验，圆孔情况的见 M. P. Bachynski and G. Bekefi, *J. Opt. Soc. Amer.*, **47**(1957), 428，矩孔情况的见 P. A. Mathews and A. L. Cullen, *Proc. Inst. Elect. Engrs*, Pt. C, **103**(1956), 449。

③ M. Berek[*Z. Phys.*, **40**(1926), 421]曾发表过一个类似但不够详细的线图。该图在一些书中转载有误(几何阴影区位置不对，两个轴也弄颠倒了)。F. Zernike 和 B. R. A. Nijboer 在一篇专稿中给出了另一种线图[见 *La Théorie des Images Optiques*(Paris, Revue d'Optique, 1949), p. 227。A. Boivin 等人则根据电磁理论，计算了相应的电能密度和能流，作出了它们的恒值线图，见 A. Boivin and E. Wolf, *Phys. Rev.*, **138**(1965), B 1561 和 A. Boivin, J. Dow and E. Wolf, *J. Opt. Soc. Amer.*, **57**(1967), 1171。

E. H. Linfoot 和 E. Wolf[*Proc. Phys. Soc.*, B, **66**(1953), 145]报道了环孔情况的同类线图。A. Boivin[*J. Opt. Soc. Amer.*, **42**(1952), 60]讨论了把 Lommel 的分析推广到一组同心环孔所产生的衍射。

④ H. D. Taylor, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, **54**(1894), 67。

$$\lim_{u\to 0}\left[\frac{U_1(u,v)}{u}\right]=\frac{J_1(v)}{v},\qquad \lim_{u\to 0}\left[\frac{U_2(u,v)}{u}\right]=0 \tag{24}$$

所以

$$I(0,v)=\left[\frac{2J_1(v)}{v}\right]^2 I_0 \tag{25}$$

这样,我们就得到以前圆孔夫琅禾费衍射的爱里公式 § 8.5(14),这是理所当然的。

(b) 轴上的强度分布

当观察点在轴上时,$v=0$,(21b)式中的两个 V_n 函数化为

$$V_0(u,0)=1,\qquad V_1(u,0)=0$$

因此

$$\begin{aligned} I(u,0)&=\frac{4}{u^2}(2-2\cos\tfrac{1}{2}u)I_0\\ &=\left(\frac{\sin u/4}{u/4}\right)^2 I_0 \end{aligned} \tag{26}$$

这样,轴上的强度分布是由函数$[\sin(x)/x]^2$ 来表征的。这个函数在 8.5.1 节矩孔夫琅禾费衍射中已经讨论过了。轴上强度的第一个零值由 $u/4\equiv\pi a^2 z/2\lambda f^2=\pm\pi$ 来决定,即它离焦点的距离 $z=\pm 2f^2\lambda/a^2$。

通常认为,强度比像斑中心低大约 20%还是可允许的。因为当接收面从中心位置($u=0$)移到 $u\approx 3.2$ 时,$[\sin(u/4)/(u/4)]^2$ 即减小 20%,所以焦点公差 Δz 近似为

$$\Delta z=\pm 3.2\frac{\lambda}{2\pi}\left(\frac{f}{a}\right)^2\approx\pm\tfrac{1}{2}\left(\frac{f}{a}\right)^2\lambda \tag{27}$$

例如,对于一个 $f/10$ 的光线锥($f/a=20$),当光的波长为 $\lambda=5\times 10^{-5}$ 厘米时,焦点公差约为 $\pm 0.5\times 20^2\times 5\times 10^{-5}$ 厘米 $=\pm 0.1$ 毫米。

(c) 几何阴影边界上的强度分布

当观察点在几何阴影边界上时,$u=\pm v$。因为强度分布对几何焦平面是对称的,所以可取 $u=+v$ 而不有失一般性。于是,函数 U_n 化为

$$U_1(u,u)=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s J_{2s+1}(u),\qquad U_2(u,u)=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s J_{2s+2}(u) \tag{28}$$

这里要用到共知的雅可比(Jacobi)恒等式[①]:

$$\left.\begin{aligned} \cos(u\cos\theta)&=J_0(u)+2\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s J_{2s}(u)\cos 2s\theta,\\ \sin(u\cos\theta)&=2\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s J_{2s+1}(u)\cos(2s+1)\theta \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

令 $\theta=0$,并同(28)式相比较,得到

$$\left.\begin{aligned} U_1(u,u)&=\tfrac{1}{2}\sin u,\\ U_2(u,u)&=\tfrac{1}{2}[J_0(u)-\cos u], \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

① 见,例如 G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of the Bessel Functions* (Cambridge, Cambridge University Press, 1922), p. 22。

因而(21a)式化为

$$I(u, u) = \frac{1 - 2J_0(u)\cos u + J_0^2(u)}{u^2} I_0 \tag{31}$$

此函数的曲线如图 8.42 所示。

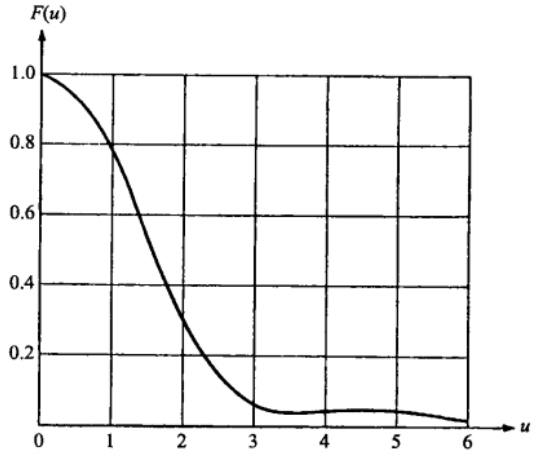


图 8.42　沿几何阴影边界上的强度变化。函数 $F(u) = \frac{1 - 2J_0(u)\cos u + J_0^2(u)}{u^2}$

8.8.3　积分强度

现在考虑另一个有用的计算。设在接收面(u = 常数)上,以轴点为中心,以预定的 r_0 为半径,作一小圆,试求落在此小圆内的(时间平均)能量百分数 L。设

$$E = \pi a^2 \left(\frac{|A|}{f}\right)^2 \tag{32}$$

代表在单位时间内入射到圆孔上的总能量,则所求的能量百分数

$$L(u, v_0) = \frac{1}{E}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} I(u, v) r \, dr \, d\psi$$

$$= \frac{1}{2I_0}\int_0^{v_0} I(u, v) v \, dv, \tag{33}$$

式中

$$v_0 = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{a}{f}\right) r_0 \tag{34}$$

如果把洛默尔的强度表达式(21)代入(33)式,则可将此积分展开成贝塞尔函数组成的级数。这一推导是冗长的,因此我们将仅仅给出沃耳夫[①]计算的最后结果。

结果仍旧包含两个形式不同的表达式,一个适用于小圆边界在几何阴影区内,另一个则适用于小圆边界在直接光束中。如取消下标 0,即以 v 代替 v_0,则在第一种情况下($|v/u| \geqslant 1$),

① E. Wolf, *Proc. Roy. Soc.*, A, **204**(1951), 533。J. Focke, *Optica Acta*, **3**(1956), 161 推导了 $L(u, v)$的渐近近似式。

$$L(u, v) = 1 - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1} \left(\frac{u}{v}\right)^{2s} Q_{2s}(v) \tag{35a}$$

式中

$$Q_{2s}(v) = \sum_{p=0}^{2s} (-1)^p [J_p(v) J_{2s-p}(v) + J_{p+1}(v) J_{2s+1-p}(v)] \tag{36}$$

在第二种情况下($|v/u| \leqslant 1$),

$$L(u, v) = \left(\frac{v}{u}\right)^2 \left[1 + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1} \left(\frac{v}{u}\right)^{2s} Q_{2s}(v)\right]$$

$$- \frac{4}{u} \left[Y_1(u, v) \cos \tfrac{1}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right) + Y_2(u, v) \sin \tfrac{1}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right)\right] \tag{35b}$$

式中 $Q_{2s}(v)$仍由(36)式给出,而 Y_1 和 Y_2 是下列函数 Y_n 中的两个:

$$Y_n(u, v) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (n+2s) \left(\frac{v}{u}\right)^{n+2s} J_{n+2s}(v)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{v^2}{u} V_{n-1}(u, v) + u V_{n+1}(u, v)\right] \tag{37}$$

从这些公式可计算 $L(u, v)$的恒值线,结果如图 8.43 所示。可以认为它们和几何光学的光线有几分类似。

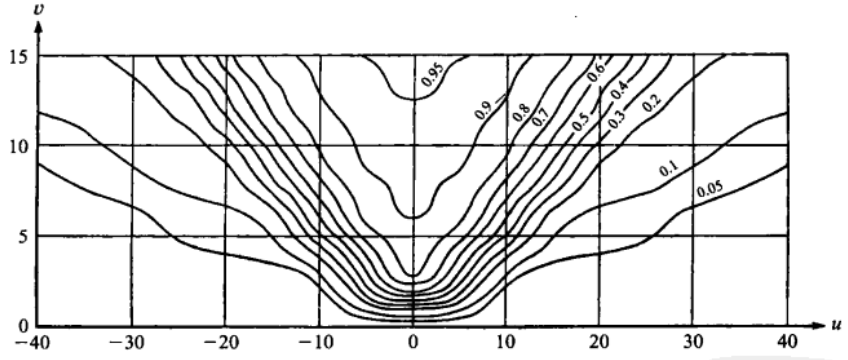


图 8.43 在选定接收面(u = 常数)上,轴心小圆所接收到的能量百分数 $L(u, v)$的恒值线[引自E. Wolf, *Proc. Roy. Soc.*, A, **204**(1951), 542]

可以注意,在特别情况下,当接收面同焦平面($u = 0$)重合时,(35a)式化为

$$L(0, v) = 1 - Q_0(v)$$

$$= 1 - J_0^2(v) - J_1^2(v) \tag{38}$$

和瑞利公式 § 8.5(18)一致。

特别有意义的情况是,(33)式的圆积分区和几何光锥的横截面相重合。这时,$|v/u| = 1$,并且(35a)和(35b)两式中的级数可行求和,结果①

① E. Wolf, *loc. cit.*, p. 539。

$$L(u, u) = 1 - J_0(u)\cos u - J_1(u)\sin u \tag{39}$$

所以，在接收面（u = 常数）上，落在几何阴影区的能量百分数为

$$\varepsilon(u) = J_0(u)\cos u + J_1(u)\sin u \tag{40}$$

图 8.44 画出了函数 $\varepsilon(u)$；它并非单调地减小，而是当 $J_1(u) = 0$ 时具有极大（$u = 0$ 除外），当 $\sin u = 0$（$u \neq 0$）时具有极小。

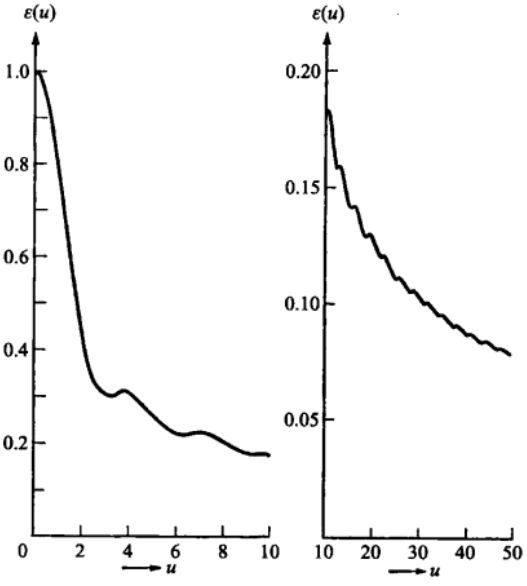


图 8.44　几何阴影区内所接收到的能量百分数 $\varepsilon(u)$[引自 E. Wolf, *Proc. Roy. Soc.*, A **204**(1951), 544]

8.8.4　位相特性

最后讨论焦点附近扰动的位相特性。按照(12)和(13)两式，如果不管附加项（$-\omega t$），则位相[①]

$$\phi(u, v) = \left(\frac{f}{a}\right)^2 u - \chi(u, v) - \frac{\pi}{2} \qquad (\mathrm{mod}\, 2\pi) \tag{41}$$

式中

$$\cos\chi = \frac{C}{\sqrt{C^2 + S^2}}, \qquad \sin\chi = \frac{S}{\sqrt{C^2 + S^2}} \tag{42}$$

在(42)式中，平方根取正号。

可以注意，与强度分布不同，位相分布不能只用 u 和 v 来表示，其结构状态还同几何光锥的角孔径有关。此外，还可以看出，在强度不为零的那些点，多值函数 $\phi(u, v)$ 的每一"分支"都是 u 和 v 的连续函数，而在强度为零的那些点，它是不确定的。在焦点 $u = v = 0$ 处，它的一个值是 $-\pi/2$。

① 一个方程，右边加上符号 mod 2π 时，表示该方程两边可差一常数 $2m\pi$，m 是任意整数。

当然,等相面(ϕ = 常数的面)是绕 u 轴的旋转面。现在来证明这些等相面还具有另外一种对称性,由下列关系表示出:

$$\phi(-u, v) + \phi(u, v) = -\pi \qquad (\mathrm{mod}\, 2\pi) \tag{43}$$

由(14)式,

$$C(-u, v) = C(u, v), \qquad S(-u, v) = -S(u, v) \tag{44}$$

于是由(42)式可知

$$\cos\chi(-u, v) = \cos\chi(u, v), \qquad \sin\chi(-u, v) = -\sin\chi(u, v) \tag{45}$$

所以

$$\chi(-u, v) = -\chi(u, v) \tag{46}$$

从(46)和(41)两式即可得到关系式(43)。因此,等相面$\phi = \phi_0$ 和$\phi = -\pi - \phi_0$(ϕ_0 任意)以平面 $u = 0$ 为反射对称面。

图 8.45 是一个 $f/2$ 共心光锥的等相面断面图。在远离焦点处,这些面和几何光学的球面波阵面相重合,但是当接近焦点区时,这些面就畸变得越来越厉害。在紧靠几何焦平面处,等相面的断面如图 8.46 所示。可以看到,在贴近焦点时,等相面实际上是平面;然而,可证明它们的间距和同波长平行光束应有的等相面间距不同。此外(见图 8.41),在每个等相面上,强度并不是均匀的。在紧靠爱里暗环(在图 8.46 中,用 R_1 和 R_2 表示)处,等相面显示有更为复杂的特性①。从几何焦点向 v 方向看去,在任何两个连号暗环之间,位相都是常数,但是在通过每个暗环时,位相陡然改变 π。从几何焦平面上复扰动 $U(0, v)$的表达式可以看出,这必须如此。$U(0, v)$表达式很容易借助(24)、(41)和(46)三式推出,结果如下:

$$U(0, v) = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{2J_1(v)}{v} \sqrt{I_0} \tag{47}$$

此式对于所有 v 值都是纯虚式,所以 $U(0, v)$的位相只能等于 $-\pi/2$ 或 $+\pi/2(\mathrm{mod}\, 2\pi)$,而在通过每个暗环时,$U(0, v)$改变符号,所以位相这时必定受到 π 的突变。位相的这种不连续——π 的突变,在通过强度为零的每一轴点时也都发生。

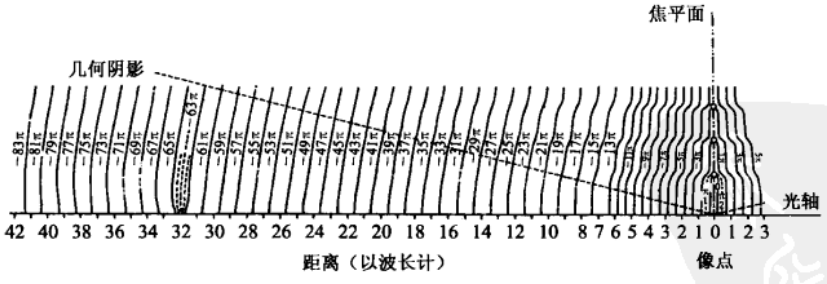


图 8.45 几何焦点附近等相面$\phi(u, v)$ = 常数的断面图,计算数据:$\lambda = 5 \times 10^{-5}$厘米,$a = 2.5$ 厘米,$f = 10$ 厘米[引自G. W Farnell, *Canad. J. Phys.*,**35**(1957),780]②

① 这是所谓波阵面位错的一个例子。在场幅为零,位相因而为奇异之点,邻近区域波阵面即发生位错。关于这种现象的讨论,见 J. F. Nye and M. V. Berry, *Proc. Roy. Soc. Lond.* A,**336**(1974),165。

② 图 8.45 中各等相面上的数值和 Farnell 论文中的差 π。这是因为要使此图和我们的分析一致,故按照(51)式将焦点的位相取为 $-\pi/2$,而 Farnell 论文中取为 $+\pi/2$。

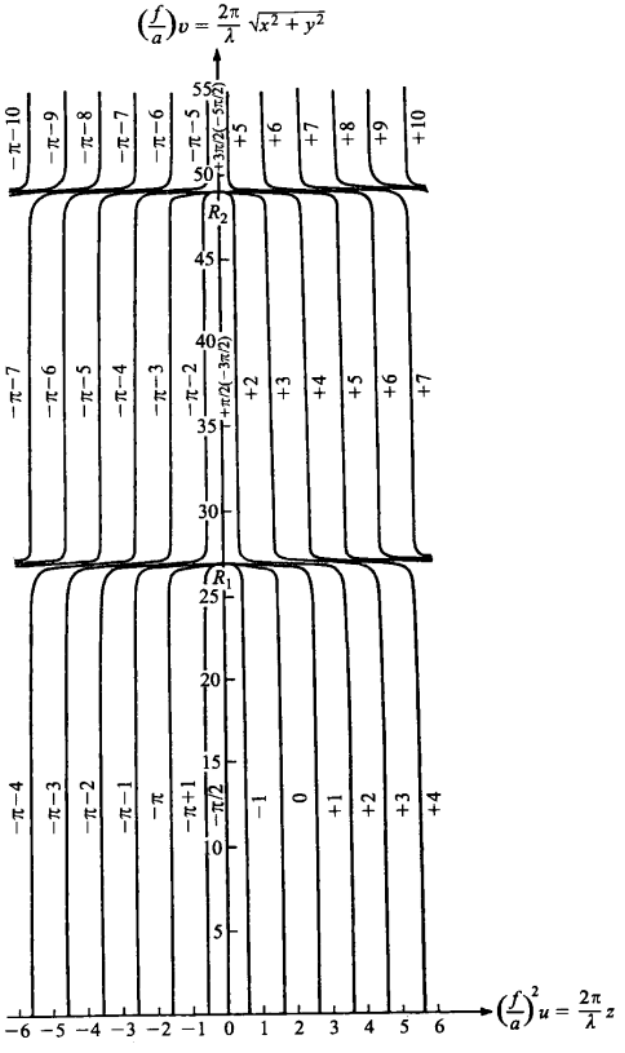


图 8.46　*f*/3.5 共心光锥在紧靠几何焦平面区域的等相面断面图。OR_1 和 OR_2 分别是第一和第二爱里暗环的半径[引自 E. H. Linfoot and E. Wolf, *Proc. Phys. Soc.*, B, **69**(1956), 827]

现在来研究,当观察点沿着通过焦点的每条光线移动时,场的位相如何改变,这也是有意义的。把该位相变化同一个球面波(它在 $z<0$ 半空间中会聚于焦点,在 $z>0$ 半空间中发散于焦点)的相应位相变化相比较,更为方便。如果这个比较波的位相 $\tilde{\phi}$ 在焦点处取为零,则

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\phi}(u,v) = -kR \quad &当 \quad u<0\\ +kR \quad &当 \quad u>0\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

同前,式中 $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0$ 是观察点离焦点的距离。ϕ 和 $\tilde{\phi}$ 之差

$$\delta(u,v) = \phi(u,v) - \tilde{\phi}(u,v) \tag{49}$$

称为**位相异常**。

由(43)、(48)和(49)三式得到

$$\delta(-u, v) + \delta(u, v) = -\pi \qquad (\mathrm{mod}\, 2\pi) \tag{50}$$

而在焦点本身地方,

$$\delta(0, 0) = \phi(0, 0) = -\frac{\pi}{2} \qquad (\mathrm{mod}\, 2\pi) \tag{51}$$

图 8.47 示出了一个 $f/3.5$ 共心光锥沿 6 条选定光线(均通过光锥焦点)的位相异常特性。

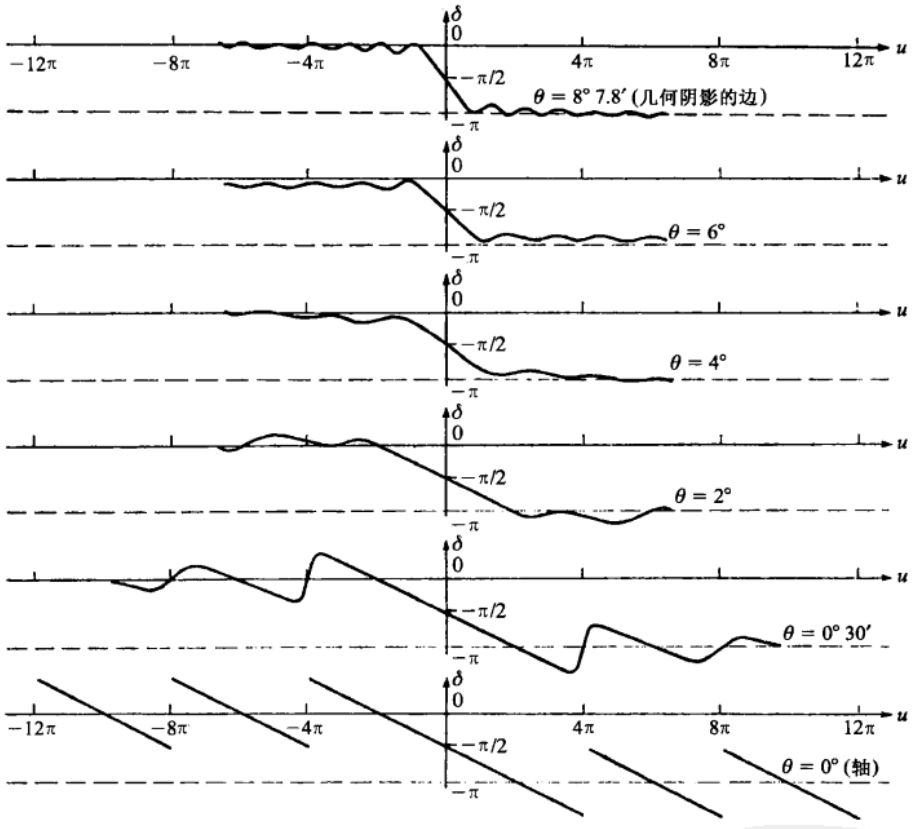


图 8.47 $f/3.5$ 共心光锥沿 6 条几何光线(均通过光锥焦点)的位相异常 δ,θ 角代表光线对轴的倾角[引自 E. H. Linfoot and E. Wolf, *Proc. Phys. Soc.*, B, **69**(1956), 827]

此图表明,除轴向光线外,其他光线在通过焦点时,δ 都经受一个急速但是连续的 π 位相改变。戈维(L. G. Gouy)[①]在很早以前就观察到了这一效应,之后它成为许多研究的课题[②]。沿轴方向,位相异常具有奇特的性质:它在 0 和 $-\pi$ 之间周期地变动。

如果对 k 很大(波长很小)时惠更斯-菲涅耳积分的渐近近似式进行分析,则可证明,当光

① L. G. Gouy, *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, **110**(1890), 1251; *Ann. Chim.* (*Phys.*)(6), **24**(1891), 145。

② 有关文献一览,见 F. Reiche, *Ann. d. Physik*, (4), **29**(1909), 56, *ibid.*, 401。关于之后一些研究的参考资料,见 E. H. Linfoot and E. Wolf, *Proc. Phys. Soc.*, B, **69**(1956), 827。

沿某一光线前进，通过相关波阵面的两个主曲率中心之一时，位相将突然改变 $\pi/2$[①]。上面所讨论的情况，相当于两个曲率中心重合时的特殊情形。这样，位相的半周期改变，即使在几何光学的解中，也是存在的[②]。图 8.47 说明，当考虑了波长的有限大小时，几何光学的不连续性如何转变成连续的过渡。最后，可提及法内耳(G. W. Farnell)的一篇论文[③]，这篇论文介绍了对微波透镜焦点区域位相分布结构的实验研究；所得结果和理论预期相符极好。

8.9　边界衍射波

如果从衍射孔或障碍物的几何阴影区内去观察它的边，可看到它是发亮的。这个结果托马斯·杨那时已经知道了[④]。还在菲涅耳之前，他就曾试图根据波动理论来解释衍射现象。杨氏相信，入射光在衍射物体的边上受到了某种反射，他认为衍射图样就是由入射波和该反射"边界波"的干涉所产生。然而，杨氏的见解只是定性表达的，所以没有赢得很多承认。

1894 年，索末菲得到了平面波在半无限大平面反射屏上衍射的严格解(见 11.5 节)，在这之后，人们才看到杨氏理论包含着正确的因素。索末菲的解表明，在几何阴影区内，光是以柱面波形式传播的，似若从屏边发出，而在照明区内，光则被表成为该柱面波和原入射波的叠加。

于是产生了一个问题：是否在更普遍情况下，也能把衍射看成是入射波和边界波的叠加效应。马吉(G. A. Maggi)在索末菲的论文出现之前，就曾研究过这个问题[⑤]，但他的结果看来已被人们忘记。后来，鲁比诺威茨(A. Rubinowicz)又独立且更详尽地研究了这个问题[⑥]。以后，米亚莫托(K. Miyamoto)和沃耳夫[⑦] 进一步发展了马吉-鲁比诺威茨理论。

考虑一单色光波，它从点源 P_0 发出，传播通过不透明平面屏上的一个开孔。同前，假定孔的线度比波长大得多，但比 P_0 和观察点 P 离屏的距离又都小很多，并假定入射角和衍射角均很小。于是，在基尔霍夫理论近似(见 8.3.2 节)下，有

---

① H. Poincaré, *Théorie mathématique de la lumière*, Vol. II[Paris, Georges Carré, (1892)], pp. 168—174。亦见, J. Walker, *The Analytical Theory of Light* (Cambridge, Cambridge University Press, 1904), pp. 91—93。

② 关于这点的讨论，亦见 A. Rubinowicz, *Phys. Rev.*, **54**(1938), 931；和 C. J. Bouwkamp, *Physica*, **7**(1940), 485。

③ G. W. Farnell, *Canad. J. Phys.*, **36**(1958), 935。

④ T. Young, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **92**(1802), 26。

⑤ G. A. Maggi, *Annali di Matem.*(2), **16**(1888), 21。Maggi 的分析在下列论文和书中亦有讨论：F. Kottler, *Ann. d. Physik*, (4), **70**(1923), 413；B. B. Baker and E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle* (Oxford, Clarendon Press, 2nd edition, 1950), p. 74。
边界波"存在"的实验证明见诸下列工作：W. Wien, *Inaug. Diss., Berlin*, 1886；E. Maey, *Ann. d. Physik.*(9), **49** (1893), 69；和 A. Kalaschnikow, *Journ. Russ. Phys. Chem. Ges.*, **44**(1912), *Phys. Teil*, 133。亦见 S. Banerji, *Phil. Mag.*(6), **37**(1919), 112；和 S. K. Mitra, *ibid.*(6), **38**(1919), 289。

⑥ A. Rubinowicz, *Ann. d. Physik.*(4), **53**(1917), 257；*ibid.*(4), **73**(1924)；*ibid.*, **81**(1926), 153；*Acta Phys. Polonica*, **12**(1953), 225。亦见 G. N. Ramachandran, *Proc. Indian Acad. Sci. A*, **21**(1945), 165；L. C. Martin, *Proc. Phys. Soc.*, **55**(1943), 104；*ibid.*, **62B**(1949), 713。Y. V. Kathavate, *ibid. A*, **21**(1945), 177；R. S. Ingarden, *Acta Phys. Polon.*, **14**(1955), 77；O. Laporte and J. Meixner, *Z. Phys.*, **153**(1958), 129。
有关边界波的研究，在 A. Rubinowicz 的书中记述甚广，见 *Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugung* (Berlin, Springer, 2nd ed., 1966)。

⑦ K. Miyamoto and E. Wolf, *J. Opt. Soc. Amer.*, **52**(1962)615, 626；K. Miyamoto, *Proc. Phys. Soc.*, **79**(1962), 617。亦见 E. W. Marchand and E. Wolf, *J. Opt. Soc. Amer.*, **52**(1962), 761；A. Rubinowicz, *ibid.*, **52**(1962)717；*Acta Phys. Polonica* **21**(1962), 61, 451；*Progress in Optics*, Vol. 4, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1965), p. 199。

$$U(P)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\mathcal{A}}\left[\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{iks}}{s}\right)-\left(\frac{e^{iks}}{s}\right)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right]dS \tag{1}$$

式中$\mathcal{A}$代表衍射孔,而其他符号意义同前,现在作一闭合面,它包括下列三部分:(1)开孔$\mathcal{A}$,(2)截锥(锥顶在 P_0,母线通过孔边)表面$\mathcal{B}$,(3)以 P 点为球心的大球的部分球面$\mathcal{C}$(见图 8.48)。设 R 代表从 P_0 到 P 的距离,则由基尔霍夫积分定理严格地得到

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{\mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{C}}\left[\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{iks}}{s}\right)-\frac{e^{iks}}{s}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right]dS=\frac{e^{ikR}}{R}\quad\text{或}\quad 0 \tag{2}$$

其中 e^{ikR}/R 对应于 P 点在闭合面内,0 对应于 P 点在闭合面外。现在采取 8.3.2 节中的方法,令球的半径足够大,则$\mathcal{C}$部分的贡献可予忽略。于是,从(1)和(2)两式得到

$$U(P)=U^{(g)}(P)+U^{(d)}(P) \tag{3}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}U^{(g)}(P)&=\frac{e^{ikR}}{R}\qquad\text{当 }P\text{ 点在直接光束中时}\\&=0\qquad\text{当 }P\text{ 点在几何阴影内时}\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

而

$$U^{(d)}(P)=-\frac{1}{4\pi}\iint_{\mathcal{B}}\left[\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{iks}}{s}\right)-\left(\frac{e^{iks}}{s}\right)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right]dS \tag{5}$$

$U^{(g)}$代表几何光学所给出的扰动,因而 $U^{(d)}$必须代表衍射效应。现在我们来证明,$U^{(d)}$可变换成一个沿孔边的线积分。

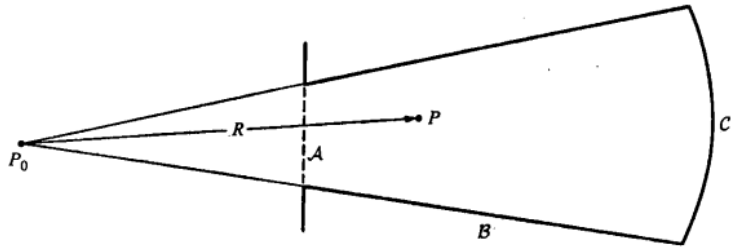


图 8.48 边界衍射波的推导

首先可以注意,r = 常数的球面和截锥$\mathcal{B}$垂直切割。因此,在$\mathcal{B}$上,

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)=0 \tag{6}$$

此外,

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{e^{iks}}{s}\right)=\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{iks}}{s}\right)\cos(n,s)=\left(\frac{ik}{s}-\frac{1}{s^2}\right)e^{iks}\cos(n,s) \tag{7}$$

由此(5)式化为

$$U^{(d)}(P)=-\frac{1}{4\pi}\iint_{\mathcal{B}}\frac{e^{ik(r+s)}}{rs}\left(ik-\frac{1}{s}\right)\cos(n,s)dS \tag{8}$$

可以取图 8.49 中 $ABB'A'$ 面积作为面元 $\mathrm{d}S$，其中 AB 和 $A'B'$ 是相邻两段母线，AA' 和 BB' 是 r = 常数和 $r+\mathrm{d}r$ = 常数两球面与截锥相交的两段圆弧。设 $\mathrm{d}\phi$ 是这两条母线的夹角，则

$$\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \tag{9}$$

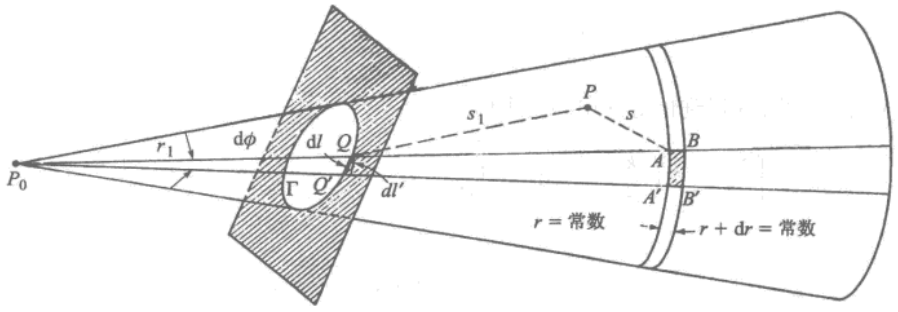


图 8.49　边界衍射波的推导；$P_0A=r$，$P_0Q=r_1$，$PA=s$，$PQ=s_1$

设 Q 和 Q' 是该两母线和孔边 Γ 的交点，$\mathrm{d}l$ 是这两点间边 Γ 的元长。若以 $r_1=P_0Q$ 为半径作一球面，与截锥相交于一圆，相应圆弧元以 $\mathrm{d}l'$ 代表，则

$$\mathrm{d}l' = r_1\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}l\cos(\mathrm{d}l,\ \mathrm{d}l') = \mathrm{d}l\sin(r_1,\ \mathrm{d}l) \tag{10}$$

从(9)和(10)两式，

$$\mathrm{d}S = \frac{r}{r_1}\sin(r_1,\ \mathrm{d}l)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}l \tag{11}$$

此外，分别取 PA，PQ 线段在 A，Q 点截锥法线上的投影(这两点的法线是平行的)，得到

$$s\cos(n,\ s) = s_1\cos(n,\ s_1) \tag{12}$$

将(11)和(12)两式代入(8)式，结果

$$\begin{aligned} U^{(d)}(P) &= -\frac{1}{4\pi}\iint_B \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r+s)}}{rs}\left(\mathrm{i}k-\frac{1}{s}\right)\frac{s_1}{s}\cos(n,\ s_1)\frac{r}{r_1}\sin(r_1,\ \mathrm{d}l)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}l \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \mathrm{d}l\frac{s_1}{r_1}\cos(n,\ s_1)\sin(r_1,\ \mathrm{d}l)\int_{r_1}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r+s)}\left(\frac{\mathrm{i}k}{s^2}-\frac{1}{s^3}\right)\mathrm{d}r \end{aligned} \tag{13}$$

下面来证明(13)式中第二项积分的被积函数是一个全微分，即

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r+s)}\left[\frac{\mathrm{i}k}{s^2}-\frac{1}{s^3}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r+s)}}{s[s+r-r_1+s_1\cos(s_1,\ r_1)]}\right\} \tag{14}$$

计算出(14)式右边的微商，有

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r+s)}}{s[s+r-r_1+s_1\cos(s_1,\ r_1)]}\right\} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r+s)}}{s[s+r-r_1+s_1\cos(s_1,\ r_1)]}\left\{\mathrm{i}k\left(1+\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{1}{s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}\right. \\ &\qquad \left.-\frac{1}{s+r-r_1+s_1\cos(s_1,\ r_1)}\left(1+\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}\right)\right\} \end{aligned} \tag{15}$$

由三角形 APQ,

$$s^2 = {s_1}^2 + (r - r_1)^2 + 2s_1(r - r_1)\cos(s_1, r_1) \tag{16}$$

对 r 微商,同时令 r_1 和 s_1 保持不变,得到

$$s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = r - r_1 + s_1\cos(s_1, r_1) \tag{17}$$

将此式代入(15)式,即得到恒等式(14)。因此

$$\begin{aligned}\int_{r_1}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r+s)}\left(\frac{\mathrm{i}k}{s^2} - \frac{1}{s^3}\right)\mathrm{d}r &= \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r+s)}}{s[s + r - r_1 + s_1\cos(s_1, r_1)]}\right]_r^{\infty} \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_1+s_1)}}{{s_1}^2[1 + \cos(s_1, r_1)]}\end{aligned} \tag{18}$$

(13)式最后变成

$$U^{(d)}(P) = \frac{1}{4\pi}\oint_{\Gamma} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_1+s_1)}}{r_1 s_1}\cdot\frac{\cos(n, s_1)}{[1 + \cos(s_1, r_1)]}\sin(r_1, \mathrm{d}l)\mathrm{d}l \tag{19}$$

这个公式,加上(3)、(4)两式,是基尔霍夫衍射积分的**鲁比诺威茨表示**,并且可以看做是杨氏理论的数学表述。它用入射波和边界衍射波来表达衍射效应,其中入射波按照几何光学的规律传播,而边界衍射波则可设想是入射辐射在孔边上散射所产生。

因为 U 是位置的连续函数,故由(4)式可知,边界衍射波 $U^{(d)}$ 在通过几何阴影边界时是不连续的,这样才能抵消"几何波" $U^{(g)}$ 中的不连续性。$U^{(d)}$ 的这一不连续性产生于(19)式分母的$[1 + \cos(s_1, r_1)]$因子。

在(19)式的积分区中,只有被积函数位相是稳定的那些点,实际才对 $U^{(d)}$ 有贡献。其中的道理在 8.3.3 节谈到衍射现象的分类时曾做过论证(356 ~ 357 页),附录 C 在说明稳定相原理的物理意义时亦有叙及。因此,在积分(19)式中,实际有贡献的点应满足下列关系:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}[k(r_1 + s_1)] = 0 \tag{20}$$

这个关系也可以写成"反射定律"的形式,即

$$\cos(r_1, \mathrm{d}l) = -\cos(s_1, \mathrm{d}l) \tag{21}$$

8.10 加伯波前[①] 重建成像法(全息学)

为了设法提高电子显微镜的分辨能力,加伯提出了一种两步光学成像法[②]。第一步,用相干电子波或相干光波照射目的物。此物体系假定可让大部分波从其中直行穿过而不受干扰[③]。物体的存在所引起的次级波,同该强背景波发生干涉,形成一种衍射图样,称为**全息图**,

① "波前"即"波阵面"(Wave-front)——译者注。

② D. Gabor, *Nature*, **161**(1948), 777; *Proc. Roy. Soc.*, A, **197**(1949), 454; *Proc. Phys. Soc.*, B, **64**(1951), 449。

③ 此即意指,如将波表示成为入射波和衍射次级波之和,则次级波的散射可予忽略。这种忽略就是通常所说的玻恩第一级近似,它在 X 射线散射和电子散射理论中有很多应用。关于这一近似在电子显微术和电子干涉量度学中的有效范围,见 D. Gabor, *Rev. Mod. Phys.*, **28**(1956), 260。

记录在照相底版上。如果底版经适当处理后，再按原状置于原处，并单独由背影波照射，则底版所透过的波就含有原物体的信息，这可用光学方法从照片中取出。为了从这一“代替”波中“重建”出物体，只须令该波通过适当的成像系统，这时将有一个像出现于原物体所在平面的共轭平面上。下面将只讨论本法所包含的光学原理①。

8.10.1　正全息图的制作

考虑一单色波，它从小光源 S 发出，投射在一半透明物体 σ 上[见图 8.50(a)]。设在此物体后面某距离处置有一屏 $\mathcal{H}$，并设屏上某代表点处的复扰动为 $U = Ae^{i\psi}$，A 为(实)振幅，ψ 为扰动的位相。我们可以把 U 看做是两项之和，即

$$U = U^{(i)} + U^{(s)} = e^{i\psi_i}(A^{(i)} + A^{(s)}e^{i(\psi_s - \psi_i)}) \tag{1}$$

式中 $U^{(i)} = A^{(i)}e^{i\psi_i}$ 代表**入射波**(即**相干背景波**)；它是没有物体时屏 $\mathcal{H}$ 上应产生的场。另一项 $U^{(s)} = A^{(s)}e^{i\psi_s}$ 代表**次级波**，即**衍射波**。正是这个波，包含着关于物体的信息。按照(1)式，总扰动 U 的振幅用分扰动的振幅和位相来表示时，可写成为

$$A = \sqrt{UU^{\star}} = \sqrt{A^{(i)2} + A^{(s)2} + 2A^{(i)}A^{(s)}\cos(\psi_s - \psi_i)} \tag{2}$$

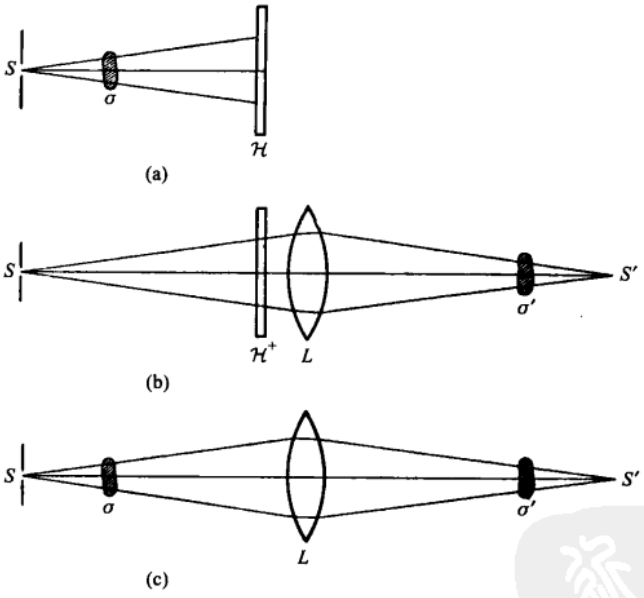


图 8.50　加伯波前重现成像法图示：(a)拍摄全息图；(b)重建；(c)等效的一步成像

与往常一样，这里略去了时谐因子 $e^{-i\omega t}$，这内中也就假定，物体所发的次级波是和入射波同频率的。这种物体称为**瑞利散射体**；实际上所有不发荧光的物体，都很好地近似于这种物体。

---

① 关于这一问题的详细论述，以及关于这一技术的种种修改和应用的叙述，可参看 R. J. Collier, C. B. Burckhardt and L. H. Lin, *Optical Holography* (San Diego, CA, Academic Press, 1971)或 P. Hariharan, *Optical Holography* (Cambridge, Cambridge University Press, 2nd edition, 1996)。

现在,假设在$\mathcal{H}$平面处放上一块照相底版。设α是底版的**透射因子**,其定义和8.6.1节中的透射函数F相类似,即底版上出射波和入射波的复振幅之比。相应的强度透射因子为$\tau = \alpha\alpha^{\star}$;而量

$$D = -\log_{10}\tau = -\log_{10}\alpha\alpha^{\star} \tag{3}$$

称为底版**黑度**。底版所接收到的光的强度$I = A^2$和曝光时间t的乘积

$$E = It \tag{4}$$

简称为**曝光量**(或光和),而D对$\log_{10}E$的曲线通常称为**赫特-德里菲耳德**(Hurter-Driffield)**曲线**;该曲线的典型形状如图8.51所示。在P、Q两点之间,曲线实际上是一直线,设其斜率为Γ,则负片黑度显然为

$$D = D_0 + \Gamma\log_{10}\frac{E}{E_0} \tag{5}$$

式中D_0和E_0是常数。利用(3)式,得到

$$\tau = \tau_0\left(\frac{E}{E_0}\right)^{-\Gamma} \tag{6}$$

对纯吸收来说,当没有位相变化时,α是一实数,就是强度透射因子的平方根$\sqrt{\tau}$。在这种情况下,"负全息图"的振幅透射因子α_n由如下关系给出:

$$\alpha_n = (K_nA)^{-\Gamma_n} \tag{7}$$

式中K_n和曝光时间的平方根成正比。

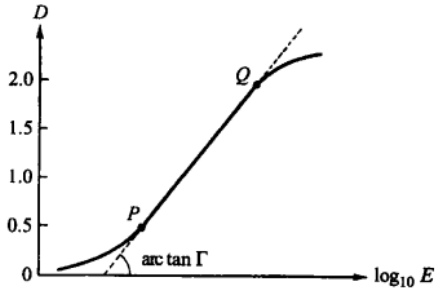


图8.51 赫特-德里菲耳德曲线(照相响应曲线)

现在假定从负全息图印出正片。正片的振幅透射因子

$$\alpha_p = [K_p(K_nA)^{-\Gamma_n}]^{-\Gamma_p} = KA^{\Gamma} \tag{8}$$

式中$\Gamma = \Gamma_n\Gamma_p$是负片-正片过程的"通计$\gamma$"(overall gamma),而$K = K_p^{-\Gamma_p}K_n^{\Gamma}$。

8.10.2 重建

在重建过程中[见图8.50(b)],正全息图$\mathcal{H}^{+}$[其振幅透射因子由(8)式给出]单独用相干背景波$U^{(i)}$照射。该背景波很容易获得,只要取走原物体而同时令其他部件布局保持不变即可。这样,底版所透过的是一个代替波U',按照(2)和(8)两式,U'由下式表出:

$$U' = \alpha_p U^{(i)} = KA^{(i)} e^{i\psi_i} [A^{(i)2} + A^{(s)2} + 2A^{(i)}A^{(s)} \cos(\psi_s - \psi_i)]^{\frac{1}{2}\Gamma} \tag{9}$$

若选取 $\Gamma = 2$，则

$$U' = KA^{(i)2} e^{i\psi_i} \left[A^{(i)} + \frac{A^{(s)2}}{A^{(i)}} + A^{(s)} e^{i(\psi_s - \psi_i)} + A^{(s)} e^{-i(\psi_s - \psi_i)} \right] \tag{10}$$

比较(10)和(1)两式即可看出，如果 $A^{(i)}$ 为常数，即如果背景波是均匀的，则代替波 U' 中包含一个和 U 成正比的成分[见(10)式中的一、三两项]，我们称其为**重建波**。(10)式中的其余两项：一项与背景波同位相，但振幅等于背景波的振幅乘以 $A^{(s)2}/A^{(i)2}$。令背景波足够强，即可使此项十分小①。另一项的振幅和重建波的相同($KA^{(i)2}A^{(s)}$)，但它相对背景波的相移是反号的。我们说它代表一**共轭波**。下面证明这个共轭波可以看成是由一个和真实物体一样但处在不同平面上的虚构物体所产生。

为了证明这一点，暂时回到图 8.50(a)的装置，并设 O_1 代表物体 σ 上任一点，P 代表$\mathcal{H}$平面上任一点(见图 8.52)。当物体用点光源 S 照明时，P 点可假定是接收两条光线上来的光，一条是直接光线 SP(与相干背景波相关联)，另一条是"衍射次级光线" O_1P(相应于次级波)。首先假定，O_1 点处的衍射没有相变；于是，衍射光到达 P 点时，比直接来光落后了一段程差 $O_1P - O_1A$，其中 A 是中心为 S、半径为 SP 的球面和 SO_1 延长线的交点。由于共轭波超前于直接波的量和衍射次级波落后于直接波的量相同，因此共轭波在 SO_1 延长线上 O_2 点处追上直接波，O_2 点满足

$$O_1P - O_1A = PO_2 - AO_2 \tag{11}$$

设 O_1，A 和 O_2 各点离 S 点的距离分别为 r_1，R 和 r_2，SP 和直线 SO_1AO_2 的夹角为 α(见图 8.52)，则(11)式可写成为

$$\sqrt{(R\cos\alpha - r_1)^2 + R^2\sin^2\alpha} - (R - r_1) = \sqrt{(r_2 - R\cos\alpha)^2 + R^2\sin^2\alpha} - (r_2 - R) \tag{12}$$

把上式两边各展成 α 的幂级数，并只保留其首项，结果得到

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{R} \tag{13}$$

如果使全息图弯曲成一球面，半径为 R，则(13)式对于其上任一点都应成立。因此这时可以认为，共轭波系由一虚构物体所产生，此虚构物体是原物体在以 S 为中心，R 为半径的球面镜中的像[见 §4.4(16)]。在平面全息图情况下，只要各光线的偏轴角足够小，上述结果作为良好近似，显然也是成立的。再者，如 $r_1/R \ll 1$，则由(13)式，$r_2 \approx -r_1$，因而这时共轭物体和真实物体的位置对点光源 S 呈对称分布。

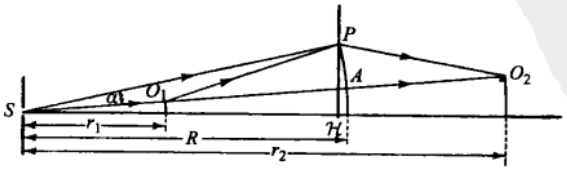


图 8.52　共轭物体位置图解

① 在 F. Zernike 的方法中，为了显示出弱的次级干涉条纹，也利用了强的相干背景[见 *Proc. Phys. Soc.*, **61**(1948), 158]。

以上假定物体上的衍射没有相变;如有相变,上面关于共轭物体位置的讨论也仍然有效,只要假定共轭物体产生的相变和真实物体所产生的大小相同而符号相反。

现在回到(10)式。我们看到,如果背景波是均匀的,并且比散射波强得多,则代替波 U',除去那项可归之于共轭物体的贡献之外,在效果上是和原来的波一样的。因此,**如果在正全息图后面放上一个透镜 L,并单独用背景波照射该全息图**[见图 8.50(b)],**则在原 σ 面的共轭平面上,将形成原物体的像** σ'。但是,一般说来,这个像将为共轭物体的贡献所干扰。我们可以找到这种干扰影响不严重的条件。大概地说,可以期望,当原物体的像和其共轭像的间距大于成像光锥的焦点公差时,这一影响将很小。焦点公差已由 § 8.8(27)给出。

图 8.50(c)说明等效的一步成像。图 8.53 给出三张照片:放大的物体、全息图和重建像。这是早期这种实验中的一个。

最近,利思(E. N. Leith)和厄帕尼克斯(J. Upatnieks)[①]大大改进了波前重建技术,他们改变了相干背景波和物体透射光束的叠加方式。在他们的装置中,采用了激光,并借助棱镜和反射镜系统,使背景光束以某一角度投射到全息图平面上。结果,两个共轭像分别形成在不同的方向,因而可得到一个高质量的重建像,而另一个像不产生一点干扰[②]。

全息图包含有三维信息。这个事实也由利思和厄帕尼克斯进一步证实,图 8.54 是他们的一个实验结果。

这些结果确立了如下结论:采用**相干光**时,仅仅从一个物体后面任何平面上所记录到的**强度分布**,就能使该物体获得高精度的重建。

要使本法获得成功,光源 S 所发的波前并不必须是严格的球面,而只需令图 8.50(a)和图 8.50(b)两装置中的背景波波前具有相同的几何形状。另外,也不需要前后采用同一光源,或者确切地说,不需要采用同波长的辐射。正是由于这个关系,本法对电镜学的应用价值就很明显了。因为,限制电镜分辨本领的主要因素之一,是物镜的球面像差,而正如加伯所指出的,采用波前重建方法,原则上可消除掉,或者说得更确切些,可补偿掉球面像差的影响。即先可用电子束产生全息图,而后再用光使物重建。这样,就必须采用带有同等球面像差(自然,要按 $\lambda_{光}/\lambda_{电子}$ 的比例尺)的光波,来**模拟**电子物镜的球面像差[③]。虽然在加伯发明这一方法的时候,技术上的困难使它未能应用于电镜学,但是其构思的基本原理已为光波方面的实验所确证。1971 年,加伯因全息方法的发明和发展而获得诺贝尔物理学奖。

两步照相术的方法,在波前重建法之前已经有过一项重要先驱研究。这就是伯施(H. Boersch)[④]和布拉格(W. L. Bragg)[⑤]先后独立提出的,从晶体衍射图重建晶体结构的光学傅里叶分析法。布拉格称此设计为"X 射线显微镜"。如果用一束平行的 X 射线照射一晶体,并用照相底版把衍射光强度的角分布记录下来,则此分布就是(至少对小衍射角是如此)该晶体中的电子密度分布,在垂直于原光束的平面上投影的傅里叶变换的绝对值平方[⑥]。由于这只是记录了强度,而位相在实验中尚未用物理方法确定,因而,一般来说,这不能实现直接重建。所需

① E. N. Leith and J. Upatnieks, *J. Opt. Soc. Amer.*, **52**(1962), 1123; **53**(1963), 1377; **54**(1964), 1295。

② E. Wolf 和 J. R. Shewell 曾讨论了这种经过改进的全息方法的衍射理论,见 *J. Math. Phys.*, **11**(1970), 2254。

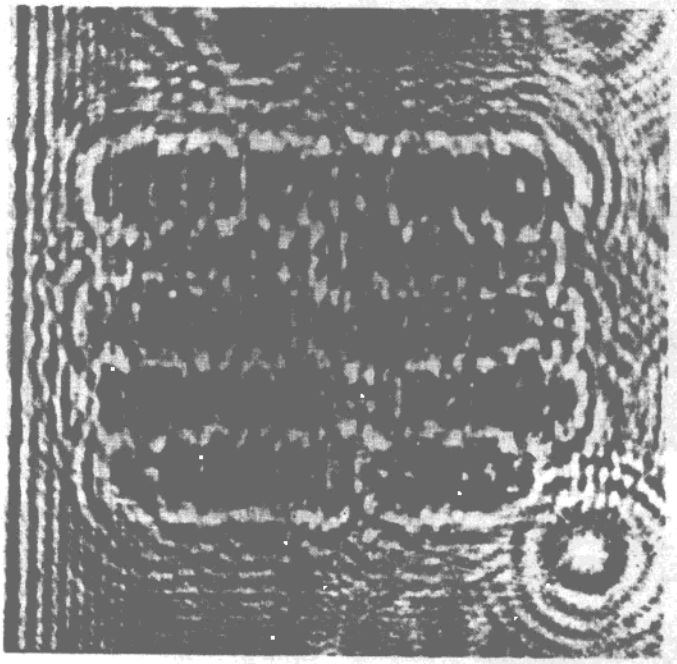
③ 用适当的非球面元件可产生具有规定球面像差的光波。

④ H. Boersch, *Z. techn. Phys.*, **19**(1938), 337。

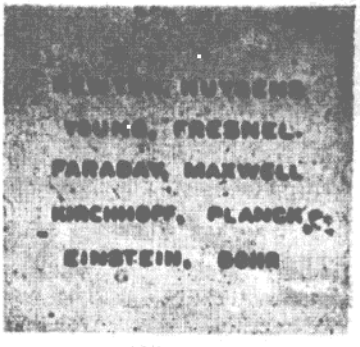
⑤ W. L. Bragg, *Nature*, **149**(1942), 470; 又见 M. J. Buerger, *J. Appl. Phys.*, **21**(1950), 909。

⑥ 见,例如 A. Guinier and D. L. Dexter, *X-ray Studies of Materials*(New York, Interscience Publishers, 1963), Chapter 4。

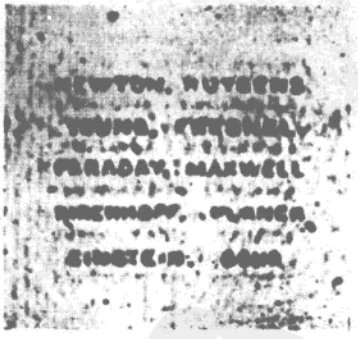
数据还必须由其他照片，由事先对化学结构的了解，以及依靠猜测来收集。当照射方向是某晶轴时，猜测工作就较简单；在这种情况下，可以证明，如果照明是严格相干的，则所用衍射子波不是同相就是反相，因此所观察到的每一衍射极大，这时仅仅对应于两种可能的位相；这无论如何都大大减少了所须试行组合的次数。



全息图



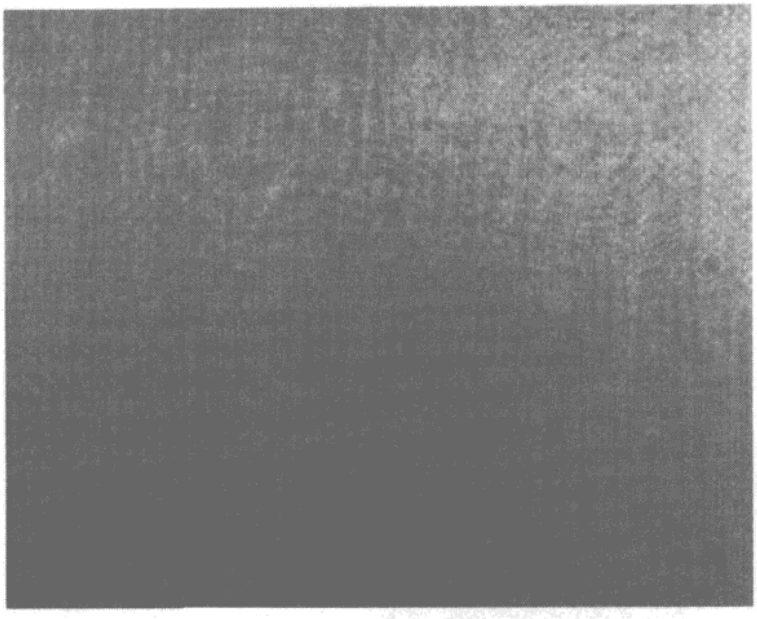
原物



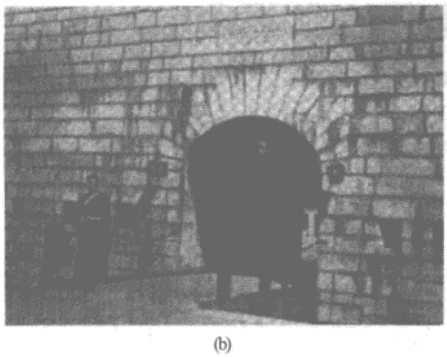
重建

图 8.53　波前重建成像。物体是一张直径 1.5 毫米的微型照片，用波长 4358 埃的光照明。光通过一个直径0.2毫米的小孔，而后经一显微镜物镜，在距物50毫米处，缩成一个标称直径为 5 微米的光点。几何放大率12。重建时所用透镜的有效孔径为0.025。噪声背景主要来自照明物镜的各种缺陷[①][引自 D. Gabor, *Proc. Roy. Soc.*, A, **197**(1949), 454]

① 原文说明与图不符，用了加伯论文的 11 图，却引用了其 10 图的说明，而这两个图得来的条件并不一样。译文未作改正——译者注。



(a)



(b)



(c)

图 8.54 波前重建成像。两个物体重建自同一张全息图。(a)全息图,(b)和(c)两张景物胶片的重建像。两张胶片用漫射相干光照明,和全息图记录底版相距14英寸和24英寸,从全息图记录底版处看去,二者互不遮挡。全息图上出现的一些明显结构,主要是尘埃粒子所产生的衍射图样[引自E. N. Leith and J. Upatnieks, *J. Opt. Soc. Amer.*, **54**(1964), 1297]

然而,有一些晶体,其每个晶胞含有一个重原子,因而重原子晶格衍射成分的振幅大大超过其他,以致合振幅只能有一种符号。在这种情况下,可以说这些重原子产生了一个相干背景波。这样,对于这些晶体(为数颇少),只需取衍射光强度的平方根,就能得到电子密度分布在垂直于该晶轴(和照射方向平行的这一晶轴)的平面上投影的傅里叶变换。

现在,如果从衍射图样印出正片,并令其通计 γ 为 1,即可得到一个正比于强度平方根的振幅分布[见(8)式]。在 X 射线显微镜中,采用平面波前照射这一正片,并用透镜把它的透射光和衍射光加以聚焦。按照夫琅禾费衍射理论(见 8.3 节),像平面上的振幅图样乃是正片平面上分布的傅里叶变换,因而是原电子密度分布经过接连两次傅里叶变换的结果。由傅里叶

定理可知，焦平面上的分布就是该电子密度分布(一般是复量)的一个直实像。这里当然假定，所用透镜的孔径很大，足以收集进所有能量足够大的衍射光线，并且所有子波同相的要求也已被满足。事实上，后一条件只有在很少情形能得到满足。

在波前重建法中，背景波是人工加上的。在对称性甚至周期性方面，不需要满足什么条件。但这一方法不适用于 X 射线分析，因为它实际不可能产生强的相干背景波。不过，这一方法在未来电子衍射研究中会有很好的应用。

8.11　瑞利-索末菲衍射积分

8.3.2 节最后一段特别提到，虽说基尔霍夫衍射理论完全适合处理仪器光学中遇到的大多数问题，但它还是含有一些令人颇不满意的显要缺点，这些缺点都来自它所设边界条件的性质。因此，其他衍射公式有时也为人采用，其中特别流行的是所谓瑞利-索末菲衍射积分。本节将对之进行推导，并对不同表述的相对优点做一简短评述。一开始我们先推导两个重要边值问题的形式解，由而可随即得到瑞利-索末菲衍射积分。

8.11.1　瑞利衍射积分

我们回顾一下 §8.3(5)，即

$$\iint_S \left(U\frac{\partial U'}{\partial n} - U'\frac{\partial U}{\partial n} \right) \mathrm{d}S = 0 \tag{1}$$

其中 $U(x,y,z)\exp(-\mathrm{i}\omega t)$和 $U'(x,y,z)\exp(-\mathrm{i}\omega t)$是两个单色波函数，定义于整个区域$\mathcal{V}$，其界面为一闭合面 S，而 $\partial/\partial n$ 代表沿 S 内向法线的微商。再次选取

$$U'(x,\ y,\ z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks}}{s} \tag{2}$$

式中 s 代表从任一观察点 $P(x,y,z)$到 S 上某积分点 $P'(x,'y',z')$的距离。于是，如 8.3.1 节中所证，若 P 点在体积$\mathcal{V}$之内，则(1)式意味着[见 §8.3(7)]

$$\iint_S \left[U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks}}{s}\right) - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks}}{s}\frac{\partial U}{\partial n} \right] \mathrm{d}S = 4\pi U(P) \tag{3}$$

然而，若 P 点位于体积$\mathcal{V}$之外，则(1)式意味着

$$\iint_S \left[U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks}}{s}\right) - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks}}{s}\frac{\partial U}{\partial n} \right] \mathrm{d}S = 0 \tag{4}$$

设区域$\mathcal{V}$为 $z\geqslant 0$ 的半空间。积分面 S 这时由平面 $z'=0$ 和该半空间的一个半球面组成，半球面中心设在原点，而半径取无穷大。假设 U 在$\mathcal{V}$内无穷远处的传播情况如同一个发散球面波，即在离原点足够远的地方，

$$U(x,\ y,\ z) \approx \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} \tag{5}$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$且 $z\geqslant 0$。因此，出于 8.3.2 节推导菲涅耳-基尔霍夫衍射积分时所说的同样理由，$z>0$ 半空间中以原点为球心的那个球面($r\to\infty$)对(3)和(4)两式中的积分没有贡

献。如果观察点 $P(x,y,z)$位于 $z>0$ 的半空间,则由(3)式得到

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{(z'=0)}\left[U\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{e^{ikR^+}}{R^+}\right)-\frac{e^{ikR^+}}{R^+}\frac{\partial U}{\partial z'}\right]dx'\,dy'=U(x,y,z) \tag{6}$$

式中(见图 8.55)

$$R^+=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},\qquad (z>0) \tag{7}$$

这时 $P(x,y,z)$的对映点 $P(x,y,-z)$将位于体积$\mathcal{V}$之外 $z<0$ 的半空间,所以由(4)式得到

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{(z'=0)}\left[U\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{e^{ikR^-}}{R^-}\right)-\frac{e^{ikR^-}}{R^-}\frac{\partial U}{\partial z'}\right]dx'\,dy'=0 \tag{8}$$

式中

$$R^-=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2} \tag{9}$$

这里要特别指出的是

$$\left.\frac{e^{ikR^+}}{R^+}\right|_{z'=0}=\left.\frac{e^{ikR^-}}{R^-}\right|_{z'=0} \tag{10a}$$

而

$$\left.\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{e^{ikR^-}}{R^-}\right)\right|_{z'=0}=-\left.\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{e^{ikR^+}}{R^+}\right)\right|_{z'=0} \tag{10b}$$

如将(10a)和(10b)两式应用于(8)式,则得到下列公式:

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{(z'=0)}\left[-U\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{e^{ikR^+}}{R^+}\right)-\frac{e^{ikR^+}}{R^+}\frac{\partial U}{\partial z'}\right]dS=0 \tag{11}$$

如从(6)式减去(11)式并令 $R^+|_{z'=0}=s$,则立即得到

$$U(x,y,z)=\frac{1}{2\pi}\iint_{(z'=0)}U(x',y',0)\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{e^{iks}}{s}\right)dx'\,dy' \tag{12}$$

式中 $s=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$。如将(11)和(6)两式相加并再次令 $R^+|_{z'=0}=s$,则得到

$$U(x,y,z)=-\frac{1}{2\pi}\iint_{(z'=0)}\left[\frac{\partial U(x',y',z')}{\partial z'}\right]\frac{e^{iks}}{s}\,dx'\,dy' \tag{13}$$

式中 s 同前。(12)和(13)两式是瑞利首先导出的[①],并分别称为第一种和第二种**瑞利衍射公式**。显然,第一种瑞利衍射公式,即(12)式,是亥姆霍兹方程的一个解,这个解在整个 $z>0$ 的半空间内有效,并且在 $z=0$ 的平面上取所设定之值,而在该半空间的无穷远处是发散的;第二种瑞利衍射公式,即(13)式,也是亥姆霍兹方程的一个解,这个解也只在整个 $z>0$ 的半空间内有效,但它在 $z=0$ 平面上的法向微商 $\partial U(x,y,z)/\partial z$ 取所设定之值,而在该半空间的无穷远处是发散的。用微分方程理论的术语来说,第一种瑞利衍射公式所提供的是一个狄利克雷

① Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, **43**(1897), 259;并载于其 *Scientific Papers*, Vol. 4 (Cambridge, Cambridge University Press, 1903), p. 283。

(Dirichlet)边值问题的解[①],而第二种瑞利衍射公式所提供的则是一个诺伊曼(Neumann)边值问题的解。

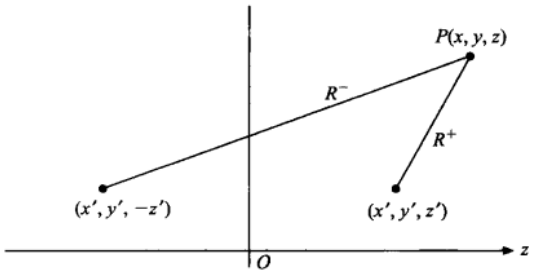


图 8.55　(7)和(9)两式定义的距离 R^+ 和 R^- 的几何意义图示

8.11.2　瑞利-索末菲衍射积分

现在来考虑 8.3.2 节基尔霍夫衍射理中讨论过的同样问题,即单色波在不透明屏开孔$\mathcal{A}$上产生的衍射。更明确地说,我们要求波进入 $z>0$ 半空间后在 $P(x,y,z)$产生的扰动 $U(x,y,z)$。仍旧假设开孔的尺度比波长大,但比 P 点离屏的距离小得多。如前所强调的,U及其法向微商在开孔$\mathcal{A}$和屏背面$\mathcal{B}$(见图 8.3)两处的值均无从精确得知。然而,假定在上述假设下$\mathcal{A}$上的$U\approx U^{(i)}$,$\mathcal{B}$上的 $U\approx 0$,其中 $U^{(i)}$代表入射场,这似乎是合理的。采取这两个假设,即可由第一种瑞利衍射公式[见(12)式]得到 $z>0$ 半空间中的衍射场表达式如下:

$$U(x,y,z)=\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathcal{A}}U^{(i)}(x',y',0)\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{e^{iks}}{s}\right)dx'\,dy' \tag{14}$$

同样,看来合理的是,可以预期在所说的假设下,孔$\mathcal{A}$处的 $\partial U/\partial z\approx\partial U^{(i)}/\partial z$,而屏背面$\mathcal{B}$上的 $\partial U/\partial z\approx 0$。这时由第二种瑞利衍射公式[见(13)式]得到 $z>0$ 半空间中的衍射场表达式如下:

$$U(x,y,z)=-\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathcal{A}}\frac{\partial U^{(i)}(x',y',z')}{\partial z'}\frac{e^{iks}}{s}dx'\,dy' \tag{15}$$

(14)和(15)两式分别称为第一种和第二种瑞利-索末菲衍射积分。二者似乎都是首先由索末菲提出,其中入射场 $U^{(i)}$均设为发散球面波[②]。在此情况下

$$U^{(i)}=\frac{Ae^{ikr}}{r},\qquad \frac{\partial U^{(i)}}{\partial z}=\frac{Ae^{ikr}}{r}\left(ik-\frac{1}{r}\right)\cos(n,r) \tag{16}$$

式中 $\cos(n,r)$代表孔平面法线(正 z 方向)与衍射方向的夹角[见图 8.3(b)]。这时第一种瑞利-索末菲衍射公式[(14)式,缀以附标 I 和 RS]给出

$$U^{(\mathrm{I})}_{RS}(x,y,z)=\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathcal{A}}\frac{Ae^{ikr}}{r}\left(ik+\frac{1}{s}\right)\frac{e^{iks}}{s}\cos(n,s)dS \tag{17}$$

---

① 确保狄利克雷问题有惟一解的严密条件,有关讨论可见 R. K. Luneburg, *Mathematical Theory of Optics* (Berkeley and Los Angeles, CA, University of California Press, 1964), § 45。

② A. Sommerfeld, *Optics* (New York, Academic Press, 1954), p. 199 *et seq*。

类此,第二种瑞利-索末菲衍射公式[见(15)式,缀以附标 II 和 RS]给出

$$U_{RS}^{(\mathrm{II})}(x,\ y,\ z)=-\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathcal{A}}\frac{A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\left(\mathrm{i}k-\frac{1}{r}\right)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks}}{s}\cos(n,\ r)\mathrm{d}S \tag{18}$$

在通常情况下,$r\gg\lambda$,$s\gg\lambda$,因此 $k\gg1/r$,$k\gg1/s$,而(17)和(18)两式获得较简单的形式

$$U_{RS}^{(\mathrm{I})}(x,\ y,\ z)\approx\frac{\mathrm{i}A}{\lambda}\iint_{\mathcal{A}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r+s)}}{rs}\cos(n,\ s)\mathrm{d}S \tag{19}$$

和

$$U_{RS}^{(\mathrm{II})}(x,\ y,\ z)\approx-\frac{\mathrm{i}A}{\lambda}\iint_{\mathcal{A}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r+s)}}{rs}\cos(n,\ r)\mathrm{d}S \tag{20}$$

可以注意,这两个式子同菲涅耳-基尔霍夫衍射公式 §8.3(17)形式都一样,后者即

$$U_{FK}(x,\ y,\ z)=-\frac{\mathrm{i}A}{2\lambda}\iint_{\mathcal{A}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r+s)}}{rs}[\cos(n,\ r)-\cos(n,\ s)]\mathrm{d}S \tag{21}$$

当入射角和衍射角都很小时,$\cos(n,r)\approx1$,$\cos(n,s)\approx-1$,我们看到在这些情况下

$$U_{RS}^{(\mathrm{I})}(x,\ y,\ z)\approx U_{RS}^{(\mathrm{II})}(x,\ y,\ z)\approx U_{FK}(x,\ y,\ z) \tag{22}$$

即在这些情况下,所有这三个公式对衍射场给出的预期值实际相同。

不论入射场是否为一发散球面波,下列关系总告成立:

$$U^{(K)}=\tfrac{1}{2}(U^{(\mathrm{I})}+U^{(\mathrm{II})}) \tag{23}$$

这里 $U^{(K)}$ 是基尔霍夫理论所预期的场[见 §8.3(14),令其中边界条件取 §8.3(15),并且忽略大半球$\mathcal{C}$的贡献],而 $U^{(\mathrm{I})}$ 和 $U^{(\mathrm{II})}$ 分别是第一种[见(14)式]和第二种[见(15)式]瑞利-索末菲积分所给出的场。

(22)式表明,在远离屏孔的地方,当入射角和衍射角很小时,三个衍射公式给出的结果基本相同。在其他情况下三者不能做简单比较。虽然如此,还是有众多人士坚信瑞利-索末菲积分优于基尔霍夫。这种执信无疑是由于瑞利-索末菲积分是"显洽的"(mainfestly consistent)这一事实使然,这里所谓"显洽"是指这两个积分在场点趋近孔平面时可再给出所设定的边值①。然而,其所设定的边值并未考虑孔边上的衍射,因而并不正确代表孔平面上真正的物理场。再者,对于黑屏,精确的边值是不知道的。当然,同样的非难也可加于基尔霍夫积分,而此积分并不是"显洽的",因为当场点趋近开孔时,它并不给出所设定的边值②。虽然这些理论没有一个能准确地预知开孔和其紧邻地方的场,但有某种迹象表明,基尔霍夫理论所给出的结果同观测符合得较好③。

最后,我们指出,瑞利-索末菲公式表述与基尔霍夫理论不同,它仅仅适用平面屏开孔上的衍射,这一点限制了它的实际使用范围。

---

① N. Mukunda, *J. Opt. Soc. Amer.*, **52**(1962), 336。

② 如 8.3.2 节所说(352 页),基尔霍夫衍射积分可以解释成一种洽合的样式,不过它和基尔霍夫原表述有所不同。

③ 见 E. W. Marchand and E. Wolf, *J. Opt. Soc. Amer.* **56**(1966), 1712, Sec. 4。基尔霍夫理论曾用微波在黑(即完全将来光吸收掉)半平面上的衍射加以检测。结果发现,在远离波源的屏那边,它同实验相符甚好[J. F. Nye, J. H. Hannay and W. Liang, *Proc. Roy. Soc. Lond.* A. **449**(1995), 515]。应予指出,该论文中所讨论的索末菲理论并非本节扼要介绍的瑞利-索末菲表述。

第 9 章　像差的衍射理论

第 5 章在几何光学的基础上研究了各种像差对成像的影响。在该处理中，像被看成是几何光线与像平面交点所形成的图形，但因光线聚焦失锐而变得有些模糊。因为几何光学给出的是一种近似模型，仅在波长很短的极限情况下有效，故可预料当像差变小时几何光学必将逐渐失去其有效性。例如，一个理想的球面会聚波从一圆孔射出时，在极短波长极限情况下几何光学预言焦平面上焦点的强度为无穷大，其他各处强度皆为零，而实际情况却如 8.5.2 节所证，像的中央是一个亮区，周围环绕着明暗相间的圆环（爱里斑）。在焦平面附近，光的分布状态亦呈现复杂性质（见图 8.41），比几何光学所设想的要复杂得多。这就促使我们采用衍射理论来研究像差的影响。

这一领域最早的研究始自瑞利[①]。他的主要贡献是对成像系统所可容许的球差给出一个定量判据（在 9.3 节中讨论），该项判据，其形式经推广后，业已广为用来确定光学仪器可以容许的像差最大量，即所谓像差容限。之后，该项课题经众家之研究而大为推进，他们仔细探讨了各种不同像差的影响[②]，其中尤以 Steward，Picht 和玻恩[③]论著为广，可特予提出。

用衍射来处理存在像差时的成像问题，奈波尔（Nijboer）[④]做了极其大量的工作，其中一部分系同泽尼克合作完成。奈波尔的工作在小像差的影响方面，即波阵面偏离球面仅在一个波长以内。大像差影响的衍射理论研究，则归于 van Kampen[⑤]，他借助渐近近似求解。该处理的出发点是将稳定相原理的形式推广到二元函数。但此原理的严格表述后来才由福克（J. Focke）给出（见附录 C，第 745 页）。

本章主要部分是讲述奈波尔-泽尼克理论，并将研讨受各种初级像差影响的衍射像结构。最后一节（9.5 节）将从点物跨越到广延物，并研究相干照明和非相干照明成像。部分相干照明成像则在第 10 章中讨论。

---

① Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, (5), **8** (1879), 403。重印于其 *Scientific Papers*, Vol. 1 (Cambridge, Cambridge University Press, 1899), p. 428。

② E. Wolf 对像差和衍射理论做了历史回顾，其文载于 *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), **14** (1951), 95。

③ G. C. Steward, *Phil. Trans Roy. Soc.*, A, **255** (1925), 131；及其书著 *The Symmetrical Optical System* (Cambridge, Cambridge University Press, 1928)。J. Picht, *Ann. d. Physik*, (4), **77** (1925), 685. *ibid.*, **80** (1926), 491；及其书著 *Optische Abbildung* (Braunschweig, Vieweg, 1931)。M. Born, *Naturwissenschaften*, **20** (1932), 921；及其书著 *Optik* (Berlin, Springer, 1933, reprinted 1965), p. 202。

④ B. R. A. Nijboer, Thesis, University of Groningen, 1942。其主要部分并发表于 *Physica*, **10** (1943), 679; *ibid.*, **13** (1947), 605; F. Zernike and B. R. A. Nijboer, contribution to *La Théorie des Images Optiques* (Paris, Revue d' Optique, 1949), p. 227。K. Nienhuis and B. R. A. Nijboer, *Physica*, **14** (1948), 590，曾讨论将该理论推广到更大一些的像差。此外需要提到的还有 K. Nienhuis (University of Groningen, 1948) 的一篇学位论文，内容主要有关像差影响的实验研究。9.4 节中翻印有几张 Nienhuis 所拍摄的漂亮照片。
在微波频段，当存在像差时，关于像区结构的实验研究，M. P. Bachynski 和 G. Bekefi 曾有过报道，见第 407 页所引有关论文，亦见 *Trans. Inst. Radio Eng.*, AP-4 (1956), 412。

⑤ N. G. van Kampen, *Physica*, **14** (1949), 575; *ibid.*, **16** (1950), 817; *ibid.* **25** (1958), 437。

9.1 存在像差时的衍射积分

9.1.1 衍射积分

考虑一个置有一单色点光源 P_0 的共轴光学系统(即合轴组——译者注)(见图 9.1)。取一笛卡儿坐标系,令其原点位于 P_0 的高斯像点 $P_1^\star$,z 轴沿 $CP_1^\star$,C 为出射光瞳中心。y 轴则取在子午面(包含 P_0 和系统之轴的平面)上。P_0 和 $P_1^\star$ 的离轴距离分别用 Y_0 和 $Y_1^\star$ 表示。

同第 5 章中一样,出射光瞳区中波阵面的形变将用像差函数 Φ 来描写。设 $\overline{Q}$ 和 Q 是像空间中某条光线分别与过 C 点的实际波阵面和高斯参考球的交点。假设像空间中的折射率为 1,则 Φ(在图 9.1 中取为正)代表沿该光线所测的距离 $\overline{QQ}$。

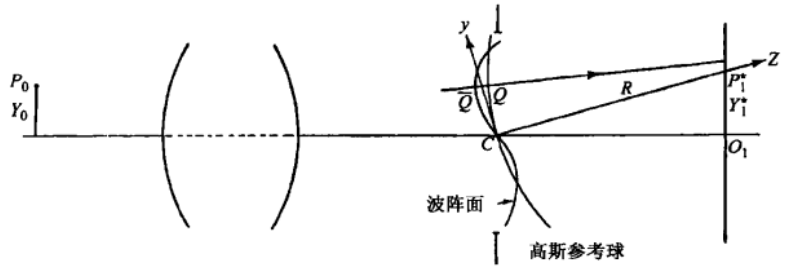


图 9.1 参考系的选择和符号

设 R 代表高斯参考球的半径 $CP_1^\star$,s 是 Q 和像区中任意一点 P 之间的距离。Q 点处的场扰动用 $Ae^{ik(\Phi-R)}/R$ 来表示,其中 A/R 是 Q 点处的振幅。按照惠更斯-菲涅耳原理,P 点的扰动由下式给出:

$$U(P)=-\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\frac{Ae^{-\mathrm{i}kR}}{R}\iint\frac{e^{ik[\Phi+s]}}{s}\mathrm{d}S, \tag{1}$$

式中积分范围为参考球面上将出射光瞳大致覆盖住的地区。(1)式中曾假设所涉及的角都很小,因而参考球上倾斜因子的变化可予忽略。此外还曾假设波阵面上各处的振幅基本不变,因而 A 可提到积分号外。

设(ξ,η,ζ)是 Q 点的坐标,(x,y,z)是 P 点的坐标,并设 a 是出射光瞳的半径。按照 8.8 节对无像差会聚球面波这一特别情况($\Phi\equiv0$)的处理,令

$$\left.\begin{aligned}\xi&=a\rho\sin\theta, & x&=r\sin\psi,\\ \eta&=a\rho\cos\theta, & y&=r\cos\psi,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

经过同 §8.8(2)和 §8.8(9)[①] 一样的运算,最后得到

$$k(s-R)=-v\rho\cos(\theta-\psi)-\tfrac{1}{2}u\rho^2+\left(\frac{R}{a}\right)^2u, \tag{3}$$

式中 u 和 v 是 P 点的两个"光学坐标",即

① 这里的 R 对应于 8.8 节的 f。值得注意的是,如采用 §8.8(2)和 §8.8(3),则衍射积分可再表成平面波角谱形式[见 J. Focke, *Optica Acta*, **3**(1956), 110]。

$$u=\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{a}{R}\right)^2 z,\qquad v=\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{a}{R}\right)\sqrt{x^2+y^2}. \tag{4}$$

为可方便处理，现将 Φ 看成为 $Y_1^\star$，ρ 和 θ 的函数：

$$\Phi=\Phi(Y_1^\star,\ \rho,\ \theta). \tag{5}$$

高斯参考球的面元为 $\mathrm{d}S=a^2\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$，而且如果 $CP_1^\star$ 与系统之轴的夹角很小，则积分范围可取为 $0\leqslant\rho\leqslant1, 0\leqslant\theta<2\pi$。此外，对像区中的观察点而言，被积函数分母中的 s 可用 R 代替。因此将(3)式代入(1)式即得到

$$U(P)=U(u,\ v,\ \psi)=-\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\frac{Aa^2}{R^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{R}{a}\right)^2 u}\int_0^1\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[k\Phi(Y_1^\star,\rho,\theta)-v\rho\cos(\theta-\psi)-\frac{1}{2}u\rho^2\right]}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta, \tag{6}$$

所以 P 点的强度

$$I(P)=|U(P)|^2=\left(\frac{Aa^2}{\lambda R^2}\right)^2\left|\int_0^1\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[k\Phi(Y_1^\star,\rho,\theta)-v\rho\cos(\theta-\psi)-\frac{1}{2}u\rho^2\right]}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\right|^2. \tag{7}$$

按照(7)式，如果不存在像差，即 $\Phi=0$ 时，则高斯像点 $P_1^\star$（$u=v=0$）处的强度将等于

$$I^\star=\pi^2\left(\frac{Aa^2}{\lambda R^2}\right)^2, \tag{8}$$

为方便起见，现将强度 $I(P)$ 表成为强度 $I^\star$ 的百分数，即取归一化强度[①]

$$i(P)=\frac{I(P)}{I^\star}=\frac{1}{\pi^2}\left|\int_0^1\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[k\Phi(Y_1^\star,\rho,\theta)-v\rho\cos(\theta-\psi)-\frac{1}{2}u\rho^2\right]}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\right|^2. \tag{9}$$

没有像差时，高斯像点的强度为一极大。存在像差时，情况一般将不再如此，这时强度极大之点可称为**衍射焦点**[②]。人们常仅关注某一特别观察面上的极大强度，这一强度当按(9)式归一化时，叫做 Strehl **强度**[③]。

从(9)式可立即推导出几个稍后将要用到的结果，兹分述于下。

9.1.2　位移定理；参考球的更换

设 Φ 和 Φ' 是两个像差函数，二者之间存在下列关系：

$$\Phi'=\Phi+H\rho^2+K\rho\sin\theta+L\rho\cos\theta+M, \tag{10}$$

式中 H, K, L 和 M 均为 λ 量级的常数。此外设 $i(u, v, \psi)$ 和 $i'(u, v, \psi)$ 为相对应的两个归一化强度。于是由(9)式

$$i(u,\ v,\ \psi)=\frac{1}{\pi^2}\left|\int_0^1\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}f(u,v,\psi;\rho,\theta)}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\right|^2, \tag{11}$$

式中

---

① 这里归一化强度符号 i 当不致与 $\sqrt{-1}$ 的符号 i 混淆，因为前者总是同自变量一起出现，例如 $i(p)$，$i(\mu, v, \Psi)$，等等。

② 一般来说，衍射焦点当然可多于一个，但如果像差足够小，衍射焦点就只有一个。

③ 此词概念出自 K. Strehl, *Z. f. Instrumkde.*, **22**(1902), 213，他称之为“Definitionshelligkeit”（德文，可译为“明亮度”——译者注）。英文文献中常采用“definition”（明晰度）一词，有欠妥当。近来，“Strehl ratio”（Strehl 比）一词亦有人使用。见，例如，V. N. Mahajan, *J. Opt. Soc. Amer.*, **71**(1981), 75 和 *ibid.*, **72**(1982), 1258。

$$f(u, v, \psi; \rho, \theta) = k\Phi - v\rho\cos(\theta - \psi) - \tfrac{1}{2}u\rho^2, \tag{12}$$

i'的表达式与此类似。按照(10)式,上式亦可写成如下形式:

$$\begin{aligned} f(u, v, \psi; \rho, \theta) &= k\Phi' - k[H\rho^2 + K\rho\sin\theta + L\rho\cos\theta + M] - v\rho\cos(\theta - \psi) - \tfrac{1}{2}u\rho^2 \\ &= k\Phi' - v'\rho\cos(\theta - \psi') - \tfrac{1}{2}u'\rho^2 - kM \\ &= f'(u', v', \psi'; \rho, \theta) - kM, \end{aligned} \tag{13}$$

式中

$$u' = u + 2kH, \qquad v'\sin\psi' = v\sin\psi + kK, \qquad v'\cos\psi' = v\cos\psi + kL. \tag{14}$$

据(2)和(4)两式可知,(14)式代表下列变换:

$$z' = z + 2\left(\frac{R}{a}\right)^2 H, \qquad x' = x + \left(\frac{R}{a}\right)K, \qquad y' = y + \left(\frac{R}{a}\right)L. \tag{15}$$

因此由(11)和(13)两式得到

$$i(u, v, \psi) = i'(u', v', \psi'). \tag{16}$$

这样我们就建立了下列**位移定理:一个像差函数,加上一项** $H\rho^2 + K\rho\sin\theta + L\rho\cos\theta + M$ **时,其中** H, K, L **和** M **均为** λ **量级的常数,结果并不改变焦点附近三维强度分布的形态,而仅仅是使该分布整体上按变换式(15)产生位移;**位移量是:沿主方向 $CP_1^\star$ 为 $2(R/a)^2H$(远离出射光瞳),沿正 x 和正 y 方向分别为 $(R/a)K$ 和 $(R/a)L$。

(10)式右方所加之项可解释为代表参考球的更换。假设选择一个新参考球,其中心位于像区中的 $P'(x', y', z')$点,半径为 R',而且离高斯参考球最多不超过几个波长。设光线 $\overline{QQ}$ 与新参考球相交于 N 点,这时以该新球为参考面的波像差 Φ' 为(见图 9.2)

$$\Phi' = \overline{QN} = \overline{QQ} - NQ \approx \overline{QQ} - NG, \tag{17}$$

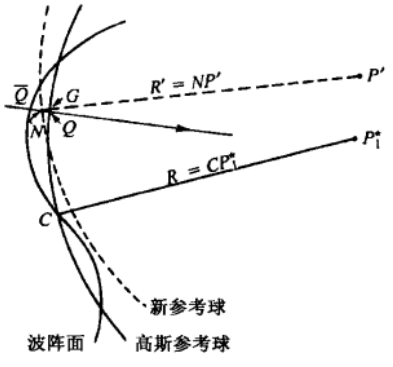


图 9.2 参考球的更换

式中 G 是直线 NP' 与高斯参考球的交点,像空间中的折射率同前仍假设为 1。这里 $\overline{QQ} = \Phi$ 是以高斯球为参考面时的波像差,而且 $NG = NP' - GP' = R' - s$,其中 s 代表 G 到 P' 的距离。因此(17)式可写成为

$$\Phi' \approx \Phi + s - R' = \Phi + \frac{\lambda}{2\pi}\left[-v\rho\cos(\theta - \psi) - \tfrac{1}{2}u\rho^2 + \left(\frac{R}{a}\right)^2 u\right] + (R - R'), \tag{18}$$

其中曾用了(3)式关系。这里 u,v 和 Ψ 仍由(3)和(4)两式给出,但需用 x',y',z' 替代原来的 x,y,z。关系式(18)可写成(10)式的形式,其中取

$$H=-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^2 z',\quad K=-\left(\frac{a}{R}\right)x',\quad L=-\left(\frac{a}{R}\right)y',\quad M=z'+R-R'. \tag{19}$$

9.1.3　强度和波阵面平均形变之间的关系

当像差很小时,参考球球心处的强度可用波像差的方均值表出。设参考球球心位于像区中的 P 点,Φ_p 是以此球为参考的波像差。于是,按照(9)和(18)两式,P 点处的归一化强度可表成下列形式:

$$i(P)=\frac{1}{\pi^2}\left|\int_0^1\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Phi_P}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\right|^2=\frac{1}{\pi^2}\left|\int_0^1\int_0^{2\pi}[1+\mathrm{i}k\Phi_P+\tfrac{1}{2}(\mathrm{i}k\Phi_P)^2+\cdots]\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\right|^2. \tag{20}$$

设 $\overline{\Phi_P^n}$ 代表 Φ_p n 次幂的平均值,即

$$\overline{\Phi_P^n}=\frac{\displaystyle\int_0^1\int_0^{2\pi}\Phi_P^n\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta}{\displaystyle\int_0^1\int_0^{2\pi}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta}=\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\Phi_P^n\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta. \tag{21}$$

如果假设像差非常小,因而可将(20)式中 $k\Phi_p$ 的三次和更高次幂略去,则 P 点的归一化强度可写成下列形式:

$$i(P)\approx|1+\mathrm{i}k\overline{\Phi_P}-\tfrac{1}{2}k^2\overline{\Phi_P^2}|^2=1-\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2[\overline{\Phi_P^2}-(\overline{\Phi_P})^2]. \tag{22}$$

上式右边方括号中的量是波阵面的“方均形变”$(\Delta\Phi)^2$,

$$(\Delta\Phi_P)^2=\frac{\displaystyle\int_0^1\int_0^{2\pi}(\Phi_P-\overline{\Phi_P})^2\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta}{\displaystyle\int_0^1\int_0^{2\pi}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta}=\overline{\Phi_P^2}-(\overline{\Phi_P})^2, \tag{23}$$

所以(22)式可写成为

$$i(P)\approx 1-\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2(\Delta\Phi_P)^2. \tag{24}$$

这一公式意味着,当像差很小时,焦点区域中高斯参考球球心处的归一化强度与像差的性质无关,而且比理想值 1 所小之量正比于波阵面的方均形变[①]。

9.2　像差函数的展开

9.2.1　泽尼克圆多项式

在第 5 章中根据几何光学讨论像差的影响时,曾将像差函数 Φ 展开成一幂级数。在本章

① 当光瞳的照度不均匀时,(24)式仍然有效,只要设 $(\Delta\Phi_p)^2$ 代表波阵面的振幅加权方均形变即可[见 V. N. Mahajan, *loc. cit.*,(1981)]。

的处理中,须对单位圆进行积分,这就更加适宜将 Φ 展开成单位圆域内正交的多项式完全集[①]。具有该种性质的多项式全集可有多种构成形式,然而泽尼克[②] 所引进的这种集与众不同,还具有简单的不变性特性。附录 G 将说明可用什么方法推导该泽尼克**圆多项式**,并讨论它们的某些特性。这里仅概括列出所需的一些公式。

泽尼克圆多项式是两个实变量 X, Y 的多项式 $V_n^l(X, Y)$,用极坐标($X = \rho\sin\theta, Y = \rho\cos\theta$)表出时,其形式为

$$V_n^l(\rho\sin\theta, \rho\cos\theta) = R_n^l(\rho)e^{il\theta}, \tag{1}$$

式中 $l \gtrless 0$,并且 $n \geqslant 0$,均为整数,$n \geqslant |l|$,而 $n - |l|$ 是偶数。其正交性和归一化性质则由下列公式表出:

$$\iint_{X^2+Y^2\leqslant 1} V_n^{l\star}(X, Y)V_{n'}^{l'}(X, Y)\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y = \frac{\pi}{n+1}\delta_{ll'}\delta_{nn'}, \tag{2}$$

式中 δ_{ij} 是克罗内克符号,星号表示复共轭。径向函数 $R_n^l(\rho)$ 是 ρ 的多项式,由 $\rho^n, \rho^{n-2}, \cdots, \rho^{|l|}$ 各次幂组成,并且如附录 G 所证,与雅可比多项式(有穷超几何级数)有密切关系。由(1)和(2)两式可见,该径向多项式满足下列关系式:

$$\int_0^1 R_n^l(\rho)R_{n'}^l(\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{2(n+1)}\delta_{nn'}. \tag{3}$$

其具体形式由下列公式($m = |l|$)给出:

$$R_n^{\pm m}(\rho) = \frac{1}{\left(\frac{n-m}{2}\right)!\rho^m}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\rho^2)}\right]^{\frac{n-m}{2}}\left[(\rho^2)^{\frac{n+m}{2}}(\rho^2-1)^{\frac{n-m}{2}}\right] \tag{4}$$

$$= \sum_{s=0}^{\frac{n-m}{2}}(-1)^s\frac{(n-s)!}{s!\left(\frac{n+m}{2}-s\right)!\left(\frac{n-m}{2}-s\right)!}\rho^{n-2s}. \tag{5}$$

其规一化则如此选定,即对所有可允许的 n 和 m 值,有

$$R_n^{\pm m}(1) = 1. \tag{6}$$

径向多项式 $R_n^{\pm m}(\rho)$ 有下列生成函数

$$\frac{\left[1+z-\sqrt{1-2z(1-2\rho^2)+z^2}\right]^m}{(2z\rho)^m\sqrt{1-2z(1-2\rho^2)+z^2}} = \sum_{s=0}^{\infty}z^s R_{m+2s}^{\pm m}(\rho). \tag{7}$$

当 $m = 0$ 时,上式左方化为自变量为 $2\rho^2 - 1$ 的勒让德多项式[③] 生成函数,所以

$$R_{2n}^0(\rho) = P_n(2\rho^2 - 1). \tag{8}$$

表 9.1 给出该径向多项式前几个 m, n 值的显函数形式。

---

① 此处"完全"这个词意指,任何相当规范的函数均可展开成该集函数的级数。关于该词的更精确定义见,例如,R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I(New York, Interscience Publishers, 1st English edition, 1953), pp. 51 – 54。

② F, Zernike, *Physica*, **1**(1934), 689。

③ 见,例如,R. Courant and D. Hilbert, *loc. cit.*, p. 85。

表 9.1　$m \leqslant 8, n \leqslant 8$ 的各径向多项式 $R_n^m(\rho)$

$m\backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1		$2\rho^2-1$		$6\rho^4-6\rho^2+1$		$20\rho^6-30\rho^4+12\rho^2-1$		$70\rho^8-140\rho^6+90\rho^4-20\rho^2+1$
1		ρ		$3\rho^3-2\rho$		$10\rho^5-12\rho^3+3\rho$		$35\rho^7-60\rho^5+30\rho^3-4\rho$	
2			ρ^2		$4\rho^4-3\rho^2$		$15\rho^6-20\rho^4+6\rho^2$		$56\rho^8-105\rho^6+60\rho^4-10\rho^2$
3				ρ^3		$5\rho^5-4\rho^3$		$21\rho^7-30\rho^5+10\rho^3$	
4					ρ^4		$6\rho^6-5\rho^4$		$28\rho^8-42\rho^6+15\rho^4$
5						ρ^5		$7\rho^7-6\rho^5$	
6							ρ^6		$8\rho^8-7\rho^6$
7								ρ^7	
8									ρ^8

下列关系式(亦在附录 G 中给出证明)在奈波尔-泽尼克理论中极为重要:

$$\int_0^1 R_n^m(\rho)J_m(v\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho=(-1)^{\frac{n-m}{2}}\frac{J_{n+1}(v)}{v} \tag{9}$$

式中 J 是第一类贝塞尔函数。

亦可不用复多项式 V_n^m 而采用下列实多项式 U_n^m 和 U_n^{-m} ①:

$$\left.\begin{aligned}U_n^m&=\tfrac{1}{2}(V_n^m+V_n^{-m})=R_n^m(\rho)\cos m\theta,\\U_n^{-m}&=\tfrac{1}{2i}(V_n^m-V_n^{-m})=R_n^m(\rho)\sin m\theta.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

在本章的应用中,将只需要多项式 $U_n^m=R_n^m(\rho)\cos m\theta$。这是因为波形畸变对子午面 $\theta=0$ 是对称的,所以像差函数是 θ 的偶函数。

9.2.2 像差函数的展开

现在仿照奈波尔,将像差函数用泽尼克圆多项式展开。同 5.1 节中一样,由对称性可知,展开式中的变量仅以 $Y_1^{\star 2}$,ρ^2 和 $Y_1^{\star}\rho\cos\theta$ 这三种组合形式出现,所以该展开式必然呈如下形式

$$\Phi(Y_1^{\star},\rho,\theta)=\sum_l\sum_n\sum_m a_{lnm}Y_1^{\star 2l+m}R_n^m(\rho)\cos m\theta, \tag{11}$$

式中 l,n 和 m 是非负的整数,$n\geqslant m$,$n-m$ 为偶数,并且各 a 均为常数。

因为这里将主要关注一固定物点的衍射像($Y_1^{\star}$ 为常数),所以适当之举是把 Φ 对 $Y_1^{\star}$ 的显依赖关系隐蔽起来,而将(11)式改写成如下形式:

$$\Phi=A_{00}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=2}^{\infty}A_{n0}R_n^0(\rho)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}A_{nm}R_n^m(\rho)\cos m\theta. \tag{12}$$

各系数 A_{nm} 这时都是 $Y_1^{\star}$ 的函数,而第二项中引入因子 $1/\sqrt{2}$ 是为了简化最后的公式。

如果像差足够小,则高斯焦点的归一化强度可用各系数 A 表成一个简单形式。将(12)式代入 §9.1(21),并利用正交关系(3),则有

$$\left.\begin{aligned}\overline{\Phi}&=A_{00},\\\overline{\Phi^2}&=A_{00}^2+\tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{A_{nm}^2}{n+1}.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

第一个关系式意味着,A_{00} 代表过 C 点的波阵面对高斯参考球的平均延迟。第二个关系式是正交函数集 $R_n^m(\rho)\cos m\theta$ 情况的"帕塞瓦尔公式"。将(13)式代入 §9.1(22),就得到高斯焦点处的归一化强度

$$i(P_1^{\star})=1-\frac{2\pi^2}{\lambda^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{A_{nm}^2}{n+1}. \tag{14}$$

用圆多项式展开像差函数 Φ,其显著优点表现在像差"平衡"这一重要问题上,所谓像差平衡,就是让不同级的像差彼此平衡以使高斯焦点的强度达到最大。假定像差函数由单"幂级数"项

$$\Phi=A'_{nm}\rho^n\cos^m\theta, \tag{15}$$

① J. Y. Wang and D. E. Silva, *Appl. Opt.*, **19**(1980), 1510. 这篇论文中刊有这些多项式的一些低阶模式图(照片)。

来代表，其中 A'_{nm} 是一个很小的常数，仅一个波长量级或更小。我们的问题是，能否通过引进一些较低级像差来增加强度 $i(P_1^\star)$。更确切地说，我们希望在表达式

$$\Phi' = A'_{nm}\rho^n \cos^m\theta + \sum_{p<n}\sum_{q\leqslant p} A'_{pq}\rho^p \cos^q\theta, \tag{16}$$

中选择适当的常数 A'_{pq} 使高斯焦点强度尽可能大。

不论如何具体选择常数 A'_{pq}，仍可将像差函数(16)用圆多项式表成如下形式：

$$\Phi' = \varepsilon_{nm}A_{nm}R_n^m(\rho)\cos m\theta + \sum_{p<n}\sum_{q\leqslant p}\varepsilon_{pq}A_{pq}R_p^q(\rho)\cos q\theta, \tag{17}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{nm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{当 } m=0,\ n\neq 0 \text{ 时,}\\ &= 1 \qquad\quad \text{其他情况时。}\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

按照(5)式，$R_n^m(\rho)$ 中 ρ 的最高次幂是 n，并出现在径向多项式 $R_n^m(\rho)$ 中，系数为 $n!/[\frac{1}{2}(n+m)]![\frac{1}{2}(n-m)]!$。因此，比较一下(16)和(17)两式中 $\rho^n\cos^m\theta$(或 $\rho^n\cos m\theta$)的系数，可以得到

$$A_{nm} = \frac{1}{\varepsilon_{nm}}\frac{[\frac{1}{2}(n+m)]![\frac{1}{2}(n-m)]!}{n!2^{m-1}}A'_{nm} \qquad \text{当 } n\neq 0 \text{ 时。} \tag{19a}$$

此外显然

$$A_{00} = A'_{00}. \tag{19b}$$

现在由于 A'_{nm} 以及 A_{nm} 已定，故由(14)式得知，通过使(17)式中取和号内所有系数恒等于零，即可让 $P_1^\star$ 点处强度达到极大。这时像差函数成为

$$\Phi' = \varepsilon_{nm}A_{nm}R_n^m(\rho)\cos m\theta, \tag{20}$$

并且 $P_1^\star$ 点的归一化强度为

$$i(P_1^\star) = 1 - \frac{2\pi^2}{\lambda^2}\frac{A_{nm}^2}{n+1}, \tag{21}$$

其中 A_{nm} 由(19)式给定，作为系数 A'_{nm} 的已知函数。现在原委已明，即：**在展开式(12)的各个单像差项 $A_{nm}R_n^m(\rho)\cos m\theta$ 中，包含有若干 $A'_{pq}\rho^p\cos^q\theta$ 这种形式的项，其中 $p=n,n-2,\cdots,m$；$q=m,m-2,\cdots,1$ 或 0，而后者的组合方式使得，当 $\rho^n\cos^m\theta$ 项的系数(非常小)给定时，高斯焦点处的归一化强度为一极大。**

现在举一个简单的例子来说明这个结果。假定某光学系统带有小量六级球面像差($\Phi = A'_{60}\rho^6$)，并且也有办法可再引进大小可加以控制的四级球面像差($A'_{40}\rho^4$)和散焦($A'_{20}\rho^2$)，试求使衍射焦点强度尽可能大的 A'_{40} 和 A'_{20} 之值。Richter[①] 首先研究了这类问题，他证明当选择下列两个系数比时该强度达到极大：

$$\frac{A'_{40}}{A'_{60}} = -\frac{3}{2}, \qquad \frac{A'_{20}}{A'_{60}} = \frac{3}{5}. \tag{22}$$

浏览一下 435 页上的表 9.1 即可发现，这正是 $R_6^0(\rho)$ 多项式中相应系数之比：

$$R_6^0(\rho) = 20\rho^6 - 30\rho^4 + 12\rho^2 - 1. \tag{23}$$

① R. Richter, *Z. f. Instrumkde.*, **45**(1925), 1。

由此可见,只要像差足够小,引进泽尼克圆多项式就自动解决了像差平衡问题——意义前已说明(见 436 页);另外,借助位移定理,从该多项式还能够确定衍射焦点的位置。

9.3 初级像差的容限条件

存在像差时衍射像中的强度分布计算颇为繁难,这个问题放在下节讨论,这里先考虑比它简单得多的问题——估计一下光学系统可容许的最大像差。

从前节讨论已然得知,当存在像差时衍射像中的最大强度小于同孔径、同焦距、无像差系统中高斯焦点(爱里图样中心)的强度。瑞利首先证明[①],当一个系统带有初级球差,且其大小相当于出射光瞳中波阵面偏离高斯参考球不到 1/4 波长时,则高斯焦点处强度减小不到 20%——通常可以容许的光强损失。以后的工作者发现,对于其他常见的像差,当波阵面形变小于 1/4 波长时,像的质量同样不受到严重影响。该结果后来称为**瑞利 1/4 波长定则**,并成为一则有用的判据,用来判定成像系统所可容许的像差大小。当然,该定则只是系统校正目标所向的一个大致导向,因为像的光强分布状态不仅取决于波阵面的最大形变,而且还与其形状(像差类型)有关。再者,可以容许的光强损失自然还因仪器具体用途而异,因而在某些情况容限规定必须更加严苛。

将条件 $|\Phi_{极大}| = \lambda/4$ 应用到不同类型的像差时,所得到的衍射焦点强度值差异颇大[②]。看来,更为适当的做法是使容限判据的表述对应于给衍射焦点强度规定一个值。这种判据 Maréchal 曾做过讨论[③],他采用参考球中心的强度与波阵面偏离球形的方均根偏差之间存在的关系。

当像差足够小时,像区中某点 P 的强度可根据 §9.1(24)表成下列形式:

$$i(P) \approx 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (\Delta\Phi_P)^2. \tag{1}$$

依照 Maréchal,**当一个光学系统衍射焦点 F 处的归一化强度大于或等于 0.8 时,该系统将被看成为精心校正的系统**。现在由(1)式可知,当 $|\Delta\Phi_F| \leqslant \lambda/14$ 时,$i(F) \geqslant 0.8$,所以该条件等同于要求**波阵面对以衍射焦点为中心的参考球的方均根偏差不得超过 $\lambda/14$**[④]。

---

① Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, (5) **8** (1879), 403。重印在其 *Scientific Papers*, Vol 1. (Cambridge, Cambridge University Press, 1899), 432 – 435中。

② V. N. Mahajan, *loc. cit.*, (1982)。

③ A, Maréchal, *Rev. d' Opt.*, **26** (1947), 257。

④ Maréchal 的条件实际导自一个稍微不同的不等式。因 $\bar{\Phi}_p$ 为常数,故由 §9.1(20)可以得到

$$i(F) = \frac{1}{\pi^2}\left|\int_0^1\int_0^{2\pi} e^{ik\Phi_F}\rho\,d\rho\,d\theta\right|^2$$

$$\geqslant \frac{1}{\pi^2}\left|\int_0^1\int_0^{2\pi} \cos(k\tilde{\Phi}_F)\rho\,d\rho\,d\theta\right|^2,$$

式中 $\tilde{\Phi}_F = \Phi_F - \bar{\Phi}_F$。如果 $k|\tilde{\Phi}_F| < \pi/2$,即如果 $|\tilde{\Phi}_F| < \lambda/4$,则该不等式中 $\cos(k\tilde{\Phi}_F)$ 显然可用 $1 - \frac{1}{2}(k\tilde{\Phi}_F)^2$ 代替。因此,对小像差来说,上列不等式变成

$$i(F) \geqslant \left[1 - \frac{2\pi^2}{\lambda^2}(\Delta\Phi_F)^2\right]^2. \tag{1a}$$

Maréchal 判据即导自不等式(1a)。但如果像差很小,这差别显然没有多大实际影响。对我们的用途来说,(1)式优于(1a)式之处在于它同泽尼克圆多项式的致极特性有更直接的关系。

现在来确定衍射焦点的位置和初级(赛德尔)像差的容限条件。采用本章符号时,每种初级像差代表一种下列形式的波阵面形变[①]:

$$\Phi = a'_{lnm} Y_1^{\star 2l+m} \rho^n \cos^m \theta, \tag{2}$$

式中 $2l + m + n = 4$。为方便起见,令

$$A'_{lnm} = a'_{lnm} Y_1^{\star 2l+m}, \tag{3}$$

因而(2)式变成

$$\Phi = A'_{lnm} \rho^n \cos^m \theta. \tag{4}$$

常数 A' 可以很容易地用第 5 章中引进的赛德尔系数 B, C, D, E 和 F 来表出。如果取 §5.2(7)和 §5.2(8)中的任意常数 λ_0 等于 1,则 λ_1 代表两个光瞳平面之间的放大率,而且如果记得本章已设 $n_1 = 1$,则 §5.3(7)的变量 ρ 和 y_0 相当于本节的 $a\rho/\lambda_1$ 和 $-\lambda_1 Y_1^{\star}/R$;将(4)式与 §5.3(7)相比较,即得到

$$\left.\begin{aligned}
A'_{040} &= -\frac{1}{4}\left(\frac{a}{\lambda_1}\right)^4 B, \\
A'_{031} &= -\left(\frac{a}{\lambda_1}\right)^3 \left(\frac{\lambda_1 Y_1^{\star}}{R}\right) F, \\
A'_{022} &= -\left(\frac{a}{\lambda_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1 Y_1^{\star}}{R}\right)^2 C, \\
A'_{120} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\lambda_1}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1 Y_1^{\star}}{R}\right)^2 D, \\
A'_{111} &= -\left(\frac{a}{\lambda_1}\right) \left(\frac{\lambda_1 Y_1^{\star}}{R}\right)^3 E.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

在圆多项式所表示的展开式中,一个典型项代表像差[②]

$$\Phi = \varepsilon_{nm} A_{lnm} R_n^m(\rho) \cos m\theta. \tag{6}$$

各初级像差项列在表 9.2 中最后一行,其附标 l, m 和 n 满足 $2l + m + n = 4$。可以看到,一些赛德尔项在这里伴随有低次项,而按照位移定理(见 9.1.2 节),这些低次项导致强度分布整体移位。根据 9.2.2 节的定理,(6)式这种像差所影响的像,其高斯焦点处的强度为极大。因此,比较一下表 9.2 中最后两行的对应项,可立即确定像在受到一初级像差影响时的衍射焦点坐标。现以初级球差[③] 为例对此做详细说明。初级球差的代表项在(4)式中为[④]

$$\Phi = A'_{040} \rho^4. \tag{7}$$

在(6)式中的对应项则为

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{040} R_4^0(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{040}(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1). \tag{8}$$

如果

---

① 这里为了区别,对本幂级数表示中的系数加撇,而不加撇的系数仍属于以泽尼克圆多项式展开的表示。

② 因子 ε_{nm} 在 $m = 0, n \neq 0$ 时等于 $1/\sqrt{2}$,在其他情况均等于 1,这里保留 ε_{nm} 是为了与 9.2 节中各公式协调一致。

③ 球差,即球面像差——译者注。

④ 为了在符号上与位移定理 §9.1(10)一致,不妨将(7)式之 Φ 改为 Φ',这样或可有助理解下文所讲内容——译者注。

$$A'_{040}=\frac{6}{\sqrt{2}}A_{040}, \tag{9}$$

则按照位移定理,两种情况的强度分布将相同,但(7)式所对应的分布相对于(8)式所对应的分布将有一位移,位移情况服从关系式 §9.1(15),其中

$$H=6A_{040}/\sqrt{2}=A'_{040},\qquad K=L=0,\qquad M=-A_{040}/\sqrt{2}=-A'_{040}/6,$$

即位移的坐标变换为:

$$x'=x,\qquad y'=y,\qquad z'=z+2\left(\frac{R}{a}\right)^2A'_{040}. \tag{10}$$

因为与(8)式相关联的衍射像在原点 $x=y=z=0$ 处强度最大,所以(7)式所表示的初级球差,其衍射焦点 $F(x_F,y_F,z_F)$ 位于

$$x_F=y_F=0,\qquad z_F=2\left(\frac{R}{a}\right)^2A'_{040}. \tag{11}$$

表 9.2 各种初级像差的表示

像差类型	l	n	m	(4)式中的表示	(6)式中的表示
球差	0	4	0	$A'_{040}\rho^4$	$\frac{1}{\sqrt{2}}A_{040}R_4^0(\rho)=\frac{1}{\sqrt{2}}A_{040}(6\rho^4-6\rho^2+1)$
彗差	0	3	1	$A'_{031}\rho^3\cos\theta$	$A_{031}R_3^1\cos\theta=A_{031}(3\rho^3-2\rho)\cos\theta$
像散	0	2	2	$A'_{022}\rho^2\cos^2\theta$	$A_{022}R_2^2\cos 2\theta=A_{022}\rho^2(2\cos^2\theta-1)$
场曲[①]	1	2	0	$A'_{120}\rho^2$	$\frac{1}{\sqrt{2}}A_{120}R_2^0(\rho)=\frac{1}{\sqrt{2}}A_{120}(2\rho^2-1)$
畸变	1	1	1	$A'_{111}\rho\cos\theta$	$A_{111}R_1^1(\rho)\cos\theta=A_{111}\rho\cos\theta$

(11)式所确定的 F 点有一个简单的几何意义,现说明于下:设 ΔY 和 ΔZ 是横向球差和纵向球差,并且当光线与坐标轴 y 或 z 的交点位于高斯焦点正方一边时取为正。由光线像差公式 §5.1(17),取其中 $\Phi'=A'_{040}\rho^4$,$\rho=Y/a$,$D_1\approx -R\approx -R'$,$X_0=X=0$[②],$n_1=1$,则

$$\Delta Y=Y_1-Y_1^{\star}=4\left(\frac{R}{a}\right)\left(\frac{Y}{a}\right)^3A'_{040}, \tag{12a}$$

通过初等几何相似形关系并借助上式,即有

$$\Delta Z=Z-Z_1^{\star}\approx\frac{R}{Y}\Delta Y=4\left(\frac{R}{a}\right)^2\left(\frac{Y}{a}\right)^2A'_{040}. \tag{12b}$$

对边缘光线($Y=a$),(12b)式给出$(\Delta Z)_{极大}=4(R/a)^2A'_{040}$,由此可见,(11)式意味着[③],**当存在小量初级球差时衍射焦点位于傍轴光线焦点与边缘光线焦点之间的中点。**

① 场曲,是"像场弯曲"的简称——译者注。

② 按:(X_0,Y_0)是物平面坐标,(X,Y)是出射光瞳平面坐标,a 是出射光瞳半径,D_1 是出射光瞳与高斯像平面距离——译者注。

③ 这里忽略了 5.1 节和本节中由于 z 方向选择不同所产生的很小影响(按:在 5.1 节中,z 方向沿着系统的光轴,而本章 9.1 节一开始即明确规定,坐标轴原点选在物点 P_0 的高斯像点 $P_1^{\star}$,z 方向则沿 $CP_1^{\star}$,C 是出射光瞳中心——译者注)。

下面来确定初级球差的容限。对于(6)式所表征的任何像差，按照 § 9.2(14)，如果

$$1-\frac{2\pi^2}{\lambda^2}\frac{A_{lnm}^2}{n+1}\geqslant 0.8,$$

即如果

$$|A_{lnm}|\leqslant\frac{\lambda\sqrt{n+1}}{10}. \tag{13}$$

则高斯焦点处的归一化强度将大于或等于 0.8。具体来说，对于初级球差，$n=4$，上式给出

$$|A_{040}|\leqslant 0.22\lambda,$$

或由(9)式，

$$|A'_{040}|\leqslant 0.94\lambda. \tag{14}$$

这就是所求的初级球差容限条件，它意味着波阵面偏离高斯参考球的最大偏差须小于 0.94 波长。

用完全类似的方式可求得其他初级像差的衍射焦点位置和相应容限。特而言之，存在小量初级像散时衍射焦点的坐标为

$$x_F=y_F=0,\qquad z_F=\left(\frac{R}{a}\right)^2A'_{022}. \tag{15}$$

该结果仍然有一个简单的物理解释。按照(5)式和 § 5.3(18)，切向焦面的曲率半径 R_t 和弧矢焦面的曲率半径 R_s 由下式给出(仍假设 $n_1=1$)

$$\frac{1}{R_t}=-\frac{4}{a^2}\left(\frac{R}{Y_1^\star}\right)^2A'_{022},\qquad \frac{1}{R_s}=0, \tag{16}$$

所以两个焦线的横坐标 Z_t 和 Z_s 为

$$Z_t=-\frac{Y_1^{\star 2}}{2R_t}=2\left(\frac{R}{a}\right)^2A'_{022},\qquad Z_s=0. \tag{17}$$

因此(15)式意味着，**当存在小量初级像散时，衍射焦点位于切向焦线与弧矢焦线之间的中点。**

因为初级场曲和初级畸变分别由 ρ 的二次项和一次项来代表，所以根据位移定理可知，这两种像差的惟一影响是使无像差像的三维强度分布产生“整体位移”。因此，当存在小量初级场曲或初级畸变时，衍射焦点的归一化强度 i 是 1，但衍射焦点与高斯像点并不重合。

表 9.3 中概括列出关于各种初级像差的这些结果。

表 9.3　各种初级像差的衍射焦点位置和容限条件

像差类型	衍射焦点 F 的坐标			容限条件 $[i(F)\geqslant 0.8]$
	x_F	y_F	z_F	
球差	0	0	$2\left(\frac{R}{a}\right)^2A'_{040}$	$\lvert A'_{040}\rvert\leqslant 0.94\lambda$
彗差	0	$\frac{2}{3}\left(\frac{R}{a}\right)A'_{031}$	0	$\lvert A'_{031}\rvert\leqslant 0.60\lambda$
像散	0	0	$\left(\frac{R}{a}\right)^2A'_{022}$	$\lvert A'_{022}\rvert\leqslant 0.35\lambda$
场曲	0	0	$2\left(\frac{R}{a}\right)^2A'_{120}$	–
畸变	0	$\left(\frac{R}{a}\right)A'_{111}$	0	–

9.4 单种像差衍射图样

现在讨论存在单种像差时的衍射像,这种像差由展开式 §9.2(11)中某一单项来代表,即

$$\Phi = a_{lnm} Y_1^{\star 2l+m} R_n^m(\rho)\cos m\theta. \tag{1}$$

同前将 Φ 对 $Y_1^{\star}$ 的显依赖关系隐蔽起来,令

$$\alpha_{lnm} = \frac{2\pi}{\lambda} a_{lnm} Y_1^{\star 2l+m} = \frac{2\pi}{\lambda} \varepsilon_{nm} A_{lnm}. \tag{2}$$

此外令

$$C = -\frac{\mathrm{i}\pi A}{\lambda}\left(\frac{a}{R}\right)^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(R/a)^2 u}. \tag{3}$$

则衍射积分 §9.1(6)变成

$$U(u, v, \psi) = \frac{C}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}[-v\rho\cos(\theta-\psi)-\frac{1}{2}u\rho^2+\alpha_{lnm}R_n^m(\rho)\cos m\theta]}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta. \tag{4}$$

借助雅可比恒等式[见 §8.8(29)]

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\cos\phi} = J_0(z) + 2\sum_{s=1}^{\infty}\mathrm{i}^s J_s(z)\cos s\phi \tag{5}$$

将积分(4)中 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}v\rho\cos(\theta-\psi)}$ 和 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_{lnm}R_n^m}(\rho)\cos m\theta$ 这两项均行展开,从而可将该积分展成一无穷级数。二展开式相乘后的结果为

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{\mathrm{i}[-v\rho\cos(\theta-\psi)+\alpha_{lnm}R_n^m(\rho)\cos m\theta]}\\ &= 4\sum_{s=0}^{\infty}{}'\sum_{s'=0}^{\infty}{}'\mathrm{i}^s(-\mathrm{i})^{s'}J_s[\alpha_{lnm}R_n^m(\rho)]J_{s'}(v\rho)\cos ms\theta\cos[s'(\theta-\psi)],\end{aligned} \tag{6}$$

式中取和号上加的一撇意指,取 $s'=0$ 以及 $s=0$ 诸项时要各乘以因子 $\frac{1}{2}$。将此双级数代入(4)式并对 θ 逐项积分。结果得到

$$U(u, v, \psi) = 4C\sum_{s=0}^{\infty}{}'(-\mathrm{i})^{(m-1)s}\cos ms\psi\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}u\rho^2}J_s[\alpha_{lnm}R_n^m(\rho)]J_{ms}(v\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho, \tag{7}$$

$s=0$ 的项仍乘有因子 $\frac{1}{2}$。

因为我们仅关注小像差(小 α)情况,所以可将积分号内的因子 $J_s[\alpha_{lnm}R_n^m(\rho)]$ 展成一幂级数,并将所得到的表达式按 α_{lnm} 幂次重新整组,结果得到

$$U(u, v, \psi) = C[U_0 + \mathrm{i}\alpha_{lnm}U_1 + (\mathrm{i}\alpha_{lnm})^2U_2 + (\mathrm{i}\alpha_{lnm})^3U_3 + (\mathrm{i}\alpha_{lnm})^4U_4 + \cdots], \tag{8a}$$

式中

$$
\left.\begin{aligned}
U_0 &= 2\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}u\rho^2} J_0(v\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho,\\
U_1 &= 2(-\mathrm{i})^m \cos m\psi \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}u\rho^2} R_n^m(\rho) J_m(v\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho,\\
U_2 &= \frac{1}{2!}\left\{\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}u\rho^2}\{R_n^m(\rho)\}^2 J_0(v\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho\right.\\
&\qquad \left. + \mathrm{i}^{2m}\cos 2m\psi\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}u\rho^2}\{R_n^m(\rho)\}^2 J_{2m}(v\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho\right\},\\
U_3 &= \frac{1}{2\times 3!}\left\{3(-\mathrm{i})^m\cos m\psi\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}u\rho^2}[R_n^m(\rho)]^3 J_m(v\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho\right.\\
&\qquad \left. + (-\mathrm{i})^{3m}\cos 3m\psi\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}u\rho^2}[R_n^m(v\rho)]^3 J_{3m}(v\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho\right\},\\
U_4 &= \frac{1}{2^2\times 4!}\left\{3\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}u\rho^2}[R_n^m(\rho)]^4 J_0(v\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho\right.\\
&\qquad + 4\mathrm{i}^{2m}\cos 2m\psi\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}u\rho^2}[R_n^m(\rho)]^4 J_{2m}(v\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho\\
&\qquad \left. + \mathrm{i}^{4m}\cos 4m\psi\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}u\rho^2}[R_n^m(\rho)]^4 J_{4m}(v\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{8b}
$$

经具体分析后，奈波尔确定式中 u 和 α_{lmn} 二者均属 1 的量级，展开式(8a)中大约 4 项即足以使强度计算误差不超过百分之几。

(8b)式中各项积分的计算可行之如下：借助众所周知的鲍尔(Bauer)公式[①] 将因子 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}u\rho^2}$ 用径向多项式表出，鲍尔公式为

$$
\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\cos\phi} = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{s=0}^{\infty}\mathrm{i}^s(2s+1)J_{s+\frac{1}{2}}(z)P_s(\cos\phi), \tag{9}
$$

式中 P 是勒让德多项式。如令 $\cos\phi = 2\rho^2 - 1$，并利用关系式 $P_s(2\rho^2-1) = R_{2s}^0(\rho)$[见 §9.2(8)]，即可得到

$$
\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}u\rho^2} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}u}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}u(2\rho^2-1)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}u}\sqrt{\frac{2\pi}{u}}\sum_{s=0}^{\infty}(-\mathrm{i})^s(2s+1)J_{s+\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{4}u\right)R_{2s}^0(\rho). \tag{10}
$$

将(10)式代入(8b)式就得到若干积分，每项各包含一个贝塞尔函数乘以几个径向多项式之积。这些积分的计算可借助公式 §9.2(9)

$$
\int_0^1 R_n^m(\rho)J_m(v\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho = (-1)^{\frac{n-m}{2}}\frac{J_{n+1}(v)}{v}, \tag{11}
$$

① 见，例如，G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (Cambridge, Cambridg University Press, 2nd edition, 1944), p. 368。

只要先将多项式之积表成为$\sum_p A_p R_p^m(\rho)$这种形式的线性组合,其中 m 等于与该多项式之积相乘的贝塞尔函数的级次。要获得系数 A_p 的一般表达式并非容易,但如果 m 和 n 不太大,这种线性关系借助 435 页表 9.1 可不难建立。这稍后从几个例子将可看到。对有关更普遍情况处理方法的讨论,请参阅奈波尔的论文。

在波没有像差这一特殊情况下,$\alpha_{lmn}=0$,将(10)式代入(7)式时则得到

$$U(u,v,\psi)=2C\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}u}\sqrt{\frac{2\pi}{u}}\sum_{s=0}^{\infty}(-\mathrm{i})^s(2s+1)J_{s+\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{4}u)\int_0^1 R_{2s}^0(\rho)J_0(v\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=2C\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}u}\sqrt{\frac{2\pi}{u}}\sum_{s=0}^{\infty}(\mathrm{i})^s(2s+1)J_{s+\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{4}u)\frac{J_{2s+1}(v)}{v},\tag{12}$$

其中曾用了(11)式,此展开式等效于 8.8.1 节所给出的洛默尔级数展开,虽然二者形式不同。

从展开式(8)可立即推论出衍射像的某些普遍性质。可以看出,当ψ易为$\psi+2\pi\mu/m$($\mu=1,2,\cdots,m$)时,U 保持不变;因此,z **轴是一个** m **重对称轴**。而且,**过** z **轴并与** y-z **平面**($x=0$)**成** $\mu\pi/m$ **角的各个平面都是对称面**。当 $m=0$ 时,U 不依赖于角ψ,因而衍射像具有旋转对称性。

其次,考虑衍射像对 x-y 平面(即平面 $z=0$)的对称性。可以看出,当 u 易为 $-u$ 时,(8)式中所有积分将变成其共轭积分。这时,如 m 为奇数,这些积分所乘的系数全为实数。所以,在此情况下,$U(u,v,\Psi)$变成其共轭函数,结果强度保持不变。因此,**如果** m **为奇数,衍射像的强度分布对**平面 $z=0$ 是对称的。另一方面,如果 m 为偶数(但 $m\neq0$),则含因子 $\cos2\mu m\,\Psi$(μ 为一整数)的这些系数为实数,而其他含因子 $\cos(2\mu+1)m\,\Psi$的各系数为纯虚数。因此,这时 u 如易为 $-u$,且同时Ψ易为$\Psi+\pi/m$,则 U 变成其共轭函数。所以,**如** m **为偶数但不为零,则** z **等于常数的平面上的任何点经** x-y **平面反射,再绕** z **轴转动** π/m **角后,其强度不变**。由此可知,虽然如前所言,z 轴一般情况下是一个 m 重对称轴,但**当** m **为偶数时,它对** $z=0$ **平面内的图样而言是一个** $2m$ **重对称轴**。当 $m=0$ 时(球差),衍射像对平面 $z=0$ 不是对称的。

最后还可看出,当像差常数 α_{lmn}的正负号变更时,如果当 m 为偶数时将 u 易为 $-u$,而当 m 为奇数时将Ψ易为$\Psi+\pi$,则强度分布均不改变。

下面扼要谈谈当光学系统存在各单种像差时像的结构。

9.4.1 初级球差

在此情况下,$l=m=0$,而 $n=4$。像差函数与 θ 无关,因而三维衍射像对主方向 $v=0$(z 轴)呈旋转对称。

根据(8)式,衍射积分的 α 幂次展示这时为

$$U(u,v,\psi)=C[U_0+\mathrm{i}(\alpha_{040})U_1+(\mathrm{i}\alpha_{040})^2U_2+\cdots],\tag{13}$$

式中 U_0 代表无像差像中的光扰动,而 $U_1,U_2,\cdots$由(8b)式中其他表达式给出,并取 $m=0$ 和 $n=4$。具体写出时

$$U_1=2\int_0^1\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}u\rho^2}R_4^0(\rho)J_0(v\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho.\tag{14}$$

将(10)式的 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}u\rho^2}$ 代入上式,即有

$$U_1 = 2e^{-\frac{1}{2}iu}\sqrt{\frac{2\pi}{u}}\sum_{s=0}^{\infty}(-i)^s(2s+1)J_{s+\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{4}u)\int_0^1 R_{2s}^0(\rho)R_4^0(\rho)J_0(v\rho)\rho\,d\rho. \tag{15}$$

为了计算右边的积分，如前所说，需将其中多项式之积 $R_{2s}^0(\rho)R_4^0(\rho)$更换成径向多项式的线性组合，而且组合中各项的上标 m 要等于积分中所乘贝塞尔函数的级次(本情况为 0)。利用 §9.2(8)

$$R_{2s}^0(\rho) = P_s(2\rho^2 - 1), \tag{16}$$

和关于勒让德多项式的一些著名关系式，不难求出上述线性组合。结果为

$$R_{2s}^0(\rho)R_4^0(\rho) = P_s(2\rho^2 - 1)P_2(2\rho^2 - 1). \tag{17}$$

现在 $P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)$，所以(17)式右方可写成

$$P_s(t)P_2(t) = \tfrac{3}{2}t^2P_s(t) - \tfrac{1}{2}P_s(t). \tag{18}$$

反复运用递推关系式[①]

$$tP_s(t) = \frac{1}{2s+1}[(s+1)P_{s+1}(t) + sP_{s-1}(t)], \tag{19}$$

从而得到

$$P_2(t)P_s(t) = a_sP_{s+2}(t) + b_sP_s(t) + c_sP_{s-2}(t), \tag{20}$$

式中

$$a_s = \frac{3}{2}\frac{(s+2)(s+1)}{(2s+3)(2s+1)}, \qquad b_s = \frac{(s+1)s}{(2s+3)(2s-1)}, \qquad c_s = \frac{3}{2}\frac{s(s-1)}{(2s+1)(2s-1)}. \tag{21}$$

因此(17)式变成

$$R_{2s}^0(\rho)R_4^0(\rho) = a_sR_{2s+4}^0(\rho) + b_sR_{2s}^0(\rho) + c_sR_{2s-4}^0(\rho). \tag{22}$$

将(22)式代入(15)式并应用(11)式，最后得到

$$U_1 = 2e^{-\frac{1}{2}iu}\sqrt{\frac{2\pi}{u}}\frac{1}{v}\sum_{s=0}^{\infty}(i)^s(2s+1)J_{s+\frac{1}{2}}(\tfrac{1}{4}u)[a_sJ_{2s+5}(v) + b_sJ_{2s+1}(v) + c_sJ_{2s-3}(v)]. \tag{23}$$

用类似方法[②] 可得到 $U_2, U_3, \cdots$的级数展开。采用这些展开式即可计算像区中一些点的强度 $I = |U|^2$ 并绘制出等强度线(isophote)。在垂直于主方向 $v = 0$ 的任何平面上，该等强度线当然都是圆。

图 9.3 给出初级球差 $\Phi = -0.48\lambda\rho^4$ 时子午面上的等强度线，而图 9.4 和图 9.5 中复制的照片展示出当存在稍大球差时各个不同接收面上像的外貌[③]。

① 见，例如，E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis* (Cambridge, Cambridge University Press, fourth edition, 1940), p. 308。

② 详见 F. Zernike and B. R. A. Nijboer, *La Théorie des Images Optiques* (Paris, Revue d'Optique, 1949), p. 227。

③ 当像差不是比波长小得多时，展开式(13)即不适宜计算强度。A. Maréchal 曾借助一机械积分器计算出初级球差为数个波长时一子午面上的等强度线，发表于 E. H. Linfoot, *Recent Advances in Optics* (Oxford, Claredon Press, 1955), pp. 60 – 61，并发表于 M. Françon 的 *Encyclopedia of Physics*, Vol, XXIV, (ed. S. Flügge, Berlin, Springer, 1956), pp. 321 – 322; J. Focke, *Optica Acta*, 3(1956), 110 则利用渐近近似处理计算了大球差等强度线。亦见 J. Picht, *Ann. d. Physik*, (4), 77(1925), 685。

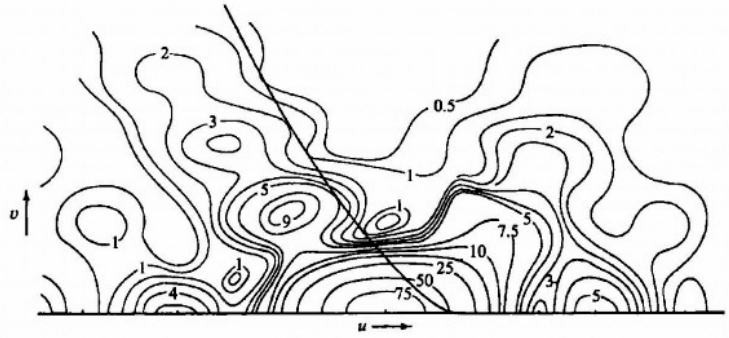


图 9.3 存在初级球差时某一子午面上的等强度线,球差 $\Phi = 0.48\lambda\rho^4$。粗线表示几何焦散线。强度的归一化是取无像差像中心为100。最佳接收面上的Strehl强度为0.95[引自F. Zernike and B. R. A. Nijboer, contribution to *La Théorie des Images Optiques* (Paris Revue d'Optique, 1949), p. 232]

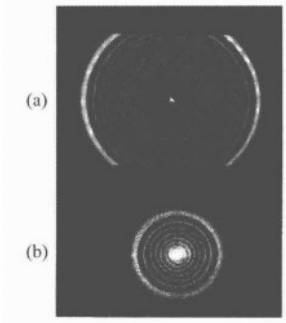


图 9.4 存在初级球差($\Phi = 16\lambda\rho^4$)时的衍射像:(a)边缘焦平面上;(b)几何光学最小模糊圆平面上[引自K. Nienhuis, Thesis (University of Groningen, 1948), p. 56]

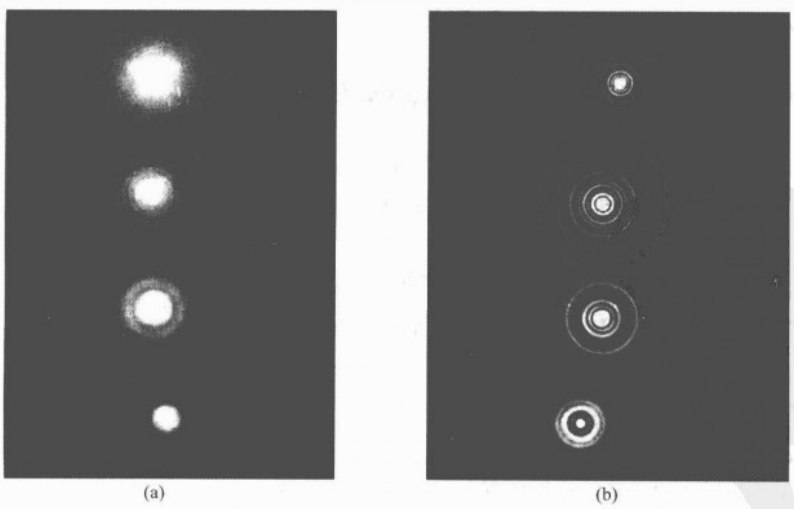


图 9.5 存在初级球差时(自上而下,$\Phi = 17.5\lambda\rho^4$, $8.4\lambda\rho^4$, $3.7\lambda\rho^4$ 和 $1.4\lambda\rho^4$)的衍射像:(a)高斯焦平面上;(b)几何光学最小模糊圆平面上[(b)的比例尺是(a)的三倍][引自K. Nienhuis, Thesis (University of Groningen, 1948), p. 56]

9.4.2　初级彗差

初级彗差的 $l=0, n=3, m=1$。按照表 9.3(见 441 页),这时衍射焦点位于平面 $z=0$ 上,并且由(8a)式可知该平面上的光扰动表达式为

$$U(0, v, \psi) = C[U_0(0, v, \psi) + (\mathrm{i}\alpha_{031})U_1(0, v, \psi) + (\mathrm{i}\alpha_{031})^2 U_2(0, v, \psi) + \cdots]. \tag{24}$$

$u=0$ 时,(8b)式中所定义的积分 U_0 代表无像差系统焦平面上的光扰动 $2J_1(v)/v$(即爱里图样),而积分 U_1 可直接利用(11)式立即算出,但计算 $U_2, U_3, \cdots$ 则仍须先将被积函数中圆多项式之积表成为该多项式的适当线性组合。具体来说,借助表 9.1(见 435 页)可以证明

$$(R_3^1)^2 = \tfrac{1}{4}R_0^0 + \tfrac{1}{20}R_2^0 + \tfrac{1}{4}R_4^0 + \tfrac{9}{20}R_6^0 = \tfrac{2}{5}R_2^2 + \tfrac{3}{5}R_6^2. \tag{25}$$

将这些关系代入(8b)式中的 U_2 表达式并应用(11)式,可立即算出其中各项积分,现将 U_0, U_1, U_2 各结果归总列出于下:

$$\left.\begin{aligned} U_0(0, v, \psi) &= \frac{2J_1(v)}{v}, \\ U_1(0, v, \psi) &= \mathrm{i}\cos\psi\,\frac{2J_4(v)}{v}, \\ U_2(0, v, \psi) &= \frac{1}{2v}\{\tfrac{1}{4}J_1(v) - \tfrac{1}{20}J_3(v) + \tfrac{1}{4}J_5(v) - \tfrac{9}{20}J_7(v) \\ &\quad - \cos 2\psi[\tfrac{2}{5}J_3(v) + \tfrac{3}{5}J_7(v)]\}. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

图 9.6 和图 9.7 给出不同大小的初级彗差的等强度线。图 9.6 的数据由级数展开算出,而图 9.7 的数据则由数值积分求得。图 9.8 给出几张照片,展示出受到初级彗差影响的衍射像。这些图片表明,当该像差为一个波长量级时,衍射像既不像爱里图样,也不像几何光学预期的图形。当像差增大时,栩栩如生的像很快变成几何光学所特定的形状,但被一系列暗带一一分割;可以证明这些暗带系起源于孔径直径两端衍射光线的干涉。

图 9.6 还说明 9.2 节中所建立的那一普遍结果,即当用圆多项式的某项来表示一种小量初级像差时,将使强度图样整体上产生移位,使其极大位于坐标原点即高斯焦点处。

9.4.3　初级像散

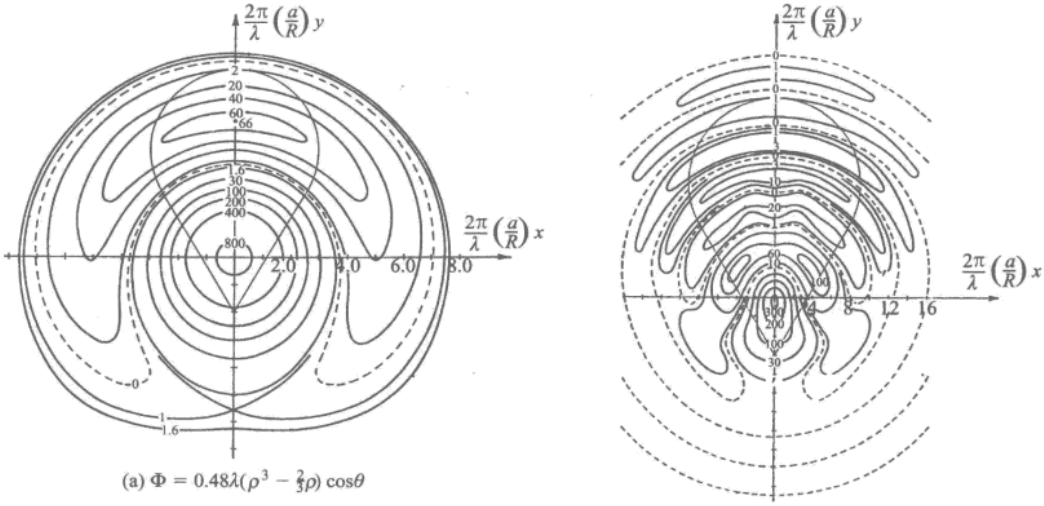
小量初级像散的影响可以用类似的方式加以研究。这时,$l=0, n=m=2$,并且如 9.3 节中所证,衍射焦点是两个焦线之间的中点。现在考虑中央平面上的光场分布,这里中央平面就是指通过该中点并垂直于主方向 z 的平面。当初级像散用适当的圆多项式[$A_{022}R_2^2(\rho)\cos 2\theta$]表示时,中央平面就是平面 $u=0$。

中央平面上的光扰动由下式给出[见(8)式]:

$$U(0, v, \psi) = C[U_0(0, v, \psi) + (\mathrm{i}\alpha_{022})U_1(0, v, \psi) + (\mathrm{i}\alpha_{022})^2 U_2(0, v, \psi) + \cdots], \tag{27}$$

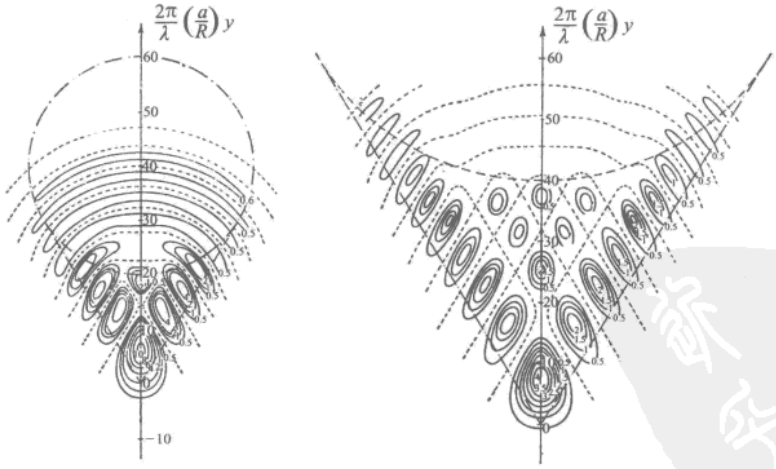
式中 $U_0(0, v, \psi)$同前代表爱里图样分布,而 $U_1(0, v, \psi)$可直接借助(11)式立即算出。为计算 U_2,可利用恒等式

$$\left.\begin{aligned}(R_2^2)^2 &= \tfrac{1}{3}R_0^0 + \tfrac{1}{2}R_2^0 + \tfrac{1}{6}R_4^0,\\ &= R_4^4,\end{aligned}\right\} \tag{28}$$



(a) $\Phi = 0.48\lambda(\rho^3 - \frac{2}{3}\rho)\cos\theta$　　(b) $\Phi = 1.4\lambda(\rho^3 - \frac{2}{3}\rho)\cos\theta$

图 9.6　存在初级彗差时 x-y 平面(即平面 $z=0$)上的等强度线。各虚线代表零强度线。几何模糊图形的边界在图中一并示出。无像差像的中心强度归一化到1000。Strehl强度:(a)0.879;(b)0.306[图(a)引自B.R.A.Nijboer, Thesis(University of Groningen, 1942), p.62;图(b)引自K.Nienhuis and B.R.A.Nijboer, *Physica*, **14**(1949), 599]



(a) $\Phi = 3.2\lambda\rho^3\cos\theta$　　(b) $\Phi = 6.4\lambda\rho^3\cos\theta$

图 9.7　存在初级彗差时 x-y 平面上的等强度线。无像差像的中心强度归一化到100[引自R.Kingslake, *Proc. Phys. Soc.*, **61**(1948), 147]

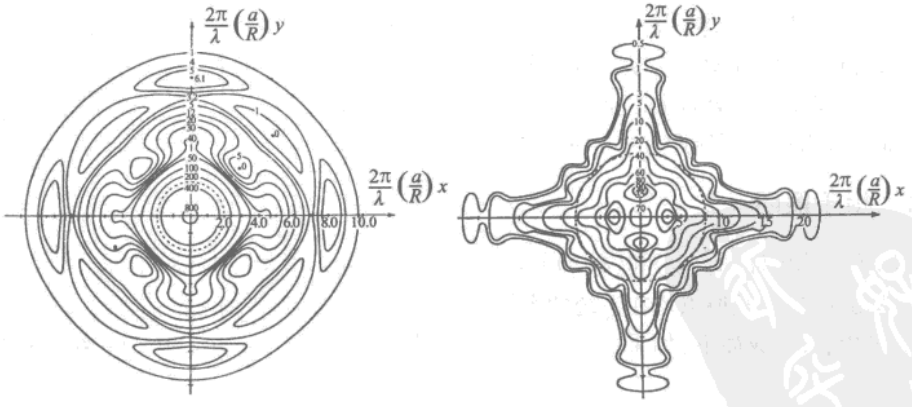


图 9.8　存在彗差(自左向右 $\Phi=0.3\lambda\rho^3\cos\theta,\lambda\rho^3\cos\theta,2.4\lambda\rho^3\cos\theta,5\lambda\rho^3\cos\theta,10\lambda\rho^3\cos\theta$)时高斯焦平面上的像[引自K. Nienhuis, Thesis(University of Groningen, 1948), p.40]

并如前继续运算下去,总起来得到

$$\left.\begin{aligned} U_0(0,v,\psi)&=\frac{2J_1(v)}{v},\\ U_1(0,v,\psi)&=-2\cos 2\psi\frac{2J_3(v)}{v},\\ U_2(0,v,\psi)&=\frac{1}{2v}\left[\tfrac{1}{3}J_1(v)-\tfrac{1}{2}J_3(v)+\tfrac{1}{6}J_5(v)+\cos 4\psi J_5(v)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

图 9.9 给出像散像的等强度线。图 9.9(a)的数据是从展开式(27)计算得到的,包括 α 四次幂以下(含四次幂)各项。像散像的照片在图 9.10 和图 9.11 中示出。可以看到,当仅存在小量像散时[见图 9.9(a)],中央平面上的等强度线在中心附近为圆,但在像的靠外部分则呈比较复杂的形状。当像散性增大时(见图 9.10),像的外貌呈靠垫状,并具有纵横交叉的干涉条纹。



(a) $\Phi=0.16\lambda\rho^2\cos2\theta$　　(b) $\Phi=0.64\lambda\rho^2\cos2\theta$

图 9.9　存在初级像散时中央平面上的等强度线。点线圆代表几何模糊图形的边界。无像差像的中心强度归一化到1000, Strehl强度:(a)0.84;(b)0.066
[图(a)引自B. R. A. Nijboer, Thesis(University of Groningen, 1942), p.55;
图(b)引自K. Nienhuis, Thesis(University of Groningen, 1948), p.13]



图 9.10 存在初级像散时(自左向右 $\Phi=1.4\rho^2\cos 2\theta, 2.7\lambda\rho^2\cos 2\theta, 3.5\lambda\rho^2\cos 2\theta, 6.5\lambda\rho^2\cos 2\theta$)中央平面上的像[引自 K. Nienhuis, Thesis (University of Groningen, 1948), p. 32]



图 9.11 存在初级像散 $\Phi=2.7\lambda\rho^2\cos 2\theta$ 时含某一焦线的平面上的像
[引自 K. Nienhuis, Thesis (University of Groningen, 1948), p. 32]

关于其余两种像差(场曲和畸变),前已说明它们并不影响三维像的结构,而仅仅改变衍射焦点的位置。因此,焦点区的等强度线图与无像差时像的这种线图(见图 8.41)完全一样,但相对高斯焦点有一位移,大小如 441 页表 9.3 所示。

9.5 广延物的成像

此前各节所探讨的都是关于点源的像。现在来讨论有关广延物的成像,并介绍几种以傅里叶变换术为基础的一般处理方法。这些方法的开发主要出自 Duffieux[①],部分工作与 Lansraux 合作完成,之后又由许多著者加以推广并应用于某些特别问题[②]。

下面分开考虑相干照明和不相干照明两种成像情况。

9.5.1 相干照明

设用笛卡儿坐标(x_1, y_1)和(ξ, η)分别代表高斯像平面上和出射光瞳平面上的点,二者所在坐标轴相互平行,其原点均在系统的光轴上。为便于分析,物平面上的点用尺度归一化坐标(x_0, y_0)来代表,构成如下:如果(X_0, Y_0)为一典型物点的笛卡儿坐标,M 为系统的横向放大率,则

① P. M. Duffieux, *L'Intégrale de Fourier et ses Applications à l'Optique* (Chez l'Auteur, Rennes, Société Anonyme des Imprimeries Oberthur, 1946),英译本 P.-M. Duffieux, *The Fourier Transform and its Applications to Optics* (New York, Wiley, 2nd ed., 1983); P. M. Duffieux and G. Lansraux, *Rev. d'Optique*, **24** (1945), 65, 151, 215。

② 见,例如,A. Blanc-Lapierre, *Ann. de l'Inst. Henri Poincaré*, **13** (1953), 245; H. H. Hopkins, *Proc. Roy. Soc.*, A, **217** (1953), 408; *ibid.*, A, **231** (1955), 91; *Proc. Phys. Soc.*, B, **69** (1956), 562; K. Miyamoto, *Progress in Optics*, Vol. I, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1961), p. 41。

$$x_0 = MX_0, \qquad y_0 = MY_0, \tag{1}$$

因此一个物点及其高斯像点这时具有相同的坐标值①。

系统的成像特性可借助一传输函数 $K(x_0, y_0; x_1, y_1)$来表征，其定义是物平面上(x_0, y_0)点处单位面积单位振幅和零位相的扰动在高斯像平面上(x_1, y_1)点处产生的复振幅。传输函数当然还与光的波长有关，但是由于我们只讨论单色光情况，因而无需考虑该一依赖关系。

设 $U_0(x_0, y_0)$代表物平面上的复扰动。(x_0, y_0)点处面元对像平面上(x_1, y_1)点处扰动所做的贡献 $\mathrm{d}U_1(x_1, y_1) = U_0(x_0, y_0) \times K(x_0, y_0; x_1, y_1)\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0$。因此$(x_1, y_1)$处的总扰动为

$$U_1(x_1, y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0, y_0)K(x_0, y_0; x_1, y_1)\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0. \tag{2}$$

此积分只是在形式上遍及无穷域，因为在 x_0-y_0 平面上没有光送达系统像空间的区域 U_0K 为零。

在我们探讨点源的时候，我们是用光瞳平面上的复扰动来确定系统的成像特性，而表征该一扰动的量是像差函数和振幅分布因子，后者在中等孔径的系统中可假设为常量。这时，不难求得用这两个量表示的传输函数表达式。为此，现在先考虑(2)式在光源缩小成一点源，位于 $x_0 = x_0'$，$y_0 = y_0'$，并具有单位强度和零位相时的极限形式。这时，可取

$$U_0(x_0, y_0) = \delta(x_0 - x_0')\delta(y_0 - y_0'), \tag{3}$$

式中 δ 是狄拉克 δ 函数(见附录 D)。于是(2)式给出

$$U_1(x_1, y_1) = K(x_0', y_0'; x_1, y_1), \tag{4}$$

即传输函数 K 代表点源(3)在像平面上产生的扰动分布，现以高斯像点$(x_1' = x_0', y_1' = y_0')$为中心作高斯参考球。设 R 为该参考球的半径，并设

$$H(x_0', y_0'; \xi, \eta) = \frac{\mathrm{i}}{\lambda}G(x_0', y_0'; \xi, \eta)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR}}{R} \tag{5}$$

是点源(3)在该球上某代表点(ξ, η)处产生的扰动。除附加因子 $\pi/2$ 外，这时 G 的位相就是该系统的像差函数 Φ，而 G 的幅值则度量着成像波的振幅不均匀性。(5)式右边引进因子 i/λ 是为了简化后面的公式。现在根据惠更斯-菲涅耳原理，像平面上的扰动和高斯参考球上的扰动二者间的关系由下列公式表出(衍射角假设很小)：

$$U_1(x_1, y_1) = -\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\iint H(x_0', y_0'; \xi, \eta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ks}}{s}\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta, \tag{6}$$

式中 s 是参考球上(ξ, η)点到高斯像平面上(x_1, y_1)点的距离，而积分范围是参考球上大致盖住出射光瞳孔径的那部分地区。此外，按照 §8.8(2)和 §8.8(7)，取其中 $x = x_1 - x_0'$，$y = y_1 - y_0'$，$z = 0$ 并以 R 代替 f，则有

$$s \approx R - \frac{(x_1 - x_0')\xi + (y_1 - y_0')\eta}{R}. \tag{7}$$

从公式(4)～(7)可以得到$(x_0', y_0'$上的一撇至此可予取消)

---

① (x_0, y_0)和(x_1, y_1)可以看成是 5.2 节的赛德尔变量，并选取任意常数 $l_1 = C = 1$。

$$K(x_0, y_0; x_1, y_1)=\frac{1}{(\lambda R)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G(x_0, y_0; \xi, \eta)e^{-\frac{2\pi i}{\lambda R}[(x_1-x_0)\xi+(y_1-y_0)\eta]}d\xi\, d\eta, \tag{8}$$

式中当(ξ, η)点位于孔径外时要取 G 为零。(8)式就是所求的关系式,它表达了系统的传输函数 K 同**"光瞳函数"** G 之间的关系。

因为 K 可以看成是一个点源的像场扰动分布,所以当看作为像点(x_1, y_1)的函数时,它在高斯像点$(x_1 = x_0, y_1 = y_0)$处或其附近有一个颇锐的极大,并随离开该点的距离而迅速下降,虽然下降通常并不是单调的。在一个经精心校正的系统中,K 仅在爱里图样第一暗环量级的尺度范围内才显著不为零。当看作为物点(x_0, y_0)的函数时,传输函数 K 在物点变动于物面各处时则相应变化缓慢。更准确地说,整个物-像工作场可划分成许多小区——称为 A 区,各大于系统所能分辨的最小细节尺度,并具有一种特性,K 在其中每个A 区作为良好近似只是从高斯像点引出的位移矢量的函数,而与该高斯像点本身的位置无关。例如,在一个精心校正的系统中,$K(x_0, y_0; x_1, y_1)$代表(除一常数因子外)以物点(x_0, y_0)的高斯像点为中心的爱里图样。在这种情下可以将 K 写成

$$K(x_0, y_0; x_1, y_1)=K_A(x_1-x_0, y_1-y_0). \tag{9}$$

具有这种性质的区域 A 称为系统的**等晕区**(isoplanatic region)。我们将仅限于讨论都很小的一些物,小到可全容纳于这样的一个等晕区内①。在此情况下,方程(2)和方程(8)可改写为

$$U_1(x_1, y_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}U_0(x_0, y_0)K(x_1-x_0, y_1-y_0)dx_0\, dy_0, \tag{2a}$$

和

$$K(x_1-x_0, y_1-y_0)=\frac{1}{(\lambda R)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\xi, \eta)e^{-\frac{2\pi i}{\lambda R}[(x_1-x_0)\xi+(y_1-y_0)\eta]}d\xi\, d\eta, \tag{8a}$$

可以注意,现在光瞳函数 G 与物点无关。

下一步将 U_0, U_1 和 K 表成为傅里叶积分:

$$U_0(x_0, y_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{U}_0(f, g)e^{-2\pi i[fx_0+gy_0]}df\, dg, \tag{10a}$$

$$U_1(x_1, y_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{U}_1(f, g)e^{-2\pi i[fx_1+gy_1]}df\, dg, \tag{10b}$$

$$K(x, y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{K}(f, g)e^{-2\pi i[fx+gy]}df\, dg. \tag{10c}$$

于是,由傅里叶反演公式

$$\mathcal{U}_0(f, g)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}U_0(x_0, y_0)e^{2\pi i[fx_0+gy_0]}dx_0\, dy_0, \tag{11a}$$

$$\mathcal{U}_1(f, g)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}U_1(x_1, y_1)e^{2\pi i[fx_1+gy_1]}dx_1\, dy_1, \tag{11b}$$

① 关于(9)式成立的条件,详尽的讨论见论文 P. Dumontet, *Optica Acta*, **2**(1955), 53。

$$\mathcal{K}(f,\ g)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,\ y)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}[fx+gy]}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{11c}$$

按照(2a)式，U_1 是 U_0 和 K 二者的卷积(convolution)[亦称合积(resultant)或褶积(Faltung)]；因而经傅里叶反演后可由卷积定理[①] 得到下列简单关系：

$$\mathcal{U}_1(f,\ g)=\mathcal{U}_0(f,\ g)\mathcal{K}(f,\ g). \tag{12}$$

这一方程意味着，如果将物平面和像平面上的扰动分布看成是所有可能"空间频率"f，g 的空间谐波分量的叠加，则像的各个分量仅与物的相应分量有关，且像、物分量之比为$\mathcal{K}$，因此，从物过渡到像，作用等同于一个**线性空间滤波器**。此外，将(10c)和(8a)两式进行比较，可知

$$\mathcal{K}\left(\frac{\xi}{\lambda R},\frac{\eta}{\lambda R}\right)=G(\xi,\ \eta), \tag{13}$$

所以相干照明情况的**频率响应函数**(亦称**传输因子**)$\mathcal{K}(f,g)$**等于出射光瞳函数** $G(\xi,\eta)$**在高斯参考球上**

$$\xi=\lambda Rf,\qquad \eta=\lambda Rg \tag{14}$$

点处的值。

因为 G 值在 ξ，η 平面上孔径边界外各点为零，所以频率高于某值时所属的谱幅，系统将不予通过。如果孔径为圆形，且半径为 a，则显然

$$f^2+g^2>\left(\frac{a}{\lambda R}\right)^2 \tag{15}$$

的各对频率不能通过。现举一例以说明此一结果。考虑一个一维物，其性质在 x 方向上无改变。设 Δy_0 是频率 g 所对应的周期，则由(15)式可知，该系统仅允许频谱成分中周期

$$\Delta y_0=\frac{1}{g}>\frac{\lambda}{\sin\theta_1}, \tag{16}$$

的有关信息通过，式中 $\sin\theta_1\approx a/R_1$ 是像方的半角孔径，假设其值很小。现在 $y_0=MY_0$，其中 M 是线性放大率，而且如果假设系统满足正弦条件，则(见 4.5.1 节) $n_0\sin\theta_0/n_1\sin\theta_1=M$，(16)式遂可写成

$$\Delta Y_0>\frac{\lambda_0}{n_0\sin\theta_0}, \tag{17}$$

式中 $\lambda_0=n_1\lambda_1$ 是真空波长，$n_0\sin\theta_0$ 是系统的数值孔径。因此，如果物平面上从这边到那边扰动随位移的变化是正弦型的，则只有其周期大于(17)式右边所给的值时才能在像平面上观察到它的有关信息。

9.5.2　不相干照明

现在考虑不相干照明情况，即来自物平面不同面元的光是不相干的，例如物为一普通原光源时。采用同前的坐标轴，设 $I_0(x_0,y_0)$是物平面上某一样点处的强度。从物点(x_0,y_0)周围面元 $\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0$ 到达像平面上点(x_1,y_1)的光的强度是 $\mathrm{d}I_1(x_1,y_1)=I_0(x_0,y_0)|K(x_0,y_0;x_1,y_1)|^2\mathrm{d}x_0\,dy_0$，

① 见 I. N. Sneddon, *Fourier Transforms* (New York, McGraw-Hill, 1951), p. 23。

其中 K 仍是系统的传输函数。因为假设物场是不相干的,从物平面上不同面元来的强度可直接相加,所以(x_1, y_1)点处的总强度

$$I_1(x_1, y_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} I_0(x_0, y_0)|K(x_0, y_0; x_1, y_1)|^2\,\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0. \tag{18}$$

如果我们仍然只限于讨论都足够小的物,则(18)式可改写成[①]

$$I_1(x_1, y_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} I_0(x_0, y_0)|K(x_1-x_0, y_1-y_0)|^2\,\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0. \tag{19}$$

方程(19)表明,在不相干照明成像情况下,像中的强度分布是物中强度分布和传输函数模平方的卷积。将这几个函数各表成(10)式这种形式的傅里叶积分,并以$\mathcal{I}_0(f, g)$,$\mathcal{I}_1(f, g)$和$\mathcal{L}(f, g)$表示其空间谱。这时,借助傅里叶反演定理,可取代(11)式而获得

$$\mathcal{I}_0(f, g)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} I_0(x_0, y_0)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}[fx_0+gy_0]}\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0, \tag{20a}$$

$$\mathcal{I}_1(f, g)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} I_1(x_1, y_1)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}[fx_1+gy_1]}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_1, \tag{20b}$$

$$\mathcal{L}(f, g)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |K(x, y)|^2\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}[fx+gy]}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{20c}$$

从(19)式通过卷积定理可得到

$$\mathcal{I}_1(f, g)=\mathcal{I}_0(f, g)\mathcal{L}(f, g). \tag{21}$$

由此可见,在不相干照明情况下,从物到像的变换仍然是一个**线性滤波过程**,但这时需用强度的空间谱而不是用复振幅的空间谱进行这种变换。频率响应函数这时是函数$\mathcal{L}(f, g)$,并且通过(20c)式、(10c)式和卷积定理,可将$\mathcal{L}(f, g)$表成如下形式:

$$\mathcal{L}(f, g)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}(f'+f, g'+g)\mathcal{K}^{\star}(f'+g')\mathrm{d}f'\,\mathrm{d}g'. \tag{22}$$

(22)式右边的积分称为(函数$\mathcal{K}$的)**自相关函数**,该积分出现在许多统计性物理问题的分析中。后面讨论关于部分相干理论时还将遇到它。

前已证明,$\mathcal{K}(f, g)$是光瞳函数 $G(\xi, \eta)$在高斯参考球上某对应点$(\xi=\lambda Rf, \eta=\lambda Rg)$处的值。如果将(13)式代入(22)式,则有

$$\mathcal{L}\left(\frac{\xi}{\lambda R}, \frac{\eta}{\lambda R}\right)=\frac{1}{(\lambda R)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi'+\xi, \eta'+\eta)G^{\star}(\xi', \eta')\mathrm{d}\xi'\,\mathrm{d}\eta', \tag{23}$$

这样我们就建立了下列重要结果:**除一常数因子外,不相干照明情况的频率响应函数$\mathcal{L}(f, g)$是系统的光瞳函数的自相关函数。**

---

① 请注意,将(18)式改写成(19)式,并无需 K 应完全满足等晕条件(9);而只要 K 的模$|K|$单独满足即可,这就是说,在物所处的整个 A 区内,在良好近似上,有

$$|K(x_0, y_0; x_1, y_1)|=|K_A(x_1-x_0, y_1-y_0)|.$$

Dumontet(见前引文)的分析表明,作为良好近似,该条件在物平面上适用的区域通常比关系式(9)大得相当多。因此将光学成像描绘成线性滤波器时,不相干照明情况比相干照明具有更宽的有效范围。然而,为了能够用一个较为简单的公式[见下文(22)式]以系统的光瞳函数表示出频率响应函数,我们还是仅限于讨论都很小的物,小到使完全的等晕条件(9)成立。

设$\mathcal{A}$是出射光瞳的面区。因为光瞳函数 $G(\xi',\eta')$在孔径(由上下文可知,此实指出射光瞳——译者注)边界外各点皆为零,而且(23)式被积函数中 $G(\xi'+\xi,\eta'+\eta)$和 $G^{\star}(\xi',\eta')$沿负 ξ'和η'方向分别相对平移ξ 和η,所以在 ξ'-η'平面上 $GG^{\star}$不为零的区域只是相应两个等同孔径$\mathcal{A}$在位置错开后的交叠地区,如图 9.12 中阴影区所示。如果位移 ξ 和η 很大,使得该二面区不再交叠,则响应函数的值将显然为零。因此,与相干情况一样,空间频率如高过某极大值,系统即不予传输。具体来说,对于一个半径为 a 的圆孔(径),当 $\xi^2+\eta^2\geqslant(2a)^2$ 时,即

$$f^2+g^2>\left(\frac{2a}{\lambda R}\right)^2 \tag{24}$$

时,两个面区将没有交叠区。用(15)式导致(17)式的相同论证,可由(24)式得知,对于不相干照明,一个等晕系统所可传输的空间频谱信息,其周期 ΔY_0 应满足

$$\Delta Y_0>\frac{0.5\lambda_0}{n_0\sin\theta_0}. \tag{25}$$

由此可见,(25)式的极限值正好是相干光成像情况极限值之半。

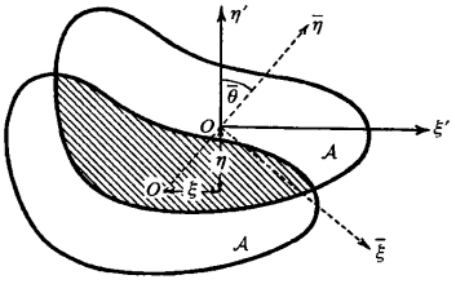


图 9.12　关于不相干照明情况响应函数$\mathcal{L}(f,g)$计算中,频率 $f=\xi/\lambda R$ 和$g=\eta/\lambda R$ 的积分区(阴影部所示)

虽然一个给定系统的响应函数$\mathcal{L}$依赖于 f 和 g 两个变量,但在原理上,从一维测试物有关实验能够推知关于$\mathcal{L}$的全部信息。为了说明这一点,现考虑一对频率(f,g),并引进极坐标(h,θ)使 $f=h\sin\theta$,$g=h\cos\theta$。现在假定坐标轴在其自身平面内顺正 θ 方向转$\bar{\theta}$ 角。这时 f 和g 变换成$\bar{f}=h\sin(\theta-\bar{\theta})$和 $\bar{g}=h\cos(\theta-\bar{\theta})$,但$\mathcal{L}$的值显然保持不变。现在可以选取转角 $\bar{\theta}$ 等于 $\arctan f/g$。这时 $\bar{f}=0$,而 $\bar{g}=\sqrt{f^2+g^2}$,由此可知:**一个光学系统的响应函数$\mathcal{L}$在频率对(f,g)时的值,等于频率为$\sqrt{f^2+g^2}$的一维结构在其周期方向对子午面 $\theta=0$ 成 $\arctan f/g$ 角时的值**。这一结果使得任何情况下响应函数的解析计算大为简化。显然,关于相干物的响应函数$\mathcal{K}(f,g)$,亦存在类似关系,但它较少直接实用意义。

现在考虑一个没有像差,但存在离焦缺陷的共轴系统的频率响应函数。从 9.1.2 节的讨论可知,接收面沿正 z 方向位移一小量 z 时,在形式上等同于引进一波像差 Φ,其大小为

$$\Phi(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^2 z\rho^2 \qquad \left(\rho^2=\frac{\xi^2+\eta^2}{a^2}\leqslant 1\right), \tag{26}$$

所以,如果波的振幅在整个高斯参考球上为常数,则光瞳函数除常数因子外为

$$G(\xi,\eta)=e^{ik\Phi(\xi,\eta)}=e^{i\frac{1}{2}k\left(\frac{a}{R}\right)^2 z\rho^2}. \tag{27}$$

响应函数可从(23)和(27)两式求出,结果如图 9.13 和图 9.14 所示。可以看到,对较高频率来

说,即使所引入的离焦量很小,只超过 $z=(2\lambda/\pi)(R/a)^2$,相当于波像差只超过 $\Phi=(\lambda/\pi)\rho^2$,系统的响应即急剧恶化①。

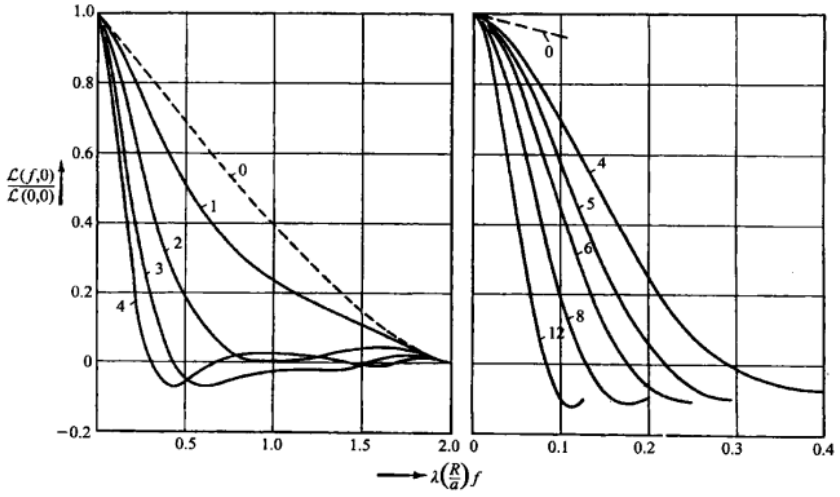


图 9.13 不相干照明情况下,一个没有几何像差但存在离焦缺陷的光学系统的归一化频率响应曲线。$\Phi=(m\lambda/\pi)\rho^2$,$|G|=1$。各曲线上的数字是参量 $m=(\pi/2\lambda)(a/R)^2z$ 之值,z 是观察面和高斯焦平面之间的距离[引自H. H. Hopkins, *Proc*, *Roy*, *Soc*., A, **231**(1955), 98]

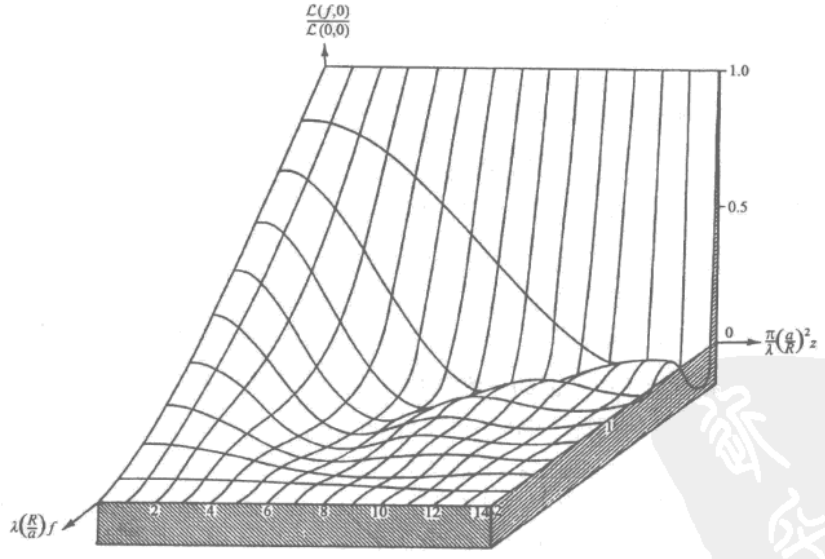


图 9.14 不相干照明情况下,一个没有几何像差但存在离焦缺陷的系统的归一化频率响应曲线,作为空间频率 f 和离焦量 z 二变数的函数,$|G|=1$。图9.13所示曲线是本图曲面与垂直于 z 轴各平面的交线[引自W. H. Steel, *Optica Acta*, **3**(1956), 67]

① 为获得一数量概念,现举一些数字:设 $R/a\approx10$(R 为出射光瞳平面与高斯像平面的距离,a 为出射光瞳半径),则所列 $z\approx60\lambda\approx30\ \mu m$(取波长 $\lambda\approx0.5\ \mu m$),$\Phi\approx\lambda/3$,相当于图 9.14 中坐标 $\frac{\pi}{\lambda}(\frac{a}{R})^2z$ 值 ≈2——译者注。

图 9.15 和图 9.16 示出系统存在初级球差和初级像散时的响应曲线。关于频率响应函数测量仪器，K. Murata 曾做过一篇综述[①]。

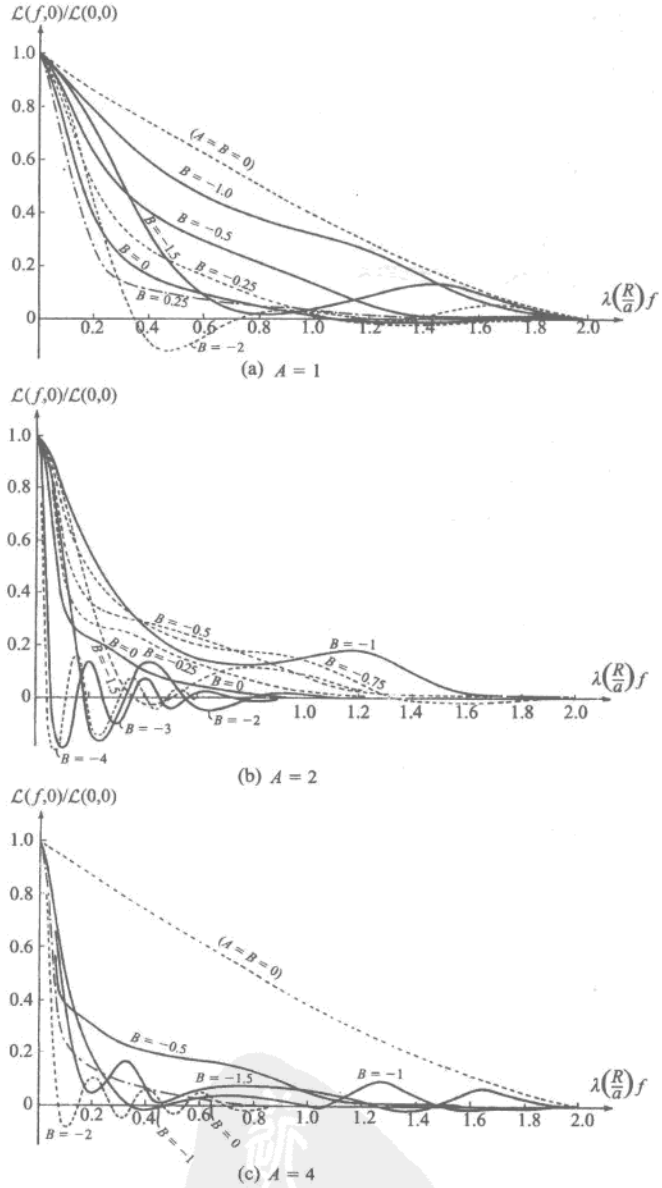


图 9.15　不相干照明情况下，一个罹有小量初级球差的系统的归一化频率响应曲线，球差 $\Phi = A(\rho^4 + B\rho^2)\lambda$，$|G| = 1$。各曲线分别对应不同的焦面位置。数值 $B = 0$ 对应傍轴焦面，$B = -2$ 对应过边缘焦点的接收面[引自 G. Black and E. H. Linfoot, *Proc. Roy. Soc.*, A, **239**(1957), 522]

① K. Murata, *Progress in Optics*, Vol. 5, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1965), p. 199。

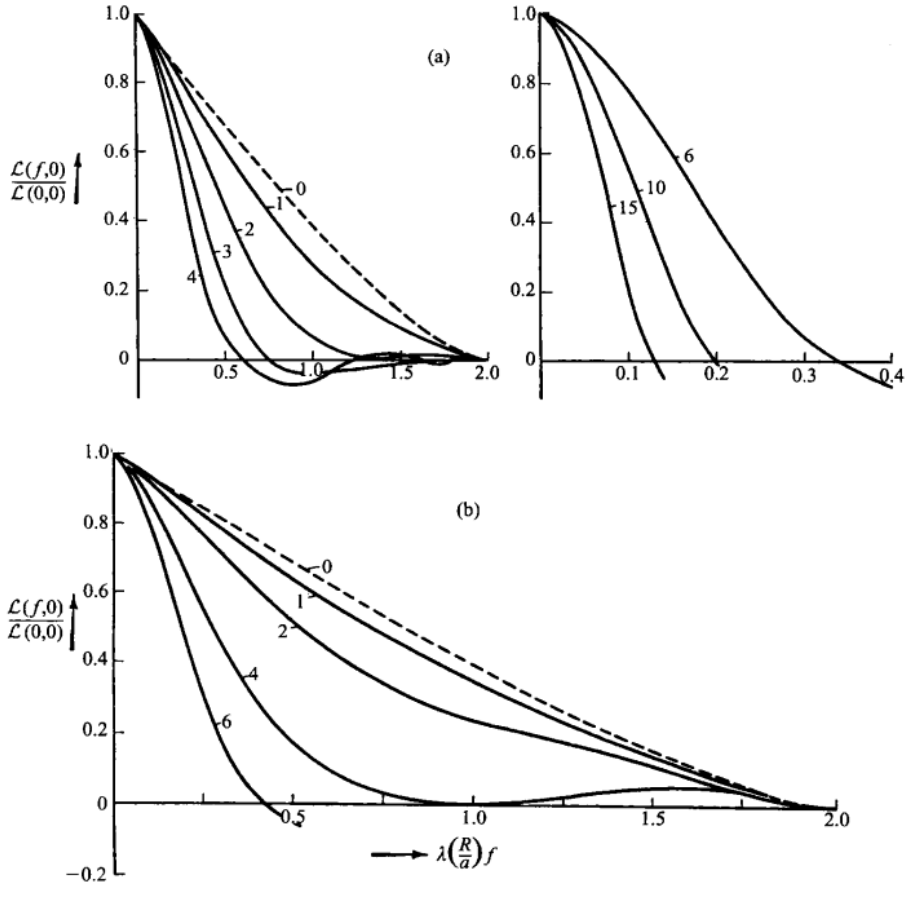


图 9.16 不相干照明情况下,存在初级像散 $\Phi=(m\lambda/\pi)\rho^2\cos^2\theta$, $|G|=1$,并且接收面位于切向焦线和弧矢焦线之间中点时系统的归一化频率响应曲线:(a)栅线[①] 周期方向沿子午面 $\theta=\pi/4$;(b)栅线周期方向沿子午面 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi/2$。各曲线上所标数字是 m 值[引自M. De, *Proc. Roy. Soc.*, A, **233**(1955), 96]

① 这里栅线指物平面上空间频率为 f 的一维周期结构[参见(16)式有关说明]——译者注。

第 10 章　部分相干光的干涉和衍射

10.1　引言

此前各章讨论所谈到的光主要是点源产生的单色光。但实际物理光源发的光绝不会是严格单色的，因为即使最锐的光谱线也具有一定的宽度。再者，一个物理光源也不是一个点源，而是具有一定的空间尺度，并包含极其众多的元辐射子(原子)。根据傅里叶定理，这种光源所产生的扰动可以表示成严格单色因而是无限长的波列之和。初等单色理论所谈的光，实质上就是该傅里叶表示的一个单一分量。

在一个单色波场中，在任何一点 P，扰动的振幅都是常量，而位相随时间的改变是线性的。在实际光源产生的波场中，情况不再如此，而是振幅和位相都经受着不规则涨落，其快度本质上取决于光谱的有效宽度 $\Delta\nu$。只是在时间间隔 Δt 很短，远小于有效光谱宽度 $\Delta\nu$ 倒数时，复振幅才大体保持不变；在这样短的时间间隔内，任何两个傅里叶分量相对位相的改变都比 2π 小得多，而这种分量相加所形成的扰动，其行为在该时间间隔内就如同一个取其平均频率的单色波。然而，对于再长的时间间隔，其说即属不确。特征时间 $\Delta t = 1/\Delta\nu$ 与 7.5.8 节中所引进的**相干时间**量级相同。

其次，考虑这种实际波场中 P_1 和 P_2 两点处光扰动的关系，设该波场产生于一个准单色的扩展光源。为简单计，假定波场是在真空中，并且 P_1 和 P_2 与波源相距有很多个波长。可以预期，当 P_1 和 P_2 彼此靠得足够近时，这两个点处的振幅涨落以及二者的位相涨落将都不是独立无关的。从逻辑上讲可以假定，如果 P_1 和 P_2 彼此如此靠近，使得各源点 S 到这两点的路程之差 $\Delta\mathcal{S} = SP_1 - SP_2$ 小于平均波长 $\overline{\lambda}$，则 P_1 和 P_2 两处的涨落将实际相同，而且即使 P_1 和 P_2 的间距再大一些，两处的涨落也将存在某种关联，只要对所有源点来说，程差 $\Delta\mathcal{S}$ 都不超过相干长度 $c\Delta t \approx c/\Delta\nu = \overline{\lambda}^2/\Delta\lambda$。这样就引导出在波场中围绕每一点 P 存在一**相干区域**的概念。

为了对一个有限大小的多色光源所产生的波场给以恰当的描述，显然，可取的做法是对该波场中不同两点 P_1 和 P_2 处振动之间存在的关联(correlation)[①] 引进某种量度，并要求这种量度应同引自该两点的振动在会合时所将产生的干涉条纹锐度(sharpness)具有密切关系。当关联很高时(例如 P_1 和 P_2 处的光来自一小光谱范围的极小光源时)，条纹须很锐，而不存在关联时(例如当 P_1 和 P_2 所接收的光各来自不同的物理光源)，则条纹全无。这两种情形我们分别用“相干的”和“不相干的”两个词来描写。但是一般而言，实际情况既非“相干”亦非“不相干”，这时的振动我们可以说是**部分相干**的。

同部分相干性课题有密切关系的最早研究似应归诸 Verdet[②]，他探讨了一个扩展原源的光

---

① “correlation”，前面均译为“相关”(旧名)，现按公布的《物理学名词》(1996)译为“关联”——译者注。

② E. Verdet, *Ann Scientif. l' École Normale Supérieure*, **2**(1865), 291; *Leçons d' Optique Physique* Vol. 1 (Paris, L' Imprimerie Impériale, 1869), p. 106。

场相干区域尺度。后来,迈克耳孙的研究确定了干涉条纹可见度与扩展原源表面强度分布之间[①](见 7.3.6 节)以及可见度与谱线能量分布之间[②](见 7.5.8 节)的关系。的确,迈克耳孙的结果一直到很晚都未以关联观点给予说明,但他的研究对现代部分相干性理论表述之形成做出了贡献[③]。第一个定量测量光振动关联的是劳厄[④],且测量结果被应用于其关于光束热力学的研究。此后进一步的贡献出自 Berek[⑤],他将关联的概念用于有关显微镜成像过程的研究。

本项课题的发展随着范西特一篇论文[⑥] 的发表而开始进入一个新阶段。范西特在该篇论文中计算了扩展原源照明屏上任何两点光扰动的联合概率分布。在稍后一篇论文中[⑦],它还计算了在任何一点,但在两个不同时刻光扰动的概率分布。在其计算的准确度范围,他得到这些分布均为高斯分布,此外他还计算了几个相属的关联系数。

1938 年,泽尼克发表了一篇关于部分相干性问题的重要论文[⑧],文中引进一种不同的且较为简单的处理方法。泽尼克用直接同实验联系的方式来定义光振动的"相干度",而且建立了几个有关该量的有价值结果(指后面 10.4.2 节范西特-泽尼克定理等——译者注)。虽然对大多数实际用途来说,泽尼克的相干度等同于范西特的关联因子,并与劳厄的关联量也存在密切关系,但他的方法似乎格外适合处理仪器光学的实际问题。泽尼克的方法后来由霍普金斯[⑨]再进一步予以简化,并应用于成像过程和分辨本领的研究。

以上谈到的这些研究填补了两个极端情况,即完全相干和完全不相干之间的空白地带,但成果仍颇为局限,其应用主要限于准单色光和干涉光束之间程差足够小的情形。为了处理更为复杂的情况,并使理论具有严实基础,进一步推而广之势在必行。这一使命已分别由沃耳夫[⑩] 和由 Blanc-Lapierre 和 Dumontet[⑪] 独立完成,包括引进更为普遍的关联函数。之后发现,这些关联函数服从两个波动方程;这一结果意味着,不仅光扰动自身而且扰动之间的关联亦以波动的形式传播。从这个结果来看,以前所建立的许多定理均可获得比较简单的说明。

以上所提到的关联函数,都是表征**两个**空-时点处光振动之间的关联。另一种关联函数,表示两点处任一特定频率分量的关联,在很晚以后才被引进[⑫]。这些"二级"关联函数完全适

---

① A. A. Michelson, *Phil. Mag.* (5), **30**(1890), 1; **31**(1891), 256; *Astrophys. J.*, **51**(1920), 257。

② A. A. Michelson, *Phil. Mag.* (5), **31**(1891), 338; **34**(1892), 280。

③ 见 F. Zernike, *Proc. Phys. Soc.*, **61**(1948), 158。

④ M. von Laue, *Ann. d. Physik*(4), **23**(1907), 1, 795。

⑤ M. Berek, *Z. Phys.*, **36**(1926), 675, 824; **37**(1926), 387; **40**(1926), 420。有关 Bered 研究的一些实验,可见报道C. Lakeman and J. Th. Groosmuller, *Physica*('s Gravenhage), **8**(1928), 193, 199, 305。

⑥ P. H. van Cittert, *Physica*, **1**(1934), 201。

⑦ P. H. van Cittert, *Physica*, **6**(1939), 1129;亦见 L. Jánossy, *Nuovo Cimento*, **6**(1957), 111; *ibid.*, **12**(1959), 369。

⑧ F. Zernike, *Physica*, **5**(1938), 785。

⑨ H. H. Hopkins, *Proc. Roy. Soc.*, A, **208**(1951), 263; *ibid*, A, **217**(1953), 408。
D. Gabor 和 H. Gamo 从信息论观点探讨光学传输问题时,其中与本课题相关的研究采用了部分相干性概念。D. Gabor, *Proc. Symp. Astr. Optics*, ed. Z. Kopal (Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1956), p. 17; *Proc. Third Symposium on Information Theory*. ed. C. Cherry (London, Butterworths Scientific Publications, 1956), p. 26; H. Gamo, *J. Appl. Phys. Japan*, **25**(1956), 431; *Progress in Optics*, Vol. 3, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1964), p. 187)。

⑩ E. Wolf, *Proc. Roy. Soc.*, A, **230**(1955), 246. 亦见 *ibid.*, A, **225**(1954), 96; *Nuovo Cimento*, **12**(1954), 884。

⑪ A. Blanc-Lapierre and P. Dumontet, *Rev. d' Optique*, **34**(1955), 1。

⑫ E. Wolf, *Opt. Commun.* **38**(1981), 3; *J. Opt. Soc. Amer.*, **72**(1982), 343; *ibid A* **3**(1986), 76; G. S. Agarwal and E. Wolf, *J. Mod. Opt.*, **40**(1993), 1489。

合分析通常的干涉和衍射光学实验，其中光系来自恒稳光源[①]（steady source）。对于分析更为复杂的实验，可能需用更高级的关联函数，即所含场变量幂级总数高于 2 的相关函数[②]。

部分相干性理论引人注目的一大特色在于它以可测之量——关联函数和时间平均强度为处理对象，这些量原则上可由实验测定。此点同初等光波理论形成鲜明对比，后者的基本量是不可测量的，因为光的振动极其之快。本章将探讨部分相干场的特性，并以一些具有实际意趣的例子来说明所得到的结果。我们只考虑光的情况，但所做的分析与其他领域存在密切的关系；特别是同样的考虑可应用于射电星体测量[③] 和射电波电离层探测[④] 的关联技术。

部分相干性理论的数学技巧也非常适用于分析部分偏振。后者所涉及的现象可用电磁场矢量正交分量间的关联予以说明。这方面的早期研究归于斯托克斯[⑤]。现代的处理采用关联函数和关联矩阵，工作主要出自维纳[⑥]，佩林[⑦]，沃耳夫[⑧] 和 Pancharatnam[⑨]。该课题将在本章 10.9 节讨论。

10.2　实多色场的复数表示

在讨论单色波场时我们曾经看到，将每个实波函数看成是一个连带复波函数的实部非常有用。本章内容将涉及多色（即非单色）场。采用复数表示仍将大有好处，这可看成是单色场情况的自然推广。

---

① 更确切地说，系来自产生定态场的光源。所谓定态场（stationary field），其定义见下文 561 页。对于非定态场的分析，可应用同种关联函数，但其定义中所采用的平均须是系综平均而非时间平均。对于定态场，这两种平均方法通常将给出相同的结果。

② 当光发自热光源（例如白炽物或气体放电）时，则可假设场在 n 个空-时点的联合概率分布在良好近似上是高斯型的。众所周知[见，例如 J. J. Freeman, *Principles of Noise* (New York, J. Wiley & Sons, Inc., 1958), pp. 245 – 247]，这种分布完全由二级关联函数来确定，这也就意味着所有与热光有关的高级关联函数均可用二级关联函数来表示。然而，对于非热光源（例如激光器）发的光，则不如是。

关于某些高级相干性效应和所适用的关联函数，可见 L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge, Cambridge University Press, 1995) 书中的讨论。

相类似的量子力学关联函数业已由 R. J. Glauber 引进，见 *Quantum Electronics*, 3*rd Congress*, Vol. 1, eds. N. Blombergen and P. Grivet (New York, Columbia University Press; Paris, Dunod, 1964), p. 111 and *Phys. Rev.*, **130** (1963), 2529。关于经典处理和量子处理之间的关系，可见下列文献的讨论：E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. Lett.*, **10** (1963), 277 和 J. R. Klauder and E. C. G. Sudarshan, *Fundamentals of Quantum Optics* (New York, W. A. Benjamin, Inc., 1968)。又见 L. Mandel and E. Wolf, *Rev. Mod. Phys.*, **37** (1965), 231；和 L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge, Cambridge University Press, 1995)。

关于光的相干特性的基础论文有很多篇被收进下列论文选集：L. Mandel and E. Wolf (eds.) *Selected Papers on Coherence and Fluctuations of Light*, (New York, Dover Publications, 1970), Vol. I (1850 – 1960), Vol. II (1961 – 1966); reprinted by SPIE (Optical Engineering Press, Bellingham, WA, 1990)。

③ 见 R. N. Bracewell, *Radio Astronomy Techniques* in *Encyclopedia of Physics*, Vol. 54, ed. S. Flügge (Berlin, Springer, 1959), Chapter V。

④ 参见 J. A. Ratcliffe, *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), **19** (1956), 188。

⑤ G. G. Stokes, *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, **9** (1852), 399；收录在其论文集 *Mathematical and Physical Papers*, Voll. III (Cambridge, Cambridge University Press, 1901), p. 233；又见 P. Soleillet, *Ann. de Physique* (10), **12** (1929), 23。

⑥ N. Wiener, *J. Math. and Phys.*, **7** (1928), 109; *J. Franklin Inst.*, **207** (1929), 525; *Acta Math.*, **55** (1930), § 9, 182。

⑦ F. Perrin, *J. Chem. Phys.*, **10** (1942), 415。

⑧ E. Wolf, *Nuovo Cimento*, **12** (1954), 884; *Proc. Symp. Astr. Optics*, ed. Z. Kopal (Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1956), p. 177; *Nuovo Cimento*, **13** (1959), 1165。

⑨ S. Pancharatnam, *Proc. Ind. Acad. Sci.*, A, **44** (1956), 398; *ibid.*, **57** (1963), 218, 231。

设 $V^{(r)}(t)(-\infty<t<\infty)$代表一实扰动,例如空间某一固定点处电矢量的一个笛卡儿分量,并假设 $V^{(r)}(t)$是平方可积函数。它可表成如下傅里叶积分形式:

$$V^{(r)}(t)=\int_0^\infty a(\nu)\cos[\phi(\nu)-2\pi\nu t]\mathrm{d}\nu. \tag{1}$$

对 $V^{(r)}(t)$系之以复函数

$$V(t)=\int_0^\infty a(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\phi(\nu)-2\pi\nu t]}\mathrm{d}\nu. \tag{2}$$

因此

$$V(t)=V^{(r)}(t)+\mathrm{i}V^{(i)}(t), \tag{3}$$

式中

$$V^{(i)}(t)=\int_0^\infty a(\nu)\sin[\phi(\nu)-2\pi\nu t]\mathrm{d}\nu. \tag{4}$$

函数 $V^{(i)}(t)$和 $V(t)$由 $V^{(r)}(t)$惟一地确定,因为将 $V^{(r)}(t)$中各傅里叶分量的位相$\phi(\nu)$更换成$\phi(\nu)-\pi/2$即得到 $V^{(i)}$。积分(1)和(4)称为**联合傅里叶积分**(allied Fourier integrals),或**连带函数**(亦称**共轭函数**),并且可以证明① 二者互为希尔伯特变换,即

$$V^{(i)}(t)=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{V^{(r)}(t')}{t'-t}\mathrm{d}t',\qquad V^{(r)}(t)=-\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{V^{(i)}(t')}{t'-t}\mathrm{d}t', \tag{5}$$

式中 P 表示取 $t=t'$处的柯西主值。

复数表示 V 常用于通信理论,在该领域 V 叫做 $V^{(r)}$所属的**解析信号**②。该名由来出自下一事实:如果 $V^{(r)}$满足某些一般正则条件,则函数 $V(z)$作为复变量 z 的函数,在下半个 z 平面内是解析的③。

为备后用,这里先特别说明,当 $V^{(r)}$表成下列复数形式的傅里叶积分时,如何从 $V^{(r)}$过渡到 V:

$$V^{(r)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}v(\nu)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\nu t}\,\mathrm{d}\nu. \tag{6}$$

因 $V^{(r)}$为实函数,故必有

$$v(-\nu)=v^{\star}(\nu). \tag{7}$$

利用(7)式可将(6)式重新写成(1)式形式,并且通过比较即可得到

---

① 见,例如 E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (Oxford, Clarendon Press, 2nd edition, 1948), Chapter 5。

② 解析信号概念的引进者是 D. Gabor, *J. Inst. Electr. Engrs.*, **93** (1946), Pt. III, 429。亦见 V. I. Bunimovich, *J. Tech. Phys. USSR*, **19** (1949), 1231; J. Ville, *Câbles et Transmission*, **2** (1948), 61; *ibid.*, **4** (1950), 9; J. R. Oswald, *Trans. Inst. Radio Engrs.*, CT-3 (1956), 244。
由一个实变量构成的复函数,当其实部和虚部通过希尔伯特变换关系相联系时,它在物理学和工程学中许多涉及因果性(causality)的分支里占有重要地位。在物理学中,希尔伯特变换关系常称为**色散关系**,因其首次登场处在光的色散理论(光因同原子相互作用而产生色散)[H. A. Kramers, *Atti Congr. Internaz. Fisici*, *Como* (Sept. 1927), (V), Bologna, N. Zanichelli, 1928;亦见 J. S. Toll, *Phys. Rev.*, **104** (1956), 1760; H. M. Nussenzveig, *Causality and Dispersion Relations* (New York, Academic Press, 1972); *Selected Works of Emil Wolf with Commentary* (Singapore, World Scientific, 2001), Lecture 7.1, 577 – 584]。

③ 参见 E. C. Titchmarsh, *loc. cit.*, p. 128。

$$\upsilon(\nu)=\tfrac{1}{2}a(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\nu)},\qquad \nu\geqslant 0. \tag{8}$$

用 $\upsilon(v)$ 来表示时，(2)式变成

$$V(t)=2\int_0^\infty \upsilon(\nu)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\nu t}\,\mathrm{d}\nu. \tag{9}$$

因此可以通过另一途径从 $V^{(r)}(t)$ 导出 $V(t)$，即先将 $V^{(r)}$ 表成(6)这种形式的傅里叶积分，然后去掉其中属于负频的振幅并将正频的振幅乘以 2。因此之故，V 也叫做与 $V^{(r)}$ 连带的**复半域函数**(complex half-range function)。反过来看很明显，如果一个复函数 V 的傅里叶积分不含属于负频的振幅，则 V 的实部和虚部互为连带函数。这里要特别提及下列关系，这些关系由(6)，(7)和(9)三式通过帕塞瓦尔定理并借助关系式(3)即可得之：

$$\int_{-\infty}^{\infty}V^{(r)2}(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}V^{(i)2}(t)\mathrm{d}t=\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}V(t)V^{\star}(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}|\upsilon(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu=2\int_0^\infty|\upsilon(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu. \tag{10}$$

在大多数即将谈到的应用中，谱幅 $\upsilon(\nu)$ 将仅在宽度 $\Delta\nu$ 比平均频率 $\bar{\nu}$ 小得多的频率间隔内才显著不为零。这时解析信号有一个简单的解释，现说明于下。将 V 表示成下列形式：

$$V(t)=A(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\Phi(t)-2\pi\bar{\nu}t]}, \tag{11}$$

式中 $A(\geqslant 0)$ 和 Φ 是实数。根据(9)式和(11)式，

$$\begin{aligned}A(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(t)}&=2\int_0^\infty\upsilon(\nu)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(\nu-\bar{\nu})t}\,\mathrm{d}\nu\\&=\int_{-\bar{\nu}}^{\infty}g(\mu)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\mu t}\,\mathrm{d}\mu,\end{aligned} \tag{12}$$

式中

$$g(\mu)=2\upsilon(\bar{\nu}+\mu). \tag{13}$$

因为业已假定谱幅 $\upsilon(\nu)$ 仅在 $\nu=\bar{\nu}$ 附近才显著不为零，所以 $|g(\mu)|$ 将只在 $\mu=0$ 附近才具有显著的值。因此积分(12)代表低频谐波分量的叠加，且因 $\Delta\nu/\bar{\nu}\ll 1$，故 $A(t)$ 和 $\Phi(t)$ 与 $\cos 2\pi\bar{\nu}t$ 和 $\sin 2\pi\bar{\nu}t$ 相比将变化很慢①。因为 $V^{(r)}$ 和 $V^{(i)}$ 是 V 的实部和虚部，用 A 和 Φ 来表出时则有

$$\left.\begin{aligned}V^{(r)}(t)&=A(t)\cos[\Phi(t)-2\pi\bar{\nu}t],\\V^{(i)}(t)&=A(t)\sin[\Phi(t)-2\pi\bar{\nu}t].\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

这两个公式将 $V^{(r)}$ 和 $V^{(i)}$ 表成载频为 $\bar{\nu}$ 的调制信号形式。由此可见，复解析信号与实信号的**包络**有密切关系②。用解析信号 V 表示时，包络 $A(t)$ 和连带位相因子 $\Phi(t)$ 由下式给出：

$$\left.\begin{aligned}A(t)&=\sqrt{V^{(r)2}+V^{(i)2}}=\sqrt{VV^{\star}}=|V|,\\\Phi(t)&=2\pi\bar{\nu}t+\tan^{-1}\frac{V^{(i)}}{V^{(r)}}=2\pi\bar{\nu}t+\tan^{-1}\left(\mathrm{i}\frac{V^{\star}-V}{V^{\star}+V}\right).\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

由此可见，$A(t)$ 与 $\bar{\nu}$ 的确切选择无关，而 $\Phi(t)$ 也只是通过附加项 $2\pi\bar{\nu}t$ 随 $\bar{\nu}$ 改变。显然可以在

① 在这些情况下，按照(14)式，显然有

$$V^{(i)}(t)\approx V^{(r)}\left(t+\frac{1}{4\bar{\nu}}\right).$$

② L. Mandel 研究了解析信号的包络性质，见 *J. Opt. Soc. Amer.*, **57**(1967), 613。

(14)式中选取任何其他 $\bar{\nu}'$ 代替 $\bar{\nu}$ 而不影响 A 值,而且新位相因子表达式与(15)式所给的仅仅差别在将 $\bar{\nu}$ 改写成 $\bar{\nu}'$。

(14)和(15)两式的推导过程并不曾用到我们正在讨论窄带信号($\Delta\nu/\bar{\nu} \ll 1$)这一事实,所以这两个关系式的适用范围颇广。然而,只有当 $\Delta\nu/\bar{\nu} \ll 1$ 时,包络概念方为有用。

前曾假定,"扰动" $V^{(r)}(t)$ 对所有 t 值都有定义。实际上,该扰动仅能存在一段有限的时间间隔 $-T \leqslant t \leqslant T$,但这段间隔通常都比物理上的显要时间尺度(平均周期 $1/\bar{\nu}$ 和相干时间 $1/\Delta\nu$)大很多,因而可将情况理想化而假定 $T \to \infty$。从场的定态性假设(见 10.3.1 节)方面看,有理由认为该一理想化在数学上是可行的。但显然这时还必须假定,当取平均的时间间隔无限增大时,强度(它正比于 $V^{(r)2}$)的时间平均趋于一有限值,即

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} V^{(r)2}(t)\mathrm{d}t \tag{16}$$

是有限的。这时,如果这一极限是有限的且不为零,则显然积分 $\int_{-\infty}^{\infty} V^{(r)2}(t)\mathrm{d}t$ 是发散的[即 $V^{(r)}(t)$ 不再是平方可积函数——译者注]。虽然如此,仍能够设法利用傅里叶分析技巧①。现在定义截断函数

$$\left.\begin{aligned} V_T^{(r)}(t) &= V^{(r)}(t) \qquad \text{当 } |t| \leqslant T \text{ 时,} \\ &= 0 \qquad\qquad \text{当 } |t| > T \text{ 时.} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

因为每个这种截断函数(truncated function)均可假定是平方可积的,所以它可表成为一个傅里叶积分,比如

$$V_T^{(r)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \upsilon_T(\nu)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\nu t}\,\mathrm{d}\nu. \tag{18a}$$

设 $V_T^{(i)}$ 是 $V_T^{(r)}$ 的连带函数,而 V_T 是相应的解析函数,即

$$V_T(t) = V_T^{(r)}(t) + \mathrm{i}V_T^{(i)}(t) = 2\int_0^{\infty} \upsilon_T(\nu)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\nu t}\,\mathrm{d}\nu. \tag{18b}$$

这时关系式(10)在 $V^{(r)}$ 换成 $V_T^{(r)}$,$V^{(i)}$ 换成 $V_T^{(i)}$,……时依然成立。因此,如果将各式除以 $2T$,则得到②

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} V_T^{(r)2}(t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} V_T^{(i)2}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} V_T(t)V_T^{\star}(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_T(\nu)\mathrm{d}\nu = 2\int_0^{\infty} S_T(\nu)\mathrm{d}\nu, \end{aligned} \tag{19}$$

式中

$$S_T(\nu) = \frac{|\upsilon_T(\nu)|^2}{2T}. \tag{20}$$

---

① 20 世纪初叶,一些参与研究白光和噪声问题的物理学家(其中著名的有 L. G. Gouy, Lord Rayleigh 和 A. Schuster)遇到了一类时间函数的分析难题,该类函数在 t 趋向无穷大时不逐渐归零。严格的数学处理主要出自 N. Wiener,他在有关广义谐波分析的论文[*Acta Math.*, **55**(1930), 117]中发展出这些方法。该文还概述了问题的历史,并列有非常完全的参考书目。

② 因为一个截断函数的希尔伯特变换不一定是一截断函数,所以 $V_T^{(i)}$ 和 V_T 在 $-T \leqslant t \leqslant T$ 区域外一般不为零。因此之故,并且也为了避免某些数学精细加工,(19)式和(23)式中时间积分的上、下限取做 $\pm\infty$ 而非 $\pm T$。

现在来进行取极限 $T\to\infty$，似乎已顺理成章。不幸，在许多有实际意义的情况下，随着 T 的增大，函数 $S_T(\nu)$——称为周期图(periodogram)并不趋向某一极限，而是涨落不已[①]。然而，此项困难可通过一种适当的"平滑步骤"(smoothing procedure)来化解。例如，如无规过程理论中常采取的做法，将函数 $V^{(r)}(t)$看成是某函数系综的一个典型成员，系综中的各个函数则表征着过程的统计性质。除此以外，光学中正常情况所遇到的系综都是**定态的**(stationary)和**各态历经的**(ergodic)。定态性意味着所有的系综平均都与时间原点无关，而各态历经性意味着每个系综平均等于该系综中某典型成员的相应时间平均。从现在起，将假定我们所讨论的都是定态各态历经系综[②]。这时可以证明，以函数 $V^{(r)}(t)$构成一系综而对它取 $S_T(\nu)$的平均，该平均在 $T\to\infty$时趋向一定的极限。因此，如用一横表示系综平均，则"平滑化周期图"

$$\overline{S_T(\nu)}=\frac{\overline{|v_T(\nu)|^2}}{2T} \tag{21}$$

将具有一极限[③]

$$S(\nu)=\lim_{T\to\infty}\overline{S_T(\nu)}=\lim_{T\to\infty}\frac{\overline{|v_T(\nu)|^2}}{2T}. \tag{22}$$

现在如果以尖括号表示时间平均

$$\langle F(t)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}F_T(t)\mathrm{d}t, \tag{23}$$

则在 $T\to\infty$极限时，得到类似(19)式的关系式如下：

$$\langle V^{(r)2}(t)\rangle=\langle V^{(i)2}(t)\rangle=\tfrac{1}{2}\langle V(t)V^{\star}(t)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}S(\nu)\mathrm{d}\nu=2\int_{0}^{\infty}S(\nu)\mathrm{d}\nu. \tag{24}$$

在定态无规过程理论中，(22)式所定义的函数 $S(\nu)$叫做无规过程的**功率谱**(power spectrum)，该无规过程系由函数 $V^{(r)}(t)$所组成的系综来表征。在我们的讨论中，$V^{(r)}(t)$代表光扰动，$S(\nu)\mathrm{d}\nu$ 正比于频率间隔$(\nu,\nu+\mathrm{d}\nu)$内的扰动对强度的贡献，我们将把 $S(\nu)$叫做光振动的**谱密度**(spectral density)或光振动的**谱**(spectrum)。

因为 $V_T{}^{(r)}(t)$是 $V_T(t)$的实部，故当对 $V_T{}^{(r)}$做线性运算时，可直接用 V_T 进行运算，而在运算终了时再取实部。此外，正如在单色情况一样，由于有关系式$\langle V^{(r)2}\rangle=\frac{1}{2}\langle VV^{\star}\rangle$，故可直接用与实扰动相连带的复扰动来计算其平方的时间平均。

---

① 见，例如 W. B. Davenport and W. L. Root, *An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise*(New York, McGraw-Hill, 1958), pp. 107 – 108。亦见 D. Middleton, *IRE Trans.*, CT-3(1956), 299。

② 关于这些概念，更为完全的讨论见，例如 W. B. Davenport and W. L. Root, *loc. cit.*; S. Goldman, *Information Theory* (New York, Prentice-Hall, Inc. 1953); D. Middleton, *An Introduction to Statistical Communication Theory*(New York, McGraw-Hill Co., 1960); A. M. Yaglom, *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions*(Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1962)。又见 E. Wolf, *J. Opt. Soc. Amer.*, **72**(1982), 343, § 2。

③ 如要对该极限的存在以及本节中以启迪方式引进的某些关系给以严格证明，则将导致深入到各态历经理论中，因此这里从略。见 J. L. Doob, *Stochastic Processes*(New York, J. Wiley & Sons, Inc., 1953), Chapt. XI；亦见 S. Goldman, *loc. cit.*, § 8.4, A. M. Yaglom, *loc. cit.*, pp, 43 – 51 或 D. Middleton, *loc. cit.*, § 3.2。
亦可不采取系综平均而改用其他平滑运算方法[见，S. Goldman, *loc. cit.*, p. 244 或 M. S. Bartlett, *An Introduction to Stochastic Processes*(Cambridge, Cambridge University Press, 1955), pp. 280 – 284]。

10.3 光束的关联函数

10.3.1 两束部分相干光的干涉;互相干函数和复相干度

10.1 节中曾经指出,实际的光源都具有一定的空间尺度(即非点源),而且所发的光还具有一定的频谱范围(即非单色),要圆满处理涉及此种光波的问题,须确定波场中任意两点处振动之间可能存在的关联。这种关联如何量度,通过分析双光束干涉实验可获适当启发。下面对此进行说明。

考虑一个多色扩展光源 σ 所产生的波场。目前先忽略偏振效应,因而可将光扰动看成是位置和时间的实标量函数 $V^{(r)}(P,t)$。令与 $V^{(r)}(P,t)$相连带的解析函数为 $V(P,t)$。依靠观测当然不可能测定这些量随时间如何变化,因为任何探测器所记录的都只是一段时间内的平均,而光扰动在此期间将反复多次易号。可加以观测的量是强度 $I(P)$,它正比于 $V^{(r)2}(P,t)$的时间平均值,因而除去一个无关紧要的常数因子外,

$$I(P)=2\langle V^{(r)2}(P,t)\rangle=\langle V(P,t)V^{*}(P,t)\rangle, \tag{1}$$

式中曾利用了关系式 § 10.2(24)。

现在考虑波场中的两个点 P_1 和 P_2。除了可以测量强度 $I(P_1)$和 $I(P_2)$外,还可从实验上测定这两点发出的振动相互叠加时产生的干涉效应。为此,设想在波场中横向放置一个不透明屏$\mathcal{A}$,在其上 P_1 和 P_2 处各开一小孔,并在$\mathcal{A}$后与光源异侧若干距离处放置另一个屏$\mathcal{B}$来观测其面上的强度分布(见图 10.1)。为简单计,假定二屏之间媒质的折射率为 1。设 s_1 和 s_2 是屏$\mathcal{B}$上某样点 Q 到 P_1 和 P_2 的距离。我们可以将 P_1 和 P_2 各看成是一个次级扰动中心,因而 Q 点处的复扰动由下式给出:

$$V(Q,t)=K_1V(P_1,t-t_1)+K_2V(P_2,t-t_2). \tag{2}$$

式中 t_1 和 t_2 分别是光从 P_1 传播到 Q 和从 P_2 传播到 Q 所需的时间,即

$$t_1=\frac{s_1}{c},\qquad t_2=\frac{s_2}{c}, \tag{3}$$

式中 c 是真空中的光速。因子 K_1 和 K_2 分别与 s_1 和 s_2 成反比,并且还与开孔的大小以及实验装置的几何布局(P_1 和 P_2 处的入射角和衍射角)有关。因为 P_1 和 P_2 所发的次级子波对原波有一个 1/4 周期的异相(见 8.2 节,8.3 节),所以 K_1 和 K_2 是纯虚数。

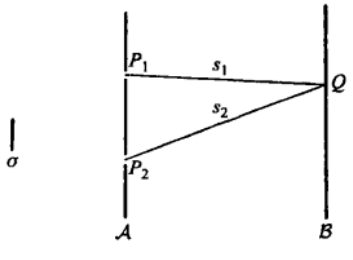


图 10.1 扩展光源 σ 的多色光干涉实验

由(1)式和(2)式得到 Q 点的强度为[①]

$$I(Q)=K_1K_1^*\langle V_1(t-t_1)V_1^*(t-t_1)\rangle+K_2K_2^*\langle V_2(t-t_2)V_2^*(t-t_2)\rangle$$
$$+K_1K_2^*\langle V_1(t-t_1)V_2^*(t-t_2)\rangle+K_2K_1^*\langle V_2(t-t_2)V_1^*(t-t_1)\rangle. \tag{4}$$

由于前已假定场是定态的,故可移动上式各函数中的时间原点,因此有

$$\langle V_1(t-t_1)V_1^*(t-t_1)\rangle=\langle V_1(t)V_1^*(t)\rangle=I_1, \tag{5}$$

其他各项类此。此外如再利用(3)式并忆及 K_1 和 K_2 为纯虚数,则(4)式可简化成

$$I(Q)=|K_1|^2I_1+|K_2|^2I_2+2|K_1K_2|\Gamma_{12}^{(r)}\left(\frac{s_2-s_1}{c}\right), \tag{6}$$

式中 $\Gamma_{12}^{(r)}(\tau)$ 是函数

$$\Gamma_{12}(\tau)=\langle V_1(t+\tau)V_2^*(t)\rangle \tag{7}$$

的实部。(7)式所表示的这个量是部分相干性理论的基本量。我们将称之为 P_1 和 P_2 两点光振动的**互相干**(mutual coherence),其中 P_1 点处振动的取样时刻比 P_2 点处总晚时间 τ。对整个波场而言,$\Gamma_{12}(\tau)$ 将称为波场的**互相干函数**[②] (mutual coherence function)。当 P_1 和 P_2 两点重合时($P_1=P_2$),则得到

$$\Gamma_{11}(\tau)=\langle V_1(t+\tau)V_1^*(t)\rangle \tag{8}$$

这时我们就称它是 P_1 点处光振动的**自相干**(self-coherence)。当 $\tau=0$ 时,它即简化成通常的强度:

$$\Gamma_{11}(0)=I_1,\qquad \Gamma_{22}(0)=I_2.$$

(6)式中的 $|K_1|^2I_1$ 项显然就是单独打开 P_1 处小孔($K_2=0$)时 Q 点处所将观测到的强度,$|K_2|^2I_2$ 项的意义类此。设以 $I^{(1)}(Q)$ 和 $I^{(2)}(Q)$ 分别代表这些强度,即

$$I^{(1)}(Q)=|K_1|^2I_1=|K_1|^2\Gamma_{11}(0),\qquad I^{(2)}(Q)=|K_2|^2I_2=|K_2|^2\Gamma_{22}(0). \tag{9}$$

此外,对 $\Gamma_{12}(\tau)$ 进行归一化,即取

$$\gamma_{12}(\tau)=\frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)}\sqrt{\Gamma_{22}(0)}}=\frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}}. \tag{10}$$

出于即将显现的原因,$\gamma_{12}(\tau)$ 将称为光振动的**复相干度**(complex degree of coherence)。借助(9)、(10)两式最后可将(6)式写成如下形式:

$$I(Q)=I^{(1)}(Q)+I^{(2)}(Q)+2\sqrt{I^{(1)}(Q)}\sqrt{I^{(2)}(Q)}\gamma_{12}^{(r)}\left(\frac{s_2-s_1}{c}\right), \tag{11}$$

其中,$\gamma_{12}^{(r)}$ 表示 γ_{12} 的实部。

公式(11)是**定态光场的一般干涉定律**。它表明,要确定两束光叠加所产生的强度,必须知

---

① 从现在开始,凡便允处将采用简缩符号,用 $V_1(t)$ 代替 $V(P_1,t)$,$\Gamma_{12}(\tau)$ 代替 $\Gamma(P_1,P_2,\tau)$,等等。

② 在定态无规过程的一般理论中,$\Gamma_{(12)}(\tau)$ 叫做 $V_1(t)$ 和 $V_2(t)$ 的交义关联函数(*cross-correlation function*),而 $\Gamma_{(11)}(\tau)$ 叫做 $V_1(t)$ 的自关联函数(*autocorrelation function*)。

道每束光的强度和复相干度的实部 $\gamma_{12}^{(r)}(\tau)$。后面将说明如何从光源和媒质传输性质的主要数据来计算 $\gamma_{12}^{(r)}$。

如果从 P_1 和 P_2 出来的光非直接到达 Q,而是中间通过一个光学系统,且色散的影响可以忽略,则(11)式仍然有效,只要将 $s_2 - s_1$ 改为程差 $P_2Q - P_1Q$ 即可。随着这一推广,当原光束所派生的两束干涉光不是来自 P_1 和 P_2 处的"波前分割",而是来自单一点 P_1 紧邻地区的"振幅分割",例如迈克耳孙干涉仪中的情况时,(11)式也照样成立。但在后者情况下,(11)式中的 $\gamma_{12}^{(r)}(\tau)$要更换成 $\gamma_{11}^{(r)}(\tau)$。

与光扰动 $V^{(r)}$ 不同,关联函数 $\gamma_{12}^{(r)}$ 和 $\Gamma_{12}^{(r)}$ 所代表的量能够由实验测定。为此,可于光束中过 P_1 和 P_2 两点横向放置一不透明屏,并在屏上 P_1 和 P_2 处各开一小孔,如图 10.1 所示。之后在屏后选一 Q 点,使 $P_2Q - P_1Q = c\tau$ 并测量 Q 点的强度 $I(Q)$。然后分别测量来自每个孔的光的强度 $I^{(1)}(Q)$和 $I^{(2)}(Q)$。将这三个测量值代入(11)式,即可求出 $\gamma_{12}^{(r)}$,结果为

$$\gamma_{12}^{(r)} = \frac{I(Q) - I^{(1)}(Q) - I^{(2)}(Q)}{2\sqrt{I^{(1)}(Q)}\sqrt{I^{(2)}(Q)}}. \tag{12}$$

要测定 $\Gamma_{12}^{(r)}$,还必须测量每个孔处的强度 $I(P_1)$和 $I(P_2)$。然后按照(10),(12)两式从下式计算出 $\Gamma_{12}^{(r)}$

$$\Gamma_{12}^{(r)} = \sqrt{I(P_1)}\sqrt{I(P_2)}\gamma_{12}^{(r)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{I(P_1)I(P_2)}{I^{(1)}(Q)I^{(2)}(Q)}}[I(Q) - I^{(1)}(Q) - I^{(2)}(Q)]. \tag{13}$$

现在回到(10)式。不难看出,我们的归一化保证 $|\gamma_{12}(\tau)| \leqslant 1$。为了证明这一结果,同§10.2(17)中一样,引进截断函数

$$\left.\begin{aligned} V_T^{(r)}(P, t) &= V^{(r)}(P, t) && \text{当}|t| \leqslant T\text{时,} \\ &= 0 && \text{当}|t| > T\text{时.} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

并以 $V_T(P, t)$代表相连带的解析信号。由 Schwarz 不等式[①] 可知

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} V_T(P_1, t+\tau)V_T^{\star}(P_2, t)\mathrm{d}t\right|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} V_T(P_1, t+\tau)V_T^{\star}(P_1, t+\tau)\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty} V_T(P_2, t)V_T^{\star}(P_2, t)\mathrm{d}t. \tag{15}$$

右边第一个积分中的 $t+\tau$ 可更换为 t。然后两边各除以 $4T^2$ 并取极限 $T\to\infty$,由而得到

$$|\Gamma_{12}(\tau)|^2 \leqslant \Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0), \tag{16}$$

由(10)式,即有

$$|\gamma_{12}(\tau)| \leqslant 1. \tag{17}$$

γ_{12}的意义可通过将(11)式表成稍微不同的形式而看得一目了然。设 $\bar{\nu}$ 是光的平均频率,并将 $\gamma_{12}(\tau)$写成

$$\gamma_{12}(\tau) = |\gamma_{12}(\tau)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\alpha_{12}(\tau) - 2\pi\bar{\nu}\tau]}, \tag{18}$$

① 见,例如 H. Margenau and G. M. Murphy, *The Mathematics of Physics and Chemistry* (New York, D. van Nostrand Co., 1947), p. 131。

式中

$$\alpha_{12}(\tau)=2\pi\bar{\nu}\tau+\arg\gamma_{12}(\tau). \tag{19}$$

这时(11)式变成

$$I(Q)=I^{(1)}(Q)+I^{(2)}(Q)+2\sqrt{I^{(1)}(Q)}\sqrt{I^{(2)}(Q)}|\gamma_{12}(\tau)|\cos[\alpha_{12}(\tau)-\delta], \tag{20}$$

式中参量 τ 和位相差 δ 的值为

$$\tau=\frac{s_2-s_1}{c},\qquad \delta=2\pi\bar{\nu}\tau=\frac{2\pi}{\bar{\lambda}}(s_2-s_1), \tag{21}$$

而 $\bar{\lambda}$ 是平均波长。如果 $|\gamma_{12}(\tau)|$ 取极值 1,则 Q 点的强度与严格单色光情况所将得到的相同,只要该单色光的波长为 $\bar{\lambda}$,且 P_1 和 P_2 两处振动的位相差等于 $\alpha_{12}(\tau)$。在这种情况下,P_1 和 P_2 两处的振动(二者间有适当的时延 τ)可以说是**相干的**[①]。如果 $|\gamma_{12}(\tau)|$ 取另一极值零,则(20)式最后一项不存在,两束光不产生干涉效应,这时 P_1 和 P_2 两处的振动可以说是**不相干的**。如果 $|\gamma_{12}(\tau)|$ 取值既非 1,也非 0,即如果 $0<|\gamma_{12}(\tau)|<1$,则 P_1 和 P_2 两处的振动就是**部分相干的**,$|\gamma_{12}(\tau)|$ 表示它们的**相干度**[②]。

不论 $|\gamma_{12}|$ 的值如何,强度 $I(Q)$ 都可表成下列形式:

$$\begin{aligned}I(Q)=&|\gamma_{12}(\tau)|\{I^{(1)}(Q)+I^{(2)}(Q)+2\sqrt{I^{(1)}(Q)}\sqrt{I^{(2)}(Q)}\cos[\alpha_{12}(\tau)-\delta]\}\\&+[1-|\gamma_{12}(\tau)|][I^{(1)}(Q)+I^{(2)}(Q)].\end{aligned} \tag{22}$$

第一行各项可以认为是出自强度为 $|\gamma_{12}(\tau)|I^{(1)}(Q)$ 和 $|\gamma_{12}(\tau)|I^{(2)}(Q)$ 而相对位相差为 $\alpha_{12}(\tau)-\delta$ 的双光束相干叠加;第二行各项则可认为是出自强度为 $[1-|\gamma_{12}(\tau)|]I^{(1)}(Q)$ 和 $[1-|\gamma_{12}(\tau)|]I^{(2)}(Q)$ 的双光束不相干叠加。因此从两孔 P_1 和 P_2 到达 Q 的光可看成是相干光和不相干光组成的一种混合光,二者的强度之比为

$$\frac{I_{\text{相干}}}{I_{\text{不相干}}}=\frac{|\gamma_{12}(\tau)|}{1-|\gamma_{12}(\tau)|}, \tag{23a}$$

或

$$\frac{I_{\text{相干}}}{I_{\text{总}}}=|\gamma_{12}|\qquad(I_{\text{总}}=I_{\text{相干}}+I_{\text{不相干}}). \tag{23b}$$

前面曾看到[(12)式],$\gamma_{12}^{(r)}(\tau)$ 可以用适当的干涉实验经由强度测量而加以测定。10.4.1 节中将看到,在大多数具有实际意义的情况下,γ_{12} 的模(原则上讲还有其位相)同样能够经由这种实验来测定。

10.3.2　互相干的谱表示

设

$$V_T^{(r)}(P,t)=\int_{-\infty}^{\infty}v_T(P,\nu)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\nu t}\,\mathrm{d}\nu \tag{24}$$

---

① L. Mandel and E. Wolf, *J. Opt. Soc. Amer.*, **51**(1961), 815 曾研究了相干光的一般特性。

② 关于测量相干度的各种方法,可见 M. Françon and S. Mallick 的讨论,其文载于 *Progress in Optics*, Vol. 6, ed. E. Wolf (Amsterdam, North-Holland Publishing Company and New York, J. Wiley, 1967), p. 71。

是截断实函数 $V_T^{(r)}$ 的傅里叶积分表示。因而由傅里叶反演公式,

$$v_T(P,\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}V_T^{(r)}(P,t)\mathrm{e}^{2\pi i\nu t}\,\mathrm{d}t, \tag{25}$$

并由此得出

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}V_T^{(r)}(P_1,t+\tau)V_T^{(r)}(P_2,t)\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty}V_T^{(r)}(P_2,t)\left[\int_{-\infty}^{\infty}v_T(P_1,\nu)\mathrm{e}^{-2\pi i\nu(t+\tau)}\,\mathrm{d}\nu\right]\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}V_T^{(r)}(P_2,t)\mathrm{e}^{-2\pi i\nu t}\,\mathrm{d}t\right]v_T(P_1,\nu)\mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau}\,\mathrm{d}\nu\\&=\int_{-\infty}^{\infty}v_T(P_1,\nu)v_T^{\star}(P_2,\nu)\mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau}\,\mathrm{d}\nu.\end{aligned} \tag{26}$$

然后将(26)式两边各除以 $2T$,并对量 $v_T(P_1,\nu)\,v_T^{\star}(P_2,\nu)/2T$ 应用前面对 § 10.2(20)取平均时所讲的"平滑运算",这种运算就是对无规函数 $V^{(r)}$ 所构成的系综取系综平均。最后取极限 $T\to\infty$,则可望得到①

$$\langle V^{(r)}(P_1,t+\tau)V^{(r)}(P_2,t)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}G_{12}(\nu)\mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau}\,\mathrm{d}\nu, \tag{27}$$

式中

$$G_{12}(\nu)=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{\overline{v_T(P_1,\nu)v_T^{\star}(P_2,\nu)}}{2T}\right]. \tag{28}$$

函数 $G_{12}(\nu)$可以叫做 P_1 和 P_2 两点光振动的**互谱密度**(mutual spectral density)或**交叉谱密度**(corss-spectral density)[也常用 $W_{12}(\nu)$表示]。它是前面引进的谱密度 $S(\nu)$[§ 10.2(22)]的推广,并且当 P_1,P_2 两点重合时即化为 $S(\nu)$。光学中的这个互谱密度与定态无规过程理论中的**交叉功率谱**(cross-power spectrum)概念完全对应。方程(27)表明,实关联函数$\langle V^{(r)}(P_1,t+\tau)V^{(r)}(P,t)\rangle$和互谱密度 $G_{12}(\nu)$构成一对傅里叶变换②。

现在将问题转向复表示。设

$$V_T(P,t)=2\int_0^{\infty}v_T(\nu)\mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau}\,\mathrm{d}\nu \tag{29}$$

是与 $V_T^{(r)}(P,t)$连带的解析信号(见 10.2 节)。通过类似于从(24)式导致(27)式的分析并再次取极限 $T\to\infty$,即可得到

$$\Gamma_{12}(\tau)=\langle V(P_1,t+\tau)V^{\star}(P_2,t)\rangle=4\int_0^{\infty}G_{12}(\nu)\mathrm{e}^{-2\pi i\nu\tau}\,\mathrm{d}\nu. \tag{30}$$

---

① 465 页脚注③所做的说明在这里同样适用。

② N. Wiener, *Acta Math.*, **55**(1930), 117; A Khintchine, *Math. Ann.*, **109**(1934), 604。实质相同的定理很早之前业已由爱因斯坦导出,见 *Arch. Sci. Phys. Nat.*, **37**(1914), 254 – 256。英译文发表于 *IEEE ASSP Mag.*, **4**, #4(1987), 6,并附有 A. M. Yaglom 的注释, *ibid.*, 7 – 11。爱因斯坦曾在一篇手稿中对该问题做了进一步讨论,该手稿发表在他逝世后出版的 *The Collected Papers of Albert Einstein*, Vol. 4(Princeton, Princeton University Press, 1996)p. 302。

在 $P_1 = P_2$（设等于 P）的情况下，(27)式和(30)式意味着

$$\langle V^{(r)}(P, t+\tau)V^{(r)}(P, t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S(P, \nu)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\nu\tau}\,\mathrm{d}\nu, \tag{31a}$$

和

$$\langle V(P, t+\tau)V^{\star}(P, t)\rangle = 4\int_{0}^{\infty} S(P, \nu)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\nu\tau}\,\mathrm{d}\nu, \tag{31b}$$

式中 $S(P,\nu)$是 P 点的谱密度，定义见 § 10.2(22)，即

$$S(P, \nu) = \lim_{T\to\infty}\frac{\overline{|v_T(P, \nu)|^2}}{2T}. \tag{32}$$

方程(31a)表明，实关联函数$\langle V^{(r)}(P, t+\tau)V^{(r)}(P, t)\rangle$和谱密度 $S(P,\nu)$构成一对傅里叶变换。光学中的这一结果等同于定态无规过程理论中著名的 Wiener-Khintchine **定理**。

因为 Γ_{12}不含属于负频的谱分量，所以它是一个解析信号。因此，如果以 $\Gamma_{12}^{(r)}$和 $\Gamma_{12}^{(i)}$代表其实部和虚部，即令

$$\Gamma_{12}(\tau) = \Gamma_{12}^{(r)}(\tau) + \mathrm{i}\Gamma_{12}^{(i)}(\tau), \tag{33}$$

则这两个函数通过 Hilbert 变换关系相联系

$$\Gamma_{12}^{(i)}(\tau) = \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_{12}^{(r)}(\tau')}{\tau'-\tau}\,\mathrm{d}\tau', \qquad \Gamma_{12}^{(r)}(\tau) = -\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_{12}^{(i)}(\tau')}{\tau'-\tau}\,\mathrm{d}\tau'. \tag{34}$$

由此可知[见 § 10.2(11) ~ (15)]，$|\Gamma_{12}|$作为 τ 的函数时，是 $\Gamma_{12}^{(r)}$的包络。而且，$G_{12}(-\nu) = G_{12}^{\star}(\nu)$，因为根据(27)式，$G_{12}(\nu)$是一个实函数的傅里叶变换。利用此关系式和(30)式以及(33)式，可得到①

$$\Gamma_{12}^{(r)}(\tau) = 2\int_{-\infty}^{\infty} G_{12}(\nu)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\nu\tau}\,\mathrm{d}\nu = 2\langle V^{(r)}(P_1, t+\tau)V^{(r)}(P_2, t)\rangle. \tag{35}$$

此外，$|\gamma_{12}|$是实关联因子

$$\gamma_{12}^{(r)}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}^{(r)}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)}\sqrt{\Gamma_{22}(0)}} = \frac{\langle V^{(r)}(P_1, t+\tau)V^{(r)}(P_2, t)\rangle}{\sqrt{\langle V^{(r)2}(P_1, t)\rangle}\sqrt{\langle V^{(r)2}(P_2, t)\rangle}} \tag{36}$$

的包络。

方程(30)给出互相干函数 $\Gamma_{12}(\tau)$的谱表示。方程(35)表明，$\Gamma_{12}(\tau)$的实部等于实函数 $V^{(r)}(P_1,t)$和 $V^{(r)}(P_2,t)$的交叉关联函数乘以 2，而(34)式表明 $\Gamma_{12}(\tau)$的实部和虚部之间的关系。

10.4　准单色光的干涉和衍射

我们已经看到，要恰当地描写部分相干光的干涉，一般而言必须知道互相干函数 $\Gamma_{12}(\tau)$，或者换个说法，必须知道通常的强度 I_1 和 I_2 以及复相干度 $\gamma_{12}(\tau)$。本节将专门讨论准单色

① 不难证明，$\Gamma_{12}^{(r)}(\tau)$也等于$2\langle V^{(i)}(P_1, t+\tau)V^{(i)}(P_2, t)\rangle$并且 $\Gamma_{12}^{(i)}(\tau) = 2\langle V^{(i)}(P_1, t+\tau)V^{(r)}(P_2, t)\rangle = -2\langle V^{(r)}(P_1, t+\tau)V^{(i)}(P_2, t)\rangle$[见，例如 P. Roman and E. Wolf, *Nuovo Cimento*, **17**(1960), 474 – 476 或 L. Mandel, *Progress in Optics*, Vol. 2, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1963), pp. 241 – 242]。

光这一重要情况。所谓准单色光是指光的频谱成分所覆盖的频率范围 $\Delta\nu$ 比其平均频率 $\bar{\nu}$ 小得多。我们将看到,在这种情况下,理论呈比较简单的形式。特别是,我们将发现,这时如果再假设干涉光束之间的程差比光的相干长度小得多——这在许多应用中都是满足的,则可采用与参量 τ 无关的关联函数来代替 $\Gamma_{12}(\tau)$和 $\gamma_{12}(\tau)$。

10.4.1 准单色光的干涉;互强度

让我们再来考虑图 10.1 所示例的干涉实验。根据 § 10.3(20),干涉图样中 Q 点处的强度为

$$I(Q)=I^{(1)}(Q)+I^{(2)}(Q)+2\sqrt{I^{(1)}(Q)}\sqrt{I^{(2)}(Q)}|\gamma_{12}(\tau)|\cos[\alpha_{12}(\tau)-\delta], \tag{1}$$

式中

$$\tau=\frac{s_2-s_1}{c},\qquad \delta=2\pi\bar{\nu}\tau=\frac{2\pi}{\bar{\lambda}}(s_2-s_1). \tag{2}$$

现在假定光是准单色的。这时,按照讨论 § 10.2(11)的方式,同样可以由 § 10.3(18)得知,$|\gamma_{12}(\tau)|$和 $\alpha_{12}(\tau)$作为 τ 的函数,其变化将比 $\cos 2\pi\bar{\nu}\tau$ 和 $\sin 2\pi\bar{\nu}\tau$ 慢得多。此外,如果 P_1 和 P_2 两处的孔足够小,则每个孔各自的衍射光强度 $I^{(1)}(Q)$和 $I^{(2)}(Q)$在干涉图样中心区域将实际保持不变,而 $\cos 2\pi\bar{\nu}\tau$ 和 $\sin 2\pi\bar{\nu}\tau$ 在该区域内已多次易号。由此可见,任何一点 Q 附近的强度分布系由两部分组成:一个几乎均匀的背景强度 $I^{(1)}(Q)+I^{(2)}(Q)$,和一个叠加于其上且幅值 $2\sqrt{I^{(1)}(Q)}\sqrt{I^{(2)}(Q)}\,|\gamma_{12}(\tau)|$ 几乎不变的正弦式强度分布①。总强度的分布模式有三种典型情况,如图 10.2 所示。Q 点附近的强度极大和强度极小,在良好近似上分别为:

$$\left.\begin{aligned} I_{\text{极大}}&=I^{(1)}(Q)+I^{(2)}(Q)+2\sqrt{I^{(1)}(Q)}\sqrt{I^{(2)}(Q)}|\gamma_{12}(\tau)|,\\ I_{\text{极小}}&=I^{(1)}(Q)+I^{(2)}(Q)-2\sqrt{I^{(1)}(Q)}\sqrt{I^{(2)}(Q)}|\gamma_{12}(\tau)|. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

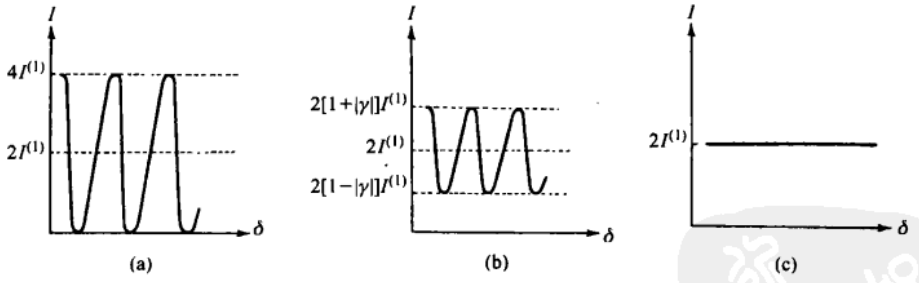


图 10.2 强度同为 $I^{(1)}$ 且相干度为 $|\gamma|$ 的两束准单色光产生的干涉图样强度分布:(a)相干叠加($|\gamma|=1$);(b)部分相干叠加($0<|\gamma|<1$);(c)不相干叠加($\gamma=0$)

因此 Q 点处**干涉条纹的可见度**为

$$\mathcal{V}(Q)=\frac{I_{\text{极大}}-I_{\text{极小}}}{I_{\text{极大}}+I_{\text{极小}}}=\frac{2\sqrt{I^{(1)}(Q)}\sqrt{I^{(2)}(Q)}}{I^{(1)}(Q)+I^{(2)}(Q)}|\gamma_{12}(\tau)|. \tag{4}$$

这个公式用两束光的强度及其相干度表示出条纹的可见度。如果像常见情况,两束光强度相

① 按:这是从数学上来说的,并无直接物理意义——译者注。

等($I^{(1)} = I^{(2)}$),则(4)式化为

$$\mathcal{V}(Q) = |\gamma_{12}(\tau)|, \tag{5}$$

即条纹的可见度这时等于两束光的相干度。

按照(1)式和(2)式,Q 点附近强度极大的位置由下式给出:

$$\frac{2\pi}{\bar{\lambda}}(s_2 - s_1) - \alpha_{12}(\tau) = 2m\pi \qquad (m = 0, \pm1, \pm2, \cdots),$$

这正好像双孔是由波长为 $\bar{\lambda}$ 的严格单色光来照明,且 P_1 处的位相相对 P_2 延迟 $\alpha_{12}(\tau)$的情况。根据 § 7.3(7),位相延迟 2π 相当于干涉图样沿平行 P_1P_2 的方向位移 $a\bar{\lambda}/d$,其中 d 是 P_1 和 P_2 的间距,a 是屏$\mathcal{A}$和屏$\mathcal{B}$的距离。因此,**准单色条纹和 P_1,P_2 受单色和同相照明所形成的条纹相比,要在平行二孔连线方向上位移一段距离**

$$x = \frac{\bar{\lambda}}{2\pi}\frac{a}{d}\alpha_{12}(\tau) \tag{6}$$

由此可见,准单色光束的复相干度的幅值和位相可通过测量干涉条纹的可见度和位置来测定。这些结果与 7.5.8 节所描述的迈克耳孙方法,即从测量可见度曲线来测定谱线强度分布有密切的关系,由 § 10.3(10)和 § 10.3(31b)可以得到

$$\gamma_{11}(\tau) = \frac{\int_0^\infty S(\nu)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\nu\tau}\,\mathrm{d}\nu}{\int_0^\infty S(\nu)\mathrm{d}\nu},$$

式中 $S(\nu)$是谱密度。因此由傅里叶反演定理可知,$S(\nu)$正比于 $\gamma_{11}(\tau)$的傅里叶变换。但是我们刚才看到。$\gamma_{11}(\tau)$的模数实质上就是可见度,而 $\gamma_{11}(\tau)$的位相同光束在适当干涉实验中形成的条纹的位置存在简单的关系。这样就使得计算 $S(\nu)$的方法与当初迈克耳孙所采用的完全相同。图 7.54 和图 7.55 中所展示的可见度曲线显然可以解释成是将$|\gamma_{11}|$表作为二光束时延的函数。

实际上,干涉光束之间所引进的时延量 τ 常很小,因而这时可将上述各公式加以简化。按照 § 10.3(30), § 10.3(18)和 § 10.3(10),有

$$|\Gamma_{12}(\tau)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_{12}(\tau)} = \sqrt{I_1}\sqrt{I_2}|\gamma_{12}(\tau)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_{12}(\tau)} = 4\int_0^\infty G_{12}(\nu)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(\nu-\bar{\nu})\tau}\,\mathrm{d}\nu. \tag{7}$$

如果$|\tau|$非常之小,使得$|G_{12}(\nu)|$具有可察觉大小的所有频率 ν 都满足$|(\nu - \bar{\nu})\tau| \ll 1$,即如果

$$|\tau| \ll \frac{1}{\Delta\nu}, \tag{8}$$

则(7)式中被积函数的指数项如以 1 代替时,显然只引起很小的误差。按照 § 7.5(105),条件(8)意味着,$|\tau|$必须比光的相干时间小得多。当该条件被满足时,$|\Gamma_{12}(\tau)|$,$|\gamma_{12}(\tau)|$和 $\alpha_{12}(\tau)$分别与$|\Gamma_{12}(0)|$,$|\gamma_{12}(0)|$和 $\alpha_{12}(0)$相差无几。为便于书写,现令①

① 凡便允处,我们仍使用简缩符号,以 J_{12}代 $J(P_1, P_2)$,如此等等。

$$J_{12}=\Gamma_{12}(0)=\langle V_1(t)V_2^{\star}(t)\rangle, \tag{9a}$$

$$j_{12}=\gamma_{12}(0)=\frac{\Gamma_{12}(0)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)}\sqrt{\Gamma_{22}(0)}}=\frac{J_{12}}{\sqrt{J_{11}}\sqrt{J_{22}}}=\frac{J_{12}}{\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}}, \tag{9b}$$

$$\beta_{12}=\alpha_{12}(0)=\arg\gamma_{12}(0)=\arg j_{12}. \tag{9c}$$

在条件(8)下，§ 10.3(18)和 § 10.3(10)这时给出

$$\gamma_{12}(\tau)\approx|j_{12}|e^{i(\beta_{12}-2\pi\bar{\nu}\tau)}=j_{12}e^{-2\pi i\bar{\nu}\tau} \tag{10a}$$

$$\Gamma_{12}(\tau)\approx|J_{12}|e^{i(\beta_{12}-2\pi\bar{\nu}\tau)}=J_{12}e^{-2\pi i\bar{\nu}\tau}. \tag{10b}$$

因此，如果(8)式被满足，则可将所有公式中的 $\gamma_{12}(\tau)$ 和 $\Gamma_{12}(\tau)$ 分别用(10a)式和(10b)式右边的量来代替。特别是，这时干涉定律(1)变成

$$I(Q)\approx I^{(1)}(Q)+I^{(2)}(Q)+2\sqrt{I^{(1)}(Q)}\sqrt{I^{(2)}(Q)}|j_{12}|\cos(\beta_{12}-\delta), \tag{11}$$

而且只要干涉光束之间所引入的程差 $|s_2-s_1|=c|\tau|$ 比相干长度 $c/\Delta\nu$ 小得多，即只要

$$|\Delta\mathcal{S}|=|s_2-s_1|=\frac{\bar{\lambda}}{2\pi}\delta\ll\frac{\bar{\lambda}^2}{\Delta\lambda}, \tag{12}$$

(式中曾用了关系式 $c/\Delta\nu=\lambda^2/\Delta\lambda$)，(11)式即告成立。

方程(11)是部分相干性基础理论(准单色光情况)的基本公式，它构成本节其余部分的题材；该理论的几项应用将在 10.6 节中讨论。在其有效范围内[见条件(8)或(12)]，波场中 P_1，P_2 两点光振动之间的关联，是由 J_{12} 而非由 $\Gamma_{12}(\tau)$ 来表征，即其表征量只取决于两点的位置而与时间差 τ 无关。由(10a)式可知，在该基础理论的准确度范围内，

$$|\gamma_{12}(\tau)|\approx|j_{12}|, \tag{13}$$

所以这时 $|j_{12}|$ $(0\leqslant|j_{12}|\leqslant1)$ 代表 P_1 和 P_2 两点处光振动的相干度；而且从(11)式可以看出，j_{12} 的位相 β_{12} 代表它们的有效位相差。j_{12} 是 $\gamma_{12}(\tau)$ 的一个特别情况，但和 $\gamma_{12}(\tau)$ 名称一样，通常也被称为**复相干度**(有时也叫做复相干因子，或**等时间相干度**)；而 J_{12} 则称为**互强度**或**等时间相干函数**。

10.4.2 扩展不相干准单色光源光场互强度和相干度的计算

(a) 范西特-泽尼克定理

现在具体考虑一个扩展不相干准单色光源 σ，用它照射一个屏 $\mathcal{A}$，来计算屏上 P_1，P_2 二受射点处的互强度 J_{12} 和复相干度 j_{12}。为简单起见，使 σ 所在平面与 $\mathcal{A}$ 平行，并假定源和屏之间的媒质是均匀的。此外还假定 σ 的线性尺度远小于源和屏之间的距离 OO'(见图 10.3)，而且从源上某样点 S 到 P_1 和 P_2 的连线 SP_1 和 SP_2 与 OO' 的夹角都很小。

设想将光源 σ 分成许多面元 $d\sigma_1$，$d\sigma_2$，…，中心分别在 S_1，S_2，…，线性尺度都比平均波长 $\bar{\lambda}$ 小得多。如果 $V_{m1}(t)$ 和 $V_{m2}(t)$ 是面元 $d\sigma_m$ 在 P_1 和 P_2 处产生的复扰动，则此两点处各自的总扰动为

$$V_1(t)=\sum_m V_{m1}(t),\qquad V_2(t)=\sum_m V_{m2}(t). \tag{14}$$

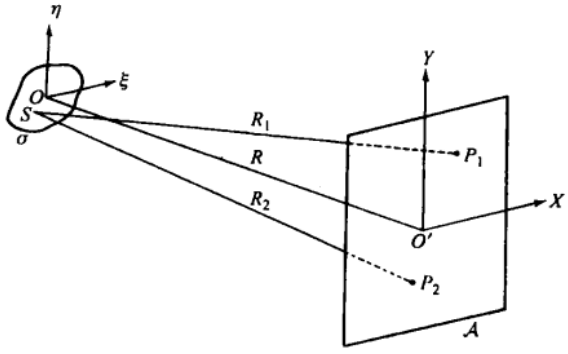


图 10.3　范西特-泽尼克定理几何布局图示

因此

$$J(P_1, P_2) = \langle V_1(t)V_2^{\star}(t)\rangle = \sum_m \langle V_{m1}(t)V_{m2}^{\star}(t)\rangle + \sum_{m\neq n}\sum \langle V_{m1}(t)V_{n2}^{\star}(t)\rangle . \tag{15}$$

现在，可以假定不同面元产生的光振动在统计上是独立的(互不相干的)，而且各自的平均值为零，因而[①]

$$\langle V_{m1}(t)V_{n2}^{\star}(t)\rangle = \langle V_{m1}(t)\rangle\langle V_{n2}^{\star}(t)\rangle = 0 \qquad \text{当} m \neq n \text{时}. \tag{16}$$

如 R_{m1} 和 R_{m2} 是 P_1 和 P_2 距源元 $\mathrm{d}\sigma_m$ 的距离，则

$$V_{m1}(t) = A_m\left(t - \frac{R_{m1}}{v}\right)\frac{\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\bar{\nu}(t-R_{m1}/v)}}{R_{m1}}, \qquad V_{m2}(t) = A_m\left(t - \frac{R_{m2}}{v}\right)\frac{\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\bar{\nu}(t-R_{m2}/v)}}{R_{m2}}, \tag{17}$$

式中 $|A_m|$ 表征第 m 个源元辐射的振动强度，而 $\arg A_m$ 表征其位相[②]，v 是光在源、屏之间媒质中的传播速度。因此

$$\begin{aligned}\langle V_{m1}(t)V_{m2}^{\star}(t)\rangle &= \left\langle A_m\left(t - \frac{R_{m1}}{v}\right)A_m^{\star}\left(t - \frac{R_{m2}}{v}\right)\right\rangle \frac{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\bar{\nu}(R_{m1}-R_{m2})/v}}{R_{m1}R_{m2}} \\ &= \left\langle A_m(t)A_m^{\star}\left(t - \frac{R_{m2}-R_{m1}}{v}\right)\right\rangle \frac{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\bar{\nu}(R_{m1}-R_{m2})/v}}{R_{m1}R_{m2}} .\end{aligned} \tag{18}$$

如果程差 $R_{m2} - R_{m1}$ 比光的相干长度小得多，则可在 $A_m^{\star}$ 的自变量中略去 $(R_{m2} - R_{m1})/v$，而由(15)，(16)和(18)三式得到

$$J(P_1, P_2) = \sum_m \langle A_m(t)A_m^{\star}(t)\rangle \frac{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\bar{\nu}(R_{m1}-R_{m2})/v}}{R_{m1}R_{m2}} . \tag{19}$$

量 $\langle A_m(t)A_m^{\star}(t)\rangle$ 表征来自源元 $\mathrm{d}\sigma_m$ 的辐射强度。在任何实际情况下，源元总数都可以假定是如此之大，以致可将光源看成是实际连续的。现在以 $I(S)$ 代表光源每单位面积的强度，即

① 不相干性总意味着含有一个有限的(虽然不一定很宽)光谱范围，而(16)式事实上对严格的单色光这一理想化情况并不成立。对于单色光，有 $V_{m1}(t) = U_{m1}\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\nu t}$，$V_{n2}(t) = U_{n2}\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\nu t}$，其中 U_{m1} 和 U_{m2} 与时间无关，所以 $\langle V_{m1}(t)V_{n2}^{\star}(t)\rangle = U_{m1}U_{n2}^{\star}$，而此量一般不为零。

② 一般，A_m 还依赖于方向，但为简单起见这里将忽略这种依赖关系。

$I(S_m)\mathrm{d}\sigma_m = \langle A_m(t)A_m^{\star}(t)\rangle$,则(19)式变成[①]

$$J(P_1, P_2) = \int_\sigma I(S)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{k}(R_1-R_2)}}{R_1R_2}\,\mathrm{d}S, \tag{20}$$

式中 R_1 和 R_2 代表一个典型源点同 P_1 和 P_2 两点之间的距离,而 $\bar{k} = 2\pi\bar{\nu}/v = 2\pi/\bar{\lambda}$ 是媒质中的波数。按照(20)式和(9b)式,这时复相干度 $j(P_1, P_2)$由下式给出:

$$j(P_1, P_2) = \frac{1}{\sqrt{I(P_1)}\sqrt{I(P_2)}}\int_\sigma I(S)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R_1-R_2)}}{R_1R_2}\,\mathrm{d}S, \tag{21a}$$

式中

$$I(P_1) = J(P_1, P_1) = \int_\sigma \frac{I(S)}{R_1^2}\,\mathrm{d}S, \qquad I(P_2) = J(P_2, P_2) = \int_\sigma \frac{I(S)}{R_2^2}\,\mathrm{d}S, \tag{21b}$$

是 P_1 点和 P_2 点处的平均强度。

这里要提请读者注意,积分(21)在形式上与不透明屏小孔球面波衍射图样复扰动计算中所出现的积分相同,但后者系出自惠更斯-菲涅耳原理,问题的性质全然不同。更精确地说,(21)式意味着,**等时间复相干度 $j(P_1, P_2)$——它描写一个被准单色不相干扩展光源所辐照的平面上定点 P_2 和变点 P_1 两处振动的关联——就等于中心位于 P_2 的某一虚拟衍射图样在相应点 P_1 处的归一化复振幅。该虚拟衍射图样系得之如下:先将所讨论的光源更换成一个与该光源同大小、同形状的衍射孔,再以一个会聚于 P_2 的球面波充照该孔,孔上波阵面的振幅分布则同该光源面上的强度分布成正比。**这个结果是首先由范西特建立的[②],之后由泽尼克做了较大推广[③]。我们将称之为范西特-泽尼克定理。

在大多数应用中,强度 $I(S)$可假设与 S 点在光源面上的位置无关(均匀强度)。这时,相应的衍射问题就简化成一个振幅均匀的球面波在一个大小和形状都与光源一样的开孔上的衍射。

设(ξ, η)是光源上样点 S 在 O 点参考轴中的坐标,并设(X_1, Y_1)和(X_2, Y_2)是 P_1 和 P_2 两点在与前者平行的 O' 点参考轴中的坐标(见图 10.3)。这时,如以 R 代表距离 OO',则

$$R_1^2 = (X_1 - \xi)^2 + (Y_1 - \eta)^2 + R^2,$$

所以

$$R_1 \approx R + \frac{(X_1 - \xi)^2 + (Y_1 - \eta)^2}{2R}. \tag{22}$$

式中只保留到 $X_1/R, Y_1/R, \xi/R$ 和 η/R 的一次项。在 R_2 方面,可得到一个完全相似的表达式,所以

$$R_1 - R_2 \approx \frac{(X_1^2 + Y_1^2) - (X_2^2 + Y_2^2)}{2R} - \frac{(X_1 - X_2)\xi + (Y_1 - Y_2)\eta}{R}. \tag{23}$$

(20)式和(21)式被积函数分母中的 R_1 和 R_2 在良好近似上可用 R 代替。此外再令

① 从现在开始,我们将常常用符号 $\mathrm{d}S, \mathrm{d}P_1, \cdots$代表中心位于 $S, P_1, \cdots$各点的面元。

② P. H. van Cittert, *Physica*, **1**(1934), 201。

③ F. Zernike, *Physica*, **5**(1938), 785。

$$\frac{(X_1-X_2)}{R}=p,\qquad \frac{(Y_1-Y_2)}{R}=q, \tag{24}$$

$$\psi=\frac{\bar{k}[(X_1^2+Y_1^2)-(X_2^2+Y_2^2)]}{2R}. \tag{25}$$

这时(21)式化为

$$j_{12}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\iint\limits_{\sigma} I(\xi,\eta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{k}(p\xi+q\eta)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{\iint\limits_{\sigma} I(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}. \tag{26}$$

因此，如果光源的线性尺度和 P_1，P_2 的间距比 P_1 和 P_2 到光源的距离小得多，则相干度 $|j_{12}|$ 等于光源强度函数的归一化傅里叶变换的绝对值。

(25)式所定义的量 ψ 有一个简单的解释。按照(23)式，它代表位相差 $2\pi(OP_1-OP_2)/\bar{\lambda}$，而当

$$OP_1-OP_2\ll\bar{\lambda}. \tag{27}$$

时，ψ 显然可予忽略。

对一个均匀的圆光源来说，设其半径为 ρ，中心在 O 点，则(26)式经积分后(见 8.5.2 节)给出

$$j_{12}=\left(\frac{2J_1(v)}{v}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}, \tag{28}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} v&=\bar{k}\rho\sqrt{p^2+q^2}=\frac{2\pi}{\bar{\lambda}}\frac{\rho}{R}\sqrt{(X_1-X_2)^2+(Y_1-Y_2)^2},\\ \psi&=\frac{2\pi}{\bar{\lambda}}\left[\frac{(X_1^2+Y_1^2)-(X_2^2+Y_2^2)}{2R}\right], \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

而 J_1 是第一类一阶贝塞尔函数[①]。根据 8.5.2 节，$|2J_1(v)/v|$ 的值先从 $v=0$ 时的 1 持续下降到 $v=3.83$ 时的零，因此随着 P_1 和 P_2 两点越来越分开，相干度将持续减小，直到完全不相干(即 $j_{12}=0$)，这时 P_1 和 P_2 分开的距离

$$P_1P_2=\sqrt{(X_1-X_2)^2+(Y_1-Y_2)^2}=\frac{0.61R\bar{\lambda}}{\rho}. \tag{30}$$

v 进一步增大时，将又出现小量的相干性，但相干度保持小于 0.14，而当 $v=7.02$ 时，将发生另一次完全不相干。因为每当 v 通过 $J_1(v)$ 的一个零点时，$J_1(v)$ 将改变一次正、负号，所以位相 $\beta_{12}=\arg j_{12}$ 这时将改变 π；结果在所形成的干涉图样上，条纹每次消失后再出现时，亮、暗条纹要交换一次位置。

函数 $2J_1(v)/v$ 的值从 $v=0$ 时的 1 持续下降，到 $v=1$ 时其值降至 0.88，这时

① 符号 J 也用来表示互强度，这当不致引起混淆，因为后者出现时总带有两个下标或带有几个自变量。

$$P_1P_2=\frac{0.16R\bar{\lambda}}{\rho}. \tag{31}$$

如果认为与理想值 1 偏离 12% 是可容许的最大偏差,则得到如下结果:**一个准单色的、均匀的、不相干的且半径为 ρ 的圆光源,在离它 R 远处的受照面上可产生一个近乎完全相干的圆形照明区,其直径等于** $0.16\bar{\lambda}/\alpha$[①],其中 $\alpha=\rho/R$ 为该光源对受照面中心所张的角半径。这一结果对估计干涉和衍射实验需要采用多大的光源甚为有用。

现以太阳为例,看看一个受其直照的屏幕上任意一点周围"相干区"的大小。太阳圆盘对地球表面张的角直径 2α 约为 $0°\ 32'\approx0.0093$ 弧度。因此,如果忽略太阳圆盘上亮度的变化,则该相干区的直径 d 近似为 $0.16\bar{\lambda}/0.0047\approx34\bar{\lambda}$。取平均波长 $\bar{\lambda}$ 为 5.5×10^{-5} 厘米时,则得到 $d\approx0.019$ 毫米。

谈到这里,自会想到应从本节相干性理论的观点和结果重新审视前面 7.3.6 节迈克耳孙的恒星角直径测量方法。按照(5)式和(13)式,干涉条纹的可见度就等于迈克耳孙测星干涉仪两个外镜(见图 7.16 中的 M_1 和 M_2)处光振动的相干度。对亮度均匀,角半径为 α 的圆星盘来说,根据(30)式,相干度为零(条纹第一次消失)时,两个外镜的最小距离应等于 $0.61\bar{\lambda}/\alpha$,这同 §7.3(43)是一致的。此外,从测量条纹的可见度和位置二量,原则上不仅能够测定星的直径,而且还能测定出星盘面上的强度分布。因为根据 10.4.1 节,测量条纹的可见度和位置就等同于测定出复相干度 j_{12} 的幅值和位相,而根据(26)式,光源面的强度分布正比于 j_{12} 的傅里叶逆变换。

7.3.6 节中曾经提到布朗和特威斯(H. B. T)对迈克耳孙测星干涉仪所做的重要修改,其装置通称**强度干涉仪**[②]。在 H. B. T 系统中,来自恒星的光被聚焦于两个光电探测器 P_1,P_2 上,通过研究这两个接收器电流输出中的涨落关联,可得到关于该恒星的信息。要完善地分析该系统的工作性能,必须考虑光电效应的量子性[③],而且还要求知道一些电子学知识,因而已超越本书范围。然而,该法的原理却不难搞懂。在理想的实验条件下(没有噪声),各光电探测器的电流输出与入射光的瞬时强度 $I(t)$ 成正比,而电流输出的涨落与 $\Delta I(t)=I(t)-\langle I(t)\rangle$ 成正比。因此,在 H. B. T 干涉仪中,实际所测的量与 $\Omega_{12}=\langle\Delta I_1\Delta I_2\rangle$ 成正比。详细的计算[④]证明,Ω_{12} 正比于相干度模数的平方,所以知道了 Ω_{12},正如同知道了 $|j_{12}|$ 一样,可获得关于恒星大小的信息。

(b) 霍普金斯公式

前面推导范西特-泽尼克公式(21)时曾经假定,光源 σ 和 P_1,P_2 两点之间的媒质是均匀的。不难将该公式推广到它种情况。例如媒质是不均匀的,或者是由折射率不同的均匀区域一一毗接组成。

---

① 早在 1865 年,E. Verdet 就估计出"相干圆"的直径略小于 $0.5R\bar{\lambda}/\rho$[*Ann. Scientif. de l'École Normale Supérieure*, **2** (1865), 291;又见其书著 *Leçons d'Optique Physique*, Tome 1 (Paris, L'Imprimerie Impériale, 1869), p. 106]。

② 关于该系统的理论及其历史记述,可参见 R. Hanbury Brown, *The Intensity Interferometer* (London, Taylor and Francis, 1974)。

③ 见 R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, *Proc. Roy. Soc.*, A, **242** (1957), 300; *ibid.*, A, **243** (1957), 291. 亦见 E. M. Purcell, *Nature*, **178** (1956), 1449; L. Mandel, *Proc. Phys. Soc.*, **72** (1958), 1037; *Progress in Optics*, Vol. 2, ed. E. Wolf (Amsterdam, North Holland Publishing Company and New York, J. Wiley and Sons, 1963), p. 181。

④ L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge, Cambridge University Press, 1995), §9.9, §9.10 和 §14.6.1。初步的、不严格的处理见 E. Wolf, *Phil Mag.*, **2** (1957), 351. 又见 J. A. Ratcliffe, *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), **19** (1956), 233。

这时可仍旧设想将光源 σ 划分成许多小面元 $\mathrm{d}\sigma_1, \mathrm{d}\sigma_2\cdots$，其中心分别位于点 $S_1, S_2, \cdots$，线性尺度均远小于平均波长 $\bar{\lambda}$。同前，设 $V_{m1}(t), V_{m2}(t)$代表面元 $\mathrm{d}\sigma_m$ 在 P_1 和 P_2 处产生的光扰动，则(15)、(16)两式仍然有效，但(17)式中每个因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{k}R_{mj}}/R_{mj}(j=1,2)$，$\bar{k}=2\pi\bar{\nu}/v$必须由一个更一般的函数来代替。现引进一个媒质**传输函数** $K(S,P,\nu)$，其定义方式与9.5.1 节中类似，它代表 S 处面元 $\mathrm{d}\sigma$ 上一个单色点源(频率为 ν，振动强度为一个单位，位相为零)在 P 处产生的复扰动。对于均匀媒质，由惠更斯-菲涅耳原理可知 $K(S,P,\nu)=-\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}/\lambda R$，其中 R 代表距离 SP，并假定 SP 与 $\mathrm{d}\sigma$ 法线的夹角足够小。由此可见，在更一般的情况下，因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{k}R_{mj}/R_{mj}}$必须用 $\mathrm{i}\bar{\lambda}K(S_m,P,\bar{\nu})$来代替，然后让光源过渡到连续分布情况，则取代(20)式而得到如下关系：

$$J(P_1,P_2)=\bar{\lambda}^2\int_\sigma I(S)K(S,P_1,\bar{\nu})K^\star(S,P_2,\bar{\nu})\mathrm{d}S. \tag{32}$$

根据(32)式和(9b)式，

$$j(P_1,P_2)=\frac{\bar{\lambda}^2}{\sqrt{I(P_1)}\sqrt{I(P_2)}}\int_\sigma I(S)K(S,P_1,\bar{\nu})K^\star(S,P_2,\bar{\nu})\mathrm{d}S, \tag{33}$$

式中 $I(P_1)=J(P_1,P_1)$和 $I(P_2)=J(P_2,P_2)$分别是 P_1 和 P_2 处的强度。

为便于后面应用，现将(32)和(33)两式表示成稍微不同的形式。令

$$\mathrm{i}\bar{\lambda}K(S,P_1,\bar{\nu})\sqrt{I(S)}=U(S,P_1),\qquad \mathrm{i}\bar{\lambda}K(S,P_2,\bar{\nu})\sqrt{I(S)}=U(S,P_2). \tag{34}$$

公式(32)和(33)这时变成

$$J(P_1,P_2)=\int_\sigma U(S,P_1)U^\star(S,P_2)\mathrm{d}S, \tag{35a}$$

$$j(P_1,P_2)=\frac{1}{\sqrt{I(P_1)}\sqrt{I(P_2)}}\int_\sigma U(S,P_1)U^\star(S,P_2)\mathrm{d}S. \tag{35b}$$

这里要提请注意，(34)式所定义的 $U(S,P)$与设在 S 处的一个严格单色点源(频率为 $\bar{\nu}$，振动强度为$\sqrt{I(S)}$，位相为零)在 P 处产生的扰动成正比。当 S 在光源 σ 上扫动时，与 S“相连带的”这个单色点源亦随之扫动而构成一个与 σ“相连带的”单色光源——一个虚构的单色源①。因此(35)式可以解释成是借助一个虚构单色源的各个源点在 P_1 和 P_2 处产生的**扰动**来表示一个扩展准单色光源的光场的互强度 $J(P_1,P_2)$和复相干度 $j(P_1,P_2)$②。

表达式(35b)是首先由霍普金斯③ 提出的，其论点曾引发颇多讨论，但其方法在解决仪器光学相干性问题中非常有用。该公式的主要得用之处在于，它同范西特-泽尼克定理一样，可允计算不相干光源光场的复相干度而无需动用取平均步骤。

10.4.3　一个例子

现在讨论一个实验，作为实例来说明前面的分析。在图 10.4 中，原光源 σ_0 通过透镜 L_0 成

① 此处原文叙述较为简略，故译文增补一句以利阅读——译者注。

② 切勿以为这样一个虚构的单色源所发的光，其**互强度**和**复相干度**亦由(35)式给出。因为，在推导(32)式的过程中曾用了关系式(16)，而该式如已解释过的，在单色辐射这一极限情况下并不成立。事实上，单色光的相干度恒等于 1。

③ H. H. Hopkins, *Proc. Roy. Soc.*, A, **208**(1951), 263。

像于小孔 σ_1 上,从 σ_1 出来的光经透镜 L_1 后变成平行。另一透镜 L_2,与 L_1 完全一样,则将干涉光束会聚到其后焦面 $\mathcal{F}$ 上的焦点 F。平面镜 M 系用来缩短整个仪器长度(见图 10.4)。如果在 L_1 和 L_2 之间的平行光束中插入一衍射掩模(一个暗屏 $\mathcal{A}$,例如经均匀曝光变黑的胶片),模上带有许多小孔,其大小、形状和分布可随意选取,则在 L_2 的焦面 $\mathcal{F}$ 上将形成掩模的夫琅禾费衍射图样,而且,在常规使用下,操作人员可一边移动或更换掩模,一边通过一显微镜观察衍射图样①。

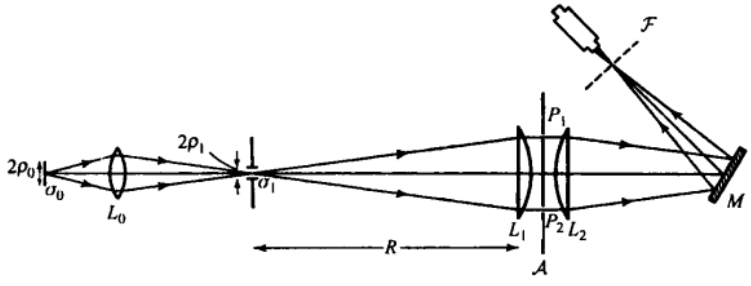


图 10.4 衍射计

如果 σ_0 是一个准单色的点源,它将在 σ_1 平面上其几何像点附近产生相干照明。该相干照明区的尺度与透镜 L_0 对单个源点所形成的爱里衍射图样 σ_A 的有效尺度同属一个量级。当 σ_0 是一个非无限小的不相干光源时,它在 σ_1 平面上产生的光分布可以看成是出自许多这种爱里图样的不相干叠加。如果按我们所假设的那样,该扩展光源经 L_0 形成的像以及小孔 σ_1 都远大于爱里图样 σ_A,则受照小孔 σ_1 本身实际上也将成为一个**不相干源**②。根据范西特-泽尼克定理,这样一种光源将在透镜 L_1 前表面上(更广泛地说,在平面 $\mathcal{A}$ 上)任何两点的光振动之间产生关联,而且在通常近似处理之下复相干度由公式(28)给出:

$$j_{12}=|j_{12}|e^{i\beta_{12}}=\frac{2J_1(v)}{v}e^{i\psi}, \tag{36a}$$

式中

$$v=\frac{2\pi}{\bar{\lambda}}\frac{\rho_1 d}{R}, \qquad \psi=\frac{2\pi}{\bar{\lambda}}\left(\frac{r_1^2-r_2^2}{2R}\right), \tag{36b}$$

其中 $d=P_1P_2$,ρ_1 是 σ_1 的半径,R 是 σ_1 和 L_1 之间的距离,而 r_1 和 r_2 是 P_1 和 P_2 的离轴距离。

如果衍射掩模 $\mathcal{A}$ 由两个小圆孔组成,两孔中心位于 P_1 和 P_2,则焦平面 $\mathcal{F}$ 上观察到的图样是由这两个孔射出、相干度为 $|j_{12}|$ 的两束部分相干光叠加而成。下面来研究当 P_1 和 P_2 间距逐渐加大时,即当二干涉光束之间的相干度改变时,$\mathcal{F}$ 上图样结构的变化。

假设 P_1 和 P_2 两点的位置对轴对称。这时 $\psi=0$,并且焦平面上 Q 点处由两束光各自单独产生的强度 $I^{(1)}(Q)$ 和 $I^{(2)}(Q)$ 这时是相等的,并各由夫琅禾费圆孔衍射公式[见 §8.5(14)]给出。如果 Q 点是与 $\mathcal{A}$ 的法线成 ϕ 角的一组衍射光线的焦点,而且如果 a 是每个孔的半径(见

① 这种仪器称为**衍射计**,主要用在以光学衍射方法求解 X 射线结构分析问题[见 C. A. Taylor, R. M. Hinde and H. Lipson, *Acta Cryst.*, **4**(1951), 261; A. W. Hanson, H. Lipson and C. A. Taylor, *Proc. Roy. Soc.* A, **218**(1953), 371; W. Hughes and C. A. Taylor, *J. Sci. Instr.*, **30**(1953), 105]。

② 这一点将在 10.6.1 节中给以定量讨论。亦见 A. T. Forrester, *Amer. J. Phys.*, **24**(1956), 194。

图 10.5)，则除去一归一化因子外，

$$I^{(1)}(Q)=I^{(2)}(Q)=\left[\frac{2J_1(u)}{u}\right]^2,\qquad u=\frac{2\pi}{\bar{\lambda}}a\sin\phi. \tag{37}$$

衍射到 Q 点的两束光之间的位相差为

$$\delta=\frac{2\pi}{\bar{\lambda}}P_2N=\frac{2\pi}{\bar{\lambda}}d\sin\phi=Cuv,\qquad C=\frac{\bar{\lambda}}{2\pi}\frac{R}{\rho_1 a}, \tag{38}$$

式中 N 是从 P_1 引向 P_2 处衍射光线的垂足。将(36)，(37)和(38)三式代入(31)式，最后得到，当 P_1 和 P_2 两处小孔相距为 d 时，焦平面上 $Q(\phi)$点的强度表达式如下：

$$I(\phi,d)=2\left[\frac{2J_1(u)}{u}\right]^2\left\{1+\left|\frac{2J_1(v)}{v}\right|\cos[\beta_{12}(v)-Cuv]\right\}, \tag{39}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\beta_{12}(v)&=0 \quad \text{当}\ \frac{2J_1(v)}{v}>0\ \text{时},\\ &=\pi \quad \text{当}\ \frac{2J_1(v)}{v}<0\ \text{时}.\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

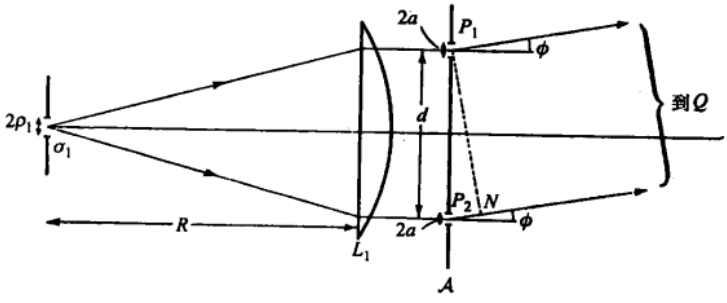


图 10.5　衍射计焦平面强度分布的计算

图 10.6 中给出这种装置所拍摄到的几张图样照片，各取不同的间距 d。从公式(39)计算的相应理论曲线一并列于图中，链线代表曲线的包络线

$$\left.\begin{aligned}I_{\text{极大}}(\phi,d)&=2\left[\frac{2J_1(u)}{u}\right]^2\left\{1+\left|\frac{2J_1(v)}{v}\right|\right\},\\ I_{\text{极小}}(\phi,d)&=2\left[\frac{2J_1(u)}{u}\right]^2\left\{1-\left|\frac{2J_1(v)}{v}\right|\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

值得关注的是，当 $\beta=\pi$ 时[情况(D)和(E)]，各图样中心的强度为相对极小，而非极大，这同我们的一般分析相一致。相干度 $|j_{12}|$ 随二孔间距 d 的变化曲线在图 10.7 中给出，系取自汤普森(Thompson)和沃耳夫的实验结果，图中字母 A，B，…，E，F 所标之处对应图 10.6 照片的 6 个 d 值。不久之前，曾有人采用高精度数字自动化系统做了这种双光束干涉实验[①]。

① D. Ambrosini, G. Schirripa Spagnolo, D. Paoletti and S. Vicalvi, *Pure Appl. Opt.* **7**(1998), 933。

(A) $d = 0.6$ 厘米
$|j_{12}| = 0.593, \beta_{12} = 0$

(B) $d = 0.8$ 厘米
$|j_{12}| = 0.361, \beta_{12} = 0$

(C) $d = 1$ 厘米
$|j_{12}| = 0.146, \beta_{12} = 0$

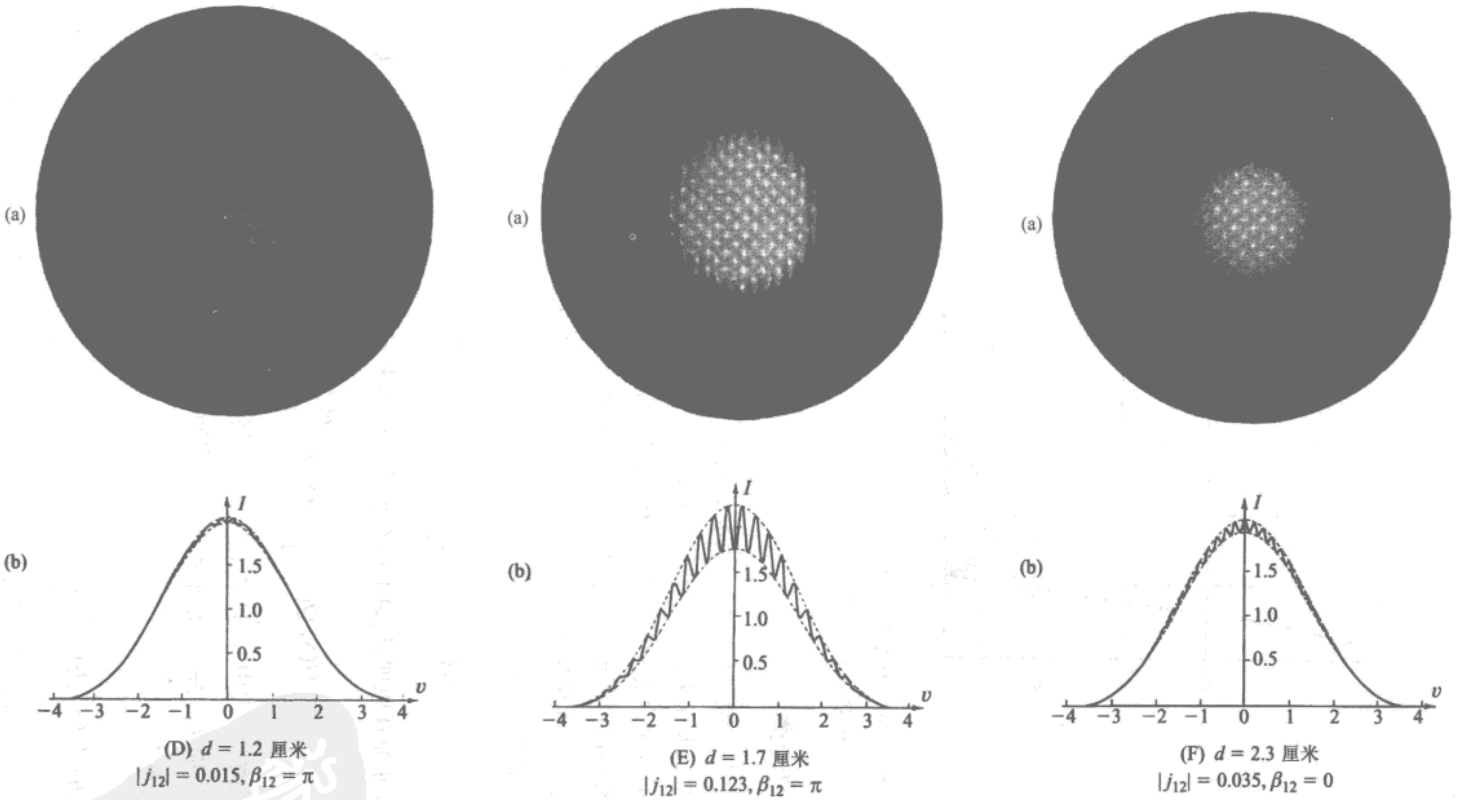


图10.6　部分相干光的双光束干涉：(a) 观察到的图样，(b) 理论的强度曲线。衍射计透镜 L_0, L_1和 L_2 的焦距：$f_0 = 20$ 厘米，$f_1 = f_2 = R = 152$ 厘米。L_0 的直径等于 5 厘米。L_0 到 σ_1 的距离：40 厘米。L_1 和 L_2 的间距：14 厘米。平面镜 M 离 L_2 的距离等于 85 厘米。小孔 σ_1 的直径 $2\rho_1$: 0.9×10^{-2} 厘米。P_1 和 P_2 处小孔的直径 $2a$: 0.14 厘米。平均波长 $\bar{\lambda} = 5790$ 埃。[引自 B. J.Thompson and E.Wolf, *J. Opt. Soc. Amer.*, **47** (1957), 895.]

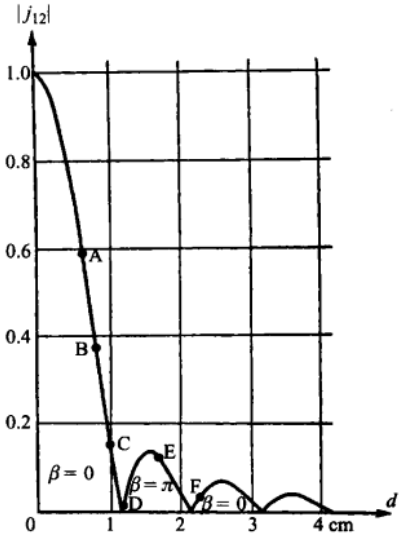


图 10.7 部分相干光的双光束干涉。衍射计中相干度 $|j_{12}|$ 随受照双孔间距 d 的变化曲线($\rho_1=0.45\times10^{-2}$ 厘米,$R=152$ 厘米,$\bar{\lambda}=5790$ 埃;假设 σ_1 的照明是不相干的)

10.4.4 互强度的传播

考虑一扩展不相干光源 σ 所发的一束准单色光,并从中截取一虚构面 $\mathcal{A}$,且假定 $\mathcal{A}$ 上全部点对的互强度为已知。现在来证明,在所设情况下能够计算出其他任何第二个面 $\mathcal{B}$ 上全部点对的互强度,不论 $\mathcal{B}$ 面受 $\mathcal{A}$ 面的光照是直接的还是通过某一光学系统。

首先假设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 之间的媒质是均匀的,并且其折射率为 1。设 $U(S,Q_1)$ 和 $U(S,Q_2)$ 是与 σ 连带的单色源上某样点 S 在 $\mathcal{B}$ 面 Q_1 和 Q_2 两点产生的光扰动(见图 10.8)。这时,根据(35)式,互强度 $J(Q_1,Q_2)$ 由下式给出:

$$J(Q_1,Q_2)=\int_\sigma U(S,Q_1)U^\star(S,Q_2)\mathrm{d}S. \tag{42}$$

现在可借助惠更斯-菲涅耳原理,用 $\mathcal{A}$ 上所有点的光扰动来表示出 $U(S,Q_1)$ 和 $U(S,Q_2)$,即

$$U(S,Q_1)=\int_{\mathcal{A}} U(S,P_1)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{k}s_1}}{s_1}\Lambda_1\,\mathrm{d}P_1. \tag{43}$$

[$U(S,Q_2)$ 的表达式类似]式中 s_1 是 $\mathcal{A}$ 上样点 P_1 到 Q_1 的距离,Λ_1 是 P_1 处的倾斜因子(在第 8 章中用 K 代表),而 $\bar{k}=2\pi\bar{\nu}/c$ 是平均波数。当倾斜角很小时,$\Lambda_1\approx-\mathrm{i}/\bar{\lambda}$。根据(43)式和 $U(S,Q_2)$ 的类似式,可有

$$U(S,Q_1)U^\star(S,Q_2)=\int_{\mathcal{A}}\int_{\mathcal{A}} U(S,P_1)U^\star(S,P_2)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{k}(s_1-s_2)}}{s_1s_2}\Lambda_1\Lambda_2^\star\,\mathrm{d}P_1\,\mathrm{d}P_2, \tag{44}$$

式中 P_1 和 P_2 两点分别独立地取积分面 $\mathcal{A}$ 上的所有位置。接下来将(44)式代入(42)式并交换积分次序。对 σ 积分所给出的正是 $J(P_1,P_2)$,由而得到

$$J(Q_1, Q_2)=\int_{\mathcal{A}}\int_{\mathcal{A}} J(P_1, P_2)\frac{e^{i\bar{k}(s_1-s_2)}}{s_1 s_2}\Lambda_1\Lambda_2^{\star}\,dP_1\,dP_2. \tag{45}$$

这就是所求的互强度传播公式，它出自泽尼克[①]。该式的推导中暗含着一种假设，即$\mathcal{A}$面上每一点都有光到达 Q_1 和 Q_2 两点。所以，如果$\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$两面之间存在任何光阑，则须加小心。这时可将积分区限制在$\mathcal{A}$面上有光送达 Q_1 和 Q_2 的那些部分，除非该光阑如此之小，以致其边部衍射影响不可忽略。这时从$\mathcal{A}$变换到$\mathcal{B}$可分成两步以计及衍射，第一步先从面$\mathcal{A}$到光阑平面，然后再从光阑平面到$\mathcal{B}$面[②]。

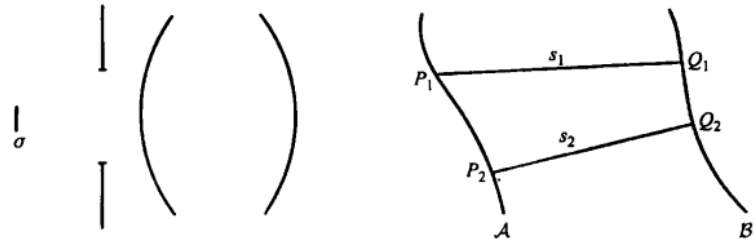


图 10.8　互强度的传播：公式(45)图示说明

在特殊情况下，当 Q_1 和 Q_2 两点重合为一点 Q 时，(45)式的 $J(Q_1, Q_2)$即化为 Q 点的强度 $I(Q)$，再用强度 $I(P_1)$，$I(P_2)$和复相干度 $j(P_1, P_2)$来代替其中 $J(P_1, P_2)$时，即得到下列强度传播公式：

$$I(Q)=\int_{\mathcal{A}}\int_{\mathcal{A}} \sqrt{I(P_1)}\sqrt{I(P_2)}\,j(P_1, P_2)\frac{e^{i\bar{k}(s_1-s_2)}}{s_1 s_2}\Lambda_1\Lambda_2^{\star}\,dP_1\,dP_2. \tag{46}$$

这一公式将 Q 点处的强度表成为光束中任意截面$\mathcal{A}$上各对面元 dP_1，dP_2 的贡献之和(见图 10.9)。来自每对面元的贡献与 P_1 和 P_2 的强度有关，并且每一贡献都要乘以复相干度因子 $j(P_1, P_2)$的适当值作为权重。公式(46)可以看成是部分相干场中有关强度传播的一种惠更斯-菲涅耳原理。刚被导出的这些公式和更基本的惠更斯-菲涅耳理论相应公式之间的这种表面相似，具有深层的意义，这将在 10.8 节部分相干性理论的严格表述中显示出来。

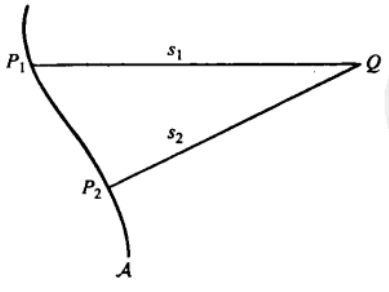


图 10.9　公式(46)图示说明

① F. Zernike, *Physica*, **5**(1938), 791。

② 前面 10.4.3 节讨论衍射计时实际已如此处理，可作参考——译者注。

如果光从$\mathcal{A}$到$\mathcal{B}$经过一光学系统,则(45)式中因子 $A e^{iks}/s$ 显然须更换为一个适当的传输函数 $K(P,Q)$,这时就得到更一般的互强度传播公式:

$$J(Q_1,Q_2)=\int_{\mathcal{A}}\int_{\mathcal{A}} J(P_1,P_2)K(P_1,Q_1)K^{*}(P_2,Q_2)\mathrm{d}P_1\,\mathrm{d}P_2. \tag{47}$$

10.5 宽带光的干涉和谱相干度;关联感生的光谱改变

接下来再考虑部分干相光双光束杨氏干涉实验。不过,与 10.3.1 节的讨论不同,这里要考查的并非两束光叠加时的强度效应,而是其对叠加区中光的频谱产生的影响。

实验装置与图 10.1 所示相同。采用同前的符号,则接收面$\mathcal{B}$上 Q 点处的复扰动由 § 10.3(2)给出,即

$$V(Q,t)=K_1V(P_1,t-t_1)+K_2V(P_2,t-t_2), \tag{1}$$

式中

$$t_1=\frac{s_1}{c},\qquad t_2=\frac{s_2}{c}, \tag{2}$$

仍然代表光从 P_1 和 P_2 处小孔行抵 Q 点所需的时间。正如我们在 § 10.3(2)讨论关联问题时所指出的,因子 K_1 和 K_2 是纯虚数。二者与 P_1 和 P_2 处小孔的尺度有关,与入射角和衍射角有关,并且各与距离 s_1 和 s_2 成反比,还与穿经小孔的光波波长成反比。然而,在通常实验条件下,在良好近似范围,K_1 和 K_2 可视为常数,且近乎相等。我们将采取此一近似并以 K 代表该一常数。

设

$$\Gamma(Q,Q,\tau)=\langle V(Q,t+\tau)V^{*}(Q,t)\rangle \tag{3}$$

为 Q 点光扰动的自相干函数。将(1)式代入(3)式,得到 $\Gamma(Q,Q,\tau)$的表达式如下:

$$\begin{aligned}\Gamma(Q,Q,\tau)=|K|^2\{&\langle V_1(t-t_1+\tau)V_1^{*}(t-t_1)\rangle+\langle V_2(t-t_2+\tau)V_2^{*}(t-t_2)\rangle\\&+\langle V_1(t-t_1+\tau)V_2^{*}(t-t_2)\rangle+\langle V_2(t-t_2+\tau)V_1^{*}(t-t_1)\rangle\},\end{aligned} \tag{4}$$

式中 $V_1(t-t_1)\equiv V(P,t-t_1)$,其他项以此类推。因为场已假定是定态的,故可移动(4)式各项平均的时间原点而得到下列 $\Gamma(Q,Q,\tau)$表达式:

$$\Gamma(Q,Q,\tau)=|K|^2[\Gamma_{11}(\tau)+\Gamma_{22}(\tau)+\Gamma_{12}(t_2-t_1+\tau)+\Gamma_{21}(t_1-t_2+\tau)]. \tag{5}$$

式中 $\Gamma_{11}(\tau)$和 $\Gamma_{22}(\tau)$分别是 P_1 点和 P_2 点光振动的自相干函数[见 § 10.3(8)],而 $\Gamma_{12}(\tau)$和 $\Gamma_{21}(\tau)$是这两点光振动的互相干函数,表征二者间的关联[见 § 10.3(7)]。现在取(5)式两边的傅里叶变换,并利用 § 10.3(31b)和 § 10.3(30)这两个结果——$\Gamma_{11}(\tau)$和 $\Gamma_{22}(\tau)$的傅里叶变换分别正比于谱密度 $S(P_1,\nu)$和 $S(P_2,\nu)$;而 $\Gamma_{12}(\tau)$和 $\Gamma_{21}(\tau)$的傅里叶变换分别正比于交叉谱密度 $G(P_1,P_2,\nu)$和 $G(P_2,P_1,\nu)$——就得到观察面$\mathcal{B}$上来光的频谱分布如下:

$$S(Q,\nu)=|K|^2[S(P_1,\nu)+S(P_2,\nu)+G(P_2,P_1,\nu)e^{i\delta}+G(P_1,P_2,\nu)e^{-i\delta}],\ (\nu\geqslant 0), \tag{6}$$

式中

$$\delta = 2\pi\nu(t_2 - t_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(s_2 - s_1). \tag{7}$$

值得注意的是，这一分布也是观测点 Q 位置的函数（见后文及图 10.10）。从交叉谱密度的定义式 § 10.3(28)可知，$G(P_1, P_2, \nu)$和 $G(P_2, P_1, \nu)$互为复共轭。因此(6)式可表成如下形式：

$$S(Q, \nu) = |K|^2\{S(P_1, \nu) + S(P_2, \nu) + 2\mathcal{R}[G(P_1, P_2, \nu)e^{-i\delta}]\}, \tag{8}$$

式中$\mathcal{R}$表示取实部。此公式可改写成更具物理意义的形式。为此，将(8)式右方最后一项表达形式稍加改变，引进归一化交叉谱密度

$$\mu_{12}(\nu) = \frac{G(P_1, P_2, \nu)}{\sqrt{S(P_1, \nu)}\sqrt{S(P_2, \nu)}}, \tag{9}$$

通称为**谱相干度**（spectral degree of coherence）。沃耳夫等[①] 曾证明，$\mu_{12}(\nu)$所量度的是 P_1 和 P_2 两点处光振动 ν 频谱分量的关联。附录 H 中证明，$|\mu_{12}(\nu)|$的上限为 1，即对其自变量的所有值而言

$$0 \leqslant |\mu_{12}(\nu)| \leqslant 1. \tag{10}$$

其中极值 1 代表完全关联（谱完全相干），而极值零代表完全不关联（谱完全不相干）。

这里务必将（时间）复相干度 $\gamma_{12}(\tau)$同谱相干度 $\mu_{12}(\nu)$区分开；$\gamma_{12}(\tau)$是量度空-时域（space-time domain）的相干性，而 $\mu_{12}(\nu)$是量度空-频域（space-frequency domain）的相干性[②]。

采用定义(9)时，Q 点谱密度公式(8)可表成下列形式

$$S(Q, \nu) = |K|^2\{S(P_1, \nu) + S(P_2, \nu) + 2\sqrt{S(P_1, \nu)}\sqrt{S(P_2, \nu)}|\mu_{12}(\nu)|\cos[\beta_{12}(\nu) - \delta]\}, \tag{11}$$

式中

$$\beta_{12}(\nu) = \arg\mu_{12}(\nu). \tag{12}$$

(11)式中第一项$|K|^2 S(P_1, \nu)$显然代表单独打开 P_1 点小孔时 Q 点所将观测到的谱密度，第二项$|K|^2 S(P_2, \nu)$的意义类此。现在以 $S^{(1)}(Q, \nu)$和 $S^{(2)}(Q, \nu)$代表这两个谱密度，

$$S^{(1)}(Q, \nu) = |K|^2 S(P_1, \nu), \qquad S^{(2)}(Q, \nu) = |K|^2 S(P_2, \nu), \tag{13}$$

则方程(11)变成

$$S(Q, \nu) = S^{(1)}(Q, \nu) + S^{(2)}(Q, \nu) + 2\sqrt{S^{(1)}(Q, \nu)}\sqrt{S^{(2)}(Q, \nu)}|\mu_{12}(\nu)|\cos[\beta_{12}(\nu) - \delta]. \tag{14}$$

公式(14)叫做**任何相干态光束相叠加的光谱干涉定律**。需要指出的是，该公式在数学形式上与任何相干态光束相叠加的干涉定律 § 10.4(1)相同，但二者的物理意义完全不同。§ 10.4(1)描述

---

① E. Wolf, *J. Opt. Soc. Amer.*, **A3**(1986), 76, Sec. 3。又见 L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge, Cambridge University Press, 1995), Sec. 4.7.2。

② 在特殊情况下，$\gamma_{12}(\tau)$和 $\mu_{12}(\nu)$之间存在简单的关系。例如，如果光的频谱范围足够窄，或者用滤光方法使之足够窄，并且频率中心位于 $\bar{\nu}$，则可证明 $\mu_{12}(\bar{\nu}) \approx \gamma_{12}(0)$[E. Wolf, *Opt. Lett.*, **8**(1983), 250]。A. T. Friberg and E. Wolf, *Opt. Lett.*, **20**(1995), 623 讨论了更普遍情况下这两个相干度的关系。

叠加区中所观测的平均强度的空间变更,而(14)式描述两束光的叠加如何影响光谱。

在大多数实际情况下,可以假设 $S^{(1)}(Q,\nu)\approx S^{(2)}(Q,\nu)$。这时光谱干涉定律变成

$$S(Q,\nu)=2S^{(1)}(Q,\nu)\{1+|\mu_{12}(\nu)|\cos[\beta_{12}(\nu)-\delta]\}. \tag{15}$$

这个公式内含两个结果:第一,频率固定于某值时,谱密度 $S(Q,\nu)$ 随 Q 点在观测面$\mathcal{B}$上的横向位置呈正弦变化,其幅度和位相取决于谱相干度 $\mu_{12}(\nu)$(通常为复量)之值;第二,Q 点固定于观测面$\mathcal{B}$上某处时,谱密度 $S(Q,\nu)$一般将不同于谱密度 $S^{(1)}(Q,\nu)$,即不同于只有两孔之一通光时 Q 点处光的谱密度,二者之差也取决于谱相干度。

从某一方面来说,"强度"干涉定律 § 10.4(1)和上述光谱干涉定律(14)是彼此互补的。前者表明,**窄带**准单色光叠加时平均强度发生明显改变;后者则表示,二宽带光束叠加时光谱可发生明显变更。更仔细分析时即可看到,在前者情况下光谱不发生明显改变,而在后者情况下强度不出现明显变更。再有一点,前者在两束光程差超过相干长度时即无干涉条纹形成,而后者不论程差 $s_2-s_1(=\lambda\delta/2\pi)$如何总有光谱调变发生,这由(14)式显然可见[①]。

如果手边掌握关于双孔入射光场相干性质的足够数据,则可计算出谱相干度。在其他情况下,则可通过测量光谱 $S(Q,\nu)$和 $S^{(1)}(Q,\nu)$,由光谱干涉定律(14)确定谱相干度[②]。

图 10.10 中展示出从谱干涉定律(14)算出的 $S(Q,\nu)$,其中 Q 点在观测面上的位置 x 分别取 0,0.25 厘米,0.5 厘米,曲线图的横坐标 $\omega=2\pi\nu$。照射双孔的光源设为一圆形均匀黑体,温度在 3000°K,其直径对孔平面轴点的张角为 2α,α 取 0 及 4×10^{-4}二值。可以看到,在两束光叠加处,谱发生巨烈变化,并且随着离轴距离 x 的增大呈现越来越快的振荡;此外,α 改变时 $S(Q,\nu)$随之改变。这种光谱改变的实验验证已经有几篇文章进行了报道[③],其中一篇所采用的装置和结果如图 10.11 所示。

适所讨论的光谱调制现象是光的波动性及其相干特性的一个结果,因此可以期望同样的频谱改变也可发生在其他种类的波。的确,在声学[④] 和中子干涉测量术里[⑤] 都已证实其存在。

上面所讨论的两束宽带光叠加产生的光谱改变,是光场空间相干性对其光谱影响最为简单的例子。沃耳夫曾更普遍地证明,部分相干源所产生的光,其频谱甚至可在自由空间的传播途中发生改变[⑥],有时改变还相当可观。这种改变可表现为谱线或向长波移位,或向短波移位(例见图 10.12),还可能导致谱线增宽或变窄,或者压制掉某些原谱线并产生一些新谱线。这种由关联感生的频谱改变在理论和实验两方面均已开展了广泛研究[⑦],对此,它文有稍详讨论[⑧]。

---

① G. S. Agarwal, *Found. Phys.*, **25**(1995), 219。一文中曾讨论互补空间中的干涉。

② 关于其方法和步骤,详细描述见于 D. F. V. James and E. Wolf, *Opt. Commun.*, **145**(1998), 1。

③ M. Santarsiero and F. Gori, *Phys. Lett. A*, **167**(1992), 123; H. C. Kandpal, J. S. Vaishya, M. Chander, K. Saxena, D. S. Mehta and K. Joshi, *Phys. Lett. A* **167**(1992), 114。

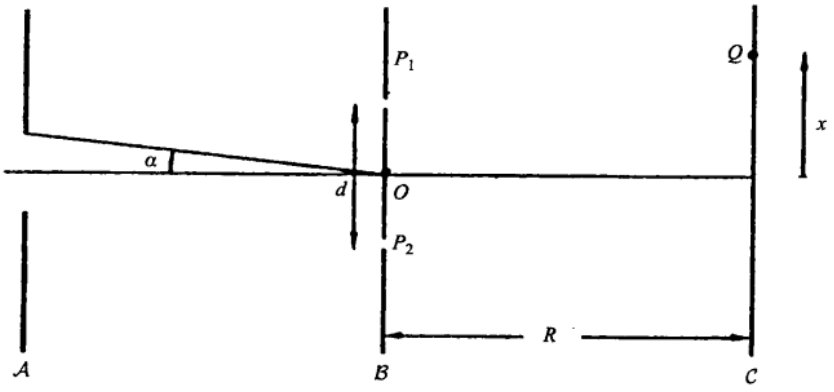
④ M. F. Bocko, D. H. Douglass and R. S. Knox, *Phys. Rev. Lett.*, **58**(1987), 2649。

⑤ 见,例如 H. Rauch, *Phys. Lett. A*, **173**(1993), 240 和 D. L. Jacobson, S. A. Werner and H. Rauch, *Phys. Rev. A* **49**(1994), 3196。

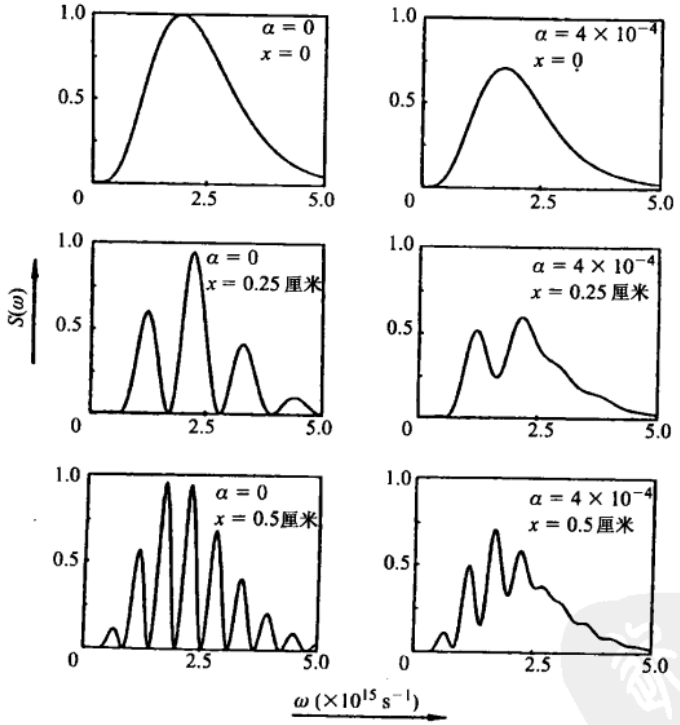
⑥ E. Wolf, *Phys. Rev. Lett.* **56**(1986), 1370。

⑦ 对该课题的综合评述,见 E. Wolf 和 D. F. V. James, *Rep. Progr. Phys.*, **59**(1996), 771。

⑧ L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge, Cambridge University Press, 1995), Sec. 5.8。



(a)



(b)

图 10.10　(a)宽带光杨氏干涉实验有关符号，光发自一圆形均匀光源，其直径对双孔平面$\mathcal{B}$上轴点的张角为 2α，下图(b)中的各计算曲线均取 $d = 0.1$ 厘米，$R = 150$ 厘米；(b)不同 Q 点处的光谱，x 是 Q 点位置的离轴距离，横坐标 $\omega = 2\pi\nu$，入射光光谱假设是一个温度为 3000°K的黑体光谱[引自 D. F. V. James and E. Wolf, *Phys. Lett. A*, **157**(1991), 6]

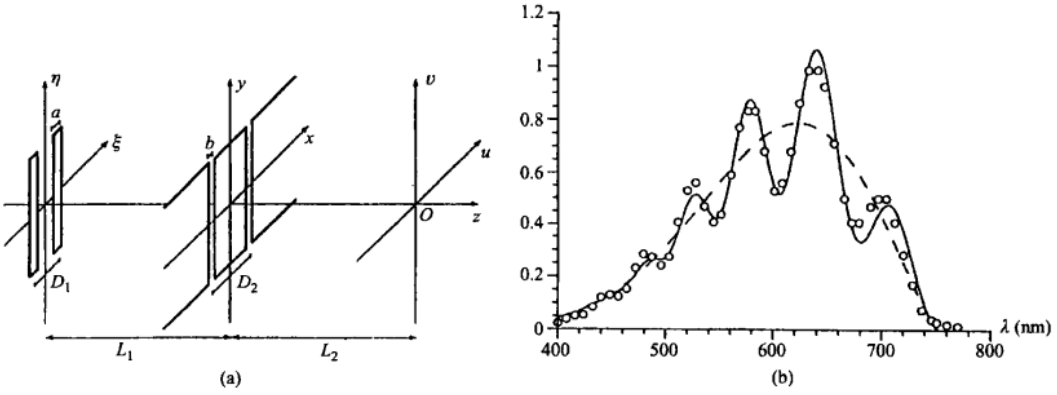


图 10.11 宽带光杨氏双缝干涉实验中关联感生的光谱改变:(a)符号和配置图:光源由两个互不相干的条带组成,位于ξ-η平面,带边平行于η方向,x-y平面含有两个平行于y方向的狭缝;(b)虚线代表当二缝仅有一个开通时到达u-v平面上O点的光所形成的谱$S^{(1)}(O,\nu)$,系由测量值做最佳拟合曲线而成。实线代表两个缝都开通时到达O点的光所形成的谱$S(0,\nu)$,是计算值。小圆表示测量值。计算及测量所取的条件为$D_1=0.68$毫米,$D_2=3.4$毫米,$a=0.026$毫米和$b=0.11$毫米。谱函数曲线图的横坐标采用的是波长,而非频率[引自M. Santarsiero and F. Gori, *Phys. Lett*, *A*, **167**(1992), 123]

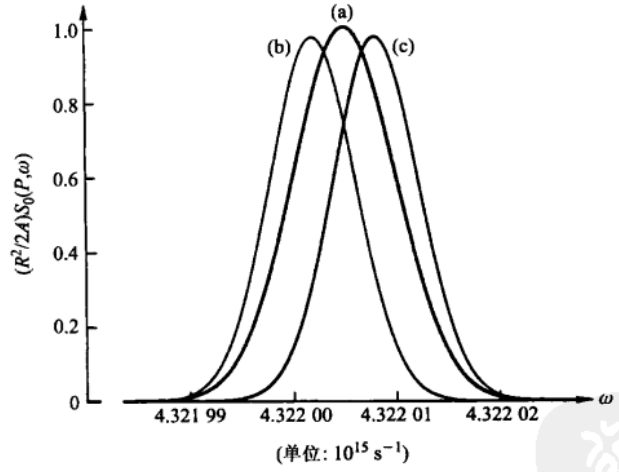


图 10.12 发自两个小源的光叠加于与二源等距R的P点时所产生的关联感生谱线移位。不计比例常数时,源的光谱$S_0(\omega)=\exp[-(\omega-\omega_0)^2/2\delta_0^2]$,$(\omega=2\pi\nu)$,$\omega_0=4.322\,01\times10^{15}$秒$^{-1}$(汞线$\lambda=4358.33$埃),$\delta_0=5\times10^9$秒$^{-1}$。(a)二源无关联时($\mu_{12}\equiv0$)$P$点的光谱;(b),(c)二源存在关联时$P$点的光谱,取谱相干度$\mu_{12}=a\exp[-(\omega-\omega_0)^2/2\delta_1^2]-1$,$a=1.8$,$\delta_1=7.5\times10^9$秒$^{-1}$,其中(b)的中心频率$\omega_1=\omega_0-2\delta_0$("红移"线),(c)的谱线中心频率$\omega_1=\omega_0+2\delta_0$("蓝移"线)。引自E. Wolf, *Phys. Rev. Lett.*, **58**(1987), 2646

10.6　几项应用

10.6.1　扩展不相干准单色光源像中的相干度

现在来研究部分相干光成像问题。作为开场话题，以讨论物、像之间的相干度关系为宜。因此考虑一个扩展不相干光源经一共轴光学系统形成的像。由于衍射（一般还由于像差），来自每一源点的光在成像时并不集中于一点，而是散开分布在一有限区域，因此导致像平面上光振动中间产生一定的关联度。上述这些“像点图样”邻近者相互错杂交叠，因而像平面上相互靠得足够近的点所接受到的光照，内中相干和不相干成分兼而有之。

假定 σ 是一个均匀的、准单色不相干的圆形光源，半径为 ρ，处于折射率为 n 的均匀物空间中，所发射的光的平均（真空）波长为 $\bar{\lambda}_0$。此外，设以 D 代表物平面和入射光瞳平面之间的距离。像方对应各量将以加撇的相同字母来代表。

设 d 为入射光瞳上 P_1，P_2 两点的间距。假设 $\rho/D \ll 1$，$d/D \ll 1$，并且 $OP_1 - OP_2 \ll \bar{\lambda}_0$，其中 O 是光源 σ 的轴点[①]。这时，根据 § 10.4(28)，复相干度 $j(P_1, P_2)$ 由下式给出：

$$j(P_1, P_2) = \frac{2J_1(v)}{v}, \tag{1}$$

$$v = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}} d \sin\alpha = \frac{2\pi n}{\bar{\lambda}_0} d \sin\alpha, \tag{2}$$

式中 $\alpha \approx \sin\alpha \approx \rho/D$ 是从入射光瞳中心来看时光源 σ 的角半径（见图 10.13）。

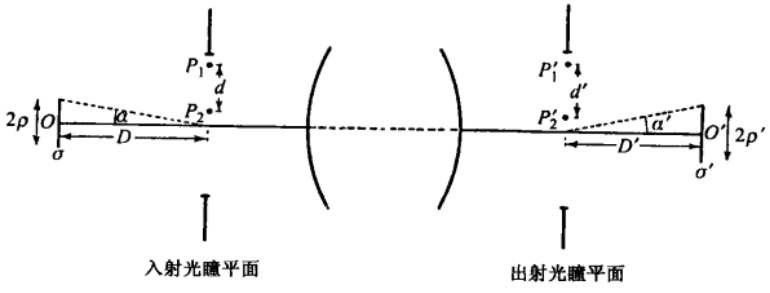


图 10.13　不相干光源像场相干度的计算

要确定出射光瞳平面上任何点对的复相干度，本可应用互强度传播公式 § 10.4(47)。然而，这里我们可用比较简单的方法行之如下。

如果 $U(S, P_1)$ 和 $U(S, P_2)$ 是连带单色光源（见 479 页）上某源点 S 在 P_1 和 P_2 产生的复扰动，则 S 在出射光瞳上共轭点 P_1' 和 P_2' 处产生的复扰动，在良好近似程度上由几何光学公式

$$U(S, P_1') = K_{11}U(S, P_1), \qquad U(S, P_2') = K_{22}U(S, P_2) \tag{3}$$

① 如果最后这一条件不被满足，$|j(P_1, P_2)|$ 将保持不变，但按照 § 10.4(28)，$j(P_1, P_2)$ 的位相要增加 $\psi = 2\pi[OP_1 - OP_2]/\bar{\lambda}_0$。

给出,其中 K_{11} 和 K_{22} 是传输因子(transmission factor)①。在几何光学精度范围内,这两个因子分别表征源点 S 所发的光线从 P_1 到 P_1' 和从 P_2 到 P_2' 的传播。借助霍普金斯公式 § 10.4(35b),P_1' 和 P_2' 两点处振动的复相干度

$$j(P_1', P_2') = \frac{1}{\sqrt{I(P_1')}\sqrt{I(P_2')}} \int_\sigma U(S, P_1') U^*(S, P_2') \mathrm{d}S. \tag{4}$$

而两个光瞳平面上的强度 $I(P_1')$ 和 $I(P_1)$ 存在如下关系:

$$I(P_1') = \int_\sigma |U(S, P_1')|^2 \,\mathrm{d}S = |K_{11}|^2 \int_\sigma |U(S, P_1)|^2 \,\mathrm{d}S = |K_{11}|^2 I(P_1), \tag{5}$$

$I(P_2')$ 和 $I(P_2)$ 之间的关系类此。由(3),(4),(5)三式可有

$$\begin{aligned} j(P_1', P_2') &= \frac{K_{11}K_{22}^*}{|K_{11}||K_{22}|} \frac{1}{\sqrt{I(P_1)}\sqrt{I(P_2)}} \int_\sigma U(S, P_1) U^*(S, P_2) \mathrm{d}S \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Phi_{11} - \Phi_{22})} j(P_1, P_2), \end{aligned} \tag{6}$$

式中 Φ_{11} 和 Φ_{22} 分别是 K_{11} 和 K_{22} 的位相。该关系式意味着,**入射光瞳上任何两点处的相干度 $|j|$ 都等于出射光瞳上共轭点处的相干度;而两个对应点对的复相干度的位相之差为 $\Phi_{11} - \Phi_{22}$,即几何位相差 $2\pi\{[P_1P_1'] - [P_2P_2']\}/\bar{\lambda}_0$。**

设

$$v' = \frac{2\pi n'}{\bar{\lambda}_0} d' \sin\alpha'. \tag{7}$$

因为 P_1' 是 P_1 的共轭点,P_2' 是 P_2 的共轭点,所以由史密斯-亥姆霍兹定理[见 § 4.4(49)]可知,在高斯光学的精度范围内②,$v' = v$。因此,由(1)式和(6)式,可将出射光瞳上点对 P_1' 和 P_2' 的复相干度写成

$$j(P_1', P_2') = \left[\frac{2J_1(v')}{v'}\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Phi_{11} - \Phi_{22})}. \tag{8}$$

如果按照 § 10.4(31)中的规定,以 $|j| \geqslant 0.88$ 一值作为足够接近完全相干的近似下限;并忆及当 $v \leqslant 1$ 时 $|2J(v)/v| \geqslant 0.88$,则可得如下结论:**一个不相干准单色的圆形光源在出射光瞳上所可产生的相干照明区,其直径**

$$d'_{\text{相干}} \approx \frac{0.16\bar{\lambda}_0}{n' \sin\alpha'}, \tag{9}$$

式中 $2\alpha' \approx 2\rho'/\mathrm{D}'$ 是光源像的直径 $2\rho'$ 对出射光瞳中心处的张角(D' 是像平面和出射光瞳平面之间的距离),而 **$\bar{\lambda}_0/n' = \bar{\lambda}$ 是像空间中光的平均波长。**

现在将(9)式表成略为不同的形式。设 r'_A 代表该系统所具爱里图样的第一暗环半径③:

$$r'_A = \frac{0.61\bar{\lambda}_0}{n' \sin\theta'}, \tag{10}$$

① 这里"传输因子"一词与 § 9.5(13)的频率响应函数(传输因子)含义不同——译者注。

② 这意味着 v 和 v' 代表赛德尔变量的一种特别选择(见 5.2 节)。

③ 这里所说的爱里图样是指会聚于系统像平面上 O' 点的球面波在出射光瞳圆孔(半径为 a')上产生的衍射图样。根据 § 8.5.2(16),将其中第一项的 w,a 和 λ 分别换成这里的 r'_A/D',a' 和 $\bar{\lambda}_0/n'$,即得到(10)式——译者注。

式中 $n'\sin\theta'\approx n'a'/D'$ 是像方的数值孔径，a' 是出射光瞳的半径。这时根据(9)，(10)两式，$d'_{相干}/r'_A\approx 0.16\sin\theta'/0.61\sin\alpha'$，所以

$$d'_{相干}\approx 0.26a'\left(\frac{r'_A}{\rho'}\right). \tag{11}$$

从这一公式可以由“物理参量”r'_A，ρ'，a'之值估算出出射光瞳上相干受照区的大小，其中 r'_A 为系统所具爱里图样的第一暗环半径，ρ' 为光源几何像的半径，a' 为出射光瞳的半径。

如果 $d'_{相干}\geqslant 2a'$，即如若

$$\rho'\leqslant 0.13r'_A. \tag{12}$$

则出射光瞳以及像平面的照明都将几乎是**相干的**。

如果 $d'_{相干}\ll 2a'$，即当

$$\rho'\gg 0.13r'_A, \tag{13}$$

时，则出射光瞳上的相干受照区将远小于出射光瞳本身，因而在这种情况下出射光瞳的照明实际上是**不相干的**。这时，像平面上点对 Q'_1，Q'_2 的复相干度将和一个不相干源所产生的复相干度基本相同；该不相干光源的大小、形状和位置与出射光瞳的都一样，且其表面强度分布与出射光瞳面上的强度分布也一样，因此，根据范西特-泽尼克定理[见 § 10.4(21)]，

$$j(Q'_1,Q'_2)=\frac{1}{\sqrt{I(Q'_1)}\sqrt{I(Q'_2)}}\int_{\mathcal{A}'}I(P')\frac{e^{i\bar{k}(s_1-s_2)}}{s_1s_2}\,dP', \tag{14}$$

$$I(Q'_1)=\int_{\mathcal{A}'}\frac{I(P')}{s_1^2}\,dP',\qquad I(Q'_2)=\int_{\mathcal{A}'}\frac{I(P')}{s_2^2}\,dP'. \tag{15}$$

式中积分遍及出射光瞳 $\mathcal{A}'$，s_1 和 s_2 分别代表 $\mathcal{A}'$ 上样点 P' 到 Q'_1 点和 Q'_2 点的距离[见图 10.14(a)]。强度 $I(P')$ 则可借助关系式(5)从入射光瞳上共轭点处的强度 $I(P)$ 来计算。因为该关系式中不出现传输因子的位相，所以 $j(Q'_1,Q'_2)$ 与系统的像差无关。由于 $I(P')$ 实际上是常数；此外，如果 Q'_1 和 Q'_2 两点相互靠得足够近，则(14)式化为

$$j(Q'_1,Q'_2)=\frac{2J_1(u')}{u'},\qquad u'=\frac{2\pi n'}{\bar{\lambda}_0}\frac{a'}{D'}h', \tag{16}$$

式中 h' 是 Q'_1 和 Q'_2 之间的距离。

在一般情况下，当条件(12)和条件(13)无一能够成立时，出射光瞳的照明是部分相干的，其复相干度由(8)式来表征。这时像平面上各点对的复相干度必须借助传播定律 § 10.4(45)来计算，结果得到

$$j(Q'_1,Q'_2)=\frac{1}{\sqrt{I(Q'_1)}\sqrt{I(Q'_2)}}\int_{\mathcal{A}'}\int_{\mathcal{A}'}\sqrt{I(P'_1)}\sqrt{I(P'_2)}\left[\frac{2J_1(v')}{v'}\right]\frac{e^{i[\Phi_{11}-\Phi_{22}+\bar{k}(s_1-s_2)]}}{s_1s_2}$$
$$\times\Lambda_1\Lambda_2^{*}\,dP'_1\,dP'_2. \tag{17}$$

强度 $I(Q'_1)$ 和 $I(Q'_2)$ 也都可由这个公式来计算，只要利用 $j(Q'_1,Q'_1)=j(Q'_2,Q'_2)=1$ 这项结果。因为(17)式的被积函数含有传输因子的位相 Φ_{11} 和 Φ_{22}，所以复相干度这时与系统的像差有关。

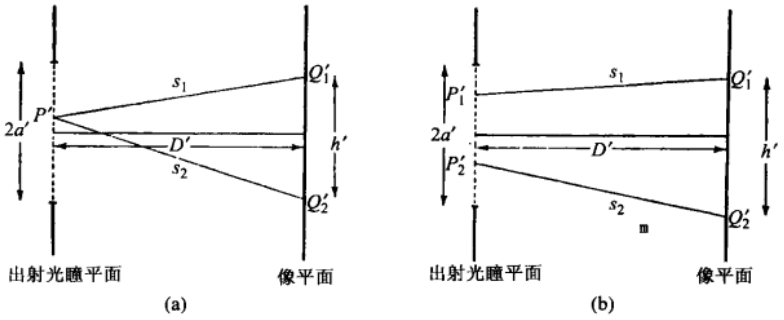


图 10.14 像平面上等时复相干度 $j(Q_1', Q_2')$的计算:(a)不相干的出射光瞳照明;(b)部分相干的出射光瞳照明

10.6.2 聚光器对显微镜分辨率的影响

要在显微镜下检查不发光的小物,物须加以照明。如果像通常情况那样,物近乎透明,则照明从其背后进行,即采用**透射照明**,并随后将物的透射光聚焦到显微镜物镜的像平面上。为使照明光充分集中,通常采用一辅助透镜系统——聚光器。照明方法有各式各样。这里将简要介绍两种普通采用的方法,即所谓**中肯照明**(critical illumination)和**科勒照明**,并讨论它们所能达到的分辨本领。

(a) 中肯照明

在这种照明方法中,将一个均匀的灼亮光源置放在紧贴视场光阑背后,并用聚光器使之成像到显微镜物镜的物平面上(见图 10.15)。调节视场光阑孔径的大小,使其经聚光器所成之像正好覆盖住整个视场。

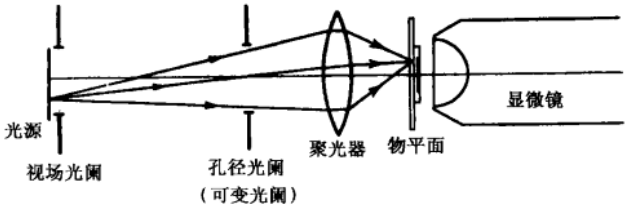


图 10.15 中肯照明

聚光器像平面(即显微镜物镜的物平面)上的受照范围比单个源点产生的爱里图样的有效尺度大得多(用 10.6.1 节的符号表示时即 $\rho' \gg r_A'$),所以由 10.6.1 节可知,在这种情况下显微镜物镜物平面上任何点对的**等时复相干度 j_{12}等同于一个与聚光器孔径同大小、同位置的不相干光源产生的复相干度**;而且其值与聚光器的像差无关。显然,分辨本领这时仅取决于物上入射光的相干度(由该因子 j_{12}来表征)和显微镜物镜的性能。因此**聚光器的像差对显微镜的分辨本领没有影响**。这个重要结果是首先由泽尼克[①] 以不同方式确立的。在此之前,人们广为相信,将聚光器高度校正会有利于提高分辨本领。上述结果证明此种观点实属不确。

① F. Zernike, *Physica*, **5**(1938), 794。

为了估计聚光器的大小对分辨率的影响，现考虑物平面上的两个小孔 $P_1(X_1, Y_1)$ 和 $P_2(X_2, Y_2)$。采用同前的假设时，到达这两个孔的光的复相干度由(16)这种形式的公式给出：

$$j(P_1, P_2) = \frac{2J_1(u_{12})}{u_{12}}, \qquad u_{12} = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}_0}\sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}\, n'_c \sin\theta'_c, \tag{18}$$

式中 $n'_c \sin\theta'_c$ 是聚光器在显微镜物镜这方的数值孔径。

设 $P(X, Y)$ 是物平面上任何其他一点，P' 是它经物镜所成之像。如果假设该物镜实际没有像差，则在物镜像平面上单独来自 P_1 的光的强度分布为一爱里图样，中心位于 P_1 的像点 P'_1。因此，如果 $n_0 \sin\theta_0$ 是物镜的数值孔径，则单独由 P_1 抵达 P' 的光所产生的强度 $I^{(1)}(P')$，除一常数因子外，等于

$$I^{(1)}(P') = \left[\frac{2J_1(v_1)}{v_1}\right]^2, \qquad v_1 = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}_0}\sqrt{(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2}\, n_0 \sin\theta_0. \tag{19a}$$

而单独由小孔 P_2 抵达 P' 的光所产生的强度 $I^{(2)}(P')$ 亦由类似的表达式给出：

$$I^{(2)}(P') = \left[\frac{2J_2(v_2)}{v_2}\right]^2, \qquad v_2 = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}_0}\sqrt{(X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2}\, n_0 \sin\theta_0. \tag{19b}$$

由此可知，当两孔 P_1 和 P_2 同时经由聚光器来照明时，显微镜物镜像平面上的强度 $I(P')$ 系由两束部分相干光叠加而成。各束光的强度由(19)式给出，而两束光之间的复相干度则由(18)式给出。将这些方程代入 § 10.4(11)，即得到 $I(P')$ 的表达式。如果同时还假设 P' 非常靠近 P_1 和 P_2 的几何像(更精确地说，设 $|s_2 - s_1| = |[P_2P'] - [P_1P']| \ll \bar{\lambda}$)，$I(P')$ 即为

$$I(P') = \left[\frac{2J_1(v_1)}{v_1}\right]^2 + \left[\frac{2J_1(v_2)}{v_2}\right]^2 + 2\left[\frac{2J_1(mv_{12})}{mv_{12}}\right]\left[\frac{2J_1(v_1)}{v_1}\right]\left[\frac{2J_1(v_2)}{v_2}\right], \tag{20}$$

式中

$$m = \frac{n'_c \sin\theta'_c}{n_0 \sin\theta_0}, \qquad v_{12} = \frac{u_{12}}{m} = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}_0}\sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}\, n_0 \sin\theta_0. \tag{21}$$

从(20)式可以得到一些颇为重要的结论。当 mv_{12} 是方程 $J(mv_{12}) = 0$ 的一个根时，$(mv_{12}) = 0$ 除外，(20)式中的乘积项为零，因而该式简化为

$$I(P') = \left[\frac{2J_1(v_1)}{v_1}\right]^2 + \left[\frac{2J_1(v_2)}{v_2}\right]^2. \tag{22}$$

这时像平面上的强度分布与 P_1 和 P_2 受**不相干**照明时相同。特别而言，当 $m = 1$，而 v_{12} 是 $J_1(v_{12}) = 0$ 的一个非零根时，情况就是如此；其中 $m = 1$ 意指二数值孔径相等，而 $J_1(v_{12}) = 0$ 的非零根意指 P_1 和 P_2 二者几何像的间距等于物镜爱里图样的任一暗环半径。

当聚光器的数值孔径很小时($m \to 0$)，则 $2J_1(m\ v_{12})/m\ v_{12} \approx 1$，因而(20)式简化为

$$I(P') = \left[\frac{2J_1(v_1)}{v_1} + \frac{2J_1(v_2)}{v_2}\right]^2. \tag{23}$$

这时不论二孔间距如何，像平面上的强度分布都和完全**相干**照明时相同。

从公式(20)能够研究显微镜物镜像平面上的强度分布对二数值孔径之比 m 的依赖关系。现特别考虑 P_1' 和 P_2' 之间中点处的强度。前面 8.6.3 节讨论不相干照明显微镜成像的分辨限时,曾根据圆孔衍射情况的瑞利判据,将两像点间的中点强度比两像点之一的强度小 26.5%(即鞍—峰强度比为 0.735)作为两物点刚刚被分辨开的判据[见 §8.6.3(52)]。这里——部分相干照明,我们仍将采取此一判据,即 P_1' 和 P_2' 中点处的强度比 P_1' 或 P_2' 处小 26.5%时,P_1 和 P_2 算刚刚被分辨开,并将此极限间距 $(P_1P_2)_{极限}$ 表示成与不相干照明[见 §8.6(32)]和相干照明[见 §8.6(55)]两种情况相同的形式:

$$(P_1P_2)_{极限}=L(m)\frac{\bar{\lambda}_0}{n_0\sin\theta_0}. \tag{24}$$

根据上述判据可从(20)式计算出 $L(m)$,其曲线如图 10.16 所示。可以看到最佳分辨本领在 $m\approx1.5$,即聚光器的数值孔径大约是物镜的 1.5 倍。这时 L 的值略小于相干照明时的值 0.61。

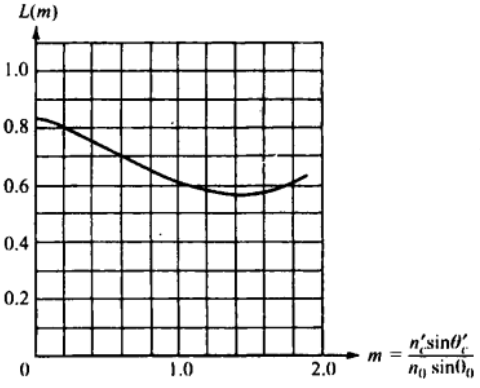


图 10.16 聚光器孔径对分辨两个等亮度小孔的影响[引自 H. H. Hopkins and P. M. Barham, *Proc. Phys. Soc.*, **63**(1950), 72]

(b) 科勒照明

科勒(Köhler)所提出的一种照明方法[①],其装置如图 10.17 所示。其中,在紧靠视场光阑的地方,置有一辅助会聚透镜,以将光源 σ 成像在聚光器的前焦面上,此处则置放聚光器所用的可变光阑。因此从每一源点发出的光线经聚光器后将成为平行光束。此种布局的优点在于:光源亮度分布的不均匀不致造成视场照明强度也不均匀。

要估计科勒照明方法所能达到的分辨限,必须先确定显微镜物镜物平面上各点对的复相干度。设

$$U(S,P_1)=A_1e^{i\phi_1},\qquad U(S,P_2)=A_2e^{i\phi_2}, \tag{25}$$

是显微镜物镜物平面上 $P_1(X_1,Y_1)$ 和 $P_2(X_2,Y_2)$ 两点处由 σ 的连带单色源(见 479 页)某一源点 S 产生的复扰动。显然

$$\phi_1-\phi_2=\frac{2\pi}{\bar{\lambda}_0}[p(X_1-X_2)+q(Y_1-Y_2)], \tag{26}$$

① A. Köhler, *Zs. f. wiss. Mikrosk.*, **10**(1893), 433; **16**(1899), 1。

式中 p 和 q 是来自源点 S 并通过 P_1 和 P_2 的两条平行光线的头两个光线分量。如果聚光器系统有像差，则这两条光线将不是严格平行的，但是由于我们只考虑相互紧挨着的点，所以该影响可予忽略。将(25)和(26)两式代入霍普金斯公式 § 10.4(35b)，从而得到

$$\left.\begin{aligned} j(P_1, P_2) &= \frac{1}{\sqrt{I(P_1)}\sqrt{I(P_2)}}\int_\sigma A_1 A_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{k}_0[p(X_1-X_2)+q(Y_1-Y_2)]}\,\mathrm{d}S, \\ I(P_1) &= \int_\sigma A_1^2\,\mathrm{d}S, \qquad I(P_2) = \int_\sigma A_2^2\,\mathrm{d}S. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

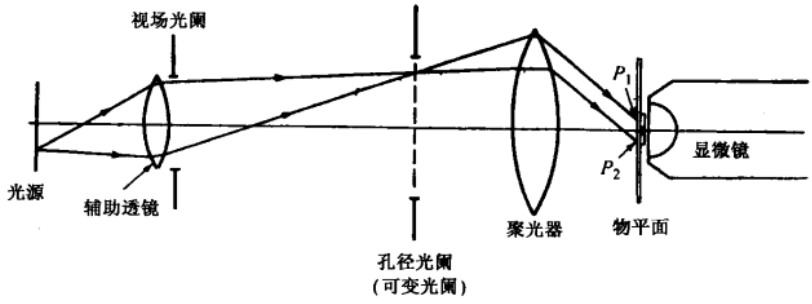


图 10.17　科勒照明方法

因为每一个源点 $S(\xi, \eta)$ 都有一对光线分量 (p, q) 与之对应，所以对 σ 的积分可变换成对立体角

$$p^2 + q^2 \leqslant n_c'^2 \sin^2\theta_c', \tag{28}$$

的积分，该立体角系由入射到物上的那些光线所形成。在高斯光学精度范围内，关系式 $\xi = \xi(p, q)$，$\eta = \eta(p, q)$ 是线性的；事实上，从 § 4.3(10) 的公式不难看出，$\xi = fp$，$\eta = fq$，式中 f 是聚光器系统的焦距。因此该变换关系的雅可比行列式 $\partial(\xi, \eta)/\partial(p, q)$ 为常数。超出几何光学区域的范围，雅可比行列式一般将在积分区内改变，但是这一改变可假设大大慢于指数项的改变，因而可予忽略。如果我们还忽略 A_1 和 A_2 的缓慢改变，则(27)式简化为

$$j(P_1, P_2) = \frac{\iint_\Omega \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{k}_0[p(X_1-X_2)+q(Y_1-Y_2)]}\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q}{\iint_\Omega \mathrm{d}p\,\mathrm{d}q}, \tag{29}$$

式中 Ω 代表区域(28)。计算出(29)式就得到表达式

$$j(P_1, P_2) = \frac{2J_1(u_{12})}{u_{12}}, \qquad u_{12} = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}_0}\sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}\, n_c' \sin\theta_c'. \tag{30}$$

这个公式和中肯照明情况的公式(18)完全等同。因此，**不论所采用的是中肯照明还是科勒照明，显微镜物平面上入射光的复相干度都一样**。人们常将中肯照明指称为“不相干的”，而将科勒照明指称为“相干的”，从上述结果来看，这颇不相宜。由此可见，公式(20)对这两种照明方式都有效，而图 10.16 对这两种情况都同样适用。

10.6.3 部分相干准单色照明成像[①]

(a) 互强度在光学系统中的传输

9.5 节介绍了扩展物成像研究的几种一般方法。9.5.1 节所研究的是完全相干照明情况，9.5.2 节则是完全不相干照明情况。在第一种情况下，所考虑的是复振幅经由系统的传输，在第二种情况下，所考虑的是强度的传输。现在来研究部分相干准单色照明这种更一般的情况。这种情况下适合来考虑的量则是互强度。

我们将采用和 §9.5(1)一样的归一化标度(赛德尔)坐标，所以物点及其高斯像点具有相同的坐标数。设 $J_0(x_0, y_0; x_0', y_0')$是物平面上$(x_0, y_0)$，$(x_0', y_0')$两点的互强度。如果 $K(x_0, y_0; x_1, y_1)$是系统的传输函数，则根据传播定律 §10.4(47)，像平面上的互强度由下式给出：

$$J_1(x_1, y_1; x_1', y_1') = \iiiint_{-\infty}^{+\infty} J_0(x_0, y_0; x_0', y_0') K(x_0, y_0; x_1, y_1) K^{\star}(x_0', y_0'; x_1', y_1') \mathrm{d}x_0\, \mathrm{d}y_0\, \mathrm{d}x_0'\, \mathrm{d}y_0'. \tag{31a}$$

式中积分只是在形式上遍及无穷域，因为对于物平面上没有光发送到像平面的那些点，J_0 为零。

如同 9.5 节中一样，我们假设物如此之小，以致它成为系统的一个等晕区，即对它上面的所有点来说，$K(x_0, y_0; x_1, y_1)$在良好近似上可用一个仅依赖于差值$(x_1 - x_0)$和$(y_1 - y_0)$的函数，比如 $K(x_1 - x_0; y_1 - y_0)$来代替。这时方程(31a)变成

$$J_1(x_1, y_1; x_1', y_1') = \iiiint_{-\infty}^{+\infty} J_0(x_0, y_0; x_0', y_0') K(x_1 - x_0, y_1 - y_0) \times K^{\star}(x_1' - x_0', y_1' - y_0') \mathrm{d}x_0\, \mathrm{d}y_0\, \mathrm{d}x_0'\, \mathrm{d}y_0'. \tag{31b}$$

现在将 J_0, J_1 和乘积 $KK^{\star}$ 各表成四维傅里叶积分的形式：

$$J_0(x_0, y_0; x_0', y_0') = \iiiint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_0(f, g; f', g') \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(fx_0 + gy_0 + f'x_0' + g'y_0')} \mathrm{d}f\, \mathrm{d}g\, \mathrm{d}f'\, \mathrm{d}g', \tag{32a}$$

$$J_1(x_1, y_1; x_1', y_1') = \iiiint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_1(f, g; f', g') \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(fx_1 + gy_1 + f'x_1' + g'y_1')} \mathrm{d}f\, \mathrm{d}g\, \mathrm{d}f'\, \mathrm{d}g', \tag{32b}$$

$$K(x, y) K^{\star}(x', y') = \iiiint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{M}(f, g; f', g') \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(fx + gy + f'x' + g'y')} \mathrm{d}f\, \mathrm{d}g\, \mathrm{d}f'\, \mathrm{d}g'. \tag{32c}$$

这时由傅里叶反演公式可得到

$$\mathcal{J}_0(f, g; f', g') = \iiiint_{-\infty}^{+\infty} J_0(x_0, y_0; x_0', y_0') \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(fx_0 + gy_0 + f'x_0' + g'y_0')} \mathrm{d}x_0\, \mathrm{d}y_0\, \mathrm{d}x_0'\, \mathrm{d}y_0', \tag{33}$$

$\mathcal{J}_1$ 和 $\mathcal{M}$ 方面也存在完全类似的关系式。

---

① 本节内容的考虑，部分基于霍普金斯和 Dumontet 的研究，见 H. H. Hopkins, *Proc. Roy. Soc.*, A, **217**(1953), 408 和 P. Dumontet, *Publ. Sci. Univ. d'Alger*, B, **1**(1955), 33。

对(31b)式应用卷积定理，即得到关系式

$$\mathcal{J}_1(f, g; f', g') = \mathcal{J}_0(f, g; f', g')\mathcal{M}(f, g; f', g'). \tag{34}$$

这一公式意味着，如果物平面和像平面上的互强度各表成为四维空间谐波(space-harmonic)分量，包括所有可能频率$(f, g; f', g')$分量的叠加，则像中的每个分量仅依赖于物中的对应分量，且二分量之比等于$\mathcal{M}$。因此，在本近似的准确度范围内，**光学系统对互强度的作用等效于一个四维线性滤波器的作用**。$\mathcal{M}$叫做**部分相干准单色照明的频率响应函数**。

频率响应函数$\mathcal{M}$和系统的光瞳函数之间存在一个简单的关系。如果按照 §9.5(10c)将系统的传输函数 K 表成二维傅里叶积分形式

$$K(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}(f, g)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(fx+gy)}\,\mathrm{d}f\,\mathrm{d}g, \tag{35}$$

并将(35)式的 K 代入(32c)式的逆变换，则获得

$$\mathcal{M}(f, g; f', g') = \mathcal{K}(f, g)\mathcal{K}^{\star}(-f', -g'). \tag{36}$$

但是，根据 §9.5(13)，$\mathcal{K}(f, g)$等于系统的光瞳函数 $G(\xi, \eta)$在高斯参考球(半径为 R)上点

$$\xi = \lambda R f, \qquad \eta = \lambda R g \tag{37}$$

处的值。因此部分相干准**单色照明的频率响应函数$\mathcal{M}$与系统的光瞳函数 G 之间存在如下公式关系**：

$$\mathcal{M}\left(\frac{\xi}{\lambda R}, \frac{\eta}{\lambda R}; \frac{\xi'}{\lambda R}, \frac{\eta'}{\lambda R}\right) = G(\xi, \eta)G^{\star}(-\xi', -\eta'). \tag{38}$$

因为光瞳函数在出射光瞳区域外各点恒为零，故由此可知，空间频率高于某值时所对应的空间频谱分量，系统将不予传输。如果出射光瞳是一个圆，其半径为 a，则当 $\xi^2 + \eta^2 > a^2$ 或 $\xi'^2 + \eta'^2 > a^2$ 时，$G(\xi, \eta)\,G^{\star}(-\xi', -\eta')$为零。因此，互强度中属于下列频率$(f, g)$或$(f', g')$的频谱分量，系统将不予传输[①]。其中

$$f^2 + g^2 > \left(\frac{a}{\bar{\lambda}R}\right)^2 \quad \text{或} \quad f'^2 + g'^2 > \left(\frac{a}{\bar{\lambda}R}\right)^2, \tag{39}$$

式中 $\bar{\lambda}$ 代表像空间中的平均波长。

表 10.1 列出有关部分相干照明成像的两个基本公式，同时列入 9.5 节相干照明和不相干照明的相应公式以便比较。不相干照明方面的公式亦可由一般公式(34)，(36)和(38)导出，只要假设 J_0 的形式为 $J_0(x_0, y_0; x_0', y_0') = I_0(x_0, y_0)\delta(x_0' - x_0)\delta(y_0' - y_0)$，其中 δ 是狄拉克 δ 函数(见附录 D)。计算只需按步进行即可，但颇为冗长，故这里不能给出。有关完全单色(因而完全相干)照明这一特别情况的公式，推导则稍容易一些，只要注意到在该情况下互强度的形式为$U_0(x_0, y_0)\,U_0^{\star}(x_0', y_0')$。这时 J_0 的傅里叶变换$\mathcal{J}_0$ 同样分解成两个因子之积，如再应用(34)式和(36)式，即可证明复扰动 U_0 各频谱分量通过系统的传输公式同表 10.1 中第一行所列一致。

---

① 如果系统的角孔径很小并满足正弦条件，则按 9.5 节(453 页)中结果，有 $a/\bar{\lambda}R \approx n_0 \sin\theta_0/M\bar{\lambda}_0$，式中 $n_0 \sin\theta_0$ 是系统的数值孔径，M 是高斯放大率，$\bar{\lambda}_0$ 是真空中的平均波长。

表 10.1 从其空间频率响应方面看光学系统的作用(假设物区属等晕区)

照明	基本量	从物到像的变换	频率响应函数
相干	复扰动 $U(x, y)$	$\mathcal{U}_1(f, g)=\mathcal{U}_0(f, g)\mathcal{K}(f, g)$	$\mathcal{K}(f, g)$
不相干	强度 $I(x, y)$	$\mathcal{J}_1(f, g)=\mathcal{J}_0(f, g)\mathcal{L}(f, g)$	$\mathcal{L}(f, g)=\iint_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{K}(f'+f, g'+g)\times\mathcal{K}^{\star}(f', g')\mathrm{d}f'\,\mathrm{d}g'$
部分相干	互强度 $J(x, y; x', y')$	$\mathcal{J}_1(f, g; f', g')=\mathcal{J}_0(f, g; f', g')\mathcal{M}(f, g; f', g')$	$\mathcal{M}(f, g; f', g')=\mathcal{K}(f, g)\mathcal{K}^{\star}(-f', -g')$

$\mathcal{K}(f,g)$是系统传输函数 $K(x,y)$的傅里叶逆变换,与光瞳函数 $G(\xi,\eta)$存在如下关系:$\mathcal{K}(\xi/\lambda R,\eta/\lambda R)=G(\xi,\eta)$,式中 R 是高斯参考球的半径,λ 是像空间中的平均波长。

(b) 透射照明下物的成像

假定物平面上某区为一透明或半透明物所居,并以部分相干准单色光从其后进行照明。另外将假设该照明光系发自一不相干光源,途经一照明系统(聚光器)后抵达物平面。

按照 8.6.1 节中的方式,用一个适当的透射函数 $F_0(x_0, y_0)$来表征该物。如果以 $U_0^-(S; x_0, y_0)$代表连带单色光源(见 479 页)某源点 S 在物平面上(x_0, y_0)点产生的扰动,则来自该源点并通过物之后的扰动由下式给出:

$$U_0(S; x_0, y_0)=U_0^-(S; x_0, y_0)F(x_0, y_0). \tag{40}$$

根据 § 10.4(35a),入射到物上的光的互强度为

$$J_0^-(x_0, y_0; x_0', y_0')=\int_\sigma U_0^-(S; x_0, y_0)U_0^{-\star}(S; x_0', y_0')\mathrm{d}S, \tag{41a}$$

而由物射出的光的互强度为

$$J_0(x_0, y_0; x_0', y_0')=\int_\sigma U_0(S; x_0, y_0)U_0^{\star}(S; x_0', y_0')\mathrm{d}S, \tag{41b}$$

由于(40)式,故有

$$J_0(x_0, y_0; x_0', y_0')=F(x_0, y_0)F^{\star}(x_0', y_0')J_0^-(x_0, y_0; x_0', y_0'). \tag{42}$$

我们将只注意下列重要情况:入射光互强度 J_0^- 的 4 个坐标变量 x_0, y_0, x_0', y_0'只以差值 $x_0'-x_0, y_0'-y_0$ 的组合形式出现,即

$$J_0^-(x_0, y_0; x_0', y_0')=J_0^-(x_0-x_0', y_0-y_0'). \tag{43}$$

10.6.2 节中曾经讲过,这种情况对中肯照明和 Köhler 照明二者均可适用。如果保留前面的假设,即物非常之小,可成为系统的一个不晕区,则由(31b)式得到像平面上的强度 $I_1(x_1, y_1)=J_1(x_1, y_1; x_1, y_1)$为

$$I_1(x_1, y_1)=\iiiint_{-\infty}^{+\infty}J_0^-(x_0-x_0', y_0-y_0')F(x_0, y_0)F^{\star}(x_0', y_0')K(x_1-x_0, y_1-y_0)\times K^{\star}(x_1-x_0', y_1-y_0')\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0\,\mathrm{d}x_0'\,\mathrm{d}y_0'. \tag{44}$$

现在将 F 和 J_0^- 表成二维傅里叶积分的形式：

$$F(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f, g)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(fx+gy)}\,\mathrm{d}f\,\mathrm{d}g, \tag{45a}$$

$$J_0^-(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_0^-(f, g)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(fx+gy)}\,\mathrm{d}f\,\mathrm{d}g. \tag{45b}$$

如果将(45a)式的 F 和 $F^\star$ 代入(44)式，并应用恒等式 $f'x_0 - f''x_0' = (f' - f'')x_1 - f'(x_1 - x_0) + f''(x_1 - x_0')$ 与 g 和 y 方面的一个相似恒等式，再引入新的积分变量 $u' = x_1 - x_0$，$u'' = x_1 - x_0'$，则得到 I_1 的表达式如下：

$$\begin{aligned} I_1(x_1, y_1) = &\iiiint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{T}(f', g'; f'', g'')\mathcal{F}(f', g')\mathcal{F}^\star(f'', g'') \\ &\times \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}[(f'-f'')x_1+(g'-g'')y_1]}\,\mathrm{d}f'\,\mathrm{d}g'\,\mathrm{d}f''\,\mathrm{d}g'', \end{aligned} \tag{46}$$

式中

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(f', g'; f'', g'') &= \iiiint_{-\infty}^{+\infty} J_0^-(u'' - u', v'' - v')K(u', v')K^\star(u'', v'') \\ &\quad \times \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}[(f'u'+g'v')-(f''u''+g''v'')]}\,\mathrm{d}u'\,\mathrm{d}v'\,\mathrm{d}u''\,\mathrm{d}v'' \\ &= \iiiint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_0^-(f, g)K(u', v')K^\star(u'', v'') \\ &\quad \times \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}[(f+f')u'+(g+g')v'-(f+f'')u''-(g+g'')v'']}\,\mathrm{d}f\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}u'\,\mathrm{d}v'\,\mathrm{d}u''\,\mathrm{d}v'' \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_0^-(f, g)\mathcal{K}(f + f', g + g')\mathcal{K}^\star(f + f'', g + g'')\mathrm{d}f\,\mathrm{d}g. \end{aligned} \tag{47}$$

(47)式中从第二行到第三行曾用(45b)式的 J_0^- 代入，第三行到第四行曾用了(35)式的逆变换。

由此可见，(46)式中物的影响(由 $\mathcal{F}$ 表征)与照明($\mathcal{J}_0^-$)和系统($\mathcal{K}$)的联合作用是分开的。采用均匀照明时(I_0^- = 常数)，从物射出的光的强度将正比于 $|F|^2$，而如果成像是理想的，则像平面上的强度将由下式(除一常数因子外)给出：

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1(x_1, y_1) &= F(x_1, y_1)F^\star(x_1, y_1) \\ &= \iiiint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f', g')\mathcal{F}^\star(f'', g'')\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}[(f'-f'')x_1+(g'-g'')y_1]}\,\mathrm{d}f'\,\mathrm{d}g'\,\mathrm{d}f''\,\mathrm{d}g''. \end{aligned} \tag{48}$$

方程(46)和(48)将真实强度 I_1 和理想强度 $\tilde{I}_1$ 各表成为物的空间频谱中所有频率对(f', g')，(f'', g'')的贡献之和。前者情况中的每一贡献是后者中相应贡献的 $\mathcal{T}$ 倍。由此可见，除非对于所有 f', g', f'', g'' 值，$\mathcal{T}$ 为常数且二频谱分量 $\mathcal{F}(f', g')$，$\mathcal{F}(f'', g'')$ 均不为零，有关物的一些

信息在传输过程中将被丢失或被窜改。函数$\mathcal{T}$叫做系统(工作于所给定的透射照明条件时)的传输交叉系数(transmission cross-coefficient)。

现在把强度本身的话题搁置一边而转向考虑它的频谱$\mathcal{J}(f,g)$。为导出相应的公式,以$e^{2\pi i(fx_1+gy_1)}$乘(46)式两边并对x_1和y_1进行积分。然后如应用傅里叶积分定理[或者更快捷地,应用狄拉克δ函数的傅里叶积分表示(见附录D)],则得到

$$\mathcal{J}_1(f,g)=\iint_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{T}(f'+f,g'+g,f',g')\mathcal{F}(f'+f,g'+g)\mathcal{F}^{\star}(f',g')\mathrm{d}f'\,\mathrm{d}g'. \tag{49}$$

对于(48)式所表示的理想情况,则有

$$\tilde{\mathcal{J}}_1(f,g)=\iint_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(f'+f,g'+g)\mathcal{F}^{\star}(f',g')\mathrm{d}f'\,\mathrm{d}g'. \tag{50}$$

公式(49)和(50)将$\mathcal{J}_1$和$\tilde{\mathcal{J}}_1$表示成物结构的各个空间频率(f',g')的贡献之和。由此可见,这时$\mathcal{T}$起着同前相似的作用。它表征着各个贡献中由于物的照明方式和成像系统的传输特性而产生的变异。

当点$\xi=\bar{\lambda}Rf,\eta=\bar{\lambda}Rg$位于出射光瞳区域之外时,响应函数$\mathcal{K}(f,g)$为零,因此由(47)式可知,对足够高的频率来说,$\mathcal{T}$等于零。如果出射光瞳是一个圆,半径为$a$,则乘积$\mathcal{K}(f+f',g+g')\mathcal{K}^{\star}(f+f'',g+g'')$以及$\mathcal{T}(f',g';f'',g'')$惟一不为零的情况是:在$f-g$平面上,以$O'(-f',-g')$点和$O''(-f'',-g'')$点为中心并同以$\sqrt{f^2+g^2}=a/\bar{\lambda}R$为半径的两个圆$C'$和$C''$能够相交而具有一个公共区(见图10.18)。为了具体说明照明的作用,现假定所采用的是中肯照明或者是科勒照明,并且聚光器的数值孔径$n'_c\sin\theta'_c$是物-像系统数值孔径$n_0\sin\theta_0$的m倍。这时,根据(18)式或(30)式,物上照明光束的互强度J_0^-为

$$J_0^-(x_0-x_0',y_0-y_0')=\left[\frac{2J_1(mv)}{mv}\right]I_0^-, \tag{51}$$

式中

$$v=\frac{2\pi}{\bar{\lambda}_0}\sqrt{(x_0'-x_0)^2+(y_0'-y_0)^2}\,n_0\sin\theta_0, \tag{52}$$

而I_0^-是入射光的强度(假设是均匀的)。(51)式右边的函数则是下列函数的傅里叶变换(见8.5.2节):

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{J}_0^-(f,g)=\text{常数}&=\left(\frac{\bar{\lambda}_0^2}{\pi m^2n_0^2\sin^2\theta_0}\right)I_0^- && \text{当 } f^2+g^2<\frac{m^2n_0^2\sin^2\theta_0}{\bar{\lambda}_0^2}\text{ 时,}\\ &=0 && \text{当 } f^2+g^2>\frac{m^2n_0^2\sin^2\theta_0}{\bar{\lambda}_0^2}\text{ 时.}\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

在图10.18中,在C所代表的圆之外$\mathcal{J}_0^-$为零,故由此得知,给定$(-f',-g')$和$(-f'',-g'')$时,f-g平面上只有位于C',C''和C三圆公共区域内的那些点(阴影线所示)才对$\mathcal{T}$的积分式(47)有贡献。

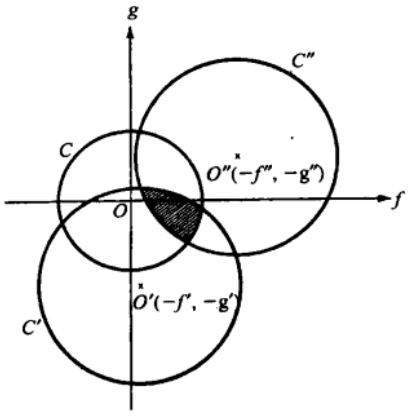


图 10.18　成像系统(其出射光瞳为圆形,并径为 a)传输交叉系数$\mathcal{T}(f',g';f'',g'')$的有效积分区域(阴影线所示)。假设物用准单色光经一聚光器进行透射照明,准单色光的平均波长为 $\bar{\lambda}_0$,聚光器的数值孔径为 $mn_0\sin\theta_0$,其中 $n_0\sin\theta_0$ 是成像系统的数值孔径。C' 和 C'' 是两个圆,半径同为 $a/\bar{\lambda}R\approx n_0\sin\theta_0/M\bar{\lambda}_0$,圆心分别位于 $O'(-f',-g')$ 点和 $O''(-f'',-g'')$ 点。C 是一个中心位于原点,半径为 $mn_0\sin\theta_0/\bar{\lambda}$ 的圆(R = 高斯参考球的半径,M = 高斯放大率)

10.7　有关互相干的几个定理

在 10.4 节和 10.6 节中,我们讨论了准单色光的干涉和衍射,并将问题限制在时间延迟 τ 远小于光的相干时间这种情况。我们看到,这时在良好近似上,关联函数对 τ 的依赖只是通过一个时谐项,即其形式呈

$$\Gamma(P_1,P_2,\tau)\approx J(P_1,P_2)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\bar{\nu}\tau},\qquad \gamma(P_1,P_2,\tau)\approx j(P_1,P_2)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\bar{\nu}\tau}.$$

采取这种近似的初级相干性理论,能够圆满地说明干涉图样"中心"($\tau=0$)处的可见度由于光源的扩展(不是一个点)而出现的下降。然而,它不能说明可见度随程差的增大而出现的变化。要圆满地描述时间延迟 τ 与相干时间相比不容忽略的情况,必须采用更为准确的关联函数表达式。下面的讨论就是来对前面几个公式做适当推广。

10.7.1　不相干光源光场互相干的计算

考虑一个扩展的(不一定是准单色的)不相干光源 σ 产生的波场,设 $V_1(t)$ 和 $V_2(t)$ 是场中 P_1 点和 P_2 点处的扰动。首先假设 σ 和 P_1,P_2 之间的媒质是均匀的。

同 10.4.2 节中一样,设想将光源 σ 划分成许多面元 $\mathrm{d}\sigma_1,\mathrm{d}\sigma_2,\cdots$,其中心分别在 $S_1,S_2,\cdots$,线性尺度均远小于有效波长。如果 $V_{m1}(t)$ 和 $V_{m2}(t)$ 是源元 $\mathrm{d}\sigma_m$ 对 V_1 和 V_2 的贡献,则

$$V_1(t)=\sum_m V_{m1}(t),\qquad V_2(t)=\sum_m V_{m2}(t), \tag{1}$$

而互相干函数 $\Gamma(P_1,P_2,\tau)$ 由下式给出:

$$\Gamma(P_1,P_2,\tau)=\langle V_1(t+\tau)V_2^*(t)\rangle=\sum_m\langle V_{m1}(t+\tau)V_{m2}^*(t)\rangle. \tag{2}$$

(2)式中右边$\langle V_{m1}(t+\tau)V_{n2}^{\star}(t)\rangle$$(m\neq n)$这种项均已被略去,因为不同源元的贡献可假设为互不相干。

接下来的处理步骤则与10.4.2节中有所不同。根据§10.3(32),(2)式中取和符号下的每一项可表成如下形式:

$$\langle V_{m1}(t+\tau)V_{m2}^{\star}(t)\rangle = 4\int_0^{\infty} G_m(P_1, P_2, \nu)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\nu\tau}\,\mathrm{d}\nu \tag{3}$$

式中

$$G_m(P_1, P_2, \nu) = \operatorname*{Lim}_{T\to\infty}\left[\frac{\overline{\upsilon_{mT}(P_1, \nu)\upsilon_{mT}^{\star}(P_2, \nu)}}{2T}\right] \tag{4}$$

是光扰动$V_{m1}=V_m(P_1,t)$,$V_{m2}=V_m(P_2,t)$的互谱密度,而其右边的υ_m代表源元$\mathrm{d}\sigma_m$所产生的扰动中某一频率分量的贡献①。因为媒质假定是均匀的,所以该贡献以球面波形式传播。因此

$$\upsilon_{mT}(P_1, \nu) = a_{mT}(\nu)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR_{m1}}}{R_{m1}}, \qquad \upsilon_{mT}(P_2, \nu) = a_{mT}(\nu)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR_{m2}}}{R_{m2}}, \tag{5}$$

式中R_{m1}和R_{m2}(假设均远大于有效波长)代表源点S_m到P_1和P_2的距离,而$k2\pi\upsilon/\upsilon=2\pi/\lambda$。$a_m(\nu)$的幅$|a_m(\nu)|$代表来源元$\mathrm{d}\sigma_m$所发的$\nu$频率分量的振动强度,而$\arg a_m(\nu)$代表其位相。由(4),(5)两式,有

$$G_m(P_1, P_2, \nu) = \left[\operatorname*{Lim}_{T\to\infty}\frac{\overline{|a_{mT}(\nu)|^2}}{2T}\right]\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R_{m1}-R_{m2})}}{R_{m1}R_{m2}}. \tag{6}$$

右边大括号中的项代表源元$\mathrm{d}\sigma_m$所发的光的谱密度。同10.4.2节中一样,假设源元数目如此之大,以致可将该光源当做实际连续的来处理。因此,如设$I(S_m,\nu)\,\mathrm{d}\sigma_m\mathrm{d}\nu = 4\operatorname{Lim}_{T\to\infty}[\overline{|a_{mT}(\nu)|^2}/2T]\mathrm{d}\nu$,即如设$I(S,\nu)$代表光源上每单位面积每单位频段的强度,则根据(2),(3)和(6)三式,即有

$$\Gamma(P_1, P_2, \tau) = \sqrt{I(P_1)}\sqrt{I(P_2)}\gamma(P_1, P_2, \tau) = \int_0^{\infty}\mathrm{d}\nu\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\nu\tau}\int_{\sigma} I(S, \nu)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R_1-R_2)}}{R_1R_2}\,\mathrm{d}S, \tag{7}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} I(P_1) &= \Gamma(P_1, P_1, 0) = \int_0^{\infty}\mathrm{d}\nu\int_{\sigma}\frac{I(S, \nu)}{R_1^2}\,\mathrm{d}S,\\ I(P_2) &= \Gamma(P_2, P_2, 0) = \int_0^{\infty}\mathrm{d}\nu\int_{\sigma}\frac{I(S, \nu)}{R_2^2}\,\mathrm{d}S, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

是P_1和P_2处的强度,而R_1和R_2是源点S到这两点的距离。方程(7)是范西特-泽尼克公式§10.4(20),§10.4(21)的推广。

如果光源和P_1,P_2两点之间的媒质是不均匀的,则可按10.4节中方法进行处理。这只要将因子$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR_j}/R_j(j=1,2)$换成$\mathrm{i}cK(S,P_j,\nu)/\nu$即可,其中$K$是该媒质的相应传输函数。这时取代(7)式而得到

---

① 具体言之,即$\upsilon_m(P_1,\nu)$是$V_m(P_1,t)$的傅里叶逆变换,$V_m(P_2,\nu)$是V_m的傅里叶的逆变换,参见§10.3(24)和§10.3(25)两式的关系以及§10.3(28)——译者注。

$$\Gamma(P_1, P_2, \tau) = \sqrt{I(P_1)}\sqrt{I(P_2)}\gamma(P_1, P_2, \tau)$$
$$= c^2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\nu}{\nu^2}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\nu\tau}\int_\sigma I(S, \nu)K(S, P_1, \nu)K^\star(S, P_2, \nu)\mathrm{d}S, \tag{9}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} I(P_1) &= c^2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\nu}{\nu^2}\int_\sigma I(S, \nu)|K(S, P_1, \nu)|^2\,\mathrm{d}S, \\ I(P_2) &= c^2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\nu}{\nu^2}\int_\sigma I(S, \nu)|K(S, P_2, \nu)|^2\,\mathrm{d}S. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

与 10.4 节中相类似，我们将(9)式和(10)式再写成稍微不同的形式。令

$$\frac{\mathrm{i}c}{\nu}K(S, P_1, \nu)\sqrt{I(S, \nu)} = U(S, P_1, \nu), \qquad \frac{\mathrm{i}c}{\nu}K(S, P_2, \nu)\sqrt{I(S, \nu)} = U(S, P_2, \nu). \tag{11}$$

于是(9)式和(10)式变成

$$\Gamma(P_1, P_2, \tau) = \sqrt{I(P_1)}\sqrt{I(P_2)}\gamma(P_1, P_2, \tau)$$
$$= \int_0^\infty \mathrm{d}\nu\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\nu\tau}\int_\sigma U(S, P_1, \nu)U^\star(S, P_2, \nu)\mathrm{d}S, \tag{12}$$

式中

$$I(P_1) = \int_0^\infty \mathrm{d}\nu\int_\sigma |U(S, P_1, \nu)|^2\,\mathrm{d}S, \qquad I(P_2) = \int_0^\infty \mathrm{d}\nu\int_\sigma |U(S, P_2, \nu)|^2\,\mathrm{d}S. \tag{13}$$

公式(12)是霍普金斯公式 § 10.4(35)的推广，它用一个连带的虚构光源所产生的光分布表示互相干函数和复相干度。因为，按照(11)式，$U(S, P, \nu)$可看成是一个单色点源在 P 处所产生的扰动，该虚构的单色点源位于 S 点，其频率为 ν，位相为零，振动强度与$\sqrt{I(S, \nu)}$成正比。

10.7.2　互相干的传播

同 10.4.4 节中一样，现在考虑一扩展不相干光源所发的光束(不一定是准单色的)，并设想有一曲面$\mathcal{A}$与之相截(见图 10.8)，光穿过$\mathcal{A}$后再照射到任一其他曲面$\mathcal{B}$。下面来说明，如果知道了$\mathcal{A}$面上各个点对的互相干，如何计算$\mathcal{B}$面上互相干的值。为简单计，假设$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$之间媒质的折射率等于 1。

$\mathcal{B}$上任何两点的互相干可采用(12)式来计算。在该式中 U 代表一单色扰动，因而可借助惠更斯-菲涅耳原理从$\mathcal{A}$面各点处的已知扰动计算$\mathcal{B}$面 Q_1，Q_2 处的扰动，即

$$U(S, Q_1, \nu) = \int_{\mathcal{A}} U(S, P_1, \nu)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 s_1}}{s_1}\Lambda_1\,\mathrm{d}P_1. \tag{14}$$

这里 s_1 代表$\mathcal{A}$上某样点 P_1 和 Q_1 之间的距离，Λ_1 是通常的倾斜因子。$U(S, Q_2, \nu)$方面有一个完全类似的公式。如果将这两个公式代入(12)式，并改变积分次序，则得到 Q_1，Q_2 两点的互相干表达式如下：

$$\Gamma(Q_1, Q_2, \tau) = \int_{\mathcal{A}}\int_{\mathcal{A}} \frac{\mathrm{d}P_1\,\mathrm{d}P_2}{s_1 s_2}\int_0^\infty J(P_1, P_2, \nu)\Lambda_1(\nu)\Lambda_2^\star(\nu)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\nu[\tau-\frac{s_1-s_2}{c}]}\,\mathrm{d}\nu, \tag{15}$$

式中

$$J(P_1, P_2, \nu) = \int_\sigma U(S, P_1, \nu)U^\star(S, P_2, \nu)\mathrm{d}S. \tag{16}$$

(15)式中对$\mathcal{A}$积分两次,意指 P_1 点和 P_2 点各自独立地扫遍$\mathcal{A}$面。倾斜因子 $\Lambda_1(\nu)$和 $\Lambda_2(\nu)$系通过一乘积因子 $-i/\lambda = -i\nu/c$ 而依赖于频率 ν[见 § 8.3(20)],因而二者随 ν 的改变比式中其他项要缓慢得多。如果光的有效频谱范围足够小,就可以用 $\overline{\Lambda}_1 = \Lambda_1(\bar{\nu})$,$\overline{\Lambda}_2 = \Lambda_2(\bar{\nu})$来代替这两个因子,其中 $\bar{\nu}$ 代表光的平均频率。其余部分的对 ν 积分,按照(12)式,正好是 $\Gamma(P_1, P_2, \tau - (s_1 - s_2)/c)$。这样我们最后得到

$$\Gamma(Q_1, Q_2, \tau) = \int_{\mathcal{A}}\int_{\mathcal{A}} \frac{\Gamma\left(P_1, P_2, \tau - \dfrac{s_1 - s_2}{c}\right)}{s_1 s_2}\overline{\Lambda}_1\overline{\Lambda}_2^\star\,\mathrm{d}P_1\,\mathrm{d}P_2. \tag{17}$$

这就是所求的公式,它用$\mathcal{A}$面上所有点对的互相干表达出$\mathcal{B}$面上 Q_1 和 Q_2 两点的互相干函数。

具有特别意义的情况是,Q_1 和 Q_2 两点相重合并且 $\tau = 0$。设以 Q 代表该共同点,则(17)式左边化为 Q 点处的强度 $I(Q)$。此外,如果再将式中右边的 Γ 用强度 $I(P_1)$,$I(P_2)$和关联因子 γ 来表出,则(17)式化为

$$I(Q) = \int_{\mathcal{A}}\int_{\mathcal{A}} \frac{\sqrt{I(P_1)}\sqrt{I(P_2)}}{s_1 s_2}\gamma\left(P_1, P_2, \frac{s_2 - s_1}{c}\right)\overline{\Lambda}_1\overline{\Lambda}_2^\star\,\mathrm{d}P_1\,\mathrm{d}P_2. \tag{18}$$

这个公式将任意一点 Q 的**强度**表成为任意面$\mathcal{A}$上所有面元对的贡献之和。每一对面元的贡献与两个面元处强度的几何平均值成正比,与这两个面元到 Q 的距离之积成反比,并用关联因子 γ 的相应值加权。

公式(17)和(18)是泽尼克传播定律 § 10.4(45)和部分相干波场强度公式 § 10.4(46)的推广,二者均出自沃耳夫。

10.8 严格的部分相干性理论[①]

10.8.1 互相干的波动方程

前面几节,我们推导了有关关联函数的数项定理,有几个在某些方面与有关复扰动本身的定理是相似的。例如,表达准单色不相干扩展光源辐照面上复相干度的范西特-泽尼克公式 § 10.4(21),从形式上看,与开孔(大小和形状与该光源都一样)衍射图样中有关复扰动的公式完全相同。其他例子还有互强度传播定律 § 10.4(45),它看上去则酷似复扰动传播的惠更斯-菲涅耳原理。但关于复扰动的结果可以看成是某些严格定律,即亥姆霍兹-基尔霍夫公式[见 § 8.3(7),§ 8.3(13)]的近似演绎,而后者又是光扰动以波动形式进行传播这一事实,即波动方程的数学推演。所以上述相似性使人联想到,关联将也以波动形式传播,而前几节关于关联函数的各项定律则应是某些相应亥姆霍兹-基尔霍夫式定理的近似表述。不难证明,事实的确如此。

现在考虑真空中的一个定态波场,并设 $V(P_1, t)$和 $V(P_2, t)$分别代表 P_1 点和 P_2 点处的

① 本节分析主要部分根据沃耳夫的研究,见 *Proc. Roy. Soc.*, A, **230**(1955), 246; 和 *Proc. Phys. Soc.*, **71**(1958), 257。

光扰动。为便于分析，首先将互相干函数表成更为对称的形式

$$\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2) = \langle V(P_1, t_1 + t) V^{\star}(P_2, t_2 + t) \rangle$$

$$= \operatorname*{Lim}_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} V_T(P_1, t + t_1) V_T^{\star}(P_2, t + t_2) \mathrm{d}t. \tag{1}$$

此外，设

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \tag{2}$$

是对 P_1 点笛卡儿直角坐标的拉普拉斯算符。将此算符应用于(1)式并交换各项运算的次序，即得到

$$\nabla_1^2 \Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2) = \operatorname*{Lim}_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \{[\nabla_1^2 V_T(P_1, t + t_1)] V_T^{\star}(P_2, t + t_2)\} \mathrm{d}t. \tag{3}$$

V_T 的实部 $V_T^{(r)}$ 代表真实的物理波场(例如电矢量波的某个笛卡儿分量)，因此它满足波动方程

$$\nabla_1^2 V_T^{(r)}(P_1, t + t_1) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} V_T^{(r)}(P_1, t + t_1). \tag{4a}$$

V_T 的虚部 $V_T^{(i)}$ 以及 V_T 自身也都满足波动方程；该结果立可得之如下：先对(4a)式两边取希尔伯特变换，再利用两个函数互为希尔伯特变换时其微商亦互为希尔伯特变换这一事实即证。因此[①]

$$\nabla_1^2 V_T(P_1, t + t_1) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} V_T(P_1, t + t_1). \tag{4b}$$

由此可见，(3)式右边的 ∇_1^2 可易为 $\partial^2/c^2\partial t_1^2$，经再次交换运算次序后即得到

$$\nabla_1^2 \Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \operatorname*{Lim}_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} V_T(P_1, t + t_1) V_T^{\star}(P_2, t + t_2) \mathrm{d}t,$$

此即

$$\nabla_1^2 \Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)}{\partial t_1^2}. \tag{5a}$$

用完全类似的方式还可得到

$$\nabla_2^2 \Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)}{\partial t_2^2}, \tag{5b}$$

式中 ∇_2^2 是对 P_2 点坐标的拉普拉斯算符。

对于定态场，Γ 作为 t_1 和 t_2 的函数仅依赖于二者之差 $t_1 - t_2 = \tau$，因而可同前将它写成 $\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2) = \Gamma(P_1, P_2, \tau)$。这时 $\partial^2/\partial t_1^2 = \partial^2/\partial t_2^2 = \partial^2/\partial \tau^2$，因而由(5)式得到

$$\nabla_1^2 \Gamma(P_1, P_2, \tau) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Gamma(P_1, P_2, \tau)}{\partial \tau^2}, \tag{6a}$$

---

① 另一种证法可简述如下：因为 $V_T^{(r)}$ 满足波动方程，所以其频谱分量 $v_T(\nu)(-\infty \leqslant \nu \leqslant \infty)$ 各满足亥姆霍兹方程。根据 § 10.2(18b)，$V_T = V_T^{(r)} + \mathrm{i} V_T^{(i)}$ 的谱是 $2\,v_T(\nu)$($\nu \geqslant 0$ 时)或 0($\nu < 0$ 时)。因此，V_T 的频谱分量也各满足亥姆霍兹方程，结果 V_T 满足波动方程。

$$\nabla_2^2\Gamma(P_1, P_2, \tau)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Gamma(P_1, P_2, \tau)}{\partial\tau^2}. \tag{6b}$$

由此可见,**在真空中互相干服从两个波动方程**①。每一方程描写当两点之一(P_1 或 P_2)固定而另一点和参量 τ 改变时互相干的变化。这里 τ 代表两点处关联取样时刻的时间差,而且在所有实验中它只以组合 $c\tau=\Delta S$即程差的形式出现。这样,时间本身在我们对场的最后描写中实际上已被消除。这正是部分相干性理论特别引人入胜之处,因为在光波场中真正的时间变化全然无从探测。而相干性理论中的基本物理实体——互相干函数 $\Gamma(P_1, P_2, \tau)$,是可直接测量的,例如借助 10.3 节和 10.4 节中所描述的干涉实验。

10.8.2 互相干传播定律的严格表述

再次考虑真空中的一个定态场。设 Q_1 和 Q_2 是场中任何两点,并设$\mathcal{A}$是包围住这两个点的任一虚构曲面。如果∇_1^2代表对 Q_1 点坐标的拉普拉斯算符,则根据(5a)式即有

$$\nabla_1^2\Gamma(Q_1, Q_2, t_1, t_2)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Gamma(Q_1, Q_2, t_1, t_2)}{\partial t_1^2}. \tag{7}$$

由于 Γ 满足波动方程(7),故可将基尔霍夫积分公式 §8.3(13)应用于 Γ。因此 $\Gamma(Q_1, Q_2, t_1, t_2)$ 可以用$\mathcal{A}$面上$[\Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2)]_1$ 的值来表出,其中(Q_2 点固定)P_1 取$\mathcal{A}$上所有位置,而$[\cdots]_1$ 代表取第一个时间变量 t_1 的推迟值,即

$$[\Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2)]_1=\Gamma\left(P_1, Q_2, t_1-\frac{s_1}{c}, t_2\right) \tag{8}$$

式中 s_1 是 P_1 和 Q_1 之间的距离(见图 10.19)。用显式写出时,基尔霍夫公式即给出

$$\Gamma(Q_1, Q_2, t_1, t_2)=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{A}}\left\{f_1[\Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2)]_1+g_1\left[\frac{\partial}{\partial t_1}\Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2)\right]_1\right.$$
$$\left.+h_1\left[\frac{\partial}{\partial n_1}\Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2)\right]_1\right\}\mathrm{d}P_1. \tag{9}$$

式中 $\partial/\partial n_1$ 表示沿$\mathcal{A}$面 P_1 点处内向法线的微商,而

$$f_1=\frac{\partial}{\partial n_1}\left(\frac{1}{s_1}\right),\qquad g_1=-\frac{1}{cs_1}\frac{\partial s_1}{\partial n_1},\qquad h_1=-\frac{1}{s_1}. \tag{10}$$

另外,根据(5b)式,则有

$$\nabla_2^2\Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2)}{\partial t_2^2}, \tag{11}$$

式中∇_2^2是对 Q_2 坐标的拉普拉斯算符。因此,(9)式右边出现的 $\Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2)$可以表成一

---

① 当 τ 远小于相干时间时,根据 §10.4(10),$\Gamma(P_1, P_2, \tau)\approx J(P_1, P_2)\mathrm{e}^{-2\pi i\bar{\nu}\tau}$。由(6)式可知,这时在准单色理论的有效范围内,真空中的互强度在良好近似上服从两个亥姆霍兹方程

$$\nabla_1^2J(P_1, P_2)+\bar{k}^2J(P_1, P_2)=0,\qquad \nabla_2^2J(P_1, P_2)+\bar{k}^2J(P_1, P_2)=0,$$

式中 $\bar{k}=2\pi\bar{\nu}/c$。

个含$[\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)]_2$之值的基尔霍夫积分形式，其中 P_2 取$\mathcal{A}$上所有可能位置，而$[\cdots]_2$ 代表取第二个时间变量 t_2 的推迟值，即

$$[\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)]_2 = \Gamma\left(P_1, P_2, t_1, t_2 - \frac{s_2}{c}\right), \tag{12}$$

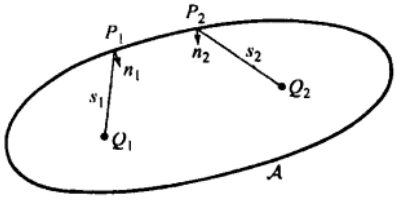


图 10.19　互相干传播定律严格表述中所用的符号

式中 s_2 是 P_2 和 Q_2 之间的距离。用显式写出时，则相应公式为

$$\Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{A}}\left\{f_2[\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)]_2 + g_2\left[\frac{\partial}{\partial t_2}\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)\right]_2 + h_2\left[\frac{\partial}{\partial n_2}\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)\right]_2\right\}\mathrm{d}P_2. \tag{13}$$

这里 $\partial/\partial n_2$ 表示沿$\mathcal{A}$面 P_2 点处内向法线的微商，而 f_2, g_2, h_2 是与(10)式中相同之量，但要将其下标 1 换成 2。然后取(13)式对 t_1 和 n_1 的微商，从而得到

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{A}}\left\{f_2\left[\frac{\partial}{\partial t_1}\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)\right]_2 + g_2\left[\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)\right]_2 + h_2\left[\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial n_2}\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)\right]_2\right\}\mathrm{d}P_2, \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial n_1}\Gamma(P_1, Q_2, t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{A}}\left\{f_2\left[\frac{\partial}{\partial n_1}\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)\right]_2 + g_2\left[\frac{\partial^2}{\partial n_1 \partial t_2}\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)\right]_2 + h_2\left[\frac{\partial^2}{\partial n_1 \partial n_2}\Gamma(P_1, P_2, t_1, t_2)\right]_2\right\}\mathrm{d}P_2. \tag{15}$$

现在将(13)，(14)和(15)三式代入(9)式，即得到下列 $\Gamma(Q_1, Q_2, t_1, t_2)$表达式：

$$\Gamma(Q_1, Q_2, t_1, t_2) = \frac{1}{(4\pi)^2}\int_{\mathcal{A}}\int_{\mathcal{A}}\left\{f_1 f_2[\Gamma]_{1,2} + f_1 g_2\left[\frac{\partial}{\partial t_2}\Gamma\right]_{1,2} + f_1 h_2\left[\frac{\partial}{\partial n_2}\Gamma\right]_{1,2} + g_1 f_2\left[\frac{\partial}{\partial t_1}\Gamma\right]_{1,2} + g_1 g_2\left[\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\Gamma\right]_{1,2}\right.$$

$$+g_1h_2\left[\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial n_2}\Gamma\right]_{1,2}+h_1f_2\left[\frac{\partial}{\partial n_1}\Gamma\right]_{1,2}$$
$$+h_1g_2\left[\frac{\partial^2}{\partial n_1\partial t_2}\Gamma\right]_{1,2}+h_1h_2\left[\frac{\partial^2}{\partial n_1\partial n_2}\Gamma\right]_{1,2}\Big\}\mathrm{d}P_1\,\mathrm{d}P_2, \tag{16}$$

式中右边 Γ 中的前两个变量是 P_1 和 P_2，$[\cdots]_{1,2}$ 表示取两个时间变量的推迟值，例如

$$[\Gamma]_{1,2}=\Gamma\left(P_1,\ P_2,\ t_1-\frac{s_1}{c},\ t_2-\frac{s_2}{c}\right). \tag{17}$$

最后，将定态假设考虑进来。由于场的定态性质，Γ 作为两个时间的函数仅依赖于二者之差。同前将其写成 $\Gamma(P_1,P_2,t_1,t_2)=\Gamma(P_1,P_2,\tau)$，$\tau=t_1-t_2$。因此 $\partial/\partial t_1=-\partial/\partial t_2=\partial/\partial\tau$，并且(16)式变成[①]

$$\Gamma(Q_1,Q_2,\tau)=\frac{1}{(4\pi)^2}\int_{\mathcal{A}}\int_{\mathcal{A}}\Big\{f_1f_2[\Gamma]-f_1g_2\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\Gamma\right]+f_1h_2\left[\frac{\partial}{\partial n_2}\Gamma\right]$$
$$+g_1f_2\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\Gamma\right]-g_1g_2\left[\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\Gamma\right]$$
$$+g_1h_2\left[\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial n_2}\Gamma\right]+h_1f_2\left[\frac{\partial}{\partial n_1}\Gamma\right]$$
$$-h_1g_2\left[\frac{\partial^2}{\partial n_1\partial\tau}\Gamma\right]+h_1h_2\left[\frac{\partial^2}{\partial n_1\partial n_2}\Gamma\right]\Big\}\mathrm{d}P_1\,\mathrm{d}P_2. \tag{18}$$

右边 Γ 中的前两个变量是 P_1 和 P_2，而 $[\cdots]$ 代表“推迟”，推迟量为 $(s_1-s_2)/c$，例如

$$[\Gamma]=\Gamma\left(P_1,\ P_2,\ \tau-\frac{s_1-s_2}{c}\right). \tag{19}$$

公式(18)可以看成是互相干传播定律[见 § 10.7(17)]的一种严格表述。它把任何两点 Q_1 和 Q_2 的互相干函数值用这两点周围任意一闭合面上所有点对的互相干函数及其某些微商之值来表出。

在特别情况下，当 Q_1 和 Q_2 重合且 $\tau=0$ 时，由(18)式用 $\Gamma_{12}(\tau)=\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}\,\gamma_{12}(\tau)$ 代入即得到下列强度表达式：

$$I(Q)=\frac{1}{(4\pi)^2}\int_{\mathcal{A}}\int_{\mathcal{A}}\Big(\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}\Big\{f_1f_2[\gamma]+(f_2g_1-f_1g_2)\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\gamma\right]-g_1g_2\left[\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\gamma\right]\Big\}$$
$$+\sqrt{I_1}\Big\{f_1h_2\frac{\partial}{\partial n_2}(\sqrt{I_2}[\gamma])+g_1h_2\frac{\partial}{\partial n_2}\left(\sqrt{I_2}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\gamma\right]\right)\Big\}$$
$$+\sqrt{I_2}\Big\{f_2h_1\frac{\partial}{\partial n_1}(\sqrt{I_1}[\gamma])-g_2h_1\frac{\partial}{\partial n_1}\left(\sqrt{I_1}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\gamma\right]\right)\Big\}$$
$$+h_1h_2\frac{\partial^2}{\partial n_1\partial n_2}(\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}[\gamma])\Big)\mathrm{d}P_1\,\mathrm{d}P_2, \tag{20}$$

① 方程(18)适用于来自任意形状的闭合面$\mathcal{A}$的传播。来自平面的传播也有一个公式，形式则简单得多[见 M. J. Beran and G. B. Parrent, *Theory of Partial Coherence* (Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1964), § 3.3]。

式中 I_1 和 I_2 分别是 P_1 和 P_2 处的强度，$[\gamma]=\gamma[P_1,P_2,(s_2-s_1)/c]$，等等。公式(20)可以看成是 § 10.7(18)所表达的定理的一种严格表述。它把任意一点 Q 的强度用该点周围任意一闭合面上的强度分布和复相干度(以及这些量的某些微商)来表示。

10.8.3　相干时间和有效光谱宽度

相干时间的概念是 7.5.8 节研究持续时间有限长的全同波列进行叠加产生干涉[①] 时引进的。这一概念被发现对许多涉及多色光的问题剖析颇为有用。该节通过一个简单的例子(周期振动波列无规序列的傅里叶频谱)证明，单个波列的时间即相干时间[②] $\Delta\tau$ 和其有效光谱宽度 $\Delta\nu=c\Delta\lambda/\bar{\lambda}^2$ 之间存在下列数量级关系：

$$\Delta\tau\Delta\nu\approx 1. \tag{21}$$

该节同时提到，这种关系在更普遍情况下依然成立，只要将 $\Delta\tau$ 和 $\Delta\nu$ 定义为适当的平均量即可。本节将定义这些平均量，并用严格方法建立所求的倒易关系。

假定一束光在某点 P 被分成两束，二者经引入程差 $c\tau$ 后又会合在一起，所产生的干涉效应由自相干函数

$$\Gamma(\tau)=\langle V(t+\tau)V^{\star}(t)\rangle=4\int_0^{\infty}S(\nu)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\nu\tau}\,\mathrm{d}\nu, \tag{22}$$

来表征，式中 $V(t)$ 是 P 处的复扰动，$S(\nu)$ 是谱密度。

因为二干涉光束的相干度由 $|\gamma(\tau)|=|\Gamma(\tau)|/\Gamma(0)$ 来表示，所以将 P 点处光的**相干时间** $\Delta\tau$ 定义为 $\Gamma(\tau)$ 模数平方的归一化方均根(r.m.s)宽度，不仅合理，而且数学上亦为方便，即[③]

$$(\Delta\tau)^2=\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\tau^2|\Gamma(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|\Gamma(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau}. \tag{23}$$

其次，关于 P 点处光的有**效光谱宽度** $\Delta\nu$，则定义为 Γ 谱的归一化方均根宽度，即定义为谱密度 $S(\nu)$ 在 $\nu\geqslant 0$ 范围的归一化方均根宽度。因此，

$$(\Delta\nu)^2=\frac{\displaystyle\int_0^{\infty}(\nu-\bar{\nu})^2S^2(\nu)\mathrm{d}\nu}{\displaystyle\int_0^{\infty}S^2(\nu)\mathrm{d}\nu},\qquad \bar{\nu}=\frac{\displaystyle\int_0^{\infty}\nu S^2(\nu)\mathrm{d}\nu}{\displaystyle\int_0^{\infty}S^2(\nu)\mathrm{d}\nu}. \tag{24}$$

为建立要求的倒易关系，令

---

① 7.5.8 节从干涉观点引进相干时间，本节则从相干性(关联)观点引进。相干性概念范畴大于干涉，故原书此处似乎有意回避“干涉”一词而用“合扰动”代之。为便于对照 7.5.8 节进行阅读，译文做了修改并补充本说明以不违原著用意——译者注。

② 为与本章符号一致，这里相干时间用 $\Delta\tau$ 代表而不用 Δt。

③ τ 的平均值 $\bar{\tau}=\int_{-\infty}^{+\infty}\tau|\Gamma(\tau)|^2\mathrm{d}\tau/\int_{-\infty}^{+\infty}|\Gamma(\tau)|^2\mathrm{d}\tau$ 为零，因为 $|\Gamma(\tau)|$ 是 τ 的偶函数。
关于相干时间的它种定义，见 L. Mandel, *Proc. Phys. Soc.*, **74**(1959), 233 又见 L. Mandel, and E. Wolf, *ibid.*, **80**(1962), 894。

$$\left.\begin{aligned}
&\xi = \nu - \bar{\nu}, && && \\
&\Phi(\xi) = 4S(\bar{\nu}+\xi) && \text{当 } \xi > -\bar{\nu} \text{ 时,} && \text{(a)} \\
&\quad = 0 && \text{当 } \xi < -\bar{\nu} \text{ 时,} && \text{(b)} \\
&\Psi(\tau) = \Gamma(\tau)\mathrm{e}^{2\pi i\bar{\nu}\tau}. && && \text{(c)}
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

我们将假设 $\Phi(\xi)$在$(-\infty < \xi < \infty)$各处都是连续的;因此[①] $\Phi(-\bar{\nu}) = S(0) = 0$。由(22)式可知,$\Psi$ 和 Φ 构成一对傅里叶变换:

$$\Psi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi\tau}\,\mathrm{d}\xi, \qquad \Phi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\tau)\mathrm{e}^{2\pi i\xi\tau}\,\mathrm{d}\tau. \tag{26}$$

$\Delta\tau$ 和 $\Delta\nu$ 二表达式变成

$$(\Delta\tau)^2 = \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} \tau^2|\Psi(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau, \tag{27}$$

$$(\Delta\nu)^2 = \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2\Phi^2(\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{28}$$

式中

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{29}$$

下一步用 Ψ 来表示积分(28)。利用(26)式中第二个关系式,即有

$$\begin{aligned}
(\Delta\nu)^2 &= \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2\Phi(\xi)\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\tau)\mathrm{e}^{2\pi i\xi\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi)\mathrm{e}^{2\pi i\xi\tau}\,\mathrm{d}\xi \\
&= -\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\tau)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\Psi^{\star}(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\tau}\right|^2\mathrm{d}\tau.
\end{aligned} \tag{30}$$

其中从第二行到第三行用了(26)式中的第一个关系式以及关系式 $\Psi(-\tau) = \Psi(\tau)$;而从第三行得到最后一行,当中经过分部积分并利用了 $\tau \to \pm\infty$ 时 $\Psi \to 0$ 这一事实——后者理应如此,因为前已假设(29)式中积分$\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi(\tau)|^2\mathrm{d}\tau$ 是收敛的。

由(27),(29)和(30)三式即可得到

---

① 事实上,这一条件对(23)式分子中积分收敛是必要的。当该条件如这里所设被满足时,(23)式在 $\Gamma(\tau) = \langle V(t+\tau)V^{\star}(t)\rangle$被更换成实关联函数 $\Gamma^{(r)}(\tau) = \mathcal{R}\,\Gamma(\tau) = 2\langle V^{(r)}(t+\tau)V^{(r)}(t)\rangle$时,其值保持不变[见 E. Wolf, *Proc. Phys. Soc.*, B, **71**(1958), 257; R. Silverman, *Trans. Inst. Rad. Engrs.*, CT-5(1958), 84。]对更普遍情况 $S(0)\neq 0$ 的研究,见 A. G. Mayer and E. A. Leontovich, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, **4**(1934), 353;和 I. Kay and R. Silverman, *Information and Control*, **1**(1957), 64, 396。又见 A. A. Kharkevich, *Spectra and Analysis*,译自俄文(New York, Consultants Bureau, 1960), § 12。

$$(\Delta\tau)^2(\Delta\nu)^2=\frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{4\left(\int_{-\infty}^{\infty}\tau^2|\Psi(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\tau}\right|^2\mathrm{d}\tau\right)}{\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau\right)^2}\right]. \tag{31}$$

通过一步步代数论证(见附录 I)可知,(31)式右边大括号内的项对所有使这些积分存在的函数 Ψ 而言,它总大于或等于 1。因此我们就建立了相干时间和有效光谱宽度之间的**倒易不等式**[①]如下:

$$\Delta\tau\Delta\nu\geqslant\frac{1}{4\pi}. \tag{32}$$

回想当光是准单色光并且二干涉光束强度相等时,按照 § 10.4(5),相干度 $|\gamma_{11}(\tau)|=|\Gamma_{11}(\tau)|/\Gamma_{11}(0)$ 等于干涉条纹图样中二光束程差为 $c\tau$ 的那一点的可见度 $\mathcal{V}(\tau)$。因此(23)式这时可写成下列形式

$$(\Delta\tau)^2=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\tau^2\mathcal{V}^2(\tau)\mathrm{d}\tau}{\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{V}^2(\tau)\mathrm{d}\tau}=\frac{\int_{0}^{\infty}\tau^2\mathcal{V}^2(\tau)\mathrm{d}\tau}{\int_{0}^{\infty}\mathcal{V}^2(\tau)\mathrm{d}\tau}; \tag{33}$$

这样,当二干涉光束强度相等时,相干时间 $\Delta\tau$ 等于可见度函数 $\mathcal{V}(\tau)$ 平方的归一化方均根宽度。

本节相干时间的定义比 7.5.8 节所给的自令人满意,因为这里没有对形成扰动的元场的性质做任何特别假设。事实上,这里不再需要知道快速涨落函数 $V(t)$ 的细节行为。本节的定义是奠基在关联函数 $\Gamma(\tau)$ 上,而后者可加以测量。如果我们愿保留用元波波列这种词语描述干涉现象,我们可以将 $\Delta\tau$ 看成是一个**平均**波列的持续时间;然而采用这一解释须多加小心。

现在回到(32)式。可以看出,其中的等号只有当(31)式右边大括号中的项等于 1 时才能成立,而这一点,根据附录 I,只有当 $\Psi(\tau)$ 是高斯函数时才有可能。可高斯函数的傅里叶变换仍是一高斯函数,而且因为该函数在其变量取任何值($-\infty<\xi<\infty$)时皆不为零,所以它不满足(25)式第二个条件(25b)。因此,(32)式中的等号从未发生效用。然而,当高斯函数的中心频率远大于其方均根宽度时,负频范围对 $\bar{\nu}$ 和 $\Delta\nu$ 的贡献可予忽略,因而很明显,对光学中所涉及的高频光谱而言,乘积 $\Delta\tau\Delta\nu$ 之值与完全的高斯曲线所对应的值相差不会很显著。这样(32)式中的"$\geqslant$"符号可以用数量级符号代替,即

$$\Delta\tau\Delta\nu\approx\frac{1}{4\pi}. \tag{34}$$

刚才所给的相干时间定义适用于振幅分割类的双光束干涉,即两束干涉光是由一单束光在某点 P 经分束而成,例如迈克耳孙干涉。该定义可推广到另一种干涉,即两束干涉光产自 P_1 和 P_2 两点处的波阵面分割,例如杨氏干涉。相应推广步骤简单易行。这时须用互相干函数 $\Gamma_{12}(\tau)=\Gamma(P_1,P_2,\tau)$ 代替自相干函数 $\Gamma(\tau)=\Gamma(P,P,\tau)$,同时用互谱密度 $G_{12}(\nu)$ 代替普

① 这里的推导系效仿 H. Weyl 和 W. Pauli 对海森伯不确定关系的推导[见 H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics* (London, Methuen, 1931; also New York, Dover Publications), pp. 77 和 393]。

通的谱密度 $S(v)$。惟一的差别来自这里 $G_{12}(v)$是复量,并且 $\Gamma_{12}(\tau)$不再一定是 τ 的偶函数,因而 $\bar{\tau}$ 不一定为零。相应的各项定义是:

$$(\Delta\tau_{12})^2=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}(\tau-\bar{\tau}_{12})^2|\Gamma_{12}(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau}{\int_{-\infty}^{\infty}|\Gamma_{12}(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau},\qquad \bar{\tau}_{12}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\tau|\Gamma_{12}(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau}{\int_{-\infty}^{\infty}|\Gamma_{12}(\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau},\tag{35}$$

$$(\Delta\nu_{12})^2=\frac{\int_{0}^{\infty}(\nu-\bar{\nu}_{12})^2|G_{12}(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu}{\int_{0}^{\infty}|G_{12}(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu},\qquad \bar{\nu}_{12}=\frac{\int_{0}^{\infty}\nu|G_{12}(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu}{\int_{0}^{\infty}|G_{12}(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu}.\tag{36}$$

$\Delta\tau_{12}$可以叫做**互相干时间**(mutual coherence time),而 Δv_{12} 可以叫做**互有效光谱宽度**(mutual effective spectral width),均系对 P_1 和 P_2 处的光而言。通过简单修改前面关于 $\Gamma_{11}(\tau)$的论证,即可得知这两个量满足倒易不等式

$$(\Delta\tau_{12})(\Delta\nu_{12})>\frac{1}{4\pi}.\tag{37}$$

最后,对于准单色光,这时将得到下列关系作为(33)式的推广:

$$(\Delta\tau_{12})^2=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}(\tau-\bar{\tau}_{12})^2\mathcal{V}_{12}^2(\tau)\mathrm{d}\tau}{\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{V}_{12}^2(\tau)\mathrm{d}\tau},\qquad \bar{\tau}_{12}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\tau\mathcal{V}_{12}^2(\tau)\mathrm{d}\tau}{\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{V}_{12}^2(\tau)\mathrm{d}\tau}.\tag{38}$$

这里,$\mathcal{V}_{12}(\tau)$代表来自 P_1 和 P_2 两点的光所形成的干涉条纹的可见度,其中二干涉光束的强度设为相同。

10.9 准单色光的偏振特性

本章前面各节将光扰动作为标量来处理。现在我们来简要讨论一下准单色光波的一些矢量性质。

在 1.4 节中我们已经得知,严格单色的光总是**偏振的**,即随着时间的增加,空间各点电矢量(同时还有磁矢量)的端点沿着一个椭圆做周期运动。当然,在特别情况下该椭圆可退化为一个圆或一条直线。我们也曾遇到过**非偏振光**。在此种情况下,可以假设电矢量端点的运动是完全无规则的,而且光的振动在垂直于其传播方向的平面上向不同方向进行分解时,并不表现有择尤的取向特性,即在时间平均上各方向情况等同。这两种情况,如同完全相干和完全不相干,代表两个极端。在一般情况下,场矢量的变化既非完全规则,亦非完全无规则,因而我们可以说这光是**部分偏振的**。这种光通常由非偏振光经反射(见 1.5.3 节)或散射(见 14.5.2 节)而产生。本节将研究部分偏振光波的一些主要性质。我们将看到,对于这种光波,如在垂直于其传播方向的平面上将其电矢量表成任何两个相互正交的分量,则该波的可观测效应依赖于此二分量的强度和二者间存在的关联。

10.9.1　准单色平面波的相干矩阵[①]

考虑一个沿正 z 方向传播的准单色光波，其平均频率为 $\bar{\nu}$。设

$$E_x(t)=a_1(t)e^{i[\phi_1(t)-2\pi\bar{\nu}t]},\qquad E_y(t)=a_2(t)e^{i[\phi_2(t)-2\pi\bar{\nu}t]} \tag{1}$$

代表 O 点处电矢量的 x，y 分量（x，y 相互正交，并同垂直于传播方向 z）。仍旧采用 10.2 节中所讨论的复表示，其中 E_x 和 E_y 是与真正（实）分量 $E_x^{(r)}=a_1(t)\cos[\phi_1(t)-2\pi\bar{\nu}t]$ 和 $E_y^{(r)}=a_2(t)\cos[\phi_2(t)-2\pi\bar{\nu}t]$ 相连带的“解析信号”。如果光是严格单色的，则 a_1，a_2，ϕ_1 和 ϕ_2 将都是常数。对准单色波来说，这些量还与时间 t 有关，但是，如我们所曾看到的，在任何远小于光的相干时间（即有效光谱宽度 $\Delta\nu$ 之倒数）的时间间隔内，它们都只改变很小的相对量。

假定 y 分量对 x 分量经受一位相延迟 ε（这可借助一补偿器来实现——关于各种补偿器，见 15.4.2 节的描述），并考查与正 x 方向成 θ 角的光振动的强度 $I(\theta,\varepsilon)$（见图 10.20）。观测此强度的方法是使该光通过一个取向合适的偏振器（见 15.4.1 节）。

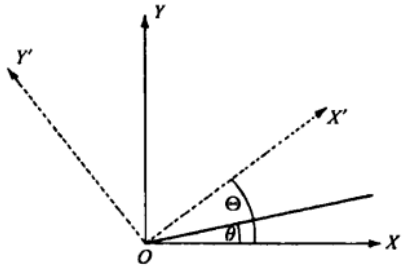


图 10.20　符号说明

经引进位相延迟 ε 后，电矢量在 θ 方向上的分量为

$$E(t;\theta,\varepsilon)=E_x\cos\theta+E_y e^{i\varepsilon}\sin\theta, \tag{2}$$

所以

$$\begin{aligned}I(\theta,\varepsilon)&=\langle E(t;\theta,\varepsilon)E^{\star}(t;\theta,\varepsilon)\rangle\\&=J_{xx}\cos^2\theta+J_{yy}\sin^2\theta+J_{xy}e^{-i\varepsilon}\cos\theta\sin\theta+J_{yx}e^{i\varepsilon}\sin\theta\cos\theta,\end{aligned} \tag{3}$$

式中 J_{xx}，…是下列矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的各个元素：

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\langle E_xE_x^{\star}\rangle & \langle E_xE_y^{\star}\rangle\\ \langle E_yE_x^{\star}\rangle & \langle E_yE_y^{\star}\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\langle a_1^2\rangle & \langle a_1a_2e^{i(\phi_1-\phi_2)}\rangle\\ \langle a_1a_2e^{-i(\phi_1-\phi_2)}\rangle & \langle a_2^2\rangle\end{bmatrix}. \tag{4}$$

$\boldsymbol{J}$ 的两个对角元素是实量，可以看出二者代表 x 和 y 方向上分量的强度。因此该矩阵之迹，即其对角元素之和等于光的总强度

$$\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{J}=J_{xx}+J_{yy}=\langle E_xE_x^{\star}\rangle+\langle E_yE_y^{\star}\rangle. \tag{5}$$

① 10.9.1 节和 10.9.2 节的分析是依据 E. Wolf 的研究，其文载于 *Nuovo Cimento*，**13**(1959)，1165。关于某些其他发展的介述，见论文 G. B. Parrent and P. Roman，*ibid.*，**15**(1960)，370。

$\boldsymbol{J}$ 的两个非对角元素一般为复量,但二者互为共轭(一矩阵,如其元素 J_{ij} 对所有 i 和 j 均满足 $J_{ji}=J_{ij}^{\star}$,则称之为**厄米**矩阵)。

现在把混合项 J_{xy} 用同前面[见 § 10.4(9b)]类似的方式加以归一化,即令

$$j_{xy}=|j_{xy}|e^{i\beta_{xy}}=\frac{J_{xy}}{\sqrt{J_{xx}}\sqrt{J_{yy}}}. \tag{6}$$

则由 Schwarz 不等式,用对 § 10.3(17)的相同方式可证

$$|j_{xy}|\leqslant 1. \tag{7}$$

此复相干因子 j_{xy} 与 10.4 节所引进的复相干度 j_{12} 具有相似的意义。但它量度的是电矢量 x,y 分量之间的关联。其绝对值 $|j_{xy}|$ 量度二者的"相干度",而其位相 βxy 则量度二者的"有效位相差"。$\boldsymbol{J}$ 叫做光波的**相干矩阵**(coherency matrix)。因 J_{xx} 和 J_{yy} 不可能为负,故(6),(7)两式意味着 $\boldsymbol{J}$ 的缔合行列式是非负的,即

$$|\boldsymbol{J}|=J_{xx}J_{yy}-J_{xy}J_{yx}\geqslant 0. \tag{8}$$

如果利用关系式 $J_{xy}=J_{yx}^{\star}$,并以 $\mathcal{R}$ 表示实部,则(3)式变成

$$\begin{aligned}I(\theta,\varepsilon)&=J_{xx}\cos^2\theta+J_{yy}\sin^2\theta+2\cos\theta\sin\theta\mathcal{R}(J_{xy}e^{-i\varepsilon})\\&=J_{xx}\cos^2\theta+J_{yy}\sin^2\theta+2\sqrt{J_{xx}}\sqrt{J_{yy}}\cos\theta\sin\theta|j_{xy}|\cos(\beta_{xy}-\varepsilon),\end{aligned} \tag{9}$$

其中从第一行过渡到第二行曾用(6)式代入。如令 $J_{xx}\cos^2\theta=I^{(1)}$,$J_{yy}\sin^2\theta=I^{(2)}$,则最后的公式就和准单色波场的基本干涉定律 § 10.4(11)完全相同。

和前面所考虑的相干函数情况一样,当波给定时,其相干矩阵的各个元素也可以靠比较简单的实验加以测定。这可有多种不同测量方法。有一种只需要测量几个不同 θ,ε 值下的强度 $I(\theta,\varepsilon)$(其中 θ 是偏振器的取向,ε 是补偿器所引进的位相延迟),然后来解由(3)式得到的几个相应关系式。设以 $\{\theta,\varepsilon\}$ 代表对应某某 θ,ε 对的测量。方便适用的一组测量如下所示[①]:

$$\{0°,0\},\ \{45°,0\},\ \{90°,0\},\ \{135°,0\},\ \left\{45°,\frac{\pi}{2}\right\},\ \left\{135°,\frac{\pi}{2}\right\}. \tag{10}$$

分别代入(3)式后即可求出相干矩阵的各元素,用上列 6 次测量所测定的各强度值表出时可有

$$\left.\begin{aligned}J_{xx}&=I(0°,\theta),\\J_{yy}&=I(90°,0),\\J_{xy}&=\tfrac{1}{2}\{I(45°,0)-I(135°,0)\}+\tfrac{1}{2}i\left\{I\left(45°,\frac{\pi}{2}\right)-I\left(135°,\frac{\pi}{2}\right)\right\},\\J_{yx}&=\tfrac{1}{2}\{I(45°,0)-I(135°,0)\}-\tfrac{1}{2}i\left\{I\left(45°,\frac{\pi}{2}\right)-I\left(135°,\frac{\pi}{2}\right)\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

由此可见,只需要一个偏振器就能够测定 J_{xx},J_{yy} 和 J_{xy}(或 J_{yx})的实部。测定 J_{xx} 和 J_{yy} 时,在测量中使该偏振器取向的方位角分别选取在 $\theta=0$ 和 $\theta=90°$ 以让相应的振动分量从其中通过;测定 J_{xy} 的实部时,则在测量中先使偏振器取向的方位角 $\theta=45°$,然后再让 $\theta=135°$,两次所测

① 事实上,仅需 4 次测量即足以确定 4 个斯托克斯参量,但(10)式所代表的这一组在实验上方便适用。

的振动分量强度即为 $J(45°,0)$和 $J(135°,0)$。要测定 J_{xy}(或 J_{yx})的虚部,按照(11)式中最后两个关系式,还需要一个补偿器(例如一个 1/4 波片,见 15.4.2 节所叙),以便在 x,y 二分量间引进一个 1/4 周期的位相差;偏振器则仍按上述使用,取向先后使方位角 $\theta = 45°$和 $\theta = 135°$的振动分量从其中通过。到了 15.4.2 节,我们将会得知,最后两次测量的用意在于检测右旋和左旋圆偏振。

显然,由(9)式可知,相干矩阵相同的两束光相互等效,这里所谓等效意指两束光在使用一个偏振器和一个补偿器的同种实验中将给出相同的(时间平均)强度①。

现在来考查当波给定且自变量之一(θ 或 ε)保持不变而另一改变时,所观测到的强度 $I(\theta,\varepsilon)$如何变化。先假定让 θ 保持固定而改变 ε。由(9)式可知,这时强度在极大值 $I_{\max(\varepsilon)}$ 和极小值 $I_{\min(\varepsilon)}$ 之间周期地改变,其中

$$\left.\begin{aligned} I_{\max(\varepsilon)} &= J_{xx}\cos^2\theta + J_{yy}\sin^2\theta + 2|J_{xy}|\sin\theta\cos\theta \\ I_{\min(\varepsilon)} &= J_{xx}\cos^2\theta + J_{yy}\sin^2\theta - 2|J_{xy}|\sin\theta\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

而

因此

$$\frac{I_{\max(\varepsilon)} - I_{\min(\varepsilon)}}{I_{\max(\varepsilon)} + I_{\min(\varepsilon)}} = \frac{|J_{xy}|\sin 2\theta}{J_{xx}\cos^2\theta + J_{yy}\sin^2\theta}. \tag{13}$$

方程(13)指给我们测定 J_{xy} 绝对值(以及测定 $|j_{xy}|$)的另一条途径。它表明该量可从测量 J_{xx},J_{yy},$I_{\max(\varepsilon)}$ 和 $I_{\min(\varepsilon)}$ 得到;而 J_{xy} 的位相可从测量极大和极小发生时 ε 之值得到。因为,按照(9)式,

$$\left.\begin{aligned} I &= I_{\max(\varepsilon)}, \quad \text{当} \quad \varepsilon = \beta_{xy} \pm 2m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \cdots), \\ I &= I_{\min(\varepsilon)}, \quad \text{当} \quad \varepsilon = \beta_{xy} \pm (2m+1)\pi \quad (m = 0, 1, 2, \cdots). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

为便于看出当 ε 固定而 θ 改变时强度如何变化;现将(9)式改写成颇为不同的形式。通过简单计算即有

$$I(\theta, \varepsilon) = \tfrac{1}{2}(J_{xx} + J_{yy}) + R\cos(2\theta - \alpha), \tag{15}$$

式中

$$\begin{aligned} R &= \tfrac{1}{2}\sqrt{(J_{xx} - J_{yy})^2 + 4J_{xy}J_{yx}\cos^2(\beta_{xy} - \varepsilon)}, \\ \tan\alpha &= \frac{2|J_{xy}|\cos(\beta_{xy} - \varepsilon)}{J_{xx} - J_{yy}}. \end{aligned} \tag{16}$$

由(15)式可见,当 θ 改变时,强度仍然呈正弦变化,其极值为

---

① 这一叙述仅在准单色理论近似范围内才正确,因为只有在该理论有效的范围,强度表达式(9)方能成立。当两正交分量间所引进的位相延迟 ε 与相干长度(以平均波长 $\bar{\lambda}$ 为计量单位)相比不容忽略时,这两束光的表观行为可完全不同。为了更完全地描写能够观测的光束特性,必须引进更普遍的相干矩阵,来表征不同时间以及不同地点分量间的关联。见 E. Wolf, *Nuovo Cimento*, **12**(1954), 884; 又见其专稿,载于 *Proc. Symp. Astronom. Optics*, ed. Z. Kopal (Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1956), p. 177; P. Roman and E. Wolf, *Nuovo Cimento*, **17**(1960), 462, 477; P. Roman, *ibid*., **20**(1961), 759; *ibid*., **22**(1961), 1005。

$$\left.\begin{aligned} I_{\max(\theta)} &= \tfrac{1}{2}(J_{xx}+J_{yy})+R, \\ I_{\min(\theta)} &= \tfrac{1}{2}(J_{xx}+J_{yy})-R. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

(17)式右边仅 R 依赖于 ε。当 $\cos^2(\beta_{xy}-\varepsilon)=1$,即 ε 等于(14)式所给的某值时,R 取其最大之值并等于

$$\begin{aligned} R_{\max(\varepsilon)} &= \tfrac{1}{2}\sqrt{(J_{xx}-J_{yy})^2+4J_{xy}J_{yx}} \\ &= \tfrac{1}{2}(J_{xx}+J_{yy})\sqrt{1-\frac{4|\boldsymbol{J}|}{(J_{xx}+J_{yy})^2}}, \end{aligned} \tag{18}$$

式中 $|J|$ 是相干矩阵的行列式(8)。由此可知强度的绝对极大和绝对极小(对 θ 和 ε 二者而言)为

$$\left.\begin{aligned} I_{\max(\theta,\varepsilon)} &= \tfrac{1}{2}(J_{xx}+J_{yy})\left[1+\sqrt{1-\frac{4|\boldsymbol{J}|}{(J_{xx}+J_{yy})^2}}\right], \\ I_{\min(\theta,\varepsilon)} &= \tfrac{1}{2}(J_{xx}+J_{yy})\left[1-\sqrt{1-\frac{4|\boldsymbol{J}|}{(J_{xx}+J_{yy})^2}}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

因此

$$\frac{I_{\max(\theta,\varepsilon)}-I_{\min(\theta,\varepsilon)}}{I_{\max(\theta,\varepsilon)}+I_{\min(\theta,\varepsilon)}}=\sqrt{1-\frac{4|\boldsymbol{J}|}{(J_{xx}+J_{yy})^2}}. \tag{20}$$

后面将看到此量具有一个简单的物理意义[见(52)式波的偏振度]。

此前我们一直采用一组任意的但是固定的直角坐标轴 OX, OY 作为电振动的参考系。现在来看看当选取一组新坐标轴时相干矩阵如何变换。假定新直角坐标轴 OX', OY' 所在平面仍垂直于传播方向。且 OX' 与 OX 成 Θ 角(见图 10.20)。用 E_x, E_y 表示时,以新轴为参考系的电矢量分量为

$$\left.\begin{aligned} E_{x'} &= \;\; E_x\cos\Theta+E_y\sin\Theta, \\ E_{y'} &= -E_x\sin\Theta+E_y\cos\Theta. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

变换后的相干矩阵 J' 的各个元素为

$$J_{k'l'}=\langle E_{k'}E_{l'}^{\star}\rangle \tag{22}$$

式中 k' 和 l' 各取 x', y' 二值。由(21)和(22)两式可以得到

$$\boldsymbol{J}'=\begin{bmatrix} J_{xx}c^2+J_{yy}s^2+(J_{xy}+J_{yx})cs & (J_{yy}-J_{xx})cs+J_{xy}c^2-J_{yx}s^2 \\ (J_{yy}-J_{xx})cs+J_{yx}c^2-J_{xy}s^2 & J_{xx}s^2+J_{yy}c^2-(J_{xy}+J_{yx})cs \end{bmatrix}, \tag{23}$$

式中

$$c=\cos\Theta,\qquad s=\sin\Theta. \tag{24}$$

由此可见,相干矩阵之迹在转轴中保持不变,通过一步步计算可以证明,其行列式在该变换中也保持不变。这两项结果亦可得自众所皆知的矩阵代数定理。

下面分别考虑几个具有特别意义的情况的相干矩形式。

(a) 完全非偏振光(自然光)

自然界中最为常见的光具有一种奇异特性,即在与其传播方向相垂直的任何方向上,其振动分量的强度均相同,而且在其振动所分解的两个正交分量中预先加上任何相对位相延迟时,该强度都不受影响。换句话说,对一切 θ 和 ε 值而言。

$$I(\theta, \varepsilon) = 常数 \tag{25}$$

这种光可称之为**完全非偏振光**,也常叫做**自然光**。

由(9)式,显然 $I(\theta,\varepsilon)$不依赖于 θ 和 ε 的惟一情况是

$$j_{xy} = 0 \text{ 和 } J_{xx} = J_{yy}. \tag{26a}$$

第一个条件意味着 E_x 和 E_y 是互不相干的。依据(6)式和关系式 $J_{xy} = J_{xy}^{\star}$,(26a)式亦可写成

$$J_{xy} = J_{yx} = 0, \qquad J_{xx} = J_{yy} \tag{26b}$$

由此可知,强度为 $J_{xx} + J_{yy} = I_0$ 的自然光,其相干矩阵为

$$\tfrac{1}{2}I_0\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{27}$$

(b) 完全偏振光

首先假定光是严格单色的。这时(1)式中的振幅 a_1 和 a_2 以及位相因子 ϕ_1 和 ϕ_2 都不依赖于时间,且相干矩阵具有下列形式:

$$\begin{bmatrix}a_1^2 & a_1a_2e^{i\delta}\\ a_1a_2e^{-i\delta} & a_2^2\end{bmatrix}, \tag{28}$$

式中[①]

$$\delta = \phi_1 - \phi_2. \tag{29}$$

由此可见,在这种情况下

$$|\boldsymbol{J}| = J_{xx}J_{yy} - J_{xy}J_{yx} = 0, \tag{30}$$

即相干矩阵的行列式为零。这时 E_x 和 E_y 二分量的复相干度

$$j_{xy} = \frac{J_{xy}}{\sqrt{J_{xx}}\sqrt{J_{yy}}} = e^{i\delta}, \tag{31}$$

即其绝对值为 1(完全相干),而位相等于二分量的位相之差。

在特别情况下,当光是**线偏振光**时,有 $\delta = m\pi(m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$[见 § 1.4(33)],因此线偏振光的相干矩阵为

$$\begin{bmatrix}a_1^2 & (-1)^m a_1a_2\\ (-1)^m a_1a_2 & a_2^2\end{bmatrix}. \tag{32}$$

① 为便于后面应用 1.4 节的一些结果,请读者注意这里的 ϕ_1 和 ϕ_2 对应于 1.4.2 节的 $-\delta_1$ 和 $-\delta_2$,所以(29)式与以前的定义 § 1.4(16)即 $\delta = \delta_2 - \delta_1$ 相一致。

电矢量的振动方向由 $E_y/E_x=(-1)^m a_2/a_1$ 给出。特别是,矩阵

$$I\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\qquad I\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \tag{33}$$

各代表强度为 I,电矢量分别在 x 方向($a_2=0$)和 y 方向($a_1=0$)的线偏振光;而矩阵

$$\tfrac{1}{2}I\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\qquad \tfrac{1}{2}I\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \tag{34}$$

各代表强度为 I,电矢量方向分别与 x 方向形成45°和135°角($a_1=a_2, m=0$ 和 $a_1=a_2, m=1$)的线偏振光。

对于**圆偏振光**,有 $a_1=a_2, \delta=m\pi/2(m=\pm1,\pm3,\cdots)$[见 §1.4(35), §1.4(36)],所以相干矩阵为

$$\tfrac{1}{2}I\begin{bmatrix}1 & \pm\mathrm{i}\\ \mp\mathrm{i} & 1\end{bmatrix}, \tag{35}$$

式中 I 是光的强度。由 §1.4(38)和 §1.4(40),式中正负号取上或下须视该偏振为右旋或左旋而定。

条件(30)在光不是单色时也可以被满足。因为如果 a_1, a_2, ϕ_1 和 ϕ_2 对时间依赖的方式使得**振幅之比和位相之差**与时间无关,即

$$\frac{a_2(t)}{a_1(t)}=q,\qquad \delta=\phi_1(t)-\phi_2(t)=\chi, \tag{36}$$

其中 q 和 χ 都是常数,则

$$\begin{aligned} J_{xx}&=\langle a_1^2\rangle, & J_{xy}&=q\langle a_1^2\rangle e^{i\chi},\\ J_{yx}&=q\langle a_1^2\rangle e^{-i\chi}, & J_{yy}&=q^2\langle a_1^2\rangle, \end{aligned} \tag{37}$$

因而条件(30)成立。由元素(37)组成的相干矩阵与分量为

$$E_x=\sqrt{\langle a_1^2\rangle}e^{i(\alpha-2\pi\bar{\nu}t)},\qquad E_y=q\sqrt{\langle a_1^2\rangle}e^{i(-\chi+\alpha-2\pi\bar{\nu}t)}, \tag{38}$$

的严格单色光的相干矩阵相同,式中 α 是任一实常数。由此可知,在采用一个偏振器和一个补偿器的实验中,满足条件(36)的准单色波在表观行为上将同严格单色因而也是完全偏振的波(38)完全一模一样。[当然,这里面要假设补偿器所引进的位相差远小于光的相干长度(以平均波长为计量单位)]。因此,条件(30)可以说表征着一个**完全偏振**的光波。

10.9.2 几种等效表示;光波的偏振度

如果有几个沿着相同方向传播的独立光波被叠加到一起,则合成波的相干矩阵将等于各波相干矩阵之和。为了证明此项结果,设 $E_x^{(n)}, E_y^{(n)}(n=1,2,\cdots,N)$ 是各个波电矢量的 x, y 分量(采用通常的复表示)。合成波电矢量的 x, y 分量是

$$E_x=\sum_{n=1}^{N}E_x^{(n)},\qquad E_y=\sum_{n=1}^{N}E_y^{(n)}, \tag{39}$$

所以合成波的相干矩阵元素由下式给出

$$J_{kl}=\langle E_kE_l^{\star}\rangle=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\langle E_k^{(n)}E_l^{(m)\star}\rangle$$

$$=\sum_{n}\langle E_k^{(n)}E_l^{(n)\star}\rangle+\sum_{n\neq m}\langle E_k^{(n)}E_l^{(m)\star}\rangle. \tag{40}$$

因为这些波假设是独立的，所以第二个取和号内各项均为零，由而得到

$$J_{kl}=\sum_{n}J_{kl}^{(n)}, \tag{41}$$

式中 $J_{kl}^{(n)}=\langle E_k^{(n)}E_l^{(n)\star}\rangle$ 是第 n 个波的相干矩阵元素。方程(41)表明，组合波的相干矩阵等于所有分体波的相干矩阵之和。

反过来，任何波可以看成是数独立波之和，而且显然这些独立波可有多种不同的选取方式。有一种选择具有特别的意义，现简要述之于下。

我们将证明，任何准单色光波均可看成是一个完全非偏振波和一个完全偏振波之和，二者彼此相互独立，而且这一表示是惟一的。

为建立该一结果，仅需证明任一相干矩阵 $\boldsymbol{J}$ 均可惟一地表成如下形式：

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}^{(1)}+\boldsymbol{J}^{(2)}, \tag{42}$$

式中依照(27)式和(30)式取

$$\boldsymbol{J}^{(1)}=\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & A\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{J}^{(2)}=\begin{bmatrix}B & D\\ D^{\star} & C\end{bmatrix}, \tag{43}$$

其中 $A\geqslant 0, B\geqslant 0, C\geqslant 0$，并且

$$BC-DD^{\star}=0. \tag{44}$$

如果 $J_{xx}, J_{yy}, \cdots$ 是表征原有波的相干矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的各个元素，则按照(42)，(43)两式，必须有

$$\left.\begin{aligned} A+B&=J_{xx}, & D&=J_{xy},\\ D^{\star}&=J_{yx}, & A+C&=J_{yy}.\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

将(45)式代入(44)式，得到 A 所满足的方程如下：

$$(J_{xx}-A)(J_{yy}-A)-J_{xy}J_{yx}=0; \tag{46}$$

因此 A 是相干矩阵 J 的一个特征根(本征值)。(46)式的两个根是

$$A=\tfrac{1}{2}(J_{xx}+J_{yy})\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(J_{xx}+J_{yy})^2-4|\boldsymbol{J}|}, \tag{47}$$

式中同前，$|J|$ 是行列式(8)，因为 $J_{yx}=J_{yx}^{\star}$，所以乘积 $J_{xy}J_{yx}$ 不为负，并且由(8)式可知

$$|\boldsymbol{J}|\leqslant J_{xx}J_{yy}\leqslant\tfrac{1}{4}(J_{xx}+J_{yy})^2,$$

所以(47)这两个根都是实根且均不为负。先考虑平方根前面为负号的那个解。这时有

$$A=\tfrac{1}{2}(J_{xx}+J_{yy})-\tfrac{1}{2}\sqrt{(J_{xx}+J_{yy})^2-4|\boldsymbol{J}|}, \tag{48}$$

$$\left.\begin{aligned} B&=\tfrac{1}{2}(J_{xx}-J_{yy})+\tfrac{1}{2}\sqrt{(J_{xx}+J_{yy})^2-4|\boldsymbol{J}|}, & D&=J_{xy},\\ D^{\star}&=J_{yx}, & C&=\tfrac{1}{2}(J_{yy}-J_{xx})+\tfrac{1}{2}\sqrt{(J_{xx}+J_{yy})^2-4|\boldsymbol{J}|}.\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

由于

$$\sqrt{(J_{xx}+J_{yy})^2-4|\boldsymbol{J}|}=\sqrt{(J_{xx}-J_{yy})^2+4J_{xy}J_{yx}}\geqslant|J_{xx}-J_{yy}|.$$

因此 B 和 C 亦均不为负,合乎要求。(47)式中的另一个根(平方根前面为正号)导致 B 和 C 之值为负,因而须予舍弃。这样我们就得到所要求的那种惟一性分解。

波的总强度为

$$I_{总}=\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{J}=J_{xx}+J_{yy};\tag{50}$$

而偏振部分的总强度为

$$I_{偏}=\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{J}^{(2)}=B+C=\sqrt{(J_{xx}+J_{yy})^2-4|\boldsymbol{J}|}.\tag{51}$$

偏振部分的强度 $I_{偏}$ 对总强度 $I_{总}$ 之比叫做波的**偏振度** P;根据(50)式和(51)式,

$$P=\frac{I_{偏}}{I_{总}}=\sqrt{1-\frac{4|\boldsymbol{J}|}{(J_{xx}+J_{yy})^2}}.\tag{52}$$

因为这一表达式只包含相干矩阵 J 的两个旋转不变量($J_{xx}+J_{yy}$ 和 $|J|$),所以偏振度与 OX, OY 二轴的具体选择无关,如原可料及。由(52)式和(48)前面的不等式可知

$$0\leqslant P\leqslant 1.\tag{53}$$

当 $P=1$ 时,没有非偏振成分,所以这时波是**完全偏振的**。在此情况下,$|J|=0$,因而 $|j_{xy}|=1$,E_x 和 E_y 是互相干的。当 $P=0$ 时,没有偏振成分,这时波是**完全非偏振的**。在此情况下,$(J_{xx}+J_{yy})^2=4|J|$,即

$$(J_{xx}-J_{yy})^2+4J_{xy}J_{yx}=0.\tag{54a}$$

因 $J_{yx}=J_{xy}^{\star}$,上式遂成为两个平方之和须等于零,这只有在二者皆为零时才可能,即

$$J_{xx}=J_{yy}\quad 和\quad J_{xy}=J_{yx}=0,\tag{54b}$$

结果与(26b)式一致。这时 E_x 和 E_y 是互不相干的($j_{xy}=0$)。在所有其他情况($0<P<1$)下,我们说光是**部分偏振的**。将(52)式同(20)式相比较,可见 $(I_{\max(\theta,\varepsilon)}-I_{\min(\theta,\varepsilon)})/(I_{\max(\theta,\varepsilon)}+I_{\min(\theta,\varepsilon)})$ 这个量正是偏振度 P。

当 E_x 和 E_y 互不相干时(但光不一定是自然光),偏振度表达式呈简单化。因为这时 $J_{xy}=J_{yx}=0$,$|J|=J_{xx}J_{yy}$,因而(52)式简化为①

$$P=\left|\frac{J_{xx}-J_{yy}}{J_{xx}+J_{yy}}\right|.\tag{55}$$

该式与公式 §1.5(42)一致,后者系得之于自然光的反射偏振。

① 因为每一个厄米矩阵皆可通过一么正变换使之对角化,而且因为 $|J|$ 和 $\mathrm{Tr}J$ 在该变换下保持不变,所以偏振度总可以表成如下形式:

$$P=\left|\frac{A_1-A_2}{A_1+A_2}\right|,$$

式中 A_1 和 A_2 是 J 的两个本征值[由(47)式给出]。然而,么正变换一般并不表示坐标轴围绕波的传播方向真有转动。颇有意味应予注意的是,这两个本征值 A_1 和 A_2 等于(12)式所给出的两个值 $I_{\max(\theta,\varepsilon)}$ 和 $I_{\min(\theta,\varepsilon)}$。

这里需请注意，**自然**光还有几种有用的表示方式。首先，相干矩阵(27)恒可表成如下形式：

$$\frac{1}{2}I\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}I\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{2}I\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \tag{56}$$

根据(33)式，这意味着一个强度为 I 的自然光波等效于两个相互独立的线偏振波，二者强度各为$\frac{1}{2}I$，电矢量振动方向相互垂直并同垂直于波的传播方向。

自然光的另一种有用表示为

$$\frac{1}{2}I\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{4}I\begin{bmatrix}1 & +\mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 1\end{bmatrix}+\frac{1}{4}I\begin{bmatrix}1 & -\mathrm{i}\\ +\mathrm{i} & 1\end{bmatrix}, \tag{57}$$

根据(35)，这意味着一个强度为 I 的自然光波等效于两个相互独立的圆偏振波，一个右旋，另一个左旋，强度各为$\frac{1}{2}$ I。

现在回到一般情况(部分偏振光)。必须注意，和偏振度 P 不一样，相干度$|j_{xy}|$依赖于 x，y 方向的选择。然而，可以立即看出$|j_{xy}|$不能超过 P。因为如果将(52)式中行列式$|J|$完全写出来，并应用(6)式，则得到

$$1-P^2=\frac{J_{xx}J_{yy}}{[\frac{1}{2}(J_{xx}+J_{yy})]^2}[1-|j_{xy}|^2]. \tag{58}$$

因任何二正数的几何平均不能超过其数学平均，故可知 $1-P^2\leqslant 1-|j_{xy}|^2$，即

$$P\geqslant |j_{xy}|. \tag{59}$$

(59)式中的等号仅在 $J_{xx}=J_{yy}$ 即与 x，y 方向相关的两个(时间平均)强度相等时才能成立。现在来证明，满足这种情况的一对正交方向总是存在的。

如果令 x 轴和 y 轴在其自身平面内逆时针方向转动一 θ 角，则 J_{xx} 和 J_{yy} 分别变换成 $J_{x'x'}$ 和 $J_{y'y'}$，按照(23)式，其中

$$\left.\begin{aligned}J_{x'x'}&=J_{xx}\cos^2\theta+J_{yy}\sin^2\theta+(J_{xy}+J_{yx})\cos\theta\sin\theta,\\ J_{y'y'}&=J_{xx}\sin^2\theta+J_{yy}\cos^2\theta-(J_{xy}+J_{yx})\cos\theta\sin\theta.\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

由(60)式可知，如果坐标轴所转的角度 $\theta=\Theta$，而 Θ 满足

$$\tan 2\Theta=\frac{J_{yy}-J_{xx}}{J_{xy}+J_{yx}}. \tag{61}$$

则有 $J_{x'x'}=J_{y'y'}$。因 $J_{yx}=J_{xy}^{\star}$ 且 J_{xx} 和 J_{yy} 均为实量，故(61)式恒有一实 Θ 解。因此，**永远存在一对强度相等的相互正交振动方向。对该对方向而言，电振动的相干度$|j_{xy}|$达到其极大值并等于波的偏振度 P**[①]。

10.9.3　准单色平面波的斯托克斯参量

我们业已看到，表征一个准单色平面波，一般必需 4 个实量，例如 J_{xx}，J_{yy} 与 J_{xy}(或 J_{yx})的

① 关于这对特殊方向的几何意义，沃耳夫做了讨论，载于 *Nuovo Cimento*，**13**(1959)，1180－1181。

实部和虚部。斯托克斯[①] 在关于部分相干光的研究中引进一种有所不同的 4 参量表示,该表示和本章的相干矩阵有着密切的关系。我们在 1.4.2 节讨论单色光的偏振时曾遇到过它的一种局限形式。普遍的斯托克斯参量是下列 4 量:

$$\left.\begin{aligned} s_0 &= \langle a_1^2\rangle + \langle a_2^2\rangle,\\ s_1 &= \langle a_1^2\rangle - \langle a_2^2\rangle,\\ s_2 &= 2\langle a_1 a_2 \cos\delta\rangle,\\ s_3 &= 2\langle a_1 a_2 \sin\delta\rangle, \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

式中 a_1 和 a_2 同前,是电矢量的两个正交分量 E_x, E_y 的瞬时振幅,而 $\delta = \phi_1 - \phi_2$ 是二者的位相差。在单色光情况下,a_1, a_2 和 δ 均与时间无关,(62)式遂化为 § 1.4(43)所定义的单色斯托克斯参量。

由(62)式和(4)式可以得到斯托克斯参量和相干矩阵元素之间的互换公式如下:

$$\left.\begin{aligned} s_0 &= J_{xx} + J_{yy},\\ s_1 &= J_{xx} - J_{yy},\\ s_2 &= J_{xy} + J_{yx},\\ s_3 &= \mathrm{i}(J_{yx} - J_{xy}); \end{aligned}\right\} \tag{63a}$$

$$\left.\begin{aligned} J_{xx} &= \tfrac{1}{2}(s_0 + s_1),\\ J_{yy} &= \tfrac{1}{2}(s_0 - s_1),\\ J_{xy} &= \tfrac{1}{2}(s_2 + \mathrm{i}s_3),\\ J_{yx} &= \tfrac{1}{2}(s_2 - \mathrm{i}s_3). \end{aligned}\right\} \tag{63b}$$

同相干矩阵各元素一样,任何准单色光的斯托克斯参量也可以从简单的实验来测定。如果同前仍以 $I(\theta,\varepsilon)$ 代表实验装置(由一补偿器和一偏振器前后串接组成)的透射光强度,其中 θ 是偏振器通振方向与 OX 方向的夹角(透射光振动方位角),而 ε 是补偿器使 y 分量相对 x 分量的位相延迟,则按照(11)式和关系式(63a),

$$\left.\begin{aligned} s_0 &= I(0°, 0) + I(90°, 0),\\ s_1 &= I(0°, 0) - I(90°, 0),\\ s_2 &= I(45°, 0) - I(135°, 0),\\ s_3 &= I\left(45°, \frac{\pi}{2}\right) - I\left(135°, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

参量 s_0 显然代表光的总强度,参量 s_1 等于偏振器先后两次透射光强度之差,第一次让振动方位角 $\theta = 0°$的线偏振光通过,第二次让 $\theta = 90°$的通过。参量 s_2 的释义相似,但所对应的方位角分别为 $\theta = 45°$和 $\theta = 135°$。最后,参量 s_3 等于右旋和左旋圆偏振光检测装置透射光强度之差。

---

① G. G. Stokes, *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, **9**(1852), 399。重印于其论文集 *Mathematical and Physical Papers*, Vol. III (Cambridge, Cambridge University Press, 1901), p. 233。亦见 P. Soleillet, *Ann. de Physique*(10), **12**(1929), 23; F. Perrin, *J. Chem. Phys.*, **10**(1942), 415; S. Chandrasekhar, *Radiative Transfer*(Oxford, Clarendon Press, 1950), § 15; M. J. Walker, *Amer. J. Phys.*, **22**(1954), 170; E. Wolf, *Nuovo Cimento*, **12**(1954), 884; S. Pancharatnam, *Proc. Ind. Acad. Sci.*, A, **44**(1956), 398; *ibid.*, **57**(1963), 218, 231。
斯托克斯参量亦被用于基本粒子偏振态的量子力学处理。见 U. Fano. *J. Opt. Soc. Amer.*, **39**(1949), 859; *ibid*, **41**(1951), 58; *Phys. Rev.*, **93**(1954), 121; D. L. Falkoff and J. E. MacDonald, *J. Opt. Soc. Amer.*, **41**(1951), 861; W. H. McMaster, *Amer. J. Phys.*, **22**(1954), 351; J. M. Jauch and F. Rohrlich, *The Theory of Photons and Electrons*(Cambridge, MA, Addison-Wesley Publ. Co., 1955), § 2.8。又见 N. Wiener, *Acta Math.*, **55**(1930), § 9,特别是 pp. 189 – 192。

如果利用关系式(63b),则前面的结果都可以不用相干矩阵而改用斯托克斯参量来表出。特别是,条件(8),即 $J_{xx}J_{yy} - J_{xy}J_{yx} \geqslant 0$,这时变成

$$s_0^2 \geqslant s_1^2 + s_2^2 + s_3^2. \tag{65}$$

对于单色光,根据(30)式,$J_{xx}J_{yy} - J_{xy}J_{yx} = 0$,这时(65)式中的等号成立,结果同 § 1.4(44)一致。

现在来看看,当采用斯托克斯参量表示时,如何将一个给定波分解成偏振和非偏振两个相互独立的部分。从(41)式和(63)式可知,由独立波组成的混合体,其斯托克斯参量为各分立波的斯托克斯参量之和。而由(27)式和(63a)式可知,一个非偏振波(自然光波)由 $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ 来表征。设用单一符号 $\boldsymbol{s}$ 代表 4 斯托克斯参量,则所求的分解自然就是将该给定波的表征量 $\boldsymbol{s}$ 分解成

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}^{(1)} + \boldsymbol{s}^{(2)}, \tag{66}$$

式中

$$\boldsymbol{s}^{(1)} = s_0 - \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2},\ 0,\ 0,\ 0, \tag{67a}$$

$$\boldsymbol{s}^{(2)} = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2},\ s_1,\ s_2,\ s_3. \tag{67b}$$

$\boldsymbol{s}^{(1)}$ 代表非偏振部分,$\boldsymbol{s}^{(2)}$ 则代表偏振部分。因此,用斯托克斯参量表出时,原有波的偏振度

$$P = \frac{I_{偏}}{I_{总}} = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}{s_0}, \tag{68}$$

将(63b)式代入(52)式亦可证此。此外还可以很容易地写下偏振部分(67b)所对应的偏振椭圆的椭圆率和取向。如果按 § 1.4(28)以

$$\tan\chi = \mp b/a, \qquad (-\pi/4 < \chi \leqslant \pi/4)$$

代表该椭圆的短、长轴之比和描绘方向(右旋偏振时 $\chi > 0$,左旋偏振时 $\chi < 0$),则根据(67b)式和 § 1.4(45c)

$$\sin 2\chi = \frac{s_3}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}} \tag{69}$$

另外,根据(67b)式和 § 1.4(46),椭圆长轴与 OX 所作之角 $\psi(0 \leqslant \psi < \pi)$ 由下式给出:

$$\tan 2\psi = \frac{s_2}{s_1} \tag{70}$$

由此可见,斯托克斯参量,正像相干矩阵一样,给系统分析准单色波的偏振态提供了一个有力工具。

第 11 章　严格的衍射理论

11.1　引言

根据麦克斯韦方程，加上标准边界条件，求解电磁辐射在障碍物上的散射，在数学上即成为一个十分明确的边值问题。本章将从这一观点对单色波衍射理论展开讨论，并特别对电磁波在理想导电（电导率 $\sigma \to \infty$）半平面上的衍射这一经典问题详细给出其严格解。

在早期杨氏、菲涅耳和基尔霍夫诸家理论中，衍射障碍物均假定为理想“黑色”；也就是所有入射其上的辐射全都被吸收，无一反射。这是早期理论共有的一个含糊其词之处，因为绝对“黑色性”概念无法以理念形式给予确切定义。事实上，它也同电磁理论相矛盾。

在电磁理论方面，非理想导电衍射体情况亦曾经有人研究，其中介电常数和电导率均设为有限值。最早的这种处理，全面而细致的一个范例，是米氏 1908 年对球体散射的讨论，这在第 14 章金属光学中加以介绍。然而，一般说来，假设电导率为有限大小，易导致数学处理十分复杂，因而人们常宁愿采纳理想导电（因而完全反射）体概念。这显然只是一种理想化，但它同电磁理论相容。再者，某些金属（如铜）的电导率非常大，所以它可代表一种良好近似，如果频率不高的话，虽则应当强调该近似在光频段从不完全适用。使问题简化的假设——衍射障碍物具有无穷大电导率，在大多数以精确数学表达为基础的处理中均行采用，本章以下讨论也限此情况。

这种衍射问题的第一个严格解由索末菲[①] 于 1896 年给出。他处理的是二维情况，即一平面波入射在一个无限薄的、理想导电的半平面上，该项成就之所以闻名，原因部分在于其求解架构之技巧，部分在于其解得结果之形式可用菲涅耳积分表出，既严格而又简单，而后者曾是以前近似理论共有的一个显明特色，因而引人注目。

众多数学家随即步索末菲后尘展开研究。初期仅稍改变其问题之条件，讨论线源和点源情况，继而对其处理进行显著推广，将半平面改成为劈体，其参与者计有卡斯劳[②]、麦克唐纳[③]和布罗米奇[④]。其他问题亦有攻研，而且晚近受超短波射电技术之推动，还有新方法引入。在进入本章主体之前，先非常简略地说明一下某些这种研究的性质。

如果存在一个正交坐标系，比如 u_1, u_2, u_3，能使衍射体之面与坐标面 $u_i =$ 常数$(i = 1,2,3)$之一吻合，则解偏微分方程的经典方法——分离变数法即可适用；这也正是上面提到的米氏对导电球情况（电导率为有限值）的求解方法。这时边值问题的解一般呈级数形式，而其应用价值取决于两点：一是计算有关函数时过程之易难；二是级数收敛之快慢。该法曾被应用到各种不同情况，除球体外，知名者还有圆盘或圆孔[⑤]。不过，应该提及，其中一些工作仅涉及纯标量

① A. Sommerfeld, *Math. Ann.*, **47**(1896), 317。

② H. S. Carslaw, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **30**(1899), 121。

③ H. M. MacDonald, *Electric Waves* (Cambridge, Cambridge University Press, 1902)。

④ T. J. I'A. Bromwich, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **14**(1916), 450。

⑤ C. J. Bouwkamp, Dissertation, Groningen(1941). J. Meixner and W. Andrejewski, *Ann. d. Physik*, 7(1950), 157。

问题，如小幅声波理论中的那些问题。如后文所证，电磁理论中的二维问题实质上也属于这一类，如若不然，电磁场的矢量性质将使问题变得更加复杂。

另一种求解方法是基于积分方程表述，似首先为瑞利[①] 所考虑。某些问题，最简单的是半平面问题，所列出的积分方程可用维纳和 Hopf 方法[②] 精确解之，复经科普森[③]，Schwinger 等人赏析与加工而获得几种新的闭合式解[④]。在这方面，还应提到变分方法，使用虽颇复杂，但成效卓著，可计算开孔衍射功率[⑤]。

因篇幅所限，本章主要只讨论一种方法[⑥]。讨论首先对理想导电结构电磁波散射理论中具有重要普遍性的一些方面展开。然后引进一种数学表示，将任何场表成为一组空间平面波谱的积分（角谱，见 11.4.2 节），并证明这种表示使某些衍射问题可表述成“对偶”积分方程形式[⑦]。至此，索末菲半平面问题的处理已轻而易举；随后即导出其解并加以稍详剖析[⑧]，包括一些枝节。最后讨论几个相关问题。

11.2　边界条件和表面电流

众所周知，一个电磁场进入良好导体的量微乎其微。在电导率为无穷大的理想化情况，则完全不能进入，结果电流完全存在于导体表面，这一概念可论证如下：

麦克斯韦旋度方程（见 1.1.3 节）的一个演衍结果是，**E** 在通过无限薄电流片时其切向分量连续，而 **H** 的切向分量不连续；**H** 中的不连续是发生在与面电流密度 **J**[⑨] 相垂直的切向分量中，相对指向如简图11.1所示，而不连续量即突变量为 $4\pi\mathbf{J}/c$[⑩]。此外，与 **E** 和 **H** 的切向分量行为相对应，**H** 在通过该电流片时其法向分量连续，而 **E** 的法向分量不连续，突变量等于 4π 乘以面电荷密度。由此可知，在理想导体外自由空间中，场是这样分布，使得在该导体表面上

(a) **E** 的切向分量为零；

(b) **H** 的切向分量垂直于面电流密度 **J**，指向如上所言，而大小为 $4\pi\mathbf{J}/c$；

---

① Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, **43**(1897), 259。

② 有关 Wiener-Hopf 方法的讨论，见 E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (Oxford, Clarendon Press, 1937), p. 339。

③ E. T. Copson, *Quart. J. Maths.*, **17**(1946), 19。

④ J. F. Carlson and A. E. Heins, *Quart. Appl. Maths.*, **4**(1947), 313; **5**(1947), 82. A. E. Heins, *Quart. Appl. Maths.*, **6**(1948), 157, 215. H. Levine and J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **73**(1948), 383。更为全面的参考文献目录，见 J. W. Miles, *J. Appl. Phys.*, **20**(1949), 760, and C. J. Bouwkamp, *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), **17**(1954), 35。

⑤ H. Levine and J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **74**(1948), 958; **75**(1949), 1423。

⑥ 对其他方法的一般介绍，可参见 G. Wolfsohn 的文章，载于 *Handbuch der Physik*, Vol. 20 (Berlin, Springer, 1928), p. 263; B. B. Baker and E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle* (Oxford, Clarendon Press, 1950), Chapters 4 and 5 以及 H. Hönl, A. W. Maue and K. Westpfahl 的文章，载于 *Handbuch d. Physik*, Vol. 25/1 (Berlin, Springer, 1961)。在刚才提到的 Bouwkamp 的综合评论中，列有最全面的方法和公式选要。

⑦ 有关“对偶”积分方程（定义见下文 642 – 643 页）的讨论，见 E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (Oxford, Clarendon Press, 1937), p. 334。

⑧ 索末菲半平面问题也可用初等方法来处理，见 F. Gori, *Atti. d. Fond. Giorgio Ronchi*, **XXXVIII**(1983), 593. 又见 F. Gori, *Opt. Commun.*, **48**(1983), 67。

⑨ 表面电流在 1.1.3 节中用 **j** 代表。

⑩ 这里显然指 $4\pi\mathbf{J}/c$ 的大小，下同——译者注。

(c) **H** 的法向分量为零;

(d) **E** 的外法向分量等于 4π 乘以表面电荷密度。

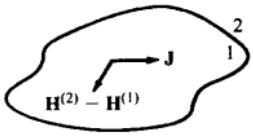


图 11.1 **H** 中的不连续与面电流密度 **J** 的相对指向图示
$\mathbf{H}^{(1)}$ 和 $\mathbf{H}^{(2)}$ 分别是表面两边(以1和2表示)的磁场

辐射入射在理想导体上所产生的效应,可以很方便地用感生表面电流的观点来说明。如果 $\mathbf{E}^{(i)}$ 是入射场的电矢量,$\mathbf{E}^{(s)}$ 是感生电流产生的"散射"场的电矢量,则总电矢量在各处都是 $\mathbf{E}^{(i)}+\mathbf{E}^{(s)}$。因此所讨论的衍射问题可陈述如下:**给定 $\mathbf{E}^{(i)}$,去求一个场 $\mathbf{E}^{(s)}$,这个场能产生于导体表面中的一个电流分布,并且要使它在该面上的切向分量与 $\mathbf{E}^{(i)}$ 在该面上的切向分量正好大小相等而方向相反**。值得强调的是,在上列边界条件中,(a)是基本的,单此一条即足以使本项问题的表述惟一地确定成上述形式①。至于其他条件,(b)的价值在于使场与感生电流发生关系,(c)和(d)则无关紧要。

应当指出:在导体内部各点,$\mathbf{E}^{(s)}=-\mathbf{E}^{(i)}$,这意味着,在任何闭合曲面 S 中都存在一个只有一种可能的电流密度分布,该分布可在 S 内所有点复制出 S 外辐射源所产生的场。同样,当辐射所射在的理想导体界面是一个完整的无穷平面时,从分析其情况亦可得知,在任何平面中都存在一个只有一种可能的电流密度分布,这个分布可在该平面一边复制出其另一边辐射源所产生的场。

在理想导电屏衍射问题中,假设屏为无限薄,当为可取。因为如若不然,数学困难将变得非常大。当然,屏的不透明性须予保留。这种概念实际就是理想导体在其厚度趋于零时的极限概念。依照前面所讲,这种屏的效应可用电流片观点来阐释,差别在于现在这个电流片不再是一闭合曲面。这里特别关注比较简单的情况,即片为平面;在此情况下,它所辐射的场 $\mathbf{E}^{(s)}$ 和 $\mathbf{H}^{(s)}$ 满足几个重要的关系式,可立即推知,并给出于下:

假定该电流片占据平面 $y=0$ 的一部分。这时,从对称性考虑,很明显应有

$$\left.\begin{aligned} E_x^{(s)}(x,y,z) &= E_x^{(s)}(x,-y,z), & H_x^{(s)}(x,y,z) &= -H_x^{(s)}(x,-y,z),\\ E_y^{(s)}(x,y,z) &= -E_y^{(s)}(x,-y,z), & H_y^{(s)}(x,y,z) &= H_y^{(s)}(x,-y,z),\\ E_z^{(s)}(x,y,z) &= E_z^{(s)}(x,-y,z), & H_z^{(s)}(x,y,z) &= -H_z^{(s)}(x,-y,z). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

此外,如果片中电流密度具有分量 J_x 和 J_z,则显然在紧靠 $y=0$ 处

$$H_x^{(s)}=\mp\frac{2\pi}{c}J_z, \qquad H_z^{(s)}=\pm\frac{2\pi}{c}J_x, \tag{2}$$

式中正、负号取上或取下,视 y 值是经正或经负抵零而定。将这些简单的关系式应用到所关注的平面屏衍射问题,即导致一个有用的表述,特别是它显示在严格的电磁理论里存在一个与标量巴比涅原理相对应的原理。这些都见下节讨论。

① 惟一性证明有些难点,故留到最后一节(11.9 节)讨论。

11.3　平面屏衍射；电磁形式的巴比涅原理

设在平面 $y=0$ 中分布有一组无限薄的理想导电金属片，并假定有一电磁场 $\mathbf{E}^{(i)}$，$\mathbf{H}^{(i)}$ 入射在该平面上。设 M 代表该平面被金属片占据的那些地区，A 代表其余间隙“孔”地区，所以 M 和 A 合在一起组成整个平面，其中 M 或 A 或者二者均可为无穷广分布。

如前所说，这里要求一个散射场，它须在 M 上满足一定的边界条件。可是由于关系式 §11.2(1)的对称性，所以只需要考虑半空间 $y\geqslant 0$ 或 $y\leqslant 0$ 中的散射场，如果通过 A 区时的连续性要求得到明确认证的话。因此问题可表述成这样：在 $y\geqslant 0$(或 $y\leqslant 0$)中，求一电磁场 $\mathbf{E}^{(s)}$，$\mathbf{H}^{(s)}$，该场能由 $y=0$ 中的电流来产生，并且满足

$$\begin{aligned}&(\mathrm{I})\quad E_x^{(i)}+E_x^{(s)}=E_z^{(i)}+E_z^{(s)}=0 \quad (\text{在}M\text{上})\\&(\mathrm{II})\quad H_x^{(s)}=H_z^{(s)}=0 \qquad\qquad\quad (\text{在}A\text{上})\end{aligned}$$

这里，(I)是理想导体情况的基本边界条件，而(II)——得之于 §11.2(2)，是一种表示 A 中没有感生电流的便捷方式。如果 $y\geqslant 0$ 中的散射场满足(II)，并且用 §11.2(1)推导出 $y\leqslant 0$ 中的散射场，则通过 A 区时的连续性要求即得到实现。

电磁波在理想导电屏上的衍射也有一个巴比涅原理——一种严格形式的巴比涅原理[①]，现在来推导可很容易。与经典巴比涅原理(8.3.2 节)中一样，先将原屏中的导电片和间隙孔交换性质，构成一“互补”屏，则可在原屏衍射场和互补屏衍射场之间建立某种关系；不同之处在于这里互补屏上的入射场不再与原屏上的入射场相同，而是由后者经 $\mathbf{E}\to\mathbf{H}$ 变换来导出。

在第一种情况，设场(缀标为 1)由 $\mathbf{E}_1^{(i)}=\mathbf{F}^{(i)}$ 定义，从 $y>0$ 一边入射到上述原屏。由(I)和(II)

$$\begin{aligned}&(\mathrm{I}')\quad E_{1x}^{(s)}=-F_x^{(i)}, \qquad E_{1z}^{(s)}=-F_z^{(i)} \quad (\text{在}M\text{上})\\&(\mathrm{II}')\quad H_{1x}^{(s)}=H_{1z}^{(s)}=0 \qquad\qquad\quad (\text{在}A\text{上})\end{aligned}$$

在第二种情况，设场(缀标为 2)由 $\mathbf{H}_2^{(i)}=\mathbf{F}^{(i)}$ 来定义，并入射到互补屏上。这里，用总场[②]写出边界条件，则

$$\begin{aligned}&(\mathrm{I}'')\quad E_{2x}=E_{2z}=0 \qquad\qquad\quad (\text{在}A\text{上})\\&(\mathrm{II}'')\quad H_{2x}=F_x^{(i)}, \qquad H_{2z}=F_z^{(i)} \quad (\text{在}M\text{上})\end{aligned}$$

因为自由空间中的麦克斯韦方程在变换 $\mathbf{E}\to\mathbf{H}$，$\mathbf{H}\to-\mathbf{E}$ 下保持不变，并且因为在 $y=0$ 中只有一种可能的电流密度能在 $y\leqslant 0$ 中所有点复制出入射场，所以通过将(I′)，(II′)与(II″)，(I″)分别作一比较，显然可见在屏后半空间中

$$\mathbf{H}_2=-\mathbf{E}_1^{(s)} \tag{1}$$

(1)式用总场 $\mathbf{E}_1$ 来表示时，即为

$$\mathbf{E}_1+\mathbf{H}_2=\mathbf{F}^{(i)}, \tag{2}$$

这就是所求的电磁形式的巴比涅原理。

---

① H. G. Booker, *J. Instn. Elect. Engrs*., **93**, Pt. III A (1946), 620. L. G. H. Huxley, *The Principles and Practice of Waveguides* (Cambridge, Cambridge University Press, 1947), p. 284。

② 这里，总场指入射场加上散射场。例如在第一种情况，总场 $\mathbf{E}_1=\mathbf{E}_1^{(i)}+\mathbf{E}_1^{(s)}$，余类推——译者注。

11.4 平面屏产生的二维衍射

11.4.1 二维电磁场的标量性质

一个问题如果与某一笛卡儿坐标(比如 z)完全无关,则称之为二维问题。如前所说,电磁理论中的这类问题实质上是属于标量性质的,因为它们能够直接采用单因变量来表述。现对此给予证明。

将时间因子 $\exp(-i\omega t)$ 隐蔽起来,并设 $k=\omega/c$,则自由空间中的麦克斯韦方程为

$$\operatorname{curl}\mathbf{H}=-ik\mathbf{E},\qquad \operatorname{curl}\mathbf{E}=ik\mathbf{H}.$$

令所有对 z 的偏微商等于零,则这两个方程可分解成独立的两组

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}=ikH_x,\qquad \frac{\partial E_z}{\partial x}=ikH_y,\qquad \frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=-ikE_z, \tag{1}$$

和

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}=-ikE_x,\qquad \frac{\partial H_z}{\partial x}=ikE_y,\qquad \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=ikH_z. \tag{2}$$

第一组只包含 H_x,H_y,E_z,第二组只包含 E_x,E_y,H_z。因此,通过将任何解分解为(1)式和(2)式各自之解的线性组合,可使问题得到简化。出于专门名词考虑,我们将场的这两种类型按其特性划分如下:

E 偏振

$$E_x=E_y=H_z=0,$$

$$H_x=\frac{1}{ik}\frac{\partial E_z}{\partial y},\qquad H_y=-\frac{1}{ik}\frac{\partial E_z}{\partial x},$$

此外,将 H_x 和 H_y 代入(1)式中第三个方程,显然即有

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+k^2E_z=0.$$

这里全部场(H_x,H_y,E_z)由 E_z 来确定,而 E_z 当然满足二维形式的标准波动方程。

H 偏振

$$H_x=H_y=E_z=0,$$

并且

$$E_x=-\frac{1}{ik}\frac{\partial H_z}{\partial y},\qquad E_y=\frac{1}{ik}\frac{\partial H_z}{\partial x}.$$

这里全部场(E_x,E_y,H_z)由 H_z 来确定。

11.4.2 平面波组成的角谱

这里只讨论二维问题。对于二维问题,业已证明 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的笛卡儿分量满足方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+k^2V=0. \tag{3}$$

解此方程须加上适当边界条件。

(3)式的一个基本的元解是

$$e^{ikr\cos(\theta-\alpha)}=e^{ik(x\cos\alpha+y\sin\alpha)},\tag{4}$$

$r,\theta(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$是极坐标,同 x,y 的方程关系为 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$。如 α 是实数,则(4)式代表一**均匀**平面波,即等幅平面和等相平面重合的平面波:α 则是传播方向与 x 轴的夹角[见图 11.2(a)]。反之,如 α 为复数,(4)式则代表一**非均匀**平面波,即等幅平面和等相平面不重合的平面波。确实,设 $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$,其中 α_1 和 α_2 均为实数,则(4)式变成

$$e^{ikr\cosh\alpha_2\cos(\theta-\alpha_1)}e^{-kr\sinh\alpha_2\sin(\theta-\alpha_1)},\tag{5}$$

由此可知,等幅平面与等相平面相互垂直[见图 11.2(b)]:位相传播方向与 x 轴成 α_1 角,相速度减小因子为 $\operatorname{sech}\alpha_2$,而振幅呈指数衰减,衰减因子为 $k\sinh\alpha_2$,衰减方向与位相传播方向垂直。

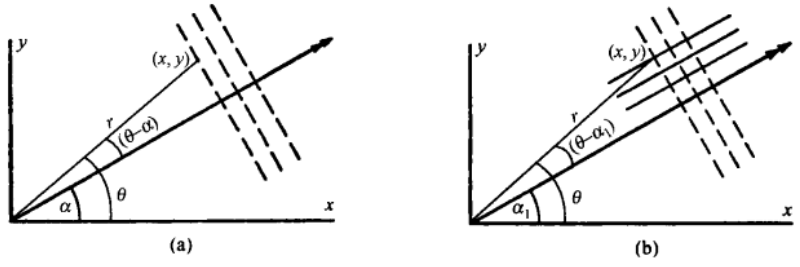


图 11.2　(4)式含义图示:(a)均匀平面波,当 α 为实数时;虚线代表等幅平面和等相平面(二者重合),(b)非均匀波,当 α 为复数时;实线代表等幅平面,虚线代表等相平面

现在可以证明[①],(3)式的任何解都能够写成**平面波角谱**形式[②]

$$\int f(\alpha)e^{ikr\cos(\theta-\alpha)}\,d\alpha$$

只要适当选择其积分路线和函数 $f(\alpha)$。这种表示和任意函数的傅里叶积分表示关系极其密切,而在应用上同样极具成效。其中积分路线亦可先行划一固定而不明显损害普遍性,这样任何一个问题都变成如何确定适合的 $f(\alpha)$。下面将先用该法表示出平面电流片产生的电磁场,然后证明其结果即导致平面屏衍射问题的对偶积分方程表述。

考虑 $y=0$ 中的一个二维电流片。如前曾指示,方便的做法是将 E 偏振和 H 偏振分开处理。先探讨前一情况,其中电流密度只有一个 z 分量,设为 J_z,并首先问 $y=0$ 中什么样的电流分布能向 $y>0$ 半空间辐射 E 偏振平面波

$$E=(0,0,1)e^{ikr\cos(\theta-\alpha)},\qquad H=(\sin\alpha,-\cos\alpha,0)e^{ikr\cos(\theta-\alpha)}\tag{6}$$

诚然,从 § 11.2(2)的第一个关系式可立即看出,该电流密度分布为

$$J_z(\xi)=-\frac{c}{2\pi}e^{ik\xi\cos\alpha}\sin\alpha\tag{7}$$

---

① E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis* (Cambridge, Cambridge University Press, 1927), p. 397。

② 关于另一种形式的角谱表示,见 13.2.1 节和 594 页所引参考文献。

式中$(\xi,0)$是平面$y=0$上的变点坐标。(7)式当然能够用标准的赫兹势方法(求电流分布所产生的场)加以证明,虽则那将需计算一个十分复杂的积分。

广而言之,任何电流分布都能够用不同α值的(7)式经适当叠加来构成,同时所辐射的场则可由平面波(6)经相应叠加而得到。更准确地说,设电流密度能够写成如下傅里叶积分的形式:

$$J_z(\xi)=-\frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(\mu)e^{ik\xi\mu}\,d\mu. \tag{8}$$

作变量更换,令$u=\cos\alpha$,得到

$$J_z(\xi)=-\frac{c}{2\pi}\int_C \sin\alpha P(\cos\alpha)e^{ik\xi\cos\alpha}\,d\alpha, \tag{9}$$

式中C是复α平面中的积分路线,如图11.3所示;沿该路线$\cos\alpha$的值绵贯整个实数域,从∞一直到$-\infty$。因此电流分布(9)所产生的非零场分量为

$$E_z^{(s)}=\int_C P(\cos\alpha)e^{ikr\cos(\theta\mp\alpha)}\,d\alpha, \tag{10}$$

$$H_x^{(s)}=\pm\int_C \sin\alpha\,P(\cos\alpha)e^{ikr\cos(\theta\mp\alpha)}\,d\alpha, \tag{11}$$

$$H_y^{(s)}=-\int_C \cos\alpha\,P(\cos\alpha)e^{ikr\cos(\theta\mp\alpha)}\,d\alpha, \tag{12}$$

其中上面的正、负号用于$y\geqslant 0$,下面的正、负号用于$y\leqslant 0$。

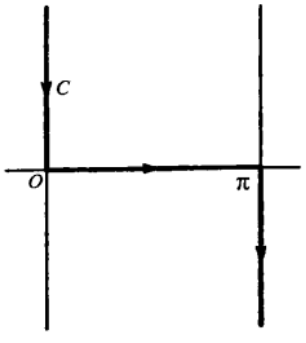


图11.3 复α平面中的路线C

方程(10),(11)和(12)将场表示成平面波谱的形式,谱形决定于函数$P(\cos\alpha)$。与C的实轴段相对应的各个平面波是均匀的;正是这些波,从$y=0$向两边辐射开,进入$y>0$和$y<0$区域,其传播方向覆盖各区π角范围,如简图11.4所示。与C的两臂$\alpha=i\beta$和$\alpha=\pi-i\beta(\beta=0$到$\infty)$相对应的各平面波则是非均匀的;所有这些波的位相传播方向都沿着正x轴或负x轴,而其振幅在垂直于平面$y=0$的方向上随距离$|y|$的增大呈指数衰减。这种波称为隐失波[①](evanescent wave),它们并不向$y>0$和$y<0$区域内传播。通过仔细剖析坡印廷矢量不难证

① 旧译倏逝波;但中文"倏逝"指时间上的很快消逝,而实际是空间上的衰减,故1996年修改为"隐失"(物理学名词)——译者注。

明，这些隐失波没有一个在时间平均上将能量从平面 $y=0$ 带进 $y>0$ 和 $y<0$ 半空间内，但它们的存在对计及电流分布中小于波长的精细结构却为必要。

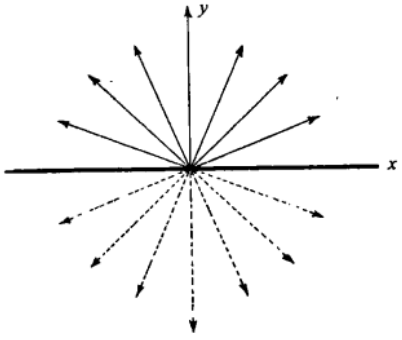


图 11.4　均匀平面波传播方向分布范围图示：进入 $y>0$ 半空间中的（实线）和进入 $y<0$ 半空间中的（虚线）

对于 H 偏振情况，$y=0$ 中的电流密度 J_x 所产生的场同样可写成为

$$H_z^{(s)}=\pm\int_C P(\cos\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos(\theta\mp\alpha)}\,\mathrm{d}\alpha, \tag{13}$$

$$E_x^{(s)}=-\int_C \sin\alpha\,P(\cos\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos(\theta\mp\alpha)}\,\mathrm{d}\alpha, \tag{14}$$

$$E_y^{(s)}=\pm\int_C \cos\alpha\,P(\cos\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos(\theta\mp\alpha)}\,\mathrm{d}\alpha, \tag{15}$$

式中上面的正、负号用于 $y\geqslant 0$，下面的正、负号用于 $y\leqslant 0$，而相关的电流密度

$$J_x(\xi)=\frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi\mu}\,\mathrm{d}\mu. \tag{16}$$

11.4.3　对偶积分方程形式的表述

现在可将平面屏二维衍射问题表述成对偶积分方程形式。设有一电磁场 $\mathbf{E}^{(i)},\mathbf{H}^{(i)}$ 入射在 $y=0$ 平面中一组无限薄的理想导电的条带上；并以 M 表示沿 x 坐标存在金属的那些地段，以 A 表示不存在金属的空白地段。如果将散射场 $\mathbf{E}^{(s)},\mathbf{H}^{(s)}$ 按其偏振性质用平面波角谱表成为 §11.4(10)，§11.4(11)，§11.4(12)，或者 §11.4(13)，§11.4(14)，§11.4(15) 的形式，则由 11.3 节的边界条件(I)和(II)可得到下列两组积分方程：

E 偏振

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\mu}\,\mathrm{d}\mu=-E_z^{(i)}\qquad(\text{在 }M\text{ 上}) \tag{17}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}P(\mu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\mu}\,\mathrm{d}\mu=0\qquad(\text{在 }A\text{ 上}) \tag{18}$$

H 偏振

$$\int_{-\infty}^{\infty}P(\mu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\mu}\,\mathrm{d}\mu=E_x^{(i)}\qquad(\text{在 }M\text{ 上}) \tag{19}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} e^{ikx\mu}\, d\mu = 0 \qquad (在\ A\ 上) \tag{20}$$

其中积分变量已用 $\cos\alpha = \mu$ 代回。复 α 平面上$\mathcal{R}\ \alpha = 0$ 和$\mathcal{R}\ \alpha = \pi$($\mathcal{R}$表示实部)之间的区域经该代换后映射成(map)全部复 μ 平面;细究其情况,可知积分路线沿实轴段应如图 11.5 所示,以避开被积函数中 $\mu = \pm 1$ 处可能存在的支点(branch-point),在上两组积分中,单一未知函数 $P(\mu)$在参量 x 的两个不同地段满足不同的方程,这种类型的积分方程叫做对偶积分方程(dual integral equations)[①]。

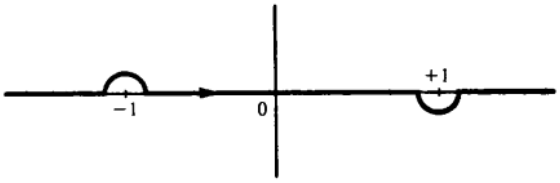


图 11.5 复 μ 平面中从 $-\infty$ 到 ∞ 的积分路线

11.1 节中提到的科普森,Schwinger 以及其他等人所采用的表述与上面给出的表述有所不同,差别在于该表述只包含单个积分方程。虽然这里对它并无需要,但应指出其与本法之关系。以 E 偏振情况为例:对(16)式取傅里叶变换,所得到的解 $P(\mu)$可写成下列形式

$$P(\mu) = -\frac{k}{c}\int_M J_z(\xi) e^{-ik\mu\xi}\, d\xi, \tag{21}$$

这当然同(8)式和 A 上 $J_z(\xi) = 0$ 相符合。将此 $P(\mu)$值代入(17)式,并计算出对 μ 的积分,则得到积分方程

$$\frac{k}{c}\int_M J_z(\xi) H_0^{(1)}(k|x-\xi|) d\xi = E_z^{(i)} \qquad (在\ M\ 上) \tag{22}$$

式中 $H_0^{(1)}$是第一类零阶 Hankel 方程,$J_z(\xi)$待解。显然,(22)式的左边能够从用感生电流密度直接表示的散射场表达式推导出来。

至此,索末菲半平面问题求解的预备工作业已就绪,下面进行求解。

11.5 平面波的半平面二维衍射

11.5.1 E 偏振情况的对偶积分方程之解

现在可用很少几页来处理平面波的半无穷平面衍射问题。先列出相应的对偶积分方程,然后求出未知函数 $P(\cos\alpha)$的显解,其式虽很简单,但却是严格的。

首先考虑 E 偏振平面波

$$E_z^{(i)} = e^{-ikr\cos(\theta-\alpha_0)} \tag{1}$$

令其入射在一个理想导电的半无穷平面($y = 0, x > 0$)上。为简便起见,假设(1)式中的 α_0 为实量(不考虑隐失波)并且 $0 < \alpha_0 < \pi$(见图 11.6)。这时方程 § 11.4(17)和 § 11.4(18)呈

① E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (Oxford, Clarendon Press, 1937), p. 334。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}}e^{ikx\mu}\,d\mu=-e^{-ikx\mu_0}\quad \text{当 } x>0\text{ 时,} \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}P(\mu)e^{ikx\mu}\,d\mu=0\quad \text{当 } x<0\text{ 时,} \tag{3}$$

式中 $\mu_0=\cos\alpha_0$。下面我们用围道积分中的标准方法来解这两个方程。

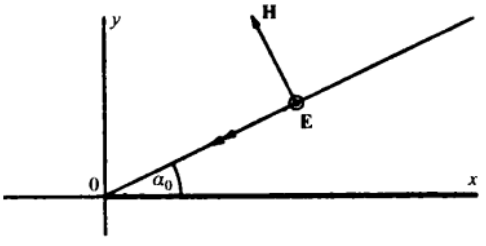


图 11.6　一个平面波入射在一个理想导电的半平面上(E 偏振情况)

在(3)式左边的积分中,x 为负。因此由约旦引理[①] 可知,当 $0\geqslant\arg\mu\geqslant-\pi$ 时,如果 $|\mu|\to\infty$ 时 $P(\mu)\to0$,则可将(3)式积分路线($-\infty\leqslant\mu\leqslant\infty$)从其两端用实轴**下方**一个无穷大的半圆弧连接起来使之闭合而丝毫不增加该积分之值。这样一来,只需再要求 $P(\mu)$在积分路线下方的半平面内没有奇点,以使(3)式得到满足,因为这时在该积分实际所围绕的闭合围道内被积函数方为正则函数。

仿此分析,由于在(2)式左方的积分中,x 为正,故可将其积分路线($-\infty\leqslant\mu\leqslant\infty$)两端用实轴**上方**的一个无穷大半圆弧连接起来使之闭合而也不改变该积分之值,但要假设当 $\pi\geqslant\arg\mu\geqslant0$而 $|\mu|\to\infty$ 时,$P(\mu)/\sqrt{1-\mu^2}\to0$。因此,如果 $U(\mu)$是任何一个在积分路线上方半平面中没有奇点的函数,并且当 $|\mu|\to\infty$ 时在该处的行为合乎要求,则(2)式显然被下式满足:

$$\frac{P(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}}=-\frac{1}{2\pi i}\frac{U(\mu)}{U(-\mu_0)}\frac{1}{(\mu+\mu_0)} \tag{4}$$

但要积分路线从 $\mu=-\mu_0$ 处极点下方绕行而过,如图 11.7 所示。因为(4)式的右方函数只有一个有关系的奇点,就是 $\mu=-\mu_0$ 处的极点,留数为 $-1/(2\pi i)$,而由柯西留数定理可知,这个奇点对(2)式中积分的贡献正好是指数项 $-\exp(-ikx\mu_0)$。

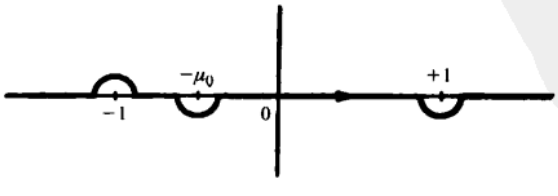


图 11.7　复 μ 平面中的积分路线

① E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis* (Cambridge, Cambridge University Press, 1920), p. 115。

现在如若将(4)式改写成下列形式:

$$\frac{P(\mu)}{\sqrt{1-\mu}}(\mu+\mu_0)=-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\frac{U(\mu)}{U(-\mu_0)}\sqrt{1+\mu} \tag{5}$$

则可论证(5)式各边为一常数。因为其左边在积分路线下方半平面内没有奇点,并且在无穷远处是代数增大的,而右边在积分路线上方半平面内具有同样的特性。这个(5)式两边均与之等同的函数在整个复 μ 平面内没有奇点,而且代数值在无穷远处是增大的:因此它必定是一个多项式,并且因为对于某些 $\arg\mu$ 值,当$|\mu|\to\infty$时 $P(\mu)\to 0$,所以该多项式只能包含一个常数项。

该常数之值通过令(5)式右边的 $\mu=-\mu_0$ 即可求出,因此

$$P(\mu)=\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\frac{\sqrt{1-\mu_0}\sqrt{1-\mu}}{\mu+\mu_0}, \tag{6}$$

即

$$P(\cos\alpha)=\frac{\mathrm{i}}{\pi}\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha+\cos\alpha_0} \tag{7}$$

(7)式在 α 和 α_0 方面具有对称性,其意义在 11.7.1 节结束时再谈。

散射场各分量由 § 11.4(10) ~ § 11.4(12)以 $P(\cos\alpha)$的(7)式值代入即可得到,因此总场(入射场加散射场)由下式给出:

$$E_z=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr\cos(\theta-\alpha_0)}-\frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int_C\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha+\cos\alpha_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos(\theta\mp\alpha)}\,\mathrm{d}\alpha, \tag{8}$$

式中上面的正、负号对应 $y>0$,下面的正、负号对应 $y<0$。至此,实在的解即告完成,剩下的工作只是把它改造成更有用的形式。

11.5.2 解的菲涅耳积分表示

当 kr 很大时,即对于离原点远大于大约一个波长的距离,计算

$$\int P(\cos\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos(\theta-\alpha)}\,\mathrm{d}\alpha \tag{9}$$

这种一般类型的积分,可尝试采用最陡下降法(见附录 C)。该法中的第一步是将积分路线 C 变形(要充分考虑被积函数中任何奇点的存在)成为经过 $\alpha=\theta$ 处鞍点的最陡下降路线,比如 $S(\theta)$。路线 $S(\theta)$示于图 11.8;沿着这条路线,新变量

$$\tau=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\theta) \tag{10}$$

之值的变化范围绵贯整个实数域,从 $-\infty$ 变到 ∞。这时积分(9)呈如下形式:

$$\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(\cos\alpha)}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\mathrm{i}\tau^2}}\mathrm{e}^{-kr\tau^2}\,\mathrm{d}\tau, \tag{11}$$

由此式可得到 $kr\gg 1$ 时的渐近近似。

将该法应用到(8)式中的具体积分,事实上导致其菲涅耳积分表示而无需采用近似。现在来证明这一点。

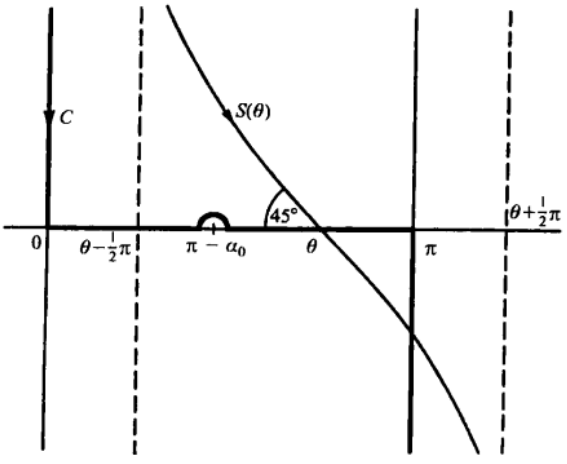


图 11.8　复 α 平面中 $S(\theta)$的最陡下降路线

首先考虑 $0<\theta<\pi$ 的情况。因为(7)式可改写成如下形式：

$$P(\cos\alpha)=\frac{1}{4\pi\mathrm{i}}[\sec\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)-\sec\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha_0)], \tag{12}$$

所以只要计算

$$\int_{S(\theta)}\sec\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos(\theta-\alpha)}\mathrm{d}\alpha \tag{13}$$

即已足够，因为 $\sec\frac{1}{2}(\alpha+\alpha_0)$的贡献随后由改变 α_0 的正、负号即可写出。现在通过简单变换，令 $\alpha-\theta=\alpha'$，可将(13)式写成

$$\begin{aligned}&\int_{S(0)}\sec\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0+\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\alpha}\,\mathrm{d}\alpha\\&=\tfrac{1}{2}\int_{S(0)}[\sec\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha_0+\theta)+\sec\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha_0-\theta)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\alpha}\,\mathrm{d}\alpha\\&=2\int_{S(0)}\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_0-\theta)\cos\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha+\cos(\alpha_0-\theta)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\alpha}\,\mathrm{d}\alpha,\end{aligned} \tag{14}$$

而后采用代换，令

$$\tau=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}\sin\tfrac{1}{2}\alpha$$

则(14)式变成

$$-2\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\eta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-kr\tau^2}}{\tau^2-\mathrm{i}\eta^2}\,\mathrm{d}\tau, \tag{15}$$

式中

$$\eta=\sqrt{2}\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\alpha_0).$$

但是

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\xi\tau^2}\,\mathrm{d}\tau=\sqrt{\frac{\pi}{\xi}},$$

将上式两边乘以 $\exp(\mathrm{i}\eta^2\xi)$,再对 ξ 积分,积分范围从 $\xi=kr$ 到 $\xi\to\infty$,即得到

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\eta^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-kr\tau^2}}{\tau^2-\mathrm{i}\eta^2}\,\mathrm{d}\tau=\sqrt{\pi}\int_{kr}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta^2\xi}}{\sqrt{\xi}}\,\mathrm{d}\xi=\frac{2\sqrt{\pi}}{|\eta|}\int_{|\eta|\sqrt{kr}}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu^2}\,\mathrm{d}\mu. \tag{16}$$

或者,引进符号

$$F(a)=\int_a^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu^2}\,\mathrm{d}\mu \tag{17}$$

作为一种复数形式的菲涅耳积分①,则

$$\eta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-kr\tau^2}}{\tau^2-\mathrm{i}\eta^2}\,\mathrm{d}\tau=\pm2\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr\eta^2}F\{\pm\eta\sqrt{kr}\}, \tag{18}$$

式中上面的正、负号用于 $\eta>0$,下面的正、负号用于 $\eta<0$。

将这些结果合到一起,最后得到,对于 $y\geqslant0$,

$$-\frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int_{S(\theta)}\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_0\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha+\cos\alpha_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos(\theta-\alpha)}\,\mathrm{d}\alpha=-\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}}{\sqrt{\pi}}\Big\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr\cos(\theta-\alpha_0)}F[\sqrt{2kr}\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\alpha_0)]$$
$$\mp\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr\cos(\theta+\alpha_0)}F[\pm\sqrt{2kr}\cos\tfrac{1}{2}(\theta+\alpha_0)]\Big\}, \tag{19}$$

式中上面的正、负号用于 $\theta+\alpha_0<\pi$,下面的正、负号用于 $\theta+\alpha_0>\pi$。

要从(8)式获得完全场,还只须要将 $\alpha=\pi-\alpha_0$ 处的单极点考虑进来。对于 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$(即 $y\geqslant0$),不难证明,在将积分路线 C 变形到路线 $S(\theta)$时,无穷远区没有贡献,并且由图 11.8 显然可见,只要 $\pi-\alpha_0>\theta$,该极点就被围入积分。这时由留数定理得到,其贡献为

$$-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr\cos(\theta+\alpha_0)}. \tag{20}$$

换言之,正是这**几何光学**的反射波,其几何形边界处($\theta=\pi-\alpha_0$)的不连续恰好抵消掉**衍射**场(19)中相应处的不连续。事实上,借助关系式

$$F(a)+F(-a)=\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}, \tag{21}$$

则(8)式的完全场可写成下列形式②:

$$E_z=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}}{\sqrt{\pi}}\Big\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr\cos(\theta-\alpha_0)}F[-\sqrt{2kr}\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\alpha_0)]$$
$$-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr\cos(\theta+\alpha_0)}F[-\sqrt{2kr}\cos\tfrac{1}{2}(\theta+\alpha_0)]\Big\}, \tag{22}$$

这就是索末菲所得到的有名结果。

当 $y<0$ 时,须要计算的积分是

---

① 这种形式的菲涅耳积分较之 § 8.7(12)所定义的更便于应用,但应注意积分下限有改变。

② 按:(8)式左方 E_z 称为总场(total field)(入射场+散射场)($y\geqslant0$),但(19)式所计算出的只是其中散射场在 $0\leqslant\theta<\pi-\alpha_0$ 和 $\pi-\alpha_0<\theta\leqslant\pi$ 两个区域(θ 为观测方向)的结果,所以加上入射场后还不是(8)式的完全场(complete field)。(20)式是 $\alpha=\pi-\alpha_0$ 处极点对散射场的贡献,加上此项后才是(8)式总场的完全场,但该结果文中未予列出,而是借助关系式(21)将其转化成(22)式写出。转化过程中不但消去了几何光学反射波[(20式)],而且也消去了(8)式中原有的入射波 $E_z^{(i)}$ 项。结果,(22)式用菲涅耳积分表达出 $y\geqslant0$ 半空间中总场的完全场——译者注。

$$\int_C \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_0 \sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha+\cos\alpha_0} e^{ikr\cos(\theta+\alpha)}\,d\alpha.$$

其中($\pi<\theta<2\pi$),这时适合的最陡下降路线是 $S(2\pi-\theta)$,并且只有当 $\theta>\pi+\alpha_0$ 时,$\alpha=\pi-\alpha_0$ 处的极点才被围入积分路线,所贡献之量则等于负的入射波。而完全场仍由(22)式给出。

H 各分量相应表达式的获得不过是一个微分问题,如 11.4.1 节中所示。笛卡儿分量 H_x,H_y 和极坐标分量 H_r,H_θ 都有其用途:由于(22)式是用 r,θ 表示的,所以方便的做法是先由麦克斯韦方程

$$H_r=\frac{1}{ikr}\frac{\partial E_z}{\partial\theta},\qquad H_\theta=-\frac{1}{ik}\frac{\partial E_z}{\partial r},\tag{23}$$

推导出 H_r,H_θ,再以之代入关系式

$$H_x=\cos\theta\,H_r-\sin\theta\,H_\theta,\qquad H_y=\sin\theta\,H_r+\cos\theta\,H_\theta$$

求出 H_x,H_y。

现引进下列符号以便结果书写较为紧凑:

$$u=-\sqrt{2kr}\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\alpha_0),\qquad v=-\sqrt{2kr}\cos\tfrac{1}{2}(\theta+\alpha_0),\tag{24}$$

$$G(a)=e^{-ia^2}F(a).\tag{25}$$

请注意

$$\frac{dG(a)}{da}=-1-2iaG(a).$$

因此(22)式呈

$$E_z=\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}}e^{ikr}\{G(u)-G(v)\},\tag{26}$$

并由此得到

$$\left.\begin{aligned}H_r&=\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}}e^{ikr}\left\{\sin(\theta-\alpha_0)G(u)-\sin(\theta+\alpha_0)G(v)-i\sqrt{\frac{2}{kr}}\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\cos\tfrac{1}{2}\theta\right\},\\ H_\theta&=\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}}e^{ikr}\left\{\cos(\theta-\alpha_0)G(u)-\cos(\theta+\alpha_0)G(v)+i\sqrt{\frac{2}{kr}}\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\sin\tfrac{1}{2}\theta\right\},\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned}H_x&=-\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}}e^{ikr}\left\{\sin\alpha_0[G(u)+G(v)]+i\sqrt{\frac{2}{kr}}\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\cos\tfrac{1}{2}\theta\right\},\\ H_y&=-\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}}e^{ikr}\left\{\cos\alpha_0[G(u)-G(v)]-i\sqrt{\frac{2}{kr}}\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\sin\tfrac{1}{2}\theta\right\}.\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

11.5.3　解的性质

现在我们略加详细地剖析 11.5.2 节中所得到的结果。从其导出过程显然可见,并且亦可直接证明,$G(u)\exp(ikr)$本身对任一 α_0 值都是二维波动方程的一个解;值得注意之点是它具有 4π 周期性,所以 $G(u)-G(v)$在 $\theta=0$,$\theta=2\pi$ 即散射屏两面处均为零,但在 $\theta=\pi$ 处不为零。

事实上,当初索末菲就是通过寻求波动方程的一个适当的 4π 周期解,并将它与它的"像"组合在一起而获得其结果(22)[①],顺便提及,由(28)式可知

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta\frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}},\qquad \sin\tfrac{1}{2}\theta\frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}$$

也是二维波动方程的解——一个众所周知的结果。

(26)式的其他方面,应该加以细致分析的,是其在 $r\to\infty$ 时的行为。这是一个直解问题,也是本节随后讨论的主题。

半平面问题的一个非常引人注视的特点是其中任何点的场都能够从菲涅耳积分表[②] 来计算。还有两种情况,即 $kr\gg1$ 和 $kr\ll1$,具有特别意义,而且这时对菲涅耳积分可采用简单的近似(8.7.2 节中讲过)。条件 $kr\gg1$ 在光学实验中当然总是满足的,因为光学中的观测点距离衍射边大多是几百万个波长;条件 $kr\ll1$ 则发生在关于锐边附近场的行为这类问题,可在厘米级射电波段加以研究(见 11.5.6 节)。

(a) $kr\gg1$。在此情况下,$|u|$ 和 $|v|$ 都远大于 1(θ 值分别离 $\pi+\alpha_0$ 和 $\pi-\alpha_0$ 足够近时除外)。为求准确,现将场划分为 5 个区域,如图 11.9 所示。II 区和 IV 区边界的曲线方程分别取为 $u^2=1$ 和 $v^2=1$,所以这两条曲线都是抛物线,其焦点都在原点,其轴分别沿着 $\theta=\pi+\alpha_0$ 和 $\theta=\pi-\alpha_0$。在区域 II 的很里边[这就是说,在抛物线 $u^2=\varepsilon(\varepsilon\ll1)$ 里面],$|u|\ll1$;在区域 II 的很外边[这就是说,在抛物线 $u^2=\gamma(\gamma\gg1)$ 外面),$|u|\gg1$;$|v|$ 和区域 IV 方面情况类似。此外,对于 $0<\theta<\pi-\alpha_0$,u 和 v 均为负;对于 $\pi-\alpha_0<\theta<\pi+\alpha_0$,$u$ 为负而 v 为正;而对于 $\pi+\alpha_0<\theta<2\pi$,u 和 v 则均为正。

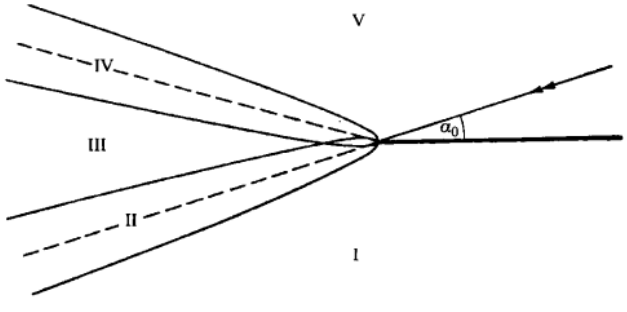


图 11.9 平面波在理想导电半平面上的衍射。划分场之行为的 5 个区域

区域 I,III 和 V 显然同采用几何光学处理时所将发生的情况密切有关;按照几何光学,光走直线,这就形成 3 个区域,如图 11.10 所示,即:完全没有场的屏后**阴影**区,只有入射波的**受照**区,以及入射平面波加上**无穷**屏反射类型反射平面波的**反射**区,三者依次对应 I,III,V 三区。事实上,广而言之,正是 II 和 IV 这种区域中的严格解使得几何场从一个区连续过渡到下一个区。为了让这一点看得更为细致,在推导菲涅耳积分 $F(a)$ 的渐近近似时,对于大自变量值($a\gg1$),必须仅取其首项即停止展开。

① 这一求解方法在 B. B. Baker 和 E. T. Copson 的著作中有很好的叙述,见 *The Mathematical Theory of Huygens' Principle* (Oxford, Clarendon Press, 2nd edition, 1950), Chapter 4。

② R. A. Rankin 所给的菲涅耳积分表似乎最适合作为此用,见 *Phil. Trans. Roy. Soc.* A, **241** (1949), 457。

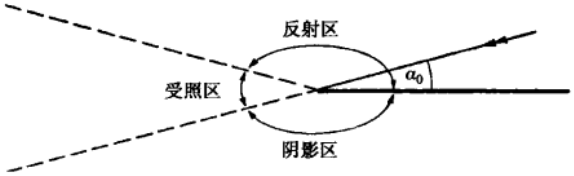


图 11.10　平面波在理想导电半平面上的衍射。几何光学的 3 个区域

如 a 为正，则将(25)式 $G(a)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a^2}F(a)$ 写成

$$G(a)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a^2}\int_a^\infty \mathrm{d}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu^2})/2\mathrm{i}\mu,$$

并接连两次进行分部积分，由而得到

$$G(a)=\frac{\mathrm{i}}{2a}+\frac{1}{4a^3}-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a^2}\int_a^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu^2}}{\mu^4}\,\mathrm{d}\mu. \tag{29}$$

这一过程如果继续下去，事实上将得到一个完全的 $G(a)$ 展开式，但是这里的目的只是为了看到(29)式中最后一项积分的模数小于

$$\int_a^\infty \mathrm{d}\mu/\mu^4=1/3a^3, \tag{30}$$

因而

$$G(a)=\frac{\mathrm{i}}{2a}+O\left(\frac{1}{a^3}\right). \tag{31}$$

值得指出的是，这一结果也能从 11.5.2 节中概述的一般方法得到，只要将(18)式被积函数中的因子 $(\tau^2-\mathrm{i}\eta^2)^{-1}$ 展开为 τ 的幂级数，然后逐项积分。

如 a 为负，则(30)式左边发散，但这一问题不难对待，只要利用(21)式并将正 a 情况的结果代入即可解决。因此

$$G(a)=\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a^2}+\frac{\mathrm{i}}{2a}+O\left(\frac{1}{a^3}\right). \tag{32}$$

正 a 时的渐近近似(31)与负 a 时的渐近近似(32)不同，这一事实是斯托克斯现象[①] 的一个特例。

现在将完全场 E_z 写成

$$E_z=E_z^{(g)}+E_z^{(d)},$$

其中 $E_z^{(g)}$ 是几何光学场，由下式给示：

$$E_z^{(g)}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr\cos(\theta-\alpha_0)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr\cos(\theta+\alpha_0)} & \text{当 } 0\leqslant\theta<\pi-\alpha_0,\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr\cos(\theta-\alpha_0)} & \text{当 } \pi-\alpha_0<\theta<\pi+\alpha_0,\\ 0 & \text{当 } \pi+\alpha_0<\theta\leqslant 2\pi,\end{cases} \tag{33}$$

而 $E_z^{(d)}$ 是**衍射**场，就是必须加到几何光学场 $E_d^{(\gamma)}$ 上以构成完全场的那个场。因此，当 $kr\gg 1$ 时，将(31)式和(32)式应用于(26)式，即有

① G. G. Stokes, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, **10**(1864), 105。近代对该现象的探讨，见，例如 R. B. Dingle, *Asymptotic Expansions: Their Derivation and Interpretation* (Academic Press, New York, 1973), Secs, 1. 2 and 21. 6。

$$E_z^{(d)} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\frac{1}{4}i\pi} \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_0 \sin\frac{1}{2}\theta}{(\cos\theta + \cos\alpha_0)} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \tag{34}$$

但观察点(r,θ)不能太靠近 II 和 IV 这两个区域,原由已见上述。由(23)式或(27)式可立即看出,与(34)式同级近似的 $\mathbf{H}^{(d)}$ 分量为 $H_\theta^{(d)} = -E_z^{(d)}$, $H_r^{(d)} = 0$。从公式上看,显然,(34)式意味着该区中衍射场的分布状态好像是发自一个位沿衍射边的线源,其强度随 θ 角的变化模式即"极图"(参阅 653 页图 14.10)如式所定。这与实验观察相合——实验上,衍射边从阴影区(这里视场反差大)看去时呈受照之状。

当 $\cos\theta + \cos\alpha_0$ 趋近零时,近似结果(34)失效,这时必须求诸严格解。因为

$$G(0) = \int_0^\infty e^{i\mu^2}\, d\mu = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} e^{\frac{1}{4}i\pi}, \tag{35}$$

由(26)式可知,在 $\theta = \pi + \alpha_0$ 方向上,

$$E_z = \tfrac{1}{2} e^{ikr} + O\left\{\frac{1}{\sqrt{kr}}\right\}, \tag{36}$$

而在 $\theta = \pi - \alpha_0$ 方向上,

$$E_z = e^{ikr\cos(2\alpha_0)} - \tfrac{1}{2} e^{ikr} + O\left\{\frac{1}{\sqrt{kr}}\right\}. \tag{37}$$

因此,靠近 $\theta = \pi - \alpha_0$ 和 $\theta = \pi + \alpha_0$ 时,衍射场与入射场同量级。特别是,在无穷远处,毗邻两区几何光学场间的过渡是经由其算术平均。

几何光学场和衍射场在它们强度相近的区域将相互干涉而产生条纹。这些条纹在 11.5.5 节所讨论的图 11.11 中明显可见。

(b) $kr \ll 1$。在此情况下,$|u|$和$|v|$都远小于 1。因而菲涅耳积分的级数展开是有用的。将 $F(a)$写成

$$F(a) = \int_0^\infty e^{i\mu^2}\, d\mu - \int_0^a e^{i\mu^2}\, d\mu,$$

并将第二项积分函数中指数项展开,即有

$$F(a) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} e^{\frac{1}{4}i\pi} - a + O(a^3). \tag{38}$$

因此,由(26)式和(28)式,略去其中 kr 幂级大于 1/2 的各项,则可得到

$$\left.\begin{aligned} E_z &= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{4}i\pi} \sqrt{kr} \sin\tfrac{1}{2}\alpha_0 \sin\tfrac{1}{2}\theta, \\ H_x &= -\sin\alpha_0 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{4}i\pi} \sin\tfrac{1}{2}\alpha_0 \cos\tfrac{1}{2}\theta \left\{\frac{i}{\sqrt{kr}} + (1 + 2\cos\alpha_0)\sqrt{kr}\right\}, \\ H_y &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{4}i\pi} \sin\tfrac{1}{2}\alpha_0 \sin\tfrac{1}{2}\theta \left\{-\frac{i}{\sqrt{kr}} + (1 + 2\cos\alpha_0)\sqrt{kr}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

应当注意,在 $r = 0$ 处,E_z 是有限的并且是连续的,而 H_x 和 H_y 按 $r^{-1/2}$ 发散,但 $\theta = \pi$ 时除外,这时 $H_x = -\sin\alpha_0 \exp(ikr\cos\alpha_0)$①;并且 $\theta = 0, 2\pi$ 时也除外,这时 $H_y = 0$。如此行为在一个

① 此结果不能由(39)式得之(因 $\theta = \pi$ 时其 $H_x = 0$),而是直接得自(28)式;$\theta = \pi$ 时,$u = -v = -\sqrt{2kr}\sin\frac{1}{2}\alpha_0$,以之代入(28)式 H_x 即可——译者注。

物理问题中实属罕见，究其原因，当然是边无限锐这一理想化概念所致。场分量在此情况下存在有奇点，这在表述任何关于解的惟一性定理（见 11.9 节）时必须加以考虑。

在对解的性质进行探究行将结束之时，顺带再剖析一下衍射屏中所感生的电流密度。该密度等于 $-c/4\pi$ 乘以 $\theta=0$ 处和 $\theta=2\pi$ 处 H_x 之差；根据由(28)式可知其结果为

$$\frac{2\pi}{c}J_z=\sin\alpha_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx\cos\alpha_0}-\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\left\{2\sin\alpha_0 G[\sqrt{2kx}\cos\tfrac{1}{2}\alpha_0]-\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{kx}}\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\right\}. \tag{40}$$

当 $\sqrt{2kx}\cos\frac{1}{2}\alpha_0\gg1$ 时，(40)式可解读为

$$J_z=\frac{c}{2\pi}\sin\alpha_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx\cos\alpha_0}+O\{(kx)^{-3/2}\}. \tag{41}$$

这个结果令人感兴趣之处是它指明在什么范围可以允许假设电流密度就是几何光学所给的结果——该假设在无法精确求解的问题中均例行采用。很清楚，这个假设只有在 α_0 值不接近 π 时才是合理的，并且是得益于(41)式中的“修正”项在 $x\to\infty$ 时按 $x^{-3/2}$ 而不按 $x^{-1/2}$ 趋于零。

相反，当 $\sqrt{2kx}\cos\frac{1}{2}\alpha_0\ll1$ 时，

$$J_z=\frac{c}{\pi\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}\sin\tfrac{1}{2}\alpha_0\left\{\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{kx}}+4\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha_0\sqrt{kx}\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \tag{42}$$

在衍射边处呈发散。

11.5.4　H 偏振情况的解

在 H 偏振情况下，入射场由

$$H_z^{(i)}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr\cos(\theta-\alpha_0)}, \tag{43}$$

来确定，处理方式可按 E 偏振情况如法炮制，事实上，分析实际完全一样。或可改用另法，借助 11.3 节严格电磁形式的巴比涅原理由后者推演出前者，因为半平面的互补屏本身还是半平面。结果表明，其完全场如下式所示：

$$\begin{aligned}H_z=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}}{\sqrt{\pi}}\Big\{&\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr\cos(\theta-\alpha_0)}F[-\sqrt{2kr}\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\alpha_0)]\\&+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr\cos(\theta+\alpha_0)}F[-\sqrt{2kr}\cos\tfrac{1}{2}(\theta+\alpha_0)]\Big\}.\end{aligned} \tag{44}$$

此式与 E 偏振场相应的 E_z 表达式(22)仅仅差在第二项的正、负号上。

采用 11.5.2 节的符号时，各非零场分量呈下列形式：

$$\left.\begin{aligned}H_z&=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\{G(u)+G(v)\},\\E_x&=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\left\{\sin\alpha_0[G(u)-G(v)]+\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{kr}}\cos\tfrac{1}{2}\alpha_0\sin\tfrac{1}{2}\theta\right\},\\E_y&=-\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\left\{\cos\alpha_0[G(u)+G(v)]+\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{kr}}\cos\tfrac{1}{2}\alpha_0\cos\tfrac{1}{2}\theta\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

很明显，当 $\theta=0$ 和 $\theta=2\pi$ 时，E_x 为零；并且当 $kr\gg1$ 时，场的行为仍然能够用直边衍射场的观点给予说明，即衍射场好像是发自一个沿着衍射边的线光源，这当然是对离 $\theta=\pi-\alpha_0$

和 $\theta=\pi+\alpha_0$ 足够远的点来说的。当 $r\to 0$ 时，H_z 保持为有限并且连续，而 E_x 和 E_y 按 $r^{-1/2}$ 发散，但有两种情况除外，即 $\theta=0,2\pi$ 时 $E_x=0$ 和 $\theta=\pi$ 时，$E_y=-\cos\alpha_0\exp(ikr\cos\alpha_0)$。

电流密度由下式给出：

$$\frac{2\pi}{c}J_x=e^{-ikx\cos\alpha_0}-\frac{2e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{\pi}}e^{ikx}G\{\sqrt{2kx}\cos\tfrac{1}{2}\alpha_0\}. \tag{46}$$

当 $\sqrt{2kx}\cos\frac{1}{2}\alpha_0\gg 1$ 时，

$$\frac{2\pi}{c}J_x=e^{-ikx\cos\alpha_0}-\frac{e^{\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{2\pi}}\sec\tfrac{1}{2}\alpha_0\frac{e^{ikx}}{\sqrt{kx}}, \tag{47}$$

它在 x 增大时趋近几何光学电流密度的速度慢于 E 偏振情况。当 $\sqrt{2kx}\cos\frac{1}{2}\alpha_0\ll 1$ 时，

$$J_x=\frac{c}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{1}{4}i\pi}\cos\tfrac{1}{2}\alpha_0\sqrt{kx}e^{ikx}. \tag{48}$$

此式在 $x=0$ 处为零，所以如可以预料的，在边自身处没有与边垂直的电流。

11.5.5 一些数值计算

图 11.11 给出一条由(26)式得到的典型理论曲线，是对 E 偏振情况计算的，其中波设为正入射，振幅设为 1。图中所示为屏背后 3 波长距离($ky=-6\pi$)处 E_z 的振幅随 x 的变化。它清楚地显示出受照区中存在衍射条纹，并且 $|E_z|$ 随深入阴影区呈单调衰落。

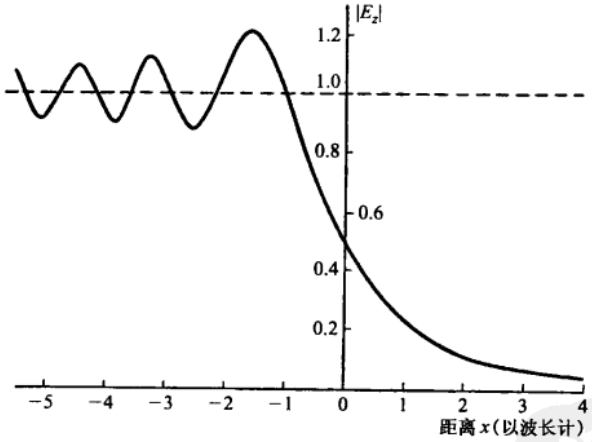


图 11.11 正入射 E 偏振平面波在一个理想导电半平面上的衍射。(波的振幅设为1)屏背后3波长距离处 $|E_z|$ 随 x 的变化

Braunbek 和 Laukien 曾做过一些令人感兴趣的计算[①]。他们采设振幅为 1 的正入射 H 偏振平面波，给出衍射边周围大约一个波长区域内 H_z 的等幅线(见图 11.12)和等相线(见图 11.13)。此外他们还给出平均能流线(见图 11.14)，这些能流线是和等相线正交的。对任何二维 H 偏振场来说情况确应如是，这一点不难加以证明：设 $H_z=he^{i\phi}$，其中 h 和 ϕ 为实量；

① W. Braunbek and G. Laukien, *Optik*, **9**(1952), 174。

然后利用关系式

$$E_x = -\frac{1}{\mathrm{i}k}\frac{\partial H_z}{\partial y}, \qquad E_y = \frac{1}{\mathrm{i}k}\frac{\partial H_z}{\partial x},$$

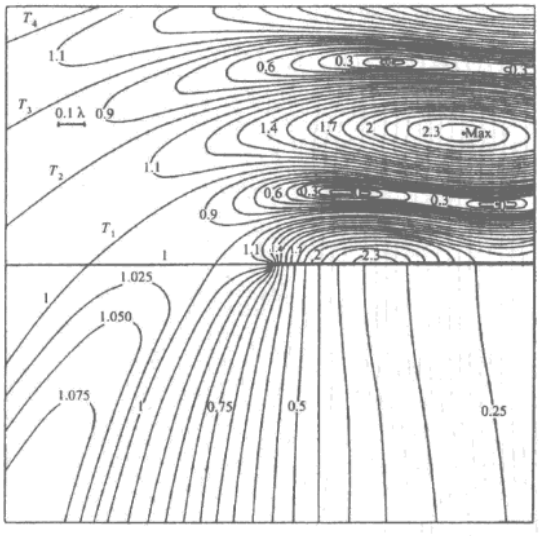


图 11.12　H_z 的等幅线(入射波振幅设为 1)　　正入射 H 偏振平面波的理想导电半平面衍射计算值[引自W. Braunbek and G. Laukien, *Optik*, **9**(1952), 174]

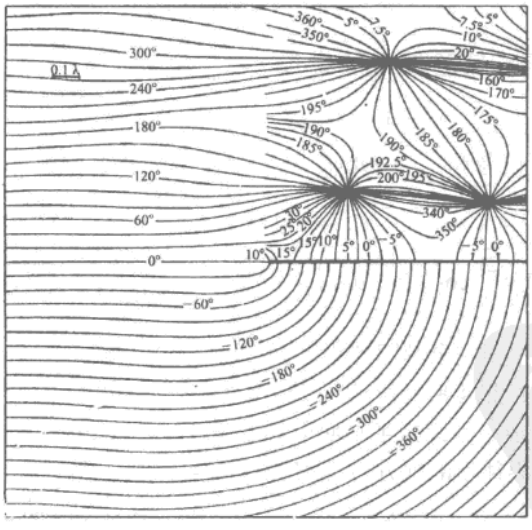


图 11.13　H_z 的等相线　　正入射 H 偏振平面波的理想导电半平面衍射计算值[引自W. Braunbek and G. Laukien, *Optik*, **9**(1952), 174]

求出 E_x 和 E_y，代入平均坡印廷矢量[见 § 1.4(56)]

$$\frac{c}{8\pi}\mathcal{R}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^\star) = \frac{c}{8\pi}\mathcal{R}(E_yH_x^\star, -E_xH_y^\star, 0)$$

可知其结果为

$$\frac{c}{8\pi}\frac{h^2}{k}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},0\right), \tag{49}$$

它与等相面ϕ = 常数正交。相应的结果对任何 E 偏振场也成立。

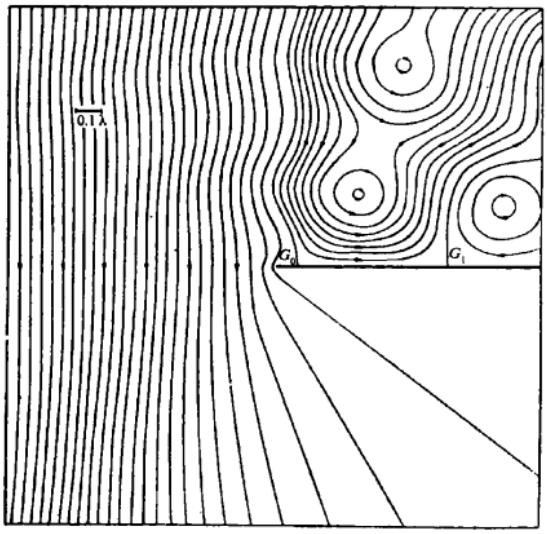


图 11.14 平均能流线 正入射 H 偏振平面波的理想导电半平面衍射计算值[引自W. Braunbek and G. Laukien, *Optik*, **9**(1952), 174]

11.5.6 与近似理论和实验结果的比较

在区域 II(见图 11.9)接受照明并出现条纹的地段,当观察点远离衍射边时,(22)式和(44)式二解中的第二项都可以忽略①。因此 E 偏振和 H 偏振两种情况,以及非偏振光情况的强度皆为

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+C\left(2\sqrt{\frac{2r}{\lambda}}\cos\frac{1}{2}(\theta-\alpha_0)\right)\right]^2+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+S\left(2\sqrt{\frac{2r}{\lambda}}\cos\frac{1}{2}(\theta-\alpha_0)\right)\right]^2, \tag{50}$$

式中 λ 是波长,C,S是菲涅耳"余弦"和"正弦"积分。读者应将(50)式同菲涅耳-基尔霍夫理论黑半平面衍射解的类似结果 § 8.7(28)做一比较。的确,曾经有人提出②,理想导电半平面衍射严格解的第一项可以看成是给出黑半平面衍射的解。

在区域 I 即阴影区很往里的地方,E 偏振场由(34)式给出,即

---

① 按:(22)和(44)两式的第一项$\approx F(u)$,而第二项$\approx F(v)$,其中 $F(a)$为复数形式的菲涅耳积分,$u=-\sqrt{2kr}\cos\frac{1}{2}(\theta-\alpha_0)$,$v=-\sqrt{2kr}\cos\frac{1}{2}(\theta+\alpha_0)$。在区域 II 几何阴影界外附近,$\theta=\pi+\alpha_0-\varepsilon_0(\alpha_0\gg\varepsilon_0>0)$,所以 $u<0$ 而 $v>0$;当观察点远离衍射边时,$kr\gg1$,故$|u|\gg v$;从菲涅耳积分性质可知,$|F(v)|\ll|F(u)|$因而这时(22)和(44)两式中的第二项皆可略去——译者注。

② 见下列参考书中所述:B. B. Baker and E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle* (Oxford, Clarendon Press, 2nd edition, 1950), p. 149 *et seq*。

$$E_z = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\frac{1}{4}i\pi} \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha_0 \sin\frac{1}{2}\theta}{(\cos\alpha_0 + \cos\theta)} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}. \tag{51}$$

同样能够证明，该处的 H 偏振场为

$$H_z = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\frac{1}{4}i\pi} \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha_0 \cos\frac{1}{2}\theta}{(\cos\alpha_0 + \cos\theta)} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}. \tag{52}$$

因此相应的两个场强之比是

$$\frac{E\text{偏振}}{H\text{偏振}} = -\tan\frac{1}{2}\alpha_0 \tan\frac{1}{2}\theta, \tag{53}$$

并且非偏振入射光经此衍射后将因而成为部分偏振光。这些结果与光学实验广为一致[①]。

微波射电技术的发展给电磁波衍射实验研究提供了绝好契机。特别是，该领域能够采用一种衍射屏，要比光学测量中能实现的衍射屏大为接近完全导电半平面的理想，而且能够详细剖析衍射边近邻地区中的场。这方面已做过一些测量，主要对 3 厘米左右的波长，结果表明理论与实验符合得很好[②]。

11.6　平面波的半平面三维衍射

在 11.5 节中，我们对平面波的半平面衍射问题进行求解，对平面波仅限制其传播方向垂直于衍射边(其他则可随意)——遂使问题简化成二维。现在来证明，通过一个简单处理技巧，可扩大前面结果而给出完全任意入射平面波情况的解。

设入射平面波由下列位相因子来表征：

$$e^{-ikS} = e^{-ik(x\cos\alpha\cos\beta + y\sin\alpha\cos\beta + z\sin\beta)}, \tag{1}$$

其中同前设理想导电屏所在的位置为 $y = 0, x > 0$。角 α 和 β 确定波的传播方向，方位如图 11.15 所示。

请注意，当 $\beta = 0$ 时，(1)式即化为前面二维形式的平面波，反过来，先将该二维形式的 k 换成 $k\cos\beta$，再乘以 $\exp(-ikz\sin\beta)$，则得到(1)式。事实上，将此步骤应用于二维波动方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + k^2 V = 0 \tag{2}$$

的任何解，显然就给出三维波动方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + k^2 V = 0 \tag{3}$$

的一个解，z 进入其中只是通过因子 $\exp(-ikz\sin\beta)$。此外，如果设 U 是(3)式的这样一个解，则不难证明，满足麦克斯韦方程的两组电磁场是

---

① 见 Wolfsohn 的论文，载于 *Handbuch der Physik*, Vol.20(Berlin, Springer, 1928), p. 275，又见 J. Savornin, *Ann. de Physique*, **11** (1939), 129。

② C. W. Horton and R. B. Watson, *J. Appl. Phys.*, **21**(1950), 16; B. N. Harden, *Proc, Inst. Elec. Engrs.*, **99**, Pt. III(1952), 229; R. D. Kodis, *J. Appl. Phys.*, **23**(1952), 249; R. V. Row, *J. Appl. Phys.*, **24**(1953), 1448。

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}&=\left(-\frac{\mathrm{i}\sin\beta}{k}\frac{\partial U}{\partial x},-\frac{\mathrm{i}\sin\beta}{k}\frac{\partial U}{\partial y},\cos^2\beta U\right),\\ \mathbf{H}&=\left(-\frac{\mathrm{i}}{k}\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\mathrm{i}}{k}\frac{\partial U}{\partial x},0\right),\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

和

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}&=\left(\frac{\mathrm{i}}{k}\frac{\partial U}{\partial y},-\frac{\mathrm{i}}{k}\frac{\partial U}{\partial x},0\right),\\ \mathbf{H}&=\left(-\frac{\mathrm{i}\sin\beta}{k}\frac{\partial U}{\partial x},-\frac{\mathrm{i}\sin\beta}{k}\frac{\partial U}{\partial y},\cos^2\beta U\right).\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

$\beta=0$ 时,(4)式即给出 E 偏振的二维场,(5)式则给出 H 偏振的二维场。

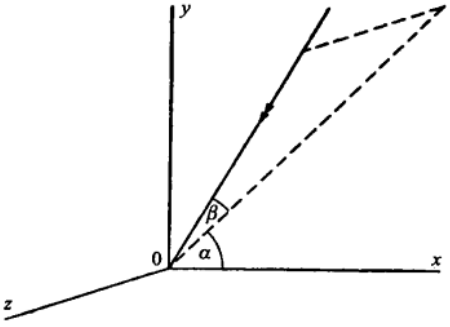
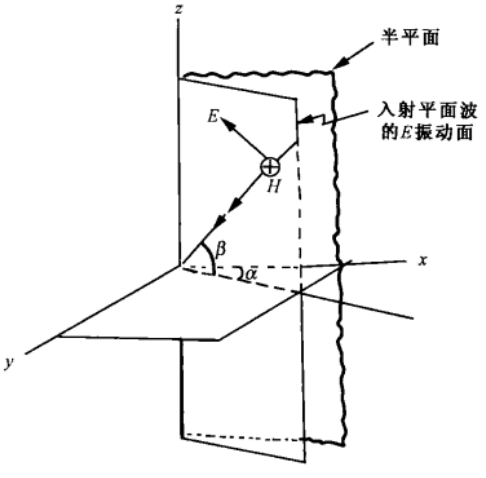


图 11.15 入射平面波的传播方向[①]

① β 是平面波传播方向对 xy 平面的倾角,α 则是传播方向在 xy 平面上的垂直投影线(图中用虚线)与 x 轴的夹角对应于 11.5 节中的 α_0。另一条虚线垂直 xy 平面。附图从另一视角观察 α,β 及(6)式 $\mathbf{E}$,$\mathbf{H}$ 所指方向,或可有助理解——译者注。



如果取(1)作为 U 的表达式，则(4)式和(5)式分别给出平面波

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}&=(-\cos\alpha\sin\beta,\ -\sin\alpha\sin\beta,\ \cos\beta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kS},\\ \mathbf{H}&=(-\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ 0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kS},\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

和

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}&=(\sin\alpha,\ -\cos\alpha,\ 0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kS},\\ \mathbf{H}&=(-\cos\alpha\sin\beta,\ -\sin\alpha\sin\beta,\ \cos\beta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kS},\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

其中有一个共同因子 $\cos\beta$ 已全提走。空间变化为(1)式的**每一个**平面波由 $\mathbf{E}$(或 $\mathbf{H}$)的两个分量即可确定，因为第三个分量可从条件 $\operatorname{div}\mathbf{E}=0$(或 $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$)求得。因此**每一个**(1)式平面波可由(6)和(7)两个波(二者的 $\mathbf{E}$ 正交)经适当叠加组成；由于这一原因，在衍射问题中，可以只讨论以(6)和(7)分别为入射场这两种情况而不有失普遍性。

先看以(6)式为入射波时的情况。现在应很清楚，这时衍射问题的解由(4)式给出，其中的 U 则由已知的二维情况的 $E_z\sec\beta$ 表达式经 $k\to k\cos\beta$ 置换后，再乘以 $\exp(-\mathrm{i}kz\sin\beta)$ 而得到。这样，由 § 11.5(24)和 § 11.5(26)即有

$$U=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}}{\sqrt{\pi}}\sec\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r\cos\beta-z\sin\beta)}\{G(p)-G(q)\},\tag{8}$$

式中

$$p=-\sqrt{2kr\cos\beta}\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\alpha),\quad q=-\sqrt{2kr\cos\beta}\cos\tfrac{1}{2}(\theta+\alpha).\tag{9}$$

因为在衍射屏上，即 $y=0,x>0$ 处，$\theta=0,P=q$，故 $U=0$，这也意味着该处的 $\partial U/\partial x=0$。因而从(4)式可知屏上的 $E_x=E_z=0$，如边界条件所要求。

总此由(4)式得到

$$\left.\begin{aligned}E_z&=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}}{\sqrt{\pi}}\cos\beta\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r\cos\beta-z\sin\beta)}\{G(p)-G(q)\},\\ H_x&=-\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r\cos\beta-z\sin\beta)}\left\{\sin\alpha[G(p)+G(q)]+\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{kr\cos\beta}}\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\theta\right\},\\ H_y&=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r\cos\beta-z\sin\beta)}\left\{\cos\alpha[G(p)-G(q)]-\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{kr\cos\beta}}\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\theta\right\},\\ E_x&=-H_y\sin\beta,\qquad E_y=H_x\sin\beta,\qquad H_z=0.\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

当 $\beta=0$ 时，(10)中各式即化为 § 11.5(26)和 § 11.5(28)中相应各式。

当以(7)式为入射波时，也可得到类似的结果，这时合乎所需的二维解是 H 偏振情况的解，即 § 11.5(44)的 H_z。因此，如前所说，对于完全任意的入射平面波，解亦可求。此外，如果将 11.5.2 节的论证做简单推广，则可证明**任何**光源分布所辐射的场均可表成为平面波组成的谱。这样，从原则上讲，对于任何光源分布，衍射问题的解都可以由逐个平面波的解构建而成。有两个情况颇具重要性，一个是平行于衍射边的线光源(属二维问题)，一个是点光源，都放在下一节讨论。

11.7 定域光源所产生的场在半平面上的衍射

11.7.1 一个平行于衍射边的线电流

考虑一个位于 T 点(r_0,θ_0)的线光源(与图 11.16 平面相垂直),其中 $0\leqslant\theta_0\leqslant\pi$。在自由空间中,该光源将向外辐射 E 偏振柱面波

$$E_z^{(i)}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{1}{4}i\pi}H_0^{(1)}(kR)\approx\frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}},\tag{1}$$

式中 $H_0^{(1)}$ 是第一类零阶 Hankel 函数,R 是从 T 点量起的距离(见图 11.16)。

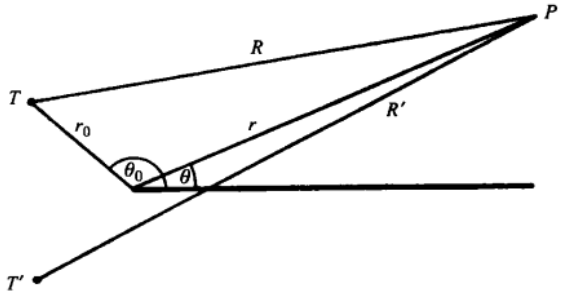


图 11.16 线源 T 和衍射半平面的位置布局

该光源实际上是一个通过 T 点而流动平行于 z 轴的电流,并且各处振动的位相相同。众所周知,(1)式是二维波动方程的一个基本解,代表一个只依赖于径向距离的发散波。

为了将(1)式写成为平面波角谱形式,我们在实质上采用 Hankel 函数的索末菲积分表示[①]。因为这里要求谱的逐个平面波都必须入射到屏上,所以仅考虑 $y<r_0\sin\theta_0$ 半空间中的这种表示,即

$$H_0^{(1)}(kR)=\frac{1}{\pi}\int_{S(\frac{1}{4}\pi)}e^{ikr_0\cos(\theta_0-\alpha)}e^{-ikr\cos(\theta-\alpha)}\,d\alpha.\tag{2}$$

这里之所以选择 $S(\frac{1}{2}\pi)$这条积分路线,是因为(除去它对 $y<r_0\sin\theta_0$ 中所有点都有效以外)它平行于最陡下降路线,这在随后的分析中将证明确为适宜。(2)式被积函数中引入位相因子 $\exp[ikr_0\cos(\theta_0-\alpha)]$,则是因为谱的各个平面波在 T 处的位相须全都为零。

因此很明显,(1)式这种入射场的半平面衍射问题之解可由平面入射波场 $\exp[-ikr\cos(\theta-\alpha)]$ 的相应衍射解经乘以因子

$$\frac{e^{\frac{1}{4}i\pi}}{\sqrt{2\pi}}e^{ikr_0\cos(\theta_0-\alpha)}\tag{3}$$

并沿路线 $S(\frac{1}{2}\pi)$对 α 积分而得到。

入射场为 $\exp[-ikr\cos(\theta-\alpha)]$时的解,已如 11.5 节中所证,可写成

① 见,例如 J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*(New York, McGraw-Hill, 1941), p. 367。

$$E_z^{(p)} = E_z^{(pg)} + E_z^{(pd)} \tag{4}$$

(此处引入附标 p 以表示入射波为平面波),式中 $E_z^{(pg)}$ 由 § 11.5(33)给出,而

$$E_z^{(pd)} = \frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_{S(0)} \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}(\theta+\beta)}{\cos\alpha + \cos(\theta+\beta)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\beta}\,\mathrm{d}\beta. \tag{5}$$

[见 § 11.5(9)]这里采用这一形式来表达 $E_z^{(pd)}$(而不再用菲涅耳积分形式)是因为,如即将看到的,它能显示出 α 和 β 之间的对称性。(1)式这种入射场的半平面衍射之解为

$$E_z = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}}{\sqrt{2\pi}}\int_{S(\frac{1}{2}\pi)} E_z^{(pg)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0\cos(\theta_0-\alpha)}\,\mathrm{d}\alpha + \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}}{\sqrt{2\pi}}\int_{S(\frac{1}{2}\pi)} E_z^{(pd)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0\cos(\theta_0-\alpha)}\,\mathrm{d}\alpha. \tag{6}$$

为了使(6)式分开成几何光学项和衍射项,必须将第二个积分中对 α 的积分路线更易为 $S(\theta_0)$。在这一积分路线转换中,$E_z^{(pd)}$ 作为 α 的函数,其极点必须加以考虑:根据(5)式,对 $S(0)$上所有 β 而言,这些极点发生在 $\cos\alpha = -\cos(\theta+\beta)$处,并且不难证明其留数的贡献与(6)中第一式合并即给出几何光学项

$$E_z^{(g)} = \begin{cases} \sqrt{(\frac{1}{2}\pi)}\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}[H_0^{(1)}(kR) - H_0^{(1)}(kR')] & \text{当 } 0 \leqslant \theta \leqslant \pi - \theta_0 \text{ 时,} \\ \sqrt{(\frac{1}{2}\pi)}\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}H_0^{(1)}(kR) & \text{当 } \pi - \theta_0 < \theta < \pi + \theta_0 \text{ 时,} \\ 0 & \text{当 } \pi + \theta_0 < \theta \leqslant 2\pi \text{ 时,} \end{cases} \tag{7}$$

式中 R'是从 T'点量起的距离,T'点是 T 在平面 $y=0$ 中的像(见图 11.16)。衍射项则可写成

$$E_z^{(d)} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}}{\pi\sqrt{2\pi}}\int_{S(0)}\int_{S(0)} \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\theta_0)\sin\frac{1}{2}(\beta+\theta)}{\cos(\alpha+\theta_0)+\cos(\beta+\theta)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_0\cos\alpha + r\cos\beta)}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta. \tag{8}$$

为方便起见,现将(8)式表成为

$$E_z^{(d)} = \mathcal{J}(\theta_0) - \mathcal{J}(-\theta_0), \tag{9}$$

式中

$$\mathcal{J}(\theta_0) = -\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}}{4\pi\sqrt{2\pi}}\int_{S(0)}\int_{S(0)} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_0\cos\alpha + r\cos\beta)}}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\theta_0+\theta)}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta. \tag{10}$$

最后一步是将$\mathcal{J}(\theta_0)$化简成一个单积分。以 $4\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\theta_0+\theta)$乘(10)式中被积函数的分子和分母并舍弃 β 的奇函数那一部分,则有

$$\mathcal{J}(\theta_0) = -\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}}{8\pi\sqrt{2\pi}}\int_{S(0)}\int_{S(0)} \left[\frac{1}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\theta_0+\theta) - \sin\frac{1}{2}\beta} + \frac{1}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\theta_0+\theta) + \sin\frac{1}{2}\beta}\right] \times \cos\tfrac{1}{2}\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_0\cos\alpha + r\cos\beta)}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta. \tag{11}$$

在(11)式被积函数的第二项中将 α 改变为 $-\alpha$,然后再将两项合并。由此得到

$$\mathcal{J}(\theta_0) = -\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}}{2\pi\sqrt{2\pi}} \times \int_{S(0)}\int_{S(0)} \frac{1}{N}[\cos\tfrac{1}{2}(\theta_0+\theta)\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_0\cos\alpha + r\cos\beta)}]\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta \tag{12}$$

式中

$$N=(\cos\alpha-1)+(\cos\beta-1)-4\sin\tfrac{1}{2}(\theta_0+\theta)\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta+2\cos^2\tfrac{1}{2}(\theta_0+\theta).$$

在(12)式中作“最陡下降”代换,令

$$\xi=\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}i\pi}\sin\tfrac{1}{2}\alpha,\qquad \eta=\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}i\pi}\sin\tfrac{1}{2}\beta,$$

并设 $R_1=r_0+r$,即得到

$$\mathcal{J}(\theta_0)=\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\pi\sqrt{2\pi}}e^{ikR_1}\cos\tfrac{1}{2}(\theta_0+\theta)\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-k(r_0\xi^2+r\eta^2)}}{\xi^2+\eta^2+2\sin\frac{1}{2}(\theta_0+\theta)\xi\eta-2i\cos^2\frac{1}{2}(\theta_0+\theta)}\,d\xi\,d\eta. \tag{13}$$

然后,作极坐标代换,令

$$\xi=\sqrt{R_1/r_0}\rho\cos\phi,\qquad \eta=\sqrt{R_1/r}\rho\sin\phi.$$

于是

$$\mathcal{J}(\theta_0)=\frac{e^{-\frac{1}{4}i\pi}}{\pi\sqrt{2\pi}}e^{ikR_1}\cos\tfrac{1}{2}(\theta_0+\theta)\int_0^{\infty}\rho K(\rho)e^{-kR_1\rho^2}\,d\rho, \tag{14}$$

式中

$$K(\rho)=\int_0^{2\pi}\left\{\rho^2\left[\sqrt{\frac{r}{r_0}}\cos^2\phi+\sqrt{\frac{r_0}{r}}\sin^2\phi+2\sin\tfrac{1}{2}(\theta_0+\theta)\sin\phi\cos\phi\right]-2i\frac{\sqrt{rr_0}}{R_1}\cos^2\tfrac{1}{2}(\theta_0+\theta)\right\}^{-1}d\phi. \tag{15}$$

现在 $K(\rho)$可用令 $z=e^{i\phi}$ 的标准方法来计算,这时积分路线变成为单位圆,因而只需要计算所围入的极点的留数。结果得到

$$K(\rho)=2\pi\left|\sec\tfrac{1}{2}(\theta_0+\theta)\right|\left[\rho^4-2i\rho^2-\frac{4rr_0}{R_1^2}\cos^2\tfrac{1}{2}(\theta_0+\theta)\right]^{-1/2}, \tag{16}$$

式中平方根的分支是位于(对实 ρ 值而言)复平面第4象限的那一支。因此(10)式变成

$$\mathcal{J}(\theta_0)=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{1}{4}i\pi}e^{ikR_1}\int_0^{\infty}\frac{\rho e^{-kR_1\rho^2}}{\sqrt{[\rho^2-i(R_1-R')/R_1][\rho^2-i(R_1+R')/R_1]}}\,d\rho, \tag{17}$$

其中上面的正、负号对应 $\cos\frac{1}{2}(\theta_0+\theta)>0$,下面的对应 $\cos\frac{1}{2}(\theta_0+\theta)<0$。最后再作代换

$$\mu^2=ikR_1\rho^2+k(R_1-R')$$

即得到所求的结果

$$\mathcal{J}(\theta_0)=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{1}{4}i\pi}e^{ikR'}\int_{\sqrt{k(R_1-R')}}^{\infty}\frac{e^{i\mu^2}}{\sqrt{\mu^2+2kR'}}\,d\mu, \tag{18}$$

其中上面的正、负号对应 $\cos\frac{1}{2}(\theta_0+\theta)>0$。下面的对应 $\cos\frac{1}{2}(\theta_0+\theta)<0$。

因为入射场(1)可写成如下形式：

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu^2}}{\sqrt{\mu^2+2kR}}\,\mathrm{d}\mu, \tag{19}$$

所以几何光学项(7)与衍射项(9)合在一起即给出总场

$$E_z=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}\int_{m}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu^2}}{\sqrt{\mu^2+2kR}}\,\mathrm{d}\mu-\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR'}\int_{m'}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu^2}}{\sqrt{\mu^2+2kR'}}\,\mathrm{d}\mu\right\}, \tag{20}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} m&=-2\sqrt{\frac{krr_0}{R_1+R}}\cos\tfrac{1}{2}(\theta_0-\theta)=\mp\sqrt{k(R_1-R)}, \quad \mp \text{ 对应 } \cos\tfrac{1}{2}(\theta_0-\theta)\gtrless 0,\\ m'&=-2\sqrt{\frac{krr_0}{R_1+R'}}\cos\tfrac{1}{2}(\theta_0+\theta)=\mp\sqrt{k(R_1-R')}, \quad \mp \text{ 对应 } \cos\tfrac{1}{2}(\theta_0+\theta)\gtrless 0. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

麦克唐纳[①] 首先给出了这一衍射解，其形式与(20)式基本相同。他通过对较早卡斯劳[②]所给的一个解进行变换而获此解。这个解与索末菲对单一平面波入射情况所得到的解在类型上非常相似，事实上如乘以$\sqrt{kr_0}\exp(-\mathrm{i}kr_0)$并令 $r_0\to\infty$，即回到索末菲的结果。H 偏振情况的解与(20)式的差别仅在于它的两项是相加而非相减。

如果 $kR_1\gg 1$，则(18)式被积函数非指数因子中的 μ 可用其下限值 $\mu^2=k(R_1-R')$ 取代，并给出近似结果

$$\mathcal{J}(\theta_0)=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR'}}{\sqrt{k(R_1+R')}}F[\sqrt{k(R_1-R')}]; \tag{22}$$

$\mathcal{J}(-\theta_0)$方面也可采用相应的近似。这样，衍射场(8)式就被表成菲涅耳积分形式，而且准确度很高，只是当源和观察点离衍射边都很近，仅在一个波长以内时，才不适用。

此外，如果观察点位置满足 $k(R_1-R')\gg 1$，则渐近近似 § 11.5(31)可应用于(22)式，并给出

$$\mathcal{J}(\theta_0)=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}}{2\sqrt{2\pi}}\sec\tfrac{1}{2}(\theta_0+\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}}{\sqrt{kr_0}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{\sqrt{kr}}; \tag{23}$$

类此，如果 $k(R_1-R)\gg 1$，则

$$\mathcal{J}(-\theta_0)=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}}{2\sqrt{2\pi}}\sec\tfrac{1}{2}(\theta_0-\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}}{\sqrt{kr_0}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{\sqrt{kr}}. \tag{24}$$

因此，对位于二**双曲线** $k(R_1-R')=1$ 和 $k(R_1-R)=1$(其轴分别为 $\theta+\theta_0=\pi$ 和 $\theta-\theta_0=\pi$)外颇远的所有点而言，衍射场好像是发自位于衍射边的某个线光源。前面 11.5.3 节中讨论平面波入射情况的解时曾谈到过两个抛物线，这里的双曲线则是柱面波入射情况与之对应的几何曲线。

最后，应当注意(20)式这个解是**倒易的**，这就是如将其中 r_0,θ_0 和 r,θ 各行交换，其式不

① H. M. MacDonald, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **14**(1915), 410。

② H. S. Carslaw, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **30**(1899), 121。

变,这当然是一般性倒易定理[①]的一个特例,这种倒易性原本隐含在麦克斯韦方程中,本节分析表明这里它表现为谱函数 § 11.5(7)在 α 和 α_0 方面对称。

11.7.2 一个偶极子

最基本的定点电磁波波源,是一个电偶极子或一个磁偶极子。一个偶极子和一个衍射半平面构成的衍射问题可分两步求解:第一步将未受干扰的偶极子场表成为一个由平面波组成的(三维)空间谱,然后对其中每个平面波应用 11.6 节的结果。西尼尔[②]就曾用这种方法来处理电偶极子在其轴垂直衍射屏时的情况,这里仅对其分析之梗概作一简单介绍。

图 11.17 示出有关几何布局。其中同前采用笛卡儿坐标 x,y,z 和柱面极坐标 r,θ,z。衍射屏所在位置仍为 $y=0,x>0$。偶极子在 T 点[(x_0,y_0,z_0)或(r_0,θ_0,z_0)]处,取向平行于 y 轴;T' 是 T 在平面 $y=0$ 中的像,而 R,R' 分别是观察点 P[(x,y,z)或(r,θ,z)]离 T 和 T' 的距离。

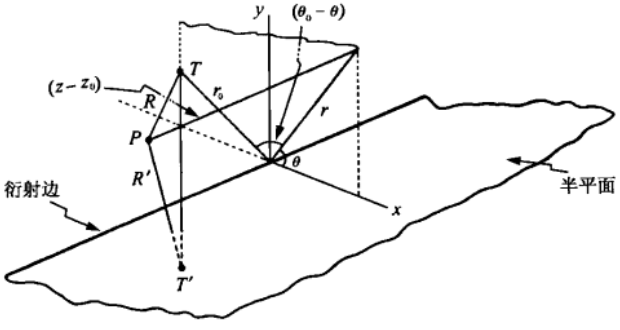


图 11.17 偶极子(位于 T 点)和衍射半平面的几何布局[③]

适当选取偶极子矩的大小,则未受干扰的偶极子场可取作为

$$\mathbf{E}=\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2\Pi}{\partial y^2}+k^2\Pi,\frac{\partial^2\Pi}{\partial y\partial z}\right),\qquad \mathbf{H}=\mathrm{i}k\left(\frac{\partial\Pi}{\partial z},0,-\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right),\tag{25}$$

[见 § 2.2(52)和 § 2.2(51)]式中

$$\Pi=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{kR}.\tag{26}$$

这样,根据已知公式[③]

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{kR}=\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{S(\frac{1}{2}\pi)}\int_{S(\frac{1}{2}\pi)}\cos\beta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k[(x-x_0)\cos\alpha\cos\beta+(y-y_0)\sin\alpha\cos\beta-(z-z_0)\sin\beta]}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\tag{27}$$

即可将(25)式按要求分解成各平面波。于是,接下来的处理步骤是写下存在衍射屏时(27)式被积函数中每一个平面波入射其上所产生的总场,然后计算出相应积分。

---

① L. G. H. Huxley, *The Principles and Practice of Waveguides* (Cambridge, Cambridge University Press, 1947) § 7.17。

② T. B. A. Senior, *Quart J. Mech. Appl. Maths.*, **6**(1953), 101. 其他方法,见 A. E. Heins, *Trans. Inst. Radio Engrs.*, AP-**4**(1956), 294; B. D. Woods, *Quart. J. Mech, Appl. Maths.*, **10**(1957), 90; W. E. Williams, *Quart. J. Mech. Appl. Maths.*, **10**(1957), 210。

③ 原图甚简,亦缺乏立体感,故稍予增补,俾可有助阅读——译者注。

④ 该式是 Weyl 所给公式[*Ann. d. Physik*, **60**(1919), 481.]的一种简单变式,Weyl 公式的另一种形式由 § 13.2(2)给出。

考虑到随后积分之便，并且由于入射场(25)涉及 E 偏振和 H 偏振两种情况，所以对于平面波入射的基本解，这里采用[参见 § 11.7(5)] § 11.5(8)这一形式(对 E 偏振)以及 H 偏振的相应形式。当然，还要按 11.6 节中讲的方法对上述这些二维解进行修改，以给出与(27)式所包含的各个平面波相对应的三维解。结果得到，与偶极子平行的 **E** 分量(E_y)呈如下形式：

$$E_y = E_y^{(g)} + E_y^{(d)}, \tag{28}$$

其中 $E_y^{(g)}$ 是几何光学场，而

$$E_y^{(d)} = \frac{ik}{2\pi}[A(\theta_0) + A(-\theta_0)] - \frac{i}{2\pi k}\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial y_0} - k^2\right) B(\theta_0)$$

$$+ \frac{i}{2\pi k}\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial y_0} + k^2\right) B(-\theta_0), \tag{29}$$

式中

$$A(\theta_0) = \frac{ik}{2\pi}\int_{S(0)}\int_{S(\frac{1}{2}\pi)}\int_{S(0)} \cos\beta \cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma + \theta - \theta_0)$$

$$\times e^{ik[r\cos\gamma\cos\beta + r_0\cos\alpha\cos\beta + (z-z_0)\sin\beta]}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma, \tag{30}$$

$$B(\theta_0) = \frac{ik}{2\pi}\int_{S(0)}\int_{S(\frac{1}{2}\pi)}\int_{S(0)} \cos\beta \sec\tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma + \theta - \theta_0)$$

$$\times e^{ik[r\cos\gamma\cos\beta + r_0\cos\alpha\cos\beta + (z-z_0)\sin\beta]}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma. \tag{31}$$

借助类似卡斯劳[①] 和麦克唐纳[②] 所作的分析，可以证明

$$A(\theta_0) = \frac{\pi}{\sqrt{rr_0}} \cos\tfrac{1}{2}(\theta - \theta_0) H_0^{(1)}(kR_1), \tag{32}$$

式中

$$R_1^2 = (r + r_0)^2 + (z - z_0)^2; \tag{33}$$

$$B(\theta_0) = \pm\pi k \int_{\pm m}^{\infty} H_1^{(1)}(kR\cosh\mu)d\mu, \qquad \pm \text{ 对 } \theta - \theta_0 \lesseqgtr \pi, \tag{34}$$

$$B(-\theta_0) = \pm\pi k \int_{\pm m'}^{\infty} H_1^{(1)}(kR'\cosh\mu)d\mu, \qquad \pm \text{ 对 } \theta + \theta_0 \lesseqgtr \pi, \tag{35}$$

其中

$$m = \operatorname{arcsinh}\left[2\frac{\sqrt{rr_0}}{R}\cos\tfrac{1}{2}(\theta - \theta_0)\right], \qquad m' = \operatorname{arcsinh}\left[2\frac{\sqrt{rr_0}}{R'}\cos\tfrac{1}{2}(\theta + \theta_0)\right]. \tag{36}$$

这些结果，加上公式

$$\tfrac{1}{2}i\int_{-\infty}^{\infty} H_1^{(1)}(kR\cosh\mu)d\mu = \frac{e^{ikR}}{kR}, \tag{37}$$

可使(28)式被写成

---

① H. S. Carslaw, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **30**(1899), 121。

② H. M. MacDonald, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **14**(1915), 410。

$$E_y=\frac{\mathrm{i}k}{\sqrt{rr_0}}\cos\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta_0H_0^{(1)}(kR_1)-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\left(\frac{\partial^2}{\partial y\partial y_0}-k^2\right)\mathcal{J}+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\left(\frac{\partial^2}{\partial y\partial y_0}+k^2\right)\mathcal{J}', \tag{38}$$

式中

$$\mathcal{J}=\int_{-m}^{\infty}H_1^{(1)}(kR\cosh\mu)\mathrm{d}\mu,\qquad \mathcal{J}'=\int_{-m'}^{\infty}H_1^{(1)}(kR'\cosh\mu)\mathrm{d}\mu. \tag{39}$$

其余各个场分量同样可用$\mathcal{J}$和$\mathcal{J}'$严格表出如下:

$$E_x=-\frac{\mathrm{i}k}{\sqrt{rr_0}}\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta_0H_0^{(1)}(kR_1)-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\frac{\partial^2\mathcal{J}}{\partial x\partial y_0}+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\frac{\partial^2\mathcal{J}'}{\partial x\partial y_0}, \tag{40}$$

$$E_z=-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\frac{\partial^2\mathcal{J}}{\partial z\partial y_0}+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\frac{\partial^2\mathcal{J}'}{\partial z\partial y_0}, \tag{41}$$

$$H_x=\frac{k(z-z_0)}{R_1\sqrt{rr_0}}\cos\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta_0H_1^{(1)}(kR_1)+\tfrac{1}{2}k\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial z_0}+\tfrac{1}{2}k\frac{\partial\mathcal{J}'}{\partial z_0}, \tag{42}$$

$$H_y=\frac{k(z-z_0)}{R_1\sqrt{rr_0}}\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta_0H_1^{(1)}(kR_1), \tag{43}$$

$$H_z=-\tfrac{1}{2}k\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial x_0}-\tfrac{1}{2}k\frac{\partial\mathcal{J}'}{\partial x_0}. \tag{44}$$

值得注意的是,在完全场中,**H**有一个平行于偶极子的非零分量,所以分析不能用一个单分量赫兹矢量来表述。

但在比较常设的限制下,仍然能够用菲涅耳积分表出所得到的解。如果 $kR_1\gg1$,不难建立下列渐近近似:

$$\mathcal{J}=-\frac{2\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}}{k}\sqrt{\frac{2}{\pi R_1(R+R_1)}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}F\left[-2\sqrt{\frac{krr_0}{R+R_1}}\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta_0)\right], \tag{45}$$

$\mathcal{J}'$也有一个相似的结果。

11.8 其他问题

本节将扼要回顾一下几个其他衍射问题。

11.8.1 两个平行半平面

设有两个衍射半平面相互平行,并同垂直于通过二者棱边的公共平面。这种布局所构成的衍射问题,用本章对单半平面情况采用的方法很容易加以处理①。

考虑 E 偏振情况,这里待解问题与 11.5.1 节中所解问题密切相似,差别仅在于这里衍射物由**两个**片组成;一个(片 1)位居 $y=0,x>0$;另一个(片 2)位居 $y=-a,x>0$。方便的做法是引进第二套坐标 r',θ',并从片 2 的边$(0,-a)$量起。

片 1 和片 2 中感生电流所产生的散射场可分别写成

① 当入射波是一平面波时,这个问题的解首先由 Heins 和 Vainstein 给出,但 Heins 所采用的方法是 Schwinger 引进的一种方法(11.1 节中提到过),见 A. E. Heins, *Quart. Appl. Maths.*, **6**(1948), 157 和 L. A. Vainstein, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR, Ser. Fiz.* (*Bull. Acad. Sci. USSR*), **12**(1948), 114 and 166。

$$E_z^{(s1)} = \int_C P_1(\cos\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos(\theta\mp\alpha)}\,\mathrm{d}\alpha, \qquad \mp \text{ 对 } y \gtrless 0, \tag{1}$$

$$E_z^{(s2)} = \int_C P_2(\cos\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr'\cos(\theta'\mp\alpha)}\,\mathrm{d}\alpha, \qquad \mp \text{ 对 } y \gtrless -a \tag{2}$$

为确保 $H_x^{(s1)}$ 和 $H_x^{(s2)}$ 在分别通过 $y=0, x<0$ 和 $y=-a, x<0$ 时具有连续性，须令 $P_1(\mu)$ 和 $P_2(\mu)$ 在图 11.7 所示积分路线下方没有奇点。此外，E_z 在两片上应为零这一边界条件导致下列积分方程

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P_1(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\mu}\,\mathrm{d}\mu + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{P_2(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka\sqrt{1-\mu^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\mu}\,\mathrm{d}\mu = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx\mu_0}, \tag{3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P_1(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka\sqrt{1-\mu^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\mu}\,\mathrm{d}\mu + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{P_2(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\mu}\,\mathrm{d}\mu = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka\sqrt{1-\mu_0^2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx\mu_0}, \tag{4}$$

这两个方程只对 $x>0$ 有效。

如果令

$$P_1(\mu)+P_2(\mu)=Q_1(\mu), \qquad P_1(\mu)-P_2(\mu)=Q_2(\mu), \tag{5}$$

则将(3)和(4)两式分别相加和相减即给出

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q_1(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka\sqrt{1-\mu^2}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\mu}\,\mathrm{d}\mu = -(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka\sqrt{1-\mu_0^2}})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx\mu_0}, \quad x>0 \tag{6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q_2(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka\sqrt{1-\mu^2}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\mu}\,\mathrm{d}\mu = -(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka\sqrt{1-\mu_0^2}})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx\mu_0}, \quad x>0 \tag{7}$$

(6)和(7)每个方程的形式都与 § 11.5(2)相似，因而要得到类似 § 11.5(4)的解，其积分路线须用实轴上方无穷大半圆使之成为闭合。为此，要选择其虚部为正的 $\sqrt{1-\mu^2}$ 分支。因此，所求的(6)式解为

$$\frac{Q_1(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka\sqrt{1-\mu^2}}) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka\sqrt{1-\mu_0^2}})\frac{U(\mu)}{U(-\mu_0)}\frac{1}{\mu+\mu_0}, \tag{8}$$

式中 $U(\mu)$ 是 μ 的任何函数，但要在积分路线上方半平面内没有奇点，并且当 $|\mu|\to\infty$ 时在该处趋于零。

剩下的问题是，如何才能选取到满足(8)式的 $Q_1(\mu)$ 和 $U(\mu)$，同时又保持 $Q_1(\mu)$ 在积分路线下方没有奇点。方法是将(8)式中 $Q_1(\mu)$ 的系数分解成因子形式如下：

$$\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka\sqrt{1-\mu^2}}}{\sqrt{1-\mu^2}} = U_1(\mu)L_1(\mu), \tag{9}$$

式中 $U_1(\mu)$ 在积分路线上方半平面中没有奇点和零点，并且在无穷远处是代数增大的，而 $L_1(\mu)$ 则在积分路线下方半平面中具有同样特性。如此因子分解方式是可能的，这从 Wiener 和 Hopf 的一般理论可以得知①，而且 $U_1(\mu)$ 和 $L_1(\mu)$ 的显表达式已由海因斯给出②。由此知道

① E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (Oxford, Clarendon Press, 1937), p. 339。

② A. E. Heins, *Quart. Appl. Maths.*, **6** (1948), 157。

$$Q_1(\mu)=\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\sqrt{1-\mu_0^2}\,U_1(\mu_0)\frac{1}{L_1(\mu)(\mu+\mu_0)},\tag{10}$$

式中曾采用了关系式 $U_1(\mu)=L_1(-\mu)$,它隐含在(9)式之中(除任意常数因子外)。

类此,如果

$$\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka\sqrt{1-\mu^2}}}{\sqrt{1-\mu^2}}=U_2(\mu)L_2(\mu)\tag{11}$$

则有

$$Q_2(\mu)=\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\sqrt{1-\mu_0^2}\,U_2(\mu_0)\frac{1}{L_2(\mu)(\mu+\mu_0)}.\tag{12}$$

将(1)和(2)两式相加就得到总散射场。例如,在 $y>0$ 中,总散射场因此即为

$$\begin{aligned}E_z^{(s)}&=\int_C[P_1(\cos\alpha)+P_2(\cos\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka\sin\alpha}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos(\theta-\alpha)}\,\mathrm{d}\alpha\\&=\tfrac{1}{2}\int_C[Q_1(\cos\alpha)(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka\sin\alpha})+Q_2(\cos\alpha)(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka\sin\alpha})]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos(\theta-\alpha)}\,\mathrm{d}\alpha\\&\text{设}\\&=\int_C P(\cos\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos(\theta-\alpha)}\,\mathrm{d}\alpha,\end{aligned}\tag{13}$$

式中

$$\begin{aligned}P(\mu)&=\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\mu^2}[Q_1(\mu)U_1(\mu)L_1(\mu)+Q_2(\mu)U_2(\mu)L_2(\mu)]\\&=\frac{\mathrm{i}}{4\pi}\frac{\sqrt{1-\mu_0^2}\sqrt{1-\mu^2}}{\mu+\mu_0}[U_1(\mu_0)U_1(\mu)+U_2(\mu_0)U_2(\mu)].\end{aligned}\tag{14}$$

仍然应该注意 $P(\mu)$在 μ 和 μ_0 方面具有对称性。此外可以看到,当 $a=0$ 时,$U_1(\mu)=\sqrt{2/(1+\mu)}$,$U_2(\mu)=0$,所以(14)式依理化为 § 11.5(6)。

11.8.2 平行错位叠加半平面的无穷堆垛

在这一问题[①]中,衍射物由无穷多个片组成,其中第 n 个片所在地区为 $y=na$,$x>nb$,而 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

这时,同前,对于 E 偏振入射平面波,第 m 个片中感生电流所产生的散射场可写成

$$E_z^{(sm)}=\int_C P_m(\cos\alpha)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}km(a\cos\alpha\pm b\sin\alpha)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos(\theta\mp\alpha)}\,\mathrm{d}\alpha,\tag{15}$$

其中上面的正、负号对应于 $y>ma$,下面的正、负号对应于 $y<ma$。所有 $P_m(\mu)$在复平面 $\mu(\mu=\cos\alpha)$中积分路线下方须没有奇点。

第 n 个片上的边界条件给出积分方程

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P_m(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka|n-m|\sqrt{1-\mu^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-mb)\mu}\,\mathrm{d}\mu=-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx\mu_0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kna\sqrt{1-\mu_0^2}},\tag{16}$$

此方程只对 $x>nb$ 有效。

---

① J. F. Carlson and A. E. Heins, *Quart. Appl. Maths.*, **4**(1947), 313 and **5**(1947), 82。

从问题的周期性来看，很清楚应有

$$P_m(\mu) = P_0(\mu)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}km(b\mu_0+a\sqrt{1-\mu_0^2})} \tag{17}$$

再令 $n-m=q$，(16)式因而变成

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P_0(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kq(b\mu_0+a\sqrt{1-\mu_0^2})}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka|q|\sqrt{1-\mu^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(qb+x)\mu}\,\mathrm{d}\mu = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx\mu_0},\quad x>0 \tag{18}$$

对 q 所取的无穷级数之和可写成闭合形式，结果仍然留下一个积分方程，可应用柯西留数定理解之。和前一问题中一样，必须将其一函数“分解”成一对因子，其中一个在上半平面中没有奇点和零点，并且在无穷远处呈代数增长，而另一个则在下半平面中具有同样特性；卡尔森和海因斯的论文(见前引文献)给出了这两个因子的显式，同时还给出另外一些细节。

11.8.3　一条窄带

另一个具有内在重要性的问题看似简单，其衍射物不过是一个理想导电平面窄带，无限长，两边平行；或者用其互补“屏”对应区，无穷平面中的一条狭缝。这个问题有各种不同解法[①]，包括 Matthieu 函数级数形式的解[②]。对偶积分方程法亦曾有人采用[③]，所讨论的是平面波正入射情况，并得到一个 ka(其中 $2a$ 是窄带宽度)幂级数解的前两项，解法如下：

设窄带位居 $y=0, |x|<a$ 地区，并且入射波为 H 偏振平面波。在正入射情况下，积分方程 § 11.4(19)和 § 11.4(20)为

$$\int_{-\infty}^{\infty}P(\mu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\mu}\,\mathrm{d}\mu = 1 \qquad \text{对 } |x|<a, \tag{19}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\mu}\,\mathrm{d}\mu = 0 \qquad \text{对 } |x|>a; \tag{20}$$

由于问题的对称性，$P(\mu)=P(-\mu)$，所以两式即可写成

$$\int_0^{\infty}P(\mu)\cos(kx\mu)\mathrm{d}\mu = \tfrac{1}{2} \qquad \text{对 } |x|<a, \tag{21}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{P(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}}\cos(kx\mu)\mathrm{d}\mu = 0 \qquad \text{对 } |x|>a. \tag{22}$$

---

① Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, **43** (1897), 259 (reprinted in *Scientific Papers by John William Strutt, Baron Rayleigh* Vol. 4 (Cambridge, Cambridge University Press, 1899 – 1920), P. 283); K. Schwarzschild, *Math. Ann.*, **55** (1902), 177; P. M. Morse and P. J. Rubenstein, *Phys, Rev.*, **54**(1938), 895; A. Sommerfeld, *Optics* (New York, Academic Press, 1954), p. 273; B. B. Baker and E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle* (Oxford, Clarendon Press, 2nd edition, 1950), p. 177 *et seq.*; S. Skavlem, *Arch. Math. Naturvid.*, **51**(1951), 61; E. B. Moullin and F. M. Phillips, *Proc. Inst. Elec. Engrs.*, **99**, Pt. IV(1952), 137; R. Müller and K. Westpfahl, *Z. Phys.*, **134**(1953), 245; P. C. Clemmow, *Trans, Inst. Radio Engrs.*, AP – **4** (1956), 282; S. N. Karp and A. Russek, *J. Appl. Phys.*, **27**(1956), 886; R. F. Millar, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **54**(1958), 479, 497。

② B. Sieger, *Ann. der Phys.*, **27**(1908), 626; 也见 P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* (New York, McGraw Hill, Part II, 1953), p. 1428 *et seq*。

③ E. Groschwitz and H. Hönl, *Z. Phys.*, **131**(1952), 305; H. Hönl and E. Zimmer, *Z. Phys.*, **135**(1953), 196; C. J. Tranter, *Quart. J. Mech. Appl. Maths.*, **7**(1954), 317。

现寻求一种解,设其形式为

$$\frac{P(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}}=\sum_{m=0}^{\infty}c_m\frac{J_{2m+1}(ka\mu)}{\mu}, \tag{23}$$

因为此级数的每一项都满足(22)式。将(23)式代入(21)式,可证明待求的 c_m 须满足

$$\sum_{m=0}^{\infty}c_m\Phi_m=\tfrac{1}{2}\qquad \text{对}\ |x|<a, \tag{24}$$

式中

$$\Phi_m=\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}J_{2m+1}(ka\mu)\cos(kx\mu)\mathrm{d}\mu. \tag{25}$$

现在可以证明,对于 $|ka|\ll 1$,

$$\Phi_m=\mathrm{i}\int_0^{\infty}J_{2m+1}(ka\mu)\cos(kx\mu)\mathrm{d}\mu+O(ka)=\frac{\mathrm{i}\cos\left[(2m+1)\arcsin\dfrac{x}{a}\right]}{ka\sqrt{1-x^2/a^2}}+O(ka); \tag{26}$$

因此,近似到一级时,(24)式为

$$\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{1-x^2/a^2}}\sum_{m=0}^{\infty}c_m\cos\left[(2m+1)\arcsin\frac{x}{a}\right]=\tfrac{1}{2}ka, \tag{27}$$

并给出

$$c_0=\frac{ka}{2\mathrm{i}},\qquad c_m=0\qquad \text{对}\ m=1,2,3,\cdots \tag{28}$$

因此,在该近似下,

$$\frac{P(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}}=\frac{ka}{2\mathrm{i}}\frac{J_1(ka\mu)}{\mu}, \tag{29}$$

并且电流密度[由 § 11.4(16)导出]为

$$J_x(x)=\frac{cka}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{\infty}\frac{J_1(ka\mu)}{\mu}\cos(kx\mu)\mathrm{d}\mu=\frac{cka}{2\pi\mathrm{i}}\sqrt{1-x^2/a^2}. \tag{30}$$

下一个近似涉及 $(ka)^3$ 项,计算就大为复杂。有几个著者分别独立地得到了该项表达式,结果完全相同[①]。

11.8.4 其他相关问题

还有一些其他令人感兴趣的问题,这些问题同上面所讨论的问题有关,并都能有解,但这里只能提一下,不能多谈。

二维劈衍射问题很多年前即已获解[②]。这一问题所涉及的角谱具有 $2\pi/n$ 的周期,其中 π/n 为外劈角。当外劈角为 2π 时,二维劈即化为一半平面。

两种不同均匀媒质界平面的半平面衍射问题首先为汉森所研究[③]。这一问题用本章方法

---

① R, Müller and K. Westpfahl, *Z. Phys.*, **134**(1953), 245; C. J. Tranter, *Quart. J. Mech. Appl. Maths.*, **7**(1954), 317. 又见 C. J. Bouwkamp, *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), **17**(1954), 73。

② H. M. MacDonald, *Electric Waves* (Cambridge, Cambridge University Press, 1902); H. S. Carslaw, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **18** (1919), 291。

③ E. T. Hanson, *Phil. Trans. Roy. Soc.* A, **237**(1938), 35。

很容易加以处理，并曾被应用于[①] 地球表面无线电波的传播理论。

另有两项工作研究了非理想状态下半平面的衍射效应。第一项研究[②] 设电导率为有限，但很大，这就使得需要采用近似边界条件；第二项[③] 研究设衍射物为一薄板，其电导率虽仍为无限大，但板有一定厚度。

11.9　解的惟一性

在 11.2 节中我们看到，我们所讨论的衍射问题就其一般性质而言可陈述如下：给定一个场 $\mathbf{E}^{(i)}$，令其入射在一理想导电面 S 上，去求一个场 $\mathbf{E}^{(s)}$，这个场可产生于 S 中的一电流分布，并且它在 S 上的切向分量要与 $\mathbf{E}^{(i)}$ 在 S 上的切向分量正好大小相等而方向相反。

当然，至为重要的是，该项表述应该给出一个惟一解[④]。但要证明满足上述条件的 $\mathbf{E}^{(s)}$ 确实不能多于一个决非容易，特别是当考虑到可能 S 为无穷大且场包含多个平面波时更是如此。只是到相当近时，似乎才有了令人满意的结果[⑤]，虽然它早已为人懵然接受。

另一个困难发生在特别的、虽然是最常见的一类衍射问题，其中衍射物可能假设有一个无限锐的边——本章的讨论就是限于这类问题。这之所以增加了困难，使问题变得复杂，原因在于这时的解，如我们所看到的，包含一个边处奇点，因而违反了刚才提到的惟一性证明所必需的一个假设。

可不难看出，如若允许有一个任意的边处奇点，则通过接连微分运算能得到一无穷系列解[⑥]。例如，取半平面问题 E 偏振解 §11.5(22) 对 x 的微分，即得到一个实质上新的表达式，它照样满足波动方程且在衍射屏上为零；或者，再取 §11.5(22) 对 y 的微分，所得到的表达式显然应当能够作为 H 偏振之解，但它不同于 §11.5(44)。

每微分一次就引进一个更高阶的衍射边处奇点。显然，为了保证解的惟一性，须对奇点的性质定规一些限制。何种限制为宜以及表述这种限制所可采用的种种方式，曾经是很多文章的主题[⑦]。读者欲知详情，请参阅其文，但一般地说可以认为，须以所含奇点为最低可能阶的解作为代表对物理问题的答案，而且这实际上排除掉 $r\to 0$ 时衍射边处其阶大于 $r^{-1/2}$ 的任何奇点。特别是可以确证，一个解是惟一的就意味着感生电流在整个衍射面上的可积性和它在衍射边处与边垂直的分量为零。$\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 各分量在衍射边附近的行为则可从这些条件推导出来。

最后一点，在说明存在无穷多个“解”的可能性之后，人们自然会问，为何本章所采用的方法看上去是给出一个惟一解，而且以上述判据判断也是一个正确的解？答案是：由于假设衍射屏平面中的场分量可表成为收敛的傅里叶积分，这就排除这些分量具有过高阶的奇点。

---

① P. C. Clemmow, *Phil. Trans. Roy. Soc.* A, **246**(1953), 1。

② T. B. A. Senior, *Proc. Roy. Soc.* A, **213**(1952), 436。

③ D. S. Jones, *Proc. Roy. Soc.* A, **217**(1953), 153。

④ 证实存在一个解或许不大重要，因为在每一具体情况下当求得一个解时该问题即随而解决。但见 C. Müller, *Math. Ann.*, **123**(1951), 345, 和 W. K. Saunders, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **38**(1952), 342.

⑤ F. Rellich, *Jahr. Deut. Math. Ver.*, **53**(1943), 57。见 A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics* (New York, Academic Press, 1949), § 28 中的说明。W. K. Saunders, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **38**(1952), 342。

⑥ C. J. Bouwkamp, *Physica*, **12**(1946), 467。

⑦ J. Meixner, *Ann. d. Physik*, **6**(1949), 1; A. W. Maue, *Z. Phys.*, **126**(1949), 601; E. T. Copson, *Proc. Roy. Soc.* A, **202**(1950), 277; D. S. Jones, *Quart. J. Mech. Appl. Maths.*, **3**(1950), 420; A. E. Heins and S. Sliver, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **51**(1955), 149; *ibid.*, **54**(1958), 131。

第 12 章　光在超声波上的衍射

第 1 章和第 2 章中曾经证明，研究电磁波的传播既可采用麦克斯韦方程而佐以物质方程，亦可借助某些积分方程而着眼于媒质的极化特性。特别是，这两种方法也都可以用来研究媒质密度随空间坐标和时间坐标改变时光的传播。虽然前一方法过去一直广为人采用，但后者只是晚近才被应用到这些研究。本章将把积分方程方法应用到超声波-光衍射问题——透明均匀媒质因超声波从中通过使其密度受扰而对光产生衍射，有时简称超声衍射（Ultrasonic diffraction）。不过，在此之前，光对这种衍射现象作一定性描述，并对从麦克斯韦微分方程来处理这一问题的理论工作作一概括介绍将有所裨益。

12.1　现象的定性描述和麦克斯韦微分方程的理论处理（概述）

12.1.1　现象的定性描述

超声波是一种声波，其频率高于人耳听觉的阈值。实验室中产生的超声波，其角频率在大约 10^5 秒$^{-1}$到大约 3×10^9 秒$^{-1}$范围，前一数值代表人耳听觉的上限，相应的波长（Λ）范围自然要取决于这些波在其传播媒质中的速度（v）。例如，在水中，$v=1.2\times10^5$ 厘米/秒，因而上列频率范围所对应的波长范围为 $\Lambda=7.5$ 厘米到 2.5×10^{-4} 厘米[①]。

1921 年，布里渊[②] 预见到，让短波长压缩波穿经一液体并同时用可见光加以照射，将产生一种与光栅衍射相似的现象。为了说明其意，现在来看一个原理图（见图 12.1）：液体位于两个无穷平面 $y=0$ 和 $y=d$ 之间，有一束波长为 Λ 的平面压缩波沿正 x 方向从中穿行而过。这就使该液体沿 x 轴形成周期性物质密度变化层，邻序两个密度极大平面的间距为 Λ。

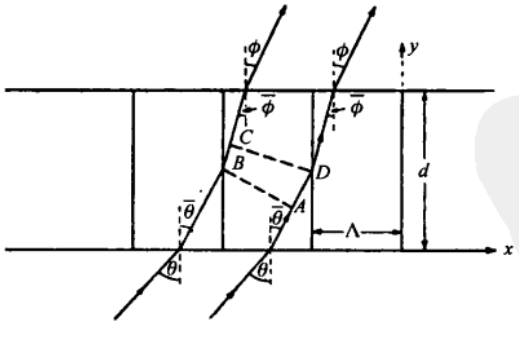


图 12.1　充当光栅的超声波

① 关于超声波的产生方法及其许多用途，见例如 L. Bergmann, *Der Ultraschall*（Zürich, Hirzel, 1954）。

② L. Brillouin, *Ann. de Physique*, **17**（1921）, 103。

现令一单色平面光波射入，光波的角频率为 ω，在该媒质中的波长为 $\bar{\lambda}$，其波法线在 xy 平面内，与 y 轴成 $\bar{\theta}$ 角。此外设 $\bar{\phi}$ 代表衍射光线与 y 轴的夹角。因为压缩波的速度 v 总远远小于光速，所以在一级近似上可以认为该物质层是不动的。因此，衍射强度显著的 $\bar{\phi}$ 方向由干涉极大条件来确定，即在 Λ 间距的系列平面中邻序两面衍射光线间的光程差应该是 $\bar{\lambda}$ 的整数倍。这一条件给出 $\Lambda, \bar{\lambda}, \bar{\theta}$ 和衍射谱中各级波传播方向 $\bar{\phi}_l$ 的关系如下：

$$BC - AD = \Lambda(\sin\bar{\phi}_l - \sin\bar{\theta}) = l\bar{\lambda} \qquad (l = 0, \pm1, \pm2, \cdots), \tag{1}$$

AB 和 CD 是与折射光线和衍射光线相关的两段波阵面。为便于应用，现将(1)式改写，用媒质外边的角 θ 和角 ϕ 以及波长 λ 表出。如果在(1)式中应用折射定律

$$\frac{\sin\bar{\theta}}{\sin\theta} = \frac{\sin\bar{\phi}}{\sin\phi} = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda},$$

则得到

$$\Lambda(\sin\phi_l - \sin\theta) = l\lambda \qquad (l = 0, \pm1, \pm2, \cdots). \tag{2}$$

由(2)式可知，相邻两级的角间隔

$$\phi_l - \phi_{l-1} \simeq \sin\phi_l - \sin\phi_{l-1} = \frac{\lambda}{\Lambda}.$$

这样，给定 λ 时，角间隔随 Λ 的增大而减小。如果 Λ 足够大，则主衍射线将如此密集，以致观测仪器不能把它们分辨开。因此之故，用可见光照射普通声波将观察不到衍射效应。

在布里渊预见提出后几近十年，德拜和西尔斯[①] 以及卢卡斯和 Biquard[②] 分别观察到了光的超声衍射。从那以后，有许多研究人员在不同实验条件下研究了这一现象，对下列诸量中的某一个或更多个进行改变以观测其影响：(a)入射角 θ，(b)超声波的波长 Λ，(c)入射光的波长 λ，(d)超声波的振幅，(e)超声波束的宽度 d。

自然，在观察屏上，各衍射级的位置及其数目和相对强度都依赖于某个或多个上列因素[③]。577 页图 12.3 给出一典型情况的若干照片，显示透射光束两边出现的衍射级数目在不同入射角 θ 下的变化。研究衍射谱的通常实验装置如图 12.2 所示(大意图)。

现在乘此时之便来定规本章采用的一些符号和取向约定。

媒质的分子(原子)数密度将用 $N(\mathbf{r}, t)$ 代表。对于各向同性均匀媒质，当有一平面压缩波沿正 x 方向从中传播通过时，$N(\mathbf{r}, t)$ 可写成下列形式[④]

$$N(\mathbf{r}, t) = N_0[1 + \Delta\cos(Kx - \Omega t)], \tag{3}$$

式中 N_0 是媒质的平均分子数密度，$N_0\Delta$(通常为 $10^{-4}N_0$ 量级)是压缩波的振幅，$K = 2\pi/\Lambda$ 是其波数(波矢量的大小)，而 $\Omega = K\,v$ 是超声扰动的角频率。在这样的媒质中，介电常数 ε 也将是

---

① P. Debye and F. W. Sears, *Proc. Nat. Acad. Sci., Wash.*, **18**(1932), 409。

② R. Lucas and P. Biquard, *J. Phys. Padium*, **3**(1932), 464。

③ 关于超声衍射谱对这些因素的依赖关系，半定量讨论见 G. W. Willard, *J. Acoust. Soc. Amer.*, **21**(1949), 101。

④ 为简单起见，我们将只探讨平面超声行波情况。光在超声驻波上的衍射亦曾有人做过实验研究(见 Bergmann, *loc. cit*)；相应的理论推广也简而易行。
应该提及，完全平面的超声波实验上很难产生；然而，在一般情况下，在线性尺度远大于 Λ 的区域可以把波阵面看成为平面。

空间坐标和时间坐标的函数;其依赖关系可假设为如下形式:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos(Kx - \Omega t). \tag{4}$$

当然,ε_1 和 Δ 之间存在某种关系,我们将把它写成下列形式:

$$\varepsilon_1 = \gamma\Delta. \tag{5}$$

如果采设洛伦兹 - 洛伦茨定律[见 § 2.3(17)]

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\frac{1}{N} = 常数, \tag{6}$$

对(6)式的对数进行微分,并记及 Δ 和 $\varepsilon_1/\varepsilon_0$ 都比 1 小得多,则得到

$$\varepsilon_1\left(\frac{1}{\varepsilon_0 - 1} - \frac{1}{\varepsilon_0 + 2}\right) - \frac{N_0\Delta}{N_0} = 0,$$

即有

$$\gamma = \tfrac{1}{3}(\varepsilon_0 - 1)(\varepsilon_0 + 2); \tag{7}$$

对于大多数液体,γ 的数量级为 1。

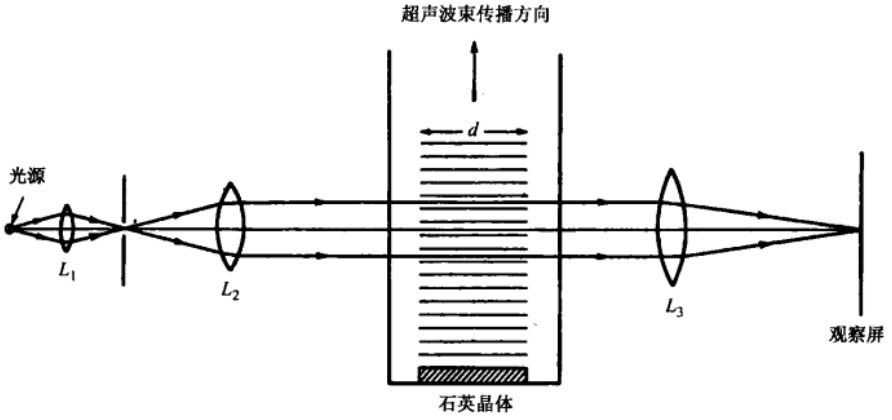


图 12.2 观测超声衍射的实验装置

我们还规定

$$\left.\begin{aligned} n &= \sqrt{\varepsilon_0}, \quad & k &= \frac{2\pi}{\lambda}, \quad & \overline{k} &= nk, \\ \delta &= \frac{\Delta\Lambda^2}{\lambda^2}, \quad & \xi &= \frac{\Lambda}{\lambda}\sin\theta, \quad & \beta &= \frac{\pi\lambda}{n\Lambda^2}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

最后,角 θ,ϕ等的度量将规定从正 y 方向顺时针转到光的前进方向(见图 12.1)。可以假设$0 \leqslant \theta < \pi/2$。

12.1.2 麦克斯韦方程的理论处理(概述)

在没有电流和电荷的区域,对于一个非磁性、不导电的媒质,当其介电常数 ε 可能是空间坐标和时间坐标的函数时,麦克斯韦方程为

$$\operatorname{curl}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},\qquad \operatorname{curl}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t},\tag{9a}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=0,\qquad \operatorname{div}\mathbf{D}=0.\tag{9b}$$

从(9a)式消去 $\mathbf{H}$,并利用关系式 $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$, $\operatorname{div}\mathbf{D}=0$ 和 $\operatorname{curl}\operatorname{curl}\equiv-\nabla^2+\operatorname{grad}\operatorname{div}$,即可求得

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varepsilon\mathbf{E})=\nabla^2\mathbf{E}+\operatorname{grad}(\mathbf{E}\cdot\operatorname{grad}\ln\varepsilon).\tag{10}$$

如果现在采用(4)式的 ε 代入,并认为 $\mathbf{E}$ 是由波长为 $\bar{\lambda}\approx\lambda/n$ 的一组平面波叠加而成,则可看到,(10)式右边第二项的量级是 $\varepsilon_1(\lambda/\Lambda)$ 乘以第一项。因为在通常实验条件下 ε_1 和 λ/Λ 都远远小于 1,所以可在(10)式中略去该项,由而得到

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varepsilon\mathbf{E})=\nabla^2\mathbf{E}.\tag{11}$$

现在来考虑图 12.1 所说明的物理情况,并设入射的单色平面电磁波是线偏振波,电矢量垂直于入射面(E 偏振),即沿 z 轴。由前一讨论可知,在媒质内 $\mathbf{E}$ 的分量 E_x 与 E_y 将都是很小的量,量级为 $\varepsilon_1(\lambda/\Lambda)$ 乘以 E_z,因此可予略去。结果,媒质外的 E_x 与 E_y 也可忽略不计。

从问题的对称性来看,很清楚 E_z 将不依赖于 z 坐标;因此应用(4)和(11)两式,即得到 E_z 所满足的方程为

$$\frac{\partial^2E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2E_z}{\partial y^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{[\varepsilon_0+\tfrac{1}{2}\varepsilon_1(e^{i(Kx-\Omega t)}+e^{-i(Kx-\Omega t)})]E_z\}=0.\tag{12}$$

为解(12)式,假设 E_z 的形式是

$$E_z=\sum_l V_l(y)e^{i[(k\sin\theta+lK)x-(\omega+l\Omega)t]},\tag{13}$$

式中取和遍及 l 的全部整数值(正,负以及零)。

将(13)式代入(12)式并令各指数项的系数等于零,由而得到 $V_l(y)$ 的递推关系式如下:

$$\begin{aligned}&V_l''(y)+\{\varepsilon_0c^{-2}(\omega+l\Omega)^2-(k\sin\theta+lK)^2\}V_l(y)\\&\quad=-\tfrac{1}{2}\varepsilon_1c^{-2}(\omega+l\Omega)^2\{V_{l-1}(y)+V_{l+1}(y)\}\qquad(l=0,\pm1,\pm2,\cdots),\end{aligned}\tag{14}$$

式中 V_l 上的一撇表示对 y 取微分。这些方程的解必须满足边界条件[①]。

和

$$\left.\begin{aligned}&V_0(0)=B,\quad B\text{是入射光波的振幅}\\&V_l(0)=0,\quad\text{对所有 }l\neq0.\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

在解(14)式之前,先察看一下(13)式的意义。它代表频率 $\omega_l=\omega+l\Omega(l=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 的一系列波的叠加。此外,频率为 ω_l 的波,其波矢的 x 分量是 $k\sin\theta+lK$。因此,频率 ω_l 的波在散射媒质外与 y 轴的夹角 ϕ_l 的正弦由下式给出:

① 当然,这些边界条件只有在各级反射波的强度均可忽略不计时才是正确的;在本问题中,反射确可忽略,因为要使衍射波具有显著强度,入射角最大只能 3°左右(又见 12.2.4 节)。

$$\sin\phi_l = \frac{c(k\sin\theta + lK)}{\omega + l\Omega}$$

$$\approx \sin\theta + l\frac{\lambda}{\Lambda}, \qquad \text{因为}\ \frac{\Omega}{\omega} \ll 1, \tag{16}$$

这同(2)式相符合。另外,l 级这个波的强度可以取为 $|V_l(d)|^2$。

现在来解(14)式。先假设 $|V_0| \gg |V_{\pm 1}| \gg |V_{\pm 2}| \cdots$。由于只须考虑"透射"解——与之对应的光波行进在使 y 相应增大的方向①,所以在一级近似下可令(14)式中 V_0 以外的所有 V_l 皆等于零,并利用条件(15)而得到

$$V_0^{(0)}(y) = B\,e^{i\sqrt{\varepsilon_0 - \sin^2\theta}ky} + O(\delta^2). \tag{17}$$

类此,令(14)式中除 $V_{\pm 1}$ 和 V_0 外所有其他 V_l 皆为零,经一步步计算即得到

$$V_{\pm 1}(y) = \tfrac{1}{4}\gamma\delta\frac{1 - e^{-2i\beta(\xi \pm \frac{1}{2})y}}{\xi \pm \frac{1}{2}}V_0^{(0)}(y). \tag{18}$$

此中还曾应用了(5)和(8)两式。现在如果将(18)式代入(14)式中 $l = 0$ 和 $l = \pm 2$ 的三个方程,并略去 $V_{\pm 3}(y)$等项,则得到对 $V_0{}^{(0)}(y)$的一个修正项和 $V_{\pm 2}(y)$的表达式;二者在这一级近似都正比于 δ^2。照此做下去,就得到各 l 级的 δ 升幂级数形式的强度表达式。这种幂级数形式的解首先由布里渊导出②,他所采用的分析比这里扼要讲述的有些更加烦琐,戴维③ 则效仿上列程序,但假设高于二级的强度可忽略不计,从而给出一级和二级衍射线强度的显表达式。其公式将在 § 12.2.5(38)中加以引用。

布里渊(以及戴维)的近似适用于 $\delta \ll 1$ 或 $\delta/\xi \ll 1$ 的情况,因为这时逐步求近法和幂级数收敛得很快。当这些条件被满足时,很明显只有前几级才具有显著强度。

拉曼和纳斯④首先对同时出现许多衍射级做出解释并给出其强度的近似式。他们按照下述方式来解(14)式。在(14)式中,令

$$V_l(y) = e^{\frac{1}{2}il\pi} \times e^{i\bar{k}(\cos\bar{\theta})y} \times U_l(y), \tag{19}$$

并记及 $\Omega/\omega \approx 10^{-5}$或更小,$\bar{k} = nk$ 和 $k\sin\theta = \bar{k}\sin\bar{\theta}$,即可得到 $U_l(y)$的递推关系式如下:

$$U_l''(y) + 2i\bar{k}\cos\bar{\theta}U_l'(y) - (2l\bar{k}K\sin\bar{\theta} + l^2K^2)U_l(y)$$
$$+ \tfrac{1}{2}i(\bar{k})^2\varepsilon_1\varepsilon_0{}^{-1}(U_{l+1}(y) - U_{l-1}(y)) = 0 \qquad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{20}$$

引进一新变量

$$\chi = \tfrac{1}{2}y\bar{k}\varepsilon_1\varepsilon_0{}^{-1}\sec\bar{\theta},$$

---

① 请参考图 12.1 中光的传播方位和 § 12.2(2)中 E_z 的表达式——译者注。

② L. Brillouin, *La Diffraction de la Lumière par des Ultrasons* (Paris, Hermann, 1933)。

③ E. David, *Phys. Z.*, **38**(1937), 587。

④ C. V. Raman and N. S. N. Nath, *Proc. Ind. Acad. Sci.* A, **2**(1935), 406, 413; *ibid.*, **3**(1936), 75, 119。
可以提及,拉曼和纳斯在他们前两篇论文(*loc. cit.*)中效仿瑞利关于相光栅的工作[*Proc. Roy. Soc.*, A, **79**(1907), 399]对超声-衍射求解,发现衍射波的振幅可用贝塞尔函数来表出。该法只考虑平面光波的通过超声束时的位相改变。

则(20)式变成

$$2U_l'(\chi)+U_{l+1}(\chi)-U_{l-1}(\chi)=(\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\varepsilon_0^{-1}\varepsilon_1)\sec^2\bar{\theta}\,U_l''(\chi)$$
$$-2\mathrm{i}\varepsilon_0\varepsilon_1^{-1}\{2lK(\bar{k})^{-1}\sin\bar{\theta}+l^2K^2(\bar{k})^{-2}\}U_l(\chi),\qquad(21)$$

式中 U 上的一撇现在代表对χ 的微分。因为 $\lambda/d\ll1$,(21)式右边第一项的量级通常为 $\varepsilon_1 U$,即 $10^{-4}U$,因而可予略去。此外,如果效仿拉曼和纳斯再令第二项也等于零,则所得到的方程组就是整数阶贝塞尔函数 J_l 所满足的递推关系式[①]。再应用边界条件(15),即得到第 l 级衍射波的强度表达式 $B^2J_l^2(\frac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon_0^{-1}\bar{k}d\sec\bar{\theta})$。

要注意的是,拉曼和纳斯所作的近似,实质在于对所有 l 略去 l^2/δ 和 $l\xi/\delta$。因此,如果 δ 与 1 相比足够大,该近似对较低各级的强度将是一个很好的近似。然而,对较高各级,贝塞尔函数强度表达式所给的值将过大。这一点已由 Extermann 和 Wannier[②] 通过对参量 δ 的三个值进行强度数值计算而获证明。在这些著者的工作中,(12)式之解最后决定于一些方程,这些方程与下一节(12.2 节)的(18)和(19)两式基本相似。

最后要提到,纳斯[③] 和 Aggarwal[④] 曾经获得(21)式的 $1/\delta$ 升幂级数形式的解;但这些级数用处似颇有限,因为它们收敛得非常慢。瓦格纳[⑤] 给出了另一种处理,仍以麦克斯韦方程为基础,但将衍射看作为边值问题。

12.2　超声衍射的积分方程处理方法

2.4 节中曾经指出,有效电场 $\mathbf{E}'(\mathbf{r},t)$的积分方程 § 2.4(4)和相伴的 $\mathbf{H}'$的公式 § 2.4(5)等效于各向同性非磁性物质的麦克斯韦方程。该处假设媒质的密度不依赖于时间,但是不难扩大其范围,把更普遍的依赖时间的情况也包括进来。同前,我们仍将假设媒质是非磁性的并且是不导电的。

回顾积分方程方法,其主要内容是将物质对电磁场传播的影响归结为浸没在真空之中的众偶极子的效应,每一个物理上无限小的体积元 $\mathrm{d}\mathbf{r}'$(其线度远小于波长 λ[⑥])内所感生的偶极矩,正比于作用在其上的电场 $\mathbf{E}'(\mathbf{r}',t)$并正比于该体积元内的分子数(原子数)$N(\mathbf{r}',t)\mathrm{d}\mathbf{r}'$。与 $\mathbf{r}'$处这样一个偶极矩相关的赫兹矢量

$$\mathbf{\Pi}_e=\alpha N\left(\mathbf{r}',\,t-\frac{R}{c}\right)\frac{\mathbf{E}'(t-R/c,\,\mathbf{r}')}{R}\,\mathrm{d}\mathbf{r}',$$

从这一矢量通过对其施以

---

① 见,例如 E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis* (Cambridge, Cambridge University Press, 4th edition, 1946), p. 360。

② R. Extermann and G. Wannier, *Helv. Phys. Acta*, **9**(1936), 520。

③ N. S. N. Nath, *Proc. Ind. Acad. Sci.*, A, **4**(1936), 222; *ibid.*, A, **8**(1938), 499。

④ R. R. Aggarwal, Ph. D. thesis, Delhi University, India(1954)。

⑤ E. H. Wagner, *Z. Phys.*, **141**(1955), 604, 622。

⑥ 这样的体积元,即体积远大于个体原子(分子)体积而线度远小于波长 λ 的体积元,对于光学波长几乎总能选取得到。

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\text{grad div}$$

运算,就可以导出 t 时刻 $\mathbf{r}$ 点处的场[见 §2.2(43)]。这里各种符号的意义与 2.4 节中相同;例如 $R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$,算符 grad div 是作用在变量 $\mathbf{r}(x,y,z)$ 上。于是,用类似导致 §2.4(4)的论证,现在可得到媒质内有效电场 $\mathbf{E}'$ 的积分方程如下①:

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r},t)+\alpha\iiint\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\text{grad div}\right)\left[N(\mathbf{r}',t-R/c)\frac{\mathbf{E}'(\mathbf{r}',t-R/c)}{R}\right]\mathrm{d}\mathbf{r}'. \tag{1}$$

如 §2.4(4)中一样,此积分遍及整个媒质,但要除去观察点 $\mathbf{r}(x,y,z)$ 处原子所占据的那一小区域。

这就是本节理论的基本方程。当从(1)式解得媒质内所有点处的 $\mathbf{E}'$ 时,媒质外的场则由入射场 $\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r},t)$ 加上全部偶极子场 $\mathbf{E}^{(d)}(\mathbf{r},t)$ 来计算,后者仍由(1)式中的积分项给出,但积分这次遍及整个媒质,无一处除外。可以注意,光经由媒质传播的这种处理,明显不同于通常设立媒质和真空两套麦克斯韦方程的方法,因而避免了显明引进折射面处的边界条件,而是通过对整个媒质积分这一过程带进来媒质的大小。再有,在麦克斯韦方程中,媒质密度的变化是通过其对介电常数 ε 的影响,而在积分方程(1)中,密度函数 $N(\mathbf{r},t)$ 则直接显现式中。

方程(1)只是在某些带有限制性的条件下成立。首先,分子的平均极化率 α 一般依赖于 $\mathbf{E}'$ 的频率,所以 $\mathbf{E}'$ 应该是严格单色的。然而,除非场的频率太靠近色散频率,α 随外场频率的改变是很小的。因此,只要 $\mathbf{E}'$ 所有成分的频率彼此靠得很近,(1)式仍可使用。即使入射场 $\mathbf{E}^{(i)}$ 是严格单色的,但当 $N(\mathbf{r},t)$ 依赖于时间时,作用在一个分子上并产生一个偶极矩的有效场 $\mathbf{E}'$ 也不一定是单色的,因为有热骚动或某些其他原因会使 $\mathbf{E}'$ 的频率展宽。展宽的程度依赖于 $N(\mathbf{r},t)$ 随时间改变的情况。因此只有当 N 在时间上的改变比 $\mathbf{E}^{(i)}$ 慢得多时,(1)式才可放心使用②;所幸,这一限制并不严苛,因为在光的散射和衍射问题中它所要求的条件几乎总是被满足的。

另外,(1)式中的 α 取作标量,这一假设不仅对原子以及具有特殊对称性的分子完全正确,而且对更为普遍的情况,只要分子取向如 2.3 节中所说呈无规状态时,它也适用。最后,媒质对光的吸收这里已假设可以忽略,如要考虑进来,可让 α 为复量。

现在我们将积分方程方法应用到超声波通过液体时产生的光的衍射问题,所作分析系效仿巴蒂亚和诺布耳③。

12.2.1 *E* 偏振情况的积分方程

让我们再考虑 12.1.1 节所描述的物理情况,并假设入射光是线偏振光,电矢量垂直于入射面;这时入射光波的电矢量 $\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r},t)$ 各分量(如常,以实部代表物理量)

---

① 方程(1)不同于 §2.4(4)之处在于后者中的算符 curl curl 已由[$-(1/c^2)(\partial^2/\partial t^2)+\text{grad div}$]取代,而且分子数密度 N 在这里依赖于空间坐标和时间坐标,并正如 $\mathbf{E}'$ 一样,取在推迟时间 $t-R/c$。

② 在非均匀媒质情况的麦克斯韦方程中,关系式 $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$ 的使用事实上也只有在对 N 的类似限制下才是正确的。

③ W. J. Noble, Ph. D. thesis, University of Edinburgh(1952); A. B. Bhatia and W. J. Noble, *Proc. Roy. Soc.*, A, **220**(1953), 356, 369。

$$\left.\begin{aligned} E_x^{(i)} &= E_y^{(i)} = 0, \\ E_z^{(i)} &= Be^{i(kx\sin\theta + ky\cos\theta - \omega t)}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

根据 565 页上所给的论证可以推断，媒质内的有效场 $\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t)$ 这时将近乎平行于 z 轴，所以可假设 $E'_x = E'_z = 0$，因而 $\mathbf{E}'$ 的矢量积分方程简化为 E'_z 的单一积分方程。$N(\mathbf{r}, t)$ 现在是由 §12.1(3) 给出，故可将 E'_z 的积分方程写成下列形式：

$$E'_z(\mathbf{r}, t) = Be^{i(kx\sin\theta + ky\cos\theta - \omega t)} + \frac{\tau_0}{4\pi}\iiint\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \times \left\{\frac{1}{R}\left[1 + \tfrac{1}{2}\Delta\left(e^{i[Kx' - \Omega(t - R/c)]} + e^{-i[Kx' - \Omega(t - R/c)]}\right)\right] \times E'_z(\mathbf{r}', t - R/c)\right\} d\mathbf{r}', \tag{3}$$

式中为书写简便，已令[①]

$$4\pi N_0 \alpha = \tau_0.$$

由 §2.3(17) 可知

$$\tau_0 = \frac{3(n^2 - 1)}{(n^2 + 2)}. \tag{4}$$

12.2.2　积分方程的试探解

因为所有垂直于 z 轴的平面在物理上都是等效的，所以我们取下列形式的 E'_z 表达式作为积分方程(3)的试探解[②]：

$$E'_z = \sum_{l,m} N_{lm} e^{-i(\omega_{lm} t - p_l x - q_m y)}, \tag{5}$$

式中 l 和 m 均为整数(正，负和零)。可以看出，方程(5)代表一个双无限平面波束；这里设解可能是这种形式，是由于想到无穷大平行平面分层媒质板中要发生多次反射和折射。下面即将看到，各未知量 N_{lm}，ω_{lm}，p_l 和 q_m 可从(5)式满足积分方程(3)这一条件来确定。

要解(3)式，须计算积分 $\mathcal{J}(\omega, p, q)$，其定义为

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}(\omega, p, q) \times e^{[-i(\omega t - px - qy)]} \\ &= \frac{1}{4\pi}\iiint_{V'}\left[-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\frac{e^{-i[\omega(t - R/c) - px' - qy']}}{R}\,dx'\,dy'\,dz' \\ &= \frac{1}{4\pi}\iiint_{V'} e^{-i(\omega t - px' - qy')}\left\{\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}\frac{e^{i\omega R/c}}{R}\,dx'\,dy'\,dz', \end{aligned} \tag{6}$$

式中 $\omega^2 > c^2 p^2$。如果观察点 (x, y, z) 在散射媒质外，则体积 V' 扩及整个媒质($-\infty < x' < \infty$，$0 \leqslant y' \leqslant d$，$-\infty < z' < \infty$)。如果观察点在散射媒质内，则积分遍及相同的体积，但围绕观察点、半径为 a 的一个小球除外(小球半径最后取极限 $a \to 0$)。令

$$x_1 = x' - x, \qquad y_1 = y' - y, \qquad z_1 = z' - z,$$

---

① 宏观量 $\tau(\mathbf{r}, t) = 4\pi\alpha N(\mathbf{r}, t)$ 有时叫做媒质的**散射指数**(scattering index)。

② 振幅 N_{lm} 和分子数密度 $N(\mathbf{r}, t)$ 当不致混淆，因为从此往后 $N(\mathbf{r}, t)$ 这个量在方程中不再显现。

并消去(6)式两边的因子 $e^{-i\omega t}$,则可将其写成如下形式

$$\mathcal{J}(\omega, p, q)=\mathcal{J}_1+\mathcal{J}_2, \tag{7}$$

式中

$$\mathcal{J}_1=\frac{1}{4\pi}\iiint_{V_1}\left[e^{i(px_1+qy_1)}\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\left(\frac{e^{i\omega R/c}}{R}\right)\right]dx_1\,dy_1\,dz_1, \tag{8}$$

$$\mathcal{J}_2=\frac{1}{4\pi}\frac{\omega^2}{c^2}\iiint_{V_1}\left[e^{i(px_1+qy_1)}\left(\frac{e^{i\omega R/c}}{R}\right)\right]dx_1\,dy_1\,dz_1, \tag{9}$$

散射媒质现在扩及的体域 V_1 是:$-\infty<x_1<\infty$,$-y\leqslant y_1\leqslant d-y$,$-\infty<z_1<\infty$。这两个积分计算放在附录 J 中,其结果为[①]

(a)当(x,y,z)位于散射媒质内时,

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\omega, p, q)=&\frac{1}{\sigma(\omega, p, q)}-\frac{\omega^2}{2c^2}\frac{\exp[-ig(\omega, p, q)y]}{g(\omega, p, q)(\omega^2c^{-2}-p^2)^{1/2}}\\&+\frac{\omega^2}{2c^2}\frac{\exp[-ih(\omega, p, q)(y-d)]}{h(\omega, p, q)(\omega^2c^{-2}-p^2)^{1/2}};\end{aligned} \tag{10a}$$

(b)当(x,y,z)位于散射媒质以外时,

$$\mathcal{J}(\omega, p, q)=\frac{\omega^2\exp[-ig(\omega, p, q)y]}{2c^2g(\omega, p, q)(\omega^2c^{-2}-p^2)^{1/2}}\{\exp[ig(\omega, p, q)d]-1\}; \tag{10b}$$

(c)当(x,y,z)位于散射媒质前方(即与入射光同侧)时,

$$\mathcal{J}(\omega, p, q)=\frac{\omega^2\exp[-ih(\omega, p, q)y]}{2c^2h(\omega, p, q)(\omega^2c^{-2}-p^2)^{1/2}}\{\exp[ih(\omega, p, q)d]-1\}. \tag{10c}$$

在诸式中

$$\left.\begin{aligned}&\sigma(\omega, p, q)=3(p^2+q^2-\omega^2c^{-2})(p^2+q^2+2\omega^2c^{-2})^{-1},\\&g(\omega, p, q)=q-(\omega^2c^{-2}-p^2)^{1/2},\\&h(\omega, p, q)=q+(\omega^2c^{-2}-p^2)^{1/2}.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

如果现在将(5)式代入(3)式,并利用关系式(6)和(10a),则经一步步运算后即得到

$$\begin{aligned}&-\sum_{l,m}N_{lm}\exp[-i(\omega_{lm}t-p_lx-q_my)]+B\exp[(-i)(\omega t-kx\sin\theta-ky\cos\theta)]\\&+\tau_0\sum_{l,m}N_{lm}\left[\frac{\exp[(-i)(\omega_{lm}t-p_lx-q_my)]}{\sigma(\omega_{lm}, p_l, q_m)}\right.\\&+\tfrac{1}{2}\Delta\sum_{+,-}\frac{\exp\{(-i)[(\omega_{lm}\pm\Omega)t-(p_l\pm K)x-q_my]\}}{\sigma(\omega_{lm}\pm\Omega, p_l\pm K, q_m)}\end{aligned}$$

① 整个 12.2 节,表达式的平方根都要取正号,除非另有说明。

$$-\frac{\omega_{lm}^2\exp\{(-\mathrm{i})[\omega_{lm}t-p_lx-(\omega_{lm}^2c^{-2}-p_l^2)^{1/2}y]\}}{2c^2g(\omega_{lm},\,p_l,\,q_m)(\omega_{lm}^2c^{-2}-p_l^2)^{1/2}}$$

$$-\tfrac{1}{2}\Delta\sum_{+,-}\frac{(\omega_{lm}\pm\Omega)^2\exp[(-\mathrm{i})\{(\omega_{lm}\pm\Omega)t-(p_l\pm K)x-[c^{-2}(\omega_{lm}\pm\Omega)^2-(p_l\pm K)^2]^{1/2}y\}]}{2c^2g(\omega_{lm}\pm\Omega,\,p_l\pm K,\,q_m)[c^{-2}(\omega_{lm}\pm\Omega)^2-(p_l\pm K)^2]^{1/2}}$$

$$+\frac{\omega_{lm}^2\exp[(-\mathrm{i})\{\omega_{lm}t-p_lx+[\omega_{lm}^2c^{-2}-p_l^2]^{1/2}y\}]\times\exp[\mathrm{i}h(\omega_{lm},\,p_l,\,q_m)d]}{2c^2h(\omega_{lm},\,p_l,\,q_m)[\omega_{lm}^2c^{-2}-p_l^2]^{1/2}}$$

$$+\tfrac{1}{2}\Delta\sum_{+,-}\frac{(\omega_{lm}\pm\Omega)^2\exp[(-\mathrm{i})\{(\omega_{lm}\pm\Omega)t-(p_l\pm K)x+[c^{-2}(\omega_{lm}\pm\Omega)^2-(p_l\pm K)^2]^{1/2}y\}]}{2c^2h(\omega_{lm}\pm\Omega,\,p_l\pm K,\,q_m)}$$

$$\times\frac{\exp[\mathrm{i}h(\omega_{lm}\pm\Omega,\,p_l\pm K,\,q_m)d]}{[c^{-2}(\omega_{lm}\pm\Omega)^2-(p_l\pm K)^2]^{1/2}}\Bigg]\equiv 0,\tag{12}$$

其中各式前面取和符号$\sum_{+,-}$的含义定规如下：

$$\sum_{+,-}F(a\pm b,\,c\pm d)\equiv F(a+b,\,c+d)+F(a-b,\,c-d).$$

为了使(12)式在所有时间和在散射媒质内所有点都一定得到满足，则各指数项在(x,y,t)三个变量任一方面不同于其他指数项者，其系数须各自分别为零。为此，先将(12)式各项进行归类。从(12)式可以看到，ω_{lm}每改变一级，是增减一个 Ω，同时 p_l 随之改变并增减一个 K。然而，在不同指数项中，y 的系数或是保持不变(q_m)，或总是相应 ω 和 p 构成的相同函数，因此可以认为 ω_{lm}仅依赖于指标 l。此外，可以假设 ω_0 是入射光的频率 ω 而不有损普遍性，因而有

$$\left.\begin{aligned}\omega_0&=\omega, &\omega_l&=\omega+l\Omega,\\ p_0&=k\sin\theta, &p_l&=k\sin\theta+lK\end{aligned}\right\}\quad(l=0,\pm1,\pm2,\cdots).\tag{13a}$$

(13b)

将这些关系用于(12)式并将不同项重新归类，(12)式即变成

$$\sum_{l,m}[N_{lm}(\tau_0/\sigma_{lm}-1)+\tfrac{1}{2}\Delta(\tau_0/\sigma_{lm})(N_{l-1,m}+N_{l+1,m})]\times\exp[(-\mathrm{i})(\omega_lt-p_lx-q_my)]$$

$$+\sum_l(B\delta_{l,0}-G_l)\exp\{(-\mathrm{i})[\omega_lt-p_lx-(\omega_l^2c^{-2}-p_l^2)^{1/2}y]\}$$

$$+\sum_l H_l\exp\{(-\mathrm{i})[\omega_lt-p_lx+(\omega_l^2c^{-2}-p_l^2)^{1/2}y]\}\equiv 0,\tag{14}$$

式中 $\delta_{l,l'}$是克罗内克δ符号[①]（即当 $l\neq l'$时，$\delta_{l,l'}=0$，而 $\delta_{ll}=1$）而 G_l 和 H_l 分别为

$$G_l=\tau_0\omega_l^2\sum_m[N_{lm}+\tfrac{1}{2}\Delta(N_{l-1,m}+N_{l+1,m})]\times[2c^2g_{lm}(\omega_l^2c^{-2}-p_l^2)^{1/2}]^{-1},\tag{15}$$

$$H_l=\tau_0\omega_l^2\sum_m[N_{lm}+\tfrac{1}{2}\Delta(N_{l-1,m}+N_{l+1,m})][\exp(\mathrm{i}h_{lm}d)][2c^2h_{lm}(\omega_l^2c^{-2}-p_l^2)^{1/2}]^{-1}.\tag{16}$$

这里还使用了缩写符号[见(11)式]

$$\sigma_{lm}=\sigma(\omega_l,\,p_l,\,q_m),\qquad g_{lm}=g(\omega_l,\,p_l,\,q_m)\quad\text{和}\quad h_{lm}=h(\omega_l,\,p_l,\,q_m).\tag{17}$$

① 这里克罗内克符号 $\delta_{l,l'}$与 § 12.1(8)中引进的参量 δ 当不致混淆，因为前者出现时总带着下标。

令(14)式中各指数项系数分别等于零,就得到 q_m 和振幅 N_{lm} 容许值的方程组如下:

$$N_{lm}(1-\sigma_{lm}/\tau_0)+\tfrac{1}{2}\Delta(N_{l-1,m}+N_{l+1,m})=0, \qquad \text{对所有 } l \text{ 和 } m, \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} B\delta_{l,0}-G_l&=0, \\ H_l&=0 \end{aligned}\right\} \quad \text{对所有 } l. \tag{19}$$

$$\tag{20}$$

12.2.3 衍射谱中和反射谱中的光波振幅表达式

在讨论(18)~(20)式的解之前,先来写下散射媒质以外(x,y,z)点处总光扰动的表达式。为此,须将(5)式代入(3)式右边被积函数中,对散射媒质逐点积分,并将入射场加到该结果上。计算中将再次遇到前一节中引进的积分$\mathcal{J}(\omega,p,q)$。忆及对于散射媒质以外的点,$\mathcal{J}(\omega,p,q)$由(10b)式给出,并利用(18)式,即得到总透射电场惟一非零分量表达式如下:

$$E_z=\sum_l B_l\exp\{(-\mathrm{i})[\omega_l t-p_l x-(\omega_l^2c^{-2}-p_l^2)^{1/2}y]\}, \tag{21}$$

式中

$$B_l=\omega_l^2\sum_m\sigma_{lm}N_{lm}[\exp(\mathrm{i}g_{lm}d)]\times[2c^2g_{lm}(\omega_l^2c^{-2}-p_l^2)^{1/2}]^{-1}. \tag{22}$$

按照(21)式和(22)式,可以将透射波看做由许多平面波组成,其频率各不相同,传播方向也不同。将(13)式代入(21)式的指数,可以很容易得到 ω_l 和 $\boldsymbol{\phi}_l$ 的表达式;结果与 12.1.2 节所给相同。

类此,借助(10c)式,可写下反射谱中振幅 $B_l^{(r)}$ 的表达式。结果是

$$B_l^{(r)}=-\omega_l^2\sum_m\sigma_{lm}N_{lm}[2c^2h_{lm}(\omega_l^2c^{-2}-p_l^2)^{1/2}]^{-1}. \tag{23}$$

然而,这里我们将只关注散射媒质那边的点,因为在本项问题中反射谱中各级波的强度一般都非常之小。

12.2.4 逐次逼近法的方程解

在 12.2.4 节和 12.2.5 节中,将根据超声波振幅 Δ 很小这一假设来解(18)~(20)式,并将得到透射谱中一级和二级谱强度的近似表达式。该近似失效的情况将在 12.2.6 节中定性讨论,最后,在 12.2.7 节中用一种与拉曼和纳斯近似实质等效的方法来解(18)~(20)式。

首先考虑方程组(18)。这些方程中的下标 m 系用来区分 q 的不同容许值 q_m 及有关各量,因此可予隐去而将(18)写成如下形式:

$$f_l(q^2)N_l(q^2)-\tfrac{1}{2}\Delta[N_{l-1}(q^2)+N_{l+1}(q^2)]=0 \qquad (l=0,\pm1,\pm2,\cdots), \tag{24}$$

其中

$$f_l(q^2)=\frac{\sigma_l(q)}{\tau_0}-1=\frac{3(p_l^2+q^2-n^2\omega_l^2c^{-2})}{(n^2-1)(p_l^2+q^2+2\omega_l^2c^{-2})}. \tag{25}$$

方程组(24)构成振幅 $N_l(q^2)$的一个无穷线性齐次方程组。存在非平凡解(即对所有 l,$N_l\neq0$)的条件是 N_l 的系数所构成的行列式为零。该行列式方程的根给出 q^2 的容许值,现以 q_m^2($m=0,\pm1,\pm2,\cdots$)代表之。对应于每个这样的 q^2,自然有两个 q 值,即 $+|q|$ 和 $-|q|$,和两组

振幅，即 $N_l(+|q|)\equiv N_l{}^{+}(q^2)$和 $N_l(-|q|)\equiv N_l{}^{-}(q^2)$，$(l=0,\pm1,\cdots)$。因此，对于一个给定的 q^2 容许值，比如 q_m^2，由递推关系式(24)可确定所有的 $N_l^{+}(q_m^2)(l=0,\pm1,\cdots)$，用其中之一，比如说 $N_m^{\pm}(q_m^2)$来表示出全体。以此方法，可得到用 $N_m^{\pm}(q_m^2)(m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$表示的全部振幅 $N_l^{\pm}(q^2)$。前者，即 $N_m^{\pm}(q_m^2)(m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$这两组振幅，则要由(19)和(20)两式来确定，而这两个方程组在数目上正够作为此用。(注意：在(5)，(12)，(15)等表达式中，符号$\sum_m$ 意指对 $N_{\cdots,m}^{+}$和 $N_{\cdots,m}^{-}$二者各项取和。)

这里我们将采用微扰方法来获得(24)式的近似解。将 Δ 看作为一个小参量并依照通常微扰步骤，将 $\eta(=q^2)$和 N_l 展成 $\frac{1}{2}\Delta$ 的幂级数：

$$N_l(\eta)=N_l^{(0)}+\tfrac{1}{2}\Delta N_l^{(1)}+(\tfrac{1}{2}\Delta)^2N_l^{(2)}+\cdots, \tag{26a}$$

$$\eta=\eta^{(0)}+\tfrac{1}{2}\Delta\eta^{(1)}+(\tfrac{1}{2}\Delta)^2\eta^{(2)}+\cdots. \tag{26b}$$

利用(26b)式，可将(25)式的 $f_l(\eta)$写成为

$$f_l(\eta)=f_l(\eta^{(0)})+\tfrac{1}{2}\Delta\eta^{(1)}f_l'(\eta^{(0)})+(\tfrac{1}{2}\Delta)^2[\eta^{(2)}f_l'(\eta^{(0)})+\tfrac{1}{2}(\eta^{(1)})^2f_l''(\eta^{(0)})]+\cdots, \tag{27}$$

式中 f 上的一撇表示对 η 取微分。(注意：$f_l'(\eta),f_l''(\eta),\cdots$对 η 的每一个正实值均不为零)。将(26)式和(27)式代入(24)式，则得到$(l=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

$$\begin{aligned}&\{f_l(\eta^{(0)})+\tfrac{1}{2}\Delta\eta^{(1)}f_l'(\eta^{(0)})+(\tfrac{1}{2}\Delta)^2[\eta^{(2)}f_l'(\eta^{(0)})+\tfrac{1}{2}(\eta^{(1)})^2f_l''(\eta^{(0)})]+\cdots\}\\&\quad\times[N_l^{(0)}+\tfrac{1}{2}\Delta N_l^{(1)}+(\tfrac{1}{2}\Delta)^2N_l^{(2)}+\cdots]\\&\quad-\tfrac{1}{2}\Delta(N_{l-1}^{(0)}+\tfrac{1}{2}\Delta N_{l-1}^{(1)}+\cdots+N_{l+1}^{(0)}+\tfrac{1}{2}\Delta N_{l+1}^{(1)}+\cdots)=0.\end{aligned} \tag{28}$$

先令(28)式中与 Δ 无关的项等于零，就得到零级近似

$$f_l(\eta^{(0)})N_l^{(0)}=0\qquad(l=0,\pm1,\pm2,\cdots). \tag{29}$$

方程组(29)有如下解：

$$\text{或}\quad f_l(\eta^{(0)})=0,\quad N_l^{(0)}\neq0\quad\text{或}\quad N_l^{(0)}=0,\quad f_l(\eta^{(0)})\neq0. \tag{30}$$

以 $\eta_l^{(0)}$ 表示$f_l(\eta^{(0)})=0$所给出的 $\eta^{(0)}$值，则可由(30)式求出

$$\eta_l^{(0)}=n^2\omega_l^2c^{-2}-p_l^2,\qquad N_l^{(0)}(\eta_l^{(0)})\equiv N_{ll}\neq0, \tag{31}$$

和

$$N_{l'}^{(0)}(\eta_l^{(0)})\equiv N_{l'l}^{(0)}=N_{ll}\delta_{l'l}. \tag{32}$$

其次，令(28)式中 Δ 项系数等于零，得到

$$f_l(\eta_m^{(0)})N_l^{(1)}(\eta_m^{(0)})+\eta_m^{(1)}f_l'(\eta_m^{(0)})N_l^{(0)}(\eta_m^{(0)})=N_{l-1}^{(0)}(\eta_m^{(0)})+N_{l+1}^{(0)}(\eta_m^{(0)}). \tag{33}$$

依次令(33)式中 $l=m,m+1,m-1,m+2,m-2,\cdots$并利用(32)式，则求得

$$\eta_m^{(1)}=0, \tag{34a}$$

$$N_{m\pm1,m}^{(1)}=\frac{N_{mm}}{f_{m\pm1}(\eta_m^{(0)})}, \tag{34b}$$

和

$$N^{(1)}_{m\pm j,m}=0 \qquad \text{当 } j\geqslant 2 \text{ 时.} \tag{34c}$$

类此,令(28)式中 Δ^2 的系数等于零,则得到二级微扰项对 $\eta_m^{(0)}$ 的修正和对振幅 N_{lm} 的表达如下①:

$$\eta_m^{(2)}=\frac{1}{f'_m(\eta_m^{(0)})}\left[\frac{1}{f_{m+1}(\eta_m^{(0)})}+\frac{1}{f_{m-1}(\eta_m^{(0)})}\right], \tag{35a}$$

$$N^{(2)}_{m\pm 2,m}=\frac{N_{mm}}{f_{m\pm 1}(\eta_m^{(0)})f_{m\pm 2}(\eta_m^{(0)})}, \tag{35b}$$

和

$$N^{(2)}_{m\pm 1,m}=0, \qquad N^{(2)}_{m\pm j,m}=0 \qquad \text{当 } j\geqslant 3 \text{ 时.} \tag{35c}$$

从以上计算可以看到,在零级微扰计算中只有 $N_{mm}(m=0,\pm 1,\cdots)$各量不为零;在一级计算中,N_{mm}和$N_{m\pm 1,m}$不为零,而在二级中,$N_{m\pm 2,m}$也不为零。照此方式,通过将微扰计算继续推向更高级,即得到越来越多的不为零的非对角振幅(即两个下标不等的振幅)。这些计算很冗长,因而这里无法给出;但可假设,凡微扰步骤有效时,较高级各项均可略去。

对角振幅一旦知道,非对角振幅(34b)和(35b)即完全确定;前者构成(24)式的零级解,现从(19)和(20)两式求之。然而,先剖析这两个式子在 $\Delta=0$ 这一简单情况的解将可获益,这时很容易得到(18)~(20)式的精确解。在该情况下,惟一可能不为零的振幅是对角振幅 $N^{\pm}_{m,m}$ $(m=0,\pm 1,\cdots)$。如果令(19)和(20)两式中所有非对角振幅都等于零,则可发现除 $N^{\pm}_{0,0}$ 外所有振幅 $N^{\pm}_{m,m}$ 恒等于零,并且 $N^{\pm}_{0,0}$ 由下式给出②:

$$N^{+}_{0,0}=(2B/\sigma_{0,0})\cos\theta[(n^2-\sin^2\theta)^{1/2}-\cos\theta](1+\rho^2-2\rho\cos 2q_0d)^{-1/2}\,e^{i\psi},$$

$$N^{-}_{0,0}=N^{+}_{0,0}(g_{0,0}/h_{0,0})e^{2iq_0d},$$

式中

$$\rho=\left|\frac{N^{-}_{0,0}}{N^{+}_{0,0}}\right|^2, \qquad \psi=\arctan\left[\frac{\rho\sin 2q_0d}{1-\rho\cos 2q_0d}\right]. \tag{36}$$

在正入射($\theta=0$)时,(11),(31)和(36)三式给出

$$\rho_0=\left|\frac{N^{-}_{0,0}}{N^{+}_{0,0}}\right|^2_{\theta=0}=\frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}. \tag{37}$$

借助(36),(27)和(23)三式,不难得到一平行平面板的正入射反射率表达式为:

$$\left|\frac{B_0^{(r)}}{B}\right|^2=\frac{4\rho_0\sin^2 q_0d}{1+\rho_0{}^2-2\rho_0\cos 2q_0d},$$

结果与§7.6(9)相符,因为 $\theta=0$ 时,$q_0=nk$。

---

① 这里所给的公式只有当 $f_{m\pm 1}(\eta_m^{(0)}),f_{m\pm 2}(\eta_m^{(0)}),\cdots$全都不为零时才能成立。如非全不为零,则上列微扰步骤必须加以修改以将该简单性考虑进来。当光在 $\theta=0$ 和 $\theta=\arcsin(\lambda/2\Lambda)$这两个角度下入射时(这时参量 $\xi\equiv\frac{\Lambda}{\lambda}\sin\theta$ 等于0和$\frac{1}{2}$),在二级微扰项的计算中,即开始出现这种简单性。然而,这里对此问题将不做深究,而仅在12.2.5节中给出这两种情况的结果。

② 在巴蒂亚和诺布耳(*loc. cit*)所给的 $N^{+}_{0,0}$和 $N^{-}_{0,0}$表达式中,有一些印刷错误,现均予改正。

当 Δ 不为零但仍足够小而可应用微扰法时，上述 $\Delta=0$ 时的解提示

$$|N_{0,0}|\gg|N_{\pm1,\pm1}|\gg|N_{\pm2,\pm2}|\cdots$$

因此可用逐次逼近法从(19)式和(20)式求解对角振幅。再者，正入射或近正入射(在超声衍射实验中 θ 最大在 3°左右)时，原有的 N^- 和相应的 N^+ 之比将很小[见(37)式]，故可将 N^- 统统略去而单从方程(19)来确定 N^+[①]。回想前面边界条件 § 12.1(15)的采用也内含同样的近似。

现在可以通过将(34b)，(34c)，(35b)和(35c)四式用于(19)式而得到对角振幅 $N^+_{0,0}\,N^+_{\pm1,\pm1}$ 和 $N^+_{\pm2,\pm2}$ 各表达式。此外，一级和二级透射谱线的强度表达式借助(22)式亦不难写出。这些表达式都在下节中给出。

12.2.5　一些特别情况的一级和二级谱线强度表达式

(a) $\delta/\xi\ll1$ 并且 ξ 远大于 1

这就是前一节所详细分析的情况。一级和二级谱线的强度 $I_{\pm1}$ 和 $I_{\pm2}$ 分别是

$$I_{\pm1}=|B_{\pm1}|^2=\tfrac{1}{4}B^2\gamma^2\delta^2\frac{\sin^2[\beta d(\xi\pm\frac{1}{2})]}{(\xi\pm\frac{1}{2})^2},\tag{38a}$$

和

$$I_{\pm2}=|B_{\pm2}|^2=\tfrac{1}{64}B^2\gamma^4\delta^4\left[\frac{1}{2(\xi\pm1)(\xi\pm\frac{1}{2})(\xi\pm\frac{3}{2})}\right]\times\left\{\frac{\sin^2[\beta d(\xi\pm\frac{1}{2})]}{(\xi\pm\frac{1}{2})}+\frac{\sin^2[\beta d(\xi\pm\frac{3}{2})]}{(\xi\pm\frac{3}{2})}-\frac{\sin^2[2\beta d(\xi\pm1)]}{2(\xi\pm1)}\right\}.\tag{38b}$$

这两个方程中的上、下正负号应理解为或全用正，或全用负。

巴蒂亚和诺布耳(*loc. cit.*)还考虑了两种其他情况，这里仅引用其强度表达式而不作证明：

(b) $\xi\approx\frac{1}{2}$，$\delta\ll1$

$$I_0=\frac{1}{4}\frac{B^2\delta^2\gamma^2}{(\xi-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\delta^2\gamma^2}\left(\frac{(\xi-\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}\delta^2\gamma^2}+\cos^2\{\beta d[(\xi-\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{1}{4}\delta^2\gamma^2]^{1/2}\}\right),\tag{39a}$$

$$I_{-1}=\frac{1}{4}\frac{B^2\delta^2\gamma^2}{(\xi-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\delta^2\gamma^2}\sin^2\{\beta d[(\xi-\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{1}{4}\delta^2\gamma^2]^{1/2}\}.\tag{39b}$$

I_1 和 I_{-2} 的表达式更为复杂。然而，当 $\xi=\frac{1}{2}$ 时，二者呈简单形式

$$I_1=\tfrac{1}{16}B^2\delta^2\gamma^2\left\{-\sin^2\left(\frac{\pi d\Delta\gamma}{2\lambda n}\right)+2\sum_{+,-}\sin^2[\beta d(1\pm\tfrac{1}{4}\delta y)]\right\}\tag{39c}$$

和

① 对这些要点的详细讨论，见巴蒂亚和诺布耳(*loc. cit.*)。特别是，该文证明 N^- 对反射谱振幅 $B^{\{r\}}_{\}}$ 的影响一般不可忽略。

$$I_{-2}=\tfrac{1}{16}B^2\delta^2\gamma^2\sin^2\left(\frac{\pi d\Delta\gamma}{2\lambda n}\right). \tag{39d}$$

(c) 正入射($\xi=0$),$\delta\ll 1$

$$I_1=I_{-1}=B^2\delta^2\gamma^2\sin^2[\tfrac{1}{2}\beta d(1+\tfrac{1}{8}\delta^2\gamma^2)], \tag{40a}$$

$$I_2=I_{-2}=\tfrac{1}{48}B^2\delta^4\gamma^4\{-\tfrac{1}{4}\sin^2 2\beta d+\sin^2[\tfrac{1}{2}\beta d(1+\tfrac{1}{8}\delta^2\gamma^2)] +\tfrac{1}{3}\sin^2[\tfrac{3}{2}\beta d(1-\tfrac{1}{24}\delta^2\gamma^2)]\}. \tag{40b}$$

如果略去(40)式中各 sine 项自变量中的 $\delta^2\gamma^2$,其结果亦可从(38)式令其中 $\xi=0$ 而得到。

如前曾提及,布里渊[①] 和戴维[②],还有 Rytov[③],当初推导一级和二级谱线强度表达式(38)是按照 12.1节中概述的方法。Aggarwal[④] 推导(38)式则是根据拉曼和纳斯微分方程 § 12.1(21)。Phariseau[⑤] 曾经证明,当 $\xi\approx\frac{1}{2}$时,一级和二级谱线强度表达式(39)也能从(21)式导出[⑥]。这当然理应如此,因为建立在麦克斯韦微分方程上的方法和本节的积分方程方法原本等效。

12.2.6 一些定性结果

从前一节所给出的各强度表达式显然可见,当 δ 和 ξ 满足条件(a)$\delta\ll 1$ 或条件(b)$\delta/\xi\leqslant 1$ 时,直接透射光束各边将只出现前少数几个低级衍射谱线,并且其强度将随级的增高而迅速下降。然而,当条件(a)和(b)都不满足,即 δ 和 δ/ξ 二者都大于 1 时,一般将多出现许多级。对于这种情况,(18) ~ (20)式的解以及各级强度的计算就更为困难。通过对 12.2.4 节微扰法有效性条件进行剖析,可以证明[⑦] 在解(18) ~ (20)式过程中,可以认为只有下标 l 和 m 都位于 $-M_1$ 和 M_2 两数之间的那些振幅 N_{lm} 为非零振幅,其中 M_1 和 M_2 大致定为

$$\left.\begin{aligned} M_1&\approx\ \ \xi+\delta^{2/3}+1\\ M_2&\approx -\xi+\delta^{2/3}+1. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

$(0\leqslant\xi<\delta^{2/3})$($\delta\equiv\Delta\Lambda^2/\lambda^2$)因为一般而言,$\Delta$ 不可能大到远超过 10^{-4},并且能观察到超声衍射现象的 Λ/λ[⑧] 最大值要受到分辨本领实际极限的限制等等,所以 δ 最大的可能值约为 100。因此,即使在极端实验条件下,(18),(19),(20)这三组无穷方程每组最多也只要解大约 20 个线性联立方程。但即使有了这一简化,计算必定仍然冗长乏味,因而不曾有人做过。

从定性上说,M_1 和 M_2 这两个数也代表直接透射光束两边可能出现的衍射级数目。根据(41)式,当 $\xi=(\Lambda\sin\theta)/\lambda$ 从零增大时,直接透射光束两边出现的衍射级数目应该变得不同,超声波波体面上反射光能到达的那一边出现的谱线多。Parthasarathy[⑨] 曾经从实验上研究过超

① L. Brillouin, *La Diffraction de la Lumière par des Ultrasons* (Paris, Hermann, 1933)。

② E. David, *Phys. Z.*, **38**(1937), 587。

③ S. M. Rytov, *Diffraction de la Lumière par les Ultrasons* (Paris, Hermann, 1938)。

④ R. R. Aggarwal, *Proc. Ind. Acad. Sci.*, A, **31**(1950), 417。

⑤ P. Phariseau, *Proc, Ind. Acad. Sci.*, A, **44**(1956), 165。

⑥ 关于本节所给出的各种强度表达式及其实验结果,可参见 Bhatia 和 Noble(*loc. cit*)论文中的讨论。

⑦ Bhatia and Noble(*loc. cit.*)。

⑧ 原文此处为 λ/Λ,显然有误,现已改正(可参见 § 12.1(2)式下面的关系式$\phi_l-\phi_{l-1}=\lambda/\Lambda$ 及说明)——译者注。

⑨ S. Parthasarathy, *Proc. Ind. Acad. Sci.*, A, **3**(1936), 442。

声衍射谱随入射角的变化，图 12.3 翻拍了其论文中的一页插图。在该实验中$(\lambda/\Lambda)=3\times10^{-3}$；假设 $\Delta\approx10^{-4}$，则根据(41)式，在正入射时，$M_1=M_2=5$。表 12.1 给出不同入射角下直接透射光束两边出现的谱线数目实际观测值，圆括弧内是(41)式所给的相应理论值(当然，当 δ/ξ 变得远小于 1 时，直接透射光束每边将只能出现一两级)。

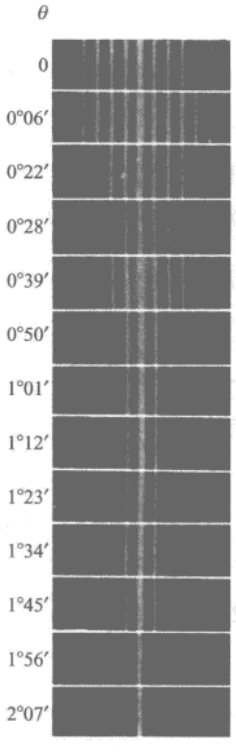


图 12.3　超声衍射：不同入射角 θ 下观测到的衍射谱$(\lambda/\Lambda=3\times10^{-3},\Delta\approx10^{-4})$。
[引自 S. Parthasarathy, *Proc. Ind. Acad. Sci.*, A, **3**(1936), 442]

表 12.1　超声衍射：当入射角 θ 取不同值时，观察到的衍射级数目和理论所预期的数目(圆括弧内)$(\lambda/\Lambda=3\times10^{-3},\Delta\approx10^{-4})$

θ	0	0° 06′	0° 22′	0° 39′	1° 01′	1° 23′	1° 45′	2° 07′
ξ	0	0.6	2	4	6	8	10	13
M_1	5 (5)	5 (6)	6 (7)	6 (9)	3	2	1	1
M_2	5 (5)	5 (4)	3 (3)	2 (2)	2	1	1	1

类似的实验结果 Nomoto[①] 也曾得到。他的 M_1 和 M_2 对 θ 的曲线，虽然定性上与(41)式相符，但在 $0\leqslant\xi<\delta^{2/3}$ 范围还显示随 ξ 有细微周期改变。方程(41)所依据的考虑太粗糙，不能解释后一特征。

① O. Nomoto, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, **24**(1942), 380, 613。

12.2.7 拉曼-纳斯近似

最后来证明，拉曼和纳斯所得到的贝塞尔函数强度表达式也可以从(18)～(20)式的解来导出。忽略频率 ω_l 随 l 的微小改变，并忆及 $q_m^2 \simeq (n^2\omega_m^2 c^{-2} - p_m^2)$，则在良好近似上可以认为(25)式分母中的 $p_l^2 + q^2 + 2\omega_l^2 c^{-2} \simeq k^2(n^2+2)$。因此(24)式可写成下列形式

$$\frac{q^2 - n^2k^2 + k^2\sin^2\theta}{\frac{1}{2}\Delta\gamma k^2} N_l(q) - N_{l+1}(q) - N_{l-1}(q) = -\frac{l^2 + 2l\xi}{2\gamma\delta} N_l(q)$$
$$(l = 0, \pm1, \pm2, \cdots). \tag{42}$$

拉曼和纳斯当时得到贝塞尔函数强度表达式是通过略去其方程 § 12.1(21)中的$[(l^2 + 2l\xi)/\delta] \times U_l$ 项。在同一近似上，我们也可略去(42)式右边的项。于是(42)式可写成为

$$\frac{q^2 - b^2}{\mu^2} N_l(q) = N_{l+1}(q) + N_{l-1}(q) \qquad (l = 0, \pm1, \cdots), \tag{43}$$

式中

$$b^2 = k^2(n^2 - \sin^2\theta) \qquad 和 \qquad \mu^2 = \tfrac{1}{2}\Delta\gamma k^2. \tag{44}$$

为解(43)式[①]，假设 $N_l(q)$ 的形式为

$$N_l(q) = N\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}lm/M}, \tag{45}$$

式中 M 是某个非常大的整数，而 m 是一个小于 M 的整数，$0 \leqslant m < M$。(即将看到，最后结果不依赖于 M。)将(45)式代入(43)式，得到容许的 q^2 值

$$q_m^2 = b^2 + 2\mu^2\cos(2\pi m/M), \qquad 0 \leqslant m < M, \tag{46}$$

忆及 $\mu^2 \ll b^2$，即有

$$\pm|q_m| = \pm[b + (\mu^2/b)\cos(2\pi m/M)] \tag{47}$$

这样，对每一个 m，有两个 q 值，即 $\pm|q_m|$。相应的振幅则由下式给出：

$$N_l(\pm q_m) \equiv N_{lm}^{\pm} = N^{\pm}\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}lm/M}. \tag{48}$$

(48)式中的两个常数 N^+ 和 N^- 要由(19)和(20)两式来确定。如 12.2.4 节中一样，这里将略去 N_{lm}^- 而单独由(19)式来确定 N^+。对于不太大的 l 值，$[\sigma_l(q)/g_l(q)] \approx [\sigma_0(q_0^{(0)})/g_0(q_0^{(0)})]$；注意及此，即可确证在(48)式中取

$$N^+ = \frac{1}{M} 2Bc^2\omega^{-2}(\omega^2c^{-2} - p_0^2)^{1/2}(g_{0,0}/\sigma_{0,0}) \tag{49}$$

将使(19)式两边恒等而得到满足。将(48)式和(49)式代入(22)式并令$(\omega_l^2 c^{-2} - p_l^2) = (\omega^2 c^{-2} - p_0^2)$，就得到 l 级衍射波的振幅 B_l 为

$$B_l \simeq \frac{B}{M}\sum_{m=0}^{M-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}[2\pi lm/M + (\mu^2 d/b)\cos(2\pi m/M)]}. \tag{50}$$

其中曾略去一个与 m 无关的位相因子。因为 M 先已假设是一个非常大的整数，故可用积分

① 方程(43)和确定线性原子链振动简正模的关系式相似，后者见 M. Born and Th. v. Kármán, *Phys. Z.*, **13**(1912), 297。

来代替(50)式中的级数。令 $2\pi m/M=\psi'$ 和 $\mathrm{d}\psi'=2\pi/M$，则可将(50)式写成为

$$B_l\simeq\frac{B}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[l\psi'+(\mu^2 d/b)\cos\psi']}\,\mathrm{d}\psi', \tag{51}$$

此式不依赖 M。将(51)式中的积分分成两部分：(i)从 0 积到$\frac{3}{2}\pi$ 和(ii)从$\frac{3}{2}\pi$ 积到 2π，并分别令(i)中$\psi'=\frac{1}{2}\pi-\psi$而(ii)中$\psi'=\frac{5}{2}\pi-\psi$，则得到[①]

$$\begin{aligned}B_l&\simeq\frac{B}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\frac{1}{2}l\pi-l\psi+(\mu^2 d/b)\sin\psi]}\,\mathrm{d}\psi\\&=B\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}l\pi}J_l(\mu^2 d/b).\end{aligned} \tag{52}$$

因此强度 $I_l=|B_l|^2$ 正好是 $B^2J_l{}^2(\mu^2 d/b)$。此外，借助(44)式，§ 12.1(5)式和 § 12.1(8)式可以看出，这里贝塞尔函数 J_l 的自变量与前面拉曼和纳斯表达式(见 567 页)中出现的相同。

① H. and B. S. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics* (Cambridge, Cambridge University Press, 1946), p. 547。

第 13 章　不均匀媒质产生的散射

“散射”一词所包括的内容，涉及波或粒子同物质相互作用的很广范围。但本章将只限于讨论这种情况，其中媒质对入射波的响应是线性的，并且可以用介电常数，或者等效地说，用折射率或介电极化率(dielectric susceptibility)这一类宏观参量来描写。此外还将假定这一响应与时间无关，即从宏观上看，媒质的物理性质在时间过程中不发生变化。这种情况谓之静态散射。

13.1　标量散射理论基础

13.1.1　基本积分方程的推导

考虑一单色电磁场入射到一个线性的、各向同性的非磁性媒质上，场的时间依赖部分设为 $\exp(-i\omega t)$(在随后的分析里就不再写明)，而媒质占据一个有限的体积 V，其周界为一闭合面 S(见图 13.1)。假定 V 内不存在场源，则复电场的空间依赖部分将满足下列方程(将波动方程 §1.2(5)应用到单色波场即可得之)：

$$\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)+k^2\varepsilon(\mathbf{r},\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)+\operatorname{grad}[\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)\cdot\operatorname{grad}\ln\varepsilon(\mathbf{r},\omega)]=0, \tag{1}$$

式中

$$k=\frac{\omega}{c}. \tag{2}$$

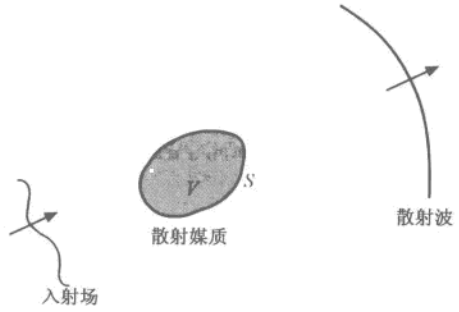


图 13.1　散射有关符号图示，散射媒质占据体积 V，其周界为闭合面 S

注意(1)式左边最后一项使电场 $\mathbf{E}$ 的各笛卡儿分量之间产生耦合。因此，如据此方程来处理散射，计算将相当复杂。如果假设介电“常数”$\varepsilon(\mathbf{r})$随位置 $\mathbf{r}$ 改变甚慢，以致在波长 $\lambda=2\pi/k=2\pi c/\omega$ 量级的一段距离上它实际是常数，则方程可行简化。在这种情况下，(1)式左边最后一项与其前项相比可予略去，由而得到下列方程：

$$\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)+k^2n^2(\mathbf{r},\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)=0, \tag{3}$$

式中应用了麦克斯韦公式 $\varepsilon(\mathbf{r},\omega)=n^2(\mathbf{r},\omega)$，$n(\mathbf{r},\omega)$代表媒质的折射率。注意(3)不同于(1)，其中 $\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)$的各笛卡儿分量不再发生耦合。因此(3)的内涵比较容易分析。事实上，单从

$\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)$的某一分量来研究(3)的解的行为,即可窥见散射场一般行为的全貌(见 13.1 节 ~ 13.5 节)。现以 $U(\mathbf{r},\omega)$代表该分量,就得到下列标量方程,它将作为我们分析散射场的出发点:

$$\nabla^2 U(\mathbf{r},\omega)+k^2 n^2(\mathbf{r},\omega)U(\mathbf{r},\omega)=0. \tag{4}$$

后面,在 13.6 节中,我们将走出标量近似,在全电磁理论的框架内来讨论散射。

为便于处理,把(4)改写成如下形式:

$$\nabla^2 U(\mathbf{r},\omega)+k^2 U(\mathbf{r},\omega)=-4\pi F(\mathbf{r},\omega)U(\mathbf{r},\omega), \tag{5}$$

式中

$$F(\mathbf{r},\omega)=\frac{1}{4\pi}k^2\left[n^2(\mathbf{r},\omega)-1\right]. \tag{6}$$

函数 $F(\mathbf{r},\omega)$通常叫做媒质的**散射势**,系仿效量子势散射理论中用词。后者所服从的方程,即非相对论粒子定态薛定锷方程,与(5)在数学形式上等同①。

现将 $U(\mathbf{r},\omega)$表成为入射场 $U^{(i)}(\mathbf{r},\omega)$和散射场 $U^{(s)}(\mathbf{r},\omega)$之和[$U^{(s)}(\mathbf{r},\omega)$可以认为由(7)式定义]:

$$U(\mathbf{r},\omega)=U^{(i)}(\mathbf{r},\omega)+U^{(s)}(\mathbf{r},\omega). \tag{7}$$

入射场通常是一平面波。这样一个场在整个空间都满足亥姆霍兹方程

$$(\nabla^2+k^2)U^{(i)}(\mathbf{r},\omega)=0. \tag{8}$$

将(7)代入(5)并利用(8),即可看到散射场满足方程

$$(\nabla^2+k^2)U^{(s)}(\mathbf{r},\omega)=-4\pi F(\mathbf{r},\omega)U(\mathbf{r},\omega). \tag{9}$$

这个微分方程的一些结果最好通过将它转化成积分方程来研究,转化方法可如下:

设 $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$是亥姆霍兹算符的一个格林函数,即下列方程的一个解:

$$(\nabla^2+k^2)G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\omega)=-4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{10}$$

式中 $\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$是三维狄拉克函数。以 $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\omega)$乘(9),以 $U^{(s)}(\mathbf{r},\omega)$乘(10),再把所得到的两个方程相减,结果为

$$\begin{aligned}&U^{(s)}(\mathbf{r},\omega)\nabla^2 G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\omega)-G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\omega)\nabla^2 U^{(s)}(\mathbf{r},\omega)\\&\quad=4\pi F(\mathbf{r},\omega)U(\mathbf{r},\omega)G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\omega)-4\pi U^{(s)}(\mathbf{r},\omega)\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}').\end{aligned} \tag{11}$$

现在把 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r}'$交换一下,并假设格林函数是对称的,即 $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\omega)=G(\mathbf{r}'-\mathbf{r},\omega)$,然后以散射体区域中的原点 O 为中心,以 R 为半径作一大球 S_R,体积为 V_R,把散射体包在其中,再对 $\mathbf{r},\mathbf{r}'$交换后的(11)式两边变量 $\mathbf{r}'$遍及体积 V_R 进行积分(见图 13.2)。如果应用格林定理将左边的体积分转化为面积分,则经简单运算后即得到公式

$$\begin{aligned}U^{(s)}(\mathbf{r},\omega)=&\int_V F(\mathbf{r}',\omega)U(\mathbf{r}',\omega)G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\omega)\,\mathrm{d}^3 r'\\&-\frac{1}{4\pi}\int_{S_R}\left[U^{(s)}(\mathbf{r}',\omega)\frac{\partial G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\omega)}{\partial n'}-G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\omega)\frac{\partial U^{(s)}(\mathbf{r}',\omega)}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S_R,\end{aligned} \tag{12}$$

① 见,例如P. Roman, *Advanced Quantum Theory* (Reading, MA, Addison-Wesley, 1965). Chapt. III。

式中 $\partial/\partial n'$ 表示沿 S_R 外向法线 $\mathbf{n}'$ 的微商。(12)式右边第一个积分只是对散射体的体积 V,而非对大球的整个体积 V_R,因为由定义式(6)显然可见,散射势 F 在 V 外处处为零。

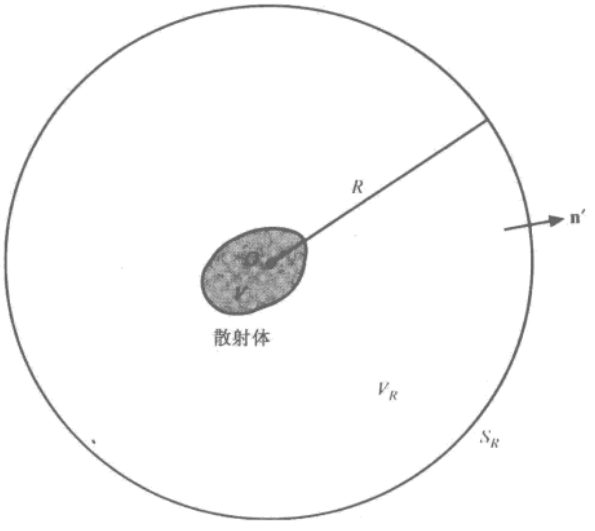


图 13.2 (12)式推导有关符号图示

截至目前,我们还没对格林函数作任何特别选择,即还未选定(10)式的任何特别解,而只是假设它是对称的。现在就此作出选择,取

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\ \omega)=\frac{e^{ik|r-r'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{13}$$

它常叫做亥姆霍兹算符的**出射自由空间格林函数**。这个选择似乎是合理的,因为在离散射体足够远的地方,散射场的行为将也如同一个出射球面波——通常所假设的一种性质。在这些情况下,当可期望在 $R\to\infty$ 极限时,(12)式右边的面积分将对总场没有贡献[①],因而可略去,(12)式这时遂化简为

$$U^{(s)}(\mathbf{r},\omega)=\int_V F(\mathbf{r}',\omega)U(\mathbf{r}',\omega)\frac{e^{ik|r-r'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3r'. \tag{14}$$

假定入射到散射体上的场是一个单色平面波,振幅为一个单位,频率为 ω,沿着单位矢量 $\mathbf{s}_0$(实量)所指定的方向传播。这时入射场与时间无关的部分由下式给出:

$$U^{(i)}(\mathbf{r},\omega)=e^{ik\mathbf{s}_0\cdot\mathbf{r}}, \tag{15}$$

并且从(7)和(14)得到

$$U(\mathbf{r},\omega)=e^{ik\mathbf{s}_0\cdot\mathbf{r}}+\int_V F(\mathbf{r}',\omega)U(\mathbf{r}',\omega)\frac{e^{ik|r-r'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3r'. \tag{16}$$

方程(16)是确定总场(入射场 + 散射场)的基本方程,叫做**势散射的积分方程**。然而,应该注意

① 关于这一论述,严格的证明见 B. B. Baker and E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle* (Oxford, Clarendon Press, 2nd edition, 1950), p. 24 – 25。

它只是散射体积 V 内各点总场 $U(\mathbf{r},\omega)$ 的积分方程。V 内各处的解一经获知，V 外各点的解即可通过将“内部”问题的解代入(16)式被积函数而得到。

积分方程(16)和微分方程(9)不同，其任何解在远离散射体处的行为都一定合乎出射场的要求，现在可用直接计算给予证明。

设 Q 是散射体积 V 内的一个代表点，P 是远离散射体积 V 的一点。此外设 $\mathbf{r}'$ 是 Q 点的位置矢量，$\mathbf{r}=r\mathbf{s}(\mathbf{s}^2=1)$ 是 P 点的位置矢量，并设 N 是 Q 至 OP 线的垂足(见图 13.3)。于是，当 r 足够大时，显然

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\approx r-\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}' \tag{17}$$

并且

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\approx\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}'}. \tag{18}$$

用近似式(18)代入(16)中的积分，可知

$$U(r\mathbf{s},\omega)\approx\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\mathbf{s}_0\cdot\mathbf{r}}+U^{(s)}(r\mathbf{s},\omega), \tag{19}$$

式中

$$U^{(s)}(r\mathbf{s},\omega)=f(\mathbf{s},\mathbf{s}_0;\omega)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}, \tag{20}$$

而

$$f(\mathbf{s},\mathbf{s}_0;\omega)=\int_V F(\mathbf{r}',\omega)U(\mathbf{r}',\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}'}\mathrm{d}^3r'. \tag{21}$$

通过更为细致的数学分析可以证明，(19)右边的表达式，加上(20)和(21)，是方向 $\mathbf{s}$ 保持固定而 $kr\to\infty$ 时总场 $U(r\mathbf{s},\omega)$ 的渐近近似。公式(20)证实，在远离散射体的地方，散射场 $U^{(s)}(r\mathbf{s},\omega)$ 的行为的确如所预期，像一个出射球面波。函数 $f(\mathbf{s},\mathbf{s}_0;\omega)$ 叫做**散射幅**，它在散射理论中起着重要作用。

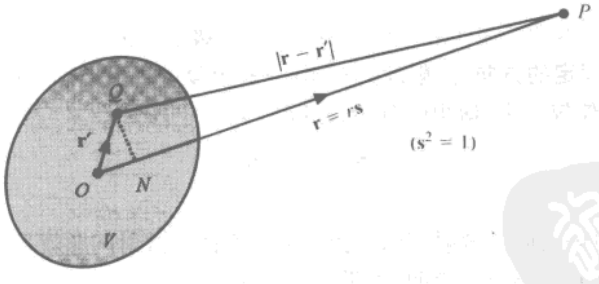


图 13.3　近似式(17)有关符号图示

13.1.2　一级玻恩近似

在大多数有实际意义的情况，势散射积分方程不能获得闭式解。因此须设法用一些近似技巧求解。最通用的一种近似方法是微扰法，其中微扰展开的各项依次用迭代法从其前项求出，但其前提是媒质对光的散射要相当弱。下面将先讨论最低级近似，即一级近似，因为它包含很多有用的结果并且能使我们对散射的种种特征获得一个大致认识。更高级的项将在 13.1.4 节作简短考虑。

从散射势表达式(6)可以清楚地看到,如果媒质的折射率同 1 相差甚微,它对光的散射将很弱。在此情况下当可假设,如把(16)中积分号内的总场 $U(=U^{(i)}+U^{(s)})$用 $U^{(i)}$ 代替,可获得总场 U 的良好近似。这时得到的就是散射积分方程的一级近似解,其表达式为(从现在起,式中不再标明各量和频率 ω 的函数关系)

$$U(\mathbf{r}) \approx U_1(\mathbf{r}) \equiv e^{ik\mathbf{s}_0\cdot\mathbf{r}} + \int_V F(\mathbf{r}')e^{ik\mathbf{s}_0\cdot\mathbf{r}'}\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3r'. \tag{22}$$

这个近似解一般称之为玻恩近似,或者更准确地说,称为**第一级玻恩近似**(或者就说玻恩一级近似)[①]。现在我们来讨论它的一些结果。

实际上测量常取在远离散射体处,即所测量的为**远场散射**。从(22)式可立即定出远场行为的准确意义。为此将(22)中的球面波项用其近似式(18)代入,结果得到(见图 13.3),当 $\mathbf{s}$ 固定而 $kr\to\infty$ 时,

$$U_1(r\mathbf{s}) \approx e^{ik(\mathbf{s}_0\cdot\mathbf{r})} + f_1(\mathbf{s},\mathbf{s}_0)\frac{e^{ikr}}{r}, \qquad (\mathbf{s}_0^2=1), \tag{23}$$

式中

$$f_1(\mathbf{s},\mathbf{s}_0) = \int F(\mathbf{r}')e^{-ik(\mathbf{s}-\mathbf{s}_0)\cdot\mathbf{r}'}\,d^3r', \tag{24}$$

(这里在形式上将积分区 V 扩大为全空间——译者注。)

散射幅 $f_1(\mathbf{s},\mathbf{s}_0)$的表达式(24)具有重要物理内涵。为了看清楚这一点,我们先引进散射势的傅里叶变换

$$\tilde{F}(\mathbf{K}) = \int F(\mathbf{r}')e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}'}\,d^3r'. \tag{25}$$

方程(24)显然意指

$$f_1(\mathbf{s},\mathbf{s}_0) = \tilde{F}[k(\mathbf{s}-\mathbf{s}_0)], \tag{26}$$

这表达了一个极其基本的结果。它意味着,**在玻恩一级近似的准确度范围,在散射体远场区域,在单位矢量 $\mathbf{s}$ 所规定的方向,散射波的振幅(一般为复量)(更准确地说,散射幅 f)完全决定于散射势的某一个(仅仅一个)傅里叶分量,即以矢量**[②]

$$\mathbf{K} = k(\mathbf{s}-\mathbf{s}_0). \tag{27}$$

为标志的那一分量。

(27)的这个简单公式同逆散射问题直接有关。所谓逆散射问题就是从物体散射光的测量获得该物体的有关信息。该公式表明,如果令一平面波沿方向 $\mathbf{s}_0$ 入射到散射体上,并在方向 $\mathbf{s}$ 上来测量散射场,则从这一测量能立即确定散势的一个傅里叶分量:这就是以(27)式所给定的空间频率矢量($\mathbf{K}$ 空间矢量)为标志的那一分量。现在来仔细考察这种实验能够测定的全部散势射傅里叶分量的总体状况。这项研究用下列几何作图方法来做最为出色。

---

① 它是玻恩量子力学碰撞论中微扰展开的第一项,见 M. Born, *Z. Physik*, **38**(1926), 803。

② 公式(27)是量子弹性散射理论中的所谓动量传递方程 $\Delta\mathbf{p}=\mathbf{p}-\mathbf{p}_0$($\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{p}_0$ 代表一个粒子在碰撞前和碰撞后的动量)的经典类似式。利用爱因斯坦-德布罗意关系 $\mathbf{p}_0=\hbar k\mathbf{s}_0$, $\mathbf{p}=\hbar k\mathbf{s}$(式中 $\hbar$ 是普朗克常数除以 2π)即可从形式上由(27)式导出动量传递方程。

首先假定散射体光照方向 $\mathbf{s}_0$ 固定，而散射场复振幅的测量分别沿远区所有可能的方向 $\mathbf{s}$。按照(26)和(25)，从这种测量($\mathbf{s}_0$ 固定而 $\mathbf{s}$ 改变)能够得到散射势 $F(\mathbf{r})$的所有这些傅里叶分量 $\tilde{F}(\mathbf{K})$，其标志矢量 $\mathbf{K}[=k(\mathbf{s}-\mathbf{s}_0)]$的端点轨迹是一个球(用 σ_1 代表)，球的半径 $k=\omega/c=2\pi/\lambda$，球心在点 $-k\mathbf{s}_0$ 处，λ 是同频率 ω 相关的波长。我们将称该球为**埃瓦尔德**(Ewald)**反射球**[见图 13.4(a)]，系效仿晶体 X 射线衍射理论中采用的同类命名。不过晶体衍射的势是位置的周期函数(这将在 13.1.3 节中作扼要讨论)。

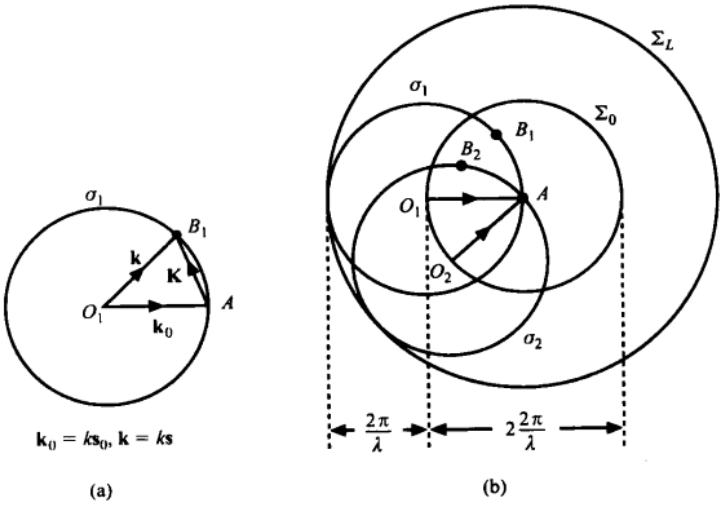


图 13.4　(a)入射波矢 $\mathbf{k}_0=k\mathbf{s}_0=\overrightarrow{O_1A}$ 所属的埃瓦尔德反射球 σ_1。它是矢量 $\mathbf{K}=\mathbf{k}-\mathbf{k}_0=\overrightarrow{AB_1}$ 端点的轨迹，其中 $\mathbf{k}=k\mathbf{s}$ 代表所有可能散射方向 $\mathbf{s}$ 上场的波矢。(b)埃瓦尔德极限球 Σ_L，它是全部可能入射场波矢 $\overrightarrow{O_1A}$，$\overrightarrow{O_2A}$，…所属反射球 σ_1，σ_2，…的包络面。Σ_0 代表全部可能入射方向所属反射球球心 O_1，O_2，…的生成球

然后，让我们假定散射体光照方向改变为另一个 $\mathbf{s}_0$ 方向，而散射场的测量仍旧沿远区所有可能的方向 $\mathbf{s}$。从这一轮测量就得到散射势的另一些傅里叶分量，其标志矢量 $\mathbf{K}$ 的端点则位于另一个埃瓦尔德反射球 σ_2 上[见图 13.4(b)]。如果测量这样一轮一轮做下去，对所有可能入射方向 $\mathbf{s}_0$ 一一进行，就能够确定散射势的全部这些傅里叶分量，它们的标志矢量 $\mathbf{K}$ 的端点所占的区域，就是全部可能入射方向所属的埃瓦尔德反射球覆盖的区域。这个区域是一个大球 Σ_L 的内区，其半径为 $2k=4\pi/\lambda$，可称为**埃瓦尔德极限球**(Ewald limiting sphere)[①] [见图 13.4(b)]。

从前面的讨论可得到如下结论：如果对所有可能入射方向和所有可能散射方向的各种组合测量了远区散射场，就能够测定出散射势的所有这些傅里叶分量 $\tilde{F}(\mathbf{K})$，其标志矢量 $\mathbf{K}$ 的大小

$$|\mathbf{K}|\leqslant 2k=4\pi/\lambda. \tag{28}$$

这样就能合成所有这些傅里叶分量来获得下列近似：

① 埃瓦尔德反射球和埃瓦尔德极限球，是 P. P. Ewald 在关于 X 射线衍射测量晶体构造测定的经典性研究中随同倒晶格概念而引进的[P. P. Ewald, *Phys. Z.*, **14**(1913), 465; J. D. Bernal, *Proc. Roy. Soc.* A, **113**(1927), 117]。

$$F_{LP}(\mathbf{r})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{|\mathbf{K}|\leqslant 2k}\tilde{F}(\mathbf{K})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}\,\mathrm{d}^3K, \tag{29}$$

这一近似叫做散射势**低通滤波近似**(low-pass filtered approximation)。散射势本身则包含所有傅里叶分量,即$|\mathbf{K}|=(0,\infty)$,并由(25)的反演给出,即

$$F(\mathbf{r})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\tilde{F}(\mathbf{K})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}\,\mathrm{d}^3K, \tag{30}$$

式中积分遍及整个 $\mathbf{K}$ 空间。因为前面的分析是根据标量近似,内中含有一个假设,即散射势在波长量级的一段距离上没有什么明显改变[见(1)~(3)]。在这种情况下,散射势的低通滤波反演可以预期会是真散射势的一个良好近似。

不等式(28)用散射势的空间周期 $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ 表示时,其意义就变得更清楚一些,$\Delta x,\Delta y,\Delta z$ 则由下列公式来定义:

$$\Delta x=\frac{2\pi}{|K_x|},\qquad \Delta y=\frac{2\pi}{|K_y|},\qquad \Delta z=\frac{2\pi}{|K_z|}, \tag{31}$$

式中 K_x,K_y,K_z 是矢量 $\mathbf{K}$ 的笛卡儿分量。用这些空间周期来表示时,不等式(28)即可表成为

$$\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}+\frac{1}{(\Delta z)^2}\leqslant\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2. \tag{32}$$

为了对这一不等式的含义获得一些启示,让我们考虑它的一维式样,令 $\Delta y\to\infty,\Delta z\to\infty$。这时(32)化为

$$\Delta x\geqslant\lambda/2. \tag{33}$$

这一不等式表明,远区散射场测量所能提供的散射体结构信息细节充其量可小到二分之一波长量级。对三维情况而言,不等式(32)的解释没有如此简单,但大体说来,可以预期(29)式所给出的低通滤波近似包含的物体结构细节信息,其分辨率极限为波长量级。

如何获得细节小于大约一个波长的有关信息,或者更准确地说,如何去获得 $\mathbf{K}$ 矢量端点落在埃瓦尔德极限球之外($|\mathbf{K}|>4\pi/\lambda$)的那些高空间频率分量的有关信息,这一问题曾有许多著者在超分辨率和外推法[①] 一般理论领域内作过研究。从低空间频率数据获取这种信息的可能性是多维形式的所谓 Plancherel-Polya 定理[②] 的一个结果。在其一维形式中,此定理断言,一个具有限支点(finite support)的函数 $f(x)$(即一个函数,它在一有限 x 范围外恒等于零),其傅里叶变换 $\tilde{f}(K)$是一个复变量 K 的全解析函数在实 K 轴上的边值[③]。因此,从原则上讲,$\tilde{F}(\mathbf{K})$作为这一定理三维变式的结果,能够在解析上延续到 $\mathbf{K}$ 空间埃瓦尔德极限球之外。然而,实际上由于噪声和各种不稳定因素的影响,能够外推的范围极为有限。

---

① 见,例如 M. Bertero 和 C. de Mol 的评述性文章,载于 *Progress in Optics*, Vol. XXXVI, ed. E. Wolf(Amsterdam, Elsevier, 1996), p. 129 *et seq*。T. Habashy and E. Wolf, *J. Mod. Opt.*, **41**(1994)1679 曾讨论过散射势的重建问题,其中特别谈到埃瓦尔德极限球区外推法。

② 见,例如 B. A. Fuks, *Theory of Analytic Functions of Several Complex Variables* (Providence, RI, American Mathematical Society, 1963), p. 353 *et seq*。

③ 这一定理从定积分定义的解析函数的一个著名结果可立即得到[见 E. T. Copson, *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable* (London, Oxford University Press, 1955), Sec. 5.5]。

13.1.3　周期势产生的散射

现在我们讨论周期势产生的散射，以它作为实例来说明前面的分析。

考虑一个弱散射物，外形为一长方体，体积为 V，占据一空间区域

$$-\frac{1}{2}A \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}A, \qquad -\frac{1}{2}B \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}B, \qquad -\frac{1}{2}C \leqslant z \leqslant \frac{1}{2}C. \tag{34}$$

假设此物的散射势 $F(x, y, z)$在三个坐标轴方向上是周期性的，其周期为 $\Delta x = a$，$\Delta y = b$，$\Delta z = c$。因此我们可以把散射势 $F(x, y, z)$展成一个三重傅里叶级数

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z) &= \sum_{h_1}\sum_{h_2}\sum_{h_3} g(h_1, h_2, h_3)\exp\left[2\pi \mathrm{i}\left(\frac{h_1 x}{a}+\frac{h_2 y}{b}+\frac{h_3 z}{c}\right)\right] && \text{当 } (x, y, z) \in V \\ &= 0 && \text{当 } (x, y, z) \notin V \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

式中 h_1, h_2, h_3 取所有可能的整数值（$-\infty < h_j < \infty, j = 1, 2, 3$），而 $g(h_1, h_2, h_3)$是常数。

散射势(35)的傅里叶变换[由(25)式定义]这时由下式给出：

$$\tilde{F}(K_x, K_y, K_z) = ABC\pi^3 \sum_{h_1}\sum_{h_2}\sum_{h_3} g(h_1, h_2, h_3) S(h_1, h_2, h_3; K_x, K_y, K_z), \tag{36}$$

其中

$$S(h_1, h_2, h_3; K_x, K_y, K_z) = \operatorname{sinc}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2h_1}{a}-\frac{K_x}{\pi}\right)A\right]\operatorname{sinc}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2h_2}{b}-\frac{K_y}{\pi}\right)B\right]\operatorname{sinc}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2h_3}{c}-\frac{K_z}{\pi}\right)C\right], \tag{37}$$

式中

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}. \tag{38}$$

函数 sinc(x)的曲线绘于图 13.5。可以看到，开始它的值从 $x = 0$ 处的 1 下降到 $x = \pm 1/2$ 处的零，然后振荡起来，而振幅迅速减小。

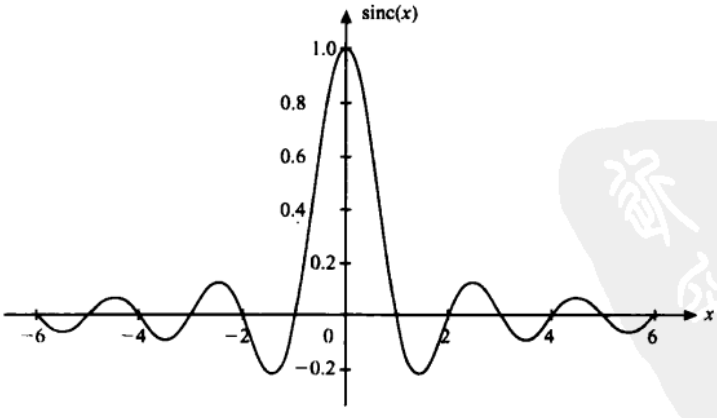


图 13.5　函数 $\operatorname{sinc}(x) = \sin(\pi x)/\pi x$

现在假定散射体积的几个线度都比周期大得多,即

$$A \gg a, \quad B \gg b, \quad C \gg c. \tag{39}$$

在这种情况下,比值 A/a, B/b, C/c 都比 1 大得多,因此从 sinc(x)函数的性质来看,方程(37)所定义的函数 S,以及散射势的傅里叶变换(36)都只有在

$$K_x \approx \frac{2\pi h_1}{a}, \qquad K_y \approx \frac{2\pi h_2}{b}, \qquad K_z \approx \frac{2\pi h_3}{c}. \tag{40}$$

时才具有不可忽略的值。而关系式(27)(与量子力学动量传递方程对应的类似式)这时意味着,远区散射场也只有在一些特定的 $\mathbf{s} \equiv (s_x, s_y, s_z)$方向上强度才显著不为零,这些方向满足条件

$$s_x - s_{0x} = h_1 \frac{\lambda}{a}, \qquad s_y - s_{0y} = h_2 \frac{\lambda}{b}, \qquad s_z - s_{0z} = h_3 \frac{\lambda}{c}, \tag{41}$$

式中(s_{0x}, s_{0y}, s_{0z})是入射平面波传播方向上单位矢量 $\mathbf{s}_0$ 的三个分量。

公式(41)是一维和二维衍射光栅(有时分别叫做线光栅和交叉光栅)相应公式的推广。然而这里有一个根本差别。虽然对线光栅和交叉光栅而言,(41)形式的方程(线光栅有一个这样的方程,交叉光栅有两个)对于衍射方向 $\mathbf{s}$ 总是有解的,但对三维光栅(对称空间光栅)来说,情况并非如此。方程(41)是一个三方程组,而 $\mathbf{s}$ 只有两个分量(譬如说 s_x 和 s_y)是独立的,因为这三个分量之间要受 $s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1$ 这一关系约束。因此,(41)的这三个方程只有某些特定的波长(λ)值才能满足,如果方程右边其他参量均已给定的话。这意味着,当入射光包含一定波长范围时,虽然线光栅和交叉光栅这时即产生一连续光谱,但空间光栅对入射波长却是有选择性的:每个衍射强度极大各有一个三重整数 h_1, h_2, h_3 标志码,各对应着一特定波长,称为特征波长(characteristic wavelength)。

前面讨论的是远区散射场强度极大的位置。极大强度的实际值正比于散射场的模平方,按照(23)和(26),即正比于 $|\tilde{F}[k(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0)]|^2$。因此,如果知道了散射势的傅里叶展开系数 $g(h_1, h_2, h_3)$,就能从(36),(27)和(41)三式计算出各强度极大值。

由于周期势产生的散射同光栅产生的衍射密切类似,在这种情况下人们提到它时常称之为衍射而不说散射。

刚刚得到的这些结果同 X 射线衍射实验固体结构测定技术有密切的关系。大多数固体由晶格中周期性排列的原子组成,周期单元叫**晶胞**(unit cell),相邻原子间距的典型值是 1 埃(Å)量级。这是 X 射线波长的数量级,X 射线波长典型值在大约 0.1 埃到 10 埃之间。1912 年,冯·劳尔在物质的原子结构和 X 射线的波动性质广为人们接受之前,就预言固体会如同空间光栅对光束产生衍射那样,对 X 射线束产生衍射。这个预言不久即为实验证实[①],这些早期研究为物质结构研究开创了一种极其成功和重要的方法[②]。

---

① W. Friedrich, P. Knipping and M. Laue, *Sber. bayer. Akad. Wiss.* (1912), 303 *et seq*. (理论部分出自 M·劳尔,实验部分归于 Friedrich 和 Knipping)。

② 关于这一课题的发展历史报告,见 P. P. Ewald, ed., *Fifty Years of X-ray Diffraction* (Utrecht, International Union of Crystallography, 1962)和 G. E. Bacon, *X-ray and Neutron Diffraction* (Oxford, Pergamon Press, 1966)。Bacon 的书中还重印有几篇有关这一课题的经典性论文。对 X 射线衍射理论更为完全的探讨,见 R. W. James, *Optical Principles of the Diffraction of X-rays*, Vol. 2 in *The Crystalline State*, eds W. H. Bragg and W. L. Bragg (London, G. Bell, 1948)或 A. Guinier and D. L. Dexter, *X-rays Studies of Materials* (New York, Interscience Publishers, 1963)。

为了说明 X 射线衍射理论的基本定律如何可得自势散射理论，现仅考虑所谓**正交晶体**这一最简单情况。该晶体的晶胞是一长方体。现取 x,y,z 轴沿着其三个边的方向，并用 a,b,c 代表它们的长度。此外以 A,B 和 C 代表晶体三边的长度，并假设 $A>>a, B>>b, C>>c$，显然，这完全类似于我们讨论周期势光散射时遇到的状况。惟一的差别是，在本例情况下，辐射(X 射线)波长和晶格参量 a,b,c 量级相同，而在前面的情况下(采用的是光而不是 X 射线)，波长一般比势的周期要大得多。虽然我们所讨论的只是正交晶体 X 射线衍射，但类似的方式也可用来处理所谓三斜晶体，只要把直角坐标系换成斜坐标系即可。

在晶体 X 射线衍理论领域，(41)式通称**冯·劳尔方程**，并且是该理论的基本方程。从劳尔方程又可立刻导出另一重要理论定律，方法如下：先取(41)式三个方程两边的平方，再将三者相加并利用 $s_x^2+s_y^2+s_z^2=1$ 和 $s_{0_x}^2+s_{0_y}^2+s_{0_z}^2=1$ 这一事实，就得下列方程

$$2\sin(\theta/2)=\lambda/D, \tag{42}$$

式中

$$D=\left[\left(\frac{h_1}{a}\right)^2+\left(\frac{h_2}{b}\right)^2+\left(\frac{h_3}{c}\right)^2\right]^{-1/2}, \tag{43}$$

而 θ 是散射(衍射)角，即散射方向($\mathbf{s}$)和入射方向($\mathbf{s}_0$)的夹角，所以

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}_0=\cos\theta. \tag{44}$$

如果整数 h_1,h_2,h_3 有一个整数公因子，譬如说 n，并且如果令

$$h_1=nh_1^\star,\quad h_2=nh_2^\star,\quad h_3=nh_3^\star \tag{45}$$

并且

$$D=\frac{d}{n},\qquad d=\left[\left(\frac{h_1^\star}{a}\right)^2+\left(\frac{h_2^\star}{b}\right)^2+\left(\frac{h_3^\star}{c}\right)^2\right]^{-1/2}, \tag{46}$$

则(42)式变成

$$2d\sin\psi=n\lambda, \tag{47}$$

式中

$$\psi=\theta/2. \tag{48}$$

公式(47)是晶体 X 射线衍射理论的另一个基本结果，称为**布拉格定律**。它有一个简单的几何意义，现在来扼要讨论一下。

让我们考虑一个平面，它的方程是

$$\frac{h_1^\star}{a}x+\frac{h_2^\star}{b}y+\frac{h_3^\star}{c}z=n, \tag{49}$$

式中 n 是一整数。如果晶体是无边无际的，这样的一个平面将叫做**格面**，现以 π_n 代表，它包含有无穷多个格点(各晶胞的角)。$h_1^\star,h_2^\star$ 和 $h_3^\star$ 称为格面的**米勒指数**。

在晶体 X 射线衍射理论中，布拉格定律表达了格面序列反射线相长干涉产生强度极大的条件。为了证明这一事实，现考虑一束平行 X 射线沿 $\mathbf{s}_0$ 方向入射，并沿 $\mathbf{s}$ 方向反射。设 O_1 是格面 π_1 上入射射线被反射的一点，而 O_0 是格面 π_0 的相应点(见图 13.6)。O_1 和 O_0 两点反射射线之间的程差

$$\Delta = AO_1 + O_1B, \tag{50}$$

式中 A 和 B 是从 O_0 分别引向 O_1 处入射射线和反射射线的垂足。当

$$k\Delta = 2n\pi, \quad n = 1,2,3,\cdots \tag{51}$$

时，O_1 和 O_0 两点反射射线将产生相长干涉。同前，设 θ 是单位矢量 $\mathbf{s}_0$ 和 $\mathbf{s}$ 二者方向的夹角，并设ψ是一入射线与某格面所成之角。从简单的几何论证可以证明$\psi = \theta/2$，由此从(50)和图 13.6可知

$$\Delta = 2d\sin\psi, \tag{52}$$

式中 d 是相邻两个格面之间的距离。令(51)和(52)两式相等，可知相长干涉的条件是

$$2d\sin\psi = n\lambda, \tag{53}$$

它正是布拉格定律(47)。

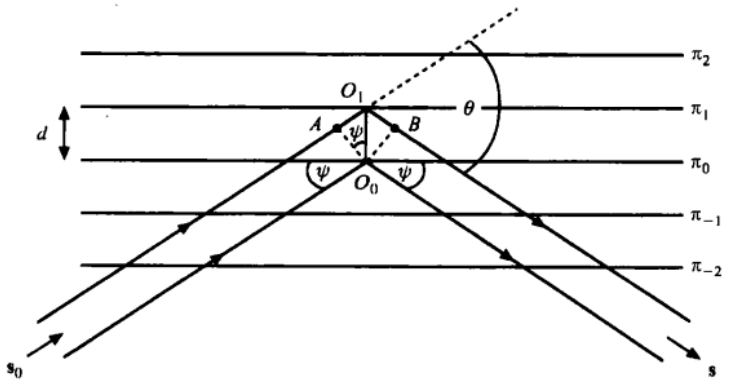


图 13.6 布拉格定律作为格面反射射线相长干涉条件的图示说明

人们或许要问，为什么玻恩一级近似会如此成功地描述晶体 X 射线散射产生的强度分布，因为在这一情况下散射场在某些方向上很强，违反了该近似使用准则的弱散射假设。对此的解释是，由子晶体中某些平面(格面)间距相等，所以在观测场的形成中起主要作用的是这些平面反射的 X 射线之间的干涉，而非个体原子产生的散射。

冯·劳尔由于发现晶体 X 射线衍射而荣获 1914 年诺贝尔物理学奖。1915 年的诺贝尔物理学奖被 W·H·布拉格和他的儿子 W·L·布拉格分享，奖励他们在使用该项技术进行晶体结构分析方面所做的研究。

上面我们简要地讨论了晶体 X 射线衍射问题，其中所讲的一些概念在全息学中，特别是在所谓体全息图方面具有重要性。这种全息图由折射率或吸收系数的三维周期变化层组成。布拉格定律在这种全息图的理论中起着重要作用。此外，它在声光学中也具有重要性。

13.1.4 多重散射

现在回到势散射的基本方程，并设入射波是一平面波[(16)式，其中的频率 ω 不再写出]，

$$U(\mathbf{r}) = U^{(i)}(\mathbf{r}) + \int_V U(\mathbf{r}')F(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\mathrm{d}^3r', \tag{54}$$

式中

$$U^{(i)}(\mathbf{r})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\mathbf{s}_0\cdot\mathbf{r}}, \tag{55}$$

而

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{56}$$

正如先前所说，如果散射很弱（$|U^{(s)}|<<|U^{(i)}|$），则在(54)右边被积函数中用 $U^{(i)}$ 代替 U 时，可望获得总场的良好近似，这给出的就是玻恩一级近似

$$U_1(\mathbf{r})=U^{(i)}(\mathbf{r})+\int_V U^{(i)}(\mathbf{r}')F(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\mathrm{d}^3r', \tag{57}$$

现在如果在积分方程(54)右边被积函数中改用 U_1 代替 U，则可预料会得到进一步近似。这就导致所谓玻恩二级近似 $U\approx U_2$，

$$U_2(\mathbf{r})=U^{(i)}(\mathbf{r})+\int_V U_1(\mathbf{r}')F(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\mathrm{d}^3r'. \tag{58}$$

这一程序可继续进行下去，再用 U_2 代替(54)中积分内的 U，如此等等，这样就得到一次高于一次的近似序列

$$U_1(\mathbf{r}),\ U_2(\mathbf{r}),\ U_3(\mathbf{r}),\ \cdots,\ U_n(\mathbf{r}),\ \cdots, \tag{59}$$

式中每一项都由前一项经迭代关系

$$U_{n+1}(\mathbf{r})=U^{(i)}(\mathbf{r})+\int_V U_n(\mathbf{r}')F(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\mathrm{d}^3r'. \tag{60}$$

而得到。

为了对序列(60)的物理意义获得一些认识，现将 U_2 表达式改写成更显明的形式。如果把(57)的 U_1 代入(58)中，并改变一下符号，结果得到

$$U_2(\mathbf{r})=U^{(i)}(\mathbf{r})+\int_V \mathrm{d}^3r'F(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\left[U^{(i)}(\mathbf{r}')+\int_V U^{(i)}(\mathbf{r}'')F(\mathbf{r}'')G(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')\,\mathrm{d}^3r''\right]$$

这意味着

$$\begin{aligned}U_2(\mathbf{r})=\ & U^{(i)}(\mathbf{r})+\int_V U^{(i)}(\mathbf{r}')F(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\mathrm{d}^3r'\\ &+\int_V\int_V U^{(i)}(\mathbf{r}')F(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')F(\mathbf{r}'')G(\mathbf{r}-\mathbf{r}'')\,\mathrm{d}^3r'\mathrm{d}^3r''.\end{aligned} \tag{61}$$

我们看到，右边第二项对散射体积 V 的积分仅进行一次，而第三项所包含的积分计算对该体积要独立进行两次。如果把这一程序继续做下去，显然将会发现 n 次近似 U_n 所含各项积分对散射体积要分别进行一次，两次，……，n 次。因为这些公式在 n 增大时变得越来越长，所以常用符号形式来表示。具体说，U_2 的方程(61)可写成为

$$U_2=U^{(i)}+U^{(i)}FG+U^{(i)}FGFG, \tag{62}$$

而一般项 U_n 的表达式显然可写成

$$U_n = U^{(i)} + U^{(i)}FG + U^{(i)}FGFG + \cdots + U^{(i)}\underbrace{FGFG\cdots FG}_{\text{共 } n \text{ 个 } FG \text{ 因子}}. \tag{63}$$

逐项的物理意义如下:出现在(57)式积分中和(61)右边第一个积分中的乘积 $U^{(i)}(\mathbf{r}')F(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3r'$ 可看做代表散射体 $\mathbf{r}'$ 点体元 d^3r' 对入射场的响应。它的作用如同一个实在光源对另一点 $\mathbf{r}$(可在 V 内,亦可在 V 外)的场产生一份贡献 $U^{(i)}(\mathbf{r}')F(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathrm{d}^3r'$。显然,这里格林函数 $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ 的作用就是一个**传播函数**(propagator),把该份项献从点 $\mathbf{r}'$ 传递到点 $\mathbf{r}$。这样,对体积 V 的积分就代表散射体所有体元一共产生的总贡献。这一过程称为**单散射**(single scattering),并在图 13.7(a)中用图解进行说明。

除单散射外,还会有其他散射过程对 $\mathbf{r}$ 点总场产生贡献。例如,点 $\mathbf{r}'$ 处的散射到达另一点 $\mathbf{r}''$ 的贡献本身还将被散射,因此点 $\mathbf{r}''$ 处体元 d^3r'' 对每个 $\mathbf{r}$ 点的场将产生另一贡献 $U^{(i)}(\mathbf{r})F(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')\mathrm{d}^3r'F(\mathbf{r}'')G(\mathbf{r}-\mathbf{r}'')\mathrm{d}^3r''$。(61)式右边最后一项代表这一过程在 $\mathbf{r}$ 点产生的场,它表达了**二重散射**(double scattering)效应,其图解说明见图 13.7(b)。

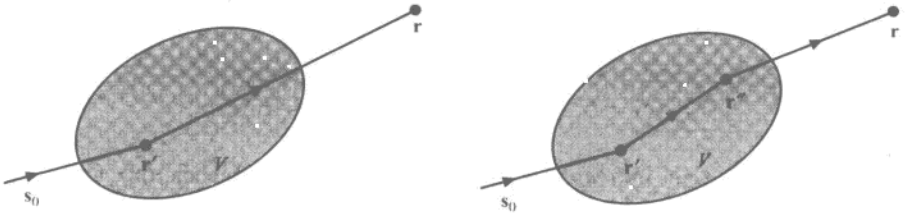


图 13.7 图解说明:(a)单散射;(b)二重散射

显然,(63)式中逐项全都可按类似方式一一说明。其中每一项比其前项各多考虑一次基本散射的贡献。一般项,$U^{(i)}FGFG\cdots FG$,含 FG 的 n 次自乘,称为代表 n 次**多重散射**(multiple scattering)效应。

在适合条件下,逐级近似序列 $U_1, U_2\cdots, U_n, \cdots$ 可望收敛于散射积分方程的精确解,但保证实现这种收敛的条件难以确立。然而,收敛问题实际并无关重要,因为很少有可能计算到一级或二级近似以上。原因很明显,只要一看序列(63)中前后各项所含积分的区域维数越来越高便可知晓。具体而言,如从(57)和(61)两式所见,一级玻恩近似需要计算一个三维积分,而二级近似即涉及计算一个六维积分。

本节扼要讨论的这类微扰展开,在积分方程一般理论中曾有过研究。在该理论中,(63)形式的展开在 $n\to\infty$ 时称为**刘维尔-诺伊曼(Liouville-Neumann)级数**。

13.2 散射势重建衍射层析术原理

在 4.11 节中我们介绍了计算机层析术。该项技术带来了一种新的光学成像方法,它让辐射沿不同方向通过一个三维物体并测量其强度变化,从而测定出该物体的三维结构(常为其吸收系数分布)。这种方法是建立在几何光学的基础上,它仅适合所用辐射(通常为 X 射线)波长远小于物体物理参量变更尺度的图像重建。然而,X 射线不适用于探测某些软组织,因为这种射线能够穿透这些组织而没有任何显著改变。计算机层析术检查未必可靠的一个重要例子

是探测妇女胸部的某些癌瘤。在这种情况下，常常采用超声波而不用 X 射线。然而，超声波长典型值为毫米量级(频率为兆赫量级)，同待测目标特征结构的尺寸大小差不多，因此所达到的分辨率一般较差。要提高分辨率，必须考虑衍射效应。为此可采用一种不同的，称为**衍射层析术**(diffraction tomography)的重建方法。超声波衍射层析术能测定的不仅是物体逐点吸收系数的分布，而且还能测定折射率的分布。然而，衍射层析术在计算上比计算机层析术要求严苛得多。主要由于这一原因，它至今还没怎样被广为采用。

我们对衍射层析术的讨论将主要限于推导有关该法重建图像的一个重要定理。

13.2.1　散射场的角谱表示

衍射层析术三维物体图像重建的有关基本定理，从散射场的所谓角谱表示来推导最为容易，因此现在首先来讨论这一表示法，它的一种比较局限形式前面在 11.4.2 节讨论某些二维衍射问题时已经遇到过。

我们的全部分析将以散射场的玻恩一级近似为基础。该近似式已由 § 13.1(22)右边第二项给出，即

$$U_1^{(s)}(\mathbf{r})=\int_V F(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\mathbf{s}_0\cdot\mathbf{r}'}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{d}^3r'. \tag{1}$$

这一积分中被积函数里的球面波可以表成下列形式，它基本出自 H. Weyl[①]：

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=\frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{s_z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k[s_x(x-x')+s_y(y-y')+s_z|z-z'|]}\,\mathrm{d}s_x\,\mathrm{d}s_y, \tag{2}$$

式中 $\mathbf{r}\equiv(x,y,z)$，$\mathbf{r}'\equiv(x',y',z')$，而

$$s_z=+\sqrt{1-s_x^2-s_y^2}\qquad \text{当}\quad s_x^2+s_y^2\leqslant 1, \tag{3a}$$

$$=+\mathrm{i}\sqrt{s_x^2+s_y^2-1}\qquad \text{当}\quad s_x^2+s_y^2>1. \tag{3b}$$

显然，s_x，s_y，s_z 是一个单位矢量的三个分量，但这个矢量只有当 $s_x^2+s_y^2\leqslant 1$ 时才是实矢量。当 $s_x^2+s_y^2>1$ 时，它的 z 分量是虚数。

现在假定散射体位于 $0\leqslant z\leqslant Z$ 范围内，并设 $\mathcal{R}^-$ 和 $\mathcal{R}^+$ 代表散射体两边 $z<0$ 和 $z>Z$ 的半空间(见图 13.8)。如果将(2)代入(1)，经过一步步代数运算，包括交换积分次序，则可得到 $\mathcal{R}^+$ 和 $\mathcal{R}^-$ 半空间中散射场 $U_1^{(s)}(\mathbf{r})$ 的表达式如下：

$$U_1^{(s)}(\mathbf{r})=\iint_{-\infty}^{\infty}a^{(\pm)}(s_x,\,s_y;\,s_{0x},\,s_{0y})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k[s_xx+s_yy\pm s_zz]}\,\mathrm{d}s_x\,\mathrm{d}s_y. \tag{4}$$

式中上面的正号在半空间 $\mathcal{R}^+$ 内有效，而下面的负号在半空间 $\mathcal{R}^-$ 内有效，并且

---

① H. Weyl, *Ann. d. Physik*, **60**(1919), 481。球面波的角谱表示可以表成几种不同的形式[见，例如 § 11.7(27)]。关于(2)这一形式的 Weyl 表示，其推导见 L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge, Cambridge University Press, 1995), §3.2.4。

$$a^{(\pm)}(s_x, s_y; s_{0x}, s_{0y}) = \frac{ik}{2\pi s_z}\int F(\mathbf{r}')e^{-ik[(s_x-s_{0x})x'+(s_y-s_{0y})y'+(\pm s_z-s_{0z})z']}\,d^3r'. \tag{5}$$

可以看出,公式(4)把$\mathcal{R}^+$和$\mathcal{R}^-$两个半空间各处的散射场$U_1^{(s)}(\mathbf{r})$表成为两种平面波的线性叠加:一种平面波的s_z由(3a)给出,另一种的s_z由(3b)给出。前者是普通均匀波,从散射体向外沿方向$(s_x, s_y, \pm s_z)$传播;后者是**隐失波**(evanescent wave,旧译倏逝波——译者注),其振幅随|z|值的增大而呈指数衰减(见11.4.2节和图13.9)。

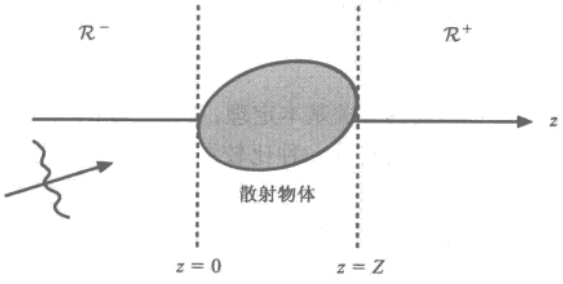


图13.8 散射场角谱表示有关符号图示说明

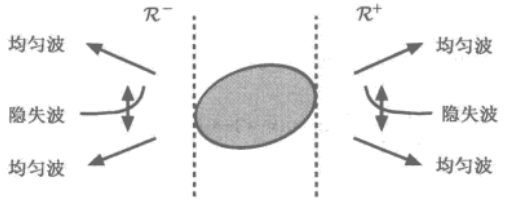


图13.9 对半空间$\mathcal{R}^+$和$\mathcal{R}^-$中散射场有贡献的平面波模式类型图示说明

公式(4)的表达,称为将半空间$\mathcal{R}^+$和$\mathcal{R}^-$中的散射场表成**平面波组成的角谱**。这种角谱表示我们曾在11.4节中与之有过短暂接触。它是两个半空间中场的**模式表示**,因为这些平面波每一个都和散射媒质外的散射场一样,满足同一方程,即亥姆霍兹方程。虽然角谱表示同傅里叶积分表示表面上很相似,但切勿将二者混淆。在傅里叶积分中,所有三个变量s_x, s_y, s_z都必须是实量;此外,因为$U_1^{(s)}(\mathbf{r})$是三维矢量$\mathbf{r}$的函数,它的傅里叶表示要遍及整个三维空间,不像角谱表示(4)情况那样仅遍及一个二维(平面)区域①。

可以注意,对均匀平面波(其s_z为实量)来说,(5)式可表成如下形式

$$a^{(\pm)}(s_x, s_y; s_{0x}, s_{0y}) = \frac{ik}{2\pi s_z}\tilde{F}[k(s_x - s_{0x}), k(s_y - s_{0y}), k(\pm s_z - s_{0z})], \tag{6}$$

式中$\tilde{F}$是散射势的傅里叶变换,其定义见§13.1(15)。公式(6)表明,每个均匀波都载有散射势三维傅里叶分量中某个分量(仅仅一个)的有关信息,这个分量的标志矢量$\mathbf{K}^{\pm} = (K_x, K_y, K_z^{(\pm)})$,其中

$$K_x = k(s_x - s_{0x}), \quad K_y = k(s_y - s_{0y}), \quad K_z^{(\pm)} = k(\pm s_z - s_{0z}). \tag{7}$$

① 关于角谱表示,比较完全的讨论见L. Mandel and E. Wolf, *loc. cit.* §3.2和P. C. Clemmow, *The Plane Wave Spectrum Representation of Electromagnetic Fields* (Oxford, Pergamon Press, 1966)。

然而，对隐失波来说，情况完全不同，因为这种波的 s_z 是纯虚数，因而 $k(\pm s_z - s_{0z})$ 不再是散射势某傅里叶分量的实标志矢量 $\mathbf{K}$ 的 z 分量。

把(6)式同散射幅 $f_1(\mathbf{s},\mathbf{s}_0)$ 表达式 § 13.1(26) 作一比较，可知散射场角谱表示的每个均匀波同散射幅有一个非常简单的关系，由公式

$$a^{(\pm)}(s_x,\ s_y;\ s_{0x},\ s_{0y})=\frac{\mathrm{i}k}{2\pi}f_1(\mathbf{s},\ \mathbf{s}_0), \tag{8}$$

表出，式中当 $s_z>0$ 时取上面的正号，而当 $s_z<0$ 时取下面的负号。

13.2.2　衍射层析术的基本定理

请读者注意，如果从(8)和(6)两式之间消去均匀波的谱振幅 $a^{(\pm)}(s_x, s_y; s_{0x}, s_{0y})$，将得到公式 § 13.1(26)。这就使我们能够从测量远区衍射(散射)场来测定散射势的低空间频率分量($|\mathbf{K}|=k|\mathbf{s}-\mathbf{s}_0|\leqslant 2k$)。然而，在实际情况里(特别是使用超声波时)，测量很少能达及远区，一般只能在比较靠近散射体的地方。但现在可以证明，远区数据能提供的信息同样也能从另一种方式获得，这就是让测量分别选在离散射体任意距离的**两个**平面处，其中一个平面在半空间 $\mathcal{R}^+$，另一个在半空间 $\mathcal{R}^-$。这种变通乃衍射层析术得以实行的根本所在。

设 $z=z^+$ 是半空间 $\mathcal{R}^+$ 中的一个平面，而 $z=z^-$ 是半空间 $\mathcal{R}^-$ 中的一个平面(见图 13.10)。按照(4)式，这两个平面内的散射场由下列积分给出[现在把 $U_1^{(s)}(\mathbf{r})$ 改写成 $U_1^{(s)}(x,y,z^{(\pm)};\mathbf{s}_0)$]

$$U_1^{(s)}(x,\ y,\ z^{(\pm)};\ \mathbf{s}_0)=\iint_{-\infty}^{\infty}a^{(\pm)}(s_x,\ s_y;\ s_{0x}\ \ s_{0y})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(s_xx+s_yy\pm s_zz^{\pm})}\,\mathrm{d}s_x\,\mathrm{d}s_y, \tag{9}$$

现在取这两个平面内散射场 $U_1^{(s)}$ 对变量 x 和 y 的傅里叶变换。由此得到谱振幅表达式如下[①]：

$$a^{(\pm)}(s_x,\ s_y;\ s_{0x},\ s_{0y})=\frac{1}{(2\pi)^2}k^2\tilde{U}^{(s)}(ks_x,\ ks_y;\ z^{\pm};\ \mathbf{s}_0)\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}ks_zz^{\pm}}, \tag{10}$$

式中

$$\tilde{U}^{(s)}(f_x,\ f_y;\ z^{\pm};\ \mathbf{s}_0)=\iint_{-\infty}^{\infty}U^{(s)}(x,\ y,\ z^{\pm};\ \mathbf{s}_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(f_xx+f_yy)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{11}$$

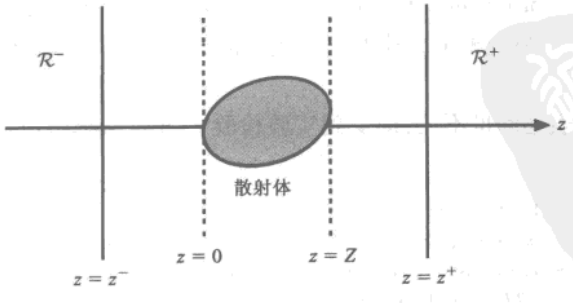


图 13.10　测量一散射体左平面 $z=z^-$ 和右平面 $z=z^+$ 各点散射场以获得该散射体重建像有关符号

① $U_1^{(s)}$ 和 $\tilde{U}_1^{(s)}$ 的下标 1 以下原文似有意略去，但未作说明——译者注。

我们已经获得了两个谱振幅表达式。第一个是(6)式给出的,仅适用于均匀波组成的谱振幅,并用散射势三维傅里叶变换来表出;另一个是(10)式给出的,对均匀波和隐失波二者都适用,但其谱振幅是用平面 $z = z^+$ 和 $z = z^-$ 内散射场的二维傅里叶变换来表出。令这两个公式相等,在 $s_x^2 + s_y^2 \leqslant 1$(均匀波)假定下,可得到关系式

$$\tilde{F}[k(s_x - s_{0x}),\ k(s_y - s_{0y}),\ k(\pm s_z - s_{0z})] = \frac{ks_z}{2\pi \mathrm{i}} \tilde{U}^{(s)}(ks_x,\ ks_y;\ z^{\pm};\ s_0)\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}ks_z z^{\pm}}. \tag{12}$$

如果令

$$f_x = ks_x, \qquad f_y = ks_y, \qquad f_z = ks_z = +(k^2 - f_x^2 - f_y^2)^{1/2} \tag{13}$$

并且

$$K_x = f_x - ks_{0x}, \qquad K_y = f_y - ks_{0y}, \qquad K_z^{\pm} = \pm f_z - ks_{0z}, \tag{14}$$

则(12)可表成下列形式

$$\tilde{F}(K_x,\ K_y,\ K_z^{\pm}) = \frac{f_z}{2\pi \mathrm{i}} \tilde{U}^{(s)}(f_x,\ f_y;\ z^{\pm};\ s_0)\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}f_z z^{\pm}}. \tag{15}$$

由不等式 $s_x^2 + s_y^2 \leqslant 1$ 适用于均匀波,故由(13)得知

$$f_x^2 + f_y^2 \leqslant k^2 \tag{16}$$

如果再利用(14),则可知

$$|\mathbf{K}| \leqslant 2k. \tag{17}$$

关系式(15),加上条件(14),就是衍射层析术基本定理的数学表述,系出自沃耳夫[①]。这一定理证明,为何从散射体两边任意距离处各取一平面 $z = z^+$ 和 $z = z^-$ 并测量二者中的散射场分布,就能够测定出散射势满足不等式(17)的那些低空间频率分量。必须注意,这一技术所能测定的散射势傅里叶分量要受到不等式(17)$|\mathbf{K}| \leqslant 2k$ 的约束,因而所测分量正是其标志矢量 $\mathbf{K}$ 端点位置在埃瓦尔德极限球内的那些分量[见 § 13.1(28)]。

衍射层析术图像重建的计算技术已研究出几种。其中一种所谓的滤波背向传播计算法(filtered back-propagation algorithm),出自 Devaney[②],可以看作是计算机层析术背投影计算法(见 § 4.11.5)的一种推广。另一种重建技术利用频域的可及傅里叶分量外推法,是 Pan 和 Kak[③]研究出来的。

衍射层析术理论表述问世不久,即受到实验检验[④],并且从那时以后已应用于几个领域,

---

① E. Wolf, *Opt. Commun.*, **1**, (1969), 153。

② A. J. Devaney, *Ultrasonic Imaging*, **4**(1982), 336; *IEEE Trans. on Biomed. Eng.*, BME-**30**(1983), 377; also in *Inverse Methods in Electromagnetic Imaging*, Part 2, eds. W. M. Boerner *et al.*, (Hingham, MA, D. Reidel Public., 1985), p. 1107。

③ S. X. Pan and A. C. Kak, *IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing*, AASP-**31**(1983), 1262。又见 A. C. Kak and M. Slaney, *Principles of Computerized Tomographic Imaging* (New York, NY, The Institute of Electrical and Electronic Engineering, 1988), Sec. 6.4.1。

④ W. H. Carter, *J. Opt. Soc. Amer.*, **60**(1970), 306; W. H. Carter and P. C. Ho, *Appl. Opt.*, **13**(1974), 162; A. F. Fercher, H. Bartlet, H. Becker and E. Wiltschko, *Appl. Opt.*, **18**(1979), 2427。

例如,在光学显微术中用来测定三维物体各处的折射率变化,在地球物理学中利用声波和电磁波进行石油和天然气勘探[①]。

衍射层析术的基本公式(15)只有在玻恩一级近似范围内才有效。在一些情况下,例如,当物体非常小时,要遇到某些计算上的困难,即使散射很弱[②]。当物体很大时,有时也会遇到麻烦,因为多项小误差累积起来,其影响可能变得很大。在这种情况下,摒弃玻恩一级近似而采用所谓 Rytov 一级近似可能有益。我们将在 13.5 节中扼要讨论一下 Rytov 近似。

图 13.11 和图 13.12 用一个实例说明光学衍射层析术的用途。这两个图给出一根白马毛发的截面重建折射率分布。

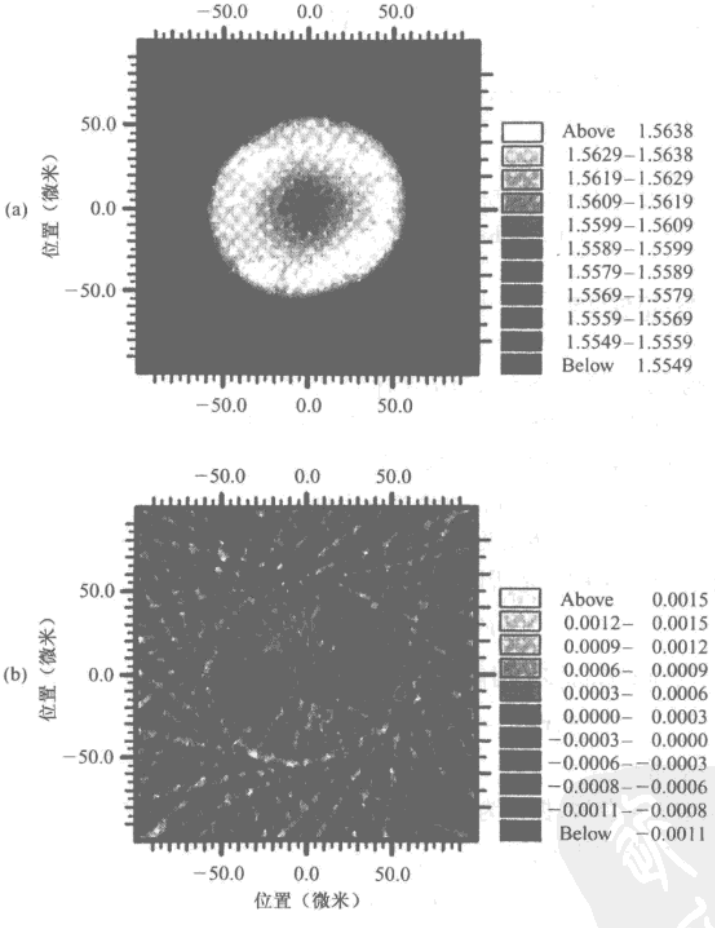


图 13.11　一根白马毛发的截面重建复折射率分布:(a)实部;(b)虚部[引自 T. C. Wedberg and W. C. Wedberg, *J. Microscopy*, **177**(1995), 53]

① 对一些这些研究的讲述,见,例如 J. J. Stamnes, L.-J. Gelius, I. Johansen and N. Sponheim in *Inverse Problems in Scattering and Imaging*, eds. M. Bertero and E. R. Pike(Bristol, Adam Hilger, 1992), p. 268; J. J. Stamnes and T. C. Wedberg in *Part. and Part. Syst. Charact.*, **12**(1995), 95; E. Wolf in *Trends in Optics*, ed. A. Consortini (San Diego, Academic Press, 1996), p. 83。

② 见 K. Iwata and R. Nagata, *Jap. J. Appl. Phys.*, **14**(1975), Suppl. 14-1, 379。

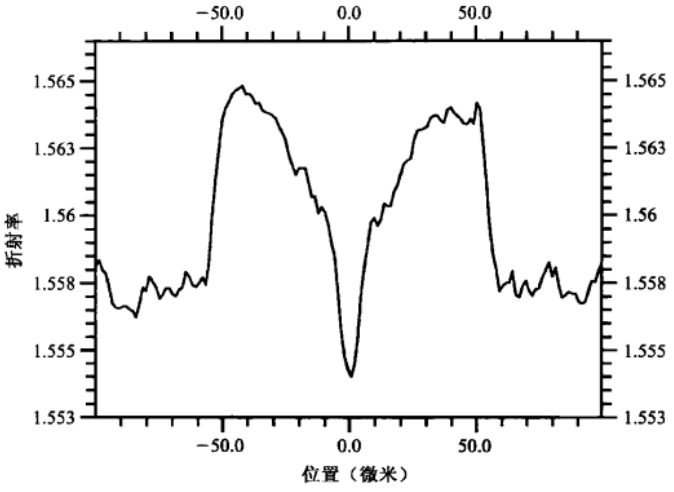


图 13.12 图 13.11(a)所给折射率实部分布重建图沿着直径的值迹曲线[引自 T. C. Wedberg and W. C. Wedberg, *J. Microscopy*, **177**(1995), 53]

13.3 光学截面定理

在分析散射实验时,有一个常常令人关注的量,它并不是散射场本身,而是物体对能量散射和吸收的速率。研究结果表明,能量由于这些过程从入射场中流失的速率同前向(入射方向上)散射场的振幅之间存在密切关系。这个关系在定量上由所谓**光学截面定理**[常常就叫做光学定理(optical theorem)]表示,本节将讨论这一定理。

在电磁理论中,同能量传播相关的基本量是坡印廷矢量(见 1.1.4 节)。附录 K[(10)]证明,在标量理论中,同一类的量是所谓**能流**(energy flux)矢量。对于一个实单色场

$$V^{(r)}(\mathbf{r},\ t)=\mathcal{R}\{U(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\}, \tag{1}$$

能流矢量在比振荡周期长得多的时间间隔内的平均值由下式给出:

$$\langle\mathbf{F}(\mathbf{r})\rangle=-\mathrm{i}\beta[U^{\star}(\mathbf{r})\nabla U(\mathbf{r})-U(\mathbf{r})\nabla U^{\star}(\mathbf{r})], \tag{2}$$

式中 β 是一个正的常数。

假定有一个平面单色波,振幅为 1,沿实单位矢量 $\mathbf{s}_0$ 所指定的方向入射到散射体上。这时它的空间变化部分由下式给出:

$$U^{(i)}(\mathbf{r})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\mathbf{s}_0\cdot\mathbf{r}}. \tag{3}$$

同前,用 $U^{(s)}(\mathbf{r})$代表散射场,并用 $U(\mathbf{r})$表示总场,因此

$$U(\mathbf{r})=U^{(i)}(\mathbf{r})+U^{(s)}(\mathbf{r}). \tag{4}$$

将(4)代入(2),得到时间平均的能流矢量表达式

$$\langle\mathbf{F}(\mathbf{r})\rangle=\langle\mathbf{F}^{(i)}(\mathbf{r})\rangle+\langle\mathbf{F}^{(s)}(\mathbf{r})\rangle+\langle\mathbf{F}'(\mathbf{r})\rangle, \tag{5}$$

式中

$$\langle\mathbf{F}^{(i)}(\mathbf{r})\rangle=-\mathrm{i}\beta[U^{(i)\star}(\mathbf{r})\nabla U^{(i)}(\mathbf{r})-\mathrm{cc}], \tag{6a}$$

$$\langle \mathbf{F}^{(s)}(\mathbf{r})\rangle = -\mathrm{i}\beta[U^{(s)\star}(\mathbf{r})\nabla U^{(s)}(\mathbf{r}) - \mathrm{cc}], \tag{6b}$$

$$\langle \mathbf{F}'(\mathbf{r})\rangle = -\mathrm{i}\beta[U^{(i)\star}(\mathbf{r})\nabla U^{(s)}(\mathbf{r}) - U^{(s)}(\mathbf{r})\nabla U^{(i)\star}(\mathbf{r}) - \mathrm{cc}], \tag{6c}$$

而 cc 表示复共轭。

现在取一个大球面 Σ，设其半径为 R，而中心位于散射体所占区域的某点 O，看看通过此球面的外向能流 $\mathcal{W}$ 如何（见图 13.13）。$\mathcal{W}$ 由下式给出：

$$\mathcal{W} = \iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}(\mathbf{r})\rangle \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}\Sigma, \tag{7}$$

式中 $\mathbf{n}$ 是 Σ 面的单位外向法线。如果散射体是一个介电体（即一个没有吸收的媒质），该积分显然将为零，因为能量这时既不会因散射而产生，也不会因散射而消失。然而，如果散射体是一个导电体，这时一些能量要被散射体吸收，并且能量守恒定律要求通过 Σ 面的净外向能量在大小上应等于吸收发生的速率 $\mathcal{W}^{(a)}$。因此由(5)和(7)可知

$$\mathcal{W} = -\mathcal{W}^{(a)} = \mathcal{W}^{(i)} + \mathcal{W}^{(s)} + \mathcal{W}', \tag{8}$$

式中 $\mathcal{W}^{(i)}$，$\mathcal{W}^{(s)}$ 和 $\mathcal{W}'$ 是能流径向分量 $\langle \mathbf{F}^{(i)}\cdot\mathbf{n}\rangle$，$\langle \mathbf{F}^{(s)}\cdot\mathbf{n}\rangle$ 和 $\langle \mathbf{F}'\cdot\mathbf{n}\rangle$（即 $\mathbf{F}^{(i)}$，$\mathbf{F}^{(s)}$ 和 $\mathbf{F}'$ 沿球面 Σ 外向法线方向 $\mathbf{n}$ 的分量）对球面 Σ 的积分。因为入射场假设满足亥姆霍兹方程，所以 $\mathcal{W}^{(i)} = 0$，这可由自由空间中单色场的微分形式能量守恒定律，通过应用高斯定理推导出来[见附录 K (13)]。这个结果也可通过一个简单计算更直接地加以证明。将(3)代入(6a)，则有

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{F}^{(i)}(\mathbf{r})\rangle &= -\mathrm{i}\beta[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\mathbf{s}_0\cdot\mathbf{r}}\mathrm{i}k\mathbf{s}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\mathbf{s}_0\cdot\mathbf{r}} - \mathrm{cc}]\\ &= 2\beta k\mathbf{s}_0.\end{aligned} \tag{9}$$

因此

$$\mathcal{W}^{(i)} \equiv \iint_{\Sigma} \langle \mathbf{F}^{(i)}(\mathbf{r})\rangle \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}\Sigma = 2\beta k\mathbf{s}_0 \cdot \iint_{\Sigma} \mathbf{n}\,\mathrm{d}\Sigma. \tag{10}$$

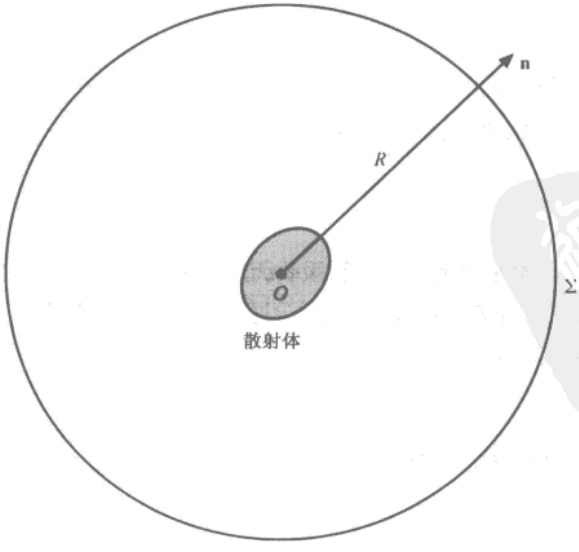


图 13.13　公式(7)有关符号说明

从对称性看,很明显(10)式右边积分值为零,这也可通过采用球面极坐标来计算(10)式右边积分而给以更为明确的证明。令球面极坐标的 z 轴沿 $\mathbf{s}_0$ 方向,则 $\mathbf{s}_0\cdot\mathbf{n}=\cos\theta$, $\mathrm{d}\Sigma=R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$, $(0\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant\phi<2\pi)$,结果得到

$$\mathcal{W}^{(i)}=0, \tag{11}$$

如所预期。

将此结果代入(8)中,并想到$\mathcal{W}'$是表达式(6c)的法线分量对球面 Σ 的积分,则得到

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^{(s)}+\mathcal{W}^{(a)}&=-\mathcal{W}'\\&=\mathrm{i}\beta\iint_{\Sigma}[U^{(i)\star}(\mathbf{r})\nabla U^{(s)}(\mathbf{r})-U^{(s)}(\mathbf{r})\nabla U^{(i)\star}(\mathbf{r})-\mathrm{cc}]\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\Sigma.\end{aligned} \tag{12}$$

因为入射场是(3)式给出的平面波,并且远区散射场由 § 13.1(20)即

$$U^{(s)}(r\mathbf{s})=f(\mathbf{s},\mathbf{s}_0)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}, \tag{13}$$

给出,其中 $f(\mathbf{s},\mathbf{s}_0)$是频率 ω 处的散射幅,所以可立即得到在半径为 R 的大球面 Σ 上(见图 13.13)

$$U^{(i)\star}\nabla U^{(s)}-U^{(s)}\nabla U^{(i)\star}=\frac{\mathrm{i}k}{R}(\mathbf{s}+\mathbf{s}_0)f(\mathbf{s},\mathbf{s}_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR\mathbf{s}\cdot(\mathbf{s}_0-\mathbf{s})}. \tag{14}$$

下一步,将(14)代入(12)。为了计算所产生的积分,可利用琼斯(D.S. Jones)给出的一个数学引理(见附录 L)。这个引理说,当 R 很大并且 G 是 $\mathbf{n}$ 的一个任意函数时

$$\frac{1}{R}\iint_{\Sigma}G(\mathbf{n})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\mathbf{s}_0\cdot\mathbf{n})R}\,\mathrm{d}\Sigma\approx\frac{2\pi\mathrm{i}}{k}[G(\mathbf{s}_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR}-G(-\mathbf{s}_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}]. \tag{15}$$

因此,利用(14)和这一引理即可得到

$$\iint_{\Sigma}(U^{(i)\star}\nabla U^{(s)}-U^{(s)}\nabla U^{(i)\star})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\Sigma\sim-4\pi f(\mathbf{s}_0,\mathbf{s}_0) \tag{16}$$

因而由(12)得到$\mathcal{W}^{(s)}+\mathcal{W}^{(a)}$表达式如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^{(s)}+\mathcal{W}^{(a)}&=-4\pi\mathrm{i}\beta[f(\mathbf{s}_0,\mathbf{s}_0)-f^{\star}(\mathbf{s}_0,\mathbf{s}_0)]\\&=8\pi\beta\mathcal{I}f(\mathbf{s}_0,\mathbf{s}_0),\end{aligned} \tag{17}$$

式中$\mathcal{I}$表示虚部。

关系式(17)意味着,**入射平面波因散射和吸收而遭致的能量流失率,正比于朝前方向($\mathbf{s}=\mathbf{s}_0$)散射的散射幅虚部**,即正比于$\mathcal{I}f(\mathbf{s}_0,\mathbf{s}_0)$,$f(\mathbf{s}_0,\mathbf{s}_0)$通常称为**前向散射幅**。

能量耗散率是$(\mathcal{W}^{(s)}+\mathcal{W}^{(a)})$,而散射体垂直入射波方向 $\mathbf{s}_0$ 的单位截面上的能量入射率是$|\langle\mathbf{F}^{(i)}\rangle|$,前者与后者之比 Q 叫做散射物体的**消光截面**。由(17)和(9)可知

$$Q=Q^{(s)}+Q^{(a)}=\frac{\mathcal{W}^{(s)}+\mathcal{W}^{(a)}}{|\langle\mathbf{F}^{(i)}\rangle|}=\frac{4\pi}{k}\mathcal{I}f(\mathbf{s}_0,\mathbf{s}_0). \tag{18}$$

这个公式是光学截面定理(一般叫做光学定理)的数学表述。在经典光学领域,这个公式似乎首先由范德赫斯特(van de Hulst)导出[①]。

用类似方式可定义障碍物的散射截面 $Q^{(s)}$ 和吸收截面 $Q^{(a)}$,

$$Q^{(s)}=\frac{\mathcal{W}^{(s)}}{|\langle\mathbf{F}^{(i)}\rangle|},\qquad Q^{(a)}=\frac{\mathcal{W}^{(a)}}{|\langle\mathbf{F}^{(i)}\rangle|},\tag{19}$$

而且显然 $Q=Q^{(s)}+Q^{(a)}$。对于没有吸收的障碍物,$Q^{(a)}=0$,这时消光截面等于散射截面。

散射截面 $Q^{(s)}$ 可以用散射幅 $f(\mathbf{s},\mathbf{s}_0)$ 表示成一个简单形式。为了证明这一点,先考虑远区散射场的能流矢量 $\mathbf{F}^{(s)}$。将(13)代入(6b)并想到场点现在是在单位矢量 $\mathbf{s}$ 方向上 R 距离的远区内,则有

$$\langle\mathbf{F}^{(s)}(R\mathbf{s})\rangle\approx\frac{2\beta k}{R^2}|f(\mathbf{s},\mathbf{s}_0)|^2\mathbf{s},\qquad \text{当 } \mathbf{s} \text{ 固定而 } R\to\infty \text{ 时}.\tag{20}$$

在远区地带中,大球面 Σ 上的能量通过率(注意现在 $\mathbf{s}=\mathbf{n}$)为

$$\mathcal{W}^{(s)}=\iint_{\Sigma}\langle\mathbf{F}^{(s)}(r\mathbf{s})\rangle\cdot\mathbf{s}\,\mathrm{d}\Sigma=2\beta k\int_{4\pi}|f(\mathbf{s},\mathbf{s}_0)|^2\,\mathrm{d}\Omega,\tag{21}$$

式中 $\mathrm{d}\Omega=\mathrm{d}\Sigma/R^2$ 是面元 $\mathrm{d}\Sigma$ 对原点 O 的立体张角元,而积分遍及 $\mathbf{s}$ 变更方向所生成的整个 4π 立体角。回想到,根据(9)式,$\langle\mathbf{F}^{(i)}\rangle=2\beta k\mathbf{s}_0$,可知这时散射截面由下列简单表达式给出:

$$Q^{(s)}\equiv\frac{\mathcal{W}^{(s)}}{|\langle\mathbf{F}^{(i)}\rangle|}=\int_{4\pi}|f(\mathbf{s},\mathbf{s}_0)|^2\,\mathrm{d}\Omega.\tag{22}$$

出于明显的理由,$|f(\mathbf{s},\mathbf{s}_0)|^2$ 这个量(常用 $\mathrm{d}Q^{(s)}/\mathrm{d}\Omega$ 来表示)叫做**微分散射截面**。

现在来考虑一个不怎么透光的障碍物,看看它的消光截面 Q 值如何。仍然假设该障碍物的线度远大于波长。在这种情况下,惠更斯-菲涅耳原理是适用的,并且对前向散射产生贡献的主要是夫琅禾费衍射。设入射波是线偏振的平面波,$\mathcal{A}$ 是被障碍物遮挡住的区域("阴影区"),$\mathcal{A}'$ 是没有被遮挡住的部分(见图 13.14)。考虑离障碍物很远的一点 $P(\mathbf{r})$ 的散射场。如果入射角和散射角以及衍射角都很小,则根据惠更斯-菲涅耳原理和巴比涅原理[见 §8.3(21)],有

$$U^{(s)}(\mathbf{r})=\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\iint_{\mathcal{A}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\,\mathrm{d}S,\tag{23}$$

式中 $\lambda=2\pi/k$ 是同波数 k 相关的波长。因为 P 离障碍物非常远,而且在入射波传播方向(朝前的方向),所以 r 可以认为是一个常数,于是由(23)得出

$$U^{(s)}(r\mathbf{s}_0)=\frac{\mathrm{i}}{\lambda}D\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r},\tag{24}$$

式中 D 是障碍物的几何截面(区域 $\mathcal{A}$)。因此,在这一情况下,前向散射幅 $f(\mathbf{s}_0,\mathbf{s}_0)$ 等于 $\mathrm{i}D/\lambda$ [参见(13)],并且(18)式表明

$$Q=2D.\tag{25}$$

---

① H. C. van de Hulst, *Physica*, **15**(1949), 740。原子碰撞方面也有一个相对应的类似定理[见 E. Feenberg, *Phys. Rev.*, **40**(1932), 40; M. Lax, *Phys. Rev.*, (2), **78**(1950), 306]。关于该定理的历史记述,可查阅 R. G. Newton, *Amer. J. Phys.*, **44**(1976), 639。

这样,一个不透明大障碍物的消光截面等于其几何截面的 2 倍。这一结果乍一看似乎有点奇怪,因为人们原本预料,对于大障碍物,几何光学近似将能适用,而在这一近似范围内消光截面等于 D。对这一表面矛盾的解释是[①]:无论障碍物有多大,也不论考虑的场离它有多远,总有一个很窄的区域——几何阴影边缘近邻地区——那里几何光学近似是无效的。除被障碍物以截面 D 阻截的光(经反射和吸收而损失掉)之外,还有另一部分消光起源于阴影边缘近邻地区,而这一部分看来显然也等于 D。要用实验证明关系式(25),须在足够宽广的区域和在离障碍物足够远的地方收集光[②]。

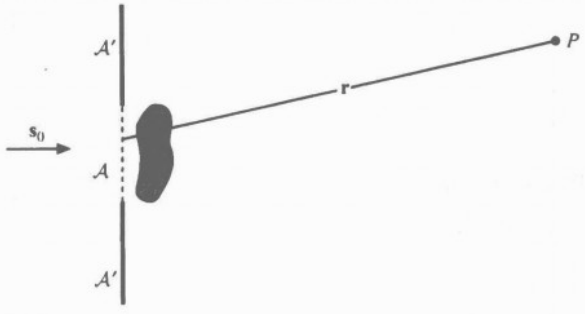


图 13.14 不透明大障碍物消光截面有关公式(23)和(24)所用符号图示。区域$\mathcal{A}$的几何截面为D

光学截面定理(18)的一个推广颇有意趣,现给以扼要讨论。

考虑频率同为 ω 的两个单色场 $U_1^{(i)}(\mathbf{r})$和 $U_2^{(i)}(\mathbf{r})$[不言而喻,各式中含时间依赖因子 $\exp(-i\omega t)$和自变量 ω]同时入射到一散射物体上,并设 $U_1(\mathbf{r})$和 $U_2(\mathbf{r})$是它们各自产生的总场。这些场满足散射的基本方程 § 13.1(5),即

$$\nabla^2 U_j(\mathbf{r}) + k^2 U_j(\mathbf{r}) = -4\pi F(\mathbf{r}) U_j(\mathbf{r}), \qquad (j = 1, 2), \tag{26}$$

式中 $F(\mathbf{r})$代表散射势。由(26)可得出下列关系:

$$U_2^\star \nabla^2 U_1 - U_1 \nabla^2 U_2^\star = -8\pi i U_1 U_2^\star \mathcal{I} F, \tag{27}$$

现在取(27)式两边对大球 Σ(参见图 13.2 和图 13.3)的体积分,并对左边的积分应用格林定理,再将面积分中的法向微商$\frac{\partial U_j}{\partial n}$$(j=1,2)$写成$(\nabla U_j)\cdot\mathbf{n}$,就得到公式

$$\iint_\Sigma (U_2^\star \nabla U_1 - U_1 \nabla U_2^\star)\cdot \mathbf{n}\, d\Sigma = 2i\mathcal{W}_{12}, \tag{28}$$

式中

$$\mathcal{W}_{12} = -4\pi \int_V U_1(\mathbf{r}) U_2^\star(\mathbf{r}) \mathcal{I} F(\mathbf{r}) d^3 r, \tag{29}$$

① 在量子碰撞理论中有一个类似的佯谬(paradox),由 H. S. W. Massey and C. B. O. Mohr, *Proc. Roy. Soc. A*, **141**(1933),434 首先注意到。

② 从导致引理(15)的细致分析可知,Σ 面上对 Q 值有显著贡献的部分对 Σ 球心 O 所张的立体角,其量级为$(kR)^{-\beta}$,式中 $1>\beta>4/5$, R 为 Σ 球的半径[见 D. S. Jones, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **48**(1952),733]。关于大障碍物的消光截面和几何阴影区域所起的作用,较为完全的讨论见 D. Sinclair, *J. Opt. Soc. Amer.*, **37**(1947),475 和 L. Brillouin, *J. Appl. Phys.* **20**(1949),1110。

其中积分区 V 为散射物体体积而非大球体积 V_R。(参见 § 13.1(12)式正文说明)(此段原文讲述欠明,译文作了修改——译者注。)

假定入射场 $U_1^{(i)}$ 和 $U_2^{(i)}$ 都是平面波,分别传播在单位矢量 $\mathbf{s}_1$ 和 $\mathbf{s}_2$ 所指定的方向。这时,按照 § 13.1(19),散射体远区中的总场由下式给出:

$$U_j(R\mathbf{s}) \approx \mathrm{e}^{\mathrm{i}kR\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}_j} + f(\mathbf{s}, \mathbf{s}_j)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}, \qquad (j = 1, 2). \tag{30}$$

用(30)代入(28)左边被积函数,经过冗长而刻板的计算,最后得到在球面 Σ 上

$$\begin{aligned}(U_2^{\star}\nabla U_1 - U_1\nabla U_2^{\star})\cdot\mathbf{n} = {} & \mathrm{i}k\mathbf{s}\cdot(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR\mathbf{s}\cdot(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)} \\ & + \mathrm{i}k(1 + \mathbf{s}\cdot\mathbf{s}_2)f(\mathbf{s}, \mathbf{s}_1)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR(1-\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}_2)}}{R} \\ & + \mathrm{i}k(1 + \mathbf{s}\cdot\mathbf{s}_1)f^{\star}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_2)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR(1-\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}_1)}}{R} \\ & + \frac{2\mathrm{i}k}{R^2}f^{\star}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_2)f(\mathbf{s}, \mathbf{s}_1),\end{aligned} \tag{31}$$

式中曾用了在 Σ 上 $\mathbf{n} = \mathbf{s}$ 这一事实。

将(31)代入(28)左边的积分,很清楚,这里一共要计算 4 个积分。让我们来一一考虑。

第一积分可立即看出其值为零,即

$$\mathrm{i}k\iint_{\Sigma}\mathbf{s}\cdot(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR\mathbf{s}\cdot(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)}\,\mathrm{d}\Sigma = 0. \tag{32}$$

这有一个最简单的方法能够证明,就是考虑散射体不存在($F \equiv 0$)时的状况。在这种情况下,(29)式所定义的量 $\mathcal{W}_{12} = 0$,并且 $U_j = U_j^{(i)} = \exp(\mathrm{i}k\mathbf{s}_j\cdot\mathbf{r})$ $(j = 1, 2)$。用这些式子代入(28)即得到(32)。

第二个和第三个积分可借助(15)式所表达的琼斯引理来计算,计算时要想到 $\mathbf{R} = R\mathbf{s}$,最后得到

$$\mathrm{i}k\iint_{\Sigma}(1 + \mathbf{s}\cdot\mathbf{s}_1)f^{\star}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_2)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(R - \mathbf{s}_1\cdot\mathbf{R})}}{R}\,\mathrm{d}\Sigma = 4\pi f^{\star}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \tag{33}$$

和

$$\mathrm{i}k\iint_{\Sigma}(1 + \mathbf{s}\cdot\mathbf{s}_2)f(\mathbf{s}, \mathbf{s}_1)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R - \mathbf{s}_2\cdot\mathbf{R})}}{R}\,\mathrm{d}\Sigma = -4\pi f(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1). \tag{34}$$

第 4 个对大球 Σ 的积分可改写成下列形式:

$$2\mathrm{i}k\iint_{\Sigma}\frac{f(\mathbf{s}, \mathbf{s}_1)f^{\star}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_2)}{R^2}\,\mathrm{d}\Sigma = 2\mathrm{i}k\iint_{4\pi}f(\mathbf{s}, \mathbf{s}_1)f^{\star}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_2)\mathrm{d}\Omega, \tag{35}$$

式中积分遍及单位矢量 $\mathbf{s}$ 变更方向所生成的整个 4π 立体角。

将长表达式(31)代入(28)并采用(32) ~ (35)的 4 个积分值,就得到下列重要结果:

$$2\pi[f(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1) - f^{\star}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)] = \mathrm{i}k\iint_{4\pi}f(\mathbf{s}, \mathbf{s}_1)f^{\star}(\mathbf{s}, \mathbf{s}_2)\mathrm{d}\Omega - \mathrm{i}\mathcal{W}_{12}. \tag{36}$$

这个公式称为**广义光学定理**,因为当选择 $\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_0$ 时它化为光学截面定理(17),下面就来证明这一点。

令(36)中 $\mathbf{s}_2=\mathbf{s}_1=\mathbf{s}_0$,由而得到

$$4\pi\mathcal{I}f(\mathbf{s}_0,\mathbf{s}_0)=k\iint_{4\pi}|f(\mathbf{s},\mathbf{s}_0)|^2\,\mathrm{d}\Omega-\mathcal{W}_{00}. \tag{37}$$

根据(22),右边的积分等于散射截面 $Q^{(s)}$,因此(37)式意味着

$$Q^{(s)}=\frac{4\pi}{k}\mathcal{I}f(\mathbf{s}_0,\mathbf{s}_0)+\frac{1}{k}\mathcal{W}_{00}. \tag{38}$$

此外,由(28)可知(因为在 Σ 上 $\mathbf{n}=\mathbf{s}$)

$$\frac{1}{k}\mathcal{W}_{00}=\frac{1}{2\mathrm{i}k}\iint_{\Sigma}(U_0^{\star}\nabla U_0-U_0\nabla U_0^{\star})\cdot\mathbf{s}\,\mathrm{d}\Sigma \tag{39}$$

利用(2)和(9),上式即为

$$\frac{1}{k}\mathcal{W}_{00}=\frac{1}{|\langle\mathbf{F}^{(i)}(\mathbf{r})\rangle|}\iint_{\Sigma}\langle\mathbf{F}(\mathbf{r})\rangle\cdot\mathbf{s}\,\mathrm{d}\Sigma. \tag{40}$$

右边的积分代表能量流出大球面 Σ 的平均速率$\mathcal{W}$,它和散射媒质对能量的吸收率$\mathcal{W}^{(a)}$必须大小相等而符号相反。因此

$$\frac{1}{k}\mathcal{W}_{00}=-Q^{(a)}, \tag{41}$$

式中 $Q^{(a)}$是散射体的吸收截面[$=\mathcal{W}^{(a)}/|\langle\mathbf{F}^{(i)}\rangle|$,见(19)]。如果将(41)代入(38)并想到 $Q^{(s)}+Q^{(a)}$是消光截面 Q,则(38)式即化为(18)式所表述的光学截面定理。因此,(36)的确是光学截面定理的一个推广。

注意当散射体没有吸收时,散射势[由 § 13.1(6)定义]的虚部为零,因而(28)所定义的$\mathcal{W}_{12}$也为零。这时广义光学定理化为

$$2\pi[f(\mathbf{s}_2,\mathbf{s}_1)-f^{\star}(\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2)]=\mathrm{i}k\iint_{4\pi}f(\mathbf{s},\mathbf{s}_1)f^{\star}(\mathbf{s},\mathbf{s}_2)\mathrm{d}\Omega. \tag{42}$$

在量子势散射理论中,这个公式常叫做**幺正关系**[①] (unitary relation)。

13.4 倒易关系

散射理论的另一个一般性结果是一项倒易定理。它可以用同前节光学截面定理讨论颇为类似的数学论证推导出来。

再次考虑有两个场 $U_1^{(i)}(\mathbf{r})$和 $U_2^{(i)}(\mathbf{r})$同时入射到一散射体上,并且 $U_1(\mathbf{r})$和 $U_2(\mathbf{r})$是它们各自产生的总场(入射场 + 散射场)。这时方程 § 13.3(26)是适用的,因而有

$$U_2\nabla^2U_1-U_1\nabla^2U_2=0. \tag{1}$$

取这个方程对大球 Σ 内部各处的积分,并应用格林定理,由而得到

$$\iint_{\Sigma}(U_2\nabla U_1-U_1\nabla U_2)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\Sigma=0, \tag{2}$$

式中 $\mathbf{n}$ 代表 Σ 的单位外向法线。

① 见,例如 A. G. Sitenko *Scattering Theory* (Berlin, Springer, 1975), Sec. 5.2。

现在假设两个入射场都是单位振幅的平面波，分别沿实单位矢量 $\mathbf{s}_1$ 和 $\mathbf{s}_2$ 所指定的方向传播，即

$$U_j^{(i)}(\mathbf{r}) = e^{ik\mathbf{s}_j\cdot\mathbf{r}} \qquad (j = 1, 2). \tag{3}$$

这时总场 U_1 和 U_2 由 § 13.3(30)给出。用这些表达式代入(2)中的被积函数，得到在 Σ 面上

$$\begin{aligned}(U_2\nabla U_1 - U_1\nabla U_2)\cdot\mathbf{n} = {} & ik\mathbf{s}\cdot(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)e^{ikR\mathbf{s}\cdot(\mathbf{s}_1+\mathbf{s}_2)} \\ & - ik(1 - \mathbf{s}\cdot\mathbf{s}_1)f(\mathbf{s}, \mathbf{s}_2)\frac{e^{ikR(1+\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{s})}}{R} \\ & + ik(1 - \mathbf{s}\cdot\mathbf{s}_2)f(\mathbf{s}, \mathbf{s}_1)\frac{e^{ik(1+\mathbf{s}_2\cdot\mathbf{s})}}{R},\end{aligned} \tag{4}$$

式中曾用了 Σ 上 $\mathbf{n} = \mathbf{s}$ 和 $\mathbf{R} = R\mathbf{s}$ 这一事实。

下一步将(4)代入(2)，显然这里需要计算三个积分。第一个积分和 § 13.3(32)左边出现的积分完全相同，只是 $\mathbf{s}_2$ 改为 $-\mathbf{s}_2$ 而已。按此对 § 13.3(32)进行改动，由而得到

$$ik\iint_\Sigma \mathbf{s}\cdot(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)e^{ikR\mathbf{s}\cdot(\mathbf{s}_1+\mathbf{s}_2)}d\Sigma = 0. \tag{5}$$

其他两个积分可借助琼斯引理[§ 13.3(15)]来计算，最后求得

$$ik\iint_\Sigma (1 - \mathbf{s}\cdot\mathbf{s}_1)f(\mathbf{s}, \mathbf{s}_2)\frac{e^{ikR(1+\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{s})}}{R}\,d\Sigma = -4\pi f(-\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \tag{6}$$

和

$$ik\iint_\Sigma (1 - \mathbf{s}\cdot\mathbf{s}_2)f(\mathbf{s}, \mathbf{s}_1)\frac{e^{ikR(1+\mathbf{s}_2\cdot\mathbf{s})}}{R}\,d\Sigma = -4\pi f(-\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1). \tag{7}$$

将(4)式对整个 Σ 球进行积分，并利用(5) ~ (7)将所得到的式子代入(2)，结果得到 $f(-\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = f(-\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1)$。如果用 $-\mathbf{s}_2$ 代替 $\mathbf{s}_2$，则得到下列**倒易关系**(reciprocity relation)[①]：

$$f(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1) = f(-\mathbf{s}_1, -\mathbf{s}_2). \tag{8}$$

这个关系式表明，**一个单位振幅的单色平面波沿 $\mathbf{s}_1$ 方向入射到一散射体时，它在 $\mathbf{s}_2$ 方向产生的散射幅，等于一个单位振幅单色平面波沿 $-\mathbf{s}_2$ 方向入射到该散射体时在 $-\mathbf{s}_1$ 方向产生的散射幅**。图 13.15 说明这一结果。

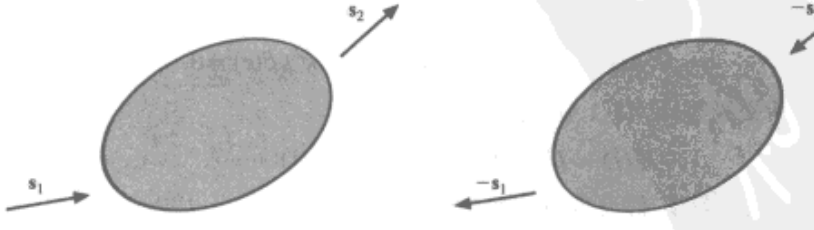


图 13.15　(8)式表达的倒易定理图示说明

① A. T. de Hoop, *Appl. Sci. Res. B*(1959 – 1960), 135 曾对电磁场推导出一个类似的关系。

13.5 Rytov 级数

在 13.1.4 节中我们扼要讨论了散射基本积分方程 § 13.1(16)的一种微扰级数解,但有时候人们也采用另一种不同的展开,出自 Rytov[①]。Rytov 展开式常用于无规媒质中波的传播问题,并用于衍射层析术。本节将对这种不同的处理方法作一简要说明。

我们的出发点仍然是 § 13.1(5),即

$$\nabla^2 U(\mathbf{r},\omega)+k^2U(\mathbf{r},\omega)=-4\pi F(\mathbf{r},\omega)U(\mathbf{r},\omega), \tag{1}$$

式中

$$F(\mathbf{r},\omega)=\frac{1}{4\pi}k^2[n^2(\mathbf{r},\omega)-1] \tag{2}$$

是散射势,$n(\mathbf{r})$是折射率。Rytov 方法的要点是将 $U(\mathbf{r},\omega)$表成一指数形式

$$U(\mathbf{r},\omega)=\mathrm{e}^{\psi(\mathbf{r},\omega)}, \tag{3}$$

(式中ψ一般是复数)并将ψ而不是将 U 展开成一微扰级数。

设 $A(\mathbf{r},\omega)$和 $\phi(\mathbf{r},\omega)$是 $U(\mathbf{r},\omega)$的振幅和(实)位相,即

$$U(\mathbf{r},\omega)=A(\mathbf{r},\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\mathbf{r},\omega)}. \tag{4}$$

这样显然

$$\psi(\mathbf{r},\omega)=\ln A(\mathbf{r},\omega)+\mathrm{i}\phi(\mathbf{r},\omega). \tag{5}$$

将(3)代入(1)就得到ψ所满足的方程如下:

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r},\omega)+[\nabla\psi(\mathbf{r},\omega)]^2=-k^2n^2(\mathbf{r},\omega). \tag{6}$$

这是一个非线性方程,它具有所谓 Riccati 方程的数学形式。

如同 13.1 节中一样,这里也假设折射率 $n(\mathbf{r},\omega)$和 1 相差很小,所以

$$n(\mathbf{r},\omega)=1+\delta n(\mathbf{r},\omega),\qquad(\delta n\ll 1). \tag{7}$$

为便于处理,现引进一个微扰参量 μ,以便让微扰展开中不同项的幂级次序有标可察。令

$$\delta n(\mathbf{r})=\tfrac{1}{2}\mu\beta(\mathbf{r}). \tag{8}$$

μ 的确切选择并无关重要。因此由(7)和(8)可知

$$n^2\approx 1+2\delta n=1+\mu\beta, \tag{9}$$

而且(6)变成

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r},\omega)+[\nabla\psi(\mathbf{r},\omega)]^2+k^2+k^2\mu\beta(\mathbf{r})=0. \tag{10}$$

刘维尔-诺伊曼级数(见 13.1 节)可表成如下形式

$$U(\mathbf{r})=U^{(0)}(\mathbf{r})+U^{(1)}(\mathbf{r})+U^{(2)}(\mathbf{r})+\cdots, \tag{11}$$

式中 $U^0\equiv U^{(i)}$代表入射场,假设为一平面波或这种波的线性叠加。$U^{(1)}\equiv U_1-U_0$ 是散射势的线性项,$U^{(2)}\equiv U_2-U_1$ 是散射势的二次项,以此类推[见 § 13.1.4(63)]。在 Rytov 方法中,如

① S. M. Rytov, *Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. FIZ*, **2**(1937), 223。

前所说，是将$\psi(\mathbf{r})$用类似方式展开，即

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r}) + \mu\psi_1(\mathbf{r}) + \mu^2\psi_2(\mathbf{r}) + \cdots, \tag{12}$$

式中ψ_1是 F 的线性项，ψ_2是 F 的二次项，如此等等。这时总场表达式(3)变成

$$U(\mathbf{r}) = \mathrm{e}^{[\psi_0(\mathbf{r})+\mu\psi_1(\mathbf{r})+\mu^2\psi_2(\mathbf{r})+\cdots]}, \tag{13}$$

称为 Rytov **展开式**。

将展开式(12)代入 Riccati 方程(10)并令两边微扰参量 μ 幂级相同的项群分别相等，可立即得到前后各项的递推关系。由此求得

$$(\nabla^2\psi_0) + (\nabla\psi_0)^2 = -k^2, \tag{14a}$$

$$\nabla^2\psi_1 + 2\nabla\psi_0 \cdot \nabla\psi_1 = -k^2\beta, \tag{14b}$$

$$\nabla^2\psi_2 + 2\nabla\psi_0 \cdot \nabla\psi_2 = (\nabla\psi_1)^2, \tag{14c}$$

$$\nabla^2\psi_3 + 2\nabla\psi_0 \cdot \nabla\psi_3 = -2(\nabla\psi_1)\cdot(\nabla\psi_2), \tag{14d}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\nabla^2\psi_n + 2\nabla\psi_0 \cdot \nabla\psi_n = -\sum_{k=1}^{n-1} \nabla\psi_n \cdot \nabla\psi_{n-k}. \tag{14e}$$

第一个方程(14a)与媒质无关，因此ψ_0必定同入射场 $U^{(i)}$相关联，即

$$\mathrm{e}^{\psi_0(\mathbf{r},\omega)} = U^{(i)}(\mathbf{r}, \omega). \tag{15}$$

其他方程的形式全属于

$$\nabla^2\psi_n + 2\nabla\psi_0 \cdot \nabla\psi_n = -g_n. \tag{16}$$

值得注意的是，方程(16)当所有前列方程已经获解时，它右边的因子 g_n 即为已知。

方程(16)可借助代换

$$\psi_n(\mathbf{r}, \omega) = \mathrm{e}^{-\psi_0(\mathbf{r},\omega)} W_n(\mathbf{r}, \omega). \tag{17}$$

而化为一种十分熟悉的形式。经一步步刻板计算，先得到

$$\nabla\psi_n = (-W_n\nabla\psi_0 + \nabla W_n)\mathrm{e}^{-\psi_0}, \tag{18}$$

$$\nabla^2\psi_n = [W_n(\nabla\psi_0)^2 - 2\nabla W_n \cdot \nabla\psi_0 - W_n(\nabla^2\psi_0) + \nabla^2 W_n]\mathrm{e}^{-\psi_0}, \tag{19}$$

再利用这些表达式和(14a)，则(16)化为

$$\nabla^2 W_n + k^2 W_n = -g_n\mathrm{e}^{\psi_0}. \tag{20}$$

方程(20)是 W_n 的一个非齐次亥姆霍兹方程。它的解用格林函数方法可以很容易得到，正如前面对 § 13.1(9)所做的那样，但是要注意这里的源项，即(20)右边的项为已知。当然，同前面一样，W_n 在无穷远处的行为也要如同一个出射球面波。根据这些可立即得知(20)的解将由下列积分给出：

$$W_n(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi}\int_V g_n(\mathbf{r}', \omega)\mathrm{e}^{\psi_0(\mathbf{r}',\omega)} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{d}^3r', \tag{21}$$

式中 $k = \omega/c$ 并且积分遍及整个散射体积 V。将(21)代回(17)，最后得到ψ_n表达式如下：

$$\psi_n(\mathbf{r},\omega)=\frac{1}{4\pi}e^{-\psi_0(\mathbf{r},\omega)}\int_V g_n(\mathbf{r}',\omega)e^{\psi_0(\mathbf{r}',\omega)}\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3r'. \tag{22}$$

回到 Rytov 展开式(13),并只保留指数中的前两项,则有

$$U(\mathbf{r},\omega)\approx U_1^{(R)}(\mathbf{r},\omega)=e^{\psi_0(\mathbf{r},\omega)+\psi_1(\mathbf{r},\omega)}. \tag{23}$$

$U_1^{(R)}$ 称为 Rytov 近似,或者更为适当地,称为第一级 Rytov 近似。如果利用(15),则可知

$$U_1^{(R)}(\mathbf{r},\omega)=U^{(i)}(\mathbf{r},\omega)e^{\psi_1(\mathbf{r},\omega)}. \tag{24}$$

计算表明,ψ_1 可以通过一个简单途径用玻恩一级近似表出。为证明此点,先看(16)和(14b),可知 $g_1=k^2\beta$。由(9)取 $\mu=1$,则 $\beta=n^2-1$,因而 $g_1=k^2(n^2-1)$。将此式代入(22)中的被积函数,再利用(15),则得到

$$\psi_1(\mathbf{r},\omega)=[U^{(i)}(\mathbf{r},\omega)]^{-1}\left\{\frac{k^2}{4\pi}\int_V[n^2(\mathbf{r}',\omega)-1]U^{(i)}(\mathbf{r}',\omega)\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3r'\right\}. \tag{25}$$

可以认出,右边大括弧中的式子就代表玻恩一级近似散射场,不过这里入射场 $U^{(i)}(\mathbf{r},\omega)$是任意场而不只限于平面波 $\exp(ik\mathbf{s}_0\cdot\mathbf{r})$[见 § 13.1(22)和 § 13.1(6)]。如果以$[U_1^{(s)}]^{(B)}$代表该式,则(25)变成

$$\psi_1(\mathbf{r},\omega)=[U^{(i)}(\mathbf{r},\omega)]^{-1}[U_1^{(s)}(\mathbf{r},\omega)]^{(B)}, \tag{26}$$

此式加上(24)式,就在 Rytov 一级近似和玻恩一级近似之间建立起一个关系。

玻恩近似和 Rytov 近似同级相比何者为优,这一问题许多出版物有过讨论,但并未达到明确共识。然而有人证明[①],如果入射场是单个平面波,则第 n 级($n\geqslant 1$)Rytov 近似所具的有效传播路程要比第 n 级玻恩近似长得多;但这一结果对较为一般的入射场并不适用。这时玻恩近似似乎具有明显优势。

13.6 电磁波的散射

此前各节,我们一直在标量理论范围内考虑不均匀媒质产生的光散射。现在将根据电磁理论来讨论这一问题。然而,完全的探讨显然较为复杂并且需要更加广泛的数学分析,所以我们将仅限于推导电磁波静态散射[②] 理论某些比较重要的结果。

13.6.1 电磁散射理论的积分-微分方程

设

$$\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r},t)=\mathcal{R}\{\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r},\omega)e^{-i\omega t}\}, \tag{1a}$$

$$\mathbf{H}^{(i)}(\mathbf{r},t)=\mathcal{R}\{\mathbf{H}^{(i)}(\mathbf{r},\omega)e^{-i\omega t}\}, \tag{1b}$$

① J. B. Keller, *J. Opt. Soc. Amer.*, **59**(1969), 1003。

② 对动态散射(即散射来自这样的媒质,它对入射场的宏观响应在随时间改变)的讨论,见 N. G. van Kampen, in *Quantum Optics, Proceedings of the International School of Physics 'Enrico Fermi'*, Course XLII, Varenna, 1967, ed. R. J. Glauber (New York, Academic, 1969), p. 235; R. Pecora, *J. Chem. Phys.*, **40**(1964), 1604; E. Wolf and J. T. Foley, *Phys. Rev.* A, **40** (1989), 579; 和 B. J. Berne and R. Pecora, *Dynamic Light Scattering* (New York, J. Wiley and Sons, 1976)。

($\mathcal{R}$表示实部)分别代表一个单色波的电场和磁场,并设此单色波入射到一散射媒质上,此媒质在自由空间中占据一个体积 V。假设这媒质的宏观特性不随时间改变。

在入射场的作用下,媒质内将感生有一个电极化强度 $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$和一个磁化强度 $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$。如果媒质的响应是线性的,$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$和 $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$将也以频率 ω 产生振荡,即二者将呈如下形式:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{R}\{\mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\}, \tag{2a}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{R}\{\mathbf{M}(\mathbf{r}, \omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\}. \tag{2b}$$

因此就产生一个新的场,其电矢量和磁矢量可表示成下列形式(从现在起,把时间依赖因子 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$省略掉,而且有时为简便起见,也把自变量 ω 省略):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^{(s)}(\mathbf{r}), \tag{3a}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^{(i)}(\mathbf{r}) + \mathbf{H}^{(s)}(\mathbf{r}), \tag{3b}$$

式中 $\mathbf{E}^{(s)}$和 $\mathbf{H}^{(s)}$代表散射场。新场 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$(入射场加散射场)以后称为总场。

对许多媒质而言,它们与弱场相互作用时,联系 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{M}$ 与 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的本构关系(constitutive relation)呈如下形式:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \eta(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{M}(\mathbf{r}) = \chi(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}), \tag{4}$$

式中 η 是介电极化率(dielectric susceptibility),χ 是磁化率(magnetic susceptibility)。一般来说,二者不仅依赖于 $\mathbf{r}$,还依赖 ω。

将适用于一般场的 § 2.2(43),§ 2.2(45),§ 2.2(38)和 § 2.2(39)特定用于单色场,并将结果代入(3a)和(3b)中的散射场 $\mathbf{E}^{(s)}$和 $\mathbf{H}^{(s)}$,则总场(入射场 + 散射场)$\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 可表成如下形式:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r}, \omega) + \operatorname{curl}\operatorname{curl}\boldsymbol{\Pi}_e(\mathbf{r}, \omega) + \mathrm{i}k\operatorname{curl}\boldsymbol{\Pi}_m(\mathbf{r}, \omega) - 4\pi\mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega), \tag{5a}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{H}^{(i)}(\mathbf{r}, \omega) + \operatorname{curl}\operatorname{curl}\boldsymbol{\Pi}_m(\mathbf{r}, \omega) - \mathrm{i}k\operatorname{curl}\boldsymbol{\Pi}_e(\mathbf{r}, \omega) - 4\pi\mathbf{M}(\mathbf{r}, \omega), \tag{5b}$$

式中 $\boldsymbol{\Pi}_e$ 和 $\boldsymbol{\Pi}_m$ 分别是电赫兹势和磁赫兹势,由下列公式定义:

$$\boldsymbol{\Pi}_e(\mathbf{r}, \omega) = \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}', \omega)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3r', \tag{6a}$$

$$\boldsymbol{\Pi}_m(\mathbf{r}, \omega) = \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}', \omega)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3r'. \tag{6b}$$

当通过本构关系(4)用电场矢量 $\mathbf{E}$ 和磁场矢量 $\mathbf{H}$ 表示(5)、(6)中的极化强度 $\mathbf{P}$ 和磁化强度 $\mathbf{M}$ 时,方程(5a)和(5b)即成为总场 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的一对耦合积分-微分方程。对这两个方程解得散射体积内各点场矢量的值之后,求散射体积 V 外各点 $\mathbf{r}$ 的场矢量值就很简单,只要把 V 内各点的解代入(5),进行积分和微分算符运算即可确定。注意对散射体积 V 外的点,(5)式右边 $4\pi\mathbf{P}$ 和 $4\pi\mathbf{M}$ 两项的值均为零。

电磁散射理论的这一对耦合积分-微分方程(5a)和(5b),相当于前面标量散射理论的积分方程 § 13.1(16)(推广到任意的入射场情况)。

13.6.2　远场

在大多数散射实验中,散射场的测量都取在远离散射体的地方。因此可以只考察远区散射场的行为。

设 $\mathbf{r}=r\mathbf{s}(\mathbf{s}^2=1)$ 是离散射体很远某点的位置矢量,$\mathbf{s}$ 是单位矢量。这时,赫兹势表达式(6a)和(6b)中被积函数的球面波因子可以用 § 13.1(18)的近似式代替(见图 13.3),即

$$\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\approx\frac{e^{ikr}}{r}e^{-ik\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}'} \tag{7}$$

并且赫兹矢量(即赫兹势)表达式(6a)和(6b)呈如下形式:

$$\boldsymbol{\Pi}_e(r\mathbf{s})\approx\tilde{\mathbf{P}}(k\mathbf{s})\frac{e^{ikr}}{r}, \tag{8a}$$

$$\boldsymbol{\Pi}_m(r\mathbf{s})\approx\tilde{\mathbf{M}}(k\mathbf{s})\frac{e^{ikr}}{r}, \tag{8b}$$

式中 $\tilde{\mathbf{P}}$ 和 $\tilde{\mathbf{M}}$ 分别是 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{M}$ 的三维傅里叶变换,即

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{k})=\int_V\mathbf{P}(\mathbf{r}')e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}d^3r', \tag{9a}$$

$$\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{k})=\int_V\mathbf{M}(\mathbf{r}')e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}d^3r'. \tag{9b}$$

(8)式是 $\boldsymbol{\Pi}_e(r\mathbf{s})$ 和 $\boldsymbol{\Pi}_m(r\mathbf{s})$ 在 $\mathbf{s}$ 方向保持固定而 $kr\to\infty$ 时的渐近近似。由(8a)和(8b),利用基本的矢量恒等式,并且只保留 $1/r$ 一次幂项,可得出

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{\Pi}_e(r\mathbf{s})\approx ik[\mathbf{s}\times\tilde{\mathbf{P}}(k\mathbf{s})]\frac{e^{ikr}}{r}, \tag{10a}$$

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl}\boldsymbol{\Pi}_e(r\mathbf{s})\approx-k^2\{\mathbf{s}\times[\mathbf{s}\times\tilde{\mathbf{P}}(k\mathbf{s})]\}\frac{e^{ikr}}{r}. \tag{10b}$$

将这些式子以及 $\boldsymbol{\Pi}_m$ 和 $\tilde{\mathbf{M}}$ 方面的类似表达式代入(5),并想到观测点在散射体外边时,$\mathbf{P}(\mathbf{r})=0$ 和 $\mathbf{M}(\mathbf{r})=0$,即得到远区电场和磁场的公式如下:

$$\mathbf{E}(r\mathbf{s},\omega)\approx\mathbf{E}^{(i)}(r\mathbf{s},\omega)-k^2\{\mathbf{s}\times[\mathbf{s}\times\tilde{\mathbf{P}}(k\mathbf{s},\omega)]+\mathbf{s}\times\tilde{\mathbf{M}}(k\mathbf{s},\omega)\}\frac{e^{ikr}}{r}, \tag{11a}$$

$$\mathbf{H}(r\mathbf{s},\omega)\approx\mathbf{H}^{(i)}(r\mathbf{s},\omega)-k^2\{\mathbf{s}\times[\mathbf{s}\times\tilde{\mathbf{M}}(k\mathbf{s},\omega)]-\mathbf{s}\times\tilde{\mathbf{P}}(k\mathbf{s},\omega)\}\frac{e^{ikr}}{r}, \tag{11b}$$

由此可见,远区散射场可表达成

$$\mathbf{E}^{(s)}(r\mathbf{s},\omega)\approx\mathbf{A}(\mathbf{s},\omega)\frac{e^{ikr}}{r}, \tag{12a}$$

$$\mathbf{H}^{(s)}(r\mathbf{s},\omega)\approx\mathbf{s}\times\mathbf{A}(\mathbf{s},\omega)\frac{e^{ikr}}{r}, \tag{12b}$$

式中

$$\mathbf{A}(\mathbf{s},\omega)=-k^2\{\mathbf{s}\times[\mathbf{s}\times\tilde{\mathbf{P}}(k\mathbf{s},\omega)]+\mathbf{s}\times\tilde{\mathbf{M}}(k\mathbf{s},\omega)\}. \tag{13}$$

由(13)显然可见,$\mathbf{s}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{s},\omega)=0$,即矢量 $\mathbf{A}(\mathbf{s},\omega)$ 垂直于 $\mathbf{s}$;另外从(12)可知,在远区中,$\mathbf{E}^{(s)}$,$\mathbf{H}^{(s)}$ 和 $\mathbf{s}$ 按此次序形成一正交右旋三矢量组(见图 13.16)。再者,$\mathbf{E}^{(s)}(r\mathbf{s})$ 和 $\mathbf{H}^{(s)}(r\mathbf{s})$ 量级还相同。因此,在远区的每一点,散射电磁场的结构如同一个平面电磁波,传播方向沿着单位矢量 $\mathbf{s}$,即散射体的外向径矢方向。从(12)还可知道,远场的整体行为是一个出射球面波。

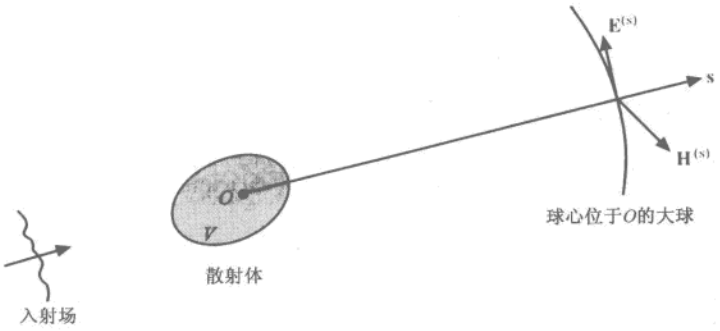


图 13.16　散射电磁场 $\mathbf{E}^{(i)}$, $\mathbf{H}^{(s)}$ 远场行为图示

(13)式中 $\tilde{\mathbf{P}}$ 和 $\widetilde{\mathbf{M}}$ 的值，正如同(6)出现的 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{M}$ 一样，取决于场矢量 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的值，而后者只有通过解积分-微分方程(5a)和(5b)耦合组才能获得。然而，如果散射场足够弱，就可以把本构关系(4)式右边 $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ 内的散射场贡献略去不计而取 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{M}$ 的近似值，即这时可用 $\eta\mathbf{E}^{(i)}$ 和 $\chi\mathbf{H}^{(i)}$ 作为 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{M}$ 的近似。这时解(5)所得到的 $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ 表达式显然相当于标量散射理论在玻恩一级近似[用任意的入射场而不限于平面波 $\exp(\mathrm{i}k\mathbf{s}_0\cdot\mathbf{r})$]精度范围计算的场表达式 § 13.1(22)。

13.6.3　电磁波散射的光学截面定理

13.3 节在标量波理论框架内讨论了所谓光学截面定理。它表达了入射平面波因散射和吸收过程而产生的能量流失速率和前向散射幅之间的关系。现在我们来推导电磁波散射的一个相应定理。

考虑一个平面单色波入射到一个形状任意的障碍物上，障碍物周围媒质中各点的场仍然可以表成为入射场和散射场之和：

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}^{(i)}+\mathbf{E}^{(s)},\qquad \mathbf{H}=\mathbf{H}^{(i)}+\mathbf{H}^{(s)}. \tag{14}$$

和通常一样，这里也省略掉时间依赖因子 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$。能流的时间平均值是用时间平均的坡印廷矢量来表示的，根据(14)和 § 1.4(56)，后者由下式给出：

$$\langle\mathbf{S}\rangle=\langle\mathbf{S}^{(i)}\rangle+\langle\mathbf{S}^{(s)}\rangle+\langle\mathbf{S}'\rangle, \tag{15}$$

式中($\mathcal{R}$表示实部)

$$\langle\mathbf{S}^{(i)}\rangle=\frac{c}{8\pi}\mathcal{R}\{\mathbf{E}^{(i)}\times\mathbf{H}^{(i)\star}\}, \tag{16a}$$

$$\langle\mathbf{S}^{(s)}\rangle=\frac{c}{8\pi}\mathcal{R}\{\mathbf{E}^{(s)}\times\mathbf{H}^{(s)\star}\}, \tag{16b}$$

$$\langle\mathbf{S}'\rangle=\frac{c}{8\pi}\mathcal{R}\{\mathbf{E}^{(i)}\times\mathbf{H}^{(s)\star}+\mathbf{E}^{(s)}\times\mathbf{H}^{(i)\star}\}. \tag{16c}$$

设围绕障碍物取一大球，半径为 R，中心位于障碍物所占区域内某点，并考虑通过此球球面的平均外向能流。每秒流出大球的净能量由$\langle\mathbf{S}\rangle$的径向分量$\langle\mathbf{S}\rangle$, 对球面的积分来表出。当障碍物是一个没有吸收的介电体时，这一外向能流净值显然为零。然而，如果障碍物是一导电体，则一些入射能量将被它吸收，因而通过球面的外向能流净值在大小上将等于吸收发生的速率。设$\mathcal{W}^{(a)}$是能量被障碍物吸收的速率。于是，从(15)得出

$$-\mathcal{W}^{(a)}=\mathcal{W}^{(i)}+\mathcal{W}^{(s)}+\mathcal{W}', \tag{17}$$

式中$\mathcal{W}^{(i)}$,$\mathcal{W}^{(s)}$和$\mathcal{W}'$分别是径向分量$\langle\mathbf{S}^{(i)}\rangle_r$,$\langle\mathbf{S}^{(s)}\rangle_r$和$\langle\mathbf{S}'\rangle_r$对大球面的积分。通过和标量情况中导致§13.3(11)的类似讨论,可以很容易证明$\mathcal{W}^{(i)}=0$,所以

$$\mathcal{W}^{(a)}+\mathcal{W}^{(s)}=-\mathcal{W}'=-\frac{c}{8\pi}\mathcal{R}\iint_{\Sigma}\{\mathbf{E}^{(i)}\times\mathbf{H}^{(s)\star}+\mathbf{E}^{(s)}\times\mathbf{H}^{(i)\star}\}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S, \tag{18}$$

S代表大球面,$\mathbf{n}$代表单位外向法线。因此,(18)右边的式子代表入射辐射能量因转化为热和不断散射而耗散的速率。

设$\mathbf{s}_0$是入射波传播方向上的单位矢量,所以

$$\mathbf{E}^{(i)}=\mathbf{e}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\mathbf{s}_0\cdot\mathbf{r})},\qquad \mathbf{H}^{(i)}=\mathbf{h}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\mathbf{s}_0\cdot\mathbf{r})}. \tag{19}$$

假定这个波是线偏振波,所以$\mathbf{e}$和$\mathbf{h}$可以假设为实单位矢量。在离障碍物很远的地方,散射波是球面波[见(12)式]:

$$\mathbf{E}^{(s)}=\mathbf{a}(\mathbf{s})\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r},\qquad \mathbf{H}^{(s)}=\mathbf{b}(\mathbf{s})\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}. \tag{20}$$

矢量$\mathbf{a}(\mathbf{s})$和$\mathbf{b}(\mathbf{s})$表征着$\mathbf{s}$方向上散射辐射的振幅强度。因为入射波和散射波都服从麦克斯韦方程,所以有[见§1.4(4),§1.4(5),令$\varepsilon=\mu=1$]

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{h}=\mathbf{s}_0\times\mathbf{e},\qquad &&\mathbf{b}=\mathbf{s}\times\mathbf{a},\\&\mathbf{s}_0\cdot\mathbf{e}=\mathbf{s}_0\cdot\mathbf{h}=0,\qquad &&\mathbf{s}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{s}\cdot\mathbf{b}=0.\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

从这些关系可以得到,在大球面Σ上,

$$\left.\begin{aligned}(\mathbf{E}^{(i)}\times\mathbf{H}^{(s)\star})\cdot\mathbf{s}&=\mathbf{e}\cdot\mathbf{a}^{\star}(\mathbf{s})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR(\mathbf{s}_0\cdot\mathbf{s})}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR}}{R},\\(\mathbf{E}^{(s)}\times\mathbf{H}^{(i)\star})\cdot\mathbf{s}&=\{(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}_0)[\mathbf{a}(\mathbf{s})\cdot\mathbf{e}]-(\mathbf{s}\cdot\mathbf{e})[\mathbf{s}_0\cdot\mathbf{a}(\mathbf{s})]\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR(\mathbf{s}_0\cdot\mathbf{s})}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R},\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

式中曾用了在大球面Σ上$\mathbf{n}=\mathbf{s}$这一事实。现在把这些式子代入(18)。所形成的积分可借助琼斯引理[§13.3(15)]来计算。于是得到

$$\left.\begin{aligned}\iint_{\Sigma}(\mathbf{E}^{(i)}\times\mathbf{H}^{(s)\star})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S&\approx-\frac{2\pi\mathrm{i}}{k}[\mathbf{e}\cdot\mathbf{a}^{\star}(\mathbf{s}_0)-\mathbf{e}\cdot\mathbf{a}^{\star}(-\mathbf{s}_0)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}kR}],\\\iint_{\Sigma}(\mathbf{E}^{(s)}\times\mathbf{H}^{(i)\star})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S&\approx-\frac{2\pi\mathrm{i}}{k}[\mathbf{e}\cdot\mathbf{a}(\mathbf{s}_0)+\mathbf{e}\cdot\mathbf{a}(-\mathbf{s}_0)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kR}],\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

而(18)变成

$$\mathcal{W}^{(s)}+\mathcal{W}^{(a)}=\frac{c}{2k}\mathcal{I}[\mathbf{e}\cdot\mathbf{a}(\mathbf{s}_0)], \tag{24}$$

式中$\mathcal{I}$表示虚部。

关系式(24)意味着,**当入射光是线偏振光时,能量耗散的速率正比于散射波的一个特定的振幅分量,它就是前向散射($\mathbf{s}=\mathbf{s}_0$)的振幅在入射波电矢量方向($\mathbf{e}$)的分量。**

同标量散射情况一样,能量耗散速率($\mathcal{W}^{(a)}$)+$\mathcal{W}^{(s)}$)和障碍物单位截面上的能量入射速率$|\langle\mathbf{S}^{(i)}\rangle|$之比$Q$,叫做障碍物的**消光截面**。由(16a),(19)和(21)可知,$|\langle\mathbf{S}^{(i)}\rangle|=c\mathbf{e}^2/8\pi$,所以

按照(24)即有

$$Q=\frac{W^{(s)}+W^{(a)}}{|\langle \mathbf{S}^{(i)}\rangle|}=\frac{4\pi}{k}\mathcal{I}\left\{\frac{\mathbf{e}\cdot\mathbf{a}(\mathbf{s}_0)}{\mathbf{e}^2}\right\}. \tag{25}$$

公式(25)表达了电磁波散射情况的**光学截面定理**。

还可用类似方式定义障碍物的**散射截面** $Q^{(s)}$ 和**吸收截面** $Q^{(a)}$：

$$Q^{(s)}=\frac{W^{(s)}}{|\langle \mathbf{S}^{(i)}\rangle|},\qquad Q^{(a)}=\frac{W^{(a)}}{|\langle \mathbf{S}^{(i)}\rangle|}, \tag{26}$$

并且显然 $Q=Q^{(s)}+Q^{(a)}$。对没有吸收的障碍物，$Q^{(a)}=0$，这时消光截面等于散射截面。

第14章　金属光学

此前各章所谈的都是不导电、各向同性媒质中光的传播。现在我们将注意力转向导电媒质的光学性质。普通金属块是一种晶粒聚集体，由无规取向的小晶体构成。块头可观的金属单晶在自然界甚属罕见，但能用人工方法生产；它们的光学性质将在第15章研究。由取向无规的微晶组成的混合物，其物性表现如同一个各向同性物质，而且因为各向同性导电媒质中光的传播理论比晶体中的要简单得多，所以本书我们只对这种媒质作稍详探讨。

根据1.1节，电导率的存在总伴随出现焦耳热。这是个不可逆现象，其中电磁能被消灭，或者更确切地说，被转变成热，因而电磁波在导体中发生衰减。在金属，由于其电导率非常高，所以这一衰减效应非常之强，以致金属实际上是不透明的。尽管如此，金属在光学中仍具有重要作用。强的吸收伴随有高的反射，所以金属面可作为优等反射镜。由于光有一部分进入金属内，所以从观测金属的反射光能够获得关于金属吸收常数和吸收机制的信息，即使进入深度很浅。

本章内容安排如下：首先在纯形式上考虑电导率的存在所产生的各个结果，包括吸收系数的引进和物质反射性质的改变，等等（见14.1节和14.2节），然后在物理上为这一形式处理扼要讨论一种简单的、有些理想化的经典电子论模型——该模型只能大体解释所观测到的某些效应；更为精确的模型只有借助量子力学方可获得，因而已超越本书范围。最后，讨论两个示例，将上述形式理论应用于两个具有实际价值的问题：14.4节讨论分层媒质含有一吸收层时的光学性质，14.5节讨论金属球粒产生的衍射（即第11章中曾经提及的米氏散射）。

本章理论特别令人注目的一个数学特点是，仅仅依靠引进一个复介电常数（或一个复折射率）来代替原有的实介电常数（或实折射率），就可以把电导率的存在所产生的影响完全考虑进来。在金属，复介电常数的虚部是起主导作用的。

14.1　波在导体中的传播

考虑一均匀各向同性媒质，其介电常数为 ε，磁导率为 μ，电导率为 σ。利用物质方程 §1.1(9)～(11)，即 $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$，$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$，$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$，则麦克斯韦方程呈如下形式：

$$\operatorname{curl}\mathbf{H}-\frac{\varepsilon}{c}\dot{\mathbf{E}}=\frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E}, \tag{1}$$

$$\operatorname{curl}\mathbf{E}+\frac{\mu}{c}\dot{\mathbf{H}}=0, \tag{2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho, \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=0. \tag{4}$$

不难看出，当电磁扰动从外界射入导体内时，可以用 $\operatorname{div}\mathbf{E}=0$ 代替(3)式。因为如果取(1)的散度并利用(3)，则得到

$$-\frac{\varepsilon}{c}\operatorname{div}\dot{\mathbf{E}}=\frac{4\pi\sigma}{c}\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho.$$

此外，取(3)式对时间的微商，有

$$\operatorname{div}\dot{\mathbf{E}}=\frac{4\pi}{\varepsilon}\dot{\rho}.$$

从最后两个方程中消去 $\operatorname{div}\dot{\mathbf{E}}$，得到

$$\dot{\rho}+\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\rho=0, \tag{5}$$

经积分后，结果为

$$\rho=\rho_0 e^{-t/\tau}, \qquad \text{式中 } \tau=\frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}. \tag{6}$$

由此可见，金属内的任何电荷密度都将依指数规律衰减掉。对任何媒质而言，凡具有显著电导性的，这一衰减的**弛豫时间** τ 都非常之小。对于金属，这一时间比波的振动周期要短得非常多(典型值量级为 10^{-18} 秒)。因此，可以假设金属中的 ρ 理所当然永远为零。所以(3)可写成为

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=0. \tag{7}$$

从(1)和(2)中消去 $\mathbf{H}$ 并利用(7)，即可得到 $\mathbf{E}$ 满足波动方程

$$\nabla^2\mathbf{E}=\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\ddot{\mathbf{E}}+\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\dot{\mathbf{E}}. \tag{8}$$

$\dot{\mathbf{E}}$ 项意味着导电媒质中的波是阻尼波，即当波通过该媒质时要不断衰减。

如果场是严格单色的，角频率为 ω，即如果 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 随时间变化的形式是 $\mathbf{E}=\mathbf{E}_0e^{-i\omega t}$，$\mathbf{H}=\mathbf{H}_0e^{-i\omega t}$，则有 $\partial/\partial t\equiv-i\omega$，因而这时(1)和(2)可改写成

$$\operatorname{curl}\mathbf{H}+\frac{i\omega}{c}\left(\varepsilon+i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)\mathbf{E}=0, \tag{9}$$

$$\operatorname{curl}\mathbf{E}-\frac{i\omega\mu}{c}\mathbf{H}=0, \tag{10}$$

而(8)式变成

$$\nabla^2\mathbf{E}+\hat{k}^2\mathbf{E}=0, \tag{11}$$

式中

$$\hat{k}^2=\frac{\omega^2\mu}{c^2}\left(\varepsilon+i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right). \tag{12}$$

这些方程在形式上和不导电媒质情况的相应方程完全相同，只要在后者中把介电常数 ε (2.3.4 节业已证明，除频率 ω 接近某共振频率时，ε 在良好近似上是实数)更换为

$$\hat{\varepsilon}=\varepsilon+i\frac{4\pi\sigma}{\omega}. \tag{13}$$

如果在复波数 $\hat{k}$ 和复介电常数 $\hat{\varepsilon}$ 外，再引进一个复相速度 $\hat{v}$ 和一个复折射率 $\hat{n}$，并按照 §1.2(8)，§1.2(12)和§1.3(21)的同样方式定义为

$$\hat{v}=\frac{c}{\sqrt{\mu\hat{\varepsilon}}},\qquad \hat{n}=\frac{c}{\hat{v}}=\sqrt{\mu\hat{\varepsilon}}=\frac{c}{\omega}\hat{k}, \tag{14}$$

则导电媒质和不导电媒质在处理上的类似变得更为接近。令

$$\hat{n}=n(1+\mathrm{i}\kappa), \tag{15}$$

式中 n 和 κ 是实量,κ 叫做**衰减指数**[①] (attenuation index)。n 和 κ 这两个量可以很容易用物质常数 ε,μ 和 σ 来表出。取(15)式的平方,有

$$\hat{n}^2=n^2(1+2\mathrm{i}\kappa-\kappa^2). \tag{15a}$$

另外由(14)和(13)两式,

$$\hat{n}^2=\mu\hat{\varepsilon}=\mu\left(\varepsilon+\mathrm{i}\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right). \tag{16}$$

这里 σ,正如 ε 一样,并非真正的物质常数,而是随频率改变。后面(见 14.3 节)将看到,当频率足够低时(长波),σ 在良好近似上是实量。假设 ε 也是实量,则在此情况下,令(15a)和(16)两式的虚部和实部分别相等,即得到下列关系:

$$n^2(1-\kappa^2)=\mu\varepsilon, \tag{16a}$$

$$n^2\kappa=\frac{2\pi\mu\sigma}{\omega}=\frac{\mu\sigma}{\nu}. \tag{16b}$$

从这两个方程可以得出

$$n^2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\mu^2\varepsilon^2+\frac{4\mu^2\sigma^2}{\nu^2}}+\mu\varepsilon\right), \tag{17a}$$

$$n^2\kappa^2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\mu^2\varepsilon^2+\frac{4\mu^2\sigma^2}{\nu^2}}-\mu\varepsilon\right). \tag{17b}$$

这里平方根取正号,因为 n 和 $n\kappa$ 是实量,所以 n^2 和 $n^2\kappa^2$ 必须为正。

方程(11)在形式上和不导电媒质情况的波动方程完全相同,但波数现在是复量。它最简单的解是一平面时谐波

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\hat{k}\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}-\omega t]}. \tag{18}$$

如果按照(14)和(15),以关系式 $\hat{k}=\omega\hat{n}/c=\omega n(1+\mathrm{i}\kappa)/c$ 代入,则(18)变成

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\omega}{c}n\kappa\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega[\frac{n}{c}\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}-t]}.$$

此式的实部,即

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\omega}{c}n\kappa\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}}\cos\left\{\omega\left[\frac{n}{c}\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}-t\right]\right\}, \tag{19}$$

(它代表电矢量)是一个平面波,其波长 $\lambda=2\pi c/\omega n$,并且振幅有衰减,由指数项给出。因为波的能量密度 w 正比于 $\mathbf{E}^2$ 的时间平均值。由此可知 w 按下列关系而减小:

$$w=w_0\,\mathrm{e}^{-\chi\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}}, \tag{20}$$

① 也有用"消光系数"(extinction coefficient)一词的。

式中

$$\chi=\frac{2\omega}{c}n\kappa=\frac{4\pi\nu}{c}n\kappa=\frac{4\pi}{\lambda_0}n\kappa=\frac{4\pi}{\lambda}\kappa, \tag{21}$$

λ_0 是真空中的波长，λ 是媒质中的波长。常数 χ [在 §4.11(6)中曾用 α 代表]叫做**吸收系数**。

设能量密度减小到它原值 1/e 时波所前进的距离为 d，则

$$d=\frac{1}{\chi}=\frac{\lambda_0}{4\pi n\kappa}=\frac{\lambda}{4\pi\kappa}. \tag{22}$$

这个量通常只有波长的很小一部分(见表 14.1)[①]。

表 14.1　三个常见谱区的辐射对金属铜的"进入深度" d 计算值，采用静电导率 $\sigma\approx5.14\times10^{17}$ 秒$^{-1}$ 和 $\mu=1$

辐　射	红　外	微　波	长无线电波
λ_0	10^{-3} 厘米	10 厘米	1000 米 $=10^5$ 厘米
d	6.1×10^{-7} 厘米	6.1×10^{-5} 厘米	6.1×10^{-3} 厘米

现在回到(17)式。此式表明，当 $\sigma=0$ 时，第一个方程正确地化为麦克斯韦关系 §1.2(14) $n^2=\mu\varepsilon$，而第二个方程给出 $\kappa=0$。对于金属，$\sigma\neq0$，而且实际如此之大，以致(17)式中 ε 与 $2\sigma/\nu$ 相比可予略去。为了对有关各量的数量级有一概念，现举一些数据作为说明。对于大多数金属，从低频一直到光谱的大约红外区($\lambda\gtrsim10^{-3}$ 厘米)，电导率的量级为 10^{17} 秒$^{-1}$。这样，例如取 $\lambda=10^{-3}$ 厘米($\nu\approx3\times10^{13}$ 秒$^{-1}$)，则有 $\sigma/\nu\approx3000$。金属的介电常数 ε 不能直接测量，但是后面即将看到，它可从光学实验数据和相应公式间接求出。然而，因为金属中的电极化机理和介质中的基本上没有差别，所以可假设二者的 ε 具有相同的数量级。因此，只要波长不太短，即可假定

$$\frac{\mu\sigma}{\nu}=n^2\kappa\gg\mu\varepsilon. \tag{23}$$

方程(17)和(22)这时简化成

$$n\approx n\kappa=\sqrt{\frac{\mu\sigma}{\nu}}, \tag{24}$$

$$d\approx\frac{\lambda_0}{4\pi}\sqrt{\frac{\nu}{\mu\sigma}}=\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{c\lambda_0}{\mu\sigma}}=\frac{c}{\sqrt{8\pi\mu\sigma\omega}}. \tag{25}$$

一个理想的导体是以电导率无穷大($\sigma\to\infty$)为表征的。因为按照(16)式，$\varepsilon/\sigma=(1-\kappa^2)/\nu\kappa$，所以该极限情况得到 $\kappa^2\to1$，或者由(16a)有 $n\to\infty$。这样的导体将不允有丝毫电磁波进入其地界之内而是将全部入射光悉行反射(见下文 14.2 节)。

虽然透明物质的折射率很容易从测量折射角来测定，但这种测量对金属做来就极端困难，因为一个金属样品必须异常之薄方能让入射光有所透过而足以观测。尽管如此，1888 年左右孔特[②] (Kundt)还是制成了金属棱镜，从而能直接测量其复折射率的实部和虚部。然而，通常

① 在交流电传导中，进入深度仅为波长的一小部分这一现象已属众所周知，并被工程师们称为"趋肤效应"。

② A. Kundt, *Ann. d. Physik*, **34**(1888), 469。

情况下,金属的光学常数是借助反射实验而非依靠透射测量来测定,即通过研究光在金属面上反射时所发生的变化,而非借助测量其透射光。

14.2 金属面的反射和折射

前节我们看到,导电媒质中时谐平面波传播所服从的基本方程,与透明电介质中的传播相比,差别仅在于前者用复常数 $\hat{\varepsilon}$ 和 $\hat{k}$ 替代了实数 ε 和 k。由此可知,第 1 章所推导的各项公式,只要它们所包含的只是平面单色波场矢量分量之间的线性关系,就都可应用于本章情况。特别是,波在传播中通过突变面时的边界条件,以及 1.5 节中与折射和反射有关的各项公式也都仍然有效。

首先考虑一个平面波在传播中从一介电体进入一导体的情况,设其中二媒质的范围均为无穷大,并且二者的接触面是平面 $z=0$。与 § 1.5(8)相类似,这时折射定律为

$$\sin\theta_t = \frac{1}{\hat{n}}\sin\theta_i. \tag{1}$$

因 $\hat{n}$ 为复量,所以 θ_t 也是复量,因而此量不再具有简单的折射角意义。

设入射面为 x-z 平面。导体中波的位相的空间变化由 $\hat{k}\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}(t)$表出,式中[见 § 1.5(4)]

$$s_x^{(t)} = \sin\theta_t, \qquad s_y^{(t)} = 0, \qquad s_z^{(t)} = \cos\theta_t. \tag{2}$$

从(1),(2)和 § 14.1(15)三式

$$s_x^{(t)} = \sin\theta_t = \frac{\sin\theta_i}{n(1+\mathrm{i}\kappa)} = \frac{1-\mathrm{i}\kappa}{n(1+\kappa^2)}\sin\theta_i, \tag{3a}$$

$$\begin{aligned} s_z^{(t)} = \cos\theta_t &= \sqrt{1-\sin^2\theta_t} \\ &= \sqrt{1-\frac{(1-\kappa^2)}{n^2(1+\kappa^2)^2}\sin^2\theta_i + \mathrm{i}\frac{2\kappa}{n^2(1+\kappa^2)^2}\sin^2\theta_i}. \end{aligned} \tag{3b}$$

为便于计算,现将 $s_z^{(t)}$ 表成下列形式

$$s_z^{(t)} = \cos\theta_t = q\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma} \tag{4}$$

(q,γ 为实量),取(3b)和(4)两式平方,并令二者虚部和实部分别相等,即可得到用 n,κ 和 $\sin\theta_i$ 表出的 q 和 γ。结果为

$$\left.\begin{aligned} q^2\cos 2\gamma &= 1-\frac{1-\kappa^2}{n^2(1+\kappa^2)^2}\sin^2\theta_i, \\ q^2\sin 2\gamma &= \frac{2\kappa}{n^2(1+\kappa^2)^2}\sin^2\theta_i. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

由此得出

$$\begin{aligned} \hat{k}\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}^{(t)} &= \frac{\omega}{c}n(1+\mathrm{i}\kappa)(xs_x^{(t)} + zs_z^{(t)}) \\ &= \frac{\omega}{c}n(1+\mathrm{i}\kappa)\left[\frac{x(1-\mathrm{i}\kappa)}{n(1+\kappa^2)}\sin\theta_i + z(q\cos\gamma + iq\sin\gamma)\right] \\ &= \frac{\omega}{c}[x\sin\theta_i + znq(\cos\gamma - \kappa\sin\gamma) + \mathrm{i}nzq(\kappa\cos\gamma + \sin\gamma)]. \end{aligned} \tag{6}$$

从(6)式可知等幅面方程为

$$z = 常数, \tag{7}$$

因此等幅面是平行于界面的平面。等实位相的面方程为

$$x\sin\theta_i + znq(\cos\gamma - \kappa\sin\gamma) = 常数, \tag{8}$$

因而等相面也是平面,其法线同界面法线的夹角 θ_t' 满足

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta_t' &= \frac{nq(\cos\gamma - \kappa\sin\gamma)}{\sqrt{\sin^2\theta_i + n^2q^2(\cos\gamma - \kappa\sin\gamma)^2}},\\ \sin\theta_t' &= \frac{\sin\theta_i}{\sqrt{\sin^2\theta_i + n^2q^2(\cos\gamma - \kappa\sin\gamma)^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

因为(7)和(8)的等幅面和等相面一般不相互重合,所以金属中的波是**非均匀波**。

如果用 n' 代表(9)式中的平方根,则 $\sin\theta_t'$ 的方程可以写成 $\sin\theta_t' = \sin\theta_i/n'$,即斯涅耳定律的形式。然而,$n'$ 这时不仅依赖于确定媒质性质的量,而且还同入射角 θ_i 有关。

此外,通过把(1)式所给出的复 θ_t 代入菲涅耳公式(见 1.5.2 节),可以推导出折射波和反射波的振幅和位相。其显式将在 14.4.1 节讨论分层导电媒质时给出。这里先考虑如何能从反射波的观测求出金属的光学常数。

因为第一媒质已假设是介电体,所以反射波是普通的(均匀)波,其位相因子是实量。如 § 1.5(21a)所示,入射波振幅分量 $A_\parallel$,$A_\perp$ 和反射波相应分量 $R_\parallel$,$R_\perp$ 之间的关系是

$$\left.\begin{aligned}R_\parallel &= \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}A_\parallel,\\ R_\perp &= -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}A_\perp.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

因为 θ_t 现在是复量,所以 $R_\parallel/A_\parallel$ 和 $R_\perp/A_\perp$ 也是复量,即反射时波的位相要发生反映金属特性的改变;因此入射的线偏振光经金属面反射后将变成椭圆偏振光。设 $\phi_\parallel$ 和 $\phi_\perp$ 是位相改变,$\rho_\parallel$ 和 $\rho_\perp$ 是反射系数的绝对值,即

$$r_\parallel = \frac{R_\parallel}{A_\parallel} = \rho_\parallel e^{i\phi_\parallel}, \qquad r_\perp = \frac{R_\perp}{A_\perp} = \rho_\perp e^{i\phi_\perp}. \tag{11}$$

假定入射光是**线偏振光**,振动方位角为 α_i,即

$$\tan\alpha_i = \frac{A_\perp}{A_\parallel}, \tag{12}$$

并设 α_r 是光被反射后的方位角(一般是复量)。因此[①]

$$\tan\alpha_r = \frac{R_\perp}{R_\parallel} = -\frac{\cos(\theta_i - \theta_t)}{\cos(\theta_i + \theta_t)}\tan\alpha_i = Pe^{-i\Delta}\tan\alpha_i, \tag{13}$$

式中

$$P = \frac{\rho_\perp}{\rho_\parallel}, \qquad \Delta = \phi_\parallel - \phi_\perp. \tag{14}$$

① (13)式右边指数因子中用 $-i\Delta$ 而不用 $+i\Delta$,以便同 1.5 节的某些结果进行比较。

可以注意,α_r 在下列两种情况为实量:

(1) 正入射($\theta_i = 0$);这时 $P = 1$,并且 $\Delta = -\pi$,所以 $\tan\alpha_r = -\tan\alpha_i$。

(2) 掠入射($\theta_i = \pi/2$);这时 $P = 1$,并且 $\Delta = 0$,所以 $\tan\alpha_r = \tan\alpha_i$。

当可记得,在正入射情况下,入射光线和反射光线方向相反;因此,负号意味着,线偏振光的方位角就它在空间的绝对方向来说并没有改变。同样掠入射时方位角的绝对方向也不改变。

在上述两种极端情况之间,存在一个入射角 $\bar{\theta}_i$,叫做**主入射角**,能使 $\Delta = -\pi/2$。在此入射角下,线偏振光一般反射成椭圆偏振光,但从 §1.4(31b)(取 $\delta = \pi/2$)可以看出,这时振动椭圆的两个主轴分别平行于和垂直于入射面。此外如果还有 $P\tan\alpha_i = 1$,则按照(13),$\tan\alpha_r = -\mathrm{i}$,因而反射光是**圆**偏振光。

假定在采用线偏振光入射时,借助适当的补偿器(见 15.2 节)在反射光的 $R_\parallel$ 和 $R_\perp$ 之间引进一个附加位相差 Δ,以补偿掉金属反射所产生的位相差 $-\Delta$,则总位相差为零,并且按照(13),反射光是线偏振光,其方位角 α'_r 满足

$$\tan\alpha'_r = P\tan\alpha_i. \tag{15}$$

出于明显的理由,角 α'_r 叫做**回复偏振角**(angle of restored polarization),虽然这个角的定义通常限定入射光的线偏振方位角 $\alpha_i = 45°$[①]。当入射角为主入射角即 $\theta_i = \bar{\theta}_i$ 时,相关的 α'_r 值和 P 值将分别用 $\bar{\alpha}'_r$ 和 $\bar{P}$ 代表。当线偏振光在主入射角下入射时,如上所说,反射光(未经补偿时)的振动椭圆主轴将平行于和垂直于入射面,如果通过想像给该椭圆外接一长方形,令其二边平行于和垂直于入射面,则二边长度之比为 $\bar{P}\tan\alpha_i$,而对角线与入射面的夹角为 $\bar{\alpha}'_r$(见图 14.1)。

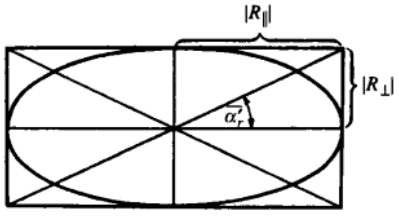


图 14.1 在主入射角下金属反射光的振动椭圆

为稍后计算用,现引进一个角 Ψ,定义为

$$\tan\Psi = P; \tag{16}$$

而对应主入射角的 Ψ 值将用 $\bar{\Psi}$ 来代表:$\tan\bar{\Psi} = \bar{P}$。

如果金属的光学常数 n 和 κ 为已知,则利用(10)和(11)可计算 $P(=\tan\Psi)$ 和 Δ 这两个量与入射角 θ_i 的关系。图 14.2(a)则给出典型情况下 P 和 Δ 随 θ_i 的变化曲线。图 14.2(b)则展示透明介电体反射的相应曲线以资比较。后者的 Δ 值有一个不连续点,从 $-\pi$ 突然降为零,发生在偏振角下的反射,而在金属面的光反射中不存在这样的突变点。同样,在介质情况下,$\tan\Psi$ 变成无穷大时曲线的陡突上升,在金属也不存在,而是被一条具有一个相当宽的极大的光滑曲线所取代。这个极大发生在的入射角叫做**准起偏角**,它接近等于主入射角 $\bar{\theta}_i$。通常假

① 这时 α'_r 等于(16)式引进的角 Ψ。

定该极大就在 $\bar{\theta}_i$ 处，如果 $n^2(1+\kappa^2) \gg 1$——情况通常如此（参见表 7.3），这几乎完全属实。然而，一般而言，这两个角并不相同；例如，就银的情况来说，在紫外波长 3280 埃处，$n^2(1+\kappa^2)$ 这个量很小，这时 $\bar{\theta}_i = 47.8°$，$\overline{\Psi} = 58.2°$，而 $\Psi_{极大} = 60.5°$ 并发生在 $\theta_i = 40°$ 左右（此处原文有误，已予改正——译者注①）。

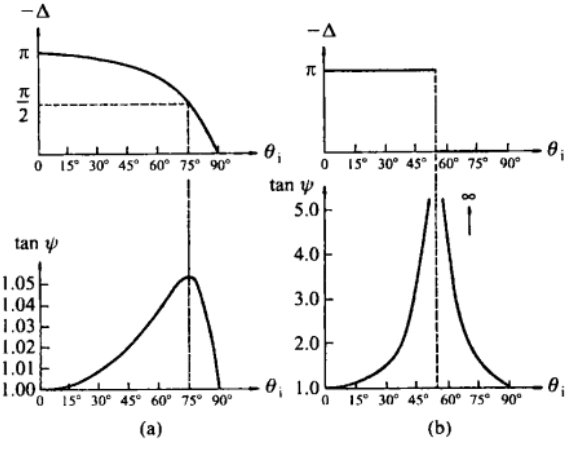


图 14.2　量 $-\Delta = \phi_\perp - \phi_\parallel$ 和量 $P = \tan\Psi = \rho_\perp / \rho_\parallel$ 随入射角 θ_i 的变化曲线，表征反射时光的偏振态改变：(a)典型金属面反射；(b)透明介电体反射

一般而言，实际问题并非从已知的 n 和 κ 去求 Ψ 和 Δ，而是反过来，从实验上观测金属反射光的振幅和位相来测定 n 和 κ。

因为 $R_\parallel, R_\perp, \phi_\parallel, \phi_\perp, \Psi$ 和 Δ 各量都是 θ_i 的函数，也都是 n 和 κ 的函数，所以在一个特定入射角 θ_i 下测量这些量中的任何两个，一般将能计算出 n 和 κ。因为许多实验都是测定这些量中的最后两个，即 Ψ 和 Δ，所以下面就来推导用 Ψ 和 Δ 表出 n 和 κ 的基本公式。由(13)和(1)

$$\frac{1 - Pe^{-i\Delta}}{1 + Pe^{-i\Delta}} = -\frac{\cos\theta_i \cos\theta_t}{\sin\theta_i \sin\theta_t} = -\frac{\sqrt{\hat{n}^2 - \sin^2\theta_i}}{\sin\theta_i \tan\theta_i}. \tag{17}$$

因为 $P = \tan\Psi$，(17)左边可表成如下形式：

$$\frac{1 - Pe^{-i\Delta}}{1 + Pe^{-i\Delta}} = \frac{1 - e^{-i\Delta}\tan\psi}{1 + e^{-i\Delta}\tan\psi} = \frac{\cos 2\psi + i \sin 2\psi \sin\Delta}{1 + \sin 2\psi \cos\Delta}. \tag{18}$$

由(17)和(18)，

$$\frac{\sqrt{\hat{n}^2 - \sin^2\theta_i}}{\sin\theta_i \tan\theta_i} = -\frac{\cos 2\psi + i \sin 2\psi \sin\Delta}{1 + \sin 2\psi \cos\Delta}. \tag{19}$$

---

① 原书初版(13)式为 $Pe^{-i\Delta} = -\frac{\cos(\theta_i + \theta_t)}{\cos(\theta_i - \theta_t)}$，有误（这是 Born，*Optik*(1933)书中 p263(5)式，而该书定义 $P = \left|\frac{R_\parallel}{R_\perp}\right|$，与本书定义的 $P = \frac{\rho_\perp}{\rho_\parallel}$ 互为倒数），初版图 14.2(a)，图 14.2(b)的曲线 $\tan\Psi \approx \theta_i$（仍沿用 *Optik* 书中的结果）因而也错了，后经改正。但正文此处 $\overline{\Psi} = 31.8°$ 和 $\Psi_{max} = 29.5°$ 的值未加改正，仅把 Ψ_{min} 改正为 Ψ_{max}，故读来费解（为何 $\Psi_{max} < \overline{\Psi}$?）。现据 $\tan\overline{\Psi} = \frac{1}{\tan 31.8°}$，$\tan\Psi_{max} = \frac{1}{\tan 29.5°}$ 关系改正——译者注。

如果,如通常在可见区的情况,

$$n^2(1+\kappa^2)\gg 1, \tag{20}$$

则 $\sin^2\theta_i$ 与 $\hat{n}^2$ 相比可以略去,于是得到

$$\frac{\hat{n}}{\sin\theta_i\tan\theta_i}=\frac{n(1+\mathrm{i}\kappa)}{\sin\theta_i\tan\theta_i}\approx-\frac{\cos 2\psi+\mathrm{i}\sin 2\psi\sin\Delta}{1+\sin 2\psi\cos\Delta}. \tag{21}$$

令实部相等,即得到

$$n\approx-\frac{\sin\theta_i\tan\theta_i\cos 2\psi}{1+\sin 2\psi\cos\Delta}. \tag{22a}$$

令虚部相等并利用(22a),则可求得

$$\kappa\approx\tan 2\psi\sin\Delta. \tag{22b}$$

因此测量任何入射角下的ψ和 Δ,即可从(22a)和(22b)两式计算出光学常数 n 和κ。在特别情况下,当观测选取在主入射角 $\bar{\theta}_i$ 时,$\Delta=-\pi/2$,$\psi=\bar{\psi}$,则(22a)和(22b)简化为

$$n\approx-\sin\bar{\theta}_i\tan\bar{\theta}_i\cos 2\bar{\psi}, \tag{23a}$$

$$\kappa\approx-\tan 2\bar{\psi}. \tag{23b}$$

其他与 n 和κ 有关的公式有时也有用途。无需假设(20),直接取(19)的平方,即有

$$\frac{\hat{n}^2-\sin^2\theta_i}{\sin^2\theta_i\tan^2\theta_i}=\frac{\cos^2 2\psi-\sin^2 2\psi\sin^2\Delta+\mathrm{i}\sin 4\psi\sin\Delta}{(1+\sin 2\psi\cos\Delta)^2}. \tag{24}$$

如果把 $\hat{n}^2=n^2(1-\kappa^2)+2\mathrm{i}n^2\kappa$ 代入,并令两边实部和虚部分别相等,则得到

$$n^2(1-\kappa^2)=\sin^2\theta_i\left[1+\frac{\tan^2\theta_i(\cos^2 2\psi-\sin^2 2\psi\sin^2\Delta)}{(1+\sin 2\psi\cos\Delta)^2}\right], \tag{25a}$$

$$2n^2\kappa=\frac{\sin^2\theta_i\tan^2\theta_i\sin 4\psi\sin\Delta}{(1+\sin 2\psi\cos\Delta)^2}. \tag{25b}$$

在特别情况下,在主入射角处($\theta=\bar{\theta}_i$,$\Delta=-\pi/2$),这些方程简化为①

$$n^2(1-\kappa^2)=\sin^2\bar{\theta}_i(1+\tan^2\bar{\theta}_i\cos 4\bar{\psi}), \tag{26a}$$

$$2n^2\kappa=-\sin^2\bar{\theta}_i\tan^2\bar{\theta}_i\sin 4\bar{\psi}. \tag{26b}$$

公式(25)并不直接给出 n 和κ,而是给出其组合 $n^2(1-\kappa^2)$和 $n^2\kappa$。参照一下 § 14.1(16)可以看出这些量具有直接的物理意义。令 $\mu=1$(在光学波段,情况总是如此),$n^2(1-\kappa^2)$是介电常数,而 $n^2\kappa$ 是电导率和频率之比。从这些量的大小,特别是它们随频率的变化,可获得关于金属结构的信息(见下文 14.3 节)。

① (23)和(26)这类方程只涉及主入射角处的测量,因而比较为一般的式子(22)或(25)要简单。仅仅由于这一原因,许多实验者都将测量限制在主入射角处。但在其他入射角处,实验的准确度会大一些。关于入射角如何选择为宜,可见下列文章中的讨论:P. Drude *Ann. d. Physik*,**39**(1890),504;J. R. Collins and R. O. Bock, *Rev. Sci. Instr.*,**14**(1943),135;I. Simon, *J. Opt. Soc. Amer.*,**41**(1951),336;D. G. Avery, *Proc. Phys. Soc.*,**65**(1952),425;R. W. Ditchburn, *J. Opt. Soc. Amer.*, **45**(1955),743。

前面的分析一直集中围绕反射光场分量的复振幅，但是我们即将看到，从比较反射光和入射光的强度，特别是在长波范围，亦可获得有用的信息。如果考虑正入射（$\theta_i = 0$）情况，则 $R_\parallel$ 和 $R_\perp$ 之间的区别消失，入射面这时也成为不确定，故可写下

$$\mathcal{R} = \left|\frac{R_\parallel}{A_\parallel}\right|^2 = \left|\frac{R_\perp}{A_\perp}\right|^2. \tag{27}$$

如果把(1)和(10)代入[或直接在 § 1.5(23)中用 $\hat{n}$ 代替 n]，则得到

$$\mathcal{R} = \left|\frac{\hat{n}-1}{\hat{n}+1}\right|^2 = \frac{n^2(1+\kappa^2)+1-2n}{n^2(1+\kappa^2)+1+2n}. \tag{28}$$

许多金属的光学常数是从测量反射光来测定的。表 14.2 给出不同观测者所得到的金属光学常数值，所在波长均为可见光谱黄区的 5893 埃。表中金属排列以反射率$\mathcal{R}$高低为序。可以注意，在所有情况下，$n < n\kappa$，因此按照 § 14.1(16a)，$\mu\varepsilon$ 以及 ϵ 为负（因为光学波段的 $\mu \approx 1$）。乍一看来，负的介电常数似乎毫无物理意义可言。但后面即将看到，情况并非如此，并且负 ϵ 值可从关于电导率电子机理的某些简单假设得到解释。从表中数据看来，似乎 n 值小于 1[①] 要同高反射率相关联，但一般情况并非如此。

表 14.2　各种金属的光学常数，光的波长 $\lambda = 5893$ 埃（钠 D 线）

金属	n	$n\kappa$	$\mathcal{R}$	观 测 者	
钠，固态	0.044	2.42	0.97	Duncan	1913
银，块状	0.20	3.44	0.94	Oppitz	1917
镁，块状	0.37	4.42	0.93	Drude	1890
钾，熔融的	0.084	1.81	0.92	Nathanson	1928
钙，块状	1.13	5.01	0.84	Drude	1890
铝，块状	1.44	5.23	0.83	Drude	1890
锡，块状	1.48	5.25	0.83	Drude	1890
金，电解的	0.47	2.83	0.82	Meier	1910
汞，液态	1.60	4.80	0.77	Lowery and Moore	1932
锌，块状	1.93	4.66	0.75	Meier	1910
铜，块状	0.62	2.57	0.73	Oppitz	1917
镓，单晶	3.69	5.43	0.71	Lange	1935
锑，块状	3.04	4.94	0.70	Drude	1890
钴，块状	2.12	4.04	0.68	Minor	1904
镍，电解的	1.58	3.42	0.66	Meier	1910
锰，块状	2.41	3.88	0.64	Littleton	1911
铅，块状	2.01	3.48	0.62	Drude	1890
铂，电解的	2.63	3.54	0.59	Meier	1910
铼，块状	3.00	3.44	0.57	Lange	1935
钨，块状	3.46	3.25	0.54	Littleton	1912
铱，块状	1.78	2.80	0.54	Meier	1910
铁，蒸发的	1.51	1.63	0.33	Meier	1910

根据 H. H. Landolt and R. Börnstein, *Phys. Chem. Tabellen*, (5 Aufl., Berlin, 1923; 1 – 3 Ergänzungsb, Berlin, 1927 – 1936)资料缩编而成。

① 当 $n < 1$ 时，实相速 c/n 超过真空中的光速，但如 1.3.3 节结尾所解释的，这和相对论并无矛盾。

不能期望表 14.2 所列的 n 和 $n\kappa$ 实验值,与近似公式 § 14.1(17)所给的计算值必定一致。因为推导这些公式时曾假设电导率 σ 是实量,而后面 14.3 节将看到,这个假设仅在低频范围才在良好近似上被满足。14.3 节用一个简单模型来研究 σ 对频率的依赖关系,从而清楚地显示,在钠 D 线(表 14.2 各值所在波长)所对应的高频区($\omega \approx 3.2 \times 10^{15}$ 秒$^{-1}$),σ 为复量,而且其虚部确实明显大于其实部。事实上,实验测定的金属光学常数对波长的依赖关系表明,实际情况比我们公式所预期的要复杂得多(见图 14.3)。

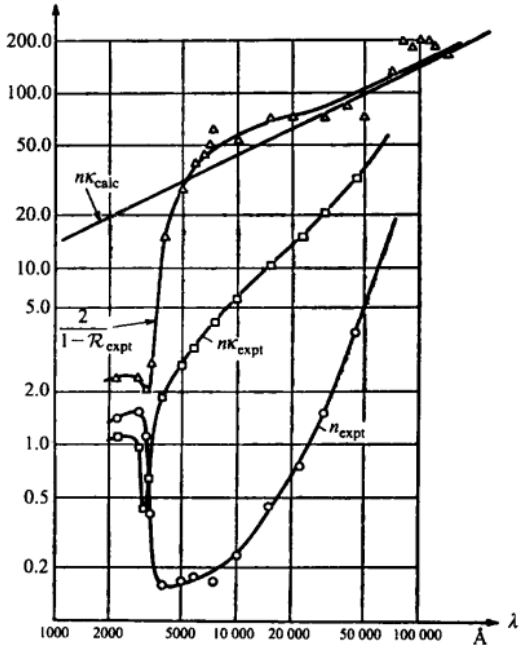


图 14.3 银的光学常数随波长改变的函数曲线。下标"expt"表示实验得到的数据,"Calc"表示计算结果。两个轴皆采用对数坐标

哈根和鲁宾斯[①] 及随后工作者的研究显示,如果辐射波长不短于大约 10^{-3} 厘米,对许多金属而言,用上面所概述的基本理论和用静电电导率作为 σ 的近似值来计算其光学常数,结果和实验很好地一致。如果用 § 14.1(24)的 n 和 $n\kappa$ 代入(28),则有(取 $\mu = 1$)

$$\mathcal{R} = \frac{2\frac{\sigma}{\nu} + 1 - 2\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}}{2\frac{\sigma}{\nu} + 1 + 2\sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}}. \tag{29}$$

当 ν/σ 足够小时,式中的 1 与其他项相比可予忽略,并可将(29)展开成$\sqrt{\nu/\sigma}$的幂级数,由而得到

$$\mathcal{R} \approx 1 - 2\sqrt{\frac{\nu}{\sigma}} + \cdots. \tag{30}$$

① E. Hagen and H. Rubens, *Ann. d. Physik*(4), **11**(1903), 873。

哈根和鲁宾斯发现，在波长 $\lambda = 1.2 \times 10^{-3}$ 厘米处，对铜而言，$1 - \mathcal{R} = 1.6 \times 10^{-2}$，而用其电导率静电值代入(30)式中的 σ 时，得到 $1 - \mathcal{R} = 1.4 \times 10^{-2}$。

当波长 λ 进一步增大时，$\mathcal{R}$ 变得非常接近 1，就很难再把 $1 - \mathcal{R}$ 测准。然而，哈根和鲁宾斯采用一种间接方法得到了有用的估计值。根据**基尔霍夫热辐射定律**①，一个物体的发射本领 E_ν 和吸收本领 A_ν 之比②，仅取决于频率 ν 和物体的温度 T，而与物体的性质无关，即

$$\frac{E_\nu}{A_\nu} = K(\nu, T), \tag{31}$$

式中 $K(\nu, T)$ 是 ν 和 T 的一个普通函数。很明显，K 等于吸收本领为 1 的物体(所谓**黑体**)的发射本领。现在假定辐射照射到一个金属样品，其厚度足以把未被反射的入射能量全部吸收在其内部，因此

$$A_\nu = 1 - \mathcal{R}, \tag{32}$$

并且由(30)，(31)和(32)，可有

$$A_\nu = \frac{E_\nu}{K(\nu, T)} = 2\sqrt{\frac{\nu}{\sigma}}, \tag{33}$$

即

$$\sqrt{\sigma} E_\nu = 2\sqrt{\nu} K(\nu, T). \tag{34}$$

这个方程的右边与金属的性质无关，它是 ν 和 T 的一个知名函数，函数 $K(\nu, T)$ 先经实验准确测定，继由理论正确导出，它就是有名的普朗克公式③。

由此可见，公式(30)正确与否，即使在 $\mathcal{R}$ 非常接近 1 时，亦可通过电导率 σ 和发射本领 E_ν 加以检验，即测量 E_ν 随频率和温度的变化关系并检查乘积 $\sqrt{\sigma} E_\nu$ 是否满足(34)式。哈根和鲁宾斯的测量证实这的确如此。测量选在远红外波段并为此利用所谓**剩余射线**。剩余射线是指一束射线，原来光谱范围较宽，经某些晶体如萤石、岩盐或钾盐多次反射后所余留的窄谱射线。这些晶体在 $\lambda = 22.9$ 微米到 63 微米光谱范围具有很强的吸收峰，因而[见(28)式]对这些峰的波长具有很高的选择性反射。

图 14.3 中给出银的 n 和 $n\kappa$ 随波长改变的实验曲线，同时还列出从公式 § 14.1(24)计算出的理论曲线以资比较。曲线采用对数坐标，因而理论曲线呈直线

$$\ln n \approx \ln n\kappa \approx \tfrac{1}{2} \ln \lambda + C,$$

式中 $C = \ln \sqrt{\mu\sigma / c}$。从 § 14.1(24)和从(30)也可用反射率表示出 n 和 $n\kappa$(适用于长波)：

$$n \approx n\kappa \approx \frac{2}{1 - \mathcal{R}}. \tag{35}$$

函数 $2/(1 - \mathcal{R})$ 也列于图中以作比较。可以看到，$n\kappa$ 的实验曲线在 $\lambda = 3000$ 埃附近有一个很锐

---

① 见，例如 M. Planck, *Theory of Heat* (London, Macmillan, 1932), p. 189; 或 A. Sommerfeld, *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, eds. F. Bopp and J. Meixner (New York, Academic Press, 1956), p. 136。

② 所谓发射本领是指物体每单位时间发射的辐射能，而吸收本领是指物体对照射到它上面的辐射能所吸收的百分比。

③ 见，例如 M. Born, *Atomic Physics* (London and Glasgow, Blackie and Son, 5th ed., 1951), p. 238。

的极小,而 n 的曲线在 $\lambda = 5000$ 埃附近有一个非常平宽的极小。在 $\lambda = 3300$ 埃附近,银的反射率很差。

随着波长的增大,实验曲线就趋近从电测电导率计算出的理论曲线。

14.3 金属光学常数电子论初探

前两节中曾经指出,电导率 σ 正如同介电常数 ε 和磁导率 μ 一样,并不是一个真正的媒质常数,而是随场的频率 ω 改变。现在我们将给出一个粗糙的、简单的模型(出自 P. Drude),从它可以导出 σ 对频率的依赖关系,至少对足够低的频率是如此。

先回忆一下介电媒质对外电场的响应,它主要决定于那些被准弹性力束缚在原子核周围的电子即束缚电子的行为(见 2.3.4 节)。导电媒质(例如金属)中的情况与介电质不同,并非所有电子全被束缚在原子内。有一些电子可在分子之间运动并被称为**自由**电子,以区别于其他那些正如同介电质中一样被束缚在原子内的电子。没有外电磁场时,自由电子的运动呈无规状态,因而并不产生一个净电流流动。当加上一外场时,自由电子获得一个附加速度,因而其运动变得较为有序,虽则仍然不时要同(基本上不动的)原子发生碰撞。自由电子的这个比较有序的运动就产生了感生的电流流动。

这里不能对该过程进行深入细致的讨论,因为这需要用气体动理学理论的统计方法来处理。不过其结果说来足堪凭信:设用一个模型电子代表自由电子全体的平均行为,则有序化运动和碰撞二者产生的平均总效果如同模型电子在运动中受有一阻尼力,大小与其速度成正比,方向则与之相反。因此该模型电子在电场 $\mathbf{E}$ 中的运动方程为

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\beta\dot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}, \tag{1}$$

式中 m 是电子的质量,e 是电子的电荷,而 β 是阻尼常数(以每单位质量计)。这个方程和束缚电子的运动方程[§2.3(33)]不同,后者右边包含一个有效场 $\mathbf{E}'$,而(1)右边含的是宏观场 $\mathbf{E}$,因为这个场被认为更接近代表作用在导体中自由电子上的场。

为了了解(1)式中阻尼常数 β 的意义,先考虑没有电场处的情况。如果 $\mathbf{E} = 0$,则有

$$\ddot{\mathbf{r}} + \beta\dot{\mathbf{r}} = 0, \tag{2}$$

它的解是

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 - \frac{1}{\beta}\boldsymbol{v}_0 e^{-\beta t}, \qquad \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 e^{-\beta t}; \tag{3}$$

由此可见,在这种情况下,以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 启动($t = 0$)的模型电子将以指数衰变方式减慢下来,衰变常量即为 β。时间 $\tau = 1/\beta$ 叫做**衰变时间**或**弛豫时间**,其典型量级为 10^{-14} 秒。

现在设想存在有一个时谐场 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$。这时(1)式的解是两项之和,一项代表衰变运动[齐次方程(2)的解],另一项代表周期运动

$$\mathbf{r} = -\frac{e}{m(\omega^2 + i\beta\omega)}\mathbf{E}. \tag{4}$$

这一周期运动产生媒质中的电流。如果每单位体积有 N 个自由电子,则电流密度 $\mathbf{j}$ 由下式给出:

$$\mathbf{j} = Ne\dot{\mathbf{r}} = \frac{Ne^2}{m(\beta - i\omega)}\mathbf{E}. \tag{5}$$

将(5)式与本构关系 § 1.1(9)即 $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$ 相比较,可见

$$\sigma=\frac{Ne^2}{m(\beta-\mathrm{i}\omega)}. \tag{6}$$

上面已经提到,τ 的典型量级是 10^{-14} 秒,所以 β 的量级是 10^{14} 秒$^{-1}$。这样,从(6)式看很清楚,当 $\omega\ll\beta$ 时,σ 可近似等于其静电值 $\sigma_0=Ne^2/m\beta$,并且当然是实数。相反,当 $\omega\gg\beta$ 时(通常光频段属此情况),σ 的虚部将变得大于其实部。因此,显然只有在 $\omega\ll\beta$ 时,才能按照 14.1 节那种处理方式,视 σ 为实量,将复介电常数分成虚部、实部而导出公式 § 14.1(16a), § 14.1(16b) 和 § 14.1(17a), § 14.1(17b)。

按照 § 14.1(16),复介电常数 $\hat{\varepsilon}$ 和复折射率 $\hat{n}$ 随频率的改变不仅要来自电导率 σ(自由电子的贡献)对频率的依赖,而且还要来自实介电常数 ε(束缚电子的贡献)对频率的依赖。在足够低的频率段,来自束缚电子的贡献可以证明将小于来自自由电子的贡献。在这种情况下,可以在 § 14.1(16)中用 1 代替 ε,用(6)式表出 σ。如果假设导体是非磁性的($\mu=1$),这就得到下列 $\hat{\varepsilon}$ 表达式:

$$\hat{\varepsilon}\equiv\hat{n}^2=1-\frac{4\pi Ne^2}{m}\frac{1}{\omega(\omega-\mathrm{i}\beta)}. \tag{7}$$

将(7)的实部和虚部分开,并利用 § 14.1(15a),即 $\hat{n}^2=n^2(1+2\mathrm{i}\kappa-\kappa^2)$,则得到公式

$$\mathrm{Re}\,\hat{\varepsilon}\equiv n^2(1-\kappa^2)=1-\frac{4\pi Ne^2}{m(\omega^2+\beta^2)}, \tag{8a}$$

$$\mathrm{Im}\,\hat{\varepsilon}\equiv 2n^2\kappa=\frac{4\pi Ne^2}{m\omega(\omega^2+\beta^2)}. \tag{8b}$$

由(8a)可以很容易推断,如果 β 足够小,则对于足够低的频率,$\hat{\varepsilon}$ 的实部将为负,而当 ω 很大时,$\hat{\varepsilon}$ 的实部显然将为正。$\hat{\varepsilon}$ 的实部由负变正的临界频率 ω_c 由下式给出:

$$\omega_c^2=\frac{4\pi Ne^2}{m}-\beta^2. \tag{9}$$

现在可以用这一临界值 ω_c 为参量将(8)式改写,表成

$$\mathrm{Re}\,\hat{\varepsilon}\equiv n^2(1-\kappa^2)=1-\frac{\omega_c^2+\beta^2}{\omega^2+\beta^2}, \tag{10a}$$

$$\mathrm{Im}\,\hat{\varepsilon}\equiv 2n^2\kappa=\frac{\beta(\omega_c^2+\beta^2)}{\omega(\omega^2+\beta^2)}. \tag{10b}$$

接下来我们将假设 $\omega_c^2\gg\beta^2$,所以(9)式可改写成

$$\omega_c^2\approx\frac{4\pi Ne^2}{m}. \tag{11}$$

此外,如果我们只限于讨论足够高的频率范围($\omega^2\gg\beta^2$),则取代(10)而得到较为简单的公式

$$\mathrm{Re}\,\hat{\varepsilon}\equiv n^2(1-\kappa^2)\approx 1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2, \tag{12a}$$

$$\mathrm{Im}\,\hat{\varepsilon}\equiv 2n^2\kappa\approx\frac{\beta}{\omega}\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2. \tag{12b}$$

由(12a)式可知,当 $\omega^2 < \omega_c^2$ 时(但仍满足 $\omega^2 \gg \beta^2$),$\hat{\varepsilon}$ 的实部为负并且 $\kappa > 1$。$\hat{\varepsilon}$ 的实部为负。反映了下列事实:在上述情况下,电子的振动同激发场之间是异相的,相差为$\frac{1}{4}$周期,这由(5)可得明证。对于足够低的 ω,衰减指数 κ 变得比 1 大得多,很容易看出这时反射率[在正入射情况下由 § 14.2(28)给出]将接近 1。另一方面,当 $\omega^2 > \omega_c^2$(但 $\omega^2 \gg \beta^2$)时,$\hat{\varepsilon}$ 的实部显然为正,所以 $\kappa < 1$,而当 ω 足够大时,κ 变得比 1 小得多,并且 $\hat{\varepsilon}$ 的虚部变得比实部也小很多。这时当可预期金属的光学行为基本上如同介电质。

碱金属所展现的正是这些现象,因为在长波区它们不透明并且反射高,而在可见或紫外的某一临界波长,它们变得透明并且吸收较低。表 14.3 中第二排给出这一过渡所发生在的临界波长实验测定值,第三排列出的是近似公式(11)计算的临界波长 $\lambda_c = 2\pi c/\omega_c$,其中自由电子数取为等于单位体积的原子数 N。可以看到,除钠的情况外这两排值各不相同。表中最后一排给出的是"有效"电子数 N_{eff} 与原子数 N 之比,系由下列公式求出:

$$\frac{N_{\text{eff}}}{N} = \frac{(\lambda_c)^2_{\text{calc}}}{(\lambda_c)^2_{\text{obs}}}. \tag{13}$$

可以看到,这个数(N_{eff}/N)的量级为 1,虽然除钠外都显著偏小。由此可见本节的初等理论只给出各参量的正确数量级,但不能描述现象的细节。

表 14.3 碱金属的临界波长 λ_c,波长低于此值时金属变为透明,波长高于此值时金属不透明并且反射高

金 属	锂	钠	钾	铷	铯
$(\lambda_c)_{\text{obs}}$	2050 Å	2100 Å	3150 Å	3600 Å	4400 Å
$(\lambda_c)_{\text{calc}}$	1500 Å	2100 Å	2900 Å	3200 Å	3600 Å
$\frac{N_{\text{eff}}}{N}$	0.54	1.00	0.85	0.79	0.67

在上述理论中,如果用含衰变常数 β 的准确度较高的公式(10)来替代粗略的近似公式(12),结果可有所改进。然而,由于高频电磁场与金属相互作用所涉及的物理过程复杂,不可能通过一个简单的修改就使本节所概述的初等经典理论显著扩大其有效范围。在金属的光学性质方面,一个完全令人满意的理论只有根据量子力学才能获得。

14.4 波在分层导电媒质中的传播;金属膜理论

在 1.6 节中我们研究了电磁波在分层介电媒质中的传播,这种介电媒质的光学性质仅依赖一个笛卡儿坐标。这一节将简短地讨论把该理论推广到含吸收层的分层媒质。因此我们假设,除 ε 和 μ 只是某一坐标的函数外,还可以有一个有限电导率 σ 也同样只是该坐标的函数。

正如 14.2 节一开始所说明的,第 1 章的公式,只要它所涉及的仅仅是时谐波(单色平面波)场矢量分量之间的线性关系,则对导电媒质仍然有效,但需把其中的介电常数 ε 和实波数 k 分别换成复介电常数 $\hat{\varepsilon} = \varepsilon + i4\pi\sigma/\omega$ 和复波数 $\hat{k} = \omega\sqrt{\mu(\varepsilon + i4\pi\sigma/\omega)}/c$。因此,我们可以把 1.6 节所发展的分层介电媒质理论的基本公式移置本节,只要在所要的公式中作这一形式代换即可。具体而言,分层吸收媒质也可用一个 2×2 矩阵来表征。但与介电分层媒质情况不同,这个矩阵的各元素不再是实数或纯虚数,而是包括虚实两部的复数。

下面将详细研究两种具有实际意义的情况,用以说明这一理论。

14.4.1　透明基片上的单层吸收膜

考虑两种介电媒质之间的平行平面单层吸收膜(见图 14.4)。有关这种膜对平面波的反射和透射公式,可从 § 1.6(55) ~ (58)经 n_2 换为 $\hat{n}_2 = n_2(1 + \mathrm{i}\kappa_2)$而得到。为便于计算,令

$$\hat{n}_2 \cos\theta_2 = u_2 + \mathrm{i}v_2, \tag{1}$$

式中 u_2 和v_2为实量。u_2 和v_2不难用入射角 θ_1 和表征第一和第二媒质光学性质的常数(n_1 和 n_2,κ_2)来表出。取(1)式的平方并应用折射定律 $\hat{n}_2 \sin\theta_2 = n_1 \sin\theta_1$,即得到

$$(u_2 + \mathrm{i}v_2)^2 = \hat{n}_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_1. \tag{2}$$

令(2)式两边虚部和实部分别相等,则有

$$\left.\begin{aligned} u_2^2 - v_2^2 &= n_2^2(1 - \kappa_2^2) - n_1^2 \sin^2\theta_1, \\ u_2 v_2 &= n_2^2 \kappa_2. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

由(3)可求得

$$\left.\begin{aligned} 2u_2^2 &= n_2^2(1 - \kappa_2^2) - n_1^2 \sin^2\theta_1 + \sqrt{[n_2^2(1 - \kappa_2^2) - n_1^2 \sin^2\theta_1]^2 + 4n_2^4\kappa_2^2}, \\ 2v_2^2 &= -[n_2^2(1 - \kappa_2^2) - n_1^2 \sin^2\theta_1] + \sqrt{[n_2^2(1 - \kappa_2^2) - n_1^2 \sin^2\theta_1]^2 + 4n_2^4\kappa_2^2}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

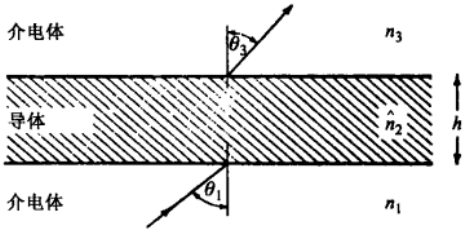


图 14.4　两种介电媒质之间的单层吸收膜

下一步需要分别计算界面 1 - 2 和界面 2 - 3 的反射系数和透射系数,因为这些系数包含在薄膜的反射系数和透射系数公式中。下面分两种偏振情况来讨论:1. TE 波,即入射波电矢量垂直于入射面;2. TM 波,即入射波电矢量平行于入射面。

电矢量垂直于入射面(TE 波)

在这一情况下,用 $\hat{n}_2 \cos\theta_2 = u_2 + \mathrm{i}\,v_2$代替 § 1.6(55)中的 $n_2 \cos\theta_2$,即有,

$$r_{12} = \rho_{12}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{12}} = \frac{n_1 \cos\theta_1 - (u_2 + \mathrm{i}v_2)}{n_1 \cos\theta_1 + (u_2 + \mathrm{i}v_2)}. \tag{5}$$

稍后要用到幅值 ρ_{12}和相变ϕ_{12}的显表达式。由(5)即有:

$$\rho_{12}^2 = \frac{(n_1 \cos\theta_1 - u_2)^2 + v_2^2}{(n_1 \cos\theta_1 + u_2)^2 + v_2^2}, \qquad \tan\phi_{12} = \frac{2v_2 n_1 \cos\theta_1}{u_2^2 + v_2^2 - n_1^2 \cos^2\theta_1}. \tag{6}$$

对于第一界面的透射,则由 § 1.6(56)可有,

$$t_{12} = \tau_{12}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi_{12}} = \frac{2n_1 \cos\theta_1}{n_1 \cos\theta_1 + u_2 + \mathrm{i}v_2}, \tag{7}$$

由此得到

$$\tau_{12}^2=\frac{(2n_1\cos\theta_1)^2}{(n_1\cos\theta_1+u_2)^2+v_2^2},\qquad \tan\chi_{12}=-\frac{v_2}{n_1\cos\theta_1+u_2}. \tag{8}$$

用完全类似的方法可得到第二界面的反射和透射有关公式如下:

$$\rho_{23}^2=\frac{(n_3\cos\theta_3-u_2)^2+v_2^2}{(n_3\cos\theta_3+u_2)^2+v_2^2},\qquad \tan\phi_{23}=\frac{2v_2n_3\cos\theta_3}{u_2^2+v_2^2-n_3^2\cos^2\theta_3}, \tag{9}$$

$$\tau_{23}^2=\frac{4(u_2^2+v_2^2)}{(n_3\cos\theta_3+u_2)^2+v_2^2},\qquad \tan\chi_{23}=\frac{v_2n_3\cos\theta_3}{u_2^2+v_2^2+u_2n_3\cos\theta_3}. \tag{10}$$

因为根据折射定律,$n_1\sin\theta_1=\hat{n}_2\sin\theta_2$,$\hat{n}_2\sin\theta_2=n_3\sin\theta_3$,所以角 θ_3 可借助下列公式得之于 θ_1:

$$n_3\sin\theta_3=n_1\sin\theta_1. \tag{11}$$

电矢量平行于入射面(TM 波)

如 1.6.3 节中所说,TM 波的反射系数和透射系数公式可从 TE 波的相应公式通过简单的置换,即把 $p_j=n_j\cos\theta_j$ 换成 $q_j=\cos\theta_j/n_j$ 而得到,其中假设各媒质是非磁性的。但这时 r 和 t 这些量都是指磁矢量之比而非电矢量之比。具体说,由 § 1.6(55)可有

$$\begin{aligned}r_{12}=\rho_{12}e^{i\phi_{12}}&=\frac{\frac{1}{n_1}\cos\theta_1-\frac{1}{\hat{n}_2}\cos\theta_2}{\frac{1}{n_1}\cos\theta_1+\frac{1}{\hat{n}_2}\cos\theta_2}=\frac{\hat{n}_2^2\cos\theta_1-n_1\hat{n}_2\cos\theta_2}{\hat{n}_2^2\cos\theta_1+n_1\hat{n}_2\cos\theta_2}\\&=\frac{[n_2^2(1-\kappa_2^2)+2in_2^2\kappa_2]\cos\theta_1-n_1(u_2+iv_2)}{[n_2^2(1-\kappa_2^2)+2in_2^2\kappa_2]\cos\theta_1+n_1(u_2+iv_2)}.\end{aligned} \tag{12}$$

由(12)经一步步计算后得到

$$\left.\begin{aligned}\rho_{12}^2&=\frac{[n_2^2(1-\kappa_2^2)\cos\theta_1-n_1u_2]^2+[2n_2^2\kappa_2\cos\theta_1-n_1v_2]^2}{[n_2^2(1-\kappa_2^2)\cos\theta_1+n_1u_2]^2+[2n_2^2\kappa_2\cos\theta_1+n_1v_2]^2},\\\tan\phi_{12}&=2n_1n_2^2\cos\theta_1\frac{2\kappa_2u_2-(1-\kappa_2^2)v_2}{n_2^4(1+\kappa_2^2)^2\cos^2\theta_1-n_1^2(u_2^2+v_2^2)}.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

在透射系数 t_{12} 方面,由 § 1.6(55)用 $\cos\theta_j/n_j$ 代换 $n_j\cos\theta_j$ 即得到

$$\begin{aligned}t_{12}=\tau_{12}e^{i\chi_{12}}&=\frac{\frac{2}{n_1}\cos\theta_1}{\frac{1}{n_1}\cos\theta_1+\frac{1}{\hat{n}_2}\cos\theta_2}\\&=\frac{2[n_2^2(1-\kappa_2^2)+2in_2^2\kappa_2]\cos\theta_1}{[n_2^2(1-\kappa_2^2)+2in_2^2\kappa_2]\cos\theta_1+n_1(u_2+iv_2)}.\end{aligned} \tag{14}$$

由(14)可求得

$$\left.\begin{aligned}\tau_{12}^2&=\frac{4n_2^4(1+\kappa_2^2)^2\cos^2\theta_1}{[n_2^2(1-\kappa_2^2)\cos\theta_1+n_1u_2]^2+(2n_2^2\kappa_2\cos\theta_1+n_1v_2)^2},\\\tan\chi_{12}&=\frac{n_1[2\kappa_2u_2-(1-\kappa_2^2)v_2]}{n_2^2(1+\kappa_2^2)^2\cos\theta_1+n_1[(1-\kappa_2^2)u_2+2\kappa_2v_2]}.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

用类似方法可得到第二界面的反射和透射系数公式如下：

$$\left.\begin{aligned}\rho_{23}^2 &= \frac{[n_2^2(1-\kappa_2^2)\cos\theta_3 - n_3u_2]^2 + [2n_2^2\kappa_2\cos\theta_3 - n_3v_2]^2}{[n_2^2(1-\kappa_2^2)\cos\theta_3 + n_3u_2]^2 + [2n_2^2\kappa_2\cos\theta_3 + n_3v_2]^2},\\ \tan\phi_{23} &= 2n_3n_2^2\cos\theta_3\frac{2\kappa_2u_2 - (1-\kappa_2^2)v_2}{n_2^4(1+\kappa_2^2)^2\cos^2\theta_3 - n_3^2(u_2^2+v_2^2)},\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

和

$$\left.\begin{aligned}\tau_{23}^2 &= \frac{4n_3^2(u_2^2+v_2^2)}{[n_3u_2 + n_2^2(1-\kappa_2^2)\cos\theta_3]^2 + (n_3v_2 + 2n_2^2\kappa_2\cos\theta_3)^2},\\ \tan\chi_{23} &= \frac{n_2^2[(1-\kappa_2)^2v_2 - 2\kappa_2u_2]\cos\theta_3}{n_3(u_2^2+v_2^2) + n_2^2[(1-\kappa_2)^2u_2 + 2\kappa_2v_2]\cos\theta_3}.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

知道了 ρ_{12}，ϕ_{12} 等量，即可计算膜的复反射系数和复透射系数。为便于表述，令

$$\eta = \frac{2\pi}{\lambda_0}h, \tag{18}$$

所以

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\hat{n}_2h\cos\theta_2 = (u_2 + \mathrm{i}v_2)\eta. \tag{19}$$

方程 § 1.6(57) ~ (58)现在变成

$$r = \rho e^{\mathrm{i}\delta_r} = \frac{\rho_{12}\,e^{\mathrm{i}\phi_{12}} + \rho_{23}\,e^{-2v_2\eta}\,e^{\mathrm{i}(\phi_{23}+2u_2\eta)}}{1 + \rho_{12}\rho_{23}\,e^{-2v_2\eta}\,e^{\mathrm{i}(\phi_{12}+\phi_{23}+2u_2\eta)}}, \tag{20}$$

$$t = \tau e^{\mathrm{i}\delta_t} = \frac{\tau_{12}\tau_{23}\,e^{-v_2\eta}\,e^{\mathrm{i}(\chi_{12}+\chi_{23}+u_2\eta)}}{1 + \rho_{12}\rho_{23}\,e^{-2v_2\eta}\,e^{\mathrm{i}(\phi_{12}+\phi_{23}+2u_2\eta)}}. \tag{21}$$

由(20)，经一步步计算后，可得到膜的反射率 $\mathcal{R}$ 和反射相变 δ_r 表达式如下：

$$\mathcal{R} = |r|^2 = \frac{\rho_{12}^2\,e^{2v_2\eta} + \rho_{23}^2\,e^{-2v_2\eta} + 2\rho_{12}\rho_{23}\cos(\phi_{23} - \phi_{12} + 2u_2\eta)}{e^{2v_2\eta} + \rho_{12}^2\rho_{23}^2\,e^{-2v_2\eta} + 2\rho_{12}\rho_{23}\cos(\phi_{12} + \phi_{23} + 2u_2\eta)}, \tag{22}$$

$$\tan\delta_r = \frac{\rho_{23}(1-\rho_{12}^2)\sin(2u_2\eta + \phi_{23}) + \rho_{12}(e^{2v_2\eta} - \rho_{23}^2\,e^{-2v_2\eta})\sin\phi_{12}}{\rho_{23}(1+\rho_{12}^2)\cos(2u_2\eta + \phi_{23}) + \rho_{12}(e^{2v_2\eta} + \rho_{23}^2\,e^{-2v_2\eta})\cos\phi_{12}}. \tag{23}$$

这些公式对 TE 波和 TM 波都同样成立。在前者情况下，ρ_{12} 和 ρ_{23} 以及 ϕ_{12} 和 ϕ_{23} 须用(6)和(9)所给的值代入；而在后者情况下，则须用(13)和(16)所给的值代入。

用类似的方法可从(21)式得到膜的透射率 $\mathcal{T}$ 和透射相变 δ_t 表达式如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \frac{n_3\cos\theta_3}{n_1\cos\theta_1}|t|^2\\ &= \frac{n_3\cos\theta_3}{n_1\cos\theta_1}\frac{\tau_{12}^2\tau_{23}^2\,e^{-2v_2\eta}}{1 + \rho_{12}^2\rho_{23}^2\,e^{-4v_2\eta} + 2\rho_{12}\rho_{23}\,e^{-2v_2\eta}\cos(\phi_{12} + \phi_{23} + 2u_2\eta)},\end{aligned} \tag{24}$$

$$\tan[\delta_t - \chi_{12} - \chi_{23} + u_2\eta] = \frac{e^{2v_2\eta}\sin 2u_2\eta - \rho_{12}\rho_{23}\sin(\phi_{12} + \phi_{23})}{e^{2v_2\eta}\cos 2u_2\eta + \rho_{12}\rho_{23}\cos(\phi_{12} + \phi_{23})}. \tag{25}$$

对于 TM 波，因子 $n_3\cos\theta_3/n_1\cos\theta_1$ 须换成 $(\cos\theta_3/n_3)/(\cos\theta_1/n_1)$。对于 TE 波，要用(6)，(8)，

(9)和(10)诸式所给的值代入上列二式;而对于 TM 波,则用(13),(15),(16)和(17)各式所给的值代入。

这里也许值得提醒:反射相变(δ_r)是以第一界面(1-2)为参考面,而透射相变(δ_t)则以第二界面(2-3)为参考面。

从方程(22)~(25)可计算单层吸收膜反射和透射的 4 个基本表征量,只要知道膜的光学性质(n_2,k_2)和设定的厚度(h)。作为实例,图 14.5 给出一些典型情况的膜的反射率和透射率随厚度的变化曲线。

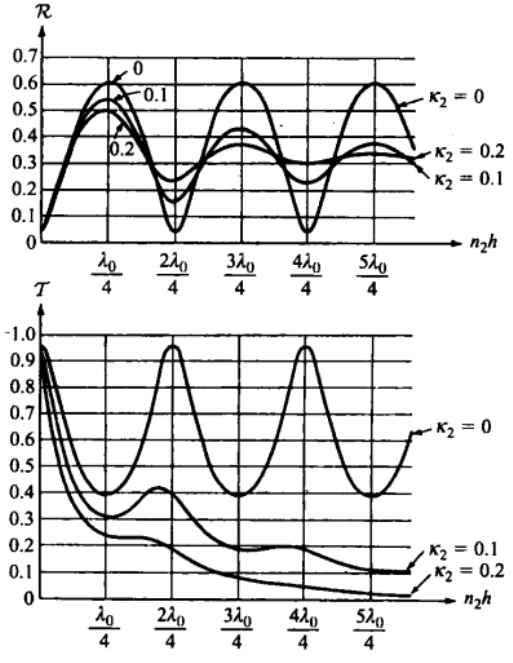


图 14.5 单层金属膜的反射率$\mathcal{R}$和透射率$\mathcal{T}$随其光学厚度的变化[$n_1 = 1, n_2 = 3.5$, $n_3 = 1.5, \kappa_1 = \kappa_3 = 0; \theta_1 = 0$][引自 K. Hammer, *Z. Tech. Phys.*, **24**(1943), 169]

对于非吸收膜,$\mathcal{R}$和$\mathcal{T}$是膜厚 n_2h 的周期函数,周期为一个波长。可以看到,吸收降低了逐个极大的峰值,并使峰的位置向小厚度方向移动。在光学波长范围,金属的吸收非常强,以致厚度要比 1/4 波长薄很多才能有可察觉的透射(见表 14.1,617 页)[①]。因此其透射光不出现极大和极小。

在光学中,金属膜主要用来获得高反射,例如法布里-珀罗干涉仪(7.6.2 节)所用。这种膜过去多用化学淀积法制备,但晚近以来该法已被高真空蒸发技术所取代[②]。

---

① 对于这样薄的膜,有关公式可行简化,方法是把(22)~(25)各式的分子和分母展成膜厚的幂级数,并只保留前几次幂项[见 F. Abelès, *Rev. d' Optique*, **32**(1953), 257]。
金属薄膜在可见和红外光谱范围的光学性质,下列文章作了全面讨论:L. N. Hadley and D. M. Dennison, *J. Opt. Soc. Amer.*, **37**(1947), 451; **38**(1948), 483。

② 见,例如 S. Tolansky, *Multiple-beam Interferometry of Surfaces and Films* (Oxford, Oxford University Press, 1948), p. 26; 或 O. S. Heavens, *Optical Properties of Thin Solid Films* (London, Butterworths, 1955)。

最后让我们看看一个“厚”膜的反射和透射。如果膜厚 h 足够大，因而参量 η 也很大，则(22)～(25)中所有不含乘积因子 $\exp(2\upsilon_2\eta)$ 的项均可略去。例如，如果 $\exp(2\upsilon_2\eta)\geqslant 100$，这一忽略所导致的误差通常不大于百分之几。对于这种膜，在正入射下，有 $4\pi h n_2\kappa_2/\lambda \geqslant \ln 100 = 4.61$，即(取消下标 2)

$$\frac{h}{\lambda}\geqslant\frac{0.37}{n\kappa}. \tag{26}$$

例如，对于银膜，$n\kappa\approx 3.67$(波长 = 5780 埃)，(26)式给出 $h\geqslant\lambda/10\approx 5.8\times 10^{-6}$ 厘米。

对于厚膜，由(22)和(24)可有

$$\mathcal{R}\approx\rho_{12}^2,\qquad \mathcal{T}=\frac{n_3\cos\theta_3}{n_1\cos\theta_1}\tau_{12}^2\tau_{23}^2\,\mathrm{e}^{-4\upsilon_2\eta}. \tag{27}$$

由此可见，一个“厚”膜的反射率同无限厚膜的反射率相差无几，并且其透射率随厚度而指数减小。相变则可由(23)和(25)立即得到：

$$\delta_r\approx\phi_{12},\qquad \delta_t\approx\chi_{12}+\chi_{23}+u_2\eta. \tag{28}$$

公式(27)和(28)表明，我们所谓的“厚”膜，用颇富物理的语言来说，其实就是这种膜中的多光束干涉效应可予忽略。

14.4.2　吸收基片上的单层透明膜

现在讨论第二个例子——吸收基片上的单层透明膜(见图 14.6)。

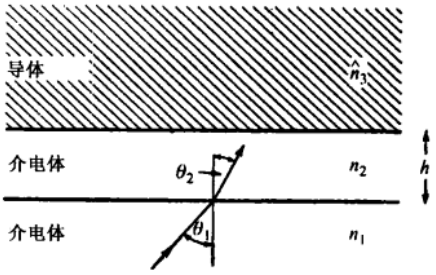


图 14.6　吸收基片上的单层透明膜

在这种情况下，r_{12} 是实量而 r_{23} 是复量。振幅比 ρ_{23} 和相变 ϕ_{23} 由(6)或(13)给出，只要把下标 1 和 2 分别改成 2 和 3 即可。按照 § 1.6(57)的推导，现在膜的反射系数

$$r=\frac{r_{12}+\rho_{23}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_{23}+2\beta)}}{1+r_{12}\rho_{23}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_{23}+2\beta)}}. \tag{29}$$

这一表达式和 § 1.6(57)完全相同，如果在后者中把 2β 换成 $2\beta+\phi_{23}$，并把 r_{23} 换成 ρ_{23}。这样，无需作任何计算，只要简单地用这一代换代入 § 1.6(59)和 § 1.6(61)，就可立即写下膜的反射率 $\mathcal{R}$ 和反射相变 δ_r 的表达式；于是得到

$$\mathcal{R}=\frac{r_{12}^2+\rho_{23}^2+2r_{12}\rho_{23}\cos(\phi_{23}+2\beta)}{1+r_{12}^2\rho_{23}^2+2r_{12}\rho_{23}\cos(\phi_{23}+2\beta)}, \tag{30}$$

和

$$\tan\delta_r=\frac{\rho_{23}(1-r_{12}^2)\sin(\phi_{23}+2\beta)}{r_{12}(1+\rho_{23}^2)+\rho_{23}(1+r_{12}^2)\cos(\phi_{23}+2\beta)}. \tag{31}$$

吸收基片上的透明薄膜有许多实际用途。例如,用来保护金属镜面并增高其反射率。也可用来减小金属面的反射率。我们在58页曾经提到可设计一种偏振器,由介质基片上加一层介质膜构成,使得$\mathcal{R}_{\parallel}=0$而$\mathcal{R}_{\perp}$非常大。采用金属基片时,则可使$\mathcal{R}_{\parallel}=0$或$\mathcal{R}_{\perp}=0$[①]。

14.5 导电球产生的衍射;米氏理论

金属不仅在块状时表现有显著的光学特征,而且当被细分成微小颗粒(如胶体悬浮物中)时也如此。我们可以回想一下胶体金无论是在液体中还是在玻璃中所呈现的那种绚丽夺目的红宝石色彩。这些现象非常令人关注,因为这里折射、吸收和衍射三者并列发生。

如果金属粒子是理想导体,那所涉及的将是一个纯衍射问题。然而,在衍射各章中,我们并不曾从理想导体这种观点讨论过这一课题,因为这里所发生的效应是起因于有一部分光进入了这些具有特别物理意趣的粒子。这时吸收就扮演了重要角色,因而这一问题放在本章处理更为适宜;介电球方面相应的结果则作为问题的一个极限情况(消光指数$\kappa\to0$)而包括在本章的探讨之内。

在金属粒子光学特性研究的早期工作者中,需要提到麦克斯韦·加尼特(Maxwell Garnett)[②]。他考虑了一种在波长三次方量级的体积内包含许多小金属球的介电媒质,分析光从中通过的情况。麦克斯韦·加尼特借助洛伦兹-洛伦茨公式[见§2.3(17)],证明这样一个集合物等效于一种具有某个复折射率$\hat{n}'=n'(1+i\kappa')$的媒质,并且求得用表征金属球的折射率n和消光指数κ表出n'和κ'的公式。凭借这些思考和分析,他能够说明所观察到的现象特征。

米氏(G. Mie)[③] 在一篇发表于1908年的论文中,根据电磁理论获得了单色平面波球体衍射的严格解,他所考虑的是一单个均匀球,直径和成分均不限,置于一均匀媒质中。之后不久,德拜(P. Debye)[④] 在一篇关于导电球所受光压(即光所施加的机械力)的论文中,发表了同一问题的一个等效解。从那时以后,许多著者[⑤] 对这一课题的不同方面进行了探讨。

米氏的解虽然是对单球衍射导来的,但它也可用到多球衍射情况,球数不限,只要这些球直径和成分全都相同,并且是无规分布,而且彼此分开的距离远大于波长。在这种情况下,不同球体的散射光之间不存在相干的位相关系,因而总的散射能量等于单个球散射能量乘以球的总数。正是特别由于这一关系,米氏解具有很大的实际价值,并可应用到各种各样的问题:除去解释金属悬浮体所展现的缤纷色彩外,这里还可以提到一些应用,诸如研究大气尘埃、星际粒子或胶体悬浮物、彩虹理论、日冕、云雾对光的传输的影响等等[⑥]。

① 见 H. Schopper, *Optik*, **10**(1953), 426。

② J. C. Maxwell Garnett, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A, **203**, (1904), 385; *ibid.* **205**(1906), 237。

③ G. Mie, *Ann. d. Physik*(4), **25**(1908), 377。

④ P. Debye, *Ann. d. Physik*(4), **30**(1909), 57。

⑤ 基本理论方面以后陆续有人研究,其中贡献卓著可特别提及的有 T. J. I'A. Bromwich, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A, **220**(1920), 175 和 H. C. van de Hulst, *Rech. Astron. Observ. Utrecht*, XI, Pt. 1(1946)。

⑥ 关于其中的某些问题以及理论方面的近期发展,见 H. M. Nussenzveig, *Diffraction Effects in Semiclassical Scattering*(Cambridge, Cambridge University Press, 1992)。

在推导米氏公式之前，先简要说明所采用的方法将有所帮助。这里所涉及的问题可陈述如下：设给定一单色平面波令其入射到一个球面上，球面内外媒质的光学性质在球面处有一突变，所产生的场服从麦克斯韦方程，试求其解。为此引进一个合适的曲线坐标系（球面极坐标），并将所求场表成为两个“分场”之和，其中一个分场的电矢量径向分量恒为零，而另一个分场的磁矢量径向分量恒为零。在该球面极坐标中，将麦克斯韦方程以及边界条件的场矢分量分开成一组普通标量微分方程，然后以无穷级数形式解之而求出上述两个分场。14.5.1 节讲述解的推导，14.5.2 节讨论解的主要结果。最后一节（14.5.3 节）是关于任意体形障碍物散射和吸收总能量的几个一般性结果，并对球形障碍物的情况给予详细讨论。

14.5.1　问题的数学解

（a）场的德拜势表示

现在考虑一个线偏振的单色平面波在一个球体上的衍射；球的半径为 a，球体浸在一个均匀的各向同性媒质中。假设球所浸在的媒质是非导体，并且该媒质和球本身都是非磁性的。

同通常一样，假设时间依赖因子为 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$，则电矢量和磁矢量与时间无关的部分在球内球外都满足不含时间形式的麦克斯韦方程：

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{curl}\mathbf{H} &= -k_1\mathbf{E}, \qquad \text{(a)} \\ \operatorname{curl}\mathbf{E} &= \quad k_2\mathbf{H}, \qquad \text{(b)} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{\mathrm{i}\omega}{c}\left(\varepsilon + \mathrm{i}\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right), \qquad \text{(a)} \\ k_2 &= \frac{\mathrm{i}\omega}{c}. \qquad \text{(b)} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

普通波数 k（在球外为实量，在球内为复量）的平方为

$$k^2 = -k_1 k_2. \tag{3}$$

凡属于球体周围媒质的量将缀以上标（I），而属于球体本身的量将缀以上标（II）。因为包围球体的媒质假设是不导电的，所以 $\sigma^{(\mathrm{I})} = 0$。

取一直角坐标系，令其原点在球心处，z 轴方向沿着入射波的传播方向，而 x 轴方向沿着其电矢量方向（见图 14.7）。如果把入射波电矢量的振幅归一化为 1，即

$$|\mathbf{E}^{(i)}| = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{(\mathrm{I})}z}| = 1,$$

则入射场矢的 6 个分量为

$$\left.\begin{aligned} E_x^{(i)} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{(\mathrm{I})}z}, \\ H_y^{(i)} &= \frac{\mathrm{i}k^{(\mathrm{I})}}{k_2^{(\mathrm{I})}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{(\mathrm{I})}z}, \\ E_y^{(i)} &= E_z^{(i)} = H_x^{(i)} = H_z^{(i)} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

关于边界条件，按照 1.1.3 节，我们仅需要 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 在球面两边的切向分量应该连续：

$$\left.\begin{aligned} E_{\text{切线}}^{(\mathrm{I})} &= E_{\text{切线}}^{(\mathrm{II})}, \\ H_{\text{切线}}^{(\mathrm{I})} &= H_{\text{切线}}^{(\mathrm{II})}, \end{aligned}\right\} \quad \text{当 } r = a \text{ 时} \tag{5}$$

另一个边界条件——$\varepsilon\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 在球面两边的径向分量也应该连续,由(5)式和麦克斯韦方程即可得出。

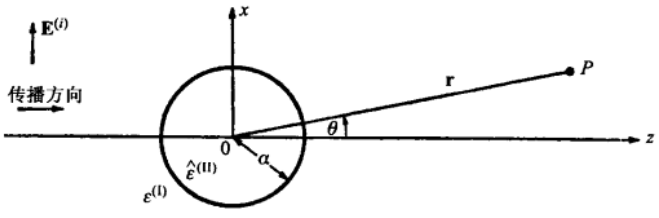


图 14.7 导电球产生的衍射:符号

为满足上述边界条件,必须假设除入射场 $\mathbf{E}^{(i)}$,$\mathbf{H}^{(i)}$ 和球内场 $\mathbf{E}^{(w)}$,$\mathbf{H}^{(w)}$ 外,在球周围媒质中还有一个次级(散射即衍射)场 $\mathbf{E}^{(s)}$,$\mathbf{H}^{(s)}$。这样,球内、球外两个区域中的总电场可合写成

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}^{(i)} + \mathbf{E}^{(s)} \quad \text{球外},\\ &= \mathbf{E}^{(w)} \qquad\quad \text{球内},\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

磁矢量方面有相似的表达式。场 $\mathbf{E}^{(s)}$,$\mathbf{H}^{(s)}$ 和 $\mathbf{E}^{(w)}$,$\mathbf{H}^{(w)}$ 可以看作分别相当于光在传播中遇到界平面时发生的反射场和折射场;然而这种类比只有当球的直径远大于波长时才够恰当。因为边界条件对所有时间都必须成立,所以这 6 个矢量全都要具有相同的时间依赖因子 $\exp(-i\omega t)$。

适合目前问题用的曲线坐标是球面极坐标 r,θ,ϕ,其定义为

$$\left.\begin{aligned}x &= r\sin\theta\cos\phi,\\ y &= r\sin\theta\sin\phi,\\ z &= r\cos\theta.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

任何矢量 $\mathbf{A}$ 的分量从笛卡儿坐标系变换到这个新坐标系所遵循的规则[①] 是

$$\left.\begin{aligned}A_r &= A_x\sin\theta\cos\phi + A_y\sin\theta\sin\phi + A_z\cos\theta,\\ A_\theta &= A_x\cos\theta\cos\phi + A_y\cos\theta\sin\phi - A_z\sin\theta,\\ A_\phi &= -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

将这些公式应用到矢量 curl $\mathbf{A}$,得到

---

① 见,例如 W. Magnus and F. Oberhettinger, *Formulas and Theorems for the Functions of Mathematical Physics* (New York, Chelsea Publishing Company, 1954), p. 146。

这里定义的分量不是里奇(Ricci)和莱维-齐维塔(Levi-Civita)绝对微分学中所采用的那些分量。那里,一个矢量 $\mathbf{A}$ 有两组不同、但相互等效的分量,即反变式分量 A^i 和协变式分量 A_i。如果 $\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$ 和 $\mathbf{e}_3$ 是三个基矢,一般不正交,长度也不同,则反变式分量(以这些基矢为参考系时)可定义为表示 $\mathbf{A} = A^1\mathbf{e}_1 + A^2\mathbf{e}_2 + A^3\mathbf{e}_3$ 中的系数,而协变式分量可定义为表示 $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}^1 + A_2\mathbf{e}^2 + A_3\mathbf{e}^3$ 中的系数,式中 $\mathbf{e}^1$,$\mathbf{e}^2$ 和 $\mathbf{e}^3$ 是倒格矢,即满足关系式 $\mathbf{e}^i\cdot\mathbf{e}_k = \delta_{ik}$ 的矢量,其中 δ_{ik} 是克罗内克符号。在特别情况下,当 $\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$ 和 $\mathbf{e}_3$ 是正交基矢时,则 $\mathbf{e}^1$,$\mathbf{e}^2$ 和 $\mathbf{e}^3$ 也正交,并且两组中的对应矢量是平行的。这时可以引进一组**自然**分量 $\bar{A}_i = \sqrt{A_iA^i}$,并且这些分量有一个简单的几何解释:它们是 $\mathbf{A}$ 投向这三个方向上的垂直投影。在球面极坐标的情况下,自然分量是(8)式所给出的分量。

张量分量可以用相似的方法来处理。

$$\left.\begin{aligned}(\text{curl }\mathbf{A})_r &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial(rA_\phi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial\phi}\right],\\ (\text{curl }\mathbf{A})_\theta &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial(rA_\phi\sin\theta)}{\partial r}\right],\\ (\text{curl }\mathbf{A})_\phi &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right].\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

在球面极坐标中，场方程(1)变成

$$\left.\begin{aligned}-k_1E_r &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial(rH_\phi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial\phi}\right], &(\alpha)\\ -k_1E_\theta &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial H_r}{\partial\phi}-\frac{\partial(rH_\phi\sin\theta)}{\partial r}\right], &(\beta)\\ -k_1E_\phi &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right]. &(\gamma)\end{aligned}\right\}\text{(a)}$$

$$\left.\begin{aligned}k_2H_r &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial(rE_\phi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial\phi}\right], &(\alpha)\\ k_2H_\theta &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial E_r}{\partial\phi}-\frac{\partial(rE_\phi\sin\theta)}{\partial r}\right], &(\beta)\\ k_2H_\phi &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial E_r}{\partial\theta}\right]. &(\gamma)\end{aligned}\right\}\text{(b)} \tag{10}$$

边界条件(5)现在是

$$\left.\begin{aligned}E_\theta^{(\mathrm{I})} &= E_\theta^{(\mathrm{II})}, \quad E_\phi^{(\mathrm{I})} = E_\phi^{(\mathrm{II})},\\ H_\theta^{(\mathrm{I})} &= H_\theta^{(\mathrm{II})}, \quad H_\phi^{(\mathrm{I})} = H_\phi^{(\mathrm{II})}.\end{aligned}\right\}\ \text{当}\ r=a. \tag{11}$$

方程(10)加上边界条件(11)是我们问题的基本方程。

我们将把这些方程的解表成为两组线性独立场($^e\mathbf{E}$, $^e\mathbf{H}$)和($^m\mathbf{E}$, $^m\mathbf{H}$)的叠加，每组都满足(10)，但方式不同，一组是

$$^eE_r = E_r, \qquad ^eH_r = 0, \tag{12a}$$

另一组是

$$^mE_r = 0, \qquad ^mH_r = H_r. \tag{12b}$$

不难看出，这样一种表示方法同我们的方程是协合的。以 $H_r = {}^eH_r = 0$ 这组为例，这时(10a, β)和(10a, γ)变成

$$\left.\begin{aligned}k_1{}^eE_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r{}^eH_\phi),\\ k_1{}^eE_\phi &= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r{}^eH_\theta).\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

将这些关系式代入(10b, β)和(10b, γ)，则得到

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+k^2\right)(r^eH_\theta)&=-\frac{k_1}{\sin\theta}\frac{\partial^eE_r}{\partial\phi}\quad(\mathrm{b},\beta)\\ \text{和}\qquad\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+k^2\right)(r^eH_\phi)&=+k_1\frac{\partial^eE_r}{\partial\theta}.\quad(\mathrm{b},\gamma)\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

方程(14)加上(10a,α),构成${}^eE_r$,${}^eH_\theta$ 和${}^eH_\phi$ 的一组独立方程。然而,并非这组方程所有的解都代表物理场,只有还满足补充条件 $\mathrm{div}\ {}^e\mathbf{H}=0$ 的那些解才能代表。现在只来求这种解。在球面极坐标中,在我们的假设${}^eH_r=0$ 下,该补充条件是

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,{}^eH_\theta)+\frac{\partial}{\partial\phi}({}^eH_\phi)=0,\tag{15}$$

而且它保证下余的方程(10b,α)被满足。因为当以${}^eH_r=0$ 和(13)代入(10b,α)时,后者变成

$$0=\frac{1}{k_1{}^2r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta{}^eH_\theta)+\frac{\partial}{\partial\phi}(r^eH_\phi)\right],$$

由于(15),上式左右两边恒等,因此成立。完全类似的分析同样可用于另一组${}^mE_r=0$ 的分场情况。

径向磁场为零的解叫做**电波**(或横磁波),而径向电场为零的解叫做**磁波**(或横电波)。现在来证明,电波和磁波可以分别从标势${}^e\Pi$ 和${}^m\Pi$ 导出,${}^e\Pi$ 和${}^m\Pi$ 则通称为**德拜势**①。

首先考虑电波,因${}^eH_r=0$,故由(10b,α)得知,${}^eE_\phi$ 和${}^eE_\theta$ 可以用一个标量的梯度来表出

$${}^eE_\phi=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\phi},\qquad {}^eE_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}.\tag{16}$$

如果现在令

$$U=\frac{\partial(r\,{}^e\Pi)}{\partial r}\tag{17}$$

则由(16)得到

$${}^eE_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\,{}^e\Pi)}{\partial r\partial\theta},\qquad {}^eE_\phi=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2(r\,{}^e\Pi)}{\partial r\partial\phi}.\tag{18}$$

可以看出(13)这时可被下式满足:

$$\left.\begin{aligned}{}^eH_\phi&=k_1\frac{\partial^e\Pi}{\partial\theta}=\frac{k_1}{r}\frac{\partial(r\,{}^e\Pi)}{\partial\theta},\\ {}^eH_\theta&=-\frac{k_1}{\sin\theta}\frac{\partial\,{}^e\Pi}{\partial\phi}=-\frac{k_1}{r\sin\theta}\frac{\partial(r\,{}^e\Pi)}{\partial\phi}.\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

如果将(19)代入(10a,α),则得到

---

① 如果 **r** 代表起自原点的径向矢量,则${}^e\Pi\mathbf{r}$ 和${}^m\Pi\mathbf{r}$ 是**径向赫兹矢量**,即处处都沿着径矢方向的赫兹矢量(关于赫兹矢量,见 2.2.2 节)(见 A. Sommerfeld, contribution in P. Frank and R. v. Mises, *Riemann-Weber's Differentialgleichungen der mathematischen Physik* (Braunschweig, Vieweg, 2nd edition, 1935; also New York, Dover Publ., 1961), Vol. 2, p. 790; C. J. Bouwkamp and H. B. G. Casimir, *Physica*, **20**(1954), 539 and A. Nisbet, *Proc. Roy. Soc.*, A, **231**(1955), 260; *Physica*, **21**(1955), 799。

$$ {}^{e}E_r = -\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\,{}^{e}\Pi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\,{}^{e}\Pi}{\partial\phi^2}\right]. \tag{20} $$

将(19)和(20)代入(14)(b,β)和(14)(b,γ)就得到两个方程,分别表示同一表达式对ϕ和 θ 的导数为零。因此令该表达式等于零即可使那两个方程都得到满足,这就给出

$$ \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\,{}^{e}\Pi)}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\,{}^{e}\Pi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\,{}^{e}\Pi}{\partial\phi^2}+k^2\,{}^{e}\Pi=0. \tag{21} $$

借助这一方程,可将(20)式写成为

$$ {}^{e}E_r=\frac{\partial^2(r\,{}^{e}\Pi)}{\partial r^2}+k^2r\,{}^{e}\Pi. \tag{22} $$

将(18),(19),(20),(21)和(22)诸式代入(10),即可证明我们已经获得我们方程组的一个解(电波解)。

磁波可用类似的方法来分析,结果得到这个波可从势${}^{m}\Pi$导出,而势${}^{m}\Pi$和${}^{e}\Pi$一样,也满足微分方程(21)。场方程的全解由电波场和磁波场二者相加即可得到,结果为

$$ \left.\begin{aligned} E_r &= {}^{e}E_r+{}^{m}E_r=\frac{\partial^2(r\,{}^{e}\Pi)}{\partial r^2}+k^2r\,{}^{e}\Pi, && (\alpha)\\ E_\theta &= {}^{e}E_\theta+{}^{m}E_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\,{}^{e}\Pi)}{\partial r\partial\theta}+k_2\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(r\,{}^{m}\Pi)}{\partial\phi}, && (\beta)\\ E_\phi &= {}^{e}E_\phi+{}^{m}E_\phi=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2(r\,{}^{e}\Pi)}{\partial r\partial\phi}-k_2\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,{}^{m}\Pi)}{\partial\theta}, && (\gamma) \end{aligned}\right\} \tag{23a} $$

$$ \left.\begin{aligned} H_r &= {}^{m}H_r+{}^{e}H_r=k^2r\,{}^{m}\Pi+\frac{\partial^2(r\,{}^{m}\Pi)}{\partial r^2}, && (\alpha)\\ H_\theta &= {}^{m}H_\theta+{}^{e}H_\theta=-k_1\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(r\,{}^{e}\Pi)}{\partial\phi}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\,{}^{m}\Pi)}{\partial r\partial\theta}, && (\beta)\\ H_\phi &= {}^{m}H_\phi+{}^{e}H_\phi=k_1\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,{}^{e}\Pi)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2(r\,{}^{m}\Pi)}{\partial r\partial\phi}. && (\gamma) \end{aligned}\right\} \tag{23b} $$

势${}^{e}\Pi$和势${}^{m}\Pi$都是微分方程(21)的解,而方程(21)不是别的,它就是波动方程

$$ \nabla^2\Pi+k^2\Pi=0 $$

的球面极坐标形式。为了使 E_θ, E_ϕ, H_θ 和 H_ϕ 各分量在通过球面 $r=a$ 时要连续,显然,充分的条件是

$$ k_1r\,{}^{e}\Pi,\qquad k_2r\,{}^{m}\Pi,\qquad \frac{\partial}{\partial r}(r\,{}^{e}\Pi),\qquad \frac{\partial}{\partial r}(r\,{}^{m}\Pi) \tag{24} $$

这 4 个量在通过该面时也要**连续**。于是我们的边界条件也分成为对${}^{e}\Pi$和${}^{m}\Pi$的两组独立条件。我们的衍射问题因此就化为在规定的边界条件下求波动方程的两个相互独立解的问题。

(b) 场分量的级数展开式

我们先把波动方程的解表成系数待定的展开式,每一项代表一个特殊积分,然后再利用边界条件来决定这些系数。

我们要找的积分,其形式为

$$\Pi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi). \tag{25}$$

将此式直接代入(21)即可证明,函数 R,Θ 和 Φ 必须满足普通微分方程

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2(rR)}{\mathrm{d}r^2} + \left(k^2 - \frac{\alpha}{r^2}\right)rR = 0, \quad \text{(a)} \\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left(\alpha - \frac{\beta}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0, \quad \text{(b)} \\ \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} + \beta\Phi = 0, \quad \text{(c)} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

式中 α 和 β 是积分常数。

因为场 $\mathbf{E}$,$\mathbf{H}$ 是位置的单值函数,所以 Π 同样必须是单值的,这一要求对 Θ 和 Φ 加上了某些限制。

对(26)式中的每一方程都可写下其一般解。对于(26c),一般解是

$$a\cos(\sqrt{\beta}\phi) + b\sin(\sqrt{\beta}\phi).$$

单值条件要求

$$\beta = m^2 \qquad (m = \text{整数}). \tag{27}$$

因此(26c)式的单值解为

$$\Phi = a_m\cos(m\phi) + b_m\sin(m\phi). \tag{28}$$

方程(26b)是众所周知的球谐函数方程。单值解的一个充要条件是其中的

$$\alpha = l(l+1) \qquad (l > |m|, \text{整数}). \tag{29}$$

将(27)式的 β 值代入(26b)并引进新变量

$$\xi = \cos\theta. \tag{30}$$

则(26b)变换成[①]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\xi}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right]\Theta = 0, \tag{31}$$

它的解是缔合勒让德函数

$$\Theta = P_l^{(m)}(\xi) = P_l^{(m)}(\cos\theta). \tag{32}$$

如果 $|m| > l$,这些函数恒等于零;因此,对每个 l,共有 $2l+1$ 个这样的函数,其

$$m = -l, -l+1, \cdots, l-1, l.$$

为对下余的方程(26a)进行积分,令

$$kr = \rho, \qquad R(r) = \frac{1}{\sqrt{\rho}}Z(\rho), \tag{33}$$

由而得到贝塞尔方程[②]

$$\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\rho} + \left[1 - \frac{(l+\frac{1}{2})^2}{\rho^2}\right]Z = 0. \tag{34}$$

① 见 A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations of Physics* (New York, Academic Press, 1949), p. 127。

② 参见 A. Sommerfeld; *loc. cit.*, p. 86。

这个方程的解是一般的 $l+\frac{1}{2}$ 阶柱面函数 $Z=Z_{l+\frac{1}{2}}(\rho)$，所以(26a)式的解是

$$R=\frac{1}{\sqrt{kr}}Z_{l+\frac{1}{2}}(kr). \tag{35}$$

每一柱面函数都可表成为两个标准型柱面函数，即贝塞尔函数 $J_{l+\frac{1}{2}}(\rho)$ 和纽曼函数 $N_{l+\frac{1}{2}}(\rho)$ 的线性组合。为便于本处求解，现采用函数①

$$\psi_l(\rho)=\sqrt{\frac{\pi\rho}{2}}J_{l+\frac{1}{2}}(\rho),\qquad \chi_l(\rho)=-\sqrt{\frac{\pi\rho}{2}}N_{l+\frac{1}{2}}(\rho). \tag{36}$$

函数 $\psi_l(\rho)$ 在 ρ 平面的每一有限域内，包括原点处，都是正则的，而函数 $\chi_l(\rho)$ 在原点 $(\rho=0)$ 处具有奇点，在该点其值变成无穷大。因此我们可以只用函数 $\psi_l(\rho)$ 而不用函数 $\chi_l(\rho)$ 来代表球内的波。

因此方程(26a)的一般积分可写成为

$$rR=c_l\psi_l(kr)+d_l\chi_l(kr). \tag{37}$$

特别是，取 $c_l=1$，$d_l=-\mathrm{i}$ 时即获得

$$rR=\zeta_l^{(1)}(kr), \tag{38}$$

式中

$$\zeta_l^{(1)}(\rho)=\psi_l(\rho)-\mathrm{i}\chi_l(\rho)=\sqrt{\frac{\pi\rho}{2}}H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(\rho), \tag{39}$$

$H^{(1)}$ 是 Hankel 函数之一②。Hankel 函数有别于其他柱面函数的特性在于该函数在复平面无穷远处为零。这里所采用的带上标 1 的 Hankel 函数在 ρ 的正虚部半平面无穷远处为零，因此适合于表示散射场。

按照(25)式，将(28)，(32)和(37)所给出的三个函数相乘在一起，就得到一个特殊积分 $\Pi_l^{(m)}$；由此我们求得波动方程的一般解如下：

$$\begin{aligned} r\Pi&=r\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\Pi_l^{(m)}\\ &=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}[c_l\psi_l(kr)+d_l\chi_l(kr)][P_l^{(m)}(\cos\theta)][a_m\cos(m\phi)+b_m\sin(m\phi)], \end{aligned} \tag{40}$$

式中 a_m，b_m，c_l 和 d_l 是任意常数。

现在需要让各个波场的势满足边界条件(24)以确定这些常数。为了达到这个目的，需要

---

① 文献中函数 ψ 和 χ 有几种稍微不同的定义(见 G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (Cambridge, Cambridge University Press, 2nd edition, 1944), p. 56; 或 A. Sommerfeld, *loc. cit.*, pp. 113 – 114.)。我们在第 646 ~ 647 页概括列出函数 ψ_l 的一些有关公式。

② 这个公式是贝塞尔、纽曼和 Hankel 三个函数间著名关系

$$J_p+\mathrm{i}N_p=H_p^{(1)}.$$

的一个直接结果。类似的一个关系导致另一 Hankel 函数：

$$J_p-\mathrm{i}N_p\leqslant H_p^{(2)}.$$

这两个关系式相当于用 $\cos\rho$ 和 $\sin\rho$ 表出指数函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho}$ 和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\rho}$ 的那两个表达式。

能够将入射波的势${}^{e}\Pi^{(i)}$和${}^{m}\Pi^{(i)}$也表成(40)形式的级数。这确能做到,下面给予证明。先将入射波表达式(4)按照(8)式变换成球面极坐标:

$$\left.\begin{aligned} E_r^{(i)} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{(1)}r\cos\theta}\sin\theta\cos\phi, & H_r^{(i)} &= \frac{\mathrm{i}k^{(1)}}{k_2^{(1)}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{(1)}r\cos\theta}\sin\theta\sin\phi,\\ E_\theta^{(i)} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{(1)}r\cos\theta}\cos\theta\cos\phi, & H_\theta^{(i)} &= \frac{\mathrm{i}k^{(1)}}{k_2^{(1)}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{(1)}r\cos\theta}\cos\theta\sin\phi,\\ E_\phi^{(i)} &= -\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{(1)}r\cos\theta}\sin\phi, & H_\phi^{(i)} &= \frac{\mathrm{i}k^{(1)}}{k_2^{(1)}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{(1)}r\cos\theta}\cos\phi. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

为了确定势${}^{e}\Pi^{(i)}$或${}^{m}\Pi^{(i)}$,仅需利用(23)中的一个方程。由方程(23a,α)和上列$E_r^{(i)}$表达式可有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{(1)}r\cos\theta}\sin\theta\cos\phi = \frac{\partial^2(r\,{}^{e}\Pi^{(i)})}{\partial r^2} + k^{(1)2}r\,{}^{e}\Pi^{(i)}. \tag{42}$$

此方程左方第一个因子可以展成下列可微分的勒让德多项式级数[鲍尔公式,见§9.4(9)]:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{(1)}r\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{i}^l(2l+1)\frac{\psi_l(k^{(1)}r)}{k^{(1)}r}P_l(\cos\theta). \tag{43}$$

此外还有恒等式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{(1)}r\cos\theta}\sin\theta \equiv -\frac{1}{\mathrm{i}k^{(1)}r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{(1)}r\cos\theta}), \tag{44}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}P_l(\cos\theta) \equiv -P_l^{(1)}(\cos\theta); \qquad P_0^{(1)}(\cos\theta)\equiv 0. \tag{45}$$

利用这些关系式,可将(42)式左边表成如下形式:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{(1)}r\cos\theta}\sin\theta\cos\phi = \frac{1}{(k^{(1)}r)^2}\sum_{l=1}^{\infty}\mathrm{i}^{l-1}(2l+1)\psi_l(k^{(1)}r)P_l^{(1)}(\cos\theta)\cos\phi. \tag{46}$$

因此我们采取一个形式与上式相似的级数

$$r\,{}^{e}\Pi^{(i)} = \frac{1}{k^{(1)2}}\sum_{l=1}^{\infty}\alpha_l\psi_l(k^{(1)}r)P_l^{(1)}(\cos\theta)\cos\phi \tag{47}$$

作为(42)式的试探解。将(46)和(47)代入(42),并比较两边系数,即得到下列关系:

$$\alpha_l\left[k^{(1)2}\psi_l(k^{(1)}r) + \frac{\partial^2\psi_l(k^{(1)}r)}{\partial r^2}\right] = \mathrm{i}^{l-1}(2l+1)\frac{\psi_l(k^{(1)}r)}{r^2}. \tag{48}$$

现在由(37)式(取$c_l=1, d_l=0$)可知

$$\psi_l(k^{(1)}r) = rR \tag{49}$$

是(26a)的一个解:

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi_l}{\mathrm{d}r^2} + \left(k^{(1)2} - \frac{\alpha}{r^2}\right)\psi_l = 0, \tag{50}$$

只要[见(29)]$\alpha = l(l+1)$。将(50)同(48)进行比较,即可看出

$$\alpha_l = \mathrm{i}^{l-1}\frac{2l+1}{l(l+1)}. \tag{51}$$

磁势${}^m\Pi^{(i)}$方面的计算与此类似。这样我们得到入射波的两个势的表达式如下：

$$\left.\begin{aligned} r\,{}^e\Pi^{(i)} &= \frac{1}{k^{(\mathrm{I})2}}\sum_{l=1}^{\infty}\mathrm{i}^{l-1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\psi_l(k^{(\mathrm{I})}r)P_l^{(1)}(\cos\theta)\cos\phi, \quad (\mathrm{a})\\ r\,{}^m\Pi^{(i)} &= \frac{1}{k^{(\mathrm{I})2}}\sum_{l=1}^{\infty}\mathrm{i}^{l}\frac{k^{(\mathrm{I})}}{k_2^{(\mathrm{I})}}\frac{2l+1}{l(l+1)}\psi_l(k^{(\mathrm{I})}r)P_l^{(1)}(\cos\theta)\sin\phi. \quad (\mathrm{b}) \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

我们已经把两个势都表成(40)形式的级数，因而现在能够很容易确定各未知常数。

边界条件(24)全式写出时是

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r}[r({}^e\Pi^{(i)}+{}^e\Pi^{(s)})]_{r=a} = \frac{\partial}{\partial r}[r\,{}^e\Pi^{(w)}]_{r=a}, && (\mathrm{a})\\ &\frac{\partial}{\partial r}[r({}^m\Pi^{(i)}+{}^m\Pi^{(s)})]_{r=a} = \frac{\partial}{\partial r}[r\,{}^m\Pi^{(w)}]_{r=a}, && (\mathrm{b})\\ &k_1^{(\mathrm{I})}[r({}^e\Pi^{(i)}+{}^e\Pi^{(s)})]_{r=a} = k_1^{(\mathrm{II})}[r\,{}^e\Pi^{(w)}]_{r=a}, && (\mathrm{c})\\ &k_2^{(\mathrm{I})}[r({}^m\Pi^{(i)}+{}^m\Pi^{(s)})]_{r=a} = k_2^{(\mathrm{II})}[r\,{}^m\Pi^{(w)}]_{r=a}. && (\mathrm{d}) \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

按照(52)式，这些方程只有在下列情况才能得到满足：如果在未知势 $\Pi^{(s)}$ 和势 $\Pi^{(w)}$ 的展开式中只存在 $m=1$ 的这些项，并且除此而外，如果磁势表达式中

$$a_1 = 0,$$

而电势表达式中

$$b_1 = 0.$$

前已提及，对于 $\Pi^{(w)}$，只有用函数 ψ_l 表示方为适宜，因为这些函数在原点处保持正则，而函数 χ_l 在该处变成无穷大。因此我们设

$$\left.\begin{aligned} r\,{}^e\Pi^{(w)} &= \frac{1}{k^{(\mathrm{II})2}}\sum_{l=1}^{\infty}{}^eA_l\psi_l(k^{(\mathrm{II})}r)P_l^{(1)}(\cos\theta)\cos\phi, \quad (\mathrm{a})\\ r\,{}^m\Pi^{(w)} &= \frac{\mathrm{i}}{k^{(\mathrm{II})}k_2^{(\mathrm{II})}}\sum_{l=1}^{\infty}{}^mA_l\psi_l(k^{(\mathrm{II})}r)P_l^{(1)}(\cos\theta)\sin\phi. \quad (\mathrm{b}) \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

我们还曾看到，对于散射波，用函数 $\zeta_l^{(1)}=\psi_l-\mathrm{i}\chi_l$ 来表示是适宜的，$\zeta_l^{(1)}$ 得自 Hankel 函数 $H^{(1)}$ 乘以$\sqrt{\pi\rho/2}$[见(39)式]。当 ρ 值很大时，$H^{(1)}$ 的行为如同 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho}/\sqrt{\rho}$，即 $\zeta_l^{(1)}$ 的行为如同 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\rho}$，而 $R=\zeta_l^{(1)}(k^{(\mathrm{I})}r)/r$ 的行为如同 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{(\mathrm{I})}r}/r$。这样，在远离球体的地方，散射波是球面波，中心在原点 $r=0$。因此我们设

$$\left.\begin{aligned} r\,{}^e\Pi^{(s)} &= \frac{1}{k^{(\mathrm{I})2}}\sum_{l=1}^{\infty}{}^eB_l\zeta_l^{(1)}(k^{(\mathrm{I})}r)P_l^{(1)}(\cos\theta)\cos\phi, \quad (\mathrm{a})\\ r\,{}^m\Pi^{(s)} &= \frac{\mathrm{i}}{k^{(\mathrm{I})}k_2^{(\mathrm{I})}}\sum_{l=1}^{\infty}{}^mB_l\zeta_l^{(1)}(k^{(\mathrm{I})}r)P_l^{(1)}(\cos\theta)\sin\phi. \quad (\mathrm{b}) \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

现在如果将(52)，(54)和(55)各式代入边界条件(53)，则得到${}^eA_l$，${}^mA_l$，${}^eB_l$ 和${}^mB_l$ 四个系数之间

的一组线性关系式[①] 如下：

$$\left.\begin{aligned}
{}^{e}B_l\frac{1}{k^{(\mathrm{I})}}\zeta_l^{(1)'}(k^{(\mathrm{I})}a)+\frac{1}{k^{(\mathrm{I})}}\mathrm{i}^{l-1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\psi_l'(k^{(\mathrm{I})}a)&=\frac{1}{k^{(\mathrm{II})}}{}^{e}A_l\psi_l'(k^{(\mathrm{II})}a),\\
{}^{m}B_l\frac{1}{k_2^{(\mathrm{I})}}\zeta_l^{(1)'}(k^{(\mathrm{I})}a)+\frac{1}{k_2^{(\mathrm{I})}}\mathrm{i}^{l-1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\psi_l'(k^{(\mathrm{I})}a)&=\frac{1}{k_2^{(\mathrm{II})}}{}^{m}A_l\psi_l'(k^{(\mathrm{II})}a),\\
{}^{e}B_l\frac{1}{k_2^{(\mathrm{I})}}\zeta_l^{(1)}(k^{(\mathrm{I})}a)+\frac{1}{k_2^{(\mathrm{I})}}\mathrm{i}^{l-1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\psi_l(k^{(\mathrm{I})}a)&=\frac{1}{k_2^{(\mathrm{II})}}{}^{e}A_l\psi_l(k^{(\mathrm{II})}a),\\
{}^{m}B_l\frac{1}{k^{(\mathrm{I})}}\zeta_l^{(1)}(k^{(\mathrm{I})}a)+\frac{1}{k^{(\mathrm{I})}}\mathrm{i}^{l-1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\psi_l(k^{(\mathrm{I})}a)&=\frac{1}{k^{(\mathrm{II})}}{}^{m}A_l\psi_l(k^{(\mathrm{II})}a).
\end{aligned}\right\}\tag{56}$$

我们所关注的只是系数${}^{e}B_l$和${}^{m}B_l$，因为二者表征着散射波。从上式中消去${}^{e}A_l$和${}^{m}A_l$，就可以得到${}^{e}B_l$和${}^{m}B_l$，结果如下：

$$\left.\begin{aligned}
{}^{e}B_l&=\mathrm{i}^{l+1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\frac{k_2^{(\mathrm{I})}k^{(\mathrm{II})}\psi_l'(k^{(\mathrm{I})}a)\psi_l(k^{(\mathrm{II})}a)-k_2^{(\mathrm{II})}k^{(\mathrm{I})}\psi_l'(k^{(\mathrm{II})}a)\psi_l(k^{(\mathrm{I})}a)}{k_2^{(\mathrm{I})}k^{(\mathrm{II})}\zeta_l^{(1)'}(k^{(\mathrm{I})}a)\psi_l(k^{(\mathrm{II})}a)-k_2^{(\mathrm{II})}k^{(\mathrm{I})}\psi_l'(k^{(\mathrm{II})}a)\zeta_l^{(1)}(k^{(\mathrm{I})}a)},\ \text{(a)}\\
{}^{m}B_l&=\mathrm{i}^{l+1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\frac{k_2^{(\mathrm{I})}k^{(\mathrm{II})}\psi_l(k^{(\mathrm{I})}a)\psi_l'(k^{(\mathrm{II})}a)-k_2^{(\mathrm{II})}k^{(\mathrm{I})}\psi_l'(k^{(\mathrm{I})}a)\psi_l(k^{(\mathrm{II})}a)}{k_2^{(\mathrm{I})}k^{(\mathrm{II})}\zeta_l^{(1)}(k^{(\mathrm{I})}a)\psi_l'(k^{(\mathrm{II})}a)-k_2^{(\mathrm{II})}k^{(\mathrm{I})}\zeta_l^{(1)'}(k^{(\mathrm{I})}a)\psi_l(k^{(\mathrm{II})}a)}.\ \text{(b)}
\end{aligned}\right\}\tag{57}$$

最后将(55)代入(23)，就得到散射波场矢量的各分量，结果是

$$\left.\begin{aligned}
E_r^{(s)}&=\frac{1}{k^{(\mathrm{I})2}}\frac{\cos\phi}{r^2}\sum_{l=1}^{\infty}l(l+1){}^{e}B_l\zeta_l^{(1)}(k^{(\mathrm{I})}r)P_l^{(1)}(\cos\theta),\\
E_\theta^{(s)}&=-\frac{1}{k^{(\mathrm{I})}}\frac{\cos\phi}{r}\sum_{l=1}^{\infty}\left[{}^{e}B_l\zeta_l^{(1)'}(k^{(\mathrm{I})}r)P_l^{(1)'}(\cos\theta)\sin\theta\right.\\
&\qquad\left.-\mathrm{i}{}^{m}B_l\zeta_l^{(1)}(k^{(\mathrm{I})}r)P_l^{(1)}(\cos\theta)\frac{1}{\sin\theta}\right],\\
E_\phi^{(s)}&=-\frac{1}{k^{(\mathrm{I})}}\frac{\sin\phi}{r}\sum_{l=1}^{\infty}\left[{}^{e}B_l\zeta_l^{(1)'}(k^{(\mathrm{I})}r)P_l^{(1)}(\cos\theta)\frac{1}{\sin\theta}\right.\\
&\qquad\left.-\mathrm{i}{}^{m}B_l\zeta_l^{(1)}(k^{(\mathrm{I})}r)P_l^{(1)'}(\cos\theta)\sin\theta\right],\\
H_r^{(s)}&=\frac{\mathrm{i}}{k^{(\mathrm{I})}k_2^{(\mathrm{I})}}\frac{\sin\phi}{r^2}\sum_{l=1}^{\infty}l(l+1){}^{m}B_l\zeta_l^{(1)}(k^{(\mathrm{I})}r)P_l^{(1)}(\cos\theta),\\
H_\theta^{(s)}&=-\frac{1}{k_2^{(\mathrm{I})}}\frac{\sin\phi}{r}\sum_{l=1}^{\infty}\left[{}^{e}B_l\zeta_l^{(1)}(k^{(\mathrm{I})}r)P_l^{(1)}(\cos\theta)\frac{1}{\sin\theta}\right.\\
&\qquad\left.+\mathrm{i}{}^{m}B_l\zeta_l^{(1)'}(k^{(\mathrm{I})}r)P_l^{(1)'}(\cos\theta)\sin\theta\right],\\
H_\phi^{(s)}&=\frac{1}{k_2^{(\mathrm{I})}}\frac{\cos\phi}{r}\sum_{l=1}^{\infty}\left[{}^{e}B_l\zeta_l^{(1)}(k^{(\mathrm{I})}r)P_l^{(1)'}(\cos\theta)\sin\theta\right.\\
&\qquad\left.+\mathrm{i}{}^{m}B_l\zeta_l^{(1)'}(k^{(\mathrm{I})}r)P_l^{(1)}(\cos\theta)\frac{1}{\sin\theta}\right].
\end{aligned}\right\}\tag{58}$$

① 式中ψ_l，ζ_l和$P_l^{(1)}$各函数上加一撇时，表示对其自变量取微分。

至此我们的边值问题的解在形式上即告完成;至于解的存在和收敛问题,这里将不再讨论。

这里回顾一下上式中各项常数的意义将有所裨益。因为包围金属球的媒质假设是非导体,所以 $\sigma^{(\mathrm{I})}=0$。如果将导电球的电导率 $\sigma^{(\mathrm{II})}$ 改写成 σ,则由(2)式得到

$$\left.\begin{aligned}
&k_1^{(\mathrm{I})}=\frac{\mathrm{i}\omega}{c}\varepsilon^{(\mathrm{I})}=\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda_0}\varepsilon^{(\mathrm{I})}, \qquad k_2^{(\mathrm{I})}=\frac{\mathrm{i}\omega}{c}=\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda_0}, && \text{(a)}\\
&k^{(\mathrm{I})}=\sqrt{-k_1^{(\mathrm{I})}k_2^{(\mathrm{I})}}=\frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\varepsilon^{(\mathrm{I})}}=\frac{2\pi}{\lambda^{(\mathrm{I})}}, && \text{(b)}\\
&k_1^{(\mathrm{II})}=\frac{\mathrm{i}\omega}{c}\left(\varepsilon^{(\mathrm{II})}+\mathrm{i}\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)=\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\varepsilon^{(\mathrm{II})}+\mathrm{i}\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right), \quad k_2^{(\mathrm{II})}=\frac{\mathrm{i}\omega}{c}=\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda_0}, && \text{(c)}\\
&k^{(\mathrm{II})}=\sqrt{-k_1^{(\mathrm{II})}k_2^{(\mathrm{II})}}=\frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\varepsilon^{(\mathrm{II})}+\frac{4\pi\sigma}{\omega}}, && \text{(d)}
\end{aligned}\right\} \tag{59}$$

式中 λ_0 是光在真空中的波长,而 $\lambda^{(\mathrm{I})}$ 是导电球周围媒质中的波长。

为便于后面的讨论,现引进导电球对周围媒质的复折射率,并用 $\hat{n}$ 代表,则有

$$\hat{n}^2=\frac{\hat{n}^{(\mathrm{II})2}}{n^{(\mathrm{I})2}}=\frac{k^{(\mathrm{II})2}}{k^{(\mathrm{I})2}}=\frac{\varepsilon^{(\mathrm{II})}}{\varepsilon^{(\mathrm{I})}}+\mathrm{i}\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon^{(\mathrm{I})}}=\frac{k_1^{(\mathrm{II})}}{k_1^{(\mathrm{I})}}. \tag{60}$$

此外再引进一个无量纲参量 q,定义为

$$q=\frac{2\pi}{\lambda^{(\mathrm{I})}}a, \tag{61}$$

即 q 等于 2π 乘以球的半径 a 与外媒质中光的波长 $\lambda^{(\mathrm{I})}$ 之比,再利用关系式

$$\frac{k^{(\mathrm{II})}k_2^{(\mathrm{I})}}{k^{(\mathrm{I})}k_2^{(\mathrm{II})}}=\hat{n},$$

就可以将系数 ${}^eB_l$ 和 ${}^mB_l$ 的表达式(57)写成如下形式:

$$\left.\begin{aligned}
{}^eB_l&=\mathrm{i}^{l+1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\frac{\hat{n}\psi_l'(q)\psi_l(\hat{n}q)-\psi_l(q)\psi_l'(\hat{n}q)}{\hat{n}\zeta_l^{(1)\prime}(q)\psi_l(\hat{n}q)-\zeta_l^{(1)}(q)\psi_l'(\hat{n}q)}, && \text{(a)}\\
{}^mB_l&=\mathrm{i}^{l+1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\frac{\hat{n}\psi_l(q)\psi_l'(\hat{n}q)-\psi_l'(q)\psi_l(\hat{n}q)}{\hat{n}\zeta_l^{(1)}(q)\psi_l'(\hat{n}q)-\zeta_l^{(1)\prime}(q)\psi_l(\hat{n}q)}. && \text{(b)}
\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

当球的介电常数或者电导率有一个很高,而同时球的半径不太小时,公式(62)呈特别简单的形式。在这种情况下,$|\hat{n}|\gg 1$,$|\hat{n}q|\gg 1$,因而(62)化为

$$\left.\begin{aligned}
{}^eB_l&=\mathrm{i}^{l+1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\frac{\psi_l'(q)}{\zeta_l^{(1)\prime}(q)}, && \text{(a)}\\
{}^mB_l&=\mathrm{i}^{l+1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\frac{\psi_l(q)}{\zeta_l^{(1)}(q)}. && \text{(b)}
\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

这一近似结果对光学而言意义不大,但在无线电波方面甚属重要。此外它还具有历史意义,因为早期理论所探讨的都是这一极限情况①。

① 见 K. Schwarzschild, *Münch. Akad.*, *Math-phys. Kl.*, **31**(1901), 293。

(c) 缔合勒让德函数和柱面函数有关公式一览

为便于继续讨论,这里概括列出球面函数和柱面函数的一些有关公式。

缔合勒让德函数

勒让德多项式是($\cos\theta$ 的)多项式

$$P_l(\cos\theta)=\sum_{m=0}^{[l/2]}(-1)^m\frac{(2l-2m)!}{2^l m!(l-m)!(l-2m)!}(\cos\theta)^{l-2m}, \tag{64}$$

并且第一类缔合勒让德函数的定义公式是[①]

$$P_l^{(m)}(\cos\theta)=(\sin\theta)^m\frac{\mathrm{d}^m P_l(\cos\theta)}{\mathrm{d}(\cos\theta)^m}. \tag{65}$$

此外后面还要用到关系式

$$\left.\begin{aligned}P_l^{(1)}(\cos\theta)&=\frac{l}{\sin\theta}[P_{l-1}(\cos\theta)-\cos\theta P_l(\cos\theta)],\\ P_l^{(1)}(\cos\theta)&=\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\left[P_l^{(1)}(\cos\theta)-l(l+1)\frac{P_l(\cos\theta)}{\sin\theta}\right].\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

对于大的 l,$P_l(\cos\theta)$有一个渐近近似

$$P_l(\cos\theta)\approx\sqrt{\frac{2}{l\pi\sin\theta}}\sin\left[(l+\tfrac{1}{2})\theta+\frac{\pi}{4}\right]. \tag{67}$$

柱面函数

I. **当自变量 x 的值很小时**,$\psi_l(x)$可作级数展开如下:

$$\psi_l(x)=\frac{x^{l+1}}{1\times3\times\cdots\times(2l+1)}f_l(x), \tag{68}$$

式中

$$f_l(x)=1-\frac{2}{2l+3}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\cdots. \tag{69}$$

对于 $\zeta_l^{(1)}(x)$,展开式为

$$\zeta_l^{(1)}(x)=-\mathrm{i}\frac{1\times3\times\cdots\times(2l-1)}{x^l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}[h_l(x)-\mathrm{i}xg_l(x)], \tag{70}$$

式中 $h_l(x)$和 $g_l(x)$是幂级数,其首项为 1,第二项是 x 的平方。函数$\psi_l'(x)$和 $\zeta_l^{(1)\prime}(x)$可以表成类似的形式:

$$\psi_l'(x)=\frac{(l+1)x^l}{1\times3\times\cdots\times(2l+1)}f_l^+(x), \tag{71}$$

$$\zeta_l^{(1)\prime}(x)=\mathrm{i}l\frac{1\times3\times\cdots\times(2l-1)}{x^{l+1}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}[h_l^+(x)-\mathrm{i}xg_l^+(x)], \tag{72}$$

式中 $f_l^+(x)$,$h_l^+(x)$和 $g_l^+(x)$是和前面同类的幂级数。

① 有时也采用一种稍微不同的定义,它和这里的定义差一乘积因子$(-1)^m$。

II. **当自变量 x 的值很大时**，如果 l 比 $|x|$ 小得多，可采用下列渐近公式：

$$\psi_l(x)\approx\tfrac{1}{2}[\mathrm{i}^{l+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+(-\mathrm{i})^{l+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}], \tag{73}$$

$$\zeta_l^{(1)}(x)\approx(-\mathrm{i})^{l+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \tag{74}$$

和

$$\psi_l'(x)\approx\tfrac{1}{2}[\mathrm{i}^{l}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+(-\mathrm{i})^{l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}], \tag{75}$$

$$\zeta_l^{(1)\prime}(x)\approx(-\mathrm{i})^{l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}. \tag{76}$$

当 x 值为实数时，函数 $\psi_l(x)$ 和 $\psi_l'(x)$ 本身也是实数：

$$\psi_l(x)\approx\sin\left(x-\frac{l\pi}{2}\right), \tag{77}$$

$$\psi_l'(x)\approx\cos\left(x-\frac{l\pi}{2}\right). \tag{78}$$

14.5.2　米氏公式的一些结果

(a) 分波

(58)式表明，散射波场径向分量 $E_r^{(s)}$ 和 $H_r^{(s)}$ 的振幅随离散射中心的距离按平方反比关系衰减，而其他分量的振幅衰减较慢，只与该距离成反比。因此，在足够远的地区（$r\gg\lambda$），在**辐射带**或**波带**内，径向分量与切向分量相比可以略去，即在这一区域散射波是**横**波。

该公式还表明，散射波是由来自不同级球谐函数的贡献组成。这些贡献可叫做**分波**(partial wave)，其幅值强度决定于复系数 ${}^eB_l$ 和 ${}^mB_l$ 的绝对值。而这些系数与两个媒质的性质，以及球的半径与入射光的波长之比有关。

每一级分波都由一个振幅为 ${}^eB_l$ 的电部和一个振幅为 ${}^mB_l$ 的磁部组成。电分波的磁力线和磁分波的电力线全部处于各同心球面上，因为对于电分波，$H_r^{(s)}=0$，而对于磁分波，$E_r^{(s)}=0$。

现在来分析一个典型的分波，例如第 l 级电分波。由(48)式可知，$E_\theta^{(s)}$ 和 $H_\phi^{(s)}$ 中的相应分量（含系数 ${}^eB_l$ 的）在 $\cos\phi$ 或 $P_l^{(1)\prime}(\cos\theta)\sin\theta$ 为零的那些点等于零；同样，$E_\phi^{(s)}$ 和 $H_\theta^{(s)}$ 中的相应分量在 $\sin\phi$ 或 $P_l^{(1)}(\cos\theta)/\sin\theta$ 为零的那些点等于零。从缔合勒让德函数的特性可以得知，在间区 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 内，$P_l^{(1)\prime}(\cos\theta)\sin\theta$ 有 l 次等于零，而函数 $P_l^{(1)}(\cos\theta)/\sin\theta$ 有 $(l-1)$ 次等于零（但零位置不发生在 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$）。由此得知，在 $\phi=\pm\pi/2$ 方位（$E_\theta^{(s)}$、$H_\phi^{(s)}\equiv0$），所有场分量（$E_\phi^{(s)}$，$H_\theta^{(s)}$）共有 $2(l-1)$ 次为零；而在 $\phi=0$ 或 π 方位（$E_\phi^{(s)}$、$H_\theta^{(s)}\equiv0$），场分量（$E_\theta^{(s)}$，$H_\phi^{(s)}$）共有 $2l$ 次为零[①]。因此，第 l 级电分波的场分量在上述两个方位总共有 $(4l-2)$ 次为零。因为磁力线必须是闭合曲线，并且如前所说，它们全部处于同以原点为球心的各球面上，由此可知，位于圆 $\phi=0$ 或 π 上的那 $2l$ 个零点各是一闭合磁力回线族的中心，而位于圆 $\phi=\pm\pi/2$ 上的那 $2l$ 个零点是中性点。前者的磁力线（在分布和走向上）回避这些中性点，正如同两个公用一对正交渐近线的直角双曲线族回避它们的共同中心[②]。

---

① 原文本章基本译自 Born, *Optik*(1933)，本段此处存在严重疏漏，现参考 *Optik* 改正译出——译者注。

② 直角双曲线又称等轴双曲线或等边双曲线——译者注。

图 14.8 给出第四级电分波的磁力线分布。上述两组零点在图中可以一目了然地区分开来;第一组的($\phi = 0, \pi$)在 xz 截面(图平面)上,而第二组($\phi = \pm \pi/2$)的在 yz 截面上,共有 $4l - 2 = 12$ 个($l = 4$)。

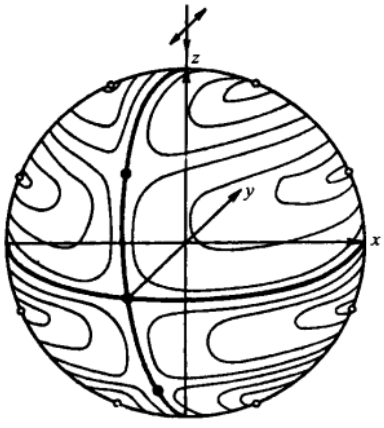


图 14.8 第四级电分波的磁力线分布

图 14.9(a)分别给出 yz 平面前半球(或后半球)上前四级电分波的磁力线在 yz 平面上的投影。在辐射带中,电力线同磁力线是正交的,因为按照(58)式,各级分波(电分波或磁分波)都存在下列关系:

$$E_\theta^{(s)} H_\theta^{(s)} + E_\phi^{(s)} H_\phi^{(s)} = 0. \tag{79}$$

图 14.9(b)给出这些电力线在 xz 平面上的同类投影。

磁分波方面结果完全类似,上列分析仍然有效,只是这时要把 $\cos\phi$ 和 $\sin\phi$ 互换一下。磁分波在一球面上的电力线,其相应投影仅需把上列图形绕 z 轴转 90°即可得出。

(b) 两种极端情况

现在来探讨各级分波的相对贡献。一般情况($\hat{n}$ 和 q 都任意)非简单分析所能胜任,因此这里只详细考虑两种极端情况:导电球半径远大于波长($q \gg 1$)和导电球半径远小于波长($q \ll 1$)。

I: $q \gg 1$。在这种情况下,应可预期我们的解所给出的结果将和惠更斯-基尔霍夫衍射定理的基本相同,甚至(当 $q \to \infty$ 时)和几何光学的结果基本相同。

如果只考虑级数 l 比 q 和 $|\hat{n}q|$ 小得非常多的情况,则可应用渐近近似式(73) ~ (76)。这时有

$$\frac{\psi_l(\hat{n}q)}{\psi_l'(\hat{n}q)} \approx \frac{\mathrm{i}^{l+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{n}q} + (-\mathrm{i})^{l+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{n}q}}{\mathrm{i}^{l}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{n}q} + (-\mathrm{i})^{l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{n}q}} = \frac{\cos\left[\hat{n}q - (l+1)\dfrac{\pi}{2}\right]}{\cos\left(\hat{n}q - l\dfrac{\pi}{2}\right)} = \tan\left(\hat{n}q - l\frac{\pi}{2}\right), \tag{80}$$

并且各系数[(62)式]变成

$$\left.\begin{aligned}
{}^{e}B_l &= (-1)^{l+1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q}\frac{\sin\left(q-l\frac{\pi}{2}\right)-\hat{n}\cos\left(q-l\frac{\pi}{2}\right)\tan\left(\hat{n}q-l\frac{\pi}{2}\right)}{1-\mathrm{i}\hat{n}\tan\left(\hat{n}q-l\frac{\pi}{2}\right)}\\
{}^{m}B_l &= (-1)^{l+1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q}\frac{\hat{n}\sin\left(q-l\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(q-l\frac{\pi}{2}\right)\tan\left(\hat{n}q-l\frac{\pi}{2}\right)}{\hat{n}-\mathrm{i}\tan\left(\hat{n}q-l\frac{\pi}{2}\right)}.
\end{aligned}\right\}\tag{81}$$

注意这些系数都是 q 和 l 二者的快速振荡函数，所以 q 和 l 的微小改变即可引起 ${}^{e}B_l$ 和 ${}^{m}B_l$ 的很大变化。此外还可看到 ${}^{m}B_{l+1}$ 和 ${}^{e}B_l$ 具有相同的数量级，即 l 级电分波的振幅和 $l+1$ 磁分波的振幅数量级相同。

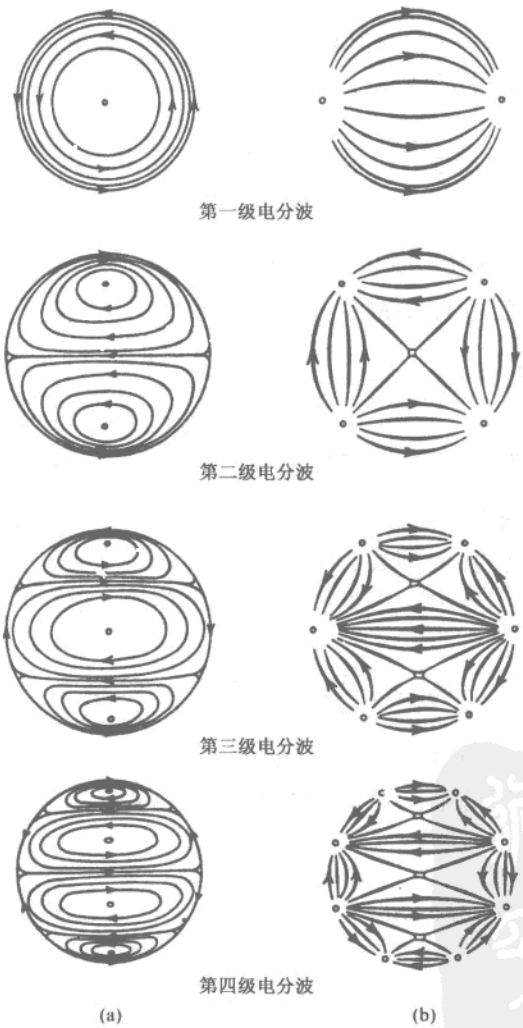


图 14.9　前四级电分波的力线分布：(a)磁力线；(b)电力线[引自 G. Mie, *Ann. d. Physik*(4), **25**(1908), 377]

因为推导公式(81)时曾假设 l 比 q 小得多,所以从这些近似式不能确定对散射场贡献不容忽略的分波数目。德拜[①] 曾推导了对所有 l 都有效的渐近近似式,并证明 $l+\frac{1}{2}$ 一超过 q 时分波的振幅即迅速衰减至零,因此只需要考虑前 q 项。

当导电球的介电常数或电导率非常大时($|\hat{n}|\to\infty$),${}^eB_l$ 和 ${}^mB_l$ 表达式简化为

$$\left.\begin{aligned} {}^eB_l &= \mathrm{i}(-1)^{l+1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q}\cos\left(q-l\frac{\pi}{2}\right),\\ {}^mB_l &= (-1)^{l+1}\frac{2l+1}{l(l+1)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q}\sin\left(q-l\frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

推导此式的最简单方法是以渐近近似式(73)~(76)代入(63)式得之。

本节($q\gg 1$)各近似式可应用在虹霓理论方面[②],这时参量 q 由雨滴的大小来决定,其数量级为 10^4。

II: $q\ll 1$。这一情况对于研究胶体溶液微观粒子和亚微观粒子具有重大实用价值。这时(62)式中各柱面函数可采用其幂级数展开式(68)~(72),由而得到(各展开式仅取到首项)

$$\left.\begin{aligned} {}^eB_l &\approx \mathrm{i}^l\frac{q^{2l+1}}{l^2[1\times3\times5\times\cdots\times(2l-1)]^2}\frac{\hat{n}^2-1}{\hat{n}^2+\dfrac{l+1}{l}},\\ {}^mB_l &\approx \mathrm{i}^l\frac{q^{2l+3}}{l(l+1)(2l+1)(2l+3)[1\times3\times5\times\cdots\times(2l-1)]^2}(\hat{n}^2-1). \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

当电导率或介电常数非常大时,从(63)式可以得到[③]

$$\left.\begin{aligned} {}^eB_l &= \mathrm{i}^l\frac{q^{2l+1}}{l^2[1\times3\times5\times\cdots\times(2l-1)]^2},\\ {}^mB_l &= -\mathrm{i}^l\frac{q^{2l+1}}{l(l+1)[1\times3\times5\times\cdots\times(2l-1)]^2}. \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

只要电导率保持有限大小而(83)式有效,则 ${}^eB_{l+1}$ 和 ${}^mB_l$ 正比于相同的 q 幂次,即($l+1$)级电分波和 l 级磁分波二者的振幅同数量级,这一点正和前面 $q\gg1$ 时情况一样[④]。如果球的半径小到 q^2 与 1 相比可予忽略,则只需要考虑第一级电分波,并且其振幅强度(和位相)由下列复振幅给出:

$${}^eB_1=\mathrm{i}q^3\frac{\hat{n}^2-1}{\hat{n}^2+2}=\mathrm{i}\left(\frac{2\pi a}{\lambda^{(1)}}\right)^3\frac{\hat{n}^2-1}{\hat{n}^2+2}. \tag{85}$$

因为 ${}^eB_1$ 是复量,所以入射的原场(primary field)和散射的次场(secondary field)之间有一相差。

相反,在 $|\hat{n}|\to\infty$ 极限情况下,第 l 级电分波的振幅和第 l 级磁分波的振幅数量级相同,如(84)式所示。

---

① P. Debye, *Ann. d. Physik*(4), **30**(1909), 118; *Mat. Ann.*, **67**(1909), 535; *Sitzungsb. Münch. Akad. Wiss, Math. Phys. Kl.*, 5 Abh. (1910)。

② 见 B. van der Pol and H. Bremmer, *Phil. Mag.*, (7), **24**(1937), 857; H. Bucerius, *Optik*, **1**(1946), 188。

③ 直接从(83)过渡到(84)并不简单易行;这里必须考虑当 $|\hat{n}|\to\infty$, $q\to0$ 时如何使 $q^2|\hat{n}|^2$ 趋于一定值。

④ $q\gg1$ 时,${}^eB_l$ 和 ${}^mB_l$ 是 q 和 l 的周期函数[见(81)式],前文特别说明这时 ${}^mB_{l+1}$ 和 ${}^eB_l$ 同数量级,其实 ${}^eB_{l+1}$ 和 ${}^mB_l$ 也同数量级,本句所言指此。$q\ll1$ 时,${}^eB_l$ 和 ${}^mB_l$ 不是周期函数,${}^mB_{l+1}$ 和 ${}^eB_l$ 数量级并不相同——译者注。

现在让我们看看，当 $|\hat{n}|$ 为有限大小时，在离球很远的地方（$r \gg \lambda$），第一级电分波的场如何。在(58)式中采用渐近近似式

$$\zeta_1^{(1)}(x) = -e^{ix}, \qquad \zeta_1^{(1)\prime}(x) = -ie^{ix}, \tag{86}$$

和关系式

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta, \qquad P_1^{(1)}(\cos\theta) = \sin\theta, \qquad P_1^{(1)\prime}(\cos\theta)\sin\theta = -\cos\theta, \tag{87}$$

式中一撇表示对 $\cos\theta$ 取微分，由而得到：

$$\left.\begin{aligned}
E_\theta^{(s)} &= -\frac{i}{k^{(1)}}\cos\phi\cos\theta^e B_1 \frac{e^{ik^{(1)}r}}{r} = \left(\frac{2\pi}{\lambda^{(1)}}\right)^2 a^3 \frac{\hat{n}^2-1}{\hat{n}^2+2}\cos\phi\cos\theta\frac{e^{ik^{(1)}r}}{r},\\
E_\phi^{(s)} &= \frac{i}{k^{(1)}}\sin\phi^e B_1 \frac{e^{ik^{(1)}r}}{r} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda^{(1)}}\right)^2 a^3 \frac{\hat{n}^2-1}{\hat{n}^2+2}\sin\phi\frac{e^{ik^{(1)}r}}{r},\\
H_\theta^{(s)} &= \frac{1}{k_2^{(1)}}\sin\phi^e B_1 \frac{e^{ik^{(1)}r}}{r} = \left(\frac{2\pi}{\lambda^{(1)}}\right)^2 \sqrt{\varepsilon^{(1)}} a^3 \frac{\hat{n}^2-1}{\hat{n}^2+2}\sin\phi\frac{e^{ik^{(1)}r}}{r},\\
H_\phi^{(s)} &= \frac{1}{k_2^{(1)}}\cos\phi\cos\theta^e B_1 \frac{e^{ik^{(1)}r}}{r} = \left(\frac{2\pi}{\lambda^{(1)}}\right)^2 \sqrt{\varepsilon^{(1)}} a^3 \frac{\hat{n}^2-1}{\hat{n}^2+2}\cos\phi\cos\theta\frac{e^{ik^{(1)}r}}{r},
\end{aligned}\right\} \tag{88}$$

不难看出，方程(88)完全等同于一个电偶极子辐射带（$r \gg \lambda$）的场方程，**该电偶极子位于原点 O，振动方向平行于 x 轴**，即平行于原入射场的电矢量，并且偶极矩 $p = p_0 e^{-i\omega t}$，其中

$$p_0 = a^3\left|\frac{\hat{n}^2-1}{\hat{n}^2+2}\right|. \tag{89}$$

为了证明这一点，首先假设球外媒质为真空（$\varepsilon^{(1)} = 1$）并回到公式 § 2.2(53)和 § 2.2(54)。根据这两个方程，一个线性电偶极矩 $\mathbf{p}_0 e^{-i\omega t}$ 在真空中的辐射场由下式给出：

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{E} &= -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{1}{r^3}\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{p}_0),\\
\mathbf{H} &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{1}{r^2}(\mathbf{r}\times\mathbf{p}_0),
\end{aligned}\right\} \tag{90}$$

式中时间因子 $e^{-i\omega t}$ 已被省略，而 $\mathbf{r}$ 是观察点相对原点的位置矢量。由(90)可知，如果 $\mathbf{p}_0$ 的方向沿 x 轴，则 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的各分量由下式给出：

$$\left.\begin{aligned}
E_x &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p_0(\sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta)\frac{e^{ikr}}{r},\\
E_y &= -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p_0(\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi)\frac{e^{ikr}}{r},\\
E_z &= -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p_0\sin\theta\cos\theta\cos\phi\frac{e^{ikr}}{r},\\
H_x &= 0,\\
H_y &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p_0\cos\theta\frac{e^{ikr}}{r},\\
H_z &= -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p_0\sin\theta\sin\phi\frac{e^{ikr}}{r}.
\end{aligned}\right\} \tag{91}$$

如果将 **E**,**H** 的这些直角坐标分量用变换式(8)变换到球面极坐标,并同时用表达式(89)代替 p_0,则(91)式将变换成(88)(取 $\varepsilon^{(1)}=1$)。在更一般的情况,$\varepsilon^{(1)}\neq 1$,就必须用介电质中偶极子辐射场的相应表达式来替代(91)。这些表达式可以用与推导(91)式的类似方法得到,变换到球面极坐标后即为(88)式。这里请注意,球的折射率 $\hat{n}$ 只以 $(\hat{n}^2-1)/(\hat{n}^2+2)$ 的组合形式进入等效偶极矩表达式(89);对于介电物质(n 为实量),这一组合形式我们曾在分子折射度理论中遇到过[见 § 2.3(17)]。

按照(88)式,振幅反比于波长的平方,因此散射光的强度反比于波长的四次方。这种情况称之为**瑞利散射**①。

第一级磁分波可按类似方法用一个振动的磁偶极子来描述。更高级的分波则可认为是由振动的多极子所产生,但这一点这里就不来探讨了。

(c) 散射光的强度和偏振

现在回到一般情况,并扼要研究一下散射光的强度和偏振。由于这里所需要的仅仅是强度的相对值,故可取电矢量实振幅的平方作为强度的量度。我们只考虑远场情况($r\gg\lambda$),因此(58)式中的函数 $\zeta_l^{(1)}$ 和 $\zeta_l^{(1)\prime}$ 可用其渐近近似式代替。此外设令

$$\left.\begin{aligned} I_{\parallel}^{(s)} &= \frac{\lambda^{(1)2}}{4\pi^2 r^2}\left|\sum_{l=1}^{\infty}(-\mathrm{i})^l\left[{}^{e}B_l P_l^{(1)\prime}(\cos\theta)\sin\theta-{}^{m}B_l\frac{P_l^{(1)}(\cos\theta)}{\sin\theta}\right]\right|^2,\\ I_{\perp}^{(s)} &= \frac{\lambda^{(1)2}}{4\pi^2 r^2}\left|\sum_{l=1}^{\infty}(-\mathrm{i})^l\left[{}^{e}B_l\frac{P_l^{(1)}(\cos\theta)}{\sin\theta}-{}^{m}B_l P_l^{(1)\prime}(\cos\theta)\sin\theta\right]\right|^2. \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

因此

$$|E_\theta^{(s)}|^2=I_{\parallel}^{(s)}\cos^2\phi,\qquad |E_\phi^{(s)}|^2=I_{\perp}^{(s)}\sin^2\phi. \tag{93}$$

我们定义**观察面**为入射光传播方向与观测方向(θ,ϕ)所构成的平面。按照(4)和(7),ϕ代表这个平面和入射波电矢量振动方向(即 x 方向)的夹角。因为按照(93),当$\phi=0$ 或$\phi=\pi/2$时,$E_\phi^{(s)}$ 或 $E_\theta^{(s)}$ 相应为零,所以当观察面平行于或垂直于入射波振动方向时,散射光是线偏振光。在其他任何(θ,ϕ)方向,散射光一般是椭圆偏振光,因为比值 $E_\theta^{(s)}/E_\phi^{(s)}$ 为复数。然而,在(88)式所表达的瑞利散射这一特别情况,$E_\theta^{(s)}/E_\phi^{(s)}$ 总是实数,所以这时散射光对所有观察方向都是线偏振光。

上面谈的都是线偏光入射情况(入射方向沿 z 轴,振动方向沿 x 轴)。

在实际工作中,通常遇到的是**自然光**的散射。按照 1.5 节中的做法,这时相应的散射公式可由偏振光散射公式对所有偏振方向(ϕ角)取平均而得到②。设用一横线表示这一平均,则(93)式化为(因为$\overline{\cos^2\phi}=\overline{\sin^2\phi}=\frac{1}{2}$)。

---

① 88 页已经指出,1899 年瑞利在一篇著名的关于天空蓝色的论文中证明,这种类型的散射也可产生于均匀媒质密度的自发涨落(Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, (4), **XLI**(1871), 274, 447; (5), **XLVII**(1899), 375. Reprinted in his *Scientific Papers by John William Strutt, Baron Rayleigh* (Cambridge, Cambridge University Press, 1899 – 1920), Vol. 1, pp. 87, 104; Vol. 4, p. 397)。

② 另一种方法是利用 10.9.2 节的结果,按照该结果,自然光波可以看成是由两个振幅相等、传播方向相同而振动方向相互垂直的非相干波所组成。每个波的散射可分开来确定,然后将两个结果相加,即得到总散射强度。这仍然导致(94)式。

$$\overline{|E_\theta^{(s)}|^2} = \tfrac{1}{2}I_\parallel^{(s)}, \qquad \overline{|E_\phi^{(s)}|^2} = \tfrac{1}{2}I_\perp . \tag{94}$$

一般，$I_\parallel^{(s)}$ 和 $I_\perp^{(s)}$ 都不为零，所以此散射光是部分偏振光。仿照 § 1.5(42)，我们可定义该散射光的偏振度 P 为

$$P = \left| \frac{I_\perp^{(s)} - I_\parallel^{(s)}}{I_\perp^{(s)} + I_\parallel^{(s)}} \right| . \tag{95}$$

因此该**散射光的非偏振部分**为

$$\left.\begin{aligned} (I_\perp^{(s)} + I_\parallel^{(s)})(1-P) &= 2I_\parallel^{(s)} \quad \text{当} \quad I_\parallel^{(s)} < I_\perp^{(s)}, \\ &= 2I_\perp^{(s)} \quad \text{当} \quad I_\parallel^{(s)} > I_\perp^{(s)}. \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

散射光的强度和偏振随散射方向和物理参量(λ，a，$\hat{n}$)的变化情况，已有许多著者根据米氏理论作过研究①，但这里不能多谈，仅概括其中一些主要结果如下。

图 14.10 和图 14.11 给出金属球和介电球在不同半径情况下散射光的强度和非偏振部分随观察角 θ(入射光方向和散射光方向的夹角)的变化曲线。靠外的曲线的径矢长度正比于总强度 $I^{(s)} = I_\parallel^{(s)} + I_\perp^{(s)}$，靠里的曲线的径矢长度，如不另作说明，均正比于 $2I_\perp^{(s)}$。单位是任意的，而且每个图各不相同。从这些**极图**(polar diagram)以及其他已发表的计算结果可以得到以下一般结论：

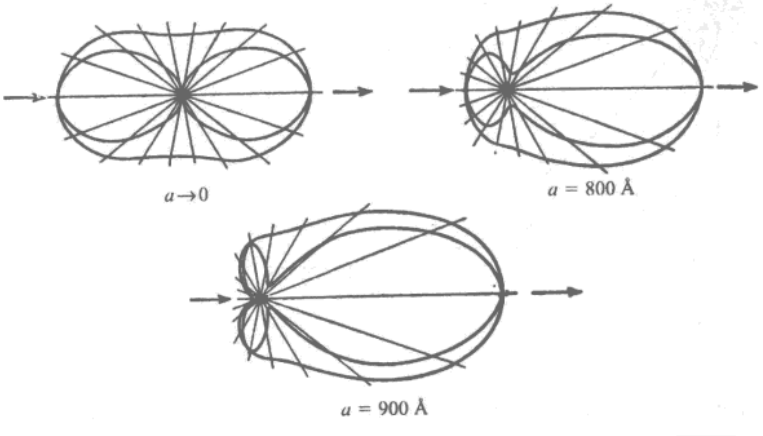


图 14.10　线偏振光在金球粒子上散射时的极图($\lambda_0 = 5500$ 埃，$n^{(\mathrm{I})} = 1.33$，$\hat{n}^{(\mathrm{II})} = 0.57 + 2.45\mathrm{i}$)[引自 G. Mie，*Ann. d. Phys.*，(4)，**25**(1908)，429]

① 除前引米氏论文外，还可参考下列文献：
R. Gans, *Ann. d. Physik*(4), **76**(1925), 29; H. Senftleben and E. Benedict, *Ann. d. Physik*(4), **60**(1919), 297; H. Blumer, *Z. Phys.*, **32**(1925), 119; **38**(1926), 304, 920; **39**(1926), 195; C. Schalén, *Uppsala Astr. Obs. Ann.*, **1**, No. 2(1939); *ibid.*, **1**, No. 9(1945); G. R. Paranjpe, Y. G. Naik and P. B. Vaidya, *Proc. Indian Acad.*, A, **9**(1939), 333, 352; H. Holl, *Optik*, **1**(1946), 213; *ibid.*, **4**(1948/49), 173。H. C. van de Hulst 的文章对众家所得结果作了非常完全的考查，见 *Rech. Astr. Observ. Utrecht*, **11**, Pt. I(1946)，也可见其书著 *Light Scattering by Small Particles*(New York, John Wiley and Sons; London, Chapman and Hall, 1957)。又见 G. Oster, *Chem. Rev.*, **43**(1948), 319。
Tables of scattering functions for spherical particles, National Bureau of Standards(Washington, DC 1949), Applied Mathematics Series, Vol. 4; R. O. Gumprecht and C. M. Sliepcevich, *Light-Scattering Functions for Spherical Particles*(Ann Arbor, University of Michigan Press, 1951)。

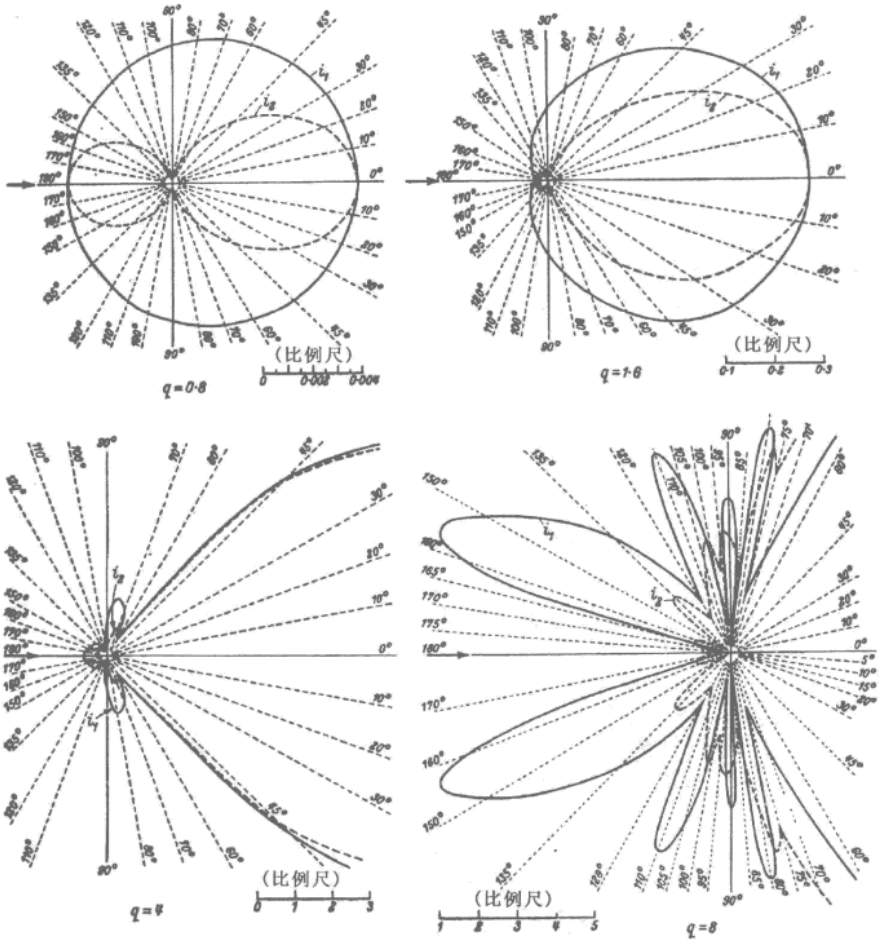


图 14.11 线偏振光在介电球上散射时的极图,球的折射率 $n=1.5$; $i_1=q^2 I_\perp$, $i_2=q^2 I_\parallel$ [引自 H. Bulmer, *Z. Phys.*, **32**(1925), 119]

除去电导率或介电常数非常大的情况(这时大部分入射光朝反方向射回,即被"反射"①),当散射球无限小($a\to 0$)时,极图是面对称的,对称面通过球心并与入射光传播方向相垂直(即 xy 平面)。前向($\theta=0$)和后向($\theta=180°$)各有一强度极大,而在对称面内($\theta=90°$)有一极小。随着球的半径增大,极图就偏离对称,前向散射的光比后向的多起来。这一现象常叫做**米氏效应**。当球的半径再继续增大时,散射光实际上全部靠拢到正前方向 $\theta=0$;同样,对于导电球,也有较多的光集中到这一方向。然而,当球的半径远大于波长时,大部分入射光就依循几何光学方式而被反射。

散射光强度对球径的依赖关系在表 14.4 中得到说明。把表中第一行和第三行进行比较,可明显看到米氏效应。表内数据表明,随着球径的增大,散射光的强度迅猛增加。要作如实比较,须将表中数值乘以因子 $\lambda^{(1)2}/4\pi^2 a^2=1/q^2$。

① 常称为背散射(backward scattering)——译者注。

表 14.4　介电球(折射率 $n=1.25$)散射光的规一化强度 $4\pi^2 a^2 (I_{\perp}^{(s)} + I_{\parallel}^{(s)})/\lambda^{(1)2}$ 随参量 $q=2\pi a/\lambda^{(1)}$ 的改变

θ	$q=0.01$	$q=0.1$	$q=0.5$	$q=1$	$q=2$	$q=5$	$q=8$
0	5.0×10^{-14}	5.0×10^{-8}	1.2×10^{-3}	2.3×10^{-1}	4.3	9.8×10^{2}	7.5×10^{3}
90°	2.5×10^{-14}	2.5×10^{-8}	5.0×10^{-4}	3.6×10^{-2}	2.5×10^{-1}	2.7	7.1
180°	5.0×10^{-14}	4.9×10^{-8}	7.8×10^{-4}	1.9×10^{-3}	2.0×10^{-2}	1.3	0.9

(由 H. Bulmer, *Z. Phys.*, **38**(1926), 304 的计算结果编纂而成。)

当 q 超过 1 时,即球的直径 $2a$ 大于 $\lambda^{(1)}/\pi$ 时,散射光随 θ 的变化就出现一系列极大和极小,一开始其分布并无规律。当 q 很大时,一些极大和极小的外观和惠更斯-基尔霍夫理论符合一致。

关于散射光的偏振情况,结果仍然因 $|\hat{n}|$ 的大小而异。

对于非常小的球,如果其电导率很高($\sigma\to\infty$)或介电常数极大($\varepsilon\to\infty$),当 $\theta=60°$ 时[汤姆孙(Thomson)角],偏振效应最大。随着半径的增加,极大就向 θ 增大的方向移动。

当球的电导率和介电常数都是有限大小时,偏振随观察角 θ 的变化关系用图 14.10 和图 14.11 中的两个典型情况可为说明。球径很小时($q\to0$),偏振曲线图与强度曲线图一样,以 xy 平面为对称面,并且在 $\theta=90°$ 处有一个极大,偏振是完全的。在这种情况(瑞利散射)下,偏振度可用一个简单解析式表出,由(88)和(94)求出 $I_{\parallel}^{(s)}$ 和 $I_{\perp}^{(s)}$ 并代入(95)即可得之。结果为①

$$P(\theta)=\frac{\sin^2\theta}{1+\cos^2\theta}. \tag{97}$$

这个公式是首先由瑞利用不同方法导出的。

随着球的半径增大,直到大约 $a=\lambda^{(1)}/\pi$,偏振极大发生位移;在大多数被研究过的情况,位移对介电球而言是朝 θ 增大的一方,对吸收球而言则是朝 θ 减小的一方。当球的半径再进一步增大时,就出现一系列不规律的偏振极大。

在 $\theta=90°$ 方向上,当 $q<1$ 时,散射光接近完全偏振光,其电矢量垂直于观察面;当 q 值较大时,情况不再如此,并且偏振行为变得不规律。

此前我们所讨论的只是单色光。但多色光的散射也常遇到,因此还须考虑存在不同波长成分时所产生的效应。注意在前面的公式中只有参量 q 和折射率 $\hat{n}$ 二者与波长有关。在足够窄的波长范围内,$\hat{n}$ 同波长的关系实际上可予忽略,只要(60)式中含电导率 σ 的项比另一项小得多,即散射球导电性能差。反之,在电导率趋于无穷大极限时,公式中根本不出现 $\hat{n}$。在这种情况下,各光谱成分的强度仅与 $a/\lambda^{(1)}$ 有关。因此波长改变时的效应实际上等效于球径改变一个适当数量时的效应。因为对于不同波长,偏振极大发生在不同的观察角,所以当通过偏振棱镜来观察散射光时,可看到复杂的颜色变化。这一效应叫做**多向色性**(polychroism)。散射光的偏振随波长的变化称为**偏振色散**。它给散射理论的检验提供了一种非常准确的方法②。

---

① 散射光的强度和偏振与多个因素有关,不易理顺,所以本节[§14.5.2(c)]读来颇感杂乱。这里显然指自然光入射情况[见(95)式推导过程]。因为在线偏振光入射情况下,散射光是偏振光,偏振度 $P\equiv1$[见 §10.9(52)];而且由(93)式可知,$|I_{\theta}^{(s)}(\phi=0,\theta)|^2=I_{\parallel}^{(s)}(\theta)$,$|E_{\phi}^{(s)}(\phi=90°,\theta)|^2=I_{\perp}^{2}(\theta)$,二者在不同观察方向$(\theta,\phi)$,故不具有直接物理意义。在自然光入射情况下,散射光一般是部分偏振光,$\overline{|E_{\theta}^{(s)}(\phi,\theta)|^2}=\frac{1}{2}I_{\parallel}^{(s)}(\theta)$,$\overline{|E_{\phi}^{(s)}(\phi,\theta)|^2}=\frac{1}{2}I_{\perp}^{(s)}(\theta)$,二者在同一观察方向$(\theta,\phi)$,且与$\phi$无关,故可用(95)式计算偏振度 $P(\theta)$而得到(97)——译者注。

② 偏振色散和多向色性的研究系出自 M. A. Schirmann *Ann. d. Physik*, (4), **59**(1919), 493。

14.5.3 总散射和消光

(a) 某些一般考虑

上述球体所散射或所吸收的光总共有多少？确定此量具有相当大的实际价值。这可通过计算散射光的坡印廷矢量并对所有散射方向进行积分来算出。借助各级缔合勒让德函数之间存在的正交关系，可将该积分用系数${}^{e}B_l$和${}^{m}B_l$表出。这些计算颇为冗长，米氏论文[①]中全部都有。

从入射光中流失的总能量，即被散射掉和吸收掉的能量之和，可用另一种方法即利用光学截面定理[见§13.6(25)]来确定。这一定理表明，一障碍物(形状任意)的消光截面Q和前向散射幅$\mathbf{a}(\mathbf{s}_0)$之间存在下列公式关系：

$$Q=\frac{4\pi}{k}\mathcal{I}\left\{\frac{\mathbf{e}\cdot\mathbf{a}(\mathbf{s}_0)}{\mathbf{e}^2}\right\}. \tag{98}$$

式中$\mathbf{s}_0$为线偏振光入射方向上的单位矢量，$\mathbf{e}$为入射光的规一化电矢量，$\mathcal{I}$表示取虚部，散射体则假设处于自由空间中。

现在将一般公式(98)应用到一球形障碍物，并以$k^{(1)}$代替其中的k。按照(58)式，在前向散射情况($\theta=0$)，散射波在入射波电矢量方向上($\phi=0$)的振幅分量由下式给出：

$$(E_\theta^{(s)})_{\theta=\phi=0}=-\frac{1}{k^{(1)}}\frac{1}{r}\sum_{l=1}^{\infty}\left\{{}^{e}B_l\zeta_l^{(1)\prime}(k^{(1)}r)[P_l^{(1)\prime}(\cos\theta)\sin\theta]_{\theta=0}\right.$$
$$\left.-\mathrm{i}^{m}B_l\zeta_l^{(1)}(k^{(1)}r)\left[P_l^{(1)}(\cos\theta)\frac{1}{\sin\theta}\right]_{\theta=0}\right\}. \tag{99}$$

式中含缔合勒让德函数的两项不难从下列展开式算出[②]：

$$P_l^{(m)}(x)=\frac{1}{2^m m!}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}(1-x^2)^{m/2}\left[1+c_1\left(\frac{1-x}{2}\right)+c_2\left(\frac{1-x}{2}\right)^2+\cdots\right], \tag{100}$$

其中$c_1, c_2, \cdots$与l和m有关。从(100)式及其微商可求得

$$\left(\frac{P_l^{(1)}(\cos\theta)}{\sin\theta}\right)_{\theta=0}=\tfrac{1}{2}l(l+1),\qquad [P_l^{(1)\prime}(\cos\theta)\sin\theta]_{\theta=0}=-\tfrac{1}{2}l(l+1). \tag{101}$$

将(101)代入(99)并采用$\zeta_l^{(1)}$和$\zeta_l^{(1)\prime}$的渐近近似式(74)和(76)，即得到

$$(E_\theta^{(s)})_{\theta=\phi=0}=\frac{1}{2k^{(1)}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{(1)}r}}{r}\sum_{l=1}^{\infty}(-\mathrm{i})^l l(l+1)[{}^{e}B_l+{}^{m}B_l]. \tag{102}$$

由于入射场的振幅已设为1($\mathbf{e}^2=1$)，所要求的量$\mathbf{e}\cdot\mathbf{a}(\mathbf{s}_0)/\mathbf{e}^2$就是(102)式中$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^{(1)}r}/r$的乘子；将它代入(98)并利用恒等式$\mathcal{I}(z)\equiv\mathcal{R}(-\mathrm{i}z)$(适用于任何复数$z$)，最后得到**一个球体的消光截面**$Q$表达式如下：

---

① G. Mie, *loc. cit.*, pp. 432 – 436。

② 见 W. Magnus and F. Oberhettinger, *Formulas and Theorems for the Functions of Mathematical Physics* (New York, Chelsea Publishing Company, 1954), p. 54。这些著者所给出的公式与这里(100)式差一个乘积因子$(-1)^m$。这一差别起源于他们对缔合勒让德多项式采用的定义稍有不同(见646页脚注)。

$$Q=\frac{\lambda^{(1)2}}{2\pi}\mathcal{R}\sum_{l=1}^{\infty}(-\mathrm{i})^{l+1}l(l+1)({}^{e}B_l+{}^{m}B_l),\tag{103}$$

式中$\mathcal{R}$表示实部，而系数${}^{e}B_l$和${}^{m}B_l$由(62)式给出。

(b) 计算结果

现在我们来总结一下关于球体总散射、总吸收和消光的主要计算结果。

在 14.5.2 节中我们看到，当球的半径比波长小得多时(瑞利散射)，只需要考虑第一级电分波。这时散射波的振幅正比于 $1/\lambda^{(1)2}$，因此总散射反比于波长的四次方。如果将与球径和物质常数有关的高次项也考虑进来，则总散射变成一个非常复杂的函数，并且显示有选择特性①。以金的情况为例，这时即使球体非常之小，总散射在 $\lambda = 5500$ 埃附近也出现一个极大(见图 14.12)。

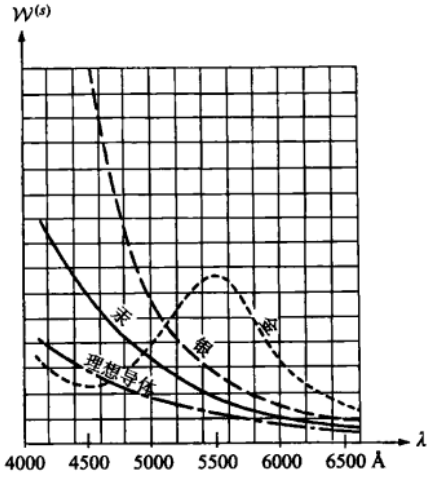


图 14.12　极小粒子($a\to 0$)产生的总散射随波长的变化曲线
[引自R. Feick, *Ann. d. Physik*, (4), **77**(1925), 582]

这种极大可以解释成是一种共振现象。现设想该球体不是处在入射光场的作用下，而是自身在作自由电磁振荡。从本节理论看，这一自由振荡的频率和阻尼常数，可从方程组(56)删去其中不含系数${}^{e}B_l$和${}^{m}B_l$的那些项来得到。这时(56)变成一组线性齐次方程，它只要满足相容条件就可有非零解。相容方程的每个解各对应一个阻尼本征振动，如其中一个的频率与具有强度极大的某些散射分波所在频率近乎重合，即产生所谓共振②。

有关散射和消光的计算，在球形粒子方面，已有许多工作者作出；球的半径均为有限大小，折射率值也各具体选定。多数计算针对介电球(n 为实数)和吸收很小的球。图 14.13 给出一

① 选择散射现象有一趣例，现述之于下。1950 年 10 月欧洲大部地区看到太阳呈深蓝色(月亮亦如此)。用光谱仪测量"蓝"太阳和正常太阳，获得导致这一现象的大气层的消光曲线，结论是：太阳变蓝的原因是烟雾产生的选择散射，该烟雾很可能由大小异常均匀的油滴构成，油滴则来自 Alberta(亚伯达，位于加拿大西部)的森林大火，被高空大气层中的风带到了欧洲[见 R. Wilson, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, **111**(1951), 478]。

② 光学共振是 R. W. Wood, *Phil. Mag.*, (6), **3**(1902), 396 从碱金属构成的颗粒薄膜和气雾观察到的。
球的本征振动研究出自 P. Debye, *Ann. d. Physik*, (4), **30**(1909), 73。

条具有代表性的曲线,系出自 B. Goldberg,球的折射率 $n=1.33$[①]。这是水的折射率,因而其结果对雾气、云和浓雾的光透射问题,对威尔逊云室理论等具有重要意义。可以看到。该曲线有一系列极大和极小,并且随着球径的增大,消光截面趋向几何截面的 2 倍,与 §13.3(25)相符合。另外,该曲线还具有精细结构,即附加有一连串小的涟漪。当然,如果这一散射是产生于许多并不严格一样大的球粒,则这些小起伏将不复存在而使曲线变得光滑。

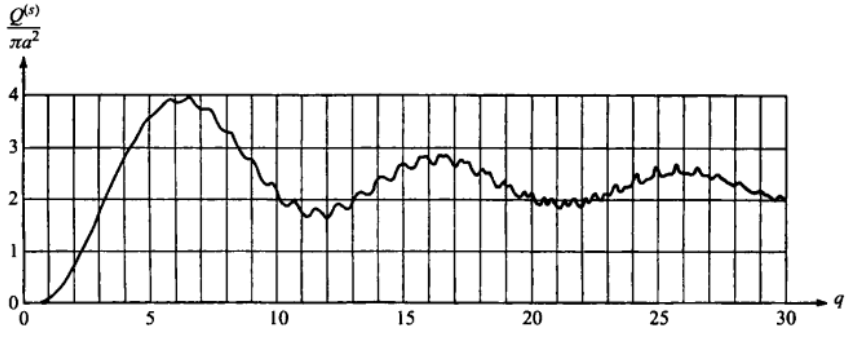


图 14.13 介电球(折射率 $n=1.33$)的散射截面随参量 $q=2\pi a/\lambda$ 的变化曲线[引自 B. Goldberg, *J. Opt. Soc. Amer.*, **43**(1953), 1221]

介电球的折射率取其他值时,其消光曲线也显示有类似形状,可以证明,如果 n 和 1 差得不太大,则所有散射曲线第一个极大的 q 值可由 $2q(n-1)\approx 4$ 给出[②],在此 q 值散射截面 Q 可达到 $4\pi a^2$ 这样大。

对于理想反射球[③]($n\to\infty$),消光曲线第一个极大位于 $q=1.2$,这时 $Q=2.29\pi a^2$,而第一个极小位于 $q=1.6$,这时 $Q=2.12\pi a^2$。此后还有几次小幅振荡,最后当 $q\to\infty$ 时 Q 趋于 $2\pi a^2$。

吸收球方面的计算要麻烦得多,因而只有少数特别情况做过详细研究。图 14.14 给出铁的微小球粒所产生的散射、吸收和消光三方面的曲线。对于比较大的球体,计算可采用 Jobst 所给出的渐近公式[④],这些公式是根据米氏理论和德拜柱面函数渐近展开式导出的。弱吸收球方面,范德赫斯特曾经作过研究[⑤],图 14.15 给出其计算结果。在后一情况下,可以看到其消光曲线的大体形状与介电球的相似,但即使非常小的电导率就足以把曲线上小的起伏完全整光滑。随着电导率再进一步增大,第一极小全都消失,并且消光曲线从原点渐近地上升到 2;吸收曲线则从原点渐近地上升至 1,是前者渐近值的 1/2。

---

① H. Holl 等也研究了这一情况,见 H. Holl, *Optik*, **4**(1948), 173 和 H. G. Houghton and W. R. Chalker, *J. Opt. Soc. Amer.*, **39**(1949), 955。折射率采用其他值时,曲线与此类似,这方面曾有许多作者发表过文章,例如:M. D. Barnes and V. K. La Mer, *J. Col. Sci.*, **1**(1946), 79; M. D. Barnes, A. S. Kenyon, E. M. Zaiser and V. K. La Mer, *ibid.*, **2**(1947), 349; J. L. Greenstein (Harvard circ., 1937, No. 422); H. C. van de Hulst, *Rech. Astr. Observ. Utrecht*, **11**, Pt. 1(1946), 43 – 51 和其书著 *Light Scattering by Small Particles* (New York, J. Wiley and Sons; London, Chapman and Hall, 1957), Chapter 13; R. Pendorf, *J. Opt. Soc. Amer.*, **46**(1956), 1001。

② $2q(n-1)$这个量代表一条光线沿直径穿过球体时所经受的相移。这是一个有用的参量,而且如果 n 和 1 差得不太大,以它为横坐标作出的消光曲线彼此非常相似。

③ F. W. P. Götz, *Astr. Nachr.*, **255**(1935), 63 and J. L. Greenstein(*loc. cit.*)。

④ G. Jobst, *Ann. d. Physik*, (4), **76**(1925), 863。

⑤ H. C. van de Hulst, *Rech. Astr. Observ. Utrecht*, **11**, Part 2(1949), 27。

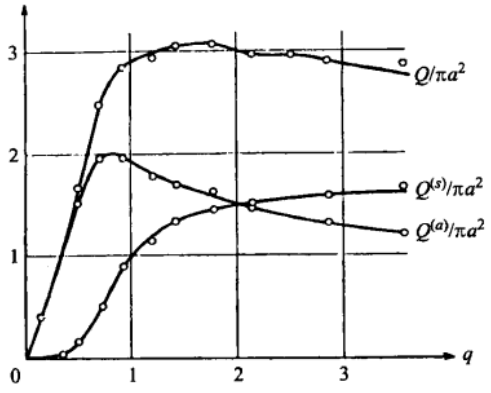


图 14.14　球形铁粒在不同半径时的吸收截面 $Q^{(a)}$，散射截面 $Q^{(s)}$ 和消光截面 Q，$\hat{n} = 1.27 + 1.37\mathrm{i}$，$\lambda^{(1)} = 4200$ 埃［根据 C. Schalén, *Uppsala Astr. Observ. Ann.*, **1**, No. 9(1945) 的计算］

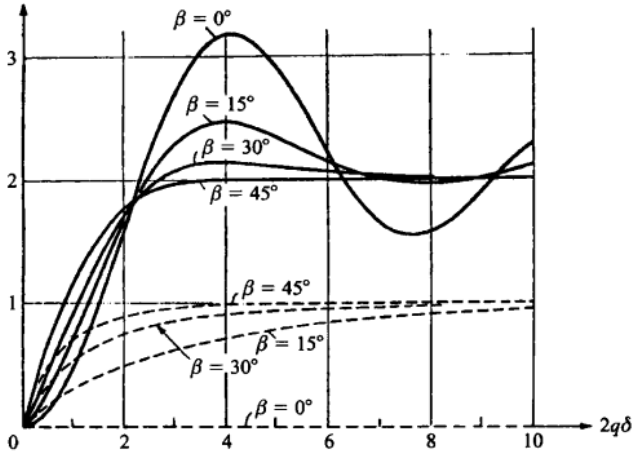


图 14.15　弱吸收球情况的消光曲线 $Q/\pi a^2$（实线）和吸收曲线 $Q^{(a)}/\pi a^2$（虚线），球的折射率 $\hat{n} = (1 + \delta) + \mathrm{i}\delta\tan\beta$，式中 δ 是实数，比 1 小得多［引自 H. C. van de Hulst, *Rech. Astr. Obs. Utrecht*, **11**, Part 2(1949), 28］

米氏理论可以在实验上通过观测单个球粒子或许多球粒子（云状媒质、胶体溶液）的散射光加以检验。这种检验在大粒子情况做起来比较容易，而当各粒子的直径为波长量级或者更小时就颇为麻烦。La Mer 和合作者们[①] 对硫的水溶胶散射光的角分布和总散射进行了测量，从而成功地验证了米氏理论。溶胶粒子的直径分别为 3000 埃到 5000 埃，所采用的光的真空波长为 2850 埃到 10 000 埃范围，结果同米氏理论的预期符合得相当好。在一些情况下，甚至连消光曲线上微小的起伏（精细结构）（见图 14.13）都观察到了。

① M. D. Barnes and V. K. La Mer, *J. Col. Sci.*, **1**(1946), 79; M. D. Barnes, A. S. Kenyon, E. M. Zaiser and V. K. La Mer, *ibid.*, **2**(1947), 349; I. Johnson and V. K. La Mer, *J. Amer. Chem. Soc.*, **69**(1947), 1184。

非球形粒子的光散射也有一些著者作过研究,但总的说相应波函数的解析性质要复杂得多,所以严格解的实际价值甚属有限[①]。甘斯(Gans)[②]和其他工作者讨论了尺寸小于波长的旋转椭球所产生的电磁波散射;Möglich[③]曾对大小任意的旋转椭球情况发表过一个严格解。早在1905年塞茨(Seitz)[④]和Ignatowsky[⑤]就研究了长的导电圆柱体产生的散射,他们所得到的公式同米氏球体的相类似。谢弗(Schaeffer)和格罗斯曼(Grossmann)[⑥]研究了长的介电圆柱体和高反射圆柱体产生的散射。

① 有一些作者研究出了近似方法,见,例如 R. W. Hart and E. W. Montroll, *J. Appl. Phys.*, **22**(1951), 376; E. W. Montroll and R. W. Hart, *ibid.*, **22**(1951), 1278; E. W. Montroll and J. M. Greenberg, *Phys. Rev.*, **86**(1952), 889。
还可见下列综述文章:C. J. Bouwkamp, *Rep. Progr. Phys.* (London, Physical Society), **17**(1954), 35。

② R. Gans, *Ann. d. Physik*, (4), **37**(1912), 881; *ibid.* **47**(1915), 270。

③ F. Möglich, *Ann. d. Physik*, (4), **83**(1927), 609。

④ W. Seitz, *Ann. d. Physik*, (4), **16**(1905), 746; *ibid.*, **19**(1906), 554。

⑤ W. v. Ignatowsky, *Ann. d. Physik*, (4), **18**(1905), 495。

⑥ C. Schaeffer and F. Grossmann, *Ann. d. Physik*, (4), **31**(1910), 455; 又见 H. C. van de Hulst, *Astrophys. J.*, **112**(1950), 1。

第15章　晶体光学

15.1　各向异性媒质的介电常数

大家会记得，我们的光学理论是建立在两个完全各自独立的基础上，一边是麦克斯韦方程§1.1(1)和§1.1(2)，另一边则是物质方程，在各向同性媒质情况下由公式§1.1(9)～§1.1(11)给出。在讨论晶体时，必须将后一组方程加以推广，以计及各向异性。在本章的较大部分都假设媒质是均匀的、不导电的($\sigma=0$)，并且在磁性上是各向同性的[①]，但允有**电各向异性**，这就是说，我们所考虑的物质的电激发状况随电场方向而改变。这时，一般说来，矢量 **D** 将不再沿着矢量 **E** 的方向。取代§1.1(10)，我们假定 **D** 和 **E** 之间的关系式属于各向异性行为表达形式中最简单的一种，即 **D** 的每个分量与 **E** 的各分量成线性关系：

$$\left.\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{xz}E_z, \\ D_y &= \varepsilon_{yx}E_x + \varepsilon_{yy}E_y + \varepsilon_{yz}E_z, \\ D_z &= \varepsilon_{zx}E_x + \varepsilon_{zy}E_y + \varepsilon_{zz}E_z. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中 $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \cdots$ 这9个量都是物质常数，它们构成一个**介电张量**，这样，矢量 **D** 便是这个张量和矢量 **E** 之积。

我们将把(1)式写成比较简洁的形式，即

$$D_k = \sum_l \varepsilon_{kl} E_l, \tag{2}$$

式中 k 代表 x, y 和 z 这三个下标中的某一个，而 l 则在取和中轮流代表 x, y 和 z。在正式的张量符号规则中，取和号 $\sum_l$ 可被省略，凡乘积中有两处同带下标 l 时，则不言而喻须对所有 l 取和。然而，我们将保留取和符号，因为这将有助于不熟悉张量计算的读者明确所指而不致误择。

电能密度 W_e 和磁能密度 W_h 的表达式§1.1(31)保持其有效性；因此

$$w_e = \frac{1}{8\pi}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} = \frac{1}{8\pi}\sum_{kl} E_k \varepsilon_{kl} E_l, \tag{3}$$

并且

$$w_m = \frac{1}{8\pi}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H} = \frac{1}{8\pi}\mu H^2. \tag{4}$$

此外我们还保留坡印廷矢量即“光线矢量”的定义§1.1(38)

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) \tag{5}$$

并审查(3)，(4)和(5)这些定义是否与能量守恒原理相协合。

---

① 磁性晶体也存在，但由于磁化对光学现象(快速振荡)的影响很小，所以磁各向异性可以忽略。然而，磁导率将被保留并用标量来代表，以保持各公式中的某种对称性，并把弱磁性晶体包括在内；此外，保留它还便于自由空间 μ 值不等于1的单位制中的方程表达。

按照§1.1.4中的做法,以**E**标乘第一个麦克斯韦方程,以**H**标乘第二个,并利用矢量恒等式§1.1(27),即可得到

$$-c\,\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}}+\mathbf{H}\cdot\dot{\mathbf{B}}$$
$$=\sum_{kl}E_k\varepsilon_{kl}\dot{E}_l+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu H^2). \tag{6}$$

如以4π除上式两边,则右边第二项代表每单位体积的磁能变化率,但第一项并不代表电能密度变化率,除非

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{kl}E_k\varepsilon_{kl}\dot{E}_l=\frac{\mathrm{d}w_e}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{8\pi}\sum_{kl}\varepsilon_{kl}(E_k\dot{E}_l+E_l\dot{E}_k) \tag{7}$$

即除非

$$\sum_{kl}\varepsilon_{kl}(E_k\dot{E}_l-\dot{E}_kE_l)=0.$$

下标k和l都是傀标,二者都同样轮流代表(x,y,z)这三个值。因此,如将第二项中的k和l进行交换,该式并不改变。这导致

$$\sum_{kl}(\varepsilon_{kl}-\varepsilon_{lk})E_k\dot{E}_l=0.$$

因为这一方程无论在什么场值都必须有效,由而得到

$$\varepsilon_{kl}=\varepsilon_{lk}. \tag{8}$$

这意味着**介电张量必须是对称张量**;其独立分量只有6个而不是9个。反过来说,条件(8)足以保证(7)式成立,因而我们得到微分形式的能量守恒定理[流体力学的连续方程§1.1(43)]

$$-\mathrm{div}\,\mathbf{S}=\frac{\partial w}{\partial t},\qquad (w=w_e+w_m). \tag{9}$$

张量ε的对称性使我们能够把电能w_e表达式简化成一种形式,使它只包含场分量的平方项而不含其乘积项,现求之如下:考虑x,y,z空间中的一个二次曲面

$$\varepsilon_{xx}x^2+\varepsilon_{yy}y^2+\varepsilon_{zz}z^2+2\varepsilon_{yz}yz+2\varepsilon_{xx}xz+2\varepsilon_{xy}xy=\text{常数}. \tag{10}$$

(10)式左方须是一个正定二次型,因为如果将其中x,y,z换成**E**的三个分量,该式就变成等于$8\pi w_e$,而w_e对场矢量的任何值都必须为正。因此(10)式代表一个椭球。而椭球总可将坐标变换到其主轴,因此晶体中存在一个坐标系,其中椭球方程呈

$$\varepsilon_xx^2+\varepsilon_yy^2+\varepsilon_zz^2=\text{常数}. \tag{11}$$

在这个**主介电轴**系统中,物质方程和电能表达式呈如下简单形式:

$$D_x=\varepsilon_xE_x,\qquad D_y=\varepsilon_yE_y,\qquad D_z=\varepsilon_zE_z, \tag{12}$$

$$w_e=\frac{1}{8\pi}(\varepsilon_xE_x^2+\varepsilon_yE_y^2+\varepsilon_zE_z^2)$$
$$=\frac{1}{8\pi}\left(\frac{D_x^2}{\varepsilon_x}+\frac{D_y^2}{\varepsilon_y}+\frac{D_z^2}{\varepsilon_z}\right). \tag{13}$$

$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z$叫做**主介电常数**(或**主电容率**)。从这些公式可立即看出,**D**和**E**将具有不同的方向,

除非 **E** 的方向同主轴之一重合，或者三个主介电常数全相等；在后一情况（$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$），椭球退化成一个球。

这里必须附加一段关于色散效应的说明。我们知道，在各向同性媒质情况，介电常数不是一个物质常数，而是随频率改变；各向异性媒质也正如此，介电张量的 6 个分量 ε_{kl} 亦随频率而变。结果不仅主介电常数 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ 的值会改变，而且主轴的方向也会改变。这个现象称为**轴色散**。然而，它只能发生在这类晶体，其中结构的对称性并不确定一组择尤的三个正交方向，即轴色散仅在单斜晶系和三斜晶系中才能被观察到（见 § 15.3.1）[①]。

如果只限于讨论单色波，则可以不考虑色散；这时 ε_{kl} 是只和媒质有关的常数。

15.2　各向异性媒质中单色平面波的结构

15.2.1　相速度和光线速度

考虑一单色平面波，其频率为 $\omega = 2\pi\nu$，沿单位波法线 **s** 的方向传播，速度为 c/n。在该波中，矢量 **E**，**D**，**H** 和 **B** 用复量表示时均正比于 $\exp\{i\omega[(n/c)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}) - t]\}$。这里要立刻提及，除**相（或波法线）速度** c/n 外，稍后将必须引进一个**光线（或能量）速度**，因为如下文所见，在各向异性媒质中能量一般是以另一种速度传播的，并且其传播方向也不同于波法线方向。

在这种振荡场中，算符 $\partial/\partial t$ 的作用恒等效于以 $-i\omega$ 相乘，而算符 $\partial/\partial x$ 则等效于以 $i\omega n s_x/c$ 相乘。具体来说，即

$$\dot{\mathbf{E}} = -i\omega\mathbf{E}, \qquad \operatorname{curl}\mathbf{E} = i\omega\frac{n}{c}\mathbf{s}\times\mathbf{E}. \tag{1}$$

麦克斯韦方程在不含电流的区域本为

$$\operatorname{curl}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{D}} = 0, \qquad \operatorname{curl}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}} = 0, \tag{2}$$

这时就变成

$$n\mathbf{s}\times\mathbf{H} = -\mathbf{D}, \qquad n\mathbf{s}\times\mathbf{E} = \mu\mathbf{H}, \tag{3}$$

式中曾应用了关系式 $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$。从(3)的两式中消去 **H**，并利用一个众所周知的矢量恒等式，即可得到

$$\mathbf{D} = -\frac{n^2}{\mu}\mathbf{s}\times(\mathbf{s}\times\mathbf{E}) = \frac{n^2}{\mu}[\mathbf{E} - \mathbf{s}(\mathbf{s}\cdot\mathbf{E})] = \frac{n^2}{\mu}\mathbf{E}_\perp, \tag{4}$$

式中 $\mathbf{E}_\perp$ 代表 **E** 在 **E** 和 **s** 平面上**垂直于 s** 的分矢量（见图 15.1）。

由(3)可知，矢量 **H**（因而还有 **B**）垂直于 **E**，**D** 和 **s**，因此后三者必定**共面**。此外，可以看出 **D** 垂直于 **s**。这样，**H** 和 **D** 对传播方向 **s** 而言是横振动，这和以前情况相同；但 **E** 对 **s** 来说不再是横振动。图 15.1 给出这些矢量的相对方向分布，此外还给出光线矢量 **S** 方向上的单位矢量，并以 **t** 代表，它垂直于 **E** 和 **H**。**E** 和 **D** 的夹角与 **s** 和 **t** 的夹角相同，并将用 α 代表。这样我们看到，**一方面 D，H 和 s 构成一组正交的三矢量，而另一方面 E，H 和 t 构成一组正交的三矢**

① 这种色散现象在红外区特别显著：参见 Th. Liebisch and H. Rubens, *Sitzber. preuss. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl.* (1919), 198, 876; H. Rubens, *ibid.*, 976。

量,两组公用一个矢量 H,相互转一个 α 角。由此得到一个重要结论:**晶体中能量的传播一般不沿波法线方向。**而另一方面,电能密度和磁能密度相等这一定理仍保持有效。这由(3)式可以得知,因为[①]

$$\left.\begin{aligned} w_e &= \frac{1}{8\pi}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} = -\frac{n}{8\pi}\mathbf{E}\cdot(\mathbf{s}\times\mathbf{H}), \\ w_m &= \frac{1}{8\pi}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H} = \frac{n}{8\pi}(\mathbf{s}\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{H}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

而根据成标三重积的众所周知特性,这两个方程的右边彼此相等。此外,它们同等于 $n(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{s}/8\pi$,所以总能量密度 $w = w_e + w_m$ 为

$$w = \frac{n}{c}\mathbf{S}\cdot\mathbf{s}. \tag{6}$$

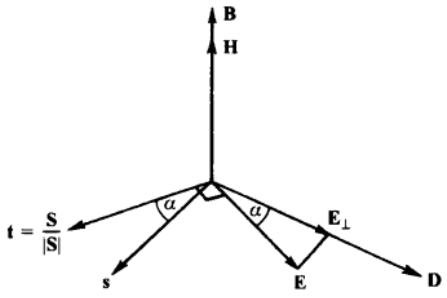


图 15.1 各向异性媒质中波法线、各场矢量和能流的方向

我们必须把相速度和能量输运速度区分开。前者,**相速度,**是沿着单位矢量 s 的方向,大小为

$$v_p = \frac{c}{n}. \tag{7}$$

后者,**光线速度,**所沿的方向与坡印廷矢量 S 相同,即沿着单位矢量 t 的方向。其大小 v_r 等于单位时间内从垂直于能流方向的单位面积上通过的能量,除以每单位体积的能量。依照能量定理 § 15.1(9),其结果为

$$v_r = \frac{S}{w}. \tag{8}$$

由(6),(7)和(8)有

$$v_p = v_r\mathbf{t}\cdot\mathbf{s} = v_r\cos\alpha, \tag{9}$$

即相速度是光线速度在波法线方向 s 上的投影。

可以注意,光线速度由于导自坡印廷矢量,因而受其性质(1.1 节,第 8 页)影响而也带有某种程度的任意性。尽管如此,它仍然是一个有用的概念,虽然它同相速度一样不具有可直接加以检测的物理意义。

① 因为这里能量密度涉及的是场变量的二次函数,所以(5)和(6)两式中的场矢量应取其实表示而不能用相关的复表示。

如果 **E** 和 **D** 为已知[例如当给定 **E** 并由 **E** 通过 § 15.1(1)求出 **D**],则折射率 n 和波法线 **s** 即告确定。首先,因为 $\mathbf{E}_\perp$ 是 **E** 在 **D** 方向上的分矢量,

$$\mathbf{E}_\perp = \left(\mathbf{E}\cdot\frac{\mathbf{D}}{D}\right)\frac{\mathbf{D}}{D}, \tag{10}$$

所以由(4)式可得到

$$n^2 = \frac{\mu\mathbf{D}}{\mathbf{E}_\perp} = \frac{\mu\mathbf{D}^2}{(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})}. \tag{11}$$

其次,因为 **s** 垂直于 **D** 并与 **D** 和 **E** 共面,所以可把它表成如下形式:

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{E}-\mathbf{E}_\perp}{|\mathbf{E}-\mathbf{E}_\perp|} = \frac{\mathbf{E}-\dfrac{(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})\mathbf{D}}{\mathbf{D}^2}}{\sqrt{\mathbf{E}^2-\dfrac{(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})^2}{\mathbf{D}^2}}} = \frac{\mathbf{D}^2\mathbf{E}-(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})\mathbf{D}}{\sqrt{\mathbf{D}^2[\mathbf{E}^2\mathbf{D}^2-(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})^2]}}. \tag{12}$$

仿照折射率 n(refractive index),我们也可以定义一个**光线指数**[①] (ray index)或**能量指数** (energy index) n_r 如下:

$$n_r = \frac{c}{v_r}. \tag{13}$$

从(7),(9)和(13)可得到

$$n_r = n\cos\alpha. \tag{14}$$

现在来证明,光线指数 n_r 和能量传播方向上的单位矢量 **t**,可用与(11)和(12)类似的公式表示。从(14),(11)和关系式 $\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} = ED\cos\alpha$,可有

$$n_r^2 = \frac{\mu(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})}{\mathbf{E}^2}. \tag{15}$$

单位矢量 **t** 垂直于 **E** 并与 **E** 和 **D** 共面,所以将(12)式中的 **E** 和 **D** 交换一下,所得到的公式就必定给出 **t**(正负号可能待定)。因此

$$-\mathbf{t} = \frac{\mathbf{E}^2\mathbf{D}-(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})\mathbf{E}}{\sqrt{\mathbf{E}^2[\mathbf{E}^2\mathbf{D}^2-(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})^2]}}. \tag{16}$$

左边的负号保证 **s** 和 **t** 如图 15.1 中那样分别指向 **E** 和 **D** 的同一边。

当 **E** 和 **D** 的方向重合时,即当 **E** 沿着晶体主轴之一的方向时,(12)和(16)都化为 0/0。这是理所当然的,因为这时 **s** 和 **t** 的方向除必须垂直于 **E** 外,都是不确定的。

我们还可以用 **E** 和 **D** 表出坡印廷矢量的大小。根据(8),(11)和(13),并想到对于平面波 $w = 2w_e$,则

$$S = v_r w = \frac{c}{n_r}\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}}{4\pi} = \frac{c}{4\pi\sqrt{\mu}}E\sqrt{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}}, \tag{17}$$

可以看出这个公式在各向同性媒质下同 § 1.4(8)和 § 1.4(9)符合一致。

---

① 光线指数(ray index) n_r 过去曾译为光线折射率,以同[波法线]折射率 n 相对应。但当考虑晶面折射问题时,光线即使在形式上也不遵守折射定律[入射角和折射角的正弦之比为一常数(折射率)],即 n_r 并不具折射率意义,故以不用此名为宜——译者注。

15.2.2 光在晶体中传播的菲涅耳公式

前节(15.2.1 节)所推导的公式都单独得自麦克斯韦方程,因此它们与媒质的性质无关。下面将让这些公式同物质方程 § 15.1(1)携手联合,求出折射率等量与介电张量之间的关系,这些关系当然要随波的传播方向而改变。

为简单起见,我们将采用一个和主介电轴重合的坐标系。关系式 § 15.1(1)这时简化为 § 15.1(12)式,以之代入(4)式中的 $\mathbf{D}(D_x, D_y, D_z)$,即得到

$$\mu\varepsilon_k E_k = n^2[E_k - s_k(\mathbf{E}\cdot\mathbf{s})], \qquad (k = x, y, z). \tag{18}$$

方程(18)是 E_x, E_y 和 E_z 的三个齐次线性方程,只有当其缔合行列式为零时才有非零解。这意味着折射率 n,单位矢量 $\mathbf{s}$ 和主介电常数(ε_x, ε_y, ε_z)几者之间必须满足某种关系。这一关系可由(18)改写成如下形式而导出:

$$E_k = \frac{n^2 s_k(\mathbf{E}\cdot\mathbf{s})}{n^2 - \mu\varepsilon_k}, \tag{19}$$

以 s_k 乘(19)两边,并将所产生的三个方程($k = x, y, z$)相加,再以公共因子($\mathbf{E}\cdot\mathbf{s}$)除所得式,即得到

$$\frac{s_x^2}{n^2 - \mu\varepsilon_x} + \frac{s_y^2}{n^2 - \mu\varepsilon_y} + \frac{s_z^2}{n^2 - \mu\varepsilon_z} = \frac{1}{n^2}. \tag{20}$$

此式可表成稍微不同的形式:先以 n^2 乘(20)两边并同 $s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1$ 相减,再以 $-n^2$ 乘所得式,结果得到

$$\frac{s_x^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\mu\varepsilon_x}} + \frac{s_y^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\mu\varepsilon_y}} + \frac{s_z^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\mu\varepsilon_z}} = 0. \tag{21}$$

现在定义三个**主传播速度**,如下列公式所示[①]:

$$v_x = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon_x}}, \qquad v_y = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon_y}}, \qquad v_z = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon_z}}. \tag{22}$$

当用(7)式来表示相速度 v_p 时,(19)和(21)呈如下形式:

$$E_k = \frac{v_k^2}{v_k^2 - v_p^2} s_k(\mathbf{E}\cdot\mathbf{s}), \qquad (k = x, y, z), \tag{23}$$

$$\frac{s_x^2}{v_p^2 - v_x^2} + \frac{s_y^2}{v_p^2 - v_y^2} + \frac{s_z^2}{v_p^2 - v_z^2} = 0. \tag{24}$$

方程(20),(21)和(24)是三个等效形式的**菲涅耳波法线方程**。这是一个 v_p^2 的二次方程,这一点由(24)式各项通分后即可看出。因此,对晶体中每一 $\mathbf{s}$ 方向,有两个相速度与之对应(对应每一 v_p^2 值,$\pm v_p$ 二值只算一个,因为负值显然属于相反的传播方向 $-\mathbf{s}$)。这时,对两个 v_p 值的每一个,可由(23)式求解比值 $E_x : E_y : E_z$;相应的 $\mathbf{D}$ 矢量分量之比随后可由 § 15.1(12)式求

① 注意 v_x, v_y, v_z 并非某矢量的三个分量,而仅仅是对晶体主轴来定义。

得。因为这些比值都是实数，所以 **E** 和 **D** 是**线偏振的**。由此我们获得下列重要结论：**在各向异性媒质空间，由于其结构特性，在每一给定的方向上，仅允许单色平面波以两种特定的线偏振方式从中传播，二者偏振方向不同并且传播速度也不同**。后面即将证明，给定一传播方向 **s** 时，相应电位移矢量 **D** 的两个偏振方向相互垂直（见 15.2.3 节）。

现在来证明，光线速度 v_r 方面也有一个类似的公式。最容易的证法是先证明存在一个与(4)类似的关系，其中只是对调一下(4)中 **D** 和 **E** 以及 **s** 和 **t** 的地位而已。为便于证明，现引进一个矢量 $\mathbf{D}_\perp$，它是矢量 **D** 在平面 **D** 和 **t** 上垂直于 **t** 的分矢量。显然，$\mathbf{D}_\perp$ 由下式给出：

$$\mathbf{D}_\perp = \mathbf{D} - \mathbf{t}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{t}). \tag{25}$$

因为电场矢量 **E** 也垂直于 **t** 并与 **D** 和 **t** 共面（见图 15.1），所以 $\mathbf{D}_\perp$ 平行于 **E**，因而也可表成如下形式：

$$\mathbf{D}_\perp = \left(\mathbf{D}\cdot\frac{\mathbf{E}}{E}\right)\frac{\mathbf{E}}{E} = \frac{n_r^2}{\mu}\mathbf{E}, \tag{26}$$

其中曾利用了(15)式，从(25)和(26)可以得到

$$\mathbf{E} = \frac{\mu}{n_r^2}[\mathbf{D} - \mathbf{t}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{t})] = \frac{\mu}{n_r^2}\mathbf{D}_\perp. \tag{27}$$

这一方程与方程(4)类似，在形式上可由(4)通过对调 **E** 和 **D**，n 和 $1/n_r$，μ 和 $1/\mu$ 以及 **s** 和 $-\mathbf{t}$ 而得到。广而言之，更普遍的对调关系遵循下列得自基本方程的**对偶性法则**（rule of duality）：

设将各变量排成两行如下：

$$\left.\begin{array}{llllllllllll} \mathbf{E}, & \mathbf{D}, & \mathbf{s}, & \mathbf{t}, & c, & \mu & v_p, & n, & \varepsilon_x, & \varepsilon_y, & \varepsilon_z, & v_x, & v_y, & v_z, \\ \mathbf{D}, & \mathbf{E}, & -\mathbf{t}, & -\mathbf{s}, & \dfrac{1}{c}, & \dfrac{1}{\mu}, & \dfrac{1}{v_r}, & \dfrac{1}{n_r}, & \dfrac{1}{\varepsilon_x}, & \dfrac{1}{\varepsilon_y}, & \dfrac{1}{\varepsilon_z}, & \dfrac{1}{v_x}, & \dfrac{1}{v_y}, & \dfrac{1}{v_z}. \end{array}\right\} \tag{28}$$

(28)表示，当一行中某些量之间存在某一关系时，如将其中各量分别换成另一行中的对应量，即获得另一确实存在的关系。

现在将这一法则应用到菲涅耳波法线方程(24)，则立即得到所求的**光线方程**

$$\frac{t_x^2}{\dfrac{1}{v_r^2}-\dfrac{1}{v_x^2}} + \frac{t_y^2}{\dfrac{1}{v_r^2}-\dfrac{1}{v_y^2}} + \frac{t_z^2}{\dfrac{1}{v_r^2}-\dfrac{1}{v_z^2}} = 0. \tag{29}$$

当然，亦可将此方程表成与(20)和(21)相类似的两种形式。和(24)式一样，(29)也是一个二次方程，对于每一个光线方向 $\mathbf{t}(t_x, t_y, t_z)$，它也给出两个可能的光线速度 v_r，以后用 v_r' 和 v_r'' 表示。这时同(23)式相对应的方程为

$$D_k = -\frac{v_r^2}{v_k^2 - v_r^2}t_k(\mathbf{D}\cdot\mathbf{t}), \qquad (k = x, y, z). \tag{30}$$

将所求出的 v_r 值（v_r' 或 v_r''）代入上式，即可求解相对应的 **D** 方向。然后利用 § 1.4.1(12)即可得到两个 **E** 矢量的方向（如前所见，**E** 矢量同 **t** 垂直）。

通常，矢量 **s** 或 **t** 只给出其一，因此需要导出 **s** 和 **t** 之间的关系，以便可直接从它计算其另一。由图 15.1 可知，

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{s}=E_{\perp}\tan\alpha,\qquad \mathbf{D}\cdot\mathbf{t}=-D\sin\alpha. \tag{31}$$

但由(4),$D=n^2E_{\perp}/\mu$。因此

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{t}=-\frac{n^2}{\mu}E_{\perp}\sin\alpha=-\frac{n^2}{\mu}\mathbf{E}\cdot\mathbf{s}\cos\alpha=-\frac{1}{\mu}\frac{c^2}{v_pv_r}\mathbf{E}\cdot\mathbf{s}, \tag{32}$$

其中曾利用了关系式(9)和(7)。将(32)代入(30),得到

$$D_k=\varepsilon_kE_k=\frac{1}{\mu}\frac{c^2v_r}{v_p(v_k^2-v_r^2)}t_k(\mathbf{E}\cdot\mathbf{s}). \tag{33}$$

比较一下(33)和(23)并考虑到 $\mu\varepsilon_kv_k^2=c^2$,即得到

$$\frac{v_ps_k}{v_k^2-v_p^2}=\frac{v_rt_k}{v_k^2-v_r^2}. \tag{34}$$

由此解得

$$t_k=\frac{v_p}{v_r}\frac{v_k^2-v_r^2}{v_k^2-v_p^2}s_k, \tag{35}$$

所以

$$v_rt_k-v_ps_k=v_ps_k\frac{v_r^2-v_p^2}{v_p^2-v_k^2}. \tag{36}$$

将(36)的三个方程($k=x,y,z$)平方后相加,并利用关系式 § 15.2(9)即 $\mathbf{s}\cdot\mathbf{t}=v_p/v_r$,则得到

$$v_r^2-v_p^2=v_p^2(v_r^2-v_p^2)^2\left[\left(\frac{s_x}{v_p^2-v_x^2}\right)^2+\left(\frac{s_y}{v_p^2-v_y^2}\right)^2+\left(\frac{s_z}{v_p^2-v_z^2}\right)^2\right]. \tag{37}$$

因此我们可定义

$$g^2\equiv v_p^2(v_r^2-v_p^2)=\frac{1}{\left(\frac{s_x}{v_p^2-v_x^2}\right)^2+\left(\frac{s_y}{v_p^2-v_y^2}\right)^2+\left(\frac{s_z^2}{v_p^2-v_z^2}\right)^2}. \tag{38}$$

这个关系式用单位法线矢量 $\mathbf{s}(s_x,s_y,s_z)$的分量表示了光线速度 v_r,因为 v_p 已经是已知量,它已由菲涅耳方程(24)用 $\mathbf{s}(s_x,s_y,s_z)$表出。v_r 经如此确定后,(35)式就把单位光线矢量 $\mathbf{t}$ 表成为 $\mathbf{s}(s_x,s_y,s_z)$的函数。利用 g 表达式(38),(35)可写成为

$$t_k=\frac{s_k}{v_pv_r}\left(v_p^2+\frac{g^2}{v_p^2-v_k^2}\right)\qquad(k=x,\ y,\ z). \tag{39}$$

因为每一个波法线方向 $\mathbf{s}$ 对应有两个相速度 v_p,所以每一个 $\mathbf{s}$ 一般对应有两个光线方向[①]。然而,某些晶体(双轴晶体——参见 15.3.1 节)由于(39)式中分母可为零而存在两个奇异($\mathbf{s}$)方向,每个奇异方向各对应有**无穷多个**光线;而且光线 $\mathbf{t}$ 方面也存在两个奇异方向,每一个则对应有无穷多个波法线方向。这两种特殊情况产生一种有趣的现象(圆锥折射),这将在后面 15.3.4 节中加以研究。

① 给定一波法线时,它所属的光线的位置在 M. 玻恩《光学》书中有详细的研究(对双轴晶体情况),见 M. Born, *Optik* (Berlin, Springer, 1933; reprinted 1965), pp. 235 – 237。

15.2.3　确定传播速度和振动方向的几何作图法

有关相速度和光线速度以及振动方向的多项结果都可借助几种几何作图加以说明。

(a) 波法线椭球

由 § 15.1(13)式可知，当给定能量密度 $w = 2w_e$ 时，矢量 **D** 各分量满足关系式

$$\frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z} = C \quad (C = 8\pi w_e = \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}). \tag{40}$$

现将 $D_x/\sqrt{C}$，$D_y/\sqrt{C}$ 和 $D_z/\sqrt{C}$ 换写成 x，y 和 z，并将三者看作是空间的笛卡儿坐标。于是

$$\frac{x^2}{\varepsilon_x} + \frac{y^2}{\varepsilon_y} + \frac{z^2}{\varepsilon_z} = 1. \tag{41}$$

这个方程代表一个椭球，它的三个半轴长度等于三个主介电常数的平方根，方向则同主介电轴重合。我们称该椭球为**波法线椭球**，而不倾向于广被采用但颇为含糊的名称“光折射椭球”(optical indicatrix)[又称折射率椭球(index ellipsoid))或倒椭球(reciprocal ellipsoid)]。

借助波法线椭球能够求出一个给定的波法线方向 **s** 所属的两个相速度 v_p 和两个 **D** 振动方向，求法如下：过原点作一平面与所设 **s** 垂直，该平面与波法线椭球的截面曲线是一椭圆，此椭圆的两个主半轴长度正比于所求相速度的倒数 $1/v_p$，而其方向同相应矢量 **D** 的方向重合(见图 15.2)。

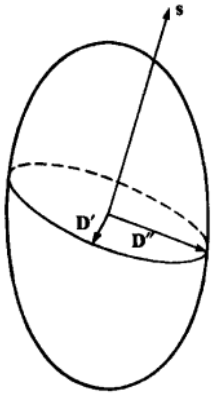


图 15.2　波法线椭球。波法线 **s** 所属 **D** 矢量(**D′** 和 **D″**)振动方向图解

为了证明这一结果，现考虑确定该截面椭圆的两个方程：

$$xs_x + ys_y + zs_z = 0, \tag{42}$$

$$\frac{x^2}{\varepsilon_x} + \frac{y^2}{\varepsilon_y} + \frac{z^2}{\varepsilon_z} = 1. \tag{43}$$

因为一个椭圆的两个主轴，按定义是它最短和最长的两个直径，所以通过求椭圆径长平方

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{44}$$

在附加条件(42)和(43)下的极值即可确定其主轴。现用拉格朗日待定乘子法[①]求之。引进两个乘子 $2\lambda_1$ 和 λ_2,并构成函数

$$F = x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda_1(xs_x + ys_y + zs_z) + \lambda_2\left(\frac{x^2}{\varepsilon_x} + \frac{y^2}{\varepsilon_y} + \frac{z^2}{\varepsilon_z} - 1\right). \tag{45}$$

这样我们的问题等同求函数 F 在没有附加条件下的极值。F 具有极值的必要条件是它对 x, y, z 的导数都应为零,即

$$x + \lambda_1 s_x + \frac{\lambda_2 x}{\varepsilon_x} = 0, \qquad y + \lambda_1 s_y + \frac{\lambda_2 y}{\varepsilon_y} = 0, \qquad z + \lambda_1 s_z + \frac{\lambda_2 z}{\varepsilon_z} = 0. \tag{46}$$

先以 x, y 和 z 分别乘上面三个方程而后相加,并考虑到(42)和(43),即得到:

$$r^2 + \lambda_2 = 0. \tag{47}$$

然后再以 s_x, s_y 和 s_z 分别乘(46)三式而后相加,并再应用(42),则得到

$$\lambda_1 + \lambda_2\left(\frac{xs_x}{\varepsilon_x} + \frac{ys_y}{\varepsilon_y} + \frac{zs_z}{\varepsilon_z}\right) = 0. \tag{48}$$

将(47)和(48)的 λ_1 和 λ_2 代入(46),得到

$$x\left(1 - \frac{r^2}{\varepsilon_x}\right) + s_x r^2\left(\frac{xs_x}{\varepsilon_x} + \frac{ys_y}{\varepsilon_y} + \frac{zs_z}{\varepsilon_z}\right) = 0, \tag{49}$$

和另外两个与此类似的方程。给定 $\mathbf{s}$ 时,这些方程是 x, y 和 z 的三个齐次方程。要它们能相容,只有其缔合行列式为零才行,这个条件即给出一个确定 r^2 极值的代数方程。但这里可以直接看出,方程(49)仅在所用符号上不同于方程(18),因为如果将 x 换成 $D_x/\sqrt{C}$,x/ε_x 换成 $E_x/\sqrt{C}$,r^2 换成 $\mathbf{D}^2/C = \mathbf{D}^2/\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} = n^2/\mu$[后者依据(11)式],则(49)变成

$$\mu D_x = n^2[E_x - s_x(\mathbf{E}\cdot\mathbf{s})], \tag{50}$$

这一方程加上另外两个与此类似的方程即等同于(18)。

这就表明,$n = c/v_p$ 的行列式方程(18)(如前所证,它是 n^2 的二次方方程)的根与垂直于 $\mathbf{s}$ 的截面椭圆的半轴长度成正比,而且矢量 $\mathbf{D}$ 的两个可能方向 $x:y:z$ 同这两个轴的方向相重合。因为一个椭圆的两个主轴相互垂直,从而我们得到下列重要结果:**一给定传播方向 $\mathbf{s}$ 所属的两个 $\mathbf{D}$ 矢量的振动方向相互垂直**。此后将用 $\mathbf{D}'$ 和 $\mathbf{D}''$ 表示属于某一波法线方向 $\mathbf{s}$ 的两个 $\mathbf{D}$ 方向[②]。因此 $\mathbf{s}, \mathbf{D}'$ 和 $\mathbf{D}''$ 形成一正交三矢量系统。

在特别情况下,当传播方向 $\mathbf{s}$ 同波法线椭球主轴之一,比如同 x 轴重合时,按照上述作图法,r 的两个极值将等于另外两个半轴的长度,即等于 $\sqrt{\varepsilon_y}$ 和 $\sqrt{\varepsilon_z}$。但是如上所证,r 的极值也等于 $n/\sqrt{\mu} = c/v_p\sqrt{\mu}$。因此,**沿 x 主介电轴方向传播的两个波(振动方向分别沿 y 轴和 z 轴)**,

① 对该方法的完全阐述,见,例如 R. Courant, *Differential and Integral Calculus*, Vol. II (London, Blackie & Son, Ltd., 1942), pp. 188 – 199。

② 这个 $\mathbf{s}$ 所属的两个相速度此后则用 v'_p 和 v''_p 表示,例如后面 15.3 节所见——译者注。

其相速度分别等于 $c/\sqrt{\mu\varepsilon_y}$ **和** $c/\sqrt{\mu\varepsilon_z}$，**即等于(22)式在形式上引进的主传播速度** v_y **和** v_z。当波沿另外两个主轴方向传播时，自然存在相应的结果。

还有另一种作图法可用来确定振动方向。大家知道，一个椭球有两个通过球心的圆截面 C_1 和 C_2，并且这两个截面的法线 $\mathbf{N}_1$ 和 $\mathbf{N}_2$ 与椭球最长和最短的两个主轴(z 轴和 x 轴)共面。这两个方向 $\mathbf{N}_1$ 和 $\mathbf{N}_2$ 叫做**光轴**①，后面(见 15.3.3 节)将对其作更全面的分析。因为截面 C_1 和 C_2 都是圆形的(而且半径相同)，所以方向 $\mathbf{N}_1$ 和 $\mathbf{N}_2$ 具有一种特性，波沿它们传播时只有一种速度：**D** 这时可取垂直于 **s** 的**任何一个**方向。在引进光轴后，现在考虑任意一个(非光轴)单位法线 **s**，并设 E② 为通过球心并与该 **s** 垂直的椭圆截面。这个平面与圆 C_1，C_2 相交在两个径向矢量 $\mathbf{r}_1$，$\mathbf{r}_2$，二者长度相等，因而与 E 的主轴所形成的角必然相等(见图 15.3 和图 15.4)。因此所求的振动方向(E 的主轴方向)是 $\mathbf{r}_1$，$\mathbf{r}_2$ 二方向夹角的等分线。但是 $\mathbf{r}_1$ 垂直于 $\mathbf{N}_1$ 和 **s**，因而垂直于 $\mathbf{N}_1$ 和 **s** 所构成的平面；与此类似，$\mathbf{r}_2$ 垂直于 $\mathbf{N}_2$ 和 **s** 所构成的平面。如果这两个平面与椭圆 E 相交在矢量 $\mathbf{r}_1'$，$\mathbf{r}_2'$，则 E 的主轴必然也是 $\mathbf{r}_1'$，$\mathbf{r}_2'$ 二方向夹角的等分线。由此可知，**电位移矢量的振动面，即 s 和 D′或 D″所构成的平面是平面(**$\mathbf{N}_1$**，s)与平面(**$\mathbf{N}_2$**，s)**③ **夹角的内等分面或外等分面**。当 **s** 同 $\mathbf{N}_1$ 或 $\mathbf{N}_2$ 方向重合时，这一作图就成为不确定，适如所料。

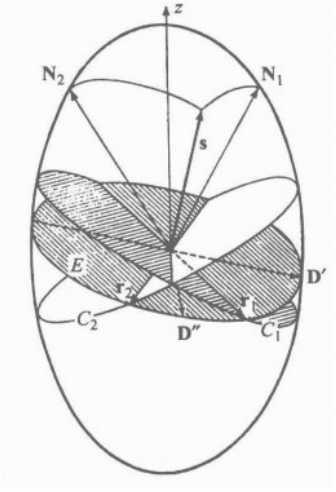


图 15.3　求振动面(**s**，**D**′)和(**s**，**D**″)的一种作图法

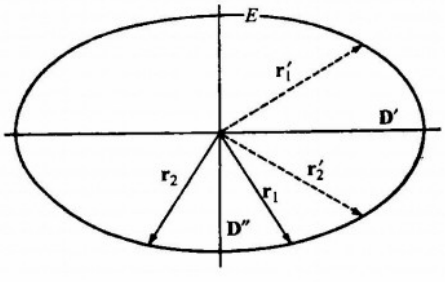


图 15.4　图 15.3 中的 E 平面

(b) 光线椭球

光线作图方面，如果按照对偶性法则(28)从光线椭球

$$\varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2 = 1. \tag{51}$$

出发④，则其处理方式必与波法线的相同。特别是，这个椭球垂直于某光线方向 **t** 的中心截面

① 更确切地说，叫**波法线光轴**。光线椭球[见下文(b)]的对应截面则定义**光线光轴**。

② 勿把此 E 同 **E** 矢量的大小相混淆——译者注。

③ 本章通篇用(**a**，**b**)代表矢量 **a** 和 **b** 所构成的平面。

④ 这时，x，y，z 按对偶性法则(28)应分别代表 $E_x/\sqrt{C}$，$E_y/\sqrt{C}$，$E_z/\sqrt{C}$，余类推——译者注。

也是一个椭圆,其半轴的长度正比于 **t** 所属的两个光线速度 v'_r 和 v''_r,而取向沿着电矢量两个可允许的方向 **E**′和 **E**″。因此,**t**,**E**′和 **E**″形成一正交三矢量系统。

(c) 法线曲面和光线曲面

设想以晶体内某固定点 O 为原点,沿同一方向 **s** 引两个矢量,令其长度分别正比于 **s** 所属的两个相速度 v'_p 和 v''_p。当 **s** 取所有可能方向时,这两个矢量的端点将描绘出一双层曲面,称为**波法线曲面**,或者径称**法线曲面**。

同样,从一固定点向所有 **t** 方向各引两条正比于光线速度 v'_r 和 v''_r 的位置矢量,则二者端点也将描绘出一双层曲面,叫做**光线曲面**。

这两个曲面比刚才讨论的两个椭球要复杂。光线曲面是四次曲面,而法线曲面为六次曲面[①],这一点可从公式(24)和(29)加以证明。这两个曲面之间存在一个重要关系,现推导于下:

我们已经看到,如果 **E** 和 **D** 为已知量,则 **s** 和 **t** 以及相应的速度 v_p 和 v_r 均告确定,因而光线曲面和法线曲面上的对应点(图 15.5 中的 P 和 P')也随之确定。设 **r** 和 **r**′为代表这两个点的矢量:

$$\mathbf{r} = v_r\mathbf{t}, \qquad \mathbf{r}' = v_p\mathbf{s}. \tag{52}$$

下面将证明,**E** 或 **D** 的微小改变导致 **r** 端点产生一个垂直于矢量 **r**′的位移。

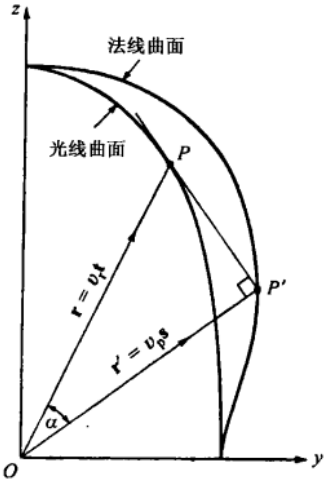


图 15.5 法线曲面和光线曲面之间的关系

我们从(27)式出发,即先考虑方程

$$\frac{1}{\mu}\mathbf{E} = \frac{1}{n_r^2}[\mathbf{D} - \mathbf{t}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{t})]. \tag{53}$$

从(52)式第一个方程和上式消去 **t**,而后以 $n_r = c/v_r$ 代入,则得到

$$\frac{c^2}{\mu}\mathbf{E} = \mathbf{r}^2\mathbf{D} - \mathbf{r}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{r}). \tag{54}$$

① 不可认为法线曲面和光线曲面二者方程级次相同,因为它们彼此并非对偶面。要绘制法线曲面的对偶面,须按对偶性法则(28)用长度为 $1/v_r$(而非 v_r)的矢量作图。

现在假定 $\mathbf{E}$ 改变一个很小的量 $\delta\mathbf{E}$。如果 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{r}$ 相应分别改变 $\delta\mathbf{D}$ 和 $\delta\mathbf{r}$，则按照(54)式即有

$$\frac{c^2}{\mu}\delta\mathbf{E}=2(\mathbf{r}\cdot\delta\mathbf{r})\mathbf{D}+\mathbf{r}^2\delta\mathbf{D}-\delta\mathbf{r}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{r})-\mathbf{r}(\delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{D})-\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\delta\mathbf{D}). \tag{55}$$

如果以 $\mathbf{D}$ 标乘此式两边并利用关系式

$$\mathbf{D}\cdot\delta\mathbf{E}=\varepsilon_x E_x\delta E_x+\varepsilon_y E_y\delta E_y+\varepsilon_z E_z\delta E_z=\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}, \tag{56}$$

即得到

$$\frac{c^2}{\mu}\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}=\delta\mathbf{D}\cdot[\mathbf{r}^2\mathbf{D}-\mathbf{r}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{r})]+2\delta\mathbf{r}\cdot[\mathbf{r}D^2-\mathbf{D}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{r})]. \tag{57}$$

两边含因子 $\delta\mathbf{D}$ 的项因(54)式而相互抵消，而右边含因子 $\delta\mathbf{r}$ 的项可写成为 $2\delta\mathbf{r}\cdot[(\mathbf{D}\times\mathbf{r})\times\mathbf{D}]$。因为 $\mathbf{r}=v_r\mathbf{t}$，所以

$$\delta\mathbf{r}\cdot[(\mathbf{D}\times\mathbf{t})\times\mathbf{D}]=0. \tag{58}$$

因矢量 $\mathbf{D}\times\mathbf{t}$ 与 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{t}$ 二者都垂直，所以 $(\mathbf{D}\times\mathbf{t})\times\mathbf{D}$ 处于平面 $(\mathbf{D},\mathbf{t})$ 内并与 $\mathbf{D}$ 垂直；因此它平行于 $\mathbf{s}$(见 15.1 节)。于是

$$\mathbf{s}\cdot\delta\mathbf{r}=0, \tag{59}$$

即 $\delta\mathbf{r}$ 垂直于 $\mathbf{s}$，这样就证明了我们的命题。这一结果意味着，**光线曲面的切面恒垂直于相应的波法线**。图 15.5 说明这一关系的 yz 平面截面情况。因为从原点到该切面的垂直距离等于 $v_r\mathbf{t}\cdot\mathbf{s}=v_r\cos\alpha=v_p$[见(9)式]。所以由此得知：法线曲面是光线曲面的垂足曲面(pedal surface)，反之，**光线曲面则是法线曲面上各径矢端点处与径矢正交平面的包络面**。如果知道了这两个曲面中某一个面的形状，就可以从这一关系求出另一个面。

这一结果可以用比较物理的语言来说明。暂将单个平面波放置一边而考虑由一组频率相同但传播方向稍异的平面波形成的波群。其中各分量波的波法线 $\mathbf{s}$ 分布在“平均波法线 $\mathbf{s}_0$”周围，形成一立体角，而且假设只有法线紧靠 $\mathbf{s}_0$ 的那些波具有可被察觉的振幅。假定在 $t=0$ 时刻，在某一点 O，所有这些波位相相同。因此扰动在此点是一个极大。现在来查看这一极大如何传播。

考虑在 $t=0$ 时刻从 O 点通过的所有波前。经单位时间后，以速度 v_p 沿方向 $\mathbf{s}$ 传播的那一波前 W 将到达位置 W' 处，这样从 O 向 W' 引一垂线时，其垂足的位置矢量为 $v_p\mathbf{s}$。因此 W' 是一个与法线曲面某一径矢相垂直的平面。在诸平面波相互加强的地区，波群的振幅将最大，这就是 W' 平面与近邻波法线相应平面相交的地区。但这正是 W' 及其近邻各平面的包络面所在地区，也就是光线曲面对应点 $v_r\mathbf{t}$ 的近邻区域。这个分析确证波群所携带的能量以速度 v_r 沿单位矢量 $\mathbf{t}$ 方向传播。

15.3　单轴晶体和双轴晶体的光学特性

15.3.1　晶体的光学分类

透明晶体按其光学特性可分为三大类：

第一类。**这类晶体中有三个结晶学上等效的、相互正交的方向可供选择**。这些晶体属于所谓**立方晶系**。三个等效方向显然与主介电轴相重合，所以有 $\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_z$(设等于 ε)；因此 $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$，晶体是**光学各向同性的**，等同于一非晶体。

第二类。**这类晶体不属于第一类,但其中有一个平面有两个或多个结晶学上等效的方向可供选择**。这些晶体属于三角晶系、四角晶系和六角晶系,包含这些等效方向的平面垂直于三重、四重和六重对称轴。主介电轴中的一个轴必定和此特殊方向相重合,而其他两个轴可选取同它垂直的任何一对正交直线。如果取该特殊方向为 z 轴,则有 $\varepsilon_x = \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$。这种晶体在光学上称为**单轴晶体**。

第三类。**这类晶体中没有两个结晶学上等效的方向可供选择**。这些是属于所谓正交晶系、单斜晶系和三斜晶系的晶体。这里 $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$,并且介电轴的方向有的可以由对称性来确定,有的则不可以(见表 15.1),因而可能同波长有关。这类晶体在光学上称为**双轴晶体**。

表 15.1

晶系	介电轴	波法线椭球	光学分类
三斜	CCC 	一般椭球	双轴
单斜	CCF 	一般椭球	双轴
正交	FFF 	一般椭球	双轴
三角四角六角	FRR 	旋转椭球	单轴
立方	RRR 	球	各向同性

C = 色散轴　　F = 固定轴　　R = 可自由转动轴,即不确定轴

所有晶体就其光学性质而言,只有这三种类型,这一点由分析一相关椭球如波法线椭球可以看得很清楚。显然,当对晶体施行各种对称操作时,晶体结构布局并不改变,因而这时该椭球必须也不改变[①]。可是**一个椭球退化成一个球**最多只有两步:椭球的三个轴长(a)全不等(一般椭球),或(b)两个相等,一个不等(旋转椭球),或(c)全相等(球);这三种情况相当于刚才谈过的三类晶体[排序为(Ⅲ),(Ⅱ),(Ⅰ)]。单轴和双轴这两个词的单、双是指椭球所具有的光轴数,也就是指通过椭球中心的平面截面为圆时,与这种圆相垂直的椭球直径数目。一般椭球有两个这样的直径(双轴晶体),旋转椭球有一个(单轴晶体),而一个球有无穷多个(各向同性晶体)。

表 15.1 给出所有可能情况一览。主介电轴中随光的颜色而变的(色散轴)用两个互成小角的细箭头(意指对两个波长的位置)表示,固定轴用粗箭头表示,而可自由转动轴(即不确定轴)用终端在一个圆上或一个球上的虚箭头表示。

15.3.2 光在单轴晶体中的传播

我们从菲涅耳波法线方程 § 15.2(24)出发并将它写成下列形式:

① 例如,单斜类晶体的结构特征是具有一个二重对称轴,平行于晶轴中的一个轴,或者是具有一个垂直于此晶轴的镜对称面,或者两个都有。很明显,每一种情况都必须让椭球的主轴之一平行于这个晶轴,才能使它在对称操作中保持不变。

关于晶体类型和对称操作,著述甚多,作为引文这里可推举 C. W. Bunn, *Chemical Crystallography* (Oxford, Clarendon Press, 1945), Chapter 2。

$$s_x^2(v_p^2-v_y^2)(v_p^2-v_z^2)+s_y^2(v_p^2-v_z^2)(v_p^2-v_x^2)+s_z^2(v_p^2-v_x^2)(v_p^2-v_y^2)=0. \tag{1}$$

对于光学上的单轴晶体，如令其光轴沿 z 方向，则 $v_x=v_y$。将这一共同速度写成 v_o 并用 v_e 代替 v_z[①]，则(1)式简化为

$$(v_p^2-v_o^2)[(s_x^2+s_y^2)(v_p^2-v_e^2)+s_z^2(v_p^2-v_o^2)]=0. \tag{2}$$

设 ϑ 代表波法线 s 与 z 轴形成的角度；于是

$$s_x^2+s_y^2=\sin^2\vartheta, \qquad s_z^2=\cos^2\vartheta,$$

而(2)式变成

$$(v_p^2-v_o^2)[(v_p^2-v_e^2)\sin^2\vartheta+(v_p^2-v_o^2)\cos^2\vartheta]=0. \tag{3}$$

这个方程的两个根(用 v'_p 和 v''_p 表示)由下式给出：

$$\left.\begin{aligned} v_p'^2&=v_o^2,\\ v_p''^2&=v_o^2\cos^2\vartheta+v_e^2\sin^2\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

方程(4)表明，**法线曲面的两层面中，一层是一个半径为 $v'_p=v_o$ 的球面，另一层是一个旋转曲面(四次曲面)，一个卵形曲面**。因此，任一特定波法线方向所属的两个波中有一个是**寻常波**，其速度与传播方向无关，另一个是**非常波**，其速度随波法线方向与光轴的夹角而异。只有当 $\vartheta=0$ 时，即波法线沿光轴方向时，这两个速度才相等($v''_p=v'_p=v_o$)。

当 $v_o>v_e$ 时[见图 15.6(a)]，寻常波比非常波传播得快($\vartheta=0$ 时除外，这时二者速度相等)；这种晶体称为**正单轴晶体**(例如石英)。如果 $v_o<v_e$[见图 15.6(b)]，寻常波比非常波传播得慢，这种晶体叫做**负单轴晶体**(例如长石)。

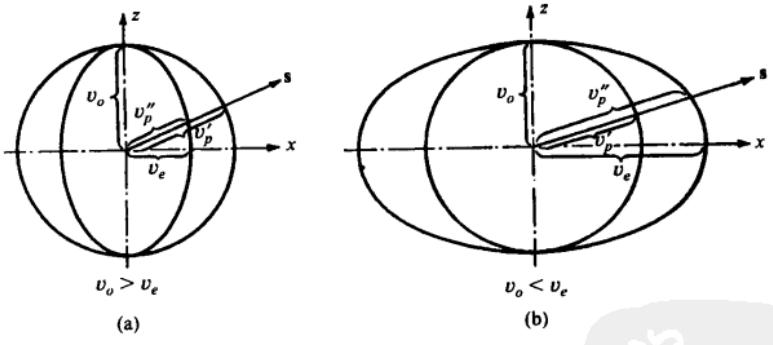


图 15.6　单轴晶体的法线曲面：(a)正单轴晶体；(b)负单轴晶体

至于波的振动方向，以用波法线椭球求之为便。这时，该椭球(旋转椭球)的两个主轴相等。波法线 **s** 和光轴 OZ 构成的平面叫**主平面**(图 15.7 中加阴影线者)。该椭球对此平面是对称的。由此得知，通过 O 点并垂直于 **s** 的椭圆截面对主平面也是对称的，因而此截面椭圆的两个主轴分别垂直于和平行于主平面，如图 15.7 所示。垂直于主平面的半轴等于旋转椭球赤道圆的半径，即它反比于寻常波速度 v_o 的倒数(正比于 $\sqrt{\varepsilon_0}$)。由此得知，**寻常波的 D 矢量**(图 15.7 中的 **D′**)**的振动方向垂直于主平面，而非常波的相应矢量(D″)在主平面上。**

① 这里下标 o 和 e 分别表示寻常(ordinary)和非常(extraordinary)，其术语含义稍后即可知晓。

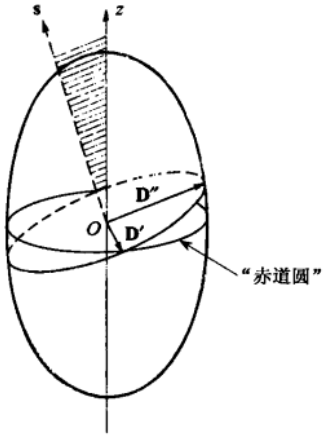


图 15.7 单轴晶体中波的振动方向

单轴晶体的光学现象在光学历史中关于“光矢量”振动方向同偏振面究竟垂直还是平行这一问题方面曾起过重要作用[光从空气-电介质界平面上反射时,在某一入射角下任何入射波均反射成为线偏振波,这时的入射面定义为该线偏波的偏振面,在电磁理论的用语中就是指(**H**,**s**)平面,见第 25 页和第 38 页]。今天,已无必要再去详细讨论这一问题①,因为我们知道并无单一的物理实体可被授予“光矢量”之名。

15.3.3 光在双轴晶体中的传播

现在来研究在双轴晶体一般情况下基本方程(1)的主要结果。先考虑法线曲面在参考系(主介电轴)三个坐标面 $x=0$, $y=0$ 和 $z=0$ 上的截面情况,这将有助于对该曲面立体形状的想像。为了将各坐标截面曲线的形状分别固定不二,现在给三个轴编序如下:

$$\varepsilon_x<\varepsilon_y<\varepsilon_z \qquad (v_x>v_y>v_z). \tag{5}$$

如果令(1)式中 $s_x=0$,该方程即分解成两个因子,分别给出

$$\left.\begin{aligned} v_p'^2 &= v_x^2, \\ v_p''^2 &= v_z^2 s_y^2 + v_y^2 s_z^2. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

令 $v_p s_y = y$, $v_p s_z = z$,则 $v_p^2 = y^2 + z^2$,而方程(6)变成

$$y^2+z^2=v_x^2, \qquad (y^2+z^2)^2 = v_z^2 y^2 + v_y^2 z^2. \tag{6a}$$

这样,法线曲面在坐标面 $x=0$ 上的截面曲线是一个圆和一个卵形。其他两个坐标面上的截面曲线同样也各包括一个圆和一个卵形,惟一的差别在于圆、卵二曲线的相对大小和位置。坐标轴按(5)选取时,yz 平面上的圆完全位于卵外,xy 平面上的圆则完全位于卵内;而 zx 平面上的圆和卵相交于 4 点(见图 15.8)。图 15.9 给出法线曲面八分之一象限的立体透示图,图中 $A'B'C'N$ 和 $A''B''C''N$ 两条空间曲线各是一光滑曲面的断面轮廓。一般说来,两个曲面相交于一条曲线,

① 关于这一历史背景的记叙,见 E. T. Whittaker, *History of the Theories of Aether and Electricity*, Vol. I: *The Classical Theories* (London, T. Nelson, 1951), p. 116。

但在本例情况这两个曲面只有 4 个交点，即 N 点和其他象限中的 3 个对应点。连结原点和各交点的两条直线是波法线所属的两个光轴。从第 671 页上所讲的关于法线椭球中心截面圆个数的几何定理可以得知，上述两个曲面除所说的交点以外别无其他交点，因而也别无其他波法线光轴。但是现在我们要通过直接计算来确证这一点，同时还要建立一个后面将要用到的不等式。

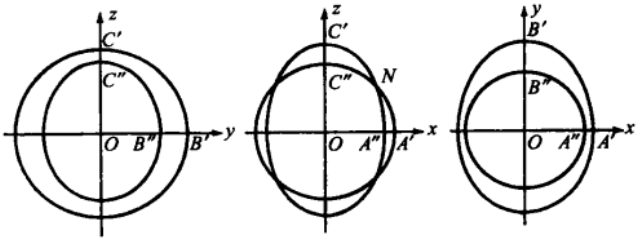


图 15.8　双轴晶体法线曲面的三个截面

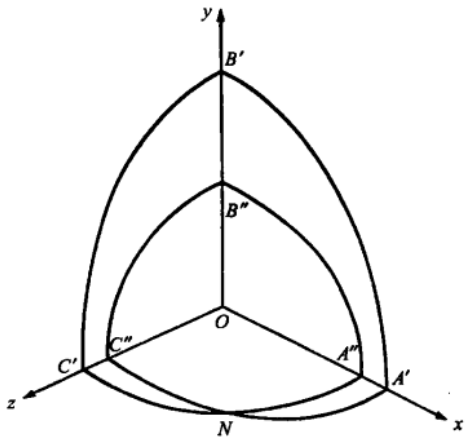


图 15.9　双轴晶体的法线曲面(1/8 象限)

设

$$v_x^2 = v_y^2 + q_x, \qquad v_z^2 = v_y^2 - q_z, \qquad v_p^2 = v_y^2 + q, \tag{7}$$

式中 q_x 和 q_z 由于(5)而为正。以此代入(1)，得到

$$s_x^2 q(q+q_z) + s_y^2(q+q_z)(q-q_x) + s_z^2(q-q_x)q = 0, \tag{8a}$$

即

$$q^2 + [s_x^2 q_z + s_y^2(q_z - q_x) - s_z^2 q_x]q - s_y^2 q_x q_z = 0. \tag{8b}$$

因为常数项 $-s_y^2 q_x q_z$ 不能为正，所以这一方程的两个根必定是实数。如以 q' 和 q'' 代表此二根，则

$$q'q'' = -s_y^2 q_x q_z \leqslant 0.$$

因此 q' 和 q'' 的正负必定相反。现在设 $q' \geqslant 0$ 而 $q'' \leqslant 0$。

如果 $q > q_x$ 或 $q < -q_z$,则(8a)左边各项都将为正,因此 q 必定位于 $-q_z \leqslant q \leqslant q_x$ 范围,所以

$$-q_z \leqslant q'' \leqslant 0 \leqslant q' \leqslant q_x. \tag{9}$$

因此 q' 和 q'' 这两个根只有都为零时才能相等;而要二者都为零,必须同时有

$$s_y^2 = 0, \qquad s_x^2 q_z = s_z^2 q_x. \tag{10}$$

因此我们得到两个特别的 s 方向,其中每个方向所属的两个速度是相等的,这就再次证实存在两个波法线光轴。如前所说,这两个光轴位于 xz 平面。设 β 是其中一个轴与 z 方向的夹角,则 $s_x = \sin\beta$, $s_z = \cos\beta$。按照(10)式,β 满足

$$\tan\beta = \frac{s_x}{s_z} = \pm\sqrt{\frac{q_x}{q_z}} = \pm\sqrt{\frac{v_x^2 - v_y^2}{v_y^2 - v_z^2}}; \tag{11}$$

因此这两个光轴对称地分布在 z 轴两旁。

不等式(9)用速度表出时即变成为

$$v_z^2 \leqslant v_p''^2 \leqslant v_y^2 \leqslant v_p'^2 \leqslant v_x^2, \tag{12}$$

这一关系后面将要用到。现在我们看到,不论波法线方向如何,它所属的两个相速度总是实量;这一结论从波法线椭球求相速度的几何作图自然也显而易见。

如果波法线方向 s 用它同两个波法线光轴的夹角 ϑ_1 和 ϑ_2 来定位,则给定 s 后它所属的两个相速度的表达形式将非常简单。因为这两个光轴的方向余弦为 $\pm\sin\beta, 0, \cos\beta$,所以角 ϑ_1 和 ϑ_2 由下列方程给出:

$$\left.\begin{aligned} \cos\vartheta_1 &= \ \ s_x\sin\beta + s_z\cos\beta, \\ \cos\vartheta_2 &= -s_x\sin\beta + s_z\cos\beta. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

方程(8b)的两个根用 s_x 和 s_z 表示时为

$$q = -\tfrac{1}{2}P \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\Delta}, \tag{14}$$

式中(如果还利用恒等式 $s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1$),

$$P = s_x^2 q_x - s_z^2 q_z + q_z - q_x, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= P^2 + 4s_y^2 q_x q_z \\ &= (q_x + q_z)^2 - 2(q_x + q_z)(s_x^2 q_x + s_z^2 q_z) + (s_z^2 q_z - s_x^2 q_x)^2. \end{aligned} \tag{16}$$

另由(13)和(11)可知

$$\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 = \frac{q_z s_z^2 - q_x s_x^2}{q_x + q_z}, \qquad \cos^2\vartheta_1 + \cos^2\vartheta_2 = 2\frac{q_x s_x^2 + q_z s_z^2}{q_x + q_z}. \tag{17}$$

因此,用 ϑ_1 和 ϑ_2 表示时,(15)和(16)即变成

$$P = q_z - q_x - (q_z + q_x)\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2, \tag{15a}$$

$$\Delta = [(q_z + q_x)\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2]^2, \tag{16a}$$

将(15a)和(16a)代入(14),并用(7)替代 q,q_x 和 q_z,则最后得到:

$$v_p^2 = \tfrac{1}{2}[v_x^2 + v_z^2 + (v_x^2 - v_z^2)\cos(\vartheta_1 \pm \vartheta_2)]. \tag{18}$$

虽然 v_y 不出现在这个方程,但它内含在 ϑ_1 和 ϑ_2 中,因为这两个角与 β 有关,而 β 是所有三个主速度的函数。

在单轴晶体这一特别情况,ϑ_1 和 ϑ_2 相等;这时可立即证明(18)正确地简化为(4)。

光线方面亦可采用类似的分析。从光线方程 § 15.2(29)出发,结果得到光线曲面在坐标面 $x = 0$ 上的截面包括两条曲线,即

$$v_r'^2 = v_x^2, \qquad \frac{1}{v_r''^2} = \frac{t_y^2}{v_z^2} + \frac{t_z^2}{v_y^2}. \tag{19}$$

如果令 $v_r t_y = y$,$v_r t_z = z$,则 $v_r^2 = y^2 + z^2$,并且(19)变成

$$y^2 + z^2 = v_x^2, \qquad \frac{y^2}{v_z^2} + \frac{z^2}{v_y^2} = 1, \tag{19a}$$

即光线曲面在平面 $x = 0$ 上的截面曲线是一个圆和一个椭圆[与法线曲面相应方程(6a)第二式不同,后者类型更复杂,为卵形]。其他两个坐标面所截出的曲线同样也各包括一个圆和一个椭圆。由于不等式(5),在 yz 平面上是圆包住椭圆,在 xy 平面上是椭圆包住圆,而 xz 平面上圆和椭圆相交于 4 点。这些点确定了**光线光轴** R_1 和 R_2 的位置;其方向由(10)的对偶式给出,即

$$t_y^2 = 0, \qquad t_x^2\left(\frac{1}{v_y^2} - \frac{1}{v_z^2}\right) = t_z^2\left(\frac{1}{v_x^2} - \frac{1}{v_y^2}\right). \tag{20}$$

这两个光轴与 z 轴的夹角相等,设为 γ,则由(20)可知

$$\tan\gamma = \frac{t_x}{t_z} = \pm\frac{v_z}{v_x}\sqrt{\frac{v_x^2 - v_y^2}{v_y^2 - v_z^2}} = \pm\frac{v_z}{v_x}\tan\beta. \tag{21}$$

如果 $v_z < v_x$,则光线光轴与 z 轴的夹角小于法线光轴。

15.3.4　晶体折射

(a) 双折射

现在考虑一平面波从真空入射到一各向异性媒质的界平面 Σ 上。这个波将产生一个透射场和一个反射场。这里将简要分析一下透射场的性质,所采用的论证与各向同性媒质情况(1.5.1 节)大体相同。我们的目标将仅限于求出扰动进入晶体后的传播方向;至于振幅比(相当于菲涅耳公式)的表达式将不去研究[①]。

设 $\mathbf{s}$ 为入射波的单位波法线,$\mathbf{s}'$ 为透射波的单位波法线。我们即将看到一般有**两个**透射波,所以 $\mathbf{s}'$ 有两个可能值。入射波和透射波的场矢量分别是 $(t - \mathbf{r}\cdot\mathbf{s}/c)$ 和 $(t - \mathbf{r}\cdot\mathbf{s}'/v')$ 的函数。

① 这些表达式在文献中曾有讨论,例如 G. Szivessy, *Hdb. d. Phys.*, Vol. 20 (Berlin, Springer, 1928), p. 715。

场通过界面时的连续性,要求在平面 Σ 上任何一点 **r** 和在所有时间 t 都有

$$t-\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}}{c}=t-\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}'}{v'},$$

即

$$\mathbf{r}\cdot\left(\frac{\mathbf{s}'}{v'}-\frac{\mathbf{s}}{c}\right)=0. \tag{22}$$

因此矢量 $\mathbf{s}'/v'-\mathbf{s}/c$ 必须垂直于界面。

满足条件(1)的波法线 $\mathbf{s}'$可通过作图求之如下:在 Σ 上取任一点为原点,向晶体内所有 $\mathbf{s}'$ 方向分别以适当长度 $1/v'$引一矢量,其中v'是菲涅耳波法线方程 § 15.2(24)中与 $\mathbf{s}'$对应的相速度。因此,该矢量端点的轨迹是一个双层曲面,它和法线曲面不同之处在于其径矢长度为 $1/v'$而非v'。我们称此曲面为**倒法线曲面**(inverse surface of wave normals);它是光线曲面的对偶面,因而同光线曲面本身一样,是一个四次曲面。由于所要求的矢量 $\mathbf{s}'/v$必须满足使矢量 $(\mathbf{s}'/v'-\mathbf{s}/c)$垂直于 Σ,为此通过 O 点作矢量 $\mathbf{s}/c$,并从其端点 P 向 Σ 面作一垂线(即 Σ 面的法线),则所求矢量 $\mathbf{s}'/v$的端点 Q'必然在此垂线上。一般说来,Σ 的这条垂线与倒法线曲线相交在 4 个点,其中有两个和晶体位于界面同侧,因此有两个这样的 Q 点(图 15.10 中分别以 Q'和 Q''表示),因而折射波有两个可能的波法线方向,所以**一般而言每一入射波将产生两个折射波**;而每个折射波相应各有一个光线方向和一个光线速度描写它在晶体内的能量传播[①]。这就是**双折射现象**。通过一块方解石观察一物点时看到有两个像,这一众所周知的效应就是该现象的常见实例。

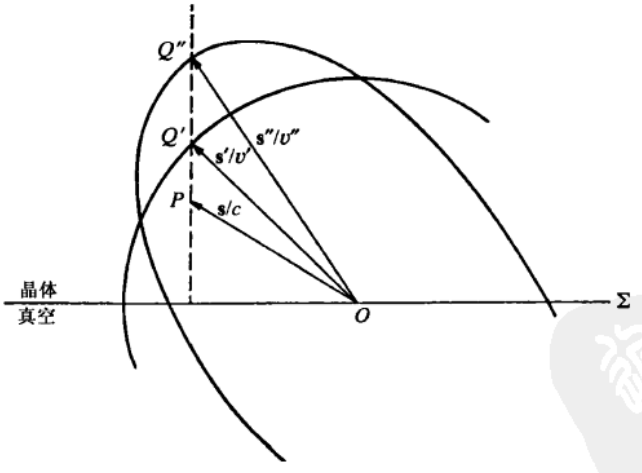


图 15.10 双折射:用作图求解其波法线

① 双折射(birefringence 或 double refraction)的起源也可用惠更斯作图(见 3.3.3 节)推广到各向异性媒质来加以说明。然而,这种处理的正确表述决不像诸教本中给的那样简单,因为惠更斯作图所涉及的波是发自一个个点源的子波,并非彼此独立的平面波,而有关子波的传播定律各书照例都是信手拈来,并无证明。对这一处理方法的某些内在困难,下列文献中作了讨论:M. G. Lamé, *Leçons sur la Théorie Mathématique de l' Élasticté des Corps Solides* (Paris, Gauthier-Villars, 2nd edition, 1866),和 V. Volterra, *Acta Math.*, **16**(1892), 153。

取界面 Σ 为 $z=0$ 平面，则(22)式变成

$$\frac{xs_x+ys_y}{c}=\frac{xs'_x+ys'_y}{v'}=\frac{xs''_x+ys''_y}{v''}, \tag{23}$$

此式必须对所有 x 值和 y 值都成立。这意味着，首先 $s'_x/s_x=s'_y/s_y$，$s''_x/s_x=s''_y/s_y$，所以**两个折射波的波法线**[①] **位于入射面上**。其次，如果 θ_i，θ'_t 和 θ''_t 分别是入射波和两个透射波与界面 Σ 法线的夹角，则由(23)得到

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta'_t}=\frac{c}{v'},\qquad \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta''_t}=\frac{c}{v''}. \tag{24}$$

由此可知，每个折射波都遵守跟各向同性情况一样的**折射定律**。然而现在速度 v 与 θ_t 有关，所以确定晶体中的传播方向就比较复杂。在单轴晶体，倒法线曲面的一个面是球面，所以这时有**一个**透射波的相速度与 θ_t 无关，这就是**寻常波**。

在正入射($\theta_i=0$)这一特别情况下，$\theta'_t=\theta''_t=0$，所以晶体中的两个波法线相重合并同沿 Σ 的法线方向。另一个在理论上饶有意趣的特别情况发生在双轴晶体，其中一个透射波的传播方向正好沿着某一光轴。这产生一种称为圆锥折射的现象，下面就来讨论这种折射。

(b) 圆锥折射

前面曾经提到，在双轴晶体中当 **s** 与某一波法线光轴重合时，**t** 和 **s** 关系式中有一奇点。在讨论折射波沿该特殊方向传播时所发生的特殊现象之前，必须先搞清楚这一奇点的性质。

15.2.3 节中曾经说明，一个波法线方向 **s** 所属的两个电位移矢量 **D**，其方向与波法线椭球中垂直于该 **s** 的中心截面椭圆的两个主轴分别平行。可是在特别情况下当矢量 **s** 落在波法线光轴方向时，该截面是一个圆，所以这时 **D** 允许取所有与 **s** 垂直的各个方向，即该圆的各个径矢方向；因而在这种情况下电矢量 **E**[就每个 **D** 从 § 15.1(1)计算出]的方向可有无穷多个，而光线方向 **t**(按图 15.1 求出)也可有无穷多个。现在来证明所有这些 **t** 矢量都位于一个圆锥的锥面上。

设 $\mathbf{s}'(s'_x,0,s'_z)$ 是沿某一波法线光轴方向的单位矢量，以主介电轴为参考系，且各轴顺序服从不等式(5)。因此 s'_x 和 s'_z 之间存在关系式(11)，并且所有可允许的 **D** 矢量都因垂直于 $\mathbf{s}'$ 而满足关系式

$$s'_xD_x+s'_zD_z=0.$$

用相应的 **E** 矢量分量表出时，上式可写成为

$$s'_x\varepsilon_xE_x+s'_z\varepsilon_zE_z=0. \tag{25}$$

在图 15.11 中，设 Π 是与 $\mathbf{s}'$ 垂直的任一平面，并设电矢量 **E** 所在的直线与此平面相交于 P。因为按照(25)式所有属于 $\mathbf{s}'$ 的 **E** 矢量必须同在一个平面 Λ 上，这个平面与分量为 $(s'_x\varepsilon_x,0,s'_z\varepsilon_z)$ 的矢量相垂直，所以所有可能的 P 点必须位于 Π 和 Λ 二平面相交的直线 AB 上。可是光线矢量 **t** 与 **E** 和 $\mathbf{s}'$ 共面并垂直于 **E**。设 **t** 和 $\mathbf{s}'$，与平面 Π 分别相交于 T 点和 S 点。则由相似三角形定理可知

① 原文"two refracted rays"(两条折射光线)为误。折射光线一般说来不一定在入射面上。满足原有折射定律形式的是波法线而非光线，这一点普物光学教材都讲得很明确，译文已予改正——译者注。

$$TS \cdot SP = OS^2 = 常数. \tag{26}$$

因为 P 的轨迹是直线 AB，所以 T 的轨迹是 AB 的反演，更明确地说[①]，是一个通过反演中心 S 并且在 S 处其切线平行于 AB 的圆[②]。因此，**一个波法线光轴 s 所属的光线有无穷多个，并且这些光线形成一个圆锥的锥面**。这个圆锥不是一个正圆锥，因为从锥顶 O 到锥底平面 Π 的垂线不通过底圆中心。

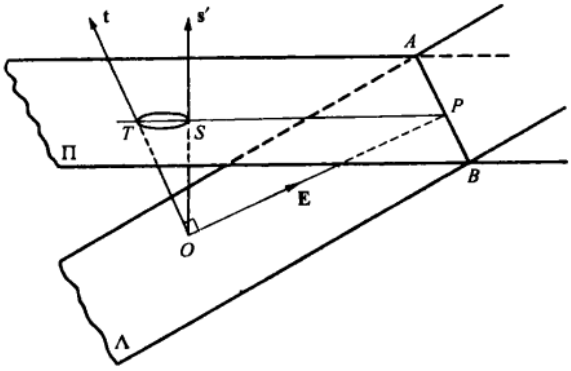


图 15.11 与双轴晶体中波法线的一个光轴相应的光线位置的图示

如果 **E**,**s**′和 **t** 都在 xz 平面上，则 **t** 的方向必然就是分量为$(s'_x\varepsilon_x, 0, s'_z\varepsilon_z)$的矢量方向，而 **E** 总是同它垂直的。如果这一方向与 z 轴的夹角为ϕ，则圆锥在 xz 平面上的孔径角χ 由下式给出：

---

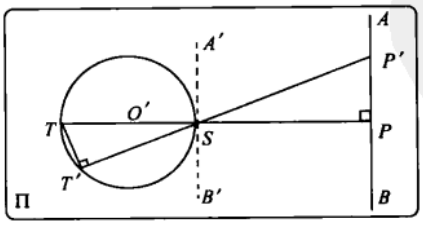
① 见，例如 D. M. Y. Sommerville, *Analytical Conics* (London, Bell and Sons, 1941), p. 92。

② 这里对本段概括补充两点说明，或可有助阅读——译者注：

(1) **s**′所属 **D**,**E**,**t** 各矢量的分布和方向关系：

以原点 O 为参考，波法线光轴 $\mathbf{s}'(s'_x, 0, s'_z)$和矢量 $\mathbf{t}_{xz}(s'_x\varepsilon_x, 0, s'_z\varepsilon_z)$二者固定，同在 xz 平面上。**s**′所属的无穷多个 $\mathbf{D}(\perp\mathbf{s}')$分布在一个通过 O 并平行于 Π$(\perp\mathbf{s}')$的平面上，而 **s**′所属的无穷多个 $\mathbf{E}(\perp\mathbf{t}_{xz})$则分布在平面 Λ$(\perp\mathbf{t}_{xz})$上，**s**′所属的无穷多条光线 **t**，其分布待定，条件是 **t**⊥**E**，并且每一组的 **s**′,**D**,**E**,**t** 四个矢量共平面，现以[**s**′,**D**]表示此面(这些均已由图 15.1 确定)。平面[**s**′,**D**]与平面 Λ 和 Π 分别交于 OP(**E** 所在直线)和 SP(//**D**)。所以 OP 与 SP 的交点 P 必然在 Λ 和 Π 二平面相交的直线 AB 上。当平面[**s**′,**D**]绕 **s**′转动时，即形成 **D**,**E**,**t** 的一般分布状态(图 15.11 难以确切绘出)；转到 xz 平面时(图 15.11 可看作如此)，**t**//$\mathbf{t}_{xz}$，并与平面 Π 交于 T，$OP\perp AB$，$SP\perp AB$；当平面[**s**′,D]绕 **s**′转过 360°时，P 点在其轨迹 AB 直线上走过两遍，而光线 t 与平面 Π 的交点(T)轨迹为一个圆。这可不用反演操作术语而直接从初等平面几何给以证明。

(2) 用平面几何证明 T 点轨迹为一个圆：



TP——平面 Π 与 xz 平面的交线，$T'O$//**t**′，OP'//**E**′，$\angle T'OP' = 90°$。如附图所示，$T'S \cdot SP' = TS \cdot SP = OS^2 =$ 常数，$\angle TST' = \angle P'SP$，所以 $\triangle TT'S \backsim \triangle P'PS$，$\angle TT'S \equiv \angle P'PS \equiv 90°$，故知 T' 的轨迹是一个圆，其直径为 TS，圆心在 TS 中点 O'，S 点处的切线 $A'B'$ // AB。

$$\tan\chi=\tan(\beta-\phi)=\frac{\dfrac{s'_x}{s'_z}-\dfrac{s'_x\varepsilon_x}{s'_z\varepsilon_z}}{1+\dfrac{\varepsilon_x s'^2_x}{\varepsilon_z s'^2_z}}=\frac{1}{v_y^2}\sqrt{(v_x^2-v_y^2)(v_y^2-v_z^2)},\tag{27}$$

式中 β 是波法线光轴 $\mathbf{s}'$ 与 z 轴的夹角，由(11)式给出。通常 $(v_x^2-v_y^2)/v_y^2\ll1$，$(v_y^2-v_z^2)/v_y^2\ll1$，所以该圆锥非常接近锥角为 χ 的正圆锥。

用完全类似的方式可以证明，**光线光轴所属的波法线也有无穷多个，并且这些波法线也形成一个圆锥面**。这个圆锥(在 xz 平面上)的孔径角由(27)的对偶式给出，即

$$\tan\psi=\frac{1}{v_xv_z}\sqrt{(v_x^2-v_z^2)(v_y^2-v_z^2)}=\frac{v_y^2}{v_xv_z}\tan\chi.\tag{28}$$

上述情况从法线曲面和光线曲面方面来看，可更便于说明，因为这里可利用 15.2.3 节导出的一个特性，即法线曲面是光线曲面的垂足曲面。图 15.12 给出这两个曲面在 xz 平面上的截面图形。法线曲面与这个平面相交成一个半径 $v'_p=v_y$ 的圆和一个极半径为 v''_p 的卵形，而光线曲面同该平面相交成一个相同的圆 $v'_r=v_y(=v'_p)$ 和一个椭圆 v''_r。设圆和卵相交于 N，则直线 ON 就是波法线光轴的方向，并且通过 N 并与 ON 垂直的平面同光线曲面相切之点必定有无穷多个，它们也就是波法线光轴 ON 所属光线形成的那一光锥同光线曲面切割之点，其轨迹为一个圆。因此，光线曲面具有一个不寻常的性质，即有某些切面各同它相切于无穷多个点[①]（有如一苹果正放在桌面时其底部与桌面切触之状，而图 15.12 所示几何关系还存在于其他三个象限——译者注）。

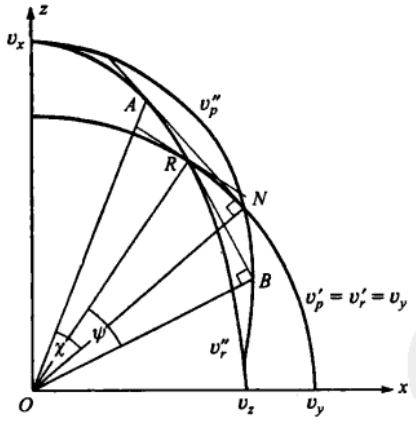


图 15.12　圆锥折射：两种圆锥的作图

光线光轴在图 15.12 中用 OR 表示，其中 R 是光线曲面的两层面相交之点；这两层面的相交方式使得 R 点处曲面的切面有无穷多个，而且它们的法线位于一圆锥上。因为从 O 引向这些切面的法线就是光线方向 OR 所属的波法线方向，所以这些无穷多个法线形成的圆锥就是

① 光线曲面的特性在 G. Salmon 的书中有详细讨论，见 G. Salmon, *Analytical Geometry of Three Dimensions*. Revised by R. A. P. Rogers, Vol.2(London, Longmans, Green & Co., 1915, 5th edition), Chapter IV。

光线光轴 *OR* 所属的波法线组成的圆锥。上面讲的这两个圆锥的孔径角 χ 和 ψ 也在图 15.12 中标出。由于即将弄明白的原因,属于 *ON* 的圆锥,即诸如 *OA* 这些光线形成的圆锥,叫做**内圆锥折射锥**,而属于 *OR* 的圆锥,即诸如 *OB* 这种波法线形成的圆锥,叫做**外圆锥折射锥**。

现举一例。考虑一块霰石双轴晶片,片的前后二面相互平行并垂直一波法线光轴切割而成。如果用一束很窄的单色光照射该片,使光垂直入射在其前表面上,则光进入晶片后其能量将散开来形成一空心光锥——内圆锥折射锥,而后从晶片后表面射出,成为一个空心圆柱,如图 15.13所示。因此在晶片后面与其平行的屏幕上可望看到一个明亮的**圆环**。1832 年,哈密顿(Sir William Rowan Hamilton)预言了这一奇异现象,一年之后劳埃德在哈密顿的推动下用霰石对此进行研究并证实了它的存在。当时,菲涅耳的光的波动理论已获得多项确证,本项实验的成功无疑代表了其中最引人注目的证明之一,并对该理论最终获得普遍接受作出了巨大贡献(见"历史引言"III 页)。

实际上,圆锥折射现象的演示实验并不完全像我们刚才讲的那么简单,因为很自然人们不可能获得一个完全严格平行的单色光束。在一个实验中,所用的光束总要有一定的角孔径。在这种情况下,如 Poggendorff[①] 和 Haidinger[②] 首先观察到的,实际是两个同心亮环,隔着一个细的暗环,如图 15.14 所示。在劳埃德最先的实验中,之所以没有看到这一结构,是因为制约其光束宽度的孔径过大,以致两个亮环界限不清混而为一。在两个亮环发现后很长一段时间其原由一直未获得解释,直到 Voigt[③] 对它作出一种说明,现概括述之如下:

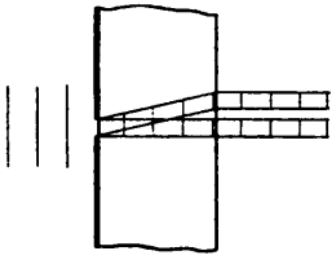


图 15.13 内圆锥折射

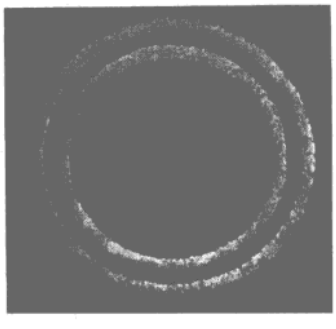


图 15.14 圆锥折射产生的光分布

要解释为何会出现两个亮环,必须考虑波法线稍微偏离(法线)光轴的那些波的传播。每条这种波法线在晶体内将产生两条光线[④],并且可以料想得到这两条光线的方向与内圆锥折射锥的母线方向偏离甚微。为了确定透射光如何分布,必须考虑图 15.12 中光线曲面同切面 *AN* 所切之圆的附近部分。光线曲面的这一部分可比拟成汽车轮胎充气内胎平放时的靠上部分,而切面可比拟成一块放在轮胎(内胎)上的薄平板。图 15.15 给出该一部分与 *xz* 平面相截

① J. C. Poggendorff, *Pogg. Ann.*, **48**(1839), 461。

② W. v. Haidinger, *Wiener Ber.*(2), **16**(1854), 129; *Pogg. Ann.*(4), **96**(1855), 486。

③ W. Voigt, *Phys. Z.*, **6**(1905), 672, 818。

④ 因为这里波法线光轴与晶片垂直,所以这些波的入射角和折射角都非常小,双折射效应对波法线而言可予忽略,但对光线则不可——译者注。

的图形。当波法线方向 s 偏离光轴(图 15.12 中的 ON)时,s 所属的光线有两条,光线曲面上代表这两条光线的两个点是光线曲面的两个垂直于 s 的切面的切点(情况如图 15.5 中 P 点所示);当 s 从法线光轴略微移开时,原来垂直于光轴的切面 AN(与光线曲面相切在一个圆)就分裂成两个平行的切面,其中之一贴着光线曲面辗动,使它的切点移动到远离切圆圆心(即 AN 中点)的 F,而第二个切面(它在我们的立体模型中无法表示,因为它将须切割内胎)的辗动是使它的切点移动到接近切圆圆心的 G。图 15.15 所示只是波法线在 xz 平面上位移导致的结果,但对于其他任何方向的位移,结果将同样如此。

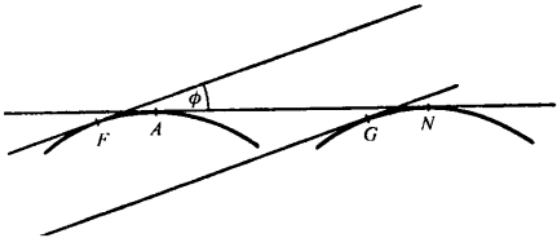


图 15.15　波法线稍微偏离波法线光轴时所属光线的位置图示①

从这些解说可知,波法线与光轴(ON)偏离一个小角度ϕ的所有入射光线将产生一对对折射光线,它们与内圆锥折射锥中心轴偏离的角度分别为$\frac{1}{2}\chi + a\phi$和$\frac{1}{2}\chi - a\phi$,其中 a 为某常数。因此,入射光束中ϕ和$\phi + \mathrm{d}\phi$角范围内包含的全部能量将分布在两个圆锥,二者的半角孔孔径为$\frac{1}{2}\chi \pm a\phi$,而角间隔为 $a\mathrm{d}\phi$。但是在入射光中ϕ和$\phi + \mathrm{d}\phi$这个角范围的总能量正比于$\phi\mathrm{d}\phi$,直到ϕ的最大值。因此可知,在角$\frac{1}{2}\chi \pm a\phi$处,光线锥中的强度正比于$\phi$;因而在$\phi = 0$外,光线锥中的强度为零。因此,我们必须期待要出现两个亮环,二者间有一个暗环,而这正是实际观察到的情况②。

外圆锥折射演示证实前面所得出的另一结果,即某一特定光线方向所属的波法线方向有无穷多个,这些波法线形成一个完整圆锥。观察这一现象,须将晶片的两个平行面切割成与光线光轴垂直。在每个面上各置一小孔,使相互正对,并以单色光会聚照射其中一孔,如图15.16

---

① 本图绘作较简,与充气内胎模型的几何关系亦欠明白,现补充几点说明,或可有助阅读——译者注:

(1) 此内胎模型图应同图 15.12 对照起来看。二者都是 xz 平面截面图,二图中的 A 点和 N 点分别为同一点,本图 $\overset{\frown}{FA}$和$\overset{\frown}{GN}$二圆弧同图 15.12 中$\overset{\frown}{AR}$和$\overset{\frown}{RN}$分别对应。

(2) 作为光线曲面切圆 AN 附近部分的模型,充气内胎也只是用其切面圆 AN 的附近部分,即圆弧$\overset{\frown}{AF}$和$\overset{\frown}{NG}$。如画全、画准,应是两个圆,二者大小应相同,圆心距离应等于 AN,且不应相交。

(3) 在 xz 平面上,波法线稍微偏离波法线光轴 ON 时,产生的是双折射(不是圆锥折射),相应的两条光线为 OF 和 OG,但图 15.12 中无 F,G,而本图中未画 O,只画出通过 F 和 A 的两个"切面",即通过切点 F 和 A 的两条平行直线。

② 按照以上分析,几何上严格符合圆锥折射理论条件的入射光将产生暗环。这一看似奇怪的结果,从几何光学上看不难明白:入射光束中正入射($\phi = 0$)的那条光线进入晶片后,其波法线沿法线光轴传播,产生内圆锥折射,能量分散到无穷多条光线上,而稍微偏离正入射(ϕ很小)的所有光线分别产生双折射,能量仅分散到两条光线,并且这些光线的分布组成两个圆锥。所以前者($\phi = 0$)对应暗环,后者(ϕ很小)组成两个亮环。参见 Born, *Optik* (1933)——译者注。

所示。在晶片内,只有方向非常靠近光线光轴的那些光线可抵达第二个小孔,所以抵达此孔的波,其波法线全在外圆锥折射锥附近。因此从晶片射出的光将形成一空心光锥。这个光锥的孔径角大于外圆锥折射锥的实际孔径角ψ,因为光从晶片出来时还要发生折射。在与晶片平行的屏幕上仍然会看到有两个同心光环。对这个双环的解释,同内圆锥折射情况类似。

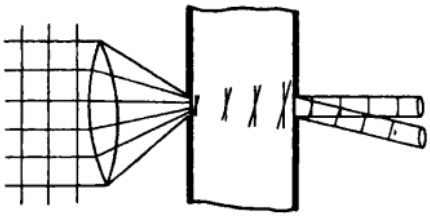


图 15.16 外圆锥折射

15.4 晶体光学测量

本节将扼要介绍测定晶体性质(单轴还是双轴)、晶体光轴方位和晶体主折射率的各种方法。我们将看到,光轴方位可以从观测晶片干涉条纹来测定;干涉图样的结构清楚地指示出光轴与晶片面相交之处,主折射率则可借助晶体棱镜从测量偏向角或全反射角来测定。

作为准备,我们须先讨论一下偏振光的产生和检测。

15.4.1 尼科耳棱镜

产生线偏振光最常用的器件之一是**尼科耳棱镜**[①]。它由方解石(单轴晶体)的天然菱体沿对角面(在图 15.17 中由 *AC* 表示)一剖为二,再经加拿大胶胶合在一起而成。菱体长度约为其宽度的 3 倍,其主截面 *B* 和 *C* 两处的角原等于 71°;端面 *AD* 和 *BC* 后经磨削,使该角减小到 68°。

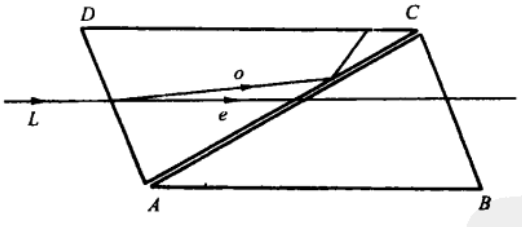


图 15.17 尼科耳棱镜

当一条光线沿平行于菱体长边方向 *L* 入射时,将分裂成一条寻常光线和一条非常光线。加拿大胶对寻常光线为光疏媒质,而对非常光线为光密媒质(方解石晶体的 $n_0 = 1.66$, $n_e = 1.49$;加拿大胶的 $n = 1.53$),从 1.5.4 节的公式不难证明,在加拿大胶界面上寻常光线满足全反射定律,因此被完全反射到涂黑的 *DC* 面而被吸收掉。非常光线则通过棱镜,实际没有侧向位移,并且是线偏振光,其 **D** 矢量在主截面内(见 15.3.2 节)。这样,**尼科耳棱镜产生线偏振光,光的振动方向为已知**。

① W. Nicol, *Edinburgh New Philos. Journ.*, **6**(1829), 83。

如果入射光对菱边有些倾斜，尼科耳棱镜仍可作为起偏器，只要寻常光线在加拿大胶上的入射角不小于临界角；这就限制空气中入射光线的锥角最大不得超过大约 30°，小于此值时，棱镜方有效①。

还有一种由特殊吸收结晶材料做成的薄片，其吸收系数对两个正交振动方向差别甚大，让自然光通过这种薄片也可获得相当纯的线偏振光。这种薄片称为“偏振片”，后面 15.6.3 节将对其进行分析。

从非线偏振态的光产生线偏振光的装置和器件，例如尼科耳棱镜，叫做**起偏器**。这种器件也可用作**检偏器**，即作为线偏振光及其振动方向的探测器。用尼科耳棱镜检测线偏振光时，只要让该棱镜绕其纵轴转动，同时注意是否存在一个位置无光从中通过。如有，则来光为线偏振光并且其 **D** 矢量的振动方向与棱镜主截面垂直。

15.4.2　补偿器

晶体材料也可以用来研究椭圆偏振光，也就是研究其两个主轴的方向和长度比。为此目的要选用一块材料和厚度都合宜的晶片，并用它在相互正交的两个振动之间引进一个光程差。特别是该光程差可以选取得使来的椭圆偏振光通过晶片后转变成线偏振光；对此线偏振光进行分析即可获得关于原椭圆偏振光的信息。这种元件叫做**补偿器**，因为其作用是补偿位相差②。

(a) 1/4 波片

考虑一块平行平面晶片，厚度为 h。设 z 轴垂直于晶片，x 轴和 y 轴分别平行于相应 **D** 振动的方向。我们可假设使晶片绕其法线转动，直到 x 轴和 y 轴分别平行于入射光振动椭圆的两个主轴。入射光 **D** 矢量的 x，y 分量这时由下式表示：

$$\left.\begin{aligned} D_x^{(i)} &= a\cos\omega t, \\ D_y^{(i)} &= b\sin\omega t. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

在通过晶片时这两个分量将受到不同的位相改变，因为这两条光线的速度不同。忽略反射损失，光从晶片射出时的 **D** 矢量分量由下式给出：

$$\left.\begin{aligned} D_x^{(t)} &= a\cos(\omega t+\delta'), \\ D_y^{(t)} &= b\sin(\omega t+\delta''), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

式中

$$\delta' = \frac{2\pi}{\lambda}n'h, \qquad \delta'' = \frac{2\pi}{\lambda}n''h, \tag{3}$$

---

① 尼科耳棱镜有几种变式，可用于较大的角视场。对这些变式的描述，见，例如，L. C. Martin, *An Introduction to Applied Optics*, Vol. 1 (London, Pitman, 1930), p. 204, 或者 R. W. Wood, *Physical Optics* (New York, Macmillan, 3rd edition, 1934), pp. 337 – 338。

② 对补偿器的详细综合论述，见 H. G. Jerrard, *J. Opt. Soc. Amer.*, **38** (1948), 35。对偏振光分析所用各种方法的综合论述，见论文 M. Richartz and Hsien-Yü Hsü, *ibid.*, **39** (1949), 136。
完全偏振光和部分偏振光理论分析的系统方法要采用 10.9 节中所讨论的相干矩阵或斯托克斯参量。

λ 是真空波长[①]。因此晶片所引进的相差为

$$\delta'' - \delta' = \frac{2\pi}{\lambda}(n'' - n')h. \tag{4}$$

特别是如果要出射光是线偏振光,就必须令 $\delta'' - \delta' = \pm \frac{1}{2}\pi$,或者更一般地令 $\delta'' - \delta' = (2m+1)\pi/2$,其中 m 是任一整数,所以必须使晶片厚度

$$h = \left|\frac{2m+1}{n'' - n'}\right|\frac{\lambda}{4}. \tag{5}$$

采用此补偿器时,透射光的线振动方向由下式给出:

$$\frac{D_y^{(t)}}{D_x^{(t)}} = \pm\frac{b}{a}. \tag{6}$$

一个补偿器,如果它所引进的位相差 $|\delta'' - \delta'| = \pi/2$,也就是它对相关两个波的光学厚度之差为四分之一波长,这个补偿器就叫做 **1/4 波片**。它可以很方便地用云母(双轴晶体,呈片层状)箔来制备,将箔剥至厚度 $h = \lambda/4|n'' - n'|$ 即成[②]。

1/4 波片可用来检测椭圆偏振光,方法如下:令光先后通过一 1/4 波片和一尼科耳棱镜,并将二者各绕其轴转动,直到通过尼科耳棱镜看到的视场变成完全黑暗,这就是云母片的两个轴与入射光振动椭圆的两个轴相互平行的位置,并且这时尼科耳棱镜的方位正好对云母出来的线偏振光产生消光,即不允其通过,而按照(6)式,此线偏振光的 **D** 矢量对 x 轴的倾角为 $\arctan\, b/a$。这样就测出了该椭圆两个轴的取向和长度比。

如果入射光是圆偏振光,则 $b = a$ 或 $b = -a$,并且线偏振透射光的 **D** 矢量方向与 OX 轴分别成 45°或 135°。前者对应左旋圆偏振,后者对应右旋圆偏振。

因为 1/4 波片的厚度与 λ 有关,所以它只能对某个特定波长的单色光起完全补偿作用。为了能对任一给定波长的光实行补偿,必须采用一个劈形波片或劈组合片来代替单个平行边波片。下面就来看看几个这种类型的补偿器。

(b) 巴比涅补偿器

巴比涅[③] 所设计的补偿器能实现所有位相差值(包括零)。它由两个石英劈构成(石英为正单轴晶体),二劈锐角相等,斜面相互紧贴(如图 15.18 所示)并能沿其接触面移动,因而形成一个厚度可变的平行板。其中一个劈的光轴与劈棱平行,另一则与之垂直。

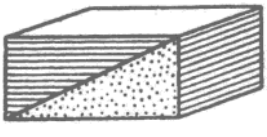


图 15.18 巴比涅补偿器

设 n_o 和 n_e 是石英的寻常折射率和非常折射率($n_o < n_e$),h_1 和 h_2 是两个劈在某一特定点处的厚度。通过这两个劈后,两条光线之间的位相差为

① 同 1.3 节相反,这里用 λ 而不用 λ_0 代表真空波长,因为整个这一节下标 o 均指寻常光线。

② G. Airy, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, **4**(1833), 313。

③ J. Babinet, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **29**(1849), 514; J. Jamin, *Ann. Chim.* (*Phys*), (3), **29**(1850), 274。

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)(h_1 - h_2). \tag{7}$$

这里两个劈的贡献反号，因为在石英中振动垂直于光轴的光线（寻常光线）传播得快，因而振动方向平行于劈棱的那一分量在一个劈中要比另一分量位相超前，而在另一劈中要位相滞后。当入射点在板上垂直于劈棱横向移动时，厚度 h_1 和 h_2 以及 δ 都连续改变，并且在中点处（$h_1 = h_2$）δ 为零。结果板中将存在一系列传播路线可使所透过的光成为线偏振光，遂可用一个取向合适的尼科耳棱镜使之消光。

取 x 轴平行于劈棱时，入射椭圆偏振光可表成为

$$\left.\begin{aligned} D_x^{(i)} &= a_1 \cos(\omega t + \delta_o'), \\ D_y^{(i)} &= a_2 \cos(\omega t + \delta_o''). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

补偿器透射光则表成为

$$\left.\begin{aligned} D_x^{(t)} &= a_1 \cos(\omega t + \delta'), \\ D_y^{(t)} &= a_2 \cos(\omega t + \delta''), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \delta' &= \delta_0' + \frac{2\pi}{\lambda} n_o(h_1 - h_2), \\ \delta'' &= \delta_0'' + \frac{2\pi}{\lambda} n_e(h_1 - h_2). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

要出射光是线偏振光，必须使 $\delta'' - \delta' = m\pi(m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$，即

$$\delta_0'' - \delta_0' = -\frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)(h_1 - h_2) + m\pi. \tag{11}$$

线振动的方向由下式给出：

$$\frac{D_y^{(t)}}{D_x^{(t)}} = \pm\frac{a_2}{a_1}. \tag{12}$$

假定先在补偿器前面放置一个尼科耳棱镜，使补偿器接收的是线偏振光。这时 $\delta_0'' = \delta_0'$。如果再在补偿器后面放上一个检偏器并使它与起偏的尼科耳棱镜取向正交，则视场将出现一系列暗带，其走向与劈棱平行，并且所在之处就是(11)式右边为 π 整数倍的那些点。所以这些暗带定出了零位。下一步如果单独用此组补偿器和检偏器分析椭圆振光，则由暗带从零位的位移即可测定出入射光的位相差 $\delta_0'' - \delta_0'$；并且从检偏器的取向，利用(12)式还可测定出入射光 $\mathbf{D}^{(i)}$ 矢量与劈棱平行和垂直的两个分量的振幅之比。从这些数据和应用 1.4.2 节的公式可求得入射光振动椭圆主轴的位置和比值。

(c) 索累补偿器

有些应用需要在整个视场各个地方产生相同的位相差（或正，或负，或为零）。这可以用索累设计的补偿器[①]来实现。这种补偿器包括两个石英劈 A 和 A'，二者也如同巴比涅补偿器那样构成一个平行平面板，但所不同的是这里两个劈中的光轴都与劈棱平行。下劈被胶合在一

① H. Soleil, *C. R. Acad. Sci.*, *Paris*, **21**(1845), 426; **24**(1847), 973; **26**(1848), 162. J. Dubosecq and H. Soleil, *ibid.*, **31**(1850), 248。

块平行平面石英片 B 上,B 的光轴则与上述二劈的劈棱垂直(见图 15.19)。此补偿器在两条光线间所引进的有效光程差显然为$(n_e - n_o)[h_B - (h_A + h_{A'})]$。在零位时,即该光程差为零时,整个视场可以用一个取向适合的检偏器使之变暗。移动上劈可改变有效光程差,但不论上劈移到哪一位置,该光程差在整个视场各个地方都保持相同。对椭圆偏振光的分析则与巴比涅补偿器情况类似。

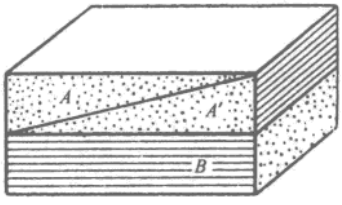


图 15.19 索累补偿器

(d) Berek 补偿器

Berek[①] 所研制的一种补偿器在生物显微术中很有用(例如,测量双折射材料细丝)。它由一片单轴晶体媒质构成,光轴与晶片二面垂直,靠倾斜晶片在寻常光线和非常光线之间引进位相差。该片安装在一框架上,可借助手轮使之转动,轮上刻有标度,经校正后可直接读出所引进的位相差。

15.4.3 晶片干涉

如前所说,晶体的光轴方向可借助晶片干涉现象来测定。这时将观察到一种干涉效应,鲜明夺目,充分显示晶体光学理论和实验的一致,因而自当纳入仔细探究之列。

首先考虑一束线偏振光从起偏器射出,而后垂直入射到一块厚度为 h 的平行平面晶片上。进入晶片后,每条光线分成两条,二者以不同的速度传播,其 **D** 矢量相互正交且都与晶片法线方向垂直。从晶片出来时这两条光线具有某一位相差 δ。如果在晶片后面放上一块检偏振的尼科耳棱镜并再在其后放置一个透镜,则这两个正交振动将被检偏器投影到同一方向(检偏器透射光的振动方向)并被透镜会聚在其后焦面上而起干涉。

在图 15.20 中,图面平行于晶片,$\mathbf{D}'$和 $\mathbf{D}''$代表晶体中的那两个相互正交的振动方向,OP 和 OA 分别是起偏器和检偏器透射光的振动方向。设ϕ是 OP 与 $\mathbf{D}'$所形成之角,χ 是 OA 和 OP 的夹角。晶片入射光的振幅用矢量 OE(平行于 OP)表示,它在 $\mathbf{D}'$和 $\mathbf{D}''$方向上的分量是

$$OB = E\cos\phi, \qquad OC = E\sin\phi. \tag{13}$$

检偏器只让其中平行于 OA 的分量 OF 和 OG 通过,由图 15.20 和(13)式可知其振幅

$$OF = E\cos\phi\cos(\phi - \chi), \qquad OG = E\sin\phi\sin(\phi - \chi). \tag{14}$$

离开晶片时,这两个分量有一位相差

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n'' - n')h. \tag{15}$$

按照 §7.2(15),位相差为 δ 的两个单色波因干涉而产生的强度为

① M. Berek, *Zbl. Miner. Geol. Paläont.* (1913), 388, 427, 464, 580。

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta,$$

式中 I_1 和 I_2 是两个波各自的强度(振幅平方)。以(14)式所给的振幅代入,即有

$$I = E^2\left[\cos^2\chi - \sin 2\phi\ \sin 2(\phi-\chi)\ \sin^2\frac{\delta}{2}\right], \tag{16}$$

其中曾利用恒等式 $\cos\delta = 1 - 2\sin^2(\delta/2)$。

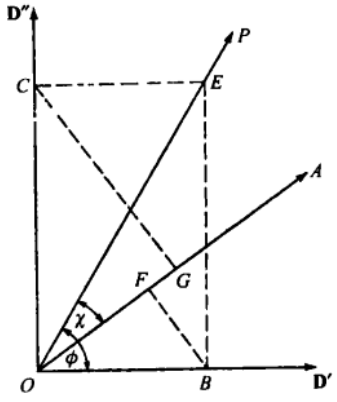


图 15.20　一个起偏器和一个检偏器所通过的振动分量图解

如取去晶片($\delta = 0$),则强度将为 $I = E^2\cos^2\chi$,因此(16)式的第二项代表晶片的作用。现在来分析一下两种重要的特别情况:

(a) **检偏器和起偏器相互平行**($\chi = 0$)。在此情况下,(16)式简化为

$$I_{\parallel} = E^2\left(1 - \sin^2 2\phi\sin^2\frac{\delta}{2}\right). \tag{17}$$

这时存在一系列**透射极大**,发生在

$$\phi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \cdots, \tag{18}$$

即**检偏器(和起偏器)透射光的振动方向**[①] **同晶片中二振动方向之一重合之时**。(18)式中相邻两个极大位置之间各有一**透射极小**,位于 $\sin 2\phi = \pm 1$,即位于

$$\phi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \cdots, \tag{19}$$

极小值为

$$I_{\parallel\text{极小}} = E^2\left(1 - \sin^2\frac{\delta}{2}\right) = E^2\cos^2\frac{\delta}{2}. \tag{20}$$

此极小并非完全黑暗,除非 δ 是 π 的奇数倍,也就是说,除非晶片的厚度 h 正好使(15)式的 δ 等于 $\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \cdots$ 中的某个值,这个 h 因波长而异。

① 此后常简称为尼科耳(检偏器或起偏器)的通振方向——译者注。

(b) **检偏器和起偏器相互垂直**($\chi = \pi/2$),在这种情况下(16)式化为

$$I_{\perp} = E^2 \sin^2 2\phi \sin^2 \frac{\delta}{2}. \tag{21}$$

同(17)式比较,可见这时的干涉现象与情况(a)是**互补的**。当ϕ等于(18)式所给的某值时,出现**完全黑暗的极小**,而在相邻极小中间,即ϕ等于(19)式的某值时,出现相对的**极大**,其值为

$$I_{\perp极大} = E^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}. \tag{22}$$

这些现象可以用来产生完全互补色;只要在两个尼科耳棱镜之间放上一块晶片,让一束平行白光从中通过,先使二棱镜平行($\chi = 0$)然后再正交($\chi = \pi/2$)。要得到一个均匀的视场,重要之处是使光束的准直性足够好,以保证没有引进显著不同的位相差。

如果起偏器的入射光是来自一个扩展不相干光源,并且该光源位于一个透镜的焦平面上,则光源中的每一点将在其共轭像点处各产生一个与所有其他源点无关的强度分布。因此在像平面上呈现一种光分布,其状态和式样可以用**等强度曲线**来描述,这些曲线就构成晶片的所谓**干涉图**。由于像平面上的每一点各对应晶片上沿某一方向射入并射出的一组平行光,因此我们来考虑位相差 δ 随该方向的变化规律。但仅考虑起偏器和检偏器正交情况($\chi = \pi/2$)即已足够,因为当二者平行时干涉图样是和正交情况互补的,而其他情况所产生的干涉图均欠显明。

给定一入射方向时,相应的强度取决于ϕ和 δ。为便于分析,现在分开来考虑ϕ或 δ 改变时所产生的影响,ϕ为常数的曲线叫做**同消色线**(isogyre)(或刷形线),而 δ 为常数的曲线叫做**等色线**。同消色线依赖于晶片中的光轴取向而与波长和晶片厚度无关,除非存在轴色散。等色线依赖于波法线的方向并依赖于晶片的厚度,其所以如此命名是因为当使用白光时这些线颜色相同。各点强度均为零的曲线族叫做**主同消色线**和**主等色线**,而按照(21)式这两种曲线族分别由 $\sin 2\phi = 0$ 和 $\sin \frac{1}{2}\delta = 0$ 给出。在这些曲线上,光的偏振态与穿行晶体前一样。这是因为在主同消色线上检偏器所通过的振动,其方向与晶体中的振动方向之一相重合,而在主等色线上二出射光束间的位相差是 2π 的整数倍。这两种曲线系叠加在一起,但可以分开来研究。

在研究这些曲线的形状之前,须先分析位相差 δ 如何随入射角改变。设 SA, AB', AB'' 分别代表入射波和两个折射波在 A 点处的波法线,并设 θ_1, θ_2', θ_2'' 分别是入射角和两个折射角(见图 15.21)。此外设 λ 是第一媒质(空气)中的波长,$\lambda' = \lambda/n'$, $\lambda'' = \lambda/n''$是两个折射波的波长。从晶片射出的两条光线将相互平行,并平行于入射波法线(见图 15.21)且具有一位相差

$$\delta = 2\pi\left(\frac{AB''}{\lambda''} + \frac{B''C}{\lambda} - \frac{AB'}{\lambda'}\right), \tag{23}$$

式中

$$AB' = \frac{h}{\cos\theta_2'}, \qquad AB'' = \frac{h}{\cos\theta_2''}, \tag{24}$$

并且

$$B''C = B''B' \sin\theta_1 = h \sin\theta_1(\tan\theta_2' - \tan\theta_2''). \tag{25}$$

将(24)和(25)两式代入(23)式,得到

$$\delta = 2\pi h\left[\frac{1}{\cos\theta_2''}\left(\frac{1}{\lambda''} - \frac{\sin\theta_1 \sin\theta_2''}{\lambda}\right) - \frac{1}{\cos\theta_2'}\left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{\sin\theta_1 \sin\theta_2'}{\lambda}\right)\right]. \tag{26}$$

利用折射定律，上式中第一个圆括弧内的 $\sin\theta_1/\lambda$ 可用 $\sin\theta_2''/\lambda''$ 代替，第二个圆括弧内的则可用 $\sin\theta_2'/\lambda'$ 代替，结果得到

$$\delta = 2\pi h\left[\frac{\cos\theta_2''}{\lambda''} - \frac{\cos\theta_2'}{\lambda'}\right] = \frac{2\pi h}{\lambda}(n''\cos\theta_2'' - n'\cos\theta_2'). \tag{27}$$

因为差值 $n'' - n'$ 总比 n' 和 n'' 小得多，所以可允许对(27)改用近似表示。在一级近似上有

$$\begin{aligned} n''\cos\theta_2'' - n'\cos\theta_2' &= (n'' - n')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}(n\cos\theta_2) \\ &= (n'' - n')\left(\cos\theta_2 - n\sin\theta_2\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}n}\right), \end{aligned} \tag{28}$$

式中 n 是 n' 和 n'' 的平均值，θ_2 和 θ_2' 是 θ_2'' 的相应平均值。此外，对折射定律 $\sin\theta_1 = n\sin\theta_2$ 取微分(令 θ_1 保持固定)，即有

$$0 = \sin\theta_2 + n\cos\theta_2\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}n}. \tag{29}$$

因此(28)可以成为

$$n''\cos\theta_2'' - n'\cos\theta_2' = \frac{1}{\cos\theta_2}(n'' - n'), \tag{30}$$

将(30)代入(27)，即得到

$$\delta = \frac{2\pi h}{\lambda\cos\theta_2}(n'' - n'). \tag{31}$$

$h/\cos\theta_2$ 这个量代表晶片中两条光线的平均几何程长，乘以 $(n'' - n')$ 就是相应的光程差。

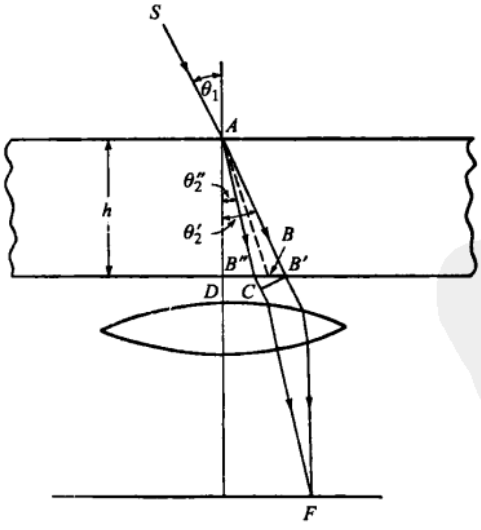


图 15.21　确定晶片两个透射波的位相差

现在回到扩展光源情况,这时须考虑不同传播方向的波的透射状况。下面将假设这些方向与晶片法线所形成的角度很小。在图 15.21 中,各个入射波用其通过定点 A 的波法线来代表。各个波最后被透镜分别聚焦到各个 F 点,途中经过的 B 点则是透射波法线 AB(AB' 和 AB'' 的平均)与晶片下表面的交点,所以 F 和 B 是一一对应的两点。因为 AB 对波片法线 AD 的倾角很小,所以 F 点将构成 B 点的一个像——一个投影——但稍有畸变。因此,等色线的形状基本上决定于 δ = 常数的 B 点轨迹。特别是,对主等色线而言,这一常数 δ 为 2π 的整数倍。如果要研究晶片厚度改变所产生的效应,只须令含 B 点的平面平行自身前后移动。

由此可见,所有等色线可通过作图一一绘制,方法是围绕某点 A 构作**各个等位相差面,即 $\delta(h,\theta_2)$ 等于常数的曲面,又称等色面**,并求出这些面与平面 h = 常数相交的轨线。在构作等色面时,必须记住 δ 表达式(31)中所包含的折射率 n' 和 n'' 也是 θ_2 的函数。

下面将分开来考虑单轴晶片和双轴晶片的干涉图形状。为方便起见,B 点的位置将采用极距离 ρ 和角 ϑ(或 ϑ_1 和 ϑ_2)来确定,其中

$$\rho = AB = \frac{h}{\cos\theta_2}, \tag{32}$$

而 ϑ(或 ϑ_1 和 ϑ_2)是 AB 与单轴(或双轴)晶体媒质波法线光轴方向的夹角(见图 15.22)。

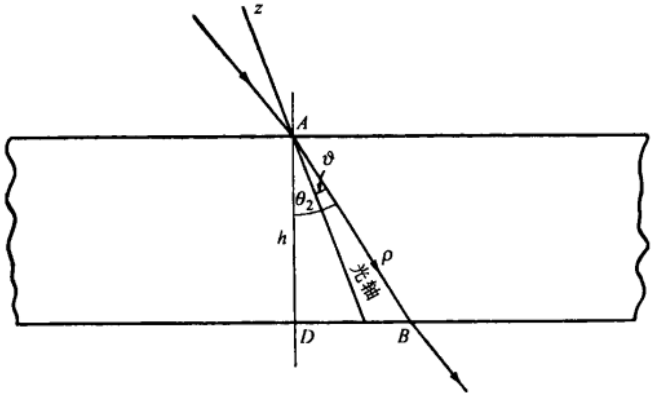


图 15.22 晶片干涉图理论图示

15.4.4 单轴晶片的干涉图

按照 § 15.3(4)式,在单轴晶体中,当波法线方向与光轴成 ϑ 角时,它所属的两个相速度 v'_p 和 v''_p 存在如下关系:

$$v_p'^2 - v_p''^2 = (v_o^2 - v_e^2)\sin^2\vartheta. \tag{33}$$

因为 $v_p = c/n$,并且类此 $v_o = c/n_o$,$v_e = c/n_e$,所以由(33)可得到

$$\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n''^2} = \left(\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2}\right)\sin^2\vartheta. \tag{34}$$

n' 和 n'' 之差通常比它们本身小得多,所以(34)可以写成近似形式

$$n'' - n' = (n_e - n_o)\sin^2\vartheta. \tag{35}$$

将此关系式代入(31)并利用(32),即得到

$$\delta=\frac{2\pi\rho}{\lambda}(n_e-n_o)\sin^2\vartheta. \tag{36}$$

因此等位相差面的方程为

$$\rho\sin^2\vartheta=C,\qquad (C=常数). \tag{37}$$

为了看出这些曲面的形状,现在把坐标(ρ,ϑ)变换到直角坐标,并令 z 轴沿光轴方向。于是

$$\begin{aligned}\rho^2&=x^2+y^2+z^2,\\ \rho^2\sin^2\vartheta&=x^2+y^2,\end{aligned} \tag{38}$$

并且(37)式变换成

$$(x^2+y^2)^2=C^2(x^2+y^2+z^2). \tag{39}$$

这些等位相差曲面可由曲线

$$x^4=C^2(x^2+z^2) \tag{40}$$

绕 z 轴旋转而成。图 15.23 给出曲线(40)的一个典型形状。在远离原点处($z^2\gg x^2$),该曲线渐近趋近抛物线

$$x^2=\pm Cz. \tag{41}$$

而在 x 轴附近

$$C^2=\frac{x^4}{x^2+z^2}=\frac{x^2}{1+\dfrac{z^2}{x^2}}=x^2\left(1-\frac{z^2}{x^2}+\cdots\right), \tag{42}$$

所以该曲线在那里近似为双曲线

$$x^2-z^2=C^2. \tag{43}$$

在图 15.23 中,抛物线和双曲线都用虚线画出。

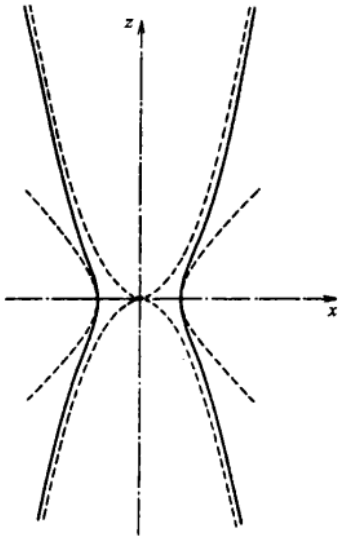


图 15.23　光学单轴晶体等位相差面的子午曲线

有了等色面方程(39),现在只要通过取其截面即可确定等色线。为此,在离原点 h 处取一平面,代表晶片的出射面,它与等色面(39)相交的曲线就是一组等色线;改变晶片出射面的距离 h 和它对晶片光轴的取向,即可获得全部这种曲线。由图 15.23 显然可见,晶片面相对光轴的取向不同时,等色线的形状可以差别很大。如果晶片面垂直于光轴,则等色线显然为圆形;如果晶片面的法线同光轴形成的角度很小,则等色线是闭合曲线,并近似为椭圆;但如果晶片面的法线同光轴形成的角度很大,则等色线将近似为双曲线。

主同消色线($\sin 2\phi = 0$ 的曲线)表现为一个模糊的暗十字,其双臂分别与起偏器和检偏器的方向平行,其中心则对应于与光轴平行的那一波法线方向。这是因为对单轴晶体中任何给定的波法线而言,它所属的两个振动方向分别平行于和垂直于主平面,即包含该波法线和光轴的平面。因此当主平面平行于起偏或检偏尼科耳棱镜的通振方向时,视野相应的所有点将都是暗点。

图 15.24 给出单轴晶体的一个典型干涉图;图中主同消色线和等色线清晰可见。



图 15.24 荧石晶片干涉图,晶片切割垂直于光轴并置于正交尼科耳棱镜间

平行平面晶片干涉图在**偏光镜**方面有一个重要的实际应用。偏光镜是一种检偏仪器,用来检测以非偏振成分为主的光束中所含的少量偏振成分之比。一个例子是 Savart 板[①]。它由两个等厚石英晶片组成,每片切割成使其光轴与晶片面法线成 45°,然后胶合在一起,并使晶片面法线与各片光轴构成的两个平面相互垂直。因此在一个晶片中属于寻常振动的方向在另一晶片中则成为非常振动的方向,因而二者中的位相差正负号相反;当波垂直通过二晶片时,这两个位相差相互抵消。这种装置在近正入射情况下能保证位相差随波长的改变非常之小,所以可产生白光条纹。如果将 Savart 板置于正交尼科耳棱镜之间,并使板中的两个主平面与二尼科耳棱镜的方向成 45°,则干涉图样是一组明、暗相间并近乎直线的条纹。如果取走起偏的尼科耳棱镜,并让部分偏振光从该系统中通过,则偏振成分将产生一组干涉条纹,叠加在非偏振成分产生的均匀背景上,但即使偏振光占的比例很低,其干涉条纹也可被检出。当入射光中偏振成分的振动面同 Savart 板中的两个主平面都成 45°时,干涉条纹的衬比度最大。

15.4.5 双轴晶片的干涉图

对于双轴的平行平面晶片,(33)式不再适用,要换成下列较为一般的关系式

① 见 *Ann. d. Physik*, **49**(1840), 292。

$$v_p'^2 - v_p''^2 = (v_x^2 - v_z^2)\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2, \tag{44}$$

此式可从 § 15.3(18)所包括的两个式子相减得到。这里 ϑ_1 和 ϑ_2 是波法线方向 AB 同两个波法线光轴形成的角度。因为$v_p = c/n$，$v_x = c/n_x$，等等，所以(44)可写成

$$\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n''^2}\right) = \left(\frac{1}{n_x^2} - \frac{1}{n_z^2}\right)\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2, \tag{45}$$

此外又因为这些折射率的差值比它们自身小得多，所以(45)可近似为

$$n'' - n' = (n_z - n_x)\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2. \tag{46}$$

将(46)代入(31)并仍令 $h/\cos\vartheta_2 = \rho$，就得到位相差 δ 的表达式

$$\delta = \frac{2\pi\rho}{\lambda}(n_z - n_x)\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2. \tag{47}$$

由此可见双轴晶片的等位相差面方程是

$$\rho \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 = C \qquad (C = 常数). \tag{48}$$

在各光轴方向上($\vartheta_1 = 0$ 或 $\vartheta_2 = 0$)，ρ 趋于无穷大，所以等位差面在围绕各光轴方向渐近近似为柱体。当 ϑ_1 很小时，ϑ_2 近似等于二光轴的夹角 2β，因而这时(48)式变成

$$\rho \sin\vartheta_1 = \frac{C}{\sin 2\beta}. \tag{49}$$

但 $\rho\sin\theta_1$ 是等位相差面上的点离光轴 $\vartheta_1 = 0$ 的距离，$\rho\sin\theta_2$ 的意义类推，因此上述两个“渐近柱体”都是圆柱体，且粗细相同。图 15.25 给出一个这种等位相差面的大体形状。显然，在光轴附近等色线为闭合曲线，并近似椭圆；在透镜焦面上这些椭圆分别围绕着二光轴的两个对应点。

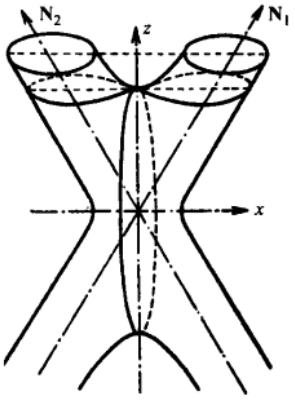


图 15.25　光学双轴晶体的等位相差面

主同消色线的求法同前，即找出晶体中所有这些波法线的方向，它们各自所属的两个(**D**)振动方向都和两个(正交)尼科耳棱镜的通振方向重合。为此可以利用 15.2.3(a)节中的作图法。该节曾证明，一波法线 **s** 所属的两个振动面(**D′**，**s**)和(**D″**，**s**)是(**N**$_1$，**s**)和(**N**$_2$，**s**)两个面夹角的内等分面和外等分面，其中 **N**$_1$ 和 **N**$_2$ 是两个光轴的方向。因此，如果晶体的 z 轴垂直于晶

片,而两个(正交)尼科耳棱镜的通振方向分别平行于 x 轴和 y 轴,则主同消色线将位于 xz 平面和 yz 平面上,因而干涉图出现一个暗十字,其双臂之一通过二光轴的两个对应点①。

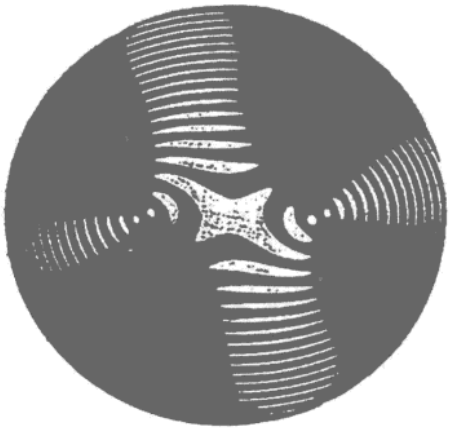


图 15.26 巴西黄玉产生的干涉图

推而广之,如果晶体相对二尼科耳棱镜作任何其他取向,则主同消色线的形状可能是直角双曲线,其渐近线沿着二尼科耳棱镜的通振方向,并且曲线的两支各通过一个光轴对应点。如果令二尼科耳棱镜固定而让晶片在自身平面内转动,则同消色线图样将改变,但等色线除跟着转动外形状将保持不变;因为等色线的定义条件与尼科耳棱镜方向无关。图 15.26 给出双轴晶片的一个典型干涉图②。

15.4.6 晶体媒质的光轴定位和主折射率测定

因为等色线围绕光轴(单轴或双轴)构成闭合曲线,所以干涉图的观测为测定晶体是单轴还是双轴并定出其位置所在提供了一个便捷方法。这种观测可在配置有两个尼科耳棱镜的显微镜(叫做**偏光显微镜**)下进行。使用时,或取走目镜,让眼睛聚焦在物镜的焦面上(因此光路同图 15.21 完全一样);或在显微镜镜体内置入一附加透镜,以便能通过目镜观察物镜的后焦面。第二种方法的优点是可以看到一个较大的干涉图像,并能利用目镜中的校准标度对干涉图进行测量。因此用它可以测量双轴晶体的光轴夹角(当然必须考虑光离开晶体时折射的影响)。采用这些方法,即使晶体是一些非常小的碎片,如制作薄矿物切片时的那种碎屑,就足以定出光轴位置并测出它们的倾角。

晶体的主折射率 n_x, n_y, n_z 可有两种测定方法,一种是从测量棱镜中的偏向角或全反射角,另一种是将晶体浸没在一系列折射率高低不同的液体中。

棱镜法对单轴晶体使用比对双轴晶体方便。这时只要将棱镜切割成使其折射棱平行于波法线光轴。于是寻常波和非常波的 **D** 矢量将分别垂直和平行于折射棱。用一束非偏振光从棱镜的一个面射入时,将有两束光从另一面射出,从每束光的偏向角即可求出折射率 n_o 和 n_e。借助一块尼科耳棱镜可把寻常光线和非常光线区分开来。

---

① 这里 x, y, z 指晶体的主介电坐标轴,并且 $\epsilon_x < \epsilon_y < \epsilon_z$(15.3.3 节约定),故晶片的两个光轴位于 xz 平面上,主同消色线的暗十字方向则与 x, y 轴重合,其横臂(沿 x 轴的)通过两个光轴对应点——译者注。

② 原文本段,包括图 15.26 讲述过简,不易看懂,详情可参看 M. Born, *Optik*(1933), § 66——译者注。

液浸法根据的原理是，一个透明物体当浸没在折射率和它相同的液体中时，由于其反射消失而不能被肉眼察觉，即成为所谓不可见。因为一个晶体对任何给定的传播方向都有两个折射率，所以如果在非偏振光下观察它，它在任何液体中都将是可见的。然而，如果采用线偏振光并令其 **D** 矢量沿着晶体中 **D**′或 **D**″的方向，则该晶体在折射率适宜，即 n' 或 n'' 的液体中将是不可见的。如果主介电轴 x, y, z 的方向为已知，则可让晶体依次更换取向，使光轮流平行各轴通过，并选取 n' 和 n'' 使它们轮流等于 n_x, n_y 和 n_z 的每一对值。

如果不知道主介电轴的方向，则可用如下方法来获得相当好的折射率估算值：将大量的、取向无规的这种待测晶体依次浸没在一系列折射率高低不同的液体中，并同时改变入射线偏振光的振动方向。每个晶体将在两个不同折射率的液体中对入射光的两个振动方向变成为不可见。如果这两组折射率为 n' 和 n''，则由不等式 § 15.3(12)可有

$$n_x \leqslant n' \leqslant n_y \leqslant n'' \leqslant n_z. \tag{50}$$

因此 n_x 等于 n' 值中的下限，n_z 等于 n'' 值中的上限，而 n_y 等于 n' 值中的上限和 n'' 值中的下限；如果所作测量次数足够多，则这两个上、下限应该重合。

如果所测晶体为单轴，则每个晶体所给出的两个折射率，一个将都是 n_o，另一个将在 n_o 和 n_e 之间。

15.5　应力双折射和形序双折射

15.5.1　应力双折射

当一个透明的各向同性材料受到机械应力作用时，它会变成光学各向异性。这一现象称为**应力双折射**或**光弹效应**，是布儒斯特首先观察到的[①]，获有多种成效卓著的实际应用。我们将只扼要说明对一个最初是各向同性的材料，如何用光学方法获取有关其中应力状态的信息。作为准备，我们必须先来看看物质的弹性常数和其光学常数之间存在的关系。

弹性固体中的应力状态和应变状态各由一个二级张量，即应力张量 P_{kl} 和应变张量 r_{kl} 来表征。这两个张量都总是对称张量，但其主轴一般说来不同于介电张量的主轴，后者，正如我们在 15.1 节中看到的，是决定物体光学性质的张量。

当物体受到应力作用时，其介电张量要改变。在一级近似上，可以假设介电常数各分量的**改变量**同应力张量的 6 个分量成线性关系，因而也同应变张量的 6 个分量成线性关系。这就导致要引进两组新的系数，即**应力-光学常数**和**应变-光学常数**，这两组系数表征着上述两组线性关系。

如果我们把坐标轴选取在材料未受应力时的主介电坐标轴，则波法线椭球的方程为

$$\frac{x^2}{\varepsilon_x}+\frac{y^2}{\varepsilon_y}+\frac{z^2}{\varepsilon_z}=1. \tag{1}$$

加上应力时，这个椭球就改变成另一个椭球，其方程可写成为

$$a_{xx}x^2 + a_{yy}y^2 + a_{zz}z^2 + a_{yz}yz + a_{zx}zx + a_{xy}xy = 1. \tag{2}$$

---

① D. Brewster, *Phil. Trans.* (1815), 60; (1816), 156; *Trans. Roy. Soc. Ed.*, **8**(1818), 369。

设所加应力的分量为 $P_{xx}, P_{xy}, \cdots$,则按照我们的假设,(2)式中各系数 a_{kl} 和(1)式中相应系数之差是 $P_{xx}, P_{xy}, \cdots$ 的线性函数。这样就产生 6 个关系式,现取其中两个作为代表列出:

$$\left.\begin{aligned} a_{xx} - \frac{1}{\varepsilon_x} &= q_{11}P_{xx} + q_{12}P_{yy} + q_{13}P_{zz} + q_{14}P_{yz} + q_{15}P_{zx} + q_{16}P_{xy}, \\ a_{yz} &= q_{41}P_{xx} + q_{42}P_{yy} + q_{43}P_{zz} + q_{44}P_{yz} + q_{45}P_{zx} + q_{46}P_{xy}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

在这一关系式中,下标 1 到 6 六个数码各代表一对坐标轴,具体规定是:1 = xx,2 = yy,3 = zz,4 = yz,5 = zx,6 = xy。

系数 a_{kl} 和应变分量之间也存在一组与(3)类似的方程。另外,应力的光学效应也可用光线椭球的形变来表述,这样就再产生两组各有 36 个系数的线性方程。这些系数与波法线椭球的相应系数之间存在一定的关系,因为这两个椭球的主轴总是方向相同,而且半轴长度互为倒数。

如果物质结构中存在对称元素,则关系式(3)呈比较简单的形式。对于**立方晶系**晶体,x, y 和 z 三个主坐标轴是彼此等效的,结果各应力-光学系数之间存在下列关系[①]:

$$\left.\begin{aligned} &q_{11} = q_{22} = q_{33}, \\ &q_{12} = q_{21} = q_{23} = q_{32} = q_{31} = q_{13}, \\ &q_{44} = q_{55} = q_{66}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其余系数均为零。

对于**各向同性材料**,不论坐标轴怎样改变,关系式(3)都必须保持不变。这只有在下列情况才有可能,即应力 - 光学常数除满足立方对称条件(4)外,还同时满足关系式

$$2q_{44} = q_{11} - q_{12} \tag{5}$$

因此,在这种情况下只有两个常数是独立的。因为这时所有的坐标轴系统都等效,所以可采用任何一组坐标轴,特别是应力张量的主坐标轴。这样,$P_{yz} = P_{zx} = P_{xy} = 0$,并且关系式(3)简化为

$$\left.\begin{aligned} a_{xx} - \frac{1}{\varepsilon} &= q_{11}P_{xx} + q_{12}P_{yy} + q_{12}P_{zz}, \\ a_{yy} - \frac{1}{\varepsilon} &= q_{12}P_{xx} + q_{11}P_{yy} + q_{12}P_{zz}, \\ a_{zz} - \frac{1}{\varepsilon} &= q_{12}P_{xx} + q_{12}P_{yy} + q_{11}P_{zz}, \\ a_{yz} &= a_{zx} = a_{xy} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

因此,在这种情况下,应力张量和波法线椭球二者的主轴相同。从对称性来看,理应如此。

虽然立方晶体(如岩盐)在没有应变时是各向同性晶体,但是当存在形变时,其行为和玻璃这种真正各向同性的材料并不一样。应力效应的观测非常简便,将所测物体置于正交尼科耳棱镜(或其他偏振元件如偏振片——见 15.6.3 节)之间查看即可。现在设观察物是一片透明

① 关于每种晶系各应力-光学系数之间存在的关系,有关讨论见 F. Pockels *Ann. d. Physik*, **37**(1889), 158;又见其著作 *Lehrbuch der Kristalloptik*, (Leipzig, 1906), pp. 469 - 474。这些关系的总结资料,见 G. Szivessy, *Handbuch der Physik*, Vol. 21 (Berlin, Springer, 1929), p. 840。

材料，厚度为 h，光正入射到其面上。假定此片受到这样的应力，使应力张量以及介电张量主轴中的两个，设为 x 和 y，处于片平面上，并且 x 轴与起偏器和检偏器二者方向形成的角度为 ϕ 和 $\phi+\pi/2$，情况如 § 15.4.3(b)所述。这时波法线椭球和 xy 平面的截面曲线是一个椭圆，其方程为

$$a_{xx}x^2 + a_{yy}y^2 = 1, \tag{7}$$

式中 a_{xx} 和 a_{yy} 由(6)式给出。所以，对在片中传播的两个波来说，片的折射率 n' 和 n'' 为

$$n' = \frac{1}{\sqrt{a_{xx}}}, \qquad n'' = \frac{1}{\sqrt{a_{yy}}}. \tag{8}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n''^2} &= a_{xx} - a_{yy} \\ &= (q_{11} - q_{12})(P_{xx} - P_{yy}).\end{aligned} \tag{9}$$

实际上 n' 和 n'' 与 n_x 将只差一点点，所以取近似时

$$n'' - n' = \tfrac{1}{2}n_x^3(q_{11} - q_{12})(P_{xx} - P_{yy}). \tag{10}$$

将(10)代入 § 15.4(31)，就得到这两个波从片中射出时的位相差 δ：

$$\delta = \frac{\pi h}{\lambda} n_x^3(q_{11} - q_{12})(P_{xx} - P_{yy}). \tag{11}$$

因此这一位相差 δ 正比于 $P_{xx} - P_{yy}$，后者除以 2 就代表与 x 和 y 两个方向都成 45°的平面剪应力。在这种情况下，问题所涉及的应力-光学常数只有一个，即 $q_{11} - q_{12}$。

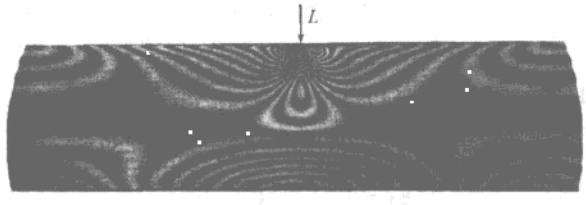


图 15.27　一根横梁在集中负载作用下的应力图案。箭头 L 所指处为负载施加位置，横梁两端(未示出)被夹紧

由此可知，如果将一片受过应力的玻璃或透明塑料放在二正交尼科耳棱镜之间来观察，会看到有明、暗条纹，而这些条纹就是等剪应力的恒值线。图 15.27 给出一个这种“应力图案”。只有在材料中应力主轴同尼科耳棱镜通振方向成 45°的地区，图案相应条纹的强度才呈现为极大。当应力主轴平行于尼科耳棱镜通振方向时，图案相应地区条纹消失而视场变暗；因此，应力系统各处的主轴方向可通过转动正交尼科耳棱镜来测定，而剪应力的大小可从条纹的分布状态来求得。这一方法多用来研究工程结构中的应力分布；先用适当的塑性材料制作出该结构的模型，然后按照刚才所说的方式直接观测应力效应。用这种方法常可免去冗长的计算[①]。

① 关于这一方法，完整的讲述见，例如 E. G. Coker and L. N. G. Filon, *A Treatise on Photoelasticity* (Cambridge, Cambridge University Press, 1931)，或 M. M. Frocht, *Photoelasticity*, Vol. I(1941), Vol. II(1948), (New York, John Wiley)。

15.5.2 形序双折射

晶体的光学双折射特性可以用其组成成员——分子的电学各向异性特性来解释。然而，双折射现象仍可以起源于另一种各向异性，其尺度要比分子大得多，它是光学各向同性材料的同种粒子呈有序排列时产生的，这些粒子比分子的尺寸大得多，但又比光的波长小得多。这种双折射称之为**形序双折射**(form birefringence)。

从光学测量常可获得关于产生形序双折射的亚微粒子的信息。下面将通过分析一个有些理想化的情况来说明该方法的原理，其中粒子呈薄板形，相互平行，排成一个规则系集。设每块板的厚度为 t_1，板间空隙宽度为 t_2(见图 15.28)。此外，设每块板的介电常数为 ε_1，板所浸在的媒质的介电常数为 ε_2。

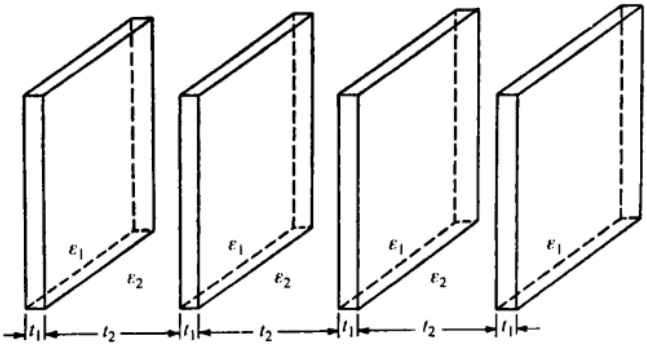


图 15.28 薄平行板组成的规则系集

假定有一单色平面波入射在这个系集上，并首先假设其电矢量与板面垂直。如果假设板面边长比波长大得多，而厚度 t_1 和 t_2 比波长小得多，则板内和板间空隙中的场都可以认为是均匀场。此外，按照 1.1.3 节，电位移在通过媒质性质突变面处其法线分量必须连续。因此电位移在板内和板间空隙中的 $\mathbf{D}$ 值必须相同。如果 $\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$ 是相应的电场，则

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_1}, \qquad \mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_2}, \tag{12}$$

并且对总体积取平均的平均电场 $\mathbf{E}$ 为

$$\mathbf{E} = \frac{t_1\dfrac{\mathbf{D}}{\varepsilon_1} + t_2\dfrac{\mathbf{D}}{\varepsilon_2}}{t_1 + t_2}. \tag{13}$$

因此有效介电常数 $\varepsilon_\perp$ 为

$$\varepsilon_\perp = \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{E}} = \frac{(t_1 + t_2)\varepsilon_1\varepsilon_2}{t_1\varepsilon_2 + t_2\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{f_1\varepsilon_2 + f_2\varepsilon_1}, \tag{14}$$

式中 $f_1 = t_1/(t_1 + t_2)$，$f_2 = t_2/(t_1 + t_2) = 1 - f_1$ 分别是板和周围媒质在总体积中所占的百分比。

其次假定入射光的电矢量与板面平行。按照 1.1.3 节，电矢量在通过突变面处其切线分量必须连续，所以在这一情况下电场在板内和板间空隙中将具有相同的 $\mathbf{E}$ 值。电位移在这两个区域为

$$\mathbf{D}_1 = \varepsilon_1 \mathbf{E}, \qquad \mathbf{D}_2 = \varepsilon_2 \mathbf{E}, \tag{15}$$

所以平均电位移 **D** 为

$$\mathbf{D} = \frac{t_1\varepsilon_1\mathbf{E} + t_2\varepsilon_2\mathbf{E}}{t_1 + t_2}. \tag{16}$$

因此这时的有效介电常数 $\varepsilon_{\parallel}$ 由下式给出：

$$\varepsilon_{\parallel} = \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{E}} = \frac{t_1\varepsilon_1 + t_2\varepsilon_2}{t_1 + t_2} = f_1\varepsilon_1 + f_2\varepsilon_2. \tag{17}$$

因为有效介电常数对于所有平行于板面(即垂直于板面法线)的振动方向同为 $\varepsilon_{\parallel}$，而对于垂直于板面的振动方向为 $\varepsilon_{\perp}$，不同于 $\varepsilon_{\parallel}$，所以这一阵列式粒子系集的光学性质就如同一个单轴晶体，其光轴与板面垂直。差值 $\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$ 恒为正，因为按照(14)和(17)

$$\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp} = \frac{f_1 f_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{f_1\varepsilon_2 + f_2\varepsilon_1} \geqslant 0. \tag{18}$$

寻常波的电矢量垂直于光轴，即平行于板面。方程(18)意味着这种板式粒子系集的光学性质总是像一个**负单轴晶体**(见 15.3.2 节)。用折射率表示时，最后的方程可写成为

$$n_e^2 - n_o^2 = -\frac{f_1 f_2(n_1^2 - n_2^2)^2}{f_1 n_2^2 + f_2 n_1^2}. \tag{19}$$

式中 $n_o^2 = \varepsilon_{\parallel}$，$n_e^2 = \varepsilon_{\perp}$，余类推。

对于形状不这样理想的粒子系集，计算当然就比较复杂[①]。

一种颇具实际意趣的情况是，粒子系集由同样的细柱形棒平行排列组成。威纳(Wiener)曾证明[②]，如果各棒体在系集总体积中所占的百分比很小($f_1 \ll 1$)，则结果取代(19)式而成为

$$n_e^2 - n_o^2 = \frac{f_1 f_2(n_1^2 - n_2^2)^2}{(1 + f_1)n_2^2 + f_2 n_1^2}. \tag{20}$$

因此这样的粒子系集的光学性质如同一个**正单轴晶体**，其光轴与棒轴平行。

形序双折射观测在生物显微术中非常有用。从所测折射率差值的正、负可以判断粒子的外形是接近棒状还是板状，而且如果 n_1 和 n_2 已经知道，还能从(19)或(20)估计出粒子所占体积的百分比。要鉴别粒子性材料中的形序双折射和内禀双折射，可改变媒质的折射率 n_2；当 $n_2 = n_1$ 时，形序双折射将消失，而内禀双折射在 n_2 改变时将不受影响。如果两种双折射形式都存在，则可绘制 $|n_e^2 - n_o^2|$ 对 n_2 的曲线图，曲线将在 $n_2 = n_1$ 处出现一极小值，但不为零。

粒子分布有序化所导致的形序双折射，可以是永久性的或半永久性的(例如烟斑病病原体晶体[③]的情形)，也可以是液体中同种悬浮粒子的一种暂时性有序化。同种粒子悬浮在一液体中时，如果粒子取向无规——当液体静止不动时情况将通常如此，则该悬浮体呈光学各向同

---

① 关于一般处理，见 O. Wiener, *Abh. Sächs. Ges. Akad. Wiss., Math.-Phys. Kl. No.* 6, **32**(1912), 575。椭球粒子的相关公式亦有报导，见 W. L. Bragg and A. B. Pippard, *Acta Cryst.*, **6**(1953), 865。

② Weiner, *loc. cit.* p. 581。瑞利(*Phil. Mag.*, (5), **34**(1892), 481)也计算过平行柱体矩形阵列的主介电常数，(20)式同他的结果是一致的，即使 f_1 的值不是比 1 小得多，但要 n_1 和 n_2 的差值很小。

③ 见 M. H. F. Wilkins, A. R. Stokes, W. E. Seeds and G. Oster, *Nature*, **166**(1950), 127 – 129。

性;然而,如果使液体产生流动,则粒子将有一种趋势在某特别方向上自己按序排列成行,这时粒子系集的光学性质就如同一个晶体。这一效应可采用如下方法来观察:将该悬浮体装在两个同轴圆柱面之间,令其一转动而另一不动,并置于二正交尼科耳棱镜当中来查看,光的传播方向则与圆柱轴平行[①]。这一现象首先由麦克斯韦观察到[②],它可作为研究液体经障碍物时流动状态的辅助手段,并能给出关于流速梯度的信息,包括其方向和大小。

15.6 吸收晶体

15.6.1 光在吸收型各向异性媒质中的传播

此前所考虑的晶体媒质,就其光学性质而言,是由介电张量 ε_{kl} 来表征的。有些媒质,不仅各向异性,而且对光有吸收,要描写这些媒质,还必须另外引进**电导率张量** σ_{kl}。这两个张量 ε_{kl} 和 σ_{kl} 的主轴方向一般可不相同,因而光在此种媒质中传播的理论颇为复杂。然而对于对称性比较高的几类晶体(至少要正交对称),这两个张量的主轴在方向上相互重合,因此这里将只限于研究这类晶体,并用它们说明一般理论的所有基本特点。这时只须将实介电常数 ε_x,ε_y 和 ε_z 换成复介电常数 $\hat{\varepsilon}_x$,$\hat{\varepsilon}_y$ 和 $\hat{\varepsilon}_z$ 即可。我们将看到,前面所有的晶体光学公式在形式上都保留了下来,只要假设所有与 ε_x,ε_y 和 ε_z 有关的量都是复量。

我们从导电媒质的麦克斯韦方程出发,即采用

$$\operatorname{curl}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\dot{\mathbf{D}}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j},\qquad \operatorname{curl}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}},\tag{1}$$

并考虑一个平面阻尼波的传播。在复表示中,矢量 $\mathbf{E},\mathbf{D},\mathbf{B},\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{j}$ 这时各正比于

$$\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{\hat{n}}{c}\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}-t\right)\right].$$

类比于 § 15.2(3)可得到方程

$$\hat{n}\mathbf{s}\times\mathbf{H}=-\mathbf{D}+\frac{4\pi}{\mathrm{i}\omega}\mathbf{j},\qquad \hat{n}\mathbf{s}\times\mathbf{E}=\mathbf{B}.\tag{2}$$

令 $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$,并从这两个方程消去 $\mathbf{H}$,即得到

$$\mu\left[\mathbf{D}+\frac{4\pi\mathrm{i}}{\omega}\mathbf{j}\right]=\hat{n}^2[\mathbf{E}-\mathbf{s}(\mathbf{s}\cdot\mathbf{E})].\tag{3}$$

如果将坐标轴取在主介电张量方向(按照我们的假设,这些方向同电导率张量的主轴重合),则有

$$\left.\begin{aligned}&D_x=\varepsilon_xE_x,\quad D_y=\varepsilon_yE_y,\quad D_z=\varepsilon_zE_z,\\&j_x=\sigma_xE_x,\quad j_y=\sigma_yE_y,\quad j_z=\sigma_zE_z.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

将(4)代入(3),并引进复介电张量

① 下列文献讨论了这种测量方法的粒子取向测定:P. Boeder, *Z. Phys.*, **75**(1932), 258 和 J. T. Edsall in *Advances in Colloidal Science*, Vol. I, ed. E. O. Kraemer(New York, Interscience Publishers Inc., 1942), p. 269。

② J. C. Maxwell, *Proc. Roy. Soc.*, **22**(1873), 46, 也见其 *Collected Papers*, Vol. 2(Cambridge, Cambridge University Press, 1890), p. 379。

$$\hat{\varepsilon}_k = \varepsilon_k + \frac{4\pi \mathrm{i}}{\omega}\sigma_k \qquad (k = x, y, z), \tag{5}$$

则(3)式变成

$$\mu\hat{\varepsilon}_k E_k = \hat{n}^2[E_k - s_k(\mathbf{E}\cdot\mathbf{s})]. \tag{6}$$

这一关系式在形式上和关系式 § 15.2(18)完全相同，只是实常数 ε_k 和 n 换成了复常数 $\hat{\varepsilon}_k$ 和 $\hat{n}$。将(6)改写成下列形式

$$E_k = \frac{\hat{n}^2 s_k(\mathbf{E}\cdot\mathbf{s})}{\hat{n}^2 - \mu\hat{\varepsilon}_k}, \tag{7}$$

用与 15.2 节相同的论证(或径直采用形式代换 $\varepsilon_k \to \hat{\varepsilon}_k$，$n \to \hat{n}$)就得到**菲涅耳方程**

$$\frac{s_x^2}{\dfrac{1}{\hat{n}^2} - \dfrac{1}{\mu\hat{\varepsilon}_x}} + \frac{s_y^2}{\dfrac{1}{\hat{n}^2} - \dfrac{1}{\mu\hat{\varepsilon}_y}} + \frac{s_z^2}{\dfrac{1}{\hat{n}^2} - \dfrac{1}{\mu\hat{\varepsilon}_z}} = 0. \tag{8}$$

引进复速度

$$\hat{v}_p = \frac{c}{\sqrt{\mu\hat{\varepsilon}}} = \frac{c}{\hat{n}}, \qquad \hat{v}_x = \frac{c}{\sqrt{\mu\hat{\varepsilon}_x}} = \frac{c}{\hat{n}_x}, \tag{9}$$

等等，可以将菲涅耳方程再次写成 § 15.2(24)形式

$$\frac{s_x^2}{\hat{v}_p^2 - \hat{v}_x^2} + \frac{s_y^2}{\hat{v}_p^2 - \hat{v}_y^2} + \frac{s_z^2}{\hat{v}_p^2 - \hat{v}_z^2} = 0. \tag{10}$$

这些关系式同非吸收晶体的相应公式完全类似；然而它们的物理内涵颇为不同。从(8)或(10)我们仍然得到 $\hat{n}^2(\mathbf{s})$ 的一个二次方程，结果每一个传播方向 $\mathbf{s}$ 也对应有两个折射率和两个主振动 $\mathbf{D}'$ 和 $\mathbf{D}''$；但由(7)式可知，$D_x : D_y : D_z$ 这时为复量，所以主振动不再是线偏振而是椭圆偏振。另一个更大的差别是电位移矢量不再垂直于波法线 $\mathbf{s}$。因为从(2)的第一个方程，以 $\mathbf{s}$ 标乘两边，即有

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{D} = \frac{4\pi}{\mathrm{i}\omega}\mathbf{s}\cdot\mathbf{j} = \frac{4\pi}{\mathrm{i}\omega}\left[\frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}s_x D_x + \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y}s_y D_y + \frac{\sigma_z}{\varepsilon_z}s_z D_z\right], \tag{11}$$

而(11)的右边一般将不为零。然而，如果比值 $4\pi\sigma_k/\omega\varepsilon_k$ 比 1 小得多，则 $\mathbf{D}$ 在 $\mathbf{s}$ 方向的分量将比 $\mathbf{D}$ 本身小得多。

接下来，如果假设吸收很小，即如果排除金属情况而只考虑有几分透明的物质，则分析就大为简化。我们将只讨论这种情况。在公式上，弱吸收意味着消光指数 κ 的二次幂同 1 相比可略去不计。因此可以写下

$$\left.\begin{aligned} \hat{n} &= n(1 + \mathrm{i}\kappa), & \hat{n}^2 &= n^2(1 + 2\mathrm{i}\kappa), \\ \hat{v}_p &= \frac{c}{n(1+\mathrm{i}\kappa)} = v_p(1 - \mathrm{i}\kappa), & \hat{v}_p^2 &= v_p^2(1 - 2\mathrm{i}\kappa), \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

[其中用了(9)式关系]下标为 x，y 和 z 的各量表达式与此相似，例如

$$\hat{n}_x = n_x(1 + \mathrm{i}\kappa_x), \qquad \hat{v}_x = c/\hat{n}_x = v_x(1 - \mathrm{i}\kappa_x) \text{ 等等.}$$

此外

$$\mu\hat{\varepsilon}_k = \hat{n}_k^2 = n_k^2(1 + 2\mathrm{i}\kappa_k) = \mu\varepsilon_k(1 + 2\mathrm{i}\kappa_k), \qquad (k = x, y, z) \tag{13}$$

比较一下(13)和(5),即得到

$$\kappa_k=\frac{2\pi}{\omega}\frac{\sigma_k}{\varepsilon_k}. \tag{14}$$

现在回到菲涅耳方程(10),将实、虚两部分开,其中的一个代表项为

$$\frac{s_x^2}{\hat{v}_p^2-\hat{v}_x^2}=\frac{s_x^2}{v_p^2-v_x^2-2\mathrm{i}(\kappa v_p^2-\kappa_x v_x^2)}=\frac{s_x^2}{v_p^2-v_x^2}\left(1+2\mathrm{i}\frac{\kappa v_p^2-\kappa_x v_x^2}{v_p^2-v_x^2}\right), \tag{15}$$

由此可知,(10)式的实部就是原有形式 § 15.2(24)的菲涅耳方程,而(10)式的虚部则给出如下方程:

$$\begin{aligned}\kappa v_p^2\left[\frac{s_x^2}{(v_p^2-v_x^2)^2}+\frac{s_y^2}{(v_p^2-v_y^2)^2}+\frac{s_z^2}{(v_p^2-v_z^2)^2}\right]\\ =\frac{\kappa_x v_x^2 s_x^2}{(v_p^2-v_x^2)^2}+\frac{\kappa_y v_y^2 s_y^2}{(v_p^2-v_y^2)^2}+\frac{\kappa_z v_z^2 s_z^2}{(v_p^2-v_z^2)^2}.\end{aligned} \tag{16}$$

对于每一个给定的波法线方向 **s**,菲涅耳方程同前面一样,一般给出两个相速度。但这里这两个波所携带的能量有一些被吸收掉(部分消光),而(16)式给出这两个消光指数的近似值。

我们可以用另一种表达形式表出求 κ 公式。从(7),(4),(9)和(13),

$$\begin{aligned}D_k&=\frac{c^2}{\mu}\frac{\varepsilon_k s_k(\mathbf{E}\cdot\mathbf{s})}{\hat{\varepsilon}_k\hat{v}_k^2-\hat{v}_p^2}\\ &=-\frac{c^2}{\mu}\frac{s_k(\mathbf{E}\cdot\mathbf{s})}{v_p^2-v_k^2}\left[1+2\mathrm{i}\frac{(\kappa-\kappa_k)v_p^2}{v_p^2-v_k^2}\right],\qquad (k=x,\ y,\ z),\end{aligned} \tag{17}$$

式中仍然只保留到消光指数的一次幂。现在(17)式中的虚部只包含 κ 和 κ_k 之**差** $\kappa-\kappa_k$,因而在许多情况下可予略去。这意味着**略去振动的椭圆性**。在这种近似下,每一个波法线 **s** 所属的两个 **D** 矢量与没有吸收并且(实)主介电常数相同的晶体情况是相同的。这时我们获得

$$\frac{s_k^2}{(v_p^2-v_k^2)^2}=\left(\frac{\mu}{c^2}\right)^2\frac{D_k^2}{(\mathbf{s}\cdot\mathbf{E})^2}, \tag{18}$$

而(16)式可以写成为

$$\kappa v_p^2=\frac{\kappa_x v_x^2 D_x^2+\kappa_y v_y^2 D_y^2+\kappa_z v_z^2 D_z^2}{\mathbf{D}^2}. \tag{19}$$

显然,这一公式在 v_p 趋近主速度 v_k 之一时可能失效,因为(17)式所略去的虚部,其分母包含差值 $v_p^2-v_k^2$(见 15.6.3 节最后一段说明)。

因为当给定波法线方向 **s** 时,它所属的两个系数 κ' 和 κ'' 一般不相同,所以相应的两个波被吸收的程度不同。这两个系数可随频率改变,而且改变方式不同,所以如以白光入射到这种晶体上,晶体一般将呈现色彩,并且颜色将随入射光的振动方向而变,这一现象称为**多向色性**;在单轴晶体情况下谓之**二向色性**;在双轴晶体情况下则谓之**三向色性**[①]。

① 这种术语出自下一事实:对单轴晶体而言有两个特征色,对双轴晶体而言有三个。然而,一些著者所说的二向色性材料是指吸收系数依赖于入射光偏振态的各种材料。

对于**单轴晶体**($\hat{\varepsilon}_x=\hat{\varepsilon}_y=\hat{\varepsilon}_o$, $\hat{\varepsilon}_z=\hat{\varepsilon}_e$;此外 $\kappa_x=\kappa_y=\kappa_o$, $\kappa_z=\kappa_e$),各关系式呈比较简单的形式。这时菲涅耳方程,与无吸收单轴晶体情况一样,分解为两个因子(见 15.3.2 节),分别给出

$$\left.\begin{aligned}\hat{v}_p'^2&=\hat{v}_o^2\\ \hat{v}_p''^2&=\hat{v}_o^2\cos^2\vartheta+\hat{v}_e^2\sin^2\vartheta,\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

式中 ϑ 同前,是波法线 **s** 同光轴形成的角度。第一个方程分成虚、实两部时给出

$$v_p'=v_o,\qquad \kappa_p'=\kappa_o,\tag{21a}$$

而第二个方程给出

$$v_p''^2=v_o^2\cos^2\vartheta+v_e^2\sin^2\vartheta,\qquad \kappa_p''^2v_p''^2=\kappa_ov_o^2\cos^2\vartheta+\kappa_ev_e^2\sin^2\vartheta,\tag{21b}$$

式中仍然略去了含消光指数二次幂的项。我们看到,寻常波的吸收对于所有传播方向都一样。

对于**双轴晶体**,各关系式要复杂得多,因而我们只限于讨论一些感兴趣的特殊情况。同 15.3.3 节中一样,首先考虑 $s_x=0$ 的这些传播方向。菲涅耳方程(10)这时同 § 15.3(6)情况类似,也给出两个方程,即

$$\left.\begin{aligned}\hat{v}_p'^2&=\hat{v}_x^2,\\ \hat{v}_p''^2&=\hat{v}_z^2s_y^2+\hat{v}_y^2s_z^2.\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

将虚、实两部分开,就得波法线方向 $\mathbf{s}(0,s_y,s_z)$ 所属的两个速度和两个消光指数

$$v_p'^2=v_x^2,\qquad \kappa_p'=\kappa_x,\tag{23a}$$

和

$$v_p''^2=v_z^2s_y^2+v_y^2s_z^2,\qquad \kappa_p''v_p''^2=\kappa_zv_z^2s_y^2+\kappa_yv_y^2s_z^2.\tag{23b}$$

类似的关系式在传播方向垂直于 y 轴和 z 轴时,即 $\mathbf{s}=(s_x,0,s_z)$ 和 $\mathbf{s}=(s_x,s_y,0)$ 时,当然也成立。

一般说来,没有实数的 s_y 和 s_z 可使相应的两个根 $\hat{v}_p'$ 和 $\hat{v}_p''$ 相等。但可以找到这样的传播方向,它所属的两个实相速度 v_p' 和 v_p'' 相等,但相应的消光指数(κ' 和 κ'')一般仍将不同。

接下来考虑传播方向同某一波法线光轴方向(比如 $\mathbf{N}_1$)偏离不很大的情况。为了应用(19)式,必须确定 $\mathbf{D}'$ 和 $\mathbf{D}''$ 的方向。这可利用 15.2.3 节中所建立的定理来做。按照这一定理,($\mathbf{D}'$,**s**)和($\mathbf{D}''$,**s**)二振动面是平面($\mathbf{N}_1$,**s**)和($\mathbf{N}_2$,**s**)二者夹角的内、外等分面,$\mathbf{N}_1$ 和 $\mathbf{N}_2$ 则是两个波法线光轴。设 ψ 是平面($\mathbf{N}_1$,**s**)和平面 xz(它包含两个光轴)的夹角。因为平面($\mathbf{N}_2$,**s**)同平面 xz 近乎平行,则由刚刚提到的定理可知,$\mathbf{D}'$ 和 xz 平面的夹角接近 $\psi/2$(见图 15.29)。所以 $\mathbf{D}'$ 在 xz 平面上的分量为 $D'\cos(\psi/2)$。要得到 x 分量,必须再把后者投影到 x 轴上。因为 **s** 和 $\mathbf{N}_1$ 接近重合,所以该投影角近乎等于光轴 $\mathbf{N}_1$ 与 z 轴的夹角 β(见图 15.30),因而 $D_x'=D'\cos\beta\cos(\psi/2)$。用类似方法可求得其他分量,结果为:

$$\left.\begin{aligned}D_x'&=D'\cos\frac{\psi}{2}\cos\beta,\\ D_y'&=D'\sin\frac{\psi}{2},\\ D_z'&=-D'\cos\frac{\psi}{2}\sin\beta.\end{aligned}\right\}\tag{24a}$$

矢量 $\mathbf{D}''$ 垂直于 $\mathbf{s}$ 和 $\mathbf{D}'$，它的三个分量可由(24a)经 $\psi/2$ 代换为 $\psi/2+\pi/2$ 而立即得到，结果为：

$$D_x''=-D''\sin\frac{\psi}{2}\cos\beta,\qquad D_y''=D''\cos\frac{\psi}{2},\qquad D_z''=D''\sin\frac{\psi}{2}\sin\beta. \tag{24b}$$

将(24a)和(24b)代入(19)式，此外并采用近似 v_p' 和 $v_p''=v_y(v_x>v_y>v_z)$，后者是合理的，因为这里所考虑的传播方向仅限于离光轴不太远。由此得到所求的两个消光指数 κ' 和 κ''：

$$\left.\begin{aligned}\kappa' v_y^2&=(\kappa_x v_x^2\cos^2\beta+\kappa_z v_z^2\sin^2\beta)\cos^2\frac{\psi}{2}+\kappa_y v_y^2\sin^2\frac{\psi}{2},\\ \kappa'' v_y^2&=(\kappa_x v_x^2\cos^2\beta+\kappa_z v_z^2\sin^2\beta)\sin^2\frac{\psi}{2}+\kappa_y v_y^2\cos^2\frac{\psi}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

由于(19)式中所包含的近似，故不能期望这两个公式在 $\mathbf{s}$ 紧邻光轴时仍然有效。在极限情况，当波法线沿光轴时，ψ 角是不确定的；为了得到这时的消光指数，现在回到菲涅耳方程。对于 xz 平面上($s_y=0$)的任何 $\mathbf{s}$ 方向，按照推导(23)式的步骤，最后将虚、实部分开，即得到

$$\left.\begin{aligned}v_p'^2&=v_y^2,\qquad \kappa_p'=\kappa_y,\\ v_p''^2&=v_x^2s_z^2+v_z^2s_x^2,\qquad \kappa_p''v_p''^2=\kappa_x v_x^2s_z^2+\kappa_z v_z^2s_x^2.\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

特别是对光轴来说，$s_x=\sin\beta$，$s_z=\cos\beta$，其中 β 是各光轴与 z 轴的夹角，由 §15.3(11)给出。此外，对光轴来说，$v_p'=v_p''=v_y$，因而(26)式中靠右的两个方程变成为(将 κ' 改写成 $\kappa_\perp$，κ'' 改写成 $\kappa_\parallel$)

$$\left.\begin{aligned}\kappa_\perp&=\kappa_y,\\ \kappa_\parallel v_y^2&=\kappa_x v_x^2\cos^2\beta+\kappa_z v_z^2\sin^2\beta.\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$\kappa_\perp$ 是 $\mathbf{D}$ 偏振方向垂直于光轴平面(xz 平面)时波的消光指数，而 $\kappa_\parallel$ 是 $\mathbf{D}$ 偏振方向在光轴平面上时波的消光指数。因此一个沿光轴方向传播的波，其吸收与其振动方向有关。

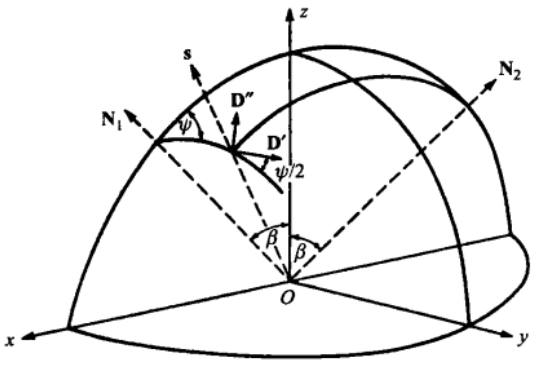


图 15.29 吸收晶体理论中的几何关系图示说明

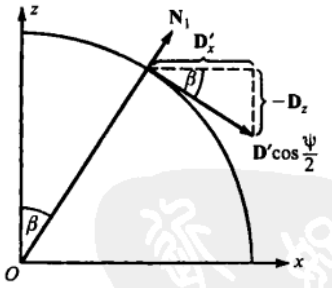


图 15.30 吸收晶体理论中的图示说明

将(27)代入(25)，即用 $\kappa_\parallel$，$\kappa_\perp$ 和偏振方位角 ψ 表示波沿光轴($\mathbf{N}_1$)附近传播时的消光系数 κ' 和 κ''，以便后面应用，结果得到

$$\left.\begin{aligned}\kappa'&=\kappa_\parallel\cos^2\frac{\psi}{2}+\kappa_\perp\sin^2\frac{\psi}{2}=\frac{\kappa_\parallel+\kappa_\perp}{2}+\frac{\kappa_\parallel-\kappa_\perp}{2}\cos\psi,\\ \kappa''&=\kappa_\parallel\sin^2\frac{\psi}{2}+\kappa_\perp\cos^2\frac{\psi}{2}=\frac{\kappa_\parallel+\kappa_\perp}{2}-\frac{\kappa_\parallel-\kappa_\perp}{2}\cos\psi.\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

15.6.2　吸收晶片的干涉图

现在来扼要讨论一下吸收晶片产生的干涉效应，并仅考虑晶片切割面与波法线光轴之一相垂直的情况。吸收晶片干涉理论和无吸收情况差别不大，惟一的重要区别是二干涉光线被吸收的强弱不同，结果导致干涉条纹可见度下降。其他结论，特别是相差表达式在我们的近似下保持不变，因为这时光波传播的几何定律同前面一样。

按照 § 14.1(19)，一平面波在吸收媒质中传播一段距离后，其振幅衰减因子为 $\exp\{-\omega\kappa cl/c\}$。因此当采用和 15.4.3 节中相同的装置和符号时(见图 15.20)，从晶片射出的两个主振动的振幅为[参见 § 15.4(13)]

$$OB = Ee^{-\frac{\omega\kappa' l}{v'}}\cos\phi, \qquad OC = Ee^{-\frac{\omega\kappa'' l}{v''}}\sin\phi. \tag{29}$$

这里 $l = h/\cos\theta_2$，h 是晶片的厚度，θ_2 是晶片内波法线和光轴所形成的角度，其中假设两个波在晶片中行程相同，这只是近似如此，如果我们仅限于考虑波法线方向靠近光轴的话。在相同的近似下，可在(29)中取 $v' = v'' = v_y$。为方便起见，令

$$u = \frac{\omega l}{v_y} \approx \frac{\omega l}{v'} \approx \frac{\omega l}{v''}. \tag{30}$$

以此代入(29)，则

$$OB = Ee^{-\kappa' u}\cos\phi, \qquad OC = Ee^{-\kappa'' u}\sin\phi. \tag{31}$$

这样，在吸收晶片情况下，入射波通过起偏器，晶片和起偏器所产生的两个干涉波的振幅表达式由 § 15.4(14)易为(见图 15.20)

$$OF = Ee^{-\kappa' u}\cos\phi\cos(\phi - \chi), \qquad OG = Ee^{-\kappa'' u}\sin\phi\sin(\phi - \chi). \tag{32}$$

经会聚后，光场干涉的总强度为

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta, \tag{33}$$

式中除无关紧要的比例因子外 $I_1 = OF^2$，$I_2 = OG^2$，而位相差 δ 的计算同前。

现在来探讨几个令人关注的特别情况。

(a) 单轴晶体

在这一情况下，有

$$\left.\begin{aligned} v_x = v_y = v_o, \quad v_z = v_e, \\ \kappa_x = \kappa_y = \kappa_o, \quad \kappa_z = \kappa_e. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

非常光线的振动方向在主平面上，即在波法线和光轴所确定的平面上。因此可以把非常波的 **D** 矢量与起偏器通振方向 OP 之间的夹角等同于(32)式中的角 ϕ。然而，为了同(21a)和(21b)保持一致，我们必须把(32)式中的 κ' 和 κ'' 交换一下。对于**正交**尼科耳棱镜($\chi = \pi/2$)情况，由(32)即得到

$$OF = Ee^{-\kappa'' u}\cos\phi\sin\phi, \qquad OG = -Ee^{-\kappa' u}\sin\phi\cos\phi, \tag{35}$$

代入(33)即有

$$I = \frac{E^2}{4}\sin^2 2\phi[e^{-2\kappa' u} + e^{-2\kappa'' u} - 2e^{-(\kappa'+\kappa'')u}\cos\delta]. \tag{36a}$$

对于光轴，$\kappa' = \kappa''$ 并且 $\delta = 0$，因而(36a)化为

$$I_0 = 0; \tag{36b}$$

因此干涉图样中心(对应光轴之点)是一暗斑。整个视场划有一个暗十字,它是对应 $\sin 2\phi = 0$ 的地方,即对应$\phi = 0$ 和$\phi = \pi/2$ 之处。这样主同消色线是一个十字形,两臂平行于起偏器和检偏器的通振方向(见 15.4.4 节)。干涉强度极大和强度极小为

$$\left.\begin{aligned} I_{极小} &= \frac{E^2}{4}\sin^2 2\phi[e^{-2\kappa' u} + e^{-2\kappa'' u} - 2e^{-(\kappa'+\kappa'')u}], \\ I_{极大} &= \frac{E^2}{4}\sin^2 2\phi[e^{-2\kappa' u} + e^{-2\kappa'' u} + 2e^{-(\kappa'+\kappa'')u}], \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

所以条纹的可见度为

$$\mathcal{V} = \frac{I_{极大} - I_{极小}}{I_{极大} + I_{极小}} = \frac{2e^{-(\kappa'+\kappa'')u}}{e^{-2\kappa' u} + e^{-2\kappa'' u}} = \frac{1}{\cosh[(\kappa' - \kappa'')u]}. \tag{38}$$

这样,κ' 和 κ'' 之差越小,可见度越高。因为波法线靠近光轴时(ϑ 很小),κ' 和 κ'' 接近相等,所以条纹在这一区域当清晰可见。但要有足够的光透过晶片。如果 κ_o 比 κ_e 小得多(例如镁铂氰化物情况),则吸收在近光轴处将相对很小,因而中央条纹将较明亮。如果 κ_o 比 κ_e 大得多(例如电气石情况),则在近光轴处吸收将相对最强(透射相对最弱),因而中央条纹将很暗。在这两种情况下,可见度从视场中心到视场边缘都逐渐下降。如果 κ_o 和 κ_e 接近相等,则干涉图除了可见度从中心向外随距离而下降外,将同无吸收晶体相类似。

(b) 双轴晶体

我们仍然仅限于讨论正交尼科耳棱镜情况($\chi = \pi/2$),并假设晶片界面垂直于其中的一个光轴(N_1)。此外还将只考虑传播方向靠近此光轴的那些波。

设 N_1,N_2 和 Q 是两个光轴和波法线与晶片出射面的交点。此外设Ψ是直线 N_1Q 同 N_1N_2 形成的角度,α 是光轴平面(xz 平面)与起偏器 P 通振面之间的夹角。

如果 $N_1Q \ll N_1N_2$,则振动 $\mathbf{D}'$的方向与 N_1N_2 形成的角度近似为$\Psi/2$,所以 $\mathbf{D}'$和起偏器通振方向 OP 的夹角ϕ近似为(见图 15.31)

$$\phi = \alpha - \frac{\Psi}{2}. \tag{39}$$

因此,会聚到一起产生干涉的两个波的振幅[见(32)式]为

$$OF = E\cos\left(\alpha - \frac{\Psi}{2}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\Psi}{2}\right)e^{-\kappa' u},\quad OG = -E\sin\left(\alpha - \frac{\Psi}{2}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\Psi}{2}\right)e^{-\kappa'' u}. \tag{40}$$

因而干涉强度

$$I = \frac{E^2}{4}\sin^2(2\alpha - \psi)(e^{-2\kappa' u} + e^{-2\kappa'' u} - 2e^{-(\kappa'+\kappa'')u}\cos\delta). \tag{41a}$$

对于沿光轴(N_1)方向传播的波,Ψ是不确定的。在这种情况下,我们把振动分解为两个分量,分别垂直于和平行于二光轴所在平面,即令$\Psi = 0$,并把(41a)中的 κ' 和 κ'' 改写为 $\kappa_\parallel$ 和 $\kappa_\perp$[见(28)式]。此外,在光轴方向,$\delta = 0$,所以最后取代(41a)而得到

$$I_0 = \frac{E^2}{4}\sin^2 2\alpha\,(e^{-\kappa_\parallel u} - e^{-\kappa_\perp u})^2. \tag{41b}$$

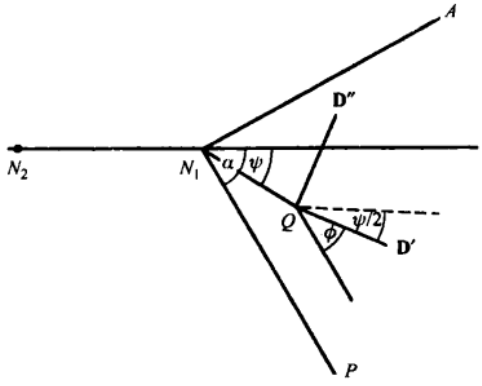


图 15.31　双轴吸收晶片干涉理论中的几何关系图示说明

方程(41a)表明,沿 $\sin(2\alpha-\psi)=0$ 所在的直线,干涉图强度为零,这是一条主同消色线。虽然在无吸收晶体情况,该同消色线通过光轴(N_1)对应点,但这里情况不再如此[①],除非,由(41b)可知,$\alpha=0$ 或 $\pi/2$,即起偏器通振面平行于或垂直于二光轴所在平面。

暗等色线由 $\cos\delta=1$,即 $\delta=0,\pm2\pi,\pm4\pi\cdots\cdots$给出,这些线呈圆环状,围绕着对应于光轴的那一点。条纹的可见度仍由(38)式给出,并且只有当 κ' 和 κ'' 接近相等时才比较高。根据(28)式,这种情况发生在ψ接近 $\pi/2$ 或 $-\pi/2$ 之时

现在来看看当 δ 保持不变时强度如何随ψ改变。如果把(28)式代入(41a),则后者可写成如下形式:

$$I=\frac{E^2}{2}e^{-(\kappa_\parallel+\kappa_\perp)u}\sin^2(2\alpha-\psi)\{\cosh[(\kappa_\parallel-\kappa_\perp)u\cos\psi]-\cos\delta\}. \tag{42}$$

当$|\cos\psi|$最大时,大括弧中的项最大,而当$|\cos\psi|$最小时,该项也最小。因此,当$\psi=0$ 和$\psi=\pi$ 时,强度为极大,而当$\psi=\pi/2$ 和 $-\pi/2$ 时,强度为极小。这样,视场中除了暗的主同消色线$\psi=2\alpha$ 外,还贯穿有一条暗的"刷形线",其两臂平伸,垂直于二光轴所在平面[②]。

15.6.3　二向色性偏振器

前一节研究了偏振光通过吸收晶片时的传播情况。现在来分析这种晶片对自然光(非偏振光)的效应。

我们仍然假设晶片界面垂直于波法线光轴(如果是双轴晶片,则垂直其中某一个轴),并且只考虑靠近光轴方向的传播情况。一束平行的自然光可以看作是由两束互不相干的等幅正交线偏振光所组成,而且这两个正交振动相对其传播方向的横向取向可任意选择[见 § 10.9(56)]。现选择晶体中两个主振动方向作为上述二分光束的振动方向。如果 E 是二分光束进入晶片时各自的振幅,则在晶片中传播一段距离 l 后,其振幅为

---

① 此句意指,在光轴 N_1 对应点处,主同消色线(暗线)有一断点,因该点强度 I_o 按(41b)一般不为零,除非 $\alpha=0$ 或 $\pi/2$;而对于无吸收晶片,由于$\kappa_\parallel=\kappa_\perp=0$,$I_o=0$——译者注。

② 利用(28)式可把(44)式写成为

$$I=2E^2e^{-(\kappa_\parallel+\kappa_\perp)u}\cosh[(\kappa_\parallel-\kappa_\perp)u\cos\psi],$$

由此可见,即使没有起偏器和检偏器,当自然光通过此晶片时,暗的刷形线也会出现。

$$E' = Ee^{-\kappa' u}, \qquad E'' = Ee^{-\kappa'' u}, \tag{43}$$

式中同前 $u = \omega l/v$，这里假定光是准单色的，平均频率为 ω。因此总强度这时由下式给出：

$$I = I' + I'', \tag{44}$$

式中

$$I' = I_0 e^{-2\kappa' u}, \qquad I'' = I_0 e^{-2\kappa'' u}, \tag{45}$$

并且 $I_0 = E^2$。对于光轴方向，κ' 和 κ'' 须用 $\kappa_{\parallel}$ 和 $\kappa_{\perp}$ 代替。

由此可见，光在该媒质中传播一段距离 l 后，两个分量的振幅之比为 $\exp[-(\kappa' - \kappa'')u]$，因而光变成为部分偏振光。如果两个消光指数差得非常悬殊，比较薄的一片材料就足以把入射的非偏振光转变为近乎线偏振的光；这就是说，这种薄片的作用如同一个**偏振器**。自然界的晶体具有这种偏振器作用的一个例子是电气石。它对寻常光线的抑制比对非常光线强得多。然而对于大多数波长它同时也吸收掉相当多的非常光(见图 15.32)，故不合实用。但用人工合成方法能够生产二向色性材料并以之制作性能极好的偏振器，这主要是兰德(Land，大约在1932年)及其合作者的研究成果。这些材料商业上称为**偏振片**，并非单晶，而是一些片状有机聚合物，其长链分子经拉伸或某种其他处理[①] 而近乎完全排列成行，有时还进行染色。特别适合用作此途的一种聚合物是合成品聚乙醇乙烯$(—CH_2—CHOH—)_x$。图 15.33 给出定向化聚乙醇乙烯上碘的二向色性随波长的变化。

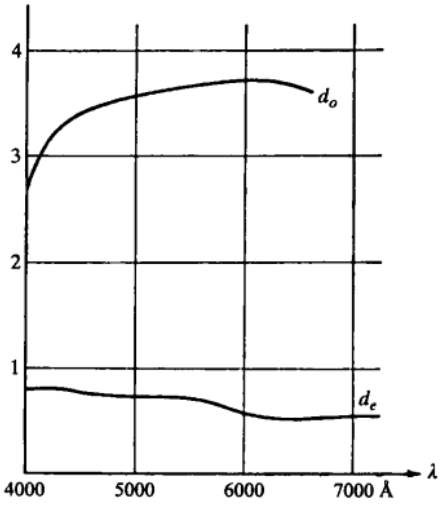


图 15.32 黑电气石晶片的二向色性，片厚 0.2 毫米，切割方向与光轴的平行性偏离24°，光的入射方向与光轴成90°

$$d = 4\pi(\log_{10} e)(n\kappa l/\lambda) \approx 5.5 n\kappa l/\lambda .$$

[引自 E. H. Land and C. D. West, contribution in *Colloid Chemistry*, Vol.6, ed. J. Alexander(New York, Reinhold Publishing Corporation, 1946), p. 167]

① 关于二向色性偏振器，讨论比较全的见图 15.32 和图 15.33 说明所引文献，或 E. H. Land, *J. Opt. Soc. Amer.*, **41**(1951), 957。

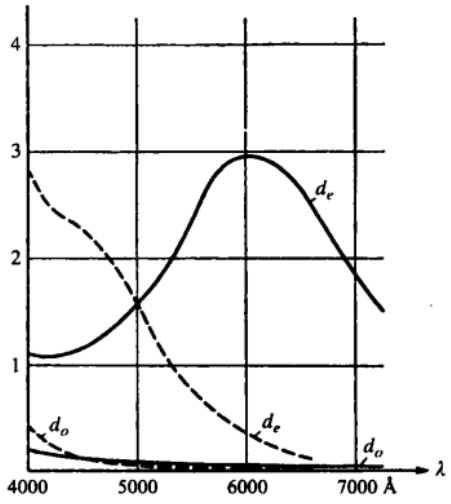


图 15.33　定向化聚乙醇乙烯上碘的二向色性，蓝色片（实线），棕色片（虚线）

$$d = 4\pi(\log_{10} e)(\,ncl/\lambda\,) \approx 5.5\,ncl/\lambda\,.$$

（引自 E. H. Land and C. D. West, contribution in *Colloid Chemistry*, Vol. 6, ed J Alexander (New York, Reinhold Publishing Corporation, 1946, p 177）

一个好的二向色性偏振器，它的两个吸收系数之比可高达 100:1，并可让振动在某一方向上的偏振光透过大约 80%，而让振动方向与之正交的偏振光透过不到 1%。这种材料的偏振片可以做得很大。商业生产中使用的宽度可达 30 英寸，长度不限，均系机制。在这一方面。这些“偏振片”优于尼科耳棱镜，后者由于缺少光学质量既好而块头又大的方解石而尺寸受到限制。

最后，让我们回过来看看这一节（15.6 节）主体部分所依据的假设，即吸收晶体中光波主振动的椭圆性可以忽略。这一假设毫无疑问并不是总能成立的。例如，可以证明，每个吸收晶体中都存在 4 个特殊方向，成对地分布在光轴附近，在这些方向上光波的主振动是圆偏振。然而，随着吸收的越来越小，椭圆性振动显著的地区越来越收拢到这些方向附近，而这些方向本身则趋于同光轴重合。考虑到这一情况，可以认为本节的讨论还是保留了有关现象的大体特征，无需再深究其详。当然，我们的分析并没有刻画吸收晶体光学理论某些更为精细的方面，这些方面的讨论须请参阅其他文献[①]。

① 见，例如 G. Szivessy, *Handbuch der Physik*, Vol. 20 (Berlin, Springer, 1928), pp. 861 – 904。

附录A 变 分 法

经典物理学方程的一个普遍特点是它们能导自变分原理。光学中的费马原理(1657年)和力学中的Maupertuis原理(1744年)是两个早期的范例。弹性力学、流体力学和电动力学的方程也能用该法表示。

然而,当处理场方程时,通常它们含4个或更多独立变量 $x, y, z, t, \cdots$,由于偏微分方程非常错综复杂,则很少使用解可导自变分即将解表达为某些积分的稳定值(stationary value)[①] 这一特性。在这种情况下,变分求解方法的基本优点仅在于推导守恒定律,例如能量守恒定律。但如若问题仅含一个独立变量(力学中的时间,或几何光学中的光线长度),情况则大为不同。这时人们所面对的是一组普通微分方程,同时结果表明采用变分处理可使研究解的行为大为便利。其实,这一处理是普通几何光学在所有细节上的径直推广。其现代表述形式大部分出自希尔伯特(David Hilbert)。1903年左右他曾在哥廷根做过系列讲座,但其文迄未公开发表,以下各节讨论即据其写成。这里所谈仅限三维空间(x, y, z)理论,但不难推广到多维。

A.1 欧拉方程——极值的必要条件

设,$F(u, v, x, y, z)$为一给定函数,对其所有5个变量都具有直到二阶的连续偏微商。此外,设 C 为 x, y, z 空间中任一曲线 $x = x(z), y = y(z)$,同时也假设 x 和 y 的微商直到二阶都是连续的。如果令

$$u = x', \qquad v = y'$$

(一撇表示对 z 取微分),则积分

$$I = \int_{z_1}^{z_2} F(x', y', x, y, z)\mathrm{d}z \tag{1}$$

是曲线 C 即 $x(z), y(z)$ 二函数的一个函数,换而言之,是一个**泛函**。变分法的基本问题是:

在两个给定点 $P_1[x_1 = x(z_1), y_1 = y(z_1), z_1]$ 和 $P_2[x_2 = x(z_2), y_2 = y(z_2), z_2]$ 之间确定一条曲线 C,使该积分为一极值(极小或极大)。

这样的一条曲线 C 叫做**致极曲线**,它必须满足的必要条件可以通过简单的线性变分过程来确定,为此,选择一个具有一阶微商的函数 $\xi(z)$,使其在端点 P_1 和 P_2 处为零

$$\xi(z_1) = \xi(z_2) = 0, \tag{2}$$

并通过将致极曲线 C 的 x 坐标易为 $x + \varepsilon\xi$ 构成"变"曲线 C',其中 ε 是一小参量。这时方程(1)成为 ε 的一个函数,

$$I(\varepsilon) = \int_{z_1}^{z_2} F(x' + \varepsilon\xi', y', x + \varepsilon\xi, y, z)\mathrm{d}z. \tag{3}$$

---

① 《数学名词》(1993年)定名为"平稳值"——译者注。

量

$$(\delta I)_x = \left(\frac{\partial I}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\xi' + \frac{\partial F}{\partial x}\xi\right) \mathrm{d}z \tag{4}$$

叫做对 x 的**一阶变分**。显然可见,(1)式为极值的一个必要条件是其一阶变分等于0,即

$$(\delta I)_x = 0 \tag{5}$$

现在如果对(4)式中的第一项进行分部积分并应用边界条件(2),则可得到

$$(\delta I)_x = \int_{z_1}^{z_2} \left(F_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F_{x'}\right)\xi \,\mathrm{d}z, \tag{6a}$$

式中 F_x 代表$\partial F/\partial x$,余类推。类此,将 y 易为 $y+\varepsilon\eta$ 时则可得到

$$(\delta I)_y = \int_{z_1}^{z_2} \left(F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F_{y'}\right)\eta \,\mathrm{d}z. \tag{6b}$$

因为 ξ 和 η 在区间 $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$ 内可任意选取,故由(6a)和(6b)两式可知 $(\delta I)_x = 0$ 和 $(\delta I)_y = 0$ 这两个条件可以表成为两个微分方程(称为**欧拉方程**)的形式:

$$F_x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F_{x'} = 0, \tag{7a}$$

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F_{y'} = 0. \tag{7b}$$

方程(7a)和(7b)是 $x(z)$和 $y(z)$的两个二阶微分方程。现将其前几项即最高阶微商所在项悉行写出如下:

$$F_{x'x'}x'' + F_{x'y'}y'' + \cdots = 0, \tag{8a}$$

$$F_{y'x'}x'' + F_{y'y'}y'' + \cdots = 0. \tag{8b}$$

从这两个方程能求解 x''和 y'',只要其缔合行列式不为零,即只要

$$F_{uu}F_{vv} - F_{uv}^2 \neq 0. \tag{9}$$

我们将假定这一条件在我们所考虑的五维区域内处处都成立。

两个二阶微分方程的解含有4个任意的积分常数,所以各致极曲线形成一个4参量曲线族(∞^4 致极曲线)。

A.2 希尔伯特独立性积分和哈密顿-雅可比方程

为便于讨论这些致极曲线的特性,先来考虑另一个相关问题。将变量 u 和 v 仅看成为 x, y, z 空间中的两个函数(即不限定 $u = x'$, $v = y'$——译者注)

$$u = u(x, y, z), \qquad v = v(x, y, z). \tag{10}$$

这时 $F[u(x,y,z), v(x,y,z), x, y, z]$及其偏微商 F_u, F_v是 x, y, z 的函数。现在选择一条曲线 $C[x = x(z), y = y(z)]$,并构成积分

$$S = \int_{z_1}^{z_2} [F + (x' - u)F_u + (y' - v)F_v]\mathrm{d}z. \tag{11}$$

相应问题是:**试求这样两个函数 u,v,使之保证积分 S 与曲线 C 的选择无关**。这时 S 只是端点 P_1 和 P_2 的函数,其中 P_1 的坐标为 $x_1=x(z_1)$,$y_1=y(z_1)$,z_1,而 P_2 的坐标是 $x_2=x(z_2)$,$y=y(z_2)$,z_2。S 将叫做**希尔伯特独立性积分**。

为了确定 u 和 v,先将(11)式改写成如下形式:

$$S=\int_{P_1}^{P_2}(U\,\mathrm{d}x+V\,\mathrm{d}y+W\,\mathrm{d}z), \tag{12}$$

式中

$$U=F_u,\qquad V=F_v,\qquad W=F-uF_u-vF_v. \tag{13}$$

众所周知,(12)式与曲线 C 无关的允要条件是$\nabla\times\mathbf{A}$的各分量皆为零,其中矢量 $\mathbf{A}$ 的三个分量为 U,V,W,即该允要条件为

$$\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}=0. \tag{14}$$

这是 $u(x,y,z)$和$v(x,y,z)$的一组偏微分方程,包括 3 个方程;然而这些方程不是完全独立的,因为对于任何 U,V 和 W,恒等式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)=0 \tag{15}$$

均告成立(对于任何 $\mathbf{A}$ 均有 div curl $\mathbf{A}=0$)。如果(14)式被满足,则 $U\mathrm{d}x+V\mathrm{d}y+W\mathrm{d}z$ 是一全微分 $\mathrm{d}S$:

$$\mathrm{d}S=U\,\mathrm{d}x+V\,\mathrm{d}y+W\,\mathrm{d}z, \tag{16}$$

因而 S 只是$P_1(x_1,y_1,z_1)$和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$的函数,将 x_2,y_2,z_2 简略写成 x,y,z,则有

$$U=\frac{\partial S}{\partial x},\qquad V=\frac{\partial S}{\partial y},\qquad W=\frac{\partial S}{\partial z}. \tag{17}$$

现在取一个任意曲面 $T(x,y,z)=0$,并在该面上每一点 P_1 选取矢量(U,V,W)与该面垂直。这时由(16)式可知在该面上 $\mathrm{d}S=0$,因而

$$S(x,y,z)=S_1 \tag{18}$$

为常数。从(相容)方程(13)的前两个方程能够解出 u 和v——作为该面上的函数,即

$$u=u(U,V,x,y,z),\qquad v=v(U,V,x,y,z). \tag{19}$$

下一步如果以(19)式的 u,v作为边值来解微分方程(14),则得到我们问题的一个特殊解;这是一个在特选曲面 $T(x,y,z)=0$ 上其 S 值为常数 S_1 的解。这个解能够从函数 S 的一个单偏微分方程来确定。因为,将(19)式代入(13)式最后一个方程时,得到

$$W=W(U,V,x,y,z), \tag{20}$$

再用(17)式代入,即获得

$$\frac{\partial S}{\partial z}=W\left(\frac{\partial S}{\partial x},\frac{\partial S}{\partial y},x,y,z\right); \tag{21}$$

该式称为变分问题的**哈密顿-雅可比方程**。

一个函数 $S(x,y,z)$，如果在曲面 $T(x,y,z)=0$ 上具有一个给定的常数值且满足(21)式，则该函数代表本问题的一个解。使积分(11)与积分路线无关的那两个函数 u 和 v 可通过对(相容)方程

$$F_u=\frac{\partial S}{\partial x},\qquad F_v=\frac{\partial S}{\partial y},\qquad F-uF_u-vF_v=\frac{\partial S}{\partial z},\tag{22}$$

中的任何两个方程求解来得出。方程(22)则是通过将(13)和(17)两式合并而得到。

A.3 致极曲线场

A.1 节和 A.2 节探讨了两个问题，现在来阐明其间存在的关系。

如果 $u(x,y,z)$和$v(x,y,z)$是使(11)式所定义的希尔伯特积分与积分路线无关的两个函数，则微分方程

$$x'=u(x,\ y,\ z),\qquad y'=v(x,\ y,\ z),\tag{23}$$

的解是一个二参量∞^2致极曲线集，即这些曲线满足与曲面 $S(x,y,z)=S_1$“横截”这一条件。这里“横截性”一词意指关系式

$$U\,\mathrm{d}x+V\,\mathrm{d}y+W\,\mathrm{d}z=0,\tag{24}$$

被满足：它表明(13)式所定义的用 u 和 v 表示的矢量(U,V,W)与该面的任何线元 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 相正交。

现在考虑 x,y,z 空间中的一个区域并给该区域的每一点配以一个矢量(u,v)——设它是连续的并具有连续的一阶偏微商。在该给定区域范围所定义的这些矢量之集叫做场。在目前情况下，谓之**致极曲线场**，而 $u(x,y,z)$，$v(x,y,z)$则叫做场的**斜率函数**。

适所表述的这一定理，其逆定理亦成立，现陈述如下：**如果一个∞^2致极曲线场的结构呈如此方式，其曲线与一个给定的曲面 $T(x,y,z)=0$ 是横截的，并且如果 u 和 v 是其斜率函数且由(23)式来定义，则(11)式所给的希尔伯特积分 S 与积分路线无关。**

在证明上述两个定理之前，先特别提一下下列推论：

设(11)式中的曲线 C 是场的一条致极曲线，则希尔伯特积分(11)简化为变分积分 $I=\int_{z_1}^{z_2}F\mathrm{d}z$。因此，在曲面 $S(x,y,z)=S_1$ 和曲面 $S(x,y,z)=S_2$ 上各“对应”点对(“对应”点对就是指同一条致极曲线与 S_1 和 S_2 横截的两个截点)之间该积分取值相同(见图 1)。变分学的这些曲面 $S(x,y,z)=$常数和∞^2横截线可以看成是几何光学的波阵面和光线的推广。

为了证明第一个定理，我们考虑一条固定的曲线 C，设它满足(23)式并与曲面 $S(x,y,z)=S_1$ 横截，同时对其应用线性变分，即将 x 易为 $x+a\xi$，y 易为 $y+b\eta$，其中 a 和 b 是两个小参量，ξ 和 η 是 z 的任意但固定可微分函数，在 z_1 和 z_2 处为零。因为，根据假设，积分 S 与积分路线无关，所以

$$\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)_0=0,\qquad \left(\frac{\partial S}{\partial b}\right)_0=0,\tag{25}$$

式中下标 0 表示在微分后以 $a=b=0$ 代入。

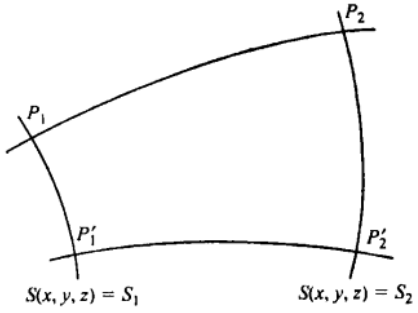


图 1 几何光学波阵面和光线概念的推广图示。对于所有与面 S_1 和 S_2 横截的致极曲线，如 P_1P_2，$P_1'P_2'$，…，变分积分(1)具有一恒定值

对 $F[u(x,y,z),v(x,y,z),x,y,z]$ 取微分，可得到

$$\frac{\partial F}{\partial a}=(F_u u_x+F_v v_x+F_x)\xi. \tag{26}$$

由(11)式，借助(26)式，即得到

$$\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)_0=\int_{z_1}^{z_2}\Big[(F_u u_x+F_v v_x+F_x)\xi+(\xi'-u_x\xi)F_u-v_x\xi F_v + (x'-u)\frac{\partial F_u}{\partial a}+(y'-v)\frac{\partial F_v}{\partial a}\Big]_0\,\mathrm{d}z. \tag{27}$$

第二行的两项为零，因为前已假设曲线 C 满足(23)式。在第一行中有几项相互消去，于是得到

$$\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)_0=\int_{z_1}^{z_2}(F_x\xi+F_u\xi')\mathrm{d}z, \tag{28}$$

此式经分部积分后即成为

$$\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)_0=\int_{z_1}^{z_2}\left(F_x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F_u\right)\xi\,\mathrm{d}z, \tag{28a}$$

类此

$$\left(\frac{\partial S}{\partial b}\right)_0=\int_{z_1}^{z_2}\left(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F_v\right)\eta\,\mathrm{d}z. \tag{28b}$$

(28a)和(28b)两式右边是 I 的一阶变分[参见(6a)式和(6b)式]，而(25)式表明它们都为零。因此曲线 C 满足欧拉方程，即它是一条致极曲线，这就证明了第一个定理。

为了证明其逆定理，现构造一个与给定曲面 $T(x,y,z)=0$ 横截的 ∞^2 致极曲线场 f_1，并将它同另一个 ∞^2 致极曲线场场 f_2 进行比较。后一个场(f_2)用下述方式构成。对哈密顿-雅可比方程(21)进行求解，其中边界条件定为 $S(x,y,z)$ 在 $T(x,y,z)=0$ 上为常数。如果 u 和 v 是根据(22)式来确定，则该解可用积分(11)来表示。于是，按照刚才证明的定理，(23)式定义一个致极曲线场 f_2，其各曲线对 $T=0$ 是横截的。然而，这两个场 f_1 和 f_2 必定是全同的，因为它们满足相同的微分方程并且在 $T=0$ 处满足相同的边界条件。因此，对于给定场 f_1，积分 S 与积分路线无关。

A.4 从哈密顿-雅可比方程的解确定全部致极曲线

截至目前我们只考虑了哈密顿-雅可比方程的一个 ∞^1 集的解 $S(x,y,z)=$常数，这些解对应于一个 ∞^2 横截致极曲线集。要得到全部 ∞^4 致极曲线，须考虑一个更大集的解 S，即 ∞^2 集，这些解可以通过将曲面 $T=0$ 绕某点转动并于每种情况各取 $S(x,y,z)=S_1$ 来获得。假定我们已经求出(21)式的"完全"解 $S(x,y,z,\alpha,\beta)$，其中包含两个参量 α,β。与任何一对 α 和 β 值相对应的函数 S，都能够表成为(11)这种形式的积分，并可通过适当选择 u 和 v 这两个函数——$u=u(x,y,z,\alpha,\beta)$，$v=v(x,y,z,\alpha,\beta)$ 使该积分与积分路线无关。因此，不仅 S 而且 $\partial S/\partial\alpha$ 和 $\partial S/\partial\beta$ 也与积分路线无关。这时因为 $F=F[u(x,y,z,\alpha,\beta),v(x,y,z,\alpha,\beta),x,y,z]$，所以

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha}=F_u u_\alpha+F_v v_\alpha, \tag{29}$$

因而从(11)式得到

$$\left.\begin{aligned} S_\alpha&=\int_{z_1}^{z_2}\left[(x'-u)\frac{\partial F_u}{\partial\alpha}+(y'-v)\frac{\partial F_v}{\partial\alpha}\right]\mathrm{d}z,\\ S_\beta&=\int_{z_1}^{z_2}\left[(x'-u)\frac{\partial F_u}{\partial\beta}+(y'-v)\frac{\partial F_v}{\partial\beta}\right]\mathrm{d}z,\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F_u}{\partial\alpha}&=F_{uu}u_\alpha+F_{uv}v_\alpha,\\ \frac{\partial F_v}{\partial\alpha}&=F_{vu}u_\alpha+F_{vv}v_\alpha,\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

其余两个微商表达式与此类似。

因为积分(30)与积分路线无关，故可知表达式

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}S_\alpha&=\left[(x'-u)\frac{\partial F_u}{\partial\alpha}+(y'-v)\frac{\partial F_v}{\partial\alpha}\right]\mathrm{d}z,\\ \mathrm{d}S_\beta&=\left[(x'-u)\frac{\partial F_u}{\partial\beta}+(y'-v)\frac{\partial F_v}{\partial\beta}\right]\mathrm{d}z,\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

都是全微分；这样，S_α 和 S_β 都只是端点 P_1 和 P_2 的函数，所以 S_α 和 S_β 之值为常数所定义的两个曲面存在，设为

$$\frac{\partial S(x,y,z,\alpha,\beta)}{\partial\alpha}=A,\qquad \frac{\partial S(x,y,z,\alpha,\beta)}{\partial\beta}=B, \tag{33}$$

其中 A,B 是常数。因此这两个方程应该代表下列两个微分方程的解：

$$x'=u(x,y,z,\alpha,\beta),\qquad y'=v(x,y,z,\alpha,\beta), \tag{34}$$

因为在方程(33)所定义的两个曲面上，分别有 $\mathrm{d}S_\alpha=0,\mathrm{d}S_\beta=0$，而由(32)式可知，这就意味着(34)式成立，但要求其缔合行列式不为零。而根据(31)式，该行列式可以写成如下形式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_u}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial F_v}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial F_u}{\partial \beta} & \dfrac{\partial F_v}{\partial \beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_{uu} & F_{uv} \\ F_{vu} & F_{vv} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_\alpha & u_\beta \\ v_\alpha & v_\beta \end{vmatrix}. \tag{35}$$

右边第一个因子就是(9)式,前已假设它不等于零。至于第二个因子,只有在(34)式对 α 和 β 无解之点,或者说在空间不为该场独家覆盖之点,它才为零。如果排除此种情况不予考虑,则(34)式代表 ∞^2 组微分方程,各有 ∞^2 解;因此所有这些解合起来必定等同于全部 ∞^4 致极曲线。这就证明(33)式的解

$$x = x(z, \alpha, \beta, A, B), \qquad y = y(z, \alpha, \beta, A, B), \tag{36}$$

正是该 ∞^4 致极曲线全集;因此 ∞^4 致极曲线全集能够从哈密顿-雅可比方程的一个完全解 $S(x, y, z, \alpha, \beta)$通过仅仅微分和消元[按照(33)式和(36)式]而得到。

A.5 哈密顿正则方程

每一个欧拉方程(7)都是一个二阶微分方程。为便于使用,常用 4 个一阶微分方程替代这两个二阶方程。这可有多种方法来做到。形式最对称的两种给出所谓哈密顿正则方程,可得之如下:

将方程看成是一个勒让德变换(见 121 页),该变换将变量 u, v 更换为 U, V(保留 x, y, z),并将函数 $F(u, v, x, y, z)$更换为 $W(U, V, x, y, z)$。(13)中的最后一个方程可写成为

$$W = F - uU - vV, \tag{37}$$

所以

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}F - u\,\mathrm{d}U - v\,\mathrm{d}V - U\,\mathrm{d}u - V\,\mathrm{d}v.$$

现在

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F &= F_u\,\mathrm{d}u + F_v\,\mathrm{d}v + F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z \\ &= U\,\mathrm{d}u + V\,\mathrm{d}v + F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z, \end{aligned}$$

因而

$$\mathrm{d}W = -u\,\mathrm{d}U - v\,\mathrm{d}V + F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z.$$

因为 W 须看成是 U, V, x, y, z 的一个函数,所以由上式可知

$$W_U = -u, \qquad W_V = -v, \qquad W_x = F_x, \qquad W_y = F_y, \qquad W_z = F_z. \tag{38}$$

现在如果考虑一条曲线 $x = x(z), y = y(z)$,并设其满足下列方程:

$$x' = u(x, y, z), \qquad y' = v(x, y, z), \tag{39}$$

这两个方程,偕同欧拉方程(7),可以写成如下形式:

$$\left.\begin{aligned} x' &= -W_U, & y' &= -W_V, \\ U' &= W_x, & V' &= W_y. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

方程(40)是 x, y, U, V(作为 z 的函数)的 4 个一阶微分方程,叫做**哈密顿正则方程**。这些方程可以看成是用函数 $W(U, V, x, y, z)$来表示的变分积分欧拉方程。如果将(31)式和(39)式代

入(1)式,则该积分在表达上即变成

$$I=\int_{z_1}^{z_2}[W(U,V,x,y,z)+x'U+y'V]\mathrm{d}z. \tag{41}$$

如果将其中 U,V,x,y 看做是 z 的4个未知函数并写出其中每个相应的欧拉方程,则立即得到(40)式。

A.6 自变量不显现在被积函数中时的特殊情况

当 F 不以显式依赖于 z 时,情况应予特殊考虑。

一般来说,$F(x',y',x,y,z)$ 对 z 的微分为

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}=F_{x'}x''+F_{y'}y''+F_xx'+F_yy'+F_z.$$

现在假设 $F_z=0$ 并用欧拉方程(7)代替 F_x,F_y,结果得到

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}=F_{x'}x''+F_{y'}y''+x'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F_{x'}+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F_{y'}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(x'F_{x'}+y'F_{y'}).$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(F-x'F_{x'}-y'F_{y'})=0,$$

所以

$$F-x'F_{x'}-y'F_{y'}=\text{常数}. \tag{42}$$

此式左方正是致极曲线上的量 W,它这时与 z 无关;即 W 是一个积分常数。根据正则方程(40)可以直接看到相同的结果,因为如果 F 在显式上不依赖于 z,则 W 也不依赖于 z,$W_z=0$,因而

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}=W_UU'+W_VV'+W_xx'+W_yy';$$

此式由于(40)式而为零。

在此情况下变分问题可由三维简化成二维。将 y 看做是 x 的一个函数,则 $y'=(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)x'$,并且 $F(x',y',x,y)=F(x',\mathrm{d}y/\mathrm{d}x,x,y)$。用同样方法可将 $F_{x'},F_{y'}$ 以及 $F-x'F_{x'}-y'F_{y'}$ 看做是 $x',\mathrm{d}y/\mathrm{d}x,x,y$ 的函数。现在可以对方程

$$F-x'F_{x'}-y'F_{y'}=W \tag{43}$$

求解 x':

$$\left.\begin{aligned}x'&=\Phi\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},x,y,W\right),\\ y'&=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Phi\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},x,y,W\right).\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

让我们考虑 W 具有某一给定值的所有曲线;这时积分(1)可以用两个积分之差来代替,即

$$J=\int_{z_1}^{z_2}(F-W)\mathrm{d}z=\int_{z_1}^{z_2}(x'F_{x'}+y'F_{y'})\mathrm{d}z=\int_{x_1}^{x_2}\left(F_{x'}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\mathrm{d}x.$$

如果采用简写符号,令

$$F_{x'}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}F_{y'}=f \tag{45}$$

并借助(44)式消去 x',y',则 f 成为 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$,y,x,W 的一个函数,并且

$$J=\int_{x_1}^{x_2} f\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\ x,\ y,\ W\right)\mathrm{d}x. \tag{46}$$

因此,对于每个 W 值,就得到一个减少一维的变分积分[这个减少在力学中对应于从哈密顿原理过渡到 Maupertuis 原理,见下文(88)式]。如果从与(46)式对应的欧拉方程求出 $y(x)$,则通过对(44)式进行积分即得到全部致极曲线。

A.7 不连续地段

有时会发生,函数 $F(u,v,x,y,z)$并不处处都连续。最主要的情况(常发生在光学)是其中 F 在沿一曲面$\sigma(x,y,z)=0$处,不管 u,v取何值,它都具有有限的不连续。

显然,在该曲面外即曲面两边,致极曲线仍然是欧拉方程(7)的解;但是如果一条致极曲线横过该面,它将发生一个方向上的不连续(折射)。现用附标 1 和 2 来区分该曲面左、右两边的空间(见图 2)。

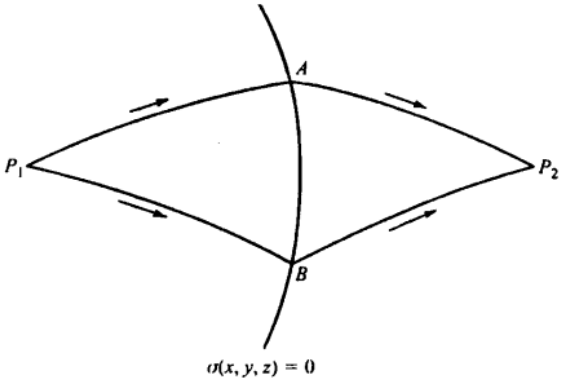


图 2 光学折射定律的变分类比图示

现在将(11)式所定义的希尔伯特积分 S 加以推广,从 $\sigma=0$ 曲面左边的一点 P_1 积到该面右边的一点 P_2。为了求出其"折射定律",必须确定保证希尔伯特积分 S 在目前情况下与积分路线无关的条件。考虑两条积分路线 P_1AP_2 和 P_1BP_2,A 和 B 是该面上的两点。这时(采用简明符号)要求 $S(P_1AP_2)=S(P_1BP_2)$即

$$S_1(P_1A)+S_2(AP_2)=S_1(P_1B)+S_2(BP_2). \tag{47}$$

在该曲面左边沿闭合路线 P_1ABP_2,

$$S_1(P_1A)+S_1(AB)+S_1(BP_1)=0, \tag{48}$$

而沿右边的闭合路线

$$S_2(P_2B)+S_2(BA)+S_2(AP_2)=0. \tag{49}$$

如果将(48)、(49)两式相加，并利用(47)式和关系式 $S(XY) = -S(YX)$，则可得到

$$S_1(AB) = S_2(AB). \tag{50}$$

因此，当积分(11)沿着曲面 $\sigma = 0$ 上任何路线来取时，不论是取面左方的 u_1, v_1 值，还是取面右方的 u_2, v_2 值作为 u, v，所得到的值相同。这样，这两种情况的被积函数必定相等，因而所求的**折射定律**等同于断言式

$$F + (x' - u)F_u + (y' - v)F_v \tag{51}$$

在曲面 $\sigma = 0$ 处是连续的。依据(13)式，这一条件可表成下列形式：

$$(Ux' + Vy' + W)_1 = (Ux' + Vy' + W)_2, \tag{52}$$

其中 x', y' 是该面上任何曲线 $x(z), y(z)$ 的微商。上式亦可表示成

$$(U_2 - U_1)\mathrm{d}x + (V_2 - V_1)\mathrm{d}y + (W_2 - W_1)\mathrm{d}z = 0. \tag{53}$$

这就是说，矢量 $(U_2 - U_1, V_2 - V_1, W_2 - W_1)$ 与不连续曲面(discontinuity surface)垂直，即指向该曲面的法线方向。

反射致极曲线问题与上述折射致极曲线问题非常相似。这时，P_1 和 P_2 两点位于曲面 $\sigma(x, y, z) = 0$ 同侧区域(见图 3)，其中 F 是 (x, y, z) 的连续函数。连接 P_1 和 P_2 的曲线 P_1AP_2 在 σ 的 A 点处有一个方向上的不连续。

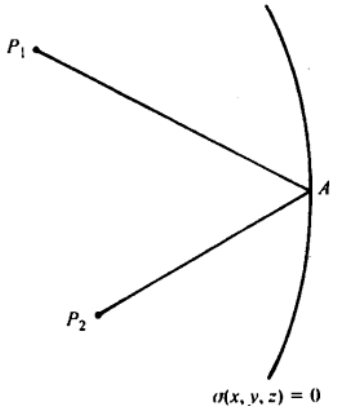


图 3 光学反射定律的变分类比图示

显然，P_1A 和 AP_2 这两部分必定都是致极曲线，并且通过与导致折射定律[(53)式]相似的考虑可以得知，要使**独立性定理**[①] 对一个入射致极曲线场(下标 1)和一个反射致极曲线场(下标 2)都能成立，其条件是满足**反射定律**

$$(U_1 + U_2)\mathrm{d}x + (V_1 + V_2)\mathrm{d}y + (W_1 + W_2)\mathrm{d}z = 0. \tag{54}$$

对于任何具有有限个折射或反射不连续地段的场来说，独立性定理均属有效。下一节将证明，在所有这些情况，不论连接 P_1 和 P_2 的致极曲线是连续的还是有多处(方向上的)不连续，只要函数 F 沿该曲线满足某些简单条件，独立性定理都将使积分(1)获得一极小值。

① 指希尔伯特独立性积分 S——译者注。

A.8 Weierstrass 条件和勒让德条件(极值的充分性条件)

前面谈论极值时一直没有区分极大值和极小值。所考虑的致极曲线甚至可能对应并非真正极值的平稳情况。下面来推导一个真实极小值所必要的条件。

设 $\bar{x}(z),\bar{y}(z)$是一条固定的致极曲线 $\bar{C}$,处于场 $u(x,y,z),v(x,y,z)$之中,并设 $x(z)$,$y(z)$是任一与 $\bar{C}$ 为邻的曲线 C,也完全处于该场之中且端点 P_1 和 P_2 与 $\bar{C}$ 相同(见图 4)。该一极值将是一个真实极小值,如果

$$\int_C F(x',y',x,y,z)\mathrm{d}z-\int_{\bar{C}}F(\bar{x}',\bar{y}',\bar{x},\bar{y},z)\mathrm{d}z>0 \tag{55}$$

的话。

根据 A.2 节和 A.3 节,可以将上式中第二个积分更换成一个路线沿 C 而非沿 $\bar{C}$ 的积分,即更换成

$$\int_C[F(u,v,x,y,z)+(x'-u)F_u+(y'-v)F_v]\mathrm{d}z;$$

这一积分与路线无关并且当所取路线与 $\bar{C}$ 重合时即化为 $\int_{\bar{C}}F\mathrm{d}z$。因此(55)式变成为

$$\int_C F\,\mathrm{d}z-\int_{\bar{C}}F\,\mathrm{d}z=\int_C\mathcal{E}(x',y',u,v,x,y,z)\mathrm{d}z>0, \tag{56}$$

式中

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x',y',u,v,x,y,z)=&F(x',y',x,y,z)-F(u,v,x,y,z)\\&-(x'-u)F_u-(y'-v)F_v,\end{aligned} \tag{57}$$

而 F_u,F_v中的自变量与 $F(u,v,x,y,z)$中的相同。(57)式所定义的函数叫做 Weierstrass $\mathcal{E}$**函数**(或**逾量函数**);式中自变量 x,y,z 及 x',y'指曲线 C 上某点的坐标及该处曲线的走向(斜率),u,v则指场通过 x,y,z 点的那条致极曲线的走向。

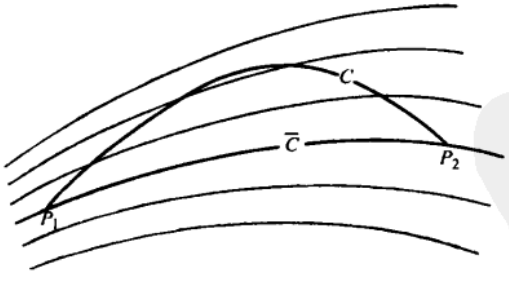


图 4 Weierstrass $\mathcal{E}$函数定义图示

由此可见,当曲线 C 与场的某条致极曲线重合时,其任何部位的$\mathcal{E}$均为零。现在我们可以这样来选择场,使集的全部∞^2致极曲线都通过 P_1 点,然后构作一条曲线 C,使之在 P_1 和某点 A 之间与场的一条致极曲线重合,而从 A 到给定致极曲线 $\bar{C}$ 上某点 B 为一段直线,最后从 B 到 P_2 则与 $\bar{C}$ 重合(见图 5)。因此,$\mathcal{E}$在 P_1A 和 BP_2 两段均为零,剩下 AB 段积分

$$\int_A^B \mathcal{E}\,\mathrm{d}z > 0.$$

现在让 A 趋近 B，可见该不等式只有当

$$\mathcal{E}(x', y', \bar{x}', \bar{y}', \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) > 0; \tag{58}$$

时才可能成立，式中 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 指的是给定致极风线 $\bar{C}$ 上一代表点（B）的坐标，而 x', y' 指直线段 AB 的方向，是完全任意的。公式(58)是 Weierstrass **强极小值条件**，它无疑是一个必要条件。但是根据函数 F 对其所有 5 个自变量都是连续的（因而$\mathcal{E}$对其 7 个自变量都是连续的）这一假设可以得知，(58)对给定致极曲线 $\bar{C}$ 上所有点和对所有 x', y' 方向都是被满足的，因此不等式(56)对 $\bar{C}$ 周围某一范围内任何近邻曲线（方向任意）都必定成立。由此看来，条件(58)也是充分的强极小值条件。当然，该极小值只是相对的，因为可能有几条致极曲线，同其所有近邻曲线相比，均具有使积分(1)为极小值的特性，其中哪一条导致绝对极小值不能由本法判定。

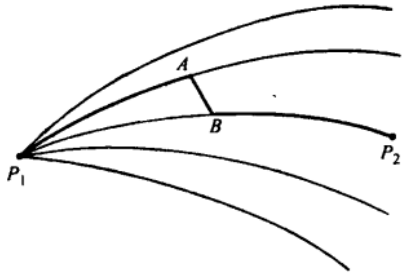


图 5　Weierstrass 强极小条件的推导

不等式(58)有一个简单的几何解释。对空间中一个固定点 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 而言，F 只是 $\bar{x}', \bar{y}'$ 的函数；这个函数可以用 $\bar{x}', \bar{y}', F$ 三维空间中的一个曲面来表示（图 6 中所画为其二维截面 $\bar{x}'F$）。这时

$$\mathcal{E}(x', y', \bar{x}', \bar{y}') = F(x', y') - [F(\bar{x}', \bar{y}') + (x' - \bar{x}')F_{\bar{x}'} + (y' - \bar{y}')F_{\bar{y}'}] \tag{59}$$

显然是图 6 中 x', y' 处纵坐标线上 Q, R 两点之间的距离，其中 Q 点在曲面 $F = F(\bar{x}', \bar{y}')$ 上，而 R 点是 $P(\bar{x}', \bar{y}')$ 点处切面与该纵坐标线的交点。因此，如果曲面 F 在 P 处切面之上，则 $\mathcal{E}(x', y', \bar{x}', \bar{y}') > 0$。如果这对所有 x', y' 都成立，则存在一个**强极小值**。

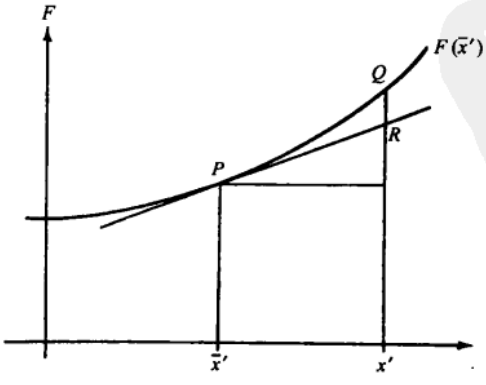


图 6　Weierstrass 强极小条件的几何解释

然而,如果(58)式只对 $\xi = x' - \bar{x}'$, $\eta = y' - \bar{y}'$ 的小区间成立,则存在一个弱极小值;在这种情况下,可以将$\mathcal{E}$展开成 ξ, η 的幂级数并可得到(如果仍旧略去自变量 x, y, z)

$$\mathcal{E}(x', y', \bar{x}', \bar{y}') = F(x', y') - F(\bar{x}', \bar{y}') - \xi F_{\bar{x}'} - \eta F_{\bar{y}'} + \frac{1}{2}[F_{\bar{x}'\bar{x}'}\xi^2 + 2F_{\bar{x}'\bar{y}'}\xi\eta + F_{\bar{y}'\bar{y}'}\eta^2] + \cdots.$$

对于小的 ξ 和 η 值来说,要存在一个极小值,二次项是起决定性的并显然须为正。这样我们就得到**勒让德弱极小(充要)条件**①

$$F_{\bar{x}'\bar{x}'} > 0, \qquad F_{\bar{x}'\bar{x}'}F_{\bar{y}'\bar{y}'} - F^2_{\bar{x}'\bar{y}'} > 0. \tag{60}$$

A.9 当路线的一端点被约束在一曲面上时变分积分的极小值

现在考虑变分积分(1)的一组路线,其一端起于一公共点 P_1,另一端点则被约束在一个给定的曲面 $\sigma(x, y, z) = 0$ 上,试求所有这些曲线中使该积分为极小值的那条曲线。这一问题可由$\mathcal{E}$函数给出一个简单的答案。

显然,该极小值曲线必定是过 P_1 点的 ∞^2 致极曲线中的一条,问题是"它们中的哪一条?"在这些 ∞^2 致极曲线当中只有一条② 与曲面 $\sigma = 0$ 是横截的,而很容易看出就是这一条代表问题的解。为了证明这一点,设该致极曲线与曲面 $\sigma = 0$ 相交于 P_2,并用全部与该面横截的致极曲线的场将其围在当中(见图 7)。这时希尔伯特积分 $S(P_2, Q)$为零。因此沿路线 P_1QP_2 取的积分 S 等于变分积分$I(P_1, Q)$。差值 $I(P_1, Q) - I(P_1, P_2)$现在可以按照与前面正好一样的方式用$\mathcal{E}$函数来表示,所以,如果(58)式得到满足,则只要 Q 不同于P_2,该差值即为正。

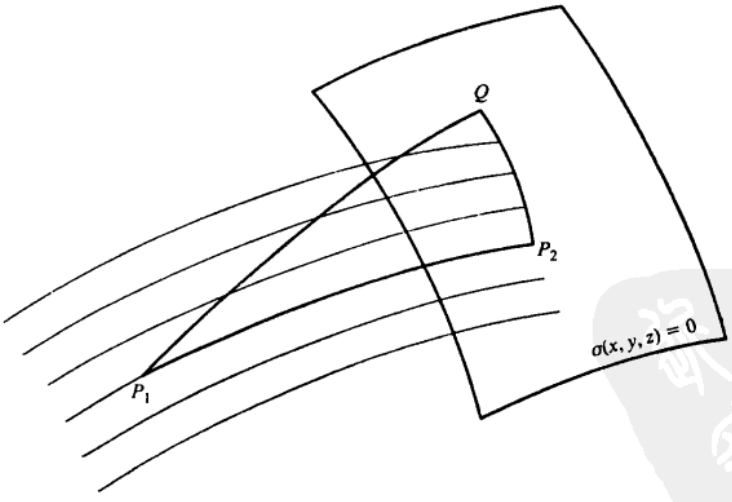


图 7 当路线一端点被固定而另一端点被约束在一曲面上时变分积分极小值的确定

① 当所涉及的变量不是两个而是较多个(比如 n 个)时,该条件有一个直接推广。要存在一极小值,n 元二次型必须是正定二次型;这意味着其缔合行列式及其主子式须全为正。

② 这里假设 P_1 离该曲面足够近,使得有几条这种致极曲线的情况被排除在外,可不考虑。

A.10 雅可比极小值判据

如果一条致极曲线 C 能被纳入一个场中，并且勒让德条件对其 P_1 和 P_2 间所有的点都得到满足，则(1)式所定义的积分 I 无疑是一个(弱)极小值。有待解决的是找到该场存在的一种判据。

设所有通过 P_1 的 ∞^2 致极曲线由下式给出：

$$x = x(z, \alpha, \beta), \qquad y = y(z, \alpha, \beta), \tag{61}$$

并设所给定的致极曲线 C 由值 $\alpha = 0, \beta = 0$ 来表征：

$$x = x(z, 0, 0), \qquad y = y(z, 0, 0). \tag{62}$$

要曲线集(61)构成一个场，只要其中有一条曲线通过与 C 任意接近的一给定点 $P(x, y)$，即只要其中 α, β 作为 x, y 的函数具有惟一解；满足这一点的条件是

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_\alpha & x_\beta \\ y_\alpha & y_\beta \end{vmatrix} \neq 0. \tag{63}$$

这就是**雅可比极小值判据**。

行列式 Δ 是给定致极曲线(62)上 z 坐标的函数。$\Delta = 0$ 的第一个点 $\bar{P}$ 叫做 P_1 **的共轭点**；对于每一个区间 P_1P_2，如果 P_2 位于 P_1 和 $\bar{P}$ 之间，则积分(1)存在一个真正的极小值。

在 $\bar{P}$ 点，给定的致极曲线被一条(与其无限接近的)相邻致极曲线所截交；它是线集(61)包络的一个点。因此，**该场的界限由致极曲线集(61)的包络来确定**。在光学中，这种包络就是焦散面(见 3.2.3 节)。

A.11 例一：光学

下面将用几个实例来说明上述一般理论。第一个例子是关于普通几何学中的最短线和几何光学中的最短光学长度线。

欧几里得几何学是以毕达哥拉斯定理为基础的，按照该项定理，线元 $\mathrm{d}s$ 与其在直角系坐标轴上的投影 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ 之间存在如下关系：

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2. \tag{64}$$

因此两点之间的最短线由变分积分

$$s = \int_{P_1}^{P_2} \mathrm{d}s = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}\, \mathrm{d}z. \tag{65}$$

的极小值来给出。几何光学则可置基于此积分的一种推广形式，即费马最短光程原理(见3.3.2节)，

$$\int_{P_1}^{P_2} n\, \mathrm{d}s = \int_{z_1}^{z_2} n(x, y, z) \sqrt{x'^2 + y'^2 + 1}\, \mathrm{d}z, \tag{66}$$

式中 $n(x, y, z)$ 为折射率。我们将只探讨光学情况，因为(65)式是(66)式 $n = 1$ 时的特别情况。

按前用符号，现在

$$F(x', y', x, y, z)=n(x, y, z)\sqrt{x'^2+y'^2+1}. \tag{67}$$

因为 $\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2+y'^2+1}\,\mathrm{d}z$,所以

$$\left.\begin{aligned} U=F_{x'}&=\frac{nx'}{\sqrt{x'^2+y'^2+1}}=n\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=ns_x,\\ V=F_{y'}&=\frac{ny'}{\sqrt{x'^2+y'^2+1}}=n\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=ns_y,\\ W=F-F_{x'}x'-F_{y'}y'&=\frac{n}{\sqrt{x'^2+y'^2+1}}=n\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}=ns_z, \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

式中 s_x,s_y 和 s_z 是曲线 $x=x(z)$,$y=y(z)$切向单位矢量 $\mathbf{s}$ 的三个分量。按照(53)式,在 $n(x,y,z)$ 不连续处曲面上,折射定律可表示成如下形式

$$(n_2\mathbf{s}_2-n_1\mathbf{s}_1)\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}=0, \tag{69a}$$

式中 $\mathrm{d}\mathbf{l}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$是该曲面上任一线元。该方程意指 $\mathbf{s}_1$,$\mathbf{s}_2$ 和曲面法线三者共面,并且 $\mathbf{s}_1$ 和 $\mathbf{s}_2$ 与曲面法线的夹角 θ_1 和 θ_2 之间存在如下关系:

$$n_2\sin\theta_2=n_1\sin\theta_1, \tag{69b}$$

这同折射定律 §3.2(19)相一致。

与(66)式相关的欧拉方程为

$$\frac{\partial n}{\partial x}\sqrt{x'^2+y'^2+1}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{nx'}{\sqrt{x'^2+y'^2+1}}=0,$$

$$\frac{\partial n}{\partial y}\sqrt{x'^2+y'^2+1}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{ny'}{\sqrt{x'^2+y'^2+1}}=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)=\frac{\partial n}{\partial x},\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)=\frac{\partial n}{\partial y}. \tag{70a}$$

z 方面的相应方程,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)=\frac{\partial n}{\partial z}, \tag{70b}$$

为一恒等式,因为它得之于

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)^2=1. \tag{71}$$

推导(70b)式可依循如下步骤:先取(71)式对 s 的微分。然后以 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}s$ 乘(71)式,以 n 乘该微分所得方程,再将两个方程相加。最后利用(70a)式[①]。三个标量微分方程(70)与光线的矢量方程 §3.2(2)相符合。

因为 U,V 和 W 现在代表光线矢量[见 §4.1(4)]的三个分量,所以从(12)式可以得知,对

① 方程(70b)可以用一种更为对称的方式来得到,然而要额外引进一个欧拉方程。这时将 x,y,z 各看作为某参量 λ 的函数,由而获得三个欧拉方程,三者间存在一恒等关系,而参量 λ 最后证明系等同于 s。

应几何光学场的 S 函数就是**哈密顿点特征函数**[见 §4.1(1)]。此外,依照导致(21)式的步骤可以发现,本处变分问题的哈密顿-雅可比方程,就是几何光学的**程函方程**。

要研究勒让德条件(60),须确定微商 $F_{x'x'}$ 等量。在本情况下即有

$$F_{x'x'}=n\frac{1+y'^2}{(1+x'^2+y'^2)^{3/2}},$$

$$F_{y'y'}=n\frac{1+x'^2}{(1+x'^2+y'^2)^{3/2}},$$

$$F_{x'y'}=-n\frac{x'y'}{(1+x'^2+y'^2)^{3/2}},$$

所以

$$F_{x'x'}\cdot F_{y'y'}-F_{x'y'}^2=\frac{n^2}{(1+x'^2+y'^2)^2}>0. \tag{72}$$

因此每一条极值曲线所给出的是一弱极小值(见 727 页),如果雅可比条件(63)得到满足的话。但是,当给定 x,y,z,即给定 n 时,因为函数 F 对于所有 x',y' 值都凸向下方,故从 Weierstrass 条件的几何解释可知,该极小值为强极小值。

剩下要考虑的是雅可比判据。对于 $n=$常数,即在普通欧几里得几何学中,致极曲线显然都是直线;因为通过一点 P_1 的一束直线决不会有任何包络,所以每条直线在其任何两点之间所给出的距离都是一强极小值。与此相反,在几何光学中,一般 n 依赖于 x,y,z(连续地或不连续地),发自 P_1 点的光线束要形成包络(焦散面)。要确定极值的性质,须对每一具体情况的焦散面分别加以剖析。

A.12 例二:质点力学

作为第二个例子我们考虑**质点系力学**。这里,自变量为时间 t,未知函数为拉格朗日量坐标 $q_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,n)$及其微商即速度 $u_\alpha=\dot{q}_\alpha$。

其变分问题由**哈密顿原理**

$$\int_{t_1}^{t_2}L(u_1,u_2,\cdots,q_1,q_2,\cdots,t)\mathrm{d}t=\text{极值}, \tag{73}$$

来表示,式中 L 为拉格朗日量。在普通非相对论力学中,$L=T-\Phi$,其中 T 为动能——u_α 的二次型,而 Φ 为势能;但是,在更普遍情况下,当存在一磁力作用并计及质量的相对论性变化时,(73)式也仍然有效。

函数 $F(u,v,x,y,z)$在这里由 $L(u,q,t)$替代;因此[见(13)式]U,V 现在相当于动量

$$p_\alpha=\frac{\partial L}{\partial u_\alpha} \tag{74}$$

而 W 相当于 $-H$,其中 H 为**哈密顿量**

$$H=\sum_\alpha u_\alpha\frac{\partial L}{\partial u_\alpha}-L=\sum_\alpha u_\alpha p_\alpha-L. \tag{75}$$

如果 $L = T - \Phi$,则(75)变成为

$$H = \sum_{\alpha} u_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial u_{\alpha}} - T + \Phi.$$

从关于齐次函数的欧拉定理[①] 可以得知

$$2T = \Sigma u_{\alpha} \frac{\partial T}{\partial u_{\alpha}} \left(= \Sigma u_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial u_{\alpha}} \right),$$

因而 H 化为总能量

$$H = T + \Phi. \tag{76}$$

欧拉方程(7)这时成为拉格朗日运动方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial u_{\alpha}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} = 0; \tag{77}$$

而正则方程(40)为

$$\frac{\mathrm{d}q_{\alpha}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}, \qquad \frac{\mathrm{d}p_{\alpha}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}}, \tag{78}$$

式中 H 须看成为 p_{α}, q_{α} 和 t 的函数。如果 H 不依赖于 t,则方程(42)表达能量守恒定律

$$H = \sum_{\alpha} u_{\alpha} p_{\alpha} - L = \text{常数} = E. \tag{79}$$

在这种情况下,哈密顿-雅可比微分方程(21)变成为

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_{\alpha}}, q_{\alpha}\right) = 0. \tag{80}$$

此式经积分后给出

$$S = -Et + S_1(q_{\alpha}), \tag{81}$$

式中,由于(80)式之故,S_1 满足方程

$$H\left(\frac{\partial S_1}{\partial q_{\alpha}}, q_{\alpha}\right) = E. \tag{82}$$

从哈密顿-雅可比方程的解,按照(17)式,即得到动量

$$p_{\alpha} = \frac{\partial S}{\partial q_{\alpha}} = \frac{\partial S_1}{\partial q_{\alpha}}. \tag{83}$$

由此可知线积分

$$\int_{P_1}^{P_2} \sum_{\alpha} p_{\alpha} \, \mathrm{d}q_{\alpha} \tag{84}$$

与连接 P_1 和 P_2 的路线无关,因而当在一单连通区域内取一闭路积分时其值为零,

$$\oint p_{\alpha} \, \mathrm{d}q_{\alpha} = 0. \tag{85}$$

① 见,例如,R. Courant, *Differential and Integral Calculus*. Vol. II(Glasgow, Blackie and Son, 1936), p. 109。

如果函数 p_α 是多值函数，则可能发生该闭路积分不为零，而是某常数周期的倍数。这一结果是光学拉格朗日不变式(3.3.1 节)的推广并且是邦加[①] **不变式之一**。它亦可表示成如下形式：

$$\frac{\partial p_\alpha}{\partial q_\beta}-\frac{\partial p_\beta}{\partial q_\alpha}=0. \tag{86}$$

如果 H 不依赖于时间，则可按照(45)式和(46)式所表达的通用步骤将 t 从极小值原理中消去。这时即有

$$J=\int_{t_1}^{t_2}(L+E)\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\sum_\alpha \dot{q}_\alpha p_\alpha\,\mathrm{d}t=\int_{P_1}^{P_2}\sum_\alpha p_\alpha\,\mathrm{d}q_\alpha=\text{极值}. \tag{87}$$

这就是 **Maupertuis 最小作用原理**对任意 L 的推广；其意义须理解如下：(79)式允许将其中时间微商 $u_\alpha=\dot{q}_\alpha$ 消去，而表示成纯几何的微商，比如 $\mathrm{d}q_\alpha/\mathrm{d}q_1(\alpha=2,\cdots,n)$，也就是用 q_1 作为一个自变量。方程(87)代表一个纯几何的原理，描写轨道而非描写运动。后者则须得自(78)式。

如果 $L=T-\Phi$，则 $E=T+\Phi$，则得到 Maupertuis 的原式

$$J=2\int_{t_1}^{t_2}T\,\mathrm{d}t, \tag{88}$$

其意义也须作同样理解。由此可见，通过从哈密顿原理转换到 Maupertuis 原理，运动问题相应化为轨道问题，这种简化的一个例子是电子光学中的处理方法，将在附录 B.2 中给出。

勒让德条件只有在给定 L 时才能加以剖析。如果 $L=T-\Phi$ 且 T 是 u_α 的一个二次型，该条件显然等于假定 T 是正定的(positive definite)。这时 Weierstrass 条件也得到满足，所以只要雅可比条件有效，就获有一强极小值。后者导致动力学焦点和焦散面的研究，但在实用上没多大重要性。

对于相对论电子，其拉格朗日量为(见附录 B)

$$L=-mc^2\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}+e\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\mathbf{A}-\phi\right) \tag{89}$$

这时勒让德条件导致 ξ,η,ζ 的二次型

$$\frac{m}{\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{3/2}}\left[\rho^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\left(\frac{\boldsymbol{\rho}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)^2\right] \tag{90}$$

其中矢量 $\boldsymbol{\rho}$ 由分量(ξ,η,ζ)构成，因而该条件恒被满足。

① Poincare，《物理学名词》(1996)译名为庞加莱——译者注。

附录 B　光学、电子光学和波动力学[①]

1831 年，W·R·哈密顿发现，势场中的质点轨道与连续变折射率媒质中的光线路径二者之间存在类似。由于其数学形式非常之美，**“哈密顿类似”**标题在动力学教本中存在几历百年之久，但迄未激起任何实际应用，直到 1925 年 H. Busch 才第一次用光学术语解释电场和磁场对电子束的聚焦作用。几乎与此同时，E·薛定谔更将哈密顿类似向前推进一步，以其波动方程使之从粒子的几何光学迈入粒子的波动光学，在该方程中他将 L·德布罗意 1923 年首先构想的粒子波长具体付诸实际。

实用电子光学从 1928 年后迅猛发展。其时哈密顿类似已广为人知，并在电子光学领域激起对应光学仪器的发明，例如电子显微镜。虽然其数学形式的类似是多方面的，但这两种方法并不完全一一对应。一些电子光学仪器如阴极射线管和曲光轴系统，在光学中就没有重要对应器件。这里因篇幅有限，将只考虑这些电子光学问题，即其同类光学问题已在本书前面诸章详尽阐明，因而可将其结果几近**全部**移植过来，仅加以少量修改。可以提及，这特别适用于电子光学最难懂的一章：透镜像差的波动理论。

B.1　基本形式的哈密顿类似

首先我们来证明，带电粒子的轨道的确定能够通过引进一个适当的、逐点变化的折射率使之化为一个光学问题。

考虑一个电荷为 e、质量为 m 的粒子，运动在一个恒定的静电势场 $\phi(x,y,z)$ 之中——为简单化起见，可将该粒子视为电子。由牛顿运动定律

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}=e\mathbf{E}=-e\,\mathrm{grad}\,\phi, \tag{1}$$

式中 $\mathbf{p}$ 为动量矢量。该定律在所有速度 $\mathbf{v}$ 均成立，即使将 $\mathbf{p}$ 由牛顿的定义 $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$ 更易为爱因斯坦的

$$\mathbf{p}=\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}},\qquad \left(\beta=\frac{v}{c}\right), \tag{2}$$

其中 c 为真空中的光速。

为便于分析，可将运动方程(1)分成两个方程，其一为轨道方程，而另一个定规电子沿轨道运动所遵循的“时间表”。为此，将 $\mathbf{v},\mathbf{p}$ 各写成 $\mathbf{v}=v\mathbf{s},\mathbf{p}=p\mathbf{s}$，$\mathbf{s}$ 为运动方向上的单位矢量。于是

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\mathbf{s}+p\frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\mathbf{s}+p\frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\mathbf{s}+pv\frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{d}s}.$$

---

① 原文标题为“*Light optics, electron optics and wave mechanics*”，其中 *Optics* 一词已在广义上使用，因而将狭义的光学称为“*Light optics*”以强调光和电子两个领域的类似性。但“光光学”一词不合中文用词习惯，故仍译为“光学”。何为广义，何为狭义，根据文意不难判明——译者注。

从微分几何学皆知，$\mathrm{d}\mathbf{s}/\mathrm{d}s$ 为单位主法线 $\boldsymbol{\nu}$ 方向上的一个矢量，其绝对值等于运动轨道的曲率 $1/\rho$。因此

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\mathbf{s}+\frac{pv}{\rho}\boldsymbol{\nu}.$$

从这一关系和(1)式可以得知，瞬时曲率中心位于切线 $\mathbf{s}$ 和电矢量 $\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\phi$ 所决定的平面上。将 $\operatorname{grad}\phi$ 分解到这两个方向，由而得到

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\mathbf{s}+\frac{pv}{\rho}\boldsymbol{\nu}=-e[(\mathbf{s}\cdot\operatorname{grad}\phi)\mathbf{s}+(\boldsymbol{\nu}\cdot\operatorname{grad}\phi)\boldsymbol{\nu}]. \tag{3}$$

令两边第一项相等即得到一标量方程，可称之为“时间表”，因为最后要由它来确定电子在轨道上随时间变化的位置。以 $v=\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ 乘该方程，可将其积分并得到

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}=-e\phi+\text{常数}. \tag{4}$$

这是爱因斯坦能量积分。对于慢运动的粒子($\beta\ll1$)，该式即转变成牛顿能量积分：$\frac{1}{2}mv^2+e\phi=$常数。

为便于分析，现将问题限于只考虑具有相同积分常数的电子，即总能量相同的电子。如果所有电子原都从某一势面 ϕ_0 处以零速度开始运动，其能量情况即属如此。在许多实际问题中，该势面可以认为就是阴极。设

$$V=\phi-\phi_0,$$

即势 V 的测量以 ϕ_0 为水平面，则能量积分呈如下形式：

$$mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)=-eV. \tag{4a}$$

将此式与(2)式合并，可将二者表示成一个有用的双方程形式

$$\left(1-\frac{eV}{mc^2}\right)^2=1+\left(\frac{p}{mc}\right)^2=\frac{1}{1-\beta^2}. \tag{5}$$

这样，这些粒子的动量的标量值 p，作为位置 x,y,z 的函数，由下式来确定：

$$mc^2\left[\sqrt{1+\left(\frac{p}{mc}\right)^2}-1\right]=-eV(x,y,z). \tag{6}$$

现在考虑(3)式的第二部分，即与运动方向成直角的分量：

$$\frac{pv}{\rho}=-e[\boldsymbol{\nu}\cdot\operatorname{grad}V]. \tag{7}$$

借助(2)式和(6)式，用 p 来表示 v 和 V，即得到简单的定律

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\boldsymbol{\nu}\cdot\operatorname{grad}p}{p}=\boldsymbol{\nu}\cdot\operatorname{grad}(\ln p). \tag{8}$$

方程(8)在形式上与**折射率为 n 的媒质中的光线曲率表达式** §3.2(14)完全相同，对比之下 n 正比于 p，这样我们就得电子和光二者路径在表达形式上的类似。

必须强调,只有对总能量同为某固定值的电子,动量绝对值 p 才只是位置的函数;而对于总能量同为另一个固定值的电子,(6)式所给出的 p 是另一个函数。因此,电子光学折射率依赖于电子能量。这在光学中亦有类似现象,即折射率依赖于光的颜色。后面将证明,这是一个非常确当的类比,因为在两者情况下折射率都判明是波长的一个函数[①]。

对于慢电子,p 正比于速度而速度又正比于$\sqrt{V}$。我们所采用的相对论方程所具的优点在于它们清楚地表明,特征量乃是动量而非速度。此外,这些结果立即使人想到对一般情况即静电磁场情况的推广。众所周知,在相对论中,当存在一磁场时,机械动量 $\mathbf{p}$(现写做 $\mathbf{p}_m$)须用"总"动量

$$\mathbf{p}_{\text{tot}} = \mathbf{p}_m + e\mathbf{A}, \tag{9}$$

来取代,式中 $\mathbf{A}$ 是矢势[②],这使人想到折射率——在静电情况它是 $\mathbf{p}_m$ 在运动方向的分量——在一般情况将要由 $\mathbf{p}_{\text{tot}}$ 的运动方向分量来取代。事实表明这一猜想是正确的,但是现在把电磁场情况的电子光学奠定在一个更为坚实而广泛的基础上将更为可取。

B.2 变分形式的哈密顿类似

几何光学的定律可导自费马原理(见 3.3.2 节),按照该原理,在 P_1 和 P_2 两点之间,光走的路线是使其光学长度为一极小值:

$$\int_{P_1}^{P_2} n\,\mathrm{d}s = \text{极小值}. \tag{10}$$

可以回想起,费马原理的这个**强**表述只有当 P_1,P_2 两个端点靠得足够近时才能成立,也就是说,在这两点之间连接它们的光线上要没有 P_1 或 P_2 的像。如果 P_2 是 P_1 的像,则(10)式所确定的不是一条光线,而是连接这两点的一个无限细的光线锥,每条光线的光学长度相同。如果 P_1 和 P_2 拉开得更远,让一像点成于其间,则**弱**表述

$$\delta\int_{P_1}^{P_2} n\,\mathrm{d}s = 0 \tag{10a}$$

所确定的仍旧是一条光线,但这条光线并非如有时误说的那样代表一极大值,而是积分的一个平稳值,既非极小值,亦非极大值。

费马原理的一些结果在附录 A(变分法)的 A.11 中已经讨论过了。该附录还在其 A.12 中告知,质点系的运动可用类似的变分形式由哈密顿原理来描述。对于单质点的特别情况,该原理由下列条件来表示:

$$\int_{P_1,t_1}^{P_2,t_2} L(\dot{x},\dot{y},\dot{z},x,y,z)\mathrm{d}t = \text{极小值}. \tag{11}$$

① 本段不仅是讲光和电子二者路径表达式形式的类似,而是已深一层涉及到其波粒二象性方面:电子和光自身各有其动量,波长以及折射率等——译者注。

② 值得注意的是,该基本结果在相对论问世前三年即由施瓦茨柴耳德发现(*Königl. Gess. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl.*, **3**(1903), 126)。

这一表述在其他任何坐标系中亦为有效，但作为示例，直角坐标 x, y, z 即已足够。式中 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ 为速度分量，L 为拉格朗日函数。始点和终点用四维时空来确定，并假设在变分过程中都固定不变。附录 A 中业已证明从原理(11)可推导出拉格朗日形式和哈密顿形式的运动方程，并给出了其步骤和结果[见附录 A(77)，(78)]。

对于一个电荷为 e，静止质量为 m 的相对论电子，拉格朗日函数为

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - e\left(\phi - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}\right). \tag{12}$$

式中 $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ 为速度矢量，ϕ 为静电势，而 $\mathbf{A}$ 为磁势即矢势[①]。要证明拉格朗日量(12)，可将其代入拉格朗日运动方程[附录 A(77)]，并利用电磁关系式 § 2.1(7)和 § 2.1(5)

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}} - \operatorname{grad}\phi, \qquad \mathbf{B} = \operatorname{curl}\mathbf{A}.$$

这时拉格朗日方程呈如下形式：

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right), \tag{13}$$

这正是牛顿－劳伦兹形式的运动方程。

(11)式所表达的哈密顿原理对处理电子光学问题而言，形式过于普遍，不大适用。它包含时间变量，这在定态场情况并不重要。此外，它代表 ∞^5 致极曲线族；其中 ∞^4 是因为当给定总能量时，P_1 和 P_2 两点可在任何两个曲面上自由选择，而另一无穷是因为总能量被放置一边未定。为了减少过多的维数，电子光学中所采取的步骤与光学中一样。

首先，使总能量固定不变，也就是说只限于讨论单色光或单能量电子(monoenergetic electron)。如附录 A(87)式所示，这就使问题的维数减少了 1。这时哈密顿原理(11)为最小作用原理所取代：

$$J = \int_{P_1,t_1}^{P_2,t_2}(L+E)\mathrm{d}t = \text{极小值}, \tag{14}$$

式中 E 是总能量

$$E = \Sigma\dot{x}p_x - L.$$

在(14)式中，时间 t 的出现只是形式而已，因为以 E 代入其中后即得到

$$J = \int_{P_1,t_1}^{P_2,t_2}\Sigma p_x\dot{x}\,\mathrm{d}t = \int_{P_1}^{P_2}\Sigma p_x\,\mathrm{d}x = \int_{P_1}^{P_2}\mathbf{p}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \text{极小值}. \tag{15}$$

在第二式和第三式中 t_1, t_2 已被撤销，因为现在只讨论定常场(time-invariant field)(否则总能量将不能保持不变)，在这种场中起始时间 t_1 并不重要，而通行时间(transit time)完全由路程和能量常数来确定。

因此，最小作用原理(14)与费马原理(10)二者在形式上完全类似。电子运动的研究就化为一个光学问题，只要将**电子光学的折射率**定义为**动量在轨道方向上的分量**。对于一个纯静电场，可以看出该结果就等于前节从更基本考虑得到的结果。在此情况下，动量是纯机械的，

① 不带相对论修正的拉格朗日量(12)由施瓦茨柴耳德于 1903 年得到(*loc. cit*)。

并与轨道平行。其值由(2)式给出:

$$p_m = \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

当存在一磁场时,必须采用广义的动量分量定义[见附录 A(74)式],即拉格朗日量对速度分量的微商。对于一个单粒子,其拉格朗日量由(12)式给出,其动量分量为

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{e}{c}A_x,$$

等等。写成矢量形式即为

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}. \tag{16}$$

因此,除一任意常数因子外,广义的电子光学折射率

$$n = \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{s}, \tag{17}$$

式中 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{s}$ 是矢势在运动方向上的分量。这里仍然要作如下理解:(17)式的折射率 n 只有对总能量同为某给定值的电子才可认为是位置的函数。

由此可以看出,在一般情况和纯电场的特殊情况之间存在一个重要差别。在一个电场中,折射率正比于机械动量,它是一个可测量的物理量。在一般表达式(17)中,第二项是矢势的一个分量,但矢势不是一个物理量而只是一个函数,其**旋度**等于磁感强度 **B**。这就清楚地表明,一般的电子光学折射率本身并不是一个物理量,而只是一个拉格朗日函数①。不过,这对纯电场中特殊情况的折射率来说也同样正确。在两者情况下,都能在其式中加上任意函数的梯度在运动方向上的分量而不改变任何物理结果。

在一般情况和特殊情况之间还存在一个更重要的差别。如果现在进一步效仿光学中简化维数的步骤,将电子轨道场的 ∞^4 维流形性质减到 ∞^2,则该一差别即可获得最好的说明。为简化维数,现选择这种轨道,其起点都在某曲面 $\mathcal{S}(x,y,z)=\mathcal{S}_0$ 上,且起始走向都与该面相垂直。在几何光学中,这个曲面可以认为就是一波阵面,然后可以证明该轨道(光线)锥将处处与一曲面族 $\mathcal{S}(x,y,z)=$ 常数相垂直;这就是马吕斯和杜平定理(见 3.3.3 节)。

在一般情况中也存在某种"横截性"特性,如附录 A 的 A.2 节和 A.3 节中所示,但其意义不似马吕斯 - 杜平定理中那样简单。这时与一曲面族 $\mathcal{S}=$ 常数保持垂直的,不是轨道方向上的单位矢量 **s**,而是动量 **p**。因为在矢势的定义中容有规范变换,所以存在无穷多个横截曲面族,但是当存在一磁场时,用任何规范 - 归一步骤均不能使这些曲面与轨道横截。

用几何学语言来说,与一曲线族皆成直角的各二维曲线锥构成一"法线汇",不存在这种横截曲面族的曲线锥则构成一"斜线汇"(见 3.2.3 节)。在光学中和在静电电子光学中,可将各轨道和轨线整理成法线汇,并认为其横截曲面也就是"波阵面"。而在磁场中,各二维轨道锥——通常称为"束",则构成斜线汇,因而横截波阵面概念对它们不能适用。这是电子光学和光学之间颇为重要的一个差别。

---

① 这一点 W. Ehrenberg and R. E. Siday, *Proc. Phys. Soc.*, B, **62**(1949), 8 曾特别给予强调,他们还曾指出一个重要事实,即除非磁场处处为零,否则不可能通过一规范变换将 **A** 归一化成它随磁场一起为零。

B.3　自由电子的波动力学

光的二象性是首先由爱因斯坦于 1905 年猜想到的。光在传播上好像是一电磁波，但在同物质相互作用上又好像其能量集中于一个一个光子，各具有一能量量子。随后不久，爱因斯坦的猜想即为光电和光化学过程方面的观测所光辉证实。

物质粒子的二象性概念则出自德布罗意，他于 1923 年证明，如果要赋予一个机械动量为 p_m 的粒子以某一波长 λ，且在相对论上是不改变的，则该波长只能呈下列形式：

$$\lambda = \frac{h}{p_m}, \tag{18}$$

式中 h 为一普适常数，其量纲为一作用量(action)，德布罗意证明它就是普朗克常数。

之后不久，海森伯、玻恩和约旦完全独立于德布罗意，研发出量子力学第一个完整的数学表述，但是他们的方法对于讨论自由电子不如用薛定谔波动方程来得方便。现对后者扼要概述如下：

薛定谔将德布罗意的观念同哈密顿的结合起来，由而走向探索粒子运动的波动描述问题。这种描述与质点动力学的关系，正如波动光学之与几何光学。薛定谔的历史性探索，如我们现下所知，其方法仅在某一点上是正确的，当然，它还包含一定程度的猜想，因为纵然几何光学已被纳入波动光学，逆向论断亦为不当。

假设存在一种波场，其强度表示电子的密度，正如电磁波强度表示光子之密度。此外，假定该场是一个标量场，其振幅由某一标量函数 $\Psi(x, y, z, t)$来代表；为了计及对其设定的类波性质，假设它满足一波动方程

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{u^2}\ddot{\Psi},$$

u 是波速——一般为位置的函数。这一点当然是一个高限制性的假设，因为传播速度为常数的普通波动方程可以有多种不同的推广方式，这是其中之一，而且是最简单的。

以一个“单色”波

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

代入 Ψ，则得到一不含时方程

$$\begin{aligned}\nabla^2\psi &= -\left(\frac{\omega}{u}\right)^2\psi \\ &= -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\psi,\end{aligned} \tag{19}$$

式中仅波长 λ 出现，而非波速。现在假设 λ 就是德布罗意波长，如果粒子在(x, y, z)点所具的动量以经典力学的 p_m 代入的话。该值可由(6)式来计算。为简单起见，考虑静电场中的一个慢电子。在此情况下，将德布罗意关系式(18)与(6)式结合，则得到

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E - \mathrm{e}\phi)}}. \tag{20}$$

将此式代入(19)式即获得

$$\nabla^2\psi+\frac{8\pi^2m}{h^2}(E-e\phi)\psi=0.$$

这就是标势场中自由电子的薛定谔波动方程。因为它是一个不含时方程,所以我们可将它解释为描写一个粒子在一力场中的定态运动,例如周期运动。但是(21)式同样可以应用于电子光学中的定态电子束,其中出现有许多粒子,但全在同一条件下一一鱼贯而过。无论是单个还是多个粒子,按照玻恩的统计解释,都可以假设——一种看来很合理的假设,振幅绝对值的平方$|\psi|^2=\psi\psi^*$系正比于x,y,z点处在长时间内测量到的平均粒子密度,或者换个说法来表达,$|\psi|^2$系正比于在任何时刻在该点能观测到一个粒子的概率。

对(21)式给予的第一个证明是薛定谔做出的。他证明,如果假设原子中的电子被束缚在一个与卢瑟福-玻尔前期原子模型中一样的力场之中,则可由(21)式解释原子光谱。对眼下讨论的问题来说,关系更为直接的证明得自自由电子情况,即出自电子衍射的发现。1927 - 1928年,Davisson 和 Germer;还有 G. P. Thomson 分别独立地发现了该衍射现象。

对于慢电子,如将其动能折合 eV 电子伏特,则德布罗意关系(18)给出的波长约为

$$\lambda=\sqrt{\frac{150}{V}}\ \text{埃单位}.$$

这样,能够便于实验室实验中操作的电子,其波长量级为几分之一埃,与 X 射线波长同数量级。因此要演示自由电子的波动性,最容易的办法可采用类似于晶格 X 射线衍射的实验。

X 射线分析的术语同样可用于电子,但它与光学术语有所不同。被称为 X 射线衍射或电子衍射的现象,实际是晶格中大体呈规则排列的原子所发射的相干次波产生的干涉。光学意义上的电子衍射产生于相对说来较大的物质障碍物,其原子结构在该衍射中并无所作为,衍射则发生于极小的角度,系由 H. Boersch 于 1940 年在电子显微镜中首先观察到[①]。

B.4 光学原理对电子光学的应用

上面对波动力学所作的基本和不完全的勾画,对电子光学的几乎全部实用目的而言业已足够,甚至不必要动用将其内涵扩大到磁场,因为在电子光学中从不需要超越衍射问题中的基尔霍夫近似范畴。该近似所基于的各项假设在电子光学中完全得以成立。但在原子核内部及其毗邻地区的场则属例外,在这些地方不存在变化十分陡峭的电场,所谓陡峭是指在电子光学所用电子的一个波长范围内,电场的改变已然十分明显。这对于磁场就更加如是。特殊磁致衍射——可从克莱因-戈尔登或狄拉克方程推论出,其效应非常之小,自由电子的实验根本检测不到。因此,只要加以一定小心,可放心应用基尔霍夫衍射理论(见 8.3 节)。该理论的稍加扩大的形式可概述如下,如何小心对待亦于其后说明:

1. 从光源开始,沿着各条光线一段一段丈量按照几何光学计算的等光学长度,从而作出到达障碍物或物的波阵面。

① H. Boersch, *Naturwissenschaften*, **28**(1940), 709。Boersch 的衍射照片被翻印在 W. Glaser, *Grundlagen der Elektronenoptik* (Vienna, Springer, 1952), p. 548。

2. 如果障碍物为一黑屏，则将该波阵面没被挡住的部位看成是位相和振幅都没受到干扰，而其余部位都看成被切割掉。如果物是部分透射的，则用几何光学定律对从物中通过的各条光线进行追踪，包括其位相和强度的改变，后二者可由物的复折射率来确定。这种办法在所有实际情况均证明可行，因为所测物，例如显微镜观察物，其纵深都很短，因而忽略其中衍射效应没有问题。
3. 为了计算远场某点处的衍射效应，用几何光学法则来计算物或障碍物所发出的波阵面各面元与该点之间的振幅传输，并将各复振幅相加取和，同时将各条衍射光线的倾斜因子考虑进来。

上面所概述的基尔霍夫方法可不加修改直接搬到电子光学，条件是只存在电场，包括固体物质原子结构所产生的强微观场——它们主要是电场。然而，如果存在磁场，则不再能通过沿着各条轨道一一丈量等德布罗意波长数来确定波阵面。如本附录中 B.2 末所指出的，磁场中的波阵面不再与电子轨道正交，而是与总动量线即“**p** 线”正交，后者没有简单的几何光学诠释。原则上这时可从某个给定的波阵面开始，沿着各条 **p** 线一一绘制光学长度来确定待定波阵面。实际上该法几近无用，因为它所给出的是位相而非振幅。这一难点的实际解决方法是借助透镜替换成像技巧，即用等效电透镜代替磁透镜成像——除去没有像的整体转动和一定的转动畸变外，该电透镜与原磁透镜产生的像场相同。这样，这两种特殊磁效应在电子传播过程中即可先予忽略而只到计算结束再加进来，从而能应用基尔霍夫方法而无何困难，且所得结果对所有实用目的而言均已足够。

虽然电子光学一般的数学基础与光学相同，但其实际结构非常不同。实用光学是在元件加工工艺基础上发展起来的，工艺包括将透明或反射固体媒质的表面经适当成形后，进行研磨和抛光等。而在电子光学中仅有一种媒质，这就是电磁场。这一点在进行像差修正时即显现出其限制和不足，特别是当由于实际原因无法采用空间电荷和空间电流时，更是如此。在电子光学的发展中，早就发现如果只考虑旋转对称场，则不可能构造没有球差和色差的发散透镜和系统。这导致了不存在上述限制的非旋转对称系统的发展，也导致了曲光轴系统的发展，这种系统在光学中鲜为人知。因此，了解光学仪器及设计原理在电子光学中甚属有益，但也只是止于提出问题并启迪发明而已；实现之路仍旧大相径庭。与此相反，基于光学和电子光学这两个领域基本原理类似而引为借鉴的光学思想，对未来的电子光学可能会一如在其前 1/4 世纪中那样发挥重要作用。

附录 C　积分的渐近近似

这一附录的目的是对获得几类积分渐近近似的方法提供数学背景资料以便查阅，这些积分在光学中经常遇到，这里只讲带有普遍性的几种方法，都是正文中列为参考的。

C.1　最陡下降法

获得渐近近似的这一方法[①]适用于下列类型的复积分：

$$\int g(z)\mathrm{e}^{kf(z)}\,\mathrm{d}z, \tag{1}$$

式中 k 值很大，而 $g(z)$ 和 $f(z)$ 与 k 无关。

就目前而言，k 须视为实数和正数，而在后面的讨论中亦如此假设。然而，事实上，所得结果一般对复 k 值也仍然成立。在进入正题之前，先谈一谈关于复变量（设为 ζ）函数的渐近展开当为合宜。

Poincaré[②] 曾对渐近展开是什么给出一个定义，可陈述如下：如果

$$F(\zeta)=\sum_{m=0}^{n}\frac{a_m}{\zeta^m}+R_n(\zeta), \tag{2}$$

式中，对于所有的 n 和对某给定区间内的 $\arg\zeta$，当 $\zeta\to\infty$ 时，$\zeta^n R_n(\zeta)\to 0$，同时 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 均为常数，则将 $F(\zeta)$ 写成

$$F(\zeta)\approx a_0+\frac{a_1}{\zeta}+\frac{a_2}{\zeta^2}+\cdots, \tag{3}$$

而将其右方称为 $F(\zeta)$ 对给定 $\arg\zeta$ 范围的渐近展开。

如果 $F(\zeta)$ 是两个函数，比如 $G(\zeta)$ 和 $H(\zeta)$ 之商，则可写作

$$G(\zeta)\approx H(\zeta)\left(a_0+\frac{a_1}{\zeta}+\frac{a_2}{\zeta^2}+\cdots\right). \tag{4}$$

事实上应予强调的是，接下去讨论的展开只是指(4)右边的形式，并设 $H(\zeta)$ 为 $\exp(a\zeta)$，其中 a 为某一常数。

现在将渐近展开的一些主要特性简要列述于下[③]：如果(3)式中的级数是有尽的，或者当 $|\zeta|$ 足够大时是收敛的，它就是渐近的，但它常常对任何 $|\zeta|$ 值均无从收敛。一般，对于一个给

---

① 基本出自 P. Debye, *Math. Ann.*, **67**(1909), 535。

② H. Poincaré, *Acta Math.*, **8**(1886), 295。

③ 见，例如 H. and B. S. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics* (Cambridge, Cambridge University Press, 1946), Chapter 17；或者 A. Erdélyi, *Asymptotic Expansions* (New York, Dover Publications, 1956)。

定的 $F(\zeta)$，一个特别的展开只对一个特定的 $\arg\zeta$ 范围有效；如果它对所有 $\arg\zeta$ 都有效，它就是收敛的。再有，对于适当 $\arg\zeta$ 范围内的一个给定 $F(\zeta)$，说渐近展开是惟一的，就是指(3)式中每个系数都是惟一的；另一方面，任一函数的渐近展开还同属于无穷多个其他函数，例如，在 $-\frac{1}{2}\pi < \arg\zeta < \frac{1}{2}\pi$ 范围，$F(\zeta) + e^{-\zeta}$ 的渐近展开和 $F(\zeta)$ 的相同。两个函数之积的渐近展开系由它们各自渐近展开的乘积结果得出。最后，$F(\zeta)$ 的积分的渐近近似可以通过对(3)式逐项积分而得到，而且是无条件的；此外还可以通过对其逐项微分以给出(如果它存在) $F(\zeta)$ 的微分的渐近近似。

一般，对于一个给定的(足够大的) $|\zeta|$ 值，(3)式各项的模开始是依次递减，直到一极小，随后增大。大致来说，如果对展开式取和到最小一项前面任何一项，则误差与第一个被略项同量级[①]。显然 $|\zeta|$ 越大，可达到的准确度越高。在物理应用中常常只要取第一项即已足够；举一个电磁理论的例子，有限光源分布的辐射场就是完全场离源距离反幂渐近展开式的首项。

现在来谈获得(1)式的 k 反幂级展开的方法。方法的基本要点是使它与下列形式的积分[②] 建立起关系：

$$\int_0^\infty h(\mu)e^{-k\mu^2}\,d\mu. \tag{5}$$

(5)式的渐近展开很容易导出，将 $h(\mu)$ 展成一个 μ 升幂级数并逐项积分即可得之。

最后这一点实际上就是 **Watson 引理**[③]的大意所在，该引理可陈述如下：设

$$h(\mu) = \frac{1}{\mu^\alpha}\sum_{s=0}^{\infty} c_s\mu^{\beta s}, \tag{6}$$

收敛半径为 ρ，式中 β 是正实数，并且 α 的实部小于 1。另设存在一个实数 d，可使 $\mu^a e^{-d\mu^2} h(\mu)$ 对于所有大于 ρ 的实 μ 值都是有界的，则积分(5)的渐近展开为

$$\frac{1}{2k^{\frac{1}{2}(1-\alpha)}}\left[c_0\Gamma\left(\frac{-\alpha+1}{2}\right) + c_1\Gamma\left(\frac{\beta-\alpha+1}{2}\right)\frac{1}{k^{\frac{1}{2}\beta}} + c_2\Gamma\left(\frac{2\beta-\alpha+1}{2}\right)\frac{1}{k^{\beta}}\right.$$
$$\left. + c_3\Gamma\left(\frac{3\beta-\alpha+1}{2}\right)\frac{1}{k^{\frac{3}{2}\beta}} + \cdots\right] \tag{7}$$

(式中 Γ 表示 Γ 函数)。

在具有物理重要性的情况，多半 α 将为零，β 将为 1。此外，如前所说，常常只要取(7)式第一项即足以提供一个令人满意的近似。

为了能够改变积分变量，以使(1)式表成为一个或多个(5)这种形式的积分，积分路线必须是要由数段组成，而且沿其各段 $f(z)$ 的虚部均为常数，实部则一路单调下降，直至 $-\infty$。如果不是这种情况，则首先要适当改变积分路线。当然，路线如何改变，要由复平面积分的基本法

---

① 关于这个误差的估计方法，见 H. and B. S. Jeffreys, *loc. cit.*, Chapter 17。

② 被积函数指数中选用 μ^2 而不用 μ 的一次幂(或某一其他)，这并无关紧要。偶数幂有方便之处，因为时常发生这种情况，(1)式中的积分路线起自无穷并止于无穷，其方式使得(1)式被变换到(5)式时可用 $-\infty$ 替代下限。

③ G. N. Watson, *Theory of Bessel Functions* (Cambridge, Cambridge University Press, 2nd edition, 1948), Chapter 8。也见 H. and B. S. Jeffreys, *loc. cit.*, Chapter 17。

则来决定;这里将仅仅说明如何能依靠分段方法选择[①] 到一条各段性质都合乎要求的积分路线,同时假设路线选定后任何有待计算的围道积分要留待标准方法设法解决。

关于 $f(z)$虚部为常数的积分路线,不管具体函数的性质如何,这里可做几点完全一般性的说明。这些说明将足以指明如何以符合所要的方式来连接复平面内的两点,虽然其方法可能会失效,如果 $f(z)$具有奇点的话。就目前情况而论,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}=0. \tag{8}$$

处的点起着特别重要的作用。这些点叫做**鞍点**(saddle-points),因为在这种点,$f(z)$的实部和虚部对复平面中的位置而言是稳定的,但不是绝对的极大或极小[②]。

现在如果将 $f(z)$分成实部和虚部写出,即令

$$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y) \tag{9}$$

则由柯西-黎曼关系不难证明,沿任何$v(x,y)$ = 常数的路线,$u(x,y)$的改变率只能在鞍点处为零。换句话说,在一条$v(x,y)$ = 常数且不通过鞍点的路线上,$u(x,y)$始终是严格单调的,而在一条$v(x,y)$ = 常数但通过一个或多个鞍点的路线上,$u(x,y)$在相邻两个鞍点之间以及从两端鞍点到路线相应终端都是严格单调的。事实上,从任何点出发,$u(x,y)$减小最快的方向是$v(x,y)$ = 常数所沿的方向,而所谓**最陡下降**路线就是指上述这种路线。如果 $f(z)$是单值的或者用分支切割(branch cut)使之单值,则可得知,从任何一点(x_0,y_0)出发,能够选择到一条$v(x,y)=v(x_0,y_0)$的路线,让它总是不断沿 $u(x,y)$减小方向而行,并终止在无穷远处或某一奇点处。不难看出,除在奇点外,一条$v(x,y)$ = 常数的路线只有在 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}z=0$ 所在之点出现岔口,即走向可多于一个。因此,一旦路线$v(x,y)=v(x_0,x_0)$起步方向正确,确保 $u(x,y)$减小,就不会出现歧途问题,除非途中遇到一个鞍点,在该情况下,至少有一个 $u(x,y)$减小的方向可供选用。

现在假定(1)式中的积分路线业已给定,两个端点为 A 和 B,并且假定能够找到分别始自 A 和 B 而终于无穷的最陡下降路线。如果这两条路线的无穷远终端在同一积分收敛区,则路线选择这一步即告完成。但是,如果这两个无穷远终端在不同的收敛区,则须用一条$v(x,y)$ = 常数的路线将其中一个终端与另一个终端连接起来,而且沿该一路线 $u(x,y)$的改变率仅改变一次正、负号(在某鞍点处),或者,如果必要的话,用几条这样的路线通过无穷远处的几个中间区域而连接之。对于所涉及的不同路线的每一条,都能得到一个(4)式这种广义的渐近展开,但原积分的真正渐近展开只是使 $u(x,y)$达到其最大值的那条路线所对应的渐近展开[③]。当各最陡下降路线终止于奇点时,可采用同样的说明。

应该注意,有一些情况超出适所概述方法的精确适用范围,然而通过对方法稍行修改即可加以处理。作为初步分析,可以先看(5)式中积分的上限如以任何正数(与 k 无关)代替,渐近

① 原文为"to choose a path,…",旧版则为"to close a path,…"(使路线成为闭合…)。从上下文判断,这一变动属于"修改"而非"版误",但亦无"一字之变,文意大改"之重。现按新版译出。顺便说明,围道积分(contour integral)一词,《数学名词》(1993)定名改为"周线积分"——译者注。

② 在复平面中,一个解析函数的实部和虚部没有绝对的极大或极小。

③ 当然,有可能能使 $u(x,y)$达到最大值的路线不止一条。

展开式(7)将保持不变。这样，上述方法也能处理这种情况，其中所包含的最陡下降路线是使 $u(x,y)$ 降至某一定值而非趋于 $-\infty$。再有，还能够采用一条这样的 $v(x,y)=$ 常数的路线，它可以通过一个以上这样的点，在这种点处 $u(x,y)$ 的改变率要改变正、负号。

或许，最陡下降法所适用的情况中最为常见的一种是，积分路线 $v(x,y)=$ 常数从某一鞍点出发，延展伸向无穷，而同时 $u(x,y)$ 一路单调[①]下降。这时，渐近展开式首项有一个众所周知的公式，可立即导之于下：假定该鞍点位于 z_0，并通过变换

$$f(z)=f(z_0)-\mu^2. \tag{10}$$

将(1)式中的积分变量由 z 改变为 μ，则(1)式变成

$$-2\mathrm{e}^{kf(z_0)}\int_0^{\infty}\frac{g(z)}{f'(z)}\mu\mathrm{e}^{-k\mu^2}\mathrm{d}\mu. \tag{11}$$

要获得(11)式渐近展开的首项，需要得到 $\mu=0(z=z_0)$ 处的 $\mu g(z)/f'(z)$ 值。假如 $f''(z_0)$ 不为零，$g(z_0)$ 不为无穷，则由(10)的 $f'(z)$ 及 $f(z)$ 的泰勒展开不难得知该值将为 $g(z_0)/\sqrt{-2f''(z_0)}$，其中平方根的正、负号须由审视每一具体情况而定。因此所求的近似为

$$\sqrt{-\frac{\pi}{2f''(z_0)}}g(z_0)\frac{\mathrm{e}^{kf(z_0)}}{\sqrt{k}}. \tag{12}$$

这里还应该对近似结果(12)需要补充或完全失效的情况谈上几句。当然，要获得全部渐近展开，须将(11)式中的 $\mu g(z)/f'(z)$ 展成 μ 的幂级数并进行逐项积分。如(7)式所示，渐近展开式首项中 k 的幂决定于 $\mu g(z)/f'(z)$ 级数展开式首项中 μ 的幂。如果此级数展开的首项为 $A\mu^{-p}$，其中 μ 须小于 1 以使积分收敛，则渐近展开式的首项为

$$-A\Gamma\left(\frac{-p+1}{2}\right)\frac{\mathrm{e}^{kf(z_0)}}{k^{\frac{1}{2}(1-p)}}. \tag{13}$$

因此，如果 $g(z_0)$ 为无穷或 $f''(z_0)$ 为零，则(12)式失效而须由(13)式取代。在这些情况下，当 k 趋于无穷时，$\exp[kf(z_0)]$ 的乘积因子趋于零的快度要小于 $k^{-1/2}$。如果 $g(z_0)=0$ 或 $f''(z_0)$ 为无穷，则(12)式并非不正确，而仅仅是表明这时当 k 趋于无穷时 $\exp[kf(z_0)]$ 的乘积因子趋于零的快度大于 $k^{-1/2}$。

如果积分路线是一条和前面一样伸向无穷的最陡下降路线，但起始点不是鞍点，则不难看出这时渐近展开式首项的非指数部分一般将正比于 k^{-1}，与(12)式的因子 $k^{-1/2}$ 差别明显。此外，纵使 $g(z)/f'(z)$ 在端点处是奇异的或为零，k 的幂也还是不同，而且与奇点和零点的阶有关。

以上所谈，就纯数学意义而言，包括了最陡下降法对渐近展开所给出的各项结果，相当全面，其中 k 可允许成为无限大，而其他参量则假定具有与 k 无关的规定值。但是如前所讲，渐近近似的形式依赖于某些特别条件，例如最陡下降路线是否起于鞍点。这就是说，它可能还依赖 k 以外的其他参量，其表现是当这些参量取某些临界值时，它呈跳跃式改变[②]。这样，对于任

① 严格地讲，最常见的情况是，积分路线起自无穷且止于无穷，而同时 $u(x,y)$ 先从 $-\infty$ 单调攀升到位于某鞍点处的极大，然后从该极大又单调下降到 $-\infty$。公式(12)在此情况仍然有效，只要乘以 2 即可，但为了更加便于随后的讨论，现取一条始于鞍点的路线。通常多将积分路线安排成始自或通过某一鞍点，因此之故最陡下降法有时叫做**鞍点法**。

② 这实质上是一个**非一致**收敛性问题。举一个平常的例子来说明：当 $k\to\infty$ 时，$1/(1+ka)\approx\begin{cases}1/ka, & \text{当 } a\neq 0\text{ 时},\\ 1, & \text{当 } a=0\text{ 时}.\end{cases}$

何**给定的** k 值,不论它如何大,如果其他参量之值**充分**接近会导致不同近似形式的那些临界值,上述各公式显然就不再能提供很好的数值近似。因此,实际需要能有更细致的表达式,以给出从一种渐近形式到另一种渐近形式的光滑过渡。这些表达式自然是比(13)式精确复杂的 k 的函数。但有三种情况值得一提,因为它们能够获得圆满处理。下面略述其要,其中每种情况只谈一个难题,不言而喻,是属于讨论中的一类特殊问题。

首先,假定 $f''(z_0)$ 趋近零。这时,(12)式只有对越来越大的 k 值才是一个良好的近似,并需要一个表达式来实现从(12)式到 $f''(z_0)=0$ 时相应不同形式的过渡。因为 $f''(z_0)$ 近乎零,所以在 z_0 附近必定存在另一个鞍点,设为 z_1。因此,所求的表达式通过作下列变换即可得到:

$$f(z)=\alpha-\beta\mu+\tfrac{1}{3}\mu^3,$$

式中

$$\alpha=\tfrac{1}{2}[f(z_1)+f(z_0)],\qquad \tfrac{2}{3}\beta^{\frac{3}{2}}=\tfrac{1}{2}[f(z_1)-f(z_0)].$$

该变换所给出的 z 在 z_0 和 z_1 附近是 μ 的正则函数,并且导致一个用爱里积分及其对自变量 $k\beta$ 的一阶微商来表示的渐近展开①。

其次,假定 $\mu g(z)/f'(z)$ 的 μ 幂级数展开式所具的收敛半径由于 $g(z)$ 具有一个接近鞍点的单极点而趋近零。这时,(12)式仍然只有对越来越大的 k 值才是一个良好的近似,并需要一个表达式来实现从(12)式到该极点正位于鞍点时相应不同形式的过渡。这种情况曾被许多著者处理过②。办法是将被积函数的非指数部分写成两项之和,一项含有极点,另一项则为正则。因此后者可用通常方法来处理,而前者给出一个菲涅耳积分或误差积分,其自变量一般为复数。

最后,假定最陡下降路线的起点不是鞍点,而是非常逼近一个鞍点。在此情况下,显然误差积分仍然能够用来连接两种渐近形式③。

C.2 稳定相法④

这是另一种可供选择的方法,虽然它与最陡下降法非常相似。这种方法在解析上虽然可能有欠普遍,也不那么立即令人信服,但它常常表现出更为联系物理问题的优点。这时将所考虑的积分写成

$$\int g(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kf(z)}\,\mathrm{d}z \tag{14}$$

的形式,比(1)式更为合宜,并且在实际问题中指数因子通常代表一行波。

---

① 爱里积分在这种一致近似中的作用早已为人所识(见,例如 H. and B. S. Jeffreys, *loc. cit.*, Chapter 17),但只是较近才完全探索出令人满意的方法,其要点如文中所述(见 C. Chester, B. Friedman and F. Ursell, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **53** (1957), 599)。

② W. Pauli, *Phys. Rev.*, **54**(1938), 925。H. Ott, *Ann. d. Physik*(5), **43**(1943), 393。P. C. Clemmow, *Quart. J. Mech. Appl. Maths.*, **3**(1950), 241; *Proc. Roy. Soc.*, A, **205**(1951), 286。B. L. van der Waerden, *Appl. Sci. Res., Hague*, B, **2**(1952), 33。

③ P. C. Clemmow, *Quart. J. Mech. Appl. Maths.*, **3**(1950), 241。

④ 关于单积分和重积分渐近展开的稳定相法,更为详细的讨论见 L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge, Cambridge University Press, 1995), Sec. 3.3。

沿用(9)式符号，所取积分路线为$v(x,y)=$常数，但在(14)式中这意味着指数因子的振幅部分沿该路线为常数，而位相部分改变最快，情况与最陡下降法相反。这时仍然能够确定路线中只有鞍点或端点附近地段才对积分产生显著贡献，但是在物理上对其发生机理的说明则是着眼于"位相干涉"[见 8.3 节，355 页]而非振幅衰减。

很明确，稳定相法系首先由开尔文(Lord Kelvin)所引进[①]。严格的足以证明上文陈述正确的数学处理则是由 Watson[②] 随后给出；该处理所根据的事实是，如果$0<m<1$，a 为正的常数，且$F(x)$在 $x\geqslant 0$ 范围的涨落是受限制的，则当 $k\to\infty$ 时[③]

$$k^m\int_0^a x^{m-1}F(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\to F(0)\Gamma(m)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}m\pi}$$

然而，Watson 的讨论的适用范围颇为局限。特别是，它似乎不能导致完全的渐近展开。这一展开后由 Focke[④] 颇为详细地给出，他讨论的情况是 $f(z)$ 为一实函数，积分路线限于实轴。Focke 利用了一种中性函数——van der Corput 较早提出的一种方法[⑤]。

从稳定相法推演所求，其方式和结果与最陡下降法情况极其相像。例如，当(14)式中的积分路线始自 z_0 处某一鞍点并沿$v(x,y)=$常数延伸到无穷而途中不遇到另外鞍点时，则对应(12)式的近似为

$$\sqrt{-\frac{\pi}{2f''(z_0)}}g(z_0)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kf(z_0)}}{\sqrt{k}}.\tag{15}$$

但是两种方法之间存在一些差别的一个方面也应予注意。对于一条始于一鞍点但不通向无穷的最陡下降路线，路线终点对严格渐近展开的贡献与该鞍点的贡献相比，由于它多含的振幅指数因子而可忽略不计。与此相反，对于一条同样的稳定相路线，路线终点的贡献一般是鞍点贡献的量级而只除以 $k^{-1/2}$；因此，只有当仅保留渐近展开首项时，终点贡献才可予舍弃。

概括起来说，最陡下降法和稳定相法，撇开其数学表示不谈，都依赖将积分路线选取成使被积函数由于其指数因子关系只在某些**临界点**附近才对积分有贡献，而其他各处皆可忽略不计，这些临界点或为鞍点，或为积分路线之端点。

C.3　二重积分

8.3 和 9.1 两节中曾证明，小孔衍射场问题导致了一个二重积分，形式如下：

$$\iint g(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kf(x,y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\tag{16}$$

式中 $g(x,y)$和 $f(x,y)$与 k 无关，积分区则由小孔决定。显然(16)和(14)两式是类似的，因而当 k 值很大时其近似结果可同样由渐近展开来提供。

二重积分渐近展开的理论自然要比单积分复杂。复平面积分方法只能直接用于单积分，

① W. Thomson, *Proc. Roy. Soc.*, A, **42**(1887), 80。

② G. N. Watson, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **19**(1918), 49。

③ 这一结果取自 T. J. I'A. Bromwich, *An Introduction to the Theory of Infinite Series* (London, Macmillan, 1908), p. 447。

④ J. Focke, *Ber. Stichs. Ges.* (*Akad.*) *Wiss.*, **101**(1954), Heft 3。

⑤ J. G. van der Corput, *Indag. Math.*, **10**(1948), 201。

所以看来二重积分展开问题的解决途径与本附录前几页所阐明的方法须有所不同。

Focke[①] 采用中性函数概念,对 $f(x,y)$ 为实函数的情况做了全面讨论,这篇论文在前面谈到该概念对单积分的应用时已然提及。其分析再次证明,对渐近展开的贡献只是来自**临界点**附近的地区,并且不同类型的临界点在其各自的贡献中产生不同的 k 幂[②]。

有三种临界点。它们对渐近展开的分别贡献现简短讨论于下,同一临界点兼备几种性质的情况除外。

第一类临界点是积分域内的一个点,在该点处

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0. \tag{17}$$

因此在该临界点[比如说(x_0,y_0)]附近

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\tfrac{1}{2}\alpha(x-x_0)^2+\tfrac{1}{2}\beta(y-y_0)^2+\gamma(x-x_0)(y-y_0)+\cdots, \tag{18}$$

式中 $\alpha=\partial^2 f/\partial x^2$, $\beta=\partial^2 f/\partial y^2$, $\gamma=\partial^2 f/\partial x\partial y$,所有偏微商均取在$(x_0,y_0)$。现在选取某些新积分变量 ξ,η,使

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\tfrac{1}{2}\alpha\xi^2+\tfrac{1}{2}\beta\eta^2+\gamma\xi\eta. \tag{19}$$

这时所求的(16)式的渐近近似为

$$g(x_0,y_0)e^{ikf(x_0,y_0)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{1}{2}ik(\alpha\xi^2+\beta\eta^2+2\gamma\xi\eta)}\,d\xi\,d\eta=\frac{2\pi i\sigma}{\sqrt{|\alpha\beta-\gamma^2|}}g(x_0,y_0)\frac{e^{ikf(x_0,y_0)}}{k}, \tag{20}$$

式中平方根取正[③],且

$$\sigma=\begin{cases}+1, & \alpha\beta>\gamma^2,\ \alpha>0,\\ -1, & \alpha\beta>\gamma^2,\ \alpha<0,\\ -i, & \alpha\beta<\gamma^2.\end{cases} \tag{21}$$

表达式(20)是二重积分情况下与单积分渐近近似(15)对应的类似式。

第二类临界点是积分域周界曲线上的一些点,在这些点处$\partial f/\partial s=0$,其中 ds 是周界曲线上的一段圆弧。这种点对渐近展开的贡献,在其首项的非指数部分中,k 的幂是 $k^{-3/2}$,不同于(20)式中的因子 k^{-1}。

最后,**第三类临界点**是积分域周界曲线的角点,即该曲线斜率不连续处的点。在这种情况下,相应的因子是 k^{-2}。

---

① J. Focke, *loc. cit*。又见 D. S. Jones and M. Kline, *J. Math. Phys.*, **37**(1958), 1; N. Chako, *J. Inst. Maths Applics*, **1**(1965), 372; M. Kline and I. W. Kay, *Electromagnetic Theory and Geometrical Optics*(New York, Interscience Publishers, 1965), Chapt. XII。

② J. G. van der Corput, *Indag. Math.*, **10**(1948), 201 一文对二重积分的临界点有简短讲述; N. G. van Kampen, *Physica*, **14**(1949), 575 一文指出了这些点对光学的定性意义。

③ 平方根号下的项有一个简单的几何解释。考虑曲面 $z=f(x,y)$。设 R_1 和 R_2 是其某样点处的主曲率半径,$K=1/R_1R_2$ 是相应的高斯曲率,则[见,例如 G. Salmon, *Analytic Geometry of Three Dimensions*, Vol. I, revised by R. A. P. Rogers(London, Longmans, Green & Co., 5th edition, 1912), p. 411]

$$K=\frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2},$$

式中 $f_x=\partial f/\partial x$, $f_{xx}=\partial^2 f/\partial x^2$,等等。在第一类临界点处,$f_x=f_y=0$, $f_{xx}=\alpha$,等等,因而该式简化成

$$K=\alpha\beta-\gamma^2.$$

附录 D　狄拉克 δ 函数

这一附录的目的是概括 δ 函数[①] 的主要性质。这个函数对代表点源、点电荷等非常有用，在量子力学以及经典应用数学中广为使用，可用下列方程来定义：

$$\left.\begin{aligned} &\delta(x)=0, \quad \text{当 } x\neq 0 \text{ 时}, && \text{(a)}\\ &\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1. && \text{(b)} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

显然，$\delta(x)$不是普通数学意义上的函数[②]，因为如果一个函数除在一点外处处为零，而其积分存在，则积分的值也必要等于零。因此将 $\delta(x)$看成为一个具有某种符号意义的量更为适当。

考虑一个这样的函数集 $\delta(x,\mu)$，它随着 μ 的不断增大只在原点左右越来越小的 x 区间显著异于零，并对于所有 μ 值具有如下性质：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x,\mu)\mathrm{d}x=1. \tag{2}$$

例如函数(见图 8)

$$\delta(x,\mu)=\frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\mu^2x^2}. \tag{3}$$

一个动人的想法是把狄拉克 δ 函数解释成(3)这一类函数集在 $\mu\to\infty$ 时的极限，但是必须注意 $\delta(x,\mu)$的极限并不需要对所有 x 都存在。然而

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x,\mu)\mathrm{d}x \tag{4}$$

务必存在且等于 1。**我们将任何含 $\delta(x)$的操作解释成是指该项操作须要用一个经过适当选择、像(3)这样的函数集 $\delta(x,\mu)$来执行，并于计算结束时取极限 $\mu\to\infty$。**以此解释观之，(1b)式显然可成立。函数 $\delta(x,\mu)$的确切选择并不重要，只要它们在原点附近的振荡(如果有的话)不太激烈。

狄拉克 δ 函数的一个重要性质是所谓**筛选特性**，由下列关系式来表示：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-a)\mathrm{d}x=f(a). \tag{5}$$

---

① 又称**脉冲函数**(impulse function)。它因狄拉克《量子力学》一书而名声鹊起，但很早以前，主要由于 O. Heaviside 的著述，已为众数学家和物理学家所知。见 B. van der Pol and H. Bremmer, *Operational Calculus Based on the Two-Sided Laplace Integral* (Cambridge, Cambridge University Press, 1950), pp. 62-66。

② δ 函数理论可通过采用广义函数概念而在数学上臻于严格，该项工作出自 Schwartz，见其 *Théorie des distributions* [Paris, Hermann et Cie., Vol. I(1950), Vol. II(1951)]。Schwartz 理论的一种简化讲法出自 G. Temple, *Proc. Roy. Soc.*, A, **228** (1955), 175，在 M. J. Lighthill, *An Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions* (Cambridge, Cambridge University Press, 1958)一书中有完全的介叙。

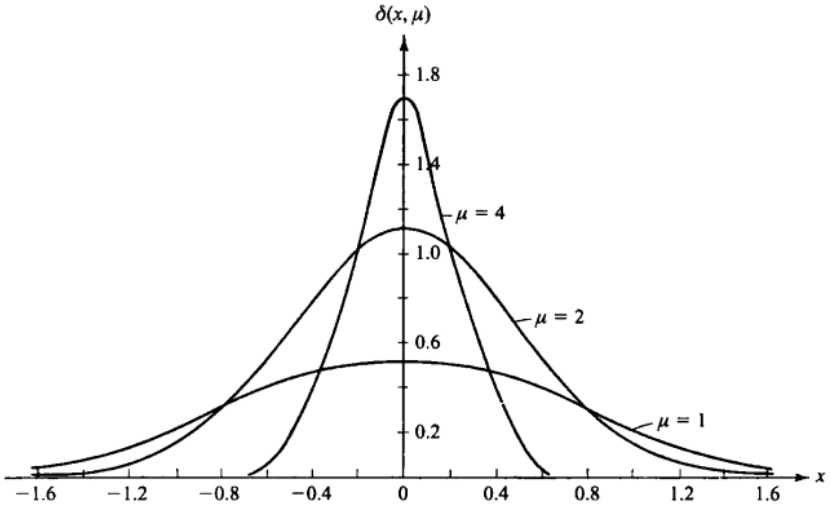


图 8 狄拉克 δ 函数的意义图示。函数

$$\delta(x,\mu)=\frac{\mu}{\sqrt{\pi}}e^{-\mu^2x^2}\ \text{对于}\ \mu=1,2,4.$$

各曲线下的总面积均为 1

这里 $f(x)$是 x 的任何连续函数。(5)式的正确性可立即得见,只要将 $\delta(x-a)$易为 $\delta(x-a,\mu)$并审察 μ 值很大时积分的行为。显然,当 μ 很大时,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-a,\mu)\mathrm{d}x \tag{6}$$

基本上只取决于点 $x=a$ 毗邻地区的 $f(x)$之值,并且以 $f(a)$取代 $f(x)$时所导致的误差可通过把 μ 取得足够大而使之可以忽略。随后应用(1b)即得到(5)式。这一结果意味着,以 $\delta(x-a)$乘一连续函数 $f(x)$并遍及所有 x 值进行积分,其过程等效于以 a 替代该函数的自变量。实际上为使该结果成立,积分范围无需取 $-\infty$ 到 $+\infty$,只要积分域内包含点 $x=a$ 即可。该结果用符号形式表示时也写成为

$$f(x)\delta(x-a)=f(a)\delta(x-a), \tag{7}$$

这种关系式的含义是,当两边被作为因子用在同一积分中时所给出的结果相同。特别是,对 $f(x)=x$, $a=0$,(7)式给出

$$x\delta(x)=0. \tag{8}$$

采用同样的释意可不难证明下列关系[①]:

$$\delta(-x)=\delta(x), \tag{9}$$

① 公式(9)~(11)是下列更一般的关系式的特别情况:

$$\delta[f(x)]=\sum_i\frac{1}{|f'(x_i)|}\delta(x-x_i),$$

式中 x_i 是 $f(x)$的零点,即 $f(x_i)=0$。

$$\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x), \tag{10}$$

$$\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2|a|}[\delta(x-a)+\delta(x+a)], \tag{11}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(a-x)\delta(x-b)\mathrm{d}x=\delta(a-b). \tag{12}$$

例如，为证明(10)式，现比较 $f(x)\delta(ax)$ 和 $f(x)(1/|a|)\delta(x)$ 的积分。一个导致

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(ax)\mathrm{d}x=\pm\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{y}{a}\right)\delta(y)\frac{1}{a}\mathrm{d}y=\frac{1}{|a|}f(0),$$

式中第二个积分前取正还是取负视 $a\gtrless 0$ 而定；另一个也导致

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\frac{1}{|a|}\delta(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{|a|}f(0)$$

其中利用了(5)式。可见这两个积分的结果相等，这就是(10)式的含义所在。类此，(12)式意指，如果两边乘以 a 或 b 的一个连续函数并遍及所有 a 值或 b 值进行积分，则得到一恒等式。

其次来看看 δ 函数的**微商**可作何解释。采用“近似函数”$\delta(x,\mu)$，进行分部积分，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta'(x,\mu)\mathrm{d}x=f(\infty)\delta(\infty,\mu)-f(-\infty)\delta(-\infty,\mu)-\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)\delta(x,\mu)\mathrm{d}x.$$

下一步取 $\mu\to\infty$ 时的极限，则右边前两项消失，由而得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta'(x)\mathrm{d}x=-f'(0). \tag{13}$$

不断重复这一过程即可求得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta^{(n)}(x)\mathrm{d}x=(-1)^n f^{(n)}(0). \tag{14}$$

另外不难证明下列关系：

$$\delta'(-x)=-\delta'(x), \tag{15}$$

$$x\delta'(x)=-\delta(x). \tag{16}$$

为便于运算，常将狄拉克 δ 函数用 **Heaviside 单位函数**（又称**阶梯函数**）$U(x)$ 来表示，后者定义如下：

$$\left.\begin{aligned}U(x)&=0, \quad x<0,\\ &=1, \quad x>0.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

如果同前以一撇表示对自变量 x 的微商，则通过分部积分即可在形式上得到（其中 $x_1>0, x_2>0$）

$$\begin{aligned}\int_{-x_1}^{x_2}f(x)U'(x)\mathrm{d}x&=[f(x)U(x)]_{-x_1}^{x_2}-\int_{-x_1}^{x_2}f'(x)U(x)\mathrm{d}x\\ &=f(x_2)-\int_0^{x_2}f'(x)\mathrm{d}x\\ &=f(x_2)-f(x_2)+f(0)\\ &=f(0).\end{aligned}$$

如令 $x=y-a, f(x)=f(y-a)=F(y)$并继续下去取极限 $x_1\to\infty, x_2\to\infty$,则上式变成

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(y)U'(y-a)\mathrm{d}y=F(a),$$

所以 U'具有筛选特性。特别是,对于 $F\equiv1, a=0$,这一关系式即变成

$$\int_{-\infty}^{+\infty}U'(y)\mathrm{d}y=1,$$

并证明 U'满足(1b)形式的关系。此外当 $x\neq0$ 时 $U'(x)=0$.因此我们可以将单位函数的微商与 δ 函数等同起来:

$$\delta(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}U(x). \tag{18}$$

δ 函数还可以借助傅里叶积分定理

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-a)}\mathrm{d}x. \tag{19}$$

来引进。如果令

$$K(x-a,\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\mu}^{\mu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-a)}\mathrm{d}k=\frac{\sin\mu(x-a)}{\pi(x-a)} \tag{20}$$

并调换积分先后次序,则(19)式在形式上可写成

$$f(a)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)K(x-a)\mathrm{d}x, \tag{21}$$

式中 $K(x-a)$被看成是 $K(x-a,\mu)$在 $\mu\to\infty$时的极限。严格地讲,当 $x-a\neq0$ 时,该极限在通常的意义上并不存在[①],但(21)式和前面所讨论的积分一样,具有相同的符号意义,即应该解释为是指

$$f(a)=\lim_{\mu\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)K(x-a,\mu)\mathrm{d}x. \tag{22}$$

这样,K 具有筛选特性。如令(21)中 $f(x)=1$,则可知 $K(x)$对所有 x 的积分等于1。因此我们就得到狄拉克 δ 函数的另一种表示,即

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k, \tag{23}$$

这就是说,$\delta(x)$可以看成是1的傅里叶变换。有一个倒易关系,由(21)式令其中 $f(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$, $a=0$,即可得之,结果如下:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x=1. \tag{24}$$

此前一直只考虑一维空间,但其定义可不难推广到多维空间,特别是三维空间。这时函数

① 如果以 Cesàro 极限的意义来诠释,则该极限存在并且其值为零(见 B. van der Pol and H. Bremmer, *loc. cit.*, pp. 100–104)。

$$\delta(x, y, z) = \delta(x)\delta(y)\delta(z), \tag{25}$$

也常以 $\delta(\mathbf{r})$来代表,式中 $\mathbf{r}$ 是分量为 x, y, z 的矢量。显然它满足与(1)式类似的关系式

$$\left.\begin{aligned} &\delta(x, y, z) = 0, \text{ 当 } x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0 \text{ 时} \quad \text{(a)} \\ &\iiint_{-\infty}^{+\infty} \delta(x, y, z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 1. \quad \text{(b)} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

筛选特性现在由关系式

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z)\delta(x-a, y-b, z-c)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = f(a, b, c), \tag{27}$$

来表示,并且 $\delta(x, y, z)$满足傅里叶倒易关系

$$\delta(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_x x + k_y y + k_z z)}\,\mathrm{d}k_x\,\mathrm{d}k_y\,\mathrm{d}k_z, \tag{28}$$

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \delta(x, y, z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x x + k_y y + k_z z)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 1. \tag{29}$$

附录 E　洛伦兹-洛伦茨定律严格推导所用的一个数学引理(2.4.2 节)

这一附录将建立 2.4 节中所用的一个引理,根据这个引理,当 $a\to 0$ 时

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl}\int_{\sigma}^{\Sigma}\mathbf{Q}(\mathbf{r}')G(R)\mathrm{d}V'\to\int_{\sigma}^{\Sigma}\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{Q}(\mathbf{r}')G(R)\mathrm{d}V'+\frac{8\pi}{3}\mathbf{Q}(\mathbf{r}),\tag{1}$$

式中 $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$是一个任意的位置函数,而 $G(R)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}/R$。积分所取的体积范围,其外周界是一个曲面 Σ,内周界则是一个小球球面 σ,其半径为 a,中心在位置矢量 $\mathbf{r}(x,y,z)$所指定的 P 点。R 代表距离 $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$,其中 $\mathbf{r}'(x',y',z')$是典型体积元 $\mathrm{d}V'$所在点的位置矢量。

设 $\mathbf{A}$ 是一个任意的位置的矢量函数。curl curl $\mathbf{A}$ 的分量为

$$(\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{A})_x=\frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2},$$

其他类推,所以

$$\left(\operatorname{curl}\operatorname{curl}\int_{\sigma}^{\Sigma}\mathbf{Q}G\,\mathrm{d}V'\right)_x=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\int_{\sigma}^{\Sigma}Q_yG\,\mathrm{d}V'+\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}\int_{\sigma}^{\Sigma}Q_zG\,\mathrm{d}V'-\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\int_{\sigma}^{\Sigma}Q_xG\,\mathrm{d}V'.\tag{2}$$

另外,对于任何可微分的标量函数 $F(\mathbf{r},\mathbf{r}')$,有

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma}^{\Sigma}F\,\mathrm{d}V'=\int_{\sigma}^{\Sigma}\frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}V'+\operatorname*{Lim}_{\delta x\to 0}\frac{1}{\delta x}\left(\int_{\sigma'}^{\Sigma}F\,\mathrm{d}V'-\int_{\sigma}^{\Sigma}F\,\mathrm{d}V'\right),\tag{3}$$

式中 σ'代表另一个小球面,半径亦为 a,但中心在点 $T(x+\delta x,y,z)$。为了计算(3)式中的极限,我们注意到其中两个积分之差代表来自图 9 中两个阴影线区域的贡献。其中体积元的形式可表成为 $\delta V'=-\delta S'\times\delta x\times\rho_x$,式中 $\delta S'$是面元,ρ_x 是单位径向矢量 $\boldsymbol{\rho}$ 从 P 点指向外的 x 分量。因此

$$\operatorname*{Lim}_{\delta x\to 0}\frac{1}{\delta x}\left(\int_{\sigma'}^{\Sigma}F\,\mathrm{d}V'-\int_{\sigma}^{\Sigma}F\,\mathrm{d}V'\right)=-\int_{\sigma}F\rho_x\,\mathrm{d}S'.\tag{4}$$

如果令 $F=Q_j(\mathbf{r})G(R)$,其中 $Q_j(j=x,y$ 或 $z)$是 $\mathbf{Q}$ 的任何一个笛卡儿分量,则从(3),(4)两式得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma}^{\Sigma}(Q_jG)\mathrm{d}V'=\int_{\sigma}^{\Sigma}\frac{\partial}{\partial x}(Q_jG)\mathrm{d}V'-\int_{\sigma}(Q_jG)\rho_x\,\mathrm{d}S'.\tag{5}$$

接下来,考虑二阶偏微商。取(5)式对 x 的微分并再次使用(5)式,由此得出

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{\sigma}^{\Sigma}(Q_jG)\mathrm{d}V'=\int_{\sigma}^{\Sigma}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(Q_jG)\mathrm{d}V'-\int_{\sigma}\frac{\partial}{\partial x}(Q_jG)\rho_x\,\mathrm{d}S'-\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma}(Q_jG)\rho_x\,\mathrm{d}S'.\tag{6}$$

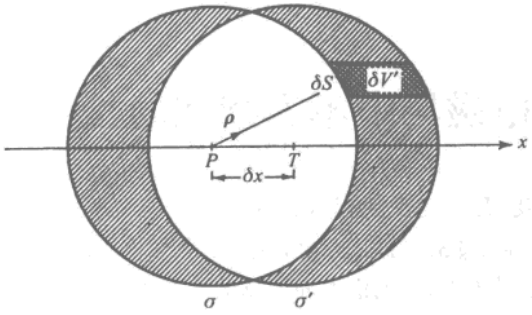


图 9　$\lim\limits_{\delta x\to 0}\dfrac{1}{\delta x}\left[\int_{\sigma'}^{\Sigma}F\,\mathrm{d}V'-\int_{\sigma}^{\Sigma}F\,\mathrm{d}V'\right]$ 的计算。σ 的中心位于 $P(x,y,z)$，σ' 的中心位于 $T(x+\delta x,y,z)$

因为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}R}\frac{\partial R}{\partial x}=-\rho_x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}=\rho_x\left(\frac{1}{R}-\mathrm{i}k\right)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R},\\ &\text{并且}\\ &\mathrm{d}S'=a^2\,\mathrm{d}\Omega,\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

式中 $\mathrm{d}\Omega$ 为元立体角，由此可知

$$\begin{aligned}\int_\sigma\frac{\partial}{\partial x}(Q_jG)\rho_x\,\mathrm{d}S'&=\int_\sigma\rho_xQ_j\frac{\partial G}{\partial x}\,\mathrm{d}S'\\&=\int_\Omega\rho_x^2Q_j\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka}(1-\mathrm{i}ak)\mathrm{d}\Omega\to\frac{4\pi}{3}Q_j(\mathbf{r})\quad\text{当}a\to0\text{时},\end{aligned}\tag{8}$$

其中 Ω 代表单位球的表面。(6)式中最后一个积分随 a 趋于零，所以当 $a\to0$ 时，得到

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_\sigma^\Sigma(Q_jG)\mathrm{d}V'\to\int_\sigma^\Sigma\frac{\partial^2}{\partial x^2}(Q_jG)\mathrm{d}V'-\frac{4\pi}{3}Q_j(\mathbf{r}).\tag{9}$$

混合二阶偏微商可以按照同一方法来计算，并且得到，例如

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\int_\sigma^\Sigma(Q_jG)\mathrm{d}V'\to\int_\sigma^\Sigma\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}(Q_jG)\mathrm{d}V'.\tag{10}$$

这时不存在 $-(4\pi/3)Q(\mathbf{r})$ 项，因为与(8)式对应的积分为

$$\int_\sigma\frac{\partial}{\partial x}(Q_jG)\rho_y\,\mathrm{d}S'=\int_\Omega\rho_x\rho_yQ_j(1-\mathrm{i}ak)\mathrm{d}\Omega,$$

而此式随 a 趋于零。

将(9)和(10)这种形式的方程代入(2)式，即求出

$$\left[\operatorname{curl}\operatorname{curl}\int_\sigma^\Sigma(\mathbf{Q}G)\mathrm{d}V'\right]_x\to\left[\int_\sigma^\Sigma\operatorname{curl}\operatorname{curl}(\mathbf{Q}G)\mathrm{d}V'\right]_x+\frac{8\pi}{3}Q_x.\tag{11}$$

y 分量和 z 分量方面也可以得到同样的表达式。将这三个式子合并成矢量形式，即得到(1)式。

附录 F　电磁场中不连续态的传播(3.1.1 节)

3.1.3 节中曾经提及,几何光学的程函方程等同于描写电磁场中不连续态传播的方程。更广地说,在几何光学方面,§3.1(11a)~(14a)这 4 个方程支配着与几何光线相关联的电磁场的行为,而在波场的运动方面,在前沿波面即场的一个不连续处(不妨称为场的不连续态),场矢量之间的关系也存在 4 个方程,并可证明前者与后者等同。本附录的目的就是来演证这一数学上的等同性。

F.1　各场矢量中不连续变化的相互关系

在 1.1.3 节中我们考虑了各场矢量中的不连续状况,该种不连续起源于物质参量 ϵ 和 μ 在空间的突变处(例如透镜某一表面)。场的不连续还可起源于完全不同的其他原因,亦即由于光源突然开始辐射。然后,场向光源周围空间散播开来,并且随着时间的增加而充满越来越大的区域。在该区域的界面处,场有一个不连续,在该区域内场矢量一般是有限的而在该区域外则为零。我们将首先建立某些适用于场不连续处任何曲面的一般关系。为简单计,假定在 $t>0$ 的任何时刻,只有一个这样的曲面;但不难推广到有几个不连续曲面[①](这些面可起源于例如媒质中各障碍物的反射)。

设 $F(x,y,z,t)=0$ 是任何一个曲面,而且在该处场矢量至少有一个是不连续的。如果这个曲面固定在空间中,F 当然不依赖于 t。曲面任一边的点分别由不等式 $F<0$ 和 $F>0$ 来区别。设 $\mathbf{E}$ 为电矢量,并设

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}(x,y,z,t)&=\mathbf{E}^{(1)}(x,y,z,t),\quad \text{当 } F(x,y,z,t)<0\text{ 时},\\ &=\mathbf{E}^{(2)}(x,y,z,t),\quad \text{当 } F(x,y,z,t)>0\text{ 时}.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

于是 $\mathbf{E}$ 可以写成下列形式:

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}^{(1)}U(-F)+\mathbf{E}^{(2)}U(F),\tag{2}$$

式中 U 为 Heaviside 单位函数[见附录 D(17)式]。

现在采用(2)式的表示法来推导麦克斯韦方程中所含 curl $\mathbf{E}$, div $\mathbf{E}$, $\partial\mathbf{E}/\partial t$ 等量的表达形式。为了对包含一个不连续因子的和或积进行微分,我们应用通常微分法则并利用附录 D 的关系式(18),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}U(x)=\delta(x),\tag{3}$$

式中 δ 是狄拉克 δ 函数。这样从(2)式可有

---

① discontinuity surface 一词无规范译名。这里为简便计译为"不连续曲面",其确切含义可从上下文推知,当不致误解——译者注。

$$\operatorname{curl}\mathbf{E} = U(-F)\operatorname{curl}\mathbf{E}^{(1)} + U(F)\operatorname{curl}\mathbf{E}^{(2)} + [\operatorname{grad}U(-F)]\times\mathbf{E}^{(1)} + [\operatorname{grad}U(F)]\times\mathbf{E}^{(2)}. \tag{4}$$

现在

$$\operatorname{grad}U(-F) = -\operatorname{grad}U(F) = -\frac{\mathrm{d}U(F)}{\mathrm{d}F}\operatorname{grad}F = -\delta(F)\operatorname{grad}F, \tag{5}$$

并由(4),(5)两式得到

$$\operatorname{curl}\mathbf{E} = U(-F)\operatorname{curl}\mathbf{E}^{(1)} + U(F)\operatorname{curl}\mathbf{E}^{(2)} + \delta(F)\operatorname{grad}F\times(\Delta\mathbf{E}), \tag{6}$$

式中

$$\Delta\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(2)} - \mathbf{E}^{(1)}. \tag{7}$$

用同样的方法可求得

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = U(-F)\operatorname{div}\mathbf{E}^{(1)} + U(F)\operatorname{div}\mathbf{E}^{(2)} + \delta(F)\operatorname{grad}F\cdot\Delta\mathbf{E}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = U(-F)\frac{\partial\mathbf{E}^{(1)}}{\partial t} + U(F)\frac{\partial\mathbf{E}^{(2)}}{\partial t} + \delta(F)\frac{\partial F}{\partial t}\Delta\mathbf{E}. \tag{9}$$

现在将(6),(8),(9)三式和有关其他场矢量的类似表达式代入麦克斯韦方程 § 1.1(1) ~ (4),并设其中 $\mathbf{j}=\rho=0$。带上标(1)的各项相互消去,带上标(2)的各项也相互消去,因为不连续曲面任一边的场各自满足麦克斯韦方程。剩下的**项给出场矢量中不连续变化 $\Delta\mathbf{E},\Delta\mathbf{H}$ 等的相互关系**如下:

$$\operatorname{grad}F\times\Delta\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t}\Delta\mathbf{D} = 0, \tag{10}$$

$$\operatorname{grad}F\times\Delta\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t}\Delta\mathbf{B} = 0, \tag{11}$$

$$\operatorname{grad}F\cdot\Delta\mathbf{D} = 0, \tag{12}$$

$$\operatorname{grad}F\cdot\Delta\mathbf{B} = 0. \tag{13}$$

值得注意的是,这些方程在形式上可由麦克斯韦方程经以下代换而得到:以差值 $\Delta\mathbf{E},\Delta\mathbf{H},\Delta\mathbf{D},\Delta\mathbf{B}$ 分别替代矢量 $\mathbf{E},\mathbf{H},\mathbf{D},\mathbf{B}$,而以乘性算符 $(1/|\operatorname{grad}F|)\partial F/\partial x$,$(1/|\operatorname{grad}F|)\partial F/\partial y$,$(1/|\operatorname{grad}F|)\partial F/\partial z$,$(1/\operatorname{grad}F)\partial F/\partial t$ 分别替代微分算符 $\partial/\partial x,\partial/\partial y,\partial/\partial z,\partial/\partial t$。

设 $\mathbf{n}_{12}$ 为不连续曲面的法向单位矢量,从区域 $F<0$(附标 1)指向区域 $F>0$(附标 2),

$$\mathbf{n}_{12} = \frac{\operatorname{grad}F}{|\operatorname{grad}F|}. \tag{14}$$

此外引进不连续曲面的前进速度 v。为此,设从不连续曲面 $F(x,y,z,t)=0$ 上某点到相邻不连续曲面上某点引一个小位移 $\delta\mathbf{r}(\delta x,\delta y,\delta z)$,时间相应改变 Δt,则 δr 和 δt 满足

$$\operatorname{grad}F\cdot\delta\mathbf{r} + \frac{\partial F}{\partial t}\delta t = 0. \tag{15}$$

特别来说,对于沿法线方向的位移,$\delta\mathbf{r} = \delta s\,\mathbf{n}_{12}$,所以速度 v 由下式给出:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{|\operatorname{grad}F|}\frac{\partial F}{\partial t}. \tag{16}$$

因而关系式(10)～(13)也可写成如下形式[①]:

$$\mathbf{n}_{12}\times\Delta\mathbf{H}+\frac{v}{c}\Delta\mathbf{D}=0, \tag{10a}$$

$$\mathbf{n}_{12}\times\Delta\mathbf{E}-\frac{v}{c}\Delta\mathbf{B}=0, \tag{11a}$$

$$\mathbf{n}_{12}\cdot\Delta\mathbf{D}=0, \tag{12a}$$

$$\mathbf{n}_{12}\cdot\Delta\mathbf{B}=0. \tag{13a}$$

如果场矢量中的不连续起源于物质参量 ε 和 μ 的空间突变,其所在曲面 $F(x,y,z)=0$ 固定在空间,则 $v=0$,因而(10a)～(13a)各式分别化为 §1.1(25), §1.1(23), §1.1(19)和 §1.1(15)(其中取 $\mathbf{j}=\rho=0$)。

F.2 运动不连续面处的场

现在考虑电磁场中一个运动的不连续曲面,系因存在一个光源并突然开始发射而形成。我们将该曲面表示成如下形式:

$$F(x,\ y,\ z,\ t)\equiv\mathcal{S}(x,\ y,\ z)-ct=0, \tag{17}$$

式中 c 是真空中的光速。不连续曲面处的场矢量将用小写字母来代表,即

$$\mathbf{e}(x,\ y,\ z)=\mathbf{E}\left[x,\ y,\ z,\frac{1}{c}\mathcal{S}(x,\ y,\ z)\right], \tag{18}$$

其他场矢量的表达式与此类似。在该运动曲面以外区域[比如 $F(x,y,z,t)>0$],没有场,所以按照(1)式和(7)式 $\Delta\mathbf{E}=-\mathbf{E}^{(1)}=-\mathbf{e}$,其余类推。另外,物质方程 §1.1(10), §1.1(11)给出[②] $\mathbf{d}=\varepsilon\mathbf{e}$, $\mathbf{b}=\mu\mathbf{h}$;如果用以上这些关系代入,则(10)～(13)式变成

$$\operatorname{grad}\mathcal{S}\times\mathbf{h}+\varepsilon\mathbf{e}=0, \tag{19}$$

$$\operatorname{grad}\mathcal{S}\times\mathbf{e}-\mu\mathbf{h}=0, \tag{20}$$

$$\operatorname{grad}\mathcal{S}\cdot\mathbf{e}=0, \tag{21}$$

$$\operatorname{grad}\mathcal{S}\cdot\mathbf{h}=0. \tag{22}$$

这些方程在形式上等同于几何光学的基本方程[§3.1(11a)～(14a)]。因此,**在运动的不连续曲面处,场矢量所服从的方程与时谐场几何光学近似下场矢量所服从的方程相同,而运动的不连续曲面就相当于几何波阵面**[③]。

---

① 这些方程是当初 Heaviside 似乎已经知道的一组不连续关系式的推广。亦见 A. E. H. Love, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **1**(1904),56; H. Bateman, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics* (Cambridge, Cambridge University Press, 1932), p. 196; T. Levi-Civita, *Caractéristiques des Systèmes Différentiels et Propagation des Ondes* (Paris, Librairie Félix Alcan, 1932), §10; R. K. Luneburg, *Mathematical Theory of Optics*, (University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1964), §6 and §7; M, Kline, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **4**(1951),239; A. Rubinowicz, *Acta Phys. Polonica*, **14**(1955),209; M. Kline and I. W. Kay, *Electromagnetic Theory and Geometrical Optics* (New York, Interscience Publishers, 1965), pp. 37 – 51。这里所采用的推导方法出自 H. Bremmer, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **4**(1951),419。

② 只有当与媒质相互作用的光的有效频率范围足够窄时,才能允许假设物质方程近似为 $\mathbf{d}=\varepsilon\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{b}=\mu\mathbf{h}$。当场不连续时,该一条件可能不再满足。因此(19)～(23)各式除对自由空间中的传播外并不严格成立。

③ 此外可以证明 $\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{h}$ 也像几何光学场的复振幅矢量一样,服从相同的输运方程[§3.1(41)和 §3.1(42)]。这一结果是 R. K. Luneburg, (*loc. cit.*, §11, §12)首先建立的。亦见 E. T. *Copson*, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **4**(1951),427; M. Kline and I. W. Kay, *loc. cit.*, p. 162。

显然,运动的不连续曲面必然服从程函方程

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2=n^2, \tag{23}$$

式中 $n^2=\varepsilon\mu$。该方程由来如前。它是(19)式和(20)式之间的相容条件,从两式中消去 **h** 或 **e** 并利用(21)式或(22)式即可得之。按照(16)、(17)和(23)三式,不连续曲面的传播速度 $v=c/n$。

附录 G　泽尼克圆多项式(9.2.1 节)

9.2.1 节中曾经简略地讨论过圆多项式,这一附录将对它做较为完全的考虑。这些多项式系由泽尼克[①] 在其关于刀口检验和相衬法的一篇重要论文中所引进并加以初步探讨,之后又由他和 Brinkman[②] 以及由奈波尔[③] 做了进一步研究。后来,Bhatia 和沃耳夫[④] 从单独正交性和不变性要求推导出这些多项式。本附录所谈大体遵循他们的处理。

G.1　一些一般考虑

不难证明,对实变量 x, y 的单位圆($x^2 + y^2 = 1$)内部而言,存在有无穷多个正交二元多项式全集,所谓正交指其多项式满足

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} V^{\star}_{(\alpha)}(x, y)V_{(\beta)}(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = A_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta}. \tag{1}$$

这里 $V_{(\alpha)}$ 和 $V_{(\beta)}$ 代表集的两个典型多项式,星号代表复共轭,$\delta_{\alpha\beta}$ 是克罗内克(Kronecker)符号,而 $A_{\alpha\beta}$ 是归一化常数,其值待以后选定;所谓全集,其意义稍后再予说明。在这些多项式集中,泽尼克圆多项式有别于其他多项式集的独特之处,在于它具有某些简单不变性特性,这些特性从群论观点考虑能够给予最好的说明。然而,借助一种归一化方法:能够避免采用群论的抽象形式描述。首先考虑这样的集,它们对坐标轴围绕原点的转动是"形式不变"的。这里不变性意指当坐标轴做任何转动

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\phi + y\sin\phi, \\ y' &= -x\sin\phi + y\cos\phi \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

时,多项式 $V(x, y)$ 被变换成一个同样形式的多项式,即 V 在变换(2)式之下满足下列关系

$$V(x, y) = G(\phi)V(x', y'), \tag{3}$$

式中 $G(\phi)$ 是转角 ϕ 的一个连续函数,具有 2π 的周期,且 $G(0) = 1$。

现在让坐标轴接连转动两次,转角先后为 ϕ_1 和 ϕ_2,其结果应等效于转角为 $\phi_1 + \phi_2$ 的单次转动,因此由(3)式可知 G 必须满足函数方程

$$G(\phi_1)G(\phi_2) = G(\phi_1 + \phi_2). \tag{4}$$

该方程的通解,具有 2π 周期者,乃众所周知,它就是[⑤]

---

① F. Zernike, *Physica*, **1**(1934), 689。

② F. Zernike and H. C. Brinkman, *Verh. Akad. Wet. Amst.* (Proc. See. Sci.), **38**(1935), 11。

③ B. R. A. Nijboer, Thesis(University of Groningen, 1942)。

④ A. B. Bhatia and E. Wolf, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **50**(1954), 40。

⑤ 见,例如 M. Born, *Natural Philosophy of Cause and Chance*(Oxford, Clarendon Press, 1949; Dover Publications, New York, 1964), p. 153。

$$G(\phi)=e^{il\phi}. \tag{5}$$

式中 l 是任何整数,正的、负的或零。将(5)式代入(3)式,令 $x'=\rho, y'=0$,并利用(2)式,可知 V 必然呈如下形式:

$$V(\rho\cos\phi,\rho\sin\phi)=R(\rho)e^{il\phi}, \tag{6}$$

式中 $R(\rho)=V(\rho,0)$只是 ρ 的函数,与ϕ无关。其次,将 $e^{il\phi}$ 展开成 $\cos\phi$和 $\sin\phi$的幂级数。假定 V 是变量 $x=\rho\cos\phi, y=\rho\sin\phi$的 n 次多项式;则由(6)式可知 $R(\rho)$是 ρ 的 n 次多项式,且不含幂次低于$|l|$的 ρ 方项。再有,$R(\rho)$显然是一个偶多项式或奇多项式,视 l 为偶数或奇数而定。**泽尼克圆多项式**集有别于所有其他这种集的特点是,**对于每一对可允许的 n(次)和 l(对角的依赖)值**,即对于 n 和 l 的整数值,凡满足 $n\geqslant 0, l\lessgtr 0, n\geqslant |l|$,且 $n-|l|$为偶数者,它都含有一个多项式。我们将用

$$V_n^l(\rho\cos\phi,\rho\sin\phi)=R_n^l(\rho)e^{il\phi} \tag{7}$$

来表示该集的一个典型多项式。

由(1)式和(7)式可知,**径向多项式** $R_n^l(\rho)$满足关系式

$$\int_0^1 R_n^l(\rho)R_{n'}^l(\rho)\rho\,d\rho=a_n^l\delta_{nn'}, \tag{8}$$

式中

$$a_n^l=\frac{A_n^l}{2\pi}. \tag{9}$$

对于任何给定的 l 值,下标 n 的值只能取$|l|, |l|+2, |l|+4, \cdots$,相应的序列 $R_{|l|}^l(\rho), R_{|l|+2}^l(\rho), R_{|l|+4}^l(\rho), \cdots$可通过对幂级

$$\rho^{|l|}, \rho^{|l|+2}, \rho^{|l|+4}, \cdots \tag{10}$$

在 $0\leqslant\rho\leqslant 1$ 区间范围附加权重因子 ρ 进行正交化来得到。此外,因为只是 l 的绝对值出现在(10)中,故

$$R_n^{-l}(\rho)=\beta_n^l R_n^l(\rho), \tag{11}$$

式中 β_n^l 是一常数,仅取决于这两个多项式 R_n^{-l} 和 R_n^l 的归一化。特而言之,可以这样来对其归一化,使得对于所有的 n 和 l,$\beta_n^l=1$。于是

$$V_n^{\pm m}(\rho\cos\phi,\rho\sin\phi)=R_n^m(\rho)e^{\pm im\phi}, \tag{12}$$

式中 $m=|l|$是一个非负整数。

这个圆多项式集包含$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$个线性独立的次数小于等于 n 的多项式。因此每个单项式 $x^iy^j(i\geqslant 0, j\geqslant 0$,且都是整数)以及每个 x, y 的多项式都可以表成为有限个数的圆多项式的线性组合。由 Weierstrass 近似定理[①] 遂可得知,这个集是**完全的**。

① 见,例如 R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1(New York, Interscience Publishers, 1st English edition, 1953), p. 65。

G.2 径向多项式 $R_n^{\pm m}(\rho)$的显表达式

因为 $R_n^{\pm m}(\rho)$是一个 n 次的ρ 多项式,不含幂次低于 m 的ρ 方项,而且是一个偶多项式或奇多项式(视 n 为偶数或奇数而定),故可得知 R 可表成如下形式

$$R_n^{\pm m}(\rho)=t^{\frac{m}{2}}Q_{\frac{n-m}{2}}(t), \tag{13}$$

式中 $t=\rho^2$, $Q_{(n-m)/2}(t)$是一个$\frac{1}{2}(n-m)$次的 t 多项式。按照(8)式,多项式 Q 必须满足下列关系

式中

$$\left.\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\int_0^1 t^m Q_k(t)Q_{k'}(t)\mathrm{d}t=a_n^{\pm m}\delta_{kk'},\\&k=\tfrac{1}{2}(n-m),\qquad k'=\tfrac{1}{2}(n'-m).\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

由此可知,多项式 $Q_0(t), Q_1(t), \cdots, Q_k(t), \cdots$可以通过对自然幂级

$$1, t, t^2, \cdots, t^k, \cdots \tag{15}$$

序列在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 区间范围附加权重因子 $w(t)=t^m$ 进行正交化来得到。但众所周知的雅可比(即超几何)多项式[①]

$$G_k(p,q,t)=\frac{(q-1)!}{(q+k-1)!}t^{1-q}(1-t)^{q-p}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}[t^{q-1+k}(1-t)^{p-q+k}] \tag{16}$$

$$=\frac{k!(q-1)!}{(p+k-1)!}\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\frac{(p+k+s-1)!}{(k-s)!s!(q+s-1)!}t^s, \tag{17}$$

($k\geqslant 0, q>0, p-q>-1$)可以定义为 p, q, t 的函数,并可通过对序列(15)在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 区间范围附加更广泛的权重因子

$$w(t)=t^{q-1}(1-t)^{p-q}$$

进行正交化来得到。其正交性和归一化特性由下式给出[②]

$$\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-q}G_k(p,q,t)G_{k'}(p,q,t)\mathrm{d}t=b_k(p,q)\delta_{kk'}, \tag{18}$$

式中

$$b_k(p,q)=\frac{k![(q-1)!]^2[p-q+k]!}{[q-1+k]![p-1+k]![p+2k]}. \tag{19}$$

[如此选择 b_k 时,对于所有的 k 都有 $G_k(p,q,0)=1$]。将(18)式和(14)式做一比较,即可得知[③]

---

① R. Courant and D. Hilbert, *loc. cit*., Vol. I, p. 90。

② E. Kemble, *The Fundamental Principles of Quantum Mechanics* (New York, McGraw-Hill, 1937), p. 594。

③ (20)式右边平方根的正、负号由下文(26)式来确定。

$$Q_k(t)=\sqrt{\frac{2a_n^{\pm m}}{b_k(m+1,\ m+1)}}G_k(m+1,\ m+1,\ t). \tag{20}$$

从(13)式和(20)式即得到用雅可比多项式表示的径向多项式表达式如下：

$$R_n^{\pm m}(\rho)=\sqrt{\frac{2a_n^{\pm m}}{b_k(m+1,\ m+1)}}\rho^m G_k(m+1,\ m+1,\ \rho^2),\qquad [k=\tfrac{1}{2}(n-m)]. \tag{21}$$

仿效泽尼克，现在如此选择归一化，使得对于所有的 n 和 m

$$R_n^{\pm m}(1)=1. \tag{22}$$

这时从(21)式和(22)式可知

$$\sqrt{\frac{b_k(m+1,\ m+1)}{2a_n^{\pm m}}}=G_k(m+1,\ m+1,\ 1). \tag{23}$$

$G_k(m+1,m+1,1)$之值能够从雅可比多项式生成函数来得到[①]。现采用

$$\frac{\left[z-1+\sqrt{1-2z(1-2\rho^2)+z^2}\right]^m}{(2z\rho^2)^m\sqrt{1-2z(1-2\rho^2)+z^2}}=\sum_{s=0}^{\infty}\binom{m+s}{s}G_s(m+1,\ m+1,\ \rho^2)z^s. \tag{24}$$

对于 $\rho=1$，上式左边简化为$(1+z)^{-1}$，将它展成一幂级数并同右边进行比较，即得到

$$G_s(m+1,\ m+1,\ 1)=\frac{(-1)^s}{\binom{m+s}{s}}. \tag{25}$$

从(25)式和(23)式可知

$$\sqrt{\frac{2a_n^{\pm m}}{b_k(m+1,\ m+1)}}=(-1)^{\frac{n-m}{2}}\binom{\frac{1}{2}(n+m)}{\frac{1}{2}(n-m)}, \tag{26}$$

再利用(16)、(17)和(26)三式，最后从(21)式得到径向多项式如下：

$$R_n^{\pm m}(\rho)=\frac{1}{\left(\frac{n-m}{2}\right)!\rho^m}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\rho^2)}\right]^{\frac{n-m}{2}}\left[(\rho^2)^{\frac{n+m}{2}}(\rho^2-1)^{\frac{n-m}{2}}\right] \tag{27}$$

$$=\sum_{s=0}^{\frac{1}{2}(n-m)}(-1)^s\frac{(n-s)!}{s!\left(\frac{n+m}{2}-s\right)!\left(\frac{n-m}{2}-s\right)!}\rho^{n-2s}. \tag{28}$$

前几个这种多项式的显表达式在 435 页表 9.1 中列出。

归一化常数 $a_n^{\pm m}$ 从(26)式和(19)式得之如下：

$$a_n^{\pm m}=\frac{1}{2n+2}. \tag{29}$$

① 见 R. Courant and D. Hilbert, *loc. cit.*, Vol. 1, p. 91。

为获得径向多项式的生成函数,现将(21)和(26)两式中的 $k=(n-m)/2$ 换写成 s,将 n 换写成 $m+2s$,并代入(24)式,于是得到

$$\frac{\left[1+z-\sqrt{1+2z(1-2\rho^2)+z^2}\right]^m}{(2z\rho)^m\sqrt{1+2z(1-2\rho^2)+z^2}}=\sum_{s=0}^{\infty}z^sR_{m+2s}^{\pm m}(\rho). \tag{30}$$

最后来计算积分

$$\int_0^1 R_n^m(\rho)J_m(v\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho$$

如第 9 章中所见,该积分在泽尼克-奈波尔像差衍射理论中起重要作用。现在用(27)式替代积分中的 $R_n^m(\rho)$,用贝塞尔的级数展开式[①] 代替 $J_m(v_2\rho)$。所得的式子可写成如下形式

$$\begin{aligned}&\int_0^1 R_n^m(\rho)J_m(v\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho\\&=\frac{1}{2\left(\frac{n-m}{2}\right)!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!(s+m)!}\left(\frac{v}{2}\right)^{m+2s}f\left(s,\frac{n-m}{2},\frac{n+m}{2},\frac{n-m}{2}\right),\end{aligned} \tag{31}$$

式中

$$f(s,p,q,r)=\int_0^1 u^s\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^p[u^q(u-1)^r]\mathrm{d}u, \tag{32}$$

p,q,r,s 都是非负的整数。对(32)式进行分部积分,由而得到

$$f(s,p,q,r)=\left\{u^s\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^{p-1}[u^q(u-1)^r]\right\}_0^1-s\int_0^1 u^{s-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^{p-1}[u^q(u-1)^r]\mathrm{d}u. \tag{33}$$

如果 $r\geqslant p$,$s+q-p\geqslant 0$,则上式右边第一项为零,所以

$$f(s,p,q,r)=-sf(s-1,p-1,q,r). \tag{34}$$

现在分开来考虑 $s\geqslant p$ 和 $s<p$ 这两种情况。

当 $s\geqslant p$ 时,经 p 次应用(34)式可有

$$\begin{aligned}f(s,p,q,r)&=(-1)^p s(s-1)(s-2)\cdots(s-p+1)f(s-p,0,q,r)\\&=\frac{(-1)^{p+r}s!}{(s-p)!}\int_0^1 u^{s+q-p}(1-u)^r\,\mathrm{d}u.\end{aligned} \tag{35}$$

(35)式中的积分是第一类欧拉积分(β 函数),其值是[②] $(s+q-p)!\,r!/(s+q+r-p+1)!$。因此,当 $s\geqslant p$ 时

$$f(s,p,q,r)=(-1)^{p+r}\frac{s!(s+q-p)!r!}{(s-p)!(s+q+r-p+1)!}. \tag{36}$$

其次,考虑情况 $s<p$。应用(34)式 s 次,得到

① R. Courant and D. Hilbert, *loc. cit.*, Vol. I, p. 484。

② R. Courant and D. Hilbert, *loc. cit.*, Vol. I, p. 483。

$$\begin{aligned} f(s,\ p,\ q,\ r) &= (-1)^s s(s-1)\cdots f(0,\ p-s,\ q,\ r) \\ &= (-1)^s s!\left\{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^{p-s-1}[u^q(u-1)^r]\right\}_0^1 \\ &= 0. \end{aligned} \tag{37}$$

现在将(36)和(37)代入(31)式并引进一个新变量 l,使 $s=\frac{1}{2}(n-m)+l$。这时得到

$$\int_0^1 R_n^m(\rho)J_m(v\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{(-1)^{\frac{3(n-m)}{2}}}{v}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!(n+l+1)!}\left(\frac{v}{2}\right)^{n+2l+1} \tag{38}$$

可以认出上式右边的级数就是 $J_{n+1}(v)$的展开式。因 $n-m$ 为偶数,故因子$(-1)^{3(n-m)/2}$可易为$(-1)^{(n-m)/2}$,并最后得到

$$\int_0^1 R_n^m(\rho)J_m(v\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho=(-1)^{\frac{n-m}{2}}\frac{J_{n+1}(v)}{v}. \tag{39}$$

附录 H　谱相干度不等式 $|\mu_{12}(\nu)| \leqslant 1$ 的证明(10.5 节)

在本附录中我们给出 § 10.5(10)的证明,按照该式,谱相干度的上界值是 1。

设 $v_T(P,\nu)$ 是截断场变量 $V_T^{(r)}(P,t)$[§ 10.3(25)和 § 10.3(14)]的傅里叶变换,并且设 a_1 和 a_2 是任意复数。显然

$$|a_1 v_T(P_1,\nu)+a_2 v_T(P_2,\nu)|^2 \geqslant 0, \tag{1}$$

或者,更清楚地展开写出

$$\begin{aligned} &a_1^\star a_1 v_T^\star(P_1,\nu)v_T(P_1,\nu)+a_2^\star a_2 v_T^\star(P_2,\nu)v_T(P_2,\nu)\\ &\quad+a_1^\star a_2 v_T^\star(P_1,\nu)v_T(P_2,\nu)+a_1 a_2^\star v_T(P_1,\nu)v_T^\star(P_2,\nu)\geqslant 0. \end{aligned} \tag{2}$$

将此不等式除以 $2T$,取系综平均并接着取 $T\to\infty$ 时的极限。忆及谱密度 $S(P,\nu)$[§ 10.3(32)]和交叉谱密度 $G(P_1,P_2,\nu)$[§ 10.3(28)]的定义,即得到不等式

$$a_1^\star a_1 S(P_1,\nu)+a_2^\star a_2 S(P_2,\nu)+a_1^\star a_2 G(P_2,P_1,\nu)+a_1 a_2^\star G(P_1,P_2,\nu)\geqslant 0. \tag{3}$$

因为此不等式必须对所有 a_1 和 a_2 值都有效,所以从非负定二次型的一个众所周知的性质即可得出行列式[①]

$$\begin{vmatrix} S(P_1,\nu) & G(P_2,P_1,\nu)\\ G(P_1,P_2,\nu) & S(P_2,\nu)\end{vmatrix}\geqslant 0. \tag{4}$$

如果再利用 $G(P_2,P_1,\nu)=G^\star(P_1,P_2,\nu)$这一事实——由交叉谱密度的定义可知,则得到

$$|G(P_1,P_2,\nu)|^2\leqslant S(P_1,\nu)S(P_2,\nu). \tag{5}$$

因此

$$|\mu_{12}(\nu)|\equiv\frac{|G(P_1,P_2,\nu)|}{\sqrt{S(P_1,\nu)}\sqrt{S(P_2,\nu)}}\leqslant 1, \tag{6}$$

此即不等式 § 10.5(10)。

① F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Vol. I(New York, Chelsea Publishing Company, 1959), Theorem 20, p. 337。

附录 I　倒易不等式的证明(10.8.3 节)

设 $f(\tau)$和 $g(\tau)$是实变量 τ 的任何两个函数,一般为复函数。则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f+\lambda g^{\star}|^{2}\,\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}(f+\lambda g^{\star})(f^{\star}+\lambda g)\mathrm{d}\tau\geqslant 0, \tag{1}$$

或

$$\int_{-\infty}^{+\infty}ff^{\star}\,\mathrm{d}\tau+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}(fg+f^{\star}g^{\star})\mathrm{d}\tau+\lambda^{2}\int_{-\infty}^{+\infty}gg^{\star}\,\mathrm{d}\tau\geqslant 0. \tag{2}$$

这个 λ 的二次式的极小值可由取微分得之:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(fg+f^{\star}g^{\star})\mathrm{d}\tau+2\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}gg^{\star}\,\mathrm{d}\tau=0. \tag{3}$$

此式之根 $\lambda=\lambda_{\text{极小}}$为

$$\lambda_{\text{极小}}=\frac{-\int_{-\infty}^{+\infty}(fg+f^{\star}g^{\star})\mathrm{d}\tau}{2\int_{-\infty}^{+\infty}gg^{\star}\,\mathrm{d}\tau}. \tag{4}$$

如果将此值代入(2)式,则得到

$$4\left(\int_{-\infty}^{+\infty}ff^{\star}\,\mathrm{d}\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}gg^{\star}\,\mathrm{d}\tau\right)\geqslant\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(fg+f^{\star}g^{\star})\mathrm{d}\tau\right)^{2} \tag{5}$$

设

$$f=\tau\psi(\tau),\qquad g=\frac{\mathrm{d}\psi^{\star}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}, \tag{6}$$

这时

$$fg+f^{\star}g^{\star}=\tau\left(\psi\frac{\mathrm{d}\psi^{\star}}{\mathrm{d}\tau}+\psi^{\star}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\tau}\right)=\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\psi\psi^{\star}), \tag{7}$$

如果对(7)式进行积分,并对右边进行分部积分,且假设当$\tau\to\pm\infty$时,$\tau\,\psi\psi^{\star}\to 0$[①],则(5)式变成

$$4\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\tau^{2}\psi\psi^{\star}\,\mathrm{d}\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\psi^{\star}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau\right)\geqslant\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\psi^{\star}\,\mathrm{d}\tau\right)^{2}. \tag{8}$$

这就是所求的不等式。

只有在(1)式中的等号成立时,(8)式中的等号才能成立;这只有在 $f\equiv-\lambda g^{\star}$时方为可能,

---

① 凡(8)式左方两个积分收敛时,该条件事实上即被满足[见 H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, translated from German(London, Methuen, 1931; also, New York, Dover Publications, Inc.), pp. 393 – 394]。

用(6)式代入,即要求

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{1}{\lambda}\tau\psi. \tag{9}$$

该微分方程的通解为

$$\psi(\tau)=A\,\mathrm{e}^{-\frac{\tau^2}{2\lambda}}, \tag{10}$$

式中 A 为一常数。只有 $\lambda\geqslant 0$ 的解可用,因为否则 $\psi(\tau)$ 在无穷处将不为零。因此,**当且仅当 ψ 是一高斯函数时(8)式才成为等式**。

附录 J　两个积分的计算(12.2.2 节)[①]

在这一附录中,我们将计算 § 12.2(8), § 12.2(9)中的两个积分

$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{4\pi}\iiint_{V_1}\left[e^{i(px_1+qy_1)}\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\left(\frac{e^{i\omega R/c}}{R}\right)\right]dx_1\,dy_1\,dz_1, \tag{1}$$

$$\mathcal{J}_2 = \frac{1}{4\pi}\frac{\omega^2}{c^2}\iiint_{V_1}\left[e^{i(px_1+qy_1)}\left(\frac{e^{i\omega R/c}}{R}\right)\right]dx_1\,dy_1\,dz_1, \tag{2}$$

式中

$$R = +\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \tag{3}$$

并且 $\omega^2 > c^2p^2$。我们只关注两种情况[②],即

(a) $\underline{0<\gamma<d}$, 其中 γ 和 d 都是常数,积分体积 V_1 是板状体 $-\infty<x_1<\infty$, $-\gamma\leqslant y_1\leqslant d-\gamma$, $-\infty<z_1<\infty$,但要除去围住原点 $x_1=y_1=z_1=0$ 的一个半径为无限小的小球面。

(b) $\underline{\gamma>d \text{ 或 } \gamma<0}$,积分体积 V_1 这时是全区域 $-\infty<x_1<\infty$, $-\gamma\leqslant y_1\leqslant d-\gamma$, $-\infty<z_1<\infty$。

为计算$\mathcal{J}_1$,现应用高斯定理,其形式如下:

$$\iiint_{V_1}\mathrm{div}\,\mathbf{G}\,dV_1 = \iint_{S_1}\mathbf{G}\cdot\mathbf{n}\,dS_1, \tag{4}$$

式中 $\mathbf{G}$ 是一个任意的矢量位置函数,而 $\mathbf{n}(n_x, n_y, n_z)$是体积 V_1 周界曲面 S_1 的单位外向法线。现在取

$$G_{x_1} = G_{y_1} = 0, \qquad G_{z_1} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{e^{i(px_1+qy_1+\omega R/c)}}{R}\right) \tag{5}$$

并从(1)、(4)两式得到

$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_1} n_{z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{e^{i(px_1+qy_1+\omega R/c)}}{R}\right)dS_1. \tag{6}$$

因为在板块每个面($y_1=-\gamma$ 和 $y_1=d-\gamma$)上 n_{z_1} 为零,所以在情况(b)中$\mathcal{J}_1$ 为零[③]。在情况(a)中,则还须计及来自围绕原点的那个小球面 σ_1 的贡献。如果 a 是小球的半径,则有 $n_{z_1}=$

---

① 引自 C. G. Darwin, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, **23**(1924), § 6 and § 8。

② 由第 12 章所讲可知,情况(a)是观察点(x,y,z)在超声衍射层(厚度为 d)内,情况(b)则是在层外——译者注。

③ 严格地讲,曲面 S_1 应该是闭合的。所以还应考虑来自远方几个边的贡献。然而,根据物理理由,这些贡献可予舍弃,因为它们需要无限长的时间到达效应考察所在之点。

$-z_1/a$,而该贡献为

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma_1}\left(\frac{z_1}{a}\right)^2 e^{i(px_1+qy_1+\omega a/c)}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{i\omega}{ac}\right)d\sigma_1 \to \frac{1}{3} \quad \text{当 } a\to 0 \text{ 时}. \tag{7}$$

因此总起来得到

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{J}_1 &= \tfrac{1}{3} \quad \text{当 } 0<y<d \text{ 时},\\ &= 0 \quad \text{当 } y<0 \text{ 或 } y>d \text{ 时}.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

在计算$\mathcal{J}_2$之前,先说明一点:因为这时被积函数只含一个$1/R$阶的奇点,所以对围绕原点的无限小球面进行的积分将不产生贡献。因此,情况(a)中的积分范围这时与情况(b)中一样,可遍及板状体全部体积:

$$\mathcal{J}_2 = \frac{\omega^2}{4\pi c^2}\int_{-y}^{d-y} e^{iqy_1}\mathcal{L}(y_1)dy_1 \tag{9}$$

式中

$$\mathcal{L}(y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i(px_1+\omega R/c)}}{R}\,dx_1\,dz_1. \tag{10}$$

现在在(10)式中取两个新变量ρ和χ,其定义为

$$px_1+\frac{\omega}{c}R = \rho\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-p^2}, \tag{11a}$$

$$z_1 = \sqrt{\rho^2-y_1^2}\sin\chi, \tag{11b}$$

在每种情况下式中平方根均取正。在x_1z_1平面(y_1=常数)上,当ρ固定为某一常数时,相应的曲线为一椭圆,其离心角为χ;而当$\rho=|y_1|$时,相应的椭圆退化成一点。因此,当ρ和χ一一历经$|y_1|\leqslant\rho\leqslant\infty$和$0\leqslant\chi\leqslant 2\pi$各值时,整个$x_1z_1$平面即被覆盖,于是

$$\mathcal{L}(y_1) = \int_0^{2\pi}\int_{|y_1|}^{\infty}\frac{e^{i\rho\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-p^2}}}{R}\frac{\partial(x_1,z_1)}{\partial(\rho,\chi)}\,d\rho\,d\chi, \tag{12}$$

式中

$$\frac{\partial(x_1,z_1)}{\partial(\rho,\chi)} = \frac{\partial x_1}{\partial\rho}\frac{\partial z_1}{\partial\chi}-\frac{\partial x_1}{\partial\chi}\frac{\partial z_1}{\partial\rho} \tag{13}$$

是该变换的雅可比行列式。由(11a)式和(3)式

$$\frac{\partial x_1}{\partial\rho} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-p^2}}{p+\frac{\omega}{c}\frac{x_1}{R}}, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial\chi}=0, \tag{14a}$$

而由(11b)式

$$\frac{\partial z_1}{\partial\rho} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2-y_1^2}}\sin\chi, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial\chi} = \sqrt{\rho^2-y_1^2}\cos\chi = \sqrt{\rho^2-y_1^2-z_1^2}. \tag{14b}$$

此外还有恒等式

$$\left(pR+\frac{\omega}{c}x_1\right)^2-\left(px_1+\frac{\omega}{c}R\right)^2=\left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-\rho^2\right][x_1^2-R^2],$$

或者利用(3)式和(11a)式，

$$\left(pR+\frac{\omega}{c}x_1\right)=\sqrt{\rho^2-y_1^2-z_1^2}\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-p^2}. \tag{15}$$

由(13)、(14)和(15)三式可以得到

$$\frac{\partial(x_1,z_1)}{\partial(\rho,\chi)}=R. \tag{16}$$

将(16)式代入(12)式。对χ的积分立即给出值 2π。对 ρ 的积分也不难计算，由而得到

$$\mathcal{L}(y)=\frac{2\pi i\,e^{i\left[|y_1|\sqrt{(\omega/c)^2-p^2}\right]}}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-p^2}}, \tag{17}$$

其中，出于同前的物理理由，曾舍弃一项来自无穷远的振荡贡献。

现在将(17)式代入(9)式并计算所产生的积分。其结果为

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{J}_2&=\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\frac{e^{-igy}}{2g\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-p^2}}(e^{igd}-1) && \text{当 } y>d \text{ 时},\\
&=\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\frac{e^{-ihy}}{2h\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-p^2}}(e^{ihd}-1) && \text{当 } y<0 \text{ 时},\\
&=\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\left[\frac{1}{gh}-\frac{e^{-igy}}{2g\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-p^2}}+\frac{e^{-ih(y-d)}}{2h\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-p^2}}\right] && \text{当 } 0<y<d \text{ 时},
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

式中

$$g=q-\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-p^2},\qquad h=q+\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-p^2}, \tag{19}$$

附录 K　标量波场中的能量守恒(13.3 节)

在 1.1.4 节中我们推导了电磁场的能量守恒定律。在这一附录中,我们将推导实标量波场的相应守恒定律,但它仅适用于不含任何光源的空间区域。

设 $V^{(r)}(t)$是自由空间中的一个实场。它满足波动方程

$$\nabla^2 V^{(r)}(\mathbf{r}, t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V^{(r)}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}, \tag{1}$$

式中 c 是**真空中**的光速。以$\partial V^{(r)}/\partial t$ 乘该方程,由而得出

$$\frac{\partial V^{(r)}}{\partial t}\left\{\nabla^2 V^{(r)}(\mathbf{r}, t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V^{(r)}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}\right\}=0. \tag{2}$$

如果利用矢量运算的基本恒等式,即可立刻发现(2)式意味着

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)+\frac{\partial W(\mathbf{r}, t)}{\partial t}=0, \tag{3}$$

式中

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)=-\alpha\frac{\partial V^{(r)}}{\partial t}\nabla V^{(r)}, \tag{4}$$

$$W(\mathbf{r}, t)=\frac{1}{2}\alpha\left[(\operatorname{grad} V^{(r)})^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial V^{(r)}}{\partial t}\right)^2\right], \tag{5}$$

而 α 是一个任意常数,现设其为正,(3)式的形式是一个连续方程的形式,因而使人联想到标量 $W(\mathbf{r}, t)$可以看成是代表**能量密度**,而矢量 $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$代表场的**能流矢量**①。

如果遍及任何有限区域 V 对(3)式进行积分,并设 V 的周界为闭合面 S,则利用高斯定理可得到公式

$$\iint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V W(\mathbf{r}, t)\mathrm{d}V, \tag{6}$$

式中 $\mathbf{n}$ 代表 S 的单位外向法线。(6)式的左边可以解释成代表通过界面 S 离开体积 V 的能量的速率。右边则可以解释成代表体积 V 中所含能量减少的速率。因此(6)式表示在自由空间中一个(实)标量波场 $V^{(r)}(\mathbf{r}, t)$中的**能量守恒定律**。公式(3)则可以看成是该定律的微分形式。正如在电磁场情况(见 1.1.4 节结束前的讨论),对 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{W}$ 的解释须稍加小心。特别是,由于任何行为规范的矢量 $\mathbf{A}$ 皆满足恒等式$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})\equiv 0$,所以可给能流矢量 $\mathbf{F}$ 加上一个任意矢量的旋度(curl),结果量 $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)+\operatorname{curl}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$,正如 $\mathbf{F}$ 一样,亦可满足守恒定律(3),而所用的能量密度 $W(\mathbf{r}, t)$相同。

---

① 借助变分考虑可使该项解释立足于普遍理由而更为可信[见,例如 G. Wentzel, *Quantum Theory of Fields* (New York, Interscience, 1949),特别是 § 6]。

现在将上一结果专门用到频率为 ω 的单色场情况,即

$$V^{(r)}(\mathbf{r},\ t)=\mathcal{R}\{U(\mathbf{r},\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\},\tag{7}$$

其中 $U(\mathbf{r},\omega)$是某一(一般为复数)函数,$\mathcal{R}$表示取实部。这时能流矢量和能量密度的表达式变成

$$\mathbf{F}(\mathbf{r},\ t)=-(\mathrm{i}\omega)\frac{\alpha}{4}\left[U^{\star}\nabla U-U\nabla U^{\star}+U^{\star}\nabla U^{\star}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t}-U\nabla U\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t}\right]\tag{8}$$

和

$$W(\mathbf{r},\ t)=\frac{\alpha}{2}\left[\nabla U^{\star}\cdot\nabla U+(\nabla U)^2\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t}+(\nabla U^{\star})^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t}-\frac{\omega^2}{4c^2}(2U^{\star}U+U^{\star 2}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t}+U^2\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t})\right].\tag{9}$$

现在取这两个式子在时间间区 $-T'\leqslant t\leqslant T'$ 内的时间平均(以角括号表示),其中 T' 远大于场的振荡周期 $T=2\pi/\omega$。这时即可发现(参见 1.4.3 节对电磁场所做的类似推导),(8)式和(9)式右边依赖于时间的因子经平均后其贡献可忽略不计,结果

$$\langle\mathbf{F}(\mathbf{r},\ t)\rangle=-\frac{1}{4}(\mathrm{i}\omega)\alpha(U^{\star}\nabla U-U\nabla U^{\star})\tag{10}$$

而

$$\langle W(\mathbf{r},\ t)\rangle=\frac{1}{4}\alpha(\nabla U^{\star}\cdot\nabla U+k^2U^{\star}U),\tag{11}$$

式中

$$k=\frac{\omega}{c}.\tag{12}$$

由(8)式和(10)式可知$\langle\mathrm{div}\ \mathbf{F}(\mathbf{r},t)\rangle=\mathrm{div}\langle\mathbf{F}(\mathbf{r},t)\rangle$,而由(9)式立即可见$\langle\partial W(\mathbf{r},t)/\partial t\rangle=0$。因此,如果取(3)式的时间平均并应用这两个结果,则得到下列简单公式:

$$\mathrm{div}\langle\mathbf{F}(\mathbf{r},\ t)\rangle=0.\tag{13}$$

这就是单色场情况下自由空间中微分形式能量守恒定律的时间平均式型。

如果对(13)式遍及任何体积区域 V 进行积分,并设 V 的周界为闭合曲面 S,则得到积分形式的能量守恒定律的相应时间平均式型,即

$$\iint_S\langle\mathbf{F}(\mathbf{r},\ t)\rangle\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S=0\tag{14}$$

式中 $\mathbf{n}$ 仍然是 S 的单位外向法线。

附录 L　琼斯引理的证明(13.3 节)

在这一附录中我们推导公式 § 13.3(15),它出自琼斯[①],即

$$\frac{1}{R}\iint_{\Sigma} G(\mathbf{n})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\mathbf{s}_0\cdot\mathbf{n})R}\,\mathrm{d}\Sigma \approx \frac{2\pi\mathrm{i}}{k}[G(\mathbf{s}_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR} - G(-\mathbf{s}_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}], \tag{1}$$

式中 $\mathbf{s}_0$ 是一实单位矢量,$\mathbf{n}$ 是一大球面 Σ 的外向径向单位矢量,Σ 的半径为 R。右边的式子应理解为当 $kR\to\infty$,而同时 $\mathbf{s}_0$ 保持固定时积分的渐近极限值。

利用附录 C 第 3 节中所讨论的二维形式的稳定相原理可推导出公式(1)。为此我们引进球面极坐标,令其极轴沿 z 方向。这时单位矢量 $\mathbf{s}_0$ 和 $\mathbf{n}$ 的各笛卡儿分量为

$$\mathbf{s}_0 \equiv (\sin\theta_0\cos\phi_0,\ \sin\theta_0\sin\phi_0,\ \cos\theta_0), \tag{2}$$

$$\mathbf{n} \equiv (\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta), \tag{3}$$

并且

$$\mathrm{d}\Sigma = R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

而(1)式的左边——现以 I 代表,变成

$$I = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi} g(\theta,\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kRf(\theta,\phi)}\,\mathrm{d}\theta, \tag{4}$$

式中

$$g(\theta,\phi) = RG(\theta,\phi)\sin\theta, \tag{5}$$

$$f(\theta,\phi) = -(\sin\theta_0\sin\theta\cos\phi_0\cos\phi + \sin\theta_0\sin\theta\sin\phi_0\sin\phi + \cos\theta_0\cos\theta) \tag{6}$$

现在积分(4)属于附录 C(16)式所给的形式,但其中 x,y 被易为 θ,ϕ,且渐近参量为 kR 而非 k。

为了得到(4)式在 $kR\to\infty$ 时的渐近近似,首先须确定其被积函数的第一类临界点(如果有的话)。这些是积分区域范围内位相函数 $f(\theta,\phi)$ 稳定的点。由(6)式可以得到

$$\frac{\partial f}{\partial\theta} = -\sin\theta_0\cos\theta\cos\phi_0\cos\phi - \sin\theta_0\cos\theta\sin\phi_0\sin\phi + \cos\theta_0\sin\theta, \tag{7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial\phi} = \sin\theta_0\sin\theta\cos\phi_0\sin\phi - \sin\theta_0\sin\theta\sin\phi_0\cos\phi. \tag{8}$$

由(7)式和(8)式可立即导出

$$\frac{\partial f}{\partial\theta} = \frac{\partial f}{\partial\phi} = 0 \tag{9}$$

所在角为

$$\theta = \theta_0 \quad 和 \quad \phi = \phi_0 \tag{10a}$$

和

---

① D. S. Jones, *Proc*, *Camb*. *Phil*. *Soc*., **48**(1952),736。

$$\theta = \pi - \theta_0 \quad 和 \quad \phi = \pi + \phi_0. \tag{10b}$$

用单位矢量 $\mathbf{s}_0$ 和 $\mathbf{n}$ 表示时,条件(10)意味着在第一类临界点处

$$\mathbf{n} = \mathbf{s}_0 \quad 和 \quad \mathbf{n} = -\mathbf{s}_0, \tag{11}$$

这在几何上显而易见。

第二阶微商可求得为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \sin\theta_0 \sin\theta \cos\phi_0 \cos\phi + \sin\theta_0 \sin\theta \sin\phi_0 \sin\phi + \cos\theta_0 \cos\theta, \tag{12a}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = \sin\theta_0 \sin\theta \cos\phi_0 \cos\phi + \sin\theta_0 \sin\theta \sin\phi_0 \sin\phi, \tag{12b}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \phi} = \sin\theta_0 \cos\theta \cos\phi_0 \sin\phi - \sin\theta_0 \cos\theta \sin\phi_0 \cos\phi. \tag{12c}$$

在(10)式所确定的临界点处,各个第二阶微商的值为

$$\alpha_1 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right)_{\mathbf{n}=\mathbf{s}_0} = 1, \qquad \beta_1 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\right)_{\mathbf{n}=\mathbf{s}_0} = \sin^2\theta_0, \qquad \gamma_1 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \phi}\right)_{\mathbf{n}=\mathbf{s}_0} = 0, \tag{13a}$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right)_{\mathbf{n}=-\mathbf{s}_0} = -1, \quad \beta_2 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\right)_{\mathbf{n}=-\mathbf{s}_0} = -\sin^2\theta_0, \quad \gamma_2 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \phi}\right)_{\mathbf{n}=-\mathbf{s}_0} = 0. \tag{13b}$$

在该临界点处,

$$\left.\begin{aligned} g|_{\mathbf{n}=\mathbf{s}_0} &= RG(\mathbf{s}_0)\sin\theta_0, \\ f|_{\mathbf{n}=\mathbf{s}_0} &= -1, \end{aligned}\right\} \tag{14a}$$

和

$$\left.\begin{aligned} g|_{\mathbf{n}=-\mathbf{s}_0} &= RG(-\mathbf{s}_0)\sin\theta_0, \\ f|_{\mathbf{n}=-\mathbf{s}_0} &= +1. \end{aligned}\right\} \tag{14b}$$

此外

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\beta_1 - \gamma_1{}^2 &= \sin^2\theta, \quad \alpha_1 > 0, \\ \alpha_2\beta_2 - \gamma_2{}^2 &= \sin^2\theta, \quad \alpha_2 < 0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

因此,由附录 C 方程(21)所定义的参量 σ 在第一类临界点和第二类临界点处的值分别为

$$\sigma_1 = +1 \quad 和 \quad \sigma_2 = -1 \tag{16}$$

将(11)、(14)、(15)和(16)四式代入附录 C 的方程(20),并考虑到现在渐近参量是 kR 而非 k,即得到当 $kR \to \infty$ 时,积分(4)[(1)式的左边]的渐近近似如下:

$$\frac{1}{R}\iint_{\Sigma} G(\mathbf{n}) e^{-ik(\mathbf{s}_0\cdot\mathbf{n})R}\, d\Sigma \sim \frac{2\pi i}{k}[G(\mathbf{s}_0)e^{-ikR} - G(-\mathbf{s}_0)e^{ikR}]. \tag{17}$$

这就是琼斯引理[(1)式]。

著者索引

Abbe, E. 151, 168, 210, 214, 图 8.32
Abelès, F. 46, 50, 53, 60, 61, 632
Adams, J. C. 183
Agarwal, G. S. 488
— and Wolf, E. 460
Aggarwal, R. R. 567, 576
Airy, G. B. 55, 图 7.74, 366, 图 8.12, 图 8.46, 688
Ambrosini, D.
—, Schirripa Spagnolo, G., Paoletti, D. and Vicalvi, S. 481
Amici, G. B. 237
Anderson, J. A. 230, 256
Anderson, W. C. 10
Andrejewski, W.
Meixner, J. and — 526
Arago, D. F. III, IV, 241, 346
Arley, N. 99
Armstrong, J. T., Hutter, D. J., Johnson, K. and Mozurkewich, D. 257
Avery, D. G. 622
Avogadro, A. 79

Babcock, H. D. 图 7.66, 378
Babinet, A. 352, 688, 图 15.18
Bachynski, M. P. and Bekefi, G. 407, 429
Bacon, G. E. 588
Baker, B. B. and Copson, E. T. 98, 347, 348, 351, 352, 415, 527, 540, 546, 559, 582
Baker, J. G. 图 6.23
Banerji, S. 415
Barham, P. M.
Hopkins, H. H. and — 图 10.16
Barnes, M. D.
—, Kenyon, A. S., Zaiser, E. M. and La Mer, V. K. 658, 659
— and La Mer, V. K. 658, 659
Barrell, H. 340
— and Sears, J. E. 340
Sears, J. E. and — 340
Barrett, H. H. 188
Bartholinus, E. II
Bartlet, H.
Fercher, A. F., —, Becker, H. and Wiltschko, E. 596
Bateman, H. 756
Bates, W. J. 图 7.52, 291
Becker, H.
Fercher, A. F., Bartlet, H. — and Wiltschko, E. 596
Bekefi, G.
Bachynski, M. P. and — 407, 429
Benedict, E.
Senftleben, H. and — 653
Bennett, A. H., Jupnik, H., Osterberg, H. and Richards, O. W. 391, 图 8.34, 图 8.35
Benoit, J. R. 269, 336
—, Fabry, C. and Perot, A. 336, 340
Michelson, A. A. and — 280, 315, 340
Beran, M. J. and Parrent, G. B. 510
Berek, M. 407, 460, 690
Bergmann, L. 562
Bergstrand, E. 10
Bernal, J. D. 585
Berne, B. J.
— and Pecora, R. 608
Berry, M. 107
Nye, J. F. and — 412
Bershader, D.
Ladenburg, R. and — 291
Bertero, M. and De Mol, C. 586
Bhatia, A. B.
— and Noble, W. J. 568, 575, 576

— and Wolf, E. 758
Bialynicki-Birula, I. 107
Billet, F. 图 7.8
Billington, C.
Greenland, K. M. and — 323
Biot, J. B. III
Biquard, P.
Lucas, R. and — 563
Birge, R. T. 10
Black, G. 172
— and Linfoot, E. H. 图 9.15
Blaisse, R. S.
Kronig, R., — and Sande, J. J., v. d. 47
Blanc-Lapierre, A. 450
— and Dumontet, P. 460
Blaschke, W. 133
Bloembergen, N. 3
— and Grivet, P. 461
— and Pershan, P. S. 88
Blumer, H. 653
Bock, R. O.
Collins, J. R. and — 622
Bocko, M. F.
—, Douglass, D. H. and Knox, R. S. 488
Boeder, P. 704
Boegehold, H. 130, 135
— and Herzberger, M. 135
Boersch, H. 422, 738
Boethe, W. 88
Bohr, N. VI, 738
Boivin, A. 407
—, Dow, J. and Wolf, E. 366, 407
— and Wolf, E. 366, 407
Boltzmann, L. 11
Booker, H. G. 529
Borgnis, F. 20
Born, M. VI, 54, 68, 71, 88, 351, 429, 584, 625, 668, 758
—, Heisenberg, W. and Jordan, P. VI
— and Jordan, P. VI
— and Kármán, Th. v. 578
Börnstein, R.
Landolt, H. H. and — 623
Bortolotti, E. 107
Bouguer 110, 图 3.5
Boutry, G. A. 220
Bouwers, A. 238
Bouwkamp, C. J. 352, 415, 526, 560, 561, 660
— and Casimir, H. B. G. 638
Boyd, R. W. 3, 164
Boyle, R. II
Bracewell, R. N. 191, 461
— and Riddle, A. C. 191
Bradley, J. VII, 10
Bradley, L. C. and Kuhn, H. 336
Bragg, W. H. and Bragg, W. L. 图 13.6, 588
Bragg, W. L. 422, 589, 590
Bragg, W. H. and — 图 13.6, 588
— and Pippard, A. B. 703
Braunbek, W. 101
— and Lankien, G. 544, 图 11.12, 图 11.13, 图 11.14
Breguet, L.
Fizeau, H. and — IV
Bremmer, H. 756
Pol, B., van der and — 650, 747, 750
Brewster, D. 图 1.11, 699
Brillouin, L. 16, 562, 566, 576, 602
Brinkman, H. C.
Zernike, F. and — 758
Broer, L. J. F. 20
Broglie, L., de VI, 117, 584, 737
Bromwich, T. J. I'A. 526, 634, 745
Brossel, J. 324
Brown, J. 130
Brown, R., Hanbury 478
— and Twiss, R. Q. 257, 478
Bruns, H. 100, 120, 130
—, Klein, F. and Liebmann, H. 130
Bryngdahl, O. 293
Bucerius, H. 650
Buchdahl, H. A. 196
Buerger, M. J. 422
Buisson, H.
Fabry, C. and — 311, 339

Bulmer, H. 图 14.11, 655
Bunimovich, V. I. 462
Bunn, C. W. 674
Bunsen, R. and Kirchhoff, G. V
Burch, C. R. 237, 图 6.30
Burckhardt, C. B.
Collier, R. J., — and Lin, L. H. 419
Burridge, J. C., Kuhn, H. and Pery, A. 图 7.61
Burtin, R. 366
Butcher, P. N. and Cotter, D. 3

Campbell, N. 294
Carathédory, C. 98, 115, 117, 120, 130, 133, 233
Carlson, J. F. and Heins, A. E. 527, 558
Carney, P. S.
Visser, T. D., — and Wolf, E. 90
Carslaw, H. S. 526, 553, 555, 560
Cartan, E. 114
Carter, W. H. 596
— and Ho, P. C. 596
Casimir, H. B. G.
Bouwkamp, C. J. and — 638
Cassegrain, N. 图 6.23
Cauchy, A. L. III, 85, 86
Chabbal, R. 307, 308
Chako, N. 200, 746
Chalker, W. R.
Houghton, H. G. and — 658
Chander, M.
Kandpal, H. C., Vaishya, J. S., —, Saxena, K., Mehta, D. S. and Joshi, K. 488
Chandrasekhar, S. 524
Chebyshev, P. L. 60, 62
Chester, C., Friedman, B. and Ursell, F. 744
Chevalier, C. 图 6.3
Chiao, R. Y., and Steinberg, A. M. 20
Chwolson, O. D. 图 1.12, 图 1.14
Cittert, P. H., van 460, 474, 476
Clausius, R. 79, 150, 151
Clemmow, P. C. 559, 561, 594, 744
Coker, E. G. and Filon, L. N. G. 701
Collett, E. and Wolf, E. 407
Collier, R. J., Burckhardt, C. B. and Lin, L. H. 419
Collins, J. R. and Bock, R. O. 622
Connes, P. 307
Conrady, A. E. 172
Cooke, T. 图 6.5
Cope, T. D. 377
Copson, E. T. 527, 561, 586, 756
Baker, B. B. and — 98, 347, 348, 351, 352, 415, 527, 540, 546, 559, 582
Cormack, A. 190
Cornu, A. 398, 图 8.37
Corput, J. G., van der 745, 746
Cotes, R. 150
Cotter, D.
Butcher, P. N. and — 3
Couder, A.
Danjon, A. and — 225
Courant, R. 110, 398, 670, 730
— and Hilbert, D. 388, 434, 759, 760, 761, 762
Crowther, R. A.
—, DeRossier, D. J. and Klug, A. 191
Klug, A. and — 191
Cullen, A. E.
Mathews, P. A. and — 407
Culshaw, W. and Jones, D. S. 42
Czapski, S. and Eppenstein, O. 130

Daguerre, L. J. M. 192
Dallmeyer, J. H. 223
Danjon, A. and Couder, A. 225
Darwin, C. G. 88, 767
Davenport, W. B. and Root, W. L. 465
David, E. 566, 576
Davis, H. T.
Hufford, M. E. and — 407
De, M. 图 9.16
Deans, S. R. 185, 188
Debye, P. 402, 634, 650, 657, 740
— and Sears, F. W. 563
De Mol, C., de
Bertero, M. and — 586
Dennison, D. M.

Hadley, L. N. and — 632
DeRossier, D. J.
— and Klug, A. 191
Crowther, R. A., — and Klug, A. 191
Descartes, R. I
Devaney, A. J. 596
Dexter, D. L.
Guinier, A. and — 422, 588
Dingle, R. B. 541
Dirac, P. A. M. VI, 738, 747, 748
Ditchburn, R. W. 622
Dogariu, A.
Wang, L. J., Kuzmich, A. and — 20
Doob, J. L. 465
Doppler, C. VII
Dorsey, N. E.
Rosa, E. B., and — 10
Dossier, B. 见 Roizen-Dossier, B.
Dove, K. 图 6.16
Douglass, D. H.
Bocko, M. F., — and Knox, R. S. 488
Dow, J.
Boivin, A., — and Wolf, E. 366, 407
Dowell, J. H. 828, 图 7.44
Drew, R. L. 293
Driffield, V. C. 图 8.51
Drude, P. 622
— and Nernst, W. 260
Duboscq, J.,
— and Soleil, H. 689
Duffieux, P. M. 450
— and Lansraux, G. 450
Dufour, C. 306, 317, 322, 336
— and Herpin, A. 62
— and Picca, R. 307, 329
Jacquinot, P. and — 313
Dumontet, P. 452, 498
Blanc-Lapierre, A. and — 460
Duncan, R. W. and Duncan, R. C. 623
Dupin, C. 117, 118
Dyson, J. 288, 图 7.49
Eagle, A. 382, 图 8.29
Edsall, J. T. 704
Ehrenberg, W. and Siday, R. E. 736
Einstein, A. VI, VII, 470, 584
Emde, F.
Jahnke, E. and — 365, 366, 397
Empedocles, C. I
Eppenstein, O.
Czapski, S. and — 130
Epstein, D. W.
Malloff, I. G. and — 178
Erdélyi, A. 884
Esmarch, W. 88
Euclid I
Euler, L. II
Ewald, P. P. 90, 585
Extermann, R. and Wannier, G. 567
Fabry, C.
— and Buisson, H. 311, 339
— and Perot, A. 304, 图 7.59, 图 7.60, 308, 图 7.63, 图 7.64, 图 7.65, 图 7.66, 315, 图 7.71
Benoit, J. R., — and Perot, A. 336, 340
Macé de Lépinay, J. and — 270
Falkoff, D. L. and MacDonald, J. E. 524
Fano, U. 524
Faraday, M. V
Farnell, G. W. 图 8.45, 415
Fearn, H., James, D. F. V. and Miloni, P. 90
Feick, R. 图 14.12
Fellgett, P. 299
Fercher, A. F., Bartlet, H., Becker, H. and Wiltschkoe, E. 596
Fermat, P., de I, 115, 图 3.11
Feussner, W. and Janicki, L. 274
Filon, L. N. G.
Coker, E. G. and — 701
Fizeau, H. III, 10, 256, 269, 图 7.30, 296, 图 7.74, 图 7.76, 图 7.77
— and Breguet, L. IV
Foucault, L. and — 10
Fletcher, A. T., Murphy, T. and Young, A. 133

Fock, V. A. 99,366
Focke, J. 196,409,430,445,745,746
Foley, J. T.
Wolf, E. and — 608
Forrester, A. T. 480
Foucault, L. IV,10
— and Fizeau, H. 10
Fourier, J. B. J. 16
Francia, Toraldo G., di 133,352,384
Françon, M. 391,445
— and Mallick, S. 469
Frank, P. and Mises, R. 638
Franken, P. A., Hill, A. E., Peters, C. W. and Weinrich, G. 3
Fraunhofer, J. V, 377, 图 8.6, 图 8.9, 图 8.10, 图 8.11, 图 8.12, 图 8.13, 图 8.14, 图 8.15, 图 8.30
Freeman, J. J. 461
Fresnel, A. J. III, IV, 45, 图 1.16, 图 7.5, 图 7.7, 图 7.10, 241, 图 7.11, 图 8.1, 图 8.36, 图 8.38, 图 8.39
—Kirchhoff, G. 图 8.3
Friberg, A. T and Wolf, E. 487
Friedlander, F. G. 99
Friedman, B.
Chester, C., — and Ursell, F. 744
Friedrich, W., Knipping, P. and Laue, M. von 588
Frocht, M. M. 701
Fry, T. C.
Ives, H. E. and — 260
Fuks, B. A. 586

Gabor, D. 418, 图 8.50, 图 8.53, 422, 460, 462
Galileo, G. I
Gamo, H. 460
Gans, R. 653,660
Gantmacher, F. R. 764
Garnett, J. C., Maxwell 634
Gauss, K. F. 1
Gehrcke, E.
— and Lau, E. 335
Lummer, O. and — 316, 图 7.67, 图 7.69, 图 7.70
Gelius, L-J.
Stamnes, J. J., —, Johansen, I. and Sponheim, N. 597
Gergonne, J. D. 117
Giacomo, P. 63,304, 图 7.61
— and Jacquinot, P. 323
Glaser, W. 738
Glauber, R. J. 461
Glazebrook, R., (editor) 220
Goede, J. de and Mazur, P. 90
Goerz, C. P. 223
Goldberg, B. 图 14.13
Goldman, S. 465
Gori, F. 527
Santarsiero, M. and — 488, 图 10.11
Götz, F. W. P. 658
Gouy, L. G. 414
Gray, A., Mathews, G. B. and MacRobert, T. M. 405
Green, A.
Twyman, F. and — 281, 图 7.41, 图 7.42
Green, G. IV
Green, H. S. and Wolf, E. 66
Greenberg, J. M.
Montroll, E. W. and — 660
Greenland, K. M. and Billington, C. 323
Greenstein, J. L. 658
Grey D. S. 238
Grimaldi, F. M. II
Grivet, P.
Bloembergen, N. and — 461
Gröbner, W. and Hofreiter, N. 364
Groosmuller, J. Th.
Lakeman, C. and — 460
Groschwitz, E. and Hönl, H. 559
Grossmann, F.
Schaeffer, C. and — 660
Guinier, A. and Dexter, D. L. 422,588
Gumprecht, R. O. and Sliepcevich, C. M. 653

Habashy, T. and Wolf, E. 586
Haber, F. and Löwe, F. 251
Hadley, L. N. and Dennison, D. M. 632
Hagen, E. and Rubens, H. 624

Haidinger, W. 684
Hamilton, W. R., Sir III, 117, 120, 121, 122, 图 4.3, 729
— and Bruns, H. 120
Hammer, K. 57, 图 1.19, 图 14.5
Hanbury Brown, R. 见 Brown, R., Hanbury
Hannay, J. H.
Nye, J. F., — and Liang, W. 428
Hansen, R. C. (ed.) 108
Hanson, A. W., Lipson, H. and Taylor, C. A. 480
Hanson, E. T. 560
Harden, B. N. 547
Harihan, P. 419
Harrison, G. R. 315, 377, 378
Hart, R. W.,
— and Montroll, E. W. 660
Montroll, E. W. and — 660
Hartree, D. R. 93
Heavens, O. S. 46, 632
Heaviside, O. 747, 756
Heins, A. E. 527, 554, 556, 557
— and Silver, S. 561
Carlson, J. F. and — 527, 558
Heisenberg, W. VI
Born, M., — and Jordan, P. VI
— and Jordan, P. VI
Helmholtz, H., von 91, 图 4.17, 151, 220, 347
— and Kirchhoff, G. 图 8.2
Herpin, A.
Dufour, C. and — 62
Herschel, J. F. W. 图 4.18, 151, 153
Hertz, H. V, VII, 9, 72
Herzberger, M. 98, 135, 172, 196
— and Hoadley, H. O. 181
— and Synge, J. L. 120
Boegehold, H. and — 135
Hilbert, D. R. 714
Courant, R. and — 388, 434, 759, 760, 761, 762
Hill, A. E.
Franken, P. A., —, Peters, C. W. and Weinrich, G. 3
Hinde, R. M.
Taylor, C. A., — and Lipson, H. 480
Hirayama, S.
Scheiner, J. and — 368
Ho, P. C.
Carter, W. H. and — 596
Hoadley, H. O.
Herzberger, M. and — 181
Hockin, C. 151
Hoek, H. 88
Hofreiter, N.
Gröbner, W. and — 364
Holden, J. 329
Holl, H. 653, 658
Hönl, H.
— and Zimmer, E. 559
Groschwitz, E. and — 559
—, Maue, A. W. and Westpfahl, K. 527
Hooke, R. II
Hoop, A. T., de 605
Hopf, E. 527
Hopkins, H. H. 178, 366, 391, 450, 图 9.13, 460, 479, 498
— and Barham P. M. 图 10.16
Hoppe, E. I
Horton, C. W. and Watson, R. B. 547
Houghton, H. G. and Chalker, W. R. 658
Hounsfield, G. N. 图 4.50, 190
Houston, W. V. 335
Hsü, Hsien-yü
Richartz, M. and — 687
Hufford, M. E. and Davies, H. T. 407
Hughes, W. and Taylor, C. A. 480
Hulst, H. C., van de 601, 634, 653, 658, 图 14.15, 660
Hurter, F. 图 8.51
Hüttel, A. 10
Hutter, D. J.
Armstrong, J. T., —, Johnson, K. and Mozurkewich, D. 257
Huxley, L. G. H. 529, 554
Huygens, C. II, 11, 119, 150

Ignatowsky, W. S. 99, 366, 660

Illingworth, K. K. 279
Ingarden, R. S. 415
— and Krzywicki, A. 99
Ives, H. E. and Fry, T. C. 260
Iwata, K. and Nagata, R. 597

Jackson, C. V. 315
Jackson, J. D. 8
Jacobi, K. G. 100, 115, 121, 408, 727, 729
Jacobs, D. A. 220
Jacobson, D. L.
—, Werner, S. A. and Rauch, H. 488
Jacobsson, R. 52
Jacquinot, P. 313
— and Dufour, C. 313
Giacomo, P. and — 323
— and Roizen-Dossier, B. 385
Jahnke, E. and Emde, F. 365, 366, 397
James, D. F. V.
— and Wolf, E. 488, 图 10.10
Fearn, H., — and Miloni, P. 90
Wolf, E. and — 488
James, G. L. 108
Jamin, J. 286, 图 7.47, 688
Janicki, L.
Feussner, W. and — 274
Jánossy, L. 460
Jauch, J. M. and Rohrlich, F. 524
Jeffreys, B. S.
Jeffreys, H. and — 579, 740, 744
Jeffreys, H. and Jeffreys, B. S. 579, 740, 744
Jerrard, H. G. 27, 687
Jobst, G. 658
Johansen, I.,
Stamnes, J. J., Gelius, L.-J., — and Sponheim, N. 597
Johnson, I. and La Mer, V. K. 659
Johnson, K.
Armstrong, J. T., Hutter, D. J., — and Mozurkewich, D. 257
Jones, D. S. 561, 600, 602, 772
— and Kline, M. 746
Culshaw, W. and — 42
Jordan, P.
Born, M., Heisenberg, W. and — VI
Born, M. and — VI
Joshi, K.
Kandpal, H. C., Vaishya, J. S., Chander, M., Saxena, K., Mehta, D. S. and — 488
Joule, J. P. 3, 8
Jupnik, H.
Bennett, A. H., —, Osterberg, H. and Richards, O. W. 391, 图 8.34, 图 8.35

Kahn, F. D. 473
Kak, A. C. 189
— and Slaney, M. 596
Pan, S. X. and — 596
Kalaschnikow, A. 415
Kampen, N. G., van 429, 608, 746
Kandpal, H. C., Vaishya, J. S., Chander, M., Saxena, K., Mehta, D. S. and Joshi, K. 488
Kanthack, R. 172, 210
Kármán, Th. v.
Born, M. and — 578
Karolus, A. and Mittelstaedt, O. 10
Karp, S. N. and Russek, A. 559
Kathavate, Y. V. 368, 415
Kay, I. W.
— and Silverman, R. 512
Kline, M. and — 101, 105, 107, 746, 756
Keller, J. B. 108, 608
Kelvin, Lord (Thomson, W.) IV, 745
Kemble, E. 760
Kennedy, R. J. 279
Kenyon, A. S.
Barnes, M. D., —, Zaiser, E. M. and La Mer, V. K. 658, 659
Kharkevich, A. A. 512
Khintchine, A. 470
Kingslake, R. 224, 图 7.42, 图 9.7
Kinosita, K. 图 7.74
Kirchhoff, G. V, 99, 342, 347
Bunsen, R. and — V

Fresnel, A. J., — 图 8.3
Helmholtz, H., von — 图 8.2
Klauder, J. R., and Sudarshan, E. C. G. 461
Klein, F. 120, 130, 133
Bruns, H., — and Liebmann, H. 130
Kline, M. 101, 105, 756
— and Kay, I. W. 101, 105, 107, 746, 756
Jones, D. S. and — 746
Klug, A.
— and Crowther, R. A. 191
Crowther, R. A., DeRossier, D. J. and — 191
DeRossier, D. J. and — 191
Knipping, P.
Friedrich, W., — and Laue, M., von 588
Knox, R. S.
Bocko, M. F., Douglass, D. H. and — 488
Koch, J. 84
Kodis, R. D. 547
Köhler, A. 496, 图 10.17
Kohler, H. 233
Kohlrausch, R. V
— and Weber, W. 9
Kohlschütter, A. 196
König, H.
Runge, C. and — 183
Kösters, W. 281, 图 7.43
Kottler, F. 72, 347, 352, 415
Kramers, H. A. 462
Kranendonk, J., van and Sipe, J. E. 88
Kronig, R., Blaisse, R. S. and Sande, J. J. v. d. 47
Krzywicki, A.
Ingarden, R. S. and — 99
Kuhn, H.
— and Wilson, B. A. 图 7.61
Bradley, L. C. and — 336
Burridge, J. C. — and Pery, A. 图 7.61
Kundt, A. 617
Kutta, M. W. 183
Kuzmich, A.
Wang, L. J., — and Dogariu, A. 20
Ladenburg, R. and Bershader, D. 291
Lagrange, J. L. 图 3.10, 150
Lakeman, C. and Groosmuller, J. Th. 460
Lalor, É. and Wolf, E. 94
Lamé, M. G. 680
La Mer, V. K.
Barnes, M. D., Kenyon, A. S., Zaiser, E. M. and — 658, 659
Barnes, M. D. and — 658, 659
Johnson, I. and — 659
Land, E. H. 712
— and West, C. 图 15.32, 图 15.33
Landolt, H. H. and Börnstein, R. 623
Lange, H. 623
Lansraux, G.
Duffieux, P. M. and — 450
Laplace, P. S., de III
Laporte, O. and Meixner, J. 415
Lau, E.
Gehrcke, E. and — 335
Laue, M., von 370, 460, 590
Friedrich, W., Knipping, P. and — 588
Laukien, G.
Braunbek, W. and — 544, 图 11.12, 图 11.13, 图 11.14
Lax, M. 601
Lee, H. W. 224
Taylor, W. and — 224
Legendre, A. M. 121
Leith, E. N. and Upatnieks, J. 422, 图 8.54
Lenz, W. 132, 133
Leonardo da Vinci 412
Leontovich, E. A.,
Mayer, A. G. and — 512
Lépinay, J., Macé de 见 Macé de Lépinay, J.
Leurgans, P. and Turner, A. F. 232
Levi-Civita, T. 107, 118, 756
Levine, H. and Schwinger, J. 527
Li, Y. 403
— and Wolf, E. 403
— and Platzer, H. 403
Liang, W.
Nye, J. F., Hannay, J. H. and — 428

Liebisch, T and Rubens, H. 663
Liebmann, H. 130
Bruns, H., Klein, F. and — 130
Lighthill, M. J. 747
Lin, L. H.
Collier, R. J., Burckhardt, C. B. and — 419
Linfoot, E. H. 233,445
— and Wolf, E. 407,图 8.41,图 8.46,图 8.47,414
Black, G. and — 图 9.15
Liouville, J. 133
Lippmann, G. 260,图 7.19
Lipson, H.
— and Cochran, W.
—, Taylor, C. A. and Thompson, B. J. 图 8.10, 图 8.12,图 8.15
Hanson, A. W., — and Taylor, C. A. 480
Taylor, C. A., Hinde, R. M. and — 480
Lissberger, P. H.
— and Ring, J. 323
Littleton, J. T., Jr. 623
Littrow, O. 图 8.25
Lloyd, H. III,图 7.6
Lommel, E. 402
Lorentz, H. A. VII,79,81
Lorenz, L. 79
Loschmidt, J. 93
Lotsch, H. K. V. 432
Love, A. E. H. 756
Löwe, F.
Haber, F. and — 251
Lowery, H. and Moore, R. L. 623
Lucas, R. and Biquard, P. 563
Lummer, O. 316
— and Gehrcke, E. 316,图 7.67,图 7.69,图 7.70
— and Reiche, F. 387
Lundblad, R. 88
Luneburg, R. K. 101,107,133,178,384,756

MacCullagh, J. IV
MacDonald, H. M. 526,553,555,560
MacDonald, J. E.
Falkoff, D. L. and — 524
Macé de Lépinay, J. 274
— and Fabry, C. 270
Mach, E. I,98
Mach, L. 289
— Zehnder, L. 图 7.50,图 7.51
MacRobert, T. M.
Gray, A., Mathews, G. B. and — 405
Maey, E. 415
Maggi, G. A. 415
Magnus, W. 785
— and Oberhettinger, F. 636
Mahajan, V. N. 431,433,438
Maiman, L. T. H. VII
Mallick, S.
Françon, M. and — 469
Malloff, I. G. and Epstein, D. W. 178
Malus, É. L. III,117,118
Mandel, L. 463,471,478,511
— and Wolf, E. 164, 185, 461, 469, 478, 487, 488, 511,593,594,744
Maraldi 346
Marchand, E. W. 130
— and Wolf, E. 415,428
Wolf, E. and — 352
Maréchal, A. 438,445
Margenau, H. and Murphy, G. M. 468
Martin, L. C. 415,687
Massey, H. S. W. and Mohr, C. B. O. 602
Mathews, G. B.
Gray, A., — and MacRobert, T. M. 405
Mathews, P. A. and Cullen, A. E. 407
Maue, A. W. 561
Hönl, H., — and Westpfahl, K. 527
Maxwell Gamett, J. C. 见 Garnett, J. C. Maxwell
Maxwell, J. C. V,10,129,图 4.7,图 4.8,704
Mayer, A. G. and Leontovich, E. A. 512
Mayer, H. 46,54
Mazur, P.
Goede, J., de and — 90
McCrea, W. H. 72
McMaster, W. H. 524

Mehta, D. S.
H. C., Kandpal, Vaishya, J. S., Chander, M., Saxena, K., — and Joshi, K. 488
Meier, W. 623
Meissner, K. W. 图 7.64, 图 7.65
Meixner, J. 561
— and Andrejewski, W. 526
Laporte, O. and — 415
Mercier, A. 10
Merté, W.
—, Richter, R. and Rohr, M., von 224
Merton, T. 378
Meslin, G. 图 7.9, 247, 273
Messner, R. 图 1.18
Methfessel, S. 46
Meyer, C. F. 342
Michelson, A. A. VII, 10, 250, 图 7.15, 图 7.16, 256, 图 7.39, 278, 280, 图 7.40, 298, 图 7.55, 378, 460, 图 8.22
— and Benoit, J. R. 315, 340
— and Morley, E. W. VII, 280
— and Pease, F. G. 256
Middleton, D. 465
Mie, G. 634, 653, 图 14.10, 654, 656
Miles, J. W. 527
Millar, R. F. 670
Milonni, P.
Fearn, H., James, D. F. V. and — 90
Minor, R. S. 623
Mises, R.
Frank, P and — 638
Mitra, S. K. 415
Mittelstaedt, O.
Karolus, A. and — 10
Miyamoto, K. 415, 450
— and Wolf, E. 415
Möglich, F. 660
Mohr, C. B. O.
Massey, H. S. W. and — 602
Montroll, E. W.
— and Greenberg, J. M. 660
— and Hart, R. W. 660
Hart, R. W. and — 660
Mooney, R. L. 59
Moore, R. L.
Lowery, H. and — 623
Morgan, J. M.
Thompson, A. R. — and Swenson, G. W 257
Morley, E. W.
Michelson, A. A. and — VII, 280
Morse, P. M. and Rubenstein, P. J. 559
Mossotti, O. F. 79
Moullin, E. B. and Phillips, F. M. 559
Mozurkewich, D.
Armstrong, J. T., Hutter, D. J., Johnson, K. and — 257
Muchmore, R. B. 47
Mukunda, N. 428
Müller, C. 561
Müller, R. and Westpfahl, K. 559, 560
Murata, K. 457
Murphy, G. M.
Margenatu, H. and — 468
Murphy, T.
Fletcher, A. T., — and Young, A. 133
Musset, A. and Thelen, A. 58

Nagata, R.
Iwata, K. and — 597
Naik, Y. G.
Paranjpe, G. R. — and Vaidya, P. B. 653
Nath, N. S. N. 567
Raman, C. V. and — 566
Nathanson, J. B. 623
Navier, C. L. M. H. IV
Nernst, W.
Drude, P. and — 260
Neumann, C. V
Neumann, F. IV
Newton, I. II, 230, 图 7.28, 图 7.29
Newton, R. G. 601
Nicol, W. 686, 图 15.17, 图 15.24
Nienhuis, K. 429, 图 9.4, 图 9.5, 图 9.8, 图 9.9, 图 9.10, 图 9.11

— and Nijboer, B. R. A. 429,图 9.6
Nijboer, B. R. A. 429,436,图 9.6,图 9.9,758
Nienhuis, K. and — 429,图 9.6
Zernike, F. and — 407,429,图 9.3
Nisbet, A. 72,638
— and Wolf, E. 32
Noble, W. J. 568
Bhatia, A. B. and — 568,574,575,576
Nomoto, O. 577
Nörrenberg, J. G. C. 40
Nussenzveig, H. M. 462,634
Nye, J. F.
— and Berry, M. V. 412
—, Hannay, J. H. and Liang, W. 428
Oberhettinger, F.
Magnus, W. and — 636
Ohm, G. S. 2
Oppitz, L. K. 623
Oseen, C. W. 88,90
Oster, G. 653
Wilkins, M. H. F., Stokes, A. R., Seeds, W. E. and — 703
Osterberg, H.
— and Wilkins, J. E. 384
Bennett, A. H., Jupnik, H., — and Richards, O. W. 391,图 8.34,图 8.35
Oswald, J. R. 462
Ott, H. 744
Oughstun, K. E. and Sherman, G. C. 16
Pan, S. X.
— and Kak, A. C. 596
Pancharatnam, S. 27,461,524
Paoletti, D.
Ambrosini, D., Schirripa Spagnolo, G., — and Vicalvi, S. 481
Paranjpe, G. R., Naik, Y. G. and Vaidya, P. B. 653
Parrent, G. B.,
— and Roman, P. 515
Beran, M. J. and — 510
Parseval, M. A. 294,356,436
Parthasarathy, S. 576,图 12.3
Paschen, F. 381,图 8.28
Pattanayak, D. N.
— and Wolf, E. 90
Pauli, W. 744
Weyl, H. and — 513
Pearcey, T. 397
Pease, F. G.
Michelson, A. A. and — 256
Pecora, R. 608
Berne, B. J. and — 608
Pendorf, R. 658
Penselin, S. and Steudel, A. 图 7.61
Péard, A. 298
Perot, A.
Benoit, J. R., Fabry, C. and — 336,340
Fabry, C. and — 62,304,图 7.59,图 7.60,308,图 7.63,图 7.64,图 7.65,图 7.66,315,图 7.71
Perrin, F. 462,524
Pershan, P. S.
Bloembergen, N. and — 88
Pery, A.
Burridge, J. C., Kuhn, H. and — 图 7.61
Peters, C. W.
Franken, P. A., Hill, A. E., — and Weinrich, G. 3
Petzval, J. 192,196,图 6.3
Phariseau, P. 576
Phillips, F. M.
Moullin, E. B. and — 559
Picca, R.
Dufour, C. and — 307,329
Picht, J. 392,394,429
Pippard., A. B.
Bragg, W. L. and — 703
Planck, M. VI,358,584,625
Platzer, H.
Li, Y. and — 403
Pockels, F. 348,700
Poggendorff, J. G. 684
Poincaré, H. 图 1.8,27,114,352,415,740
Poisson, S. D. III,77,346
Pol, B., van der and Bremmer, H. 650,747,750
Porter, A. B. 387

Poynting, J. H. 21,28,29,75,103,108
Preddy, W. S.
Wolf, E. and — 178
Priestley, J. I
Pringsheim, E. 287,图 7.48
Prins, J. A. 370
Prokhorov, A. M.
Basov, N. G. and — VII
Purcell, E. M. 478
Purkinje, J. E. 167
Pythagoras 727

Quetelet, A. 117

Rabinovich, G. D. 192
Radon, J. 185
Ramachandran, G. N. 415
Raman, C. V. and Nath, N. S. N. 566
Ramsden, J. 227,228
Rankin, R. A. 540
Ratcliffe, J. A. 461,478
Rauch, H. 488
Jacobson, D. L., Werner, S. A. and — 488
Rayces, J. L. 195
Rayleigh, Lord (Stutt, J. W.) V,88,150,251,图 7.13, 298,308,图 7.62,368,387,429,438,527,559,566, 652,703
— and Sommerfeld, A. 425 及其后
Reiche, F. 414
Lummer, O. and — 387
Rellich, F. 561
Ricci, G. 636
Rice, S. O. 294
Richards, B. and Wolf, E. 366
Richards, O. W.
Bennett, A. H., Jupnik, H., Osterberg, H. and — 391,图 8.34,图 8.35
Richartz, M. and Hsü, Hsien-Yü 687
Richter, R. 437
Merté, W., — and Rohr, M., von 224
Riddle, A. C.
Bracewell, R. N. and — 191
Righi, A. 72
Rinehart, R. F. 133
Ring, J.
— and Wilcock, W. L. 图 7.61
Lissberger, P. H. and — 323
Rittenhouse, D. 377
Robinson, G.
Whittaker, E. T. and — 183
Rohr, M., von 168,172,20,226
Merté, W., Richter, R. and — 224
Rohrlich, F.
Jauch, J. M. and — 524
Roizen-Dossier, B.
Jacquinot, P. and — 385
Rolt, F. H. 269
Roman, P. 517,581
Parrent, G. B. and — 515
— and Wolf, E. 471,517
Römer, O. II,10
Röntgen, W. C. 7
Root, W. L.
Davenport, W. B. and — 465
Rosa, E. B. and Dorsey, N. E. 10
Ross, F. E. 230,231
Row, R. V. 547
Rowl and, H. A. 377,381,382,图 8.26,图 8.27
Rubens, H. 663
Hagen, E. and — 623
Liebisch, T. and — 663
Rubenstein, P. J.
Morse, P. M. and — 559
Rubinowicz, A. 415
Rudolph, P. 223
Rule, B. 230
Runge, C. and König, H. 183
Runge, J.
Sommerfeld, A. and — 99,111
Russek, A.
Karp, S. N. and — 559
Rutherford, E., Lord 738
Rytov, S. M. 99,107,576,606

Sakai, H.

Vanasse, G. A. and — 299
Salmon, G. 683, 746
Sande, J. J. v. d.
Kronig, R., Blaisse, R. S. and — 47
Santarsiero, M. and Gori, F. 488, 图 10.11
Saunders, W. K. 561
Savart, F. 696
Savornin, J. 547
Saxena, K.
Kandpal, H. C., Vaishya, J. S., Chander, M., —, Mehta, D. S. and Joshi, K. 488
Schaeffer, C. and Grossmann, F. 660
Schalén, C. 653, 图 14.14
Schawlow, A. L. and Towns, C. H. VII
Scheiner, J. and Hirayama, S. 368
Schelkunoff, S. A. 66
Schirmann, M. A. 655
Schirripa Spagnolo, G.
Ambrosini, D., —, Paoletti, D. and Vicalvi, S. 481
Schmidt, B. 178, 231, 图 6.20, 图 6.21, 图 6.23
Schopper, H. 634
Schorr, R. 231
Schröder, H. 58
Schrödinger, E. VI, 738
Schuster, A. 344
Schuster, K. 47
Schwartz, L. 747
Schwarzschild, K. 178, 192, 196, 217, 402, 559, 645, 734, 735
Schwerd, F. M. 366
Schwinger, J.
Levine, H., and — 527
Searle, G. F. C. 274
Sears, F. W.
Debye, P. and — 563
Sears, J. E. 341
— and Barrell, H. 340
Barrell, H. and — 340
Seeds, W. E.
Wilkins, M. H. F., Stokes, A. R., — and Oster, G. 703
Seidel, L. 192, 196, 210
Sein, J. J. 90
Seitz, F. 660
Sellmeir, W. 86
Senftleben, H. and Benedict, E. 653
Senior, T. B. A. 554, 561
Sherman, G. C.
Oughstun, K. E. and — 16
Shewell, J. R.
Wolf, E. and — 422
Siday, R. E.
Ehrenberg, W. and — 736
Siegman, A. E. 346
Silva, D. E.
Wang, J. Y. and — 436
Silver, S. 352
Heins, A. E., and — 561
Silverman, R. 512
Kay, I. and — 512
Simon, I. 622
Sinclair, D. 602
Sipe, J. E.
Kranendonk, J., van and — 88
Sirks, J. A. 287, 图 7.48
Sitenko, A. G. 604
Skavlem, S. 559
Slaney, M.
Kak, A. C. and — 596
Slevogt, H. 233
Sliepcevich, C. M.
Gumprecht, R. O. and — 653
Smith, R. 图 4.17, 150, 151, 152
Smith, T. 135, 172, 229
Sneddon, I. N. 356, 453
Snell, W., (Snellius) 1, 33, 48, 112
Soleil, H. 图 15.19, 689
Duboscq, J. and — 689
Soleillet, P. 461, 524
Sommerfeld, A. 6, 16, 98, 342, 348, 427, 526, 559, 561, 625, 638, 640, 641
— and Runge, J. 99, 111
Rayleigh and — 425 及其后
Sommerville, D. M. Y. 682

Southall, J. P. C. 220
Sponheim, N.
Stamnes, J. J., Gelius, L. -J., Johansen, I. and — 597
Stamnes, J. J. 402
— and Wedberg, T. C. 597
—, Gelius, L. -J., Johansen, I. and Sponheim, N. 597
Steel, W. H. 图 9.14
Steinberg, A. M.
Chiao, R. Y. and — 20
Steinheil, H. A. 223
Stettler, R. 133
Steudel, A.
Penselin, S. and — 图 7.61
Steward, G. C. 200, 图 8.30, 428
Stokes, A. R. 26
Wilkins, M. H. F., —, Seeds, W. E. and Oster, G. 703
Stokes, G. G. 111, 351, 461, 524, 541
Stratton, J. A. 6, 550
Straubel, R. 384
Strehl, K. 431
Stroke, G. W. 378
Strömgren, B. 233
Strutt, J. W. 见 Rayleigh, Lord
-Struve, H. 402
Suchy, K. 99
Sudarshan, E. C. G. 461
Klauder, J. R. and — 461
Svelto, O. 307
Swenson, G. W.
Thompson, A. R., Morgan, J. M. and — 257
Synge, J. L. 120
Hertzberger, M. and — 120
Szivessy, G. 679, 700, 713

Taylor, C. A. 图 8.10, 图 8.12, 图 8.15
—, Hinde, R. M. and Lipson, H. 480
— and Thompson, B. J. 407
Hanson, A. W., Lipson, H. and — 480
Hughes, W. and — 480
Lipson, H., — and Thompson, B. J. 图 8.10, 图 8.12, 图 8.15
Taylor, H. D. 224, 407
Taylor, W.
— and Lee, H. W. 224
Temple, G. 747
Theimer, O., Wassermann, G. D. and Wolf, E. 357
Thelen, A.
Musset, A. and — 58
Thompson, A. R., Morgan, J. M. and Swenson, G. W. 257
Thompson, B. J. 图 8.10, 图 8.12, 图 8.15
— and Wolf, E. 图 10.6
Lipson, H., Taylor, C. A. and — 图 8.10, 图 8.12, 图 8.15
Taylor, C. A. and — 407
Thomson, G. P. 738
Thomson, W. 见 Kelvin, Lord
Thorp, T. 378
Titchmarsh, E. C. 462, 527, 534, 557
Tolansky, S. 311, 329, 332, 632
— and Wilcock, W. L. 图 7.79
Toll, J. S. 462
Townes, C. H.
Schawlow, A. L. and — VII
Tranter, C. J. 559, 560
Trowbridge, A.
— and Wood, R. W. 377
Turner, A. F. 322, 324
Leurgans, P. and — 323
Twiss, R. Q.
Brown, R., Hanbury and — 257, 478
Twyman, F. 264, 281
— and Green, A. 281, 图 7.41, 图 7.42

Upatnieks, J.
Leith, E. N. and — 422, 图 8.54
Ursell, F.
Chester, C., Friedman, B. and — 744

Vaidya, P. B.
Paranjpe, G. R., Naik, Y. G. and — 653
Vainstein, L. A. 556

Vaishya, J. S.
Kandpal, H. C., —, Chander, M., Saxena, K., Mehta, D. S. and Joshi, K. 488
Vanasse, G. A.
— and Sakai, H. 299
Vaskas, E. M. 181
Verdet, E. 459,478
Vicalvi, S.
Ambrosini, D., Schirripa Spagnolo, G., Paoletti, D. and — 481
Ville, J. 462
Vinci, Leonardo da 342
Visser, T. D.
— and Wolf, E. 90
—, Carney, P. S. and Wolf, E. 90
Voigt, W. 684
Volosov, D. S. 181
Volterra, V. 680

Wadsworth, F. L. O. 382
Waerden, B. L., van der 744
Wagner, E. H. 567
Walker, J. 405,415
Walker, M. J. 27,524
Wallace, R. J. 378
Walsh, J. W. T. 164
Wang, J. Y. and Silva, D. E. 436
Wang, L. J., Kuzmich, A. and Dogariu, A. 20
Wannier, G.
Extermann, R. and — 567
Wassermann, G. D.
— and Wolf, E. 181
Theimer, O., — and Wolf, E. 357
Watson, G. N. 365,397,405,408,443,641,741,745
Whittaker, E. T. and — 365,366,445,531,535,567
Watson, R. B.
Horton, C. W. and — 547
Weatherburn, C. E. 113,154
Webb, S. 191
Weber, W. V
Kohlrausch, R. and — 9
Wedberg, T. C.
— and Wedberg, W. C. 图 13.11,图 13.12
Stamnes, J. J. and — 597
Wedberg, W. C.
Wedberg, T. C. and — 图 13.11,图 13.12
Weierstrass, K. 724,725,731,759
Weinrich, G.
Franken, P. A., Hill, A. E., Peters, C. W and — 3
Weinstein, W. 59,172
Welford, W. T. 382
Wentzel, G. 8,770
Werner, S. A.
Jacobson, D. L., — and Rauch, H. 488
West, C. D.
Land, E. H. and — 图 15.32,图 15.33
Westpfahl, K.
Hönl, H., Maue, A. W. and — 527
Müller, R. and — 559,560
Weyl, H. 513,554,593,765
— and Pauli, W. 513
Wheatstone, C. 10
Whipple, F. L. 233
Whittaker, E. T. I,130,676
— and Robinson, G. 183
— and Watson, G. N. 365,366,445,531,535,567
Wien, W. 415
Wiener, N. 461,524,527
Wiener, O. 259,图 7.18,261,703
Wilcock, W. L. 图 7.76,图 7.77
Ring, J. and — 图 7.61
Tolansky, S. and — 图 7.79
Wilkins, J. E.
Osterberg, H. and — 384
Wilkins, M. H. F.
—, Stokes, A. R. Seeds, W. E. and Oster, G. 703
Willard, G. W 563
Williams, W. E. 379,554
Wilson, B. A.
Kuhn, H. and — 图 7.61
Wilson, R. N. 230,657
Wiltschko, E.
Fercher, A. F., Bartlet, H., Becker, H. and — 596
Wolf, E. 164, 178, 181, 194, 299, 357, 382, 384, 409,

410,图 8.43,图 8.44,429,460,461,462,465,478,487,488,图 10.12,506,512,517,523,524,596
— and Foley,J. T. 608
— and Marchand,E. W. 352
— and Preddy,W. S. 178
— and Shewell,J. R. 422
Agarwal,G. S. and — 460
Bhatia,A. B.,and — 758
Boivin,A.,Dow,J. and — 366,407
Boivin,A. and — 366,407
Collett,E. and — 407
Friberg,A. T. and — 487
Green,H. S. and — 66
Habashy,T. and — 586
James,D. F. V. and — 488,图 10.10
Lalor,Éand — 94
Li,Y. and — 403
Linfoot,E. H. and — 图 8.41,图 8.46,407,图 8.46,416,图 8.47
Mandel,L. and — 164,185,461,469,478,487,488,511,593,594,744
Marchand,E. W. and — 415,428
Miyamota,K. and — 415
Nisbet,A. and — 32
Pattanayak,D. N. and — 90
Richards,B. and — 366
Roman,P. and — 471,517
Theimer,O.,Wassermann,G. D. and — 357
Thompson,B. J. and — 图 10.6
Visser,T. D.,Carney,P. S. and — 90
Visser,T. D. and — 90
Wassermann,G. D. and — 181
Wolfsohn,G. 527,547
Wollaston,W. H. V
Wood,R. W. 377,378,657,687
Trowbridge,A. and — 377
Woods,B. D. 554
Wynne,C. G. 135,224
Yaglom,A. M. 465,470
Young,A.
Fletcher,A. T.,Murphy,T. and — 133
Young,T. II,图 7.2,图 7.4,图 7.12,415,图 10.10,图 10.11
Zaiser,E. M.
Barnes,M. D.,Kenyon,A. S.,— and La Met,V. K. 658,659
Zanichelli,N. 462
Zeeman,P. 378
Zehnder,L. 289
Mach,L.,— 图 7.50,图 7.51
Zeiss,C. 223,图 6.5
Zernike,F. 392,394,421,434,460,476,485,494,758
— and Brinkman,H. C. 758
— and Nijboer,B. R. A. 407,429,图 9.3
Zimmer,E.
Hönl,H. and — 559

英汉内容索引

Abbe invariant of lens 透镜的阿贝不变量 214
  reflection 反射不变量 145
  refraction 折射不变量 143,175
Abbe theory of image formation in microscope 显微镜成像的阿贝理论 387~391
aberration 像差
  balancing 像差平衡 436~437
  chromatic 色差 158~161,217~219
  diffraction theory of 像差的衍射理论 429及其后
  fifth-order 五级像差 196
  fixed stars 恒星光行差 10
  geometrical (wave and ray aberrations) 几何像差(波像差和光线像差) 192
  order of 像差的级 195
  primary 初级像差 195,199及其后 438及其后
    chromatic 色差 217~219
    coefficients of centred system 共轴系统的初级像差系数 199及其后,207及其后,439及其后
    diffraction focus 衍射焦点 431,439~441
    diffraction patterns 衍射图样 442~450
    frequency response curves 频率响应曲线 456及其后
    frequency response function 频率响应函数 453
    of thin lens 薄透镜的初级像差 213~217
    tolerances 容限 438~441
aberration curves 像差曲线 200
aberration function 像差函数 194~196,198及其后,430及其后
absolute instrument 绝对仪器 129及其后
absorbing crystal 吸收晶体 704~713
  Fresnel equation 菲涅耳方程 705及其后
  interference figures 干涉图 709~711
  light propagation in 光在吸收晶体中的传播 704~709
absorbing films, *see* metallic films 吸收膜,见金属膜
absorbing medium 吸收媒质 184~185
absorption coefficient 吸收系数 185,617
absorption cross-section 吸收截面 601,613,659
absorption curves for weakly absorbing spheres 弱吸收球的吸收曲线 659
absorption frequency 吸收频率 82及其后
absorption index 吸收指数(衰减指数)(消光指数) 184~185
absorptive power 吸收本领 625
achromat 消色差透镜 227
achromatic doublet 消色差双合透镜 160,222
achromatic fringe 消色差条纹 252
achromatic microscope objective 消色差显微镜物镜 237~238
achromatic system 消色差系统 159~160
achromatization 消色差 159~160,219
acuity, visual 敏锐度(视觉) 221
advanced potential 超前势 68
aether 以太 I,II,III,IV
affine collineation (transformation) 仿射变换 137,139
Airy formula 爱里公式
  for diffraction at circular aperture 圆孔衍射 365
  for multiple-beam interference with plane-parallel plate 平行平面板多光束干涉 55,301
Airy pattern 爱里图样 367
alkali metals 卤金属 628
allied Fourier integral 联合傅里叶积分 462
Amici ('roof-type') prism Amici("屋脊型")棱镜 228
amplitude 振幅 14
  complex 复振幅 15
  scattering 散射幅 583,595,600
    forward 前向散射幅 600
amplitude division 振幅分割 239,261~299
amplitude object 幅物体 371
amplitude vectors 振幅矢量 105及其后
analytic signal 解析信号 462及其后

analyzer 检偏器 41,687
anastigmatic lens (anastigmat) 消像散透镜(消像散镜头) 223
angle 角
of collection 收集角 234
of deviation 偏向角 161
of diffraction 衍射角 343
polarizing 起偏角 38,40
quasi-polarizing 准起偏角 620
of restored polarization 回复偏振角 620
angle characteristic 角特征函数 123 ~ 128
ångström 埃 314,340 ~ 341
angular aperture 角孔径 166
angular dimensions of sources (astronomical objects), determination of 光源(天体物)角幅度的测定 252 ~ 257,478
angular dispersion 角色散 163 ~ 164,377
of grating 光栅的角色散 377
of prism 棱镜的角色散 163 ~ 164
angular field of view 角视场 169
angular frequency 角频率 14
angular magnification 角放大率 139
angular spectrum of plane waves 平面波组成的角谱 530 ~ 533,593 ~ 595
anisotropic medium, *see* crystals 各向异性媒质,见晶体
anisotropy, electrical 各向异性,电各向异性 661
annular aperture 环孔 383 及其后,407
anomalous dispersion 反常色散 16,83 ~ 84
anomaly, phase 异常,位相异常 413 ~ 414
antinode 波腹 259
antireflection film 减反射膜 45,57 ~ 58
aperture 孔,孔径
angular 角孔径 166
numerical (NA) 数值孔径(NA) 169,236,367
relative 相对孔径 169
see also diffraction 又见衍射
aperture stop 孔径光阑 168 ~ 170
aplanat 不晕透镜 223
aplanatic pair of points 一对不晕点 153
of lens 透镜的一对不晕点 215
of spherical surface 球面的一对不晕点 136
aplanatic telescope objective 不晕望远镜物镜 178, 230
aplanatism, attainment with aspheric surfaces, 用非球面实现不晕 181 ~ 183
apodization 变迹法 385
area (region of) coherence 相干区域 459,460,477 ~ 478
aspheric surfaces, design of 非球面的设计 178 ~ 183
associated function 连带函数 462
associated Legendre polynomials 缔合勒让德多项式 640,646,656
associated monochromatic source in coherence theory 相干性理论中的连带单色光源 479
astigmatic focal distance 像散焦差 155
astigmatic focal line, photograph of 像散焦线(照片) 图 9.11
astigmatic pencils 像散光锥 153 ~ 158
astigmatism 像散 201,202 及其后,221,441,457 ~ 458
astronomical telescope 天文望远镜
reflecting 反射 230 ~ 233
refracting 折射 225 ~ 229
asymptotic approximation to integrals 积分的渐近近似 740 ~ 746
asymptotic behaviour of diffraction integrals 衍射积分的渐近行为 357
asymptotic expansion, definition and properties of 渐近展开,定义和性质 740 及其后
asymptotic series for field vectors 场矢量的渐近级数 101
atomic refractivity 原子折射度 79,81
attenuation index 衰减指数(消光指数) 184 ~ 185, 616
autocorrelation function 自关联函数 454,467
Aviar lens 航摄透镜 223
Avogadro number 阿氏常数 79
axes 轴
dielectric 介电轴 662,674
dispersion of 轴色散 662
optic, of crystal 晶体的光轴 671,673 及其后
determination of location 定位 696
axial stigmatism, attainment with aspheric surfaces 轴上无像散,用非球面实现 178 ~ 181
azimuth of vibration 振动的方位角 40

Babinet's compensator 巴比涅补偿器 688~689
Babinet's principle 巴比涅原理
electromagnetic form 电磁形式的 529
for scalar wave 标量波的 352
back-projection algorithm 背投影计算法 190,596
Baker Super-Schmidt camera Baker超施密特照相机 233
balancing of aberrations 像差的平衡 436~437
barrel distortion 桶形畸变 205
Bates wave-front shearing interferometer 贝茨波阵面剪切干涉仪 图7.52,291~292
Bauer's formula 鲍尔公式 443,642
beam propagation in absorbing medium 吸收媒质中的光束传播 184
beam-splitter 分束器 45
Beer's law 比尔定律 185
Berek's compensator Berek补偿器 690
Berry phase Berry相 107
Bessel equation 贝塞尔方程 640~641
Bessel functions 贝塞尔函数 641
beta function β函数 762
biaxial crystal 双轴晶体 673,674
absorbing 吸收双轴晶体 707,710~711
interference figures from biaxial crystal plates 双轴晶片干涉图 696~698,710~711
normal surface 法线曲面 676~677
ray surface 光线曲面 679
surface of constant phase difference 等位相差面 697
Billet's split lens 比累剖开透镜 245~246,247,249
binocular 双目望远镜 226
biprism, Fresnel's 菲涅耳双棱镜 244~245,247,249
birefringence 双折射 679~680
form 形序双折射 702~704
stress 应力双折射 699~701
black body 黑体 625
black obstacle 黑障碍物 526
black screen 黑屏 352
blazed grating 炫耀光栅 378
bloomed surfaces 敷霜表面 58
blue sun 蓝太阳 657
Born's approximation 玻恩近似
first-order 一级玻恩近似 418,583~587,590,591
relation to Rytov approximation 与Rytov近似的关系 606
second-order 二级玻恩近似 591,592
Bouger's formula 布格公式 110
boundary conditions 边界条件
at discontinuity surface 突变面处的边界条件 3~6
Kirchhoff's 基尔霍夫边界条件 350,352~353
at perfect conductor 理想导体上的边界条件 527~528
boundary diffraction wave 边界衍射波 415~418
Bragg's law 布拉格定律 589~590
Brewster angle 布儒斯特角 38,58
Brewster fringes 布儒斯特条纹 286
Brewster law 布儒斯特定律 38
brightness 亮度 164,165,170~171,191
de Broglie wavelength of a particle 粒子的德布罗意波长 737~738
Brown-Twiss intensity interferometer 布朗-特威斯强度干涉仪 257,478
Burch reflecting microscope 伯奇反射显微镜 237~238

calculus of variations 变分学 714~731
camera, photographic 照相机 221及其后
see also Schmidt camera, Schmidt-Cassegrain camera, Baker Super-Schmidt camera 又见施密特照相机,施密特-卡塞格伦照相机,Baker超施密特照相机
Campbell's theorem Campbell定理 294
candela 坎德拉 168
candle, international 国际烛光 168
candle power 烛光 168
canonical equations (Hamilton's) 正则方程(哈密顿) 720~721
Carathéodory's theorem for absolute instrument 绝对仪器的卡拉西奥多里定理 130
cardinal planes 基面 138
cardinal points 基点 138
Cassegrain telescope 卡塞格伦望远镜 230
Cauchy's dispersion formula 柯西色散公式 85~86
CAT scan CAT扫描 184
causality 因果性 462
caustic surface 焦散面 114,116~117,154,727,729
Celor lens Celor镜头

central dark ground method 中心暗场法 391,395
central plane of astigmatic image 像散像的中央平面 447
central (or principal) ray 中央光线(或主光线) 155
centred system 共轴系统 137
aberration coefficients 像差系数 199 及其后,207 ~ 213,439 及其后
power of 光焦度 143
channelled spectrum 沟槽光谱 247
characteristic curves 特征曲线(像差曲线) 200
characteristic functions of Hamilton 哈密顿特征函数 120 ~ 129,729
characteristic matrix of stratified medium 分层媒质的特性矩阵 51 ~ 53,60
characteristics, equation of 特征线方程 100
charge density 电荷密度 1 及其后,615
free 自由电荷密度 68
surface 面电荷密度 4
Chebyshev polynomials 切比雪夫多项式 60
Chevalier lens 舍伐列透镜 222
chief (or reference) ray 主光线(参考光线) 169
chromatic aberration 色差 158 ~ 161,217 ~ 219
chromatic change in 色差
magnification 像的放大率,色差 219
position of image 像的位置色差 217
circle of least confusion 最小模糊圆 200
circle polynomials of Zernike 泽尼克圆多项式 433 ~ 436,758 ~ 763
circular polarization 圆偏振 25 ~ 26,32
classification (optical) of crystals 晶体的光学分类 673 ~ 674
coherence 相干性 239,459 及其后,469
area of 相干区域 459,460,477 ~ 478
complex degree of (coherence factor) 复相干度(相干因子) 467 及其后
between components of electric field 电场分量之间的相干性 516 及其后
for quasi-monochromatic light 准单色光的相干性 473,474
in image 像中的相干性 491
microscope resolution, coherence theory of 显微镜分辨率的相干性理论 494 ~ 498
mutual, *see* Mutual coherence 互相干 467,见 Mutual coherence
partial 部分相干 459 及其后,469
region (area) of 相干区域 459,460,477 ~ 478
relation to visibility fringes 与条纹可见度的关系 472 ~ 473
rigorous theory of 严格的相干性理论 506 及其后
self-coherence 自相干 467
coherence length 相干长度 296
coherence time 相干时间 296,459,478,511 ~ 514
coherency matrix 相干矩阵 515 及其后
coherent background 相干背景波 419,420
coincidences, method of 量合法 315
collection, angle of 收集角 234
collineation 直射变换 136 ~ 142
colour 颜色 10
colour photography 彩色照相术 260
coma 彗差 153,图 5.3(b),202,图 5.5,440,441,447 ~ 449
compensator 补偿器 687 ~ 690
Babinet's 巴比涅补偿器 688 ~ 689
Berek's Berek 补偿器 689 ~ 690
Soleil's 索累补偿器 690
completeness (complete set) 完全性(完全集) 434
complex amplitude 复振幅 15
complex degree of coherence (coherence factor) 复相干度(相干因子) 467 及其后
complex dielectric constant 复介电常数 615,627,704 ~ 705
complex half-range function 复半域函数 463
complex phase velocity 复相速度 615 ~ 616
complex refractive index 复折射率 83,615 ~ 616
complex representation 复数表示
of monochromatic wave 单色波的复数表示 15
of polychromatic wave 多色波的复数表示 461 及其后
complex vector 复矢量 26
complex velocity 复速度 615,705
complex wave-number 复波数 616
computerized (computed) tomography (CT, CAT) 计算机(计算)层析术(CT, CAT) 183 ~ 191,图 4.50,592
concave grating 凹面光栅 377,381 ~ 382
concurrent transformation (imaging) 同向变换(成像) 140

condenser, influence on resolution in microscope 聚光器,对显微镜分辨率的影响 494~498
condenser lenses 聚光透镜 294~295
conduction current 传导电流 2,7
conductivity 电导率 614及其后,626~627
specific 电导率 2
tensor 电导率张量 704
conductor (conducting medium) 导体(导电媒质) 2,614及其后
perfect 理想导体 526,527,617
stratified, wave-propagation in 波在分层导电媒质中的传播 628~634
wave propagation in 波在导体中的传播 614~618
see also metal 又见金属
cones 锥状光敏细胞 221
conformal transformation 共形变换 133
confusion, circle of least 最小模糊圆 200
congruences 线汇
in electron optics 电子光学中的线汇
of light rays 光线汇 113~114,117
conical refraction 圆锥折射 681~686
conjugate function 共轭函数 462
conjugate object 共轭物体 421~422
conjugate point 共轭点 116,129,136,727
conjugate wave 共轭波 421
constitutive relations 本构关系(原译结构关系) 2
continuity, equation of 连续方程式 1
contracurrent transformation (imaging) 反向变换(成像) 140
contrast factor 衬比因子 306
contravariant component of a vector 矢量的反变式分量 636
convection current 运流电流 2,7
convection of light by moving bodies 运动物体造成的光漂移 VII
convergence ratio 会聚比 139~140
convergent transformation (imaging) 会聚变换(成像) 140
convolution (resultant, *Faltung*) 卷积(合积,褶积) 453,454
Cooke triplet 库克三透镜镜头 224
cophasal surface 等相面(波面) 15
near focus 焦点附近 411~414
copper, penetration depth 铜,电磁波的进入深度 617
cornea 角膜 220
Cornu spiral 考纽螺线 399,图8.37
corpuscular theory 微粒理论 II,III
corrector plate of Schmidt camera 施密特照相机校正板 231~233
correlation between vibrations 振动之间的关联 459及其后
correlation factors of light disturbances 光扰动的关联因子 460
correlation functions of light beams 光束的关联函数 460~461,466及其后
cosine law 余弦定律
of illumination 照度余弦定律 166
Lambert's 朗伯余弦定律 165
Coudé focusing Coudé聚焦(Coudé装置) 231
covariant component of a vector 矢量的协变式分量 636
critical illumination 中肯照明 494~496
critical point 临界点 356,746
cross-coefficient, transmission 传输交叉系数 501~503
cross-correlation function 交叉关联函数 467
cross-grating 交叉光栅 376
cross-power spectrum 交叉功率谱 470
cross-section 截面
absorption 吸收截面 600~601,613
differential 微分截面 601
extinction 消光截面 600,601,602,604,613
geometrical 几何截面 601
scattering 散射截面 600,601,613
see also optical (cross-section) theorem 又见光学(截面)定理
cross-spectral density 交叉谱密度 470
crystal (anisotropic medium) 晶体(各向异性媒质)
absorbing, *see* absorbing crystals 吸收晶体 704~713
biaxial, *see* biaxial crystal 双轴晶体 673,674
energy propagation in 晶体中的能量传播 663~665,673
light propagation in 光在晶体中的传播 666及其后,674~679
optical classification 光学分类 673~674
optically isotropic 光学各向同性晶体 673~674

optics of 晶体光学 661～713
orthorombic 正交晶体 589
refraction in 晶体折射 679～686
refractive indices, determination of 折射率测定 698～699
triclinic 三斜晶体 589
uniaxial, *see* uniaxial crystal 单轴晶体，见 uniaxial crystal
crystal axes, determination of location 晶体光轴位置测定 698
crystal plates, interference with 晶片干涉 690～698, 709～711
CT scan CT扫描 183, 图 4.50
current 电流
conduction 传导电流 2,7
convection 运流电流 2,7
free current density 自由电流密度 68
sheet, discontinuities at 电流片处的不连续 527
surface current density 表面电流密度 4,527
curent density, electric 电流密度 1
curvature 曲率
of field 场曲 图 5.3(d), 202 及其后, 440, 441
Gaussian (second) 高斯曲率(第二曲率) 104, 746
lines of 曲率线 154
principal radii of 主曲率半径 154
vector of a ray 光线的曲率矢量 111
cylindrical functions 柱面函数 641, 646～647

Dagor lens Dagor 镜头 223
damped wave 阻尼波 614
damping force 阻尼力 626
dark-ground method of observation 暗场观察法 391～392, 394～395
Debye integral 德拜积分 403
Debye's potential 德拜势 638
decay time 衰变时间 626
defect of focus 离焦缺陷 图 9.13, 图 9.14, 455～456
see also tolerance, focal 又见焦点公差(焦点容限)
definition (Strehl intensity) 明晰度(Strehl 强度) 431
deformation coefficient 形变系数
of lens 透镜的形变系数 214
of surface 面的形变系数 125
degree of coherence (coherence factor) 相干度(相干因子) 460, 467 及其后
between components of electric field 电场分量之间的相干度 516 及其后
in image 像中的相干度 491
for quasi-monochromatic light 准单色光的相干度 473～474
degree of polarization 偏振度 39, 522～523
delta function (Dirac's) δ 函数(狄拉克 δ 函数) 747～751
density 密度
charge 电荷密度 1 及其后, 4, 68, 635
of electric current 电流密度 1
free current 自由电流密度 68
mutual spectral 互谱密度 470
of photographic plate 照相底版黑度 420
spectral 谱密度 465
deviation 偏向
angle of 偏向角 161
minimum 最小偏向角 161～162
diamagnetic substance 逆磁物质 2
diaphragm 光阑 168
dichroic polarizer 二向色性偏振器 711～713
dichroism 二向色性 41, 706
dielectric 介电体(介电质, 介电的) 2
dielectric axes 介电轴 662, 674
dielectric constant 介电常数 2
complex 复介电常数 615, 627, 704～705
dielectric susceptibility 介电极化率 609
frequency-dependent 与频率有关 82
of metal 金属的 626～627
principal 主介电常数 662
static 静介电常数 82
dielectric film 介质膜 51, 54～63
dielectric susceptibility 介电极化率 76
dielectric tensor of an anisotropic medium 各向异性媒质的介电张量 661～663
differential cross-section 微分截面 601
diffracted ray 衍射光线 108, 355, 421
diffracted wave 衍射波 355, 419
diffraction 衍射 342 及其后
angle of 衍射角 343
at annular aperture 环孔衍射 383～385, 407

by a black screen 黑屏衍射 352
boundary value treatment 边值处理方法 526及其后
boundary wave 边界衍射波 415~418
by complementary screen 互补屏衍射 352
by concentric arrays of ring shaped apertures 一组同心环孔 407
by conducting sphere 导电球 634~660
electron 电子衍射 738~739
Fraunhofer 夫琅禾费(衍射)
at annular aperture 环孔 383~385
at aperture 孔 353~357,362~370
at circular aperture 圆孔 365~368,382~385
at elliptical aperture 椭圆孔 369
from large number of apertures 大量孔 369~370
in optical instruments 光学仪器中的夫琅禾费衍射 371~395
at rectangular aperture 矩孔 362~365
at slit, from line source 狭缝(线光源) 364~365
Fresnel 菲涅耳衍射 355,367
effects near geometrical focus 几何焦点附近的效应 408~415
at straight edge 直边 395~401
Huygens-Fresnel theory 惠更斯-菲涅耳理论 342及其后
Kirchhoff's theory 基尔霍夫(衍射)理论 347及其后,738
rigorous theory 严格理论 526及其后
half-plane 半平面 342,415,526,534~547
from localized source 定域光源 550~556
infinite stack of half-planes 半平面的无穷堆垛 558~559
slit 狭缝 559
sphere 球 634~660
strip 条带 559~560
two parallel half-planes 两个平行半平面 556~558
theory of aberrations 像差的衍射理论 429及其后
tomography 衍射层析术 592~598
basic theorem 基本定理 595~597
by ultrasonic waves 超声波上的衍射 562~579
uniqueness of solutions 解的惟一性 561
X-ray X射线衍射 376,422~423,880,738
Young's theory 杨氏理论 415
diffraction focus 衍射焦点 431,439~441
diffraction fringes 衍射条纹 98
diffraction gratings 衍射光栅 371~382
diffraction image, general properties 衍射像的普遍性质 444
diffraction integrals 衍射积分 357
asymptotic behaviour (approximation) 渐近行为(近似) 740及其后
expansion of 展开 442及其后
in presence of abberations 存在像差时 429及其后
diffraction patterns 衍射图样 图8.13,442~450
diffractometer 衍射计 480,图10.4
diffuse emission 漫发射 165
diffuse reflection 漫反射 165
dioptre 屈光度 144
dioptric imaging 折射成像 140
dipole, electric 电偶极子
field of 电偶极子场 73~76,651~652
potentials 电偶极子势 71
dipole, magnetic 磁偶极子 71
Dirac delta function (impulse function) 狄拉克 δ 函数(脉冲函数) 747~751
discontinuities in field 场中的不连续态 3~6,100,527,754~757
dispersion 色散 III,18,81~103
angular, of grating 光栅的角色散 377
angular, of prism 棱镜的角色散 163,164
anomalous 反常色散 16,83~84
of axes 轴色散 662
in a metal 金属中的色散 626及其后
normal 正常色散 83
of polarization 偏振色散 655
by prism 棱镜的色散 161~164
relations 色散关系 462
dispersion curves 色散曲线 83
of glass 玻璃的色散曲线 图4.24
dispersion formula 色散公式
Cauchy's 柯西色散公式 85~86
Koch's 科赫色散公式 84
Sellmeir's 塞耳迈尔色散公式 86
dispersive power 色散本领 159
displacement, electric 电位移 1
displacement theorem, relating to diffraction images 位移定理(关于衍射像的) 431~433

distortion 畸变 图 5.3(e),204～205,440,441
distributions 分布(理论) 747
disturbance (wave), secondary 次级扰动(波) 343, 345,419
divergent transformation (imaging) 发散变换(成像) 140
Doppler effect 多普勒效应 295
double anastigmat 双消像散镜头 223
double Protar 双 Protar 镜头 223
double refraction 双折射 679～681
doublet, achromatic 消色差双合透镜 图 4.25,222
Dove prism Dove 棱镜 228,图 6.16
Dowell end-gauge interferometer 多耳端规干涉仪 282,图 7.44
dry objective 干物镜 236
dual integral equations 对偶积分方程 527,534～535
duality rule in crystal optics 晶体光学中的对偶性法则 667
dynamic scattering 动态散射 608
Dyson interferometer microscope 戴森干涉显微镜 289～290

Eagle's mounting 意格尔装置 382
echelette 小阶梯光栅 377
echelle 中阶梯光栅 378
echelon 阶梯光栅 378 及其后
edge, singularity 边处奇点 561
Edser-Butler fringes 埃德索-巴特勒条纹 332
effective field 有效场 77～78
effective number of beams 有效光束数 309
effective spectral width 有效光谱宽度 511～514
eikonal 程函 100,120
of Schwarzchild (Seidel-) 施瓦茨蔡耳德(赛德尔)程函 196～199
eikonal equation 程函方程 100,729,757
Einstein-de Broglie relations 爱因斯坦-德布罗意关系 584
elastic aether theory 弹性以太理论 I,II,III,IV
electric current density 电流密度 1
electric dipole 电偶极子 71,73,76,651～652
electric displacement 电位移 1
electric energy density 电能密度 7,29,661～662,664～665
in geometrical optics 几何光学中的 101～102
electric polarization 电极化强度 64,68
electric scalar potential 电标势 66,68 及其后
electric vector 电矢量 1
electric wave 电波 638
see also transverse electric wave 又见横电波
electrical anisotropy 电各向异性 661
electromagnetic field 电磁场 1 及其后
in material medium; integral equation for 媒质中的; 积分方程 88～89
transversality 横向性 20
two-dimensional, scalar nature of 二维电磁场的标量性质 530
electromagnetic scattering theory 电磁散射理论 608～613
integro-differential equations 积分-微分方程 609
far field 远场 609～611
optical cross-section theorem 光学截面定理 611
electromagnetic waves 电磁波 20 及其后
velocity of 电磁波的速度 V,9 及其后
electron 电子 81
free, wave-mechanics 自由电子的波动力学 737～738
relativistic 相对论电子 735
electron diffraction 电子衍射 738
electron optics 电子光学 732
electron theory of optical constants of metals 金属光学常数的电子论 626～628
ellipsoid 椭球
index 折射率椭球 669
ray 光线椭球 671
reciprocal 倒椭球 669
of wave normals 波法线椭球 669 及其后
elliptic polarization 椭圆偏振 21 及其后,29 及其后
elongation, formula of Maxwell 麦克斯韦伸长公式 150
emission 发射
diffuse 漫发射 165
line spectrum 发射线状光谱 293
emission theory 发射理论 II,III
emissive power 发射本领 625
emmetropic eye 正常眼 221
energy 能量

conservation law in scalar fields 标量场中的能量守恒定律 599及其后,661,770~771
conservation law in electromagnetic fields 电磁场中的能量守恒定律 6~10
luminous 光能 168
propagation in crystal 晶体中的能量传播 663~665,673
energy density 能量密度 6,29,661,662~665,770,771
in geometrical optics 几何光学中的能量密度 101~102
energy dissipation 能量耗散 612
energy flow (flux) vector 能流矢量 8,20~21,29,596及其后,611,664,770,771
energy index 能量指数 665
energy law 能量定律 6~8,662
energy (ray) velocity 能量(光线)速度 664,665,673
entrance pupil 入射光瞳 168,图4.33
entrance window 入射窗 169,图4.33
envelope of 包络
extremals 致极曲线包络 727
signal 信号包络 463
E-polarization *E* 偏振 46,530,565
equal optical path, principle of 等光程原理 119
ergodicity 各态历经性 465
etalon, Fabry-Perot 法布里-珀罗标准具 305
Euler's equations 欧拉方程 715,720~721
Euler's integral 欧拉积分 732
evanescent wave 隐失波 532
evolute 渐展面 154
Ewald sphere 埃瓦尔德球
of reflection 埃瓦尔德反射球 585
limiting 埃瓦尔德极限球 585,586
Ewald-Oseen extinction theorem 埃瓦尔德-欧西恩消光定理 64,89~92
excess fractions, method of 剩余小数法 269, 314
excess function of Weierstrass Weierstrass 逾量函数 724,725
exit pupil 出射光瞳 169,图4.33
exit window 出射窗 169,图4.33
exposure 曝光量 420
extended objects, imaging of 广延物的成像 450~458,498~503
exterior problem 外部问题 583
external conical refraction 外圆锥折射 684~686
extinction coefficient 消光系数 616
extinction cross-section 消光截面 600,601,602,604,613
extinction curves 消光曲线 658~660
extinction theorem 消光定理 64,89~92
extraordinary wave 非常波 675
extrapolation 外推法 586
extremal 致极曲线 714~715
determination of 致极曲线的确定 719~720
envelope of 致极曲线包络 727
field of 致极曲线场 717~718
eye 眼睛 220~221
see also resolution, visibility curve, visibility factor 又见分辨率,视见度曲线,视见度(因子)
eye lens 接目镜 227~228
eye relief 接目距离 227
eyepiece 目镜 225,227~228,236

Fabry-Perot etalon 法布里-珀罗标准具 305
Fabry-Perot fringes 法布里-珀罗条纹 图7.60,图7.64,图7.65,图7.66
Fabry-Perot interferometer 法布里-珀罗干涉仪 304及其后
application to comparison of wavelengths 应用于比较波长 313~316
application to study of fine structure of spectral lines 应用于研究光谱线的精细结构 308~313
Faltung, *see* convolution 褶积,见卷积
fan-beam projection 扇束投影 165
Fermat's principle 费马原理 I,115~116,714,734
ferromagnetic substance 铁磁物质 3
field 场
curvature 像场弯曲(场曲) 图5.3(d),202及其后,440~441
effective 有效场 77~78,92
electromagnetic 电磁场, 1及其后
of extremals 致极曲线场 717~718
of an instrument 仪器的视场 129
limit of 场的界限 727
mean (observed) 平均(观测)场 77
quantization 场量子化 VI

static 静态场 2
stationary 定态场 2
of view, angular 角视场 169
field angle 视场角 169
field lens 场镜 227
field stop 视场光阑 169
fifth-order aberrations 五级像差 196
film 膜
antireflection 消反射膜 45,57~58
dielectric 介员膜 51,54~63
fringes with thin films 薄膜干涉条纹 265及其后, 324~333
metallic 金属膜 628~634
quarter-wave 1/4波长膜 图1.19,62
filtered back-propagation algorithm 滤波背向传播计算法 596
filters; *see also* linear filter 滤波器 59,321~324;又见线性滤波器
finesse 细度 303,306,319~320
first variation 一阶变分 715
fish-eye of Maxwell 麦克斯韦鱼眼 133~135
fixation 定像 221
Fizeau fringes 斐索条纹 269, 327, 329, 图7.76, 图7.77
Fizeau interferometer 斐索干涉仪 269,图7.30
Fizeau method for determining angular dimensions of astronomical objects 天体角幅度的斐索测定法 255~256
flatness of field 像场平度 213
flint-in-front objective (Steinheil) 火石玻璃在前面的物镜(斯坦海耳物镜) 227
flow (flux) of energy 能流 8,20~21,29
fluctuations 涨落 235,457
F number *F* 数 169,224
focal distance, astigmatic 像散焦差 155
focal length 焦距 138
focal line 焦线 154,155,157,202
focal plane 焦平面 114,137,138及其后,154,155
focal ratio, nominal 标称焦比 169
focal sphere 焦球 234
focal surface 焦面 114,202
focal tolerance 焦点公差 408
focus 焦点
of congruence 线汇的焦点 113
defect of 离焦缺陷 图9.13,图9.14,455~456
diffraction 衍射焦点 431,438及其后
light distribution near 焦点附近的光分布 401~414
marginal 边缘焦点 200
primary 第一焦点 155,157
principal 主焦点 137
sagittal 弧矢焦点 156
secondary 第二焦点 155,158
tangential 切向焦点 156
foot-candle 英尺烛光 168
form birefringence 形序双折射 702~704
forward scattering amplitude 前向散射幅 600
Fourier slice theorem 傅里叶层析定理 189
fovea 中央凹 221
fractional order 小数序 263
Fraunhofer diffraction, *see* diffraction 夫琅禾费衍射,见衍射
Fraunhofer objective 夫琅禾费物镜 227
free charge density 自由电荷密度 68
free current density 自由电流密度 68
free spectral range 自由光谱范围 380
frequency 频率 14
absorption 吸收频率 82及其后
angular 角频率 14
resonance 共振频率 82及其后
spatial 空间频率 453
of visible light 可见光频率 10
frequency response function (transmission factor) 频率响应函数(传输因子)
coherent illumination 相干照明 450~451,499~500
incoherent illumination 不相干照明 453及其后
partially coherent illumination 部分相干照明 499~500
Fresnel bi-prism 菲涅耳双棱镜 244(双面镜), 图7.7,247,249
Fresnel diffraction, *see* diffraction 菲涅耳衍射,见衍射
Fresnel equation of wave normals 菲涅耳波法线方程 666,705及其后
Fresnel formulae 菲涅耳公式
for light propagation in crystals 光在晶体中传播的

菲涅耳公式 666~668,705及其后
refraction and reflection 反射和折射 34~35,96~97,619
total reflection 全反射 41及其后
Fresnel integrals 菲涅耳积分 397~396,538,540,541
Fresnel-Kirchhoff diffraction formula 菲涅耳-基尔霍夫衍射公式 350~351
Fresnel mirrors 菲涅耳双面镜 242,图7.5,247,248,250,273
Fresnel number 菲涅耳数 346,403
Fresnel ray equation 菲涅耳光线方程 667
Fresnel rhomb 菲涅耳菱体 45,图1.16
Fresnel zone construction 菲涅耳波带作图法 图8.1,343及其后
fringes 条纹
achromatic 消色差条纹 252
Brewster's 布儒斯特条纹 286
multiple-beam 多光束 339
diffraction 衍射条纹 98
Edser-Butler 埃德索-巴特勒条纹 332
of equal chromatic order 等色序条纹 332
of equal inclination 等倾条纹 262
multiple-beam 多光束 301,图7.81
of equal thickness 等厚条纹 266及其后
Fabry-Perot 法布里-珀罗条纹 图7.60,图7.64,图7.65,图7.66
Fizeau 菲索条纹 269
multiple-beam 多光束 图7.74,329,图7.76,图7.77
interference 干涉条纹 244
localization 条纹定域 262及其后,270~278
with Lummer-Gehrke interferometer 陆末-格尔克干涉仪条纹 319
nonlocalized 非定域条纹 245,271,273
with plane-parallel plate 平行平面板条纹 261~265
multiple-beam 多光束 299~304
with quasi-monochromatic light 准单色光条纹 246~247
of superposition 叠加条纹 336~340
with thin films 薄膜条纹 265及其后
multiple-beam 多光束 324~333
with two plane-parallel plates 两块平行平面板 284及其后
multiple-beam 多光束 333及其后
visibility 可见度 249
from a wedge 劈条纹 274~278
with white light 白光条纹 247
Young's 杨氏条纹 图7.4

Gabor's method of imaging by reconstructed wavefronts 加伯波前重建成像法 418~425
Galilean telescope 伽利略望远镜 226
gauge-measuring interferometer 测规干涉仪 269~270
gauge transformation for 规范变换
Hertz vectors 赫兹矢量 72,73
vector and scalar potentials 矢势和标势 66
Gaussian curvature 高斯曲率 104,746
Gaussian optics 高斯光学 142~151
Gaussian reference sphere 高斯参考球 192,194,430及其后
Gaussian units 高斯单位 1
generalized harmonic analysis 广义谐波分析 464
geometrical aberration, *see* aberration 几何像差,见像差
geometrical cross-section 几何截面 601
geometrical optics 几何光学 98及其后
eikonal equation 程函方程 100,729
extension of 几何光学的推广 108
intensity law 强度定律 103~105,108
law of refraction (Snell's law) 折射定律(斯涅耳定律) 111~112
limits of validity 适用范围 108~109
transport equations for amplitude vectors 振幅矢量输运方程 106
geometrical wave-front (wave surface) 几何波阵面(波面) 101
ghosts 鬼线 377
glass, dispersion curves 玻璃的色散曲线 图4.24
Goos-Hänchen effect Goos-Hänchen效应 43
gram-molecule 克分子 79
gratings 光栅 371~382
angular dispersion 角色散 377
one-dimensional (line gratings) 一维光栅(线光栅) 375,588
overlapping of spectral orders 光谱序的交叠 379

resolving power 分辨本领 375～376
spectrograph 光栅摄谱仪 380～382
three-dimensional (space gratings) 三维光栅(空间光栅) 588
two-dimensional (cross gratings) 二维光栅(交叉光栅) 588
types 类型 377及其后
Green's function of Helmholtz operator 亥姆霍兹算符的格林函数 581
outgoing free-space 出射自由空间 582
Green's theorem 格林定理 347,581,604
Gregorian telescope 格雷果里望远镜 231
group velocity 群速 17～20
group of waves 波群 16及其后

Hale telescope Hale望远镜 230,231
half-intensity width 半强度宽度 303
half-plane, diffraction by, rigorous 严格的半平面衍射理论 342,415,526,534～547
half-range function, complex 复半域函数 463
half-width 半宽度 303,321～322
Hamilton canonical equations 哈密顿正则方程 720～721
Hamilton characteristic functions 哈密顿特征函数 120～128
Hamilton-Jacobi equation 哈密顿-雅可比方程 100,716,729,730
Hamilton principle 哈密顿原理 729
Hamiltonian 哈密顿量 729
Hamiltonian analogy between geometrical optics and mechanics 几何光学和力学之间的哈密顿类似 117,732及其后
Hanbury Brown-Twiss interferometer H.B.T干涉仪 257,478
Hankel functions Hankel函数 550,641
harmonic analysis, generalized 广义谐波分析 464
harmonic wave 谐波 14～16
of arbitrary form 任意形式的谐波 28～32
plane 谐平面波 21～27
heat 热
Joule's 焦耳热 8
radiation; Kirchhoff's law 热辐射;基尔霍夫定律 625
Heaviside unit function (step function) Heaviside单位函数(阶梯函数) 749
Helmholtz equation 亥姆霍兹方程 347,581
Helmholtz Green's function 亥姆霍兹-格林函数 581
Helmholtz-Kirchhoff integral theorem 亥姆霍兹-基尔霍夫积分定理 348
Helmholtz reciprocity (reversion) theorem 亥姆霍兹互易定理(可逆定理) 352
see also Smith-Helmholtz invariant 又见史密斯-亥姆霍兹不变量
Hermitian matrix 厄米矩阵 516
Herschel condition 赫谢耳条件 151,153
Hertz vectors (polarization potentials) 赫兹矢量(极化势) 72～73,609,610
far field 远场 610
radial 径向赫兹矢量 638
Hilbert independence integral 希尔伯特独立性积分 716
Hilbert transform 希尔伯特变换 462,464
hologram 全息图 418及其后
volume 体全息图 590
holography 全息学 418及其后
homocentric pencil 共心光锥 117,153
homogeneous plane wave 均匀平面波 531
see also plane wave 又见平面波
Hopkins' formula 霍普金斯公式 478～479
generalization 推广 505
H-polarization *H*偏振 46,530
Hurter-Driffield curve 赫特-德里菲耳德曲线 420,图8.51
Huygenian eyepiece 惠更斯目镜 228,图6.14(a)
Huygens' construction 惠更斯作图法 119,680
Huygens-Fresnel diffraction theory 惠更斯-菲涅耳衍射理论 342及其后
Huygens-Fresnel principle 惠更斯-菲涅耳原理 119,342～346,349,351
hypergeometric polynomials 超几何多项式 760～761
hypergon 拟球心阑透镜 223
hypermetropia 远视 221
hyperplane 超平面 187
hysteresis 滞后现象 3

illumination 照明,照度 165,166,168,170～172

critical 中肯照明 494~496
Köhler's 科勒照明 496~497
instruments of 照明仪器 233~235
radiometric 辐射度量学照度 165及其后
image 像
chromatic change in position 像的位置色差 217
stigmatic (sharp) 消像散像(锐像) 129
of transilluminated object 透照照明下物的成像 500~503
see also aberration, diffraction image, diffraction patterns, imaging 又见像差,衍射像,衍射图样,成像
image field angle 像场角 169
image formation in microscope (Abbe's theory) 显微镜中的成像(阿贝理论) 387~391
image forming instruments 成像仪器 220~238
image reconstruction from projection (computerized tomography, CAT) 投影法图像重建(计算机层析术, CAT) 183~191
image resolving power 成像系统的分辨本领 382~385
image point, graphical determination of 用作图法确定像点 139,图4.11
image space 像空间 129,148~149
imaging 成像
concurrent (dioptric) 同向(折射)成像 140
contracurrent (katoptric) 反向(反射)成像 140
convergent 会聚成像 140
divergent 发散成像 140
of extended objects 广延物的成像 450~458,498~503
perfect 理想成像 129及其后
by reconstructed wave-fronts 波前重建成像法 418~425
stigmatic 消像散成像 135~136,151
of three-dimensional objects 三维物的成像 183
of two-dimensional objects 二维物的成像 183
see also axial stigmatism 又见轴上无像散
impulse function (Dirac delta function) 脉冲函数(狄拉克 δ 函数) 747~751
inclination factor 倾斜因子 343,351
incoherence 不相干性 107,239,459,469,图10.2(c),475
independence integral, Hilbert's 希尔伯特独立性积分 716
index ellipsoid 折射率椭球 669
indicatrix, optical 光折射椭球 669
induced surface currents 感生表面电流 527
induction, magnetic 磁感应强度 1
inhomogeneous wave 非均匀波 15,531
instrument 仪器
absolute 绝对仪器 129及其后
field of 仪器的视场 129
of illumination 照明仪器 233~235
image-forming 成像仪器 220~238
insulator 绝缘体 2
integral equation 积分方程
dual 对偶积分方程 527,533~534
for electromagnetic field in material medium 物质媒质中电磁场的积分方程 88~89
integral invariant 积分不变式 114~115
integral of potential scattering 势散射积分方程 582
intensity 强度
near focus in terms of wave deformation 用波阵面形变表示焦点附近的强度 433
of light 光的强度 8
luminous 发光强度 168
mutual 互强度 474及其后
radiant 辐射强度 165
specific 比强度 165
Strehl (definition) Strehl强度(明晰度) 431
intensity interferometer, of Hanbury Brown and Twiss 布朗和特威斯(H.B.T)强度干涉仪 257,478
intensity law of geometrical optics 几何光学的强度定律 103~105,108
interference 干涉 239及其后,459及其后
with broadband light 宽带光干涉 486~490
multiple-beam 多光束干涉 239,299~340,又见条纹
order of 干涉序 244,373
principle of 干涉原理 III
rays reflected from lattice planes 格面反射射线的干涉 589~590
spectral interference law 光谱干涉定律 487,488
two-beam 双光束干涉
division of amplitude 振幅分割 239,261~299
of wave-front 波阵面分割 239,242~257
of two monochromatic waves 两个单色波的干涉

239 ~ 242,257 ~ 261
interference figures from crystal plates 晶片干涉图 690 ~ 698,709 ~ 711
interference filter 干涉滤波器 321 ~ 324
interference fringes, *see* fringes 干涉条纹,见条纹
interference function 干涉函数 图 8.19
interference law for stationary optical fields 定态光场的干涉定律 467,468
quasi-monochromatic form 准单色形式 474
interference term 干涉项 240
interior problem 内部问题 583
interferometer 干涉仪
Bates, wave-front shearing 贝茨波阵面切变干涉仪 291 ~ 292
Dowell end-gauge 多耳端规干涉仪 282 及其后
Dyson interforometer microscope 戴森干涉显微镜 286 ~ 287
Fabry-Perot 法布里-珀罗干涉仪 304 及其后
Fizeau 斐索干涉仪 269 ~ 270
gauge-measuring 测规干涉仪 269 ~ 270
Hanbury Brown-Twiss intensity 布朗-特威斯(H.B.T)强度干涉仪 257,478
Jamin 雅满干涉仪 286 ~ 287,289
Kösters 科斯特干涉仪 281 ~ 282,图 7.43
Lummer-Gehrke 陆末-格尔克干涉仪 316 ~ 321
Mach-Zehnder 马赫-曾德尔干涉仪 289 ~ 291
Michelson 迈克耳孙干涉仪 278 ~ 280,图 7.40,281
Michelson, stellar 迈克耳孙测星干涉仪 256 ~ 257,478
radio 射电干涉仪 257
Rayleigh 瑞利干涉仪 251 ~ 252,287
resolution 分辨率 308
Sirks-Pringsheim 瑟克斯-普林谢干涉仪 287 ~ 288
spectral range 光谱范围 310
Twyman-Green 特怀曼-格林干涉仪 280 ~ 282
internal conical refraction 内圆锥折射 684
international candle 国际烛光 168
International Prototype Metre 国际米原器 340
invariance in form 形式不变性 758
invariant 不变量,不变式
Abbe's 阿贝不变量 143,145,175,214
Lagrange's 拉格朗日不变式 114,731
Poincaré's 邦加不变式 114,731
Smith-Helmholtz 史密斯-亥姆霍兹不变量 149 ~ 150
inverse square law 平方反比定律 104,166
inverse surface of wave-normals 倒法线曲面 680
involute 渐展面 154
iris 虹膜 220
isochromate 等色线 692,696,697 ~ 698,711
isochromatic surface 等色面 694
isogyr 同消色线 692,696,698,710,711
isophotes (lines of equal intensity) 等强度线
aberration-free image, focal region 无像差像焦点附近的等强度线 407,图 8.41
for primary astigmatism 初级像散 449
for primary coma 初级彗差 447,图 9.6,图 9.7
for primary spherical aberration 初级球差 445
isoplanatic region 等晕区 452,454
isotropic crystal 各向同性晶体 673,674
isotropic material 各向同性物质 2
isotropic radiation 各向同性辐射 165

Jacobi criterion for a minimum 雅可比极小值判据 727
Jacobi identities 雅可比恒等式 408,442
Jacobi polynomials 雅可比多项式 760 ~ 761
see also Hamilton-Jacobi equation 又见哈密顿-雅可比方程
Jamin interferometer 雅满干涉仪 286 ~ 287,289
Jones lemma 琼斯引理 600,722,723
Joule's heat 焦耳热 8

katoptric imaging 反射成像 140
Kellner eyepiece Kellner 目镜 图 6.14(b)
Kirchhoff 基尔霍夫
boundary conditions 边界条件 350,352
diffraction integral, Rubinowicz' representation 衍射积分的鲁比诺维茨表示 418
diffraction theory 衍射理论 347 及其后,738 ~ 739
in electron optics 电子光学中 738 ~ 739
integral theorem 积分定理 347 ~ 349
law of radiation 辐射定律 625
Koch's dispersion formula 科赫色散公式 84
Köhler's illumination 科勒照明 496

König erecting prism König正像棱镜 226,图6.10
Kösters interferometer 科斯特干涉仪 281,图7.48

Lagrange equation of motion 拉格朗日运动方程 730
Lagrange invariant 拉格朗日不变式 114,731
Lagrange method of undetermined multipliers 拉格朗日特定乘子法 670
Lagrangian 拉格朗日量 729,735
Lambert's(cosine)law 朗伯(余弦)定律 165
landscape lens 观景透镜 222
Laplace's equation 拉普拉斯方程 348
lateral chromatic aberration 横向色差 158,图4.23
lateral magnification 横向放大率 138,178
lattice plane 格面 589
Laue (von) equations 劳尔(冯)方程 588~589
least action, principle of 最小作用原理 731,735
least confusion, circle of 最小模糊圆 200
least time, principle of, *see* Fermat's principle 最小时间原理,见费马原理
Legendre associated functions 勒让德缔合函数 640,646,656
Legendre condition for a weak minimum 勒让德弱极小值条件 726
Legendre polynomials 勒让德多项式 434
Legendre transformation 勒让德变换 121,720
length (path), optical 光学长度(路程) 102~103,119
lens 透镜
  Abbe's invariant 阿贝不变量 214
  anastigmatic 消像散透镜 223
  aplanatic points; *see also* aplanatic pair 不晕点 153,215;又见一对不晕点
  coma-free 没有彗差 215,图5.10
  condenser 聚光器 图6.25,295
  deformation coefficient 形变系数 214
  of eye 眼睛的透镜 220~221
  eye-lens 接目镜 227~228
  field 场镜 227
  Luneburg Luneburg透镜 133
  photographic, types of 照相镜头的类型 221及其后
  testing by Michelson's method 迈克耳孙的透镜检验方法 250
  thick 厚透镜 145~147
  thin 薄透镜 148
    aberrations 像差 213~217,219
  types of 类型,图4.15,图221~225,227及其后,234~235,245~246
light 光
  disturbances, probability distribution 光扰动概率分布 459,460
  monochromatic, *see* monochromatic light 单色光,见monochromatic light
  natural 自然光 38~39,357~362,519,522~523,652~653
  partially polarized 部分偏振光 461,514,522
  polarized 偏振光 519
  quasi-monochromatic, see quasi-monochromatic light 准单色光,见quasi-monochromatic light
  sum 光和 420
  unpolarized; *see also* natural light 非偏振光 514,519,522;又见自然光
  vibrations 振动
    coherent 相干的 459,469
    incoherent 不相干的 459,469
    partially coherent 部分相干的 459,469
    visible, frequency of 可见光的振动频率 10
light intensity 光强 8
light ray 光线 98,102及其后,729
light velocity 光速 V,Ⅶ,9,10及其后
line grating 线光栅 图8.20,375,588
linear filter representation of action of optical system 光学系统作用的线性滤波器表示 453,454,499,500
linear polarization 线偏振 25,26,32
lines of 线
  curvature 曲率线 154
  equal intensity, *see* isophotes 等强度线,见isophotes
Liouville's theorem on conformal transformation 共形变换的刘维定理 133
Lippman's colour photography 李普曼彩色照相术 260
Littrow's mounting 利特罗装置 380
Lloyd's mirror 劳埃德镜 245,247,249,258
localization of fringes 条纹的定域 262及其后 270~278
Lommel functions 洛默尔函数 402

longitudinal chromatic aberration 纵向色差 158
longitudinal magnification 轴向放大率 138
Lorentz condition 洛伦兹条件 66
Lorentz law (force) 洛伦兹定律(力) 7
Lorentz-Lorenz formula 洛伦兹-洛伦茨公式 64,79,92
Loschmidt's number Loschmidt 常数 79
low-pass filtered approximation 低通滤波近似 586
lumen 流明 168
luminance 亮度 168
luminous energy 光能 168
luminous intensity 发光强度 168
Lummer-Gehrke interferometer 陆末-格尔克干涉仪 316~321
Luneburg lens Luneburg 透镜 133
lux 勒克斯 168

Mach-Zehnder interferometer 马赫-曾德尔干涉仪 289~291
magnetic dipole 磁偶极子 71
magnetic energy density 磁能密度 7,29,661
in geometrical optics 几何光学中的 101~102
magnetic induction 磁感强度 1
magnetic permeability 磁导率 2
magnetic polarization 磁极化强度 64,68
magnetic potential 磁势 66,68 及其后
magnetic substance 磁性物质 2
magnetic susceptibility 磁极化率 76
magentic vector 磁矢量 1
magnetic wave; *see also* transverse magnetic wave 磁波 638;又见横磁波
magnetization 磁化强度 64,68 及其后,609
magnification 放大率
angular 角放大率 139~140
chromatic change in 放大率色差 219
lateral 横向放大率 138,178
longitudinal 轴向放大率 138
magnifier 放大镜 图 6.26,235,236
magnifying power 放大率 225,235
Malus-Dupin theorem 马吕斯-杜平定理 117~118,736
converse of 逆定理 118
marginal focus 边缘焦点 200
material equations 物质方程 2~3
matrix 矩阵 49 及其后,515 及其后
Maupertuis' principle Maupertuis 原理 714,722,731
Maxwell elongation formula 麦克斯韦伸长公式 150
Maxwell equations 麦克斯韦方程 1~2,46,64,89,99,526,530,564~565,567~577,614
Maxwell 'fish-eye' 麦克斯韦"鱼眼" 133~135
Maxwell formula 麦克斯韦公式 11
Maxwell theorem for absolute instrument 绝对仪器的麦克斯韦定理 129 及其后
Mean field 平均场 77
mean polarizability 平均极化率 79
meniscus 弯月形 图 4.15(c),图 4.15(f)
meridional plane 子午面 137,172
meridional ray 子午光线 172
Meslin's experiment 梅斯林实验 246,图 7.9,247,273
metal 金属 614
alkali 卤金属 628
dielectric constant 介电常数 627~628
Fresnel's formulae 菲涅耳公式 619
optical constants 光学常数
electron theory of 电子论 626~628
general relations 一般关系 616 及其后
values of 值 623,图 14.3
optics of 金属光学 614~660
reflection at metal surface 金属面的反射 618 及其后
refraction at metal surface 金属面的折射 618 及其后
see also conductor 又见导体
metallic films 金属膜 628~634
metre 米 313,340~341
metre-candle 米-烛光 168
Michelson interferometer 迈克耳孙干涉仪 278~280
Michelson stellar interferometer 迈克耳孙测量干涉仪 256~257 478
Michelson's method for 迈克耳孙方法
determining angular dimensions of astronomical objects 测定天体的角大小 252~257
determining fine structure of spectral lines 测定光谱线的精细结构 293~299,473
for lens testing 透镜检验 250
microscope 显微镜 235~238

Abbe's theory 阿贝理论 387 ~ 391
Burch reflecting 布奇反射显微镜 237 ~ 238
Dyson interferometer 戴森干涉显微镜 286 ~ 287
polarizing 偏光显微镜 698
Rayleigh's theory 瑞利理论 387
X-ray X射线显微镜 422
Zernike's phase contrast method 泽尼克相衬法 391 ~ 395
microscope images 显微镜成像 387 及其后 图 8.34,图8.35
microscope resolution 显微镜分辨率 386 ~ 387,391
effect of condenser on 聚光器的影响 494 ~ 498
Mie effect 米氏效应 654
Mie's theory, *see* diffraction by conducting sphere 米氏理论,见导电球衍射
Miller indices 米勒指数 589
minimum 极小值
Jacobi's criterion 雅可比判据 727
strong, Weierstrass' condition Weierstrass 强极小条件 725
weak, Legendre's condition 勒让德弱极小条件 726
minimum deviation 最小偏向角 162
mixed characteristic 混合特征函数 122 ~ 123
mode representation of wave fields, *see also* angular spectrum representation 波场的模式表示 594,又见角谱表示
molar refractivity 克分子折射度 79 ~ 81
mole 克分子 79
molecule 分子 77,78,81
monochromatic wave (light) 单色波(光) 16,21 及其后 237,294,415,479,519 ~ 520
momentum transfer equation 动量传递方程 584,588
multilayer 多层膜 45,59 及其后
multiple-beam fringes, *see* fringes 多光束条纹,见条纹
multiple-beam interference 多光束干涉 239,299 ~ 340
multiple scattering 多重散射 590 ~ 592
mutual coherence 互相干 467
calculation of 互相干的计算 503 ~ 505
propagation of 互相干的传播 505 ~ 506,508 ~ 511
spectral representation 谱表示 469 ~ 471
wave-equations 波动方程 506 ~ 508
mutual coherence time 互相干时间 513 ~ 514
mutual effective spectral width 互有效光谱宽度 513 ~ 514
mutual intensity 互强度 474 及其后
calculation of 互强度的计算 474 及其后
propagation of 互强度的传播 484 ~ 486
transmission of 互强度的传输 498
mutual spectral density 互谱密度 470
myopia 近视 221

NA, *see* numerical aperture NA,见数值孔径
natural component of vector 矢量的自然分量 636
natural light 自然光 38 ~ 39,357 ~ 362,519,522 ~ 523,652 ~ 653
negative uniaxial crystal 负单轴晶体 675
Neumann functions 纽曼函数 641
Newton colours 牛顿色序 268
Newton equation 牛顿方程 138,139
Newton rings 牛顿环 268,图 7.28,图 7.29
Newtonian telescope 牛顿望远镜 230,图 6.18
Nicol prism 尼科耳棱镜 686 ~ 687
nit 尼特 168
nodal point 节点 图 4.10,139
node 波节 256
nominal focal ratio 标称焦比 169
nonlocalized fringes 非定域条纹 245,271,273
nonnegative definite quadratic form 非负定二次型 764
nonpolar molecule 无极分子 78,81
normal congruence 法线汇 113 ~ 114 117 ~ 118,736
normal surface 法线曲面 672 ~ 673,675,676 及其后
normal dispersion 正常色散 83
Nörrenberg's reflecting polariscope 诺伦伯格反射偏振计 40 ~ 41
nucleus 原子核 81
number density 分子数密度 77
numerical aperture (NA) 数值孔径(NA) 169,236,367

object, transmission function of 物的透射函数 371
object function 物函数 188
object space 物空间 129,148 ~ 149
objective 物镜
dry 干物镜 237

flint-in-front (Steinheil) 火石玻璃在前面的物镜(斯坦海耳物镜) 227
Fraunhofer 夫琅禾费物镜 227
oil-immersion 油浸物镜 237
microscope 显微镜物镜 236及其后
photo-visual 照相目视物镜(仿视照相物镜) 227
telescope 望远镜物镜 178,225
oblique meridional ray trace 斜子午光线 172~174
obstacle, black 黑障碍物 526
Ohm's law 欧姆定律 2
oil-immersion objective 油浸物镜 237
opthalmics 眼科 221
optic axis of wave normals 波法线光轴 671,674及其后,678
optic ray axis 光线光轴 671
optical constants of metal, *see* metal 金属的光学常数,见金属
optical cross-section theorem 光学截面定理 596,600~601,613,
generalized 推广 602,604,613
optical indicatrix 光折射椭球 669
optical length 光学长度 102,119
optical parallelism 光学平行性 119
optical path 光程 102,119
optical resonance 光学共振 657
optical system as linear filter 作为线性滤波器的光学系统 453,454,499,500
orthorombic crystals 正交晶体 589
optics 光学
of crystals 晶体光学 661~713
Gaussian 高斯光学 142~151
geometrical, *see* geometrical optics 几何光学,见geometrical optics
of metals 金属光学 614~660
order of 级序
aberration 像差的级 195
interference 干涉序 244,373
orders 序
overlapping 序的交叠 310,380
spectral 光谱序 373
ordinary wave 寻常波 675
out-of-focus images of a point source 点源的离焦像 401~415
overlapping of orders 序的交叠 310,380

parallel projection 平行投影 185~186,188~189,190
parallelism, optical 光学平行性 119
paramagnetic substance 顺磁物质 2
paraxial ray trace 傍轴光线追迹 174~175
Parseval's theorem 帕塞瓦尔定理 356,463
partial coherence 部分相干性 459~525
rigorous theory 严格理论 506及其后
partial polarization 部分偏振 461,514,522
partial waves in Mie's theory 米氏理论中的分波 647~648,图14.9
Paschen's mounting 帕邢装置 381
path length 程长 15,102,118
peak-transmission 峰值透射率 305,图7.61,321
pencil of rays 光锥
astigmatic 像散光锥 153,158
homocentric 共心光锥 117,153
penetration depth 进入深度 617
for copper 铜的情况 617
perfect conductor (reflector) 理想导体(反射体) 526,527,617
perfect imaging 理想成像 129及其后
period 周期 14
periodically stratified media 周期性分层媒质 59~63
periodogram 周期图 465
periscope 潜望镜 228~229
permeability, magnetic 磁导率 2
permittivity 电容率 2,662
perturbation eikonal 微扰程函 196~199
perturbation expansion 微扰展开 592
Petzval's condition 佩茨瓦尔条件 213
Petzval's portrait lens 佩茨瓦尔人像透镜 222
Petzval's surface 佩茨瓦尔面 213
Petzval's theorem 佩茨瓦尔定理 213
phase 位相,相 14
behaviour near focus 焦点附近的位相特性 411~414
contrast method 相衬法 391~395
object 相物体 371,391
slowness 相慢度 16
stationary, method of 稳定相法 357,744~745

surface of constant phase difference 等相差面 694, 695,图 15.23,697,678
phase anomaly 位相异常 413 ~ 414
phase change on 相变
reflection 反射相变 54,632
transmission 透射相变 54,632
phase plate 相板 392
phase velocity 相速 14 ~ 16,19,664,669,670 ~ 671
complex 复相速度 615
photochemical action 光化学作用 260
photoelastic effect 光弹效应 699
photoelasticity 光测弹性学 701
photoelectric effect 光电效应 VI,166
photographic camera; *see also* Schmidt camera, Schmidt-Cassegrain camera, Baker Super-Schmidt camera 照相机 221 及其后;又见 Schmidt 照相机,Schmidt-Cassegrain 照相机,Baker Super-Schmidt 照相机
photographic lenses 照相镜头 222 及其后
photographic plate, transmission factor of 照相底版的透射因子 420
photographic response 照相响应曲线 图 8.51
photography, colour 彩色照相术 260
photoheliograph 摄日仪 244
photometric 光度学[的] 165
photometry 光度学 164
photons 光子 VI
photovisual objective 照相目视物镜(仿视照相物镜) 227
pincushion distortion 枕形畸变 205,图 5.8
planar lens planar 镜头 224,图 6.5
Plancherel-Polya theorem Plancherel-Polya 定理 586
plane of 平面
incidence 入射面 33
observation 观察面 652
polarization 偏振面 24
vibration 振动面 25
plane wave 平面波 12 ~ 13,14 及其后,20 及其后,531 及其后
plane-polarized wave 平面偏振波 25
plate, quarter wave 1/4 波片 687 ~ 688
pleochroism 多向色性 706
Poincaré invariant 邦加不变式 114,731
Poincaré sphere, representation of state of polarization 邦加球,偏振态的表示 图 1.8,27
point characteristic 点特征函数 120 ~ 121,图 4.3,729
polar diagrams for scattering by a sphere 球散射极图 653 ~ 654
polar molecule 极分子 81
polariscope 偏光镜,偏振计 40 ~ 41,696
polarizability 极化率 28,82
polarization 偏振 II,21 及其后,29 ~ 32,极化,68 及其后
complete 完全偏振 522
degree of 偏振度 39,522 ~ 523,524,653,666 ~ 667
direction of 偏振方向 24 ~ 25
dispersion of 偏振色散 655
electric 电极化强度 64,68
elliptic, circular, linear 椭圆偏振,圆偏振,线偏振 21 及其后,25 及其后,29 ~ 32
left-handed, right-handed 左旋,右旋 24 及其后
magnetic 磁极化强度 64,68
partial 部分偏振 461,514,522
plane of 偏振面 24 ~ 25
properties of quasi-monochromatic light 准单色光的偏振特性 514 ~ 525
properties of waves of arbitrary form 任意形式的波的偏振特性 28 ~ 32
by reflection 反射偏振 III,38 及其后
by scattering 散射偏振 652 ~ 655
polarization ellipse 偏振椭圆 22 ~ 23,30
polarization potentials (Hertz vectors) 偏振势(赫兹矢量) 72 ~ 73,609
polarized proportion 偏振部分 39
polarizer 偏振器 41,58,686 ~ 687,711 ~ 713
polarizing (Brewster) angle 起偏角(布儒斯特角) 45
polarizing microscope 偏光显微镜 698
polaroid 偏光片 41,711 及其后
pole (critical point) 极点(临界点) 356,746
pole (of a surface) 极点(面的) 124
polychroism 多向色性 655
polychromatic field 多向色场 461 及其后
Porro prism Porro 棱镜 226
portrait lens, Petzval's 佩茨瓦尔人像透镜 222
positive uniaxial crystal 正单轴晶体 675

potential 势
advanced 超前势 68
Debye's 德拜势 638
Hertz 赫兹势 609
of an electric dipole 电偶极子的势 69～71
electric scalar 电标势 66,69及其后
magnetic vector 磁矢势 66,69及其后
polarization (Hertz vector) 极化势(赫兹矢量) 72～73
retarded 推迟势 69
scattering 散射势 581
integral equation 积分方程 582
power 本领,光焦度,率,功率
absorptive 吸收本领 625
of centred system 共轴系统的光焦度 143
dispersive 色散本领 159
emissive 发射本领 625
magnifying 放大率 225,235
of refracting surface 折射面的光焦度 143
spectrum 功率谱 465
Poynting vector 坡印廷矢量 8,20～21,29,596,611,661
in geometrical optics 几何光学中的 101～103,107～108
primary (Seidel) aberration 初级(赛德尔)像差 195,199及其后,438及其后
chromatic 初级色差 217～219
coefficients of centred lens system 共轴透镜系统的像差系数 199及其后,207～217,438～441
diffraction focus 衍射焦点 438及其后
diffraction patterns 衍射图样 441～450
frequency response curves 频率响应曲线 图9.13,图9.14,图9.15,图9.16
of thin lens 薄透镜的初级像差 213～217
tolerances 像差容限 438～441
primary focal line 第一焦线 155,202
primary focus 第一焦点 155,157
principal angle of incidence 主入射角 620
prmcipal dielectric axes 主介电轴 662
principal dielectric constants 主介电常数 662
principal focus 主焦点 137
principal isochromate 主等色线 692
principal isogyre 主同消色线 692,696,698,710,711
principal permittivity 主电容率 662
principal plane 主平面 138,154,675
principal point 主点 138,139
principal radius of curvature 主曲率半径 154
principal (or central) ray 主光线(中央光线) 152,169
principal velocity 主速度 666,671
prism 棱镜
Amici ('roof type') Amici("屋脊型")棱镜 228
Dove Dove棱镜 228
König, erecting König正像棱镜 226,图6.10
Nicol 尼科耳棱镜 686～687
Porro Porro棱镜 226
see also dispersion, resolving power 又见色散,分辨本领
probability distribution for light disturbances 光扰动的概率分布 459,460
projection 投影 185,186,187,188
back 背投影 190,596
fan-beam 扇束投影 185～186
parallel 平行投影 185～186,188～189,190
projection angle 投影角 169
projection slice theorem 投影层析定理 188
projective transformation 射影变换 136～142
propagation vector 传播矢量 14
proportion 部分
polarized 偏振部分 39
unpolarized 非偏振部分 653
Protar lens Protar镜头 223
prototype metre 米原器 340
pupil 光瞳 168,169
pupil function 光瞳函数 356,384,452
Purkinje effect 珀金杰效应 167

quantum 量子 VI
quantum theory 量子理论 VI
quantization of field 场的量子化 VI
quarter-wave film 1/4波长膜 图1.19,62
quarter-wave plate 1/4波片 687～688
quarter wavelength rule of Rayleigh 瑞利1/4波长定则 438
quasi-monochromatic light 准单色光 246
imaging with 准单色光成像 498～503

interference and diffraction with 准单色光的干涉和衍射 246~247,471~486
interference law 干涉定律 473~474
polarization properties of 准单色光的偏振特性 514~525
quasi-polarizing angle 准起偏角 620

radial Hertz vectors 径向赫兹矢量 638
radial polynomials 径向多项式 434及其后,759及其后
radiance 辐射亮度 164~165
radiant intensity 辐射强度 165
radiation 辐射
isotropic 各向同性辐射 165
Kirchhoff's law 基尔霍夫辐射定律 625
radiation zone 辐射带 74,647
radio interferometer 射电干涉仪 257
radiometric illumination 辐射度量学照度 165
radiometry 辐射度量学 164~168
Radon transform Radon变换 186~188,189
scaling law Radon变换的标度律 187
two-dimensional 二维Radon变换 189
Ramsden eyepiece 冉斯登目镜 227~228,图6.13(b)
Rapid-Rectilinear lens 快速直线透镜 223
ray 光线 98,102及其后,109及其后,729
central (or principal) 中央(或主)光线 155
chief (or reference) 主(或参考)光线 169
diffracted 衍射光线 108,355,421
equation of 光线方程 109~111,727~729
Fresnel's 菲涅耳光线方程 667
generalization in calculus of variation 变分法中的推广 717~718
integral 射线积分 185~186
meridional 子午光线 172
paraxial 傍轴光线(追迹) 174~175
principal (or central) 主(或中央)光线 155
reference (or chief) 参考(或主)光线 169
regular neighbourhood of 光线的正则邻域 115
residual 剩余射线 625
in spherically symmetrical medium 球面对称媒质中的光线 110~111
ray aberration 光线像差 192及其后
ray axis, optic 光线光轴 673,679
ray component 光线分量 121
ray congruence 光线汇 113~114,117,736
ray ellipsoid 光线椭球 671
ray index 光线指数 665
ray surface 光线曲面 672~673,679
ray tracing 光线追迹 172及其后
ray vector in 光线矢量
crystal optics (Poynting vector) 晶体光学中的(坡印廷矢量) 661
geometrical optics 几何光学中的 111,121
ray velocity 光线速度 663,664,673
Rayleigh criterion for resolution 瑞利分辨率判据 308及其后,383,496
Rayleigh diffraction integrals 瑞利衍射积分 425~427
Rayleigh formula for total energy in diffraction pattern 衍射图样中总能量的瑞利公式 367~368,409~411
Rayleigh interferometer 瑞利干涉仪 251~252,287
Rayleigh quarter wavelength rule 瑞利1/4波长定则 438
Rayleigh scatterer 瑞利散射体 419
Rayleigh scattering 瑞利散射 88,652,655,657
Rayleigh-Sommerfeld diffraction integrals 瑞利-索末菲衍射积分 427及其后
Rayleigh theory of image formation in microscope 瑞利显微镜成像理论 387
rays, thin pencil of 细光维 154
real portion of object (image) space 物(像)空间的实部 149
reciprocal ellipsoid 倒椭球 669
reciprocal lattice 倒晶格 585
reciprocity inequality 倒易不等式 765
reciprocity relation 倒易关系 604~605
reciprocity theorem of Helmholtz 亥姆霍兹互易定理 352
reconstructed wave-fronts 重建波阵面 418~425
rectilinear congruence 直线汇 113
reduced wavelength 约化波长 14
reference (or chief) ray 参考(或主)光线 169
reference sphere, Gaussian 高斯参考球 192,194,430及其后
reflecting microscope 反射显微镜 237~238
reflecting polariscope 反射偏振计 40~41

reflecting telescope 反射望远镜 230～233
reflection 反射
diffuse 漫反射 165
of rays at lattice planes 晶面光线反射 589～590
Fresnel formulae 菲涅耳公式 34～35,96～97,619
law of 反射定律 33,97
in geometrical optics 几何光学 112
variational analogue 变分类似 723
at metal surface 金属表面的反射 618 及其后,629 及其后
of normal congruence 法线汇的反射 117～118
phase change on 反射相变 54,632
polarization by 反射偏振 III,38 及其后
at surface of revolution 旋转反射面 145
total 全反射 41～45
reflection coefficient 反射系数
dielectric film 介质膜 55
metal/dielectric interface 金属/介质界面 619 及其后,629 及其后
metallic film 金属膜 631
stratified medium 分层媒质 53～54
reflection function 反射函数 371
reflection invariant of Abbe 阿贝反射不变量 145
reflectivity 反射率 36 及其后
of dielectric film 介质膜 55～59
of dielectric film multilayer 多层介质膜 62～63
enhancement by thin films 用加膜方法增高反射率 45,58
of metallic film 金属膜 631～633
selective 选择反射 625
reflector, perfect 完全反射体 526,527～528,617
refracting telescope 折射望远镜 225
refraction 折射
conical 圆锥折射 III,681～686
in crystals 晶体折射 679～686
double 双折射 679～681
Fresnel formulae 菲涅耳公式 35,97
at metal surface 金属面的折射 617 及其后,628 及其后
of normal congruence 法线汇的折射 117～118
at spherical surface 球面折射 135～136
at surface of revolution 旋转折射面 142～144
of thin pencil 细光锥的折射 152～158
refraction equation 折射方程 173～177
refraction invariant of Abbe 阿贝折射不变量 143,175
refraction law (Snell's law) 折射定律(斯涅耳定律) I,33,96
for anisotropic medium 各向异性媒质 681
for conducting medium 导电媒质 618～619
in geometrical optics 几何光学中的折射定律 112
for stratified medium 分层媒质 48
variational analogue 变分类似 723
refractive index 折射率 11
absolute 绝对折射率 11,12
of air 空气的折射率 86
complex 复折射率 83,184,615～616
of crystal, determination of 晶体折射率的测定 698～699
dependence on 依赖于
density 密度 82 及其后
frequency 频率 82 及其后
in electron optics 电子光学中的 736
refractivity 折射度
atomic 原子折射度 79,81
molar 克分子析射度 79 及其后
refractometer 折射计 45
region (area) of coherence 相干区域 459～460,477～478
regular neighbourhood of a ray 光线的正则邻域 115
relative aperture 相对孔径 169
relative visibility curve of eye 眼睛的相对视见度曲线 167
relative visibility factor of eye 眼睛的相对视见度因子 167
relativity 相对论 VII
relaxation time 弛豫时间 615,626
replica of grating 光栅的复制品 378
residual ray 剩余射线 625
resolution limit 分辨极限
with annular and with circular aperture, comparison of 环孔和圆孔衍射分辨极限的比较 383～385
of eye 眼睛的分辨极限 383
of interferometer 干涉仪的分辨极限 308 及其后
of microscope 显微镜
coherent illumination 相干照明 390～391,496

incoherent illumination 不相干照明 385～387, 496
partially coherent illumination (effect of condenser) 部分相干照明(聚光器的影响) 494～498
Rayleigh's criterion 瑞利判据 308及其后, 383, 496
of telescope 望远镜 383
see also resolving power 又见分辨本领(resolving power)
resolving power 分辨本领(分辨率) 308, 382～385
of diffraction grating 衍射光栅的分辨本领 375
of echelon 阶梯光栅 378
of eye 眼睛 221, 383
of prism 棱镜 376
see also resolution limit 又见 resolution limit
resonance frequency 共振频率 82及其后
resonance, optical 光学共振 657
response function, *see* frequency response function 响应函数,见频率响应函数
response, photographic 照相响应曲线 图8.51
restored polarization, angle of 回复偏振角 620
resultant, *see* convolution 合积,见卷积
retarded potential 推迟势 69
retina 视网膜 220
reversion theorem of Helmholtz 亥姆霍兹可逆定理 352
Riccati equation Riccati方程 606
rods 杆状细胞 221
roof type prism (Amici) 屋脊型棱镜(Amici) 228
Rowland's circle and Rowland's mounting for concave grating 凹面光栅用的罗兰圆和罗兰装置 381～382
Rubinowicz' representation of Kirchhoff's diffraction integral 基尔霍夫衍射积分的鲁比诺维茨表示 418
ruled grating 刻线光栅 317及其后
Rytov series(expansion) Rytov级数(展开) 606～608
approximation Rytov近似 597, 608
relation to Born approximation 与玻恩近似的关系 608

saddle-point 鞍点 742
saddle-point method 鞍点法 742及其后
sagittal field curvature 弧矢场曲 204
sagittal focal line 弧矢焦线 202
sagittal focal surface 弧矢焦面 202
sagittal focus 弧矢焦点 156
saltus problem 不连续问题 352
Savart's plate Savart板 696
scalar nature of two-dimensional electromagnetic field 二维电磁场的标量性质 530
scalar potential, electric 电标势 66, 68及其后
scalar representation of optical fields 光学场的标量表示 357～362
scalar waves 标量波 12及其后
scaling law for Radon transform Radon变换的标度律 187
scattered light 散射光
degree of polarization 偏振度 653
unpolarized proportion 非偏振部分 653
scattering 散射
amplitude 散射幅 583, 595, 600
forward 前向散射幅 600, 601, 612
cross-section 散射截面 600, 601, 613
double 二重散射 592,图13.7(b)
dynamic 动态散射 608
electromagnetic theory 电磁理论 608～613
far field (zone) 远场(带) 609～611
integral equation 积分方程 582
integro-differential equation 积分微分方程 609
multiple 多重散射 590～592
by nonspherical particles 非球形粒子的光散射 660
polarization by 散射偏振 652～655
potential 散射势 581～583, 596
periodic 周期势 587～590
Rayleigh 瑞利散射 88, 651, 652, 655, 657
reciprocity relation 倒易关系 604～605
scalar theory 标量理论 580～608
selective 选择散射 657
single 单散射 592,图13.7(a)
by sphere (diffraction by) 球粒子散射(衍射) 634～660
static 静态散射 580, 608
total, from 总散射,来自
body of arbitrary shape 任意形状的物体 600～601

sphere 球形粒子 634及其后
very small particles 非常小的粒子 657,图14.12
unitary relation 么正关系 604
see also Born approximation, optical cross-section theorem, Rytov approximation 又见 Born approximation, optical cross-section theorem, Rytov approximation
scattering index 散射指数 569
Schlieren method 纹影法 392
Schmidt camera 施密特照相机 178,231~233
Schmidt-Cassegrain camera 施密特-卡基格伦照相机 233
Schmidt-corrector plate 施密特校正板 231
Schrödinger's equation 薛定锷方程 581,738
Schwarzschild's aplanatic telescope 施瓦茨蔡耳德不晕望远镜 178,230
Schwarzschild, eikonal 旋瓦茨蔡耳德程函 196~199
screen, black 黑屏 352
second curvature, *see* curvature 第二曲率,见 curvature
secondary disturbance (wave) 次级扰动(波) 343,345,419
secondary focal line 第二焦线 155
secondary focus 第二焦点 155,157
secondary spectrum 次级光谱 159
Seidel aberration, *see* aberration, primary 赛德尔像差 见初级像差(aberration, primary)
Seidel eikonal 赛德尔程函 196~199
Seidel formulae 赛德尔公式
in terms of 用
one paraxial ray 一条傍轴光线表示 211~212
two paraxial rays 两条傍轴光线表示 207~211
Seidel variables 赛德尔变量 196~198,451
selective reflectivity 选择反射 625
selective scattering 选择散射 657
self-coherence 自相干 467
Sellmeir's dispersion formula 塞尔迈耳色散公式 86
semiconductor 半导体 2
shadow 阴影(区) 99,408~409,409~410
sifting property 筛选特性 747
sign convention in Gaussian optics 高斯光学中的符号规则 142
signal, analytic 解析信号 462及其后
sinc(x) function sin(x)函数 587
sine condition 正弦条件 151,152~153
singularity at edge 边处奇点 561
Sirks-Pringsheim interferometer 瑟克斯-普林谢姆干涉仪 287~288
skew congruence 斜线汇 113,736
skew ray trace 不交轴光线追迹 175~178
skin effect 趋肤效应 617
slit, *see* diffraction, Fraunhofer, and diffraction, rigorous theory 狭缝 见 diffraction, Fraunhofer, and diffraction, rigorous theory
slit source, use of 使用狭缝光源 247及其后
slope function 斜率函数 717
Smith-Helmholtz formula (invariant) 史密斯-亥姆霍兹公式(不变量) 150
Snell's law, *see* refraction, law 斯涅耳定律,见折射定律
Soleil's compensator 索累补偿器 690
Sommerfeld's diffraction problem 索末菲衍射问题 342,415,526,534~547
Sonnar lens Sonnar镜头 224
spatial frequencies 空间频率 453
spatial spectra 空间谱 454
specific conductivity 电导率 2
spectral amplitude 谱振幅 595
spectral changes, correlation-induced 关联感生的光谱改变 488,490
spectral degree of coherence 谱相干度 486~487,488,764
spectral density 谱密度 465
mutual 互谱密度 470
spectral interference law 光谱干涉定律 487,488
spectral line, structure determination by Michelson's method 用迈克耳孙方法测定光谱线的结构 296~299,473
spectral modulation 光谱调制 488
spectral orders 光谱序 373
spectral range 光谱范围
free 自由光谱范围 380
of an interferometer 干涉仪的光谱范围 310
spectral width 光谱宽度
effective 有效光谱宽度 512
mutual effective 互有效光谱宽度 513~514
spectrograph, grating 光栅摄谱仪 380~382
spectroscopic wave number 光谱学波数 14

spectroscopy 光谱学 VI
spectrum 光谱
channelled 构槽光谱 247
cross-power 交叉功率谱 470
emission line 发射线状光谱 293
of plane waves, angular 平面波角谱 530 ~ 533
power 功率谱 465
secondary 次级光谱 159
spatial 空间谱 454
speed of lens 透镜的速率 169
sphere 球
diffraction (scattering) by 导电球产生的光衍射(散射) 634 ~ 660
extinction cross-section 消光截面 654 ~ 660
focal 焦球 234
Gaussian, reference 高斯参考球 192, 194, 430 及其后
Poincaré's 邦加球 图 1.8, 27
spherical aberration 球面像差 200, 图 5.3(a), 439 ~ 440, 444 ~ 446, 图 9.15
spherical wave 球面波 13
Weyl representation Weyl 表示 593
spherically symmetric medium, rays in 球面对称媒质中的光线 109 ~ 111
standing wave 驻波 257 ~ 261
static field 静态场 2
static scattering 静态散射 580
stationary field 定态场 2, 465, 608
stationary phase, method of 稳定相方法 744 ~ 745
steepest descent method of 最陡下降法 740 ~ 745
Steinheil (flint-in-front) objective 斯坦海耳(火石玻璃在前面的)物镜 227
step function (Heaviside unit function) 阶梯函数(Heaviside 单位函数) 749
stigmatic imaging 消像散成像 135 ~ 136, 151 及其后; 又见 axial stigmatism
stilb 熙提 168
Stokes parameters 斯托克斯参量
of monochromatic wave 单色光的 26 ~ 27
of quasi-monochromatic wave 准单色光的 523 ~ 525
Stokes phenomenon 斯托克斯现象 541
stops 光阑 168 ~ 170
strain-optical constants 应变-光学常数 699 及其后
strain tensor 应变张量 699
stratified medium 分层媒质 45 ~ 63, 628 ~ 634
characteristic matrix 特性矩阵 49 ~ 53
periodic 周期性 59 ~ 63
reflection coefficient 反射系数 53 ~ 54
transmission coefficient 透射系数 53 ~ 54
Strehl intensity (definition) Strehl 强度(明晰度) 431
Strehl ratio Strehl 比 431
stress birefringence 应力双折射 699 ~ 701
stress optical constants 应力光学常数 699 及其后
stress pattern 应力图案 701
stress tensor 应力张量 699
strip, diffraction by, *see* diffraction 条带衍射 见 diffraction(衍射)
surface 面, 曲面
aspheric, design of 非球面设计 178 ~ 183
caustic 焦散面 114, 116 ~ 117, 图 3.13, 154, 727, 729
of constant phase, *see* co-phasal surface 等相面, 见 co-phasal surface
of constant phase difference 等相差面 694, 图 15.23, 697
focal 焦面 114, 202
inverse surface of wave normals 倒(波)法线曲面 680
isochromatic 等色面 694
ray 光线曲面 672 ~ 673, 679
wave 波面 15
of wave normals (normal surface) (波)法线曲面 672 ~ 673, 675, 676 及其后
surface charge density 表面电荷密度 4
surface current density 表面电流密度 4, 527
super-resolution 超分辨率 586
susceptibility 极化率
dielectric 介电极化率 76
magnetic 磁极化率 76

tangential curve in the field of an instrument 仪器视场中的切向曲线 130
tangential field curvature 切向场曲 204
tangential focal line 切向焦线 202
tangential focal surface 切向焦面 202
tangential focus 切向焦点 156

TE wave, *see* transverse electric wave TE 波，见 transverse electric wave(横电波)
telecentric system 焦阑系统 169
telephoto lens 摄远镜头(远距照相镜) 224
telescope 望远镜 225 及其后
  Baker Super-Schmidt camera Baker 超施密特照相机 233 ~ 234
  binocular 双目望远镜 226
  Cassegrain 卡塞格伦 230
  Galilean 伽利略 226
  Gregorian 格雷果里 231
  Hale Hale 望远镜 230,231
  Newtonian 牛顿 230,图 6.18
  reflecting 反射望远镜 230 ~ 233
  refracting 折射望远镜 225
  resolution limit 分辨极限 383
  Schmidt camera 施密特照相机 178,231 ~ 233
  Schmidt-Cassegrain 施密斯-卡塞格伦照相机 233
  Schwarzschild's aplanatic 施瓦茨蔡耳德不晕望远镜 178,230
  terrestrial 地上望远镜 226 ~ 227,图 6.11
telescopic collineation (transformation) 远焦直射变换(变换) 137,139 ~ 140
tensor 张量
  dielectric 介电张量 661 ~ 663
  strain 应变张量 699
  stress 应力张量 699
tensor, conductivity 电导率张量 704
terrestrial telescope 地上望远镜 226 ~ 227,图 6.11
Tessar lens Tessar 镜头 223
thick lens 厚透镜 145 ~ 147
thin films, fringes with 薄膜条纹 265 及其后,324 ~ 333
thin lens 薄透镜 148
  aberrations 像差 213 ~ 217,219
  Gaussian optics 高斯光学 148
third-order aberration, *see* primary aberration 三级像差，见 primary aberration(初级像差)
Thomson angle 汤姆孙角 655
time average 时间平均 29,465
  of electric and magnetic energy densities 电能密度和磁能密度的时间平均 29,101 ~ 102
  of Poynting vector 坡印廷矢量的时间平均 29,102
TM wave, *see* transverse magnetic wave TM 波，见横磁波
tolerance, focal 焦点容限(焦点公差) 406
tolerances for primary aberrations 初级像差容限 438 ~ 441
tomography 层析术
  back-projection 背投影 190,596
  back-propagation 背向传播 596
  computerized (or computed) 计算机(或计算)层析术 183 ~ 191,592
  diffraction 衍射层析术 592 ~ 598
Topogon lens 小孔径宽视场镜头 222
total reflection 全反射 41 ~ 45
total scattering, *see* scattering 总散射，见 scattering
tracing of rays 光线追迹 172 及其后
transfer fimction, *see* frequency response function 传递函数，见 frequency response function
transfer equations 传递方程 173,177
transformation 变换
  affine 仿射变换 137,139
  concurrent (dioptric) 同向(折射)变换 140
  conformal 共形变换 133
  contracurrent (katoptric) 反向(反射)变换 140
  convergent 会聚变换 140
  divergent 发散变换 140
  gauge, for 规范变换
    Hertz vectors 赫兹矢量 72 ~ 73
    vector and scalar potentials 矢势和标势 66
  Legendre's 勒让德变换 121,720
  projective 射影变换 136 ~ 142
    classification of 分类 140
    combination of 组合 141
    telescopic 远焦射影变换 137,140
transilluminated objects, images of 透射照明下物的成像 500 ~ 503
transillumination 透射照明 238,494
transmission coefficient of 透射系数
  dielectric film 介质膜的 55
  metal/dielectric interface 金属/介质界面的 629 ~ 631
  metallic film 金属膜的 631
  stratified medium 分层媒质的 53 ~ 54
transmission cross-coefficient 传输交叉系数 501 ~ 503

transmission factor of 透射因子
optical system, *see* frequency response function 光学系统的,见 frequency response function
photographic plate 照相底版的 420
transmission function of 传输函数,透射函数
medium 媒质的传输函数 479
object 物体的透射函数 371
transmission, phase change on 透射相变 54,632
transmissivity 透射率 36及其后
of dielectric film 介质膜的 55
of metallic film 金属膜的 631
transparency region of metal 金属的透明区 628
transparent substance 透明物质 3
transport equation for amplitude vectors in geometrical optics 几何光学中的振幅输运方程 105~107
transversality of electromagnetic field 电磁场的横向性 20
transverse electric wave (TE wave) 横电波(TE波) 46及其后,637~638
transverse magnetic wave (TM wave) 横磁波(TM波) 46及其后,637~638
trichroism 三向色性 706
triclinic crystals 三斜晶体 589
triple protar 三合 protar(镜头) 223
triplet, Cooke 库克三透镜镜头 224
Twiss, *see* Hanbury Brown-Twiss interferometer 特威斯,见 Hanbury Brown-Twiss interferometer
two-beam interference, *see* interference 双光束干涉,见 interference
two-dimensional electromagnetic field 二维电磁场
scalar nature of 标量性质 530
Twyman-Green interferometer 特怀曼-格林干涉仪 280~282

ultrasonic waves 超声波 376,562及其后,592~593
diffraction of light by 光在超声波上的衍射(超声衍射) 562~579
undetermined multipliers, Lagrange's method of 拉格朗日待定乘子法 670
uniaxial crystal 单轴晶体 673,674
absorbing 吸收晶体 704~713(包含双轴晶体)
direction of vibration 振动方向 675
interference figures from uniaxial crystal plates 单轴晶片干涉图 694~696,709~710
negative, positive 负单轴晶体,正单轴晶体 675
normal surface (波)法线曲面 675
ordinary and extraordinary waves 寻常波和非常波 675
principal plane 主平面 675
surfaces of constant phase difference 等位相差面 694~695
unifocal lens unifocal 镜头 223
uniqueness of solutions in rigorous diffraction theory 严格衍射理论中解的惟一性 561
unit cell 晶胞 588
unit function of Heaviside Heaviside单位函数 749
unit plane 单位面 138及其后
unit point 单位点 138及其后
unitary relation 么正关系 604
unpolarized light (wave) 非偏振光(波) 514,519
unpolarized proportion of scattered light 散射光的非偏振部分 653

van Cittert-Zernike theorem 范西特-泽尼克定理 574
variation, first 一阶变分 715
variational methods in rigorous diffraction theory 严格衍射理论中的变分方法 527
variations, calculus of 变分法 714~731
vector 矢量
complex 复矢量 26
Hertz 赫兹矢量 72~73,638
Poynting 坡印廷矢量 8,20~21,29,101~103,107~108,661,664
vector potential 矢势 66,69及其后
vector waves 矢量波 20~24
velocity 速度
complex 复速度 615,705
of electromagnetic waves 电磁波的速度 V,9及其后
energy 能量速度 663~665,673
group 群速 17~20
of light 光的速度(光速) V,VII,9,10及其后
phase 相速 14~16,19,664,669,670~671
principal 主速度 666,671
ray 光线速度 663,664,673
wave-normal 波法线速度 664

vibration 振动
azimuth of 振动方位角 40
direction of 振动方向 24,675
plane of 振动面 24
see also light vibrations 又见 light vibrations
vignetting 渐晕 170
virtual portion of object (image) space 物(像)空间的虚部 149
visibility 可见度,视见度
curve of eye 眼睛的视见度曲线 167
curves from sources of different 干涉条纹可见度随光源
geometry 几何尺度的变化 248~249,图 7.11,图 7.15
spectral distributions 光谱分布的变化 296 及其后
factor of eye, relative 眼睛的相对视见度因子 167
of fringes (Michelson's) (迈克耳孙)条纹可见度 248~249
relation to 同
coherence time 相干时间的关系 513
degree of coherence 相干度的关系 472~473
mutual coherence time 互相干时间的关系 513~514
visual acuity 视觉敏锐度 221
vitreous humour 玻璃状液 221
volume hologram 体全息图 590
von Laue equations 冯·劳尔方程 588~589

Watson's lemma Watson 引理 741
Wave 波
boundary diffraction 边界衍射波 415
conjugate 共轭波 421
damped 阻尼波 614
diffracted 衍射波 355,419
electric 电波 638
electromagnetic 电磁波 V,20 及其后
E-polarized *E* 偏振波 46,530,565
evanescent 隐失波 532,594,595,596
extraordinary 非常波 675
H-polarized *H* 偏振波 46,530
harmonic, *see* harmonic wave 谐波,见 harmonic wave
homogeneous 均匀波 531,594,595,596,又见平面波
inhomogeneous 非均匀波 15,531
magnetic; *see also* tranverse magnetic wave 磁波 638,又见横磁波
monochromatic (light) 单色(光)波 16,21 及其后,237,294,475,479,519~520
ordinary 寻常波 675
partial, in Mie's theory 米氏理论中的分波 647~648,图 14.9
plane 平面波 12~13,14 及其后,20 及其后,531 及其后
plane-polarized 平面偏振波 25
polarized 偏振波 21 及其后,522
elliptically, circularly, linearly 椭圆,圆,线 21 及其后,29~32
partially 部分偏振波 461,514,522
reconstructed 重建波 418~425
scalar 标量波 12 及其后
secondary, (disturbance) 次级波(扰动) 343,345,419
spherical 球面波 13
Weyl representation Weyl 表示 593
standing 驻波 257~261
transverse electric (TE wave) 横电波(TE)波,46 及其后,637~638
transverse magnetic (TM wave) 横磁波(TM)波,46 及其后,637~638
ultrasonic 超声波 376,562 及其后
unpolarized 非偏振波 514,519
vector wave 矢量波 20~24
wave aberration 波像差 192 及其后,图 5.3
wave equation 波动方程 9,506~511
wave-front 波阵面
deformation, influence on intensity at focus 形变对焦点强度的影响 433
division 波阵面分割 239,242~257
generalization in calculus of variations 变分法中的推广 717
geometrical 几何波阵面 101
reconstructed 重建波阵面 418~425
shearing interferometer 波阵面切变干涉仪 291~292
wave group 波群 16 及其后

wave mechanics of free electrons 自由电子的波动力学 737 ~ 738
wave normal velocity 波法线速度 664
wave normals 波法线
ellipsoid of (波)法线椭球 669 及其后
Fresnel's equation of 菲涅耳波法线方程 666,705 及其后
inverse surface of 倒法线曲面 680
optic axes of 波法线光轴 671,674 及其后,678
surface of, *see* normal surface (波)法线曲面,见 normal surface
wave number 波数 14,616
complex 复波数 616
spectroscopic 光谱学波数 14
wave packet 波包 16 ~ 20
wave surface 波面 15
geometrical 几何波面 101
wave theory 波动理论 I,II,III,119
wave train 波列 293 及其后,513
wave vector 波矢 14
wave zone 波带 74,647
wavelength 波长 14
comparison, with 同……的比较
Fabry-Perot interferometer 法布里-珀罗干涉仪 313 ~ 316
standard metre 标准米 340 ~ 341
of particle, de Broglie 粒子的德布罗意波长 737 ~ 738
reduced 约化波长 14
Weierstrass condition for a strong minimum Weierstrass 强极小值条件 725
Weierstrass $\mathcal{E}$ function Weierstrass $\mathcal{E}$ 函数 724 ~ 725
Weyl representation of spherical wave 球面波的 Weyl 表示 593
wide-angle pencils, imaging with 广角光锥成像 151 ~ 153
Wiener-Hopf method Wiener-Hopf 方法 527
Wiener-Khintchine theorem Wiener-Khintchine 470
Wiener's experiment on standing waves 维纳驻波实验 259 ~ 261
window, entrance, exit 入射窗,出射窗 169

X-ray diffraction (scattering) X 射线衍射(散射) 376,422 ~ 423,585,588,589,590,738
Bragg's law 布拉格定理 589
von Laue equations 冯·劳尔方程 589
X-ray microscope X 射线显微镜 422

Young's diffraction theory 杨氏衍射理论 415
Young's interference experiment 杨氏干涉实验 242 ~ 244,247,248,250

Zeiss Biotar lens 蔡斯 Biotar 镜头 224
Zernike's circle polynomials 泽尼克圆多项式 433 ~ 436,758 ~ 763
Zernike's phase contrast method 泽尼克相衬法 391 ~ 395
zone construction 波带作图法 343 及其后

译 后 感

回想自第一次登台讲“光的电磁理论”课到译本出版(1956—2006),已过去整整 50 年。其间多少事,如史、如戏、如梦,尽在不言中。

《光学原理》原书初版于 1959 年,随后即被该课采用为主要参考书。部分基础章节接连讲了几遍(1962—1965),因而产生深入学习阅读兴趣并与之结下一种情缘。

但好景不常,翌年文革爆发,随后 10 年岁月蹉跎,光阴虚度。

文革告终后,高校春来早。恢复高考;教学、学术会议之多,如雨后春笋。这时,我着手课程第二期建设,首先增加了“光的部分相干性”内容。这是《光学原理》的重要一章。但是,全面深入系统地逐章逐节研读该书,则是通过本次翻译。

本书(第五版)在 1976 年曾翻译过一次。那尚处于计划经济闭关锁国之际。这次(第七版)则在改革开放下市场经济展现活力之时。二者感受颇异。

E·沃耳夫教授为这次译本写了中文版序言,我深为感谢。南开大学母国光教授情意感人并为译本写了一篇热情洋溢的贺词,我在此表示衷心谢忱。电子工业出版社窦昊先生在整个译书过程中表现的协作与通达给我留下了深刻印象,我亦于此致谢。

于耄耋之年完成一本光学名著的中译,未致光阴完全虚度,聊感欣慰。

杨葭荪

2009 年 9 月