兰州大学物理科学与技术学院光学基础上小班辅导讲稿

兰州大学萃英学院2019级物理班　　李丛宇

目录

0 引言
1 一、几何光学、费马原理与变折射率光学
1 1.1. 几何光学三定律 1.2. 全反射 1.3. 连续介质变折射率光学.
1.4. 惠更斯原理与费马原理.
2 二、光的描述
2 2.1. 光是一种电磁波
3 2.2. 定态波与脉冲波 2.3. 定态光波的标量表示 2.4. 波函数的复数表示
4 2.5. 球面波向平面波的转化
5 三、光的干涉
5 3.1. 双点光源干涉 3.2. 相干条件 3.3. 发光规律
6 3.4. 杨氏双缝干涉 X
7 3.5. 空间相干性
8 3.6. 薄膜干涉的等厚条纹(等厚干涉)
9 3.7. 等倾条纹(等倾干涉)
10 3.8. 迈克尔逊干涉仪
11 3.9. 多光束干涉与法布里-珀罗干涉仪
13 3.10. 非单色光干涉与时间相干性
14 四、光的衍射
14 4.1. 衍射的一般理论
15 4.2. 菲涅耳衍射的两种分析方法(圆孔衍射、直线上)
16 4.3. 菲涅耳波带片
17 4.4. 夫朗禾费单缝衍射
18 4.5. 积分法与矩孔衍射
19 4.6. 夫琅禾费圆孔衍射与分辨本领 4.7. 夫朗禾费多缝衍射.
20 4.7. 多缝衍射习题 4.8. 光栅及其特性.
21 4.9. 闪耀光栅与晶体光栅.
22 五、光的偏振
22 5.1. 二维振动的分析
23 5.2. 光的偏振态与光学仪器偏振片 5.3. 双折射

24 5.4. 晶体光学器件.
25 5.5. 复杂偏振现象
26 5.6. 物质对偏振态的其他影响
28 5.7. 偏振的矩阵表示 5.8. 介质界面光学
31 六、光与物质相互作用
31 6.1. 光的吸收 6.2. 色散的进一步解释
32 6.3. 发光的经典理论 6.4. 光的量子性与粒子性
33 6.5. 光的散射. 光子与粒子碰撞 .End.

引言

先自我介绍一下，我是兰州大学原物理学院2019级英班，现英学院2019级物理班的李丛宇。

光学基础I这门课，是我带的第一门物理学基础课的小班辅导课程，其实同一学期我还带了概率论与数理统计，不过算是（第一门）数学基础课）。小班辅导的官方说法是“由面试选拔的高年级学生负责，以复习回顾、预习加典型例题讲解等形式加深学生的理解”。个人想法是在有限的一到两节课时中，构建一个尽量完整的知识体系与课程框架，极端情况下，即使一名同学完全听不懂或者没有听老师讲课，靠听我讲课甚至靠看我写的讲稿，也能大致学会这门课，知道它在讲什么、干什么、有什么用。

我写这份讲稿，或者叫笔记时，首先要力求自己能看懂，其次便是争取让没什么基础的同学看懂，力求概念清晰，推导详细。

说回到光学这门课，我个人认为，其入门存在不小难度，学会也有一些困难，但掌握之后便会霍然开朗，觉得也没什么难的。可能你会说每门课都是这样，那么我要说光学尤为明显。

光学的主干还是非常简洁的，著名而经典的有三大现象：光的干涉、衍射和偏振，再加上几何光学与变折射率光学和光与物质相互作用（色散、散射），也就是五到六部分内容。

问题在于简单的主干上长满了复杂的枝叶，光学的每一大部分都包括许多小内容，细节繁多。

我认为解决问题的关键在于，首先要时刻抓住主干，其次要理清每一部分其内在的逻辑与框架。

光学是否需要大量的前置知识呢？我的回答是：也要也不要。如果你距离远大，追求理解深刻，那可能的确需要基础学得扎实；但是如果只是为了听懂大部分内容，考试考出总分的大部分（比如80分？），那倒大可不必。如果在学习和听课中碰到前置知识影响进度，应当战略跳过，一是老师没时间讲，二是你可能没时间、学不会或者推不出来，如果长时间卡住，不仅可能影响后续听课，甚至可能一直没法入门。

上面也提到了，光学的确是一门综合性很强的课，也正因如此，在学习/复习光学的过程中，你基础课掌握不牢的知识点便有可能暴露出来。以本笔记第五、六单元为例，便用到了线性代数、力学与理论力学、电磁学与电动力学、原子物理与量子力学（没错，就是没有热学，它挺孤独的）。即使我已经学完光学一年多，再去写这部分笔记，依然颇有难度，但也乐在其中。

最后，还要说一句，光学是一门很美的课，希望大学都能乐在其中，学有所成！

光学基础I（普通光学）　　参考教材：《现代光学基础》钟锡华

一、几何光学、费马原理与变折射率光学

1.1. 几何光学三定律

$i_1=i_1'$　　$n_1\sin i_1=n_2\sin i_2$

① 光沿直线传播 ② 反射定律 ③ 折射定律

实验定律，后面可以用费马原理或菲涅耳公式证明。

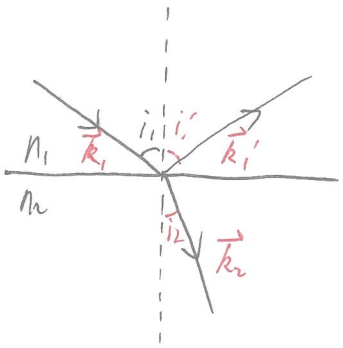


图 1.1.1

先来直观地看一下图像：

$k_1\sin i_1=k_2\sin i_2=k_1\sin i_1'$（这里用到 $n=\frac{kc}{\omega}\propto k$），

$k_{1x}=k_{1x}'=k_{2x}$，$k_{1y}=-k_{1y}'$，$k_{1y}\neq k_{2y}$，波矢水平分量相等（即不变连续），

反射时竖直分量反向，折射时竖直分量变了。

1.2. 全反射：

假如图 1.1.1 的话 $n_1>n_2$，$i_1<i_2$，则 $i_2=0$ 时，$i_1>0$，之后折射消失只存在反射了。

1.3. 连续介质变折射率光学：

离散情况下，存在不变量 $n\sin i$，即 $n_1\sin i_1=n_2\sin i_2=\cdots=n_i\sin i_i$.

连续介质，取一薄层 dz，并对 $n\sin\theta=C$ 取微分：

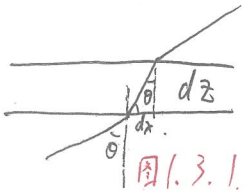


图 1.3.1

$dn\sin\theta+n\cos\theta\,d\theta=0$，$\frac{dn}{d\theta}=-n\cot\theta=-n\frac{dz}{dx}\Rightarrow\frac{dn}{dz}=-n\frac{d\theta}{dx}$.

要得到 $\frac{d\theta}{dx}$ 的其他表达，可对 $\cot\theta=\frac{dz}{dx}$ 两边对 x 求导 $\Rightarrow$

$-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d\theta}{dx}=\frac{d^2z}{dx^2}$，得 $\frac{d\theta}{dx}=-\sin^2\theta\frac{d^2z}{dx^2}$.

θ 是变量，用已知量表出：$n\sin\theta=n_0\sin\theta_0$，$\sin^2\theta=\frac{n_0^2\sin^2\theta_0}{n^2}$.

代回上式，得 $\frac{dn}{dz}=\frac{n_0^2\sin^2\theta_0}{n}\frac{d^2z}{dx^2}$，又 $n\frac{dn}{dz}=\frac{1}{2}\frac{d(n^2)}{dz}$，

得 $\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{1}{2n_0^2\sin^2\theta_0}\frac{d(n^2)}{dz}=f(z)$.

解法：降次：设 $\frac{dz}{dx}=z'$，则 $\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\right)=\frac{dz'}{dz}\frac{dz}{dx}=z'\frac{dz'}{dz}=f(z)$，

$\frac{1}{2}\frac{dz'^2}{dz}=f(z)$，$z'=\sqrt{2\int f(z)dz}$，再用分离变量法求解即可。

1.4. 惠更斯原理与费马原理

惠更斯原理：光扰动同时到达的空间曲面称为波面（波前），其上的每一点都可被看成一个新的扰动中心，称为子（次）波源。下一时刻的波前是这些大量次波面的公切面（包络面）。波的传播方向垂直于包络面。

费马原理与最小光程：以上介质为例，光的传播时间

$t=\frac{L_1}{v_1}+\frac{L_2}{v_2}=\frac{n_1L_1}{c}+\frac{n_2L_2}{c}=\frac{n_1L_1+n_2L_2}{c}$.



图 1.4.1

要使 t 最小，只需 n_iL_i 求和最小，光程 $l=\sum n_iL_i$

对连续介质，$L=\int_A^B n\,dl$，

光线沿光程为平稳值的路径传播，即变分 $\delta L=\delta\int n\,dl=0$.

光程与时差：$\Delta t=\frac{1}{c}L$，正如同一般的 $V=\frac{s}{t}\to t=\frac{s}{v}$.

光程与相位差：$\Delta\varphi=-\sum_i\frac{2\pi}{\lambda_i}l_i=-2\pi\sum_i\frac{l_i}{\lambda_0/n_i}=-2\pi_0\sum_i n_i l_i=-2\pi_0 L$.

$\varphi=k_0L$，$k=\frac{2\pi}{\lambda_0}$ 为真空中的空间频率，沿波传播方向相位逐点落后.

成像：由物点 Q 发出一列球面波或平行同心光束，经成像系统变换为另一列球面波，则出射同心光束的中心定义为像点，

成像过程是一个对同心光束实现某种变换的过程.

由反证法，可得从物点到像点的各个光线光程相等.

特别的，虚光程应取负值.

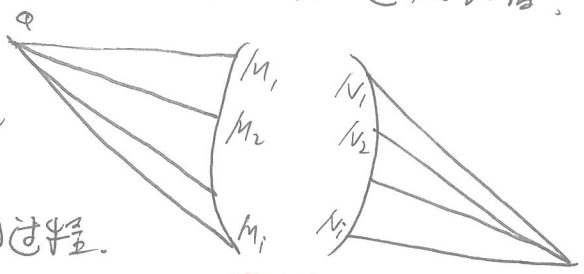


图 1.5.2.

球面近轴折射成像公式：$\frac{n}{s}+\frac{n'}{s'}=\frac{n'-n}{r}$.

符号法则：s、s' 实正虚负，以物在像右为实.

半径 r：左凸，$r>0$；右凸，$r<0$.

物方像方跟随物和像：

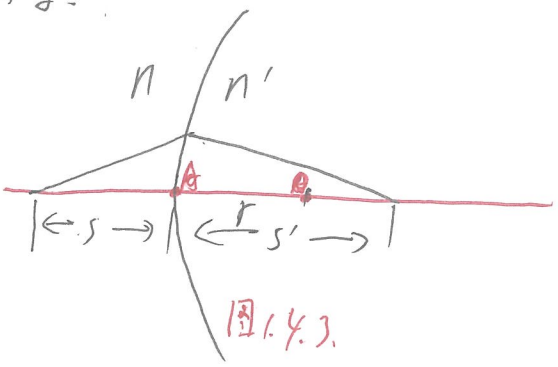


图 1.5.3.

像方焦距：物距 ∞，$s'=f'=\frac{n'r}{n'-n}$

物方焦距：像距 ∞，$s=f=\frac{nr}{n'-n}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{像方焦距：物距}\infty,\ s'=f'=\frac{n'r}{n'-n}\\ \text{物方焦距：像距}\infty,\ s=f=\frac{nr}{n'-n}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{f}{n}=\frac{f'}{n'}\Rightarrow\frac{f}{s}+\frac{f'}{s'}=1.$$

二、光的描述.

2.1 光是一种电磁波

自由空间中的麦克斯韦方程组：$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=0\\ \nabla\times\vec{E}=-\mu\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{H}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{cases}$.

导出波动方程 $\begin{cases}\nabla^2\vec{E}-\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0\\ \nabla^2\vec{H}-\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0\end{cases}$. 波速满足 $\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0=\frac{1}{v^2}$，即 $V=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$.

真空中电磁波速公式 $C=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$. 由 $V=\frac{c}{n}$ 得 $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$.

波动方程的通解为多列波的叠加，则电磁波的基元为平面电磁波函数：$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi_E)$，

$\vec{H}(\vec{r},t)=\vec{H}_0\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi_H)$.

ω，我们早在三角函数中就已认识它，为角频率或叫时间频率，$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\nu$.

相应的 k 为空间频率，$k=\frac{2\pi}{\lambda}$，而 $\vec{k}$ 叫波矢，指向波传线方向，

与平面等相面正交.

注：光在不同介质中传播频率保持不变。波的频率就是波的本质属性是将波区分开来的最基本标准。频率只和光源有关，从光源发出后则一直不变。在非线性光学中，有可能出现光的频率改变。

$V=\lambda\nu=\frac{c}{n}$，$\lambda=\frac{c}{n\nu}$，$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{n_2}{n_1}\Rightarrow\lambda=\frac{n_0\lambda_0}{n}=\frac{\lambda_0}{n}$.

电磁波能流密度—坡印亭矢量：$\vec{S}(r,t)=\vec{E}(r,t)\times\vec{H}(r,t)$.

瞬时值：$S=EH=EHn$，最大值 $S_m=E_0H_0$.

光强：平均电磁能流密度：$\bar{S}=\frac{1}{T}\int_0^T|\vec{E}\times\vec{H}|dt=\frac{1}{T}\int_0^T EHdt$

$=\frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi}E_0H_0\cos^2\theta d\theta=\frac{1}{2}E_0H_0=\frac{1}{2}S_m=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E_0^2\propto nE_0^2$.

注：对于光波，频率极高，周期极小，对于T，即使它很小很小，但在微观上，与光的频率相比，仍然很大，可以为包含无数个周期等效为许多周期

在同一介质中研究光强空间分布，以 $I=E_0^2$ 度量。

在不同介质中比较光强，则以 $I=nE_0^2$ 度量。

2.2. 定态波与脉冲波：

在观测时间中，光源持续且稳定地发光，发波场中各点皆以同一频率作稳定的振荡，此即定态波，是一个波列随时间在空间推移。

特点：频率单一，振幅确定。

脉冲波：光源在极短时间中发光，以致波形局限于一个区域，称为波包，图像是类钟的波包按一定重复频率T随时间在空间推移。

2.3 定态光波的标量表示。

E_x 有确定关系，选择电场强度矢量 E 为光矢量，再考虑到 E 的三分量 (E_x,E_y,E_z) 遵从同一形式的波动方程，可选其中一个分量为代表，将矢量波动方程转化为标量表示：$\nabla U-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2U}{\partial t^2}=0$.

定态光波的基元成分为简谐波，一般形式为 $U(P,t)=A(P)\cos(\omega t-\varphi(P))$，振幅 $(A(P))$ 一定频率 (ω) 单一。振幅 $A(P)$ 不随时间改变，但可能是场点P位置的函数（光在声场时有不均匀）。

相位函数 $\varphi(P)$ 随场点位置而变化（含有光程或光程项），体现波动性。

2.4. 波函数的复数表示。

$U(P,t)=A(P)\cos(\omega t-\varphi(P))\longleftrightarrow\tilde{U}(P,t)=A(P)e^{-i(\omega t-\varphi(P))}$.

相位的正负并无优劣之分，本书选择负相位。

结合欧拉公式可以看出，$U(P,t)$是$\tilde{U}(P,t)$的实部，$U=R_e\tilde{U}$.
对应幅角相等但运算过程中实部虚部互不干扰(无耦合)，
指数函数的运算要简于三角函数.

不妨假设初相位$\varphi_0=0$，则简谐波复数形式：

平面波：$\tilde{U}(\vec{r},t)=Ae^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\cdot e^{-i\omega t}$，$\vec{k}\cdot\vec{r}=k_x x+k_y y+k_z z$.

球面波：$\tilde{U}(\vec{r},t)=\frac{a_1}{r}e^{ikr}\cdot e^{-i\omega t}$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

柱面波：$\tilde{U}(\vec{r},t)=\frac{a_0}{\sqrt{r}}e^{ikr}\cdot e^{-i\omega t}$.

复振幅：忽略$e^{-i\omega t}$，$\tilde{U}(P)=A(P)e^{i\varphi(P)}$.

平面波：$\tilde{U}(P)=Ae^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}=Ae^{i(k_x x+k_y y+k_z z)}=Ae^{ik(\cos\alpha\cdot x+\cos\beta\cdot y+\cos\gamma\cdot z)}$

·振幅为常数，与场点位置无关；

·相位分布是场点位置的线性函数，简称为线性相因子.

线性相因子的系数(k_x,k_y,k_z)或$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$与平面波的传播方向一对应

球面波：$\tilde{U}(P)=\frac{a_1}{r}e^{\pm ikr}=\frac{a_1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}e^{\pm ik\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，

+对应发散球面波，-对应会聚球面波.

轴外点源：~~P(x,y,z)~~ 场点$P(x,y,z)$，源点$Q(x_0,y_0,z_0)$，

$\tilde{U}(P)=\frac{a_1}{r}e^{\pm ikr}$，$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$

光强：$I(P)=\tilde{U}(P)\cdot\tilde{U}^*(P)=A^2(P)$，其中$\tilde{U}^*$是$\tilde{U}$的复共轭，

$\tilde{U}^*(P)=A(P)e^{-i\varphi(P)}$，通过取共轭乘积使e指数消去.

2.5. 球面波向平面波的转化.

·傍轴(振幅)：$z^2\gg\rho^2$，横向接收范围$\rho\ll$纵向距离z，$\frac{a_1}{r}\approx\frac{a_1}{z}$.

$e^{ikr}\approx e^{ik(z+\frac{x^2+y^2}{2z})}$.

·远场(相位)：$\Delta\varphi=k\frac{x^2+y^2}{2z}\ll\pi$，又$k=\frac{2\pi}{\lambda}$，$x^2+y^2=\rho^2$，$\therefore z\lambda\gg\rho^2$，

$e^{ikr}\approx e^{ikz}$，$\frac{a_0}{r}\approx a_0/(z+\frac{x^2+y^2}{2z})$.

三、光的干涉

3.1 双点光源干涉：

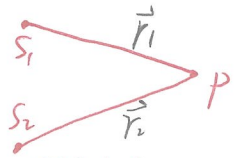


图 3.1.1.

设复振幅 $\tilde{U}_1 = \vec{A}_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}_1+\varphi_{10})}$，$\tilde{U}_2 = \vec{A}_2 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}_2+\varphi_{20})}$

简化假设：① $\vec{A}_1 // \vec{A}_2$，不考虑偏振；② $\varphi_{10}=\varphi_{20}=\varphi_0$，不考虑初相差别。

$\tilde{U}(P)=\tilde{U}_1+\tilde{U}_2 = A_1 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}_1+\varphi_0)} + A_2 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}_2+\varphi_0)}$

∵电磁波方程为二阶齐次线性微分方程，∴电磁场满足叠加原理。

光强：$I=|\tilde{U}|^2=\tilde{U}\cdot\tilde{U}^*=A_1^2+A_2^2+A_1A_2\left[e^{i\vec{k}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}+e^{-i\vec{k}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}\right]$

$=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\delta$，相位差 $\delta=\vec{k}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$。

不考虑点乘时，$\delta=k\Delta r=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta r=\frac{2\pi}{\lambda_0 n}\Delta r=\frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta L=k_0\Delta L$（光程差）

$I_1=A_1^2$，$I_2=A_2^2$，$I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\delta \neq I_1+I_2$！

光强不满足叠加原理。只有完全非相干时才满足叠加原理。

3.2 相干条件

相干叠加：$I(P)=I_1(P)+I_2(P)+\Delta I(P)$，在观测时间内总光强不等于分光强之和，常表现为在交叠区出现干涉条纹，即光强在空间重新分布。

① 两列波的振动方向一致或有平行振动分量。

② 频率相同，即 $k_1=k_2=k$ / $\omega_1=\omega_2=\omega$。

③ 场点有稳定的相位差，即 $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_0$ 或 $\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2=const$。

对比度：以极值加减作商定义：$\gamma=\frac{I_M-I_m}{I_M+I_m}$，$0\le\gamma\le1$。

$\gamma=\frac{2\sqrt{I_1I_2}}{I_1+I_2}=\frac{2\frac{A_2}{A_1}}{1+\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}$。可看出两束光的振幅越接近，对比度越大。

$I(P)=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\delta=(I_1+I_2)\left(1+\frac{2\sqrt{I_1I_2}}{I_1+I_2}\cos\delta\right)=I_0(1+\gamma\cos\delta)$，$I_0=I_1+I_2$。

获得高对比度的2个补充条件：

① 两束光的振幅尽可能接近。

② 两束光的传播方向的夹角不要太大。

3.3 发光规律

普通光源的发光是由大量微观粒子（分子、原子）内部的自发辐射造成的，这是一个随机过程，表现为发光的断续性、无规性和统计性，根源是微观上持续发光时间 τ_0 有限。如果 τ_0 无限，则波列无限长，初相位、振幅、

偏振方向都单一，这便是理想单色光。

3.4. 杨氏双缝干涉

干涉花样(条纹)：等相位(等光程)方程。

三维空间中，到两定点光程差为定值的点形成双曲面，

在屏幕上承接出双曲线簇。

在一定条件下，双曲线也可近似为平行直线。

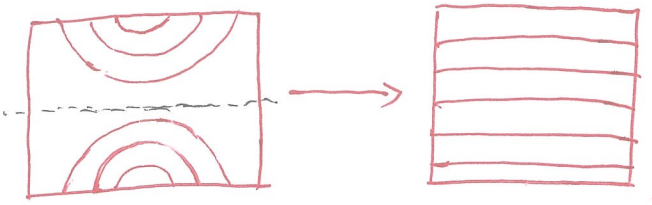


图 3.4.1.

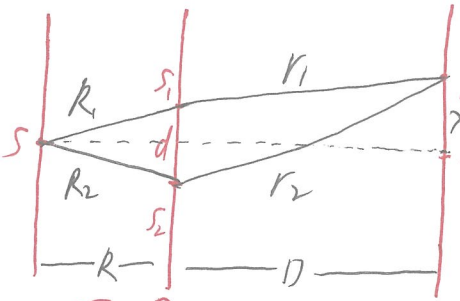


图 3.4.2.

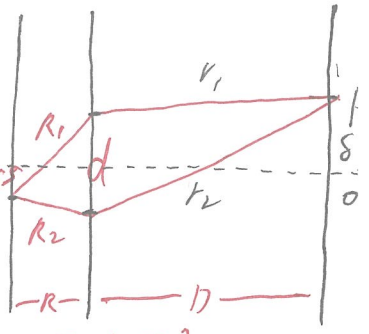


图 3.4.3.

一些假设：远场：$d \ll D$；傍轴：$x \ll D$；对称：$R_1 = R_2$。

光程差：$\Delta L = r_2 - r_1 = \sqrt{D^2+(x+\frac{d}{2})^2} - \sqrt{D^2+(x-\frac{d}{2})^2}$

$= D\left(1+\frac{1}{2}\frac{(x+\frac{d}{2})^2}{D^2} - 1 - \frac{(x-\frac{d}{2})^2}{2D^2}\right) = \frac{dx}{D}$

条纹：以亮纹为例，满足 $\delta = k\cdot 2\pi = 2n\pi$，即 $\Delta L = \frac{dx}{D} = m\lambda$，

得 $x_m = m\frac{\lambda D}{d}$，$m$ 叫亮纹的级数(入射指来说应当为入。)

相邻条纹间距相等：$\Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda D}{d}$。

$\because \Delta x \propto \lambda$，∴对同一套干涉装置，波长越长，条纹越稀疏。

光强公式简化：$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta$，令 $I_1 = I_2 = I_0$，

则 $I = 2I_0(1+\cos\delta) = 4I_0\cos^2\frac{\delta}{2} = 4I_0\cos^2\frac{\pi d}{\lambda D}x$。

干涉条纹移动：分析一群条纹的移动 → 分析一个 → 分析中央条纹 ⇒ 光程差为0。 如图 3.4.3，$\Delta L = (R_2+r_2) - (R_1+r_1) = 0$。

$r_2 - r_1 = \frac{d}{D}\delta x$，同理 $R_2 - R_1 = \frac{d}{R}\delta S$。

$\Delta L = \frac{d}{R}\delta S + \frac{d}{D}\delta x = 0$，$\delta x = -\frac{D}{R}\delta S$。(定义向上为+，向下为−)

也可写成归0式：$\frac{\delta x}{D} + \frac{\delta S}{R} = 0$。

对于由杨氏双缝干涉实验衍生出的其他装置，如菲涅耳双镜、双棱镜、劳埃德镜等，只需将其看成双缝装置，找 D 和 d 即可。

干涉条纹变动：干涉场中某一观察点 P 的光程差 $\Delta L(P)$ 发生变化 $\delta(\Delta L)$，当 $\delta(\Delta L)=N\lambda_0$，则在视场印象中有 N 个条纹移过该处。

3.5 空间相干性

普通光源不同位置发光的相位差随机，故线光源上各点之间互不相干，和2个点源发光，各自产生一套条纹，光强可直接叠加。

轴上光源：$I=4I_0\cos^2\frac{\delta}{2}$，$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{xd}{D}$，当光源偏离轴时，$\delta$ 会有变化，

设 $\delta\to\delta+\pi$，则 $I'=4I_0\cos^2(\frac{\delta}{2}+\frac{\pi}{2})=4I_0\sin^2\frac{\delta}{2}$，$\therefore I+I'=4I_0=$ const.

此情形是两套条纹恰好错开对齐，偏移量为 $\delta x=\frac{1}{2}\Delta x=\frac{1}{2}\frac{\lambda D}{d}$.

而 $\delta x=-\frac{D}{R}\delta s$，得点源移动距离为 $\delta s=-\frac{\lambda R}{2d}$. 负号表示 δs 和 δx 一上一下.

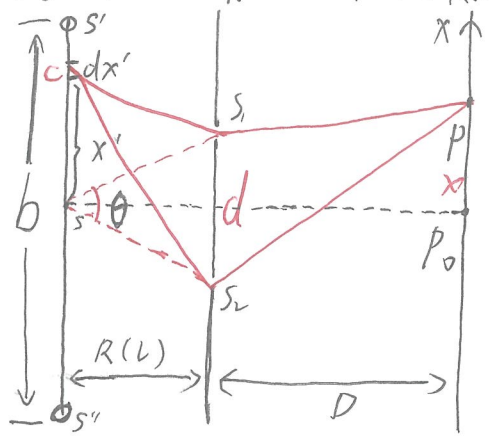


图 3.5.1

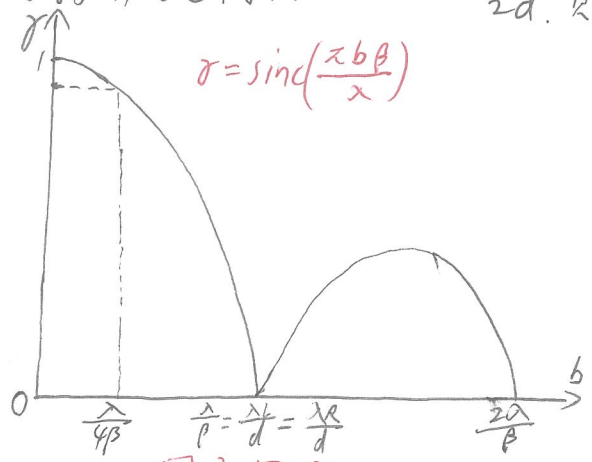


图 3.5.2

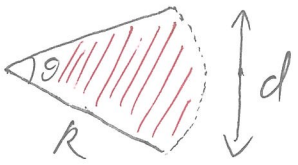


图 3.5.3

求和变积分：把宽度为 b，光强为 I_0 的扩展光源分成许多宽度为 dx'，强度为 $i_0=\frac{I_0}{b}$ 的点光源。以点光源干涉光强公式为基础：$I=2I_0(1+\cos\delta)$，

扩展光源上任一元光源 C 在干涉场上 P 点形成的条纹强度为：

$dI=2i_0dx'[1+\cos k(\Delta'+\Delta)]$，其中 $\Delta'=R_2-R_1$，$\Delta=r_2-r_1$.

易知 $\Delta'=\frac{d}{L}x'$，$\Delta=\frac{d}{D}x$，将 dI 按长度从 $-\frac{b}{2}$ 积到 $+\frac{b}{2}$，

$$I=\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}2i_0\left[1+\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{d}{L}x'+\frac{d}{D}x\right)\right]dx'$$

$$=2i_0\left[b+\sin\frac{\pi b\beta}{\lambda}\Big/\frac{\pi\beta}{\lambda}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{d}{D}x\right)\right]$$

$$=2I_0\left[1+\sin\frac{\pi b\beta}{\lambda}\Big/\frac{\pi b\beta}{\lambda}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{d}{D}x\right)\right]$$

$\beta=\frac{d}{L}$ 叫干涉孔径角，近似为 $\theta(\angle S_1S_2$

对比度 $\gamma=\sin\frac{\pi b\beta}{\lambda}\Big/\frac{\pi b\beta}{\lambda}$

$=\frac{\sin u}{u}=\mathrm{sinc}(\frac{\pi b\beta}{\lambda})$.

关于 β：固定线光源长度 b，改变 L(R)，$\gamma=0$（第一次），$\frac{\pi b\beta}{\lambda}=\pi$，$\beta=\frac{\lambda}{b}$，

即 $\frac{\lambda}{d}=\frac{R}{d}=\frac{b}{\lambda}$，$R\propto d$. 只有 d 位于图3.5.3所示的阴影区域时才会有干涉条纹. $\theta\approx\frac{d}{R}=\frac{\lambda}{b}$.

相干长度：两孔间距：$d=\theta R=\frac{\lambda}{b}L$

3.6 薄膜干涉的等厚条纹（等厚干涉）

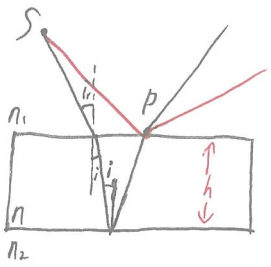


图 3.6.1.

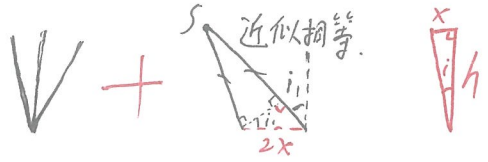


图 3.6.2. 图 3.6.3.

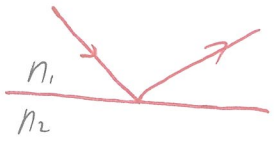


图 3.6.4

等厚干涉如图 3.6.1 所示.

光程差，即折光与上光的路程差如图 3.6.2 所示，

① 介质内走的：薄膜厚度为 h，入射角为 i_1，折射角为 i，$+\frac{2h}{\cos i}$.

② 介质外走的：认为光源离薄膜很远，构造"双直角等腰三角形"，上方的腰相等. $x=h\tan i$. 斜边 $=2x=2h\tan i$. $\longrightarrow -2h\tan i\sin i_1$.

光程差：$\Delta L=+\frac{2h}{\cos i}n-2h\tan i\sin i_1 n_1=\frac{2nh}{\cos i}-2nh\frac{\sin^2 i}{\cos i}$ （$n\sin i$）

$=\frac{2nh}{\cos i}(1-\sin^2 i)=2nh\cos i$.

半波损失：光从折射率为 n_1 的介质射向折射率为 n_2 的介质，反射光可能会出现 $\frac{\lambda}{2}$ 的相位损失，是否发生要看折射率相对大小.

$\begin{cases} n_1<n_2, \text{相位突变} \\ n_1>n_2, \text{无半波损失.} \end{cases}$ 相位差 $\begin{cases} \text{光程差} \\ \text{半波损} \end{cases}$

对薄膜干涉，$n_1>n>n_2$，两界面均不发生半波损失；

$n_1<n<n_2$，都发生半波损.

若 $n_1>n<n_2$ / $n_1<n>n_2$，则有且仅有一束光发生半波损，$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L+\pi$.

$=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L+\pi=\frac{2\pi}{\lambda}(\Delta L+\frac{\lambda}{2})=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L'$ $\longrightarrow$ 等效光程差.

相位差对应光程差 $\frac{\lambda}{2}$（半波长），

$\Delta L'=2nh\cos i(+\frac{\lambda}{2})$，$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}2nh\cos i(+\pi)$.

亮纹：$\delta=2m\pi$，$\Delta L'=m\lambda$.

i 不变时，光程差只与厚度有关. 同一条干涉~~条~~纹对应厚度相同.

增反增透膜：设 $n_1<n<n_2$，即折射率逐渐增大，则反射光无半波损. 下光与上光的光程差为：

$\Delta L'=2nh$. 当 $2nh=m\lambda$ 时 $\begin{cases} \text{反射光变亮(增强)} \\ \text{反射光变暗(相消)} \end{cases}$ 增反膜.

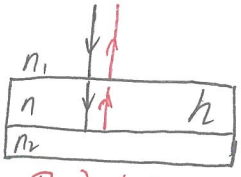


图 3.6.5.

楔形薄膜（空气劈尖）：玻璃板很薄夹角很小.



图 3.6.6

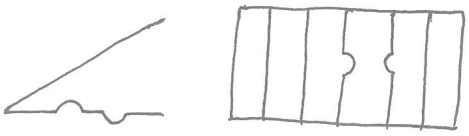


图 3.6.7

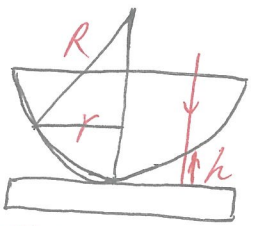


图 3.6.8.

$\Delta L' = 2h + \frac{\lambda}{2}$（有半波损）.

亮纹：$\Delta L' = m\lambda$，$2h = (m-\frac{1}{2})\lambda$ 暗纹：$\Delta L' = (m+\frac{1}{2})\lambda$，$h = \frac{1}{2}m\lambda$.

等距条纹，$\Delta h = h_{m+1} - h_m = \frac{\lambda}{2}$（厚度差）.

$\Delta s = \frac{\Delta h}{\sin\alpha} \approx \frac{\Delta h}{\alpha} = \frac{\lambda}{2\alpha}$. 可通过减小 α，扩大条纹间距 Δs.

检测平整度：凸起会减小光程差，导致条纹向右偏.（向厚看齐：条纹向哪偏，哪边就偏厚，即光程差大）.

牛顿环：设透镜半径很大，忽略折射.

根据圆对称性，干涉条纹为同心圆. $\Delta L' = 2h + \frac{\lambda}{2}$.

几何关系：$R^2 = r^2 + (R-h)^2 = R^2 + r^2 + h^2 - 2Rh$. $h \ll R$，$r^2 = 2Rh$，$h = \frac{r^2}{2R}$.

$\Delta L' = 2h + \frac{\lambda}{2} = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda}{2}$.

亮条纹：$\Delta L' = m\lambda \longrightarrow r = \sqrt{(m-\frac{1}{2})R\lambda}$. 手数 $\sqrt{m}$ 非线性，由内向外条纹变密.

暗条纹：$\Delta L' = (m+\frac{1}{2})\lambda \longrightarrow r = \sqrt{mR\lambda}$.

间距：$r_{m+1} - r_m = (\sqrt{m+1} - \sqrt{m})\sqrt{R\lambda}$.

平方差：$r_{m+1}^2 - r_m^2 = R\lambda$.

计算球面半径：$R = \frac{r_{m+1}^2 - r_m^2}{\lambda} = \frac{r_{m+k}^2 - r_m^2}{k\lambda}$.

3.7 薄膜干涉的等倾条纹（等倾干涉）.

光程差：$\Delta L' = 2nh\cos i (+\frac{\lambda}{2})$. 虽然与等厚干涉图形不同，但光程差式子相同

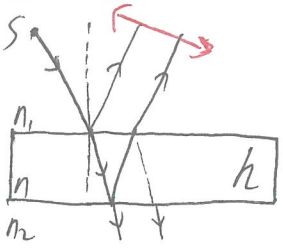


图 3.7.1.



图 3.7.2.

现为固定 h，研究 i 的影响.

第 k 级条纹的半径 $r_k \propto i_k$（i 为入射角）.

高条纹：$\Delta L' = m\lambda = 2nh\cos i (+\frac{\lambda}{2}) \longrightarrow \cos i = m\lambda(-\frac{\lambda}{2})/2nh$

$\cos i_{m+1} - \cos i_m = \frac{\lambda}{2nh}$. / $r_{m+1} - r_m \propto i_{m+1} - i_m$.

利用微分：$\Delta f(x) = \frac{df}{dx}\Delta x$（$\Delta x$ 很小），

$\therefore \cos i_{m+1} - \cos i_m = \frac{d\cos i}{di}(i_{m+1} - i_m) = -\sin i_m (i_{m+1} - i_m) = \frac{\lambda}{2nh}$，

$\therefore i_{m+1} - i_m = -\frac{\lambda}{2nh\sin i_m} \longrightarrow$ 条纹不均匀.

负号说明 $i_{m+1} < i_m$，即 $r_{m+1} < r_m$. 越往外级次越低，中间最高.

0级条纹在无限远处.

3.8. 迈克耳逊干涉仪

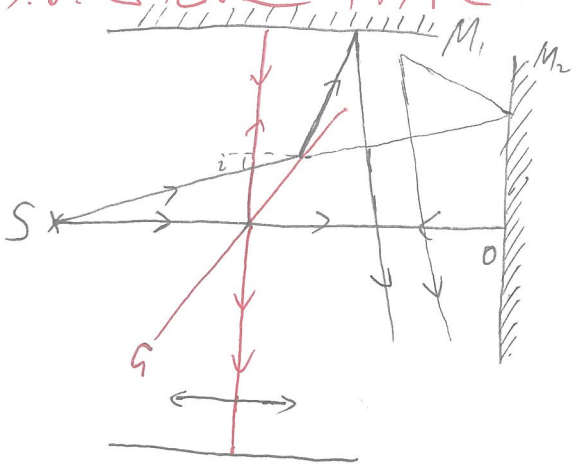


图 3.8.1

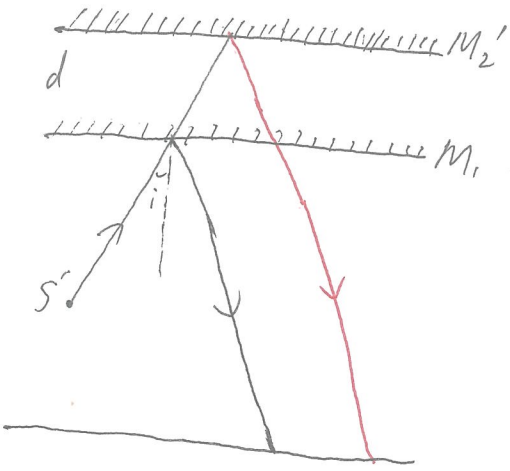
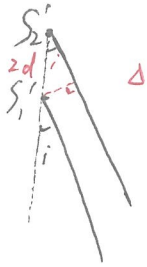


图 3.8.2



$\Delta L = 2d\cos i$.

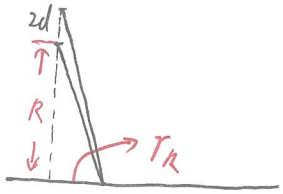


图 3.8.3　图 3.8.4

如图 3.8.1，将 S 和 M_2 分别关于 G 作对称，光路等效为空气薄膜的等倾干涉（如图 3.8.2 所示）. $n=1$, $\Delta L = 2d\cos i$.

进一步简化：作 S' 关于 M_1 和 M_2' 的 2 个像点 S_1' 和 S_2'，∵镜面相距为 d，

∴ 2 个像点相距为 $2d$. $\Delta L = 2d\cos i$.

平行光 → 相交光：i 很小时，近似相交；

我们想求得 k 级条纹的半径 r_k，要将其与光程差 $2d\cos i$ 联系起来.

"算两次"：由几何关系，光程差亦可表示为：

$$\Delta L = \sqrt{(R+d)^2 + r_k^2} - \sqrt{R^2 + r_k^2} \approx (R+d)\left(1 + \frac{r_k^2}{2(R+d)^2}\right) - R\left(1 + \frac{r_k^2}{2R^2}\right)$$

$$= 2d - \frac{r_k^2 d}{R(R+d)} = k\lambda \quad (k\text{级条纹})$$

不妨令 $2d = m\lambda$，则 $\frac{r_k^2 d}{R(R+d)} = (m-k)\lambda$，$r_k = \sqrt{\frac{(m-k)R(R+d)}{d}} \propto \sqrt{m-k}$，

即 r_k 与整数 $(m-k)$ 的平方根成正比，

这与前面等倾干涉 $r = \sqrt{mR\lambda}$ 对应.

半波损失：一般认为在上部附有介质板时视为平玻璃

最后无半波损失. $\Delta L' = \Delta L = 2d\cos i$.

补偿板 G_2: 反射光束先后3次经过 G_1, 而透射光束仅1次经过 G_1, 有3G透射光束将往返经过它2次, 合计3次通过玻璃介质, 与反射光束平衡.

条纹变化: $d\downarrow$, 光程差↓, 级次↓, 原来外面的低级条纹内缩, 即中心吞入条纹; 反之, $d\uparrow$, 吐出条纹.

3.9. 多光束干涉与法布里-珀罗干涉仪.

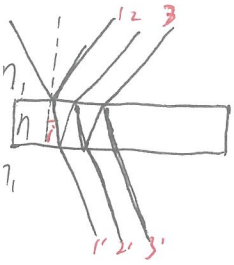


图 3.9.1.

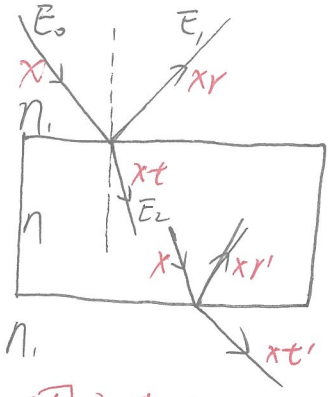


图 3.9.2.

F-P干涉仪原理如图3.9.1所示. 由于发生多次折反射, 反射率和透过率的影响不可忽略. 如图3.9.2, 设 r 为电场反射率, t 为电场透过率,

则 $r = \frac{E_1}{E_0}$, $t = \frac{E_2}{E_0}$, 但 $r + t = \frac{E_1 + E_2}{E_0} \neq 1$, 这也很显然,

能量守恒, 但能量正比于 E^2, 故场强之比 $\neq 1$.

Stokes定律: $r = -r'$, $r^2 + tt' = 1$.

$|r| = |r'|$, 说明上下两束反射光振幅相同, 而负号表示半波损.

多光束干涉的基础是等倾干涉.

相邻两束光的相位差: $\delta = \frac{4\pi n h \cos i}{\lambda}$ $(+\pi)$.

复数法: 相邻两束光的相位相差 δ, 即 $\omega t \to \omega t + \delta$,

而 $e^{i(\omega t + \delta)} = e^{i\omega t} \cdot e^{i\delta}$, 比 $e^{i\omega t}$ 多一个 $e^{i\delta}$ 因子.

含 δ 的 e 指数项求和 → 等比数列求和.

设入射光振幅为 A, 复振幅为: $\tilde{u} = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi)}$, 设 $\tilde{u} = A$, 则:

反射光: $\tilde{u}_1 = Ar = -Ar'$

$\tilde{u}_2 = Atr't'e^{i\delta}$

$\tilde{u}_3 = Atr'^3t'e^{i2\delta}$ (n≥2)

$\tilde{u}_n = Atr'^{(2n-3)}t'e^{i(n-1)\delta}$

透射光: $\tilde{u}_1' = Att'$

$\tilde{u}_2 = Atr'^2t'e^{i\delta}$

$\tilde{u}_3 = Atr'^4t'e^{i2\delta}$

$\tilde{u}_n = Atr'^{2n-2}t'e^{i(n-1)\delta}$ $(n \geq 1)$

对透射光: $\tilde{u}_T = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n = Att' \sum_{n=1}^{\infty} r'^{2n-2} e^{(n-1)i\delta} = \frac{Att'}{1 - r'^2 e^{i\delta}} = \frac{A(1-r^2)}{1 - r^2 e^{i\delta}}$.

光强: $I_T = |\tilde{u}_T|^2 = \tilde{u}_T^* \cdot \tilde{u}_T$ $(i \to -i)$

$$A^2(1-r^2)^2/(1-r^2e^{i\delta})(1-r^2e^{-i\delta})$$

$$=\frac{A^2(1-r^2)^2}{1-2r^2\cos\delta+r^4}=\frac{A^2(r^2-1)^2}{(r^2-1)^2+2r^2(1-\cos\delta)}=\frac{I_0}{1+\frac{4R\sin^2\frac{\delta}{2}}{(1-R)^2}}$$

$I_0=A^2$，$R=r^2$，光强反射率 = 振幅反射率^2（$R=r^2$）。 例数

由能量守恒，对透射光：$I_R=I_0-I_T=\frac{I_0}{1+\frac{(1-R)^2}{4R\sin^2\frac{\delta}{2}}}$

双光束干涉近似：$R\to 0$，$(1-R)\to 1$。

对透射光：$I_T\approx\frac{I_0}{1+4R\sin^2\frac{\delta}{2}}\approx I_0(1-4R\sin^2\frac{\delta}{2})$

$=I_0[1-2R(1-\cos\delta)]=I_0-2I_0R(1-\cos\delta)$。

$I_R=I_0-I_T=2I_0R(1-\cos\delta)=4I_0R\sin^2\frac{\delta}{2}$。

半峰宽：$\delta=2k\pi$ 对应峰值，半峰宽对应 $\delta=2k\pi\pm\frac{\varepsilon}{2}$，

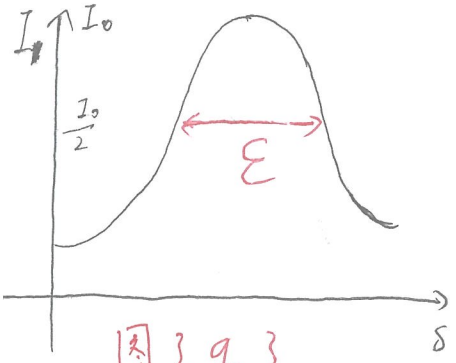


图 3.9.3

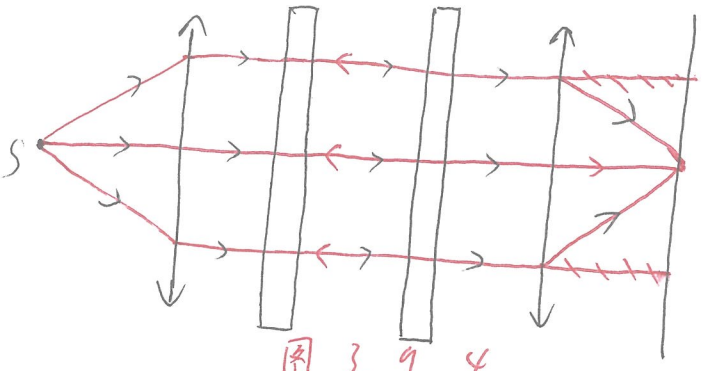


图 3.9.4

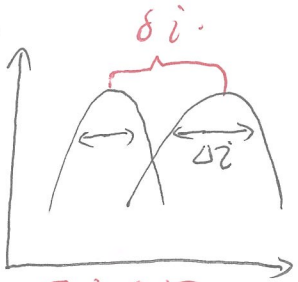


图 3.9.5

得 $\sin^2\frac{\delta}{2}=\sin^2(k\pi\pm\frac{\varepsilon}{2})=\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\approx(\frac{\varepsilon}{2})^2$，将其代入 $I_T=\frac{I_0}{1+\frac{4R\sin^2\frac{\delta}{2}}{(1-R)^2}}=\frac{I_0}{2}$，

得 $\frac{1}{2}=1/1+\frac{4R(\frac{\varepsilon}{2})^2}{(1-R)^2}$，$\varepsilon=\frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$。

F-P干涉仪如图 3.9.4 所示。

相位差：等倾干涉：$\delta=\frac{4\pi nh\cos i}{\lambda}$，反由 i 决定。

条纹宽度（视角）：取微分：$\Delta\delta=-\frac{4\pi nh\sin i}{\lambda}\Delta i$。

令 $\Delta\delta=\varepsilon=\frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$，得 $|\Delta i|=\frac{\lambda}{2\pi nh\sin i}\frac{1-R}{\sqrt{R}}$。

分光（波长）：固定入射角 i，取微分：$\Delta\delta=-\frac{4\pi nh\cos i}{\lambda^2}\Delta\lambda$，

代入 $\Delta\delta=\varepsilon=\frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$，得 $|\Delta\lambda|=\frac{\lambda^2}{2\pi nh\sin i}\frac{1-R}{\sqrt{R}}$。

亮纹 $\to 2nh\cos i=k\lambda$，代入上式，得 $|\Delta\lambda|=\frac{\lambda}{\pi k}\frac{1-R}{\sqrt{R}}$

k 大，λ 小，$\Delta\lambda$ 小，容易分光，即最终可分离出入与（入+$\Delta\lambda$）射光。

分光极限：如图 3.9.5，半峰宽不应有交集，

极限为 $\delta i=\Delta i$。已知 $\Delta i=\frac{\lambda}{2nh\sin i}\frac{1-R}{\sqrt{R}}$，求 $\delta i=?\delta\lambda$。

由相差 $\delta=2k\pi=\frac{4\pi nh\cos i}{\lambda}$ 得 $\cos i=\frac{k\lambda}{2nh}$，

取微分: $-\sin i\,\delta i=\frac{\lambda}{2nh}\delta\lambda$, $\delta i=\frac{\lambda}{2nh\sin i}\delta\lambda$.

由 $\delta i=\Delta i$, 得 $\Delta\lambda=\frac{\lambda\lambda}{2h}\frac{1-R}{R}$. 由瑞利判据导出了同样的结果.

色分辨本领: $\frac{\lambda}{\delta\lambda}=2h\frac{R}{1-R}$, R 小, 分辨本领越强.

3.10. 非单色光干涉与时间相干性.

两束光振动频率接近但不同: $I_1=I_0(1+\cos\delta_1)=I_0(1+\cos k_1\Delta L)$, $I_2=I_0(1+\cos k_2\Delta L)$,

$I=I_1+I_2=2I_0\left(1+\cos\frac{k_1-k_2}{2}\Delta L\cos\frac{k_1+k_2}{2}\Delta L\right)$. 利用到和差化积公式.

如图 3.10.1, 出现"拍现象", 一个被另一个调制.

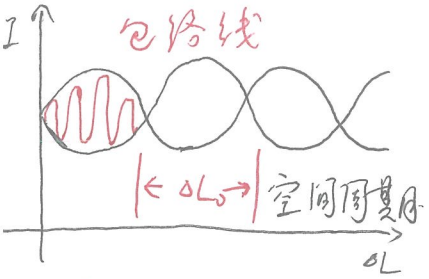


图 3.10.1

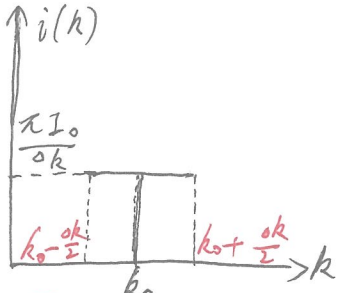


图 3.10.2

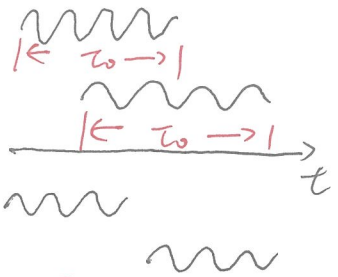


图 3.10.3

拍的周期是空间周期, 表现为振幅改变

幅值: $2I_0\cos\frac{k_1-k_2}{2}\Delta L$ 在改变.

周期: $\frac{k_1-k_2}{2}\Delta L_0=\pi$ (又称为拍长).

$\Delta L_0=\frac{2\pi}{k_1-k_2}=\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{\lambda_1}-\frac{2\pi}{\lambda_2}}=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\approx\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$.

衬比度也随时间变化: $\gamma=\left|\frac{I_M-I_m}{I_M+I_m}\right|=\left|\cos\frac{k_1-k_2}{2}\Delta L\right|$.

从离散光谱到连续光谱:

定义 $i(k)=\frac{dI}{dk}$ 叫光谱密度, 总光强为 $I_{总}=\int_0^\infty i(k)\,dk$.

$k\sim k+dk$, $dI=i(k)\,dk$. 干涉: 对 $dI(1+\cos k\Delta L)$ 求和,

多子数: $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty i(k)(1+\cos k\Delta L)\,dk$. (向上无穷). 类似连续型随机变量.

均匀分布: $I(\Delta L)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty i(k)(1+\cos k\Delta L)\,dk$

$=\frac{1}{\pi}\int_{k_0-\frac{\Delta k}{2}}^{k_0+\frac{\Delta k}{2}}\frac{\pi I_0}{\Delta k}(1+\cos k\Delta L)\,dk=\frac{I_0}{\Delta k}\left(k+\frac{1}{\Delta L}\sin k\Delta L\right)\Big|_{k_0-}^{k_0+}$

$=I_0\left(1+\frac{2\cos k_0\Delta L\sin\frac{\Delta k\Delta L}{2}}{\frac{\Delta k\Delta L}{2}}\right)=I_0\left(1+\frac{\sin\frac{\Delta k\Delta L}{2}}{\frac{\Delta k\Delta L}{2}}\cos k_0\Delta L\right)$.

衬比度: $\gamma=\sin\frac{\Delta k\Delta L}{2}\Big/\frac{\Delta k\Delta L}{2}=\mathrm{sinc}\frac{\Delta k\Delta L}{2}$.

其他分布: 转化为均匀分布.

时间相干性: 波列有限: ⑤ ∿∿∿ ∿∿∿ | 光源并非一直发光, 而是断续.

光程差与路程差: $\Delta L=\frac{\Delta L}{v}\le\tau_0$, $\Delta l\le c\tau_0$

四、光的衍射

§1. 衍射的一般理论

惠更斯原理 → 惠更斯-菲涅耳原理：

场点P的复振幅：

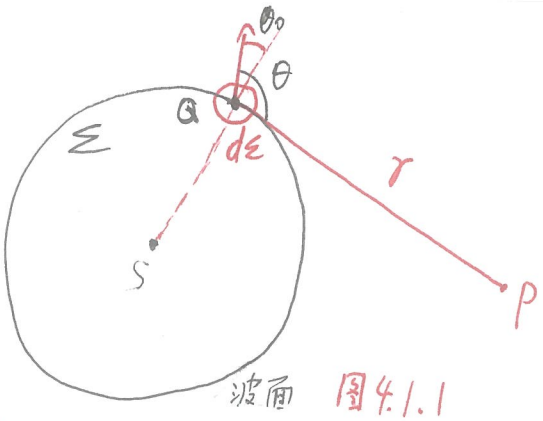


图 §1.1

Q的振动：$Ae^{i(\omega t+\varphi)}$

$$\tilde{U}(P)=K\oint_{\Sigma}\tilde{U}(Q)\,\underbrace{F(\theta_0,\theta)}_{\text{倾斜因子，与}\theta\text{有关}}\,\frac{e^{ikr}}{r}\,d\Sigma$$

$d\Sigma$ → 面元

$\frac{e^{ikr}}{r}$ → 球面波因子 → 球面波：$\frac{A}{r}e^{ikr}$

结论：$K=-\frac{i}{\lambda}$，$F(\theta_0,\theta)=\frac{1}{2}(\cos\theta_0+\cos\theta)$.

简化：S发出球面波，$\theta_0=0$，$F=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)$.

$$\tilde{U}(P)=-\frac{i}{\lambda}\oint_{\Sigma}\tilde{U}(Q)\frac{e^{ikr}}{r}(1+\cos\theta)\,d\Sigma$$

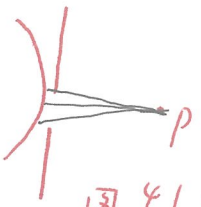


图 §1.2.

傍轴近似：积分域往往不是整个波面，而只是一小部分，如图§1.2. $\theta\approx 0$，$F(\theta_0,\theta)\approx 1$，$r\approx r_0$.

$$\tilde{U}(P)=-\frac{i}{\lambda}\oint_{\Sigma}\tilde{U}(Q)\frac{e^{ikr}}{r_0}d\Sigma=-\frac{i}{\lambda r_0}\oint_{\Sigma}\tilde{U}(Q)e^{ikr}d\Sigma.$$

注：傍轴条件，只近似分母，e指数保留.

巴比涅原理：对于互补屏/互补障碍物

由电场的可加性和曲面积分的可加性

$\Sigma_3=\Sigma_1+\Sigma_2$　　$\oint_{\Sigma_3}=\oint_{\Sigma_1}+\oint_{\Sigma_2}$

可得 $\tilde{U}_1(P)+\tilde{U}_2(P)=\tilde{U}_3(P)$

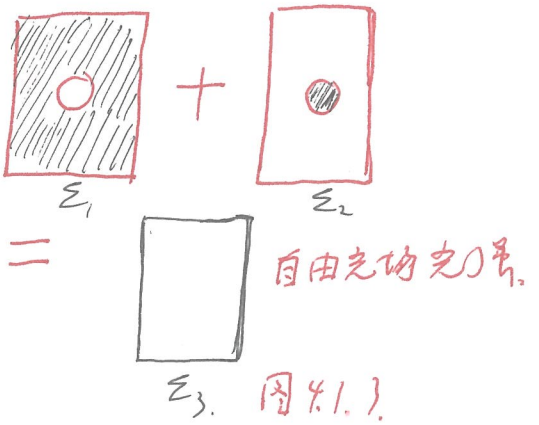


图 §1.3

两个互补屏单独产生的衍射场的复振幅之和等于没有衍射屏时的复振幅.

推论：自由光场下的黑暗部分，在两种衍射下光强(图样)相同.

$\tilde{U}_3(P)=0=\tilde{U}_1(P)+\tilde{U}_2(P)\Rightarrow\tilde{U}_1^2=\tilde{U}_2^2\Rightarrow I_1=I_2$.

则平行光照明时(无衍射)，自由光场聚焦于透镜的焦点，轴外自由光场为0，故2个互补屏在后焦面上产生的强度分布是完全相同的，有区别的仅是像点.

注：公式 $\tilde{U}_a+\tilde{U}_b=\tilde{U}_0$ 是矢量式，复振幅中的相位差因素有影响.

一衍射屏在某处的衍射强度是亮的，其互补屏在该处的衍射强度不一定是暗的.

§4.2. 菲涅耳衍射的两种分析方法（圆孔衍射、轴线上）

半波带法：积分 = 求和的极限，$\int_a^b f(x)dx \approx \sum f(\xi_i)\Delta x_i$.

特殊分割：将球面分割成环带，环带相邻边界到P点距离相差$\frac{\lambda}{2}$，即差半个波长，故名半波带.

$\oint d\tilde{U}(P) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{U}_i(P)$，$n=?$

有多少个半波带：直观来看，$n = \frac{r_{max} - r_{min}}{\lambda/2}$

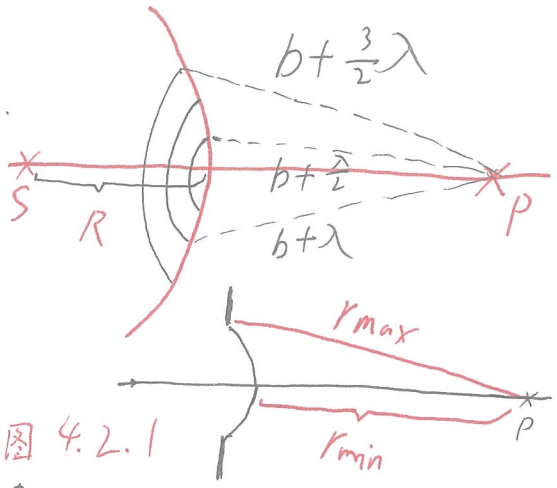


图 4.2.1

贡献：$\tilde{U}_1(P) = A_1 e^{i\varphi}$，$\tilde{U}_2(P) = A_2 e^{i(\varphi+\pi)}$

$\tilde{U}_3(P) = A_3 e^{i(\varphi+2\pi)}$ $\frac{\lambda}{2} \sim \pi$，$e^{i\pi} = -1$.

$\tilde{U}_2(P) = -A_2 e^{i\varphi}$，$\tilde{U}_3(P) = A_3 e^{i\varphi}$，$\cdots$ $\tilde{U}_n(P) = (-1)^{n-1} A_n e^{i\varphi}$.

$\tilde{U}(P) = e^{i\varphi} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} A_i \rightarrow A(P) = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \cdots + (-1)^{n-1} A_n$.

简化：$A_i \propto f(\theta_i) \rightarrow \frac{1}{2}(1+\cos\theta_i)$.

近似：不取 $A_1 = A_2 = A_3 = \cdots$，而用 $A_2 = \frac{A_1+A_3}{2}$，两侧的平均，

$A_4 = \frac{A_3+A_5}{2}$，$\cdots$，$A_{2k} = \frac{A_{2k-1}+A_{2k+1}}{2}$.

$$A(P) = \frac{A_1}{2} + \frac{A_1}{2} - \frac{A_1+A_3}{2} + \frac{A_3}{2} + \frac{A_3}{2} - \frac{A_3+A_5}{2} + \cdots + \frac{A_{k-1}}{2} + \frac{A_{k-1}}{2} - \frac{A_{2k-1}+A_{2k+1}}{2}$$

$$= \frac{A_1}{2} - \frac{A_{2k+1}}{2}$$，$n = 2k+1$ 为奇数，$\because A_1 \approx A_{2k+1}$（$A_1 > A_{2k+1}$），

$\therefore A(P) \approx 0$，衍射暗（几乎是黑的）.

反之，当 $n = 2k+1$ 为奇数时，$A(P) \approx \frac{A_1}{2} + \frac{A_n}{2}$，较亮.

一般，$A(P) \approx \frac{1}{2}(A_1 + (-1)^{n-1} A_n)$.

圆屏衍射：$A(P) = \sum_{i=n+1}^{\infty} (-1)^{i-1} A_i = \frac{1}{2}(-1)^{n-1} A_{n+1}$，

可见中心P总是亮的，即泊松亮斑.

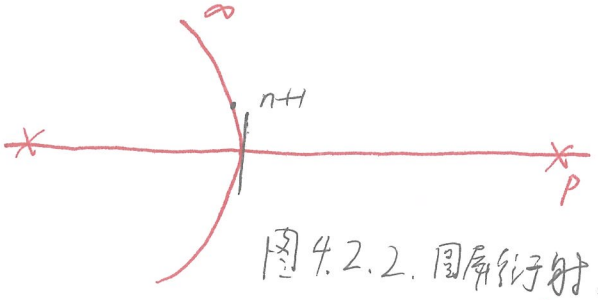


图 4.2.2. 圆屏衍射.

矢量图解法（自带相位信息）：

干涉光强 $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta$ 与余弦定理有关.

在以上半波带法的基础上，分析一个半波带：

将其分成 m 份，则相邻者到P点距离相差$\frac{\lambda}{2m}$，

对应相位差 $\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2m} = \frac{\pi}{m}$.（也可直接得到）

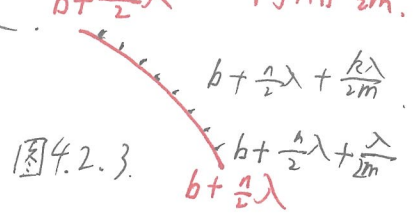


图 4.2.3.

一个半波带对应相位差元，可用半圆表示，而分成 m 份的半波带对应相差$\frac{\pi}{m}$，可在半圆中用分成 m 份的弧或弦表示.

自由传播：不停画半圆，有无数个，最终收缩到大圆圆心，得 $A(P) = \frac{1}{2}A_1$，$I = I_0$. 自由传播光强 $I_0 = A_0^2$ 为参考值 （图 4.3.4）

更重要的是计算非整数半波带：

露出第一个半波带的一半（图4.2.5）：$A=\frac{A_0}{2}$. $I=\frac{A_1^2}{2}=\frac{4A_0^2}{2}=2I_0$.

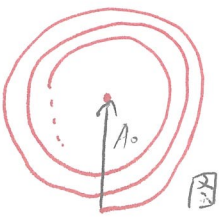


图4.2.4

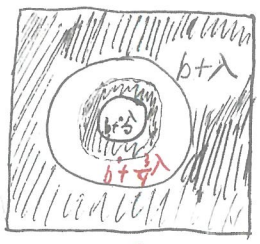


图4.2.6

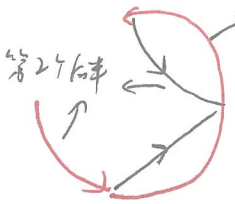


图4.2.7.

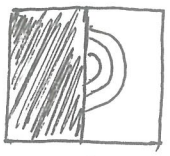


图4.2.8

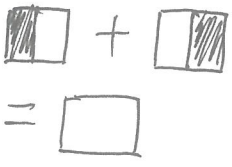


图4.2.9.



图4.2.5

露出第一个半波带的全部和第二个半波带的半部分（图4.2.6/7）：

计算结果同上，但形成过程不同.

露出/遮住一半（横向）（图4.2.8/9）：横向减少一半，振幅减半：

$A(P)=\frac{A_0}{2}$，$I(P)=\frac{I_0}{4}$. 还是注意光强不能直接叠加，要先算振幅.

另解：2个遮一半的光屏光强之和等于自由光场，而求和时要考虑干涉

$I+I+2I\cdot\cos 0=4I=I_0$，$\therefore I=\frac{I_0}{4}$.

露出第一个半波带的全部和第二个半波带的一半（横向）：

横向的减少不影响相位，只是振幅减小. $A(P)=A_0$，$I=I_0$.


图4.2.9.

图4.2.10.



4.3. 菲涅尔波带片

如果将圆孔看作半波带，则其中存在相消，据此可以构造出随频挑选的光学仪器，如图4.3.1的手.


图4.3.1.

如图4.3.2的手，$\cos\theta=\frac{R^2+(R+b)^2-(b+\frac{k\lambda}{2})^2}{2R(R+b)}=1-\frac{kb\lambda}{2R(R+b)}$，

用到了近似 $R,b\gg\lambda$.

$\rho_k=R\sin\theta$，其中 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}\approx\sqrt{\frac{kb\lambda}{R(R+b)}}$

得 $\rho_k=\sqrt{\frac{Rb}{R+b}k\lambda}$.

将 R、b 看成几何光学中的物距、像距.

ρ_k 决定了 R、b 的关系.

$$\rho_k=\sqrt{\frac{k\lambda}{\frac{1}{R}+\frac{1}{b}}}\Rightarrow\frac{1}{R}+\frac{1}{b}=\frac{k\lambda}{\rho_k^2}$$

$\because\rho_k\propto\sqrt{k}$，$\therefore$ 定义 $\rho_k^2=k\rho_1^2$，k 可以看作波带数.

$\therefore\frac{1}{R}+\frac{1}{b}=\frac{\lambda}{\rho_1^2}=\frac{1}{f}$. 类似凸透镜成像公式，但焦点不是光线的唯一通路；焦点也并不唯一，如 f、$\frac{f}{3}$、$\frac{f}{5}$…

自己看：$\rho_k=\sqrt{\frac{Rb}{R+b}k\lambda}=\sqrt{f\cdot k\lambda}=\sqrt{\frac{f}{3}\cdot 3k\lambda}=\sqrt{\frac{f}{5}\cdot 5k\lambda}=\cdots$

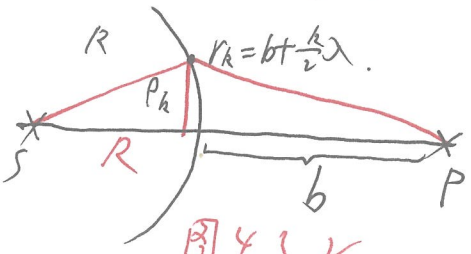


图4.3.2

将每个半波带再分成奇数份：1,2,3 → (1',2',3'),(4',5',6'),(7',8',9')...
两两相消，剩余3',6',9',...。
如果分成偶数份，则恰好相消，产生极小。

§4.4 夫朗禾费单缝衍射：

光源无限远，入射光为平行光。考察等倾的一组光线。
衍射 → 多光束干涉。

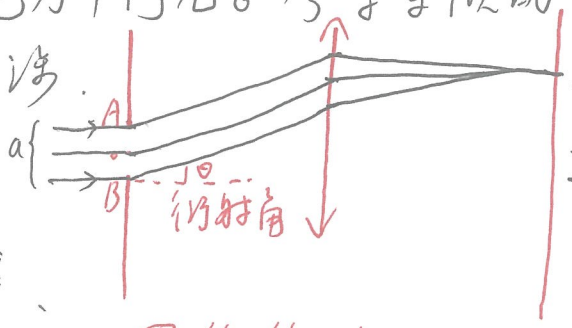


图 4.4.1

找光程差：

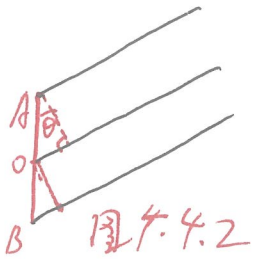
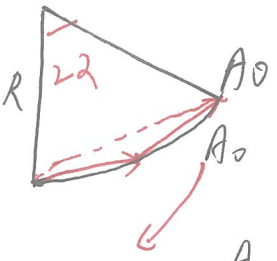


图 4.4.2.

BO与OA的长度：$\Delta = \frac{a}{2}$。
点O与点A的光程差：$\Delta L = \frac{a}{2}\sin\theta$。相位差：$\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta \equiv \alpha$。



利用矢量图解法：画小箭头 → 形成折线 → 形成圆弧。

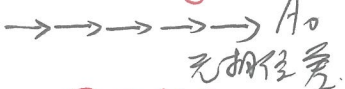


图 4.4.3.

AB间的相位差即2α。
$\overset{\frown}{AB}$：$R\cdot 2\alpha = A_0$。
$\overline{AB}$：$R\cdot 2\sin\alpha = A_\theta$。
$\Rightarrow A_\theta = A_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}$。$I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$。

分析极值、光强分布、半角宽。
$\alpha = 0$时，$\lim\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$。
极小：$\sin\alpha = 0$ 且 $\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha = k\pi$，$k \in N^*$。
极大：即$\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)_{max}$，求导：$\frac{\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}{\alpha^2} = 0$。
得$\alpha = \tan\alpha$，数值解：$\alpha = \pm 1.43\pi, \pm 2.46\pi, \pm 3.47\pi, \cdots$

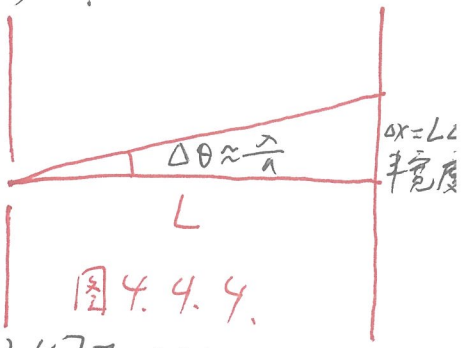


图 4.4.4.

又$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{\lambda\alpha}{\pi a} = \pm 1.43\frac{\lambda}{a}, \pm 2.46\frac{\lambda}{a}, \cdots$。
可以想见，九手的有光强都集中于零级亮纹(几何像点)。

半角宽：$\Delta\alpha = \pi$，求$\Delta\theta = ?$
$\Delta\theta \approx \Delta(\sin\theta) = \frac{\lambda}{\pi a}\Delta\alpha = \frac{\lambda}{a}$。
易知其他级次半角宽为$\frac{\lambda}{2a}$。

斜入射：入射角为θ_0，入射光线有附加光程差。
BS A：$\Delta L = \frac{a}{2}(\sin\theta - \sin\theta_0)$
BS O：$\Delta L = \frac{a}{2}(\sin\theta - \sin\theta_0)$，相位差：$\frac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0) \equiv \alpha$。

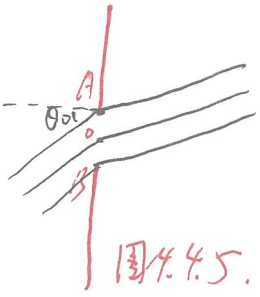


图 4.4.5.

$I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$。（形式不变）
I_0是光程差为0的点对应的光强。$\alpha = 0$，$\theta = \theta_0$。

半角宽：$\alpha=\frac{\pi}{\lambda}\Rightarrow \sin\theta-\sin\theta_0=\frac{\lambda}{a}$. $(\theta-\theta_0)$

不能直接近似，而需用微分近似：$\cos\theta_0\cdot\Delta\theta=\frac{\lambda}{a}\Rightarrow\Delta\theta=\frac{\lambda}{a\cos\theta_0}$.

或用和差化积：$2\cos\frac{\theta+\theta_0}{2}\cdot\sin\frac{\theta-\theta_0}{2}=\cos\theta_0(\theta-\theta_0)=\cos\theta_0\cdot\Delta\theta$.

增加介质，改变折射率：只需修改 α：

$\alpha=\frac{\pi a}{\lambda}(n_2\sin\theta-n_1\sin\theta_0)$. 零级：$n_2\sin\theta=n_1\sin\theta_0$（折射定律）.

§4.5. 积分法与矩孔衍射.

傍轴近似：$\theta\approx\theta_0\approx 0$，$F(\theta,\theta_0)=1$，$r\to r_0$，$\tilde{u}(\theta)$ 相同.

$\tilde{U}(P)=-\frac{i}{\lambda r_0}\tilde{u}(Q)\oint_\Sigma e^{ikr}d\Sigma=-\frac{i}{\lambda r_0}\tilde{u}(Q)e^{ikr_0}\oint_\Sigma e^{ik\vec{\Delta r}}d\Sigma$. ← 光程差.

曲面积分转化为定积分：$\tilde{U}(P)\propto\oint_\Sigma e^{ik\Delta r}d\Sigma\propto\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}e^{ik\Delta r}dx$.（单缝）

$$\tilde{U}(P)=C\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}e^{ikx\sin\theta}dx=C\cdot\frac{e^{i\frac{k}{2}a\sin\theta}-e^{-i\frac{k}{2}a\sin\theta}}{ik\sin\theta}$$

$$=C\cdot\frac{2i\sin(\frac{k}{2}a\sin\theta)}{ik\sin\theta}=C\cdot a\cdot\frac{\sin(\frac{k}{2}a\sin\theta)}{\frac{k}{2}a\sin\theta}=\tilde{u}_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

$\alpha=\frac{k}{2}a\sin\theta$.

$$I_\theta=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2.$$

矩孔（一维→二维）：

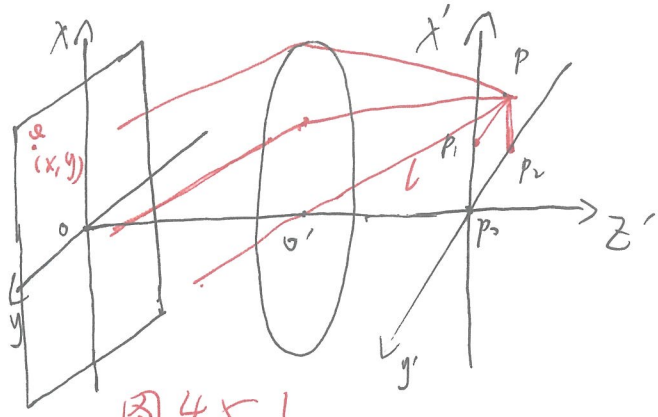


图 4.5.1

设 $\theta_1=\angle PO'P_2$，$\theta_2=\angle PO'P_1$：

光程差：作投影即 $\vec{OQ}\cdot\hat{r}$.

以 O' 为原点，$P(l\sin\theta_1,l\sin\theta_2,+l)$.

$\hat{r}=\frac{\vec{O'P}}{l}=(\sin\theta_1,\sin\theta_2,\frac{+l}{l})$

$\vec{OQ}\cdot\vec{r}=(x,y,0)\cdot\hat{r}=x\sin\theta_1+y\sin\theta_2$.

$\Delta l=-(x\sin\theta_1+y\sin\theta_2)$.

$$\tilde{U}(P)=C\oint_\Sigma e^{ik\Delta r}d\Sigma=C\iint_\Sigma e^{-ik(x\sin\theta_1+y\sin\theta_2)}dxdy$$

Σ 边界：$x\in[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]$，$y\in[-\frac{b}{2},\frac{b}{2}]$.

$$=C\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}e^{-ikx\sin\theta_1}\cdot e^{-iky\sin\theta_2}dxdy.$$

$$=C\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}e^{-ikx\sin\theta_1}dx\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}e^{-iky\sin\theta_2}dy=C\frac{2\sin(\frac{k}{2}a\sin\theta_1)}{k\sin\theta_1}\cdot\frac{2\sin(\frac{k}{2}b\sin\theta_2)}{k\sin\theta_2}$$

$$=abC\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\beta}.\quad \frac{k}{2}a\sin\theta_1=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta_1=\alpha,\ \beta=\frac{k}{2}b\sin\theta_2=\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta_2.$$

令 $\alpha=\beta=0$，得 $abC=\tilde{U}(0,0)$. $I(\theta_1,\theta_2)=I(0,0)\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$.

$b\to 0$, $\beta\to 0$, $\frac{\sin\beta}{\beta}\to 1$, $I\to I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$, 退化成单缝衍射.

4.6. 夫朗禾费圆孔衍射与分辨本领.

圆孔半径为 a, 定义 $x\equiv\frac{2\pi a\sin\theta}{\lambda}$, 得 $I_\theta=I_0\left(\frac{2J_1(x)}{x}\right)^2$,

$J_1(x)$ 为一阶贝塞尔函数.

角半径: $2\pi a\sin\theta/\lambda\approx\frac{2\pi}{\lambda}a\Delta\theta=1.22\pi$.

$\Delta\theta=0.61\frac{\lambda}{a}=1.22\frac{\lambda}{D}$.



瑞利判据: $\delta\theta=\Delta\theta$. $\delta\theta\geq\Delta\theta=1.22\frac{\lambda}{D}$. $\delta\theta=\frac{d}{L}$.

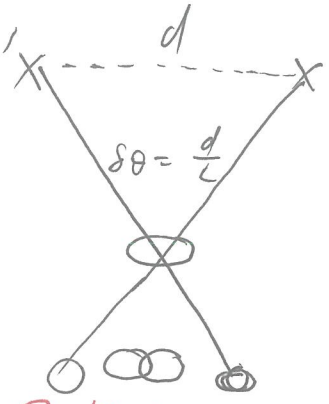


图 4.6.1

4.7. 夫朗禾费多缝衍射. a: 缝宽, d: 周期.

每个缝的振幅: $a_\theta=a_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}$, $\alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$

相邻两缝对应点的相差:

$\frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda}\equiv\delta=2\beta$. $\beta=\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$

圆心角: $N\delta=2N\beta$

在大小等腰△中, $2R\sin\beta=a_\theta$,

$2R\sin N\beta=A_\theta$, 得 $A_\theta=a_\theta\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}=a_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}$.

$I_\theta=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$, 对比矩孔: $I_\theta=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$.

衍射因子 干涉因子. 衍射因子.

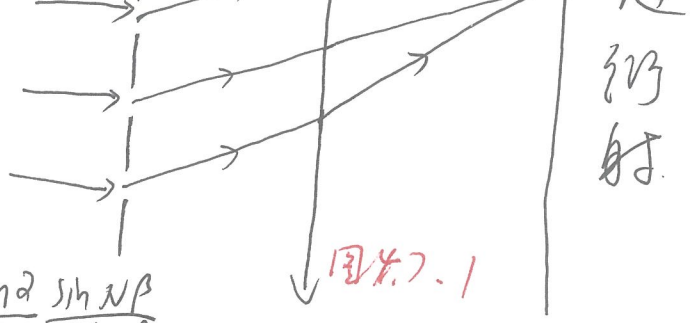


图 4.7.1



图 4.7.2.

$N=2$, $\frac{\sin 2\beta}{\sin\beta}=\cos\beta$.

$N>2$, $\beta=0$, $\lim_{\beta\to 0}\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}=N$. $\beta=k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

极小: $N\beta=m\pi$, $\beta=\frac{m}{N}\pi$. 又 $\beta\neq k\pi$, $\therefore\beta=(k+\frac{m}{N})\pi$.

2个相邻主极大间有 $(N-1)$ 个极小, 对应 $(N-2)$ 个次极大.

角宽: $\beta=\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}=k\pi$, $\sin\theta=k\frac{\lambda}{d}$.

$\beta=\frac{m}{N}\pi$, $\Delta\beta=\frac{1}{N}\pi$.

$\Delta\beta=\Delta\left(\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}\right)\approx\frac{\pi d}{\lambda}\cos\theta\Delta\theta$.

$\therefore\Delta\theta=\frac{\lambda}{Nd\cos\theta}$. $\theta\uparrow$, $\cos\theta\downarrow$, $\Delta\theta\uparrow$.

$N\uparrow$, $\Delta\theta\downarrow$. 总之, $\theta\downarrow$, $N\uparrow$, $\Delta\theta\downarrow$, 条纹越细.

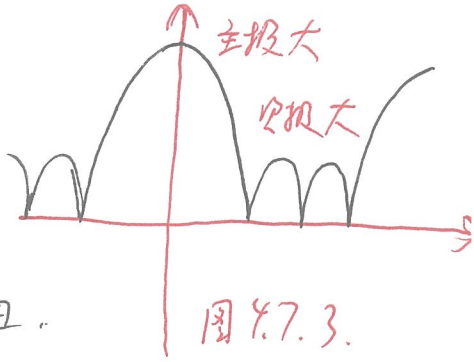


图 4.7.3.

以上只分析了 $\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)$, 即干涉因子.

对于干涉衍射综合: 结合之前学习的干涉衍射图像.

$\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^2$ 将成为 $\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$ 的包络线.

缺级：$\beta=k\pi$，对应干涉的极大，但同时 $\alpha=k'\pi$，对应衍射项的极小值，导致缺失级次.

4.7' 多缝衍射习题

常见题型：
- 缝宽不一致、间距不一致 → 矢量图解 → 化为缝宽一致，间距不一致，用正交分解.
- 全入射、有介质 → 修改相差

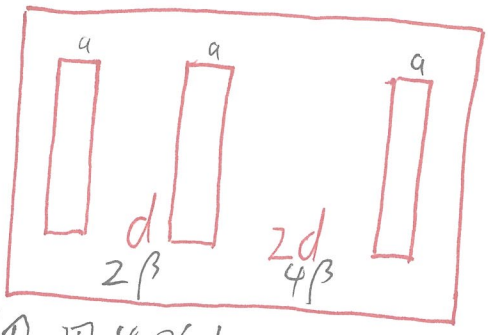


图 4.7'.1

e.g.1. 定义 $\beta=\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$，$\alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$.

$A_x=a_0(1+\cos 2\beta+\cos 6\beta)$. $A_y=a_0(\sin 2\beta+\sin 6\beta)$

$A_x^2+A_y^2=a_0^2[1+1+1+2\sin 2\beta\sin 6\beta+2\cos 2\beta\cos 6\beta$

$+2\cos 2\beta+2\cos 6\beta]=a_0^2[3+2(\cos 2\beta+\cos 4\beta+\cos 6\beta)]$.

又 $a_0=A_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}$，$\therefore I_\theta=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2[3+2(\cos 2\beta+\cos 4\beta+\cos 6\beta)]$.

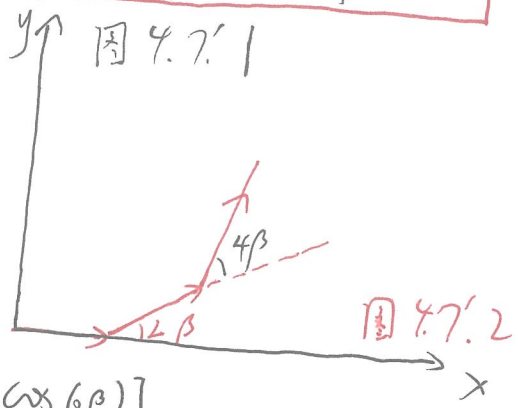


图 4.7'.2

4.8. 光栅及其特性.

光栅公式：$d\sin\theta=k\lambda$.

来自于主极大：$\beta=\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}=k\pi$.

色散本领：体现在衍射角的分开程度.

角色散本领：$D_\theta=\frac{\delta\theta}{\delta\lambda}$. 同一主极大，入射光波长改变对应衍射角改变.

$d\sin\theta=k\lambda$. 两边取微分：$d\cos\theta\,\delta\theta=k\delta\lambda$.

得 $D_\theta=\frac{\delta\theta}{\delta\lambda}=\frac{k}{d\cos\theta}$. $k=0$ 时 $D_\theta=0$，即无法分光.

衍射角：$\sin\theta=k\frac{\lambda}{d}$. $\lambda\uparrow$，$\theta\uparrow$，故红光在蓝光外侧.

线色散本领：$D_l=\frac{\delta x}{\delta\lambda}$. $\lambda\to x$；$\lambda+\delta\lambda\to x+\delta x$.

$\delta x=f\delta\theta$，$\frac{\delta x}{\delta\lambda}=f\frac{\delta\theta}{\delta\lambda}=fD_\theta$.

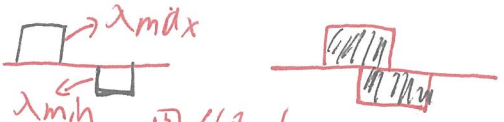


图 4.8.1

衍主缝判据：$\delta\theta\geq\Delta\theta$.

$\delta\theta=\frac{k}{d\cos\theta}\delta\lambda$，$\Delta\theta=\frac{\lambda}{Nd\cos\theta}$，得 $\delta\lambda\geq\frac{\lambda}{kN}$.

色分辨本领：$R=\frac{\lambda}{\delta\lambda}=kN$，可分辨波长差越小，本领越强.

量程：$d\sin\theta=k\lambda$ 中，$\sin\theta<1$，$\therefore k\lambda=d\sin\theta<d$. $\lambda<\frac{d}{k}$.

自由光谱范围：连续光谱，不同级次可能重叠. $\lambda\sim\lambda+\delta\lambda$ 连续分布.

考察 k 级与 $k+1$ 级，$d\sin\theta_k=k\lambda_{max}$ $d\sin\theta_{k+1}=(k+1)\lambda_{min}$，

$\theta_{k+1} > \theta_k$，即 $(k+1)\lambda_{min} > k\lambda_{max}$，$\lambda_{min} > k(\lambda_{max} - \lambda_{min}) = k\Delta\lambda$．$\Delta\lambda < \frac{\lambda}{k}$．

e.g.1. 光栅总长度 6mm，$\lambda = 0.6\mu m$ 的光照射该光栅，某级主极大 $\sin\theta =$ 下一级 $\sin\theta = 0.2$，第3级出现首次缺级．求：

(1) 光栅常数 d 和缝宽 a 的关系．

(2) 能够看到的有哪几级？

(3) 求能够看到的最大一级主极大的角宽 $\Delta\theta$．

(1) 缺级：$\beta = 3\lambda$，$\alpha = \lambda$，$\sin\theta = \frac{3\lambda}{d} = \frac{\lambda}{a}$，$a = \frac{d}{3}$．

(2) $\lambda < \frac{d}{2}$，$k < \frac{d}{\lambda}$．$\begin{cases} 0.1d = m\lambda \\ 0.2d = (m+1)\lambda \end{cases}$，$\lambda = 0.1d$．$d = 10\lambda = 6\mu m$．

$k < \frac{d}{\lambda} = 10$，即 $k \le 9$．考察缺级：

$\beta = 3\lambda, \alpha = \lambda$；$\beta = 6\lambda, \alpha = 2\lambda$；$\beta = 9\lambda, \alpha = 3\lambda$，缺3、6、9级．

故能看到 $0, \pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm7, \pm8$ 级．

(3) $N = \frac{l}{a} = 10000$．$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta}$，$d\sin\theta = 8\lambda$，$\sin\theta = \frac{8\lambda}{d} = 0.8$，

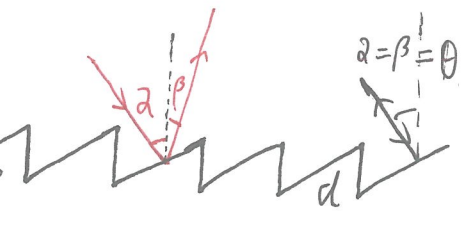
$\therefore \Delta\theta = \frac{0.6}{6000 \times \sqrt{1 - \sin^2\theta}}$ rad．（其实无需计算 N，$Nd = l$）

§4.9. 闪耀光栅与晶体光栅．

普通光栅零级条纹光强最强却无法分光，为此想要使干涉衍射主极强分离．

入射光线光程差：$d\sin\alpha$　出射光程差：$d\sin\beta$

$\Delta L = d(\sin\alpha + \sin\beta)$．$\alpha > 0$ $\begin{cases} \alpha$ 与 β 在同侧，$\beta > 0$； $\\ \alpha$ 与 β 在异侧，$\beta < 0$．



闪耀光栅公式：$d(\sin\alpha + \sin\beta) = k\lambda$．

$\alpha = \beta = \theta_b$：$2d\sin\theta_b = k\lambda$．$k$ 级闪耀波长 $\begin{cases} \text{衍射因子极大} \\ \text{干涉因子次级} \end{cases}$

将衍射因子和干涉因子的零级分开，达到效果不同：

衍射：垂直斜面；干涉：垂直底面．

晶体光栅：$\Delta L = 2d\sin\theta = k\lambda$．布拉格公式．测量 d．

五、光的偏振

5.1. 二维振动的分析

$\begin{cases} x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$ 是同频率，有相位差的二维振动的参数方程，

要得到轨迹方程需消去 t：

$\begin{cases} \omega t = \arccos\frac{x}{A_1} - \varphi_1 \\ \omega t = \arccos\frac{y}{A_2} - \varphi_2 \end{cases}$

$\arccos\frac{x}{A_1} - \arccos\frac{y}{A_2} = \varphi_1 - \varphi_2$，两边取 $\cos$，

$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\varphi_1-\varphi_2) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2} + \sqrt{1-(\frac{x}{A_1})^2}\sqrt{1-(\frac{y}{A_2})^2} = \cos(\varphi_1-\varphi_2)$.

$\rightarrow \frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1) = \sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$.

相位差：$\varphi_2 - \varphi_1 \equiv \delta$.

$\delta = 0$：$\frac{x}{A_1} \pm \frac{y}{A_2} = 0$，是位于二四/一三象限的直线。

$\delta = \frac{\pi}{2}/\frac{3}{2}\pi$：正椭圆。注：$A_1 = A_2$ 时为圆（包括下面的斜椭圆）。

其他：斜椭圆。是一个二次型。

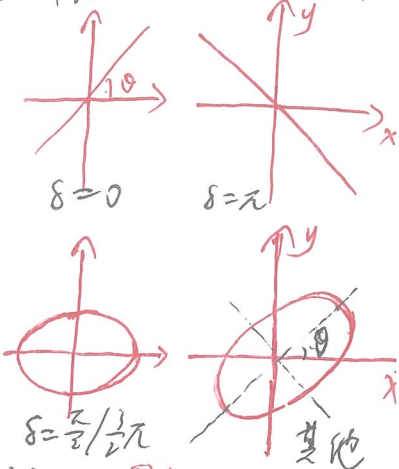


图 5.1.1

一点点推导（详细推导计算过于复杂，只写思路）：

$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos\delta = (x,y)\begin{pmatrix} \frac{1}{A_1^2} & \frac{\cos\delta}{A_1A_2} \\ \frac{\cos\delta}{A_1A_2} & \frac{1}{A_2^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{x}^TA\vec{x} = \sin^2\delta$.

$Q(\vec{x}) = \vec{x}^TA\vec{x}$ 是一个二次型，A 是实矩阵。

设 $\vec{x} = P\vec{y}$ / $\vec{y} = P^{-1}\vec{x}$，则 $Q(\vec{x}) = Q(P\vec{y}) = \vec{y}^TP^TAP\vec{y} = \vec{y}^T(P^TAP)\vec{y} = \vec{y}^TD\vec{y}$，

有定理保证存在正交矩阵使得 P^TAP 是对角阵 D.

作法是求 A 的本征值 λ_1, λ_2 和本征向量 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$，则 $P = [\vec{v}_1, \vec{v}_2]$.

对于 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$，本征值满足 $\det\begin{pmatrix} a-\lambda & c \\ c & b-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(b-\lambda) - c^2 = 0$.

$\rightarrow \lambda^2 - (a+b)\lambda + (ab-c^2) = 0$. $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}[(a+b) \pm \sqrt{(a-b)^2+4c^2}]$.（$\lambda$ 的倒数是长短半轴长）.

接下来求解 $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ 可得本征向量 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$，正交矩阵 $P = [\vec{v}_1, \vec{v}_2]$，

对角化的二次型（标准型）$Q(P\vec{y}) = \vec{y}^TD\vec{y}$，$D = P^TAP$.

另：设椭圆主轴为 x', y'，则 x'-y' 相对 x-y 旋转了 θ 角，

可知 $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是 "$'$" $\rightarrow$ x-y 的旋转矩阵，即 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$，

将 $\begin{cases} x = \cos\theta x' - \sin\theta y' \\ y = \sin\theta x' - \cos\theta y' \end{cases}$ 代回原方程，消去交叉项，得 $\tan 2\theta = \frac{2A_1A_2\cos\delta}{A_1^2 - A_2^2}$.

补：也可计算 P^TAP，令其非对角元 $= 0$，可得 $\tan 2\theta = \frac{2c}{a-b}$.

左右旋：

对于正（斜）圆的右旋：分析右顶点，即 x 为正的最大值，$x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) = A_1$，

相位 $\omega t + \varphi_1 = 0$. 对右旋，有向下运动，即从 x 向下减小，

相位 $\omega t + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$，则相位差 $\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$.

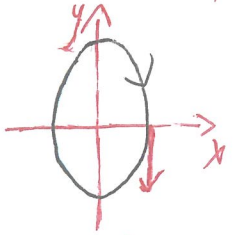
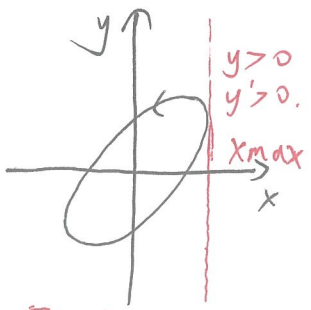


图 5.1.2.

对于斜椭圆的右旋：如图 5.1.3，分析 x 为正的最大值，也即右切点，满足相位 $\delta_1 = \omega t + \varphi_1 = 0$.（设 $y > 0$）



此时y为正值且y'仍继续增大，即$y>0$且$y'>0$，如图5.1.4.

在$[0,2\pi]$区间内可得$\delta\in(\frac{\pi}{2},2\pi)$.

右旋只需取为$y>0$且$y'<0$.

$y<0$者同样分析.

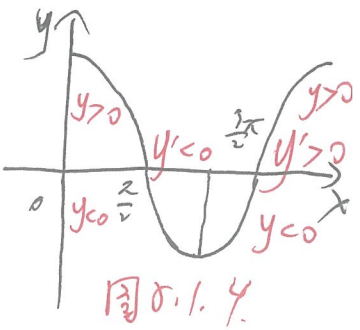
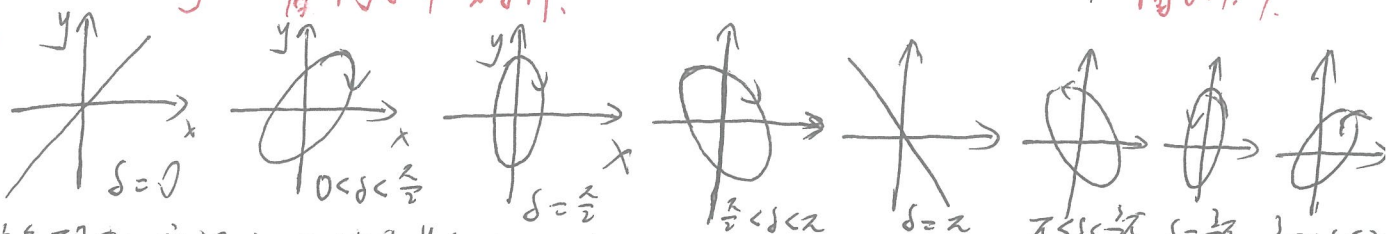


图5.1.4

图5.1.3.

总结：

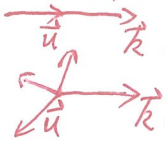


注：左右旋判断实际上只涉及y'，故可善于取$[\cos\delta]'=-\sin\delta$，$\sin\delta>0$，右旋，$\sin\delta<0$，左旋

5.2、光的偏振态与光学仪器偏振片.

纵波：$\vec{v}\parallel\vec{x}$，$\vec{v}$是振动方向.

横波：$\vec{v}\perp\vec{x}$，$\vec{x}$是振动传播方向.



左如弹簧，右如绳子.

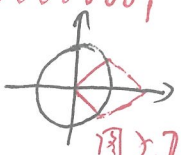




图5.2.1

(电场)五种偏振态：$\begin{cases}E_x=A_1\cos\omega t\\E_y=A_2\sin\omega t\end{cases}$

① 线偏振光：$\delta=0/\pi$

② 圆偏振光：$\delta=\pm\frac{\pi}{2}(\frac{3}{2}\pi)$，可被投影成两束圆偏振光：$\begin{cases}E_x=A\cos\omega t\\E_y=A\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})\end{cases}+\begin{cases}E_x=A\cos\omega t\\E_y=A\cos(\omega t-\frac{\pi}{2})\end{cases}=\begin{cases}E_x=2A\cos\omega t\\E_y=0\end{cases}$

上述计算中竖直分量相互抵消，几何上如图5.1.5.合成矢量总平行于x轴.③椭圆偏振光

④自然光(非偏振光)：各个方向都有振动，且无区别，各向同性、与圆偏振光有区别.

⑤部分偏振光：……，但各向异性，不对称，与椭圆偏振光有区别.

小注(规定)：本笔记以右迎面而来定义左旋右旋，右旋转方向与右拇指方向成右手系.

偏振片：分为起偏器和检偏器，分别能产生和检验全线偏振光。

除透振方向，其余方向均会吸收发生消光。

透过后的光强变化：

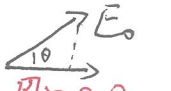


图5.2.2

线偏振光：马吕斯定律：$E=E_0\cos\theta$，θ是振动方向与透振方向的夹角 $I=I_0\cos^2\theta$

圆偏振光：和自然光结论相同，均为$I=\frac{1}{2}I_0$.



图5.2.3

自然光：取角度微元，$dI_0=\frac{I_0}{2\pi}d\theta$，是原光强$I_0$在单位角度区中的分布(密度)、$dI=dI_0\cos^2\theta$、$I=\int_0^{2\pi}dI=\frac{I_0}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{I_0}{2}$为一常数.

椭圆偏振光和部分偏振光结论(现象)相同，不能分辨.

转动偏振片光强会变，但不会出现消光.

偏振度(表征对比度)：$P=\frac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}}$，线1，圆/自然0，椭圆/部分：$0<P<1$.

5.3、双折射

现象：正常的光(ordinary，o光)，按照传统几何光学折射定律应当只有一束出射光.但还会出现一束非常光(extraordinary，e光)，似乎不满足折射定律(其实是其对应的折射率与o光不同.

即 $n_e \neq n_o$，使得e光自然不合o光的折射定律）。

光轴：一个特殊方向，光沿此方向入射，o、e光无区别，无法区分（包括相速度）

主平面：入射光+光轴构成的平面。有结论：o光矢量：$\vec{E}_o \perp$ 主平面，$\vec{E}_e \perp$ 主平面

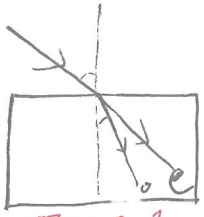


图5.3.1

光所"感受"到的折射率是电场振动方向对应的折射率。

如图5.3.3，o光垂直主平面，也即 $D \perp z$，$D \perp$ z（光轴），落在xy面内，感受到的折射率为一定值，各向同性。

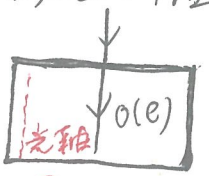


图5.3.2

如图5.3.4，o光的 $\vec{D} \perp z$，且 $\vec{D} \perp \vec{e}$，随意分布在xy面内，无区别。

一般的，xy面内折射率为 n_1，沿z向有分布 $n_2 = n_2(z)$ 或 $n_2(y)$。

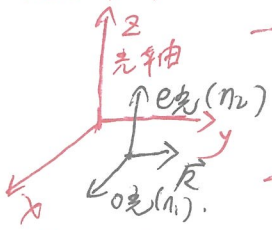


图5.3.3

波速：$V_o = \frac{c}{n_1}$，$V_e = \frac{c}{n_2}$。

折射率椭球：$\frac{x^2+y^2}{n_1^2} + \frac{z^2}{n_2^2} = 1$。



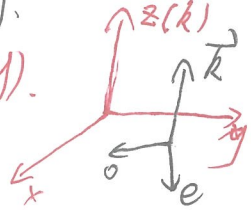


图5.3.4

e光折射率是e光在其上的椭线段的长度，故异性。

两个主折射率：$n_1 = n_x = n_y = n_o$；$n_2 = n_z = n_e$。

正（负）晶体：正晶体 $n_e < n_o$，$V_e > V_o$，如图5.3.5；负晶体 ~~如图5.3.6~~



图5.3.5

惠更斯原理作图：对于一般晶体，由光方向之义为"连接次波源与切点"。

o光一定落在xy面内，无论其沿哪个方向传播，其感受到的折射率为 $n_1 = n_o$。

e光只需平行主平面，不局限于xy面内，几乎可沿任何方向传播，不同方向感受到的折射率不同，波前为一椭球面，与o光球面相切在光轴方向，即连接两切点平行光轴。因为沿光轴方向 $n_o = n_e$，$V_o = V_e$。

e.g.1. 沿光轴、正入射：波前一致，方向、速度均相同。

e.g.2. 垂光轴、正入射：波前平行，方向相同，速度不同。

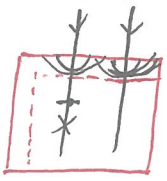


图5.3.5

e.g.3. 垂光轴、斜入射：椭球亦截录圆。

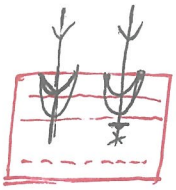


图5.3.6

e.g.4. 与轴共面、斜入射：椭圆与圆相切与光轴方向。

更一般的情况，如光轴既不平行亦不垂直入射面，则e光可能不在入射面。

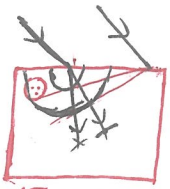


图5.3.7

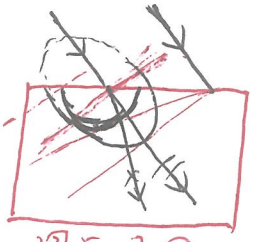


图5.3.8

补注：一般左乘认为 $\vec{S}$ 是传播方向，对均匀介质，$\vec{k} // \vec{S}$。

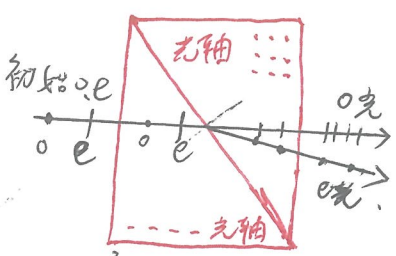
5.4. 晶体光学器件

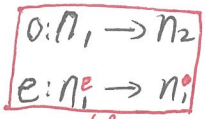
双折射之用处：{分离偏振光（棱镜）；改变偏振态（波晶片）}

Rochon（洛匈、罗雄）棱镜，图5.4.1

Wollaston（沃拉斯顿）棱镜，图5.4.2

Nicol（尼科尔）棱镜，图5.4.3





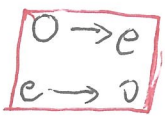


图5.4.1

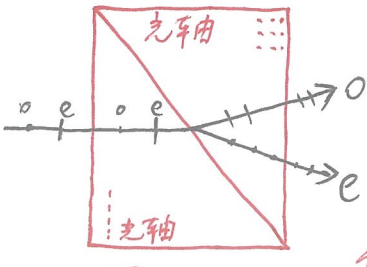
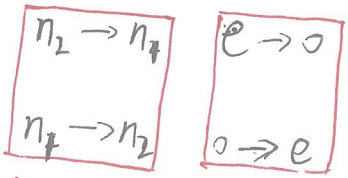
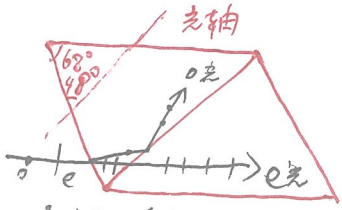


图 5.4.2



偏折方向相反.



双折射 ($n_e < n < n_o$)

图 5.4.3

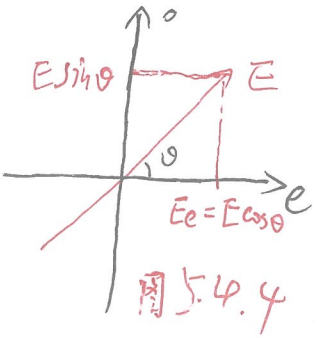


图 5.4.4

光的偏振态 (o、e光强): 建立 o-e 坐标系.

线偏振: 振幅分解, 平方得光强: $I_e = I\cos^2\theta$, $I_o = I\sin^2\theta$. 类马吕斯定律.

圆偏振/自然光: $I_e = I_o = \frac{1}{2}I$.

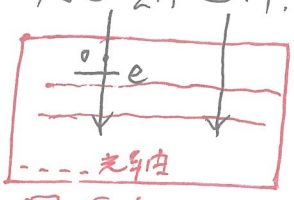


图 5.4.5.

波(晶)片: 光轴平行界面, oe光方向相同、波速不同 ($n_o \neq n_e$)

光程差: $\Delta L = (n_o - n_e)d$, 相位差: $\delta = k_0 \Delta L = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_o - n_e)d$.

总光程差: $\Delta\varphi = \delta_0 + \delta$, $\delta = 2k\pi$, 全波片; $\delta = (2k+1)\pi$, 半波片; $\delta = (k \pm \frac{1}{2})\pi$, 4分之1波片.

波晶片对不同偏振光的影响: (1) 全波片, $\delta = 2k\pi$, 几乎无影响.

(1) $\frac{1}{4}$ 波片, $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$.

线偏振: $\Delta\varphi = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$, 将变为 (正椭) 圆, 当且仅当 $A_o = A_e$ ($\theta = 45°$) 时变为圆偏振.

圆偏振: 变为 线偏振光.

椭圆偏: 正椭圆: $\delta_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, 将变成线偏光/斜椭圆: δ_0 一般, $\Delta\varphi = \delta_0 + k\pi + \frac{\pi}{2}$, 仍是斜椭圆, 只是主轴发生了变换.

自然光: 其具有旋转对称性, 可看成许多线偏光的集合. 透过波片后, 变为许多线偏/圆偏和椭圆偏的集合, 仍然各向同性, 仍是自然光.

(2) 4分之2波片, $\delta = \pm\pi$, 主要起反向作用.

线偏振/斜椭圆: 长轴关于y轴作对称 (变象限), 斜椭旋转反向.

圆偏振/正椭圆偏: 左右旋反向.

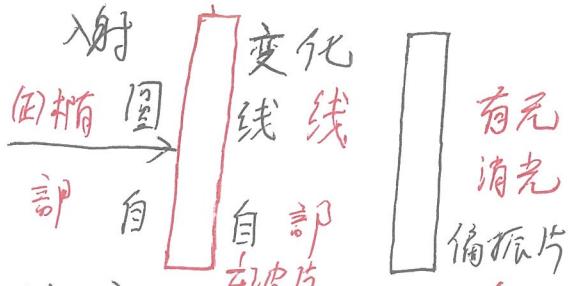


图 5.4.6.

分辨圆偏振和自然光或椭圆偏和部分偏振:

通过转动 波片使得椭圆在新坐标系下成为正椭圆. 如此, 正椭圆和圆偏光通过 4分之1 波片都会变成线偏光, 再通过偏振片 (检偏器) 会产生 (完全) 消光现象; 而部分偏振光和自然光通过波片后性质不变, 再通过偏振片不会发生完全消光 (至多发生部分消光).

5.5. 复杂偏振现象.

例 5.9.1. 自然光 (光强为 I_0) 通过 N 个偏振片, 相邻2个偏振片夹角为 30°, 求出射光强.

$I_1 = \frac{1}{2}I_0$ (自然光 → 线偏光), $I_2 = I_1\cos^2 30° = \frac{3}{4}I_1$, $I_{n+1} = \frac{3}{4}I_n$ ($n \geq 1$),

$\therefore I_N = \left(\frac{3}{4}\right)^{N-1} I_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^{N-1}\frac{I_0}{2}$.

e.g.2.（偏振光干涉）在两偏振片 P_1 和 P_2 间插入一波片，互成角度。

我们以波片光轴方向为准，沿光轴方向为 e 轴，垂直光轴方向为 o 轴。（如图5.5.1）

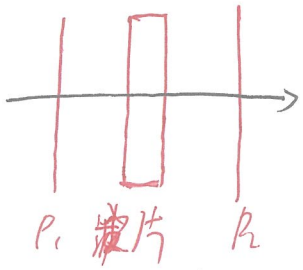


图 5.5.1

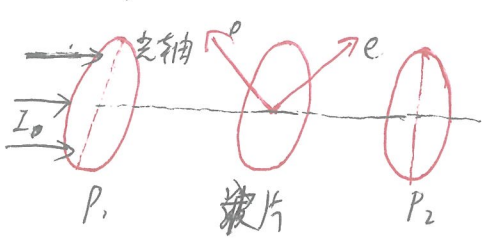
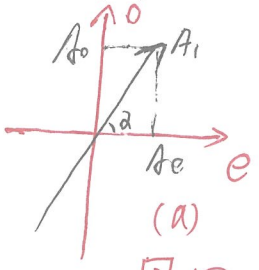


图 5.5.2



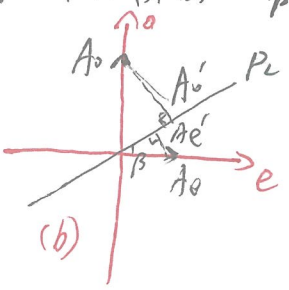


图 5.5.3

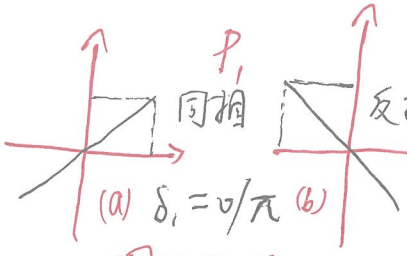


图 5.5.4

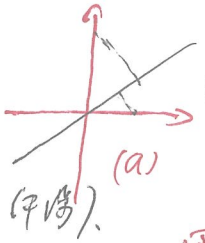
P_1: $A_e = A_1\cos\alpha$, $A_0 = A_1\sin\alpha$

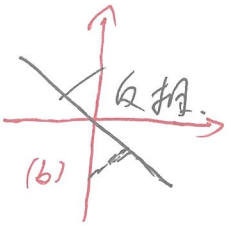
P_2: $A_0' = A_0\sin\beta = A_1\sin\alpha\sin\beta$

$A_e' = A_e\cos\beta = A_1\cos\alpha\cos\beta$.

$I = A_0'^2 + A_e'^2 + 2A_0'A_e'\cos\delta$ (干涉).

δ 是 A_0' 与 A_e' 的相位差





$\delta_2 = 0/\pi$

图 5.5.5

$\delta = \delta_1 + \Delta + \delta_2$，因每经过一个光学仪器都会有相差。 $\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d$.（介质双折射相差）

δ_1：经过 P_1，作一次投影，如图5.5.4(a)/(b)两种情形，可能产生0或π的相差。

δ_2：经过 P_2，再作一次投影，如图5.5.5(a)/(b)，$\delta = 0/\pi$。

$\delta = 0/\pi + \Delta + 0/\pi = \Delta + 0/\pi/2\pi = 0/\Delta + \pi$.

$I = A_0'^2 + A_e'^2 \pm 2A_0'A_e'\cos\Delta = I_1(\cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta \pm 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta\cos\Delta)$.

补注：色偏振：偏振光的干涉。非单色光通过波晶片会产生不同相位差。

六.6. 物质对偏振态的其他影响。（电磁场导致双折射旋光）

$n_o - n_e = \beta E^2$，β：克尔常量。

克尔效应 → 平方电光效应

泡克耳斯效应 → 线性电光效应。

电场导致物质各向异性

$n_o - n_e = CE$. KDP/ADP晶体。

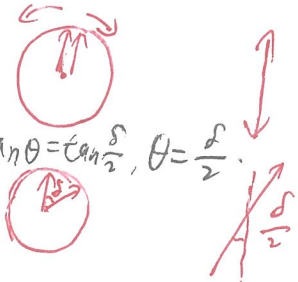
旋光：菲涅尔解释：一个线偏可分解为2个圆偏，左旋L和右旋R。

石英对两种圆偏光的折射率不同，$n_L \neq n_R$. $\delta = \varphi_R - \varphi_L = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_R - n_L)d$.

线偏 $\begin{cases} E_x = 2A\cos\omega t \\ E_y = 0 \end{cases} = 右\begin{cases} E_x = A\cos\omega t \\ E_y = -A\sin\omega t \end{cases} + 左\begin{cases} E_x = A\cos\omega t \\ E_y = A\sin\omega t \end{cases}$ 经过旋光晶体

$\begin{cases} E_x = A\cos(\omega t + \delta) \\ E_y = -A\sin(\omega t + \delta) \end{cases} + 左\begin{cases} E_x = A\cos\omega t \\ E_y = A\sin\omega t \end{cases} = 线\begin{cases} E_x = 2A\cos(\omega t + \frac{\delta}{2})\cos\frac{\delta}{2} \\ E_y = 2A\cos(\omega t + \frac{\delta}{2})\sin\frac{\delta}{2} \end{cases}$

$\tan\theta = \tan\frac{\delta}{2}$, $\theta = \frac{\delta}{2}$.



旋数旋光（法拉第旋转）：$\theta = VdB$，V是Verdet（费尔德）常数。

经典解释：原子中的电子由一弹性力维系。在线偏光的电磁场作用下，电子将在光场W作受迫线性振动可被分解为左右旋圆周运动。加入磁场B后，左右旋电子将分别受到指向和背离圆心的洛伦兹力，使其角速度增加和减，即 $W_{L/R} = W \pm \Delta W$，精加推算可得 $\Delta W = \frac{eB}{2m}$。色散曲线 $n_{L/R}(W)$ 不同，左右旋偏振光的传播速度不同，$V_L \neq V_R$，造成偏振面的偏转。

精加推算：$f = \frac{mv^2}{r} = evB$, $v = \frac{eBr}{m}$ $W = \frac{eB}{m}$ $\Delta W = \frac{eB}{2m}$

详细推算：(扯上中心力场微扰与轨道稳定性)

极坐标下质点的运动微分方程：$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=F_r=F(r)$, $m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})=F_\theta=0$.

第2式为0对应守恒量，注意到 $r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=\frac{1}{r}(r^2\ddot{\theta}+2r\dot{r}\dot{\theta})=\frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt}$,

$\therefore \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt}=0$, $r^2\dot{\theta}=h=\frac{L_0}{m}$ $(\vec{L}=L_0\vec{k}=\vec{r}\times m\vec{v}=m\vec{r}\times(\dot{r}\vec{r}+r\dot{\theta}\vec{\theta})=mr^2\dot{\theta}\vec{k})$.

机械能守恒方程：$E=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+V(r)=\frac{m}{2}\dot{r}^2+\frac{mh^2}{2r^2}+V(r)=\frac{m}{2}\dot{r}^2+U(r)$.

(1)运动学：一质量为m，电荷量为q的电子在洛仑兹力 $f=-qvB=\frac{e^2B^2r}{m}$，势场 $V=\frac{e^2B^2r^2}{2m}=kr^2$ $k>0$ 的有心力场中运动. 求(i)电子轨道运动的周期 (ii)角动量大小 (iii)微扰频率.

(i) $F(r)=-\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r=-2kr\vec{e}_r$. $r=r_0$ 时，$m\frac{v_0^2}{r_0}=mr_0\omega^2=-F_r=2kr_0$. $\omega=2\pi/T=\sqrt{\frac{2k}{m}}$ 恒定

ii) $L=r_0mv=\sqrt{2mk}\,r_0^2$, $h=\frac{L}{m}=\sqrt{\frac{2k}{m}}r_0^2$

iii) 当质点运动在径向发生微小偏离 ε 时，设微扰后 $r=r_0+\varepsilon$, $\varepsilon\ll r_0$. $\dot{r}=\dot{\varepsilon}$, $\ddot{r}=\ddot{\varepsilon}$.

代入电子的极坐标运动方程：$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=F(r)=-2kr_0$, $r^2\dot{\theta}=h$.

得关于 ε 的方程：$\ddot{\varepsilon}-\frac{h^2}{(\varepsilon+r_0)^3}=-\frac{2k}{m}(\varepsilon+r_0)$.

ε 是小量，泰勒展开保留 ε 的一次项：$\frac{1}{(\varepsilon+r_0)^3}=r_0^{-3}(1+\frac{\varepsilon}{r_0})^{-3}=\frac{1}{r_0^3}(1-3\frac{\varepsilon}{r_0}+6\frac{\varepsilon^2}{r_0^2}+\cdots)$.

$\ddot{\varepsilon}-\frac{h^2}{r_0^3}(1-3\frac{\varepsilon}{r_0})=-\left(\frac{h}{r_0^2}\right)^2(\varepsilon+r_0)$, $\ddot{\varepsilon}=-\frac{h^2}{r_0^4}\varepsilon(1+3)=-\frac{4h^2}{r_0^4}\varepsilon=-\frac{8k}{m}\varepsilon$.

$\therefore \Omega^2=\frac{8k}{m}=\frac{4e^2B^2}{m^2}$, $\Omega=\frac{2eB}{m}$. 好巴好像不太对.

(2)能量方程：$E=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+V(r)=\frac{m}{2}\dot{r}^2+U(r)$. 对微小偏离圆轨道情形，$r=r_0+\varepsilon$.

将 $U(r)$ 在 $r=r_0$ 附近泰勒展开：$U(r)=U(r_0)+\left.\frac{dU}{dr}\right|_{r=r_0}\varepsilon+\frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=r_0}\varepsilon^2+\cdots$

$-F(r_0)=\left.\frac{dU}{dr}\right|_{r_0}=2kr_0=\frac{mh^2}{r_0^3}$, $\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=r_0}=2k=\frac{mh^2}{r_0^4}$

$\frac{d}{dr}\left(\frac{mh^2}{2r^2}\right)_{r=r_0}=-\frac{mh^2}{r_0^3}$, $\frac{d}{dr}\left(-\frac{mh^2}{r^3}\right)=\frac{3mh^2}{r_0^4}$ $\left.\frac{dU}{dr}\right|_{r=r_0}=0$, $\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=r_0}=\frac{4mh^2}{r_0^4}$.

将能量方程两边对时间求导，得 $m\dot{r}\ddot{r}+\frac{dU}{dt}=0$.

$\to m\dot{\varepsilon}\ddot{\varepsilon}=-\left.\frac{dU}{dr}\right|_{r=r_0}\dot{\varepsilon}-\frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=r_0}2\varepsilon\dot{\varepsilon}+\cdots\approx-\frac{4mh^2}{r_0^4}\varepsilon\dot{\varepsilon}=\frac{8k}{m}\varepsilon\dot{\varepsilon}$, $\ddot{\varepsilon}=-\frac{4e^2B^2}{m^2}\varepsilon$, $\Omega=\frac{2eB}{m}$

两种计算方式结果相同，可还是不能与简单推算结果对应.

问题在于，原题是假设电子已在某力作用下以某轨道作圆周运动，洛仑兹力作为微扰力，求微扰所增减的频率 ω，而上题则是在恒定向心力下对之施作微扰，作用在垂直轨道方向，且计算结果说明电子在垂直方向的小振动（晃动）的频率大于转动频率.

对力微扰的计算：初始受力：$f=\frac{mv^2}{r}=m\omega^2r$,

微扰后磁力：$f'=evB$, $f+f'=m(\omega+\Delta\omega)^2r\to f'=evB=m\cdot2\omega_0\omega\cdot r$

$\to\Delta\omega=\frac{evB}{2m\omega r}=\frac{eB}{2m}$.



光二极管（光隔离器）：磁致旋光的不可逆性. 磁场打破了对称性，总使光往相同的方向旋转.

5.7. 偏振的矩阵表示

基与量子力学的矩阵力学形式有点相似.

偏振态用二维状态矢量一阶张量表示，偏振器用二维球斯托克斯矩阵表示，便于算符操作.

斯托克斯矢量：光是一种横波，光矢量$\vec{E}$有2个自由度，可分解成2个正交分量$E_x(t)$和$E_y(t)$，它们之间确定的振幅和相位关系便对应一种相干的偏振态$\vec{E}=\begin{bmatrix}E_x\\E_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_x\\A_y e^{i\delta}\end{bmatrix}$

线偏振光：$\vec{E}=\begin{bmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{bmatrix}$，圆偏振光：$\vec{E}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\\pm i\end{bmatrix}$，椭圆偏振光：$\vec{E}=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\begin{bmatrix}A\\B+iC\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\B+iC\end{bmatrix}$

偏振器的矩阵表示：当光线入射光[redacted]后，转化为出射光$\vec{E}_2$.

这一操作/线性变换可通过(2×2)矩阵J实现，即$\vec{E}_2=J\vec{E}_1$.

线偏振器透振方向分别沿x轴，y轴和土45°方向：

$J_{//}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$J_{\perp}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$，$J_{45°}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$，$J_{-45°}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$.

$\frac{\lambda}{4}$波晶片，其快轴沿x轴、y轴方向：$J_{qx}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-i\end{bmatrix}$，$J_{qy}=\begin{bmatrix}1&0\\0&i\end{bmatrix}$.

如快轴沿x轴，则$E_x(t)$振动超前$E_y(t)$振动$\frac{\pi}{2}$

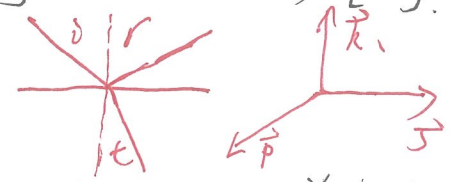
圆偏振发生器：让一束光先通过线偏振器，再通过$\frac{\lambda}{4}$波晶片，两者夹角为$\frac{\pi}{4}$，即可得到圆偏振光. 如右旋圆偏振器：$J_R=J_{qy}\cdot J_{45°}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\i&i\end{bmatrix}$.

J_R乘以任何一个偏振态，其结果均为右旋圆偏光(迎着光看)：

$$\vec{E}=J_R\vec{E}_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\i&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_x\\A_y e^{i\delta}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}A_x+A_y e^{i\delta}\\i(A_x+A_y e^{i\delta})\end{bmatrix}=\frac{1}{2}(A_x+A_y e^{i\delta})\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$$

5.8. 介质界面光学

菲涅尔公式：目的：求反射率与透射率.



字母定义：入射(incident)：E_i；反射(reflect)：E_r；透射(transmite)：E_t.

振幅~：反射率：$r=\frac{E_r}{E_i}$；透射率：$t=\frac{E_t}{E_i}$.

能量~：反射率：$R=\frac{P_r}{P_i}$；透射率：$T=\frac{P_t}{P_i}$.(功率)

建系分解：p-s-k坐标系，$\hat{p}\times\hat{s}=\hat{k}$.

p：parallel，平行入射面(P波)；s：Senkrecht，垂直入射面(P波).(德语)

假设：各向同性均匀介质；s波与p波相互独立

s波菲涅尔公式：电场(光矢量)垂直于入射面/纸面(向外)

引入右旋坐标系，$\vec{E}_i$、$\vec{E}_r$、$\vec{E}_t$构成右手系.

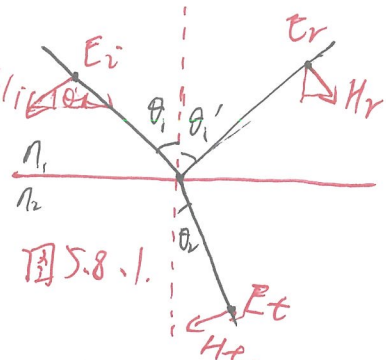


图5.8.1.

几何光学定律：$\theta_i=\theta_i'$，$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2$.

界面连续性：

$\vec{E}$切向连续：由静电场环路定理：$\oint\vec{E}\cdot d\vec{r}=0$.

关于切向：垂直法线方向，即平行界面. 界面和电场都垂直纸面，故电场平行于纸面，无需投影，即两介质电场切向分量相等：$E_i+E_r=E_t$.

H切向连续：$\oint \vec{H}\cdot d\vec{r} = I_0 = 0$. 平行界面投影：$H_i\cos\theta_1 - H_r\cos\theta_1' = H_t\cos\theta_2$.

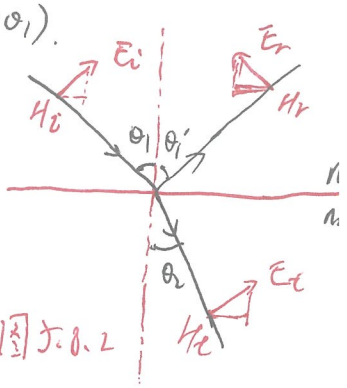
H、E关系：$H = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{\mu_0\mu_r}}E$，$\because \beta = \frac{E_r}{E_i}$是本质，故忽略$\mu_r$. $H \approx \sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{\mu_0}}E \propto \sqrt{\varepsilon_r}E = nE$.

H式改写：$n_1 E_i\cos\theta_1 - n_1 E_r\cos\theta_1 = n_2 E_t\cos\theta_2$.

菲涅尔：$r_s = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2}$. $t_s = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2}$.

利用折射定律：$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}$ $\rightarrow r_s = \frac{\sin\theta_2\cos\theta_1 - \sin\theta_1\cos\theta_2}{\sin\theta_2\cos\theta_1 + \sin\theta_1\cos\theta_2} = \frac{\sin(\theta_2-\theta_1)}{\sin(\theta_2+\theta_1)}$.

同理，$t_s = \frac{2\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$.



图示 8.2

P波菲涅尔公式：电场平行入射面(纸面)，磁场垂直纸面向外.

E切向：$E_i\cos\theta_1 - E_r\cos\theta_2 = E_t\cos\theta_2$

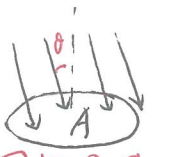
H切向：$H_i + H_r = H_t \rightarrow n_1(E_i + E_r) = n_2 E_t$.

$\Rightarrow r_p = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_2\cos\theta_1 - n_1\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2} = \frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)}$. $t_p = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin\theta_1\cos\theta_1 + \sin\theta_2\cos\theta_2}$.

能量关系：强度用功率表征，∵能量不仅由光强决定，还与入射角度有关.

(光的强度都是单位面积上(正入射)的功率).

$P = \iint \vec{S}\cdot d\vec{A} = IA\cos\theta \propto I\cos\theta$. 又 $I = \frac{n}{2c\mu_0}E^2 \propto nE^2$，$\therefore P \propto nE^2\cos\theta$,



图示 8.3

$R = \frac{P_r}{P_i} = \frac{n_1 E_r^2\cos\theta_1}{n_1 E_i^2\cos\theta_1} = \left(\frac{E_r}{E_i}\right)^2 = r^2$ (对s、p都成立).

$T = \frac{P_t}{P_i} = \frac{I_t\cos\theta_2}{I_i\cos\theta_1} = \frac{n_2 E_t^2\cos\theta_2}{n_1 E_i^2\cos\theta_1} = \frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}\left(\frac{E_t}{E_i}\right)^2 = \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}t^2$. $\rightarrow R = r^2$, $T \neq t^2$.

能量守恒：$R + T = 1$. $(P_r + P_t = P_i)$. 但 $r + t \neq 1$.

Stokes(斯托克斯)关系：$r = -r'$, $r^2 + tt' = 1$.

证明：$r_p = \frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)} \rightarrow r_p = -r_p'$，同理 $r_s = -r_s'$、$r^2 = R$, $tt' = T$. $R + T = 1$.

应用：解释全反射：光密介质→光疏介质，$n_1 > n_2$，$\theta_1 > \arcsin\frac{n_2}{n_1}$.

$\rightarrow \sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 > 1$，如果存在，则$\theta_2$必为复数. 可证得 $R = |r|^2 = 1$. $T = 0$，无透射.

半波损失：$\begin{cases} r_s = \frac{\sin(\theta_2-\theta_1)}{\sin(\theta_2+\theta_1)} \\ r_p = \frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)} \end{cases}$ $n_1 < n_2 \rightarrow \theta_1 \geq \theta_2$.

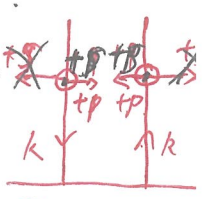
正入射 $\theta_1 = \theta_2 = 0$，此时上式出现$\frac{0}{0}$极限，运用洛必达公式，$\cos\theta \rightarrow 1$，得 $r_s = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$，$r_p = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$.

$r_s < 0$，说明 $\frac{E_r}{E_i} < 0 \rightarrow$ 振幅比于零，方向相反，存在无的相位差.

但 $r_p > 0$，可见不能只看r_s和r_p的正负，还要结合坐标架分析. 两方向

如图示8.4，随着波矢k的反向，$\hat{p}$方向不变，$\hat{p}$方向反向，

又 $r_s < 0$，则$\hat{s}$反向；$r_p > 0$，$\hat{p}$不反向，故存在半波损失.

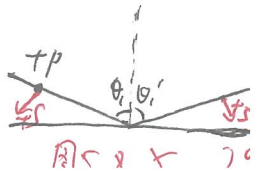


图示 8.4

掠入射 $\theta_1 \approx 90°$，r_s、r_p均< 0，如图示 8.5.

此种情形下，极限情况，$\hat{p}$、$\hat{s}$方向均不变，

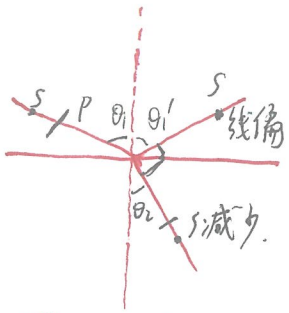
而 r_s、$r_p < 0$，∴ $\hat{p}$、$\hat{s}$均反向，无论 $n_1 < n_2$ 或 $n_1 > n_2$，均会发生半波损失.



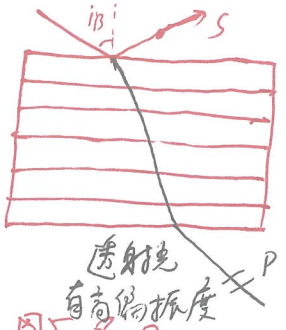
图示 8.5

其他情形(一般斜入射)：参考上图示8.5，中P没影响，S既不垂直亦不平行，此时讨论同一束入射反射光已无意义，改为讨论二束出射光之相差。

布儒斯特角(Brewster)：$r_P=\frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)}$，对于分母，如$\theta_1+\theta_2=90°$，则$\to\infty$，$r_P=0$，$R_P=T_P=1$。P波无反射，而反射光中只有S波，成为线偏振光。如图示.8.6.

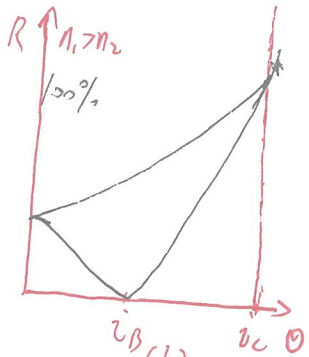


图示.8.6.



图示.8.7





图示.8.8

但反射光用起来不方便，如图示.8.7，一般用多波玻璃砖反复过滤S波（透射起偏器）

$\begin{cases}\theta_1+\theta_2=90° \to \sin\theta_2=\cos\theta_1 \\ n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2\end{cases}$ 可得 $\theta_1\equiv i_B=\arctan\frac{n_2}{n_1}$。对比全反射临界角 $\arcsin\frac{n_2}{n_1}(n_2<$

若i_C存在，则$i_C>i_B$.

代数方法：不等式$\sin x<x<\tan x$，取反，$\arctan x<x<\arcsin x$. $i_B<\frac{n_2}{n_1}<i_C$（令$x=\frac{n_2}{n_1}$

六、光与物质相互作用

6.1. 光的吸收

吸收光子会导致电子跃迁.

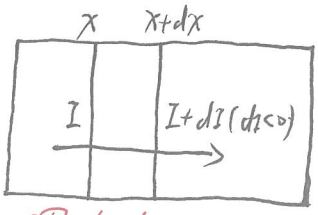


图 6.1.1

假设：均匀介质、光强不太大（否则会引起非线性效应）.

分析可得 dI 分别 $\propto I$ 和 dx，可设 $dI=-\alpha I dx$（α 默认为正）. α 叫吸收系数/吸收率（absorptivity）

$\frac{dI}{I}=-\alpha dx$，$\ln I\Big|_{I_0}^{I}=-\alpha x\Big|_0^x$，$I=I_0 e^{-\alpha x}$，吸收以指数形式变化.

布格定律或朗伯(-比尔)定律.

线性：一个电子一次仅吸收一个光子.

非线性：一对多，$\frac{dI}{dx}=-\alpha I-\beta I^2-\gamma I^3-\cdots$.

采用复折射率：$\tilde{n}=n(1+ik)$，实部为 n，虚部为 nk，k 是一个衰减项.

尝试将光的吸收与此前理论相统一.

波矢开可定义为复数：$k=\frac{w}{v}=\frac{nw}{c}\rightarrow\tilde{k}=\frac{\tilde{n}w}{c}=k(1+ik)$

光矢量 $\tilde{E}=\tilde{E}_0 e^{i(\tilde{k}x-wt)}=\tilde{E}_0 e^{i[-wt+k(1+ik)x]}=\tilde{E}_0 e^{-kkx} e^{i(kx-wt)}$.

新的复振幅：$\tilde{A}=\tilde{E}_0 e^{-kkx}$ 非常数.

光强：$I=|\tilde{A}|^2=|\tilde{E}_0|^2 e^{-2kkx}=I_0 e^{-\alpha x}$. $\alpha=2kk=\frac{2k\tilde{n}w}{c}=\frac{4\pi nk}{\lambda}$.

类比力学中的阻尼振动，光的吸收亦可以看成电磁波的阻尼振动.

微分方程：$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+w_0^2x=0$. 可借用简谐振动结果的形式，

$x=Ae^{iwt}$，无阻力时 A 为常数，有阻力时代入复数 $\tilde{w}$，

可得 $A'=Ae^{-\beta t}$，是一个衰减项.

6.2. 色散的进一步解释

本质原因：$n=n(\lambda)$ 是 λ 的函数.

正常色散：$\frac{dn}{d\lambda}<0$，$\frac{dn}{dw}>0$. 如对三棱镜，红光偏转角度最小 n 最小 波长 λ 最大，说明 n 关于 λ 是一个减函数.

反常色散：$\frac{dn}{d\lambda}>0$，$\frac{dn}{dw}<0$.

柯西色散公式：$n=A+\frac{B}{\lambda^2}+\frac{C}{\lambda^4}$，其中 $\frac{C}{\lambda^4}$ 项太小可舍去，可先近似为正常色散.

实际上，每种物质均同时存在正常/反常色散，全域色散曲线（n-λ 图像）反复横跳.

（此处应该有张图，不过我懒得画，也懒得贴了）n 的峰值类似于受迫振动中的共振.

引入群速度：此前所用的波速 $v=\frac{w}{k}$ 是相位（phase）信息的传播速度，叫相速度，用 v_p 表示（波形本身的速度）.

波包形状的前移速度叫群速度（group velocity），传递振幅信息，计算式为 $v_g=\frac{dw}{dk}$（有简单证明）

波包是对振幅的限制与约束（group）. 波包本身不一定随时间变化，即拍现象与驻波.

单色性不佳时，波包本身也会移动. 波包的包络线本身也是正弦曲线.

绝对单色光的振动

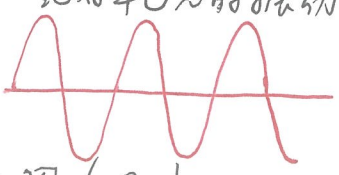


图 6.2.1

有一点非单色性

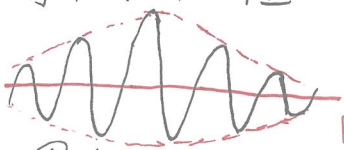


图 6.2.2

定量分析 V_p、V_g：

V_p：$k=\frac{w}{v}\rightarrow V_p=\frac{w}{k}$，又 $V_p=\frac{c}{n}$，$\therefore n=\frac{c}{V_p}$。

V_g：群速度对应折射率：$n_g=\frac{c}{V_g}=c\frac{dk}{dw}$

$=c\frac{d}{dw}(\frac{nw}{c})=n+w\frac{dn}{dw}$。

改写：$\lambda w=2\pi v\lambda f=2\pi c=const$，取微分：$\lambda dw+wd\lambda=0$。

$\rightarrow \frac{dw}{w}+\frac{d\lambda}{\lambda}=0\rightarrow w\frac{dn}{dw}=-\lambda\frac{dn}{d\lambda}\Rightarrow n_g=n+w\frac{dn}{dw}=n-\lambda\frac{dn}{d\lambda}$。

$V_g=\frac{c}{n_g}=\frac{c}{n-\lambda\frac{dn}{d\lambda}}=\frac{V_p}{1-\frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}}=\frac{V_p}{1+\frac{w}{n}\frac{dn}{dw}}$。

e.g. 折射率函数 $n(\lambda)=1+\frac{B}{\lambda^2}$，$V_p=\frac{c}{n}=\frac{c\lambda^2}{\lambda^2+B}$，$\frac{dn}{d\lambda}=-\frac{2B}{\lambda^3}$。

$V_g=\frac{V_p}{1-\frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}}=\frac{c\lambda^2}{\lambda^2+B}\Big/1+\frac{2B}{n\lambda^2}=\frac{c\lambda^2}{\lambda^2+B}\Big/\frac{3B+\lambda^2}{B+\lambda^2}=\frac{c\lambda^2}{\lambda^2+3B}$。

简单证明：对2束波长接近的光：$\begin{cases}E_1=A\cos(k_1x-w_1t),\ k_1=k-\Delta k,\ w_1=w-\Delta w,\\ E_2=A\cos(k_2x-w_2t),\ k_2=k+\Delta k,\ w_2=w+\Delta w.\end{cases}$

$E=E_1+E_2=2A\cos(\Delta kx-\Delta wt)\cos(kx-wt)=A'\cos(kx-wt)$。

（波包）振幅的变化：$V_g=\frac{\Delta w}{\Delta k}\rightarrow\frac{dw}{dk}$。相位变化：$V_p=\frac{w}{k}$。

6.3. 光的经典理论

目的：利用经典理论推导 ε_r 与 n 的表达式。

模型：电子受迫振动（有驱动力弹簧振子）。

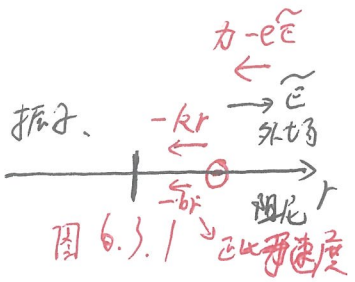


图 6.3.1 正比于速度

动力学方程：$m\ddot{r}=-kr-b\dot{r}-e\tilde{E}$。交变电场：$\tilde{E}=E_0e^{-iwt}$

$\therefore m\ddot{r}+b\dot{r}+kr=-eE_0e^{iwt}$。$\ddot{r}+\gamma\dot{r}+kr=-\frac{eE_0}{m}e^{-iwt}$。

稳态解（忽略衰减项）：形式解 $\tilde{r}=\tilde{A}e^{-iwt}$，待定系数求解。

$\dot{\tilde{r}}=-iw\tilde{A}e^{-iwt}=-iw\tilde{r}$，$\ddot{\tilde{r}}=(-iw)^2\tilde{r}=-w^2\tilde{r}$，代回原方程：

$-w^2\tilde{r}-iw\gamma\tilde{r}+w_0^2\tilde{r}=-\frac{eE_0}{m}e^{iwt}$，$\rightarrow\tilde{r}=\frac{eE_0}{m}\frac{1}{(w^2-w_0^2)+iw\gamma}e^{-iwt}=|\tilde{r}|e^{i\varphi}$。

φ 为振子振动和驱动力的相位差。

电偶极矩：$\tilde{p}=-e\tilde{r}$。⊕←⊖。

极化强度：$\tilde{P}=N\tilde{p}$，N 表分子/原子体密度，Z 表每一个分子/原子的带电荷数。

$\therefore\tilde{P}=-NZe\tilde{r}=-\frac{NZe^2}{m}\frac{E_0e^{-iwt}}{w^2-w_0^2+iw\gamma}=\varepsilon_0\tilde{\chi}\tilde{E}$，$\tilde{D}=\varepsilon_0\tilde{E}+\tilde{P}=\varepsilon_0(1+\tilde{\chi})\tilde{E}=\varepsilon_0\varepsilon_r\tilde{E}$。

$\tilde{\varepsilon}_r=1+\tilde{\chi}=1+\frac{\tilde{P}}{\varepsilon_0\tilde{E}}=1-\frac{NZe^2}{\varepsilon_0m}\frac{1}{w^2-w_0^2+iw\gamma}$ 此为同振子模型。

异振子模型：具有 w_j 与 γ_j 的电子数为 f_j（一个原子内，$\sum f_j=Z$）。

则 $\tilde{\varepsilon}_r=1-\frac{Ne^2}{\varepsilon_0m}\sum\frac{1}{w^2-w_j^2+iw\gamma_j}$，$\tilde{n}=\sqrt{\tilde{\varepsilon}_r}\approx1-\frac{Ne^2}{2\varepsilon_0m}\sum$ ——

6.4. 光的量子性与粒子性。经典物理两朵乌云。

迈克尔逊-莫雷实验 受质疑：以太（ether, aether）已存在，提出相对论。

黑体辐射与紫外灾难 普朗克：能量量子化，$\varepsilon=h\nu$。



h是普朗克常量，ν是频率.

爱因斯坦 → 光电效应 → 光的粒子性（光子）.

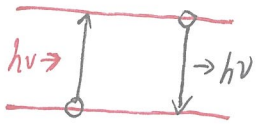
1个光子携带1份能量 $\varepsilon=h\nu(=mc^2)$. 光子静质量 $m_0=0$、结合 $\nu=c$，得 $\varepsilon=\frac{hc}{\lambda}$.

能量三角形：$(m_0c^2)^2+(pc)^2=(mc^2)^2$，c、λ、ν 波动性

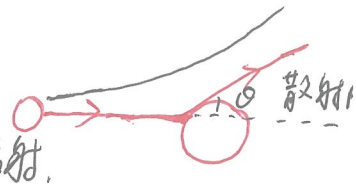
$\longrightarrow pc=mc^2=h\nu$，$p=\frac{h}{\lambda}=\frac{\varepsilon}{c}$. ε、P 粒子性.

德布罗意：实物粒子具有波动性，电子的双缝干涉.

发光方式{自发辐射 E_2 → $h\nu$ E_1 能级 自发辐射



受激辐射.

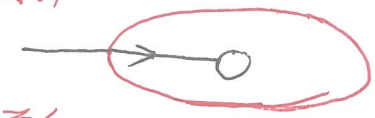


6.5 光的散射 光子与粒子碰撞.

{弹性散射（λ、ν不变）瑞利散射、米氏散射

非弹性散射（λ、ν变化）拉曼散射、布里渊散射. ↗对称性（前后对称）

瑞利散射：粒子微粒（$r\ll\lambda$）$I=I(0)\propto\frac{1+\cos^2\theta}{\lambda^4}$ I与λ有很大关系.

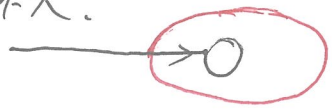


散射主要研究散射粒子分布（密度）.

光子密度 → 光强.

米氏散射：稍大微粒（$r\sim\lambda$）I主要与θ相关，而与λ关系不大.

不对称，散射强度前强后弱.



解释生活现象：

{朝霞、晚霞、蓝天：瑞利散射、颜色较单一，与波长关系较大.

白云、白发、牛奶：米氏散射、~~黑色~~多为白色，与波长关系不大.

注意，并不是有白色素，而是其中分子对外界的作用.

蓝天和霞的原理相同，结果却不同，是由于光线的角度不同造成.