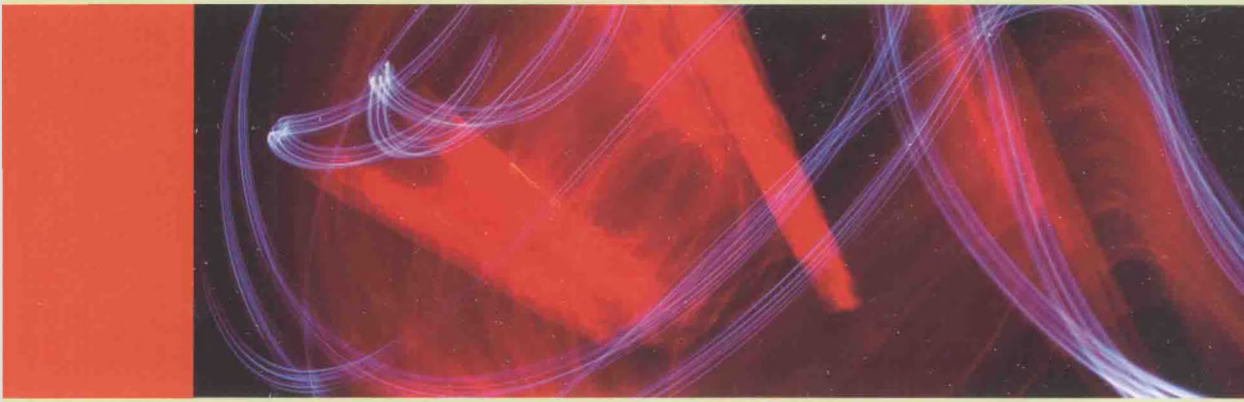
高校核心课程学习指导丛书

光学解题方法与典型例题（物理专业）

GUANGXUE JIETI FANGFA YU DIANXING LITI
WULI ZHUANYE

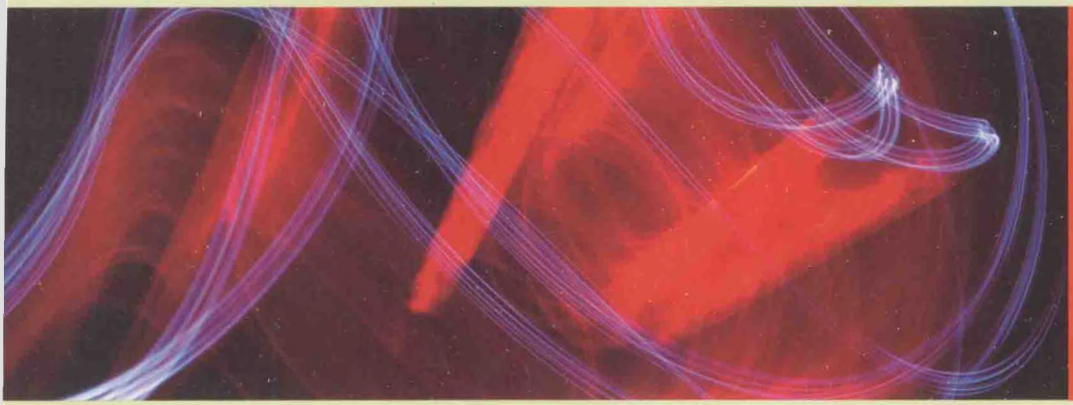
崔宏滨　吴　强／编著



中国科学技术大学出版社

高校核心课程学习指导丛书

高等数学导论学习辅导（第2版）
数学物理方法习题全解
线性代数与解析几何学习辅导
微分几何学习指导
线性代数学习指导
数学分析范例选解
高等代数范例选解
量子力学学习指导
全新量子力学习题
应用光学试题与解析
综合化学——无机化学·分析化学·有机化学
物理化学——概念辨析·解题方法·应用实例（第4版）
无机化学——要点·例题·习题（第4版）
分析化学——要点·例题·习题·真题（第2版）
有机化学习题与考研练习题精解（第2版）
高分子物理重点难点释疑
物理化学思考题1100例
电路学习指导与考研题精解
▶ 光学解题方法与典型例题（物理专业）
光学重难点释疑（非物理专业）



选题编辑／孔庆勇　责任编辑／陈隆隆　封面设计／刘俊霞

定价：55.00元

ISBN 978-7-312-03855-6
9 787312 038556 >

销售分类建议：物理类

高校核心课程学习指导丛书

崔宏滨　吴　强 / 编著

光学解题方法与典型例题（物理专业）

GUANGXUE JIETI FANGFA YU DIANXING LITI
WULI ZHUANYE

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书对光学的解题方法进行了系统的概括，并精选了相当数量不同类型的题目做了详细的解答。为了便于阅读，书中的题目按光学的知识模块分章节编辑，并对各知识模块的主要内容做了概要的介绍。

本书不是针对某一本光学教材的习题解答，因而所选题目范围广泛、类型丰富。

本书可用作物理类学生学习光学的辅助教材，也可供讲授光学课程的教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

光学解题方法与典型例题：物理专业/崔宏滨，吴强编著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2016.1

ISBN 978-7-312-03855-6

Ⅰ.光… Ⅱ.①崔… ②吴… Ⅲ.光学—题解 Ⅳ.O43-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 297594 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，邮编：230026
http://press.ustc.edu.cn
印刷 合肥华星印务有限责任公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 710 mm×960 mm 1/16
印张 28
字数 564 千
版次 2016 年 1 月第 1 版
印次 2016 年 1 月第 1 次印刷
定价 55.00 元

前　言

光学是物理学的一个重要分支，是大学物理教学中的一门主干课程，也是应用十分广泛、不断取得新进展的一门学科。

解题是学习过程中一个非常重要的环节。解题，可以检验学生对基本概念的掌握程度和对所学知识的运用能力；解题，可以加深学生对知识的理解；解题，可以使学生初步掌握解决实际问题的方法和技巧。

物理学是一门结合实际的科学，物理知识有着非常广泛的实际应用，光学尤其能够体现这一特点。几乎所有的科学研究和工程技术都涉及光学成像、光学测量等知识，因而学好光学、利用光学知识理解和解决实际问题，对从事科学研究与工程技术的人员有重要的作用。

中国的理工科大学生通过中学阶段的学习具有较好的数学、物理基础。尤其对于力学和电磁学，由于升学的需要，基础知识掌握得非常好，并做了大量的习题。但是，由于在高中阶段所学习的光学知识十分有限，进入大学之后，初学这门课程，通常会遇到一些困难，特别是在解题的过程中，往往不知该如何入手。具体的表现是：不知道在成像、干涉、衍射等问题中为什么要做傍轴近似和如何做傍轴近似；不知道光学中处理电磁波的方法和电磁学中处理电磁波方法的区别；不理解什么是光的相干性以及如何做光波的相干叠加和非相干叠加，等等。据本书作者了解，这些问题，多数是由于学生对光学的基本概念理解不深、对光学解决问题的基本方法把握不准确而造成的。解决这些问题，仅仅依靠时间有限的课堂教学是远远不够的，需要学生通过自己做适量的习题来加以解决。在做题的过程中，一本适当的解题指导书对迅速提高学生的能力是有帮助的，这也正是作者编写本书的用意。

本书的两位作者有数十年在中国科学技术大学从事光学教学的经历，也曾承担过指导中学生参加物理竞赛的工作，并且都出版过光学教材，因而对光学的知识体系有着深刻而准确的理解，对学生学习过程中所遇到的各种问题也有充分的了解。这本解题指导参考书是集两位作者长期的经验编写而成的。

本书初稿于十年前编成，十年之间，历经多次增删改写。其中有一些例题取自两位作者的光学教材，一些例题涉及光学的基本问题，更有相当数量的例题是作者结合实际

编写的，还有一些例题是作者讲授光学课程的考题。所选题目都是能够体现光学基本概念和基本方法的典型题目，多数题目都有相当的难度。因为题目比较典型，因而对每一道题目的求解过程都比较详细，对题中涉及的重要概念、重要方法都做了强调。

需要指出的是，解题仅仅是学习过程中的一个环节，解题是一个自我练习、自我检验的过程，因而要求学生独力而为。如果缺少系统的学习，如果不先进行充分思考而匆忙地看别人的例题解答，或者对一些例题解答不加思索而盲目相信，对掌握知识是毫无益处的。因而，作者提醒本书的读者：在看每一道例题的解法之前，自己先多想一想；在看每一道题的解题过程时，要采用怀疑的眼光和批判的思维。本书仅仅是为了拓展读者的思路，为读者提供一些有益的参考。若将本书奉作考试神器，仅仅希望通过阅读本书而提高考试分数，那就与作者的意愿背道而驰了。

我们诚恳希望读者发现并指出书中的讹误和不足之处。

崔宏滨　吴　强

2015 年 12 月 9 日

于中国科学技术大学

目　录

前言 …… (ⅰ)

第 1 章　几何光学的实验定律 …… (1)

1.1　光的直线传播、反射与折射 …… (1)

1.2　费马原理 …… (21)

1.3　光线在变折射率媒质中的传播 …… (27)

第 2 章　光学成像 …… (37)

2.1　折射球面、反射球面与薄透镜的成像 …… (37)

2.2　光具组成像 …… (66)

2.3　成像作图法 …… (101)

2.4　成像光学仪器 …… (120)

2.5　共轴理想光具组理论 …… (139)

2.6　光学矩阵方法 …… (156)

第 3 章　光的波动模型与叠加原理 …… (167)

3.1　简谐光波的标量表达式 …… (167)

3.2　接收屏上的波函数 …… (182)

3.3　光波的叠加 …… (193)

3.4　光波的吸收、色散与散射 …… (208)

第 4 章　光的干涉 …… (214)

4.1　光波的相干条件与相干光的获得 …… (214)

4.2　分波前的干涉装置 …… (214)

4.3　分振幅的干涉装置 …… (251)

4.4　法布里—珀罗干涉仪 …… (274)

4.5　光波场的空间相干性与时间相干性 …… (283)

第 5 章 光的衍射 …… (295)
5.1 衍射积分公式与衍射的分类 …… (295)
5.2 菲涅耳衍射 …… (296)
5.3 夫琅禾费衍射 …… (315)
5.4 衍射光栅 …… (331)

第 6 章 光的偏振与双折射 …… (353)
6.1 光的偏振态 …… (353)
6.2 光在晶体中的双折射 …… (368)
6.3 偏振光的干涉 …… (392)
6.4 琼斯矩阵 …… (409)
6.5 旋光 …… (422)

第 7 章 光的量子性 …… (425)
7.1 黑体辐射 …… (425)
7.2 光电效应 …… (426)
7.3 康普顿效应 …… (426)
7.4 光的波粒二象性 …… (426)
7.5 典型问题与基本解题方法 …… (427)

参考文献 …… (439)

第 1 章　几何光学的实验定律

几何光学是关于光传播的理论体系，是以光学实验为基础的唯象理论。在几何光学的理论体系中，用几何线表示光的传播、反射和折射的路径，并称之为光线。所以几何光学中不涉及光的物理本质，仅仅用“光线”这一物理模型描述光传播、反射和折射的性质。

1.1　光的直线传播、反射与折射

1.1.1　几何光学中的基本概念

1. 界面

不同种类的透明媒质的分界面或物体的表面。入射到界面上的光线将发生反射或折射。

2. 入射面

界面上光线入射点的法线与入射光线所构成的平面。

3. 入射角

入射光线与入射点法线间的夹角。

4. 反射角

反射光线与入射点法线间的夹角。

5. 折射角

折射光线与入射点法线间的夹角。

1.1.2 几何光学实验定律的表述

1. 光的直线传播定律

在均匀媒质中，光沿着直线传播。

2. 光的反射定律

反射光线在入射面内，反射光线与入射光线分别位于入射点法线的两侧，且反射角等于入射角，即

$$i' = i \tag{1.1}$$

如图 1.1 所示。

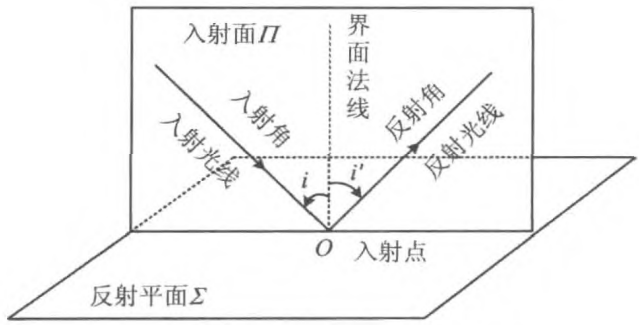


图 1.1 入射面、入射角、反射角

3. 光线的折射定律

折射光线在入射面内，折射光线与入射光线分别位于入射点法线的两侧，且有

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \tag{1.2}$$

如图 1.2 所示，其中 n_1，n_2 分别为界面两侧媒质的折射率。

1.1.3 光的全反射

光从折射率较大的光密媒质（设折射率为 n_1）射向折射率较小的光疏媒质（设折射率为 n_2），并且入射角大于如下的临界值时，将会出现全反射：

$$i_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \tag{1.3}$$

i_c 称作全反射临界角。发生全反射时，光线不能在光疏媒质中传播。

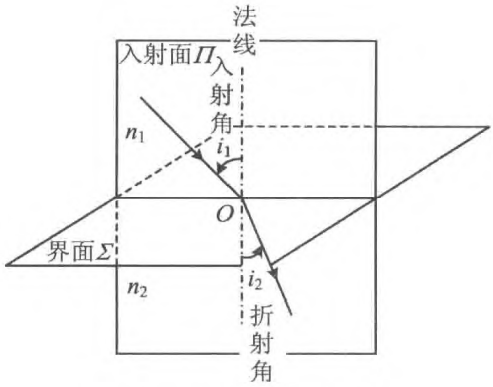


图 1.2　折射光线与折射角

1.1.4　光的可逆性原理

(1) 光在传播、反射、折射过程中，光路是可逆的。

(2) 在成像过程中，物与像是共轭的。

1.1.5　几何光学定律成立的条件

(1) 光学系统的尺度远大于光波的波长。

(2) 介质是各向同性的。

(3) 光强不是很大。

1.1.6　典型问题与基本解题方法

主要涉及光线在透明介质中的传播，在媒质界面上反射、折射的问题。对这类问题，通常直接应用直线传播定律、反射定律和折射定律求解。

【例 1.1】　试说明如何用同一种数学表达式描述光线的实验定律。

分析　光线在媒质中传播，传播过程的特性与媒质的折射率有关。数学公式只是对物理规律和物理性质的表达。所以也可以用折射定律的数学表达式描述直线传播和反射的情形，但需要做一些数学上的约定。

解　公式 $n_1\sin i_1 = n_2\sin i_2$ 所描述的是光线在两种媒质界面处折射的情形，是光线

折射定律的表达式。若媒质是均匀的，各处的折射率均相等，设想在光线的传播路径上任取一个界面，在界面两侧 $n_2 = n_1$，即可得 $i_2 = i_1$，光线的方向始终不变，沿直线传播。所以可以用折射定律的表达式描述光线在均匀媒质中直线传播的定律。

对比反射与折射这两种情形，可发现有两点不同：第一，数学上的角度是有正负规定的，通常从一条边算起，沿逆时针方向的角度为正，顺时针方向的角度为负。参考图 1.1 和图 1.2，角度都是从界面的法线算起的，其中入射角 i_1 和折射角 i_2 为正，而反射角 i'_1 为负。第二，折射时，界面的出射（即折射）光线与入射光线分别在界面的两侧，而反射时，界面的出射（即反射）光线与入射光线在界面的同一侧。

针对上述第一点，若用 $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ 表示反射定律，则由于 $i_2 = -i_1$，会得到 $n_2 = -n_1$，而实际上反射光线与入射光线在同一种媒质中，这样的结果显然是有问题的。

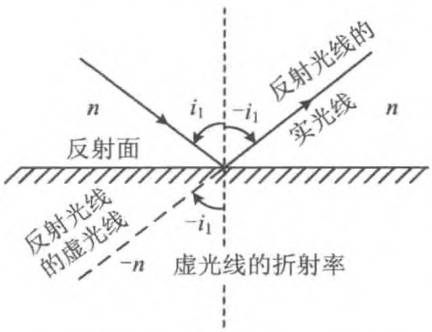


图 1.3　反射光线的方向表示

针对上述第二点，说明要用反射面另一侧的直线表示反射光线的方向。如图 1.3 所示，在用折射定律描述反射时，需要用反射光线的反向延长线表示反射光线的方向。由于反射光线是实际的光线（不妨称为“实光线”），其反向延长线不是实际的光线，因而将其称作与反射光线对应的“虚光线”。与折射时的图 1.2 比较，对这样的虚光线而言，其与法线的夹角（就是反射角的对顶角）为 $-i_1$，而若认为虚光线所在空间的折射率为 $-n$，上述第一点中的问题自然可解决。这样就可以用折射定律的表达式来描述反射定律了。

上述的处理方式实际上是将反射作为折射的特例，这样做的好处在于：涉及反射的情形，没有必要再另行考虑，只需要按上述方式处理即可。

【例 1.2】　如图 1.4 所示，一光线射入镜面间并反射 n 次，最后沿入射时的光路返回，试写出初始入射角 θ_i 与 α 间的关系表达式。

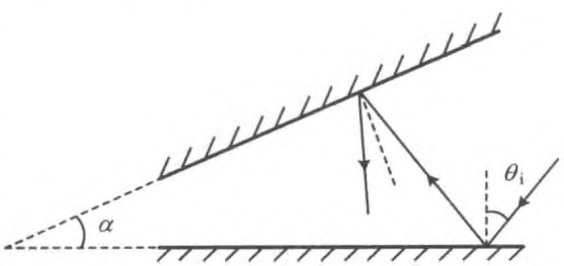


图 1.4　光线在两镜面之间反射

分析　光线在镜间反射，第 n 次射入初始入射点，且入射角 $\theta_i^{(n)} = \theta_i$ 时，光线沿原路返回。或者采用另一种分析方法，在反射过程中，当某次入射角为 0 时，反射角也为 0，光线才能沿原路

返回。

解　方法一。如图 1.5 所示，设光线第一次入射角为 θ_i，在另一镜上的入射角，即第二次的入射角为 $\theta_i^{(2)}$，由反射定律与图 1.5 中三角形的几何关系可知

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = \theta_i^{(2)} + \left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right)$$

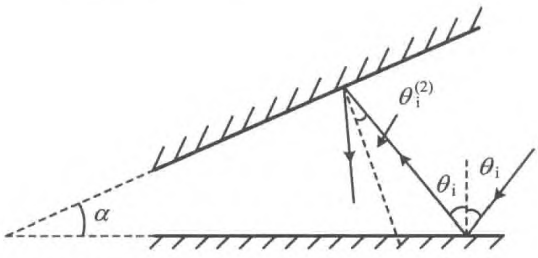


图 1.5　解法一

由此可以得到

$$\theta_i^{(2)} = \theta_i - \alpha$$

依此类推，可以得到

$$\theta_i^{(3)} = \theta_i^{(2)} - \alpha = \theta_i - 2\alpha$$

即

$$\theta_i^{(n)} = \theta_i^{(n-1)} - \alpha = \theta_i - (n-1)\alpha$$

由于光线沿原路返回，在返回过程中，上述角度关系应当反号，即

$$\theta_i^{(n)} = -[\theta_i - (n-1)\alpha]$$

于是，当 $\theta_i^{(n)} = \theta_i$ 时

$$\theta_i = -\theta_i + (n-1)\alpha$$

即

$$\theta_i = \frac{(n-1)\alpha}{2}$$

方法二。如图 1.6 所示，设共有 n 次反射，要沿原路返回，可知 n 必为奇数。其中，第 $(n+1)/2$ 次的入射角应为 0。记 $k+1=(n+1)/2$。则第 k 次的反射角为 $\theta_k = \alpha$，第 $k-1$ 次的反射角为 $\theta_{k-1} = 2\alpha$。相邻的两次反射之间，有关系式

$$\theta_m + \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{m-1}\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

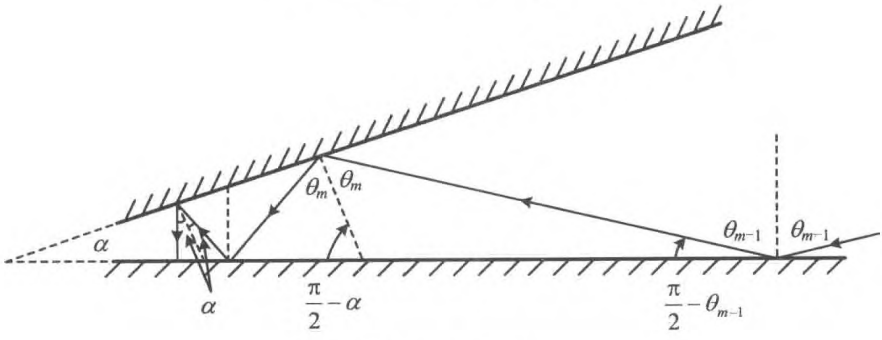


图 1.6　解法二

即

$$\theta_{m-1} = \theta_m + \alpha$$

则必有

$$\theta_i = (m-1)\theta_m + \alpha = (k-1)\theta_k + \alpha = k\alpha$$

即可推得

$$\theta_i = \frac{(n-1)\alpha}{2}$$

【例 1.3】 如图 1.7 所示为一圆锥形管，两端开口，孔径分别为 R_1，R_2，锥的顶角为 2δ，光可在其内壁之间反射。光线从大口的一端射入，与轴线间的夹角为 θ。试求：

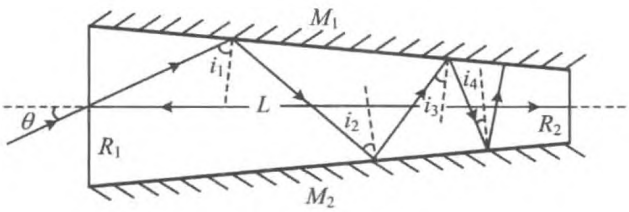


图 1.7　锥形管的剖面

(1) 光线在管内壁经过 m 次反射后，入射角变为多少？

(2) 能够从小口出射的光线，θ 角的范围是多少？

(2) 光线在管内共经历了多少次反射？

解　(1) 光线的入射面是由入射光线和管的轴线所确定的平面，即图中的剖面。

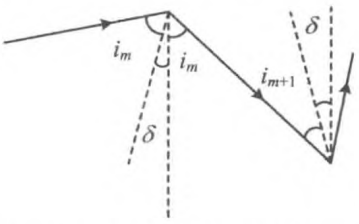


图 1.8　锥形管内光线入射角的变化

如图 1.8 所示，剖面中，两相对反射面法线之间的夹角为 2δ。在连续两次经表面的反射过程中

$$i_{m+1} + \delta = i_m - \delta$$

所以有

$$i_{m+1} = i_m - 2\delta$$

即每经过一次反射，光线的入射角减小 2δ。

若经过了 m 次反射，则有

$$i_m = i_1 - 2(m-1)\delta \qquad (1)$$

(2) 光线在两个相对的平面 M_1、M_2 之间连续多次反射，可以采用以下的等效方法处理。

如图 1.9 所示，光线首先入射到平面 M_1，设光线与 M_1 平面之间的夹角为 α_1，反射后射向 M_2，光线与 M_2 平面之间的夹角为 α_2，作出 M_2 关于 M_1 的镜像为 $M_2^{(1)}$，则被 M_1 反射后射向 M_2 的光线的镜像也可以作出，该镜像光线与 M_1 平面之间的夹角也为 α_1，相

当于将 M_1 的入射光线直接延长射向 $M_2^{(1)}$，而该延长线与 $M_2^{(1)}$ 平面之间的夹角就是 α_2。实际的光线被 M_2 反射后又射向 M_1，等效于将镜像光线接着延长，入射到 M_1 关于 $M_2^{(1)}$ 的镜像 $M_1^{(1)}$。依此类推即可将在 M_1，M_2 之间连续多次反射的光线用入射光线的延长线表示，而各次的入射光线、反射光线与镜面之间的夹角 α_n 就是上述延长线与依次作出的各个反射面的镜像之间的夹角，相应的入射角、反射角就是延长线与各个反射面镜像法线之间的夹角。

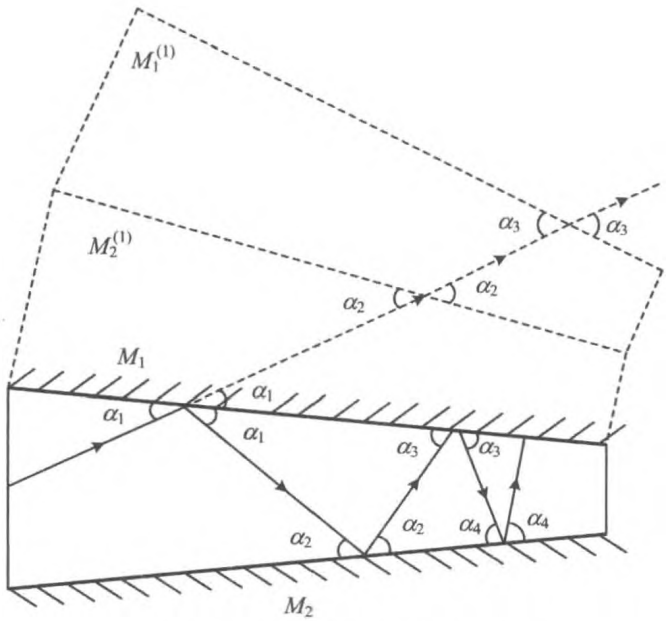


图 1.9　在两镜面间连续反射的光线

针对本题的处理方法如图 1.10 所示，各个反射面的镜像的延长线汇聚于同一点 O。由于反射面与锥管轴线之间的夹角为 δ，可算出

$$\overline{OA} = \frac{R_1 L}{R_1 - R_2} = \frac{R_1}{\tan\delta}$$

$$\overline{OB} = \frac{R_2 L}{R_1 - R_2} = \frac{R_2}{\tan\delta}$$

一条直线，该直线若与另一端面的镜像相交，说明可以从锥管射出。极限的情形是光线恰与小端口截面平行，且光线与小端口的交点恰在边缘处，如图 1.11 所示，在 $\triangle COB_m$ 中应用正弦定理，可得

$$\sin\angle CB_mO = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}}\sin\theta = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}\sin\theta = \frac{R_1}{R_2}\sin\theta \tag{2}$$

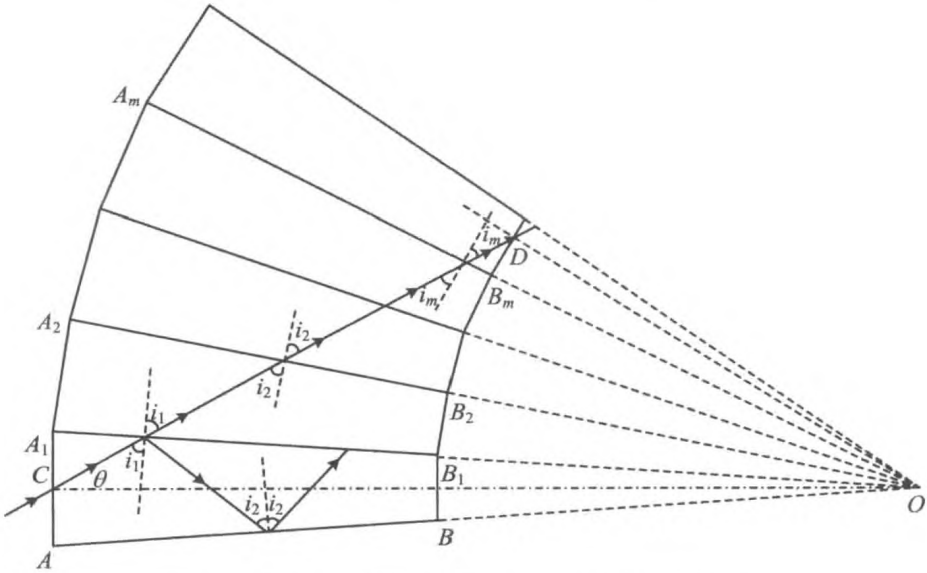


图 1.10 锥管内连续多次反射光线的等效处理方法

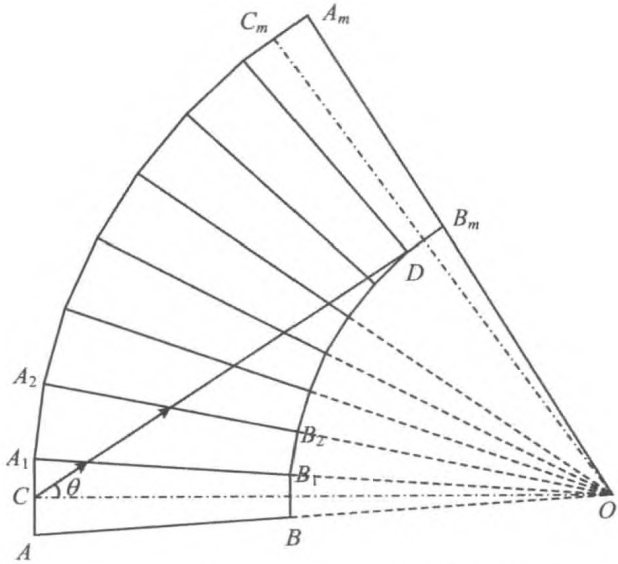


图 1.11 光线能够从小端口射出的极限情形

由于锥管母线与轴线之间的夹角为 δ，则大端口与母线之间的夹角为 $\beta_1 = \frac{\pi}{2} - \delta$，小端口与母线之间的夹角为 $\beta_2 = \frac{\pi}{2} + \delta$。每作一次镜像，端口转过的角度为

$$\Delta\beta = 2\beta_2 - \pi = 2\delta$$

每个镜像的端口与轴线 OC 之间的夹角依次减小 $\Delta\beta$。则第 m 个镜像的端口与 OC 之间的夹角减为

$$\frac{\pi}{2} - m\Delta\beta = \frac{\pi}{2} - 2m\delta$$

若上述夹角等于入射光线与轴线之间的夹角 θ，则 $\frac{\pi}{2} - 2m\delta = \theta$，可得

$$m = \frac{\pi - 2\theta}{4\delta} \tag{3}$$

即如图 1.11 中所示的情形，而此时 $\angle COB_m = 2(m-1)\delta$，在 $\triangle COB_m$ 中，$\angle CB_mO = \pi - \theta - 2(m-1)\delta$，式(2)即为

$$\sin[\theta - 2(m-1)\delta] = \frac{R_1}{R_2}\sin\theta \tag{4}$$

将式(3)代入式(4)，有

$$\sin\left[2(\theta + \delta) - \frac{\pi}{2}\right] = \frac{R_1}{R_2}\sin\theta$$

即

$$2\sin^2(\theta + \delta) - \frac{R_1}{R_2}\sin\theta - 1 = 0 \tag{5}$$

从式(5)解得的 θ 是符合题意的最大角度。

(3) 根据(2)中的讨论，光线在锥管内反射的次数应当比式(3)的 m 小 1，即

$$m - 1 = \frac{\pi - 2\theta}{4\delta} - 1$$

【例 1.4】 求光线经过棱镜折射的偏向角，讨论出现最小偏向角的条件，并求出最小偏向角。已知棱镜的顶角为 α，折射率为 n。

解　如图 1.12 所示，设光线从棱镜的左侧面入射，入射角、折射角分别为 i_1, i_1'。在棱镜右侧面，入射角、折射角分别为 i_2', i_2。

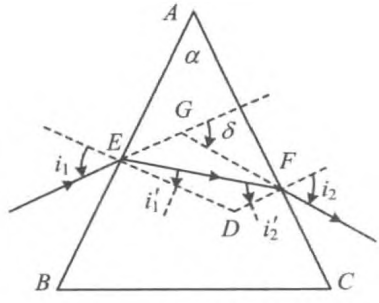


图 1.12　光在三棱镜中的折射

光线的偏向角是指出射光线相对于入射光线偏转的角度，即图 1.12 中的角 δ。

图 1.12 中，棱镜的两棱边与每一棱的法线构成一个四边形 $AEDF$，其中

$$\alpha + \angle D = \pi$$

在△EDF 中

$$i'_1 + i'_2 + \angle D = \pi$$

于是

$$i'_1 + i'_2 = \alpha \tag{1}$$

在△EFG 中，可得偏向角

$$\delta = i_1 - i'_1 + i_2 - i'_2 = i_1 + i_2 - (i'_1 + i'_2) = i_1 + i_2 - \alpha \tag{2}$$

最小偏向角的条件为$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}i_1} = 0$，而

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}i_1} = \frac{\mathrm{d}(i_1 + i_2 - \alpha)}{\mathrm{d}i_1} = 1 + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}i_1} = 0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}i_1} = -1 \tag{3}$$

在棱镜的两侧面，折射角与入射角之间的关系为 $\sin i_1 = n\sin i'_1$ 和 $\sin i_2 = n\sin i'_2$，于是有

$$\mathrm{d}(\sin i_1) = \cos i_1 \mathrm{d}i_1 = n\mathrm{d}(\sin i'_1) = n\cos i'_1 \mathrm{d}i'_1$$
$$\mathrm{d}(\sin i_2) = \cos i_2 \mathrm{d}i_2 = n\mathrm{d}(\sin i'_2) = n\cos i'_2 \mathrm{d}i'_2$$

即

$$\frac{\mathrm{d}i'_1}{\mathrm{d}i_1} = \frac{\cos i_1}{n\cos i'_1}, \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}i'_2} = \frac{n\cos i'_2}{\cos i_2}$$

而根据式(1)，可得 $\mathrm{d}i'_1 = -\mathrm{d}i'_2$，于是式(3)可表示为

$$\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}i_1} = \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}i'_1} \cdot \frac{\mathrm{d}i'_1}{\mathrm{d}i_1} = -\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}i'_2} \cdot \frac{\mathrm{d}i'_1}{\mathrm{d}i_1} = -\frac{\cos i_1}{n\cos i'_1} \cdot \frac{n\cos i'_2}{\cos i_2}$$

$$= -\frac{\cos i_1}{\sqrt{n^2 - n^2\sin^2 i'_1}} \cdot \frac{\sqrt{n^2 - n^2\sin^2 i'_2}}{\cos i_2} = -1$$

即

$$\frac{\cos i_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}} = \frac{\cos i_2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i_2}} \tag{4}$$

式(4)成立的条件为 $i_1 = i_2$，相应地 $i'_1 = i'_2$，如图 1.13 所示。

此时

$$\sin i_1 = n\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

于是最小的偏向角为

$$\delta_{\min} = 2i_1 - \alpha = 2\arcsin\left(\frac{n\sin\alpha}{2}\right) - \alpha$$

若测出最小偏向角 $\delta_{\min}$，由于此时

$$i'_1 = \frac{\alpha}{2}, i_1 = \frac{\alpha + \delta_{\min}}{2}$$

则棱镜的折射率为

$$n = \frac{\sin i_1}{\sin i'_1} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha + \delta_{\min}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \tag{5}$$

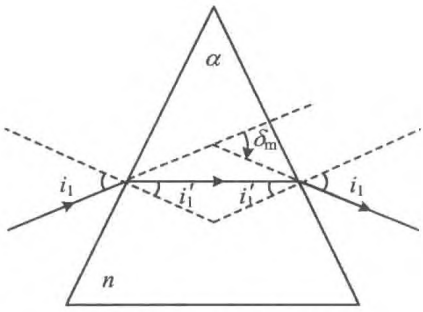


图 1.13　最小偏向角

根据式(5)测量棱镜折射率的方法被称作最小偏向角方法。

【例 1.5】 证明：当一条光线通过平板玻璃时，出射光线方向不变，只产生侧向平移，当入射角 i_1 很小时，位移

$$\Delta x = \left(\frac{n-1}{n}\right) i_1 t$$

其中，n 为玻璃的折射率，t 为玻璃板的厚度。

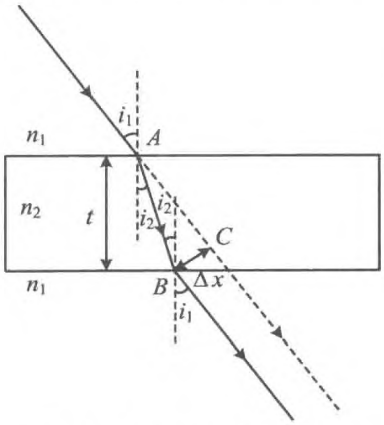


图 1.14　透过玻璃平板的光线

证明　如图 1.14 所示，由于玻璃板的上、下两表面平行，且两侧空气的折射率相等，所以在下表面的入射角等于上表面的折射角，下表面的折射角等于上表面的入射角。出射光线与入射光线保持平行。利用几何关系可以得到

$$\begin{aligned}\Delta x = BC &= AB\sin(i_1 - i_2)\\ &= \left(\frac{t}{\cos i_2}\right)\sin(i_1 - i_2)\\ &= \frac{t(\sin i_1\cos i_2 - \cos i_1\sin i_2)}{\cos i_2}\\ &= t\left(\sin i_1 - \frac{\cos i_1\sin i_1}{n\cos i_2}\right)\end{aligned}$$

在小角度时，有

$$\sin i_1 \approx i_1 - \frac{i_1^3}{6} \approx i_1$$

$$\cos i_1 \approx 1 - \left(\frac{i_1}{2}\right)^2 \approx 1, \cos i_2 \approx 1 - \left(\frac{i_2}{2}\right)^2 \approx 1$$

于是

$$t\left(\sin i_1 - \frac{\cos i_1 \sin i_1}{n\cos i_2}\right) \approx t\left(i_1 - \frac{i_1}{n}\right) = \frac{ti_1}{n}(n-1)$$

即

$$\Delta x = \left(\frac{n-1}{n}\right) i_1 t$$

【例 1.6】 光从塑料棒的一端射入，若要保证射入的光总是在棒内全反射传播，塑料的折射率至少是多大？

分析 本题中，光线首先从棒的端面入射，进入棒内，射向棒的侧面并发生反射。需要注意端面与侧面的法线是相互垂直的。

解 如图 1.15 所示，棒的端面与侧面垂直，所以在侧面上入射角最小的光线，在端面上的入射角是最大的。则实际上仅需对从端面掠入射的光线讨论即可。也可以先进行一般性讨论，然后得到结论。

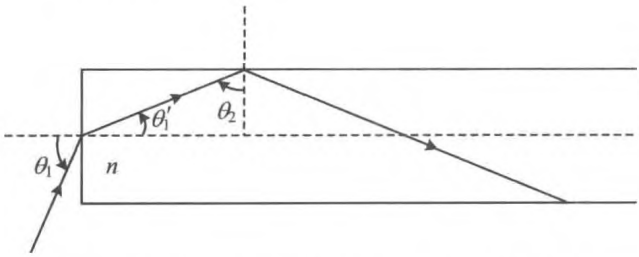


图 1.15 光线在端面的折射和在棒内的全反射

在端面处的折射定律为 $\sin\theta_1 = n\sin\theta_1'$。从图 1.15 中可以看出

$$\theta_1' = \frac{\pi}{2} - \theta_2$$

于是有

$$\sin\theta_1 = n\cos\theta_2 = n\sqrt{1-\sin^2\theta_2} = \sqrt{n^2 - n^2\sin^2\theta_2}$$

要发生全反射，$n\sin\theta_2 \geqslant 1$，而 θ_1 可以取到 $\pi/2$，于是

$$1 = \sqrt{n^2 - n^2\sin^2\theta_2} \leqslant \sqrt{n^2 - 1}$$

即

$$n \geqslant \sqrt{2}$$

【例 1.7】 在圆形木塞中心垂直插入一大头针，然后将其倒置于水面上，调节大头针露出的长度，使观察者从水面上无论何种角度都恰好看不到水下的大头针，如图 1.16 所示。如果测得大头针露出木塞的长度为 h，木塞直径为 d，求水的折射率。

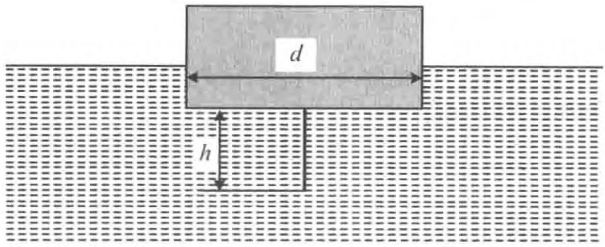


图 1.16　水面上插有大头针的木塞

解　如图 1.17 所示，此时大头针下端发出的掠过木塞棱边的光线恰好在水面处发生全反射，即 $\sin\theta=\frac{1}{n}$。而

$$\tan^2\theta=\left(\frac{d}{2h}\right)^2=\frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}=\frac{1}{n^2-1}$$

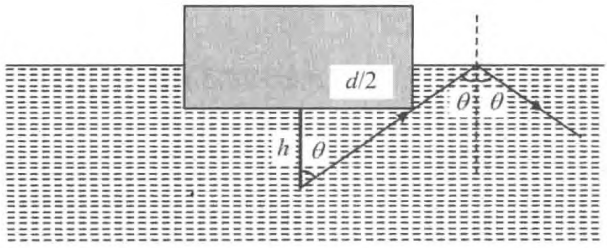


图 1.17　大头针下端射到水面的光线

于是得到

$$n=\sqrt{1+\left(\frac{2h}{d}\right)^2}$$

【例 1.8】　如图 1.18 所示，一束光线以入射角 i 射入折射率为 n 的球形水滴，求：

(1) 此光线在水滴内另一侧球面的入射角 α，这条光线是被全反射还是部分反射？

(2) 从另一侧面出射的光线相对于入射光线的偏向角 δ_1 的表达式；

(3) 反射回球内的光线，再经球面折射出来，偏向角 δ 的表达式；

(4) 偏向角 δ 最小时的入射角 i 是多少？

解　(1) 如图 1.19 所示，设折射角为 i'，由折射定律

$$\sin i=n\sin i'$$

根据球面的对称性可得

$$\alpha=i'=\arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right)$$

由于 $\sin\alpha=\sin i'\leqslant\frac{1}{n}$，只有入射角 $i=\frac{\pi}{2}$ 时，才有可能出现全反射，这种情形下，球外光线在球面上掠入射进入球内。除此之外，球内光线在球面上的入射角均小于全反射临界角，所以被部分反射回球内，再经球面折射出来。

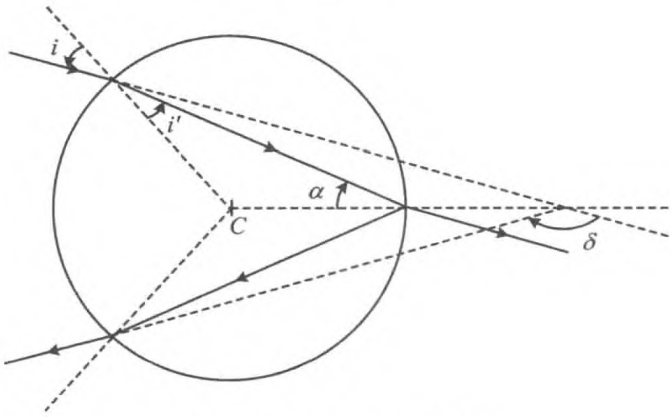


图 1.18 光线射入球形水滴

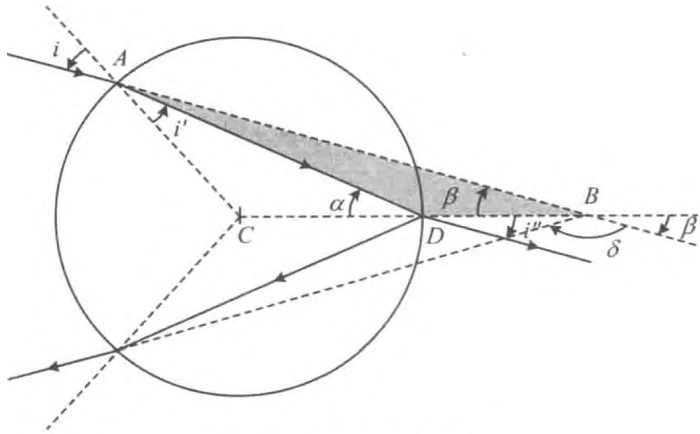


图 1.19 水滴内光线的角度

(2) 若记在另一侧面光线的折射角为 i''，则

$$\sin i''=n\sin\alpha$$

即得 $i''=i$。

记入射光线与 D 点处法线的夹角为 β，利用 $\triangle ADB$ 内外角的关系，可得

$$\beta=\alpha-(i-i')=2\alpha-i$$

于是偏向角为

$$\delta_1 = i'' - \beta = i - (2\alpha - i) = 2(i - \alpha)$$

$$= 2\left[i - \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right)\right]$$

(3) 从图 1.19 中可看出，反射光线的偏向角为

$$\delta = \pi - 2\beta = \pi - 2(2\alpha - i)$$

$$= \pi - 2\left[2\arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right) - i\right]$$

(4) 使偏向角 δ 的一阶导数为 0，即

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}i} = -4\frac{\frac{\cos i}{n}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin i}{n}\right)^2}} + 2$$

$$= 2 - \frac{4\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} = 0$$

可得 $4\cos^2 i + \sin^2 i = n^2$，整理后，有 $\cos^2 i = \dfrac{n^2-1}{3}$，即偏向角 δ 最小的条件为

$$i = \arccos\sqrt{\frac{n^2-1}{3}}$$

【例 1.9】 直角锥棱镜是由 3 个相互垂直的平面构成的玻璃四面体，相当于从立方体中切下一角，如图 1.20 所示，证明从斜面射入的光线，经过三个面依次反射后，将沿着入射的方向返回。

分析　进入棱锥的光线在每一个直角面上都发生全反射。这种棱镜也被称作阿波罗棱镜，1969 年阿波罗 11 号首次将由 100 块直角锥棱镜组成的阵列反射器送上月球，用它反射来自地球的激光，用这种方式准确地测定了月球与地球之间的距离。

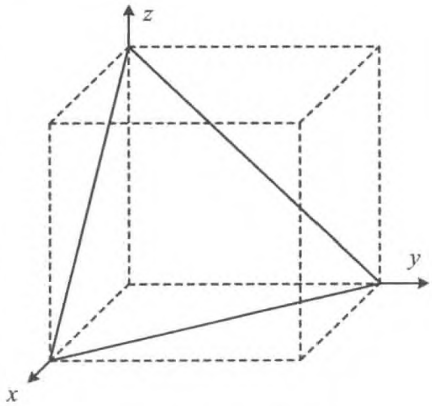


图 1.20　直角棱锥

解　以该棱锥直角的三个棱作为直角坐标轴，从斜面进入棱锥的光线的方向可以用矢量表示为

$$\boldsymbol{k} = k_x\boldsymbol{e}_x + k_y\boldsymbol{e}_y + k_z\boldsymbol{e}_z$$

其中，$\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ 分别为沿坐标轴方向的单位矢量，k_x，k_y，k_z 为相应的方向余弦。

由于e_x, e_y, e_z代表光线矢量的分量，每一个分量分别与一个反射面垂直。则被每一个面反射后，相应的分量方向反转，所以经过三个面反射后光线的矢量变为

$$k' = -(k_x e_x + k_y e_y + k_z e_z) = -k$$

该矢量与从斜面进入棱锥的光线矢量平行，因而在经过斜面折射后，出射的方向与射向斜面的光线平行，而方向恰好相反。

自行车的尾灯就是按照这一原理设计的。尾灯中有许多用红色塑料制成的直角锥棱，这些棱锥整齐地排成阵列，就组成了一个向后反射器。夜间，当汽车灯光照在它上面时，无论光的入射方向如何，反射光都能返回汽车，而且光强远大于一般的漫反射光，就像发光的红灯，使汽车驾驶员能够识别，以保证安全。

【例 1.10】 平静水面下深度 s 处有一个物点，在水面上物点正上方的观察者能否清晰地看到该物点？如果能够，物点看起来在何处？

分析 进入眼睛的光才能被看见。由于观察者总是认为光线沿直线传播，所以总是根据进入眼睛的光线的方向判断物的位置。本题中，物在水面下，水中的光线进入空气，方向要偏折，所以眼睛所看到的物的位置与物的实际位置并不一致。

解 水下物点发出的光线束，经过平面折射后如果仍能汇聚于同一点，则可以清晰成像。

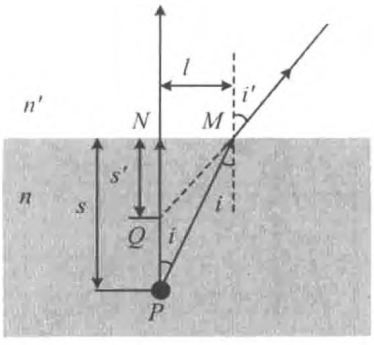


图 1.21　傍轴光线经平面折射成像

如图 1.21 所示，从物点 P 发出两条光线，一条正入射到水面，另一条入射角为 i。这两条光线反向延长交于水面下的 Q 点。在由入射光线构成的直角三角形 PNM 和折射光线的反向延长线构成的直角三角形 QNM 中，有几何关系：

$$s' = l\cot i', s = l\cot i$$

于是

$$s' = s\frac{\cot i'}{\cot i} = s\frac{\sin i}{\sin i'} \cdot \frac{\cos i'}{\cos i}$$

根据折射定律

$$n\sin i = \sin i'$$

Q 点到水面的距离为

$$s' = \frac{s}{n} \cdot \frac{\cos i'}{\cos i}$$

可见不同方向的光线汇聚点 Q 并不相同，这样一来，就无法成像。

而实际上，能够同时进入眼睛瞳孔的光线，才能在眼中成像，这就要求成像的光束发散角很小，即上述两条光线与眼睛和物点连线之间的夹角很小，即 i 很小，相应地 i' 也很

小，于是有

$$i \ll 1, i' \ll 1 \tag{1}$$

则

$$\cos i \approx 1 - \frac{i^2}{2} \approx 1$$

$$\cos i' \approx 1 - \frac{i'^2}{2} \approx 1 \tag{2}$$

于是 $\frac{\cos i'}{\cos i} \approx 1$，可得

$$s' \approx s \frac{\sin i}{\sin i'} = s \frac{n'}{n} \tag{3}$$

发散角 i 和 i' 很小的光线束可近似汇聚于同一点而成像。

光线发散角 i 和 i' 较小，即光束满足式(1)，被称作光线满足傍轴条件(近轴条件)。

光学成像中，式(2)是忽略小角 i 和 i' 的高阶小量的近似，这种近似被称作傍轴近似。在傍轴条件下，物点发出的光线通过平面折射后可以成像。

【例 1.11】 例 1.10 中，如果是不在物的正上方观察，而是在水面上斜向下观察，所看到的物在何处？

解　如图 1.22 所示，可知观察者相对于物的方位不同时，所看到的像的位置也不同，所以，两者的相对方位应当作为已知量。

不妨设从位于水面上 O 点正下方的物点 P 发出的光线在界面 A 处的入射角为 i，折射角为 i'；另一条近邻的光线在界面 B 处入射角为 $i+\delta i$，相应的折射角为 $i'+\delta i'$，如图 1.22 所示。两条近邻折射光线反向延长后交于 Q 点，Q 点就是在这样的方位所看到的像点，位于 C 点的正下方。

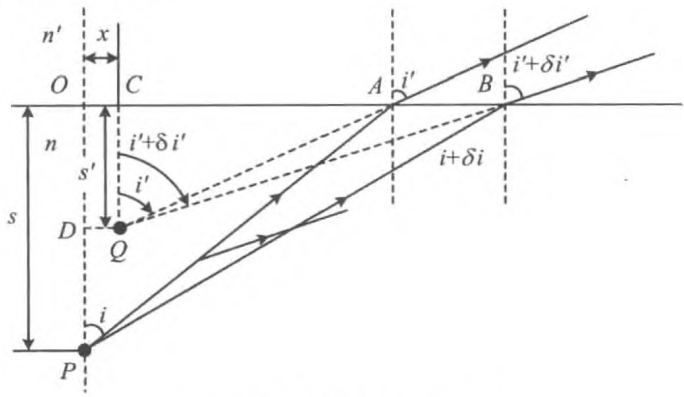


图 1.22　像与物的相对位置

两近邻入射光线入射点的距离为

$$\overline{AB} = \overline{OP}\tan(i+\delta i) - \overline{OP}\tan i = s[\tan(i+\delta i) - \tan i]$$

而在 Rt△BCQ 和 Rt△ACQ 中

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{CB} - \overline{CA} = \overline{CQ}\tan(i'+\delta i') - \overline{CQ}\tan i' \\ &= s'[\tan(i'+\delta i') - \tan i']\end{aligned}$$

于是有

$$s'[\tan(i'+\delta i') - \tan i'] = s[\tan(i+\delta i) - \tan i]$$

可得

$$s' = s\frac{\tan(i+\delta i) - \tan i}{\tan(i'+\delta i') - \tan i'}$$

考虑到进入眼睛的光线方向几乎一致，发散角很小，满足傍轴条件，即 δi 和 $\delta i'$ 都是小量，$\delta i \ll 1$，$\delta i' \ll 1$，于是可做以下傍轴近似：

$$\tan(i+\delta i) \approx \tan i + \frac{\delta i}{\cos^2 i}$$

$$\tan(i'+\delta i') \approx \tan i' + \frac{\delta i'}{\cos^2 i'}$$

进而得到

$$s' = s\frac{\delta i \cos^2 i'}{\delta i' \cos^2 i} \tag{2}$$

由折射定律

$$n\sin i = n'\sin i'$$

可得

$$n\delta i\cos i = n'\delta i'\cos i'$$

即

$$\frac{\delta i}{\delta i'} = \frac{n'\cos i'}{n\cos i}$$

而

$$n'\cos i' = \sqrt{n'^2 - n'^2\sin^2 i'} = \sqrt{n'^2 - n^2\sin^2 i}$$

于是式(2)成为

$$s' = s\frac{n'}{n}\cdot\frac{\cos^3 i'}{\cos^3 i} = \frac{s}{nn'^2}\cdot\frac{\sqrt{(n'^2 - n^2\sin^2 i)^3}}{\cos^3 i} \tag{3}$$

相对于物点 P，像点 Q 在水平方向上也有偏移，由图 1.22 知，偏移的距离 x 可表示为

$$x = \overline{OC} = \overline{OA} - \overline{CA} = \overline{OP}\tan i - \overline{CQ}\tan i' = s\tan i - s'\tan i'$$

而

$$s'\tan i' = s'\frac{n'\sin i'}{n'\cos i'} = \frac{s}{nn'^2}\cdot\frac{\sqrt{(n'^2-n^2\sin^2 i)^3}}{\cos^3 i}\cdot\frac{n\sin i}{\sqrt{n'^2-n^2\sin^2 i}}$$

$$= \frac{s}{n'^2}\cdot\frac{(n'^2-n^2\sin^2 i)\sin i}{\cos^3 i} = s\tan i\left(\frac{n'^2-n^2\sin^2 i}{n'^2\cos^2 i}\right)$$

于是有

$$x = s\tan i - s\tan i\left(\frac{n'^2-n^2\sin^2 i}{n'^2\cos^2 i}\right)$$

$$= s\tan i\left(\frac{n'^2\cos^2 i - n'^2 + n^2\sin^2 i}{n'^2\cos^2 i}\right)$$

$$= s\tan i\left(\frac{n^2\sin^2 i - n'^2\sin^2 i}{n'^2\cos^2 i}\right)$$

即

$$x = s\tan^3 i\left(\frac{n^2-n'^2}{n'^2}\right) \tag{4}$$

【例 1.12】 如图 1.23 所示，使一束原来向 P 点汇聚的光在达到 P 点之前通过一玻璃平板，玻璃板垂直于光束的轴线。问汇聚点如何移动？移动多少？

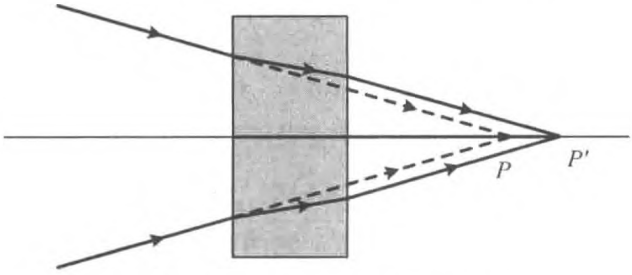


图 1.23　被玻璃平板折射的光线

分析　入射光束经过玻璃板时，在两个表面处发生折射，因而偏移原来的方向。按照折射定律画出光线的轨迹，利用几何关系即可求解。

解　如图 1.24 所示，可以判断汇聚点从 P 移向较远处的 P'，这时，由于沿着光束轴线方向的入射光没有偏折，所以只需求出任意一条入射光线与沿着光束轴线方向入射的光线的交点即可确定新的汇聚点 P'。

可以利用图 1.24 中的几何关系得到 $l = d\tan i$，$l' = d\tan i'$，$h = \Delta l\cos i$，所以

$$\Delta s' = \frac{h}{\sin i} = \frac{d(\tan i - \tan i')\cos i}{\sin i}$$

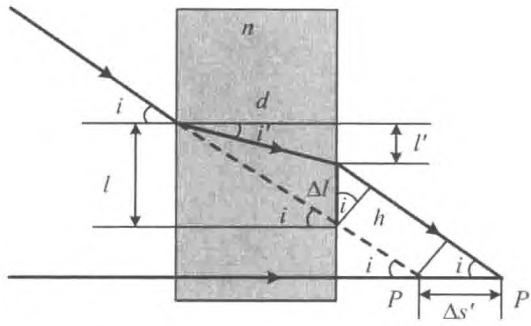


图 1.24 折射光线汇聚点的偏移

利用折射定律 $n\sin i' = \sin i$，可以得到

$$n\cos i' = n\sqrt{1-\sin^2 i'} = \sqrt{n^2 - n^2\sin^2 i'} = \sqrt{n^2 - \sin^2 i}$$

于是

$$\Delta s' = \frac{d(\tan i - \tan i')\cos i}{\sin i} = \frac{d(\tan i - \tan i')}{\frac{\sin i}{\cos i}}$$

$$= d\left(1 - \frac{\sin i'}{\cos i'}\frac{\cos i}{\sin i}\right) = d\left(1 - \frac{\cos i}{n\cos i'}\right)$$

$$= d\left(1 - \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}\right)$$

入射光束满足近轴条件，即入射角很小，$\cos i \approx 1$，而 $\sin^2 i \approx i^2 \approx 0$，得到

$$\Delta s' \approx d\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

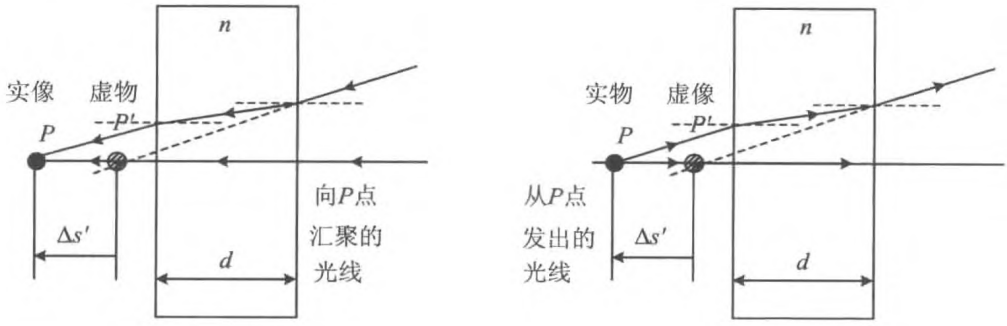
如图 1.25 所示，在傍轴条件下，向一点汇聚的光束经玻璃平板折射后的光束的中心（即折射光束的汇聚点），与从物点发出的光束经玻璃平板折射后的中心（即折射光束反射延长线的汇聚点）具有相似的性质。

从成像的观点看，入射光束的中心是物点，那么对前者而言，物点是延长的入射光线的中心，这些光线是不存在的，可以称之为“虚光线”，虚光线的汇聚点可以称之为“虚物”，也就是虚物成实像；而对后者而言，物点发出的是“实光线”，入射光束的中心是实际存在的，称之为“实物”。

折射光束的中心是像点，那么对前者而言，像点是折射后的实光线的汇聚点，可以称之为“实像”；而对后者而言，像点是折射光束反向延长后的汇聚点，是这些虚光线的中心，称之为“虚像”。

于是前者就是虚物成实像，而后者是实物成虚像。

由于光路是可逆的，因而物像是共轭的，虚实是对应的。所以这两种情形的本质是相同的。



(a) 汇聚光束入射　　(b) 发散光束入射

图 1.25　经过玻璃平板折射成像

1.2　费 马 原 理

1.2.1　费马原理的表述

两点之间光的实际路径，是光程极小的路径。

在均匀媒质中，光程是光线传播过的距离 s 与传播路径中媒质折射率 n 的乘积 ns；若媒质是非均匀的，其折射率随位置而变化，则两点 P_1，P_2 之间的光程应当是路径积分 $\int_{P_1}^{P_2} n\mathrm{d}s$。在数学上，费马原理可用路径积分的变分表示：

$$\delta(\widehat{P_1P_2}) = \delta\left(\int_{P_1}^{P_2} n\mathrm{d}s\right) = 0 \tag{1.4}$$

1.2.2　费马原理的特例

在某些特定的情形下，光线传播路径的光程也可以是恒定值或极大值。所以有时也这样表述费马原理：两点之间光的实际路径，是光程平稳的路径。这里平稳的含义是光程取极值(极大、极小)或恒定值。

1.2.3 光学成像时的费马原理

光学成像中，物点到像点之间所有的路径光程相等。这一结论通常被称作“物像之间的等光程性”。

1.2.4 典型问题与基本解题方法

通常涉及的问题是根据媒质折射率的特点确定光线的路径，或者为了使光沿特定路径传播需要界面具有特定的形状。这类问题都要根据光程取极值的限制条件解决。

【例 1.13】 如图 1.26 所示，P，Q 是位于平面 Σ 同侧的两个点，试根据费马原理确定光线从 P 经平面反射到达 Q 的路径。

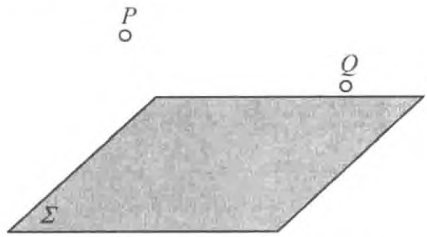


图 1.26 两点位于平面的同侧

解 如图 1.27 所示，取 P 点关于平面 Σ 的对称点 P'，用直线连接得 PP'，$P'Q$，直线 $P'Q$ 与平面 Σ 的交点为 O，则 $\overline{PO}=\overline{P'O}$。

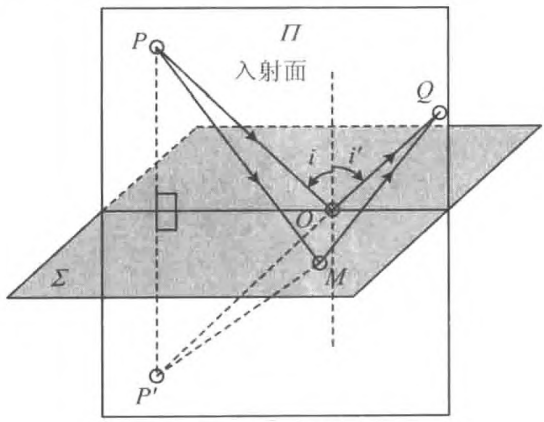


图 1.27 反射光线的路径

在平面 Σ 上 O 点之外任取一点 M，则 $\overline{PM}=\overline{P'M}$。易知 $\overline{P'M}+\overline{MQ}>\overline{P'O}+\overline{OQ}$，即在由 P 经 Σ 上一点到 Q 的所有路径中，$PO+OQ$ 是最短的。而 O 在由 P，P'，Q 三点所确定的平面 Π 内，且 $\Pi\perp\Sigma$，则 Π 就是光线 PO 的入射面。过 O 点作 Σ 的法线，该法线与 PO 的夹角 i 就是入射角，与 QO 的夹角 i' 就是反射角，且 $i'=i$。即光线的路径是遵循反射定律的路径。

【例 1.14】 如图 1.28 所示，平面两侧是不同的光学媒质，P，Q 是位于平面异侧的两个点，试根据费马原理确定光线从 P 经平面折射到达 Q 的路径。

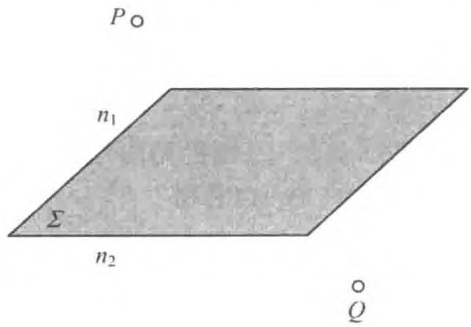


图 1.28　两点位于界面的两侧

解　分别从 P，Q 向平面 Σ 作垂线，垂足分别为 R，K。则两平行直线 PR，KQ 可确定一平面 Π，且 $\Pi\perp\Sigma$，RK 在两平面的交线上，如图 1.29 所示。

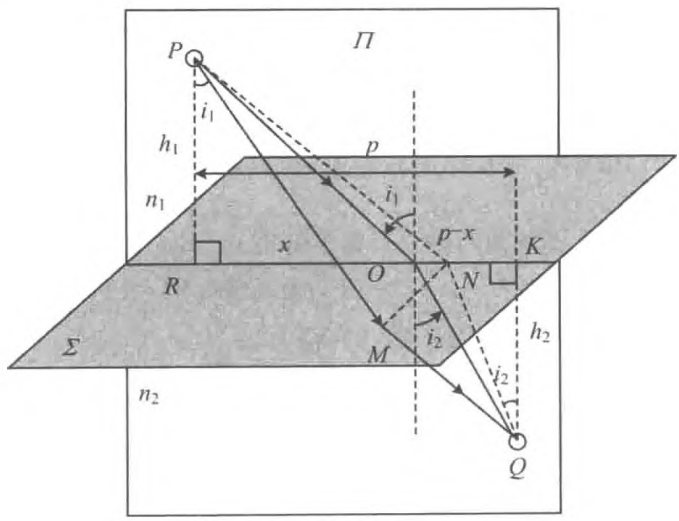


图 1.29　折射光线的路径

在 Σ 上两平面交线之外任取一点 M，从 M 向 Π 作垂线，垂足为 N，连接 PM，MQ，PN，NQ，则得到两个直角三角形 $\triangle PMQ$ 和 $\triangle PNQ$，由于 PM，MQ 分别是两个三角形的斜边，所以一定有 $\overline{PM}>\overline{PN}$，$\overline{MQ}>\overline{NQ}$，即 P，Q 之间的折射光线只有在平面 Π 内才有可能使光程取极小值，而平面 Π 实际上就是从 P 点发出光线的入射面。

在 RK 之间取一点 O，连接 PO，QO，并设 $\overline{RK}=p$，$\overline{RO}=x$，$\overline{PR}=h_1$，$\overline{QK}=h_2$。则路径 PO，OQ 的光程为

$$L = n_1\,\overline{PO} + n_2\,\overline{OQ} = n_1\sqrt{h_1^2+x^2} + n_2\sqrt{h_2^2+(p-x)^2}$$

光程取极小值的条件为 $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}=0$，即

$$\frac{n_1 x}{\sqrt{h_1^2+x^2}} - \frac{n_2(p-x)}{\sqrt{h_2^2+(p-x)^2}} = 0$$

过点 O 作平面 Σ 的法线，记该法线与 PO 的夹角为 i_1，这就是入射角；法线与 OQ 的夹角为 i_2，这就是折射角。从图 1.29 中可以看出

$$\sin i_1 = \frac{x}{\sqrt{h_1^2+x^2}}$$

$$\sin i_2 = \frac{p-x}{\sqrt{h_2^2+(p-x)^2}}$$

于是有

$$n_1\sin i_1 - n_2\sin i_2 = 0$$

这就是折射定律。

从上面两个例子可以看出，反射定律、折射定律是光程取极小值的结果。

【例 1.15】 由费马原理导出傍轴条件下球面折射的物像公式。

分析 费马原理指出，光沿着光程为极值的路径传播。由物点 Q 经球面上 M 点折射到达像点 Q' 的所有光线，其光程应取极值，由此确定实际光线的路径和物像之间的关系。

解 如图 1.30 所示，设球面两侧分别为折射率 n_1，n_2（不妨设 $n_1<n_2$）的两种媒质，球面半径为 r，物距、像距分别为 s，s'。任取一条光线 QM，经折射到达 Q'。过 M 点的半径与光轴的夹角为 θ。则光线 $\overset{\frown}{QMQ'}$ 的总光程为

$$L = n_1\,\overline{QM} + n_2\,\overline{MQ'} \tag{1}$$

在 $\triangle QMC$ 中，由余弦定理，可得

$$\overline{QM} = [r^2+(r+s)^2 - 2r(r+s)\cos\theta]^{1/2}$$

在傍轴条件下，$\cos\theta\approx 1-\dfrac{\theta^2}{2}$，代入上式，有

$$\overline{QM} = s\left[1 + \frac{r(r+s)}{s^2}\theta^2\right]^{1/2} \approx s\left[1 + \frac{r(r+s)}{2s^2}\theta^2\right] = s + \frac{r(r+s)}{2s}\theta^2 \tag{2}$$

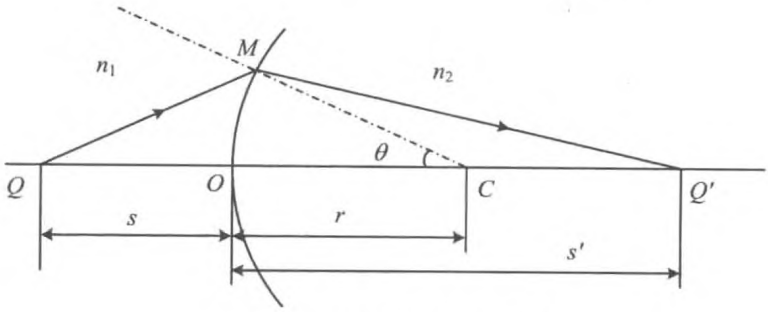


图 1.30　任意一条光线的路径

同理有

$$\overline{MQ'} = s' - \frac{r(s'-r)}{2s'}\theta^2 \tag{3}$$

将式(2)、式(3)代入式(1)，得到

$$L = n_1\left[s + \frac{r(r+s)}{2s}\theta^2\right] + n_2\left[s' - \frac{r(s'-r)}{2s'}\theta^2\right]$$

光程 L 取极值的条件是

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta} = n_1\frac{r(r+s)}{s}\theta - n_2\frac{r(s'-r)}{s'}\theta = 0$$

满足上式的解有两个：① $\theta=0$，即沿光轴传播的光线；② $\theta\neq0$，但 s，s' 满足下述关系的光线：

$$n_1\frac{r(r+s)}{s} - n_2\frac{r(s'-r)}{s'} = 0$$

即得

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r} \tag{4}$$

式(4)即是球面折射的物像公式。当 s、s' 满足该式时，凡从 Q 点发出的傍轴光线都能通过 Q' 点，即 Q' 是 Q 的像点。

另外，还由于

$$\frac{\mathrm{d}^2L}{\mathrm{d}\theta^2} = r\left(n_1\frac{r+s}{s} - n_2\frac{s'-r}{s'}\right) = 0$$

所以 L 取稳定值，即从 Q 点到 Q' 点的所有光线所经历的光程都相等，这就是光学成像的等光程原理，即物点到共轭像点之间所有的路径光程是相等的，简称物像之间等光程。

【例 1.16】 试用费马原理导出傍轴条件下薄透镜的物像公式。

解 如图 1.31 所示，薄透镜由两个球面组成，球心分别为 C_1，C_2，半径分别为 r_1，r_2，球面顶点分别为 O_1，O_2。轴上物点 Q 发出的光线经球面折射后经过像点 Q'。Q 到 O_1 的距离为 s，Q' 到 O_2 的距离为 s'。

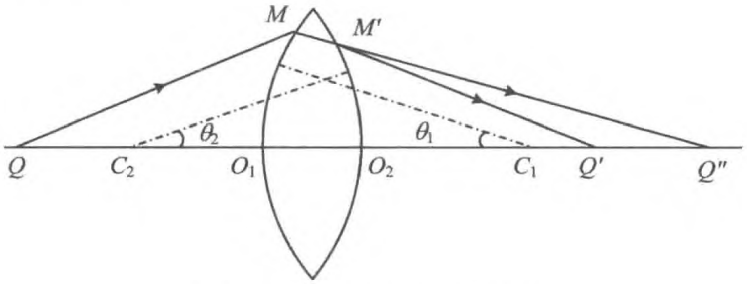


图 1.31 薄透镜成像的等光程性

用逐次成像法，Q 经球面 1 成像为 Q''，Q'' 到球面 1 的距离为 s_1'；Q'' 再经球面 2 成像为 Q'。光线 $\overset{\frown}{QMM'Q'}$ 的光程为

$$L = \overline{QM} + n(\overline{MQ''} - \overline{M'Q''}) + \overline{M'Q'} \tag{1}$$

类似例 1.15，可求得在傍轴条件下，分别有

$$\begin{aligned}
\overline{QM} + n\,\overline{MQ''} &= \left[s + \frac{r_1(r_1+s)}{2s}\theta_1^2\right] - \left[s_1' - \frac{r_1(s_1'-r_1)}{2s_1'}\theta_1^2\right] \\
\overline{M'Q'} &= s_1' + \frac{r_2(s_1'+r_2)}{2s_1'}\theta_2^2 \qquad (2) \\
\overline{M'Q''} &= s' + \frac{r_2(s'+r_2)}{2s'}\theta_2^2
\end{aligned}$$

将式(2)代入式(1)，并考虑到在薄透镜条件下

$$r_1\theta_1 \approx r_2\theta_2 \tag{3}$$

通过计算，简化后得

$$L = \left[s + \frac{r_1(r_1+s)}{2s}\theta_1^2\right] + \left[s' + \frac{r_1^2(s'+r_2)}{2r_2s'}\theta_1^2\right] - n\left(\frac{r_1r_2+r_1^2}{2r_2}\right)\theta_1^2 \tag{4}$$

由极值条件

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta_1} = \frac{r_1(r_1+s)}{s}\theta_1 - n\left(\frac{r_1r_2+r_1^2}{r_2}\right)\theta_1 + \frac{r_1^2(s'+r_2)}{r_2s'}\theta_1 = 0$$

可知，当满足下述关系时：

$$\frac{r_1(r_1+s)}{s} - n\left(\frac{r_1r_2+r_1^2}{r_2}\right) + \frac{r_1^2(s'+r_2)}{r_2s'} = 0$$

即有

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) \tag{5}$$

这种情形下，从 Q 点发出的到 Q' 点的傍轴光线的光程取极值。式(5) 即是薄透镜的物像公式。

【例 1.17】 半径为 R 的反射球内，P_1，P_2 两点相对于球心对称，与球心距离为 b。设光线自 P_1 发出、经球面上 O 点反射后过 P_2 点，如图 1.32 所示。

(1) 试给出光线 P_1O+OP_2 的光程与任意角 θ 的关系。

(2) 利用费马原理计算实际光线的 θ 值。

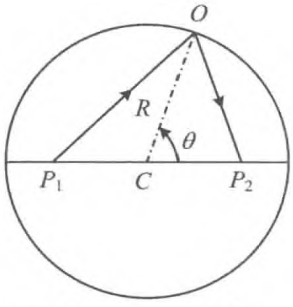


图 1.32　反射球内的光线

分析　用费马原理解题的关键是写出光程的表达式。解题过程一般分为两个步骤：一是直接利用几何关系或折反射定律得到光程的表达式；二是将光程表示为某一变量的函数，求出该函数取极值的条件。

解　本题的光程就是光线的几何路程。

(1) 以 θ 为变量，将余弦定律应用到 $\triangle P_1OC$ 和 $\triangle P_2OC$ 中，可得光程的表达式为

$$L=OP_1+OP_2=(b^2+R^2+2bR\cos\theta)^2+(b^2+R^2-2bR\cos\theta)^2$$

(2) 令 $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}=0$，有

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}=\frac{bR\sin\theta}{(b^2+R^2-2bR\cos\theta)^2}-\frac{bR\sin\theta}{(b^2+R^2+2bR\cos\theta)^2}=0$$

可得 $\theta=0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3\pi}{2}$ 四个值满足 L 为极值的条件。分别代入 $\dfrac{\mathrm{d}^2L}{\mathrm{d}\theta^2}$ 后，可知 $\theta=0,\pi$ 时，光程取极小值；而 $\theta=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}$ 时，光程取极大值。

1.3　光线在变折射率媒质中的传播

1.3.1　变折射率媒质中光线径迹的方程

只讨论较为简单的情况，媒质的折射率仅随空间的一个参量渐变。如图 1.33 所示，

在选定的直角坐标系中，设媒质的折射率仅随坐标 y 改变，用函数表示为

$$n = n(y)$$

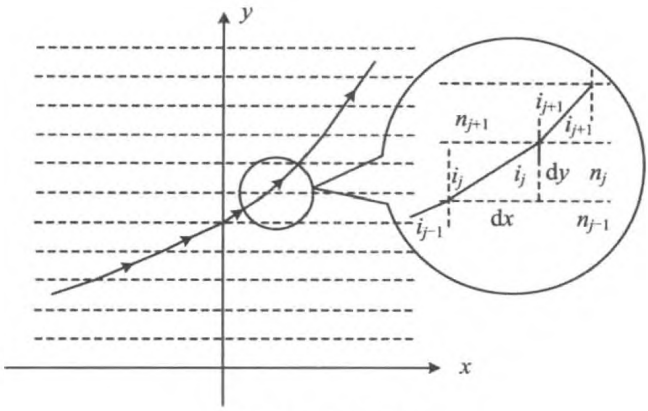


图 1.33 媒质分层

其中的任意一条光线在某一点(x_0, y_0)的方向已知。

可以沿着折射率渐变的方向，将媒质分成一系列厚度为 $\mathrm{d}y$ 的薄层，设每一层中的折射率是均匀的。在其中任意一层的界面上，应用折射定律，有

$$n\sin i = n_j \sin i_j = n_{j+1}\sin i_{j+1} = n(y_0)\sin i(y_0) = n_0 \sin i_0$$

折射率、光线入射角、光线折射角之间的变化关系可表示为

$$n_{j+1} = n_j + \Delta n_j$$

$$i_{j+1} = i_j + \Delta i_j$$

由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cot i$$

利用三角函数公式

$$\sin i = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 i}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}} = \frac{n_0}{n}\sin i_0$$

可以得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{n^2 - n_0^2 \sin^2 i_0}{n_0^2 \sin^2 i_0} \tag{1.5}$$

这就是渐变折射率媒质中的光线方程。可以根据折射率分布函数 $n = n(y)$和已知条件 n_0, i_0 求解光线方程。

1.3.2　典型问题与基本解题方法

既可以根据媒质折射率分布的特征确定光线传播的路径，也可以反过来根据光线传播的路径推断折射率分布的特征。

【例 1.18】 光线在媒质中传播的路径是抛物线，试讨论媒质折射率分布的特征及光线的入射方式。

解　若媒质的折射率沿着 y 方向渐变，则光线的方程为

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{n^2 - n_0^2 \sin^2 i_0}{n_0^2 \sin^2 i_0} \tag{1}$$

设在直角坐标系中，抛物线的方程为

$$y = ax^2 + bx + c$$

则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2ax + b$$

于是有

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 &= 4a^2x^2 + 4abx + b^2 \\ &= 4a(ax^2 + bx + c) + b^2 - 4ac \\ &= 4ay + b^2 - 4ac\end{aligned} \tag{2}$$

结合式(1)、式(2)，有

$$\frac{n^2}{n_0^2 \sin^2 i_0} - 1 = 4ay + b^2 - 4ac$$

即得

$$n(y) = n_0 \sin i_0 \sqrt{4ay + b^2 - 4ac + 1} \tag{3}$$

(1) 若 $a>0$，是开口向上的抛物线，如图 1.34(a)所示。

式(3)也可表示为

$$n(y) = 2\sqrt{a} n_0 \sin i_0 \sqrt{\frac{b^2 - 4ac + 1}{4a} + y}$$

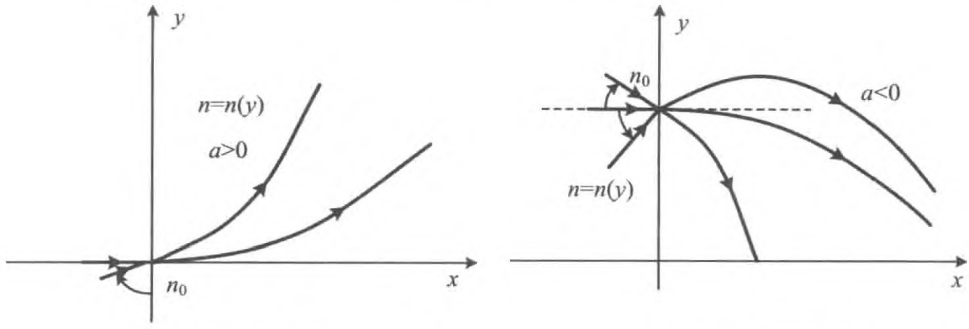
光线从外界射入，入射方式不同，抛物线的形状也会有所不同。

(2) 若 $a<0$，是开口向上的抛物线，如图 1.34(b)所示。

式(3)也可表示为

$$n(y) = 2\sqrt{-a} n_0 \sin i_0 \sqrt{\frac{b^2 - 4ac + 1}{-4a} - y}$$

光线从外界射入，入射方式不同，抛物线的形状也会有所不同。



(a) 开口向上　　(b) 开口向下

图 1.34　光线的径迹是抛物线

【例 1.19】 光线在媒质中传播的路径是圆弧，试讨论媒质折射率分布的特征及光线的入射方式。

解　设在直角坐标系中，光线的轨迹为圆，圆心在(x_0, y_0)，半径为 r，其方程为

$$(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2 = r^2$$

于是

$$y = y_0 \pm \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}$$

而

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm \frac{x - x_0}{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}} = \pm \frac{\sqrt{r^2 - (y - y_0)^2}}{y - y_0}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{r^2}{(y - y_0)^2} - 1}$$

结合光线方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{n^2 - n_0^2 \sin^2 i_0}{n_0^2 \sin^2 i_0}$$

可得

$$\frac{r^2}{(y - y_0)^2} - 1 = \frac{n^2}{n_0^2 \sin^2 i_0} - 1$$

即有

$$n(y) = \begin{cases} + \dfrac{n_0 r \sin i_0}{y - y_0} & (y > y_0) \\ - \dfrac{n_0 r \sin i_0}{y - y_0} & (y < y_0) \end{cases}$$

【例 1.20】 如图 1.35 所示，用变折射率材料制成的微透镜用以聚焦平行光束，其折射率沿径向对称分布。已知其焦距 f 远大于透镜口径 a，而 a 又远大于其厚度 d。

(1) 定性分析折射率 $n(r)$ 随 r 是增大还是减小；

(2) 定量导出 $n(r)$ 函数，设轴上折射率为 n_0。

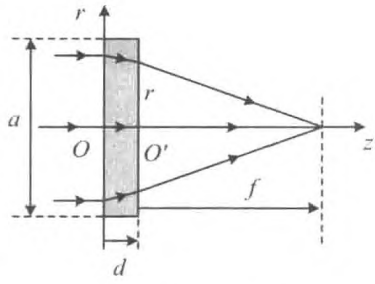


图 1.35　微透镜

解　(1) 根据对称性判断，折射率沿径向变化。

由于远离轴线的光线，传播的距离较大，根据等光程的要求，即可判断出折射率随 r 减小。

(2) 从透镜的左侧平面算起，不同位置入射的光线，到焦点的光程相等。由于 $d \ll a \ll f$，在透镜内倾斜的光线传播的距离近似等于透镜的厚度，即可得

$$n(r)d + \sqrt{f^2 + r^2} = n_0 d + f$$

式中，n_0 为轴线处的折射率。解得

$$n(r) = n_0 + \frac{f - \sqrt{f^2 + r^2}}{d} = n_0 + \frac{f}{d}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{r^2}{f^2}}\right)$$

$$\approx n_0 + \frac{f}{d}\left(1 - 1 - \frac{r^2}{2f^2}\right)$$

即

$$n(r) = n_0 - \frac{r^2}{2fd}$$

【例 1.21】 如图 1.36 所示，厚度为 d 的玻璃块，折射率随高度 y 变化的关系为

$$n(y) = \frac{n_0}{1 - \frac{y}{r_0}}$$

其中，$n_0 = 1.2$，$r_0 = 13\ \text{cm}$。光线沿 x 轴从原点处射入，从另一侧 A 点出射的角度为 30°。试求：

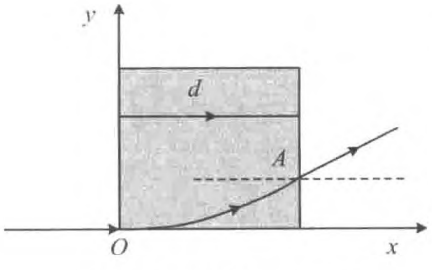


图 1.36　变折射率玻璃块

(1) 玻璃中光线的径迹；

(2) 出射点处玻璃的折射率 nA；

(3) 玻璃的厚度 d。

解　(1) 根据例 1.19 题

$$n(y) = -\frac{n_0 r \sin i_0}{y - y_0}$$

光线的径迹是圆，圆心在坐标原点之上。

将折射率关系化为标准的表达式，得到

$$n(y) = \frac{n_0}{1 - \frac{y}{r_0}} = -\frac{n_0 r_0}{y - r_0}$$

可见光线从外部入射时，入射角 $i_0 = 90^\circ$，圆心位于 $x = 0, y_0 = r_0$ 处，半径为 r_0。

(2) 根据光的可逆性原理，若使光线自另一侧的 A 点处以 30° 入射，则有

$$n_A r \sin i_A = n_0 r \sin i_0$$

即

$$n_A = \frac{n_0 \sin i_0}{\sin i_A} = \frac{1 \times \sin 90^\circ}{\sin 30^\circ} = 2.0$$

(3) 出射点 A 的位置满足

$$n_A = \frac{n_0}{1 - \frac{y_A}{r_0}}$$

可得

$$y_A = r_0\left(1 - \frac{n_0}{n_A}\right)$$

厚度为

$$\begin{aligned} d &= x_A - 0 = \sqrt{r_0^2 - (y_A - y_0)^2} \\ &= \sqrt{r_0^2 - \left[r_0\left(1 - \frac{n_0}{n_A}\right) - r_0\right]^2} \\ &= r_0\sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{2} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{3} r_0}{2} \end{aligned}$$

算得

$$d = 11.3\ \text{cm}$$

【例 1.22】 光线在媒质中传播的路径是正弦曲线，试讨论媒质折射率分布的特征及光线的入射方式。

解 设光轴沿 z 轴方向，正弦曲线的方程为

$$x = A\sin\frac{2\pi z}{L}$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = \frac{2\pi A}{L}\cos\frac{2\pi z}{L} = \sqrt{\frac{n^2(x)}{n_0^2 \sin^2 i_0} - 1}$$

于是得到

$$\left(\frac{2\pi A}{L}\right)^2 \cos^2\frac{2\pi x}{L} = \frac{n^2}{n_0^2 \sin^2 i_0} - 1$$

解得

$$\begin{aligned} n(x) &= n_0 \sin i_0 \sqrt{\left(\frac{2\pi A}{L}\right)^2 \left(1 - \sin^2 \frac{2\pi z}{L}\right) + 1} \\ &= n_0 \sin i_0 \sqrt{\frac{(2\pi A)^2 + L^2}{L^2} - \frac{(2\pi)^2}{L^2} x^2} \\ &= n_0 \sin i_0 \frac{\sqrt{(2\pi A)^2 + L^2}}{L} \sqrt{1 - \frac{4\pi^2}{4\pi^2 A^2 + L^2} x^2} \\ &= \frac{2\pi n_0 \sin i_0}{\alpha L} \sqrt{1 - \alpha^2 x^2} \end{aligned}$$

若记

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{A^2 + \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2}}$$

则

$$n(x) = \frac{2\pi n_0 \sin i_0}{\alpha L} \sqrt{1 - \alpha^2 x^2} \tag{1}$$

折射率沿 x 方向的分布也可表示为

$$n(x) = n(0) \sqrt{1 - \alpha^2 x^2} \tag{2}$$

如图 1.37 所示，若光线自外部入射，入射点在轴线处，在界面处的入射角为 θ_0，在介质内部的折射角 i_1（i_1 即为光线的方向与光轴之间的夹角）可通过下式确定：

$$\sin i_1 = \frac{\sin \theta_0}{n_0} \tag{3}$$

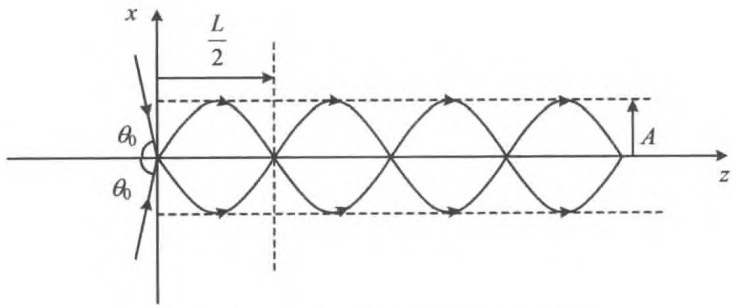


图 1.37　光线传播的径迹是正弦曲线

在介质内部，正弦曲线在轴线处的斜率为

$$\tan i_1 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = \frac{2\pi A}{L}\cos\frac{2\pi z}{L}\Big|_{z=0} = \frac{2\pi A}{L} \tag{4}$$

而

$$\tan i_1 = \frac{\sin i_1}{\cos i_1} = \frac{\sin i_1}{\sqrt{1-\sin^2 i_1}} = \frac{2\pi A}{L}$$

即

$$\sin i_1 = \frac{A}{\sqrt{A^2 + \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2}} = \alpha A \tag{5}$$

同时有

$$\cos i_1 = \frac{\frac{L}{2\pi}}{\sqrt{A^2 + \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2}} = \frac{\alpha L}{2\pi} \tag{6}$$

这种情况下，正弦曲线为

$$x = \frac{\sin i_1}{\alpha}\sin\left(\frac{\alpha}{\cos i_1}z\right) \tag{7}$$

由式(3)、式(5)、式(6)可得到

$$\begin{cases} A = \dfrac{\sin i_1}{\alpha} = \dfrac{\sin\theta_0}{\alpha n_0} \\ L = \dfrac{2\pi}{\alpha}\cos i_1 = \dfrac{2\pi\sqrt{n_0^2 - \sin^2\theta_0}}{\alpha n_0} \end{cases} \tag{8}$$

若以这种方式设计并制造折射率沿着径向 r 变化的光纤，即图 1.37 表示包含光纤轴线的截面，而光纤轴线处的折射率为 n_0，距轴线 r 处的折射率为

$$n(r) = n_0\sqrt{1-\alpha^2 r^2}$$

则在光纤内部，光纤传播的径迹就是正弦线。径迹的特征，即距轴线最远的距离 A、与光轴交点的间隔 $L/2$ 可由式(8)得到。

实际上，由于光纤很细，通常在光纤中传输的光线，在经过轴线处，与光轴的夹角 i_1 是个很小的角，即 $i_1 \ll 1$，相应地，要求从光纤端面处入射的光线，入射角也很小，即 $\theta_0 \ll 1$。则$\sin^2\theta_0 \approx 0$，于是光纤中正弦曲线的周期为

$$L = \frac{2\pi}{\alpha} \tag{9}$$

这种情形下，只要将从端面入射的光束的发散角控制在一个较小的范围内，或者入射的光束满足傍轴条件，而且使入射点在轴线处，则在光纤内部，每经过 $\Delta z = \frac{\pi}{\alpha}$ 的距离，

光束就会在光纤的轴线上汇聚一次。这种光纤被称作自聚焦光纤，如图 1.38 所示。

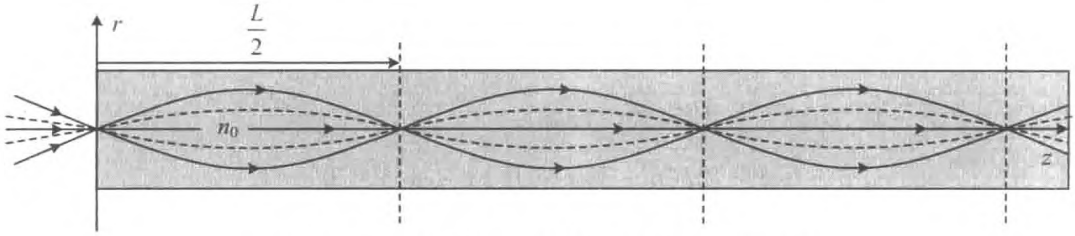


图 1.38　自聚焦光纤中光线的径迹与汇聚点(焦点)

【例 1.23】 如图 1.39 所示，如果以 S 为中心的发散光束经过折射率为 n 的平凸透镜后变为波面为 CN 的平行光束，则透镜凸面的形状必为以 S 为焦点的旋转圆锥曲面(当 $n>1$ 时为旋转双曲面；当 $n<1$ 时为旋转椭球面)，试用费马原理证明之。

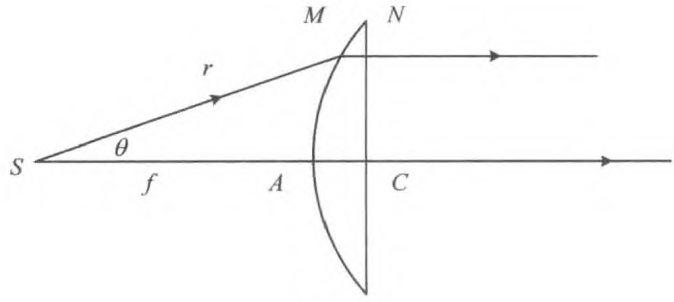


图 1.39

分析　由费马原理可知，由 S 发出的所有光线到达 CN 平面的光程相等。设 M 为凸面上的任一点，其坐标可由 r,θ 确定。由等光程性定出 M 点空间位置的轨迹，即可确定凸面的形状。

解　因为由 S 发出的所有光线到达 CN 平面的光程是相等的，即沿轴线的光线 SAC 与任意光线 SMN 的光程相等，则有

$$\overline{SA} + n\,\overline{AC} = \overline{SM} + n\,\overline{MN}$$

设 $\overline{SA} = f$，$\overline{SM} = r$，则有

$$f + n\,\overline{AC} = r + n\,\overline{MN}$$

或

$$r = f + n(\overline{AC} - \overline{MN}) \tag{1}$$

而由几何关系

$$\overline{AC} - \overline{MN} = r\cos\theta - f$$

代入式(1),可得

$$r = \frac{f(1-n)}{1-n\cos\theta} \tag{2}$$

若令 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,$\cos\theta = \frac{x}{r}$,代入式(2),有

$$y^2 - 2f(n-1)x - f^2(1-n)^2 = 0 \tag{3}$$

式(2)和式(3)即分别是极坐标下和直角坐标下的圆锥曲线的方程。由旋转对称性可知,凸面为上述圆锥曲线绕光轴旋转而成,即凸面为旋转圆锥曲面。

第2章　光学成像

光学成像理论是几何光学重要的组成部分，是以光线的实验定律为基础发展起来的关于成像的理论体系。

2.1　折射球面、反射球面与薄透镜的成像

2.1.1　光学成像的基本概念

1. 光学成像元件

光学成像是通过光线的反射或折射而实现的。

成像元件就是通过反射或折射使光线成像的基本光学装置。成像元件包括单个反射面(图 2.1)、单个折射面(图 2.2)和单个薄透镜(图 2.3)。

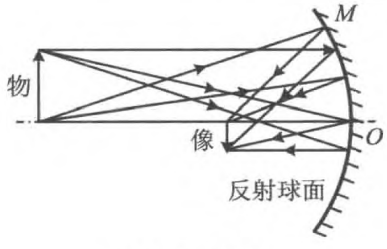


图 2.1　反射面

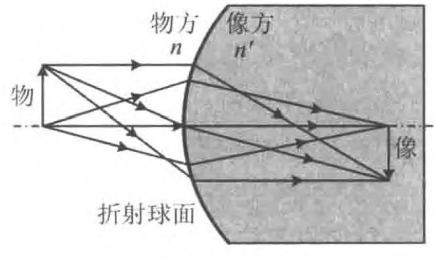


图 2.2　折射面

2. 同心光束

物可以看做是由一系列的点构成的。

物上的某一个点所发出的光束，经过光学成像元件后，如果都汇聚到同一点，则汇聚点就是与该物点所对应的像点。

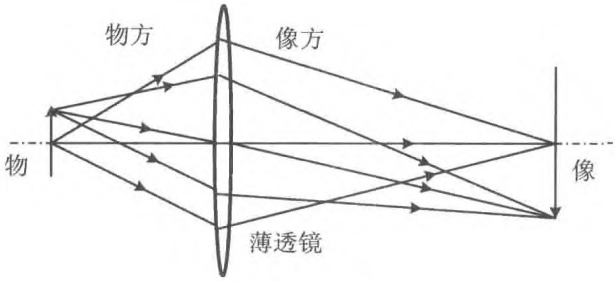


图 2.3 薄透镜

若每一个物点都有一个对应的像点，则像点的集合就构成像。

物点发出同心光束，同心光束汇聚成像点。

所以光学成像的过程，就是光学元件将同心光束变换为同心光束的过程。

保持光束的同心性不变，是成像的必要条件。

3. 物方与像方

成像元件将光线所在的空间分为物方空间（简称物方）和像方空间（简称像方）。

入射光线所在的空间属于物方，出射光线所在的空间属于像方。

对于折射光学元件（折射面、薄透镜），物方、像方分别在元件的两侧；对于反射光学元件，物方、像方在反射面的同一侧。

光学成像，其实就是成像元件将物方的同心光束变换为像方的同心光束的过程。

4. 实物与虚物

如果物在物方，则入射光束的中心在物方，即射向成像元件的光线是发散的光束，这样的物被称作实物。

如果物不在物方，即射向成像元件的光线是汇聚的光束，则入射光束的中心不在物方，这样的物被称作虚物。

如图 2.4 所示，物在透镜 L_1 的物方，当然是实物；该实物经 L_1 成像于透镜 L_2 的物方。像上的每一点都是同心光束的中心，所以对于透镜 L_2 而言，L_1 的像就是物，该像位于 L_2 的物方，所以依然实物。

如图 2.5 所示，若仅考虑 L_1 成像，则 L_1 的像位于透镜 L_2 的像方。然而，对透镜 L_2 而言，入射的光束都是同心光束，所以依然可以成像，只不过这些光束是汇聚的同心光束，而且光束的中心不在其物方，则对于 L_2，L_1 的像就是虚物。

对于透镜 L_2，入射光线的延长线，称作虚光线，入射光线的虚光线的汇聚点，是虚物点。而入射的实光线的汇聚点，即物方实光线的中心，是实物点。

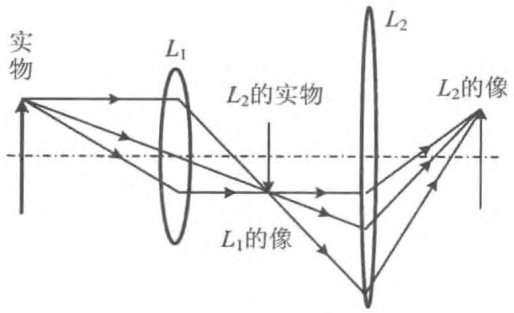


图 2.4 实物成像

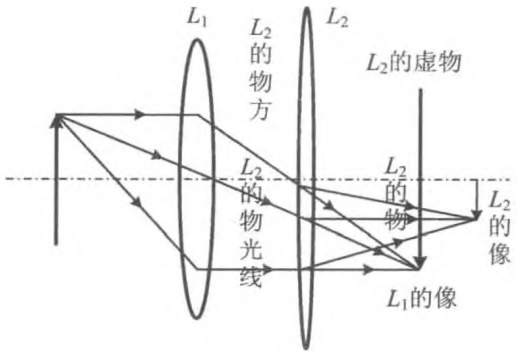


图 2.5 虚物成像

5. 实像与虚像

如果像在像方，即出射光束在像方汇聚成像，这样的像称作实像，如图 2.6 所示。

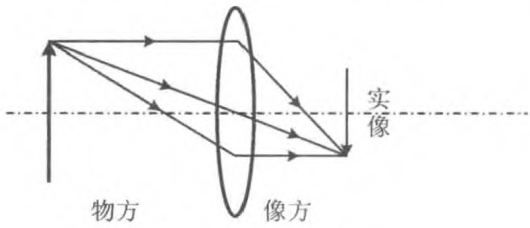


图 2.6 实物成像

如果出射光束在像方是发散的，则不能成实像；但是，由于出射光束也是同心光束，将这样的光束反向延长后一定能够汇聚。像方光线的反向延长线称作像方的虚光线，这些虚光线会的聚成点就是虚像点，如图 2.7 所示。

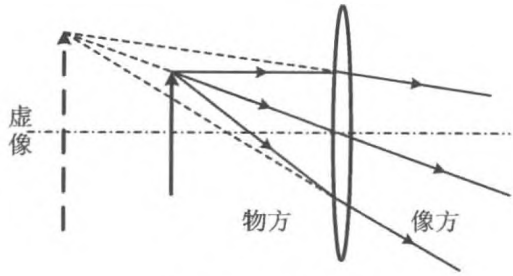


图 2.7 虚物成像

实物、虚物都是物方同心光束的中心；实像、虚像都是像方同心光束的中心。从这一观点看，虚物与实物并无本质差别，虚像与实像也无本质差别。图 2.8 显示了各种不同类型的成像情形。

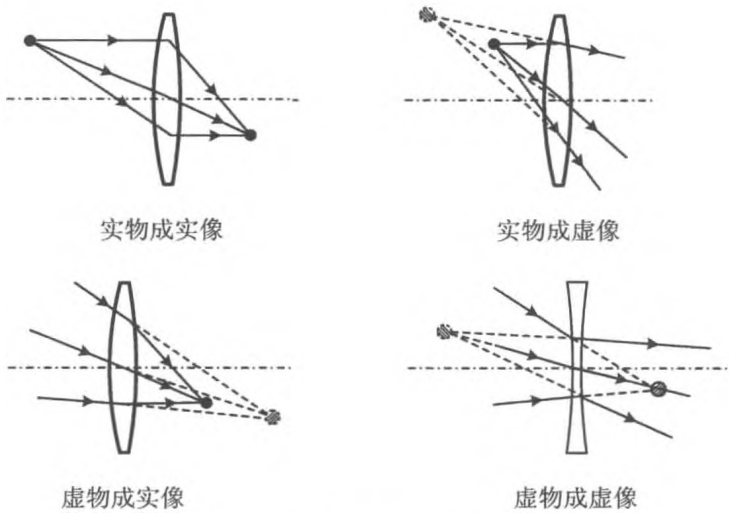


图 2.8 各种不同的成像情形

2.1.2 光学成像的符号约定

实物在物方，而虚物不在物方；实像在像方，而虚像不在像方。这就要求能够区分实物与虚物的物距以及实像与虚像的像距。同时，凸球面与凹球面的成像也有差别，它们的曲率半径也需要加以区分。

在光学成像中，上述距离的差别以及球面曲率半径的差别，可以通过取正负值加以

区分。所以成像光学的符号约定主要是对距离和半径取正值或取负值的约定。除此之外，还涉及物、像长度正负的约定以及有关角度正负的约定。

需要指出的是，符号约定因人而异，并无优劣之分。但是，采用不同的约定，会导致成像公式具有不同的形式。

采用最多的约定有两种，一种是高斯的约定，另一种是笛卡尔的约定。以下分别加以介绍。

1. 高斯符号约定

(1) 球面如果是朝向物方的凸球面，曲率半径取正值；球面如果是朝向物方的凹球面，曲率半径取负值。

(2) 物在物方，物距取正值，即实物的物距为正值；物不在物方，物距取负值，即虚物的物距为负值。

(3) 像在像方，像距取正值，即实像的像距为正值；像不在像方，像距取负值，即虚像的像距为负值。

(4) 物方焦点在物方，物方焦距取正值，反之取负值；像方焦点在像方，像方焦距取正值，反之取负值。

(5) 垂轴的物或者像指向主光轴的上方，则其长度(或高度)取正值；反之取负值。

(6) 光线的角度自主光轴或球面的法线算起，逆时针方向为正，顺时针方向为负。

2. 笛卡尔符号约定

如图 2.9 所示，可以设光线的入射面为 xOy 平面(即纸面)，x 轴沿主轴(即光具组的对称轴)，其正方向与光的入射方向一致，习惯上的做法是入射光从左向右。对于单球面系统，x 轴原点($x=0$)通常选在球面的顶点(对光具组视需要可以有不同的选择)。y 轴与 x 轴垂直，y 轴的正方向朝上，原点($y=0$)在主轴上。则对线段和角度的正负做下述约定：

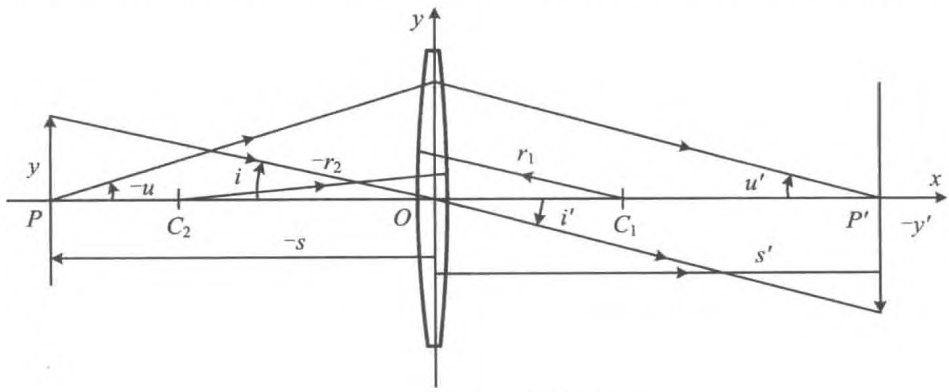


图 2.9 笛卡尔符号约定

(1) 线段的正负与坐标系的规定一致,即线段沿坐标轴的正方向则取正值;反之则取负值。

(2) 角度从光具组的主轴或球面的法线算起,光线转过的角度取锐角,旋转方向顺时针为正,逆时针为负。

(3) 当光线沿 x 轴负方向传播时,所经历介质的折射率为负值。

这种约定实际上是以球心所在位置的坐标表示球面的曲率半径;以物和像位置的横坐标值 x 和 x' 来表示物距和像距;以物和像端点的纵坐标值之差 y 和 y' 来表示物和像的长度(或高度)。图 2.9 中取负值的物理量前面加负号"-"加以表示。

2.1.3 光学成像元件的基点和基平面

1. 主平面和主点

横向放大率等于 +1 的一对共轭的物像平面称作物方主平面和像方主平面。

上述两主平面与光轴的交点分别称作物方主点和像方主点。

成像元件的物方主平面和像方主平面在同一个位置。单球面的主平面就是在光轴处球面的切平面,薄透镜的两球面由于靠得很近,所以也认为两个主平面是重合的。透镜的主平面与光轴的交点称作透镜的光心。

物距和像距都是从各自的主平面算起的,分别是物到物方主平面的距离和像到像方主平面的距离。

2. 焦平面和焦点

与无穷远处的垂轴物平面共轭的像平面称作像方焦平面;与无穷远处的垂轴像平面共轭的物平面称作物方焦平面;

上述两焦平面与光轴的交点分别称作像方焦点和物方焦点。

焦平面到主平面的距离称作焦距。焦距是特殊的物距和像距。

2.1.4 光学元件的成像公式

球面半径记作 r,物方折射率、像方折射率分别记作 n,n',物距、像距分别记作 s,s',物方焦距、像方焦距分别记作 f,f',物、像的长度分别记作 y,y'。

1. 折射面的物像公式

如图 2.10 所示,在高斯的符号约定下,成像公式为

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r} \tag{2.1a}$$

其中

$$\Phi = \frac{n' - n}{r} \tag{2.2a}$$

为折射面的光焦度。

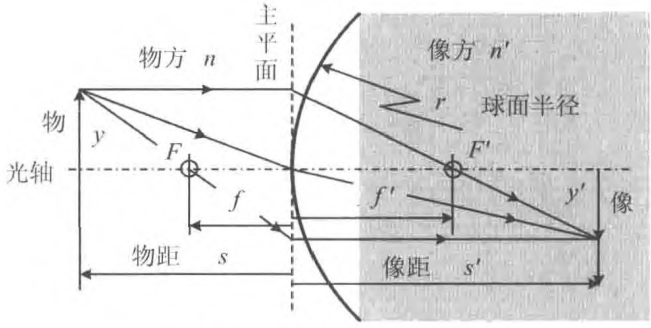


图 2.10 单折射球面成像

物方焦距

$$f = \frac{n}{\Phi} \tag{2.3a}$$

像方焦距

$$f' = \frac{n'}{\Phi} \tag{2.4a}$$

高斯公式

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1 \tag{2.5a}$$

牛顿公式

$$xx' = ff' \tag{2.6a}$$

像的横向放大率

$$\beta \equiv \frac{y'}{y} = -\frac{ns'}{n's} = -\frac{f}{x} \tag{2.7a}$$

而在笛卡尔的符号约定下，上述公式分别为如下形式：

成像公式

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} \tag{2.1b}$$

折射面的光焦度

$$\Phi = \frac{n' - n}{r} \tag{2.2b}$$

物方焦距

$$f = -\frac{n}{\Phi} \tag{2.3b}$$

像方焦距

$$f' = \frac{n'}{\Phi} \tag{2.4b}$$

高斯公式

$$\frac{f'}{s'} - \frac{f}{s} = 1 \tag{2.5b}$$

牛顿公式

$$xx' = ff' \tag{2.6b}$$

像的横向放大率

$$\beta \equiv \frac{y'}{y} = \frac{ns'}{n's} = -\frac{f}{x} \tag{2.7b}$$

2. 反射面的物像公式

如图 2.11 所示，在高斯的符号约定下，成像公式为

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = -\frac{2}{r} \tag{2.8a}$$

焦距

$$f = f' = -\frac{r}{2} \tag{2.9a}$$

像的横向放大率

$$\beta \equiv \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} = -\frac{f}{x} \tag{2.10a}$$

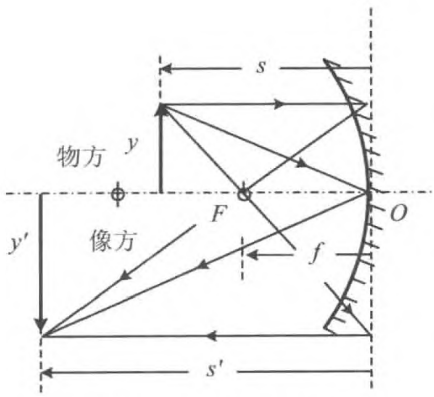


图 2.11 单反射球面成像

在笛卡尔的符号约定下，成像公式为

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r} \tag{2.8b}$$

焦距

$$f = f' = \frac{r}{2} \tag{2.9b}$$

像的横向放大率

$$\beta \equiv \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} = -\frac{f}{x} \tag{2.10b}$$

3. 薄透镜的物像公式

如图 2.12 所示，在高斯的符号约定下，成像公式为

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2} \tag{2.11a}$$

其中

$$\Phi = \frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2} \tag{2.12a}$$

为薄透镜的光焦度。

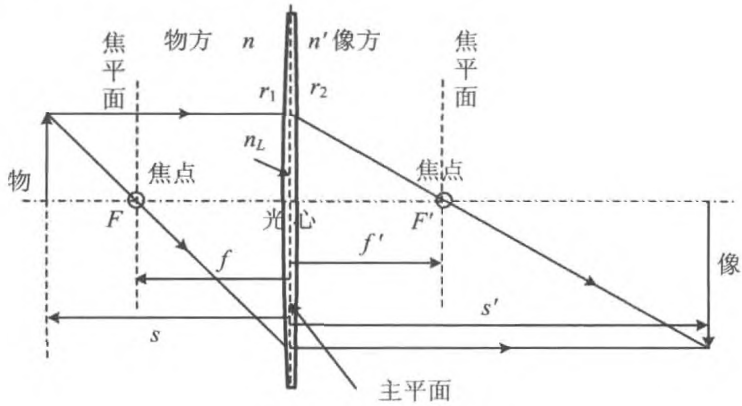


图 2.12 薄透镜成像

物方焦距

$$f = \frac{n}{\Phi} \tag{2.13a}$$

像方焦距

$$f' = \frac{n'}{\Phi} \tag{2.14a}$$

高斯公式

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1 \tag{2.15a}$$

牛顿公式

$$xx' = ff' \tag{2.16a}$$

像的横向放大率

$$\beta \equiv \frac{y'}{y} = -\frac{ns'}{n's} = -\frac{f}{x} \tag{2.17a}$$

而在笛卡尔的符号约定下，上述公式分别为如下形式：

成像公式

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2} \tag{2.11b}$$

薄透镜的光焦度

$$\Phi = \frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2} \tag{2.12b}$$

物方焦距

$$f = -\frac{n}{\Phi} \tag{2.13b}$$

像方焦距

$$f' = \frac{n'}{\Phi} \tag{2.14b}$$

高斯公式

$$\frac{f'}{s'} - \frac{f}{s} = 1 \tag{2.15b}$$

牛顿公式

$$xx' = ff' \tag{2.16b}$$

像的横向放大率

$$\beta \equiv \frac{y'}{y} = \frac{ns'}{n's} = -\frac{f}{x} \tag{2.17b}$$

牛顿公式中，物距、像距分别从物方焦平面、像方焦平面算起。

本书中所有例题，基本上都采用高斯的符号约定。

2.1.5 典型问题与基本解题方法

物经过成像单元(即单个折射球面、单个反射球面和单个薄透镜)的成像是成像光学中最基本的问题，通常可直接利用高斯公式求解，这种方法被称作成像的解析法。但要注意正确地应用符号约定。

成像是几何光学研究的中心问题，主要讨论物像的位置、大小、虚实、倒正等。在实际问题中有时还要考虑像的清晰度、亮度和照度等等。成像的解析法就是通过分析题意，选择适当的公式进行计算。

在对一个问题进行计算的过程中，为了避免混淆，应当采用一致的符号约定。关于几何光学中各个物理量的符号，完全是一种人为的规定，不同的文献、书籍，不同的人往往根据各人的习惯和喜好规定物距、像距、焦距、球面半径等线段的正负以及角度的正负，对此没有必要强求统一。关于几何光学物理量的符号约定大致可以分为两类：一类

是自然的符号法则，即以折射或反射球面将空间分为物方（物所在的空间）、像方（像所在的空间），物在物方，物距为正，像在像方，像距为正；反之为负。角度则以逆时针方向为正，顺时针方向为负。北京大学赵凯华、钟锡华的《光学》（北京大学出版社，1984）、美国 Adelphi University 的 Eugene Hecht 所著《Optics》（Fourth edition，Pearson education，2002）等，则采用这种符号约定。另一类是在笛卡尔坐标系中，设定坐标原点与 x，y 轴的正方向后，则线段的正负与坐标的正负一致。同时角度的正负规定从光轴（即 x 轴）或分界面（折射球面或反射球面）的法线算起，顺时针为正、逆时针为负。我国出版的教科书中，南开大学母国光的《光学》（人民教育出版社，1978）、中国科技大学郭光灿、庄象萱的《光学》（高等教育出版社，1997）、复旦大学章志鸣等的《光学》（第二版，高等教育出版社，2000）等，采用这种符号约定。

采用不同的符号约定，成像公式会有正负号的差别，但计算的结果是完全相同的。事实上，不同的符号约定没有优劣之分，只要依照个人的习惯灵活运用即可。但是，在图中或者文字说明中，都用线段和角度的绝对值标注，对于负值，则要在前面加上负号“－”。

【例 2.1】 估算以下情形中，成像光束的发散角：

（1）眼睛；

（2）标准照相镜头；

（3）望远镜。

解 任何成像元件和仪器的通光孔径总是有一定尺度的，如图 2.13 所示。通光孔径对物点的张角，就是成像光束的发散角。

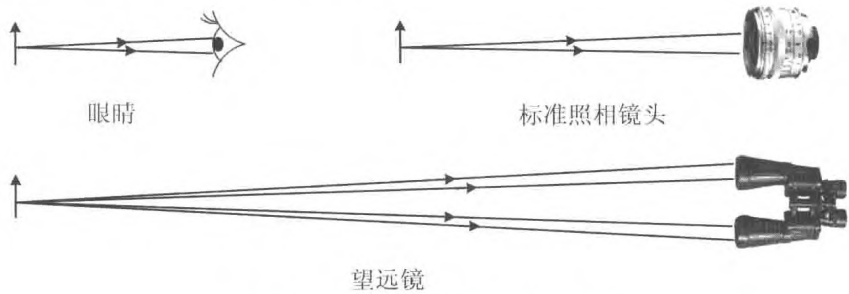


图 2.13 成像光束对光学孔径的张角

（1）眼睛瞳孔的大小可以根据光的强弱自动进行调节，用作估算，不妨取瞳孔的直径 $D=5$ mm（这个数值算是相当大的），眼睛的明视距离 s_0 约为 250 mm，可算得成像光束的张角为

$$\Delta\varphi < \frac{D}{s_0} = \frac{5}{250} = 0.02 \approx 1.2^\circ$$

(2) 标准照相镜头的焦距范围为45～55 mm，在所有照相镜头中，标准镜头的有效通光孔径是最大的，最大的光圈数(通常称作 F 数，是镜头的焦距与其有效通光孔径的比值)为1，即镜头最大孔径与焦距相当。不妨取 $D = 50$ mm。标准镜头通常用于拍摄人像，拍摄时，物距的范围为1～2 m，不妨取物距 $s = 2\ \text{m} = 2\times10^3$ mm，则算得成像光束的张角为

$$\Delta\varphi < \frac{D}{s_0} = \frac{50}{2\,000} = 0.025 \approx 1.4^\circ$$

(3) 望远镜的有效孔径不会大于50 mm，而物通常在远处，不妨取孔径 $D = 50$ mm，物距 $s = 1\ \text{km} = 1\times10^6$ mm，于是成像光束的张角为

$$\Delta\varphi < \frac{D}{s_0} = \frac{50}{1\times10^6} = 5\times10^{-5} \approx 0.003^\circ$$

可见，实际的成像装置，由于通光孔径的限制，成像光束总是满足傍轴条件。满足傍轴条件的光束，光线的入射角、折射角(或反射角)总是小角，或角度的分布范围很小，即 $|\varphi| \ll 1$，或 $|\Delta\varphi| \ll 1$，这种情形下，总能够作以下的近似

$$\sin\varphi \approx \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 \approx \varphi$$

以及

$$\cos\varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 \approx 1$$

需要注意的是，在涉及成像的近似中，忽略的仅仅是高阶的小量，即至少是 φ^2，而一阶小量 φ 是不能忽略的。

【例2.2】 利用小角折射定律讨论不同类型的折射球面在傍轴条件下成像的物像关系。

分析 折射球面，既可以是凸面，也可以是凹面，凸球面与凹球面成像的情况必然有所不同；光线通过球面，既有可能是从光疏媒质进入光密媒质，也有可能是从光密媒质进入光疏媒质，两侧媒质不同，成像的情况也有所不同；还有一个因素是物距不同，成像的情况也将不同。没有必要将所有的情形都一一讨论，只要选择几种典型即可。

光线满足傍轴条件，就意味着成像光线与光轴间的夹角很小，对于球面而言，光线的入射角 i 和折射角 i' 也很小，形如 $n\sin i = n'\sin i'$ 的折射定律近似成为 $ni \approx n'i'$，这就是小角折射定律。

解 折射定律 $n\sin i = n'\sin i'$ 在小角情形下变为 $ni \approx n'i'$，这就是所谓的小角折射定律。

下面针对不同类型的球面分别进行讨论。

(1) 凸球面，且 $n>n'$，如图 2.14 所示。

在图 2.14 中，M 点处的入射光线、折射光线与光轴的夹角分别记为 u，u'，M 点处法线(即球面的半径)与光轴夹角记为 θ。在$\triangle QMC$ 中

$$\angle MQC = u = i - \theta$$

$$\overline{CM} = r$$

$$\overline{QC} = \overline{QO} + \overline{OC} = s + r$$

$$\sin\angle QMC = \sin i$$

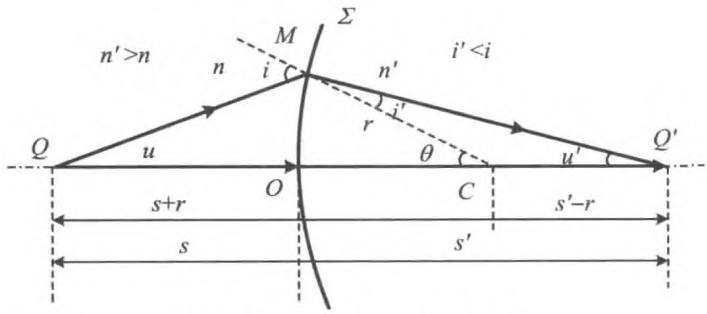


图 2.14 第一种类型折射球面

由正弦定理，有

$$\sin\angle MQC = \frac{\overline{CM}}{\overline{QC}}\sin\angle QMC$$

将角度与边长的关系带入，可得到

$$\sin(i-\theta) = \frac{r}{s+r}\cdot\sin i \tag{1}$$

在$\triangle Q'MC$ 中

$$\angle MQ'C = u' = \theta - i'$$

$$\overline{Q'C} = \overline{Q'O} - \overline{OC} = s' - r$$

应用正弦定理，同样可得

$$\sin(\theta - i') = \frac{r}{s'-r}\cdot\sin i' \tag{2}$$

由于是傍轴光线，式(1)、式(2)中的各个角度都很小，即

$$\sin(i-\theta) \approx i - \theta$$

$$\sin i \approx i$$

$$\sin(\theta - i') \approx \theta - i'$$
$$\sin i' \approx i'$$

式(1)、式(2)化为

$$i - \theta = \frac{r}{s + r} \cdot i \tag{3}$$

$$\theta - i' = \frac{r}{s' - r} \cdot i' \tag{4}$$

式(3)+式(4),得到

$$i - i' \approx \frac{r}{s' - r} \cdot i' + \frac{r}{s + r} \cdot i$$

整理后,为

$$\frac{s}{s + r} \cdot i = \frac{s'}{s' - r} \cdot i' \tag{5}$$

而折射定律为

$$ni \approx n'i' \tag{6}$$

将式(6)代入式(5)中,有

$$\frac{n's}{s + r} = \frac{ns'}{s' - r}$$

即有

$$\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n' - n}{r} \tag{7}$$

(2) 凸球面,且 $n > n'$,如图 2.15 所示。

从图 2.15 可以看出,这时物点发出的同心光束折射后在像方是发散的,不能汇聚成实像,但是傍轴条件下,折射光线的反向延长线在物方汇聚成虚像。

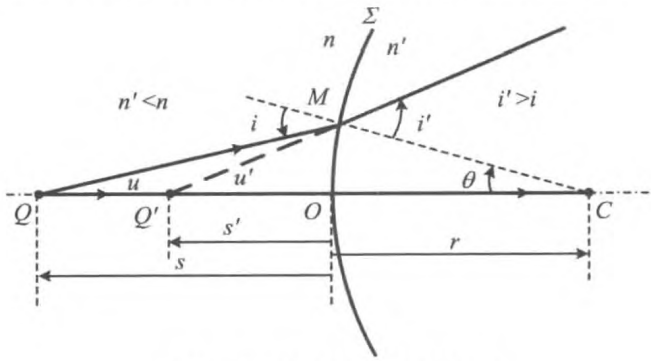


图 2.15 第二种类型折射球面

与(1)中的分析类似,在△QMC中

$$\angle MQC = u = i - \theta$$

$$\overline{QC} = s + r$$

在△$Q'MC$中

$$\angle MQ'C = u' = i' - \theta$$

$$\overline{Q'C} = \overline{Q'O} + \overline{OC} = s' + r$$

在△QMC和△$Q'MC$中,根据正弦定理,分别有

$$\sin(i - \theta) = \frac{r}{s + r} \cdot \sin i$$

和

$$\sin(i' - \theta) = \frac{r}{s' + r} \cdot \sin i'$$

在小角情形下,分别为

$$i - \theta \approx \frac{r}{s + r} \cdot i \tag{8}$$

$$i' - \theta \approx \frac{r}{s' + r} \cdot i' \tag{9}$$

式(8)－式(9),得到

$$i - i' \approx \frac{r}{s + r} \cdot i - \frac{r}{s' + r} \cdot i'$$

整理为

$$\frac{s}{s + r} \cdot i \approx \frac{s'}{s' + r} \cdot i'$$

利用小角折射定律 $ni \approx n'i'$,得到

$$n \cdot \frac{s + r}{s} = n' \cdot \frac{s' + r}{s'}$$

最后整理得到

$$\frac{n}{s} + \frac{n'}{-s'} = \frac{n' - n}{r} \tag{10}$$

式(10)与式(7)形式一致,只是像距 s'之前有一负号。这是因成虚像造成的差别。

(3) 凹球面,且 $n > n'$,如图 2.16 所示。

这时,由于总有 $i' > i$,所以若物点 Q 在球心 C 之外,其发出的傍轴同心光束经折射后必定在像方汇聚成实像 Q'。

在△QMC中

$$\angle MQC = u = \theta - i$$

$$\overline{QC} = \overline{QO} - \overline{OC} = s - r$$

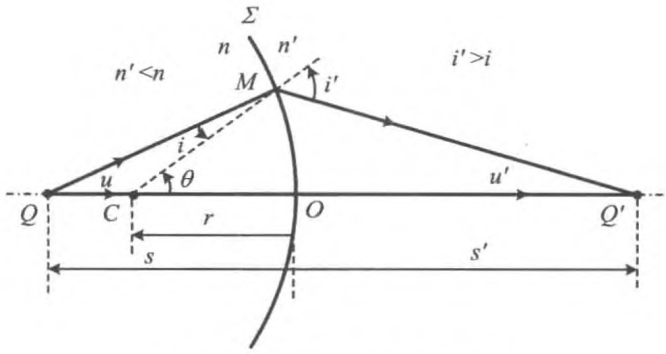


图 2.16 第三种类型折射球面

在$\triangle Q'MC$中

$$\angle MQ'C = u' = i' - \theta$$

$$\overline{Q'C} = \overline{Q'O} + \overline{OC} = s' + r$$

于是有

$$\sin(\theta - i) = \frac{r}{s - r} \cdot \sin i$$

和

$$\sin(i' - \theta) = \frac{r}{s' + r} \cdot \sin i'$$

在傍轴条件下,分别为

$$\theta - i = \frac{r}{s - r} \cdot i \tag{11}$$

$$i' - \theta = \frac{r}{s' + r} \cdot i' \tag{12}$$

式(11)+式(12),得到

$$i' - i \approx \frac{r}{s' + r} \cdot i' + \frac{r}{s - r} \cdot i$$

整理为

$$\frac{s}{s - r} \cdot i = \frac{s'}{s' + r} \cdot i'$$

代入小角折射定律,得到

$$\frac{n's}{s - r} = \frac{ns'}{s' + r}$$

整理后，得到

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{-r} \tag{13}$$

物像关系式(13)与式(7)形式一致，但由于此处为向物方的凹球面，所以在球面半径之前有一负号。

(4) 凹球面，且 $n<n'$，如图 2.17 所示。

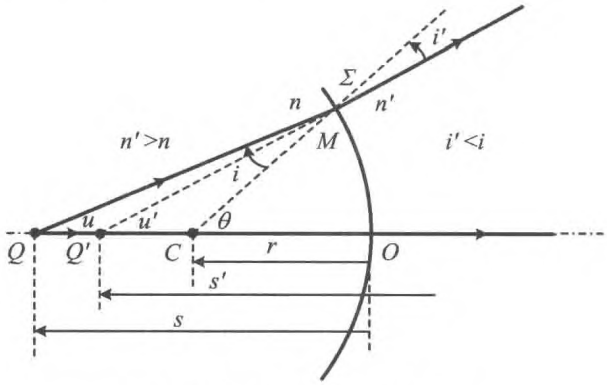


图 2.17 第四种类型折射球面

这时的情况，由于总有 $i'<i$，所以物点发出的傍轴同心光束经折射后在像方必定发散，只能在物方成虚像。

在△QMC 中

$$\angle MQC=u=\theta-i$$
$$\overline{QC}=\overline{QO}-\overline{OC}=s-r$$

在△$Q'MC$ 中

$$\angle MQ'C=u'=\theta-i'$$
$$\overline{Q'C}=\overline{Q'O}-\overline{OC}=s'-r$$

于是有

$$\sin(\theta-i)=\frac{r}{s-r}\cdot\sin i$$

和

$$\sin(\theta-i')=\frac{r}{s'-r}\cdot\sin i'$$

在傍轴条件下，分别为

$$\theta - i = \frac{r}{s - r} \cdot i \tag{14}$$

$$\theta - i' = \frac{r}{s' - r} \cdot i' \tag{15}$$

式(14)－式(15)，得到

$$i' - i \approx \frac{r}{s - r} \cdot i - \frac{r}{s' - r} \cdot i'$$

整理为

$$\frac{s}{s - r} \cdot i = \frac{s'}{s' - r} \cdot i'$$

代入小角折射定律，得到

$$\frac{n's}{s - r} = \frac{ns'}{s' - r}$$

整理后，得到

$$\frac{n'}{-s'} + \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{-r} \tag{16}$$

物像关系式(16)与式(7)形式一致，但由于此处为向物方的凹球面，而且成虚像，所以在球面半径和像距之前各有一负号。

上述各种结果表明，如采用同样的物像公式，必须对凸球面、凹球面曲率半径的正负及实像、虚像像距的正负作出约定。

【例 2.3】 射向球面的汇聚同心光束，且光束中心不在入射一侧，试导出这种情形下的物像公式。

分析 物若在物方，则从物点发出的光线是发散的同心光束。射向折射面的同心光束，且光束的中心不在物方，说明这不是实物成像的情形。

解 这样的入射光束在物方并无汇聚点，也就是没有真实的物点。入射光束的汇聚点在球面的右侧，就是将入射光束延长后汇聚点 Q。既然成像公式要给出物像之间的数学关系，在没有实物的情形下，也可以将上述物方光线的汇聚点 Q 作为物点。当然 Q 是未经折射的入射光束的虚拟汇聚点，这就是虚物。

设入射光束满足傍轴条件，则经球面折射后，将汇聚于 Q' 点。Q'点就是虚物 Q 的像点，如图 2.18 所示。

同推导实物成像的方法和步骤相仿，对于图 2.18 中的两个以球面半径 CM 为共有边的三角形△QMC 和△$Q'MC$ 中，注意到

$$\angle MQC = \pi - (i + \theta)$$

$$\angle MQ'C = \pi - (i' + \theta)$$

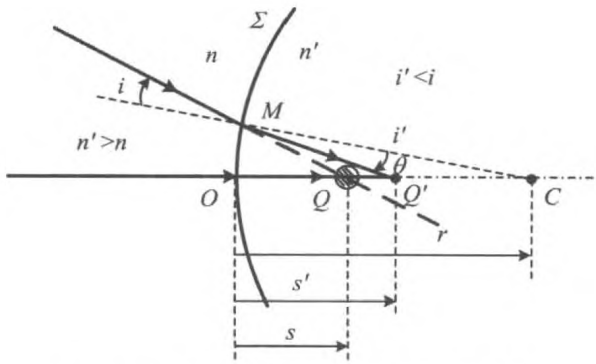


图 2.18 汇聚同心光束经球面折射后成像

$$\overline{QC} = r - s$$
$$\overline{Q'C} = r - s'$$

应用正弦定理,可以得到

$$\sin(\theta + i) = \frac{r}{r - s} \cdot \sin i$$

$$\sin(\theta + i') = \frac{r}{r - s'} \cdot \sin i'$$

在傍轴条件下,上述两式相减消去 θ,有

$$i - i' \approx \frac{r}{r - s} \cdot i - \frac{r}{r - s'} \cdot i'$$

即

$$\frac{s}{r - s} \cdot i \approx \frac{s'}{r - s'} \cdot i'$$

利用小角折射定律 $ni \approx n'i'$,得到

$$\frac{n's}{r - s} = \frac{ns'}{r - s'}$$

最后得到

$$\frac{n}{-s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n' - n}{r}$$

汇聚入射光线经球面的折射,可以作为虚物成像进行处理。

物像公式的形式与例 2.2 中相同,只是由于是虚物成像,物距 s 之前有一负号。

该结果表明,若用同样的公式处理实物和虚物的成像,必须对实物、虚物物距的正负作出约定。

【例 2.4】 讨论平面折射成像的特点。

解 如图 2.19 所示，设物方和像方的折射率分别为 n 和 n'，物到平面的距离为 s。

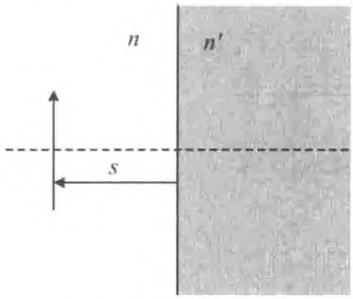


图 2.19　物与折射平面

平面可视作曲率半径无穷大的平面，即 $r=\infty$，于是在满足傍轴条件的前提下，平面的光焦度

$$\Phi = \frac{n'-n}{r} = 0$$

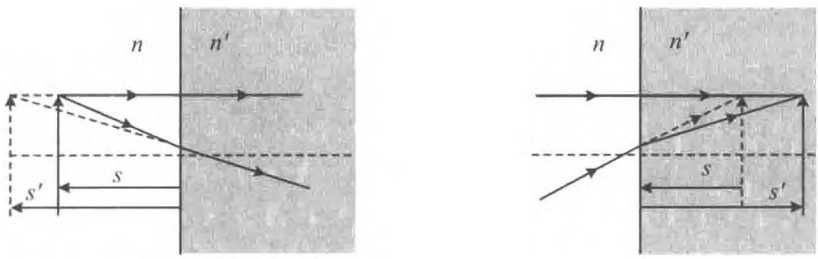
物像公式为

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = 0$$

于是有

$$s' = -\frac{n'}{n} \cdot s$$

若是实物成像，则 $s'<0$，像是虚的；反之，若是虚物成像，则 $s'>0$，像是实的，如图 2.20 所示。



(a) 实物成虚像　　(b) 虚物成实像

图 2.20　平面折射成像

横向放大率为

$$\beta = -\frac{n}{n'} \cdot \frac{s'}{s} = -\frac{n}{n'}\left(-\frac{n'}{n} \cdot \frac{s}{s}\right) = +1$$

像总是正立的。

【例 2.5】 一玻璃毛细管，外径远大于内径。内径看起来为 2.66 mm，求管的实际内径。设玻璃的折射率为 1.55。

分析 该题既可以用折射定律求解，也可以利用高斯公式求解。

解 方法一：用折射定律求解。

如图 2.21(a)所示，对于观察者而言，内径的像，是从管的内表面发出的光线经管的外表面折射而成的。在图 2.21(a)所示的情形下，A 点发出的切向光线进入眼睛，由于受到瞳孔的限制，参与成像的光线发散角很小，是傍轴光线，这些光线经外管壁折射后将发

散，所以它们的虚光线汇聚于 A' 点，这就是观察者所看到的内管的像。从对称性判断，内管的截面是圆(称物圆)，则所成的像的截面也是圆(称像圆)。与圆相切的直线经过圆的外缘，所以折射光线与像圆在 A' 点相切。所以图中的两个三角形 $\triangle OMA$ 和 $\triangle OMA'$ 都是直角三角形。

设外圆的半径为 R，内圆的半径为 r，像圆的半径为 r'，成像光线的入射角为 i，折射角为 i'，则在 $\triangle OMA$ 和 $\triangle OMA'$ 中分别有

$$\sin i = \frac{r}{R}$$

$$\sin i' = \frac{r'}{R}$$

而折射定律为 $n\sin i = \sin i'$，于是得到

$$r = \frac{\sin i}{\sin i'} \cdot r' = \frac{r'}{n} = 1.72\ \text{mm}$$

方法二：用成像定理求解。

如图 2.21(b)所示，A，B 是内管上相对的两点，自外部观察，这两点像为 A'，B'。由于眼睛的瞳孔很小，可认为成像光线是集中在玻璃管的一个横截面内的傍轴光线。由于用平面截球面所得到的也是圆，所以可以利用单球面折射的物像公式求解。

物点 A，B 在管内中，物方是折射率为 n 的玻璃，像方是空气，折射面是朝向物方的凹面，曲率半径为 $-R$，物距为 $s = R$，于是有

$$\frac{1}{s'} + \frac{n}{R} = \frac{1-n}{-R}$$

解得

$$s' = -R$$

这是虚像，在管的轴线处。横向放大率为

$$\frac{2r'}{2r} = -\frac{n}{1} \cdot \frac{s'}{R} = n$$

于是可得

$$r = \frac{r'}{n} = 1.72\ \text{mm}$$

与方法一的结果一致。

通过比较两种方法，容易看出，采用折射定律求解，不仅需要画出比较准确的光路图，还要作出适当的傍轴近似，相当于从最基本的出发点处理成像的问题。而成像定理就是在傍轴条件下所得到的，若直接应用，处理起来当然非常简单。因而所有的光学成像问题都可以用成像定理加以解决。

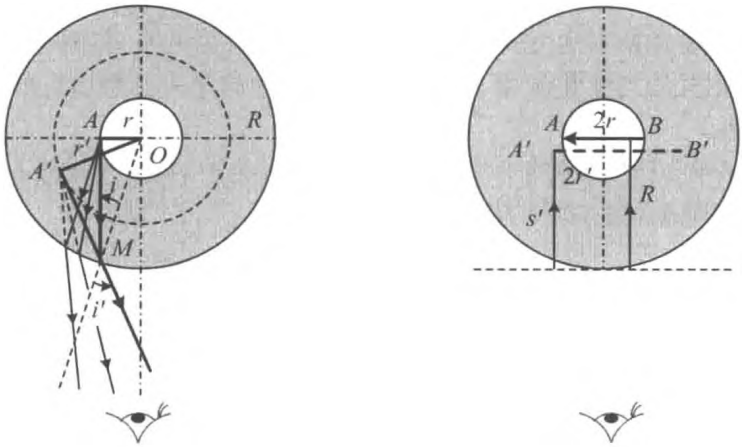


图 2.21 毛细管内径的像

【例 2.6】 一发光物点位于一透明球的后表面，从球的前表面出射的近轴光束恰为平行光，求此透明球材料的折射率

分析 可以用逐次成像法求解此题，物点发出的光线依次经过透明球的两个表面时都要折射成像，应用单球面折射的成像公式逐次求解即可。

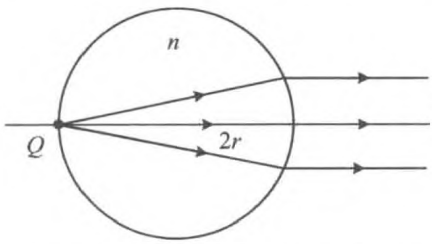


图 2.22 从球面另一侧射出平行光束

解 设球的半径为 r，如图 2.22 所示，物点 Q 第一次成像时，应用单球面的物像公式

$$\frac{n}{s_1'}+\frac{1}{s}=\frac{n-1}{r}$$

得到

$$s_1'=\frac{nrs}{(n-1)s-r}=0$$

说明由于物点紧贴折射球面，物距 $s=0$，像距 $s_1'=0$，所以可以认为没有被此球面折射，即也可以认为物点处于球的内部，紧贴表面。

对于前表面，物距 $s_2=2r$

第二次成像

$$\frac{1}{s'}+\frac{n}{s_2}=\frac{1-n}{-r}$$

而出射光为平行光，即 $s'=\infty$，因而有

$$\frac{n}{2r} = \frac{1-n}{-r}$$

求得 $n=2$

【例 2.7】 一凸球面镜浸没在折射率为 1.33 的水中，高为 1 cm 的物在凸面镜前 40 cm 处，像在镜后 8 cm 处。求像的大小、正倒、虚实以及凸面镜的曲率半径和光焦度。

分析 反射成像依据反射定律，与物方（也是像方）的折射率无关，反射面的光焦度会因物方的折射率不同而不同。但焦距保持不变，成像公式也不变。

解 直接用球面镜的物像公式计算成像的情况。

物距 $s=40$ cm，像在球面镜后面，是虚像，$s'=-8$ cm。

由

$$\frac{n}{s'} + \frac{n}{s} = -\frac{2n}{r}$$

可得到球面半径 $r=20$ cm。

像高

$$y' = -y \cdot \frac{s'}{s} = 0.2\ \text{cm}$$

是正立的虚像。

光焦度

$$\Phi = -\frac{2n}{r} = -\frac{2n}{0.2} = -13.3\ (\text{m}^{-1})$$

【例 2.8】 用费马原理证明：空气中的薄透镜，若中间厚、边缘薄，一定是正透镜；反之，若中间薄、边缘厚，一定是负透镜。

分析 焦距为正值的透镜是正透镜，焦距为负值的透镜是负透镜。透镜在空气中，透镜材料的折射率比空气大，且透镜的物方像方折射率相等。所以透镜的物方焦距与像方焦距相等。像方焦点是透镜光轴上无穷远处物点的像，当轴上的物点在无穷远处时，从物射向透镜的光线是平行于光轴的光束。

证明 与透镜光轴平行的入射光束汇聚于其像方焦点，这些光束可视作是从无穷远处的轴上物点发出的。按照费马原理，物像之间所有的路径光程相等。

在物方取一个与入射光束垂直的平面，由于物点在光轴上，所以该面上各点到物点的光线均有相等的光程，则从该平面算起，面上各点到焦点的光线也有相等的光程。所以上述平面就是一个等光程面。

若是正透镜，像方焦点在像方。如图 2.23 所示，凸透镜中间厚边缘薄，经过凸透镜轴线附近的光线，在透镜中的光程比较大；经过凸透镜边缘处的光线，在透镜中的光程比较小。为了满足从等光程面到焦点的条件，就要求轴线附近的光线在空气中的光程较

小，传过的距离较短；边缘处的光线在空气中的光程较大，传过的距离较长。所以实光线能够在像方汇聚。即凸透镜的像方焦点在像方，焦距为正值，是正透镜。

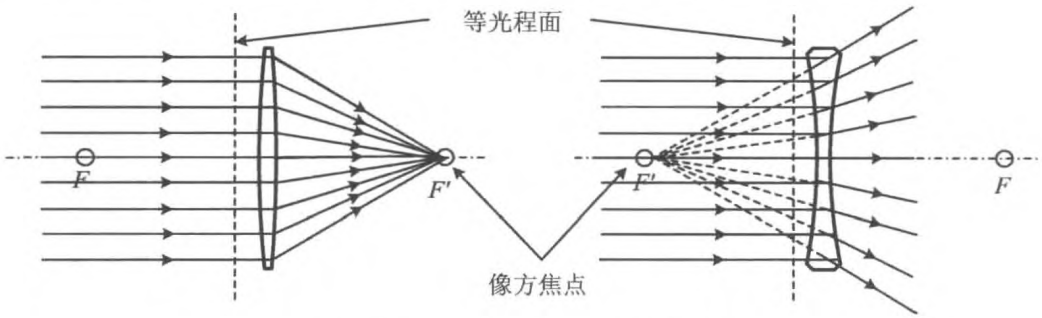


图 2.23　凸透镜、凹透镜的等光程面

而凹透镜中间薄边缘后，经过凹透镜轴线附近的光线，在透镜中的光程比较小；经过凹透镜边缘处的光线，在透镜中的光程比较大。为了满足从等光程面到焦点的条件，就要求轴线附近的光线在空气中的光程较大，传过的距离较长；边缘处的光线在空气中的光程较小，传过的距离较短。这样一来，像方的实光线不可能在像方汇聚，只能发散。所以凹透镜的像方焦点一定不在像方。

若是负透镜，像方焦点不在像方，这样的焦点实际上是虚焦点。对图 2.23 中的凹透镜，像方实光线的反向延长线是虚光线，虚光线的光程是负值。凹透镜的像方焦点不在像方，从等光程面到像方焦点，在边缘处，实光线的光程大，虚光线的光程也大；在中间处，实光线的光程小，虚光线的光程也小，因而可以满足等光程的条件。

【例 2.9】 利用成像元件的高斯成像公式和相应的符号约定，讨论成实像和成虚像的条件。

解　从一般性的高斯公式$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1$可得到像距为

$$s'=\frac{sf'}{s-f} \tag{1}$$

分以下不同的情况进行讨论。

(1) 实物成像，即物距为正值，$s>0$。

① 焦距为正值，$f>0$，$f'>0$。

当 $s>f$ 时，$s'>0$，成实像；当 $s<f$ 时，$s'<0$，成虚像。

实物在凸透镜或凹面镜的物方焦点外侧时，成实像；反之成虚像。

② 焦距为负值，$f<0$，$f'<0$

式(1)的分子 $sf'<0$，而分母 $s-f>0$，所以总有 $s'<0$，只能成虚像。

实物经凹透镜或凸面镜只能成虚像。

(2) 虚物成像，即物距为负值，$s<0$

① 焦距为正值。

式(1)的分子 $sf'<0$，而分母 $s-f<0$，所以总有 $s'>0$，虚物经正镜只能成实像。

由于正镜(凸透镜或凹面镜)的作用是将入射光线在像方进一步汇聚，而虚物等效于汇聚光束入射，出射光线进一步汇聚，当然只能成实像。

② 焦距为负值。

式(1)的分子 $sf'>0$。

若分母 $s-f>0$，即当 $s>f$ 时，$s'>0$，可以成实像。此时虚物在主平面与物方焦点之间，如图 2.24 所示。

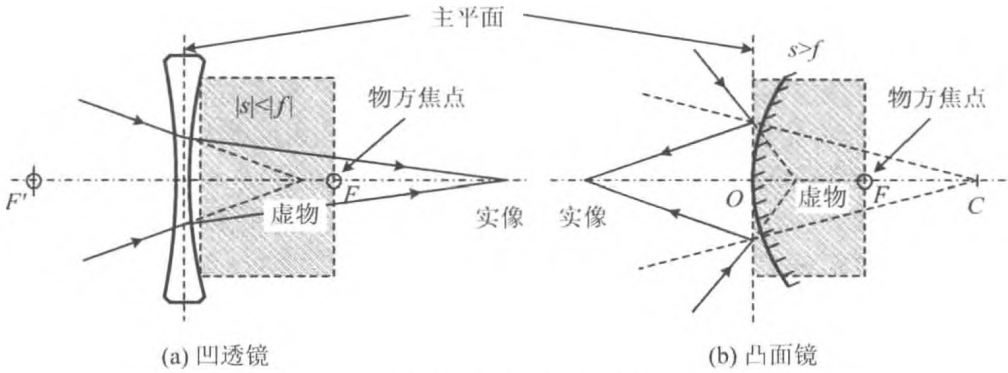


图 2.24 虚物经凹透镜(a)或凸面镜(b)成实像

由于负镜的作用是将光束发散，且其焦点不在物方。所以若入射光束射向镜面与物方焦点之间，说明光束的汇聚程度很大，使得出射光束也是汇聚的，可以成实像。

当 $s-f<0$，即 $s<f$ 时，$s'<0$，可成虚像。这时入射光束的汇聚点在物方焦点的外侧。

实物在凸透镜或凹面镜的物方焦点外侧时，成实像；反之成虚像。

【例 2.10】 实物放在凹面镜前什么位置能成倒立的放大像？为什么？这时是实像还是虚像？

解 凹面镜的焦距为正值，$f=\dfrac{|r|}{2}$。实物物在焦点外侧，可成实像，实像一定是倒立的。横向放大率为

$$\beta = -\frac{s'}{s} = -\frac{f}{s-f}$$

只要满足$\frac{f}{s-f}>1$，且 $s-f>0$ 即可，因而有

$$\frac{|r|}{2} = f < s < 2f = |r|$$

即，物到凹球面镜的距离大于球面半径且小于球面直径，即可成放大的倒立实像。

【例 2.11】 内半径为 R 的直立圆柱器皿内盛水银，绕圆柱轴线匀速旋转（水银不溢，皿底不露），稳定后的液面为旋转抛物面。若取坐标原点在抛物面的最低点，纵坐标轴 z 与圆柱器皿的轴线重合，横坐标轴 r 与 z 轴垂直，则液面的方程为

$$z = \frac{\omega^2}{2g}r^2$$

式中，ω 为旋转角速度，g 为重力加速度（当代已使用大面积的此类旋转水银液面作反射式天文望远镜）。

观察者的眼睛位于抛物面最低点正上方某处，保持位置不变，然后使容器停转，待液面静止后，发现与稳定旋转时相比，看到的眼睛的像的大小、正倒都无变化。求人眼位置至稳定旋转水银面最低点的距离。

分析 本题有三个关键点，首先要明白大的抛物面的近轴部分近似于球面，可用球面反射的物像公式；其次，要确定两次观察时反射面之间的距离，即要计算出平面表面与抛物面表面顶点间的距离，也就是要计算抛物面下水银的体积；最后，看到的像的大小都相同，不是指像的大小相同，而是像对眼睛的视角相同。

解 抛物面的焦点就是球面成像的焦点，由于抛物线的方程为

$$z = \frac{\omega^2}{2g}r^2$$

可知其焦点为

$$f = \frac{g}{2\omega^2}$$

对于过抛物面顶点的平面之上的水银的体积，可以采用积分方法计算。如图 2.25 所示，取一半径为 r 的薄壁圆筒，筒壁的高为

$$z = \frac{\omega^2}{2g}r^2$$

圆筒的底面积为 $S=\pi r^2$，则薄壁的底面积为

$$\mathrm{d}S = 2\pi r\,\mathrm{d}r$$

则该圆筒壁的体积为

$$dV = zdS = 2\pi zrdr$$

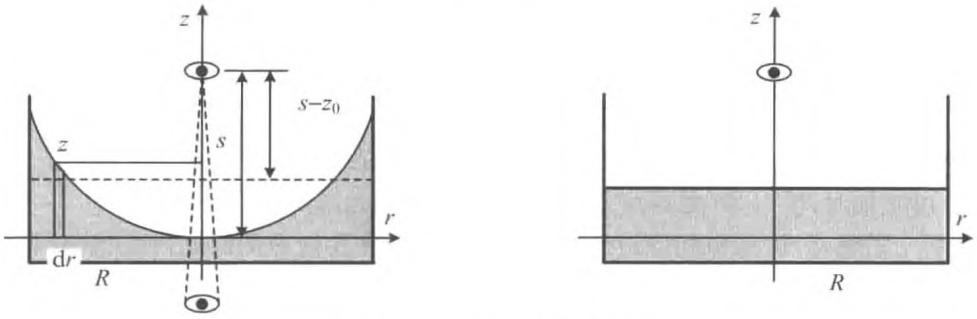


图 2.25 转动和静止时的水银面

上述水银的体积为

$$V = \int_0^R 2\pi zrdr = \int_0^R 2\pi \frac{\omega^2}{2g} r^3 dr = \frac{\pi\omega^2 R^4}{4g}$$

当抛物面成为平面时，这些水银所形成的圆柱的高为

$$z_0 = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

这就是平面与抛物面顶点间的距离。

下面讨论成像问题。

设眼睛到抛物面顶点的距离为 s，眼睛的大小为 y，则抛物面成像的像距为

$$s_1' = \frac{sf}{s-f}$$

像的大小为

$$y_1' = y\frac{-s_1'}{s} = -\frac{yf}{s-f}$$

该像对眼睛的张角为

$$\varphi_1 = \frac{y_1'}{s-s_1'} = -\frac{yf}{(s-s_1')(s-f)}$$

眼睛到平面的距离为 $s_2 = s - z_0$，经平面成像距为 $s_2' = -(s-z_0)$，像的大小仍为 y，则对眼睛的张角为

$$\varphi_2 = \frac{s_2'}{s_2 - s_2'} = \frac{y}{2(s-z_0)}$$

由于 $\varphi_1 = \varphi_2$，所以

$$\frac{yf}{(s-s_1')(s-f)} = \frac{y}{2(s-z_0)}$$

即

$$-(2s-2z_0)f = s^2-2sf$$

计算得到

$$s = \sqrt{2fz_0} = \sqrt{2\times\frac{g}{2\omega^2}\frac{\omega^2R^2}{4g}} = \frac{R}{2}$$

【例 2.12】 沿直线移动的点光源经 $f=30$ cm 的凸透镜成像，该点光源以与光轴成 60°角穿过光轴时，像以 30°角穿过光轴，计算这一瞬间光源到透镜的距离。

分析 若物运动，像也相应地运动。速度的定义是在极短的时间内位移与时间的比值。这是解决本题的关键。

解 可用两种方法求解本题。

方法一：利用物像关系。

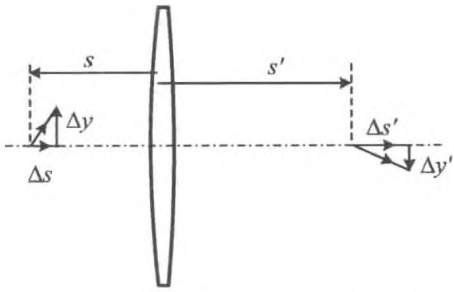


图 2.26　运动的物像之间的位移关系

如图 2.26 所示，设传过光轴的瞬间，物距、相距分别为 s，s'，根据高斯公式可得

$$s' = \frac{sf'}{s-f}$$

物距改变 Δs 所引起的像距改变为

$$\Delta s' = \frac{(s-f)f-sf}{(s-f)^2}\cdot\Delta s = -\frac{f^2}{(s-f)^2}\cdot\Delta s$$

即

$$\frac{\Delta s'}{\Delta s} = -\frac{f^2}{(s-f)^2} \tag{1}$$

可以将式(1)作为薄物成像的纵向放大率，所谓纵向，是指沿着光轴的方向。

由于物点的运动与光轴成某一角度，可将其速度分解为纵向和横向。在纵向，像与物的速度分量的关系为

$$\frac{\Delta s'}{\Delta t} = -\frac{f^2}{(s-f)^2}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{2}$$

而在横向，两速度分量之间的比值就是横向放大率，即

$$\frac{\Delta y'}{\Delta t} = -\frac{s'}{s}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t} = -\frac{f}{s-f}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t} \tag{3}$$

根据题中所给条件

$$\tan 60^\circ = \pm\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

$$\tan 30^\circ = \pm \frac{\frac{\Delta y'}{\Delta t}}{\frac{\Delta s'}{\Delta t}}$$

利用式(2)、式(3),可得

$$\pm \frac{\tan 60^\circ}{\tan 30^\circ} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta s}}{\frac{\Delta y'}{\Delta s'}} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta y'}}{\frac{\Delta s'}{\Delta s}} = \frac{s-f}{f} \cdot \frac{f^2}{(s-f)^2} = \frac{f}{s-f}$$

即

$$\frac{f}{s-f} = \pm 3$$

解得

$$s = f\left(1 \pm \frac{1}{3}\right) = \begin{cases} 40\ \text{cm} \\ 20\ \text{cm} \end{cases}$$

当 $s = 40$ cm 时,像是实的;当 $s = 20$ cm 时,像是虚的。

方法二:利用共轭光线求解。

如图 2.27 所示为在 Δt 时间内物的位移与像的位移,物在 P_1,像在 Q_1,物运动到 P_2,像运动到 Q_2。

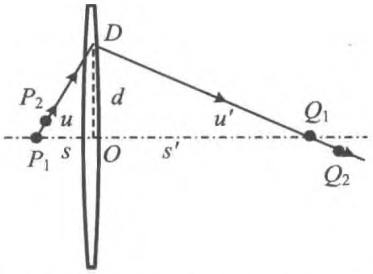


图 2.27 从物点发出一条沿其速度方向的光线

从物点所发出的光线经透镜后都射向像点,即从 P_1 发出的光线都射向 Q_1 点,从 P_2 发出的光线都射向 Q_2 点。物在 P_1 和 P_2 点分别发出的沿速度方向的光线,分别射向 Q_1 点和 Q_2 点。但在物方,这两条光线实际上等同于从 P_1 点发出的同一条光线,因而在像方,对应的光线也是同一条光线,即像方光线通过 Q_1 点和 Q_2 点。于是可知,这一对共轭光线分别沿物和像的速度方向,于是根据图 2.27 中的几何关系,可得

$$\tan u = \frac{d}{s}, \tan u' = \frac{d}{s'}$$

即

$$\frac{s'}{s} = \frac{\tan u}{\tan u'} = \pm \frac{\tan 60^\circ}{\tan 30^\circ} = \pm 3$$

再利用

$$s' = \frac{sf'}{s - f}$$

可得

$$s = f\left(1 \pm \frac{1}{3}\right) = \begin{cases} 40\ \text{cm} \\ 20\ \text{cm} \end{cases}$$

与方法一的结果完全一致。

2.2 光具组成像

2.2.1 逐次成像法

光学元件依次排列，就构成了成像光具组。处理光具组成像的基本方法是所谓的“逐次成像法”，即物首先经第一个元件成像，将第一个元件的像作为第二个元件的物，再经第二个元件成像，依此类推。这样逐次地运用成像公式，就能够得到最终的像。

2.2.2 逐次成像的递推公式

在应用逐次成像法处理成像问题时，最关键的是确定每次成像时的物距。在采用了符号约定后，若第 m 个元件成像的像距为 s'_m，第 $m+1$ 个元件与第 m 个元件主平面之间的距离为 $d_{m,m+1}$，则对第 $m+1$ 个元件，物距 s_{m+1} 为

$$s_{m+1} = d_{m,m+1} - s'_m \tag{2.18}$$

式(2.1)是逐次成像法中像距与物距之间的递推公式。

2.2.3 典型问题与基本解题方法

由于一个较复杂的成像光学系统往往包括多个折射面或反射面，因而有时需要联立数个成像方程以求解，这时，一方面要采用一致的符号约定，另一方面要注意对于不同的折射面或反射面的物距、像距间的递推关系。对于其中的任意一个折射面或反射面，应用成像公式进行计算时必须注意，有关的物距、像距等线段的大小和正负都是相对于这一折射面或反射面规定的。

【例 2.13】 圆柱形玻璃杯，内置金属圆筒。从杯外观察，当杯内无水时，圆筒直径 D_1；杯内有水时，圆筒直径 D_2。求金属圆筒的直径 D 以及水的折射率 n，并分析玻璃杯的外径 R、内径 R_0 以及玻璃的折射率 n_0 对结果有无影响？

分析 杯内的圆筒依次经玻璃杯的内壁、外壁折射成像，这类问题可以采用逐次成像法处理。在应用逐次成像法的过程中，是将第一个元件所成的像作为第二个元件的物，逐次应用成像定理，从而得到最终的像。

解 如图 2.28 所示，其中画出了玻璃杯及其内部金属圆筒的竖直剖面与水平剖面。

可参考例 2.5 的方法二处理本题的成像问题。

首先计算杯内无水的情形下所成像的位置和大小。

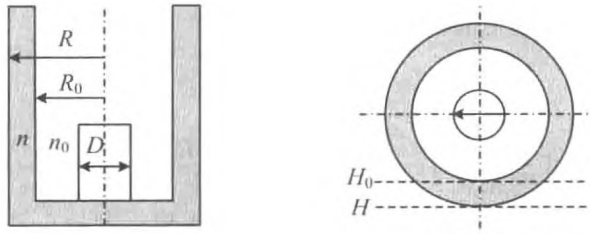
第一次是杯内壁折射成像。图 2.28 中 H_0 为内壁的主平面，圆筒表面上两个相对的点之间的距离即为其直径 D，该直径到 H_0 的距离（即物距）$s_1 = R_0$，于是物像公式为

$$\frac{n_0}{s_1'} + \frac{1}{R_0} = \frac{n-1}{-R_0}$$

解得

$$s_1' = -R_0$$

这是虚像，与物在相同的位置。



(a) 杯的竖直剖面　　(b) 杯的水平剖面

图 2.28 物经玻璃杯壁折射成像

第二次是杯的外壁折射成像，将第一次的像作为第二次的物，两折射面的主平面 H 与 H_0 之间的距离是玻璃杯的壁厚，为

$$d = R - R_0$$

物距为

$$s_2 = d - s_1' = R$$

第二次成像的物像公式为

$$\frac{1}{s_2'} + \frac{n_0}{s_2} = -\frac{1-n_0}{R}$$

解得

$$s_2' = -R$$

依然是原处的虚像。

像的横向放大率为

$$\beta_1 = \left(-\frac{n_0 s_2'}{s_2}\right)\left(-\frac{s_1'}{n_0 s_1}\right) = \left(\frac{-R}{R}\right)\left(\frac{-R_0}{R_0}\right) = +1 \tag{1}$$

这种情形下(杯内无水,杯内杯外都是空气),像在原处,是等大小的正立的虚像。即

$$D = D_1 \tag{2}$$

再计算杯内有水的情形下所成像的位置和大小。

第一次成像,物方媒质是水,像方媒质是玻璃,水的折射率记为 n,则

$$\frac{n_0}{s_1''} + \frac{n}{R_0} = \frac{n_0 - n}{-R_0}$$

解得

$$s_1'' = -R_0$$

依然是在远处的虚像。

第二次成像,物距为

$$s_2 = d - s_1'' = R$$

与无水时相比,外壁的成像完全相同,所以

$$s_2'' = -R$$

像的横向放大率为

$$\beta_2 = \left(-\frac{n_0 s_2''}{s_2}\right)\left(-\frac{n s_1''}{n_0 s_1}\right) = n\left(\frac{-R}{R}\right)\left(\frac{-R_0}{R_0}\right) = n \tag{3}$$

在杯内有水的情形下,像依然在原处,是放大的正立虚像。则

$$D_2 = nD \tag{4}$$

结合式(2)、式(4),得到水的折射率

$$n = \frac{D_2}{D_1}$$

成像与玻璃杯的外径 R、内径 R_0 以及玻璃的折射率 n_0 均无关。原因是,若物在折射球面的球心处(本题是在圆柱面的轴线处),则像也在球心处(本题是在轴线处)。又由于两球面共心(本题是两圆柱面共轴),所以第二次依然是在原位成像,即像距与半径无关。而第一次成像的像方恰是第二次成像的物方,都是玻璃杯壁,所以杯壁的折射率也与成像无关。像的大小只与杯内外媒质的折射率有关。

【例 2.14】 讨论等厚薄球壳成像的特点。

分析 两共心的球面之间的媒质层才是等厚的,用逐次成像法处理。

解 设两共心球面的半径分别为 r_1 和 r_2，球壳的折射率为 n，球壳内外媒质的折射率分别为 n_1 和 n_2，物在球内，到内球面的物距为 s，如图 2.29 所示。

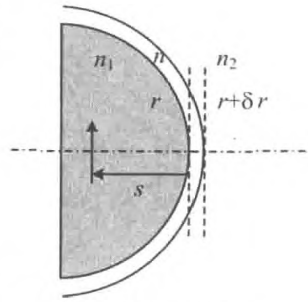


图 2.29 薄球壳

若 $r_1 = r$，由于球壳很薄，所以

$$r_2 = r_1 + d = r + \delta r$$

内球面折射成像，物像公式为

$$\frac{n}{s_1'} + \frac{n_1}{s} = \frac{n - n_1}{r} \tag{1}$$

外球面的物距

$$s_2 = \delta r - s_1' \approx - s_1'$$

外球面折射成像，物像公式为

$$\frac{n_2}{s'} + \frac{n}{-s_1'} = \frac{n_2 - n}{r + \delta r} \approx \frac{n_2 - n}{r} \tag{2}$$

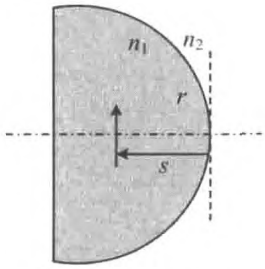


图 2.30 单球面

式(1)和式(2)两端相加，有

$$\frac{n_2}{s'} + \frac{n_1}{s} = \frac{n - n_1}{r} + \frac{n_2 - n}{r} = \frac{n_2 - n_1}{r} \tag{3}$$

式(3)相当于如图 2.30 所示的情形，半径为 r、内外媒质的折射率分别为 n_1 和 n_2 的折射球面成像。

所以一个等厚的薄介质层对成像不起作用。

本题也可以用另一种方法处理。由于薄球壳的两个表面靠得很近，所以整个球壳的光焦度等于两个球面的光焦度之和，即

$$\Phi = \frac{n - n_1}{r_1} + \frac{n_2 - n}{r_2} = \frac{n - n_1}{r} + \frac{n_2 - n}{r + \delta r}$$

$$\approx \frac{n - n_1}{r} + \frac{n_2 - n}{r} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

与单球面的光焦度相等。

【例 2.15】 由两个完全相同的球面薄表壳玻璃胶合在一起，中间是空气，其中一块玻璃的表面镀银成为球面反射镜，如图 2.31 所示。利用准直法，即让灯泡发出的光通过白屏上的针孔，调节 L 可在白屏上得到孔的清晰的像，这时测得 $L = 20$ cm。如果在表壳中充满折射率为 4/3 的水，求 L 为何值时，在白屏上能得到空的清晰像？

分析 当表壳中为空气时，由于表壳很薄，则前表壳对光的折射可以忽略，仅需要考虑作为球面镜的后表壳的光线的反射即可。当其中充满水后，就成了一个水的薄透镜以及紧贴透镜后表面的球面反射镜所组成的光学系统，透过小孔的光要经过三次成像

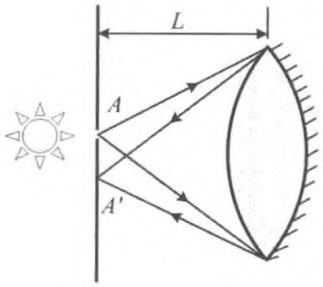


图 2.31 薄表壳反射成像

过程。

解 表壳中空时，是球面反射成像，此时 $s = s' = L = 20\ \text{cm}$，由

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = -\frac{2}{r_2}$$

可得

$$r_2 = -s = -20\ \text{cm}$$

另一个表壳是向物方的凸球面，所以

$$r_1 = -r_2 = 20\ \text{cm}$$

表壳充水后，内部成为一个折射率 $n_L = 4/3$ 的水透镜，其光焦度

$$\Phi_1 = \frac{n-1}{r_1} + \frac{1-n}{r_2}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}-1}{20} + \frac{1-\frac{4}{3}}{-20} = \frac{1}{30}(\text{cm}^{-1})$$

即水透镜的焦距为

$$f_1 = \frac{1}{\Phi_1} = 30\ \text{cm}$$

整个装置是水透镜与球面反射镜的组合，等效于一个球面反射镜。

按例 2.14 的结果，可以认为在透镜和球面镜之间有一等厚空气薄层，整个装置等效于空气中的组合光具组，即水透镜 + 球面反射镜 + 水透镜。由于是密接的，所以整个装置的光焦度等于各个元件的光焦度之和。

球面反射镜的光焦度为

$$\Phi_2 = -\frac{2}{r_2} = \frac{1}{10}\ \text{cm}^{-1}$$

于是整个装置的光焦度为

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_1 = \frac{1}{6}\ \text{cm}^{-1}$$

整个装置相当于一个球面反射镜，焦距为

$$f = \frac{1}{\Phi} = 6\ \text{cm}$$

物在球面反射镜的 2 倍焦距处，可实现原位成像，即

$$L = 12\ \text{cm}$$

更直接的方法，三次成像过程依次为：① 球面折射（空气→水）；② 球面反射（水→

水);③ 球面折射(水→空气),所以整个装置的光焦度是三个密接光学球面的光焦度之和。

折射球面(空气→水):

$$\Phi_1' = \frac{n-1}{r_1}$$

反射球面(水→水):反射成像与物方像方媒质的折射率无关,但是由于焦距与光焦度的关系为 $f=\frac{n}{\Phi}$,所以在球面反射镜物方(也是像方)的折射率为 n 的情形下,其光焦度为

$$\Phi_2' = -\frac{2n}{r_2}$$

折射球面(水→空气):

$$\Phi_3' = \frac{1-n}{-r_1} = \Phi_1'$$

于是

$$\Phi = \Phi_1' + \Phi_2' + \Phi_3' = \frac{2n-2}{r_1} + \left(\frac{-2n}{r_2}\right)$$

$$= \frac{2(2n-1)}{r_1} = \frac{2\left(2\times\frac{4}{3}-1\right)}{20} = \frac{1}{6}\ (\mathrm{cm}^{-1})$$

与将其视作空气中的透镜与反射镜的组合结果一致。

本题也可以这样分析:由于最后成像于原物点处,故被镜面反射的光线必须沿着入射方向。所以要求通过透镜的光线沿着反射镜的法线(即半径)方向,由此可知反射镜的物、像都位于该镜面的球心处。

由于反射镜的物是透镜第一次成像时的像,即物经水透镜第一次所成像的像距为

$$s_1' = r = -20\ \mathrm{cm}$$

则物距为

$$L = s_1 = \frac{s_1' f_1}{s_1' - f_1} = \frac{-20\times 30}{-20-30} = 12\ (\mathrm{cm})$$

【例 2.16】 向后反射器是一种可以将入射光线沿着原路反射回去的光学器件。苏格兰球体反射器就是将透明介质球的后半个球面镀银成为反射面,通过选择合适的折射率 n,就可以将射入该球的光线沿原路反射回去。求该球体材料的折射率,并将其与四面直角体棱镜进行比较。

解 一种反射方式如图 2.32 所示,过球心作一条与入射光线平行的轴线,该轴线与球面的焦点就是球体的前、后顶点。若使入射光线能够沿原路反射,则球内的光线必须

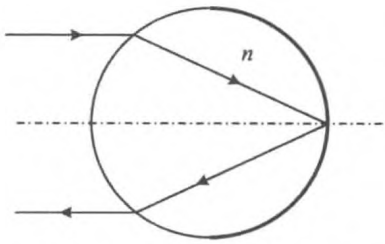


图 2.32 苏格兰球体反射器

落在球体后表面的顶点上，也就是前表面的像方焦点就是球体的后顶点，焦距

$$f' = 2r \tag{1}$$

由单球面像方焦距公式

$$f' = \frac{n}{n-1}r \tag{2}$$

可得

$$n = 2$$

另一种反射方式是从一侧入射的光线都射向球心，即球面的像方焦距为

$$f' = r \tag{1}$$

则由于

$$f' = \frac{n}{n-1}r$$

可得

$$n = n - 1$$

这是不可能的。

苏格兰球体反射器的优点是无论从何方射来的光线都可以沿原路反射，缺点是这些光线必须是近轴光线；而四面体直角棱镜的优点是不必仅限于近轴光线，缺点是只有从斜面入射、且必须在棱镜内依次经历三次全反射。

【例 2.17】 已知一个凹透镜的两球面的光焦度分别为 5 m^{-1} 和 − 10 m^{-1}，透镜的直径为 30 mm，中心厚 2 mm。问用于制造该透镜的平板玻璃（折射率为 1.5）至少应该多厚？该透镜的边缘有多厚？

分析 由透镜的光学参数，如折射面的光焦度等，可以计算出球面的曲率半径，再应用几何关系进一步求解。

解 透镜两球面的曲率半径分别为

$$r_1 = \frac{n-1}{\Phi_1} = \frac{1.5-1}{5} = 100\ (\text{mm})$$

$$r_2 = \frac{1-n}{\Phi_2} = \frac{1-1.5}{-10} = 50\ (\text{mm})$$

这是一个弯月形凹透镜，如图 2.33 所示。利用几何关系，及图中所标参数，D = 30 mm，d = 2 mm，可得

$$\sin\varphi_1 = \frac{\frac{D}{2}}{r_1} = 0.15$$

$$\sin\varphi_2 = \frac{\frac{D}{2}}{r_2} = 0.30$$

于是

$$\overline{A_2C_2} = r\cos\varphi_2 = 47.7\ \text{mm}$$

$$\overline{O_1A_2} = d + (r_2 - \overline{A_2C_2}) = 4.3\ \text{mm}$$

即制造透镜的平板玻璃厚度至少为 4.3 mm。

$$\overline{O_1A_1} = r_1(1 - \cos\varphi_1) = 1.13\ \text{mm}$$

即得到边缘厚度为

$$\overline{O_1A_2} - \overline{O_1A_1} = 3.17\ \text{mm}$$

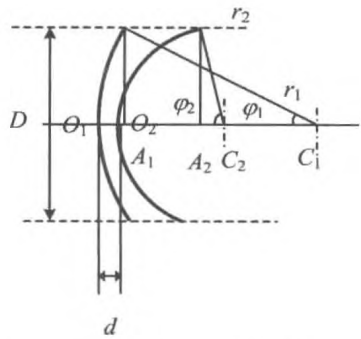


图 2.33 制备凹透镜材料的厚度

【例 2.18】 以折射率为 1.50 的平凸透镜放在纸面上，透镜厚 20 mm，球面的曲率半径为 80 mm，分别求当球面向下和平面向下时，纸上与透镜接触处的文字的成像位置。

分析 这不是薄透镜，所以要针对两个折射面用逐次成像法处理。

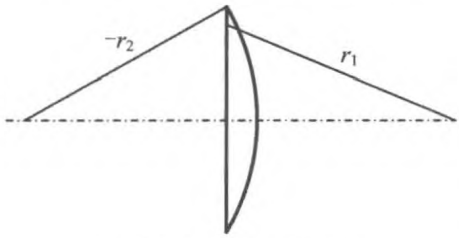


图 2.34 平凸厚透镜

解 如图 2.34 所示，当物点紧贴表面折射成像时，物距为 0，由于

$$s' = \frac{sf}{s - f}$$

则此时像距恒为 0，因而可以不考虑前表面的作用，直接对后表面作成像计算。注意此时物方在透镜中，物方的折射率为 n。

若平面向下，对于球面而言，物距 $s_2 = d$。物像公式为

$$\frac{1}{s_2'} + \frac{n}{s_2} = \frac{1 - n}{r_2}$$

解得像距

$$s_2' = \frac{r_2 s_2}{(1 - n)s_2 - nr_2} = \frac{-80 \times 20}{(1 - 1.5) \times 20 - 1.5 \times (-80)}$$

$$= -\frac{160}{11} = -14.5\ (\text{mm})$$

这是虚像。

距纸面 $d + s_2' = 5.5$ mm，在纸面上方。横向放大率为

$$\beta_1 = -\frac{ns_2'}{s_2} = -\frac{1.5 \times (-14.5)}{20} = +1.1$$

若球面向下，经平面成像，物距 $s_2 = d$。物像公式为

$$\frac{n}{s_2'} + \frac{1}{s_2} = \frac{n-1}{r_1} = 0$$

像距

$$s_2' = \frac{-s_2}{n} = -\frac{40}{3} = -13.3\,(\text{mm})$$

依然是虚像。

距纸面 $d + s_2' = 6.7$ mm，在纸面下上方。横向放大率为 +1。

【例 2.19】 如图 2.35 所示，比较观察者所看到的经平面镜和全反射棱镜所成的像的差别，图中 d 为棱镜直角边的长度。

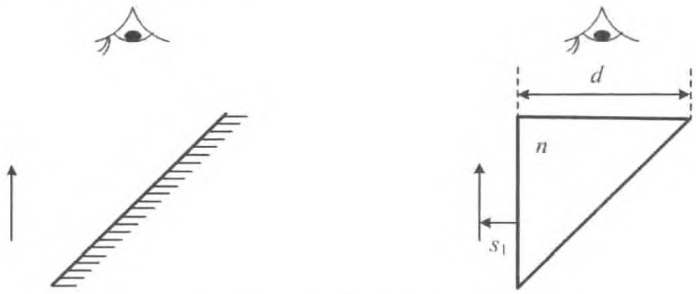


图 2.35　两种反射镜成像

分析　棱镜成像的过程为平面折射（空气→玻璃），平面反射，平面折射（玻璃→空气），共三次。而平面镜只有一次反射成像。

解　本题中物平面与反射面不平行，为了表示物的相对位置，可在平面镜处作两个相互垂直的平面，使其外观与全反射棱镜一致，并标记物的相对位置，如图 2.36 中左侧所示。

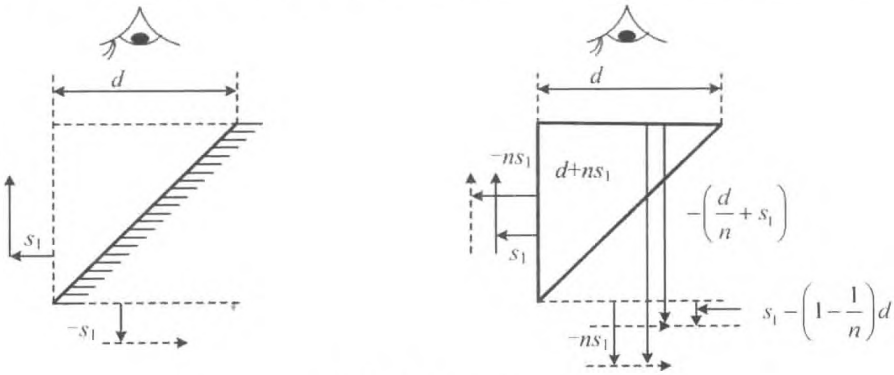


图 2.36　成像过程分析

平面镜成像的情形中，竖直的平面形物经反射后在对称位置成虚像。为了标记物与像的位置，可按图 2.36 所示分别作竖直和水平的辅助线，这两条辅助线与镜面构成一个等腰直角三角形，且直角边长为 d。设物到竖直线的距离为 s_1。由于竖直的辅助线也可经反射在对称位置成像，则两像间距仍为 s_1，图中标记为 $-s_1$，表示其为虚像。

物经全反射棱镜，先是经竖直平面折射，然后斜面反射，再经水平面折射，共有三次成像过程。以下逐次分析。

第一次经竖直平面折射成像。

根据物像公式

$$\frac{n_i}{s_i}+\frac{n_o}{s_o}=\frac{n_i-n_o}{r}$$

式中，下标 i(image)、o(object)分别表示像、物。此处 $r=\infty$，即折射平面的光焦度为 0，于是

$$s_i=-\frac{n_i s_o}{n_o}$$

即实物成虚像，横向放大率为

$$\beta=-\frac{n_o s_i}{n_i s_o}=+1$$

等大小正立。

竖直面成像是从空气向玻璃的折射，因而到竖直面的像距为

$$s_1'=-\frac{ns_1}{1}=-ns_1$$

该虚像对于反射面是实物，经反射在对称位置成虚像。同样，竖直面也在对称位置成像，两者间距仍为 ns_1。

反射面的虚像对水平折射面是实物，物距为

$$s_3=d-s_1'=d+ns_1$$

水平面成像是从玻璃像空气的折射，像距为

$$s_3'=-\frac{s_2}{n}=-\left(\frac{d}{n}+s_1\right)$$

到水平参考面的距离为

$$l=d+s_3'=s_1-\left(1-\frac{1}{n}\right)d$$

与平面镜一次反射成像比较，对于观察者而言，相当于像移近了

$$\delta=\left(1-\frac{1}{n}\right)d$$

虽然像的大小没有改变，由于距离变小了，所以看起来要大一些。

【例 2.20】 如图 2.37 所示，讨论物经全反射棱镜所成的像，图中 D 为棱镜斜边的长度。

分析 分析本题的方法与例 2.19 相似，只是多了一次反射成像过程。

解 本题中，成像过程依次为折射、反射、反射、折射。由于相邻平面不平行，因而将斜边及其反射的像作为定位的基准，如图 2.38 所示。

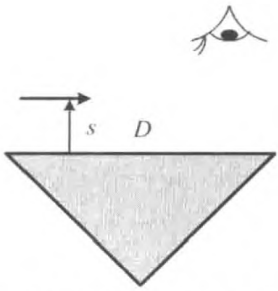


图 2.37　全反射棱镜的另一种成像方式

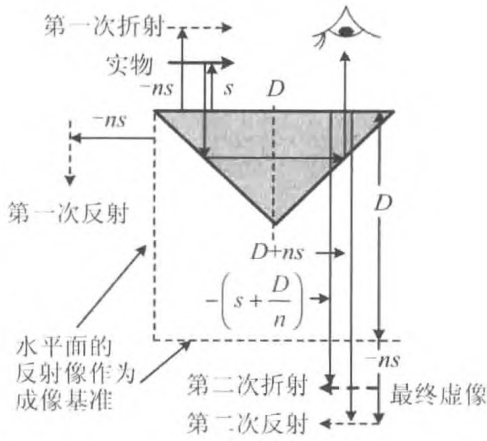


图 2.38　成像过程

物第一次成像是三角形斜面的折射成像，像距为 $s_1' = -ns$，虚像。

第二次成像，是第一次折射的像经平面反射成像，在相对于反射面对称位置成虚像，如图 2.38 所示。第一反射面像作为第二反射面的物，是实物，又在相对于第二反射面的对称位置成虚像，该虚像是最后一次折射的实物，物距为 $D + ns$，像距为

$$s' = -\left(s + \frac{D}{n}\right)$$

像到物的距离为

$$2s + \frac{D}{n}$$

如果物的方向与棱镜的直角棱垂直，则像的方向与物的方向相反。

【例 2.21】 现代双筒望远镜的结构如图 2.39 所示，其中有一对正交棱镜，称作“珀罗组合棱镜”。若远处的物经物镜后所成的像在第一个棱镜下，到三棱镜斜边的距离为 s，而棱镜两相对面间距离为 Δ，计算经组合棱镜后像的位置及虚实。

解 望远镜物镜的实像，对棱镜的第一个面来说是虚物，物距应当为 $s_1 = -s$。在高斯光学中，采用了符号约定之后，虚物成像的结果与实物成像的结果形式上是一致的。

因而每个棱镜的成像可利用例 2.20 的结果。

如图 2.40 所示，相对于棱镜的斜边，第一棱镜的像距为

$$s_1' = -\left(s_1 + \frac{D}{n}\right)$$

注意此处 s_1 为负值，因而这是一个实像，在第一个棱镜的斜边之上，即

$$s_1' = s - \frac{D}{n}$$

该实像到第二个棱镜斜边的距离为

$$s_2 = \delta - s_1' = \delta - s + \frac{D}{n}$$

对第二棱镜，是虚物。经第二棱镜再次成像，像距为

$$s_2' = -\left(s_2 + \frac{D}{n}\right) = s - \delta - \frac{2D}{n}$$

是实像，在图中第二棱镜斜边的下方。



图 2.39 望远镜的光学结构

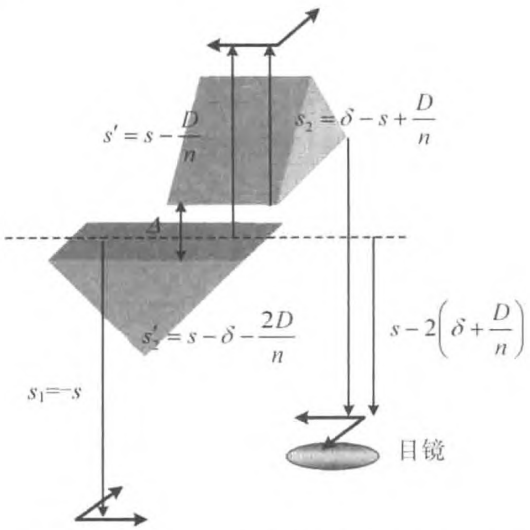


图 2.40 望远镜中组合棱镜的成像过程分析

第二棱镜的像到第一棱镜斜边的距离为

$$s' = s_2' - \delta = s - 2\left(\delta + \frac{D}{n}\right)$$

最终的结果，像朝着光线入射的一侧移动了 $2\left(\delta+\frac{D}{n}\right)$。

注意观察图中的光线，由于两棱镜是正交的，不仅使物镜的像上下倒转，同时也使其左右倒转。

若知道物镜、棱镜组、目镜之间的距离，就可以将珀罗组合棱镜作适当的配置，组成望远镜。

【例 2.22】 如图 2.41 所示，一凸透镜 L_1 和凹透镜 L_2 构成照相镜头。已知凸透镜的焦距 $f_1 = 10$ cm，成像屏幕 P 到 L_1 的距离 $d = 40$ cm，一傍轴小物到 L_1 的距离 $s_1 = 30$ cm。要求在 P 上成一个 3 倍大的像。求：

(1) L_2 的焦距 f_2 应是多少？

(2) L_2 到屏幕的距离应是多少？

(3) 屏上的像是正立的还是倒立的？

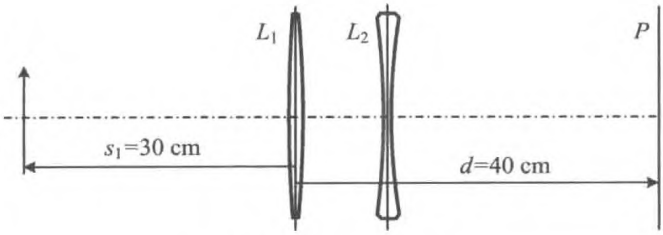


图 2.41 透镜的组配置

解 用逐次成像法处理，注意屏幕上所成的一定是实像。

(1) L_1 成像的像距为

$$s_1' = \frac{s_1 f_1}{s_1 - f_1} = 15 \text{ cm}$$

横向放大率为

$$\beta_1 = -\frac{s_1'}{s_1} = -\frac{1}{2}$$

因而要求 L_2 的横向放大率为 ± 6。

由于只有虚物才能经负透镜成实像，而虚物成实像时，$s_2 < 0$，$s_2' > 0$，因而横向放大率一定是正值，即 $\beta_2 = -\frac{s_2'}{s_2} = +6$，因而 $s_2' = -6s_2$。如图 2.42 所示，由于

$$s_1' + s_2 + s_2' = d$$

可得

$$s_2 = \frac{d - s_1'}{-5} = -5\ \text{cm}$$

$$s_2' = -6s_2 = 30\ \text{cm}$$

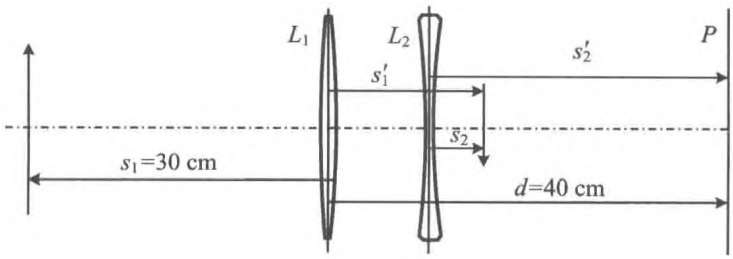


图 2.42 逐次成像

L_2焦距为

$$f_2 = \frac{s_2 s_2'}{s_2 + s_2'} = -6\ \text{cm}$$

(2) 凹透镜到屏幕的距离为

$$s_2' = 30\ \text{cm}$$

(3) 像是倒立的。

【例 2.23】 如图 2.43 所示，一光具组由焦距为 20 cm 的凸透镜 L_1 和焦距为 −10 cm 的凹透镜 L_2 构成，两透镜间距 15 cm，整个光学系统满足近轴条件。求：

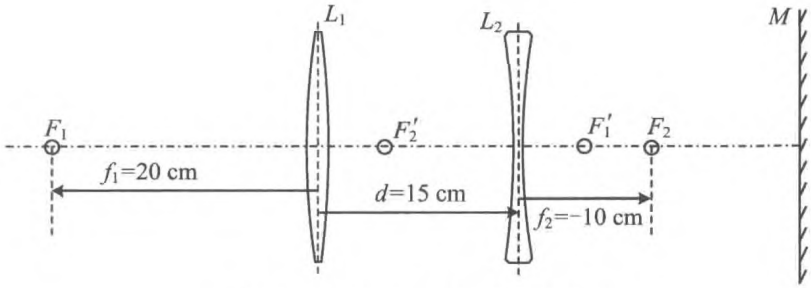


图 2.43 带有平面反射镜的光具组

(1) 一近轴小物位于 L_1 左侧 60 cm 处，求该物经过此光具组后最终成像于何处，并求出像的虚实、倒正以及横向放大率；

(2) 如果在 L_2 右侧放置一个平面反射镜 M，要想使得一个物经过这样的系统后仍然在原处成像，该物应当置于何处？并说明这时所成的是一个与原物等大小的实像。设 M 到 L_2 的距离为 d_0。

解 (1) 经 L_1 的像距为

$$s_1' = \frac{s_1 f_1}{s_1 - f_1} = \frac{60 \times 20}{60 - 20} = 30\ (\text{cm})$$

为实像。

到 L_2 的物距为

$$s_2 = d - s_1' = -15\ \text{cm}$$

像距

$$s_2' = \frac{s_2 f_2}{s_2 - f_2} = \frac{-15 \times (-10)}{-15 - (-10)} = -30\ (\text{cm})$$

为虚像。位于 L_2 左侧 30 cm 处。

横向放大率

$$\beta = \left(-\frac{s_2'}{s_2}\right)\left(-\frac{s_1'}{s_1}\right) = -\frac{30}{60}\left(-\frac{-30}{-15}\right) = 1$$

上述物像平面是一对横向放大率等于 +1 的共轭平面，是该共轴透镜组的一对主平面。

(2) 若轴上一个物点发出的光线经过两透镜后向 M 正入射，则光线会原路返回，最终在原处成实像。因而，要求物经 L_1 成像于 L_2 的物方焦平面，即 $s_2 = -10$ cm，因而

$$s_1' = d - s_2 = 25\ \text{cm}$$

所以物到 L_1 的距离为

$$s_1 = \frac{s_1' f_1}{s_1' - f_1} = \frac{25 \times 20}{25 - 20} = 100\ \text{cm}$$

轴上物点发出的实光线原路返回，轴外物点发出的光线经反射对称返回，所以像是倒立的，等大小的。

本题还有另一种情形，如果经过透镜组成实像于反射镜的表面，由于光路是可逆的，反射回的光线也可以在原处成实像，是正立的，等大小的。这种情形需要知道平面反射镜的位置，设已知平面镜到 L_2 的距离为 d_0，则此时 $s_2' = d_0$，于是 L_2 成像的物距为

$$s_2 = \frac{s_2' f_2}{s_2' - f_2} = \frac{d_0 f_2}{d_0 - f_2} = \frac{-10 d_0}{d_0 + 10}$$

据此可得物第一次经 L_1 成像的像距

$$s_1' = d - s_2 = d - \frac{d_0 f_2}{d_0 - f_2}$$

所以可算得物距

$$s_1 = \frac{s_1' f_1}{s_1' - f_1} = \frac{\left(d - \dfrac{d_0 f_2}{d_0 - f_2}\right) f_1}{\left(d - \dfrac{d_0 f_2}{d_0 - f_2}\right) - f_1}$$

$$= \frac{[d(d_0 - f_2) - d_0 f_2]f_1}{(d - f_1)(d_0 - f_2) - d_0 f_2}$$

对于本题

$$s_1 = \frac{20[15(d_0 + 10) + 10d_0]}{-5(d_0 + 10) + 10d_0} = \frac{100(d_0 + 6)}{d_0 - 10}$$

只要 $s_1 > 0$，即 $d_0 > 10$ cm 就可实现。

在有反射镜的光学系统中，像与物在同一位置被称作“自准直成像”。

【例 2.24】 把曲率半径为 r 的对称薄双凸透镜放在水平镜面上，透镜和平面镜之间加入折射率为 n_2 的液体，透镜的折射率为 n_1。设透镜上方距离 l 处物像重合，试求 n_1，n_2 和 r 间的关系。

分析 本题是在已知液体折射率 n_2 的条件下用自准法测透镜材料折射率的一种实验方法，解题主要是用逐次成像法。但分析的方法可以有许多种。即可以认为从物点 P 发出的光线经过三次成像过程回到像点 Q，即第一次是透镜成像，第二次是平面反射镜成像，第三次再经透镜成像。这样分析时，须注意到透镜前后介质并不相同。也可以认为整个过程包括五次成像；将液体看做是一个薄透镜，则除了玻璃透镜的两次成像过程之外，在平面镜成像前后还各有一次液体薄透镜的成像过程；或者认为在平面镜成像前后各有两次单球面（空气－玻璃界面、玻璃－液体界面）折射成像过程。当然，无论是三次成像还是五次成像，最后的结果都是相同的。另外，自准法有一个特点，由于整个光具组的物像是重合的，所以反射前后的光线路径必须是重合，即入射光线平行于反射光线，在反射镜是平面的情况下，入射光线必须垂直于平面镜，则物点必须在透镜的物方焦点处。利用这一特点，可以方便而迅速地求得 n_1 的表达式。

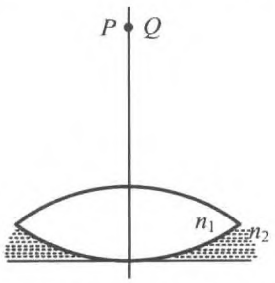


图 2.44 透镜与镜面之间有液体

解 如图 2.44 所示，用两种方法求解。

方法一：认为有三个成像过程。

第一次成像，即薄双凸透镜成像

$$\frac{n_2}{s_1'} - \frac{1}{s_1} = \Phi = \frac{n_1 - 1}{r_1} + \frac{n_2 - n_1}{r_2} = \frac{n_1 - 1}{r} - \frac{n_2 - n_1}{r} \tag{1}$$

其中 Φ 为透镜的光焦度。

第二次平面镜成像

$$s_2' = -s_2 \tag{2}$$

第三次薄双凸透镜成像

$$\frac{1}{s_3'} - \frac{n_2}{s_3} = -\Phi = \frac{n_2 - n_1}{r} - \frac{n_1 - 1}{r} \tag{3}$$

注意到 $s_3' = s_1 = l$，$s_2 = s_1'$，$s_3 = s_2'$，代入式(1)、式(2)、式(3)联立求解，可得

$$l = -\frac{1}{\Phi} = -\frac{r}{2n_1 - (n_2 + 1)} = f \tag{4}$$

f 即是薄凸透镜的物方焦距。

方法二：物点 P 为透镜的物方焦点，因而有

$$l = f = -\frac{1}{\Phi} = -\frac{1}{\Phi_1 + \Phi_2}$$

而将

$$\Phi_1 = \frac{n_1 - 1}{r_1} = \frac{n_1 - 1}{r}$$

$$\Phi_2 = \frac{n_2 - n_1}{r_2} = -\frac{n_2 - n_1}{r}$$

代入上式，所得结果与式(4)相同。

如果透镜与平面镜之间不加液体，通过这种自准法就可以测出透镜的焦距，由于大小相同、方向相反的物像重合在一起，测出物(像)点到透镜的距离 l，该距离就是透镜的焦距 f。

【例 2.25】 一烧杯内水深 4 cm，杯底有一枚硬币，水面上放置一焦距为 30 cm 的薄透镜，硬币的中心位于透镜的光轴上。若透镜上方的观察者(通过透镜)看到硬币还在原处，求透镜应放于距离水面多高的位置(已知水的折射率为 4/3，忽略硬币厚度)。

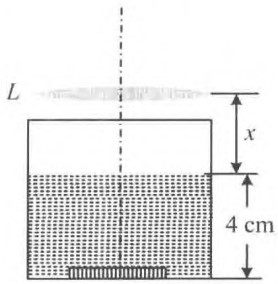


图 2.45 通过透镜观察水中的硬币

分析 如图 2.45 所示，硬币经过水面和透镜两次成像，最后成像的位置与硬币的位置重合，由这一条件可以求得此题的解。

解 第一次水面成像，硬币到水面的距离 $s_1 = 4$ cm，水的折射率为 n，则像距为

$$s_1' = -\frac{s_1}{n} \tag{1}$$

接着第二次透镜成像。如果透镜到水面的距离为 x，则物距

$$s_2 = x - s_1' \tag{2}$$

由

$$\frac{1}{s_2'} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f} \tag{3}$$

可得

$$s_2' = \frac{s_2 f}{s_2 - f} = \frac{\left(x + \frac{s_1}{n}\right) f}{x + \frac{s_1}{n} - f} = \frac{(nx + s_1) f}{nx + s_1 - nf} \tag{4}$$

s_2'是从透镜主平面算起的距离，据题意，应当有 $s_1 + x + s_2' = 0$，即

$$-\frac{(nx + s_1) f}{nx + s_1 - nf} = s_1 + x \tag{5}$$

于是可得

$$nx^2 + (n+1)s_1 x - s_1[s_1 - (n-1)f] = 0$$

将数据代入，有

$$x^2 + 7x - 18 = 0$$

解为

$$x = \begin{cases} 2\ \text{cm} \\ -9\ \text{cm}(\text{舍去}) \end{cases}$$

即透镜位于水面上方 2 cm 处。

【例 2.26】 如图 2.46 所示为一透镜组，物处于最左端透镜的左方 10 cm 处，使用逐次成像法求最后的成像位置。已知四个薄透镜均处于空气中，像方焦距分别为 $f_1 = f_3 = -5$ cm，$f_2 = f_4 = 5$ cm。

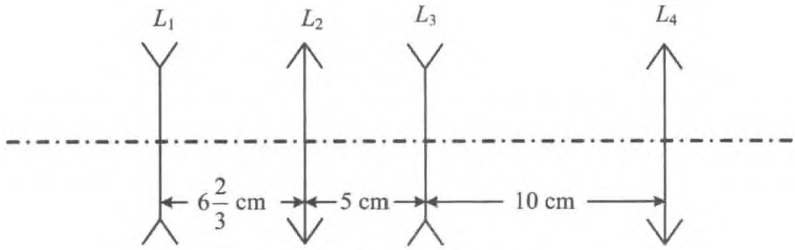


图 2.46 透镜组成像

解 光具组中第 i 个透镜的成像的像距为

$$s_i' = \frac{s_i f_i}{s_i - f_i}, i = 1,2,3,4$$

逐次成像过程中，物距与像距之间的递推关系为

$$s_{i+1} = d_i - s_i', i = 1,2,3$$

已知 $s_1 = 10$ cm，依次算得 $s_1' = -3\frac{1}{3}$ cm，$s_2 = 10$ cm，$s_2' = 10$ cm，$s_3 = -5$ cm，$s_3' = \infty$，$s_4' = 5$ cm。

上述各个像距都是相对于各个透镜的原点得到的，结果表明最后成像的位置在 L_4 右侧 5 cm 处，即 L_4 的像方焦平面处。

【例 2.27】 用凸透镜和平面镜可以测凹透镜的焦距。方法是：先让点光源 Q 经凸透镜成实像于 Q' 点，测得像距 s'。然后，在凸透镜与 Q' 点之间放置待测得凹透镜，使其与凸透镜共轴，并在凹透镜右侧与光轴放置平面镜，如图 2.47 所示。移动凹透镜到一个合适的位置，使 Q 经过整个光学系统后所成的像与其自身重合。测得此时凹透镜与凸透镜间距离为 d，计算凹透镜的焦距。

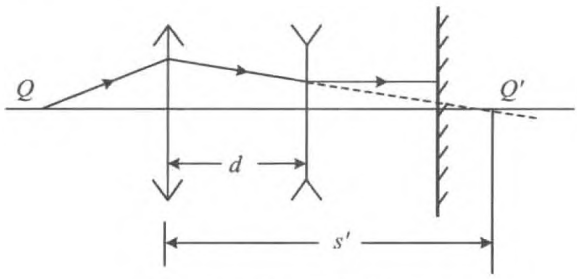


图 2.47 测量凹透镜的焦距

分析 由于实物经凹透镜不能成实像，所以不能够通过测量物距和像距的方法计算其焦距。本题借助于一个凸透镜和一个反射镜，使得在原位成像，则可以方便地测量凹透镜的焦距。这种通过反射在原位成实像的方法被称作自准直法。

解 由光路可逆性，只有向平面镜入射的光线与光轴平行时，才能实现整个系统的物像重合。则此时向凹透镜入射的光线，看起来应当汇聚到其物方焦点发出的，即此时凹透镜的物方焦点与 Q 经凸透镜的像点重合。则显然凹透镜的焦距为

$$f = d - s'$$

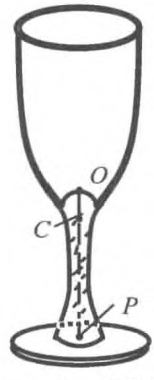


图 2.48 高脚杯

【例 2.28】 有一种高脚酒杯，如图 2.48 所示。杯内底面为一凸起的球面，球心在顶点 O 下方玻璃中的 C 点，球面的半径 $R = 1.50$ cm，O 到杯口平面的距离为 8.0 cm。在杯脚底中心处 P 点紧贴一张画片，P 点距 O 点 6.3 cm。这种酒杯未斟酒时，若在杯口处向杯底方向观看，看不出画片上的景物，但如果斟了酒，再在杯口处向杯底方向观看，将看到画片上的景物。已知玻璃的折射率 $n_1 = 1.56$，酒的折射率 $n_2 = 1.34$。试通过分析计算与论证解释这一现象。

分析 若从杯口向下看去，所见是杯脚底部的物经杯底球面所成的像。分别讨论像方是空气和水时，像的大小、位置和虚实，

即能解释题中所涉及的现象。

解 物在杯脚底部，经杯底的球面折射成像，则物方为玻璃，物距为杯脚底部的 P 到球面顶点 O 的距离。这是单球面折射成像，物像关系为

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{R} \tag{1}$$

其中，s 为物距，s' 为像距，R 为球面半径，n，n' 分别为物方、像方介质的折射率。

按照本书所采用的符号约定，$R=-1.50\ \text{cm}$，$s=6.3\ \text{cm}$，$n=1.56$。若杯子是空的，则像方为空气，折射率 $n'=1$，据此算得

$$s'=8.0\ \text{cm}$$

由于像距为正值，说明是一个实像，位于杯底球面的上方。

横向放大率为

$$\gamma_1=-\frac{n}{n'}\cdot\frac{s'}{s}=-2.0$$

这是一个放大的实像，几乎就在杯口处。若眼睛也在杯口处，则该实像到眼睛的距离太小，而且由于经过细长的杯脚，光束的发散角很小，如图 2.49 所示，所以不能被看到。



图 2.49 成像情况

如向杯中注酒，像方折射率为 $n''=1.34$，这种情况下，可算得像距为

$$s''=-13.3\ \text{cm}$$

这是一个虚像，横向放大率为

$$\gamma_2=-\frac{n}{n''}\cdot\frac{s''}{s}=+2.5$$

进入酒中的光线还要再经过酒与空气的界面折射，这是平面折射成像。可以将前面所成的像作为这次成像的物，而光线是从酒射向空气，所以物方为酒。设酒的深度为 d，则这次成像的物距为

$$s_2=d-s''$$

由于是平面成像，物像公式为

$$\frac{1}{s_2'}+\frac{n''}{s_2}=\frac{1-n''}{\infty} \tag{2}$$

取 $d=8\ \text{cm}$，于是得到

$$s_2'=-\frac{d-s''}{n''}=-\frac{d+13.3}{1.34}=-15.9\ (\text{cm})$$

仍是虚像，在杯口下方，到杯口的距离约为 16 cm。由于平面成像的横向放大率为 +1，所以总的横向放大率为 2.5。虽然两种情形下横向放大率相差不大，但注酒后，像到

眼睛的距离变为 16 cm，且虚像光束的发散角变大了，所以很容易被看到。

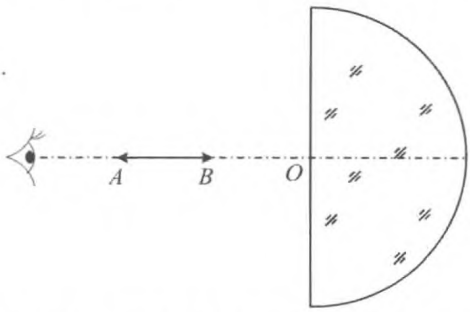


图 2.50　玻璃半球及其前面的条形发光体

【例 2.29】　有一半径为 $R = 0.128$ m 的玻璃半球，过球心 O 并与其平面部分相垂直的直线为其主轴，在主轴上沿主轴放置一细条形发光体 AB（B 离球心 O 较近），其长度为 $l = 0.020$ m。若人眼在主轴附近对着平面部分向半球望去（如图 2.50 所示），可以看到条形发光体的两个不很亮的像（此外可能还有亮度更弱的像，不必考虑），当条形发光体在主轴上前后移动时，这两个像也在主轴上随着移动。现在调整条形发光体的位置，使得它的两个像恰好头尾相接，接在一起，此时条形发光体的近端 B 距球心 O 的距离为 $a_2 = 0.020$ m。试利用以上数据求出构成此半球的玻璃的折射率 n（计算时只考虑近轴光线）。

分析　射向玻璃表面的光线，除了折射之外，还有少量被反射，反射光也能够成不很明亮的像。虽然理论上光线在两个表面之间多次反射，但是由于反射率很低，所以第二次反射光的强度比第一次反射光的强度低得多。眼睛所看到的像，其成像光线都是射向平面左侧的，因而只需要考虑经平面的反射光所成的像和经平面折射进入半球经球面反射再经平面折射的光所成的像即可。

本题中，玻璃半球较厚，不能作为薄透镜，所以只能用逐次成像法依次计算出各个面折射或反射所成的像。

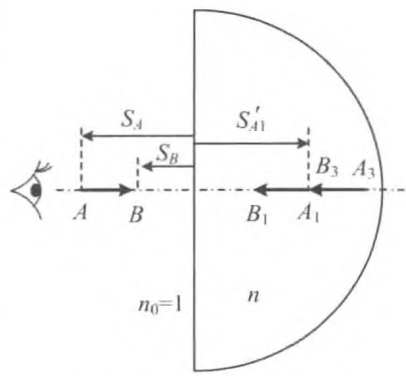


图 2.51　两个头尾相接的像

解　观察者在半球的左侧，看到的是两个反射像，分别由平面反射和球面反射形成。其中球面反射所成的像实际上是物先经平面折射，再经球面反射，再经球面折射而成。

不妨假设最终成像的情况如图 2.51 所示，A 端的平面反射像 A_1 与 B 端的球面反射像 B_3 重合。

首先确定平面反射所成的像。

球面反射的物像公式为

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = -\frac{2}{r}$$

其中，s，s' 和 r 分别为物距、像距和球面半径。若反射面是平面，$r = \infty$，所以有 $s' = -s$，按照本书的符号约定，这是一个在对称位置上的等大小的正立虚像。则 A 端的平面反射

像A_1的像距为

$$s'_{A1} = -s_A$$

下面讨论球面的反射像。

物先经平面折射成像，如图 2.52 所示的球面折射的物像公式为

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}$$

其中，n 和 n'分别为物方和像方的折射率。若折射面是平面，$r = \infty$，则

$$s' = -\frac{n}{n'}s$$

所以 B 端的平面折射像的像距为

$$s'_{B1} = -ns_B$$

像的位置如图 2.52 所示。将此像作为球面的物，再经球面反射成像。在这次成像中，物距为

$$s_{B2} = r - s'_{B1} = r + ns_B$$

像距为

$$s'_{B2} = \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{s_{B2}}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r + ns_B}\right)^{-1}$$

$$= \frac{r(r + ns_B)}{r + 2ns_B}$$

像的位置如图 2.53 所示。将此像作为平面的物，经平面折射成像。在这次成像中，物距为

$$s_{B3} = r - s'_{B2} = r - \frac{r(r + ns_B)}{r + 2ns_B}$$

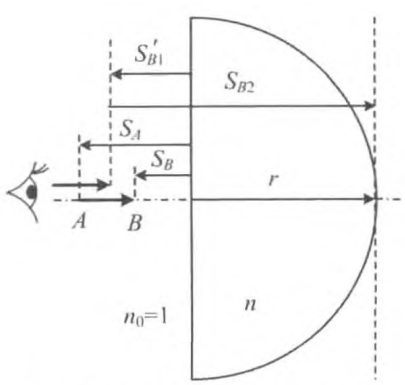


图 2.52 B 端经平面折射成像

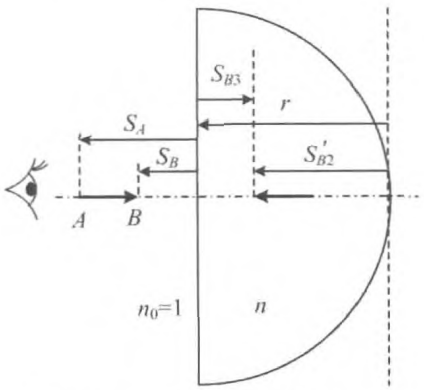


图 2.53 B 端再经球面反射成像

物像公式为

$$\frac{1}{s_3'} + \frac{n}{s_3} = 0$$

所以像距为

$$s'_{B3} = -\frac{s_{B3}}{n} = -\frac{r - \dfrac{r(r + ns_B)}{r + 2ns_B}}{n}$$

$$= -\frac{nrs_B}{n(r + 2ns_B)} = -\frac{rs_B}{r + 2ns_B}$$

按题意，最后，平面的反射像与球面的反射像头尾相接，由于 s'_{A1} 和 s'_{B3} 都是从同一个平面算起的距离，所以应当有

$$s'_{A1} = s'_{B3}$$

即

$$-s_A = -\frac{rs_B}{r + 2ns_B}$$

解得

$$n = \frac{R}{2s_B}\left(\frac{s_B}{s_A} - 1\right)$$

由于 $s_B < s_A$，所以会有 $n<0$，这是不可能的。所以最后应当是球面像在平面像的左侧，即 A_3 与 B_1 重合，如图 2.54 所示。

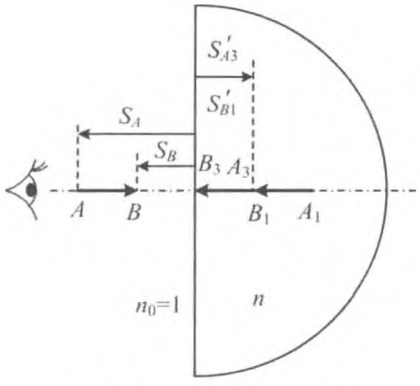


图 2.54 最终成像情况

对于这样的情况，当然不需要从头计算一遍，而只需要将前面计算结果中 A 与 B 两点的数据互换即可，即 $s_B \leftrightarrows s_A$，因而可以得到

$$-s_B = -\frac{rs_A}{r + 2ns_A}$$

解得

$$n = \frac{R}{2s_A}\left(\frac{s_A}{s_B} - 1\right) = \frac{128}{2 \times 40}\left(\frac{40}{20} - 1\right) = 1.6$$

【例 2.30】 照相机镜头 L 前 2.28 m 处的物体被清晰地成像在镜头后面 12.0 cm 处的照相胶片 P 上。今将一折射率为 1.50、厚 $AB = 0.90$ cm、两面平行的玻璃平板插入镜头与胶片之间，玻璃平板与光轴垂直，位置如图 2.55 所示。设照相机镜头可看做是一个简单薄凸透镜，光线为近轴光线。

(1) 求插入玻璃板后，像的新位置；

(2) 如果保持镜头、玻璃板、胶片三者间距离不变，并要求物体仍清晰地成像于胶片上，则物体应放在何处？

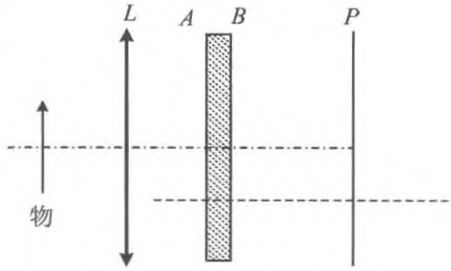


图 2.55 镜头后插一玻璃板

分析 此处的玻璃平板也是一个成像元件。

解 (1) 物经玻璃平板所成的像，相对于物向像方的移动距离为

$$\delta = d\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0.3\ \text{cm}$$

即像在 P 右侧 0.3 cm 处。

(2) 为了使像仍在 P 上，则透镜的像应当位于 P 左侧 0.3 cm 处。由此算得像距为

$$s' = 12.0 - 0.3 = 11.7\ (\text{cm})$$

而根据没有玻璃平板时透镜成像的参数，可算得透镜的焦距为

$$f = \frac{ss'}{s + s'} = \frac{228 \times 12.0}{228 + 12.0} = 11.4\ (\text{cm})$$

物距为

$$s = \frac{s'f}{s' - f} = \frac{11.7 \times 11.4}{11.7 - 11.4} = 444.6\ (\text{cm})$$

【例 2.31】 两个光学元件共轴放置，位置固定不动，每个光学元件都可能是薄透镜或平面反射镜。一个小物垂直于主轴。已知当小物位于两元件之间的任何位置时，由这光学系统所成的像是有限多个，且两个最后的像大小相同。试通过对各种可能情况的分析，论证什么样的光学系统能满足上面的要求，什么样的光学系统不能满足上面的要求。

分析 因为像是有限多个，所以不可能两个都是反射镜。又因为最后有两个像，必定一个由透镜直接成像，另一个既可能是另一个透镜直接成像，也可能经反射镜后再经透镜成像。

解 第一种情况，两透镜系统，分别向右、向左成像，如图 2.56 所示。

设两镜间距为 d，物到 L_1 距离为 s_1，则两像的横向放大率分别为

$$\beta_1 = -\frac{f_1}{s_1 - f_1}$$

和

$$\beta_2 = -\frac{f_2}{(d - s_1) - f_2}$$

按题意，两个最后的像大小相同，即 $\beta_1 = \pm\beta_2$，于是得到

$$\frac{f_1}{s_1 - f_1} = \pm\frac{f_2}{(d - s_1) - f_2}$$

若取“+”号，则有

$$s_1 = \frac{df_1}{f_1 + f_2}$$

是固定值，不合题意；取“-”号，则有 $f_1 = f_2$，$d = 2f_1$，物距可取任意值。

第二种情况，透镜与反射镜系统，如图 2.57 所示。向右成像，横向放大率

$$\beta_1 = -\frac{f}{s_1 - f}$$

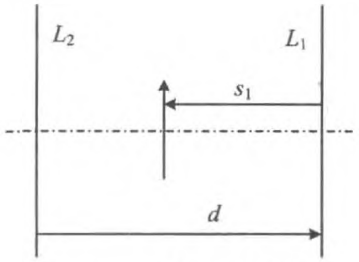


图 2.56 透镜—透镜组合

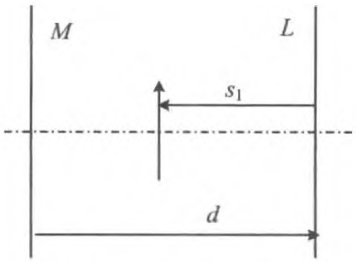


图 2.57 反射镜—透镜组合

向左被反射，反射镜的虚像再经透镜成像，此像对透镜的物距为

$$s_2 = d + d - s_1 = 2d - s_1$$

横向放大率

$$\beta_2 = -\frac{f}{2d - s_1 - f}$$

于是有

$$2d - s_1 - f = \pm (s_1 - f)$$

有两个解，$s_1 = d$ 和 $d = f$，其中 $s_1 = d$ 不合题意；当 $d = f$ 时，物距可取任意值。

【例 2.32】 焦距 f 的数值均相同的三个薄透镜 L_1，L_2 和 L_3 依次为凸透镜、凹透镜与凸透镜，它们构成一个共轴光学系统，相邻透镜间的距离均为 d，各透镜的光心分别为 O_1，O_2 和 O_3，如图 2.58 所示。在透镜 L_1 的左方，位于主轴上的物点 P 经此光学系统最终成像于透镜 L_2 右方的 Q 点。若距离 $\overline{PO_2} = \overline{O_2Q}$，则物点 P 与透镜 L_1 的距离应为多少？

分析 本题中，光学系统是左右对称的，物像也是左右对称的，则只能是中间透镜 L_2 成像时，物和像是左右对称的。

解 L_1 的像是 L_2 的物，而 L_2 的像是 L_3 的物，由于 L_1 和 L_3 是相同的透镜，物、像都是实的，到透镜的距离也相同，所以可以判断，L_2 成像时，物距与像距相等。

根据高斯公式

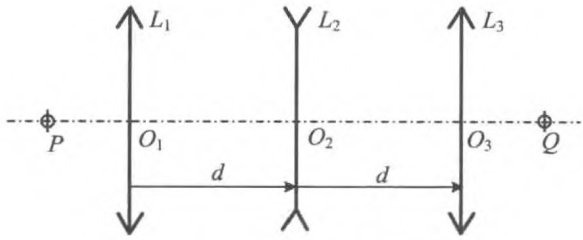


图 2.58 三透镜系统物像对称

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{f}$$

可得

$$s'=s=2f$$

即物像都在2倍焦距处。对于凹透镜，焦距为负值，就是虚物成虚像。而 L_2 的物是 L_1 的像，所以 L_1 的像距为 $s_1'=d+2f$，物距为

$$s_1=\frac{s_1'f}{s_1'-f_1}=\frac{(d+2f)f}{d+2f-f}=\frac{(d+2f)f}{d+f}$$

还有另外一种情况，当而 L_2 的物距和像距都为0时，也成立。此时，$s_1'=d$，物距为

$$s_1=\frac{s_1'f}{s_1'-f_1}=\frac{df}{d-f}$$

只有当 $d>f$ 才有这一情况。

【例 2.33】 如图2.59所示，L_1 为一薄凸透镜，Q 为高等于2.00 cm与光轴垂直放置的线状物。已知 Q 经 L_1 成一实像，像距为40.0 cm。现于 L_1 的右方依次放置薄凹透镜 L_2，L_3 和薄凸透镜 L_4 以及屏 P，它们之间的距离如图所示，所有的透镜都共轴，屏与光轴垂直，L_2，L_3 焦距的大小均为15.0 cm。已知物 Q 经上述四个透镜最后在屏上成倒立的实像，像高为0.500 cm。

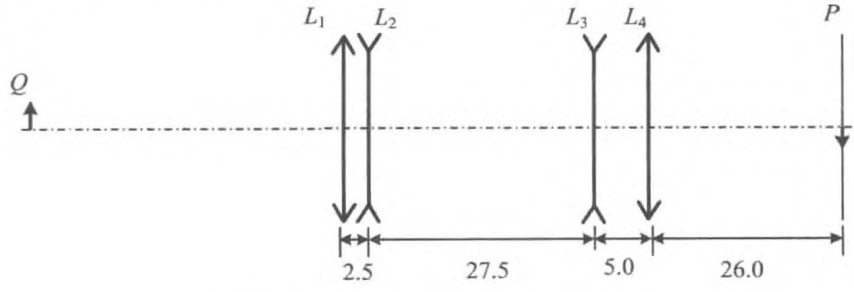


图 2.59 由4个薄透镜构成的光具组

(1) 求透镜 L_1 和 L_4 焦距；

(2) 现保持 Q，L_1，L_4 和 P 位置不变，而沿光轴平移 L_2，L_3，最后在屏上成倒立的实像，像高为 1.82 cm，求此时 L_1 和 L_2 的距离以及 L_2 和 L_3 的距离。

分析 题中已告知初始条件下的一些参数，可据此根据物像公式和横向放大率确定未知的透镜。在某些透镜位置变动后，仍可以按上述方法进行一些计算。

解 (1) 已知 $f_2 = f_3 = -15$ cm，这种条件下，逐次成像过程示如下表示：

对于 L_1，像距为 $s_1' = 40$ cm。

对于 L_2，物距

$$s_2 = d_{21} - s_1' = 2.5 - 40.0 = 37.5\,(\text{cm})$$

像距为

$$s_2' = \frac{s_2 f_2}{s_2 - f_2} = -25.0\ \text{cm}$$

对于 L_3，物距

$$s_3 = d_{32} - s_2' = 27.5 + 25.0 = 52.5\,(\text{cm})$$

像距为

$$s_3' = \frac{s_3 f_3}{s_3 - f_3} = -11.67\,(\text{cm})$$

对于 L_4，物距

$$s_4 = d_{43} - s_3' = 5.0 + 11.67 = 16.67\,(\text{cm})$$

像距为

$$s_4' = 26.0\,(\text{cm})$$

则焦距

$$f_4 = \frac{s_4 s_4'}{s_4 + s_4'} = 10.16\ \text{cm}$$

横向放大率为

$$\left(-\frac{s_1'}{s_1}\right)\left(-\frac{s_2'}{s_2}\right)\left(-\frac{s_3'}{s_3}\right)\left(-\frac{s_4'}{s_4}\right) = \left(-\frac{40}{s_1}\right)\left(-\frac{-25}{-37.5}\right)\left(-\frac{-11.67}{52.5}\right)\left(-\frac{26}{16.67}\right)$$

$$= \frac{-0.5}{2}$$

可解得

$$s_1 = 36.98\ \text{cm}$$

于是得到 L_1 的焦距

$$f_1 = \frac{s_1 s_1'}{s_1 + s_1'} = 19.22\ \text{cm}$$

(2) 移动之后，各透镜间距如图 2.60 所示，则此时 L_2，L_3之间距离为

$$d_{32} = 30.0 - d_{21} - d_{43}$$

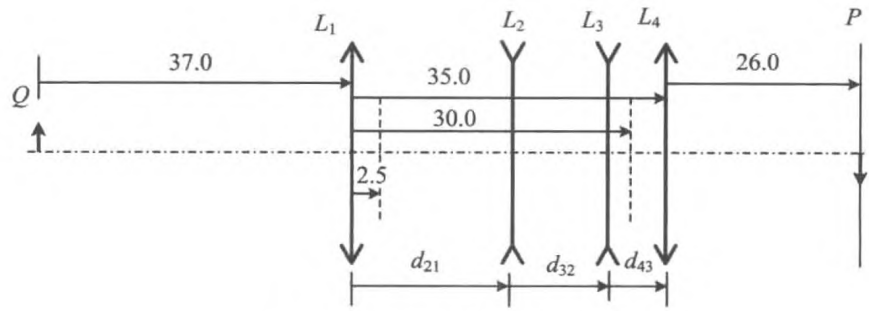


图 2.60 透镜 L_2，L_3移动之后

由于 Q，L_1，L_4和 P 的位置没变，所以第一次成像、第四次成像均与移动前相同。而这时总的横向放大率改变，为

$$\left(-\frac{s_1'}{s_1}\right)\left(-\frac{s_2'}{s_2}\right)\left(-\frac{s_3'}{s_3}\right)\left(-\frac{s_4'}{s_4}\right) = \left(-\frac{40}{36.98}\right)\left(-\frac{s_2'}{s_2}\right)\left(-\frac{s_3'}{s_3}\right)\left(-\frac{26}{16.67}\right)$$

$$= \frac{-1.82}{2}$$

所以有

$$\frac{s_2'}{s_2} \cdot \frac{s_3'}{s_3} = -0.54 \tag{1}$$

对于 L_2，物距和像距分别为

$$s_2 = d_{21} - 40.0 \tag{2}$$

$$s_2' = \frac{s_2 f_2}{s_2 - f_2} = \frac{-15.0 s_2}{s_2 + 15.0} = \frac{15.0(40.0 - d_{21})}{d_{21} - 25.0} \tag{3}$$

对于 L_3，像距和物距分别为

$$s_3' = d_{43} - 16.67 \tag{4}$$

$$s_3 = \frac{-15.0 s_3'}{s_3' + 15.0} = \frac{15.0(16.67 - d_{43})}{d_{43} - 1.67} \tag{5}$$

将式(2)～式(4)代入式(1)，得到

$$\frac{15}{d_{21} - 25.0} \cdot \left(\frac{16.67 - d_{43} - 15.0}{15.0}\right) = -0.54$$

由此解得

$$d_{43} = 11.83 - 0.54 d_{21} \tag{6}$$

而

$$s_3 = d_{32} - s_2' = 35.0 - d_{21} - d_{43} - s_2'$$

将式(3)、式(5)代入，得到

$$\frac{15.0(16.67 - d_{43})}{d_{43} - 1.67} + \frac{15.0(40.0 - d_{21})}{d_{21} - 25.0} = 35.0 - d_{21} - d_{43} \tag{7}$$

再将式(6)代入式(7)，解得

$$d_{21} = 20.3\ \text{cm}$$

$$d_{43} = 4.2\ \text{cm}$$

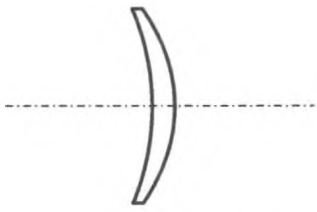


图 2.61 薄透镜

【例 2.34】 如图 2.61 所示的薄透镜，球面半径分别为 15.00 cm(左)和 10.00 cm(右)，已知玻璃的折射率为 1.5。

(1) 计算该透镜的焦距；

(2) 一傍轴小物在透镜左侧 80.0 cm 处，计算经过透镜所成像的位置和横向放大率，并指出像的虚实、倒正。

解 (1) 两折射面的光焦度分别为

$$\Phi_1 = \frac{n_L - 1}{r_1} = \frac{1.5 - 1}{-15} = -\frac{1}{30}\ \text{cm}^{-1}$$

$$\Phi_2 = \frac{1 - n_L}{r_2} = \frac{1 - 1.5}{-10} = \frac{1}{20}\ \text{cm}^{-1}$$

透镜的光焦度为

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{1}{60}\ \text{cm}^{-1}$$

焦距为

$$f = \frac{1}{\Phi} = 60\ \text{cm}$$

(2) 由高斯公式

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

解得

$$s' = \frac{sf}{s - f} = \frac{80 \times 60}{80 - 60} = 240\ (\text{cm})$$

横向放大率为

$$\beta = -\frac{s'}{s} = -3$$

为倒立实像。

【例 2.35】 如图 2.62 所示，焦距 $f_1 = 10.0\ \text{cm}$ 的凸透镜和 $f_2 = -15.0\ \text{cm}$ 的凹透镜间距 $d = 5.0\ \text{cm}$，两透镜都可视作理想薄透镜。求：

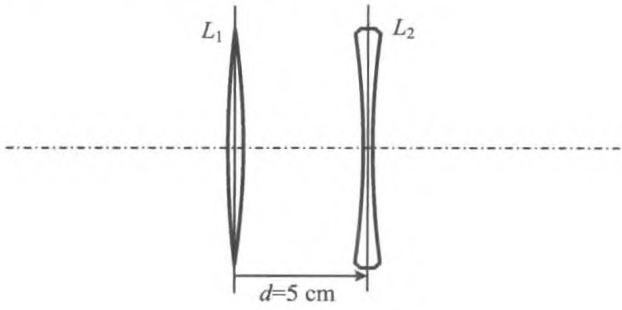


图 2.62 透镜组

(1) 若物在凸透镜左侧 50.0 cm 处，最终成像于何处？横向放大率是多少？并指出像的倒正、虚实。

(2) 若将上述透镜组用作望远镜的物镜，且望远镜的目镜是焦距 $f_3 = 2.5\ \text{cm}$ 的凸透镜，该目镜应当置于何处？

解 (1) 第一次经 L_1 成像

$$s_1 = 50\ \text{cm}$$

$$s_1' = \frac{s_1 f_1}{s_1 - f_1} = \frac{50 \times 10}{50 - 10} = 12.5\ (\text{cm})$$

第二次经 L_2 成像

$$s_2 = d - 12.5 = -7.5\ (\text{cm})$$

$$s_2' = \frac{s_2 f_2}{s_2 - f_2} = \frac{(-7.5) \times (-15)}{(-7.5) - (-15)} = 15.0\ (\text{cm})$$

这是到 L_2 的距离，像在 L_2 的右侧，是实像。横向放大率为

$$\beta = \left(-\frac{s_1'}{s_1}\right)\left(-\frac{s_2'}{s_2}\right) = \left(-\frac{12.5}{50}\right)\left(-\frac{15}{-7.5}\right) = -\frac{1}{2}$$

是倒立的。

(2) 物很远时，第一次成像于 L_1 的像方焦平面处

$$s_1' = f_1 = 10\ \text{cm}$$

第二次经 L_2 成像，物距

$$s_2 = d - 10 = -5\ (\text{cm})$$

$$s_2' = \frac{s_2 f_2}{s_2 - f_2} = \frac{(-5) \times (-15)}{(-5) - (-15)} = 7.5\ (\text{cm})$$

这就是物镜像方焦平面的位置。目镜的物方焦平面在此处，则目镜应当在 L_2 的右侧 10 cm 处。

【例 2.36】 如图 2.63 所示的光学系统中，凹透镜 L_1 的焦距 $f_1 = -20$ cm，凸透镜 L_2 的焦距 $f_2 = 30$ cm，平面镜 M 与两透镜光轴成 45°角，相互间的位置已标于图中。求：

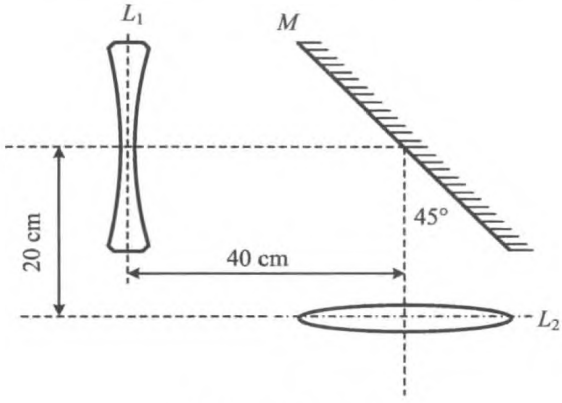


图 2.63 光学成像系统

(1) 平行光从 L_1 的左侧入射，经过该系统后，汇聚于何处？

(2) 平行光从 L_2 的下侧入射，经过该系统后，汇聚于何处？

(3) 在 L_1 的左侧 20 cm 处的一个尖端向上的物体，经过该系统后，成像于何处？放大倍数是多少？尖端朝向哪一方？像的虚实性如何？

分析 光具组的成像问题都可以采用逐次成像法处理。本题中的平面镜位于透镜中间，透镜的像是平面镜的物。平面镜成像时，实物成虚像，虚物成实像。

解 (1) 平行光经 L_1 后，成像于 L_1 的左侧 20 cm 处，为虚像；该虚像为 M 的实物，经 M 后，在镜面对称位置成一个虚像，该虚像为 L_2 的实物，到 L_2 的距离为

$$20 + 40 + 20 = 80\ (\text{cm})$$

再经 L_2 后，像距为

$$\frac{80 \times 30}{80 - 30} = 48\ (\text{cm})$$

是实像，在 L_2 下方 48 cm 处。

(2) 平行光经 L_2 后，成像于 L_2 的上方 30 cm 处，为实像；该实像位于 M 之后，为 M 的虚物，经 M 后，在镜面对称位置成实像，该实像为 L_1 的实物，到 L_1 的距离为

$$40 - 10 = 30\ \text{cm}$$

再经 L_1 后，成像于

$$\frac{30\times(-20)}{80-(-20)}6=-6\,(\text{cm})$$

是虚像，在 L_1 右侧 6 cm 处。

本小问所求的结果和(1)中的结果就是该光具组的两个焦点。

(3) 物经 L_1 第一次成像，物距 $s_1=20$ cm，像距为

$$s_1'=\frac{s_1f_1}{s_1-f_1}=\frac{20\times(-20)}{20-(-20)}=-10\,(\text{cm})$$

为正立虚像。

该像作为 M 的物，到 M 中心距离为

$$s_2=d_{12}-s_1'=40-(-10)=50\,(\text{cm})$$

经 M 第二次成像，成像于对称位置，像距 $s_2'=-s_2=-50$ cm，为虚像。

该虚像作为 L_2 的物，物距为

$$s_3=d_{12}-s_2'=20-(-50)=70\,(\text{cm})$$

是 L_2 的实物。再经 L_2 成像的像距为

$$s_2'=\frac{s_2f_2}{s_2-f_2}=\frac{70\times30}{70-30}=52.5\,(\text{cm})$$

为实像，在 L_2 的下方。

成像过程中，注意到平面镜的横向放大率总是 +1，所示总的横向放大率为

$$\beta=\left(-\frac{s_1'}{s_1}\right)(+1)\left(-\frac{s_3'}{s_3}\right)=\left(-\frac{-10}{20}\right)(+1)\left(-\frac{52.5}{70}\right)=-0.375$$

若约定对于水平的光轴，系统的正方向向上，则对于竖直的光轴，系统的正方向应该向左。上述结果说明最终像的方向与系统的正方向相反，即像的尖端指向右侧。

【例 2.37】 如图 2.64 所示，焦距 $f_1=10$ cm 的薄凸透镜 L_1 右侧 15 cm 处有一成像屏幕。求：

(1) 物在何处，才能在屏幕上成像？像的横向放大率是多少？

(2) 保持物和 L_1 不动，可以将一个焦距 $f_2=-20$ cm 的薄凹透镜 L_2 插入 L_1 之后而最终在屏上成一个放大 2 倍的像。L_2 到 L_1 的距离为多少？屏幕应移至何处？

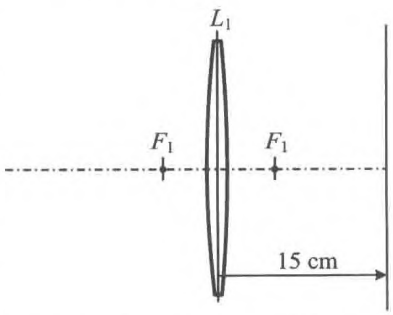


图 2.64　透镜与成像屏幕

解　(1) 透镜 L_1 右到屏幕的距离即为像距，即 $s'=15$ cm，于是物距为

$$s = \frac{s'f_1}{s' - f_1} = \frac{15 \times 10}{15 - 10} = 30\ (\text{cm})$$

横向放大率为

$$\beta = -\frac{s'}{s} = -\frac{1}{2}$$

(2) 由于要在屏幕上成实像，而只有虚物才能经负透镜成实像。因而第二次成像过程是虚物成像，物距为负值，像距为正值，横向放大率为正值。由于已知第一次成像的横向放大率为 $-1/2$，而总的横向放大率为 2，所以第二次成像的横向放大率必为 4，即

$$-\frac{s_2'}{s_2} = 4$$

而

$$\frac{s_2'}{s_2} = \frac{f_2}{s_2 - f_2}$$

所以可得

$$\frac{s_2'}{s_2} = \frac{f_2}{s_2 - f_2} = \frac{-20}{s_2 + 20} = -4$$

解得

$$s_2 = -15\ \text{cm}$$

物经 L_1 所成的像为 L_2 的物，所以 L_2 与 L_1 的间距为

$$d = s_1' + s_2 = 15 + (-15) = 0$$

即 L_2 应紧贴 L_1 后放置。

此时 L_2 的像距为 $s_2' = -4s_2 = 60$ cm，这是屏幕到 L_2 的距离，即屏幕应当向右移动 45 cm。

【例 2.38】 如图 2.65 所示的光学系统由共轴且焦距绝对值相等的凸透镜、凹透镜及凸面镜构成，相邻两元件间距等于上述焦距的绝对值 f。

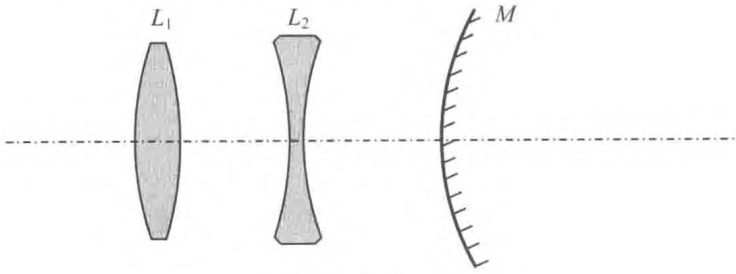


图 2.65 共轴光具组

(1) 求出该系统的焦点在何处?

(2) 一个傍轴小物经过该系统后在原处成像,求该小物的位置以及最后所成像的倒正。

分析 对于共轴的光学成像系统而言,所谓焦点,就是平行于光轴的光束经过系统后的汇聚点,该汇聚点一定在光轴上。系统中有一个反射镜,所以整个系统属于反射型的,物方与像方重合,物方与像方两焦点重合。反射系统可实现自准直,即像与物在同一位置。

解 (1) 平行光入射,经 L_1 后成像于 L_1 的像方焦点,而 L_1 的像方焦点就是 L_2 光心。对于 M,物距为 $s_3=f$。再经 M 反射成像,由

$$\frac{1}{s_3'}+\frac{1}{f}=\frac{1}{-f}$$

算得

$$s_3'=-\frac{f}{2}$$

即成虚像于 M 右侧$(1/2)f$ 处。

经 M 反射后,再依次经 L_2,L_1 成像。对于 L_2,物距为

$$s_4=f-s_3'=\frac{3}{2}f$$

经 L_2 成像,由于

$$\frac{1}{s_4'}+\frac{1}{\frac{3}{2}f}=-\frac{1}{f}$$

算得

$$s_4'=-\frac{3}{5}f$$

为虚像,在 L_2 右侧。

对于 L_1,物距为

$$s_5=f-s_4'=\frac{8}{5}f$$

经 L_1 成像,由于

$$\frac{1}{s_5'}+\frac{1}{\frac{8}{5}f}=\frac{1}{f}$$

$$s_5'=\frac{8}{3}f$$

为实像，在 L_1 左侧，这就是焦点（整个系统的物方和像方焦点）

（2）若使像与物在同一位置，就要求系统中反射镜的物像在同一位置。对 M 而言，有以下两种情形。

第一种情形，反射镜 M 的物在其 2 倍焦距处，即在其球心处。则经 L_2 的光线汇聚于 M 的球心，到 L_2 的像距为 $3f$。于是由

$$\frac{1}{s_2}+\frac{1}{3f}=-\frac{1}{f}$$

可得

$$s_2=-\frac{3}{4}f$$

是虚物。

L_2 的物是 L_1 的像，L_1 的像距应为

$$s_1'=f-s_2=\frac{7}{4}f$$

对于 L_1，由

$$\frac{1}{\frac{7}{4}f}+\frac{1}{s_1}=\frac{1}{f}$$

得到

$$s_1=\frac{7}{3}f$$

在 L_1 左侧。

由于反射镜的物像是相互倒立的，所以整个系统的物像也是相互倒立的。

第二种情形，反射镜 M 的物在其镜面处，即物距为 0，像距也为 0。则经 L_2 的光线汇聚于 M 的主平面，到 L_2 的像距为 f。于是由

$$\frac{1}{s_2}+\frac{1}{f}=-\frac{1}{f}$$

可得

$$s_2=-2f$$

是虚物。

L_2 的物是 L_1 的像，L_1 的像距应为

$$s_1'=f-s_2=3f$$

对于 L_1，由

$$\frac{1}{3f}+\frac{1}{s_1}=\frac{1}{f}$$

得到

$$s_1 = \frac{3}{2}f$$

在 L_1 左侧。

由于反射镜的物像的方向是相同的，所以整个系统的物像的方向也是相同的。

2.3 成像作图法

2.3.1 作图法的基本原则

成像作图法，是用物方、像方的共轭光线确定物像关系。所谓共轭，就是物像之间的对应关系。光学成像中基本的共轭关系包括：

一条物方光线←→一条像方光线；

一个物点（物方同心光束）←→一个像点（像方同心光束）；

一个垂轴的物方平面←→一个垂轴的像方平面。

理想光学元件（或成像系统）成像作图法的原则是只要元件（或成像系统）的焦点是确定的，则物方像方的共轭关系就是确定的。作图法与解析法（计算法）所依据的原则是相同的，所以作图法与解析法是完全等价的，即只要用解析法能解决的问题，作图法一样能够解决；用解析法处理起来较容易的问题，用作图法处理起来也很容易。

用作图法处理光具组的成像问题，一般也按逐次成像的规则。

2.3.2 典型问题与基本解题方法

（1）利用焦点的性质，确定物像关系

与光轴平行的光线←→经过焦点的光线。

（2）利用焦平面的性质，确定物像关系

相互平行的光线←→经过焦平面上同一点的光线。

（3）对于物方和像方折射率相同的薄透镜，例如空气中的薄透镜，还可以利用光心的性质作图，经过光心的光线方向不变。

【例 2.39】 如图 2.66 所示，某人的眼睛在 E 处通过放大镜 L 观察标尺 M，F_1 和 F_2

为 L 的焦点。他既能通过 L 看到 M 上的一部分刻度，又能直接从镜外看到部分刻度，试在题图上用作图法求出他看不到的 M 上的刻度值的范围。在作图时用①、②……表明你画的光线，并写出作图步骤。

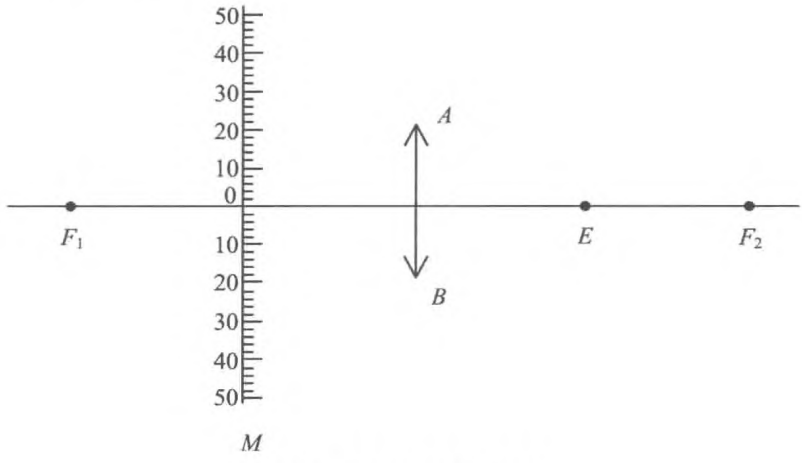


图 2.66 通过透镜观察标尺

分析 本题中，标尺上某些区域发出的光线可不经透镜直接进入观察者的眼睛，这些区域当然可以被看到。另有一些区域所发出的光线经过透镜折射后也可以进入观察者的眼睛，也能被看到。还有一些区域所发出的光线经透镜折射后不能进入观察者的眼睛，这属于不可见的区域。

每一个具体的成像问题都可以用多种作图法求解。

根据光的可逆性，所以从 E 点所发出的光线能够覆盖到的区域，就是可见的区域。

解 方法一，如图 2.67 所示。

(1) 从 E 点向透镜的边缘 A 引一条光线 EA。

(2) 过透镜光心作与 AE 平行的光线，该光线与过 F_1 的焦平面交于 H 点。

(3) 由于平行光线经透镜后都汇聚于焦平面上的同一点，所以光线 EA 的共轭光线为 AH。

(4) AH 与标尺的交点 C 就是从 E 点发出的光线能够到达的在标尺的最上位置，即光轴到 C 的区域能够通过透镜看到。

(5) 将 EA 直接延长与标尺交于 D 点，D 点以上区域可以被眼睛直接看到。

(6) E 点发出的光线不能到达 CD 之间的区域，则标尺上 CD 之间不能被看到，即 30～40 之间不能被看到。

(7) 在光轴的另一侧，有对称的不能被看到的区域(－30～－40)。

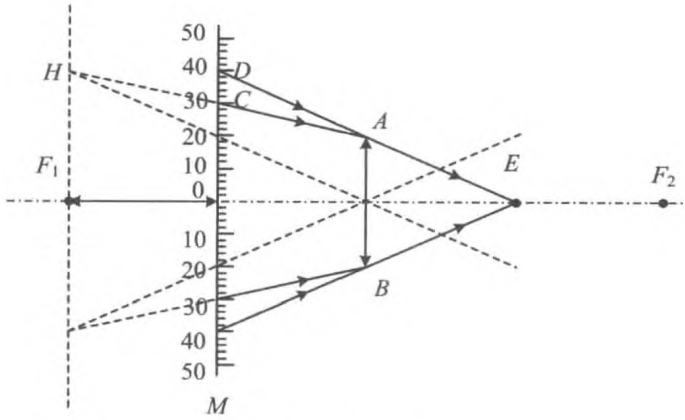


图 2.67 方法一

方法二，如图 2.68 所示。

用物像法解决该问题。同样利用物像共轭的原理，作出眼睛经透镜所成的像，然后进行判断。

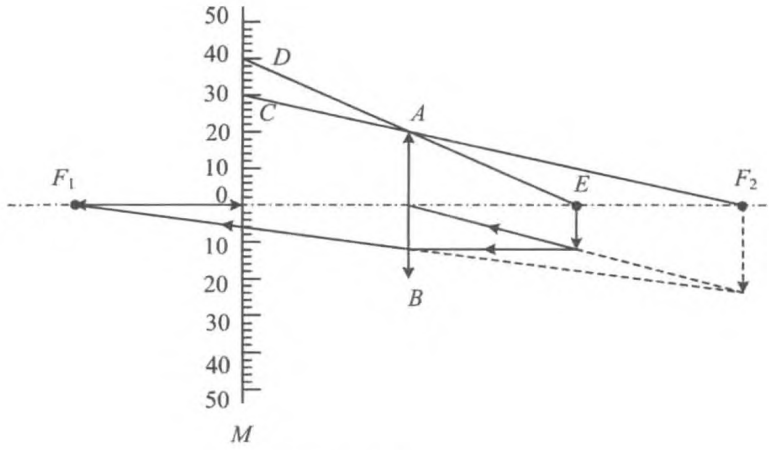


图 2.68 方法二

(1) 在 E 处作一傍轴小物，求出改物经透镜所成的像。可见，E 点的像在焦点 F_2 处。

(2) 从标尺看眼睛，除了不经透镜可直接看到的区域之外，在一些区域看到的是眼睛经透镜所成的像。将 F_2 与 A 用直线连接，所得直线与标尺交于 C 点，则 C 点之上的部分不能通过透镜看到 E。

(3) 标尺上可不通过透镜直接看到眼睛的区域在 D 点以上。

(4) CD 之间的区域看不到眼睛，眼睛也看不到标尺。

当然还有其他方法。

【例 2.40】 一平凸透镜焦距为 f，其平面上镀了银，现在其凸面一侧距它 $2f$ 处，垂直于主轴放置一高为 H 的物，其下端在透镜的主轴上(如图 2.69 所示)。

(1) 用作图法画出物经镀银透镜所成的像，并标明该像是虚、是实。

(2) 用计算法求出此像的位置和大小。

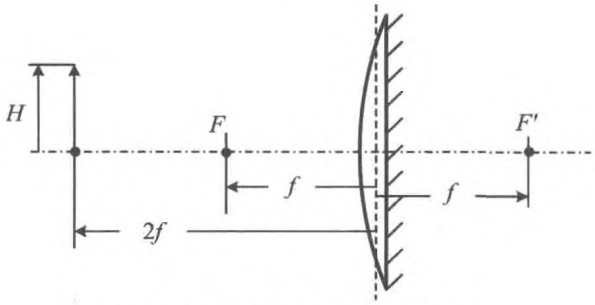


图 2.69 镀有反射膜的平凸透镜

解 (1) 题中的成像过程可以这样理解(如图 2.70 所示)：

① 物经平凸透镜成实像 A 于像方 $2f$ 处。

② 透镜的像 A 作为平面镜的物，是虚物。该虚物经平面镜成实像 B，在平面镜的像方 $2f$ 处。

③ 平面镜的像 B 作为透镜的物，是虚物。该虚物经透镜成实像 C，在透镜左侧。

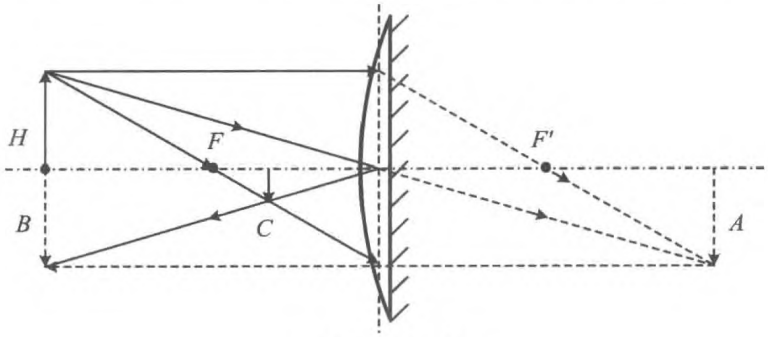


图 2.70 作图结果

作图中，第三步可利用的光线是从物射向透镜光心的光线，该光线在透镜中方向不变，被平面镜反射，所以出射光线与入射光线关于光轴对称；另一光线是垂直于平面镜的反射光线，由于该光线与光轴平行，所以经透镜后射向焦点 F。上述两光线的交点就是

最终像的位置 C。

当然，也可根据平凸透镜和平面镜的特点，利用两条特殊的光线直接得到最终的像，经过透镜焦点的光线经折射后与光轴平行，由于出射界面是平面，所以在透镜中上述光线就与光轴平行，与平面镜垂直，反射后将原路返回。另一条光线就是射向透镜光心的光线。作图过程如图 2.71 所示。

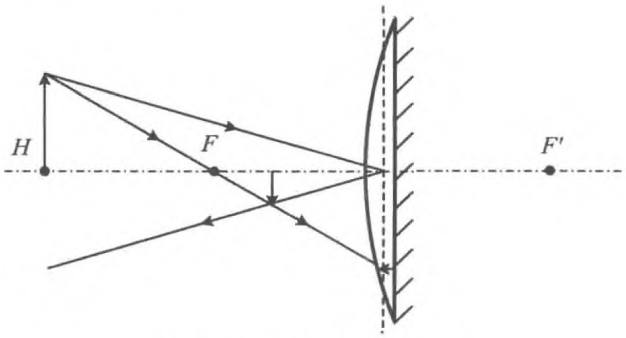


图 2.71 另一种作图方法

(2) 前面已经描述了逐次成像的过程，最后一次经透镜成像时，物距为 $s_3 = -2f$，于是像距为

$$s_3' = \frac{s_3 f}{s_3 - f} = \frac{-2ff}{-2f - f} = \frac{2}{3}f$$

横向放大率为

$$\beta = (-1)(+1)\left(-\frac{\frac{2}{3}f}{-2f}\right) = -\frac{1}{3}$$

即像高为 $H/3$，是倒立的。

【例 2.41】 焦距都为 f 的两个凸透镜 L_1，L_2 与两个圆形平面反射镜 M_1，M_2 放置如图 2.72 所示。两透镜共轴，透镜的主光轴与两平面镜垂直，并通过两平面镜的中心，四镜的直径相同，在主光轴上有一点光源 O。

(1) 画出光源向右的一条光线 OA 在此光学系统中的光路。

(2) 分别说出由光源向右发出的光线和由光源向左发出的光线各在哪些位置(O 点除外)形成光源 O 的能看到的像。哪些是实像？哪些是虚像？

(3) 现在用不透明板把下半部(包括透镜中心)都遮住，说出这时像有什么变化。

分析 可以利用焦平面的性质作出光线经各个元件后的共轭光线，也可以作出物点经各个元件的像，以确定光线的方向。

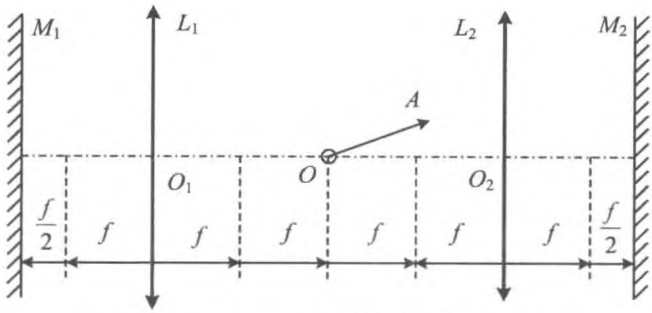


图 2.72 两透镜与两反射镜构成的光学系统

解 (1) 方法一,逐次作出共轭光线,如图 2.73 所示。

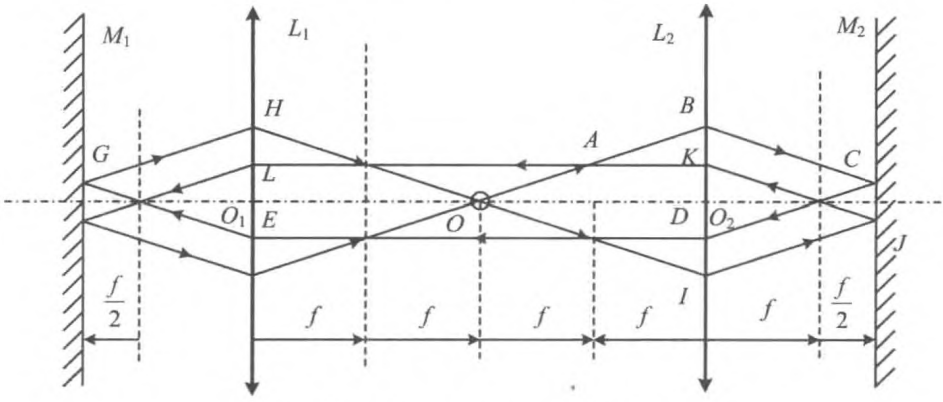


图 2.73 方法一,逐次作出共轭光线

① 过透镜 L_2 的光心作 OA 的平行线,该光线经过方向不变,与 OA 的折射光线相交于 L_2 右方焦平面上的同一点,由此作出 OA 的像方光线 BC。

② BC 经平面镜 M_2,对称地反射,反射光线为 CD。

③ 过 L_2 的光心作 CD 的平行线,该光线与 L_2 左侧焦平面的交点即是 CD 经 L_2 折射后的光线与该焦平面的交点,据此作出光线 DE。

④ 用相同的方法作出光线 DE 经 L_1 的折射光线 EG,EG 经 M_1 的反射光线 GH,GH 经 L_1 的折射光线 HI,由于光学系统的特殊性,HI 一定经过物点 O。

⑤ HI 经 L_2 之后成为 IJ,IJ 经 M_2 反射后成为 JK,JK 经 L_2 之后成为与光轴平行的 KL,再依次经 L_1,M_1,L_1 之后,又射向 O。

⑥ 之后再进行不断的循环。

方法二，利用各个元件所成的像点，逐次作出对应的光线，如图 2.74 所示。

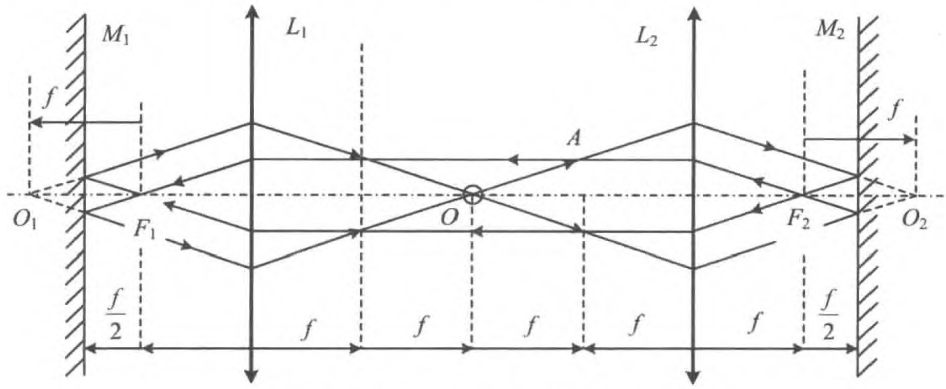


图 2.74 方法二，逐次作出像

① O 点经透镜 L_2 所成的实像点为 O_2，在 L_2 右侧 $2f$ 处。

② O_2 作为平面镜 M_2 的虚物，成实像于 L_2 的右焦点 F_2 处。

③ F_2 处的实像，经 L_2 成为平行光束，再经 L_1，成实像于 L_1 的左焦点 F_1 处。

④ F_1 处的实像，作为面镜 M_1 的实物，成虚像 O_1 于 M_1 左侧 $f/2$ 处。

⑤ O_1 作为 L_1 的实物，在 L_1 的 2 倍焦距处，经 L_1 成实像于 O 点。

⑥ 之后进行不断的循环。

⑦ 按次序将上述各个像点用光线连接即可。

【例 2.42】 已知透镜主光轴 OO'，发光点 A，A 经过透镜所成的像 A' 以及两个互相垂直且几何尺寸、位置都已给定的平面镜 M_1 和 M_2（如图 2.75 所示）。

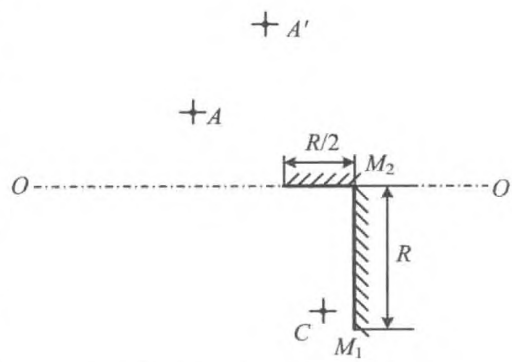


图 2.75 物与像的相对位置

（1）在题中给定的图上，用作图法画出透镜的位置和大小及焦点的位置，已知透镜的直径为 $2R$。

（2）图中的物点 C 对整个光学系统成几个实像？几个虚像？

（3）在题中给定的图上，再画出 C 点所成实像的光路图。

解 （1）本题中并没有说明透镜的正负，也没有说明像 A' 的虚实，但根据透镜成像的特点可以作出合理的推断。

事实上，由于像比物远离主光轴，且与物在主光轴的同一侧，相当于实物成一个正立放大的像，所以只能是正透镜成虚像。

由于成像光线中，通过光心的光线方向不变，所以通过物点和像点的直线与光轴的交点就是透镜的光心。

如图 2.76 所示，通过光心的垂轴平面是透镜的主平面，从物点 A 向主平面作垂线，垂足与像点 A' 的连线经过焦点，即上述直线与光轴的交点就是透镜的焦点 F。另一侧焦点 F' 可根据位置确定。

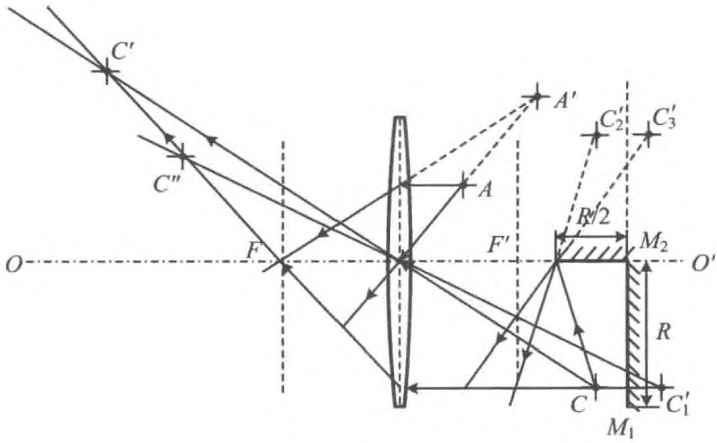


图 2.76 作图结果

(2) 物点 C 经平面镜 M_1，M_2 各成一个虚像，分别为 C_1' 和 C_2' 再经一次反射，又成虚像于 C_3'，如图 2.76 所示；直接经过透镜成一个实像 C'，C_1' 经透镜又可成一实像 C''。由于受到平面镜 M_2 尺度和透镜孔径的限制，C_2' 不能再经过透镜成像。

(3) C 点的虚像 C_1' 可作为透镜的实物进行成像，两个实像的作图过程示于图 2.76 中。

【例 2.43】 如图 2.77 所示，焦距为 10 cm 的凹透镜 L_1 与焦距为 20 cm 的凸透镜 L_2 共轴，两镜间隔为 30 cm，平面镜 M 与两透镜光轴垂直。傍轴小物位于两透镜之间，通过该系统后可以成两个像。

(1) 要使这两个像的位置重合，物应在何处？像又在何处？

(2) 用作图法画出上述成像过程，要求准确表示像的虚实与倒正。

(3) 如果 L_2 也是凹透镜，是否有使两个像重合物的位置？请解释原因。

分析 本题讨论的也是自准直成像问题。最终的两个像，一个是物直接经 L_1 向左所成的像，另一个是依次经 L_2，M，反射后再经 L_2，L_1 所成的像。由于都要经 L_1 成像，

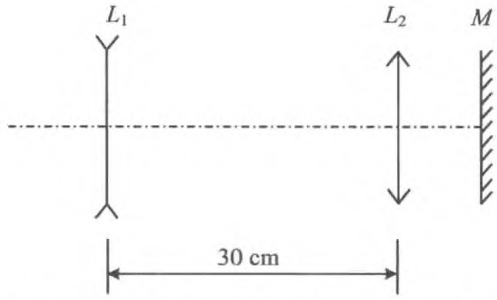


图 2.77 两透镜和一个平面镜构成的光具组

因而要求 L_1的物在同一位置，即对于最初向右的成像过程是自准直的，平面镜的物像在同一位置。本题中，由于平面镜处在任意位置，因而要求平面镜的物、像均在无穷远处。

解 (1) 如果物向右成像后仍在原处，则可以保证再向左所成的像与直接向左所成的像在同一处。

将物置于 L_2物方焦点处，经 L_2后变为平行光，沿 M 法线入射，满足自准直条件，在原处成一倒立实像，再经过 L_1，与物直接经 L_1所成的像在同一位置处。

对于 L_1，$s=10\ \text{cm}$，$f_1=-10\ \text{cm}$，像距

$$s'=\frac{sf}{s-f}=\frac{10\times(-10)}{10-(-10)}=-5\ (\text{cm})$$

为虚像，正立。

(2) 作图结果如图 2.78 所示。

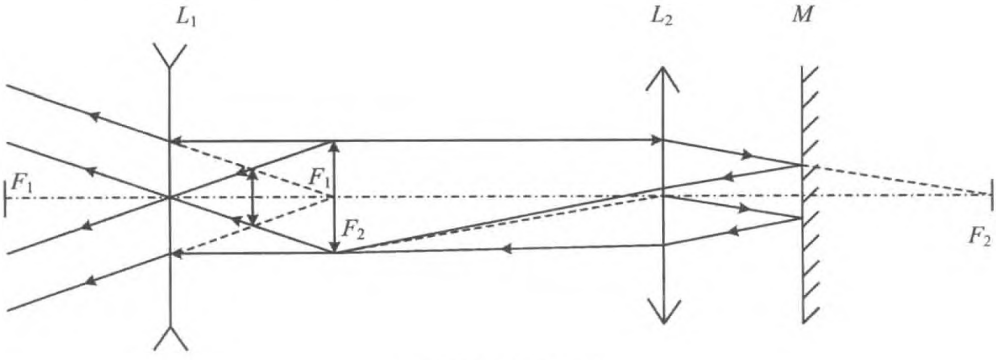


图 2.78 作图结果

(3) L_2也是凹透镜，对于实物，无法获得平行光线，因而无法在原处成像，对于 L_1而

言，相当于两物距不等，则无法使像距相等。

【例 2.44】 如图 2.79 所示，凸透镜 L_1 与凹透镜 L_2 共轴，每个透镜的焦点标示于图中。在 L_1 左侧有一物，经过透镜组成像。

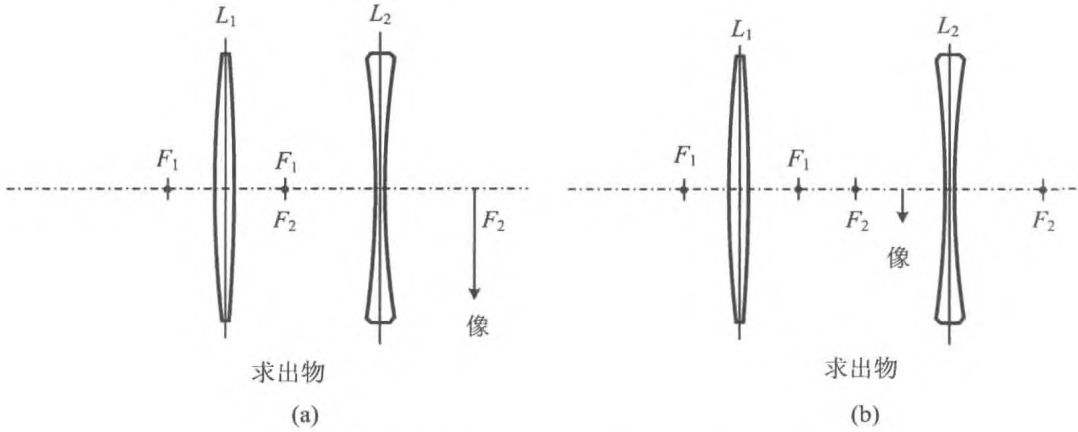


图 2.79　已知像，作图求出物

(1) 由于两透镜之间的距离可以改变，因而最终所成的像是不同的。分别就图中所给的最后所成的像，用作图法求出物(图中的像均用实线画出，与虚实无关)。

(2) 用作图法求出第一种配置下，共轴光学系统的物方焦平面和像方主平面。

解　(1) 作图结果如图 2.80 所示。需要注意的是，图 2.79(b)中的像由于不在透镜 L_2 的像方，因而是虚像。

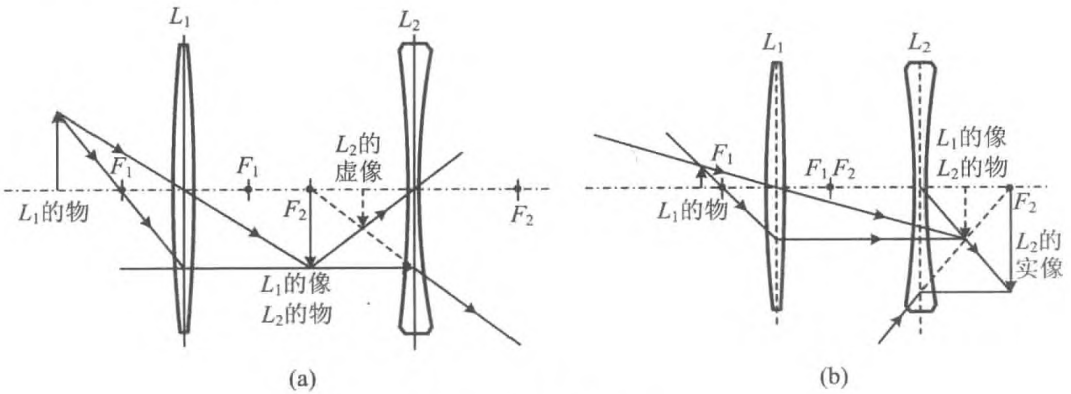


图 2.80　作图结果

(2) 如图 2.81 所示，使一条与光轴平行的光线自光具组的像方(本题中为 L_2 的右方)入射，依次经 L_2，L_1 折射后，与光轴的焦点就是光具组的物方焦点，因而可作出物方焦平面。

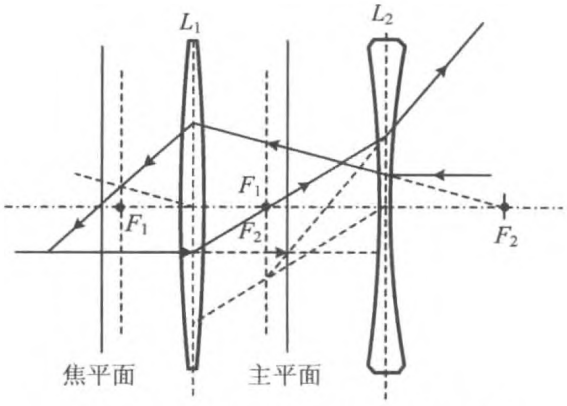


图 2.81 系统的物方焦平面与像方主平面

使一条与光轴平行的光线从系统的物方(本题中为 L_1 的左侧)入射，依次经 L_1，L_2 折射后成为一条像方光线。该像方光线与入射光线的交点一定位于像方主平面上，据此可作出系统的像方主平面。

【例 2.45】 用作图法完成下列各题：

(1) 作出图 2.82 中入射光线 1 和出射光线 2′的共轭光线 1′ 和 2。图中已标出凹透镜的两个焦点。

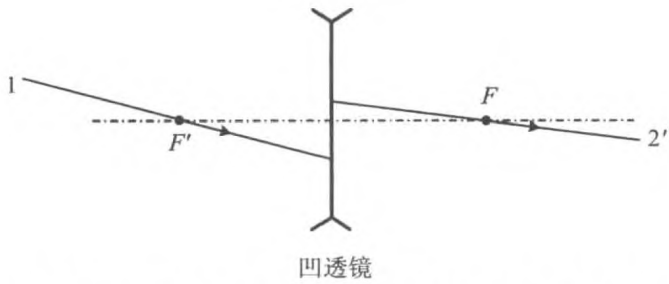


图 2.82 分别作图求出 1 的像方光线和 1′的物方光线

(2) 图 2.83 中标出了三个共轴薄透镜的焦点和各自的主平面，一物位于凸透镜 L_1 左侧 2 倍焦距处。作出物经过三个透镜后最终所成的像。

(3) 图 2.84 中 C 为凸面镜的曲率中心，作出图中所示物体经该反射镜所成的像。

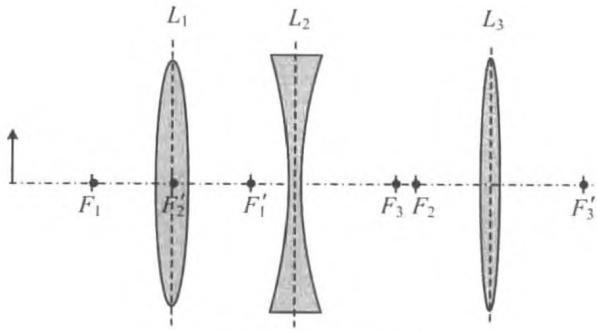


图 2.83 求最终的像

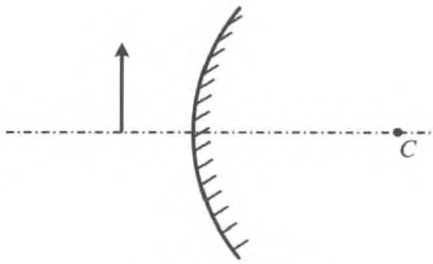


图 2.84 作图求物

解 作图结果分别见图 2.85、图 2.86 和图 2.87。

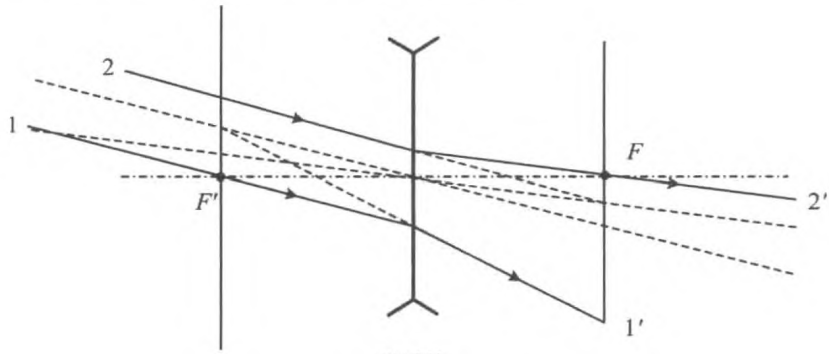


图 2.85 共轭光线

【例 2.46】 如图 2.88 所示，一凹透镜两侧介质折射率不等，图中标出了两个焦点 F, F'。以左侧为物方，已知像点为 Q'，用 2～3 种不同的作图法求出物点 Q 的位置。

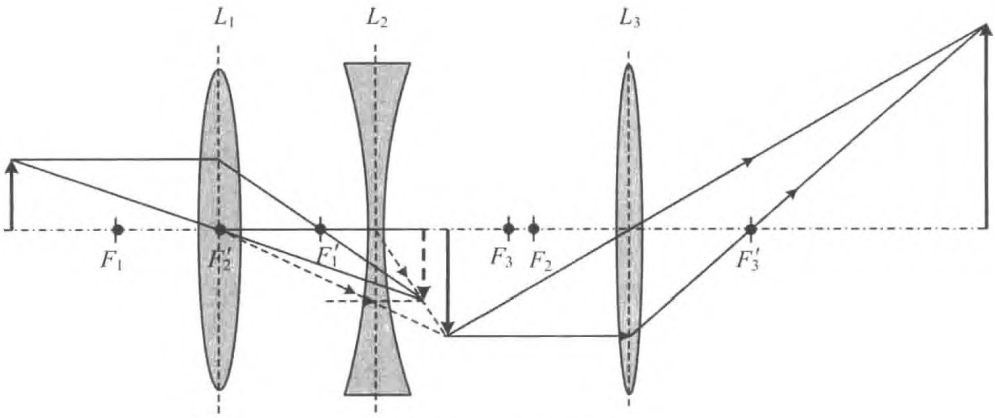


图 2.86 光具组的像

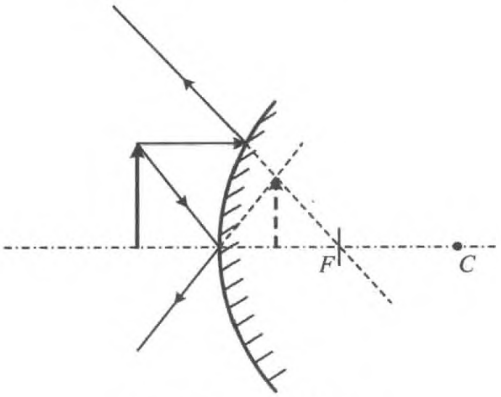


图 2.87 球面镜的像

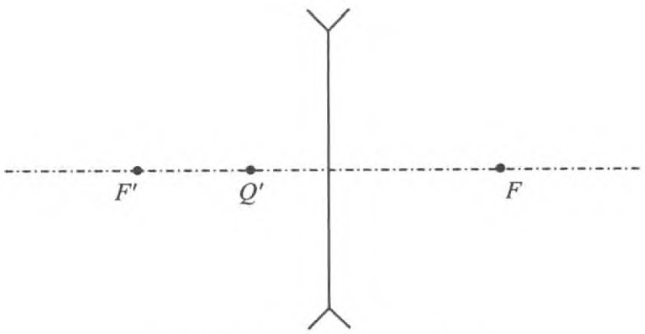


图 2.88 已知凹透镜的像 Q′

分析　本题中的困难在于，第一，透镜的焦距是负的，即凹透镜的物方焦点其实在像方，像方焦点其实在物方；第二，图中的像是虚像。解决问题的关键是要清楚像是透镜像方同心光束的汇聚点，虚像是像方发散光束的反向延长线的汇聚点，即虚光线的汇聚点。

基本的方法是依像点的位置，任意作两条通过该像点的像方光线，作出与之相应的两条物方光线，这两条物方光线的焦点就是物点。实际上，由于沿光轴通过透镜的光线方向不变，所以实际处理的时候，作出一条不平行于光轴的像方光线，求出其共轭的物方光线，该光线与光轴的交点就是物点。

作图过程中，可分别利用物方焦平面，或像方焦平面，也可利用物像作图法。

解　方法一，利用物方焦平面。

如图 2.89 所示，任意作一条汇聚到像点 Q' 像方光线 AB，另作一条与 AB 平行且通过像方焦点 F' 的像方光线 CD，则 CD 在物方的光线与光轴平行，且 AB，CD 在物方的光线通过物方焦平面上的同一点。于是得 CD 的物方光线（图中与光轴平行的物方光线）与物方焦平面的交点 E，连接 E，A 并延长得 GA，GA 就是与 AB 共轭的物方光线，GA 与光轴的交点 Q 就是物点。

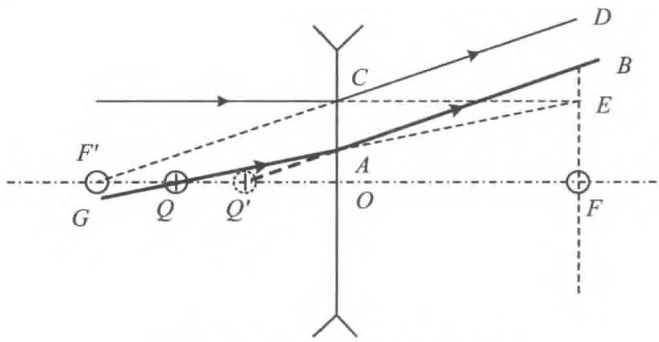


图 2.89　利用物方焦平面作图

方法二，利用像方焦平面。

如图 2.90 所示，将像方光线 AB 反向延长，与像方焦平面交于 E 点，另作一条过 E 点和光心 O 的像方光线 EOD。由于 AB，EOD 通过像方焦平面上同一点，它们在物方的光线相互平行。过 A 点作平行于 EO 的直线，该直线就是与 AB 共轭的物方光线，其与光轴的交点 Q 就是物点。

方法三，利用物像作图法。

如图 2.91 所示，过像点 Q' 作一个垂轴小物 $P'Q'$，然后求出与 P' 点相应的物点。由于 P' 点在光轴之外，可以利用特殊的共轭光线作图。

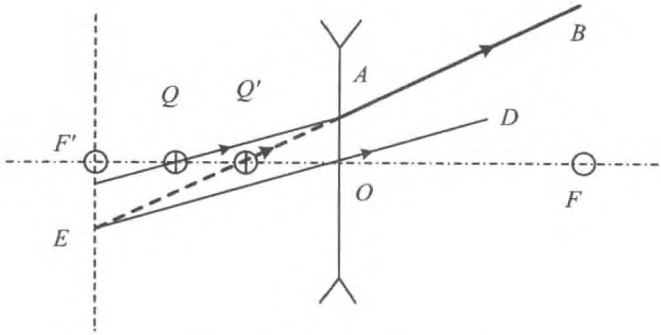


图 2.90 利用像方焦平面作图

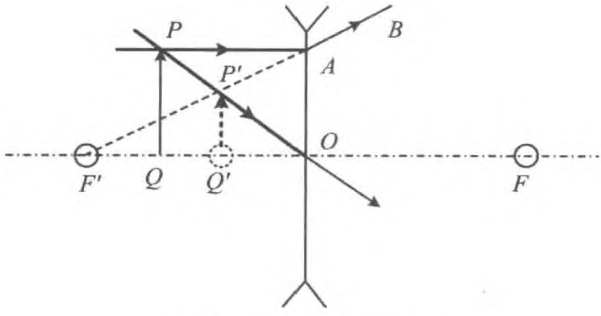


图 2.91 利用物像法作图

不妨过 P' 点分别作一条过光心的光线 $P'O$ 和过像方焦点的光线 $P'AB$，与 $P'O$ 共轭的物方光线与其平行，与 $P'AB$ 共轭的物方光线与光轴平行，两条物方光线的交点为 P，P 就是与 P' 共轭的物点，过 P 向光轴作垂线，垂足 Q 就是物点。

【例 2.47】 如图 2.92 所示，一理想光具组由焦距 $f_1 = 20\ \text{cm}$ 的凸透镜 L_1、焦距 $f_2 = -10\ \text{cm}$ 的凹透镜 L_2 和平面镜 M 构成，两透镜间距 $d = 15\ \text{cm}$，图中 F_1，F_1' 和 F_2，F_2' 分别 L_1 和 L_2 的焦点，M 在 L_2 右侧任意位置，整个光学系统满足近轴条件。要想使得一个物体经过这样的系统后仍然在原处成像，用作图法求该物体的位置，并说明所成的是一个与原物等大小的倒立实像。

分析 物像在同一位置，则与轴上的物点共轭的像点必在轴上。于是从轴上物点发出的光线依次经过 L_1，L_2 后，只有正入射到 M 上才能沿入射光路返回并汇聚于物所做的位置。由此可知该物点经 L_1 后必成像于 L_2 的物方焦点 F_2'。由此可确定物的位置。

以上并不是本题的重点，本题的重点是要用作图法证明原位处的像是倒立的。这要针对轴外的一个物点作图。

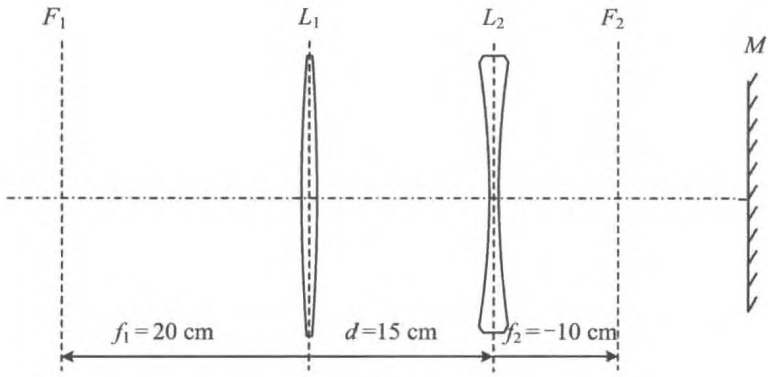


图 2.92

解 作图方法与结果见图 2.93。作图过程中利用了焦平面的性质。从轴外物点 P 点任意作两条光线 PA_1，PA_2。这两条光线经过透镜 L_1 后必汇聚于 L_2 的物方焦平面 F_2'（此时 L_2 的物方焦平面 F_2' 位于 L_2 左侧）上一点 Q，于是经过 L_2 后，成为相互平行的光线 B_1C_1，B_2C_2，射向平面镜 M。

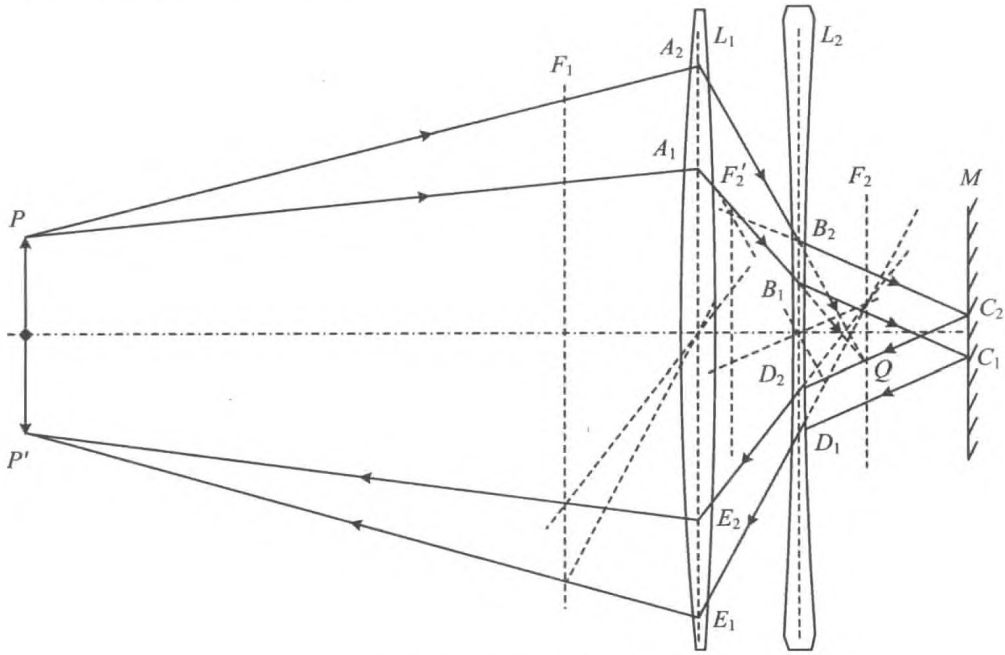


图 2.93 作图方法与结果

射向平面镜 M 的相互平行光线 B_1C_1，B_2C_2 被反射后依然是相互平行的光线 C_1D_1，C_2D_2，射向 L_2，经 L_2 后，成为汇聚到 L_2 像方焦平面（此时 L_2 的像方焦平面 F_2 位于 L_2 右侧）的光线 D_1E_1，D_2E_2。利用透镜 L_1 的像方焦平面 F_1，即可作出光线 D_1E_1，D_2E_2 经 L_1 的光线 E_1P'，E_2P'，P' 为与 P 共轭的像点。可见，像与物在同一位置，是倒立的实像。

【例 2.48】 用作图法求图 2.94 中的像方光线。

分析 在图 2.94 中，由于透镜两侧折射率不同，所以两侧的焦距也不相等。因而通过光心 O 点的光线方向要改变，这种情形下不能直接利用通过光心的光线作图，但依然可以利用焦点与焦平面的性质处理。

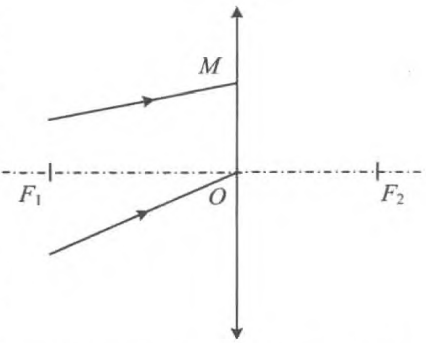


图 2.94 透镜物方像方的折射率不等

解 对于本题，用两种方法求解。

如图 2.95 所示，作出透镜的物方焦平面 F_1。过 M 点的光线通过物方焦平面 F_1 的 A_1 点。过 A_1 点作与光轴平行的光线 A_1N，A_1N 在像方的光线必经过像方焦点 F_2，由于 A_1M 与 A_1N 过物方焦平面 F_1 上的同一点 A_1，两者在像方的光线必相互平行，于是从 M 引一条与 NF_2 平行的直线 MA_2，MA_2 就是 A_1N 经透镜后的像方光线。对过光心的光线可用相似的方法处理，过光心的光线通过物方焦平面 F_1 上的 B_1 点，过 B_1 点作与光轴平行的光线 B_1D，B_1D 在像方的光线必经过像方焦点 F_2，为 DF_2，B_1O 在像方的光线与 DF_2 平行，即图中的光线 OB_2。

如图 2.96 所示，作出透镜的像方焦平面 F_2。过焦点 F_1 作一条与 A_1M 平行的光线 F_1Q，F_1Q 在像方的光线通过像方焦平面 F_2 上的 A_2 点，则 A_1M 在像方的光线也通过 A_2 点，MA_2 即是 A_1M 在像方的光线。同理可作出 B_1O 在像方的光线 OB_2。

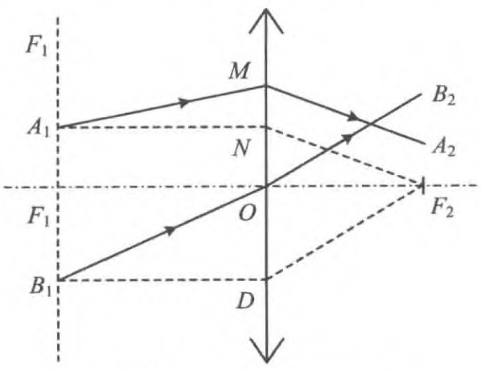


图 2.95 利用物方焦平面作图

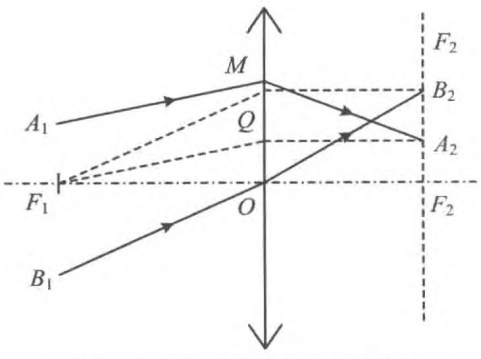


图 2.96 利用像方焦平面作图

【例 2.49】 如图 2.97 所示，已知光具组的前后表面和主光轴 x，并已知与物点 P_1 和 P_2 分别对应的像点 Q_1 和 Q_2 的位置，用作图法求出光具组的主点 H 和 H' 以及焦点 F 和 F' 的位置，并说明像的虚实。

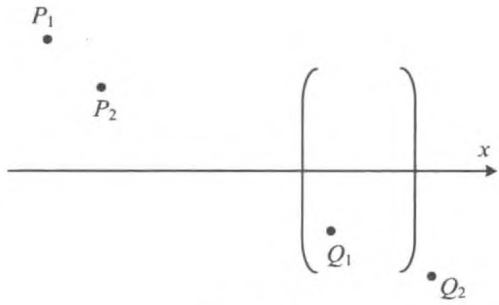


图 2.97

解 如图 2.98 所示，作图法如下：

先连接 P_1Q_1 交 x 轴于 A 点，再作 $O'P_1$ 垂直于 x 轴，在 $O'P_1$ 上截得 $O'P_2' = y$，连接 $O'P_2'$ 并延长交线段 $O''Q_1$ 于 B 点。连接 Q_2B 并延长，与从 P_2 发出的平行于光轴的光线交于 C 点（同时与光轴交于 F' 点），过 C 点作光轴的垂线得交点 H'。

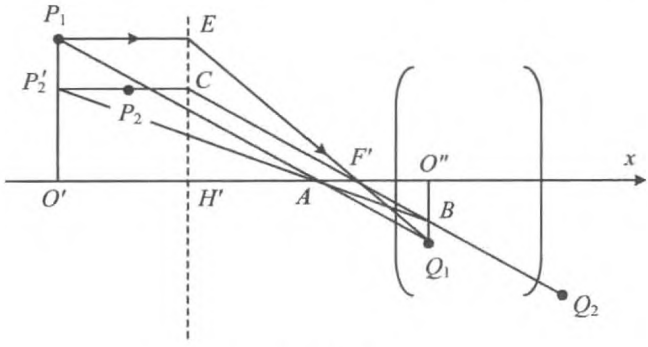


图 2.98

以下证明 H' 和 F' 分别是系统的像方主点和像方焦点。

证明 若 $H'C$ 为主面，则 P_1 发出的平行于光轴的光线在光学系统内传播等于其在与主面的交点 E 处折射后经过 F' 点射到 Q_1。而 P_2 发出的光线等效于在 C 点折射后也经过 F' 点射到 Q_2。由图可知

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{CA}} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{\overline{O''Q_1}}{\overline{O''B}}$$

因此，找到 B 点即可找到 P_2 点发出的平行于光轴的光线的共轭光线，从而，再由这两条共轭光线的交点找到 C 点，进而确定 H'，同时也确定了 F' 点。而前面的作图步骤正是保证了

$$\frac{\overline{P_1O'}}{\overline{O''Q_1}}=\frac{\overline{O'A}}{\overline{O''A}}=\frac{\overline{P''_2O'}}{\overline{O''B}}$$

即

$$\frac{\overline{O''Q_1}}{\overline{O''B}}=\frac{\overline{P_1O'}}{\overline{P''_2O'}}=\frac{y_1}{y_2}$$

用类似的方法，可以获得 H 与 F 点的位置。由于 Q_1 在光具组内，故为虚像，而 Q_2 在光具组后表面的右侧，故为实像。

【例 2.50】 用作图法求出图 2.99 中的像。

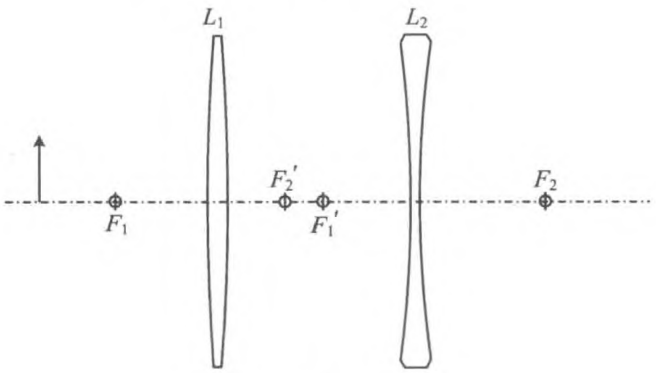


图 2.99

分析 用逐次成像法，利用特殊的共轭光线作图(图 2.100)。

解 首先作出物经透镜 L_1 的像，A 点的像为 A'。可知 A' 是透镜 L_2 的虚物。

由于从 A 点发出的所有光线经 L_1 后均汇聚到 A' 点，其中必然包含对透镜 L_2 的特殊光线，因而可作出通过 L_2 的光心射向 A' 的光线，与光轴平行射向 A' 的光线，以及经过 L_2 的物方焦点 F_2 射向 A' 的光线，这三条是特殊光线，可以方便地作出它们经 L_2 之后的光线，于是可得最终的像点。

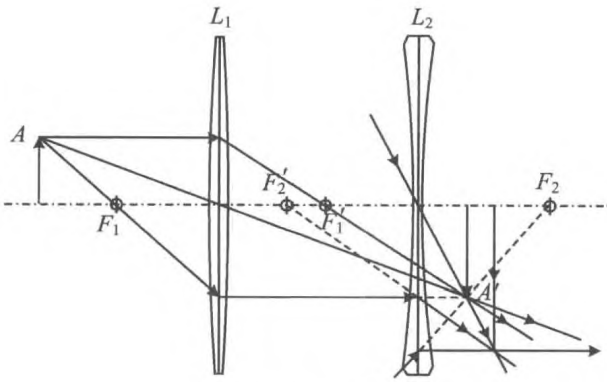


图 2.100 作图结果

2.4 成像光学仪器

成像光学仪器是由共轴光学元件构成的光具组，如物镜、目镜、望远镜、显微镜等。

光学仪器的结构取决于其作用。例如，物镜的作用是在接收屏上成实像，目镜的作用是在眼睛的明视距离处成虚像，而望远镜、显微镜都是物镜与目镜的组合。

2.4.1 目镜

目镜通常都是透镜组，单个透镜也可用作目镜。目镜的作用是成一个便于用眼睛观察的放大的虚像。所以若目镜的焦距为正值，可将实物置于其物方焦点内侧，所成的虚像是正立放大的；若目镜的焦距为负值，则要使虚物处在其物方焦点（负透镜的物方焦点在其像方）外侧，所成的虚像是倒立放大的。

使用时，眼睛应紧贴目镜，物经目镜成一放大虚像，该像应位于眼睛的明视距离处。正常视力的眼睛，明视距离为 25 cm，可记作 $s_0 = 25\ \text{cm}$。若用单个正透镜作目镜，有时也称之为放大镜。使用目镜的光路如图 2.101 所示。

裸眼直接观察长度为 y 的物 PQ，将物置于眼前明视距离处，该物直接经过眼睛的晶状体（晶状体可视作一个焦距可调节的薄透镜，记作 L_0）在视网膜上成实像 P_1Q_1。物对眼睛的张角也等于像对眼睛的张角，为

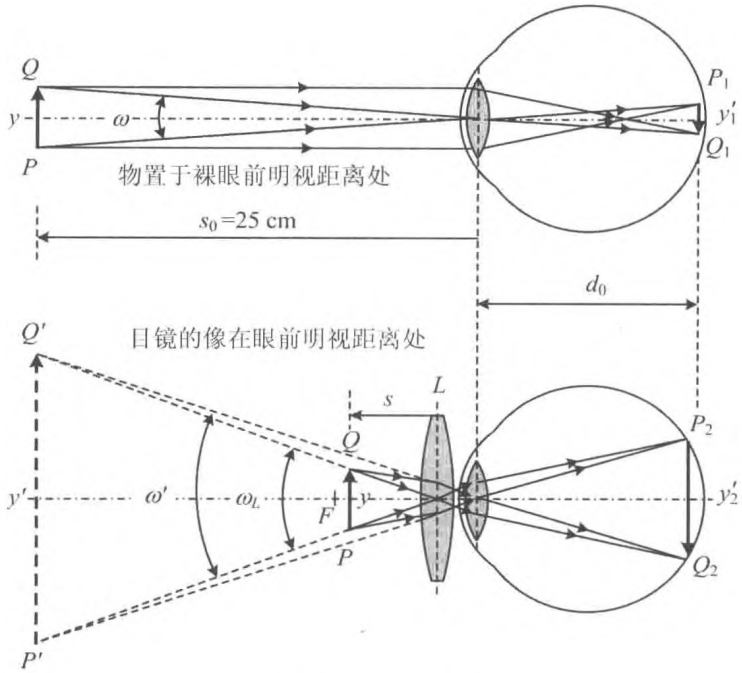


图 2.101 目镜的助视作用

$$\omega = \frac{y}{s_0} = -\frac{y_1'}{d_0} \tag{2.19}$$

其中，y_1'为像 P_1Q_1 的长度，d_0 为眼睛处在放松状态时视网膜到晶状体的距离，也就是眼轴的长度。

若通过目镜 L 观察同一个物，则 L 与 L_0 构成一个密接的薄透镜组。从逐次成像的观点看，物 PQ 经目镜 L 所成的像 $P'Q'$ 是眼睛 L_0 的物，则 L 的像 $P'Q'$ 应当在眼睛的明视距离处，即

$$s' = -s_0 = -25\ \text{cm}$$

若目镜 L 的焦距为 f，则物距应当为

$$s = \frac{-s_0 f}{-s_0 - f} = \frac{25f}{25+f}\ \text{cm}$$

实际上目镜的焦距通常较短，即 $f \ll 25$ cm，所以一般有 $s \approx f$，即将物置于目镜物方焦平面内侧附近。

PQ 和 $P'Q'$ 对 L 的张角相等，为

$$\omega_L = \frac{y'}{s_0} \approx \frac{y}{f}$$

由于 L 与 L_0 是密接的，且均可视作薄透镜，所以可近似认为 L 与 L_0 的光心重合，这样 $P'Q'$ 对眼睛的张角与对目镜的张角近似相等，即 $\omega' \approx \omega_L$。$P'Q'$ 作为 L_0 的物，在视网膜上所成的像为 P_2Q_2，记该像的长度为 y_2'，则

$$\omega' = \frac{y'}{s_0} = \frac{y}{f} = -\frac{y_2'}{d_0} \tag{2.20}$$

比较式(2.1)和式(2.2)，可得目镜的角放大率为

$$M = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{s_0}{f} \tag{2.21}$$

式(2.3)即是目镜角放大率的公式。

从式(2.1)和式(2.2)也可得到

$$M = \frac{y_2'}{y_1'}$$

这说明，所谓角放大率其实就是物 PQ 经过目镜在视网膜上所成的像 P_2Q_2 与直接经裸眼在视网膜上所成的像 P_1Q_1 的大小的比值。

由于将物放在目镜的物方焦平面处时，像其实要成在无穷远处，所以式(2.3)只是反映目镜角放大能力的一个表达式，与实际的效果还是有些差别的。

实际上，通过目镜将像成在眼睛的明视距离处只是一种理想的情形，往往不需要这样。只要目镜的放大像在眼前的一个适当的位置，就是适于观察的。因而，实际的角放大率的定义应当是：通过目镜观察，眼睛的视网膜上所成的像的长度为 y_2'，将该物放在目镜的像平面处，用裸眼直接观察，眼睛的视网膜上所成的像的长度为 y_1'，y_2' 与 y_1' 的比值就是目镜的角放大率。

若要准确地计算目镜的角放大率，则应根据实际的目镜的焦距做具体的讨论与计算。

2.4.2 望远镜

望远镜的结构如图 2.102 所示，由共轴的长焦距物镜 L_o 和短焦距目镜 L_e 构成。物镜的像方焦平面 F'_o 与目镜的物方焦平面 F_e 几乎重合。

远处的物经望远镜的物镜 L_o 在其像方焦平面 F'_o 处成一大小为 y'_o 的倒立实像。该实像作为目镜的物，在明视距离处成大小为 y'_e 的虚像，该虚像是眼睛的物，在视网膜上成一个实像。

由于望远镜的作用是观察远处的物，该物对望远镜物镜的张角 ω 就是对眼睛的张角，该张角等于物镜的像对物镜的张角，为

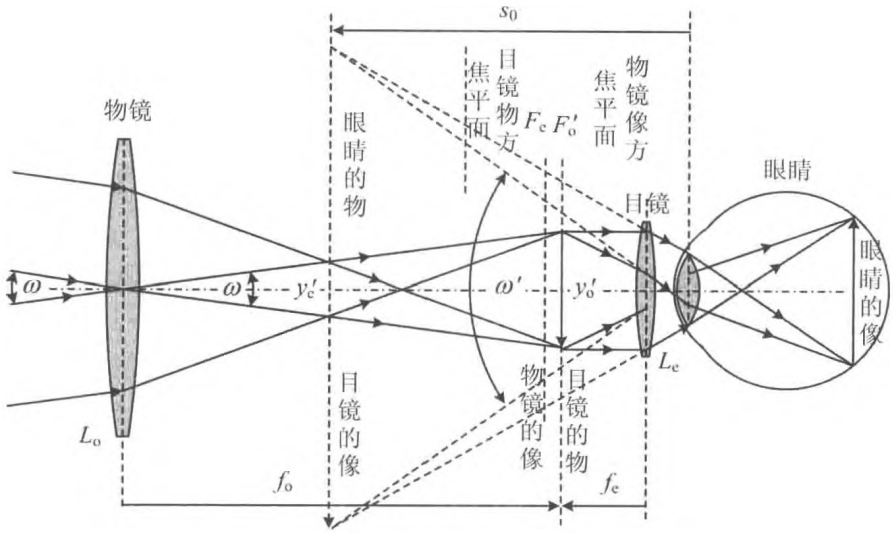


图 2.102 望远镜

$$\omega = \frac{y_o'}{f_o}$$

其中，f_o 为物镜的(像方)焦距。

目镜的像对目镜的张角等于眼睛的物对眼睛的张角，为

$$\omega' = \frac{y_e'}{s_0}$$

于是角放大率为

$$M = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{y_e'}{y_o'} \cdot \frac{s_0}{f_o}$$

其中，$\frac{y_e'}{y_o'}$为目镜成像的横向放大率，而$\frac{s_0}{f_o}$为目镜的角放大率。望远镜的目镜成像时，物距为其焦距 f_e，像距为 $-s_0$，于是

$$\frac{y_e'}{y_o'} = -\frac{-s_0}{f_e}$$

则角放大率为

$$M = -\frac{f_o}{f_e} \tag{2.22}$$

望远镜的目镜的焦距若是正值，是开普勒望远镜；目镜的焦距若是负值，是伽利略望远镜。伽利略望远镜可将物镜所成的倒立实像正过来。

2.4.3 显微镜

显微镜的结构如图 2.103 所示，由共轴的短焦距物镜 L_o 和短焦距目镜 L_e 构成。

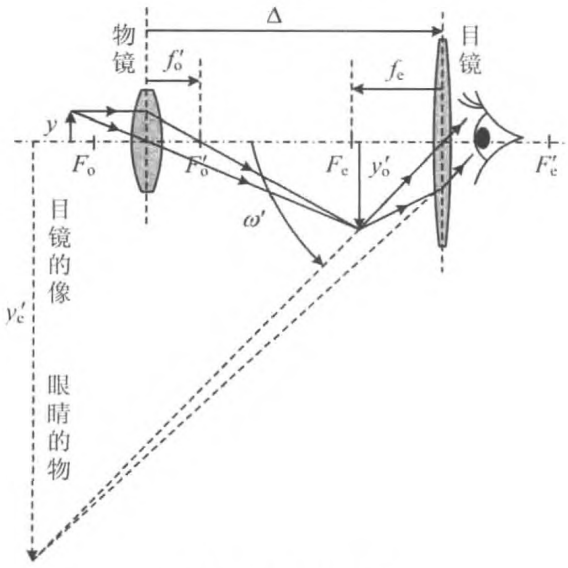


图 2.103 显微镜

显微镜是用来观察小物的，因而要求物经物镜成一个尽可能大的实像，并使该实像位于目镜的物方焦平面内侧附近。所以在使用时，要让物尽量靠近物镜的物方焦平面，使物距尽可能小，从而成一个尽可能大的实像。

从图 2.103 中可看出，显微镜的像对眼睛的张角为

$$\omega' = \frac{y_e'}{s_0} = \frac{y_o'}{f_e}$$

而用裸眼直接观察，则应将物置于眼的明视距离处，物对眼的张角为

$$\omega = \frac{y}{s_0}$$

于是显微镜的角放大率为

$$M = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{y_o'}{y} \cdot \frac{s_0}{f_e}$$

其中，$\frac{y_o'}{y}$ 为物镜的横向放大率，而 $\frac{s_0}{f_o}$ 为目镜的角放大率，所以显微镜的角放大率等于物镜

的横向放大率与目镜的角放大率的乘积。物镜成像时，物距 $s \approx f_o$，像距 $s' = \Delta - f_e$，其中 Δ 为目镜与物距间的距离，就是所谓显微镜镜筒的长度。由于 $f_e \ll \Delta$，所以 $s' \approx \Delta$，则 $\frac{y_o'}{y} \approx -\frac{\Delta}{f_o}$，于是显微镜的角放大率为

$$M = -\frac{s_0 \Delta}{f_o f_e} \tag{2.23}$$

2.4.4 典型问题与基本解题方法

成像光学仪器中基本都涉及目镜，目镜的作用是成一虚像于明视距离处。使用时应使目镜的物位于其物方焦平面内侧附近。

【例 2.51】 两个薄透镜，凸透镜的焦距 $f_1 = 10.00$ cm，凹透镜的焦距 $f_2 = -12.00$ cm。两透镜各有一个等曲率的球面，用一薄层透光树胶将其黏合，用作望远镜的物镜。该望远镜目镜的焦距 $f_e = 4.00$ cm。每个镜筒中各有由一对等腰直角三棱镜构成的珀罗组合棱镜，直角边长 $a = 2.00$ cm，折射率 $n = 1.55$，棱镜顶角的棱正交，斜面相对并相互平行，间距 $\Delta = 2.18$ cm。

(1) 用来观察月亮时，目镜到物镜的距离是多少？该望远镜的角放大率是多少？

(2) 发现裸视范围内的一处目标，用该望远镜观察，需要将目镜向何方向移动？透过望远镜平视目标，目镜移动了 0.2 mm，目标到观察者的距离是多少？

(3) 在望远镜的视场中，看到目标的像在镜中标尺上的竖直长度为 12.0 mm，该目标的实际高度是多少？

分析 如图 2.104 所示，物先经望远镜的物镜成像，再经珀罗组合棱镜成像，再经目镜成像。目镜的物在其物方焦平面处。

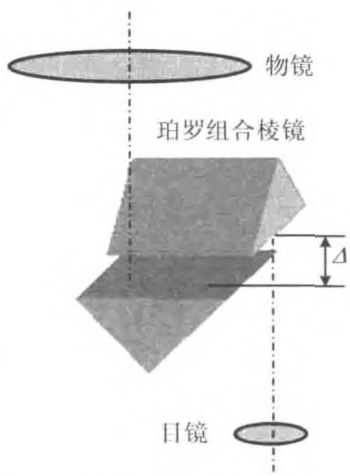


图 2.104 望远镜

解 (1) 物镜是两个透镜密接而成，所以焦距为

$$f_o = \frac{10 \times (-12)}{10 + (-12)} = 60.00\ (\text{cm})$$

该望远镜中有一珀罗组合棱镜，起正像作用，所以角放大率为

$$M = \frac{f_o}{f_e} = 15$$

物镜的像，作为珀罗组合棱镜的虚物，成像后，向物镜方向移动

$$\delta = 2\left(\Delta + \frac{d}{n}\right) = 2\left(\Delta + \frac{\sqrt{2}a}{n}\right) = 8.00\ (\text{cm})$$

观察月亮时，物在无穷远处，所以目镜与物镜的间距为

$$f_o - \delta + f_e = 56.00\ (\text{cm})$$

(2) 物在有限远处，与在无穷远处相比，对物镜的物距减小，所以像距增大，目镜到物镜的距离要相应增大。

按题意，此时 $s_1' = 60.02$ cm，物距为

$$s_1 = \frac{s_1' f_o}{s_1' - f_o} = 1\,800.6\ \text{m}$$

(3) 此时物镜的横向放大率为

$$\beta_o = -\frac{s_1'}{s_1} = -\frac{1}{3\,000}$$

因而目标物的高度为

$$h = \frac{h'}{\beta_o} = \frac{12 \times 10^{-3}}{3\,000^{-1}} = 36.00\ (\text{m})$$

【例 2.52】 极限法测液体折射率的装置如图 2.105 所示，ABC 是直角棱镜，其折射率 n_g 已知，将待测液体涂一薄层于其上表面 AB，在液体上覆盖一块毛玻璃(上毛下光)。用扩展光源在掠入射的方向上照明，从棱镜的 AC 面出射的光线的折射角将有一个下限 i'。如用望远镜观察，则在视场中出现有明显分界线的半明半暗区。

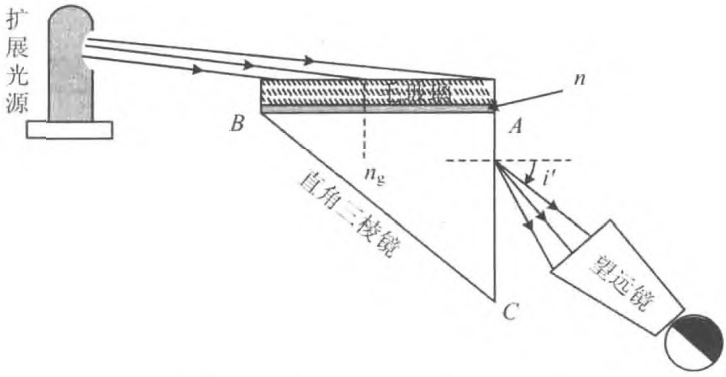


图 2.105 极限法测液体折射率的装置

(1) 用题中的 n_g 和 i' 表示液体的折射率 n。

(2) 用这种方法测量液体的折射率，测量范围受什么限制？

(3) 在什么情形下望远镜视场中为什么会出现有明显分界线的半明半暗区？在该实

验中望远镜起什么作用?

(4) 实际上,往往用顶角是锐角的棱镜来替代直角棱镜,如图 2.106 所示。直角棱镜有什么缺陷? 若顶角 α 已知,求液体折射率的表达式。

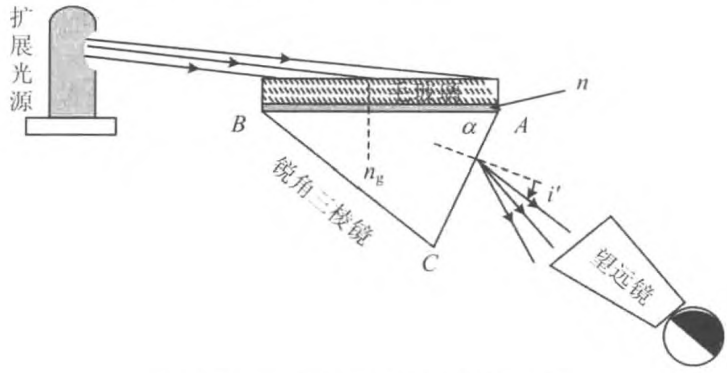


图 2.106 用锐角棱镜取代直角棱镜

分析 入射光经毛玻璃散射后,可以以任意角射向毛玻璃与液体的分界面,折射进入液体,再经液体与棱镜的界面折射进入棱镜。以最大入射角从液体射向棱镜的光线,在棱镜中折射角最大,在另一直角边上,则以最小的角度入射,折射进入空气中的光线折射角最小,该角就是所谓折射角的下限。本题中的方法之所以被称作极限法,就是因为利用上述具有极限性质的光线测量折射率。

解 (1) 如图 2.107 所示,通过毛玻璃进入液体的光线,可以沿任意方向。其中掠入射通过 AB 界面进入棱镜的光线,在棱镜中折射角最大,记为 i_c,按折射定律

$$n = n_g \sin i_c \tag{1}$$

在棱镜的 AC 界面,上述光线的入射角为

$$i_0 = \frac{\pi}{2} - i_c \tag{2}$$

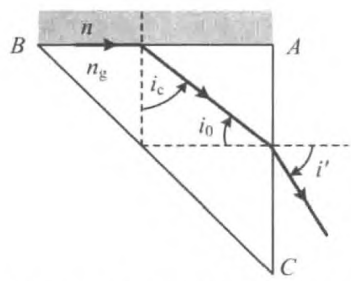


图 2.107 液体及棱镜中的极限光线

这是以最小角度向 AC 界面入射的光线,该光线的折射定律为

$$\sin i' = n_g \sin i_0 = n_g \cos i_c \tag{3}$$

由式(1)、式(2)、式(3)可得

$$n = n_g \sin i_c = n_g \sqrt{1 - \cos^2 i_c} = \sqrt{n_g^2 - n_g^2 \cos^2 i_c} = \sqrt{n_g^2 - \sin^2 i'} \tag{4}$$

(2) 为使液体中掠入射的光线能够折射进入棱镜中,液体的折射率应小于棱镜的折

射率，即

$$n < n_g \tag{5}$$

同时，这样的光线在棱镜的 AC 界面不能出现全反射，即

$$i_0 < \arcsin \frac{1}{n_g}$$

而

$$i_c = \arcsin \frac{n}{n_g}$$

即

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{n}{n_g} < \arcsin \frac{1}{n_g}$$

于是

$$\sqrt{1 - \left(\frac{1}{n_g}\right)^2} < \frac{n}{n_g}$$

解不等式，有

$$n > \sqrt{n_g^2 - 1} \tag{6}$$

(3) 其他方向的光线也从 AC 界面出射，折射角都比上述极限光线大。用望远镜对着 AC 面观察，不同方向的光线通过望远镜物镜，将汇聚到其焦平面上不同的位置，如图 2.108 所示。

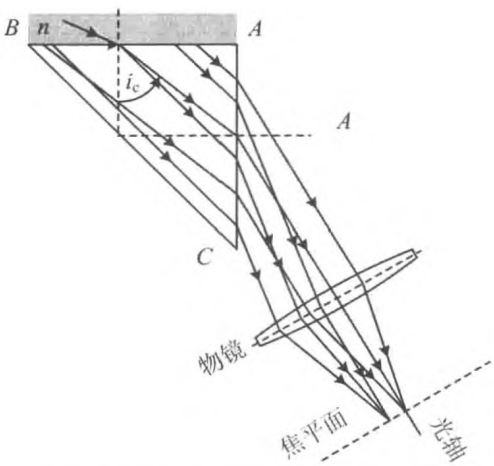


图 2.108 平行的出射光线汇聚到望远镜物镜的焦平面上

若望远镜的光轴与极限光线的方向平行，则极限光线汇聚到焦点处，其他方向的光

线都汇聚到光轴下方，于是视场中出现半明（下半部）半暗（上半部）。此时，望远镜光轴与 AC 面法线间的夹角就是折射角的下限 i'。所以望远镜起测角作用。

（4）若采用锐角棱镜，则极限光线在 AC 面的入射角会比直角棱镜小，如图 2.109 所示，可避免出现全反射，从而能够测量更大范围的液体折射率。

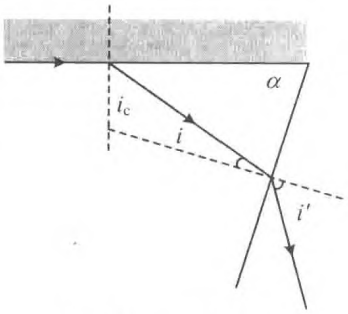


图 2.109 锐角棱镜

若图中光线在 AC 面的入射角为 i，则 $i_c = \alpha - i$，于是 AB 面的折射定律为

$$\begin{aligned} n &= n_g \sin(\alpha - i) = n_g \cos i \sin\alpha - n_g \sin i \cos\alpha \\ &= n_g \sqrt{1 - \sin^2 i} \sin\alpha - \sin i' \cos\alpha \\ &= \sin\alpha \sqrt{n_g^2 - n_g^2 \sin^2 i} - \cos\alpha \sin i' \\ &= \sin\alpha \sqrt{n_g^2 - \sin^2 i'} - \cos\alpha \sin i' \end{aligned}$$

【例 2.53】 （1）如图 2.110 所示，光学系统是由平行光管、载物台和望远镜组成。已知望远镜物镜 L_o 的焦距为 16.00 cm。在 L_o 的焦平面 P 处，放置带十字叉丝线的分划板和亮十字物，如图 2.111 所示。在载物台上放置双面平行的平面镜 M，通过望远镜的目镜 L_e 观察时，能同时清楚地看到分划板上的十字叉丝线和十字物经过 L_o 折射、M 反射、再经 L_o 折射后在分划板上所成的十字像，十字像位于 A 点，与上十字叉丝线的距离为 5.2 mm。绕载物台转轴（沿竖直方向）转动载物台，使平面镜转 180°，此时十字像位于 B 点，与上十字叉丝线的距离为 18.8 mm。此时望远镜光轴与水平面的夹角为多少？

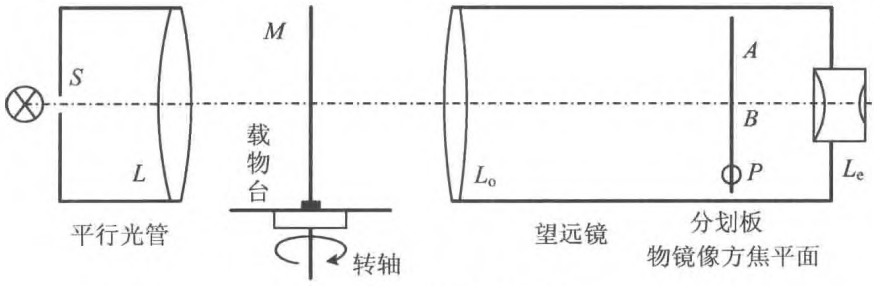


图 2.110 光学系统配置

（2）根据（1）的结果，调节望返镜，使其光轴与载物台的转轴垂直。平行光管是由十字缝 S 和凸透镜 L 组成。去掉光学系统中的平面镜 M，并用钠光灯照亮 S。沿水平方向移动 S，当 S 到平行光管中的透镜 L 距离为 8.25 cm 时，通过望远镜目镜能清楚地看到十字缝的像恰好成在分划板中心十字叉丝线上，L 的焦距是多少？

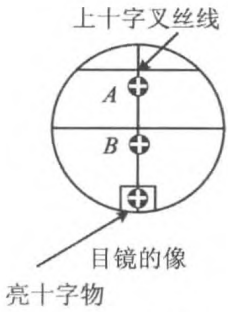


图 2.111　转动载物台，通过目镜观察到的像

(3) 将载物台平面调至与载物台的转轴垂直，在载物台上放置长、宽、高均为 3.00 cm、折射率为 1.52 的分束棱镜 $abcd$（分束棱镜是由两块直角三棱镜密接而成，接触面既能透光又能反光）和待测凹球面镜 O，O 到 L 的距离为 15.00 cm，并保证分束棱镜的 ab 面与图 2.112 中的 XX' 轴垂直、凹球面镜的光轴与图 2.112 中的 XX' 轴重合；再将望远镜绕载物台的中心轴转 90°。向右移动 S，当 S 移动的距离为 3.75 cm 时，通过望远镜目镜刚好能看清楚十字缝 S 的像成在分划板中心十字叉丝线上。试求凹球面镜的曲率半径。

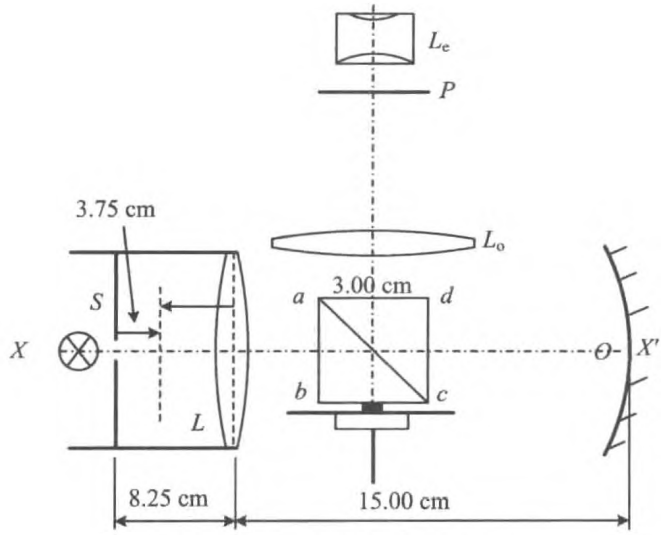


图 2.112　光学装置及其元件图示

分析　本题首先是一个望远镜成像的问题；其次要清楚分光棱镜的特点和作用，最后用逐次成像法计算凹面镜的焦距和半径。

解　(1) 望远镜物镜焦平面上的亮十字物，发出的光线先经物镜 L_o，再被平面镜 M 反射，又经物镜 L_o 成像。

亮十字发出的光线经 L_o 后成为平行光束，射向平面镜 M，经 M 反射后，仍是平行光束，再经 L_o，成像于 L_o 的像方焦平面上。

按题中的说法，载物台的转轴是竖直的，而望远镜的光轴不是水平的，这样望远镜的光轴与载物台的转轴不垂直，导致平面镜 M 随载物台旋转 180°后，两个反射面的反射光线不平行，因而经 L_o 后成两个不同的像。

其实，只要保持望远镜光轴方向不变，而且平面镜旋转前后的两个反射面是相互平行的，则亮十字的成像光线方向就不会改变，因而旋转载物台前后的两个像就会在同一位置。之所以旋转载物台前后有两个不同位置的像，是由于旋转前后平面镜的两个反射面不平行，这当然是由于平面镜的镜面与载物台的转轴不平行而造成的，如图 2.113 所示。

设平面镜的镜面与载物台转轴之间的夹角为 θ，则旋转前后，M 的反射光相差 2θ 角。图 2.113 中，记 L_o 的光心为 O，像方焦点为 F_o，则直线 OA 与 OB 之间的夹角成为 4θ。

又

$$\overline{AB} = 18.8 - 5.2 = 13.6\,(\text{mm})$$

$$\overline{OF_o} = f_o = 160.0\,(\text{mm})$$

所以有

$$\theta = \frac{1}{4}\frac{\overline{AB}}{\overline{OF_o}} = \frac{1}{4} \times \frac{13.6}{160.0} = 0.021\,3\,(\text{rad})$$

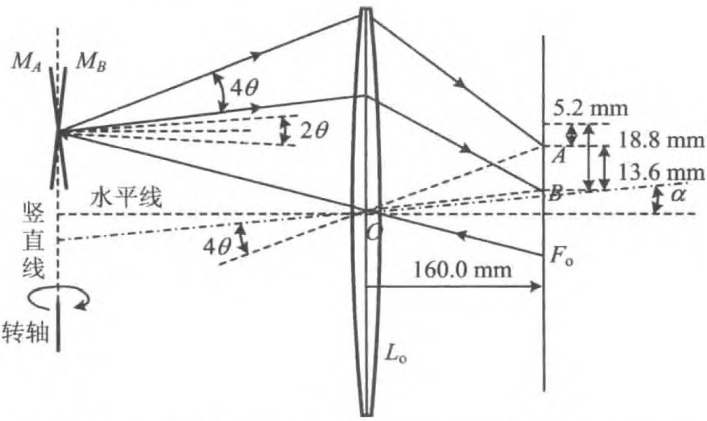


图 2.113 平面镜的镜面与载物台的转轴不平行所形成的两个像

但本题所要解决的是将望远镜光轴调整到水平方向的问题。已知载物台的转轴是竖直的，这是确定方向的基准。则只要望远镜的光轴与载物台转轴垂直即可。

需要注意的是，分划板上，亮十字物与上十字叉丝线相对于视场中心（即望远镜光轴）是对称的。这种情形下，若望远镜光轴与反射镜垂直，则应成像于上十字叉丝线。若

光轴与反射镜法线之间的夹角为 α，像到上十字叉丝线的距离为 $\Delta l = 2\alpha f_o$，则

$$\alpha = \frac{\Delta l}{2f_o}$$

于是算得像在 A 点时

$$\alpha = \frac{5.2}{2 \times 160} = 0.016\,3\ (\text{rad})$$

由于两次所成的像均在上十字叉丝线的下方，这说明望远镜的物镜的位置是低于目镜的。于是光轴与水平线的夹角为

$$\alpha + \theta = 0.037\,5\ \text{rad}$$

(2) 通过望远镜能清晰地看到 S 上十字的缝，且十字的缝的像在视场中心，说明射向望远镜的是与光轴平行的光束，如图 2.114 所示。则此时 S 上的十字缝一定位于透镜 L 的焦平面处，由此可得 L 的焦距为

$$f = 8.25\ \text{cm}$$

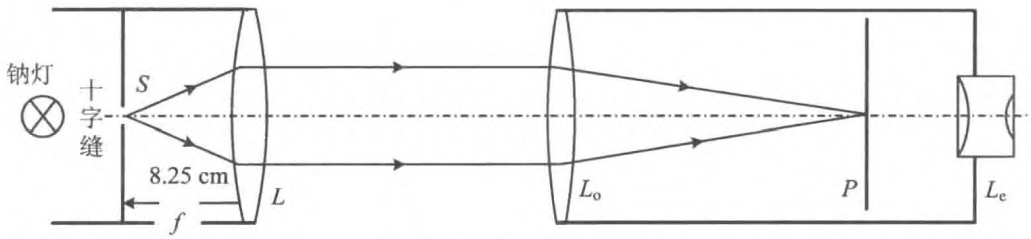


图 2.114　观察十字缝的像

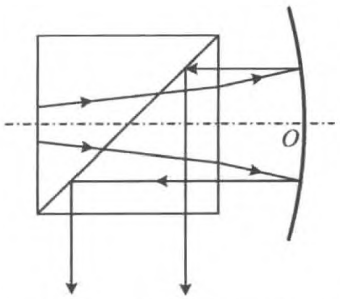


图 2.115　经凹面镜反射的光束

(3) 经凹面镜反射的光线，向左射入分束棱镜，被界面 db 反射，向下射出。第三步操作的结果，说明凹面镜的反射光是与其光轴平行的光束，如图 2.115 所示。因而向右通过分束棱镜 $abcd$ 的光束一定汇聚于凹面镜的焦点处。

如图 2.116 所示，对透镜 L，S 成像于 S'，物距为

$$s = 8.25 - 3.75 = 4.50\ (\text{cm})$$

因而像距为

$$s' = \frac{sf}{s - f} = -9.90\ \text{cm}$$

再经分束棱镜之后，像点向右移动至 F，移动的距离

$$\Delta = \left(1 - \frac{1}{n}\right)d = \left(1 - \frac{1}{1.52}\right) \times 3.00 = 1.03\ (\text{cm})$$

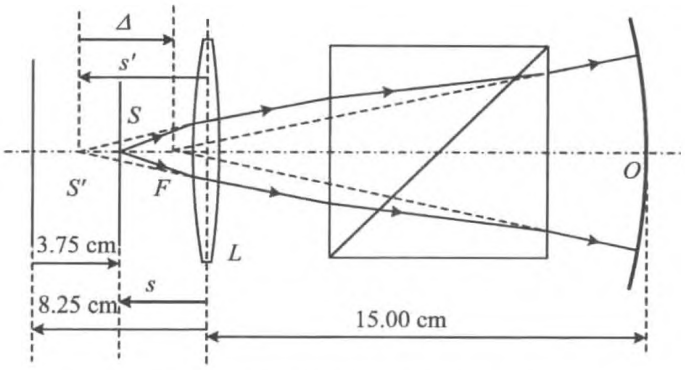


图 2.116 透镜与分束棱镜的成像

则

$$\overline{FO} = s' - \Delta + 15.00 = 9.90 - 1.03 + 15.00 = 23.87\,(\text{cm})$$

这就是凹面镜的焦距，即

$$f_o = 23.87\ \text{cm}$$

而凹面镜的曲率半径为

$$r_o = 2f_o = 47.74\ \text{cm}$$

【例 2.54】 一伽利略型望远镜，物镜和目镜相距 12 cm。若望远镜的放大倍率为 4×，问物镜和目镜的焦距各是多少？

分析 望远镜的放大倍率是其角放大率。由于望远镜观察很远处的物体时，物镜的像方焦平面与目镜的物方焦平面重合，物镜与目镜的间距就是两者焦距之和。注意伽利略望远镜的目镜是负透镜。

解 按题意可得

$$\begin{cases} f_o + f_e = 12\ \text{cm} \\ \dfrac{-f_o}{f_e} = 4 \end{cases}$$

于是有

$$\begin{cases} f_o = 16\ \text{cm} \\ f_e = -4\ \text{cm} \end{cases}$$

【例 2.55】 拟制作一个 4× 的望远镜，已有一个焦距为 50 cm 的物镜，若是伽利略型望远镜，目镜焦距是多少？若是开普勒型望远镜，目镜焦距是多少？

解 同例 2.54，可得

$$f_e = \pm\frac{f_o}{4} = \pm\frac{50}{4} = \begin{cases} +12.5\ \text{cm}\ (\text{开普勒型}) \\ -12.5\ \text{cm}\ (\text{伽利略型}) \end{cases}$$

【例 2.56】 一架显微镜，物镜焦距为 4 mm 中间像成在物镜像方焦点后面 160 mm 处，如果目镜是 20× 的，该显微镜的总放大倍率是多少？

解 题中目镜的焦距为

$$f_e = \frac{s_0}{20} = \frac{250}{20} = 12.5\ (\text{mm})$$

由于显微镜的角放大率等于物镜的横向放大率与目镜的角放大率的乘积。题中物镜的像距为 $s_1' = 160$ mm，则物距为

$$s_1 = \frac{s_1' f_o}{s_1' - f_o} = \frac{160 \times 4}{160 - 4} = 4.10\ (\text{mm})$$

横向放大率为

$$\beta_1 = -\frac{s_1'}{s_1} = -\frac{160}{4.10} = -39$$

于是该显微镜的总放大倍率为

$$M = -39 \times 20 = -780 \tag{1}$$

也可以套用显微镜角放大率的公式(2.4)计算，用 160 mm 表示镜筒长度，结果为

$$M = -\frac{s_0 \Delta}{f_o f_e} = -\frac{250 \times 160}{4 \times 12.5} = -800 \tag{2}$$

两结果相差不大，但又不严格一致，原因是式(2)尽管是通用的公式，但却是近似的结果。

【例 2.57】 拟制备一个 10× 的惠更斯目镜，假定两镜片都用折射率 $n = 1.516\,3$ 的 $K9$ 玻璃，求两片透镜的曲率半径和两镜的间隔。

解 惠更斯目镜的结构如图 2.117 所示，其中每一片都是平凸薄透镜，向场镜的焦距 f_1 是接目镜焦距 f_2 的 3 倍，即 $f_2 = f$，$f_1 = 3f$，两透镜的间隔为 $d = 2f$。

目镜的像应当位于接目镜之前(图中接目镜左侧)25 cm 处，即像距为 $s_2' = -s_0$，则接目镜的物距为

$$s_2 = \frac{s_2' f_2}{s_2' - f_2} = \frac{s_0 f}{s_0 + f}$$

接目镜的物是向场镜的像，于是向场镜的像距为

$$s_1' = d - s_2 = 2f - \frac{s_0 f}{s_0 + f} = \frac{(s_0 + 2f) f}{s_0 + f}$$

由此可得物到向场镜的距离为

$$s_1 = \frac{s_1' f_1}{s_1' - f_1} = \frac{3(s_0 + 2f) f}{(s_0 + 2f) - 3(s_0 + f)} = -\frac{3(s_0 + 2f) f}{2s_0 + f}$$

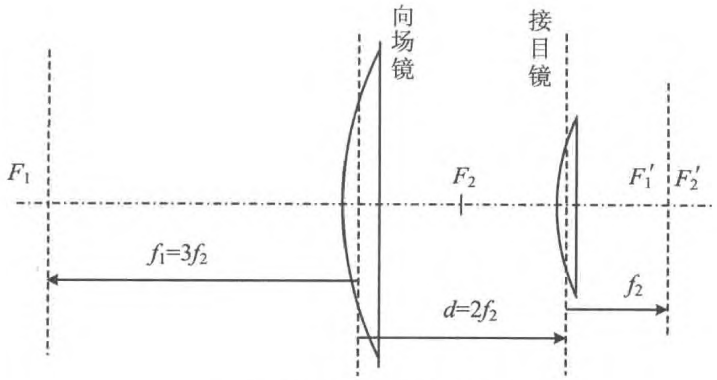


图 2.117 惠更斯目镜

由于惠更斯目镜的物是物镜的像，而物镜的像在目镜内部，是向场镜的虚物，所以物距 s_1 是负值。

综合以上各式，可得惠更斯目镜的横向放大率为

$$\beta=\left(-\frac{s_1'}{s_1}\right)\left(-\frac{s_2'}{s_2}\right)=\frac{s_1'-f_1}{f_1}\cdot\frac{s_2'-f_2}{f_2}$$

$$=\left[\frac{\frac{(s_0+2f)f}{s_0+f}-3f}{3f}\right]\cdot\frac{-(s_0+f)}{f}=\frac{2s_0+f}{3f}$$

若目镜的物（惠更斯目镜的物是物镜的像）长度为 y，则目镜的像对眼睛的张角为

$$\omega'=\frac{\beta y}{s_0}=\frac{2s_0+f}{3f}\cdot\frac{y}{s_0}$$

将物置于眼睛的明视距离处，该物对眼睛的张角为

$$\omega=\frac{y}{s_0}$$

于是惠更斯目镜的角放大率为

$$M=\frac{\omega'}{\omega}=\frac{2s_0+f}{3f}$$

按题设，$M=10$，于是可得

$$f=\frac{2s_0}{3M-1}=\frac{2\times25}{3\times10-1}=\frac{50}{29}=1.7241\ (\text{cm}) \tag{1}$$

而平凸透镜的焦距为

$$f=\frac{1}{\frac{n-1}{r}}=\frac{r}{n-1}$$

于是球面的曲率半径为

$$r_1 = (n-1)f = (1.516\,3-1)\times 1.724\,1 = 0.890\,2\,(\text{cm})$$

$$r_1 = 3r_2 = 2.670\,6\ \text{cm}$$

间隔为

$$d = 2f = 3.448\,2\ \text{cm}$$

本题也可用惠更斯目镜的焦距 $f=\frac{3}{2}f_2$ 和角放大率公式 $M=\frac{s_0}{f}$ 直接计算，得到

$$f_2 = \frac{2}{3}\times\frac{s_0}{M} = \frac{2}{3}\times\frac{25}{10} = \frac{50}{30}\,(\text{cm}) \tag{2}$$

两者接近但有微小的差别，实际上式(1)是更准确的结果。

【例 2.58】 拟制备一个 10× 的拉姆斯登目镜，假定两镜片都用折射率 $n=1.516\,3$ 的 $K9$ 玻璃，求两片透镜的曲率半径和两镜的间隔。

解 拉姆斯登目镜的结构如图 2.118 所示，向场镜和接目镜焦距相等，两片透镜的间距等于它们的焦距，即 $f_1=f_2=f$，$d=f$。

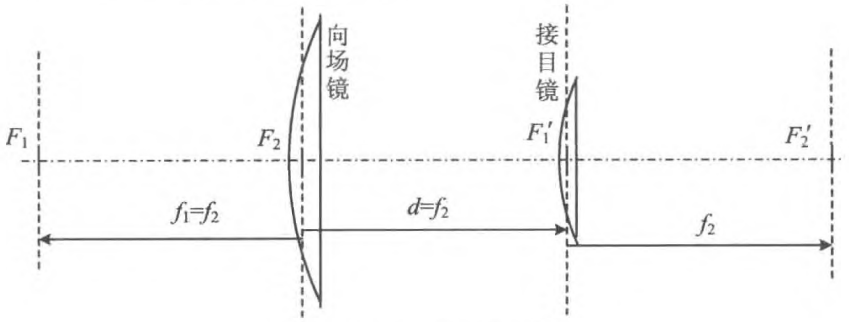


图 2.118 拉姆斯登目镜

仿照例 2.57 的方法，可得

$$s_2' = -s_0$$

$$s_2 = \frac{s_0 f}{s_0+f}$$

$$s_1' = d - s_2 = f - \frac{s_0 f}{s_0+f} = \frac{f^2}{s_0+f}$$

$$s_1 = \frac{s_1' f_1}{s_1' - f_1} = -\frac{f^2}{s_0}$$

横向放大率为

$$\beta = \left(-\frac{s_1'}{s_1}\right)\left(-\frac{s_2'}{s_2}\right) = \frac{\frac{f^2}{s_0+f}}{\frac{-f^2}{s_0}} \cdot \frac{-s_0}{\frac{s_0 f}{s_0+f}} = \frac{s_0}{f}$$

于是拉姆斯登目镜的角放大率为

$$M = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\frac{\beta y}{s_0}}{\frac{y}{s_0}} = \frac{s_0}{f}$$

焦距为

$$f = \frac{s_0}{M} = \frac{25}{10} = 2.5\,(\text{cm}) \tag{1}$$

球面曲率半径为

$$r = \frac{n-1}{M} \cdot s_0 = \frac{1.516\,3-1}{10} \times 25 = 0.129\,1\,(\text{cm})$$

间隔为

$$d = f = 2.5\ \text{cm}$$

本题也可用拉姆斯登目镜的焦距 $f = f_2$ 和角放大率公式 $M = \frac{s_0}{f}$ 直接计算，得到

$$f_2 = \frac{s_0}{M} = \frac{25}{10} = 2.5\,(\text{cm}) \tag{2}$$

与式(1)恰好一致。

【例 2.59】 若例 2.58 中的拉姆斯登目镜是改进型的，其他条件不变，求两片透镜的曲率半径和两镜的间隔。

解 所谓改进型的拉姆斯登目镜，是将保持两片透镜的焦距相等，而将他们的间距缩短为 $d = \frac{2f}{3}$。对改进型的目镜，仿照例 2.58 的方法，可算得

$$s_2' = -s_0$$

$$s_2 = \frac{s_0 f}{s_0+f}$$

$$s_1' = \frac{2f}{3} - \frac{s_0 f}{s_0+f} = -\frac{f}{3} \times \frac{s_0-2f}{s_0+f}$$

$$s_1 = \frac{s_1' f_1}{s_1' - f_1} = \frac{(s_0-2f)f}{4s_0+f}$$

横向放大率为

$$\beta = \left(-\frac{s'_1}{s_1}\right)\left(-\frac{s'_2}{s_2}\right) = \frac{-s_0\left(-\frac{f}{3}\times\frac{s_0-2f}{s_0+f}\right)}{\frac{(s_0-2f)f}{4s_0+f}\times\frac{s_0 f}{s_0+f}} = \frac{4s_0+f}{3f}$$

$$M = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\frac{\beta y}{s_0}}{\frac{y}{s_0}} = \frac{4s_0+f}{3f}$$

焦距为

$$f = \frac{4s_0}{3M-1} = \frac{100}{29} = 3.448\,3\ (\text{cm}) \tag{1}$$

球面曲率半径为

$$r = (n-1)f = (1.516\,3-1)\times 3.448\,3 = 1.780\,4\ (\text{cm})$$

若用改进型拉姆斯登目镜的焦距 $f=\frac{3f_2}{4}$ 和角放大率公式 $M=\frac{s_0}{f}$ 直接计算，得到

$$f_2 = \frac{4}{3}\frac{s_0}{M} = \frac{4}{3}\times\frac{25}{10} = 3.333\,3\ (\text{cm}) \tag{2}$$

两者接近但有微小的差别，实际上式(1)是更准确的结果。

【例 2.60】 一架开普勒型望远镜，已知物镜焦距为 200 mm 目镜焦距为 25 mm 为了正像，在物镜像方焦点前加一个珀罗棱镜组，它在光路上相当于一块厚度 $d = 45$ mm 的平行平面玻璃板($n = 1.5$)，假定目镜和物镜都是薄透镜，问这样的正像望远镜的总长度应该是多少?

分析 汇聚的傍轴光束经平行平面玻璃后依然可以汇聚成实像，只是像要向远处移动一定的距离。

解 物镜所成的实像，经过平行平面玻璃后，向像方移动的距离为

$$\Delta = \left(1-\frac{1}{n}\right)d = 15.0\ \text{mm}$$

则望远镜镜筒的总长度应为

$$L = f_o + \Delta + f_e = 240\ \text{mm}$$

2.5 共轴理想光具组理论

2.5.1 共轴球面系统的基点和基平面

对于薄透镜等成像元件，只要知道了光心位置、物方和像方的焦点和焦平面，则可以方便地解决任何光线的成像问题。同样，对于共轴的球面系统，确定了基本的点和面后，也可以完全确定物像关系。

1. 焦平面

与无穷远处的像平面共轭的物平面为物方焦平面 F；与无穷远处的物平面共轭的像平面为像方焦平面 F'。

2. 焦点

物方焦平面与主光轴的交点为物方焦点 F；像方焦平面与主光轴的交点为像方焦点 F'。

3. 主平面

横向(垂轴)放大率等于 +1 的一对共轭平面为主平面。物方主平面 H，像方主平面 H'。

4. 主点

主平面与主光轴的交点为主点。物方主点 H，像点主点 H'。

2.5.2 基点和基平面的确定

可以由已知成像系统的基点和基平面求整个成像系统的基点和基平面。

1. 作图法

如图 2.119 所示，为确定由两已知成像系统(图中系统一和系统二)的像方焦平面和像方主平面，可按以下方法作图：

作一条从物方入射的与光轴平行的光线，利用已知的主平面和焦平面，可得到从像方出射的光线，该出射光线与光轴的交点就是整个系统的像方焦点 F'，由此可确定整个系统的像方焦平面 F'。该出射光线与入射光线的延长线的交点一定在整个系统的像方主平面上，由此可确定整个系统的像方主平面 H' 和像方主点 H'。物方的基点和基平面

用相同方法确定。

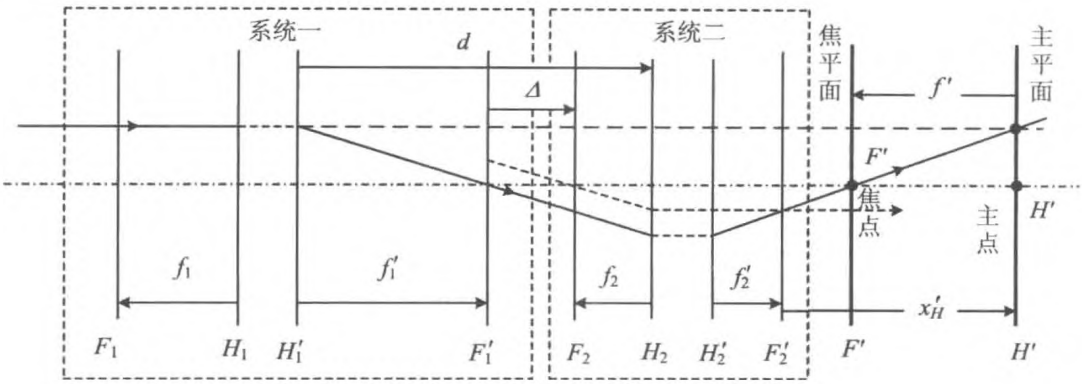


图 2.119 系统的基点和基平面的确定

2. 计算法

如图 2.119 所示，第一系统像方主平面 H_1' 到第二系统物方主平面 H_2 的间距 $\overline{H_1'H_2}=d$，第一系统像方焦平面 F_1' 到第二系统物方焦平面 F_2 间距 $\overline{F_1'F_2}=\Delta$，称为两光学系统的间隔，$\Delta=d-f_1'-f_2$。采用高斯符号约定，距离均从各个系统的主平面算起，可得整个系统的成像参数如下：

物方主平面的位置

$$x_H=\frac{df_1}{\Delta} \tag{2.24}$$

从第一系统的物方主平面 H_1 算起。

像方主平面的位置

$$x_H'=\frac{df_2'}{\Delta} \tag{2.25}$$

从第二系统的像方主平面 H_2' 算起。

物方焦距

$$f=-\frac{f_1f_2}{\Delta} \tag{2.26}$$

是物方焦平面 F 到整个系统物方主平面 H 的距离。

像方焦距

$$f'=-\frac{f_1'f_2'}{\Delta} \tag{2.27}$$

是像方焦平面 F' 到整个系统像方主平面 H' 的距离。

2.5.3 共轴球面系统的物像关系

对已知参数的理想共轴成像光学系统，无论用作图法还是计算法，物像关系单个薄透镜的成像情况相同。

如图 2.120 所示，物像关系可以用高斯公式 $\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1$ 或牛顿公式 $x'x=f'f$ 表示。

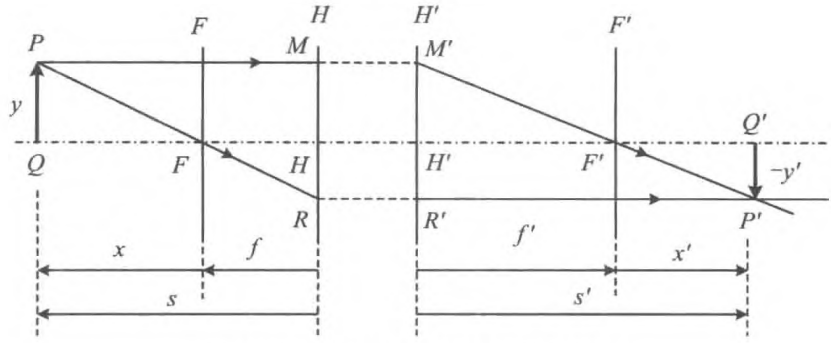


图 2.120 理想共轴光学系统的物像关系

2.5.4 典型问题与基本解题方法

通常要根据已有系统的特征求得整个系统的特征，基本方法就是依次序先将两个系统组成一个系统，再算得了这样系统的基本参数后，再将这样的系统与第三个系统组合，依此类推。

若已知共轴球面光学系统的基点和基平面，就可以利用成像公式（高斯公式或牛顿公式）、放大率公式对物象的位置、大小进行计算。与单球面和薄透镜不同的是，物距（包括物方焦距）从物方主点或主平面算起，像距（包括像方焦距）从像方主点或主平面算起。

对于共轴球面光学系统，若已知表征各个折射球面的光学参数（r，n，n'）或各个薄透镜的光学参数（f，f'）以及球面或透镜间的距离，就可以采用共轴球面系统的组合公式，通过一系列步骤，计算出整个光学系统的基点和基平面的位置以及整个系统的焦距。计算时，首先将单折射球面或单薄透镜看做整个系统的一个基本元件，单球面的主点位于该球面的顶点，单薄透镜的主点位于该透镜的光心。然后利用共轴光学系统的组合公式，计算出两个相邻的光学元件组成的光学系统的基点、基平面。然后再将该系统作为

一个光学元件，计算出该元件和另一个光学元件组成的光学系统的基点、基平面……如此反复，最后可以计算出整个系统的基点和基平面。要注意的是，对于整个系统，要采用一致的符号约定，注意各个量的正负。

【例 2.61】 如图 2.121 所示，一个双凸厚透镜前折射球面与后折射球面的焦距分别为 f_1, f_1' 和 f_2, f_2'，厚度为 d。试求该厚透镜的焦距以及焦点、主点的位置。

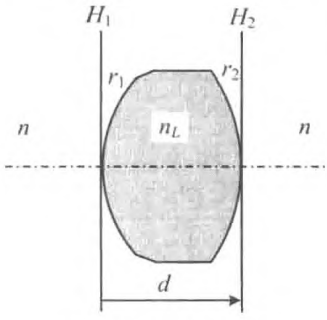


图 2.121　厚透镜

解　厚透镜由两个间距为 d 的折射球面构成，每个球面的主平面是过各自顶点的垂轴平面。记两球面的光焦度分别为 Φ_1, Φ_2，焦距分别为 f_1, f_1', f_2, f_2'，则

$$f_1 = \frac{nr_1}{n_L - n}$$

$$f_1' = \frac{n_L r_1}{n_L - n}$$

$$f_2 = \frac{n_L r_2}{n - n_L}$$

$$f_2' = \frac{nr_2}{n - n_L}$$

两球面的光学间隔

$$\Delta = d - f_1' - f_2$$

则

$$x_H = \frac{df_1}{\Delta} = \frac{d}{\frac{d}{f_1} - \frac{f_1'}{f_1} - \frac{f_2}{f_1}} = \frac{d}{\frac{d(n_L - n)}{nr_1} - \frac{n_L}{n} + \frac{n_L r_2}{nr_1}}$$

$$= \frac{ndr_1}{d(n_L - n) - n_L r_1 + n_L r_2}$$

$$x_H' = \frac{df_2'}{\Delta} = \frac{d}{\frac{d}{f_2'} - \frac{f_1'}{f_2'} - \frac{f_2}{f_2'}} = \frac{d}{\frac{d(n - n_L)}{nr_2} + \frac{n_L r_1}{nr_2} - \frac{n_L}{n}}$$

$$= \frac{ndr_2}{d(n - n_L) + n_L r_1 - n_L r_2} = -\frac{ndr_2}{d(n_L - n) - n_L r_1 + n_L r_2}$$

主平面的位置如图 2.122 所示。

焦距为

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} = \frac{\frac{nn_L r_1 r_2}{(n_L - n)^2}}{\frac{d - n_L r_1}{n_L - n} + \frac{n_L r_2}{n_L - n}}$$

$$= \frac{nn_L}{n_L - n} \cdot \frac{r_1 r_2}{(n_L - n)d - n_L r_1 + n_L r_2}$$

$$f' = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta}$$

$$= \frac{nn_L}{n_L - n} \cdot \frac{r_1 r_2}{(n_L - n)d - n_L r_1 + n_L r_2} = f$$

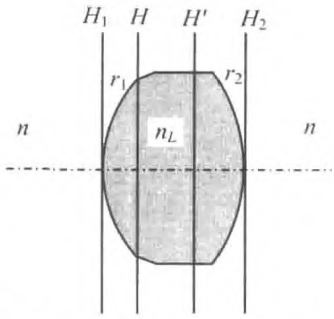


图 2.122 厚透镜的主平面

实际上，由于 $f'_1 f'_2 = f_1 f_2$，所以只要物方和像方的折射率相等，则厚透镜的物方焦距和像方焦距也相等，只是厚透镜没有与薄透镜相似的光心，这些焦距都分别从物方主平面和像方主平面算起，相应的两个焦点也不是对称地分布于厚透镜的两侧。但是，只要确定了厚透镜的基平面，可以方便地采用高斯成像理论处理其成像问题。

又由于

$$\frac{1}{f} = \frac{n_L - n}{nn_L} \cdot \frac{(n_L - n)d - n_L r_1 + n_L r_2}{r_1 r_2}$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n - n_L}{r_2} + d\frac{(n_L - n)^2}{n_L r_1 r_2}\right]$$

如果将 n/f 定义为厚透镜的光焦度，则

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n_L}\Phi_1 \Phi_2 \tag{1}$$

厚透镜的计算结果与薄透镜组的结果形式上是一致的。而整个厚透镜的主平面相对于物方、像方折射球面的移动也可用光焦度表示，即

$$x_H = \frac{ndr_1}{d(n_L - n) - n_L r_1 + n_L r_2}$$

$$= \frac{nd}{d\left(\frac{n_L - n}{r_1}\right) - n_L\left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right)}$$

$$= \frac{nd}{d\Phi_1 - n_L\left(1 + \frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right)}$$

$$x'_H = -\frac{nd}{d\left(\frac{n_L - n}{r_2}\right) - n_L\left(\frac{r_1}{r_2} - 1\right)}$$

$$= \frac{nd}{d\Phi_2 - n_L\left(1 + \frac{\Phi_2}{\Phi_1}\right)}$$

厚透镜两侧折射球面的主平面 H_1，H_2 分别是过各自顶点的垂轴平面。对整个透镜而言，其物方主平面 H 和像方主平面 H' 的位置相对于 H_1 和 H_2' 的移动可以用 x_H 和 x'_H 表示。对于处在空气中的厚透镜，$n=1$，可将前面的计算结果简化并整理为

$$x_H = \frac{dr_1}{d(n_L-1)-n_L(r_1-r_2)} \tag{2}$$

$$x'_H = -\frac{dr_2}{d(n_L-1)-n_L(r_1-r_2)} \tag{3}$$

$$\frac{x_H}{x'_H} = -\frac{r_1}{r_2} \tag{4}$$

其中，球面曲率半径的正负按本书的符号约定取值。

如果是对称的双凸或双凹厚透镜

$$r_1 = -r_2$$

$$\frac{x_H}{x'_H} = +1$$

则主平面相对于球面顶点对称移动，而且

$$x_H = x'_H = \frac{d}{\dfrac{(n_L-1)d}{r_1-2n_L}}$$

取光学玻璃的折射率 $n_L \approx 1.50$，而且球面曲率半径往往比透镜厚度大得多，则有

$$x_H = x'_H \approx -\frac{d}{3}$$

$$f = f' = -\frac{n_L}{n_L-1}\cdot\frac{r_1^2}{(n_L-1)d-2n_Lr_1} \approx r_1$$

对于平凸或平凹厚透镜，不妨取 $r_2=\infty$，则

$$x_H = 0, x'_H = -\frac{2d}{3}$$

而两球面曲率半径符号相同的弯月形厚透镜，则要依据曲率半径的具体数值进行计算。例如，取 $r_1, r_2>0$，对 $r_1<r_2$ 的正透镜

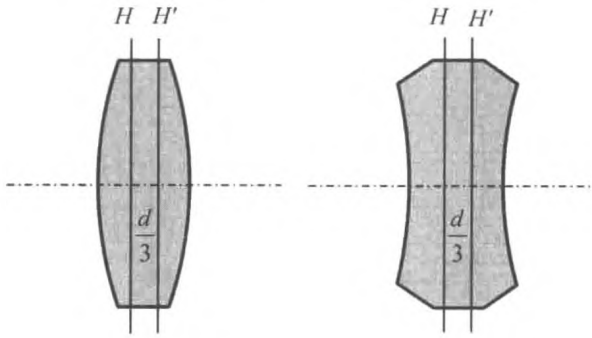
$$x_H \approx \frac{d}{n_L\left(\dfrac{r_2}{r_1}-1\right)} > 0$$

而

$$x'_H \approx \frac{d}{n_L\left(\dfrac{r_1}{r_2}-1\right)} < 0$$

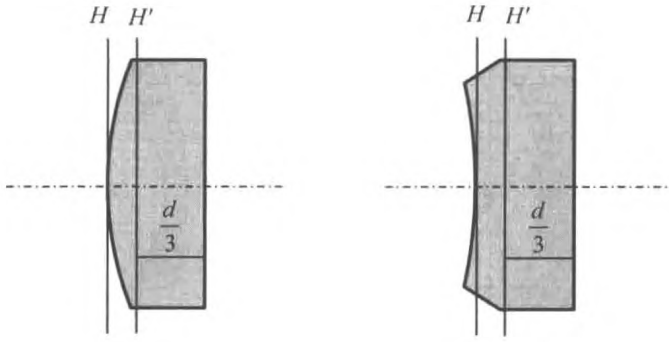
对 $r_1>r_2$ 的负透镜，$x_H<0$，而 $x'_H>0$。

图 2.123～图 2.126 中给出了一些典型厚透镜主平面的大致位置，读者可自行验证。



(a) 双凸透镜　　(b) 双凹透镜

图 2.123　对称型厚透镜



(a) 平凸透镜　　(b) 平凹透镜

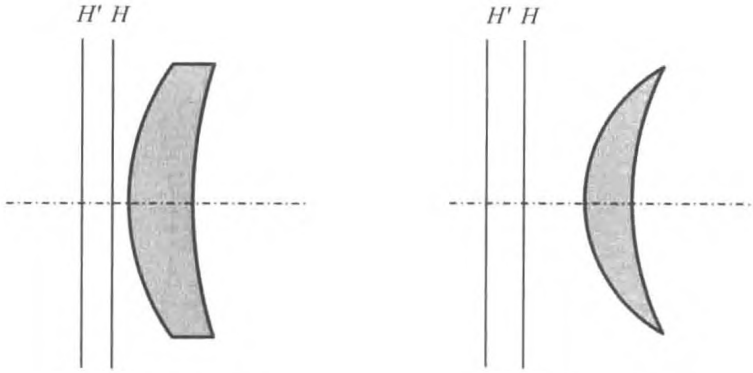
图 2.124　平凸和平凹厚透镜

如果厚透镜两侧的折射率不等，分别记作 n_1 和 n_2，将每个球面的焦距用光焦度表示，则

$$f_1 = \frac{n_1}{\Phi_1}, f'_1 = \frac{n_L}{\Phi_1}, f_2 = \frac{n_L}{\Phi_2}, f'_2 = \frac{n_2}{\Phi_2}$$

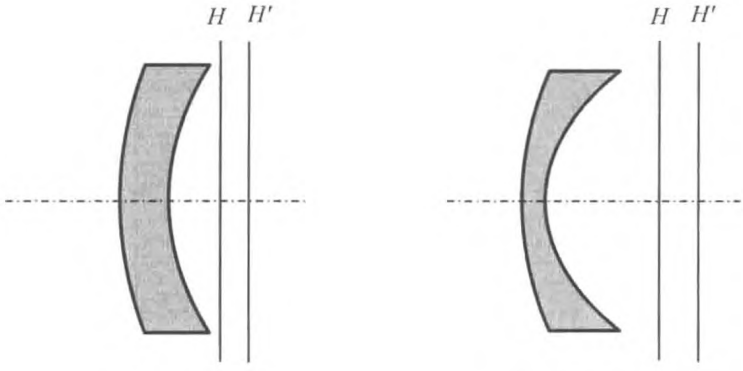
仍可以得到

$$x_H = \frac{df_1}{\Delta} = \frac{d}{\frac{d}{f_1} - \frac{f'_1}{f_1} - \frac{f_2}{f_1}} = \frac{d}{\frac{d\Phi_1}{n_1} - \frac{n_L}{n_1} - \frac{n_L\Phi_1}{n_1\Phi_2}}$$



(a) 小曲率弯月正透镜　　(b) 大曲率弯月正透镜

图 2.125　弯月形正厚透镜



(a) 小曲率弯月负透镜　　(b) 大曲率弯月负透镜

图 2.126　弯月形负厚透镜

$$x'_H = \frac{df'_2}{\Delta} = \frac{d}{\frac{d}{f'_2} - \frac{f'_1}{f'_2} - \frac{f_2}{f'_2}} = \frac{d}{\frac{d\Phi_2}{n_2} - \frac{n_L\Phi_2}{n_2\Phi_1} - \frac{n_L}{n_2}}$$

即

$$x_H = \frac{n_1 d}{d\Phi_1 - n_L\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2} + 1\right)} = \frac{\frac{n_1 d\Phi_2}{n_L}}{\frac{d\Phi_1\Phi_2}{n_L} - (\Phi_1 + \Phi_2)} = -\frac{n_1 d\Phi_2}{n_L\Phi} \tag{5}$$

$$x'_H = \frac{n_2 d}{d\Phi_2 - n_L\left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1}+1\right)} = \frac{\frac{n_2 d\Phi_1}{n_L}}{\frac{d\Phi_1\Phi_2}{n_L} - (\Phi_1+\Phi_2)} = -\frac{n_2 d\Phi_1}{n_L\Phi} \tag{6}$$

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} = -\frac{n_L}{d\Phi_2}x_H = \frac{n_1}{\Phi_1+\Phi_2-\frac{d\Phi_1\Phi_2}{n_L}} = \frac{n_1}{\Phi} \tag{7}$$

$$f' = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta} = -\frac{n_L}{d\Phi_1}x'_H = \frac{n_2}{\Phi_1+\Phi_2-\frac{d\Phi_1\Phi_2}{n_L}} = \frac{n_2}{\Phi} \tag{8}$$

其中，光焦度的定义与式(1)相同。

式(5)～式(8)分别给出了厚透镜的物方及像方主点和焦点的位置。由于在解题过程中，并未涉及该厚透镜光学参数的具体数值，所以可以将前、后球面各视作一个光学参数已知的独立的光学系统，并且两系统间的距离 d、Δ 是已知的，或者可以通过简单的计算得到。所以上述公式也是两个光学系统所组成的共轴系统的组合公式。

【例 2.62】 确定惠更斯目镜和拉姆斯登目镜的主平面和焦平面。

解 惠更斯目镜的结构如图 2.127 所示，接目镜的焦距为 f_2，向场镜的焦距 $f_1 = 3f_2$，两者间距 $d = 2f_2$，间隔为

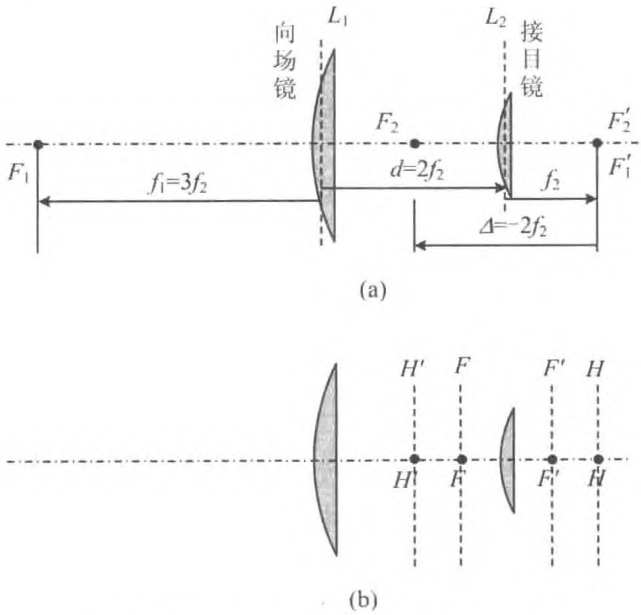


图 2.127 惠更斯目镜的主平面和焦平面

$$\Delta = d - f_1 - f_2 = -2f_2$$

拉姆斯登目镜的结构如图 2.128 所示，接目镜与向场镜的焦距相等，两者间距 $d = f$，间隔为

$$\Delta = d - f_1 - f_2 = -f$$

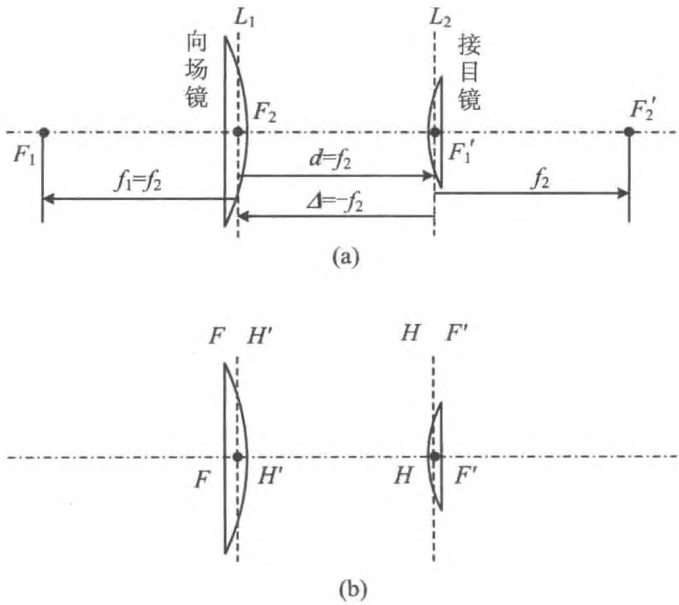


图 2.128 拉姆斯登目镜的主平面和焦平面

于是分别有：

惠更斯目镜

$$\begin{cases} x'_H = \dfrac{df'_2}{\Delta} = \dfrac{2f_2 f_2}{-2f_2} = -f_2 \\ x_H = \dfrac{df_1}{\Delta} = \dfrac{2f_2 \times 3f_2}{-2f_2} = -3f_2 = -f_1 \\ f = f' = -\dfrac{f'_1 f'_2}{\Delta} = -\dfrac{3f_2 f_2}{-2f_2} = \dfrac{3f_2}{2} \end{cases}$$

拉姆斯登目镜

$$\begin{cases} x'_H = \dfrac{df'_2}{\Delta} = -f \\ x_H = \dfrac{df_1}{\Delta} = -f \\ f = f' = -\dfrac{f'_1 f'_2}{\Delta} = f \end{cases}$$

改进后的拉姆斯登目镜结构如图 2.129(a)所示，两镜间距缩短为 $d = 2f/3$，间隔为 $\Delta = -4f/3$，于是基平面的参数为

$$\begin{cases} x'_H = \dfrac{df'_2}{\Delta} = -\dfrac{f}{2} \\ x_H = \dfrac{df_1}{\Delta} = -\dfrac{f}{2} \\ f = f' = -\dfrac{f'_1 f'_2}{\Delta} = \dfrac{3f}{4} \end{cases}$$

这样目镜的物方焦点就前移到了向场镜之外$(1/4)f$处，如图 2.129(b)所示，改进后的拉姆斯登目镜因而也可以直接观察实物。

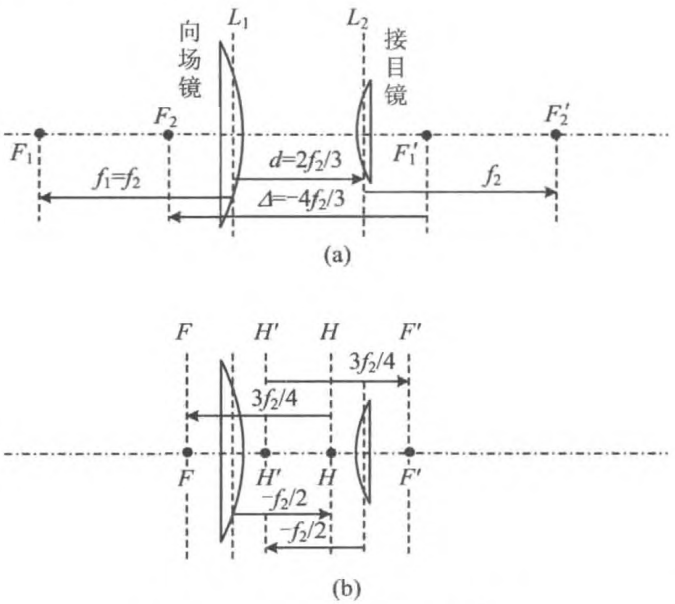
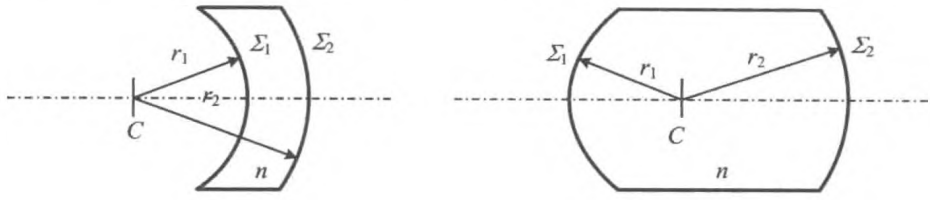


图 2.129 改进后的拉姆斯登目镜

【例 2.63】 共心透镜两球面的曲率半径分别为 r_1，r_2，构造分别如图 2.130(a)和

图 2.130(b)所示。透镜材料的折射率为 n。试分别求透镜主点的位置即焦距。



(a) 共心透镜1　　(b) 共心透镜2

图 2.130

分析　可以首先计算出每个折射球面的焦距，再利用光学系统的组合公式计算出整个系统的基点，在计算过程中，注意各量的符号。

解　本题采用第一种符号约定。先计算如图 2.130(a)所示的情形，这时 Σ_1 和 Σ_2 均为凹球面，各个折射面的焦距分别为

$$f_1 = -\frac{r_1}{n-1}, f_1' = -\frac{nr_1}{n-1}, f_2 = \frac{nr_2}{n-1}, f_2' = \frac{r_2}{n-1}$$

透镜的厚度

$$d_1 = r_2 - r_1$$

间隔为

$$\Delta_1 = d_1 - f_1' - f_2 = r_2 - r_1 + \frac{nr_1}{n-1} - \frac{nr_2}{n-1} = -\frac{r_2 - r_1}{n-1}$$

两主点的位置分别为

$$x_H = f_1 \frac{d_1}{\Delta_1} = -\frac{r_1}{n-1} \cdot \frac{r_2 - r_1}{-\left(\frac{r_2 - r_1}{n-1}\right)} = r_1$$

$$x_{H'} = f_2' \frac{d_1}{\Delta_1} = \frac{r_2}{n-1} \cdot \frac{r_2 - r_1}{-\left(\frac{r_2 - r_1}{n-1}\right)} = -r_2$$

结果表明两主点 H, H' 都与球心 C_1 重合。

焦距为

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta_1} = -\frac{-\frac{nr_2 r_1}{(n-1)^2}}{-\frac{r_2 - r_1}{n-1}} = -\frac{nr_2 r_1}{(n-1)(r_2 - r_1)} = f$$

这样的透镜中间薄边缘厚，所以焦距为负值。

图 2.130(b)的情况与图 2.130(a)一样处理，区别仅仅在于 Σ_1 为凸球面。各个折射

面的焦距分别为

$$f_1 = \frac{r_1}{n-1}, f_1' = \frac{nr_1}{n-1}, f_2 = \frac{nr_2}{n-1}, f_2' = \frac{r_2}{n-1}$$

透镜的厚度

$$d_1 = r_2 + r_1$$

间隔为

$$\Delta_1 = d_1 - f_1' - f_2 = r_2 + r_1 - \frac{nr_1}{n-1} - \frac{nr_2}{n-1} = -\frac{r_2 + r_1}{n-1}$$

两主点的位置分别为

$$x_H = f_1 \frac{d_1}{\Delta_1} = \frac{r_1}{n-1} \cdot \frac{r_2 + r_1}{-\left(\frac{r_2 + r_1}{n-1}\right)} = -r_1$$

$$x_{H'} = f'_2 \frac{d_1}{\Delta_1} = \frac{r_2}{n-1} \cdot \frac{r_2 + r_1}{-\left(\frac{r_2 + r_1}{n-1}\right)} = -r_2$$

结果表明两主点 H, H' 都与球心 C_2 重合。

焦距为

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta_1} = -\frac{\frac{nr_2 r_1}{(n-1)^2}}{-\left(\frac{r_2 + r_1}{n-1}\right)} = \frac{nr_2 r_1}{(n-1)(r_2 + r_1)} = f$$

这样的透镜中间厚边缘薄，所以焦距为正值。

若两球面半径相等，则成为一个透明的实心球，$r_2 = r_1 = r$，焦距为

$$f = f' = \frac{nr}{2(n-1)}$$

【例 2.64】 两薄透镜共轴，一个是汇聚透镜，焦距为 $f_1 = 10$ cm；另一个为发散透镜，$f_2 = -15$ cm，两者相距 5 cm（如图 2.131 所示）。试求透镜组的焦点、主点的位置。若将一物体放在汇聚透镜左侧 10 cm 处，求像的位置、大小、虚实和正倒。

分析 此题既可以用逐次成像法求解，也可以先计算出透镜组的基点位置，再用高斯公式求解。

解 由题意可知，$f_1 = f_1' = 10$ cm，$f_2 = f_2' = -15$ cm，$d = 5$ cm，则

$$\Delta = d - f_1' - f_2 = 10 \text{ cm}$$

由理想光具组的公式，可得到透镜组的焦距为

$$f' = f = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta} = 15 \text{ cm}$$

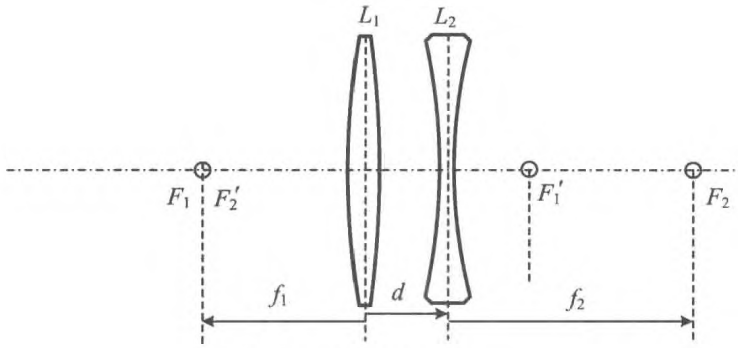


图 2.131 共轴透镜组

主点位置

$$x_{H'} = f_2' \cdot \frac{d}{\Delta} = -7.5\ \text{cm}$$

$$x_H = f_1 \cdot \frac{d}{\Delta} = 5\ \text{cm}$$

即物方主平面 H 位于 L_1 左侧 5 cm 处，像方主平面 H' 位于 L_2 左侧 7.5 cm 处，如图 2.132 所示。由此可知，物方焦平面 F 位于 L_1 左侧 $10+5=15$ (cm)处，像方焦平面 F' 位于 L_2 右侧 $-7.5+15=7.5$ (cm)处。

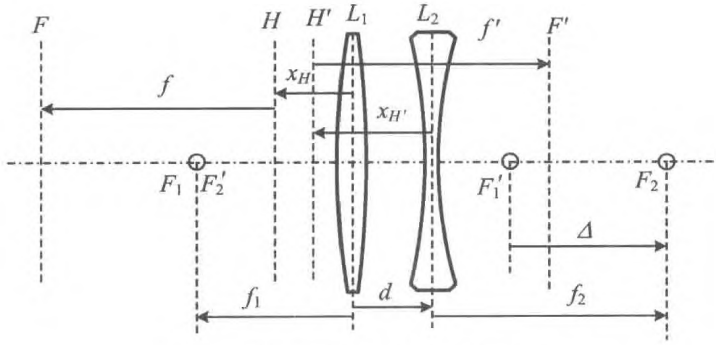


图 2.132 透镜组的基点和基平面

由高斯公式

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1$$

可得

$$s' = \frac{sf'}{s-f} = -7.5\ \text{cm}$$

最后成像于 H' 左侧 7.5 cm 处，恰与物重合。横向放大率为

$$\beta = \frac{s'}{s} = 1.5$$

是正立、放大 1.5 倍之虚像。

【例 2.65】 物体浸于水中，发出的光线穿过一个半径为 R 的球形空气泡，水的折射率为 4/3。

(1) 当物体离气泡很远时，求像的位置，并指出像的正倒和虚实；

(2) 当物体位于气泡的左侧表面时，求像的位置，并指出像的正倒和虚实。

分析 如图 2.133 所示，该气泡是一个厚透镜，根据两侧折射球面的特征，确定整个气泡的主平面和焦平面，即可利用成像公式计算得到答案。

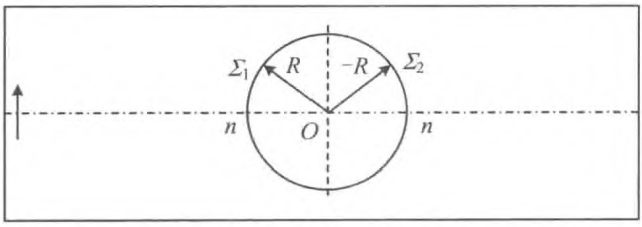


图 2.133 水中的气泡成像

解 (1) 两侧折射球面的间距为 $d=2R$，焦距分别为

$$f_1 = \frac{nR}{1-n} = -4R$$

$$f_1' = \frac{R}{1-n} = -3R$$

$$f_2 = \frac{-R}{n-1} = -3R$$

$$f_2' = \frac{-R}{n-1} = -4R$$

于是

$$\Delta = d - f_1' - f_2 = 8R$$

气泡主点的位置

$$S_H' = f_2' \cdot \frac{d}{\Delta} = -R = -2\ \text{cm}$$

$$S_H = f_1 \cdot \frac{d}{\Delta} = -R = -2\ \text{cm}$$

气泡的焦距

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta} = -\frac{3}{2}R = -3\ \text{cm}$$

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} = -\frac{3}{2}R = -3\ \text{cm}$$

容易看出，主点 H，H'都位于气泡中心处，而物方焦点 F 位于球心右侧 3 cm 处，像方焦点 F'位于球心左侧 3 cm，因此很远处的物成像于 F'处，是正立虚像。

(2) 此时物距 $s = R$，代入高斯公式 $\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1$，可得像距为

$$s' = \frac{sf'}{s - f} = -\frac{3}{5}R = -\frac{6}{5}\ \text{cm}$$

像位于球心左侧 $\frac{6}{5}$ cm 处。

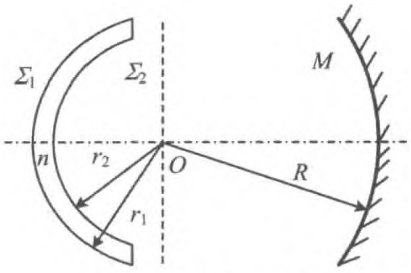


图 2.134 组合光具组

横向放大率

$$\beta = -\frac{3}{5} \times \frac{R}{(-R)} = \frac{3}{5}$$

是正立缩小的虚像，横向放大率为 3/5。

【例 2.66】 如图 2.134 所示，折射率为 1.5 的共心透镜与凹面镜的球心重合于 O 点，置于空气中，透镜的曲率半径分别为 $r_1 = 50$ cm 和 $r_2 = 40$ cm。凹面镜的曲率半径为 $R = 80$ cm，求反射系统的基点，并讨论其成像的特性。

解 利用例 2.63 结果，可知透镜的主平面在球心处，焦距为

$$f_L = f_L' = -\frac{nr_2 r_1}{(n-1)(r_1 - r_2)} = -\frac{1.5 \times 50 \times 40}{(1.5-1)(50-40)} = -600\ (\text{cm})$$

凹面镜的主平面在其顶点处，焦距为

$$f_R = 40\ \text{cm}$$

透镜主平面到反射镜主平面的距离为

$$d_{LM} = 80\ \text{cm}$$

透镜与球面镜的光学间隔为

$$\Delta_{12} = \overline{F_L' F_R} = d_{LM} - f_L' - f_R = 640\ \text{cm}$$

只考虑一次折射和一次反射，复合光具组主点的位置为

$$x_{12H'} = \frac{d_{LM}}{\Delta_{12}} f'_M = 5\ \text{cm}$$

$$x_{12H} = \frac{d_{LM}}{\Delta_{12}} f_L = -75\ \text{cm}$$

即，像方主平面在球面镜像方，距其主平面 H'_M 为 5 cm；物方主平面在透镜右侧，距其主平面 H_L 为 75 cm，如图 2.135 所示。物方和像方主平面重合，在凹面镜前 5 cm 处。

焦距为

$$f'_{12} = -\frac{f'_L f'_M}{\Delta_{12}} = -\frac{-600 \times 40}{640} = 37.5\ (\text{cm})$$

$$f_{12} = -\frac{f_1 f_2}{\Delta_{12}} = -\frac{-600 \times 40}{640} = 37.5\ (\text{cm})$$

由于系统中有反射镜，物方与像方是重合的，因而物方焦点和像方焦点重合，在凹面镜前 42.5 cm 处，如图 2.136 所示。

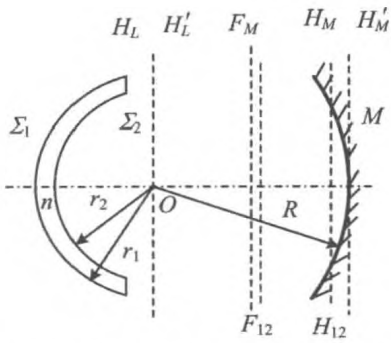


图 2.135 只考虑一次折射和一次反射，复合光具组主点的位置

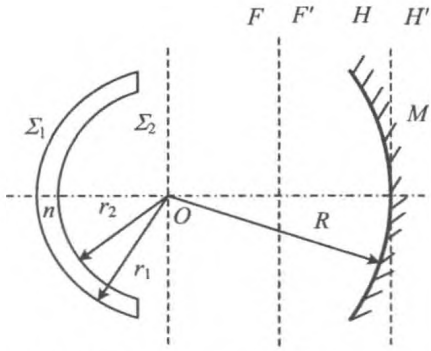


图 2.136 整个装置的主平面和焦平面

被反射的光线，再经透镜折射。再考虑透镜，则系统间隔为

$$\Delta = 600 - 37.5 = 562.5\ (\text{cm})$$

两主平面间距为

$$d = -75\ \text{cm}$$

主平面的位置为

$$x_{H'} = \frac{d}{\Delta} f'_L = \frac{-75 \times (-600)}{562.5} = 80\ (\text{cm})$$

$$x_H = \frac{d}{\Delta} f_{12} = \frac{-75 \times 37.5}{562.5} = -5\ (\text{cm})$$

整个系统的物方和像方主平面重合，在凹面镜顶点处，有

$$f' = -\frac{f'_L f'_{12}}{\Delta} = -\frac{-600\times 37.5}{562.5} = 40\ (\text{cm})$$

$$f = -\frac{f_L f_{12}}{\Delta} = -\frac{-600\times 37.5}{562.5} = 40\ (\text{cm})$$

物方和像方焦点重合，在凹面镜前 40 cm 处。

即整个装置相当于一个焦距为 40 cm 的凹面镜。入射光线经过透镜的效应被反射光线再次经过透镜所抵消。

2.6 光学矩阵方法

矩阵方法是将成像过程中的折射、反射、传播过程用矩阵表示，并通过矩阵运算处理成像的方法。

2.6.1 基本的光学矩阵

按照高斯的符号约定，光学矩阵的基本量和基本成像公式表示如下：

1. 折射矩阵

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \Phi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中，Φ 为折射球面光焦度，或薄透镜的光焦度。

2. 反射矩阵

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{2n}{r} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中，r 为反射球面的曲率半径。

3. 过渡矩阵

$$T_{i+1,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{d_{i+1,i}}{n_i} & 1 \end{bmatrix}$$

其中，$d_{i+1,i}$ 为第 i 个球面到第 $i+1$ 个球面之间的距离，若用 x_i 和 x_{i+1} 分别表示两球面的位置，则 $d_{i+1,i} = x_{i+1} - x_i$，$n_i$ 两球面之间媒质的折射率。

x 轴与光具组主轴重合，方向与射入光具组的光线方向一致，一般为由左向右，x_i 为

第 i 个折射面顶点的坐标，n_i 为第 i 个折射面前部的折射率。当光线逆着 x 轴正向传播时折射率前加负号。Φ_i 为第 i 个折射面的光焦度，r 为反射球面的半径，凹面镜为负，凸面镜为正。

4. 系统矩阵 M_{x_N,x_i}

$$M_{x_N,x_i} = R_N T_{N,N-1} \cdots R_{2,1} R_1 \equiv \begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

系统矩阵由各个元件的矩阵依次相乘得到。

5. 物像矩阵 $M_{x',x}$

$$M_{x',x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{d'}{n} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{d}{n} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\beta} & \Phi \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

物像矩阵由物到第一个面的过渡矩阵乘以系统矩阵乘以最后一个面到像的过渡矩阵而得到。式中，$d = x_1 - x$，$d' = x' - x_N$，x，x' 分别为物与像的坐标，Φ 是整个光具组的光焦度，β 为像的横向放大率。

2.6.2 典型问题与基本解题方法

根据各个元件的特征和相对位置写出它们的折射、反射矩阵和过渡矩阵，进而得到系统矩阵和物像矩阵。通过矩阵运算，可得到物像关系以及横向放大率。

【例 2.67】 在一个半径为 r、折射率为 n 的透明球的后半个表面镀以反射膜，构成一个向后反射器(图 2.137)。

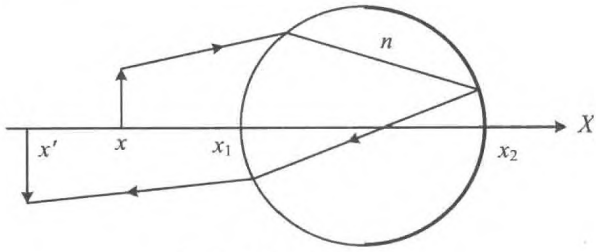


图 2.137 向后反射器

(1) 试求反射器的系统矩阵；

(2) 若 x_1 左侧 r 处有一物高 1 mm，求像的大小与位置(设 $r = 1$ cm，$n = 1.5$)。

分析 本光学系统的成像元件的构成为折射面→反射面→折射面，光线在系统中传播时，经历的成像过程为折射→过渡→反射→过渡→折射，故系统矩阵由 5 个矩阵相乘

而得到。

解 (1) 与5次过程对应的矩阵分别为

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{n-1}{r} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{x_2,x_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2r}{n} & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{2r}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{x_1,x_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2r}{n} & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{n-1}{r} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

系统矩阵为

$$\begin{aligned} M^F_{x_1,x_2} &= R_2 T_{x_1,x_2} F T_{x_1,x_2} R_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{n-1}{r} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2r}{n} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{2r}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2r}{n} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{n-1}{r} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{n-4}{n} & \dfrac{2(2-n)}{nr} \\ \dfrac{4n}{n} & \dfrac{n-4}{n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2) 此时物像矩阵可写作(设 $s' = x' - x_1$, $-s = x_1 - x$)

$$M^F_{x',x} = T_{x',x_1} M^F_{x_1,x} T_{x,x_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{n-4}{n} & \dfrac{2(2-n)}{nr} \\ \dfrac{4n}{n} & \dfrac{n-4}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1.5-4}{1.5} & \dfrac{2(2-1.5)}{1.5\times 1} \\ \dfrac{4\times 1.5}{1.5} & \dfrac{1.5-4}{1.5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{7}{3}s' + \frac{13}{3} & \frac{2}{3}s' - \frac{5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} & \Phi \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

因为对应的矩阵元相等，可得到两个方程

$$-\frac{7}{3}s' + \frac{13}{3} = 0$$

和

$$\frac{2}{3}s' - \frac{5}{3} = \beta$$

得到

$$s' = \frac{17}{3}\ \text{cm}, \beta = -\frac{11}{21}$$

由横向放大率公式计算得到

$$y' = \beta y = -\frac{11}{21}\ \text{cm}$$

所成为实像，位于 x_1 右侧 $\frac{13}{7}$ cm 处。

【例 2.68】 如图 2.138 所示，考虑一双透镜系统，一个高为 1 cm 的物体位于凸透镜左侧 40 cm 处，计算像的大小和位置。

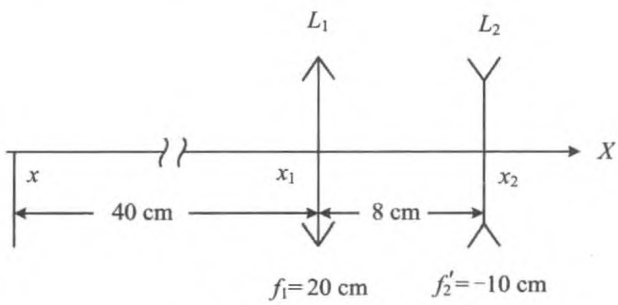


图 2.138 光具组与物

分析 透镜的折射矩阵为 $R_i = \begin{bmatrix} 1 & \Phi_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，这里 Φ_i 为第 i 个透镜的光焦度。

解 先计算系统矩阵

$$M_{x_2,x_1}=\begin{bmatrix}1 & \Phi_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{d}{1} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \Phi_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

其中，$\Phi_1=\dfrac{1}{f_1'}=\dfrac{1}{20\ \text{cm}}$，$\Phi_2=\dfrac{1}{f_2'}=\dfrac{1}{10\ \text{cm}}$，$d=8\ \text{cm}$，带入参数，得到

$$M_{x_2,x_1}=\begin{bmatrix}\dfrac{18}{10} & -\dfrac{1}{10}\\ -8 & 1\end{bmatrix}$$

然后得到物像矩阵

$$\begin{aligned}M_{x',x}&=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -s' & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{18}{10} & -\dfrac{1}{10}\\ -8 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & \dfrac{1}{20}\\ -40 & 1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}2.2 & -0.01\\ -(32+2.2s') & 0.01s'+0.6\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\beta} & \Phi\\ 0 & \beta\end{bmatrix}\end{aligned}$$

因为对应的矩阵元相等，可得到两个方程

$$32+2.2s'=0$$
$$0.01s'+0.6=\beta$$

得到

$$s'=-14.5\ \text{cm}$$
$$\beta=\frac{1}{2.2}$$

因此所成为正立、缩小的虚像，位于 L_2 左侧 14.5 cm 处，像高$\dfrac{1}{2.2}$ cm。

【例 2.69】 考虑一个厚透镜，第一个曲面与第二个曲面的曲率半径分别为 −10 cm 和 20 cm。透镜厚度为 10 cm，折射率为 1.5。试求该厚透镜的主点、节点和焦点的位置。

分析 先求出厚透镜的系统矩阵，再由基点的位置与习用矩阵元的关系确定几点的位置。

解 如图 2.139 所示，采用高斯符号约定，可得到系统矩阵为

$$M_{x_2,x_1}=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{1-1.5}{20}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{10}{1.5} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \dfrac{1.5-1}{-10}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{10}{1.5} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & A \\ D & C \end{bmatrix}$$

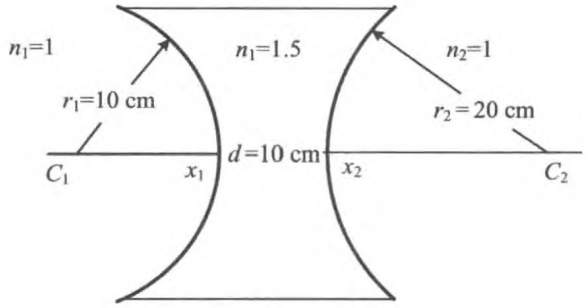


图 2.139 厚透镜

由公式可得

$$d_H = x_H - x_1 = \frac{n_1(1-B)}{A} = \frac{1\left(1-\frac{7}{6}\right)}{-\frac{1}{12}} = 2\,(\text{cm})$$

$$d_{H'} = x_{H'} - x_2 = \frac{n_2(C-1)}{A} = \frac{1\left(\frac{3}{4}-1\right)}{-\frac{1}{12}} = -4\,(\text{cm})$$

由于透镜前后折射率相同，故节点位置与主点重合，$x_N = x_H$，$x_{N'} = x_{H'}$。

系统的焦点为

$$f = -\frac{n_1}{A} = -\frac{1}{-\frac{1}{12}} = 12\,(\text{cm}) = x_F - x_H$$

$$f' = \frac{n_2}{A} = \frac{1}{-\frac{1}{12}} = -12\,(\text{cm}) = x_{F'} - x_{H'}$$

即 F 在透镜右表面右侧 2 cm 处，F'在透镜左侧 6 cm 处。

【例 2.70】 空气中一复合透镜，球面曲率半径分别为 −1.0 m，1.5 m，−1.0 m，厚度分别为 4 cm，5 cm，两镜介质的折射率分别为 1.632 和 1.5，用矩阵方法求复合透镜的光焦度。

解 如图 2.140 所示，采用第二种符号约定，系统矩阵为

$$S=\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{1-n_2'}{r_3}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \dfrac{d_{32}}{n_2'} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{n_2'-n_1'}{r_2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \dfrac{d_{21}}{n_1'} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{n_1'-1}{r_1}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -0.5\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \dfrac{1}{30} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0.088\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \dfrac{5}{204} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0.632\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.973\,2 & 0.201\,5\\ 0.057\,91 & 1.039\,5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.97 & 0.20\\ 0.058 & 1.04\end{bmatrix}$$

于是可得，光焦度

$$\Phi=-S_{12}=-0.20\ \mathrm{m}^{-1}$$

【例 2.71】 如图 2.141 所示，一空心玻璃球，内外半径分别为 r 和 R，置于空气中。玻璃的折射率 $n=1.5$，求系统的各个基点的位置。

解 本题采用第二种符号约定，可以用两种方法求解。

方法一，用共轴球面系统成像方法。

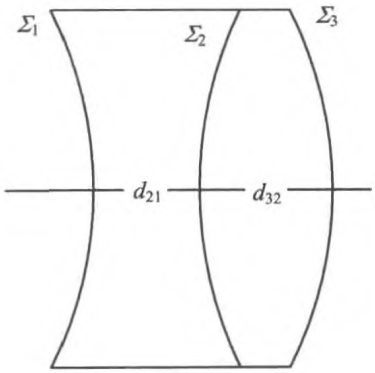


图 2.140 复合透镜

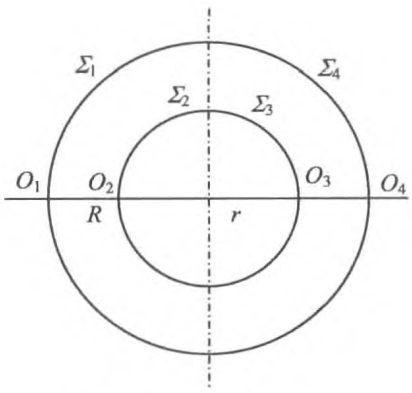


图 2.141 空心玻璃球

对于每一个单球面，物方、像方的主点就是球面顶点。

对于 Σ_1，有

$$(\text{物方})f_1=\frac{R}{n-1}$$

$$(\text{像方})f_1'=\frac{nR}{n-1}$$

起点为 O_1 点。

对于 Σ_2，有

$$(\text{物方})f_2=\frac{nr}{1-n}$$

$$(\text{像方})f_2'=\frac{r}{1-n}$$

起点为 O_2 点。

对于由 Σ_1 和 Σ_2 组成的系统，由于光学间隔

$$\Delta_{12}=\overline{F_1'F_2}=-f_2-[f_1'-(R-r)]$$

$$=-\frac{nr}{1-n}-\frac{nR}{n-1}+(R-r)=-\left(\frac{R-r}{n-1}\right)$$

所以可算得

$$x_{12H'}'=\left(\frac{\Delta+f_1'+f_2}{\Delta}\right)f_2'$$

$$=\frac{-\left(\frac{R-r}{n-1}\right)+\frac{n(R-r)}{n-1}}{-\left(\frac{R-r}{n-1}\right)}\cdot\frac{r}{1-n}=r$$

$$x_{12H}=\left(\frac{\Delta+f_1'+f_2}{\Delta}\right)f_1$$

$$=\frac{-\left(\frac{R-r}{n-1}\right)+\frac{n(R-r)}{n-1}}{-\left(\frac{R-r}{n-1}\right)}\cdot\frac{R}{n-1}=-R$$

或者，由例 2.66，知道物方、像方主点就是球心。

焦距为

$$f_{12}'=-\frac{f_1'f_2'}{\Delta_{12}}=-\frac{-\frac{nRr}{(n-1)^2}}{-\left(\frac{R-r}{n-1}\right)}=-\frac{nRr}{(n-1)(R-r)}$$

像方焦点在球心右侧。

$$f_{12}=-\frac{f_1f_2}{\Delta_{12}}=-\frac{-\frac{nRr}{(n-1)^2}}{-\left(\frac{R-r}{n-1}\right)}=-\frac{nRr}{(n-1)(R-r)}$$

物方焦点在球心右侧。

对于另一侧空心球，只需将上列各式中 $R\Leftrightarrow -r$，$r\Leftrightarrow -R$ 即可。故有

$$\Delta_{34}=\overline{F_3'F_4}=-\left(\frac{R-r}{n-1}\right)$$

$$x'_{34H'} = -R, x_{34H} = r$$

$$f'_{34} = -\frac{nRr}{(n-1)(R-r)}$$

$$f_{34} = -\frac{nRr}{(n-1)(R-r)}$$

可见 Σ_1 和 Σ_2 组成的系统和 Σ_3 和 Σ_4 组成的系统，主平面重合；Σ_1 和 Σ_2 组成的系统的像方焦点与 Σ_3 和 Σ_4 组成的系统的像方焦点重合；Σ_1 和 Σ_2 组成的系统的物方焦点与 Σ_3 和 Σ_4 组成的系统的物方焦点重合，如图 2.142 所示。

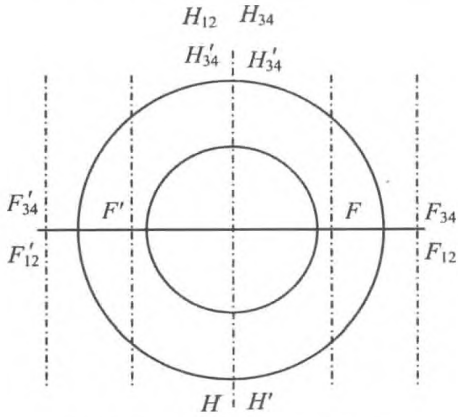


图 2.142 共轴光具组方法

整个系统

$$\Delta = F'_{12}F_{34} = -f_{34} - f'_{12} = \frac{2nRr}{(n-1)(R-r)}$$

$$f' = -\frac{f'_{12}f'_{34}}{\Delta} = -\frac{nRr}{2(n-1)(R-r)}$$

$$f = -\frac{f_{12}f_{34}}{\Delta} = -\frac{nRr}{2(n-1)(R-r)}$$

$$x'_{H'} = \left(\frac{\Delta + f'_{12} + f_{34}}{\Delta}\right)f'_{34} = 0$$

$$x_H = \left(\frac{\Delta + f'_{12} + f_{34}}{\Delta}\right)f_1 = 0$$

主平面在球心处。系统为发散的。

将 $n = 1.5$ 代入，得到

$$f' = f = -\frac{1.5Rr}{2(1.5-1)(R-r)} = -1.5\left(\frac{Rr}{R-r}\right) = -\left(\frac{1.5}{\frac{1}{r}-\frac{1}{R}}\right)$$

方法二,矩阵方法。

系统矩阵为

$$S = R_4 T_{43} R_3 T_{32} R_2 T_{21} R_1$$

其中

$$R_n = \begin{bmatrix} 1 & -\Phi_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{n,n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{d_{n,n-1}}{n_{n,n-1}} & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{n-1}{R} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{R-r}{n} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{n-1}{r} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2r & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{n-1}{r} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{R-r}{n} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{n-1}{R} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\dfrac{(R-r)(n-1)}{nR} & \left[1-\dfrac{(R-r)(n-1)}{nR}\right]\dfrac{(n-1)}{r} - \dfrac{n-1}{R} \\ \dfrac{R-r}{n} & 1+\dfrac{(n-1)(R-r)}{nr} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2r & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+\dfrac{(R-r)(n-1)}{nr} & \left[1+\dfrac{(R-r)(n-1)}{nr}\right]\left(-\dfrac{n-1}{R}\right)+\dfrac{n-1}{r} \\ \dfrac{R-r}{n} & 1-\dfrac{(n-1)(R-r)}{nR} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\dfrac{(n-1)(R-r)}{nR} & \dfrac{(n-1)(R-r)}{nRr} \\ \dfrac{R-r}{n} & 1+\dfrac{(n-1)(R-r)}{nr} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2r & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+\dfrac{(n-1)(R-r)}{nr} & \dfrac{(n-1)(R-r)}{nRr} \\ \dfrac{R-r}{n} & 1-\dfrac{(n-1)(R-r)}{nR} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1+\dfrac{(n-1)(R-r)}{nR} & \dfrac{(n-1)(R-r)}{nRr} \\ \dfrac{2nR-R+r}{n} & 1+\dfrac{(n-1)(R-r)}{nr} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+\dfrac{(n-1)(R-r)}{nr} & \dfrac{(n-1)(R-r)}{nRr} \\ \dfrac{R-r}{n} & 1-\dfrac{(n-1)(R-r)}{nR} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1+\dfrac{2(n-1)(R-r)}{nr} & \dfrac{2(n-1)(R-r)}{nRr} \\ \dfrac{2R(nR-R+r)}{nr} & 1+\dfrac{2(n-1)(R-r)}{nr} \end{bmatrix}$$

由

$$\frac{s'}{n'_m}=-\frac{\left(\dfrac{s}{n_1}\right)S_{22}+S_{21}}{\left(\dfrac{s}{n_1}\right)S_{12}+S_{11}}$$

可得

$$f'=-\frac{S_{22}}{S_{12}}=-\frac{nr+2(n-1)(R-r)}{2(n-1)(R-r)}R=-\left[\frac{nRr}{2(n-1)(R-r)}+R\right]$$

由

$$\beta=\frac{y'}{y}=S_{22}+\left(\frac{s'}{n'_m}\right)S_{12}$$

可得

$$x'_{H'}=\frac{(1-S_{22})}{S_{12}}=-R$$

由

$$\beta=\frac{1}{S_{11}+\dfrac{s}{n_1}\cdot S_{12}}$$

可得

$$x_H=\frac{(1-S_{11})}{S_{12}}=-R$$

与方法一结果相同。

第 3 章　光的波动模型与叠加原理

3.1　简谐光波的标量表达式

简谐光波也称定态光波，是空间各点的振幅不随时间变化的单色光波。

3.1.1　简谐光波的余弦表达式

$$U(P,t) = A(P)\cos[\varphi(P) - \omega t] \tag{3.1}$$

该式所表达的是 t 时刻，空间点 P 点处光波场物理量（通常指电场强度）的数值。其中 $A(P)$ 是光波在 P 点的振幅，$\varphi(P)$ 是 $t=0$ 时刻 P 点的相位，也是任意时刻 P 点相对于原点的相位滞后或延迟，$\omega = 2\pi\nu$ 称作该单色光波的角频率，ν 是该单色光波的时间频率。

3.1.2　简谐光波的复振幅表达式

$$\widetilde{U}(P) = A(P)e^{i\varphi(P)} \tag{3.2}$$

3.1.3　球面波与平面波

1. 球面光波的表达式

$$U(r,t) = \frac{a}{r}\cos(kr - \omega t + \varphi_0) \tag{3.3}$$

或

$$U(r,t) = \frac{a}{r}\cos(kr + \omega t + \varphi_0) \tag{3.4}$$

式(3.3)表示从原点发散的光波，式(3.4)表示向原点汇聚的光波。$\boldsymbol{k}=\frac{2\pi}{\lambda}$称作波矢，$\lambda$ 是光的波长，φ_0 是 $t=0$ 时刻原点的相位，称作初相位。

2. 平面波的表达式

$$U(x,y,z,t) = A\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \varphi_0) \tag{3.5}$$

式(3.5)中，$\boldsymbol{k}=k_x\boldsymbol{e}_x+k_y\boldsymbol{e}_y+k_z\boldsymbol{e}_z$ 和 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$ 分别是空间直角坐标系中波的传播方向和场点 P 的位矢。

3.1.4 光波的辐射通量与强度

1. 光波场的能量密度

光波场中单位体积中的能量称作光的能量密度。

能量密度的表达式为

$$w = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{3.6}$$

其中，$\boldsymbol{D}$ 为介质中的电位移矢量，$\boldsymbol{D}=\varepsilon_r\varepsilon_0\boldsymbol{E}$，$\varepsilon_r$ 为介质的相对介电常数；$\boldsymbol{H}$ 为介质中的磁场强度，$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_r\mu_0}$，$\mu_r$ 为介质的相对磁导率。能量密度也可用标量表示为

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_r\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_r\mu_0}\right) = \varepsilon_r\varepsilon_0 E^2 \tag{3.7}$$

2. 光波的辐射通量

光波单位时间内传输过某一截面的能量称作光波的辐射通量。

辐射通量也被称作能流，由于其含义是光波传输的功率，所以也被称作光功率。

由于单位时间内光传输的距离为 $c\cdot 1$，而体积为 $c\cdot 1\cdot A$ 的均匀光束所储存的能量为 $c\cdot 1\cdot A\cdot w$，所以光的辐射通量为

$$P = wcA \tag{3.8}$$

3. 光的强度

光波单位时间内传输过单位截面的能量称作光强。光强也被称作能流密度或功率密度。

能流密度称为坡印廷矢量，若以 $\boldsymbol{S}$ 表示，为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{3.9}$$

坡印廷矢量的量值也可以用光波的能量密度 w 和速度 v 表示为

$$S = w\cdot v = \frac{v}{2}(\varepsilon_r\varepsilon_0 E^2 + \mu_r\mu_0 H^2) \tag{3.10}$$

光强是坡印廷矢量模的平均值，为

$$I = \frac{n}{2c\mu_r\mu_0}E_0^2 \tag{3.11}$$

其中，n 是介质的折射率。

在可见光范围中，一般情况下介质的磁导率 $\mu_r \approx 1$，故

$$I \approx \frac{n}{2c\mu_0}E_0^2 \tag{3.12}$$

如果不考虑光强的量纲，而只关心其相对数值，则可略去式中的常量 c 和 μ_0，得到

$$I \propto nE_0^2 \tag{3.13}$$

如果光只是在同一种介质中传播，通常取

$$I = E_0^2 \tag{3.14}$$

E_0^2 仅仅表示光强的相对值。

3.1.5　典型问题与基本解题方法

波都有相似的表达式，光波的振动通常是指波场中某一点电场强度的瞬时值。由于光场物理量的值由其相位决定，因而确定光波的相位表达式往往是基本的。

【例 3.1】　一列沿 z 方向传播的一维波的表达式为

$$E(z,t) = A\cos\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)$$

式中，$\frac{z}{v}$ 的含义是什么？如果将其表示为

$$E(z,t) = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega z}{v}\right)$$

$\frac{\omega z}{v}$ 的含义又是什么？

分析　本题讨论振动的超前与滞后和相位的超前与滞后的问题。这涉及波动中最基本的概念，同时也是一个很容易引起混淆的概念。

解　波是随时间周期性变化的物理量在空间做周期性的分布而形成的场。习惯上，将波场中某一点的物理量随时间的周期性变化称作振动。

一方面，波场中任意一点物理量的数值都是随时间而变化的；另一方面，不同点的物理量随时间的变化是相互关联，这种关联被视作振动的传播，振动的传播就是波的传播。

既然振动和传播都是过程，必然有先后次序。若作相互比较，则先发生的，被称作超前；后发生的，被称作滞后。

物理公式只是物理过程的数学表达式，分析物理过程，可不必涉及具体的公式。

首先分析振动的超前或滞后。

对于任意一空间点 z 处的物理量，总是 0 时刻振动在先，t 时刻振动在后（若设 $t>0$），所以说波场中任意一点，t 时刻的振动比 0 时刻振动滞后，或 t 时刻的物理量比 0 时刻的滞后。

若振动沿 $+z$ 方向传播（就是波沿 $+z$ 方向传播），波动从原点传播到 z 点（设 $z>0$）要经历 Δt 的时间，则 z 点的振动总是比原点的振动滞后 Δt 的时间。

注意，上述所比较的是振动的先后次序，因而关于振动超前或滞后的说法是按时序比较的结论，超前或滞后的是时间。

任一点 0 时刻的物理量（即振动）要经历 $\Delta t = t - 0$ 的时间才能达到 t 时刻的物理量，所以说该点 t 时刻的振动是比 0 时刻的振动超前的，也可以说 t 时刻的相位比 0 时刻的相位超前。

若在同一时刻比较不同位置的振动，则 t 时刻 z 点的振动是由 $t-\Delta t$ 时刻原点的振动所引起的，所以同一时刻，z 点（设 $z>0$）的相位比原点的相位超前。

对相位的比较通常涉及上述两种情形，一种是比较同一点在不同时刻的相位，另一种是比较不同点在同一时刻的相位。相位是无量纲的物理量，所以这种超前或滞后不是时序的比较。

所以对于沿着 $+z$ 方向传播的波，“z 点（设 $z>0$）的振动比原点的振动滞后”和“z 点的相位比原点的相位超前”这两种说法是完全一致的。对于任意一点的振动，“t 时刻（设 $t>0$）的振动比 0 时刻的振动滞后”和“t 时刻的相位比 0 时刻的相位超前”这两种说法也是完全一致的。

结合本题，波的表达式为

$$E(z,t) = A\cos\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)$$

式中，$\frac{z}{v}$ 的含义是 z 点的振动比原点的振动所滞后的时间。

若将表达式写成

$$E(z,t) = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega z}{v}\right)$$

$\frac{\omega z}{v}$ 的含义则是 z 点比原点所滞后的相位。

其实，由于余弦函数是偶函数，上述表达式也可以分别写成

$$E(z,t) = A\cos\omega\left(\frac{z}{v} - t\right)$$

和

$$E(z,t) = A\cos\left(\frac{\omega z}{v} - \omega t\right)$$

虽然公式的形式有所不同，但所描述的都是沿 $+z$ 方向传播的波，其物理意义是一样的。

【例 3.2】 推导定态球面光波的表达式。

分析　通常光学教材中都是直接给出球面波和平面波的表达式，本例和例 3.3 的目的是希望通过具体的推导过程使读者对球面波和平面波产生和传播的条件以及其振动的特征有更深刻的认识。

波动是周期性变化的物理量在空间的周期性分布，因而为了描述波的特征，总是要建立空间坐标系。以下推导和表达是在适当的坐标系中进行的。

解　所谓波面，指的是波场中的等相位面，即任意一时刻相位相等的点所在的面。

定态球面光波是从点光源发出的或向某一点汇聚的在均匀空间传播的单色光波。

可取点光源所在处为坐标原点，光源的辐射通量（即辐射功率）为 P，原点的初相位为 φ_0。

则在距离原点为 r 的球面上，辐射的功率密度为

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$$

若记

$$\sqrt{\frac{P}{4\pi}} = a$$

振幅为

$$A(r) = \sqrt{I(r)} = \sqrt{\frac{P}{4\pi r^2}} = \frac{a}{r}$$

0 时刻，原点的相位为 φ_0，则 t 时刻，原点的相位为

$$\varphi(0,t) = \varphi_0 + 2\pi\nu t \tag{1}$$

其中，ν 是光波的时间频率。

若光波以速度 $v=\frac{c}{n}$ 传播，其中 c 是光在真空中的速度，n 是媒质的折射率。则 r 处光的振动总是比原点滞后

$$\Delta t = \frac{r}{v} = \frac{nr}{c} \tag{2}$$

即 t 时刻 r 处光波振动的相位是 $t-\Delta t$ 时刻原点的相位，即

$$\varphi(r,t) = \varphi(0,t-\Delta t) = \varphi_0 + 2\pi\nu(t-\Delta t) = \varphi_0 + 2\pi\nu\left(t - \frac{nr}{c}\right)$$

$$= 2\pi\nu t - \frac{2\pi\nu nr}{c} + \varphi_0 = 2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda}nr + \varphi_0$$

其中，$\lambda = \frac{c}{\nu}$，为光在真空中的波长。

记 $\frac{2\pi}{\lambda} = k$，$2\pi\nu = \omega$，相位表达式为

$$\varphi(r,t) = \omega t - knr + \varphi_0 \tag{3}$$

nr 是从原点到 r 处的光程。通常光在真空或空气中传播，$n=1$。若记 $L = nr$，则

$$\varphi(r,t) = \omega t - kL + \varphi_0$$

参考例 3.1，$kL = knr$ 是 r 处比原点超前的相位。

则发散球面光波的表达式为

$$U(r,t) = \frac{a}{r}\cos(\omega t - knr + \varphi_0) \tag{4}$$

对于向原点汇聚的球面光波，r 处光的振动总是比原点超前 $\Delta t = \frac{r}{v} = \frac{nr}{c}$，即 t 时刻 r 处光波振动的相位是 $t + \Delta t$ 时刻原点的相位，即

$$\varphi(r,t) = \varphi(0, t + \Delta t) = \varphi_0 + 2\pi\nu(t + \Delta t) = \omega t + knr + \varphi_0$$

则汇聚球面光波的表达式为

$$U(r,t) = \frac{a}{r}\cos(\omega t + knr + \varphi_0) \tag{5}$$

由于余弦函数是偶函数，为了与简谐光波的复振幅表达式一致，也可以将式(4)和式(5)写成

$$U(r,t) = \frac{a}{r}\cos(knr - \omega t + \varphi_1)$$

$$U(r,t) = \frac{a}{r}\cos(knr + \omega t + \varphi_1)$$

若以复振幅表示，则分别为

$$\tilde{U}(r) = \frac{a}{r}e^{ iknr + i\varphi_0}$$

$$\tilde{U}(r) = \frac{a}{r}e^{-iknr + i\varphi_0}$$

【例 3.3】 推导定态平面光波的表达式。

解 若对平面波下一个严格的定义，则应当是：在均匀空间中从无穷远处的点光源发出(或向无穷远处点汇聚)的光波，或从无穷大平面光源发出的光波。因而，严格意义上的平面波实际上是不存在的。

通常可以这样理解平面波：在有限的空间范围内，各处强度相等、且沿某一方向传播的单色光波。

这样的话，平面波场中各处的强度都是一样的，即各处的振幅都相等，记为 A。等相位面是与其传播方向垂直的平面。

建立直角坐标系 $oxyz$，如图 3.1 所示，在过坐标原点的平面 Σ_0 上，初相位为 φ_0，光波的传播方向以波矢表示，为

$$\boldsymbol{k} = k_x \boldsymbol{e}_x + k_y \boldsymbol{e}_y + k_z \boldsymbol{e}_z \tag{1}$$

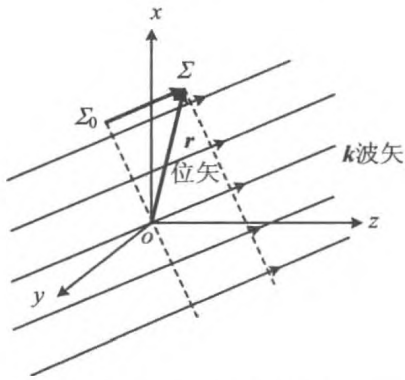


图 3.1　直角坐标系中的平面波

波矢 $\boldsymbol{k}$ 的大小为

$$k = \frac{2\pi n}{\lambda}$$

过任意一点 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ 的波面为 Σ，Σ 与 Σ_0 的间距为

$$\Delta r = \boldsymbol{r} \cdot \frac{\boldsymbol{k}}{k} = \frac{\lambda}{2\pi n}\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} \tag{2}$$

则 t 时刻，Σ 面上的相位，也就是 r 处的相位为

$$\varphi(r,t) = 2\pi\nu\left(t - \frac{\Delta r}{v}\right) + \varphi_0 = 2\pi\nu t - 2\pi\frac{\nu}{v}\frac{\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}}{k} + \varphi_0$$

$$= \omega t - \frac{\nu\lambda}{nv}\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} + \varphi_0 = \omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} + \varphi_0 \tag{3}$$

平面波的表达式为

$$U(\boldsymbol{r},t) = A\cos(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} + \varphi_0) \tag{4}$$

也可将式(4)写成如下形式

$$U(\boldsymbol{r},t) = A\cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t + \varphi_0)$$

$$= A\cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi_0) \tag{5}$$

以复振幅表示，则为

$$\tilde{U}(\boldsymbol{r}) = A e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+i\varphi_0} = A e^{i(k_x x+k_y y+k_z z)+i\varphi_0} \tag{6}$$

【例 3.4】 一平面波的波函数为

$$E(P,t) = A\cos[5t - (2x - 3y + 4z)]$$

式中 x, y, z 的单位为 m，t 的单位为 s。试求：

(1) 时间频率；

(2) 波长；

(3) 波矢的大小和方向；

(4) 在 $z=0$ 和 $z=1$ 波前上的相位分布。

分析 题目要求从平面波的波函数表达式中获取其频率、波长和其传播方向，并给出在某些特定平面上波前函数的表达式。

解 与本题所对应的平面波波函数的形式为

$$\begin{aligned} E(x,y,z,t) &= A\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \varphi_0) \\ &= A\cos[\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z) + \varphi_0] \end{aligned}$$

将其与题目中所给表达式

$$E(P,t) = A\cos[5t - (2x - 3y + 4z)]$$

比较，则有

(1) $$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5}{2\pi} = 0.796\ (\mathrm{Hz})$$

(2) $$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2}}$$

$$= 1.166 \approx 1.17\ (\mathrm{cm})$$

(3) 空间频率为

$$\frac{1}{\lambda} = 0.857\,5 \approx 0.86\ (\mathrm{cm}^{-1})$$

波矢的大小为

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 5.385\,1 \approx 5.39\ (\mathrm{cm}^{-1})$$

向量方向可用其单位矢量来表示，该波矢的方向单位矢量为

$$\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2}}(2\boldsymbol{e}_x - 3\boldsymbol{e}_y + 4\boldsymbol{e}_z)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{29}}(2\boldsymbol{e}_x - 3\boldsymbol{e}_y + 4\boldsymbol{e}_z)$$

(4)　$\varphi|_{z=0}=(2x-3y+4z)|_{z=0}=2x-3y$，$\varphi|_{z=1}$
$=(2x-3y+4z)|_{z=1}=2x-3y+4$

【例 3.5】 太阳光垂直射向地面，测得能流密度为 1.35 kW/m²，计算地面上太阳光电场强度的振幅。如果用一个半径为 5 cm 的透镜将太阳光聚成面积 1 mm² 的光斑，忽略透镜对光的吸收和反射，计算光斑上的能流密度和电场强度的振幅。

分析　题目旨在考察光场的能流密度(即光强)和电场振幅二者之间的关系。

解　先由光场的能流密度推导出电场振幅的表达式。

光场能流密度(光强)的表达式为

$$I=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0}{\mu_r\mu_0}}E_0^2$$

因而

$$E_0^2=2I\sqrt{\frac{\mu_r\mu_0}{\varepsilon_r\varepsilon_0}}$$

代入题目所给数据，得

$$E_0^2=2\times(1.35\times10^3)\times\sqrt{\frac{4\pi\times10^{-7}}{8.85\times10^{-12}}}=1.017\times10^6\ (\mathrm{V/m})^2$$

即地面上太阳光电场强度的振幅为

$$E_0=1\,008.54\approx1.01\times10^3\ (\mathrm{V/m})$$

聚焦后面积缩小的倍数为

$$\frac{\pi R^2}{1\ \mathrm{mm}^2}=\frac{3.14\times(5\ \mathrm{cm})^2}{1\times10^{-6}\mathrm{m}^2}=7\,850$$

光强是功率密度，所以光强增加至

$$I'=7\,850I=1.06\times10^7\ (\mathrm{W/m^2})$$

而振幅增加至

$$E_0'=\sqrt{7\,850}E_0=8.936\times10^4\approx8.94\times10^4\ (\mathrm{V/m})$$

【例 3.6】 如图 3.2 所示，一平面简谐波沿 x 方向传播，波长为 λ，设 $x=0$ 的点的相位 $\varphi_0=0$。

(1) 写出沿 x 轴波的相位分布 $\varphi(x)$；

(2) 写出沿 y 轴波的相位分布 $\varphi(y)$；

(3) 写出沿 r 方向波的相位分布 $\varphi(r)$。

分析　题目要求对传播方向已知的平面波，写出相位表达式，并求出特定空间位置的相位分布。

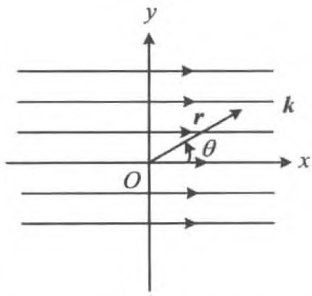


图 3.2　沿 x 方向的平面波

平面波沿 x 方向传播，波矢 $\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{e}_x$，相位分布 $\varphi(\boldsymbol{r})$与空间位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 有关，具体表现为平面波相位表达式

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$$

其中，位置矢量为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$$

的不同。

解 (1) 沿 x 轴，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x$，波的相位分布

$$\varphi(x)=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=k\boldsymbol{e}_x\cdot(x\boldsymbol{e}_x)=kx$$

(2) 沿 y 轴，$\boldsymbol{r}=y\boldsymbol{e}_x$，波的相位分布

$$\varphi(y)=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=k\boldsymbol{e}_x\cdot(x\boldsymbol{e}_y)=0$$

即 y 轴上相位处处相等；

(3) 沿 r 方向

$$\boldsymbol{r}=r(\cos\theta\boldsymbol{e}_x+\sin\theta\boldsymbol{e}_y+0\boldsymbol{e}_z)$$

光波沿此方向波的相位分布为

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=k\boldsymbol{e}_x\cdot r(\cos\theta\boldsymbol{e}_x+\sin\theta\boldsymbol{e}_y+0\boldsymbol{e}_z)=kr\cos\theta$$

【例 3.7】 如图 3.3 所示，一平面简谐波沿 $\boldsymbol{r}$ 方向传播，波长为 λ，设 $r=0$ 的点的相位为 φ_0，

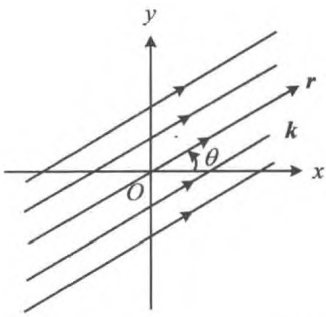


图 3.3 沿 θ 方向的平面波

(1) 写出沿 $\boldsymbol{r}$ 方向波的相位分布 $\varphi(\boldsymbol{r})$；

(2) 写出沿 x 轴波的相位分布 $\varphi(x)$；

(3) 写出沿 y 轴波的相位分布 $\varphi(y)$。

解 本例考察目的与例 3.6 相同，即对传播方向已知的平面波，写出相位表达式，并求出特定空间位置的相位分布。

本例中平面波沿 r 方向传播

$$\boldsymbol{r}=r(\cos\theta\boldsymbol{e}_x+\sin\theta\boldsymbol{e}_y)$$

波矢

$$\boldsymbol{k}=k(\cos\theta\boldsymbol{e}_x+\sin\theta\boldsymbol{e}_y)$$

相位分布 $\varphi(\boldsymbol{r})$与空间位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 有关，具体表现为平面波相位表达式

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0$$

中位置矢量

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$$

的不同。

(1) 沿 $\boldsymbol{r}$ 方向

$$\boldsymbol{r} = r(\cos\theta \boldsymbol{e}_x + \sin\theta \boldsymbol{e}_y + 0\boldsymbol{e}_z)$$

波的相位分布为

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} + \varphi_0 = k\boldsymbol{e}_x \cdot r(\cos\theta \boldsymbol{e}_x + \sin\theta \boldsymbol{e}_y + 0\boldsymbol{e}_z)_0$$
$$= kr(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \varphi_0 = kr + \varphi_0$$

或者

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = k(x\cos\theta + y\sin\theta) + \varphi_0$$

(2) 沿 x 轴，$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x$，波的相位分布

$$\varphi(x) = kx\cos\theta + \varphi_0$$

(3) 沿 y 轴，$\boldsymbol{r} = y\boldsymbol{e}_x$，波的相位分布

$$\varphi(y) = ky\sin\theta + \varphi_0$$

【例 3.8】 在玻璃中 z 方向上传播的单色平面波的波函数为

$$E(z,t) = 10^2 \exp\left[\mathrm{i}\pi \times 10^{15}\left(\frac{z}{0.65c} - t\right)\right]$$

式中，c 为真空中的光速，时间以 s 为单位，电场强度以 V/m 为单位，距离以 m 为单位，试求：

(1) 光波的振幅和时间频率；

(2) 玻璃的折射率；

(3) z 方向的空间频率；

(4) 在 xz 平面内与 x 轴成 45°角方向上的空间频率。

解　题目考查的是单色平面波的波函数表达式中各物理量。

与本题所对应的波的复数表达形式为

$$\tilde{U}(P,t) = A\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{z}{v} - t\right)\right]$$

与题目给出的表达式对照，即有

(1) 振幅 $A = 10^2$ V/m，频率

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi \times 10^{15}}{2\pi} = 5 \times 10^{14}\ (\mathrm{Hz})$$

(2) 介质的折射率

$$n = \frac{c}{v} = \frac{c}{0.65c} = 1.538\,5 = 1.54$$

(3) 平面波沿 z 方向传播，故 z 方向的空间周期即为波长 λ，z 方向的空间频率

$$f_z = \frac{1}{\lambda} = \frac{k}{2\pi} = \frac{\frac{\omega}{v}}{2\pi} = \frac{\frac{\pi \times 10^{15}}{0.65c}}{2\pi} = 2.564 \times 10^6 (\mathrm{m}^{-1})$$

(4) 如图 3.4 所示，在 xz 平面内与 x 轴成 θ 角方向上的空间周期为 $\lambda/\sin\theta$，该方向上的空间频率为

$$f_{\pi/4} = \frac{1}{\frac{\lambda}{\sin\theta}} = f_z \sin\theta = f_z \sin\frac{\pi}{4}$$

$$= 1.813 \times 10^6 (\mathrm{m}^{-1})$$

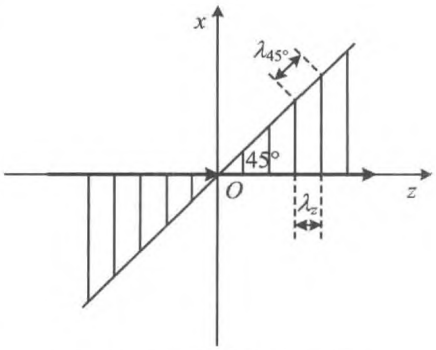


图 3.4 光波的空间频率

【例 3.9】 一平面波的复振幅为

$$\tilde{E}(P) = A\exp\left[-\mathrm{i}\frac{k}{5}(3x - 4z)\right]$$

试求波的传播方向，并写出在 xy 平面上的相位分布。

分析 题目是平面波的复振幅表达式，要求给出波矢方向。

解 平面波的空间相位

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} + \varphi_0 = k_x x + k_y y + k_z z + \varphi_0$$

与题目给出的相位

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = -k\left(\frac{3x - 4z}{5}\right)$$

比较，得

$$\boldsymbol{k} = k\left(-\frac{3}{5}\boldsymbol{e}_x + \frac{4}{5}\boldsymbol{e}_z\right) = \frac{2\pi}{\lambda}\left(-\frac{3}{5}\boldsymbol{e}_x + \frac{4}{5}\boldsymbol{e}_z\right)$$

$$k_x = -\frac{3}{5}k, k_y = 0, k_z = \frac{4}{5}k$$

所以波矢在 xOz 平面内，可设

$$\boldsymbol{k} = k(\cos\theta\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\boldsymbol{e}_z)$$

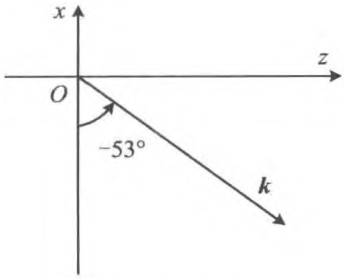


图 3.5 波矢的方向

如图 3.5 所示，由 $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ 可知与 x 轴夹角 θ 为 -53°。

xOy 平面上点的位置矢量

$$\boldsymbol{r} = r(\cos\varphi\boldsymbol{e}_x + \sin\varphi\boldsymbol{e}_y) = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + 0\boldsymbol{e}_z$$

所以在 xOy 平面上的相位为

$$\varphi(z = 0) = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} + \varphi_0 = k_x x + k_y y + k_z z + \varphi_0$$

$$= -k\left(\frac{3x - 0z}{5}\right) = -\frac{3kx}{5}$$

【例 3.10】 一列波长为 λ_0 的单色波在折射率为 n 的介质中由 A 点传播到 B 点，其相位改变了 2π，问光程改变了多少？从 A 到 B 的距离是多少？

分析　题目旨在考查相位差和光程差、路程三者之间的关系。

解　简谐光波相位改变(相位差)$\Delta\varphi$ 与光程改变(光程差)ΔL 的关系为

$$\Delta\varphi = k\Delta L = \frac{2\pi}{\lambda}n\Delta r$$

于是光程差为

$$\Delta L_{AB} = \frac{\Delta\varphi_{AB}}{k} = \frac{\Delta\varphi_{AB}}{2\pi}\lambda_0 = \frac{2\pi}{2\pi}\lambda_0 = \lambda_0$$

距离为

$$\Delta r_{AB} = \frac{\Delta L_{AB}}{n} = \frac{\lambda_0}{n}$$

$$\varphi_B - \varphi_A = (kz_B - \omega t + \varphi_0) - (kz_A - \omega t + \varphi_0)$$

$$= k(z_B - z_A) = 2\pi$$

【例 3.11】 频率为 6×10^{14} Hz，相速度为 3×10^8 m/s 的光波，在传播方向上相位差为 60°的任意两点之间的最短距离是多少？

分析　本例与例 3.10 相似。

解　两点间最短的距离为

$$\Delta z = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}\cdot\frac{\lambda}{n} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}\cdot\frac{v_P}{\nu} = \frac{\left(\frac{\pi}{3}+2m\pi\right)\times(3\times10^8)}{2\pi\times(6\times10^{14})}$$

$$= \left(\frac{1+6m}{12}\right)\times10^{-6} = (1+6m)\times8.33\times10^{-8}$$

$$\overset{m=0}{=} 83.3\times10^{-8}(\text{m}) = 83.3(\text{nm})$$

注意：相位差为 60°即 $\frac{\pi}{3}$，则相位可能改变了 $\frac{\pi}{3}+2m\pi$。

【例 3.12】 钠黄光(钠原子的 D 双线)的波长分别为 $\lambda_1 = 589.0$ nm，$\lambda_2 = 589.6$ nm，设 $t=0$ 时刻两列波的波峰在原点 $z=0$ 处重合，求

(1) $t=0$ 时在传播路径上的哪些位置两列波的波峰还能重合？

(2) 经过多长时间，两列波的波峰又可以在原点重合？

分析　此题考察相位分别随空间或者时间的变化，波长 λ 是波的空间周期，频率的倒数 ν^{-1} 是波的时间周期。

解　(1) 按题意，0 时刻原点处波长分别为 $\lambda_1 = 589.0$ nm 和 $\lambda_2 = 589.6$ nm 两列光波的波峰重合，就是这两列光波 0 时刻原点处的相位相等。

同一时刻，光波在空间分布的周期就是其波长，每经过一个波长的距离，相位变化2π，振动重复。即，波长为λ_1的波列，波峰依次出现在$z_{m_1}=m_1\lambda_1$，波长为λ_2的波列，波峰依次出现在$z_{m_2}=m_2\lambda_2$，所以两列波波峰重合的位置应满足以下条件

$$m_1\lambda_1 = m_2\lambda_2$$

正整数m_1，m_2只能取符合$\frac{m_1}{m_2}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$的值。也就是说，每经过上述两波长“最小公倍数”（数论中只有正整数才有最小公倍数，此处借用这一概念）的距离，波峰就会重合一次。针对本题的情况，取10^{-10} m（即埃，表示为Å）为波长的单位，可使得两波长均为正整数，考虑到两波长相差不大，所以两波长的“最小公倍数”就是

$$\Delta z=\frac{\lambda_1\lambda_2}{1}=5\,890\times 5\,896\,(\text{Å})=34\,727\,440\times 10^{-10}(\text{m})$$

$$=3.472\,744\,(\text{mm})$$

需要注意的是，有人认为在两列光波相位差是2π整倍数的位置，波峰就会重合，即

$$\frac{2\pi}{\lambda_1}z_j-\frac{2\pi}{\lambda_2}z_j=2j\pi$$

从而解得$z_j=j\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}$。这是不对的，因为两列波相位相同（或相差$2\pi$整倍数）的地方，并不一定是波峰，例如，波谷与波谷相遇处，相位差也是相差2π整倍数。

（2）光波振动的周期与波长的关系为

$$T=\frac{1}{\nu}=\frac{\lambda}{c}$$

则两列波随时间变化的周期分别为

$$T_1=\frac{\lambda_1}{c}=1.965\times 10^{-15}(\text{s})=1.965\,(\text{fs})$$

$$T_2=\frac{\lambda_2}{c}=1.963\times 10^{-15}(\text{s})=1.963\,(\text{fs})$$

若取10^{-18}s为时间单位，上述两周期成为正整数。

在原点处，从零时刻开始，每经过上述两周期“最小公倍数”的时间，两列波的波峰就会重合。即

$$\Delta T=\frac{T_1T_2}{10^{-18}}=1\,965\times 1\,963\times 10^{-18}=3\,857\,295\times 10^{-18}$$

$$=3.857\times 10^{-12}=3.857\,(\text{ps})$$

时间周期分别为原点处。

有人从

$$(\omega_2 - \omega_1)t_j = 2j\pi$$

解得波峰相遇的时刻为

$$t_j = \frac{j}{c} \cdot \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

这一结果与(1)中的错误相似。

【例 3.13】 波长为 404.7 nm 的蓝光在重火石玻璃中的折射率为 1.682，而波长为 766.5 nm 的红光在重火石玻璃中的折射率为 1.636，分别求出它们在这种玻璃中的波长以及相速度。如果这两种光在玻璃中的某一点相位相同，经过多少距离后，有 π 的相位差？这时哪种光的相位超前？

解　在上述重火石玻璃中，蓝光的波长和相速度分别为

$$\lambda'_B = \frac{\lambda_B}{n_B} = \frac{404.7}{1.682} = 240.6\ (\text{nm})$$

$$v_B = \frac{c}{n_B} = \frac{2.998 \times 10^8}{1.682} = 1.783\,6 \times 10^8\ (\text{m/s})$$

红光的波长和相速度分别为

$$\lambda'_R = \frac{\lambda_R}{n_R} = \frac{766.5}{1.636} = 468.5\ (\text{nm})$$

$$v_R = \frac{c}{n_R} = \frac{2.998 \times 10^8}{1.636} = 1.833\,7 \times 10^8\ (\text{m/s})$$

设经过距离 d，两列光波之间有 π 的相位差，则

$$\varphi_B - \varphi_R = (k_B n_B - k_R n_R)d = \left(\frac{2\pi}{\lambda_B}n_B - \frac{2\pi}{\lambda_R}n_R\right)d$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{\lambda'_B} - \frac{1}{\lambda'_R}\right)d = \pi$$

得到

$$d = \frac{1}{2} \times \frac{\lambda'_R\lambda'_B}{\lambda'_R - \lambda'_B} = 247.3\ \text{nm}$$

此处又涉及相位超前与滞后的问题。参考例 3.1，设两列光波在某一点(设为 S 点)相位相同，所以传过相同的距离后达到另一点(设为 E 点)，则两列波在 E 点的相位都比在 S 点的相位超前。由于波长不同，所以在媒质中的相速度也不相同，本例中，$v_R > v_B$，所以经历的时间 $\Delta t_B > \Delta t_R$，所经历的时间越长，超前就越多，因而总是速度较慢的光波相位超前，或者说，所传过的光程越大的光波，或者相位改变越大的光波，相位越超前，振动越滞后。

本例中，从该点开始 $\varphi_R < \varphi_B$，所以蓝光的相位比红光的相位超前。

相位的“超前”、“滞后”是一个比较容易导致混淆的说法，倒不如直接说“相位较大”、“相位较小”，后一种说法更简单明了。

3.2 接收屏上的波函数

3.2.1 光波场的傍轴条件与远场条件

1. 轴上的傍轴条件与远场条件

如图 3.6 所示，点光源 S 在 z 轴上，到接收屏 xOy 的距离为 z_0，在接收屏上，以原点为中心的圆周上各点到光源的距离相等，因而有相等的相位和振幅。对任意一点 $P(x, y)$，记 $\overline{OP}=\rho$，$\overline{SP}=r$，则有 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$r=\sqrt{z_0^2+\rho^2}$。

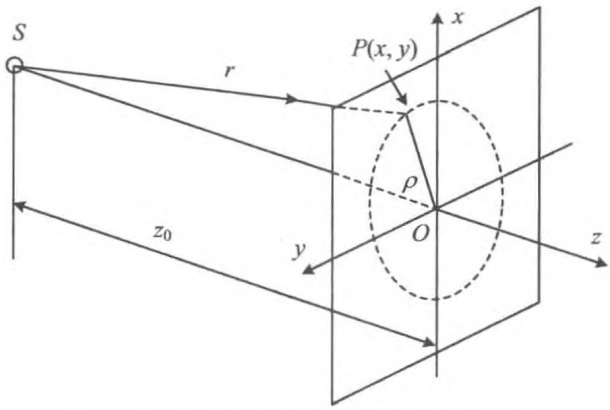


图 3.6 轴上物点的傍轴条件与远场条件

傍轴条件(也称近轴条件)为

$$\rho^2 \ll z_0^2 \tag{3.15}$$

在满足傍轴条件的情形下，轴上物点的球面波在接收屏上 P 点的振幅为

$$A(P) \approx \frac{a_0}{z_0} \tag{3.16}$$

即在平面波前 xOy 上，各点的振幅均相等。

球面波在接收屏 xOy 上的相位为

$$\varphi(P) \approx \frac{2\pi}{\lambda} z_0 + \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\rho^2}{2z_0} \tag{3.17}$$

式(3.16)、式(3.17)的近似称作傍轴近似。

傍轴条件下，轴上物点发出的球面波可以简化为

$$\tilde{U}(x,y,0) = \frac{a_0}{z_0} \exp\left[\mathrm{i}k \left(z_0 + \frac{x^2 + y^2}{2z_0} \right) + \mathrm{i}\varphi_0 \right] \tag{3.18}$$

远场条件为

$$z_0 \gg \frac{\rho^2}{\lambda} \tag{3.19}$$

在满足远场条件的情形下，轴上物点的球面波在接收屏上 P 点的相位为

$$\varphi(P) \approx \frac{2\pi}{\lambda} z_0 \tag{3.20}$$

式(3.20)的近似称作远场近似。

远场条件必然包含傍轴条件。

远场条件下，轴上物点发出的球面波可以进一步简化为

$$\tilde{U}(x,y,0) = \frac{a_0}{z_0} \exp(\mathrm{i}kz_0 + \mathrm{i}\varphi_0) \tag{3.21}$$

满足远场条件时，在接收屏上，球面波可以作为平面波处理。

2. 轴外的傍轴条件和远场条件

设点光源在距接收屏为 z_0 的平面上，该平面称作物平面。物平面上有一点光源，在 $Q(x_0, y_0, z_0)$，场点在平面 xOy 上以 ρ 为半径的圆周上，为 $P(x, y, 0)$，如图 3.7 所示。场点到物点(光源)的间距为

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2}$$

场点与物平面中心的间距为

$$r_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}$$

记光源 Q 到物平面中心 O 的距离为 $\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$，接收屏中心与光源的间距为

$$r'_0 = \sqrt{\rho_0^2 + z_0^2}$$

物点和场点的傍轴条件分别为

$$\rho_0^2 = x_0^2 + y_0^2 \ll z_0^2 \tag{3.22}$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \ll z_0^2 \tag{3.23}$$

相应的傍轴近似分别为

$$r \approx z_0 + \frac{x^2 + y^2}{2z_0} + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_0} - \frac{x_0 x + y_0 y}{z_0} \tag{3.24}$$

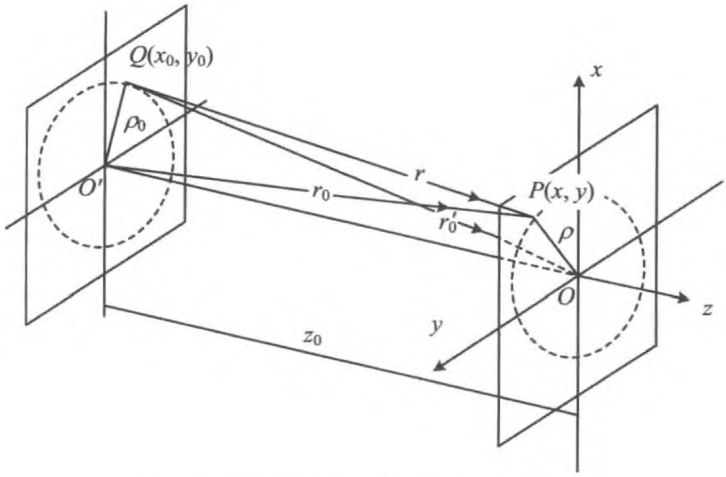


图 3.7 轴外物点的傍轴条件和远场条件

或者

$$r = r_0' + \frac{x^2 + y^2}{2z_0} - \frac{x_0 x + y_0 y}{z_0} \tag{3.25}$$

或者

$$r = r_0 + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_0} - \frac{x_0 x + y_0 y}{z_0} \tag{3.26}$$

接收屏上的复振幅为

$$\widetilde{U}(x, y) = \frac{a_0}{z_0}\exp\left[\mathrm{i}k\left(r_0 + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_0}\right)\right]\exp\left[-\mathrm{i}k\left(\frac{x_0 x + y_0 y}{z_0}\right)\right] \tag{3.27}$$

相对于接收屏，光源的远场条件为

$$z_0 \gg \frac{\rho_0^2}{\lambda} \tag{3.28}$$

相对于光源，场点的远场条件为

$$z_0 \gg \frac{\rho^2}{\lambda} \tag{3.29}$$

在场点满足傍轴条件、光源 Q 满足远场条件的情形下，接收屏上光波的表达式为

$$\widetilde{U}(x, y, 0) \approx \frac{a_0}{z_0}\exp\left[\mathrm{i}kz_0 + \mathrm{i}k\left(\frac{x^2 + y^2}{2z_0}\right)\right] = \frac{a_0}{z_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{x^2+y^2}{2z_0}} \tag{3.30}$$

傍轴条件和远场条件是为了将球面波的波前函数简化，这样得到的波前函数的近似表达式在分析干涉和衍射等问题时经常用到。

3.2.2　典型问题与基本解题方法

光学中的多数问题，是讨论各种形式的光波在平面型接收屏上的振幅与相位。平面光波入射到平面接收屏上，其相位依然是线性函数，而振幅是常量，通常不需要作任何近似。而球面光波在平面波前上的振幅和相位都不是线性函数，所以通常要根据条件采取适当的近似加以处理，最常用的近似就是傍轴近似。

【例 3.14】 如图 3.8 所示，一个顶角 α 很小的三棱镜(即所谓“光楔”)，折射率为 n，波长为 λ 的平面光波从一侧正入射。设入射波在光楔左侧面 Σ_0 处的初相位为 0，求在光楔右侧距离 Σ_0 为 s 处平面 Σ_1 上的波前函数。

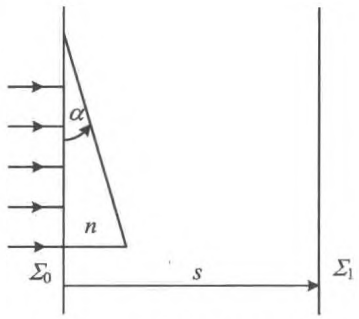


图 3.8　平面光波经过光楔

分析　平面波经平面折射后，依然是平面波，但方向偏转。只要确定了波的方向，就可方便地求出在某一确定位置处的波前函数。

解　首先计算折射后平面波的传播方向。

如图 3.9(a)所示，在光楔的另一侧面，光的入射角为 α，则折射角 i 可依据折射定律得到，满足 $\sin i = n\sin\alpha$。由于 α 很小，所以折射定律可写作 $i = n\alpha$。出射光波相对于入射光波的偏向角为

$$\delta = i - \alpha = n\alpha - \alpha = (n-1)\alpha$$

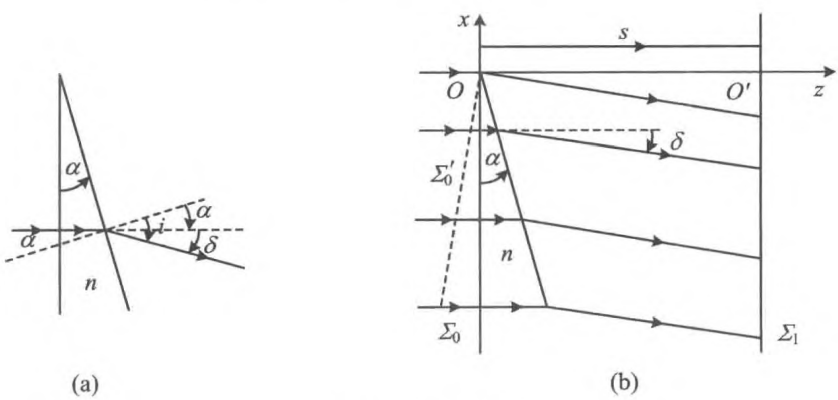


图 3.9　光波的偏折

按图 3.9(b)中所示的方式建立坐标系，以光楔的顶点为原点，折射光波的波矢为

$$\boldsymbol{k} = k(-\sin\delta\boldsymbol{e}_x + \cos\delta\boldsymbol{e}_z) = \frac{2\pi}{\lambda}\left[-\delta\boldsymbol{e}_x + \left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right)\boldsymbol{e}_z\right]$$

对于经过光楔的光波，0 相位的波面为 Σ'_0，即坐标原点处的初相位为 0，则平面 Σ_1 上的波前函数为

$$\varphi = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} = k(-\sin\delta\boldsymbol{e}_x + \cos\delta\boldsymbol{e}_z) \cdot (x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + s\boldsymbol{e}_z)$$

由于 δ 很小，可作近似 $\sin\delta = \delta$，$\cos\delta = 1$，于是

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(-\delta\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_z) \cdot (x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + s\boldsymbol{e}_z)$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda}(-\delta x + s) = \frac{2\pi}{\lambda}[s - (n-1)\alpha x]$$

【例 3.15】 计算表明，当单色点光源 S 距离光楔（顶角为 α、折射率为 n）为 l 时，从另一侧看到光源 S' 位于 S 的正上方 $h = (n-1)\alpha l$ 处，如图 3.10 所示。据此求出在光楔右侧距离 s 处平面 Σ 上的波前函数，设图中 O 点（即接收屏上与像 S' 等高的点）处的相位为 φ_0。

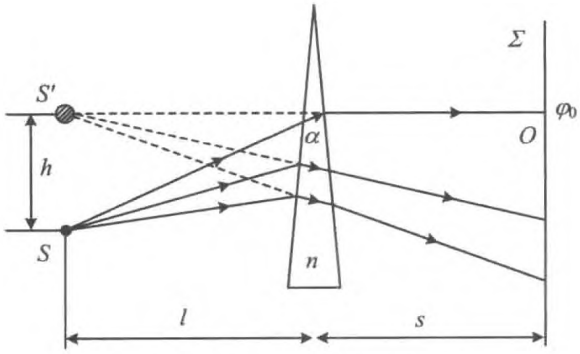


图 3.10 球面光波经过光楔

解 题目要求写出球面波在平面上的波前函数。

点光源 S 经三棱镜在平面 Σ 上的波前函数等价于自由空间中处于点 S' 的点光源发出的球面波自由传播后在平面 Σ 上的波前函数。

以像点 S' 为原点，以向右为 z 轴正方向，向上为 x 轴正方向，建立直角坐标系，则波前函数为

$$\tilde{U}(x, y, z = s + l) = \frac{A_0}{r}e^{i(kr + \varphi'_0)}$$

其中

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (s + l)^2}$$

其中 φ_0' 为像点 S' 的初相位。而 $\varphi_0 = k(l+s) + \varphi_0'$，所以

$$\tilde{U}(x,y,z = s+l) = \frac{A_0}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[kr - k(l+s) + \varphi_0]}$$

特别地，当满足傍轴条件时

$$x^2 + y^2 \ll (l+s)^2$$

$$k\sqrt{x^2+y^2+(s+l)^2} - k(l+s) = k(l+s)\left[\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{(s+l)^2}} - 1\right]$$

$$\approx k\left[\frac{x^2+y^2}{2(s+l)}\right]$$

波前函数为

$$\tilde{U}(x,y,z = s+l) = \left(\frac{A_0}{s+l}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[k\frac{x^2+y^2}{2(s+l)} + \varphi_0\right]}$$

注意，此时由于坐标的选取特殊，表达式中不含三棱镜参数。

【例 3.16】 将一单色点光源置于凸透镜物方（左侧）2 倍焦距处，如图 3.11 所示，计算该点发出的光波经透镜后，在像方（右侧）的汇聚点前、后 1 倍焦距处平面 Σ_1 和 Σ_2 上的波前函数（认为透镜的孔径很小，光波满足傍轴条件，可设汇聚点处的初相位为 φ_0）。

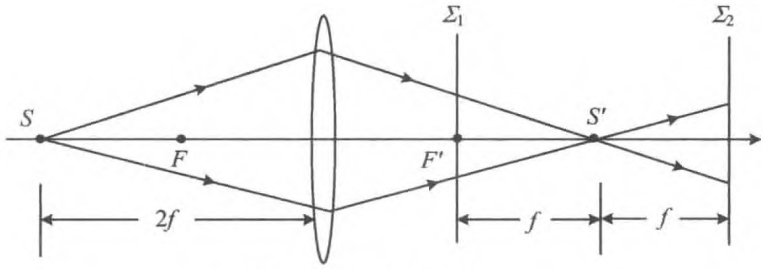


图 3.11　球面光波经过透镜

分析　波前 Σ_1 处的光波，是向 S' 处汇聚的球面波；波前 Σ_2 处的光波，是从 S' 处发散的球面。由于透镜是傍轴光学元件，题中需要作相应的近似。

解　透镜右侧球面光波的中心 S' 点在 $2f$ 处，记光波的波矢为 $\boldsymbol{k}$。

以 S' 为原点，光轴向右为 z 方向建立坐标系，对于波前 Σ_1 上的任一点 (x_1, y_1)，在傍轴条件下，到 S' 点的距离为

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + f^2} = f\sqrt{1 + \frac{x_1^2 + y_1^2}{f^2}}$$

$$= f\left(1 + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2f^2}\right) = f + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2f}$$

于是(x_1, y_1)点的相位为

$$\varphi(x_1, y_1) = -k\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + f^2} + \varphi_0 = -k\left(f + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2f}\right) + \varphi_0$$

对于波前 Σ_2 上的任一点(x_2, y_2)，到 S'点的距离为

$$r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + f^2} = f + \frac{x_2^2 + y_2^2}{2f}$$

(x_2, y_2)点的相位为

$$\varphi(x_2, y_2) = k\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + f^2} + \varphi_0 = k\left(f + \frac{x_2^2 + y_2^2}{2f}\right) + \varphi_0$$

由于只在傍轴区域中，光波在波前 Σ_1 和 Σ_2 上的振幅均为

$$A = \frac{a}{r} = \frac{a}{f}$$

于是 Σ_1 上的波前函数为

$$U(x_1, y_1) = \frac{a}{f}\cos\left[-k\left(f + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2f}\right) + \varphi_0\right]$$

Σ_2 上的波前函数为

$$U(x_2, y_2) = \frac{a}{f}\cos\left[k\left(f + \frac{x_2^2 + y_2^2}{2f}\right) + \varphi_0\right]$$

【例 3.17】 在波前 xOy 平面上，分别出现了以下的波前函数：

(1) $\tilde{U}_1 \propto \exp\left[\mathrm{i}5k\left(\frac{x^2 + y^2}{D}\right)\right]$；

(2) $\tilde{U}_2 \propto \exp\left[\mathrm{i}k\left(\frac{x^2 + y^2}{2D}\right)\right]$；

(3) $\tilde{U}_3 \propto \exp\left[\mathrm{i}4k\left(\frac{x^2 + y^2}{2D}\right)\right] \cdot \exp\left[-\mathrm{i}4k\left(\frac{5x + 8y}{2D}\right)\right]$；

其中，k 为波数，$D>0$。请根据这些波前函数判断波场的类型和特征。

分析 题中相位的分布都是傍轴条件下平面波前上的表达式。可参考相关公式分析波的特征。

解 求解此题需熟悉傍轴条件下轴上物点或轴外物点发出的球面波在波前平面上的表达式。

(1) 对表达式稍作变形，为

$$\tilde{U}_1 \propto \exp\left[\mathrm{i}5k\left(\frac{x^2 + y^2}{D}\right)\right] = \exp\left[\mathrm{i}k\left(\frac{x^2 + y^2}{\frac{2D}{10}}\right)\right]$$

这是近轴条件下，轴上物点发出的球面波在波前平面上的函数。

近轴条件下，轴上物点发出的球面波复振幅的标准表达式为

$$\tilde{U}(x,y,z') = \frac{a_0}{z_0}\exp\left[\mathrm{i}k\left(z_0 + \frac{x^2+y^2}{2z_0}\right) + \mathrm{i}\varphi_0\right]$$

其中，z_0 是光源到波前 xOy 的距离。于是可知这是从与波前平面 xOy 相距 $z' = D/10$ 处的轴上物点发出的球面波。

(2) 同理 $\tilde{U}_2 \propto \exp\left[\mathrm{i}k\left(\frac{x^2+y^2}{2D}\right)\right]$ 对应的是近轴条件下，与波前平面 xOy 相距 $z' = D$ 处的轴上物点发出的球面波。

(3) 表达式

$$\tilde{U}_3 \propto \exp\left[\mathrm{i}4k\left(\frac{x^2+y^2}{2D}\right)\right] \cdot \exp\left[-\mathrm{i}4k\left(\frac{5x+8y}{2D}\right)\right]$$

$$= \exp\left[\mathrm{i}k\left(\frac{x^2+y^2}{\frac{2D}{4}}\right)\right] \cdot \exp\left[-\mathrm{i}k\left(\frac{\frac{5}{2}x+4y}{\frac{D}{4}}\right)\right]$$

这是场点和物点都满足近轴条件时，轴外物点发出的球面波在平面波前上的表达式。

场点和物点都满足近轴条件时，轴外物点 (x_0, y_0, z_0) 发出的球面波在 xy 平面上复振幅的表达式为

$$\tilde{U}(x,y,z') = \frac{a_0}{z_0}\exp(\mathrm{i}\varphi_0)\exp\left[\mathrm{i}k\left(z_0 + \frac{x^2+y^2}{2z_0}\right)\right] \cdot \exp\left[-\mathrm{i}k\left(\frac{x_0x + y_0y}{2z_0}\right)\right]$$

于是可知，点光源 (x_0, y_0, z_0) 的位置为 $(5/2, 4, D/4)$。

【例 3.18】 (1) 太阳距地球 1.8×10^8 km，从太阳上正对地球的一点发出的球面光波到达地球，对于其中波长 550 nm 的可见光，估算在地面上多大的范围内，满足傍轴条件；在多大的范围内，可以将日光作为平面波处理。

(2) 月亮距地球 3.8×10^5 km，来自月亮上正对地球的一点的球面波到达地球，对于其中波长 550 nm 的可见光，估算在地面上多大的范围内，满足傍轴条件；在多大的范围内，可以将月光作为平面波处理。

分析　傍轴条件和远场条件是针对点光源到平面波前上不同位置的距离改变所引起的光波振幅和相位的改变而设定的，应该从此入手进行讨论和判断。

解　(1) 如图 3.12 所示，平面波前 xy 到点光源 S 的距离为 z_0，对于 xy 上以 O 为中心、ρ 为半径的圆周，其上任意一点 P 到 S 的距离为

$$r = \sqrt{z_0^2 + \rho^2} = z_0\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{z_0^2}} \tag{1}$$

来自 S 的球面光波在上述圆周上的振幅和相位分别为

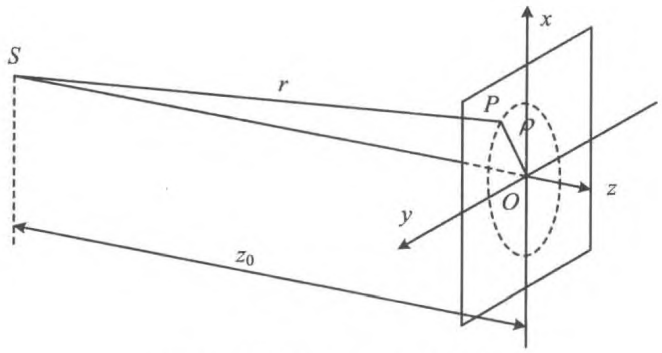


图 3.12 傍轴条件与远场条件

$$A(\rho) = \frac{a}{r} = \frac{a}{z_0\sqrt{1+\frac{\rho^2}{z_0^2}}} \tag{2}$$

$$\varphi(\rho) = \varphi_0 + kr = \varphi_0 + \frac{2\pi z_0}{\lambda}\sqrt{1+\frac{\rho^2}{z_0^2}} \tag{3}$$

若 ρ 比 z_0 小得多，可将式(1)泰勒展开表示为

$$r = z_0\left[1+\frac{\rho^2}{2z_0^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\rho^2}{z_0^2}\right)^2 + \cdots\right]$$

则

$$A(\rho) = \frac{a}{z_0}\cdot\frac{1}{1+\frac{\rho^2}{2z_0^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\rho^2}{z_0^2}\right)^2 + \cdots} \tag{4}$$

$$\varphi(\rho) = \varphi_0 + \frac{2\pi z_0}{\lambda}\left[1+\frac{\rho^2}{2z_0^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\rho^2}{z_0^2}\right)^2 + \cdots\right] \tag{5}$$

傍轴条件为 $\rho^2 \ll z_0^2$，即 $\frac{\rho^2}{z_0^2} \ll 1$，式(5)为

$$\varphi(\rho) \approx \varphi_0 + \frac{2\pi z_0}{\lambda} + \frac{\pi z_0}{\lambda}\cdot\frac{\rho^2}{z_0^2} - \frac{\pi z_0}{2\lambda}\cdot\frac{\rho^4}{z_0^4}$$

通常在实验室中，z_0 的数量级为 m，而可见光的波长 λ 的数量级为 10^{-6} m，所以相位表达式中 $\frac{2\pi z_0}{\lambda}$ 是一个很大的常数。为了使 $\frac{\pi z_0}{\lambda}\cdot\frac{\rho^2}{z_0^2}$ 的值在 $0\sim10^2\pi$ 之间变化显著而 $\frac{\pi z_0}{2\lambda}\cdot\frac{\rho^4}{z_0^4}$ 的值小于 $10^{-1}\pi$，ρ 应当取在 $\frac{z_0}{100}\sim\frac{z_0}{50}$ 之间，这种情形下 $\frac{\pi z_0}{\lambda}\cdot\frac{\rho^2}{z_0^2}$ 的值约为 $10^2\pi$，显然这一项不能忽略；而 $\frac{\pi z_0}{2\lambda}\cdot\frac{\rho^4}{z_0^4}$ 的值约为 $10^{-2}\pi$，是可以忽略的。所以傍轴条件通常取 ρ

在$\frac{z_0}{100}\sim\frac{z_0}{50}$之间，式(5)为

$$\varphi(\rho)\approx\varphi_0+\frac{2\pi z_0}{\lambda}+\frac{\pi z_0}{\lambda}\cdot\frac{\rho^2}{z_0^2} \tag{6}$$

而式(4)为

$$A(\rho)\approx\frac{a}{z_0}\left(1-\frac{\rho^2}{2z_0^2}\right)$$

若 ρ 取在$\frac{z_0}{100}\sim\frac{z_0}{50}$之间，式(4)为

$$A(\rho)\approx\frac{a}{z_0} \tag{7}$$

式(6)的偏差小于 10^{-4}。

对于本题

$$\rho(\text{傍轴})\approx\frac{z_0}{100}=\frac{1.8\times10^8}{100}\approx10^6(\text{km})$$

显然，这个范围远远超出了地球的尺度。

远场条件为 $z_0\gg\frac{\rho^2}{\lambda}$，目的使$\frac{\pi z_0}{\lambda}\cdot\frac{\rho^2}{z_0^2}$项可忽略。若取

$$z_0\approx\frac{100\rho^2}{\lambda}$$

则式(6)中，$\frac{\pi z_0}{\lambda}\cdot\frac{\rho^2}{z_0^2}$的值约为$10^{-2}\pi$，可忽略，相位为

$$\varphi(\rho)\approx\varphi_0+\frac{2\pi z_0}{\lambda} \tag{8}$$

而满足远场条件的情形下，$\rho^2\ll z_0\lambda\ll z_0^2$ 一定满足傍轴条件。则在半径为 ρ 的区域中，光波的振幅和相位都是常量，相当于平面波。

对于本题

$$\rho(\text{远场})\approx\sqrt{\frac{\lambda z_0}{100}}=\frac{\sqrt{550\times10^{-9}\times1.8\times10^{11}}}{10}=31\,(\text{m})$$

(2) 参考(1)中的分析，可得

满足傍轴条件的区域

$$\rho(\text{傍轴})\approx\frac{z_0}{100}=\frac{3.8\times10^5}{100}\approx10^3(\text{km})$$

这是一个足够大的区域。

满足远场条件的区域

$$\rho(\text{远场}) \approx \sqrt{\frac{\lambda z_0}{100}} = \frac{\sqrt{550\times10^{-9}\times3.8\times10^{8}}}{10} = 1.4\ (\text{m})$$

【例 3.19】 一射电源距地面高度约 300 km，向地面发射波长 20 cm 的微波，接收器的孔径为 2 m，问这种情况下，是否满足远场条件？

解 参考例 3.18，此处，由于

$$\frac{\rho^2}{\lambda} = \frac{\left(\frac{2\text{m}}{2}\right)^2}{20\text{ cm}} = 5\text{ m} \ll 300\text{ km}$$

所以满足远场条件。

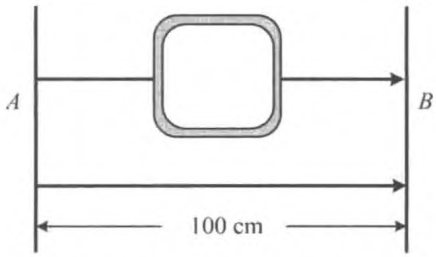


图 3.13 两列波的相位差

【例 3.20】 如图 3.13 所示，两列波长 500 nm 的单色波传过 100 cm 的距离，由 A 到达 B 处，其中一列波穿过盛水的玻璃杯，玻璃杯壁厚 0.5 cm，内壁间距 10 cm，设两列波在 A 同相位，求在 B 处的相位差。已知玻璃和水的折射率分别为 1.52 和 1.33。

分析 两列光波虽然传过了相同的距离，但由于路径上的媒质不同，所以光程不同，致使两列波之间产生了相位差。相位差可根据光程差算得。

解 记杯壁厚为 d，内壁间距为 D，玻璃和水的折射率分别为 n_1 和 n_2，则题中两列光波传播路径的光程差为

$$\Delta L = 2n_1 d - 2d + n_2 D - D = 2(n_1 - 1)d + (n_2 - 1)D$$

相位差为

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= k\Delta L = \frac{2\pi}{\lambda}[2(n_1-1)d + (n_2-1)D] \\ &= \frac{2\pi}{500\times10^{-9}}[2(1.52-1)\times0.5\times10^{-2} + (1.33-1)\times10\times10^{-2}] \\ &= 1.528\times10^{5}\pi \\ &= 4.8\times10^{5}\ (\text{rad})\end{aligned}$$

3.3　光波的叠加

3.3.1　光波的叠加原理

1. 光波的独立传播定律

从不同光源发出的光波在空间相遇时，如果振动不十分强烈，各列波将保持各自的特性不变，继续传播，相互之间没有影响。

2. 光波的叠加原理

几列波在相遇点所引起的合振动，即总的光矢量，是各列光波独自在该点所引起的振动的矢量和，是在该点各个光矢量的矢量和。

3.3.2　同频率简谐光波的叠加

1. 代数法

设两列波在相遇点的波函数分别为

$$\psi_1 = A_1\cos(\varphi_1 - \omega t)$$

和

$$\psi_2 = A_2\cos(\varphi_2 - \omega t)$$

按照叠加原理，相遇点的合振动为

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = A_1\cos(\varphi_1 - \omega t) + A_2\cos(\varphi_2 - \omega t)$$

叠加的结果为

$$\psi = A\cos(\varphi - \omega t) \tag{3.31}$$

叠加之后的振幅和空间相位分别是

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{3.32}$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \tag{3.33}$$

2. 复数法

如果将上述两列光波的振动用复指数表示，则为

$$\tilde{\psi}_1 = A_1 e^{i(\varphi_1 - \omega t)} = A_1 e^{i\varphi_1} e^{-i\omega t} = \tilde{U}_1 e^{-i\omega t}$$

$$\tilde{\psi}_2 = A_2 e^{i(\varphi_2 - \omega t)} = A_2 e^{i\varphi_2} e^{-i\omega t} = \tilde{U}_2 e^{-i\omega t}$$

其中，$\tilde{U}_1 = A_1 e^{i\varphi_1}$，$\tilde{U}_2 = A_2 e^{i\varphi_2}$，是两列波在相遇点的复振幅。

按叠加原理，其合振动的复数值为

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2 = (\tilde{U}_1 + \tilde{U}_2) e^{-i\omega t} = \tilde{U} e^{-i\omega t}$$

即合振动的复振幅为

$$\tilde{U} = \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2 = A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2} = A e^{i\varphi}$$

3. 振幅矢量法

复振幅 $\tilde{U}_1 = A_1 e^{i\varphi_1}$，$\tilde{U}_2 = A_2 e^{i\varphi_2}$ 都是复数，可以用复平面上的矢量表示，如图 3.14 所示。求 $\tilde{U} = \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2$，就是求复数 $\tilde{U}_1$，$\tilde{U}_2$ 在复平面上所对应的两个矢量的和，即 $\tilde{U}$ 可以按照矢量求和的方法得到。

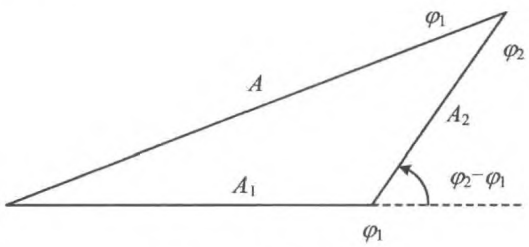


图 3.14 振幅矢量法

振幅矢量法简单直观，不需要计算就能形象地表示合振动振幅的大小。更值得一提的是，对于多列光波叠加情形，若用解析式表示叠加结果，则计算和表达非常繁琐，但是采用与复数求和对应的矢量法处理，则十分简单。

多列波叠加的复振幅可写为

$$\tilde{U} = \sum_{m=1}^{n} \tilde{U}_m$$

其中，$\tilde{U}_m = A_m e^{i\varphi_m}$，是其中一列光波的复振幅。按照复数的求和规则，将每个复振幅用矢量表示，让各个矢量依次首尾相接，相邻两矢量 $\tilde{U}_m$，$\tilde{U}_{m+1}$ 之间的夹角就是它们的辐角之差，也就是两列光波的相位差

$$\Delta\varphi_{m+1,m} = \varphi_{m+1} - \varphi_m$$

最后，合矢量 $\tilde{U}$ 的模就对应合振动的振幅。

3.3.3　非单色光波的叠加

1. 有限数量的非单色波列的叠加

叠加的结果，形成如图 3.15 所示的光学包，不再是简谐光波。

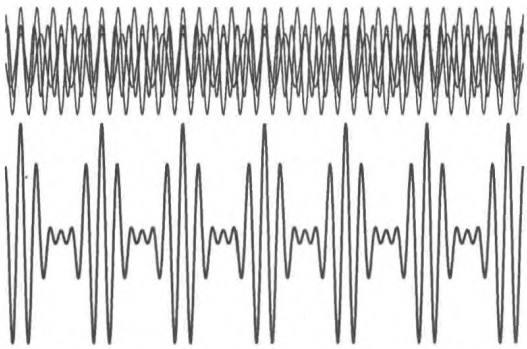


图 3.15　三列频率、振幅均不等的光波的叠加

2. 波长范围在 $\lambda-\frac{\Delta\lambda}{2}\sim\lambda+\frac{\Delta\lambda}{2}$ 或相应的波矢范围在 $k_0\pm\frac{\Delta k}{2}$ 的波列的叠加

叠加的结果，形成如图 3.16 所示的波包，不再是简谐光波。

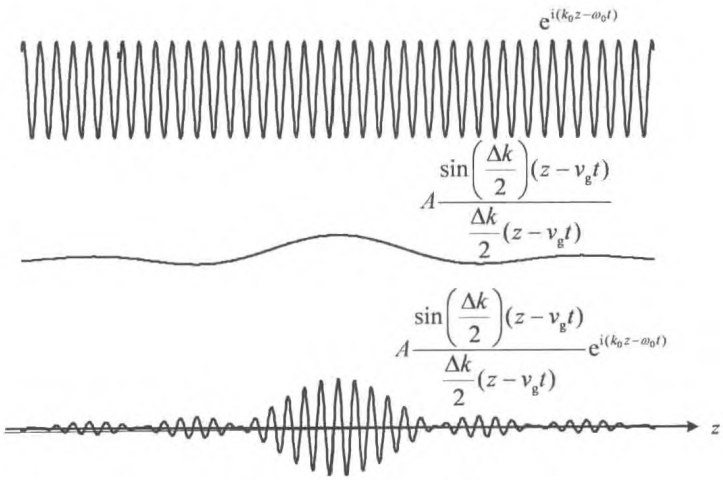


图 3.16　准单色波的叠加

叠加之后波场的表达式为

$$\widetilde{U}(z,t) = \left[A \frac{\sin\left(\frac{\Delta k}{2}\right)(z - v_g t)}{\frac{\Delta k}{2}(z - v_g t)} \right] e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \tag{3.34}$$

波包传播的速度称为群速度，为

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \tag{3.35}$$

波包的空间尺度，即波包的大小为

$$L_0 = \frac{2\pi}{\Delta k} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = \frac{c}{\Delta\nu} \tag{3.36}$$

在色散媒质中群速度与相速度的关系为

$$v_g = v_p - \lambda \frac{dv_p}{d\lambda} \tag{3.37}$$

3.3.4 典型问题与基本解题方法

【例 3.21】 设两列单色光波在空间某一点的振动分别为

$$E_1 = 4\cos(2\pi \times 10^{15} t)$$

和

$$E_2 = 6\cos\left(2\pi \times 10^{15} t + \frac{\pi}{6}\right)$$

求该点的合振动。

解 光学中通常采用的表达式为

$$E = A\cos(\omega t - \varphi)$$

两列光波

$$E_1 = A_1\cos(\varphi_1 - \omega t)$$

$$E_2 = A_2\cos(\varphi_2 - \omega t)$$

叠加所引起的合振动的振幅 A 与相位 φ 可按下式得到

$$\begin{cases} A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \tan\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \end{cases} \tag{1}$$

若将光波场中某点振动的表达式写作

$$E = A\cos(\omega t + \varphi)$$

结果与式(1)相同。

按波的叠加原理，两光波列波在该点的合振动为

$$\begin{aligned}E &= E_1 + E_2 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2)\\ &= A_1(\cos\varphi_1\cos\omega t - \sin\varphi_1\sin\omega t) + A_2(\cos\varphi_2\cos\omega t - \sin\varphi_2\sin\omega t)\\ &= (A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)\cos\omega t - (A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)\sin\omega t\end{aligned}$$

若令

$$A^2 = (A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)^2 + (A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)^2$$

则上式为

$$E = A\left(\frac{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}{A}\cos\omega t - \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A}\sin\omega t\right)$$

显然，若记

$$\cos\varphi = \frac{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}{A}$$

则有

$$\sin\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A}$$

于是

$$E = A(\cos\varphi\cos\omega t - \sin\varphi\sin\omega t) = A\cos(\omega t - \varphi)$$

而其中

$$\begin{aligned}A^2 &= A_1^2\cos^2\varphi_1 + 2A_1A_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + A_1^2\cos^2\varphi_2\\ &\quad + A_1^2\sin^2\varphi_1 + 2A_1A_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + A_1^2\sin^2\varphi_2\\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)\\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\end{aligned}$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

根据以上结果，代入本题中的数据，有

$$A^2 = 4^2 + 6^2 + 2\times 4\times 6\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 52 + 24\sqrt{3} = 93.57$$

$$\tan\varphi = \frac{4\sin 0 + 6\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{4\cos 0 + 6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{3\times\frac{1}{2}}{2 + 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{9\sqrt{3} - 12}{11} = 0.326$$

即 $A = 9.67$，$\varphi = 18.067^\circ = 0.1\pi$。则该点的合振动为

$$E = 9.67\cos(2\pi\times 10^{15}t + 0.1\pi)$$

【例 3.22】 4列同方向振动的单色波在 P 点的振动分别为

$$E_1 = 5\cos(2\pi\times 10^{14}t)$$

$$E_2 = 5\cos\left(2\pi \times 10^{14} t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$E_3 = 5\cos\left(2\pi \times 10^{14} t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$E_4 = 5\cos\left(2\pi \times 10^{14} t + \frac{\pi}{2}\right)$$

计算该点的合振动振幅及初相位。

解 按光波的叠加原理，上述 4 列光波在 P 点的合振动为

$$E = \sum_{i=1}^{4} E_i$$

为了便于计算，可分别逐次求和

$$E_{12} = E_1 + E_2 = A_{12}\cos(2\pi \times 10^{14} t + \varphi_{12})$$

其中

$$A_{12}^2 = A_1^2 + A_1^2 + 2A_1 A_2 \cos\Delta\varphi_{12} = 2 \times 5^2\left(1 + \cos\frac{\pi}{6}\right) = 50\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\tan\varphi_{12} = \frac{5\sin 0 + 5\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{5\cos 0 + 5\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = 2 + \sqrt{3}$$

即

$$\varphi_{12} = \frac{\pi}{12}$$

$$E_{34} = E_3 + E_4 = A_{34}\cos(2\pi \times 10^{14} t + \varphi_{34})$$

其中

$$A_{34}^2 = 5^2 + 5^2 + 2 \times 5 \times 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 50\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\tan\varphi_{34} = \frac{5\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 5\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{5\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 5\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{\frac{1}{2} + 0} = \sqrt{3} + 2$$

即

$$\varphi_{34} = \frac{5\pi}{12}$$

最后

$$E = E_{12} + E_{34} = A\cos(2\pi \times 10^{14} t + \varphi)$$

$$A^2 = A_{12}^2 + A_{34}^2 + 2A_{12} A_{34} \cos\Delta\varphi_{12,34}$$

$$= 2 \times 50\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left[1 + \cos\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$= 150\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\tan\varphi = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)} = 1$$

则得到

$$E = 16.73\cos\left(2\pi \times 10^{14} t + \frac{\pi}{4}\right)$$

【例 3.23】 如图 3.17 所示，从 S_1 和 S_2 各发出波长为 10 m 的电磁波，在彼此靠近的两个点 P_1 和 P_2 测得电磁波的强度分别为 16 W/m² 和 9 W/m²。若 $\overline{S_1P_1} = 2\ 560$ m，$\overline{S_1P_2} = 2\ 550$ m，$\overline{S_2P_1} = 2\ 570$ m，$\overline{S_2P_2} = 2\ 555$ m，问点源 S_1 和 S_2 的辐射功率各为多少（设两列波从 S_1 和 S_2 发出时同相位，可以不考虑这些波的电矢量间的夹角）？

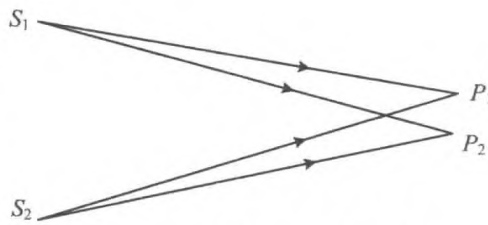


图 3.17　两个波源发出的电磁波

解　点源 S_1 发出的波，在 P_2 点和 P_1 点的相位分别为

$$\varphi_1(P_2) = \varphi_0 + \frac{2\pi}{\lambda}\overline{S_1P_2} = \varphi_0 + 2\pi \times \frac{2\ 550\ \text{m}}{10\ \text{m}} = \varphi_0 + 255 \times 2\pi$$

$$\varphi_1(P_1) = \varphi_0 + \frac{2\pi}{\lambda}\overline{S_1P_1} = \varphi_0 + 2\pi \times \frac{2\ 560\ \text{m}}{10\ \text{m}} = \varphi_0 + 256 \times 2\pi$$

点源 S_2 发出的波在 P_2 点和 P_1 点的相位分别为

$$\varphi_2(P_2) = \varphi_0 + \frac{2\pi}{\lambda}\overline{S_2P_2} = \varphi_0 + 2\pi \times \frac{2\ 555\ \text{m}}{10\ \text{m}} = \varphi_0 + 255.5 \times 2\pi$$

$$\varphi_2(P_1) = \varphi_0 + \frac{2\pi}{\lambda}\overline{S_1P_2} = \varphi_0 + 2\pi \times \frac{2\ 570\ \text{m}}{10\ \text{m}} = \varphi_0 + 257 \times 2\pi$$

于是，两列波在 P_2 点和 P_1 点的相位差分别为

$$\Delta\varphi(P_2) = \varphi_2(P_2) - \varphi_1(P_2) = 0.5 \times 2\pi = \pi$$

$$\Delta\varphi(P_1) = \varphi_2(P_1) - \varphi_1(P_1) = 2\pi$$

则合振动振幅满足

$$A^2(P_2) = A_1^2(P_2) + A_2^2(P_2) + 2A_1(P_2)A_2(P_2)\cos\Delta\varphi(P_2)$$

$$= [A_1(P_1) - A_2(P_1)]^2$$

$$A^2(P_1) = A_1^2(P_1) + A_2^2(P_1) + 2A_1(P_1)A_2(P_1)\cos\Delta\varphi(P_1)$$
$$= [A_1(P_1) + A_2(P_1)]^2$$

辐射功率就是辐射的能流，即辐射通量；而强度是辐射的能流密度，即功率密度。所以点源的辐射功率与 r 处强度的关系为 $W = 4\pi r^2 I$，而 $I \propto A^2$。

所以本题中，设两点源的辐射功率分别为 W_1 和 W_2，则

$$A_1^2(P_1) = \frac{W_1}{4\pi \overline{S_1P_1}^2}$$

$$A_1^2(P_2) = \frac{W_1}{4\pi \overline{S_1P_2}^2}$$

$$A_2^2(P_1) = \frac{W_2}{4\pi \overline{S_2P_1}^2}$$

$$A_2^2(P_2) = \frac{W_2}{4\pi \overline{S_2P_2}^2}$$

$$\begin{cases} I(P_2) = \dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{\sqrt{W_1}}{S_1P_1} - \dfrac{\sqrt{W_2}}{S_2P_2}\right)^2 \\ I(P_1) = \dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{\sqrt{W_1}}{S_1P_1} + \dfrac{\sqrt{W_2}}{S_2P_2}\right)^2 \end{cases}$$

代入数据，为

$$\begin{cases} 9 = \dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{\sqrt{W_1}}{2\,550} - \dfrac{\sqrt{W_2}}{2\,555}\right)^2 \\ 16 = \dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{\sqrt{W_1}}{2\,560} + \dfrac{\sqrt{W_2}}{2\,570}\right)^2 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 6\sqrt{\pi} = \pm\left(\dfrac{\sqrt{W_1}}{2\,550} - \dfrac{\sqrt{W_2}}{2\,555}\right) \\ 8\sqrt{\pi} = \dfrac{\sqrt{W_1}}{2\,560} + \dfrac{\sqrt{W_2}}{2\,570} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} W_1 = 1.012 \times 10^9\ \text{W} \\ W_2 = 2.12 \times 10^7\ \text{W} \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} W_1 = 2.044 \times 10^7\ \text{W} \\ W_2 = 1.011 \times 10^9\ \text{W} \end{cases}$$

【例 3.24】 用振幅矢量法证明

$$3\cos(kz-\omega t)+4\sin(kz-\omega t)=5\cos(kz-\omega t+\varphi)$$

并确定 φ 的值。

证明　将上式左端两项均化作余弦函数的形式，有

$$3\cos(kz-\omega t)+4\sin(kz-\omega t)=3\cos(kz-\omega t)+4\cos\left[(kz-\omega t)-\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=5\cos(kz-\omega t+\Delta\varphi)$$

振幅矢量法如图 3.18 所示。显然，合振动的振幅为 $\sqrt{3^2+4^2}=5$，而相位为

$$\varphi=-\arctan\left(\frac{3}{4}\right)=-53^\circ$$

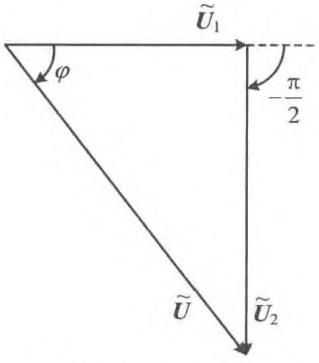


图 3.18　振幅矢量法

【例 3.25】 求两列波

$$E_1=A\cos(kz-\omega t)$$

$$E_2=-A\cos(kz+\omega t)$$

叠加后的波动。

解　这是两列传播反向相反的波，题目考查传播方向相反的两列波的合成。

根据三角函数和差化积公式，合振动

$$E=E_1+E_2=A\cos(kz-\omega t)-A\cos(kz+\omega t)$$

$$=-2A\sin\left[\frac{(kz-\omega t)+(kz+\omega t)}{2}\right]\sin\left[\frac{(kz-\omega t)-(kz+\omega t)}{2}\right]$$

$$=2A\sin(kz)\sin(\omega t)$$

叠加之后的表达式中，因子 $\sin(\omega t)$ 表示各点随时间的振动，而因子 $2A\sin(kz)$ 表示空间各点物理量的最大值，相当于振幅。$E(z,t)=2A\sin(kz)\sin(\omega t)$ 形式的波动，振幅最大的位置依次为

$$z_n=(2n+1)\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{k}=(2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

这些点称作波腹；振幅为 0 的位置依次为

$$z'_n=\frac{n\pi}{k}=\frac{n\lambda}{2}$$

这些点称作波节。由于波场中各点的振幅是固定的，所以这样的波似乎不能传播，被称作驻波。

传播方向相反、频率相同、相位相同或相反的两列波叠加后形成驻波。

若 $E_2=A\cos(kz+\omega t)$，则同样有

$$E = E_1 + E_2 = A\cos(kz - \omega t) + A\cos(kz + \omega t)$$
$$= 2A\cos\left[\frac{(kz - \omega t) + (kz + \omega t)}{2}\right]\cos\left[\frac{(kz - \omega t) - (kz + \omega t)}{2}\right]$$
$$= 2A\cos(kz)\cos(\omega t)$$

叠加后也形成驻波。

【例 3.26】 一列驻波的表达式为

$$E = 100\sin\left(\frac{2}{3z}\right)\cos(5\pi t)$$

找出可以合成这种驻波的两列单色波。

解 两列同频率、等振幅，反向传播的波叠加后可形成的驻波。参考例 3.25，有

$$E = 100\sin\left(\frac{2}{3}z\right)\cos(5\pi t) = 100\cos\left(\frac{2}{3}z - \frac{\pi}{2}\right)\cos(5\pi t)$$

可知驻波可由以下两列波叠加形成

$$E_1 = 50\cos\left(\frac{2}{3}z - 5\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = 50\sin\left(\frac{2}{3}z - 5\pi t\right)$$

$$E_2 = 50\cos\left(\frac{2}{3}z + 5\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = 50\sin\left(\frac{2}{3}z + 5\pi t\right)$$

【例 3.27】 载有信号的波列 $E = A(1 + a\cos\omega_m t)\cos\omega_c t$ 是频率为 ω_c 的单色波的振幅被频率为 ω_m 的单色波调制。证明这列载波是频率为 ω_c，$\omega_c + \omega_m$ 和 $\omega_c - \omega_m$ 的三列单色波叠加的结果。

证明 利用三角函数的积化和差公式，有

$$E = A(1 + a\cos\omega_m t)\cos\omega_c t = A\cos\omega_c t + aA\cos\omega_m t\cos\omega_c t$$
$$= A\cos\omega_c t + aA \times \frac{1}{2}[\cos(\omega_m t + \omega_c t) + \cos(\omega_m t - \omega_c t)]$$
$$= A\cos\omega_c t + \frac{1}{2}aA\cos[(\omega_c + \omega_m)t] + \frac{1}{2}aA\cos[(\omega_c - \omega_m)t]$$

可以看出，这列载波正是频率为 ω_c，$\omega_c + \omega_m$ 和 $\omega_c - \omega_m$ 的三列单色波，其中后两列波的振幅相同。

【例 3.28】 真空中沿 z 方向传播的两列单色波

$$E_1 = A\cos 2\pi\left(\nu t - \frac{z}{\lambda}\right)$$

$$E_2 = A\cos 2\pi\left[(\nu + \Delta\nu)t - \frac{z}{\lambda - \Delta\lambda}\right]$$

其中，$\Delta\nu = 3 \times 10^8$ Hz。试求这两列波叠加所形成的波的振幅、强度变化的空间周期。

解 两列振幅相等的单色波标准形式为

$$E_1 = A\cos(k_1 z - \omega_1 t)$$
$$E_2 = A\cos(k_2 z - \omega_2 t)$$

叠加后的合成波为

$$E = E_1 + E_2 = A\cos(k_1 z - \omega_1 t) + A\cos(k_2 z - \omega_2 t)$$
$$= 2A\cos\left[\frac{(k_1 + k_2)z - (\omega_1 + \omega_2)t}{2}\right]\cos\left[\frac{(k_1 - k_2)z - (\omega_1 - \omega_2)t}{2}\right]$$
$$= 2A\cos(\bar{k}z - \bar{\omega}t)\cos(k_m z - \omega_m t)$$

其中，$\bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2}$，$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$，$k_m = \frac{k_1 - k_2}{2}$，$\omega_m = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$。

此例中 $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda} < k_2 = \frac{2\pi}{\lambda - \Delta\lambda}$，$\omega_1 = 2\pi\nu < \omega_2 = 2\pi(\nu + \Delta\nu)$。

对于可见光，取 $\lambda = 500$ nm，则

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{500 \text{ nm}} = 6 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

所以有 $\Delta\nu = 3 \times 10^8$ Hz $\ll \nu$，也就是 $\Delta\lambda \ll \lambda$，此时，$\bar{k} \gg k_m$，$\bar{\omega} \gg \omega_m$，则合成后的波

$$E = 2A\cos(\bar{k}z - \bar{\omega}t)\cos(k_m z - \omega_m t)$$

表示的是一个振幅为 $2A\cos(k_m z - \omega_m t)$，随时间和空间变化的波，这就是一个光学。振幅 $2A\cos(k_m z - \omega_m t)$ 变化的空间周期为

$$\frac{2\pi}{k_m} = \frac{2\pi \times 2}{k_2 - k_1} = \frac{2\pi \times 2}{\frac{2\pi}{\lambda - \Delta\lambda} - \frac{2\pi}{\lambda}} = 2\frac{\lambda(\lambda - \Delta\lambda)}{\lambda - (\lambda - \Delta\lambda)} = 2\left(\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} - \lambda\right) \approx 2\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

由 $\nu = \frac{c}{\lambda}$ 得知 $\Delta\nu = \frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda$（注：对 $\nu = \frac{c}{\lambda}$ 直接微分得 $\Delta\nu = -\frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda$，表示频率大的光波其波长小，题目中已考虑此事实，给出的 $\Delta\lambda$ 和 $\Delta\nu$ 均大于 0，所以有 $\Delta\nu = \frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda$），解出 $\Delta\lambda$ 并代入上式，得振幅变化的空间周期为

$$\frac{2\pi}{k_m} \approx 2\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = \frac{2c}{\Delta\nu} = \frac{2 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s}}{3 \times 10^8 \text{ Hz}} = 2 \text{ m}$$

强度变化的空间周期为振幅变化周期的 1/2，为 1 m。

【例 3.29】 对于光波，证明

$$\frac{1}{v_g} = \frac{n}{c} + \frac{\omega}{c} \cdot \frac{dn}{d\omega}$$

其中，n 为媒质的折射率，v_g 为群速度。

证明　群速度的表达式 $v_g = \frac{d\omega}{dk}$，则 $\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega}$；而

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{\frac{\lambda_0}{n}}=\frac{2\pi}{\frac{\left(\frac{c}{\nu}\right)}{n}}=\frac{\omega}{\frac{c}{n}}=\frac{n\omega}{c}$$

代入$\frac{1}{v_g}=\frac{dk}{d\omega}$，得

$$\frac{1}{v_g}=\frac{dk}{d\omega}=\frac{d\left(\frac{n\omega}{c}\right)}{d\omega}=\frac{n}{c}+\frac{\omega}{c}\cdot\frac{dn}{d\omega}$$

【例 3.30】 在液体表面下比波长大许多的深度中传播的表面波的相速度为

$$v_p=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}}$$

其中，γ 为液体的表面张力，ρ 为液体的密度。计算在长波极限下，一个脉冲（准单色波）的群速度。

解 角频率与相速度的关系为

$$\omega=2\pi\nu=2\pi\frac{v_p}{\lambda}=kv_p$$

群速度和相速度的关系为

$$v_g=\frac{d\omega}{dk}=\frac{d(kv_p)}{dk}=v_p+k\frac{dv_p}{dk}=v_p-\lambda\frac{dv_p}{d\lambda}$$

而

$$\frac{dv_p}{d\lambda}=\frac{d\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}}}{d\lambda}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}}}\left(\frac{g}{2\pi}-\frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda^2}\right)$$

所以有

$$v_g=\frac{d\omega}{dk}=\frac{d(kv_p)}{dk}$$

$$=v_p+k\frac{dv_p}{dk}=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}}}\left(\frac{g\lambda}{2\pi}-\frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}\right)$$

为化简其形式，将其中的有关表达式用 v_p 代替，则

$$v_g=v_p-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}}}\left(\frac{g\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}-\frac{4\pi\gamma}{\rho\lambda}\right)=v_p-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{v_p}\left(v_p^2-\frac{4\pi\gamma}{\rho\lambda}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(v_p+\frac{1}{v_p}\frac{4\pi\gamma}{\rho\lambda}\right)$$

或者

$$v_g = \frac{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda} - \frac{1}{2}\left(\frac{g\lambda}{2\pi} - \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}\right)}{\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}}} = \frac{\frac{g\lambda}{4\pi} + \frac{3\pi\gamma}{\rho\lambda}}{\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}}} = \frac{\frac{g\lambda}{4\pi} + \frac{3\pi\gamma}{\rho\lambda}}{v_p}$$

【例 3.31】 证明：

$$v_g = \frac{c}{n} + \frac{\lambda c}{n^2} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$$

证明 角频率与相速度的关系为

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{v_p}{\lambda} = kv_p$$

其中，$k = \frac{2\pi}{\lambda}$；而 $\frac{dk}{d\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda^2} = -\frac{k}{\lambda}$，将其代入群速度的定义式，有

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kv_p)}{dk} = v_p + k\frac{dv_p}{dk} = v_p + k\frac{d\lambda}{dk} \cdot \frac{dv_p}{d\lambda}$$

$$= v_p - \lambda\frac{dv_p}{d\lambda}$$

另一方面，相速度

$$v_p = \frac{c}{n}$$

$$\frac{dv_p}{d\lambda} = \frac{dv_p}{dn} \cdot \frac{dn}{d\lambda} = -\frac{c}{n^2} \cdot \frac{dn}{d\lambda} = -\frac{c}{n^2} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$$

所以

$$v_g = \frac{c}{n} - \lambda\left(-\frac{c}{n^2} \cdot \frac{dn}{d\lambda}\right) = \frac{c}{n} + \frac{c\lambda}{n^2} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$$

【3.32】 一列波在周期性结构中传播，其频率为 $\omega = 2\omega_0\sin(kl/2)$，求出这列波的相速度和群速度的表达式。

解 由

$$\omega = 2\omega_0\sin\left(\frac{kl}{2}\right)$$

可得相速度

$$v_p = \frac{\omega}{k} = 2\omega_0 \cdot \frac{\sin\left(\frac{kl}{2}\right)}{k} = \omega_0 l \cdot \frac{\sin\left(\frac{kl}{2}\right)}{\frac{kl}{2}}$$

群速度

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = 2\omega_0 \cos\left(\frac{kl}{2}\right) \cdot \left(\frac{l}{2}\right) = \omega_0 l \cos\left(\frac{kl}{2}\right)$$

【例 3.33】 设等离子体中，电磁波的色散关系为 $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2$，其中 ω_p 为常数，求出相速度和群速度的表达式，并证明 $v_p v_g = c^2$。

解 色散关系指的是频率 ω 和波矢 k 的关系，即对于给定的频率的光波，色散关系给出了其在该介质中传播时所对应的波矢。

由色散关系 $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2$，有

$$k = \sqrt{\frac{(\omega^2 - \omega_p^2)}{c}}$$

代入相速度定义式，有

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega c}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_p^2)}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > c$$

从中可以看出相速度折射率为 $\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < 1$。

将题目给出的色散关系 $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2$ 两边对波矢 k 微分，得

$$\omega \frac{d\omega}{dk} = 0 + c^2 k$$

即

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega}$$

将其和前面得出的 k 的表达式一起代入群速度定义式，有

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2}{\omega} \cdot \frac{\sqrt{(\omega^2 - \omega_p^2)}}{c} = c\sqrt{\frac{1 - \omega_p^2}{\omega^2}} < c$$

而群速度折射率为

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1 - \omega_p^2}{\omega^2}}} > 1$$

由求解的中间过程，群速度和相速度之间的关系为

$$v_p \times v_g = \frac{\omega}{k} \times \frac{c^2 k}{\omega} = c^2$$

也可直接代入求解的最终结果，有

$$v_p \times v_g = \frac{c}{\sqrt{\frac{1 - \omega_p^2}{\omega^2}}} \times c\sqrt{\frac{1 - \omega_p^2}{\omega^2}} = c^2$$

【例 3.34】 在激光出现之前，单色性最好的光源是氪同位素 Kr^{86} 放电管发出的波长为 605.7 nm 的红光，其波列长约 700 mm，求其波长分布范围和频率分布范围。

解　非单色波列的有效长度定义为

$$L_0 = \frac{c}{\Delta\nu} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

中心波长 605.7 nm，所以波长分布范围

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{L_0} = \frac{(605.7\ \text{nm})^2}{700\ \text{mm}} = 5.241 \times 10^{-4}\ \text{nm}$$

波长分布在$(605.7 - 2.62\times10^{-4})$ nm 和$(605.7 + 2.62\times10^{-4})$ nm 之间；频率分布范围

$$\Delta\nu = \frac{c}{L_0} = \frac{2.998 \times 10^8\ \text{m/s}}{700\ \text{mm}} = 4.283 \times 10^8\ \text{Hz}$$

中心频率

$$\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{2.998 \times 10^8\ \text{m/s}}{605.7\ \text{nm}} = 4.950 \times 10^{14}\ \text{Hz}$$

频率分布在$(4.950 - 2.141\times10^{-6})\times10^{14}$ Hz 和$(4.950 + 2.141\times10^{-6})\times10^{14}$ Hz 之间。

【例 3.35】 测量二硫化碳的折射率，得到以下实验数据：波长为 589.0 nm 时，折射率为 1.629；波长为 656.0 nm 时，折射率为 1.620。求波长为 589.9 nm 时，光波在其中的相速度、群速度以及群速折射率（提示：折射率与波长的关系为 $n = A + B/\lambda^2$，其中 A，B 可根据题设确定）。

解　根据实验数据和色散关系 $n = A + B/\lambda^2$，可得

$$\begin{cases} 1.629 = A + \dfrac{B}{589.0^2} \\ 1.620 = A + \dfrac{B}{656.0^2} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A = 1.583 \\ B = 16\ 108\ \text{nm}^2 \end{cases}$$

波长 $\lambda = 589.0$ nm 时，折射率为 $n = A + B/\lambda^2 = 1.629$，相速度为

$$v_p(\lambda) = \frac{c}{n(\lambda)} = 1.841 \times 10^8\ \text{m/s}$$

而

$$\lambda\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\lambda} = \lambda\frac{\mathrm{d}\left(\frac{c}{n}\right)}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{c\lambda}{n^2}\cdot\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{c\lambda}{n^2}\cdot\frac{2B}{\lambda^3} = \frac{2cB}{n^2\lambda^2}$$

于是群速度为

$$v_g(\lambda) = v_p(\lambda) - \lambda \frac{dv_p}{d\lambda} = v_p(\lambda) - \frac{2cB}{n^2\lambda^2} = 1.736 \times 10^8 \ (\text{m/s})$$

群速折射率为

$$n_g(\lambda) = \frac{c}{v_g(\lambda)} = 1.728$$

3.4 光波的吸收、色散与散射

【例 3.36】 用 $A = 1.539\,74$，$B = 4.652\,8 \times 10^6\ \text{nm}^2$ 的玻璃做成顶角为 50°的棱镜，当其对 550.0 nm 的入射光处于最小偏向角位置时，求其角色散率是多少。

解 由柯西色散公式

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} = 1.539\,74 + \frac{4.652\,8 \times 10^6}{550^2} = 1.555\,12$$

色散率

$$\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3} = -\frac{2 \times 4.652\,8 \times 10^6}{550^3} = -5.593 \times 10^{-2} \ (\text{rad/nm})$$

出现最小偏向时，有

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\alpha + \delta_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

其中，α 为棱镜的顶角，δ_m 为最小偏向角。

角色散率

$$D = \frac{d\delta_m}{d\lambda} = \frac{d\delta_m}{dn} \cdot \frac{dn}{d\lambda} = \frac{\frac{dn}{d\lambda}}{\frac{dn}{d\delta_m}} = \frac{\frac{dn}{d\lambda}}{\left[\frac{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\alpha + \delta_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right]}$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\alpha + \delta_m}{2}\right)}} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{50^\circ}{2}\right)}{\sqrt{1-1.555\,12^2\sin^2\left(\frac{50^\circ}{2}\right)}} \times (-5.593\times10^{-2})$$

$$= -6.272\times10^{-2}\ (\text{rad/nm})$$

【例 3.37】 某种玻璃对不同波长的折射率在 $\lambda_1 = 400.0$ nm 时，$n_1 = 1.63$；$\lambda_2 = 500.0$ nm 时，$n_2 = 1.58$。假定柯西公式 $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$ 适用，求此种玻璃在 600.0 nm 时的 $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$。

解　柯西色散公式为 $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$，代入所给参数，得到方程组

$$\begin{cases} 1.63 = A + \dfrac{B}{400.0^2} \\ 1.58 = A + \dfrac{B}{500.0^2} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A = 1.49 \\ B = 2.22\times10^4\ \text{nm}^2 \end{cases}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3} \overset{\lambda=600.0\ \text{nm}}{=} -\frac{2\times2.22\times10^4}{600.0^3} = -2.06\times10^{-4}\ \text{rad/nm}$$

【例 3.38】 同时考虑介质对光的吸收和散射时，吸收系数 $\alpha = \alpha_0 + \alpha_s$，其中 α_0 是真正的吸收系数，而 α_s 为散射系数。根据朗伯定律，$I = I_0 \mathrm{e}^{-(\alpha_0+\alpha_s)L}$，若光经过一定厚度的某种介质后，只有 20%的光强通过，已知该介质的散射系数为真正吸收系数的 1/2，若消除散射，透射光强可增加多少？

解　由题中所给条件，得到，有散射时

$$\frac{I}{I_0} = \exp[-(\alpha_s+\alpha_0)L] = \exp\left[-\left(\frac{\alpha_0}{2}+\alpha_0\right)L\right] = \exp\left(-\frac{3\alpha_0}{2}L\right) = 20\%$$

消除散射，则有

$$\frac{I'}{I_0} = \exp(-\alpha_0 L)$$

$$I' - I = I_0(\mathrm{e}^{-\alpha_0 L} - \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\alpha_0 L}) = I_0\{[(\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\alpha_0 L})]^{\frac{2}{3}} - \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\alpha_0 L}\}$$

$$= I_0(0.2^{\frac{2}{3}} - 0.2) = 0.142 I_0$$

【例 3.39】 已知冕牌玻璃的折射率遵从柯西经验公式，且 $A = 1.504$，$B =$

$4.437\times10^{3}\,\mathrm{nm}^2$，$C=-1.387\times10^{8}\,\mathrm{nm}^4$。试求该种玻璃对波长为 600.0 nm 的折射率以及光在这种玻璃中的相速度和群速度。

分析 描述正常色散的柯西经验公式给出了折射率与波长的关系，为

$$n=A+\frac{B}{\lambda^2}+\frac{C}{\lambda^4}$$

相速度是单色波相位传播的速度，在介质中，为

$$v_{\mathrm{p}}=\frac{c}{n}$$

群速度是波包能量传播的速度，在色散介质中，为

$$v_{\mathrm{g}}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$$

群速度与相速度的关系为

$$v_{\mathrm{g}}=v_{\mathrm{p}}-\lambda\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}\lambda}$$

解 直接由柯西经验公式计算，得到

$$n=A+\frac{B}{\lambda^2}+\frac{C}{\lambda^4}=1.504+\frac{4.437\times10^{3}}{400.0^2}+\frac{-1.387\times10^{8}}{400.0^4}$$
$$=1.515$$

因此，可以计算出相速度为

$$v_{\mathrm{p}}=\frac{c}{n}=\frac{3.00\times10^{8}}{1.515}=1.979\times10^{8}\ (\mathrm{m/s})$$

下面推导群速度与相速度的关系（说明：以下推导过程和结果在许多光学教科书中都有详细论述，这里加以引述，是为了加深读者对色散关系的进一步认识）。

相速度，即单色光的相位传播速度，定义为 $v_{\mathrm{p}}=\frac{\omega}{k}$，所以 $\omega=v_{\mathrm{p}}k$，其中 $\omega=2\pi\nu$，$k=2\pi/\lambda$，代入群速度的表达式中

$$v_{\mathrm{g}}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}=v_{\mathrm{p}}+k\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}k}=v_{\mathrm{p}}-\lambda\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}\lambda}\tag{1}$$

推导过程中，用到了

$$\mathrm{d}k=\mathrm{d}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)=-\frac{2\pi}{\lambda^2}\mathrm{d}\lambda=-\frac{k}{\lambda}\mathrm{d}\lambda$$

又因为

$$\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{c}{n}\right)}{\mathrm{d}\lambda}=-\frac{c}{n^2}\cdot\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$$

代入式(1)，得到

$$v_g = \frac{c}{n} + \lambda \frac{c}{n^2} \cdot \frac{dn}{d\lambda} = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{\lambda}{n} \cdot \frac{dn}{d\lambda}\right) \tag{2}$$

根据柯西经验公式，计算出在 $\lambda = 600$ nm 处，玻璃的色散率为

$$\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3} - \frac{4C}{\lambda^5} = -33.95 \text{ (rad/nm)}$$

代入式(2)，得

$$v_g = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{\lambda}{n} \cdot \frac{dn}{d\lambda}\right) = 1.979 \times 10^8 \left(1 - \frac{600 \times 10^{-6}}{1.515} \times 3.395\right) = 1.954 \times 10^8 (\text{m/s})$$

可见在这种玻璃中，群速度小于相速度。

【例 3.40】 (1) 证明：在折射率为 n 的介质中，光的群速度可以写成

$$v_g = \frac{c}{n + \omega \cdot \dfrac{dn}{d\omega}}$$

(2) 利用下列色散方程

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_j} \tag{1}$$

证明在 X 射线波段，物质的色散规律为 $n^2 = 1 - \kappa\lambda^2$，式中 λ 为 X 射线在真空中的波长，并证明 X 射线在介质中的群速度 $v_g = cn$。

分析　利用经典的电磁理论，忽略阻尼常数，则可得到本题中所给的色散方程。根据色散关系可以求解本题。

证明　(1) 相速度的定义为 $v_p = \frac{\omega}{k} = \nu\lambda$，所以波矢 $\boldsymbol{k}$ 可以写作 $k = \frac{v_p}{\omega} = \frac{\omega n}{c}$。于是

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{n}{c} + \frac{\omega}{c} \cdot \frac{dn}{d\omega}$$

由群速度的定义

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n + \omega \cdot \dfrac{dn}{d\omega}} \tag{2}$$

(2) 由于 X 射线的频率远大于介质中电子和离子的本征频率，即 $\omega \gg \omega_{0j}$；同时，由于离子的质量远大于电子的质量，所以只需要考虑电子的效应即可。故式(1)可改写为

$$n^2(\omega) = 1 - \frac{e^2}{\varepsilon_0 m_e \omega^2} N \sum_j f_j = 1 - \frac{N'e^2}{\varepsilon_0 m_e \omega^2} \tag{3}$$

式中，$N' = N\sum_j f_j$ 为单位体积内的电子数。

又因为 $\omega=\dfrac{2\pi c}{\lambda}$，代入式(3)，得到

$$n^2 = 1-\frac{N'e^2\lambda^2}{4\pi^2\varepsilon_0 m_e c^2} = 1-\kappa\lambda^2 \tag{4}$$

其中，$\kappa=\dfrac{N'e^2}{4\pi^2\varepsilon_0 m_e c^2}$。

下面计算 X 射线在介质中的群速度，为简便起见，将式(3)改写为

$$n^2 = 1-\frac{\kappa'}{\omega^2} \tag{5}$$

式中，$\kappa'=\dfrac{N'e^2}{\varepsilon_0 m_e}$。

对式(5)求微商，得

$$\frac{dn}{d\omega} = -\frac{\dfrac{\kappa'}{\omega^3}}{\sqrt{1-\dfrac{\kappa'}{\omega^2}}} = -\frac{\kappa'}{n\omega^3}$$

将微商结果代入式(2)，有

$$v_g = \frac{c}{n+\omega\dfrac{dn}{d\omega}} = \frac{c}{n-\dfrac{\kappa'}{n\omega^2}} = \frac{cn}{n^2-\dfrac{\kappa'}{\omega^2}}$$

参见式(5)，上式的分母为 1，于是

$$v_g = cn$$

因为相速度 $v_p=\dfrac{c}{n}$，可见对于 X 射线，有

$$v_p v_g = c^2$$

【例 3.41】 一均匀媒质的吸收系数为 $\alpha=0.32/\text{cm}$，求出射光强变为入射光强 0.1，0.2，0.5 倍时媒质的厚度。

解 介质对光波线性吸收的公式为 $I=I_0e^{-\alpha L}$，吸收介质的厚度可表示为

$$L = \frac{\ln\left(\dfrac{I_0}{I}\right)}{\alpha}$$

$\dfrac{I}{I_0}=0.1$ 时

$$L = \frac{\ln 10}{0.32} = 7.196\,(\text{cm})$$

$\dfrac{I}{I_0}=0.2$ 时

$$L = \frac{\ln 20}{0.32} = 5.029\ (\text{cm})$$

$\frac{I}{I_0} = 0.5$ 时

$$L = \frac{\ln 50}{0.32} = 2.166\ (\text{cm})$$

【例 3.42】 设海水的吸收系数为 $\alpha = 2/\text{m}$，而人眼能感受到的光强为太阳光强的 10^{-18}。试问在海面下多深处，人眼还能看见光？

解　参考例 3.41 的结果，由 $I/I_0 = 10^{-18}$，可得

$$L = \frac{\ln 10^{18}}{2} = 20.72\ (\text{m})$$

【例 3.43】 证明当介质厚度 $l = 1$ cm 而吸收系数又很小时，吸收率 $G = \frac{I_0 - I}{I_0}$ 在数值上就等于吸收系数本身。

证明　由于

$$I = I_0 \mathrm{e}^{\alpha L} \overset{L=1\text{ cm}}{=} I_0 \mathrm{e}^{-\alpha} = I_0(1 - \alpha)$$

于是有

$$\alpha = 1 - \frac{I}{I_0} = \frac{I_0 - I}{I_0} = G$$

【例 3.44】 一块玻璃对波长为 0.070 nm 的 X 射线的折射率比 1 小 1.600×10^{-6}，求 X 射线能在此玻璃的外表面发生全反射（全外反射）的最大掠射角。

解　全反射时，有

$$\sin i_C = n = 1 - 1.600 \times 10^{-6}$$

可以算得 X 射线的全外反射临界角

$$i_c = \arcsin(1 - 1.600 \times 10^{-6}) = 89.898^\circ$$

最大掠入射角

$$\theta = 90^\circ - 89.898^\circ = 0.102^\circ$$

【例 3.45】 计算波长为 253.6 nm 和 546.1 nm 的两条谱线的瑞利散射强度之比。

解　瑞利散射的光强与波长的 4 次方成反比，即 $I \propto \lambda^{-4}$，所以有

$$\frac{I_s(253.6)}{I_s(546.1)} = \left(\frac{546.1}{253.6}\right)^4 = 21.50$$

第4章　光的干涉

光的干涉现象是光的波动性的重要特征之一，光的干涉现象之所以产生，是由于两列或多列相干光波的叠加。

4.1　光波的相干条件与相干光的获得

4.1.1　相干条件

满足以下条件的光波才能产生干涉：

(1) 频率相同；

(2) 相位差稳定；

(3) 有相互平行的振动分量。

4.1.2　相干光的获得

严格地说，一列光波是一个原子所发出的。实际的光源都包含有数量巨大的发光原子，所以实际的光波场中都包含有数量巨大的随机波列，它们之间是不相干的。只有从每一列光波中分出的波列才是相干的。所以只有通过分波列的方法才能获得相干光。

4.2　分波前的干涉装置

这类装置基本上以杨氏干涉为基础演变而来。

在讨论双缝(孔)和多缝(孔)干涉时,若接收屏距缝很远,而同时缝宽可以认为是无限窄的(严格地说,是缝宽 $a \ll \lambda$),这就是单纯的分立波列之间的干涉问题。此时,可以认为每条狭缝(孔)上只有一个线(点)光源,忽略每条缝或每个孔的衍射效应,不同的缝宽或孔径仅仅表示光强或振幅不同。

杨氏干涉实验装置是通过双缝或双孔将波列分为两个相干的部分,也可以通过诸如反射、折射等方式分波列,从而获得相干光,例如,菲涅耳双棱镜、菲涅耳双面镜、劳埃德镜、比累对切透镜、梅斯林对切透镜,等等,也可以使反射的光波与入射的光波进行干涉,得到维纳驻波的干涉。事实上,由于分光波的方法不胜枚举,所以分波前的干涉装置有很多种。

【例 4.1】 在如图 4.1 所示的双缝情形下,证明:

(1) 屏幕上的光强为

$$I_P = 4A_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right) = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)$$

(2) 第一极小出现在

$$\theta_1 = \frac{\lambda}{2d}$$

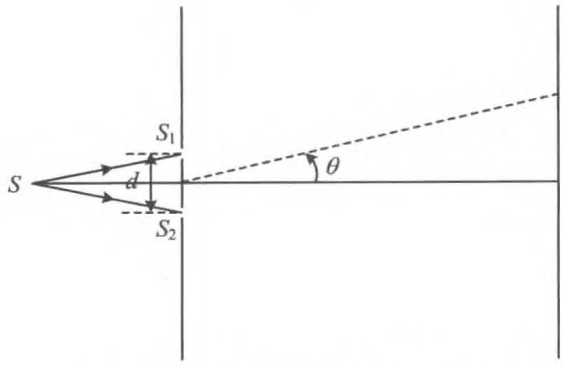


图 4.1 以角度表示干涉强度分布

证明 (1) 在满足近轴条件时,才能用简单的表达式描述杨氏干涉的特征。

如图 4.2 所示,P 点处,两列光波的光程差为

$$\delta r = r_2 - r_1 = \overline{S_2 B}$$

由于 $\overline{S_1 S_2}^2 \ll \overline{OA}^2$,$\overline{AP}^2 \ll \overline{OA}^2$,所以 $\triangle PS_1 B$ 是一个顶角很小的等腰三角形,于是

$$\angle S_1 B S_2 \approx \frac{\pi}{2}$$

近似地,也有 $S_1 B \perp OP$,于是

$$\angle S_2S_1B \approx \angle POA = \theta$$

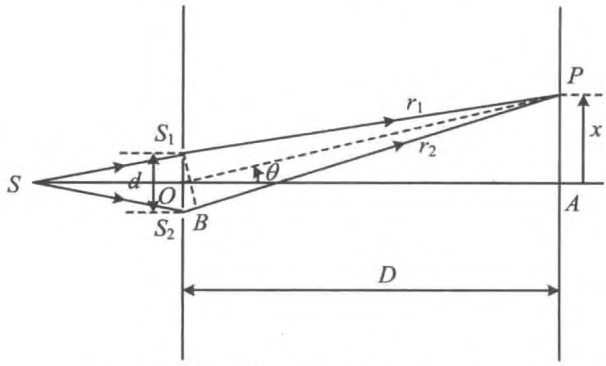


图 4.2 傍轴条件下两列光波的光程差

则光程差可表示为

$$\delta r = \overline{S_2B} = \overline{S_1S_2}\sin\theta$$

两列光波在 P 点处的相位差为

$$\Delta\varphi = k\delta r = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta$$

接收屏上的光强为

$$I(\theta) = 2A_0^2(1+\cos\Delta\varphi) = 2A_0^2\left(1+\cos\frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)$$

$$= 4A_0^2\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right) = I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)$$

(2) 第一极小值出现在 $\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ 处，即 $\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{2d}$。由于满足近轴条件，所以

$$\theta_1 \approx \sin\theta_1 = \frac{\lambda}{2d}$$

【例 4.2】 波长为 λ 的平行单色光以小倾角 θ 斜入射到间距为 d 的双缝上，设接收屏到双缝距离为 D。求：

(1) 零级主极大的位置；

(2) 假设在屏上到双缝距离都相等的地方恰好出现暗条纹，倾角 θ 必须满足什么条件？

分析 平行光斜入射时，两缝不在同一个等相位面上，故其发出的次波具有不同的初相位。因而在总的相位差中，必须要记入初相位差。

解 如图 4.3 所示，光程差中应包括双缝前的部分，总光程差为

$$\Delta L = \frac{xd}{D} - d\sin\theta$$

(1) $j=0$ 级，$\Delta L=0$，于是有

$$x_0 = D\sin\theta$$

在入射方向上。

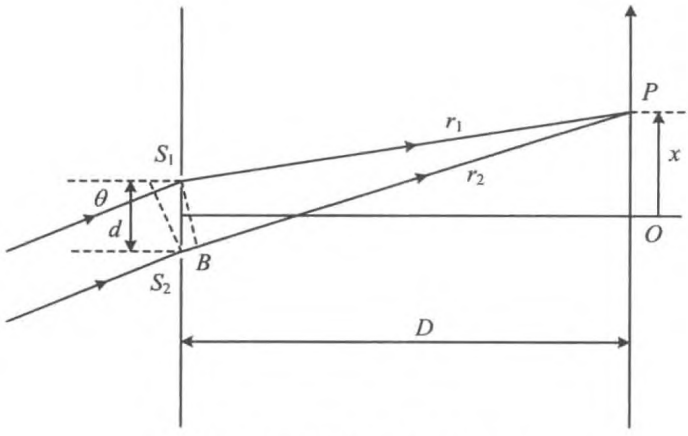


图 4.3 斜入射平面波的双缝干涉

(2) 暗条纹的光程差满足条件

$$\Delta L = \frac{xd}{D} - d\sin\theta = \left(j+\frac{1}{2}\right)\lambda$$

屏上到双缝距离相等的地方是 O 点，$x=0$，因而

$$d\sin\theta = -\left(j+\frac{1}{2}\right)\lambda$$

由于 j 可以取任意整数，同时又是以小角度入射，所以

$$\theta \approx \sin\theta = \left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d}$$

【例 4.3】 波长 λ 为 0.5 μm 的平行单色光垂直入射到双孔平面上，已知双孔间距 t 为 0.5 mm，在双孔屏另一侧 5 cm 远处，正放置一枚像方焦距 f' 为 5 cm 的理想薄透镜 L，并在 L 的像方焦平面处放置接收屏。求：

(1) 干涉条纹的间距等于多少？

(2) 将透镜往左移近双孔 2 cm，接收屏上干涉条纹的间距又等于多少？

分析 (1) 由于双孔位于透镜的物方焦平面上，所以双孔发出的球面光波经过透镜后变为平面波，因而屏上是两列平行光的干涉。

(2) 这时,由于到达屏上的光先要经过透镜,因而是这两个光源的像所发出的光的干涉。

解 (1) 由于双孔在透镜的物方焦平面上,所以发出的光经透镜后成为平行光束,即射向接收屏的光是平面波。如图 4.4 所示,光波与光轴夹角由下式确定

$$\sin\alpha = \frac{\frac{d}{2}}{f} = \frac{\frac{0.5}{2}}{50} = 0.005$$

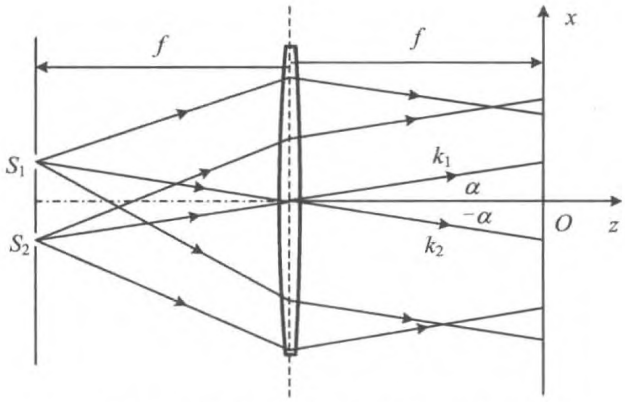


图 4.4 平面波在透镜焦平面上的干涉

建立如图 4.4 所示的直角坐标系,并取接收屏所在处为 xy 平面,即接收屏 $z=0$。波矢分别为

$$\boldsymbol{k}_1 = k(\sin\alpha\,\boldsymbol{e}_x + \cos\alpha\,\boldsymbol{e}_z)$$

$$\boldsymbol{k}_2 = k(-\sin\alpha\,\boldsymbol{e}_x + \cos\alpha\,\boldsymbol{e}_z)$$

接收屏上任意一点的位矢为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y$$

则在接收屏上,两列平面光波的相位差为

$$\Delta\varphi = \boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{r} - \boldsymbol{k}_2 \cdot \boldsymbol{r} = 2kx\sin\alpha$$

干涉极大的条件为

$$\Delta\varphi = 2kx_j\sin\alpha = j2\pi$$

于是亮纹的位置为

$$x_j = \frac{2\pi j}{2k\sin\alpha} = \frac{j\lambda}{2\sin\alpha}$$

亮条纹间距

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\sin\alpha} = 50\ \mu\text{m}$$

(2) 透镜往左移近双孔 2 cm，则双孔经透镜所成的像在

$$s' = \frac{sf}{s-f} = \frac{3\times 5}{3-5} = -7.5\ (\text{cm})$$

如图 4.5 所示，为虚像，两像的像高分别为

$$y_1' = -\frac{s'}{s}y_1 = -\frac{-7.5}{3}\times 0.25 = 0.625\ (\text{mm})$$

$$y_2' = -0.625\ \text{mm}$$

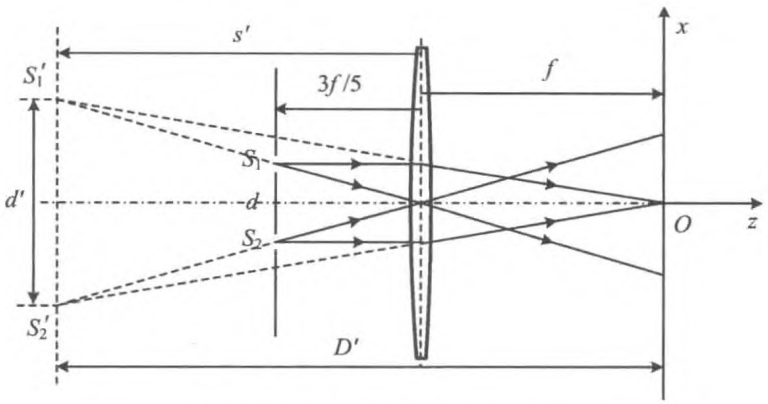


图 4.5 球面波在透镜焦平面上的干涉

相当于两像光源 S_1'，S_2'的干涉。双孔间距

$$d' = y_1' - y_2' = 1.25\ \text{mm}$$

到接收屏的距离

$$D' = f - s' = 50 + 75 = 125\ (\text{mm})$$

条纹间距变为

$$\Delta x' = \frac{D'\lambda}{d'} = 50\ \mu\text{m}$$

【例 4.4】 考虑如图 4.6 所示的三缝干涉，假设三狭缝的宽度相同$\left(\text{缝宽}\leqslant\frac{\lambda}{2}\right)$，求：

(1) 第一主极大的 θ 角是多少(即从三狭缝出来的子波同相位)？

(2) 把(1)的结果写为 θ_1，在零级主极大($\theta=0$)方向的光强记作 $I(0)$。在$\frac{\theta_1}{2}$方向上的光强是多少(设 $\lambda \ll d$)？

分析 由题意可知缝宽很小，则不必考虑每一缝的衍射。另外，由于干涉出现在较

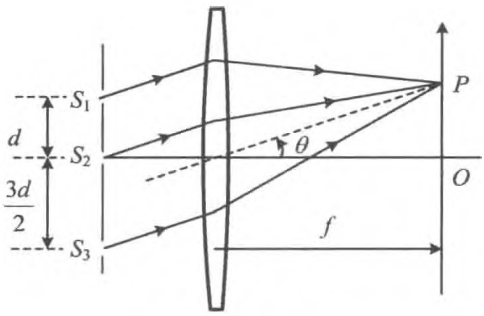


图 4.6 三缝干涉

远处，故可视作三列平行光的干涉。对于三列以上的光的干涉，光强的计算应当采用复振幅求和的方法，或者振幅矢量方法。

解 (1) 在一个与双缝垂直的平面内讨论即可。如图 4.7 所示，对于接收屏上傍轴区域中的 P 点，相邻两列间光程差分别为

$$\delta_{12} = d\sin\theta$$

$$\delta_{23} = \frac{3d}{2}\sin\theta$$

三列波同相，即光程差同时是波长的整倍数时，是干涉的极大值。则有 $d\sin\theta = m_1\lambda$，$\frac{3}{2}d\sin\theta = m_2\lambda$。于是 $m_1 = \frac{2}{3}m_2$。除 0 之外，最小的取值为 $m_1 = 2$，$m_2 = 3$。即方向由式 $\sin\theta_1 = \frac{2\lambda}{d}$ 确定。

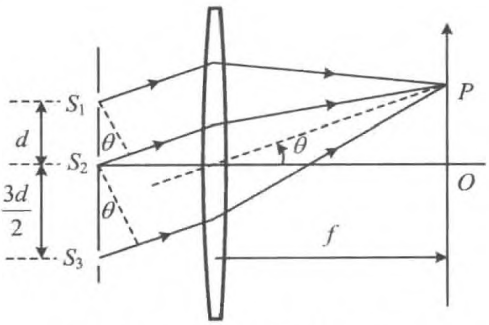


图 4.7 相邻两列光波的光程差

(2) 相邻两列波在 P 点的位相差分别为

$$\Delta\varphi_{12} = k\delta_{12} = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta = \Delta\varphi$$

$$\Delta\varphi_{23} = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{3d}{2}\sin\theta = \frac{3}{2}\Delta\varphi$$

采用振幅矢量法求和，如图 4.8 所示，叠加后，光强为

$$I(\theta) = A^2(\theta) = A_0^2\left[\left(1+\cos\Delta\varphi+\cos\frac{5}{2}\Delta\varphi\right)^2+\left(\sin\Delta\varphi+\sin\frac{5}{2}\Delta\varphi\right)^2\right]$$

$$= A_0^2\left(1+\cos^2\Delta\varphi+\cos^2\frac{5}{2}\Delta\varphi+2\cos\Delta\varphi+2\cos\frac{5}{2}\Delta\varphi\right.$$

$$\left.+2\cos\Delta\varphi\cos\frac{5}{2}\Delta\varphi+\sin^2\Delta\varphi+\sin^2\frac{5}{2}\Delta\varphi+2\sin\Delta\varphi\sin\frac{5}{2}\Delta\varphi\right)$$

$$= A_0^2\left(3+2\cos\Delta\varphi+2\cos\frac{3}{2}\Delta\varphi+2\cos\frac{5}{2}\Delta\varphi\right)$$

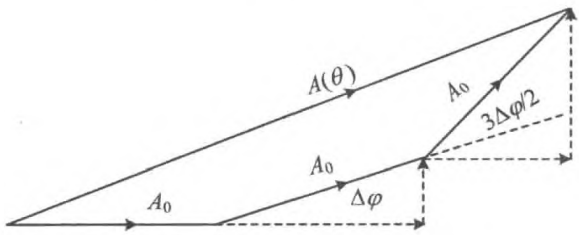


图 4.8 振幅矢量法求和振动振幅

0 级极大值为

$$I(0) = A_0^2(3+2+2+2) = 9A_0^2$$

在 1 级极大方向上

$$\Delta\varphi(\theta_1) = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta_1 = 4\pi$$

1 级极大值为

$$I(\theta_1) = A_0^2(3+2+2+2) = 9A_0^2 = I(0)$$

由于 θ_1 是小角，近似，有 $\sin\theta_1\approx\theta_1$。在 $\frac{\theta_1}{2}$ 方向上

$$\Delta\varphi\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot d\cdot\frac{\theta_1}{2} = 2\pi$$

于是

$$I\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = A_0{}^2(3+2\cos2\pi+2\cos3\pi+2\cos5\pi) = A_0^2 = \frac{F_0}{9}$$

【例 4.5】 如图 4.9 所示的杨氏实验装置中，若单色光源的波长 $\lambda = 500.0$ nm，$d =$

$S_1S_2=0.33$ cm，$r_0=3$ m，试求：

(1) 屏上干涉花样的条纹间隔；

(2) 若在缝 S_2 后面放置一厚度 $h=0.01$ mm 的平行平面玻璃片，试确定条纹移动方向，并导出条纹移动公式；

(3) 假设一根直条纹的位移为 4.73 mm，试计算玻璃的折射率。

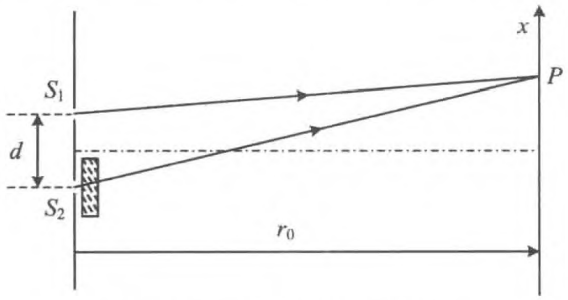


图 4.9 一列光波经过玻璃片

解 (1) 由杨氏干涉的公式可以直接得到条纹间距为

$$\Delta x=\frac{r_0}{d}\lambda=0.5\text{ mm}$$

(2) 插入玻璃片后从 S_2 到 P 点的光程为 $r_2+(n-1)h$，由于该光程增大，$j=0$ 级条纹向下移动，所有条纹也将同样移动。

由于 P 点处的光程差为

$$\delta=r_2+(n-1)h-r_1=x\frac{d}{r_0}+(n-1)h$$

j 级亮纹满足

$$x\frac{d}{r_0}+(n-1)h=j\lambda$$

j 级亮纹的位置为

$$x_j'=j\frac{\lambda r_0}{d}-(n-1)h\frac{r_0}{d}$$

移动的距离为

$$\Delta=-(n-1)h\frac{r_0}{d}$$

(3) 根据(2)的结果，可得

$$n=1-\Delta\left(\frac{d}{hr_0}\right)=1+\frac{4.73\times3.3}{0.01\times3\times10^3}=1.52$$

【例 4.6】 用很薄的云母片($n=1.58$)覆盖在双缝装置中的一条缝上,这时,光屏上的中心为原来的第 7 级亮纹所占据,若 $\lambda=550.0\ \text{nm}$,则云母片有多厚?

解 本例与例 4.5 相似,这里采用与例 4.5 不同的方法处理。

设云母片的厚度为 h,插入云母片之后,对于接收屏上的一点而言,与插入前比较,两条路径的光程差改变了

$$\delta=(n-1)h$$

对于杨氏双缝干涉,$j=0$ 的亮纹,光程差为 0;$j=1$ 的亮纹,光程差为 λ;第 j 级亮纹,两条路径的光程差为 $j\lambda$,即光程差每改变一个波长,亮纹就移过一个间隔。于是插入云母片之后,接收屏上的每一根条纹移过的间隔数目为

$$\Delta j=\frac{\delta}{\lambda}=\frac{(n-1)h}{\lambda}$$

移过的距离为

$$\Delta=\Delta j\Delta x=\frac{(n-1)h}{\lambda}\cdot\frac{r_0\lambda}{d}=(n-1)h\frac{r_0}{d}$$

与例 4.5 的结果完全相同。

按题中条件,$\Delta j=7$,于是

$$h=\frac{\Delta j\lambda}{n-1}=\frac{7\times550\times10^{-9}}{1.58-1}=6.64\times10^{-6}(\text{m})=6.64\ (\mu\text{m})$$

【例 4.7】 设有两个点光源 S_1,S_2,相距为 t,接收屏垂直于 S_1S_2 连线放置,垂足为接收屏上的原点,接收屏至 S_1,S_2 中点的距离为 D,且 $D\gg t$,$D\gg x$。问在接收屏上生成的干涉图样是什么形状?并证明第 j 级亮纹至屏原点的距离为

$$\rho=D\sqrt{2\left(1-\frac{j\lambda}{t}\right)}$$

解 如图 4.10 所示,对于接收屏上任意一点 (x,y),两列光的光程差为

$$\begin{aligned}\delta=r_1-r_2&=\sqrt{x^2+y^2+\left(D+\frac{t}{2}\right)^2}-\sqrt{x^2+y^2+\left(D-\frac{t}{2}\right)^2}\\&=\sqrt{\rho^2+\left(D+\frac{t}{2}\right)^2}-\sqrt{\rho^2+\left(D-\frac{t}{2}\right)^2}\\&=j\lambda\end{aligned}$$

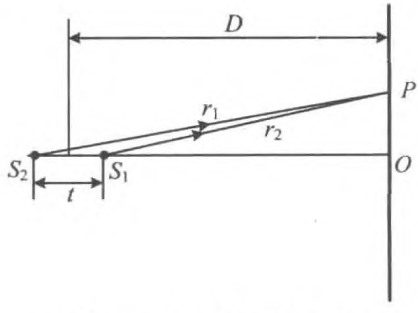


图 4.10 接收屏与光源连线垂直

其中，$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，为接收屏上任意一点到中心线的距离，可见条纹为同心圆环。

由于

$$r_1=\sqrt{\rho^2+\left(D+\frac{t}{2}\right)^2}=\left(D+\frac{t}{2}\right)\sqrt{1+\frac{\rho^2}{\left(D+\frac{t}{2}\right)^2}}$$

$$\approx\left(D+\frac{t}{2}\right)\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho^2}{\left(D+\frac{t}{2}\right)^2}\right]$$

$$r_2=\sqrt{\rho^2+\left(D-\frac{t}{2}\right)^2}$$

$$\approx\left(D-\frac{t}{2}\right)\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho^2}{\left(D-\frac{t}{2}\right)^2}\right]$$

光程差为

$$\delta=r_1-r_2==\left(D+\frac{t}{2}\right)\left[1+\frac{\rho^2}{2\left(D+\frac{t}{2}\right)^2}\right]-\left(D-\frac{t}{2}\right)\left[1+\frac{\rho^2}{2\left(D-\frac{t}{2}\right)^2}\right]$$

$$=t+\frac{D\rho^2}{2\left(D+\frac{t}{2}\right)^2}-\frac{D\rho^2}{2\left(D-\frac{t}{2}\right)^2}$$

$$=t+\frac{D\rho^2}{2}\cdot\frac{\left(D-\frac{t}{2}\right)^2-\left(D+\frac{t}{2}\right)^2}{\left(D+\frac{t}{2}\right)^2\left(D+\frac{t}{2}\right)^2}$$

$$=t+\frac{D\rho^2}{2}\cdot\left(\frac{-Dt}{D^4}\right)=t\left(1-\frac{\rho^2}{2D^2}\right)$$

第 j 级亮纹满足条件 $t\left(1-\frac{\rho_j^2}{2D^2}\right)=j\lambda$，得到

$$\rho_j^2=2D^2\left(1-\frac{j\lambda}{t}\right)$$

即

$$\rho_j=D\sqrt{2\left(1-\frac{j\lambda}{t}\right)}$$

这就是第 j 级条纹的半径。

【例 4.8】 在杨氏双缝实验装置中，除了原有的光源缝 S 外，再在 S 的正上方开一狭缝 S'，如图 4.11 所示。问：

(1) 若使 $S'S_2 - S'S_1 = \frac{\lambda}{2}$，试求单独打开 S 或 S' 以及同时打开它们时屏上的光强分布。

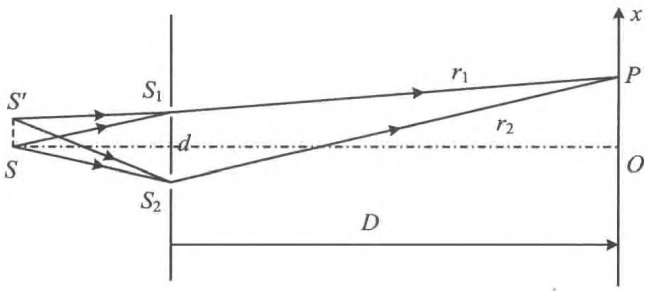


图 4.11 两个光源的双缝干涉

(2) 若 $S'S_2 - S'S_1 = \lambda$，S 和 S' 同时打开时，屏上的光强分布如何？

解 (1) 设接收屏上 P 点到轴线的距离为 x。

在满足傍轴条件时，单独打开中央缝 S，光强为

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{kd}{2D}x\right) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x\right) \tag{1}$$

单独打开缝 S'，则计入双缝前的光程差 δ_1，两列光在 P 点的总位相差为

$$\Delta\varphi'(x) = k\Delta' = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\delta_1 + x\frac{d}{D}\right)$$

光强为

$$I' = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi\delta_1}{\lambda} + \frac{\pi d}{\lambda D}x'\right) \tag{2}$$

相当于 S 点的干涉花样在屏上做了平移。

由于 S 和 S' 是不相干的，所以两缝同时打开，屏上的光强是两光源单独在屏上形成的光强直接相加，于是有

$$I + I' = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x\right) + 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi\delta_1}{\lambda} + \frac{\pi d}{\lambda D}x\right) \tag{3}$$

如果 $S'S_2 - S'S_1 = \frac{\lambda}{2}$，则 $\delta_1 = \frac{\lambda}{2}$，则 $\frac{\pi\delta_1}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$，于是

$$I' = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi d}{\lambda D}x'\right) = 4I_0 \sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right) \tag{4}$$

与式(1)比较，两者的亮暗条纹正好是互补的

$$I + I' = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x\right) + 4I_0 \sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x\right) = 4I_0 \tag{5}$$

由于两组干涉花样是互补的，因而光强叠加后，屏上各处被均匀照明，没有干涉条纹。

(2) $S'S_2 - S'S_1 = \lambda$，$\delta_1 = \lambda$，$\frac{\pi\delta_1}{\lambda} = \pi$，于是

$$I' = 4I_0\cos^2\left(\pi + \frac{\pi d}{\lambda D}x'\right) = 4I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right) \tag{6}$$

与单独打开 S 所形成的干涉花样完全相同

$$I + I' = 4I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x\right) + 4I_0\cos^2\left(\pi + \frac{\pi d}{\lambda D}x\right) = 8I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x\right) \tag{7}$$

屏上亮条纹强度增加 1 倍，即反衬度增加了 1 倍。

【例 4.9】 瑞利干涉仪的结构和使用原理如下(如图 4.12 所示)：以钠光灯作为光源置于透镜 L_1 的前焦面，在透镜 L_2 的后焦面上观测干涉条纹的变动，在两个透镜之间安置一对完全相同的玻璃管 T_1 和 T_2。实验开始时，T_2 管充以空气，T_1 管抽成真空，此时开始观察干涉条纹。然后逐渐使空气进入 T_1 管，直到它与 T_2 管的气压相同位置。记下这一过程中条纹移过的数目。设光波长为 589.3 nm，管长 20 cm，条纹移过 98 根，求空气的折射率。

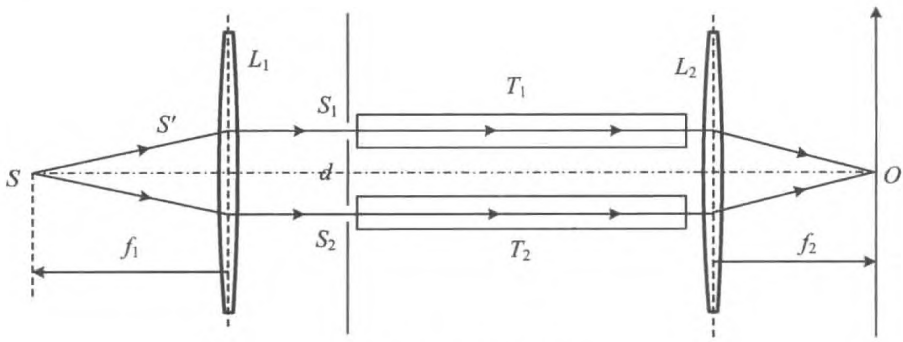


图 4.12 瑞利干涉仪

解 两列光波所传播过路径的光程差每改变一个波长，接收屏上某一点就会移过一根条纹。

若每根管的长度为 l，其中气体的折射率分别为 n_1 和 n_2，则 O 点处光程差为

$$\Delta = n_2 l - n_1 l = (n_2 - n_1)l$$

若 T_1 中气体的折射率改变 δn_1，上述光程差的改变为 $\delta\Delta = -\delta n_1 l$，移过的条纹数为

$$\delta m = -\frac{\delta n_1 l}{\lambda}$$

题中，$\delta n_1 = n - 1$，$\delta m = -98$，则

$$n = 1 - \frac{\delta m\lambda}{l} = 1 + \frac{98 \times 589.3 \times 10^{-6}}{200} = 1.000\,289$$

【例 4.10】 如图 4.13 所示为另一种利用干涉现象测定气体折射率的原理性装置，在 S_1 后面放置一长度为 l 的透明容器，当待测气体注入容器而将空气排出的过程中幕上的干涉条纹会移动，由移过条纹的根数即可推知气体的折射率。试求：

(1) 设待测气体的折射率大于空气的折射率，干涉条纹如何移动？

(2) 设 $l = 4.0$ cm，条纹移过 20 根，光波长 589.3 nm，空气折射率为 1.000 276，求待测气体(氯气)的折射率。

分析 在双缝干涉装置中改变其中一束光路的折射率会引起相遇点 P 处两列光的光程差和相位差的改变，从而导致干涉条纹的移动和 P 点干涉级次的变化。可以从条纹的变化特征，探知光路折射率的变化。

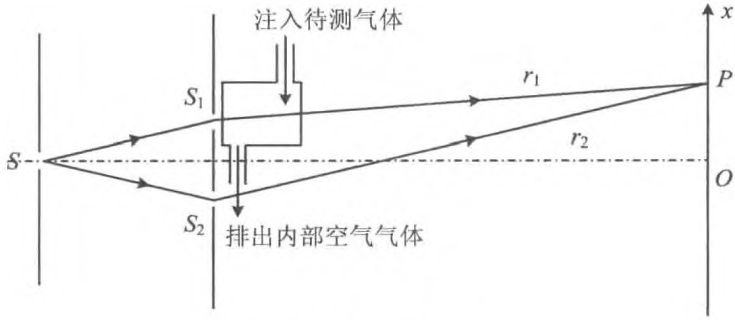


图 4.13 干涉装置

解 (1) 充气过程中，上光源 S_1 所发出的到达屏上的光波经历的光程逐渐增大，因此，产生第 j 级条纹的下光源 S_2 所发出的到达屏上的光波经历的光程也必须相应增大，则只有该级次条纹上移。所以，所有条纹都将整体向上移动。

(2) 实验过程中，接收屏上任一点 P 光程差的改变满足以下关系

$$\delta = (n - n_0)l = \Delta j\lambda$$

待测氯气的折射率为

$$n = \frac{\Delta j\lambda}{l} + n_0 = \frac{20 \times 589.3 \times 10^{-6}}{20} + 1.000\,276 = 1.000\,865\,3$$

【例 4.11】 为测量粒子的速度，用两列波长为 λ 的相干光照射粒子的路径，并使入射方向与路径法线间各成 θ 角，如图 4.14 所示。记录反射光信号，接收器每秒收到 n 个反射光的信号。求粒子速度。

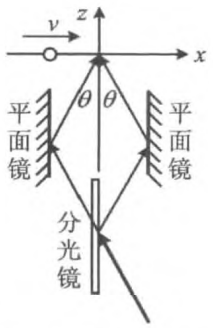


图 4.14 测量粒子速度

解 这是两列平面光波的相干叠加。

取粒子径迹在 xy 平面上，则两列光在 xy 平面上的相位分布可表示为

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{r} + \varphi_{10} \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}(\sin\theta\,\boldsymbol{e}_x + 0\,\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_z) \cdot (x\,\boldsymbol{e}_x + y\,\boldsymbol{e}_y + 0\,\boldsymbol{e}_z) + \varphi_{10} \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta + \varphi_{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \boldsymbol{k}_2 \cdot \boldsymbol{r} + \varphi_{20} \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}[\sin(-\theta)\,\boldsymbol{e}_x + 0\,\boldsymbol{e}_y + \cos(-\theta)\,\boldsymbol{e}_z] \cdot (x\,\boldsymbol{e}_x + y\,\boldsymbol{e}_y + 0\,\boldsymbol{e}_z) + \varphi_{20} \\ &= -\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta + \varphi_{20}\end{aligned}$$

在 xy 平面上的相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi}{\lambda}x\sin\theta + (\Delta\varphi_{10} - \Delta\varphi_{20}) = \frac{4\pi}{\lambda}x\sin\theta + \Delta\varphi_0$$

在 xy 平面上亮纹满足以下条件

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi}{\lambda}x_j\sin\theta + \Delta\varphi_0 = 2j\pi$$

相邻条纹间隔为

$$\Delta x = \frac{\sin\theta}{2\lambda}$$

在粒子飞行过程中，要经过一系列等间隔的亮暗条纹，每经过一根亮纹，就会有一个光信号被反射回来被接收器收到。设粒子的速度为 v，则信号的频率为

$$n = \frac{v}{\Delta x}$$

于是粒子的速度为

$$v = n\Delta x = \frac{n\lambda}{2\sin\theta}$$

【例 4.12】 如图 4.15 所示的菲涅耳双面镜的夹角 $\varepsilon = 10^{-3}$ rad，有一单色狭缝光源 S 与两镜相交处 C 的距离 r 为 0.500 m，单色波的波长 $\lambda = 500.0$ nm。在距两镜相交处的距离为 $L = 1.5$ m 的屏幕 Σ 上出现明暗交错的干涉条纹。

(1) 求屏幕 Σ 上两相邻明条纹之间的距离；

(2) 问在屏幕 Σ 上最多可以看到多少明条纹？

分析 菲涅耳双面镜的干涉可以看成是 S 的两个虚像 S_1 与 S_2 间的双缝干涉。由图可见，上述三个光源 S, S_1, S_2 都位于以 C 为圆心、r 为半径的圆周上

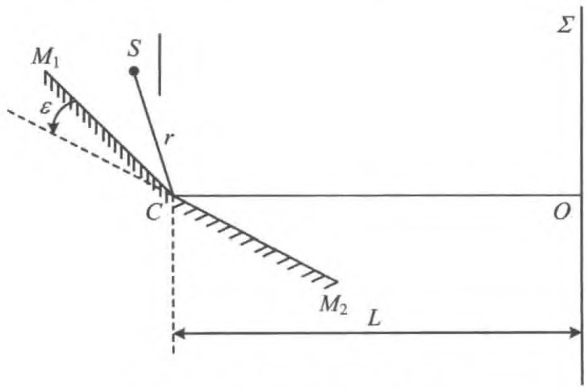


图 4.15 菲涅耳双面镜的干涉

解 (1) 如图 4.16 所示，光源 S 发出的光分别经两反射镜 M_1 和 M_2 反射后到达接收屏 Σ 上，这两列光波等效于是从 S 分别经 M_1 和 M_2 的像 S_1 和 S_2 发出的，而 S_1 和 S_2 是相干的，因而这等效于一个杨氏双缝干涉装置。

像光源 S_1 和 S_2 对反射镜交线 C 的张角为

$$\beta = 2(\alpha + \varepsilon) - 2\alpha = 2\varepsilon$$

则两者间距

$$d = 2r\sin\varepsilon \approx 2r\varepsilon$$

到屏的距离

$$D = r\cos\varepsilon + L \approx r + L$$

于是 Σ 上干涉条纹的间距为

$$\Delta x = \frac{D\lambda}{d} = \frac{(r + L)\lambda}{2r\varepsilon} = 1.00 \text{ mm}$$

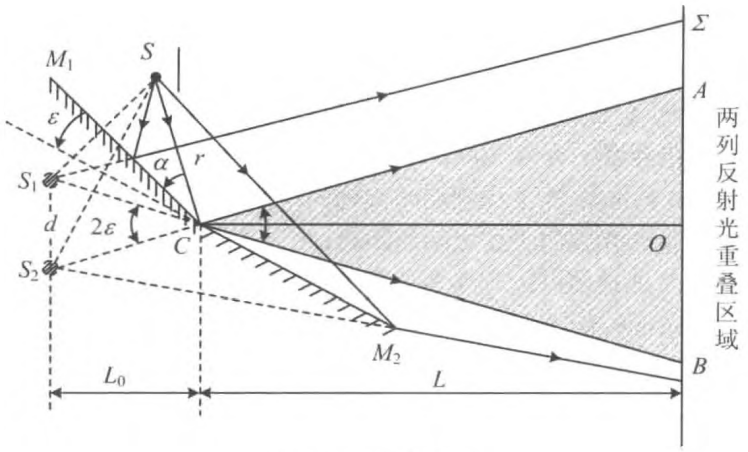


图 4.16 干涉区域

(2) 由于两光源的重叠照射区域的宽度为

$$\overline{AB} = 2L\tan\varepsilon \approx 2L\varepsilon$$

此区域中干涉条纹的数量为

$$\Delta j = \frac{\overline{AB}}{\Delta x} = \frac{2L\varepsilon}{\Delta x} = 3$$

【例 4.13】 设菲涅耳双面镜的夹角为 20′，缝光源距两镜交线 10 cm，接受屏幕与光源的两个像点的连线平行，且与两镜连线间的距离为 210 cm，光波长为 600.0 nm，试问：

(1) 干涉条纹的间距为多少？

(2) 如果光源到两镜交线的距离增大一倍，干涉条纹有何变化？

(3) 如果光源与两镜交线的距离保持不变，而在横向有所移动，干涉条纹有何变化？

(4) 如果要在屏幕上观察到有一定反衬度的干涉条纹，所允许的缝光源的最大宽度是多少？

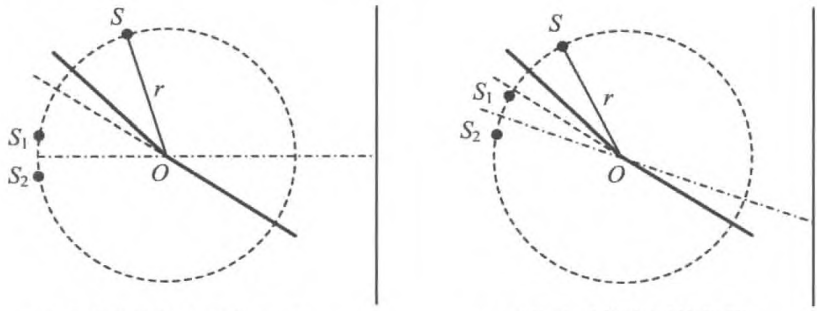
解 (1) 参考例 4.13 的结果，可得

$$\Delta x = \left(\frac{L + r}{2r\varepsilon}\right)\lambda = \frac{210 + 10}{2 \times 10 \times \dfrac{20}{60} \times \dfrac{\pi}{180}} \times 600.0\,(\text{nm}) = 1.13\,(\text{mm})$$

(2) 光源到两镜交线的距离增大一倍，即 $r' = 2r$，可得

$$\Delta x' = \left(\frac{L + r'}{2r'\varepsilon}\right)\lambda = \frac{210 + 20}{2 \times 20 \times \dfrac{20}{60} \times \dfrac{\pi}{180}} \times 600.0\,(\text{nm}) = 0.59\,(\text{mm})$$

(3) 如图 4.17 所示，光源做横向移动时，由于距离 r 保持不变，像光源 S_1，S_2 对两镜交线 C 的张角 2ε 保持不变，即 S_1，S_2 间距不变，所以干涉条纹的间距没有变化。光源 S 移动前引起像光源 S_1，S_2 的移动，但是由于光源的移动引起了两个像光源的整体平移，所以屏上的条纹也会整体平移。



(a) S 移动前像光源的位置　　(b) S 移动后像光源的位置

图 4.17　光源 S 移动前引起像光源 S_1 与 S_2 的移动

(4) 光源有一定宽度，所成的像也有一定宽度，即光源 AB 的像光源为 A_1B_1 和 A_2B_2，如图 4.18 所示。由于两平面镜之间的夹角很小，所以两个像几乎是相互平行的。

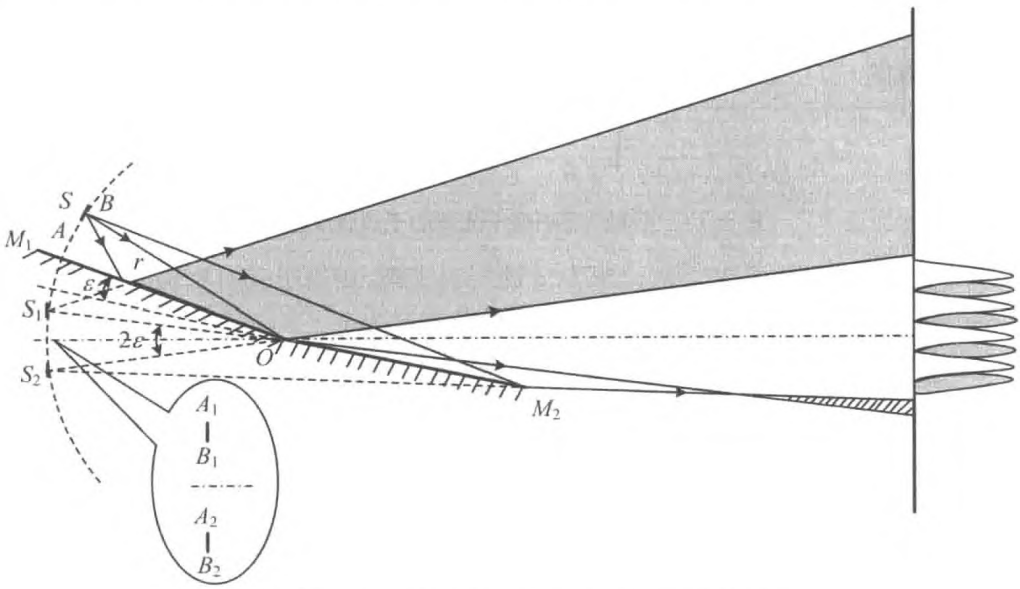


图 4.18　光源 AB 的像 A_1B_1 和 A_2B_2 及其干涉条纹

但是必须注意到，A_1，A_2 对应于光源上的点 A；而 B_1，B_2 对应于光源上的 B 点。所以 A_1，A_2 是一对相干光源，而 B_1，B_2 是另一对。由于光源上不同的点是不相干的，因而像上的非对应点之间也不相干。

由题图可知，这两对像光源上的相干点的对称轴是不重合的，因而他们各自所形成的干涉条纹也是相互错开的。这样就会导致干涉条纹由于相互重叠而使可见度降低。

以下对干涉强度及可见度进行计算。

如图 4.19(a)所示，在坐标系中，两个对称的相干点光源在屏上的干涉强度为

$$I(x') = 4\left(\frac{A}{D}\right)^2 \cos^2\left(\frac{kd}{2D}x'\right) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{kd}{2D}x'\right)$$

宽度为 $\mathrm{d}x$ 的一对光源，干涉强度为

$$\mathrm{d}I(x') = 4i_0 \cos^2\left(\frac{kd}{2D}x'\right)\mathrm{d}x$$

其中，i_0 为单个单位宽度光源发出的光波在屏上的强度。

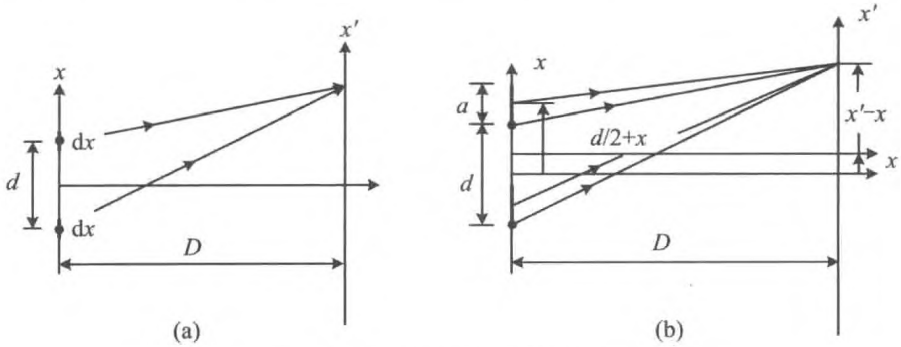


图 4.19　不同位置的相干光源的干涉强度计算

如图 4.19(b)所示，距离上述光源为 x 的一对光源，相当于其对称轴移动了 x，原来坐标系中的 x' 点在移动了 z 轴的新坐标系中的位置成为 $x'-x$，这样一对光源在屏上 x' 点的干涉强度为

$$\mathrm{d}I(x') = 4i_0 \cos^2\left[\frac{kd}{2D}(x'-x)\right]\mathrm{d}x$$

由于不相干的光波之间是强度叠加，所以宽度为 a 的像光源 A_1B_1 和 A_2B_2 在接收屏上的光强为

$$\begin{aligned} I(x') &= 4i_0 \int_0^a \cos^2\left[\frac{kd}{2D}(x'-x)\right]\mathrm{d}x \\ &= 2i_0\left\{a + \frac{D}{kd}\left[\sin\left(\frac{kd}{D}(x'-a)\right) - \sin\left(\frac{kd}{D}x'\right)\right]\right\} \end{aligned}$$

式中，$\frac{D}{kd}\left[\sin\left(\frac{kd}{D}(x'-a)\right)-\sin\left(\frac{kd}{D}x'\right)\right]$是代表屏上光强周期改变形成明暗条文的因素，量值在$\pm\frac{2D}{kd}$之间。当$\frac{kd}{D}a=2m\pi$，即光源宽度为$a=m\frac{D}{d}\lambda=m\Delta x$时，可见度为0。其中，$\Delta x$为点光源所形成的干涉条纹间隔。但是随着$a$的增大，背景光增强，明暗条纹的反差迅速减小，即条纹的可见度降低，如图4.20所示。

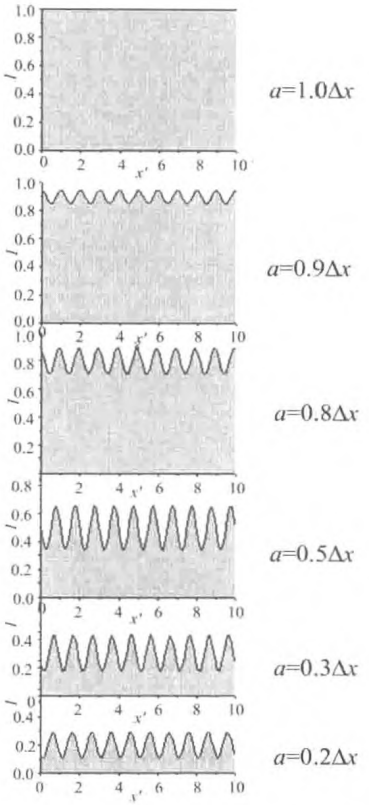


图4.20 光源宽度引起的条纹可见度变化

不妨作如下估算：

$$I_{\max}=2i_0\left(a+\frac{2D}{kd}\right)$$

$$I_{\min}=2i_0\left(a-\frac{2D}{kd}\right)$$

则可见度为

$$V\approx\frac{\frac{D}{kd}}{a}=\frac{D\lambda}{2\pi ad}=\frac{\Delta x}{2\pi a}$$

【例4.14】 在做菲涅耳双棱镜实验时，测得以下数据：狭缝S所在平面与观察屏P之间的距离$l=676$ mm，屏上$N=20$条干涉纹的总宽度为$\Delta x'=4.158$ mm，如图4.21所示。为了测出两虚光源间距d，可在屏与棱镜间放一薄凸透镜，使其焦距$f'\leqslant\frac{l}{4}$，当透镜位于图中Ⅰ位置时，在屏上得到两虚光源的放大像，两者间距$d_1=2.166$ mm；当透镜位于Ⅱ位置时，在屏上得到两虚光源的缩小像，间距$d_2=1.437$ mm。试利用上述数据推算光源的波长。

分析 菲涅耳双棱镜可视为以狭缝S的两个虚像为相干光源的干涉装置。通过上述两次成像的过程可以计算出两虚像的空间位置，再利用已测出的干涉条纹的间距就可以求出光源的波长。同时也可以计算出棱镜的顶角。

解 在满足傍轴条件时，光源S经双棱镜成两个像，其中的每一个像再经透镜成像。按题中所给条件，可知在物平面像平面不变的情形下，经同一个透镜成两个像，相当于两次物像互换。设双棱镜所成的两个像之间距离为d，则由于两次横向放大率互为倒数，

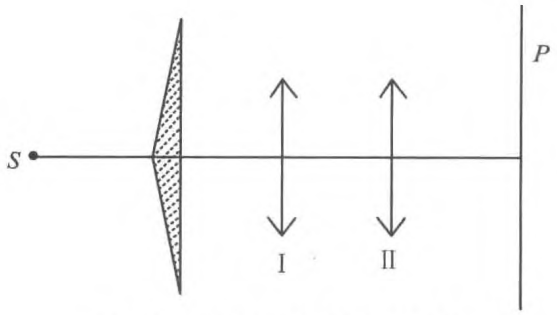


图 4.21 菲涅耳双棱镜的干涉装置

于是有

$$\beta_1\beta_2\frac{d_1}{d}\cdot\frac{d_2}{d}=1$$

于是

$$d=\sqrt{d_1d_2}=1.764\ \text{mm} \tag{1}$$

由双缝干涉条纹间距公式,得到

$$\lambda=\frac{d}{D}\Delta x=\frac{\sqrt{d_1d_2}}{l}\cdot\frac{\Delta x'}{N}=589.9\ \text{nm}$$

【例 4.15】 如图 4.22 所示的菲涅耳双棱镜干涉装置,参数已在图中标出。若上下两棱镜的折射率不相等,分别为 n_1 和 n_2,求:

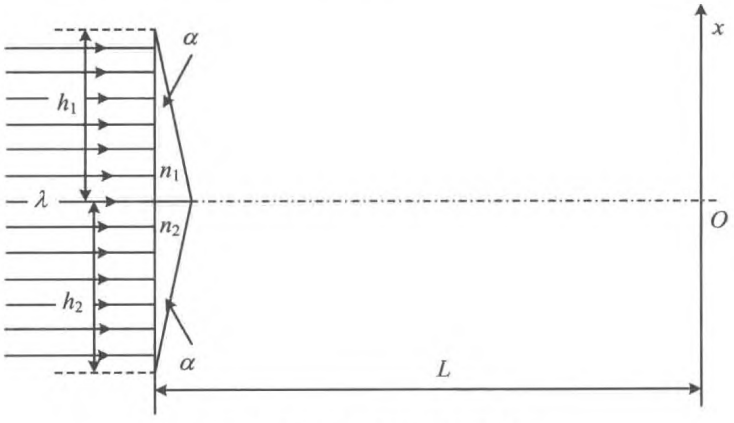


图 4.22 不对称菲涅耳双棱镜

(1) 接收屏上零级亮纹的位置;

(2) 接收屏上相邻亮纹的间隔。

分析 入射的平面光波经棱镜折射后，仍是平面波。本例中，两列相干的平面波方向不对称，因而干涉的零级不在光轴上。

解 (1) 经过上下棱镜折射的光波，偏向角分别为

$$\theta_1 = (n_1 - 1)\alpha$$

$$\theta_2 = (n_2 - 1)\alpha$$

如图 4.23 所示，两列折射光波的等相位面分别为 Σ_1 和 Σ_2。建立直角坐标系，接收屏所在处为 xz 平面，原点为 O。O 点到 Σ_1 和 Σ_2 的距离分别为

$$L_1 = (h_1\tan\theta_1 + D)\cos\theta_1 \approx h_1\theta_1 + D$$

$$L_2 = (h_2\tan\theta_2 + D)\cos\theta_2 \approx h_2\theta_2 + D$$

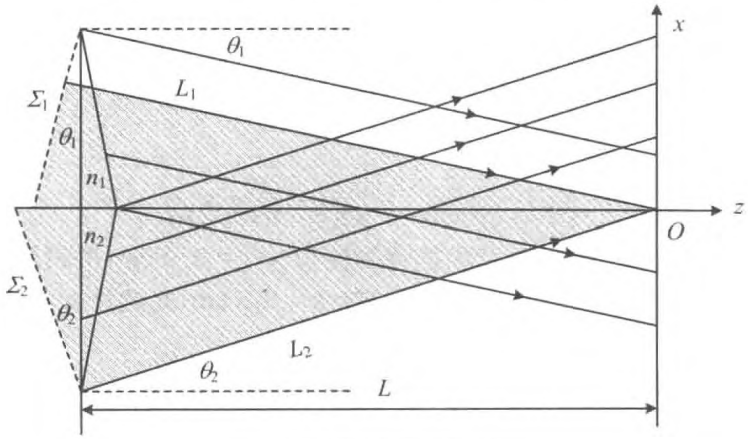


图 4.23 相干光的方向

两列出射光波的波矢分别为

$$\boldsymbol{k}_1 = k(-\sin\theta_1\,\boldsymbol{e}_x + \cos\theta_1\,\boldsymbol{e}_z) \approx k(-\theta_1\,\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_z)$$

$$\boldsymbol{k}_2 = k(\sin\theta_2\,\boldsymbol{e}_x + \cos\theta_2\,\boldsymbol{e}_z) \approx k(\theta_2\,\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_z)$$

若设入射波在棱镜入射侧面的初相位为 0，则两列出射光波在 O 点的初相位分别为

$$\varphi_{10} = kL_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(h_1\theta_1 + D)$$

$$\varphi_{20} = kL_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(h_2\theta_2 + D)$$

两列光波在接收屏上 (x, y) 处的相位分别为

$$\varphi_1(x, y) = \varphi_{10} + \boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{r}$$

$$= \varphi_{10} + k(-\theta_1\,\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_z) \cdot (x\,\boldsymbol{e}_x + y\,\boldsymbol{e}_y)$$

$$= \varphi_{10} - k\theta_1 x$$

$$\varphi_2(x,y) = \varphi_{20} + \boldsymbol{k}_2 \cdot \boldsymbol{r}$$

$$= \varphi_{10} + k(\theta_2 \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_z) \cdot (x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y)$$

$$= \varphi_{20} + k\theta_2 x$$

两列光波在接收屏上(x,y)处的相位差为

$$\Delta\varphi(x,y) = \varphi_2(x,y) - \varphi_1(x,y) = \varphi_{20} - \varphi_{10} + k\theta_2 x + k\theta_1 x$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda}(h_2\theta_2 - h_1\theta_1) + \frac{2\pi}{\lambda}(\theta_2 + \theta_1)x$$

亮条纹应满足

$$\frac{2\pi}{\lambda}(h_2\theta_2 - h_1\theta_1) + \frac{2\pi}{\lambda}(\theta_2 + \theta_1)x_j = 2j\pi$$

零级亮纹的位置为

$$x_0 = \frac{h_1\theta_1 - h_2\theta_2}{\theta_2 - \theta_1} = \frac{(n_1 - 1)h_1 - (n_2 - 1)h_2}{n_2 + n_1 - 2}$$

(2) 条纹间隔为

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\theta_2 + \theta_1} = \frac{\lambda}{(n_2 + n_1 - 2)\alpha}$$

【例 4.16】 如图 4.24 所示，劳埃德镜的镜长为 $l = 5.0$ cm，屏幕距镜的前端 $l_1 = 3.0$ m，缝光源距镜后端 $l_2 = 20$ cm，距镜面高度 $h = 0.5$ cm，光波长 $\lambda = 589.3$ nm。求：

(1) 屏幕上条纹的间距；

(2) 出现的干涉条纹的数目。

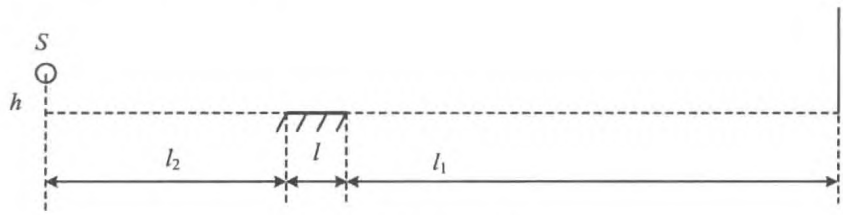


图 4.24 劳埃德镜

分析 劳埃德镜的干涉是一种分波前的干涉，从缝光源直接射到屏上的光与经平面镜反射后照到屏上的光均来自同一光源 S，因而是相干的，它们在屏上相遇而发生干涉。通常情况下，上述 h 的数值较小，光是掠入射到镜面上的，因而反射光有半波损失。等效地，可以将这种装置看做是缝光源 S、像光源 S' 间的干涉。

解 (1) 如图 4.25 所示，缝光源的像为 S'，两光源间距 $\overline{SS'} = 2h$，而缝到屏的距离为

$$D = l_1 + l_2 + l$$

由双缝干涉的条纹间距公式，得到

$$\Delta x = \frac{D}{d}\lambda = \left(\frac{l_1 + l_2 + l}{2h}\right)\lambda = \left(\frac{3.0 + 5.0 \times 10^{-2} + 2.0 \times 10^{-2}}{2 \times 0.5 \times 10^{-2}}\right) \times 589.3 \times 10^{-9}$$

$$= 1.8 \times 10^{-4}\ (\text{m})$$

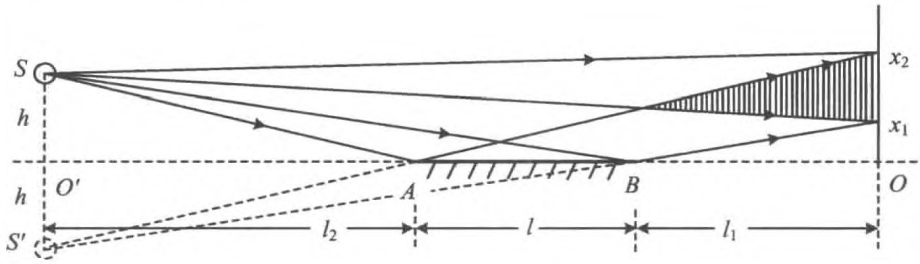


图 4.25 相干光

(2) 图中$\overline{x_1 x_2}$为相干区域，由几何关系可知$\triangle O'S'A \sim \triangle Ax_2O$，$\triangle O'S'B \sim \triangle Bx_1O$，故得

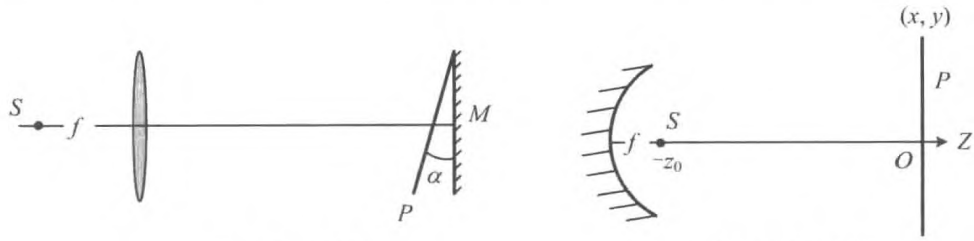
$$\overline{x_1 x_2} = \overline{x_2 O} - \overline{x_1 O} = \left(\frac{l + l_1}{l_2}\right)h - \left(\frac{l_1}{l + l_2}\right)h$$

$$= \left(\frac{3.0 + 5.0 \times 10^{-2}}{2.0 \times 10^{-2}} - \frac{3.0}{7.0 \times 10^{-2}}\right) \times 0.5 \times 10^{-2} = 0.548\ (\text{m})$$

因而条纹数目

$$N = \frac{0.548}{1.8 \times 10^{-4}} = 3\,045\ (\text{条})$$

【例 4.17】 计算如图 4.26 所示的干涉装置所形成的条纹形状和宽度：



(a) 平面镜分光　　(b) 球面镜分光

图 4.26 干涉装置

(1) 图 4.26(a)的点光源位于薄凸透镜的物方焦点上，P 为半透明的观察屏，M 为平

面镜；

(2) 图 4.26(b)的点光源在球面镜的焦点上。

分析 图 4.26(a)中，S 发出的球面光经透镜后变为平面光，直接射向 P 的光与被 M 反射的光相干叠加。当屏与镜间的夹角 α 很小时，光程差就等于 PM 间距的两倍，所以该装置等效于楔形空气膜的干涉。图 4.26(b)中，S 直接射向 P 的球面波与经球面镜反射的平面波产生干涉，利用傍轴条件求解。

解 (1) 如图 4.26(a)所示，点光源 S 发出的球面波经透镜后变为平面波，到达接收屏 P 时，分为两部分，有一半透过屏后到达平面镜 M，被 M 反射后又到达接收屏，与直接射到屏的光干涉。两部分的光程差是透过屏又反射回屏的光在空气尖劈中所经历的光程，当 α 很小时，即等于直角三角形的底边长的两倍，考虑到光被 M 反射所产生的半波损失，有

$$2(x_0 - x)\sin\alpha + \frac{\lambda}{2} = m\lambda \tag{1}$$

其中，$x_0 - x$ 为屏上一点到屏与反射镜交线的距离。所以条纹是平行于上述交线的等间隔直条纹。相邻条纹间距为

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\sin\alpha} \approx \frac{\lambda}{2\alpha} \tag{2}$$

(2) 由图 4.26(b)，设 P 到 S 的距离为 z_0，则在屏上，球面波的复振幅为

$$\widetilde{E}_1(P) = \frac{A_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}} e^{ik\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}} \tag{3}$$

经球面镜反射后的平面波的复振幅为(考虑半波损失)

$$\widetilde{E}_2(P) = A'_0 e^{ik\left(2f + z_0 + \frac{\lambda}{2}\right)} \tag{4}$$

在傍轴条件下为

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2} = z_0\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{z_0^2} + 1} \approx z_0 + \frac{x^2 + y^2}{2z_0}$$

于是式(3)化为

$$\widetilde{E}_1(P) = \frac{A_0}{z_0} e^{ik\left(z_0 + \frac{x^2+y^2}{2z_0}\right)} \tag{5}$$

在屏上任一点 $P(x, y, 0)$，两列波的光程差为

$$\Delta L = 2f + z_0 + \frac{\lambda}{2} - \left(z_0 + \frac{x^2 + y^2}{2z_0}\right) = 2f + \frac{\lambda}{2} - \frac{\rho^2}{2z_0}$$

亮条纹满足以下条件

$$2f + \frac{\lambda}{2} - \frac{\rho_m^2}{2z_0} = m\lambda \tag{6}$$

即

$$\rho_m^2 = z_0(4f + \lambda - 2m\lambda) \tag{7}$$

为一系列的同心圆环。相邻圆环间距为

$$\Delta\rho = \frac{z_0}{\rho}\lambda \tag{8}$$

【例 4.18】 薄透镜焦距为 f，观察屏位于其右侧焦平面处，一平面反射镜在透镜左侧，与主光轴垂直，一单色点光源（波长为 λ）靠近反射镜右侧放置，两者间距为 a。问：

（1）在屏上能观察到什么形状的干涉花样？

（2）干涉级次是如何分布的？最大的干涉级次是多少？

（3）如果光源缓缓向平面镜移动，屏上的干涉花样将如何变化？

分析 点光源经平面镜成一虚像，则虚、实两光源发出的光波经过透镜，在屏上进行干涉。需要注意的是，反射光有半波损失。

解 （1）如图 4.27 所示，点光源 Q 经平面镜 M 成虚像 Q'，由于观察屏位于像方焦平面，故虚实点光源发出的相互平行的波列才能在屏上相遇进行干涉。设光线与主光轴夹角为 θ，则两列光的光程差为（记入半波损失）

$$\Delta L = 2a\cos\theta + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} m\lambda & (\text{亮纹}) \\ \left(m + \dfrac{1}{2}\right)\lambda & (\text{暗纹}) \end{cases} \tag{1}$$

可见光程差仅取决于 θ，故条纹为以像方焦点为中心的一系列同心圆环。

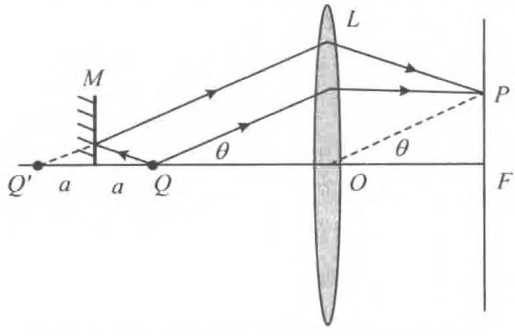


图 4.27 分光装置及两列光的光程差

当 θ 很小时

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} = 1 - \frac{x^2}{2f^2}$$

代入式(1)，可得条纹位置

$$x_{亮} = f\sqrt{2 - \left(\frac{m - \frac{1}{2}}{a}\right)\lambda} \tag{2}$$

(2) $\theta = 0$，m 取极大值，故中心处干涉级次最高，为

$$m = \frac{2a\cos\theta}{\lambda} + \frac{1}{2}$$

对式(1)两端取微分，可得

$$-2a\sin\theta \mathrm{d}\theta = \lambda \mathrm{d}m$$

取$|\mathrm{d}m| = 1$，得到条纹的角距离为

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{2a\sin\theta} \tag{3}$$

可见干涉条纹中心疏、边缘密。

(3) 移动过程中，a 变小，则第 m 级亮纹的 θ 也变小，则可以看到条纹向中心收缩，并消失。

【例 4.19】 将焦距为 25 cm 的透镜切去宽度 a 为 3 mm 的中央部分，再将剩余的两部分黏合起来，如图 4.28 所示，这种透镜被称作比累对切透镜。在该透镜的左侧轴线上放置一波长为 600.0 nm 的单色点光源，在另一侧放置一个观察屏。在观察干涉条纹时发现，当观察屏沿轴线移动时，条纹间距 Δx 保持不变。试求：

(1) 屏上条纹间隔 Δx；

(2) 设透镜上下边缘的间距 $D = 6$ cm，问观察屏移到何处，干涉条纹数最多？有多少条？屏幕移动到何处，才看不到干涉条纹？

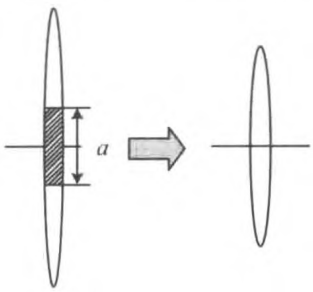


图 4.28 比累对切透镜

分析 比累对切透镜看起来是一个透镜，但由于上面一半的光轴在对称轴的下方，下面一半的光轴在对称轴的上方，这实际上是两个主平面重合的等焦距透镜。因而从物方入射的一列光波，经过透镜后成为相干的两列。本题中，移动观察屏时，条纹间距不变，则可断定是两列平行光的干涉，因而光源处于透镜的物方焦平面上。

解 (1) 由题意可作光路如图 4.29 所示。

图 4.29 中 O_1，O_2 分别为透镜上下部分的光心，由于光源 S 处于物方焦平面上，因而经过透镜后，变为两列对称的平面波，每列与光轴的夹角为 α，$\tan\alpha = \frac{a}{2f}$。

干涉条纹的间隔为

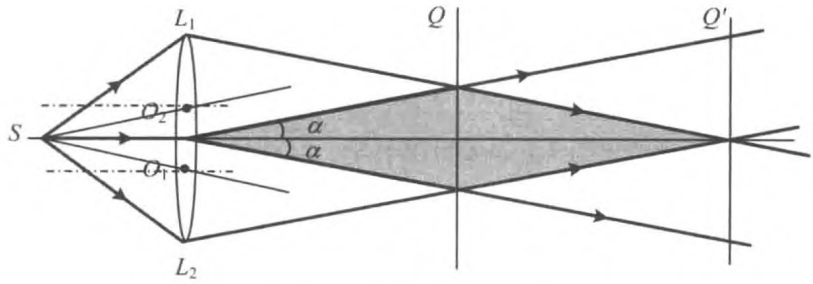


图 4.29 相干光的特征

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\sin\alpha} \approx \frac{\lambda}{2\tan\alpha} = \frac{\lambda f}{a} = 0.5\ \text{mm}$$

(2) 由图 4.29 可知,干涉条纹消失的位置为

$$z_1 = \frac{\frac{D}{2}}{\tan\alpha} = \frac{Df}{a} = 2\,500\ \text{cm}$$

干涉条纹最多的位置为

$$z_2 = \frac{z_1}{2} = 1\,250\ \text{cm}$$

此时干涉范围为

$$2z_2\tan\alpha = z_1\tan\alpha = \frac{D}{2}$$

条纹数为

$$\frac{\frac{D}{2}}{\Delta x} + 1 = \frac{60}{2\times 0.5} + 1 = 61\ (\text{条})$$

【例 4.20】 如图 4.30 所示,将一焦距为 f 的凸透镜切去宽度为 A 的中央部分,再将剩余两半黏合,在黏合透镜的左焦点处放置一点光源,在其右侧放一个杨氏双缝屏,缝宽为 a,缝距为 d,求此时位于右侧远处(即 $D \gg d$, $D \gg a$)屏上的光强分布?

分析 光源发出的光经黏合透镜后变为两列平行光,分别沿着与主轴成 $\pm\theta'$ 角的方向传播,上述角度由 $\tan\theta' = \frac{A}{2f}$ 决定。再经过杨氏双缝,就变为 4 列相干光,在屏上进行相干叠加。

解 点光源 S 发出的球面波经黏合透镜后,变为两列平面波,与光轴间的角度由 $\tan\theta' = \frac{A}{2f}$ 决定。波矢可以表示为

$$\boldsymbol{k} = k(\pm \boldsymbol{e}_x \sin\theta' + \boldsymbol{e}_z \cos\theta')$$

在双缝$(\pm d/2, y, 0)$处的相位为

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} = \frac{\pm kd\sin\theta'}{2}$$

即每一狭缝处，有两列相位差为 $kd\sin\theta'$ 的相干光。

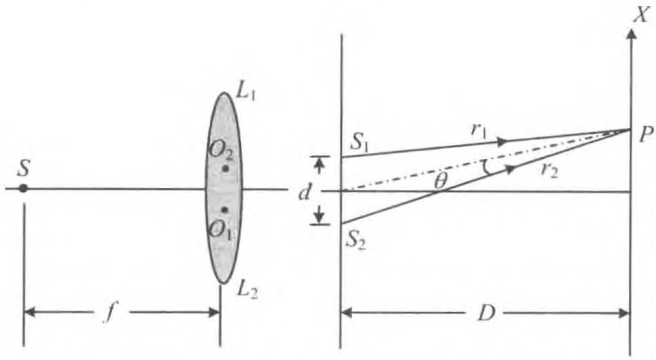


图 4.30 双缝前有透镜

于是，屏上每一点是 4 列相干光的叠加，其复振幅可以分别表示为

$$e^{ikr_1}, e^{ik(r_1+d\sin\theta')}, e^{ikr_2}, e^{ik(r_2+d\sin\theta')}$$

由于 $D \gg d, D \gg a$，对于屏上靠近光轴的区域，题中的干涉满足近轴条件。于是

$$\sin\theta' = \frac{A}{2f}$$

$$r_2 - r_1 = \frac{x}{D}d$$

$$\begin{aligned}\widetilde{E}(P) &= E_0\left[e^{ikr_1} + e^{ik(r_1+d\sin\theta')} + e^{ikr_2} + e^{ik(r_2+d\sin\theta')}\right] \\ &= E_0 e^{ikr_1}\left[1 + e^{ikd\frac{A}{2f}} + e^{ik\frac{x}{D}d} + e^{ik\left(\frac{x}{D}d+d\frac{A}{2f}\right)}\right]\end{aligned}$$

光强分布

$$\begin{aligned}I(P) &= \widetilde{E}(P)\cdot\widetilde{E}^*(P) \\ &= I_0\left\{4 + 4\left\{\cos\left(\frac{2\pi xd}{\lambda D}\right) + \cos\left(\frac{2\pi da}{2\lambda f}\right) + 2\left[\cos\frac{2\pi d}{\lambda}\left(\frac{A}{2f}+\frac{x}{D}\right)\right.\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\left. + \cos\frac{2\pi d}{\lambda}\left(\frac{A}{2f}-\frac{x}{D}\right)\right]\right\}\right\}\end{aligned}$$

【例 4.21】 将一焦距 f 为 50 cm 的汇聚透镜的中央部分截取 6 mm，把余下的上下两部分再黏合在一起，成为一块透镜 L。在透镜 L 的对称轴上，左边 300 cm 处有一波长

$\lambda = 500.0$ nm 的单色点光源 S，右边 450 cm 处置一光屏 DD。试分析并计算：

(1) S 发出的光经过透镜 L 后的成像情况，如所成之像不止一个，计算像间的距离；

(2) 在光屏 DD 上能否观察到干涉条纹？如能观察到干涉条纹，相邻明条纹的间距是多少？

解 如此处理后的透镜等效于具有两个光轴的透镜，光轴偏移现在的中心轴的距离为 $\pm y = 3$ cm。

(1) 由高斯公式算得点光源经每个半透镜后的像距为

$$s' = \frac{sf}{s-f} = \frac{300 \times 50}{300 - 50} = 60\ (\text{cm})$$

像高到半透镜光轴的距离

$$y' = -\frac{s'}{s}y = -\frac{60}{300} \times 3 = -0.6\ (\text{mm})$$

如图 4.31 所示，两像光源间距

$$d = 2y + 2y' = 7.12\ \text{mm}$$

(2) 由图 4.31 可知，由于接收屏在像点的右侧，两像光源发出的光在屏幕上并无交会，故屏上没有干涉条纹。只有将接收屏移动到透镜与像点之间的某个区域中，才能观察到干涉。

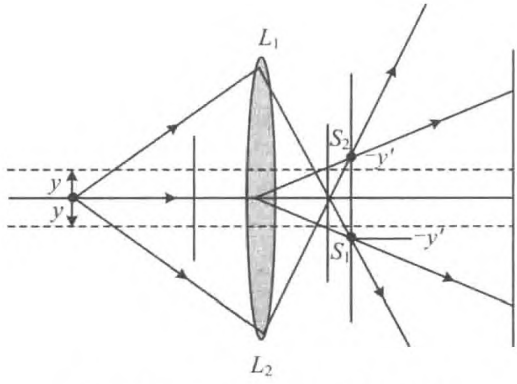


图 4.31 光源的像其实重叠区域

【例 4.22】 如图 4.32 所示，一凸透镜的焦距 $f = 20.00$ cm，将其剖开为两部分，记为 L_1 和 L_2，再沿光轴将两半错开 8.00 cm。波长为 500.0 nm 的平面光波沿着光轴方向入射。

(1) 求两列光波在各自像点处的相位差。

(2) 在哪个区域中能够出现干涉？干涉条纹有什么特征？

(3) 如果在两像点的中点处取一垂直于光轴的平面，说明在此平面上干涉条纹的形状，并计算相邻亮条纹的间距。

(4) 如果换用凹透镜，能否观察到干涉？

分析 点光源经上述透镜后成两个像，可以看做是两个相干的点光源。于是在这两个点光源所发出的球面波的交叠区域，就可产生干涉。

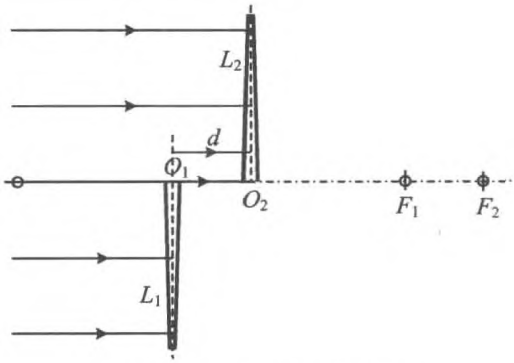


图 4.32 梅斯林对切透镜

解 (1) 平行光束经过半透镜后，汇聚到各自的焦点处，如图 4.33 所示。两焦点间距 $F_1F_2 = d = 2.00$ cm。

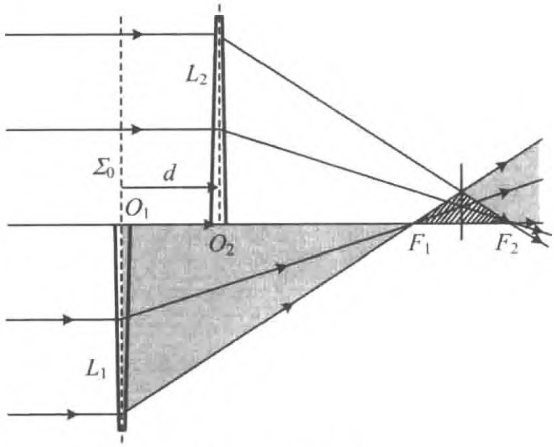


图 4.33 汇聚光束

在图 4.33 中，L_1 和 L_2 的主平面之间光程为 $\overline{O_1O_2} = d$，根据等光程性原理，从入射光的波面算起，向 F_2 处汇聚的光波与向 F_1 处汇聚的光波的光程差为 d，相位差为

$$\Delta\varphi_0 = \varphi(F_2) - \varphi(F_1) = kd = \frac{2\pi}{\lambda}d = \frac{2\pi \times 20.0}{500.0 \times 10^{-6}} = 8\pi \times 10^4$$

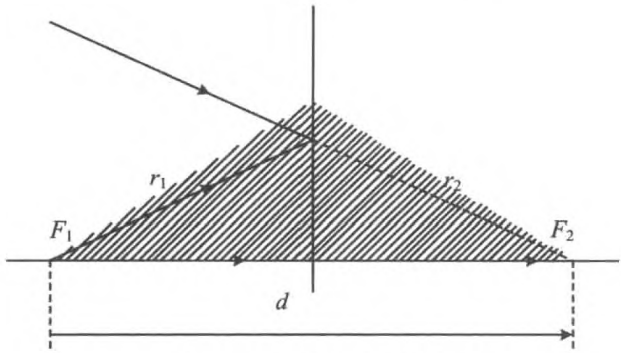


图 4.34 干涉区域及光程差

(2) 如图 4.33 所示,只有在两列波的交叠区域才能出现干涉,所以在两个交点之间光轴上方的区域中会出现同心圆环形的干涉条纹。

(3) 由于像点可以看做两个相干的点光源,但是在观察平面处,F_1 是发散的点光源,F_2 是汇聚的点光源,如图 4.34 所示,两列光波在接收屏上某一点的相位分别为

$$\varphi_1(r_1) = \varphi(F_1) + kr_1$$

$$\varphi_2(r_2) = \varphi(F_2) - kr_2$$

相位差为

$$\Delta\varphi = \varphi_1(r_1) - \varphi_2(r_2) = \varphi(F_1) - \varphi(F_2) + k(r_2 + r_1) = 2kr - \Delta\varphi_0$$

亮条纹满足的条件为

$$\Delta\varphi = 2kr_j - \Delta\varphi_0 = 2j\pi$$

若条纹的半径记作 ρ,由于

$$r = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \rho^2}$$

可得到

$$2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \rho_j^2} - d = j\lambda$$

由于满足傍轴条件

$$2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \rho_j^2} = d\sqrt{1 + \frac{4\rho_j^2}{d^2}} \simeq d\left(1 + \frac{2\rho_j^2}{d^2}\right)$$

则有

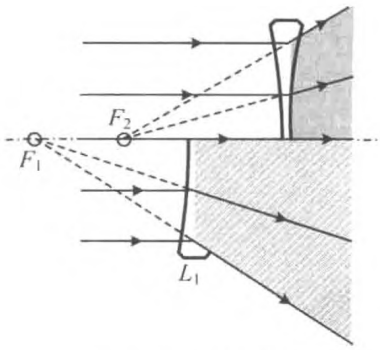


图 4.35　凹透镜分光

$$\rho_j = \sqrt{\frac{j\lambda d}{2}} = \sqrt{2j}\ \text{mm}$$

(4) 如图 4.35 所示，经过凹透镜后，光束总是发散的，在像方两列光波没有重叠的区域，则无法产生干涉。

【例 4.23】 如图 4.36 所示，波长 $\lambda = 488.0$ nm 的 Ar^+ 激光从折射率 $n = 1.50$、顶角 $\alpha = 1^\circ$ 的玻璃光楔的左侧正入射，出射后射向一个杨氏双缝干涉装置。干涉装置中，双缝屏、接收屏的平面都与光楔的左侧面平行，双缝间隔 $d = 0.5$ mm，接收屏到双缝屏的距离 $L = 1\,000$ mm，图中 O 点位于装置的对称轴上。问：

(1) 接收屏上 0 级亮纹在何处？

(2) 0 级附近，相邻亮纹的间隔是多少？

(3) 若在 S_1 缝后放置一个厚度 $t = 0.02$ mm、折射率 $n_0 = 1.6$ 的透明薄片，接收屏上 0 级亮纹将移到何处？

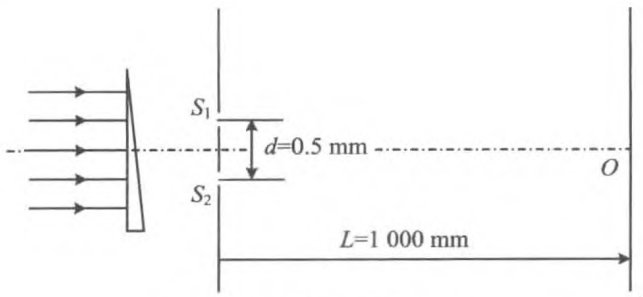


图 4.36　双缝之前有一光楔

分析　激光束经光楔后，成为斜射向双缝屏的平面光波。

解　平行光经光楔折射后，向光楔底部的偏转角为 $\delta = (n-1)\alpha = 0.5^\circ$。

射向双缝的平面光波，波矢与双缝屏法线的夹角也为 0.5°，到达两缝的光程差为 $\Delta L_1 = d\sin\delta$，光在缝 S_2 处的相位比 S_1 处滞后(图 4.37)

$$\Delta\varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\delta$$

(1) 双缝发出的光波在接收屏上距中心 x 处的光程差为 $\Delta L_2 = \frac{d}{L}x$。0 级亮纹出现

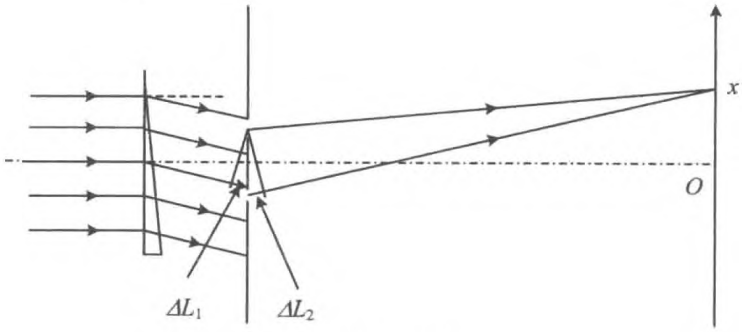


图 4.37 光程差

的位置满足条件

$$\Delta L_1 + \Delta L_2 = d\sin\delta + \frac{d}{L}x = 0$$

即

$$x = -L\sin\delta = -8.7\ \text{mm}$$

在 O 点下方。

(2) 相邻亮纹的间隔为

$$\Delta x = \frac{L}{d}\lambda = \frac{1\,000}{0.5} \times 488.0 \times 10^{-6} = 0.98\ (\text{mm})$$

(3) 在缝 S_1 后插入透明薄片后，经 S_1 到达接收屏的光程变大。与插入前相比，光程差改变了

$$\Delta = (n_0 - 1)t = 0.012\ \text{mm}$$

在接收屏上，光程差每改变一个波长，干涉亮纹移过一个条纹间隔。而

$$\frac{\Delta}{\lambda} = \frac{0.012\ \text{mm}}{488.0 \times 10^{-6}\ \text{mm}} = 24.6$$

即亮纹整体向上移过 24.6 个条纹间隔，距离为 24.0 mm。

【例 4.24】 如图 4.38 所示，将一个顶角为 α 的玻璃光楔与焦距为 f 的截去一半的薄凸透镜拼接，在透镜左焦点处有一点光源，发出波长为 λ 的单色光。右侧距离透镜 $4f$ 处有一接收平面。已知光楔与透镜材料的折射率均为 n。

(1) 在接收屏上，哪些区域能观察到干涉条纹？傍轴区域中的干涉条纹有怎样的形状？

(2) 若屏与透镜光轴相交处 O 点为亮纹，计算从 O 点数起第 j 根亮纹中心到 O 点的距离。

分析 经过光楔和透镜的光波是相干的。等效于从各自的像点发出的。

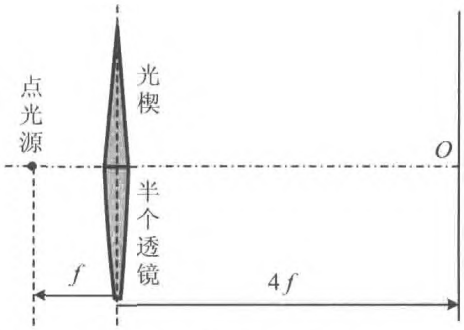


图 4.38 光楔与透镜组合

解 (1) 点光源经光楔后，成虚像于实际光源的正上方，到轴线的距离为

$$h = (n-1)\alpha f$$

对于接收屏而言，就是一个点光源，发出球面光波。

点光源发出的球面光波经透镜后，变为沿光轴传播的平面光波，只照射光轴之下的部分。

上述两列光波相干，在接收屏轴线之下的部分相干叠加后，由于是球面波与平面波的叠加，形成圆环形干涉条纹。实际上，在傍轴区域，可看做是相互平行的直线形条纹。

而在轴线之上，由于只有一列球面光波，没有干涉，被均匀照明，没有条纹。

(2) 如图 4.39 所示，屏上距 O 点 x 处，球面波的光程为

$$L = \sqrt{(5f)^2 + (h+x)^2} = 5f\sqrt{1 + \frac{(h+x)^2}{(5f)^2}}$$

$$\approx 5f\left[1 + \frac{(h+x)^2}{2(5f)^2}\right]$$

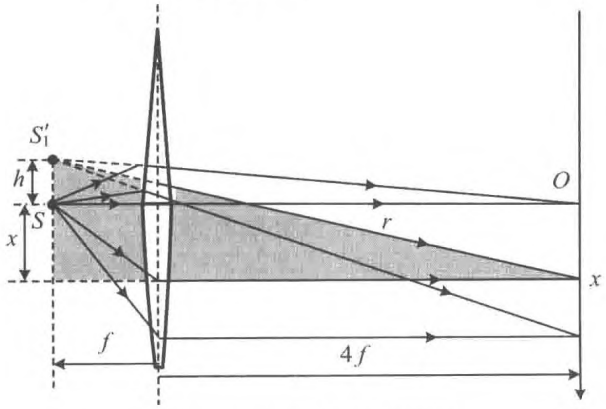


图 4.39 相干波列的光程差

O 点处的光程

$$L_0 = \sqrt{(5f)^2 + h^2} \approx 5f\left[1 + \frac{h^2}{2(5f)^2}\right]$$

若 x 处为从 O 点数起第 j 根亮纹，则两点的光程差应当为 $L - L_0 = j\lambda$，即

$$L - L_0 = 5f\left[\frac{(h+x)^2}{2(5f)^2} - \frac{h^2}{2(5f)^2}\right] = \frac{2hx + x^2}{10f}$$

$$= \frac{2(n-1)\alpha fx + x^2}{10f} = j\lambda$$

整理得到

$$x^2 + 2(n-1)\alpha fx - 10j\lambda f = 0$$

解得

$$x = \frac{-2(n-1)\alpha f \pm \sqrt{4(n-1)^2\alpha^2 f^2 + 40j\lambda f}}{2}$$

取正值，为

$$x = \sqrt{(n-1)^2\alpha^2 f^2 + 10j\lambda f} - (n-1)\alpha f = (n-1)\alpha f\left[\sqrt{1 + \frac{10j\lambda}{(n-1)^2\alpha^2 f}} - 1\right]$$

$$\approx (n-1)\alpha f\left[1 + \frac{10j\lambda}{2(n-1)^2\alpha^2 f} - 1\right] = \frac{10j\lambda}{2(n-1)\alpha}$$

【例 4.25】 如图 4.40 所示，L 是被截去一半的薄凸透镜，M 是平面镜，S 为点光源，发出波长为 λ 的单色光。已知 S 位于 L 的焦点处，S 到 M 的距离为 $h/2$，S 到接收屏的距离为 D。D 比 h 大得多，也比透镜的焦距大得多。

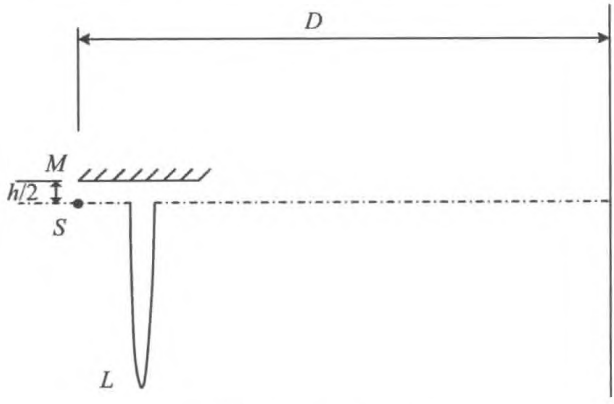


图 4.40 分光装置

(1) 判断屏上干涉条纹的形状和出现的区域；

(2) 若接收屏与透镜光轴相交处恰好为暗纹，计算在图示竖直平面内自轴线算起第 j 条亮纹到轴线的距离。

分析 射到接收屏上的光，一部分是经 M 反射的，一部分是经 L 折射的，这两部分光波之间相干叠加。

解 (1) 经透镜的光为平面波，经反射镜的光为由 S 的像点 S' 点发出的球面波，有半波损失。条纹为不完整的圆环，圆环中心在轴线上 h 处。

(2) 如图 4.41 所示，S' 点发出的球面波到距轴 x 的点的光程为

$$r = \sqrt{D^2 + (h + x)^2} = D\sqrt{1 + \left(\frac{h + x}{D}\right)^2} = D\left[1 + \frac{(h + x)^2}{2D^2}\right]$$

$$= D + \frac{(h + x)^2}{2D}$$

到原点的光程为

$$r_0 = D + \frac{h^2}{2D}$$

由于平面波在接收屏上等相位，所以条纹的间隔由球面波的光程决定，r 每改变 1 个波长，就出现一根亮纹。

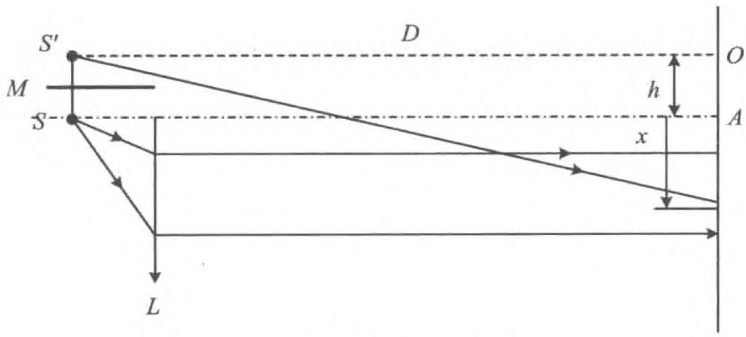


图 4.41 光程差的计算

原点处为暗纹，则第 1 根亮纹满足条件

$$r_1 - r_0 = D + \frac{(h + x_1)^2}{2D} - \left(D + \frac{h^2}{2D}\right) = \frac{\lambda}{2}$$

整理

$$(h + x_1)^2 - h^2 = D\lambda$$

$$x_1^2 + 2hx_1 - \lambda D = 0$$

得到

$$x_1 = \frac{2h \pm \sqrt{4h^2 + 4\lambda D}}{2} = h + \sqrt{h^2 + \lambda D}$$

第 j 根亮纹满足条件

$$r_j - r_0 = D + \frac{(h + x_j)^2}{2D} - (D + \frac{h^2}{2D}) = j\lambda - \frac{\lambda}{2}$$

整理

$$(h + x_j)^2 - h^2 = (2j - 1)\lambda D$$
$$x_j^2 + 2hx_j - (2j - 1)\lambda D = 0$$

得到

$$x_j = h + \sqrt{h^2 + (2j - 1)\lambda D}$$

4.3 分振幅的干涉装置

一束射到透明介质分界面上的光，其一部分能量被反射，一部分能量透射，由此得到两列相干光，这种获得相干光的方法称作分振幅方法，也称振幅分割法。最常见的分振幅干涉装置包括光学干涉薄膜和各种干涉仪。在某些情形下，一束光可以经过多次反射或透射后进行干涉，这就是多光束干涉的情形（例如法布里—珀罗干涉仪或标准具）。

最基本的分振幅干涉装置是薄膜干涉，典型的薄膜干涉分为等倾干涉和等厚干涉。

所谓等倾干涉，是指从薄膜两表面出射的同方向的波列具有相等的光程差，形成同一级干涉纹，这种情形下不计半波损失的光程差为

$$2n_2 h\cos i_2 = 2h\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1}$$

其中，h 为薄膜的厚度，n_1，n_2 分别为薄膜外部、内部媒质的折射率，i_1，i_2 分别为在薄膜界面处光的入射角、折射角。为了形成不同的干涉纹，要求入射光能够以各种角度入射，所以观察等倾干涉通常以单色扩展光源入射，在凸透镜的像方焦平面上观察干涉纹。

所谓等厚干涉，是指经过厚度相等的薄膜的反射波列之间有相等的光程差，从而形成同一级干涉纹。为了观察等厚干涉，通常使单色光以相同的角度入射到薄膜的表面，这样，不计半波损失的上下两表面反射光之间的光程差也为

$$2n_2 h\cos i_2 = 2h\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1}$$

由于光的角度相等，因而光程差与薄膜的厚度有关，膜厚相等处的光程差相等，是同一级干涉纹。

【例 4.26】 一束白光垂直照射厚度为 0.4 μm 的玻璃片，玻璃的折射率为 1.5，在可见光谱范围内（$\lambda = 400.0 \sim 700.0$ nm），反射光的哪些波长成分将被加强？

解 垂直入射，$i_1 = i_2 = 0$，反射光干涉相长的条件为

$$2nh = \frac{(2j+1)\lambda}{2}$$

其中，加强的波长成分为

$$\lambda = \frac{4nh}{2j+1} = \frac{4 \times 1.5 \times 0.4}{2j+1} = \frac{2.4}{2j+1} = 0.48\ (\mu\text{m}) = 480\ (\text{nm})$$

【例 4.27】 沿着与肥皂膜的法线成 35°角的方向观察时，膜呈绿色（$\lambda = 500.0$ nm），设肥皂水的折射率为 1.33，求：

（1）薄膜的厚度；

（2）如果垂直注视时，膜呈何种颜色？

解 （1）这是等倾干涉，沿着与法线成 35°角的方向观察时，光的入射角也是 35°。

反射光干涉相长的条件时

$$2h\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} = \frac{(2j+1)\lambda}{2}$$

可得

$$h = \frac{(2j+1)\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}} = \frac{(2j+1)500.0\ \text{nm}}{4\sqrt{1.33^2 - \sin^2 35^\circ}} = (2j+1) \times 1.041\,7 \times 10^{-4}\ \text{mm}$$

（2）垂直注视，$i_1 = i_2 = 0$，反射光干涉相长的条件为

$$2nh = \frac{(2j+1)\lambda}{2}$$

于是

$$\lambda = \frac{4nh}{2j+1} = \frac{4 \times 1.33 \times (2j+1) \times 1.041\,7 \times 10^{-4}\ \text{mm}}{2j+1} = 554.2\ \text{nm}$$

【例 4.28】 （1）光学玻璃的折射率为 1.55，某种长焦距镜头由 16 个镜片组成，估算这样的镜头对光强的透射率；

（2）解释为什么有些镜头（照相镜头或望远镜头）呈蓝紫色，而有些镜头呈紫色。

解 （1）镜头是傍轴成像系统，对于长焦距镜头，可认为光是正入射的。根据菲涅耳公式，光从折射率为 n_1 的媒质正入射到折射率为 n_2 的媒质时，振幅的反射率和透射率分别为

$$r = \frac{|n_1 - n_2|}{n_1 + n_2}$$

$$t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

光从空气射向玻璃，$n_1 = 1.00$，$n_2 = 1.55$，于是有

$$r = \frac{1.55 - 1.00}{1.55 + 1.00} = 0.22$$

$$t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = 0.78$$

光从玻璃射向空气，按斯托克斯倒逆关系，可得

$$r' = r = 0.22$$

$$t' = \frac{1 - rr'}{t} = 1.22$$

不考虑光波之间的干涉和光波在镜片的两个表面之间的多次反射，也不考虑镜片对光波的吸收。设入射光振幅为 A，从一个镜片透射后，振幅为 $A_2 = Att'$，光强为 $I_2 = A_2^2 = A^2 (tt')^2$。因而一个镜片对光强的透射率为

$$T_0 = (tt')^2 = 0.90$$

对光强的反射率为

$$R_0 = 1 - T_0 = 0.10$$

题中的镜头，对光强的透射率为

$$T = T_0^{16} = (0.90)^{16} = 0.19$$

(2) 由于镜头对光的反射率很高，因而其中的每个镜片都要蒸镀增透的薄膜，使得射向镜头的光能够尽量多地透过镜头。

但由于可见光有一定的波长分布范围，因而镀膜的镜头不可能使所有波长的光都有很高的透射率，只能使某一波段的光有很大的透射率，而该波段之外的光，透射率低一些，反射率高一些。

通常有两种情况。一种增透膜使得长波端有较高的反射率，即被反射的光波主要是红光，因而看起来镜头是红色的，这种增透膜也被称作“红膜”。相反的情况是短波端有较大的反射率，因而被反射的光主要是蓝光和紫光，镜头看起来呈蓝紫色，这种增透膜也被称作“蓝膜”。

【例 4.29】 玻璃板上有一层油膜，波长可连续改变的单色光正入射，在 $\lambda = 500.0$ nm 和 $\lambda = 600.0$ nm 时，观察到反射光干涉相消，并且在这两波长之间再无其他波长的光相消。

(1) 证明油膜的折射率一定小于 1.5(玻璃的折射率 1.5)；

(2) 若油的折射率为 1.3，求油膜的厚度；

(3) 如在油膜上方放置一单色点光源，问反射光等倾干涉条纹的反衬度有多大？

解 (1) 参与干涉的两列光波，第一列在空气与油的界面被反射，第二列在油和玻璃

的界面被反射。第一列反射光有半波损失。

如果油膜的折射率大于玻璃，则第二列反射光没有半波损失。则两列反射光之间有半波损失，即相干叠加中要计入半波损失，干涉相消的条件为

$$2nh = j\lambda \tag{1}$$

按题中所给条件，应当有

$$500j_1 = 700j_2 = 2nh \tag{2}$$

由于入射光波长的变化是连续的，且只有上述两个波长干涉相消，则式(2)中两整数要么相等，要么只能相差 1。这两种情形都不可能满足。

如果油膜的折射率小于玻璃，则第二列反射光也有半波损失。则两列反射光之间无半波损失，即干涉相消的条件是

$$2nh = \left(j - \frac{1}{2}\right)\lambda \tag{3}$$

于是

$$500\left(j_1 - \frac{1}{2}\right) = 700\left(j_2 - \frac{1}{2}\right) \tag{4}$$

从中可得到 $j_1 = 3, j_2 = 2$，这是合理的。

(2) 根据(1)中的讨论，取 $j = 3, \lambda = 500.0\ \text{nm}$ 则

$$h = \frac{\left(j - \frac{1}{2}\right)}{2n}\lambda = \frac{2.5 \times 500.0\ \text{nm}}{2 \times 1.3} = 480.8\ \text{nm}$$

(3) 入射光为自然光，正交分解后的 S, P 分量振幅相等。

由菲涅耳公式，S, P 分量振幅的反射率为

$$\frac{E'_{S_1}}{E_{S_1}} = \frac{n_1\cos i_1 - n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1 + n_2\cos i_2}$$

$$\frac{E'_{P_1}}{E_{P_1}} = \frac{n_2\cos i_1 - n_1\cos i_2}{n_2\cos i_1 + n_1\cos i_2}$$

S, P 分量振幅的透射率为

$$\frac{E_{S_2}}{E_{S_1}} = \frac{2n_1\cos i_1}{n_1\cos i_1 + n_2\cos i_2}$$

$$\frac{E_{P_2}}{E_{P_1}} = \frac{2n_1\cos i_1}{n_2\cos i_1 + n_1\cos i_2}$$

在垂直入射时，$i_1 = i_2 = 0$，因而上述 S, P 分量的反射率、透射率分别为

$$r = \frac{|n_1 - n_2|}{n_1 + n_2}$$

$$t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

在油膜上表面，空气 $n_1 = 1.0$，油 $n_2 = 1.3$，反射率和透射率分别为

$$r_1 = \frac{|n_1 - n_2|}{n_1 + n_2} = 0.13$$

$$t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = 0.87$$

油到空气的透射率为

$$t' = \frac{2n_2}{n_1 + n_2} = 1.13$$

在油膜的下表面，玻璃 $n_3 = 1.5$，反射率为

$$r_2 = \frac{|n_3 - n_2|}{n_3 + n_2} = 0.07$$

于是，第一列反射光（油膜上表面直接反射）的振幅为

$$E_1 = r_1 E_0 = 0.13E_0$$

第二列反射光（经油膜上表面透射、下表面反射、再经上表面透射）的振幅为

$$E_2 = tr_2 t' E_0 = 0.07E_0$$

反射光干涉条纹亮纹光强为

$$I_{max} = (E_1 + E_2)^2 = 0.04E_0^2$$

暗纹强度为

$$I_{min} = (E_1 - E_2)^2 = 0.003\,6E_0^2$$

反衬度为

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = 0.83$$

【例 4.30】 为了减少玻璃的反射，经常的做法是在玻璃表面上涂一层很薄的透明薄膜（增透膜）。其结构如图 4.42 所示，膜上方为空气（$n_1 = 1$），膜下方是玻璃（$n_2 = 1.5$），膜的折射率 $n = 1.3$。求：

（1）不涂增透膜时，玻璃的光强反射率是多少？一个由 6 片透镜构成的镜头，其光强透过率为多少？

（2）若想使波长为 600.0 nm 的反射光减小到最小，应涂多厚的膜？涂膜后光强反射率为多少？

（3）要想使反射光完全干涉相消，增透膜的折射率应取多少？

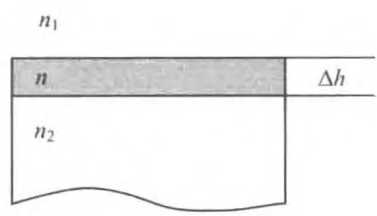


图 4.42 增透膜

分析 涂膜后，由于在膜的上下表面，反射光干涉

相消，因而可以提高透过率。透过率、反射率可以由菲涅耳公式计算。但一般情况下，由于两列光的振幅不相等，所以不能完全相消。只有膜的折射率满足一定条件时，才能使干涉完全相消，即两列光既有相反的相位、又有相同的光强(振幅)。

解 (1) 参考例 4.30，光线由空气向玻璃正入射或从玻璃向空气正入射时，光强反射率为

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 = 4\%$$

光透过 6 片透镜，即经过 12 个表面的反射，每个表面的光强透射率为

$$T = 1 - R = 96\%$$

因而总的光强透射率为

$$T_{\text{total}} = T^{12} = 0.96^{12} = 0.607 = 60.7\%$$

(2) 由于膜的折射率 $n = 1.3$，介于空气($n_1 = 1$)和玻璃($n_2 = 1.5$)之间，故两列反射光之间没有半波损失，干涉相消的条件是

$$2n\Delta h = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

膜厚应当为

$$\Delta h = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2n} = 230.8\left(m + \frac{1}{2}\right)\text{nm} \qquad (m = 0,1,2,\cdots)$$

涂膜后，上表面的振幅反射率为

$$r_1 = \frac{n - n_1}{n + n_1} = 0.130$$

下表面的振幅反射率

$$r_2 = \frac{n_2 - n}{n_2 + n} = 0.071$$

设入射光振幅为 A_0，则上表面反射的振幅为 $A_1 = A_0 r_1$，下表面反射后又返回空气中的光的振幅为

$$A_2 = A_0 t_1 r_2 t_1' = A_0 r_2 t_1 t_1' = A_0 r_2 (1 - r_1^2)$$

两列反射光干涉相消，光强为

$$I = (A_1 - A_2)^2 = A_0^2 [r_1 - r_2(1 - r_1^2)]^2 = I_0 [r_1 - r_2(1 - r_1^2)]^2$$

光强的反射率为

$$R' = \frac{I}{I_0} = [r_1 - r_2(1 - r_1^2)]^2 = [0.130 - 0.071(1 - 0.130^2)]^2$$

$$= 3.62 \times 10^{-3} = 0.36\%$$

(3) 欲使反射光完全干涉相消，要求两列反射光的振幅相等，即

$$A_1 = \left|\frac{n-n_1}{n+n_1}\right| A_0$$

与

$$A_2 = \left|\left(\frac{2n_1}{n+n_1}\right)\left(\frac{n_2-n}{n_2+n}\right)\left(\frac{2n}{n_1+n}\right)\right| A_0$$

相等，则有

$$\left|\frac{n_1-n}{n_1+n}\right| = \left|\left(\frac{2n_1}{n_1+n}\right)\left(\frac{n_2-n}{n_2+n}\right)\left(\frac{2n}{n_1+n}\right)\right|$$

可得

$$n^3-(4n_1-n_2)n^2+n_1(4n_2-n_1)n-n_1^2n_2=0$$

或者

$$n^3+(4n_1+n_2)n^2-n_1(4n_2+n_1)n-n_1^2n_2=0$$

将参数带入并化简，得到

$$n^3-2.5n^2+5n-1.5=0 \tag{1}$$

及

$$n^3+5.5n^2-7n-1.5=0 \tag{2}$$

在(1)～(3)范围内，式(1)无合理解；式(2)解为 $n\approx1.22$。

实际上，尚未发现 $n\approx1.22$ 的透明薄膜，使用氟化镁涂膜，其折射率为 1.38。

【例 4.33】 如图 4.43 所示，在一折射率为 n_3 的平板玻璃的表面上涂两层厚度分别为 t_1，t_2，折射率分别为 n_1，n_2 的介质膜。若空气折射率为 n_0，且满足 $n_0<n_1<n_2$，$n_2>n_3$。波长为 λ 的单色光垂直入射，不考虑各个界面的多次反射。已知由三个界面反射的三列光进入空气时，振幅相等。为了使反射光的总强度为零，必须选择适当的膜厚 t_1，t_2。求：

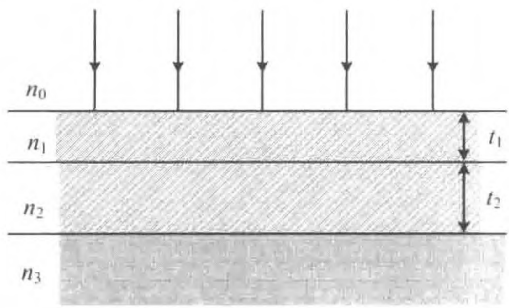


图 4.43 多层膜的干涉

(1) t_1 的最小值；

(2) 在 t_1 取最小值的情形下，t_2 的最小值是多少？

分析 本题中，有来自三个界面的三列反射光相干叠加，因而用复振幅方法较为简便。

解 (1) 建立坐标系，取 z 轴的正方向垂直向上，则在三列反射光中，考虑到半波损失，它们的复振幅可以分别写作

$$\tilde{U}_1 = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}, \tilde{U}_2 = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(2n_1t_1+z)}, \tilde{U}_2 = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(2n_1t_1+2n_2t_2+z+\pi)}$$

在空气中的合振动为三列反射光的相干叠加，于是

$$\tilde{U} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}[1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2kn_1t_1} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k(n_1t_1+n_2t_2)}]$$

如果 $\tilde{U}=0$，则有

$$1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2kn_1t_1} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k(n_1t_1+n_2t_2)} = 0$$

经下述简化过程

$$1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2kn_1t_1}(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}2kn_2t_2}) = 0 \Rightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}2kn_1t_1}(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}2kn_2t_2}) = -1 \Rightarrow 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}2kn_2t_2} = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2kn_1t_1}$$

即可得到一组联立的方程

$$\begin{cases} 1 - \cos 2kn_2t_2 = -\cos 2kn_1t_1 \\ \sin 2kn_2t_2 = -\sin 2kn_1t_1 \end{cases} \tag{1}$$

由方程组中的第二式，可得到

$$2kn_2t_2 = -2kn_1t_1 + 2m\pi \tag{2}$$

或

$$2kn_2t_2 = 2kn_1t_1 + (2m+1)\pi \tag{3}$$

如果将式(2)代入方程组中的第一式检验，得到

$$1 - \cos 2kn_1t_1 = -\cos 2kn_1t_1$$

即 $1=0$，所以式(2)不能成立。

对于式(3)，将其代入方程组中的第一式，有

$$1 + \cos 2kn_1t_1 = -\cos 2kn_1t_1$$

即

$$2\cos 2kn_1t_1 = -1$$

可解得

$$2 \times \frac{2\pi}{\lambda} n_1t_1 = 2j\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

即

$$t_1 = \frac{j \pm \frac{1}{3}}{2n_1}\lambda \tag{4}$$

式(4)的最小值为

$$t_1 = \frac{1}{6n_1}\lambda$$

由式(2)，可得

$$t_2 = \frac{2kn_1t_1 + (2m+1)\pi}{2kn_2} = \left[\frac{1}{6} + \frac{(2m+1)}{4}\right]\frac{\lambda}{n_2}$$

$m=0$ 时，最小值为

$$t_2=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\frac{\lambda}{n_2}=\frac{5}{12n_2}\lambda$$

本题还可用矢量方法计算。由于三列反射光的振幅相等，所以这是三个大小相等的矢量。如果要使它们的和为零，则只有构成一等边三角形，如图 4.44 所示。

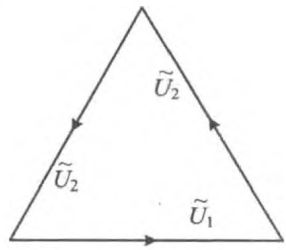


图 4.44 振幅矢量法

要求这三列光波两两之间的相位差均为 120°，于是有

$$2kn_1t_1=2m_1\pi+\frac{2\pi}{3}$$

$$2kn_2t_2+\pi=2m_2\pi+\frac{2\pi}{3}$$

膜厚分别为

$$t_1=\left(m_1+\frac{1}{3}\right)\frac{\lambda}{2n_1}$$

$$t_2=\left(m_2-\frac{1}{6}\right)\frac{\lambda}{2n_2}$$

均取最小值时，有

$$t_1=\frac{\lambda}{6n_1}$$

$$t_2=\frac{5\lambda}{12n_2}$$

【例 4.32】 将光滑的平板玻璃覆盖在柱形平凹透镜上，如图 4.45 所示，试求：

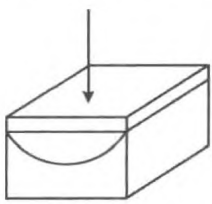


图 4.45 柱面对光的反射

(1) 用单色光垂直照射时，描述出反射光中干涉条纹分布的大致情况；

(2) 若圆柱面的半径为 R，且中央为暗纹，问从中央数第 2 条暗纹与中央暗纹的距离是多少？

(3) 连续改变入射光的波长，在 $\lambda=500.0$ nm 和 $\lambda=600.0$ nm 时，中央均为暗纹，求柱面镜的最大深度；

(4) 若轻压上玻璃片，条纹如何变化？

解 (1) 这是等厚干涉，厚度相等处是同一级干涉条纹，因而干涉条纹是平行于柱面轴线的直条纹。

(2) 考虑平板下表面的反射光与柱面反射光的干涉，这两列光波之间要计入半波损失，设 H_0 为轴线处的膜厚，距离轴线 d 处的膜厚位 h，如图 4.46 所示，则有以下几何关系

$$d^2 = R^2 - (R - H)^2 = 2RH - H^2$$

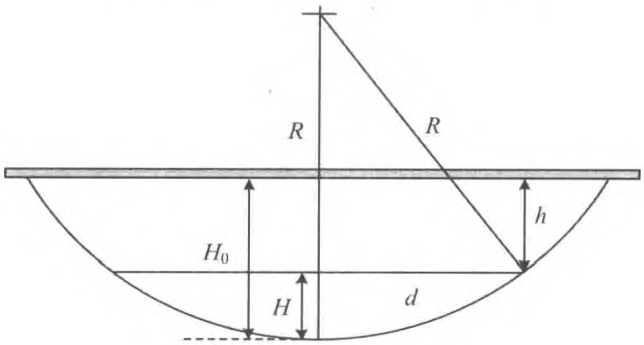


图 4.46 空气膜的厚度

由于各处的膜厚都比柱面半径 R 小得多，即 $H \ll R$，所以

$$d^2 \approx 2RH$$

于是有

$$h = H_0 - H = H_0 - \frac{d^2}{2R}$$

考虑半波损失，亮条纹满足

$$2h_j = \left(j + \frac{1}{2}\right)\lambda = 2\left(H_0 - \frac{d_j^2}{2R}\right)$$

即亮条纹满足

$$d_j = \sqrt{[2H_0 - (2j+1)\lambda]R}$$

而暗条纹满足

$$d_j' = \sqrt{2(H_0 - j\lambda)R}$$

中央暗纹，$d_{j_0}' = 0$，即 $j_0 = H_0/\lambda$。从中心数第 2 条暗纹

$$j = j_0 - 1 = H_0/\lambda - 1$$

与中央暗纹间距为

$$\Delta d' = \sqrt{2[H_0 - (j-1)\lambda]R} = \sqrt{2[H_0 - (H_0 - \lambda)]R} = \sqrt{2\lambda R}$$

(3) 此时

$$2H_0 = j\lambda_1 = (j + m)\lambda_2$$

由于波长连续改变，而其他波长的光不出现暗纹，m 只能取 1，即 $600j = 500(j+1)$，可得 $j = 5$。于是

$$H_0 = \frac{j\lambda_1}{2} = \frac{5 \times 600.0}{2} = 1\,500\ (\text{nm}) = 1.5\ (\mu\text{m})$$

(4) 此时,由于膜厚减小,原来的条纹为了与膜厚匹配,要向中间移动,看起来像是中心有条纹被吞入。

另外,由于受压柱面弧线的曲率半径将会增大,水平方向相差更大才能有足够的厚度差,因而相邻条纹间距会变大。

【例 4.33】 太阳光垂直照在水面上的一层油膜上,显示出彩色的干涉条纹。在 A,B 两点间的干涉条纹颜色依次是黄、绿、蓝、红和黄。设黄色的波长为 580.0 nm,油膜的折射率为 1.40。求:

(1) A,B 两点间油膜的厚度差是多少?

(3) 如果彩色的次序为黄、绿、蓝、黄则上述厚度差为多少?

(2) 设红光的波长为 700.0 nm,当红光消失时,薄膜的厚度至少为多少?

分析 本例是有关薄膜干涉的问题。光垂直入射时,反射光的亮条纹满足以下条件(考虑半波损失)

$$2nt = m\lambda + \frac{1}{2}\lambda \qquad (m = 0,1,2,\cdots) \tag{1}$$

可见不同波长的极大值出现在不同的厚度处,因而这种干涉称作等厚干涉,意为相等的波长在相等的厚度处有相同的干涉级。

由式(1),同一波长相邻干涉纹间的厚度差为

$$\Delta t = \frac{\lambda}{2n} \tag{2}$$

由于上述间隔与波长成正比,因而红光的条纹间隔大于黄光,也即当两黄条纹恰处于两红条纹之间时,在两黄条纹中间则看不到红条纹。或者,靠近 B 点处的薄膜厚度很小,已无法满足红光干涉的条件,即 $2nt < \frac{\lambda_R}{2}$。

解 (1) 由于 A,B 两点恰为相邻两级黄光的干涉极大值处,由"分析"中的式(2)可算出这两点的厚度差为

$$\Delta t_1 = \frac{\lambda_Y}{2n} = \frac{580.0}{2 \times 1.40} = 207.1\,(\text{nm})$$

(2) 彩色的次序为黄、绿、蓝、黄,则根据上述分析,厚度差仍为 207.1 nm。

(3) 红光的波长最长,红光消失,膜厚很薄,此时满足的条件为

$$m\lambda_R > (m+1)\lambda_Y$$

$$(m-1)\lambda_R < m\lambda_Y$$

即红光的条纹处于相邻黄光的条纹之外,由上述两不等式可得

$$m > \frac{\lambda_Y}{\lambda_R - \lambda_Y} = \frac{580.0}{700.0 - 580.0} = 4.8$$

$$m < \frac{\lambda_R}{\lambda_R - \lambda_Y} = \frac{700.0}{700.0 - 580.0} = 5.8$$

得到 $m=5$，由此可知 A 点的厚度至少为

$$t_A = \frac{m\lambda_Y}{2n} = 1\,035.7\ \text{nm}$$

由分析可知，如果膜厚 $t<\frac{\lambda_R}{4n}$，红光也消失。

【例 4.34】 用钠光的 589.3 nm 谱线观察迈克尔孙干涉条纹，先看到干涉场中有 16 个亮环(包括中心亮斑)，且中心是亮的；移动平面镜 M_1 后，看到中心吞(吐)了 20 环，干涉场中心还剩 6 个亮环(包括中心亮斑)，中心仍是亮的。试求：

(1) M_1 移动的距离；

(2) 开始时中心亮斑的干涉级；

(3) M_1 移动后，干涉场中最外亮环的干涉级。

分析 视场中心，光线的入射角为 0，视场的外边缘，即最外干涉环所对应的角度，在 M_1 移动过程中是不变的。

解 (1) 对于迈克尔孙干涉仪，若不计半波损失，等倾干涉时，其中心条纹

$$2h = j_0\lambda \tag{1}$$

最外条纹

$$2h\cos i = j_1\lambda \tag{2}$$

式(1)－式(2)，得到

$$2h(1-\cos i) = (j_0 - j_1)\lambda \tag{3}$$

$(j_0 - j_1 + 1)$为干涉场(视场)中条纹的数目。

由于 M_1 移动后，视场中条纹减少，因而 h 减小。吞入了 20 环，说明中心级次减小了 20。由式(1)，得到

$$2\Delta h = \Delta j\lambda = -20\lambda \tag{4}$$

因而 M_1 移动距离为

$$\Delta h = \frac{\Delta j\lambda}{2} = \frac{-20\lambda}{2} = -5.893\ (\mu\text{m})$$

(2) 设开始时中心斑的级次为 j_0，最外条纹的级次为 j_0-15，则式(2)为

$$2h\cos i = (j_0 - 15)\lambda \tag{5}$$

结合式(1)、式(5)，可得

$$j_0\lambda\cos i = (j_0 - 15)\lambda \tag{6}$$

结束时，中心条纹级数 $j_0' = j_0 - 20$，最外的条纹为 $j_0' - 5 = j_0 - 25$，有

$$2(h + \Delta h) = (j_0 - 20)\lambda \tag{7}$$

$$2(h+\Delta h)\cos i=(j_0-25)\lambda \tag{8}$$

结合式(7)、式(8)，可得

$$(j_0-20)\lambda\cos i=(j_0-25)\lambda \tag{9}$$

由式(6)、式(9)，可得

$$\frac{j_0-20}{j_0}=\frac{j_0-25}{j_0-15}$$

即

$$j_0=30$$

(3) 移动后，中心条纹的级次为

$$j_0-25=30-25=5$$

【例 4.35】 图 4.47(a)为检查块规的装置，G_0 为标准块规，G 为上表面待测的块规，以波长为 λ 的平行单色光垂直入射，测得块规与平晶之间的空气尖劈所形成的干涉条纹如图 4.47(b)所示，对应于 G_0 和 G 的条纹间距分别为 l_0 和 l，且 $l_0<l$。若将 G 转过 180°，两侧条纹均比原来密。

(1) 判断 G 规的上端面形貌有何特征；

(2) 求 G 规左、右侧与标准规的高度差。

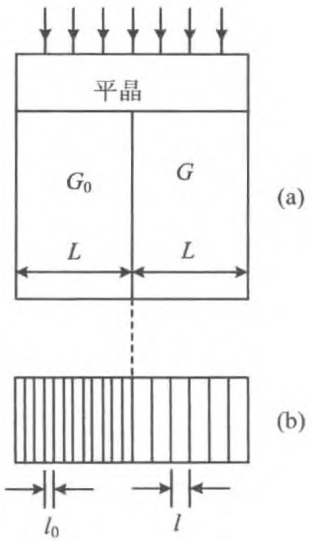


图 4.47 块规及其干涉条纹

解 (1) G 转过180°前，由于两侧干涉条纹均为平行直条纹，可知两规的上端面均为平面。但由于 G 规的条纹间隔较大，说明 G 规与平晶之间的气隙坡度比 G_0 规与平晶之间气隙的坡度小。而将 G 规转过 180°，条纹均变密了，说明气隙的坡度均较转之前增大了。由此可知转动之前，G 规上端面的右侧比左侧高，左侧比 G_0 规的上端面高，如图 4.48 所示。

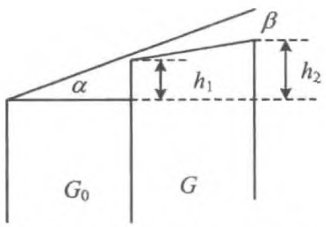


图 4.48 两个区域的空气膜

(2) 对 G_0，$l_0=\frac{\lambda}{2\alpha}$，所以 $h_1=\alpha L=\frac{\lambda L}{2l_0}$。对 G，$l=\frac{\lambda}{2\beta}$，因而

$$h_2=h_1+L(\alpha-\beta)=\frac{\lambda L}{2l_0}+L\left(\frac{\lambda}{2l_0}-\frac{\lambda}{2l}\right)=\lambda L\left(\frac{1}{l_0}-\frac{1}{2l}\right)$$

【例 4.36】 如图 4.49 所示，一弯月形厚透镜放置于玻璃平板上，波长为 632.8 nm 的 He—Ne 激光正入射，观察光经透镜与玻璃平板间空气膜反射所形成的干涉条纹。

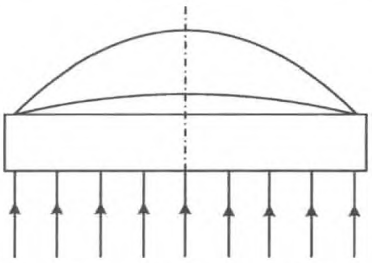


图 4.49 透镜覆盖在平板上

(1) 在透镜与平板的接触线处，是亮纹还是暗纹？

(2) 若稍稍用力向下压透镜，每一根干涉纹是收缩还是扩展？

(3) 在显微镜下观察干涉环，测量到某一根干涉亮环的半径为 $r_1=5.00$ mm，从该亮环向外数，第 20 根亮环的半径为 $r_2=5.25$ mm，试求透镜朝向平板玻璃一侧的球面的曲率半径。

分析 透镜与平板之间的空气隙的干涉形成牛顿环。

解 (1) 在接触线处，由于两列反射光之间有半波损失，所以是暗纹。

(2) 受压后，空气膜变薄，某根亮环要向中心收缩，才能保持以前的光程差，所以干涉环收缩。

(3) 如图 4.50 所示，设球面顶点的高度为 h_0，在高度为 h_j 的球冠处，干涉圆环的半径为 r_j，球面半径为 R。则

$$h_j(2R-h_j)=r_j^2$$

$$h_j=\frac{r_j^2}{2R-h_j}\approx\frac{r_j^2}{2R}$$

此处空气膜的厚度为

$$\Delta_j=h_0-h_j=h_0-\frac{r_j^2}{2R}$$

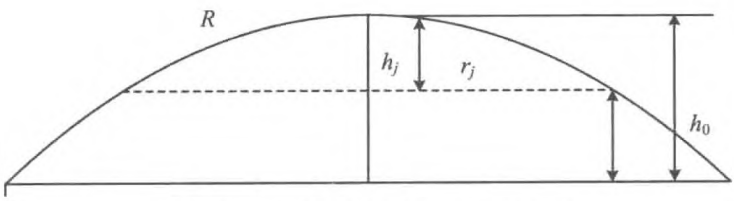


图 4.50 干涉环的半径与膜厚的关系

两条干涉亮环分别满足

$$2\Delta_j = (2j+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$2\Delta_{j+\Delta_j} = (2j+2\Delta_j+1)\frac{\lambda}{2}$$

则

$$2\Delta_{j+\Delta_j} - 2\Delta_j = (2j+2\Delta_j+1)\frac{\lambda}{2} - (2j+1)\frac{\lambda}{2} = \Delta_j\lambda$$

即

$$\frac{r_j^2}{R} - \frac{r_{j+\Delta_j}^2}{R} = \Delta_j\lambda$$

算得

$$R = \frac{r_{j+\Delta_j}^2 - r_j^2}{-\Delta_j\lambda} = \frac{5.25^2 - 5.00^2}{20 \times 632.8 \times 10^{-6}} = 202.47\,(\text{mm})$$

【例 4.37】 如图 4.51 所示为一观察干涉条纹的实验装置。R_1 为透镜 L_1 下表面的曲率半径，R_2 为验规的上表面的曲率半径，今用一束波长 $\lambda = 589.3$ nm 的单色平行钠光垂直照射，由反射光测得第 20 级暗条纹半径 $r = 4.5$ cm，又已知 $R_2 = 200$ cm，试求：

(1) 干涉图样的形状和特性；

(2) 透镜上表面的曲率半径 R_1 是多少？

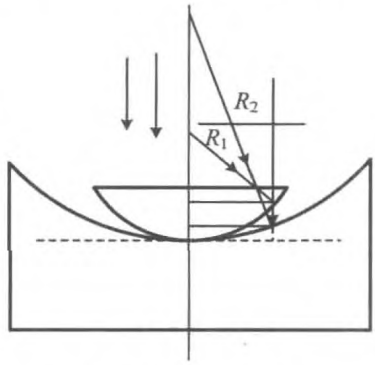


图 4.51 透镜与验规

分析 这是牛顿环的干涉装置，只不过空气膜两侧的反射面都是球面。原理和计算方法与平面和球面构成的装置类似。

解 (1) 因为两球面以光轴为对称轴，所以两球面的反射光相干叠加，所得到的干射花样为同心圆环干涉条纹。

如图 4.52 所示，从与两球面顶点相切的平面算起，半径为 r 的圆环到球面上的反射点的距离分别为

$$\Delta h_1 = \frac{r^2}{2R_1}$$

和

$$\Delta h_2 = \frac{r^2}{2R_2}$$

于是此处空气膜的厚度为

$$\Delta h = \Delta h_1 - \Delta h_2 = r^2\left(\frac{1}{2R_1} - \frac{1}{2R_2}\right)$$

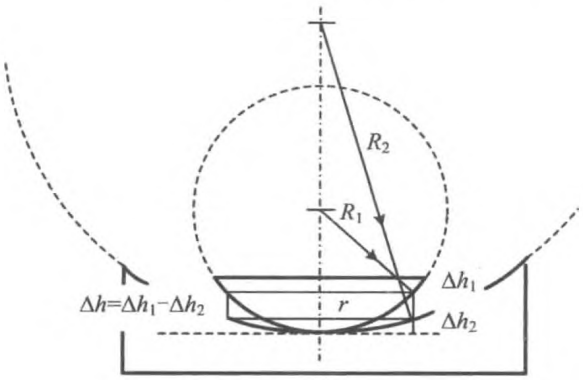


图 4.52 干涉环半径与空气膜厚

计入半波损失，则亮条纹满足条件

$$2\Delta h = \frac{(2j+1)\lambda}{2}$$

即

$$\Delta h = r^2\left(\frac{1}{2R_1} - \frac{1}{2R_2}\right) = \frac{(2j+1)\lambda}{4}$$

求得

$$r^2 = \frac{(2j+1)\lambda}{2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} = \frac{(2j+1)\lambda R_1 R_2}{2(R_2 - R_1)}$$

第 j 级亮条纹的半径为

$$r_j = \sqrt{\frac{(2j+1)\lambda R_1 R_2}{2(R_2 - R_1)}} \tag{1}$$

而暗条纹的半径为

$$r_j' = \sqrt{\frac{j\lambda R_1 R_2}{R_2 - R_1}} \tag{2}$$

中心为暗条纹。

(2) 由例中所给数据，根据式(2)可以算得

$$R_1 = \left(\frac{j\lambda}{r_j^2} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} = \left(\frac{20 \times 589.3 \times 10^{-7}}{2.5^2} + \frac{1}{200}\right)^{-1} = 192.73\,(\text{cm})$$

【例 4.38】 如图 4.53 所示的是一个检验球面镜质量的验规。以 $\lambda = 546.0$ nm 的单色光从平凸透镜一侧正入射，则能观察到反射光的干涉条纹。

(1) 在验规与透镜的接触线处，是亮纹还是暗纹？为什么？

(2) 在图示的情形下，若稍稍用力向下压透镜，其中的每一根条纹半径是变大还是变小？为什么？

(3) 若已知验规的球面半径 $R = 100.0$ mm，测得中心处为暗斑，从中心数起第 5 根亮环的半径 $r_5 = 2.5$ mm，求透镜朝向验规一侧的球面半径。

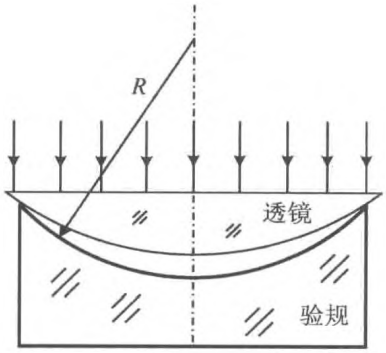


图 4.53　用验规检测透镜的球面半径

解　(1) 在接触线处，膜厚为 0，两列反射光之间有半波损失，所以是暗纹。

(2) 下压时，膜厚减小，为了保持厚度不变，则原来的亮纹要向厚度大的方向移动，即向中心处移动，所以亮环半径减小。

(3) 如图 4.54 所示，设透镜球面半径为 R'，对于半径为 r_j 的亮环，设到各自球面下端的距离分别为 h' 和 h，则有 $h' = \dfrac{r_j^2}{2R'}$ 和 $h = \dfrac{r_j^2}{2R}$。

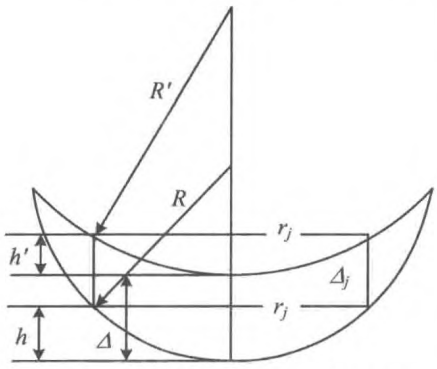


图 4.54　计算球面间空气膜的厚度

记两球面下端的距离为 Δ，则此处的空气膜厚度可表示为

$$\Delta_j = h' + (\Delta - h)$$

中心处出现暗纹的条件为 $2\Delta = j_0\lambda$，在第 5 根亮纹处，光程差比中心处小 4.5λ，此处出现亮纹的条件为

$$2\Delta_j = j_0\lambda - \frac{9}{2}\lambda = 2(h' - h) + 2\Delta = 2\left(\frac{r_j^2}{2R'} - \frac{r_j^2}{2R}\right) + j_0\lambda$$

于是有

$$-\frac{9}{2}\lambda = 2\left(\frac{r_j^2}{2R'} - \frac{r_j^2}{2R}\right)$$

可得

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} - \frac{9\lambda}{2r_j^2} = \frac{1}{100.0} - \frac{9 \times 0.546 \times 10^{-3}}{2 \times 2.50^2} = 1.000 \times 10^{-2} - 3.931 \times 10^{-4}$$

$$= 0.961 \times 10^{-2}\ (\text{mm}^{-1})$$

即

$$R' = 104.1\ \text{mm}$$

【例 4.39】 如图 4.55 所示的实验装置，在一洁净的玻璃片的上表面上放一滴油，当油滴展开成油膜时，在波长 $\lambda = 600.0$ nm 的单色光垂直照射下，从反射光中观察到油膜所形成的干涉条纹。实验中，是由读数显微镜向下观察油膜所形成的干涉条纹。如果油膜的折射率 $n = 1.20$，玻璃的折射率 $n' = 1.50$，试求：

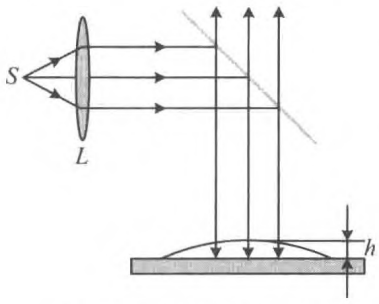


图 4.55　油膜形成的干涉纹

（1）当油膜中心的最高点与玻璃片的上表面相距 $h = 1\,200.0$ nm 时，描述所观察到的条纹的形状，即可以观察到几条亮条纹，亮条纹所在处油膜的厚度是多少？中心点的明暗程度又如何？

（2）当油膜逐渐扩展时，所看到的条纹将如何变化？

解　如图 4.56 所示，油膜上表面和油膜与玻璃的分界面的反射光相干叠加，此时无半波损失。

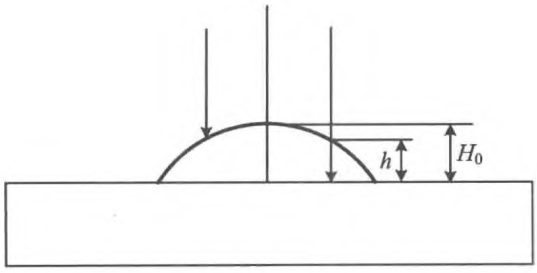


图 4.56　膜厚

（1）光程差为 $2nh_1$，其中 n 为油膜的折射率，h_1 为反射点处油膜的厚度。则亮条纹满足条件 $2nh_1 = j\lambda$。解得

$$j = \frac{2nh_1}{\lambda}$$

$h_1 = h$ 时

$$j_{\max} = \frac{2 \times 1.20}{600} \times 1\,200 = 4.8$$

取 $j_{\max} = 4$，即可见 5 条亮纹，$j = 0, 1, 2, 3, 4$。

亮条纹处油膜的厚度分别为

$$h_1 = j\frac{\lambda}{2n} = 0,250\ \text{nm},500\ \text{nm},750\ \text{nm},1\,000\ \text{nm}$$

而暗条纹满足

$$j' = \frac{2nh_1}{\lambda} - \frac{1}{2}$$

中心点 $j' = -\frac{1}{2}$，介于明暗之间。

(2) 油膜扩展，膜厚 h 减小，j_{max}减小，看见亮条纹向中心收缩并消失，同时可见油膜新扩展的区域有新的条纹出现。

【例 3.40】 如图 4.57 所示的是牛顿环的干涉装置，平凸透镜球面的曲率半径 $R = 1.00$ m，折射率 $n_1 = 1.50$，平板玻璃由左右两部分组成，折射率分别是 $n_3 = 1.50$ 和 $n_4 = 1.75$，平凸透镜的顶点在这两部分玻璃的分界处，中间充以折射率 $n_2 = 1.62$ 的二硫化碳液体，若用单色光垂直照射，在反射光中测得右边 j 级明条纹的半径 $r_j = 4$ mm，$j+5$ 级明条纹的半径 $r_{j+5} = 6$ mm，试求：

(1) 入射光的波长；

(2) 观察到的干涉图样。

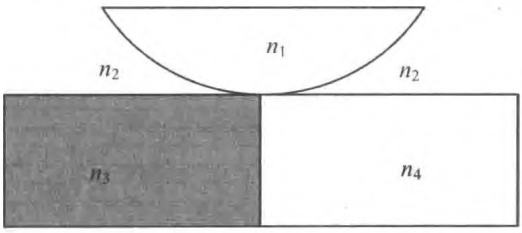


图 4.57 两种折射率不等的平板

分析 这是牛顿环干涉装置，由于不同区域材料的折射率不同，因而需要仔细考虑各处是否有半波损失。

解 左边有半波损失，右边没有。

(1) 右边，亮条纹的条件为

$$2n_2h = \frac{n_2r_j^2}{R} = j\lambda \tag{1}$$

故有

$$\frac{n_2}{R}(r_{j+\Delta_j}^2 - r_j^2) = \Delta_j\lambda$$

于是可得

$$\lambda = \frac{n_2}{\Delta_j R}(r_{j+\Delta_j}^2 - r_j^2) = \frac{1.62}{5\times 10\times 10^3}\times(6^2-4^2) = 648\times 10^{-6}(\text{mm}) = 648\,(\text{nm})$$

(2) 左边,亮条纹的条件为

$$2n_2 h = \frac{n_2 r_j^2}{R} = \left(j+\frac{1}{2}\right)\lambda \tag{2}$$

暗条纹的条件为

$$2n_2 h = \frac{n_2 r_j^2}{R} = j\lambda \tag{3}$$

分别与式(1)对比,可发现,在同一半径处,两侧的条纹正好明暗错开。

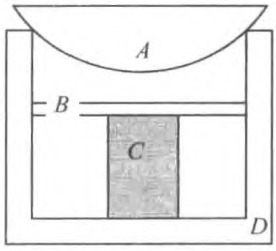


图 4.58 金属柱高度会变化

【例 3.41】 如图 4.58 所示,A 为平凸透镜,B 为平板玻璃,C 为金属柱,D 为框架,A,B 之间留有气隙,而 A 被固结在框架的边缘上。温度变化时,C 发生伸缩,而假设 A,B,D 都没有伸缩。现用波长为 $\lambda = 634.8$ nm 的激光垂直照射,试求:

(1) 在反射光中观察时,看到牛顿环的条纹都移向中央,这表明金属柱 C 的长度是增加还是缩短?

(2) 如果观察到有 10 个明条纹移到中央而消失,C 的长度变化了多少毫米?

分析 在平凸透镜 A 和平板玻璃 B 之间,是空气膜,这是牛顿环干涉装置。

解 (1) 条纹向中间移动,即第 j 级干涉环的半径减小,由于这是等厚干涉,即某一级条纹,例如 j 级,总是处在相同的膜厚处,如图 4.59 所示,所以可以判断膜厚增大了。说明气隙增加,即金属柱 C 缩短。

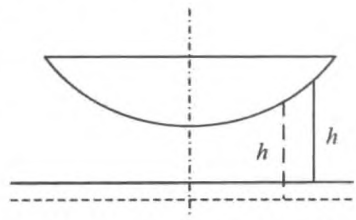


图 4.59 气隙的膜厚

(2) 由牛顿环干涉公式

$$2nh = \frac{nr_j^2}{R} = \left(j+\frac{1}{2}\right)\lambda$$

可得 $2n\Delta h = \Delta_j\lambda$,即

$$\Delta h = \frac{\Delta_j\lambda}{2n} = \frac{10\times 632.8}{2} = 3\,164\,(\text{nm}) = 3.164\,(\mu\text{m})$$

【例 4.42】 如图 4.60 所示,在一厚玻璃中有一气泡,形状类似球面透镜,两球面曲率半径 R 相同,气泡垂直直径 $r_0 = 2$ mm。用波长为 400.0 nm 的单色光从玻璃的左侧垂直入射。

(1) 在右侧看到气泡上有 4 条亮纹(包括中央亮斑),求气泡的曲率半径 R、干涉条纹

间距，并说明条纹的形状和边界处条纹的特点；

(2) 若均匀用力挤压玻璃的左右两侧，条纹有何变化？

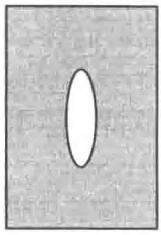


图 4.60 玻璃中的气泡

分析 这是空气膜的等厚干涉问题。

解 (1) 由球面镜的对称性，可知干涉条纹是同心圆环。

透射光中没有半波损失。可以证明透镜上距离光轴 ρ 处的厚度为

$$h = d - \left(\frac{\rho^2}{2R_1} + \frac{\rho^2}{2R_2}\right) \tag{1}$$

其中，d 为透镜中心处厚度。

亮纹的条件为

$$2h_j = j\lambda \tag{2}$$

将式(2)代入式(1)，得

$$\rho_j^2 = \frac{2d - j\lambda}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{(2d - j\lambda)R_1R_2}{R_1 + R_2} \tag{3}$$

为说明主要特征，可以令两球面半径相等，即

$$\rho_j^2 = (2d - j\lambda)R \tag{4}$$

与牛顿环相似。

轴线处为亮斑，即 $0 = (2d - j\lambda)R$，得到

$$2d = j\lambda \tag{5}$$

边缘处亮环，即

$$r_0^2 = [2d - (j - 3)\lambda]R \tag{6}$$

将式(5)代入式(6)，得

$$r_0^2 = [j\lambda - (j - 3)\lambda]R = 3\lambda R$$

于是

$$R = \frac{r_0^2}{3\lambda} = 3.3\ \text{m}$$

对式(4)进行微分，得 $\rho\Delta\rho = -\Delta_j\lambda R$，即条纹间距

$$|\Delta\rho| = \frac{\lambda R}{\rho}$$

越靠近边缘，间距越小。

条纹半径为

$$\rho = \sqrt{(2d - j\lambda)R}$$

(2) 挤压使膜变薄，则圆环被吞入中心。同时，由于使得 R 变大，条纹间距变大，因

而气泡上条纹数减少。

【例 4.43】 一个迈克尔孙干涉仪被调节，当用波长 $\lambda = 500.0\ \text{nm}$ 扩展光源照明时会出现同心圆环形条纹，若要移动其中一臂而使圆环中心处相继出现 1 000 根条纹，则该臂要移动多少？若中心是亮的，计算第一个暗环的角半径（要求用两臂的路径距离差和波长表示）。

解 这是等倾干涉。由等倾干涉公式，设其中一臂移动 Δh，则

$$2\Delta h = \Delta_j \lambda$$

于是

$$\Delta h = \frac{\Delta_j \lambda}{2} = \frac{1\,000 \times 500.0}{2} = 250 \times 10^3\ (\text{nm}) = 250\ (\mu\text{m})$$

是其中一臂移动的距离。

中心是亮环，即亮条纹公式为

$$2h = j_0 \lambda \tag{1}$$

说明没有半波损失，于是距中心最近的暗环，即第一暗环的条件为

$$2h\cos i_1 = \left(j_0 - \frac{1}{2}\right)\lambda \tag{2}$$

式(1) − 式(2)，消去 j_0，即得

$$1 - \cos i_1 = 2\sin^2 \frac{i_1}{2} \approx \frac{i_1^2}{2} = \frac{\lambda}{4h}$$

于是第一暗环的角半径为

$$i_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{2h}}$$

【例 4.44】 在傍轴条件下，等倾条纹的半径与干涉级有什么样的依赖关系？牛顿环的情况又怎样？能够将二者区别吗？如何区别？

解 等倾干涉

$$2hn_2\cos i_2 = \left(j - \frac{1}{2}\right)\lambda$$

在傍轴条件下，利用

$$\tan i \approx \sin i \approx i$$

$$1 - \cos i = 2\sin^2 \frac{i}{2} \approx \frac{i^2}{2}$$

及折射公式

$$n_1 i_1 \approx n_2 i_2$$

可得条纹圆环半径

$$r_j \approx f \cdot i_1 \approx f \cdot \frac{n_2 i_2}{n_1} \approx f \cdot \frac{n_2\sqrt{2(1-\cos i_2)}}{n_1} = f \cdot \frac{n_2\sqrt{2\left[1-\frac{\left(j-\frac{1}{2}\right)\lambda}{2n_2 h}\right]}}{n_1}$$

$$= \frac{f}{n_1}\sqrt{2n_2^2 - \frac{n_2\left(j-\frac{1}{2}\right)\lambda}{h}}$$

即圆环中心处的干涉级数最大。

而牛顿环

$$r_j = \sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)R\lambda}$$

圆环中心处的干涉级数最小。

区别：前者是等倾干涉，后者是等厚干涉。对于中心条纹而言，前者明暗随机出现，而后者始终是固定的明纹或暗纹。另外，当膜厚改变时，圆环半径的变化方式正好相反，即膜厚增大，等倾条纹的某一级条纹半径增大，即看到条纹不断从中心冒出；而牛顿环条纹中，某一级的半径减小，即看到条纹向中心收缩并被吞入。

【例 4.45】 如图 4.61 所示为牛顿环的干涉装置，将一个平凸透镜放在玻璃平板上，以 600.0 nm 的平面单色光正入射，观察到反射光形成一组同心圆环形干涉条纹。问：

(1) 中心处是暗纹还是亮纹？为什么？

(2) 通过显微镜观察，测得其中一根亮环的半径为 2.35 mm，从该根亮环向外数第 10 根亮环的半径为 2.65 mm，则透镜球面的半径是多少？

(3) 从中心数起第 100 根暗环的半径是多少？

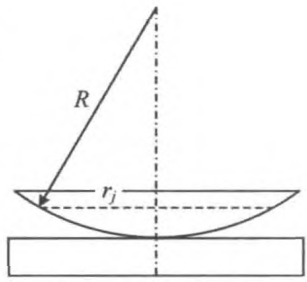


图 4.61 观测牛顿环

解 (1) 反射光有半波损失，而中心处空气膜的厚度为 0，所以是暗环。

(2) 从中心数起第 j 根牛顿环亮纹的半径与球面半径之间的关系为

$$r_j^2 = \left(j+\frac{1}{2}\right)\lambda R$$

于是有

$$r_{j+\Delta_j}^2 - r_j^2 = \Delta_j \lambda R$$

可得

$$R = \frac{(r_{j+\Delta_j} + r_j)(r_{j+\Delta_j} - r_j)}{\Delta_j \lambda} = \frac{(2.65+2.35)\times(2.65-2.35)}{10\times 0.6\times 10^{-3}}$$

$$= \frac{5 \times 0.3 \times 10^3}{6} = 250\ (\text{mm})$$

(3) 反射光暗纹的半径为

$$r'_j = \sqrt{j\lambda R}$$

第 100 根亮环

$$j = 100$$

$$r'_{100} = \sqrt{100\lambda R} = 3.87\ \text{mm}$$

或

$$r'_{99} = \sqrt{99\lambda R} = 3.85\ \text{mm}$$

4.4 法布里—珀罗干涉仪

法布里—珀罗(Fabry-Poret)干涉仪的两个表面具有很高的反射率,因而光可以在两相对的表面之间多次反射,各列反射光的振幅相差不大;同样,各列透射光的振幅也比较接近,因而这是多列光波之间的干涉。

与透明薄膜的干涉相比,法布里—珀罗干涉仪的反射光和透射光都能形成干涉纹,如图 4.62 所示,且干涉纹要细锐得多。条纹的细锐程度可以用相邻波列之间的相位差表示,也可以用光波的角度范围或波长范围表示。

设薄膜的光强反射率为 ρ,干涉仪两表面之间的距离为 h,相邻两列波之间的相位差为

$$\delta = \frac{4\pi nh\cos i}{\lambda}$$

则反射光、透射光干涉纹的强度分别为

$$I_R = \frac{I_0}{1 + \dfrac{(1-\rho)^2}{4\rho \sin^2\left(\dfrac{\delta}{2}\right)}} \tag{4.1}$$

$$I_T = \frac{I_0}{1 + \dfrac{4\rho \sin^2\left(\dfrac{\delta}{2}\right)}{(1-\rho)^2}} \tag{4.2}$$

上述干涉光强可用图 4.63 和图 4.64 表示。

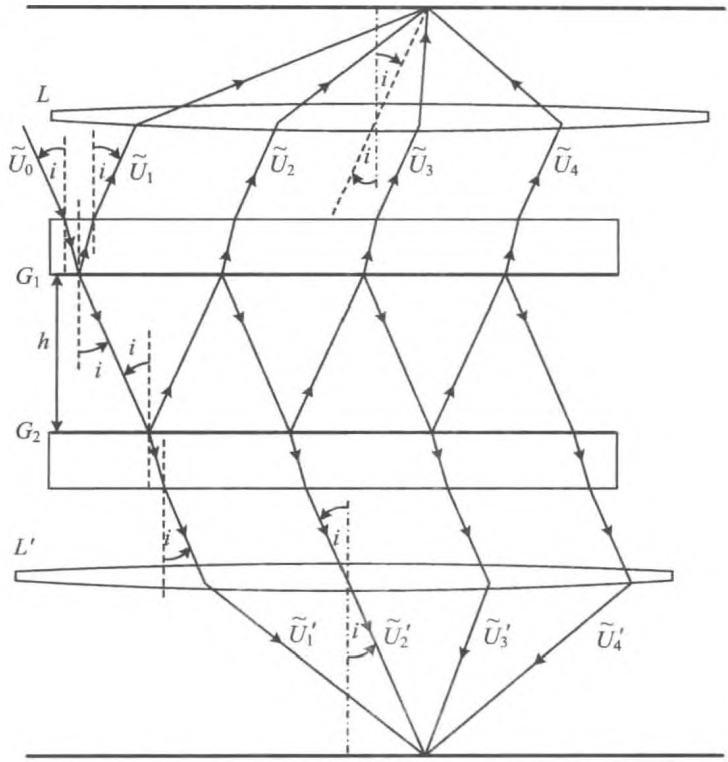


图 4.62 法布里—珀罗干涉仪反射光、透射光的相干叠加

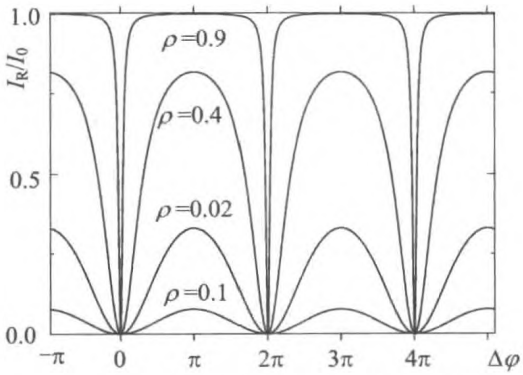


图 4.63 多光束干涉的反射光强分布

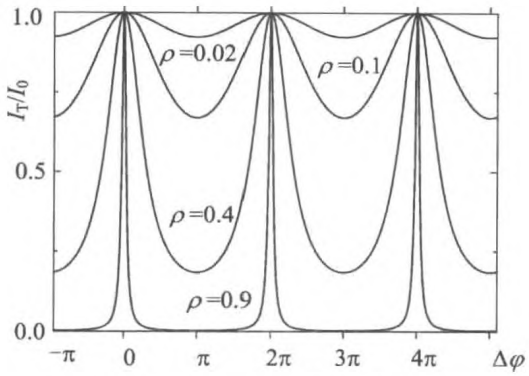


图 4.64 多光束干涉的透射光强分布

如图 4.65 所示，用相位差表示的条纹的半值宽度

$$\varepsilon = \frac{2(1-\rho)}{\sqrt{\rho}} \tag{4.3}$$

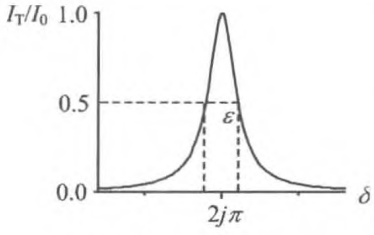


图 4.65 半值宽度

条纹的半角宽度为

$$\Delta i_j = \frac{\lambda\varepsilon}{4\pi nh\sin i} = \frac{\lambda}{2\pi nh\sin i}\left(\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}\right) \tag{4.4}$$

条纹的波长范围为

$$\Delta\lambda_j = \frac{\lambda^2}{2\pi nh\cos i}\left(\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}\right) = \frac{\lambda}{j\pi}\left(\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}\right) \tag{4.5}$$

若用作光谱分辨，可分辨的最小波长间隔为

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{j\pi}\left(\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}\right) = \frac{\lambda^2}{2\pi nh\cos i}\left(\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}\right) \tag{4.6}$$

分辨本领为

$$A = \left(\frac{\sqrt{\rho}}{1-\rho}\right)j\pi = \frac{2\pi nh\cos i}{\lambda}\left(\frac{\sqrt{\rho}}{1-\rho}\right) \tag{4.7}$$

【例 4.46】 如果法布里—珀罗干涉仪两反射面间距为 1.00 cm，用绿光(波长为 500 nm)做实验，透射光干涉条纹中心正好是一亮斑，求第 10 个亮环的角直径。

解 透射光满足 $2h\cos i_j = j\lambda$，中心处的条纹

$$2nh = j_0\lambda \tag{1}$$

由题中所给条件，得到

$$2nh\cos i_j = (j_0 - 9)\lambda \tag{2}$$

式(1)－式(2)，整理得到

$$1-\cos i_j=\frac{9\lambda}{2h}$$

利用

$$1-\cos i_j\approx\frac{i_j^2}{2}$$

所以有

$$i_j=\sqrt{\frac{9\lambda}{h}}=\sqrt{\frac{9\times500\times10^{-9}}{10.0\times10^{-3}}}=0.021$$

角直径为 $0.042\text{rad}=3.14^\circ$。

【例 4.47】 在玻璃上涂一层薄膜，折射率为 n，玻璃的折射率记为 n_2；另一侧是空气，折射率记为 n_0。

(1) 试证明，单色光正入射时，光强反射率为

$$R=\frac{(n_0-n_2)^2\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)+\left(\frac{n_0n_2}{n}-n\right)^2\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}{(n_0+n_2)^2\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)+\left(\frac{n_0n_2}{n}+n\right)^2\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

式中，$\delta=\frac{4\pi}{\lambda}nh$，$h$ 为膜厚。

(2) 为使膜对某一波长的光起到完全消反射的作用，薄膜的厚度和折射率应满足什么条件？

分析 本题要考虑多光束干涉，再依据菲涅耳公式导出反射光强公式，然后求解完全消反射问题。

解 (1) 如图 4.66 所示，设入射光振幅为 E_0，入射角为 i，折射角为 i'，规定以下符号：

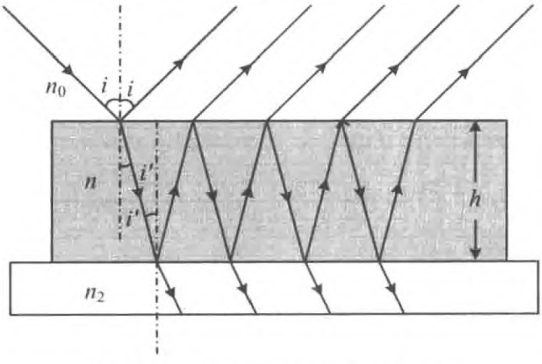


图 4.66 薄膜的反射光与透射光

上表面：振幅反射率 r_1, r_1'，透射率 t_1, t_1'。

下表面：振幅反射率 r_2。

于是，各列反射光的复振幅可以表示为（设第一列反射光得初位相为 0）

$$\widetilde{E}_1 = r_1 E_0$$

$$\widetilde{E}_2 = t_1 r_2 t_1' E_0 e^{i\delta}$$

$$\widetilde{E}_3 = t_1 r_2^2 r_1' t_1' E_0 e^{i2\delta}$$

$$\widetilde{E}_4 = t_1 r_2^3 r'^2_1 t_1' E_0 e^{i3\delta}$$

$$\cdots$$

其中

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2nh\cos i'$$

通项可写作

$$\widetilde{E}_n = t_1 r_2^{(n-1)} r'^{(n-2)}_1 t_1' E_0 e^{i(n-1)\delta}$$

可见，$n \geqslant 2$，是一初项为 $t_1 r_2 t_1' E_0 e^{i\delta}$、公比 $r_2 r_1' e^{i\delta}$ 的等比数列。

合振动为

$$\widetilde{E}_R = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{E}_n = r_1 E_0 + \frac{t_1 r_2 t_1' e^{i\delta}}{1 - r_2 r_1' e^{i\delta}} E_0$$

而由斯托克斯倒逆关系

$$t_1 t'_1 = 1 - r_1^2, r_1 = - r'_1$$

前式化为

$$\widetilde{E}_R = r_1 E_0 + \frac{(1 - r_1^2) r_2 e^{i\delta}}{1 + r_2 r_1 e^{i\delta}} E_0 = \frac{r_1 + r_2 e^{i\delta}}{1 + r_2 r_1 e^{i\delta}} E_0$$

反射光强为

$$I_R = \widetilde{E}_R \widetilde{E}_R^* = \left(\frac{r_1 + r_2 e^{i\delta}}{1 + r_2 r_1 e^{i\delta}}\right)\left(\frac{r_1 + r_2 e^{-i\delta}}{1 + r_2 r_1 e^{-i\delta}}\right) E_0^2 = \left(\frac{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos\delta}{1 + r_1^2 r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos\delta}\right) I_0$$

$$= \frac{(r_1^2 + r_2^2)\left[\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\right] + 2r_1 r_2\left[\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\right]}{(1 + r_1^2 r_2^2)\left[\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\right] + 2r_1 r_2\left[\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\right]} \cdot I_0$$

$$= \frac{(r_1 + r_2)^2 \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) + (r_1 - r_2)^2 \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}{(1 + r_1 r_2)^2 \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) + (1 - r_1 r_2)^2 \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \cdot I_0$$

正入射时，$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}2nh$。同时，由菲涅耳公式可知

$$r_1=\frac{n_0-n}{n_0+n},r_2=\frac{n-n_2}{n+n_2}$$

代入上式，得到

$$R=\frac{(n_0-n_2)^2\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)+\left(\frac{n_0n_2}{n}-n\right)^2\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}{(n_0+n_2)^2\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)+\left(\frac{n_0n_2}{n}+n\right)^2\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \tag{1}$$

(2) 当 $\delta=(2m+1)\pi$ 时，相邻两列光的位相相反，即

$$\frac{2\pi}{\lambda}2nh=(2m+1)\pi$$

可取 $m=0$，则

$$nh=\frac{\lambda}{4} \tag{2}$$

此时，$\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)=0,\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)=1$。代入式(1)，得到

$$R=\frac{\left(\frac{n_0n_2}{n}-n\right)^2}{\left(\frac{n_0n_2}{n}+n\right)^2}$$

如 $\frac{n_0n_2}{n}=n$，即

$$n=\sqrt{n_0n_2} \tag{3}$$

则

$$R=0$$

实际上不一定能够找到完全符合式(3)的材料，但只要薄膜的折射率小于基片的折射率，涂膜后，反射率总会减小。

【例 4.48】 设法布里—珀罗腔(F－P 腔)长 5 cm，用扩展光源做实验，光波波长 $\lambda=600.0$ nm，问：

(1) 中心干涉级数是多少？

(2) 在倾角为 1°附近，干涉环的半角宽度是多少(设反射率 $R=0.98$)？

(3) 如果用该 F－P 腔分辨谱线，其色分辨本领有多大？可分辨的最小波长间隔是多少？

(4) 如果用其对白光进行选频，透射最强的谱线有几条？每条的谱线宽度是多少？

(5) 由于热胀冷缩所引起的腔长的改变量为 10^{-5}(相对值),则谱线的漂移量是多少?

分析 法布里—珀罗干涉仪是一种多光束干涉装置,其透射光强为

$$I_T = \frac{I_0}{1 + \dfrac{4R\sin^2\left(\dfrac{\delta}{2}\right)}{(1-R)^2}} \tag{1}$$

其中,R 为光强反射率,δ 为相邻两列光的位相差,有

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2nh\cos i \tag{2}$$

$\delta = 2j\pi$ 时为亮条纹出现的位置。

解 (1) 中心处,$i=0$,由式(2),得

$$2h = j_0\lambda$$

中心干涉级数

$$j_0 = \frac{2h}{\lambda} = \frac{2\times 5\times 10^4}{0.6} = 166\,666$$

(2) 半角宽度为

$$\Delta i_j = \frac{\lambda}{2\pi nh\sin i}\left(\frac{1-R}{\sqrt{R}}\right) = \frac{(1-0.98)\times 0.6}{2\pi\times 5\times 10^4 \sin 1^\circ \sqrt{0.98}} = 2.21\times 10^{-6}$$

(3) 色分辨本领为

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \left(\frac{\sqrt{\rho}}{1-\rho}\right)j\pi = \left(\frac{\sqrt{0.98}}{1-0.98}\right)\times 16\,666\pi = 2.59\times 10^7$$

可分辨的最小波长间隔是

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{A} = \frac{600}{2.59\times 10^6} = 2.32\times 10^{-5}(\text{nm})$$

(4) 由 $\lambda = \dfrac{1}{j}2nh$,得

$$j = \frac{2nh}{\lambda} = 131\,578 \sim 250\,000$$

共 118 422 条。

$$\Delta\lambda_j = \frac{\lambda}{j\pi}\left(\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}\right)$$

或

$$\Delta\nu_j = \frac{c}{\pi j\lambda_j}\left(\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}\right) = \frac{c}{2n\pi h}\left(\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}\right) = 1.93\times 10^7\ (\text{Hz})$$

(5) 由 $2h = j_0\lambda$,得到

$$2\Delta h = j_0\Delta\lambda = \frac{2h}{\lambda}\Delta\lambda$$

即

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta h}{h}$$

因而

$$\Delta\lambda = \lambda\frac{\Delta h}{h} = 600\times10^{-5} = 6\times10^{-3}\ (\text{nm})$$

或者

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta h}{h} = \frac{600\times10^{-5}}{600.0} = 1\times10^{-5}$$

【例 4.49】 法布里—珀罗干涉仪每个镜面的光强反射率 $\rho = 0.950$，腔长 $h = 20.000$ mm。锂光谱灯发出波长为 670.8 nm 的光谱，从干涉仪射出后，形成一系列细锐的干涉圆环。

(1) 沿 5°方向从干涉仪射出的光所形成的干涉环，半值角宽度是多少？

(2) 670.8 nm 的光谱线中包含两条波长十分接近的精细结构谱线，波长分别为 670.78 nm 和 670.79 nm，能否用上述干涉仪在 5°附近分辨上述两条谱线？

(3) 法布里—珀罗干涉仪对波长的分辨本领与干涉环的角半径有怎样的关系？在 1°附近能否分辨上述两谱线？

解 (1) 条纹半值宽度所对应的相位差为

$$\epsilon = \frac{2(1-\rho)}{\sqrt{\rho}}$$

由于相邻两列光波之间的光程差为

$$\Delta L = 2h\cos i$$

相位差为

$$\Delta\varphi = k\Delta L = \frac{4\pi h\cos i}{\lambda}$$

则半值角宽度满足 $\delta(\Delta\varphi) = \epsilon$，即

$$\frac{4\pi h\sin i}{\lambda}\Delta i = \frac{2(1-\rho)}{\sqrt{\rho}}$$

可得

$$\Delta i = \frac{2(1-\rho)}{\sqrt{\rho}}\cdot\frac{\lambda}{4\pi h\sin i} = 0.3\times10^{-6}$$

(2) 多光束干涉极大值的条件为 $\Delta L = 2h\cos i = j\lambda$，波长改变而引起的角度改变为 $2h\sin i\delta i = j\delta\lambda$，即

$$\delta i = j\frac{\delta\lambda}{2h\sin i}$$

按泰勒判据(或者瑞利判据)$\delta i \geqslant \Delta i$ 时可分辨,即

$$j\frac{\delta\lambda}{2h\sin i} \geqslant \frac{2(1-\rho)}{\sqrt{\rho}} \cdot \frac{\lambda}{4\pi h\sin i}$$

而

$$j = \frac{2h\cos i}{\lambda}$$

可得

$$\delta\lambda \geqslant \left(\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}\right)\frac{\lambda^2}{2\pi h\cos i}$$

当 $i=5^\circ$ 时

$$\delta\lambda \geqslant \left(\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}\right)\frac{\lambda^2}{2\pi h\cos i} = 0.000\,18 = 2\times10^{-4}\ (\text{nm})$$

即可分辨的最小波长间隔为 0.000 2 nm。

题中光谱线间隔为 0.01 nm,所以可以分辨。

也可以根据分辨本领公式 $A=\frac{\lambda}{\delta\lambda}=j\pi\left(\frac{\sqrt{\rho}}{1-\rho}\right)$ 直接计算。

(3) $\delta\lambda \geqslant \left(\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}\right)\frac{\lambda^2}{2\pi h\cos i}$

所以干涉环越小,$\delta\lambda$ 越小,即分辨本领越高。

在 1°附近

$$\delta\lambda \geqslant \left(\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}\right)\frac{\lambda^2}{2\pi h\cos i} = 0.000\,2\ \text{nm}$$

所以可分辨。

【例 4.50】 将氢光谱灯的 H_β 线经透镜组变为扩展平行光束后射入法布里—珀罗干涉仪,已知 H_β 线波长为 486.13 nm。该法布里—珀罗干涉仪每个镜面的反射率为 0.950,腔长为 20.000 mm。求:

(1) 从干涉仪中透射出的光,在 1°~3°之间,有几条亮环?

(2) 在 2°附近,接收屏上干涉亮环的半值角宽度是多少?

(3) H_β 线实际上包含有靠得很近的多条精细结构谱线,其中两条很接近的谱线的波长分别为 486.127 86 nm 和 486.128 70 nm,该干涉仪是否可以分辨上述两条谱线?

(4) 若用焦距为 400.0 mm 的凸透镜将出射光汇聚到接收屏上,接收屏到透镜的距离应是多少?在 2°附近,上述两条精细结构谱线在屏上的距离又是多少?

解 透射光亮条纹满足的条件是

$$\Delta L = 2h\cos i = j\lambda$$

(1) 由于 $j=\dfrac{2h\cos i}{\lambda}$,可得

$$\Delta j = \frac{2h}{\lambda}(\cos i_1 - \cos i_2) = \frac{2\times 20\times 10^6}{486.123}(\cos 1^\circ - \cos 3^\circ) = 100$$

$1^\circ\sim 3^\circ$之间,有 100 条亮环。

(2) 亮纹出现的条件为

$$\Delta\varphi = k\Delta L = \frac{4\pi}{\lambda}h\cos i = 2j\pi$$

则光程差改变对应的角度改变为

$$\frac{4\pi}{\lambda}h\sin i\,\mathrm{d}i = \mathrm{d}(\Delta\varphi)$$

可得亮环的半值角宽度为

$$\mathrm{d}i = \frac{\lambda\,\mathrm{d}(\Delta\varphi)}{4\pi h\sin i} = \frac{\lambda\varepsilon}{4\pi h\sin i} = \frac{\lambda}{2\pi h\sin i}\left(\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}\right) = 5.69\times 10^{-6}$$

(3) 由于

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{j\pi}\left(\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}\right) = \frac{\lambda^2}{2\pi h\cos i}\left(\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}\right) = 9.65\times 10^{-5}(\mathrm{nm})$$

而题中波长差为 0.001 4 nm,可以分辨。

(4) 屏幕放在透镜焦平面处,相邻亮纹的角距离为

$$\delta i = \frac{j}{2nh\sin i_j}\delta\lambda = \frac{\cos i}{\lambda\sin i_j}\delta\lambda = 8.25\times 10^{-5}$$

线距离为

$$\delta l = f\delta i = 8.25\times 10^{-5}\times 400 = 0.033\,(\mathrm{mm})$$

4.5 光波场的空间相干性与时间相干性

4.5.1 空间相干性

一个具有一定空间尺度的光源上,不同位置的点源是不相干的。在杨氏干涉等分波

前干涉的情形下，由于不同位置点源的亮纹会相互错开，会导致干涉花样的可见度降低直至消失。这就是光波的空间相干性的问题。

针对杨氏双缝干涉的空间相干性的反比关系为

$$b\Delta\theta_0 = \lambda \tag{4.8}$$

其中，b 为扩展光源的空间尺度，λ 为光的波长，$\Delta\theta_0$ 为相干孔径角。

在薄膜干涉的情形下，由于每一列光波是通过反射和透射而被分成两列相干光的，与光源的空间分布和空间尺度无关，所以分振幅的干涉通常不会涉及空间相干性的问题。

4.5.2 时间相干性

非单色光波的波列是有限长的，从一列光波分出的两相干波列，若光程差太大，则不可能同时到达同一点，即两者不可能相遇，因而不能形成干涉。这就是光波的时间相干性问题。

波长范围为 $\Delta\lambda$、中心波长为 λ 的准单色光$\left(\text{即 } \Delta\lambda \ll \lambda, \text{或} \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \ll 1\right)$的波列在空间的长度为

$$\Delta L = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

ΔL 就是非单色光的相干长度。若将这样的波列分为两列光波，分出的两个波列在空间的间隔大于其相干长度，则不能相遇，不能产生干涉。

光波传过相干长度所需的时间为

$$\tau = \frac{\Delta L}{c}$$

若上述两列光波到达某一点的时间差大于 τ，则不能相遇，不能干涉，则 τ 被称为相干时间。由于

$$\tau = \frac{\Delta L}{c} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda c}$$

将波长范围用频率范围 $\Delta\nu$ 表示，利用 $\lambda = \frac{c}{\nu}$，可得

$$\Delta\lambda = \frac{c\Delta\nu}{\nu^2}$$

则

$$\tau = \frac{\left(\frac{c}{\nu}\right)^2}{\frac{c^2\Delta\nu}{\nu^2}} = \frac{1}{\Delta\nu}$$

由此可得

$$\tau\Delta\nu = 1 \tag{4.9}$$

这就是时间相干性的反比关系。

实际的光波都不是严格意义上的单色波，因而无论是分波前的干涉还是分振幅的干涉，时间相干性都是一样的。

4.5.3 典型问题与基本解题方法

【例 4.51】 一个宽度为 b 的扩展光源，发出单色光波。光源到杨氏双缝的距离为 l，双缝间隔为 d。若光源满足傍轴条件，即 $b \ll l$。讨论接收屏上干涉条纹消失的条件。

解 如图 4.67 所示，扩展光源上的任意一点发出的光波，经过双缝到达 P 点时，光程差包括两部分：在双缝之前

$$\Delta_1 = \overline{S_2S'} - \overline{S_1S'}$$

在双缝之后

$$\Delta_2 = \overline{PS_2} - \overline{PS_1}$$

总的光程差为

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$$

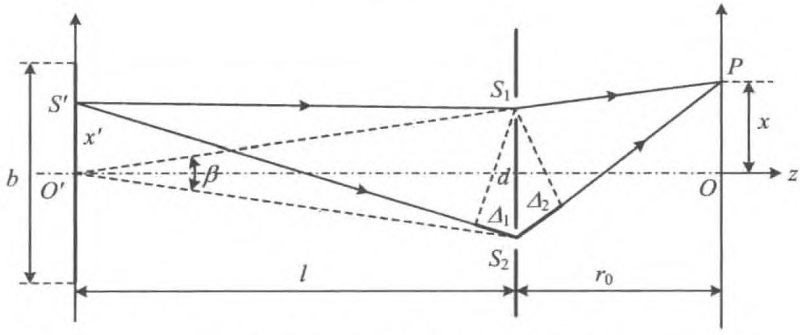


图 4.67 扩展光源上任一点光程的计算

当光源位置改变时，P 点的 Δ_1 变化，而 Δ_2 保持不变。

设 S' 的坐标为 x'，设光源具有较大的宽度，同时距双缝较远，例如恒星等天体，则 b

$\gg d, x' \gg d$，同时 l 也很大，$l \gg b, l \gg x'$，即光源也满足傍轴条件，则仿照屏后光程差 Δ_2 的计算方法，可得

$$\Delta L_1 = \overline{S'S_2} - \overline{S'S_1} \approx x' \frac{d}{l} = x'\beta \tag{1}$$

其中，$\beta = \frac{d}{l}$ 是光源中心对双缝的张角，称为干涉孔径(角)。

杨氏干涉的强度公式为

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi$$

设双缝宽度相等，即从双缝出射的光具有相等的振幅和强度，上式中 $A_1 = A_2$，$I_1 = I_2 = I_0$，可以化为

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi = 2I_0(1 + \cos\Delta\varphi)$$

其中，I_0 为只打开一条狭缝时(没有干涉，同时忽略单缝的衍射)接收屏上的光强。

位于 x' 附近的宽度为 $\mathrm{d}x'$ 的光源在屏上所形成的干涉强度为

$$\mathrm{d}I = 2I_0\mathrm{d}x'\left(1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\right) = 2I_0\mathrm{d}x'\left[1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}(\beta x' + \Delta_2)\right]$$

宽度为 b 的扩展光源上不同位置所发出的光波是不相干的，在接收屏上，这些光的强度进行叠加。因而整个光源的干涉场的强度为

$$\begin{aligned} I &= 2I_0\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\mathrm{d}x'\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(\beta x' + \Delta_2)\right] \\ &= 2I_0\left[b + \frac{\lambda}{\pi\beta}\sin\left(\frac{\pi b\beta}{\lambda}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta_2\right)\right] \end{aligned} \tag{2}$$

在傍轴条件下，双缝到接收屏上 x' 点的两条路径的光程差，即缝后光程差为

$$\Delta_2 = \frac{\mathrm{d}x}{\Delta D}$$

干涉图样的可见度分析如下：

从式(2)可以看出，当光源宽度 b 增大，$2bI_0$ 是接收屏上的背景光强，随位置而有所变化的部分的强度是

$$\left[2\frac{\lambda}{\pi\beta}\sin\left(\frac{\pi b\beta}{\lambda}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\Delta_2\right)\right]I_0 = \left[2\frac{\lambda}{\pi\beta}\sin\left(\frac{\pi b\beta}{\lambda}\right)\cos\left(\frac{2\pi\mathrm{d}x}{\lambda D}\right)\right]I_0$$

这一部分强度在 $\pm 2\frac{\lambda}{\pi\beta}\sin\left(\frac{\pi b\beta}{\lambda}\right)I_0$ 之间变化，相当于在一个亮背景上分布着干涉条纹，光源宽度增大，背景光强持续增大，从而使干涉图样的可见度持续下降。

在屏上形成干涉图样，最大光强和最小光强分别为

$$I_{\max} = 2I_0 b + 2I_0\frac{\lambda}{\pi\beta}\left|\sin\left(\frac{\pi b\beta}{\lambda}\right)\right|$$

$$I_{\min} = 2I_0 b - 2I_0 \frac{\lambda}{\pi\beta}\left|\sin\left(\frac{\pi b\beta}{\lambda}\right)\right|$$

于是干涉图样的可见度为

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{\left|\sin\left(\frac{\pi b\beta}{\lambda}\right)\right|}{\frac{\pi b\beta}{\lambda}} \tag{3}$$

接收屏上条纹可见度与光源宽度可用图 4.68 表示

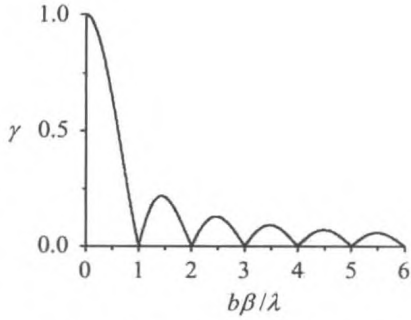


图 4.68 扩展光源杨氏干涉的可见度

将 $\beta = \frac{d}{l}$ 代入式(3),则得到

$$V = \frac{\left|\sin\left(\frac{\pi bd}{\lambda l}\right)\right|}{\frac{\pi bd}{\lambda l}} \tag{4}$$

可以看出,随着光源宽度 b 或者双缝间距 d 的增大,干涉图样的可见度迅速减小。

相干孔径与空间相干性:

在扩展光源的条件下,杨氏干涉的可见度是一个振荡衰减的函数。当 $\frac{b\beta}{\lambda} = 0$ 时,可见度函数取得极大值 $V = 1$,相当于 $b \ll \lambda$,即光源可视作一个几何点;随着 $\frac{b\beta}{\lambda}$ 的增大,可见度迅速衰减,到 $\frac{b\beta}{\lambda} = 1$ 时,$V = 0$;此后,虽然随着 $\frac{b\beta}{\lambda}$ 的增大,V 的值还会有一定幅度的起伏变化,但是数值很小,可见度很低。所以,通常认为当 $\frac{b\beta}{\lambda} \geqslant 1$ 时,干涉条纹的可见度已经很小。这种情况下,就是由于光源在空间的扩展,导致了干涉的消失。

于是,能够产生明显干涉的条件是 $\frac{b\beta}{\lambda} < 1$,由此可以得到

$$b < \frac{\lambda}{\beta} = \frac{l}{d}\lambda \tag{5}$$

上式就是与双缝间距 d 对应的扩展光源的尺度范围,在此范围内可以保证有一定可见度的干涉场可供观测。

当 $b_m = \frac{l}{d}\lambda$ 时,可见度 $V = 0$,此时 b_m 为扩展光源的极限宽度。

由于扩展光源导致干涉消失,这种现象被称作光的**空间相干性**。

或者，在光源宽度保持一定的情况下，空间相干性要求双缝间距

$$d \leqslant \frac{l}{b}\lambda \tag{6}$$

此时干涉孔径角为 $\beta = \frac{d}{l} \leqslant \frac{\lambda}{b}$。由此可得最大干涉孔径角为

$$\Delta\theta_0 = \frac{\lambda}{b} \tag{7}$$

能够产生显著干涉的最大的 $\Delta\theta_0$ 称作**相干孔径(角)**，这是双缝对光源的张角，只有处于这一角度范围之内的光是相干的。

也可以将式(7)改写作

$$b\Delta\theta_0 = \lambda \tag{8}$$

式(7)或式(8)就是空间相干性的反比公式。

【例 4.52】 讨论波长分布范围为 $\lambda \sim \lambda + \Delta\lambda$ 的非单色光的杨氏干涉强度分布。

解 入射光为非单色光时，除了 0 级亮纹，在接收屏上不同波长的同一级亮纹不重合，一方面会产生彩色的条纹，另一方面也会由于亮纹的扩散使暗纹消失，在接收屏上难以观察到明显的条纹。通过对接收屏上的光强分布进行计算可以得到具体的结果。易知波矢为 k 的单色成分经双缝干涉所形成的强度分布为

$$i(k) = 4\left(\frac{A}{D}\right)^2 \cos^2\left(\frac{kd}{2D}x\right) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{kd}{2D}x\right)$$

式中，$4I_0$ 为单位波长范围的光波在接收屏上的强度。

由于只有相同波长的光才能进行相干叠加，不同波长的光是不相干的，按强度叠加，则

$$I = \int_{k_0}^{k_0+\Delta k} i(k)\mathrm{d}k = 4I_0 \int_{k_0}^{k_0+\Delta k} \cos^2\left(\frac{kd}{2D}x\right)\mathrm{d}k = 2I_0 \int_{k_0}^{k_0+\Delta k} \left[1 + \cos\left(\frac{kd}{D}x\right)\right]\mathrm{d}k$$

$$= 2I_0\left\{\Delta k + \frac{D}{xd}\sin\left[\frac{(k_0 + \Delta k)d}{D}x\right] - \frac{D}{x'd}\sin\left(\frac{k_0 d}{D}\right)x\right\}$$

当 $\lambda = 500\ \mathrm{nm}$，$\Delta\lambda = 50\ \mathrm{nm}$ 时，接收屏上的强度分布如图 4.69 所示。

当 $\frac{\Delta kd}{D}x > 2\pi$ 时，屏上明暗条纹相差较小，已不容易分辨，所以对于非单色光而言，接收屏上有效的干涉范围为 $x < 2\pi\frac{D}{\Delta kd}$，即

$$x < \frac{D}{\lambda d} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \Delta x \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

与亮条纹的公式 $x_j = j\frac{D}{d}\lambda = j\Delta x$ 比较，可知能够出现的最大干涉级数为

$$j_{\max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

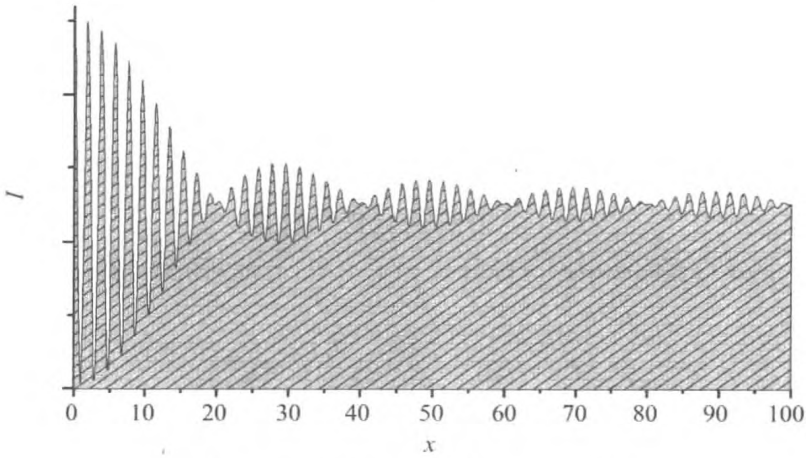


图 4.69 非单色光双缝干涉的强度分布

【例 4.53】 钠灯的 D 线有两根谱线，波长分别为 $\lambda_1 = 589.0$ nm 和 $\lambda_2 = 589.6$ nm。用该谱线照明迈克尔孙干涉仪。首先调整干涉仪，得到清晰的干涉条纹，然后移动 M_1，干涉图样为什么会逐渐变得模糊？第一次视场中干涉条纹消失时，M_1 移动了多少距离？

分析 由于不同波长的干涉条纹分布不同，因而会相互重叠，导致可见度下降，直至看不见条纹。

解 这涉及非单色光叠加的问题。

钠灯的两根波长不同的谱线各自形成一套干涉图样。调节干涉仪得到清晰的干涉图样时，意味着两根谱线的相差 m 级的干涉条纹恰好重合，即

$$2h\cos i = (j + m)\lambda_1$$

$$2h\cos i = j\lambda_2$$

由于视场中只能见到有限的几根条纹，且某级条纹重合时，近邻的干涉条纹虽然不是完全重合，但相互错开的距离比较小，因而看起来还是清晰的。

改变两反射镜间的距离，上述重合的条纹逐渐错开，直至一根谱线的亮纹与另一根谱线的暗纹重合，这时干涉图样会变得模糊。不妨使两镜间距增大，则视场中每根干涉环的半径都将增大，只是不同波长的干涉环增大的速度不同。即

$$2h'\cos i' = (j + m + l)\lambda_1$$

该位置处是长波的暗纹，即

$$2h'\cos i' = \left(j + l - \frac{1}{2}\right)\lambda_2$$

由以上四式，可得

$$(j + m)\lambda_1 = j\lambda_2$$

$$(j + m + l)\lambda_1 = \left(j + l - \frac{1}{2}\right)\lambda_2$$

解得

$$l = \frac{\lambda_2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{\lambda_2}{2\Delta\lambda}$$

说明增大两反射镜间距引起干涉环变化了 l 根，与此对应的光程差的变化为（由于 $\lambda_1 \approx \lambda_2$）

$$\Delta L = l\lambda_1 = \frac{\lambda_1^2}{2\Delta\lambda} \approx l\lambda_2 = \frac{\lambda_2^2}{2\Delta\lambda}$$

即 M_1 移动的距离为

$$\frac{\Delta L}{2} = \frac{\lambda_1^2}{4\Delta\lambda} = 0.145\ \text{mm}$$

每移动这样长的距离，干涉图样就经历一次从清晰到模糊的过程。

需要指出的是，这是双谱线的干涉图样可见度的变化，不同于带宽为 $\Delta\lambda$ 的波长连续分布的非单色光的干涉。

【例 4.54】 在杨氏双缝实验中，双缝间距为 0.5 mm，接收屏距双缝 1.000 m，点光源距双缝 30 cm，它发射波长 $\lambda = 500.0$ nm 的单色光。试求：

(1) 屏上干涉条纹间距；

(2) 若点光源由轴上向下平移 2 mm，屏上干涉条纹向什么方向移动？移动多少距离？

(3) 如点光源发出的光波为(500.0 ± 2.5 nm)范围内的准单色光，求屏上能看到的干涉极大的最高级次；

(4) 若光源具有一定的宽度，屏上干涉条纹消失时，它的临界宽度是多少？

分析 本题既涉及光的空间相干性，也涉及光的时间相干性。

解 (1) 若光源是点光源，杨氏双缝干涉中的条纹间距

$$\Delta x = \frac{D\lambda}{d} = 1.00\ \text{mm}$$

(2) 此时还需考虑点光源屏和双缝屏之间的光程差，总光程差由两部分构成，设点光源在屏上的位置坐标为 x'，点光源由轴上向下平移 2 mm 记为 $x' = -2$ mm。则需考虑双缝之前的光程差，于是接收屏上 x_j 处亮条纹的光程差满足的条件为

$$k\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\left(x'\frac{d}{l} + x_j\frac{d}{D}\right) = 2j\pi$$

可得

$$x_j = \left(j\lambda - x'\frac{d}{l}\right)\frac{D}{d}$$

所以0级条纹位置为

$$x_0 = -x'\frac{D}{l} = -(-2)\times\frac{100}{30} = 6.7\,(\text{mm})$$

大于0,表示条纹上移。

(3) 相干长度为 $L=\lambda^2/\Delta\lambda$,于是条纹最高级次为

$$j = \frac{L}{\lambda} = \frac{\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}}{\lambda} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 100$$

也可按此方法计算:当长波限 $\lambda+\Delta\lambda$ 的 j 级亮条纹与短波限 λ 的 $j+1$ 级亮条纹重合时,干涉消失,即 $j(\lambda+\Delta\lambda)=(j+1)\lambda$,得最大相干级数为

$$j = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

λ 为短波限。代入题目已知数据,得

$$j = \frac{\lambda_{\min}}{\Delta\lambda} = \frac{500-2.5}{5} = 99.5$$

屏上可见的条纹最高级次 $j_{\max}=99$。

(4) 临界宽度为

$$b = \lambda\frac{l}{d} = 500\times10^{-6}\times\frac{300}{0.5} = 0.3\,(\text{mm})$$

【例4.55】 用迈克尔孙干涉仪精密测长,以He—Ne激光器的632.8 nm谱线作光源,其谱线宽度为0.000 1 nm,对干涉强度讯号测量的灵敏度可达1/8个条纹。求:

(1) 这台干涉仪的测长精度是多少?

(2) 该测长仪一次测长的量程是多少?

解 (1) 两个相邻的条纹对应的光程差改变为一个波长,1/8个条纹对应的光程差变化为1/8个波长。

薄膜干涉的亮条纹条件,即光程差满足

$$\delta = 2n_2h\cos i_2 = j\lambda$$

对于迈克尔孙干涉仪,$n_2=1$,靠近中心处,条纹角位置 $i_2\approx0$,$\cos i_2\approx1$,所以干涉亮纹满足 $2h\approx j\lambda$。

假设移动1/8条纹,对应迈克尔孙干涉仪一臂移动距离为 Δh,则光程差的改变为

$$2(h+\Delta h)=\left(j+\frac{1}{8}\right)\lambda$$

其中，Δh 即为测长精度，可解出

$$\Delta h=\frac{\lambda}{16}=\frac{632.8}{16}=39.55\,(\text{nm})\approx 40\,(\text{nm})$$

(2) 用有一定波长范围的光波(即有一定带宽的非单色光)光照明，设初始时两静的间距为 0。使两镜错开，当长波长的 j 级亮(或暗)条纹和短波长的 $j+1$ 级亮(或暗)条纹重合时，干涉区一片明亮，看不到明暗交错的条纹。此时对应的两镜间距(长度)H 即为其一次测长的量程。代入题目已知数据，有

$$2H=j\times\left(\frac{632.8+0.000\,1}{2}\right)=(j+1)\times\left(\frac{632.8-0.000\,1}{2}\right)(\text{nm})$$

$$j=\frac{\lambda_{\min}}{\Delta\lambda}=\frac{\dfrac{632.8-0.000\,1}{2}}{0.000\,1}\approx 632.8\times 10^4$$

所以量程为

$$H=\frac{j\lambda_{\min}}{2}=2.002\ \text{m}$$

【例 4.56】 镉灯为准单色光源，其红色谱线的中心波长为 642.8 nm，谱线宽度为 0.001 nm。

(1) 求其光场的相干长度和相干时间；

(2) 求该红色谱线的频宽；

(3) 用此灯作为迈克尔孙干涉仪的光源，用镜面移动来观测干涉场输出的光信号曲线，设镜面移动速度为 0.5 mm/s，试估算需要多长时间可以获得显示有两个波包形状的讯号曲线？

解 (1) 非单色光的相干长度为

$$\Delta L=\frac{\bar{\lambda}^2}{\Delta\lambda}$$

此公式的证明如下：

相干长度就是最大相干光程差，即

$$\Delta L_{\max}=j\times\lambda_{\max}=(j+1)\lambda_{\min}$$

由此可得

$$j=\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}-\lambda_{\min}}=\frac{\lambda_{\min}}{\Delta\lambda}$$

所以膜厚，即量程为

$$\Delta L_{\max} = j \times \lambda_{\max} = \frac{\lambda_{\min}\lambda_{\max}}{\Delta\lambda} \approx \frac{\bar{\lambda}^2}{\Delta\lambda}$$

当 $\Delta\lambda \ll \lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ 时，上式近似成立，其中

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}{2}$$

所以相干长度为

$$\Delta L = \frac{\bar{\lambda}^2}{\Delta\lambda} = \frac{642.8^2}{0.001} = 4.132 \times 10^8 \text{ (nm)} = 413.2 \text{ (mm)}$$

相干时间为

$$\tau = \frac{\Delta L}{c} = \frac{413.2 \text{ mm}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 1.377\,3 \times 10^9 \text{ s} = 1.377\,3 \text{ ns}$$

(2) 由于 $\nu = c/\lambda$，因而

$$\Delta\nu = -\frac{c\Delta\lambda}{\lambda^2}$$

当只考虑大小时，负号可以略去，则

$$\Delta\nu = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda^2} = 3 \times 10^8 \times \frac{0.001}{642.8^2} = 7.26 \times 10^8 \text{ (Hz)} = 726 \text{ (MHz)}$$

此数值也可由

$$\Delta\nu = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{c}{\Delta L} = \frac{1}{\tau}$$

求出。

(3) 对于非单色光，条纹反衬度会随着两个反射镜之间距离的变化而变化，两反射镜臂长相近时反衬度最高，臂长相差增大时反衬度逐渐下降，直至光程差达到一个相干长度时反衬度为0，大于1个相干长度时，反衬度均为0。

所以要获得两个波包形状的信号曲线，则此过程产生的光程差应是两个相干长度，即臂长从 $\Delta L_{\max}$ 变化到 $-\Delta L_{\max}$，即 $2h = 2\Delta L_{\max}$，而 $h = vt$，所以可得

$$t = \frac{\Delta L_{\max}}{v} = \frac{413.2}{0.5} = 826.4 \text{ (s)}$$

【例 4.57】 两条光谱线，中心为 600 nm，波长差 10^{-4} nm，现在要用法布里—珀罗干涉仪将其分辨，问法布里—珀罗干涉仪的镜面间距至少要多长(设每一个镜面的反射率为95%)?

解 法布里—珀罗干涉仪的可分辨最小波长间隔

$$\delta\lambda \geqslant \frac{\lambda}{j\pi} \cdot \left(\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}\right)$$

其中，ρ 为反射镜对光强的反射率，其中的干涉级数 j 由 $2n_2 h\cos i_2 = j\lambda$ 确定，由于 j 一般非常大，所以可取视场中心的干涉级数，即 $2h = j\lambda$，$j = 2h/\lambda$。

将 j 代入可分辨波长的表达式得

$$\delta\lambda \geqslant \frac{\lambda^2}{2\pi h} \cdot \left(\frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}\right)$$

解出法布里—珀罗干涉仪的镜面间距

$$h \geqslant \frac{\lambda^2}{2\pi\delta\lambda} \cdot \frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}} = \frac{(600\ \text{nm})^2}{2 \times 3.14 \times 10^{-4}\ \text{nm}} \times \left(\frac{1-0.95}{\sqrt{0.95}}\right) = 2.94\ \text{cm}$$

镜面间距要比 2.94 cm 大才行，此处要用进一法，比如取 3 cm。

第5章　光的衍射

光的衍射现象是光的波动性的又一重要表现，光的衍射是相干的光波进行线性叠加的结果。衍射是连续分布的次波源（次波中心）所发出的次波的相干叠加。由于次波中心是波前的一个无穷小的点源，因而每列次波的振动实际上是无穷小的，而次波列的数目是无穷多的，这样，接收屏上某一点的合振动实际上是无穷多个无穷小量的和，这样的求和实际上就是求积分，在处理光的衍射时，光波的叠加原理就成了按惠更斯的思想而发展起来的菲涅耳—基尔霍夫衍射积分。而干涉是分立波列的相干叠加，是直接应用光波的叠加原理的结果。

以经典波动光学为基础，利用数学中的傅里叶变换关系来研究光信息的处理、传递和记录，以及成像问题，称作傅里叶光学。傅里叶光学中的三个重要应用是光学信息处理、成像系统的传递函数、全息照相。目前，傅里叶光学已发展成为光学的一个重要分支，但在光学教学中，它可以被视作是光的衍射的拓展和延伸。

5.1　衍射积分公式与衍射的分类

5.1.1　惠更斯—菲涅耳原理

光波前上的每一点都可以看成是次波波源，由它们发出球面次波，光场中任意一点的光振动是所有这些次波的相干叠加。

5.1.2　菲涅耳—基尔霍夫衍射积分公式

$$\widetilde{U}(P) = \frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\iint_{\Sigma}\widetilde{U}_0(Q)\left(\frac{\cos\theta_0 + \cos\theta}{2}\right)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\Sigma$$

其中，θ_0，θ 分别是源点和场点相对于次波面元 $d\Sigma$ 的方位角；$\tilde{U}_0(Q)$ 为波前 Q 点的复振幅，称为瞳函数；r 为场点 P 相对于面积元的位矢。

$$F(\theta_0,\theta)=\frac{\cos\theta_0+\cos\theta}{2}$$

称作次波的倾斜因子。

5.1.3 衍射的分类

根据衍射障碍物（衍射屏）到光源和接收屏的距离将衍射分类。

距离有限的，或至少一个是有限的，为菲涅耳（Fresnel）衍射。此时在接收屏上的任意一点，来自不同方向的次波进行相干叠加。

距离无限的，即平行光入射、出射，为夫琅禾费（Fraunhofer）衍射。此时相互平行的光在无穷远处相干叠加。事实上，在衍射屏后置一凸透镜，相互平行的光汇聚在透镜焦平面上的同一点，进行相干叠加。

5.1.4 巴比涅原理

互补屏 $\Sigma_a+\Sigma_b=\Sigma$，透光部分相加等于无衍射屏。

当

$$\tilde{U}_a(P)+\tilde{U}_b(P)=\tilde{U}_0(P)$$

为自由传播。

5.2 菲涅耳衍射

5.2.1 菲涅耳半波带

典型的菲涅耳衍射是圆孔或圆屏的衍射，一般用菲涅耳半波带方法处理次波的相干叠加。

如图 5.1 所示，菲涅耳是这样解决求解衍射积分问题的：将露出圆孔的波前（这里是点光源 S 所发出的球面波的波面）划分为一系列的同心圆环带，并使各个带的边缘到轴上场点 P 的距离（光程）依次相差半个波长，例如，第一个环带的中心到 P 的光程为 $r_0=$

b，其外缘到 P 的光程为 $r_1 = r_0 + \frac{\lambda}{2}$，第二个环带的外缘到 P 的光程为 $r_2 = r_0 + \lambda$……第 m 个半波带的外边缘到场点 P 的光程为 $r_m = r_0 + m\frac{\lambda}{2}$。这样在球面上划分出的环带称为菲涅耳半波带(Fresnel half-period zone)。

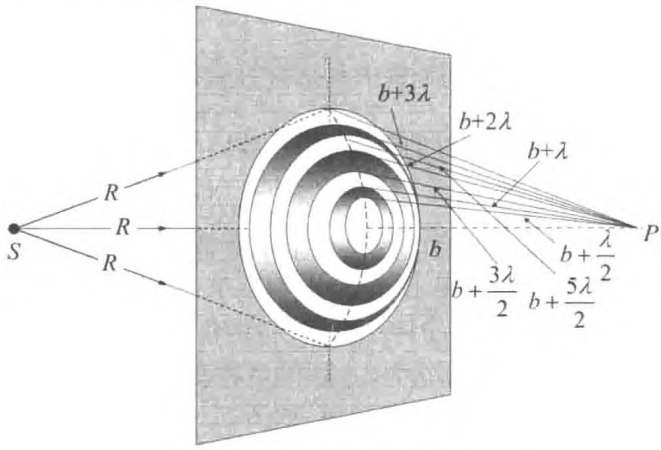


图 5.1 菲涅耳半波带的划分

两个相邻的半波带上，有一系列的对应点(其实是对应的圆环)，如图 5.2 所示，它们到场点 P 的光程差为 $\frac{\lambda}{2}$，因而在 P 点振动的相位差为 π，相位相反，振动方向也相反，因而振动相互抵消。

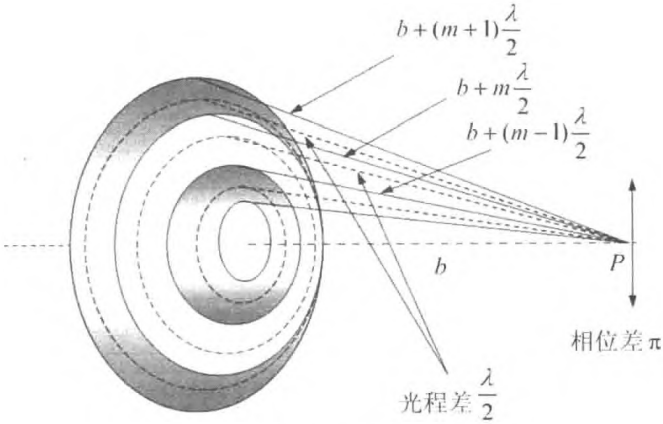


图 5.2 相邻半波带的合振动

5.2.2 半波带的复振幅表示

用振幅矢量法处理每个半波带的合振动振幅和半波带次波之间的相干叠加。

若将每个半波带细分为 m 个波带，使各个波带到 P 点的光程依次相差 $\frac{\lambda}{2m}$，则各个波带在 P 点的相位依次相差 $\frac{\pi}{m}$。用振幅矢量法计算合振动，则是 m 个矢量依次首尾相接，每个矢量相对于前一个矢量转过的角度为 $\frac{\pi}{m}$，最后一个矢量相对于第一个矢量转过的角度为 π，如图 5.3(a)所示。

需要指出的是，由于这些矢量对应的是一个小波带所发出的次波的复振幅，各列次波的倾斜因子非常接近，光程也相差不大(最多相差半个波长)，因而这些复振幅的大小可近似认为是相等的，所以图 5.3(a)中的各个矢量的长度相等。

进一步，若将一个半波带无线细分，则上述矢量将变为无穷多个，同时每个矢量将变得无限小，于是上述折线将演变为一个半圆弧，如图 5.3(b)所示。即一个完整半波带所有次波的振幅矢量叠加的结果可近似地用一个半圆弧表示，这样的振幅矢量就是上述圆弧直径所代表的矢量。

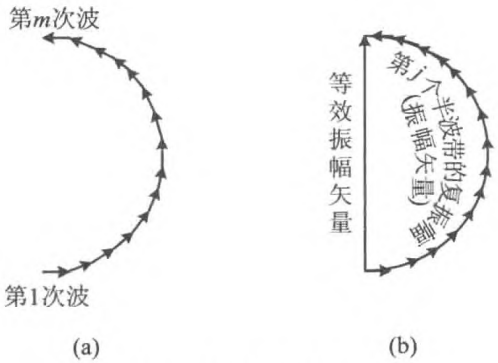


图 5.3 一个半波带的振幅矢量

如果将每一个半波带都用上述方法分析，则可得到各个半波带在场点 P 处的振幅矢量，相邻的半波带的振幅矢量由于相位相反(相位差为 π)，矢量的方向也相反，再考虑倾斜因子的影响，易知靠外的半波带，其振幅矢量将逐渐减小。但是，由于相邻的半波带的倾斜因子十分接近，所以相邻的振幅矢量的大小也十分接近，如图 5.4 所示。

各个半波带次波叠加后的合振动的振幅为

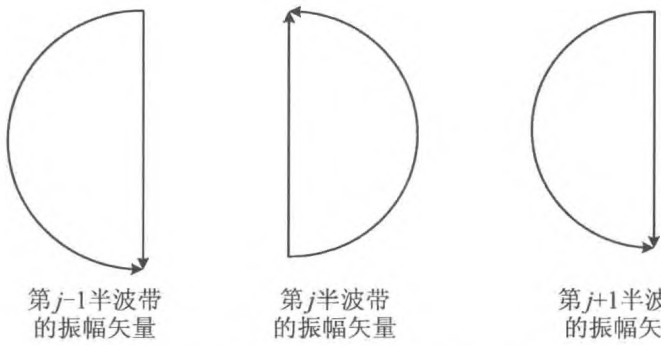


图 5.4 相邻半波带的振幅矢量

$$A = \frac{1}{2}[A_1 + (-1)^{n-1}A_n] \tag{5.1}$$

如图 5.5 所示，对轴上的衍射结果可作以下解释。

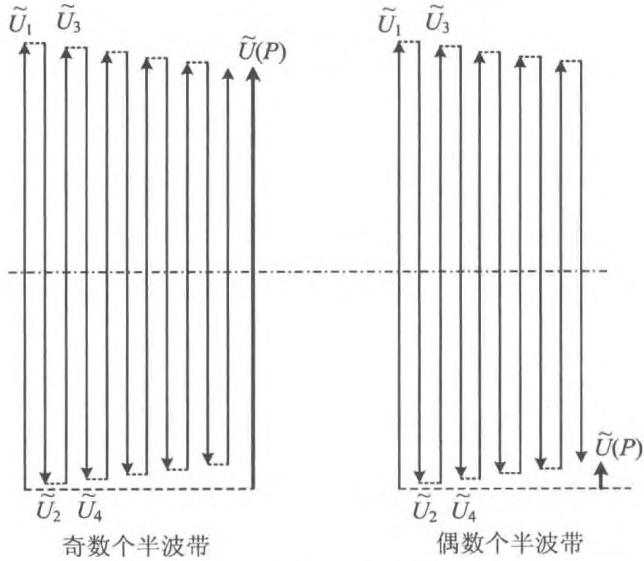


图 5.5 菲涅耳半波带合振动的振幅矢量

在圆孔衍射中，如果露出的半波带数 n 为奇数，则

$$\tilde{U}(P) = \frac{1}{2}(A_1 + A_n)$$

为亮点。

如果露出的半波带数 n 为偶数，则

$$\tilde{U}(P) = \frac{1}{2}(A_1 - A_n)$$

为暗点。

自由传播，相当于 $n \to \infty$，而 $A_n \to 0$，所以

$$A(P) = \frac{1}{2}A_1$$

始终亮点。

在圆屏衍射中，相当于前面 n 个半波带被遮住，则

$$\tilde{U}(P) = \sum_{n+1}^{\infty} A_m = \frac{1}{2}A_{n+1}$$

因而总是亮点。

5.2.3 半波带方程

若点光源所发出的球面波在圆孔处的球面半径为 R，轴上的场点到球面顶点的距离为 r_0，第 n 个半波带外缘的半径为 ρ_n，光的波长为 λ。半波带方程为

$$n = \frac{\rho_n^2}{\lambda}\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{R}\right) \tag{5.2}$$

由方程(5.2)可知，圆孔所露出的半波带的数目 n 及其奇偶性由 r_0 决定，即在轴上不同的位置看同一个圆孔，其所露出的半波带的数目是不同的。

5.2.4 菲涅耳波带片

用半波带将波面分割，然后只让其中的奇数(或偶数)半波带透光，即可以制成菲涅耳波带片。透过波带片的光，在光轴上的场点有相同的相位，振动方向相同，则合振动的振幅大大增强。

可以将半波带方程(5.2)写成如下形式

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{r_0} = \frac{n\lambda}{\rho_n^2} \tag{5.3}$$

将式(5.3)同透镜的高斯公式 $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$ 比较，可发现其形式上相同，因而波带片的焦距为

$$f = \frac{\rho_n^2}{n\lambda} \tag{5.4}$$

经过波带片之后，衍射光在焦点处汇聚，出现一个光强的极大值。

对平行入射光而言，由于 $R=\infty$，所以对平面波的波带片应当制成平面形状的。

除了(5.4)式所表示的波带片的主焦点之外，波带片还有一系列的次焦点，位置分别为 $f'=\frac{f}{3},\frac{f}{5},\cdots,\frac{f}{2m+1}$。

5.2.5 典型问题与基本解题方法

处理菲涅耳衍射的基本方法是半波带法。

将通过衍射屏光孔的波前相对于要讨论的衍射场点 P 分割为一系列的菲涅耳半波带，然后求各个半波带的次波到达场点的振幅矢量，求出这些矢量的和。将整个波前分割为一系列的半波带，就可以用简单的代数法替代复杂的积分法，得出衍射场的某些定性特征。半波带法常用于解决菲涅耳圆孔或圆屏衍射问题，这时应掌握以下主要公式。

在处理衍射问题中，经常把经过衍射屏的波前分成许多子波前，然后用振幅矢量法来求这些子波前在衍射场点 P 的合振幅。所谓振幅矢量法，就是将复振幅用一个矢量表示，矢量的大小表示振幅，而其方向对应复振幅的位相，或者两矢量的夹角对应两复振幅的相位差。则总的复振幅就是这些矢量的和。若每一个子波前分割得无限小，则代表每一个子波前的复振幅的矢量将变得无限小，同时相邻矢量间的夹角也变得无限小，则整个波前的复振幅就变成了一条光滑的曲线，曲线起点至终点的矢量就是整个波前所对应的复振幅(所有子波的合振动的振幅)。自由传播的复振幅矢量是一条螺旋线。

对于上述的求和过程，如果将每一个面元无限细分的话，则求和运算便演变成为积分运算，实际上就是求解菲涅耳—基尔霍夫衍射积分公式。但是，由于上述积分是曲面积分，严格计算的话几乎无法得到解析解，因而，积分过程中总是要采用一些近似的，最常采用的近似就是傍轴(近轴)近似。经过积分得到场点的复振幅，进而得到衍射场的光强分布。

【例 5.1】 波长为 $\lambda=563.3$ nm 的单色光从远处的光源发出，经过一个直径 $D=2.6$ mm 的圆孔，在距孔 1 m 处放一屏幕，问：

(1) 幕上正对孔中心的点 P 是亮的还是暗的？

(2) 要使 P 点的明暗变成与(1)相反的情况，至少要将屏幕移动多少距离？

(3) 若在衍射屏与接受屏间充以折射率为 2 的介质，(1)将会有什么变化？

分析 菲涅耳圆孔衍射，要用半波带法分析光轴上各点的复振幅。对于本题，利用半波带方程，求出从轴上的点观察圆孔时所露出的半波带数 m，即可作出判断。

解 (1) 按题中所给条件，光源在很远处，$R=\infty$，由半波带方程，可算得圆孔对于点

P 所露出的半波带数为

$$m = \frac{\rho^2(R+b)}{\lambda b_0 R} = \frac{\rho^2}{\lambda}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{b_0}\right) = \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2}{\lambda b_0} = \frac{(1.3)^2}{563.3\times10^{-6}\times1\times10^3} = 3$$

m 为奇数，所以 P 为亮点。

(2) 移动后使 $m=2$，或 $m=4$，则对应暗点。由上式计算

$$b = \frac{\rho^2}{m\lambda} = \frac{1.3^2}{563.3\times10^{-6}\times m} = \begin{cases} 1500\ (\text{mm}) & (m=2) \\ 750\ (\text{mm}) & (m=4) \end{cases}$$

则

$$b - b_0 = 1\,500 - 1\,000 = 500\ (\text{mm})$$

或

$$b - b_0 = 750 - 1\,000 = -250\ (\text{mm})$$

即前移 0.25 m 或后移 0.5 m，到暗点处。

(3) 若衍射空间的折射率为 $n=2$，则(1)中的波长应以 $\lambda' = \frac{\lambda}{n}$ 代替。于是

$$m = \frac{n\rho^2}{\lambda b} = \frac{2\times1.3^2}{563.3\times10^{-6}\times1\times10^3} = 6$$

为偶数，故 P 点为暗点。

【例 5.2】 用波长为 500 nm 的平面单色光照射一菲涅耳波带片，此波带片最亮的像点在波带片后 1 m 处。若只将波带片前 5 个偶数半波带挡住，其余全部开放，问：

(1) 波带片后最亮点的光强与自由传播时的光强之比是多少？

(2) 这个波带片的半径是多大？光强极大值出现在轴上的哪些位置？

(3) 若在波带片后紧贴一个焦距为 1 m 的同等大小的透镜，与不放透镜时相比，有什么变化？

分析 平行光照射波带片时，其后面的最亮点就是主焦点。因此本题波带片的主焦距就是 1 m。由于只有前面 5 个偶数半波带被挡住，故主焦点的光强取决于前 5 个奇数半波带和大于 10 的所有半波带的次波的合振动。加上透镜后，平面波将汇聚到透镜的焦点处，而且从波带片平面到透镜的焦点所有路径的光程相等，即从各个半波带发出的所有次波经过透镜到达上述主焦点时，光程相同，相位相同，原本可用一个半圆弧代表一个半波带在焦点处的振幅矢量，经过透镜，由于相位相同，等效于原来半圆弧被拉成一条直线，合振动的振幅变为原来的 $\frac{\pi}{2}$ 倍。

解　(1) 设第一个半波带在波带片主焦点 F 处的振幅为 A_1，则前 5 个奇数半波带在该点的合振幅为 $5A_1$，波带片之外的所有半波带(第 11 个及其后面的半波带)在该点的合振幅为 $\frac{1}{2}A_{11}\approx\frac{1}{2}A_1$。则该点合振动的振幅为

$$5A_1+\frac{1}{2}A_1=\frac{11}{2}A_1$$

光强为

$$I_1=\frac{121}{4}A_1^2=\frac{121}{4}I_1=121I_0$$

其中，$I_0=\frac{1}{4}A_1^2$，为自由传播时该点的光强，即两者之比为 121。

(2) 由波带片焦距公式 $f=\frac{\rho_m^2}{m\lambda}$，得到

$$\rho_m=\sqrt{mf\lambda}$$

而波带片的半径就是最外透光半波带的半径。题中 $f=1\ \mathrm{m}$，$m=10$，$\lambda=500\times10^{-9}\ \mathrm{m}$，于是该波带片的半径为

$$\rho_{10}=\sqrt{1\times10\times500\times10^{-9}}=2.24\times10^{-3}\ (\mathrm{m})=2.24\ (\mathrm{mm})$$

光强极大值会出现在该波带片的其他次焦点处，而其他次焦点的位置为

$$f_m=\frac{f}{2m+1}=\frac{1}{2m+1}\ (\mathrm{m})$$

(3) 按图 5.6 所示放置透镜，通过波带片的光波也通过透镜，对于透镜的焦点，波带片所在的波前是一个等相位面，于是所有次波在焦点处相位相等，如图 5.7 所示，一个波带片所发出的次波在焦点处的振幅变为

$$A'_m=\frac{\pi A_m}{2}$$

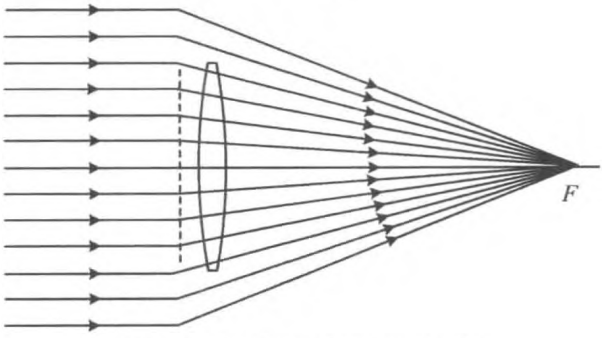


图 5.6　波带片后放置一个凸透镜

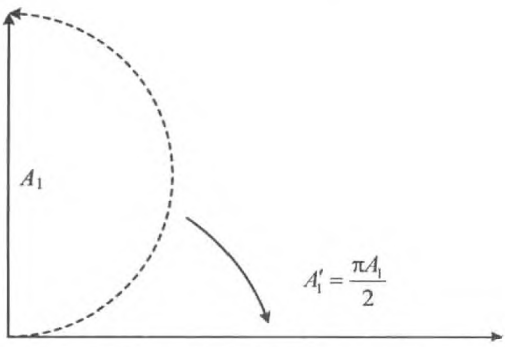


图 5.7　一个半波带的振幅矢量

透镜的口径与波带片大小相等，未通过波带片的光也未通过透镜，于是合振动的振幅为

$$5A_1' + \frac{1}{2}A_1 = \left(\frac{5\pi}{2} + \frac{1}{2}\right)A_1 = \left(\frac{5\pi + 1}{2}\right)A_1$$

光强为

$$I_1' = \left(\frac{5\pi + 1}{2}\right)^2 A_1^2 = \frac{279.2}{4}I_1 = 279.2I_0$$

与不加透镜时相比，光强增大的倍数为

$$\frac{I_1'}{I_1} = \frac{1\,049.76}{121} = 2.3\text{（倍）}$$

【例 5.3】 对于 500.0 nm 的光设计波带片，要求其第 5 环外缘的半径为 1.5 mm，则

（1）其第 1 环的半径是多少？

（2）该波带片的焦距是多少？

（3）若在波带片和屏幕间充以折射率为 n 的介质，将发生什么变化？

分析　菲涅耳波带片中的每一个半波带，有一定数值的内外径，其中第 m 个半波带的外径 ρ_m 就是第 $m+1$ 个半波带的内径，在通常的半波带方程中，ρ_m 的含义就是第 m 个半波带的外径。

解　（1）半波带的方程为

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{r_0} = \frac{1}{\frac{\rho_m^2}{m\lambda}}$$

式中，R 为点光源所发出的球面波到衍射屏的球面半径，r_0 为从衍射屏向衍射波汇聚点的球面半径。平面波入射，$R = \infty$，该汇聚点就是波带片的主焦点，焦距为

$$f = \frac{\rho_m^2}{m\lambda}$$

则各个半波带外缘半径的关系为 $\frac{\rho_m^2}{m}=\rho_1^2$，第1半波带外缘半径为

$$\rho_1=\frac{\rho_5}{\sqrt{5}}=0.67\,(\text{mm})$$

(2) 该波带片对500.0 nm波长单色光的主焦距为

$$f=\frac{\rho_m^2}{m\lambda}=\frac{1.5^2}{5\times500\times10^{-6}}=900\,(\text{mm})=0.9\,(\text{m})$$

(3) 充入折射率为 n 介质后，其中波长变为 $\lambda'=\lambda/n$。但是波带片却没有改变，按照半波带方程，衍射波的汇聚点将会改变，焦距变为

$$f'=\frac{\rho_m^2}{m\lambda'}$$

即

$$\frac{\rho_m^2}{m}=f'\lambda'$$

故有 $f\lambda=f'\lambda'$，所以得到

$$f'=\frac{f\lambda}{\lambda'}=nf$$

【例5.4】 由于X射线在介质中的折射率接近于1，所以不能用透镜将其汇聚。一种将X射线汇聚的方法是采用菲涅耳波带片。问：

(1) 一波带片的奇数条半波带透光、而偶数条半波带不透光，可以将波长 $\lambda=20.0$ nm的平行X光束汇聚到距离波带片 $r_0=500.0$ mm的 P 点处。该波带片第 n 条透光半波带的内外半径各是多少？

(2) 一个波带片除了有一个主焦点之外，还有一系列的次焦点。上述波带片距离 P 点最近的次焦点在哪里？

(3) 上述波带片能否将波长 $\lambda=50.0$ nm的平行X光汇聚？若能汇聚，汇聚点在何处？

解 半波带方程为

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{r_0}=\frac{1}{\frac{\rho_n^2}{n\lambda}}$$

对于平面入射光，$R=\infty$，波带片的焦距为

$$f=r_0=\frac{\rho_n^2}{n\lambda}$$

其中，ρ_n 是第 n 个半波带的外缘半径。

(1) 奇数半波带透光，其外缘半径为

$$\rho_n = \sqrt{n\lambda r_0} = 0.10\sqrt{n}\ (\text{mm})$$

内缘半径为

$$\rho'_n = \sqrt{(n-1)\lambda r_0} = 0.10\sqrt{n-1}\ (\text{mm})$$

式中 n 为奇数。

(2) 根据半波带方程

$$n = \frac{\rho_n^2}{\lambda} \cdot \frac{1}{r_0}$$

在轴上距离波带片 $r_1 = \frac{1}{3}r_0$ 处，$n_1 = 3n$，即原来的每一个半波带，序号都增为原来的 3 倍，相当于在此处观察波带片，原来的每一个半波带都分成了 3 个。其中两个发出的次波由于相位相反而抵消，还剩余 1 个半波带所发出的次波，因而这一点就是距离主焦点最近的次焦点。

(3) 由于

$$f = \frac{\rho_n^2}{n\lambda}$$

波长改变，主焦点相应改变，$\lambda = 50.0\ \text{nm}$，$f = 200.0\ \text{mm}$。

【例 5.5】 平行光正入射到如图 5.8(a)、图 5.8(b)、图 5.8(c)、图 5.8(d)所示的衍射屏上。图中标出的是衍射屏上某些位置到衍射场点的光程，其中 r_0 是衍射屏中心到轴上场点 P 的光程。用矢量图解法求出 P 的光强与自由传播时的光强之比。

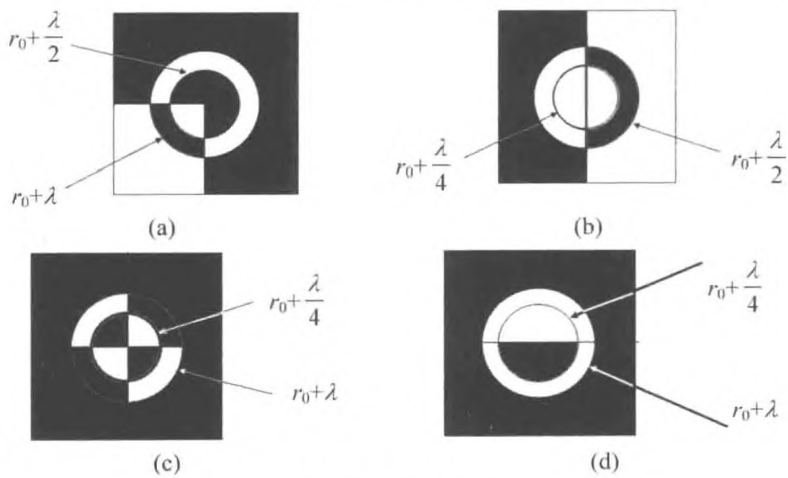


图 5.8　衍射屏

分析 当衍射屏上所暴露的不是一个完整的半波带时，要用振幅矢量图表示其所对应的复振幅。一个完整的半波带的复振幅对应的是半圆弧的直径。针对上图中各种不同的情形，要作具体的分析。

解 (a) 第一个半波带沿着角度方向露出$\frac{1}{4}$，这一部分所发出的次波，在 P 点的相位从φ_0 到 $\varphi_0+\pi$，所以合振幅矢量仍构成一个半圆弧矢量，但由于次波的数目只有完整半波带的$\frac{1}{4}$，则合振幅为$\frac{A_1}{4}$，其中 A_1 是一个完整半波带的合振幅，如图 5.9 所示；相应地，第二个半波带沿着角度方向露出$\frac{3}{4}$，则振幅为$-\frac{3A_2}{4}$；后面的所有半波带均沿着角度方向露出$\frac{1}{4}$，振幅为$\frac{1}{4}\times\frac{A_3}{2}$。注意到 $A_3\approx A_2\approx A_1$，于是，合振幅为

$$A=\frac{A_1}{4}-\frac{3A_2}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{A_3}{2}=-\frac{3A_1}{8}$$

光强为

$$I=A^2=\left(-\frac{3A_1}{8}\right)^2=\frac{9}{16}\times\frac{A_1^2}{4}=\frac{9}{16}I_0$$

(b) 第一个半波带沿着径向露出前面的$\frac{1}{2}$，这一部分所发出的次波，在 P 点的相位从φ_0 到 $\varphi_0+\frac{\pi}{2}$，所以合振幅矢量只是一个半圆弧矢量的前一半，振幅大小为$\frac{\sqrt{2}}{2}A_1$，沿$\frac{\pi}{4}$方向，如图 5.10 所示；而第一半波带后面的$\frac{1}{2}$沿角度方向露出$\frac{1}{2}$，这一部分所发出的次波，在 P 点的相位从$\varphi_0+\frac{\pi}{2}$到 $\varphi_0+\pi$，所以合振幅矢量只是一个半圆弧矢量的后一半，沿$\frac{3\pi}{4}$方向，但由于次波的数目减半，则合振幅为$\frac{\sqrt{2}}{4}A_1$。后面所有的半波带均沿角度方向露出$\frac{1}{2}$，合振幅矢量大小为$\frac{1}{4}A_2$，沿$\frac{3\pi}{2}$方向。上述三个矢量可以移动，构成图 5.10 中阴影区域的三角形，进行矢量合成。于是

$$A^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}A_1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}A_1\right)^2-2\times\frac{\sqrt{2}}{4}A_1\times\frac{\sqrt{2}}{2}A_1\cos\frac{\pi}{4}=\frac{5-2\sqrt{2}}{8}A_1^2$$

光强为

$$I=A^2=\left(\frac{5-2\sqrt{2}}{2}\right)\frac{A_1^2}{4}=\left(\frac{5-2\sqrt{2}}{2}\right)I_0$$

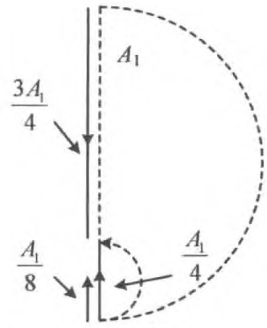


图 5.9 图 5.8(a)的振幅矢量合成

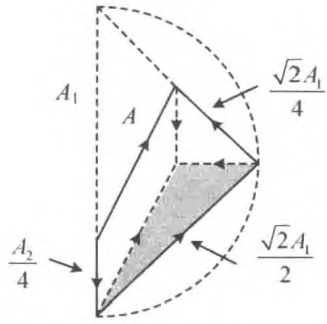


图 5.10 图 5.8(b)的振幅矢量合成

(c) 透光的部分是第一和第二半波带的局部。每一个半波带,透光部分与遮挡部分各占一半,而第一个半波带与第二个半波带的次波相抵消,于是 $A=0, I=0$。

(d) 第一个半波带,沿径向的前$\frac{1}{2}$部分,沿角向露出$\frac{1}{2}$,这一部分所发出的次波,在 P 点的相位从 φ_0 到 $\varphi_0+\frac{\pi}{2}$,所以合振幅矢量只是一个半圆弧矢量的前一半,但由于次波的数目减半,则合振幅为$\frac{\sqrt{2}}{4}A_1$,沿$\frac{\pi}{4}$方向;后$\frac{1}{2}$部分全露出,这一部分所发出的次波,在 P 点的相位从 $\varphi_0+\frac{\pi}{2}$到 $\varphi_0+\pi$,所以合振幅矢量只是一个半圆弧矢量的后一半,振幅大小为$\frac{\sqrt{2}}{2}A_1$,沿$\frac{3\pi}{4}$方向。第二个半波带全露,如图 5.11 所示,于是矢量合成,可得合振幅为

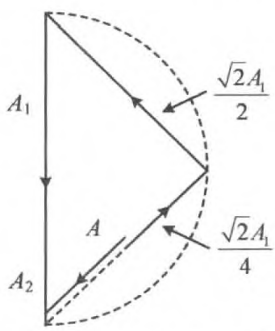


图 5.11 图 5.8(d)的振幅矢量合成

$$A=\frac{\sqrt{2}}{4}A_1$$

光强为

$$I=A^2=\left(\frac{\sqrt{2}A_1}{4}\right)^2=\frac{1}{2}\times\frac{A_1^2}{4}=\frac{1}{2}I_0$$

【例 5.6】 波长为 λ 的单色点光源 S 和场点 P 位于圆孔衍射屏轴线上,光源位于屏前 R 处,场点位于屏后 r_0 处,圆孔半径为 ρ_0,且 $R\gg\rho_0, r_0\gg\rho_0$。试推导 P 点光强的一般公式。

分析 在 $R\gg\rho_0, r_0\gg\rho_0$ 条件下,可以用衍射积分方法求解菲涅耳衍射问题。

解 如图5.12所示，圆孔中任意一点的极坐标表示为(ρ,φ)，由菲涅耳—基尔霍夫衍射积分公式

$$\widetilde{U}(P)=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\iint_{\Sigma}\left(\frac{\cos\theta_0+\cos\theta}{2}\right)\widetilde{U}_0(Q)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\Sigma$$

可得衍射屏圆孔上的瞳函数为

$$\widetilde{U}_0(Q)=\frac{A}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}$$

其中，波矢 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$。

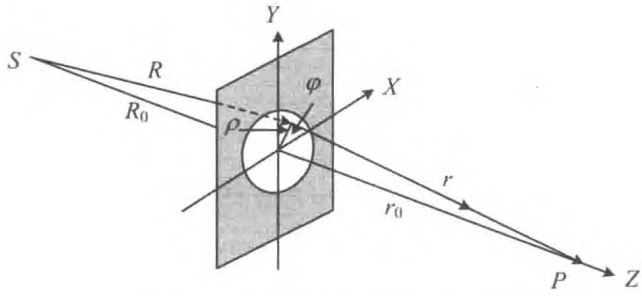


图 5.12 傍轴条件下的菲涅耳衍射

由于 $R\gg\rho_0$，$r_0\gg\rho_0$，所以可以认为倾斜因子 $\dfrac{\cos\theta_0+\cos\theta}{2}\approx1$，于是

$$\widetilde{U}(P)=\frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\iint_{\Sigma}\frac{A}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\Sigma=\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R+r)}}{Rr}\mathrm{d}\Sigma=\frac{-\mathrm{i}A}{\lambda}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\rho_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R+r)}}{Rr}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{-\mathrm{i}2\pi A}{\lambda}\int_0^{\rho_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R+r)}}{Rr}\rho\mathrm{d}\rho$$

从图5.12中可得几何关系

$$R=\sqrt{R_0^2+\rho^2}\approx R_0+\frac{\rho^2}{2R_0}$$

$$r=\sqrt{r_0^2+\rho^2}\approx r_0+\frac{\rho^2}{2r_0}$$

代入上述积分公式，得到

$$\widetilde{U}(P)=\frac{-\mathrm{i}2\pi A}{\lambda}\int_0^{\rho_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\left(R_0+\frac{\rho^2}{2R_0}+r_0+\frac{\rho^2}{2r_0}\right)}}{\left(R_0+\dfrac{\rho^2}{2R_0}\right)\left(r_0+\dfrac{\rho^2}{2r_0}\right)}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{-\mathrm{i}2\pi A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R_0+r_0)}}{\lambda R_0r_0}\int_0^{\rho_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_0}+\frac{1}{r_0}\right)\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{-\mathrm{i}2\pi A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R_0+r_0)}}{R_0+r_0}\left[1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\left(\frac{R_0+r_0}{2R_0r_0}\right)\rho^2}\right]$$

因而场点 P 的光强为

$$I(P)=\tilde{U}(P)\tilde{U}^{*}(P)=\left(\frac{A}{R_0+r_0}\right)^2\left[1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\left(\frac{R_0+r_0}{2R_0r_0}\right)\rho^2}\right]\left[1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\left(\frac{R_0+r_0}{2R_0r_0}\right)\rho^2}\right]$$

$$=\left(\frac{A}{R_0+r_0}\right)^2\left\{2-2\cos\left[k\left(\frac{R_0+r_0}{2R_0r_0}\right)\rho^2\right]\right\}=4\left(\frac{A}{R_0+r_0}\right)^2\sin^2\left(\frac{\pi(R_0+r_0)\rho^2}{2\lambda R_0r_0}\right)$$

$$=4I_0\sin^2\left[\frac{\pi(R_0+r_0)\rho^2}{2\lambda R_0r_0}\right]$$

其中，$I_0=\left(\frac{A}{R_0+r_0}\right)^2$ 为点光源 S 自由传播到 P 点的光强。注意到

$$\frac{R_0+r_0}{\lambda R_0r_0}\rho^2=\frac{\rho^2}{\lambda R_0}+\frac{\rho^2}{\lambda r_0}$$

正好是圆孔所包含的半波带的数目 m，即

$$\sin^2\left[\frac{\pi(R_0+r_0)\rho^2}{2\lambda R_0r_0}\right]=\sin^2\frac{m\pi}{2}$$

所以 m 为偶数时，$I(P)=0$，为暗点；而 m 为奇数时，$I(P)=4I_0$，为亮点，由于忽略了倾斜因子的影响，所以亮点的光强皆为 $4I_0$。

【例 5.7】 在波长为 0.54 μm 的平面单色波的路径上安放一焦距为 50 cm 的凸透镜，紧靠透镜后放置一个圆孔光阑，屏幕到透镜的距离为 75 cm，当圆孔的口径为多大时，屏上衍射图样的中心照度最大？

分析 衍射装置如图 5.13 所示，本题是关于菲涅耳衍射的问题，这类问题一般用半波带法或振幅矢量法求解。但本题的特殊之处是，平面光经透镜后，变为向 F 点汇聚的球面波，如图 5.14 所示，其波面形状与一般的菲涅耳圆孔衍射中的波面恰好相反，即远离轴线的半波带，其光程较小。当圆孔只含有一个半波带时，场点 O 光强最大。

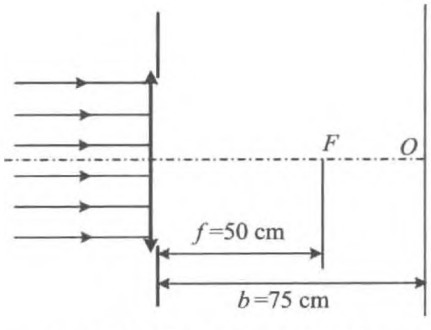


图 5.13 圆孔后有一汇聚透镜

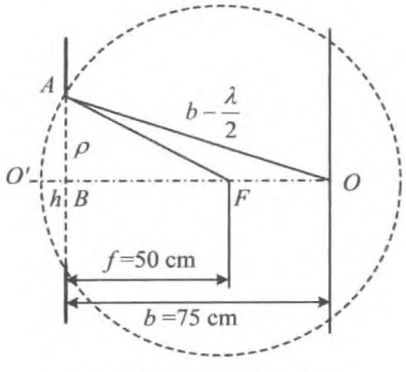


图 5.14 汇聚的球面波

解 如图5.14所示，波面顶点为 O'，要使 O 点光强最大，则圆孔只含有一个半波带，即 $\overline{AO}=b-\frac{\lambda}{2}$，于是在△$ABO$ 和△ABF 中，有几何关系

$$\left(b-\frac{\lambda}{2}\right)^2-\rho^2=(b-h)^2 \tag{1}$$

$$f^2-\rho^2=(f-h)^2 \tag{2}$$

式(1)展开得到

$$b^2-b\lambda+\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2-\rho^2=b^2-2bh+h^2$$

略去高阶小量 $\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2$，$h^2$，得到

$$\rho^2=2bh-b\lambda \tag{3}$$

式(2)展开得到

$$f^2-\rho^2=f^2-2fh+h^2\approx f^2-2fh$$

即

$$h=\frac{\rho^2}{2f} \tag{4}$$

代入式(3)得到

$$\rho^2=\frac{b\rho^2}{f}-b\lambda$$

即

$$\rho=\sqrt{\frac{b\lambda f}{b-f}}$$

代入数据，可得

$$\rho=0.9\ \text{mm}$$

【例5.8】 如图5.15所示，波长为0.60 μm的平面单色波垂直投射到一块足够大的平板玻璃上，玻璃的另一侧面有一圆柱状凹穴。对于观察点 P，凹穴是菲涅耳半波带的起始的1.5个。当 P 点的光强分别为

(1) 最大；

(2) 最小；

(3) 等于投射光的强度时。

求凹穴的深度 h。

分析 同例5.5一样，本题是菲涅耳衍射问题，因题中含有一个半菲涅耳半波带的条件，所以宜用振幅矢量法求解。如图5.16所示，前面1.5个半波带对应的矢量为 $\boldsymbol{AB}$，

其余所有半波带所对应的矢量为 ***BO***，则合矢量为 ***AO***。由于凹穴引入了额外的光程，则通过改变凹穴的深度，可以控制前 1.5 个半波带的相位，从而改变场点的光强。

解 没有凹穴时，振幅矢量 ***BO*** 与 ***AB*** 间的相位差为 $\frac{3}{4}\pi$。凹穴引起的额外光程差为

$$\Delta L = (1-n)h$$

额外相位差为

$$\Delta\varphi = k\Delta L = \frac{2\pi(1-n)h}{\lambda}$$

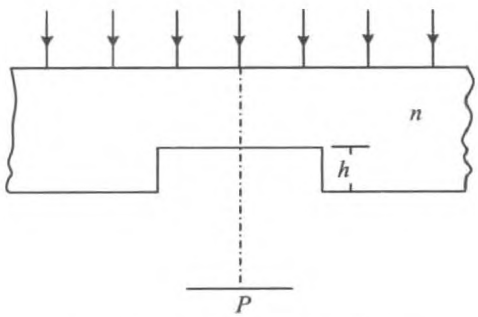


图 5.15 带有凹槽的衍射装置

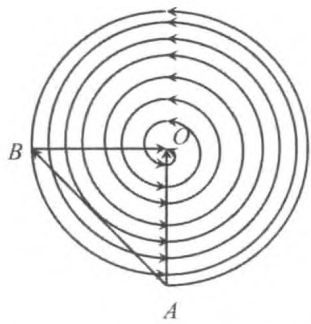


图 5.16 衍射的振幅矢量

(1) 如果 ***BO*** 与 ***AB*** 同向，即相位差为 0 时，***BO*** + ***AB*** 取得最大值，即

$$\frac{3}{4}\pi - \frac{2\pi(1-n)h}{\lambda} = 2j\pi$$

解得

$$h = \frac{j-\frac{3}{8}}{n-1}\lambda$$

如果取玻璃折射率 $n=1.5$，则

$$h = 1.2\left(j-\frac{3}{8}\right)\mu\text{m}$$

(2) 此时，要求 ***BO*** 与 ***AB*** 反向，即相位差为 $(2j+1)\pi$ 时，***BO*** + ***AB*** 取得最小值，即

$$\frac{3}{4}\pi - \frac{2\pi(1-n)h}{\lambda} = (2j+1)\pi$$

解得

$$h = \frac{j+\frac{1}{8}}{n-1}\lambda = 1.2\left(j+\frac{1}{8}\right)\mu\text{m}$$

(3) 要使 P 点的光强与入射光强一样(即等于无凹穴时的光强),则

$$-\frac{2\pi(1-n)h}{\lambda}=2j\pi$$

或

$$-\frac{2\pi(1-n)h}{\lambda}=2j\pi+\frac{3\pi}{2}$$

解得

$$h=\frac{j\lambda}{n-1}=1.2j\ \mu\mathrm{m}$$

或者

$$h=\frac{\left(j+\frac{3}{4}\right)\lambda}{n-1}=1.2\left(j+\frac{3}{4}\right)\mu\mathrm{m}$$

【例 5.9】 平行光正入射到单圆孔衍射屏上,在轴上距离孔 L 处记录光强变化,发现光强随孔径的增加呈震荡型变化。求:

(1) 第一极大时圆孔的半径 r_a;

(2) 第一极小时圆孔的半径 r_b;

(3) 上述两半径趋于无限大时,两者光强的比值;

(4) 用半径为 r_a 的不透光圆屏代替衍射屏,L 处的光强。

解 (1) 这是菲涅耳圆孔衍射,平行光入射,相当于光源点位于圆孔前无穷远处,即 $R=\infty$。于是由半波带方程

$$m=\frac{\rho^2}{\lambda}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{L}\right)=\frac{\rho^2}{\lambda L}$$

得到第一极大时的圆孔半径为

$$r_a=\sqrt{mL\lambda}\overset{m=1}{=}\sqrt{L\lambda}$$

(2) 第一极小时圆孔的半径

$$r_b=\sqrt{mL\lambda}\overset{m=2}{=}\sqrt{2L\lambda}$$

(3) 上述半径趋于无限大时,相当于自由传播。对于空间同一点,则光强相等。

如果设第一极大处光强值为 $I_a=A_1^2$,则自由传播时

$$I_0=\frac{1}{4}A_1^2$$

(4) 第一极大值 $I_a=A_1^2$,自由传播时观察点的光强为

$$I_0=\frac{1}{4}A_1^2$$

对于半径为 r_a 的不透光圆屏，遮住了第一个半波带，圆屏衍射强度为

$$I = \frac{1}{4}A_2^2 \approx \frac{1}{4}A_1^2 = I_0$$

强度相当于自由传播时光强。

【例 5.10】 波长为 500.0 nm 的光正入射到如图 5.17 所示的衍射屏上，其中 $r_1 = \sqrt{2}$ mm，$r_2 = 1$ mm，轴上观察点距衍射屏 2 m。计算该点的振幅和强度。



图 5.17　衍射屏

解　对于图 5.17 所示的菲涅耳衍射圆孔，在观察点看来，露出半波带的数目为

$$m_1 = \frac{\rho_1^2}{b\lambda} = \frac{1^2}{2\,000 \times 500.0 \times 10^{-6}} = 1$$

$$m_2 = \frac{\rho_2^2}{b\lambda} = \frac{\sqrt{2}^2}{2\,000 \times 500.0 \times 10^{-6}} = 2$$

由于第二半波带只沿角度露出 1/4。所以合振动振幅为

$$A = A_1 - \frac{1}{4}A_2 = \frac{3}{4}A_1$$

光强为

$$I = A^2 = \frac{9}{4}I_0$$

【例 5.11】 对于波长为 λ 的单色光，某菲涅耳波带片的主焦距为 f，问：

(1) 对于波长为 $\lambda/2$ 的单色光，该波带片的主焦距为多少？

(2) 若对该波带片简单处理后使波长为 $\lambda/2$ 的单色光主焦距仍然为 f，应该采用什么方法？

解　(1) 波长为 $\lambda/2$ 的单色光，该波带片的主焦距为 $2f$。

(2) 按照半波带方程，若观察点移近衍射屏，圆孔所划分出的半波带的数目要增大。若入射光为平面光波，则半径为 ρ 的半波带的序号为

$$m = \frac{\rho^2}{\lambda r_0}$$

若使焦距变为原来的 1/2，则原来的 1 个半波带将成为 2 个。

处理的方法是：将原来透光的半波带的前一半进行遮挡，同时将原来被遮挡的半波带的后一半打开。

5.3 夫琅禾费衍射

5.3.1 衍射装置

夫琅禾费单缝衍射装置如图 5.18 所示，平行光入射，衍射屏上有一宽度为 a 的单狭缝，在衍射屏之后，置一凸透镜 L_2，接收屏位于透镜的像方焦平面。

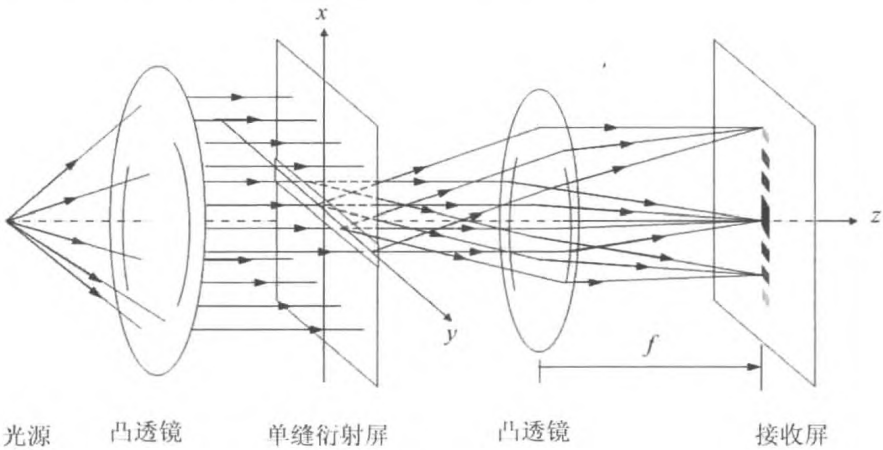


图 5.18 夫琅禾费单缝衍射装置

5.3.2 衍射光强分布

衍射的复振幅为

$$\widetilde{U}(\theta) = \widetilde{U}_0 \frac{\sin u}{u}$$

其中

$$u = \frac{\pi a(\sin\theta \pm \sin\theta_0)}{\lambda}$$

衍射光强为

$$I_\theta = I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \tag{5.5}$$

5.3.3 衍射图样

零级主极大，即中央主极大的角宽度为

$$\Delta\theta_0 = 2\frac{\lambda}{a} \tag{5.6}$$

其他高级次条纹的角宽度为

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{a} \tag{5.7}$$

5.3.4 典型问题与基本解题方法

夫琅禾费衍射问题中，入射的光波是平面波，因而次波中心总是取在一个平面波前上，瞳函数的表达式比较简单。同时由于只需考虑同方向的傍轴次波之间的相干叠加，因而倾斜因子通常为常数1，而且光程差的计算比较简单。因而在适当的近似下，往往能够得到夫朗禾费衍射强度分布解析表达式。

【例 5.12】 平行白光正入射到宽 0.320 mm 的狭缝上，缝后 1 m 远处有一小的分光镜的入射缝正对该狭缝，对图样进行分光研究。如果狭缝沿着垂直方向移动 1.250 cm，分光镜中所见如何？

解 如图 5.19 所示，分光镜的入射狭缝到衍射屏的距离 $D \gg a$，可以认为满足远场条件，即可用夫琅禾费单缝衍射处理该问题。

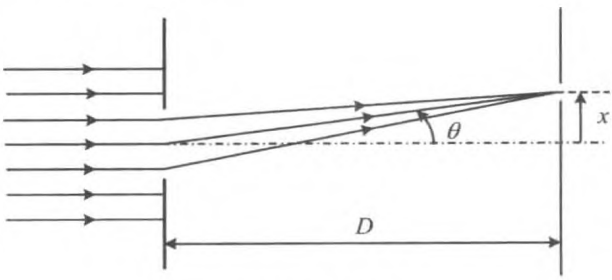


图 5.19 单缝衍射

狭缝相对于分光镜的入射缝移动，角度为

$$\theta = \arctan\left(\frac{x}{D}\right) = \arctan\left(\frac{1.250}{100}\right) = 0.72^{\circ}$$

由于 θ 很小，近似地有

$$\theta \approx \frac{x}{D} = 1.250 \times 10^{-2}$$

单缝衍射的极小分布公式为

$$\sin\theta_j(\lambda) = j\frac{\lambda}{a}$$

即

$$j = \frac{a\sin\theta_j(\lambda)}{\lambda} \approx \frac{a\theta_j(\lambda)}{\lambda}$$

在移动过程中，短波极小出现的次数为

$$j_1 = \frac{a\sin\theta}{\lambda_1} = \frac{0.320 \times 10^6 \times 1.250 \times 10^{-2}}{400} = \frac{40}{4} = 10$$

长波极小出现的次数为

$$j_2 = \frac{a\sin\theta}{\lambda_2} = \frac{0.320 \times 10^6 \times 1.250 \times 10^{-2}}{700} = \frac{40}{7} \approx 5.71$$

即在移动过程中，分光镜中可见 9 条紫色条纹（即紫光出现 9 次），红光出现 5 次，其他颜色的光出现的次数介于两者之间。

【例 5.13】 波长为 λ 的平面波垂直通过不等宽双缝衍射屏，两缝宽度分别为 20λ 和 40λ，两缝中心间距为 $1\,000\,\lambda$。紧靠衍射屏后放置一焦距为 1.0 m 的透镜，观察屏位于透镜的焦平面处。试求：

（1）观察屏上光强分布的表达式（以屏上 P 点到焦点的坐标 x 表示）；

（2）相邻极大值间的距离 δx；

（3）两狭缝独立产生的衍射图样中央极大亮条纹的宽度 Δx_1 和 Δx_2（即两个第一极小值间的距离）；

（4）两狭缝中央极大交叠部分所产生的干涉条纹数目；

（5）衍射图样中央部分极大值与极小值的光强之比。

分析 夫琅禾费双缝衍射的问题可以由菲涅耳—基尔霍夫衍射积分公式求解；也可以认为双缝衍射是两束单缝衍射光之间的干涉，每一束相干光可以视为由缝中心发出的、向各个方向振幅大小不等的波列，经透镜折射后，其中的相互平行的波列在透镜焦平面上进行干涉。

解 如图 5.20 和图 5.21 所示，设衍射角为 θ，所对应的观察屏上 P 点的坐标为 x，菲涅耳—基尔霍夫衍射积分公式为

$$\widetilde{U}(P) = \frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\iint_{\Sigma}\left(\frac{\cos\theta_0 + \cos\theta}{2}\right)\widetilde{U}_0(Q)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\Sigma \tag{1}$$

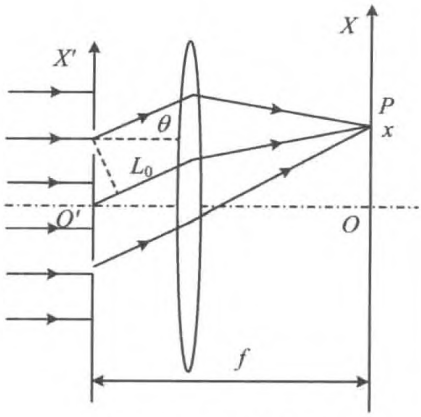


图 5.20 同方向次波

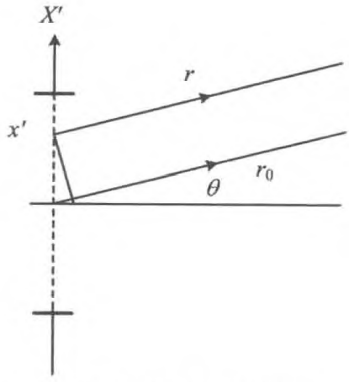


图 5.21 次波间的光程差

由于 $\theta_0 = 0$，且衍射满足傍轴（近轴）条件，故倾斜因子 $\frac{\cos\theta_0 + \cos\theta}{2} \approx 1$，若透镜紧靠衍射屏，积分公式中分母上的 $r \approx f$；由于平行光正入射，瞳函数 $\widetilde{U}_0(Q)$ 为常数 U_0。衍射屏上 x' 点所发出的次波到 P 点的光程可表示为

$$r = L_0 - \Delta r = L_0 - \left(x' + \frac{d}{2}\right)\sin\theta$$

其中，L_0 为衍射屏中心所发出的沿 θ 的次波到 P 点的光程。积分公式化为

$$\widetilde{U}(P) = \frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\cdot\frac{U_0}{f}\iint_{\Sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}\Sigma = \frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\frac{U_0}{f}\left(\int_{a_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}x' + \int_{a_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\mathrm{d}x'\right)$$

$$= \frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\cdot\frac{U_0}{f}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_0}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{kd\sin\theta}{2}}\int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx'\sin\theta}\mathrm{d}x' + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{kd\sin\theta}{2}}\int_{-\frac{a_2}{2}}^{\frac{a_2}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx'\sin\theta}\mathrm{d}x'\right)$$

$$= \frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\cdot\frac{U_0}{f}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_0}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{kd\sin\theta}{2}}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{a_1}{2}\sin\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{a_1}{2}\sin\theta}}{-\mathrm{i}k\sin\theta}\right) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{kd\sin\theta}{2}}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{a_2}{2}\sin\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{a_2}{2}\sin\theta}}{-\mathrm{i}k\sin\theta}\right)\right]$$

$$= \frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\cdot\frac{U_0}{f}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_0}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{kd\sin\theta}{2}}\frac{-2\mathrm{i}\sin\left(k\frac{a_1}{2}\sin\theta\right)}{-\mathrm{i}k\sin\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{kd\sin\theta}{2}}\frac{-2i\sin\left(k\frac{a_2}{2}\sin\theta\right)}{-\mathrm{i}k\sin\theta}\right]$$

$$= \frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\cdot\frac{U_0}{f}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_0}\left[a_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{kd\sin\theta}{2}}\frac{\sin\left(k\frac{a_1}{2}\sin\theta\right)}{\frac{ka_1\sin\theta}{2}} + a_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{kd\sin\theta}{2}}\frac{\sin\left(k\frac{a_2}{2}\sin\theta\right)}{\frac{ka_2\sin\theta}{2}}\right]$$

$$= \frac{-\mathrm{i}}{\lambda} \cdot \frac{U_0}{f} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_0} \left(a_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{kd\sin\theta}{2}} \frac{\sin u_1}{u_1} + a_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{kd\sin\theta}{2}} \frac{\sin u_2}{u_2} \right)$$

$$= \widetilde{U}_1(0) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(L_0 - \frac{kd\sin\theta}{2}\right)} \frac{\sin u_1}{u_1} + \widetilde{U}_2(0) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(L_0 + \frac{kd\sin\theta}{2}\right)} \frac{\sin u_2}{u_2} \tag{2}$$

式中，$\widetilde{U}_1(0) = \frac{-\mathrm{i}}{\lambda} \cdot \frac{U_0}{f} a_1$，$\widetilde{U}_2(0) = \frac{-\mathrm{i}}{\lambda} \cdot \frac{U_0}{f} a_2$，$u_1 = \frac{\pi a_1 \sin\theta}{\lambda}$，$u_2 = \frac{\pi a_2 \sin\theta}{\lambda}$，可见

$$\widetilde{U}_1(0) = \frac{1}{2} \widetilde{U}_2(0) \tag{3}$$

光强为

$$\begin{aligned} I(P) &= \widetilde{U}(P) \widetilde{U}^*(P) \\ &= \left[\widetilde{U}_1(0) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(L_0 - \frac{kd\sin\theta}{2}\right)} \frac{\sin u_1}{u_1} + \widetilde{U}_2(0) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(L_0 + \frac{kd\sin\theta}{2}\right)} \frac{\sin u_2}{u_2} \right] \\ &= |\widetilde{U}_1(0)|^2 \frac{\sin^2 u_1}{u_1^2} + |\widetilde{U}_2(0)|^2 \frac{\sin^2 u_2}{u_2^2} \\ &\quad + \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kd\sin\theta} \widetilde{U}_1(0) \widetilde{U}_2^*(0) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}kd\sin\theta} \widetilde{U}_1^*(0) \widetilde{U}_2(0) \right] \frac{\sin u_1}{u_1} \cdot \frac{\sin u_2}{u_2} \\ &= I_1(P) + I_2(P) + 2\sqrt{I_1(P) I_2(P)} \cos(kd\sin\theta) \end{aligned} \tag{4}$$

其中

$$I_1(P) = |\widetilde{U}_1(0)|^2 \frac{\sin^2 u_1}{u_1^2} = \left(\frac{a_1 U_0}{\lambda f} \right)^2 \frac{\sin^2 u_1}{u_1^2}$$

$$I_2(P) = |\widetilde{U}_2(0)|^2 \frac{\sin^2 u_2}{u_2^2} = \left(\frac{a_2 U_0}{\lambda f} \right)^2 \frac{\sin^2 u_2}{u_2^2}$$

分别为每一缝独立产生得衍射光强分布。

近轴条件下

$$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{x}{f}$$

于是光强公式可写作

$$I(P) = I_1(P) + I_2(P) + 2\sqrt{I_1(P) I_2(P)} \cos\left(\frac{kdx}{f} \right) \tag{5}$$

由式(5)可知，双缝衍射可以看做是两条单缝衍射光的干涉。

(2) 极大值由式(5)中的干涉项决定，于是$\frac{kdx}{f} = 2j\pi$，即

$$x_j = \frac{2j\pi f}{kd} = \frac{j\lambda f}{d}$$

相邻极大值间距

$$\delta x = \frac{\lambda f}{d} = \frac{\lambda \times 1.0}{1\,000\lambda} = \frac{1}{1\,000}\,(\mathrm{m}) = 1\,(\mathrm{mm})$$

(3) 第一缝单独产生的第一极小值出现在 $u_1 = \frac{\pi a_1 \sin\theta}{\lambda} = \pi$ 的条件下，即

$$\sin\theta_{\pm 1} = \pm \frac{\lambda}{a_1}$$

两者间的角距离 $\Delta\theta_1 \approx 2\frac{\lambda}{a_1}$，则中央极大值的宽度为

$$\Delta x_1 = f\Delta\theta_1 = \frac{2f\lambda}{a_1} = \frac{2 \times 1.0 \times \lambda}{20\lambda} = 100\,(\mathrm{mm})$$

同理

$$\Delta x_2 = f\Delta\theta_2 = \frac{2f\lambda}{a_2} = \frac{2 \times 1.0 \times \lambda}{40\lambda} = 50\,(\mathrm{mm})$$

(4) 中央极大交叠部分为 50 mm，而条纹间距为 $\delta x = 1$ mm，所以重叠部分条纹共有 $N = 50$ 条。

由于缝 2 中央衍射条纹的两旁为极小值，故实际上有 49 条。

(5) 中央极大光强

$$I_{\max} = I_1(P) + I_2(P) + 2\sqrt{I_1(P)I_2(P)}$$

中央极小光强

$$I_{\min} = I_1(P) + I_2(P) - 2\sqrt{I_1(P)I_2(P)}$$

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{I_1(P) + I_2(P) + 2\sqrt{I_1(P)I_2(P)}}{I_1(P) + I_2(P) - 2\sqrt{I_1(P)I_2(P)}}$$

当 $\theta = 0$ 时，$I_2(0) \approx 4I_1(0)$，于是得到

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{I_1(0) + 4I_1(0) + 4I_1(0)}{I_1(0) + 4I_1(0) - 4I_1(0)} = 9$$

【例 5.14】 平行单色光以 θ_0 角入射到有一单缝的衍射屏上，屏后有一焦距为 f 的透镜，设透镜无限大。

(1) 求后焦面上的光强分布；

(2) 如果将上述衍射屏换为长板条，强度又如何？

(3) 用夫琅禾费衍射可测量细丝的直径。设屏与细丝相距 1 m，屏上相邻暗纹间距为 0.7 mm，所用波长为 632.8 nm，试求细丝的直径。

解 (1) 由透镜的特性，其像方焦平面上的任意一点都是相互平行的入射光的汇聚点，如图 5.22 所示。设衍射角为 θ 的所有平行光都汇聚到观察屏上的 P 点，由菲涅耳—基尔霍夫衍射积分公式，P 点的复振幅为

$$\tilde{U}(P) = \frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\iint_{\Sigma}\left(\frac{\cos\theta_0 + \cos\theta}{2}\right)\tilde{U}_0(Q)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\Sigma$$

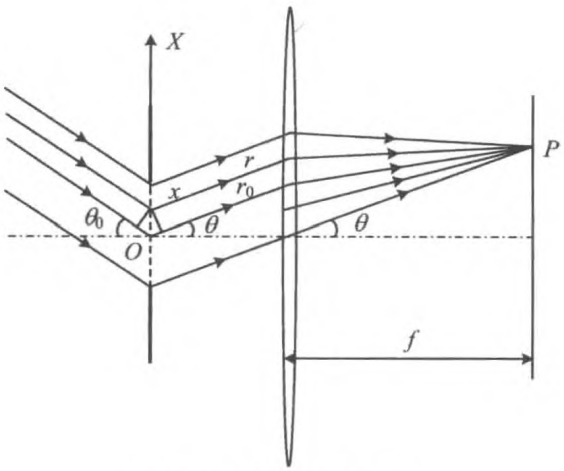


图 5.22 斜入射的平面波

由于满足傍轴(近轴)条件,$\cos\theta \approx 1$,倾斜因子$\frac{\cos\theta_0 + \cos\theta}{2} \approx \frac{\cos\theta_0 + 1}{2}$,为常数。分母上的 $r \approx f$;由于平行光入射,瞳函数为

$$\tilde{U}_0(Q) = U_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\sin\theta_0 + \mathrm{i}\varphi_0}$$

其中,U_0 为常量。将狭缝所在平面取作 xOy 平面,设自狭缝中心到 P 点的光程为 r_0,而狭缝上任意一点 x 到 P 点的光程为 r,则

$$r = r_0 - \Delta r = r_0 - x\sin\theta$$

于是积分公式化为

$$\begin{aligned}\tilde{U}(P) &= \frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\left(\frac{\cos\theta_0 + 1}{2f}\right)U_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}\int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k[r_0 - x(\sin\theta_0 + \sin\theta)]}\mathrm{d}x \\ &= \frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\left(\frac{\cos\theta_0 + 1}{2f}\right)\tilde{U}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}\int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx(\sin\theta_0 + \sin\theta)}\mathrm{d}x \\ &= \frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\left(\frac{\cos\theta_0 + 1}{2f}\right)\tilde{U}_0 a\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}\frac{\sin u}{u}\end{aligned}$$

其中,$u = \frac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta_0 + \sin\theta)$,而 $I(\theta) = I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$。

关于本题中入射角 θ_0 与衍射角 θ 正负值的设定:上述角度 θ_0,θ 均指波列方向与 z 轴正向之间的夹角,从 z 轴正向算起,逆时针方向为正,顺时针方向为负。

(2) 在无衍射屏时,即自由传播时,透镜后焦面上的复振幅分布为 $\widetilde{E}_0(P)$,正比于 δ 函数,即

$$\widetilde{E}_0(P) \propto \delta(\theta_0 - \theta)$$

$\widetilde{E}_0(P)$趋于无限大是因为假设透镜为无限大。设衍射屏为长条板时观察屏上的复振幅分布为

$$\widetilde{E}(P) + \widetilde{E}'(P) = \widetilde{E}_0(P)$$

由巴比涅原理可知式中 $\widetilde{E}(P)$为衍射屏上开有一无限长狭缝时观察屏上的复振幅,即

$$\widetilde{E}'(P) = \widetilde{E}_0(P) - \widetilde{E}(P)$$

于是有

$$\begin{aligned} I'(P) &= [\widetilde{E}_0(P) - \widetilde{E}(P)]^*[\widetilde{E}_0(P) - \widetilde{E}(P)] \\ &= \begin{cases} I_0\left(\dfrac{\sin u}{u}\right)^2 & (\theta \neq \theta_0) \\ \infty & (\theta = \theta_0) \end{cases} \end{aligned}$$

所以在几何像点之外,即 $\theta \neq \theta_0$ 时

$$I'(\theta) = I(\theta) = I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$$

长板条的衍射图样与长狭缝相同。

(3) 由于在几何像点之外,细丝的衍射图样与等宽的狭缝是相同的,因此有

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{a}$$

而

$$\Delta x = f(\tan\theta_{n+1} - \tan\theta_n) \approx f(\sin\theta_{n+1} - \sin\theta_n) \approx f\Delta\theta = f \cdot \frac{\lambda}{a}$$

细丝的直径为

$$a = f \cdot \frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{632.8 \times 10^{-6} \times 1 \times 10^3}{0.7} = 0.904\ (\text{mm})$$

【例 5.15】 用波长为 λ 的平面单色波垂直照射宽度为 a 的单缝衍射屏,若在单缝中央覆盖一宽度为 $a/3$ 的相位型掩膜,使入射光经该掩膜后相对于其余部分产生了 $\pi/2$ 的相移。试求:

(1) 该衍射屏的夫琅禾费衍射光强分布公式;

(2) 第一次光强为 0 的衍射角 θ_1;

(3) 第一级衍射极大的衍射角 θ_1'。

分析 如图 5.23 所示，可以将原来的一个单缝看做三个平行狭缝，三缝发出的衍射光之间除了有空间位置不同而产生的相位差之外，还有由掩模引起的相位差。这三条缝的衍射光的相干叠加决定了接收屏上的光强分布。

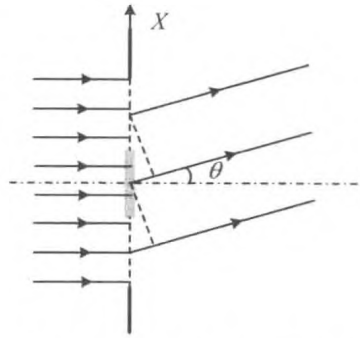


图 5.23 将一条缝分为三条缝

解 (1) 将整个狭缝看做是三个等宽的狭缝，各个缝衍射光的复振幅分别为

$$\tilde{E}_1(\theta) = E_1 e^{ik\left(r_0 - \frac{a}{3}\sin\theta\right)}$$

$$\tilde{E}_2(\theta) = E_2 e^{ikr_0 + i\frac{\pi}{2}}$$

$$\tilde{E}_3(\theta) = E_3 e^{ik\left(r_0 + \frac{a}{3}\sin\theta\right)}$$

其中

$$E_1 = E_2 = E_3 = \frac{E_0}{3} \cdot \frac{\sin u}{u}$$

$$u = \frac{\pi a}{3}\sin\theta$$

E_0 为原来整个单缝在接收屏中央的振幅。于是有

$$\begin{aligned}\tilde{E}(\theta) &= \tilde{E}_1(\theta) + \tilde{E}_2(\theta) + \tilde{E}_3(\theta) \\ &= \frac{E_0}{3} \cdot \frac{\sin u}{u} e^{ikr_0}\left(e^{-ik\frac{a}{3}\sin\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{ik\frac{a}{3}\sin\theta}\right) \\ &= \frac{E_0}{3} \cdot \frac{\sin u}{u} e^{ikr_0}\left[2\cos\left(\frac{ka}{3}\sin\theta\right) + i\right] \\ &= \frac{E_0}{3} \cdot \frac{\sin u}{u} e^{ikr_0}(2\cos 2u + i)\end{aligned}$$

光强为

$$\begin{aligned}I(\theta) &= \left(\frac{E_0}{3} \cdot \frac{\sin u}{u}\right)^2 e^{ikr_0}(2\cos 2u + i)e^{-ikr_0}(2\cos 2u - i) \\ &= \frac{E_0^2}{9} \cdot \frac{\sin^2 u}{u^2}[1 + 4\cos^2(2u)]\end{aligned}$$

其中，$\frac{\sin^2 u}{u^2}$ 为缝宽为 $\frac{a}{3}$ 的单缝衍射因子，因而 $1 + 4\cos^2(2u)$ 可称作三缝干涉因子。

(2) 由于三束光的干涉因子 $1 + 4\cos^2(2u)$ 恒不为零，故各级为 0 的角度是由衍射因子决定的，即 $\sin\theta_n = n\frac{3\lambda}{a}$，于是 $\sin\theta_1 = \frac{3\lambda}{a}$，即

$$\theta_1 = \sin^{-1}\left(\frac{3\lambda}{a}\right)$$

(3) 衍射极大由干涉因子决定，即$\cos^2(2u)=1$时，出现极大值，即

$$\theta' = \arcsin\left(\frac{3\lambda}{2a}\right)$$

是第一级极大的衍射角。

【例 5.16】 一反射式天文望远镜物镜的通光孔径为 2.5 m，求可以分辨的双星的最小夹角。与人眼相比，分辨本领提高了多少倍？望远镜的放大率以多少为宜？人眼瞳孔的直径约为 2 mm。

解 按照瑞利判据，望远镜可分辨的最小夹角为

$$\delta\theta_{\min} = 1.22\frac{\lambda}{D} = 1.22 \times \frac{550}{2.5 \times 10^9} = 2.648 \times 10^{-7}$$

对于人眼，可分辨的最小夹角为

$$\delta\theta'_{\min} = 1.22\frac{\lambda}{D_{\text{eye}}} = 1.22 \times \frac{550}{2 \times 10^6} = 3.355 \times 10^{-4}$$

两相比较，望远镜比眼睛分辨本领提高的倍数为

$$N = \frac{\delta\theta'_{\min}}{\delta\theta_{\min}} = \frac{D}{D_{\text{eye}}} = \frac{2\,500}{2} = 1\,250$$

本题中所谓望远镜的放大率是角放大率，即通过望远镜观察与用裸眼直接观察所得到的两个像的横向尺度的比值。提高角放大率并不能够改变最小分辨角。

如图 5.24 所示，双星经望远镜的物镜在其像方焦平面成像 S_1，S_2，两像 S_1，S_2 对物镜光心的张角就是双星对物镜光心的张角 $\delta\theta$。由于眼睛紧贴目镜观察，两像 S_1，S_2 对目镜光心的张角就是对眼睛的张角 $\delta\theta'$。望远镜物镜的像方焦平面与目镜的物方焦平面是重合的。设两像 S_1，S_2 之间的距离为 Δy，物镜、目镜的焦距分别为 f_o，f_e，由于

$$\delta\theta = \frac{\Delta y}{f_o}$$

$$\delta\theta' = \frac{\Delta y}{f_e}$$

可得

$$\frac{\delta\theta'}{\delta\theta} = \frac{f_o}{f_e}$$

而望远镜的角放大率为

$$|M| = \frac{f_o}{f_e}$$

所以

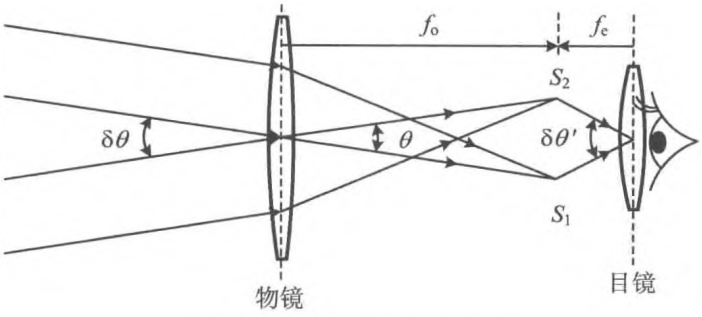


图 5.24 光束张角的变化

$$\frac{\delta\theta'}{\delta\theta} = |M|$$

对望远镜，双星的张角至少为 $\delta\theta_{min}$ 时可分辨，对眼睛，两像的张角至少为 $\delta\theta'_{min}$ 时可分辨，所以望远镜的角放大率至少应当满足 $|M| = \frac{\delta\theta'_{min}}{\delta\theta_{min}}$。对本题中的望远镜，即

$$M = \frac{\delta\theta'_m}{\delta\theta_m} = 1\,250$$

【例 5.17】 (1) 用 275.0 nm 的紫外光比用 550.0 nm 的可见光，显微镜的分辨本领可以增大多少倍？

(2) 显微镜的物镜在空气中的数值孔径为 0.9，若用紫外光，可以分辨的两条线的最小间距是多少？

(3) 用油浸系统时，可分辨的最小间距又是多少(油的折射率为 1.6)？

(4) 照相底片上感光微粒的大小约为 0.5 mm，问当油浸系统的紫外光显微镜的横向放大率是多少时，底片上恰能分辨？

分析 显微镜的物镜是对近处的物成像，若考虑物镜孔径引起的衍射，这不是夫琅禾费圆孔衍射，衍射的中央斑也不是艾里斑。但是可参考艾里斑的衍射分析显微镜的分辨本领。

解 (1) 可分辨的最小张角为艾里斑的半角宽 $\delta\theta_m = 1.22\frac{\lambda}{D}$，波长越短，可分辨的角度越小，分辨本领越高。对本题，采用紫外光，分辨本领提高的倍数为

$$\frac{550.0}{275.0} = 2$$

(2) 显微物镜是齐明透镜，成像要满足阿倍正弦条件，即

$$ny\sin u = n'y'\sin u'$$

其中，u 和 u' 分别是物和像对物镜的张角，即

$$\sin u = \frac{D}{s}, \sin u' = \frac{D}{s'}$$

物上可分辨的最小间距为

$$\delta y_m = s\delta\theta_m = 1.22\lambda \cdot \frac{s}{D} = \frac{1.22\lambda}{\sin u}$$

若考虑到光在媒质中波长会改变，$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$，其中 λ_0 为真空中的波长，n 为媒质的折射率，则

$$\delta y_m = \frac{1.22\lambda_0}{n\sin u}$$

其中，$n\sin u$ 被称作显微物镜的数值孔径。对本题，物在空气中，则

$$\delta y_m = \frac{1.22\lambda}{n_a \sin u} = \frac{1.22 \times 275.0}{0.9} = 373\,(\text{nm}) = 0.37\,(\mu\text{m})$$

(3) 物浸在油中，物镜的数值孔径为

$$n_o \sin u = n_o n_a \sin u = 1.6 \times 0.9 = 1.44$$

可分辨最小距离为

$$\delta y'_m = \frac{1.22\lambda_0}{n_o \sin u} = \frac{1.22 \times 275.0}{1.6 \times 0.9} = 233\,(\text{nm}) = 0.23\,(\mu\text{m})$$

(4) 照相底片的空间分辨率为

$$\delta y'' = 0.5\ \text{mm} = 0.5 \times 10^6\ \text{nm}$$

两像点间隔等于 $\delta y''$ 时才能在底片上被分辨，因而要求像被放大，横向放大倍数为

$$\beta = \frac{\delta y''}{\delta y'_m} = \frac{0.5 \times 10^6}{233} = 2.1 \times 10^3$$

【例 5.18】 (1) 一平面屏上有 N 个随机分布的等半径的圆孔，设一单色平面波垂直入射，此屏的夫琅禾费衍射花样与单孔衍射有什么差别？

(2) 试解释为什么有时在月亮周围会出现一个“小亮环”。如果月亮周围亮环直径是月亮直径的 1.5 倍，计算空气中小水珠的大小(设月亮对地球的角半径为 0.01 弧度)。

解 (1) 屏上的每一个圆孔是一个衍射单元，单色平面波照射到每一个圆孔，产生一个衍射光束。由于圆孔相同，故每个圆孔单独存在时的衍射花样相同。如在屏后置一透镜，则在接收屏(即后焦面)上，N 个衍射图样将重合，然后各个单孔的衍射光进一步进行干涉，形成最后的衍射图样。但由于每个圆孔的位置是随机分布的，因而在屏上的任意一点，各列光的相位是随机的，复振幅叠加的结果为

$$\widetilde{U}(P_\theta) = \sum_{j=1}^{N} \widetilde{E}_0 e^{ikr_{0j}}$$

其中，$\widetilde{E}_0 e^{ikr_{0j}}$ 为第 j 个孔单独存在时观察屏上的复振幅，r_{0j} 是由此圆孔中心到屏上的光程。由此可得衍射光强的分布为

$$I(P) = \widetilde{U}(P)\widetilde{U}^*(P) = |\widetilde{E}_0|^2\left(\sum_{j=1}^{N} e^{ikr_{0j}}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} e^{-ikr_{0i}}\right)$$

$$= |\widetilde{E}_0|^2 \sum_{j=1}^{N} e^{ik(r_{0j}-r_{0i})} + |\widetilde{E}_0|^2 N^2$$

在 N 很大时，第一项为零，故

$$I(P) = |\widetilde{E}_0|^2 N^2$$

即此平面屏上的衍射光强分布是单孔衍射光强分布的 N 倍。

(2) 由于气象的变化，大气中部分的水蒸气凝结为小水珠，无规地分布在大气中，月光照射各个小水珠产生衍射，并在人眼的视网膜上形成衍射图样。由(1)的分析可知，上述衍射图样与一个小水珠的衍射图样相同，只是强度增加到 N^2 倍。由于月亮很远，水珠又很小，所以可以看做是上述的夫琅禾费小圆盘衍射，衍射图样与圆孔衍射相同，为同心亮暗圆环，中间为艾里斑，而月亮的几何像则位于圆环中央。

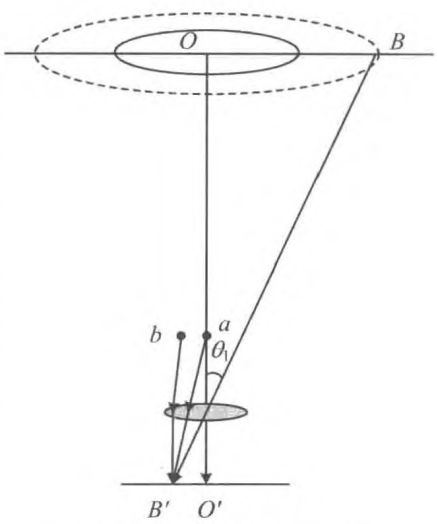


图 5.25 一个小水珠的衍射

如图 5.25 所示，月亮的中心点发出的光近似于平行光，经水珠衍射后，在视网膜上形成的第一级亮环半径以 $O'B'$ 表示，O' 点为月亮中心 O 点的像，人眼看到的月亮周围的亮环应在第一极大值的角位置 θ_1 处，如图中所示的以虚线标示的圆环。月亮可视为非相干的面光源，以月面不同点作为点光源的衍射图样略有错开，这些图样重叠后非相干叠加，使人们看到的亮环变粗，但由于月亮的线度比其到地球的距离小得多，根据空间相干性原理，人眼仍能看到清晰的衍射条纹。由以上分析可知，月亮周围粗亮环中间最亮的部分对应月亮中心 O 点产生的小水珠衍射图样的第一级极大值所对应的衍射角 θ_1，根据夫琅禾费圆孔衍射强度分布公式，有

$$1.635\pi = \frac{2\pi}{\lambda} r\sin\theta_1$$

设 θ_0 表示月亮的视角半径，因 θ 很小，故有

$$\sin\theta_1 = \theta_1 = 1.5\theta_0 = 0.015\,(\text{rad})$$

对于暗视觉，最敏感的波长取 $\lambda = 510.0\ \text{nm}$，于是小水珠的直径

$$D = 2r = \frac{1.635\lambda}{\sin\theta_1} \approx 0.055\,6\ (\text{mm})$$

【例 5.19】 (1) 一束直径为 1.5 mm 的氦氖激光(波长 652.8 nm)自地面射向月球，地球与月球相距 5.76×10^5 km，问在月球上得到的光斑有多大？

(2) 常将望远镜倒用作激光扩束装置，以便压缩激光发散角。试说明其原理，并导出输入、输出的束宽比及发散角与望远镜放大倍数的关系；

(3) 如将该激光器发出的光束扩充成直径 4.5 m 的光束，该用多大倍数的望远镜？用此扩束后的光束再射向月球，问在月球上的光斑有多大？

分析 本题所述的氦氖激光器，其输出端面类似夫琅禾费圆孔衍射，所出射的激光可看成圆孔衍射光，在月球上形成的光斑即艾里斑，望远镜是由一个目镜和一个物镜组成的共焦光学系统，其物镜的像方焦点与目镜的物方焦点重合，无限远处物点射来的光经物镜汇聚于其主焦面上，又经目镜转化为平行光。设入射光、出射光与主光轴的夹角分别为 u，u'，则望远镜的视角放大率定义为

$$M = \frac{u'}{u} = -\frac{f_1'}{f_2'}$$

用望远镜观察远处物体时，由于 $f_1' > f_2'$，视角增加，物体似乎移近了，当望远镜倒过来使用时，可以作为激光扩束器。

解 (1) 激光束在月面上艾里斑的角半径(即第一条暗纹的角半径)为

$$\Delta\theta \approx \sin\theta_1 = 1.22\frac{\lambda}{D_1} = 5.15\times10^{-4}\ \text{rad}$$

式中，D_1 为激光束的直径。

故月面上光斑半径为

$$R = \Delta\theta \cdot S = 193.6\ \text{km}$$

式中，S 表示地球到月球的距离。

(2) 如图 5.26 所示，设入射光束与出射光束的直径分别为 D_1、D_2，则有

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{f_e}{f_o} = \frac{1}{M}$$

其中，M 为望远镜的角放大率。

若入射光束的发散角为 $\delta\theta_1$，不考虑衍射，发散角为 $\delta\theta_1$ 的光束在焦平面上形成一个横向线度为 $\delta y = f_e\delta\theta_1$ 的像斑，该像斑对物镜的张角为

$$\delta\theta_2 = \frac{\delta y}{f_o} = \frac{f_e\delta\theta_1}{f_o}$$

如图 5.27 所示，从物镜出射光束的张角为 $\delta\theta_2$。于是

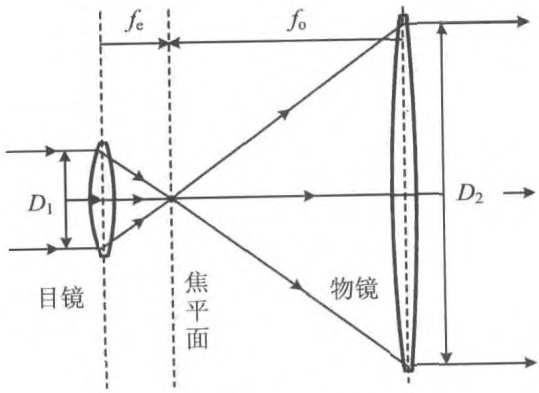


图 5.26 扩束

$$\frac{\delta\theta_2}{\delta\theta_1} = \frac{f_e}{f_o} = \frac{1}{M}$$

(3) 激光器的角放大倍数为

$$M = \frac{f_o}{f_e} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{4.5\times10^3}{1.5} = 3\times10^3$$

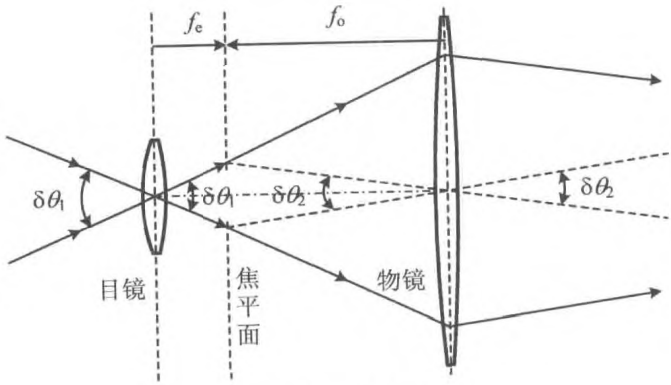


图 5.27 张角变化

当激光光束的直径扩成 4.5 m 后，光束的发散角为

$$\delta\theta_2 = \frac{\delta\theta_1}{M} = 1.22\frac{\lambda}{D_1 M} = 1.22\frac{\lambda}{D_2}$$

月面上光斑的半径为

$$R_2 = \Delta\theta_2 \cdot S = 1.22\frac{\lambda S}{D_2} = 64.5\ \text{m}$$

【例 5.20】 针孔相机没有透镜，而是用一个前后相距 10 cm 的带针孔的暗盒构成。用它拍摄太阳时要得到最清晰明亮的像，针孔的直径应该多大(中心波长取 500 nm)？

分析 相机中没有透镜，成像光束不能由于折射而汇聚。是通过针孔对光束的限制，使得从物上一点发出的光束在相机的像平面处形成一个光斑。本题中，由于太阳很远，进入针孔的光束近似为平行光束，物上的一个点在像平面上形成一个与针孔大小相等的光斑。这样的光斑可以看做是物上一点的几何像。显然，针孔越小，几何像斑也越小，成像越清晰。

但同时由于针孔的限制，成像的光波一定会出现衍射。太阳上的一个点会在针孔相机的像平面上形成一个艾里斑。根据衍射的特点可知，针孔越小，艾里斑将越大，成像越不清晰。

所以要得到一个既清晰又明亮的像，需要综合考虑上述两种因素的影响。可以根据折中的原则获得最佳的成像条件。

解 如图 5.28 所示，根据光纤的直线传播定律，太阳上的一个点所发出的光束，经过针孔后在针孔相机的像平面上所形成的一个像斑的大小等于针孔的直径 D。



图 5.28 针孔相机的几何像斑

若针孔相机像平面到针孔的距离为 l，该几何像斑对针孔的张角为

$$\Delta\theta_1 = \frac{D}{l}$$

考虑针孔的衍射，艾里斑对针孔的张角为

$$\Delta\theta_2 = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

改变针孔的孔径 D，上述两张角变化趋势恰相反，所以可认为两张角相等时成像最清晰，于是有

$$\frac{D}{l} = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

从而得到

$$D = \sqrt{1.22\lambda l} = \sqrt{1.22 \times 500 \times 10^{-6} \times 10 \times 10^{1}}$$
$$= 2.5 \times 10^{-1}(\text{mm})$$

或者从另一方面考虑，上述两张角之和最小，像最清晰。于是上述两张角之和的一阶导数为零，即

$$\frac{1}{l} - 1.22\frac{\lambda}{D^2} = 0$$

依然可得到

$$D = \sqrt{1.22\lambda l}$$

有人处理这一问题时，认为从像平面观察，针孔是第一个半波带时，像是最好的。于是根据菲涅耳半波带方程得到

$$D = \sqrt{\lambda l}$$

看起来与 $D = \sqrt{1.22\lambda l}$ 相差不大，但方法与结论却是错误的。

5.4 衍射光栅

衍射光栅是多缝夫琅禾费衍射装置。衍射花样是各个缝衍射的复振幅相干叠加的结果，光强为

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2 \tag{5.8}$$

式中，I_0 为单条缝在几何像点处的衍射光强，N 为缝的数目，$u = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$，$a$ 为缝宽，$\beta = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}$，$d$ 为光栅的周期，即光栅常数。

光栅方程，即衍射的极大值条件为

$$d(\sin\theta_0 - \sin\theta_j) = j\lambda \qquad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots) \tag{5.9}$$

在干涉的主极大值与衍射的极小值重合的位置，由于干涉的极大值不能出现而产生缺级，缺级条件为 $j/d = n/a$，即

$$j = n\frac{d}{a} \qquad (n \neq 0) \tag{5.10}$$

光栅光谱的半角宽度为

$$\Delta\theta_j = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta_j} = \frac{\lambda}{L\cos\theta_j} \tag{5.11}$$

其中，光栅的周期数与光栅常数的乘积 $L = Nd$ 就是光栅的有效宽度。

可分辨的最小波长间隔为

$$\delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda}{jN} \tag{5.12}$$

光栅的分辨本领为

$$A = \frac{\lambda}{\delta\lambda_{\min}} = jN \tag{5.13}$$

【例 5.21】 已知光栅缝宽为 1.5×10^{-4} cm，波长为 600 nm 的单色光垂直入射，发现第 4 级缺级，透镜焦距为 1 m，试求：

(1) 屏幕上第 2 级亮条纹与第 3 级亮条纹的距离；

(2) 幕上所呈现的全部亮条纹数。

解 (1) 光栅衍射出现缺级的原因是某一缝间干涉极大值位置与单缝衍射的极小值位置重合。所缺的级数为 $j = n\dfrac{d}{a}$。本题中 $j=4$ 缺级，则 $\dfrac{d}{a}=4$，可得光栅常数为

$$d = 4a = 6.0\times10^{-4}\ \text{cm}$$

根据光栅方程 $d\sin\theta_j = j\lambda$，可得 $\sin\theta_j = j\dfrac{\lambda}{d}$，衍射角 θ_j 很小时，$\theta_j \approx \sin\theta_j$，于是可得

$$\Delta x = f(\theta_3 - \theta_2) = (3-2)\frac{f}{d}\lambda = \frac{1\times10^2\times600\times10^{-8}}{6\times10^{-4}} = 1.00\ (\text{cm})$$

(2) 衍射角 θ 的最大值为 $\dfrac{\pi}{2}$，所对应的最大衍射级数为

$$j_{\max} = \frac{d}{\lambda} = 10$$

除去 ±4，±8 缺级，±10 级实际上难以观察到，所以在接收屏幕上出现的亮条纹数为

$$1 + 2\times7 = 15$$

即共有 15 根亮纹。

【例 5.22】 一光栅宽 5 cm，每 1 mm 有 400 条刻线。波长为 500 nm 的平行光正入射时，光栅的第 4 级衍射光谱在单缝衍射的第一极小值位置。试求：

(1) 每缝的宽度；

(2) 第二级衍射谱的半角宽度；

(3) 第二级可分辨的最小波长差；

(4) 如果入射光的入射方向与光栅平面的法线成 30°角，光栅能分辨的最小波长差又是多少？

解 (1) 光栅的周期为

$$d = \frac{1}{400} = 2.5 \times 10^{-3}(\text{mm})$$

$j=4$ 缺级，于是每缝透光部分的宽度为

$$a = \frac{d}{4} = \frac{\frac{1}{400}}{4} = 6.25 \times 10^{-4}(\text{mm})$$

(2) 光栅的宽度为 $L=Nd$，衍射谱线的半角宽度为

$$\Delta\theta_j = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta_j} = \frac{\lambda}{L\cos\theta_j} = \frac{\lambda}{L\sqrt{1-\left(\frac{j\lambda}{d}\right)^2}} \overset{j=2}{=} 1.09 \times 10^{-5}$$

(3) 可分辨最小波长间隔为

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{jN} \overset{j=2}{=} \frac{500}{2 \times 400 \times 50} = 0.012\,5\,(\text{nm}) = 0.125\,(\text{Å})$$

(4) 斜入射的光栅方程为 $d(\sin\theta+\sin\theta_0)=j\lambda$，光谱的衍射级数为

$$j = \frac{d}{\lambda}(\sin\theta_j + \sin\theta_0)$$

可分辨最小波长差依然是 $\delta\lambda=\frac{\lambda}{jN}$，而最大的衍射级数为

$$j_{\max} = \frac{d}{\lambda}(\sin 90^\circ + \sin 30^\circ) = 7$$

实际可用的最大级数是 $j_{\max}=7$，所以

$$\delta\lambda_{\text{m}} = \frac{\lambda}{j_{\max}N} = \frac{\lambda d}{j_{\max}L} = \frac{500 \times 2.5 \times 10^3}{7 \times 5 \times 10^7} = = 0.003\,6\,(\text{nm})$$

【例 5.23】 用强度为 I_0 的单色平行光如图 5.29 所示的屏，试求其夫琅禾费衍射的强度公式。

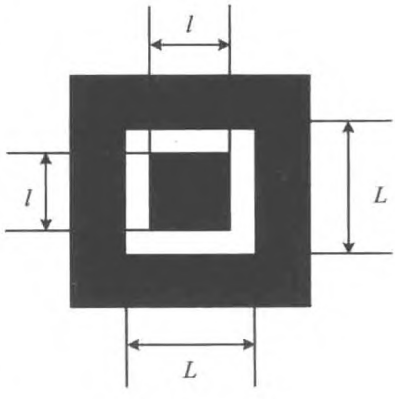


图 5.29 衍射屏

解 由菲涅耳—基尔霍夫衍射积分公式可知，本题所述的衍射屏的夫琅禾费衍射的复振幅为

$$\widetilde{U}(P) = \frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\iint_{\Sigma_0}\left(\frac{\cos\theta_0+\cos\theta}{2}\right)\widetilde{U}_0(Q)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\Sigma$$

其中，积分面积 Σ_0 为光孔的面积，由图 5.29 可知

$$\Sigma_0 = \Sigma_1 - \Sigma_2$$

其中，Σ_1 为边长为 L 的正方形，而 Σ_2 为边长为 l 的正方形。忽略倾斜因子，有

$$\tilde{U}(P) = \frac{-\mathrm{i}}{\lambda}\tilde{U}_0(Q)\left(\iint_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\Sigma - \iint_{\Sigma_2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\Sigma\right) = \tilde{U}_1(P) - \tilde{U}_2(P)$$

其中，$\tilde{U}_1(P)$，$\tilde{U}_2(P)$分别为大、小方孔的夫琅禾费衍射复振幅分布，于是

$$I(P) = A_0^2\left(L^2\frac{\sin\alpha_1}{\alpha_1}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\beta_1} - l^2\frac{\sin\alpha_2}{\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_2}{\beta_2}\right)^2$$

其中，$A_0 = \frac{U_0}{\lambda f} = \frac{\sqrt{I_0}}{\lambda f}$，$\alpha_1 = \frac{\pi L}{\pi}\sin\theta_1$，$\beta_1 = \frac{\pi L}{\pi}\sin\theta_2$，$\alpha_2 = \frac{\pi l}{\pi}\sin\theta_1$，$\beta_2 = \frac{\pi l}{\pi}\sin\theta_2$。$\theta_1$，$\theta_2$分别为屏上观察点相对于系统光轴的水平和垂直张角。

【例 5.24】 一光栅，光栅常数为 4 μm 总宽度为 10 cm，波长为 500.0 nm 和 500.01 nm 的平面波正入射，光栅工作在二级光谱，问这双线分开多大角度？能否分辨？

解 焦距离为

$$\delta\theta = j\frac{\delta\lambda}{d\cos\theta} = \frac{2\delta\lambda}{d\cos\theta}$$

考虑到

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{j\lambda}{d}\right)^2} = \sqrt{1-4\left(\frac{\lambda}{d}\right)^2}$$

$$\delta\theta = j\frac{\delta\lambda}{d\cos\theta} = \frac{2\delta\lambda}{\sqrt{d^2-4\lambda^2}} = \frac{2\times0.01}{\sqrt{4^2-4\times0.5^2}} = 5.16\times10^{-6}$$

光栅的刻线数

$$N = \frac{W}{d} = \frac{10}{4} = 2.5\times10^4$$

由瑞利判据

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{jN} = \frac{5\,000}{2\times2.5\times10^4} = 0.1\,(\text{Å})$$

恰可分辨。

【例 5.25】 设可见光谱的两个极限波长选定为 430.0 nm 和 680.0 nm，今设计一个光栅，使第一级光谱的衍射角宽为 20°，问此光栅的光栅常数为多少？若想这一级光谱的低频端的最小可分辨波长差为 2 nm，则此光栅的总宽度为多少？

解 设 $\lambda_1 = 430.0$ nm，$\lambda_2 = 680.0$ nm，λ_1 的第一级主极大的角位置为 θ_1，则根据光栅公式，有

$$d\sin\theta_1 = \lambda_1 \tag{1}$$

$$d\sin(\theta_1 + 20^\circ) = \lambda_2 \tag{2}$$

两式相除，得到

$$\frac{d\sin(\theta_1 + 20^\circ)}{d\sin\theta_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

将 $\sin(\theta_1 + 20^\circ)$展开后，可得

$$\sin\theta_1\cos 20^\circ + \cos\theta_1\sin 20^\circ = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sin\theta_1$$

即

$$\tan\theta_1 = \frac{\sin 20^\circ}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \cos 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\frac{68}{43} - \cos 20^\circ} = 0.533\,0$$

所以 $\theta_1 = 28.05^\circ$。

代入式(1)，即可求出光栅常数为

$$d = \frac{\lambda_1}{\sin\theta_1} = 9.1 \times 10^{-7}(\text{m})$$

再由可分辨最小波长公式

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{jN}$$

得到

$$N = \frac{\lambda}{j\delta\lambda} = 34\,000\ (\text{条})$$

故光栅宽度

$$L = Nd = 3.09\ (\text{cm})$$

【例 5.26】 如图 5.30 所示的实验装置，入射缝、出射缝、光栅中心三者皆在球面镜的焦平面上，闪耀光栅中心在光轴上，与两缝间距皆为 50 mm，球面镜曲率半径 $R = 4$ m，宽度为 10 cm 的光栅，刻线密度为 125 线/mm，光栅平面正对入射方向。

(1) 试画出光路并计算出射光有哪些波长(忽略缝宽)。

(2) 若希望出射光更明亮，闪耀角应取何值?

(3) 在(2)的情况下的色分辨本领是多大?

(4) 若出射缝宽 $\Delta l = 1$ mm，试求什么波长范围的可见光能出射。

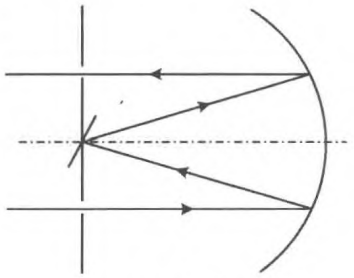


图 5.30 衍射装置

分析 闪耀光栅是反射式光栅，其优点是能将衍射光的能量较多地集中在某一非零级的光谱上，其与透射光栅有相同的光栅公式，所以与光栅光谱有关的诸如角色散本领、色分辨本领等公式也有相同的形式。

解 (1) 观察图 5.30 中的光路，由光栅公式，出射光的波长满足

$$d\sin 2\theta = m\lambda$$

由于 θ 很小，所以有 $\theta \approx \tan\theta = 0.025$ rad，代入上式，得到

$$\lambda = \frac{d\sin 2\theta}{m} = \frac{400\ \text{nm}}{m}$$

式中，m 为相应主极大的级数。

(2) 若令光栅的闪耀角 $\theta_B = \theta$，则出射方向应平行于闪耀方向，在此方向出射波长的单槽面衍射光为最大，故出射光最明亮。

(3) 光栅的总缝数

$$N = \frac{L}{d} = 12\,500\ (\text{条})$$

色分辨本领为

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN = 12\,500\ (\text{m})$$

(4) 在可见光中只有相应于 $m = 1$ 的波长 400.0 nm，由角色散本领公式

$$D_\theta = \frac{\delta\theta}{\delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta_m}$$

可知

$$\delta\lambda = d\cos\theta_1\delta\theta = d\cos 2\theta\delta\theta$$

其中，$\delta\theta$ 可视为缝对光栅中心的张角，由图中几何关系，考虑到焦平面发出的球面波经反射后变为平行光，如有

$$\delta\theta = \frac{\Delta l}{\frac{R}{2}} = 0.5\times 10^{-3}\ \text{rad}$$

代入上式可得

$$\delta\lambda = 4.0\ \text{nm}$$

故可见光中出射的波长范围为 400.0～404.0 nm

【例 5.27】 如图 5.31 所示，一光栅共有 $3N$ 条缝宽为 a 的狭缝，缝间不透明的宽度也为 a，现用一块相位型掩模将第 $3m$（m 为正整数）条缝都覆盖一层介质，使得入射光经过介质层后相对其他缝产生 π 的相移。用波长为 λ 的单色光垂直照射此光栅，试求夫琅禾费衍射的强度分布公式。

分析 如图 5.31 所示，可以将整个光栅看做是两个光栅复合而成，一个是由 N 条覆盖介质的缝构成，缝宽为 a，缝间距为 $6a$；另一个是由 N 个双缝单元构成，双缝单元中之间的距离为 $6a$。整个光栅的强度是这两个光栅衍射光的相干叠加。另外一种方法是把

整个光栅看做是三个光栅，每一个缝宽是 a，缝间距是 $6a$，第三个光栅出射光的相位与另两个光栅相比多了 π 的相位差。

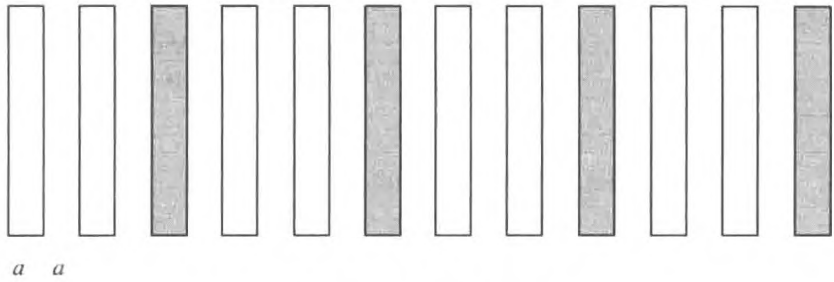


图 5.31 衍射光栅

解 方法一：首先考虑第一个覆盖透明膜的光栅的衍射，该光栅的缝宽为 a、光栅常数为 $6a$，则对应于 θ 角的衍射复振幅为

$$\tilde{U}_1 = U_0 \frac{\sin u}{u} \cdot \frac{\sin N\beta}{\sin\beta} = U_0 \frac{\sin u}{u} \cdot \frac{\sin 6Nu}{\sin 6u} \tag{1}$$

其中，$u = \frac{\pi}{\lambda} a\sin\theta$，$\beta = \frac{\pi}{\lambda} 6a\sin\theta = 6u$。

再考虑第二个光栅的复振幅分布。将间距为 a 的双缝看做一个衍射单元，是一个光栅常数为 $2a$ 的双缝光栅，该单元衍射的复振幅为

$$\tilde{U}_i = U_0 \frac{\sin u}{u} \cdot \frac{\sin(2 \cdot 2u)}{\sin(2u)} = 2U_0 \frac{\sin u}{u}\cos(2u) = 2U_0 \frac{\sin u}{u}\cos\frac{\delta'}{2} \tag{2}$$

其中，$\delta' = \frac{2\pi}{\lambda} 2a\sin\theta = 4u$ 为两缝衍射光之间的相位差。

N 个双缝单元的衍射光相干叠加后，复振幅为

$$\tilde{U}_2 = \tilde{U}_1 \frac{\sin N\beta}{\sin\beta}$$

将式(2)代入，可得

$$\tilde{U}_2 = 2U_0 \frac{\sin u}{u} \cdot \cos(2u) \cdot \frac{\sin 6Nu}{\sin 6u}$$

第一、第二光栅中心间距为 $5a$，再考虑到掩模所引起的相位差，两部分衍射光的相位差为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(5a)\sin\theta + \pi = \pi + 10u$$

相干叠加后，总强度为

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos 10u \tag{3}$$

其中，I_1，I_2 为两个光栅单独的衍射光强分布，将已知的 I_1，I_2 表达式代入式(3)，有

$$I = U_1^2(1 + 4\cos^2 2u + 2\cos 2u\cos 10u)$$

方法二：将整个光栅看做三个光栅，则每个光栅的复振幅为

$$\widetilde{U}_i = U_0 \frac{\sin u}{u} \cdot \frac{\sin N\beta}{\sin\beta} = U_0 \frac{\sin u}{u} \cdot \frac{\sin 6Nu}{\sin 6u} \tag{4}$$

相邻光栅之间的相位差为

$$\delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda} d_{12}\sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda} 2a\sin\theta = 4u \tag{5}$$

$$\delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda} d_{23}\sin\theta + \pi = \frac{2\pi}{\lambda} 2a\sin\theta + \pi = 4u + \pi \tag{6}$$

由振幅矢量法可知，合振幅 $\widetilde{U}_\theta$ 的两个分量为

$$\widetilde{U}_{\theta x} = \widetilde{U}_i[1 + \cos\delta_1 + \cos(\delta_1 + \delta_2)]$$

$$\widetilde{U}_{\theta x} = \widetilde{U}_i[\sin\delta_1 + \sin(\delta_1 + \delta_2)]$$

将式(5)、式(6)代入上式，有

$$\widetilde{U}_{\theta x} = \widetilde{U}_i(1 + \cos 4u + \cos 8u)$$

$$\widetilde{U}_{\theta x} = \widetilde{U}_i(\sin 4u - \sin 8u)$$

故 θ 方向的总光强为

$$\begin{aligned} I(\theta) &= |\widetilde{U}_\theta| = |\widetilde{U}_{\theta x}|^2 + |\widetilde{U}_{\theta y}|^2 \\ &= |\widetilde{U}_i|^2[(1 + \cos 4u + \cos 8u)^2 + (\sin 4u - \sin 8u)^2] \\ &= |\widetilde{U}_i|^2[3 + 2(\cos 4u + \cos 8u + \cos 12u)] \\ &= |\widetilde{U}_i|^2[1 + 4\cos^2 2u + 2\cos 2u\cos 10u] \end{aligned}$$

将式(4)代入上式，即得整个光栅的衍射强度，显然两种方法的结果相同。

【例 5.28】 一块透明片的振幅透过率为 $t(x) = e^{-\pi x^2}$（高斯分布函数），将其置于透镜的前焦面上，并用单位振幅的单色光垂直照明，求透镜后焦面上的振幅分布。

解

$$\begin{aligned} \widetilde{U}(f_x) &= \widetilde{C}' e^{ikr_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{t}(x)\exp\left(-ik\frac{xx'}{f}\right)dx \\ &= \widetilde{C}' e^{ikr_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi x^2)\exp(-i2\pi f_x x)dx \\ &= \widetilde{C}' e^{ikr_0} e^{-\pi f_x^2} = \widetilde{C}' e^{ikr_0}\exp\left(-\pi\frac{x'^2}{f^2\lambda^2}\right) \end{aligned}$$

y 方向为 δ 函数，高斯分布的傅里叶变换仍为高斯分布。

【例 5.29】 三狭缝衍射屏，缝宽均为 a，彼此间距为 d，中间缝盖有可以引起 180°位

相改变的滤光片，波长为 λ 的单色光正入射，计算下列各种情况下的角度。

(1) 第一衍射极小；

(2) 第一干涉极小；

(3) 第一干涉极大。

解 (1) 衍射只与单缝有关，由于是等宽狭缝，所以各个缝的衍射花样完全重叠，则第一衍射极小出现在

$$\sin\theta = j\frac{\lambda}{a} \overset{j=1}{=} \frac{\lambda}{a}$$

(2) 干涉由缝间光的相干叠加决定，干涉因子为

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\theta) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_1} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kL_1 + kd\sin\theta \pm \pi)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kL_1 + 2kd\sin\theta)} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kL_1 + kd\sin\theta)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kd\sin\theta} - 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}kd\sin\theta}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_1}(2\cos\beta - 1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\end{aligned}$$

光强为

$$I(\theta) = (2\cos\beta - 1)^2 \tag{1}$$

极小值条件为 $\cos\beta = 1/2$，即

$$\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta = j\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

于是得到

$$\sin\theta = \left(j \pm \frac{1}{3}\right)\frac{\lambda}{2d}$$

即第一干涉极小的位置为

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{6d} \tag{2}$$

(3) 干涉极大。干涉极大的条件为

$$\cos\beta = -1$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta = (2j+1)\pi$$

$$\sin\theta = \left(j + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2d}$$

1 级干涉极大值的位置为

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{4d} \tag{3}$$

【例 5.30】 一束激光(波长为 630 nm)掠入射于一钢尺上(最小刻度为 1/16 in，1 in = 2.54 cm)，反射的光投射到 10 m 以外的竖立墙壁上，如图 5.32 所示。

(1) 推导墙上干涉极大处的角度 θ，为简单起见，设入射激光束平行于钢尺表面；

(2) 墙上零级和 1 级干涉图样的垂直分布又如何?

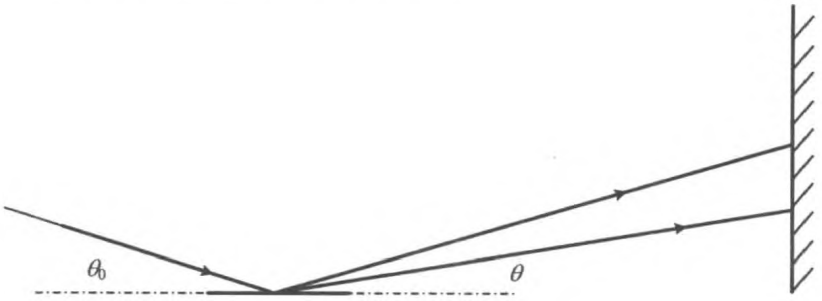


图 5.32 钢尺反射光的叠加

解 (1) 等效于光栅的衍射,即

$$d(\cos\theta - \cos\theta_0) = j\lambda$$

式中的角度都是掠射角。

掠入射时,$\theta_0 \approx 0$,于是近似有

$$d(\cos\theta - 1) = j\lambda$$

在掠入射条件下 $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$,所以得到

$$\theta = \sqrt{\frac{2j\lambda}{d}}$$

(2) 当 $j=0$ 时,$\theta=0$;当 $j=1$ 时

$$l\theta = l\sqrt{\frac{2\lambda}{d}} = 10 \times \sqrt{\frac{2 \times 6.3 \times 10^{-7}}{\frac{2.54 \times 10^{-2}}{16}}} = 28.2\,(\text{cm})$$

即 0 级在与钢尺同高度处,而 1 级比钢尺高 28.2 cm。

【例 5.31】 有一四缝衍射屏,缝宽为 a,缝间不透光部分宽度为 b,且 $a=b$,其中缝 1 一直打开,其他缝可以关闭,单色平行光正入射,如图 5.33(a)所示。试求:

(1) 打开缝_____可得到如图 5.33(b)所示的强度分布;

(2) 画出 4 个缝全打开时的强度分布;

(3) 若缝 1、3 打开,保持 d 不变,而 a 减小至 $a \ll b$,画出强度分布曲线;

(4) 按(2)的情况,中央最大光强为 $I =$ _____ I_0,I_0 为图 5.33(b)中的中央最大光强。

分析 光栅衍射中,由于既有每一单缝的衍射,又有缝间的干涉,所以最终的衍射强度分布是单缝衍射因子与缝间干涉因子的乘积。在这种情况下,如果缝间干涉的极大值

恰与单缝衍射的极小值在相同的方向，则该极大值（即光谱线）就不能出现，这种情况就是光栅的缺级。本题就是用缺级来判断光栅的缝宽与光栅常数间的关系。

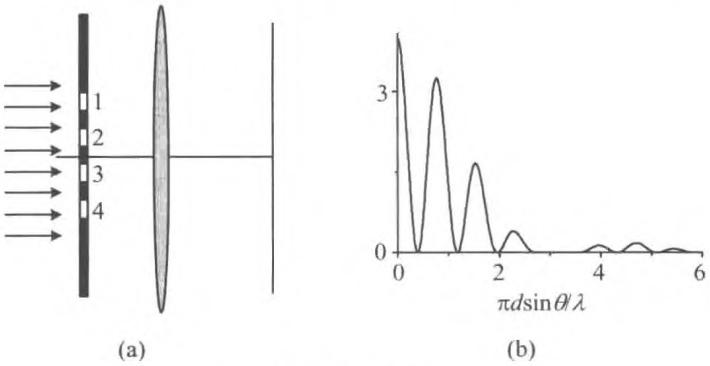


图 5.33 四缝衍射屏

解 (1) 光栅缺级的条件是 $j = n\dfrac{d}{a'}$，其中，a' 为透光部分宽度，d 为光栅的一个周期，即光栅常数，n 为非零整数。图 5.33(b)中，光栅光谱的第一次缺级出现在 $j=4$，说明此时 $n=1$，即 $d=4a'$，而缝 1 一直开着，所以只有再打开缝 3 才可得到这样的强度分布。

(2) 四个缝全打开，则 $d=2a'$，第一次缺级出现在 $j=2$，后面的缺级依次为 $j=4$，$j=6$，…光强分布见图 5.34。

(3) 此时，由于 $a \ll b$，即 $a \ll d$，所以缺级出现在 j 很大处，而光谱线变得细密，如图 5.35 所示。

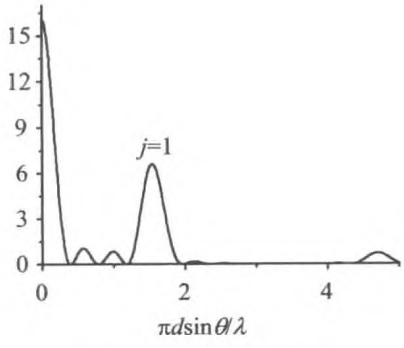


图 5.34 (2)的光强

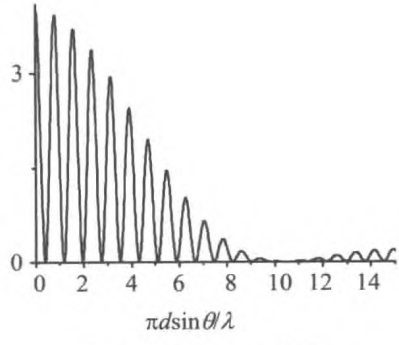


图 5.35 (3)的光强

(4) 图 5.33(b)的情形是只开两缝，而此时开四缝，因为接收屏上光强分布正比于缝

数的平方，因而此时最大光强

$$I = 4^2 I_0 = 16 I_0$$

【例 5.32】 如图 5.36(a)所示的三缝衍射屏，缝宽为 a，缝间不透光部分宽度为 b，薄透镜焦距为 2 m。求：

(1) 把中间缝关闭，平行单色光垂直照射。在透镜焦平面上得到图 5.36(b)所示衍射条纹，在图上画出三缝均打开时的衍射条纹分布；

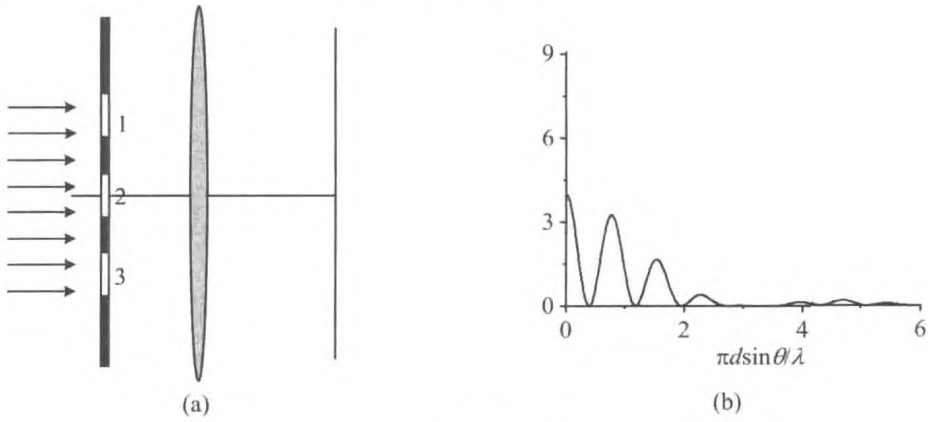


图 5.36 三缝衍射屏

(2) 若打开三缝，用 400 nm，600 nm 的双色平行光入射，在屏上 $x = 10$ cm 处，同时观察到 400 nm 的 k 级主极大和 700 nm 的 $k+1$ 级主极大，则三缝的 a，b 各是多大？

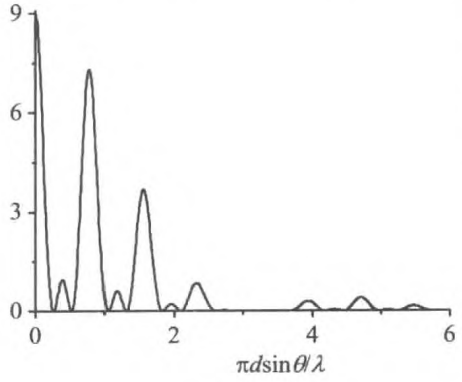


图 5.37

解 (1) 三缝均打开时的衍射强度分布与图 5.36(b)相比，有三点主要区别：第一，强度增大为原来的 $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ 倍；第二，缺级出现在 3，6，… 处；第三，光谱变得细锐，如图 5.37 所示。

(2) 屏上出现极大值的位置为

$$x = f\sin\theta = f\frac{k\lambda_1}{d} = f\frac{(k+1)\lambda_2}{d}$$

即

$$k\lambda_1 = (k+1)\lambda_2$$

由所给条件，在屏上 $x = 10$ cm 处，同时观察到 400 nm 的 k 级主极大和 700 nm 的 $k+1$ 级主极大，可得到最小的整数值为 $k = 2$。进而得到

$$d = f\frac{k\lambda_1}{x} = \frac{2\times 600\times 2\times 10^9}{100\times 10^6} = 24\times 10^3(\text{nm}) = 24\ (\mu\text{m})$$

由图 5.36(b),缺级出现在第 4 级,可以判断 $\frac{d}{a}=4$。

所以 $a=6\ \mu\text{m}$,$b=18\ \mu\text{m}$。

【例 5.33】 波长 480 nm 的平行单色光垂直入射到缝宽 0.4 mm 的单缝衍射屏上,缝后透镜焦距为 60 cm,计算:当接收屏上一点 P 到缝两端的位相差分别为 $\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{\pi}{6}$ 时,该点到透镜焦点的距离分别是多少?

解 狭缝两端到 P 点处的位相差为 $\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}a\sin\theta$,则 P 点对透镜光心的张角为

$$\theta\approx\sin\theta = \frac{\lambda}{2\pi a}\Delta\varphi = \frac{0.48}{400\times 2\pi}\Delta\varphi = \frac{1.2\times 10^{-3}}{2\pi}\Delta\varphi$$

$$= \begin{cases} 3\times 10^{-4} & \left(\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}\right) \\ 1\times 10^{-4} & \left(\Delta\varphi=\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

透镜的焦点位于接收屏与系统光轴的交点,于是

$$x = f\cdot\tan\theta\approx f\theta$$

$$= \begin{cases} 0.018\ (\text{cm}) & \left(\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}\right) \\ 0.006\ (\text{cm}) & \left(\Delta\varphi=\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

【例 5.34】 一平面衍射光栅,周期 $d=2\ \mu\text{m}$,有效宽度 $L=50.0$ mm。问:

(1) 钠光谱灯发出的平行光正入射到光栅上,对于其中 589.3 nm 的 D 线,光栅一级光谱的衍射角是多少?该谱线的半角宽度是多少?

(2) 钠原子的 D 线中包含 D_1,D_2 两条谱线,波长分别为 $\lambda_1=589.6$ nm,$\lambda_2=589.0$ nm。用该光栅的一级光谱可否分辨上述两谱线?

(3) 氢原子发出波长分别为 486.128 nm,486.129 nm 的两条精细结构谱线,能否用此光栅的 2 级光谱分辨?

解 光栅的周期数为

$$N = \frac{L}{d} = 2.5\times 10^4$$

正入射时,光栅方程为 $d\sin\theta=j\lambda$

(1) 一级衍射角

$$\theta = \arcsin\frac{j\lambda}{d} = 17.1^{\circ}$$

光谱线半角宽度

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{L\cos\theta} = (1.2\times10^{-3})^{\circ}$$

(2) 钠的两光谱线的波长差为 0.6 nm。光栅一级光谱在此波长附近可分辨的最小波长间隔为

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{jN} = \frac{589.3}{1\times2.5\times10^{4}} = 0.02\,(\text{nm})$$

所以足可分辨。

(3) 光栅二级光谱在此波长附近可分辨的最小波长间隔为

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{jN} = \frac{486.1}{2\times2.5\times10^{4}} = 0.01\,(\text{nm})$$

氢的两谱线的波长差为 0.001 nm,所以不可分辨。

【例 5.35】 一平面夫朗禾费衍射光栅,周期 $d=1\ \mu\text{m}$,透光缝宽度 $a=0.25\ \mu\text{m}$,刻线数 $N=4\times10^{4}$,氢光谱等发出的平行光正入射到光栅上。问:

(1) 以 $\lambda=486.1$ nm 的单色光入射,可观察到几根强度显著的光谱线?

(2) 计算 $\lambda=486.1$ nm 的单色光 2 级衍射光谱的衍射角(角度)和半角宽度(弧度)。

(3) 上述入射光实际上包含 486.127 86 nm,486.128 70 nm,486.136 15 nm 三条精细结构谱线,计算相邻两谱线 2 级光谱的角距离。

(4) 判断能否用 2 级光谱将上述入射光的精细结构分辨。

解 (1) 单缝衍射主极大范围内的光谱线有显著的强度,其中最大的级数为

$$j \leqslant \frac{d}{a} = 4$$

由于 $\sin\theta=\dfrac{j\lambda}{d}$,而本题中 $3\lambda>d$,实际上 3 级谱不可能出现。所以只能看到 5 根光谱线。

(2)
$$\theta_1 = \arcsin\frac{j\lambda}{d} = \arcsin\frac{2\times486.1}{1\,000} = 74.15^{\circ}$$

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta} = 4.45\times10^{-5}$$

(3)
$$\delta\theta = \frac{j\delta\lambda}{d\cos\theta}$$

$$\begin{cases} = \dfrac{2\times0.000\,84\times10^{-3}}{1\times\cos74.15^{\circ}} = 6.15\times10^{-6} \\ = \dfrac{2\times0.00745\times10^{-3}}{1\times\cos74.15^{\circ}} = 5.455\times10^{-5} \end{cases}$$

(4) 比较上述两问的结果，不能分辨。或者，由于

$$A = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = jN$$

2级光谱可分辨最小波长间隔为

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{jN} = \frac{486.1}{2\times 4\times 10^4} = 6.1\times 10^{-2}(\text{nm})$$

入射波长差为 8.4×10^{-4} nm，7.45×10^{-3} nm，所以不可分辨。

【例 5.36】 如图 5.38 所示，波长为 λ 的单色平行光正入射到开有三条平行狭缝的不透光屏上，接收屏位于凸透镜的焦平面处，各个狭缝的宽度和间距均已在图中标出，在缝 3 处覆盖一层薄膜，该薄膜对光无吸收，其厚度与折射率满足关系式 $(n-1)d=\frac{\lambda}{2}$，设各缝处的光强都相等。

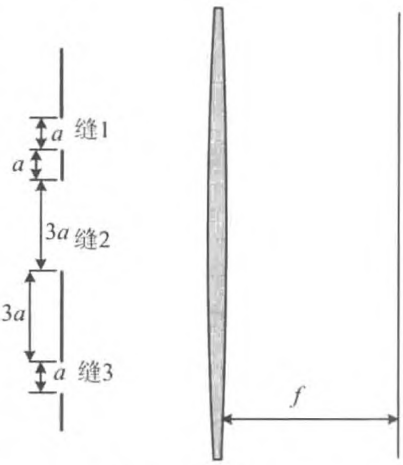


图 5.38 三缝衍射屏

(1) 分别打开缝 1 和缝 2，在接收屏上所得到的光强分布是否相同？为什么？同时打开缝 1 和缝 2，求出这时接收平面上的光强分布表达式。

(2) 分别打开缝 1 和缝 3，在接收屏上所得到的光强分布是否相同？为什么？同时打开缝 1 和缝 3，求出这时接收平面上的光强分布表达式。

(3) 三条缝同时打开，求出这时接收平面上的光强分布表达式。

(提示：要求过程与方法正确，并给出光强分布表达式，但不必将结果化成最简形式)

解 (1) 缝 2 与缝 1 的条纹中心重合，但条纹角宽度只有缝 1 的 1/3。

用振幅矢量法，两矢量大小分别为 $\frac{\sin u}{u}$，$3\frac{\sin 3u}{3u}$，两缝中心间距 $d_1=3a$，相位差为

$$\Delta\varphi_1 = \frac{2\pi d_1\sin\theta}{\lambda} = \frac{6\pi a\sin\theta}{\lambda} = 6u$$

合矢量振幅

$$A^2 = \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 + \left(\frac{\sin 3u}{u}\right)^2 + 2\frac{\sin u\sin 3u}{u^2}\cos 6u$$

(2) 缝 3 的衍射花样与缝 1 相同，但中心不重合，由于从缝 3 出射的光有 π 的相位滞后，缝 3 中心与缝 1 的 -1 级极小值位置重合。缝 3 与缝 1 中心间距为 $d_2=7a$，相位差为

$$\Delta\varphi_2 = 14u$$

合矢量振幅

$$A^2 = \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 + \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 + 2\frac{\sin u \sin u}{u^2}\cos(14u + \pi)$$

$$= 2\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2[1 - 2\cos(14u)]$$

(3) 三缝同时打开,合矢量振幅为

$$A^2 = \left[\frac{\sin u}{u} + \frac{\sin 3u}{u}\cos\Delta\varphi_1 + \frac{\sin u}{u}\cos(\Delta\varphi_2 + \pi)\right]^2$$

$$+ \left[\frac{\sin u}{u} + \frac{\sin 3u}{u}\sin\Delta\varphi_1 + \frac{\sin u}{u}\sin(\Delta\varphi_2 + \pi)\right]^2$$

$$= \left(\frac{\sin u}{u} + \frac{\sin 3u}{u}\cos 6u - \frac{\sin u}{u}\cos 14u\right)^2 + \left(\frac{\sin u}{u} + \frac{\sin 3u}{u}\sin 6u - \frac{\sin u}{u}\sin 14u\right)^2$$

【例 5.37】 一平面光栅,周期 $d = 1\ \mu m$,透光缝宽度 $a = 0.4\ \mu m$,刻线数 $N = 4 \times 10^4$,平行光正入射到光栅上。

(1) 计算波长为 588.996 nm 的 1 级衍射光谱的衍射角和半角宽度;

(2) 计算波长为 588.996 nm 和 589.593 nm 的 1 级光谱的角距离;

(3) 判断上述两谱线能否分辨;

(4) 如果入射光中仅包含 500 nm 和 550 nm 两种波长成分,测量衍射光得到波长为 500 nm 和 550 nm 的两谱线光强之比为 1 : 0.9,计算在入射光中这两成分的强度之比(提示:注意单元衍射的调制作用,并区分相干叠加与非相干叠加)。

解 (1) $$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{j\lambda}{d}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1 \times 0.588\,996}{1}\right) = 36.09^\circ$$

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta} = 1.82 \times 10^{-5}$$

(2) $$\theta' = \sin^{-1}\left(\frac{j\lambda'}{d}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1 \times 0.589\,593}{1}\right) = 36.13^\circ$$

$$\delta\theta = 0.04^\circ$$

(3) $$\delta\lambda = \frac{\lambda}{jN} = \frac{588.996}{1 \times 4 \times 10^4} = 0.015\ (\text{nm})$$

而 $\lambda - \lambda' = 0.597$ nm,可以分辨。

(4) 由于受到衍射因子的调制,衍射光强不能直接反映入射光强,如图 5.39 所示。

$$I(P) = I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

由光栅方程

$$d\sin\theta = j\lambda, d\sin\theta_1 = 500\ \text{nm} = 0.500\ \mu\text{m},$$

$$d\sin\theta_2 = 550\ \text{nm} = 0.550\ \mu\text{m}, \beta = \frac{\pi d\sin\theta}{\lambda} = j\pi$$

极大值处，缝间干涉因子$\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2 = N^2$均相同。

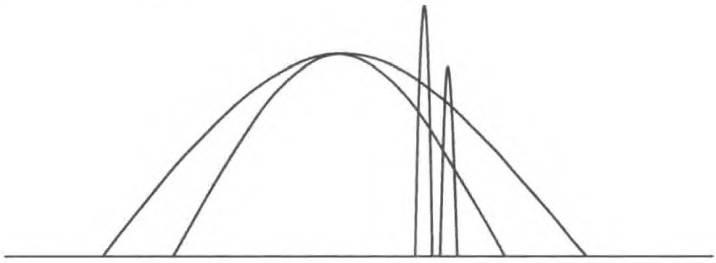


图 5.39 衍射因子对光强的调制

由于重叠，不同波长的单缝衍射强度相加，即

$$\begin{aligned} I(\theta_1) &= I_1(\theta_1) + I_2(\theta_1) \\ &= N^2 I_1 \left[\frac{\sin u\ (\theta_1)_1}{u\ (\theta_1)_1}\right]^2 + I_2 \left[\frac{\sin u\ (\theta_1)_2}{u\ (\theta_1)_2}\right]^2 \left[\frac{\sin N\beta\ (\theta_1)_2}{\sin\beta\ (\theta_1)_2}\right]^2 \\ I(\theta_2) &= I_1(\theta_2) + I_2(\theta_2) \\ &= I_1 \left[\frac{\sin u\ (\theta_2)_1}{u\ (\theta_2)_1}\right]^2 \left[\frac{\sin N\beta\ (\theta_2)_1}{\sin\beta\ (\theta_2)_1}\right]^2 + N^2 I_2 \left[\frac{\sin u\ (\theta_2)_2}{u\ (\theta_2)_2}\right]^2 \end{aligned}$$

由于非干涉极大值处缝间干涉要小得多，所以近似地有

$$I(\theta_1) \approx N^2 I_1 \left[\frac{\sin u\ (\theta_1)_1}{u\ (\theta_1)_1}\right]^2$$

$$I(\theta_2) \approx N^2 I_2 \left[\frac{\sin u\ (\theta_2)_2}{u\ (\theta_2)_2}\right]^2$$

在θ_1处

$$u_1 = \frac{\pi a\sin\theta_1}{\lambda_1} = 0.4\pi$$

$$u_2 = \frac{\pi a\sin\theta_1}{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{50}{55} \times 0.4\pi = \frac{4\pi}{11}$$

在θ_2处

$$u_1 = \frac{\pi a\sin\theta_2}{\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{55}{50} \times 0.4\pi = 0.44\pi$$

$$u_2 = \frac{\pi a \sin\theta_2}{\lambda_2} = 0.4\pi$$

代入上式，可得

$$I(\theta_1) = N^2 I_1 \left(\frac{\sin 0.4\pi}{0.4\pi}\right)^2 = 0.573 I_1 N^2$$

$$I(\theta_2) = N^2 I_2 \left(\frac{\sin 0.4\pi}{0.4\pi}\right)^2 = 0.573 N^2 I_2$$

解得

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{0.9}$$

【例 5.38】 平行光正入射到开有一系列间距为 d 的平行狭缝的不透光屏上，这些狭缝的宽度是可以调节的，屏后放有焦距为 f 的凸透镜，$d \ll f$，接收平面位于凸透镜的焦平面处，如图 5.40 所示。

(1) 稍稍打开其中第 1,2,5 条狭缝(缝间距依次为 d 和 $3d$)。以波长为 λ 的光入射，直到在接收平面能看到条纹，测得透镜焦点处光强为 I_1，这时可以认为每一缝的宽度相等且远小于 λ。求出接收平面上的光强分布表达式，以 θ 或 x 表示。

(2) 将第 3,4 条狭缝也稍稍打开，且缝宽与(1)中的三条狭缝相等，求出这时接收平面上的光强分布表达式。

(3) 将上述 5 条狭缝的宽度增大，直至每一缝的宽度为 $d/4$，与(2)中的情况相比，接收屏上的条纹有何变化？

(4) 如果只打开其中相邻的两条狭缝，且缝宽分别为 $d/4$ 和 $d/2$，求出这时接收平面上的光强分布表达式。

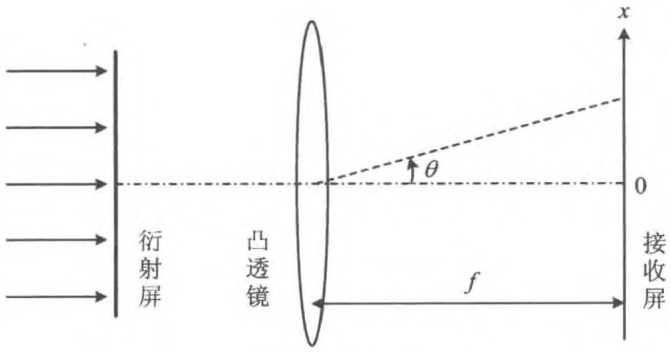


图 5.40 衍射装置

分析 本题涉及不等间距狭缝的衍射问题，关键是求出缝间干涉因子。

解 (1) 按题意,此时每条缝都非常细,可以不考虑每条缝的衍射,只考虑缝间的干涉,这是三缝干涉。三缝所发出的沿 θ 方向的波列之间的光程差依次为

$$\Delta L_{13} = d\sin\theta$$

$$\Delta L_{15} = 4d\sin\theta$$

于是各列光波复振幅的和为

$$\widetilde{U}_1(\theta) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_1}(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta L_{12}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta L_{15}}) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_1}(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}kd\sin\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}4kd\sin\theta})$$

记 $\beta = \dfrac{d\sin\theta}{\lambda}$,则 $kd\sin\theta = 2\beta$,上式可表示为

$$\widetilde{U}_1(\theta) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_1}(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\beta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}8\beta})$$

光强分布为

$$\begin{aligned} I_1(\theta) &= \widetilde{U}_1(\theta)\widetilde{U}_1^*(\theta) = A^2(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\beta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}8\beta})(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\beta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}8\beta}) \\ &= A^2(3 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\beta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\beta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}6\beta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}6\beta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}8\beta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}8\beta}) \\ &= A^2(3 + 2\cos2\beta + 2\cos6\beta + 2\cos8\beta) \end{aligned}$$

焦点处,$\theta = 0$,对应的光强为

$$I(0) = A^2(3 + 2 + 2 + 2) = 9A^2 = I_1$$

于是 $I(\theta)$ 表示为

$$I_1(\theta) = \frac{I_1}{9}(3 + 2\cos2\beta + 2\cos6\beta + 2\cos8\beta)$$

(2) 这是5条等间隔狭缝所发出的光波的干涉,合振动的复振幅为

$$\begin{aligned} \widetilde{U}_2(\theta) &= A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_1}(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta L_{12}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta L_{13}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta L_{14}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta L_{15}}) \\ &= A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_1}(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\beta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}4\beta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}6\beta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}8\beta}) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_1}\left[\frac{1 - (\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\beta})^5}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\beta}}\right] \\ &= A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\beta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}5\beta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}5\beta}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\beta}\frac{\sin5\beta}{\sin\beta} \end{aligned}$$

就是5缝光栅的缝间干涉因子。光强为

$$I_2(\theta) = A^2\frac{\sin^2 5\beta}{\sin^2\beta}$$

(3) 此时要考虑每一条狭缝的衍射,是5缝的夫琅禾费衍射光栅,光强为

$$I_3(\theta) = A^2\frac{\sin^2 u}{u^2} \cdot \frac{\sin^2 5\beta}{\sin^2\beta}$$

其中

$$u = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda} = \frac{\pi d\sin\theta}{4\lambda} = \frac{\beta}{4}$$

与(2)相比，光强受到单缝衍射因子$\frac{\sin^2 u}{u^2}$的调制。

(4) 这是间隔为 d 的不等宽双缝的衍射，此时合振动的复振幅为

$$\tilde{U}_4(\theta) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_1}\left(a\frac{\sin u}{u} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\beta}2a\frac{\sin 2u}{2u}\right) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL_1}a\frac{\sin u}{u}(1 + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\beta}\cos u)$$

光强为

$$I_4(\theta) = a^2A^2\frac{\sin^2 u}{u^2}(1 + 4\cos^2 u + 4\cos u\cos 2\beta)$$

【例 5.39】 用白光垂直照射在一光栅上，能在 30°衍射角方向观察到 600 nm 的第二级主极大干涉，并能在该处分辨 600 nm 附近波长差 0.5 nm 的两条谱线，可是在 30°的衍射角方向上，却难以测到 400 nm 的主最大干涉。试问：

(1) 光栅相邻两缝间距有多大？

(2) 光栅的总宽度是多少？

(3) 光栅的每一条透光狭缝有多宽？

(4) 若用此光栅观察钠光谱(590.0 nm)，求当光线垂直入射时，屏上呈现的干涉条纹总数是多少？

解 (1) 设周期为 d，缝宽为 a。

由光栅方程 $d\sin\theta = j\lambda$，得到

$$d = \frac{j\lambda}{\sin\theta} = 2\,400\ \mathrm{nm} = 2.4\ \mu\mathrm{m}$$

这就是相邻两缝的间距。

(2) 由光栅分辨本领

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = jN$$

已知，$\lambda = 600$ nm，可分辨的最小波长间隔 $\Delta\lambda = 0.05$ nm，$j = 2$，于是光栅刻线数

$$N = \frac{\lambda}{j\Delta\lambda} = 6\,000$$

光栅的总宽度

$$L = Nd = 14.4\ \mathrm{mm}$$

(3) 能观察到 600 nm 的第二级主极，却观察不到 400 nm 的主最大干涉，说明 400 nm 的主极大在这里出现了缺级。缺级时，缝间干涉的主极大 $d\sin\theta = j\lambda$ 与单缝衍射的极小 $a\sin\theta = m\lambda$ 重合，即满足条件

$$\frac{j}{d} = \frac{m}{a}$$

于是 $a=\frac{m}{j}d$，显然对 400 nm，$j=3$，而 $m=1$，于是光栅的狭缝宽度为

$$a = 800\ \text{nm} = 0.8\ \mu\text{m}$$

（4）由光栅方程 $d\sin\theta=j\lambda$，$\theta=\frac{\pi}{2}$时，$j=4$，由于 $j=3$ 缺级，观察钠光谱(590.0 nm)，屏上呈现的干涉条纹总数是 7。

【例 5.40】 一闪耀光栅每 1 mm 有 1 200 个刻槽，闪耀角为 20°，平行光垂直于光栅平面入射，求：

（1）1 级闪耀波长；

（2）能观察到闪耀波长的几级光谱？

解 （1）入射方式如图 5.41 所示，光栅常数为

$$d = \frac{1}{1\,200} = 8.333\times10^{-4}(\text{mm})$$

对于光栅的光谱，即缝间干涉的强度极大值方向，仍然可以由光栅方程得到，即

$$d\sin\theta = j\lambda$$

闪耀方向是指每个闪耀面(即反射面)的反射方向，对于本题的入射方式，闪耀方向与光栅平面之间的夹角为 $2\theta_B$，$\theta_B=20°$为闪耀角。衍射主极大的方向即为槽面(闪耀面)反射的方向，与光栅平面的法线间有 $2\theta_B$ 夹角。其1级闪耀波长为

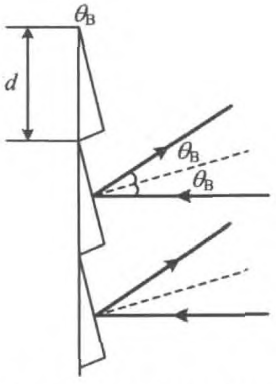


图 5.41　闪耀光栅的入射方式

$$\lambda_{1B} = d\sin(2\theta_B) = 535.7\ \text{nm}$$

（2）可以近似地认为槽面的宽度为 $a=d\cos\theta_B=7.831\times10^{-4}$ mm，则衍射中央主极大的半角宽度为

$$\Delta\theta_0 = \frac{\lambda}{a} = \frac{\lambda}{d\cos\theta_B} = 39.2° \approx 40°$$

处于衍射主极大之内的光谱，其角度应满足

$$0° \approx 2\theta_B - \Delta\theta_0 < \theta < 2\theta_B + \Delta\theta_0 \approx 80°$$

由此可以得到对应的最小级数为

$$j_{\min} = \frac{d\sin(2\theta_B - \Delta\theta_0)}{\lambda_{1B}} = \frac{\sin0°}{\sin40°} = 0$$

最大级数为

$$j_{\max} = \frac{d\sin(2\theta_B + \Delta\theta)}{\lambda_{1B}} = \frac{\sin80°}{\sin40°} = 1.5$$

说明只有1级可见。

【例 5.41】 利用傅立叶变换方法，求包含 N 个狭缝的衍射光栅的夫琅禾费衍射的强度分布公式。设狭缝宽度为 a，光栅常数为 d，光栅由单位振幅的单色光垂直照明。

解

$$\widetilde{U}(f_x) = \widetilde{C}'\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}\int \widetilde{t}(x)\exp(-\mathrm{i}2\pi f_x x)\mathrm{d}x$$

$$\widetilde{t}(x) = \begin{cases} 1 & (x \in [kd, kd+a]) \\ 0 & (x \in [kd+a, (k+1)d]) \end{cases}$$

则

$$\widetilde{U}(f_x) = \widetilde{C}'\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{kd}^{kd+a}\widetilde{t}(x)\exp(-\mathrm{i}2\pi f_x x)\mathrm{d}x$$

$$= \widetilde{C}'\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}\left[\sum_{k=0}^{N-1}\exp(-\mathrm{i}2\pi f_x kd)\right]\cdot\frac{[\exp(-\mathrm{i}2\pi f_x a)-1]}{-\mathrm{i}2\pi f}$$

$$= \widetilde{C}'\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}\frac{1-\exp[-\mathrm{i}2\pi f_x(N-1)d]}{1-\exp(-\mathrm{i}2\pi f_x d)}\cdot\frac{[1-\exp(-\mathrm{i}2\pi f_x a)]}{\mathrm{i}2\pi f}$$

光强

$$I = \widetilde{U}\widetilde{U}^* = |\widetilde{C}'|^2\frac{f^2}{k^2x'^2}4\sin^2(\pi f_x a)\frac{\sin^2(\pi f_x Nd)}{\sin^2(\pi f_x d)}$$

第 6 章　光的偏振与双折射

偏振是指波的振动方向相对于传播方向的不对称性。光波是横波，光的电场分量、磁场分量与传播方向相互垂直，因而表现出偏振的特性。

6.1　光的偏振态

按照偏振特征，光波可分为自然光、部分偏振光、线偏振光、圆偏振光和椭圆偏振光 5 种。

6.1.1　自然光

自然光不具有偏振，电场分量在各个方向是对称的，如图 6.1 所示。

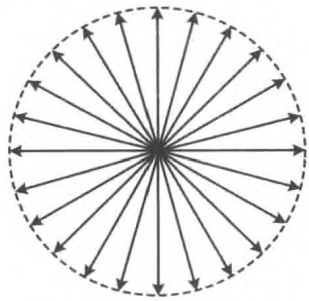


图 6.1　自然光的电矢量

6.1.2 部分偏振光

部分偏振光具有自然光的特点，只是在不同方向振幅不同，如图 6.2 所示。

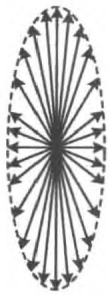


图 6.2 部分偏振光的电矢量

6.1.3 线偏振光

线偏振光也称平面偏振光，电矢量只在一个固定的平面内振动。

若建立直角坐标系，并取 z 轴沿光波传播的方向，平面偏振光的电矢量可沿 x，y 方向正交分解。这两个分量之间的相位差为 0 或 π，如图 6.3(a)和图 6.3(b)所示，表示为

$$\begin{cases} E_x = A_x\cos(kz - \omega t) \\ E_y = A_y\cos(kz - \omega t) \end{cases} \tag{6.1}$$

或者

$$\begin{cases} E_x = A_x\cos(kz - \omega t) \\ E_y = -A_y\cos(kz - \omega t) = A_y\cos(kz - \omega t + \pi) \end{cases} \tag{6.2}$$

而 $A_x = A\cos\theta$，$A_y = A\sin\theta$。

6.1.4 圆偏振光

若在一个与光的波矢(即光的传播方向)垂直的平面内观察其电矢量，光的电矢量不是沿一个特定的方向振动，而是绕着传播的方向匀速旋转，即 t_0，t_1，t_2，t_3，t_4，……诸时刻，电矢量的方位依次变化，且旋转中电矢量的大小保持不变，则其端点轨迹为圆，如图 6.4 所示，这就是圆偏振光。

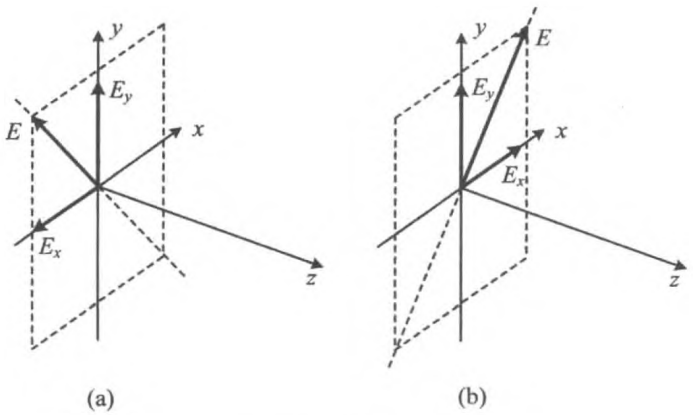


图 6.3　平面偏振光

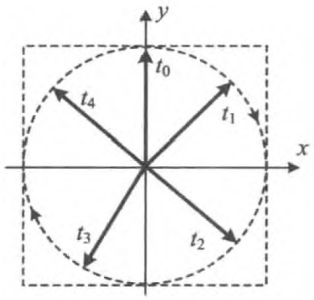


图 6.4　圆偏振光

由波的矢量叠加可以判断，圆偏振光可以分解为两个振幅相等的相互垂直的平面偏振光，这两个平面偏振光具有$\frac{\pi}{2}$的相位差，如图 6.5 和图 6.6 所示。

$$\begin{cases} E_x(z,t) = A\cos(kz - \omega t) \\ E_y(z,t) = A\cos\left(kz - \omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \tag{6.3}$$

式(6.3)中，两正交分量的相位差为$+\frac{\pi}{2}$时，即 y 分量比 x 分量滞后$\frac{\pi}{2}$，是左旋的；相位差为$-\frac{\pi}{2}$时，即 y 分量比 x 分量超前$\frac{\pi}{2}$，是右旋的。

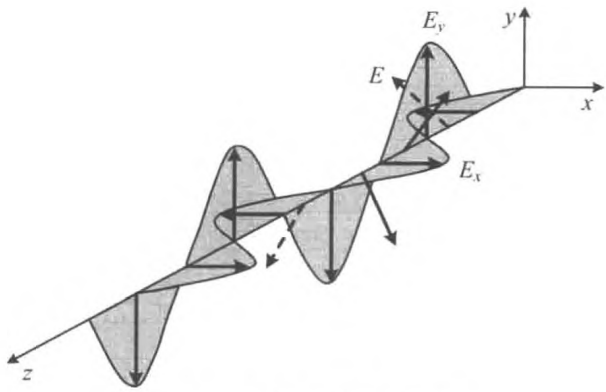


图 6.5 圆偏振光正交分解

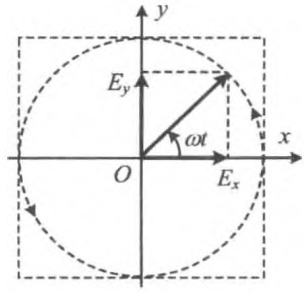


图 6.6 圆偏振光两正交分量之间的相位差

6.1.5 椭圆偏振光

在一个固定的平面(该平面垂直于光的传播方向)内观察,如果光矢量绕传播方向旋转,而且在不同的角度,光矢量的大小不同,但其数值作周期性变化,矢量端点的轨迹为椭圆,如图 6.7 所示,这种偏振光就是椭圆偏振光。

如图 6.8 所示,椭圆偏振光的电矢量可正交分解为

$$\begin{cases} E_x = A_x\cos(kz - \omega t) \\ E_y = A_y\cos(kz - \omega t + \Delta\varphi) \end{cases} \tag{6.4}$$

两正交分量的相位差 $\Delta\varphi$ 与电矢量旋转方向的关系为

$$\begin{cases} \Delta\varphi \in \text{Ⅰ},\text{Ⅱ},\text{左旋} \\ \Delta\varphi \in \text{Ⅲ},\text{Ⅳ},\text{右旋} \end{cases}$$

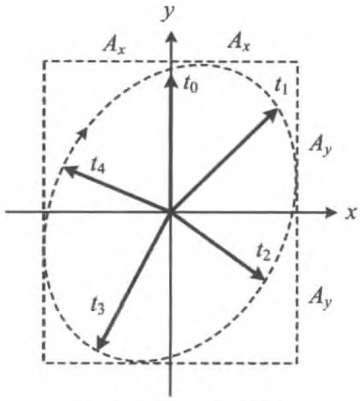


图 6.7　椭圆偏振光

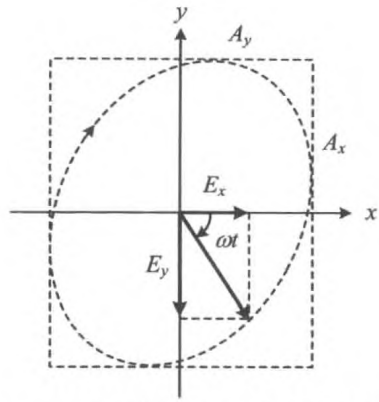


图 6.8　椭圆偏振光电矢量的正交分解

一般地，两正交分量合成的偏振光的特征可如图 6.9 所示方式表示。

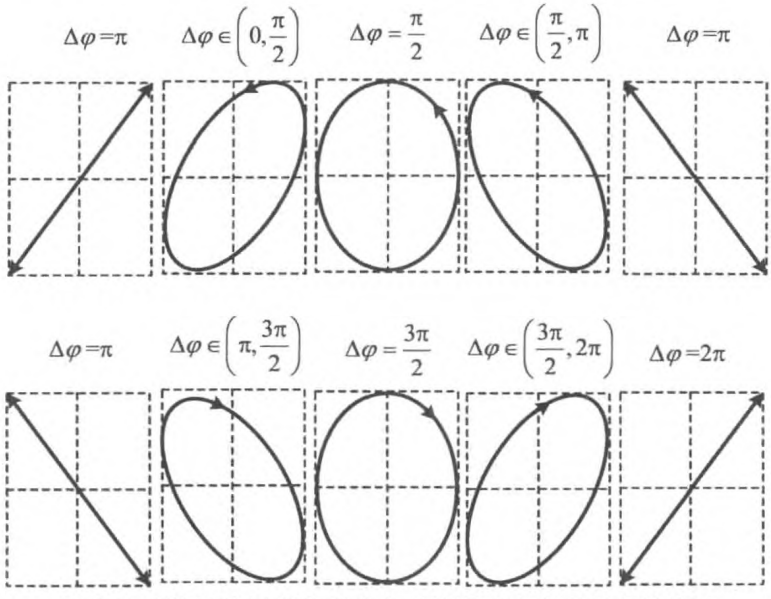


图 6.9　椭圆偏振光的旋转方向、长轴取向与相位差间的关系

6.1.6　典型问题与基本解题方法

【例 6.1】　试计算：(1) 要使自然光经过折射率为 1.5 的玻璃反射后成为线偏光，入射角应为多大？

(2) 此时折射角是多少？折射光的偏振度是多大？

(3) 若反过来，让自然光由玻璃内部射向空气，此时的全偏振角(即反射光是线偏振光时的入射角)又是多大？

分析 一般情形下，自然光的反射光与折射光都是部分偏振光。可根据菲涅耳公式计算 P 分量与 S 分量的相对振幅的大小。

解 (1) 当光以布儒斯特角入射时，反射光中只有 S 分量，为线偏振光。由布儒斯特定律，可得

$$i_B = \tan^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1.5}{1}\right) = 56.3^\circ$$

(2) 由折射定律

$$\sin i_B = \sin\frac{n_2}{n_1} i_2$$

而

$$\tan i_B = \frac{\sin i_B}{\cos i_B} = \frac{n_2}{n_1}$$

得

$$\sin i_2 = \cos i_B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_B\right)$$

即折射角为

$$i_2 = \frac{\pi}{2} - i_B = 90^\circ - 56.3^\circ = 33.7^\circ$$

由于入射光的 P 分量全部折射(透射)，而 S 分量部分透射，故折射光为部分偏振光，根据偏振度的定义，可得

$$P = \frac{I_{2P} - I_{2S}}{I_{2P} + I_{2S}} = \frac{n_2 I_{1P} |t_P|^2 - n_2 I_{1S} |t_S|^2}{n_2 I_{1P} |t_P|^2 + n_2 I_{1S} |t_S|^2} \tag{1}$$

其中，I_{1P}，I_{1S}分别表示入射光的 P，S 分量的光强；I_{2P}，I_{2S}分别表示折射光的 P，S 分量的光强。t_P，t_S 分别表示 P，S 分量的振幅透射率。

由于入射光为自然光，所以

$$I_{1P} = I_{1S}$$

式(1)可化为

$$P = \frac{|t_P|^2 - |t_S|^2}{|t_P|^2 + |t_S|^2} \tag{2}$$

根据菲涅耳公式可以计算出 t_P，t_S：

$$|t_P|^2 = \left[\frac{2\sin i_2 \cos i_B}{\sin(i_B + i_2)\cos(i_B - i_2)}\right]^2 \overset{i_2 = \frac{\pi}{2} - i_B}{=} \left(\frac{2\cos^2 i_B}{\sin 2i_B}\right)^2 = \left(\frac{1}{\tan i_B}\right)^2 = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{-2}$$

$$|t_S|^2 = \left[\frac{2\sin i_2 \cos i_B}{\sin(i_B + i_2)}\right]^2 = (2\cos^2 i_B)^2 = 4\cos^4 i_B$$

$$= \left(\frac{2}{1+\tan^2 i_B}\right)^2 = \left(\frac{2n_1^2}{n_1^2+n_2^2}\right)^2$$

将上述结果代入式(2)，有

$$P = \frac{\left(\frac{2\cos^2 i_B}{\sin 2i_B}\right)^2 - 4\cos^4 i_B}{\left(\frac{2\cos^2 i_B}{\sin 2i_B}\right)^2 + 4\cos^4 i_B} = \frac{1-\sin^2 2i_B}{1+\sin^2 2i_B} = \frac{1-0.852\,3}{1+0.852\,3} = 8.0\%$$

(3) 此时，布儒斯特角为

$$i'_B = \tan^{-1}\left(\frac{n_1}{n_2}\right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \frac{\pi}{2} - i_B = 33.7^\circ$$

【例 6.2】 一束光强为 I_0、能流为 W_0 的自然光以 i_B(布儒斯特角)入射到折射率为 1.5 的平行平面玻璃上，不计吸收，计算图 6.10 中各处标示的光强和能流值。

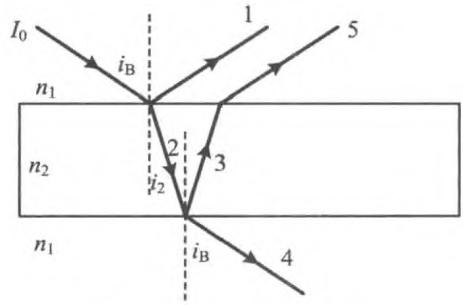


图 6.10　反射光与透射光

分析　由于自然光以 i_B 入射，所以光束 1 中只有 S 分量。由光在平行平板玻璃中传播的特性可知，光束 4,5 的折射角也均为 i_B，故光在上下表面的每次反射都满足布儒斯特条件，即每次的反射光都是线偏振光。

了解到上述特征后，只要计算出上下界面的光强和能流的透射率和反射率，就可以得到结果。计算过程中需要注意的是，由于入射光与折射光分别处于不同的介质中，故光强的透射率并不等于振幅透射率的平方；由于折射后光束的横截面积发生变化，所以能流透射率也不等于光强透射率。

解　由于入射光式自然光，所以分解为 P,S 分量后，两分量的光强相等，即

$$I_{0S} = I_{0P} = \frac{1}{2}I_0$$

$$W_{0S} = W_{0P} = \frac{1}{2}W_0$$

(1) 由菲涅耳公式,在满足布儒斯特条件时,有

$$r_P^2 = 0$$

$$r_S^2 = \left(\frac{E'_{S1}}{E_{S0}}\right)^2 = \left[-\frac{\sin(i_B - i_2)}{\sin(i_B + i_2)}\right]^2 = \sin^2\left(2i_B - \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 2i_B$$

$$= \frac{1 - \tan^2 i_B}{1 + \tan^2 i_B} = \frac{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}{1 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} = \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + n_2^2}$$

反射光束 1 的光强为

$$I_1 = I_{0S}r_S^2 = I_{0S}\cos^2 2i_B = \frac{I_0}{2} \cdot \left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + n_2^2}\right)^2 = 0.07I_0$$

由于反射光与入射光具有相等的光束截面,于是能流为

$$W_1 = S_1 I_1 = S_1 I_0 r_S^2 = W_0 r_S^2 = 0.07W_0$$

(2) 对于透射光束 2

$$t_{2S} = \frac{E_{S2}}{E_{S0}} = \frac{2\sin i_2 \cos i_B}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 2\cos^2 i_B = 1 + \cos 2i_B = \frac{2n_1^2}{n_1^2 + n_2^2}$$

$$t_{2P} = \frac{E_{P2}}{E_{P0}} = \frac{2\sin i_2 \cos i_B}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(i_B - i_2)} = \frac{2\sin^2 i_2}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - i_2 - i_2\right)}$$

$$= \frac{2\sin^2 i_2}{\sin(2i_2)} = (\tan i_B)^{-1} = \frac{n_1}{n_2}$$

于是光强透过率为

$$T_{2S} = \frac{I_{2S}}{I_{0S}} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \left(\frac{E_{S2}}{E_{S0}}\right)^2 = \frac{n_2}{n_1} \cdot \left(\frac{2n_1^2}{n_1^2 + n_2^2}\right)^2 = \frac{4n_1^3 n_2}{(n_1^2 + n_2^2)^2}$$

$$T_{2P} = \frac{I_{2P}}{I_{0P}} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \left(\frac{E_{P2}}{E_{P0}}\right)^2 = \frac{n_2}{n_1} \cdot \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = \frac{n_1}{n_2}$$

$$I_2 = \frac{I_0}{2} \cdot \left[\frac{4n_1^3 n_2}{(n_1^2 + n_2^2)^2} + \frac{n_1}{n_2}\right] = 0.62I_0$$

能流透过率为

$$T_{2S}\frac{S_2}{S_1} = T_{2S} \cdot \frac{\cos i_2}{\cos i_B} = T_{2S}\tan i_B = \frac{4n_1^3 n_2}{(n_1^2 + n_2^2)^2} \cdot \frac{n_2}{n_1} = \frac{4n_1^2 n_2^2}{(n_1^2 + n_2^2)^2}$$

$$T_{2P}\frac{S_2}{S_1} = T_{2P} \cdot \frac{\cos i_2}{\cos i_B} = T_{2P}\tan i_B = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{n_2}{n_1} = 1$$

于是，能流为

$$W_2 = \frac{1}{2}W_0\left[\frac{4n_1^2n_2^2}{(n_1^2+n_2^2)^2}+1\right] = \frac{1}{2}W_0(0.85+1) = 0.93W_0$$

(3) 对于下表面的反射光束 3

$$r_{2P}^2 = 0$$

$$r_{2S}^2 = \left(\frac{E'_{S3}}{E_{S2}}\right)^2 = \cos^2 2i_B = \left(\frac{n_1^2-n_2^2}{n_1^2+n_2^2}\right)^2$$

于是

$$I_3 = I_{3S} = I_{S2}\left(\frac{E'_{S3}}{E_{S2}}\right)^2 = \frac{I_0}{2}\left(\frac{4n_1^3n_2}{n_1^2+n_2^2}\right)^2\left(\frac{n_1^2-n_2^2}{n_1^2+n_2^2}\right)^2$$

$$= \frac{2n_1^3n_2(n_1^2-n_2^2)^2}{(n_1^2+n_2^2)^4}I_0 = 0.04I_0$$

同理，能流为

$$W_3 = W_{3S} = W_{2S}r_{2P}^2 = 0.06W_0$$

(4) 对于下表面的透射光束 4

$$I_{4S} = I_{2S}\frac{n_1}{n_2}\left(\frac{E_{4S}}{E_{2S}}\right)^2 = \frac{I_0}{2}\cdot\frac{4n_1^3n_2}{(n_1^2+n_2^2)^2}\cdot\frac{n_1}{n_2}\cdot\left(\frac{2n_2^2}{n_1^2+n_2^2}\right)^2$$

$$= \frac{I_0}{2}\cdot\frac{16n_1^4n_2^4}{(n_1^2+n_2^2)^4}$$

$$I_{4P} = I_{2P}\frac{n_1}{n_2}\left(\frac{E_{P4}}{E_{P2}}\right)^2 = \frac{I_0}{2}\cdot\frac{n_1}{n_2}\cdot\frac{n_1}{n_2}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 = \frac{I_0}{2}$$

即光强透过率为

$$T_{2S} = \frac{I_{4S}}{I_{2S}} = \frac{n_1}{n_2}\left(\frac{E_{s4}}{E_{s2}}\right)^2 = \frac{n_1}{n_2}\left(\frac{2n_2^2}{n_1^2+n_2^2}\right)^2$$

$$T_{2P} = \frac{I_{4P}}{I_{2P}} = \frac{n_1}{n_2}\left(\frac{E_{P4}}{E_{P2}}\right)^2 = \frac{n_2}{n_1}$$

透射光强

$$I_4 = I_{4S} + I_{4P} = 0.86I_0$$

能流透过率

$$T_{2S}\cdot\frac{S_4}{S_2} = T_{2S}\cdot\frac{\cos i_B}{\cos i_2} = T_{2S}(\tan i_B)^{-1} = \left(\frac{2n_2^2}{n_1^2+n_2^2}\right)^2\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = \frac{4n_1^2n_2^2}{(n_1^2+n_2^2)^2}$$

$$T_{2P}\cdot\frac{S_4}{S_2} = T_{2P}\cdot\frac{\cos i_B}{\cos i_2} = T_{2P}(\tan i_B)^{-1} = \frac{n_2}{n_1}\cdot\frac{n_1}{n_2} = 1$$

能流为

$$W_4 = \frac{1}{2}W_0\left[\frac{4n_1^2n_2^2}{(n_1^2+n_2^2)^2}\cdot\frac{4n_1^2n_2^2}{(n_1^2+n_2^2)^2}+1\times 1\right]=\frac{1}{2}W_0(0.85^2+1)=0.86W_0$$

(5) 对于从上表面透射的光束5，由于只有 S 分量，于是

$$I_5 = I_{5S} = I_{3S}\cdot\frac{n_1}{n_2}\cdot\left(\frac{E_{S5}}{E_{S3}}\right)=I_0\cdot\frac{2n_1^3n_2(n_1^2-n_2^2)^2}{(n_1^2+n_2^2)^4}\cdot\frac{n_1}{n_2}\cdot\left(\frac{2n_2^2}{n_1^2+n_2^2}\right)^2$$

$$=\frac{I_0}{2}\cdot\frac{16n_1^4n_2^4(n_1^2-n_2^2)^2}{(n_1^2+n_2^2)^4}=0.05I_0$$

能流

$$W_5 = W_3T_{3S}\cdot\frac{S_5}{S_3}=W_{3S}T_{2S}\cdot\frac{S_4}{S_2}=W_{3S}\frac{4n_1^2n_2^2}{(n_1^2+n_2^2)^2}\cdot\frac{n_1}{n_2}$$

$$=W_{3S}\frac{4n_1^3n_2}{(n_1^2+n_2^2)^2}=0.05W_0$$

【例 6.3】 光自光密介质射向光疏介质，求 S 分量、P 分量的光强透射率大于 1 的条件。

分析 此时入射角小于折射角，因而入射光的截面积小于折射光的截面积，则此时折射光的光强有可能大于入射光的光强，但这时并不违背能量守恒，因为能流透射率仍小于折射光的能流与入射光的能流。

解 先讨论 S 分量，其光强透射率为

$$T_S=\frac{n_2}{n_1}|t_S|^2=\frac{1}{n}|t_S|^2$$

其中，$n=\frac{n_1}{n_2}$为两种介质的相对折射率，可知 $n>1$。

如果令 $T_S=1$，于是有 $|t_S|=\sqrt{n}$，再根据菲涅耳公式，则有

$$t_S=\frac{2n_1\cos i_1}{n_1\cos i_1+n_2\cos i_2}=\frac{2}{1+\dfrac{\cos i_2}{n\cos i_1}}=\sqrt{n} \tag{1}$$

由于

$$\cos i_2=\sqrt{1-\sin^2 i_2}=\sqrt{1-n_1^2/n_2^2\sin^2 i_1}=\sqrt{1-n^2\sin^2 i_1}$$

$$\cos i_1=\sqrt{1-\sin^2 i_1}$$

将其代入式(1)，整理后得到

$$\sin i_1=\sqrt{1+\frac{(1+n)(1-n)}{4n-2n\sqrt{n}}} \tag{2}$$

为使上式有意义，要求 $1<n<4$。

即当入射角 i_1 满足式(2)时，S 分量的光强透射率等于 1。

令式(1)中的因子 $n\cos i_2/\cos i_1 = y$，即

$$y = \frac{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 i_1}}{n\sqrt{1 - \sin^2 i_1}}$$

对上式求微分，可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}i_1} &= \frac{-\dfrac{n^2\sqrt{1-\sin^2 i_1}}{\sqrt{1-n^2\sin^2 i_1}} + \dfrac{\sqrt{1-n^2\sin^2 i_1}}{\sqrt{1-\sin^2 i_1}}}{n(1-\sin^2 i_1)}\sin i_1\cos i_1 \\ &= \frac{-n^2(1-\sin^2 i_1) + (1-n^2\sin^2 i_1)}{n(1-\sin^2 i_1)\sqrt{1-n^2\sin^2 i_1}\sqrt{1-\sin^2 i_1}}\sin i_1\cos i_1 \\ &= -\frac{(n^2 + 2n^2\sin^2 i_1 - 1)\sin i_1\cos i_1}{n(1-\sin^2 i_1)\sqrt{1-n^2\sin^2 i_1}\sqrt{1-\sin^2 i_1}} < 0\end{aligned}$$

说明当入射角 i_1 增大时，t_S 也将增大，导致 T_S 也增大。于是，只要入射角大于给定的值，就可以保证 $T_S > 1$。

用上面类似的方法，可以得到 P 分量 $T_P = 1$ 的条件为

$$\sin i_1 = \sqrt{\frac{4n - 4\sqrt{n} + 1 - n^2}{4n - 4\sqrt{n} + 1 - n^4}} \tag{3}$$

式(3)只要 $n > 1$ 就成立。同样，入射角大于给定的值，就可以保证 $T_P > 1$。

【例 6.4】 欲使一平面偏振光的振动面旋转 90°，若只用两块理想的偏振片，怎样做到这一点？如果用两块理想偏振片使平面偏振光的振动面旋转了 90°，最大的光强为原来的多少倍？

解 如图 6.11 所示，使第二偏振片的透振方向与平面偏振光的振动方向保持垂直，并且第一片的透振方向与平面偏振光的振动方向不垂直即可。

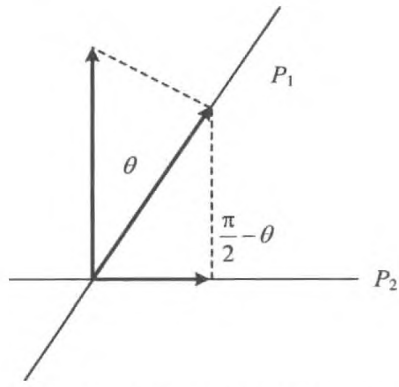


图 6.11　利用偏振片使电矢量转过一个角度

如果第一片与平面偏振光的振动方向夹角为 θ，则由马吕斯定律，可得

$$I = I_0\cos^2\theta\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{4}I_0\sin^2 2\theta \overset{\theta=\pi/4}{=} \frac{1}{4}I_0$$

【例 6.5】 假定在两个固定的正交理想偏振片之间插入第三个理想偏振片，且其透

振方向以角速度 ω 旋转，试证明透射的光强满足关系式

$$I = \frac{1}{8} I_0 (1 - \cos 4\omega t)$$

证明 如图 6.12 所示，当第三个偏振片 P 与第一个偏振片 P_1 的透振方向间夹角为 $\theta = \omega t$ 时，P，P_2 之间的夹角为 $\frac{\pi}{2} - \theta$，于是可得从 P_2 透射的光强为

$$I = I_0 \cos^2 \omega t \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \omega t \right) = \frac{1}{4} I_0 \sin^2 2\omega t = \frac{1}{8} I_0 (1 - \cos 4\omega t)$$

【例 6.6】 如图 6.13 所示为一全反射棱镜，$n_2 = 1.6$，空气折射率 $n_1 = 1$，计算由于反射而损失的能量。

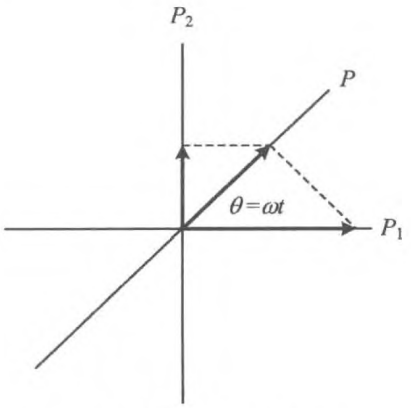


图 6.12 偏振片转动

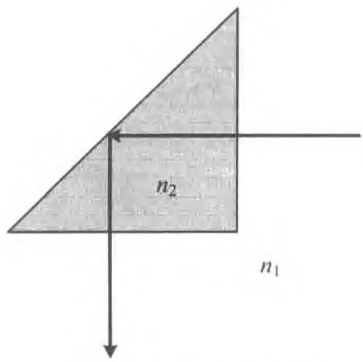


图 6.13 全反射棱镜

分析 在棱镜的两个直角边处，由于反射，会使入射光损失部分能量，利用菲涅耳公式求解本题。

解 在界面处入射，由于是垂直入射，$i_1 = i_2 = 0$。入射光为自然光，P，S 分量的强度相等，于是能流的透过率为

$$T_1 = \frac{w_1}{w_0} = \frac{I_1}{I_0} \cdot \frac{\cos^2 i_2}{\cos^2 i_1} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \left(\frac{A_{1P}^2 + A_{1S}^2}{A_{0P}^2 + A_{0S}^2} \right) = \frac{n_2}{n_1} t^2 = \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right)^2$$

$$= \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = \frac{4 \times 1.6}{(1 + 1.6)^2} = 0.946\,7$$

在斜面处，由于全反射，无能量损失。

在出射界面处，能流透射率为

$$T_2 = \frac{w_2}{w_1} = \frac{I_2}{I_1} \frac{\cos^2 i_2}{\cos^2 i_1} = \frac{n_1}{n_2} \left(\frac{A_{2P}^2 + A_{2S}^2}{A_{1P}^2 + A_{1S}^2} \right) = \frac{n_1}{n_2} t'^2 = \frac{n_1}{n_2} \left(\frac{2n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

$$= \frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2} = \frac{4\times 1.6}{(1+1.6)^2} = 0.946\,7$$

总透射率为

$$T = T_1T_2 = 0.946\,7^2 = 0.896\,3$$

能量损失

$$1 - 0.896\,3 = 0.103\,7 = 10.37\%$$

【例 6.7】 振动面平行和垂直于入射面的平面偏振光分别以 45°角入射到折射率为 1.52 的平行平面玻璃片上，经折射后透射的光强变为原来的多少？

解 振动面平行于入射面的平面偏振光就是 P 分量；振动面垂直于入射面的平面偏振光就是 S 分量。如图 6.14 所示，应用菲涅耳公式，得到

$$\frac{E_{S2}}{E_{S1}} = \frac{2n_1\cos i_1}{n_1\cos i_1 + n_2\cos i_2} = \frac{2\sin i_2\cos i_1}{\sin(i_1+i_2)}$$

$$\frac{E_{P2}}{E_{P1}} = \frac{2n_1\cos i_1}{n_2\cos i_1 + n_1\cos i_2} = \frac{2\sin i_2\cos i_1}{\sin(i_1+i_2)\cos(i_1-i_2)}$$

$$\frac{I}{I_0} = T_1T_2$$

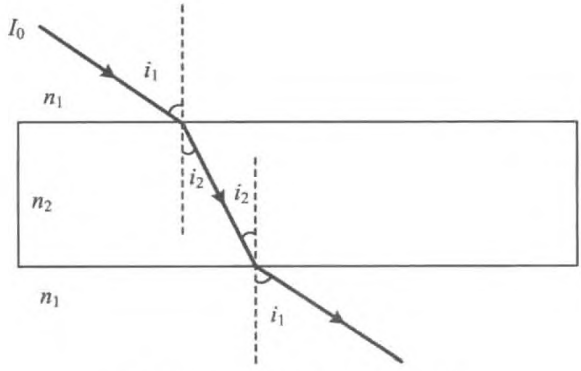


图 6.14　经过玻璃平板的透射光

而

$$T_{1S}T_{2S} = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{E_{S1}}{E_{S0}}\right)^2 \cdot \frac{n_1}{n_2}\left(\frac{E_{S2}}{E_{S1}}\right)^2 = \left[\frac{2\sin i_2\cos i_1}{\sin(i_1+i_2)} \cdot \frac{2\sin i_1\cos i_2}{\sin(i_1+i_2)}\right]^2$$

$$= \left[\frac{\sin 2i_1\sin 2i_2}{2\sin^2(i_1+i_2)}\right]^2$$

$$T_{1P}T_{2P} = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{E_{P1}}{E_{P0}}\right)^2 \cdot \frac{n_1}{n_2}\left(\frac{E_{P2}}{E_{P1}}\right)^2$$

$$= \left[\frac{2\sin i_2\cos i_1}{\sin(i_1+i_2)\cos(i_1-i_2)} \cdot \frac{2\sin i_1\cos i_2}{\sin(i_1+i_2)\cos(i_2-i_1)}\right]^2$$

$$= \left[\frac{\sin 2i_1 \sin 2i_2}{2\sin^2(i_1+i_2)\cos^2(i_1-i_2)}\right]^2$$

$$i_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$n_2 = 1.52$$

$$\sin i_2 = \frac{1}{n_2}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1.53} = 0.462\,2$$

$$\cos i_2 = 0.885\,2$$

可得，S 分量透过率为 81.59%，P 分量透过率为 98.14%。

可见两正交分量的透射光强并不相等。

【例 6.8】 要使入射到玻璃(折射率为 1.5)表面上的自然光的反射光为平面偏振光，入射角为多大？该角度是否与波长有关？折射光的偏振度是多大？

解 由布儒斯特定律，可以算得此时的布儒斯特角为

$$i_B = \arctan\left(\frac{n}{n_a}\right) = \arctan\left(\frac{1.5}{1}\right) = 56.31^\circ$$

因为光的色散，该角度与波长有关，即对于同一介质，不同波长的光有不同的布儒斯特角。

此时折射光为部分偏振光，其振幅为

$$(A_{P_2})^{(1)} = A_{P_1}\frac{2\sin^2 i_2}{\sin 2i_2} = A_{P_1}\tan i_2$$

$$(A_{S_2})^{(1)} = A_{S_1}\cdot 2\sin^2 i_2$$

光强为

$$(I_{P_2})^{(1)} = \frac{n_1}{n_2}\cdot\frac{I_0}{2}\cdot\tan^2 i_2$$

$$(I_{S_2})^{(1)} = \frac{n_1}{n_2}\cdot\frac{I_0}{2}\cdot 4\sin^4 i_2$$

按偏振度的定义

$$P = \frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}} = \frac{\tan^2 i_2 - 4\sin^4 i_2}{\tan^2 i_2 + 4\sin^4 i_2} = \frac{1-4\sin^2 i_2\cos^2 i_2}{1+4\sin^2 i_2\cos^2 i_2}$$

$$= \frac{1-4\sin^2 i_B\cos^2 i_B}{1+4\sin^2 i_B\cos^2 i_B}$$

而

$$\sin^2 i_B = \frac{\tan^2 i_B}{1+\tan^2 i_B} = \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}{1+\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} = \frac{n_2^2}{n_1^2+n_2^2}$$

$$\cos^2 i_B = \frac{n_1^2}{n_1^2+n_2^2}$$

于是

$$P = \frac{1-\frac{4n_2^2n_1^2}{(n_1^2+n_2^2)^2}}{1+\frac{4n_2^2n_1^2}{(n_1^2+n_2^2)^2}} = \frac{(n_1^2-n_2^2)^2}{n_1^4+6n_2^2n_1^2+n_2^4} = \frac{(1-1.5^2)^2}{1+6\times1.5^2+1.5^4} = 0.079\,87$$

【例 6.9】 一束平面偏振光和自然光混合，使其通过一理想偏振片，发现在偏振片旋转的过程中，出射光强可以变化 5 倍。求：

(1) 混合光中两种成分的百分比；

(2) 如果偏振片从出射光强极大的位置转过 60°，则出射光强将减小多少？

分析 本题要用到马吕斯定律求解，将入射光的振幅沿着偏振片的透振方向分解，而光强与振幅的平方成正比。

解 (1) 设混合光中平面偏振光的光强为 I_1，自然光的光强为 I_2。则透过偏振片时，最大的光强为

$$I_{max} = I_1 + \frac{1}{2}I_2$$

最小光强为

$$I_{min} = \frac{1}{2}I_2$$

由题中所给条件

$$\frac{I_{max}}{I_{min}} = \frac{I_1+\frac{1}{2}I_2}{\frac{1}{2}I_2} = 5$$

即可得到

$$I_1 = 2I_2$$

即平面偏振光占 66.7%，而自然光占 33.3%。

(2) 透射的最大光强为

$$I_{max} = I_1 + \frac{1}{2}I_2 = \frac{5}{2}I_2$$

偏振片从光强极大处转过 θ 角，透过的平面偏振光强度变为

$$I_1' = I_1 \cos^2\theta$$

透过的总光强为

$$I' = I_1 \cos^2\theta + \frac{1}{2}I_2 = \frac{1}{4}I_1 + \frac{1}{2}I_2 = I_2 = \frac{2}{5}I_{max}$$

减小到原来的 40%。

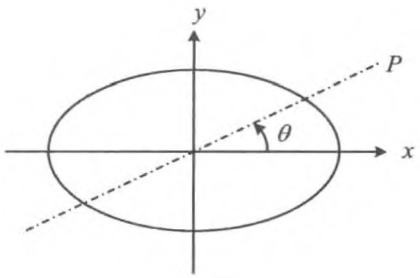


图 6.15 椭圆偏振光

【例 6.10】 一束椭圆偏振光通过一偏振片，透射光的强度将随着偏振片透振方向的转动而变化，若测得最大的透射光强和最小的透射光强分别为 I_{max} 和 I_{min}。问当透射方向与光强最大透射方向间夹角为 θ 时，透射光强为多少？

解 取坐标系，x 轴沿椭圆长轴方向，y 轴沿椭圆短轴方向，如图 6.15 所示，则上述椭圆偏振光可用分量表示为

$$\begin{cases} E_x = \sqrt{I_{max}}\cos\omega t \\ E_y = \sqrt{I_{min}}\cos\left(\omega t \pm \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

当透射方向与光强最大透射方向间夹角为 θ 时，透射光的振幅

$$E_\theta = E_x\cos\theta + E_y\sin\theta = \sqrt{I_{max}}\cos\theta\cos\omega t + \sqrt{I_{min}}\sin\theta\cos\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right)$$

这是两列相位差为 $\pm\frac{\pi}{2}$ 的平面偏振光的相干叠加，强度为

$$I_\theta = I_{max}\cos^2\theta + I_{min}\sin^2\theta$$

6.2 光在晶体中的双折射

6.2.1 双折射现象与双折射晶体

晶体的结构是各向异性的，因而其光学性质也与晶体内部的方向有关。一束光入射到晶体中分为两束，这就是晶体的双折射现象。能够产生双折射的晶体被称作双折射晶体。

在双折射晶体中，其中一束光遵循折射定律，传播特性与在各向同性介质中相同，因而将这束光称为寻常光，简称为o光；而另一束光则不遵循折射定律，例如，入射角为零时，在晶体中的折射角并不为零，在某些情况下甚至会出现折射角为负值的特例，因而将这束光称为非常光，简称为e光。o光和e光都是平面偏振光。

所谓的o光、e光都是针对在晶体中的光而言，离开晶体之后，则两束光无所谓“寻常”、“不寻常”，所以对从晶体出射的光不再以o光、e光作为称谓。

6.2.2　双折射晶体的特征

1. 晶体的光轴

在双折射晶体中有一个特殊的方向，光沿此方向入射时不发生双折射，这个方向就被称作晶体的光轴。

按光轴可以将具有双折射特性的晶体分为单轴晶体（方解石晶体、石英、红宝石、冰等）、双轴晶体（云母、蓝宝石、橄榄石、硫黄等）。

2. 晶体的主截面

晶体某一表面的法线与晶体光轴所构成的平面，就是晶体的主截面。同样由晶体的平移对称性可知，每一个表面实际上有一个主截面族。

3. 主平面

晶体中的光线与晶体的光轴所构成的平面就是光在晶体中的主平面。

在晶体中，由于双折射而产生了o光和e光，而o光和e光往往是分开的，因而，o光与光轴构成的平面就是o光主平面；e光与光轴构成的平面就是e光主平面。

实验研究表明，o光、e光具有如下特征：

o光：电矢量的振动方向垂直于其主平面。因而o光的电矢量垂直于光轴。

e光：电矢量的振动方向平行于其主平面。因而e光的电矢量在e光主平面内。

一般情况下，光以任意的角度射入晶体，则入射面（即入射光线与晶体表面法线构成的平面）、主截面、o光主平面、e光主平面是不重合的。

6.2.3　单轴晶体中光的波面

o光的波面是球面，e光的波面是旋转椭球面。如图6.16和图6.17所示。

由于o光、e光沿着光轴方向传播时具有相同的速度 v_2，因而它们在同一时刻的波面在光轴处总是相切的。在与光轴垂直的方向传播时，o光、e光的速度取决于o光、e光在晶体中的折射率。如果o光的折射率大于e光的折射率，那么e光的速度 v_1 就大于o

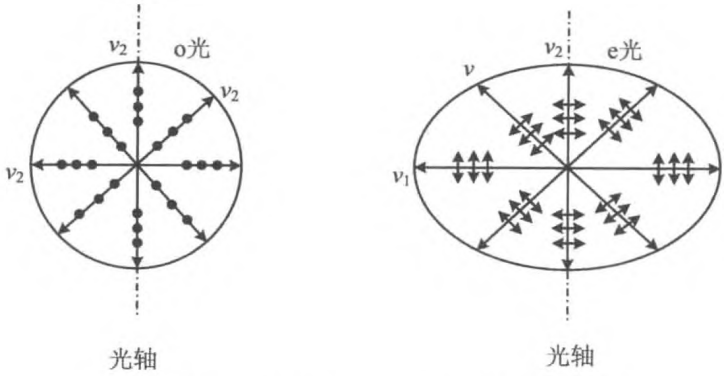


图 6.16 单轴晶体中 o 光、e 光电矢量的方向

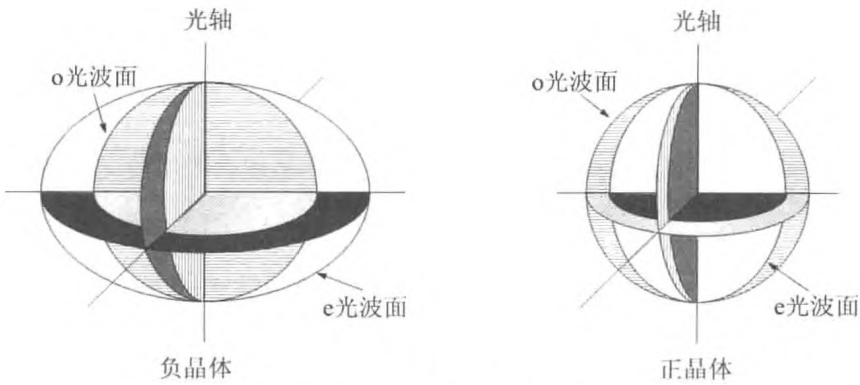


图 6.17 单轴晶体中 o 光、e 光的波面

光的速度 v_2，则球面被包裹于椭球面内，这样的晶体被称作负晶体；反之，如果 o 光的折射率小于 e 光的折射率，那么 e 光的速度 v_1 就小于 o 光的速度 v_2，则椭球面被包裹在球面内，这样的晶体被称作正晶体，如图 6.18 所示。

由于 e 光在不同方向传播速度不同，其折射率也不同。当 e 光沿着与光轴垂直的方向传播时，将 e 光的折射率定义为主折射率，若记 e 光沿着与光轴垂直方向传播的速度为 v_e，则其主折射率为

$$n_e = \frac{c}{v_e}$$

o 光的折射率与方向无关，为

$$n_o = \frac{c}{v_o}$$

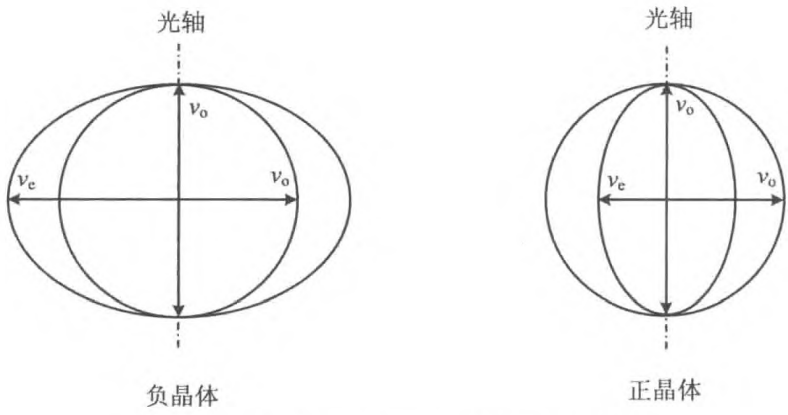


图 6.18　单轴晶体中 o 光、e 光沿不同方向的速度

6.2.4　晶体光学器件

可用双折射晶体制成偏振棱镜和波晶片。

1. 偏振棱镜

在双折射晶体中，o 光和 e 光都是平面偏振光，若使这两列光从晶体出射时能够分开，则可获得平面偏振光。这样的晶体光学器件就是偏振棱镜。自然光经过偏振棱镜，成为沿特定方向振动的平面偏振光。

常用的偏振棱镜有尼科耳棱镜、渥拉斯顿棱镜、洛匈棱镜、格兰—汤普森棱镜等等。

2. 波晶片

若晶体的光轴与其表面平行，平行光正如射到晶体中，这种情形下，在晶体中由于双折射而产生的 o 光和 e 光沿着相同的方向传播，但由于 o 光和 e 光的折射率不同，经历的光程也不同。一列偏振光从波晶片出射后，成为两列同方向传播的、振动方向相互垂直的平面偏振光，这两列光之间由于有特定的相位差，合成后，就成为一列具有特定偏振特性的光。

常用的波晶片有半波片(也称二分之一)和四分之一波片。

半波片满足条件

$$(n_o - n_e)d = m\lambda \pm \frac{\lambda}{2}$$

经过这样的波片后，振动方向正交的光波之间会有 $\pm\pi$ 的额外相位差。半波片通常记作 $\frac{\lambda}{2}$ 片。

四分之一波片满足条件

$$(n_o - n_e)d = m\lambda \pm \frac{\lambda}{4}$$

经过这样的波片后，振动方向正交的光波之间会有 $\pm\frac{\pi}{2}$ 的额外相位差。事实上，当波片满足

$$(n_o - n_e)d = \frac{m}{2}\lambda \pm \frac{\lambda}{4}$$

时，也有相同的效果。四分之一波片通常记作 $\frac{\lambda}{4}$ 片。

波片中，e 光的振动方向沿晶体光轴的方向，o 光的振动方向垂直于晶体光轴的方向。所以，通常将波片中 e 光的振动方向称作 e 轴，o 光的振动方向称作 o 轴。

波片中传播速度快的光波的振动方向称作晶体的快轴，传播速度慢的光波的振动方向称作晶体的慢轴。由于方解石是负晶体，其中 e 光的折射率小于 o 光的折射率，对于方解石晶体制成的波片而言，e 轴是快轴，o 轴是慢轴；石英是正晶体，其中 e 光的折射率大于 o 光的折射率，对于石英晶体制成的波片而言，e 轴是慢轴，o 轴是快轴。

6.2.5 典型问题与基本解题方法

【例 6.11】 使平面偏振光通过一石英薄片来产生一束左旋的椭圆偏振光，要使椭圆的长轴或短轴在其光轴方向，且长、短轴的比值为 1∶2，石英片如何放置？厚度是多少（已知对于 $\lambda = 589.3$ nm 的光波，石英的 $n_o = 1.544\,2$，$n_e = 1.553\,3$）？

解 如图 6.19 所示，取晶体光轴沿 x 方向，则椭圆偏振光的两个分量，也就是平面偏振光在晶体中所分解得到的 e 光和 o 光分别是

$$\begin{cases} E_x = A_x\cos\omega t \\ E_y = A_y\cos(\omega t - \Delta\varphi) \end{cases}$$

设入射平面偏振光与晶体光轴的夹角为 α，按题中所提要求，应当使椭圆的长轴或短轴在其光轴方向，以下分别讨论。

如果短轴在光轴方向，则

$$\tan\alpha = \frac{A_x}{A_y} = \frac{1}{2}$$

可算得 $\alpha = 63.4^\circ$。

石英为正晶体，如果此时 o 光的相位相对滞后 $\pi/2$，或超前 $3\pi/2$，则为左旋椭圆偏振光，光轴沿 x 方向，y 为快轴，光程差为

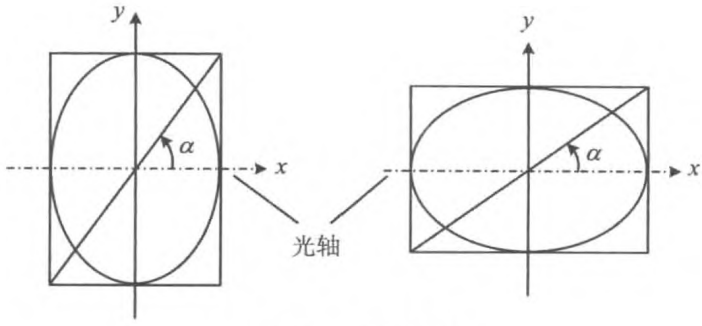


图 6.19　正交分量

$$\Delta L = d\Delta n = d(n_e - n_o) = j\lambda - \frac{3\lambda}{4}$$

即

$$d = \frac{j\lambda - \frac{3\lambda}{4}}{n_e - n_o} = \frac{j\lambda - \frac{3\lambda}{4}}{1.553\,3 - 1.544\,2} = \frac{j\lambda - \frac{3\lambda}{4}}{0.009\,1}$$

如果椭圆的长轴在光轴方向，x 为快轴，则

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - 63.4^\circ = 26.4^\circ$$

【例 6.12】 右旋椭圆偏振光，长半轴为 a，短半轴为 b，垂直入射到方解石制成的 $\frac{\lambda}{4}$ 片上，设椭圆长轴与晶体光轴间的夹角为 θ，求当 $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 45^\circ$ 时，出射光的偏振态。

分析　本题是关于偏振光经过波片后偏振态改变的问题。求解这类问题，一般是将入射光的光矢量正交分解，即

$$\begin{cases} E_x = A_x \cos\omega t \\ E_y = A_y \cos(\omega t - \Delta\varphi) \end{cases}$$

如果将入射光的光矢量正交分解为沿着椭圆的长短轴方向的分量，则上式为

$$\begin{cases} E_x = A_x \cos\omega t \\ E_y = A_y \cos\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

当光射入波片时，再分别将上述两分量沿着晶体的 e 轴（即光轴）和 o 轴（垂直于光轴的方向）正交分解，得到 o 光和 e 光，然后考察上述两列光经过晶体后的相位差和振幅，即可判断出射光的偏振态。

在判断相位差时，要注意波片是正晶体还是负晶体，从而确定到底是 o 光的相位超

前还是 e 光的相位超前，由此确定相位差的正负。

解 (1) 建立坐标系，使 x 轴沿椭圆长轴方向，y 轴沿椭圆短轴方向，则上述右旋椭圆偏振光可用分量表示为

$$\begin{cases} E_x = a\cos\omega t \\ E_y = b\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

由于 $\theta = 0^\circ$，则在晶体中，e 光即为 x 分量，o 光即为 y 分量。

方解石是负晶体，e 轴是快轴，o 轴是慢轴，即 o 光的相位比 e 光的相位滞后。于是经过上述 $\frac{\lambda}{4}$ 片后，两分量为

$$\begin{cases} E'_x = a\cos\omega t \\ E'_y = b\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right) = b\cos\omega t \end{cases}$$

为一、三象限的平面偏振光，电矢量的振动平面与 x 轴夹角为

$$\alpha = \arctan\frac{b}{a}$$

(2) $\theta = 90^\circ$，则在晶体中，e 光即为 y 分量，o 光即 x 为分量，即 y 分量的相位超前，是经过上述 $\frac{\lambda}{4}$ 片后，两分量为

$$\begin{cases} E'_x = a\cos\omega t \\ E'_y = b\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right) = b\cos(\omega t + \pi) \end{cases}$$

为二、四象限的平面偏振光，电矢量的振动平面与 x 轴夹角为

$$\alpha = \arctan\frac{b}{a}$$

(3) $\theta = 45^\circ$，如图 6.20 所示，可以将椭圆偏振光的两个分量进一步沿着 e 轴和 o 轴分解，于是得到

$$\begin{cases} E_e = E_x\cos\theta + E_y\sin\theta = a\cos\theta\cos\omega t + b\sin\theta\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ E_o = -E_x\sin\theta + E_y\cos\theta = -a\sin\theta\cos\omega t + b\cos\theta\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

整理即得

$$\begin{cases} E_e = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}\cos(\omega t + \delta) \\ E_o = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}\cos[\omega t - (\pi + \delta)] \end{cases}$$

其中，$\delta=\arctan\dfrac{b}{a}$，由于 $b<a$，则 $\delta<\dfrac{\pi}{4}$。

也可以改写为

$$\begin{cases} E_e=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\cos\omega t \\ E_o=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\cos[\omega t-(\pi+2\delta)] \end{cases}$$

由于 $\pi+2\delta$ 在第三象限，故出射光为右旋圆偏振光。

如果椭圆与晶体光轴的相对取向如图 6.21 所示，则出射光为左旋圆偏振光。

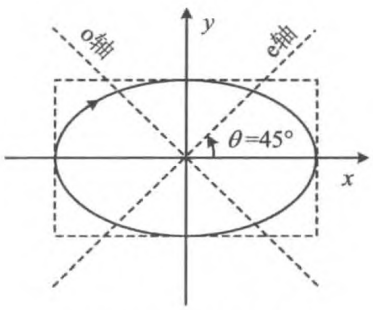


图 6.20　光轴的取向

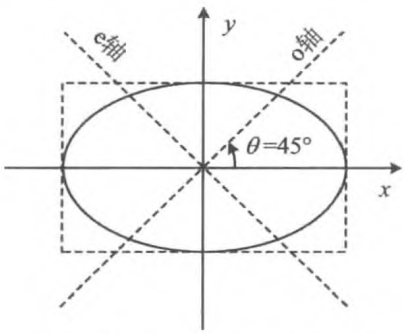


图 6.21　光轴的另一种取向

【例 6.13】 一束椭圆偏振光与自然光的混合光沿 z 轴方向传播，通过一偏振片。当偏振片的透振方向沿 x 轴时，透射光强度最大，为 $1.5I_0$；透振方向沿 y 轴时，透射光强度最小为 I_0。问：

(1) 当透振方向与 x 轴成 θ 角时，透射光强是多少？与入射光中的无偏振部分相关吗？

(2) 如果入射光先通过一个$\dfrac{\lambda}{4}$片，再通过偏振片，$\dfrac{\lambda}{4}$片的光轴沿 x 轴，而偏振片的透振方向与 x 轴成 30°角时透射光强最大，求此最大光强值以及入射光中两成分的强度比例。

解　据题中所给条件可知椭圆的长轴沿 x 方向。

设自然光的光强为 I_1，而椭圆偏振光两正交分量的振幅分别为 A_x，A_y。

(1) 由于

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}I_1+A_x^2=1.5I_0 \\ \dfrac{1}{2}I_1+A_y^2=I_0 \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} A_x^2 = 1.5I_0 - \dfrac{1}{2}I_1 \\ A_y^2 = I_0 - \dfrac{1}{2}I_1 \end{cases}$$

若偏振片 P 的透振方向与 x 轴成 θ 角，透过光强

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \frac{1}{2}I_1 + A_x^2\cos^2\theta + A_y^2\sin^2\theta \\ &= \frac{1}{2}I_1 + \left(1.5I_0 - \frac{1}{2}I_1\right)\cos^2\theta + \left(I_0 - \frac{1}{2}I_1\right)\sin^2\theta \\ &= 1.5I_0\cos^2\theta + I_0\sin^2\theta = I_0(1 + 0.5\cos^2\theta) \end{aligned}$$

(2) 如图 6.22 所示，这时相对于波片的光轴，入射光是正椭圆偏振光。

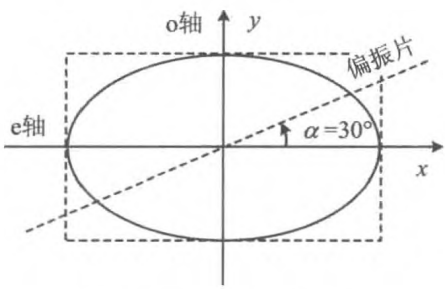


图 6.22 正椭圆偏振光

由于波片光轴沿椭偏光长轴，所以使椭圆偏振光变为线偏光。根据题中条件，此线偏光的振动方向与 x 轴成 30°。

于是可知入射的椭圆偏振光两正交分量的振幅的关系为 $A_x^2 = 3A_y^2$。根据(1)的结果

$$\begin{cases} A_x^2 = 1.5I_0 - \dfrac{1}{2}I_1 \\ A_y^2 = I_0 - \dfrac{1}{2}I_1 \\ A_x^2 = 3A_y^2 \end{cases}$$

解得 $A_y^2 = 0.25I_0$，$A_x^2 = 0.75I_0$，$I_1 = 1.5I_0$。

注意到椭圆偏振光经 1/4 波片后成为线偏光，但光强不变，从而得到此时的最大出射光强为

$$I_{\max} = \frac{1}{2}I_1 + A_x^2 + A_y^2 = \frac{7}{4}I_0$$

入射光中椭圆偏振光的光强为

$$I = A_x^2 + A_y^2 = I_0$$

自然光的光强为

$$I_1 = 1.5I_0$$

所以，自然光与椭偏光的光强比为 1.5∶1。

【例 6.14】 一束钠黄光掠入射到冰的晶体平板上，其光轴与入射面垂直，平板厚度为 6.2 mm，求 o 光与 e 光射到平板对面上两点的间隔(已知对于钠黄光，冰的折射率分

别为 $n_o = 1.309\,0$，$n_e = 1.310\,4$）。

解　按惠更斯作图法，得到光在晶体中的双折射情形如图 6.23 所示，其中标出了晶体中 o 光、e 光的方向。

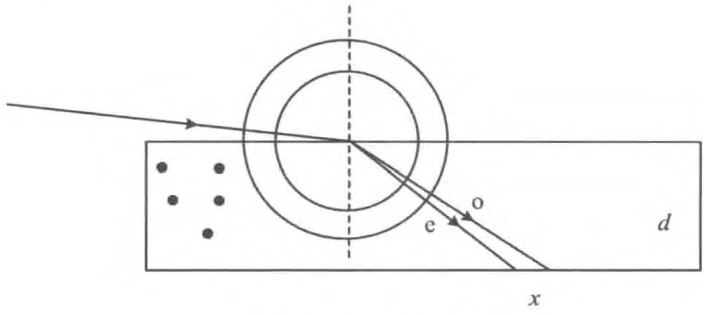


图 6.23　光的双折射

于是可以算得 o 光与 e 光射到平板对面上两点的间隔

$$x = d(\tan i_o - \tan i_e) = d\left(\frac{1}{\sqrt{n_o^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{n_e^2 - 1}}\right) = 1.27 \times 10^{-2}\ (\text{mm})$$

【例 6.15】　钠黄光以 50°角入射到方解石制成的波片上。对于钠黄光（波长为 589.0 nm）方解石的折射率为 $n_o = 1.658$，$n_e = 1.486$。若其光轴垂直于入射面、且平行于晶片表面，求两束光在晶体内的夹角。若晶片厚 1 mm，求出射后两束光间的垂直距离是多少？

分析　同例 6.14 类似，本例要求用惠更斯作图法绘出晶体中发生双折射时 o 光、e 光的方向，再利用几何关系计算。

解　如图 6.24 所示，为在晶体中发生双折射后所分成的两列光的路径。

对于 o 光，$n_o \sin i_o = \sin 50^\circ$，可得

$$i_o = \arcsin\left(\frac{\sin 50^\circ}{1.658}\right) = 27.52^\circ$$

对于 e 光，$n_e \sin i_e = \sin 50^\circ$，可得

$$i_e = \arcsin\left(\frac{\sin 50^\circ}{1.486}\right) = 31.12^\circ$$

则晶体中两光间夹角

$$\Delta i = i_e - i_o = 3.6^\circ$$

射出后光线间隔

$$\Delta s = \overline{OE}\cos 50^\circ = d(\tan i_e - \tan i_o)\cos 50^\circ$$
$$= 1 \times (\tan 31.12^\circ - \tan 27.52^\circ)\cos 50^\circ = 0.053\,2\ (\text{mm})$$

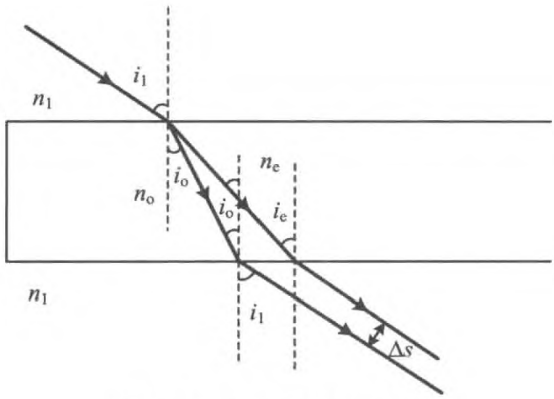


图 6.24 晶体平板的双折射

【例 6.16】 如图 6.25 所示，一束光从方解石三棱镜的左边入射，晶体的光轴可以有 x，y，z 三种取向，分析每一种情况下出射光束的偏振特征以及如何测定 n_o，n_e。

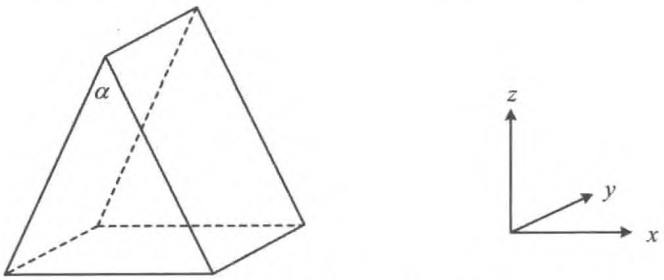


图 6.25 方解石三棱镜

解 方解石是负晶体，e 轴为快轴。

(1) 若光轴沿 x 方向，双折射情况如图 6.26 所示。

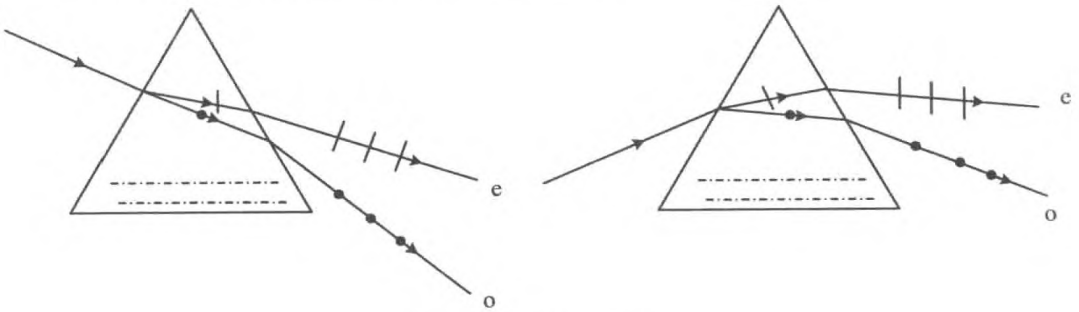


图 6.26 光轴沿 x 方向

(2) 光轴沿 y 轴，双折射情况如图 6.27 所示。

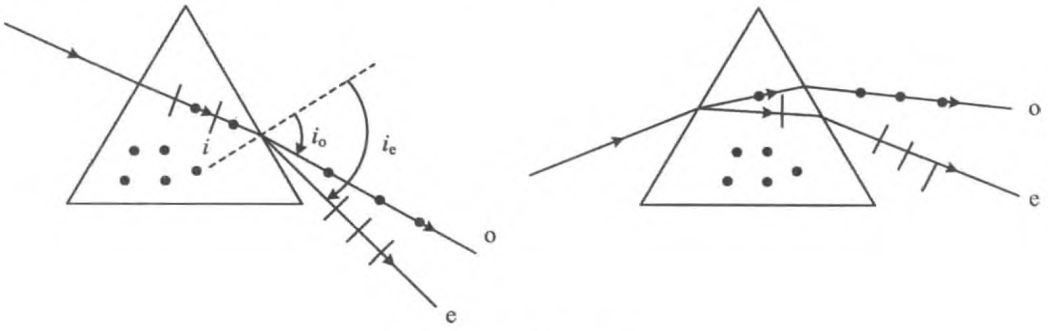


图 6.27　光轴沿 y 方向

(3) 光轴沿 z 轴，双折射情况如图 6.28 所示。

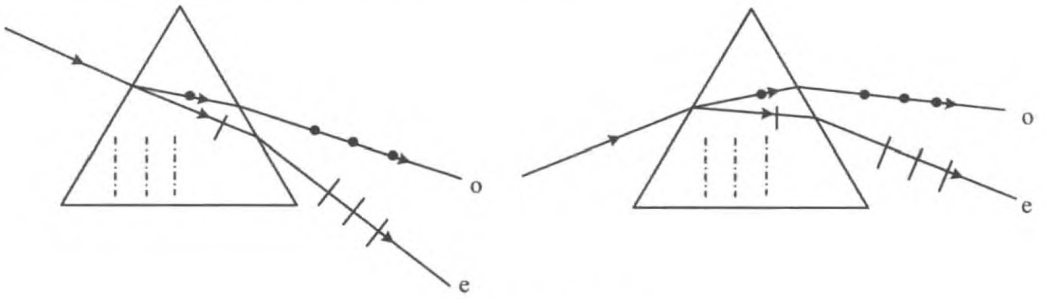


图 6.28　光轴沿 z 方向

可以选定特殊情况，即光轴垂直于入射面的情形，光轴沿 y 轴，来测得主折射率。

$$n_o = \frac{\sin i_o}{\sin i}, n_e = \frac{\sin i_e}{\sin i}$$

【例 6.17】 一棱镜由一个负晶体的直角三棱镜(光轴垂直于图面)和玻璃直角三棱镜(折射率为 n)组成。自然光垂直入射，讨论以下几种情况双折射光束的传播方向：

(1) $n = n_o$；

(2) $n = n_e$；

(3) $n > n_o$；

(4) $n_o > n > n_e$。

解　双折射情况如图 6.29 表示。

【例 6.18】 一水晶棱镜的顶角为 60°，光轴与棱镜的截面垂直，钠黄光以最小偏向角的方向入射，用焦距为 1 m 的透镜聚焦，o 光和 e 光两谱线的间隔是多少？

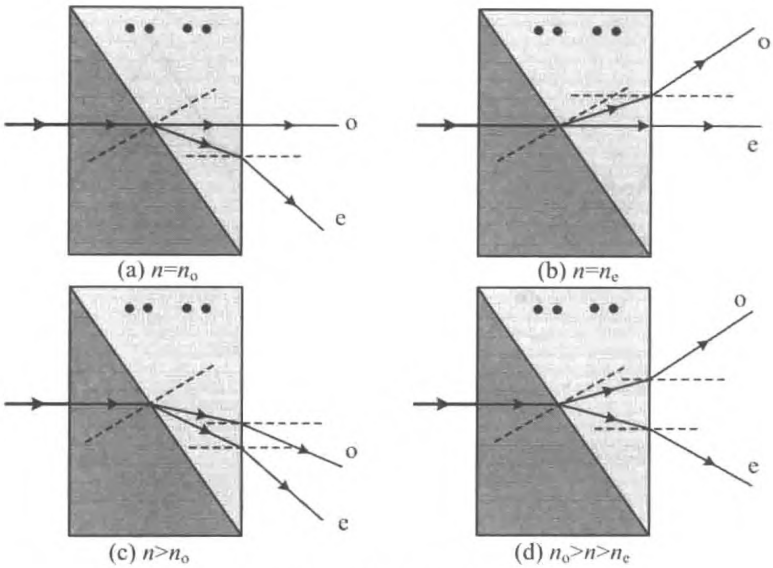


图 6.29 各种双折射情况

解 根据最小偏向角原则，晶体中 o 光的折射角为 30°，设其入射角射为 α，如图 6.30 所示，则

$$\sin\alpha = n_o \sin 30^\circ = 1.544\,25 \times 0.5 = 0.772\,13$$

即

$$\alpha = 50.545^\circ$$

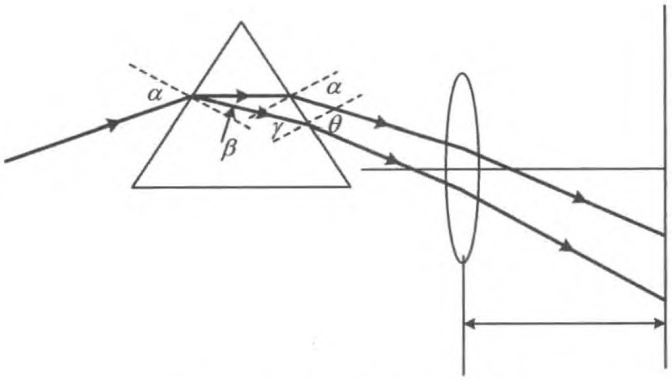


图 6.30 光经水晶棱镜的双折射

由此，e 光在晶体入射面一侧的折射角 β 满足

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n_e} = 0.497\,07$$

即 $\beta = 29.806^\circ$。

e 光在另一侧面的入射角为

$$\gamma = 60^\circ - \beta = 30.194^\circ$$

折射角

$$\sin\theta = n_e \sin\gamma = 1.553\,36 \times \sin 30.194^\circ = 0.181\,22$$

即 $\theta = 51.373^\circ$。

在透镜的焦平面上束光的间隔为

$$\Delta = f(\theta - \alpha) = 1 \times (51.373 - 50.545) \times \frac{\pi}{180} = 0.014\,1\ (\text{m}) = 14.01\ (\text{mm})$$

【例 6.19】 假设构成渥拉斯顿棱镜的直角三棱镜的顶角为 $\alpha = 30^\circ$，计算两出射光的相对强度和相对能流。

解　如图 6.31 所示，进入左侧棱镜后，分为 o 光和 e 光，方向相同。在第一棱镜内部，P 分量是 e 光，S 分量是 o 光，于是按照菲涅耳公式，可得

$$I_{1o} = \frac{n_o}{n}\left(\frac{2n}{n_o + n}\right)^2 \cdot \frac{I}{2} = 0.47I$$

$$I_{1e} = \frac{n_e}{n}\left(\frac{2n}{n_e + n}\right)^2 \cdot \frac{I}{2} = 0.48I$$

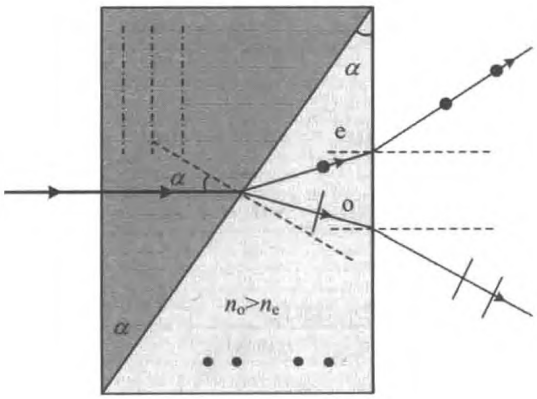


图 6.31　渥拉斯顿棱镜

式中，n 为空气的折射率，有

$$W_{1S} : W_{1P} = W_{1o} : W_{1e} = I_{1o} : I_{1e}$$

在晶体内部的界面处发生折射，注意，同一列光在界面两侧的折射率不同，即左侧的

e 光进入右侧变为 o 光，于是

$$\begin{cases} \sin i_{2e} = \dfrac{n_o}{n_e}\sin i_1 \\ \sin i_{2o} = \dfrac{n_e}{n_o}\sin i_1 \end{cases}$$

可以算得

$$\begin{cases} i_{2e} = \arcsin\left(\dfrac{n_o}{n_e}\sin i_1\right) = 33.9^\circ \\ i_{2o} = \arcsin\left(\dfrac{n_e}{n_o}\sin i_1\right) = 26.6^\circ \end{cases}$$

在晶体内部界面右侧，即进入第二块棱镜后，P 分量是 o 光，S 分量是 e 光，于是根据菲涅耳公式，可得

$$I_{2o} = I_{1e} \cdot \frac{n_o}{n_e}\left(\frac{2n_o\cos i}{n_e\cos i + n_o\cos i_{2o}}\right)^2 = 0.464\,3I$$

$$I_{2e} = I_{1o} \cdot \frac{n_e}{n_o}\left(\frac{2n_o\cos i}{n_o\cos i + n_e\cos i_{2e}}\right)^2 = 0.487\,6I$$

$$W_{2S} : W_{2P} = W_{2e} : W_{2o} = \left(I_{2e}\frac{\cos i_{2e}}{\cos\alpha}\right) : I_{2e}\left(\frac{\cos i_{2e}}{\cos\alpha}\right)$$

在出射界面上，入射角

$$\begin{cases} i_{3e} = i_{2e} - \alpha = 3.9^\circ \\ i_{3o} = \alpha - i_{2o} = 3.4^\circ \end{cases}$$

折射角

$$\begin{cases} i_{4e} = \arcsin\left[\dfrac{n_e}{n}\sin(i_{2e} - \alpha)\right] = 5.8^\circ \\ i_{4o} = \arcsin\left[\dfrac{n_o}{n}\sin(\alpha - i_{2o})\right] = 5.6^\circ \end{cases}$$

光强

$$I_{3e} = I_{2e} \cdot \frac{n}{n_e}\left(\frac{2n_e\cos i_{3e}}{n_e\cos i_{3e} + n\cos i_{4e}}\right)^2 = 0.964I_{2e} = 0.47I$$

$$I_{3o} = I_{2o} \cdot \frac{n}{n_o}\left(\frac{2n_o\cos i_{3o}}{n_o\cos i_{3o} + n\cos i_{4o}}\right)^2 = 0.44I$$

$$I_S : I_P = 47 : 44 = 1.068$$

能流与光束的截面积有关，折射过程中光束面积的变化如图 6.32 所示，即

$$S_4 = S_3 \cdot \frac{\cos i_4}{\cos i_3} = S_2 \cdot \frac{\cos i_4}{\cos i_3} = S_1 \cdot \frac{\cos i_2}{\cos i_1} \cdot \frac{\cos i_4}{\cos i_3}$$

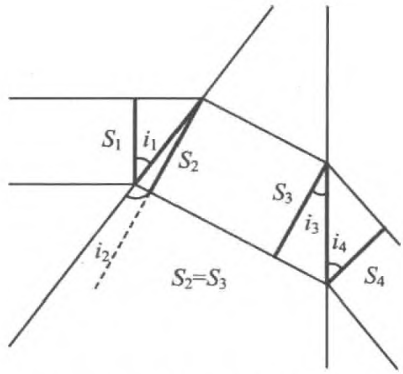


图 6.32　折射光束截面积的变换

而能流

$$W_S = I_S S_{4S} = I_{3e} S_{1o} \cdot \frac{\cos i_{2e}}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos i_{4e}}{\cos i_{3e}}$$

$$W_P = I_P S_{4P} = I_{3o} S_{1e} \cdot \frac{\cos i_{2o}}{\cos i_{\alpha}} \cdot \frac{\cos i_{4o}}{\cos i_{3o}}$$

$$W_S : W_P = \left(I_{3e} \cdot \frac{\cos i_{2e}}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos i_{4e}}{\cos i_{3e}} \right) : \left(I_{3o} \cdot \frac{\cos i_{2o}}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos i_{4o}}{\cos i_{3o}} \right) = 0.996$$

【例 6.20】 一束左旋圆偏光正入射到折射率为 1.5 的玻璃的表面，反射光是右旋的还是左旋的？

解　由于反射光有半波损失，即反射瞬间，两振动分量都反向，如图 6.33 所示。判断旋转方向总是逆着反射方向看，若入射光是左旋的，y 分量的相位比 x 分量的超前 $\frac{\pi}{2}$，

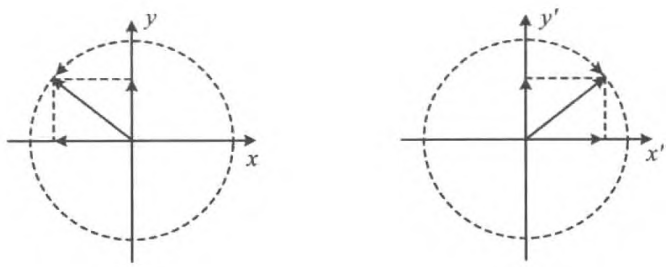


图 6.33　入射光与反射光电矢量的旋转方向

观察反射光时，依然是 y 分量的相位比 x 分量的超前 $\frac{\pi}{2}$，但由于 x 轴方向相反，相当于 y 分量比 x 分量超前 $\frac{2\pi}{3}$，则反射光是右旋的。

【例 6.21】 如图 6.34 所示，单色光源 S 置于透镜 L 的焦点处，P 为偏振器，K 为此单色光的 $\frac{\lambda}{4}$ 片，其快轴与偏振器的透振方向成 α 角，M 为平面反射镜。已知入射到偏振器的光强为 I_0，分析光束经过各个元件后的偏振态，计算返回 L 处的光强（不计反射、吸收的光强损失）。

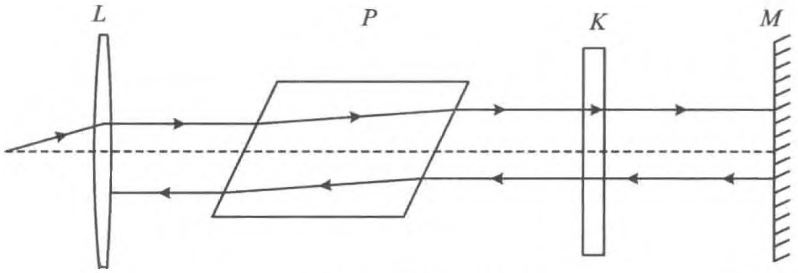


图 6.34 光学器件配置

解 经过透镜后成为平行光束，射向偏振器，经过偏振器后，成为线偏振光，经过波片后，成为椭圆偏振光。反射后，成为反向旋转的椭圆偏振光，再经波片，成为线偏振光。反射线偏振光的振动面相对于入射线偏振光转过 2α 角，如图 6.35 所示。入射光经偏振片后，光强为 $I_1 = \frac{1}{2} I_0$。经过波片、反射镜、波片，光强不变。反射回来的线偏振光射向偏振片，再经过偏振片后，光强为

$$I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 2\alpha$$

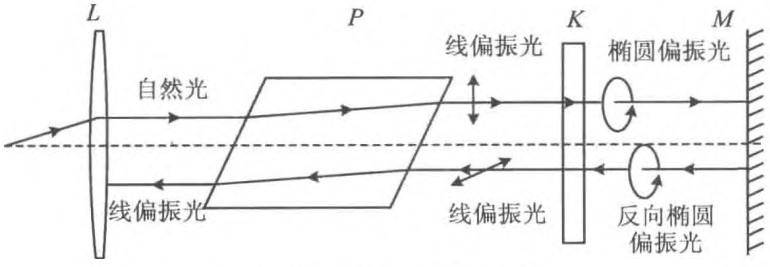


图 6.35 光的偏振态的变化

【例 6.22】 巴比涅补偿器由两个光轴相互垂直的劈形石英组成。现有一束极窄的线偏振光正入射，其偏振方向与 x 轴成 45°角，光束偏离补偿器的中心线 x，如图 6.36 所示。

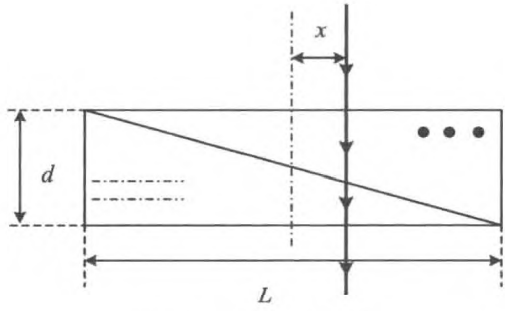


图 6.36　巴比涅补偿器

(1) 用 $n_o, n_e, \lambda, L, d, x$ 表示出射光束中 x, y 分量间的相对相移；

(2) x 取什么样的值时可以得到线偏振光或圆偏振光？

解　(1) 通过补偿器后，两列电矢量相互垂直的平面偏振光间的光程差为

$$\Delta L = (d_2 - d_1)(n_o - n_e)$$

而由图 6.36 可知，光在上下两个棱镜中传过的距离分别为

$$d_1 = \frac{\frac{L}{2} + x}{L} d$$

$$d_2 = \frac{\frac{L}{2} - x}{L} d$$

于是出射光束中 x, y 分量间的相对相移，即位相差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(d_2 - d_1)(n_o - n_e) = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)\frac{2xd}{L} \tag{1}$$

(2) 由式(1)，可得到

$$x = \frac{\lambda L}{2\pi(n_o - n_e)2d}\Delta\varphi$$

若要得到线偏振光，$\Delta\varphi = 0$，$x = 0$；或 $\Delta\varphi = \pi$，则

$$x = \frac{\lambda L}{2\pi(n_o - n_e)2d} j\pi = j\frac{\lambda L}{4\pi(n_o - n_e)d}$$

若要得到圆偏振光，$\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$，即

$$x = \frac{\lambda L}{2\pi(n_o - n_e)2d}\left(j\pi \pm \frac{\pi}{2}\right) = \left(j \pm \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda L}{4\pi(n_o - n_e)d}$$

【例 6.23】 用一块$\frac{\lambda}{4}$片和一块偏振片鉴定一束椭圆偏振光，达到消光位置后，$\frac{\lambda}{4}$的光轴与偏振片的透振方向相差 22°，求椭圆长短轴之比。

解 要想用一块$\frac{\lambda}{4}$片和一块偏振片鉴定一束椭圆偏振光并实现消光，应当使椭圆偏振光的长轴或短轴与$\frac{\lambda}{4}$片的光轴重合，此时，经过$\frac{\lambda}{4}$片后，才能得到平面偏振光，进而通过偏振片实现消光。如图 6.37 所示，从波片出射的线偏振光的振动方向与偏振片的透振方向垂直，容易得到

$$A_x : A_y = \cos\theta : \sin\theta = 1 : \tan 22^\circ = 2.48 : 1$$

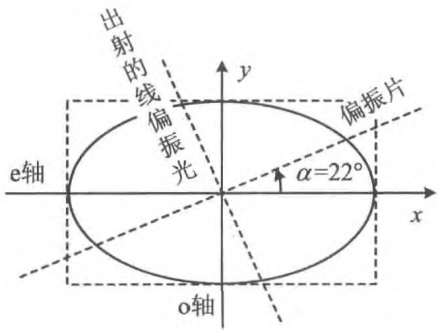


图 6.37 椭圆偏振光通过 1/4 波片成为线偏振光

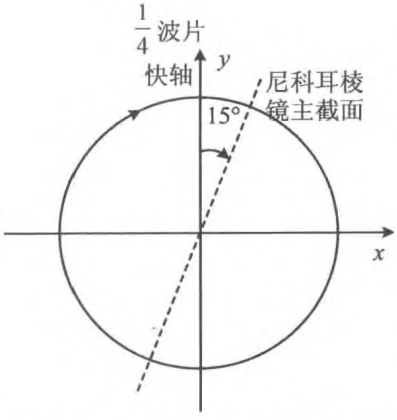


图 6.38 波片与偏振棱镜的取向

【例 6.24】 一强度为 I_0 的右旋圆偏振光垂直通过一$\frac{\lambda}{4}$片（快轴沿 y 轴），然后再经过一块主截面相对于$\frac{\lambda}{4}$片的快轴向右旋过 15°的尼科耳棱镜，求最后出射的光强。

解 在如图 6.38 所示坐标系中，右旋圆偏振光，y 向振动比 x 向超前 $\pi/2$。由于波片的快轴沿 y 轴，经过该波片后，y 向又有一个附加的超前位相 $\pi/2$，y 向相位超前 π，于是成为沿 Ⅱ，Ⅳ 象限对角线的线偏光。光强不变，依然是 I_0。

再经过尼科耳棱镜，透过的光强为

$$I = I_0 \cos^2(45^\circ - 15^\circ) = \frac{3I_0}{4}$$

【例 6.25】 右旋椭圆偏振光入射到方解石制成的$\frac{1}{4}$波片，椭圆的短轴与晶体的光轴夹角为 30°，且长短轴之比为$\sqrt{3}:1$。讨论从波片出射的光的偏振态。

解 如图 6.39 所示，在沿着椭圆长短轴建立的坐标系中 $x'Oy'$ 中，y'方向的电矢量相位超前$\frac{\pi}{2}$，且

$$K' = A'_x : A'_y = 1 : \sqrt{3}$$

$\alpha = 30^\circ$表示椭圆短轴与晶体光轴(快轴)之间的夹角。为了分析经过波片后椭圆偏振光两正交分量间的关系，可以将椭圆看做是沿着晶体快慢轴的两正交分量的叠加。设沿晶体的光轴建立坐标系为 xOy，在该坐标系中，椭圆的长轴在Ⅱ、Ⅳ象限。

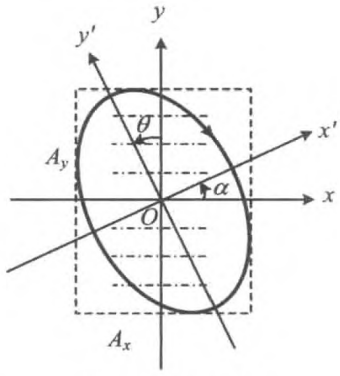


图 6.39　入射光

由于进入波片后，o 光、e 光分别沿 o 轴、e 轴方向振动，所以应当首先将光椭圆偏振光的表达式在 o 轴、e 轴的坐标系中写出来，即要进行一次坐标轴的旋转。

在图 6.39 的坐标系 xOy 中，椭圆偏振光的电矢量可正交分解为

$$\boldsymbol{E} = E_x \boldsymbol{e}_x + E_y \boldsymbol{e}_y = A_x \cos(kz - \omega t)\, \boldsymbol{e}_x + A_y \cos(kz - \omega t + \Delta\varphi)\, \boldsymbol{e}_y \tag{1}$$

即

$$\begin{cases} E_x = A_x \cos(kz - \omega t) \\ E_y = A_y \cos(kz - \omega t + \Delta\varphi) \end{cases} \tag{2}$$

上面两式中，$\Delta\varphi$ 表示 y 分量比 x 分量的相位滞后。

可以消去参量 $kz - \omega t$，而得到两正交分量 E_x，E_y 的方程。将上式化为

$$\begin{cases} \dfrac{E_x}{A_x} = \cos(kz - \omega t) \\ \dfrac{E_y}{A_y} = \cos(kz - \omega t)\cos\Delta\varphi - \sin(kz - \omega t)\sin\Delta\varphi \end{cases}$$

则得到

$$\begin{cases} \dfrac{E_x}{A_x} = \cos(kz - \omega t) \\ \dfrac{1}{\sin\Delta\varphi}\left[\cos(kz - \omega t)\cos\Delta\varphi - \dfrac{E_y}{A_y}\right] = \sin(kz - \omega t) \end{cases}$$

将第二式中的 $\cos(kz-\omega t)$ 以 $\frac{E_x}{A_x}$ 替换，再将两式平方之后相加，即可在上述方程中消去参量 $kz-\omega t$，有下式

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2+\left[\frac{1}{\sin\Delta\varphi}\left(\frac{E_x}{A_x}\cos\Delta\varphi-\frac{E_y}{A_y}\right)\right]^2=\cos^2(kz-\omega t)+\sin^2(kz-\omega t)=1$$

最后得到

$$\frac{E_x^2}{A_x^2}+\frac{E_y^2}{A_y^2}-\frac{2E_xE_y}{A_xA_y}\cos\Delta\varphi=\sin^2\Delta\varphi \tag{3}$$

这是一个 xOy 平面中的椭圆方程。上述公式中的电场分量 E_x，E_y 就是直角坐标系 E_xOE_y 中的坐标值。

如果 $\Delta\varphi=0$，或 $\Delta\varphi=\pi$，则由

$$\frac{E_x^2}{A_x^2}+\frac{E_y^2}{A_y^2}\pm\frac{2E_xE_y}{A_xA_y}=0$$

可得到

$$\frac{E_x}{E_y}=\pm\frac{A_x}{A_y}$$

这就是平面偏振光；如果 $\Delta\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$，同时 $A_x=A_y$，则得到

$$E_x^2+E_y^2=A^2$$

这就是圆偏振光；如果仅仅 $\Delta\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$，而不要求 $A_x=A_y$，则得到

$$\frac{E_x^2}{A_x^2}+\frac{E_y^2}{A_y^2}=1$$

这就是长、短轴分别沿 x，y 轴的椭圆偏振光，即所谓的“正椭圆”偏振光。

其实，可以将一般位置的椭圆变为长短轴沿坐标轴的正椭圆。下面对这一变换作简单的说明。

通过坐标系的旋转，将形如式(3)的椭圆方程

$$\frac{x^2}{A_x^2}+\frac{y^2}{A_y^2}-\frac{2xy}{A_xA_y}\cos\Delta\varphi=\sin^2\Delta\varphi$$

在新坐标系中转化为标准椭圆

$$\frac{x'^2}{A_x'^2}+\frac{y'^2}{A_y'^2}=1$$

设椭圆的长轴(或短轴)与原坐标系 x 轴间的夹角为 α，如图 6.39 所示，将坐标系 xOy 旋转 α 角，得到新的坐标系 $x'O'y'$。两坐标系之间的关系为

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

将上述坐标变换式代入原来坐标系中的椭圆方程

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - \frac{2xy}{A_xA_y}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi$$

整理后得到

$$x'^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{A_x^2} + \frac{\sin^2\alpha}{A_y^2} - \frac{\sin 2\alpha}{A_xA_y}\cos\Delta\varphi\right) + y'^2\left(\frac{\sin^2\alpha}{A_x^2} + \frac{\cos^2\alpha}{A_y^2} + \frac{\sin 2\alpha}{A_xA_y}\cos\Delta\varphi\right)$$
$$- 2x'y'\left[\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{A_x^2} - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{A_y^2} + \left(\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{A_xA_y}\right)\cos\Delta\varphi\right] = \sin^2\Delta\varphi$$

要在新坐标系中将椭圆化为标准形式，则要求

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{A_x^2} - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{A_y^2} + \left(\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{A_xA_y}\right)\cos\Delta\varphi = 0$$

整理，得到

$$(A_y^2 - A_x^2)\sin 2\alpha + 2A_xA_y\cos\Delta\varphi\cos 2\alpha = 0$$

即旋转的角度要满足下式

$$\tan 2\alpha = \left(\frac{2A_xA_y}{A_x^2 - A_y^2}\right)\cos\Delta\varphi \tag{4}$$

式中，α 就是椭圆的长轴或短轴与原坐标系 xOy 旋的坐标轴的夹角，通常用 α 表示椭圆长轴或短轴的取向。

而标准椭圆的方程为

$$\frac{x'^2}{\sin^2\Delta\varphi\left(\frac{\cos^2\alpha}{A_x^2} + \frac{\sin^2\alpha}{A_y^2} - \frac{\sin 2\alpha}{A_xA_y}\cos\Delta\varphi\right)^{-1}}$$
$$+ \frac{y'^2}{\sin^2\Delta\varphi\left(\frac{\sin^2\alpha}{A_x^2} + \frac{\cos^2\alpha}{A_y^2} + \frac{\sin 2\alpha}{A_xA_y}\cos\Delta\varphi\right)^{-1}} = 1$$

椭圆的半长轴和半短轴分别由下式确定

$$A_x'^2 = \frac{A_x^2A_y^2\sin^2\Delta\varphi}{A_x^2\sin^2\alpha - A_xA_y\sin 2\alpha\cos\Delta\varphi + A_y^2\cos^2\alpha} \tag{5}$$

$$A_y'^2 = \frac{A_x^2A_y^2\sin^2\Delta\varphi}{A_x^2\cos^2\alpha + A_xA_y\sin 2\alpha\cos\Delta\varphi + A_y^2\sin^2\alpha} \tag{6}$$

按照上述方式变换后，在新坐标系 $x'O'y'$ 中，椭圆的表达式成为

$$\frac{E_x'^2}{A_x'^2} + \frac{E_y'^2}{A_y'^2} = 1$$

如果将坐标系 xOy 旋转 30°，则可将椭圆化为正椭圆，根据椭圆变换的关系式(4)，可以得到

$$\tan 2\alpha = \frac{2A_xA_y\cos\Delta\varphi}{A_x^{\ 2}-A_y^{\ 2}} = \frac{2\cos\Delta\varphi}{\frac{A_x}{A_y}-\frac{A_y}{A_x}} = \frac{2\cos\Delta\varphi}{\frac{K-1}{K}} = \frac{2K\cos\Delta\varphi}{K^2-1} = \sqrt{3}$$

即

$$3K^2 - 2\sqrt{3}K\cos\Delta\varphi - 3 = 0 \tag{7}$$

再利用式(5)和式(6)，得到

$$A_x'^2 = \frac{A_x^2A_y^2\sin^2\Delta\varphi}{A_x^2\sin^2\alpha - A_xA_y\sin 2\alpha\cos\Delta\varphi + A_y^2\cos^2\alpha}$$

$$A_y'^2 = \frac{A_x^2A_y^2\sin^2\Delta\varphi}{A_x^2\cos^2\alpha + A_xA_y\sin 2\alpha\cos\Delta\varphi + A_y^2\sin^2\alpha}$$

则

$$\frac{A_y'^2}{A_x'^2} = \frac{\left(\frac{A_x^2}{A_y^2}\right)\sin^2\alpha - \left(\frac{A_x}{A_y}\right)\sin 2\alpha\cos\Delta\varphi + \cos^2\alpha}{\left(\frac{A_x^2}{A_y^2}\right)\cos^2\alpha + \left(\frac{A_x}{A_y}\right)\sin 2\alpha\cos\Delta\varphi + \sin^2\alpha}$$

$$= \frac{K^2 - 2\sqrt{3}K\cos\Delta\varphi + 3}{3K^2 + 2\sqrt{3}K\cos\Delta\varphi + 1} = 3$$

即

$$K^2 + \sqrt{3}K\cos\Delta\varphi = 0 \tag{8}$$

联立式(7)、式(8)，可得到

$$\begin{cases} K = \dfrac{A_x}{A_y} = \sqrt{\dfrac{3}{5}} \\ \cos\Delta\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \tag{9}$$

考虑到是右旋椭圆偏振光，$\Delta\varphi \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$。这就是在晶体光轴坐标系中椭圆偏振光两正交分量振幅的比值及相位差。

方解石的光轴是快轴，即图 6.39 中 y 为慢轴，经过波片后，两正交分量的相位差为 $\Delta\varphi' = \Delta\varphi + \frac{\pi}{2}$，由于 $\Delta\varphi \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$，所以 $\Delta\varphi' \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$，所以依然是右旋椭圆偏振光，长轴由原来的Ⅱ，Ⅳ象限变到Ⅰ，Ⅲ象限，长轴与光轴的夹角由下式决定

$$\tan 2\alpha' = \frac{2A_xA_y\cos\Delta\varphi'}{A_x^2 - A_y^2} = \frac{2K\cos\Delta\varphi'}{K^2-1} = \frac{-2K\sin\Delta\varphi}{K^2-1} = 2\sqrt{3}$$

即 $\alpha' = 33.7°$，而长短轴的比值变为

$$\frac{A''_y}{A''_x} = \sqrt{\frac{K^2 - 2\sqrt{3}K\cos\Delta\varphi' + 3}{3K^2 + 2\sqrt{3}K\cos\Delta\varphi' + 1}} = \sqrt{\frac{K^2 + 2\sqrt{3}K\sin\Delta\varphi + 3}{3K^2 - 2\sqrt{3}K\sin\Delta\varphi + 1}} = \frac{\sqrt{15}}{1}$$

结果如图 6.40 所示。

【例 6.26】 不同波长的光在方解石上的折射率不等，对于 $\lambda_1 = 404.6$ nm 的光，$n_{o1} = 1.681\,34$，$n_{e1} = 1.496\,94$；对于 $\lambda_2 = 706.5$ nm 的光，$n_{o2} = 1.644\,69$，$n_{e2} = 1.483\,59$。今取一个对 404.6 nm 光波的方解石 1/4 波片（o 光较 e 光的光程大），使波长为 706.5 nm 的左旋圆偏振光入射，试详细讨论出射光的偏振态，并指出其特征方向（即：若是平面偏振光，指出其偏振方向；若是圆偏振光或椭圆偏振光，指出其旋转方向）。

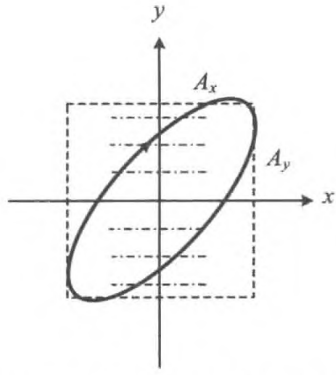


图 6.40　从波片出射的椭圆偏振光的形态

解　由于 $\lambda_1 = 404.6$ nm，$\Delta n_1 = n_o - n_e = 0.184\,4$，对于$\frac{1}{4}$波片，有

$$\Delta n_1 d = \frac{\lambda_1}{4}$$

对于 $\lambda_2 = 706.5$ nm

$$\Delta n_2 = n_o - n_e = 0.161\,1$$

$$\frac{\Delta n_2 d}{\lambda_2} = \frac{\Delta n_1 d}{\lambda_2} \cdot \frac{\Delta n_2}{\Delta n_1} = \frac{1}{4} \times \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{\Delta n_2}{\Delta n_1}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{404.6}{706.5} \times \frac{0.161\,1}{0.184\,4} = \frac{1}{8}$$

对于 $\lambda_2 = 706.5$ nm 的光，晶体相当于 1/8 波片，经过波片后，两正交分量之间额外增加$\frac{\pi}{4}$的相位差。

由于圆偏振光的电矢量具有轴对称性分布，所以无论波片的光轴方向取何种方向，经过该波片后，光的偏振态都是唯一确定的。不妨将坐标系的 x 轴沿光轴（即方解石波片的快轴）方向选取，如图 6.41 所示。

入射光为左旋圆偏振光，即

$$\begin{cases} E_x = A\cos(kz - \omega t) \\ E_y = A\cos\left(kz - \omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

经过该波片后，y 方向(即 o 轴方向)为慢轴，于是

$$\begin{cases} E'_x = A\cos(kz - \omega t) \\ E'_y = A\cos\left(kz - \omega t + \dfrac{3\pi}{4}\right) \end{cases}$$

显然，这是左旋的椭圆偏振光。

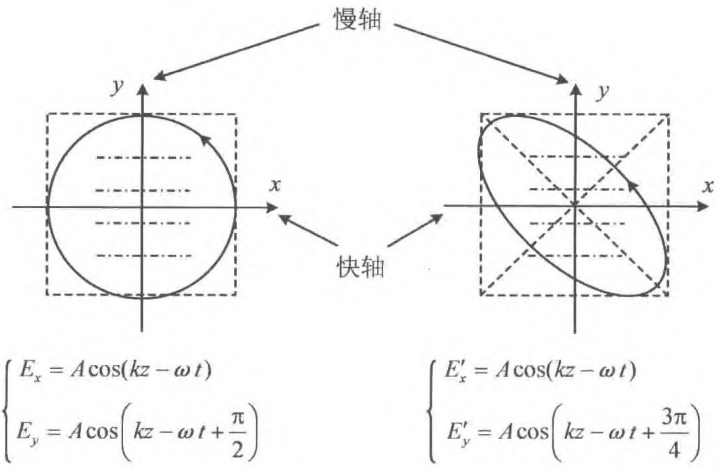


图 6.41 入射光与出射光的偏振态

6.3 偏振光的干涉

偏振光经波片后，出射的两列同方向光波，由于振动方向相互垂直，是不相干的，叠加之后的光强是两正交分量的光强之和。如果在经过一个偏振元件，则成为两列同传播方向、同振动方向、具有稳定相位差的相干光，可以进行干涉。

6.3.1 平行偏振光的干涉装置

平行偏振光的干涉装置如图 6.42 所示，由两个偏振片和位于其间的双折射晶体(波

晶片)组成。从线偏振器 P_1 出射的平面偏振光，正入射到晶体中，分为 o 光和 e 光，从晶体出射后，再使电矢量正交的两列波经过一个偏振片 P_2，从 P_2 射出的光，电矢量相互平行，成为相干光，进行相干叠加。

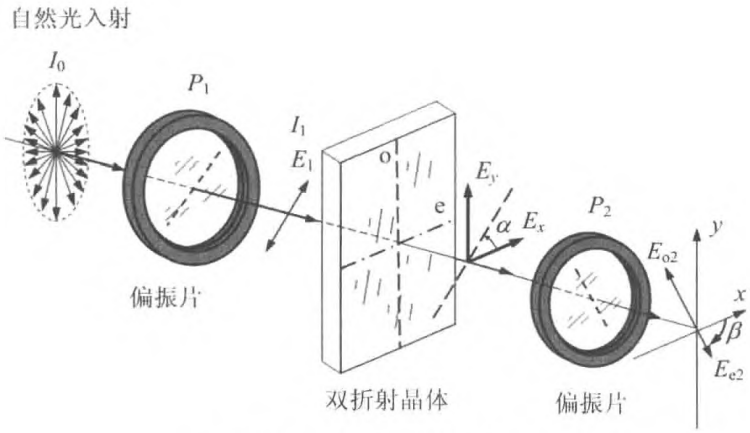


图 6.42　平行偏振光的干涉装置

可以看出，在这种装置中，偏振光的干涉与自然光干涉的区别主要有：

(1) 干涉光为线偏光，振动面相互平行；

(2) 光程差由波晶片的厚度，以及波晶片光轴与 P_1，P_2 透光轴之间的夹角决定，不同于双缝或薄膜干涉。

6.3.2　干涉强度

如图 6.43 所示，设入射自然光的强度为 I_0，经 P_1 后的线偏光的电矢量和振幅分别为 E_1 和 A_1。在波晶片中，e 光、o 光的振幅分别为

$$A_e = A_1\cos\alpha, A_o = A_1\sin\alpha$$

从波晶片射出的 e 光、o 光，再经过 P_2，相应的振幅为

$$A_{e2} = A_1\cos\alpha\cos\beta, A_{o2} = A_1\sin\alpha\sin\beta$$

e 光、o 光中都有一部分可以从 P_2 透射，他们振动分别表示为 $\boldsymbol{E}_{e2}$，$\boldsymbol{E}_{o2}$，且 $\boldsymbol{E}_{e2} /\!/ \boldsymbol{E}_{o2}$，这两部分是相干的，相干叠加可表示为 $\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}_{e2} + \boldsymbol{E}_{o2}$，干涉的光强为

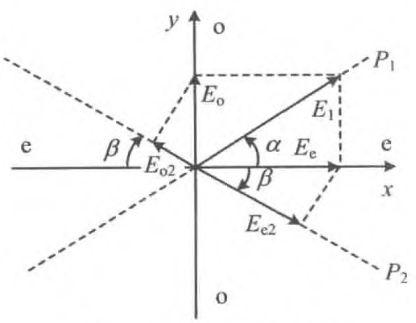


图 6.43　光矢量的分解

$$I = A_{e2}^2 + A_{o2}^2 + 2A_{e2}A_{o2}\cos\Delta\varphi$$
$$= A_1{}^2(\cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta\cos\Delta\varphi) \quad (6.5)$$

其中，$\Delta\varphi$ 为两列光的相位差，由以下因素决定：

(1) P_1 透光轴的方向所引起的相位差，记作 $\Delta\varphi_1 = 0, \pi$。当其透光轴在Ⅰ，Ⅲ象限(如图 6.44(a)所示)时，$\Delta\varphi_1 = 0$；而当其透光轴在Ⅱ，Ⅳ象限(如图 6.44(b)所示)时，$\Delta\varphi_1 = \pi$。

(2) 波晶片引起的

$$\Delta\varphi_c = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d$$

(3) P_2 透光轴的方向所引起的相位差，记作 $\Delta\varphi_2 = 0, \pi$。当其透光轴在Ⅰ，Ⅲ象限(如图 6.44(c)所示)时，$\Delta\varphi_2 = 0$；而当其透光轴在Ⅱ，Ⅳ象限(如图 6.44(d)所示)时，$\Delta\varphi_2 = \pi$。

总的相位差为

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_c + \Delta\varphi_2$$

各个元件的方向固定时，$\Delta\varphi_1$，$\Delta\varphi_2$ 固定不变。

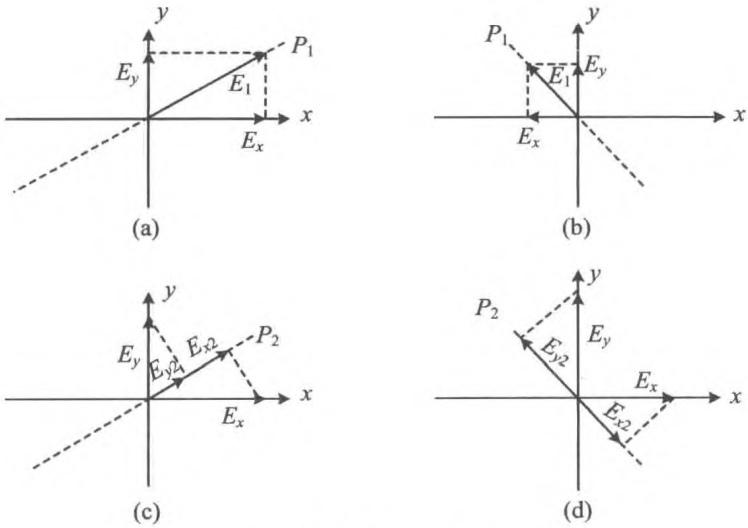


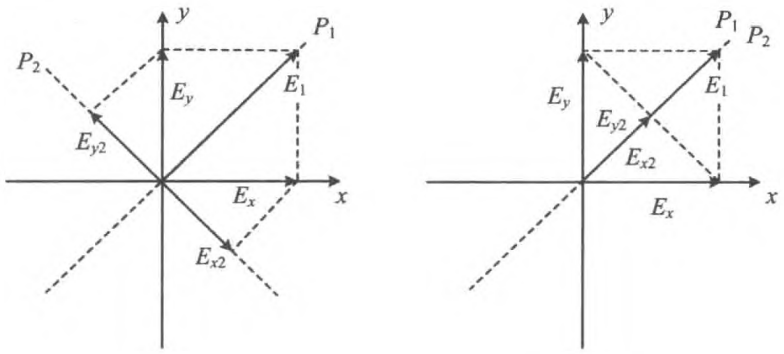
图 6.44 偏振片透光轴取向所引起的相位差

例如，$P_1 \perp P_2$，且波晶片光轴平分 P_1，P_2 的夹角，如图 6.45(a)所示，则有 $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$，$\Delta\varphi_1 = 0$，$\Delta\varphi_2 = \pi$，干涉光强为

$$I = A_1^2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\pi + \Delta\varphi_c)\right] = \frac{1}{4}I_0(1 - \cos\Delta\varphi_c) = \frac{1}{2}I_0\sin^2\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi_c\right) \quad (6.6)$$

如果 $P_1 /\!/ P_2$，且 P_1，P_2 与波晶片光轴的夹角为 45°（如图 6.45(b)所示），则有 $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$，$\Delta\varphi_1 = 0$，$\Delta\varphi_2 = 0$，干涉光强为

$$I = A_1^2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\Delta\varphi_c)\right] = \frac{1}{4}I_0(1 + \cos\Delta\varphi_c) = \frac{1}{2}I_0\cos^2\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi_c\right) \quad (6.7)$$



(a) $P_1 \perp P_2$　　(b) $P_1 /\!/ P_2$

图 6.45　偏振光干涉的两种特例

【例 6.27】 如图 6.46 所示，强度为 I_0 的单色平行自然光沿 z 轴入射，P 为线起偏器，C 为 $\lambda/4$ 波片，M 为与光轴垂直的平面镜。已知波片的快轴沿 y 方向，若 P 的透振方向与 x 轴夹角为 30°。

（1）详细描述从 $\lambda/4$ 片右侧出射的光的偏振态；

（2）光经平面镜反射后，又经过波片 C，详细描述经过波片 C 后，光的偏振态；

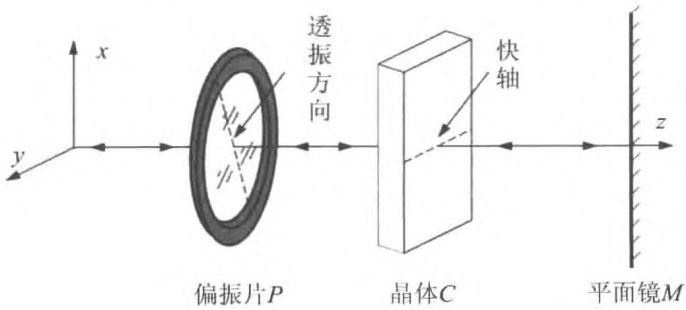


图 6.46　光学装置

(3) 反射光经过偏振片 P 后，强度是多少？

解　(1) 如图 6.47 所示，经过偏振片 P 后，成为与 x 轴夹角为 30°方向的平面偏振光 $\boldsymbol{E}$，振幅为 $A = A_0/\sqrt{2}$，其中 A_0 为入射自然光的振幅。

再经过晶体 C，由于 y 方向的相位超前 $\pi/2$，两正交分量为

$$\begin{cases} E_x = A\cos 30^\circ \cos(kz - \omega t) \\ E_y = A\sin 30^\circ \cos\left(kz - \omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

这是一列右旋正椭圆偏振光。

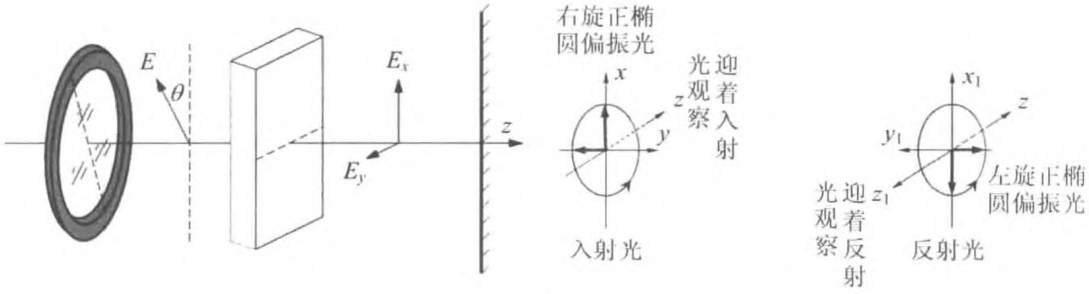


图 6.47　光的偏振态分析

(2) 经平面镜 M 反射后，尽管有半波损失，或者不管是否有半波损失，上述两正交分量之间的相位差保持不变，即电矢量的旋转方向是不变的。然而，光学中所谓左旋右旋的规定，是在观察者迎着光的传播方向时作出的，因而反射光成为一列左旋的正椭圆偏振光。

这时光波沿着 $-z$ 方向传播，或者对于观察者来说，上述坐标系是一个左手系，所以上述表达式在新的右手系中成为

$$\begin{cases} E_{x1} = A\cos 30^\circ \cos(kz - \omega t) \\ E_{y1} = A\sin 30^\circ \cos\left(kz - \omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

(3) 上述反射光经过波片，y 方向又有了 $\pi/2$ 的相位超前，偏振态变为

$$\begin{cases} E'_{x1} = A\cos 30^\circ \cos(kz - \omega t) \\ E'_{y1} = A\sin 30^\circ \cos(kz - \omega t) \end{cases}$$

这是一列平面偏振光，振幅为 A，但电矢量的振动平面与偏振片的透振方向之间的夹角变为 $2\theta = 60^\circ$。再经过偏振片，振幅为

$$A\cos 2\theta = \frac{A_0}{(2\sqrt{2})}$$

强度为

$$I = \frac{I_0}{8}$$

【例 6.28】 将一棱角 $\alpha = 0.33'$ 的石英尖劈，放在一对正交的尼科耳棱镜之间，石英尖劈的光轴平行于棱，如图 6.48 所示。当波长为 656.3 nm 的红光通过之后产生干涉，计算相邻条纹间的距离，对于波长为 656.3 nm 的红光，石英的折射率 $n_o = 1.541\,90$，$n_e = 1.550\,93$。

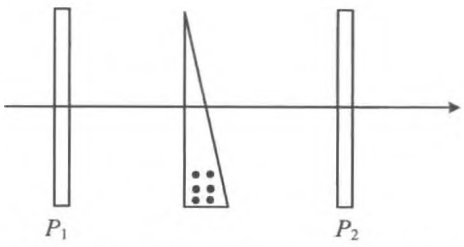


图 6.48　石英尖劈置于两正交偏振片之间

解　由于尖劈的夹角很小，所以忽略由折射引起的光波方向改变。按平行偏振光干涉强度公式，可得出射光的强度为

$$I = (A_{10}\sin\theta\cos\theta)^2 + (A_{10}\sin\theta\cos\theta)^2 + 2(A_{10}\sin\theta\cos\theta)^2\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d + \pi\right]$$

$$= \frac{1}{2}(A_{10}\sin 2\theta)^2\left[1 - \cos\frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d\right]$$

$$= \frac{1}{2}(A_{10}\sin 2\theta)^2 \cdot \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d$$

$$= \frac{I_0}{2}\sin^2 2\theta\sin^2\left[\frac{\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d\right]$$

当

$$\delta = \frac{\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d = \begin{cases} k\pi & \text{（暗纹）} \\ \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi & \text{（亮纹）} \end{cases}$$

相邻条纹之间的厚度差 Δd 满足关系式 $\Delta\delta = \frac{\pi}{\lambda}(n_e - n_o)\Delta d = \pi$，条纹间距为

$$\Delta x = \frac{\Delta d}{\tan\alpha}$$

故

$$\Delta x = \frac{\lambda}{(n_e - n_o)\tan\alpha} = 1.26 \times 10^{-2}\ \text{m} = 12.6\ \text{mm}$$

【例 6.29】 如图 6.49 所示的 $\lambda/4$ 片在透振方向相互正交的两偏振片之间旋转，自然光从第一偏振片处入射，求：

（1）每经过一个元件后光的性质，并用方程表示；

（2）讨论当 $\lambda/4$ 片旋转时，出射光的强度如何变化；

(3) 如果用 $\lambda/2$ 片代替 $\lambda/4$ 片，出射光的强度又如何变化？

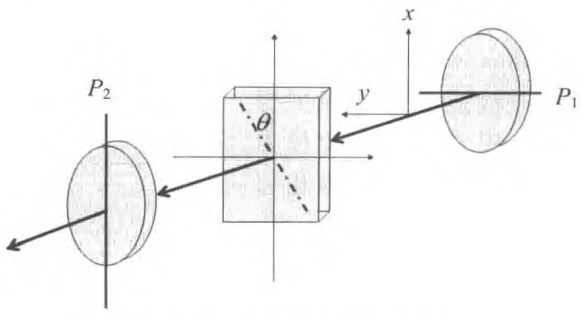


图 6.49 波片与偏振片的组合

解 (1) 在经过 P_1 后，是线偏振光，沿 y 方向振动，若设入射光的振幅为 A，则此处光的振幅为 $A_{1y}=\frac{\sqrt{2}}{2}A$，光波的振动可表示为

$$E_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}A\cos\omega t$$

经过波片后，为正椭圆偏振光，振幅为

$$\begin{cases} A_e = A_{1y}\sin\theta \\ A_o = A_{1y}\cos\theta \end{cases}$$

两正交分量表示为

$$\begin{cases} E_e = A_e\cos(\omega t - kz) \\ E_o = A_o\cos\left(\omega t - kz \pm \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

再经过 P_2 后，成为线偏振光，沿 x 方向振动。

$$A_{2x}^2 = (A_e\cos\theta)^2 + (A_o\sin\theta)^2 \pm 2A_eA_o\cos\theta\sin\theta\cos\frac{\pi}{2}$$

$$= (A_{1y}\sin\theta\cos\theta)^2 + (A_{1y}\cos\theta\sin\theta)^2 = \frac{1}{4}A^2\sin^2 2\theta$$

(2) 如果 $\theta=\omega t$，则

$$I = \frac{1}{4}A^2\sin^2 2\omega t = \frac{1}{4}I_0\sin^2 2\omega t$$

(3) 如果用半波片替代，则上经过波片后，为线偏光，转过 $2(\pi/2-\theta)=\pi-2\theta$ 角，与 P_2 透振方向间夹角为 $\pi/2-2\theta$，出射光强

$$I = \frac{1}{2}I_0\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right) = \frac{1}{2}I_0\sin^2(2\theta)$$

【例 6.30】 将巴比涅补偿器放在两个正交偏振片之间，光轴与它们的透振方向之间成 45°角，会看到什么现象？若补偿器楔角 $\alpha = 2.75'$，用平行的钠黄光（波长为 589.290 nm）照射，求干涉条纹的间隔。转动补偿器的光轴，对干涉条纹有什么影响？

解　通过巴比涅补偿器后，两正交分量间的光程差为

$$\Delta L = (n_o - n_e)(d_1 - d_2)$$

干涉后的光强分布为

$$I = \frac{1}{2} I_0 \sin^2\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi_c\right) = \frac{1}{2} I_0 \sin^2\left[\frac{\pi}{\lambda}(n_o - n_e)(d_1 - d_2)\right]$$

由于厚度差 $d_1 - d_2$ 沿着与棱边垂直的方向线性分布，所以干涉花样是一系列平行于补偿器棱边的等间隔直条纹。

如图 6.50 所示，设补偿器高度为 h，则在距离补偿器一端 x 处，

$$d_1 - d_2 = x\tan\alpha - (h - x)\tan\alpha = 2x\tan\alpha - h\tan\alpha$$

亮条纹的间隔满足

$$(n_o - n_e)2\Delta x\tan\alpha = \lambda$$

即

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2(n_o - n_e)\tan\alpha} = \frac{\lambda}{2(n_o - n_e)\alpha}$$

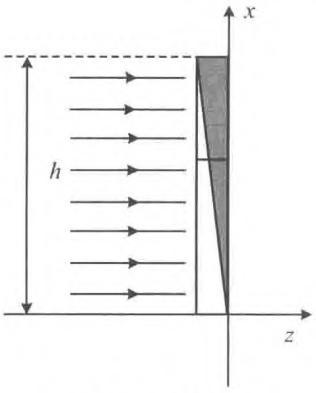


图 6.50　补偿器

【例 6.31】 以线偏振光照射巴比涅补偿器，通过偏振片观察，发现在两楔形棱镜中央，即厚度 $d_1 = d_2$ 处有一条暗线，与中央暗线相距 a 处又有一条暗线。若以同一波长的椭圆偏振光照射，发现暗线移至距离中央 b 处。求：

（1）椭圆偏振光在补偿器晶体中所分解成的两个振动分量的初始相位差与 a、b 的关系；

（2）如果椭圆的长短轴正好分别与两棱镜晶体的光轴平行，试证此时 $b = a/4$；

（3）设已知偏振片的透振方向与补偿器一楔的光轴夹角为 θ，找出 θ 与（2）问中椭圆长短轴比值的关系。

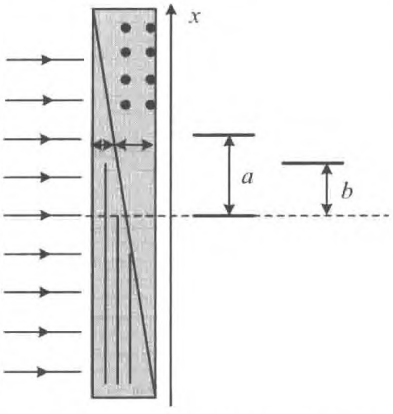


图 6.51　线偏振光入射到补偿器

解　（1）如图 6.51 所示，通过补偿器后，两正交分量的光程差为

$$\Delta = (n_o - n_e)(d_1 - d_2)$$

而在距离补偿器中线 x 处

$$d_1 - d_2 = 2x\tan\alpha$$

于是 a 处的暗线满足条件

$$\Delta_1 = 2(n_o - n_e)a\tan\alpha = \lambda$$

即

$$2(n_o - n_e)\tan\alpha = \frac{\lambda}{a}$$

入射光为椭圆偏振光时，b 处的暗线满足条件

$$\Delta\varphi_0 \pm 2bk(n_o - n_e)\tan\alpha = \Delta\varphi_0 \pm \frac{bk\lambda}{a} = \Delta\varphi_0 \pm \frac{2\pi b}{a} = 0$$

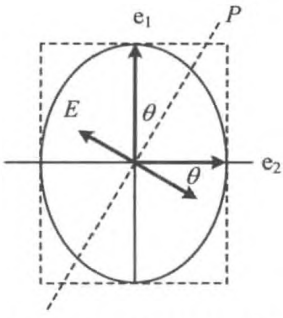


图 6.52 偏振片的取向

(2) 如果是正椭圆，$\Delta\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$，于是有

$$\frac{\pi}{2} - b\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{a} = 0$$

即 $b = \frac{a}{4}$。

(3) 此时偏振片透振方向与晶体光轴的关系如图 6.52 所示。在暗线处，出射光可表示为

$$\begin{cases} E_x = A\cos\theta\cos\omega t \\ E_y = A\sin\theta\cos(\omega t + \pi) \end{cases}$$

据此，入射光为

$$\begin{cases} A_x = A\cos\theta \\ A_y = A\sin\theta \end{cases}$$

即长短轴之比为

$$\cos\theta : \sin\theta$$

【例 6.32】 如图 6.53 所示，用圆偏振光照射一具有等宽双狭缝的屏，双缝间距为 L，厚度为 d 的双折射晶体薄片放在其中一缝上，使其 o 轴与狭缝平行，e 轴垂直于狭缝。另一屏幕 Σ 平行放置于双缝屏后距离 $D \gg L$ 处。设一个狭缝被挡住时，屏幕 Σ 上的总光强为 I_0（忽略衍射效应）。当两狭缝都打开时，屏幕 Σ 上的干涉图样如何？

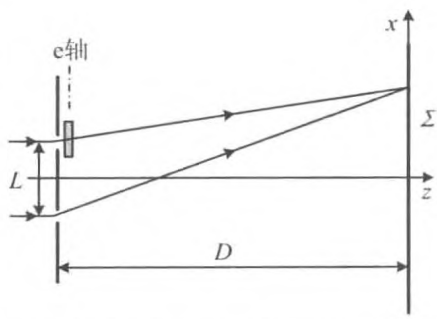


图 6.53 圆偏振光入射到双缝干涉装置

解 这是偏振光的双缝干涉问题。

对于圆偏振光

$$\begin{cases} E_{2x} = A\cos\omega t \\ E_{2y} = A\cos\left(\omega t \pm \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

由 S_1 射出的光，经过晶体后，两正交分量为

$$\begin{cases} E_{1x} = A\cos[\omega t - d(n_e - 1)] \\ E_{1y} = A\cos\left[\omega t - d(n_o - 1) \pm \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

同方向的振动相干叠加，由于光程差为

$$\Delta L_y = (n_o - 1)d + \frac{L}{D}x$$

及

$$\Delta L_x = (n_e - 1)d + \frac{L}{D}x$$

可得

$$I_x(P) = 2I_0\cos^2\left[\frac{\pi}{\lambda}\left(n_e d - d + \frac{L}{D}x\right)\right]$$

$$I_y(P) = 2I_0\cos^2\left[\frac{\pi}{\lambda}\left(n_o d - d + \frac{L}{D}x\right)\right]$$

则总光强为

$$\begin{aligned} I(P) &= I_x(P) + I_y(P) \\ &= 2I_0\left\{\cos^2\left[\frac{\pi}{\lambda}\left(n_e d - d + \frac{L}{D}x\right)\right] + \cos^2\left[\frac{\pi}{\lambda}\left(n_o d - d + \frac{L}{D}x\right)\right]\right\} \end{aligned}$$

是明暗交错的平行直条纹。

【例 6.33】 用一束平行的圆偏振光垂直照射一具有等宽双狭缝的屏，双缝间中心距离为 L，另有一观察屏，平行地放置于双缝屏后 D 处，$D \gg L$，如图 6.54 所示，试问：

(1) 这时在观察屏上是否有干涉条纹？若在双缝后面放一偏振片 P，屏幕上干涉条纹有何变化？P 的透振方向与图面成怎样的角度，才能使观察屏上的暗条纹最暗？

(2) 若将 P 去掉，而在双缝屏的一条狭缝上覆盖厚度为 d 的双折射晶体薄片，且使晶体的光轴垂直于狭缝，求这时屏上的光强分布。假设其中任意一条狭缝被挡住时，观察屏上的光强为 I_0。

(3) 在(1)的情况下，再在 P 后每个狭缝处各放一个 $\lambda/4$ 片，如图 6.55 所示，光轴与 P 的透振方向都成 45°角，且两波片的光轴正交，这时观察屏上的干涉条纹如何变化。

分析　圆偏振光，或者一般的椭圆偏振光，可以分解为两列有固定相位差的、电矢量正交的平面偏振光，经过干涉装置后，每一列平面偏振光进行干涉(相干叠加)，可以形成

两套干涉花样。而实际上这两套干涉花样是完全重合的，但是，由于两列平面偏振光的电矢量相互垂直，所以两套干涉花样之间只是简单的强度相加，最终得到稳定的干涉强度分布。

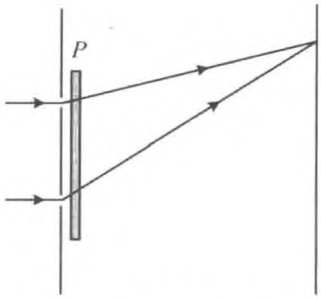


图 6.54 干涉装置

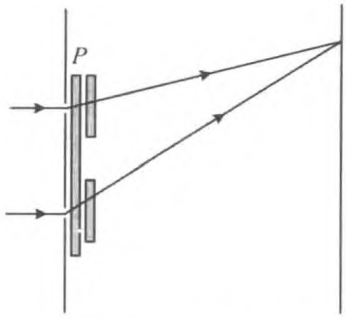


图 6.55 再各增加一个波片

解 (1) 这是典型的杨氏双缝干涉装置，所以观察屏上有干涉条纹。

在双缝后放偏振片，则干涉的光是两列平面偏振光，因而强度减为原来的一半。

由于从两缝射出的光，不是相互平行的，由于光是横波，因而电矢量也不平行，干涉相消时，并不能完全抵消，除非电矢量的方向与缝的方向平行。所以要使暗纹最暗，应当使偏振片的透振方向与狭缝平行，在本题中，就是与纸面垂直。

(2) 此时与例 6.31 的情况相同。入射到晶体的光的分为 o 光和 e 光，即

$$\begin{cases} E_e = A\cos\omega t \\ E_o = A\cos\left(\omega t \pm \dfrac{\pi}{2} + \Delta\varphi\right) \end{cases}$$

其中，$\Delta\varphi$ 是由于晶体所引起的 o 光相对于 e 光的相位超前。

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d$$

经过晶体后，垂直于狭缝振动的两列光，额外光程差为

$$\Delta L_x = (n_e - 1)d$$

干涉花样除了在屏上上下平移之外，并没有其他改变。

同理，振动方向平行于狭缝的两列光，额外光程差为

$$\Delta L_y = (n_o - 1)d$$

干涉花样也在屏上上下平移，但移动的幅度与第一套干涉花样不同，因而相互错开，会导致可见度的降低，甚至干涉条纹的消失。

具体的光强分布可以通过计算得到

$$I_x = 2A^2\left\{1+\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left[\frac{L}{D}x+(n_e-1)d\right]\right\}$$

$$I_y = 2A^2\left\{1+\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left[\frac{L}{D}x+(n_o-1)d\right]\right\}$$

$$I = I_x + I_y = 2A^2\left\{2+\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left[\frac{L}{D}x+(n_e-1)d\right]+\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left[\frac{L}{D}x+(n_o-1)d\right]\right\}$$

$$= I_0\left\{2+\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left[\frac{L}{D}x+(n_e-1)d\right]+\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left[\frac{L}{D}x+(n_o-1)d\right]\right\}$$

(3) 由于两 $\lambda/4$ 片的光轴相互垂直，所以从两缝出射的光经过该 $\lambda/4$ 片后，o 光和 e 光由于振动同向而进行相干叠加，但是，额外光程差为

$$\Delta L = \pm\frac{\lambda}{4} - \frac{|n_o - n_e|\lambda}{4}$$

因而两套干涉花样在屏上向相反的方向移动。相对移动的幅度对应于 $2\times\frac{\lambda}{4}=\frac{\lambda}{2}$ 的光程，因而正好明条纹与暗条纹交叠，则看不到干涉条纹。

【例 6.34】 有一长度 $l=5$ cm，极板间距 $d=1$ mm 的克尔盒，放在一对正交的起偏器与检偏器之间，其中所盛液体的克尔常量 $B=2.13\times10^{-18}$ m^2/V^2。若以频率为 10^7 Hz，峰值电压为 5 000 V 的高频电压加在克尔盒的极板上，试计算 $\lambda=400.0$ nm 的线偏振光通过克尔盒时，每秒钟被遮断的次数。

分析　本题讨论有关克尔效应的问题。某些各向同性的介质在外电场的作用下具有双折射的特征，相当于单轴晶体。其光轴沿电场的方向，电矢量垂直于光轴和沿着光轴方向振动的光之间的折射率差(称作感生折射率差)为

$$\Delta n = n_{/\!/} - n_{\perp} = BE^2$$

其中，B 为比例常数，由介质的性质决定，称作克尔常量，对于大多数介质为正值，相当于正单轴晶体。E 为电场强度。

解　克尔盒上没有加电场时，其中的液体是各向同性的，光不能通过。加电场后，振动方向相互垂直的、同方向传播的两列光之间有下列光程差

$$\Delta L = \Delta n l = (n_{/\!/} - n_{\perp})l = BE^2 l = B\frac{U^2}{d^2}l \tag{1}$$

式中，U 为两极板间的电压。

一般情况下，从克尔盒中射出的光为椭圆偏振光，所以总能通过检偏器。如果上述光程差恰好为波长的整倍数，则从克尔盒中射出的光仍是沿原来方向振动的平面偏振光，因而不能通过检偏器。在本题中所加的交变电压从 0 增加到峰值时，光程差的变化幅度为

$$\Delta L = B\frac{U^2}{d^2}l = 2.13\times10^{-18}\times\left(\frac{5\,000}{0.001}\right)^2\times0.05 = 266.25\times10^{-8}(\mathrm{m})\approx6.6\lambda$$

即在交变电场的 1/4 周期内，光有 6 次被遮断。于是每秒钟被遮断的次数为

$$N = 6\times4\times10^7 = 2.4\times10^8(\text{次})$$

【例 6.35】 平行光从单轴晶体的表面正入射，为了使晶体中 o 光、e 光间的偏离角最大，应当如何切割晶体？

分析 在正入射的情况下，如果晶体的光轴与其表面既不平行也不垂直，则 o 光、e 光将分开，原因是此时 o 光虽然没有折射，但 e 光仍有折射。本题的问题是，当光轴与表面法线间的夹角多大时，两列光间的偏离角最大。可以采用惠更斯作图法求解，解题时要注意到，e 光的波面是旋转椭球面，其截面为正椭圆，可以用方程表示

$$n_o^2x^2 + n_e^2y^2 = 1$$

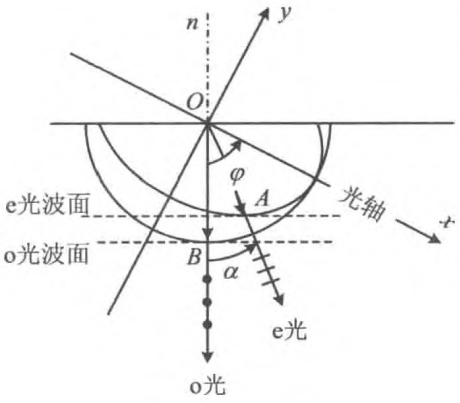


图 6.56 作图法

解 以正晶体为例，如图 6.56 所示，光轴沿 x 轴方向，与晶体表面法线间的夹角为 φ。由惠更斯作图法，可知在正入射时，o 光、e 光的波阵面（即等相位面）均平行于晶体表面。现在讨论由晶体表面上的一个点 O 所发出的 o 光、e 光的次波（或子波）波面。经过 $\Delta t = 1/c$ 的时间后，o 光的次波面为半径为 $1/n_0$ 的球面；而 e 光的次波波面为旋转椭球面，长半轴为 $1/n_o$，短半轴为 $1/n_e$，在入射面内的截面方程为

$$n_o^2x^2 + n_e^2y^2 = 1 \tag{1}$$

作平行于表面的平面与椭球面相切，该切平面就是 e 光的波阵面，切点为 A，连接 O，A，则 OA 即为 e 光的传播方向。由于 o 光仍然沿着表面法线的方向传播，则 o 光、e 光间的夹角设为 α，则在平面直角坐标系 xOy 中，e 光的直线方程为

$$\tan(\varphi-\alpha) = -\frac{y}{x} \tag{2}$$

由方程(1)可求得 A 点切线的斜率为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{n_e^2}{n_o^2}\cdot\frac{x}{y} \tag{3}$$

该切线与晶体表面平行，即在坐标系 xOy 中，切线的斜率为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \tag{4}$$

结合式(3)、式(4)，有

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=-\frac{n_e^2}{n_o^2}\cdot\frac{x}{y} \tag{5}$$

结合式(2)、式(5)，得到

$$\tan(\varphi-\alpha)=\frac{n_o^2}{n_e^2}\tan\varphi \tag{6}$$

或者

$$\alpha=\varphi-\arctan\left(\frac{n_o^2}{n_e^2}\tan\varphi\right) \tag{7}$$

对式(7)求导，并令$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\varphi}=0$，即得到式(7)取极值的条件为

$$\tan\varphi=\pm\frac{n_e}{n_o} \tag{8}$$

相应的极大值为

$$\alpha_{\max}=\arctan\left(\frac{n_e^2-n_o^2}{2n_en_o}\right) \tag{9}$$

在切割晶体时，如果使得光轴与表面法线间的夹角满足式(8)，即可保证 o 光、e 光具有最大的偏离角。

【例 6.36】 如图 6.57 所示，强度为 I_0 的自然光通过由偏振片 P_1、1/4 波片和偏振片 P_2 构成的光学系统。已知波片的 e 轴为快轴，P_1 的透振方向与 e 轴的夹角为 60°，P_2 的透振方向与 e 轴的夹角为 30°，试求：

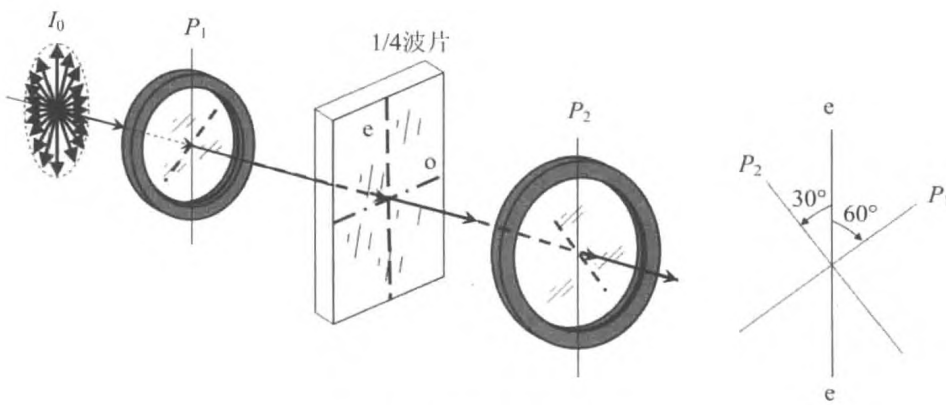


图 6.57　偏振光的干涉装置

(1) 经过 P_1 后的光强；

(2) 经过波片后光的偏振态和光强，若是圆偏光或椭偏光，指出是左旋的还是右旋的，若是椭偏光，计算椭圆长短轴之比；

(3) 经过 P_2 后的光强。

解 (1) 经过 P_1 后的光强为 $\frac{I_0}{2}$。

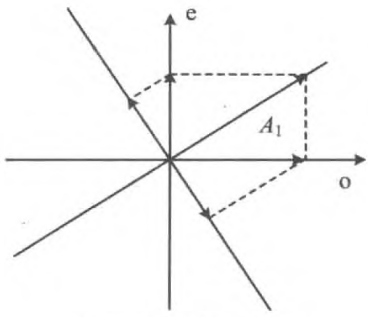


图 6.58 相干叠加

(2) 经波片后，光强为 $\frac{I_0}{2}$。由于 e 光超前 $\frac{\pi}{2}$，因而是右旋的正椭圆偏振光，长轴沿 o 轴，长短轴之比为 $\sqrt{3}:1$。

(3) 经过 P_2 后，叠加的情况如图 6.58 所示。

两列光的振幅分别为

$$A_1\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}A_1$$

$$A_1\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}A_1$$

相位差为 $\frac{\pi}{2}+\pi$。

相干叠加后，光强为

$$I=2\times\frac{3}{16}A_1^2=\frac{3}{16}I_0$$

【例 6.37】 波长 $\lambda=589.3$ nm 的钠黄光在方解石中的折射率分别为 $n_o=1.658\,36$ 和 $n_e=1.486\,41$。用方解石制成两个波晶片 C_1，C_2，厚度分别为 $d_1=343.57\ \mu$m 和 $d_2=687.15\ \mu$m。两个理想偏振片与上述波晶片按图 6.59 所示放置，光强为 I_0 的平行钠黄光正入射，依次通过偏振片 P_1、波片 C_1、偏振片 P_2 和波片 C_2。已知 P_1 的透光轴与水平方向夹角 $\alpha=60^\circ$，波片 C_1 的光轴沿竖直方向，偏振片 P_2 的透光轴沿竖直方向，波片 C_2 的光轴与水平方向的夹角 $\theta=-30^\circ$。问：

(1) 对于 $\lambda=589.3$ nm 的钠黄光，C_1，C_2 是怎样的波片？

(2) 经过 C_1 后，光的偏振态如何？光强是多少？

(3) 经过 P_2 后，光强度是多少？

(4) 经过 C_2 后，光的偏振态如何？光强是多少？

解 (1) 经过波片后两正交分量之间增加的光程差为

$$\Delta L=(n_o-n_e)d$$

$$\frac{\Delta L_1}{\lambda} = \frac{(n_o - n_e)d_1}{\lambda} = \frac{(1.658\,36 - 1.486\,41) \times 343.57 \times 10^3}{589.3} = 100.25$$

$$\frac{\Delta L_2}{\lambda} = \frac{(n_o - n_e)d_2}{\lambda} = \frac{(1.658\,36 - 1.486\,41) \times 687.15 \times 10^3}{589.3} = 200.50$$

C_1和 C_2分别相当于 1/4 波片和 1/2 波片。

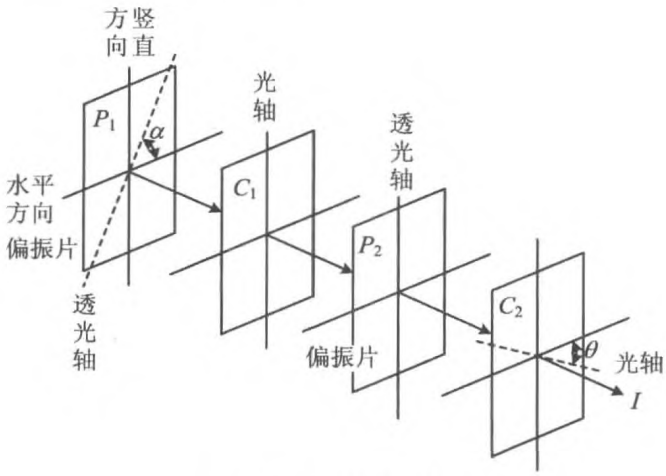


图 6.59　光学元件配置

(2) 经过 P_1后，为线偏振光，光强为$\frac{1}{2}I_0$。设振幅为 A_1。

建立坐标系，x 轴沿水平(o 轴)方向，y 轴沿竖直(e 轴)方向。经过 1/4 波片 C_1后，由于 y 为快轴，y 方向相位超前 $\pi/2$，所以两正交的振动分量为

$$\begin{cases} E_{x1} = A_1\cos\alpha\cos\omega t = \dfrac{1}{2}A_1\cos\omega t \\ E_{y1} = A_1\sin\alpha\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}A_1\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

是右旋椭圆偏振光，长轴沿竖直(e 轴)方向。长短轴比值为

$$\frac{A_1\sin\alpha}{A_1\cos\alpha} = \tan 30^\circ = \sqrt{3}$$

光强为

$$I_2 = \frac{1}{2}I_0$$

(3) 经过 P_2后，为线偏振光。电矢量沿竖直方向。由于只有 y 方向分量可通过，所以经过 P_2后的光强为

$$I_3 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} I_0 = \frac{3}{8} I_0$$

(4) 以 C_2 的快轴(e 轴)为 x 轴建立坐标系,如图 6.60 所示。

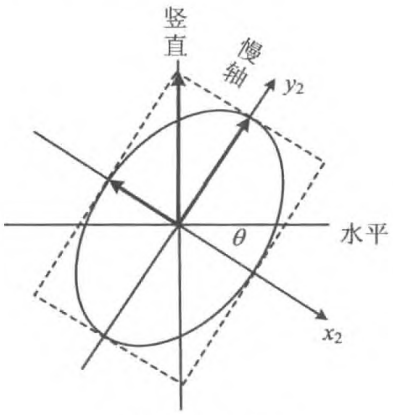


图 6.60 坐标系

入射线偏振光的两个正交分量为

$$\begin{cases} E_{x2} = A_1 \sin\alpha \sin\theta \cos\omega t = \dfrac{\sqrt{3}}{4} A_1 \cos\omega t \\ E_{y2} = A_1 \sin\alpha \cos\theta \cos(\omega t + \pi) = \dfrac{3}{4} A_1 \cos(\omega t + \pi) \end{cases}$$

y 轴为慢轴(o 轴),出射光的两正交分量可表示为

$$\begin{cases} E'_{x2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} A_1 \cos\omega t \\ E'_{y2} = \dfrac{3}{4} A_1 \cos\left(\omega t + \pi - \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{3}{4} A_1 \cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

是右旋椭圆偏振光,长轴沿 y 方向,与竖直方向成 θ 角。

长短轴比值为

$$\frac{A_1 \sin\theta}{A_1 \cos\theta} = \tan 30^\circ = \sqrt{3}$$

光强依然为

$$I_3 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} I_0 = \frac{3}{8} I_0$$

6.4　琼斯矩阵

6.4.1　琼斯矢量

对于光的平面偏振、圆偏振和椭圆偏振三种状态，其电场强度都可用两个正交分量表示，其一般形式为

$$\begin{cases} E_x = A_x\cos(kz - \omega t + \varphi_{0x}) \\ E_y = A_y\cos(kz - \omega t + \varphi_{0y}) \end{cases}$$

或者写成复指数形式

$$\begin{cases} \widetilde{E}_x = A_x e^{i(kz-\omega t+\varphi_{0x})} = A_x e^{i(kz+\varphi_{0x})}e^{-i\omega t} = A_x e^{i\varphi_x(z)}e^{-i\omega t} \\ \widetilde{E}_y = A_y e^{i(kz-\omega t+\varphi_{0y})} = A_y e^{i(kz+\varphi_{0y})}e^{-i\omega t} = A_y e^{i\varphi_y(z)}e^{-i\omega t} \end{cases}$$

由于是同一列光波，两分量的时间频率 ω 相同，因而可以去掉两式中的公因子 $e^{-i\omega t}$，则得到两分量的复振幅，即

$$\begin{cases} \widetilde{E}_x = A_x e^{i\varphi_x(z)} \\ \widetilde{E}_y = A_y e^{i\varphi_y(z)} \end{cases}$$

上述光矢量可以用一个 2×1 的矩阵的表示，其两分量的复振幅就是该矩阵的矩阵元，即

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \widetilde{E}_x \\ \widetilde{E}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x e^{i\varphi_x(z)} \\ A_y e^{i\varphi_y(z)} \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

这个矩阵称作偏振光的琼斯矢量。

形如式(6.8)的琼斯矢量，两分量的振幅和相位可以任意取值，一般为椭圆偏振光。实际上，椭圆偏振光的分量式是最普遍的偏振表达，而当 $\varphi_y(z) = \pm\varphi_x(z)$ 时，就是平面偏振光；而 $A_y = A_x$，且 $\varphi_y(z) = \varphi_x(z) \pm \pi/2$ 时，就是圆偏振光。

光强就是光矢量复振幅模的平方，即

$$I = |\boldsymbol{E}|^2 = \boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{E} = \widetilde{E}_x\widetilde{E}_x^* + \widetilde{E}_y\widetilde{E}_y^* = A_x^2 + A_y^2$$

由于上述偏振光的强度为

$$I = |\widetilde{E}_x|^2 + |\widetilde{E}_y|^2 = A_x^2 + A_y^2$$

也可以将琼斯矢量写成归一化的形式

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}}\begin{bmatrix} A_x e^{i\varphi_x(z)} \\ A_y e^{i\varphi_y(z)} \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

归一化的琼斯矢量，其模为 1，即

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^* = 1$$

由于光的偏振态实际上取决于两分量的振幅之比和相位差，所以可以将各个矩阵元的公因子提出，写成更简洁的形式，即

$$\boldsymbol{E} = A_x e^{i\varphi_x}\begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{A_y}{A_x} e^{i(\varphi_y - \varphi_x)} \end{bmatrix} = A_x e^{i\varphi_x}\begin{bmatrix} 1 \\ \gamma e^{i\varphi} \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

这是非归一化的形式，其中 $\gamma = A_y/A_x$，为两正交分量振幅之比，$\varphi = \varphi_y - \varphi_x$，为两正交分量的相位差。

例如，光矢量沿 x 轴的平面偏振光的归一化琼斯矢量为

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{A_x}\begin{bmatrix} A_x e^{i\varphi_x} \\ 0 \end{bmatrix} = e^{i\varphi_x}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

略去公因子 $e^{i\varphi_x}$，可得到非常简洁的形式

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

同样，光矢量与 x 轴夹角为 θ 的平面偏振光的琼斯矢量为

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}}\begin{bmatrix} A_x e^{i\varphi_x(z)} \\ A_y e^{i\varphi_x(z)} \end{bmatrix} = \frac{e^{i\varphi_x}}{A\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}}\begin{bmatrix} A\cos\theta \\ A\sin\theta \end{bmatrix} = e^{i\varphi_x}\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

略去公因子 $e^{i\varphi_x}$，得到

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

而圆偏振光的琼斯矢量为

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}}\begin{bmatrix} A_x e^{i\varphi_x} \\ A_y e^{i\varphi_y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}A}\begin{bmatrix} A e^{i\varphi_x} \\ A e^{i\varphi_x \pm \frac{\pi}{2}} \end{bmatrix} = \frac{e^{i\varphi_x}}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ e^{\pm i\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix}$$

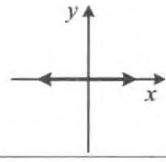
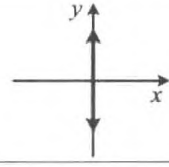
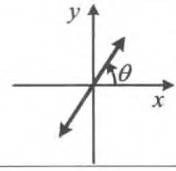
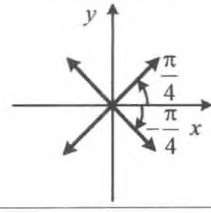
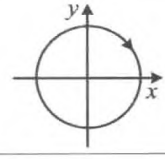
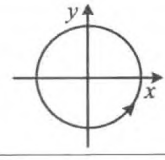
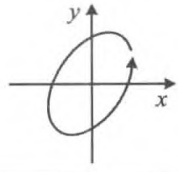
简化后，为

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix}$$

当第二个矩阵元取“+”时，为左旋圆偏振光；取“−”时，为右旋圆偏振光。

各种偏振态的琼斯矢量列在表 6.1 中。

表 6.1　各种偏振态的琼斯矢量

光的偏振态		图示	琼斯矢量
平面偏振光	$\boldsymbol{E}$ 沿 x 轴		$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
	$\boldsymbol{E}$ 沿 y 轴		$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
	$\boldsymbol{E}$ 与 x 轴夹角为 θ		$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{bmatrix}$
	$\boldsymbol{E}$ 与 x 轴夹角为 $\pm\frac{\pi}{4}$		$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\\pm1\end{bmatrix}$
圆偏振光	右旋		$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-\mathrm{i}\end{bmatrix}$
	左旋		$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\\mathrm{i}\end{bmatrix}$
椭圆偏振光			$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\begin{bmatrix}1\\\gamma\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\end{bmatrix}$

对于椭圆偏振光，当两分量的相位差 φ 处于Ⅰ、Ⅱ象限时，为左旋；处于Ⅲ、Ⅵ象限时，为右旋。当 $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$，且 $\gamma\neq1$ 时，为正椭圆，其长短轴与坐标轴平行。

6.4.2 正交偏振

如果两列光波的光矢量 $\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}\widetilde{E}_{1x}\\ \widetilde{E}_{1y}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}\widetilde{E}_{2x}\\ \widetilde{E}_{2y}\end{bmatrix}$ 之间满足以下关系式

$$\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2^*=\widetilde{E}_{1x}\widetilde{E}_{2x}^*+\widetilde{E}_{1y}\widetilde{E}_{2y}^*=0$$

则这两列光波是正交偏振的，其中 $\boldsymbol{E}_2^*$ 为 $\boldsymbol{E}_2$ 复共轭矢量。

例如，两平面偏振光 $\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}\cos\theta_1\\ \sin\theta_1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}\cos\theta_2\\ \sin\theta_2\end{bmatrix}$，则

$$\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2^*=\begin{bmatrix}\cos\theta_1\\ \sin\theta_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\theta_2 & \sin\theta_2\end{bmatrix}=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2=\cos(\theta_1-\theta_2)=0$$

即得到

$$\theta_2=\theta_1+\frac{\pi}{2}$$

说明两列偏振光的光矢量相互垂直。因此，相互正交的平面偏振光的一般形式可写作

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}$$

和

$$\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}$$

左旋的圆偏振光 $\begin{bmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{bmatrix}$ 与右旋的圆偏振光 $\begin{bmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{bmatrix}$ 是相互正交的；同样，左旋的椭圆偏振光 $\begin{bmatrix}2\\ \mathrm{i}\end{bmatrix}$ 与右旋的椭圆偏振光 $\begin{bmatrix}1\\ -2\mathrm{i}\end{bmatrix}$ 也是正交的。

由于任何偏振光都可以分解为两个正交的偏振光，所以任何一种偏振态都可以写作两个正交偏振的琼斯矢量的和。

例如，$\begin{bmatrix}A\\ B\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}+B\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ 是平面偏振光分解为两个正交的平面偏振光，当然也可以将其分解为两正交的圆偏振光

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{A + \mathrm{i}B}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix} + \frac{A - \mathrm{i}B}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}$$

6.4.3　琼斯矩阵

为了计算用琼斯矢量表示的偏振光通过偏振元件后偏振态的变化，就要求偏振元件也用矩阵表示，这类矩阵应该是一个 2×2 矩阵，一般形式为

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

式(6.11)称为线性光学元件的琼斯矩阵。如果入射的光矢量为

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \widetilde{E}_x \\ \widetilde{E}_y \end{bmatrix}$$

从偏振器件出射的光矢量为

$$\boldsymbol{E}' = \begin{bmatrix} \widetilde{E}'_x \\ \widetilde{E}'_y \end{bmatrix}$$

则偏振元件的变换作用可以用下面的运算表示为

$$\boldsymbol{E}' = \begin{bmatrix} \widetilde{E}'_x \\ \widetilde{E}'_y \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \widetilde{E}_x \\ \widetilde{E}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}\widetilde{E}_x + p_{12}\widetilde{E}_y \\ p_{21}\widetilde{E}_x + p_{22}\widetilde{E}_y \end{bmatrix} \tag{6.12}$$

即

$$\begin{cases} \widetilde{E}'_x = p_{11}\widetilde{E}_x + p_{12}\widetilde{E}_y \\ \widetilde{E}'_y = p_{21}\widetilde{E}_x + p_{22}\widetilde{E}_y \end{cases} \tag{6.13}$$

如果光依次通过多个偏振元件，而这些元件的琼斯矩阵分别为 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_n$，则出射光的琼斯矢量为

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{P}_n \cdots \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{E}$$

例如，$\lambda/2$ 片，其快轴沿 x 方向，慢轴沿 y 方向，则通过该波片后，与入射光相比，出射光会在 y 方向额外产生 π 的相位滞后，即如果入射光的琼斯矢量为

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \widetilde{E}_x \\ \widetilde{E}_y \end{bmatrix}$$

则出射光的琼斯矢量应当为

$$\boldsymbol{E}' = \begin{bmatrix} \widetilde{E}_x \\ \widetilde{E}_y \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{E}_x \\ -\widetilde{E}_y \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} \widetilde{E}'_x = 1 \cdot \widetilde{E}_x + 0 \cdot \widetilde{E}_y \\ \widetilde{E}'_y = 0 \cdot \widetilde{E}_x + (-1) \cdot \widetilde{E}_y \end{cases}$$

因而可以推算出该波片的琼斯矩阵为

$$\boldsymbol{P}_{+\lambda/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

快轴沿 y 方向的 $\lambda/2$ 片的琼斯矩阵同样是

$$\boldsymbol{P}_{-\lambda/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

对于快轴沿 x 方向的 $\lambda/4$ 波片，其作用是使得 y 方向的振动分量额外增加 $\pi/2$ 的相位滞后，因而出射光的琼斯矢量为

$$\boldsymbol{E}' = \begin{bmatrix} \widetilde{E}_x \\ \widetilde{E}_y \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{E}_x \\ \mathrm{i}\widetilde{E}_y \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} \widetilde{E}'_x = 1 \cdot \widetilde{E}_x + 0 \cdot \widetilde{E}_y \\ \widetilde{E}'_y = 0 \cdot \widetilde{E}_x + \mathrm{i} \cdot \widetilde{E}_y \end{cases}$$

于是该波片的琼斯矩阵为

$$\boldsymbol{P}_{-\lambda/4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{bmatrix}$$

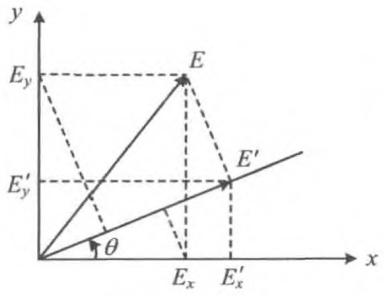


图 6.61 线偏振器

用于起偏的偏振片，是将光变为平面偏振光，针对一般的情形，设偏振片的透振方向（即透光轴）与 x 轴的夹角为 θ（即相对于 x 轴转过 θ 角），设入射光、出射光的琼斯矢量分别为

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \widetilde{E}_x \\ \widetilde{E}_y \end{bmatrix}, \boldsymbol{E}' = \begin{bmatrix} \widetilde{E}'_x \\ \widetilde{E}'_y \end{bmatrix}$$

从图 6.61 可以看出，出射光矢量的大小等于入射光两正交分量在偏振片透振方向上的投影，即

$$|\boldsymbol{E}'| = \tilde{E}_x\cos\theta + \tilde{E}_y\sin\theta$$

则

$$\begin{cases}\tilde{E}'_x = (\tilde{E}_x\cos\theta + \tilde{E}_y\sin\theta)\cos\theta = \tilde{E}_x\cos^2\theta + \tilde{E}_y\sin\theta\cos\theta \\ \tilde{E}'_y = (\tilde{E}_x\cos\theta + \tilde{E}_y\sin\theta)\sin\theta = \tilde{E}_x\sin\theta\cos\theta + \tilde{E}_y\sin^2\theta\end{cases}$$

用矩阵运算表示，为

$$\begin{bmatrix}\tilde{E}'_x \\ \tilde{E}'_y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y\end{bmatrix}$$

于是该偏振片的琼斯矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta\end{bmatrix}$$

自然光透过上述偏振片后变为平面偏振光(线偏振光)，所以偏振片也称作线起偏器。如果让自然光依次通过一个偏振片和一个 $\lambda/4$ 波片，则可以变为圆偏振光，则这种起偏器就是圆起偏器。右旋的圆起偏器，要求将输入的自然光变为右旋圆偏振光，以下求出这类圆起偏器的琼斯矩阵。

这时，偏振片的透振方向应当与波片的光轴成 $\pi/4$ 角。以波片的光轴为坐标轴建立直角坐标系，从偏振片透射的线偏振光的琼斯矢量是 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 \\ \pm 1\end{bmatrix}$，设透振方向在Ⅰ、Ⅲ象限，则琼斯矢量为 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix}$。

再经过 $\lambda/4$ 波片，其快轴沿 y 方向，则出射光的偏振态为

$$\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 \\ -\mathrm{i}\end{bmatrix}$$

为右旋圆偏振光。

则此时的组合元件的琼斯矩阵为

$$\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 \\ 1 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 \\ -\mathrm{i} & -\mathrm{i}\end{bmatrix}$$

但是，这样的装置还不能算是完整的右旋圆起偏器，因为还要求右旋圆起偏器同时还能阻挡左旋圆偏振光输出。所以，要设法将到达偏振片之前的左旋圆偏振光变为Ⅱ、Ⅳ象限的平面偏振光。为此，还需要在偏振片之前再放置一个 $\lambda/4$ 波片，这一波片对自然光不起作用。在逆着 z 轴的正方向看来，左旋圆偏光的 y 分量相位滞后 $\pi/2$，为此，需要它经过波片后 y 方向的分量额外再滞后 $\pi/2$，故此波片的慢轴应当在 y 方向。这样，

左旋圆偏光通过该波片后，变为Ⅱ，Ⅳ象限的平面偏振光，且光的偏振方向与偏振片的透振方向垂直，被偏振片截止。于是琼斯矩阵为

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -\mathrm{i}\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{i}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -\mathrm{i} & -\mathrm{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{i}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & \mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 1\end{bmatrix}$$

这就是右旋圆起偏器，其构成如图 6.62 所示。

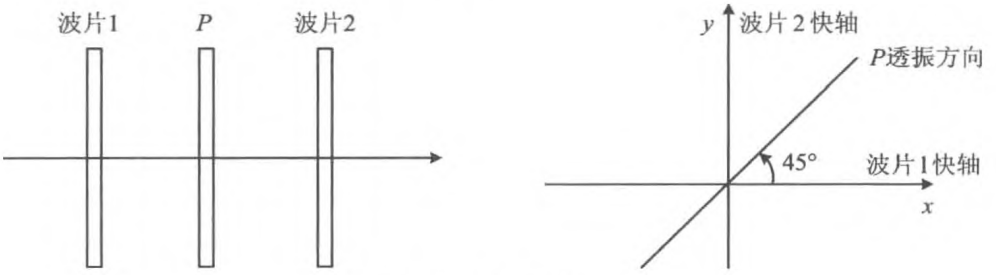


图 6.62 右旋圆起偏器

如果自然光从右侧入射，这时将坐标系的 z 方向为自右向左，于是偏振片的透振方向在Ⅱ，Ⅳ象限，则透射光的琼斯矢量为

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{i}\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{bmatrix}$$

依然是右旋圆偏振光。

可以将各种偏振元件的琼斯矩阵分类排列如表 6.2 所示。

表 6.2 各种偏振元件的琼斯矩阵

偏振元件		琼斯矩阵
起偏器	透振方向为 x	$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$
	透振方向为 y	$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$
	透振方向与 x 轴夹角为 θ	$\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \frac{\sin 2\theta}{2}\\ \frac{\sin 2\theta}{2} & \sin^2\theta\end{bmatrix}$
	透振方向与 x 轴夹角为 $\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

续表

偏振元件		琼斯矩阵
$\frac{\lambda}{4}$ 波片	快轴沿 x 方向	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \mathrm{i}\end{bmatrix}$
	快轴沿 y 方向	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -\mathrm{i}\end{bmatrix}$
	快轴与 x 轴夹角为 $\pm\frac{\pi}{4}$	$\begin{bmatrix}1 & \pm\mathrm{i}\\ \pm\mathrm{i} & 1\end{bmatrix}$
$\frac{\lambda}{2}$ 波片	快轴沿 x 或 y 方向	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$
	快轴与 x 轴夹角为 $\pm\frac{\pi}{4}$	$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$
圆偏振器	右旋	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & \mathrm{i}\\-\mathrm{i} & 1\end{bmatrix}$
	左旋	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -\mathrm{i}\\\mathrm{i} & 1\end{bmatrix}$

6.4.4　典型问题与基本解题方法

【例 6.38】　右旋椭圆偏振光射入 $\lambda/4$ 波片，用 θ 表示该椭圆长轴与波片快轴间的夹角，问当 $\theta=0$ 和 $\theta=45^\circ$ 时，出射光的偏振态怎样？

解　为表达方便，可取坐标轴的方向与椭圆长短轴的方向一致，不妨使椭圆长轴沿 x 方向，则此时右旋椭圆偏振光的琼斯矢量为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\begin{bmatrix}1\\ \gamma\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\begin{bmatrix}1\\ -\mathrm{i}\gamma\end{bmatrix}\qquad(\gamma<1)$$

$\theta=0$ 时，波片的琼斯矩阵为 $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \mathrm{i}\end{bmatrix}$，出射光为

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{i}\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\begin{bmatrix}1\\ -\mathrm{i}\gamma\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\begin{bmatrix}1\\ \gamma\end{bmatrix}$$

为Ⅰ，Ⅲ象限的平面偏振光。

$\theta=45^\circ$时，波片的琼斯矩阵为$\begin{bmatrix}1 & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 1\end{bmatrix}$，出射光为

$$\begin{bmatrix}1 & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\begin{bmatrix}1\\ -\mathrm{i}\gamma\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\begin{bmatrix}1+\gamma\\ \mathrm{i}(1-\gamma)\end{bmatrix}$$

而$1-\gamma>1$，为左旋椭圆偏振光。

【例 6.39】 如图 6.63 所示，在由两个 $\lambda/4$ 片和一个偏振片 P 组成的系统中，两 $\lambda/4$ 片的快轴均沿铅直方向(即 y 轴方向)，从系统的右方看去，偏振片 P 的透振方向与 x 轴成 45°角，如图 6.64 所示。由琼斯矩阵法证明，当自然光从左端入射时，从右端出射的为右旋圆偏振光；而当自然光从右端入射时，从左端出射的是左旋圆偏振光。

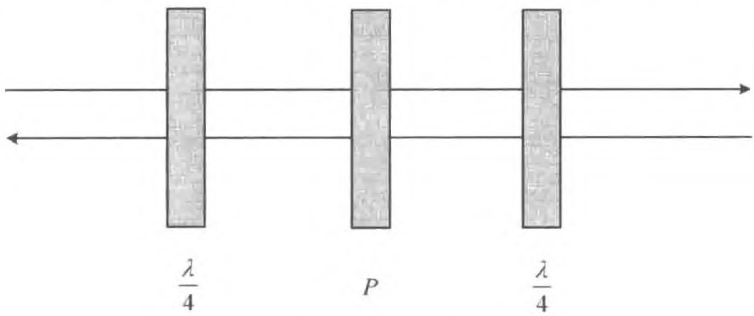


图 6.63 系统组成

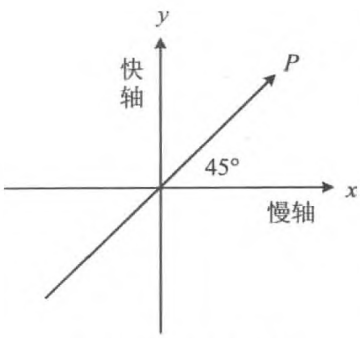


图 6.64 特征方向

分析 用琼斯矩阵求解经过一个光学系统后光的偏振态变化的问题，具有简洁明确的特点。这时只需要写出入射光偏振态的琼斯矢量和光学系统中各个元件的琼斯矩阵，简单地用矩阵相乘的方法就可以得到出射光的琼斯矢量，而不必对每一个元件所引起的偏振态的改变进行讨论。但这种方法也有缺点，由于可以任意引入一个公因子，所以不能计算出出射光两分量的绝对数值。值得提醒的是，在计算过程中应特别注意到整个光学系统只设一个统一的坐标系，即各个元件的 x 轴都是相互平行的，y 轴也是相互平行的。

解　自然光的琼斯矢量为

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta(t)} \end{bmatrix}$$

这是没有归一化的琼斯矢量，其中的 $\delta(t)$ 随时间 t 做无规则变化。

在本例所讨论的系统中，当取 z 轴的正向向右时，其他元件（从左向右）的琼斯矩阵依次是

$\frac{\lambda}{4}$ 片：

$$\boldsymbol{G}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

偏振片 P：

$$\boldsymbol{G}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\frac{\lambda}{4}$ 片：

$$\boldsymbol{G}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

对于从左端入射的光，系统的琼斯矩阵为

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}_3\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{G}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & -1 \end{bmatrix}$$

于是从右端出射的光的琼斯矢量为

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \boldsymbol{G}\begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta(t)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta(t)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 - \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta(t)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

消去公因子，得到

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

这正是右旋圆偏振光的琼斯矢量。读者可以用同样的方法验证从左端入射的线偏振光和左旋圆偏振光从右端出射时，也是右旋圆偏振光。

当光从右端入射时，光学系统的坐标系必须改变，z 轴的正向向左，为了满足右手坐标系的要求，则 x，y 轴的正向也作相应的调整，最后，P 的透振方向由原来的Ⅰ，Ⅲ象限变为Ⅱ，Ⅳ象限，相应的琼斯矩阵变为：

偏振片 P：

$$\boldsymbol{G}_2' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

此时系统的琼斯矩阵为

$$\boldsymbol{G}' = \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_2'\boldsymbol{G}_3 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -\mathrm{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -\mathrm{i}\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & -1\end{bmatrix}$$

从左端出射的光，其琼斯矢量为

$$\begin{bmatrix}E_x'\\ E_y'\end{bmatrix} = \boldsymbol{G}'\begin{bmatrix}1\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta(t)}\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta(t)}\end{bmatrix} = \frac{1}{2}(1+\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta(t)})\begin{bmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix}E_x'\\ E_y'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{bmatrix}$$

是左旋圆偏振光的琼斯矢量。

【例 6.40】 两晶片由同种材料制成，第一块晶片的快慢轴平行于晶片表面，厚度为 d；第二块晶片为 $\lambda/4$ 片。两晶片的快轴间夹角为 45°，波长为 λ 的线偏振光垂直射向第一晶片，然后从第二晶片出射，入射光的振动平面与 $\lambda/4$ 片的快轴方向一致。求出第二晶片射出的光的偏振态。

分析 本例采用琼斯矩阵法求解，过程与上例类似。

解 取 z 轴正方向沿光的传播方向，自左至右。x 轴为第一块晶片的快轴方向，$\lambda/4$ 片的快轴与 x 轴夹角为 45°，如图 6.65 所示。

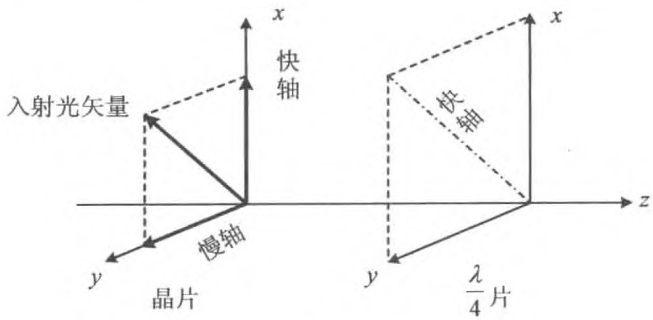


图 6.65 晶体的方向

于是第一块晶片的琼斯矩阵为

$$\boldsymbol{G}_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}\end{bmatrix}$$

其中，$\delta = \dfrac{2\pi}{\lambda}|n_o - n_e|d$，为经过第一块晶片后快慢光之间的附加相位差。

由琼斯矩阵理论，可以计算出快轴与 x 轴间夹角为 α 的 $\lambda/4$ 片的琼斯矩阵为

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \mathrm{i}\sin^2\alpha & \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha(1-\mathrm{i}) \\ \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha(1-\mathrm{i}) & \sin^2\alpha + \mathrm{i}\cos^2\alpha \end{bmatrix}$$

在本题中，当 $\alpha = 45^\circ$ 时，有

$$\boldsymbol{G}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i}) & \dfrac{1}{2}(1-\mathrm{i}) \\ \dfrac{1}{2}(1-\mathrm{i}) & \dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i}) \end{bmatrix}$$

为简洁起见，可以将上述矩阵中矩阵元的公因子 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})$ 除去，于是得到等效的琼斯矩阵为

$$\boldsymbol{G}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}$$

则系统的琼斯矩阵为

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}_2\boldsymbol{G}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} \\ -\mathrm{i} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} \end{bmatrix}$$

入射光的电矢量与 x 轴间夹角为 45°，则入射光的琼斯矢量为

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

出射光的琼斯矢量为

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \boldsymbol{G}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} \\ -\mathrm{i} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} \\ -\mathrm{i}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\delta-\frac{\pi}{2}\right)} \\ \mathrm{i}\left(-1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\delta-\frac{\pi}{2}\right)}\right) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\delta-\frac{\pi}{2}\right)}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\delta-\frac{\pi}{2}\right)}-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\delta-\frac{\pi}{2}\right)} \\ \mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\delta-\frac{\pi}{2}\right)}-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\delta-\frac{\pi}{2}\right)}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\delta-\frac{\pi}{2}\right)}\begin{bmatrix} \cos\dfrac{1}{2}\left(\delta-\dfrac{\pi}{2}\right) \\ -\sin\dfrac{1}{2}\left(\delta-\dfrac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\delta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\begin{bmatrix} \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\delta}{2}\right) \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\delta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

出射光是平面偏振光，其振动方向与 x 轴之间的夹角为

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2}$$

即

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{\lambda} \mid n_o - n_e \mid d$$

6.5 旋　光

将石英晶体加工成光轴垂直于表面的薄片，线偏光沿着其光轴方向入射，出射光的振动面将旋转过一个角度，这一现象称作旋光。

通过晶体后，电矢量 $\boldsymbol{E}$ 转过的角度 θ 与晶体的厚度 l 成正比，即

$$\theta = \alpha l$$

其中，α 是与晶体有关的常数，称作旋光本领，或旋光率。该常数通常与光的波长有关，即可表示为

$$\alpha = \alpha(\lambda)$$

如果白光入射，则出射光中，不同波长成分的电矢量 $\boldsymbol{E}$ 转过的角度不同，如果用检偏器观察，就会发现在不同的角度处有不同颜色的光射出，这一现象称作旋光色散。

某些溶液也有明显的旋光特性，例如，蔗糖溶液中，线偏振光的光矢量转过的角度可表示为

$$\theta = \alpha N l$$

其中，α 与溶液的种类有关，称作比旋光率，而 N 为溶液的浓度。$\alpha>0$，取正值表示右旋。由于溶液都是各向同性的，因而同一种类的溶液，使光矢量都向同一方向旋转。

菲涅耳用非常简单的模型解释了旋光现象，他认为，线偏振光可以看做是两列同方向传播的旋转方向相反的同频率圆偏振光的合成，这两列圆偏振光在各处都以相同的频率旋转，则合成的平面偏振光就在同一个平面内振动。

在同一种旋光介质中，右旋光和左旋光的折射率 n_L 和 n_R 不同，因而其波矢 k_L 和 k_R 也不同。经过相同的距离，左旋圆偏振光和右旋圆偏振光角度的滞后不同，因而合成的平面偏振光的偏振方向不再沿原来的方向，而是转过一个角度。

【例 6.41】 钠光以最小偏向角射入顶角为 60°的石英晶体棱镜，棱镜的光轴与底平行。求出射的左、右旋圆偏光之间的夹角。

解 对于右旋石英，$n_L>n_R$，右旋圆偏光为最小偏向角。如图 6.66 所示，可以得到入射角

$$\sin\theta_1 = n_R \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} n_R$$

$$\sin i_{L1} = \frac{\sin\theta_1}{n_L} = \frac{n_R}{2n_L}$$

$$i_{L2} = \alpha - i_{L1} = 60^\circ - \arcsin\left(\frac{n_R}{2n_L}\right)$$

$$\sin\theta_2 = n_L \sin i_{L2} = n_L \sin\left[60^\circ - \arcsin\left(\frac{n_R}{2n_L}\right)\right]$$

$$= n_L\left\{\sin 60^\circ \cos\left[\arcsin\left(\frac{n_R}{2n_L}\right) - \cos\left(60^\circ \frac{n_R}{2n_L}\right)\right]\right\}$$

$$= n_L \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{n_R}{2n_L}\right)^2} - \frac{n_R}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4n_L^2 - n_R^2} - \frac{n_R}{4}$$

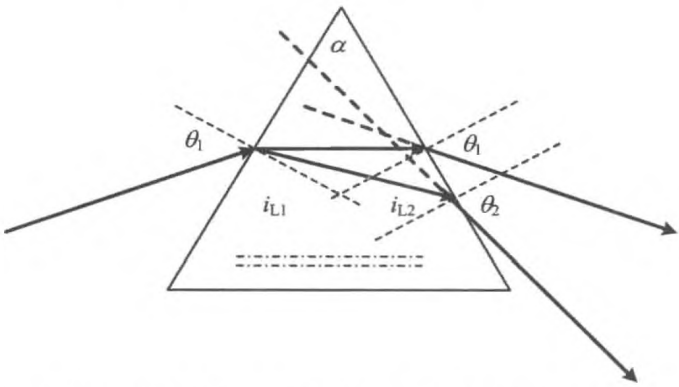


图 6.66　石英晶体棱镜中的左旋圆偏振光和右旋圆偏振光

出射的左旋、右旋圆偏振光之间的夹角为

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4n_L^2 - n_R^2} - \frac{n_R}{4}\right) - \arcsin\left(\frac{n_R}{2}\right)$$

同理，对左旋石英，

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4n_R^2 - n_L^2} - \frac{n_L}{4}\right) - \arcsin\left(\frac{n_L}{2}\right)$$

【例 6.42】　厚度为 1 mm 的沿垂直于光轴方向切出的石英片放在正交偏振片之间，为什么无论入射光的波长为何值，晶片总是亮的？

解　查表可知，对于可见光，石英的旋光率为 13～55°/mm。对于 1 mm 的石英片，线偏光的旋转角是 13～55°，总能通过第二个偏振片。

【例 6.43】　厚度为 1 mm 的沿垂直于光轴方向切出的石英片放在平行的尼科耳棱镜之间，对某一波长的光偏振面旋转 20°，问当石英晶片的厚度为多少时，该波长的光将完全消失？

解 只需转过 90°即可。石英的厚度为

$$d = \frac{90}{\alpha} = \frac{90}{20} = 4.5\,(\text{mm})$$

【例 6.44】 两尼科耳棱镜之间插入一块石英旋光片，以消除对眼睛最敏感的黄绿光(550 nm)，石英对这一波长的光的旋光率为 24°/mm，求下列情形下晶片的厚度：

(1) 两尼科耳棱镜的主截面正交；

(2) 两尼科耳棱镜的主截面平行。

解 (1) 转过 $j\times180°$，厚度为

$$d = \frac{180}{24}j = 7.5j\,(\text{mm})$$

(2) 转过 $(j+1/2)\times180°$，厚度为

$$d = \frac{j+\dfrac{1}{2}}{24}\times180 = 7.5(j+0.5)\,(\text{mm})$$

【例 6.45】 一表面垂直于光轴的水晶片恰好抵消 10 cm 长度的浓度为 20%的麦芽糖溶液对钠光偏振面所引起的旋转。对此波长水晶的旋光率为 $\alpha = 21.75°/\text{mm}$，麦芽糖的比旋光率为 $[\alpha] = 144°/(\text{dm}\cdot\text{g}\cdot\text{cm}^{-3})$，求此水晶片的厚度。

解 根据题中条件，可得 $\alpha_1 d_1 = \alpha_2 N_2 d_2$，因而水晶片的厚度为

$$d_1 = \frac{\alpha_2 N_2 d_2 + j\pi}{\alpha_1} = \frac{14.4\times20\%\times10+180j}{21.75} = (1.324+8.726j)\,(\text{mm})$$

【例 6.46】 将 16.5 g 的蔗糖溶于水，得到 60 cm^3 的溶液。在 15 cm 的量糖计中测得钠光偏振面的旋转角为向右 16.8°，已知 $[\alpha] = 6.65°/(\text{cm}\cdot\text{g}\cdot\text{cm}^{-3})$，该蔗糖样品中有多大比例的非旋光杂质？

解 设其中非旋光杂质的比例为 β，则旋过的角度为 $\varphi = \alpha N(1-\beta)d$，于是

$$\beta = 1-\frac{\varphi}{\alpha N d} = 1-\frac{16.8}{6.65\times\dfrac{14.50}{60}\times15} = 1-0.697 = 30.3\%$$

第 7 章　光的量子性

光与微观体系相互作用的过程中，表现出显著的粒子特性。这种情况下，应当用量子理论来描述光的行为。

光的量子性结论是建立在一系列物理实验的基础之上的。

7.1　黑 体 辐 射

黑体是对电磁辐射全吸收、不反射的物体。

黑体中的带电粒子由于作随机的热运动而向外辐射电磁波。

1．斯特藩—玻尔兹曼定律

温度均匀的物体通过其单位面积表面辐射的电磁波的功率为

$$\Phi = \sigma T^4 \tag{7.1}$$

式中，T 是物体的温度，$\sigma = 5.670 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2 \cdot K^4)}$，称作斯忒藩—玻尔兹曼常数。

2．维恩位移定律

$$\lambda_m = \frac{b}{T} \tag{7.2}$$

式中，$b = 2.90 \times 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}$，是普适常数，$\lambda_m$ 是黑体在绝对温度 T 时，与单色辐射本领最大值对应的辐射波长。

3．普朗克黑体辐射公式

$$E(\nu, T) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \tag{7.3}$$

式中，k 是玻尔兹曼常数，h 为普朗克常数，$E(\nu, T)$是黑体在频率 ν 处、温度 T 下的单色辐射本领（又称单色辐出度）。

7.2 光电效应

光电子的动能为 E_k，光子的能量为 $h\nu$，金属的逸出功为 W，三者之间的关系为

$$h\nu = W + E_k \tag{7.4}$$

7.3 康普顿效应

在康普顿散射中，被散射的光子的波长大于入射光子波长，波长的改变量为

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta) = \frac{2h}{m_0 c}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\lambda_C \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{7.5}$$

式中，θ 为光子的散射角，m_0 为电子的静止质量，$\lambda_C = \frac{h}{m_0 c}$ 称为电子的康普顿波长。

7.4 光的波粒二象性

光子的能量

$$\varepsilon = h\nu$$

光子的动量

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

光子的质量

$$m = \frac{h\nu}{c^2}$$

7.5　典型问题与基本解题方法

在普通物理的光学范畴，量子光学的主要问题是黑体辐射或者类黑体辐射问题；光子的辐射和吸收问题；光子与微观粒子相互作用时，光子或微观粒子状态（例如能量、动量、频率、波长等）的改变以及微观粒子的衍射特征等问题。

通常利用黑体辐射的特性解题，或者利用光子、微观粒子的波粒二象性关系解题，或者利用相互作用过程中能量、动量等守恒关系解题

【例 7.1】 若视黑体的辐射腔为边长为 a 的立方体金属盒，试求腔中单位体积内、频率 ν 附近单位频率间隔内电磁驻波振子的数目。

分析　这是瑞利—金斯解释黑体辐射的基础，利用驻波的边界条件求解金属盒内麦克斯韦方程组即可。

解　本题是定态电磁场的问题，相应的麦克斯韦方程组为

$$(\nabla^2 + \boldsymbol{k}^2)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{2}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{3}$$

将方程(1)写为分量表达式，即

$$(\nabla^2 + \boldsymbol{k}^2)E_x = 0$$

$$(\nabla^2 + \boldsymbol{k}^2)E_y = 0$$

$$(\nabla^2 + \boldsymbol{k}^2)E_z = 0$$

用分离变量法，即设

$$E_x = E_x(x)E_x(y)E_x(z)$$

可得到

$$\frac{1}{E_x(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 E_x(x)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{E_x(y)} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 E_x(y)}{\mathrm{d}y^2} + \frac{1}{E_x(z)} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 E_x(z)}{\mathrm{d}z^2} + k^2 = 0$$

设

$$\boldsymbol{k} = k_x \boldsymbol{e}_x + k_y \boldsymbol{e}_y + k_z \boldsymbol{e}_z$$

则

$$k^2 = k_x^2 + k_x^2 + k_x^2 = \left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^2$$

进一步得到

$$\frac{\mathrm{d}^2E_x(x)}{E_x(x)\mathrm{d}x^2}+k_x^2=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2E_x(y)}{E_x(y)\mathrm{d}y^2}+k_y^2=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2E_x(z)}{E_x(z)\mathrm{d}z^2}+k_z^2=0$$

则可得到通解的形式为

$$E_x(x)=A_{x1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_xx}+B_{x1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_xx}$$

或

$$E_x(x)=A_{x1}\cos k_xx$$

或者

$$E_x(x)=A_{x1}\sin k_xx$$

$E_x(y)$,$E_x(z)$有相同的形式,不妨将 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$的解写作

$$\begin{cases}E_x=A_1\cos k_xx\sin k_yy\sin k_zz\\E_y=A_2\sin k_xx\cos k_yy\sin k_zz\\E_z=A_3\sin k_xx\sin k_yy\cos k_zz\end{cases}\tag{4}$$

其中

$$k^2=k_x^2+k_x^2+k_x^2=\left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^2\tag{5}$$

k_x,k_y,k_z 为波矢的三个分量。

由金属盒的边界条件,即在腔壁处上述电场强度均为零,于是有

$$\begin{cases}k_x=\dfrac{n_x\pi}{a}\\k_y=\dfrac{n_y\pi}{a}\\k_z=\dfrac{n_z\pi}{a}\end{cases}\tag{6}$$

其中,n_x,n_y,n_z 都是正整数,即 n_x,n_y,$n_z=1,2,3,\cdots$。

式(4)告诉我们在金属盒内电磁场以驻波的形式存在,这些驻波也称驻波振子。将式(4)代入式(2),得

$$k_xA_1+k_yA_2+k_zA_3=0\tag{7}$$

其中,$A_i(i=1,2,3)$是三个可变常数,由于必须满足式(7),故只有两个是独立的,即对于给定的每一组(n_x,n_y,n_z)的数值,可以有两种不同的驻波,即有两个驻波振子。

为了计算出腔内驻波振子的数目，我们在波矢 $\boldsymbol{k}$ 空间进行讨论。以波矢 $\boldsymbol{k}$ 的三个分量 k_x, k_y, k_z 构建直角坐标系，如图 7.1 所示，以 $\frac{\pi}{a}$ 为单位长度，则坐标轴上的整数刻度为 n_x, n_y, n_z，即每一组 (n_x, n_y, n_z) 对应于波矢空间的一个点，称作格点。由于上述 n_x, n_y, n_z 都是正整数，所以只在第一象限讨论即可。

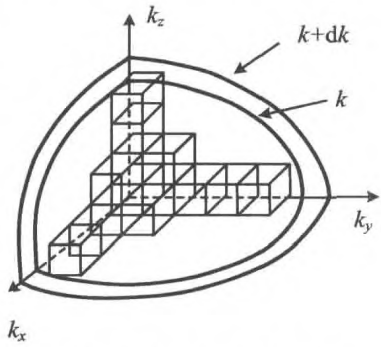


图 7.1　k 空间的坐标系

可以将上述空间以单位长度的立方体填满，每个立方体的顶点都位于整数刻度的位置，则可以看出，由于每个格点周围有 8 个立方体，而每个立方体又有 8 个格点作为其顶点，故格点数目与立方体的数目是相等的。

由式(5)、式(6)，得到

$$k^2 = \left(\frac{n_x\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_z\pi}{a}\right)^2 = \left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^2$$

即

$$\left(\frac{n_x}{k}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{k}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{k}\right)^2 = \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \tag{8}$$

为波矢空间的球面方程。即频率 ν 或波矢数值 k 相同的驻波振子位于波矢空间中的球面上，而计算处于 $k \sim k + \mathrm{d}k$ 内振子的数目，就相当于计算处于半径 $k \sim k + \mathrm{d}k$ 的球壳中格点(或单位边长的小立方体)的数目。容易算得

$$N_k \mathrm{d}k = \frac{1}{8} \times \frac{4\pi k^2 \mathrm{d}k}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^3} \times 2$$

利用关系式 $k = \frac{\omega}{c}$，可得到

$$N_k \mathrm{d}k = \frac{\omega^2 a^3}{\pi^2 c^3}\mathrm{d}\omega = \frac{\omega^2 V}{\pi^2 c^3}\mathrm{d}\omega \tag{9}$$

单位体积中的振子数，即振子的空间数密度为

$$n_k \mathrm{d}k = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\mathrm{d}\omega$$

将 k 以 ν 代替，注意到 $k = \frac{2\pi\nu}{c}$，$\omega = 2\pi\nu$ 则频率在 $\nu \sim \nu + \mathrm{d}\nu$ 间的驻波振子的数密度为

$$n_k \mathrm{d}\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\mathrm{d}\nu \tag{10}$$

而在 ν 附近单位频段内的驻波振子的数密度为

$$n_k = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \tag{11}$$

【例 7.2】 根据太阳辐射特有的光谱成分，认为其接近绝对黑体的辐射，假设太阳光辐射的峰值波长为 480 nm，求太阳表面的温度以及太阳由于辐射每秒钟消耗的质量。

解 根据维恩位移定律，可得太阳表面的温度为

$$T = \frac{b}{\lambda_m} = \frac{2.90 \times 10^{-3}}{480 \times 10^{-9}} = 6.04 \times 10^3 (\mathrm{K})$$

太阳的辐射功率为

$$P = 4\pi R^2 \Phi = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

按照爱因斯坦质能关系，辐射的能量由质量转化而来，因而太阳质量消耗的速度为

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{P}{c^2} = \frac{4\pi R^2 \sigma T^4}{c^2} = 7 \times 10^9 (\mathrm{kg/s})$$

【例 7.3】 现在，地球的平均温度为 $T = 287$ K，若太阳到地球的平均距离减少 1%，则地球的平均温度将变为多少？

分析 本题是关于黑体的热辐射问题，用斯特藩—玻尔兹曼定律和热平衡规律考虑；也可以将地球视作灰体。

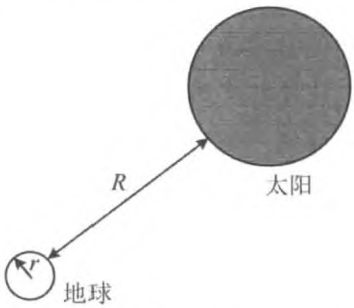


图 7.2 地球吸收太阳的辐射

解 把太阳和地球视为黑体，设太阳到地球的距离为 R，地球半径为 r，见图 7.2，太阳的辐射功率为 P。在地球达到热平衡时，即所吸收的太阳辐射的功率与其本身所辐射的功率相等时，并且忽略热辐射之外的其他热传导形式，有

$$\frac{P}{4\pi R^2} \cdot \pi r^2 = 4\pi r^2 \sigma T^4 \tag{1}$$

由式(1)可知 $T \propto \sqrt{\frac{1}{R}}$，即 $T = C_0 R^{-\frac{1}{2}}$，这里 C_0 为与距离 R 无关的常数。对式(1)两端取微分，可得

$$\mathrm{d}T = -\frac{C_0}{2} R^{-\frac{3}{2}} \mathrm{d}R$$

或

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} = -\frac{1}{2} \times \frac{\mathrm{d}R}{R} \tag{2}$$

于是

$$T' = T + \mathrm{d}T = T\left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{\mathrm{d}R}{R}\right) = 287\left(1 - \frac{1}{2} \times 1\%\right) = 285.6\,(\mathrm{K})$$

另解：把地球看做灰体，忽略热辐射之外的其他热传导形式，则热平衡时，有

$$(1 - \gamma')\frac{P}{4\pi R^2} \cdot \pi r^2 = 4\pi r^2 \varepsilon \sigma T^4 \tag{3}$$

式中，γ'为地球表面的光强反射率，ε 为发射系数，当温度变化较小时，ε 可视为常数，则仍然有

$$T \propto \sqrt{\frac{1}{R}}$$

所得结果应当与前面的解法相同。

【例 7.4】 如图 7.3 所示，一个半径 $R_1 = 40$ cm 的大水桶，盛有 100 ℃的水，原来外面罩有一个半径为 $R_3 = 60$ cm 的圆筒，其温度保持在 0 ℃。在两筒之间再插入一个半径 $R_2 = 50$ cm 的圆桶，桶的表面都涂黑，可看做是黑体，忽略筒间的空气流动和空气导热，试求：

(1) 达到热平衡后，中间筒的温度；

(2) 在插入中间圆筒后，筒间能量流动的变化。

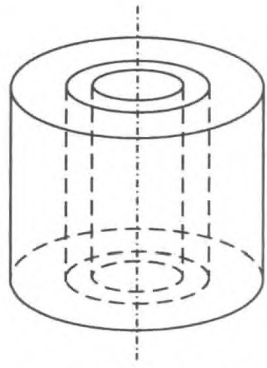


图 7.3　三层圆筒

分析　将各个圆筒看做黑体，利用斯特藩—玻尔兹曼定律和热平衡规律，用中间圆筒的热平衡条件求解。

解　(1) 达到热平衡时，设三个筒的温度依次为 T_1，T_2，T_3，由于其吸热与放热相等，于是有

$$\sigma T_1^4 2\pi R_1 H + \sigma T_3^4 2\pi R_3 H = 2\sigma T_2^4 2\pi R_2 H \tag{1}$$

其中，H 为筒的高度。式(1)整理后，为

$$2T_2^4 R_2 = T_1^4 R_1 + T_3^4 R_3 \tag{2}$$

即

$$T_2 = \sqrt[4]{T_1^4 \frac{R_1}{2R_2} + T_3^4 \frac{R_3}{2R_2}} = \sqrt[4]{373^4 \times \frac{40}{100} + 273^4 \times \frac{60}{100}} = 324.4\,(\mathrm{K})$$

(2) 原来半径为 $r(R_1 < r < R_2)$处的能流为

$$s = \frac{\sigma T_1^4 2\pi R_1}{2\pi r} - \frac{\sigma T_3^4 2\pi R_3}{2\pi r} = \frac{\sigma T_1^4 R_1 - \sigma T_3^4 R_3}{r} \tag{3}$$

增加了中间筒之后的能流为

$$s' = \frac{\sigma T_1^4 2\pi R_1}{2\pi r} - \frac{\sigma T_2^4 2\pi R_2}{2\pi r} = \frac{\sigma T_1^4 R_1 - \sigma T_2^4 R_2}{r} \tag{4}$$

增加了中间筒前后的能流之比为

$$\frac{s'}{s} = \frac{T_1^4 R_1 - T_2^4 R_2}{T_1^4 R_1 - T_3^4 R_3} \tag{5}$$

由式(2)可知

$$T_2^4 R_2 = \frac{1}{2}(T_1^4 R_1 + T_3^4 R_3) \tag{6}$$

将式(6)代入式(5),可得

$$\frac{s'}{s} = \frac{1}{2}$$

可见,真空多层隔热的效果明显优于单侧真空隔热。

【例 7.5】 对某一黑体进行加热,在此过程中,测得此黑体的单色辐射本领最强的波长由开始时的 690 nm 变为最终的 500 nm,试求:

(1) 黑体的温度升高了多少?

(2) 其总辐射本领增加的倍数。

分析 此题是将维恩位移定律与斯特藩—玻尔兹曼定律联合起来进行求解,先求出温度的变化,再由温度计算出总辐射本领的变化。

解 (1) 由维恩位移定律,可知

$$T_1 = \frac{b}{\lambda_{m1}} = \frac{2.90 \times 10^{-3}}{690 \times 10^{-9}} = 4\,203\ (\mathrm{K})$$

$$T_2 = \frac{b}{\lambda_{m2}} = \frac{2.90 \times 10^{-3}}{500 \times 10^{-9}} = 5\,800\ (\mathrm{K})$$

加热过程中黑体的温度增加了

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 1\,597\ \mathrm{K}$$

(2) 由斯特藩—玻尔兹曼定律,黑体的总辐射本领为

$$R = \sigma T^4$$

于是

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{T_2^4}{T_1^4} = \left(\frac{5\,800}{4\,203}\right)^4 = 3.63\ (\text{倍})$$

即加热前后黑体的总辐射本领增加了 3.63 倍。

【例 7.6】 有两个内表面是完全反射面的空腔,开有直径相同的小孔,如图 7.4 所示,孔径 $d = 1.0$ cm,两小孔平行面相对,小空间的距离为 $l = 10$ cm。维持空腔 1 中的温度为 $T_1 = 1\,700$ K,计算出空腔 2 中的温度。

解 由于空腔 1 是余弦辐射体,若设 θ 为辐射方向和小孔法向之间的夹角,则辐射光强应当是

$$I = I_0 \cos\theta \tag{1}$$

又，小孔向 2π 立体角辐射的总功率等于黑体的总辐射本领与小孔面积的乘积，于是有

$$\iint_S I\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_0\cos\theta\sin\theta l^2\mathrm{d}\theta = \sigma T_1^4 S \tag{2}$$

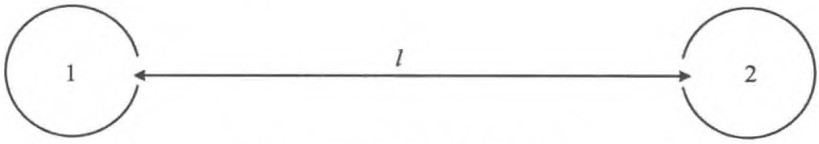


图 7.4　两开口相对的空腔辐射体

式(2)中，S 为小孔的面积，l 为两孔间的距离。

将式(2)两端积分后，得到

$$I_0\pi l^2 = \sigma T_1^4 S \tag{3}$$

其中，I_0 为沿小孔法线方向的辐射光强，其大小为

$$I_0 = \frac{\sigma T_1^4 S}{\pi l^2} \tag{4}$$

对于空腔而言，当达到热平衡时，有

$$I_0 S = \frac{\sigma T_1^4 S^2}{\pi l^2} = \sigma T_2^4 S \tag{5}$$

上式右端为空腔 2 的热辐射能量，将 $S=\frac{\pi d^2}{4}$ 代入式(5)，得到

$$T_2 = T_1\sqrt{\frac{d}{2l}} = 400\ \mathrm{K}$$

【例 7.7】 有两个绝对黑的热辐射源，其中一个的温度为 $T_1 = 2\,500$ K，如果第二个辐射源的单色辐射本领极大值所对应的波长比第一个辐射体的单色辐射本领极大值所对应的波长大 $\Delta\lambda = 500$ nm，求第二个辐射源的温度。

解　根据维恩位移定律可得 $\lambda_1 = \frac{b}{T_1}$，$T_2 = \frac{b}{\lambda_1 + \Delta\lambda}$，于是可得

$$T_2 = \frac{b}{\frac{b}{T_1} + \Delta\lambda} = \frac{bT_1}{b + \Delta\lambda T_1} = 1.75\times 10^3\ \mathrm{K}$$

【例 7.8】 波长为 400 nm 的光照射在功函数为 2.48 eV 的材料的表面上，试求：

(1) 由该表面发射的光电子的最大动能；

(2) 光的截止波长是多少？

解　(1)　　$E_k = h\nu - W = 0.998\times 10^{-19}$ J

(2) $$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{hc}{W} = 7.00 \times 10^{-7}\ \text{m}$$

【例 7.9】 利用守恒定律证明，自由电子不能完全吸收光子。

分析 微观体系中的相互作用也应当遵循能量守恒和动量守恒定律，所以假设一个光子被一个电子完全吸收，则可以写出相应的守恒关系式，如果求解此关系式得到了没有物理意义的结果，则说明上述过程实际上不可能发生。

证明 设在一个相对于碰撞前自由电子静止的坐标系中，一个光子被此电子完全吸收，则能量守恒和动量守恒定律可以写作

$$\hbar\omega + m_0 c^2 = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1}$$

$$\frac{\hbar\omega}{c} = mv = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2}$$

其中，m_0，m 分别为自由电子的静止质量和运动质量，而两者关系为

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

将式(2)代入式(1)，得到

$$\frac{m_0 cv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{3}$$

整理后，得到

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c - v}{c} \tag{4}$$

两端平方后，变为

$$v^2 - cv = 0 \tag{5}$$

结果为电子的速度 $v = 0$ 或 $v = c$，而这两个结果都没有物理意义，所以一个自由电子不可能完全吸收一个光子。

【例 7.10】 设一 20 keV 的中子束经过一直径为 0.07 Å 的小圆孔，试求中子圆孔衍射主极大方向的半角宽度(中子的质量为 1.67×10^{-27} kg)。

分析 由德布罗意波粒二象性关系式，求出中子的波长，利用圆孔衍射公式，即可得到相应的结果。

解 按照非相对论力学处理，由 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$，得到

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} \tag{1}$$

将上式代入德布罗意物质波公式

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = 0.02\,(\text{nm}) \tag{2}$$

圆孔衍射艾里斑的半角宽度为

$$\Delta\theta_0 = 1.22\frac{\lambda}{d} = 0.35\,(\text{rad}) = 2^\circ \tag{3}$$

【例 7.11】 试证明：以速度 v 运动的原子所发射光子的频率 ν' 与同一原子静止时发射光子的频率 ν 之间满足多普勒关系。

分析 原子发射光子的过程遵循能量守恒和动量守恒定律，利用德布罗意的波粒二象性关系式可以导出上述频率 ν' 与 ν 之间的关系式，这也是利用光子理论推导多普勒关系的一种方法。

证明 (1) 静止原子的光辐射过程。



图 7.5　光子与原子的动量

设 $\boldsymbol{P}'$ 为原子发射光子所获得的反冲动量，$\boldsymbol{p}_\varphi$ 为所发射的光子的动量，如图 7.5 所示，则有守恒定律，可得到

$$\boldsymbol{P}' - \boldsymbol{p}_\varphi = 0 \tag{1}$$

$$M_0c^2 = c\sqrt{P'^2 + M_0'^2c^2} + cp_\varphi \tag{2}$$

式中，M_0，M_0' 分别为原子处于激发态(发射前)和基态(发射后)时的静止质量。式(2)中利用了相对论的动能关系式

$$E^2 = P'^2c^2 + M_0'^2c^4$$

式(1)可写作标量形式

$$P'^2 = p_\varphi^2 \tag{3}$$

将式(3)代入式(2)，消去 P' 后，可得

$$p_\varphi = \frac{h\nu}{c} = \frac{M_0^2 - M_0'^2}{2M_0}c$$

或者改写作

$$2M_0p_\varphi = (M_0^2 - M_0'^2)c \tag{4}$$

(2) 运动原子的光辐射过程。

设$(\boldsymbol{P},E)$、$(\boldsymbol{P}',E')$分别代表发射光子之前、发射光子之后原子的动量和能量，$(\boldsymbol{p}'_\varphi,cp'_\varphi)$代表光子的动量和能量。则由守恒定律，有以下关系式

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}'+\boldsymbol{p}_\varphi\\ E=E'+cp'_\varphi\end{cases}$$

为计算方便，可写作

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}_\varphi\\ E=E'+cp'_\varphi\end{cases}$$

分别将上述两式的两端平方，然后相减，则有

$$\frac{E'^2}{c^2}-P'^2=\frac{E'^2}{c^2}-P^2-2p'_\varphi\left(\frac{E}{c}-P\cos\theta\right)$$

其中，θ为原子原来运动方向与所发射光子方向间的夹角。将相对论的能量和动量关系式

$$E^2=P^2c^2+M_0^2c^4$$
$$E'^2=P'^2c^2+M_0'^2c^4$$

代入上式，可得到

$$M'_0c^2=M_0c^2-2p'_\varphi\left(\frac{E}{c}-P\cos\theta\right)\tag{5}$$

将式(5)与式(4)对比，有

$$2M_0p_\varphi=2p'_\varphi\left(\frac{E}{c}-P\cos\theta\right)$$

即

$$p'_\varphi=p_\varphi\frac{M_0c}{\frac{E}{c}-P\cos\theta}\tag{6}$$

再将相对论能量公式

$$E=\frac{M_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

和动量公式

$$P=\frac{M_0v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

代入式(6)，有

$$p'_{\varphi} = p_{\varphi}\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta} \tag{7}$$

由于 $p'_{\varphi} = h\nu'/c$，$p_{\varphi} = h\nu/c$，最后得到

$$\nu' = \nu\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta} \tag{8}$$

式(8)即为光的多普勒效应关系式。

当 $\theta = 0$ 时

$$\nu' = \nu\frac{\sqrt{1+\frac{v}{c}}}{\sqrt{1-\frac{v}{c}}}$$

即观察者与运动原子相对运动时，观察到光的频率较相对静止时变大，称作频率“蓝移”。

当 $\theta = \pi$ 时

$$\nu' = \nu\frac{\sqrt{1-\frac{v}{c}}}{\sqrt{1+\frac{v}{c}}}$$

观察者与光源背向运动，频率变小，称作频率“红移”。

【例 7.12】 证明：电子的动能若取非相对论的表达式(即 $E_k = p^2/2m$)，那么康普顿移动有以下表达式：

$$\lambda' - \lambda = \left(1-\frac{h\nu - h\nu'}{2mc^2}\right)^{-1}\frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

并证明当发射电子的速度远小于 c 时，上述方程与 $\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$一致。

证明　如图 7.6 所示，由能量守恒和动量守恒定律，即

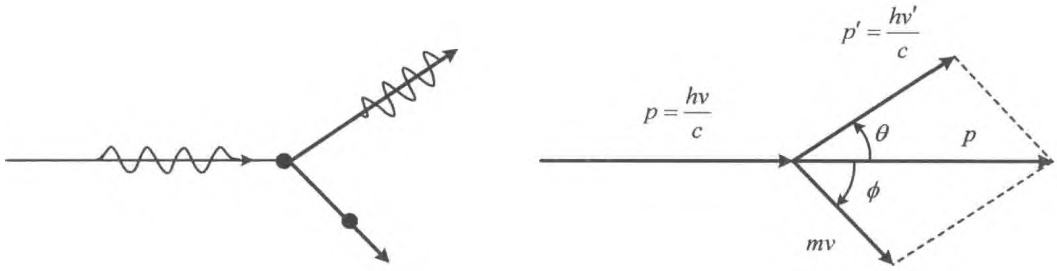
$$h\nu = h\nu + \frac{P_e^2}{2m} \tag{1}$$

$$p_{\varphi} = p'_{\varphi} + p_e \tag{2}$$

由式(2)，得到

$$p_e^2 = p_{\varphi}^2 + p_{\varphi}'^2 - 2p_{\varphi}p'_{\varphi}\cos\theta \tag{3}$$

将式(3)代入式(1)



(a) (b)

图 7.6 能量守恒和动量守恒

$$h\nu - h\nu' = \frac{\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{h\nu}{c}\cdot\frac{h\nu'}{c}\right)\cos\theta}{2m}$$

化简,得到

$$(h\nu - h\nu')\left(1 - \frac{h\nu - h\nu'}{2mc^2}\right) = \frac{h\nu h\nu'}{mc^2}(1-\cos\theta)$$

即为

$$\lambda' - \lambda = \left(1 - \frac{h\nu - h\nu'}{2mc^2}\right)^{-1}\frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

当 $v_e \ll c$ 时

$$h\nu - h\nu' = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{h\nu - h\nu'}{2mc^2} = \frac{v^2}{4c^2} \ll 1$$

于是得

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

参 考 文 献

[1] 郭光灿，庄象萱. 光学[M]. 北京：高等教育出版社，1997.

[2] 吴强. 光学[M]. 北京：科学出版社，2006.

[3] 崔宏滨，李永平，康学亮. 光学[M]. 2 版. 北京：科学出版社，2015.

[4] 崔宏滨. 光学基础教程[M]. 合肥：中国科学技术大学出版社，2013.