物理专业经典教材

光学（第二版）

母国光　战元龄　编

高等教育出版社
Higher Education Press

● 本书第一版于1987年荣获国家教委高等学校优秀教材一等奖

ISBN 978-7-04-026648-1



定价 35.90 元

物理专业经典教材

光学（第二版）

母国光　战元龄　编

高等教育出版社
Higher Education Press

内容简介

本书是在第一版的基础上修订的。这次修订主要是更新了一些图表和照片，力求反映光学的一些新进展；另外，根据国家最新标准和相关规定，规范了全书的量和单位及名词术语等。本书用三分之一左右的篇幅讲述了关于几何光学的基本原理、光学系统的近轴成像、实际光学系统、有效拦光和像差、光度学基础以及光学仪器的基本原理等。另三分之一多的篇幅讲述了波动光学：包括光的干涉，光的衍射和光的偏振的现象、原理及其在生产、生活及科技中的重要应用，同时侧重介绍了光学系统传递函数的概念、光学系统的分辨率理论、光学信息处理理论、薄膜光学基础、干涉计量学以及相关的仪器原理等。最后一部分系统地讲述了光的速度、光的吸收、色散和散射，光的发射、光谱以及激光原理等光的量子行为和物理现象，并介绍了它们在现代光学及科学技术中的基础性和方兴未艾的发展势头。

本书可以作为高等学校物理类专业以及光电工程专业的光学教材，也可供其他有关人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

光学/母国光，战元龄编. —2 版. —北京：高等教育出版社，2009.7

ISBN 978-7-04-026648-1

Ⅰ.光… Ⅱ.①母…②战… Ⅲ.光学 Ⅳ.O43

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 085516 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京机工印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	1978 年 9 月第 1 版
开　　本	787×960　1/16		2009 年 7 月第 2 版
印　　张	30.75	印　　次	2009 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	570 000	定　　价	35.90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

物料号　26648-00

第一版前言

这本《光学》是在已出版的《普通物理学(光学部分)》一书的基础上,根据1977年全国理科教材会议精神和苏州物理教材会拟定的教材编写大纲,参考国内外有关资料及我们的实践,重新编写而成的。拟为综合大学、科技大学及师范院校的物理类专业以及工科院校的有关专业,进行基础光学教学提供一本教材或教学参考书,兼充一般科技人员初学光学用的参考书,现在作为引玉之砖与读者见面。

新编的这本《光学》,包括了经典光学和近代光学的主要原理和重要应用,全书共十八章,分三大部分:第二章到第六章是第一部分,主要讲几何光学;第七章到第十四章是第二部分,主要讲波动光学;第十五章到第十八章是第三部分,主要讲量子光学。此外,在第一章介绍了光学的发展简史和我国光学的今昔概况,以使读者对光学有一概括性的了解,自觉地运用辩证唯物主义观点来认识事物和增加攀登科学高峰的勇气和信心。

本书注重基本原理和对物理现象、实验的阐述,同时也企图使其具有如下特点:

1. 为适应基础课教学的特点,我们努力从物理实验和现象出发来逐步地引入物理概念和原理,并将难点分散开,而不过分追求纯理论体系的完美;对纯属抽象的重要原理也不回避解析上的处理。我们希望这样会有利于读者循着由浅入深、由感性到理性的路前进。

2. 近十几年来,光学有很大的发展。激光科学已经成为现代科学技术的最活跃的领域,为光学开拓了一个新纪元;一系列新兴的学科分支如信息光学、薄膜光学、纤维光学、干涉计量学、矩阵光学以及量子电子学等大大地丰富了光学的内容。我们在精选经典光学的系统理论的同时,尽最大努力反映这些现代光学的主要原理、概念和应用,并力求将经典与现代衔接起来。

3. 由于光学是研究光的基本性质和规律的基础科学,同时又是与现代科学技术以及现代工程有紧密联系的一门学科,所以光学教材更有条件把理论和实际很好地结合起来,在本书的大部分重要章节里,我们都介绍了实际的应用,个别内容还是相当具体的。

4. 为了弥补目前一般学校尚不能做很多的演示实验,书中除绘制了许多图

表外，还选用了比较多的科学照片，有些照片还反映了我国的光学成果。这样可以帮助自学，加深印象以及对基本原理有进一步的了解。

5. 书中选编了许多习题并附答案，在几何光学部分还于正文中列了一些经过筛选的例题。这对教学是会有益处的。

此外，我们在编写本书时，虽然主要考虑的是如何符合课程的要求，但是也想给一般物理专业的学生提供一本能有助于日后工作的参考书，以使他们日后遇到一般光学问题时，能从该书了解到有些什么解决方法。

根据以上诸点，本书在内容上比一般规定学时（例如 70 学时）所要求的多些。不过，由于本书在章节的安排上考虑到了少讲或不讲某些内容而不影响课程的系统性问题，所以多些也可能无碍于使用。根据本书审稿会上各校代表的意见，我们将内容分为必讲部分和参考部分，凡参考内容在目录上均标以 * 号。这样安排仅供任课教师参考。我们深信在各校稍有不同的教学计划下，每位教师根据自己的经验和所在学校的特点必能比我们考虑得更周到。

本书是在很短的时间内匆促完成的，并且由于我们的学识浅薄和缺少经验，所以书中一定有很多缺点、遗漏甚至错误。总之，这是一块引玉之砖，我们诚恳地希望读者不吝指出，以便有机会改正。

倘若这本书能对读者有所帮助的话，则应归功于教育、培养和领导我们的党。如果不是在党的领导下进行多年的教学和实际工作，从而得到锻炼，则完成这样的编写任务是不可能的。

本书的编写工作是这样完成的：母国光重编第一、二、三、四、五、六、九、十、十四和第十八章，增写了第十一章；战元龄修改并补充了第七、八、十二和第十三章；沈寿春教授重编第十五、十六章，增写了第十七章并校阅全书。

书中新增的科学照片是李玺英同志精心复制的；中国科学院上海光机所、西安光机所、紫金山天文台和上海光学仪器厂等单位为本书提供了宝贵的照片；周维新同志绘制了本书新增部分的大部分图表。编者谨向这些单位和个人致敬并表示衷心地感谢。

中国科学院严济慈副院长，西安光机所龚祖同所长，北京大学物理系沈克琦教授、赵凯华教授均百忙中拨冗亲自参加并主持本书的审稿会，为提高本书的思想性和科学性作出了宝贵的贡献；参加审稿会的北京大学（主审）、南京大学、中国科技大学、四川大学、浙江大学、复旦大学、吉林大学、西北大学、中山大学、厦门大学、郑州大学、北京师范大学、江苏师范学院和北京师范学院等校的老师，对本书提出了许多很好的意见。编者在此一并致敬和感谢。

编者　母国光　战元龄

1978 年 8 月 2 日于南开

目　　录

***第一章　绪论** …… 1

* §1－1　光学的发展简史 …… 1
* §1－2　我国的光学简况 …… 8

第二章　几何光学的基本原理 …… 10

§2－1　几何光学的基本定律 …… 10
* §2－2　费马原理 …… 11
§2－3　发光点　光束　实像　虚像 …… 14
习题 …… 16

第三章　光学系统的近轴成像 …… 18

§3－1　光在平面上的反射和折射 …… 18
* §3－2　光在棱镜主截面内的折射　色散棱镜 …… 27
§3－3　光在单球面上的折射和反射 …… 29
§3－4　元光束经单球面折射后的空间成像 …… 36
§3－5　共轴球面系统及其基点 …… 40
§3－6　共轴球面系统的组合 …… 46
§3－7　厚透镜 …… 47
§3－8　薄透镜及薄透镜组 …… 50
* §3－9　近轴光学中的矩阵方法 …… 55
习题 …… 61

第四章　实际光学系统的拦光和像差 …… 65

§4－1　光阑 …… 65
§4－2　像差概述 …… 70
* §4－3　球差 …… 71
* §4－4　彗差 …… 75

* §4-5 像散和像场弯曲 …… 77
* §4-6 畸变 …… 79
* §4-7 色差及其校正方法 …… 81
* §4-8 校正像差与光学玻璃 …… 85
习题 …… 87

第五章 光度学基础 …… 88

§5-1 光度学的定义和基本概念 …… 88
§5-2 发光强度 光出射度和光照度 …… 92
§5-3 光亮度 …… 96
* §5-4 光度学的计量单位 …… 98
* §5-5 通过光学系统的光通量 像的光亮度和光照度 …… 103
* §5-6 主观亮度 …… 106
习题 …… 107

第六章 光学仪器原理 …… 109

* §6-1 概述 …… 109
§6-2 眼睛 …… 110
§6-3 放大镜 目镜 显微镜 …… 116
§6-4 望远镜 …… 123
§6-5 照相机和幻灯机 …… 128
* §6-6 变焦距物镜 …… 131
* §6-7 棱镜光谱仪 …… 134
习题 …… 136

第七章 光的干涉 …… 138

§7-1 波动光学和光波 …… 138
§7-2 光波的叠加 …… 142
§7-3 光的干涉现象及相干条件 …… 145
§7-4 由分波阵面法产生的光的干涉 …… 147
§7-5 由分振幅法产生的光的干涉 …… 154
§7-6 多光束干涉 …… 161
习题 …… 164

第八章 干涉现象的应用及干涉仪 …… 166

§8-1 等厚干涉的应用 …… 166

* §8-2　牛顿环 …… 169
§8-3　迈克耳孙干涉仪 …… 172
* §8-4　泰曼干涉仪 …… 176
§8-5　傅里叶干涉分光计 …… 177
* §8-6　马赫-曾特尔干涉仪 …… 180
§8-7　法布里-珀罗干涉仪 …… 182
* §8-8　激光干涉仪 …… 187
* §8-9　波面剪切干涉术 …… 190
习题 …… 192

第九章　光的衍射 …… 194

§9-1　概述　惠更斯-菲涅耳原理 …… 194
§9-2　菲涅耳圆孔衍射 …… 196
* §9-3　菲涅耳圆盘衍射 …… 203
* §9-4　菲涅耳直边衍射 …… 206
* §9-5　菲涅耳单狭缝衍射 …… 212
§9-6　夫琅禾费单狭缝衍射 …… 214
§9-7　夫琅禾费圆孔衍射 …… 218
习题 …… 222

第十章　光学系统的分辨本领和衍射光栅 …… 224

§10-1　光学系统的分辨本领　瑞利判据 …… 224
§10-2　眼睛、望远镜和照相物镜的分辨本领 …… 226
§10-3　显微镜的分辨本领　电子显微镜 …… 229
* §10-4　棱镜光谱仪的分辨本领 …… 231
§10-5　夫琅禾费双狭缝衍射 …… 233
* §10-6　衍射光栅 …… 237
§10-7　晶体的 X 射线衍射 …… 254
§10-8　莫阿条纹 …… 257
习题 …… 258

第十一章　信息光学概要 …… 260

* §11-1　光学传递函数 …… 261
§11-2　阿贝成像理论及其实验 …… 271
* §11-3　相干光学处理系统 …… 276

* §11-4 光学信息处理举例 …… 277
§11-5 全息照相 …… 288
习题 …… 297

第十二章 光在介质及其薄膜中的传播 …… 299

* §12-1 光的电磁理论 …… 299
§12-2 偏振光与自然光 …… 302
§12-3 光在两种透明介质分界面上的折射和反射 …… 304
§12-4 单层薄膜的光学特性 …… 312
* §12-5 双层增透膜 …… 317
* §12-6 多层高反射膜 …… 320
* §12-7 干涉滤光片 …… 322
习题 …… 324

第十三章 光在各向异性介质中的传播 …… 326

§13-1 双折射 …… 326
§13-2 单轴晶体内的波面 平面波在单轴晶体内的传播 …… 329
* §13-3 双轴晶体内的波面 …… 333
§13-4 折射率椭球 …… 336
§13-5 由双折射产生偏振光的仪器 …… 337
§13-6 椭圆偏振光和圆偏振光 波片 …… 340
§13-7 偏振光的干涉 …… 344
§13-8 偏振光振动面的旋转 旋光性 …… 347
* §13-9 外力作用下产生的各向异性 …… 351
习题 …… 356

第十四章 光的速度 …… 358

§14-1 概述 …… 358
§14-2 测定光速的天文学方法 …… 359
§14-3 测定光速的实验室方法 …… 362
§14-4 光在介质中的速度 相速和群速 …… 367
* §14-5 运动介质中的光速 …… 370
* §14-6 狭义相对论的概念 …… 374
* §14-7 由狭义相对论得出的一些推论 …… 377
* §14-8 运动坐标系统中的光学与狭义相对论 …… 379

习题 …… 384

第十五章　光的吸收、色散和散射 …… 385

§15－1　光的吸收 …… 385
* §15－2　吸收光谱 …… 386
§15－3　光的色散 …… 389
§15－4　反常色散 …… 391
* §15－5　吸收和色散的经典理论 …… 393
§15－6　光的散射 …… 396
* §15－7　散射光的偏振 …… 398
§15－8　拉曼散射 …… 401
习题 …… 403

第十六章　光的发射 …… 405

§16－1　两种不同形式的光的发射 …… 405
§16－2　热辐射和基尔霍夫定律 …… 406
§16－3　黑体 …… 407
§16－4　黑体辐射定律和普朗克公式 …… 409
* §16－5　光测高温学 …… 413
§16－6　线光谱　氢原子光谱 …… 418
* §16－7　带光谱 …… 423
* §16－8　光源 …… 424
习题 …… 431

第十七章　激光 …… 433

§17－1　激光原理 …… 433
* §17－2　红宝石激光器 …… 435
§17－3　氦氖激光器 …… 436
§17－4　纵模　横模 …… 438
* §17－5　氮分子激光器 …… 439
* §17－6　可调谐染料激光器 …… 442
* §17－7　其他激光器 …… 443
§17－8　激光的重要应用 …… 444
习题 …… 447

第十八章 光子 光的二象性 …… 449

§18-1 光电效应 …… 449
§18-2 爱因斯坦公式和密立根实验 …… 451
§18-3 康普顿效应 …… 453
* §18-4 光压 …… 456
* §18-5 微弱光流的量子起伏——瓦维洛夫实验 …… 457
§18-6 光的二象性 粒子的二象性 …… 459
习题 …… 465

附录 …… 467

一、基本物理常量表 …… 467
二、角度换算表 …… 467
三、一些常用波长 …… 468
四、各种物质的折射率 …… 469
五、光度学单位换算表 …… 472

部分习题答案 …… 474

* 第一章

绪　论

* §1-1　光学的发展简史

如同几何学、天文学和力学一样，光学是一门有悠久历史的学科，它包含着人类自古以来对光的研究的丰硕果实，它的发展史典型而又鲜明地反映着人类认识客观世界逐渐接近真理的过程.

人类对光的研究，最初主要是试图回答像“人为什么能看见周围物体”的这一类问题。现在一般书上，多以古希腊欧几里得（Euclid，公元前 323—前 285）对这一问题的回答作为世界光学知识的最早记录。在欧几里得的书中写道：“我们假想光是以直线传播的，在线与线间还留出一些空隙来，光线自物体到人眼成为一锥体，锥顶在人眼，锥底在物体，只有被光线碰上的东西，才被我们看见，没有碰上的东西就看不见了”. 这种描述，一方面反映了当时人们对光的直线传播性的正确认识，但也同时反映了对光的错误认识——从人眼向被看见的物体伸展着某种触须似的东西. 显然，把这样的陈述作为光学的最早记录是欠妥当的. 事实上，在比欧几里得的书早约百年的我国《墨经》（先秦时代，约在公元前 468—前 382 年）上，对光的几何性质已有了较完全的记载.

《墨经》中有八条是关于光学方面的①，第一条是叙述影的定义与生成；第二条说明光与影的关系；第三条则畅言光进行的直线性，并且用针孔成像的实验来说明它；第四条说明光有反射的性能；第五条论光和光源的关系而定影的大小；第六、七和八条分别叙述了在平面镜、凹球面镜和凸球面镜中物和像的关系. 文虽前后八条，寥寥数百字，但却毫无臆测之语，以严谨的文字表述了几何光学的基础. 所以无论就时间的先后还是就科学性来说，《墨经》都称得上是世界光学知识的最早记录. 只要比较一下《墨经》和欧几里得书对光的直线传播的记载，即可相信这一点.

---

① 钱临照. 物理通报. 1951，1(3).

《墨经》的梁本第二十条,《经》云:"景倒,在午有端."《经说》云:"景,光之人,煦若射;下者之人也高,高者之人也下.足蔽下光,故成景于上,首蔽上光,故成景于下."这段文字是以描写一个针孔成像实验来说明光的直线进行.它的意思是:"光向人照去,好像射箭一样,从下面照去的到高处去了,从高处照去的到下面去了.足遮住了下面的光线所以成影在上面,头遮住了上面的光所以成影在下面."午,是一纵一横相交之点,可作小孔照相匣上的小孔讲;端,就是光线经小孔所成的光束.所以"景倒,在午有端",就是自人发出的光线交于针孔而成光束,足蔽下光成景于上,首蔽上光成景于下,故得头在下,足在上的倒像.这里毫无主观臆测,完全是由观察得到的结果,所以可以肯定,关于光的直线传播的伟大发现,《墨经》上所说的要比欧几里得的既早又好.

自墨子开始,在有关光的科学存在的两千多年的历史中,经过了公元1100年阿拉伯人阿尔-海兹恩(Al-hazen)发明第一个透镜,公元1590年琼森(Jonsen)和李普塞(Lippershey)发明第一架望远镜和17世纪初冯特纳(Fontana)发明第一架显微镜,一直到17世纪上半叶才由斯涅耳(Snell)和笛卡儿(Descarte)将对于光的反射和折射的观察结果,归结为今天所用的反射定律和折射定律.约在他们的同时,费马(Fermat)又得到了确定光在介质中传播所走路径的光程极值的原理,这原理可以包括反射定律和折射定律.

换言之,经过漫长的时期,到17世纪上半叶,才弄清楚光的几何性质,而其余的一切,甚至关于视觉中的两个基本特征——亮度和颜色的观念还很模糊.

到了17世纪后半叶,牛顿(Isaac Newton)和惠更斯(Christian Huggens)等对光的研究才真正地把光学引上了发展的道路.

1665年牛顿进行太阳光的实验.在这实验中,太阳光通过窗板上的小圆孔照射在玻璃三棱镜上,光束在棱镜中折射后,投射在光屏上形成一个颜色按一定顺序排列的长条像,牛顿称它为光谱.这个现象在牛顿之前已有人知道,并且有这样的解释:玻璃会影响太阳光使它形成彩色.但牛顿从他自己的实验确定了这一解释是不正确的.他认为白光(太阳光)是复杂的,是无数种不同的光线的混合,各种光线在玻璃中受到不同程度的折射.棱镜没有改变白光而只是把它分解成简单的组成部分,把这许多组成部分混合起来能重新恢复最初的白色.在实验中还看到,把从第一棱镜中分出的某种颜色(例如黄色)的光从光谱中分离出来,令它再通过第二棱镜,结果没有新的成分.因此,在第一次棱镜分解中,事实上是分出了某种不变的东西.但彩色本身并没有说明光的性质,它是一个靠视觉得到的印象.例如,倘若我们把单纯的红色和绿色混合起来,也能得到太阳光中的黄色.而单纯颜色光在空间上的分离却是与光的本性联系着的,它使人们第一次接触到光的客观和定量的特征,因为这种特征可根据棱镜折射率和棱镜形状算出.换言之,牛顿的太阳光实验,使颜色学说脱离了主观印象而走上与客观量

相联系的科学的发展道路.

牛顿还发现了另一惊人的现象:把曲率半径很大(几米)的凸透镜放在平玻璃板上,当用白光照射它时,则见在透镜与玻璃板接触点处出现一组彩色的同心环,当用单纯的某一种色光(如红色)照射时,则见在接触点处出现一组明暗(如红与黑)相间的同心环,均匀的照射却得到了不均匀的光强分布! 这种环称为牛顿环. 在这实验中,每一单纯的光与牛顿环的第一黑环所在处的透镜与玻璃板之间的空气厚度联系着,不同的单色光所对应的这种空气厚度不同. 所以单色光可以定量地用第一空气隙的厚度来表征.

牛顿在发现这些重要现象的同时,根据光的直线传播性,认为光是一种微粒流,微粒从光源飞出来,在均匀物质内以力学定律作等速直线运动,并且以这种观点对折射和反射定律作了解释. 微粒流学说很自然地解释了光的直线传播性,然而在解释牛顿环现象时,却遇到了困难,他不得不假定,光线在牛顿环实验中能"发生容易的反射和容易的透射".

惠更斯是光的微粒说的反对者,他创立波动说,在 1690 年于《论光》一书中写道:"光同声一样,是以球形波面传播的,这种波同把石子投在平静的水面上时所看到的波相似."他从声现象和光现象的许多类似出发,认为必须把光振动看做是在一种特殊的介质——"以太"中传播的弹性脉动,而这种特殊的介质充满宇宙的全部空间. 然而惠更斯的关于光波的概念是很不完全的,例如,他始终没有提到光波在空间上的周期性,在《论光》中他甚至写道:"……不需要认为光波是以相同的间隔一个跟着一个."惠更斯也没有注意到当时已由格利马尔第(F. Grimaldi)和胡克(R. Hooke)指出的光的衍射现象,却认为光通过无论是多小的孔都能是直线传播的,他写道:"这孔永远是足够大,以至于能包含为数很多的小到不可思议的以太微粒". 特别是惠更斯更没有提到牛顿环,而牛顿本人却把这一现象看做是光的周期性的表现.

惠更斯的波动说只是相当粗略地指出光的波动性,这学说最有意义的乃是作为寻求光振动的传播方向的惠更斯原理:光振动所达到的每一点都可视为次波的振动中心,次波的包络面为传播着的波的波阵面(波前). 而牛顿关于光的本性的概念,有许多特点可以在今天的概念中碰到,虽然今天是以完全不同的新观点和新实验为基础的. 总之,在光学萌芽的 17 世纪,在微粒说占优势的同时,波动说也是被粗略地提了出来,两种截然不同的学说自产生之日起一方面沿着各自的道路发展,另一方面却互有斗争.

在整个 18 世纪中,光的微粒流理论在光学中仍占优势,但光的波动理论却从没有停止对微粒流理论的斗争. 例如欧拉(Leonhord Euler,公元 1746 年)就是捍卫以太的波动理论的,而为微粒说的反对者.

19 世纪初,逐步发展起来的波动光学体系已初步形成,其中以杨氏(Young)

和菲涅耳(Fresnel)的著作为代表.杨氏圆满地解释了"薄膜的颜色"的现象和用双狭缝实验显示了光的干涉现象;菲涅耳认为光振动是一种连续介质——以太的机械弹性振动,他于1835年以杨氏干涉原理补充了惠更斯原理,由此产生了今天为人们所熟知的惠更斯-菲涅耳原理.用这个原理既能圆满地解释光的直线传播,又能讨论衍射现象,成为波动光学中的重要原理.

通过进一步的研究,观察到了光的偏振和偏振光的干涉,为了解释这些现象,菲涅耳假定光是横波.看来好像是相当圆满了,因为光的弹性波动理论既能说明光的直线传播,又能解释衍射,而加上横波的限制后又可解释光的偏振现象.但是,机械的弹性横波只能产生在固体之中,所以不得不把弹性固体的特性强加于以太.弹性横波在无限大的固体中的传播速度 v 同固体的切变模量 N 和密度 ρ 有下列关系:

$$v = \sqrt{\frac{N}{\rho}}. \tag{1-1}$$

因为以太不妨碍各种物体的运动,所以以太的 ρ 必定是非常小的,同时为说明光的巨大的传播速度,又必须给 N 以相当大的数值.为了解释光在各种不同介质中的不同速度,又必须认为以太的特性在不同的物质中是不同的;在各向异性介质中还需要有更复杂的假设.此外,还必须给以太以更特殊的性质,才能解释光波中没有纵振动的现象.这种密度无限小,切变模量远大于钢,并且还有许多附加性质的以太是令人难以想象的.于是就暴露了光的弹性理论的许多重大困难.此外,机械的弹性理论既没有指出光学现象和其他物理现象间的任何联系,也没有能把表征介质性质的光学常数和介质的其他参数联系起来.显然,光的弹性波动理论是人类逐渐认识客观真理过程中具有相对进步的一种理论.

1846年,法拉第(Faraday)发现了光的振动面在磁场中发生旋转,这表示光学现象与磁学现象间存在内在的联系;1856年,韦伯(Weber)发现光在真空中的速度等于电流强度的电磁单位与静电单位的比值,即 3×10^{10} cm/s,这表示光学现象与电学现象有一定的关系.从这些发现中,人们获得了新的启发,即必须把光学现象和其他物理现象联系起来考虑,而不能孤立地来研究光的本性.

1860年,麦克斯韦(C. Maxwell)的理论研究指出,电场和磁场的改变,不能局限在空间的某一部分,而是以等于电流的电磁单位与静电单位的比值的速度传播着;光的传播就是这样的一种电磁现象.这个结论在1892年被赫兹(Hertz)的实验证实.按着麦克斯韦的理论,若以 c 代表光在真空中的速度,v 代表光在介电常量为 ε 和磁导率为 μ 的介质中的速度,则有

$$\frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{1-2}$$

因为 $\frac{c}{v} = n$——介质的折射率,所以

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{1-3}$$

这个式子给出了物质的光学常量 n 与电学常量 ε、磁学常量 μ 间的关系. 在认识光的本性方面,麦克斯韦电磁理论较之弹性固体理论向前迈进了一大步.

然而麦克斯韦理论像弹性固体理论一样,还需要有以太,只不过是以电磁的以太代替了机械的以太,在电磁以太中有位移电流和磁场. 然而,这样的理论并没有进一步说明以太的性质.

麦克斯韦的理论和赫兹的实验证明了光是电磁波,于是就有必要研究产生频率高达光的频率的电振子的性质. 另一方面,从已得到的式(1-3)看不出折射率 n 随着光的频率而变,而实验上已确证,n 随光的频率而变. 这样,当时就有必要根据物质结构的概念,研究物质是怎样发光的和物质与光相互作用的各种过程. 到了 1896 年洛伦兹(H. A. Lorentz)创立了电子论,他认为原子和分子内含有带负电的电子,在无外力时电子处于平衡位置;在外力作用下,电子作阻尼振动而产生光的辐射. 当光通过介质时,介质中电子的自然频率与外场的频率相同时,则受缚电子成为吸收体. 这样,利用洛伦兹电子论不仅解释了发光和物质吸收光的现象,也解释了光在物质中传播的各种特点. 特别是,对折射率 n 和随光波频率而变的色散现象也得到了较合理的解释. 因为从电子论观点来看,介电常量 ε 是与电场改变的频率有关的物理量. 在洛伦兹的理论中,以太乃是广袤无限的不动的介质,其唯一特点是,在这种介质中光振动具有一定的传播速度.

然而,对于像炽热的黑体的辐射中能量按波长分布这样重要的问题,洛伦兹理论还不能给出令人满意的解释. 并且,如果洛伦兹关于以太的概念是正确的话,则可将不动的以太选作为参考系,以使人们能区别出绝对运动. 而事实上,于 1887 年迈克耳孙用干涉仪测“以太风”却得了否定结果,即洛伦兹所设想的以太的存在与迈克耳孙实验结果不符. 这表明即使到了洛伦兹电子论时期,人们对光的本性的认识也仍然是片面的. 但是与 18 世纪相比,却是在新的认识高度上更接近于客观事实了.

1900 年,普朗克(Max Planck)从物质的分子结构理论中借用了不连续性的概念,提出了辐射的量子论. 他认为各种频率的电磁波,包括光,只能以完全一定分量的能量自振子射出,这种能量微粒称为量子,光的量子称为光子. 用量子论不但很自然地解释了灼热体辐射能量按波长分布的规律性问题,并且以全新的方式提出了光与物质相互作用的整个问题,而如果没有量子论,要理解这些问题是不可能的. 量子论不但给光学,而且也给整个物理学提供了新的概念,故通常把它的诞生视为近代物理学的起点. 1905 年,爱因斯坦将这个在物理学中具有革命意义的量子论用于光电效应之中,他给光子作了十分明确的表示,特别是他指出了在光作用于物质时,光也是以光子为最小单位进行的. 此外,在 19 世纪末

和20世纪初的许多实验中都确凿地证明了光的量子性.这样一来,光的微粒性(量子性)又提到了首位.

1905年9月,德国《物理学年鉴》(Annalen der Physik)发表了爱因斯坦的一篇论文《关于运动介质的电动力学》,其中第一次提出了狭义相对论的基本原理.论文中指出,从伽利略和牛顿时代以来占统治地位的古典物理学,其应用范围只限于速度远远比光速小的情况,而他的新理论可解释与很大运动速度有关的过程的特征,根本抛弃了以太的概念,圆满地解释了运动物体的光学现象.

这样,在20世纪初,一方面从光的干涉、衍射、偏振以及运动物体的光学现象确证了光是电磁波,而另一方面又从热辐射、光电效应、光压现象以及光的化学作用等无可怀疑地证明了光的量子性——微粒性.并且,光的波动理论和光的量子理论各自统治着自己的领域,波动理论不能解释光的量子行为,而光的量子理论亦不能说明光的波动现象,似乎没有方法使两者统一起来.这种情况与17世纪末叶牛顿的光的微粒说同惠更斯的光波动说的对峙相似.不过,就对光的本性的认识阶段而言,光的量子论和光的电磁波理论都是比较地进入了高级阶段,这种认识虽然仍只具有相对性,但是它更接近于客观真实了.

将有关光的本性的两个完全不同的概念统一起来,看来好像是不可能了,然而解决这一困难的希望却来自意想不到的方面.原来人们对光的两种概念都是根据对宏观的客观现象的观察得到的,而当人们想统一这两种概念时也仅限于人们所能"想象"到的和所能"了解"到的.但是,为了如实地认识客观世界,应当用广泛的、活的、正如客观实在那样的、辩证的物质概念来代替形而上学的、机械的物质学说.从这一观点来看,光学发展的结果所揭露的,在光学现象中波动性与量子性之间的"不可克服的"矛盾就是自然辩证法的一种表现,真实的矛盾统一.对于宏观世界中连续的波动和不连续的量子,在经典物理学的简化了的机械概念中,是互相排斥的,而在客观实际的自然现象中,它们是统一的、共处的.人们所不习惯的这种矛盾的统一,只不过证明宏观的经典的机械图像有片面性和缺欠.客观世界的物质比起形而上学的形象来要复杂得没有止境,形而上学的形象是由于习惯和长时间的经验产生的.

科学的历程证实了这一论断的正确.七十多年前,德布罗意(de Broglie)大胆地创立了物质波动学说.他设想每一物质的粒子的运动都和一定的波动相联系.这一假设被后来许多实验所证明.例如,电子束在通过金属薄膜时产生衍射现象,从而能确定电子束的波长,令人信服地证明了电子的波动性.实际上,具有波动性的不仅仅有电子、质子、原子和分子,其他物质颗粒也都有与它自己的质量和速度相联系的波动性的特征.这实际上表示了不仅光有波动性和微粒性,一切习惯概念上的实物也同样有这两种性质,它们是客观物质所共有的属性.在由德布罗意和后来薛定谔(Schrödinger)创立的量子力学原理中,波动性和微粒性

的对立得到了较圆满的统一.按量子力学概念,光或电子通过圆孔的衍射图样,可以这样来解释:通过圆孔的光子或电子落在屏上某些区域的多些,而另一些区域的少些,甚至没有.换言之,衍射图样可由求出屏上一定点或一定时间发现光子或电子的概率值来确定.

然而,却不能把"实物波"和光波看做同样的东西,光波有电磁性,而"实物波"没有这种性质;"实物波"与实物本身有机地相符合,而光波却是由实物发出来的,具有完全另外的性质.

总之,如今对光的本性得到的认识是这样:光和实物一样,是物质的一种,它同时具有波的性质和微粒(量子)的性质,而从整体来说,它既不是波,亦不是微粒,亦不是这样或那样的混合物.对这种辩证关系,现在人们还缺乏一目了然的形象.这反映出即使在今天人们对光的本性的认识也还远远没有达到最后的境地,甚至在某些新发现的现象前,人们还没有从惊奇中苏醒过来.例如,近代实验已发现,波长不大于0.001 nm(1 nm = 10^{-9} m)的光子(γ射线)在强电场中可变成两个带相反电荷的质点——电子和正电子的现象.这一现象无疑地显示着光子与实物之间的深刻联系.如今人们在这现象面前很像17世纪末人们在牛顿环面前一样,在惊奇中不知其所以.研究光的本性的工作尚需人们做坚久地努力.

尽管对光的本性的认识还没有得到满意的结果,但是光学本身的发展并没有停止,特别是20世纪50年代以来,光学开始了一个新的发展时期,以至于成为现代物理学和现代科学技术前沿阵地的重要组成部分.

20世纪50年代以来,人们把数学技术和通信理论跟光学结合起来,更新了经典光学的概念,形成了所谓"傅里叶光学",它给光学引入的频谱和空间滤波的概念为现代的光学信息处理、现代的像质评价、相干光学计算机以及综合孔径雷达技术等奠定了基础.

20世纪60年代出现的高速数字计算机为复杂光学系统的设计和提高光学设计的质量创造了条件,从而产生了一系列的高质量的性能卓越的光学系统,如应用于现代电视、电影摄像用的变焦距物镜及应用于半导体工业中的衍射限的精密微缩镜头.光学工艺中,多层介质膜不仅显著地提高了光学系统的效能而且薄膜光学为解决各种分光和光谱滤波提供了理论基础.

纤维光学近十多年来,特别是近几年来得到了突飞猛进的发展,它不仅为一般内窥光学系统提供了纤维传像和传光束,尤其重要的是,它已成功地应用于通信系统,现在已能做到用光学纤维来代替传统上沿用的电缆.

近几十年来,红外光技术的研究一直受到各国军工的普遍的重视,已经成功地应用于各种探测系统、导弹制导、资源考察以及遥感遥控技术之中.红外材料以及各种有机化合物的红外光谱的研究都得到了巨大的发展.

自 1960 年做成第一只红宝石激光器以来，激光科学技术的发展已使它成为现代科学技术的最活跃的领域. 它的出现，不妨说是标志着人们掌握和利用光进入了一个新阶段；它的发展有力地促进了物理学、化学和生物学的发展. 激光在材料加工、精密测量、远距离测距、全息检测、通信、医疗以及农作物育种等方面获得了广泛的应用. 在同位素分离、催化、信息处理等方面有着广阔的发展前景. 以激光引发核聚变是探索实现受控热核反应和有关技术的重要途径之一.

在光学领域本身，由强激光产生的非线性光学效应正为越来越多的人所注意. 激光光谱学，包括激光拉曼光谱学、高分辨率光谱和皮秒超短脉冲以及可调谐激光技术等已使传统的光谱学发生了革命性的变化，成为深入研究物质微观结构、运动规律和转换机制的重要手段，它将对凝聚态物理学、分子生物学和化学的动态过程的研究提供前所未有的方法.

相干光学计算机与电子数字计算机的联合，为计算机科学开拓一个新的技术领域. 全息照相术的应用不仅可能为人们提供立体电影或电视，尤其是全息存储的研究有可能为研究人脑的记忆机理提供有益的线索. 由于现代光学技术在空间上既能延伸到上亿光年的空际，又能深入联系到微观的原子世界；并且在波段上它包含极短波长的 γ 射线、X 射线、紫外线、可见光、红外线、远红外线直到微波，所以光信息的研究——信息光学方兴未艾，有巨大的发展前景.

20 世纪 70 年代的光学与过去沉寂一时的光学相比，无论在发展的速度上还是在发展的规模上都是史无前例的. 光学正在发生着深刻的变化，出现新的飞跃，产生了并且正在继续产生一系列新的学科分支. 总之，像其他现代科学一样，光学正在经历一场革命.

* §1-2 我国的光学简况

我国古代曾对光学有过光辉的贡献：如前节所述，公元前 400 年的《墨经》的光学部分，论阴影、论反射、论光之直线进行性质、论平面镜，秩然成章. 就系统而言，俨然是一部几何光学；就内容而言，是一部实验的记录. 不论就写作的年代还是就对光学现象的科学记载，这部书都堪称世界最早的光学记录.

事实上从记载我国周代的工业技术和制度的《考工记》也可得知，当时已经会用凹面镜取火，称之为燧. 对制造镜子所用材料的成分也作了记载："金锡半谓之鉴燧之齐"，金就是指铜，齐就是合金，鉴是照人用的镜子，可见那时鉴燧两物都是用铜锡各半的合金制成的.

后来，到 9 世纪，我国宋代沈括，在《梦溪笔谈》一书中对凹面镜和凸面镜的成像以及凹面镜焦点都作了相当详细的记载，如"古人铸鉴，鉴大则平，鉴小则凸，凡鉴洼则照人面大，凸则人面小，小鉴则不能全观人面，故令微凸，收人面令

小,则鉴虽小而能纳人面,仍复量鉴之大小增损高下,常令人面与鉴大小相若."对凹面镜的焦点写道"阳燧面洼,向日照之,光皆聚向内,离镜一两寸,光聚为一点,大如麻菽,著物即火发".从这段文字可以看到,沈括所说的凹面镜的曲率半径应在二寸到四寸之间,而镜的球面和光滑程度推想起来应该是相当好的.因为这个镜的焦点只有芝麻粒儿那么大,把东西放在焦点就着火! 而英国人在此后四百年(即13世纪),才相传有R.培根(Bacon)花三年工夫在他53岁那年磨成一个凹面镜,用它在太阳光下取火.可见我国古代在光学上的贡献并不逊于世界上任何其他民族,有着极光辉的历史.

从前述光学发展史可以看到,光学到了17世纪末才真正有了较快的进展,而很多重要现象的发现和重要理论的完成却多在19世纪末和20世纪初期,这个时期正是欧洲工业的产生、壮大和发展的时期.而同一时期,我国始终处于封建统治之下,不仅没有兴起工业,而且尤其是,自1840年鸦片战争之后,我国沦为半殖民地,丧权失土,民不聊生,更谈不上发展科学.所以,直到1949年全国解放前夕,光学还是一穷二白.

自新中国成立以来,我国的科学技术得到了迅速的发展.光学也自不例外,在原来空白的基础上,迅速地壮大起来了,建起了有一定规模的光学工业系统和专门从事光学科技的研究机构网;各类高等学校兴办了许多培养光学专门人材的专业.我们不仅会设计和制造各种现代的光学精密仪器(包括军用和民用),而且还有成效地解决了光学材料的制备问题;我们不仅能进行一般的光学问题的研究,而且还比较早地开展了以激光科学为代表的许多现代光学的研究工作,都取得了可喜的成果.所有这些,在旧中国是无法想象的,它的成就是谁也不能否定,谁也无法否定的.

然而,我们还须清醒地看到,我国的光学现状同世界先进水平的差距还很大,科学技术的力量还很薄弱,我国面临的任务还十分艰巨,但是"春风杨柳万千条,六亿神州尽舜尧",我们相信,经过全体人民的奋斗,我国光学耸立于世界先进之林的情景,指日可待!

第二章

几何光学的基本原理

§2-1 几何光学的基本定律

1. 几何光学的含义及其范畴

撇开光的波动本性,而仅以光的直线传播性质为基础,研究光在透明介质中传播问题的光学,称为几何光学.几何光学的理论基础,就是由实际观察和直接实验得到的几个基本定律:光的直线传播定律,光的独立传播定律及光的反射和折射定律.

由于光的直线传播性对于光的实际行为只具有近似的意义,所以拿它作为基础的几何光学,就只能应用于有限的范围和给出近似的结果.在所研究的对象中,若其几何的尺寸远远大于所用光波的波长(如对有一定大小的透镜或面镜,研究由它们成像的物距和像距等),则由几何光学可以获得与实际基本相符的结果;反之,当其几何尺寸可以跟波长相比(如透镜或面镜的孔径非常小,或者虽然透镜和面镜有一定的大小,但研究的问题是"像点"的细微结构)时,则由几何光学所获得的结果将与实际有显著的差别,甚至相反.在后一种情况下,必须撇开光的直线传播的概念,而采用以光的波动性质为基础的波动光学来研究.用波动光学研究任何情况下的光的传播问题,都能得到严格的解.几何学只不过是波动光学在一定条件下的近似.尽管如此,而由于几何光学在应用上的简便,以及在实际上并不总需要严格的解,所以它仍为研究光传播问题的有力工具.

2. 光线 几何光学的基本原理

在几何光学中可用一条表示光的传播方向的几何线来代表光,并称这条线为光线.我们借助于光线的这个概念,可将几何光学基本原理的要点表述如下:

(1) 光的直线传播定律:在均匀介质中,光沿直线传播.即在均匀介质中,光线为一直线.

(2) 光的独立传播定律:自不同方向或由不同物体发出的光线的相交,对每一光线的独立传播不发生影响.

(3) 光的反射和折射定律:当光线由一介质进入另一介质时,光线在两个介质的分界面上被分为反射光线和折射光线.对于这两条光线的进行方向,可分别由反射定律和折射定律来表述.

反射定律 入射光线 AB(图 2-1),分界面 B 点的法线 NB 和反射光线 BC,三者在同一平面内,并且反射光线与法线间的夹角 r(反射角)等于入射光线与法线间的夹角 i(入射角).

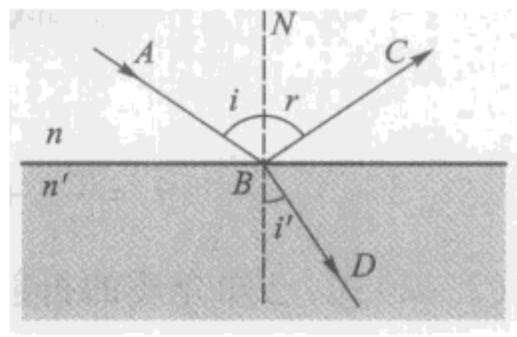


图 2-1

折射定律 入射光线 AB,分界面 B 点的法线 NB 和折射光线 BD,三者在同一平面内,并且入射角 i 的正弦与折射角 i'(折射光线和法线间的夹角)的正弦之比,是一个取决于两介质光学性质及光的波长的常数,它与角 i 和 i'的大小无关.这个定律可写成

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{n'}{n}, \tag{2-1}$$

其中常数 n 和 n'分别为第一介质和第二介质的绝对折射率(以下简称折射率①),它们的定义为

$$n = \frac{c}{v_1},\ n' = \frac{c}{v_2}. \tag{2-2}$$

其中 c 为光在真空中的速度,v_1 和 v_2 分别为光在第一介质和第二介质中的速度.

实际上,在计算时总可把反射定律当作折射定律在 $n = -n'$情况下的特例.按式(2-1),在 $n = -n'$时,$i = -i'$.负号表示入射光线与反射光线各在法线的一侧.

* §2-2 费马原理

光在各向均匀介质中的传播规律,可由前述几何光学的几个基本原理来完全确定.而研究光在不均匀介质中的传播问题,更具有普遍的意义.为此,必须回答这样一个问题:光由任一介质中的一点 A 至另一介质中的一点 B,是沿着怎样的路径传播的?费马原理指出:光沿着所需时间为极值的路径传播.

设光在 1,2,3,…,K 等均匀介质中的传播速度分别为 $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_K$,在各介质中光路程的几何长度分别为 $s_1, s_2, s_3, \cdots, s_K$.于是光从介质 1 中的 A 点(图 2-2)到介质 K 中的 B 点所需的时间为

① 常遇到的光学介质及我国生产的一些光学玻璃的折射率见本书后面的附录.

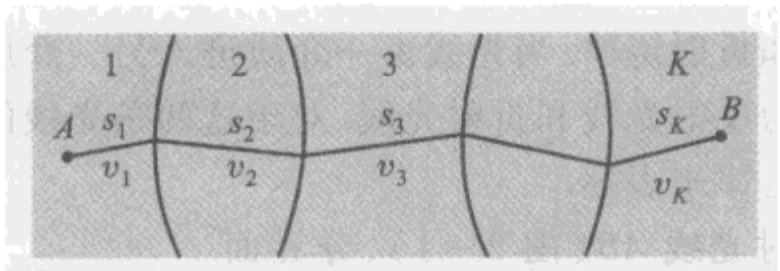


图 2－2

$$t = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + \frac{s_3}{v_3} + \cdots + \frac{s_K}{v_K} = \sum_{i=1}^{i=K} \frac{s_i}{v_i}.$$

由(2－2)式,已知介质的折射率 $n_i = c/v_i$,所以上式可写成

$$t = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{i=K} n_i s_i. \tag{2-3}$$

其中乘积 $n_i s_i$ 称为光在第 i 介质中的光程. 乘积之和 $\sum n_i s_i$ 称为光由 A 到 B 的总光程 l. 光在 i 介质中的光程,在数值上等于光以真空中的速度在时间 t(光穿过该介质 i 所用的时间)内所能走的路程的长度. 借助于光程这个概念可将光在非真空介质中所走的路程折算为光在真空介质中的路程的长度. 这样便于比较光在不同介质中所走路程的长短.

若在由 A 到 B 的空间,充满着折射率连续改变的介质,则光路将是一条曲线(图 2－3). 为计算在这种情况下由 A 到 B 的光程,须将几何路程 AB 分成许多线段元 $\mathrm{d}s_i$,使每一线段元上各点的折射率可视为常数 n_i. 于是,与线段元 $\mathrm{d}s_i$ 相应的光程为 $\mathrm{d}l = n_i \mathrm{d}s_i$;而由 A 到 B 的总光程为

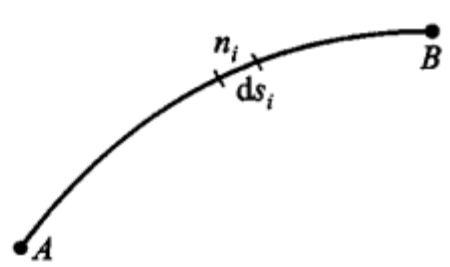


图 2－3

$$l = \int_A^B n \mathrm{d}s, \tag{2-4}$$

积分沿光路 AB 进行. 由 A 到 B 所需的时间为

$$t = \frac{1}{c} \int_A^B n \mathrm{d}s. \tag{2-5}$$

这样,根据变分法的原理,t 有极值的条件是式(2－5)的定积分的变分为零. 即

$$\delta t = \delta \left(\frac{1}{c} \int_A^B n \mathrm{d}s \right) = 0. \tag{2-6}$$

由于光在真空中的速度 c 为一常数,所以上式可写成

$$\delta l = \delta \int_A^B n \mathrm{d}s = 0. \tag{2-7}$$

式(2－6)和(2－7)都是费马原理的数学表达式. 而由式(2－7),我们对费马原理也可以作这样的理解:光从空间的一点到另一点是沿着光程为极值的路程传播的. 或者说,光沿光程值为最小、最大或常量的路径传播.

从下面几个例子,不仅可以使我们相信费马原理的正确性,同时还能表明费

马原理与光的反射和折射定律有同等的意义,可以认为,费马原理是光学基本定律的推论;亦可认为后者是前者的必然结果.

自 A 点发出的光线在平面 CC' 上由 D 点反射后通过 B 点,遵守反射定律的光线 ADB(图 2-4),其光程较其他任一光线 $AD'B$ 的光程都小. 为证明这一论断,在垂线 BE 的延长线上取 B' 点,使 $|BE| = |EB'|$,此时,$|BD| = |DB'|$ 及 $|BD'| = |D'B'|$;A,D 和 B' 在一条直线上. 显然直线 ADB' 的长度小于折线 $AD'B'$ 的长度,即 $|AD| + |DB'| < |AD'| + |D'B'|$. 由此得出:

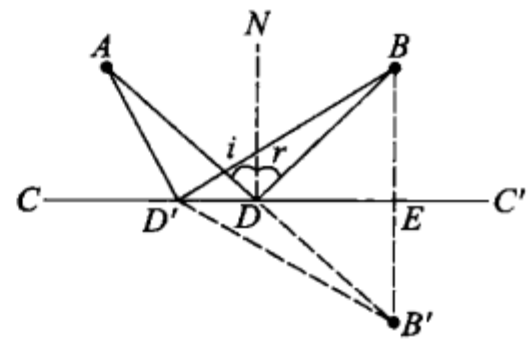


图 2-4

$$|AD| + |DB| < |AD'| + |D'B|.$$

可见,依照反射定律或费马原理,对上述平面反射所得的唯一结论是:所有从 A 点发出而被 CC' 反射的光线,除光线 ADB 外,都不能通过 B 点.

自回转椭球凹面镜的一焦点 A 上发出的光线,都通过该椭球面的另一焦点 B(图 2-5). 根据椭圆的特性,从椭圆两个焦点引至椭圆上任一点的两个向径之和为一常数,可知光程 ADB 等于任意另一光程 $AD'B$. 这种情况下的反射,相当于光程为常量的情形.

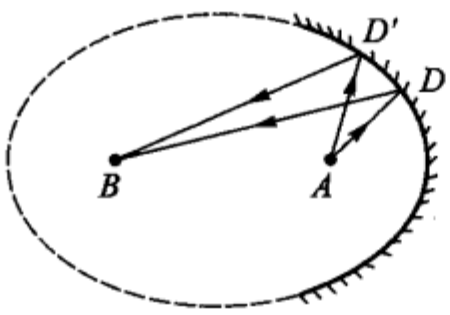


图 2-5

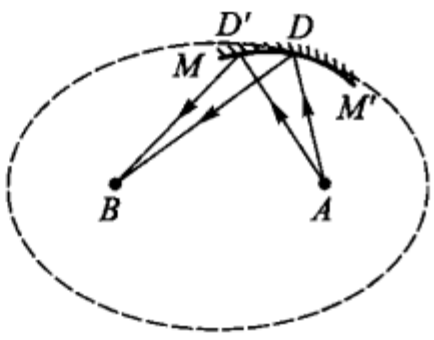


图 2-6

设想有一个内切于回转椭球的凹面镜 MM',在 D 点相切(图 2-6),遵守反射定律的反射光线 ADB 通过椭圆另一焦点 B,由于该面镜的任意其他点 D' 均在椭球内,所以光线 ADB 的光程较任何其他光线 $AD'B$ 的光程都大,而后者违背反射定律,因而在 D' 点的反射不会再通过 B 点. 这是光程为最大的一个例子. 同样也可以设想一个外切于回转椭球的凹面镜来证明在椭球面上的反射光线的光程为最小.

自 A 点发出的光线通过折射率为 n 和 n' 的两介质的分界平面 CC' 上的折射点 D 而到 B 点(图 2-7),遵守折射定律的光线,其光程较任何其他光线的光程都小. 即此种情况下的折射,其折射光线由光程最小的条件来确定. 对于任一给定的 A 点和 B 点,其在平面 CC' 上的两垂足 E 和 F 间的距离 p 为一常数. 于是光

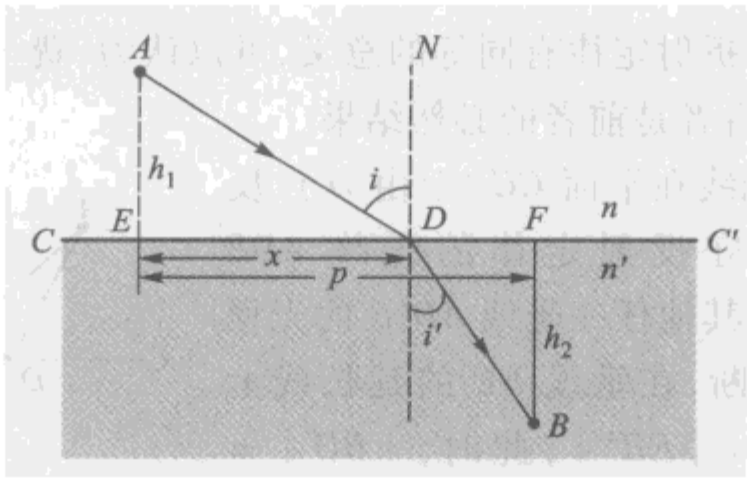


图 2-7

线 ADB 的光程为

$$l = n|AD| + n'|DB|. \tag{2-8}$$

由图(2-7)可得

$$|AD| = \sqrt{h_1^2 + x^2}, \quad |DB| = \sqrt{h_2^2 + (p-x)^2},$$

其中 h_1 和 h_2 分别为垂线 AE 和 BF 长度,将 $|AD|$ 和 $|DB|$ 值代入式(2-8),得

$$l = n\sqrt{h_1^2 + x^2} + n'\sqrt{h_2^2 + (p-x)^2}. \tag{2-9}$$

光程为极值的条件是 $\delta l = 0$,即 $\frac{dl}{dx} = 0$. 微分式(2-9)得

$$\frac{dl}{dx} = n\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - n'\frac{p-x}{\sqrt{h_2^2 + (p-x)^2}},$$

令 $\frac{dl}{dx} = 0$ 则有

$$n\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = n'\frac{p-x}{\sqrt{h_2^2 + (p-x)^2}}. \tag{2-10}$$

而从图 2-7 可得

$$\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \sin i, \quad \frac{p-x}{\sqrt{h_2^2 + (p-x)^2}} = \sin i'.$$

代入式(2-10),则有

$$n\sin i = n'\sin i'.$$

可见,满足费马原理的条件,必然满足折射定律. 从 $\frac{d^2l}{dx^2} > 0$ 的结果,可以说,在给定情况下满足折射定律的光路,其光程为最小.

§2-3　发光点　光束　实像　虚像

从前两节所述的几何光学基本原理或费马原理,可研究光线在各种具体情况下的进行方向. 而实际上,主要是用来研究由反射或折射的平面和平面系统、

球面和球面系统或其混合而组成的光学系统的成像问题. 为此,必须引入发光点和光束的概念.

1. 发光点

设想有这样一个发射光线的光源,它与几何点一样,只有几何位置,而没有大小. 这样的光源,称为发光点. 显然,它和光线一样,是一个不可能实现的设想,是一个概念,但在一般讨论成像问题中,发光点的概念却有助于描述像和物的性质.

若光线实际发自某点,则该点即为实发光点;反之,若该点为诸光线延长线的交点,则为虚发光点.

2. 光束

有一定关系的一些光线的集合,称为光束. 自一发光点发出的许多光线构成的光束,称为单心光束(或称同心光束). 按波动光学的观点,波面的法线即为光线,所以在各向同性的均匀介质中,单心光束与球面波相应;发光点在无限远的单心光束与平面波相应.

作为光学系统成像的对象的实际物体,它的每一点都发出一个单心光束.

另一种光束,是由不相交于一点的有一定关系的一些光线的集合,称像散光束. 在各向同性的均匀光学介质中,像散光束与非球面的高次曲面波相应.

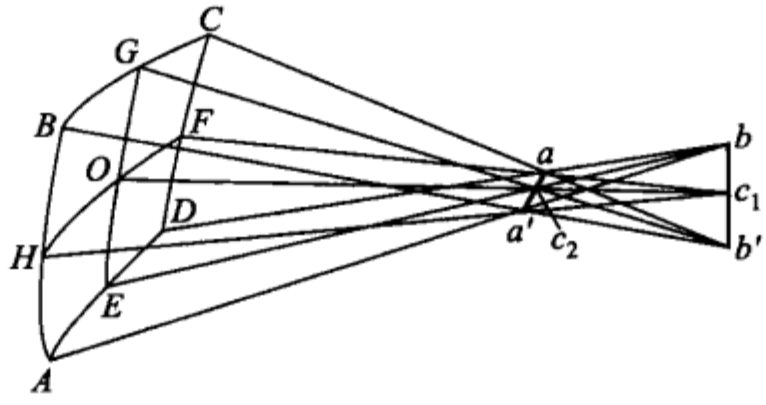


图 2-8

设图 2-8 中 $ABCD$ 为一与非球面波对应的任意曲面元. 由几何学可知,在它的某一点 O 上对曲面元作的所有截线中,曲率半径最大的截线 HOF 垂直于曲率半径最小的截线 GOE. 两截线的曲率中心分别在 c_1 和 c_2,即自 H、O 和 F 引的法线——光线交于 c_1,自 G、O 和 E 引的法线交于 c_2. 由于截线 AHB 和 CFD 与 GOE 接近且平行,故可认为它们与 GOE 有相同的曲率. 因而对 A、H、B 和 C、F、D 诸点作法线必相交于通过 c_2 点的垂直于平面 $GOEc_1$ 的线段 aa' 上. 同样,对于接近且平行于截线 HOF 的截线 BGC 和 AED 上的诸点所作的法线,必交于在 $GOEc_1$ 平面内的线段 bb' 上. 在该面元上所有点作的法线,必交于两线段 aa' 和 bb' 中之一. 这两个相互垂直的线段 aa' 和 bb',称为该像散光束的焦线,两者的距离 c_1c_2 称为像散差.

自物点发出的光束，经光学系统后若仍保持为单心光束，则这个经过系统后的光束的心称为光学系统对该物点成的像点. 当光线实际通过心时，则得实像；而如果是光线延长线的交点与该单心光束的心重合，则得虚像.

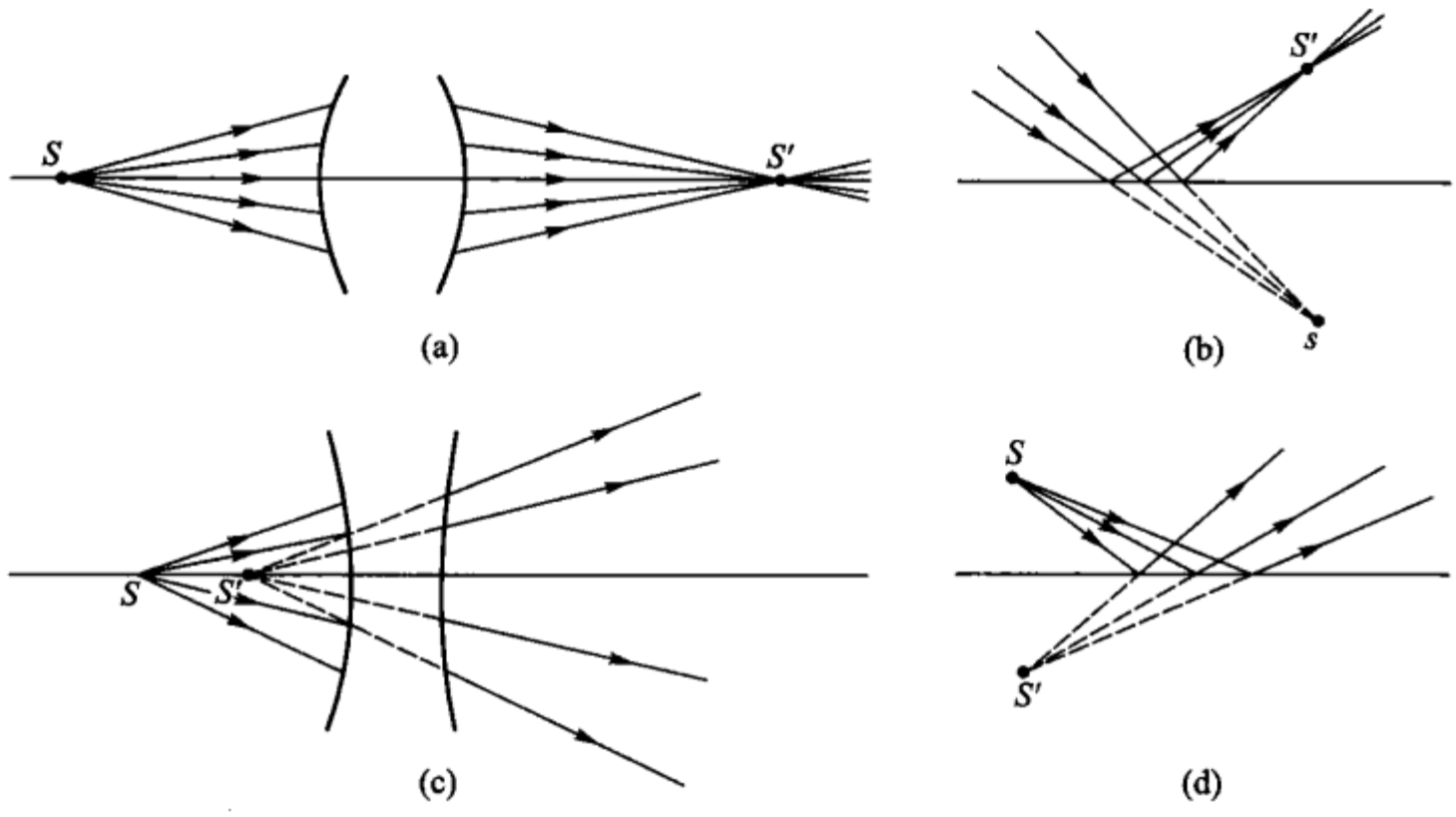


图 2－9

在图 2－9 中，(a)图表示自实发光点 S 发出的单心光束，经过光学系统后成一实像点 S'；(b)图表示虚发光点 S 经过光学系统后成一实像点 S'；图(c)和(d)表示实发光点 S 经过光学系统后成虚像点 S'.

若自物点发出的光束，经光学系统后变成为像散光束，则光束的心被两焦线代替，像点被弥散斑代替. 这种情况下，将得不到点像.

所有旨在对物体成像的光学系统，必须在按要求改变光束的立体角的同时，保持光束的单心性，这也就是构造各种光学仪器的基本原则.

习　　题

1. 已知光在真空中的速度为 3×10^8 m/s，试求光在下列各介质中的速度：

水($n=1.333$)，冕玻璃($n=1.50$)，重火石玻璃($n=1.65$)，加拿大树胶($n=1.526$).

2. 若光由介质 A 向介质 B 折射，相对折射率定义为 n_{AB} = 光在介质 A 中的速度/光在介质 B 中的速度，试求下列各情况的各相对折射率：

(1)光从水到冕玻璃，(2)光从水到重火石玻璃，(3)光从加拿大树胶到水，(4)光从重火石玻璃到空气，(5)光从冕玻璃到重火石玻璃，(6)光从加拿大树胶到重火石玻璃，(7)光从加拿大树胶到冕玻璃.

3. 试对几何光学的基本原理的每一条，提出一个实验来证明它.

4. 把一块形状不规则的玻璃浸没在某一液体中，若该玻璃和液体有相等的折射率，问会

出现什么现象？这现象可有什么用途？

5. 有一个玻璃球，折射率为$\sqrt{3}$，今以一光线射到球表面，若入射角为60°，试证此时反射光线跟折射光线间的夹角为90°.

6. 水面上浮一层油（$n=1.47$），若光线自空气以45°角入射到油层的上表面，试绘出光在油层中及水中的轨迹.

7. 为什么说光线和发光点是概念而不能物理地实现？

8. 光线斜射在折射率递增的介质中，问光线的轨迹如何？

第三章

光学系统的近轴成像

利用几何光学基本定律及光束的概念，我们可以研究任意光学系统的成像问题. 但在这一章，我们将主要讨论平面和平面系统、球面和球面系统的成像问题，并且大部分限于讨论近轴区域的成像，即所谓的近轴光学. 近轴光学，它简练地阐明了光学系统近轴区域的物与像的共轭关系，是研究各种实际光学系统所必备的基本知识，也是光学中的主要内容之一.

§3-1 光在平面上的反射和折射

一个平面是最简单的光学系统，让我们从它入手来研究光学系统的成像问题.

首先，研究在平面上反射光的成像. 如图 3-1(a)所示，自任一发光点 S 发出的光束，被平面反射. 按反射定律，其反射光线的延长线交于 S' 点，此 S' 点即为 S 点的虚像，位于镜后，并在 S 点向平面所作的法线 SN 上，$|SN| = |NS'|$. 若被成像的点是虚发光点，则由平面反射可产生实像，如图 3-1(b)所示.

可见，平面反射镜是一个最简单的、不改变光束单心性的、能成完善像的光学系统. 所成的像与原物大小相同，并且像与物对称于镜面，如图 3-1(c)所示.

其次，研究折射成像问题. 光束在两透明介质分界平面上的折射，常不能保持其单心性，单心光束经折射后将变成像散光束.

如图 3-2 所示，SM 为由发光点 S 发出的单心光束中的任一光线，它在折射率分别为 n 和 n'(假定 $n > n'$)的两透明介质的分界平面 OM 上折射，其入射角为 i，折射角为 i'. 设自折射点 M 到由发光点 S 向折射面所作的法线 SOX 的距离为 y，点 S 到点 O 的距离为 x，折射光线延长线跟 XOS 的交点 S' 到 O 点的距离为 x'. 于是，由折射定律得

$$n\sin i = n'\sin i'. \tag{3-1}$$

由图 3-2 得

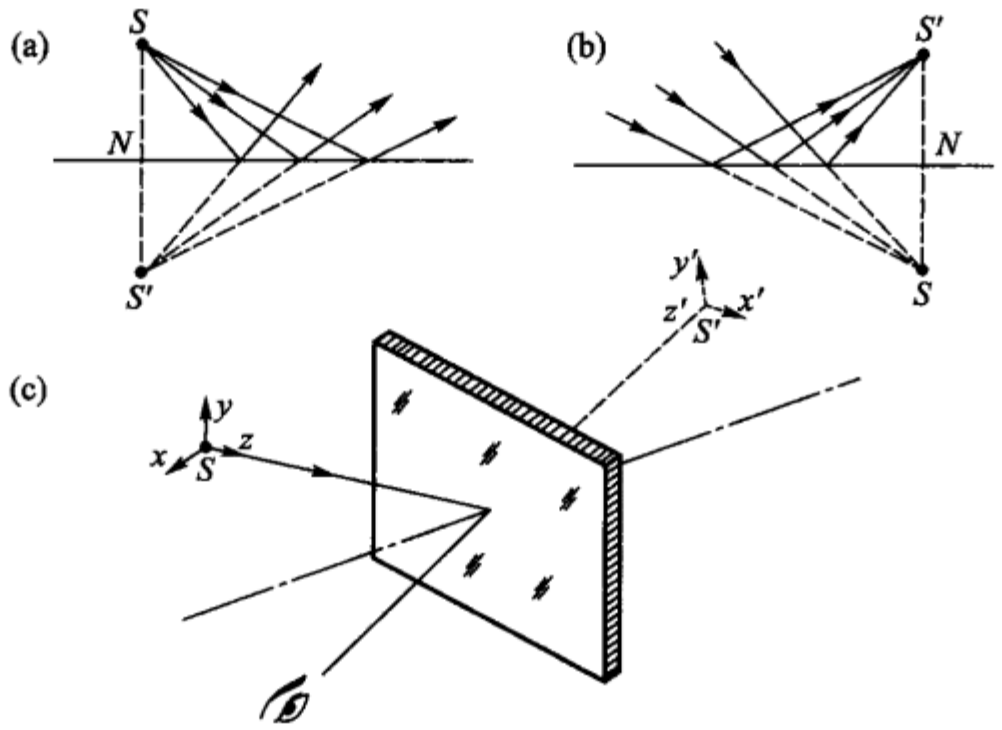


图 3－1

$$\sin i = \frac{y}{\sqrt{y^2 + x^2}},$$

$$\sin i' = \frac{y}{\sqrt{y^2 + x'^2}}.$$

将此二值代入式(3－1)解出 x'，则得下式：

$$x' = \frac{n'}{n}\sqrt{x^2 + \left(1 - \frac{n^2}{n'^2}\right)y^2}, \tag{3－2}$$

(3－1)式经变换，亦可写成

$$x' = x \cdot \frac{n'\cos i'}{n\cos i}. \tag{3－2a}$$

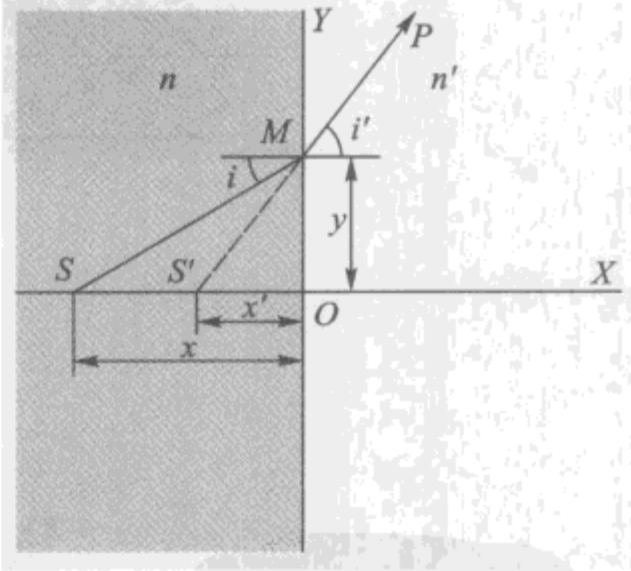


图 3－2

由式(3－2)及式(3－2a)可知，当 x 不变时，x'随 y 或 i 而变. 即对于由给定位置的发光点发出的光束，由于其中不同光线在分界平面上具有不同的入射角 i 或高度 y，所以相应折射光线的延线跟光束的光轴 XOS 的交点 S'都不重合.

下面来进一步地研究此折射后的光束的性质. 由于任一单心光束均可视为由许多元光束构成的，所以，只要了解元光束的折射，即可得知一般.

为表征立体光束的形状，常作这样的两个相互垂直的平面：通过光束轴且包含分界面法线的平面——子午平面和通过光束轴且垂直于子午面的平面——弧矢平面.

设自 S 点发出一个以 SM 为轴的元光束，如图 3－3(a)，SM_1 和 SM_2 为其在

子午面 XOY 上的两条边缘光线，它们折射后成为光线 P_1M_1 和 P_2M_2，延长线的交点在 S_1 处，并且交轴线 XOS 于 S' 和 S''. 在子午面内 SM_1 和 SM_2 间所有光线的延长线跟轴线的交点都在 S' 和 S'' 两点间. 将图围绕 OS 轴旋转一小角度，则得出一个表示相应立体光束的图. 此时，所有光线延长线的交点，都在线段 $S'S''$ 上，并且子午光线交点 S_1 画出了一个垂直于纸面的小弧段，对于元光束，这一小弧段可视为一个直线元. 这两个相互垂直的线段即为折射后的元光束的两个焦线. 线段 $S'S''$ 为弧矢焦线；在 S_1 处垂直于纸面的线段为子午焦线；两者分别与图 2－8 所示的 bb' 和 aa' 相应. 可见，单心的元光束经平面折射后成为像散光束.

图 3－3(b) 给出了这一像散光束的立体图形.

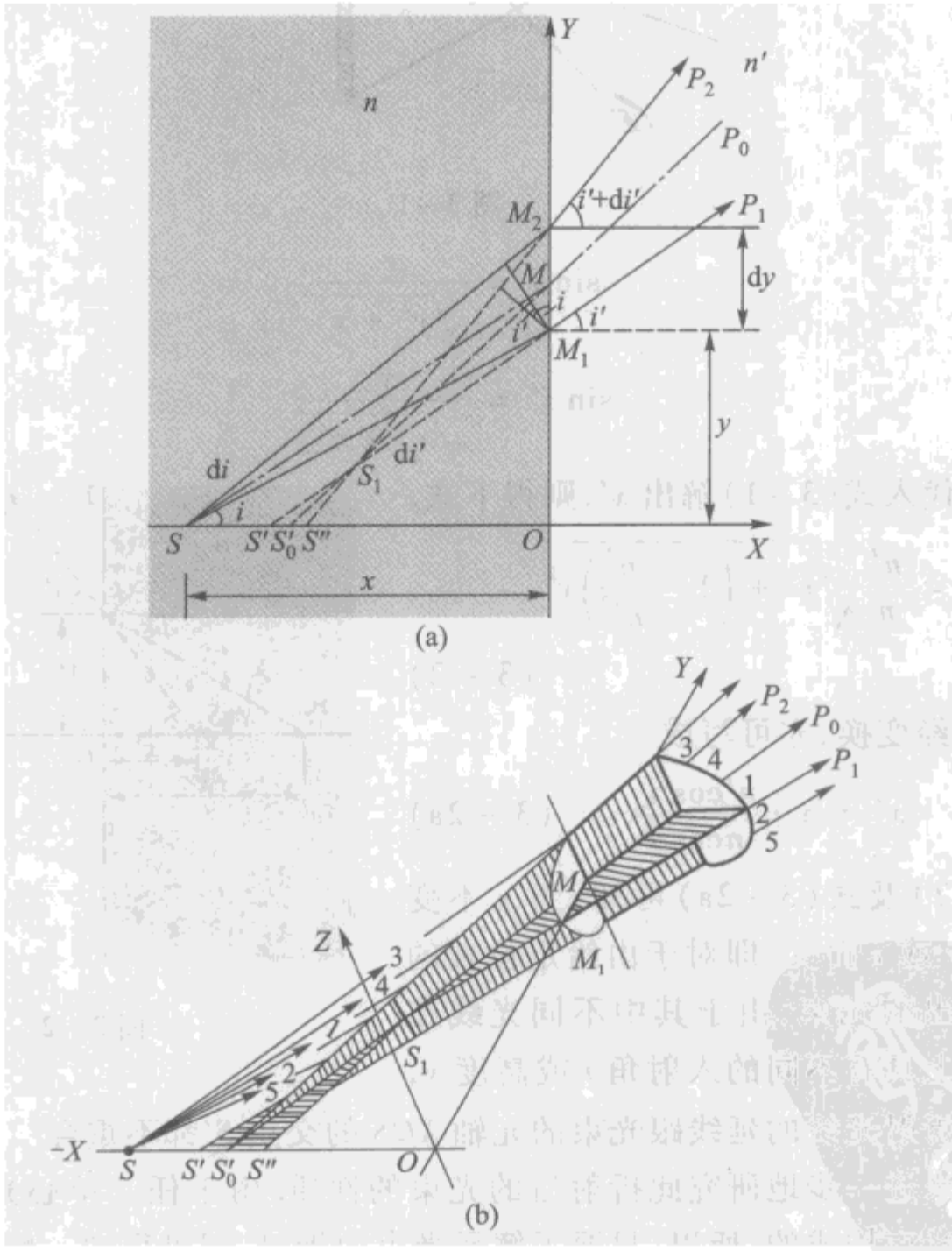


图 3－3

下面，讨论两焦线及像散差随入射角而变的情况.

图 3－3(a) 中，令 $P = |SM_1|$，$P_t = |M_1S_1|$ 和 $P_s = |M_1S'|$. 由三角形 SM_1M_2 和 $M_2M_1S_1$ 得

$$P\mathrm{d}i = \mathrm{d}y\cos i,$$
$$P_t\mathrm{d}i' = \mathrm{d}y\cos i'.$$

将折射定律的数学式微分,则有

$$n\cos i\mathrm{d}i = n'\cos i'\mathrm{d}i',$$

于是,得

$$P_t = \frac{n'\cos^2 i'}{n\cos^2 i}P. \tag{3-3}$$

对作为光束轴的光线,按折射定律有

$$n\frac{\gamma}{P} = n'\frac{\gamma}{P_s},$$

即

$$P_s = \frac{n'}{n}P. \tag{3-4}$$

式(3-3)和式(3-4)是对于单折射平面计算子午焦线和弧矢焦线位置的公式. 由它们求得经单平面折射后的元光束的像散差为

$$\Delta_\alpha = P_s - P_t = \frac{n'}{n}P\left(1 - \frac{\cos^2 i'}{\cos^2 i}\right). \tag{3-5}$$

由此式可知,经平面折射后光束的像散差随入射角而变.

此像散光束两焦线的位置随入射角 i 而变的情况,也可以单用一个图来表示. 在图 3-4 中所画的虚线和粗实线分别表示当入射角 i 改变时,子午焦线 S_1 和弧矢焦线 $S'S''$的轨迹,这些轨迹称为焦散曲线. 由上列公式或者由图均可知,元光束在折射平面上的入射角愈大,则折射后光束的像散差亦愈大;而当入射角 i 为零时,S_1 和 S'重合. 故当用折射平面作为光学系统时,只有在元光束垂直入射的情况下,才能在 S'处给出 S 的完善的像(虚像). 这一点,与平面反射成完善像的特点相比,是截然不同的.

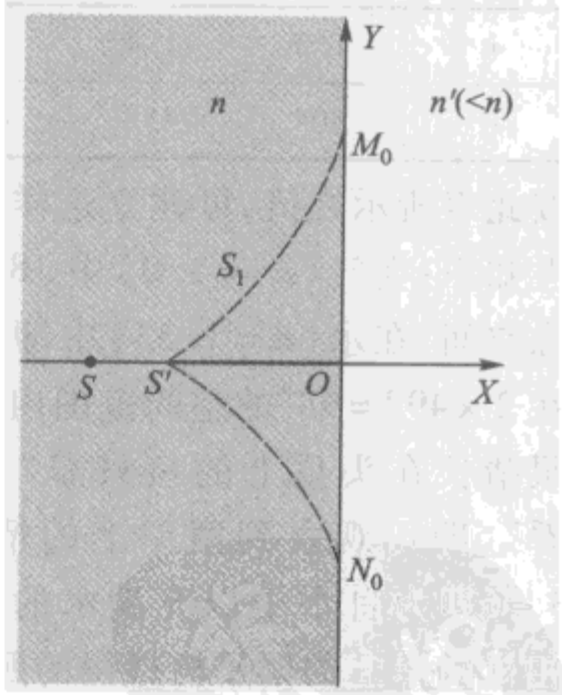
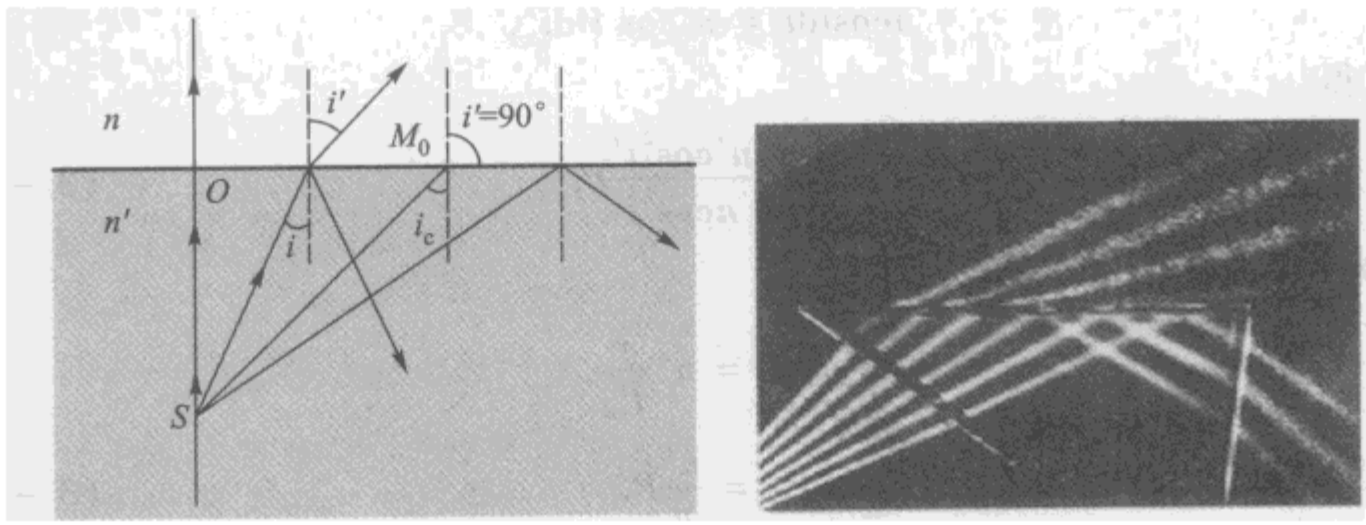


图 3-4

在实发光点所处介质的折射率大于分界面另一侧的折射率($n > n'$)的情况下,如图 3-5(a),折射角 i'总大于入射角 i;与 $i' = 90°$相应的入射角 i_c 是给定情况下的最大入射角,入射角超过 i_c 的光线,都不能进入分界面的另一侧,而按反射定律返回原介质. 这种完全返回原介质的反射,称为全反射或全内反射. 最大入射角 i_c 称为临界角. 临界角 i_c 的数值,取决于相邻介质折射率的比值:

$$i_c = \arcsin\frac{n'}{n}. \tag{3-6}$$

图 3 -5(b)与图 3 -5(a)对应,是由直接拍照而得的照片. 对于图 3 -4,我们应该注意,焦散曲线上的 M_0 和 N_0,与自 S 发出的以临界角 i_c 为其入射角的光线相应.



(a)　　(b)

图 3 -5

全反射　当光从光密介质向光疏介质折射,并且入射角超过临界角 i_c 时,则生全反射. 若 $n'=1$,则由式(3 -6)可算出 n 值不同的各种介质的临界角如下表:

n	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
i_c	50°	45°	42°	39°	36°	34°	32°	30°

按此表所示之值,可建立这样一种感性知识:空气($n'=1.0$)中 180°的成像空间,在水($n=1.33$)中却只反映在 $2\times49°=98°$的空间范围内. 例如,眼睛长在头顶上的鱼只需“向天上看”,即可观察到两岸上的情况. 图 3 -6即为自水中以充满水的针孔照相机向岸上的椰子树摄得的照片.

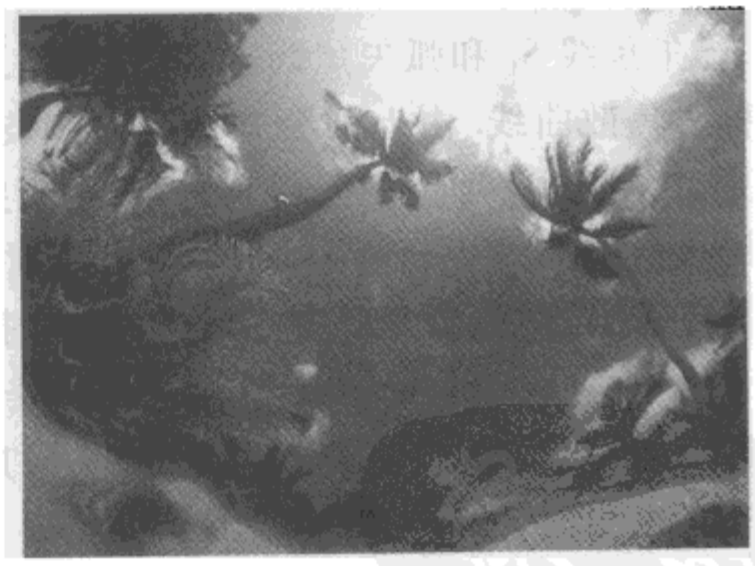


图 3 -6

全反射的应用很多,兹举三例如下:

1. 折射计

基于全反射原理构成测介质折射率的折光计,如阿贝(Abbe)折射计和浦尔弗里许(Pulfrich)折射计等.

折光计的原理如图 3 -7 所示. 将待测介质(n)载于已知折射率为 n_g($n_g>n$)的棱镜上,并且以扩散光照明此载有待测介质的折射面 AB,然后用望远镜从棱镜的另一侧 AC 进行观测. 由于 n_g 大于 n,所以在棱镜中将没有折射角大于 i_c

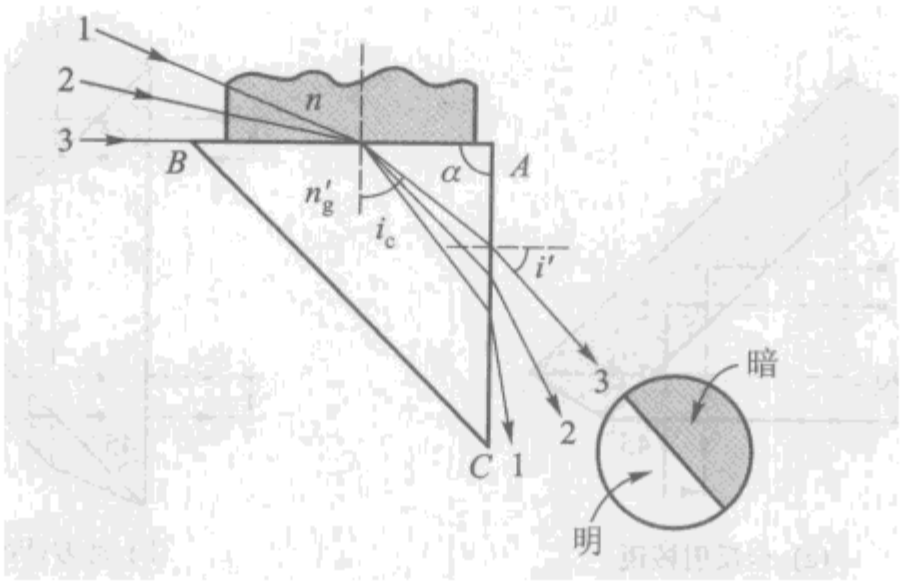


图 3－7

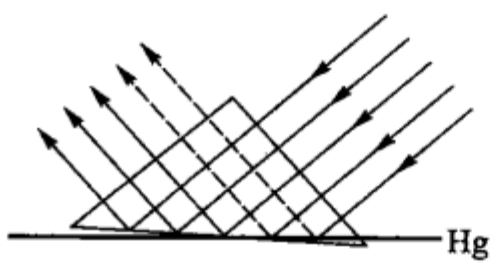
的光线，由望远镜观察到的视场，将是半明半暗的，并且中间有显明的分界线，此分界线与具有折射角 i_c 的光线相应. 很容量计算出，i'，α 和 n 有下列关系：

$$n = \sin\alpha \sqrt{n_g^2 - \sin^2 i'} - \sin i' \cos\alpha. \qquad (3-7)$$

由此，当 n_g 和 α 为已知时，通过测 i' 角，即可得待测介质的折射率 n 值. 阿贝折射计所用的棱镜，折射角 $\alpha = 45°$；而浦尔弗里许折射计的棱镜 $\alpha = 90°$. 显然，不论二者中的哪一个，所能测量的最大 n 值，都不能大于所用棱镜的 n_g 值.

2. 棱镜

借助光在棱镜中的全反射，来改变光的传播方向. 这在许多方面都较平面反射镜优越. 首先，因为全反射时光能完全反射回原介质；而由镀铝或镀其他介质膜的平面镜反射时，在反射表面上将有一定的光能被吸收；图 3－8 的照片表示由棱镜左半产生的全反射光（实线）比在棱镜右半自水银面的反射光的量大很多，前者与照片上的白的部分相应，后者与灰的部分相应. 其次，在研磨工艺和装校技术上，棱镜具有容易制成多种多样组合的反射面和满足高精度要求的特点. 图 3－9 所示的一组棱镜，即为用于改变光路方向的转向棱镜，在光学仪器中经常会用到它们.



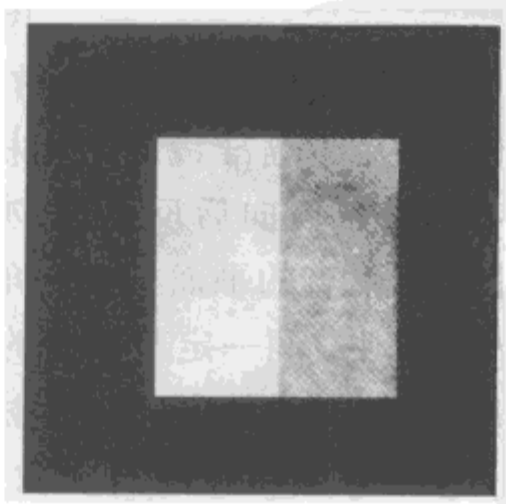


图 3－8

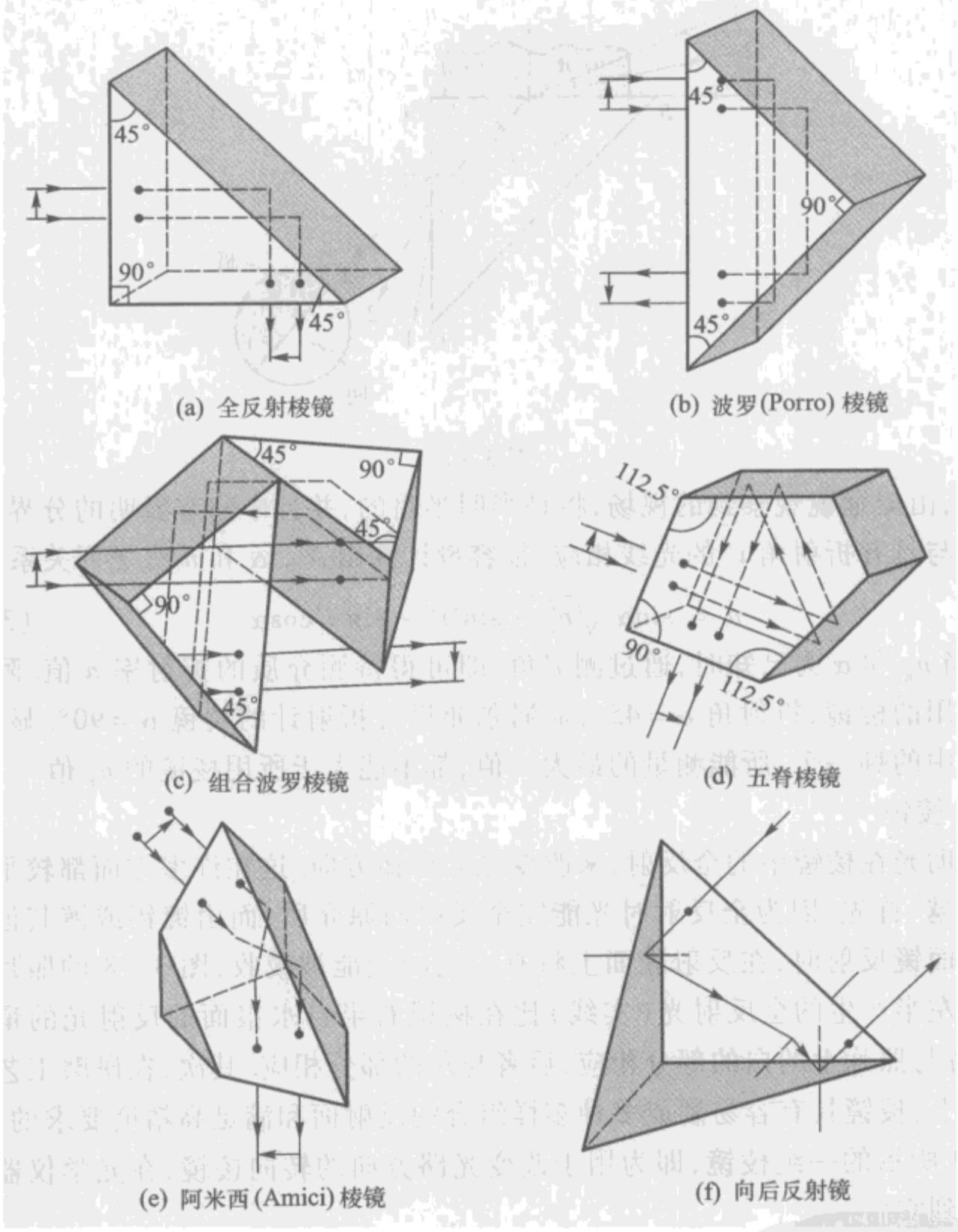


图 3－9

图 3－9 中(c)组合波罗棱镜，常用于陆地望远镜中，使倒像转变为正像；(e)阿米西棱镜多用于瞄准镜或照相机的调焦光路中，使光路改变 90°，像的左右与物的左右互换；(f)向后反射镜，亦称四面直角体，形如立方体割下的一个“棱角”，三个互相垂直的平面构成交角 A，角 A 的“中线”垂直于第四个折射面. 它的独特之处，是对空间一定范围内的入射光线，经过在它三个互相垂直平面上相继全反射后，出射光线的方向与入射光线的方向正相反. 这种棱镜在激光器的共振腔中可代替“高反介质镜”；在激光测距中它作为被测目标的反射器，不仅能有效地把光反射回来，而且减少了瞄准调整的困难. 正因为如此，它已被用作“月球激光反射器”，使从地球上某地送出的激光束由置于月球上的这种反射器

反射回原地.

3. 光学纤维

利用光在均匀、透明的玻璃柱的光滑内壁上接连不断的全反射,可以将光从其一端传送到另一端,如图 3－10(a)所示. 当柱的截面直径很小,甚至细到 5～10 μm 时,传送光的效果也不变,这种传光的细玻璃丝称光学纤维. 光学纤维现在已成为一种新的光学基本元件,它为光学窥视和光通信的实现创造了条件,也是某些新型光学系统和某些特殊激光器的组成部分.

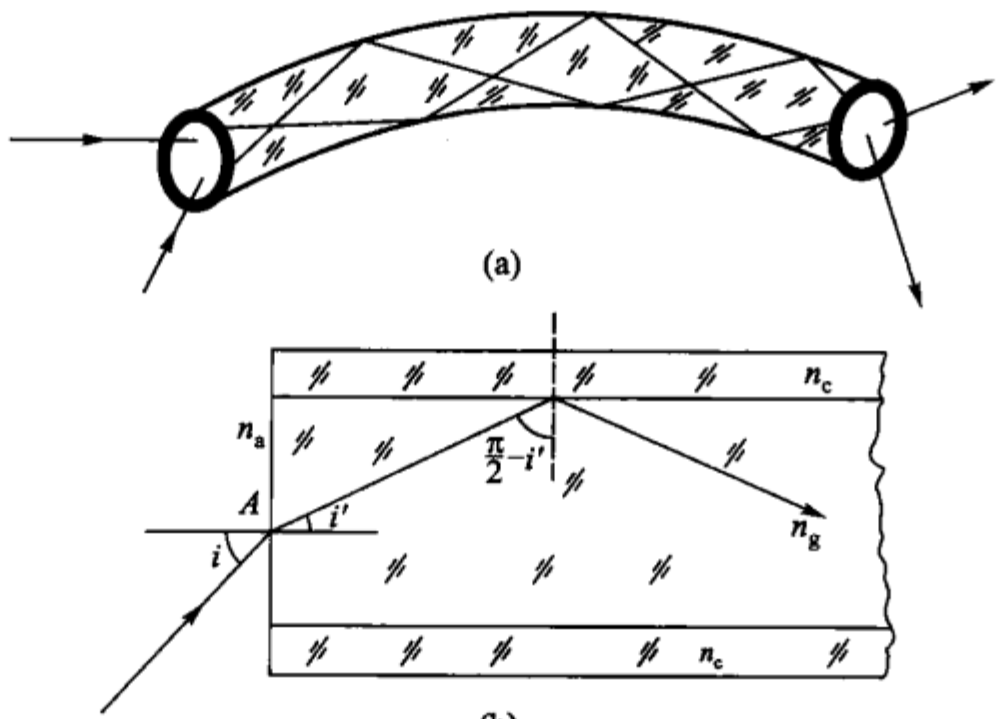


图 3－10

设有一折射率为 n_g 的均匀、透明的玻璃柱,如图 3－10(b),它的外层是折射率为 n_c 的另一玻璃层,$n_c < n_g$,并且柱的一端 A 在折射率为 n_a 的介质中. 入射光线在介质中射到 A 端,经折射后射到柱的内壁,当光线在壁上的入射角 $\frac{\pi}{2}-i'$ 大于由 n_g 和 n_c 决定的临界角时就产生全(内)反射. 也就是只有 i' 小于某一角 i_0',或者相应的 i 小于某一角 i_0 的光线才能产生全(内)反射,从而把光从一端传至另一端. 此 i_0 值可按下式求出:

$$n_g\sin\left(\frac{\pi}{2}-i_0'\right)=n_c,$$

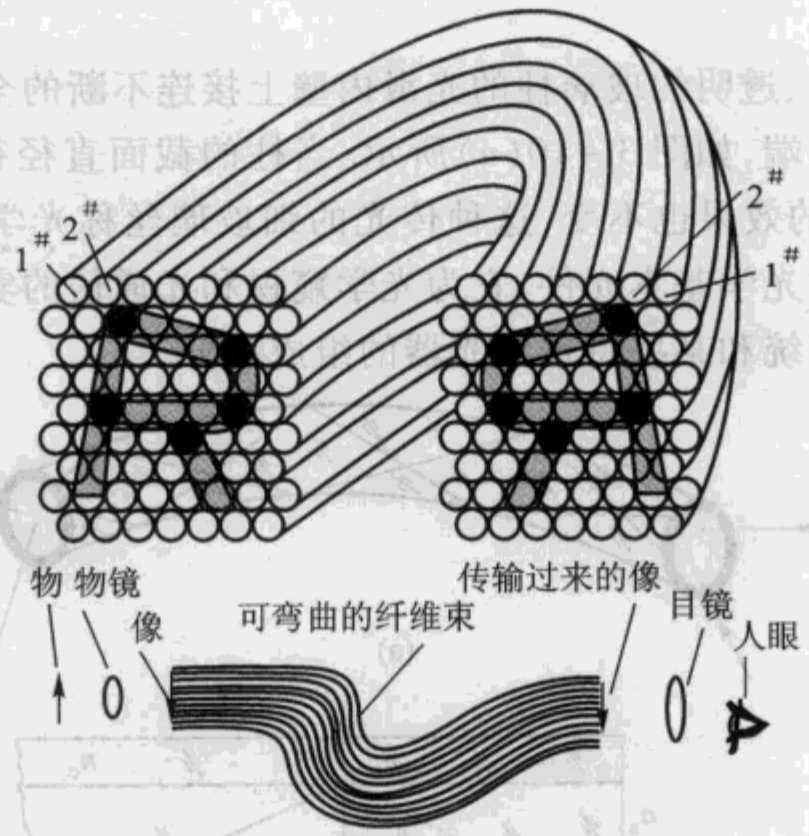
$$n_g\sin i_0'=n_a\sin i_0,$$

即
$$n_a\sin i_0=n_g(1-\cos^2 i_0')^{\frac{1}{2}}=\sqrt{n_g^2-n_c^2}. \tag{3-7a}$$

所以
$$i_0=\arcsin\left(\frac{1}{n_a}\sqrt{n_g^2-n_c^2}\right). \tag{3-7b}$$

凡是入射角 i 小于此 i_0 的入射光线都将通过接连不断的全(内)反射从一端传到另一端;入射角大于此 i_0 的光线将透过内壁进入外层,不能继续传送. 由式(3－7a)确定的 $n_a\sin i_0$ 值称光学纤维的数值孔径,i_0 的数值只取决于 n_a、n_g 和

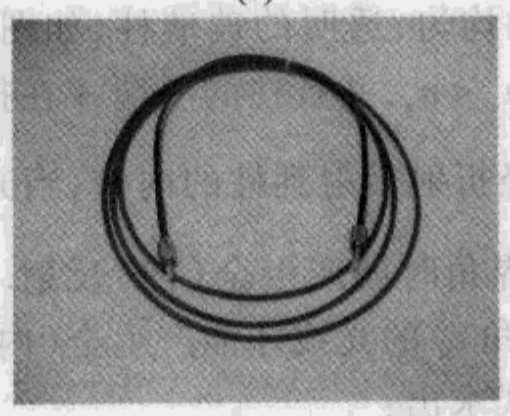
n_c，它表明了光学纤维能传送怎样的入射光束.



(a)



(b)



(c)



(d)

图 3 - 11

如果玻璃柱或纤维不是直的而是弯曲得很厉害,以至于某些光线在弯曲处内壁上的入射角小于临界角,则相应的光线将透过内壁漏掉,不能继续传播. 不过,倘若弯曲的曲率半径比棒或纤维的截面半径大 10 倍以上,则所述的漏光并不严重. 所以,一般弯曲的光学纤维,只要它透明度良好、均匀并且内壁光滑,就是一个光导管. 数以万计的光学纤维构成的光学纤维束不仅能传导光能,也能把图像从一端传送到另一端,如图 3-11(a)所示. 仅限于传光能的纤维束称传光束,同时能传像的纤维束称传像束,后者要求纤维束中的所有光学纤维在两端面的位置有严格的几何对应关系,传像束的实物及其效果的照片如图 3-11(b)、(c)和(d)所示.

* §3-2 光在棱镜主截面内的折射 色散棱镜

棱镜是由折射平面组成的光学系统. 具体来说,它是由两个或两个以上不平行的折射平面围限成的透明介质元件. 它的主要作用,是使通过它的光的传播方向相对于原来的方向发生偏折. 所以,偏向角是它的主要特征量. 上一节讲到了几种常见的转向棱镜,现在来研究另一种棱镜——色散棱镜(图 3-12). 为简便起见,仅限于研究光线在垂直于两折射平面的截面——主截面内的折射.

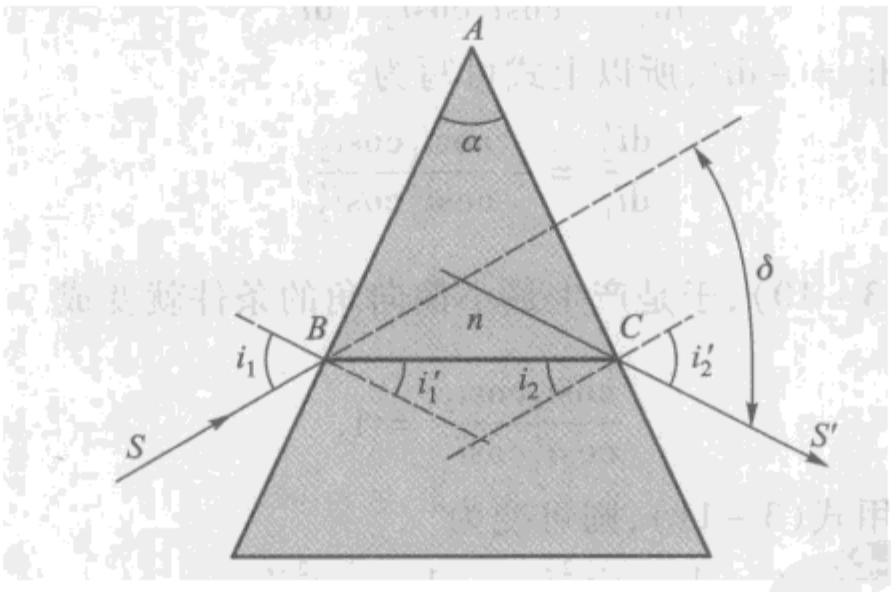


图 3-12

图 3-12 中 SB 为入射光线,经棱镜折射后成为 CS' 光线,两光线间的夹角即为光在棱镜主截面内的偏向角 δ. 由图 3-12 可写出:

$$\delta = (i_1 - i_1') + (i_2' - i_2) = i_1 + i_2' - (i_1' + i_2).$$

由几何学已知:

$$i_1' + i_2 = \alpha, \tag{3-8}$$

所以

$$\delta = i_1 + i_2' - \alpha. \tag{3-9}$$

对于给定折射角 α 的棱镜,δ 随 i_1 而变. 当 i_1 固定时,由于棱镜介质的折射率跟光的波长有关,所以不同波长的光将有不同的 i_2'. 这样,当入射光为各种波长组成的混合光时,经过棱镜后就分散开了. 这样的棱镜名为色散棱镜. 此外,由实验

得知:在 δ 随 i_1 的改变中,对某一 i_1 值,偏向角有一最小值 δ_{min}.

下面我们来求产生最小偏向角的条件.

由式(3 -9)得

$$\frac{d\delta}{di_1} = 1 + \frac{di_2'}{di_1}.$$

最小偏向角 δ_{min} 的必要条件是 $\frac{d\delta}{di_1} = 0$. 具体来说,就是

$$\frac{di_2'}{di_1} = -1. \tag{3-10}$$

按折射定律,光在 AB 面及 AC 面折射时,有

$$\left.\begin{aligned} n\sin i_1' &= \sin i_1, \\ n\sin i_2 &= \sin i_2', \end{aligned}\right\} \tag{3-11}$$

微分后,得

$$\begin{aligned} n\cos i_1' di_1' &= \cos i_1 di_1, \\ n\cos i_2 di_2 &= \cos i_2' di_2'. \end{aligned}$$

两式相除,得

$$\frac{di_2'}{di_1} = \frac{\cos i_1 \cos i_2}{\cos i_1' \cos i_2'} \cdot \frac{di_2}{di_1'}.$$

由式(3 -8)得知 $di_2 = -di_1'$,所以上式可写为

$$\frac{di_2'}{di_1} = -\frac{\cos i_1 \cos i_2}{\cos i_1' \cos i_2'}.$$

将此 $\frac{di_2'}{di_1}$ 值代入式(3 -10),于是产生最小偏向角的条件就变成

$$\frac{\cos i_1 \cos i_2}{\cos i_1' \cos i_2'} = 1. \tag{3-10a}$$

将上式平方,并利用式(3 -11),则可变为

$$\frac{1 - \sin^2 i_1}{n^2 - \sin^2 i_1} = \frac{1 - \sin^2 i_2'}{n^2 - \sin^2 i_2'}. \tag{3-10b}$$

所以,只有当 $i_1 = i_2'$ 时,式(3 -10b)才成立. 这就是说,光线 SB 在棱镜第一折射面上的入射角在数值上等于光线在第二折射面上的折射角,是偏向角有最小值的必要条件. 此时,光线 SB 和 CS' 对棱镜是对称的.

很容易证明,$\frac{d^2\delta}{di_1^2} = \frac{d^2 i_2'}{di_1^2} > 0$,所以上述必要条件,也是实现最小偏向角的充分条件. 按式(3 -11),此充要条件也就是

$$i_1' = i_2. \tag{3-10c}$$

这样,在最小偏向角的情况下,就有

$$i_1' = i_2 = \frac{\alpha}{2} \quad 和 \quad i_1 = \frac{\alpha + \delta_{min}}{2}.$$

将 i_1' 和 i_1 值代入式(3-11)的第一式并整理之,得

$$n = \frac{\sin\frac{\alpha + \delta_{min}}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \tag{3-12}$$

可见,在给定 α 的情况下,通过测量某波长的光线在三角棱镜中的最小偏向角 δ_{min},由式(3-12)就可算出棱镜介质对该色光的折射率 n.

色散棱镜在大多数情况下并不是用来测某色光的最小偏向角,而主要是用来把混合光在空间上分开. 虽然目前由于光栅(详见第十章)的日益完善,色散棱镜有被代替的趋向,但还是有它自己的特点的. 色散棱镜有许多种类型,这里讨论的不过是其中最基本的一种.

折射角 α 很小的棱镜称光楔,光通过光楔而产生的偏向角可由式(3-9)或式(3-12)得

$$\delta = (n-1)\alpha. \tag{3-12a}$$

棱镜对元光束的折射,实质上是元光束依次地通过组成棱镜的各折射面的折射的总和. 因而对于通过棱镜后的像散光束,可由在每个折射面上应用 §3-1 所讨论的原理来研究.

由两平行平面构成的平行面平板,为棱镜的一特例($\alpha = 0$). 关于光束在平行面平板中的折射的研究,可见本章习题.

§3-3 光在单球面上的折射和反射

单球面是仅次于平面的简单的光学系统,也是组成现在大多数光学系统的基本组元. 研究光通过它的折射和反射,是研究一般光学系统的成像的基础.

球面的一部分 OM(图 3-13)是折射率分别为 n 和 n' 的两透明介质的分界面. 现在来研究自发光点 S 发出的光线 SM 经过单球面折射后的光路,亦即研究光线 SM 经球面 OM 折射后与连线 SC 相交的位置. 在习惯上,称此发光点 S 与球面的曲率中心 C 的连线 SC 为主光轴.

在建立计算光路的公式之前,必须对作图的计算中所用的正负符号作出统一规定,否则,将无法进行具体计算. 应该指出,目前各国光学书籍或文献在符号规定上并不统一,所以在引用公式时,应注意其符号规定. 本书对线段和角度的符号作如下规定:

线段 是由点的运动而构成的,由指定的点(如折射点)沿光的传播方向运动所构成的线段为正,反之,为负.

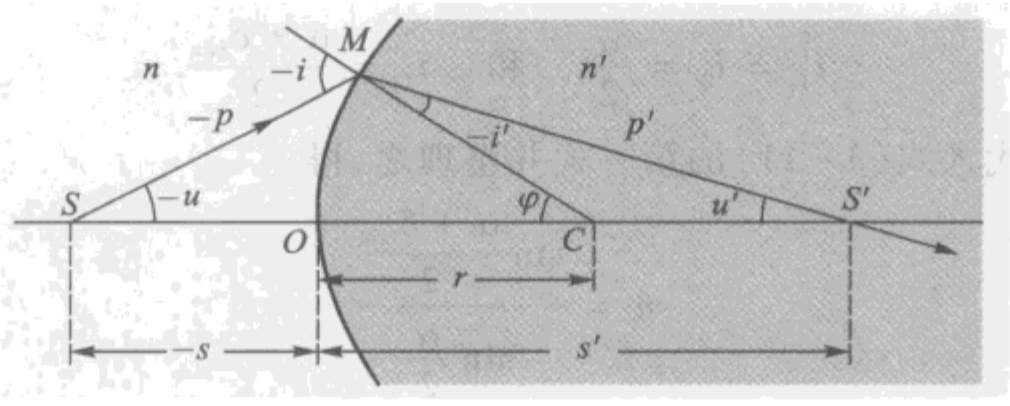


图 3 − 13

角度　是由轴线绕一定的点旋转而成的，由指定的轴（各折射点的法线）依顺时针方向旋转所构成的锐角为正，反之，为负.

此外，还规定在图上只标记角度和线段的绝对值，若某一字母表示负的数值，则在其前标以负号.

图 3 − 13 就是按上述规定标记成的. 在实际应用中，将会看到，这是比较方便的一种规定.

在 $\triangle SMC$ 中，按正弦定律有

$$\frac{-p}{\sin\varphi} = \frac{r}{\sin(-u)} = \frac{r-s}{\sin\angle SMC},$$

而
$$\sin\angle SMC = \sin[\pi - (-i)] = \sin(-i),$$

所以
$$\frac{-p}{\sin\varphi} = \frac{r}{\sin(-u)} = \frac{r-s}{\sin(-i)}. \tag{3-13}$$

同理，由 $\triangle S'MC$ 得

$$\frac{p'}{\sin\varphi} = \frac{r}{\sin u'} = \frac{s'-r}{\sin(-i')}. \tag{3-14}$$

在折射点 M，按折射定律有

$$n\sin(-i) = n'\sin(-i'). \tag{3-15}$$

由图 3 − 13 得各角度间的关系为

$$\varphi = u - i = u' - i'. \tag{3-16}$$

以上四个公式便是光经球面折射时，决定光路的基本公式. 利用它们并借助相邻折射面的过渡条件，可计算光线在由任意多个球面组成的光学系统中的光路，称这种计算工作为光路计算或描光路，而这是在研究光学系统的成像时，必须进行的工作.

由式(3 − 13)，式(3 − 14)和式(3 − 15)可得

$$\frac{n(s-r)}{p} = \frac{n'(s'-r)}{p'}, \tag{3-17}$$

其中 p 和 p' 的数值，可由三角公式算出：

$$p^2 = (r-s)^2 + r^2 - 2r(r-s)\cos\varphi,$$

$$p'^2 = (r - s')^2 + r^2 - 2r(r - s')\cos\varphi.$$

将式(3-17)的两端平方并以上面 p^2 和 p'^2 值代入,则有

$$\frac{r^2 + (r - s)^2}{n^2(r - s)^2} - \frac{2r\cos\varphi}{n^2(r - s)} = \frac{r^2 + (r - s')^2}{n'^2(r - s')^2} - \frac{2r\cos\varphi}{n'^2(r - s')}. \quad (3 - 18)$$

此式表示:在已知 n、n'和 r 的条件下,对于自同一发光点发出的各光线,经球面折射后,其与主光轴的交点 S'的位置,不仅取决于 s 的数值,而且除几个特殊情况外,还与折射点对曲率中心的张角 φ 的大小有关. 即发光点所在的物空间的单心光束,经球面折射后,除几个特例之外,均变成非单心的光束;或者说,球面折射破坏光束的单心性,一般不能给出完善的像.

但是,当角 φ 很小,以至于 $\cos\varphi$ 可视为 1,$\sin i$ 与 i 的弧度值无实际差别,p 可视为 s 及 p'可视为 s'时,则无论从式(3-17)或式(3-18),s'值均唯一地决定于 s. 光学系统中满足这样的条件的区域称近轴区域或傍轴区域. 在近轴区域里,由主光轴上发光点发出的单心光束经球面折射仍保持为单心光束,即对该发光点能获“点像”,研究近轴区域而物像关系的光学称近轴光学或称高斯光学.

在式(3-17)中,令 $p = s$ 和 $p' = s'$,立即得到决定近轴区域主光轴上物(S)和像(S')的位置的近轴球面折射公式:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}. \quad (3 - 19)$$

当然,利用近轴区域的折射定律

$$ni = n'i' \quad (3 - 20)$$

及式(3-16)亦可得出式(3-19). 读者可自行推导. 此处从略.

对于给定的 s,不同的球面(不同的 n、n'和 r)将有不同的 s'与之相应,所以可以认为式(3-19)中右端的项$(n' - n)/r$ 是一个表征球面的光学特性的常数,称为该面的光焦度,其符号为 Φ,

$$\Phi = \frac{n' - n}{r}. \quad (3 - 21)$$

并且规定,当 r 以 m 为单位时,由此式求出的 Φ 的单位为每米,符号为 m^{-1};也可用屈光度,符号为 D,1 D = 1 m^{-1}. 例如,对于 $n' = 1.5$,$n = 1.0$ 和 $r = 100$ mm 的球面,其光焦度等于 5 D.

若物点不在 S 点,而在 S'点,则 S 点就变成像点. 即若 S 和 S'之一为物,则另一为其相应的像. 这样的一对相应的点,称为共轭点.

当物点在物空间主轴上的无限远处 $s = -\infty$ 时,即当投射到球面上的光线平行于光轴时,则其共轭点的位置按式(3-19)应为

$$s' = \frac{n'}{n' - n}r.$$

由此 s'所确定的点,称为折射面的像空间主焦点或第二主焦点,记以 F';自折射

面顶点 O 到 F'的距离，称为该折射面的像空间焦距或第二焦距 f'. 即

$$f' = \frac{n'}{n' - n} r. \tag{3-22}$$

与像空间主光轴上的无限远点对应的，在折射面物空间的共轭点，称为折射面的物空间主焦点或第一主焦点，记以 F；自折射面 O 到 F 的距离，称为该面的物空间焦距或第一焦距 f. 只要以 $s' = \infty$ 代入式(3-19)，即可求得

$$f = -\frac{n}{n' - n} r. \tag{3-23}$$

由式(3-22)及式(3-23)，折射面的两个焦距显然有下列关系：

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}. \tag{3-24}$$

根据表征光焦度的公式(3-21)及上式，折射面的两焦距与光焦度间有关系：

$$\left.\begin{aligned} f' &= \frac{n'}{\Phi}, \text{ 或 } \Phi = \frac{n'}{f'}, \\ f &= \frac{-n}{\Phi}, \text{ 或 } \Phi = -\frac{n}{f}. \end{aligned}\right\} \tag{3-25}$$

有时希望以折射面的特征量 f 和 f'表示近轴球面折射公式(3-19). 为此，以 $\frac{r}{n' - n}$ 乘式(3-19)的两端，得

$$\frac{n'}{s'} \cdot \frac{r}{n' - n} - \frac{n}{s} \cdot \frac{r}{n' - n} = 1,$$

即

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1. \tag{3-26}$$

此式称为高斯公式.

若在计算近轴球面折射的共轭点时，不以折射面顶点 O 为原点，而选取折射面的两焦点 F 和 F'为原点，按图 3-14，

$$-s = -x - f,\ s' = f' + x';$$

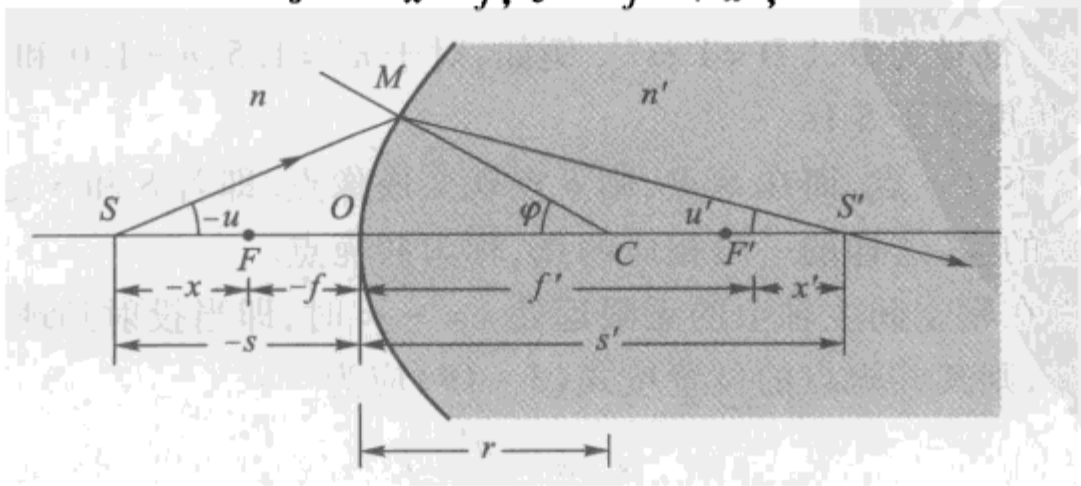


图 3-14

这样,高斯公式变为

$$\frac{f'}{x'+f'}+\frac{f}{x+f}=1,$$

简化后,变为

$$xx'=ff'. \tag{3-27}$$

此式称为牛顿公式.

式(3-19),式(3-26)和式(3-27)三者等效,有相同的含义.

在§2-1曾指出,当令 $n'=-n$ 时,对于一个平面折射所得的结果能推广到平面反射的情况;同理,光线在一个球面反射镜上的反射情况,也可由令 $n'=-n$ 的单球面折射公式获得. 由式(3-19),当令 $n'=-n$ 时,则得曲率半径为 r 的球面反射镜在近轴区域的反射公式:

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{2}{r}. \tag{3-28}$$

[**例题 1**] 从几何光学观点来研究人眼,有好几种简化模型,其中之一称为高尔斯特兰(Gullstrand)简化眼. 它把人眼的成像归结为只由一个曲率半径为 5.7 mm、介质折射率为 1.333 的单球面折射. 试求这种简化眼的焦点位置和光焦度. 若已知某物在角膜后 24.02 mm 处网膜上成像,求该物应在何处.

[**解**] (1) 已知 $n=1.0, n'=1.333, r=5.7$ mm,于是有

$$f'=\frac{n'}{n'-n}r=\frac{1.333}{1.333-1}\times 5.7\ \text{mm}=22.82\ \text{mm};$$

$$f=-\frac{n}{n'-n}r=-\frac{1.0}{1.333-1.0}\times 5.7\ \text{mm}=-17.12\ \text{mm};$$

$$\Phi=\frac{n'-n}{r}=\frac{1.333-1}{0.005\ 7\ \text{m}}=58.42\ \text{D}.$$

(2) 已知 $s'=24.02$ mm 或 $x'=(24.02-22.82)$ mm $=1.20$ mm,按式(3-19),有

$$\frac{1.333}{s'}-\frac{1}{s}=\Phi \quad \text{即} \quad s=-343\ \text{mm};$$

或按式(3-26),有

$$\frac{22.82}{24.02}+\frac{-17.12\ \text{mm}}{s}=1, \text{即}\ s=-343\ \text{mm};$$

或按式(3-27),有

$$1.20x=-17.12\times 22.82, x=-326\ \text{mm}.$$

亦即

$$s=(-326-17.12)\ \text{mm}\approx -343\ \text{mm}.$$

三种计算方法,得同样的结果:第一焦点 F 在角膜前 17.12 mm 处,第二焦点 F' 在角膜后 22.82 mm 处;简化眼的光焦度为 58.42 D,所求之物应在角膜前

343 mm 处.

[**例题 2**]　有一个玻璃球,半径 15.2 mm,折射率 1.52. 若在球心左侧 10 mm处放置一小发光体,令光线通过球心右侧的球面折射,试求像的位置及该折射面的焦点的位置并绘图表示之.

[**解**]　(1) 已知 $n = 1.52, n' = 1.0, r_1 = -15.2$ mm,

$$s = -(15.2 + 10)\ \text{mm} = -25.2\ \text{mm},$$

由式(3 - 19)得

$$\frac{1}{s'} - \frac{1.52}{-25.2\ \text{mm}} = \frac{1.0 - 1.52}{-15.2\ \text{mm}}, s' = -38.30\ \text{mm}.$$

(2) 对于中心右侧的折射球面,物空间焦距 f 和像空间焦距 f' 应分别为

$$f = -\frac{n}{n' - n}r = -\frac{1.52}{1.0 - 1.52} \times (-15.2)\ \text{mm} = -44.4\ \text{mm};$$

$$f' = \frac{n'}{n' - n}r = \frac{1.0}{1.0 - 1.52} \times (-15.2)\ \text{mm} = 29.23\ \text{mm}.$$

(3) 作为验算,应用牛顿公式(3 - 27),得

$$(44.4 - 25.2)x' = (-44.4)(29.23),$$

$$x' = -67.53\ \text{mm}.$$

此值正是

$$x' = s' - f' = (-38.3 - 29.23)\ \text{mm} = -67.53\ \text{mm}.$$

物 S 成虚像于折射面左方,距折射面顶点 38.3 mm;F 和 F' 点如图 3 - 15 所示.

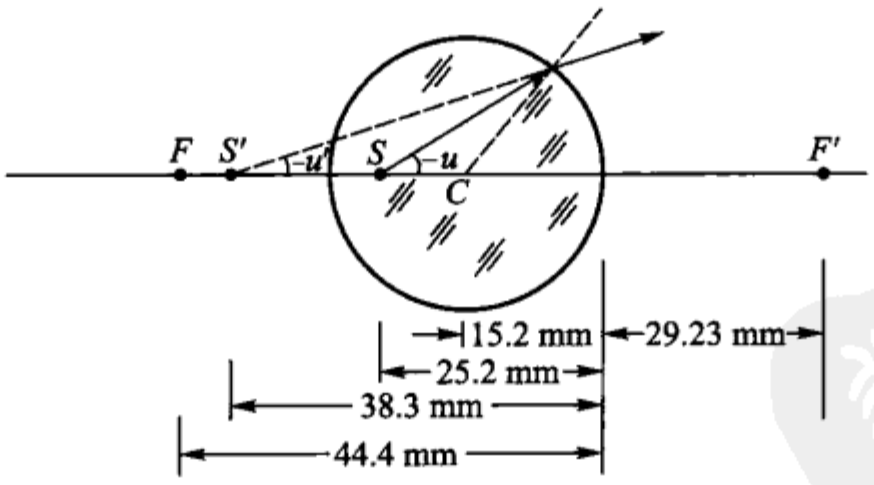


图 3 - 15

下一章我们会看到,这样一对共轭点 S 和 S' 是满足不晕成像的 $s = \frac{r}{n} + r$ 和 $s' = nr + r$ 关系式的,因而在高倍显微镜物镜中有十分重要的应用.

[**例题 3**]　如图 3 - 16 所示的一个球,内壁涂铝,半径为 r,球心在 C. 今在距球心为 Δ 处放一个小物 S,问它由左半球 O_1M_1 和右半球 O_2M_2 成的像各于何处? 两像的距离如何?

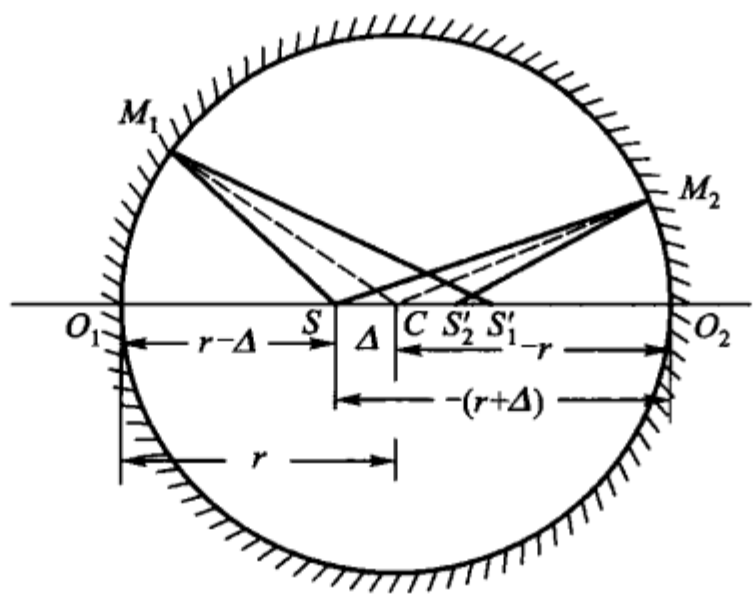


图 3－16

［**解**］（1）对左半球 O_1M_1，利用式(3－28)，有

$$\frac{1}{s_1'}+\frac{1}{r-\Delta}=\frac{2}{r},$$

得

$$s_1'=\frac{r(r-\Delta)}{r-2\Delta}.$$

此为像点 S_1' 到 O_1 的距离.

对右半球 O_2M_2，利用式(3－28)，以 $s_2=-(r+\Delta)$ 代入则有

$$\frac{1}{s_2'}+\frac{1}{-(r+\Delta)}=\frac{2}{-r},$$

即

$$s_2'=-\frac{r(r+\Delta)}{r+2\Delta},$$

此为像点 S_2' 到 O_2 的距离.

（2）两像的距离 $S_1'S_2'$ 并不能由 s_1' 和 s_2' 的直接相减来求，因为两者有不同的坐标原点. 我们可把 s_2' 用 O_1 为原点来表示

$$s_2''=s_2'+2r.$$

于是所求的两像点的间隔

$$|S_1'S_2'|=s_2''-s_1'=2r-\frac{r(r+\Delta)}{r+2\Delta}-\frac{r(r-\Delta)}{r-2\Delta}$$

$$=-\frac{4\Delta^2}{r-\dfrac{4\Delta^2}{r}}.$$

即两像点相距 $4\Delta^2\Big/\left(r-\dfrac{4\Delta^2}{r}\right)$. 这个结果是有实际意义的，它初步分析了在固体激光器的聚光腔中，工作物质(例如红宝石)与脉冲氙灯各应放在怎样的位置为最合适的问题. 从上式中可以看到，Δ 愈小和 r 愈大，则 $S_1'S_2'$ 也就愈小，这是设计固体激光器聚光腔所应考虑的基本问题.

§3-4　元光束经单球面折射后的空间成像

由上节已经确定，用以主光轴为轴的元光束，经球面折射后成点像. 现在来研究物空间一平面以及全部物空间的成像问题.

为此，可应用在球面的曲率中心处放一有小圆孔的屏（图 3-17），并且它的圆心 C 在主光轴上. 由于这样一个屏，使从以 C 为中心的物空间球面 S_1SS_2 上每一点发出的、以其法线为轴的元光束，均有相同条件（$\cos\varphi\approx1$）. 因而在以元光束成像的情况下，与物空间球面 S_1SS_2 上各点共轭的像点，将在以 C 为中心的另一个球面 $S_1'S'S_2'$ 上. 即用元光束经球面折射成像时，一对共轭面是两个同心的球面. 当我们对成像的物面的大小作一定的限制，即限制元光束的光轴对主光轴的夹角——视场角 ω 很小，以至 $\omega\approx\tan\omega$，弧段 S_1S 与垂轴直线段 P_1S 的差别可不计时，则可认为共轭面是两个垂直于光轴的平面. 可见，对于垂轴的直线段或平面，即使用元光束通过球面折射成像，也只能在 $\omega\approx\tan\omega$ 的近轴区域才有完善的像.

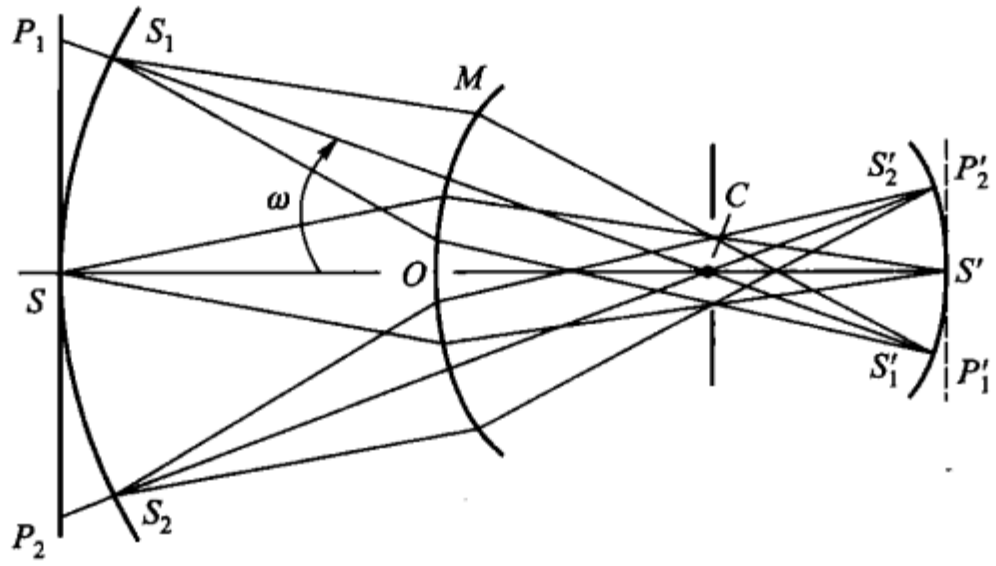


图 3-17

在近轴区域，可利用作图法来确定共轭点、线和面的位置.

像上每一点都是由共轭的物点发出的所有光线通过折射面后的交点. 于是，为确定像点，必须首先找出这些相交光线的光路. 但为确定一点，只需两条光线，所以在下列三条特征光线中任取两条，即可确定共轭点的位置.

（a）物空间平行于主光轴的光线，折射后，通过像空间主焦点 F'；

（b）物空间通过主焦点 F 的光线，折射后，在像空间平行于主光轴；

（c）通过球面曲率中心 C 的光线，不变方向.

图 3-18 为给定物体 P_1S，利用上面所述的三条特征光线求共轭线段 $P_1'S'$ 的例子.

与上述图解法具有同等意义，而且为实际所惯用的还有所谓解析法. 就是，

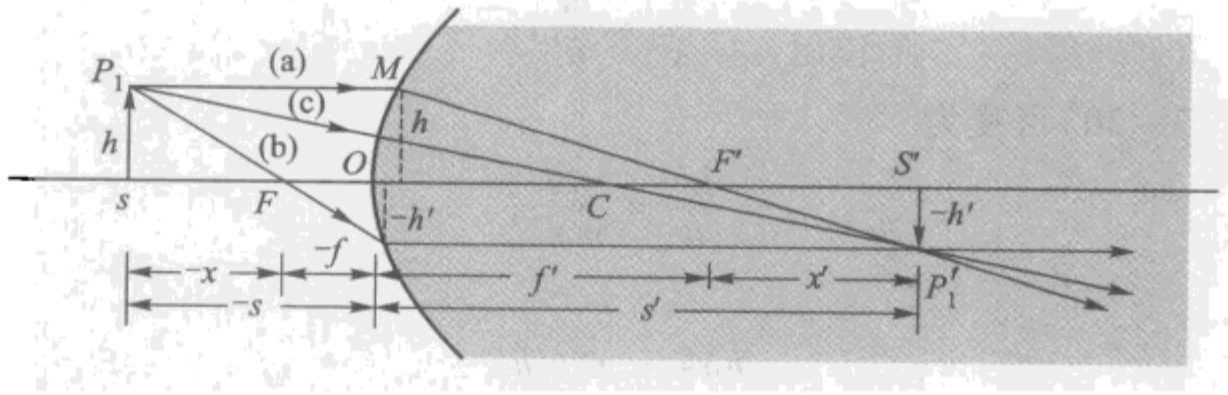


图 3－18

首先利用近轴球面折射公式求出 s' 值，然后用由折射定律导出的其他公式来计算共轭线或点间的各种几何上的比例关系.

在表示近轴区域成像的图 3－19 中，有

$$\frac{-h'}{h}=\frac{s'\cdot i'}{-s\cdot i},$$

即

$$\frac{h'}{h}=\frac{s'i'}{si}.$$

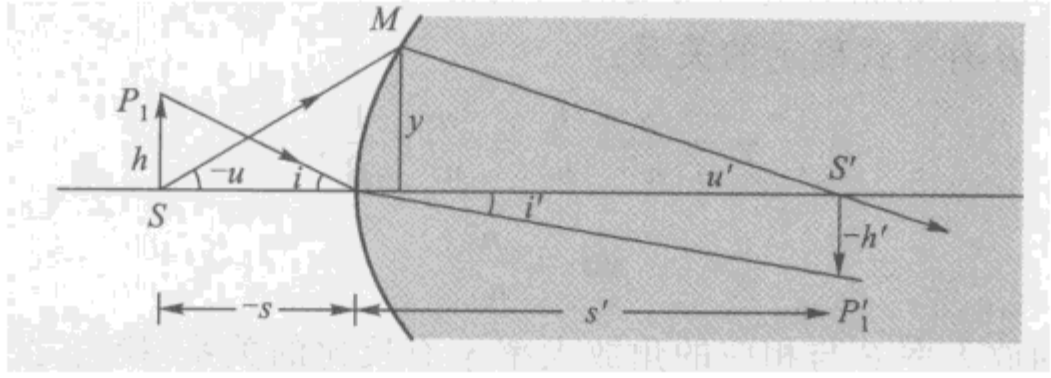


图 3－19

由近轴折射定律 $ni=n'i'$，上式可改写为

$$\frac{h'}{h}=\frac{n}{n'}\cdot\frac{s'}{s}. \tag{3－29}$$

此处 $\frac{h'}{h}$ 称为折射面对物 P_1S 成像的垂轴（横向）放大率 β，

$$\beta=\frac{h'}{h}=\frac{ns'}{n's}. \tag{3－30}$$

显然，在已知 n，n'，r 和 s 的情况下，利用式(3－19)算出 s' 后，即可由上式求得像高对物高的比值——垂轴放大率 β.

根据图 3－18，β 亦可由下式计算：

$$\beta=-\frac{f}{x}=-\frac{x'}{f'}. \tag{3－30a}$$

由图 3－19，有

$$\frac{s'}{s} = \frac{u}{u'},$$

于是,式(3 - 30)可变为

$$\frac{h'}{h} = \frac{nu}{n'u'},$$

或

$$nuh = n'u'h'. \tag{3 - 31}$$

即在光线经球面折射的情况下,物空间的折射率 n,光线与主光轴的夹角 u 和物高 h 三者之乘积等于像空间的折射率 n',与角 u 共轭的角 u'和像高 h'三者的乘积. 称此三者之积 nuh 或 $n'u'h'$为拉格朗日 - 亥姆霍兹(Lagrange-Helmholtz)不变量,简称拉氏不变量,式(3 - 31)简称为拉氏不变式. 它给出了物空间和像空间在近轴区的各共轭量间的关系.

像空间的光线和主光轴的夹角 u',与其在物空间共轭光线和主光轴的夹角 u 之比,称为折射面对共轭点 S 和 S'的角放大率 γ,即

$$\gamma = \frac{u'}{u}. \tag{3 - 32}$$

角放大率表示着共轭点上空间角度的改变情况. 由不变式(3 - 31),角放大率 γ 与垂轴放大率 β 有下式确定的关系:

$$\gamma = \frac{n}{n'} \cdot \frac{h}{h'} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{\beta},$$

或

$$\gamma\beta = \frac{n}{n'}. \tag{3 - 33}$$

此式表明垂轴放大率 β 与相应的角放大率 γ 有反比的关系. 换言之,当由球面折射面获得某给定物体的放大的像时,相应的角放大率 γ 必较小.

此外,为了充分地研究物空间与像空间的共轭性质,还必须确定表征沿系统主光轴方向的共轭线段间的比例关系.

若物沿主光轴位移一距离 $\mathrm{d}x$,则像沿主光轴有一相应的位移 $\mathrm{d}x'$,比值$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}x}$称为轴向(纵向)放大率 α,即

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}x}. \tag{3 - 34}$$

按牛顿公式(3 - 27)有

$$x\mathrm{d}x' + x'\mathrm{d}x = 0$$

所以,轴向放大率

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}x} = -\frac{x'}{x}. \tag{3 - 35}$$

对于给定焦距的折射面,物离折射面愈远,即 x 愈大,则轴向放大率 α 将愈小.

按牛顿公式,式(3-35)亦可写成

$$\alpha = -\frac{ff'}{x^2} = -\frac{x'^2}{ff'}. \tag{3-35a}$$

对于同一共轭点,上述三个放大率间有一定的关系. 由式(3-30a)和(3-35a),可得

$$\frac{\alpha}{\beta^2} = -\frac{f'}{f}, \tag{3-36}$$

而由式(3-24),此关系式可写成

$$\frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{n'}{n}. \tag{3-37}$$

将式(3-33)的$\frac{n}{n'}$值代入上式,则得

$$\alpha\gamma = \beta. \tag{3-38}$$

这就是同一共轭点的三个放大率间的关系式.

有了上述三个放大率即可计算物像两空间的线段、方向、面元以及立体元等的共轭关系,它们表征了共轭空间的几何关系.

[**例题**] 一个玻璃球,折射率为 n,半径为 R,置于空气之中,问:

(1) 物在无限远时经过球成像于何处?

(2) 物在球前 $2R$ 处时,经球成像于何处?大小如何?

(3) 如果物体是个指向球面的小箭头,问在(2)的条件下成像后箭头指向何方?

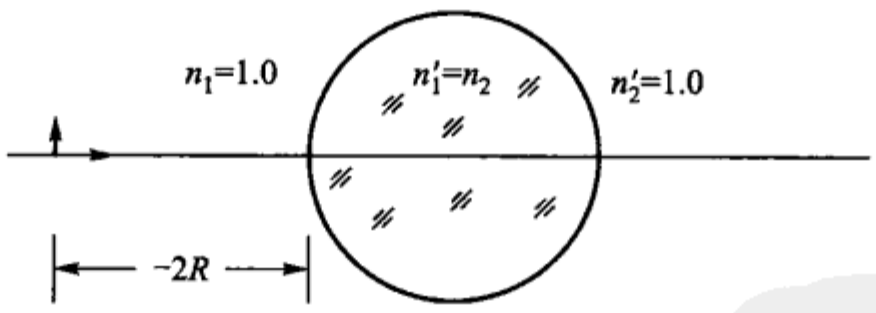


图 3-20

[**解**] 如图 3-20 所示,已知:$n_1 = 1.0$,$n_1' = n_2 = 1.5$,$n_2' = 1.0$,$r_1 = R$,$r_2 = -R$.

(1) 物在无限远时,对第一折射球面,由公式(3-19)得

$$\frac{1.5}{s_1'} - \frac{1.0}{\infty} = \frac{1.50 - 1.0}{R}, \text{即 } s_1' = 3R;$$

同样,对第二折射球面,$s_2 = s_1' - 2R$,有

$$\frac{1}{s_2'} - \frac{1.5}{s_1' - 2R} = \frac{1 - 1.5}{-R}, \text{即 } s_2' = \frac{R}{2}.$$

无限远物将成像于球后面离第二折射表面 $0.5R$ 处,此即球的第二焦点.

（2）物在球前 $2R$ 处，$s_1 = -2R$，由第一折射球面，有

$$\frac{1.5}{s_1'} - \frac{1.0}{-2R} = \frac{1.5-1.0}{R}，即\ s_1' = \infty；$$

由第二折射球面

$$\frac{1}{s_2'} - \frac{1.5}{\infty} = \frac{1-1.5}{-R}，即\ s_2' = 2R，$$

像点在球后面离第二折射球面顶点 $2R$ 处.

（3）对于(2)的情况，设在第一折射球面的垂轴放大率为 β_1，第二折射球面的放大率为 β_2，则总的放大率应为

$$\beta = \beta_1\beta_2 = \frac{n_1 s_1'}{n_1' s_1} \cdot \frac{n_2 s_2'}{n_2' s_2} = \frac{s_1' s_2'}{s_1 s_2} = -1.$$

所以，像与物大小相等，倒立. 此时可由轴向放大率 α 来描述箭头的指向：

$$\alpha = \frac{n'}{n}\beta^2 = \frac{n_2'}{n_1}\beta^2 = 1，$$

即像的箭头方向向右.

§3-5　共轴球面系统及其基点

由中心在同一直线上的两个或两个以上的球面组成的系统，称为共轴球面系统，诸中心所在的直线称为系统的光轴. 共轴球面系统是最简单的一种球面组合系统，也是一般复杂光学系统的基本组元.

光通过共轴球面系统的成像，决定于光依次地在组成系统的每个球面上的折射和反射的结果. 在成像过程中，前一折射面所成的像，即为相邻后一折射面的物. 在近轴区域，只要物空间是单心光束，则经共轴系统后，光束仍为单心的. 即共轴球面系统对近轴区域的物能完善地成像.

当物在共轴球面系统中的位置、高度和光线跟光轴的夹角为已知时，则应用拉格朗日－亥姆霍兹不变式，就能研究每个折射面对于成像的作用，或对给定的物研究它经每一折射面后的成像位置和大小.

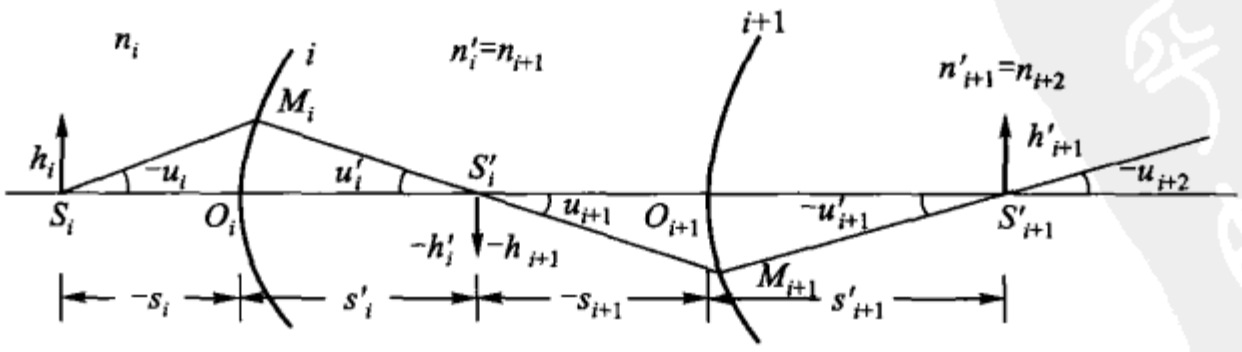


图 3-21

图 3-21 中，O_i 和 O_{i+1} 分别为组成共轴球面系统的第 i 个和第 $i+1$ 个折射球面的顶点，直线 O_iO_{i+1} 为系统的光轴. S_i 是第 i 面的物与光轴的交点，或者是相邻前一折射面所成的像与光轴的交点. 光线 S_iM_i 与光轴的夹角 u_i，称为光线在第 i 面物空间的孔径角. 对于第 i 面，按拉格朗日-亥姆霍兹不变式(3-31)有

$$n_iu_ih_i = n_i'u_i'h_i',$$

而由第 i 面过渡到第 $i+1$ 面时，存在下列的过渡关系：

$$n_i' = n_{i+1}, u_i' = u_{i+1} \text{ 及 } h_i' = h_{i+1}. \tag{3-39}$$

于是，有

$$n_iu_ih_i = n_i'u_i'h_i' = n_{i+1}u_{i+1}h_{i+1} = n_{i+1}'u_{i+1}'h_{i+1}'.$$

设系统是由 k 个共轴球面组成的，则由上式可得

$$n_1u_1h_1 = \cdots = n_{i-1}u_{i-1}h_{i-1} = n_iu_ih_i = \cdots = n_k'u_k'h_k'. \tag{3-40}$$

可见，在任一给定共轴球面系统中，对于一给定的物，拉格朗日-亥姆霍兹不变量 nuh 是一个常量.

当把共轴系统作为一个整体，而不逐一地研究每一个面的成像时，则可用系统的几个特别的点，来表征系统在成像上的性质. 不论共轴球面系统的具体布置如何，只要得知系统的这几个点，便可用前述非常简单的高斯公式或牛顿公式，计算共轭点的位置和成像的放大率等. 这几个特别的点，就是系统的主焦点、主点和节点，统称为系统的基点.

物空间平行于系统光轴的平行光束，在系统像空间的交点 F' ——与物空间光轴上无限远点共轭的像空间的点，称为系统像空间的主焦点(或第二主焦点). 通过 F' 所作的垂直于光轴的平面，称为系统像空间的主焦平面(或第二主焦平面).

像空间平行于系统光轴的光束，在物空间所对应的点 F——与像空间光轴上无限远点共轭的物空间的点，称为系统物空间的主焦点(或第一主焦点). 通过 F 所作的垂直于光轴的平面，称为系统物空间的主焦平面(或第一主焦平面).

如图 3-22(a)，作物空间焦点 F 发出的光线的延长线，并且将像空间的相应的平行光线向反方向延长，于是此两延长线(虚线)交于 M 点，通过 M 点向光轴作的垂轴平面 MH，称为系统物空间的主平面(或第一主平面). 这个主平面有这样的含义：系统对从物空间主焦点 F 处发出的光线所产生的偏折，等效于物空间主平面对同一光线所产生的偏折. 这样就把在系统中实际上的许多折射和反射，简化为一次偏折. 或者说，由主平面的一次偏折代替了系统的许多个实际的折射和反射.

系统物空间的主平面与光轴的交点 H，称为系统的物空间主点(或第一主点).

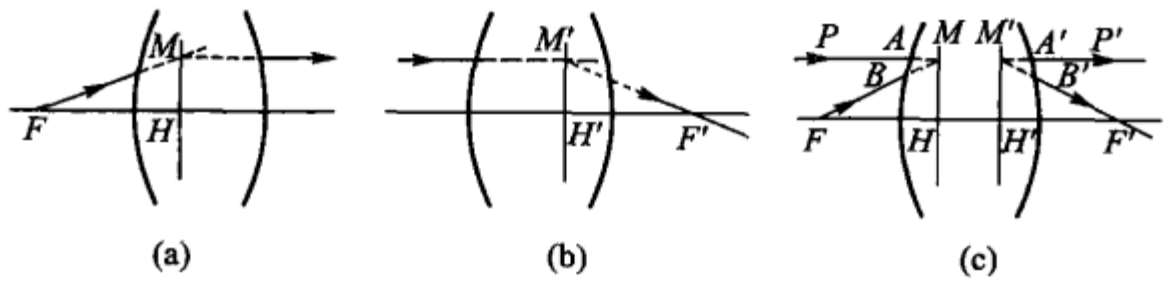


图 3 - 22

如图 3 - 22(b),作物空间平行于光轴的光线的延长线,并且将在像空间会聚于第二主焦点 F'的相应光线向反方向延长,于是,此两延长线交于 M'点,通过 M'点向光轴所作的垂轴平面,称为系统的像空间主平面(或第二主平面). 第二主平面对自第二主焦点 F'发出的光线所产生的偏折,与整个系统对同一光线所产生的偏折相同. 第二主平面与光轴的交点,称为系统的像空间主点(或第二主点).

如图 3 - 22(c),对同一系统的第一主平面上的任一点 M,它是光线 PA 和 FB 的交点(我们总可选择 FB 与光轴的倾斜角,使光线 $A'P'$与 PA 在同一直线上),经系统后,此两光线分别成为光线 $B'F'$和 $A'P'$,相交于 M',故 M'为 M 的共轭点,它在系统的第二主平面上. 并且,M'及 M 在光轴的垂直距离 $M'H'$与 MH 相等,即 $\beta = +1$. 于是,主平面可定义为:系统中垂轴放大率为正 1 ($\beta = +1$)的两个共轭垂轴平面.

自第一主点到第一主焦点的距离 HF,称为系统的第一焦距(或物空间的焦距);自第二主点到第二焦点的距离 $H'F'$,称为系统的第二焦距(或像空间的焦距).

上述两主焦点和两主点,为表征光学系统的性质所必要的基点.

此外,系统光轴上角放大率 $\gamma = +1$ 的两个共轭点,称为系统的节点. 在物空间的折射率和像空间的折射率相同的共轴球面系统内,垂轴放大率 β 与角放大率 γ 之积为 1[(3 - 33)式],所以,在此情况下,主点与节点重合. 利用两者重合的性质,并根据系统绕节点作不大的转动时($\gamma = +1$)平行光所成的像不产生位移的特点,可确定系统主点位置,从而能确定任意复杂系统的焦距.

现在来研究当共轴光学系统的两主点和两主焦点为已知时,对垂直于系统光轴上的线段 PS 的像(图 3 - 23).

自物上一点 P 画一平行于光轴的光线,它与系统的第一平面的交点 M 距光轴为 h_1. 由于两主平面共轭并且 $\beta = +1$,所以在像空间与 PM 光线对应的光线,不但通过系统的第二主焦点 F',而且也通过系统第二主平面上与 M 等高的 M'点. 同时,自同一物点 P 画出的通过系统第一主焦点 F 的光线,与第一主平面的交点 N 距光轴为 $-h_1'$,按主平面的性质,在像空间与 PFN 对应的光线应为平行

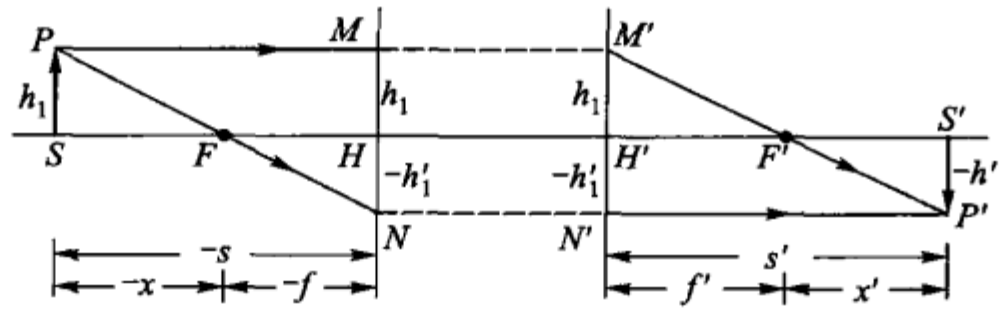


图 3-23

于光轴的 $N'P'$. 这样,两直线 $M'F'$ 与 $N'P'$ 的交点 P',即为物点 P 被由 H,H',F 和 F' 表征的共轴球面系统所成的像点.

在图 3-23 中,由两相似三角形 PMN 和 FHN,得

$$\frac{-h_1'}{h_1-h_1'}=\frac{-f}{-s},$$

由另一组相似三角形 $M'P'N'$ 和 $M'F'H'$,得

$$\frac{h_1}{h_1-h_1'}=\frac{f'}{s'}.$$

将以上二式两端分别相加,则有

$$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1. \tag{3-41}$$

此式与计算单球面折射成像的高斯公式(3-26)有相同的形式. 但必须注意到,这个公式所用的原点,不是系统哪一个折射面的顶点而是组合系统的两主点.

若所讨论的共轴球面系统在空气中,$f'=-f$,则上式可改写为

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}. \tag{3-41a}$$

对于已知基点的共轴球面系统(图 3-23)也可以用牛顿公式. 由 $\triangle NHF$ 和 $\triangle PSF$,得

$$\frac{-h_1'}{h_1}=\frac{-f}{-x},$$

而由 $\triangle S'P'F'$ 和 $\triangle M'F'H'$,得

$$\frac{-h_1'}{h_1}=\frac{x'}{f'}.$$

于是,有

$$\frac{x'}{f'}=\frac{-f}{-x},$$

即

$$xx'=ff'. \tag{3-42}$$

此式不论在使用上和形式上与计算单球面折射成像的牛顿公式完全相同.

[例题 1] 某一在空气中的透镜组,焦距为 f',两主点间的距离为 d,试求垂轴放大率为 -1 的共轭点间的间隔.

［**解**］　设所求的两共轭点间的间隔为 L，按图 3－23，有

$$L = -s + d + s'.$$

对于空气中的透镜组，$n = n' = 1$；垂轴放大率 $\beta = \dfrac{ns'}{n's} = -1$，只有 $s = -s'$；此时上式变为

$$L = d + 2s'.$$

按(3－41)式，以 $s = -s'$ 代入，则有

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{-s'} = \frac{f'}{s'} + \frac{-f'}{-s'} = 1，即 s' = 2f'.$$

于是，得

$$L = d + 4f'.$$

即放大率为 -1 的两共轭点的间隔，等于透镜组的两主点的间隔 d 加上 4 倍的焦距. 若透镜组就只有一个薄透镜 $d = 0$，则 $\beta = -1$ 的一对共轭点的间隔等于该薄透镜焦距的 4 倍.

［**例题 2**］　焦距为 100 mm 的照相镜头已对远处的景物调好了焦面，现在拟对在镜头前 2 m 处的人拍照，问在像面不改变位置的条件下，镜头应移动多少？

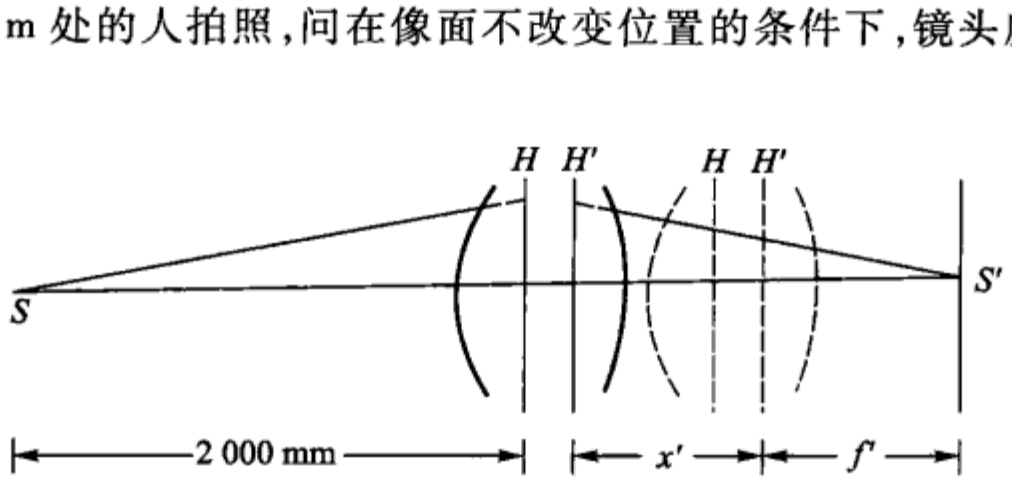


图 3－24

［**解**］　无限远物必成像于焦平面上，设对 2 m 处的人，镜头需向前移 x 方能在原焦面位置上成清晰的像. 如图 3－24 所示，设镜头需向物方移动 x' 距离.

按(3－41a)式，有

$$\frac{1}{f' + x'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'},$$

整理后，得

$$x' = -\frac{f'^2}{s + f'}.$$

已知 $f' = 100$ mm，$s = -2\,000$ mm，代入上式，得

$$x' = -\frac{100 \times 100}{-2\,000 + 100}\ \text{mm} = 5.26\ \text{mm},$$

即照相镜头需向物方移动 5.26 mm.

[**例题 3**] 在空气中一个负透镜(假定焦距为 -1)逐渐移近某一虚物(如图 3-25),试绘出垂轴放大率 β 跟物到焦点 F 的距离 x 的关系曲线.

[**解**] 垂轴放大率 $\beta = -\frac{x'}{f'} = -\frac{f}{x} = \frac{f'}{x}$,令 $f' = -1$,则得方程式

$$\beta = -\frac{1}{x},$$

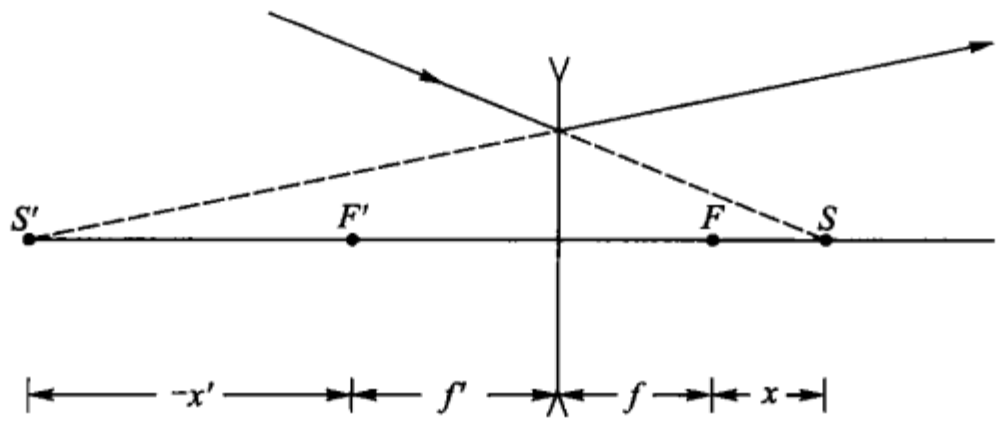


图 3-25

由此式得下表及图 3-26:

x	100	50	10	5	2	1	0.5	0.1	-0.1
β	-0.01	-0.02	-0.1	-0.2	-0.5	-1	-2	-10	10
x	-0.5	-1	-2	-5	-10	-50	-100	$-\infty$	
β	2	1	0.5	0.2	0.1	0.02	0.01	0	

[**例题 4**] 试证共轴光学系统的节点平面的垂轴放大率和主平面的角放大率均为 n/n'.

[**证**] 按节点的定义,它的角放大率 $\gamma_N = \frac{u'_K}{u_1} = 1$,代入拉氏不变式(3-40),则有

$$n_1 h_1 = n'_K h'_K.$$

所以,节点平面的垂轴放大率

$$\beta_N = \frac{h'_K}{h_1} = \frac{n_1}{n'_K},$$

其中 n_1 和 n'_K 分别为系统物空间和像空间的折射率,简记为 n 和 n',即

$$\beta_N = \frac{h'_K}{h_1} = \frac{n}{n'}.$$

按主平面的定义,它的垂轴放大率 $\beta_H = \frac{h'_K}{h_1} = 1$,代入拉氏不变式(3-40),则有

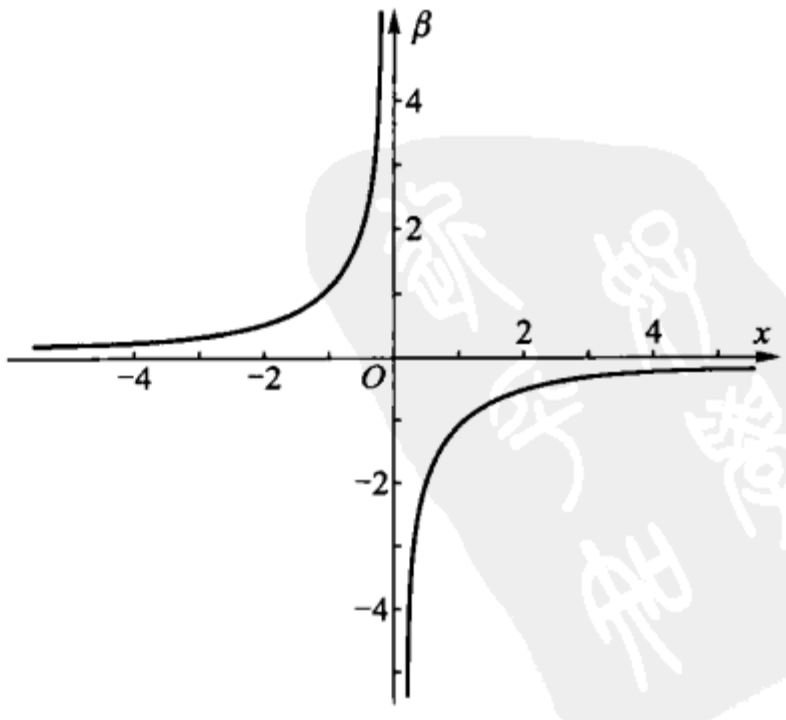


图 3-26

$$n_1 u_1 = n'_K u'_K,$$

$$\gamma_H = \frac{u'_K}{u_1} = \frac{n_1}{n'_K} = \frac{n}{n'},$$

所以，有

$$\beta_N = \gamma_H = n/n'.$$

§3-6　共轴球面系统的组合

实际的光学系统，特别是现代光学仪器或光学布置所用的光学系统，常是由几个共轴球面系统组合而成的. 此合成的光学系统，也可由它的基点来表征. 有了合成系统的基点，则其成像方面的性质便可利用上节所得的高斯公式、牛顿公式和放大率公式来确定.

图 3-27 所示为由共轴球面系统 Ⅰ 和系统 Ⅱ 构成的合成系统. 当系统 Ⅰ 的主点 H_1, H'_1 和主焦点 F_1, F'_1，系统 Ⅱ 的主点 H_2, H'_2 和主焦点 F_2, F'_2，以及两系统的光学间隔 $|F'_1F_2| = \Delta$ 为已知时，则可求得合成系统的基点（H, H', F 和 F'）.

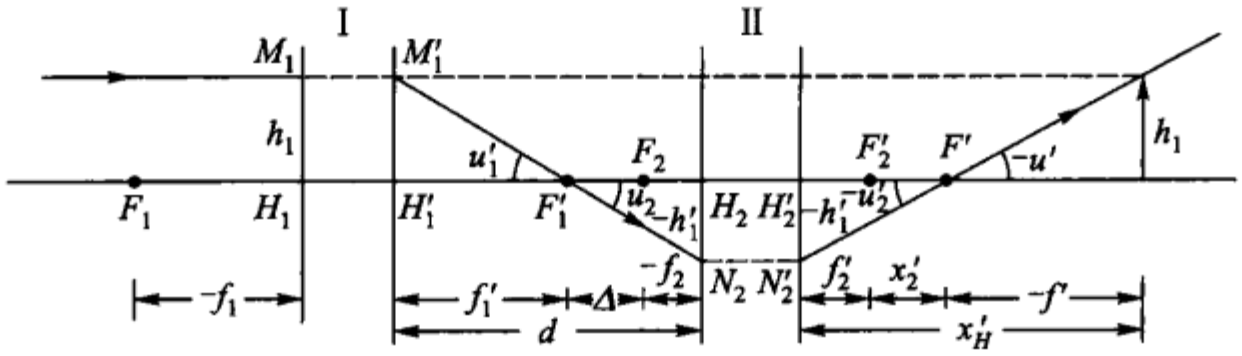


图 3-27

在物空间作一平行于光轴的光线，它必通过系统 Ⅰ 的第二主焦点 F'_1 和合成系统的第二主焦点 F'，而且 F'_1 和 F' 即为此光线在系统 Ⅱ 中的一对共轭点.

由图 3-27 得

$$\begin{cases} h_1 = f'_1 u'_1 = (-f')(-u'), \\ -h'_1 = (\Delta - f_2) u_2 = (f'_2 + x'_2)(-u'_2); \end{cases}$$

或者

$$\begin{cases} \dfrac{u'_1}{-u'} = -\dfrac{f'}{f'_1} \\ \dfrac{u_2}{-u'_2} = \dfrac{f'_2 + x'_2}{\Delta - f_2}. \end{cases}$$

而

$$u'_1 = u_2, \quad -u' = -u'_2,$$

所以

$$\frac{u'_1}{u'} = \frac{u_2}{u'_2};$$

于是
$$-\frac{f'}{f'_1}=\frac{f'_2+x'_2}{\Delta-f_2}.$$
由前述,已知 F'_1 与 F' 共轭,按牛顿公式有
$$-\Delta\cdot x'_2=f_2\cdot f'_2,$$
或
$$x'_2=-\frac{f_2f'_2}{\Delta}.$$
将此 x'_2 值代入上式并解出 f',得合成系统的像空间焦距为
$$f'=-\frac{f'_1f'_2}{\Delta}. \tag{3-43}$$
同理,可求得合成系统的物空间焦距为
$$f=\frac{f_1f_2}{\Delta}. \tag{3-44}$$
由图 3-27 得由系统Ⅱ的第二主点 H_2 到合成系统第二主点 H' 的距离为
$$x'_H=f'_2+x'_2-f'=f'_2+\left(-\frac{f_2f'_2}{\Delta}\right)-\left(-\frac{f'_1f'_2}{\Delta}\right),$$
或
$$x'_H=f'_2\frac{\Delta-f_2+f'_1}{\Delta}.$$
而自系统Ⅰ的第二主点到系统Ⅱ的第一主点的距离为 $d=\Delta-f_2+f'_1$,所以上式可写成
$$x'_H=f'_2\frac{d}{\Delta}. \tag{3-45}$$
同理,可求得自系统Ⅰ的第一主点 H_1 到合成系统的第一主点 H(图中未画出)的距离为
$$x_H=f_1\frac{d}{\Delta}. \tag{3-46}$$
对于由两个以上的共轴球面系统组成的复杂系统,可以将每两个相邻系统组合成一个中间系统,利用上面得到的公式(3-43),(3-44),(3-45)和(3-46)求各个中间系统的焦点和主点,若所得中间系统多于两个,则须以每两个相邻中间系统再进行组合,并且求出每一组合的焦点和主点,依此类推,便可获得任意复杂系统的焦点和主点.

有了合成系统的焦点和主点后,可不考虑系统的具体结构,而直接用高斯公式或牛顿公式讨论其物空间和像空间的近轴光学关系.

§3-7 厚 透 镜

由两个共轴折射曲面构成的光学系统称透镜. 大多数实际应用的透镜的两

个曲面都是球面的，主要类型如图 3－28 所示，统称之为球面透镜. 此外还有非球面透镜，如图 3－29 所示：其中(a)为双双曲面透镜，(b)为双曲面－平面透镜，(c)球面－椭球面透镜及(d)平面－双曲面透镜.

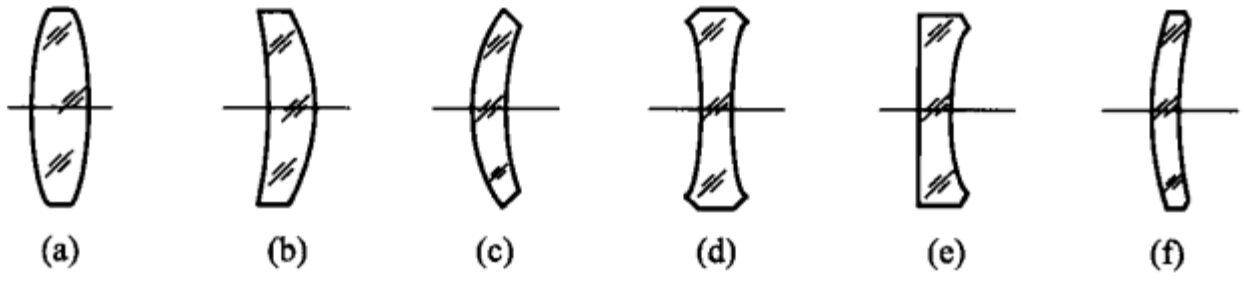


图 3－28　球面透镜

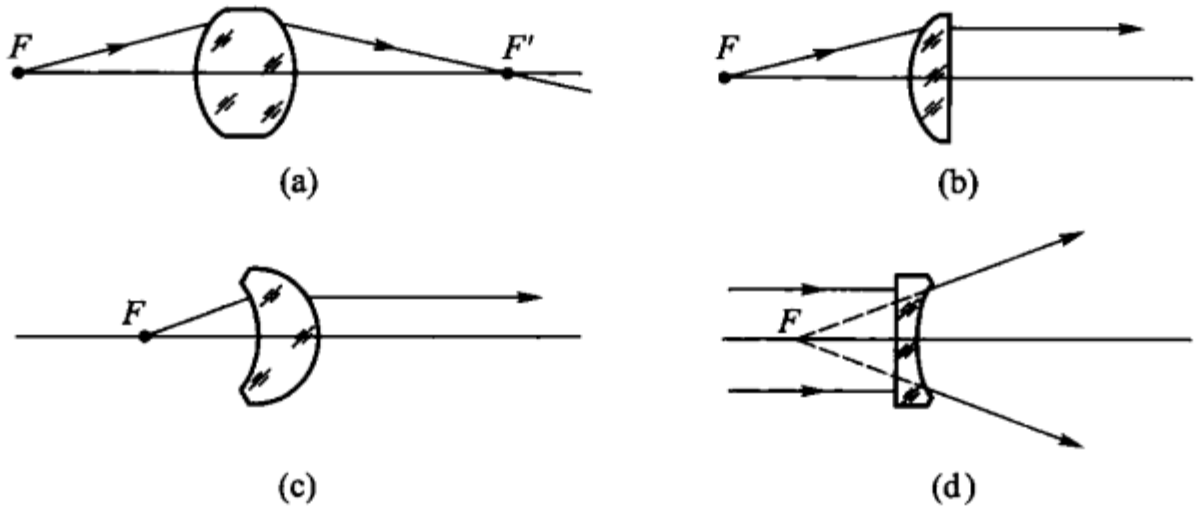


图 3－29　非球面透镜

透镜两曲面在其光轴上的间隔称透镜的厚度，若此厚度同透镜的焦距相比，不能忽略者称厚透镜，可忽略者称薄透镜.

作为对透镜性质(包括反射镜在内)的一般讨论，我们在下面均以球面透镜为例，甚至在说到透镜这个词时若不加说明也都是指球面透镜. 然而，我们且不可忘记，所有对球面透镜有意义的近轴光学概念也都适用于非球面透镜. 非球面透镜在相当长的一段历史时期内，用得比较少，其基本原因是这样的透镜不容易制造. 不过现在，用电子计算机来控制透镜的研磨已是很成熟的技术，对校正像差十分有利的非球面透镜的应用已经很广泛.

我们从光学系统方面来看透镜，认为厚透镜是由这样两个系统组成的共轴系统：第一系统的两主平面 H_1 和 H_1' 重合，并且通过第一折射面的顶点 O_1(图 3－30)，第二系统的两主平面 H_2 和 H_2' 也重合，并且通过第二折射面的顶点 O_2. 对于置于空气中的厚透镜可利用上节所得的公式求其基点.

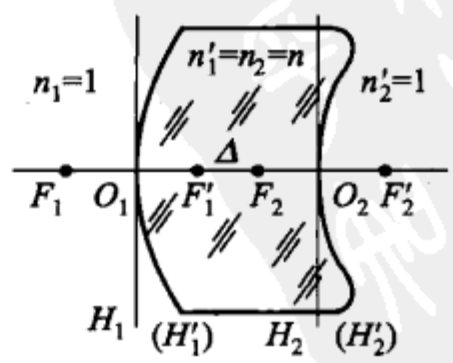


图 3－30

利用式(3－43)，得透镜的光焦度为

$$\Phi = \frac{1}{f'} = -\frac{\Delta}{f_1' f_2'},$$

其中 $\Delta = d - f_1' + f_2$，所以

$$\Phi = \frac{f'_1}{f'_1 f'_2} - \frac{f_2}{f'_1 f'_2} - \frac{d}{f'_1 f'_2};$$

又由式(3-24),(3-25)及图3-20知:

$$\Phi_1 = \frac{n}{f'_1}, \quad \Phi_2 = \frac{1}{f'_2}.$$

于是,厚透镜的光焦度由下式决定:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n}\Phi_1\Phi_2, \tag{3-47}$$

其中 Φ_1 和 Φ_2 分别为第一折射面和第二折射面的光焦度,可由公式(3-21)算出. 当已知 Φ_1 和 Φ_2 时,利用公式(3-45)和(3-46)就可求出厚透镜的两主点的位置:

$$\left.\begin{aligned} x'_H &= f'_2\frac{d}{\Delta} = \frac{f'_1 f'_2}{\Delta}\cdot\frac{d}{f'_1} = -f'\frac{d}{f'_1}, \\ x_H &= f_1\frac{d}{\Delta} = \frac{f_1 f_2}{\Delta}\cdot\frac{d}{f_2} = f\frac{d}{f_2}. \end{aligned}\right\} \tag{3-48}$$

这两式亦可直接用透镜第一折射面的曲率半径 r_1,第二折射面的曲率半径 r_2 和透镜的折射率来表示:

$$\left.\begin{aligned} x'_H &= -\frac{r_2 d}{(n-1)d - n(r_1 - r_2)}; \\ x_H &= -\frac{r_1 d}{(n-1)d - n(r_1 - r_2)}. \end{aligned}\right\} \tag{3-49}$$

有了公式(3-47)和(3-48)或(3-49),就可定出透镜的两主点和两焦点的位置,从而能用高斯公式研究近轴区域内的各种成像问题. 但是,在使用高斯公式时,应该注意:原点在 H 和 H'.

作为必要的感性知识,我们来讨论由 $n=1.5$ 的光学玻璃制成的、厚度 d 不过分大[即$(n-1)d \ll n(r_1 - r_2)$]的几种厚透镜的基点.

图3-31(a),$|r_1| = |r_2|$ 的双凸透镜,由式(3-49)得

$$\begin{cases} x_H = +\dfrac{1}{3}d; \\ x'_H = -\dfrac{1}{3}d. \end{cases}$$

图3-31(b),$|r_1| = |r_2|$ 的双凹透镜,由式(3-49)得

$$\begin{cases} x_H = +\dfrac{1}{3}d; \\ x'_H = -\dfrac{1}{3}d. \end{cases}$$

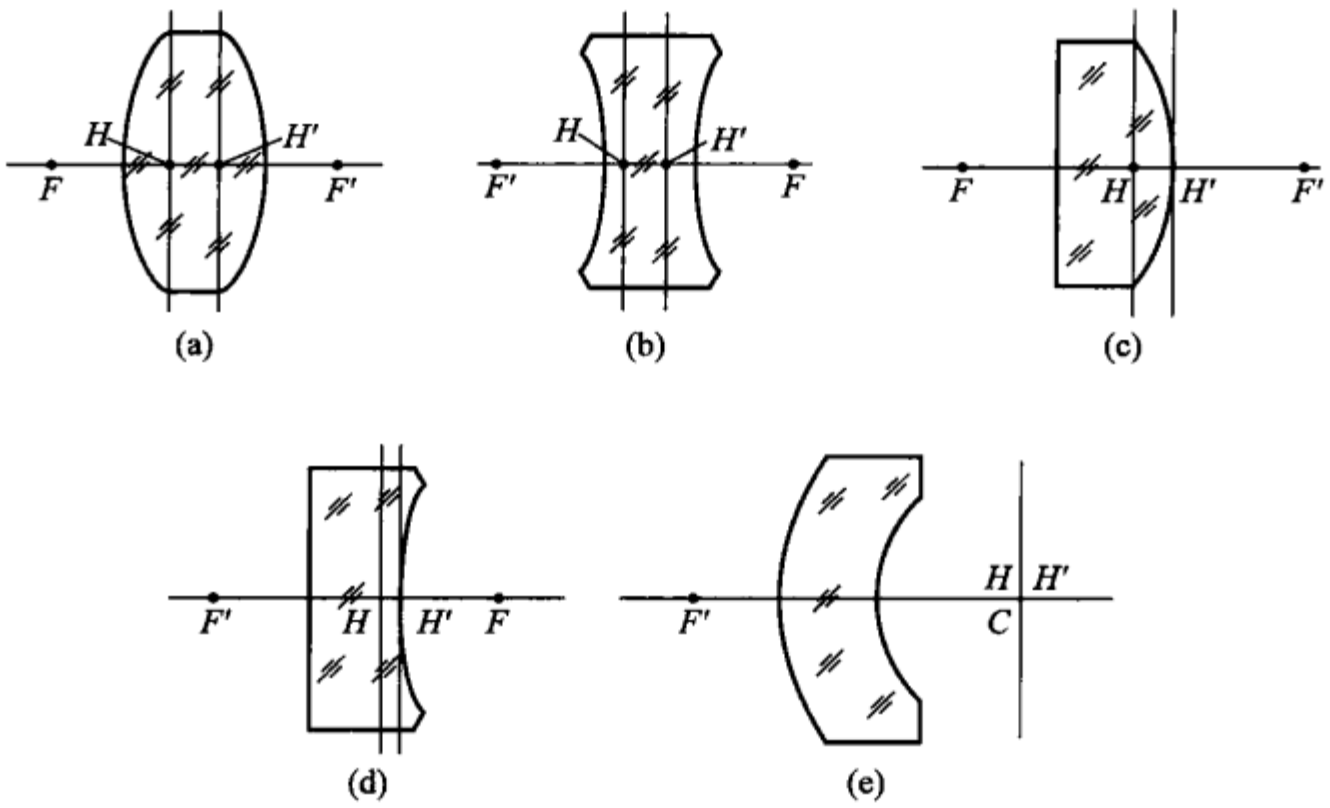


图 3 - 31

图 3 - 31(c),$r_1 = \infty$ 的平凸透镜,由式(3 - 49)得

$$\begin{cases} x_H = \dfrac{2}{3}d; \\ x'_H = 0. \end{cases}$$

图 3 - 31(d),$r_1 = \infty$ 的平凹透镜,由式(3 - 49)得

$$\begin{cases} x_H = \dfrac{2}{3}d; \\ x'_H = 0. \end{cases}$$

图 3 - 31(e),$r_1 - r_2 = d$ 的共心透镜. 这种透镜两球面曲率中心重合于 C,因而不论厚度 d 值多大,由式(3 - 49)算出的下列结果永远成立:

$$\begin{cases} x_H = r_1; \\ x'_H = r_2. \end{cases}$$

这表明共心厚透镜的两主平面重合,且位于该透镜的曲率中心 C. 这种共心透镜在近代的光学系统中有很重要的用途.

§3 - 8　薄透镜及薄透镜组

薄透镜也是由两个系统组合成的共轴球面系统,不过透镜的厚度同透镜的焦距相比可忽略. 即在研究薄透镜的成像问题时,可令 $d = 0$. 这样,按式(3 - 47)和(3 - 48),求得薄透镜的光焦度 Φ 和主点的位置 x_H 和 x'_H 如下:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \tag{3 - 50}$$

和

$$x_H = 0, \quad x'_H = 0.$$

这表明,由第一面和第二面的光焦度的直接相加,即得薄透镜的光焦度,并且它的两主平面与透镜重合. 在这里可以看到为什么一般眼镜制造者喜欢用光焦度来定眼镜的焦距. 因为眼镜是薄透镜,把已知两面的光焦度加起来即得总的光焦度. 这样比用焦距的倒数来计算方便得多.

若以两折射球面的曲率半径表示薄透镜的光焦度 Φ,则有

$$\Phi = \frac{n'_1 - n_1}{r_1} + \frac{n'_2 - n_2}{r_2}$$

或

$$\Phi = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{3-50a}$$

由两个或两个以上的共轴薄透镜组合而成的光学系统,称为薄透镜组. 在实际应用中,常把实际透镜组看做薄透镜组,以便近似地研究实际透镜组的成像问题. 对于薄透镜组,同样需要首先确定它们的基点.

如图 3-32 所示的薄透镜组,按公式(3-43),(3-45)和(3-46)可得其光焦度 Φ 和两主平面的位置:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - d\Phi_1\Phi_2. \tag{3-51}$$

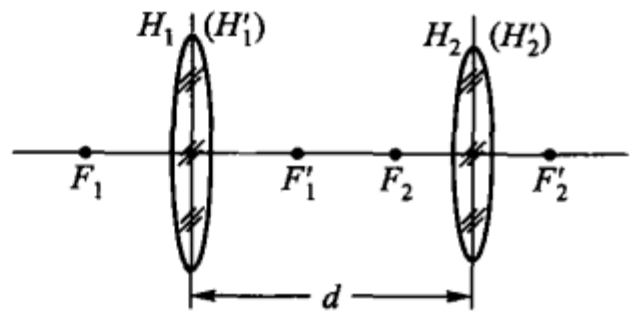


图 3-32

$$\left.\begin{aligned} x_H &= f\frac{d}{f_2}; \\ x'_H &= -f'\frac{d}{f'_1}. \end{aligned}\right\} \tag{3-52}$$

其中 Φ_1 和 Φ_2 分别为第一薄透镜和第二薄透镜的光焦度,可由(3-50a)式算出; x_H 和 x'_H 分别是以 H_1 和 H_2 为原点到系统第一和第二主平面的距离.

不同薄透镜组不仅各基点的位置不同,而且其排列的次序也大有差别. 巧妙地安排基点的位置,会给光学仪器带来很多好处. 兹举几个较常见的薄透镜组为例:

1. 惠更斯目镜

由两正薄透镜组成的惠更斯目镜(图 3-33),如果其一之焦距 $f'_1 = 3a$,另一之焦距 $f'_2 = a$,并且两者相间 $d = (f'_1 + f'_2)/2 = 2a$,则按式(3-51),此目镜的光焦度为

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - d\Phi_1\Phi_2 = \frac{1}{3a} + \frac{1}{a} - \frac{2a}{3a^2} = \frac{2}{3a}.$$

由此得出目镜的焦距为

$$f' = -f = \frac{1}{\Phi} = \frac{3}{2}a.$$

按式(3－52)，由第一透镜到目镜第一主点和第二透镜到目镜第二主点的距离 x_H 和 x'_H 分别为

$$x_H = \left(-\frac{3}{2}a\right)\cdot\frac{2a}{-a} = 3a$$

和

$$x'_H = \left(-\frac{3}{2}a\right)\cdot\frac{2a}{3a} = -a.$$

图 3－33 中的 F、F' 和 H、H' 就是按上列结果标出的目镜的四个基点.

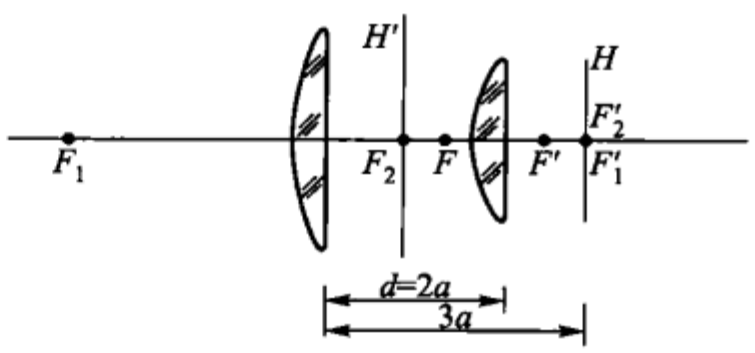


图 3－33

可见，惠更斯目镜的第一焦点在两透镜之间，并且靠近第二透镜. 为了由此目镜产生平行光，必须将物放在目镜内的 F 点. 这就是惠更斯目镜的特点之一；另一特点是两透镜间隔 $d=(f'_1+f'_2)/2$，它使得目镜色差很小[详见 §6－3].

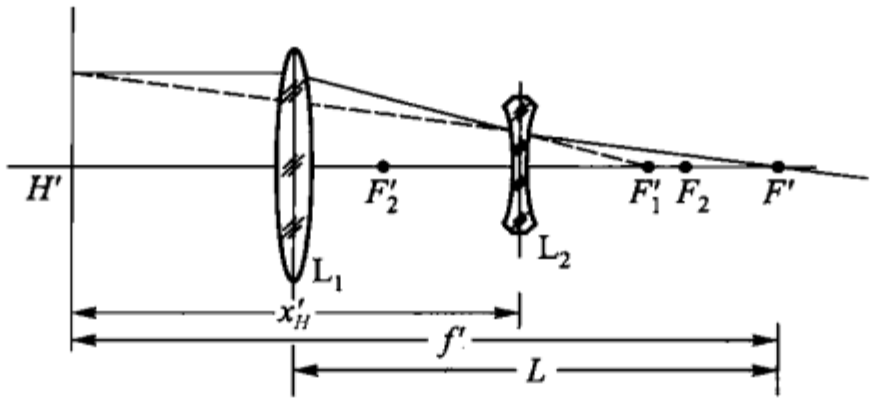


图 3－34

2. 摄远物镜

由一个正的薄透镜和一个负的薄透镜组成一个望远镜的物镜(图 3－34)，两透镜的间隔 d 较正透镜的焦距小. 例如 $f'_1=18.8$ cm，$d=15.0$ cm 和 $f'_2=-6.0$ cm. 利用公式(3－51)和(3－52)，得此组合物的焦距 f' 和主平面的位置如下：

$$f' = 51.3\ \text{cm},$$
$$x'_H = -40.9\ \text{cm}.$$

这种物镜的特点是，筒长 $|L_1F'| = (51.3-40.9+15.0)\,\text{cm} = 25.4$ cm 较焦距 f' 小很多，称这种物镜为摄远(telephoto)物镜. 用它可使仪器的长度在保持较小尺寸的情况下，获得长焦距的光学系统. 在现代大地测量仪器以及长焦距的照相机中，多采用这种光学系统.

3. 反远距系统

与摄远物镜相反,若把负透镜放在靠近物的一方(如图 3-35),则构成所谓反远距系统,它的特点是能提供较长的后工作距离. 一些投影仪物镜和某些特殊物镜常采用这种系统. 例如,仍使用摄远物镜中所用的透镜,$f_1' = -6.0$ cm,$d = 15.0$ cm,$f_2' = 18.8$ cm,利用(3-51)和(3-52)式,得系统的焦距为

$$f' = 51.3 \text{ cm}$$

和系统第二主点的位置

$$x_H' = 128.2 \text{ cm}.$$

亦即,系统的后工作距离 $|L_2F'| = 179.5$ cm,远大于焦距.

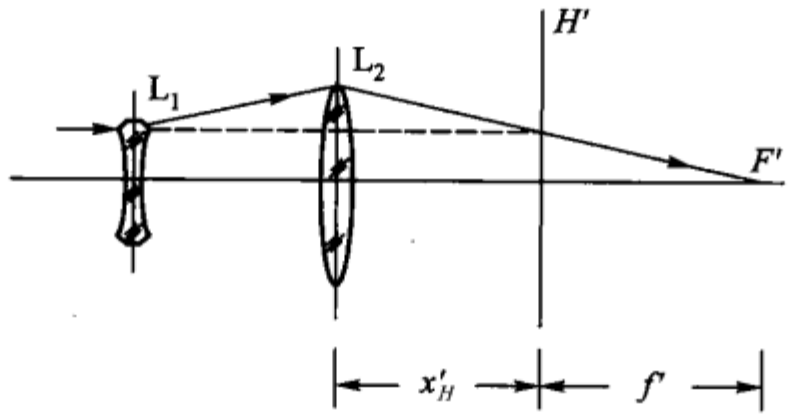


图 3-35

4. 折反系统

由透镜和反射镜组成的系统称折反系统,它广泛地应用于望远镜物镜和一些导弹头的光学系统之中. 以一共心负透镜和一半径为 R 的球面镜组成共心折反系统称为包沃斯-马克苏托夫共心物镜,如图 3-36 所示.

由图 3-31(e),已知共心负透镜的主平面 H_1' 与中心重合并且球面反射镜的主平面 H_2' 与它本身的顶点重合. 所以这种共心折反系统的主平面位置为

$$x_H' = -f\frac{d}{f_1'} = -f'\frac{R}{f_1'}.$$

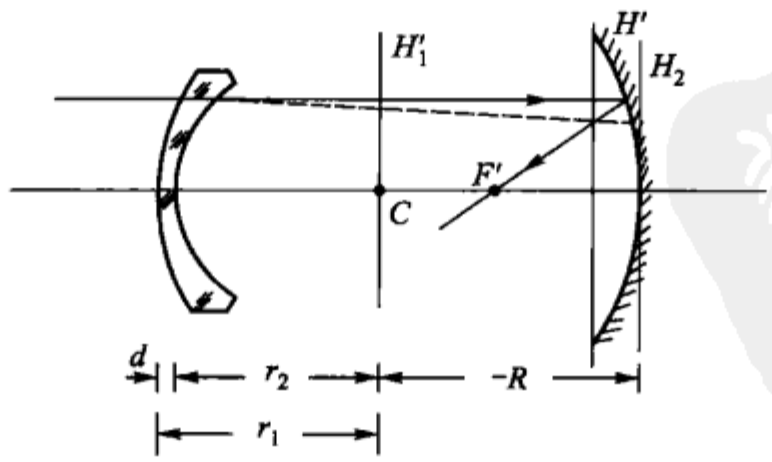
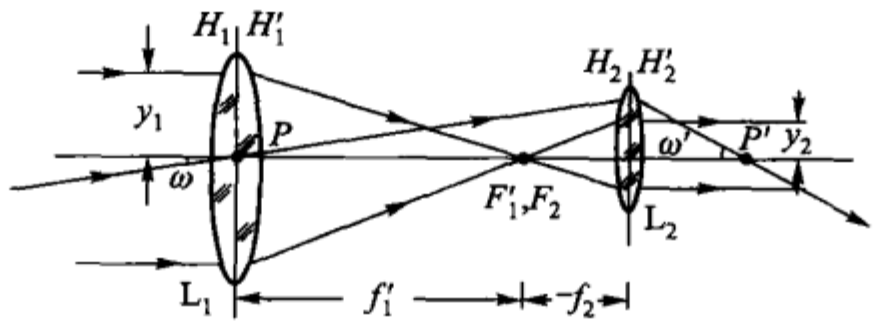


图 3-36

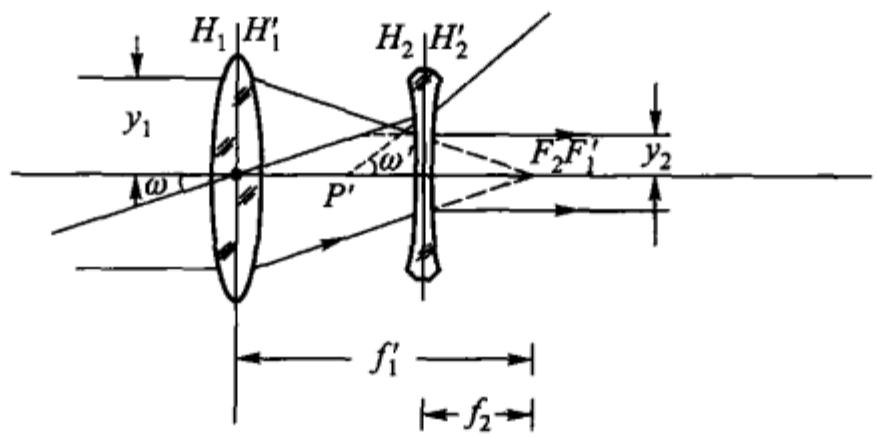
若负透镜焦距的绝对值为球面反射镜的焦距 20 倍,则系统的 $x_H' \approx R/20$. 即合成系统的第二主点在反光镜中心一侧、离反光镜面约为 $|R/20|$,而且合成系统的焦距仍近似于反光镜的焦距.

5. 无焦系统

两个薄透镜，焦距分别为f_1'和f_2'、若它们相距为$f_1'+f_2'$，则由(3－51)式得其合成系统的焦距为无限大并且主平面亦在无限远，这样的系统称无焦系统.



(a)



(b)

图 3－37

对于无焦系统从图 3－37(a)和(b)可以看到，出射光束的宽度$2y_2$较入射光束的宽度$2y_1$小很多；反过来，若细光束从L_2入射，则从L_1出射的光束将增宽y_1/y_2倍. 利用这个原理可将由激光器发出的细光束扩展为较宽的激光束，这样的系统称扩束系统，它在激光技术中有相当广泛的应用.

无焦系统也是典型的望远镜系统，因为它使在物空间与光轴成ω角的光线经过无焦系统之后，在像空间该光线与光轴的夹角ω'变大，ω'/ω值即为望远镜的放大倍数；应用拉氏不变式，有

$$n_1 y_1 \omega_1 = n_K' y_K' \omega_K', \tag{3－53}$$

即$n_1 y_1 \omega_1 = n_2' y_2' \omega_2'$或$\dfrac{\omega'}{\omega} = \dfrac{\omega_2'}{\omega_1} = \dfrac{n y_1}{n' y_2}$. 当望远镜在空气中时，$n_1 = n'$，所以望远镜的放大倍数$\dfrac{\omega'}{\omega} = \dfrac{y_1}{y_2}$，即等于平行于光轴的入射光束宽度与相共轭的出射光束宽度之比. 下一章我们会看到，严格来说，望远镜的放大倍数等于望远镜的入射光瞳直径($2y_1$)跟出射光瞳直径($2y_2$)之比. 利用这种特性，我们很容易测出各种实际望远镜的放大倍数.

*§3-9 近轴光学中的矩阵方法

前面几节已经概括了共轴光学系统的近轴光学的基本内容,这节我们将应用矩阵代数对已经讨论过的问题再扼要地作一次分析,为的是在对近轴光学原理更加系统化的同时得到一个便于使用电子计算机运算的更为简练的数学计算方法.这个方法的发明虽然很早,但是真正被人们拿来应用却是近三十多年的事.

从几何光学观点来看,共轴光学系统的成像,不过是光在组成系统的各面上折(反)射的结果.如果我们能确定光在各面上的折(反)射光的光路,也就能最终得到系统的光学成像性质.显然,这样就把问题归结为光路计算的问题,实际上,光学系统的光学设计工作也正是以光路计算为基础的.光路计算的方法很多,一般多采用以式(3-13)、(3-14)、(3-15)和(3-16)为基础的、加上相邻面的过渡条件的方法,这种方法时到今日虽在原理上仍不失完善,但在应用现代电子计算机方面它已显出有不方便之处.为此,用矩阵代数来计算光路越来越被人重视,它有便于直接应用算法语言(如 Fortan 语言或 Algo 语言)的方便和自行验算的特点.

让我们以图 3-38 表示光线在任意共轴光学系统中的相邻两个折射面的折射.

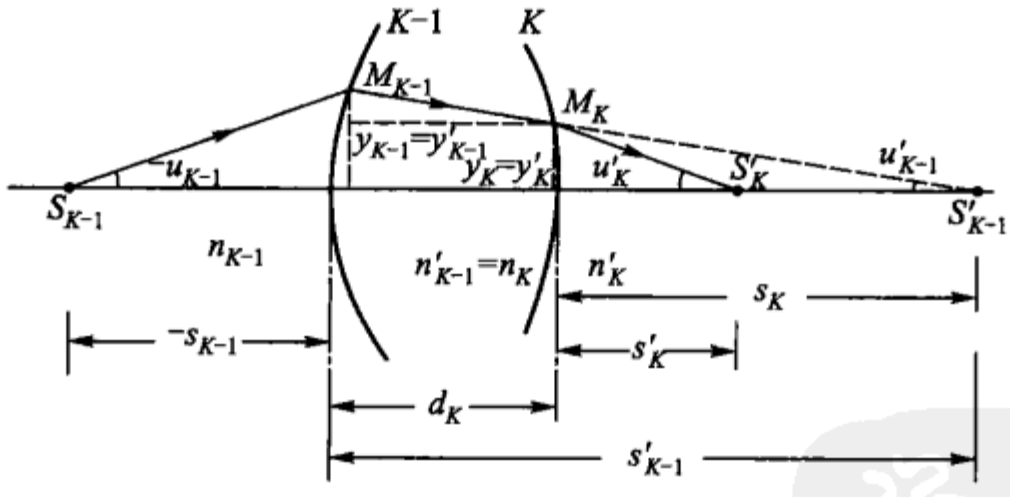


图 3-38

光线 $S_{K-1}M_{K-1}$ 在第 $K-1$ 表面,根据(3-19)式,有

$$\frac{n'_{K-1}}{s'_{K-1}}-\frac{n_{K-1}}{s_{K-1}}=\frac{n'_{K-1}-n_{K-1}}{r_{K-1}}=\Phi_{K-1}.$$

两端均乘以 y_{K-1} 并引用 $-u_{K-1}=\frac{y_{K-1}}{-s_{K-1}}$, $u'_{K-1}=\frac{y_{K-1}}{s'_{K-1}}$,则有

$$n'_{K-1}u'_{K-1}=n_{K-1}u_{K-1}+y_{K-1}\Phi_{K-1}, \tag{3-54}$$

其中 Φ_{K-1} 为第 $K-1$ 面的光焦度,y_{K-1} 为入射光线在第 $K-1$ 表面上的入射点 M_{K-1} 的离轴高度,也是第 $K-1$ 表面上折射光线的高度 y'_{K-1},即

$$y'_{K-1} = 0 + y_{K-1}. \tag{3-55}$$

对于 M_{K-1} 点，入射光线 $L_{K-1,i}$ 由 $(n_{K-1}u_{K-1}, y_{K-1})$ 确定，折射光线 $L_{K-1,r}$ 由 $(n'_{K-1}u'_{K-1}, y'_{K-1})$ 确定；而两者间的变换式(3-54)和(3-55)又可改写为

$$\begin{bmatrix} n'_{K-1}u'_{K-1} \\ y'_{K-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Phi_{K-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{K-1}u_{K-1} \\ y_{K-1} \end{bmatrix}. \tag{3-56}$$

我们称其中 2×2 矩阵为折射矩阵，记为

$$R_{K-1} \equiv \begin{bmatrix} 1 & \Phi_{K-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3-57}$$

两光线记为

$$L_{K-1,i} \equiv \begin{bmatrix} n_{K-1}u_{K-1} \\ y_{K-1} \end{bmatrix}, L_{K-1,r} \equiv \begin{bmatrix} n'_{K-1}u'_{K-1} \\ y'_{K-1} \end{bmatrix}. \tag{3-58}$$

于是式(3-56)可简写为

$$L_{K-1,r} \equiv R_{K-1} \cdot L_{K-1,i}. \tag{3-59}$$

这就是第 $K-1$ 面将光线 $L_{K-1,i}$ 变换为光线 $L_{K-1,r}$ 的表示式.

按图 3-38，有第 $K-1$ 面到第 K 面的过渡关系：

$$n_K u_K = n'_{K-1}u'_{K-1} + 0,$$

$$y_K = -d_K u'_{K-1} + y'_{K-1},$$

同样，可改写成下式：

$$\begin{bmatrix} n_K u_K \\ y_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -d_K/n'_{K-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n'_{K-1}u'_{K-1} \\ y'_{K-1} \end{bmatrix}, \tag{3-60}$$

其中 2×2 矩阵称为过渡矩阵，用它将光线由 M_{K-1} 过渡到 M_K，记为

$$T_{K,K-1} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -d_K/n'_{K-1} & 1 \end{bmatrix} \tag{3-61a}$$

和

$$L_{K,i} \equiv \begin{bmatrix} n_K u_K \\ y_K \end{bmatrix}. \tag{3-61b}$$

所以，式(3-60)可简写为

$$L_{K,i} = T_{K,K-1}L_{K-1,r}. \tag{3-62}$$

将式(3-59)代入，则有

$$L_{K,i} = T_{K,K-1}R_{K-1}L_{K-1,i}. \tag{3-63}$$

同样地，光线在第 K 面的 M_K 点，有

$$L_{K,r} = R_K L_{K,i},$$

以式(3-63)代入，则得

$$L_{K,r} = R_K T_{K,K-1}R_{K-1}L_{K-1,i}. \tag{3-64}$$

这就是相邻两折射面把入射光线 $S_{K-1}M_{K-1}$ 变换为出射光线 $M_KS'_K$ 所需的矩阵代数式.

通常称 $R_KT_{K,K-1}R_{K-1}$ 为系统矩阵,记为

$$A \equiv R_KT_{K,K-1}R_{K-1}, \tag{3-65}$$

即

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Phi_K \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -d_K/n_K & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \Phi_{K-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \Phi_K \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \Phi_{K-1} \\ -d_K/n_K, & -\Phi_{K-1}d_K/n_K + 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \Phi_Kd_K/n_K & \Phi_{K-1} + \Phi_K - \Phi_K\Phi_{K-1}d_K/n_K \\ -d_K/n_K & -\Phi_{K-1}d_K/n_K + 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

所以,系统矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \Phi_Kd_K/n_K & \Phi_{K-1} + \Phi_K - \Phi_{K-1}\Phi_Kd_K/n_K \\ -d_K/n_K & -\Phi_{K-1}d_K/n_K + 1 \end{bmatrix}. \tag{3-66}$$

在推导此式时应用了矩阵乘法公式:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix},$$

其中 $\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j}; i = 1,2; j = 1,2.$

式(3-66)所表示的矩阵有这样的特性:

$$\det A = 1, \tag{3-66a}$$

读者可自行证明. A 的各元素 a_{11}, a_{12}, a_{21} 和 a_{22} 都是由系统的折射率、厚度和光焦度构成的,并且都有各自的物理意义. 从矩阵 A 中我们很容易求得光学系统的基点.

若所讨论的光学系统是两个球面组成的厚透镜,则令 $K=2$ 即可由式(3-66)和(3-64)得

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \Phi_2/d_2/n_2 & \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_1\Phi_2d_2/n_2 \\ -d_2/n_2 & -\Phi_1d_2/n_2 + 1 \end{bmatrix} \tag{3-67}$$

和

$$L_{2r} = \begin{bmatrix} n'_2u'_2 \\ y'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \Phi_2d_2/n_2 & \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_1\Phi_2d_2/n_2 \\ -d_2/n_2 & -\Phi_1d_2/n_2 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1u_1 \\ y_1 \end{bmatrix}. \tag{3-68}$$

由此可见

$$a_{12} = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d_2}{n_2}\Phi_1\Phi_2,$$

它就是所讨论的厚透镜的光焦度，即

$$a_{12} = \Phi \tag{3-69}$$

同样可以导出其他几个矩阵元素的物理意义：光学系统的第一折射面到系统的第一主平面的距离

$$x_H = \frac{n_1(1 - a_{11})}{a_{12}}; \tag{3-70}$$

光学系统的第二折射面到系统第二主平面的距离

$$x'_H = \frac{n'_2(a_{22} - 1)}{a_{12}}. \tag{3-71}$$

对于一个薄透镜，即 d_2 可忽略不计，此时过渡矩阵 $T_{K,K-1}$ 为单位矩阵，因而系统矩阵

$$\begin{aligned} A &= R_2R_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \Phi_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \Phi_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Phi_1 + \Phi_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3-72}$$

由此，薄透镜的光焦度 $\Phi = a_{12} = \Phi_1 + \Phi_2 = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$，并且

$$x_H = \frac{n_1(1 - a_{11})}{a_{12}} = \frac{(1-1)}{a_{12}} = 0; \quad x'_H = \frac{n'_2(a_{22} - 1)}{a_{12}} = \frac{(1-1)}{a_{12}} = 0.$$

对于两个间隔为 d 的薄透镜组成的系统，若它们在空气中，则系统矩阵

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & \Phi_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -d & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \Phi_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - d\Phi_2 & \Phi_1 + \Phi_2 - d\Phi_1\Phi_2 \\ -d & -d\Phi_1 + 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3-73}$$

并且有

$$a_{12} = \Phi_1 + \Phi_2 - d\Phi_1\Phi_2 = \Phi,$$

$$x_H = \frac{1 - (1 - d\Phi_2)}{\Phi} = d\frac{\Phi_2}{\Phi} = f\frac{d}{f_2};$$

$$x'_H = \frac{(-d\Phi_1 + 1) - 1}{\Phi} = -d\frac{\Phi_1}{\Phi} = -f'\frac{d}{f'_1}.$$

此三式与式(3-51)和(3-52)完全相同.

下面举例来说明如何应用矩阵法计算光学系统的基点位置：

[例题 1]　试用矩阵法求直径为 27 mm、折射率为 1.54 的玻璃球的焦距和主平面的位置.

[解] 已知 $n_1=1.0, n_2=1.54, n_2'=1.0, r_1=13.5\ \text{mm}, r_2=-13.5\ \text{mm}, d_2=27\ \text{mm}$.

系统矩阵 $$A = R_2 T_{21} R_1,$$

其中 R_2, R_1 分别为球后表面和球前表面的折射矩阵,

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & \Phi_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1-1.54}{-13.5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & \Phi_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1.54-1}{13.5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

T_{21} 为过渡矩阵,

$$T_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -d_2/n_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -27/1.54 & 1 \end{bmatrix},$$

于是

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.54/13.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -17.53 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0.54/13.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0.04 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0.04 \\ -17.53 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.3 & 0.052 \\ -17.53 & 0.3 \end{bmatrix},$$

即 $a_{11}=0.3, a_{12}=\Phi=0.052, a_{21}=-17.53, a_{22}=0.3$. 所以

$$\Phi = a_{12} = 0.052, \quad f' = \frac{1}{0.052} = 19.25\ (\text{mm}),$$

$$x_H' = \frac{n_2'(a_{22}-1)}{a_{12}} = \frac{-0.7}{0.052} = -13.5\ (\text{mm}),$$

$$x_H = \frac{n_1(1-a_{11})}{a_{12}} = \frac{0.7}{0.052} = 13.5\ (\text{mm}),$$

此即表明此球透镜的焦距为 19.25 mm,两主平面重合于球的中心.

作为验算: $\det A = (0.3\times0.3) - (-17.53)\times0.052 = 1$,计算无误.

[例题 2] 试求折射率为 1.5、半径为 25 mm 和中心厚度为 6 mm 的平凸透镜的焦距和两主平面的位置.

[解] 已知 $n_1=1.0, n_2=1.5, n_2'=1.0, r_1=25\ \text{mm}, r_2=\infty, d_2=6\ \text{mm}$. 系统矩阵 $A=R_2T_{21}R_1$,其中 R_1, R_2 分别为球面和平面的折射矩阵,

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & \Phi_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5/25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & \Phi_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

T_{21}为过渡矩阵

$$T_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6/1.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

所以系统矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0.02 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.02 \\ -4 & 0.92 \end{bmatrix}.$$

即 $a_{11}=1, a_{12}=0.02, a_{21}=-4, a_{22}=0.92$. 所以

$$\Phi = a_{12} = 0.02, f' = \frac{1}{0.02} = 50\ (\text{mm})$$

$$x'_H = \frac{n'_2(a_{22}-1)}{a_{12}} = \frac{0.92-1}{0.02} = -4\ (\text{mm}),$$

$$x_H = \frac{n_1(1-a_{11})}{a_{12}} = 0.$$

验算：$\det A = (1\times 0.92) - 0.02\times(-4) = 1$，计算无误.

即所述的平凸透镜的焦距为 50 mm，第一主平面在第一折射面与光轴交点处，第二主平面在第二折射面前 4 mm 处$\left(\frac{2}{3}d\right)$.

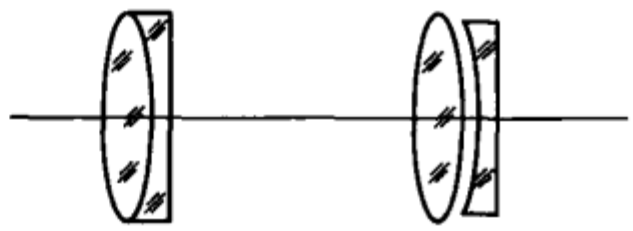


图 3－39

［**例题 3**］　一个用于放映机的匹兹瓦尔镜头，如图 3－39，已知其结构元素如下（单位为 mm），试列出系统矩阵.

	d	n
$r_1 = 76.03$		
	17.80	1.52027
$r_2 = -99.08$		
	5.0	1.67762
$r_3 = 2489$		
	79.05	1.0
$r_4 = 56.49$		
	25.27	1.51829
$r_5 = -1259$		
	3.5	1.0
$r_6 = -74.30$		
	4.0	1.74623
$r_7 = -143.88$		

［解］　根据上列结构元素，系统矩阵应为

$$A_{71} = R_7 T_{76} R_6 T_{65} R_5 T_{54} R_4 T_{43} R_3 T_{32} R_2 T_{21} R_1$$

其中折射矩阵

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & (1.52027 - 1)/76.03 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & (1.67762 - 1.52027)/-99.08 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1 & (1 - 1.67762)/2489 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R_4 = \begin{bmatrix} 1 & (1.51829 - 1)/56.49 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R_5 = \begin{bmatrix} 1 & (1 - 1.51829)/-1259 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R_6 = \begin{bmatrix} 1 & (1.74623 - 1)/-74.30 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R_7 = \begin{bmatrix} 1 & (1 - 1.7463)/-143.88 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

过渡矩阵

$$T_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -17.80/1.52027 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5/1.67762 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_{43} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -79.05 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{54} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -25.27/1.5189 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_{65} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{76} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4.0/1.74623 & 1 \end{bmatrix}.$$

完成 A_{71} 即可得焦距 $f' = 120.6$ mm，$x'_H = -86$ mm.

习　题

1. 试用作图法证明，人通过平面镜看到自己的全身，平面镜的长度至少要有人身之半.

2. 两平面镜以其边相接构成一个基本上在一个平面的反射镜. 一个人在离镜 7.2 m 处向镜观看，他看到自己的脸有两个像并且紧相接，若人脸宽为 20 cm，试求两平面镜间的夹角.

3. 试设计一个实验来证明当平面镜的法线方向改变 θ 度角时，反射光线将改变 2θ 角.

4. 在平面镜前 1 m 处有一小发光点，问当平面镜转动多大角时光斑移动 5 cm？这有什么用途？

5. 在一块厚为 d 的平行平面透明板（$n = 1.5$）前 15 cm 处放置一小物体，人眼在板后透过该板观察该物，求人眼看到该物的位置较其实在位置向人眼移动了多少距离.

6. 试用作图法证明平行光在如图 3 - 9(a)所示的全反射直角棱镜中所走的光路,等效于光通过厚度等于该棱镜等腰边边长 d 的平行平面板的光路.

7. 如果上问中的全反射直角棱镜是由冰制成的,假定冰的折射率为 1.196,问冰棱镜对如图 3 - 9(a)所示的光束能否起全反射棱镜的作用?

8. 一块折射率为 1.5 的全反射直角棱镜浸没在折射率为 4/3 的水中,问该棱镜对图 3 - 9(a)所示的光线能否起全反射棱镜的作用?

9. 光学纤维为什么一定要在玻璃芯的外表涂一层折射率 n_c 小于光学纤维芯的折射率 n_g 的介质? 若已知 $n_g = 1.6$, $n_c = 1.5$,试计算该光学纤维的数值孔径.

10. 一个折射角为 60°的色散棱镜,对某色光的最小偏向角为 58°,试求棱镜介质对该色光的折射率.

11. 为什么大多数用无色光学玻璃制成的色散棱镜的折射角多为 60°左右?

12. 已知某液体对红、绿和蓝色光的折射率分别为 1.512, 1.532 和 1.543,若这些光从液体中射向液面并且绿光在液面上的入射角等于临界角,问此时会看到什么现象?

13. 透过色散棱镜来观察一个阳光照明的白纸条,问看到些什么现象?

14. 一个玻璃做的色散棱镜(折射角 72°,对某色光的折射率为 1.66)浸没在水中,试求该棱镜对该色光的最小偏向角.

15. 试用作图法证明图 3 - 40 所示的所谓阿贝(常偏)棱镜相当于折射角为 2α 的色散棱镜,并且处于最小偏向角的入射光线和出射光线间的夹角为 90°. 若沿图中所画虚线切掉等腰直角棱镜而代之以平面镜 AB,问该色散棱镜的作用有何变化?

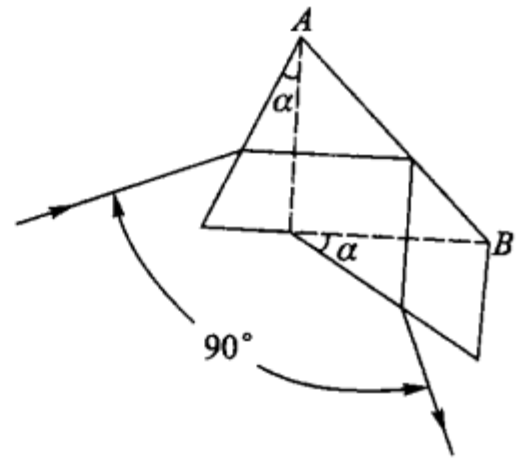


图 3 - 40

16. 设球径仪三只脚所构成的圆的半径等于 15 mm,今用此球径仪来测量曲率半径为 100 mm 的凸球面镜,问球径仪中间的测头应升起多高?

17. 一个由折射率等于 1.523 的玻璃制成的透镜,已知其两个球面的光焦度分别为 6 D 和 - 11 D,透镜的孔径(即直径)为 40 mm,中心厚 3 mm. 求此透镜的边厚并问用至少多厚的平板玻璃才能磨出这样的透镜来?

18. 设有一束会聚光,它与一个厚度为 d、折射率为 n 的平行平面板正交. 试证此时会聚点向外移动的位移为 $(1 - 1/n)d$.

19. 在一张报纸上放一个平凸透镜,眼睛通过透镜来看报纸. (1)当平面在上时报纸的虚像在平面下为 13.8 mm 处;(2)当凸面在上时,报纸的虚像在凸面下 14.6 mm 处. 若透镜的中心厚度为 20 mm,求透镜的折射率和它的凸球面的曲率半径.

20. 一个直径为 200 mm 的玻璃球,折射率为 1.53. 球内有两个小气泡,看来一个恰好在球心,另一个在球表面和中心之中间. 求两气泡的实在位置.

21. 人眼的角膜可以看做是曲率半径为 7.8 mm 的单球面,它的物方空气,像方是折射率约为 4/3 的液体. 如果瞳孔看来在角膜后 3.60 mm 处,并且直径为 4 mm,试求瞳孔在眼中的实在位置及实在直径.

22. 一平行细光束垂直地入射在曲率半径为 100 mm 的半球的平面上. 试求在下列情况

下光束会聚点的位置:(1)球在空气中;(2)球浸在水中. 假定水和玻璃的折射率分别为 4/3 和 3/2.

23. 一玻璃球半径为 R,折射率为 n,若以平行光入射,问当玻璃的折射率为何值时会聚点恰好落在球的后表面上?

24. 曲率半径为 R,折射率为 1.5 的玻璃球,有半个球面镀上铝,若平行光从透明表面入射,问会聚点在何处?

25. 上问中若折射率改为 2,问会聚点在何处?

26. 一个实物放在曲率半径为 R 的凹面镜前的什么地方才能:(1)得放大率为 4 倍的实像;(2)得放大率为 4 倍的虚像?

27. 一物在凹球面镜前 310 mm 时成实像于镜前 190 mm 处;若物为虚物并且在镜后 310 mm 处,求像在何处.

28. 一凸球面镜,曲率半径 250 mm,在它前面 600 mm 处置一高为 10 mm 的物. 试用作图法求像的位置和大小.

29. 物与像相距为 1 m,如果物高 4 倍于像高,求凹面镜的曲率半径.

30. 一凹球镜浸没在水中,物在镜前 30 cm,像在镜前 9 cm,求镜的曲率半径和光焦度.

31. 试述两种测量凹球面镜曲率半径的方法.

32. 两个凹球面镜,焦距分别为 20 cm 和 40 cm,相距 1 m(面对面地摆成共轴系统). 今以一小物放在靠近较弯曲的凹面镜前 10 cm 处,试求下列两情况下像的位置和大小:(1)光先在其靠近的凹面镜上反射;(2)光先在较远的凹面镜上反射.

33. 身高 1.8 m 的人站在照相机前 3.6 m 处被拍照,若拟拍成高为 100 mm 的像,问照相机镜头的焦距应如何?

34. 已知由某透镜成的实像,其共轭点的间隔为 150 mm,放大率为 3 倍,求透镜的位置和焦距.

35. 有一焦距为 50 mm 的透镜,物高 4 mm,放在透镜的光轴上,试用作图法求出物在透镜前 100 mm 和 160 mm 时像的大小和位置.

36. 一透镜对某一物成一实像,放大率为 -1. 今以另一个薄透镜紧贴在第一透镜上,则见像向透镜方向移动 20 mm、放大率为原先的 3/4 倍. 求两透镜的焦距各多少.

37. 某一正透镜将某物成像于屏幕上,已知实像高 50 mm,物至幕的距离 150 mm. 在物至幕的距离不变的条件下,如何移动透镜才能在幕上得高度为 20 mm 的像?

38. 有一薄正透镜对某一物成倒立的实像,像高为物高的一半. 今将物向透镜移近 10 cm,则所得像与物同大小,求该薄正透镜的焦距.

39. 某一物通过凸透镜成一实像,像离透镜 40 cm,今以一焦距为 15 cm 的凹透镜放在凸透镜后的 10 cm、15 cm 和 20 cm 处. (1)求新像的位置及它们放大率的比值;(2)这类系统有哪些用途.

40. 一光学系统对放在它前面的一个高为 2 cm 的物,在系统之后成一倒立 12 cm 的像. 若把物移近 10 cm,则成像于无限远,求此系统的焦距.

41. 试证对于在空气中厚度为 d 的透镜,当其折射率为 n 时,透镜的光焦度

$$\Phi = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{(n-1)^2}{n}\frac{d}{r_1 r_2},$$

其中 r_1，r_2 分别为透镜的第一、第二面的曲率半径.

42. 长 60 mm、折射率 1.5 的玻璃棒，将其两端均磨成曲率半径为 10 mm 的凸球面，此棒的光学性质如何？

43. 将一个半径为 60 mm 的球形电灯泡浸没在水中，试求由此形成的光学系统的焦距和光焦度.

44. 试求折射率为 1.54、直径为 54 mm 的玻璃球的主点和焦点的位置.

45. 一个光学系统由透镜组 L_1 和透镜组 L_2 组成，若物放在 L_1 的第一焦点上，试证物在 L_2 第二焦点上像的大小与物的大小的比值等于两透镜组焦距的比值. 又这种系统有什么用途？

46. 双凸透镜两球面的光焦度分别为 5 D 和 8 D，折射率 1.50，中心厚度 18.75 mm. 求此透镜的主点位置.

47. 一双凸透镜（曲率半径 10 cm、中心厚度 2 cm、折射率 1.61）的一个表面与水连接. 如果在透镜另一表面前 60 cm 处置一高为 1 cm 的物体，求此组合系统的主点和焦点位置以及像的位置和大小.

48. 焦距为 100 mm 的平凹透镜（$n = 1.57$）水平放置，凹面向上并注以水. 试求此水 - 玻璃透镜组的光焦度.

49. 一个凹面镜，焦距为 11.5 cm，水平放置，凹面向上并在凹面上注以某种液体，中心厚度 5 mm. 当以一发光点放在液面上 15.9 cm 处时，像与发光点重合，试求该液体的折射率.

50. 一束平行光垂直射到薄的平凸透镜上，会聚于透镜后 48 cm 处；若此透镜的凸面涂铝，则平行光会聚于透镜前 8 cm 处. 试求透镜的折射率和凸表面的曲率半径.

51. 焦距为 100 mm 的薄双凸透镜，折射率为 1.50，令其一面与水相接，求此系统的焦距及焦点位置.

52. 用焦距同为 60 mm 的两个单透镜组成目镜，两透镜间隔 40 mm. 试求目镜的焦距、焦点位置和主点的位置.

53. 用焦距分别为 60 mm 和 30 mm 的两单透镜一前一后的组合成目镜，间隔 40 mm. 求目镜的焦距并焦点和主点的位置.

54. 一个光焦度为 Φ 的薄透镜的两个共轭点间距 L. 试证 L 与共轭点的垂轴放大率 β 和 Φ 有关系式：

$$2 - \beta - \frac{1}{\beta} = L\Phi.$$

55. 一个电影放映镜头由两个正薄透镜组成，已知其前、后组的焦距分别为 200 mm 和 100 mm，两者间隔 100 mm，试求镜头的焦距、主点和焦点的位置.

56. 一光学系统由 6 D 和 -8 D 的两薄透镜组成，两透镜相距 80 mm. 求组合系统的光焦度并焦点和主点的位置. 这样的系统有什么特点？

57. 若上题中的两透镜换一下顺序，间隔不变，求组合系统的第二焦点的位置，这样的系统有什么特点？

58. 试应用矩阵法，求由焦距分别为 40 mm、50 mm 和 60 mm，相间各为 10 mm 组成的光学系统的焦点和主点的位置.

第四章

实际光学系统的拦光和像差

在前一章我们讨论了光学系统的近轴成像，侧重于分析共轭物像的位置和大小，而对于实际光学系统的成像，还必须讨论实际能成像的范围、像的明亮程度和成像的清晰度. 这些问题都与成像光束在实际光学系统中受限制——拦光的情况有关，其中成像的清晰度还与光学系统的结构元素有关. 本章将简要地讨论实际光学系统的拦光和影响光学系统成像清晰度的像差的一些基本概念.

§4-1 光　　阑

组成光学系统的透镜、面镜和棱镜等光学元件都有一定的孔径，它们必然限制可用以成像的光束的截面；有些光学系统还特别附加有一定形状的开孔的屏（如照相机中的光圈）来限制成像光束的截面. 所有这些光学元件的边框和特加的有一定形状的开孔的屏统称为光阑，它们在光学系统中起拦光的作用.

一个实际光学系统，可能有许多个光阑，但可因其大小和在光学系统中位置的不同而产生性质不同的效果. 例如，在图 4-1 所示的光学系统中，有三个光阑：透镜的边框 MN，特加的圆孔光阑 Ⅰ 和 Ⅱ. 光阑 Ⅰ 对通过 MN 的光束再作限制，从而决定了成像光束的截面或立体角，这种光阑称为孔径光阑. 光阑 Ⅱ 无论大小如何都不影响成像光束的截面，但能直接限制物空间的被成像的范围，这种光阑称为视场光阑. 所以，通常将光阑分成两类，而且任一实际完整的光学系统必定同时有这两类光阑.

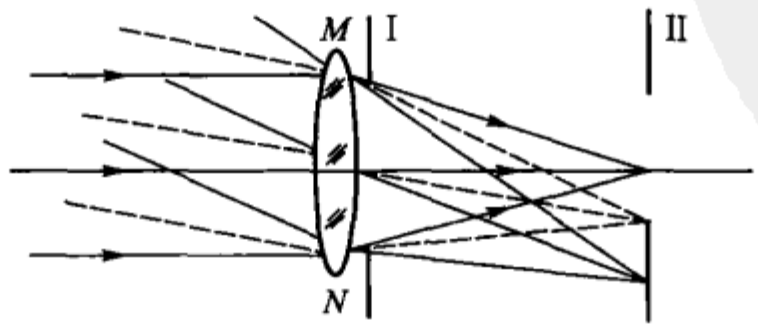


图 4-1

1. 孔径光阑，入射光瞳和出射光瞳

在实际光学系统中，不论有多少个光阑，一般来说，其中只有一个为孔径光阑，它起着控制进入光学系统的光能量的多少、某些像差的大小以及能成满意像的物空间的深度（景深）等作用，故有时也称有效光阑.

在有数个光阑的光学系统中，有效光阑要由轴上物点和各光阑在同一物空间对该物点所张立体角的大小来决定. 在不同的光学系统中，有效光阑有十分不同的情况，很难普遍地讨论. 这里仅以两个简单的特例来说明有效光阑的作用和分析方法. 这两个例子虽然是特例，但由于许多光学系统（如望远物镜、照相物镜）都是在焦点或其附近成像，或者物体置于焦点或其附近（如放映物镜、显微物镜、放大镜），所以亦不失有典型意义.

图 4－2 中 M_1N_1 为薄透镜 L_1 的边缘，A_1B_1 为开有圆孔的光阑. 在这一简单的系统中，有两个光阑：透镜的框边 M_1N_1 和光阑 A_1B_1. 在光阑 A_1B_1 小于光阑 M_1N_1 的情况下，对于在系统第一焦点 F_1 的物点发出的光束，由图可知，限制通过系统的光束的立体角的光阑为 A_1B_1，故光阑 A_1B_1 为系统的孔径光阑. 虽然通过光学系统的光束在物空间的孔径角，是由光阑 A_1B_1 的大小来决定，但却不是由 A_1B_1 对 F_1 直接作成的张角. 因为光阑 A_1B_1 与物点 F_1 不在同一空间，A_1B_1 对于发自 F_1 点的光束的限制，须通过在它前面的光学系统 L_1 的折射起作用. 所以直接确定通过系统的光束在物空间的张角的，是以孔径光阑 A_1B_1 为物，通过在它前面的光学系统 L_1 于系统物空间所成的像（$A_1'B_1'$）. 由这个像的边缘对物点 F_1 所作的张角，就是通过系统的光束在物空间的最大孔径角. 称光阑的这个像为系统的入射光瞳. 换言之，入射光瞳对物点所作的张角就是成像光束在物空间的最大孔径角. 图 4－2 中，$A_1'B_1'$ 即为给定系统的入射光瞳，u_0 角为通过系统的光束在物空间的最大孔径角.

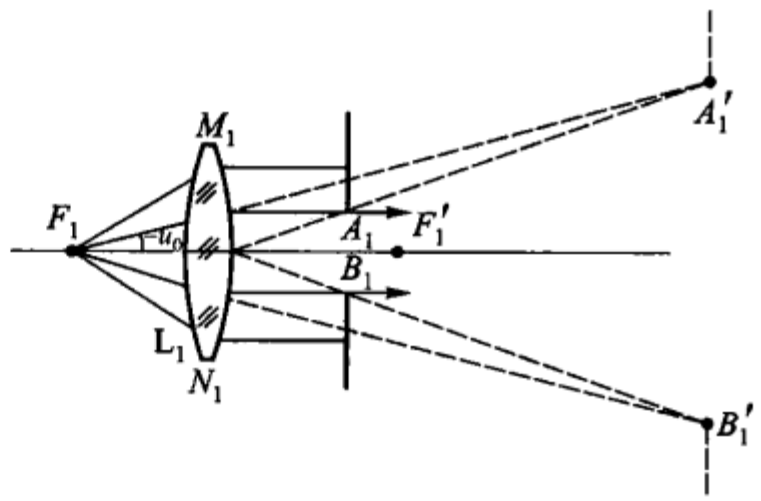


图 4－2

又如图 4－3 所示的系统，光阑 A_2B_2 放在焦点 F_2 和透镜 L_2 之间，并且光阑 A_2B_2 的直径很小于透镜边缘 M_2N_2. 对于放在焦点 F_2 的物点，光阑 A_2B_2 显然是孔径光阑. 在这种

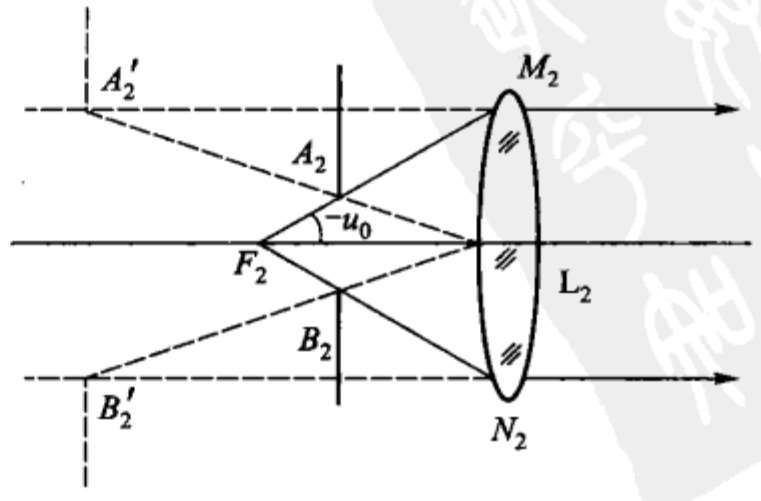


图 4－3

情况下，由于孔径光阑与物点在同一空间，A_2B_2 的边缘对自 F_2 点发出的通过系统的光束直接起限制作用. 所以由 A_2B_2 对点 F_2 直接作的张角，就决定了通过系统的光束在物空间的最大孔径角. 因而光阑 A_2B_2 兼为给定系统的入射光瞳.

现在再来研究通过系统的光束在像空间的截面或孔径角. 在图 4-2 所示的系统中，由于光阑 A_1B_1 在系统的像空间，所以它直接决定了像空间光束的截面积或孔径角. 而在图 4-3 所示的系统中，孔径光阑 A_2B_2 对像空间的光束的限制，须通过在它后面的光学系统 L_2 的折射来起作用. 所以，为确定成像光束在像空间的孔径角或截面积，必须以孔径光阑 A_2B_2 作为物，求出通过在它后面的光学系统 L_2 于系统像空间所成的像 $A_2'B_2'$. 像 $A_2'B_2'$ 的边缘决定成像光束在像空间的截面积或孔径角，称这个像 $A_2'B_2'$ 为系统的出射光瞳. 由出射光瞳对像点所作的张角，就是成像光束在像空间的最大孔径角.

总结上述两例可以看到：实际光学系统的入射光瞳，是该系统的孔径光阑通过在它前面的光学系统，于系统的物空间所成的像；出射光瞳是孔径光阑通过在它后面的光学系统，于系统的像空间所成的像. 显然对于同一系统来说，入射光瞳、孔径光阑和出射光瞳三者共轭. 通过孔径光阑中心的光线，也通过入射光瞳中心和出射光瞳中心，此光线称为主光线.

2. 视场光阑，入射窗和出射窗

光学系统成像的空间范围由对轴外光束有遮蔽或拦光作用的一切光阑的总和来决定. 然而，由于各光阑对光束的遮蔽方式和程度有所不同，所以总能找出对限制成像范围特别起作用的光阑，称它为视场光阑. 下面以对无限远物成像的简例来说明确定视场光阑的方法. 图 4-4 所示为由透镜 L 和在它后面

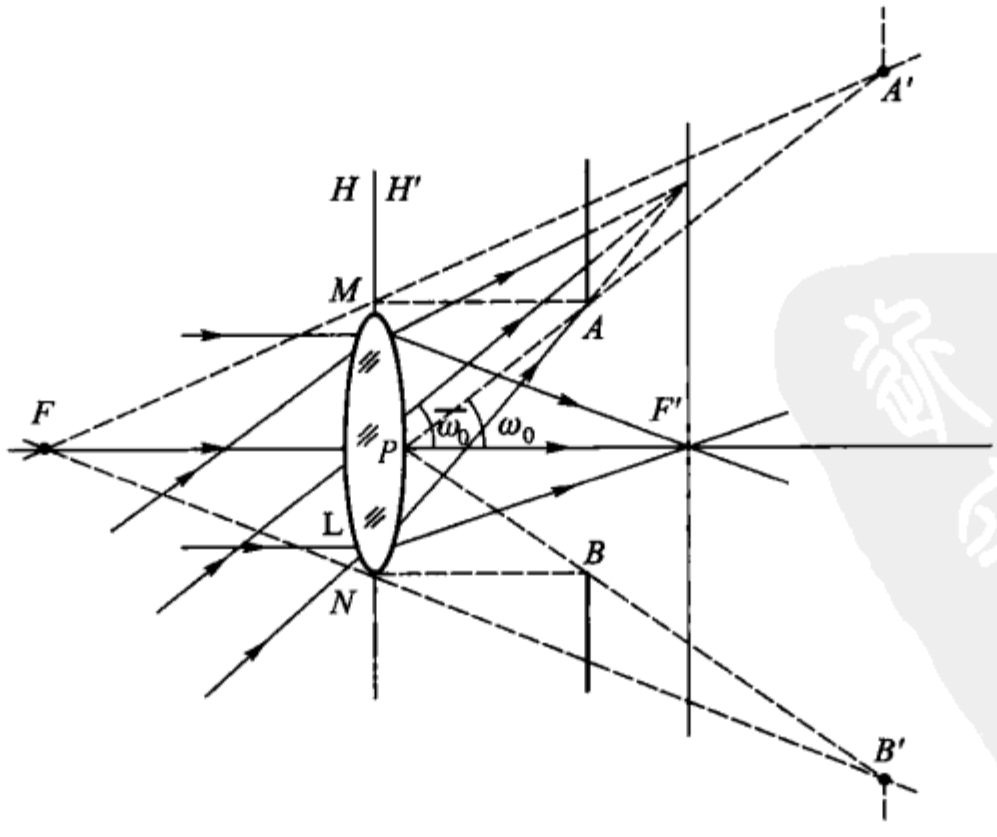


图 4-4

的有大于透镜直径的圆孔光阑 AB 组成的光学系统. 对于无限远的物体,此系统的有效光阑显然为透镜 L 的边缘 MN,并且光阑 MN 兼为系统的入射光瞳和出射光瞳. 但由图可知,在此系统中,通过入射光瞳的各光束,并不一定都能最后到达像面成像,其中有的光束将被光阑 AB 所阻,不能成像. 即对于通过入射光瞳的光束,当其主光线与系统光轴的夹角 ω 超过某一最大值时,则完全被光阑 AB 所遮,因而相应的物点不能在像面上成像. 此最大角 $\overline{\omega}_0$ 的大小取决于光阑 AB 的位置和大小,称 $\overline{\omega}_0$ 为光学系统成像的物空间视场角,相应的光阑 AB 为视场光阑.

当光学系统的入射光瞳很小时,物空间视场角可以这样来确定:先求出视场光阑通过在它前面的光学系统于物空间所成的像,然后,由此像边缘对入射光瞳中心作张角,此张角即为所求的物空间视场角. 如果入射光瞳较大,则如此确定的视场角 ω_0 与实际的视场角 $\overline{\omega}_0$ 将有很大的偏差. 在图 4 -4 中这情况亦很明显. 图 4 -4 中光阑 AB 通过透镜 L 于系统物空间所成的像为 $A'B'$,它对系统入射光瞳的中心 P 所作的张角 ω_0,十分接近于恰好完全被视场光阑 AB 遮住光束的光轴与系统光轴的夹角 $\overline{\omega}_0$. 当入射光瞳 MN 很小于视场光阑的像 $A'B'$时,ω_0 与 $\overline{\omega}_0$ 将无实际上的区别. 因而角 ω_0 称为系统的物空间视场角,视场光阑的像 $A'B'$称为系统的入射窗.

视场光阑通过在它后面的光学系统,于系统的像空间所成的像,对出射光瞳中心 P'(图 4 -4 中未画出)的张角,决定系统像空间的最大视场角. 称视场光阑在系统像空间所成的像为出射窗. 而在图 4 -4 的系统中,场阑 AB 兼为出射窗.

由上面的讨论可以看到:入射窗是视场光阑通过在它前面的光学系统,于系统物空间所成的像;出射窗是视场光阑通过在它后面的光学系统,于系统像空间所成的像. 显然对于同一系统,入射窗、视场光阑和出射窗三者共轭.

这里应该注意到,在入射光瞳不甚小的情况下,为确定光学系统成像的视场角,需要考虑到系统的所有光阑的作用. 而这是应用光学中较专门的问题,此处从略.

3. 实例

实际光学系统中,普遍有上述入射光瞳、有效光阑、出射光瞳、入射窗、视场光阑和出射窗. 下面举例分析,作为对上述原理的具体说明.

首先,我们来讨论一种有广泛应用的开普勒望远镜的光瞳和窗.

图 4 -5 所示为开普勒望远镜的示意图,它是由第二焦距为正的透镜 L_1 和 L_2 组成的无焦光学系统;在该系统中两透镜的光学间隔 Δ 为零,并且在透镜 L_1 的第二焦点与透镜 L_2 的第一焦点相重合的平面上,放一光阑 AB. 此光学系统的物至透镜 L_1 的距离为无限远($s = -\infty$);而由系统所成的像至透镜 L_2 的距离也

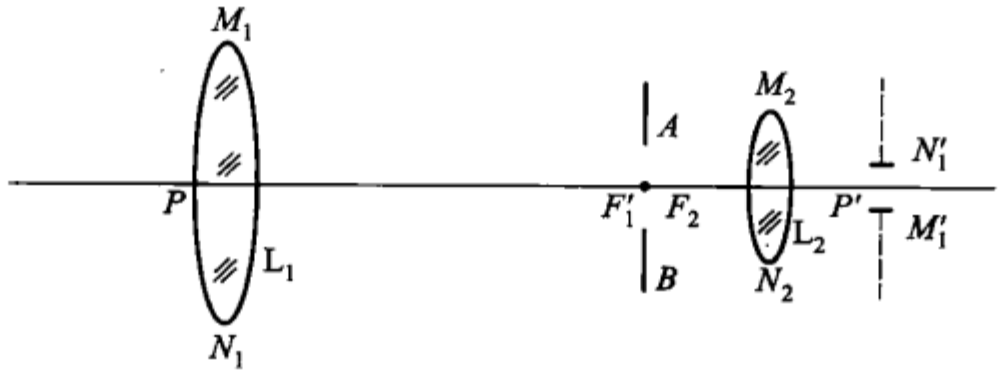


图 4－5

为无限远($s' = \infty$).

当不考虑观察者的眼睛时,此光学系统共有三个光阑:透镜 L_1 的框边 M_1N_1,光阑 AB 和透镜 L_2 的框边 M_2N_2. 现在来确定哪是孔径光阑,哪是视场光阑.

为确定系统的入射光瞳,首先要将所有光阑通过在它们各自前面的光学系统,于系统的物空间成像. 透镜 L_1 的框边 M_1N_1 本身,就是 M_1N_1 的像(因为在它前面没有光学系统);光阑 AB 被透镜 L_1 成像于系统物空间的无限远,与物面重合;透镜 L_2 的框边 M_2N_2 被透镜 L_1 成一放大像位于物与 L_1 之间. 从比较这三个同在物空间的像的边缘对无限远轴上物点所作的张角,显然看到:M_1N_1 对物体的张角最小,故透镜 L_1 的框边 M_1N_1 为开普勒望远镜的入射光瞳和孔径光阑. 由于出射光瞳与入射光瞳和孔径光阑共轭,所以,M_1N_1 通过透镜 L_2 在系统像空间 P'处所成的像 $M_1'N_1'$就是系统的出射光瞳.

在物空间,除入射光瞳外,还有两个光阑的像,并且其中 M_2N_2 在系统物空间所成像的边缘对入射光瞳中心 P 的张角,总做得大于位于无限远处与物平面重合的光阑 AB 的像的边缘对入射光瞳中心 P 的张角. 所以光阑 AB 为系统的视场光阑;它的重合于物平面的像为入射窗;它的重合于像平面的像为出射窗(图中都未画出).

在用望远镜进行观察时,必须将眼睛亦作为光学系统的一部分而考虑在内,若开普勒望远镜的出射光瞳($M_1'N_1'$)的直径小于眼睛的瞳孔,则透镜 L_1 的边缘($M_1'N_1'$)仍为整个系统的有效光阑;否则,瞳孔为有效光阑.

其次,我们来讨论一下照相机的光瞳和窗.

图 4－6 为一照相机光学系统的示意图,镜头是六片四组的双高斯型物镜,在其中心附近特加一个光圈 M_1M_2,在像面上特加一个底片框 AB.

在这样的系统中有四个透镜 L_1、L_2、L_3 和 L_4 的边框,还有两个特加的光阑 M_1M_2 和 AB,共六个光阑. 通常总是以改变光圈 M_1M_2 的大小来控制通过物镜的光能量,所以光圈 M_1M_2 就是系统的有效光阑. 它通过在它前面的透镜 L_1 和 L_2 在物空间成的(虚)像 P_1P_2 即为系统的入射光瞳;它通过在它后面的透镜 L_3 和 L_4 在像空间成的(虚)像 $P_1'P_2'$即为系统的出射光瞳. 通过入射光瞳中心 P、有效光阑中心 M 和出射光瞳中心 P'的光线就是主光线.

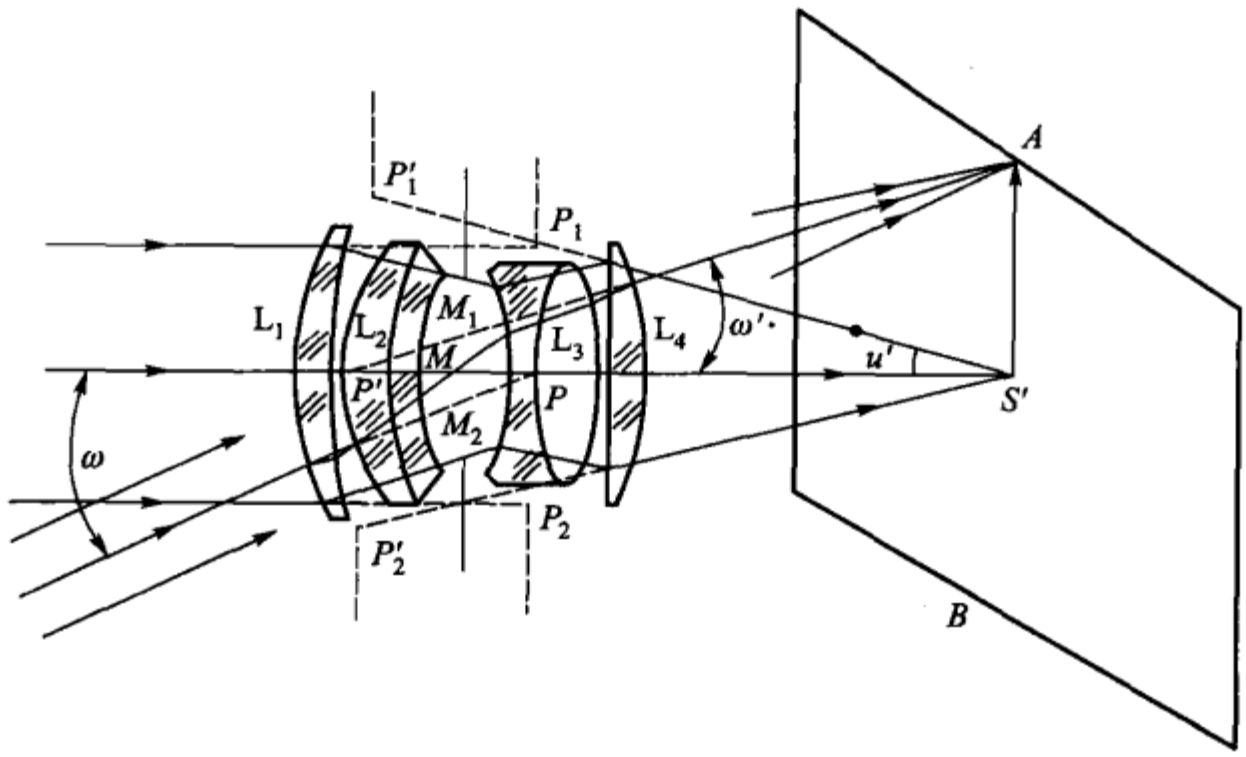


图 4－6

在物空间有 L_1、L_2、M_1M_2、L_3、L_4 和 AB 通过各自前面的透镜成的像(未画)，其中 AB 阑的像与物面重合，并且此像对入瞳中心 P 的张角 ω 决定了镜头所能拍摄的物空间的范围. 所以，这个与物面重合的像为系统的入射窗，AB 阑本身为系统的视场光阑兼出射窗.

最后，我们来分析一下人眼. 眼的瞳孔就是眼的有效光阑，瞳孔通过在它前面的系统(前房和角膜)于角膜后距角膜顶点 3.047 mm 处的像即为眼的入瞳；瞳孔通过在它后的水晶体和玻璃液于角膜后距角膜顶点为 3.667 mm 处成的像即为眼的出瞳. 布满视神经的网膜的大小决定了静止的人眼所能看到的物空间的范围，网膜的边起视场光阑的作用. 如果网膜因病有部分脱落或损坏，则从光学上看，就是减小了或部分损坏了视场光阑，从而影响所能看到的物空间的范围. 当然，由于眼睛能转动和头部运动，还不至于因网膜的部分损伤而总看不到物空间的某些部分.

§4－2　像差概述

前一章所研究的关于光学系统中物和像的各种性质及确定光学系统基点的公式等，统称为近轴光学. 这种光学只适用于光学系统的近轴区域，在这种区域内光线在球面上折射时的入射角和折射角都很小，以至于一切角的正弦或正切都可用角本身的弧度数值代替. 此外，在建立这种光学时，还假定了介质的折射率不随光的波长而变. 换言之，只有当轴上发光点或靠近轴的发光点用单色的元光束成像时，才会有完善的像.

然而，实际的光学系统并不这样简单. 一方面如前所述，实际光学系统总有

一定的通光孔径和一定的视场角或发光点不靠近光轴；另一方面由于成像光束多是由不同波长的光组成的，系统的折射率不为常数，所以，实际光学系统的成像与近轴光学所得的结果不同，两者间存在着偏离，我们把这种光学成像相对于近轴成像的偏离称为像差. 这里必须注意，光学系统的像差与光学系统的缺欠不同，后者系指组成实际光学系统的折射面（如球面）不够完善、折射率欠均匀以及共轴系统中各曲面的中心不严格地在同一直线上，等等. 而像差，是由实际光学系统的物理条件造成的，即使实际光学系统在材料和工艺上并无缺欠，系统仍然可能有显著的像差.

按产生像差的上述原因，可把像差分成两类：一类是单色光成像时的像差，称单色像差；另一类是多色光（或称复合光，即由不同波长的光构成的混合光）成像时，由于介质折射率随光的不同波长而变所引起的像差，称为色像差，简称色差. 在单色像差中还有球（面）差、彗（形）差、像散、像场弯曲和畸变等五种；在色差中又可分位置色差和放大率色差两种. 球差和彗差发生在对轴上和靠近轴的点用粗光束成像的光学系统中，称轴上像差；像散、像场弯曲及畸变发生在对离系统光轴较远的物体成像的光学系统中，称轴外像差.

除平面反射镜外，没有像差的光学系统——理想光学系统是不存在的，所以，研究实际光学系统的像差性质和设法校正或减小像差，就成为光学应用中的重要问题. 光学仪器或光学装置的结构之所以常是很复杂的，主要原因之一就是需要减小像差以提高像的清晰度. 关于像差理论及其在设计光学系统中的应用是“应用光学”的主要课题，在本书范围内只限于扼要地介绍各种像差的现象、特点以及校正像差的一些基本原理.

*§4-3 球　差

由光轴上某一物点发出的单色光束，经光学系统后，若不同孔径角的各光线交光轴于不同位置，从而使轴上像点被一弥散光斑所代替，则我们称光学系统对该物点的成像有球差. 或者说，球差是系统对轴上物点以单色粗光束成像时所产生的像差.

图 4-7(a)表示，自物空间光轴上的物点 S 发出的单色光束，经薄单透镜后，孔径角 u（或 u'）不同的光线交光轴于不同的位置. 孔径角近于零的近轴光线与光轴交于 S' 点，而非近轴的光线交光轴于 $\overline{S'}$ 点. 我们以此二点之间隔表征光学系统对给定物点 S 的球差：

$$LA = s' - \overline{s'} \tag{4-1}$$

其中 s' 和 $\overline{s'}$ 分别为由透镜到近轴光线与光轴的交点 S' 和非近轴光线与光轴的交点 $\overline{S'}$ 的距离. 显然，球差值 LA 与孔径角 u 或光线在光学系统上的高度 y 有关，即

LA 为 u 或 y 的函数.

关于一光学系统对给定物点成像,以光线的孔径角 u 或高度 y 为纵轴,LA 为横轴,则所画出的曲线称为系统对该物点的球差曲线. 若能使光学系统对某一给定孔径角的光线有 $LA=0$,则称该系统为消球差系统;此时,对其它孔径角的光线 $LA\neq0$. 此外我们规定:$LA>0$ 为球差欠校正,$LA<0$ 为球差过校正.

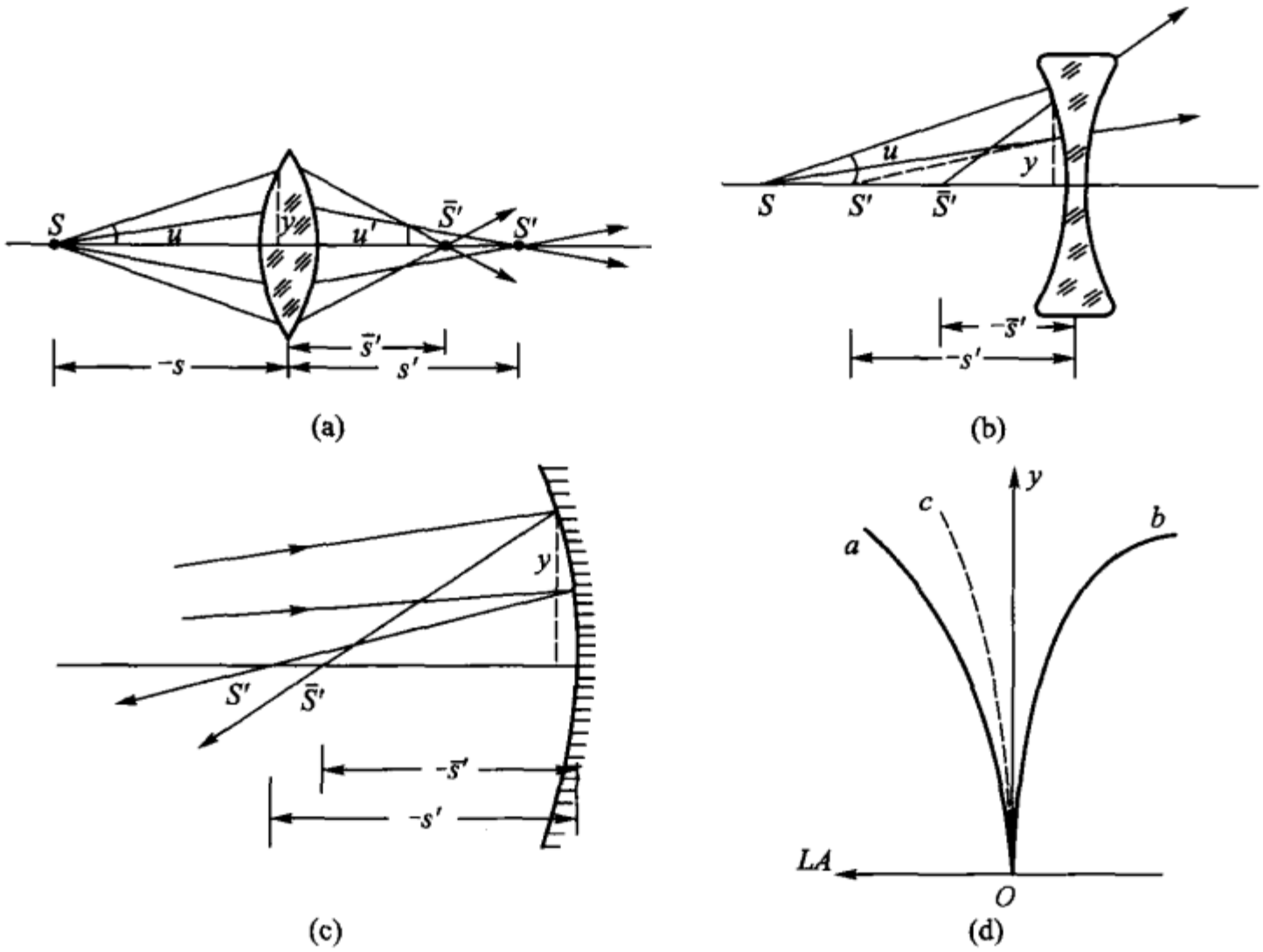


图 4－7

在图 4－7(a)所示的正单透镜中,$LA>0$,近轴像点 S' 在所有非近轴光线与光轴的交点 $\overline{S'}$ 的右侧,即 $\overline{S'}$ 点在 S' 点的反光线方向的一侧;而在图 4－7(b)所示的负单透镜中,$LA<0$,近轴像点 S' 在所有非近轴光线与光轴的交点 $\overline{S'}$ 的左侧,即 $\overline{S'}$ 点在 S' 点的顺光线方向的一侧. 显然,正负单透镜有符号相反的球差. 在图 4－7(c)所示的凹球面反射镜中,$LA<0$,诸 $\overline{S'}$ 点皆处于近轴像点 S' 的反光线方向的一侧,此种球差的性质与正单透镜的相同,而与负透镜的相反. 图 4－7(d)的三条曲线分别代表正单透镜、负单透镜和凹球面镜的球差曲线,其中曲线 c 是以 $-LA$ 画出的. 这里所画的球差曲线只是为了说明三种情况在符号上的关系和每一系统中 LA 与 y 的关系,而没有考虑三个系统的焦距的绝对值是否相等,也没有考虑透镜形状如何.

单透镜的球差值,一方面与透镜的焦距和通光孔径对焦距的比值——相对孔径有关,同时也与透镜的形状和介质的折射率有关. 对于如图 4－8 所示的一

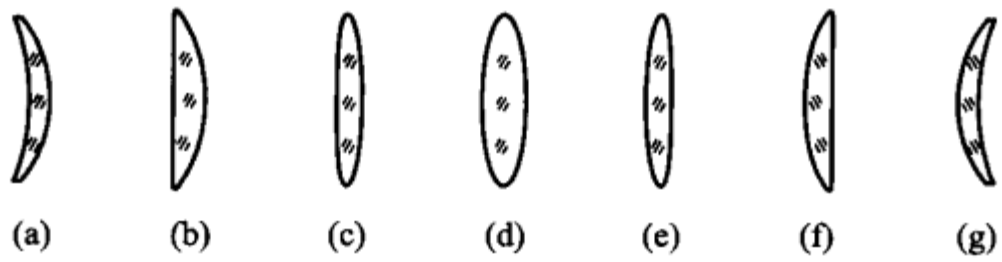


图 4-8

组具有相同的介质、焦距和相对孔径的薄透镜，当以纵轴表示透镜球差 LA，横轴表示透镜的形状（$\rho = 1/r_1$）时，经过计算可作出如图 4-9 所示的曲线.

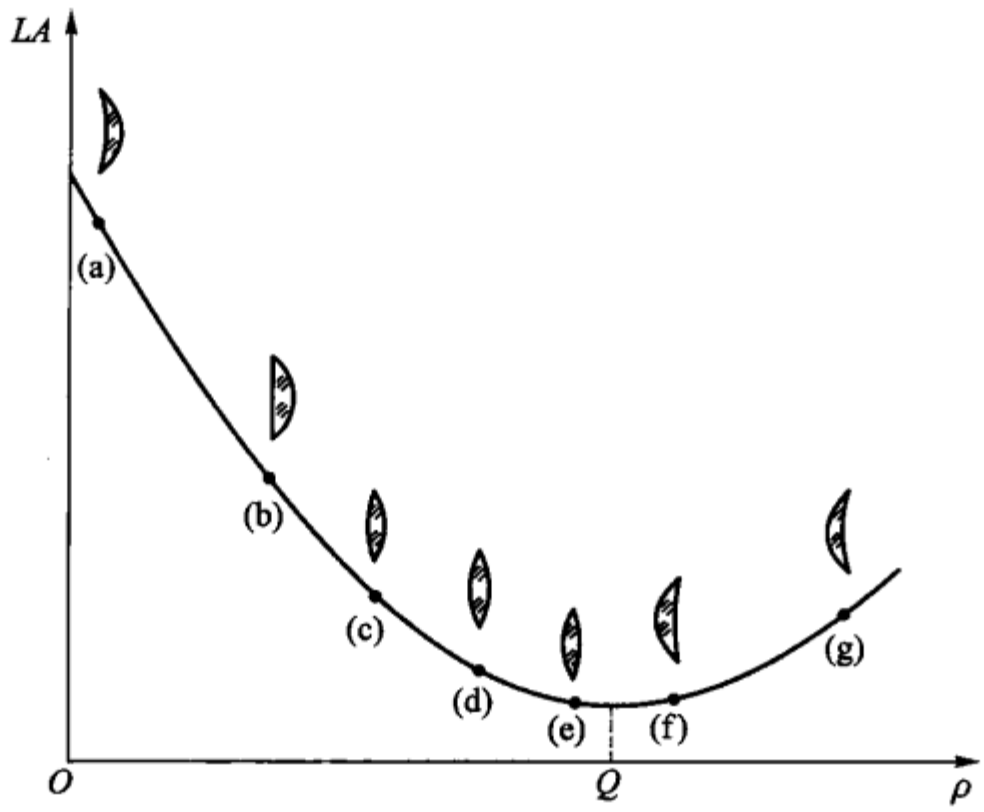


图 4-9

这样，对于给定了孔径、焦距和介质折射率的透镜，通过改变它的形状，可得到虽不为零但为最小的球差. 当此正单透镜的相对孔径不太大，并且对无限远处的物点成像时，满足下列条件的透镜将有最小的球差：

$$\frac{r_1}{r_2} = -\frac{4 + n - 2n^2}{n(1 + 2n)}, \tag{4-2}$$

其中 r_1 和 r_2 分别为透镜第一和第二表面的曲率半径，n 为透镜的折射率. 当 $n = 1.5$ 时，由上式得 $r_1/r_2 = -1/6$. 即第二表面的曲率半径较第一表面的曲率半径大 6 倍，并且反号. 这样的薄透镜（与图 4-9 曲线上的 Q 点相当的透镜）对于轴上无限远处的物点，有球差最小的成像.

不论是正单透镜，负单透镜，还是单球面反射镜，它们都有一定的球差，当其相对孔径较大（成像的光束不为元光束）时，球差的影响不能忽略. 所以在用较粗的光束成像时，必须采用组合的光学系统，以便对某一孔径角的光线消球差. 由上述正、负单透镜及凹球面反射镜的球差性质（图 4-5）得知：将正透镜和负透镜，或将凹球面反射镜和负透镜适当地组合起来，即可得消球差的光学系统.

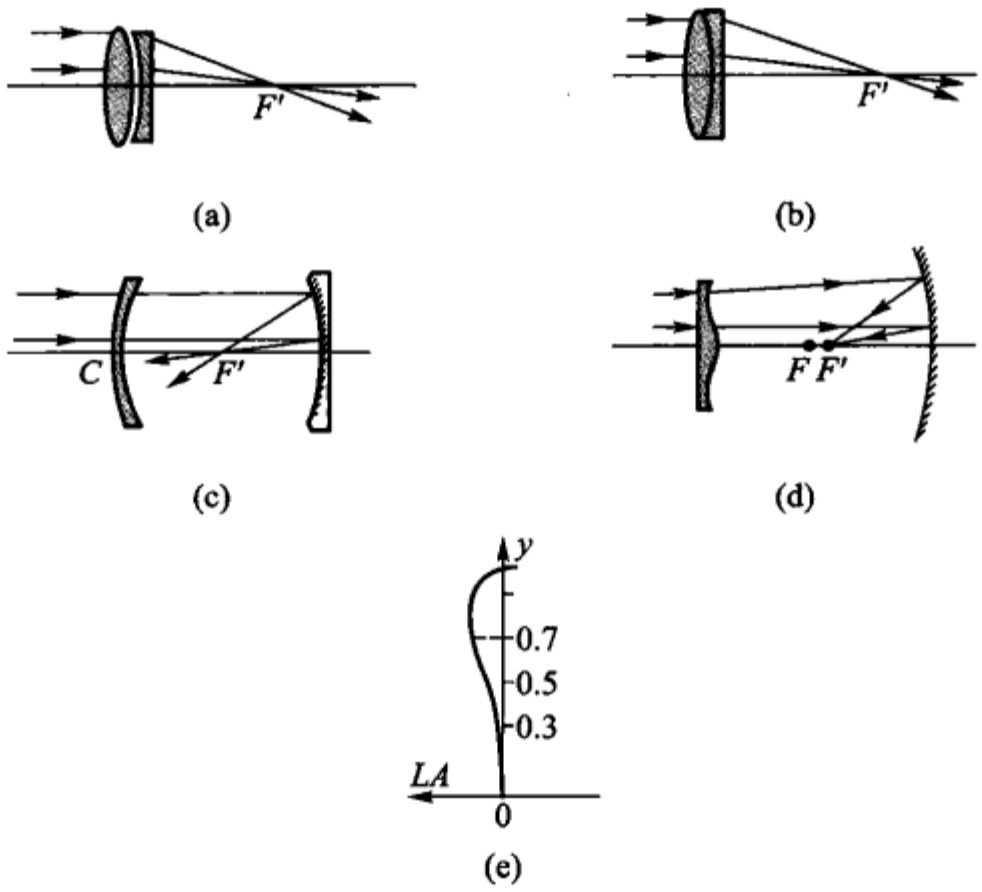


图 4 - 10

这样便需要有如图 4 - 10(a)和(b)所示的双透镜组和胶合双透镜(后者的两透镜必须由不同材料制成),以及由凹球面反射镜和负透镜组成的包沃斯 - 马克苏托夫折反(透镜 - 面镜)系统,如图 4 - 10(c). 还有一种由特殊校正板和球面镜组成的如图 4 - 8(d)所示的系统,称施密特(Schmidt)系统.

但是,不论双透镜组、折反系统,还是更复杂的其他光学系统,一般都只能对某一非近轴光线消球差,而不能同时对各种孔径角的光线消球差,总有一定的剩余像差. 图 4 - 10(e)为一般消球差系统的球差曲线.

然而,特别值得提出的,在单球面折射的成像中,由决定光路的公式(3 - 18)得知,除放在球面曲率中心的物点之外,满足下列条件的共轭点,将是完全消球差的:

$$n^2(r-s) = n'^2(r-s').$$

因为满足这个条件时,像距 s' 将与光线在折射面上的高度对球面中心的张角 φ 无关.

将光路公式(3 - 17)应用到近轴区域,得

$$\frac{n(r-s)}{s} = \frac{n'(r-s')}{s'}.$$

将以上二式联立对 s 和 s' 求解,得

$$\left.\begin{aligned} s &= r + \frac{n'}{n}r, \\ s' &= r + \frac{n}{n'}r. \end{aligned}\right\} \tag{4-3}$$

在由此二值决定的共轭点上，无论光束孔径角多大，都无球差. 这一对特殊的共轭点称为单球面的不晕点(aplanatic points)；在下一节会看到，这样的一对共轭点也是无彗差的. 前面§3-3的例题2中的一对共轭点就是这样的不晕点.

*§4-4 彗　差

由靠近轴的轴外点发出的单色粗光束，经光学系统后，若在近轴像面上得到的不是像点，而是彗星形的光斑，则称该系统对给定物点的成像有彗差. 与球差引起的弥散斑不同，彗差所生的光斑对光束的光轴不对称，因此，彗差有时也称不对称差.

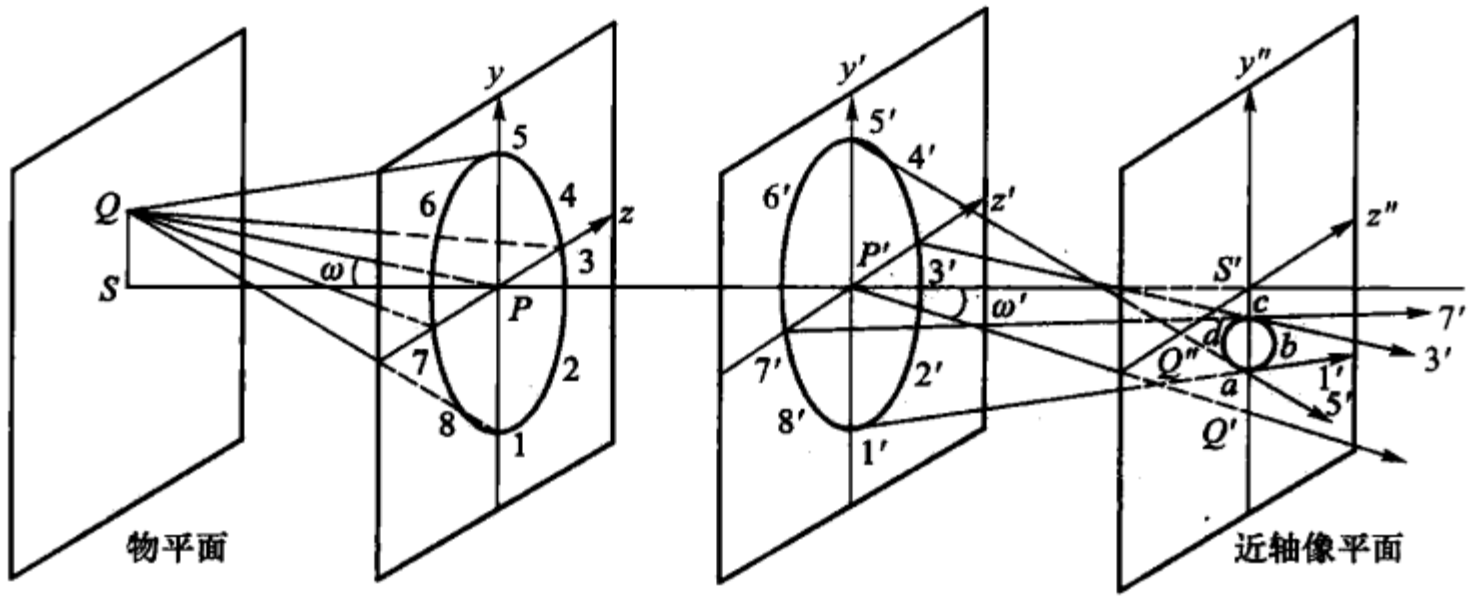


图4-11

图4-11中，自物点Q发出的元光束，经光学系统(例如一般的单透镜)之后，会聚于像点Q'，此点为Q在近轴像面上理想的像. 以QP为轴的空心锥形光束在光学系统中某一对共轭面(P和P')上的截面为圆圈$1,2,3,\cdots,8$和$1',2',3',\cdots,8'$. 当Q点发出的光束立体角不太大时，这些光线通过光学系统后在近轴像面上的交点，将构成一个以Q''为中心的圆圈$abcd$. 光线$1'$与$5'$相交于a，光线$2'$与$6'$相交于b，光线$3'$与$7'$相交于c，光线$4'$与$8'$相交于d；并且随着光束立体角的增大，圆心Q''到近轴像点Q'的距离$Q'Q''$以及圆$abcd$的半径也增大. 这样，对于实心的圆锥形粗光束，经系统后的成像便构成彗斑状的图形(图4-12). 在视场角ω和孔径角u不太大的条件下，彗斑在子午面(图4-11的y''方向)的直径比弧矢面(图4-11的z''方向)的直径约大三倍.

图4-13(a)是望远镜拍摄的星空照片，(b)是照片左下角区域的放大图. 可见，在视场中心的像点良好，而在视场边缘则呈现出显著的彗差.

对于这个以不对称的光斑为特征的彗差，可借助于在子午面内的线段k(图4-14)来量度：

$$k = h'_0 - \frac{1}{2}(h'_1 + h'_5), \quad (4-4)$$

其中 h'_0 是锥形空心光束的光轴——主光线 QP 在像空间与近轴像面 S' 所成交点的高度；h'_1 和 h'_5 分别是在物空间对称于主光线 QP 的子午面内(即纸面内)的光线 1 和 5 在像空间近轴像面 S' 上交点的高度. 当 $k=0$ 时，则称系统为消彗差的.

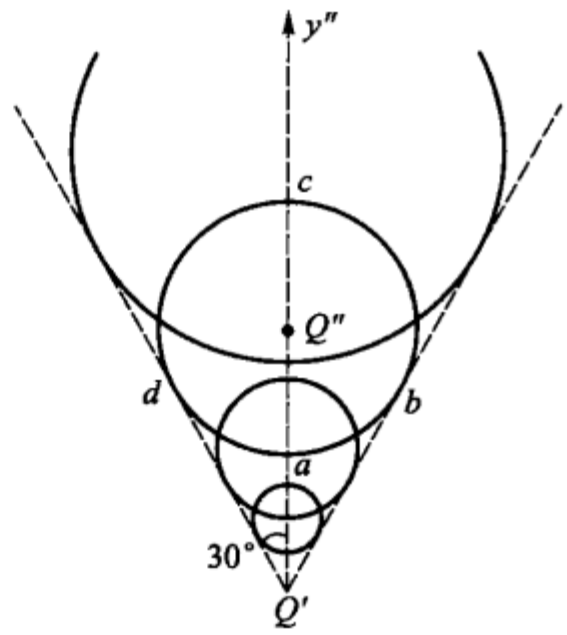
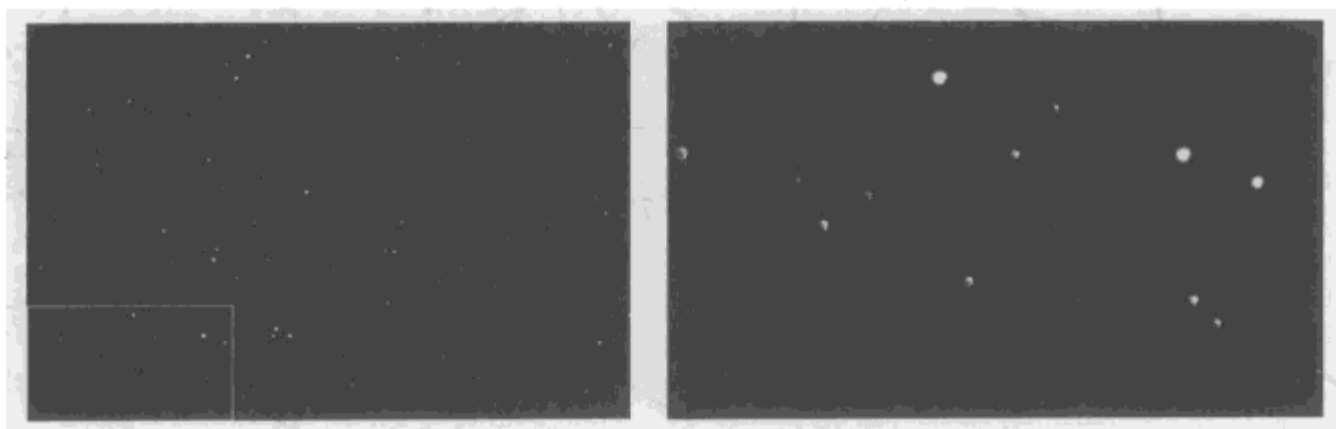


图 4-12

显然，对于投射在系统的不同带区的同一光束的各光线，若光学系统对它们有相同的垂轴放大率，则这些光线与近轴像面交于同一点 Q'，而无彗差. 所以也可以说，彗差是由于光学系统的不同带区对于同一轴外物点有不同的放大率而产生的. 为消彗



(a)　　(b)

图 4-13

差，必须使光学系统对不论孔径角如何的各光线，有同一的垂轴放大率，即 h'/h 应与光线的孔径角 u 和 u' 无关. 德国光学家阿贝根据费马原理，导出了对于靠近轴的物点，光学系统无彗差的条件：

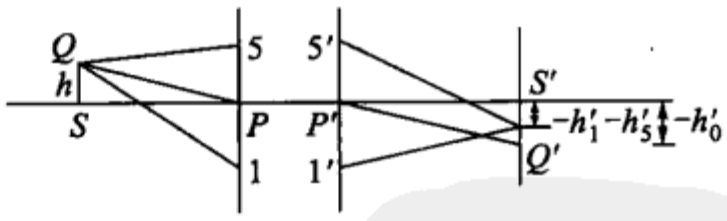


图 4-14

$$\frac{h'}{h} = \frac{n\sin u}{n'\sin u'}$$

或

$$h'n'\sin u' = hn\sin u, \quad (4-5)$$

其中 n 和 n' 分别为物 h 和像 h' 所在空间的折射率，u 和 u' 分别为光线在物空间和像空间共轭点上的孔径角. 这个公式称为阿贝正弦条件(或定律). 当 u 和 u' 都很小时，阿贝正弦条件的公式与近轴的拉格朗日 - 亥姆霍兹不变式(3-31)一样.

对于单球面折射，可以证明：由式(4-3)确定的一对共轭点，是满足阿贝正弦条件[式(4-5)]的，也就是，若将元线段 h(物)垂立于式(4-3)所决定的 S

点上，则在该式所决定的 S' 点处将得 h 的完善的像，无球差，也无彗差. 这样的一对共轭点称为不晕点.

在显微镜中，为增大系统的分辨本领和提高像的明亮程度，要求进入显微镜物镜的光线有尽可能大的孔径角，同时还要求系统对切片上的物能成完善的像，即消球差和消彗差. 为此，显微镜物镜必须满足阿贝正弦条件. 将上述单球面折射的不晕点用于显微镜物镜，即可达到所提到的要求. 图 4-15(a) 所示为一半球透镜，在它的平表面上，敷以与透镜的折射率相同的液体(油)，并将被观察的切片或物体浸在液体中，这样的系统称为油浸物镜(或湿镜头)，它与图 4-15(b) 所示的单球面系统相同. 当物 S 到球面的距离等于 $r+r/n$ 时，则于距球面为 $r+nr$ 处有完善的像 S'. 若在半球透镜的像空间，再加一弯月形的正透镜，如图 4-15(c)，并且使弯月镜的第一折射球面的曲率中心与虚像 S' 重合，第二折射球面的曲率中心至 S' 的距离等于 r_2/n，其中 n 为弯月形透镜的折射率，于是，第二折射面将又一次不晕地成像于 S''. 有些高级的油浸物镜便是这样两次运用不晕成像的阿贝正弦条件的[参看图 6-11(f)].

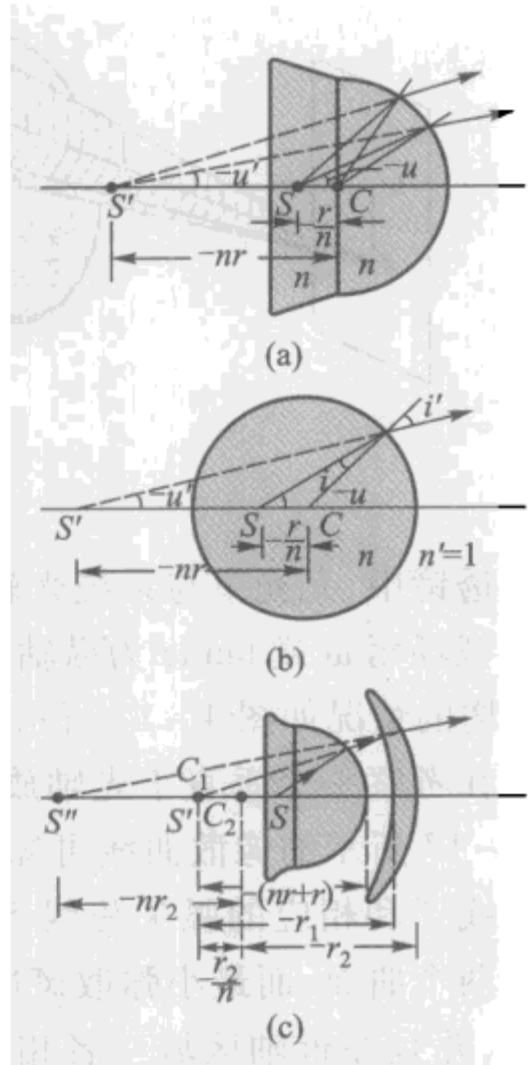


图 4-15

* §4-5 像散和像场弯曲

当光学系统对非近光轴的物点以元光束成像时，若像点被分离着的子午焦线 T 和弧矢焦线 S 所代替，则称系统对给定物点的成像有像散. 此时，在由高斯公式所决定的像面——近轴像面上有较大的弥散斑，对于一凸透镜，此斑为一长轴平行于弧矢焦线的椭圆，在两焦线之间有一最小圆斑，而子午焦线另一端的弥散斑的截面为一长轴平行于子午焦线的椭圆. 图 4-16 是以夸大的形式表示出的一个正单透镜对非近轴的 A 点成像时产生像散的情形；图 2-8 所示的像散光束中的子午焦线 aa' 与这里的 T 对应，弧矢焦线 bb' 与这里的 S 对应；这里的 Q 和 Q' 平面是近轴的共轭面.

光学系统像散的大小，多用弧矢焦线 S 和子午焦线 T 在系统光轴 QQ' 上的投影 ST 来表示，称 ST 为像散差. 当以 x'_T 和 x'_S 分别代表子午焦线和弧矢焦线到近轴像面的距离时，则有

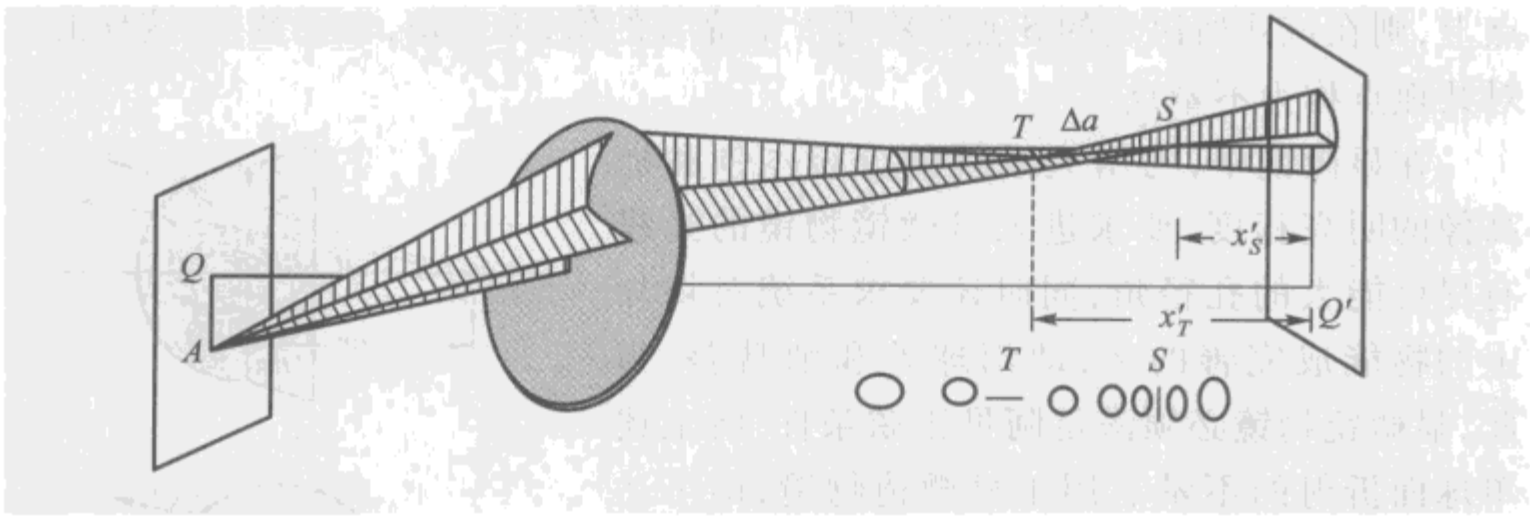


图 4 – 16

$$ST = x'_T - x'_S. \tag{4-6}$$

在单透镜中,元光束与系统光轴的夹角(即视场角)愈大,则像散差 ST 亦愈大. 当以视场角 ω 或 $\tan\omega$ 为纵轴,以 x'_T和 x'_S为横轴时,正单透镜的像散差随视场角 ω 而增的情况如图 4 – 17 所示.

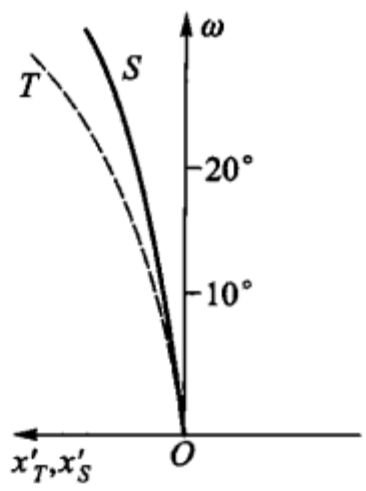


图 4 – 17

在考察一个垂直于光轴放置的平面物的成像时,由图 4 – 17 所示的像散曲线可知:各视场角的元光束的子午焦线 T 和相应的弧矢焦线 S 所在的面将是对称于光轴的两个曲面,而最小弥散斑所在的面位于这两个曲面之间,并且在近轴区域三者相重合. 子午焦线 T 所在的面,称为子午像面;弧矢焦线 S 所在的面,称为弧矢像面. 如果平面物如图 4 – 18(a)所示,则于子午像面和弧矢像面,将分别得到如图 4 – 18(b)和(c)的图像. 而在这两像面之间具有最小弥散圆斑的曲面上所得的“像”,其清晰程度取决于相应最小圆斑的大小. 当像散差超过一定值之后,最小圆斑亦不能视为像点,这时得不到清晰的像.

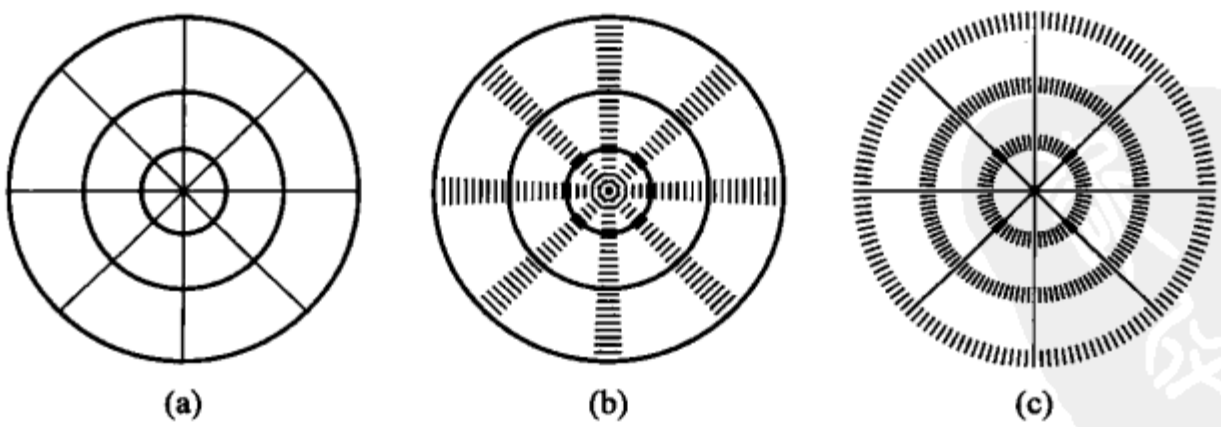
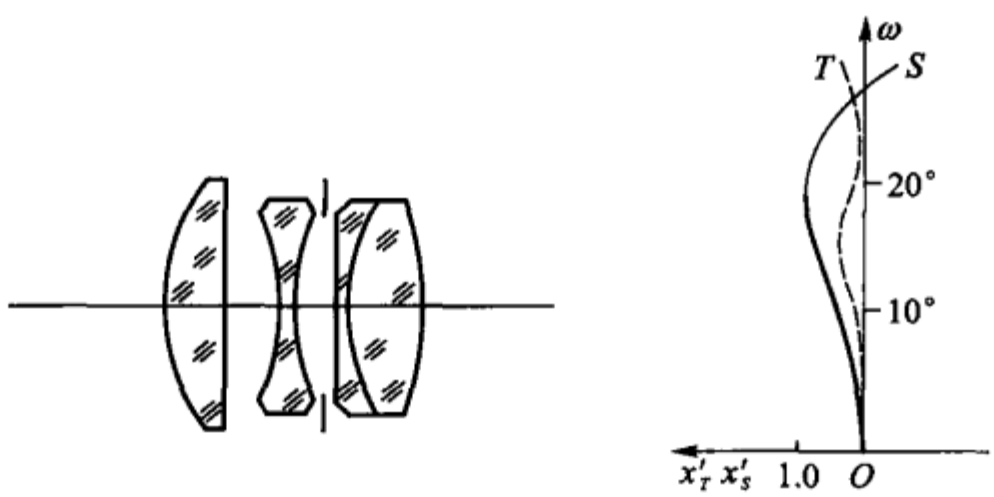


图 4 – 18

像散差的大小,与元光束相对于光轴的倾角、相邻介质的折射率及折射面的曲率半径等有关,并且正透镜的像散差与负透镜的符号相反. 所以,适当地选配系统各球面的曲率、各介质的折射率,以及合理地确定有效光阑的位置等,就能

得到对于视场角 ω 为某一定值的元光束像散差为零的光学系统. 我们称这样的系统为消像散的光学系统. 显然,一个实际消像散的光学系统,不能使来自所有方向(ω 角)的元光束都不产生像散差. 还必须指出:对离光轴较远的物点用粗光束成像,不但要考虑像散差,同时还要考虑彗差和所谓轴外球差等.

在消像散的光学系统中,若成清晰像的最佳像面仍不为平面,则称该系统有像场弯曲. 这种像差的大小与透镜的形状及光束截面的粗细无关,而只决定于系统中各透镜的焦距与其折射率之间的关系. 有显著像场弯曲的光学系统,给实用带来许多不便,例如,在照相机中,就必须使感光板呈同样的曲面. 为校正像场弯曲,也要采用组合系统,并且合适地配选各透镜的焦距及其折射率. 图 4-19(a)表示一个消像散并且像面平直的照相物镜的光学系统,它的像散曲线如图 4-19(b)所示.



(a)　(b)

图 4-19

从上面的讨论可以看到,为校正像散和像场弯曲,一方面要用组合系统,使系统复杂化,另一方面还要求有许多种不同性质的光学材料.

* §4-6 畸　变

所有上述像差的共同特点,是像点被弥散斑所代替,破坏了成像的清晰程度. 然而,还有另一种像差,它不影响成像的清晰程度而仅影响像与物的几何相似性,或者说仅影响像的几何形状,这种像差叫畸变. 产生畸变的原因,可以认为是由于光学系统对共轭面上不同高度的物体有不同的垂轴放大率所致,即 β 不是常数,而是物高的函数(或视场角的函数).

畸变量的大小,通常用

$$\text{dist} = \frac{\beta_0 - \bar{\beta}}{\beta_0} \times 100\% \qquad (4-7)$$

来衡量,其中 β_0 为对小视场角的(或近轴的)垂轴放大率,$\bar{\beta}$ 为对较大的某一视场角的垂轴放大率. 当共轭平面上的垂轴放大率随视场角 ω 的增大而变大时,

$|\bar{\beta}| > |\beta_0|$，则所产生的畸变我们称之为负畸变，亦称枕形畸变；反之，为正畸变，亦称桶形畸变.

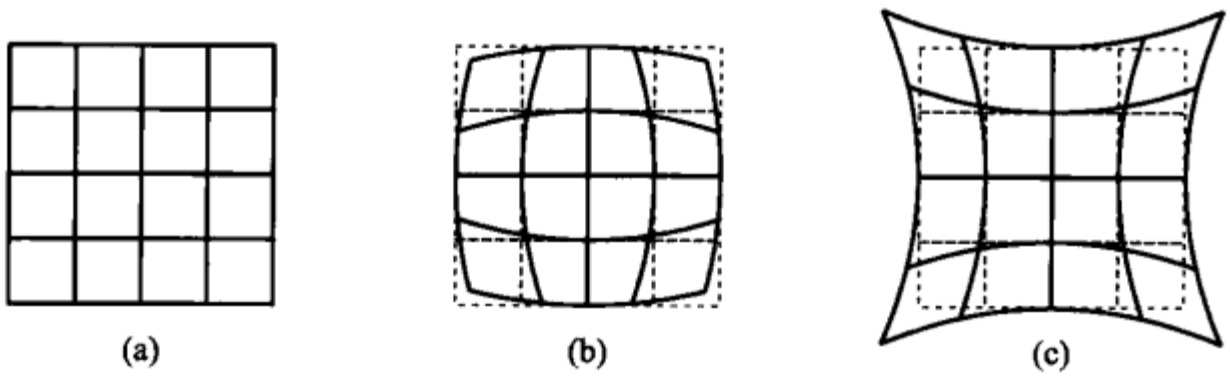


图 4－20

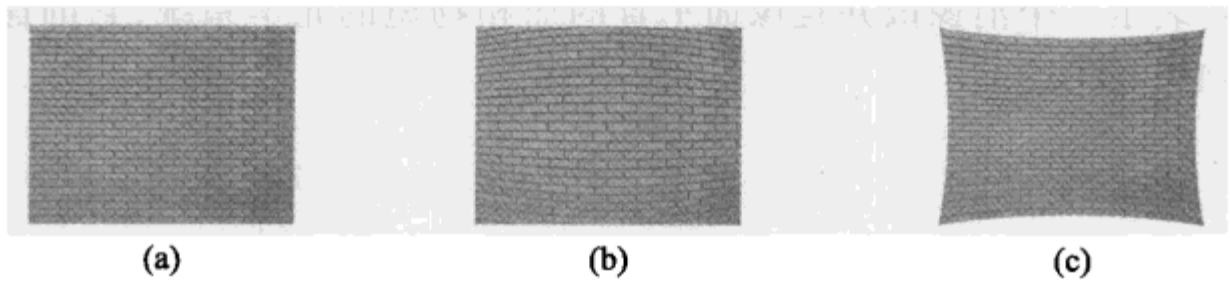


图 4－21

若在垂直于光轴的平面上放置一个如图 4－20(a)所示的网状物，假定光学系统没有任何其他像差，则当系统有正畸变时，将得到如图 4－20(b)所示的图形；而当有负畸变时，则得到如图 4－20(c)所示的图形. 图 4－21(a)，(b)和(c)所示的三张照片，分别为用无畸变系统、正畸变系统和负畸变系统拍照的同一景的照片；与图 4－21(a)，(b)和(c)三种情形相应.

由于畸变不影响成像的清晰程度，而只改变像的几何形状，因而它与其他像差不同，在一些实际光学系统中，不但允许它存在，而且还设法造成巨大的畸变，以获得其他方面的益处. 例如，由拍摄宽银幕电影的照相物镜所得的像，是严重畸变的，像的水平方向同垂直方向的比例不似原物，矮胖变成瘦长；广阔的田野在感光底片上只占很窄的一条. 这样，才能将水平方向较大范围内的景物拍摄在一般的胶片上. 放映这种宽银幕电影时，只要用一个与摄影光学系统的畸变在绝对值上相等而符号相反的光学系统作放映系统即可. 而若将一般电影片放在放映宽银幕的光学系统中进行放映，则圆将变成长轴在水平方向的椭圆！

一般人眼，如果未经过专门的训练，对于畸变不超过 5% 的图像是感觉不出它的几何失真的. 所以，在有些观察用的光学系统中，只要畸变不很大，例如不超过 5%，也不妨碍使用. 用于拍摄电视或电影的摄像镜头以及一般观察用望远镜等就是这样的光学系统.

然而，在另外一些光学系统中，特别是在测绘仪器(如大地测量仪器)和各种制版或复制用物镜的光学系统中，畸变是不能允许的严重缺点，必须设法减小或消除.

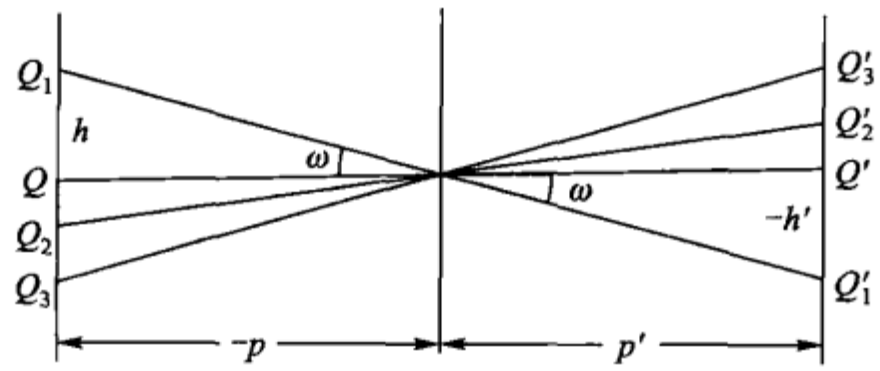


图 4-22

在针孔成像中,不论物点到光轴的距离多远,或光线对光轴的夹角如何,垂轴放大率恒为一常数. 图 4-22 所画出的便是这个结论的证明. 因为每一对共轭点的连线均为直线,在这种情况下,垂轴放大率 β 为一常数,即

$$\beta = \frac{h'}{h} = \frac{p'\tan\omega'}{p\tan\omega} = 常数, \tag{4-8}$$

其中 p 和 p' 分别为自针孔到物面和像面的距离,此式称为无畸变成像的正切条件.

若代替针孔的是一个孔径很小的而焦距较长的薄透镜,则上述无畸变的性质仍存在;当以厚透镜或薄透镜组代替针孔时,则一般不能保证满足此正切条件,因而产生畸变. 不过,在针孔的两侧,对称地放置两个同样的透镜或透镜组(图 4-23)时,

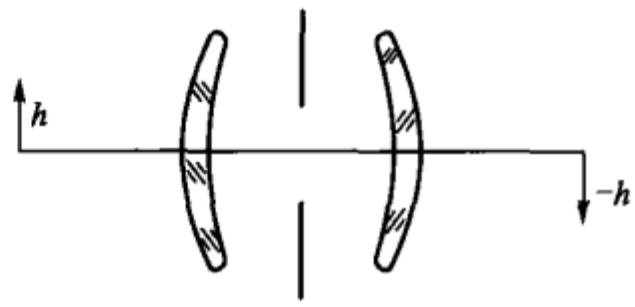


图 4-23

则对于垂轴放大率 β 为 -1 的一对共轭平面,将完全无畸变地成像. 可以证明:这种对称型光学系统,对于 $\beta = -1$ 的共轭平面,不单是无畸变的,也是无彗差和无放大率色差的;并且当物面在无限远或 $|\beta| << 1$ 时,仍在一定程度上保留这些特点. 这就是现代照相物镜多采用对称型或亚对称型光学系统的主要原因. 前面图 4-6 所示的双高斯型物镜就是在这样考虑下制成的一种现代颇流行的亚对称型物镜.

* §4-7 色差及其校正方法

任何实际的光学材料,对于不同颜色①的光的折射率是不同的,因而,一个透镜对不同颜色的光将有不同的基点. 这样,首先,当光轴上的物点发出多色光经单透镜成像时,即使在近轴区域也将得到一系列与各色光对应的不重合的像点. 这种色像差,称为位置色差或轴向色差.

① 严格来说,应该用波长字样,不过考虑到与所讲色差在用词上衔接,这里仍用颜色二字.

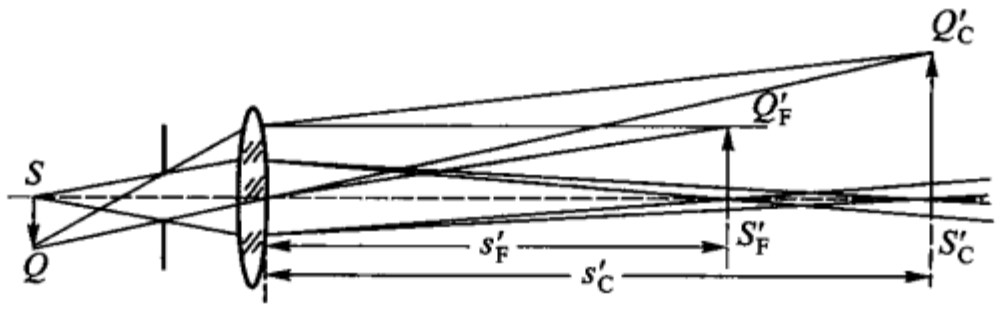
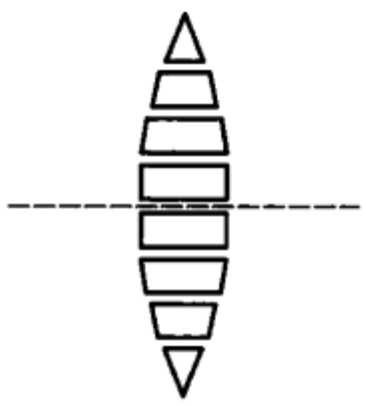
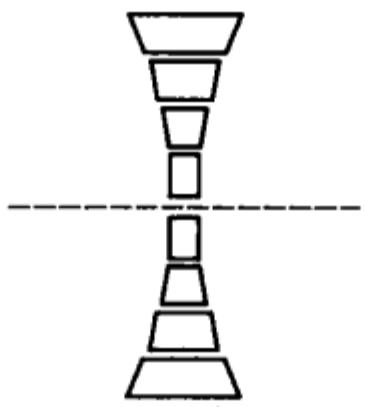


图 4 – 24



(a)



(b)

图 4 – 25

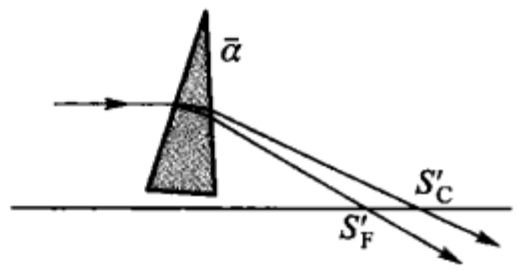


图 4 – 26

在图 4 – 24 中，自物点 S 发出各种颜色的光束，即使在透镜前放一个有小圆孔的屏以造成近轴光束，经透镜后，紫光(F)成像于 S'_F，红光(C)成像于 S'_C. 结果，不论在 S'_F处，还是在 S'_C处，所得到的都是带彩边的光斑，而非点像. 为研究色差的成因，可把透镜看做是由折射角 α 连续改变的一系列棱镜组成的，如图 4 – 25 所示. 同时，任一单透镜都可用一个平均折射角为 $\bar{\alpha}$ 的棱镜来表示它对光的偏折. 由于一般光学材料对紫光的折射率，总是大于其对红光的折射率，所以，当紫光和红光以同样的入射角入射时，从棱镜射出的紫光(F)较红光(C)有更大的偏向角，如图 4 – 26. 这就表明：对于无限远点 S 而言，在正单透镜中紫光的像点 S'_F较红光的像点 S'_C靠近透镜些. 同理也适用于负透镜. 我们用两像点的间隔 Lch 表示光学系统对紫光(F)和红光(C)的位置色差，即

$$Lch = s'_C - s'_F. \tag{4 – 9}$$

其次，由于光学系统的各放大率均与透镜的焦距有关，而今焦距随光的颜色而异，所以一个光学系统对不同颜色的光，将有不同的放大率. 于是，一物体将由透镜生成一系列的与各色光对应的高度不同的像，而在由任一色光所成的像面上只能得到一个有彩边的“像”. 这种色差，称为放大率色差. 由于它表现在垂轴方向，所以也称垂轴色差. 在图 4 – 24 中，线段 $S'_FQ'_F$和 $S'_CQ'_C$分别为透镜对物 SQ 所成的紫光的像和红光的像. 光学系统的放大率色差，可用这两个像的高度差 $h'_C - h'_F$或相应垂轴放大率之差 $\beta_C - \beta_F$ 来表示；但更常见的是用这些差值占总像高 h'或放大率 β 的百分数表示，即用 $(h'_C - h'_F)/h' = \Delta h'/h'$或 $(\beta_C - \beta_F)/\beta = \Delta\beta/$

β 表示. 其中 h' 和 β 分别为各种颜色光对该共轭平面的平均像高和平均垂轴的放大率.

上述两种色差,为实际光学系统的完善成像增加了很大的困难,因为,即使在近轴区域,这些色差仍然出现. 然而更大的困难却是在非近轴区域成像时,除了产生上述两种色差之外,还有伴随球差、彗差、像散、像场弯曲和畸变等而出现的所谓像差的色差. 而仅仅由于大多数实际光学材料的折射率随不同颜色而变的量很小,所以,尽管这些色差不能同时都消除,但在不同的具体情况下,有些色差却是可以允许的. 实际上,若能使光学系统对两种不同颜色的光有相同的成像位置,则为一般目的而用的光学系统,可得尚好的像,这种光学系统即称为消色差系统. 同对球差及像散的校正相似,实际光学系统在现有光学材料的情况下,一般只能对某两种颜色的光校正色差. 两种色差同时得到校正的系统,称为稳定的消色差系统. 对某三种颜色的光校正色差叫做复消色差,对四种颜色的光校正色差叫做超消色差,不过,这两种只在较特殊的情况下才采用. 有些系统在两种色差中只校正了一种,如下面要讨论到的惠更斯目镜便是一例;在该目镜中,只校正了放大率色差而位置色差并未被校正,因为位置色差在目镜中是不重要的.

只有完全由反射镜组成的光学系统才没有色差,而在任何折射光学系统中均有色差. 为校正色差,需采用组合的光学系统. 即借助于组合系统各组元的焦距与其介质色散参数的恰当组合,或组元间隔的合理确定,就可得到消色差的光学系统.

对薄单透镜的光焦度 Φ 可写成

$$\Phi = (n-1)K,$$

其中 $K=(1/r_1-1/r_2)$ 为表征透镜形状的量,与透镜介质的折射率无关. 设透镜对某两种光的折射率之差为 Δn,则由之引起透镜光焦度的改变值为

$$\Delta\Phi = \Delta nK,$$

或写成

$$\Delta\Phi = \frac{\Delta n}{n-1}\Phi,$$

若 Δn 为透镜对紫光(F)的折射率 n_F 和对红光(C)的折射率 n_C 之差,即 $\Delta n = n_F - n_C$,则透镜对紫光的光焦度 Φ_F 和对红光的光焦度 Φ_C 之差为

$$\Delta\Phi = \frac{\Phi}{\nu}, \tag{4-10}$$

其中 $\nu=(n_D-1)/(n_F-n_C)$,称为透镜介质的阿贝数,n_D 为介质对钠黄光的折射率,在一般的情况下,常用它作为介质在可见光范围内的平均折射率.

式(4-10)表明,透镜对于紫光和红光的光焦度的改变值 $\Delta\Phi$,与所用介质(玻璃)的种类有关,也与透镜光焦度本身的大小有关,并且与其光焦度同号. 这

样,在组合光学系统时,只要采用使某一透镜对紫光和红光的光焦度的改变值,与另一透镜对紫光和红光的光焦度的改变值大小相等而符号相反,就可达到消色差的目的.

对于由两薄透镜组成的光学系统,其光焦度 Φ 由式(3 - 51)得

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - d\Phi_1\Phi_2,$$

按式(4 - 10),此系统对紫光或红光所生的光焦度之差有

$$\Delta\Phi = \frac{\Phi_1}{\nu_1} + \frac{\Phi_2}{\nu_2} - d\Phi_1\left(\frac{\Phi_2}{\nu_2}\right) - d\Phi_2\left(\frac{\Phi_1}{\nu_1}\right),$$

即

$$\Delta\Phi = \frac{\Phi_1}{\nu_1} + \frac{\Phi_2}{\nu_2} - \frac{d\Phi_1\Phi_2(\nu_1 + \nu_2)}{\nu_1\nu_2}, \tag{4 - 11}$$

其中 ν_1 和 ν_2 分别为第一透镜和第二透镜的阿贝数. 当使组合系统的 $\Delta\Phi = 0$ 时,就得消色差的光学系统.

1. 若将两透镜接触在一起,$d = 0$,则由式(4 - 11)得消色差的条件:

$$\frac{\Phi_1}{\nu_1} + \frac{\Phi_2}{\nu_2} = 0, \tag{4 - 12}$$

同时,此组合系统的光焦度 Φ 为

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2.$$

以上二式联立对 Φ_1 和 Φ_2 求解,得

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{\nu_1}{\nu_1 - \nu_2}\Phi,\\ \Phi_2 &= -\frac{\nu_2}{\nu_1 - \nu_2}\Phi.\end{aligned}\right\} \tag{4 - 13}$$

这样,当给定了组合透镜组的光焦度,并且选定玻璃时,可由式(4 - 13)算出为消色差而两透镜所应有的光焦度.

由于 ν_1 和 ν_2 同为正数,所以 Φ_1 和 Φ_2 必须反号,即只有正透镜与负透镜组合起来的系统,才能消色差. 同时,为此目的而相互接触的正透镜与负透镜必须是由阿贝数不同的光学材料组成,因为当 $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ 时,由上式 $\Phi_1 = \infty$ 和 $\Phi_2 = \infty$,无意义. 而通常,正透镜与负透镜分别取冕玻璃和火石(燧石)玻璃,并且令正透镜的第二面与负透镜的第一面有相同的曲率半径;然后用特种树胶(如加拿大胶)将两面胶合在一起,遂成所谓胶合透镜(如图 4 - 27 所示):

这种透镜组,在玻璃给定的情况下,通过适当地分配两透镜的焦距的方法,可消色差;通过适当改变各面的曲率半径的方法,可消球差. 倘若组成胶合透镜的两材料可任选,则它也可同时消彗差.

2. 若两透镜是由同一材料制成且其间隔 d 不为零,则可得出对系统焦距消色差的光学系统. 为消色差必须使式(4 - 11)得

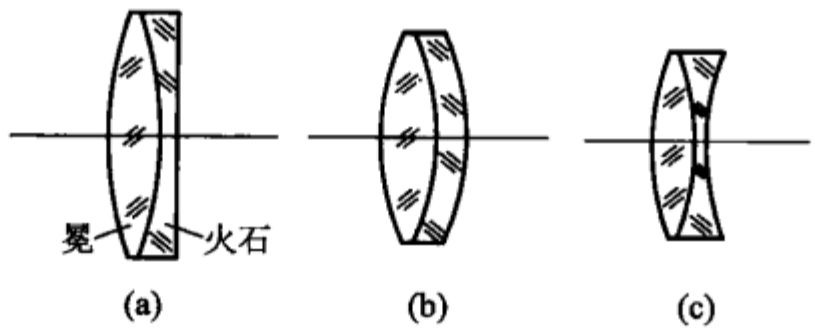


图 4-27

$$\Delta\Phi = \frac{\Phi_1}{\nu_1} + \frac{\Phi_2}{\nu_2} - \frac{d\Phi_1\Phi_2(\nu_1+\nu_2)}{\nu_1\nu_2} = 0,$$

即

$$d = \frac{\Phi_1+\Phi_2}{2\Phi_1\Phi_2},$$

写成

$$d = \frac{1}{2}(f_1' + f_2'). \tag{4-14}$$

这一原理常用来设计目镜,以校正色差. 例如惠更斯目镜和冉斯登目镜便是. 不过,这种消色差透镜组与前面讲的胶合消色差透镜不同,它仅仅校正了系统的放大率色差,而没有校正位置色差.

第三章图 3-33 所示的光学系统是图 4-28 所示的同一型的惠更斯目镜,在那里 $f_1' = 3a, f_2' = a$,两透镜的间隔 $d = (f_1' + f_2')/2 = 2a$. 可见,该惠更斯目镜是消色差的. 图 4-29 为一消色差的拉姆斯登目镜.

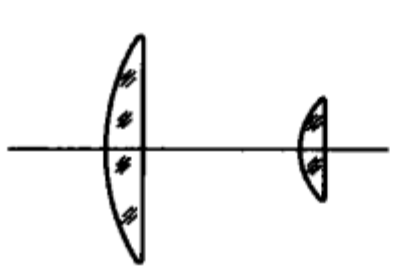


图 4-28

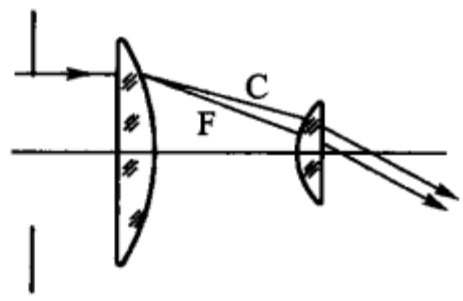


图 4-29

* §4-8 校正像差与光学玻璃

一个优良的实际光学系统,它不仅必须依赖于作为基础的近轴光学所提供的物理条件,而且,作为充分条件,还要依赖像差理论来校正或减小实际光学系统所产生的各种像差. 从上述各节我们已经看到,实际光学系统像差的大小是系统结构元素 r、d、n 和 ν 的函数. 所以校正像差的问题,实质上就是设法确定出一组合理的 r、d、n 和 ν 值来使所要校正的像差为零或最小的问题,这是光学设计中的重要课题. 从数学方法上看,光学设计中的校正像差问题,是一个解方程组的问题,而且在原则上,只要变数(r、d、n、ν)的数目等于由所要校正的像差数决

定的方程式的数目，则方程组必有解；变数的数目较方程式的数目少时，则为求最佳解的问题.

然而，曲率半径 r 和间隔 d，在大多数情况下还能当作连续变数来考虑，而由玻璃提供的变数 n 和 ν 却不能这样考虑，因为玻璃的 n 和 ν 值不仅只限于一定的范围而且也是不连续的. 这不仅使校正像差的问题变得困难了，而且也在实际上限制了光学系统的成像质量. 所以合理地扩大光学玻璃 n、ν 值的范围是提高实际光学系统性能的前提. 光学玻璃的品种增多了，性能提高了，则实际光学系统的像差校正就会向完善的方向前进一步.

目前，光学玻璃已有近二百种，这是自 19 世纪以来许多科学家和工人的劳动成果. 我国光学玻璃工业发扬自力更生奋发图强的精神仅用二十多年的时间就走完了外国百余年的历程，现在已能生产国际上已有光学玻璃的绝大部分. 光学玻璃的基本成分是硅酸盐. 光学玻璃的品种虽多，但基本上是二大类：一类叫冕(K)玻璃，另一类叫燧石或火石(F)玻璃；冕玻璃内分氟冕(FK)、轻冕(QK)、冕(K)、磷冕(PK)、钡冕(BaK)、重冕(ZK)、镧冕(LaK)等；火石玻璃内分冕火石(KF)、轻火石(QF)、钡火石(BaF)、火石(F)、重钡火石(ZBaF)、重火石(ZF)、镧火石(LaF)、重镧火石(ZLaF)、钛火石(TiF)以及特种火石(TF)等，每一种玻璃内还有几种到十几、二十种玻璃. 图 4－30 为我国生产的光学玻璃的 $n-\nu$ 图，图

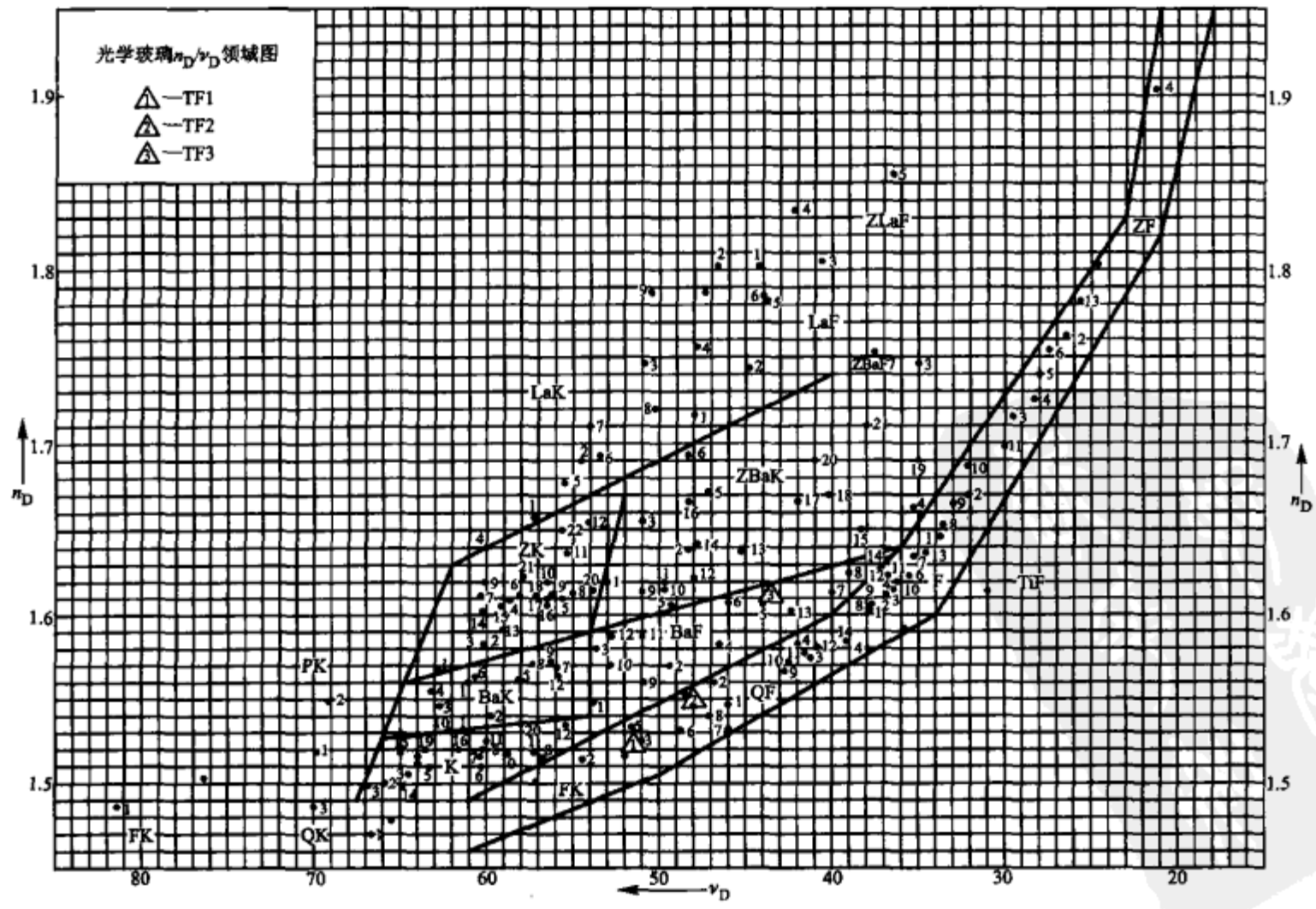


图 4－30

中一个点代表一种光学玻璃.

习　题

1. 有两个薄的正透镜 L_1 和 L_2，焦距分别为 9 cm 和 3 cm，孔径分别为 6 cm 和 4 cm，相间 5 cm；在两透镜之间离 L_2 为 2 cm 处放一个直径为 2 cm 的圆孔光阑. 试对 L_1 前 12 cm 处的轴上物点，求有效光阑、入瞳和出瞳的位置和大小.

2. 试用作图法求图 4－31 所示光学系统的有效光阑、入射光瞳和出射光瞳的位置和大小. 假定物点在 S 点.

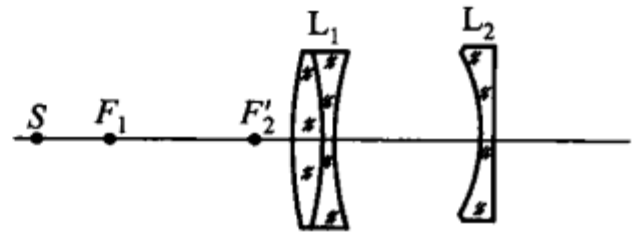


图 4－31

3. 一个焦距为 +50 mm 的薄透镜，孔径为 40 mm，在它左方 30 mm 处放一个直径为 20 mm 的圆孔光阑，如果在透镜左方 200 mm 处有一发光点，问何者为有效光阑？出射光瞳在何处？

4. 孔径为 5 cm、焦距分别为 +10 cm 和 +6 cm 的两个薄透镜，相距 4 cm，以一直径为 2 cm 的圆孔光阑放在透镜的中间. 如果一个高为 4 cm 的物放在第一个透镜左方 10 cm 处，求(1)入射光瞳的位置和大小；(2)出射光瞳的大小和位置；(3)像的位置并绘出自物的顶端发出的主光线的路径.

5. 拟制一个使平行光会聚的薄单透镜，要求有最小的球差和 100 mm 的焦距. 问当采用 $n=1.7$ 的玻璃时透镜两面的曲率半径应如何？

6. 拟制一个使波长为 10.6 μm 的 CO_2 激光束会聚的单透镜，要求有最小球差和焦距为 100 mm，问当采用锗 $n=4.0$ 为透镜材料时两面的曲率半径应如何？

7. 在图 4－15(c)所示的光学系统中，问(1)共轭点 S 和 S''的垂轴放大率为多少？(2)还有什么像差？应如何校正？

8. 拟用冕玻璃 K9($n_D=1.5163$，$n_F=1.5220$，$n_C=1.5139$)和火石玻璃 F4($n_D=1.6199$，$n_F=1.6321$，$n_C=1.6150$)来做消色差胶合透镜，焦距 100 mm，若已确定其中负透镜的非胶合面为平面，试求其余各面的曲率半径.

9. 拟用重冕玻璃 ZK4($n_D=1.6087$，$n_F=1.61601$，$n_C=1.60567$)和钡火石玻璃 BaF8($n_D=1.6259$，$n_F=1.6373$，$n_C=1.6213$)做焦距等于 −100 mm 的负胶合透镜，若其中 ZK4 玻璃透镜有一个平面，试求其余各面的曲率半径.

10. 有一惠更斯目镜(图 4－28)，两片的焦距之比 $f_1':f_2'=2:1$，为消除系统的放大率色差，假定两片所用的玻璃的折射率均为 1.6，目镜的焦距为 50 mm，试求每片的曲率半径及目镜的主点和焦点的位置并绘图表示之.

11. 一个惠更斯目镜，焦距 50 mm，在校正放大率色差的条件下，采用 $f_1':f_2'=2.5:1$，$n=1.5$. 求两透镜的曲率半径及目镜的主点和焦点的位置.

第五章

光度学基础

§5-1 光度学的定义和基本概念

在讨论光度学之前，我们有必要对一般用语中的“光”字加以说明. 我们常说的 X 光、紫外光、可见光和红外光等，这些“光”并不是都能用眼睛看得见的. X 光、紫外光和红外光，虽然它们的许多性质完全可用与可见光相同的光学原理来描述，但是，它们毕竟是看不见的，为测得它们能量的多少，需要用各种不同的检测器，而不是用眼睛. 所以，当我们研究关于光的能量的计量问题时，不得不把这些眼睛看不见的光同眼睛能看见的光区别开来. 光度学(photometry)是对可见光的能量的计量的研究，而把对 X 光、紫外光、红外光[①]以及其他电磁辐射的能量的计量的研究称为辐射量度学(radiometry). 光度学是辐射量度学的一部分或特例，光度学中的光是指可见光. 这一章我们侧重于光度学，而对于辐射量度学，留待后面的第十四章去讨论. 但是，在下面我们会看到，光度学和辐射量度学两者在研究方法上和概念上基本相同，光度学中的量和辐射量度学中的量是一一对应的.

应该指出，光度学并不是几何光学的一部分，只是因为在许多实际情况下，几何光学的模型可以作为研究光度学的基础，所以，在这里扼要地对光度学进行讨论，可以认为是合适的.

在光度学中，我们把光看做是沿光线进行的能量流，并且遵守能量守恒定律，即光束的任一截面在单位时间内所通过的能量为一常数.

1. 辐射通量

设 S 为光源表面(图 5-1)，也可设想它是某一实际光源表面的实像或虚像，或者，是一个自身不发光的被照明的固体表面. 自此光源表面 S 向所有方向

---

① 全国自然科学名词审定委员会公布的《物理学名词》(1996)把它们分别称为 X 射线、紫外线、红外线.

辐射出各种波长的光. 此光源表面的一个元面积 dS 的辐射本领，可用它的辐射功率——在单位时间内通过元面积 dS 的所有波长的光的能量的多少来表示，我们称此功率为该元面积 dS 的辐射通量(radiant flux)，以 Φ 表示，单位为 W(瓦特).

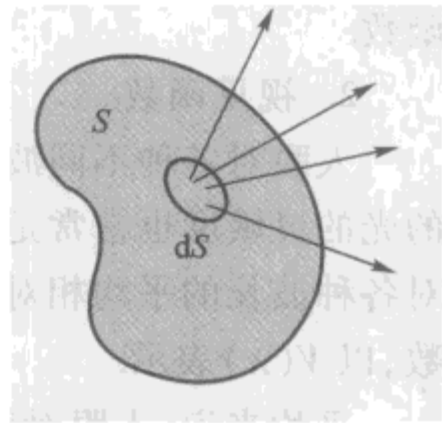


图 5－1

对于任一实际光源元面积的辐射通量，不同波长的光在其中所占的比重不同. 为表示光源元面积对于不同波长的光的相对辐射通量，引入了所谓能量的波长分布函数(或称能量的光谱分布函数)e_λ，它在数量上等于在波长 λ 处，波长间隔 $\Delta\lambda$ 为 1 单位的范围内的光，在单位时间内通过光源元面积 dS 的光的能量. e_λ 是波长 λ 的函数，对于某些灼热的固体表面，e_λ 与 λ 可有如图 5－2 曲线所示的关系，这种关系曲线常用来表征光源的特性.

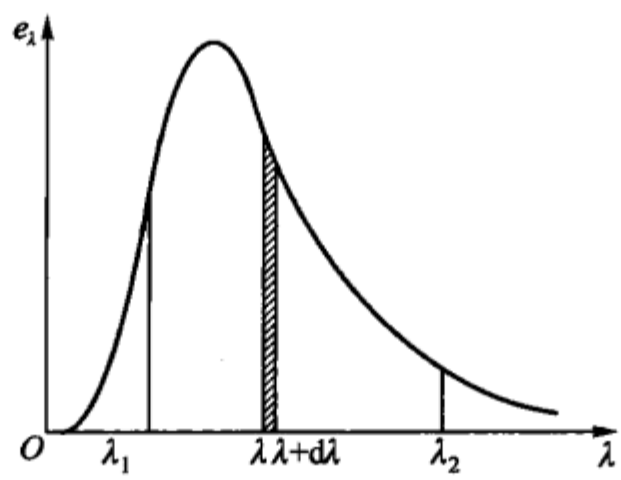


图 5－2

自光源表面的元面积 dS 辐射出的、波长在 λ 到 $\lambda+d\lambda$ 间隔内的光的辐射通量为

$$d\Phi_{\lambda,\lambda+d\lambda} = e_\lambda d\lambda,$$

所以，在由波长 λ_1 到另一波长 λ_2 的范围内，元面积 dS 的辐射通量为

$$\Phi_{\lambda_1,\lambda_2} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e_\lambda d\lambda. \tag{5－1}$$

于是，对于光源元面积 dS 的所有各波长光的总的辐射通量 Φ 为

$$\Phi = \int_0^\infty e_\lambda d\lambda. \tag{5－2}$$

辐射通量 Φ 只表示光源元面积在单位时间内传送出的客观能量的多少，但却没有反映出这些能量所能引起的人们的主观感觉——视觉的强度. 实际上，不同波长光的数量不相等的辐射通量可能引起相等的视觉强度，而相等的辐射通量的不同波长的光，却不能引起相等的视觉强度，因为人的眼睛对不同波长的光有不同的感光灵敏度.

为了研究客观的辐射通量与其在人眼所引起的主观感觉的强度之间的关

系,首先必须了解眼睛对各种波长光的灵敏度. 为此,我们来研究人眼的视见函数.

2. 视见函数

人眼对各种不同波长的光有不同的灵敏度,并且不同人的眼睛,对各种波长的光的灵敏度也常常是有差别的;所以我们要根据对许多正常人眼的研究,求出对各种波长的平均相对灵敏度,我们称表征此平均相对灵敏度的函数为视见函数,以 $V(\lambda)$ 表示.

平均来说:人眼对黄绿色光最灵敏;对红光和紫光较不灵敏;而对红外光和紫外光,则无视觉的反应. 对此,我们说人眼对黄绿色光的视见函数 $V(\lambda)$ 值大;对红光和紫光的视见函数 $V(\lambda)$ 值小;而对红外光和紫外光的视见函数 $V(\lambda)$ 值为零. 或者说,为产生相等强度的视觉,对具有较大视见函数 $V(\lambda)$ 值的光,需要的辐射通量较小;而对其具有较小视见函数 $V(\lambda)$ 值的光则需要较大的辐射通量. 例如,为使波长 555 nm 的黄绿光与波长 700 nm 的红光产生同等强度的视觉,则所需该黄绿光的辐射通量约为所需该红光的辐射通量的 1/250. 也就是,为产生同等强度的视觉,视见函数 $V(\lambda)$ 与所需的辐射通量 $\mathrm{d}\Phi_\lambda$ 成反比.

由于视见函数仅表示人眼对各种波长光的相对灵敏度,所以可借助于比较为产生同等强度的视觉所需各波长光的辐射通量来建立视见函数. 然而,对于人眼,实际上很难确定不同颜色的光所产生的视觉强度是否相等. 例如,很难确定由红光所产生的某一视觉强度是否等于由蓝光所产生的另一视觉强度. 为克服这一困难,可采用逐阶比较的方法:依次地确定出为引起同等强度的视觉所需的两相近颜色光的辐射通量的比值.

所谓逐阶比较法,是用颜色差不多相同的两种不同组分的光,各照明视场的一部分,例如,分别射在圆视场的左半圆和右半圆,这样可以相当准确地确定出两半圆的明亮程度是否相等. 因为当两部分的明亮程度相等时,两者间的分界线将从视场中消失. 设第一光束是由邻近于波长 λ_1 的狭窄间隔 $\mathrm{d}\lambda$ 内的光组成的;第二光束是邻近于波长 λ_2 的狭窄间隔 $\mathrm{d}\lambda$ 内的光组成的;并且 λ_1 与 λ_2 之差不大. 两光束的辐射通量分别为 $\mathrm{d}\Phi_{\lambda_1}$ 和 $\mathrm{d}\Phi_{\lambda_2}$. 由于视见函数 $V(\lambda)$ 随波长而变,所以,为产生同等强度的视觉,按前述的 $V(\lambda)$ 与 $\mathrm{d}\Phi_\lambda$ 的反比关系,得

$$\frac{V(\lambda_1)}{V(\lambda_2)} = \frac{\mathrm{d}\Phi_{\lambda_2}}{\mathrm{d}\Phi_{\lambda_1}}. \tag{5-3}$$

这样,通过测量辐射通量的比值,按上式即可求得人眼对颜色相近的两光的视见函数的比值. 当顺次地从一种颜色的光转到相近的另一颜色的光,并且及于整个可见光范围的所有各种颜色的光时,根据所得一系列的相应辐射通量的比值,并规定对人眼最灵敏的光的视见函数 $V(\lambda)$ 值为 1 时,就能得出人眼的视见函数 $V(\lambda)$,其数值如表 5-1 所示.

表 5－1　平均眼的视见函数值表

λ/nm	$V(\lambda)$	λ/nm	$V(\lambda)$	λ/nm	$V(\lambda)$
400	0.0004	530	0.862	650	0.107
410	0.0012	540	0.954	660	0.061
420	0.0040	550	0.995	670	0.032
430	0.0116	555	1.000	680	0.017
440	0.023	560	0.995	690	0.0082
450	0.038	570	0.952	700	0.0041
460	0.060	580	0.870	710	0.0021
470	0.091	590	0.750	720	0.00105
480	0.139	600	0.631	730	0.00055
490	0.208	610	0.503	740	0.00025
500	0.323	620	0.381	750	0.00012
510	0.503	630	0.265	760	0.00006
520	0.710	640	0.175		

图 5－3 中实线即为按表 5－1 所列的数值画出的、在光照充分条件下得到的人眼的视见函数曲线，称为亮光视见函数曲线（photopic visibility curve）；虚线为在光照较弱条件下得到的视见函数曲线，称微光视见函数曲线（scotopic visibility curve）. 微光视见函数曲线的峰值所对应的波长，较亮光视见函数曲线峰值所对应的波长短约 50 nm，即曲线的峰值向短波端移动了约 50 nm 的波长间隔. 产生这种现象的基本原因，在于人眼网膜上有两种感光元，其一呈圆锥形，称圆锥视神经细胞；另一呈圆柱状，称圆柱视神经细胞（详见 §6－2）. 前者与亮光条件下的视觉相联系；后者与微光条件下的视觉相联系. 由图 5－3 可以看出，人眼对于波长短于约 400 nm 的紫外线和波长长于（约）760 nm 的红外线，其视见函数值均为零.

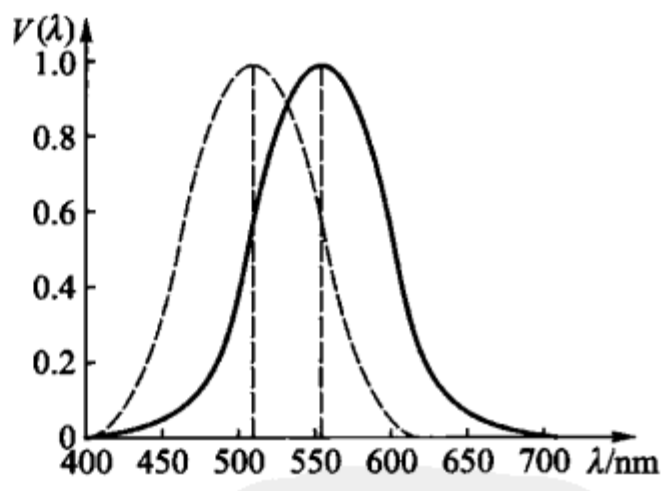


图 5－3

眼以外的感光器件（光电池、热电偶、光电倍增管、感光乳剂等）也都有与人眼视见函数曲线相应的所谓光谱响应曲线（或光谱灵敏度曲线）. 例如，做得近似黑体的热电偶，在较大的光谱范围内有相同的灵敏度. 这些曲线表示了感光器件对各种波长光的相对感光灵敏度，是器件的一个很重要的性质.

3. 光通量

研究了视见函数 $V(\lambda)$ 之后，现在可引入一个新的物理量，以表示光源表面的客观的辐射通量对人眼所引起的视觉强度，这个量称为光通量（luminous flux），以 Φ_v 表示，它等于辐射通量与视见函数的乘积. 对邻近于某一波长 λ、波长间隔 $d\lambda$ 内的单色光，其光通量为

$$d\Phi_v = V(\lambda)d\Phi_\lambda = V(\lambda)e_\lambda d\lambda; \tag{5-4}$$

对光源表面元面积的总辐射通量所产生的总光通量为

$$\Phi_v = \int_0^\infty V(\lambda)e_\lambda d\lambda. \tag{5-5}$$

这样，对于任一元面光源，只要知道了它的能量的波长分布函数 e_λ 和视见函数，即可由上式积分结果得出该元面积光源的总光通量，从而可判断由该光源所引起的视觉的强弱程度.

§5-2　发光强度　光出射度和光照度

首先，我们来考虑向各方向辐射光的点光源的情况. 若它在某一方向上元立体角 $d\Omega$ 内传送出的光通量为 $d\Phi_v$，则后者对前者的比值

$$I = \frac{d\Phi_v}{d\Omega}, \tag{5-6}$$

称为该点光源在给定方向上的发光强度（luminous intensity）. 发光强度在数值上等于通过单位立体角的光通量.

若点光源是各向同性的，即其发光强度在所有方向上都相同，则上式中的元立体角 $d\Omega$ 及通过其中的光通量 $d\Phi_v$，可由有限立体角 Ω 及通过其中的光通量 Φ_v 来代替. 于是该光源的发光强度为

$$I = \frac{\Phi_v}{\Omega}.$$

对于各向同性的点光源，由上式得其光通量为

$$\Phi_v = I\Omega. \tag{5-7}$$

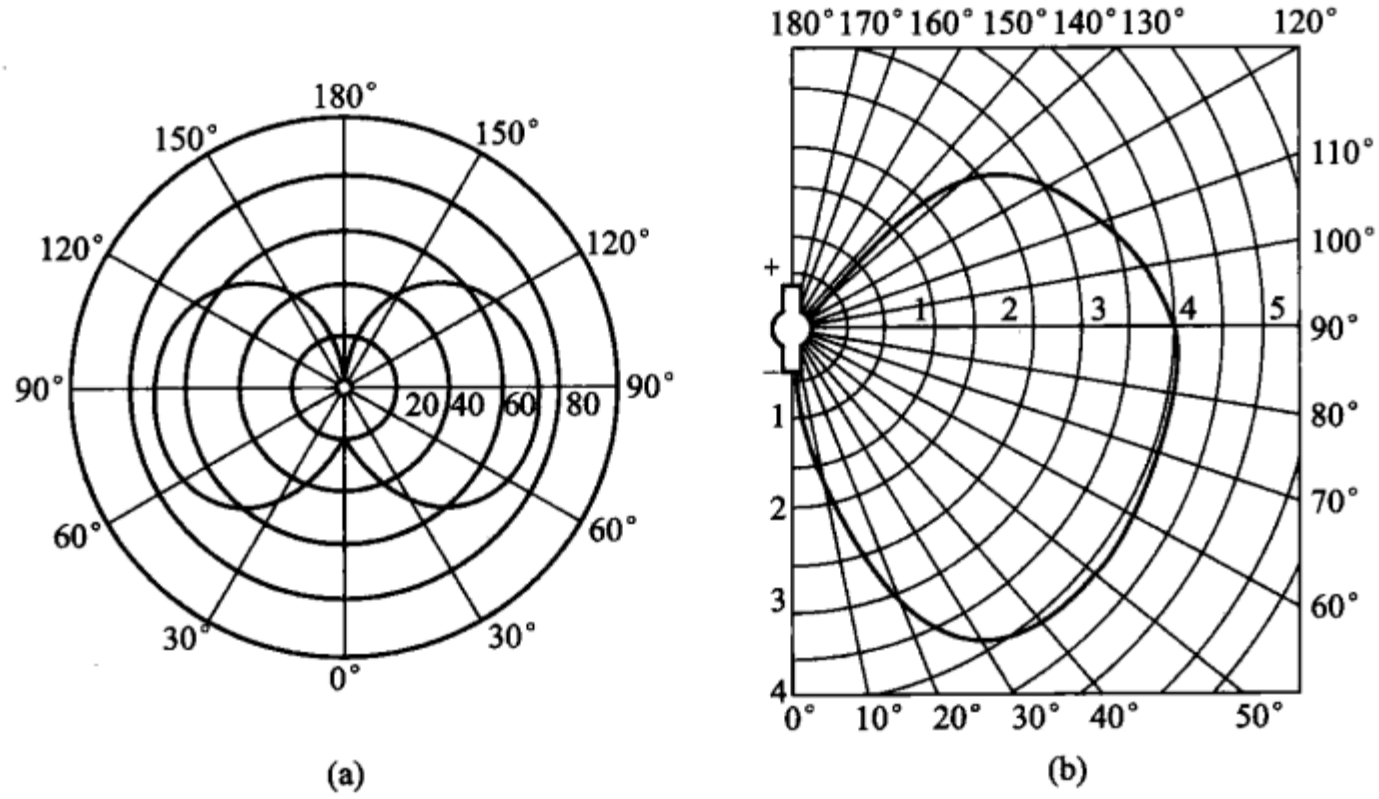
令 $\Omega = 4\pi$，就可得出此光源向所有方向发出的总光通量：

$$\Phi_v = 4\pi I. \tag{5-8}$$

对各向异性的光源，其发光强度随方向而异. 引用球坐标，可得发光强度的球坐标函数：$I = I(i,\varphi)$. 为形象化，对于各向异性的光源，多用曲线表示其发光强度函数. 自原点向各径方向取矢量，矢量的长度与该方向的发光强度成正比，将各径矢量的端点连起来，就得到光源的发光强度随方向改变的所谓发光强度曲线，在工程上，有时称配光曲线. 图 5-4(a) 表示将一般电灯（钨丝白炽灯）作为点光源时，所得的发光强度曲线，其中 0°线代表自灯垂直向下的方向，180°线

代表自灯指向天花板的方向.

图5－4(b)为3 000 W的超高压短弧氙灯的配光曲线,其中I_{max} = 15 000 cd,Φ_v = 137 000 lm,每一格表示1 815 cd. 这种氙灯有发光效率高、寿命长和灯光颜色接近于太阳光的特点,现已有效地应用于各种放映机中.



(a)　　(b)

图5－4

其次,我们来研究有限大小的光源——面光源的情况. 在光源表面上有一面积元dS(图5－5),它向各方向($\Omega = 2\pi$)辐射出光通量,若此面积元dS向各方向辐射出的总光通量为dΦ_v,则后者与前者的比值为

$$M = \frac{d\Phi_v}{dS}, \tag{5－9}$$

称M为该面积元光源的光出射度(以前称为面发光度). 光出射度在数值上等于通过单位面积所传送的光通量.

这里所研究的面光源,如前曾指出过的,不限于灼热固体的表面和实在的光源表面,也可以是这些自身发光的光源的像或自身不发光而受照后成为光源的表面;对于后一种,其光出射度与该面的被照明的程度有关. 为此,我们引入一个表征受照面的明亮程度的量,称为光照度(illuminance)E. 这就是投射在受照面上的光通量dΦ_v与该面积dS的比值,即

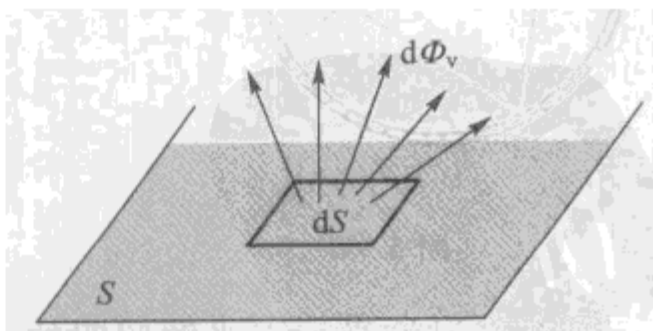


图5－5

$$E = \frac{d\Phi_v}{dS}. \tag{5－10}$$

光照度在数值上等于投射在单位面积上的光通量.

光出射度 M 与光照度 E 有相同的表达式和单位. 所不同者在于:前者是由面积元 dS 传送出的光通量 $d\Phi_v$ 与面积元 dS 的比值;而后者则为投射到面积元 dS 上的光通量 $d\Phi_v$ 与面积元 dS 的比值.

对于受照而成为面光源的表面来说,显然,其光出射度必正比于其光照度,于是有

$$M = kE, \tag{5-11}$$

其中 k 为一个小于 1 的系数,当表面光滑时,称反射系数,当表面粗糙时,称散射系数,它与表面的特性有关.

大多数物体对不同波长有不同的 k 值. 当以含有各种可见光的所谓"白光"(如太阳光)照射这类物体的表面时,由于它们的 k 值随波长而异,所有由该表面反射或散射出的光,其组分将不同于原投射的白光,从而引起一定颜色的感觉. 若某物体的这个系数 k 对于在可见光范围内的所有波长的光均为接近于 1 的某一常数,则称该物体为白体;若系数 k 对于所有波长的光均为甚小于 1 的某一常数,则称该物体为灰体;而对所有波长的光,k 值恒为零的物体则称为绝对黑体. 洁净的雪面或氧化镁的表面,其 k 值对所有波长的光都接近于 0.9 或更大,可视为白体;粗糙的黑色表面,如纯净的煤烟,其 k 值对所有波长光都为 0.01,可视为黑体;在封闭的容器壁上开一个很小的孔的空腔(如图 5-6),即为绝对黑体. 窗口很小的大屋子,对于阳光来说,亦近似于绝对黑体.

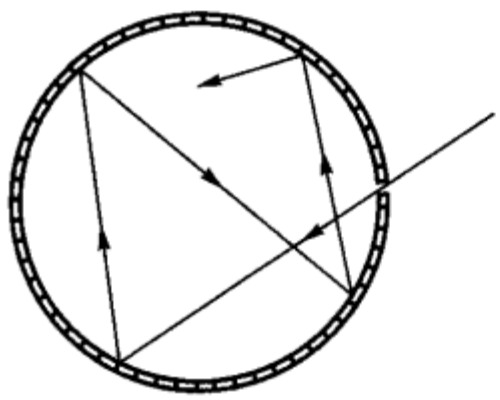


图 5-6

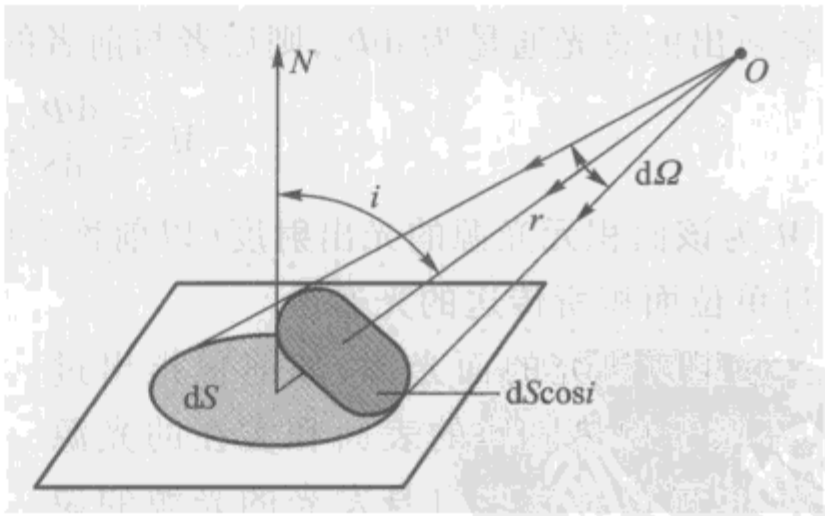


图 5-7

现在来讨论受一点光源照明的面积元的光照度. 假设点光源 O 至面积元 dS 的距离为 r,并且点光源发出的光束元的光轴与面积元的法线 N 之间夹角为 i(图 5-7). 面积元 dS 对发光点 O 所张的立体角为

$$d\Omega = \frac{dS\cos i}{r^2}.$$

在此立体角元内由点光源传送出的光通量为

$$d\Phi_v = I\frac{dS\cos i}{r^2},$$

而此光通量全部投射在面积元 dS 上，所以面积元上的光照度为

$$E = \frac{d\Phi_v}{dS} = \frac{I}{r^2}\cos i. \tag{5-12}$$

可见，点光源在面积元 dS 上所产生的光照度与光源的发光强度成正比；与距离的平方成反比；并且与面积元相对于光束的倾角有关.

当点光源在面积元的法线上时，上式变为

$$E = \frac{d\Phi_v}{dS} = \frac{I}{r^2}, \tag{5-12a}$$

此即通常所说的光照度的平方反比定律.

若某一平面上的两相邻的面积元 dS_1 和 dS_2，例如圆视场的左半圆和右半圆，分别受点光源 O_1 和 O_2 的照明(图 5-8)，按上式，则两面积元的光照度分别为

$$E_1 = \frac{I_1\cos i_1}{r_1^2};$$

$$E_2 = \frac{I_2\cos i_2}{r_2^2}.$$

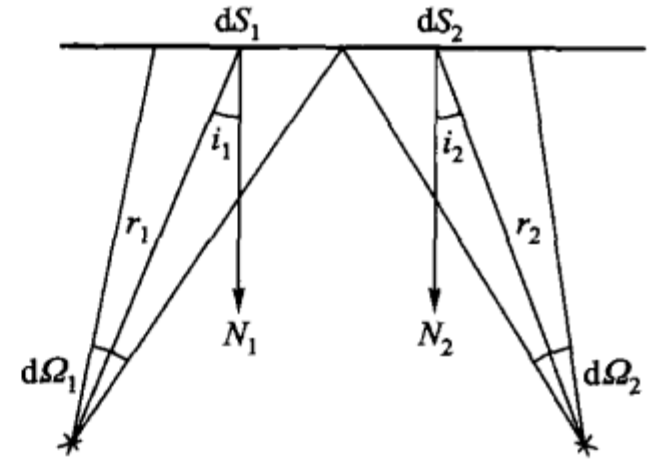


图 5-8

人眼虽不能定量地比较出 E_1 和 E_2 的比值，但却能相当灵敏地确定出光照度 E_1 与光照度 E_2 是否相等. 当由人眼确定两光照度相等时，则有

$$\frac{I_1\cos i_1}{r_1^2} = \frac{I_2\cos i_2}{r_2^2};$$

当两点光源垂直照明两面积元，或者对两面积元有相同的倾角($i_1 = i_2$)时，

$$I_1 = I_2\frac{r_1^2}{r_2^2}. \tag{5-13}$$

于是，当两光源之一的发光强度为已知时，由量出长度 r_1 和 r_2，就能得到另一光源的发光强度. 利用这个原理，人们制成了各种光度计，如陆末-布洛洪(Lummer-Brodhun)光度计，本生油斑光度计，以及浦尔弗里许(Pulfrish)光度计等. 图 5-9(a)即为一个陆末-布洛洪光度计的示意图，其中 T 为一块“白板”，即两表面涂有反射系数近于 1 的材料(如氧化镁)的平板，它使由光源 O_1 和 O_2 照射的光分别漫(反)射到全反射棱镜 P_1 和 P_2 中. 两束光再经由全反射棱镜 P_3 和 P_4 以及透镜 L_e 进入眼睛. 于是，在视场内看到由这两束光形成的交错的图样[图 5-9(b)]；当 T 板两表面的光照度相等时，视场内是一片均匀的照明，看不到交

错的图样. 量出此时的 r_1 和 r_2,即可按(5 - 13)式由一已知发光强度求出另一发光点的发光强度.

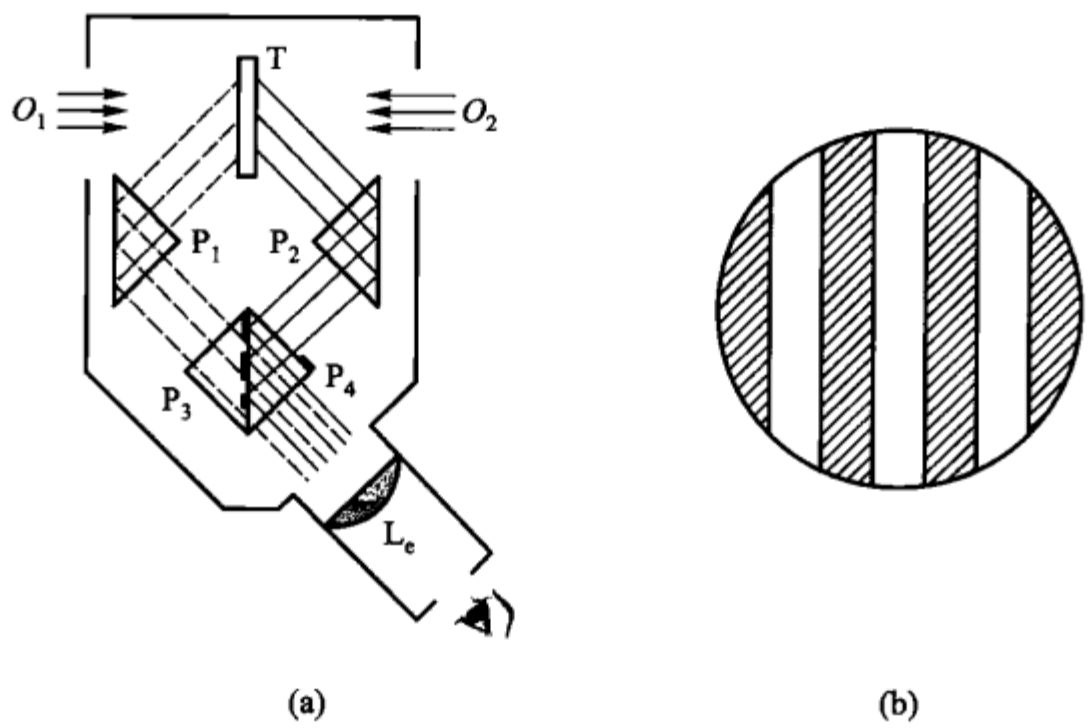


图 5 - 9

除直接用眼睛作检测器的上述光度计之外,现代已普遍采用光电光度计,即用经过滤光片校正过的光电池(让这种光电池的光谱灵敏度曲线与眼睛的视见曲线一致)来代替眼睛,这种光电光度计可以消除目视光度计中由于不同观测者所造成的"人差"并且提高测量的重复性和精密度.

§5 - 3 光 亮 度

由前节所讨论的光出射度,可得到面光源在所有方向(2π 立体角内)辐射出的总光通量. 但在许多情况下,只需要研究从面积元 dS 发出的、在与法线某一角 i 的方向上的立体角元 dΩ 范围内(图 5 - 10)传送出去的光通量. 例如进入所有实际光学系统中的光通量都是这样. 此光通量 dΦ_v 正比于在该方向所张的立体角 dΩ 和面积元光源 dS 在该方向的垂直平面上投影 dS_n(= dScos$i$),即

$$d\Phi_v \propto d\Omega dS\cos i,$$

或写成

$$d\Phi_v = L\cos i dS d\Omega, \qquad (5 - 14)$$

其中 L 为与面积元特性有关的量,称为面积元在该方向的光亮度(luminance),它在数值上等于单位面积的光源表面在法线方向的单位立体角内传送出的光通量. 若光亮度 L 为一常数,与方向无关,则该面积元光源在立体角元 dΩ 内传送

出的光通量，随方向角 i 的余弦而变，即 $d\Phi_v$ 正比于 $\cos i$，这样的面光源称为余弦辐射体.

余弦辐射体从各方向来看都是一样亮. 而一般物体的光亮度多少都和方向有关. 具有粗糙表面的自身发射体和被照明的散射体接近于余弦辐射体. 只有绝对黑体是理想的余弦辐射体. 太阳看来像个圆盘而不像球，这说明它近似于余弦辐射体.

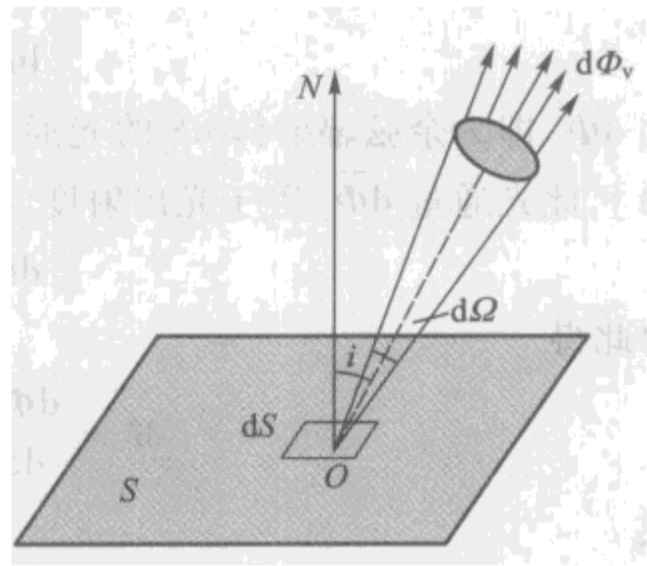


图 5-10

面积元光源 dS 在有限立体角 Ω 内送出的光通量应为

$$d\Phi_v = dS\int_\Omega L\cos i d\Omega. \tag{5-15}$$

若面积元光源 dS 为余弦辐射体，则它在有限立体角 Ω 内传送出的光通量为

$$d\overline{\Phi}_v = LdS\int_\Omega \cos i d\Omega. \tag{5-16}$$

计算出该面积元在 2π 立体角内辐射的光通量，我们可得余弦辐射体的光出射度和光亮度的关系.

在极坐标（图 5-11）内立体角元 $d\Omega$ 可写成

$$d\Omega = \frac{r di \cdot r\sin i d\varphi}{r^2},$$

即

$$d\Omega = \sin i di d\varphi.$$

将此 $d\Omega$ 值代入式（5-16），并在 $\Omega = 2\pi$ 的立体角内积分，则得 dS 的光通量：

$$d\overline{\Phi}_v = LdS\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos i\sin i di d\varphi$$

$$= 2\pi LdS\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin i\cos i di,$$

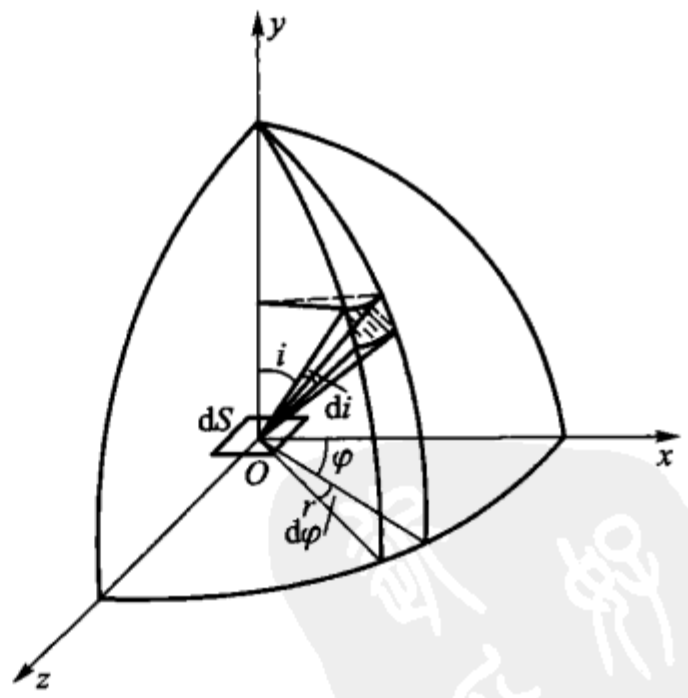


图 5-11

因为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin i\cos i di = \frac{1}{2},$$

所以上式最后变为

$$\mathrm{d}\overline{\Phi}_{\mathrm{v}} = \pi L \mathrm{d}S. \tag{5-17}$$

此 $\mathrm{d}\overline{\Phi}_{\mathrm{v}}$ 即为余弦辐射体 $\mathrm{d}S$ 的光通量. 按元面积 $\mathrm{d}S$ 的光出射度的定义[式(5-9)],此光通量 $\mathrm{d}\overline{\Phi}_{\mathrm{v}}$ 等于光出射度 M 与元面积 $\mathrm{d}S$ 的乘积:

$$\mathrm{d}\overline{\Phi}_{\mathrm{v}} = M\mathrm{d}S,$$

由此得

$$M = \frac{\mathrm{d}\overline{\Phi}_{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}S} = \frac{\pi L \mathrm{d}S}{\mathrm{d}S} = \pi L,$$

或

$$L = \frac{M}{\pi}. \tag{5-18}$$

此式表明,在数值上余弦辐射体的光亮度等于其光出射度的 π 分之一. 也就是说,单位面积的余弦辐射体在法线方向的单位立体角内传送出的光通量为该辐射体辐射出的光通量的 π 分之一.

若余弦辐射体本身不发光而是被照明的面积元,则由式(5-11)和(5-18),得其光亮度与光照度的关系:

$$L = \frac{k}{\pi}E, \tag{5-19}$$

此式表明,靠其他光源照明的余弦辐射体,其光亮度不但正比于该面积元上的光照度,而且也正比于表征该面积元表面特性的系数 k.

上列两式(5-18)和(5-19),建立了光亮度与光出射度、光亮度与光照度的变换关系. 此外,我们还可定出光亮度与发光强度之间的关系. 为此,将式(5-14)写成

$$L = \frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}S\cos i\,\mathrm{d}\Omega}, \tag{5-20}$$

按发光强度 I 的定义[(5-6)式],

$$I = \frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}\Omega},$$

所以,

$$L = \frac{I}{\mathrm{d}S\cos i}. \tag{5-21}$$

此式表示:面积元 $\mathrm{d}S$ 的光亮度在数值上等于单位面积在其法线方向上的发光强度.

* §5-4 光度学的计量单位

光度学的计量单位与其他计量单位一样,可分基本单位和导出单位两种. 光

度学中,一般采用发光强度的单位作为基本单位,因为它较光度学的其他量容易具有较高的客观性和准确性. 有了发光强度的单位之后,即可按其与光亮度的关系式(5-22),光亮度同光出射度和光照度的关系式(5-19)和(5-20)来确定关于光亮度、光出射度和光照度的单位——光度学的导出单位.

作为光度学基本单位的发光强度单位,它不像其他计量中的基本单位那样在长期中改变很少. 这是因为初定时在科学上不够严密,因而随科学技术的进展在不同年代采用着不同的规定.

最初,以一定规格的蜡烛,在规定的条件下点燃,取其于某一定方向的发光强度为 1 发光强度单位: 将鲸鱼油制成的直径 7/8 英寸和重 1/6 磅的蜡烛点着,使其每小时消耗 120 格令(1 格令 = 1/7000 磅),由此所产生的烛焰,在某一方向的发光强度定为 1 单位,称为 1 烛光,这样的蜡烛称为标准烛.

后来,标准烛被一定构造的标准灯所代替,例如直到今天有的国家还在使用的亥夫纳(Herfner)灯便是一例. 该灯用纯乙酸戊基醚为燃料,并规定在点着时灯焰的高度为 40 mm.

再后,就用电灯代替带芯的标准灯,对于所用的电灯严格地定了它的大小、构造、材料以及使用条件等,并且还采用其在各方向的发光强度的平均值作为发光强度的单位. 由于电灯的特性随时间有所变化,所以对于这种标准需要不断地更新. 而在技术上很难保证各标准灯的完全相同. 所以,实际上,是采用标准电灯群和借助于比较的方法,来保持标准单位的常定性,用这种方法所确定出的发光强度单位,称国际烛光.

所有上述诸标准具(灯或烛)在一般实验室中都不易复制. 为克服这一缺点并进一步提高标准具的客观性和准确度,自 1940 年起开始采用一种绝对黑体作为标准光源. 1967 年在法国巴黎的第 13 次国际计量大会上,规定在铂的凝固点(约 2042 K 或 1769℃)和气压为 101 325 Pa 的绝对黑体,在其面积等于 $\frac{1}{6}\times10^{-5}\ \mathrm{m}^2$,沿法线方向发出的光的发光强度为 1 发光强度单位,称为 1 坎德拉(符号为 cd). 此坎德拉与由标准电灯所确定的国际烛光,在数值上不完全相等,60 cd 等于 58.8 国际烛光. 而亥夫纳灯的 1 烛光等于 0.919 cd 或 0.885 国际烛光.

根据发光强度的单位,并按其与光通量的关系,

$$\mathrm{d}\Phi_v = I\mathrm{d}\Omega,$$

可得光通量的单位. 某一方向的发光强度为 1 cd 的点光源,其在该方向的单位立体角内传送出的光通量,定为光通量的单位,称为 1 流明(符号为 lm). 若某点光源是各向同性的,并且发光强度为 1 cd,则由它发出的总光流,由式(5-8)得

$$\Phi_v = 4\pi I = 4\pi\mathrm{lm} \approx 12.566\ \mathrm{lm}. \tag{5-22}$$

1 lm 的光通量均匀地分布在 1 cm^2 的平面上所产生的光照度作为 1 照度单位，称 1 辐透（符号为 ph），1ph = 1 lm/cm^2.

1 lm 的光通量均匀地分布在 1 m^2 的平面上所产生的光照度称 1 勒克斯（符号为 lx），1 lx = 1 lm/m^2. 显然，ph 和 lx 之间的单位换算关系为

$$1\ \text{ph} = 10^4\ \text{lx}. \tag{5-23}$$

按关系式(5-21)，1 cm^2 的面光源，其在法线方向的发光强度若为 1 cd，则称该光源在该方向的亮度为 1 熙提（符号为 sb），1 sb = 1 cd/cm^2.

应该指出，在实际工程技术（照明工程、电视、电影以及发光材料工程）中，光度学量的单位是很不统一的，这给一般使用者带来很多不方便. 为了统一，1967 年专门召开过一个光度计量单位的国际会议，会议规定，以 lm、cd、lx、cd/m^2 分别为光通量、发光强度、光照度和光亮度的单位. 为便于读者把在一般书中可能还遇到的英制单位换算为国际规定的单位，本书在附录中给出了光亮度的单位换算表和光照度的单位换算表.

为了对光亮度和光照度有些具体数值上的概念，表 5-2(a)给出了一些实际光源的光亮度的近似值；表 5-2(b)列举了一些能常遇到的典型情况的光照度的近似值.

表 5-2(a)　一些实际光源的光亮度近似值

光源	光亮度/($cd \cdot m^{-2}$)
在地球大气层外所看到的太阳	1 900 000 000
在地面上所看到的太阳	1 500 000 000
普通碳弧的喷火口	150 000 000
超高压球状水银灯	1 200 000 000
钨丝白炽灯	5 000 000 ~ 15 000 000
乙炔焰	80 000
煤油灯焰	15 000
距太阳 75°的明朗的天空	1 500
阳光照明的洁净雪面	30 000
地球上所看到的满月的表面	2 500
无月的夜空	10^{-4}
与人眼的最小灵敏域对应的物体	10^{-6}

最后，让我们来讨论光度学的计量单位与客观能量的单位之间的当量关系.

光通量是单位一的视见函数与具有功率单位的辐射通量的乘积，所以它有与功率相同的单位. 即 lm 可换算成以 W 为单位的功率值. 由于不同波长光的视见函数不同，所以 1lm 光所相当的功率值亦随波长而异. 对于视见函数值为 1 的

黄绿色光(波长约为 555 nm),685 lm 相当于 1 W;或者 1 lm 相当于 0.00146 W. 而对于所有其他波长的光,

$$1\ \mathrm{W} = 685V(\lambda)\,\mathrm{lm}. \tag{5-24}$$

表 5-2(b) 一些实际情况下的光照度值

环境	光照度/lx
无月夜天光在地面上所产生的照度	3×10^{-4}
接近天顶的满月在地面所产生的照度	0.2
办公室工作所必须的照度	20 ~ 100
晴朗的夏日在采光良好的室内的照度	100 ~ 500
夏天太阳不直接照到的露天地面的照度	1 000 ~ 10 000

式中 $V(\lambda)$ 为人眼对该波长光的视见函数. 我们称 0.00146 W/lm 为光的最小力学当量. 因为对任何其他波长的光,1 lm 光通量所相当的功率值都比 0.00146 W 大.

现在我们再来讨论 685 lm/W 的这个数值如何得来的. 先假定这个值为未知,并且以 K_m 表示它,某一光源元面积 dS 对波长为 λ 的光的辐射功率为 $d\Phi_\lambda$ (W),按式(5-4),此 $d\Phi_\lambda$ 所相当的光通量应为

$$d\Phi_v = K_m V(\lambda)\,d\Phi_\lambda(\mathrm{lm}). \tag{5-25}$$

对于以铂熔点的绝对黑体为标准光源的辐射元面积,辐射通量 $d\Phi_\lambda$ 可由普朗克黑体辐射公式(见本书第十六章)写出:

$$d\Phi_\lambda = \frac{c_1\lambda^{-5}}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}}-1}d\lambda\cdot dS,$$

其中 c_1 和 c_2 为常数,T 代表绝对黑体的热力学温度.

标准光源的单位面积所传送出的总光通量应为

$$\Phi_v = \int d\Phi_v = K_m\int_{\lambda=0}^{\infty} V(\lambda)\,d\Phi_\lambda.$$

对于铂熔点 $T=2\,042$ K,积分的数值为 2 750 国际单位(由于视见函数不能写成解析式,所以这个积分式需借助图解方法),于是有

$$\Phi_v = 2\,750K_m(\mathrm{lm}). \tag{5-26}$$

按发光强度标准单位的规定,这样的面光源,在其法线方向发光强度为 60×10^4 cd. 而事实上,此标准光源为余弦辐射体,所以从单位面积上传送出的光通量为

$$\Phi_v = M = \pi L,$$

其中 L 为该元面的光亮度. 按式(5-21),光亮度 L 在数值上等于单位面积在其法线方向的发光强度,因为 1 lm 等于发光强度为 1 cd 的光源在给定方向单位立

体角内的光通量，于是所求的单位面积的光通量为

$$\Phi_v = 60\pi \times 10^4 \text{ lm.} \tag{5-27}$$

式(5-26)和(5-27)所表示的为同一光通量，因而有

$$2\,750K_m = 60\pi \times 10^4$$

$$K_m = \frac{60\pi \times 10^4}{2\,750}\text{lm/W} = 685 \text{ lm/W}$$

实验上所得的 K_m 值与 685 lm/W 也很相符.

[**例题**]　一支氦氖激光器，发射出波长为 632.8 nm 的激光束 10 mW，发散角为 1 mrad，试求此激光束的光通量及其发光强度.

又假定此氦氖激光器输出光束的截面（即放电毛细管的截面）直径为 1 mm. 试求其光亮度并与地面上所看到的太阳的光亮度作一比较.

以这样的激光束射在距激光器为 10 m 远的白色屏幕上，问在屏幕上的光照度如何？

[**解**]　(1) 由表 5-1 得 632.8 nm 光的视见函数 $V(\lambda)=0.24$，利用式(5-24)得 1W632.8 nm 光相当于 1 W × 685 lm/W × 0.24 = 164.4 lm，所以 10 mW 等于 1.644 lm.

根据发光强度 $I=\frac{d\Phi_v}{d\Omega}$ 的定义，已知 $d\Phi_v = 1.644$ lm，立体角 $d\Omega = \pi\theta^2$，其中 θ 即为以 rad 为单位的激光束的发散角，所以，

$$I = \frac{d\Phi_v}{d\Omega} = \frac{1.644}{\pi(1\times10^{-3})^2}\text{ cd} = 52.3\times10^4\text{ cd.}$$

(2) 当把放电毛细管的截面 dS 作为发光面元考虑时，激光器的亮度，按式(5-21)，应为

$$L = \frac{I}{dS},$$

其中 $dS=\pi(d/2)^2=\pi(1/20)^2\text{ cm}^2$. 代入上式则得

$$L = \frac{I}{dS} = \frac{52.3\times10^4\text{ cd}}{\pi\times\frac{1}{400}\text{ cm}^2} = 6.66\times10^7\text{ cd/cm}^2.$$

由表 5-3(a)，在地面上所看到的太阳的亮度为 $1.5\times10^5\text{ cd/cm}^2$，故该激光器发光面元的亮度为地面上看到的太阳亮度的 444 倍.

(3) 这样的激光束在相距为 10 m 的屏幕上产生的光照度为

$$E = \frac{d\Phi_v}{dS'} = \frac{d\Phi_v}{\pi(r\theta)^2} = \frac{1.644\text{ lm}}{\pi(10\times10^{-3})^2\text{ m}^2} = 5\,230\text{ lm/m}^2.$$

由此可见，这样一个一般的氦氖激光器，在光度学上看，是很特殊的，它的总的功率并不大，然而所产生的光亮度却是太阳光亮度的几百倍. 顺便指出，有些脉冲

激光的光亮度甚至是太阳的百亿倍以上,这正是现代激光器主要特点之一.根据这一特点,中等光亮度的激光可以产生几千以及几万摄氏度的高温,可用于精密焊接、打孔和切割;高光亮度脉冲激光可以产生几百万摄氏度的高温、几百万个大气压和每厘米几千万伏的强电场.

* §5-5 通过光学系统的光通量 像的光亮度和光照度

从实用的观点,对于实际光学系统的成像,不仅要研究它的像差,而且还必须研究通过光学系统的光通量及像的光亮度和光照度等问题.因为通过对这些问题的研究,可以得知一个实际光学系统的效率.分析像差是从成像的"质量"方面来考察实际光学系统;所述的光度学问题是从成像的"效率"方面来考察实际光学系统,在我们有了前一章所述的光瞳概念之后,现在来研究通过光学系统的光通量、像的光亮度和光照度就方便了.

设小面积 ΔS 是垂直于光学系统光轴的一个面光源(图 5-12),$\Delta S'$为其由光学系统所成的像.P_1PP_2 为系统的入射光瞳;$P'_1P'P'_2$为系统的出射光瞳.由光源 ΔS 发出而进入光学系统的光通量,由公式(5-14)得

$$\Delta \Phi_v = L\Delta\Omega\Delta S, \tag{5-28}$$

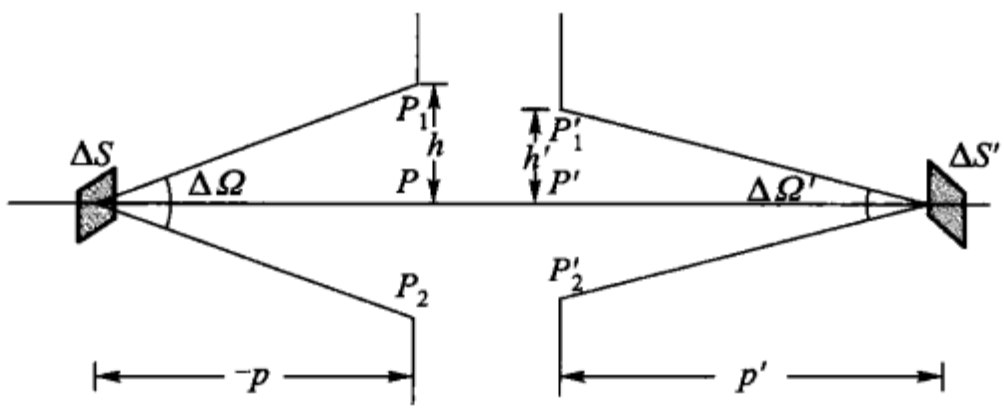


图 5-12

其中 $\Delta\Omega$ 为系统入射光瞳对面光源所张的立体角,L 为该面光源的光亮度.

假定进入光学系统的光通量除被介质吸收、散射和折射表面的反射之外,其他光通量全部都到达像 $\Delta S'$上,于是投射到 $\Delta S'$的光通量应为

$$\Delta \Phi'_v = \rho\Delta\Phi_v, \tag{5-29}$$

其中 ρ 为小于 1 的一个系数,它的数值由实际光学系统的透射能力来确定,故常称 ρ 为光学系统的透射系数.以公式(5-28)的 $\Delta\Phi_v$ 值代入上式,则得

$$\Delta \Phi'_v = \rho L\Delta\Omega\Delta S, \tag{5-30}$$

这就是通过光学系统的光通量,在像空间它包含在出射光瞳对像 $\Delta S'$中心所张的立体角 $\Delta\Omega'$之内.在像的右边光通量 $\Delta\Phi'_v$继续传播,并包含在同一立体角 $\Delta\Omega'$之内.所以像面 $\Delta S'$在某个方向(如光轴)上的光亮度应为

$$L' = \frac{\Delta \Phi'_v}{\Delta S' \cos i' \Delta \Omega'},$$

其中 i' 为像面 $\Delta S'$ 的法线与该方向(如系统光轴)之间的夹角,现在 $i'=0$,所以像在光轴方向上的光亮度为

$$L' = \frac{\Delta \Phi'_v}{\Delta \Omega' \Delta S'} = \rho L \frac{\Delta \Omega}{\Delta \Omega'} \frac{\Delta S}{\Delta S'}. \tag{5-31}$$

立体角 $\Delta\Omega$ 和 $\Delta\Omega'$ 分别为

$$\Delta \Omega = \frac{\pi h^2}{p^2} \quad 和 \quad \Delta \Omega' = \frac{\pi h'^2}{p'^2},$$

其中 h 和 h' 分别为入射光瞳和出射光瞳的半径,p 和 p' 分别为自入射光瞳中心到物面 ΔS 的距离和出射光瞳中心到像面 $\Delta S'$ 的距离. 由于 $\Delta S'$ 与 ΔS 共轭,因而有

$$\frac{\Delta S'}{\Delta S} = \beta^2,$$

其中 β 为所述共轭面上的垂轴放大率. 将此式的 $\Delta S'/\Delta S$ 值及上面的 $\Delta\Omega'$ 和 $\Delta\Omega$ 值代入式(5-31),则得

$$L' = \rho L \frac{p'^2 h^2}{p^2 h'^2} \frac{1}{\beta^2}. \tag{5-32}$$

对于只有一个薄透镜或一个面镜的光学系统,在那里入射光瞳、有效光阑和出射光瞳都是该透镜或该面镜的框边,因而有 $h=h'$,$p=s$ 和 $p'=s'$,于是由上式得

$$L' = \rho L \frac{s'^2}{s^2} \frac{1}{\beta^2}.$$

而按式(3-40)及图 3-16,$\frac{s'}{s} = \frac{n'}{n}\beta$,代入上式,最后得

$$L' = \rho \left(\frac{n'}{n}\right)^2 L, \tag{5-33}$$

其中 n 和 n' 分别为物空间和像空间的折射率. 由此可见,对所述系统,像的光亮度与光学系统的焦距、形状和孔径等无关,而只决定于系统的透射系数,物面的光亮度和物与像所在空间的折射率之比. 如两空间折射率相同,则有

$$L' = \rho L. \tag{5-33a}$$

由于 ρ 永远小于 1,并且对一般光学仪器来说,物与像都处在空气中,所以由它们所生的像的光亮度,都不能大于物的光亮度. 换言之,在给定的情况下,像的光亮度不可能大于物的光亮度,光学系统无助于光亮度的增加.

虽然复杂的光学系统都是由许多个单透镜或一些透镜与一些面镜组成,但是,只要找到系统的入射光瞳和出射光瞳,则仍可得与公式(5-33)和(5-33a)相似的结果. 在这种情况下 L' 当然是指最后的像的光亮度,ρ 指总的透射系数.

现代光学仪器的光学系统,有多至 20~30 个折射面的. 光在这些面上的反射,显著地减少了通过光学系统的光通量(详见 §12-3),ρ 变得很小. 所以利用在折射面上涂光学增透膜的方法来提高系统的透射系数,已被普遍采用. 增透膜的原理在第十二章要较详细地讨论,更深入和专门的问题属于薄膜光学,不在本书所讨论的范围之内.

对于许多实际光学系统的效率的估计,主要的并不在于知道它们的像的光亮度,而是在于知道的像的光照度. 例如一般拍照时照相底板上的黑度就是由板上的光照度大小来决定的. 对于如图 5-12 所表示的一般光学系统,由于投射到像面 $\Delta S'$ 上的光通量为 $\Delta \Phi'_v$,所以像的光照度

$$E = \frac{\Delta \Phi'_v}{\Delta S'} = \rho L \Delta \Omega \frac{\Delta S}{\Delta S'}$$

或

$$E = \rho L \frac{\Delta \Omega}{\beta^2}, \tag{5-34}$$

它表明像的光照度正比于物体的光亮度、实际光学系统的透射系数和成像光束在物空间的立体角,而反比于垂轴放大率的平方.

对于只有一个薄透镜的光学系统,式(5-34)中的立体角与其在像空间相应的立体角 $\Delta \Omega'$ 之间,有这样的关系:

$$\frac{\Delta \Omega}{\Delta \Omega'} = \frac{s'^2}{s^2} = \frac{n'^2}{n^2}\beta^2,$$

即

$$\Delta \Omega = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \beta^2 \Delta \Omega'.$$

将此 $\Delta \Omega$ 值代入式(5-34),则得

$$E = \rho L \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \Delta \Omega'; \tag{5-35}$$

而当 $n = n'$ 时,则有

$$E = \rho L \Delta \Omega' \tag{5-35a}$$

由此得出结论:对于给定亮度的物面,透镜在像面上的照度正比于成像光束在像空间的立体角和透镜的透射系数. 例如用照相物镜给一物体拍照,相对孔径大(在照相机中即光圈数小)的物镜所得的像,光照度较大;若光圈数相同,则物镜透射系数愈大,像的光照度愈大.

上面所得的关于像的光照度的一些结论,严格地说,只适合于被成像的物体是在光轴上的垂轴小面积的情况. 而当物面相当大,以至于成像的像空间视场角 ω' 相当大时,则像面上的光照度并不均匀. 若以 E_0 代表在系统光轴附近的像面的光照度,$E_{\omega'}$ 代表在视场角为 ω' 的像面上的照度,通过计算可以证明二者有下

列关系：

$$E_{\omega'} \propto E_0 \cos^4 \omega'. \tag{5-36}$$

此式表明，像平面上的光照度随视场角 ω' 的余弦的四次方而急速地减弱. 这是大视场光学系统的一个严重缺陷. 例如对于 $\omega' = 60°$ 的光所成的像，其光照度已下降为光轴附近像的光照度的 1/16，这将形成这样的情况：当像面上的视场中央有合适的曝光时，底片的四角上曝光不足，反之，若让四角曝光合适，中央部分就曝光过度了. 不过，一般来说，只要视场边缘处的照度不低于视场中心照度的某一百分数（例如 70%），也就不妨使用，例如电视、电影及一般照相等都是这样.

* §5-6 主观亮度

当人观察物体时，被观察的物成像于眼睛的视网膜上，同时，由成像光束投射在视网膜上的光通量，对分布在成像区域的视网膜上的视神经梢起作用. 这种作用被认为是一种化学作用，由它引起的特殊刺激被观察者所感受，从而产生视觉. 观察者依靠这种感受的强弱，判断被观察物体的亮度，这种由观察者判断出的亮度称为主观亮度.

主观亮度与光度特性的关系，在不同情况下一般是不同的，而和在视网膜上像的大小有关. 所以在下面我们从被观察物体在视网膜上所成的像的大小来讨论主观亮度问题.

首先，当物体在视网膜上所成的像 $\Delta S'$ 有一定的大小，它覆盖住许多视神经元时，主观亮度决定于视网膜上单位面积所得的光通量 $\Delta \Phi'$，即主观亮度正比于成像光束在视网膜上所产生的光照度：

$$E = \rho L \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \Delta \Omega' ,$$

其中 $\Delta \Omega'$ 为眼睛的出射光瞳对视网膜上像面 $\Delta S'$ 的中心所张的立体角. 假定出射光瞳与眼睛第二主平面重合（实际上很接近），并且 d' 为出射光瞳的直径，则立体角 $\Delta \Omega'$ 可由下式算出：

$$\Delta \Omega' = \frac{\pi d'^2}{4 f'^2},$$

其中 f' 为眼睛的第二焦距.

将此 $\Delta \Omega'$ 值代入计算照度的式(5-35)中，得

$$E = \frac{\pi}{4} \rho L \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \left(\frac{d'}{f'}\right)^2. \tag{5-37}$$

可见，在眼睛的“相对孔径 d'/f'”不变的情况下，被观察之物体的主观亮度与客观的物体的光亮度 L 成正比. 而对给定光亮度为 L 的物体，为获得较大的主

观亮度，其唯一办法就是放大眼睛的瞳孔，因为上式中 ρ 和 n' 都是常数，且在给定物体的一定条件下，f' 也是一个不变的数. 还可以看出，在上述情况下（像覆盖住许多视神经元），主观亮度与物体到眼睛的距离以及成像的放大率等无关.

其次，当物体对眼睛所张的视角很小，以至于其在视网膜上的像只遮盖住一个视神经元. 这样的像，对眼睛来说，可视为点像，相应的物可视为发光点. 在这种情况下，主观亮度决定于被遮盖的该视神经元所获得的光通量，即主观亮度正比于自发光点进入眼睛的光通量：

$$\Delta \Phi_v = I \Delta \Omega,$$

其中 $\Delta \Omega$ 为眼睛的入射光瞳对该发光点所张的立体角. 设发光点到眼睛的距离为 r，眼睛入射光瞳的直径为 d，则有

$$\Delta \Omega = \frac{\pi d^2}{4r^2},$$

将此 $\Delta \Omega$ 值代入上式，得

$$\Delta \Phi_v = \frac{\pi d^2}{4r^2} I.$$

它表明，对于可作为发光点的物体，主观亮度正比于该发光点的发光强度；而反比于该发光点到眼睛距离的平方.

总之，物体在视网膜上所成的像较大时，主观亮度由视网膜上像的光照度决定，而当物体在视网膜上成的像只遮盖一个视神经元时，主观亮度由自物体进入眼睛的光通量来决定. 由此可知，为对给定的物点提高主观亮度，一个有效的方法是在眼睛之前另加一光学系统，使与眼睛瞳孔共轭的整个系统的入射光瞳变大，这样做所提高的主观亮度约为用眼直接观察所得主观亮度的 $(D/d)^2$ 倍，这里的 D 为与瞳孔共轭的整个系统的入射光瞳的直径. 然而借助光学系统并不能改变眼睛的“相对孔径 d'/f'”，所以对于面光源来说，任何光学系统都不能帮助眼睛来提高对它的主观亮度. 例如，用望远镜观察天空白云时，所得云像的主观亮度与用眼直接观察的差不多，甚至变小；当用望远镜观看星时，所得星的主观亮度却显著地提高. 因而，能产生这种情况：对于直接用眼睛看不到的夜间被薄云遮住的星，通过适当的望远镜，却能十分清楚地看到它.

习　题

1. 一支氦氖激光器，发射出波长为 632.8 nm 的激光束 3 mW，问此光束的光通量为多少流明？

若已知此激光束的发散角为 10^{-3} rad，放电毛细管的直径为 1 mm，并且人眼只能观看 10 000 cd/m^2 的亮度，问所戴保护眼镜的透射率应为多少？

2. 一束蓝光波长为 460 nm，光通量为 6.2×10^2 lm，射在一个白色屏幕上，问屏幕上在

1 min 内接受多少能量?

3. 一只 25 W 小灯泡离另一只 100 W 的小灯泡 1 m,今以陆末 - 布洛洪光度计置于两者之间,为使光度计内漫射"白板"T 的两表面有相等的光照度,问该漫射板 T 应放在何处?

4. 某一光源的发光强度为 55 cd,在离它 2.2 m 处有一屏幕,假定屏幕的法线通过该光源,试求屏幕上的光照度.

5. 对某一实际光源,为测得其配光曲线,用照度计每 10° 测一个数据,得 E_0、$E_{10°}$、$E_{20°}$,…,$E_{180°}$,试证该光源的总光通量等于

$$\Phi_v = 2\pi r^2\left(E_0\frac{\cos 0° - \cos 10°}{2} + E_{10°}\frac{\cos 0° - \cos 20°}{2} + E_{20°}\frac{\cos 10° - \cos 30°}{2} + E_{30°}\frac{\cos 20° - \cos 40°}{2} + \cdots + E_{180°}\frac{\cos 170° - \cos 180°}{2}\right).$$

6. 试根据图 5 - 4(b)所示的 3 kW 超高压短弧氙灯的配光曲线,求该灯的总光通量,假定该图中每一小格表示 1 815 cd.

7. 已知阳光照明的洁净雪面的光亮度为 30 000 cd/m^2,假定人眼通常习惯于 3 000 cd/m^2,问登雪山运动员所戴防护眼镜的透射系数为多少?

第六章

光学仪器原理

*§6-1 概　　述

人们在从事物质生产、科学实验和社会活动的实践中，在用各种器官认识客观世界的意义上来说，视觉——眼睛比其他感觉器官更重要. 它有我们现在还不完全理解的高度准确性、极高的灵敏度、精密的分辨能力以及高度的适应性等. 但就客观的需要来说，人眼还有很大的局限性，不能完全满足人类活动的需要. 例如，对太远或太近的物体看不见或看不清；不能对所观察的物体的大小、远近和形状做出数量上的精确比较或计量；对于发生在瞬间的现象或事物，不能留下长久的记录；以及对红外线和紫外线都不产生光的感觉（这些光有时会对眼睛产生破坏作用）等，此外，现代的工业生产、科学研究、文化生活以及国防建设等方面，对提高和扩展视觉性能提出了范围广阔、内容繁多的要求.

为弥补视觉的局限性和满足上述来自各方面的对改善和扩展视觉的要求，人们很早就开始利用以透镜、反射镜和棱镜等构成的仪器，这些仪器统称为光学仪器. 例如，早在公元 1100 年左右，阿拉伯人阿尔－海真（Al-hazen）就发明了第一个透镜；公元 1590 年有詹森（Jansen）和李普塞（Lippershey）建成了第一架望远镜；17 世纪初冯特纳（Phontana）制成了第一架显微镜等. 然而，大量地使用光学仪器还是在 20 世纪 20 年代（第一次世界大战）以后，特别是随着激光的产生和发展，现代光学与现代电子无线电技术的进一步配合，特种光学材料和工艺的进步，光学仪器已应用于几乎所有科技领域和许多工业部门之中，甚至在日常生活中，它也是不可缺少的工具. 现代光学仪器种类之多，已很难用简短的文字来做即使是很不全面的概括性介绍. 不过，在这一章，为初学者的方便，还是根据经典光学仪器的性能和光学系统来把光学仪器粗分为显微镜、望远镜、照相机和分光镜. 关于物理光学仪器和仪器中的物理光学问题均留在本书后面的有关章节去讨论.

虽然现代光学仪器的理论基础是多方面，但光学仍是其中的根本. 借助于几

何光学，可近似描写光学仪器的主要性能，对于一般的应用，这种近似描述已足够准确，因而在这种意义上来说，光学仪器的基础理论主要是几何光学. 本章将按光学仪器的上述分类，用近轴光学原理依次地讨论显微镜、望远镜、照相物镜以及分光镜等；并且在作这些讨论之前，还把人眼作一扼要的介绍.

§6－2　眼　　睛

1. 人眼的结构

图 6－1 所示为人眼的水平剖面，眼球由坚韧的膜包着，这膜在眼球前部凸出的透明部分称为角膜，其余部分称为巩膜，它是几乎不透明的白色膜，厚度在 0.4～1.1 mm 之间. 在角膜之后为眼的前房，其中充满水状液（房水），前房之后为虹膜，其中心为瞳孔，瞳孔的直径为 1.4～8 mm. 虹膜与睫状体相连接，睫状体为由肌肉纤维组成的睫状肌. 靠近虹膜的是晶状体，它的外形如双凸透镜，内部是由折射率分层的介质组成，并且它的表面的曲率可由睫状肌的松紧而改变.

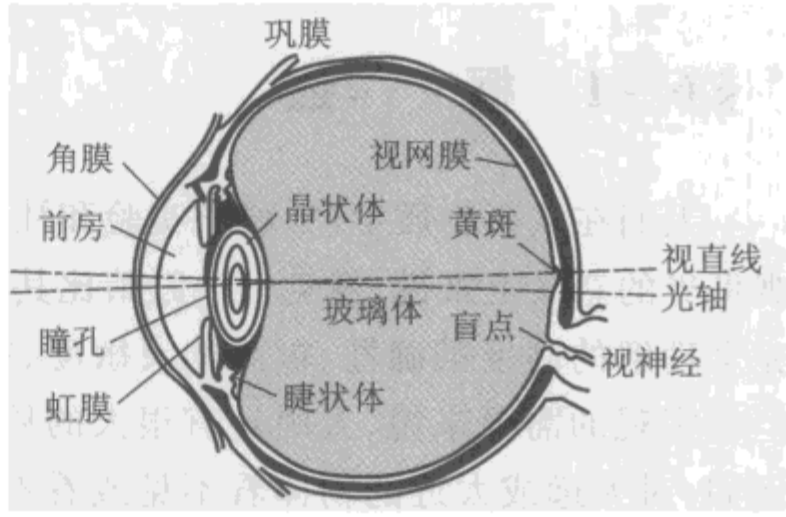


图 6－1　人眼的水平剖面

在晶状体后面眼的内腔充满了黏性的透明物质，称玻璃体. 玻璃体的透明外膜与视网膜紧贴着，视网膜上分布着复杂的视神经末梢. 视神经在光轴旁靠鼻子的一侧进入眼腔内.

网膜上有圆柱细胞和圆锥细胞两种，如图 6－2(a)所示. 图 6－2(b)为由电子显微镜拍摄下的斑泥蝾螈视网膜的照片，可以清楚地看出圆锥细胞和圆柱细胞. 人眼中的这两种细胞，在许多方面，还是很相似的，两者均约为 50 μm 长，通

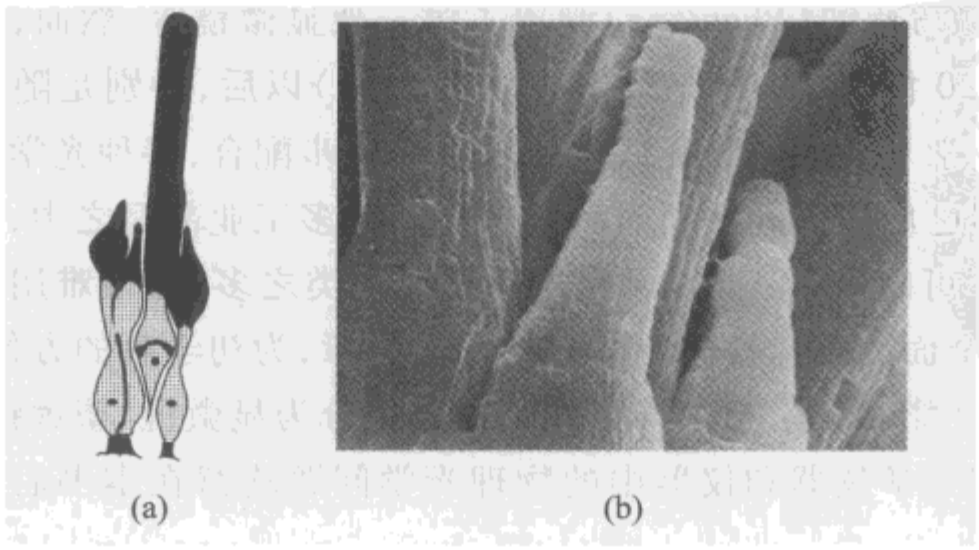


图 6－2

常圆柱细胞比圆锥细胞稍长些,两者的直径均约为 2 μm,通常圆锥细胞稍大些.但是这两种细胞中含有的"色素"及其在视觉过程中的作用却是完全不同的.圆柱细胞是管暗视觉的,圆锥细胞是管明视觉的.所谓暗视觉即只对明暗有感觉,而明视觉则与色觉和像的细节分辨有关.这两种细胞都在视觉的光化学作用中起作用,主要是由于它们含有视觉物质(视紫红质).

圆柱细胞和圆锥细胞在网膜上的分布是很不均匀的.在视神经进入眼内腔的地方,既无圆柱细胞亦无圆锥细胞.这个地方不感光,因而称为盲点.用图6-3所示图案很容易证实盲点的存在:遮住左眼而以右眼看图中的十字.把眼光靠近图而后渐渐离开,就可以找到这样一个位置:此时在视场边缘处黑色圆盘消失不见.这就是由于黑圆成像于盲点之故.若十字与黑圆相距为 70 mm,则消失黑圆将发生在眼睛离纸面约为 20~22 cm 处.通常我们不觉得有盲点,这主要是因为人眼很灵活的缘故.



图 6-3

在距盲斑中心 15.5°(向太阳穴的方向)处,有一个扁圆斑,呈黄色,称黄斑;在黄斑的中心有一凹坑,称中心窝,其水平直径约 0.3 mm,竖直直径为 0.2 mm.在这个地方几乎全是圆锥细胞,直到中心窝外围的相当范围才开始有圆柱细胞(相应的视角约为 2°),在这个区域以外,圆柱细胞对圆锥细胞的比数渐渐增加,到网膜边缘时几乎全是圆柱细胞.圆锥细胞总数估计有 4×10^6;其中约 1.3×10^4 个处于黄斑中,而约 4×10^3 个在中心窝.圆柱细胞有约 1.25×10^8 个.

眼球的形状近乎对称,其对称轴(图 6-1 中的光轴)的长度,对成人来说,平均为 24.3 mm.对眼的光学系统而言,重要的不是对称轴,而是视直线(图 6-1).当观察任一空间物体时,由肌肉的作用使眼转动,使视直线经过所观察的点,被观察的像落在中心窝;所有空间点的像不在黄斑上时,眼都用"外围视觉"去看.眼的运动能力是很大的,视线不断地由空间中一点移(扫描)到另一点.眼的运动可视为绕一固定点的转动,此固定点距角膜顶点 13.5 mm,离视直线 1.6 mm.

2. 示意眼与简化眼

从几何光学观点来看,人眼在一个由不同介质组成的共轴系统,这一系统能使物体在网膜上成清晰的像.进入眼睛的光线要通过一系列的折射面的折射和反射;折射光到达网膜,反射光返回物空间.表征眼的光学系统的结构元素(r、n、d)都是可以测量的,大量的测量使我们可以对实际上的各种人眼用一个如图 6-4所示的共轴光学系统来表征,这样的光学系统称示意眼,它的结构元素:

r/mm	d/mm	n	
7.7 6.8	0.5	1.376	角膜
10.0	3.1	1.336	房水
	3.6	1.386	晶状体
-6.0 -9.7	17.2	1.336	玻璃体

对此,我们可求出人眼的一些光学常数:

光焦度	58.64 D
第一主点距	1.348 mm
第二主点距	1.602 mm
物方焦距	-17.05 mm
像方焦距	22.785 mm
入瞳距	3.047 mm
出瞳距	3.667 mm

很明显,眼睛对不同距离的物体成像,并不像照相机镜头那样调焦,而是通过睫状肌压缩晶状体使其两曲面的曲率半径变小来实现.所以松弛(看无限远)时的眼睛和紧张(看近物)时的眼睛,其光学常数是不同的.上面的数据是对松弛的眼睛给出的;对于近处物体,眼的光焦度可达70.57 D,约有20%的变化范围.眼睛通过改变晶状体两曲面的曲率半径而改变其光焦度的这种性能,说明眼睛是一个变焦距系统,只不过是这种简捷的变焦方式在现有的人造的实际光学系统中还没有任何一个能够模仿出来罢了.

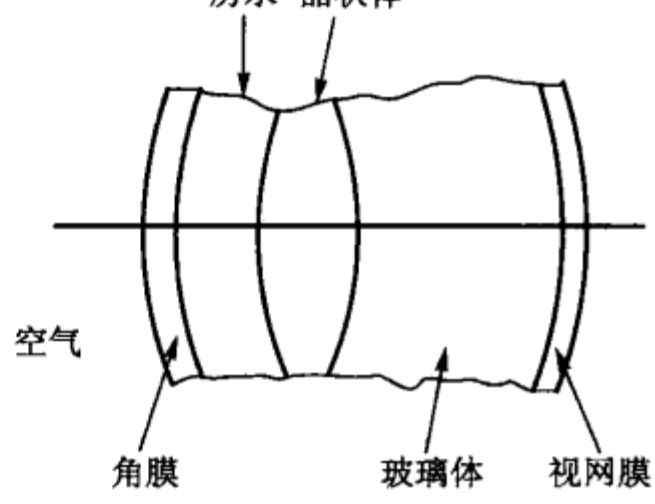


图 6-4　示意眼

通过观察光从眼睛的各曲面的反射的像,我们很容易看到晶状体曲面的曲率半径的变化.例如,在眼角放一发光体,可看到三个反射像:一个是由角膜第一表面反射的虚像(正立、缩小、很亮),一个是由晶状体第一表面反射的虚像(正立、缩小),另一个是由晶状体第二表面反射而成的倒立实像.当眼睛调焦时,可以清楚地看到上述三个像中,晶状体第一表面反射所成的像的大小有显著的变化,这表明调焦是通过(主要通过)该面的曲率半径的变化来实现的.

在很多情形下,用示意眼作各种近似的计算仍然很不方便,这一方面是由于其复杂性,另一方面由于每个人眼的实际数值与平均值之间有很大的差异;因而

常将示意眼再加以简化为所谓简化眼.

由于示意眼两主点距离很小,可以认为它们相互重合,并且认为眼睛只由一种介质组成;设想眼睛只有一个折射面,曲率半径的大小由示意眼和简化眼有相同的焦距来确定;简化眼在网膜上成像的大小与示意眼相同,由此,我们得到所谓高尔斯特兰(A. Gullstrand)简化眼:

折射率	4/3
折射面的曲率半径	5.7 mm
第一焦距	-17.1 mm
第二焦距	22.8 mm
光焦度	58.48 D
网膜曲率半径	9.7 mm

应该说明,示意眼与简化眼都旨在以一个尽可能接近实际的平均值来代替实际上千差万别的具体眼,不同的观点将会有不同的平均值,所以上面所列数据仅是其中的一种.

3. 人眼的调节及非正常眼的校正

人眼的调节(或称调焦),已知上述,是靠晶状体的作用.当眼中的睫状肌 *uu* 松弛,晶状体两曲面的曲率半径为最大时,能在视网膜上成清晰像的物点到眼的距离我们称之为远点,记以 s_{FO}.当物体由远逐渐移近时,为看清楚它,睫状肌须压紧晶状体以使它的两曲面(主要是前表面)的曲率半径随之变小,当物移近到某一定距离时,晶状体的两曲面的曲率半径已达最小,若物体从此位置再移近,则由于晶状体的曲率半径不再变小,物就看不清楚了.这时物点到眼睛的距离我们称之为近点,记以 s_{NO}.显然,眼睛的调节范围就是 $|s_{FO}-s_{NO}|$;不过,通常为应用上的方便,我们用远点倒数与近点倒数之差来表征眼睛的调节范围:

$$A=\frac{1}{s_{FO}}-\frac{1}{s_{NO}}. \tag{6-1}$$

对于每个人来说,在整个生命过程中,近点、远点以及调节范围并不是保持不变的.一般来说,随着年龄的增长,近点逐渐变远,从而使调节范围的绝对值变小.例如,儿童时期,近点在眼前不过 7 ~ 8 cm,而远点在无限远,此时眼的调节范围最大;到了中年时,近点约为眼前 25 cm;到了老年,近点已远移到眼前的 1 ~ 2 m 处,远点已近移到眼前几乎只有几米处,此时眼的调节范围就很小了.当然,这里所说的中年、老年是一般而言,实际上,眼的调节范围归根结底与人的健康状态有关.

在合适的照度(50 ~ 100 lx)下,一般的眼睛看眼前 25 cm 处的物体是不费力的,很舒适,我们称这个距离为明视距离.

我们把远点在无限远的眼,亦即眼的第二焦点与网膜重合的眼称为正视眼;

若第二焦点不在网膜上,则称之为非正视眼. 一般来说,正视眼到45岁以后开始视力失常,成为非正视眼,非正视眼的成因,也不仅有年龄因素,还有其他因素. 非正视眼中,远点在眼前有限距离的眼睛称近视眼,而近点变远的眼睛称远视眼.

(1) 近视眼及其校正

近视眼,不论其形成原因是眼球长度的变长,角膜曲率的变大,还是眼内介质折射率的异常,总之,在几何光学上来看,它是当眼内肌肉放松时,无限远处的物体不成在视网膜上而成在视网膜前,只有有限远的远点才能成像于视网膜,如图6-5的(a)、(b)、(c). 为了校正这种远点不在无限远的缺点,需要在眼前加一个负透镜,以使入射光束先发散一下,亦即令无限远物点在有限的远点处成一虚像. 例如远点为2 m的近视眼,为使它在戴上眼镜之后远点恢复到无限远,则眼镜的光焦度

$$\frac{1}{f'}=\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{-2\mathrm{m}}-\frac{1}{\infty},$$

$$f'=-2\ \mathrm{m},$$

眼镜的光焦度 $\Phi_g=-0.5\ \mathrm{D}$,即近视50度.

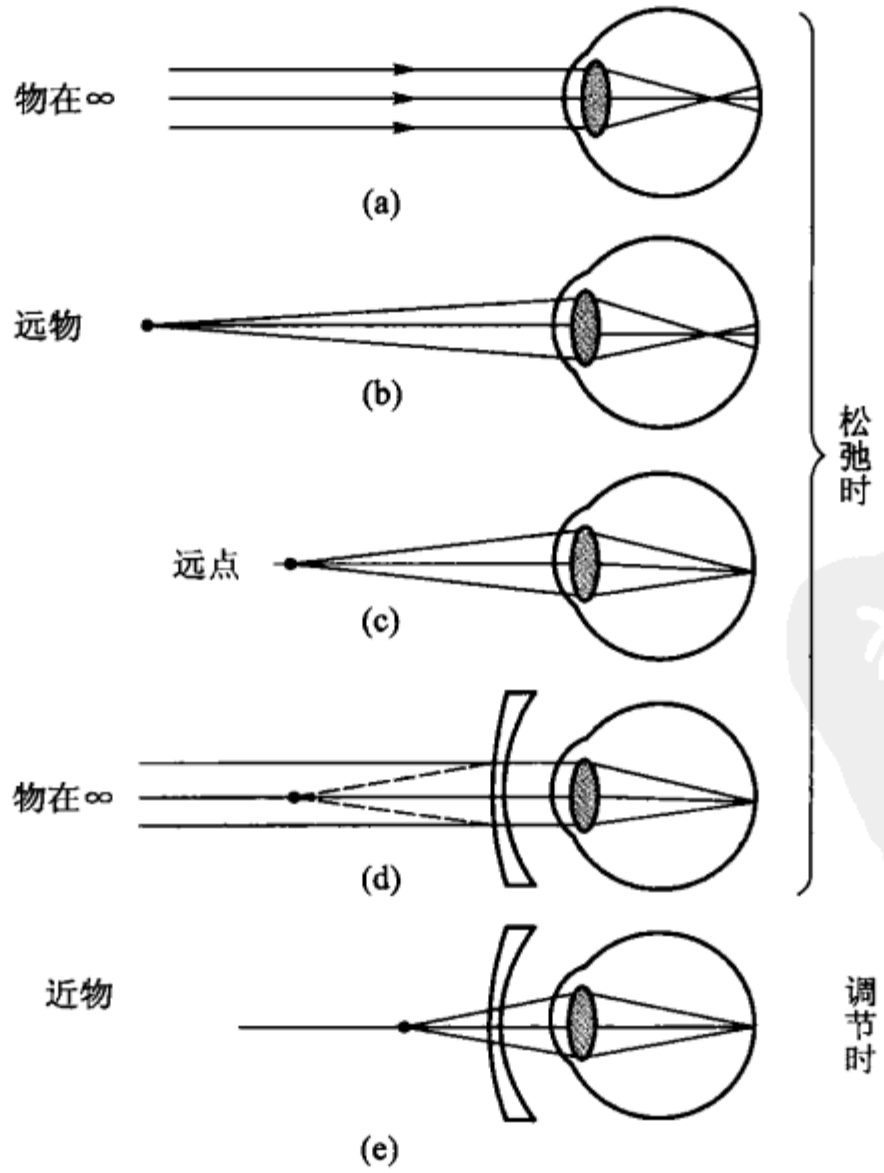


图6-5　近视眼及其校正示意图

（2）远视眼及其校正

远视眼，不论是由于眼球的变短，还是由于晶状体离视网膜太近，总之，它是当眼睛松弛时，无限远点成像于视网膜之后，并且当眼内肌肉最紧张时，近于25 cm的物点也成像于视网膜之后，也就是近点太远. 为了把太远的近点校正到眼前 25 cm 处，需要在眼前加一正透镜，以使放在眼前 25 cm 处的物成虚像于所要校正的近点上. 如图 6－6 所示. 例如，对一个近点为 125 cm 的远视眼，所需要加的正透镜的光焦度

$$\frac{1}{f'}=\frac{1}{-1.25}-\frac{1}{-0.25}=\frac{1}{0.31},$$

$$f'=0.31\ \text{m},$$

正透镜的光焦度为 3.2 D，即远视 320 度.

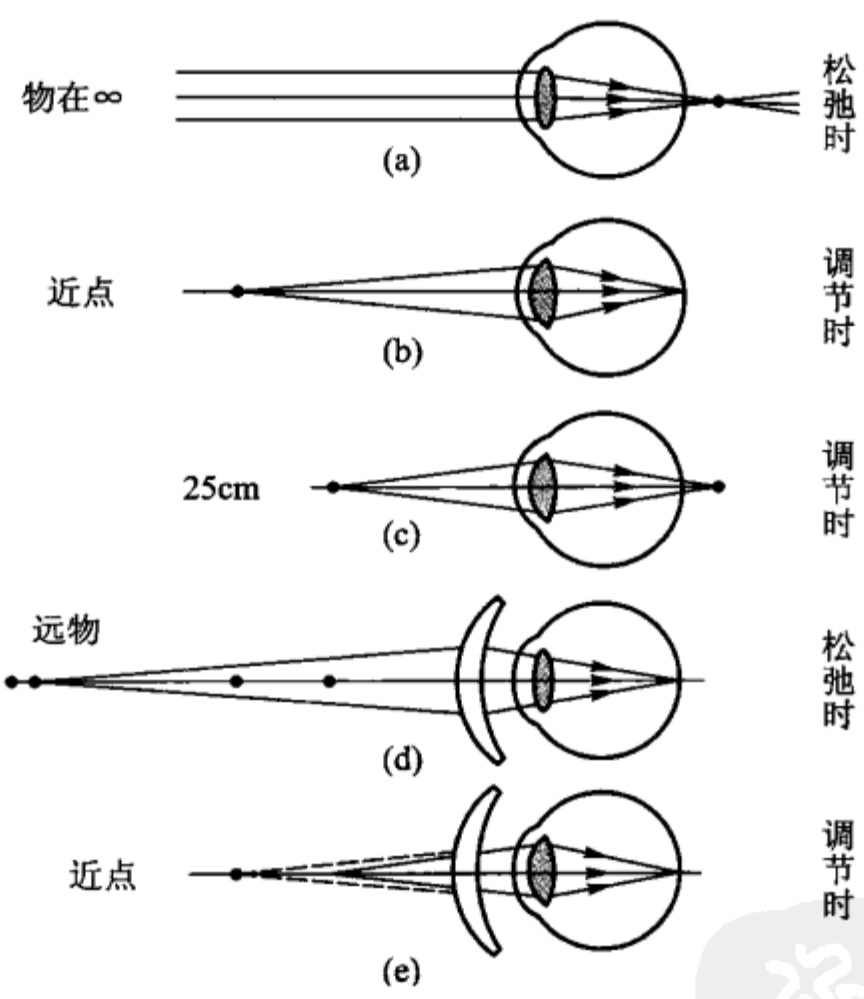


图 6－6　远视眼及其校正示意图

显然，不论是校正近视眼，还是校正远视眼，眼镜和眼睛组成的光学系统的总光焦度必为

$$\Phi=\Phi_{\text{眼镜}}+\Phi_{\text{眼}}-d\Phi_{\text{眼}}\,\Phi_{\text{眼镜}}.$$

一般来说，这个 Φ 值不一定等于正视眼的光焦度. 因而戴上眼镜后物在视网膜上成像的大小与没戴眼镜时所看到的物的大小不同. 这虽然并不重要，但如果能不改变放大率当然就更好. 为此，应该选择合适的 d 值（眼镜到眼睛第一主点的间隔），使眼镜－眼睛系统的光焦度 Φ 等于眼睛的光焦度 $\Phi_{\text{眼}}$，即 $\Phi\approx\Phi_{\text{眼}}$，以此条件代入上式，则有

$$\Phi_{眼睛}(1-d\Phi_{眼})=0,$$

由于 $\Phi_{眼镜}\neq 0$，所以，为满足上式，必须

$$1-d\Phi_{眼}=0$$

即

$$d=\frac{1}{\Phi_{眼}}=-f_{眼} \tag{6-2}$$

也就是当眼镜放在眼睛的第一焦点上时，戴眼镜与不戴眼镜所看到的物不改变大小. 根据前述示意眼的数据：$f=-17.05$ cm，眼第一主点到角膜顶点的距离 1.348 mm，故眼镜（不考虑它的厚度）离角膜顶点的距离应为 15.6 mm.

（3）散光眼及其校正

散光眼是由于角膜的曲面的不对称形成的，也就是说，这种眼在不同截面上有不同的光焦度. 如果具有最大光焦度的截面垂直于具有最小光焦度的截面，则称该种散光眼为正规散光眼. 对于正规散光眼，一般来说是可以借助柱面透镜来校正的. 如果角膜曲面无规则，则称非正规散光眼，对于非正规散光眼，一般是无法校正的.

一般患散光的眼，常伴随有近视或远视，所以还有近视散光和远视散光的区别. 为校正这类缺欠，眼镜要由球面－柱面的透镜（球柱透镜）来做.

关于非正视眼校正的进一步讨论以及眼的光度、色度方面的特性等，读者可参阅《光学仪器理论》第二卷第十五章（科学出版社，中译本，1963）.

§6－3　放大镜　目镜　显微镜

为观察清楚微小的物体或物体的细节，需要把物体移近眼睛，这样做，增大了物体对人眼的张角，从而可使物体在视网膜上成一个较大的像. 然而，当物体到眼睛的距离太近时，由前节可知，这样反而会看不清楚. 也就是说，为明察微小的物体或物体的细节，不但要使物体对眼瞳孔有足够大的张角，而且还要有合适的距离. 显然，对于眼睛来说，这两个要求是互相矛盾的. 不过若在眼睛之前另加一个适当的光学系统，例如，一个焦距较小的凸透镜，会有助于消除这种矛盾. 放大镜便是这种帮助眼睛观察微小物体或其细节的光学仪器. 凸透镜是一个最简单的放大镜.

1. 放大镜

现在以一个凸透镜为例，来研究放大镜的作用. 将被观察的物体 AB 放在凸透镜 L 的第一焦点 F 附近，并使它靠近透镜的一侧［图 6－7(a)］，于是，物体在透镜的像空间成一放大的虚像 $A'B'$，像到透镜的距离为 s'. 此虚像成为眼睛的物，它到眼睛的距离与其到透镜的距离无实际的差别，并且一般总使此虚像处于明视位置（$s'\approx -25$ cm）. 作为物体的 $A'B'$，它对眼睛瞳孔有较大的张角 $2\omega_0$，它

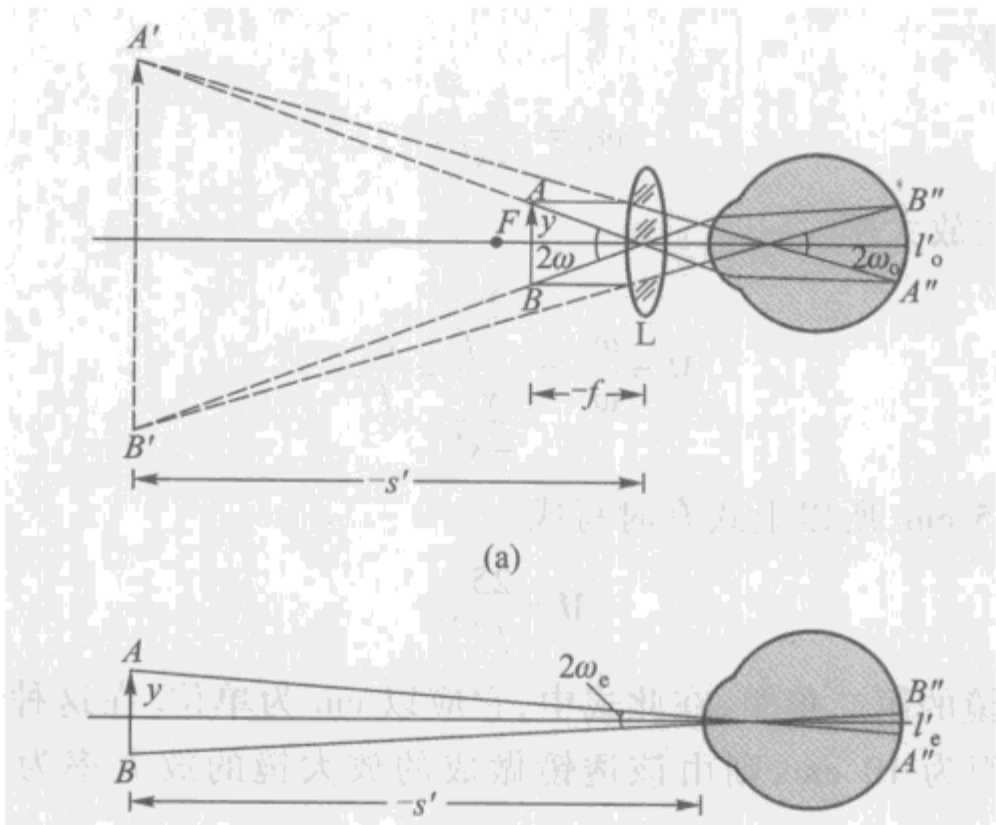


图 6－7

与物体 AB 对透镜中心的夹角 2ω 无实际的差别，此角愈大，则在视网膜上所得的像 $A''B''$ 也愈大.

为了表示像放大镜这类目的在于帮助眼睛观察物体的光学仪器的特性，我们引入一个参数，称为仪器放大率 M. 在数值上它等于被观察的物体通过光学仪器在视网膜上所成的像的长度 l'_o 同把物体放在由光学仪器所成的虚像的平面上[图 6－7(b)]而用眼睛直接观察时，物在视网膜上所成的像的长度 l'_e 之比值. 由于视网膜上的像的长度实际上正比于像对眼睛出射光瞳中心(即瞳孔中心)的张角，所以这类光学仪器的放大率 M，也等于用光学仪器对物所成的虚像(作为眼睛的物)对瞳孔中心的张角 $2\omega_o$ 同将该物放在上述虚像平面上时物对瞳孔的张角 $2\omega_e$[图 6－7(b)]之比值，即

$$M=\frac{l'_o}{l'_e}, \tag{6-3}$$

或近似地写成

$$M=\frac{\omega_o}{\omega_e}. \tag{6-4}$$

这里必须注意，上式中的 l'_o 与 l'_e，或 ω_o 与 ω_e，并不是共轭线段或共轭角，它们是两个不同条件下物体在视网膜上的像高或张角. 第三章中所定义的垂轴放大率 β、角放大率 γ 和轴向放大率 α 都是共轭量的比值. 切不可忽视 M 与 α、β、γ 的这个重要区别.

对于放大镜，由图 6－7(a)得

$$\omega_o\approx\omega=\frac{y}{-f};$$

由图 6 -7(b)得

$$\omega_e = \frac{y}{-s'}.$$

由此得放大镜的放大率

$$M = \frac{\omega_0}{\omega_e} = \frac{\frac{y}{-f}}{\frac{y}{-s'}} = \frac{s'}{f}. \tag{6-5}$$

通常选 $s' = -25$ cm,所以上式有时写成

$$M = \frac{25}{f'}, \tag{6-5a}$$

其中f'为放大镜的第二焦距,在此式中,它应以 cm 为单位. 在这种情况下,若凸透镜的第二焦距为 10 cm,则由该透镜做成的放大镜的放大率为 2.5 倍,写成 2.5 ×.

由公式(6 -5)及(6 -5a)可以看出,借助于减小凸透镜的焦距,似乎可得随便多大的放大率. 然而对于单透镜,由于有像差的存在,放大率都在 3 × 以下. 如果能用组合透镜将像差减小,则放大率可达 20 ×.

2. 目镜

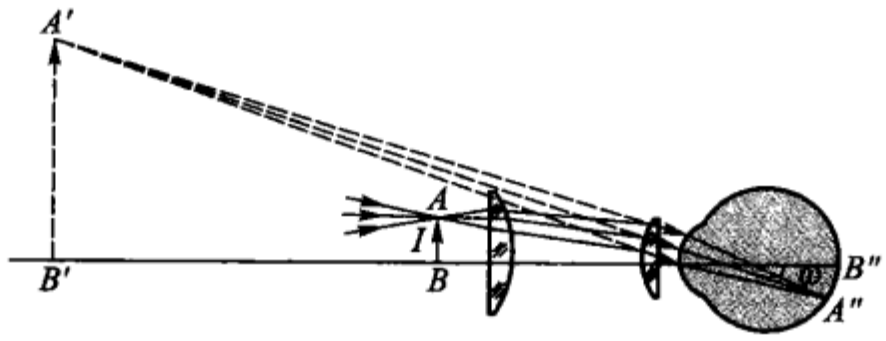
用于观察由光学系统所成的像的放大镜,称为目镜. 对于显微镜和望远镜,目镜是其中一个组成部分,简单的放大镜也就是简单的目镜. 一般对目镜的要求是:有较高的放大率和较大的视场角,同时要尽可能校正彗差、像散、像场弯曲、畸变和色差等,为此,目镜通常是由两片或更多片的透镜组成的.

惠更斯目镜和拉姆斯登目镜的光学系统如图 4 -28 和图 4 -29 所示,这里的图 6 -8(a)和(b)则着重说明它们的放大作用. 显然,这两种目镜对被观察的实像虽然都有放大作用,但在使用上却有所不同. 由图 6 -8(a)可以看出:拉姆斯登目镜可当作一般放大镜用来观察实物,而惠更斯目镜却只能用来观察像;在拉姆斯登目镜的物面上加一透明刻度板,即可对被观察的物体(或实像)进行长度的测量,而惠更斯目镜则不能. 在由两个和两个以上透镜组成的目镜中,接近于眼睛的透镜,称为接目镜;远离眼睛的一端的透镜,称为场镜. 在上述两种目镜中,各有一接目镜和一场镜,且两透镜间有一定的距离,因而它们都有够多的参量,可以在 $2\omega = 30°$的范围内,对主要的像差可有较好的校正.

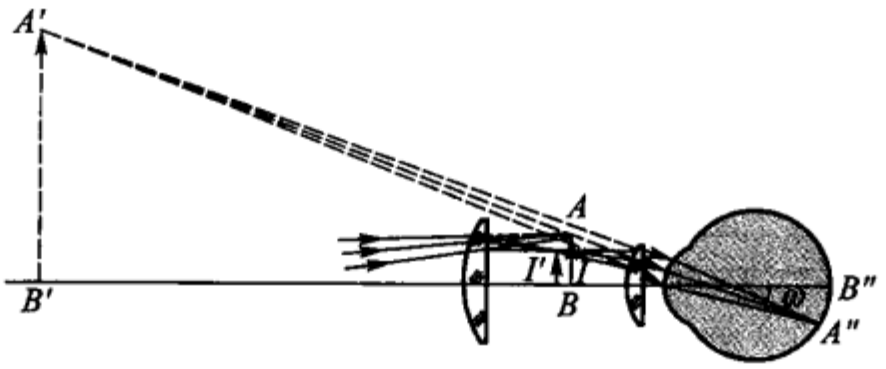
为不同的使用目的有多种目镜,图 6 -9 所示即为一些典型的目镜,(a)为对称型目镜,$2\omega = 40°$;(b)为无畸变目镜(orthoscopic eyepiece),$2\omega = 40°$;(c)为开尔纳(Kellner)目镜,$2\omega = 45°$;(d)为伊尔福(Erfle)目镜,$2\omega = 60°$.

3. 显微镜

如前所述,放大镜的放大率愈大,则其焦距应愈短,20 × 的放大镜,其焦距不

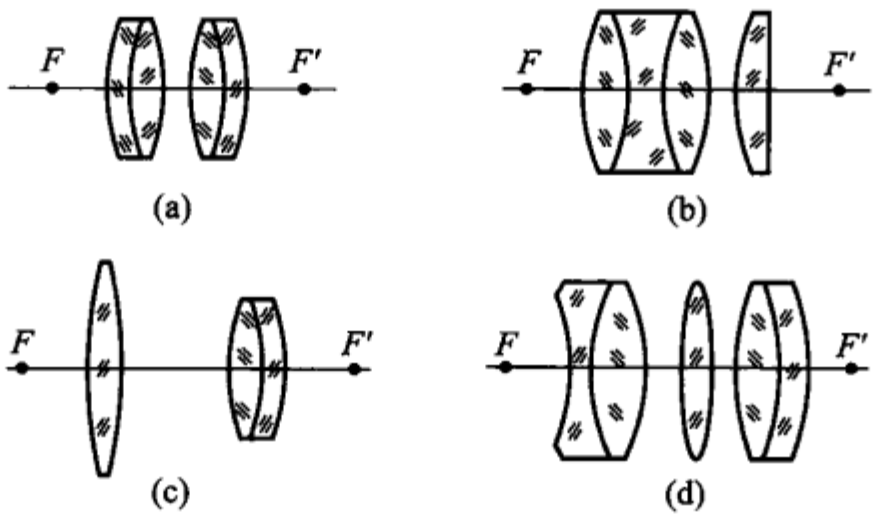


(a)



(b)

图 6－8



(a)　(b)

(c)　(d)

图 6－9

过是 1.25 cm 左右. 使用它时，被观察的实物到眼睛的距离与 1.25 cm 相差亦不多，而这样短的工作（观察）距离对于许多工作是不方便的，甚至在实际上是不允许的. 另一方面，对于实际应用来说，这样的 20 × 的放大镜即使可以应用，而其放大率亦嫌太小，甚至不能满足观察一般生物切片的要求. 为在提高放大率的同时，也能获得合适的工作条件，必须用组合放大镜，即采用两个光学系统组成的复光学系统来代替单一的放大镜，这种组合的放大镜，称为显微镜.

显微镜的光学系统如图 6－10 所示. L_1 称为显微镜的物镜，L_2 称为显微镜的目镜，人眼在目镜后面的一定位置上. F_1 和 F_1' 为物镜的第一和第二焦点，F_2 为目镜的第一焦点. 将被观察的物体 AB 放在物镜的第一焦点附近（靠外），于是，物镜将长为 y 的物体 AB 在目镜的第一焦点附近（靠近目镜）成一放大的实像 $A'B'$，它的长度等于物镜对物的垂轴放大率 β 与长度 y 的乘积 βy；目镜 L_2 对此像起放大的作用，从而在目镜之前的某一位置成一放大的虚像 $A''B''$. 虚像 $A''B''$

成为眼睛这一光学系统的物，它在视网膜上的像，就是眼睛通过显微镜对物 AB 所获得的最后的像. 这个像对瞳孔的张角较放在一定距离的物体 AB 对瞳孔的张角大许多倍.

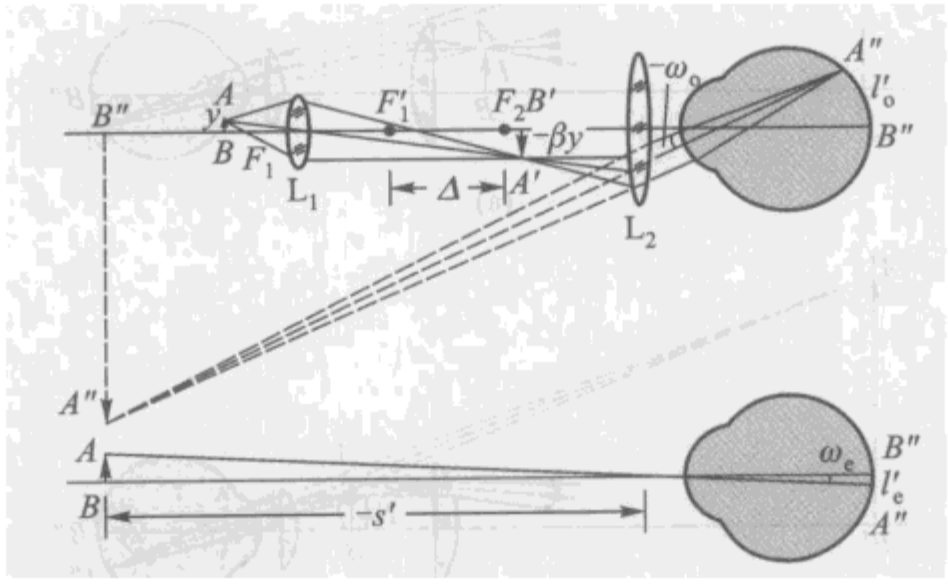


图 6－10

假定 s' 为目镜到由它所成的虚像 $A''B''$ 的距离，则虚像 $A''B''$ 对眼睛瞳孔的张角 ω_0 可近似地写成

$$-\omega_0 = \frac{-\beta y}{-f_2} = \frac{-\beta y}{f_2'},$$

其中 f_2' 为目镜的第二焦距.

当物体 AB 处于 $A''B''$ 所在的平面时，它对人眼瞳孔的张角 ω_e 为

$$\omega_e = \frac{y}{-s'}.$$

将此 ω_0 及 ω_e 值代入式(6－4)，则得显微镜的放大率为

$$M = \frac{\omega_0}{\omega_e} = \frac{\dfrac{\beta y}{f_2'}}{\dfrac{y}{-s'}} = -\beta\frac{s'}{f_2'}, \tag{6-6}$$

式中 s'/f_2' 为目镜的放大率. 可见，显微镜的放大率等于物镜的放大率与目镜的放大率的乘积. 为此，在显微镜物镜和目镜上都分别刻有 5×，10× 等字样，以便由其乘积直接得知所用显微镜的放大率.

在给定的情况下，由(3－30a)式物镜的垂轴放大率 β 近似地等于物镜和目镜的光学间隔 Δ（F_1' 到 F_2 的距离）除以物镜的第二焦距，即

$$\beta = \frac{-\Delta}{f_1'}.$$

于是，式(6－6)可改写为

$$M = -\frac{\Delta\, s'}{f_1' f_2'}. \tag{6-6a}$$

现代的显微镜，其光学间隔 Δ 均有定值，通常是 17 cm 或 19 cm，一般人（眼）在

用显微镜进行观察时，s'约为 -25 cm. 在这情况下，由改变物镜目镜的焦距，可得各种不同的放大率. 当物镜和目镜都是组合系统时，则在放大率很高的情况下，仍能获得清晰的像.

由于放大的目的最终还是为了分辨细节，所以显微镜除应有足够的放大率之外，还要有相应的分辨本领. 由光的衍射的讨论可知，显微镜的分辨本领，取决于被观察物体发出的光在物镜的物空间的孔径角 u 和该光的波长 λ，并且还与被观察物体所在的介质的折射率 n 有关. 也就是，显微镜的分辨本领正比于物空间的折射率和孔径角的正弦的乘积 $n\sin u$，反比于波长 λ. 乘积 $n\sin u$ 称为显微镜物镜的数值孔径(numerical aperture，简写为 N. A.). 对于给定波长的光，物镜的数值孔径愈大，则其分辨本领愈高. 通常在显微镜物镜上除刻有表示放大率的数字外，还刻有表示数值孔径的数字. 例如，物镜上刻有 N. A. 0.65 字样，即表示该物镜的数值孔径 $n\sin u = 0.65$.

实际上，高倍的显微镜物镜，其数值孔径值一定也大. 如此，则要求物镜的焦距短和相对孔径大. 但由像差的研究得知，在这样的光学系统中，球差、彗差、色差以及像差的色差等，都是很严重的. 所以，为获得较完善的像，常需要使物镜的结构复杂化，阿贝不晕点的原理在构成这种高倍显微镜物镜中得到了普遍的应用.

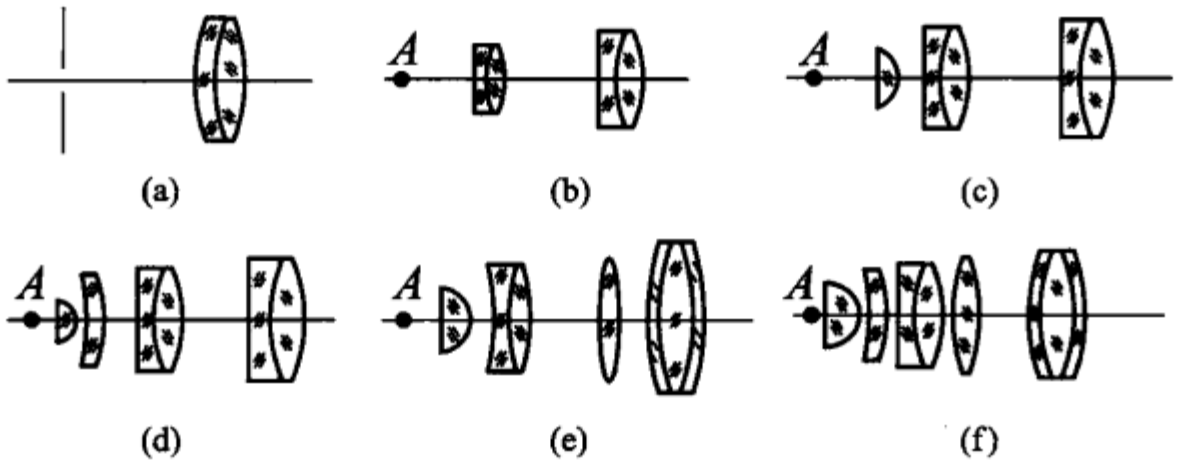


图 6-11

图 6-11 给出了用透镜组组成的各种放大率和数值孔径的显微镜物镜. 其中(a)为由 2× 和 N. A. 0.0016(写成 2×0.0016)至 6×0.11 和 7×0.18 的物镜；(b)为由 7×0.17 至 10×0.25 的物镜；(c)为由 10×0.3 至 70×0.8 的物镜；(d)为 20×0.7，40×0.75，95×1.25 的物镜，这三个中的最后一个称油浸物镜(或湿镜头)，因为在这里被观察的物体须放在其折射率与物镜第一片透镜的折射率相同的油液中，这是为了利用如图 4-13 所示的阿贝不晕点，以便在具有大孔径光线的情况下，不产生彗差和球差；(e)为 20×0.65 的所谓复消色物镜，在这物镜中采用了由特殊的光学材料组成的胶合物镜，对某三种颜色的光消色差；(f)为 90×1.35 的油浸消色物镜.

在保持物镜的数值孔径不变的条件下，为提高物镜有分辨本领，可改用波长

短的紫外线通过物镜成像，因而有紫外线显微镜. 由于玻璃不透过紫外线，所以紫外线显微镜的物镜多由反射镜组成. 图 6 - 12 所示为两个结构不同的反射型的物镜，其中(a)称为斯瓦兹谢尔特(Schwarzschild)物镜；(b)为牛顿物镜.

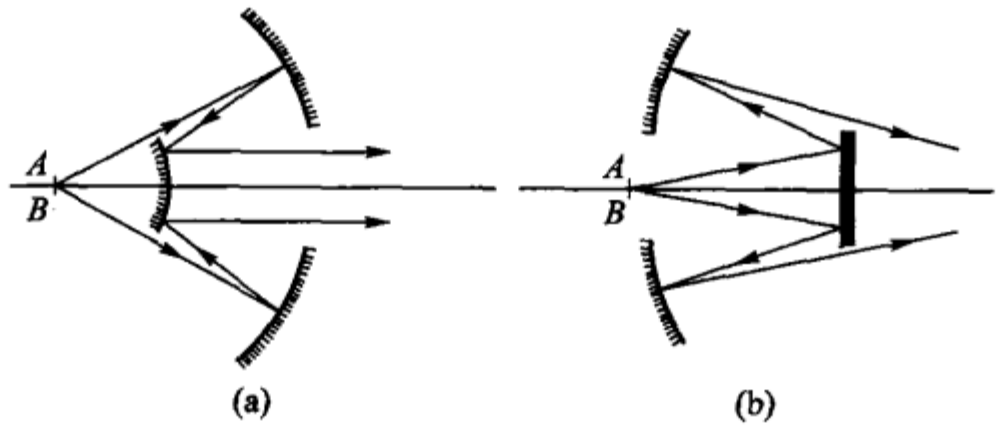


图 6 - 12

反射镜型显微镜在红外线中也有许多应用.

除上述纯透镜型的和纯反射镜型的显微镜之外，现在又有了折反型物镜，它是由反射镜和透镜联合组成的. 图 6 - 13 所示即为一个折反型的显微镜物镜，这个物镜的数值孔径值可以做到比图 6 - 12 所示的物镜的大些.

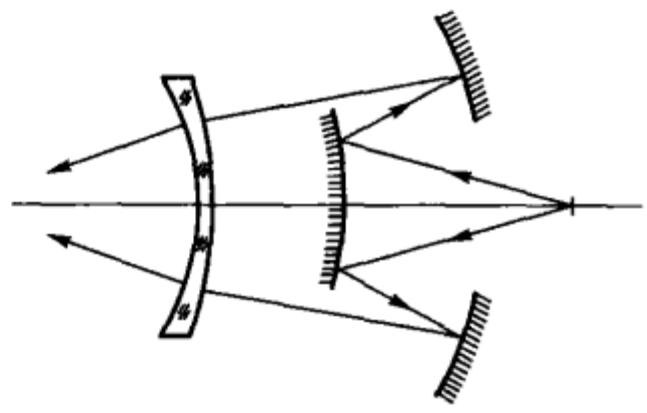


图 6 - 13

在显微镜下观察的物体通常是不发光的，因而需要照明. 对透明的薄片，如生物的切片，须采用透射照明. 当所用显微镜的物镜的数值孔径小于 0.25 时，用一凹面镜将漫射的太阳光(例如天空的白云)会聚于所观察的薄片上即可，如图 6 - 14(a)所示；当所用物镜的数值孔径较大时，须用附加的照明光学系统，如图 6 - 14(b)所示，对不透明物体的观察，如对金属表面的观察，则须采用反射式的照明. 照明的方式在显微术中是相当重要的，它在一定程度上影响着观察能否获得最大分辨本领.

图 6 - 15(a)所示的照片是我国生产的生物显微镜的外貌. 图 6 - 15(b)所

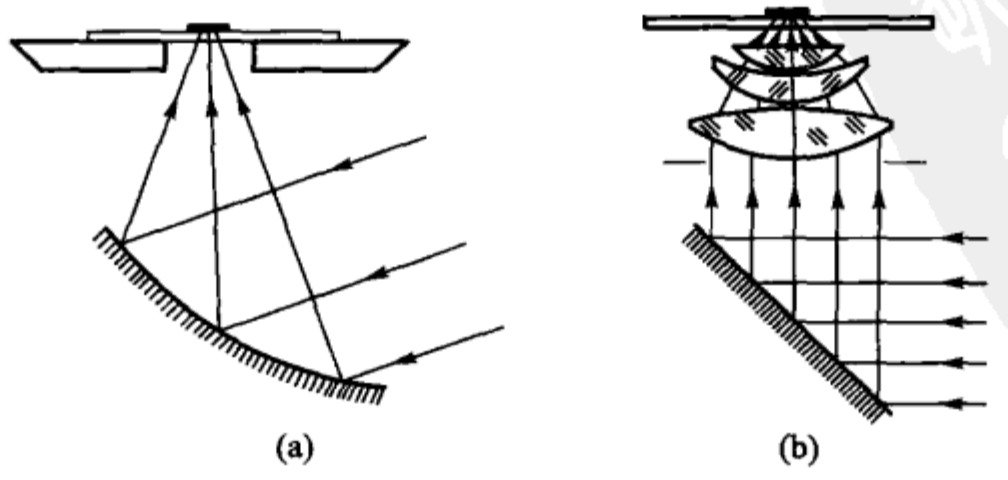
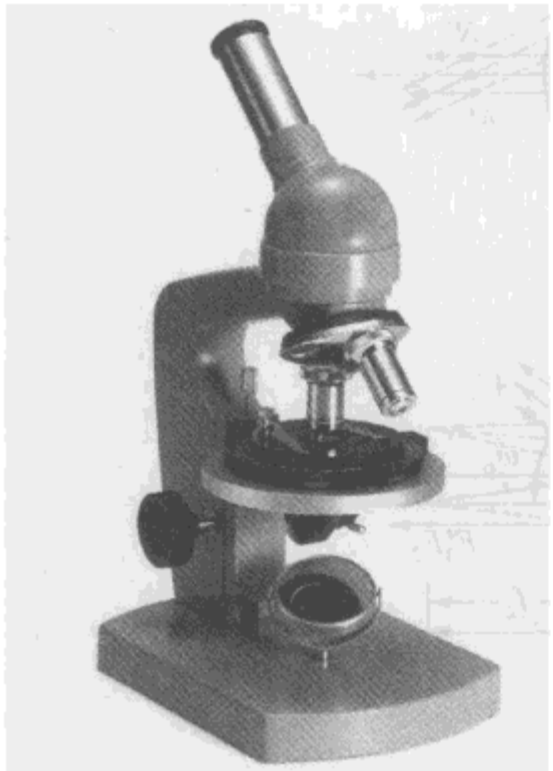
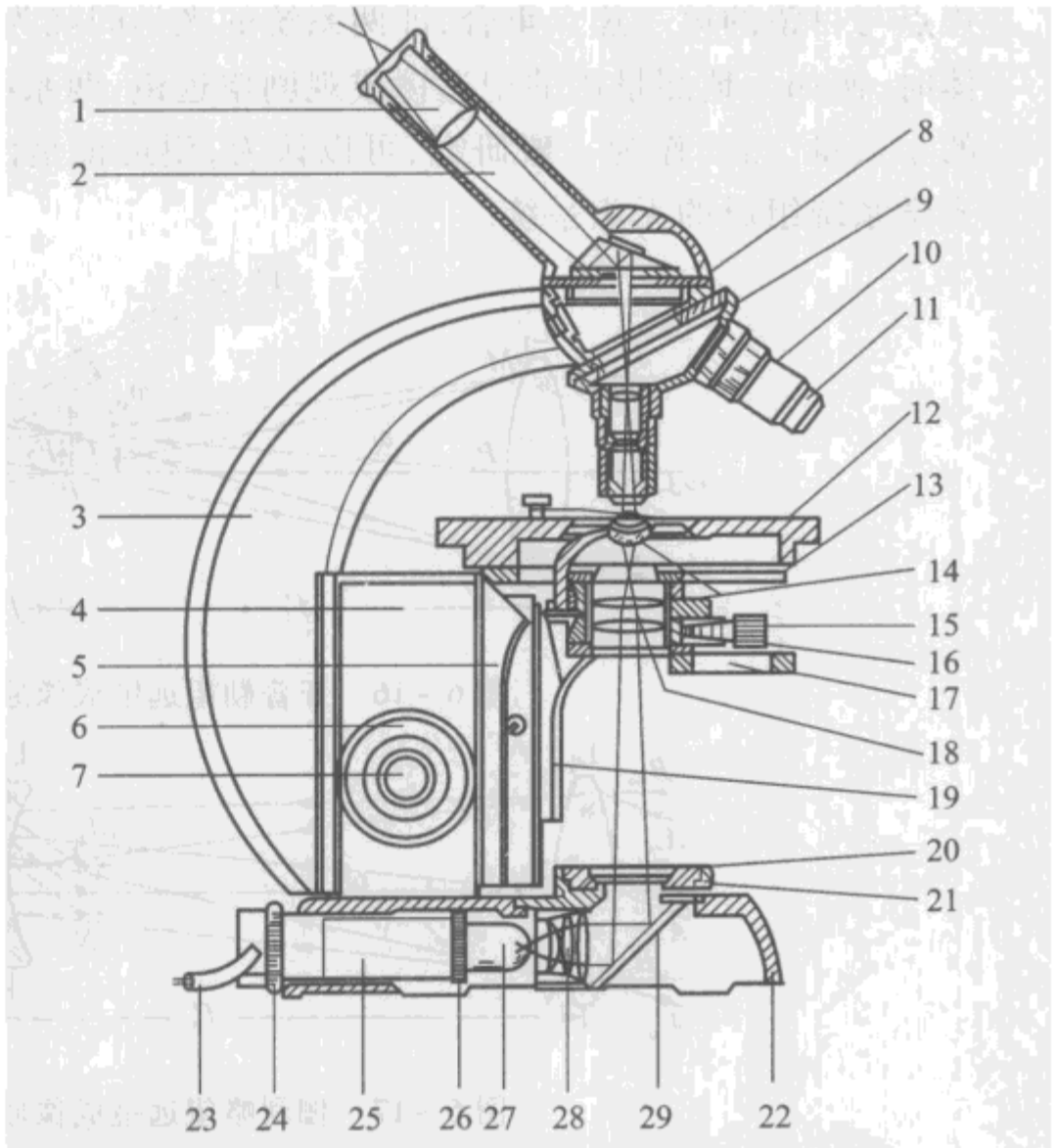


图 6 - 14



(a)



(b)

图 6-15

1. 目镜 2. 镜筒 3. 弯臂 4. 微动座 5. 载物台座 6. 粗动准焦装置 7. 微动准焦装置 8. 镜筒头 9. 回转盘 10. 弹性物镜座 11. 物镜 12. 载物台 13. 光阑调节手柄 14. 聚光镜 15. 弹簧顶针 16. 紧圈 17. 滤色片座 18. 辅助透镜 19. 聚光镜座 20. 视场光阑盘 21. 视场光阑调节圈 22. 底座 23. 灯线 24. 止动套圈 25. 灯座 26. 压圈 27. 6V15W 灯泡 28. 聚光透镜组 29. 反光镜

示为显微镜的结构图.

§6-4 望 远 镜

望远镜是帮助人眼对远处物体进行观察的光学仪器. 观察者以对望远镜的像空间的观察代替对本来的物空间的观察. 由于望远镜的像空间的像对人眼瞳孔的张角比其在物空间的共轭角大,所以通过望远镜观察时,远处的物体似乎被移近,原来看不清楚的物体能被看清楚了.

望远镜是由两个共轴的光学系统组成的,其中向着物体的系统称物镜,接近于人眼的系统称目镜. 当用在观看无限远的物体时,如天文望远镜,物镜在第二

焦点与目镜的第一焦点重合，即两系统的光学间隔为零. 当用在观看有限远的物体时，例如大地测量用的望远镜或观剧望远镜，两系统的光学间隔是一个不为零的小数量. 然而作为一般研究，可以认为，望远镜是由光学间隔为零的两个共轴光学系统组成的无焦系统.

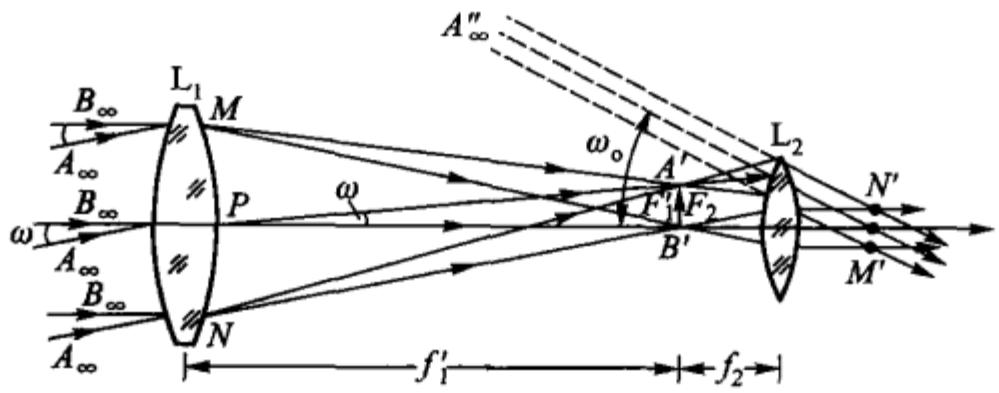


图 6－16　开普勒望远镜成像原理

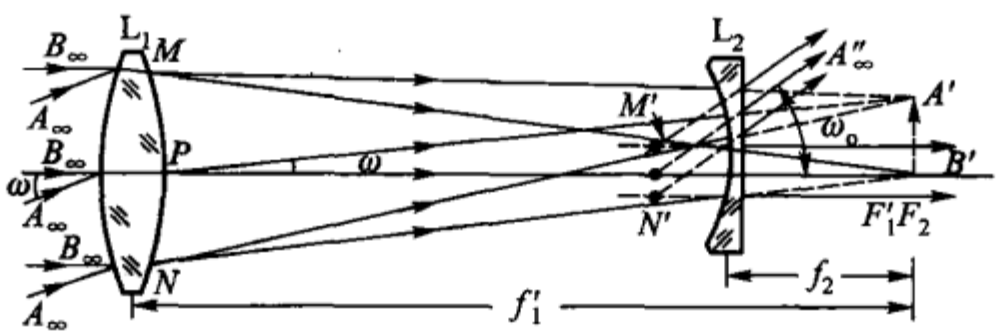


图 6－17　伽利略望远镜成像原理

若物镜和目镜的第二焦距均为正，就是所谓开普勒(Kepler)望远镜；若物镜的第二焦距为正，而目镜的第二焦距为负，就是所谓伽利略(Galileo)望远镜. 图 6－16 和图 6－17 分别为开普勒望远镜和伽利略望远镜的光路图. 自无限远的物点 A(图中没有画)发出的光束，在物镜上与望远镜光轴有不大的夹角 ω，经望远镜物镜后光束被会聚于物镜的第二焦平面 A' 点，成为 A 的像，此光束经目镜后成为与望远镜光轴有很大夹角 ω_o 的一束平行光. 这表明，望远镜使位于无限远的物体 AB 仍成像于无限远，不过，却使原来与望远镜光轴成不大夹角 ω 的光束变成为与光轴成较大夹角 ω_o 的光束. 按前述的关于放大率的概念，这就相当于使物体 AB 对人眼的张角变大，从而在视网膜上获得放大的像. 由于位于无限远的物体 AB 对人眼瞳孔的张角 ω_e 实际上等于如图中所画出的 ω，所以望远镜的放大率为

$$M = \frac{\omega_o}{\omega_e} = \frac{\omega_o}{\omega}. \tag{6-7}$$

从图 6－16 和 6－17 可以看出，ω 和 ω_o 恰巧为望远镜在物镜 MN 和它的像 $M'N'$ 处的一对共轭角，所以，ω_o 与 ω 的比值就是望远镜对物镜及其像的角放大率 γ_p，也就是望远镜的放大率 M 等于光瞳处的角放大率 γ_p. 而在所述的这一对共轭平面上，其垂轴放大率 β_p 很容易由图 6－16 和图 6－17 得出：

$$\beta_p = \frac{|M'N'|}{MN} = \frac{f_2}{f_1'}.$$

按(3-33)式,并且由于物镜 MN 及其像 $M'N'$ 都在同一空气介质中,所以 γ_p 和 β_p 的乘积为 1,即

$$\gamma_p = \frac{1}{\beta_p}.$$

于是,望远镜的放大率为

$$M = \gamma_p = \frac{f_1'}{f_2} = -\frac{f_1'}{f_2'}.$$

此式表明,物镜的焦距愈大和目镜的焦距愈小,则所得望远镜的放大率愈大. 当物镜和目镜都为正焦距($f_1' > 0, f_2' > 0$)的光学系统时,如开普勒望远镜,则放大率 M 为负值,系统成倒立的像;而物镜的焦距为正($f_1' > 0$),目镜的焦距为负($f_2' < 0$)时,如伽利略望远镜,则放大率 M 为正值,系统成正立的像.

在开普勒望远镜中,按 §4-1 所述,当只考虑望远镜本身的光学系统时,物镜的框边 MN 为系统的有效光阑和入射光瞳,它被目镜在系统像空间所成的像 $M'N'$ 为系统的出射光瞳. 当把眼睛也考虑在内时,若像 $M'N'$ 小于瞳孔的直径,则上述仍为正确;反之,则眼睛的瞳孔为整个观察系统的有效光阑. 在由伽利略望远镜和眼睛组成的观察系统中,眼睛的瞳孔是有效光阑,物镜的边框是视场光阑和入射窗. 在开普勒望远镜中,视场光阑是特意放在物镜的第二焦平面上的光阑.

当用望远镜观看白云、山峰、海面、高大建筑物以及距离较近的银幕等面光源时,观察者所得的主观亮度,正比于这个物体在网膜上所生的光照度. 按式(5-37),此光照度应为

$$A = \frac{\pi}{4} B\rho' \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \left(\frac{d'}{f'}\right)^2, \tag{6-8}$$

其中 ρ' 为包括光在望远镜中的损耗在内的透射系数,它较用眼睛直接观看时相应的透射系数 ρ 小很多. 此式表明,用望远镜观看面光源所得的主观亮度并不比直接用眼观看所得的主观亮度大;当眼睛的相对孔径 d'/f' 不改变时,对于给定物体,由于 ρ' 小于 ρ,用望远镜反而降低了主观亮度.

若用望远镜观看发光强度为 I 的点光源,如星和远处的路灯,则所得主观亮度正比进入人眼中的光通量:

$$\overline{d\Phi_v} = I\Delta\Omega,$$

或

$$\overline{d\Phi_v} = I\frac{\pi}{4}\left(\frac{D}{r}\right)^2, \tag{6-9}$$

其中 D 为由望远镜和眼睛所组成的观察系统的入射光瞳的直径,r 为被观察的物点到所述入射光瞳的距离. 而用眼直接观看同一发光点时,进入眼睛的光通量

为

$$d\Phi_v = I\frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{r}\right)^2,$$

其中 d 为瞳孔的直径.

光通量 $\overline{d\Phi_v}$ 与光通量 $d\Phi_v$ 的比值,即为用望远镜观看点光源时主观亮度提高的倍数:

$$\frac{\overline{d\Phi_v}}{d\Phi_v} = \left(\frac{D}{d}\right)^2. \tag{6-10}$$

可见,用望远镜观看点光源时,主观亮度提高的倍数等于系统入射光瞳的直径与人眼瞳孔直径的比值的平方. 当瞳孔小于物镜被目镜所成的像 $M'N'$(图 6-16)时,则主观亮度增大的倍数正比于望远镜的放大率的平方值 M^2.

望远镜物镜的视场角 ω 一般都很小,因而与视场角有关的像差也很小,皆可忽略不计. 这样就决定了望远镜物镜所应消除的像差为球差、彗差和色差,从而也就规定了望远镜物镜的结构. 如第四章所述,将不同光学材料制成的正透镜和负透镜组合起来,只要两透镜的焦距和形状合适,则可得校正球差、彗差和色差的光学系统. 图 6-18 所示的胶合透镜(a)和分离的双透镜(b)即为一般望远镜用的物镜.

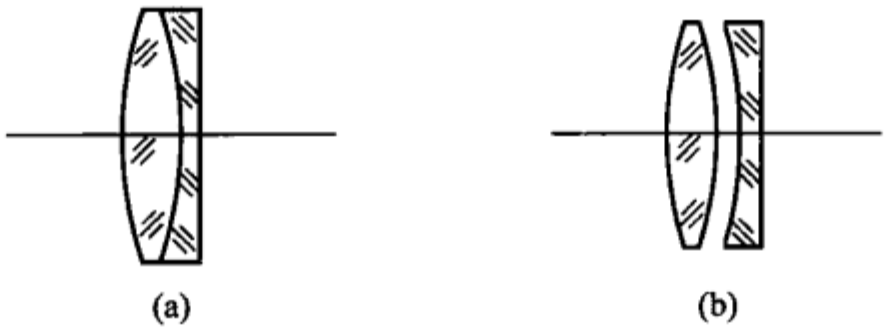
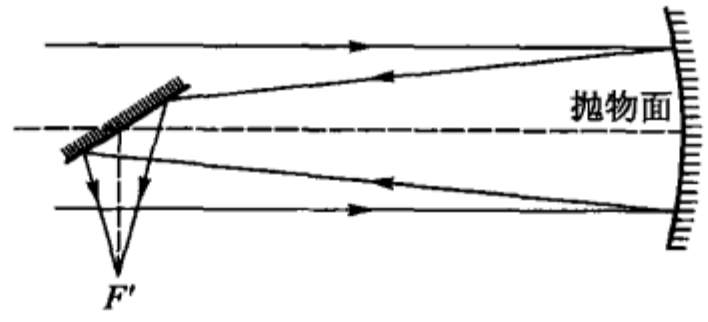


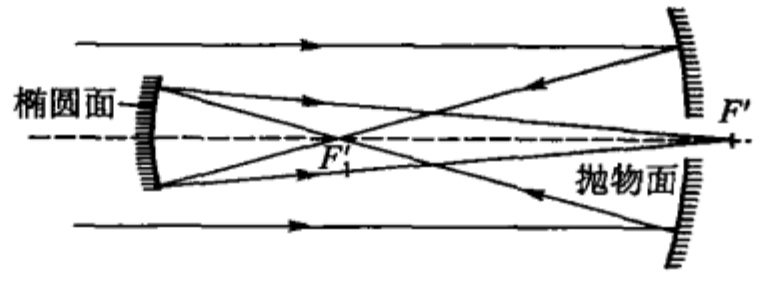
图 6-18

由于反射镜能反射较广的光谱范围的光而无色差,容易获得大孔径,并且当反射镜的形状合适时又可校正球差,所以大孔径的天文望远镜多是由反射镜做成的. 图 6-19(a)是回转抛物面反射镜的望远镜物镜,称为牛顿反射物镜. 平行于光轴的光束在光轴上成无球差的像,然而在光轴之外却有显著的彗差,图 4-13的照片已经很明显地表示出这种情况. 图 6-19(b)是回转抛物面反射镜和回转椭圆面反射镜组成的望远镜,称为格雷果里(Gregory)反射物镜. 设大反射镜的焦点 F_1' 处于椭圆镜的几何焦点之一,则物镜的焦点 F' 将处于椭圆镜的另一几何焦点. 这样可使物镜的球差和彗差达最小,从而在较大相对孔径的情况下,在轴上也能有良好的成像. 更换椭圆反射镜的形状和改变它与给定形状的抛物面镜间的距离,则可改变物镜的总焦距. 此外,观察者不必像使用牛顿反射物镜那样,要到望远镜顶上去进行观察,而在格雷果里物镜的正后方即可进行观察. 图 6-19(c)是回转抛物面反射镜和回转双曲面反射镜组成的望远物镜,称

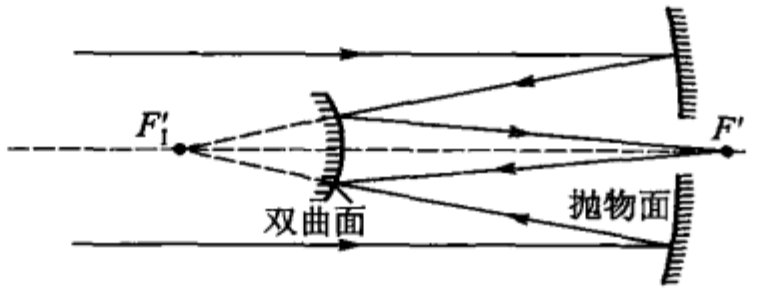
为卡塞格伦反射物镜(Cassegarain reflector).对于给定的抛物面反射镜,通过改变双曲镜的形状及其与大抛物面反射镜间的距离,可使物镜的焦距改变.这种物镜具有与格雷果里反射物镜同等质量的成像和同样的观察位置,但在两者焦距相等的情况下,卡塞格伦反射物镜的筒长可以缩短些.目前,世界上最大的光学望远镜就是这种物镜,其直径约为 5 m,焦距为 16.9 m.



(a)



(b)



(c)

图 6-19

此外还有用球面镜做成的望远镜物镜,称为赫谢耳(Herschel)反射物镜,它只能是相对孔径很小的物镜,因为较大相对孔径的球面反射镜将有显著的球差.

1930 年,施密特(Schmidt)为校正由球面反射镜产生的球差,在球面反射镜的曲率中心处加一个非球面的透镜 S(图 6-20),从而第一次实现了色差很小、而球差得到了校正的光学系统,这种物镜称为施密特物镜.平行于光轴的光,在此物镜中会聚于靠近球面反射镜焦点 F' 的 $\overline{F}'$ 点.

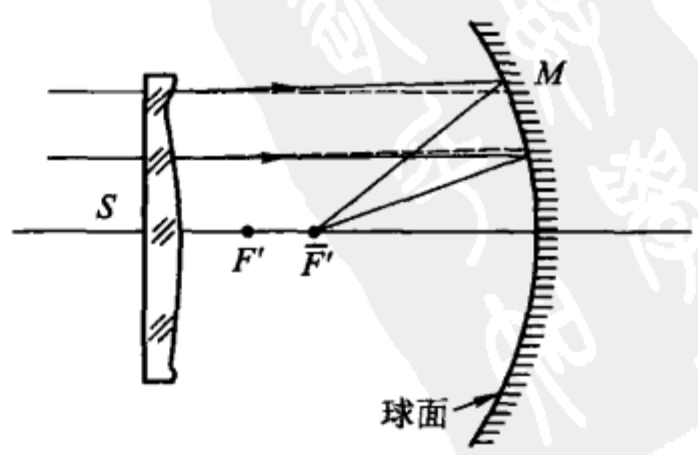


图 6-20

在 §4-3 所述的包沃斯-马克苏托夫物镜是第二次世界大战期间制成的折反光学系统,由于所用的透镜是由球面组成的,所以称为新折反系统,以区别含有

非球面的施密特折反光学系统;球面透镜在制造上比施密特的非球面透镜方便得多.

折反型望远镜现在已有很大的发展,例如,许多新型的大地测量用的光学仪器,已开始使用新折反光学系统.

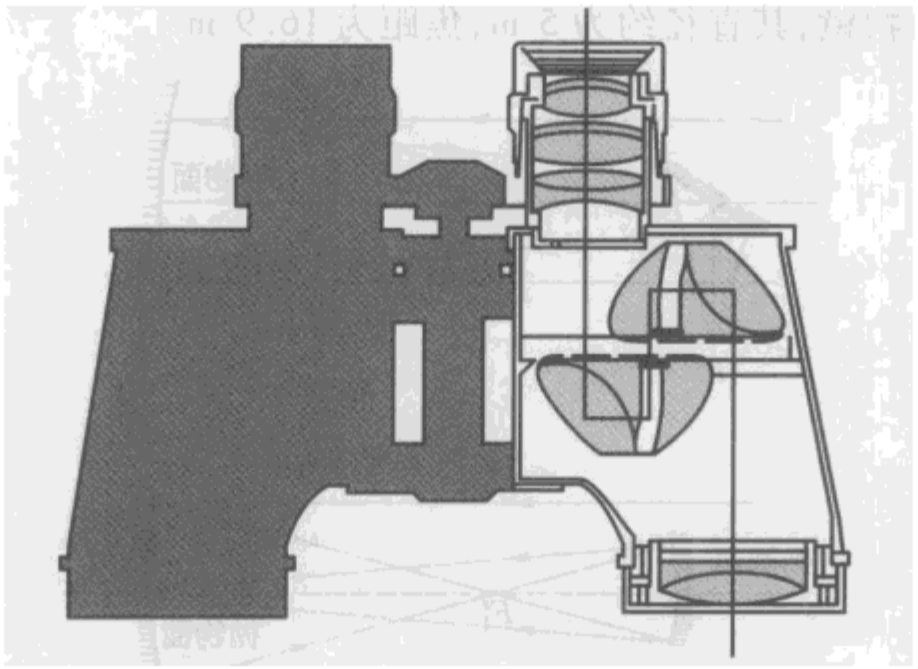


图 6 – 21

为观剧和军事目的常需要正像的有立体感的望远镜,为此产生了尺寸紧凑、性能良好的所谓双筒望远镜. 图 6 – 21 所示的照片就是一架由胶合透镜作物镜,波罗组合棱镜作正像器和伊尔福目镜组成的双筒望远镜,在这种望远镜上常标注 6 ×30 或 8 ×50 等字样,前一个数字代表望远镜的倍数(如 6 ×,8 ×),后面的数代表物镜的入瞳直径(如 30 mm,50 mm).

§6 – 5　照相机和幻灯机

照相机的主要部分是照相物镜、暗箱和放置感光板(或胶片)的支架. 照相物镜使空间物体在某一平面(定位平面)上的投影或某一平面上的物成实像于感光板上;感光板通过光化学作用记录下在它上面所成的像,经显影和定影后得负片;暗箱使物镜到感光板的空间以及感光板本身和其他光线隔离. 物镜中有可变孔径的光阑,俗称光圈,用它来控制在感光板上成像的光照度及改变空间成像的景深. 图 6 – 22 画出了照相机中的光路,其中物体 AB 被物镜 L 成一倒立实像 $A'B'$ 于感光板上,感光板的框子决定着成像的视场角 ω.

电影放映机和幻灯机是与照相机有“相反”作用的光学仪器. 照相机为的是拍照空间或平面的像;而电影放映机和幻灯机,则是将已拍制好的电影胶片或合适的图片和幻灯片放映在较大的银幕上,供人们观赏. 在电影机和幻灯机中,主要部分是聚光器和使胶片成像在银幕上的照相物镜. 图 6 – 23 中,S 是光源,通

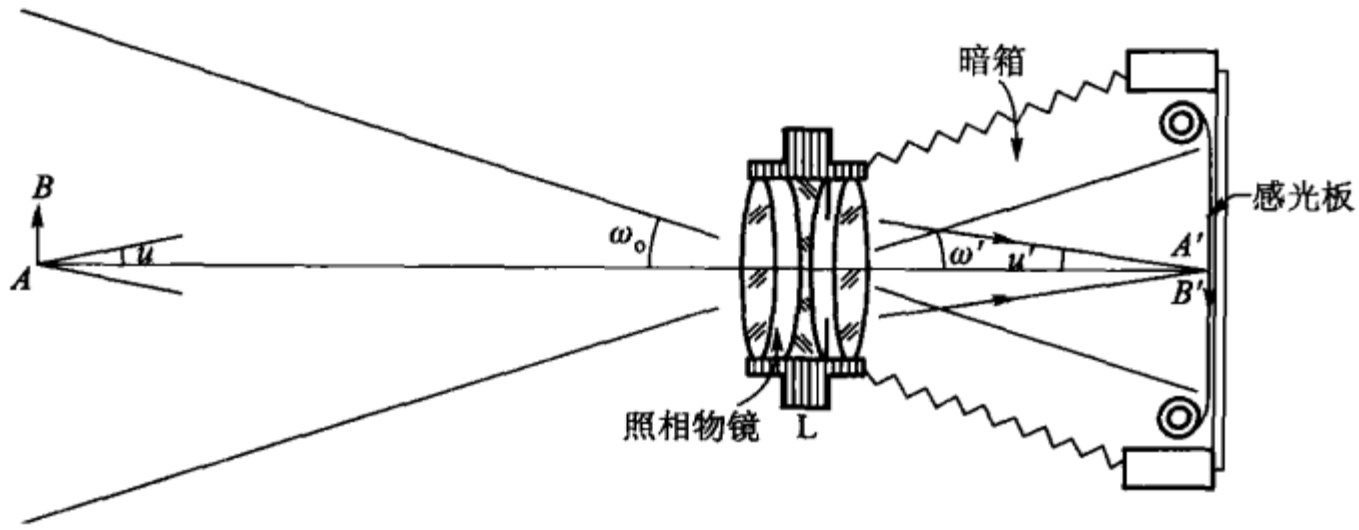


图 6－22

常为电弧或功率很大的白炽灯泡；M 是由两个平凸透镜组成的聚光器；L 是照相物镜，它把被照明的电影片 P 成像在银幕 P′上，从聚光器出来的光束会聚于照相物镜的入射光瞳的中心，这光束的张角 ω 决定了银幕上成像的范围.

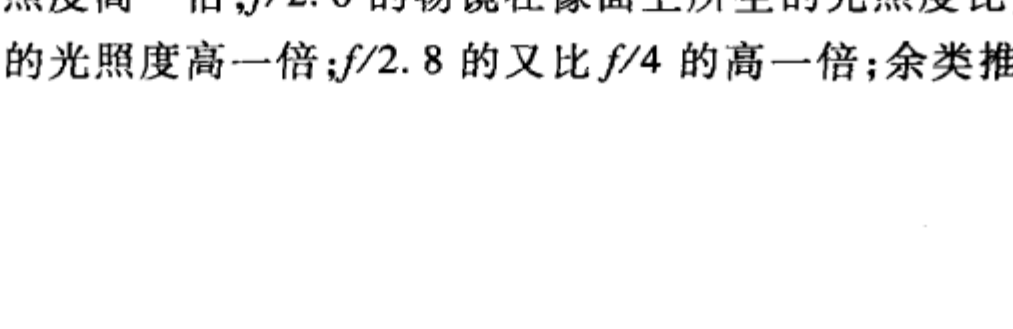


图 6－23

不论照相机还是放映机，它们成像质量的好坏、视场、放大率和像面上的光照度等，都取决于所用的照相物镜的性能. 而一般照相物镜的视场、放大率和像面照度的性能可由焦距、相对孔径和视场角这三个参量来描写.

照相物镜的焦距决定着物与像的比例(垂轴放大率 β). 在照相机中，除显微照相机外，其余各种照相机的垂轴放大率均小于 1. 一般民用照相机，其物镜焦距不外是 5 cm 的、7.5 cm 的或 10 cm 的，有些有特殊用途的照相物镜，其焦距可达 50～60 cm. 总的来说，与望远镜物镜相比，照相物镜的焦距都较小.

照相物镜的孔径与其焦距的比称为相对孔径，它决定像面的照度和空间成像的景深. 按(5－35a)式，对于光亮度为 B 的物体，在相对孔径为 D/f 的照相物镜的焦面上，所得像的光照度为

$$A=\frac{\rho\pi}{4}\left(\frac{D}{f}\right)^2 B, \tag{6-11}$$

可见，像的照度正比于相对孔径的平方. 例如，相对孔径为 1∶1.4(写成 $f/1.4$)的物镜，其在像面上是所生的光照度较相对孔径为 1∶2.0(写成 $f/2.0$)的物镜在像面上所生的光照度高一倍；$f/2.0$ 的物镜在像面上所生的光照度比 $f/2.8$ 的物镜在像面上所生的光照度高一倍；$f/2.8$ 的又比 $f/4$ 的高一倍；余类推. 照相物镜的

光圈数就是按照这样的数字刻成的. 有时将物镜相对孔径的平方值称为物镜的集光本领.

按 §5 - 2,空间成像的景深与入射光瞳的直径成反比. 对于焦距相同的物镜,相对孔径愈小,则其成像的景深愈大. 所以,增大景深和提高像的光照度对相对孔径提出了互相矛盾的要求. 实际上只能根据拍照的条件,来选用照相物镜的相对孔径.

照相物镜的视场角决定成像的空间范围,一般多用能成清晰像的底片的尺寸来表示它. 照相物镜就其总体来说,是大视场角的光学系统. 一般照相物镜的视场角 2ω 为 50 ~ 60°,有的航空照相物镜的视场角 2ω 可达到 120°;而一般望远镜物镜的视场角(2ω)只有 1 ~ 2°,广角望远镜的视场角也不过只有 10°,这是照相物镜与望远镜物镜的区别.

由于照相物镜的相对孔径和视场角都较大,所以在照相物镜中有第四章所述的各种像差. 为使照相机能拍出高质量的像,照相物镜必须是对各种单色像差和色差行过良好校正的光学系统. 因此,一般照相物镜是较复杂的,多用数个透镜组成. 虽然如此,也还不能取得像望远镜或显微镜中所得到的那样好的像,只不过由于一般感光板不如视网膜那样细致和灵敏,所以一般照相物镜虽有较大的剩余像差,在实际上还是可以允许的.

在要求有令人满意的成像的条件下,物镜的相对孔径、视场角和焦距是不能任意选取的. 例如,长焦距的物镜,其相对孔径和视场角都不宜大,相反,短焦距的物镜可有大的相对孔径和视场角.

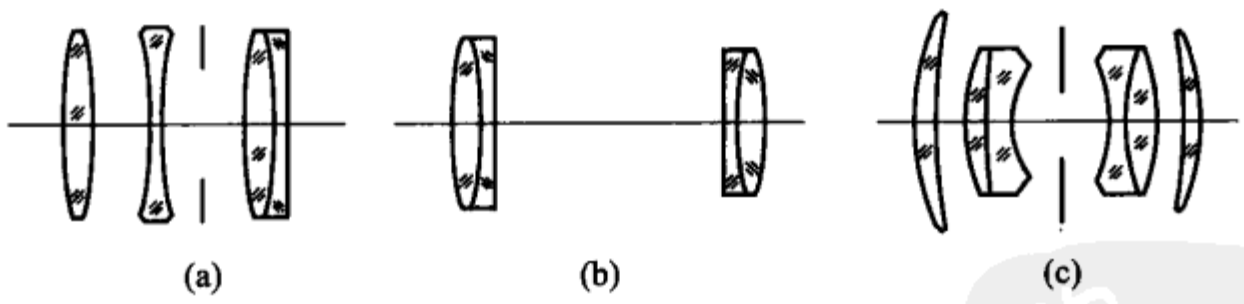


图 6 - 24

现代照相物镜已有百余种,图 6 - 24 只画出了几个常见的照相机物镜. 图 6 - 24(a)所示为天塞(Tessar)物镜,是 $f/3.5 \sim f/2.8$ 和 $2\omega \approx 50° \sim 60°$ 的著名物镜,多用在各种照相机及幻灯机上,它是德国蔡司光学仪器工厂鲁得洛夫(Rudolof)首先设计成的,现在已流行于各国. 图 6 - 24(b)所示为佩茨瓦尔(Petzval)物镜,它是由两个可作为望远镜的物镜的胶合透镜组合起来的,结构简单,而在视场不大时可得较大的相对孔径,它已广泛地应用于放映机中. 图 6 - 24(c)所示是一个较高级的照相机所用的大相对孔径的照相物镜,称为亥诺(Xenan)物镜(具有这种物镜的照相机的剖视图如图 6 - 25 所示).



图 6-25

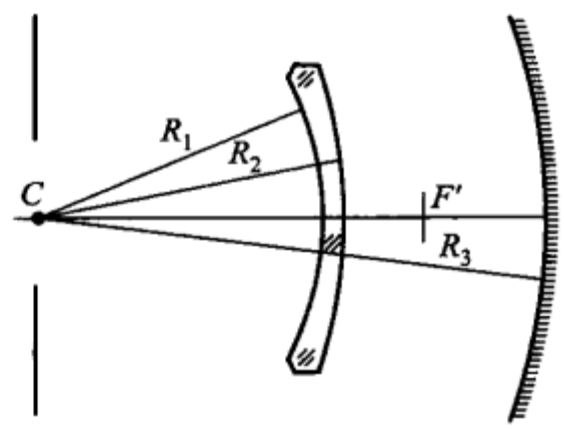


图 6-26

除上述由透镜组成的照相物镜之外，近代为某些特殊目的，已开始采用折反型照相物镜，图 6-26 所示为包沃斯共心折反光学系统，在该系统中球面镜的曲率中心 C 与校正系统像差的负透镜的两表面的中心重合，并且在中心 C 处放一光阑. 这样，通过光阑中心向各方向的光线都垂直于折射表面和球面镜，可视为光轴，因而不存在轴外光线，于是也就没有像散、彗差、畸变等像差. 不过，此共心物镜对无限远物平面所成之像，并非在一平面上，而是在以其焦距为曲率半径的一个球表面上. 在这种情况下，物镜唯一可能的单色像差是球差，而这可由薄透镜的球差和面镜的球差相互抵消. 这种物镜的相对孔径可达 $f/0.8$ 或更大，为拍照亮度很低的物体多用这种照相物镜，例如，拍摄荧光屏上 X 射线像用的照相机的物镜.

* §6-6 变焦距物镜

以上所述各种物镜都是定焦距物镜，因为每一个物镜只有一个确定不变的焦距(f 和 f'). 除此之外，还有另一类称之为变焦距物镜(zoom lens)，它是焦距可连续变化而像面保持不动的物镜. 照相物镜(也包括望远物镜和显微物镜)由定焦距发展到变焦距，是光学领域一个很重要的成就，也是在模拟人眼方面的一个进步，它显示着现代光学系统的发展趋势.

由光学系统的垂轴放大率 $\beta = f'/x$ 的关系式可知，对定焦距物镜，要想在像面上得到不同放大率的像，必须改变被摄物体到物镜第一焦点的距离 x. 这是一般照相都照办的原理，前面 §3-5 的例题 2 和例题 3 正说明了这一点. 但是，在

许多情况下，例如，在用电视和电影来播送或记录一场球赛、一场民兵演习以及其他一些空间范围较大的现场等，为增强观众的感受力和提高传递“信息”的效果，需要不断地，甚至连续不断地，时而急剧、时而均匀缓慢地改变被摄景物在画面上成像的大小. 如果单靠定焦距物镜随着对象的大小的变化要求而改变它跟物的距离，则显然是不容易办到的.

早些时候，一个折中的解决办法，就是在一个摄像机或照相机上安装几个不同焦距的定焦距物镜，由更换物镜的方法（固定 x 而改变 f'）来解决不同放大率的像的拍摄问题. 不过，这只限于有限的几种焦距，却不能连续改变，也还不能完全满足需要. 所以，迫切地需要创造一种焦距可连续改变而像面不动的变焦距物镜. 事实上，人们对变焦距物镜的一般原理，在几十年前就研究过，只是由于它在设计和制造上存在着当时还不能克服的困难，所以才没有造出变焦距物镜.

由于电子计算机在光学设计中的应用、光学多层介质膜用于增透光的技术的成功以及精密机械加工的进步等，才使折射表面数少则 20 几面，多则 40 几面的复杂的变焦距物镜的生产成为现实. 目前，已有多种性能良好的变焦距物镜，广泛地应用于电视、电影摄影、望远摄影（如人造卫星摄影）和显微摄影等科技领域，以及导弹实验、追迹观察、火箭记录等方面.

变焦距物镜，可按其补偿方式的不同而分为光学补偿式和机械补偿式两类，这里仅就用于电视摄像中的所谓机械负组补偿式变焦物镜的近轴光学原理介绍如下.

机械补偿式变焦距物镜（如图 6－27），一般由调焦组（又称前固定组）L_1、变倍组 L_2、补偿组 L_3 和聚焦组（又称后固定组）L_4 组成. L_3 为正透镜组者称机械正组补偿，L_3 为负透镜组者称机械负组补偿（图 6－27 所示为负组补偿）.

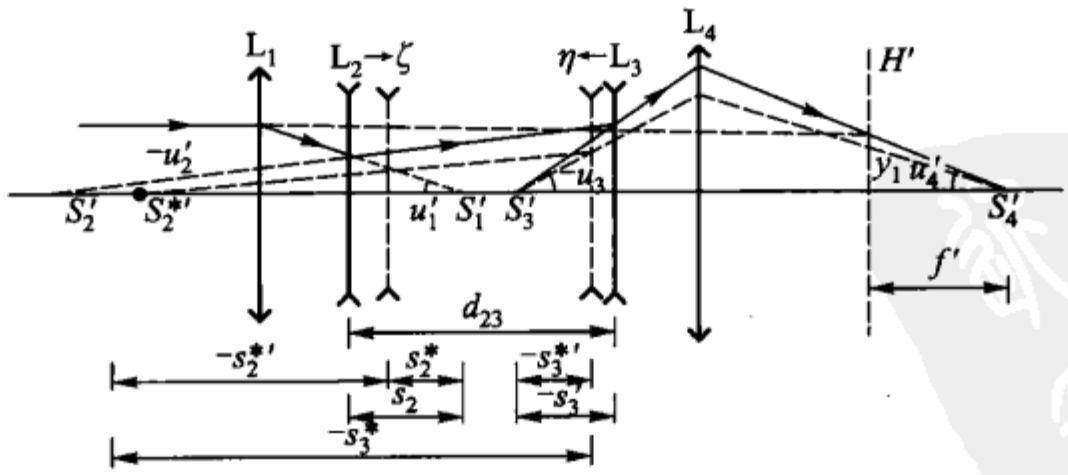


图 6－27

透镜组 L_1 将被摄物体成像于一固定点 S_1'（参看 §3－5 例题 2）给透镜组 L_2 提供一个虚物，故 L_1 称调焦组；透镜组 L_2 将位于 S_1' 的虚物成像于 S_2'，放大率为 β_2，当 L_2 相对于 S_1' 的距离连续改变时，β_2 就随之连续变化，同时 S_2' 的位置亦随之移动，称 L_2 为变倍组；也就是，由 L_2 相对于 S_1' 的距离的连续变化获得了 β_2 的

连续改变，但可惜的是 S_2' 点不是不动的. 为此，用另一透镜组 L_3 把 S_2' 处的像成像于 S_3'，放大率为 β_3，并且随着 S_2' 位置的改变令 L_3 对 S_2' 的距离作相应的移动，β_3 改变而确保 S_3' 不动，故 L_3 称为补偿组. 这样，通过变倍组 L_2 和补偿组 L_3 按一定关系的相对移动就可以得到 $\beta_2\beta_3$ 连续变化的像并且像面稳定在 S_3' 上. 所谓像面稳定不动，实质上就是要在 L_2 和 L_3 改变相对位置时保持 $S_1'S_3'$ 的距离不变. 透镜 L_4 把位于 S_3' 处的虚像以一固定的放大率 β_4 成实像于最后像空间 S_4' 处，故 L_4 称为聚焦组或后固定组.

这样，由 L_1、L_2、L_3 和 L_4 组成的系统的总焦距，如图 6-27 得

$$f' = \frac{y_1}{u_4'} = \frac{y_1}{u_1'} \cdot \frac{u_1'}{u_2'} \cdot \frac{u_2'}{u_3'} \cdot \frac{u_3'}{u_4'} = f_1'\beta_2\beta_3\beta_4, \tag{6-12}$$

其中 f_1' 为调焦组的焦距. 由此可见，系统的合成焦距等于调焦组焦距 f_1' 跟 $\beta_2\beta_3\beta_4$ 的乘积；只要 $\beta_2\beta_3$ 能连续改变，系统的焦距 f' 就能以同一比例作连续的改变.

设变倍组 L_2 向 S_1' 移动一个距离 ζ，为保证像面不动，则补偿组应随之作一位移 η. 决定 L_2 和 L_3 相对位置的 ζ 与 η 应有如下导出的相互关系.

变倍组移动距离 ζ，S_1' 通过 L_2 所成的像 $S_2^{*\prime}$ 的位置可由下式求出：

$$\frac{1}{s_2 - \zeta} + \frac{1}{f_2'} = \frac{1}{s_2^{*\prime}}. \tag{6-13a}$$

为了保持像面不动，要求由此式决定的像 $S_2^{*\prime}$ 经过补偿组之后亦成像于 S_3'，为此 L_3 应向 S_3' 点作一位移 η，此 η 值应满足：

$$\frac{1}{s_2^{*\prime} - d_{23} + \eta + \zeta} + \frac{1}{f_3'} = \frac{1}{s_3' - \eta}. \tag{6-13b}$$

若以 $x' - f' = s'$ 和 $x + f = s$ 的定义，把式(6-13a)和(6-13b)改写成 $x_2x_2' = -f_2'$ 和 $x_2x_3' = -f_3'$ 的形式，则有

$$x_2' = -\frac{f_2'^2}{f_2' + s_2 - \zeta} \tag{6-14a}$$

和

$$(x_2' + f_2' - d_{23} + \zeta + f_3' + \eta)(s_3' - f_3' + \eta) = -f_3'^2, \tag{6-14b}$$

将式(6-14a)代入式(6-14b)中，展开并整理之，得

$$a\eta^2 + b\eta + c = 0, \tag{6-15}$$

其中

$$a = f_2' + s_2 - \zeta,$$

$$b = -\zeta^2 + (d_{23} - s_3' + s_2)\zeta + (f_2's_3' + s_2s_3' + f_2's_2 - d_{23}f_2' - s_2d_{23}),$$

$$c = [(d_{23} + s_2 - \zeta)(s_3' - f_3') - s_3'f_3']\zeta.$$

所以，补偿组 L_3 的位移量 η 应如下式决定：

$$\eta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{6-16}$$

显然，只要预先选定 f_2'，f_3'，d_{23}，s_2 和 s_3'，即可按上列诸式算出 ζ 和 η 值. 一般来

说，当 L_2 作线性位移时，对应的 L_3 位移是一个二次曲线.

图 6－28 所示为彩色电视机用变焦距物镜光学系统示意图.

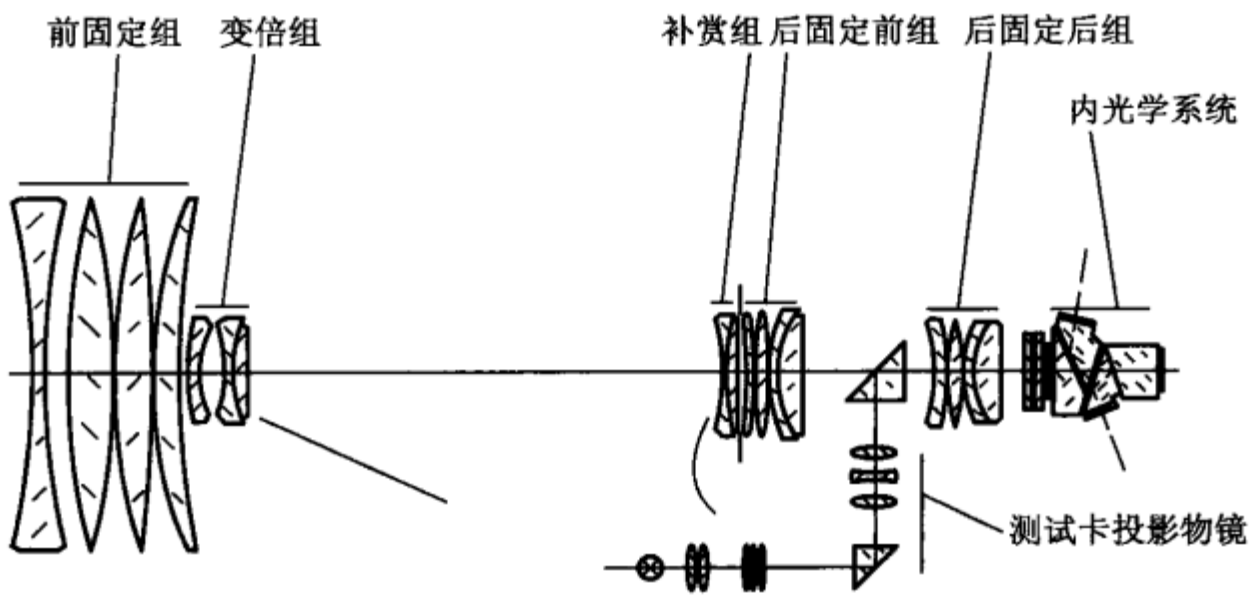


图 6－28　彩色电视机用变焦距光学系统示意图

* §6－7　棱镜光谱仪

光谱仪是能将混合光按不同波长分成谱的光学仪器，它由准光镜系统、色散系统和摄谱（或望远镜）物镜系统组合而成. 用棱镜作色散系统的光谱仪，称为棱镜光谱仪，用光栅或干涉仪作色散系统的光谱仪，则分别称为光栅光谱仪和干涉分光仪. 本节只限于讨论前者，而后两者将分别在衍射与干涉的有关章节中进行讨论.

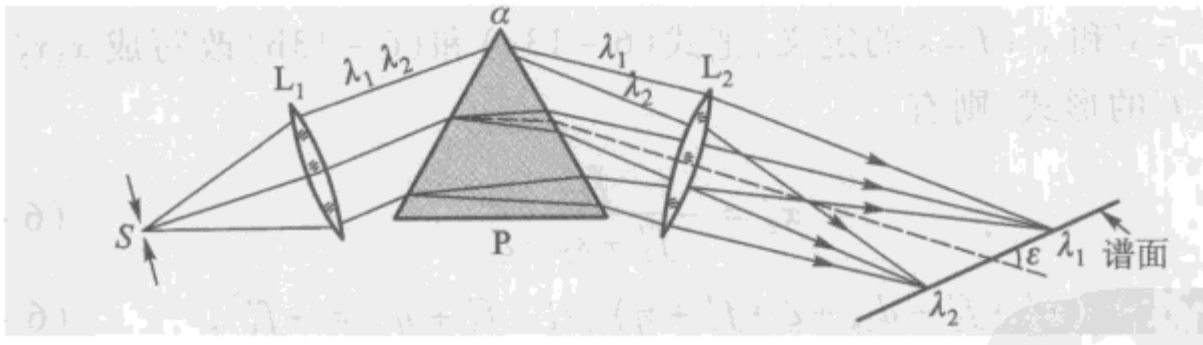


图 6－29

图 6－29 为棱镜光谱仪的光路图. 准光镜系统包含准光物镜 L_1 和在它焦面上的狭缝 S，准光物镜使自狭缝 S 发出的混合光成为平行光；棱镜 P 依据它的折射率随光波波长而变的性质，将沿同一方向投射到它的第一折射面的混合光，分成沿不同方向传播的各组分光；摄谱物镜（或照相物镜）L_2 将这些分布在不同方向上的各种波长（$\lambda_1, \lambda_2, \cdots; \lambda_1 > \lambda_2, \cdots$）的平行光会聚于焦面上，从而获得按波长次序排列的各组分光的狭缝的像. 这一系列的各种波长光的狭缝的像称为光谱. 按几何光学观点，若混合光中各波长 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ 的光是互相分离的，则当狭缝 S 无限细和整个光谱仪的光学系统完善时，所得的狭缝像呈明晰的线状，每一这

样的线状的狭缝像,都称为谱线,各谱线所构成的面,称为谱面.

若在棱镜后是用望远镜观察光谱,则该光谱仪称为分光镜(spectroscope);若在棱镜后是用照相物镜和感光板进行摄谱,则该光谱仪称为摄谱仪(spectrograph);若在棱镜后先以望远镜物镜将光谱呈在它的焦面上,然后在该焦面上放置另一狭缝以分离出某一波长的光,这种光谱仪称为单色仪(monochromator).

表征光谱仪基本性质的有这样四个参量:光谱的波长范围、色散、分辨本领和决定谱面照度的仪器的集光本领. 其中分辨本领决定于光在仪器中的衍射,这留在衍射一章中再讨论.

由光谱仪所得光谱的波长范围,决定于光谱仪光学系统所用的光学材料. 例如,用石英为棱镜和透镜材料制成的光谱仪,可得紫外光的光谱;用光学玻璃为棱镜和透镜的材料时,可得可见光的光谱;用氯化钠(NaCl)晶体制成的棱镜,可得波长到 15 μm 的红外光谱;用溴化钾(KBr)晶体棱镜,可得波长到 25 μm 的红外光谱.

光谱仪的色散能力由线色散 $\mathrm{d}l/\mathrm{d}\lambda$ 来表示,它等于波长差为 1 单位的两光谱线在谱面上的间隔. 此值愈大,表示该光谱仪的色散能力愈大. 而光谱仪的色散决定于棱镜的角色散,将平行光会聚成谱线的摄谱物镜的焦距以及谱面对于物镜光轴的倾角等.

棱镜的角色散 $\mathrm{d}\delta/\mathrm{d}\lambda$ 在数值上等于使波长差为 1 单位的两光在空间上所分开的角度差. 这个差值随不同偏向角而异. 为近似地了解棱镜的角色散,我们只限于讨论棱镜对处于最小偏角的光线的角色散. 将公式(3-12)对波长微分,则得棱镜的角色散:

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha+\delta}{2}}\cdot\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}\cdot\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda},\tag{6-17}$$

其中 n 为棱镜介质对于最小偏向角的光线的折射率,$\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda$ 为棱镜介质在该光线所对应的波长附近的色散率. 由上式可见,棱镜的折射角 α 和色散率 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda$ 愈大,则棱镜的角色散亦愈大. 当已知棱镜的角色散、物镜 L_2 的焦距 f_2' 和谱面对于物镜光轴的倾角 ε(图 6-29)时,则光谱仪的色散可由下式算出:

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}\lambda}\cdot f_2'\cdot\frac{1}{\sin\varepsilon},$$

则

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}\cdot\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\cdot\frac{f_2'}{\sin\varepsilon}.\tag{6-18}$$

可见,为获得大色散的光谱仪,应该在有大角色散的同时,采用长焦距的物镜;并

且准光镜物镜 L_1 的色差和摄谱物镜 L_2 的色差使光谱面与物镜的光轴的夹角 ε 变小，这也是一个十分有利的因素.

对于给定亮度 B 的狭缝，谱面上的照度 A 决定于光谱仪光学系统的透射系数 ρ、谱面的倾斜角及摄谱（或望远镜）物镜 L_2 的相对孔径 D_2/f_2' 的平方，即

$$A=\frac{\pi}{4}\rho B\left(\frac{D_2}{f_2'}\right)^2\sin\varepsilon,$$

其中乘积 $(D_2/f_2')^2\sin\varepsilon$ 有时称为光谱仪的集光本领. 可见，物镜 L_2 的相对孔径愈大，仪器的集光本领愈强.

图 6－30 所示的照片为普通物理实验室中常用的一种我国制造的摄谱仪的外貌.

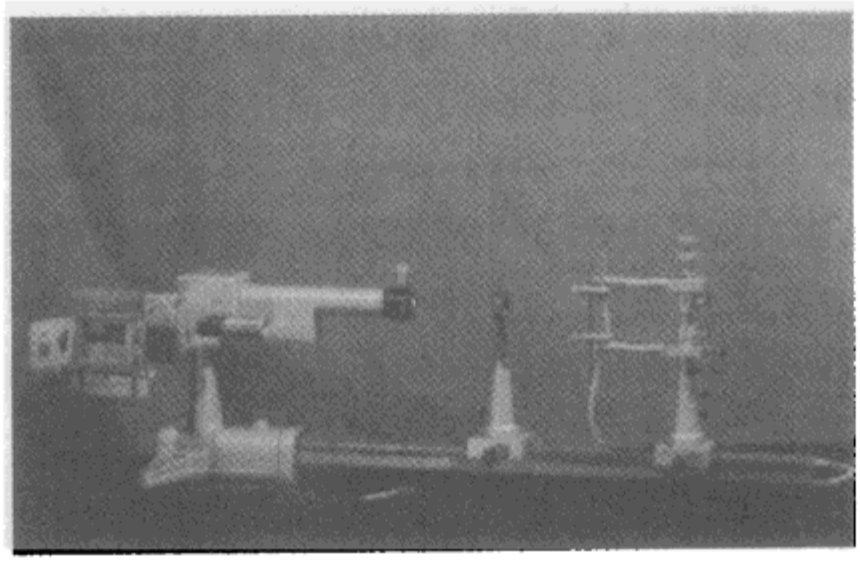


图 6－30

习　　题

1. 一天文望远镜，物镜的焦距 40 cm，相对孔径为 $f/5.0$. 今测得出瞳直径为 2 cm，试求望远镜的放大率和目镜的焦距.

2. 一伽利略型望远镜，物镜和目镜相距 12 cm. 若望远镜的放大率为 4×，问物镜和目镜的焦距各多少？

3. 拟制一个 3× 的望远镜，已有一个焦距为 50 cm 的物镜，问：(1) 在开普勒望远镜中，(2) 在伽利略望远镜中，目镜的光焦度和物到目镜的距离各多少？

4. 一架显微镜，物镜焦距为 4 mm，中间像成在物镜第二焦点后面 160 mm 处. 如果目镜是 20× 的，问显微镜的总放大率是多少？

5. 拟制一个 10× 的惠更斯目镜（如图 4－26），假定两片都用 $n=1.5163$ 的 K9 玻璃. 试求目镜两片各面的曲率半径和间隔.

6. 拟制一个 10× 的拉姆斯登目镜（如图 4－27），假定两片都用 $n=1.5163$ 的 K9 玻璃，$f_1'=f_2'$，$d=(f_1'+f_2')/2$. 求目镜两片各面的曲率半径和间隔.

7. 一架开普勒型望远镜，已知物镜焦距为 200 mm，目镜焦距为 25 mm；为了正像，在物镜

第二焦点前加一个波罗棱镜组，它在光路上相当于一块厚度为 45 mm 的平行平面玻璃板（$n=1.5$）. 问这样的正像望远镜的总长该多少毫米（假定物镜和目镜都是薄透镜）.

8. 试比较 $f/2.8$ 镜头和 $f/0.9$ 镜头在像面上的照度. 假定两镜头有相等的透过率并且用于拍摄同一物体，若 $f/2.8$ 镜头需曝光 0.2 s，问用 $f/0.9$ 镜头时需曝光多少秒？

9. 用 $f/2.0$ 照相机以（1/100）s 的快门拍摄某一物体，当底片用 21 度（100 ASA①）时，摄得的底片在光度方面很满意. 为了提高景深和减小底片的颗粒度，光圈拟改为 $f/2.8$ 和底片改为细致的 50ASA（为 100ASA 灵敏度的 50%）的底片. 问快门应取多少秒的？

10. 一台光路如图 6－31 所示的“恒偏向摄谱仪”，已知 A 角为 30°，准光物镜 L_1 和照相物镜 L_2 的焦距均为 280 mm. 若棱镜的玻璃为 ZF2（$n_D=1.672\ 50$，$n_e=1.677\ 62$），试求该仪器对绿光（$\lambda_e=546.1$ nm）的线色散的倒数值.

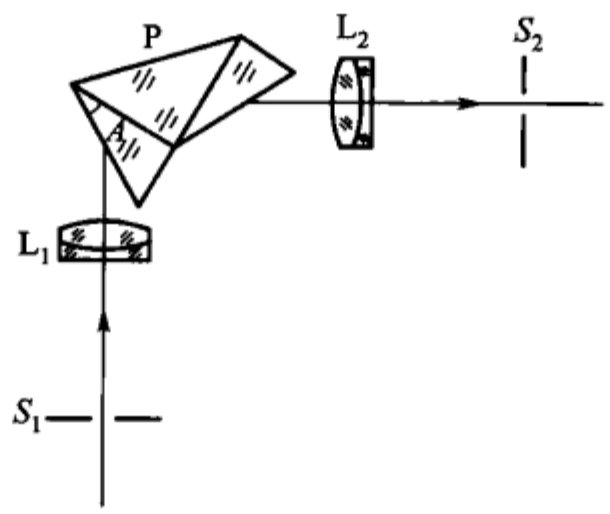


图 6－31

11. 在上题中，若 A 角改为 31.5°，准光物镜和照相物镜的焦距均为 500 mm，棱镜玻璃为 ZF3（$n_D=1.717\ 20$，$n_e=1.723\ 17$）. 试求对绿光（$\lambda_e=546.1$ nm）的线色散的倒数.

12. 某人对在其眼前 2.5 m 的物看不清楚，问需要配上怎样光焦度的眼镜才能使视力正常？另一人对在其眼前 1 m 以内的物看不清楚，问需要配上怎样光焦度的眼镜才能使视力正常？

① ASA 为美国度量衡制度协会的缩写（American Standard Association）.

第七章

光的干涉

§7-1 波动光学和光波

前几章中,我们依据几何光学的基本原理研究了光的一些现象、性质和应用.在那里所用的光线、光束、物点和像点等概念,不过是关于光的表观的抽象,并未涉及光的内在属性,所得的结果对于光的客观规律来说,只具有近似的意义.

为了解光的各种现象的实质,洞悉光的属性以及有效地利用它,我们还必须研究光的波动性和光的粒子性,这部分光学,称为物理光学.以光是一种波动为基础的物理光学,称为波动光学;以光是一种粒子为基础的物理光学,称为量子光学.

举凡一切事物的共性总是寓于个别事物的个性中,共性需通过个性才能表现出来.对于光来说,其波动性寓于光的干涉、衍射以及偏振等现象之中,而且只能通过这些现象表现出光的波动性.所以,通过这些现象的研究,将能获得关于光的基本属性之一的光的波动性的基本知识.

这一章将着重介绍光的干涉的原理,下一章讨论关于光的干涉的应用.为此让我们首先重温关于波动的一些概念.

波的种类很多,有一维的弦振动所产生的波;有二维的薄膜或液面的振动所产生的声波或液面波;有在空间向所有方向传播的电磁波和冲击波等.它们虽具有不同的内容,但作为波来讲,却可用若干个共同的特征量,如波长、频率、波速、振幅和相位等来描写它的特性.

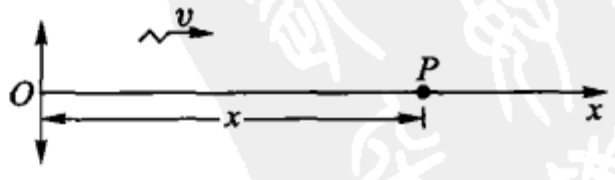


图 7-1

在图 7-1 中,设 O 点在作一振动,其位移 y 为时间 t 的周期函数 $f(t)$.当此振动以一定的速度 v 沿某一方向(如 Ox 方向)传播时,则在该方向上的所有点都将重复 O 点的动作,只是在时间上落后一个时间间隔 τ,振动的这种传播过程形成

波. 对于在波的传播方向上到 O 点的距离为 x 的任一点 P,它在某一瞬间 t 的位移与 O 点在此瞬间之前某一时间间隔 $\tau = x/v$ 的位移相同,即其位移为

$$y = f(t-\tau) = f\left(t-\frac{x}{v}\right). \tag{7-1}$$

此式一方面表示了对于同一瞬间 t、不同 x 的诸点的位移;另一方面也表示了对于给定 x 的某一点在不同瞬间的位移. 此式描写了振动以速度 v 沿 x 方向的传播过程,故称为波方程式.

波方程式可以是时间与空间的任意周期函数,因为任意的周期函数均可展开为简谐函数的级数,为方便计而又不失一般性,我们假定它是一个简谐周期函数. 于是,波方程式(7-1)可写成

$$y = a\sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)\right], \tag{7-2}$$

其中 a 称为波的振幅,T 为振动的周期,v 为波的传播速度(简称波速),$\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)$ 为 P 点在 t 瞬间的相位,$-\frac{2\pi x}{Tv}$ 为 P 点的初相位,常记以 α.

在波的传播方向上距 O 点分别为 x_1 和 x_2 的两点,于同一瞬间,它们的相位差为

$$\delta = \frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x_1}{v}\right) - \frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x_2}{v}\right) = \frac{2\pi}{vT}(x_2-x_1). \tag{7-3}$$

可见,对于给定周期和以一定速度传播的波,其在传播方向上的两点的相位差决定于这两点在波的传播方向上的间隔. 我们定义在波的传播方向上相位差为 2π 的两点的间隔为波长,以 λ 表示. 按式(7-3)得

$$\delta = 2\pi = \frac{2\pi}{vT}\lambda, \tag{7-4}$$

即

$$\lambda = vT.$$

对于由有固定周期的振源所发出的波,不论在什么介质中传播,其周期 T 或其频率 $\nu = 1/T$ 总是不变的;但在不同介质中其传播速度却不同. 由此得出,同一频率的波在不同介质中将有不同的波长.

利用式(7-4),可将波方程(7-2)改写成

$$y = a\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\right], \tag{7-5}$$

这是经常采用的波方程式的写法.

以后我们将会看到,以复数形式表示波方程式,在处理波的各种现象时更为简捷. 由欧拉(Euler)公式知,三角函数和复数之间有下列关系:

$$e^{i\delta} = \cos\delta + i\sin\delta,$$

其中 $i = \sqrt{-1}$,可见 $\cos\delta$ 和 $\sin\delta$ 分别是复数 $e^{i\delta}$ 的实数部分和虚数部分.

显然式

$$y = ae^{i2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)} \tag{7-5a}$$

中的虚数部分就是(7-5)式的波方程式. 所以,只要我们记住取式(7-5a)中的虚数部分,就可以用该式表示波方程. 同样,若取式(7-5a)中的实数部分,则有

$$y = a\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\right] \tag{7-5b}$$

此式也是常用的波方程式,事实上它与式(7-5)表示的波只有$\frac{\pi}{2}$的相位移动.

本书中,在用复数形式表示波方程时,我们统一采用复数的虚数部分,即采用正弦波的表示方法.

对于光波,理论和实验都已证明,它是电磁波的一种,因此,上述关于波动的一般概念对光波也是成立的.

现在让我们来讨论式(7-5)对光波而言所代表的物理意义.

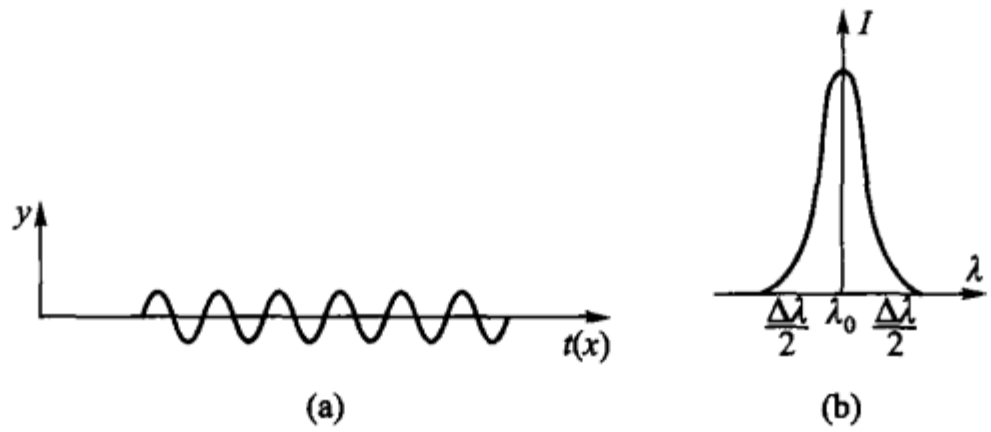


图 7-2

上述波方程式,按其形式是代表振幅为常数 a、波长为 λ 的沿 Ox 方向传播的单色平面波①(亦即平行单色光),并且是一个无限长的正弦波,这是一种理想的情况,而实际上这样的单色光波并不存在. 因为即使在极稀薄的气体放电管中,原子所发的光,也漫无规则. 在较典型的情况下,光波是由一段段有限长的、振幅为常数或缓慢变化的正弦波组成的,各段之间无固定的相位关系. 每一段在一定范围内是正弦波,在它前后振幅都为零,如图 7-2(a)所示,我们称它为波列. 这是由原子发光只发生在有限的时间 Δt 内所决定的. 所以光波都是由波列组成. 这是对实际光的一种看法. 另一种看法是,实际光并不是只含有一种波长的光,即不是单色光,而是由在波长 λ_0 附近、在 $\Delta\lambda$ 宽的范围内、许多不同波长的光按一定的强度分布组合而成的,如图 7-2(b)所示. 我们用 $\Delta\lambda$ 表征光的单

① 在波动的讨论中,把有相同相位的点构成的面称作波面,这里的平面波就是指相位相同的点构成的面为垂直于 x 方向的平面.

色性. $\Delta\lambda$ 愈小,分布曲线愈窄即表示光的单色性愈好. 这两种看法是完全等同的,因为对如图 7-2(a)所示的波列,用傅里叶变换(详见第十一章),即可得如图 7-2(b)所示的强度按波长分布的曲线,单色性好的光,则光波的波列较长,反之则短.

我们把波列的长度 Δl 称作相干长度,它等于光速 c 与发光时间 Δt 的乘积,即

$$\Delta l = c \cdot \Delta t.$$

其中 Δt 称作相干时间. 利用傅里叶分析,由上式可得

$$\Delta l = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}, \tag{7-6}$$

它给出光波的相干长度 Δl 和其单色性的表征量 $\Delta\lambda$ 间的关系. 表 7-1 列出了在低温条件下所能获得的最好的几种元素灯所辐射出的实际单色光的相干长度及其相应的 $\Delta\lambda$ 值. 至于一般实验室所用的低压水银灯如波长 546.1 nm 的绿光,其相干长度只约 1~2 cm.

表 7-1

光源	波长/nm	相干长度 Δl/cm	$\Delta\lambda$/nm
氦 He^4	587.6	14	0.0025
氖 Ne^{20}	585.2	30	0.0012
氪 Kr^{86}	605.7	77	0.00047

自激光问世后,我们可以获得的实际单色光,其相干长度有时可达几百公里! 一般甲烷饱和吸收稳频的氦氖激光,相干长度可达约几十公里. 可见,激光的单色性是十分优越的.

虽然式(7-5)代表的是理想的单色光,但为简便计,在下面的讨论中,我们仍用式(7-5)表示一般实际单色光.

按波的一般理论,振源的能量通过波向空间传输,光波是电磁波,在定量地研究电磁能的传输时,我们引入能流密度矢量[坡印廷(Poynting)矢量]$\boldsymbol{S}$ 这一概念,它与光波中的电矢量 $\boldsymbol{E}$ 和磁矢量 $\boldsymbol{H}$ 有下列关系:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}, \tag{7-7}$$

$\boldsymbol{S}$ 表示单位时间内通过以考察点为中心、垂直传播方向的单位面积上的电磁辐射通量. 按矢量 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 间的依赖关系,此能流密度的平均值可写成

$$\bar{S} = \frac{1}{2} n \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} |E_0|^2, \tag{7-7a}$$

其中 n 为光在其中传播的介质的折射率,E_0 为电矢量振动的振幅,ε_0 和 μ_0 分别为真空中的介电常量和磁导率. 可见 $\bar{S}$ 正比于 n 和 E_0 的平方. 在许多波动光学

实验中，常用照相法或用眼睛观察光的分布，此时能流密度表现为光照度，光波所达之处的能流密度愈大，则该处的光照度亦愈大.

在波动光学中，主要是讨论光波所达之处的相对光照度. 因而，只需计算光波在各处的振幅的平方值，而不需要计算各处的光照度的绝对值. 在波动光学的用语上，常把由振幅的平方所表征的光照度称为光强度，并且用 I 表示它①. 由此，当我们用式(7－5)代表光波时，它在 x 方向的任意点 P 的光强度 I 可用光在该点的振幅的平方表示，即

$$I = a^2. \tag{7-8}$$

§7－2　光波的叠加

当两光波彼此相重叠时，可以看到很多复杂而有趣的现象，这些现象可由光波的叠加原理来解释. 为此，让我们先来温习一下波的叠加原理：

1. 用解析法来研究传播方向、振动方向和频率均相同的光波的叠加

设有沿 x 方向传播(图 7－3)在 y 方向上振动的两个同频率的单色光，它们分别由有相同初相位的两点 O_1 和 O_2 发出，这两光波将使 P 点产生这样两个简谐振动：

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right), \\ \text{和}\quad y_2 &= a_2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right), \end{aligned}\right\} \tag{7-9}$$

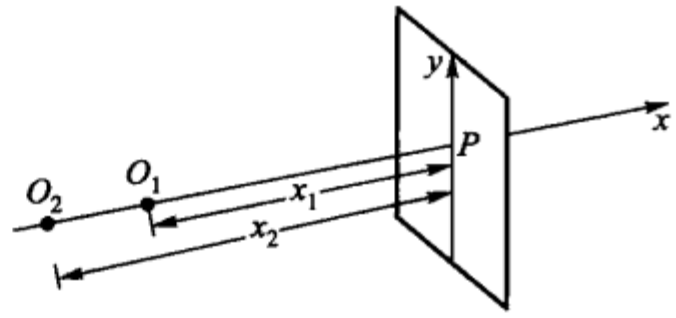


图 7－3

其中 x_1 和 x_2 分别为由 O_1 和 O_2 到所研究的 P 点的距离，λ 为光在介质中的波长. 这样，两光波在 P 点的合成振动的问题就成为求 P 点在同时作两个简谐运动的叠加的问题.

设 y 为 P 点的合成位移，于是有

$$y = y_1 + y_2 = a_1 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right)\right] + a_2 \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right)\right], \tag{7-10}$$

令 $\alpha_1 = -2\pi x_1/\lambda$，$\alpha_2 = -2\pi x_2/\lambda$ 和 $\omega = 2\pi/T$(圆频率)，则上式可改写成

$$y = y_1 + y_2 = a_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + a_2 \sin(\omega t + \alpha_2).$$

应用两角和的正弦公式，此式又可写成

$$\begin{aligned} y &= a_1 \sin\omega t \cos\alpha_1 + a_1 \cos\omega t \sin\alpha_1 + a_2 \sin\omega t \cos\alpha_2 + a_2 \cos\omega t \sin\alpha_2 \\ &= (a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2)\cos\omega t + (a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2)\sin\omega t. \end{aligned} \tag{7-10a}$$

---

① 从光度学看，这种用语是不合适的，但为照顾波动光学的习惯，本书也不另搞一套.

因为 a_1 和 a_2 以及 α_1 和 α_2 都是常数,所以可以令

$$\left.\begin{aligned} a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2 &= A\sin\theta, \\ \text{和}\qquad a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 &= A\cos\theta, \end{aligned}\right\} \tag{7-10b}$$

其中 A 和 θ 值与常数 a_1, a_2, α_1 和 α_2 间有下面将要求得的关系,将(7-10b)式平方然后相加,即得

$$\begin{aligned} A^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) &= a_1^2(\sin^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_1) + a_2^2(\sin^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_2) \\ &\quad + 2a_1a_2(\sin\alpha_1\sin\alpha_2 + \cos\alpha_1\cos\alpha_2), \end{aligned}$$

即

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2). \tag{7-11a}$$

或写成

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\delta, \tag{7-11b}$$

其中 $\delta = 2\pi(x_2 - x_1)/\lambda$,称两光波在 P 点的相位差.

由于同频率的光,在真空中的传播速度为 c,在介质中传播速度为 v,所以相应的波长为

$$\lambda_0 = cT,\ \lambda = vT,$$

按式(2-1),

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n},$$

所以相位差 δ 又可写成

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}n(x_2 - x_1), \tag{7-12}$$

于是(7-11b)式可写成

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta,$$

其中 $\Delta = n(x_2 - x_1)$ 为所述两光在 P 点的光程差.

把式(7-10b)的第一式除以第二式,得

$$\tan\theta = \frac{a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2}{a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2}. \tag{7-13}$$

这样,P 点的合成位移的方程式(7-10a)可写成

$$y = A\sin\theta\cos\omega t + A\cos\theta\sin\omega t,$$

而这是两角和的正弦的计算式,因而又可以写成

$$y = A\sin(\omega t + \theta). \tag{7-14}$$

这个方程式与表示原有的两波在 P 点所产生的两单独的简谐振动的方程式形式相同,只是换了一个新的振幅 A 和一个新的初相位 θ. 换言之,在所给的两单色光的作用下的一点,其振动的频率与原光波的频率相同,而其振幅取决于式(7-11a)和初相位取决于式(7-13),但它们都由两波在该点的相位差而定.

许多单色波在 P 点相遇时，P 的合成振动可由逐次相加来获得. 由于每两个相加都得到一个和公式(7－14)形式相同的方程式，所以无论对多少个给定的同频率的单色波的叠加，其最后的结果仍然有公式(7－14)的形式.

利用式(7－8)和式(7－11b)可得 P 点的光强度：

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta, \tag{7-11c}$$

其中 I_1 和 I_2 分别为所述两光波单独存在时在 P 点产生的光强度. 此式表明，P 点的光强度取决于两光波在 P 点的相位差 δ. 当相位差 δ 为 π 的偶数倍时，即 $\delta = 2k\pi(k = 0,1,2,3,\cdots)$，则光强度有最大值

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2},$$

而在相位差为 π 的奇数倍数时，即 $\delta = (2k+1)\pi(k = 0,1,2,3,\cdots)$，则光强度有最小值

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}.$$

而当相位差 δ 介于两者之间时，则 P 点的光强度在两极限值之间依式(7－11c)而定.

若所述两光波的光强度相等，即 $I_1 = I_2$，则两光波叠加后在 P 点产生的光强度为

$$I = 4I_1\cos^2\frac{\delta}{2}, \tag{7-11d}$$

此时最大值为单独一光波光强度的 4 倍，而最小值为零.

若采用式(7－5a)所示的复数形式，两光波

$$y_1 = a_1 e^{i2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda}\right)} = a_1 e^{i(\omega t+\alpha_1)},$$

$$y_2 = a_2 e^{i2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_2}{\lambda}\right)} = a_2 e^{i(\omega t+\alpha_2)},$$

在 P 点的合振动为

$$y = y_1 + y_2 = a_1 e^{i(\omega t+\alpha_1)} + a_2 e^{i(\omega t+\alpha_2)}.$$

合振动的振幅的平方等于合振动乘以其共轭复数，所以 P 点的光强度为

$$\begin{aligned} I &= y\cdot y^* = \left[a_1 e^{i(\omega t+\alpha_1)} + a_2 e^{i(\omega t+\alpha_2)}\right]\cdot\left[a_1 e^{-i(\omega t+\alpha_1)} + a_2 e^{-i(\omega t+\alpha_2)}\right] \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 e^{i(\alpha_2-\alpha_1)} + a_1 a_2 e^{-i(\alpha_2-\alpha_1)} \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2\cos(\alpha_2-\alpha_1). \end{aligned}$$

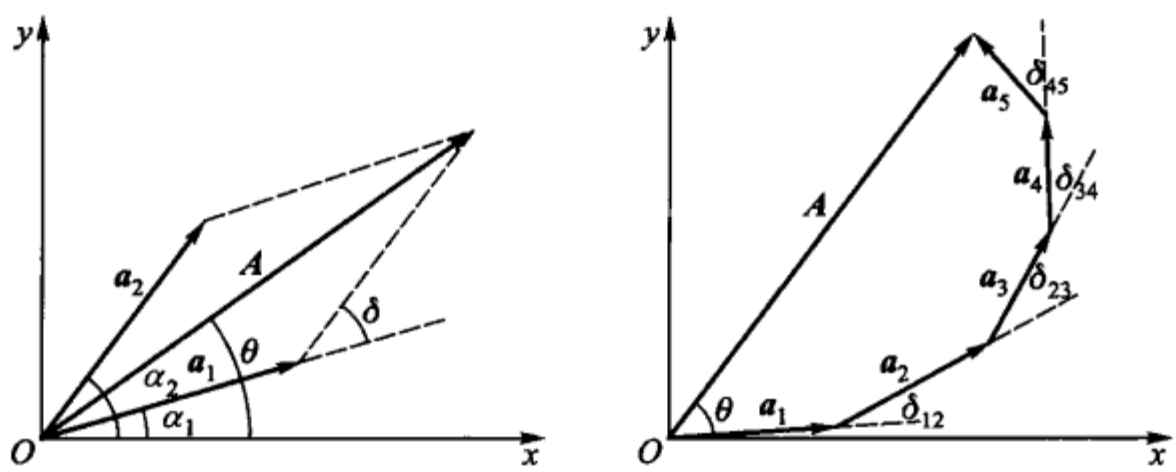
2. 用振幅矢量的图解加法来研究振动方向、传播方向和频率均相同的光波的叠加

用这种方法也能得到与上述解析法同样的结果，但却使求合成振幅的工作大为简化. 这种方法是基于振幅矢量的概念：振幅矢量 $\boldsymbol{a}$，它的长度代表振幅的大小，它与某一给定轴(如 Ox)的夹角相当于所研究振动的初相位. 对于振动方向和传播方向相同且有相同频率的光波的叠加，是以振幅矢量代表每个光波对

P 点所生的振动，然后由求出诸矢量的矢量和而得到合成振动.

在图 7－4(a)中，$\boldsymbol{a}_1$ 为所讨论的光波之一在 P 点所产生的振幅为 a_1、初相位为 α_1 的振动的振幅矢量，$\boldsymbol{a}_2$ 则为另一光波在 P 点所产生的振幅为 a_2、初相位为 α_2 的振动的振幅矢量. 利用平行四边形加法，则得其合成矢量为 $\boldsymbol{A}$，它的长度 A 为合成振动的振幅，它与 Ox 轴的夹角 θ 为合成振动的初相位. 由所构成的平行四边形，可求出矢量 $\boldsymbol{A}$ 的长度的平方：

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1).$$



(a)　(b)

图 7－4

矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 Ox 轴的夹角 θ 可由下式定出：

$$\tan\theta = \frac{a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2}{a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2}.$$

可见，它与用解析法求得的公式(7－11)和(7－13)相同.

当求由许多个同频率、振动方向和传播方向相同的光波作用下的 P 点的合成振动时，可应用矢量的多边形的加法求出矢量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ 等的合成矢量 $\boldsymbol{A}$. 图 7－4(b)表示了五个振幅矢量的多边形的加法，两相邻矢量间的夹角为两相应振动的相位差.

§7－3　光的干涉现象及相干条件

我们大概都看到过这样有趣的现象：把两块石头同时投入平静的水池内，则在两石块落水处各产生一个向四外传播的水面波，在两波相交的区域，有些地方的扰动实际上等于零，而另一些地方的扰动比任何单独一个波所产生的都大很多. 图 7－5 便是所述现象的照片，这种现象我们称为水面波的干涉.

两个或两个以上的光波相遇时，各光波间不产生相互的影响，即每一个光波的传播方向、振幅、频率以及其他特性等都如同其他光波不存在一样，不发生改变. 从这个意义来说，向各方向传播的光是相互独立的，正如几何光学基本原理

所说的那样. 然而,按 §7 -2 讨论的结果,我们可以预料,对于满足一定条件的两个或两个以上的光波,在它们相交的区域,各点的光强度与各光波单独作用所生的光强度之和可能是极不相同的. 有些地方光强度近于零,而另一些地方的光强度则较各光波单独作用所生光强度之和大得多. 这种现象称为光的干涉.

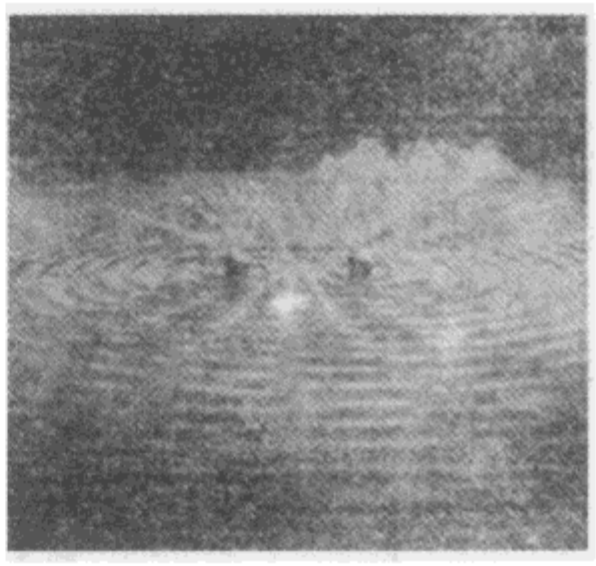


图 7 -5

光的干涉现象是多种多样的. 简单的装置即能表现出光的干涉现象,例如,在露过光的黑色底片上,用锐利的刮脸刀划出两条相距不大于 0.5 mm 的平行狭缝,通过它观看电灯丝时,可看到一组明暗相同的条纹并且带有彩色,这便是双狭缝干涉图样. 在自然界也能看到光的干涉现象,例如,在太阳光下常看到浮于平静的水面上的油膜和肥皂膜呈某种颜色,并且当改变观看的方向时膜的颜色随之而变;在太阳光下观看吹起的肥皂泡,也能看到类似的现象,这些都是干涉现象.

光的干涉虽然不难实现,但并非任意两光波相遇都能产生干涉现象. 从两个完全独立的光源(如两只蜡烛灯、两盏油灯或电灯)发生的光波即使相遇,却无论如何都不能产生干涉现象. 它们所产生的光强分布等于各单独光强之和. 正如同两个人同时唱歌不能产生声的干涉一样. 为产生光的干涉现象,相遇的光波必须满足某些条件,我们称这些条件为相干条件,满足相干条件的光称为相干光. 换言之,只有相干光才能产生光的干涉现象.

显然,前节所述的自初相位相同的两光源发出的、频率、振动方向和传播方向均相同的两单色光是相干光. 然而,实际上的单色光都是由波列组成的,不是严格的单色光,所以对于实际的光,只有满足下列条件才能产生干涉,即相干条件为:

1. 频率相同的两光波在相遇点有相同的振动方向和固定的相位差

若两光波在相遇点所产生的振动不在同一个方向,则该点的合成振动将不是由式(7 -14)表示的简谐振动,因而不能产生干涉现象.

而若两光波在相遇点的相位差不固定,随时间作无规则且迅速的变化,由这种变化引起的光强改变的次数在观察或测量所需的时间间隔 τ 内几乎是无限大,于是,在该相遇点只能获得在时间间隔 τ 内的平均光强度. 它与两光波在该点单独产生的光强度之和无区别,因而无干涉现象. 由两个独立的光源发生的光波相遇就是这样的结果. 但是,如果把从同一光源发出的光波,用某种方法分成两光波,并使它们在相遇点有固定的相位差,则该点的合成光强与时间无关,且与两单独的光波在该点产生的光强度之和不同,在有些地方光的强度最大,另一

些地方光的强度最小,可有明显的干涉现象.

上述条件是为产生干涉现象的必要条件,只能满足此条件还不一定就能获得干涉现象;为确保产生明显的干涉现象,还须满足以下两个条件:

2. 两光波在相遇点所产生的振动的振幅相差不悬殊

由式(7-11)知,若两光波在相遇点所产生的振幅相差悬殊,例如 $a_1 >> a_2$,则该点的合成振动的振幅 A 将与单一光波在该点所生的振动的振幅 a_1 无实际上的差别,因而观察不出干涉现象.

3. 两光波在相遇点的光程差不能太大

实际光源所发出的光波,绝非一个无限长的正弦波,而是由一系列有限长的波列组成的. 当两光波在相遇点的光程差很小时,则两光波中有固定相位差的波列几乎同时作用于一点,能产生清晰的干涉现象. 而当光程差很大时,一光波的波列已通过,而另一光波相应的波列尚未到达,两相应的波列间无重叠,因而无干涉现象出现. 当光程差为中等时,两相应的波列部分重叠,将出现不很清晰的干涉现象. 换言之,两光波在相遇点的光程差如果大于所用实际光波的相干长度,则无干涉现象.

简言之,条件(1)是产生干涉现象的必要条件;而条件(2)和(3)可认为是为获得干涉现象的补充条件.

尽管干涉现象是多种多样的,但为满足上述相干条件,则总是把由同一光源发出的光分成两个或两个以上的相干光束,使它们各经过不同的路径再相遇以产生干涉. 产生相干光的方式有两种,即分波阵面的干涉和分振幅的干涉. 下面依照这种分法来研究各具体的干涉现象.

§7-4 由分波阵面法产生的光的干涉

不论在自然界或在实验室,都不可能获得满足上述诸条件的两个或两个以上的实在光源. 但我们可设法从一点(线)光源发出的光波的波阵面上分离出两部分或更多个部分. 由于波阵面上任一部分均可视为新的光源且同一波阵面的各部分有相同的相位,所以,这些被分离出的部分波阵面可作为初相位相同的光源,不论点(线)光源的相位改变如何频繁,而这些光源的初相位差却恒久不变. 于是,由这些光源发出的光波,在相遇的区域将产生干涉现象.

杨氏(Young)双狭缝、菲涅耳双棱镜和双平面反射镜以及劳埃德(Lloyd)镜等实验都是由分波阵面获得相干光而实现干涉的实验.

1. 杨氏双狭缝实验

杨氏最初所做的实验如图 7-6 所示. 用强光照明针孔 S,以它作为点光源,送出球面波,在距 S 为一定距离处放置另外两个小针孔 S_1 和 S_2,它们把由 S 送

出的球形波阵面,分离出两个很小的部分作为相干光源. 于是在由此两针孔发出的光波相遇的区域产生干涉现象,即在双针孔后面的幕上呈现干涉图样. 从这个早期的实验做过以后,后来发现以狭缝代替针孔可得同样清晰的、但是明亮得多的干涉图样,这样便有了以柱面波阵面代替球面波阵面的双狭缝实验,但其截面仍可由图 7 -6 表示.

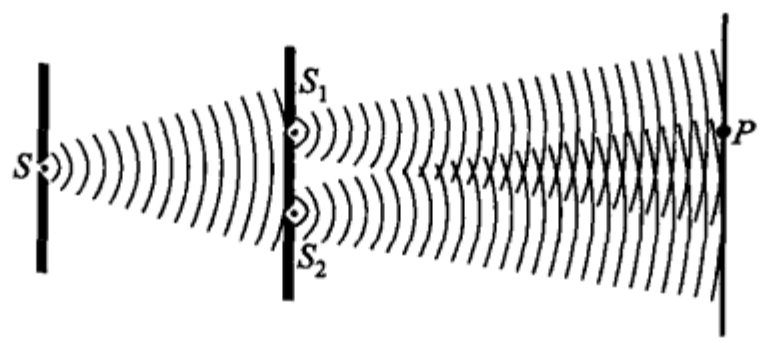


图 7 -6

由光源 S_1 和 S_2 发出的光波在幕上的任一点 P 所产生的合成振动,其振幅的平方值,可由式(7 -15)计算,即

$$A^2 = 4a^2\cos^2\frac{\delta}{2},$$

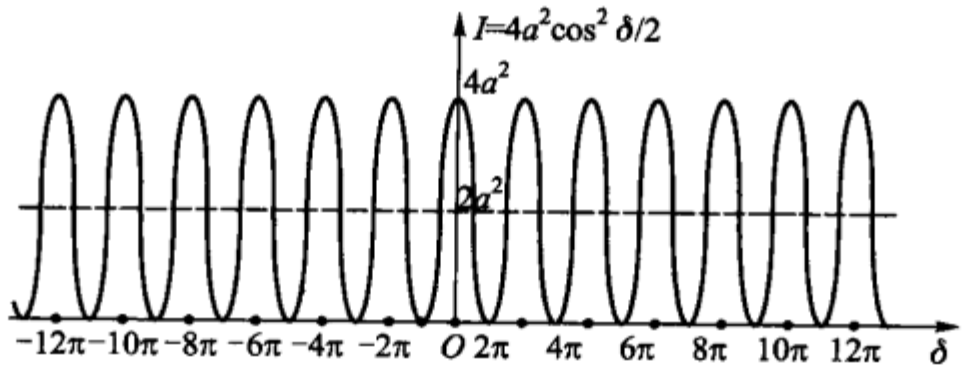
其中 δ 为自该两光源发出的光波在所考察的 P 点的相位差. 由于两光波在幕上的不同点有不同的相位差,所以幕上各点的光强度不同;在 $\delta = \pm 2k\pi$($k = 0,1,2,3,\cdots$)的地方,光强度最大,等于 $4a^2$;而在 $\delta = \pm(2k+1)\pi$ 的地方,光强度为零,即在幕上的光强度分布如图 7 -7(a)所示,当狭缝 S 和双狭缝 S_1 和 S_2 都是非常窄,且后者对前者平行和对称时,则幕上呈现的干涉图样将如图 7 -7(b)的照片所示.

两光波在幕上任一点 P 的相位差,按(7 -6)式也可由它们在该点的光程差 Δ 表示,$\delta = 2\pi\Delta/\lambda_0$,其中 λ_0 为这两光波在真空中的波长. 由于杨氏实验的整个系统都在空气中($n \approx 1.0$),所以在近似的情况下上述光程差 Δ 即为自 S_1 和 S_2 到所研究的 P 点的距离之差,并且波长 λ_0 可由光在空气中的波长 λ 代替. 这样,只要算出如图 7 -8 所示的双狭缝实验截面图中的 $S_1P - S_2P$,就可求得 P 点的光强度.

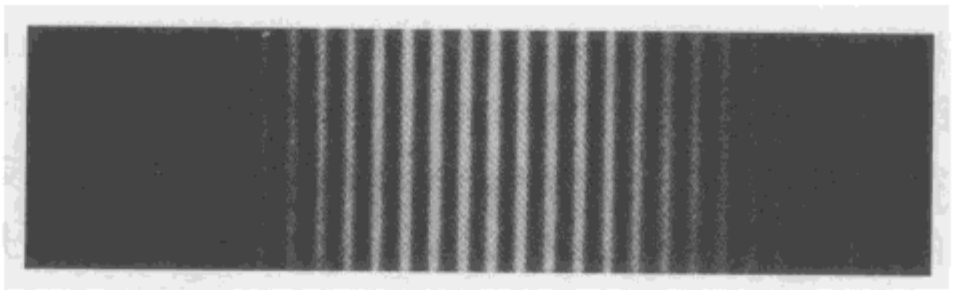
在图 7 -8 中,设双狭缝的间隔为 t,幕到双狭缝平面的距离为 L,幕上任一点 P 到 O 的距离为 l,O 是由 S 作出的平分双狭缝的中央线与幕的交点,并且 L 和 l 都比 t 大得多. 于是,
近似地有

$$\frac{\Delta}{t} = \frac{l}{L},$$

由此得出



(a)



(b)

图 7－7

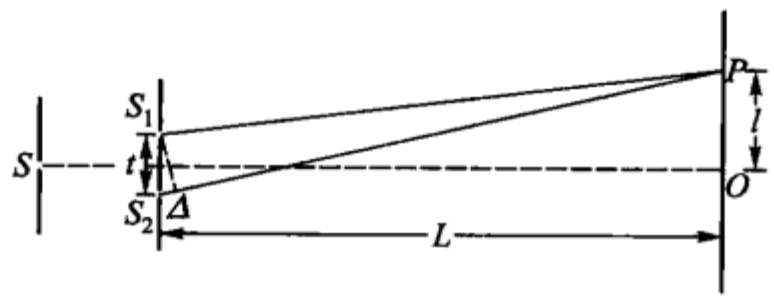


图 7－8

$$\Delta = \frac{l}{L}t. \tag{7-15}$$

相位差 $\delta = \pm 2k\pi$，即 $\Delta = \pm k\lambda$，所以 l 满足下式的各点，有最大光强度：

$$l = \pm \frac{k\lambda}{t}L, \tag{7-16}$$

其中 $k=0,1,2,3,\cdots$ 为干涉条纹的级次. 同理，满足下式的各点，其光强度为零：

$$l = \pm (2k+1)\frac{\lambda}{2}\frac{L}{t}. \quad k=0,1,2,3,\cdots. \tag{7-17}$$

当考虑到图 7－8 是一个双狭缝实验的截面图时，可知在幕上有相同 l 值的点的轨迹是平行于双狭缝的直线. 所以，双狭缝干涉图样是明暗相间的直条纹，并且在幕的中央 $\Delta=0$，为亮条纹. 此外，由式(7－16)和(7－17)可知相邻亮条纹的间隔和相邻暗条纹的间隔均为

$$\Delta l = \frac{\lambda}{t}L. \tag{7-18}$$

即相邻亮条纹和相邻暗条纹的间隔相等且与干涉级 k 无关；间隔的大小正比于光波的波长和幕到双缝的距离，反比于双缝的间隔. 对于给定 t 和 L 的实验布

置,在红光所产生的干涉图样中相邻条纹的间隔较绿光干涉图样中相邻条纹的间隔大些. 当以含有各种波长的混合光(白光)作为光源时,除 $k=0$ 的零级亮条纹外,其余各级亮条纹都是带颜色的,颜色的排列以零级亮条纹为中心左右对称,并且整个干涉图样中的条纹数目很少. 白光干涉的这一特点提供了判断零级干涉条纹的可能性,在干涉测量中常用到它.

2. 菲涅耳双棱镜和双平面反射镜实验

在杨氏做完双狭缝实验后不久,曾有反对的意见,认为该实验中的亮暗相间且等宽的干涉图样或许是由于光经过狭缝边时发生的复杂变化,而不是由于真正的干涉. 但不多几年之后,菲涅耳做了几个新实验,这些实验对于两束光的干涉的证明使大家都满意. 这就是上面提过的双棱镜实验和双平面反射镜实验.

这两个实验的原理是这样的:在双棱镜实验(图 7-9)中,所用双棱镜的折射角 α 很小,并且主截面垂直于作为光源的狭缝 S;双棱镜的两个棱镜的底边相接(实际上是做在一起),借助于棱镜的折射,将自 S 发出的波阵面分为向不同方向传播的两个部分,这两部分波阵面好像自图中所示的虚光源 S_1 和 S_2 点发出的一样,在两波相交的区域 P_1P_2' 产生干涉. 在由两个平面玻璃以很小的夹角 φ 组成的菲涅耳双平面反射镜的实验(图 7-10)中,借助于两平面的反射,将自 S 发出的波阵面分为向不同方向传播的两个部分,这两部分波阵面如同自图 7-10 中所示的虚光源 S_1 和 S_2 中发出的一样,在两波相交的区域 P_2P_2' 产生干涉. 在给定距离的幕上,相邻条纹的间隔决定于自 S 发出的光的波长和两虚光源的距离. 在双棱镜实验中,两相干光源的距离 t,可由折射角为小角 α 的棱镜对光线产生的偏向角公式(3-12a)算出:

$$t=2(n-1)\alpha\cdot L_1,$$

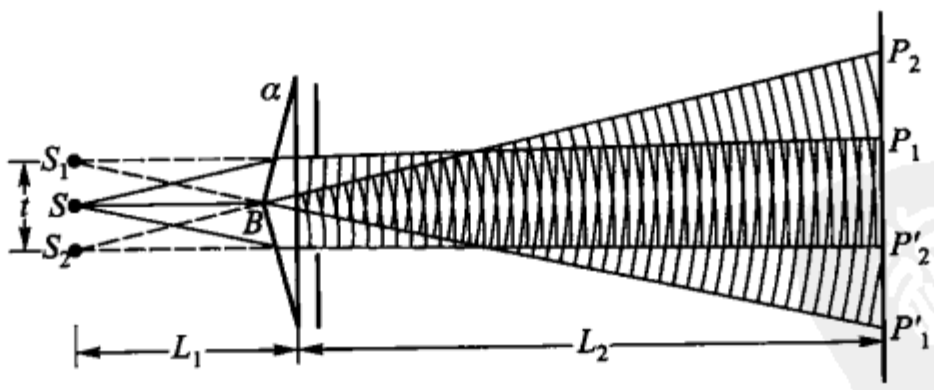


图 7-9

其中 n 为棱镜的折射率. 由比较图 7-9 与图 7-8,可得 $L=L_1+L_2$,将这里的 t 及 L 值代入(7-18)式,则得双棱镜实验中相邻条纹的间隔:

$$\Delta l=\frac{(L_1+L_2)}{2(n-1)\alpha L_1}\lambda. \qquad (7-18a)$$

在双平面反射镜实验中,$L=r+L_0$,$t=2r\varphi$,于是,相邻条纹的间隔为

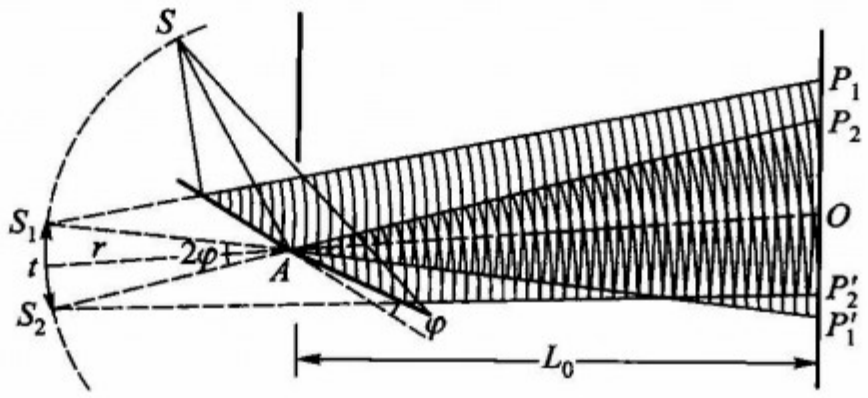


图 7－10

$$\Delta l = \frac{(r + L_0)\lambda}{2r\varphi}. \tag{7－18b}$$

在双棱镜实验和双平面反射镜实验中，所得干涉图样均与图 7－7(b)所示的双狭缝干涉图样相似；而当详细研究时，会发现双棱镜实验所得的图样(如图 7－11 所示)，有些复杂的附加的光强改变. 这是由于双棱镜的公共底边 B(图 7－9)所引起的. 这一点在讨论过光的衍射之后就会明白了. 在这两种实验中，角 α 和 φ 都必须很小，否则条纹太密，得不到明显的干涉图样.

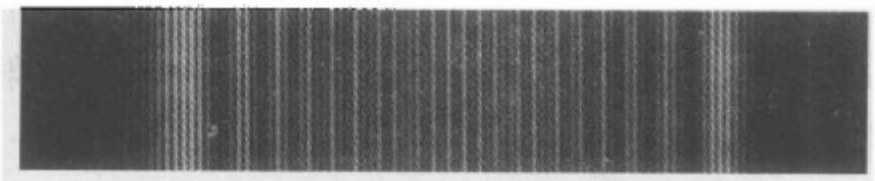


图 7－11

在双平面反射镜实验中，若所用的光为前面所说的单色性好的激光(如氦氖激光)、且其振动垂直入射面，则 φ 角可以很大，在这种情况下，$t = 2r\sin\varphi$，式(7－18b)变为

$$\Delta l = \frac{(r + L_0)\lambda}{2r\sin\varphi}. \tag{7－18c}$$

在光源 S 位于无限远时，即若以平行光入射到菲涅耳双平面反射镜时，则上式变为

$$\Delta l = \frac{\lambda}{2\sin\varphi}. \tag{7－18d}$$

此时两相干光束间的夹角 $\theta = 2\varphi$，因而上式又可写成

$$\Delta l = \frac{\lambda}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}. \tag{7－18e}$$

此式表明，在这里相邻亮条纹或暗条纹间的间隔与所用光的波长成正比，与两光束间的夹角之半的正弦成反比. 例如在 $\lambda = 632.8$ nm，$\theta = 30°$时，$\Delta l = 1.23$ μm，即每毫米有约 810 个亮条纹或暗条纹. 利用这种装置可制备所谓全息光栅，它是把干涉条纹呈现在超微粒感光底片上，经显影、定影等处理后，在底片上形成凹

凸的槽形痕纹,再在其上镀铝而得(见图 7 – 12 并参看第十一章“全息光栅”一节).

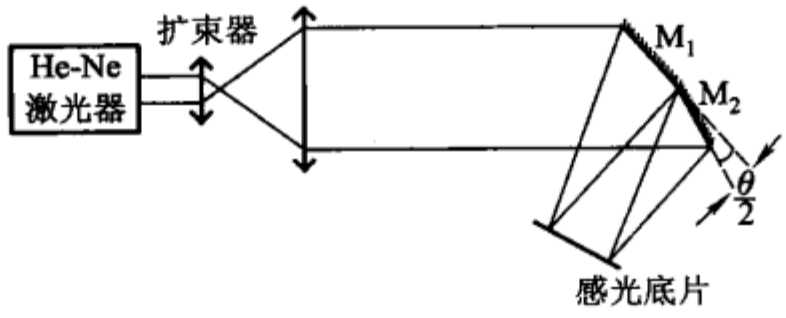


图 7 – 12

3. 劳埃德镜实验

劳埃德镜就是一块平玻璃片,利用它使投射到它表面上的光的波阵面改变方向,与由同一光源 S_1 直接发出的其他部分的波阵面相交,在相交区域产生干涉. 这个实验除显现了光的干涉之外,还显示出光在玻璃面反射时的相位变化. 因而是很重要的实验. 在图 7 – 13 中,从狭缝 S_1 射出的光以很大的角度(接近于 90°)入射到很长的平面玻璃片上. 这光经玻璃面反射后到达幕上,就好像由虚光源 S_2 发出的一样. 另外,到达幕上的还有自狭缝 S_1 直接射到的光,于是在两光相遇的区域 P_2P_2' 产生干涉. 由于入射到平玻璃板上的光的入射角很大,所以反射光和自狭缝 S 直接射到幕上的光可有近于相等的振幅(这一点在第十二章有详细的讨论,如图 12 – 13). 在这种情况下,若将幕放在 MN 位置,使之与劳埃德镜的一端紧挨着,则从几何路程来看,$S_1O = S_2O$,预料 O 点应为亮点,而实际上该点却是暗点. 这表示两束光中之一的相位变化了 π. 因为直接射到幕上的光不可能凭空地产生相位的改变,所以可认为这个实验显示出这样一个事实:光波从折射率小的光疏介质向折射率大的光密介质表面入射时,反射过程中反射光的相位变化 π,它相当于光多走了半波长,因而称这种现象为半波损失.

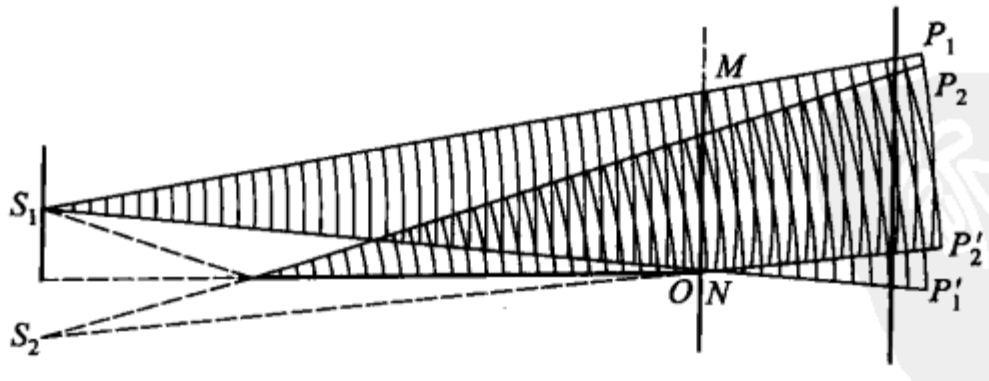


图 7 – 13

劳埃德镜实验所得的干涉图除 O 点为暗条纹的特点之外,它与前述诸干涉图样不同之处,还在于它只在 O 点的一侧有干涉条纹,而杨氏双狭缝等的干涉条纹是对称地分布在零级条纹的两侧的.

4. 干涉条纹的可见度 空间相干性和时间相干性

在上述诸干涉实验中，都是把光源狭缝开得很窄，而如果把光源狭缝由窄逐渐变宽，我们就会看到所得的干涉条纹也随着逐渐地变模糊，最后甚至完全消失. 为什么会这样呢？下面来讨论这个问题.

首先，为了描述干涉图样的清晰程度，需要引入可见度 V（或称对比度、反衬度，亦称调制度）的概念，我们定义干涉图样中亮条纹的最大光强度 I_{max} 和暗条纹的最小光强度 I_{min} 之差与其和的比值为可见度：

$$V=\frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}} \tag{7-19}$$

由此，对于光强度相等的两相干单色光的干涉，$I_{max}=4a^2$，$I_{min}=0$. 我们说，它的干涉条纹（或干涉图样）的可见度为 1；对于光强度相差悬殊的两相干单色光，可见度几乎为 0.

其次，让我们来讨论光源狭缝宽度对干涉条纹可见度的影响的问题.

仍以菲涅耳双平面反射镜实验为例（光路图如图 7－14）. 将光源狭缝垂直 SA 由 S 单向地开大至 S'，与 S 点相对应的两虚光源为 S_1 和 S_2，S' 的两虚光源则在 S_1' 和 S_2'.

自 S 点发出的经双平面镜后在幕上 O 点的两相干光的相位差 $\delta=0$；对 S' 点，由于它跟 S 点有一定的间隔，所以由 S' 发出而达同一 O 点的两相干光的相位差 $\delta'\neq 0$. 前者产生光强最大，后者产生的不是光强最大，并且在邻近 O 点的由 S 的两相干光产生的光强为零的点上，由 S' 在该点产生的光强不为零，结果使 O 处的干涉条纹可见度降低. 随着 S' 离 S 渐远，则 O 处的干涉条纹的可见度降低得更多，当由 S' 发出的光在 O 处所生的相位差 $\delta'=\pi$ 时，即 $\delta'-\delta=\pi$ 时，则 O 处的干涉条纹的可见度为零，干涉条纹消失. 换言之，幕上干涉条纹的可见度取决于从光源狭缝中各点发出的在所考察处的相干光的相位差之差（$\delta'-\delta$）或者说相位差的改变量（$\delta'-\delta$）；$\delta'-\delta=\pi$ 时，$V=0$. 因而，为了获得可见度尚好的干涉条纹，就要求光源各点在所考察处的相位差的改变量（$\delta'-\delta$）小于某一定值，相应的，光源狭缝的宽度（$2SS'$）就必须小于某一定宽度.

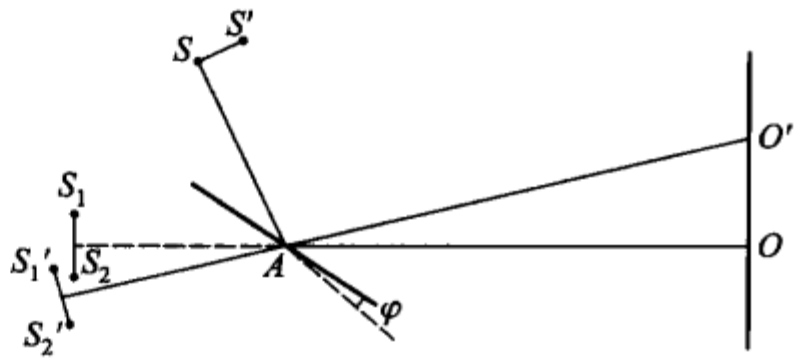


图 7－14

为了表征光源狭缝各点（也包括其他面光源）在幕上各处产生的相位差改变量（$\delta'-\delta$）的大小可用光源的空间相干性的概念，$\delta'-\delta$ 值小者称空间相干性好，$\delta'-\delta$ 值大者称空间相干性不好. 所以在菲涅耳双平面镜干涉实验中，光源狭缝的空间相干性是个不能忽视的条件.

在影响条纹可见度方面，与空间相干性平行的，还有光的时间相干性的问

题. 所谓光的时间相干性就是指实际单色光的波列的相干长度,相干长度长者称时间相干性好,或者说单色性好者($\Delta\lambda$ 小者),时间相干性好.

用杨氏双狭缝实验很容易演示光的时间相干性对于干涉条纹可见度的影响. 例如,用一个小薄玻璃片放在如图 7-6 所示的狭缝 S_1 的后面. 当用普通光源照明很窄的狭缝 S 时,由于玻璃片给两相干光附加的光程差已超过普通光源本身的相干长度,所以在幕上干涉条纹的可见度为零. 然而,当用氦氖激光照明同一狭缝时,小薄玻璃即使稍厚些,在幕上也可得到可见度很高的干涉条纹. 这说明了干涉条纹的可见度跟光源的时间相干性的密切关系,也说明了时间相干性和空间相干性是两个不同的概念.

总之,在干涉实验中,为了得到可见度高的干涉条纹,除了要满足前述相干条件 1 和 2 外,还必须令光源的空间相干性和时间相干性(即相干条件 3)满足一定的要求.

§7-5 由分振幅法产生的光的干涉

利用透明薄板的第一表面和第二表面对入射光的依次反射,将入射光的振幅分解为若干部分,由这些部分光波相遇所产生的干涉,称为分振幅法的干涉. 这是一种颇为常见的干涉,前述油膜和肥皂泡的颜色即为一例.

下面我们先来讨论光源为一扩展面时,由均匀介质的平行平面板分振幅所产生的干涉.

设所研究的薄板在空气中,其厚度为 d,折射率为 n;自面光源 S 上的一点发出的光,其振幅为 a,在薄板第一表面上的入射角为 i(图 7-15). 这光在 A 点一部分反射光为①,另一部分成为折射光,沿 AA' 方向进行,两者的振幅分别为 ar 和 at,此处的 r 和 t 分别代表在该薄板表面上的反射光和透射光对入射光振幅的比值,称反射比和透射比. 下面要用到的 t' 和 r' 是光从薄板内向空气投射时的透射比和反射比. 由于 r' 的绝对值等于 r,所以这里不区别 r 和 r'. 折射光 AA' 在第二表面分为振幅为 atr 的反射光和振幅为 att' 的透射光①';反射光 atr 在第一表面又分成为振幅为 $att'r$ 的光②和振幅为 atr^2 的反射光;此反射光 atr^2 在第二表面上又分为光②'和振幅为 atr^3 的反射光,以次类推. 这样便得到了由①,②,③,…诸相干平行光组成的反射光和由①',②',③',…诸相干平行光组成的透射光. 当用透镜把两组光分别会聚在焦点上时,就会产生干涉. 在薄板的折射率不高的情况下,反射光的干涉图样明显,即干涉条纹有很高的可见度,而透射光的干涉图样一般不明显,即干涉条纹的可见度较低. 反射光在相遇点的光强决定于诸相干光给予该点的合成振动的振幅. 为确定合成振幅,除需知道上述光①,②,③,…的振幅外,还需计算相邻光在相遇点的相位差或光程差.

在图 7-16 中,作一垂直于光①和②的线段 $|BD|$,自 B 和自 D 到透镜的焦点的距离相等. 因而光①和②的光程差就产生于自 A 点起光②在板内所走的光程和光①在 A 点的反射和随后所走的路程 AD 之差. 由于光①在反射时有“半波损失”,所以两光的光程差应为

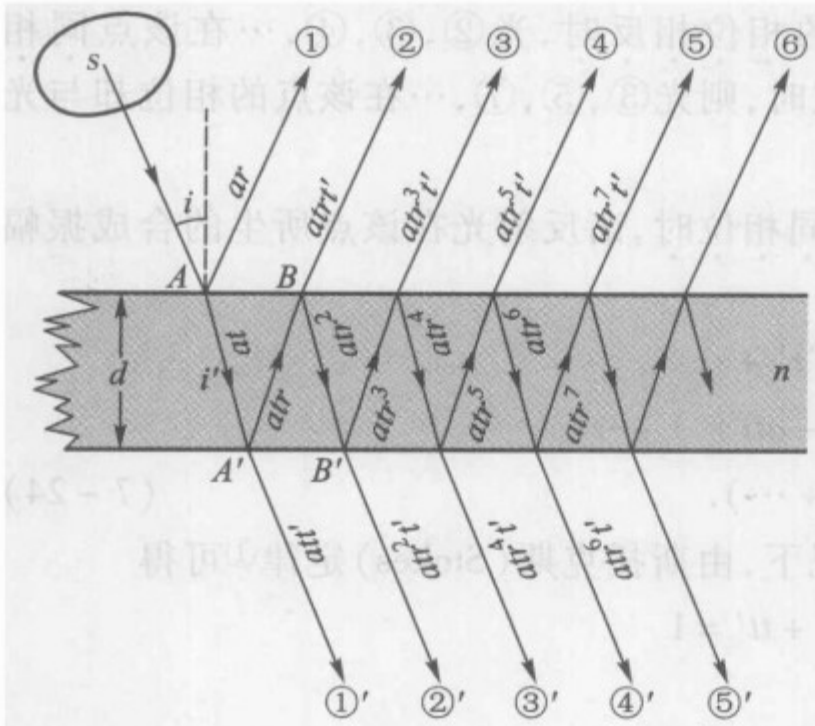


图 7-15

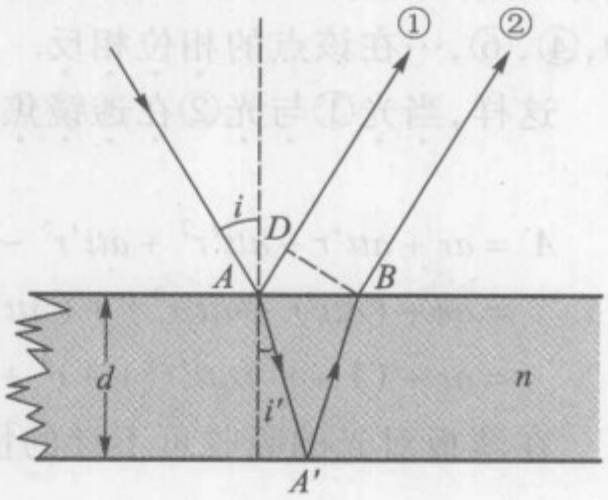


图 7-16

$$\Delta = n(AA' + A'B) - \left(AD + \frac{\lambda}{2}\right). \tag{7-20}$$

由图 7-15,得

$$AA' = A'B = \frac{d}{\cos i'} \tag{7-21}$$

和

$$AD = 2d\tan i'\sin i.$$

又由折射定律得

$$n\sin i' = \sin i;$$

因而,

$$AD = 2nd\sin i'\tan i' = 2nd\,\frac{\sin^2 i'}{\cos i'}.$$

将此 AD 值及式(7-21)的 AA' 和 $A'B$ 值代入式(7-20),整理后,得

$$\Delta = 2nd\cos i' - \frac{\lambda}{2}. \tag{7-22}$$

有了光程差之后,即可得光①和光②在透镜焦点的相位差为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left(2nd\cos i' - \frac{\lambda_0}{2}\right). \tag{7-23}$$

此式中的 λ_0 为该光在真空中的波长,在给定的情况下,由于空气的折射率很接近于 1,所以可不计该光在空气中的波长 λ 和 λ_0 的差别.

现在再来研究其余的光③,④,⑤,…在透镜焦点的相位差. 这一组光中相邻的几何关系跟光①和②的关系相同,所以光②与光③,光③与光④以及光④与光⑤等的几何路程上的光程差都为 $2nd\cos i'$;但这些光都是经过内反射,没有光①所独有的"半波损失",因而这些光中相邻光的光程差即为 $2nd\cos i'$. 显然,当薄板所引入的 δ 使光①与光②在焦点的相位相反时,光②,③,④,…在该点同相位;反之,当光①与光②在该点同相位时,则光③,⑤,⑦,…在该点的相位却与光②,④,⑥,…在该点的相位相反.

这样,当光①与光②在透镜焦点同相位时,诸反射光在该点所生的合成振幅为

$$\begin{aligned} A &= ar + att'r - att'r^3 + att'r^5 - att'r^7 + \cdots \\ &= ar + (att'r - att'r^3) + (att'r^5 - att'r^7) + \cdots \\ &= ar + (1 - r^2)att'r(1 + r^4 + r^8 + \cdots). \end{aligned} \tag{7-24}$$

在薄板对光的吸收可不计的情况下,由斯托克斯(Stokes)定律①可得

$$r^2 + tt' = 1$$

或

$$I - r^2 = tt'. \tag{7-25}$$

其中 r^2 称为该薄板表面的反射系数. 将此式代入式(7-24)并略去 r^4 及 r^4 以上的高次项,最后得

$$A \approx ar(1 + t^2t'^2). \tag{7-26}$$

事实上,$t^2t'^2$ 值很接近于 1,因而上式可近似地写成

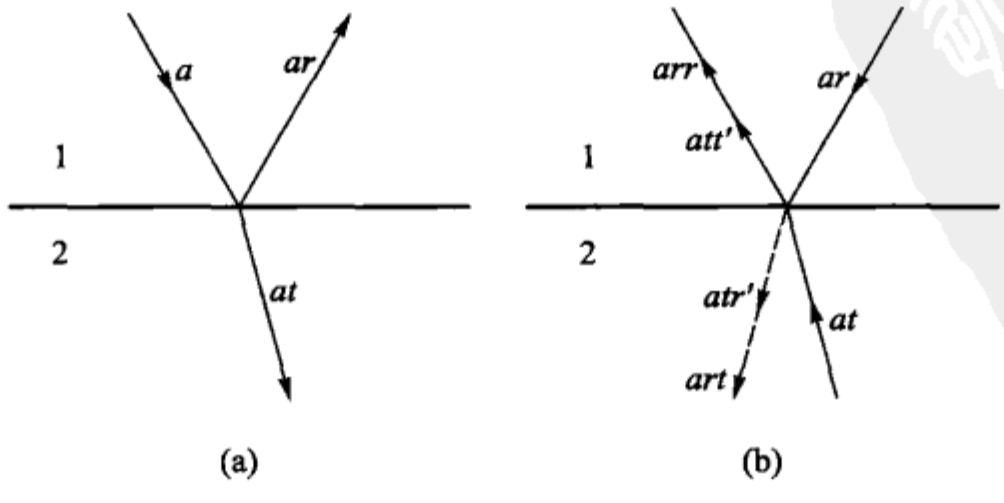
---

① 对于图(a)所示的反射和折射两光,按斯托克斯关于"反射"的处理方法,有如图(b)所示的情况. 就是振幅为 ar 和 at 的反向后的波,在射到表面上以后,只在介质 1 中生一个波,它与原入射波等振幅,只不过进行方向相反罢了. 因而有

$$att' + ar^2 = a, \quad art + atr' = 0.$$

第二个方程式表示两个反向波在介质 2 内没有振动. 从这两式,分别得到

$$tt' + r^2 = 1 \quad 和 \quad r' = -r.$$



(a) (b)

前者即为所求的关系式,称斯托克斯定律;后者表示从界面上的反射和从界面下的反射,振幅相等但相位差为 π.

$$A = 2ar. \tag{7-27}$$

由此可见,当光①与光②同相位时,由反射光①,②,③,④,…在透镜的焦点所产生的振幅实际上等于由振幅同为 ar 的两个光波以相同相位到达该点所生的合成振幅,其光强度为

$$I = 4a^2r^2. \tag{7-28}$$

当光①与光②在透镜焦点反相位时,则在该点所产生的振幅应为

$$A = ar - (att'r + att'r^3 + att'r^5 + att'r^7 + \cdots) \approx 0,$$

即此时该点的光强度为零.

总之,对于一般折射率不高的透明薄板,由于表面的反射系数 r^2 很小,其反射光的干涉与等振幅(ar)的双光束的干涉相差甚微. 因此在以后讨论这种透明薄板反射光的干涉中,只讨论两反射光①,②的干涉. 就是说,当光①和光②同相位

$$\delta = 2k\pi, k = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

或

$$\Delta = 2nd\cos i' - \frac{\lambda}{2} = k\lambda \tag{7-29}$$

时,有最大光强度;而当光①与光②反相位

$$\delta = (2k+1)\pi$$

或

$$\Delta = 2nd\cos i' - \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \tag{7-30}$$

时,有最小光强度.

由式(7-25)可知,自薄板透射的光①′,②′,③′,④′,…的干涉,其图样与上述反射光的干涉图样互补. 图 7-17 为反射系数 $r^2 = 0.04$ 的情况下,反射光的光强度 I_r 及透射光的光强度 I_t 与相位差 δ 的关系曲线. 可以看出,其中 I_r 与 δ 曲线与图 7-17(a)的余弦曲线相似,而在 I_t 与 δ 曲线中,最小值不为零,所以透射光干涉条纹比较模糊(可见度较低).

由式(7-23)知,对于给定波长的单色光,相位差决定于板的厚度 d、折射率 n 和光在板面上的折射角 i'. 当板的折射率均匀时,相位差决定于乘积 $d\cos i'$,每个因素(d 或 i')都能影响干涉条纹的形状和强度,一般来说,形状比较复杂. 现在只讨论以下两种简单情形.

1. 当薄板是折射率 n 和厚度 d 均为常数的平行平面板时,则相位差 δ 只决定于光在板面上的入射角 i. 由相同入射角的光所形成的反射光在透镜的相应焦点有相同的相位差,因而有相同的光强度,而光强度相等的点的轨迹就是干涉条纹. 所以,平行平板的干涉条纹是由有相同入射角的光形成的,我们称这种干涉

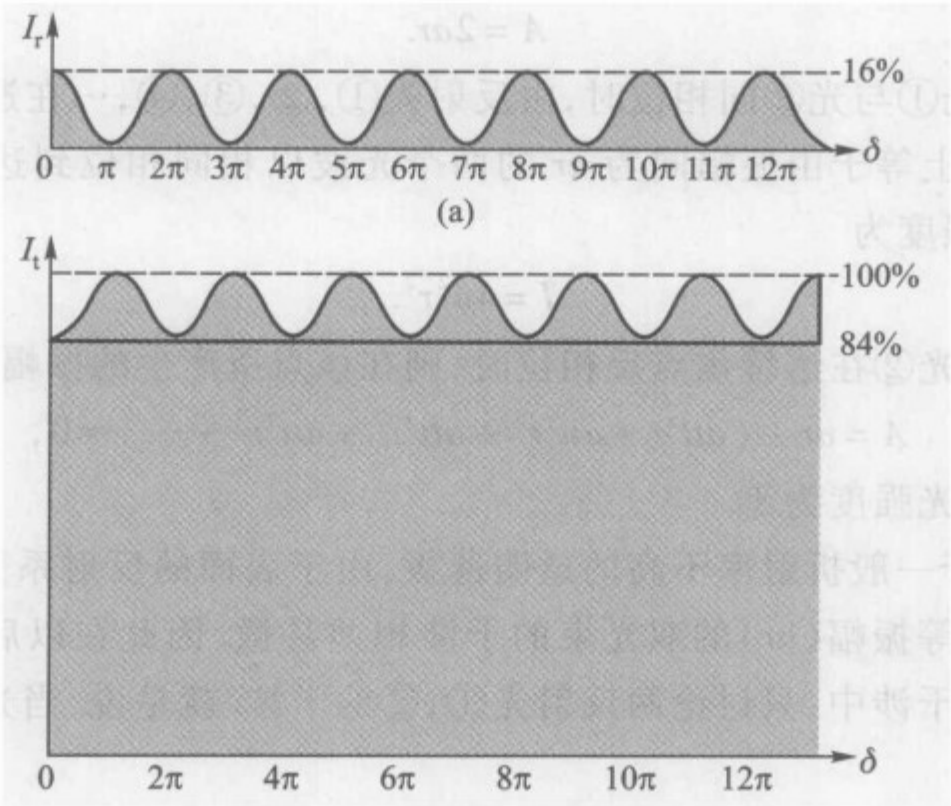


图 7 - 17

为等倾(度)干涉.

等倾干涉图样只呈现在会聚相干平行光的透镜的焦面上. 不用透镜时,干涉图样在无限远,所以说等倾干涉条纹定位于无限远.

图 7 - 18 表示对于入射角不同的光(一为实线,一为虚线),在透镜焦面上被会聚于不同之处,形成不同的干涉条纹,即干涉条纹与光在板上的位置无关,只决定于入射角. 又光源上其他点发出的光线只要倾角 i 相等,都聚焦在同一条纹上,因而扩展的面光源可使图样总的光强增加. 这就决定了平行薄板的干涉图样比前述的双狭缝等干涉图样明亮得多.

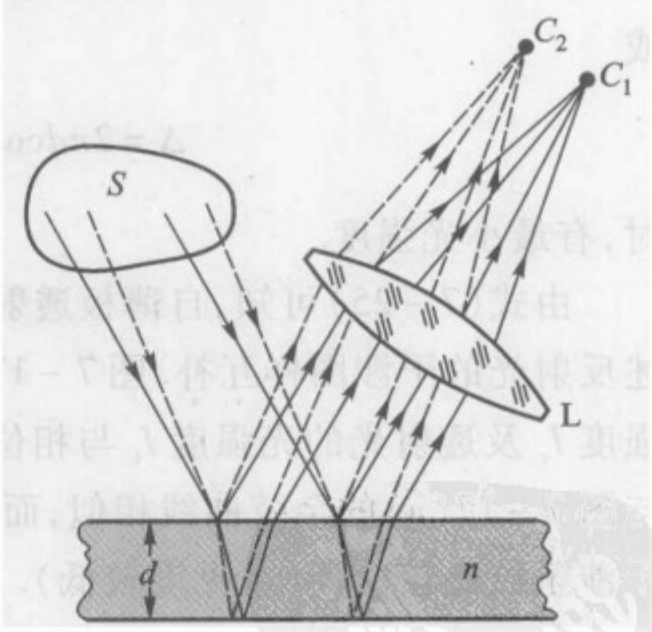


图 7 - 18

等倾干涉条纹的形状决定于具有相同入射角的光线在垂直于观察方向的平面上的交点轨迹,对于平行平面板上的任一点,具有相同入射角的光线分布在以该点为中心的圆锥面上. 这些光线在所述平面上的轨迹系光源平面对该圆锥面所作的截线,一般为圆或圆锥曲线的一部分,因而在透镜焦面所得的干涉图样可为一组共心环状条纹或一组共心的弧状条纹(详见 § 8 - 3 迈克耳孙干涉仪).

2. 当所研究的透明板是折射率 n 均匀而折射角 α 很小的楔形板时,若光源距板较远或观察干涉条纹用的仪器(眼睛或低倍显微镜)的孔径很小,以至于在

整个视场内光线的入射角 i 可视为不变的常量，则反射光在相遇点的相位差只决定于产生该反射光的薄板的厚度 d. 板上厚度相同的地方对反射光所产生的光程差相同，因而同一干涉条纹是由板上厚度相同的地方所产生的反射光形成的，我们称这种干涉为等厚(度)干涉.

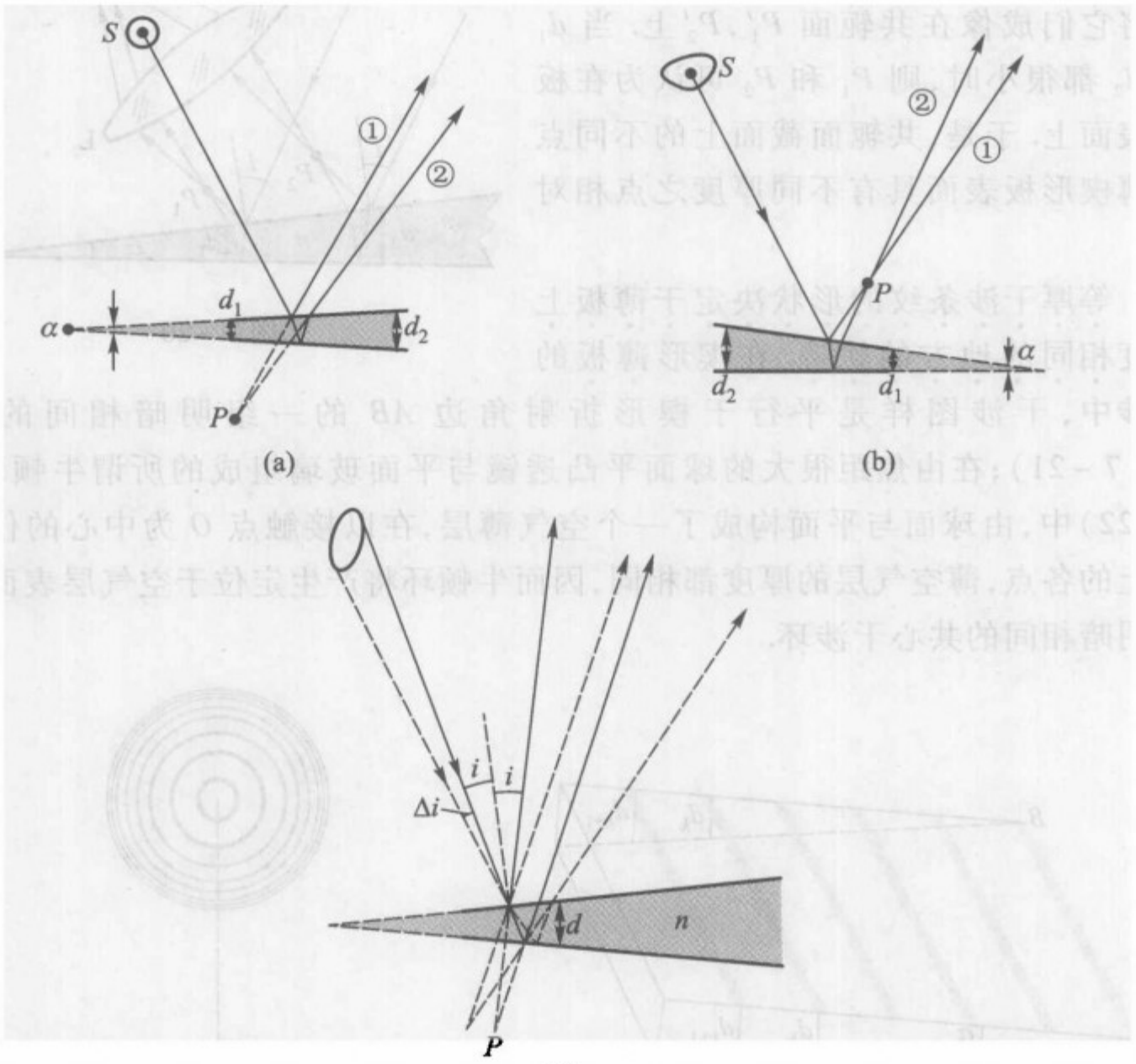


图 7-19

等厚干涉图样的位置如图 7-19 所示，其中于(a)所示的情况下，干涉条纹在楔形板下的 P 处，而于(b)所示的情况下，干涉条纹在楔形板上的 P 处. 当楔形板很薄时，只要光在板面上的入射角不大，则可认为干涉条纹位于板的表面，一般薄膜的干涉就是这种情况. 再者，如图 7-19(c)所示，对于楔形薄板表面上的点，张角 Δi 不大于某一限值 Δi_0 的光线均可当作具有相同入射角 i 的光线，每一条等厚干涉条纹都是由这些自光源 S 的不同点发出的光构成的. 因而等厚干涉条纹也比较明亮. 但楔形板稍厚时，只有光源非常远或很小，才能看到明亮的条纹.

为观察等厚干涉条纹必须使眼睛调焦在 P 处；用照相机拍摄等厚干涉图样时，必须将物镜对 P 点调焦使之成像于其共轭面上，此共轭面不是物镜的焦面.

共轭面上的不同点与板上的不同位置相对应. 图 7 - 20 表示从板的厚度为 d_1 处反射的光所生的干涉条纹在 P_1，从厚度为 d_2 反射的光所生的干涉条纹在 P_2；透镜将它们成像在共轭面 P_1'，P_2' 上. 当 d_1 和 d_2 都很小时，则 P_1 和 P_2 可认为在板的表面上. 于是，共轭面截面上的不同点与薄楔形板表面具有不同厚度之点相对应.

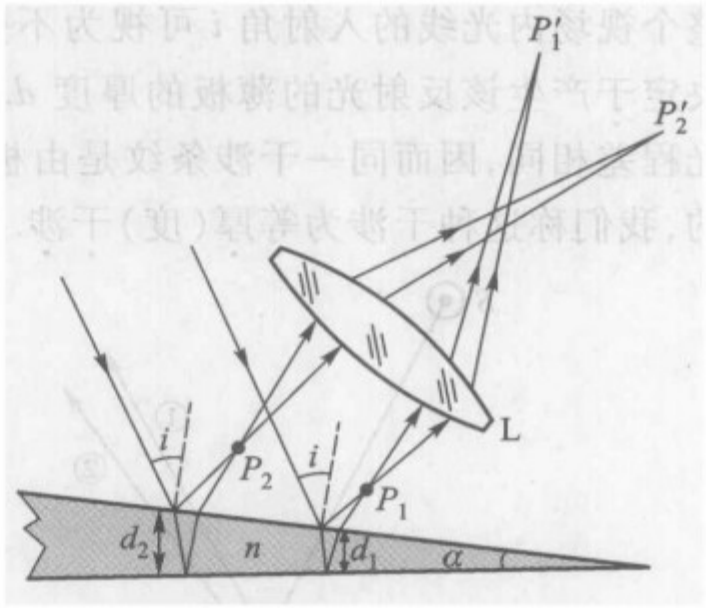


图 7 - 20

等厚干涉条纹的形状决定于薄板上厚度相同的地方的轨迹. 在楔形薄板的干涉中，干涉图样是平行于楔形折射角边 AB 的一组明暗相间的条纹(图 7 - 21)；在由焦距很大的球面平凸透镜与平面玻璃组成的所谓牛顿环(图 7 - 22)中，由球面与平面构成了一个空气薄层，在以接触点 O 为中心的任一圆周上的各点，薄空气层的厚度都相同，因而牛顿环将产生定位于空气层表面的一组明暗相间的共心干涉环.

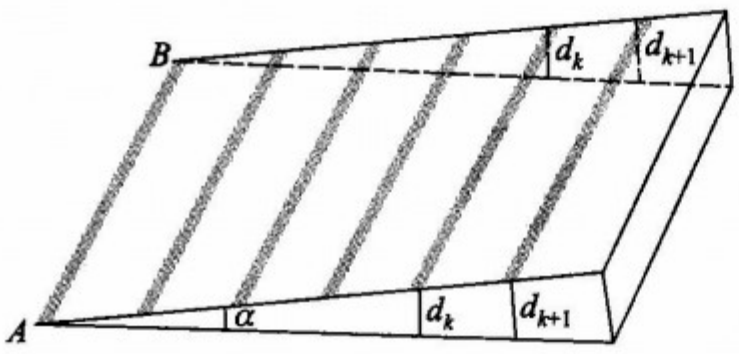


图 7 - 21

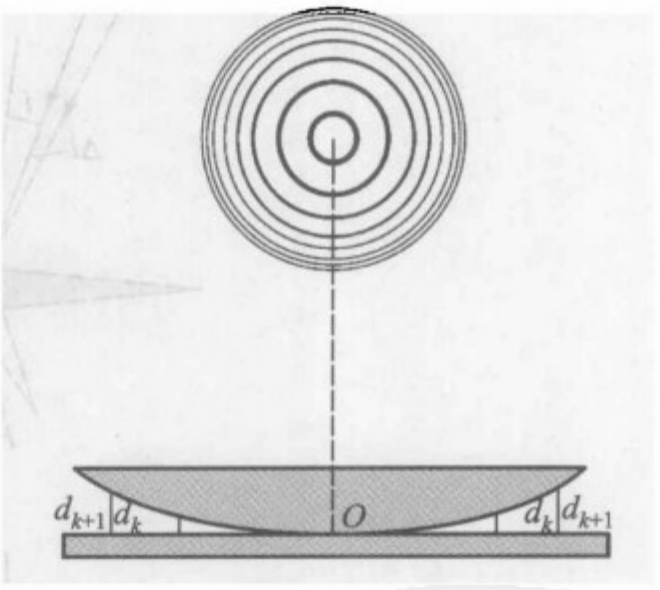
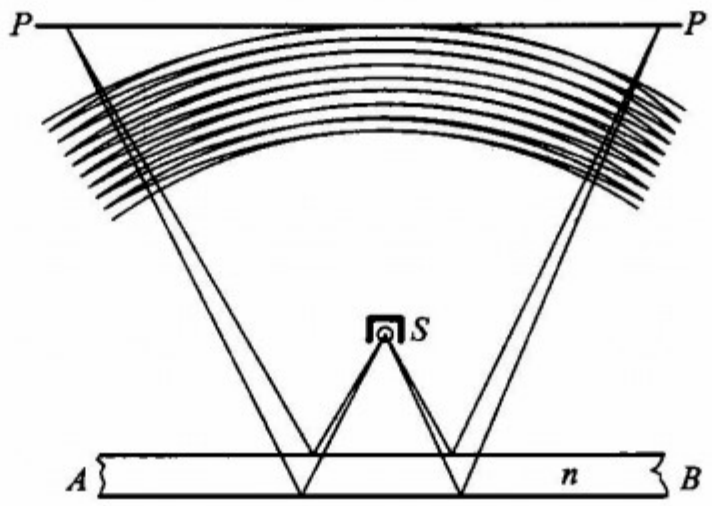


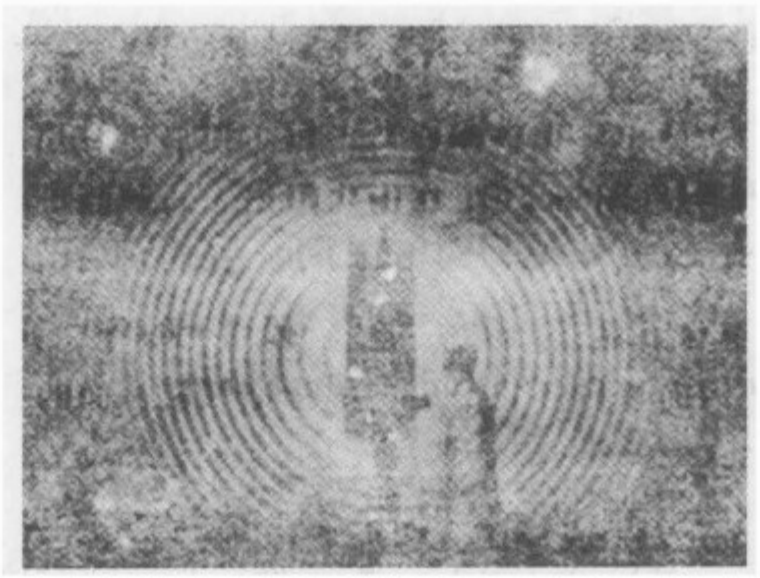
图 7 - 22

不论是平行平面板或楔形板，当光源是扩展的光源时，所生的干涉条纹都有一定的位置，故这些干涉统称定位干涉. 而当光源为点光源时，不论是在平行平面板中还是在楔形板中，与光源在同一边的空间的任一点都可得一定的干涉，称这种干涉为不定位干涉. 用一云母板和一高压小水银灯即可做出这种干涉. 图 7 - 23(a)表示用小水银灯作点光源 S，令光照在云母板 AB 上，在光源所在的同一边放置一幕，并使自光源发生的光不能直接照到幕上，这样在幕上将出现一定的干涉图样；图 7 - 23(b)即为由该实验装置所得的干涉图样的照片.

点光源获得不定位干涉，而面光源只能获得定位干涉，这是由于面光源的各部分对在光源同一边的空间的有限距离的各点都有所贡献(空间相干性很差)，



(a)



(b)

图 7-23

致使图样的可见度甚坏,无法看到干涉条纹. 如果把光源的面积由大变小(即光源的空间相干性变好),当小到某种程度时就会得不定位干涉条纹.

氦氖激光会聚后成功的点光源,兼备空间相干性好和时间相干性好的特点,所以上述实验中用氦氖激光代替高压小水银灯,效应会更明显.

实现等倾干涉和等厚干涉的各种方法,将在下一章详细讨论,在那里还能了解到等倾干涉和等厚干涉的各个细节以及其主要应用.

§7-6 多光束干涉

无论在§7-4还是在§7-5,我们所讨论的干涉都是双光束干涉或者是与双光束等效的干涉. 它们的共同特点之一是干涉图样的光强度是 $\cos^2(\delta/2)$ 的函数,光强随 δ 的改变较缓慢,即干涉条纹较宽. 为获得光强度急剧改变,使干涉图样中的条纹锐利,必须用振幅相等和相邻光的相位差相等的多光束干涉. 由分波阵面法可以获得这样的多光束,由分振幅法也能获得这样的多光束. 让我们先来讨论这样的多光束在相遇点所产生的合成的光强度.

设有 N 个相干光波，每一光波的振幅皆为 a，相邻光波在所考察的点的相位差皆为 δ. 按矢量的多边形加法，这 N 个光波在所讨论的点的合成振幅即为图 7-24 的合成矢量的长度 A. A 的 x 轴和 y 轴方向的投影分别为：

$$\left.\begin{aligned}\sum x &= a[1+\cos\delta+\cos 2\delta+\cdots+\cos(N-1)\delta]\\ \sum y &= a[0+\sin\delta+\sin 2\delta+\cdots+\sin(N-1)\delta]\end{aligned}\right\},\tag{7-31}$$

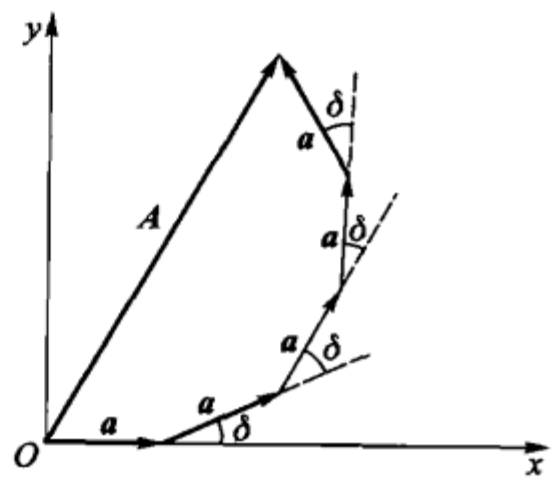


图 7-24

因此该点的光强度：

$$I=A^2=(\sum x)^2+(\sum y)^2=(\sum x+\mathrm{i}\sum y)(\sum x-\mathrm{i}\sum y),\tag{7-32}$$

其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，

$$(\sum x+\mathrm{i}\sum y)=a\{1+(\cos\delta+\mathrm{i}\sin\delta)+(\cos 2\delta+\mathrm{i}\sin 2\delta)+\cdots+[\cos(N-1)\delta+\mathrm{i}\sin(N-1)\delta]\}$$

和

$$(\sum x-\mathrm{i}\sum y)=a\{1+(\cos\delta-\mathrm{i}\sin\delta)+(\cos 2\delta-\mathrm{i}\sin 2\delta)+\cdots+[\cos(N-1)\delta-\mathrm{i}\sin(N-1)\delta]\}.$$

由于　　$\cos\delta+\mathrm{i}\sin\delta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}$，　$\cos\delta-\mathrm{i}\sin\delta=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}$，

所以　　$(\sum x+\mathrm{i}\sum y)=a[1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\delta}+\cdots+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(N-1)\delta}]$

和　　$(\sum x-\mathrm{i}\sum y)=a[1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\delta}+\cdots+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(N-1)\delta}]$.

此两式分别为以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}$ 和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}$ 为公比的几何级数. 按几何级数的求和法，则有

$$\sum x+\mathrm{i}\sum y=a\sum_{k=1}^{N}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-1)\delta}=a\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}N\delta}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}-1},$$

$$\sum x-\mathrm{i}\sum y=a\sum_{k=1}^{N}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-1)\delta}=a\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}N\delta}-1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}-1}.$$

将此二值代入式(7-23)，则得

$$I=a\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}N\delta}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}-1}\cdot a\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}N\delta}-1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}-1},$$

即

$$I=a^2\frac{2-(\mathrm{e}^{\mathrm{i}N\delta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}N\delta})}{2-(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta})}.$$

又由于　　$\mathrm{e}^{\mathrm{i}N\delta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}N\delta}=2\cos N\delta$，　$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}=2\cos\delta$，

所以

$$I=a^2\frac{1-\cos N\delta}{1-\cos\delta}=a^2\frac{\sin^2\frac{N\delta}{2}}{\sin^2\frac{\delta}{2}}.\tag{7-33}$$

这就是振幅相同的多光束在相遇点的光强度公式. 当光束是平行光时,此式表示在会聚此光束的透镜焦平面上的光强度分布.

若以复数形式表示诸相干光波的振幅和相位关系,则在所讨论点的合振动(省略时间因子)显然是

$$\begin{aligned} y &= a + ae^{-i\delta} + ae^{-i2\delta} + \cdots + ae^{-i(N-1)\delta} \\ &= a\left[1 + e^{-i\delta} + e^{-i2\delta} + \cdots + e^{-i(N-1)\delta}\right] \\ &= a\frac{e^{-iN\delta} - 1}{e^{-i\delta} - 1}. \end{aligned}$$

于是在该点的光强为

$$I = y \cdot y^* = a^2 \frac{e^{-iN\delta} - 1}{e^{-i\delta} - 1} \cdot \frac{e^{iN\delta} - 1}{e^{i\delta} - 1}.$$

同样的讨论仍得式(7-33).

由(7-33)式可知:当相邻光在所讨论的点的相位差为 π 的偶数倍时,即 $\delta = \pm 2k\pi$ 时,则该点有最大光强度

$$I_{max} = (Na)^2; \tag{7-34}$$

而当 $\delta = \pm 2k'\pi/N$(但 $k' \neq N, 2N, 3N, \cdots$)时,该点的光强度

$$I_{min} = 0,$$

我们称由 $\delta = 2k\pi$ 的多光束所产生的最大光强度为第 k 级干涉主最大,由 $\delta = 2k'\pi/N$所产生的最小光强度为第 k'级干涉最小. 两相邻级的干涉主最大之间还有决定于光束数目 N 的若干个较弱的最大光强度,称为次最大,它们的位置可由使公式(7-33)的第一阶导数为零而得,即当

$$\delta \approx \pm (2k'' + 1)\frac{\pi}{N}, \quad k'' = 1, 2, 3, \cdots \tag{7-35}$$

时,可得次最大.

当遵守(7-35)式时,可得下列关系:

$$\sin^2\frac{N\delta}{2} = \frac{N^2\tan^2\frac{\delta}{2}}{1 + N^2\tan^2\frac{\delta}{2}} = \frac{N^2\sin^2\frac{\delta}{2}}{1 + (N^2 - 1)\sin^2\frac{\delta}{2}},$$

这一关系式可使式(7-38)变成

$$I = a^2 \frac{N^2}{1 + (N^2 - 1)\sin^2\frac{\delta}{2}}. \tag{7-36}$$

由此式不仅可以算出主最大的光强度为 N^2a^2,且亦可算出各次最大的光强度. 对于最靠近 0 级主最大的次最大($k'' = 1$)

$$\delta = \pm 3\pi/N,$$

当 N 很大时,这是一个十分小的角度,代入式(7-36),则求得该次最大的光强

度为

$$I = a^2 \frac{N^2}{1 + (N^2 - 1)\left(\frac{3}{2}\frac{\pi}{N}\right)^2} \approx \frac{1}{23} N^2 a^2 = \frac{1}{23} I_{max}. \tag{7-37}$$

推广之,对于靠近任一级主最大的次最大,其光强度亦均如此. 因而,在多光束干涉中,靠近主最大的次最大,其光强度约为主最大的 1/23. 其余的离主最大更远的次最大,光强度更小.

由于 $\delta = \pm 2k\pi$ 时有主最大,$\delta = \pm 2k'\pi/N$时有最小,其中 $k' = 1, 2, 3, \cdots, (N-1), (N+1), \cdots, (2N-1), (2N+1), \cdots$,所以出现最小的次数要比出现主最大的次数多 $N-1$ 倍,即两相邻主最大间有 $N-1$ 个最小. 每两相邻最小间有一次最大,所以两相邻主最大之间有 $N-2$ 个次最大.

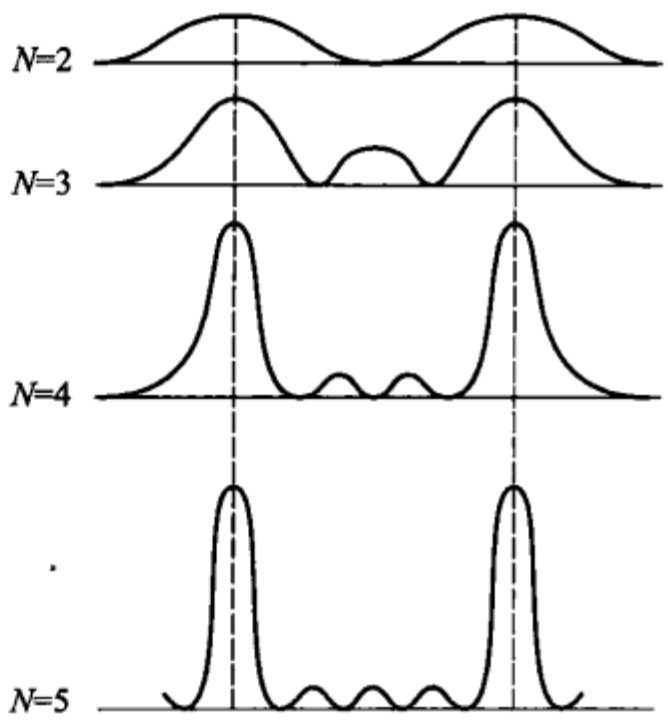


图 7-25

图 7-25 分别表示二、三、四和五个光束干涉时的情况. 可见增加相干光束的数目时,主最大就变得锐利,光强度的变化急剧,同时次最大的数目增多. 当相干光束的数目 N 很大时,则数目众多的次最大实际上混成一片,只在诸主最大之间形成一个光强度很弱的背景;主最大成为非常细的亮条纹,这些亮条纹实际上是完全为较宽的暗间隔所隔开.

在后面我们将研究实现多光束干涉的方法——衍射光栅和法布里-珀罗干涉仪.

习 题

1. 若用两个细灯丝代替杨氏实验中的双狭缝,可否看到干涉条纹? 为什么?

2. 试由式(7-11c)说明双光束干涉中光强度分布与两光束光程差间的关系.

3. 双狭缝干涉实验中,设两缝的距离为 0.3 mm,以单色光照明狭缝光源时,在离双缝 1.2 m远的屏上两第 5 暗条纹的间隔为 22.78 mm,所用光的波长是多少? 并说明它的颜色.

4. 若以波长 $\lambda = 600$nm 的光照明光源狭缝,并且两缝的距离为 0.7 mm,问距双缝 5 m 远的屏上干涉条纹的间隔是多少?

5. 设以波长为 $\lambda = 590$ nm 的光照明光源狭缝,并且双缝的间隔为 0.5 mm,试以屏幕与双缝的距离为横坐标,相邻条纹间的间隔为纵坐标作一关系曲线.

6. 在菲涅耳双平面反射镜的干涉实验中,若照明光源狭缝所用的光为复色光,且其波长

分别为 400 nm,550 nm 和 700 nm,试以曲线表示出屏上的光强度分布,并以此推论白光干涉时所产生的干涉图样的特点.

7. 若以图 7-12 所示的装置制备每毫米 1200 条线的光栅,用氦氖激光器作光源(λ = 632.8 nm),试问两反射镜间的夹角是多少?

8. 设菲涅耳双棱镜的折射率为 $n=1.5$,棱镜的锐角为 0.5°,狭缝放在距双棱镜 100 mm 的地方,在距双棱镜 1 m 远的屏上测得干涉条纹的间隔为 0.8 mm,所用光的波长是多少?

9. 在 8 题中,若将一薄玻璃片放在一棱镜后面的光路中将出现什么现象? 为什么?

设照明光源狭缝的单色光的相干长度为 1 cm,玻璃片的折射率为 $n=1.5$,试问当玻璃片的厚度为多大时,干涉现象完全消失?

10. 在菲涅耳双棱镜干涉实验中以钠光灯(λ = 589.3 nm)照明光源狭缝,若将一肥皂膜($n=1.33$)放入一棱镜后的光路中,干涉条纹的中心极大(零级)移到原第 3 级极大处,试问肥皂膜的厚度是多少?

11. 在图 7-22 所示的牛顿环装置中,若在平凸透镜与平板间充满折射率为 $n=1.60$ 的油液,问干涉条纹会发生什么变化?

12. 在 11 题中,若在透镜的凸表面和平板的上表面镀上反射系数为 90% 的膜层后,试问与未镀膜之前相比,干涉条纹有什么变化?

第八章

干涉现象的应用及干涉仪

前一章讨论了光的干涉原理，在这一章，我们将以典型的干涉实验和著名的干涉仪来进一步阐述那里的原理，同时，还注意讨论它们的实际应用. 在具体内容方面，除著名的经典干涉仪如牛顿环、迈克耳孙干涉仪和法布里－珀罗干涉仪及其变种之外，我们还扼要地介绍几种概念上或应用上有特殊意义的干涉仪，如傅里叶干涉分光计、激光干涉仪、马赫－曾特尔干涉仪以及用于波面剪切的干涉仪等.

§8－1　等厚干涉的应用

在干涉现象中，不论是何种干涉，相邻干涉条纹的光程差的改变都等于相干光的波长. 可见光的波长虽然很小，但干涉条纹间的距离或干涉条纹的数目却是可以计量的. 这样，通过对条纹数目或条纹的改变的计量，即可获得以光的波长为单位的对光程差的计量. 在折射率为已知时，可得以波长为单位的长度值（或长度差值），而在长度为已知时，则可得微小的折射率差等. 由于长度能以波长为单位进行测量，所以也能精密的测量微小的角度或角度差. 大多数情况下，对长度的微小改变和平面之间的微小夹角的测量是借助于等厚干涉. 兹分述如下：

1. 测量微小的角度

设有一个由折射率为 n 的透明介质构成的楔形板（参看图 7－21），其很小的折射角 α 为待测角. 今以波长为 λ 的平行单色光（例如水银灯的绿光）近于垂直地投射在楔板的表面上，当板很薄时，则在表面上呈现明暗相间的干涉直条纹.

在此种等厚干涉条纹中，第 k 级最大所在处的楔形板厚度按式（7－29），应为

$$d_k = \frac{1}{2n}\left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda.$$

第 $k+1$ 级最大所在处的楔形板厚度则为

$$d_{k+1}=\frac{1}{2n}\left(k+1+\frac{1}{2}\right)\lambda.$$

两相邻亮条所在处的厚度差为

$$d_{k+1}-d_k=\frac{\lambda}{2n}.$$

若两相邻亮条纹在板表面上的距离为 l，则由图得

$$l\alpha=d_{k+1}-d_k=\frac{\lambda}{2n}.$$

因而

$$\alpha=\frac{\lambda}{2nl}, \tag{8-1}$$

在已知入射光的波长和楔形板折射率的条件下，只要测出相邻亮条纹（或暗条纹）的间隔 l，即可由上式求得该楔形板上的折射角 α，例如，用水银绿光（$\lambda=546.1$ nm）照射在很薄的楔形板上，由显微镜测得相邻条纹间的距离 $l=5$ mm. 于是，由式（8－1）得该楔形板两平面间的夹角 $\alpha=15''$. 这样小的角度只有用高级的测角仪才能测出，而用所述的干涉法却很简单.

上述原理也可用来检查最精密的棱镜的角度. 为此目的，需要有一个玻璃角规. 玻璃角规是由一块有标准形状的玻璃棱镜和一块平行平面玻璃板组成的，两者有极完善的接触. 图 8－1 中标准玻璃块 A 为长方形，它与平行平面板 B 有“光学接触（即完全密合）”. A 与 B 间构成一个直角或一个十分近于直角的其他已知角. 将待检查的直角棱镜 W 放在图中虚线所示的棱镜的位置；当此被检查的角度与角规的角度有微小的差值时，则在其与 A 块的平面间和其与 B 板的平面间各构成一楔形空气隙. 用单色光照明它们，则得如图所示的等厚干涉条纹. 量出相邻干涉条纹的距离 l，利用式（8－1）即可得出楔形空气隙的角度，从而得知被检查棱镜的角度的精确值.

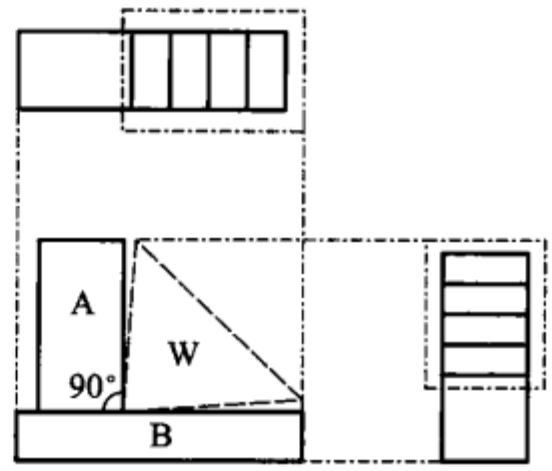


图 8－1

2. 检查表面的质量

光学仪器要求所用的棱镜或透镜具有与理想的几何形状极接近的形状，两者之差值应以波长为单位，且不应超过某一规定的值，例如 $\lambda/2$ 或更小. 这样高精度的表面只有用干涉方法才能检查. 检查平面或球面时，需在被检查的表面上放一个有同一曲率半径的“玻璃样板”（此样板的几何形状完善，且其曲率半径的精确值为已知）. 待查的面如系凸面，则在其上放一个凹面样板；如待查的是平面则在其上放一个平面样板. 在样板与被检查的表面间形成一个空气薄层. 当以

一单色光(例如水银灯的绿光)照明此空气薄层时,就产生干涉.

图 8 -2 表示检查平面的情况. AB 为平面样板的一个平面,$A'B'$为被检查的近于平面的一个表面. 将两者放在一起,若两者之间毫无灰尘,并且它们具有完全相同的几何形状,则当在 A 点稍加压力时,AB 与 $A'B'$间形成一个完整的楔形空气膜. 于是在单色光的照明下,在此空气膜上(或者说在$A'B'$表面上)将出现明暗相间的等厚干涉直条纹,

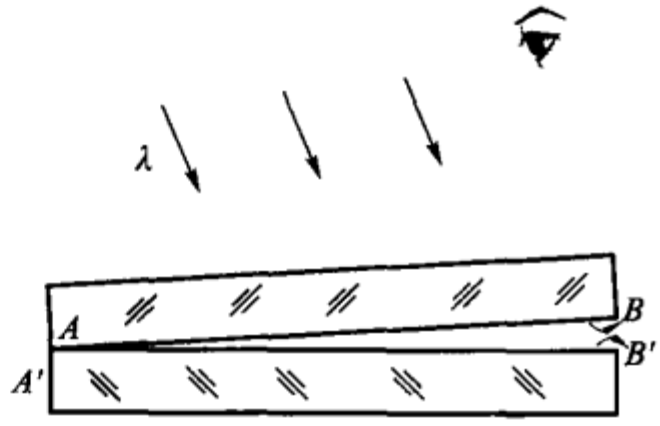


图 8 -2

此条纹平行于所加压的 A 边. 只要被检查的表面对样板的平面稍有偏差,则空气膜将不是一个完整的楔形,具有相同厚度的地方的轨迹不再是一个平行直线. 因而所得位于$A'B'$表面的等厚干涉条纹不再是上述平行于加压力的 A 边的明暗相间的干涉直条纹. 图 8 -3(a)和(b)表示被检查的表面 $A'B'$有"凸起"和"凹陷"时,干涉图样的形状(夸大了的). 改变加压力的地点来观察这些干涉条纹的改变,即可得知被检查平面在不同方向上与平面的偏离程度. 一般的光学反射面,要求其平面与几何平面之差不超过 $\lambda/4$,即要求如图 8 -3 所示的弯曲条纹对相应直条纹的偏离 ΔN 不超过相邻条纹间隔的 1/2. 高级的光学平面,例如,上述的"玻璃样板"以及下面要讲到的迈克耳孙干涉仪与法布里 - 珀罗干涉仪上用的平面,其 ΔN 值一般应不超过 1/10.

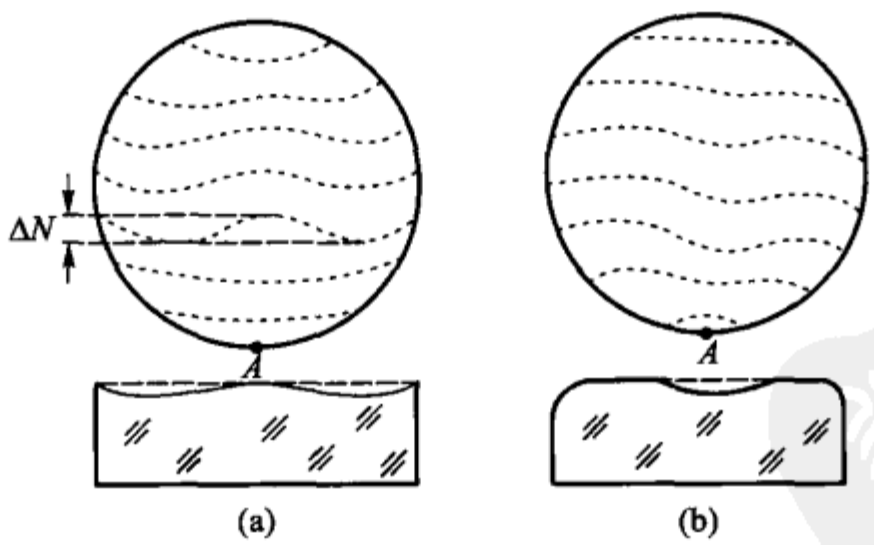


图 8 -3

3. 测量长度的微小改变

对任一楔形薄层,当其折射角 α 不变而只增减板的厚度时,等厚干涉条纹并不改变其条纹间的距离,而只发生条纹的移动. 当厚度增加 $\lambda/2n$ 时(n 为楔形薄层的折射率),第 k 级干涉条纹将位移到第 $k-1$ 级干涉条纹的位置上,第 $k+1$ 级移到第 k 级,余类推,即此时整个干涉图样在薄层表面上向较薄的方向位移了

一段由下式决定的距离：

$$l=\frac{\lambda}{2\alpha n}.$$

此式是由式(8-1)得到的. 当楔形薄层的厚度减小 $\lambda/2n$ 时，整个干涉图样将向楔形薄层的较厚的方向移动同样一个距离. 于是通过测量干涉条纹位移，即可算出楔形板厚度的微小的改变. 利用这个原理可制成干涉膨胀仪，用它可测量很小的固体样品的热膨胀系数.

干涉膨胀仪的主要部分如图 8-4 所示，CC'为一个由热膨胀系数很小，且其值为精确测定过的材料制成的环，如熔石英环，铟钢环等，环放在平面玻璃板 AB 和 $A'B'$之间，在环内置待测物体 W. 环的两断面和待测样品的上、下的两表面，都要研磨成完善的光学平面，特别是样品的上表面. 样品放在环 CC'内，使平板 AB 的下表面与样品 W 的上表面间形成一个楔形空气层. 以单色光自 AB 板上垂直入射时，在此楔形空气层上将产生等厚干涉条纹. 当仪器的温度上升时，由于环 CC'和样品 W 的热膨胀系数不同，空气层的厚度将有改变，因此干涉条纹将移动. 若仪器的温度由 t_0 升至 t，通过视场中某一刻线的条纹的数目为 N 个，则楔形空气厚度的增量为

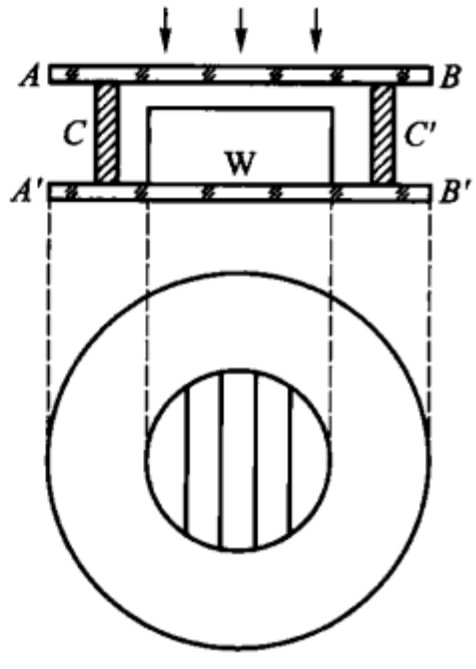


图 8-4

$$\Delta L=N\frac{\lambda}{2},$$

式中 ΔL 为当温度由 t_0 升至 t 时环 CC'的长度 L_C 与样品的长度 L 之差，即

$$L_C-L=N\frac{\lambda}{2}. \tag{8-2}$$

由于环 CC'的热膨胀系数为已知，因而上式中的 L_C 值可由计算得出，结果由上式可得在温度为 t 时样品的长度 L. 若 L_0 为样品在温度 t_0 时的长度，于是被测物体的热膨胀系数 β 为

$$\beta=\frac{L-L_0}{L_0}\frac{1}{(t-t_0)}. \tag{8-3}$$

*§8-2 牛 顿 环

如§7-5(2)所述，牛顿环是由一个焦距很大的平凸透镜与一个平面玻璃板接触在一起组成的器件. 在透镜的凸表面与平板的平面间形成一个厚度由零逐渐增大、且两表面的夹角亦随之增大的空气层，在此接触点为中心的圆周上空

气层的厚度相等. 所以,当以单色光沿一定方向入射时,在所述的空气层上呈现如图 8 -5(a)所示同心环状的干涉条纹.

凸表面的反射光与其相干的在平板平面上的反射光之间的光程差为

$$\Delta = 2d\cos i' + \frac{\lambda}{2},$$

式中第二项前取"加号"为的是与在空气层的第一表面产生半波损失的情况相区别. 因为在牛顿环中,在平板的平面上反射光的相位变更 π,而在凸面上的反射光无相位的改变. 由此式可知,在接触点($d=0$),两反射光的光程差为 $\lambda/2$,因而牛顿环所产生的等厚干涉条纹的中心是一个暗点,事实上也确是如此.

在牛顿环的干涉图样中,第 k 级干涉亮条纹与第 $k+1$ 级干涉亮条纹所在处空气层的厚度 d_k 和 d_{k+1} 分别由

$$\left.\begin{aligned} 2d_k\cos i_k' + \frac{\lambda}{2} &= k\lambda, \\ 2d_{k+1}\cos i_{k+1}' + \frac{\lambda}{2} &= (k+1)\lambda \end{aligned}\right\} \tag{8-4}$$

来确定,实际上,i_k' 与 i_{k+1}' 相差甚微,可由其平均值 i' 代替,因而相邻亮条纹在空气层上的厚度差近似为

$$d_{k+1} - d_k = \frac{\lambda}{2\cos i'}.$$

由于牛顿环中形成空气层的两表面的夹角 α 虽然是由零逐渐增大但在相邻干涉条纹的小范围内,夹角 α_k 仍可认为是常数,因而第 k 级与第 $k+1$ 级的亮条纹在空气上的间隔 l_k,可由推导式(8 -1)的原理而求得

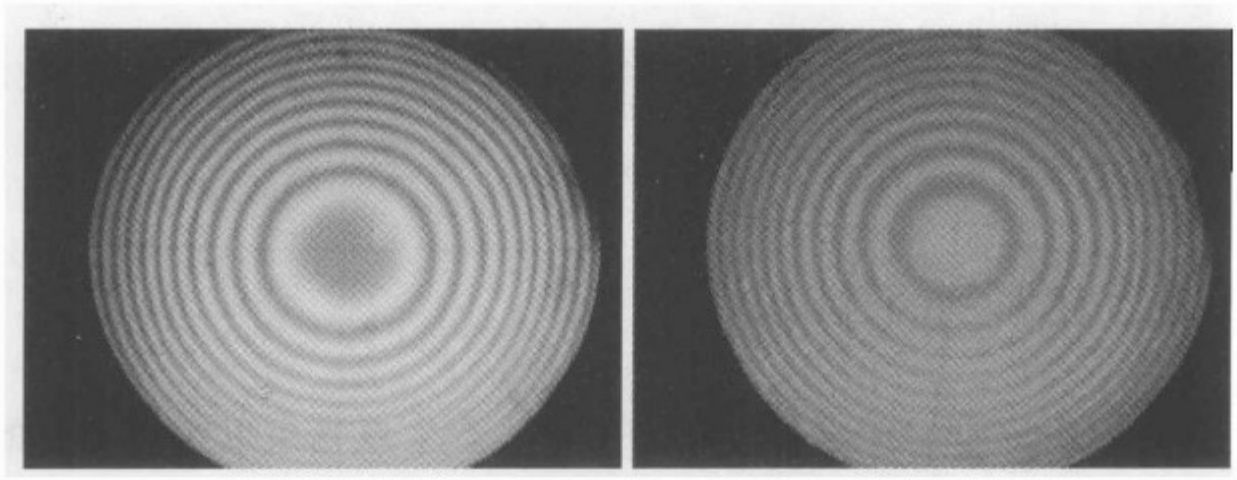
$$l_k = \frac{\lambda}{2\alpha_k\cos i'}, \tag{8-5}$$

此式表明,牛顿环干涉条纹的间隔正比于波长,并且入射光的入射角愈大则条纹的间隔愈大(实际上 $i\approx 0$);由于牛顿环中 α_k 是由零逐渐增大的,所以愈靠近接触点,相邻条纹的间隔愈大,即牛顿环的干涉图样是中心疏而边缘密的一组同心环状条纹.

当以白光投射到牛顿环上时,则可见中心为暗斑,而外围有彩色的几个环状条纹.

在牛顿环中,由透射的光所生的干涉图样与由反射光所生的干涉图样是互补的. 图 8 -5(b)所示即为透射光的干涉图样,它与图 8 -5(a)互补. 可见,透射光的干涉图样的对比度较差,其原因可由图 7 -17(b)所示的光强曲线来说明.

下面让我们来导出干涉环的半径 r、波长 λ 和所用透镜凸表面的曲率半径 R 三者之间的关系式,以便了解牛顿环的应用. 图 8 -6 中 d_k 为第 k 级亮条纹所在



(a) (b)

图 8-5

处空气层的厚度，r_k 为该亮条纹的半径. 由几何定律得

$$d_k = \frac{r_k^2}{2R - d_k},$$

实际上 R 有几米之长，而 d_k 最大不过是几分之一毫米，因而上式分母中的 d_k 值可以略去，即

$$d_k = \frac{r_k^2}{2R}. \tag{8-6}$$

在一般的牛顿环实验中，入射光垂直投射在透镜面上，$i' \approx 0$，于是，公式(8-4)的第一式可变为

$$d_k = \left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2},$$

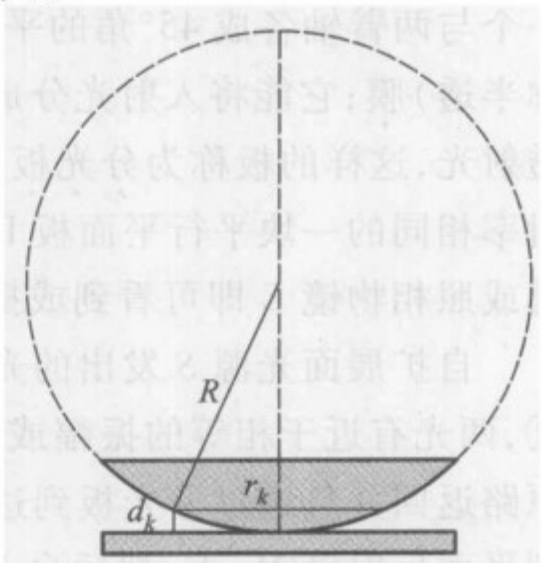


图 8-6

令此式与式(8-6)相等，则得

$$r_k^2 = 2R\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} = R(2k-1)\frac{\lambda}{2}, \quad k = 1,2,3,\cdots. \tag{8-7}$$

由此可见，干涉环的半径和 1,3,5,… 的平方根成正比. 当第 k 级亮干涉条纹的半径 r_k 用显微镜测得后，若已知入射光的波长 λ，则可得透镜凸球面的曲率半径 R；反之，若 R 为已知，则可得入射光的波长. 不过用这种方法测 R 或 λ 常常有很大的差误，原因之一是假定了凸面与平面相切于一点. 事实上即使两表面间毫无尘埃也不免因接触压力引起形变，使接触为一圆面. 所以比较准确的方法是测量距中心较远的两个干涉环的半径，例如测得较远的第 k 级和第 $k+m$ 级亮条纹半径 r_k 和 r_{k+m}，利用公式(8-7)，可得

$$r_{k+m}^2 - r_k^2 = mR\lambda.$$

由此得到

$$\lambda = \frac{r_{k+m}^2 - r_k^2}{mR}, \tag{8-8}$$

或

$$R=\frac{r_{k+m}^2-r_k^2}{m\lambda},\tag{8-8a}$$

这个公式是实际上常用的.

§8-3　迈克耳孙干涉仪

迈克耳孙(Michelson)干涉仪是用分振幅法产生双光束以实现干涉的仪器. 图 8-7(a)和(b)分别为这种干涉仪的实物照片和构造简图,其中 M_1 和 M_2 为在相互垂直的两臂上放置的相互垂直的两个平面反射镜,并且 M_1 可沿臂轴方向移动,两平面反射镜系由光学平面涂金属反射膜而成. 在两臂轴的相交处,放一个与两臂轴各成 45°角的平行平面板 P_1,且于 P_1 的第二平面涂以半反射(或称半透)膜;它能将入射光分成振幅(或光强度)近于相等的一束反射光和一束透射光,这样的板称为分光板. 在 $P_1\rightarrow M_2$ 的臂上另加一个与分光板厚度相同、折射率相同的一块平行平面板 P_2,它起补偿光路的作用,称为补偿板. 观察者的眼睛或照相物镜 E 即可看到或摄得干涉图样.

自扩展面光源 S 发出的光线,射到分光板 P_1 后被分解为反射光①和透射光②,两光有近于相等的振幅或光强度. ①光垂直地射到平面反射镜 M_1 上后,沿原路返回并且透过分光板到达眼睛或照相物镜;②光通过补偿板 P_2 后垂直地射到平面反射镜 M_2 上,然后自 M_2 沿原路返回至分光板 P_1;并由 P_1 上的半反射膜将光部分地反射向人眼或照相物镜. 这样①光和②光是相干光,所以眼睛或照相物镜能看到或摄得干涉图样. 为了在平面镜 M_1 和 M_2 至分光板 P_1 半反膜中心的距离 M_1P_1 和 M_2P_1 相等时,使进入人眼的①光和②光在仪器中的光程也相等,则需加补偿板[①] P_2,它使②光在 P_2 中所走的光程与①光在 P_1 板中所走的光程相等. 由于分光板第二平面的半反射膜实质上是反射镜,它使 M_2 在 M_1 附近成一个平行于 M_1 的虚像 M_2'(未画),但为下面讨论上的方便,不妨认为半反膜使 M_1 在 M_2 附近成一个平行于 M_2 的虚像 M_1',因而光在迈克耳孙干涉仪中自 M_2 和 M_1 的反射,相当于自 M_2 和 M_1'的反射. 于是,迈克耳孙干涉仪中所产生的干涉与厚度为 d 的空气平行平板所生的干涉一样,此处 d 为虚像 M_1'和平面镜 M_2 的间隔. 显然,自 M_1'和 M_2 反射的两光的光程差应为

$$\Delta=2d\cos i',\tag{8-9}$$

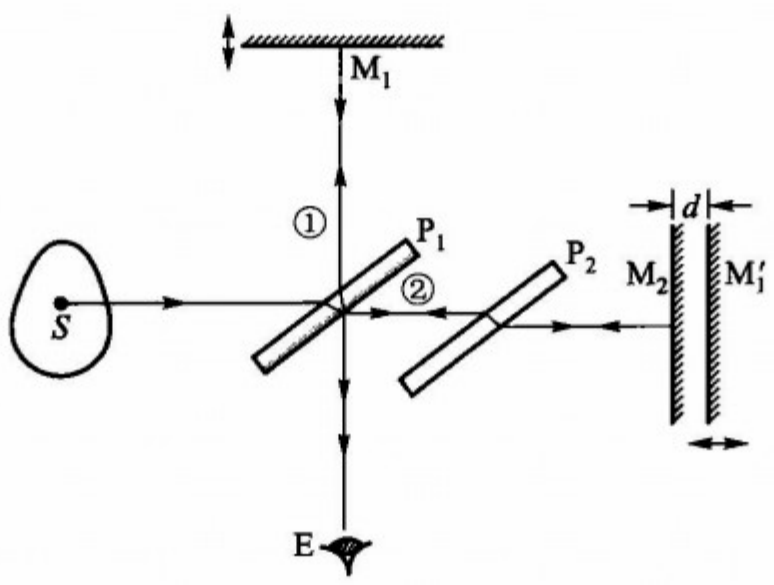
其中 i'即为①光在平面镜 M_1 上的入射角.

---

① 补偿板的作用,实质上是为了使干涉仪对不同波长的光同时满足等光程的要求,为了确保它的厚度和折射率与分光板的完全相等,在制作时是将同一块平行面板分为两块,一块作分光板,一块作补偿板.



(a)



(b)

图 8－7

当 M_1' 与 M_2 完全平行时，所得干涉为等倾干涉，其条纹位于无限远或透镜的焦面上，第 k 级亮条纹是由满足下式的入射光的反射造成的：

$$2d\cos i_k' = k\lambda. \tag{8-10}$$

如 §7－5 所述，等倾干涉条纹的形状决定于具有相同入射角的光线在垂直于观察方向的平面上的轨迹，而按图 8－8 所示的迈克耳孙干涉仪的光路图，可以看到在 M_1 垂直于 M_2（即 M_2 平行于 M_1'）的条件下，在实际垂直于观察方向的光源平面 S 上，自以 O 点为中心的圆周上各点发出的光有相同的倾角，因而干涉图样是由同心环状的条纹组成的. 图 8－9 就是用水银绿光在迈克耳孙干涉仪中获得等倾干涉图样.

在这个干涉图样中，第 $k+1$ 级亮条纹是由入射角 i_{k+1}' 满足下式的光造成的：

$$(k+1)\lambda = 2d\cos i_{k+1}'. \tag{8-11}$$

由比较式(8－10)和式(8－11)可知 $i_k' > i_{k+1}'$，即较高级次($k+1$)级的干涉条纹在较低级次(k)级干涉条纹的内侧，愈向边缘，干涉条纹的级次愈小，这是和牛

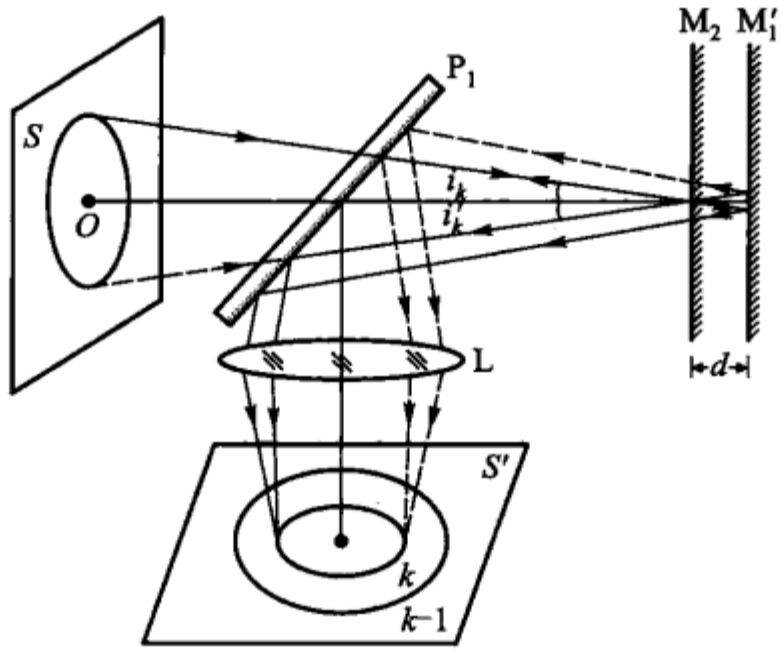


图 8 - 8

顿环干涉条纹截然不同之点. 在同一等倾干涉的干涉图样中,两相邻干涉条纹的间隔可从下述方法求出:由式(8 - 11)减式(8 - 10),得

$$2d(\cos i'_{k+1} - \cos i'_k) = \lambda,$$

或写成

$$-2\sin\frac{i'_{k+1}+i'_k}{2}\sin\frac{i'_{k+1}-i'_k}{2} = \frac{\lambda}{2d}.$$

实际上 i'_k 和 i'_{k+1} 的绝对值都很小,所以上式可近似地写成

$$-(i'_{k+1}+i'_l)(i'_{k+1}-i'_k) = \frac{\lambda}{d},$$

或

$$\Delta i'_k = -\frac{\lambda}{2d}\frac{1}{\overline{i'_k}}, \qquad (8-12)$$

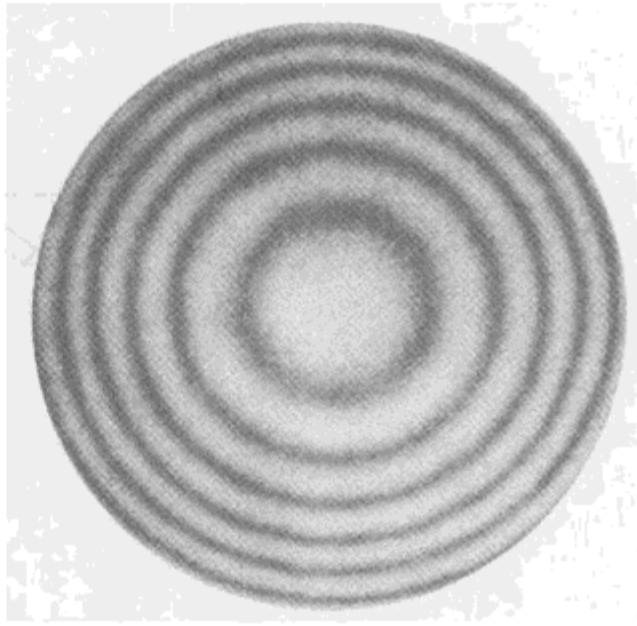


图 8 - 9

式中 $\Delta i'_k = i'_{k+1} - i'_k$, $i'_k = (i'_{k+1} + i'_k)/2$. 此式表明相邻两条纹的角距离 $\Delta i'_k$ 正比于波长而反比于 M'_1 与 M_2 之间的间隔,并且随条纹对干涉中心的远离($\overline{i'_k}$变大),条纹的间隔愈来愈小. 这一点在表现上与牛顿环的干涉图样相似. 图 8 - 9 已清楚地表明了这种情况.

当 M_1 与 M_2 两平面镜不完全垂直,即由 M'_1 与 M_2 的平面构成一个楔形空气层时,可得等厚干涉条纹. 若 d 很小,则干涉条纹呈现于所形成的空气层上. 此时在表面上相邻干涉条纹的间隔,按式(8 - 1),应为一常数. 显然,此时干涉图样是由等距离分布的亮暗相间的直条纹组成的,如图 8 - 10 中的(g),(h)和(i)所示. 其中(g)和(i)图的干涉条纹有些弯曲,乃因光程差的改变多少也随角度而变的缘故.

当 M_1' 与 M_2 完全重合时，则中心条纹充满整个视场，视场内有均匀的光强分布，如图 8-10(c)所示.

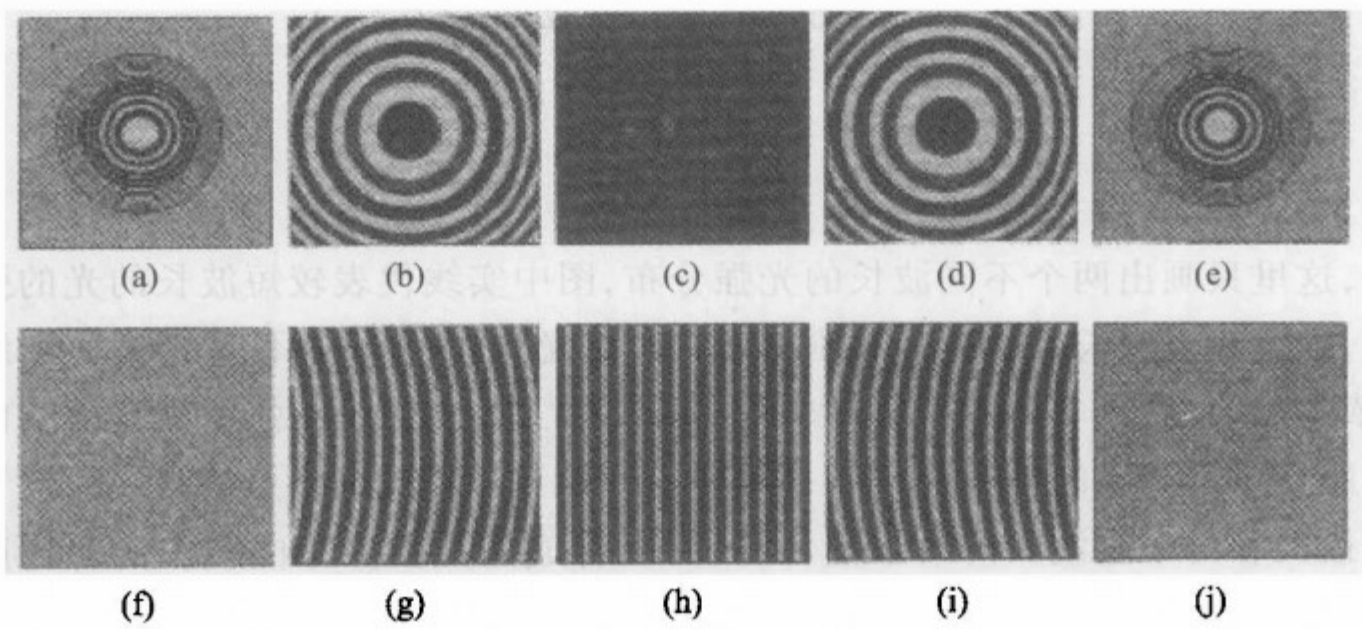


图 8-10

当平行的 M_1' 与 M_2 的间隔 d 逐渐增大时，对于任一级干涉条纹，例如第 k 级，它必以减小其 $\cos i_k'$ 值来保持满足 $2d\cos i_k' = k\lambda$，故该干涉条纹向 i_k' 变大($\cos i_k'$ 变小)的方向移动，即向外扩展，中心条纹将向外长出；且每当间隔 d 增加 $\lambda/2$ 时，中心条纹向外长出一个. 所以当间隔由小逐渐变大时，观察者可看到自干涉图样中心，条纹不断的涌出. 反之，当间隔由大逐渐变小时，最靠近中心的条纹将一个一个地“陷入”中心，且每陷入一个条纹，间隔的改变亦必为 $\lambda/2$. 图 8-10(a)，(b)，(c)，(d)，(e)表示间隔 d 自较大的值开始逐渐变小而至零，然后又由零逐渐向反向变大时，等倾干涉图样的改变，其中(c)与 $d=0$ 相应. 而(f)和(j)两个空白图表示在 d 太大时得不到干涉条纹. 在平面 M_1' 和 M_2 不完全平行的条件下，将两者的距离由较大逐渐变小而至零，以及然后由零再向反向变大，可得如(g)，(h)和(i)所示的三张图，其中(h)表示 M_1' 平面同 M_2 平面相交于两镜中央部分的情况.

若射入干涉仪的光包含各种波长的光，例如白光，则干涉条纹除了在 d 值不超过几个波长的情况之外，是完全看不见的. 观察白光的干涉条纹须使 M_1' 和 M_2 相交[图(h)的情况]，所观察到的图样是几条直条纹. 若分光板 P_1 第二面未镀银，则当两臂几何光程相等(M_1' 和 M_2 相交)时，中央条纹是暗的，因为自 M_2 反射回来的(2)光[图 8-7(b)]在分光板第二面上反射时相位变更 π. 但因一般分光板第二面都镀半透银膜，情况就不如此简单，中央条纹可能是亮的.

白光干涉图样只能看见几条，其理由是相邻条纹的间隔正比于波长，且所有波长的中央条纹的中心重合，因而有如图 8-11 所示的光强度分布曲线. 为明显

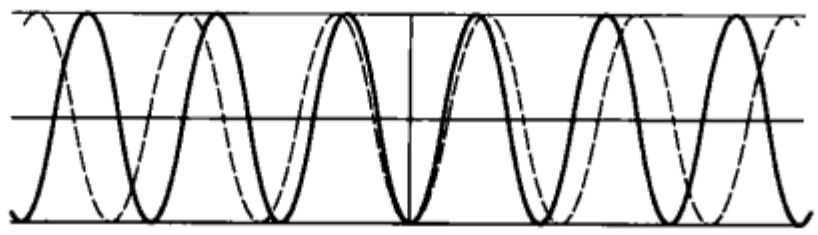


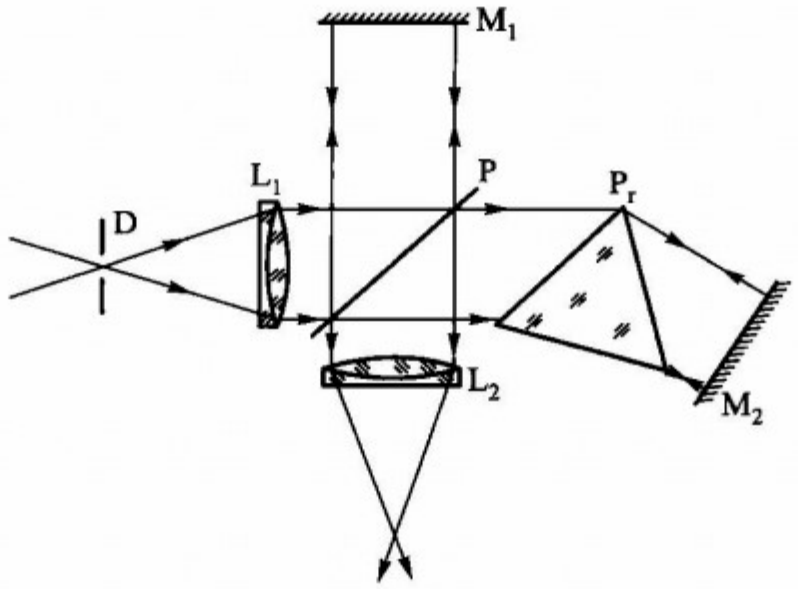
图 8－11

起见，这里只画出两个不同波长的光强分布，图中实线代表较短波长的光的强度分布，虚线代表较长波长的光的强度分布. 白光是由许多个不同波长的光组成的，依此画出后，对零级及其附近几级干涉条纹，各波长的光强度分布曲线的合成还能显示出明显的最大和最小；而到较高的干涉级次，每一点都有一些波长的光的最大和另一些波长的最小重合，因而在合成的光强分布曲线中的对比度很小，看不见干涉条纹. 这点是白光干涉的特点，在干涉测量中常要用到它. 虽然在高级次区域看不见条纹，但每一单色光的干涉作用仍然发生，只不过各种颜色的干涉重叠在一起，使对比度降为零而已.

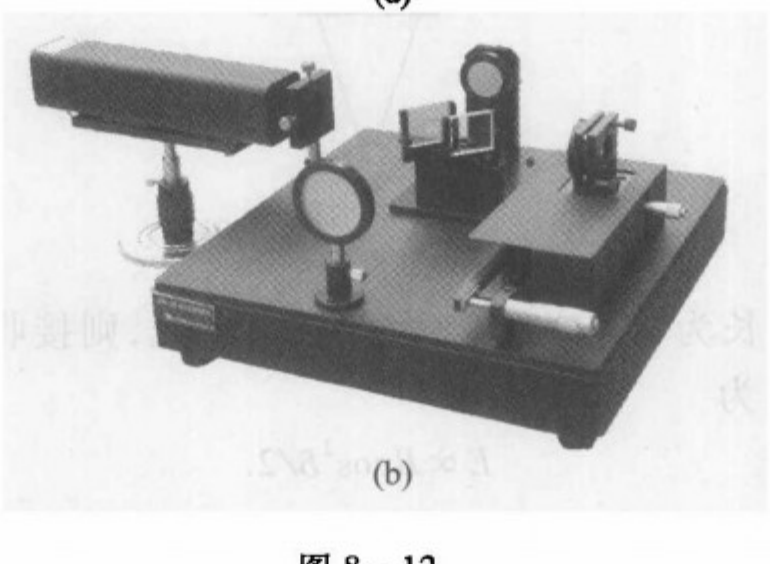
上述表明，迈克耳孙干涉仪的主要特点是两相干光束完全分开，并且它们的光程差可由移动反射镜 M_1 的位置或在一光路中加入另一介质来改变. 迈克耳孙和他的合作者利用这种干涉仪进行测“以太风”、光谱线精细结构的研究和用光波标定标准米尺等实验为近代物理和近代计量技术作出了重要的贡献. 不仅如此，后人又将该干涉仪的基本原理应用到许多方面，研制成各种形式的干涉仪. 兹举其中著名的泰曼干涉仪和傅里叶分光计，现介绍如下.

* §8－4　泰曼干涉仪

由泰曼(Twyman)设计的用于检测棱镜的干涉仪的光路如图 8－12(a)所示，这种干涉仪的实物如图 8－12(b)所示. 将单色光会聚于准光物镜 L_1 的焦点处的小孔 D 上，由 L_1 给出一束单色平行光，经分光板 P 分成互相垂直的反射平行光和透射平行光，前者射到反射平面镜 M_1 后，沿原路返回，再经分光板而到投射物镜 L_2；后者经过处于最小偏向角位置的待测棱镜 P_r，垂直地射到反射平面镜 M_2 上，经 M_2 反射后，再次通过 P_r 沿原路返回，并由分光板 P 反射而到投射物镜 L_2. 观察者眼睛放在 L_2 的焦点后一点. 若棱镜是完善的，就会看到光照度均匀的视场. 若棱镜有缺欠(棱镜表面有缺欠或其内部折射率不均匀，或兼而有之)，则两次穿过棱镜的平行光的波面的平面性将发生形变，它与由 M_1 反射回的平面波干涉，一般得如图 8－13 所示的干涉图样. 这种图样可看做棱镜缺欠分布的“轮廓图”. 图中 Q 是峰是谷，可由轻轻地按反射镜 M_2 的支架以增大 $P \rightarrow P_r$



(a)



(b)

图 8－12

→M_2 的光程，视干涉条纹的移动而定；若此时 Q 处的条纹向外扩展，则 Q 为峰，反之为谷. 不过，这里所说的峰或谷并不一定是棱镜表面的凸起或凹陷，因为泰曼干涉仪中的干涉图样，是反映两次通过棱镜的波面相对于平面波的偏离，所以，峰或谷也可能是由于棱镜内折射率的不均匀引起的.

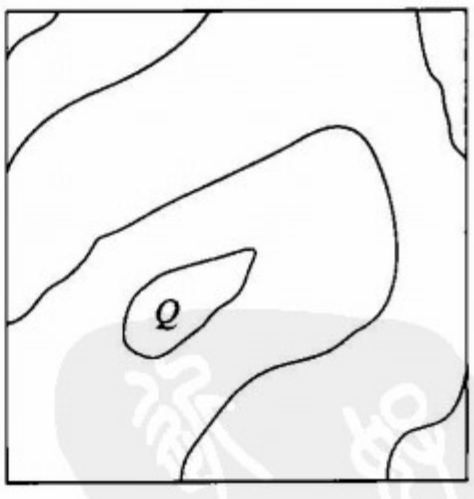


图 8－13

用小湿棉球蘸磨料对 Q 处所对应的棱镜部位进行局部修琢直至整个视场达到所要求的干涉图样为止，这种工艺称手修(figuring)，它是加工精密光学元件的有效手段. 事实上，被检测的不限棱镜，也可以是平板或透镜；固体激光器的谐振腔(如红宝石棒和钕玻璃棒)也多采用这样方法制备.

§8－5　傅里叶干涉分光计

傅里叶(Fourier)干涉分光计的光路如图 8－14 所示，它基本上就是一架迈

克耳孙干涉仪. M_1 和 M_2 为两平面反射镜，P 为分光板，L_1 和 L_2 分别为准光物镜和投射物镜. L_1 使通过小孔 D 的光变成平行光，L_2 将通过干涉仪之后的两束相干平行光会聚于接收器 R 上.

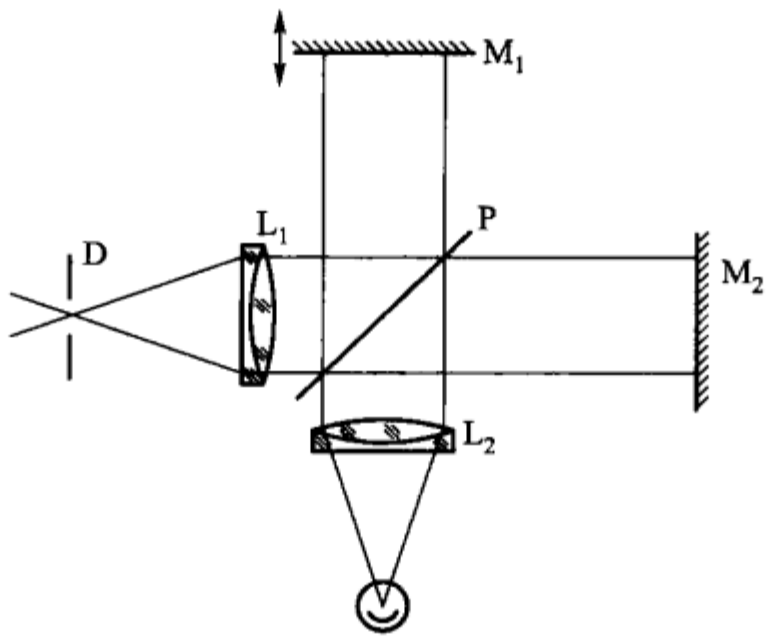


图 8 - 14

若入射光是波长为 λ 和光亮度为 B 的单色光，则接收器 R 接收的辐射通量，按式(7 - 11d)，为

$$E \propto B\cos^2\delta/2. \tag{8-13}$$

若以光程差 Δ 代替相位差 δ，并且用波数 ν 代替波长 $\left(\nu = \frac{1}{\lambda}\right)$，则上式可改写为

$$E \propto B\cos^2\pi\nu\Delta = B + B\cos 2\pi\nu\Delta. \tag{8-13a}$$

此式表示接收器接收的辐射通量 E 是光程差 Δ 的余弦函数. 使镜 M_1 连续移动并用记录器同步地记下接收器的输出，可得如图 8 - 15 所示的余弦曲线.

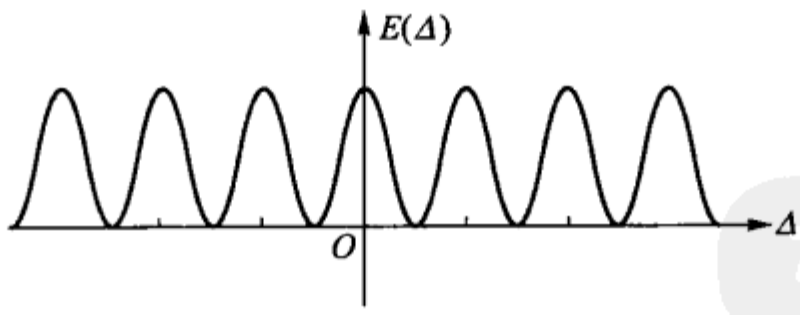


图 8 - 15

若入射光为含有各种波长的混合光，并且在光谱间隔 $(\nu, \nu + d\nu)$ 内光亮度为 $B(\nu)d\nu$，则接收器 R 接收到的在光谱间隔 $(\nu, \nu + d\nu)$ 内的辐射通量为

$$dE \propto B(\nu)d\nu + B(\nu)d\nu\cos 2\pi\nu\Delta. \tag{8-14}$$

而接收到的全光谱范围的总辐射通量为

$$E \propto \int_0^\infty B(\nu)d\nu + \int_0^\infty B(\nu)\cos 2\pi\nu\Delta d\nu. \tag{8-15}$$

此式表示，接收器接收的总辐射通量中，一部分(第一项)是与光程差无关的，而

另一部分(第二项)则为光程差 Δ 的函数,我们把后者写成

$$E(\Delta) \propto \int_0^\infty B(\nu)\cos 2\pi\nu\Delta \mathrm{d}\nu. \tag{8-15a}$$

显然,此函数 $E(\Delta)$ 是光源光谱分布 $B(\nu)$ 的傅里叶余弦变换. 由于傅里叶变换是可逆的,所以,可得

$$B(\nu) \propto \int_0^\infty E(\Delta)\cos 2\pi\nu\Delta \mathrm{d}\Delta. \tag{8-16}$$

此式表示. 函数 $E(\Delta)$ 的傅里叶余弦变换即为入射光的光谱分布 $B(\nu)$.

在迈克耳孙干涉仪中,借助于连续地移动反射镜 M_1 可实现连续改变光程差 Δ. 若在改变 Δ 的同时,用同步记录系统记下接收器输出中的变化部分,则所得的记录是一条 $E(\Delta)-\Delta$ 曲线,称为干涉图,$E(\Delta)$ 称为干涉图函数. 这样,在获得干涉图之后,只要算出干涉图函数的傅里叶余弦变换[即完成式(8－16)的积分],即得到光源的光谱分布 $B(\nu)$. 如此计算出的光谱(分布)称傅里叶光谱,所以,上述利用傅里叶变换研究入射光的光谱分布的干涉仪称为傅里叶干涉分光计,这样的光谱技术称傅里叶光谱术.

例如,令低压水银光谱灯发出的可见光进入傅里叶分光计,则可得如图8－16所示的干涉图;对该图的曲线(干涉图函数)作傅里叶余弦变换,即可求得低压水银灯的几条光谱线的分布(波长和强度).

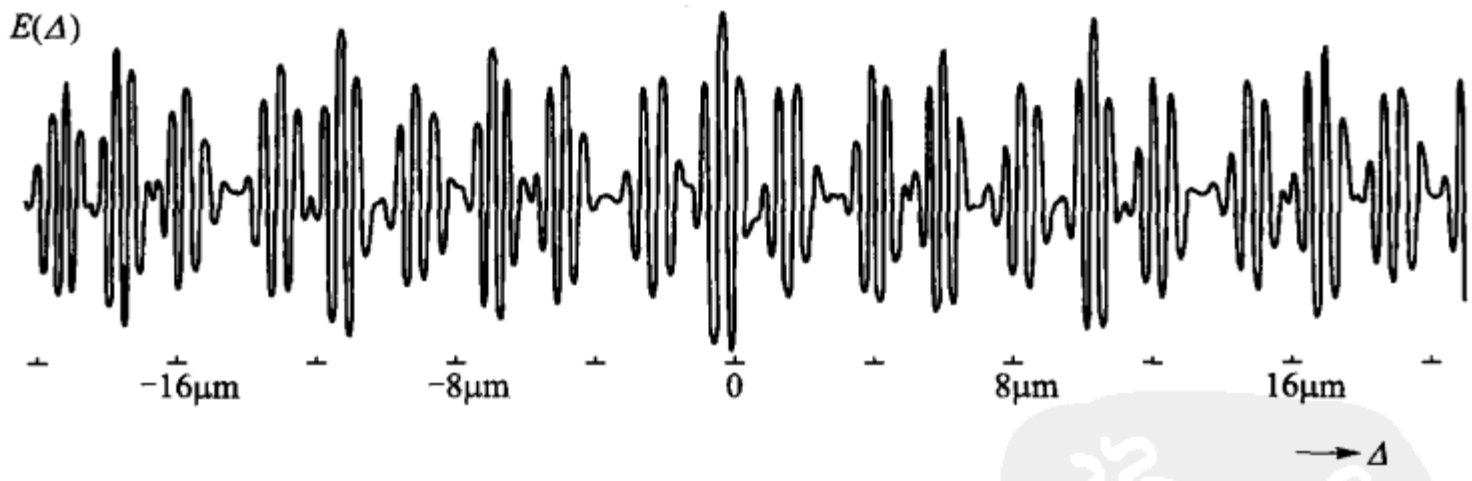


图 8－16

为完成所需的傅里叶变换,需要大量的计算,在数字电子计算机普遍应用之前,这曾是这种分光术的难点. 不过,在今天只要一台比较简单的专用数字电子计算机,为一般光谱工作就可满足要求. 事实上,现在制成的傅里叶干涉分光光度计已经能够在反射镜 M_1 的扫描停止后,几乎是实时地即可由仪器绘出所求的光谱分布.

傅里叶干涉分光计的主要优点如下:

(1) 在记录和测量光谱元的方式上,它兼有摄谱仪和一般分光光度计的特点:一方面,它像摄谱仪一样,能同时记录选定波段的所有光谱元(而一般分光光

度计每一瞬间只能测一个光谱元),另一方面,它跟一般分光光度计一样,可根据波段选择合适的光电测量系统(而摄谱仪在红外区,特别是中、远红外区,因无感光板,不能摄谱).

(2) 所有棱镜式和光栅式分光仪器的分辨本领 R_0 都与它们的入射狭缝宽度有关. 狭缝愈宽,则分辨本领愈低,但能进入仪器的辐射通量 E 愈多,R_0 与 E 之间顾此失彼. 设狭缝宽和高对准光物镜中心所张的角度分别为 α 和 β,棱镜或光栅的角色散为 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\lambda$,则它们与 R_0 间有关系式:

$$\alpha\beta R_0 = \beta\lambda \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}.$$

令 $\Omega_S = \alpha\beta$,即狭缝面积对准光镜中心张的立体角,则上式可写成

$$\Omega_S R_0 = \beta\lambda \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{8-17a}$$

实际上,在绝大多数情况下,β 的合理值约为 0.01 ~ 0.02,$\lambda\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\lambda$ 值最大约为 0.6 ~ 0.7;上式右端的数值常不到 0.01.

然而,在迈克耳孙干涉仪型的傅里叶分光计中,其与一般分光计的入射狭缝对应的光孔对准光镜中心所张的立体角 Ω_F 跟傅里叶分光计的分辨本领 R_0 关系式为

$$\Omega_F R_0 = 2\pi. \tag{8-17b}$$

比较上面两式可以看到,在两类分光计有相同分辨本领的情况下,Ω_F 较 Ω_S 大两个数量级以上. 即所述傅里叶分光计所能收集的待测光谱元的辐射通量 E 较一般分光计的高出两个数量级以上.

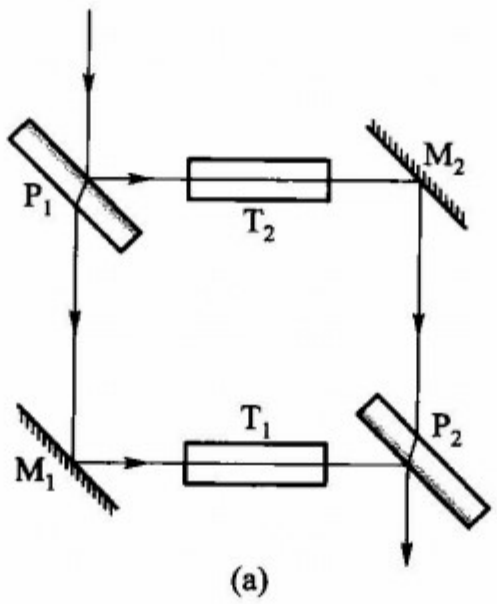
(3) 傅里叶干涉分光计显著地提高了接收器输出的信噪比. 如上所述,在一般分光光度计中,每一瞬间只能测量一个光谱元,而在傅里叶干涉分光计中同时记录所有光谱元(例如 M 个). 这就是说,在同样长的记录时间内,傅里叶干涉分光计接收器所获得的辐射通量比一般分光计的大约 M 倍. 对于红外区所用的热电偶等,其固有噪声不受辐射通量中不变部分的影响,辐射通量的变化部分 $[E(\Delta)]$ 增大 M 倍时,接收器的输出和噪声将分别随之增大 M 和 $\sqrt{M}$ 倍,也就是信噪比提高 $\sqrt{M}$ 倍.

因为在红外区,特别是中、远红外区,光源都很弱,傅里叶干涉分光计的上述优点就显得更为重要,所以傅里叶干涉分光计在近红外和中、远区较一般光栅或棱镜型分光计优越得多,在数字化的今天,傅里叶干涉分光计已占绝对优势.

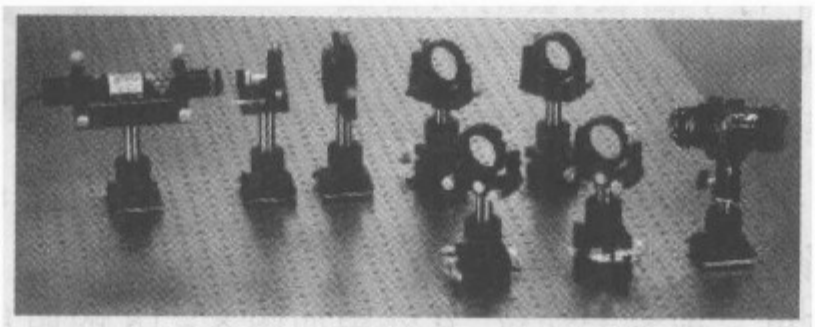
* §8-6　马赫-曾特尔干涉仪

马赫-曾特尔干涉仪(Mach - Zehnder interferometer)也是用分振幅法产生

双光束以实现干涉的仪器.它们的光路和实验系统如图 8-17(a)和(b)所示,它是由两块分光板 P_1、P_2 和两块反射镜 M_1、M_2 组成的,四个反射面互相平行,并且中心光路构成一平行四边形.



(a)



(b)

图 8-17

入射光在分光板 P_1 的前表面分成两束平行光,它们分别由反射镜 M_1 和 M_2 反射,到第二块分光板后相遇产生干涉.一般使用时,首先把其中一块分光板稍微倾斜,使视场内出现为数不多的几个直条纹,然后在其一路插入被验介质,从干涉条纹的变化来判断其光学性质.

这种干涉仪的特点是两光束分得很开.虽然在制造工艺和调节方面比较困难,但用途很广,特别是在空气动力学中用它来研究气流的折射率变化,很有价值.例如,图中 T_1 处可以放一个风洞(令气流以高速度通过),T_2 处放一个参考气室(内充不流动的同样气体),用后者补偿前者的光程.由观察气流变化前后的干涉图样的差别来测定气体折射率变化的空间分布.

将这种干涉仪稍加修改,即可用于制备光学信息处理中用的全息空间滤波器(详见第十一章第四节).

此外,应该指出,这种干涉仪在光通量的利用率上比迈克耳孙干涉仪高约一倍.因为在迈克耳孙干涉仪中有一半左右的光通量将返回到光源方向,而在马赫-曾特尔干涉仪中却没有回到光源方向的光通量.

§8-7　法布里-珀罗干涉仪

上述诸干涉仪都是双光束的干涉仪. 如§7-6所述,它们所产生的干涉条纹不甚锐利,这在实际应用上有时不能满足要求. 欲使干涉条纹变细,就必须实现多光束干涉. 为此,有多光束干涉的干涉仪,其中以法布里-珀罗(Fabry-Perot)干涉仪最常用.

这种仪器是由平行放置的两块平面板组成的,在两板相对的平面上镀薄银膜或其他有较高反射系数的薄膜. 要求镀膜的两平面与理想几何平面的偏差不超过1/20至1/50波长,而为消除两平板相背的平面上的反射光的干涉与我们所研究的干涉的重叠,每块板都不是平行平面板,板的两面成一很小的夹角. 若两平行的镀银平面的间隔用由某些热膨胀系数很小的材料成的环固定起来,则称该仪器为法布里-珀罗标准具;若两平行的镀银平面的间隔可以改变,则称该仪器为法布里-珀罗干涉仪,其外貌如图8-18的照片所示.

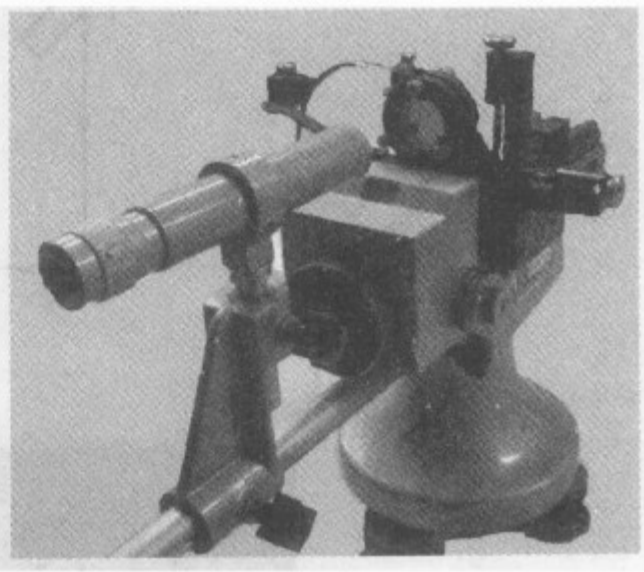


图8-18

图8-19表示光在两平面板之间进行多次反射的情况,自扩展光源S上任一点发出的光,射在两平板后,则在两镀银平面间进行多次反射,结果构成多个平行的透射光①,②,③,;…和多个平行的反射光①′,②′,③′,…. 在这两组光中,相邻光的相位差或光程差都相等. 设入射光的振幅为a,则诸透射光的振幅分别为att',$att'r^2$,$att'r^4$,…;而诸反射光的振幅为ar,$artt'$,ar^3tt',ar^5tt',ar^7tt',…,其中r^2为镀银面的反射系数. 由式(7-25)知$r^2+tt'=1$. 当反射系数r^2较大且与1相

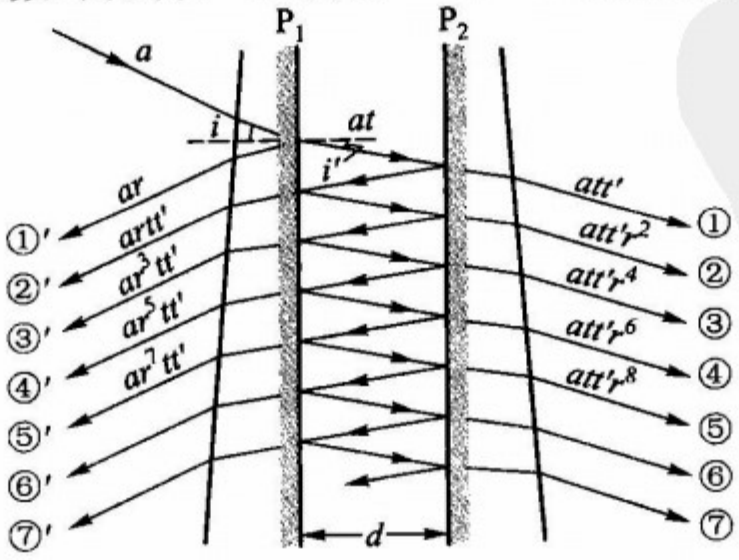


图8-19

差不多时,则所构成的透射光接近于等振幅的多光束.这样透射的多束光,就可作为获得锐利干涉条纹的相干多光束.

在透射的诸光束中,相邻光束的光程差为

$$\Delta = 2nd\cos i', \tag{8-18}$$

由此所引起的相位差则为

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} nd\cos i'. \tag{8-18a}$$

由于一般情况下,法布里-珀罗干涉仪是在空气中使用,空气的折射率为 $n=1$,所以式(8-18)和(8-18a)又可写成

$$\Delta = 2d\cos i', \tag{8-18b}$$

及

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} d\cos i'. \tag{8-18c}$$

其中 i' 为在两镀银平面间反射光与平面法线的夹角,也可视为入射光与板平面的法线的夹角.当此光程差为波长的整数倍时,则得最大光强度,称为干涉主最大.由于两镀银平面是平行的且所用的光源的扩展面光源,所以产生等倾干涉.在有相同入射角的光线所产生的诸光束中,相邻光线的相位差相同,而入射角相同的光线在垂直于观察方向的平面上的轨迹,与迈克耳孙干涉仪的情形一样,是一组同心圆,因而在透镜 L_2 焦面上得到的是一组同心环形条纹的图样(图8-20).

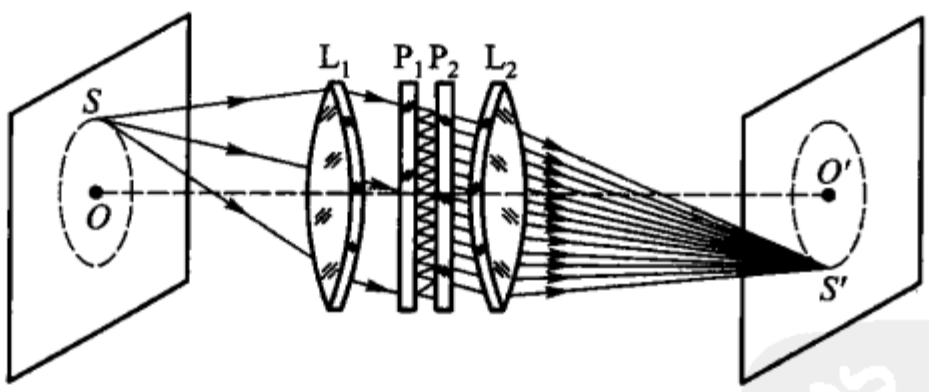


图 8-20

现在我们来计算诸透射光在透镜 L_2 焦平面上的光强度分布,以便了解所得的干涉图样的特点.

令 δ 为相邻两光在透镜 L_2 的焦面上某点的相位差,于是,按矢量的多边形加法(参见图7-24)可得透射光(1),(2),(3),…在该点的合成振动的振幅 A,其在 x 方向的分量和 y 方向的分量分别为

$$\sum x = att'(1 + r^2\cos\delta + r^4\cos 2\delta + r^6\cos 3\delta + \cdots)$$

和

$$\sum y = att'(0 + r^2\sin\delta + r^4\sin 2\delta + r^6\sin 3\delta + \cdots).$$

该点的光强度为

$$I_T = A^2 = (\sum x)^2 + (\sum y)^2 = (\sum x + \mathrm{i}\sum y)(\sum x - \mathrm{i}\sum y),$$

其中 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$,

$$\begin{aligned}\sum x + \mathrm{i}\sum y &= att'[1 + r^2(\cos\delta + \mathrm{i}\sin\delta) + r^4(\cos 2\delta + \mathrm{i}\sin 2\delta) + \cdots] \\ &= att'(1 + r^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} + r^4 \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\delta} + \cdots);\end{aligned}$$

$$\sum x - \mathrm{i}\sum y = att'(1 + r^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta} + r^4 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\delta} + \cdots).$$

以上二等式的括号部分,都是收敛的等比级数,因而可写作:

$$\left.\begin{aligned}\sum x + \mathrm{i}\sum y &= \frac{att'}{1 - r^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}; \\ \sum x - \mathrm{i}\sum y &= \frac{att'}{1 - r^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}};\end{aligned}\right\} \tag{8-19}$$

将此 $\sum x + \mathrm{i}\sum y$ 和 $\sum x - \mathrm{i}\sum y$ 值代入 I_T 式,则得

$$I_T = \frac{a^2(tt')^2}{1 + r^4 - 2r^2\cos\delta}, \tag{8-20}$$

令 $R = r^2$,则上式可改写为

$$I_T = \frac{a^2(tt')^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\dfrac{\delta}{2}}. \tag{8-20a}$$

由式(7-25)知 $tt' = 1 - r^2 = 1 - R$,将此关系代入上式,则得

$$I_T = \frac{I_0}{1 + \dfrac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\dfrac{\delta}{2}}, \tag{8-20b}$$

其中 $I_0 = a^2$. 此式即为透过法布里-珀罗干涉仪的光在透镜 L_2 的焦平面上的光强度分布公式. 以 I_T/I_0 为纵轴,相位差 δ 为横轴,则式(8-20b)可绘成如图 8-21所示的曲线. 由于透射光和反射光是互补的,所以反射光在透镜 L_1 焦平面上的光强度分布 I_R 可由 $I_0 - I_T$ 求出. 在图 8-21 中以其右端的纵轴代表I_R/I_0,于是也表示了 I_R/I_0 与相位差的关系. 可以看出:镀银面的反射系数愈大,由透射

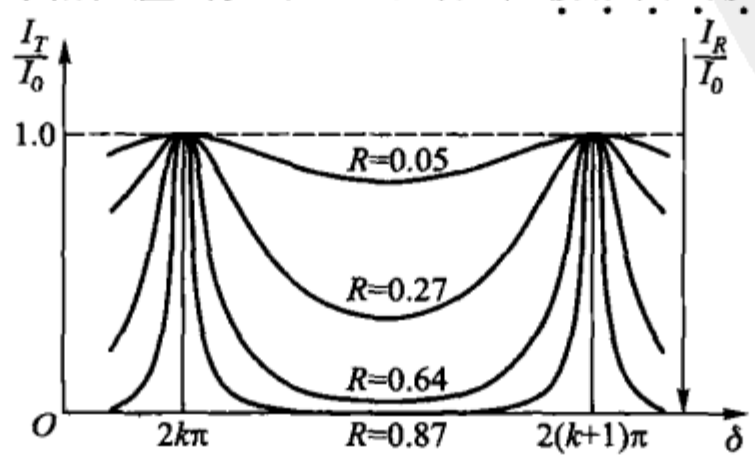


图 8-21

光所得的干涉主最大亦愈细.

图 8-22 即为透过法布里-珀罗干涉仪的光在透镜 L_2 焦平面上的干涉图样的照片,将它与图 8-9 的迈克耳孙干涉仪的干涉图样对比,很明显地就看到,这里的干涉亮条纹锐利,而那里的干涉亮条纹较宽. 除此之外,两种干涉条纹的性质极相似:内环的干涉级次较高,相邻条纹的间隔正比于波长,反比于两反射面的间隔,以及离条纹中心愈远条纹愈密等.

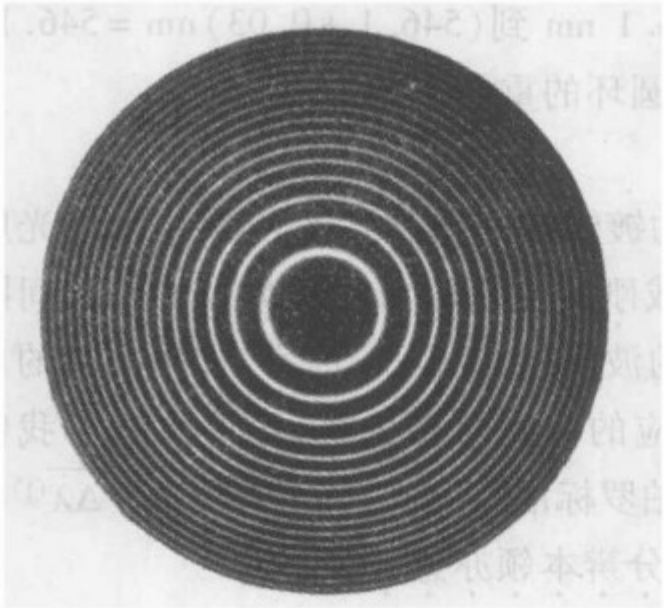


图 8-22

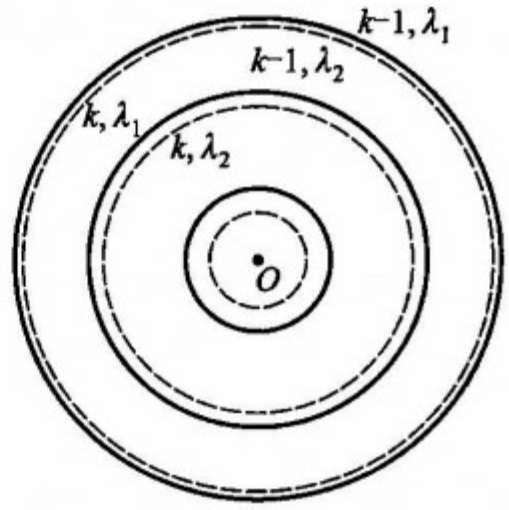


图 8-23

法布里-珀罗干涉仪和标准具所产生的干涉亮条纹十分细锐的特点,使它成为研究光谱线超精细结构的有效手段;法布里-珀罗干涉仪和标准具的原理为激光谐振腔提供了基本模型,也是研究干涉滤光片的理论基础,为了进一步了解法布里-珀罗干涉图样的特点,我们需要讨论表征它的特性的两个参量:自由光谱范围和分辨本领.

1. 自由光谱范围

设波长为 λ_1 和 $\lambda_2(\lambda_2>\lambda_1)$ 的两光以相同的方向射到法布里-珀罗标准具上,它们各产生一组同心圆环状的干涉亮条纹(主最大),对同一干涉级(k),λ_2 的干涉圆环的直径较 λ_1 的小一些,如图 8-23 所示. 当满足 $2d\cos i' = k\lambda_1 = (k-1)\lambda_2$ 时,λ_1 的第 k 级亮圆环与 λ_2 的第($k-1$)级亮圆环重叠,因而得

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\lambda_2}{k}.$$

由于在法布里-珀罗标准具中,大多数情况下,$\cos i' \approx 1$,所以上式中的 k 值应为

$$k \approx \frac{2d}{\lambda_1}.$$

以此 k 值代入上式,则得

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2d}.$$

实际上,可认为 $\lambda_1\lambda_2 = \lambda_1^2$,还可省略 λ 的下角标,故有

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2d}, \tag{8-21}$$

此 $\Delta\lambda$ 值是某一波长光的干涉圆环和另一波长光的干涉圆环重合时的波长差，亦即在给定 d 的标准具中，若入射光的波长在 λ_1 到 $\lambda_1 + \Delta\lambda$ 的波长范围以内，则所产生的干涉圆环不重叠. 我们称此 $\Delta\lambda$ 为标准具常数或称标准具的自由光谱范围. 例如，对 $d = 5$ mm 的标准具，入射光波长 $\lambda = 546.1$ nm，则由式(8-21)得 $\Delta\lambda \approx 0.03$ nm. 这就是对该标准具，只有波长在 546.1 nm 到(546.1 + 0.03) nm = 546.13 nm 范围的光，在标准具内才没有不同级干涉圆环的重叠现象.

2. 分辨本领

如图 8-21 所示，法布里-珀罗标准具的镀银面的反射系数愈大，由透射光所得的干涉亮圆环亦愈细锐，因而刚能被分辨或刚能鉴别的两相邻亮环的几何间隔愈小，亦即刚能被分辨的相应的两相邻波长的波长差 $\overline{\Delta\lambda}$ 愈小. 简言之，标准具的反射系数 R 愈大，则刚能被分辨的两亮环所对应的两光的波长差 $\overline{\Delta\lambda}$ 愈小. 通常我们定义 $\lambda/\overline{\Delta\lambda}$ 为光谱分辨本领. 所以，法布里-珀罗标准具的光谱分辨本领 $\lambda/\overline{\Delta\lambda}$①与镀银面的反射系数密切相关，反射系数愈大，分辨本领亦愈大.

仔细的分析可得

$$R_0 = \frac{\lambda}{\overline{\Delta\lambda}} = kN_e, \tag{8-22}$$

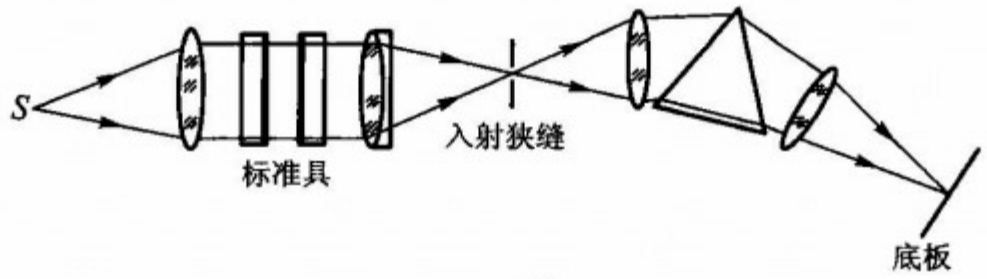
式中 k 是干涉级数. 因 $2d = k\lambda$，间隔 d 愈大，则级数愈高，分辨本领也愈大，N_e 为有效光束的数目，它随反射面的反射系数 R 而增加. 为获得高分辨本领，R 需在 90% 以上.

例如，对 $\lambda = 546.1$ nm，$d = 5$ mm 的标准具. 当反射系数 $R = 0.9$ 时，可得光谱分辨本领 $\lambda/\Delta\lambda \approx 5.5 \times 10^5$. 这就是对 546.1 nm 的光能分辨的波长差为 0.001 nm. 可见，法布里-珀罗标准具是一种分辨本领很高的光谱仪器，也正因为如此，它才能用来研究单个光谱“线”的超精细结构.

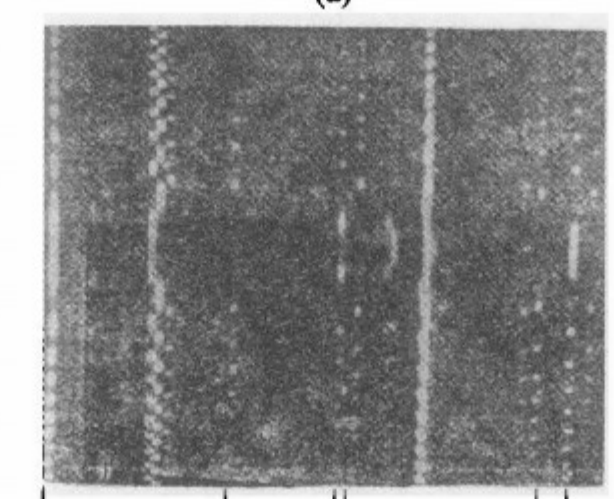
所谓测单个光谱“线”的超精细结构就是对粗看来是一条光谱线的光测出它的各光谱成分的波长和强度. 为此，有摄谱法和光电法两种. 其中摄谱法就是按图 8-24(a)所示将合适的法布里-珀罗标准具与摄谱仪串联. 此时干涉亮环受摄谱仪的色散作用而分散在感光底板上，摄谱仪狭缝将各环切成直带. 这样装置摄出的光谱图如图 8-24(b)所示. 量出相应光谱线的干涉环的直径和测出其在感光板上的黑度即可确定各光谱成分的波长和强度.

若用光电接收技术测谱线的超精细结构，则需在标准具前放置一台单色仪，

① 这里的一个关键问题是如何才算刚能分辨，它涉及判断标准问题，这留在第十章瑞利判据中再讨论.



(a)



(b)

图 8-24

它把被测谱线以外的光滤掉而只让待测光进入标准具. 在标准具后用光电接收器接收干涉亮环的一部分,采用连续但是微小地改变标准具的间隔——扫描的方法,则接收器的输出就可显示出被测光谱线的精细结构.

* §8-8 激光干涉仪

激光较一般辐射光波,在相干长度方面产生了一个巨大的飞跃. 所以不难想到激光干涉会给干涉量度学带来深刻的变化. 如 20 世纪 60 年代以前,为用光波校定米尺,由于当时最好的氪灯(Kr^{86})的相干长度不过 38.5 cm,所以不得不分几步逐级校定,而现在的激光比长仪,对 1 m 多长的米尺的校定一次就可完成.

激光干涉仪多种多样,不胜枚举,这里仅举只有激光才能做到的干涉仪两例,以阐明激光干涉的特点.

1. 用激光干涉测平行平板的楔角

激光干涉用于测量光学平行平板两面的夹角——楔角,方法简单、灵敏,并且可达 0.1 弧秒$\left(1\text{ 弧秒}=\frac{1}{3\,600}\text{弧度}\right)$的数量级.

测量装置如图 8-25 所示. 将氦氖激光器 S 发出的 632.8 nm 的激光,用一凸透镜 L 会聚后,成为一个发散的球面波. 将被测的平行平板 P 置于这个发散激

光束的光路上，并令平板的法线与光束的光轴重合. 于是由平板前、后两表面反射回来的两球面波在反射光所在的空间叠加而形成不定位的干涉条纹. 这时，若在凸透镜的会聚点处垂直于光束的光轴放置一个有小圆孔的屏，并令所述激光会聚点与小孔重合，则在屏上将呈现一组同心环状的干涉图样. 当被测光学平板完善（两表面严格平行）时，则同心干涉环的中心与小圆孔中心重合；若被测光学平板所产生的同心干涉环的中心相对于屏上圆孔的中心有一个偏离，则表示平板两表面间有一楔角，由偏离的大小可计算出楔角数值.

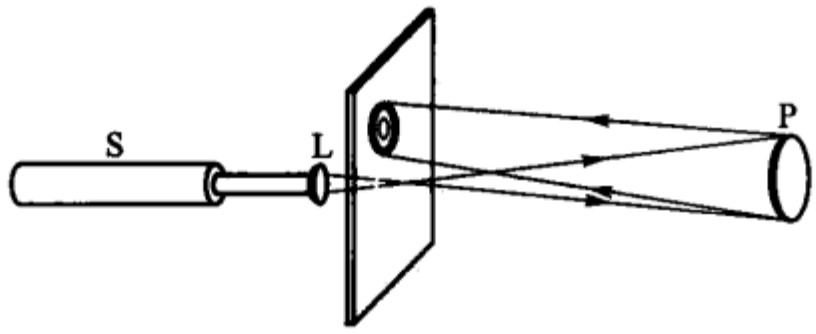


图 8 - 25

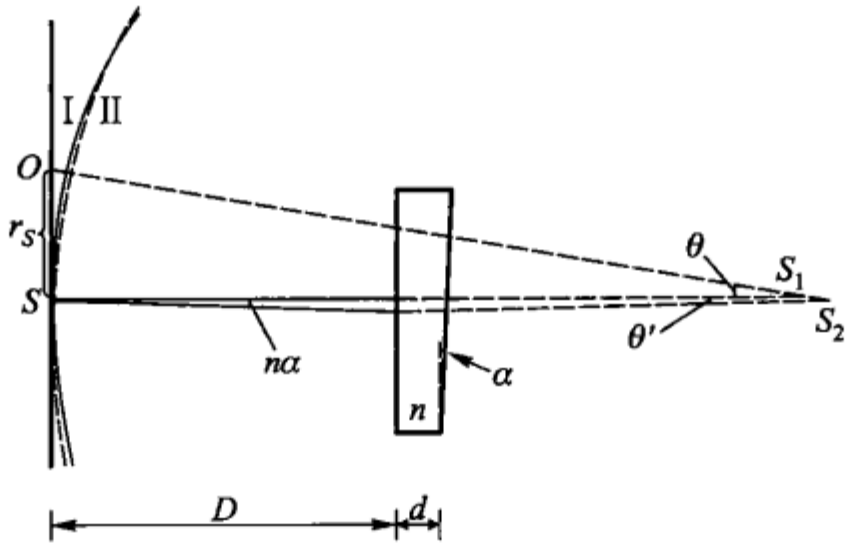


图 8 - 26

在图 8 - 26 中，S 表示透镜会聚点（即上述球面波的中心），由它发出的球面波经平板前、后两表面反射后分别形成球面波 Ⅰ 和球面波 Ⅱ，这两个球面波可视为由两个虚光源 S_1 和 S_2 发出的. S_1 是 S 由平板前表面成的虚像，因而有

$$|SS_1| = 2D, \tag{8-23}$$

S_2 的位置取决于平板的楔角 α、厚度 d 和平板介质的折射率 n，利用几何光学，得

$$|SS_2| = 2D + \frac{2d}{n}. \tag{8-23a}$$

连线 $|SS_1|$ 与 $|SS_2|$ 间的夹角为 $n\alpha$.

由虚光源 S_1 和 S_2 发出的相干球面波，所形成的干涉同心环的中心在 S_1 和 S_2 的连线的延长线上，此中心距圆孔中心的距离为 r_S. 由图 8 - 26，有

$$|S_1S_2| = \frac{2d}{n}, \tag{8-24}$$

$$\theta' = \frac{2nD\alpha}{S_1S_2} = \frac{n^2D\alpha}{d},$$

和

$$\theta = (\theta' + n\alpha) = \left(\frac{nD}{d} + 1\right)n\alpha. \tag{8-25}$$

在 $nD >> d$ 的情况下,上式可简化为

$$\theta = \frac{n^2D\alpha}{d}, \tag{8-26}$$

因而得

$$r_S = \frac{2n^2D^2}{d}\alpha, \tag{8-27}$$

或写成

$$\alpha = \frac{r_Sd}{2n^2D^2}. \tag{8-28}$$

从式(8-26)看到,干涉环中心相对于屏上圆孔中心的偏角 θ 与平板的楔角 α 成正比,这样的干涉装置可视为对 α 角的放大器,n^2D/d 可视为该装置的角放大系数. 由于实际上 $D >> d$,所以对 α 角的放大系数可以很大. 例如,当 $D = 1$ m,$d = 2.4$ mm,$n = 1.55$ 时,n^2D/d 可达 10^3. 若 $\alpha = 5\times10^{-6}$ rad(约 1 弧秒),则有 $\theta = 5\times10^{-3}$ rad,$r_S = 10$ mm. 可见,即使对只有弧秒级楔角的平行平板,也能有明显的效果. 一般来说,若偏离量 r_S 可测准到 1 mm,则可能测出 0.1 弧秒的楔角. 此外,还可由条纹中心偏离圆孔的方向来判断 α 的方向.

2. 激光球面干涉仪

一种激光球面干涉仪的光路图如图 8-27 所示. 令氦氖激光(632.8 nm)经聚光透镜聚焦于 O 点,发散后的球面波由分光块 P(由两块等光程直角棱镜胶合而成,胶合面镀半透半反膜)分成两路,其中透过半透半反膜的光垂直射到曲率半径为 R_1 的标准球面 M_1 上,调节 O 点到球面 M_1 的距离等于 R_1,光沿原路返回,再经分光块 P 在 O' 处成一实像;另一束由分光块反射的光,垂直射到被检验的曲率半径为 R_2 的球面 M_2 上,调节 O 点到 M_2 的距离等于 R_2,光亦沿原路返回,再经分光块会聚于 O' 处. 于是,我们可以在 O' 处看到或拍摄到两相干波面所产生的等厚干涉条纹. 根据所产生干涉条纹的形状可以相当直观地确定出待验球面 M_2 表面的缺欠. 这种干涉仪在原理上与前述泰曼干涉仪十分相似,所不同者,这里用的是球面波并且是相干长度很长的激光. 正因为这点,激光球面干涉仪所能检验的球面 M_2 在仪器所规定的相对孔径内可以有随便多大的孔

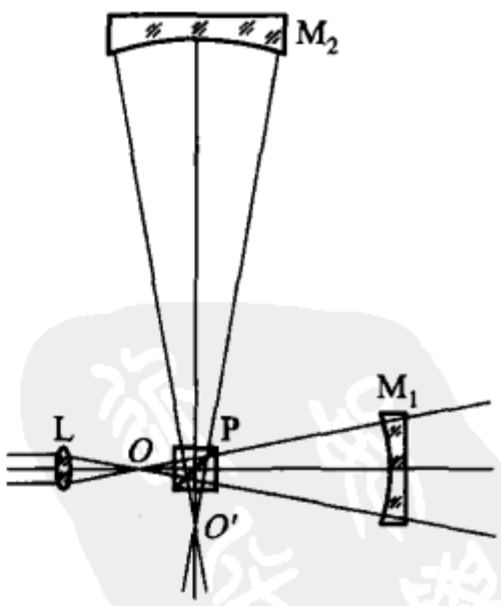


图 8-27

径,不受球面 M_1 的孔径的限制,实现了长光程差的干涉,可以用小干涉仪检验大光学表面. 显然,在天文光学望远镜的检验方面,这是很重要的.

* §8-9　波面剪切干涉术

大部分用于检验光学元件加工质量和物镜像差的干涉仪都需要一个标准的参考光学表面,在要求两相干光束的光程近于相等的情况下,参考光学表面的口径至少要和被检物的口径一样大. 由于超过中等口径的干涉仪其造价迅速上升,便严重地限制了被检验的光学元件的尺寸,特别是对天文望远镜物镜这类大口径的光学系统①. 因此,20 世纪 40 年代末,贝茨(Bates)首先发展了不需参考表面的波面剪切干涉术,他用马赫 - 曾特尔干涉仪把待检验的波阵面分裂成两个,并使一个波阵面相对另一个横向错开(剪切),在波阵面重叠的部分出现干涉条纹,如图 8-28 所示. 由条纹的形状变化情况来测定波面的形变. 自此以后,波面剪切技术和一般干涉技术一样,得到了迅速的发展. 人们已研制出各种类型的剪切干涉仪,并且除了上述的横向剪切外,还有旋转、倒置和径向剪切等,在应用上大多为测定光学系统的像差,六十几年前还用剪切干涉仪测定波差以求光学系统的传递函数(传递函数概念见第十一章). 这里仅以贝茨的横向剪切干涉仪为例,阐明剪切干涉术的基本原理.

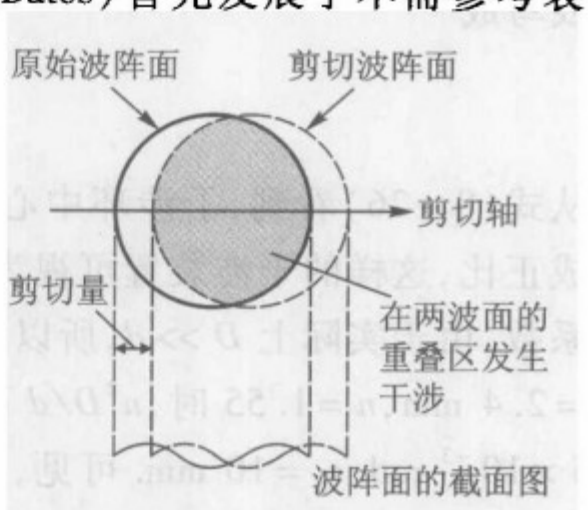


图 8-28

图 8-29 表示的是贝茨用马赫 - 曾特尔干涉仪作波面剪切干涉仪的情形. W 为被检验的球面波,其主光轴 OA 在水平面(即图面)内. 该球面波被半透半反板 P_1 分成两个球面波,它们分别在 S_1 和 S_2 会聚成点. 若干涉仪的四个反射镜面都处在垂直位置并且它们之间互相平行,则 S_1 和 S_2 重合为一点. 调节干涉仪与被检验光学系统出瞳的相对位置,可使 S_1 和 S_2 位于分光板 P_2 的分光膜上,此时,与入射球面波 W 对应的主光轴分别为 O_1S_1 和 O_2S_2 的两虚球面波 W_1 和 W_2 则完全重合. 位于分光板 P_2 后的人眼将看到亮度均匀的现场. 若把 P_1 和 M_1 一起绕平行于 OA 的轴转动一小角度,此时 O_1S_1 和 O_2S_2 在垂直方向上被分离开,相当于球面波 W_2 相对球面波 W_1 发生倾斜. 若球面波是理想的,此时可看到视场中有等间隔的干涉条纹出现,并且条纹的取向在水平方向. 由于此时的两相干光束的等光程性,入射光为白光时,也可看到干涉条纹.

---

① 由此更可以看到前述激光球面干涉仪的价值.

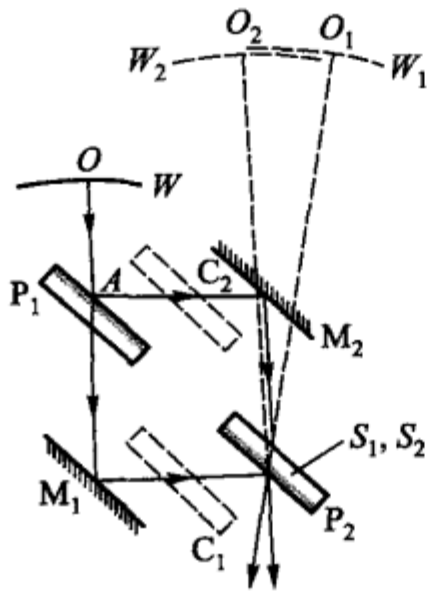


图 8-29

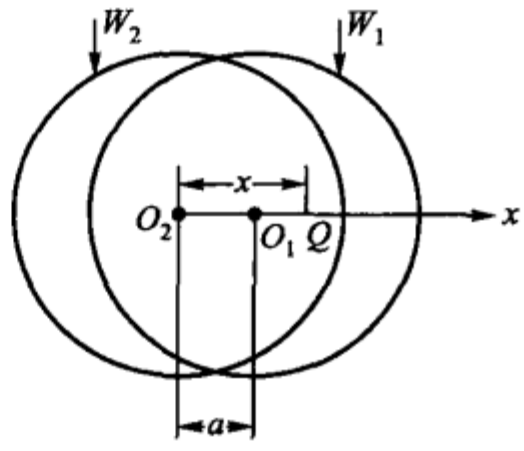


图 8-30

若把分光板 P_2 绕通过 S_1(或 S_2)点的垂直轴转一小角度,O_1S_1 则绕 S_1 点在水平面内旋转. 球面波 W_1 与球面波 W_2 错开,我们把这种错开称作剪切,剪切干涉术的名称即由此而得. 在 W_1 和 W_2 为理想球面波的情况下,在两波面重叠区上述干涉条纹不变. 若球面波不是理想的,在两波重叠区内,对应波面形变干涉条纹将发生相应的弯曲,即在观察点干涉条纹产生位移,与波面形变相对应的条纹的这种位移,使观察点处的干涉级次 k 发生 Δk 的变化,此 Δk 相当于图 8-3 中的 ΔN 值. 在图 8-30 中,设以 O_2 为原点的坐标轴 Ox 的剪切方向上,a 为剪切距离,在坐标为 x 的被观察点 Q 处,干涉条纹的级次变化 Δk 取决于 x 和 a,记以 $\Delta k(x,a)$,则有

$$\Delta k(x,a)=\frac{1}{\lambda_0}[\Delta(x)-\Delta(x-a)], \tag{8-29}$$

其中 Δ 是波面 W_2 以 S_2 为中心,以 O_2S_2 为半径的球面间的光程差,显然在 $x=0$ 时,即在 O_2 点处 $\Delta=0$. 而在 $x=a$ 处,则

$$\Delta k(a,a)=\frac{1}{\lambda_0}[\Delta(a)].$$

于是

$$\Delta(a)=\lambda_0\Delta k(a,a),$$

同样,在 $x=2a$ 处,有

$$\Delta k(2a,a)=\frac{1}{\lambda_0}[\Delta(2a)-\Delta(a)].$$

将上两式相加,得

$$\Delta k(a,a)+\Delta k(2a,a)=\frac{1}{\lambda_0}[\Delta(2a)],$$

于是

$$\Delta(2a)=\lambda_0[\Delta k(a,a)+\Delta k(2a,a)].$$

同样我们可以求得 $\Delta(3a)$,$\Delta(4a)$,…的表示式,这样,从干涉图上以 a 为间隔测出诸 Δk 值后,就可求得相应的诸 Δ 值,从而求得波面的形变.

贝茨剪切干涉仪中，在波面横向剪切时，穿过虚观察点 Q 的两出射光束在分光板 P_2 上有不同的角度，因而两光束间产生了附加的光程差. 为使干涉条纹的位移只反映波面形变，必须把此种附加光程差补偿掉. 图 8－29 中的平行平面板 C_1 和 C_2 就是为此而设置的.

应该指出，上述计算波面形变的公式，只是对波面 W_2 绕水平轴（即与剪切轴平行的轴）相对于波面 W_1 倾斜的情形成立. 在许多情况下，波面 W_2 绕与剪切轴垂直的轴与 W_1 倾斜，此时，在波面为理想球面时，将得到垂直方向的等间隔干涉条纹，若波面有所形变，在剪切波面与原波面的重叠区，干涉条纹也发生位移，此时，由干涉条纹的位移计算波面形变的公式稍为复杂. 这里从略.

习　　题

1. 说明薄膜不同厚度处有不同颜色的原因和这一现象的实际应用.

2. 如图 8－31 所示，两平面玻璃在一边相接，在与此边相距 20 cm 处夹一直径为 0.05 mm 的细丝以构成空气楔，若用波长为 589 nm 的光垂直照射，相邻暗条纹的间隔是多大？这一实验有何实际意义？

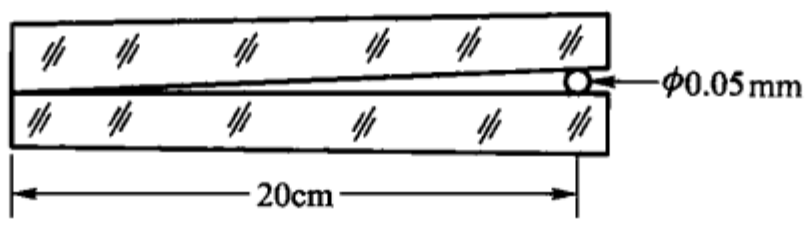


图 8－31

3. 在牛顿环实验中，若以 r_k 表示第 k 个暗环的半径，试推导出它与透镜凸表面的曲率半径 R 及波长 λ 间的关系式. 若入射光的波长 $\lambda = 589$ nm，光在空气层中与平板法线间的夹角为 30°，并且第 3 暗环的直径为 10 mm，试问 R 是多少？

4. 用白炽灯直接照明迈克耳孙干涉仪时，为什么很难找到干涉条纹？怎样克服？白光干涉有什么意义？

5. 若用钠光灯（波长为 $\lambda_1 = 589$ nm 和 $\lambda_2 = 589.6$ nm）照明迈克耳孙干涉仪，首先调整干涉仪得最清晰的干涉条纹，然后移动 M_1，干涉图样为什么逐渐变得模糊？至第一次干涉现象消失时，M_1 由原来位置移动了多少距离？

6. 试画出强度相同的钠黄光两谱线（波长为 589 nm 和 589.6 nm）在傅里叶分光计中得到的干涉图.

7. 在法布里－珀罗干涉仪中，所得干涉条纹的光强分布有图 8－21 所示的曲线. 常用条纹半宽度表征条纹的细锐程度，所谓半宽度即光强为最大值一半处所对应的宽度，常以波长间隔 $\Delta\lambda$ 或相位间隔 $\Delta\delta$ 表示. 试由式（8－20b）推导 $\Delta\delta$ 及 $\Delta\lambda$ 的表示式，并说明其物理意义.

8. 水银谱线中 546.1 nm 的超精细结构的光谱范围共占 0.005 nm，试问用法布里－珀罗标准具对其进行研究时，其间隔应为多少？

9. 试证法布里－珀罗标准具的角色散为

$$\frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{1}{\lambda \tan i'}.$$

其中 λ 为入射光的波长，i' 为该光在标准具内与镀银面法线的夹角.

10. 用如图 8－25 所示的激光干涉仪测平行平板的楔角，若平板玻璃的折射率为 1.52，厚度为 10 mm，玻璃距屏为 1 m，干涉环中心移出 5 mm，问板的楔角多大？

11. 在图 8－26 所示的光路中，试证连线 S_1S 与 S_2S 间的夹角等于 $n\alpha$.

第九章

光的衍射

§9-1 概述 惠更斯-菲涅耳原理

按几何光学观点，自点（或线）光源发出的光波，当其通过圆孔、狭缝、直边或其他任意形状的孔或障碍物面到达幕上时，在幕上应该呈现明晰的几何影，影内完全没有光，影外有均匀的光强度分布. 然而，实际上，在所述圆孔、狭缝或其他障碍物都很小的情况下，由于它们限制光波的波阵面，结果有光进入影内并且在影外的光强度分布也不均匀，这是光的直线传播定律所不能解释的，我们称这种现象为光的衍射.

例如，令自一点光源发出的光波通过一个与光源相距几米的很小的圆孔（2～3 mm 的直径）、在圆孔后面约 1 m 处的幕上，则可观察到中心可为亮亦可为暗的一组明暗相间的圆环构成的图样. 又如，令一束平行单色光（单色平面波）通过一个没有像差或像差校正得很好的透镜或透镜组，按几何光学的观点，应该在焦平面上得到一个像点；然而实际上，得到的是一个与透镜孔径的大小和所用光的波长有关的光斑，并且光斑内的光强度分布是有规则的. 诸如此类的现象，都是光的衍射现象.

光的衍射是光的波动性的一种表现. 我们通过对光的各种衍射现象的研究，可以在光的干涉现象之外，从另一侧面再次深入具体地了解光的波动性，同时，也可以为讨论近代光学的一些课题奠定一个理论基础.

为了初步地讨论光的衍射，兹介绍惠更斯-菲涅耳原理如下：

惠更斯为了说明波在空间各点的逐步传播的机制，曾提出一种设想，现今称之为惠更斯原理. 如图 9-1(a)，他认为自点光源 S 发出的波阵面 Σ 上的每一点均可视为一个新的振源，由它发出次级波；若光波在各向同性的均匀介质中以速度 v 传播，则波阵面 Σ 经过某一时间 τ 后的新波阵面就是在波阵面 Σ 上作出的半径为 $v\tau$ 的诸次级球面波的包络面 Σ'.

利用上述原理，可以预料光的衍射现象的存在. 例如，我们来考察一平面波

WW'通过宽度为 a 的开孔 AA'的情况，如图 9－1(b). 开孔 AA'限制平面波 WW'只允许宽度为 a 的一段波阵面通过，开孔平面上的每一点都可视为新的振源，传出次级波；这些次级波的包络面在中间部分是平面，在边缘处是弯曲的. 即在开孔的边缘处光不沿原光波方向进行，因而可以预料在几何影内的光强度不为零，它表明有衍射现象. 这是几何光学所不能描述的.

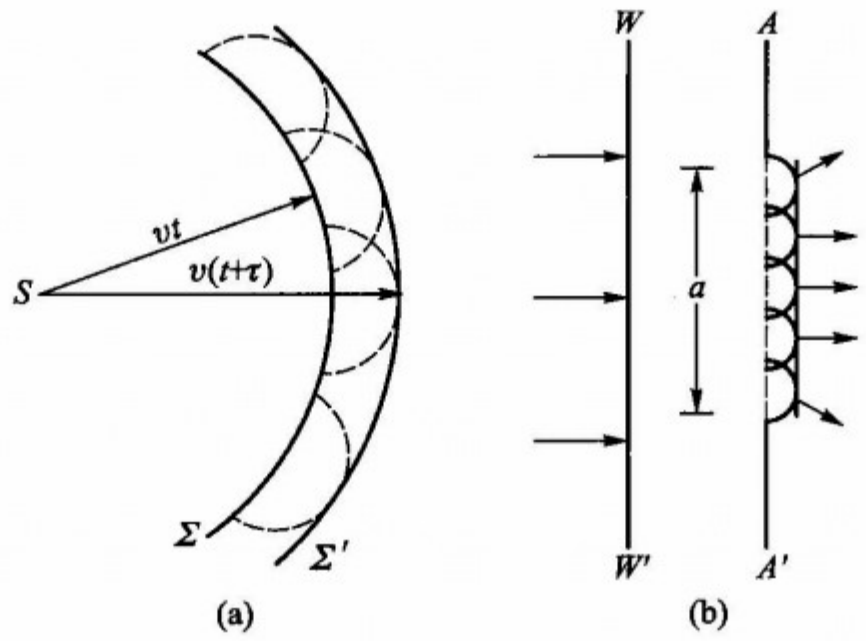


图 9－1

然而，惠更斯原理却不能用来考察衍射现象的细节以及多种多样的衍射. 换言之，惠更斯原理有助于确定光波的传播方向，而不能确定沿不同方向传播的振动的振幅. 菲涅耳基于光的干涉原理，认为不同次级波之间可以产生干涉，给惠更斯原理作了补充，成为惠更斯－菲涅耳原理：如图 9－2，波阵面 S 在与其相距 r_0 的一点 P 上所产生的振动，取决于波阵面上所有面元 $\mathrm{d}S$ 在该点所产生振动的总和. 对于给定的面元 $\mathrm{d}S$，它在 P 点所产生的振动的振幅正比于面元的面积 $\mathrm{d}S$，反比于面元到 P 点的距离 r 并且与面元 $\mathrm{d}S$ 对 P 点的倾角有关；P 点的振动相位取决于面元 $\mathrm{d}S$ 的初相位和面元到 P 点的距离. 于是面元 $\mathrm{d}S$ 在 P 点所产生的振动可表示为

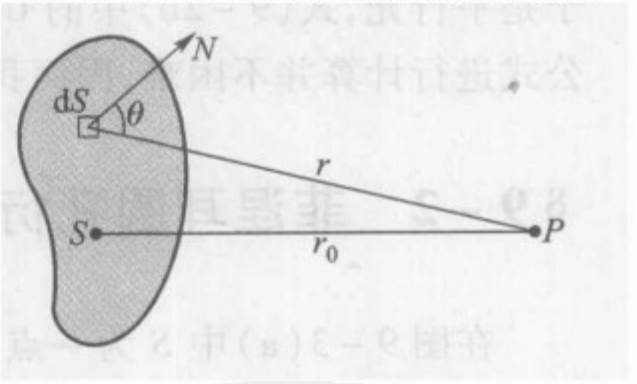


图 9－2

$$\mathrm{d}y \propto \frac{\mathrm{d}SK(\theta)}{r}\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)\right],$$

或

$$\mathrm{d}y = C\frac{K(\theta)}{r}\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)\right]\mathrm{d}S. \tag{9-1}$$

其中 $K(\theta)$ 为随 θ 角增大而缓慢减小的函数，C 为比例常数. 将波阵面 S 上所有面元在 P 点的贡献加起来，即求得波阵面 S 在 P 点所产生的振动：

$$y = \int_S \mathrm{d}y = \int_S C\frac{K(\theta)}{r}\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)\right]\mathrm{d}S. \qquad (9-2a)$$

如果波阵面上各点的振幅有一定的分布，且分布函数为 $a(S_i)$，则波阵面 S 在 P 点所产生的振动：

$$y = \int_S \mathrm{d}y = \int_S C\frac{a(S_i)K(\theta)}{r}\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)\right]\mathrm{d}S. \qquad (9-2b)$$

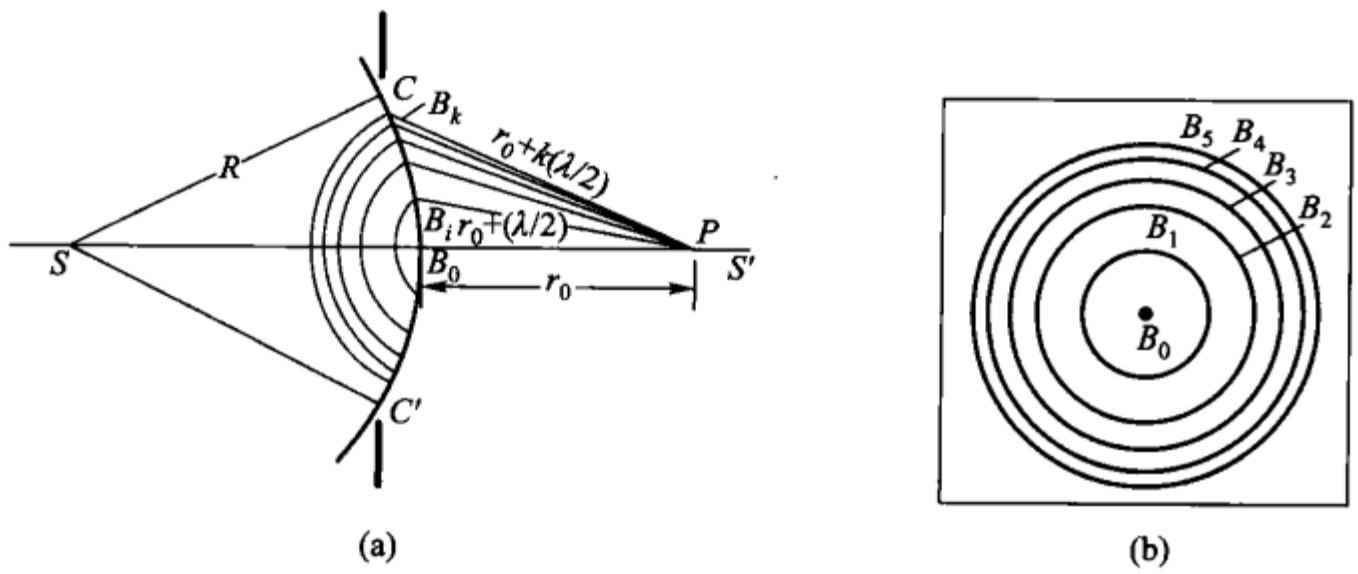
一般来说，式(9-2a)和(9-2b)是相当复杂的积分，但在波阵面对以通过 P 的波面法线为轴而有迴转对称的情况下，这些积分是较简单的，并且可以用代数加法或矢量加法来代替积分.

借助于上述惠更斯-菲涅耳原理可以预计或描述光波通过各种障碍物时所产生的衍射现象的主要特征. 作为研究光通过各种形状的开孔和障碍物所产生的衍射的基础，我们先来讨论几个具有规则的几何形状的开孔和障碍物所产生的衍射. 对于这些衍射，我们可按光源(S)和所研究的点(P)到障碍物的距离将衍射现象分为菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射两类. 前者是光源和所考察的点到障碍物的距离为有限远时的衍射；后者是光源和所考察的点到障碍物来说或者是在无限远或者是相当于在无限远时的衍射. 下面就依这种分类对光通过圆孔、圆盘、直边和狭缝等所产生的衍射作一初步讨论.

对菲涅耳衍射，如果我们直接应用式(9-2b)进行讨论，是比较麻烦些的. 为此，我们以矢量叠加法代替式(9-2b)来作近似地讨论. 对夫琅禾费衍射，由于是平行光，式(9-2b)中的 $Ca(S_i)K(\theta)/r$ 可认为是一个常数 C'，直接应用该公式进行计算并不困难，因而我们作积分来求衍射的光强分布.

§9-2 菲涅耳圆孔衍射

在图 9-3(a)中 S 为一点光源，CC'是在不透明的屏上开的小圆孔，它使来自 S 点的球面波的一部分通过. 现在来考察这个部分波阵面在通过圆孔 CC'中心的直线 SS'上一点 P 所产生的振动的振幅. 为此，当然可以先按式(9-2)写出相应的积分式，然后对所露出的波阵面进行面积积分而求得 P 点的振动. 但在这里由于波阵面对所考察的点具有对称性，因而可用特殊的作图法代替上述积分，所说的特殊作图法是这样的：自所考察的 P 点向圆孔露出的波阵面作直线 PB_0，$PB_1, PB_2, \cdots, PB_k$，其中 PB_0 为通过 P 点的波面法线，并且 $PB_1 - PB_0 = PB_2 - PB_1 = PB_3 - PB_2 = \cdots = PB_k - PB_{k-1} = \lambda/2$；然后，以 SS'(即 B_0P)为轴以 P 为顶点用这些直线将波阵面分成许多环形带，如图 9-3(b)所示. 在这些带中，自两相邻带的相应边缘(或两相邻带的相应点)到 P 点的光程差为半波长，相位差为 π. 也就是，相邻带在 P 点所产生的振动，方向相反. 因而，可把两相邻带之一在 P



(a)　(b)

图 9－3

点所产生的振动规定为正，另一个则规定为负. 这种带称为菲涅耳半波带. 设 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k$ 分别为第一带，第二带，第三带……第 k 带在 P 点所产生振动的振幅的绝对值，于是由这些带在 P 点所产生的合成振动的振幅应为

$$A_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots \pm a_k, \tag{9-3}$$

其中最末项的正负号取决于 k 是奇数还是偶数，奇数为正，偶数为负.

由惠更斯－菲涅耳原理得知，各带在 P 点所产生的振动的振幅的大小，取决于各带的面积，各带到 P 点的距离以及各带对 P 点连线的倾角. 所以为了求 a_1，$a_2, \cdots, a_k$ 诸值以便计算合成振幅，需先求各带的面积，各带到 P 点的距离以及各带对 P 点连线的倾角.

在图 9－4 中，设圆孔 CC' 对所考察的 P 点，露出 k 个半波带，第 k 带的半径为 ρ_k. 于是，这露出的部分波阵面的表面积应为

$$S_k = 2\pi Rh, \tag{9-4}$$

其中 h 为自半径 ρ_k 在连线 SS' 上的交点 C_0 到波阵面顶点 B_0 的长度.

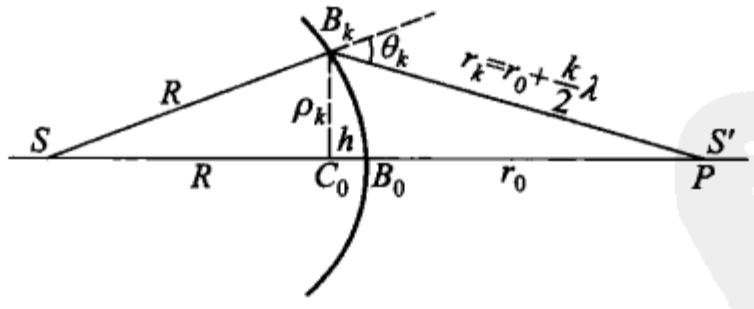


图 9－4

ρ_k 为图 9－4 中两直角三角形 SB_kC_0 和 PB_kC_0 的公共边的高度，因而有

$$\rho_k^2 = R^2 - (R-h)^2 = r_k^2 - (r_0+h)^2.$$

由此得出

$$h = \frac{r_k^2 - r_0^2}{2(R+r_0)}. \tag{9-5}$$

已知 $r_k = r_0 + k\lambda/2$，所以有

$$r_k^2 - r_0^2 = kr_0\lambda + k^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2;$$

在 $\lambda << r_0$ 情况下，λ^2 项可以略去，于是上式成为

$$r_k^2 - r_0^2 = kr_0\lambda.$$

将此差值代入式(9-5)，得

$$h = \frac{kr_0\lambda}{2(R + r_0)}. \tag{9-5a}$$

将此 h 值代入式(9-4)，即得包含有 k 个半波带的波阵面的表面积：

$$S_k = \frac{2\pi Rr_0 k}{R + r_0}\frac{\lambda}{2}. \tag{9-6}$$

显然，共含有 $k-1$ 个带的波阵面的表面积应为

$$S_{k-1} = \frac{2\pi Rr_0(k-1)}{R + r_0}\frac{\lambda}{2}. \tag{9-6a}$$

自式(9-6)减去式(9-6a)，即得第 k 半波带的面积：

$$\Delta S_k = S_k - S_{k-1} = \frac{\pi Rr_0}{R + r_0}\lambda. \tag{9-7}$$

由此可知，在由圆孔露出的部分波阵面上所作的菲涅耳半波带中，在 $\lambda << r_0$ 的情况下，各半波带的面积与下角标 k 无关，即各带的面积相等. 当 R、r_0 及波长 λ 给定时，半波带的面积为一常数.

这样一来，各半波带在 P 点所产生振动的振幅的不同，肯定是由各带到 P 点距离的不同和各带对 P 点的倾角的不同而引起的. 当 k 变大时，距离 r_k 和倾角 θ_k 亦随之变大，因而各带在 P 点所产生的振动的振幅随下角标 k 的变大而单调地减小：

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \cdots > a_k.$$

对于这个单调减小的数列，近似地有下列关系：

$$a_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2}, a_4 = \frac{a_3}{2} + \frac{a_5}{2}, \cdots, a_k = \frac{a_{k-1}}{2} + \frac{a_{k+1}}{2}. \tag{9-8}$$

为了利用这种关系，可把式(9-3)中的奇数项分为两部分，a_1 写成 $\frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{2}$，$a_3$ 写成 $\frac{a_3}{2} + \frac{a_3}{2}$，等等，于是当 k 为奇数时，式(9-3)变成

$$A_k = \frac{a_1}{2} + \left(\frac{a_1}{2} - a_2 + \frac{a_3}{2}\right) + \left(\frac{a_3}{2} - a_4 + \frac{a_5}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{a_{k-2}}{2} - a_{k-1} + \frac{a_k}{2}\right) + \frac{a_k}{2}; \tag{9-9}$$

k 为偶数时，式(9-3)变为

$$A_k = \frac{a_1}{2} + \left(\frac{a_1}{2} - a_2 + \frac{a_3}{2}\right) + \left(\frac{a_3}{2} - a_4 + \frac{a_5}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{a_{k-3}}{2} - a_{k-2} + \frac{a_{k-1}}{2}\right) + \frac{a_{k-1}}{2} - a_k. \tag{9-9a}$$

将关系式(9-8)代入上两式,则式(9-9)成为

$$A_k = \frac{a_1}{2} + \frac{a_k}{2}; \tag{9-10}$$

式(9-9a)成为

$$A_k = \frac{a_1}{2} + \frac{a_{k-1}}{2} - a_k. \tag{9-10a}$$

如果 k 值足够大,a_{k-1} 和 a_k 相差很少,那么有 $a_{k-1}/2 - a_k = -a_k/2$. 于是等式(9-10)和(9-10a)可归并在一起而写成

$$A_k = \frac{a_1}{2} \pm \frac{a_k}{2}, \tag{9-11}$$

式中的正号与 k 为奇数相应,负号与 k 为偶数相应.

若把由圆孔露出的波阵面分成数目众多的波带元,则不用上述菲涅耳半波带所导出的加法,亦能求出所考察的 P 点的相对光强. 为此,我们设想对每一个半波带,都按着使两相邻环状带元的相应边到 P 点有相同的光程差的方法,分成许多个小的环状带元. 换言之,每一个半波带都是由许多小的环带元组成的,而它们中的任意两相邻带元施于 P 点的振动的相位差为同一数量. 并且,像各半波带的面积相等一样,这些带元的面积亦彼此相等. 因而,同一半波带中各带元施于 P 点的振动的振幅 $\Delta a_1, \Delta a_2, \Delta a_3, \cdots, \Delta a_k$ 的绝对值相差很少. 图 9-5(a)表示第一个半波带分成的许多小的环状带元;图 9-5(b)为求它们在 P 点作用的总和而作出的矢量图,其中 $\overrightarrow{AB}$ 即为第一个半波带在 P 点的合成振动的振幅矢量. 当带元的数目趋近于无限大时,则同一半波带上的第一带元和最末带元施予 P 点的振动的相位差为 π. 这时图 9-5(b)的多边形趋近于半圆曲线 $\overset{\frown}{AB}$,并以它为极限,即得图 9-5(c),合成振幅 $\boldsymbol{a}_1 = \overrightarrow{AB}$.

用同法处理前两个半波带时,则得如图 9-5(d)所示的近于封闭的曲线 ABC,其中第二个半圆 BC 是由第二个半波带上各小环带元施予 P 点的振动的振幅矢量构成的. 矢量 $\overrightarrow{BC}$ 为第二半波带施予 P 点的振动的振幅矢量,$\boldsymbol{a}_2 = \overrightarrow{BC}$. 这样,前两个半波带在 P 点的合成振动的振幅矢量即为图 9-5(d)中的矢量 $\overrightarrow{AC}$,由于 $|\boldsymbol{a}_1|$ 和 $|\boldsymbol{a}_2|$ 相差很小,所以 $|\overrightarrow{AC}|$ 实际上很小. 当所研究的波阵面具有很多个半波带时,则 P 点的振幅可由图 9-5(e)所示的矢量图求出. 例如,当由圆孔露出三个半波带时,则 P 点的合成振幅等于 $\overrightarrow{AB_1}$;四个半波带时,合成振幅 $\overrightarrow{AC_1} \approx 0$;而当由圆孔露出的半波带的数目很多时,则 P 点的振动的振幅为 $\overrightarrow{AC_0}$[图 9-5(e)],在数值上等于 $a_1/2$. 这个结果表示,没有遮蔽的整个波面,在 P 点所产生

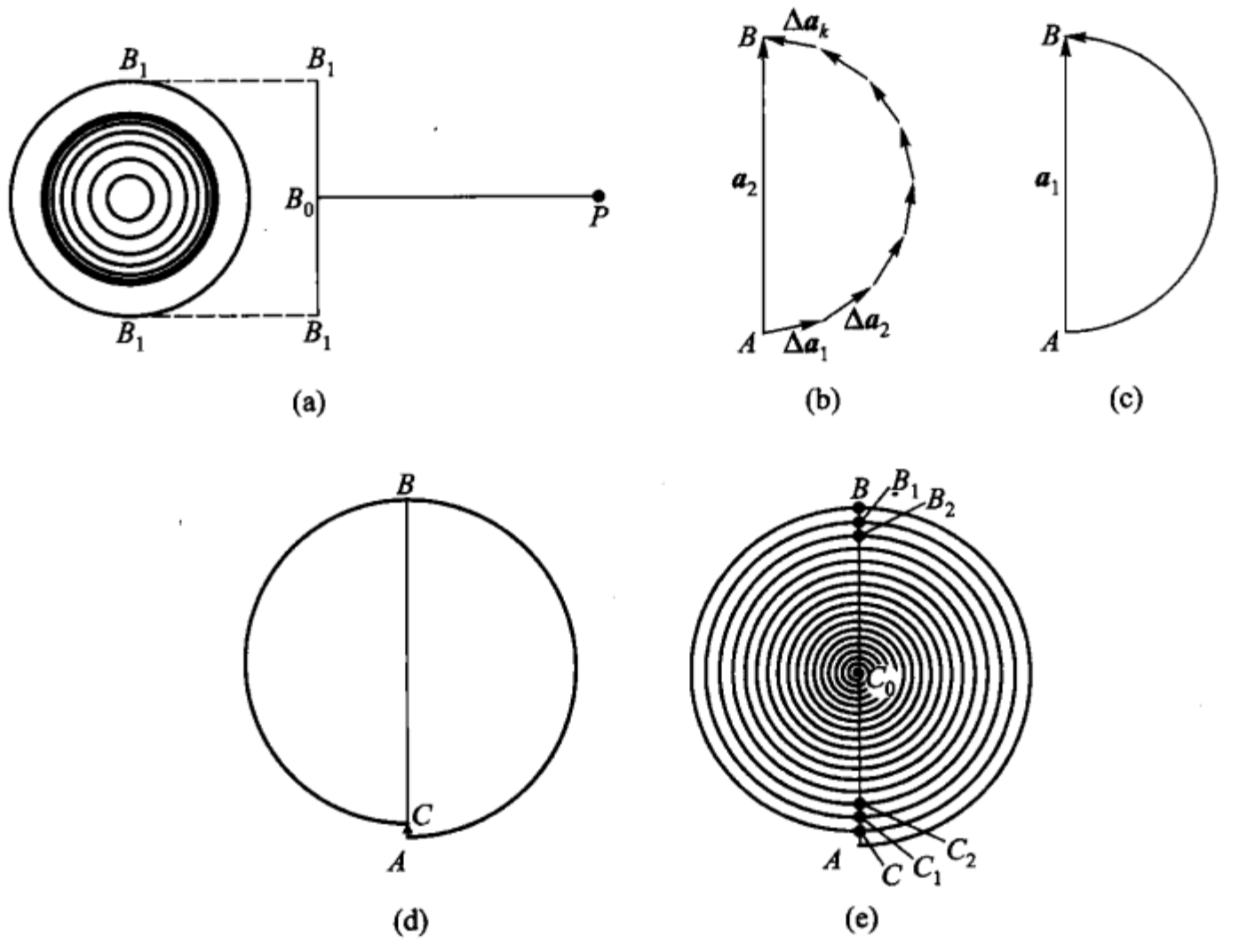


图 9－5

的光强为圆孔对 P 点露出第一个半波带时所产生光强的 1/4. 这是通常所预料不到的结果.

虽然在这里看来似乎有了菲涅耳半波带的处理方法就不需要用矢量加法，然而在与后面要讨论的直边衍射作比较时，这些图将直观地表示出两种衍射的差别.

由式(9－11)或图 9－5(e)可见，只要知道在由圆孔露出的波阵面上对于所考察的 P 点作出的菲涅耳半波带的数目就能确定出该点的振动的振幅，从而得知该点的光强度. 当在露出的波阵面上作出的半波带为奇数个时，P 点有最大的光强度；而为偶数个半波带时，P 点有最小的光强度.

当在圆孔露出的波阵面上只能作出为数不多的若干个半波带时，则最末一个(第 k)带在 P 点所产生的振动的振幅 a_k 与第一带在 P 点所产生的振动的振幅 a_1 相差很少，在此情况下，当 k 为奇数时，有

$$A_k = \frac{a_1}{2} + \frac{a_k}{2} = a_1;$$

当 k 为偶数时，有

$$A_k = \frac{a_1}{2} - \frac{a_k}{2} = 0.$$

这表明，在所述的条件下，当圆孔露出奇数个半波带时，P 点的光强度正比于 a_1^2，

为亮点;而当圆孔露出偶数个半波带时,P 点是光强度为零的暗点.

下面将要看到,圆孔所露出的半波带的数目 k 不仅取决于圆孔的直径或光的波长,而且也取决于光源和所考察的点到圆孔的距离.

由图 9-4,可得

$$\rho_k^2 = r_k^2 - (r_0 + h)^2 = r_k^2 - r_0^2 - 2r_0h - h^2,$$

由于在实际上,$h \ll r_0$,所以上式中的 h^2 项可忽略,因而有

$$\rho_k^2 = r_k^2 - r_0^2 - 2r_0h.$$

利用式(9-5a)和前已导出的 $r_k^2 - r_0^2 = kr_0\lambda$,则上式可写成

$$\rho_k^2 = k\frac{r_0R}{R + r_0}\lambda, \tag{9-12}$$

或

$$k = \frac{\rho_k^2}{\lambda}\frac{R + r_0}{r_0R}. \tag{9-12a}$$

利用此式可以求出对于半径为 ρ 的圆孔露出的半波带的数目 k,只需将其中的 ρ_k 值代以圆孔的半径 ρ 值. 于是,在光源到圆孔的距离 R 和圆孔的半径 ρ 给定的情况下,在露出的波阵面上作出的半波带的数目就决定于所考察的点到圆孔的距离 r_0. 换言之,同一圆孔,对于通过圆孔中心和光源的直线 SS' 上的不同点所露出的半波带的数目亦不同,因而在这条直线上,某些点的光强度为最大,而另一些点的光强度为最小. 另一方面,在 R 和 r_0 给定的条件下,圆孔的半径 ρ 改变时,波阵面对所考察的点作出的半波带的数目亦变,即当光源和所考察点的位置固定时,改变圆孔的直径亦可使所考察点的光强度有明暗交替的变化.

这个结论与几何光学所得的结论完全不同,因为按几何光学的观点,在所述的直线 SS' 上的各点的光强度都不为零并且与圆孔的大小无关. 但这并非表明波动光学在一切情况下都排斥几何光学,因为当光源和所考察的 P 点到圆孔的距离为有限值并且圆孔相当大($\rho^2 \gg \lambda r_0$)时,则由上式求得的 k 为一个趋近于无限大的数目,于是第 k 带在给定的 P 点上所产生振动的振幅 a_k 实际上可忽略,结果这无限多个半波带在该点合成振动的振幅为

$$A_\infty = \frac{a_1}{2} \pm \frac{a_k}{2} = \frac{a_1}{2}. \tag{9-13}$$

即在 k 趋近于无限大的情况下,所考察的直线 SS' 上的各点有相同的光强度(正比于 $a_1^2/4$). 这个结论又开始与几何光学的结论一致. 所以可以说,几何光学是波动光学在部分波阵面对所考察的点作出的半波带数目 k 趋近于无限大时的极限. 实际上,在光源和所考察的点到圆孔的距离为有限值的条件下,只要圆孔的半径足够大,则几何光学与波动学无差别.

这个结果[(9-13)式]还表示,没有遮蔽的整个波阵面在 P 点所产生的光

强只有第一个菲涅耳半波带在同一点所产生光强的 1/4[用图 9-5(e)可得同样的结果]. 这是通常预料不到的结果.

从式(9-12a)还可看出,如果距离 R 和 r_0 足够大,则即使圆孔的半径很大,而在露出的波阵面上作出的半波带的数目也可以是很少的,此时也能获得明显的衍射现象.

对于不在通过圆孔中心和光源连线的任一点 P'[图 9-6(a)]的光强度,亦可用菲涅耳半波带来估计. 首先设想没有光屏,这样就可以以 B_0' 为中心作出菲涅耳半波带;然后在波阵面上以 B_0 为中心加上所讨论的具有圆孔的光屏,因而露出的半波带如图 9-6(b)所示,这些带在 P' 点所产生振动的振幅就不仅取决于它们的数目,而且也取决于每个带露出部分的多少. 精确地计算 P' 点的合成振动的振幅是很复杂的. 但显而易见,当 P' 点逐渐离开 P 点时,有些地方的光强度较大,另一些地方的光强度较小. 由于整个图形具有回转对称性,所以在 P 点周围呈现明暗交替的圆环. 图 9-6(c)和(d)即为在两个不同位置上观察到的菲涅耳圆孔衍射图样;注意它们的中心,一个是亮,一个是暗.

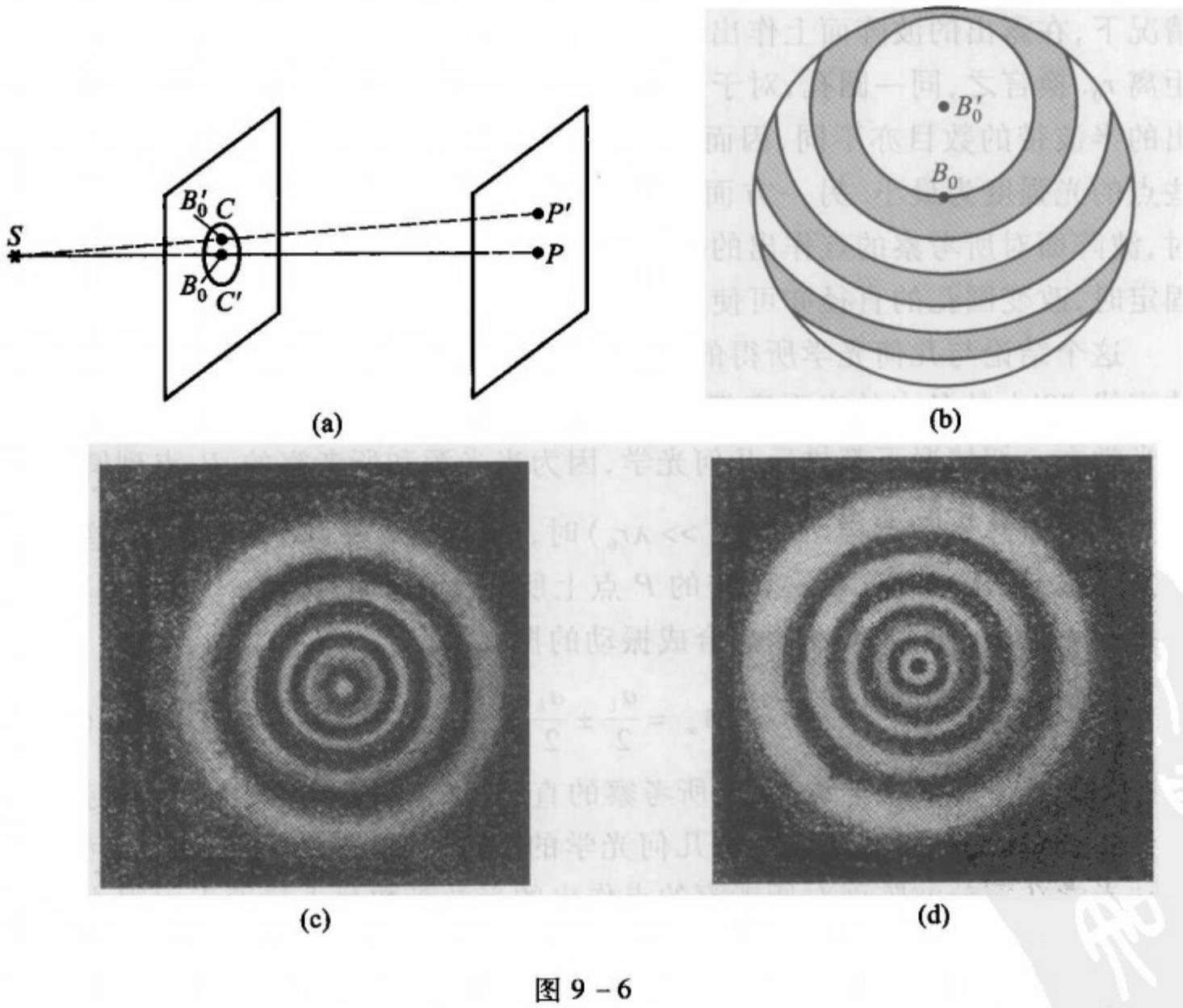


图 9-6

在图 9-7 的照片中第一排的四个是当圆孔所开的大小尚不足第一个半波

带时，在幕上得到的光斑；第二排左起第二个为由圆孔露出两个半波带时，幕上所得的光斑，它的中心是暗的；同一排的最后边一个是圆孔露出三个半波带时幕上所得的光斑，它的中心是亮的. 图中其余各图样为圆孔继续增大时，幕上所得的光斑.

在观察所述圆孔衍射时，必须使光源可以称得上点光源，否则通过圆孔而在幕上所得的衍射图样，将是模糊不清的. 这是因为有限大小的光源是由许多个点光源组成的，而每一点光源在幕上均产生自己的衍射光斑，这些衍射光斑的重叠致使总的光斑模糊不清. 将附有滤光片的碳棒（直径 4 ~ 5 mm）弧光灯或超高压短弧氙灯，放在离圆孔约 5 m 远的地方，用照相物镜中的可变光阑作为所研究的圆孔并在距它 1 ~ 2 m 远处放一白纸幕，则在纸上很容易地观察到图 9 - 7 所示的各种衍射图样. 现在用激光（例如氦氖激光器）作光源，演示所述菲涅耳衍射现象更是件不难的事，一般实验室都能做.

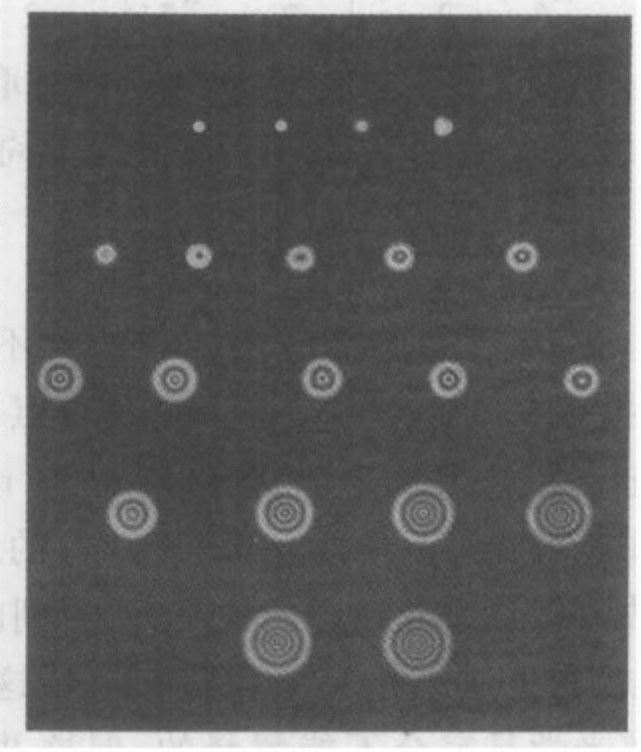


图 9 - 7

* §9 - 3 菲涅耳圆盘衍射

这里所说的圆盘是指在光的传播方向上，具有圆形投影的一切不透明的障碍物，它可以是一个不透明的圆形板或一个不透明的球，或者是一个尖端向着光源的一个不透明的圆锥体. 图 9 - 8 中，S 为点光源，D 为一圆盘，现在仍然来考察在通过圆盘中心和光源所作的直线上的任一点 P 的光强度.

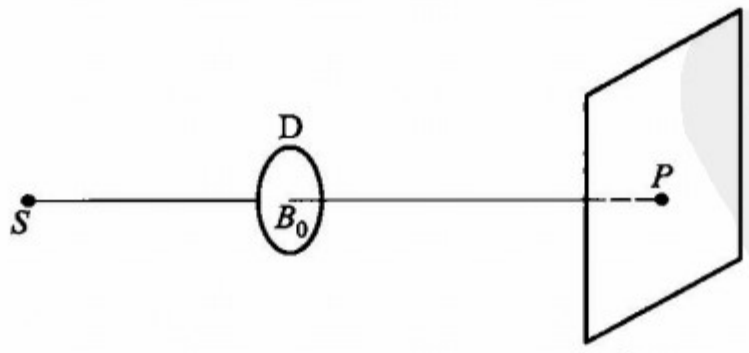


图 9 - 8

按前节所述的原理，圆盘使自光源 S 发出的球面波阵面的开头的 m 个半波带不能对所考察的 P 点起作用，即圆盘遮住了开头的 m 个半波带. 因而自 S 点发出的波阵面在 P 点所产生的合成振动的振幅可由式(9 - 9)和(9 - 9a)得

$$A_k=\frac{a_{m+1}}{2}+\left(\frac{a_{m+1}}{2}-a_{m+2}+\frac{a_{m+3}}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{a_{k-2}}{2}-a_{k-1}+\frac{a_k}{2}\right)+\frac{a_k}{2},$$

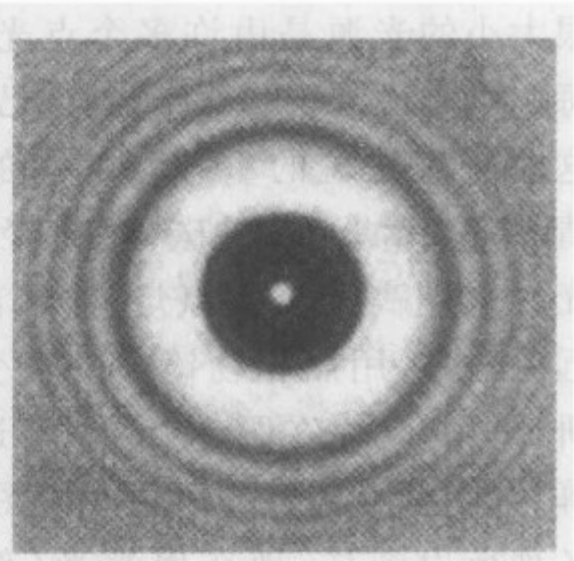
或

$$A_k=\frac{a_{m+1}}{2}+\left(\frac{a_{m+1}}{2}-a_{m+2}+\frac{a_{m+3}}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{a_{k-3}}{2}-a_{k-2}+\frac{a_{k-1}}{2}\right)+\frac{a_{k-1}}{2}-a_k;$$

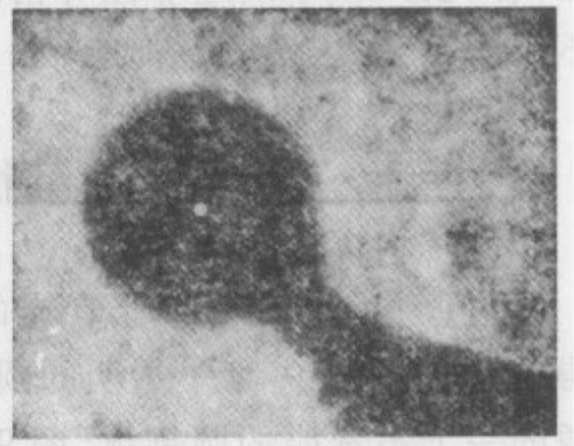
当 k 为奇数时取前者，k 为偶数时取后者. 然而，在所讨论的情况下，k 趋近于无限大，a_k 趋近于零，所以不论 k 是奇数还是偶数，上面两式都得同一结果：

$$A_k=\frac{a_{m+1}}{2}. \tag{9-14}$$

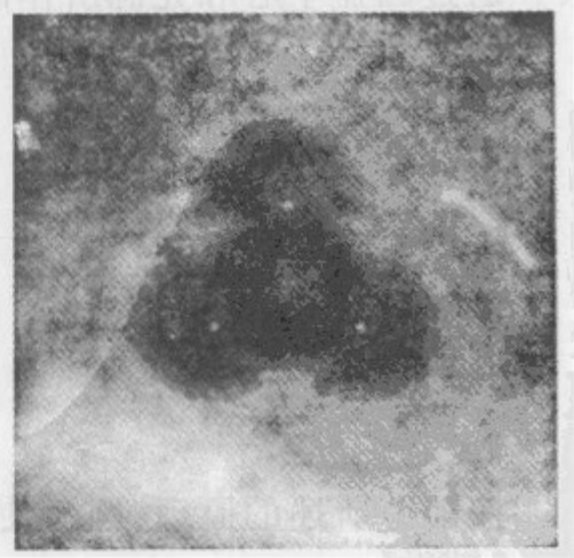
由此可知，当圆盘较小，$m+1$ 为不大的有限值时，则在几何影的中心永远是亮点，其光强度正比于 $a_{m+1}^2/4$. 把一个直径为 2 ~ 3 mm 的圆盘放在离弧光灯足够远(约 5 ~ 6 m)的地方，然后用放大镜观察几何影的中心，所看到的现象(是亮点)与上述结论完全相符. 显然，这种现象用几何光学是完全不能解释的. 但这并不表示在一切情况下几何光学与波动光学都是不一致的. 发生上述现象的条件，是 $m+1$ 为不大的有限值，按式(9-12a)，有两种情况可以满足这个条件：其一，光源到圆盘的距离 R 和圆盘到所考察的 P 点的距离 r_0 不很大(几米)，而圆盘的半径 ρ 很小，以至于光的波长对它来说并不是可忽略的；其二，R 和 r_0 很大(达几千米)，而圆盘的半径亦相当大，例如，在 R 和 r_0 为几千米的情况下，半径 10 cm 左右的圆盘都能产生上述几何影中心为亮点的衍射现象. 然而，对于半径很大的圆盘，当 R 和 r_0 均不很大时，它将遮住数目众多的半波带，而使第 $m+1$ 个半波带在所研究的 P 点上产生的振动的振幅 a_{m+1} 近于零. 于是，P 点实际上是暗点，这又开始与几何光学的结论一致.



(a)



(b)



(c)

图 9-9

图 9-9(a)所示为圆盘对自点光源发出的光所产生的衍射图样的照片；(b)为 $R+r_0$ 达 7 km 时手拿直径为 20 cm 的圆盘所产生的衍射图样；(c)为排成品字的三个圆盘对点光源发出

的光所产生的衍射图样的照片.

在上述讨论及实验中,可以看到圆盘有使点光源成一实像的作用,因而可以设想它相当于一个正透镜. 当把点光源改换成被照明的印有人像的负片时,由于圆盘衍射的作用,结果在圆盘后可得到负片的像.

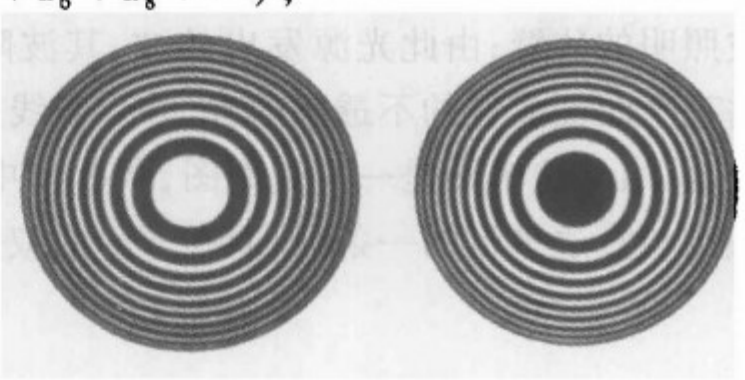
从菲涅耳半波带的作图法来看,对于在圆孔中心连线上的点,圆孔露出了由式(9-12a)决定的若干个半波带,其中有奇数半波带亦有偶数半波带;现在可以制造这样一种屏,它对于所考察的点,只让奇数半波带通过或者只让偶数半波带通过,于是波阵面在所考察的点上产生的振动的振幅为

$$A_k = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots$$

或 (9-15)

$$A_k = -(a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \cdots),$$

不论哪一种情况,合成振动的振幅均为相应各半波带在该点所生振动的振幅之和,这样的屏板称为菲涅耳波带板(片). 由式(9-12)可知,菲涅耳各半波带的半径与序数 k 的平方根成正比,所以波带片可以这样来做:先在白的图画纸上画出半径正比于整数 k 的平方根的一组同心圆,把相间的带涂黑,然后用无畸变的照相机将它拍在一张小底片上,这底片即成为波带板,如图 9-10(a)和(b)所示.



(a) (b)

图 9-10

如果某一波带片对某一点露出前十个奇数(第 1,3,…,19 半波带),则这些带在该点所产生的振动的振幅 $A_k \approx 10a_1$,这为不放任何光阑(将圆孔开得非常大)情况时的 20 倍. 因而在有波带片的情况下,该点的光强度为不放波带片时的 400 倍. 这样,波带片显然有使点光源或不大的物体成一实像的作用,并且跟一般的正透镜一样,波带片也有它的焦距(波带片的焦距就是发光点在无限远时的像距). 它的数值取决于波带片通光半径 ρ_k、半波带的数目 k 和所用光的波长,由式(9-12a),得

$$f' = r_0 = \rho_k^2 / k\lambda. \qquad (9-15a)$$

此外,在距波带片 $f'/3$、$f'/5$、$f'/7$、…处尚有较弱的焦点. 波带片成像与透镜成像之不同,在于对于给定的物点,满足普通薄透镜物像公式的像点可因焦距有好几个而有好几个像点;并且像点的位置跟所用光的波长有密切的关系,也就是它的成像还有很显著的色差.

菲涅耳波带片所表现的上述成像,不仅是对惠更斯-菲涅耳原理的令人信服的例证,而且还为红外、紫外以及 X 射线的成像提供了新的途径;此外,波带

板的概念在全息照相术和综合孔径雷达的信息处理中获得了重要的应用.

* §9-4　菲涅耳直边衍射

一个平面光波或一个球面光波通过一个与其传播方向垂直的不透明的直边(如刮脸刀片的直边)后,在幕上的光强度分布并不像几何光学所描述的那样有清晰的几何影界. 仔细地观察会发现:在几何影内的一定范围内光强度不为零,而在影界之外的明亮区域,光强度作有规律的不均匀分布. 此时幕上各点的光强度不仅与光源到幕的距离有关,而且亦与光的波长和光源的尺寸有关.

在此,我们仅限于研究如图9-11(a)所示情况下的幕上各点的光强度. 图中S代表一个垂直于图面的很长的线光源,它可以是一根长的白炽灯丝,也可以是一个被照明的狭缝;由此光源发出的波,其波阵面CC'是以光源为中心的柱面;N代表垂直于图面放置的不透明的屏,并且与线光源平行;MM'代表垂直于图面放置的一块幕. 由于这个图是一个截面图,所以图中在幕上所画的一点,实际上是代表通过该点与直边平行的一条线,而在下面的叙述中,我们常说幕上一点.

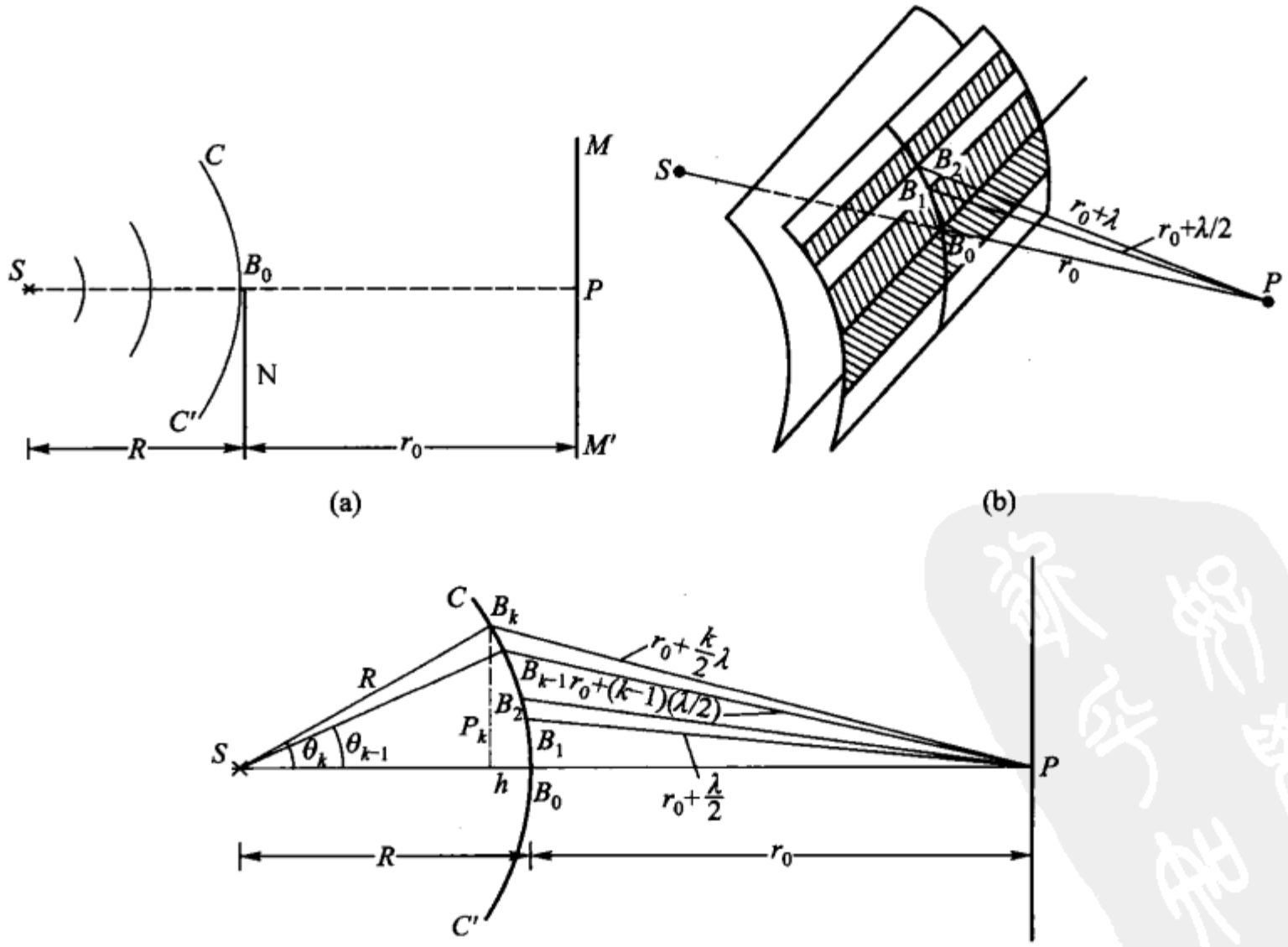


图 9-11

幕上各点的光强度决定于波阵面 CC' 的露出部分在该点所产生的振动的振幅，这个振幅可以借助式(9-2)来计算，然而为能更形象地显出其物理意义，也可用菲涅耳半波带的作图法来计算. 这里采用作图法对直边的衍射图样讨论如下：

假定先拿掉直边屏 N，以通过幕上 P 点的直线 SB_0P 为中线，将柱面波阵面 CC' 分成许多这样的直条带：相邻带的边缘到 P 点的距离之差为半个波长[参看三维图 9-11(b)和截面图(c)]，即 $PB_0 = r_0$，$PB_1 = r_0 + \lambda/2$，$PB_2 = r_0 + \lambda$，$PB_3 = r_0 + 3\lambda/2$，$\cdots$，$PB_k = r_0 + k\lambda/2$. 相邻带在 P 点所产生的振动的相位相反. 这些带亦称为菲涅耳半波带，从 P 点向光源看去，这种直条状的半波带的外貌如图 9-12 所示.

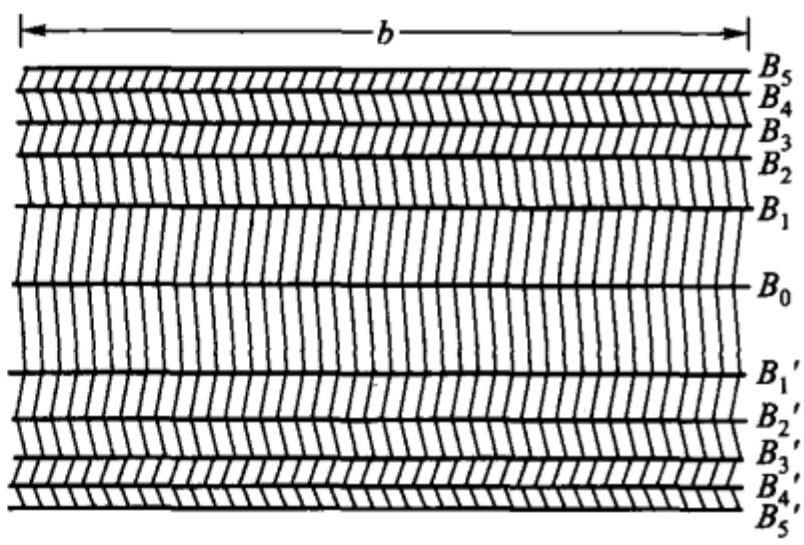


图 9-12

在 §9-2 中已证明，在球面波阵面上画出的同心环状的各菲涅耳半波带的面积差不多彼此相等，而这种直条状的半波带的面积沿波阵面向上或向下却有很快地改变. 由图 9-11(c)可知，第 k 个直条带的面积

$$\Delta S_k = (R\theta_k - R\theta_{k-1})b, \tag{9-16}$$

其中 b 为半波带的长度，θ_k 和 θ_{k-1} 分别为第 k 带和第 $k-1$ 带的边缘同光源 S 的连线与 SB_0 线的夹角，而 θ_k 值和 θ_{k-1} 值可由下列二式确定：

$$\theta_k = \frac{\rho_k}{R} = \frac{\sqrt{k\dfrac{r_0R}{R+r_0}\lambda}}{R} = \sqrt{k\frac{r_0\lambda}{R(R+r_0)}},$$

$$\theta_{k-1} = \sqrt{(k-1)\frac{r_0\lambda}{R(R+r_0)}}.$$

将此两角的值代入式(9-16)，并加整理则得

$$\Delta S_k = b\sqrt{\frac{r_0R\lambda}{R+r_0}}(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}). \tag{9-17}$$

这表示对于给定的 R、r_0、b 和 λ，各直条半波带的面积随序数 k 而变，并且随 k 之增大而减小. 由于各带在 P 点所产生振动的振幅正比于带的面积，而现在序数 k 较高的半波带的面积小于系数 k 较低的半波带的面积，再加上序数 k 较高的带到所研究的 P 点的距离和对 P 点的连线的倾角亦都较序数低的带的相应值大，所以可以肯定：由序数 k 较高的半波带在 P 点所产生的振动的振幅，其绝对值小于序数 k 较低的半波带在该点所产生的振动的振幅的程度较 §9-2 所述的圆

环形的半波带的情形为甚,因而不能利用式(9-11)来进行讨论.

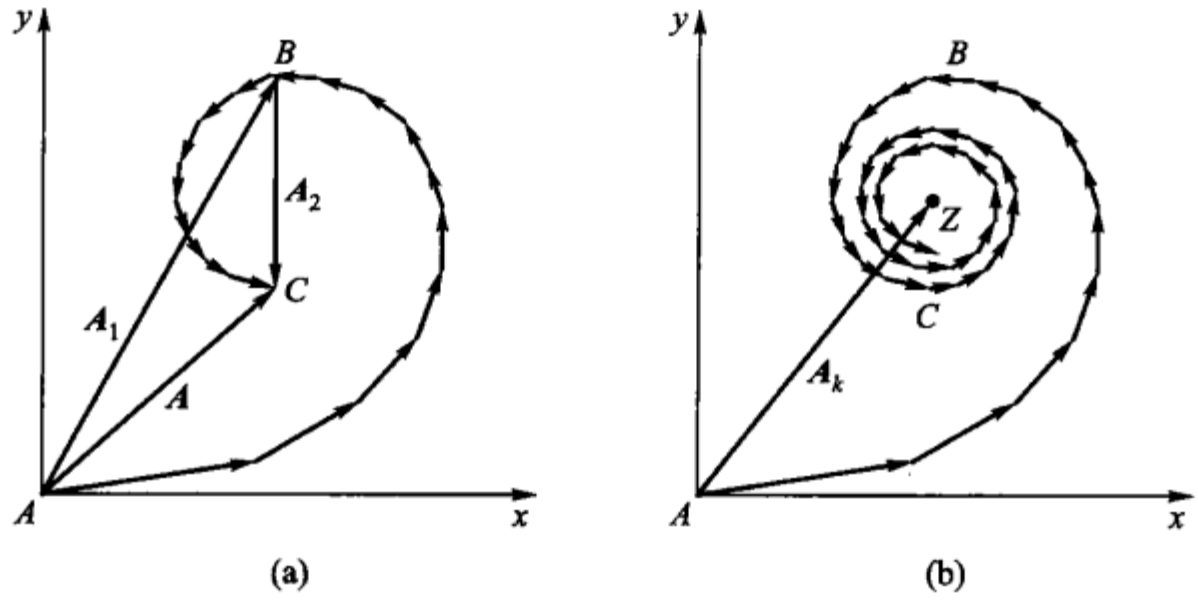


图 9-13

如同前面用矢量图讨论圆孔衍射一样,现在将每一直条半波带,按相邻带元相位差相等的条件再分成许多个直条波带元. 例如,自 B_0 点向上把第一个半波带分成九个直条带元,它们在 P 点所产生的振动的振幅分别为 Δa_1, Δa_2, Δa_3, $\cdots$, Δa_9,用矢量的多边形加法,求得其合成矢量如图 9-13(a)所示的$\overrightarrow{AB}$,即 $A_1 = \overrightarrow{AB}$. 同样可得第二个直条半波带在 P 点作用的合成矢量 $A_2 = \overrightarrow{BC}$. 由于前述理由,矢量的绝对值 A_1 较 A_2 大很多,故两者虽相位近于相反,但却不能相抵消,而其合成振动由图中所示的 $A = \overrightarrow{AC}$表示. 将这种情况与圆孔衍射的图 9-5(d)相比,可以明显地看出它们之间的不同,在那里合成的振幅几乎近于零,而这里 A 却有相当大的数值. 现在我们继续来讨论柱形波面的情况,即重复应用上述方法把自 B_0 点向上的各半波带都分成直条波带元,并把代表各带元在 P 点所产生振动的矢量画出,则得图 9-13(b)所示的较完全的图. 这些矢量向内盘旋而趋近于 Z,所以上半个波阵面上的所有半波带在 P 点的振动,可由矢量 $A_k = \overrightarrow{AZ}$来代表. 当把每个半波带分成无限多个直条带元时,图 9-13(b)的折线就变成如图 9-14 所示的曲线的上半支. 其下半支可用同样的方法得到,它代表自 B_0 向下的所有半波带对所考察的 P 点的作用. 这个曲线称为考纽螺线(Cornu-spiral),它与讨论圆孔衍射时得到的图 9-5(e)所示的螺线相对应. 为精确地获得考纽螺丝,需用(9-2)式并对所述的柱面波阵面作积分. 考纽螺线两终点 Z 和 Z'间的连线代表柱面波阵面不受任何遮蔽时对所考察的 P 点的振动的振幅的绝对值,亦可写成

$$A_{kk'} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \Delta a_k + \sum_{k'=1}^{k'=\infty} \Delta a'_k, \tag{9-18}$$

其中第一项代表柱面波的上半部对 P 点的贡献,而第二项代表下半部波阵

面对 P 点的贡献.

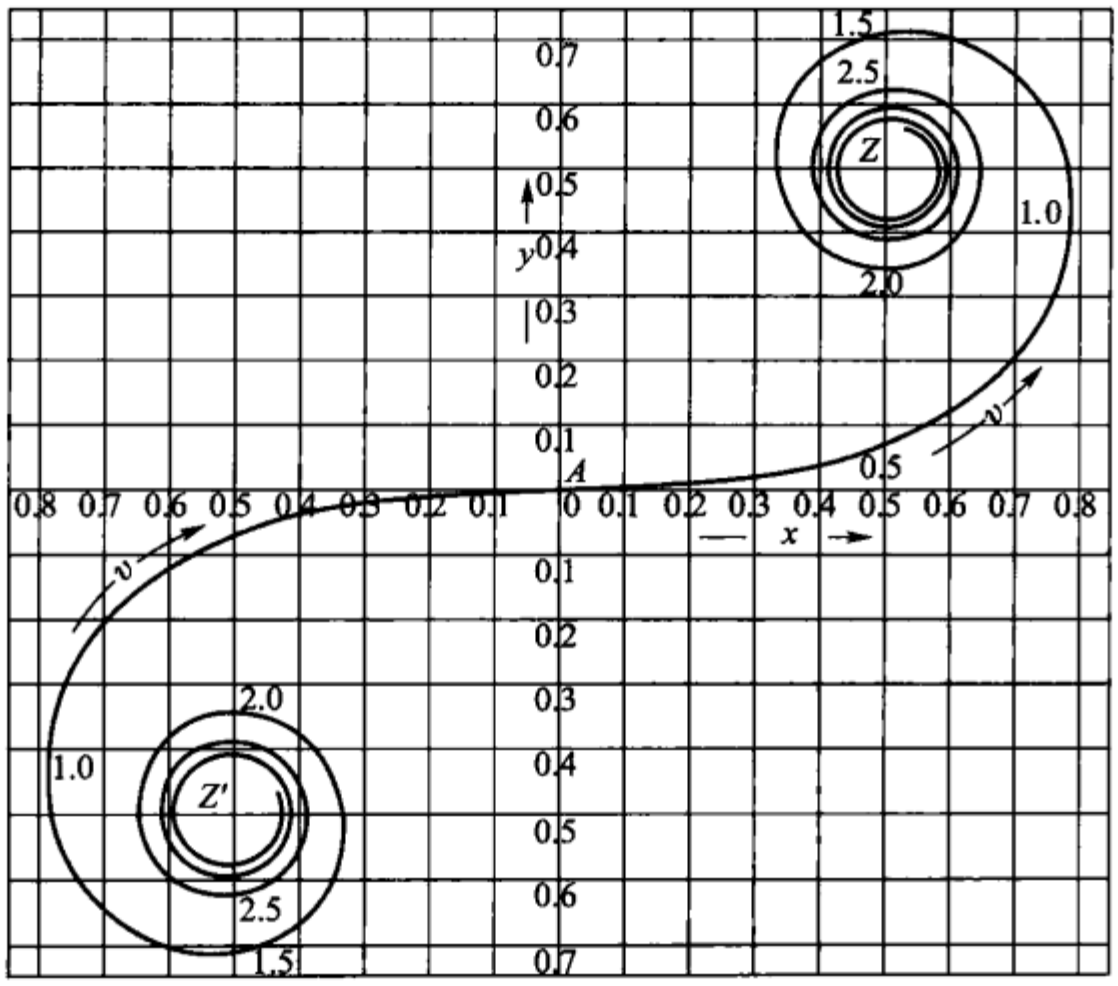


图 9－14

现在,即可利用考纽螺线来讨论柱面波被直边遮蔽一部分[图 9－11(a)]后,幕上各点的光强度:

(1) 对于几何影界上的 P 点[图 9－15(a)],B_0 之上的半个波阵面都对该点起作用,而 B_0 之下的半个波阵面被直边屏 N 所遮,所以合成振动的振幅

$$\boldsymbol{A}_{kk'} = \boldsymbol{A}_k = \sum_{k=1}^{k=\infty} \Delta \boldsymbol{a}_k. \tag{9－19}$$

在考纽螺线上,此 $\boldsymbol{A}_k$ 相当于自 A 到 Z 的直线,即 $\boldsymbol{A}_k = \overrightarrow{AZ}$[图 9－13(b)],于是,几何影界上 P 点的光强度正比于 $|AZ|^2$.

(2) 对几何影界上方的 P' 点[图 9－15(a)],由它向光源 S 作的直线与波阵面交于 B_0',现在将波阵面重新分为许多半波带,自 B_0' 起为第一带,整个波阵面分为上、下两部分,与(1)相比,相当于 B_0 点移到了 B_0' 点. B_0' 之上的半个波阵面都对该点起作用,而 B_0' 之下的一部分波阵面被直边屏所遮,P' 点离几何影界 P 愈远,此被遮的波阵面部分愈小,当 P' 点离几何影界 P 足够远时,直边屏将不产生影响,宛如不存在. 所以,P' 点的振动的振幅为

$$\boldsymbol{A}_{kk'} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \Delta \boldsymbol{a}_k + \sum_{k=1}^{k=m} \Delta \boldsymbol{a}_k, \tag{9－19a}$$

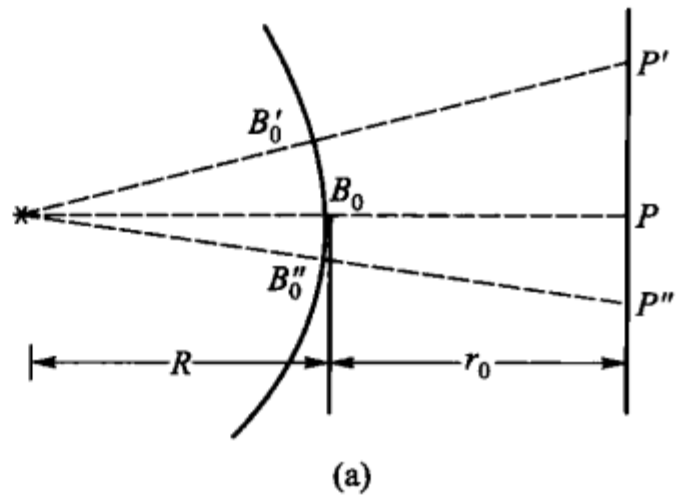
其中第二项中的上限 m 取决于 P' 点到影界 P 的距离. 在考纽螺线上,此 $\boldsymbol{A}_{kk'}$ 相当于自第三象限的 M' 点到第一象限的极限点 Z 的直线[图 9－15(b)],即 $\boldsymbol{A}_{kk'}$

$=\overrightarrow{M'Z}$，其中 M' 点决定于 P' 点到 P 点的距离. P' 点离 P 点愈远，则 M' 点沿螺线愈趋近于 Z'. 从而得知，正比于 $|M'Z|^2$ 的 P' 点的光强度，随 P' 点的位置而有改变，并且与图 9－15(b) 中的 M_1'，M_2'，M_3'，…相应的 P' 点有最大光强度，而与 $\overline{M_1'}$，$\overline{M_2'}$，$\overline{M_3'}$，…相应的 P' 点有最小光强度. 也就是，在几何影界的上方靠近 P 处，光强度的分布不均匀，有亮暗相间的条纹，而在离 P 足够远的那些地方，光强度正比于 $|ZZ'|^2$，为一常数，有均匀的光强度分布.

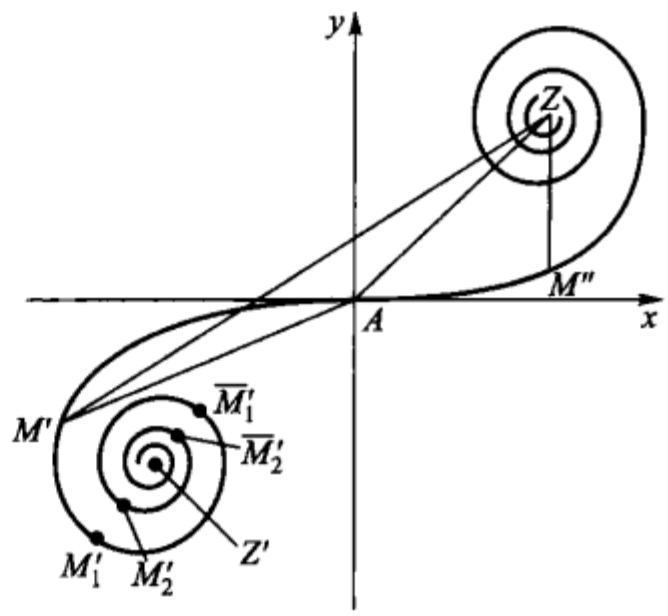
(3) 对于几何影界下的 P'' 点[图 9－15(a)]，由它向光源 S 作的直线与波阵面交于 B_0''，自此点将波阵面分为上、下两部分，与(1)相比，相当于 B_0 点移到了 B_0'' 点. B_0'' 之下的半个波阵面被直边屏所遮，对 P'' 点不起作用，而 B_0'' 上的半个波阵面中也有一部分被屏遮住. 于是 P'' 点的振动的振幅为

$$A_{kk'} = \sum_{k=n}^{k=\infty} \Delta a_k, \qquad (9-20)$$

其中 n 决定于 P'' 点到几何影界 P 点的距离，此距离愈大，则 n 值亦愈大. 由上式算出的 A_k，相当于在考纽螺线的第一象限的 M'' 点[图 9－15(b)]到 Z 点的直线，即 $A_{kk'} = \overrightarrow{M''Z}$. P'' 点离 P 点愈远，则 M'' 点沿螺线愈趋近于 Z 点. 由于 P'' 点的光强度正比于 $|M''Z|^2$，所以当 P'' 点到 P 点的距离逐渐增大时，P'' 点的光强度将单调地减小；当 P'' 点到 P 点的距离足够远时，则相应点的光强度趋于零.



(a)



(b)

图 9－15

图 9－16(a) 为用单色光在如图 9－11(a) 所示的布置中获得的幕上光强度分布的照片，图 9－16(b) 所示为相应的光强度分布曲线.

设 v 为考纽螺线上自 A 点算起的弧长的绝对值，已标注在螺线上；s 为在波阵面上 B_0' 或 B_0'' 点到 B_0 点的距离的绝对值，s' 为在幕上 P' 或 P'' 点到 P 点的距离. 用图 9－15(a) 中的三角形关系可得

$$s = \frac{R}{R + r_0} s',$$

又从解析方法获得直边衍射的光强公式时，有

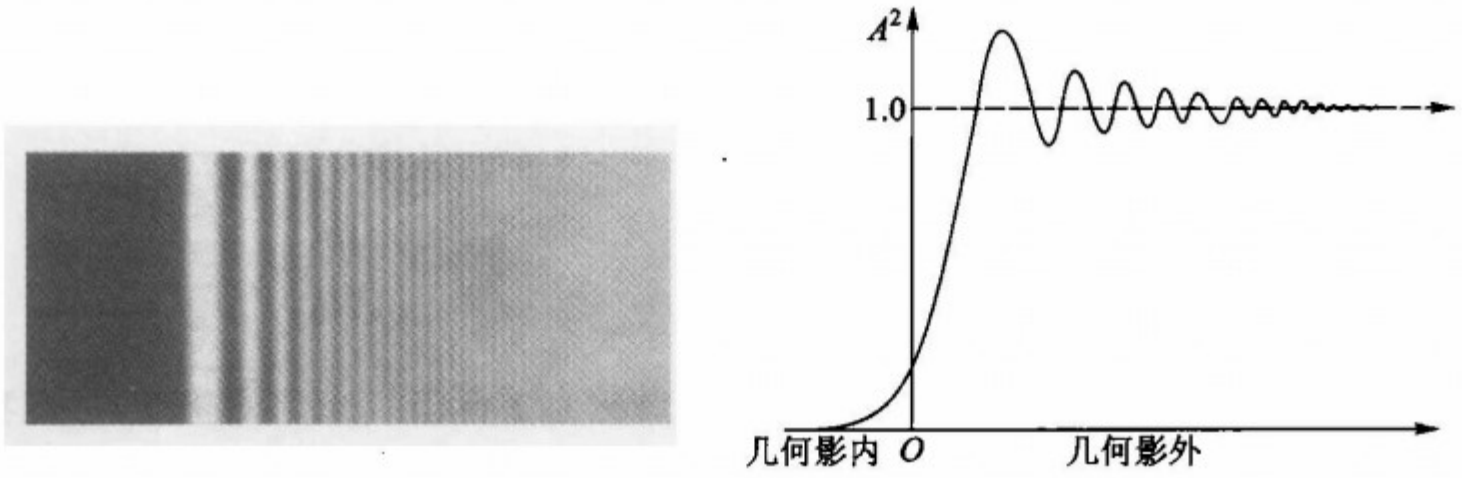


图 9-16

$$s = v\sqrt{\frac{Rr_0\lambda}{2(R+r_0)}}, \tag{9-21}$$

由此两式,得出

$$s' = v\sqrt{\frac{\lambda(r_0+R)r_0}{2R}} = ev. \tag{9-21a}$$

这样一来,利用式(9-21a)和考纽螺线,即可算出给定实验条件下的幕上各点的相对光强度的近似值.

[**例题**] 在图 9-11(a)所示的实验布置中,已知 $R = r_0 = 100$ cm 和 $\lambda = 500$ nm,求几何影界外三个最大光强度的点到影界的距离和在几何影界内距影界为 2 mm 的点的光强度对影界外均匀光强度的比值.

[**解**] 在给定的条件下,式(9-21a)中的 e 为

$$e = \sqrt{\frac{\lambda(r_0+R)r_0}{2R}} = 0.071 \text{ cm}.$$

由图 9-14 和图 9-15(b)可知,在影界上方具有最大光强度的前三个 P' 点分别与 $v = 1.2, 2.4, 3.1$ 相应. 于是,利用式(9-21a)即可求出三个最大光强度的点到影界 P 的距离:

$$s_1' = ev = 0.071 \text{ cm} \times 1.2 = 0.085 \text{ cm};$$

$$s_2' = ev = 0.071 \text{ cm} \times 2.4 = 0.170 \text{ cm};$$

和

$$s_3' = ev = 0.071 \text{ cm} \times 3.1 = 0.220 \text{ cm}.$$

对于影界下方 2 mm 的点,由式(9-21a)[并参考图 9-15(b)]可知,它与螺线上 $v = s'/e = 0.2/0.071 = 2.81$ 的点相应. 利用图 9-14,量出 M'' 点到 Z 点的距离和 $|ZZ'|$ 的长度. 于是有

$$\frac{|M''Z|^2}{|ZZ'|^2} \approx \left(\frac{1}{12.5}\right)^2 \approx \frac{1}{156},$$

此即表示距影界 2 mm 的点,其光强度已降为影外均匀强度的 0.6%.

从这个例子我们也看到了,在所述情况下如果用几何光学来研究,其所得结果的近似程度:在影界内 2 mm 处虽有光,但其强度已不及影外均匀光强度的 1%.

* §9-5　菲涅耳单狭缝衍射

图 9-17 中,S 为垂直于图面的线光源,NN'为平行于线光源的狭缝. 可把狭缝看做是两个相距很近的平行直边屏 N 和 N'的组合,它使由线光源发出的柱面波阵面只露出很窄的一部分,幕上各点的光强度便由这露出的部分波阵面来决定.

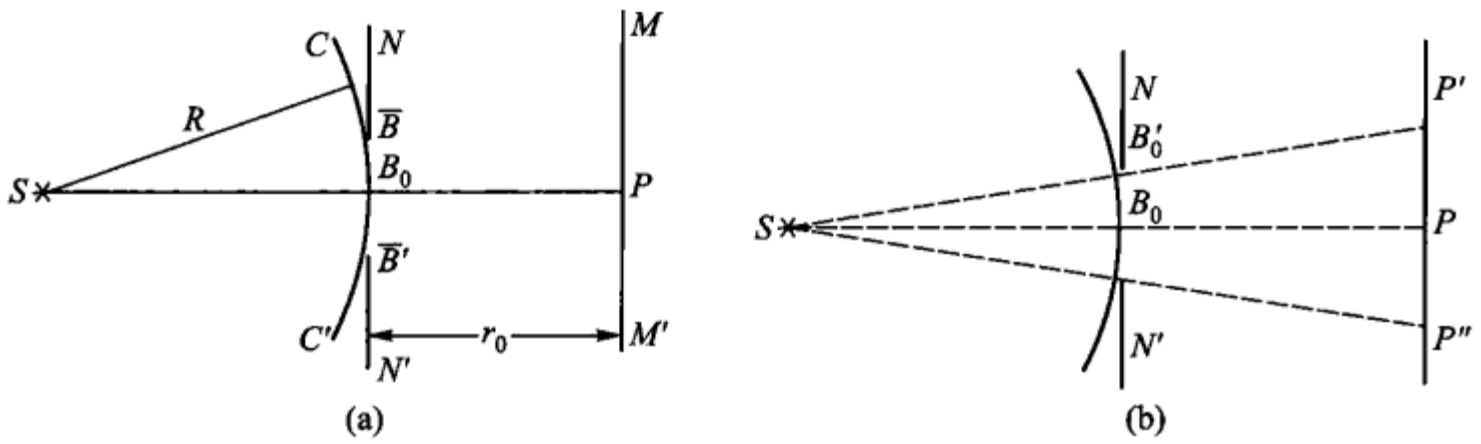


图 9-17

对于狭缝中心线上的 P 点[图 9-17(a)],B_0 点上半部的半个波面中只有开头的部分 $B_0\overline{B}$ 露出和 B_0 点下半部的半个波阵面中只有开头的部分 $B_0\ \overline{B'}$露出,总共露出的部分 Δs 决定于狭缝的宽度 a. 在近似的情况下,可以认为 Δs 等于 a. 有了 Δs 值后,再利用上节所得的考纽螺线及公式(9-21)和(9-21a),即可得幕上 P 点的光强度的相对值. 例如,对于 $R=100$ cm,$r_0=400$ cm,$\lambda=400$ nm 和狭缝宽度 $a=\Delta s=0.02$ cm 的情况,可先利用式(9-21)将 Δs 折换成螺线上的相当弧长 $\Delta v=0.5$. 于是 P 点的光强度决定于这弧长所对应的弦的平方. 由于所考察的 P 点在中心线上,所以此弧是由螺线下支(第三象限)的 $v=0.25$ 的点开始到螺线上支(第一象限)的 $v=0.25$ 的点为止,如图 9-18 所示螺线上的 ij 两点. 此时合成的振幅约为 0.5,其平方值即 P 点的光强度.

对于在狭缝中心线 SP 上方的一点 P',波阵面的中心线移到 B_0'[图 9-17(b)]. 于是 B_0'上面的半个波阵面中所能露出的开头的部分较 B_0'下面的半个波阵面中所能露出的开头的部分少,而当 P'离 P 很远时甚至会是只有 B_0'下面的某一部分露出,然而总的 Δs 或其相应的 Δv 不变. 这相当于在考纽螺线上将不变的弧长 Δv 从原来对 A 点对称的位置开始,沿螺线向其下支滑动(例如图 9-18 的 i',j'),滑动的多少取决于 P'点的位置,而弧 Δv 的弦的平方即为相应 P'点的光

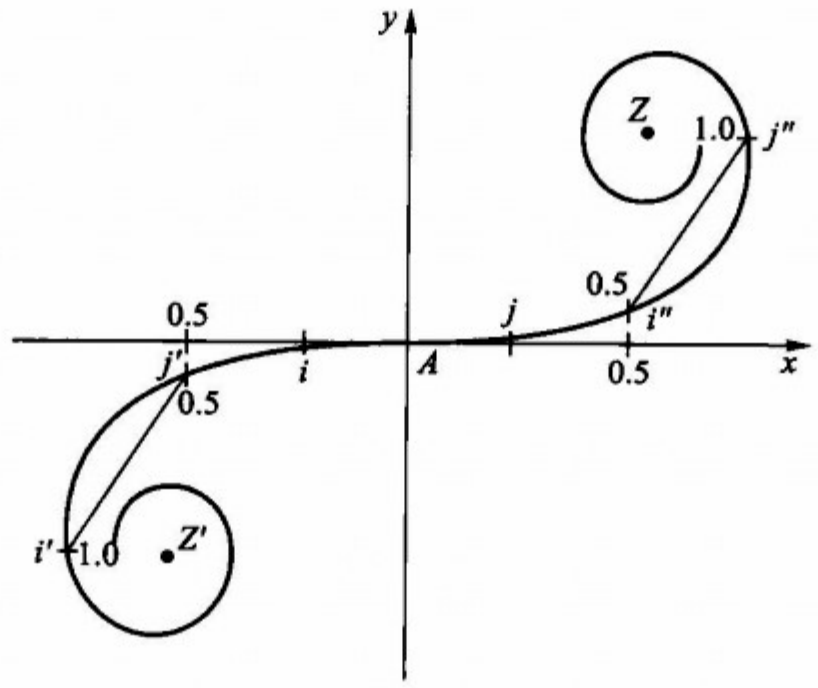


图 9-18

强度.

对于在狭缝中心线下方的一点 P'',情况与上述相似,但不变的弧长需向螺线的上支滑动(如图 9-18 中,i 移到 i'',j 移到 j'').

因此,为求得幕上的光强度分布,只需把和狭缝宽度对应的一定的弧长(例如 $\Delta v=0.5$)在螺线上滑动到各不同的位置,然后再量出它在每个位置所对应的弦长,即得振幅. 图 9-19 是在如图 9-17(a)所示的位置中,对一些宽度不同的

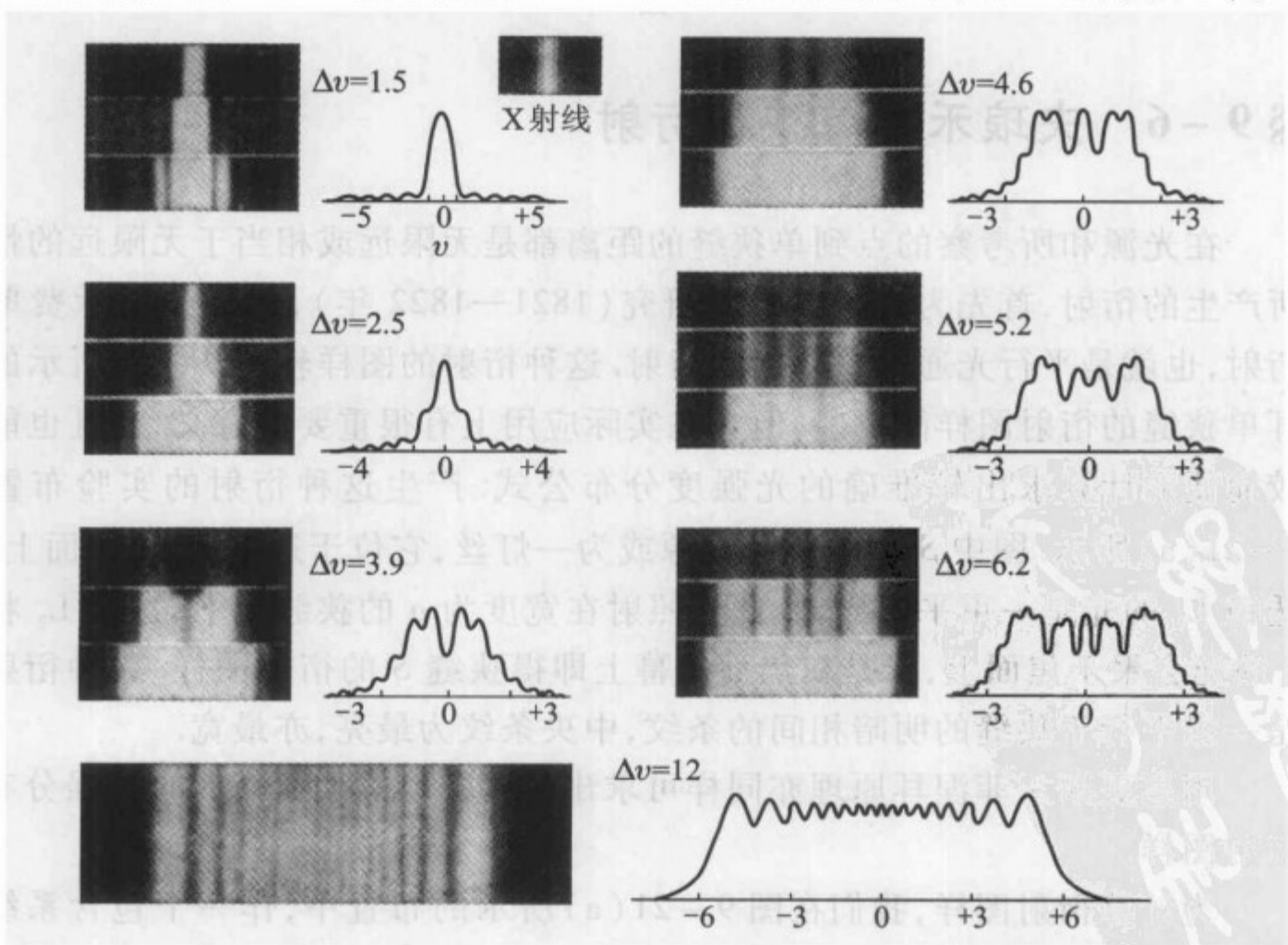


图 9-19

狭缝,在幕上得到的衍射图样的照片,每一组的三张照片是由三种不同曝光时间得出的.每图样旁都注明了狭缝宽度所对应的弧长 Δv 和由此弧在考纽螺线上利用上述方法得到的光强度分布曲线.此外,在每一曲线下面都标出了几何影界的位置.从中可以看到,只有很少的光分布在几何影界之外;当狭缝很宽(如其中 $\Delta v = 12$)时,所得的衍射图样与两个遥遥相对的直边衍射的衍射图样一样[参看图 9 - 16(a)];当狭缝很窄时,所得的衍射图样很像下面要讨论的夫琅禾费单狭缝衍射图样(图 9 - 23).

利用考纽螺线带还可以研究以不透明直条代替狭缝而得的菲涅耳衍射图样,图 9 - 20 即为一根细金属丝的菲涅耳衍射图样的照片.

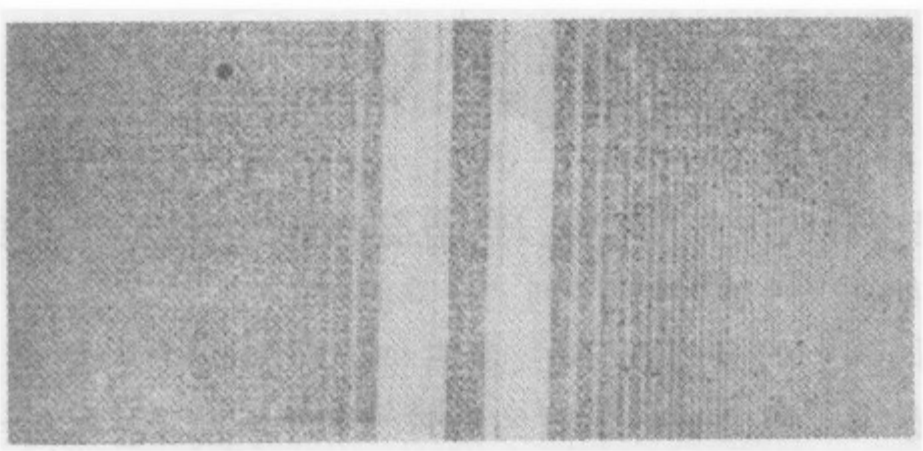


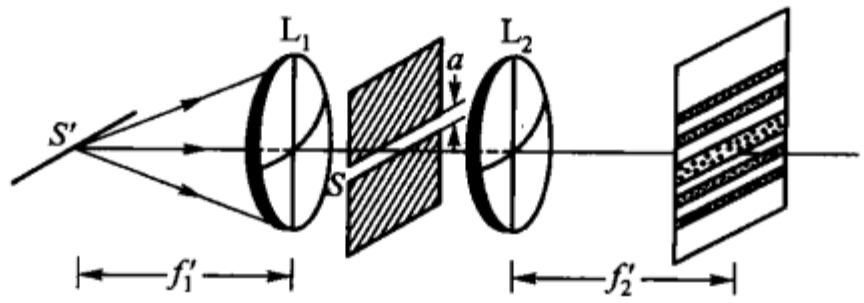
图 9 - 20

§9 - 6 夫琅禾费单狭缝衍射

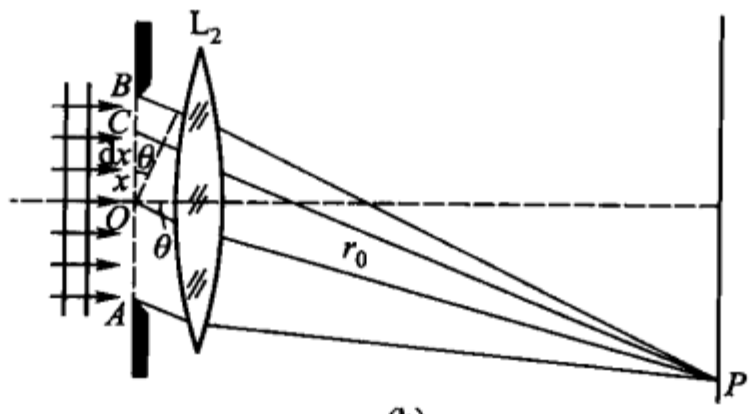
在光源和所考察的点到单狭缝的距离都是无限远或相当于无限远的情况下所产生的衍射,首先为夫琅禾费所研究(1821—1822 年),称为夫琅禾费单狭缝衍射,也就是平行光通过单狭缝的衍射.这种衍射的图样较图 9 - 19 所示的菲涅耳单狭缝的衍射图样简单些,但它在实际应用上有很重要的意义,并且也能够用较简便的计算求出较准确的光强度分布公式.产生这种衍射的实验布置如图 9 - 21(a)所示.图中 S' 为一狭缝光源或为一灯丝,它位于透镜 L_1 的焦面上,通过透镜 L_1 的光是一束平行光,令此光照射在宽度为 a 的狭缝 S 上;透镜 L_2 将通过 S 的光会聚于焦面上,于是在焦面的幕上即得狭缝 S 的衍射图样.这种衍射图样是一组平行于狭缝的明暗相间的条纹,中央条纹为最亮,亦最宽.

用惠更斯 - 菲涅耳原理亦同样可求出透镜 L_2 焦面(幕)上的光强分布——衍射图样.

为计算衍射图样,我们在图 9 - 21(a)所示的布置中,作一个包含系统光轴和垂直于狭缝的截面,其中一部分如图 9 - 21(b)所示.研究此截面内幕上的光强分布即可得夫琅禾费单狭缝衍射图样.狭缝 S 使平面波阵面只露出宽度为 a



(a)



(b)

图 9-21

的一长条,在此截面图中它由 AB 代表. 幕上 P 点的光强度即在与狭缝法线成 θ 角方向上的光强度,决定于由 AB 所代表的受限波阵面在该点或该方向作用的总和. 令 $\mathrm{d}x$ 代表一受限波阵面元的宽度,位于中心 O 点的波阵面 $\mathrm{d}x$ 在 P 点所产生的振动可写成:

$$\mathrm{d}y_0 = C'\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_0}{\lambda}\right)\right]\mathrm{d}x,$$

其中 r_0 为由 O 点到 P 点的距离,C'为一常数. 同样,AB 上任意一点 C 的波阵面元 $\mathrm{d}x$ 在 P 点所产生的振动可写成

$$\mathrm{d}y_C = C'\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_0+\Delta}{\lambda}\right)\right]\mathrm{d}x, \tag{9-22}$$

其中 Δ 为从中心 O 和任意点 C 到 P 点的光程差. 由于可以认为透镜 L_2 是完善的,对通过它的光不生光程差,所以此 Δ 值只决定于 O 点和 C 点的波阵面元在所研究的 θ 方向上的光程差,即

$$\Delta = x\sin\theta$$

将此值代入上式并将 AB 上的所有波阵面元在 P 点的作用都加起来,即得 P 点的振动:

$$y = \int_S \mathrm{d}y_C = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} C'\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_0+x\sin\theta}{\lambda}\right)\right]\mathrm{d}x. \tag{9-23}$$

利用两角差的三角公式,将上式展开,则有

$$y = C'\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_0}{\lambda}\right)\right]\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(\cos 2\pi\frac{x\sin\theta}{\lambda}\right)\mathrm{d}x$$

$$-C'\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_0}{\lambda}\right)\right]\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(\sin 2\pi\frac{x\sin\theta}{\lambda}\right)\mathrm{d}x,$$

而第二项积分恒为零,故上式变为

$$y = C'\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_0}{\lambda}\right)\right]\frac{\sin 2\pi\dfrac{x\sin\theta}{\lambda}}{2\pi\dfrac{\sin\theta}{\lambda}}\Bigg|_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} = C'a\frac{\sin\dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}{\dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_0}{\lambda}\right)\right] \tag{9-23a}$$

所以,P 点的光强为

$$I = (C'a)^2\frac{\sin^2\dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}{\left(\dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda}\right)^2}, \tag{9-24}$$

其中 $\pi a\sin\theta/\lambda$ 恰为狭缝边缘上的波阵面和中心的波阵面在 θ 方向的相位差,亦即为狭缝两边缘上的波阵面在 P 点的相位差之半,可用 u 表示,即

$$u = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}.$$

这样,式(9-24)即可简写为

$$I = I_0\frac{\sin^2 u}{u^2}, \tag{9-24a}$$

其中 $I_0 = (C'a)^2$. 由公式(9-24)或(9-24a)可得幕上光强度分布,具有相同 u 值(即 θ 角)的幕上的点有相同的光强度,因而在幕上所得的衍射图样中,条纹的轨迹平行于狭缝.

在透镜 L_2 的光轴和幕的交点处,$u=0$,由上两式可知,此处有最大光强度:$I = I_0 = (C'a)^2$;此光强度最大值正比于狭缝的宽度的平方.

当 $u = k\pi(k=1,2,3,\cdots)$,即 $a\sin\theta = k\lambda$ 时,由上两式得 $I=0$;其中第一个光强度为零的点所在的方向与透镜 L_2 的光轴间的夹角为

$$\theta = \arcsin\frac{\lambda}{a}. \tag{9-25}$$

由于此 θ 角实际上很小,所以上式可写成

$$\theta = \frac{\lambda}{a}. \tag{9-25a}$$

在两相邻最小之间有一次最大,这些次最大的位置可由作式(9-24a)的一级导数并使之为零而求出:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[\frac{\sin^2 u}{u^2}\right] = 0,$$

即

$$\tan u = u. \tag{9-26}$$

在满足此式的方向上,有次最大出现. 解此方程式可利用作图法:在同一坐标系上作 $y=\tan u$ 的曲线和 $y=u$ 的直线,两线的交点即为上式的解. 图 9-22 的上端即为 $y=\tan u$ 和 $y=u$ 的两条曲线,按它们交点的位置在图的下端画出由(9-24)式所求出的单狭缝衍射图样中的光强度的分布,图 9-23 为与之相应的衍射图样的照片.

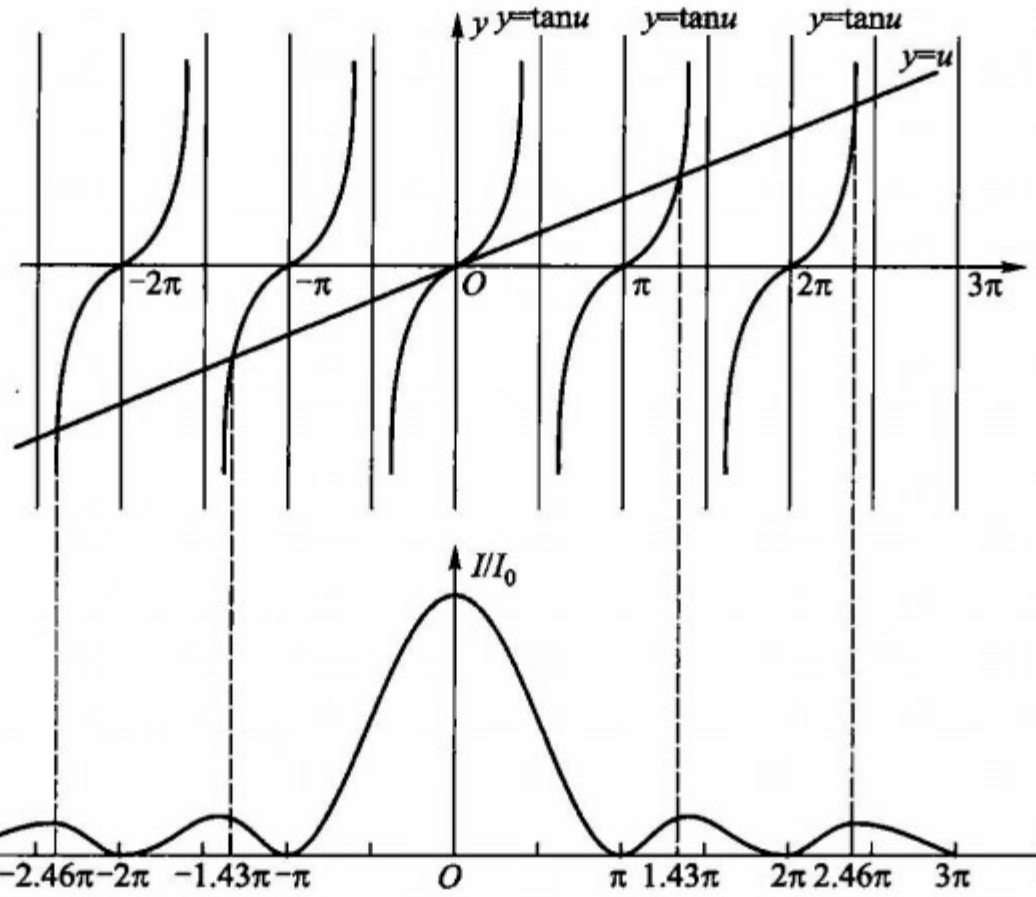


图 9-22

可见,夫琅禾费单狭缝衍射图样的特点是中央亮条纹的宽度两倍于各次最大的亮条纹的宽度,并且绝大部分光能都落在中央条纹上;此外,暗条纹是等间隔的,而次最大则是不等间隔的,例如第一次最大在 1.43π 处而不在 1.5π 处,第二次最大在 2.46π 处而不在 2.5π 处,然而愈向高级次,次最大也就愈趋近于等间隔,在实用上我们最感兴趣的还是中央亮条纹的宽度,在单狭缝的衍射图样中,中央亮条纹的角宽度之半 θ_0' 等于光强度为第一最小的点所对应的角度 θ,即

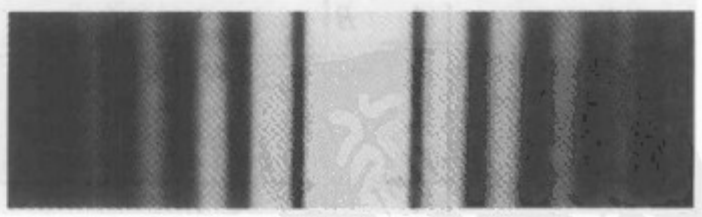


图 9-23

$$\theta_0' = \theta = \frac{\lambda}{a}. \tag{9-27}$$

若透镜 L_2 的焦距为 f',则在幕上所得的中央亮条纹的宽度之半为

$$\rho = f'\theta = f'\frac{\lambda}{a}. \tag{9-27a}$$

可见,中央亮条的宽度与狭缝 S 的宽度成反比,与波长成正比. 当 $a >> \lambda$ 时,ρ 趋近于零,则所得的结果与几何光学的一致,所以在这里也可以看到,几何光学确实是波动光学在 $a >> \lambda$ 时的极限.

§9-7 夫琅禾费圆孔衍射

光源和所考察的点到有圆孔的屏的距离都是无限远或相当于无限远时,所产生的衍射称为夫琅禾费圆孔衍射,也就是平行光通过圆孔的衍射. 与菲涅耳圆孔衍射相比,它更具有较普遍的意义,因为大多数光学仪器的通光孔都是圆形的并且是对平行光或近似于平行光成像的. 此外,和计算夫琅禾费单狭缝衍射的光强度分布一样,也能用较简便的计算求出较准确的光强分布公式. 下面就来讨论它.

令平行光通过圆孔,再由透镜或反射镜将它会聚在焦面的幕上. 按几何光学,此时在幕上应得一个与圆孔无关的像点. 而实际上,在应呈像点之处有一个光强分布相当复杂的图样,并且此图样与圆孔的大小有关. 当圆孔换为其他形状的开孔时,此图样也随之而变. 为计算所述的图样,仍需按惠更斯-菲涅耳原理,但可以比较简单地进行直接积分.

图 9-24 中,AB 代表半径为 a 的圆孔. 自无限远一点光源发出的平行光的平面波受它限制,只露出与圆孔相应的一部分波阵面. 现在来计算此圆孔形的平面波阵面在与圆孔屏法线成 θ 角的无限远的或光学系统焦面上的一点 P 所生的振动.

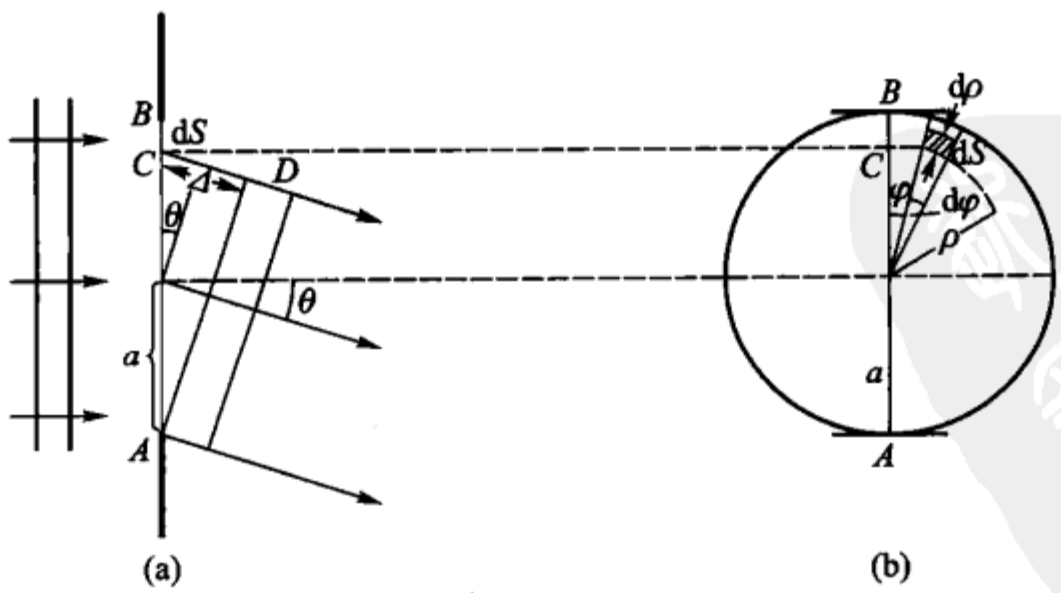


图 9-24

在圆孔边缘 A 处的波阵面元 dS 对所考察的 P 点的作用,按式(9-1),可写成

$$dy_A = C'\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_0}{\lambda}\right)\right]dS,$$

其中 C' 为由倾斜因数、距离和比例系数等确定的一个系数，在这里可视为一常数，r_0 为 A 到 P 的距离.

圆孔波阵面上任一面元 dS，例如在图 9-24(b)中的 dS，它对 P 点的作用可写成

$$dy = C'\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_0+\Delta}{\lambda}\right)\right]dS, \tag{9-28}$$

其中 Δ 为该面元与在 A 点的面元到 P 点的光程差，即该面元在直径 AB 上的投影 C 点与 A 点在 θ 方向上的光程差. 由图可得

$$\Delta = CD = AC\sin\theta.$$

而

$$AC = a+\rho\cos\varphi,$$

其中 ρ 为该面元到圆孔中心的距离，φ 为该面元所在的半径对 AB 的夹角. 于是，式(9-28)变为

$$dy_C = C'\sin\left\{2\pi\left[\frac{t}{T}-\frac{r_0}{\lambda}-\frac{(a+\rho\cos\varphi)\sin\theta}{\lambda}\right]\right\}dS.$$

图 9-24(b)所示的面元的面积

$$dS = \rho d\varphi d\rho,$$

代入上式，则有

$$dy_C = C'\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_0}{\lambda}-\frac{a\sin\theta}{\lambda}-\frac{\rho\cos\varphi\sin\theta}{\lambda}\right)\right]\rho d\varphi d\rho. \tag{9-28a}$$

将圆孔波阵面上的所有面元在 P 点的作用加起来，即将上式对圆孔面积 S 求积分，得 P 点的振动

$$y = \int_S dy_C = \int_0^a\int_0^{2\pi} C'\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_0+a\sin\theta}{\lambda}-\frac{\rho\cos\varphi\sin\theta}{\lambda}\right)\right]\rho d\varphi d\rho.$$

令 $M=\dfrac{t}{T}-\dfrac{r_0+a\sin\theta}{\lambda}$，$N=\dfrac{\rho\cos\varphi\sin\theta}{\lambda}$，代入上式，得

$$y = \int_0^a\int_0^{2\pi} C'[\sin[2\pi(M-N)]\rho d\varphi d\rho.$$

由两角差的正弦公式，有

$$\sin[2\pi(M-N)] = \sin(2\pi M)\cos(2\pi N)-\cos(2\pi M)\sin(2\pi N).$$

将此关系式代入上式，则有

$$y = C'\sin(2\pi M)\int_0^a\int_0^{2\pi}(\cos 2\pi N)\rho d\rho d\varphi - C'\cos(2\pi M)\int_0^a\int_0^{2\pi}(\sin 2\pi N)\rho d\rho d\varphi,$$

由于第二项积分恒为零，故上式简化为

$$y = C'\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_0 + a\sin\theta}{\lambda}\right)\right]\int_0^a\int_0^{2\pi}\rho\left[\cos 2\pi\frac{\rho\cos\varphi\sin\theta}{\lambda}\right]\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi. \tag{9-29}$$

由此可知,所考察的 P 点的振动的频率与圆孔波阵面的频率相同,而其振幅 A 则决定于上式的积分部分:

$$A = C'\int_0^a\int_0^{2\pi}\rho\left[\cos\left(2\pi\frac{\rho\cos\varphi\sin\theta}{\lambda}\right)\right]\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi.$$

A 的平方值即为所求的光强度. 此积分可化为贝塞尔函数,最后得 P 点的光强度

$$I = C'^2\pi^2a^4\left[1 - \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{m^2}{2!}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{m^3}{3!}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{m^4}{4!}\right)^2\cdots\right]^2, \tag{9-30}$$

其中 $m = (\pi a\sin\theta)/\lambda$. 此式对任意 m 值均为收敛的,因而任意 θ 方向上的 P 点的光强度均有一定的值. 对于 $\theta = 0°$ 的 P 点,上式有最大值;由方括号对 m 的第一阶导数为零则得次最大;m 为某些值时,上式为零. 表 9-1 给出以 $\theta = 0°$ 的 P 点的光强度为 1 的,各次最大的相对光强度以及前三个最大和最小(零)的位置.

表 9-1

	m/π	相对光强度
第一最大	0	1
第一最小	0.61	0
第二最大	0.81	0.017 4
第二最小	1.116	0
第三最大	1.333	0.004 1
第三最小	1.619	0

以 m/π 为横轴,I/I_0 为纵轴,则由式(9-30)可绘成如图 9-25 所示的曲线. 它表明通过圆孔的光由透镜或反射镜会聚于焦面上时,所得的不是一个像点而是一个有明确结构的衍射图样,其中心光强度最大,两旁有若干最小和若干次最大. 由于图 9-24 是一截面图,而实际上每一截面都相同,所以衍射图样具有对称性,呈如图 9-26 所示的光斑. 此光斑的中心亮盘称为艾里(Airy)斑,在它上面分布的光能量占通过圆孔总光能量的 84% 左右,其余约 16% 的光能量分布在周围的各级亮环中. 应该指出的是,这样的衍射图样在近代物理学中具有比它在这里所表现的更为深刻的意义,例如,令一束高速的电子束通过一个圆孔时也能得到与图 9-26 所示相同的衍射斑,从而使人们确实地看到电子和光一样,也具有波动性. 电子的粒子性(如有确定的质量和电量),这是现在一般人们都知道的常识,而在 1924 年法国人德布罗意(De Broglie)第一个提出电子有波动性,这在当时不能不说是一个概念上的飞跃,但是也只有在电子衍射实验成功之后,才令人信服(详见第十八章).

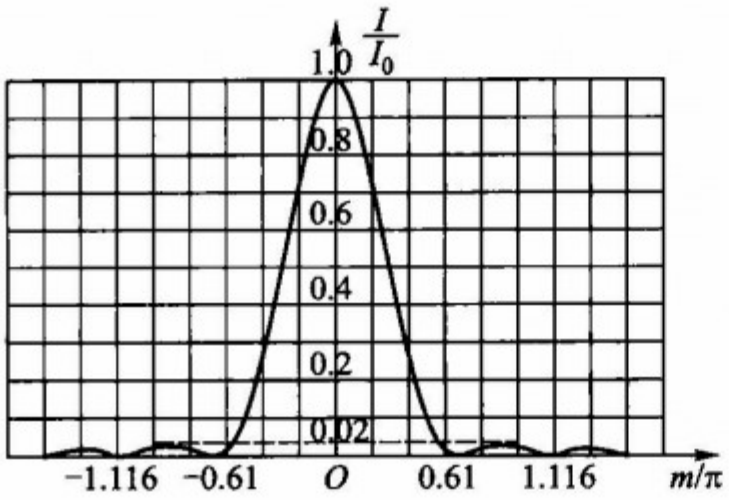


图 9－25

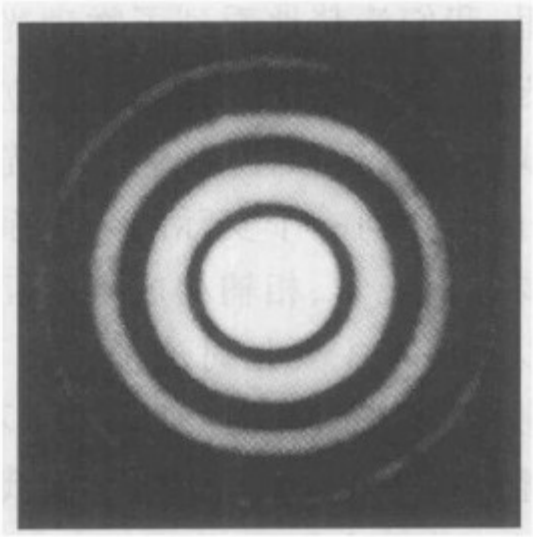


图 9－26

让我们回过头来再看艾里斑，它的半径的张角 θ_0 即为衍射第一最小对通过圆孔中心的法线的夹角：

$$\theta_0 = \arcsin \frac{0.61\lambda}{a},$$

由于 θ_0 总是很小的，所以可以写成

$$\theta_0 = \frac{0.61\lambda}{a}. \tag{9－31}$$

可见，圆孔愈小和波长愈大，则所得艾里斑的半径的张角（或称角半径）亦愈大. 对于半径为 a 的圆孔，若它在后面置一焦距为 f 的会聚透镜（图 9－27），则在其焦面所得的艾里斑的半径为

$$\rho = f'\theta_0 = 0.61\lambda \frac{f'}{a}. \tag{9－31a}$$

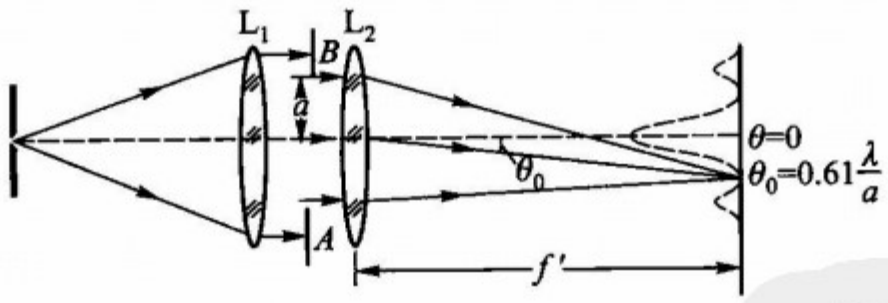


图 9－27

任一实际的透镜、棱镜、反射镜以及其他光学元件，总有一定的孔径（或圆或方）所以即使不加任何光阑，平行光通过它们也有衍射现象. 这样一来，任何实际的光学系统，即使是像差已完全校正或消除，也得不到真正的点像，因为在点像处呈现的是衍射图样，最小像点亦必大于或等于相应的艾里斑或衍射中心最大斑，这是几何光学预料不到的. 不过，这也并不绝对排斥作为光学仪器理论基础的几何光学，因为，由式（9－31）可知，只要光学系统的通光孔径的半径远远大于用以成像的光的波长，则所得衍射的艾里斑的半径将非常小，实际上趋近于零，这又与几何光学的结果相符，而大多数实际的光学仪器是具备这样条件的.

在这里,我们清楚地看到了物理光学在解决光的传播和成像问题上的严格和深入的方面,也看到了几何光学成立的前提条件,这实质上反映了光的波动属性和光直线传播的近似性. 我们对待光学的这两个分支切不可偏废,应该都同样地精通它,因为任何一个实际的光学系统所提出的光学问题的解决既需要物理光学也需要几何光学,相辅相成不能互相代替.

以上诸节主要是讨论了菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射的基本原理,也可以说是用惠更斯 - 菲涅耳原理计算了不同条件下的几种典型的受限制的波阵面在位于传播方向的幕上的贡献. 下面我们将以此为基础来讨论具有较普遍意义的光学仪器的分辨本领问题和有重大应用价值的衍射光栅,以及现在方兴未艾的有关信息光学问题.

习 题

1. 设图 9 - 3 中的圆孔的半径连续地增大,试画出一条曲线表示 P 点的光强度,只求大致的结果. 作图时以圆孔的半径为横轴,光强度为纵轴.

提示:参考图 9 - 5(e).

2. 设图 9 - 3 中的圆孔的大小是固定的,连续地增大屏幕跟圆孔的距离,试画一条曲线表示 P 点的光强度.

3. 设在图 9 - 8 中的圆盘为一个五分硬币,它离波长 $\lambda = 600$ nm 的点光源 10 m,试求在点光源与圆盘中心连线上、圆盘后 10 m 处的光强表示式 $(a_{m+1}/2)^2$ 中的 m 值.

4. 一个波带片对 $\lambda = 500$ nm 的光焦距为 1 m,假定有 10 个开带且中心的一个为透明的开带,试求波带片的半径.

5. 一个波带片的第 8 个半波带的直径为 5 mm,试求 $\lambda = 500$ nm 时此波带片的焦距及相邻的两个较弱的焦点到波带片的距离.

6. 一个用于软 X 射线($\lambda = 4$ nm)的波带片(透镜),如果它能分辨的最小间隔为 0.01 mm 并且波带片上有 25 个开带,问波带片的直径应该多大?

7. 试利用图 9 - 14 所示的考纽螺线画一个 $R = 100$ cm,$r_0 = 200$ cm 和 $\lambda = 632.8$ nm 的直边衍射图样,并标明前三个最大光强的位置.

8. 试利用考纽螺线,对于 $R = 100$ cm,$r_0 = 200$ cm 和 $\lambda = 632.8$ nm,分别画出狭缝宽度为 0.69 mm,1.15 mm 和 5.52 mm 的衍射图样,并与图 9 - 19 中的各图比较.

9. 若夫琅禾费单狭缝衍射图样中的零级最大的光强度规定为 1 单位,试求第一、第二级最大光强的相对值.

10. 一狭缝被氦氖激光($\lambda = 632.8$ nm)照明,所得夫琅禾费衍射图样的第一最小对狭缝法线的夹角为 5°,问该狭缝有多宽?

11. 一束直径为 2 mm 的氦氖激光($\lambda = 632.8$ nm)自地面发向月球,已知月球跟地面的距离为 376×10^3 km,问在月球上得到的光斑有多大? 假定大气的影响可不计.

如果先把这样的激光束经过扩束器扩充成直径为 2 m 和 5 m 的光束再发向月球,问在月

球上的光斑各多大?

12. 设在图 9 - 21 所示的系统中,透镜 L_1 和 L_2 的焦距均为 200 mm,线光源发出波长为 546.1 nm 的绿光. 问当狭缝宽度为 1 mm 时在屏幕上得到的衍射图样中,中央最大的宽度等于多少毫米?

如果线光源不是无限细的,问衍射图会发生什么变化?

实际上该线光源总有一定的宽度,并且实验表明该宽度对 L_1 的张角只要大于衍射图样中央最大之半对 L_2 的张角的 1/4,衍射图样的细节就模糊不清了. 问在上述系统中线光源的最大允许宽度是多少毫米?

第十章

光学系统的分辨本领和衍射光栅

§10-1 光学系统的分辨本领 瑞利判据

由第九章关于光的衍射的讨论可知,几何光学中的像,实质上就是自物体发出的光波通过光学系统的传输作用而在一定平面上得到的衍射图样.例如,对于无像差的光学系统或者像差校正到一定允许范围之内的优良光学系统,无限远处的物点在系统焦平面上所得的像,就是决定于系统通光孔径的形状和大小以及光波的波长的夫琅禾费衍射图样.近似地研究时,可认为点像就是衍射图样中的中央亮条纹或艾里圆斑.这种情况使光学系统对于由靠近的两个物点所成的"像"可能发生重叠,从而限制了光学系统的分辨本领.从几何光学观点来看,无像差系统的分辨本领是无限的;而实际上,由于衍射的存在,即使是无像差的系统,它的分辨本领也是有限的.显然,在所述的系统中,像面上的衍射图样的中央亮斑或艾里斑愈大,则系统的分辨本领愈小.于是便有这样一个问题:对任一给定的光学系统,其所能分辨的最靠近的两物点的距离是多少?这是实际光学系统的一个十分重要的问题,也是受多种因素影响的一个并不简单的问题.

如果讨论一般的光学系统的实际分辨本领,那是很复杂的,因为有像差的光学系统或像差虽已校正到实际可用而还不能达到某一定的允限范围之内时,衍射图样中光强度的分布并不像图 9-26 所示的那样,艾里斑的半径虽不大但周围各级亮环占的光能量会远远超过 16%.这时系统的分辨本领就不能仅仅由衍射图样中的艾里斑来决定.

为简单计,在本章我们只限于讨论无像差系统或像差校正到某一定的允限范围之内的优良光学系统的分辨本领,并且假定被成像的物只是两个发光强度相等的独立发光(不相干的)点.

在图 10-1 中,A_1 和 A_2 为发光强度相等的两个独立的发光点,L 代表所研究的光学系统;自 A_1 和 A_2 发出的光通过 L,则在其像面上呈现衍射图样 A_1' 和 A_2'.若 A_1 和 A_2 相距不很近,则有图 10-1(a)所示的情况,此时两衍射图样相距

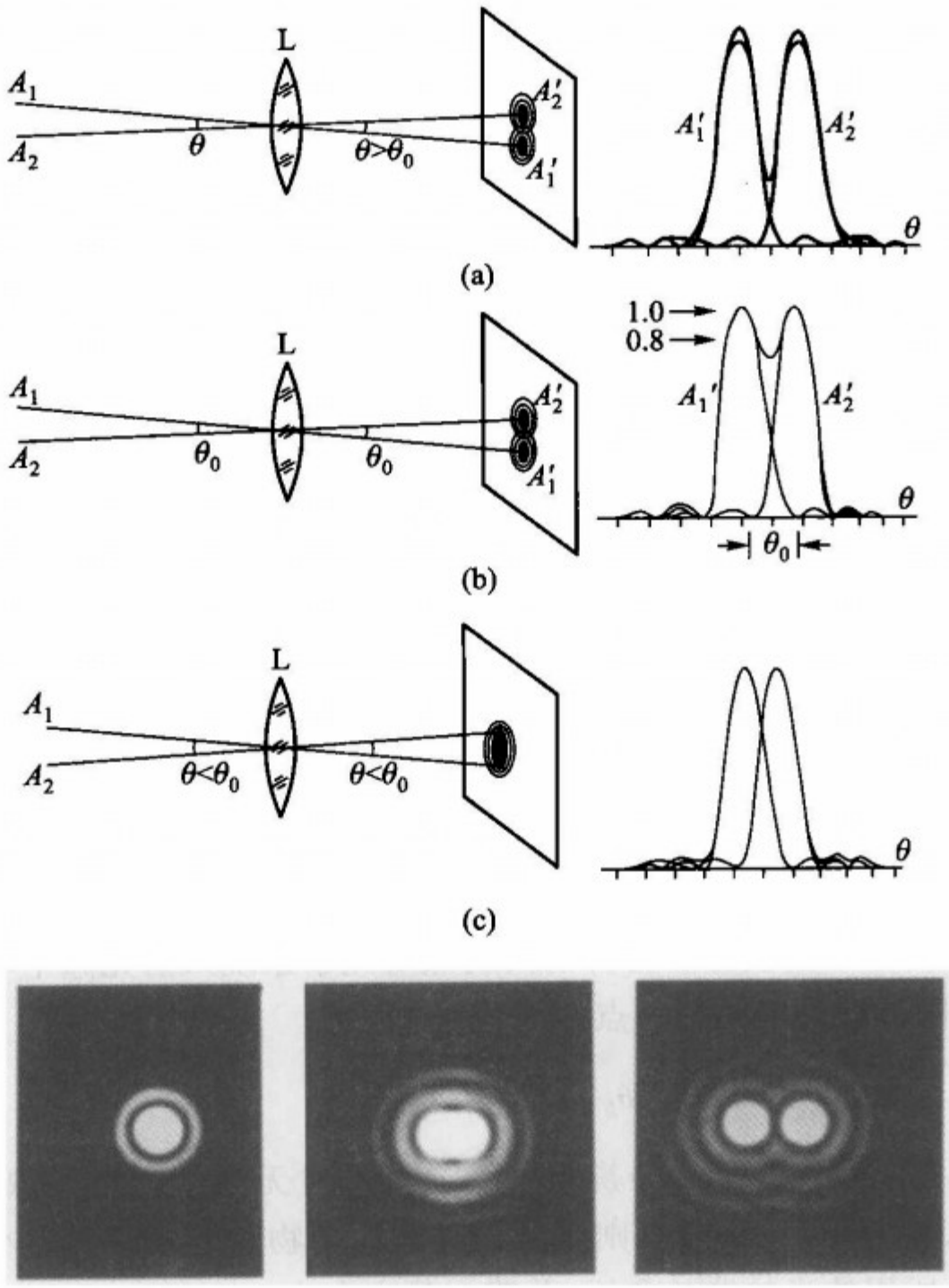


图 10－1

较远，使人可以毫不怀疑地判断这是两个物点所成的像；图(a)的右图画出了相应的光强度的分布曲线. 当 A_1 和 A_2 逐渐接近时，则在像面上的两衍射图样亦逐渐接近，并且开始有重叠的部分，而当 A_1 和 A_2 接近到一定的程度时，像面上两衍射图样将达如图(b)所示的情况：衍射图样 A_1' 的中央最大与衍射图样 A_2' 的第一最小重合，亦即衍射图样 A_2' 的中央最大与衍射图样 A_1' 的第一最小重合. 在这种情况下，两衍射图样中心之间的光强度约为中央最大的 80%，这可由两个衍射图样的光强分布曲线的直接相加而得(因为两发光点是不相干的). 大多数人的视觉能毫无困难地辨别两最大与两最大间约为最大的 80% 的最小光强度间的不同，因而可判断这种合成的衍射图样是由两个发光点构成的. 换言之，在由两衍射图样合成的总光强分布曲线中，当两最大之间的最小不超过最大值的 80% 时，则可分辨出有两个物点. 瑞利(Rayleigh)即以这种条件作为光学系统的

分辨极限，亦即以甲衍射图样的中央最大与乙衍射图样的第一最小重合所定出的两物点的距离作为光学仪器所能分辨的两物点的最小距离，称这个极限为瑞利判据. 当两物点 A_1 和 A_2 更接近时，则相应的两衍射图样的重叠部分增多，当达图 10－1(c)所示的情况时，则从总的衍射图样中将无法辨出有两个物点存在，光学系统对相应的两物点不能分辨. 当然，也并不是两衍射中心间的距离只要小于瑞利判据所规定的，就不能分辨，而在一定条件下是有可能分辨的，但对于图 10－1(c)所示的情况，确是完全不能分辨的.

图 10－1(d)所示的照片为具有圆形孔径的光学仪器对一点光源. 两个刚能分辨的点光源和两个完全能分辨的点光源的衍射图样，其中，中间的一个与上述瑞利判据的情况相当.

来自无限远处物点的光，通过圆形通光孔的光学系统，则在其焦面上成一个夫琅禾费圆孔衍射图样. 若系统的通光孔径的半径为 a，则艾里斑的角半径，由公式(9－31)得

$$\theta_1 = \frac{0.61\lambda}{a}.$$

此角正是在瑞利判据条件[图 10－1(b)]下，两衍射图样中心对光学系统出射光瞳中心的夹角，亦即刚被分辨得开的两物点对光学系统入射光瞳中心的夹角，即 $\theta_0 = \theta_1$，因而刚被分辨开的两物点的角距离 θ_0 为

$$\theta_0 = \theta_1 = \frac{0.61\lambda}{a}, \tag{10－1}$$

称此 θ_0 角为光学系统的最小分辨角. 此式表明，对无限远物点成像的圆通光孔的光学系统，其通光孔径愈大，则所能分辨开的两物点的角距离愈小，即分辨本领愈大；并且所用的光的波长愈短，分辨本领亦愈大.

若光学系统的通光孔径呈狭缝状，则很容易算出，光学仪器对于无限远物点的最小分辨角为

$$\theta_0 = \theta_1 = \frac{\lambda}{a}, \tag{10－2}$$

其中 a 为狭缝的宽度①.

后面几节将以瑞利判据来讨论各典型光学系统的分辨本领.

§10－2　眼睛、望远镜和照相物镜的分辨本领

1. 眼睛的分辨本领

当用眼睛观察远处的物体时，视网膜上的像即为自物体发出的光通过眼睛

① 此处之 a 是 §9－6 中的狭缝宽度，并不是式(10－1)的通光孔径的半径.

瞳孔而产生的夫琅禾费圆孔衍射图样. 若此时瞳孔的直径为 d,光在眼内的波长为 λ',则眼睛的最小分辨角,由式(10－1)得

$$\theta_0 = \frac{1.22\lambda'}{d} = \frac{1.22\lambda_0}{nd}, \tag{10－3}$$

其中 λ_0 为与 λ'对应的光在真空中的波长. 对于远处相互靠近的两点,若其对眼睛的张角 θ_1 大于和等于此式所决定的 θ_0 角,则人可认出有两个物点,反之则认不出有两个物点,即不能分辨. 由于人眼的焦距很小,只有 20 mm 左右,所以即使对明视距离(眼睛前250 mm)处的物体进行观察,亦可用上式估计其最小分辨角. 在正常照度(约 50 lx)下,人眼瞳孔的直径为 2～3 mm,而可见光中,人眼最灵敏的波长 $\lambda_0 = 550$ nm,于是由(10－3)式得此时人眼的最小分辨角为

$$\theta_1 = \frac{1.22\lambda_0}{nd} = \frac{1.22 \times 0.55 \times 10^{-3}}{1.336 \times 2}\ \text{rad} = 2.5 \times 10^{-4}\ \text{rad}.$$

若物体放在明视距离处,则相距为 $\delta y = 250\theta_1 = 250\ \text{mm} \times 2.5 \times 10^{-4} = 6.3 \times 10^{-2}$ mm的两点可被分辨,小于此距离的两物点不能被分辨.

大量的实验表明,一般人眼实际上的最小分辨角约为 1′($= 2.9 \times 10^{-4}$ rad),它与上面计算的结果很相符. 联系到使用瑞利判据的前提条件(系统无像差),这实际上表明了人眼光学系统的成像在瞳孔直径不大于 2 mm 时是相当完善的.

2. 望远镜的分辨本领

由于望远镜总是用于观察远处的物体和优良的望远物镜总是像差校正得相当好,所以它的最小分辨角无疑是由式(10－1)来决定. 设望远镜物镜的通光孔径的直径为 D,则它的最小分辨角可写为

$$\theta_1 = \frac{1.22\lambda}{D}.$$

由此可知,对于所有望远镜,除了有放大作用之外,还由于它们的通光孔径 D 总是大于人眼的瞳孔 d,所以用望远镜观察远处物体时,还提高了对物体的分辨本领. 所提高的倍数,显然是 D/nd. 望远镜物镜的通光孔径愈大,则分辨本领提高的倍数亦愈大.

设某一开普勒望远镜物镜的直径为 50 mm,则其对发出黄绿光(λ = 550 nm)的物体的最小分辨角,由上式算出,得 1.35×10^{-5} rad. 角距离这样小的两物点,眼睛是分辨不出的. 此角度较眼睛所能分辨的最小角度小 50/2.67 倍. 为充分利用此物镜的分辨本领需使 1.35×10^{-5} rad 的张角经望远镜后大于或等于眼睛的最小分辨角. 为此,望远镜应有由下式确定的放大率 M_e:

$$2.5 \times 10^{-4} = M_e \times 1.35 \times 10^{-5},$$

即

$$M_e \approx 19.$$

望远镜的这个放大率保证了所述物镜的分辨本领的充分利用. 对任一给定物镜都有这样一个与之相应的仪器放大率,称它为望远镜的正常放大率. 望远镜的放大率大于正常放大率,并不会提高整个观察系统的分辨本领,只不过是使像的轮廓更加放大而已;若望远镜的放大率小于正常放大率,则物镜的分辨本领就不能被充分地利用.

一种世界上最大的天文望远镜的通光孔径为 5 m,按上述计算,它的最小分辨角应为 1.35×10^{-7} rad,相应的正常放大率应为 1 700 倍. 当然,实际上都宁可取稍大于正常放大率的值.

式(10 - 1)不仅适用于光波,同样地也适用于其他电磁波,无论波长短的 X 射线和紫外线,还是波长长的红外线和无线电波. 雷达和射电天文望远镜的接收天线相当于光学望远镜的物镜,所以它们的分辨本领取决于接收天线的大小,天线愈大,分辨本领愈大. 由于雷达使用的无线电波(微波)的波长约为光波的波长的 $10^3 \sim 10^4$ 倍,,所以想要得到与光学望远镜相同的分辨本领,雷达天线的尺寸就要比望远镜物镜的孔径大 $10^3 \sim 10^4$ 倍. 例如,孔径为 100 mm 的望远镜物镜所能得到的分辨本领相当于几百米到几千米长的天线所能得到分辨本领. 虽然,做天线的技术与做望远镜物镜的技术是截然不同的,天线可以做得比望远镜物镜大得多,但是做得太大也是困难的. 所以,一般说来,从分辨本领方面来看,射电天文望远镜和雷达不如光学望远镜的高. 然而,这并不意味着可以不用射电望远镜和雷达,因为它们的许多其他特性又是光学望远镜所不及的,甚至是无法比拟的;特别是,近代发展的射电望远镜的阵列技术,其分辨本领已可与世界上最大的光学望远镜的分辨本领相媲美.

3. 照相物镜的分辨本领

大多数照相物镜都是用于对距离较其焦距大许多倍的物体成像,例如,一般民用照相物镜的焦距不过 5 cm 到 10 cm,而被拍照的物体常是 2 m 以外. 这样,只要照相物镜的像差已校正到某一允限范围之内,则在感光乳剂面上所得的“像”也同样是由物镜圆通光孔产生的夫琅禾费衍射图样. 物镜的最小分辨角,可用式(10 - 1)或(10 - 3)计算. 但照相机的分辨本领不仅取决于照相物镜的最小分辨角,而且也与所用的感光乳剂的结构和性质有关. 这样,虽然照相物镜的通光孔径比眼睛瞳孔大许多倍,然而却不能无条件地说照相机的分辨本领比眼睛的分辨本领好. 为充分地利用照相物镜的分辨本领,要求感光乳剂对于相差不多的光强度有足够灵敏的变黑的反应,即有较高的反衬灵敏度,例如达到眼睛能辨别出相差 20% 的两个光强度的程度;此外,乳剂的结构应该足够细致,以至于乳剂面上的感光元的大小和相邻两感光元间的距离都小于物镜所产生的艾里斑的直径. 当乳剂满足这两方面的要求时,则照相机的分辨本领就只决定于物镜的分辨本领.

相对孔径为 D/f 的优良照相物镜(衍射限的物镜),其所能分辨的最靠近的两物点在感光乳剂上的距离应为

$$\delta y' = f\theta_0 = 1.22\lambda \frac{f}{D}.$$

为充分地利用物镜的分辨本领,感光乳剂必须于每单位长度内能分辨出由下式决定的 N 条线:

$$N = \frac{1}{\delta y'} = \frac{1}{1.22\lambda}\frac{D}{f}. \tag{10-4}$$

此式表示,照相物镜的相对孔径愈大,其分辨本领亦愈大;为充分利用它的分辨本领,则要求感光乳剂单位长度内能分辨的线数也愈多. 例如,相对孔径为1:3.5的精密微缩照相物镜(如半导体制版用),要求用每毫米能分辨开 420 条线的感光乳剂(解像力为 420/mm 的感光乳剂).

应该注意,大多数照相物镜的剩余像差是相当大的(称大像差系统),不能应用式(10－4);另一方面,分辨本领的大小还不能全面地反映照相物镜的实际成像质量,所以近几十年来开始用光学传递函数代替分辨本领来评价照相物镜,而无论它是小像差的还是大像差. 关于光学传递函数的概念留在第十一章中作专门讨论.

§10－3　显微镜的分辨本领　电子显微镜

显微镜是用以观察在其物镜第一焦点附近(靠外)的物体的光学系统. 假定在物面上有两个靠近光轴的独立的发光点,它们均匀而非相干地照明物镜孔径. 每一成像光束均被置于像前方 s' 远处的、直径 D 的圆孔光阑(简单来说即为物镜的框)所限制(图 10－2). 若物镜的像差校正完善,则每一点光源的像都近似于通常的艾里斑,并且它的第一暗环的半径为

$$\delta y' \approx \frac{1.22\lambda s'}{D} \approx \frac{0.61\lambda}{\sin u'}, \tag{10-5}$$

其中 u' 为物镜像空间孔径角(图 10－2). 当两发光点近到它们的像的中心相距等于 $\delta y'$ 时,则达到一般规定的分辨极限. 若物镜的垂轴放大率为 β,则显微镜所能分辨的最邻近的两发光点(物点)的距离应为

$$\delta y = \frac{\delta y'}{\beta} = \frac{1}{\beta}\frac{0.61\lambda}{\sin u'} \tag{10-5a}$$

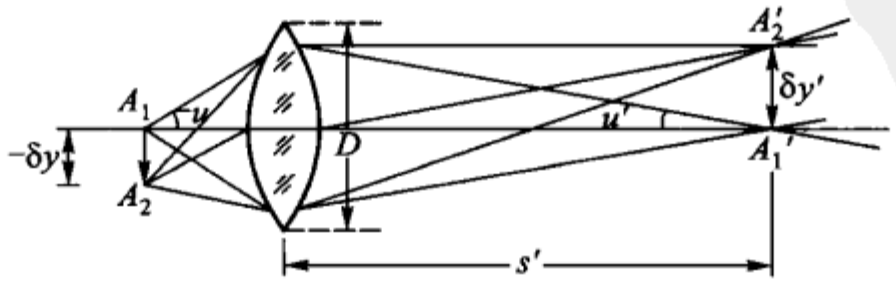


图 10－2

由于在校正好像差的显微镜中，物镜都满足阿贝正弦条件式(4－5)，因而有

$$\delta y n \sin u = \delta y' n' \sin u',$$

其中 n 和 n' 分别为物镜的物空间和像空间的折射率，而 $n'=1$，即

$$\beta \sin u' = n \sin u.$$

将此 $\beta \sin u'$ 代入式(10－5a)，则得

$$\delta y = \frac{0.61\lambda}{n \sin u}, \tag{10-6}$$

其中 $n\sin u$ 值即为物镜的数值孔径(N. A.). 此式表明，物镜的数值孔径愈大和所用成像的光波长愈短，则物镜的分辨本领愈大，现在我们清楚地看到，利用油浸物镜增大物镜的数值孔径，有提高分辨本领的好处.

显微镜中的目镜对分辨本领的贡献如同望远镜中的目镜一样，它最多不过是用来保证物镜分辨本领的充分利用，而不能进一步地增大整个光学系统的分辨本领. 所以显微镜的最大分辨本领决定于其物镜的分辨本领.

数值孔径 1.0～1.5 的物镜，它所能分辨的最靠近的两物点的距离，由式(10－6)算出，约为 0.4～0.6 个波长，在可见光范围内，这个距离约为 0.3×10^{-3} mm；它较前节提及的人眼对明视距离处物体所能分辨的最小距离(6.3×10^{-2} mm)约小 200 倍. 这表示，当用具有相当大的数值孔径的上述物镜的显微镜观察物体时，其分辨本领较用眼睛直接观察放在明视距离处的物体的分辨本领大 200 倍左右. 实际上，用于可见光的一般显微镜，在提高观察的分辨本领方面，确实最多也不过是 200 倍.

由于数值孔径的进一步增大受到油液及物镜所用光学玻璃的折射率的限制，所以由式(10－6)可以看出，要进一步提高显微镜的分辨本领，势必要求用波长短的光成像. 紫外线的波长短于可见光的波长，因而用紫外线成像可使所得像的分辨本领提高一些. 为此目的，显微镜的物镜应该用反射式的物镜(图 6－6)，或者是用能透紫外线的石英和萤石作的透镜，因为一般光学玻璃制成的透镜，不透紫外线. 然而，由于只有为数不多的几种透紫外线的材料，致使所作的物镜不能兼顾大数值孔径和不晕成像的要求，另一方面，反射镜也不能有很大的数值孔径，所以用紫外线的显微镜(简称紫外显微镜)的数值孔径都不很大. 当然，紫外显微镜更不能与眼睛联合而组成观察系统，而需进行显微照相. 现在已制成的紫外显微镜多用 200～250 nm 的紫外线，它较可见光的分辨本领高一倍左右，这种显微镜多在生物学中使用.

伦琴射线是波长更短的光，在原则上用它在特殊的显微镜中成像，可进一步改善显微镜的分辨本领，然而制造伦琴射线的光学系统却遇到至今尚未解决的很大困难.

由近代物理的研究结果得知(例如 §9－7 中所述的电子衍射). 任何运动的

质点流,都相当于一个波,我们现在暂不讨论这一波的本性,而只指出其波长 λ 跟运动的质点的质量 m 和速度 v 的下列关系:

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \tag{10-7}$$

其中 $h = 6.626\ 2 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$,称为普朗克常量. 由此式可知,质点的速度和质量愈大,则波长愈短. 与可见光的波长相比,即使以普通速度运动的电子($m = 0.9 \times 10^{-27}\ \mathrm{g}$),其相应的波长也是很短的. 例如,对于加速电压为 150 V 的阴极射线(电子束),其波长 $\lambda = 0.1\ \mathrm{nm}$. 对于速度更快的电子或质量更大的原子和分子,相应的波长就更短.

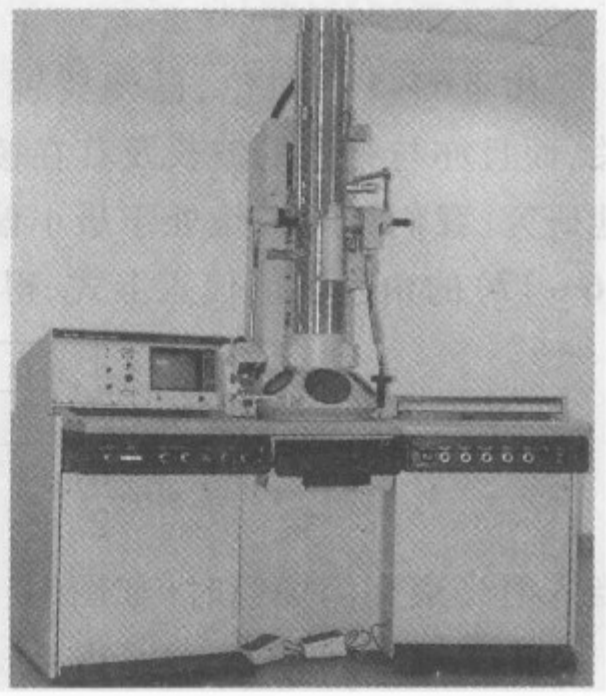


图 10-3

以电子束代替光束,并且使电子束在特殊的光学系统(称电子光学系统)内成像,即可获得所谓电子显微镜,它的分辨本领特别大. 例如,对于波长为 0.1 nm 的电子束,假定物镜的数值孔径为 0.02,则这样的电子显微镜可分辨相距约为 3 nm 的两物点,它较人眼的分辨本领提高 18 万~20 万倍,而较可见光显微镜提高 1 000 倍. 我国已能自己生产分辨本领达零点几个纳米的电子显微镜,图 10-3 所示即为电子显微镜的外貌照片.

* §10-4 棱镜光谱仪的分辨本领

棱镜光谱仪的有效通光孔径(或入射光瞳),一般均由棱镜在垂直于望远镜物镜 L_2(图 6-29)光轴的平面上的投影来决定,如图 10-4 所示,即棱镜于准光镜 L_1 和望远镜物镜 L_2 的圆孔径上的投影矩孔为有效光阑. 将眼睛放在谱面上向物镜 L_2 望去,即可看到这种情况. 所以,在物镜 L_2 焦面上的光谱线,实质上是自准光物镜 L_1 射出的平行光通过所述棱镜投影的矩孔的夫琅禾费衍射图样,也就是自位于无限远的狭缝来的平行光通过棱镜矩孔所产生的夫琅禾费衍射图样. 由于在光谱仪中实际上只注意棱镜主截面内的分辨本领,所以可以用宽度为 D(图 10-4)的单狭缝衍射决定棱镜光谱仪的分辨本领. 换言之,棱镜光谱仪的最小分辨角由下式决定:

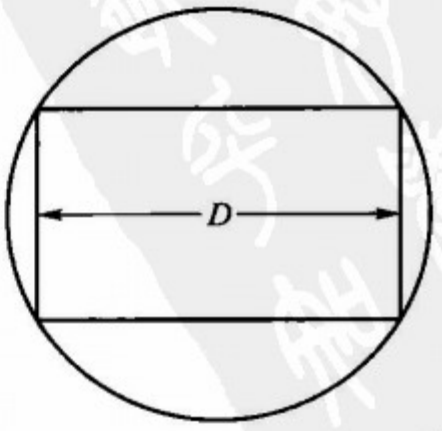


图 10-4

$$\theta_0 = \frac{\lambda}{D}.$$

应该注意,式中 D 是棱镜在望远镜光轴的垂直平面上

的投影宽度，而不是棱镜某一边的长度.

光谱面上任意两光谱线，只要其角距离大于或等于由上式所决定的 θ_0 角，即能被分辨；此 θ_0 角相应的两光谱线的波长间隔 $\delta\lambda$ 即为该光谱仪所能分辨的两光谱线的最小波长间隔，它等于棱镜角色散的倒数乘以最小分辨角，即

$$\delta\lambda = \left(\frac{d\lambda}{d\delta}\right)\theta_0 \tag{10-8}$$

由 §6-5 的讨论，已知棱镜的角色散 $d\delta/d\lambda$ 不仅与棱镜的形状和材料有关，而且亦与光线的波长及其在棱镜第一折射面上的入射角有关. 然而作为近似地研究，我们可取棱镜处于最小偏向角位置时的角色散来计算上式. 因而可将式(6-17)的角色散值代入上式，得

$$\delta\lambda = \frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{d\lambda}{dn}\theta_0 = \frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{d\lambda}{dn}\frac{\lambda}{D}. \tag{10-8a}$$

当入射光束充满棱镜时(如图 10-5)所示，上式可用较简单的形式写出.

由三角形 AEC 和 AFC 得

$$AC = \frac{t/2}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{D}{\cos i_1}.$$

而在棱镜处于最小偏向角的情况下，有

$$i_1 = \frac{\alpha+\delta_{min}}{2},$$

$$i_1' = \frac{\alpha}{2}.$$

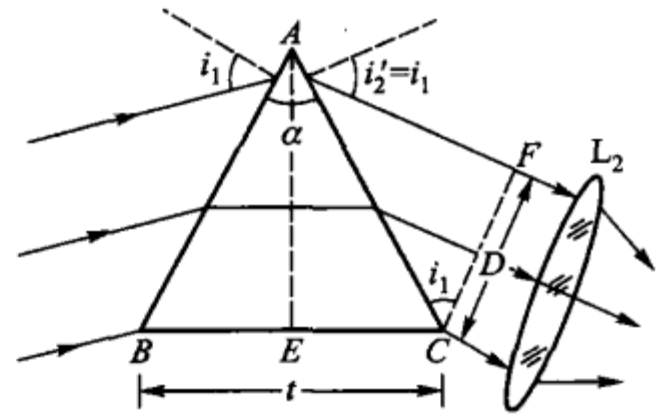


图 10-5

和式(3-12)

$$n\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha+\delta_{min}}{2}.$$

于是

$$\cos i_1 = \sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha+\delta_{min}}{2}} = \sqrt{1-n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

将此 $\cos i_1$ 代入计算 AC 的式子，整理后则得棱镜的投影宽度 D 与棱镜的边长度 t 的关系：

$$D = \frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}t.$$

利用这个关系式，式(10-8a)可改写为

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{t\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}}.$$

此 $\delta\lambda$ 值即为棱镜光谱仪对波长在 λ 附近的光所能分辨的、最靠近的两光谱线的波长间隔(差). 然而通常多以波长 λ 与在该波长附近能被分辨的最小波长间隔 $\delta\lambda$ 的比值 R 作为光谱仪分辨本领的量度,并称此比值 R 为光谱仪的分辨本领. 由上式,得

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = t\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{10 - 9}$$

由此可知,棱镜光谱仪的分辨本领只与棱镜底边的大小和棱镜材料的色散率的高低有关,而与棱镜的折射角和物镜的焦距无关. 这样,高分辨本领的光谱就必须用高色散率的光学材料和尽可能大的底边的棱镜. 而如 §6 - 5 所述,大色散的光谱仪要求棱镜的折射角大、色散率高,并且要求物镜 L_2 的焦距长. 即仪器的大色散和高分辨本领对棱镜的要求相同的部分是要材料的色散率高,不相同的部分是前者要折射角大(形状方面),后者要底边大(尺寸方面). 当然,折射角并不能随意增大,折射角的极限由棱镜第二折射面的全内反射来决定.

显然由(10 - 9)式所定义的,是按瑞利判据定义的光谱仪的理论分辨本领,而实际上,由于光谱仪光学系统的像差和光学元件在制造、装配或材料上的欠完善以及狭缝并不总是无限细等,所以实际的分辨本领总是小于它.

最后应注意,只有当光束充满棱镜时,光谱仪的分辨本领才能用式(10 - 9)计算;而在如图 10 - 6 所示的情况下,式(10 - 9)应由下式代替:

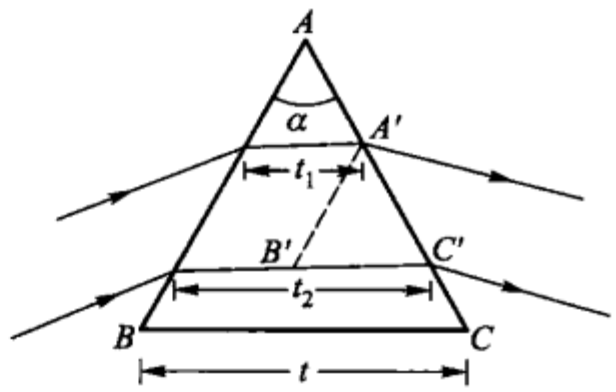


图 10 - 6

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = (t_2 - t_1)\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}; \tag{10 - 9a}$$

此时,相当于大棱镜 ABC 变成为小棱镜 $A'B'C'$.

§10 - 5　夫琅禾费双狭缝衍射

本节所要讨论的是平行光通过双狭缝的衍射,在研究问题的方法上与前章讨论夫琅禾费单狭缝的方法相同,而这一衍射之所以必须加以注意,一方面在于它介乎单狭缝衍射和多狭缝(即光栅,详见下节)衍射之间,通过对它的研究可看到多狭缝衍射的某些特征;另一方面由于它在天文观察和气体折射率的测量等方面有很大的应用.

两个宽度同为 a 的狭缝，中间隔着宽度为 b 的不透明的部分（图 10－7），假定光源狭缝 S 无限细并且平行光垂直地照射双狭缝，则于透镜 L_2 的焦面上所得的光强度分布可参照式(9－23)而求得. 取一个缝的中点作原点，则幕上一点 P 的振动由下式确定：

$$y = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} C'\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_0}{\lambda} - \frac{x\sin\theta}{\lambda}\right)\mathrm{d}x + \int_{b+\frac{a}{2}}^{b+\frac{3}{2}a} C'\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_0}{\lambda} - \frac{x\sin\theta}{\lambda}\right)\mathrm{d}x, \tag{10－10}$$

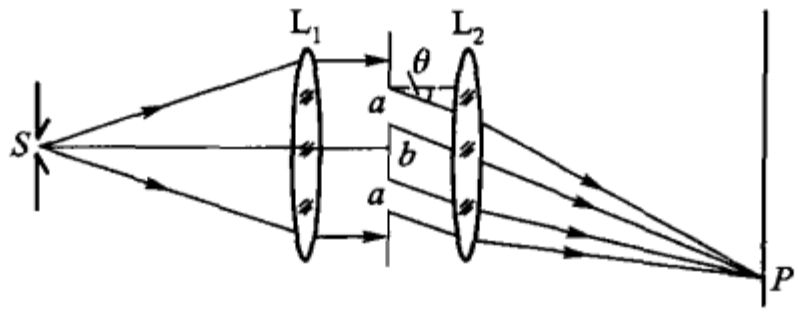


图 10－7

完成此积分并整理，得

$$y = C'2a\frac{\sin\dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}{\dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}\cos\frac{\pi(a+b)\sin\theta}{\lambda} \cdot \sin 2\pi\left[\frac{t}{T} - \frac{r_0}{\lambda} - \frac{(a+b)\sin\theta}{2\lambda}\right]. \tag{10－11}$$

此式表示，幕上任一点振动的周期与入射到双狭缝上的光的周期相同，但其振幅 A 则与光的波长 λ、P 点对双狭缝法线方向的夹角 θ 以及狭缝的宽度 a 和间隔 $(a+b)$ 等有关，即

$$A = C'(2a)\frac{\sin\dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}{\dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}\cos\frac{\pi(a+b)\sin\theta}{\lambda}, \tag{10－12}$$

令 $(\pi a\sin\theta)/\lambda = u$ 和 $[\pi(a+b)\sin\theta]/\lambda = v$，则上式可简写为

$$A = C'(2a)\frac{\sin u}{u}\cos v. \tag{10－12a}$$

于是，幕上任意的 P 点的光强度为

$$I = C'4a^2\frac{\sin^2 u}{u^2}\cos^2 v. \tag{10－13}$$

由式(10－13)表示出幕上的光强度分布，其中因数 $(\sin^2 u)/u^2$ 恰好就是在 §9－

6 已得到的、宽度为 a 的单狭缝的夫琅禾费衍射图样的光强分布式(9-24a);而第二个因数 $\cos^2 v$,乃为由光强度相等而相位差为 $2v$ 的两光束所产生的干涉图样的光强分布公式[(7-11c)式].换言之,夫琅禾费双狭缝的衍射图样等于宽度为 a 的单狭缝的衍射图样乘以无限细的双狭缝的干涉图样.这两个因数(或两图样)中若有一个是零,则合成光强即为零.就第一个因数而言,光强为零发生在 $u=\pi,2\pi,3\pi,\cdots$ 时;就第二个因数而言,光强为零发生在 $v=\pi/2,3\pi/2,5\pi/2,\cdots$ 时;而由图 10-8 可知,u 和 v 并不是互相无关的.从每个缝的两边缘到幕上的光程差,如图所示是 $a\sin\theta$,与之相应的相位差为 $(2\pi a\sin\theta)/\lambda$,这等于 $2u$.两缝的任意两对应点的光程差是 $[(a+b)\sin\theta]/\lambda$,相应的相位差为 $[2\pi(a+b)\sin\theta]/\lambda$,这等于 $2v$.所以,v 和 u 有下列关系:

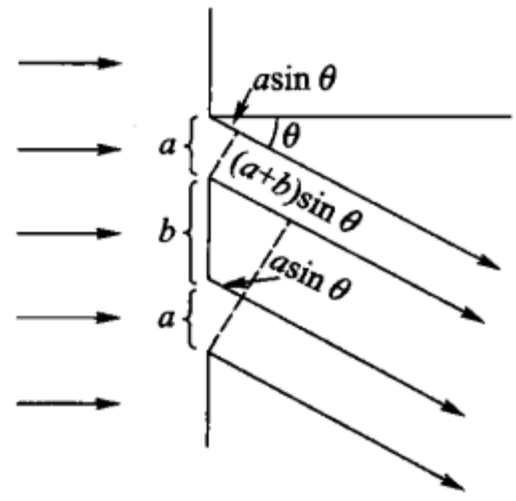


图 10-8

$$\frac{v}{u}=\frac{a+b}{a}. \tag{10-14}$$

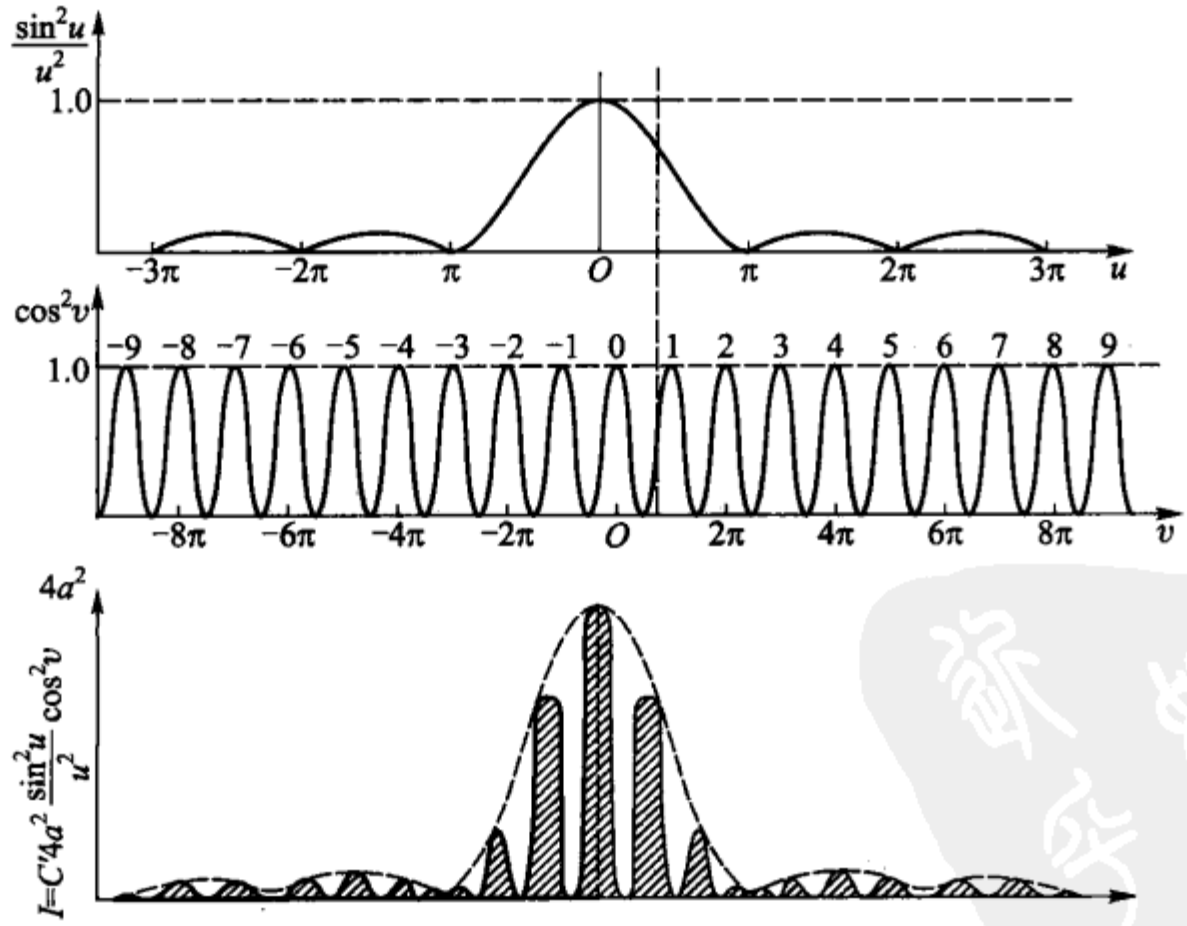


图 10-9

兹以 $a+b=3a$ 为例,画出由公式(10-13)所表示的在幕上的光强度分布,如图 10-9 所示.

由图 10-9 可以看到,幕上光强度最大的点,其所在方向与双缝法线的夹角

θ 由 $v=k\pi$ 来决定，但需除去 $k=3,6,9,\cdots$，即在满足下式的 θ 方向上有最大光强度：

$$(a+b)\sin\theta = k\lambda, \tag{10-15}$$

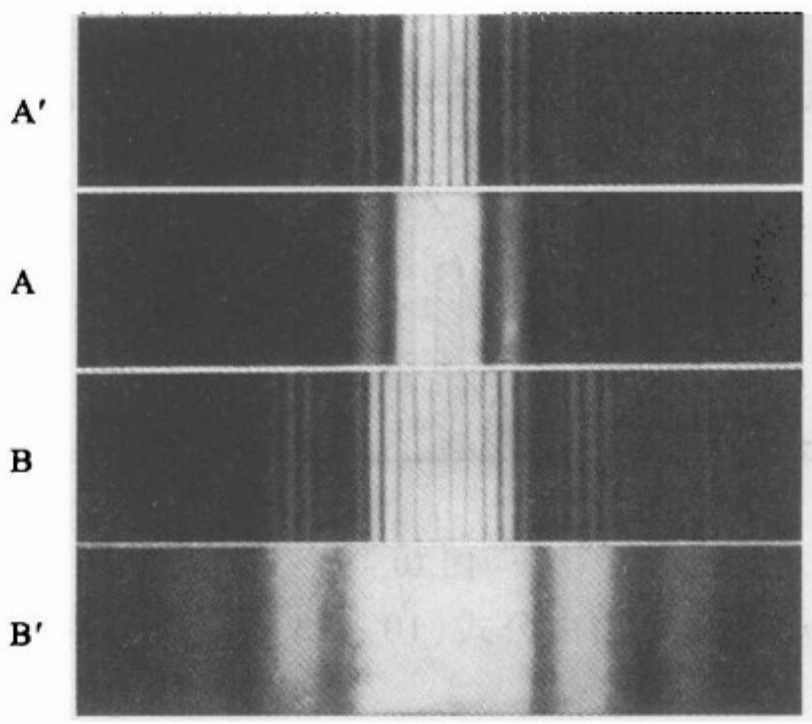
其中 k 为最大光强度的级次，在图 10-9 所示的情况下，$k=0,1,2,4,5,7,8,10,\cdots$. 这是因为在 k 等于 $v/u=(a+b)/a=3$ 以及 3 的整数倍的方向上，由干涉最大与衍射最小的乘积所决定的合光强度为零的缘故. 我们把这种本应出现最大光强而由于衍射的原因，光强反而为零的现象称为缺级（或没级）现象. 在双狭缝以及下节要讨论的多狭缝衍射中，缺级现象是普遍存在的，它出现在 k 等于两狭缝中心的间隔 $(a+b)$ 与狭缝宽度 a 的比值为整数的方向，即满足下列条件的 k' 级为缺级：

$$k' = n\frac{a+b}{a}, \quad n=1,2,3,\cdots. \tag{10-16}$$

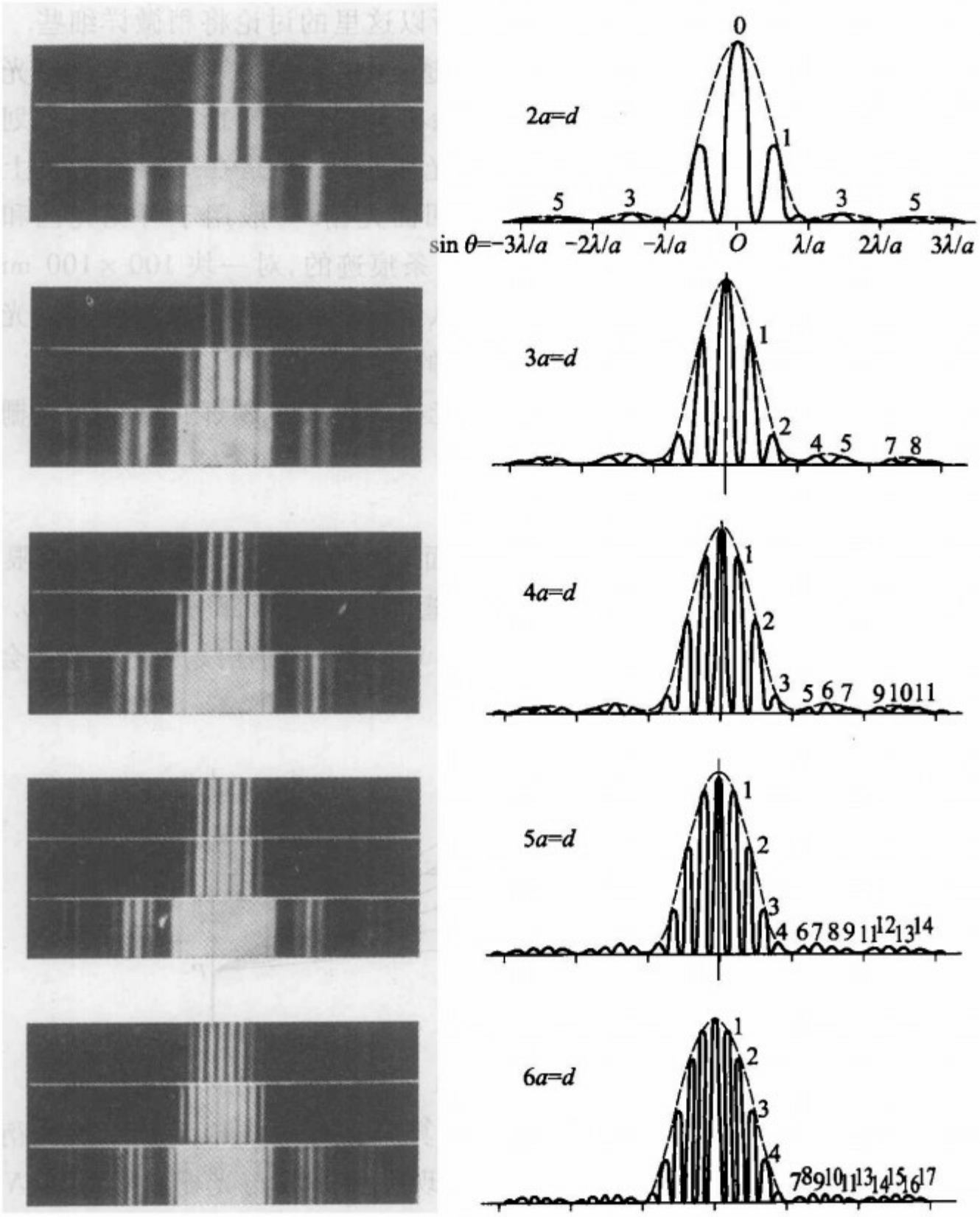
由上图亦可看到，除缺级外，合光强度为零的点，其所在的方向与双狭缝法线的夹角 θ，由 $v=\pi/2,3\pi/2,5\pi/2,\cdots$ 来决定，即在满足下式的 θ 方向上，有最小光强度：

$$(a+b)\sin\theta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad k=0,1,2,3,4,\cdots. \tag{10-17}$$

当双狭缝的间隔不变，即 $(a+b)$ 为一常数，而狭缝变细时，则由式 (10-16) 得知，缺级向高级移动，在单狭缝衍射中央最大包线内所能看到的有最大光强的条纹数目变多. 图 10-10(a) 的 A 即为与图 10-9 相当的衍射图样的照片；当 $a+b$ 保持不变，而将 a 变小时，例如 $(a+b)/a=6$，则得如图 10-10(a) 的 B 所示的衍射图样；图中的 A′和 B′分别为 A 和 B 的单狭缝的夫琅禾费衍射图样.



(a)



(b)

图 10 – 10

* § 10 – 6　衍射光栅

从狭义上说，平行、等宽而又等间隔的多狭缝即为衍射光栅；而从广义上说，任何装置，只要它能起等宽而又等间隔地分割波阵面的作用，则均为衍射光栅. 上节所讨论的双狭缝可视为最简单的光栅，一般光栅在一毫米内有几十乃至成千的“狭缝”（视应用的光谱区域而异）. 由于光栅是研究光谱的一种普遍采用的强有力的工具，并且通过对它的讨论可以再一次看到单缝衍射和多光束干涉的

特征,有助于对光波特性作进一步的理解,所以这里的讨论将稍微详细些.

光栅有两种,一种是用于透射光衍射的透射光栅,另一种是用于反射光衍射的反射光栅. 反射光栅又分两种,一种是在涂有金属层的平面反射镜上刻划出许多等间隔且等宽的平行直痕迹的平面反射光栅,另一种是在球面反射镜上沿弦刻划出等间隔且等宽的许多平行直痕迹的凹面光栅. 一般用于可见光区和紫外线区的光栅大多数是每毫米 600 条或 1 200 条痕迹的,对一块 $100 \times 100\ \text{mm}^2$ 的光栅,要刻划 60 000 条或 120 000 条痕迹. 从这样一个数目不难想到刻划光栅是件很不容易的技术,原刻光栅是一种很贵重的光学元件.

这里根据光栅的衍射图样、光栅光谱、光栅的分辨本领、闪耀光栅、光栅的制备以及光栅光谱仪等的次序分别讨论如下.

1. 光栅的衍射图样

在图 10 - 11 中,S 为处于透镜 L_1 的焦面上的光源狭缝,假定它为无限细;G 为光栅,它有 N 个宽度为 a 的狭缝,相邻狭缝间的不透明部分的宽度为 b. 自 L_1 射出的平行光垂直地照射在光栅 G 上,透镜 L_2 将与光栅法线成 θ 角的光会聚于焦面上的 P 点.

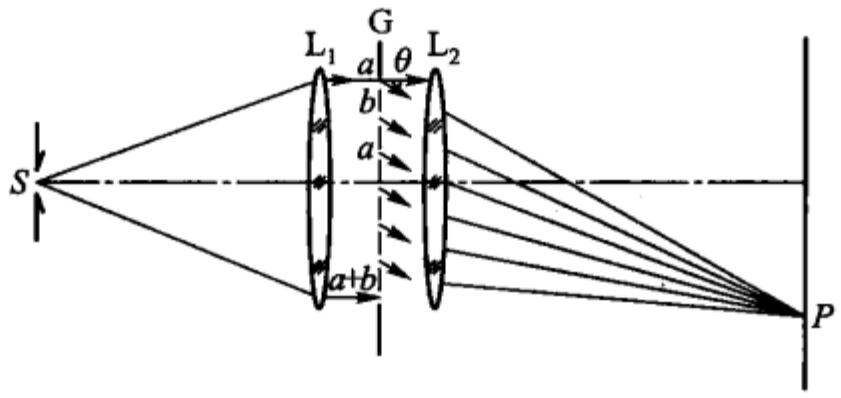


图 10 - 11

现在我们来计算 P 点的光强度. 这种计算与在讨论夫琅禾费双狭缝衍射时对幕上任一点光强度的计算一样,只不过是现在要完成与光栅狭缝数目 N 对应的那么多项的积分,而在那里只有两项. 于是,通过光栅的光波在 P 点所产生的振动为

$$\begin{aligned} y = & \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} C'\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_0 + x\sin\theta}{\lambda}\right)\mathrm{d}x \\ & + \int_{b+\frac{a}{2}}^{b+\frac{3}{2}a} C'\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_0 + x\sin\theta}{\lambda}\right)\mathrm{d}x \\ & + \int_{2b+\frac{3a}{2}}^{2b+\frac{5}{2}a} C'\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_0 + x\sin\theta}{\lambda}\right)\mathrm{d}x + \cdots \\ & + \int_{(N-1)b+\frac{2N-3}{2}a}^{(N-1)b+\frac{2N-1}{2}a} C'\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_0 + x\sin\theta}{\lambda}\right)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{10-18}$$

完成各项积分,整理之后得

$$y = C'a\frac{\sin u}{u}\frac{\sin Nv}{\sin v}\sin 2\pi\left[\frac{t}{T}-\frac{r_0}{\lambda}-\frac{(N-1)(a+b)\sin\theta}{2\lambda}\right], \tag{10-18a}$$

其中 $u=(\pi a\sin\theta)/\lambda$, $v=[\pi(a+b)\sin\theta]/\lambda$. 此式表示 P 点的振动周期与入射到光栅上的光的振动周期相同,其振幅 A 决定于参量 u,v 和狭缝的数目 N,即

$$A = C'a\frac{\sin u}{u}\frac{\sin Nv}{\sin v}. \tag{10-19}$$

由于光强度正比于振动的振幅的平方,因而所求的 P 点的光强度为

$$I = C'^2a^2\frac{\sin^2 u}{u^2}\frac{\sin^2 Nv}{\sin^2 v}, \tag{10-20}$$

此式中因数 $(\sin^2 u)/u^2$ 正是表征宽度为 a 的单狭缝的夫琅禾费衍射图样的光强度分布函数;而另一因数 $(\sin^2 Nv)/\sin^2 v$ 则是多光束干涉的光强度分布的函数,与式(7-33)相同,该式中 $\delta/2$ 即为式(10-20)中的 v. 显然,式(10-20)表示在透镜 L_2 的焦平面上任一点的光强度,等于由 N 个相干光在该点所产生的干涉光强度与宽度为 a 的单狭缝的夫琅禾费衍射在该点所产生的光强度的乘积.

由§7-6多光束干涉的原理可知,当 $v=k\pi$ 时产生干涉主最大,其光强度为 N^2a^2,即在满足下式的 θ 方向上,应有与主最大对应的亮条纹出现:

$$(a+b)\sin\theta = \pm k\lambda, \quad k = 0,1,2,\cdots. \tag{10-21}$$

通常称此式为光栅方程式,其中 k 为主最大的级次,$a+b=d$ 为光栅常数.

光栅方程式为决定主最大方向的公式,是应用光栅时的基本公式. 式(10-21)左端 $(a+b)\sin\theta$ 代表两相邻光束在 θ 方向上的光程差,当它等于波长的整数倍时,在 θ 方向产生主最大. 因而不论在透射或反射光栅中,甚至在凹面反射光栅中,当入射光与光栅法线成 φ 角时,根据两邻近光束的光程差的计算即可得出光栅方程式:

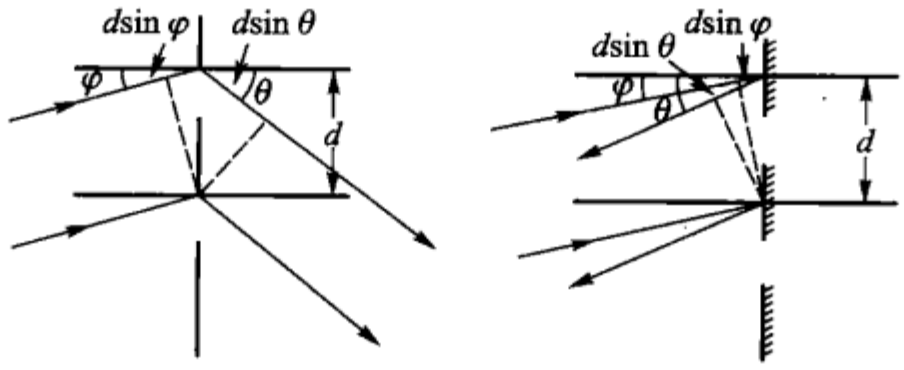
$$d(\sin\varphi \pm \sin\theta) = k\lambda. \tag{10-21a}$$

从图10-12可以看出,(+)号表示衍射光和入射光在法线的同一侧,而(-)号表示它们在法线异侧.

现在让我们再回到光线垂直入射到光栅的情况来继续讨论光栅的衍射图样. 在多光束干涉中,当 $v=k'\pi/N$, $k'\neq N,2N,3N,\cdots$ 时,则光强度为零,即在满足下式的 θ 方向上光强度为零:

$$(a+b)\sin\theta = \pm k'\frac{\lambda}{N}, \quad k' = 1,2,3,\cdots,N-1,N+1,\cdots,2N-1,2N+1,\cdots \tag{10-22}$$

显然,单从光束干涉来考虑幕上一点 P 的光强度是不充分的,而必须同时考虑单



(a) 透射光栅　　(b) 反射光栅

图 10 - 12

狭缝衍射在该点的作用. 但可以确信,多光束干涉为零之点,其合成光强度亦必为零. 所以式(10 - 22)是合成光强为零的充分条件,而式(10 - 21)只是合成光强为最大的必要条件. 因为即使已满足式(10 - 21),应产生主最大,但若该方向恰为单狭缝衍射的最小而满足下式时,则合成光强亦为零,即发生缺级现象:

$$a\sin\theta = \pm k''\lambda, \quad k'' = 1,2,3,\cdots, \tag{10-23}$$

这里,k''为夫琅禾费单狭缝衍射的最小光强的级次. 将式(10 - 21)和式(10 - 23)联立并消去 θ,则得产生缺级现象的主最大的级次 k 与衍射最小的级次 k''间的关系:

$$k = \frac{a+b}{a}k''. \tag{10-24}$$

此式与夫琅禾费双狭缝衍射中缺级现象的公式(10 - 16)有完全相同的意义.

为形象地表示出多狭缝与双狭缝之间的不同,下面以由四个狭缝做成的光栅($N=4$)和 $a+b=3a$ 为例,作光强分布曲线,如图 10 - 13 所示.

由比较图 10 - 13 和图 10 - 9 可以看出,当狭缝的数目增加时,衍射图样最显著的改变是亮条纹变细,正如法布里 - 珀罗干涉仪的亮条纹较迈克耳孙干涉仪的亮条纹细一样,图 10 - 13 所示的照片明显地表示出狭缝数目增多时条纹(主最大)变细的情况,其中图 10 - 14(f)是 20 个狭缝的光栅所得的衍射图样,其主最大已成为明锐的细线. N 增大时的另一改变,是相邻主最大之间次最大的出现,它们的数目随狭缝数目的增多而增加[$(N-2)$个],但最靠近主最大的第一次最大的光强度只约为主最大的 1/25[见(7 - 37)式],从图 10 - 14 的(c),(d)和(e)中仔细地观察也可看到这种改变.

实际光栅狭缝的数目 N 是很大的,例如,宽为 15 cm 的平面光栅,若在每一毫米内有 1 200 条狭缝(刻痕),则该光栅的总狭缝数目(总刻痕数)$N=180\ 000$. 所以可以想到光栅衍射图样是以单狭缝夫琅禾费衍射分布为包络线的由实际上成为细线的一些主最大和在其间由许多次最大形成的相当弱的背景而构成的.

利用计算最靠近主最大的最小的方向与该主最大方向间的夹角 $\Delta\theta$,我们即可确定主最大的半宽度的角度值. 第 k 级主最大在满足下式的方向:

$$\sin\theta_k = k\frac{\lambda}{a+b}.$$

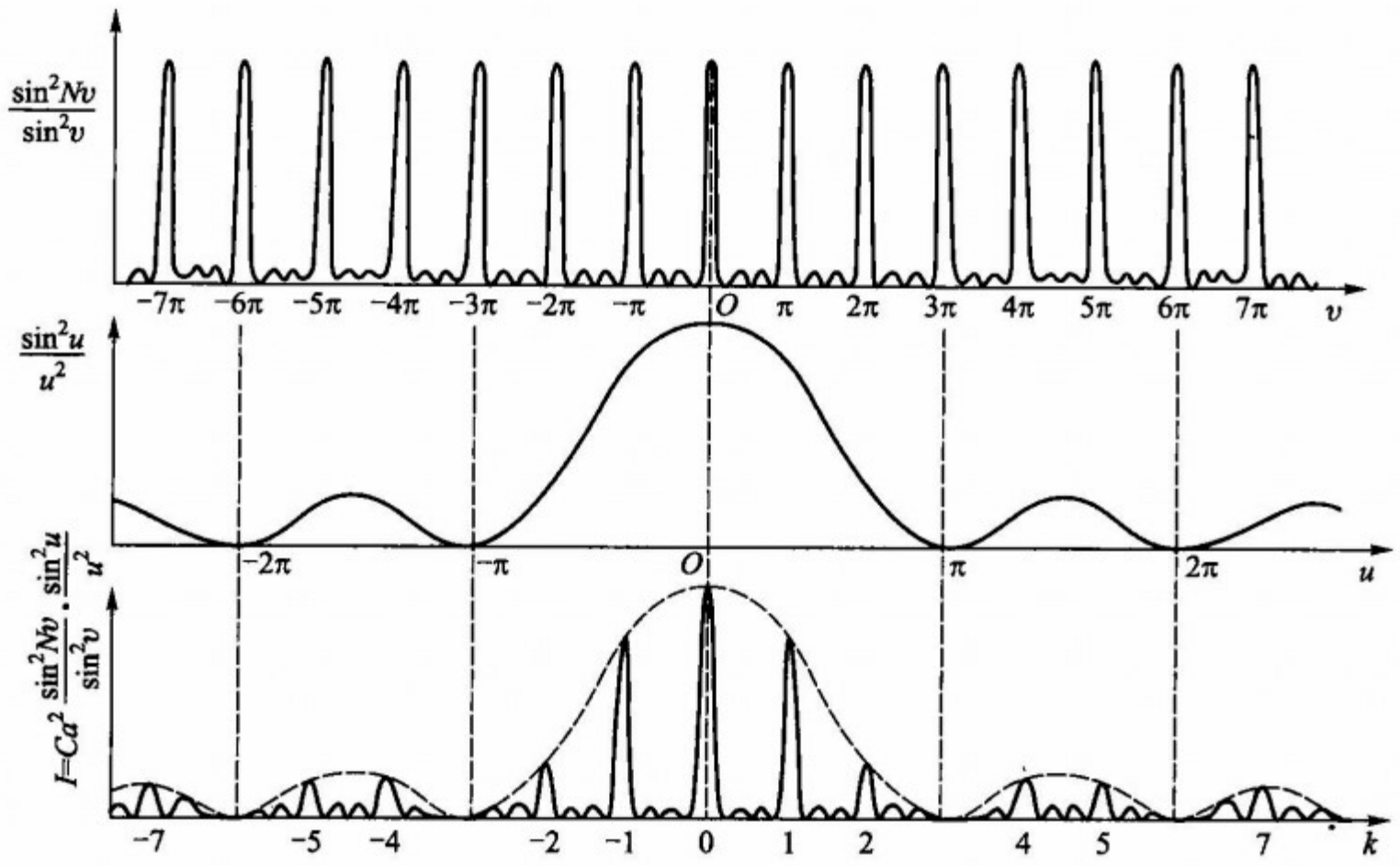

$\frac{\sin^2 Nv}{\sin^2 v}$
−7π −6π −5π −4π −3π −2π −π O π 2π 3π 4π 5π 6π 7π v
$\frac{\sin^2 u}{u^2}$
−2π −π O π 2π u
$I=Ca^2\frac{\sin^2 Nv}{\sin^2 v}\cdot\frac{\sin^2 u}{u^2}$
−7 −5 −4 −2 −1 0 1 2 4 5 7 k

图 10-13

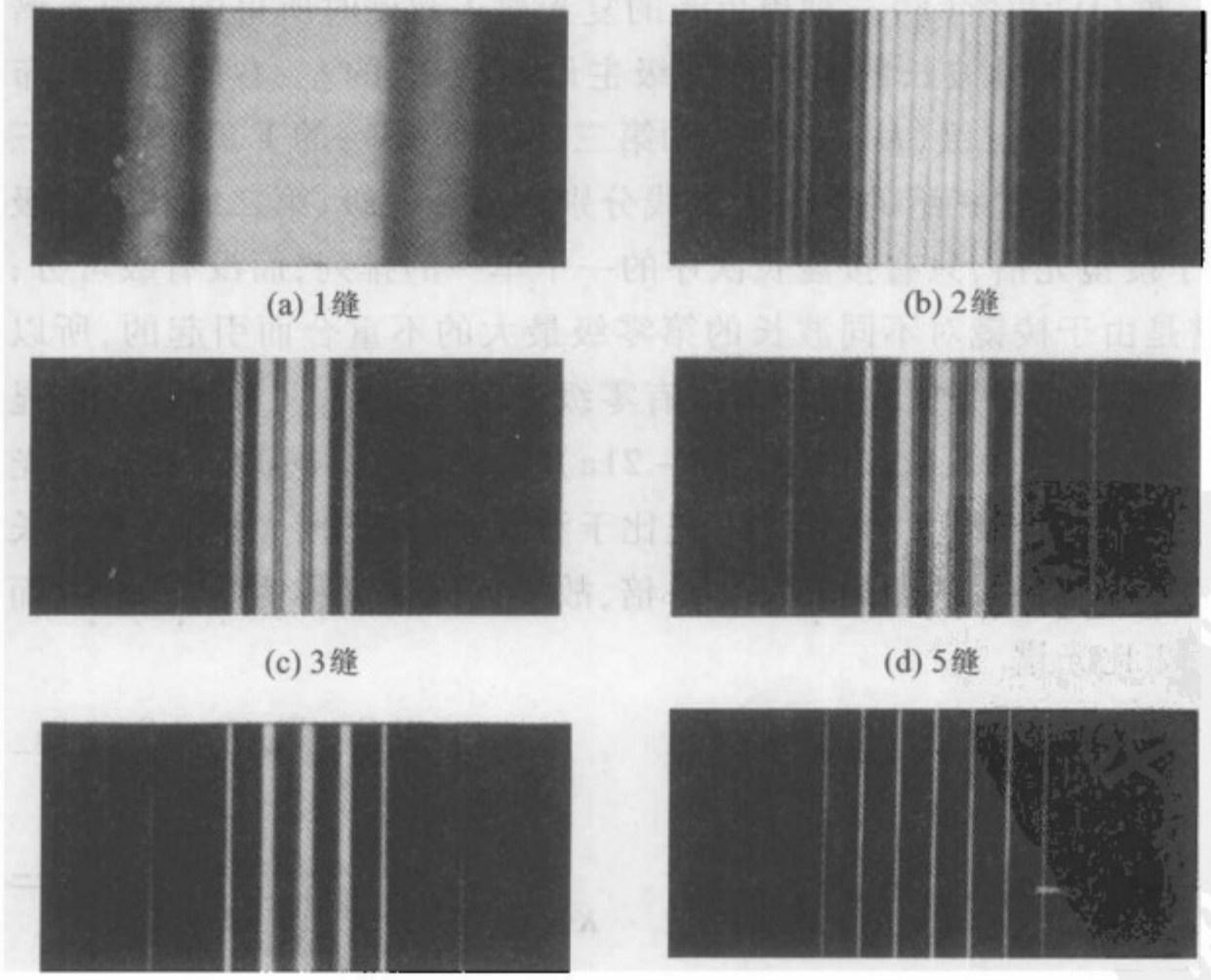

(a) 1缝
(b) 2缝
(c) 3缝
(d) 5缝
(e) 6缝
(f) 20缝

图 10-14

最靠近它的最小的级数 k' 应为 $kN+1$，按式(10－22)，该最小所在的方向 $\theta_k+\Delta\theta$ 满足

$$(a+b)\sin(\theta_k+\Delta\theta)=(kN+1)\frac{\lambda}{N}.$$

由此两式相减，并利用实际上满足的条件 $\cos\Delta\theta=1$ 和 $\sin\Delta\theta=\Delta\theta$，则得

$$\Delta\theta=\frac{\lambda}{N(a+b)\cos\theta_k}. \tag{10-25}$$

由此可见，对于给定的光栅，$a+b$ 为一常数，则光栅上狭缝的总数目愈大，则所得各级主最大愈细.

2. 光栅光谱

由光栅方程式(10－21)和(10－21a)可知，对于给定常数 $a+b$ 的光栅，不同波长的同一级主最大，除第零级外，均不重合，并且按波长的次序，自第零级开始向左右两侧，由短波向长波地散开. 另一方面，由上一段的讨论得知，每一波长的主最大，在实际光栅的衍射图样中都是很细锐的亮线. 这样，当以含有许多波长的复光射在光栅上时，则在其后面的透镜的焦面上将得到该复光所有组分的、按波长次序排列的主最大的细亮线，并且对于每一级(K)都有一组这样的主最大的细亮线，我们称光栅对复光的这种衍射图样为光栅光谱. 图 10－15 是当含有红(C)，黄(D)和紫(F)三种单色光的复光射入光栅时所得的光栅光谱的示意图，中央亮线是三种波长的光的第零级主最大，在它的左、右两侧各分布着第一级($K=\pm1$)的、第二级($K=\pm2$)的和第三级($K=\pm3$)的 F、D 和 C 的三种光的主最大的细亮线，这三组的主最大亮线分别称为第一级、第二级和第三级的光栅光谱. 对于棱镜光谱，只有按波长次序的一个单一的排列，而没有级可分；实质上棱镜光谱是由于棱镜对不同波长的第零级最大的不重合而引起的，所以棱镜光谱是零级光谱，而在光栅光谱中却没有零级光谱. 这是这两种光谱十分显著的不同之处. 此外由式(10－21)和式(10－21a)所描写的不同波长的光在光栅光谱中的位置，在 θ 角不很大的情况下，正比于波长，即在光栅光谱中，波长长一倍的光谱离第零级主最大的距离亦约远一倍，故光栅光谱又称为正比光谱，而棱镜光谱则为非正比光谱.

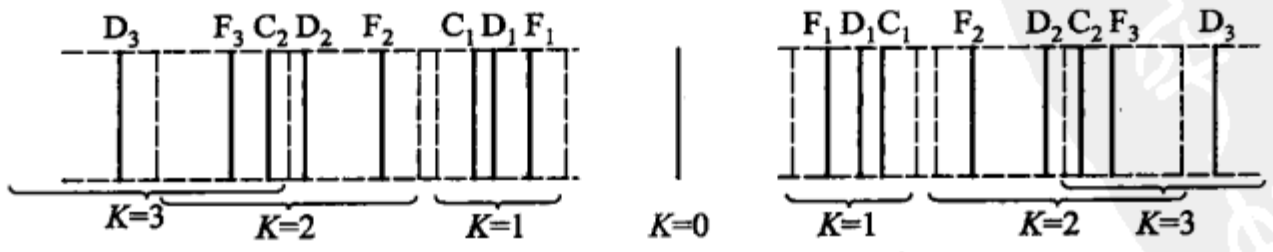


图 10－15

由图 10－15 可以看到，可见光的第二级光谱与第三级光谱彼此有部分重叠. 从光栅方程式得知，波长为 λ_1 的第 k_1 级的光栅线光谱与波长为 λ_2 的第 k_2

级的光栅线光谱重叠在某一位置时,必满足

$$k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2. \tag{10-26}$$

例如,波长为 400 nm 的第三级光谱与波长为 600 nm 的第二级光谱重叠,并且与波长为 1 200 nm(近红外线)的第一级光谱重叠. 这种重叠现象给光栅的应用带来很多麻烦.

各级光栅光谱的相对光强度分布决定于作为包络线的单狭缝衍射的光强度分布曲线的形状,由图 10-13 即可看出各级光谱相对强度的改变情况,其中以无色散的零级光谱占能量最多.

将光栅当作一个色散系统来研究时,它的角色散 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\lambda$ 可由光栅方程式(10-21)和式(10-21a)对波长的微分而求得,即

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{k}{(a+b)\cos\theta}. \tag{10-27}$$

由此可知,光栅常数 $a+b$ 愈小,角色散愈大,即在单位长度内的狭缝数目愈多,其角色散愈大. 此外,在不同的光谱级内,角色散亦不同;高级次的光谱有较大的角色散. 然而,在应用光栅作色散系统时,最被人注意的还是由于它的光谱线很细,因而可获得高的分辨本领.

3. 光栅的分辨本领

在本节第一段的讨论中,已知主最大的半宽度的角度(光栅线光谱的半宽度的角度)等于由式(10-25)所确定的 $\Delta\theta$. 而当光栅用作色散系统时,若仍以瑞利判据作为分辨的标准,则此 $\Delta\theta$ 就是光栅的最小分辨角. 我们所感兴趣的常不是此 $\Delta\theta$ 之数值如何,而是此角度所对应的两谱线的波长差 $\delta\lambda$ 如何. 也就是说,我们要用光栅所能分辨的最靠近的两个光谱线的波长差来代替光栅的最小分辨角. 而由光栅的角色散公式(10-27),可知角度差为 1 单位的两谱线的波长差为

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\theta} = \frac{(a+b)\cos\theta}{k}. \tag{10-27a}$$

所以与最小分辨角 $\Delta\theta$ 对应的两谱线的波长差 $\delta\lambda$ 为

$$\delta\lambda = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\theta}\Delta\theta,$$

将由式(10-25)求出的 $\Delta\theta$ 值代入此式,则得

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{kN}.$$

与表征色散棱镜的分辨本领一样,我们仍用 $\lambda/\delta\lambda$ 作为光栅的分辨本领的表征量,并称这个量为光栅的分辨本领. 由上式,则光栅的分辨本领为

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN. \tag{10-28}$$

这就是说,光栅的分辨本领 R 等于光栅狭缝的总数目 N 乘以光栅光谱的级次 k.

让我们以一个一般的例子来说明光栅分辨本领的大小. 例如,每毫米有1 200条刻痕的光栅,若其宽度为 5 cm(对于实际的光栅来说,这样的尺寸算是很小的),则在由它所产生的第一级光栅光谱中,光栅的分辨本领 $R = \lambda/\delta\lambda = 1 \times 50 \times 1\ 200 = 6 \times 10^4$. 这数值表示,在波长为 λ 的第一级光栅光谱中,光栅所能分辨的最靠近的两谱线的波长差为 $\delta\lambda = \lambda/(6 \times 10^4)$. 对于 $\lambda = 600$ nm 的红光,此 $\delta\lambda = 0.01$ nm. 单从这个数值,我们或许还看不出光栅分辨本领的高低,但是当以其与棱镜的分辨本领相比较时,则可立即获得突出的印象.

选一个色散率较大的光学玻璃作棱镜,例如重火石玻璃,假定其在 $\lambda = 600$ nm 处的色散率 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda = 120/\mathrm{mm}$(即对波长差为 0.1 nm 的两光,折射率之差为 1.2×10^{-5}). 试问为获得与上述光栅有相同的分辨本领,此棱镜的底边 t 该有多宽?

由式(10 -9)可得

$$t = \frac{R}{\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda} = \frac{60\ 000}{120/\mathrm{mm}} = 500\ \mathrm{mm}.$$

即棱镜的底边至少应该半米宽! 这宽度恰好是光栅宽度的 10 倍. 事实上制造这样大的棱镜是很困难的,首先,不容易得到这么大的优质(均匀、透明、无气泡、无内应力等)的光学材料. 其次,这样大的棱镜过于笨重,不便加工并且工艺中很难达到光学仪器所要求的精密程度. 而在光栅中,5 cm 宽的光栅却是很平常的,并且更大的光栅在现代技术的条件下也已制成并且不断地生产着.

从这一比较,可知光栅是高分辨本领的光学元件,也正因为它的这种性质,所以用光栅作色散系统的光谱仪,在近代、特别是过去几十年有很大的发展.

然而,必须指出,由式(10 -28)所算出的光栅的分辨本领是理论上的极限值. 因为在推导此式的过程中假定了在准光物镜 L_1 焦面上的光源狭缝 S(图 10 -11)是无限细的并且认为光栅是理想的平行、等宽而又等间隔的 N 个狭缝阵列(组). 而实际上,光源狭缝不能是没有宽度的并且光栅也不能是那样理想的,所以,光栅的实际分辨本领较由式(10 -28)算出的理论分辨本领 R 低很多. 当考虑光源狭缝有一定的宽度 W 时,光栅的实际分辨本领 R_g 应由下式计算:

$$\frac{W}{f_1'} R_g = \lambda \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}, \tag{10 -28a}$$

其中 f_1' 为准光物镜的焦距,W/f_1' 为狭缝宽度对准光物镜中心的张角,$\lambda \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\lambda$ 值在大多数实际情况下是一个 0.4 ~ 0.5 的常数,故此式表明,实际分辨本领跟狭缝角宽度成反比.

应用式(10 -27)和式(10 -28),式(10 -28a)可改写为

$$R_g = \lambda \frac{f_1'}{W} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = \lambda \frac{f_1'}{W} \frac{kN}{D\cos\theta}, \tag{10 -28b}$$

或
$$R_g/R = \frac{\lambda}{W}\frac{f_1'}{D}\frac{1}{\cos\theta},$$

其中，$R = kN$，D 为光栅的宽度或准光物镜通光孔径的宽度；不妨认为 f_1'/D 为准光物镜的相对孔径的倒数，记以 H，于是，有

$$\frac{R_g}{R} = \frac{\lambda H}{W}\frac{1}{\cos\theta}, \tag{10-28c}$$

其中 λH 常称“正常宽度”，由 L_1 的孔径的夫琅禾费衍射决定；式中的 $1/\cos\theta$ 值，实际上与 1 相差不多. 所以，当光源狭缝的宽度 W 等于正常宽度 λH 时，光栅的实际分辨本领接近于理论分辨本领. 例如，对 600/mm 的光栅，若光波的波长为 500 nm 和准光物镜的相对孔径的倒数为 10，则相应的正常宽度不过等于 0.5×10^{-2} mm. 显然，当光源狭缝开到 1×10^{-2} mm 时，实际分辨本领将下降到只有理论分辨本领的一半. 换言之，在所述的例子（$W = 0.01$ mm）中，为在实际上对 500 nm光谱分辨 0.01 nm 所需的光栅，其理论分辨本领应为 $2\times50\,000$，相应的光栅（600/mm）的宽度应为 166.7 mm.

4. 闪耀光栅

由本节的Ⅱ和Ⅲ的讨论已知，光栅的分辨本领和色散都正比于光谱的级次. 但是对于一般光栅，由于它的衍射图样总是由一个占总光能量很大部分的没有色散的零级主最大和在它两侧对称分布的若干个各级主最大组成，所以单独每一级，而尤其是高级次的光谱，光强很小. 换言之，光栅的主要缺点之一，是它将能量分散在各级光谱上，特别是没有色散的零级占了大部分的能量. 这十分不利于光栅的应用，因而提出了这样一个问题：在光栅光谱中，零级比其他级强和零级两侧各级光强对称分布的规律是否为一成不变的？在 1888 年，罗兰指出过，利用刻槽有一定形状的反射光栅，可将衍射光集中在某一级光谱上，即通过控制刻痕的形状可改变各级主最大（光谱）的相对光强分布. 1910 年，伍德（R. W. Wood）改进了钻石刀头的形状做出了第一个用于红外光的、刻痕有一定形状的光栅；35 年后，用改进过的钻石刀、以涂铝的玻璃板作反射光栅的基坯，刻出了光栅常数很小的、刻痕有一定形状的光栅，称为闪耀光栅（blazed grating）. 这种光栅亦称定向光栅，其刻痕轮廓如图 10-16 所示.

在这种光栅所产生的衍射图样中，各级主最大的位置不受刻痕形状的影响，仍由光栅方程式（10-21）或（10-21a）确定；而单狭缝衍射的中央最大（即包络线的中心）却从原来与零级主最大重合的方向移至由刻痕形状决定的反射光的方向，结果在反射光方向的光谱（主最大）变强或称闪耀. 例如，在图 10-16 中，刻槽面与光栅平面成 α 角，垂直于光栅平面（$\varphi = 0$）的入射光 A 在槽面上的入射角为 α，于是，在与槽面法线成 α 角的反射光 B 的方向上（$\theta = 2\alpha$）的主最大（光谱线）得到最大的相对强度.

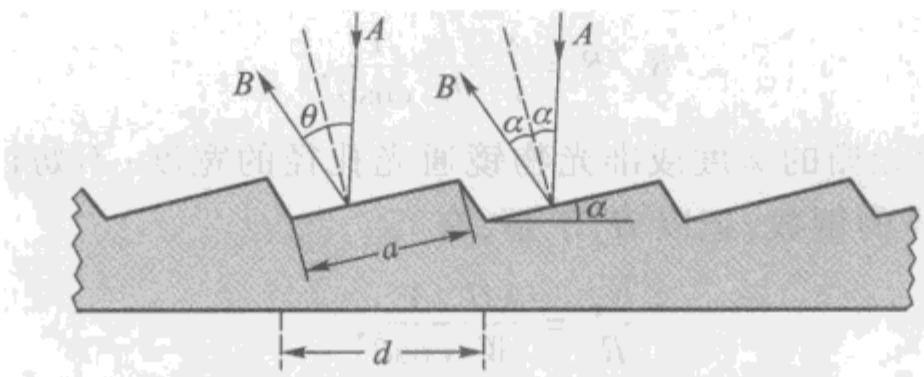


图 10 - 16

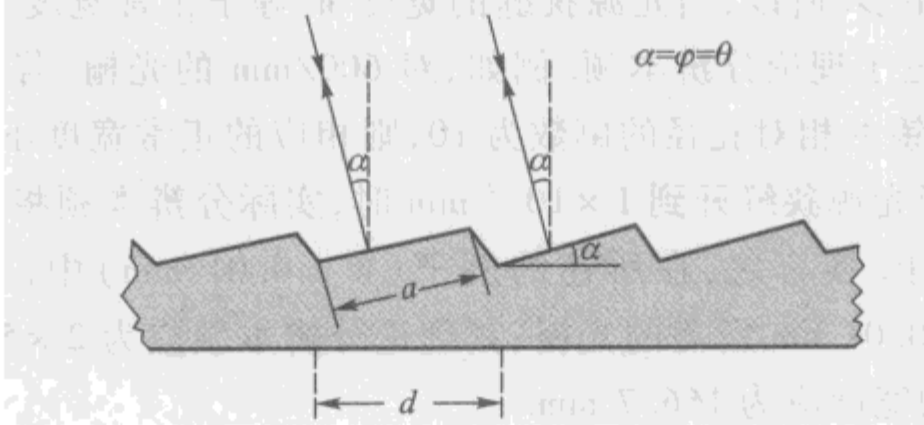


图 10 - 17

又例如,在图 10 - 17 中,令入射光垂直于刻槽面,即入射光对光栅平面的入射角 φ 等于槽面跟光栅平面的夹角 $\alpha(\varphi=\alpha)$,并且在与光栅平面法线成 α 角的方向上观察($\theta=\alpha$). 此时零级主最大[由光栅方程式(10 - 21a)得 $\theta=-\alpha$]在光栅的法线另侧与入射线对称的位置上;而单狭缝衍射的中央最大(包络线的中心)移到了与光栅法线成 α 角的入射光方向,在这个方向上被闪耀的光谱的波长 λ_B 可由光栅方程式(10 - 21a)求出:

$$d(\sin\alpha+\sin\alpha)=k\lambda_B,$$

即

$$2d\sin\alpha=k\lambda_B. \tag{10-28d}$$

由此式明显地看到,对一级闪耀波长为 λ_B 闪耀的光栅也闪耀二级、三级等的 $\lambda_B/2$、$\lambda_B/3$、…. 不过,按一般惯例,当说到某光栅的闪耀波长为 λ_B 时,其意即为在如图 10 - 17 所示条件下(称利特罗自准系统)的一级闪耀波长为 λ_B. 例如,每毫米 600 刻痕的闪耀光栅,当槽面与光栅平面的夹角 α(称闪耀角)为 9.5°时,它的闪耀波长即为汞绿光,$\lambda_B=546.1$ nm.

现代的优质原刻光栅的 $d\approx a$,可以把近 80% 的能量集中到所需要的 λ_B 上去. 此外,由于单狭缝衍射分布(包络线)有一定的宽度,所以,那些以闪耀波长 λ_B 为中心的其他光谱也得到了相当程度的闪耀. 这个波段范围的大小,视刻痕的质量而异;规定 λ_B 的闪耀效率为 1 时,闪耀效率不低于 0.7 的波段范围,好的光栅一般可用 $\lambda_B\pm\lambda_B/2$ 来估计.

5. 光栅的制备

现代制造光栅主要有三种方法,现分述如下.

(1) 刻划光栅

世界上第一块光栅是夫琅禾费在1819年制成的,他把金属丝绕在两个平行细螺丝上,形成两组平行线,焊住一组,割去另一组就成为透射光栅. 这个光栅的色散小,但偶尔还可以用在红外光上. 此后他继续研究刻划机. 到1882年罗兰(Rowland)解决了精密螺丝的制造方法后,才制成了比较优良的刻划机,能在玻璃或镜合金面上刻出每英寸14 000条刻痕的4×6 in^2(平方英寸)的光栅,他还发明凹面光栅,使光栅不需另加聚集透镜或反射镜,有利于紫外和红外的工作.

刻划光栅在原理上很简单. 用一钻石刀,在抛光的玻璃或金属坯子上刻一道直痕,在退刀时,提起刀头,同时将坯子横向移动一个与光栅常数 d 相等的距离,然后再刻下一道直痕,为了保持 d 为常数、刻痕要直、要同样深浅和同样形状(它们的准确度都以光波波长的几分之一或几十分之一来度量),因而光栅刻划机的元件,如刀头、螺丝、导轨和轴承等都要非常精密,而且在刻划过程中还要防止震动与温度的变化;刻划动作要慢,每分钟刻6线,刻一块60 000条线的光栅昼夜不停,需一星期. 由于机件的误差,在光栅光谱中会出现鬼线(ghosts),其中当推动光栅坯子的螺丝有周期性误差时,会在主最大两旁对称地产生两条弱线,称罗兰鬼线,好的光栅,要求罗兰鬼线强度不超过相应主最大光强的千分之五. 图10-18即为由一块相当好的平面光栅上摄得汞绿光(546.1 nm)的第12级谱线的光强记录曲线,标记有 a 和 d 字样的伴线即为罗兰鬼线,图中 b,c 和 s 等为由机件的其他误差引起的另一些鬼线.

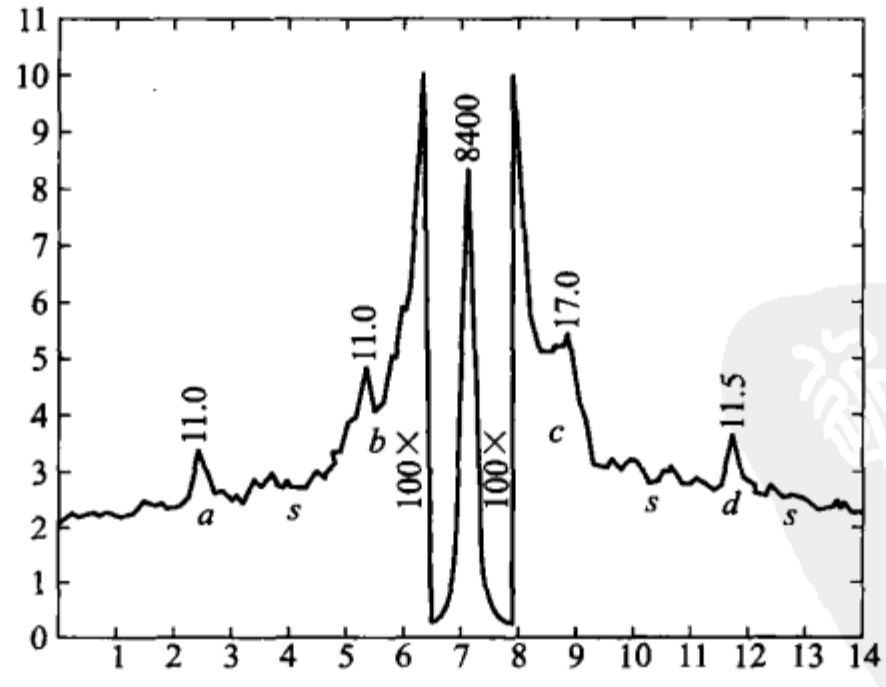


图 10-18

为了刻划质量更好的光栅,早在五十多年前哈里森(Harrison)等就开始研究用干涉仪来控制光栅的刻划,其原理如图10-19所示. 例如反射镜A和刻刀系统相连,反射镜B和坯子相连,当它们的相对运动有偏离平行的倾向时,反射镜

A 与 B 所产生的干涉条纹就起变化. 这个变化即使只有波长的十分之一,也会使光电系统产生足够的电流去转动伺服电动机来校正原来的偏离. 由于现代电子伺服系统的进展,使这种方法得以成功. 现在世界上已经有许多实验室能刻出大面积优质光栅. 我国的一些光学研究所和工厂也掌握了现代的光栅刻划技术.

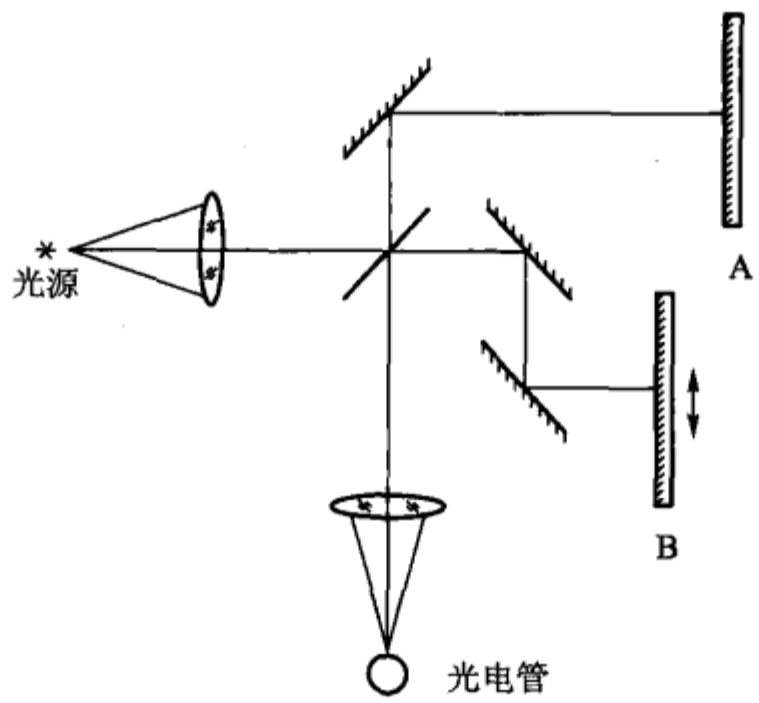


图 10 - 19

检查平面光栅刻划质量的一个方法,是把它放在迈克耳孙干涉仪的一臂中,去代替原来的反射镜并观察所得的波阵面干涉图. 图 10 - 20 中,(a)是一个没有用干涉控制刻划的光栅的波阵面干涉图;(b)是用干涉控制的. 两者的区别,一目了然. (c)为放大率为 4 000 倍的电子显微镜拍摄的现代闪耀光栅表面的照片;(d)为放大率为 9 000 倍的电子显微镜拍摄的现代闪耀光栅表面的照片,"微观"上的不平整是刻划光栅产生一定杂散光的原因.

(2) 复制光栅

优质原刻光栅是一刀一刀、一块一块地刻划出来的,尽管应用了现代的控制技术,每一块大面积光栅也都是很费时间的,它至少在降低成本和大量生产方面遇到了困难;然而,另一方面,由于现代光栅复制技术的进步,已使得复制出的光栅与原刻光栅相比并不逊色,甚至在某些方面如杂散光和信噪比还略胜一筹. 所以,现在有许多工厂为满足现代物理和化学实验室日益增长的对光栅光谱仪的大量需要,都从事复制光栅的研制或生产.

复制光栅的基本方法,是在面形精度达 $\lambda/10$ 的基坯面上先涂一层极薄的干净的树脂,然后以刻划的优质光栅为原器,采用细致的特殊技术将光栅刻痕"印"在树脂层上,最后,在真空系统中给印有光栅刻痕的树脂表面镀铝(或其他金属如金或铂)和保护膜即成复制光栅. 或者,是在刻划光栅上先涂一层极薄的油膜而后镀铝,使在光栅表面上形成一层由油膜隔离着的与光栅有同样刻痕的

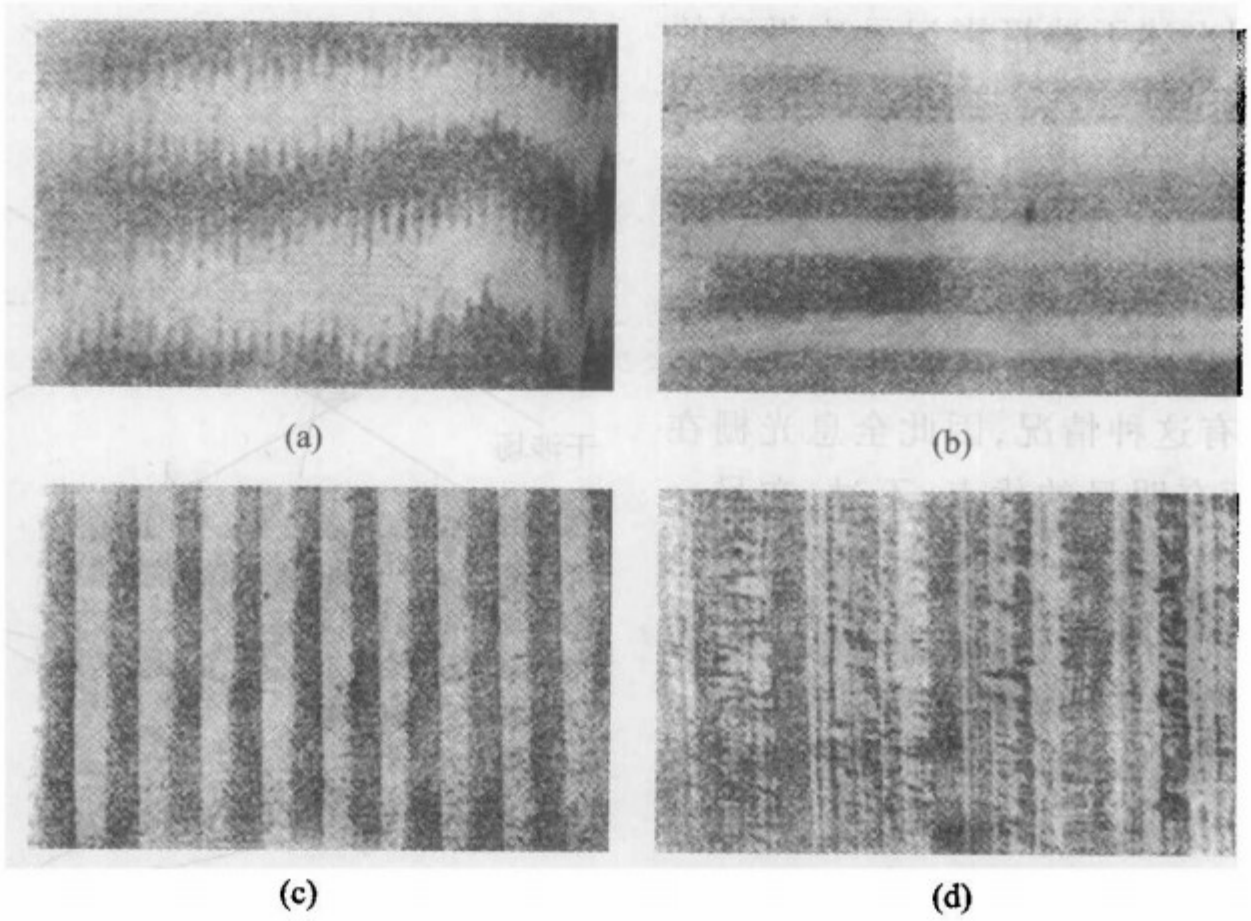


图 10-20

较厚的铝膜,其次用涂特殊树脂的基坯的精密表面压在铝膜上,经过适当的时间后铝膜便由树脂牢固地粘在基坯上,最后从原刻光栅脱下,即在基坯上得到复制光栅.

(3) 全息光栅

所谓全息光栅,其实它与有严格定义的全息没有什么联系,应该叫干涉摄影记录的衍射光栅,它是用单色激光(如氩离子激光 $\lambda = 488$ nm)的双光束干涉图样来代替刀刻划而得的衍射光栅,参看第七章双光束干涉图(图 7-11)就可以从概念上了解这一点,该图所示是一个一般"单色光"的双光束干涉图样,条纹是等宽又等间隔的,不过由于光的单色性差,结果只能在较小的空间范围内产生和光栅几何要求相接近的光强分布. 如果用相干长度提高了几个数量级的单色激光,则可想到,其干涉图样必然是等间隔、等宽的清晰条纹并且其所占空间之大足以制造实际有价值的大面积光栅.

全息光栅的制备原理:在基坯的面形精度达 $\lambda/10$ 的表面上先涂光敏材料(超微粒的乳剂),然后将它置于单色激光双光束干涉场内进行曝光,如图 10-21(a)和(b),经过显像与处理,再放入真空系统中镀反射膜和保护膜即得光栅. 相邻干涉条纹的间隔即为光栅常数 d,在图 10-21(a)的情况下,显然是

$$d = \frac{\lambda}{2\sin\varphi}, \tag{10-28e}$$

改变 φ 值就会得出不同的光栅常数;改变 λ 也可以改变光栅常数. 实验室利用

这种方法已制出 6 000/mm 的全息光栅;大的光栅可达 600 ×400 mm^2.

把用上述干涉摄影记录法得到的全息光栅与一般刻划的光栅作一比较,我们自然会看到在刻划光栅中由于刻划机的周期误差和刻痕的不平整所引起的鬼线和杂散光,而在全息光栅中,由于是记录下间距相等的干涉条纹,没有这种情况,因此全息光栅在这些方面有明显的优点. 不过,在另一方面,从闪耀的效率来看,一般的全息光栅在目前还没有刻划光栅的高,这是有待进一步研究解决的问题.

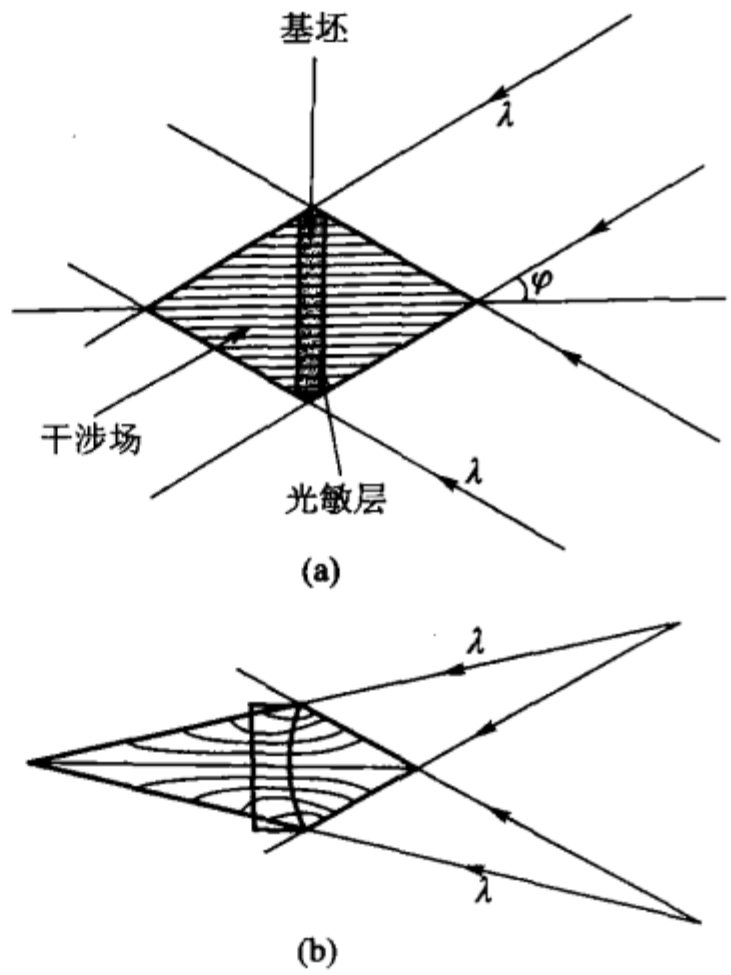


图 10 - 21

6. 光栅光谱仪

用衍射光栅作色散系统的单色仪、分光计和摄谱仪统称为光栅光谱仪. 由于光栅有透射光栅和反射光栅两种,所以光栅光谱仪也有相应的两种. 不过,现代用得最多的是反射光栅光谱仪,从真空紫外直到红外,甚至远红外都普遍使用反射光栅光谱仪. 在这里我们只讨论具有代表性的光栅光谱仪.

图 10 - 22 是透射光栅分光镜的示意图,其中 S 为光源狭缝,它和透镜 L_1 组成分光镜的准光管,S 在透镜 L_1 的焦面上. 自准光管射出的平行光束垂直地射在透射光栅 G 上,在光栅的后面用普通的望远镜 T 观察光谱,望远镜 T 可绕垂直于图面并且通过光栅的轴线 O 而旋转,以便观察不同方向上的各级光谱. 这种分光镜主要用于可见光,通常教学实验室多用它来让学生了解和熟悉光栅的原理.

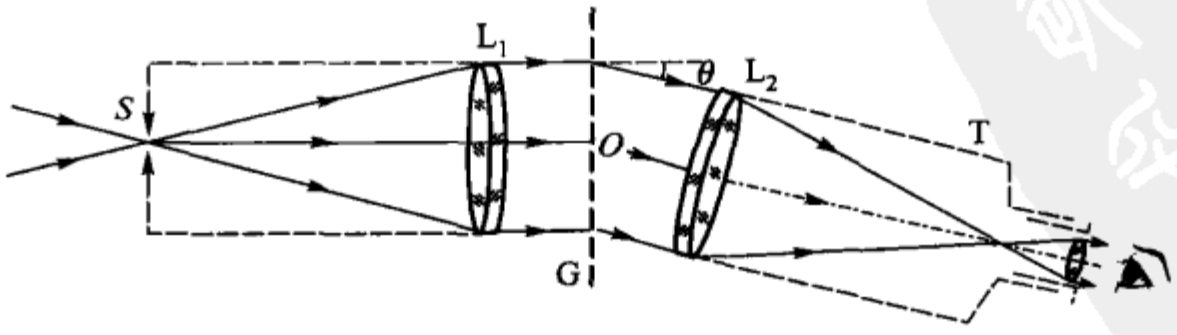


图 10 - 22

对于反射光栅光谱仪,我们分凹面光栅和平面光栅两种讨论如下.

凹面光栅除有等间隔地分波阵面而产生衍射的作用之外,还兼有准光和聚

焦的作用,不用附加任何光学系统就可以产生光栅光谱. 这是凹面光栅十分重要的优点. 由于这一点,凹面光栅在原则上可用于随便什么光谱范围. 罗兰证明,假如光源狭缝 S 和凹面反射光栅 G(图 10-23)同放在直径等于光栅表面曲率半径的圆周上(实线),并且光栅表面与该圆周切于一点,则由该光栅所生的光谱将都呈现在这个圆周上. 这个圆称为罗兰圆. 各种凹面光栅光谱仪都是利用这个罗兰圆装成的.

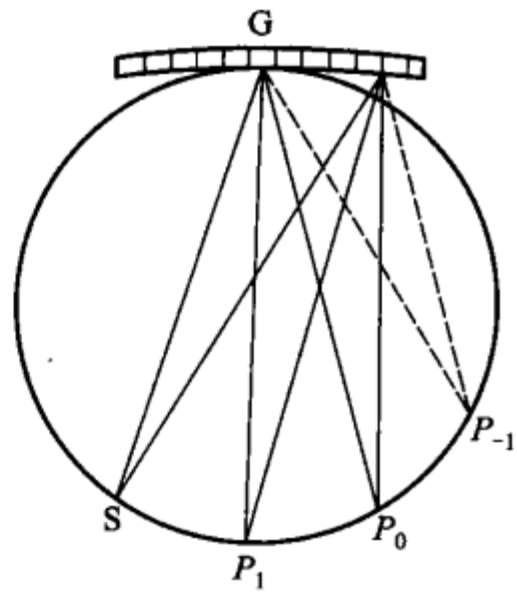


图 10-23

常见的凹面光栅光谱仪是帕邢(Paschen)装置和意格耳(Eagle)装置. 帕邢装置如图 10-24 所示. 狭缝及光栅固定在罗兰圆上. 需要研究的光谱,可根据光栅方程式计算出来的位置,把有同样弯曲(与罗兰圆能重合)的照相板放到那一段圆周上. 所以三者(狭缝、光栅和照相板)都有一定的位置. 改变波段时,只要移动照相板,不必作其他调节,这是帕邢装置的优点. 但是需要暗室的空间较大,只能在专用的暗室使用.

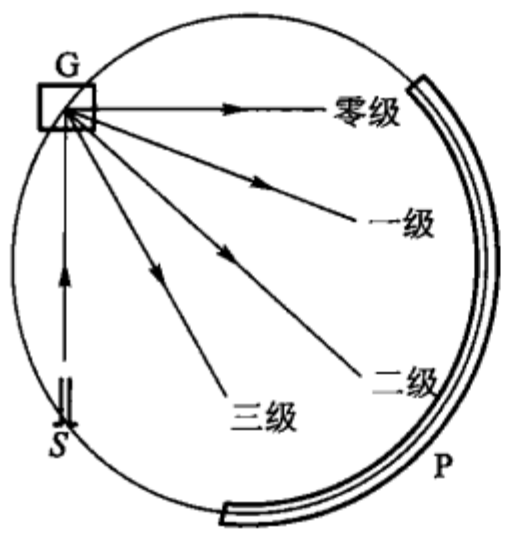


图 10-24

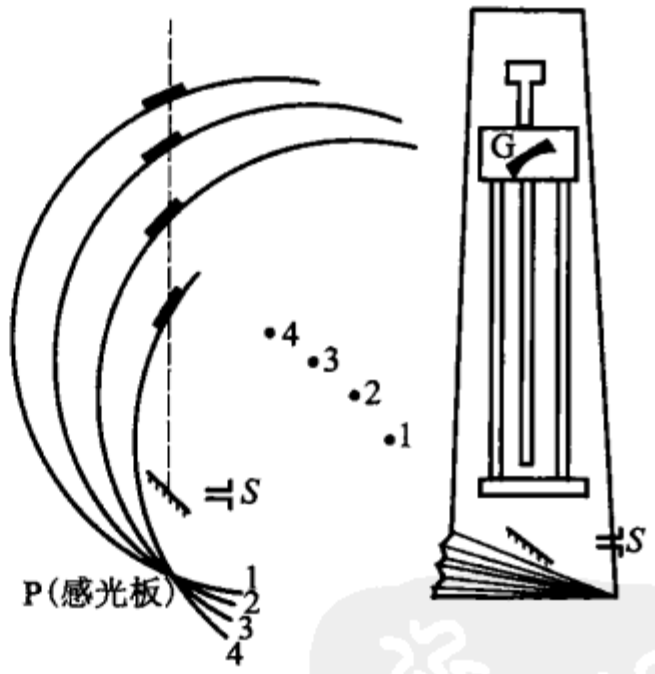


图 10-25

意格耳的装置如图 10-25 所示. 在这种装置中,入射角等于衍射角,并且只固定狭缝. 当要改变波段时,需同时改变光栅的距离和转角以及照相板的转角,以符合罗兰圆. 所以在机械结构上比较复杂. 但整个仪器可装在一长方形暗盒中,占地方较少,这是它的优点.

由于凹面光栅在制造上较平面光栅困难得多,并且凹面光栅光谱的像质常不够理想,所以,平面反射光栅光谱仪重新得到了发展. 图 10-26 为埃伯特(Ebert)装置,其中 M 为凹面镜,起准光和聚焦的作用,S 为入射狭缝,S'为用以

从整个光谱中分离出单色光的出射狭缝，S 和 S' 共轭，并且对光栅刻槽平面的法线（即球面镜的光轴 MG）对称，这样的仪器称为埃伯特光栅单色仪. 由于它占空间较小并且能给出消彗差的谱线（有球差和像散），所以大多数近代光栅单色仪都是这种类型的. 如果需要摄谱，拿掉出口狭缝 S'，代之以照相板 P 即可.

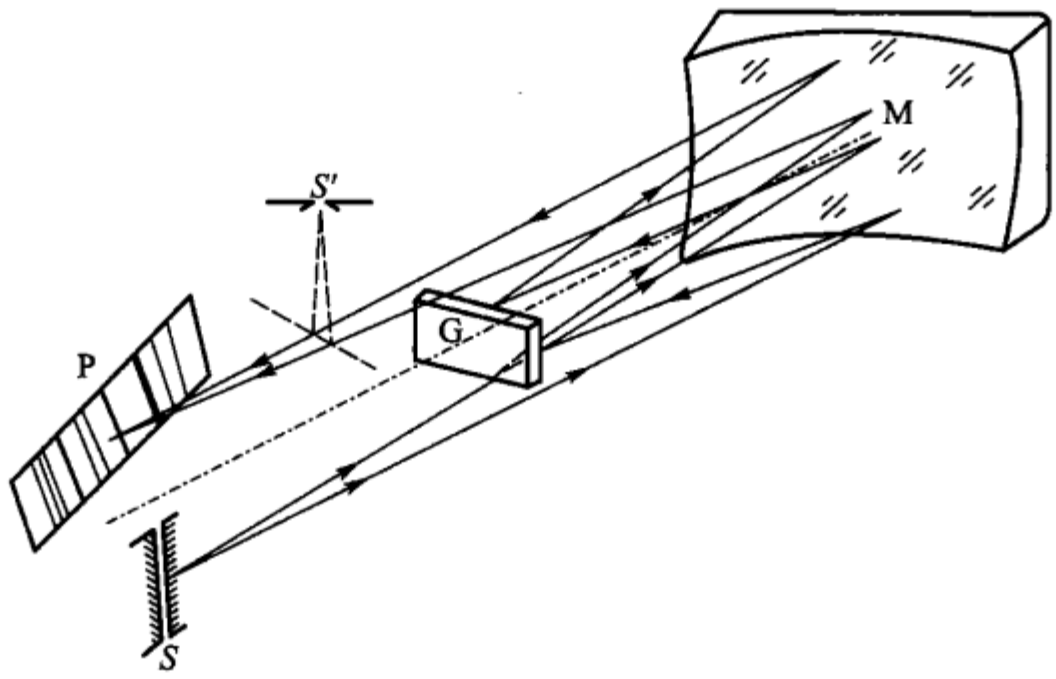
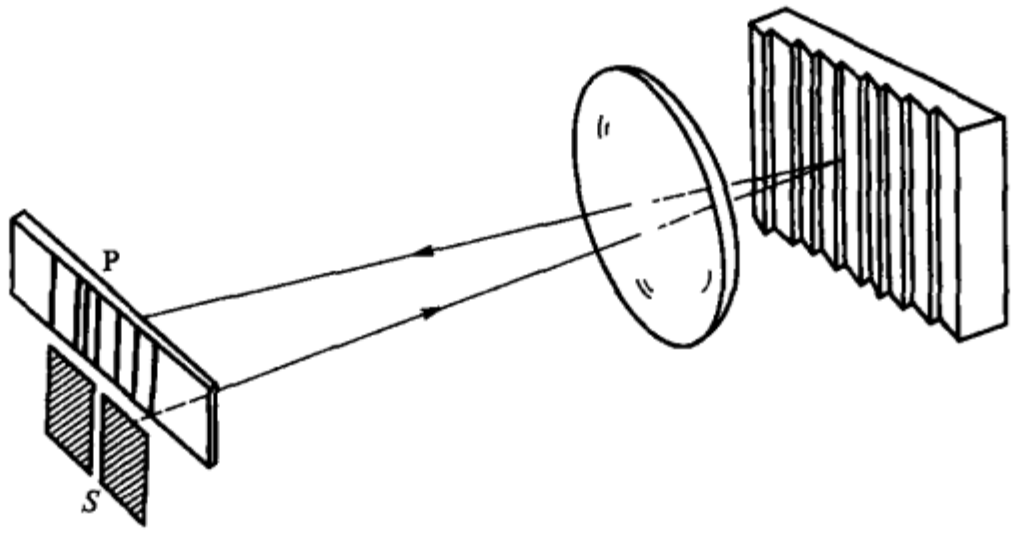


图 10 - 26

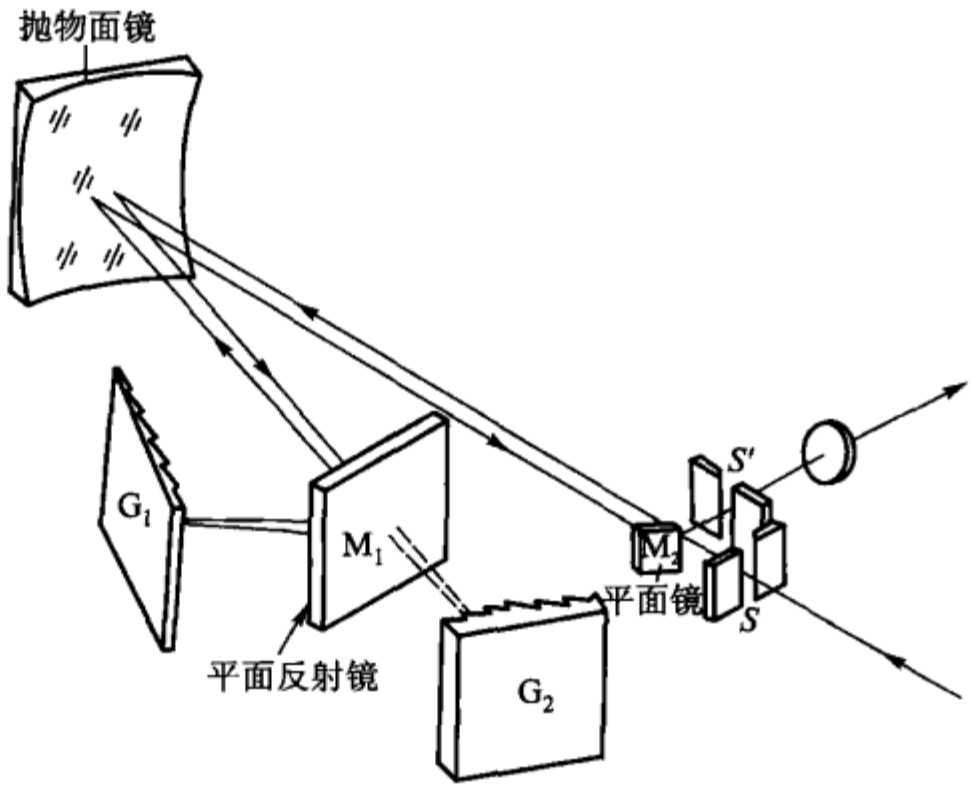
此外，还有一种前面在闪耀光栅节提到过的，也是常用的光栅装置称为利特罗装置，如图 10 - 27(a)所示（与图 10 - 17 对应）. 当图中的透镜改为抛物面反射镜时，可用于红外区和紫外区；现代的红外线光栅分光光度计和紫外线光栅分光光度计中的分光计部分多采用利特罗装置. 图 10 - 27(b)所示即为反射式利特罗分光计的光路图，其中 G_1 和 G_2 为适用于不用波长范围的两块光栅，插入平面反射镜 M_1 时 G_1 起作用，移去平面反射镜 M_1 时 G_2 起作用.

7. 阶梯光栅

由迈克耳孙首先提出，而后威廉斯（Williams）等改进和完成的阶梯光栅，可使高级次的光谱得到最大的相对光强，因而能兼有高分辨本领和强光谱. 这种光栅也分透射式和反射式两种. 透射式阶梯光栅如图 10 - 28(a)所示，是由排列得像阶梯一样的一堆厚度和折射率都相同的透明玻璃板或石英板组成的，每板的厚度 t 为 1 ~ 2 cm，阶梯高度 d 为 0.1 cm. 反射式阶梯光栅，如图 10 - 28(b)所示，由阶梯上涂反射膜而获得. 阶梯光栅与刻痕光栅是沿着不同路径获得高分辨本领的. 在一般刻痕光栅中，光谱级 k 小，刻痕总数 N 大，而阶梯光栅中 N 小 k 大，即阶梯数目较少（约 20）而光谱级次高，这是两类光栅的主要差别. 此外，由于阶梯光栅的相当于单狭缝的阶梯高度 d 相对于波长来说已十分大，由它产生的单狭缝衍射中央最大的角宽度很小，所以只有某一两个高级次的光谱出现. 这就决定了阶梯光栅只适合于研究光谱的超精细结构，而不能像在一般刻痕光栅中那样能用于研究相当广的光谱范围.



(a)



(b)

图 10－27

当平行光垂直地射在透射式的阶梯光栅面上时，由相邻两阶梯透射的光，在法线方向（$\theta=0$）的光程差为$(n-1)t$，其中 n 为板的折射率；在其他方面（$\theta\neq 0$），相应的光程差为$(n-1)t+\theta d$. 因而，透射式阶梯光栅的光栅方程式为

$$(n-1)t+\theta d = k\lambda. \tag{10-29}$$

同样，参考图 10－28，求得反射式阶梯光栅的光栅方程式：

$$2t-\theta d = k\lambda. \tag{10-29a}$$

对于 $t=1.0$ cm，$d=0.1$ cm 的阶梯光栅，由此两式可算出在法线方向上汞绿光的主最大的级次分别为 9×10^3 和 36×10^3，后者为前者（透射，$n=1.5$）的四倍. 若阶梯数 $N=20$，则它们的分辨本领分别为 180 000 和 720 000. 这已达到一般刻痕光栅所能达到的最高分辨本领（400 000）的数量级，甚至还超过些.

不过由于阶梯光栅在制造上相当困难，所以在几十年前还没有被广泛地应用，只是在一些基础较好的专门研究室内使用过. 这种光栅在许多方面都与法布

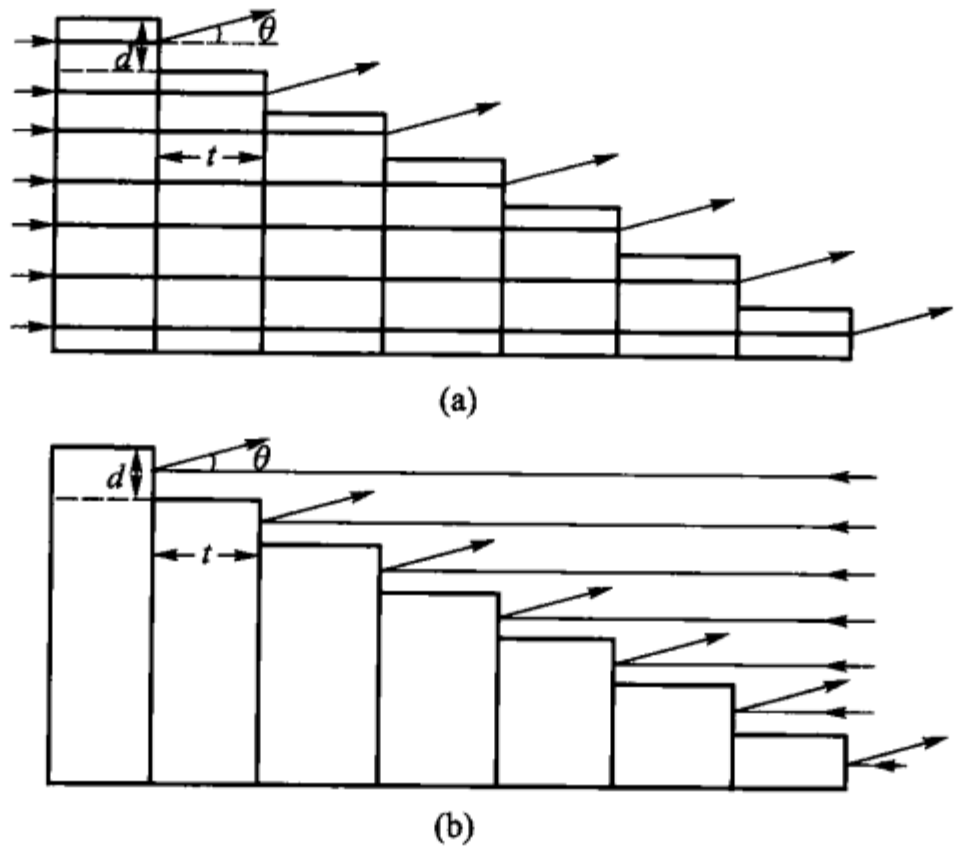


图 10－28

里－珀罗标准具相似，用途也相同. 不过，反射式阶梯光栅不论什么波段，分辨本领都不变，而法布里－珀罗标准具由于其反射面的反射本领随波长而异，致使分辨本领在短波方面有所下降.

§10－7　晶体的 X 射线衍射

虽然 X 射线早在 1895 年就被伦琴(Röntgen)发现了，但它的波长直到 1913 年还没有准确地测定过. 曾有实验指出，X 射线是波长在 10^{-8} cm 数量级的电磁波，而这一数量级与某些固体内的原子间隔相同. 劳厄(Max van Laue)在 1913 年想到，如果在晶体内的原子是有规则排列的，则它可当作对 X 射线的三维光栅(空间光栅). 弗莱特里希(Freiderich)和奈平(Knipping)实验的成功，既证明了 X 射线是一种电磁波同时亦证明了晶体内原子是等间隔排列的. 因而在当时，晶体的 X 射线衍射现象成为物理学家研究晶体结构和测量 X 射线波长的很有力的工具.

图 10－29 所示为食盐(NaCl)晶体内的原子分布的模型，其中黑圈代表钠原子，白圈代表氯原子. 图 10－30为此晶体的一个截面图，在通过晶体而平行于 *aa*、*bb*、*cc* 等的平面上有大量等间隔的原子. 这些等间隔的平面与上节所述的平面光栅上的狭缝相应.

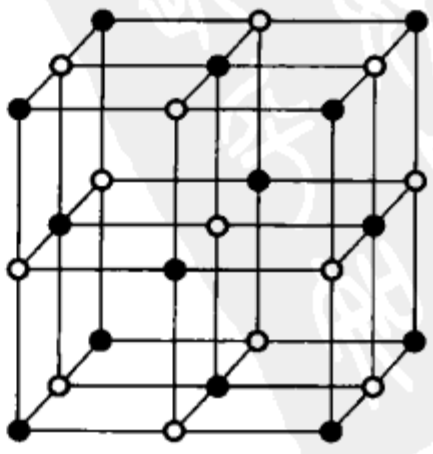


图 10－29

布拉格(Bragg)对晶体的 X 射线衍射作了如下所述的简明解释：当一束 X 射线射到晶体上时，自晶体

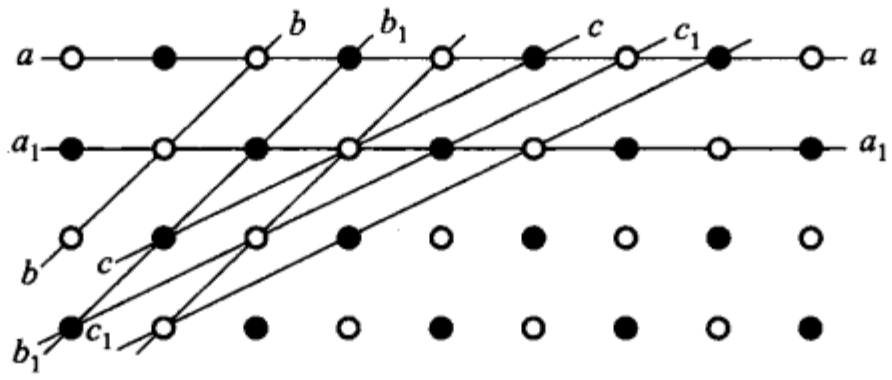


图 10－30

内的每一个如图 10－30 所示的平面上，反射一部分射线，并且反射角等于入射角. 不过这反射是由于散射而产生的. X 射线在晶体中所生的散射现象，如同光在气体中所产生的散射，两者间唯一的不同，是气体中的分子处于自由运动状态，杂乱无章的排列，而晶体中的分子是固定的，有规则的排列. 当入射的 X 射线通过晶体时，使晶体原子内的电子产生受迫振动而成为次波的振源. 如果晶体平面是一个光学平面，则这些次波合成的结果将在某一反射方向产生最大的干涉强度.

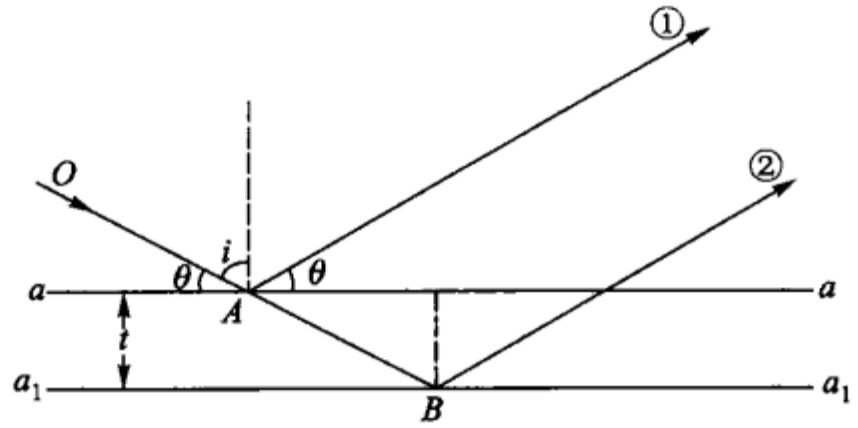


图 10－31

设图 10－31 中的水平线代表晶体的两个平面（例如图 10－30）的 aa 和 a_1a_1），直线 OAB 为入射的平行 X 射线束中的一射线，它与晶体平面的夹角 θ 称为掠射角. 自 A 点有一部分反射，B 点亦有一部分反射，在其余各平面的相应点均有一部分反射，若这些自相互平行的平面上反射的射线在某一掠角的情况下有一相同的相位，则在相应的方向上有最大，亦即图 10－31 中的射线①和射线②的光程差等于所用 X 射线波长 λ 的整数倍的方向上，有最大强度的反射，参考图 7－15，求得在图 10－31 中的①和②光线的光程差为

$$\Delta = 2t\cos i,$$

其中 i 为射线的入射角；t 为晶体内相邻原子的间隔；当把晶体看做三维光栅时，此 t 值为该光栅的光栅常数. 而在习惯上，对于 X 射线衍射，多采用掠射角 θ，因而上式写成

$$\Delta = 2t\sin\theta.$$

所以产生最强反射的方向，应满足下式：

$$2t\sin\theta = k\lambda, k = 1,2,3,\cdots, \tag{10-30}$$

此式称为布拉格公式. 由此可见,X 射线在晶体中的衍射与光栅的衍射不同,它只有在衍射角等于入射角的方向上,才产生加强反射,而在其他方向上,衍射光很弱,实际上等于没有. 因此为获得 X 射线光谱,当晶体的方位固定时,要用连续光入射,这样其中总有一种波长能符合布拉格公式,产生加强反射. 而在单色光照射时,转动晶体或用粉末晶体,可以找到合适的 θ 角,来满足布拉格公式.

在实验中,如果已知晶体的常数 t,则由确定最强反射的掠射角 θ,即可由式(10-30)算出所用 X 射线的波长 λ;反之,如果已知入射的 X 射线的波长 λ,则由确定产生最强反射的掠射角 θ,即可算出所用晶体的常数 t. 利用上述原理,可制成将不同波长的 X 射线分开的装置,这种装置称为 X 射线摄谱仪.

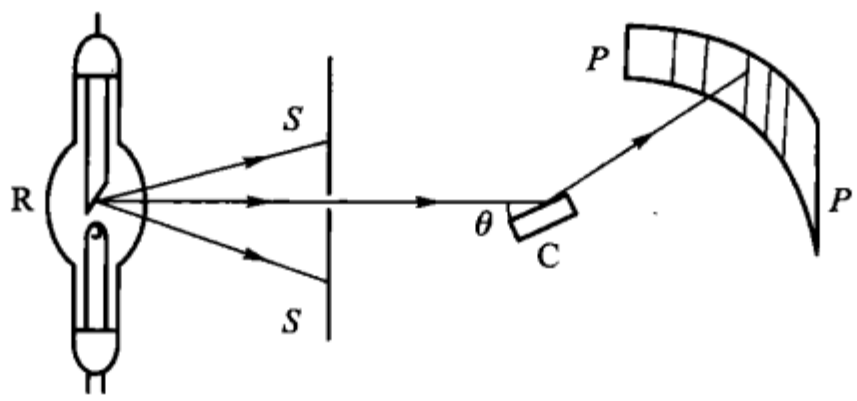


图 10-32

X 射线摄谱仪的装置如图 10-32 所示,其中 R 是 X 射线管,SS 是有狭缝的铅质光阑. 从此缝分出很细的一束 X 射线,射到一个可绕垂直于图面(平行于狭缝)的轴旋转的晶体 C 上,在沿以晶体的旋转轴为中心的圆弧 PP 上放感光胶片.

假如入射到晶体 C 上的 X 射线含有不同波长($\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots$)的射线,则当掠射角 θ 对于某波长 λ_i 满足式(10-30)时,自晶体面即发生最强的反射,并在感光板相应的位置产生强度最大的感光. 继续转动晶体时,可以依次地得到波长为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots$ 的反射线. 若光阑狭缝很窄,且平行于晶体的反射面,则感光板上显影后变黑的地方呈线状,而整个照片与一般光栅所得的光谱相似.

此外,还有用晶体粉末代替上述单晶体 C 而获得 X 射线谱的所谓粉末法摄谱仪. 这种方法的装置如图 10-33 所示,其中 C' 是用细的晶体粉末压成的圆柱体. 如果用某一波长的 X 射线通过这圆柱体 C′,则在这无规则取向的无数个小晶体中,总有数目亦是相当大的小晶体与入射 X 射线所构成的掠射角 θ 对于该波长满足布拉格公式(10-30),于是,在与原射线方向成 2θ 的方向,产生该波长的最强反射,在感光片 PP 上得到以原射线方向为轴,半顶角为 2θ 的圆锥体的截线. 对于不同的级次 k,有半顶角 2θ 不同的相应截线(弧). 图 10-34 即为用粉末法,对波长 $\lambda = 0.153\ 9$ nm 的 X 射线,通过常数 $t = 0.351\ 8$ nm 的晶体获得

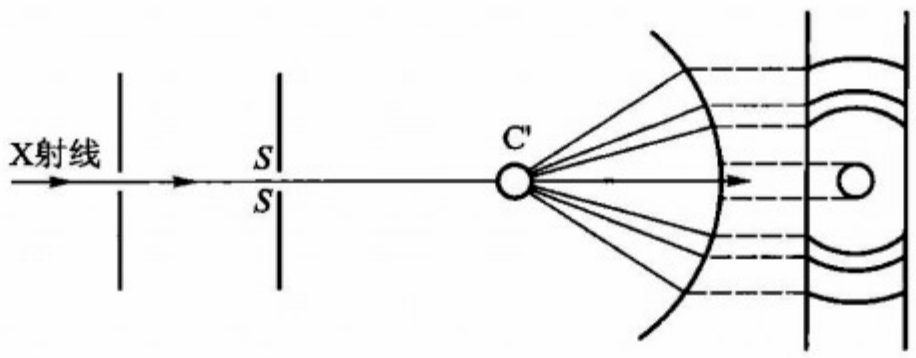


图 10-33

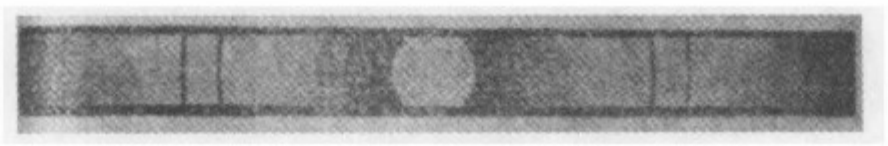


图 10-34

的 X 射线谱图.

显然,利用这两种摄谱仪装置,一方面可以测量 X 射线的波长,反过来亦可确定晶体的构造,现在应用 X 射线来分析晶体的构造已发展为一个专门的学科——X 射线结构分析,或称伦琴射线结构分析.

§10-8 莫阿条纹

用光栅常数相差不多(或完全相等)的两片透明光栅重叠在一起并且令它们的刻痕间有一定的夹角,在光波照明下,则在它们之间便产生一组明暗相间的条纹,我们称它为莫阿条纹(moire fringe). 在图 10-35 中,1、2、3、4、…代表一光栅常数为 d 的透明光栅Ⅰ,1′,2′,3′,4′,…代表一光栅常数为 d' 的透明光栅Ⅱ,d 与 d' 相等或相差不多,两光栅刻痕以一定的夹角 θ 重叠在一起,图中 M_{S1},M_{S2},M_{S3},…所示的粗线组即为莫阿条纹. 在明亮的背景下,眼睛向这样的一对光栅望去即可看到莫阿条纹. 由于实际上这两光栅的光栅常数 d 和 d' 较前面所讲的衍射光栅的光栅常数大得多并且也比背景光的波长大得多,所以在简单的讨论中可不考虑光的波动效应而只注意其几何效应.

在图 10-35 中,莫阿条纹的条纹间隔 m 与光栅Ⅰ和Ⅱ的光栅常数 d 和 d' 间有如下的几何关系:

由平行四边形 $ABCD$ 的面积 ΔS,我们有

$$\Delta S = |AD| \cdot m = |DC| \cdot d = |DB| \cdot d', \tag{10-31}$$

由余弦定律,则有

$$|BC|^2 = |AD|^2 = |DB|^2 + |DC|^2 - 2 \cdot |DB| \cdot |DC| \cos\theta. \tag{10-32}$$

由上两式可得 m 和 d,d' 的关系式:

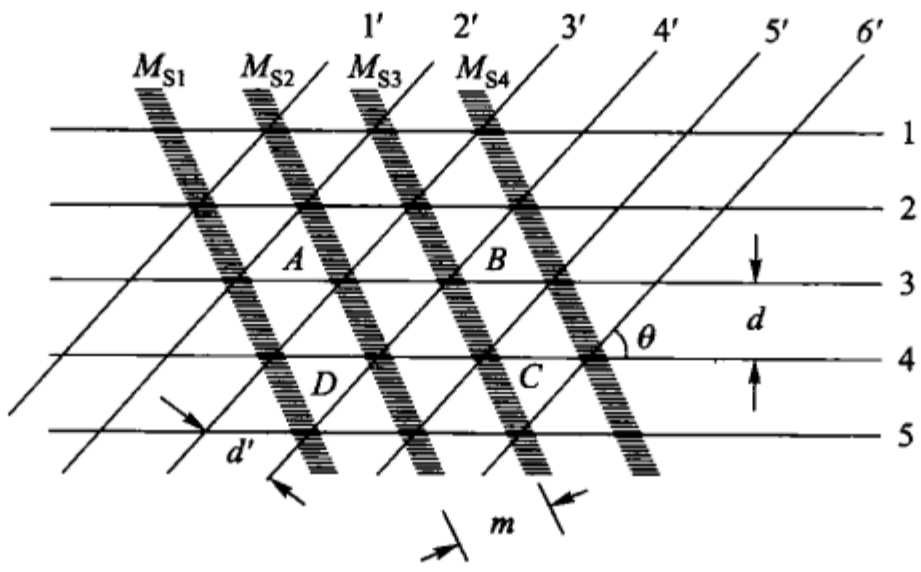


图 10－35

$$m = \frac{dd'}{\sqrt{d^2 + d'^2 - 2dd'\cos\theta}}. \tag{10-33}$$

可见，对于给定的两片光栅，莫阿条纹的间隔 m 取决于两光栅的刻痕的夹角 θ. 当 θ 角很小时，$\cos\theta \approx 1$，

$$m = \frac{dd'}{|d - d'|}. \tag{10-34}$$

这个 m 值可以是相当大的.

若两光栅有同样大小的光栅常数（$d = d'$），则（10－33）式成为

$$m = \frac{d}{\sqrt{2(1 - \cos\theta)}},$$

利用三角函数关系式

$$\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}} = \sin\frac{\theta}{2},$$

所以得

$$m = \frac{d}{2\sin\theta/2}. \tag{10-35}$$

如果光栅Ⅱ固定不动，而将光栅Ⅰ相对于光栅Ⅱ作一微小位移，例如恰恰移动了等于 d 的一段，则莫阿条纹将移动一段等于 m 的距离. 一个小的位移产生了一个放大 m/d 倍的莫阿条纹的位移，莫阿条纹表现了“位移放大器”的作用. 利用这一点可来测量微小的长度和角度，在过去的几十年来这种计量技术有很大的发展，已用于精密仪器及精密机床中；各种各样的产生莫阿条纹的装置的发展正在引起人们愈来愈大的兴趣.

习　　题

1. 某天文台反射式天文望远镜物镜的通光孔径为 2.5 m，试求能被它分辨的双星的最小

夹角($\lambda = 550$ nm),并且与人眼相比,求在分辨本领方面提高的倍数.

2. 在 50 km 外有两只弧光灯,今用一通光孔径为 40 mm 的望远镜观察它们,并在物镜前置一可调节宽度的狭缝,缝的宽度与两光源连线平行,令狭缝由满孔径逐渐减小宽度,发现当宽度等于 30 mm 时两光源刚能分辨开,狭缝再变窄就分辨不清了. 试根据所述情况求两只弧光灯的距离,假定有效波长 $\lambda = 600$ nm.

3. 一架油浸显微镜恰可分辨每毫米 4 000 条线的明暗相间的线组,已知照明光的波长为 435.8 nm,并假定任意相邻线条都是非相干的,试求物镜的数值孔径(N. A.).

若所用的油液的折射率为 1.52, 求入射光的孔径角.

4. 一个用汞 h 光($\lambda = 404.7$ nm)的,像差校正完善的微缩制版物镜,能分辨每毫米 1 000 条线的线组,问该物镜的最大相对孔径是多少?

5. 迎面而来的汽车的两个头灯相距为 1 m,问在汽车离多远时它们刚能为人眼所分辨?假定瞳孔直径为 3 mm,光在空气中的波长 $\lambda = 500$ nm.

6. 试由式(10 - 10)证明夫琅禾费双狭缝衍射图样的振幅分布为

$$y = C'2a\frac{\sin\dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}{\dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}\cos\frac{\pi(a+b)\sin\theta}{\lambda}.$$

7. 一束波长 $\lambda = 600$ nm 的平行光垂直射到透射的平面光栅上,在与光栅法线成 45°角的方向观察到该光的第二级光谱,问该光栅每毫米多少刻痕?

又若此时能分辨与 600 nm 相差 ±0.1 nm 的光谱,问光栅的宽度至少该多少毫米?

8. 在上题中若准光物镜的焦距为 250 mm,为不降低所能得到的分辨本领,问线光源的最大宽度应多少?

9. 如果上题中的线光源是由被照明的狭缝实现的,当狭缝宽为 0.3 mm 时,为保持上题中同样的分辨本领,问准光物镜的孔径和光栅的宽度该多少毫米?

10. 一束 400 ~ 700 nm 的可见光的平行光垂直地射到光栅常数为 0.002 mm 的透射平面光栅上,为了投射物镜 L_2(图 10 - 22)的焦面上得到该波段的第一级光谱的长度约为 50 mm,问物镜 L_2 的焦距至少应该多少毫米?

11. 一块闪耀波长为第一级 500 nm 的,每毫米刻痕为 1 200 的光栅,在如图 10 - 17 及图 10 - 27 所示的利特罗自准系统中,能看到 500 nm 的哪几级光谱? 并绘一简图说明之.

12. 若上题利特罗自准物镜的焦距为 2 m,入射光是可见光(400 ~ 700 nm),问它的第 1 级光谱在感光板上所占的总宽度多少厘米?

13. 已知岩盐晶体的格子 $d = 0.28$ nm. 用波长为 0.144 nm 的 X 射线射到光滑的岩盐晶体面上,在按图 10 - 32 所示的实验装置中求第一级和第二级最大的位置.

14. 在如图 10 - 35 所示的莫阿光栅中,假定两光栅的光栅常数相同,问当两光栅取向的夹角 θ 为多少度时方能得到莫阿条纹的间距为光栅间距的 10 倍? 与照明光的波长有无关系?

第十一章

信息光学概要

近几十年来光学中有几个特别引人注目的课题，如光学传递函数、光学信息处理及全息照相等，它们已成为今日光学前沿阵地的一个重要组成部分. 在光学中，不论在理论上还是在实际应用中，它们已是不能避而不谈的内容了. 另一方面，前面已学过了光的干涉、衍射和几何光学的一般原理，数学课中又学了傅里叶分析，有了这些基础，我们对上述近代光学的内容作一初步的学习已完全具备了条件. 所以本章以“信息光学”命名作一扼要介绍.

“信息光学”一词对一般初学光学的人，确实是个陌生的字眼，而不像波动光学和几何光学那样顾名思义地容易理解，这可能主要是我们对“信息”一词不太熟悉之故. 其实，信息是电信中早已采用的术语，一个电信号可以看做是一个携带着信息的时间序列. 这个观点同样适用于光学：一幅图像——一个两维的光场分布也可以看做是两维空间序列，信息寓于其中，即一幅图像就是一种光学信息. 这样，就可以从信息传递的观点来对光学系统进行研究，例如对成像系统的特性可借助光学传递函数来分析. 对于光学信息，我们可用光学方法进行各式各样的综合处理，例如：模糊图像的改善，特征识别，信息的抽取、编码、存储以及含有加、减、乘、除、微分等数学运算作用的数据处理，这类技术称光学信息处理或称光学数据处理. 而光学信息的全息记录和像的重现的技术称为全息照相. 所以这里用信息光学这个名词来包括光学传递函数、光学信息处理和全息照相等内容，不至于太不合适.

对经典光学中的一些概念用信息光学所建立的概念和方法来研究，可以使人们在一个新的高度上来分析和综合光学现象. 这不仅具有理论上的意义、产生概念上的飞跃，而尤其重要的，是由此产生了许多重要的应用. 不妨说，正是这些内容才给沉寂一时的光学带来了新的活力.

基础光学教学参考书中写进这些内容在国外近几十年新出版的光学书中已经相当普遍. 我们写这些内容并不是让所有学生都去学它，而只是为那些有余力者提供一些参考读物和对于那些将进入相关专业的一般学生提供一些入门的学习资料.

* §11-1 光学传递函数

在近代光学中用傅里叶变换和线性系统理论来研究光学系统已取得了很大的成功,光学传递函数是其中一个很突出的例子.我们想通过介绍光学传递函数来初步接触傅里叶变换和线性系统理论,并且也从应用的角度来了解光学传递函数在一般成像光学系统中的重要意义.为便于与前两章所讨论的内容相衔接,下面准备先介绍一下像质评价的问题,然后再直接讨论与光学传递函数有关的各基本内容.

1. 像质评价与光学传递函数的产生

像质评价就是对实际光学系统的成像质量的优劣作出客观判断的问题.正确的判断方法可以识别光学系统的优劣并指导系统的设计和制造.然而,怎样的方法才是正确的呢?

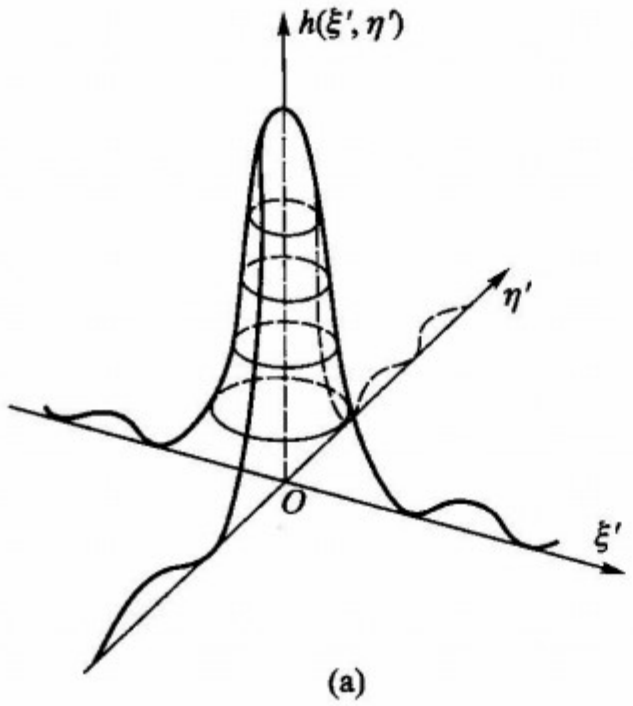
以前,主要用点光源在光学系统像面上产生的衍射图样或用对特殊测试板能分辨的两条线之间最近距离的倒数——分辨本领来评价光学系统成像的质量.但是这两种方法都有缺点:前者与光学系统的使用条件很不密切,大量一般光学系统的物并不是一个点光源而是扩展的面光源(下称广延物),同时由于有像差的系统所成的衍射图样很复杂,以至于很难作定量的计算和测量;后者虽然和使用条件有一定的联系,但实际上发现它跟物面的光强度分布、照明光的性质(相干还是不相干)以及接收器的性能等有关,并且在某些情况下它基本上不反映系统像差的大小,甚至出现"伪分辨",等等.

为了克服上述方法中的缺点,需要寻求一个建立在牢靠的理论基础上并且与实际能联系起来的方法.1946 年法国人杜斐尔(P. M. Duffieux)的著作《傅里叶变换和它在光学中的应用》给这方面带来了很大的推动.1948 年美国人谢德(O. Schade)第一次应用光学传递函数的观点来评价电视摄像系统的成像质量,给后来的工作以很大的启发.20 世纪 50 年代和 60 年代有许多人,诸如 H. H. Hopkins, R. L. Lambert, L. R. Baker, Linfoot, M. Francon 等做了大量的理论的和实验工作.现在,光学传递函数概念已被普遍地接受并且应用于光学设计结果的评价、控制光学自动设计的过程、光学镜头质量的检测以及光学信息处理等方面,特别是在光学仪器的设计、制造和使用之间,它提供了共同的技术语言和统一的评价标准.

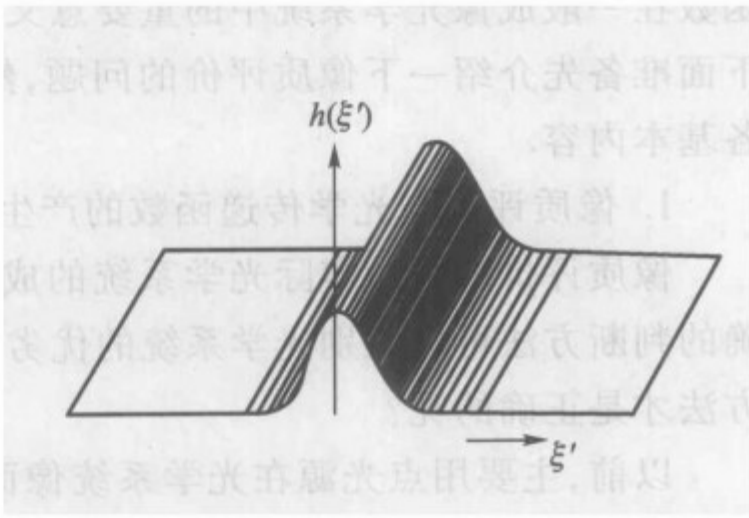
2. 点扩散函数和线扩散函数

由前两章关于衍射的讨论可知:对于一个点光源,即使用无像差的光学系统来成像也是一个有一定大小的衍射斑,在实际光学系统内,加上像差、元件和工艺的缺欠以及杂散光等因素的影响,像点扩散为一个弥散斑.当以三维的坐标来

表示弥散斑的光能分布时，可以得到如图 11－1(a)所示的“山包”. 如果物平面上点的坐标为(ξ,η)，像平面上点的坐标为(ξ',η')，则描写“山包”的光能分布函数$h(\xi',\eta')$即称为点扩散函数. 显然，这个函数反映着所属光学系统的衍射、像差以及一切造成光能扩散的因素的总合效果.



(a)



(b)

图 11－1

对于物平面内的一条线光源，在像平面上的光能分布如图 11－1(b)所示，对它的截面写出的函数$h(\xi')$称线扩散函数. 显而易见，线扩散函数是由在一条直线上的无数个点的点扩散函数的集合而成的.

3. 广延物的像　线性系统

为了数学上的简便，我们先来讨论一维的情况.

设在物平面上位于ξ_1处有一条光强度为I_1的亮线，则像面上将有一个由系统线扩散函数决定的光强分布：

$$I_1' = I_1 h(\xi' - \xi_1), \tag{11-1}$$

如图 11－2(a)所示. 如果物平面上在ξ_1和ξ_2两处各有一条亮线，光强度分别为I_1和I_2并且它们之间是独立的(不相干)，则像面上的总光强度分布取决于所用光学系统的基本特性. 我们假定光学系统有这样的性质：在光学系统中，与I_1对应的仅有一个I_1'，并且I_1'与I_2对应的唯一的I_2'之间没有相互作用，合成的光强度只由叠加原理来决定. 这样，对所述两亮线，在像面上的光强度分布为

$$I' = I_1' + I_2' = I_1 h(\xi' - \xi_1) + I_2 h(\xi' - \xi_2). \tag{11-2}$$

此外，我们还假定所讨论的光学系统具有这样的性质：像面上各点的线扩散函数都一样，即无论物面上的哪一点，它在像面上都产生同样的弥散斑，即$h(\xi' - \xi_1)$和$h(\xi' - \xi_2)$有相同的函数形式$h(\xi' - \xi)$，光学系统的这种性质称空间不变性. 显然，只有满足等晕(isoplanatic)成像条件的光学系统才有空间不变性，而不是任何光学系统或同一光学系统的随便多大的成像范围都具有这种空间不变

性的.

必须强调指出,具有空间不变性的而又能进行由式(11－2)表示的叠加的光学系统称之为线性系统.

对于线性的光学系统,式(11－2)可改写成

$$I' = I_1' + I_2' = I_1 h(\xi' - \xi) + I_2 h(\xi' - \xi), \qquad (11-3)$$

如图 11－2(b)所示,可见它是由两弥散斑光强的叠加而成最后的光强分布.

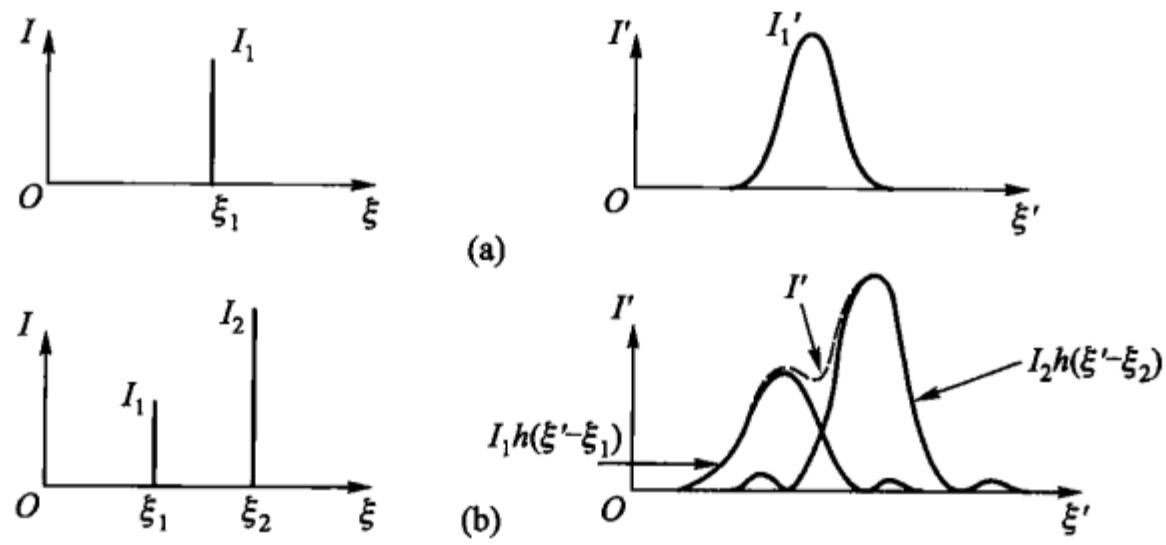


图 11－2

于是,对于物平面上一个连续的光强分布 $I(\xi)$——广延物,若光学系统是线性系统,则像平面上的光强分布——广延物的像应为

$$I'(\xi') = \int_{-\infty}^{\infty} I(\xi) h(\xi' - \xi) \mathrm{d}\xi. \qquad (11-4)$$

此式在数学上叫做函数 $I'(\xi')$ 等于函数 $h(\xi' - \xi)$ 对函数 $I(\xi)$ 的卷积(convolution),也就是,广延物的像是(线)扩散函数对物函数的卷积. 对照图 11－2(b)可推知式(11－4)的物理意义:像面上的照度是由无数个形状相同的而峰值高度和位置按 $I(\xi)$ 分布的弥散斑叠加的结果. 图 11－3 以光强度正弦分布的广延物为例,给出了式(11－4)的图解:第一排表示正弦分布的物函数 $I(\xi)$,第二排分别给出三种不同的线扩散函数 $h(\xi' - \xi)$,第三排表示 $I(\xi)h(\xi' - \xi)$,第四排为合成的像函数 $I'(\xi')$,它的每一点的光强度都是由对该点有贡献的所有 $I(\xi)h(\xi' - \xi)$ 叠加而成的.

4. 调制度　光学传递函数的概念及其应用

用眼睛来观察一个广延物或用光电接收器来检测由光学系统所成的广延物的像,物中细节能否被鉴别或分辨决定于该细节的光强度相对其背底光强度高出或低下的程度. 例如,在照度暗弱的室内可以清楚地看电影或电视,而在明亮的阳光照射下或照度很高的室内,同样的电影和电视就看不清楚;无月夜晴空可见满天星斗,白天却一个不见,都是这个道理. 所以,实际上人们是依靠像的调制度的大小来看到和分辨物体的. 所谓调制度(modulation),就是第七章所述的可见度,不过在这里换了一个名词罢了. 调制度用 M 表示:

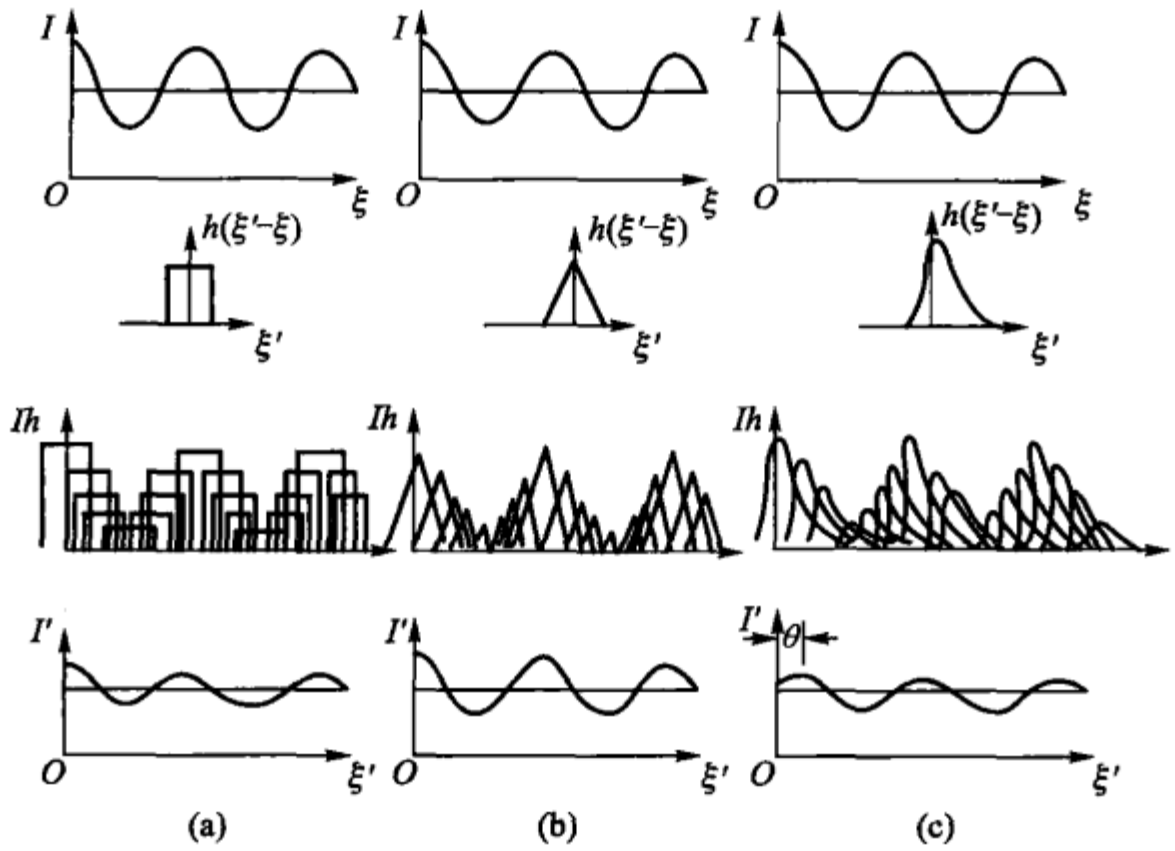


图 11 - 3

$$M = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \tag{11 - 5}$$

其中 I_{max} 和 I_{min} 就是物面或像面上的最大光强度和最小光强度. 图 7 - 7(a)所示的情况,其调制度最大,$M = 1$;图 11 - 4 所示的情况,其调制度最小,$M = 0$. 从这个观点来看,前述瑞利判据是指对 $M = 1$ 的两独立物点的分辨,而在大量常见的 $M \neq 1$ 的低调制度的情况下,瑞利判据就失去了它本来的意义,因而不能应用于所有的光学系统.

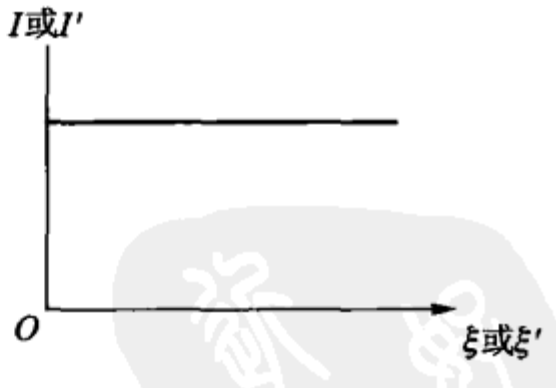


图 11 - 4

当将普遍应用于电信系统的傅里叶分析法应用于成像的光学系统时,可以证明:若光学系统是线性系统,则对于一个非相干的、光强度按正弦分布的物,由光学系统给出的像仍然是同一频率的正弦分布,只不过像的调制度较物的调制度有所下降,像的相位相对于物的相位有所移动;并且像调制度降低的程度和相位移动的数量取决于正弦分布的物中单位长度内光强度起伏的数目——空间频率和光学系统的(线)扩散函数. 这一结论,在无线电网络中相当于给网络输入一个正弦波信号,所得输出的信号,亦为同频率的正弦波,只不过输出波形的调制度有所下降,相位有所移动;并且输出波形的调制度和相移是信号频率的函数. 光学系统和电网络系统从信息传输的角度来看没有实质性的区别,只不过在光学系统中研究的是空间光强分布,电网络系统研究的是时间信号.

从上述结论看到,对任一给定的光学系统,由它传递的像的调制度和相移是

物的空间频率的函数,这个函数称为光学传递函数(optical transfer function,简写为 OTF),它的具体形式表征了光学系统成像的特性. 所以用 OTF 来判断某一给定光学系统的成像是否合乎实际使用的要求和用它来比较不同光学系统在成像性能方面的优劣,现在已被认为是比较客观的和比较基本的方法.

下面让我们用一维的简单情况来导出上述结论:

设物面的光强度分布如图 11-5 所示,写成物函数

$$I(\xi) = a + b\cos(2\pi N\xi), \tag{11-6}$$

其中 N 为空间频率.

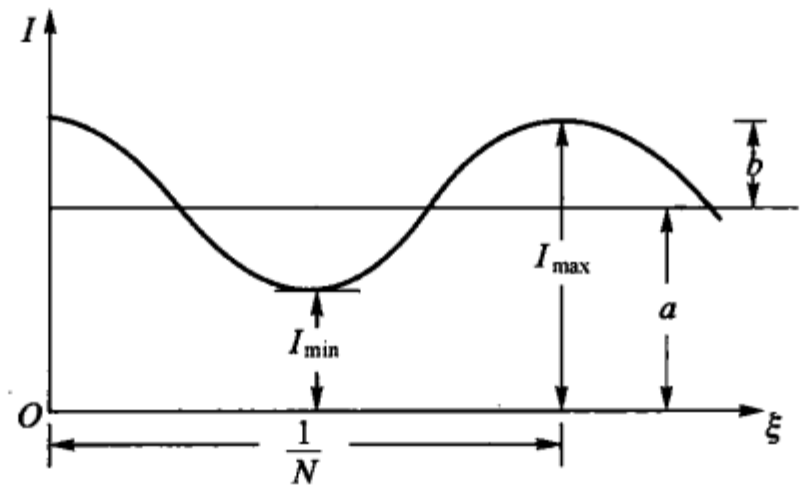


图 11-5

显然,当 $\cos(2\pi N\xi) = 1$ 时,

$$I = I_{max} = a + b;$$

当 $\cos(2\pi N\xi) = -1$ 时,

$$I = I_{min} = a - b.$$

代入式(11-5),得物的调制度为

$$M_0 = \frac{(a+b)-(a-b)}{(a+b)+(a-b)} = \frac{b}{a}. \tag{11-7}$$

对满足线性系统条件的光学系统成的广延物的像,由式(11-4)得

$$I'(\xi') = \int_{-\infty}^{\infty} I(\xi)h(\xi'-\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi'-\xi)[a + b\cos(2\pi N\xi)]\,\mathrm{d}\xi$$

作自变量更换,令 $\delta = \xi' - \xi$,即 $\xi = \xi' - \delta$,则有

$$I'(\xi') = \int_{-\infty}^{\infty} h(\delta)\{a + b\cos[2\pi N(\xi'-\delta)]\}\,\mathrm{d}\delta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\delta)\{a + b[\cos(2\pi N\xi')\cos(2\pi N\delta) + \sin(2\pi N\xi')\sin(2\pi N\delta)]\}\,\mathrm{d}\delta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} ah(\delta)\,\mathrm{d}\delta + b\cos(2\pi N\xi')\int_{-\infty}^{\infty} h(\delta)\cos(2\pi N\delta)\,\mathrm{d}\delta$$

$$+ b\sin(2\pi N\xi')\int_{-\infty}^{\infty} h(\delta)\sin(2\pi N\delta)\,\mathrm{d}\delta. \tag{11-8}$$

其中第一项的积分可取为 a，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\delta)\,\mathrm{d}\delta = 1. \tag{11-9}$$

此式的物理意义就是将光强度为 1 的亮线的像所包含的总光能取作光能单位. 于是上式变为

$$\begin{aligned} I'(\xi') &= a + bH_c(N)\cos(2\pi N\xi') + bH_s(N)\sin(2\pi N\xi') \\ &= a + bT(N)\cos\left\{2\pi N\left[\xi' - \frac{\theta(N)}{2\pi N}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{11-10}$$

式中不含 ξ' 的系数 $H_c(N)$ 和 $H_s(N)$ 分别为

$$\begin{aligned} H_c(N) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\delta)\cos(2\pi N\delta)\,\mathrm{d}\delta, \\ H_s(N) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\delta)\sin(2\pi N\delta)\,\mathrm{d}\delta. \end{aligned} \tag{11-11}$$

这两式，从数学上看，$H_c(N)$ 是线扩散函数 $h(\delta)$ 的傅里叶余弦变换，$H_s(N)$ 是线扩散函数 $h(\delta)$ 的傅里叶正弦变换. 参照图11-6可得

$$T(N) = \{[H_c(N)]^2 + [H_s(N)]^2\}^{\frac{1}{2}}; \tag{11-12}$$

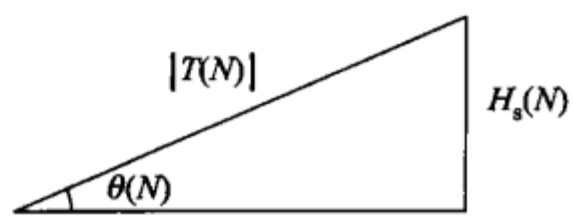


图 11-6

$$\theta(N) = \arctan\frac{H_s(N)}{H_c(N)}.$$

所以，由比较式(11-6)和式(11-10)得出：对于光强度为正弦分布的物，经线性光学系统成的像仍然是同一空间频率(N)的正弦分布，像的调制度降低 $T(N)$ 倍，因为像的调制度

$$M_i = \frac{bT(N)}{a} = M_0T(N); \tag{11-13}$$

亦即像的调制度值等于物的调制度与 $T(N)$ 的乘积. 并且相位移动了

$$\Delta\xi' = \frac{\theta(N)}{2\pi}. \tag{11-14}$$

回过头来再看图 11-3 的三组图，实际上它们对这个结论作了很好的说明，并且还可进一步看到，形状对称的线扩散函数[如图 11-3(a)和(b)]不产生相移，$\theta(N)=0$；形状不对称的线扩散函数[如图 11-3(c)]产生相移，$\theta(N)\neq 0$.

$T(N)$ 称为调制(度)传递因子，$\theta(N)$ 称为相位传递因子，它们跟空间频率 N 的关系函数分别称为调制传递函数(modulation transfer function，简记 MTF)和相位传递函数(phase transfer function，简记为 PTF). 根据图 11-6，以 $T(N)$ 为模和

以 $\theta(N)$ 为相角的复数

$$\begin{aligned} H(N) &= T(N)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(N)} \\ &= H_c(N) - \mathrm{i}H_s(N) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\delta)\cos(2\pi N\delta)\,\mathrm{d}\delta - \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} h(\delta)\sin(2\pi N\delta)\,\mathrm{d}\delta, \end{aligned}$$

应用欧拉公式,则有

$$H(N) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\delta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi N\delta}\mathrm{d}\delta. \tag{11-15}$$

此 $H(N)$ 即为光学传递函数(OTF),它表明,光学系统的 OTF 就是光学系统线扩散函数的傅里叶变换.

对于一般的光学系统的线扩散函数,其傅里叶余弦变换——即 MTF 跟空间频率的关系曲线多呈如图 11-7 所示的曲线,这曲线称 MTF 曲线. 随着空间频率的递增,MTF 值递减,当减到 MTF 值为零时,物的调制度 M_0 无论多大,像的调制度亦为零,这时光能接收器再也不能"检测"或"感知"像的结构,与此对应的空间频率称为光学系统的截止频率 N_0. 换言之,低于此截止频率 N_0 的空间频率才能通过光学系统成像,所以说,光学系统是一个低通滤波器.

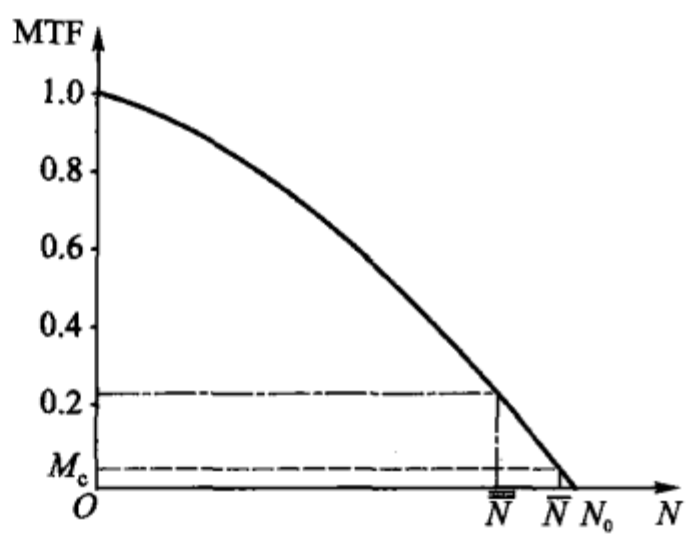


图 11-7

实际上,任何实际的光能接收器都有一个能感知的调制度阈值 M_c(如图 11-7中的虚线,高于此阈值(虚线)的才能被分辨或鉴别. 与调制度阈值 M_c 对应的空间频率 $\bar{N}$ 即为相应光学系统的实际分辨极限. 例如,瑞利判据的条件,其相应的调制度 $M_i \approx (1-0.8)/(1+0.8) = 0.22$,由此为判据所确定的分辨本领即图 11-7 中的 $\bar{\bar{N}}$,它与人眼实际的调制度阈值[$M_{ic} = (1-0.95)/(1+0.95) \approx 0.03$]所对应的实际分辨极限有明显的差别.

由 MTF 曲线还可以看出:无论用截止频率还是用实际分辨极限,一个指标是不能充分地表征光学系统成像性能的,只有用整个曲线才能完成像质评价的任务. 例如,图 11-8 有两条 MTF 曲线,要判断哪一条曲线所代表的光学系统质量更好些,单纯从截止频率 N_{10},N_{20}

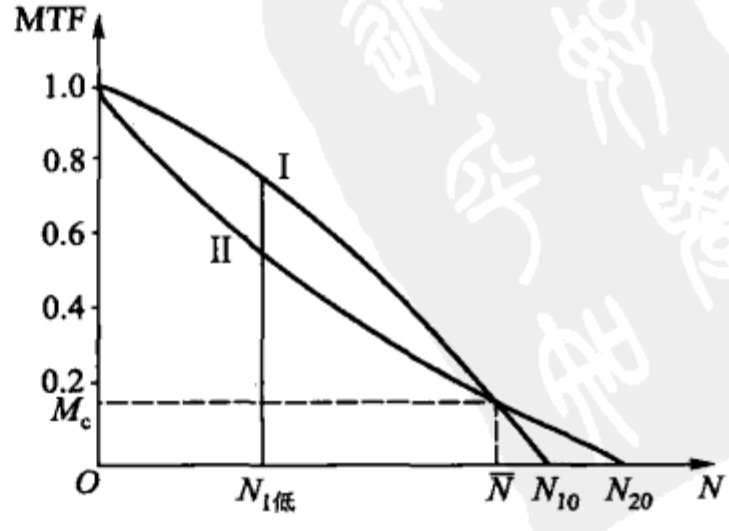


图 11-8

的大小来评价就不妥,需根据系统的使用目的来权衡调制度和分辨本领的相对重要性. 如电视摄像用的镜头,它并不需要很高的分辨本领,却要求能对较低调制度的物和景获得层次尽可能丰富和对比度明显的像,为此以曲线 I 所代表的镜头为好,因为它对低频的调制传递函数高;相反,如用于光刻的镜头,由于它的目标物都是调制度高的黑白线条或图案(如印刷线路),而对于像的要求主要是要分辨本领尽可能地高,为此,以曲线 II 所代表的为宜.

5. 光学传递函数的测量

根据上面讨论过的关于光学传递函数的基本定义和光学传递函数与线扩散函数的关系,自 1955 年以来,相继提出了许多测量光学传递函数的方法,这里主要介绍其中比较常用的扫描法. 扫描法还分光学傅里叶法,光电傅里叶法和数字计算傅里叶法. 兹分别简述如下.

(1) 光学傅里叶法

按光学传递函数的基本定义,作一个光强度正弦分布的目标——正弦板,用被测的光学系统将正弦板成像,然后在像面上用狭缝扫描,用光电倍增管接收,测出像的调制度和相位移动,于是就得到被测系统的 MTF 和 PTF,如图 11 - 9(a)所示. 或者反过来,用非相干光照明狭缝,用被测的光学系统将狭缝成像,然后在像面上用正弦板扫描狭缝的像,光电倍增管接收,如图 11 - 9(b)所示,其效果与图 11 - 9(a)完全一样.

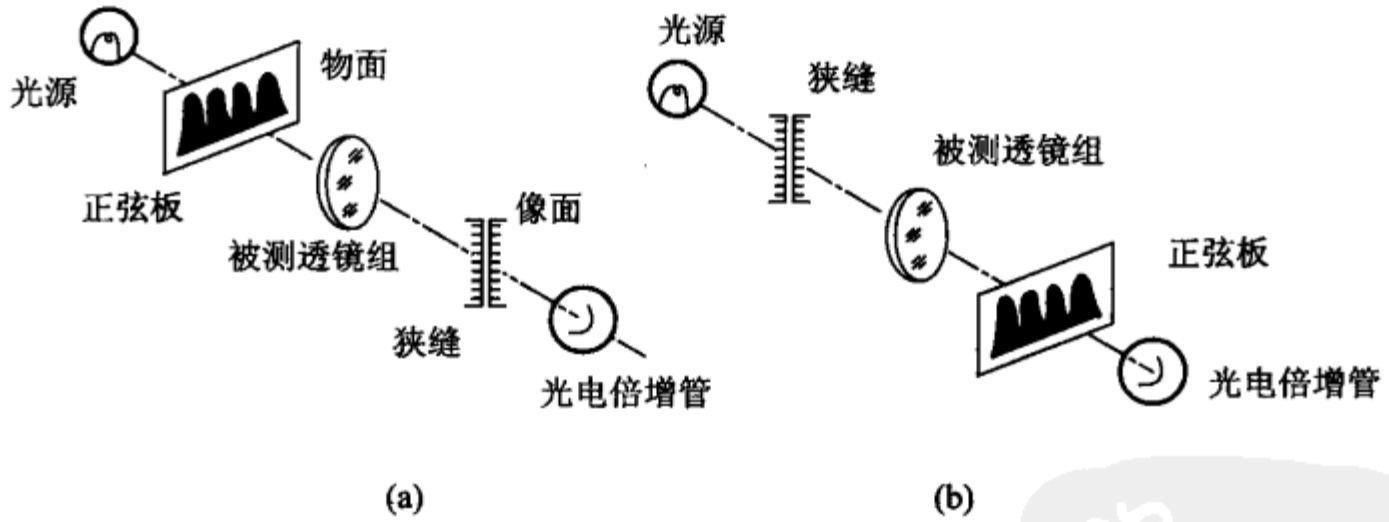


图 11 - 9

上述正弦板有密度型正弦板[如图 11 - 10(a)]和面积型正弦板[如图 11 - 10(b)]两种. 密度型正弦板是由一个狭缝和旋转偏振片(见第十三章)在照相底片上曝光而得,当偏振片以一定速度旋转,每转半周底片以匀速度移动一个 $1/N$ 的距离时,底片上就得到空间频率为 N 的正弦分布的光强度. 这就要求底片的 γ 值等于 1,而严格地达到这一点并不很容易. 图 11 - 10(a)是三条为一组的不同频率 N 的密度型正弦板.

为制面积型正弦板可以在一张白纸上先画正弦曲线,并且曲线内涂黑,然后由一个无畸变照相物镜和高反差的底片翻拍复制即得正弦板[图 11 - 10(b)].

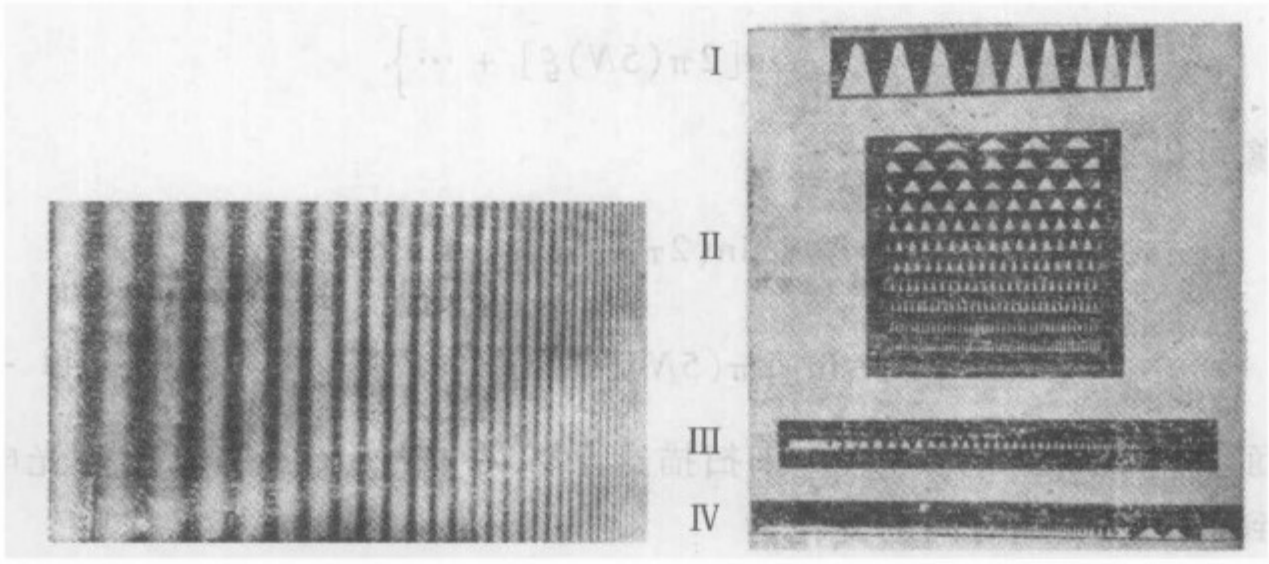


图 11-10

为了减少绘图的困难,高频部分可以用低频部分再经照相复制. 图中所示正弦板的空间频率是按一定的几何级数排列的,图中Ⅲ和Ⅳ的一端的方孔是为归一时用的,代表零频率. 为得连续变频的正弦板可用变焦距的物镜来实现.

(2) 光电傅里叶法

为避免制作正弦板的困难和提高测量的精度,用容易制作的形状简单的矩形板(图 11-11)加上电学滤波器滤去高次谐波代替正弦板扫描,这就是光电傅里叶法.

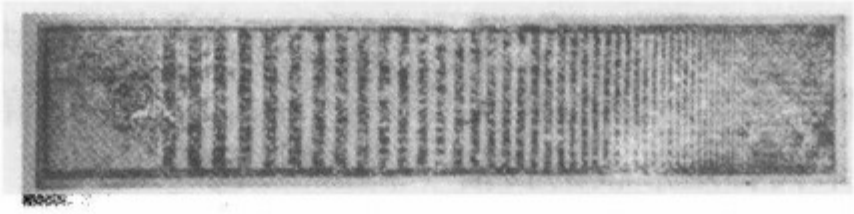


图 11-11

从数学上的傅里叶级数看,光强度的矩形分布 $I_\tau(\xi)$ 可以看成是无数个正弦分布叠加的结果[图 11-11(b)]:

$$I_\tau(\xi) = \frac{4}{\pi}\left\{\sin(2\pi N\xi) + \frac{1}{3}\sin[2\pi(3N)\xi]\right.$$

$$+\frac{1}{5}\sin[2\pi(5N)\xi]+\cdots\Big\}.$$

而它的像可以表示为

$$I_r'(\xi')=\frac{4}{\pi}T(N)\Big\{\sin(2\pi N\xi)+\frac{1}{3}\sin[2\pi(3N)\xi]+\frac{1}{5}\sin[2\pi(5N)\xi]+\cdots\Big\}. \tag{11-16a}$$

若在像面上用一个狭缝以速度 v 来扫描这个像，$\xi=vt$，令 $f=Nv$. 于是，光电倍增管上收到的光强度随时间的变化为

$$E_r(t)=\frac{4}{\pi}\Big\{T(N)\sin(2\pi ft)+\frac{1}{3}T(3N)\sin[2\pi(3f)t]+\frac{1}{5}T(5N)\sin[2\pi(5f)t]+\cdots\Big\}. \tag{11-16b}$$

用一个电学滤波器，它只让基频(f)通过，于是，该电学滤波器的输出就是一个频率为 f 的正弦信号，它的振幅和相位分别给出了系统的 MTF 和 PTF.

在光电傅里叶法中也可以用莫阿条纹提供的三角形光强分布来代替矩形板(图 11-12)；并且由于莫阿条纹的空间频率为

$$N=\frac{1}{d}\sin\frac{\theta}{2} \tag{11-17}$$

可以由改变两块莫阿光栅的夹角 θ 较容易地实现变频. 当一块光栅相对于另一块光栅沿着垂直于光栅刻线方向移动时，莫阿条纹就沿着 θ 角的平分线方向移动，这个性质可用来代替矩形板的扫描.

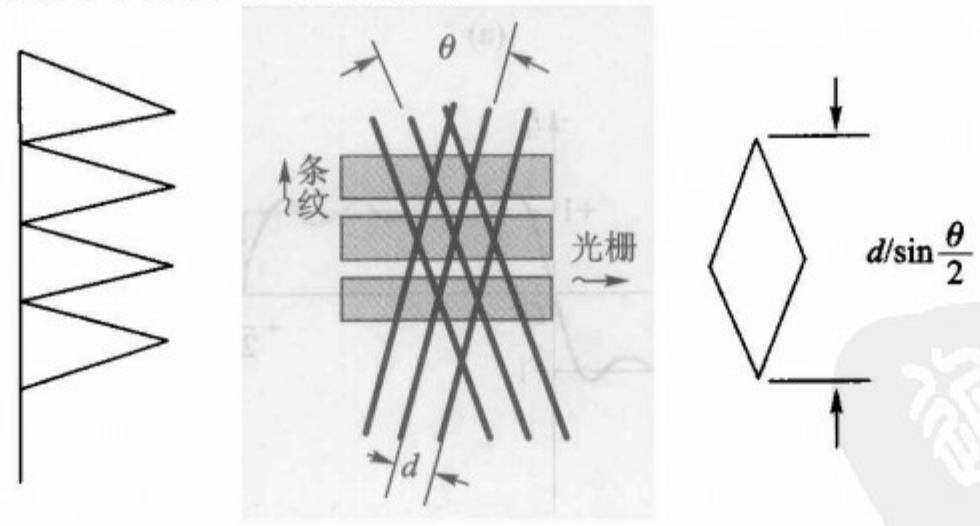


图 11-12

(3) 数字计算的傅里叶法

由(11-15)式已知，光学传递函数是光学系统的线扩散函数的傅里叶变换，所以，可以先扫描测量出被测光学系统对一狭缝成像的光强度分布，然后用电子数字计算机对所得光强分布(线扩散函数)完成其傅里叶变换即得光学传递函数.

最后，应该注意 OTF 并不限于镜头而且可应用于任意的平面和平面系统、反射镜、望远镜、显微镜及其他各种光学仪器；OTF 也能用于感光乳剂（photographic emulsions），光学纤维系统以及电视系统. 总之，光学传递函数可应用于任意的实质上属于信息传递的线性光学系统.

§11－2　阿贝成像理论及其实验

在前一节通过对光学传递函数的讨论，我们已初步看到应用线性系统和傅里叶变换的概念在分析成像系统的性能方面十分有用. 但是，如果这些概念仅限于分析的目的才有用，那么它们在近代光学中的地位将远没有它们今天实际上所享有的地位那么重要. 它们真正的重要性，应该说，主要在于将这些概念应用于光学信息处理（optical information processing）中所显露出的“综合”作用方面.

光学信息处理这个课题所包含的内容太广泛了，不可能在这里进行全面的讨论. 我们在这里只打算给出几个典型的例子，以便从概念上了解其物理意义. 阿贝（Abbe）成像理论及波特（A. B. Porter）实验，虽然早在 1873 年和 1906 年已分别完成，但是这些工作确实可认为是今日光学中广泛应用的傅里叶变换的强有力的证明，也可说是开端.

1. 阿贝成像理论

阿贝的显微镜成像理论，不仅用傅里叶变换阐述了显微镜成像的机理，而更为重要的是首次引出频谱概念和二次衍射成像的概念.

图 11－13 表示显微物镜的成像，其中 SO 是物平面，用平行于光轴的相干光照明，L 是物镜，PO_P 是物镜的第二焦平面，H、H' 是物镜的两个主平面，$S'O'$ 是显微物镜的像平面. 设物镜的入瞳在物方无限远，PO_P 面为出瞳面. 入射的平面波通过透明物 $f(\xi,\eta)$ 之后由于受到物内各点的衍射，向前进的所有方向传播，假定物镜 L 足够大以至可以收纳所有从物 $f(\xi,\eta)$ 发出的光.

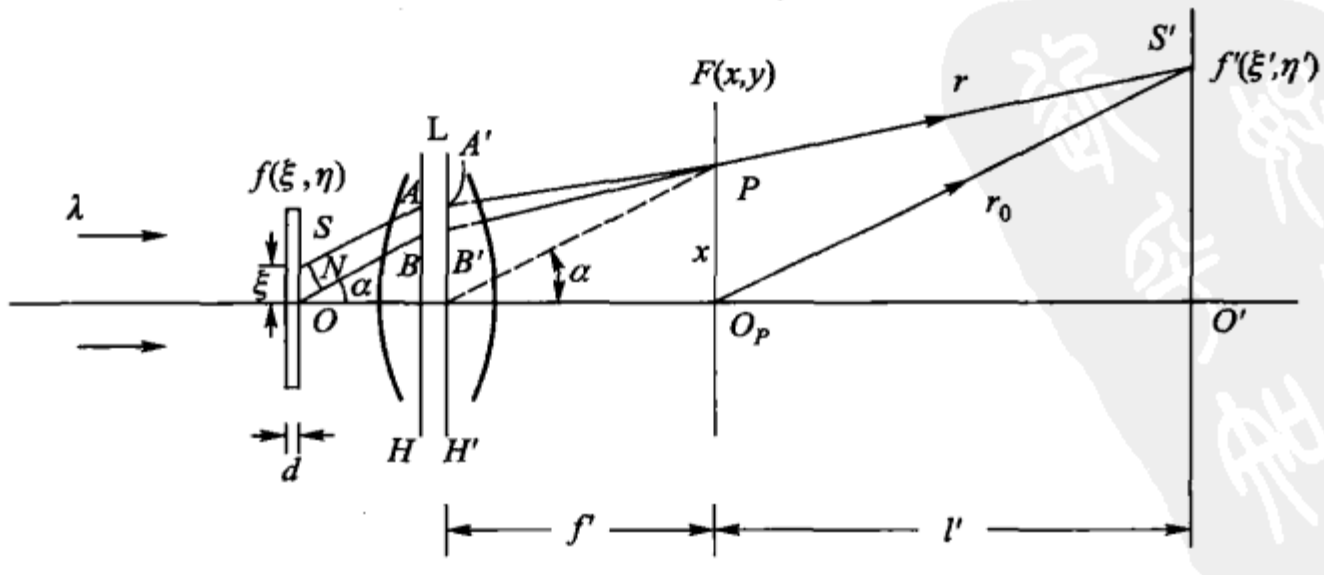


图 11－13

设 O 点的光振动方程式

$$A_0 = a_0\cos\omega t.$$

S 点的光振动方程式，则可写为

$$A_S = a_\xi\cos(\omega t + \delta_\xi),$$

其中 $\delta_\xi = 2\pi(n_\xi - n_0)d/\lambda$，为相干照明下物面上 S 点和 O 点的相位差，其中 n_ξ 和 n_0 分别为物在 S 点和 O 点的折射率.

让我们先来讨论光在子午面内的传播情况. 选与光轴成 α 角的两平行光线 SA 和 OB，在不计物镜像差的情况下所有与光轴成 α 角的平行光线都交于第二焦平面的 P 点，相邻光线在 P 点的相位差 δ_P 取决于它们在物平面上的相位差 δ_ξ 和两光线在 α 方向的光程差 $|ON|$. 如图 11 - 13 可知

$$|ON| = \xi\sin\alpha \approx \xi\frac{x}{f'},$$

其中 x 为 P 点在第二焦平面上的坐标，f' 是物镜的后焦距. 所以，物平面上任一点 S 贡献给第二焦平面上一点 P 的扰动的振动方程式可写成

$$A_P = a_\xi\cos\left(\omega t + \delta_\xi - \frac{2\pi\xi x}{f'\lambda}\right). \tag{11 - 18}$$

如果 S 和 P 不限于子午面，它们的坐标分别为 (ξ,η) 和 (x,y)，则 S 点贡献给 P 点的扰动的振动方程式可写成

$$A_P = a_{\xi\eta}\cos\left[\omega t + \delta_{\xi\eta} - \frac{2\pi(\xi x + \eta y)}{f'\lambda}\right]. \tag{11 - 19}$$

根据第九章讨论过的惠更斯 - 菲涅耳原理，P 点的振动 U_P 应该是物平面上所有振源在该点上扰动的总和，所以

$$U_P = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a_{\xi\eta}\cos\left[\omega t + \delta_{\xi\eta} - \frac{2\pi(\xi x + \eta y)}{f'\lambda}\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta, \tag{11 - 20}$$

积分的范围本应该是物体 $f(\xi,\eta)$ 所占的面域，但因除了这个面域之外 SO 平面上所有其他点的振幅皆为零，所以积分的上、下限可取由 $-\infty$ 到 ∞. 这个式子给出了物体第二焦平面上的振幅和相位分布——即物 $f(\xi,\eta)$ 的第一次衍射的像场分布，我们称它为物的频谱.

有了这个频谱，重复上面的计算过程，即可求出在几何共轭像平面 $O'S'$ 上的任一点 S' 的振动：

由 P 和 O_P 引两光线到 $S'(\xi',\eta')$ 点，则两光线在 S' 点的光程差

$$r - r_0 = \sqrt{(\xi' - x)^2 + (\eta' - y)^2 + l'^2} - \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + l'^2}$$

按照泰勒公式将根号内展开成级数，略去其中 x^2 和 y^2 项，则有

$$r - r_0 \approx -(x\xi' + y\eta')/l'.$$

于是，得 S' 点的光扰动方程式

$$U_{S'} = \iint_{\Sigma} a_{xy}\cos\left[\omega t + \delta_{xy} - \frac{2\pi(x\xi' + y\eta')}{\lambda' l'}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad (11-21)$$

其中 a_{xy} 和 δ_{xy} 为 $P(x,y)$ 的振幅和相位；Σ 代表出瞳的面积. 此式给出了物 $f(\xi,\eta)$ 的第二次衍射的像场分布，称为像函数.

为了简化以后的推导，现在把上面的简谐运动方程写成复数形式：

假使振动方程为

$$y = a\cos(\omega t + \delta),$$

则式的右端可用下面复数的实部表示：

$$ae^{\mathrm{i}(\omega t+\delta)} \quad 或 \quad ae^{\mathrm{i}\delta}e^{\mathrm{i}\omega t};$$

假使振动方程是

$$y = a\sin(\omega t + \delta),$$

则式的右端是下面复数的实部：

$$\frac{a}{i}e^{(\omega t+\delta)} \quad 或 \quad \frac{a}{i}e^{\mathrm{i}\delta}e^{\mathrm{i}\omega t}.$$

因子 $ae^{\mathrm{i}\delta}$ 和 $ae^{\mathrm{i}\delta}/\mathrm{i}$ 称为振动的复数振幅. 假使振动的复振幅为一般的二项式 $m+\mathrm{i}n$，则 m^2+n^2 等于振幅的平方，而比值 n/m 为振动相角的正切.

要得到由周期相同的几个振动合成的结果，应该将它们的复数振幅相加，并按前述方法求出合成振动的振幅和相位常数. 在这样计算时，式内不出现 t 和 ω.

现在我们令 $f(\xi,\eta)$ 代表物平面上的复振幅分布（$a_{\xi\eta}e^{\mathrm{i}\delta_{\xi\eta}}$）——物函数，$F(x,y)$ 代表物镜第二焦平面上的复振幅分布（$a_{xy}e^{\mathrm{i}\delta_{xy}}$）——频谱函数，$f'(\xi',\eta')$ 代表像平面上相应的复振幅分布——像函数，则式(11-20)和式(11-21)可改写为

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)\exp\left[-\mathrm{i}\frac{2\pi(\xi x+\eta y)}{f'\lambda}\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \qquad (11-22)$$

和

$$f'(\xi',\eta') = \iint_{\Sigma} F(x,y)\exp\left[-\mathrm{i}\frac{2\pi(\xi' x+\eta' y)}{l'\lambda}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (11-23)$$

在此，我们引入新变数

$$\nu_x = \frac{x}{f'\lambda}, \quad \nu_y = \frac{y}{f'\lambda}, \qquad (11-24)$$

这样做的物理意义是，将频谱面的坐标进行比例缩放，以便坐标值 ν_x,ν_y 与物平面上空间频率的 ξ,η 分量直接联系起来.

于是式(11-22)和式(11-23)变为

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)\exp[-\mathrm{i}2\pi(\nu_x\xi+\nu_y\eta)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta, \qquad (11-25)$$

和

$$f'(\xi',\eta') = \iint_{\Sigma} F(x,y)\exp\left[-\mathrm{i}2\pi(\nu_x\xi' + \nu_y\eta')\frac{f'}{l'}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad (11-26)$$

由于 $S'O'$ 平面是 SO 平面的共轭面，有关系式

$$\xi' = -\frac{l'}{f'}\xi \quad 和 \quad \eta' = -\frac{l'}{f'}\eta$$

以及出瞳面积 Σ 外频谱分布为零，所以式(11-26)变为

$$f'(\xi',\eta') = (f'\lambda)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)\exp[\mathrm{i}2\pi(\nu_x\xi + \nu_y\eta)]\mathrm{d}\nu_x\mathrm{d}\nu_y. \quad (11-27)$$

根据傅里叶变换的性质，作式(11-25)的傅里叶逆变换，得

$$f(\xi,\eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)\exp[\mathrm{i}2\pi(\nu_x\xi + \nu_y\eta)]\mathrm{d}\nu_x\mathrm{d}\nu_y. \quad (11-28)$$

比较式(11-27)和式(11-28)，则有

$$f'(\xi',\eta') = (f'\lambda)^2 f(\xi,\eta). \quad (11-29)$$

这样，物面和像面共轭点的复数振幅之比是常数，亦即像平面光振动的实数振幅和相位分布跟物平面上的准确地对应；像与物几何一致.

2. 阿贝－波特实验

历史上阿贝－波特实验所作的贡献自不必赘述，今天用激光作相干光来重复这样的实验是很容易的. 这种实验的一般作法如图 11-14 所示：用激光的宽平面波照明一细丝网格(如金属筛)，则在物镜的第二焦平面上呈现网格的傅里叶频谱，由各个傅里叶频谱分量的再组合则在像平面上得网格的像. 如果狭缝组(或透射光栅)代替网格，则在物镜的第二焦平面上得到的频谱就是前面讨论过的光栅光谱，零级在中央，正负各级依次分布在两侧，由各级光谱的再组合即在像面上得到光栅的像.

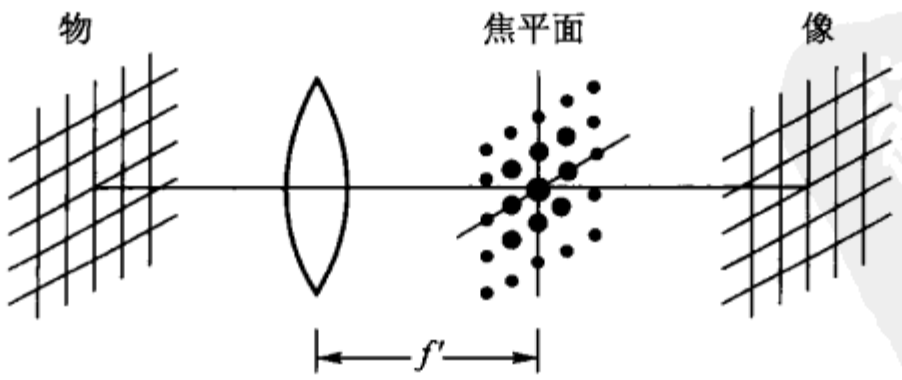


图 11-14

值得特别注意的，是用诸如狭缝、直条、小圆孔和小圆盘等拦截物放在频谱平面上，就能以各种不同的方式直接改变参与综合成像的频谱. 这些拦截物或与拦截物有相同性能的光学元件统称为空间滤波器.

图 11-15(a)为一个网格的频谱照片，由此未加任何修饰的频谱的再组合

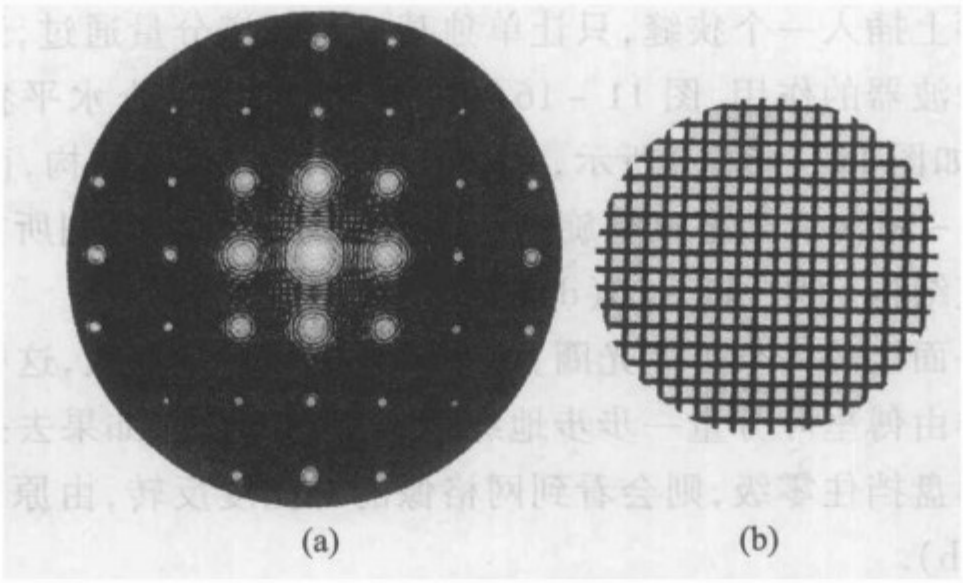


图 11－15

而给出的网格的像如图 11－15(b)所示. 从图中清楚地看到,整个频谱是由一系列分立的频谱分量构成的,而且每个分量都是一个衍射图样. 频谱面上水平轴上的亮斑对应于物的水平方向的复指数分量(式 11－25),垂直轴上的亮斑对应于物的垂直方向的复指数分量,不在轴上的亮斑对应于物平面上相应角度方向的分量.

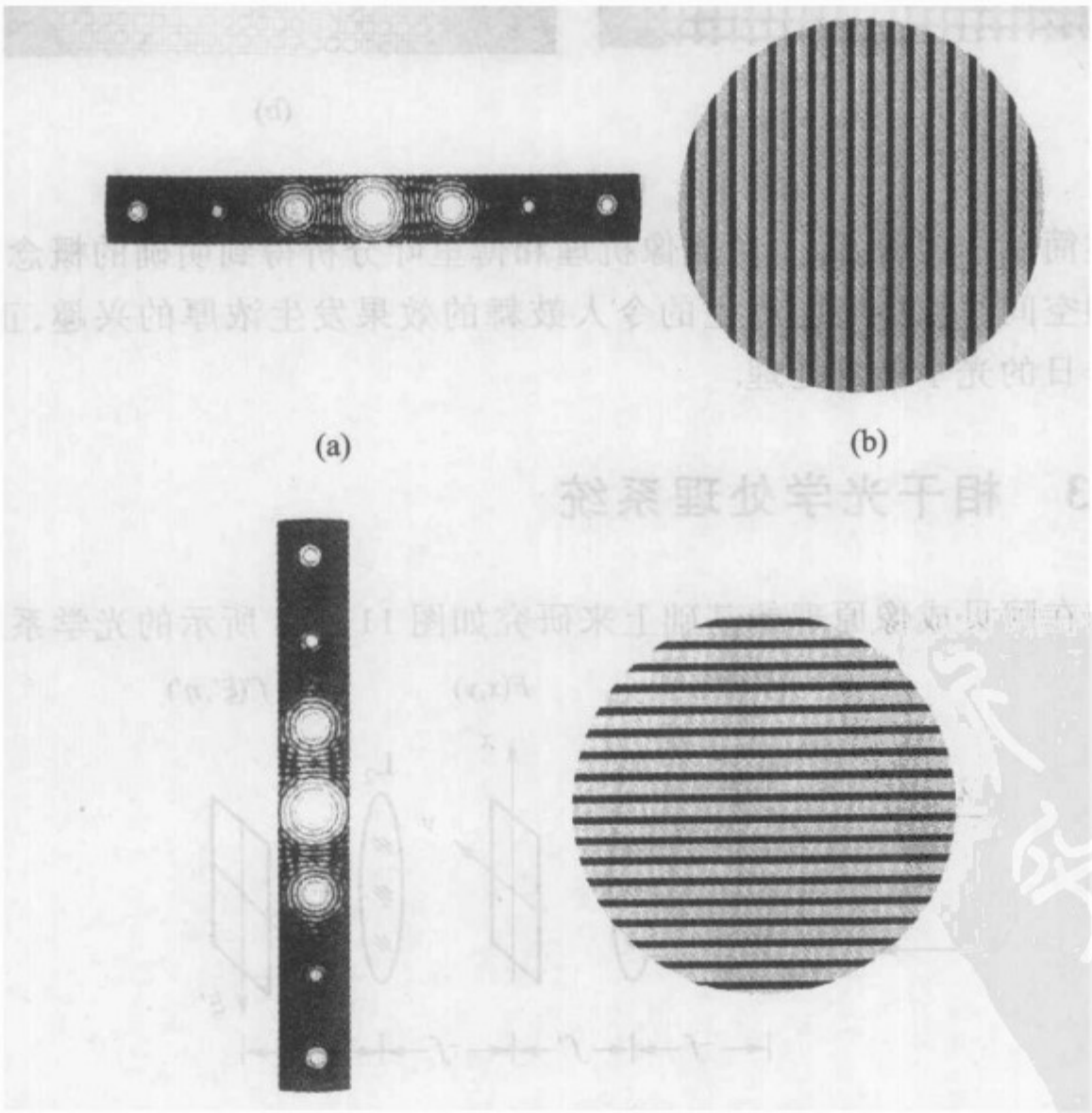
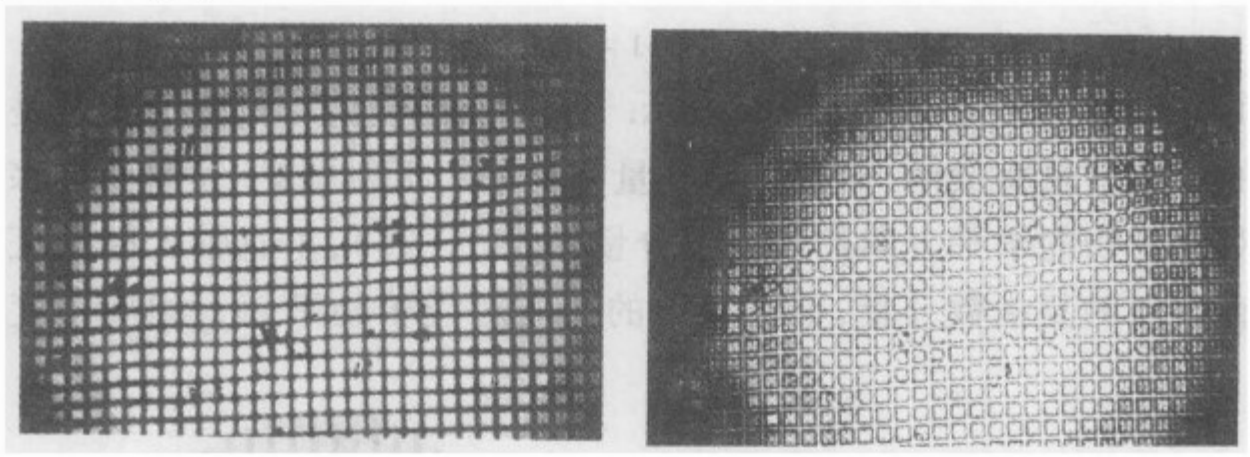


图 11－16

在频谱平面上插入一个狭缝，只让单独某一行频谱分量通过，这样就可以清楚地看到空间滤波器的作用. 图 11 - 16(a)所示为使用一个水平狭缝时透过的频谱，对应的像如图 11 - 16(b)所示，它只包含网格的垂直结构，而完全没有水平结构. 如图 11 - 16(c)，当把狭缝旋转 90°成为垂直狭缝时，则所得的像只有水平结构而无垂直结构，如图 11 - 16(d).

若在频谱平面上放一个可变光圈，使其圆孔由小逐渐变大，这样就可以看到网格的像是怎样由傅里叶分量一步步地综合出来的. 此外，如果去掉光圈而在光轴上放一个小圆盘挡住零级，则会看到网格像的对比度反转，由原图 11 - 17(a)变成图 11 - 17(b).



(a)　　(b)

图 11 - 17

由上述简单的实验，除了对成像机理和傅里叶分析得到明确的概念之外，自然还对应用空间滤波器所能产生的令人鼓舞的效果发生浓厚的兴趣，正是这一点孕育了今日的光学信息处理.

* §11 - 3　相干光学处理系统

让我们在阿贝成像原理的基础上来研究如图 11 - 18 所示的光学系统.

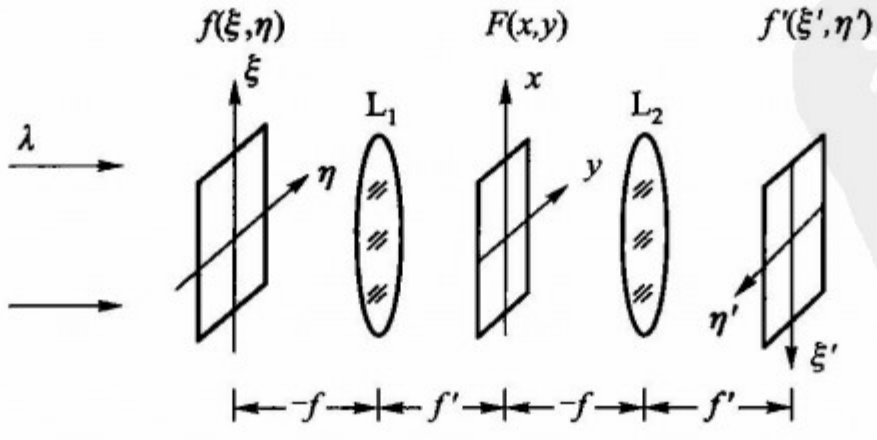


图 11 - 18

一束相干平行光通过复数振幅为 $f(\xi,\eta)$ 的物的衍射，在透镜 L_1 的第二焦平面上得到物的衍射图样——物的频谱，由前节的式(11 - 25)，可写为

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)\exp[-i2\pi(\nu_x\xi + \nu_y\eta)]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta. \quad (11-30)$$

以此频谱为物，它的夫琅禾费的衍射图样应在无限远，为避免空间过大的麻烦，引入透镜 L_2，则频谱的夫琅禾费衍射图样就可呈在 L_2 的第二焦平面上，按同一式(11-25)，此频谱的夫琅禾费衍射图样，可写为

$$f'(\xi',\eta') = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)\exp[-i2\pi(\nu_x\xi' + \nu_y\eta')]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于这个系统的 $f_1' = f_2'$ 并且物 $f(\xi,\eta)$ 所在的平面与像 $f'(\xi',\eta')$ 所在的平面共轭，所以有

$$\xi' = -\xi, \quad \eta' = -\eta$$

代入上式，则有

$$f'(\xi',\eta') = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)\exp[i2\pi(\nu_x\xi + \nu_y\eta)]\mathrm{d}x\mathrm{d}\eta. \quad (11-31)$$

这就是图 11-18 所示光学系统对物 $f(\xi,\eta)$ 成的像，但是，从数学上看，式(11-31)恰为式(11-30)的傅里叶逆变换. 所以，这样的光学系统能完成对输入的两维光场分布的物函数 $f(\xi,\eta)$ 的傅里叶变换和对它的频谱的傅里叶逆变换，而给出两维光场分布的像函数 $f'(\xi',\eta')$，有计算机的功能. 因而称这样的光学系统(图 11-18)为相干光学计算机(coherent optical computer)，$f(\xi,\eta)$ 和 $f'(\xi',\eta')$ 分别为计算机的输入数据和输出数据. 由于在频谱平面插入空间滤波器可以改变频谱函数，使这样系统有处理输入的光学数据的功能，所以又称相干光学处理系统(coherent optical processing system)，它是光学信息处理技术的基本光学系统之一.

所谓光学信息处理(optical information processing)，狭义来说，就是应用图 11-18所示的光学系统或相似的系统从物函数 $f(\xi,\eta)$，其频谱函数 $F(x,y)$ 以及像函数 $f'(\xi',\eta')$ 的相互关系出发，研究如何改变频谱以获得关于物函数中的有用信息和去掉其中无用的干扰课题；广义来说，就是用光学系统的线性变换特性来完成对输入数据 $f(\xi,\eta)$ 的变换计算，而给出所要求的输出数据 $f'(\xi',\eta')$.

* §11-4 光学信息处理举例

光学信息处理所包含的内容，由于近几十年来的发展已经很广泛，这里只能举几个简单的和脍炙人口的例子以说明其一隅.

1. 简单的空间滤波

(1) 图 11-19(a)是一张由“月球轨道飞行器 1 号”(Lunar Orbiterl)记录下来的许多条照相底片经过细工镶嵌的月亮的“合成照片”. 但还能明显地看到各条底片在相接处的水平方向的痕迹，它们与前面所述阿贝-波特实验中网格的

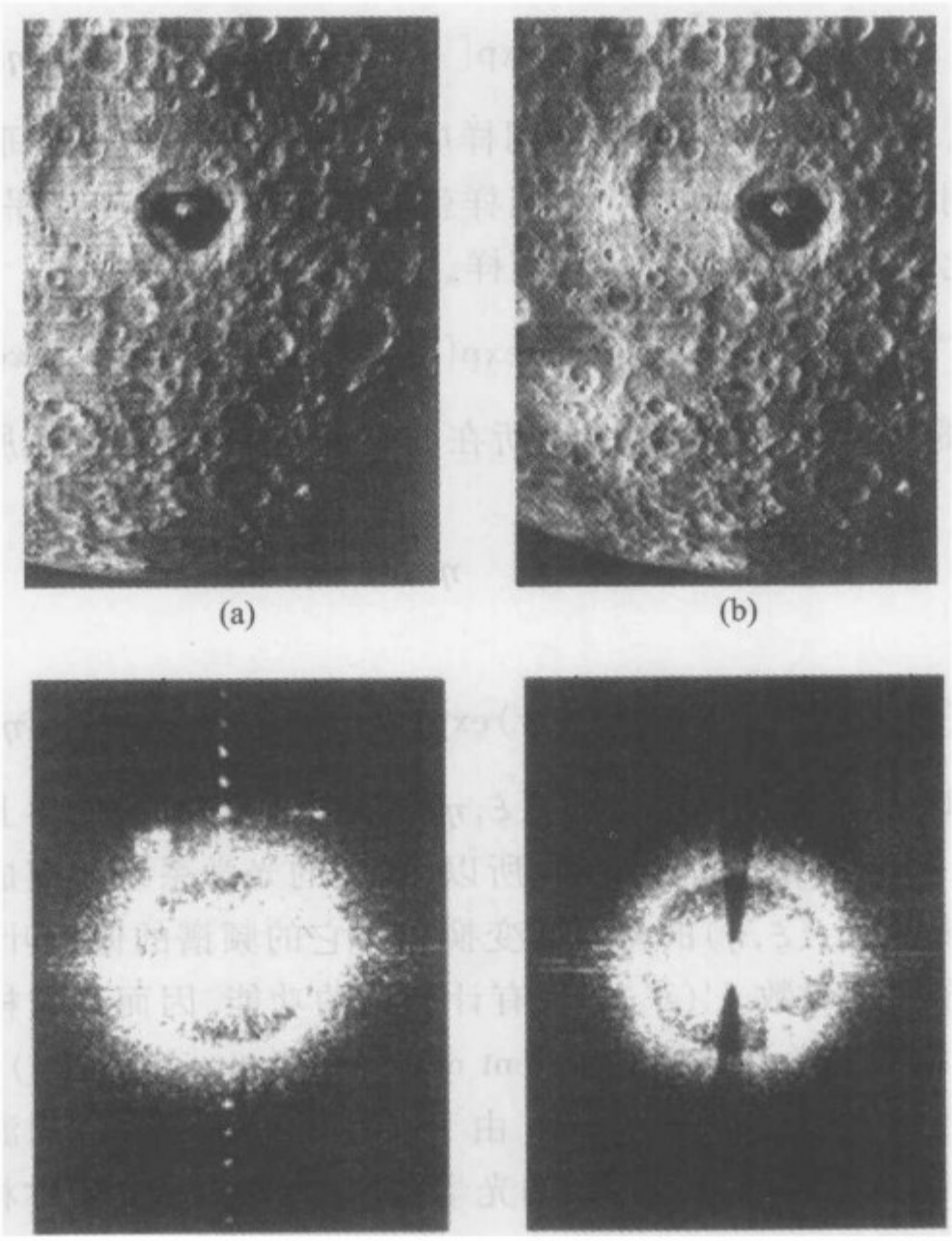
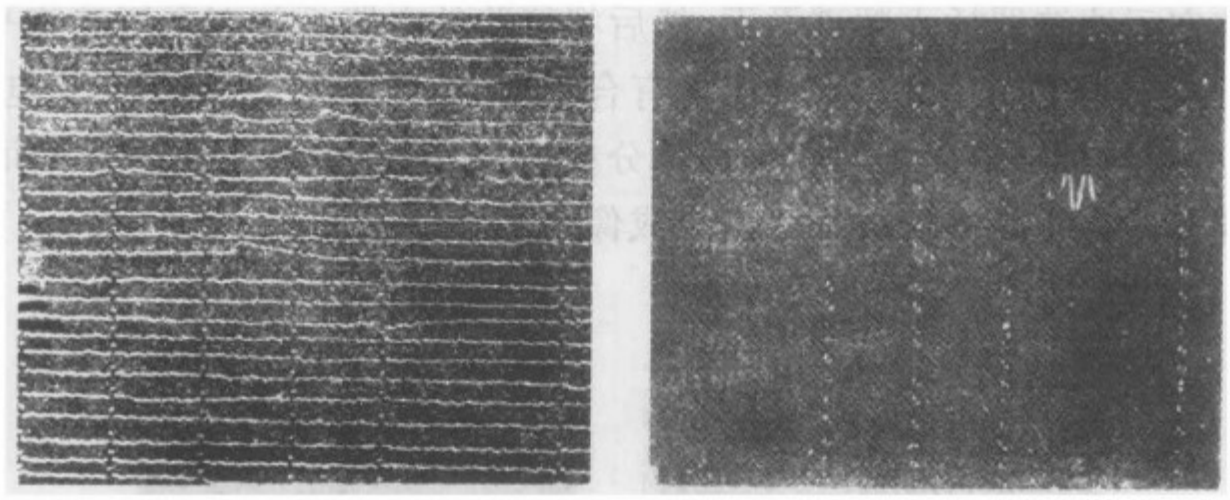


图 11 - 19

水平细线在实质上是相同的. 为了从图 11 - 19(a)的画面上除掉这些不必要的水平痕迹,可参照图 11 - 16 所示的原理采取相应的措施:在图 11 - 19(a)的频谱图 11 - 19(c)所在的平面上,用两个不透光的竖长条遮去频谱中纵坐标的绝对值较大的部分形成如图 11 - 19(d)所示的状态,这样再由相干光学处理系统第二透镜 L_2 进行傅里叶变换,得到的像 $f'(\xi',\eta')$ 中将不含水平痕迹,结果如图 11 - 19(b)所示.

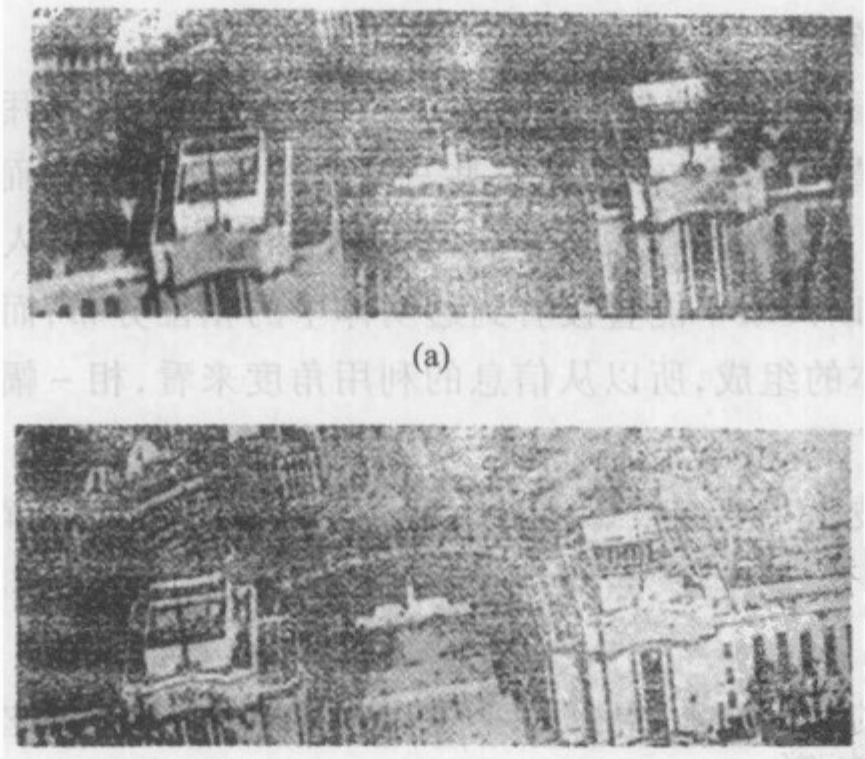
(2) 相类似的应用,还有对如图 11 - 20(a)所示的由 25 个信道记录下来的地震波的记录(透明照片)的光学信息处理. 在这张记录照片中有用的"数据"只是那些垂直方向上的信号. 杰克逊(Jackson)利用相干光学处理系统,在频谱面上插入一个能遮拦住垂直方向的高频分量的,与图 11 - 19(d)相似的空间滤波器,结果得到了如图 11 - 20(b)所示的照片. 对地质数据的这种处理(从大量的信息中抽取有用的信号)较用数字电子计算机快得多而且也经济,因为相干光学计算机的"计算过程"几乎是即时的(实时的).



(a) (b)

图 11-20

(3) 图 11-21(a)是一张细节和棱角比较模糊的照片. 马尔夏(Marechal)等人利用一个透过率沿半径方向递增的圆形空间滤波板,放在该(透明)照片的频谱平面上并令圆滤波板的中心与相干光学处理系统的光轴重合. 于是,频谱中低频部分的光强度被减弱而高频部分没有衰减或衰减得很少;结果,在透镜 L_2 的第二焦平面上所得的像中,景物的细节和棱角的对比度提高了,原来稍模糊的照片变成如图 11-21(b)所示的细节比较清楚的照片. 这是一个典型的光学图像质量改善的例子.



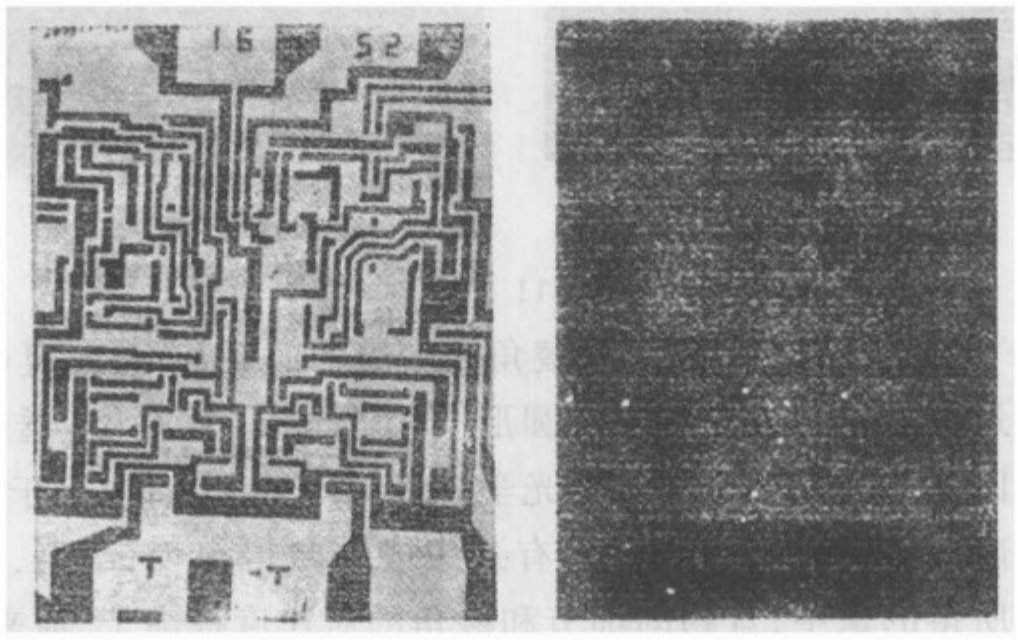
(a)

(b)

图 11-21

(4) 光学信息处理可以对检查大规模微型集成电路板中有无瑕疵提供一个简捷有效的方法. 图 1-22(a)是一张有斑点缺欠的微型电路的放大照片,图 11-22(b)是经过相干光学处理系统检查后在其像面上给出的只显现其斑点的照片. 对于斑点或其他不合格的结构无论有多少和位于何处都能给出一目了然的结果. 这种检查的一般做法,是先把标准无疵的电路板的频谱作成负片,并以

此负片作空间滤波器插入频谱平面，然后将待验的电路板放在系统的物平面，它的频谱由所说的空间滤波器滤掉了所有合格部分的频谱，于是，在待验电路板的频谱中，所有与标准电路板对应的那部分频谱都被上述滤波器挡住了，而只有让有缺欠部分的频谱在系统的像平面上成像.



(a)　　(b)

图 11 - 22

2. 相 - 幅转换

相位转换为振幅的滤波器(简称相 - 幅滤波器)的重要用处是把“相位物体”显现出来. 所谓相位物体就是指那些只有空间的相位结构而透明度一样的透明体，如生物切片、油膜、热塑以及声光偏转池等. 它们只改变入射光波的相位而不影响其振幅，所以人眼不能直接看到透明体中的相位分布，而常常是这些相位分布反映着该物体的组成，所以从信息的利用角度来看，相 - 幅转换给人类的视觉带来了很大的扩展.

显现相位的技术主要有纹影法(schlieren)、相衬法和第八章所述的，如迈克耳孙干涉仪等的干涉量度法，兹介绍纹影法和策尼克(Zernike)相衬法如下：

(1) 纹影法

纹影法所用的空间滤波器，实际上是一个简单的带拦，用它消去频谱中的零频部分和低频部分.

相位物函数 $f(\xi)$ 总可写成 $e^{i\varphi(\xi)}$ 的形式，$e^{i\varphi(\xi)}$ 又可作如下展开：

$$f(\xi) = e^{i\varphi(\xi)} = 1 + i\varphi(\xi) - \frac{1}{2}\varphi^2(\xi) - \frac{1}{6}i\varphi^3(\xi) + \cdots, \quad (11-32)$$

其中 $\varphi(\xi)$ 为实数，当它很小时，上式可近似为

$$f(\xi) = 1 + i\varphi(\xi). \quad (11-33)$$

若忽略相干光学系统有限孔径的影响，按式(11 - 30)，则物的频谱为

$$F(\nu_x) = \int_{-\infty}^{\infty} [1 + i\varphi(\xi)] \exp(-i2\pi\nu_x\xi)\,d\xi = \delta(\nu_x) + i\varphi(\nu_x). \tag{11-34}$$

若在频谱平面的光轴上置一个形为小圆盘的空间滤波器消去上式中的 $\delta(\nu_x)$ 项，只留下

$$F'(\nu_x) = i\varphi(\nu_x), \tag{11-35}$$

则按式(11-31)，得像函数

$$f'(\xi') = \int_{-\infty}^{\infty} i\varphi(\nu_x) \exp(i2\pi\nu_x\xi)\,d\nu_x = i\varphi(\xi). \tag{11-36}$$

于是，像平面上的光强度分布为

$$I(\xi') = f'(\xi') f'^{*}(\xi') = |\varphi(\xi)|^2 \tag{11-37}$$

可见，像面上的光强度分布正比于物体相位分布的平方，达到了将相位分布转变为一定的振幅的目的，但不足的是，光强度不是相位的线性函数.

(2) 策尼克相衬法(相位-对比度法)

策尼克(Zernike)早在1935年就提出了将物的相位分布转换成像的对比度[即调制度 M，见式(11-5)]分布的所谓相衬法(phase contrast). 他用一个使零频衰减同时相移90°的相位板进行空间滤波，得到像平面上的光强度分布中的对比度正比于透明体中的相位分布的结果.

策尼克相位板——空间滤波器的光学传递函数可写成

$$H(\nu)\begin{cases} = \pm i\gamma, & |\nu| < \nu_0; \\ = 1, & |\nu| > \nu_0. \end{cases} \tag{11-38}$$

也就是频谱平面的 $|\nu| < \nu_0$ 区域内，策尼克相位板的光学传递函数为 $\gamma e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$；在此区域外，相位板的光学传递函数等于1. 式中的 γ 为相位板的衰减因数，+、-号表示相位的提前与延迟，ν 为空间频率，它与前面定义过的 ν_x 和 ν_y 有关系：

$$\nu = \sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2}. \tag{11-39}$$

图11-23为策尼克相位板的示意图.

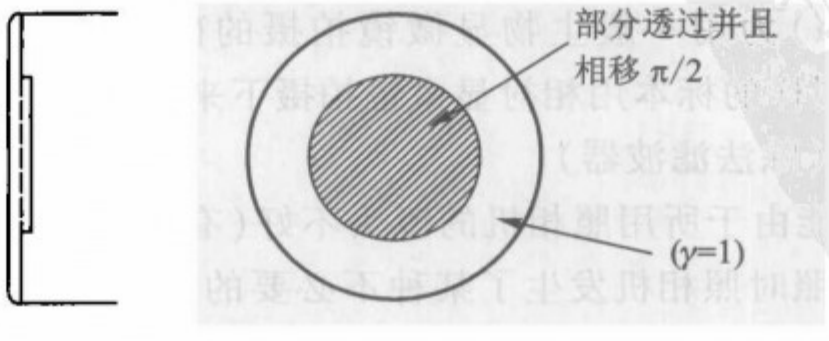


图11-23

把由式(11-34)表示的频谱和策尼克空间滤波板重叠在一起，为简单计，仍用一维计算，则有

$$F'(\nu_x) = F(\nu_x)H(\nu) = \pm \mathrm{i}\gamma\delta(\nu_x) + \mathrm{i}\varphi(\nu_x) \tag{11-40}$$

和

$$\begin{aligned} f'(\xi') &= \int_{-\infty}^{\infty} F'(\nu_x)\exp(\mathrm{i}2\pi\nu_x\xi)\,\mathrm{d}\nu_x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\pm \mathrm{i}\gamma\delta(\nu_x) + \mathrm{i}\varphi(\nu_x)]\exp(\mathrm{i}2\pi\nu_x\xi)\,\mathrm{d}\nu_x \\ &= \pm \mathrm{i}\gamma + \mathrm{i}\varphi(\xi). \end{aligned} \tag{11-41}$$

于是,像面上可观察到的光强度

$$I'(\xi') = f'^{*}(\xi')f'(\xi') = \gamma^2 \pm 2\gamma\varphi(\xi) + \varphi^2(\xi). \tag{11-42}$$

当 $\varphi(\xi)$ 很小可不计 $\varphi^2(\xi)$ 时,$I'(\xi')$ 与 $\varphi(\xi)$ 成正比,是线性关系,克服了纹影法中的不足.

按对比度[即式(11-5)定义的调制度]的定义

$$M = \frac{I_{\max}' - I_{\min}'}{I_{\max}' + I_{\min}'}$$

及 $I'_{\max} = \gamma^2 + 2\gamma\varphi_{\mathrm{m}} + \varphi_{\mathrm{m}}^2$,$I'_{\min} = \gamma^2 - 2\gamma\varphi_{\mathrm{m}} + \varphi_{\mathrm{m}}^2$,则有

$$M = \frac{2\varphi_{\mathrm{m}}}{\gamma + \varphi_{\mathrm{m}}^2/\gamma}, \tag{11-43}$$

式中的 φ_{m} 为 $\varphi(\xi)$ 的最大值. 这就是对于 $f(\xi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\xi)}$ 的相位分布,由策尼克相位板的滤波而在相干光学系统像平面上呈现的光强度分布中对比度跟相位物体的最大相位 φ_{m} 的关系式. 可以看到,对于 $|\varphi_{\mathrm{m}}/\gamma| < 1$ 的情况,当衰减因数 γ 值递减(即相位板透过率变小)时,像的对比度递增;不过当 γ 值趋近于零时,式(11-42)中的二次项就不能忽略,实际上 $\gamma = 0$ 时策尼克相衬法就跟纹影法没有差别了.

式(11-42)中的正负号取决于相位板是提前 $\pi/2$ 还是推迟 $\pi/2$,若为正,则为亮场相衬;若为负,则为暗场相衬.

策尼克相衬法于 1947 年由蔡司工厂制成相衬显微镜,不妨说,它是光学信息处理概念下的第一个产品,荣获诺贝尔奖金.

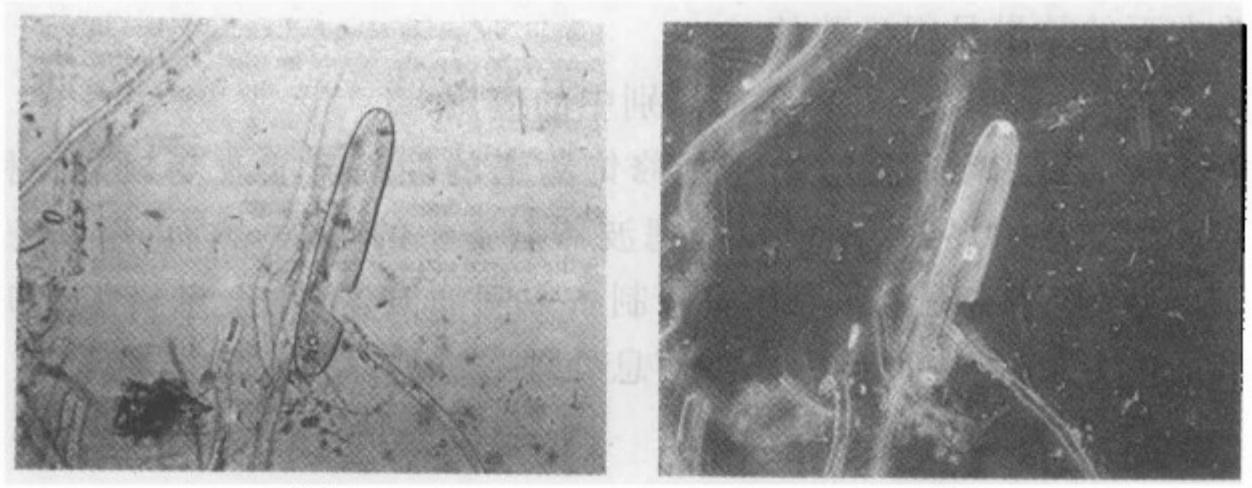
图 11-24(a)为用一般生物显微镜拍摄的硅藻、纤维和细菌的照片,图 11-24(b)为对同样的标本用相衬显微镜拍摄下来的照片.

3. 逆转滤波(除法滤波器)

一张照片可能由于所用照相机的镜头不好(有过大的剩余像差或不良的工艺),或者由于拍照时照相机发生了某种不必要的运动、物与照相机间的空气抖动以及没有调好距离(离焦)等而模糊. 把这种模糊的照片做成透明板时,它的频谱可写成

$$F'(\nu) = H_{\mathrm{s}}(\nu)F(\nu), \tag{11-44}$$

其中 $F(\nu)$ 为被摄物的理想的频谱,$H_{\mathrm{s}}(\nu)$ 代表造成模糊的那个因素的传递函数



(a)　(b)

图 11 - 24

(它可以是镜头的传递函数,也可以是离焦或某种运动和空气抖动所相当的传递函数). 显然,如果能做这样一个空间滤波器:$T(\nu) = 1/H_s(\nu)$,并把它放在相干光学处理系统的频谱平面中,则有

$$T(\nu)F'(\nu) = H_s(\nu)F(\nu) \cdot \frac{1}{H_s(\nu)} = F(\nu). \qquad (11-45)$$

这样,经过系统的 L_2 的傅里叶逆变换所得的像 $f'(\xi')$ 就是被摄物体的清晰的像. 这个过程在数学上叫做消卷积.

具有上述性能的滤波器称除法滤波器或称逆转滤波器. 这种滤波器可用全息照相术来制作(称全息除法模板),也可以用数字电子计算机来制作(称计算机全息除法滤波器). 前者留在下一节单独介绍.

所谓计算机全息除法滤波器,就是让电子数字计算机绘出函数 $H_s(\nu)$ 的倒数的图形,然后用光学方法做成的滤波板. 这是制造空间滤波器的很有发展前途的新方法,它的特点是不论 $H_s(\nu)$ 本身是否物理地存在,只要能给出 $H_s(\nu)$ 的函数形式就可以,在这一点上它是任何物理方法比不上的;而且它之所以有发展前途,也正是由于这一点.

图 11 - 25(a)是一张用球差未校正好的镜头拍摄的模糊照片,图 11 - 25(b)是经过全息除法滤波器处理后的照片. 从中可以看到除法(逆转)滤波器在



(a)　(b)

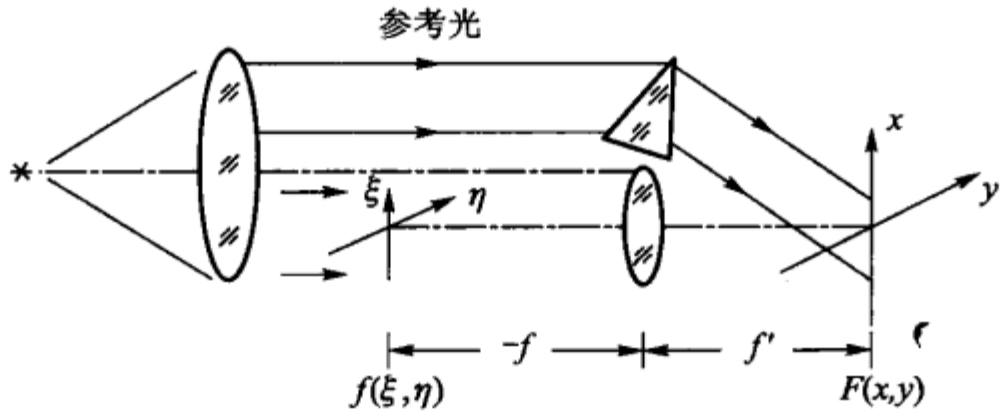
图 11 - 25

校正像差方面的效果是很显著的.

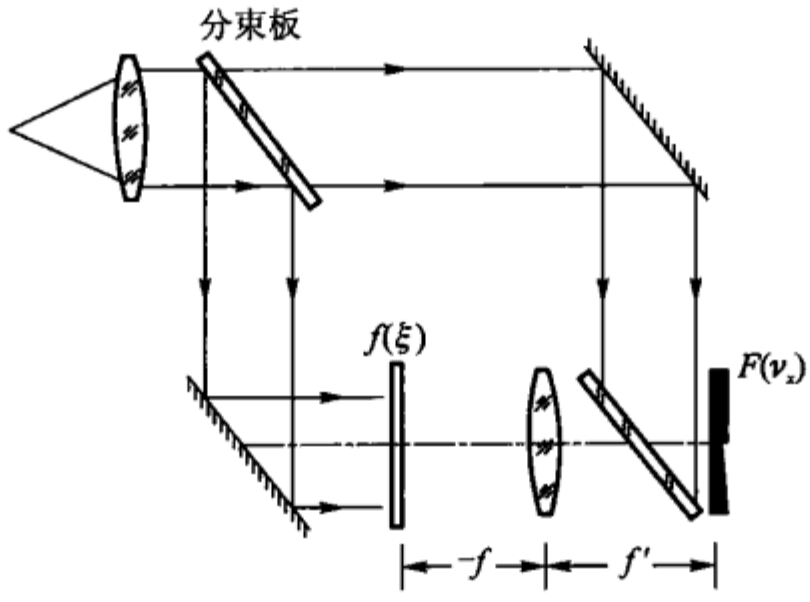
4. 全息空间滤波器及其在特征识别中的应用

许多情况下要求空间滤波器既能修饰频谱的振幅又能改变频谱的相位,而且所要求的形式各种各样,这曾经是滤波器制备中的难题. 然而,用范德卢格特(Van der Lugt)提出的用全息照相术来制备空间滤波器(称全息模板)却为克服这种困难创造了条件,因而也给光学信息处理的进展以很大的推动.

(1) 全息空间滤波器



(a)



(b)

图 11 - 26

全息空间滤波器又称全息模板,可利用如图 11 - 26(a)和(b)所示的夫琅禾费全息照相光学系统来制备.

将感兴趣的信息 $f(\xi)$ 作成透明板放在系统的输入平面——$\xi\eta$ 平面,于是在 xy 平面上得到 $f(\xi)$ 的频谱 $F(\nu_x)$;与此同时令相干的参考光束亦照明 $F(\nu_x)$ 所在的区域,结果在 xy 平面得合成复数振幅分布为

$$A(\nu_x) = R\exp(-\mathrm{i}2\pi\nu_x b) + F(\nu_x), \qquad (11-46)$$

其中 R 为参考光束在 xy 平面上的振幅,b 为 xy 平面中两光束中心的距离.

用合适的感光板记录式(11 - 46)所表示的干涉图样并且使显影后的感光

板的振幅透过率正比于曝光量，于是在这块感光板的透过光的复数振幅分布可写成

$$H(\nu_x) \propto |A(\nu_x)|^2 = R^2 + |F(\nu_x)|^2 + RF(\nu_x)\exp(i2\pi\nu_x b) + RF^*(\nu_x)\exp(-i2\pi\nu_x b). \tag{11-47}$$

式中 $F^*(\nu_x)$ 为 $F(\nu_x)$ 的复共轭函数，这块感光板即为对 $f(\xi)$ 制成的全息模板.

把上述全息模板放在相干光学处理系统的频谱平面内，并令它与待处理的信息 $g(\xi)$ 的频谱 $G(\nu_x)$ 重叠，则在频谱平面透过模板的频谱为

$$H(\nu_x)G(\nu_x) = (R^2 + |F(\nu_x)|^2)G(\nu_x) + RF(\nu_x)G(\nu_x)\exp(i2\pi\nu_x b) + RF^*(\nu_x)G(\nu_x)\exp(-i2\pi\nu_x b). \tag{11-48}$$

对此式作傅里叶逆变换，则有像函数

$$\begin{aligned} g'(\xi') &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\nu_x)G(\nu_x)\exp(i2\pi\nu_x\xi)\,d\nu_x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R^2 G(\nu_x)\exp(i2\pi\nu_x\xi)\,d\nu_x \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\nu_x)F(\nu_x)G(\nu_x)\exp(i2\pi\nu_x\xi)\,d\nu_x \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} RF(\nu_x)G(\nu_x)\exp[i2\pi\nu_x(\xi+b)]\,d\nu_x \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} RF^*(\nu_x)G(\nu_x)\exp[i2\pi\nu_x(\xi-b)]\,d\nu_x \\ &= R^2 g(\xi) + [f(\xi) * f(\xi)] \otimes g(\xi) \\ &\quad + R[f(\xi+b) \otimes g(\xi+b)] + R[f(\xi-b) * g(\xi-b)]. \end{aligned} \tag{11-49}$$

式中符号⊗代表卷积运算，行间的 * 号代表相关运算. 式中前两项代表输出平面上与直流分量有关的量，在一般滤波运算中对它们很少有兴趣；第三项代表信息 $f(\xi)$ 对信息 $g(\xi)$ 的卷积运算，第四项代表信息 $f(\xi)$ 对信息 $g(\xi)$ 的互相关运算（亦称交叉关联），并且第三项是以 $\xi = -b$ 为中心的分布，第四项是以 $\xi = b$ 为中心的分布，两者对光轴对称.

为了使在轴外的第三、第四项与在轴上的第一、第二项在像平面上相互分离得开一些，要求式中的 b 值足够大，即参考光束对信息光束的斜角要相应的大些.

（2）全息模板在特征识别中的应用

光学信息处理中多年来一直被人们关注的一项应用就是特征识别这一类. 所谓特征识别就是从大量的信息中检测某一特定信号的有无和它所在的位置. 例如，对一张印有许多个 0，1，2，…，9 等数字的照片检测其中有无某一个，例如

“4”这个字并且指出它在照片的什么位置上. 利用这种原理可以从飞机或卫星拍摄的照片中检查有无特定的目标,从很多种细胞的照片中检查有无特定的细胞以及从许多个指纹中检测出某一特定指纹的有无及属于何人,等等.

特征识别技术的一般方法,就是对所要检测的特定信号 $f(\xi)$ 用上述全息照相法制作一个复数振幅分布函数为

$$H_{\mathrm{M}}(\nu_x) = kF^*(\nu_x) \tag{11-50}$$

的空间滤波板,其中 $F^*(\nu_x)$ 为 $f(\xi)$ 的频谱 $F(\nu_x)$ 的复共轭函数,k 为比例常数. 这个滤波板正是式(11-47)中的第四项,称它为 $f(\xi)$ 的匹配滤波器. 将待验的信息

$$g(\xi) = \sum_i f(\xi - a_i) + n(\xi) \tag{11-51}$$

放在相干光学处理系统的物平面,即在物平面的 $\xi = a_1, \xi = a_2, \cdots$ 处有相同的分布 $f(\xi)$(如图 11-27 所示)和另外的信息 $n(\xi)$. 于是,在频谱平面通过匹配滤波器的频谱

$$F'(\nu_x) = kF^*(\nu_x)\left[\sum_i F(\nu_x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu_x a_i} + N(\nu_x)\right], \tag{11-52}$$

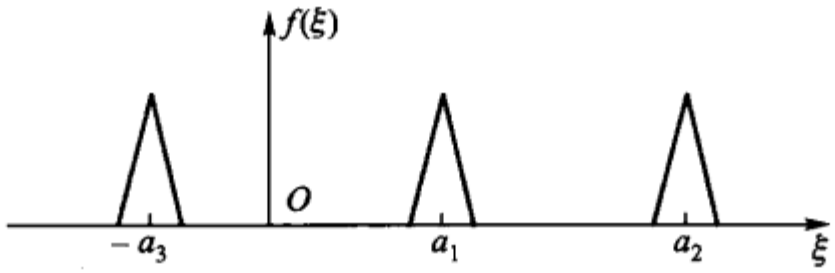


图 11-27

经过系统第二透镜的傅里叶逆变换,在像平面上振幅分布应为

$$\begin{aligned} g'(\xi') &= \int_{-\infty}^{\infty} kF^*(\nu_x)\left[\sum_i F(\nu_x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu_x a_i}\right]\exp(\mathrm{i}2\pi\nu_x\xi)\,\mathrm{d}\nu_x \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} kF^*(\nu_x)N(\nu_x)\exp(\mathrm{i}2\pi\nu_x\xi)\,\mathrm{d}\nu_x \\ &= k\sum_i \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\nu_x)F(\nu_x)\exp[\mathrm{i}2\pi\nu_x(\xi - a)]\,\mathrm{d}\nu_x \\ &\quad + k\int_{-\infty}^{\infty} F^*(\nu_x)N(\nu_x)\exp(\mathrm{i}2\pi\nu_x\xi)\,\mathrm{d}\nu_x \\ &\equiv k\sum_i f(\xi) * f(\xi - a_i) + kf(\xi) \otimes n(\xi), \end{aligned} \tag{11-53}$$

式中的第一项是函数 $f(\xi)$ 的自相关运算,它将在 $\xi = a_1, \xi = a_2, \cdots$ 处有峰值出现(即光强最大),就是说,无论 $f(\xi)$ 的具体形式如何,只要 $g(\xi)$ 中含有 $f(\xi - a_i)$ 项必将在像平面的 $\xi' = -a_1, \xi' = -a_2, \cdots$ 处出现一亮点. 从这些亮点即可判断出

在物平面的 $\xi = a_1, \xi = a_2, \cdots$ 处有一个跟制作匹配滤波器所使用的函数 $f(\xi)$ 特征一样的函数存在. 上式中的第二项是 $f(\xi)$ 跟 $n(\xi)$ 的卷积,它显然不会构成一个亮点而必为复杂的弥散斑.

对于这种匹配滤波作用的物理机理可以这样来解释:平面波经过物函数 $f(\xi)$ 之后(图 11-28),波面一般来说发生两方面的变化,一方面波面发生形变,不再是平面波,另一方面波面上振幅的分布也变得不均匀. 主要是前一因素使出射波不再能被透镜 L_2 会聚为一亮点. 而置于频谱平面上的匹配滤波器的作用恰能把由 $f(\xi)$ 造成的波面形变补偿回去,重新成为平面波,这样即可被 L_2 会聚为一亮点,而物函数中的另外部分 $n(\xi)$ 造成的波面形变则不能由给定的匹配滤波器校正为平面波,因而不能呈现亮点.

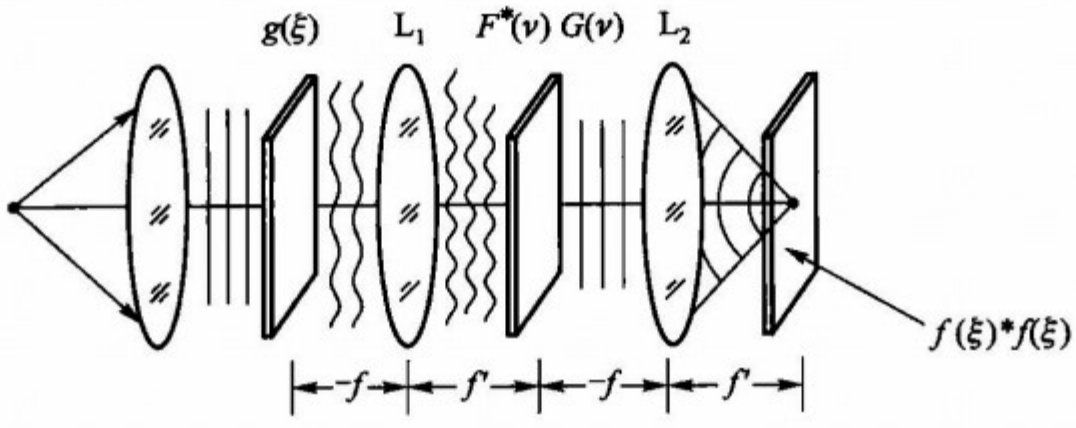
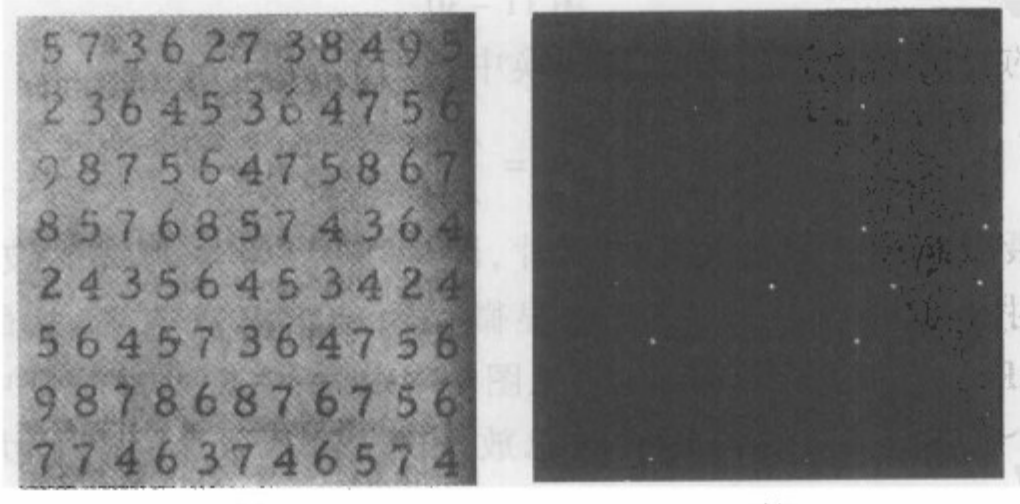


图 11-28

作为一个例子,想从如图 11-29(a)所示(透明)照片中找有没有“4”这个字并且要知道它在什么位置. 为此我们可以先用同字体的“4”字作一个全息的匹配滤波模板,然后把模板放置在相干光学处理系统中的频谱平面中;图 11-29(a)所示的透明照片放在物平面. 于是便在系统的像平面得到如图 11-29(b)所示的显示,有亮点处就是“4”所在的位置.



(a) (b)

图 11-29

§11-5　全息照相

普通的照相术,是把从物体表面反射(或漫射)来的光或物体本身发出的光,经过物镜成像,并且将光强度记录在感光底片上,再在照相纸上显现出物体的平面像.

而全息照相术,不仅要在感光底片上记录下物光的光强分布,而且还把物光的相位也记录下来,也就是把物光的所有信息全部记录下来,然后通过一定的手续"再现"出物体的立体图像.我们把这种既记录振幅又记录相位的照相称全息照相(holography)①.

1. 全息照相的历史根源　波前再现

从阿贝成像理论和上一节光学信息处理的讨论已经清楚地看到,成像是两次衍射或说是两次傅里叶变换的结果.在一般成像中这两次变换都是即时的并且用同一波长的光.但是,从原理上讲,可以不必即时的,也可以不用同一波长的光.例如,伯格(M. J. Buerger)实验,它的第一次变换是令 X 射线通过晶体得出劳厄斑(图 11-30)——晶格的频谱;第二次是用可见的相干光对频谱作变换得出晶格的像.这个实验起初并没有成功,因为记录劳厄斑的感光板并不能记录光的相位;直到伯格对频谱面上各劳厄斑的相位作了计算并且用薄云母片在频谱面上作了相应的相位修改之后,实验才获成功.

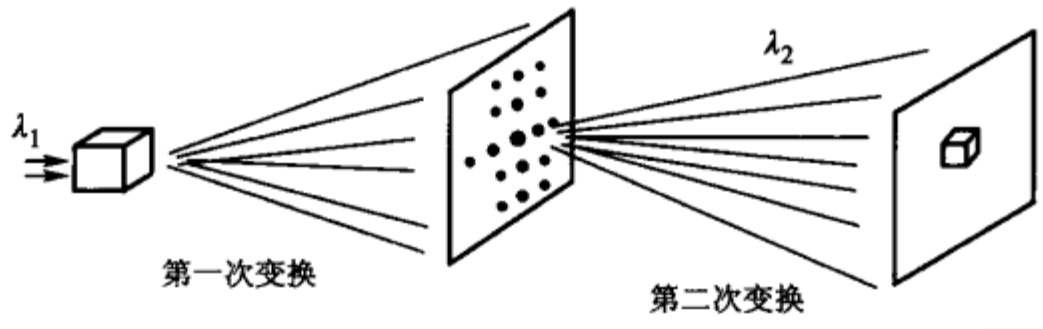


图 11-30

这实验的目的是想利用第二次变换中像的放大率

$$\beta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \tag{11-54}$$

的特性来拍摄出晶体的原子结构的照片,因为当 λ_1 为 X 射线的波长和 λ_2 为可见光的波长时,β 值可以很大,是一般显微镜所望尘莫及的.实验最后成功地拍出了白铁矿(FeS_2)的原子结构照片(见图 11-31),从中可以看到中心的铁原子和两旁的两个硫原子,该照片相应的总放大率(包括 λ_2/λ_1 和放大照片的放大

① holography 一词系词组 whole(or all) of γραφειν 的缩读词,其中 γραφειν 为希腊字,相当于英文的 graphy(图形).

率)达 2.6×10^7 倍! 这个实验,一方面以其高度的技巧完成了在两次变换中获得巨大的放大倍率的成像,是一个很出色的实验;另一方面,在理论上指出,只要能制作记录振幅又同时记录相位的能复现全部频谱的模板,就能显现原物的像. 不过,对各种复杂的波阵面(复振幅)如何才能制成所需要的全息模板,却成为一时的难题.

后来,伽博(D. Gabor)在他的题为《全波前再现的干涉显微镜》一文中指出,虽然感光底片和其他光接收器一样都不能记录光的相位,但是,利用双光束干涉原理,令物光和另一个与物光相干的光束(参考光束)产生干涉图样却可把相位"合并"上去,从而用感光底片能同时记录下相位和振幅. 对于这一点,是不难理解的,因为在前面第七章光的干涉一章中已经详细讨论过干涉条纹的光强分布和形状与两相干光束的振幅和相位密切相关.

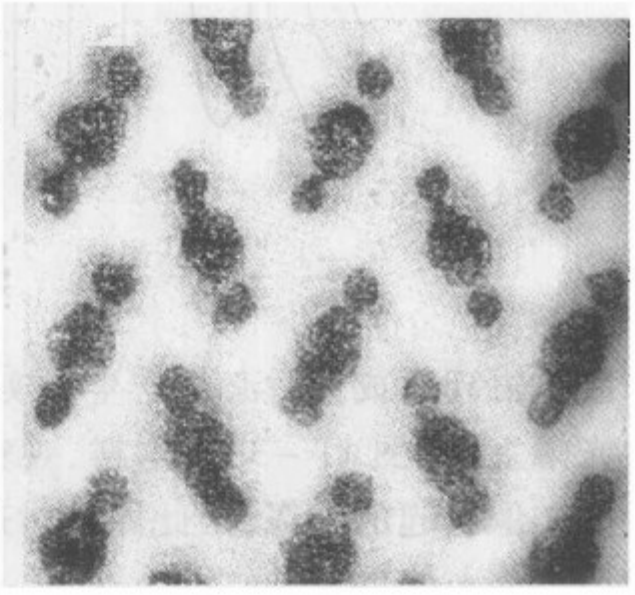


图 11-31

利用干涉法将自物体发出的光的振幅和相位同时完全地记录下来所得的图样称全息图(hologram). 当全息图由一束相干的光波照明时,它将重现宛如物体存在时一样的波阵面,这就叫做波前再现(wave-front reconstruction). 在实现了波前再现的基础上,无论什么时候,也无论原来的物体是复杂的还是简单的,只要通过第二次衍射,或者说通过第二次傅里叶变换就可以得到高质量的和逼真的原物的三维的像,这就是全息照相出现时的物理意义.

虽然这种照相术在当初并不太引人注目,但是由于后来利思(E. N. Leith)和乌帕特尼克斯(J. Upatnieks)等人对全息照相方法的改进,而尤其是现代激光为此提供了高亮度的和高相干度的光源之后,全息照相就不仅在成像理论中占有很重要的地位而且也迅速地扩大了它的应用范围.

2. 全息图的制备

(1) 伽博全息图

记录伽博全息图所需的光路如图 11-32 所示. 若物体是相当透明的如在透明的玻璃板上写的字或画上的图案,则当它被一个准直了的相干光照明时,透射的光波由两部分组成:一部分是物的透明部分透过的平面波(参考光),另一部分是物的不透明部分造成的较弱的散射波(物光),这两种光彼此相干,在感光底片上形成干涉图样,伽博全息图就是这种干涉图样的记录.

伽博全息图的一个显然的局限性就是它不适用于不透明板上的透明物,因为这种情况下,它将无法获得与散射光相干的参考光. 此外,还有伽博全息图在

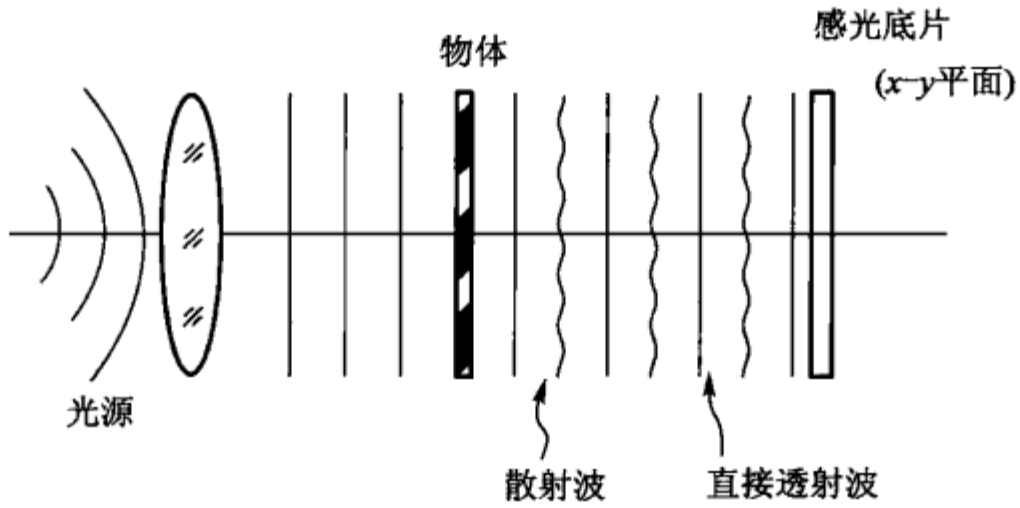


图 11 - 32

作波前再现而成像时必将产生一实、一虚的两个像(孪生像)并且它们都在系统的光轴上(见图 11 - 33).这样,观察者对虚像聚焦时将无法避免地也看到了孪生的实像引起的光斑,因此即使对透明板上写的字,其像的质量也是降低了.

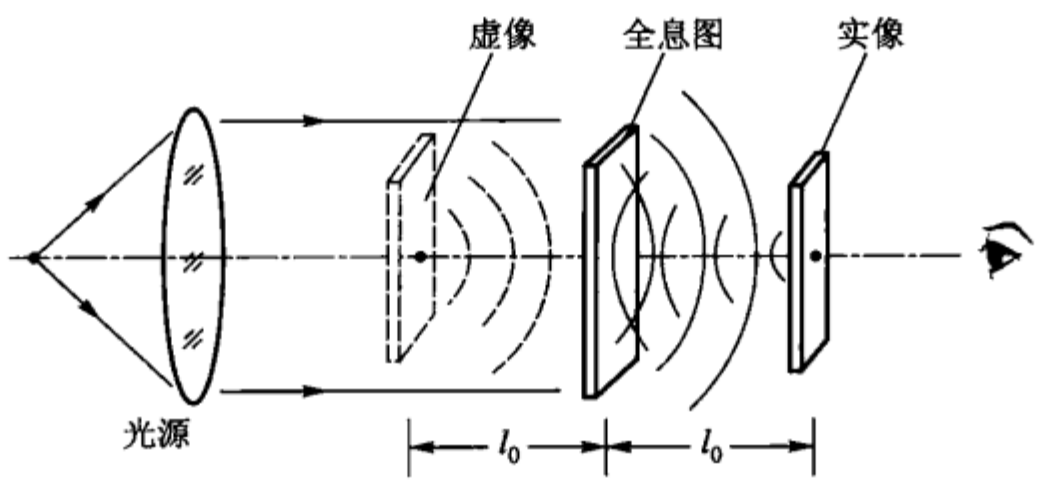


图 11 - 33

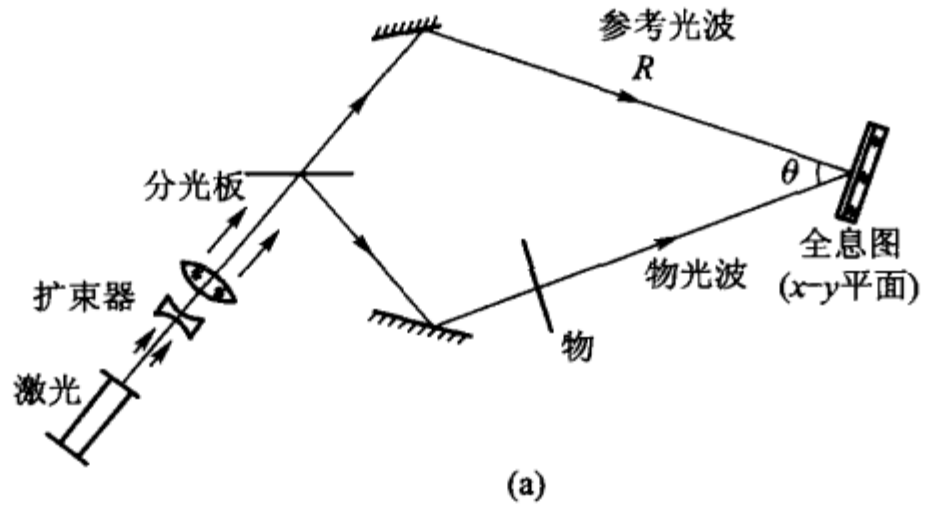
(2) 利思 - 乌帕特尼克斯全息图

伽博全息图的上述局限性在利思 - 乌帕特尼克斯全息图中得到克服,因而后者成为现在使用最广的全息图.记录利思 - 乌帕特尼克斯全息图所需的光路形式很多,其中一种如图 11 - 34(a)和(b)所示.它与伽博全息图之间的主要差别是不用物体直接透过的光作参考光束,而是从与物光束的光轴成一定倾斜角的方向单独引入一束相干的参考光束.这样,它不仅适用于透明物体[图 11 - 34(a)],也适用于非透明物体[图 11 - 34(b)],而且还可以分别观察再现的实像和虚像,像的质量也提高了.

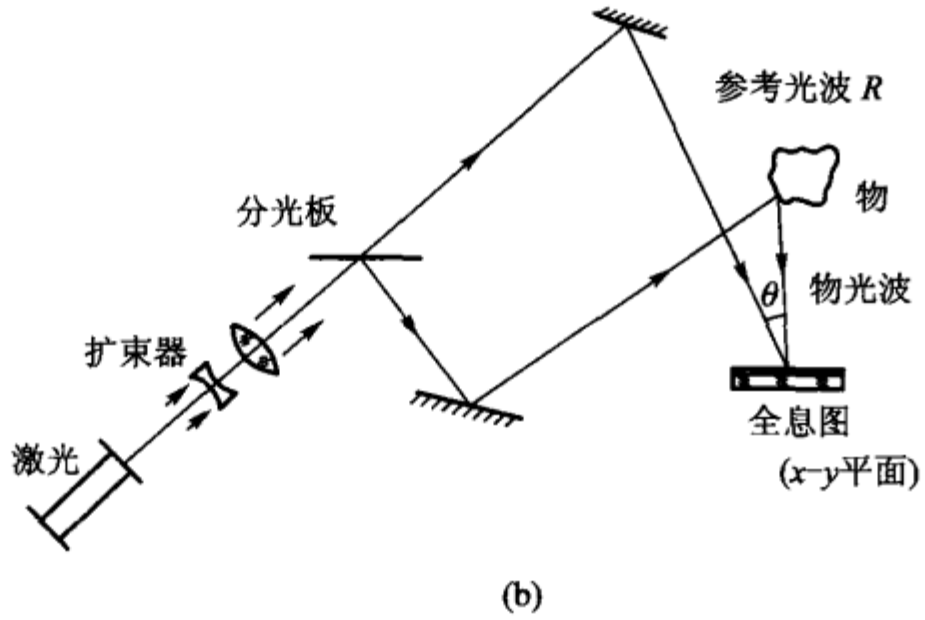
3. 全息照相的理论

全息图的理论,实质上就是一种较为广义的双光束干涉场的计算,下面我们结合如图 11 - 34 所示的利思 - 乌帕特尼克斯的光路来计算感光底片上的光强分布:

设 xy 平面为感光底片平面,$R\exp(-i2\pi\nu y)$ 为参考光束在该平面上的振幅,



(a)



(b)

图 11-34

物光束在该平面的复数振幅为 $O(x,y)$,两波叠加后,则 xy 平面上的复数振幅分布为

$$U(x,y) = R\exp(-\mathrm{i}2\pi\nu y) + O(x,y). \tag{11-55}$$

其中 ν 为参考波的空间频率

$$\nu = \frac{\sin\theta}{\lambda}, \tag{11-56}$$

θ 为图中所示的参考光束跟物光波光轴的夹角.

于是,xy 平面上的光强度分布为

$$I(x,y) = R^2 + |O(x,y)|^2 + RO(x,y)\exp(\mathrm{i}2\pi\nu y) + RO^*(x,y)\exp(-\mathrm{i}2\pi\nu y). \tag{11-57}$$

这个式子与式(11-47)完全一样,只不过在那里是计算频谱,在这里是计算空间某一定平面(xy 平面)上的振幅分布. 式(11-57)中第一项取决于参考光的光强度,它构成底片平面上的均匀背景;第二项取决于物光的光强度,它在底片平面上随不同位置而异,但是,在大多数实际情况下,它的数值较第一项小得多;第三项和第四项是包含有两相干光的振幅和相对相位的光强分布. 为了明显地表

示出这两项确已包含物光波的相位分布 $\varphi(x,y)$，我们可把物光波明确地写出：

$$O(x,y) = o(x,y)\exp[-\mathrm{i}\varphi(x,y)], \tag{11-58}$$

代入式(11-57)中并合并第三和第四项，于是可以得到光强度分布的另一个表达式

$$I(x,y) = R^2 + o^2(x,y) + 2Ro(x,y)\cos[2\pi\nu y - \varphi(x,y)]. \tag{11-59}$$

此式比较直观地表明物光的振幅和相位已转变为空间频率为 ν 的干涉图样，只要干涉图样有足够的分辨本领，即可准确地完成波前再现.

曝光后的感光底片，经过适当的显影和定影，使所得的照相底片各处的振幅透射率正比于原来曝光时底片上相应各处的光强度 $I(x,y)$，于是底片——全息图的透射率可写为

$$\begin{aligned} T(x,y) = {} & T_R + k[\,|O(x,y)|^2 + RO(x,y)\exp(\mathrm{i}2\pi\nu y) \\ & + RO^*(x,y)\exp(-\mathrm{i}2\pi\nu y)\,]. \end{aligned} \tag{11-60}$$

为了方便，我们把上式的四项写成：

$$\begin{aligned} T_1 &= T_R, \\ T_2 &= k|O(x,y)|^2, \\ T_3 &= kRO(x,y)\exp(\mathrm{i}2\pi\nu y), \\ T_4 &= kRO^*(x,y)\exp(-\mathrm{i}2\pi\nu y). \end{aligned} \tag{11-61}$$

为了进行波前再现，需用一个相干光波(复现波)，从一定的方向照射全息图，而从另一方向来观看. 今设此复现光波的振幅为 B，垂直照明全息图(见图 11-35)于是透过全息图的光有四个不同的分量，每一分量与上式中的一项对应：

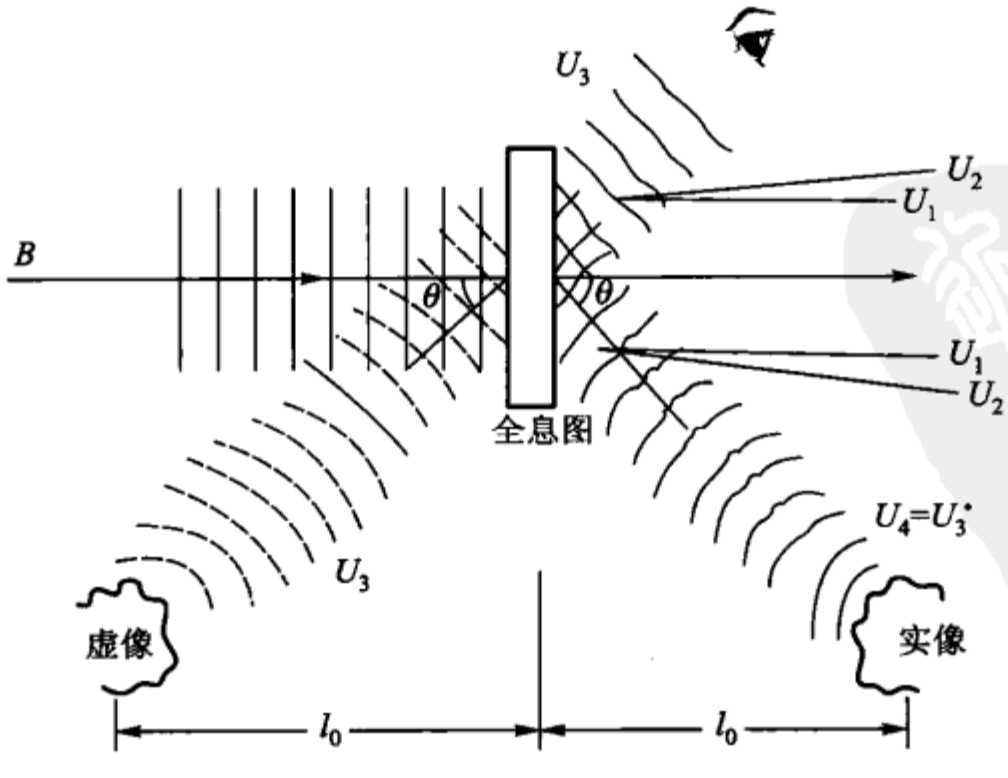


图 11-35

$$U_1 = T_R B,$$
$$U_2 = kB\,|O(x,y)|^2,$$
$$U_3 = kBRO(x,y)\exp(\mathrm{i}2\pi\nu y),$$
$$U_4 = kBRO^*(x,y)\exp(-\mathrm{i}2\pi\nu y). \qquad (11-62)$$

分量 U_1 是被全息图透射率 T_R 衰减的入射光波 B 的重现，它沿垂直于全息图平面的方向传播；分量 U_2 是随空间变化的，它包含着与光轴成各种角度的各平面波，只不过实际上它的能量仍然非常靠近全息图的法线方向，从而可与所感兴趣的像分离开；分量 U_3 正比于原来的物体波阵面 O 并乘以一个线性的指数因子. 正比于 O 就意味着相应的 U_3 是发散的波阵面，它将在离全息图为 l_0 处形成物体的一个虚像，线性指数因子 $\exp(\mathrm{i}2\pi\nu y)$ 表示这虚像跟全息图平面法线成一 θ 角；同理，分量 U_4 正比于 O 的共轭波阵面 O^*，意味着 U_4 是会聚的波阵面，它表示在虚像的相反的一侧在距全息图 l_0 处形成一个实像，线性指数因子 $\exp(-\mathrm{i}2\pi\nu y)$ 说明这个实像偏全息图法线以同样的 θ 角，U_4 实际上是 U_3^*.

上述结论的重要意义主要在于，虽然重现过程中仍有一实、一虚的孪生像，但它们在空间上的位置便于对两者之一进行单独观察，并且也不与 U_1 和 U_2 混淆. 这种便于分离的特性是由于采用的参考光束与物光有一倾角 θ 造成的，不过 θ 角根据不同物体应有不同的下限，只有 θ 大于相应的某一最小参考角 $\theta_{\min}$ 才能使实像和虚像不受其他分量的干扰.

此外，由于这两个像独立于 U_1 和 U_2 之外，所以它们本身的正负就无所谓了. 这样，感光底片用正片和负片都可以，而由于实际操作上的原因，一般都宁可采用负片，以避免制正片的麻烦.

最后，我们看到，用上述垂直入射的平面波来照明全息图，这个平面波既不是原来参考光束的复现，也不是其共轭. 但我们却也同样得到了一个实像和一个虚像，可见对重现光束(B)的要求并不严格. 但是，某些情况下，若不用与原来参考光束(R)完全相同的光束作重现光束就得不到所要求的虚像，不用原来参考光束的复共轭(R^*)作重现光束就得不到所要求的实像.

4. 实验——一个教学用的全息照相实验

全息照相术确实是一种精密的物理实验，它需要良好的激光、优质的感光底片和高度稳定的实验装置；高精度的全息照相对这些要求尤为严格. 但是，在教学中，也不难用简单的设备来拍摄全息图. 这里介绍一种已在某些高校试行了数十年的教学用全息照相实验①，让学光学课的大学生拍一张全息照片不仅有必要而且也是可能的.

(1) 实验前的准备

① 江苏师范学院物理系姜耶光提供.

（a）架设隔振台　选择大楼底层离振源稍远的地方，以其水泥或磨石地面作为放全息台的地基，水泥板或铁板作的全息台面板直接压在由大木箱盛着的黄砂面上. 在大木箱底部钉一块稍厚些的结实的木板，在木板下方垫上乳胶海绵及硬质黑橡皮，两者的厚度比约为3:2（见图 11 - 36），这样便搭成了全息照相实验台. 为检查所搭的台子是否隔震，可在台子上放一架干涉仪，看其干涉图样，如果图样稳定，则台子合格.

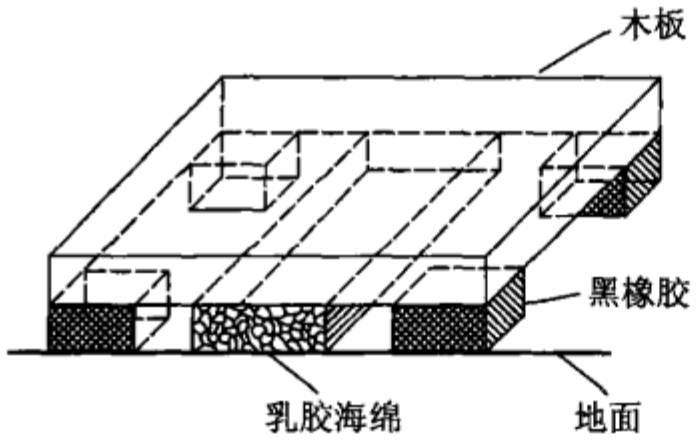


图 11 - 36

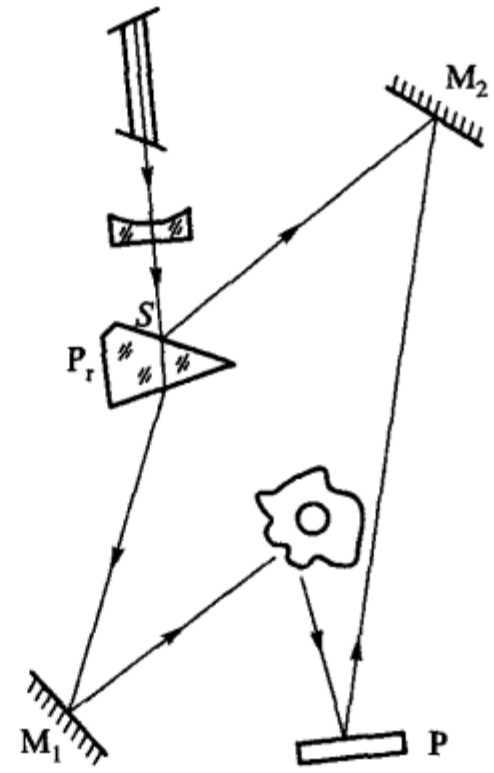


图 11 - 37

（b）支架的准备　平面反射镜要用万能胶牢固地粘在玻璃块或铁块上，为便于调节，另备一些厚度不同的金属片或玻璃片，但不能用有缓慢形变的有机玻璃、塑料或纸片；底片架以能固定住底片而又不加压力于底片为原则，不需夹牢.

（2）光路

为拍静止物体的全息图的光学系统如图 11 - 37 所示. 一只 1 ~ 2 mW 的氦氖激光器为光源，光束经凹透镜扩束后射到分束棱镜 P_r 上，从棱镜前表面反射的光作为参考光束，透过棱镜的光经平面镜后射到被拍摄的物体上，由物体漫射的光——物光束在感光板 P 上与参考光束相遇，遂形成物的全息图. 参考光束与物光束的强度比，一般以 1:1 到 5:1 为宜. 要注意使两光束的光程差尽可能接近于零，即令参考光束从 S 点经 M_2 到 P 的光程与从 S 点经 M_1 和 O 而到 P 的物光束的光程尽可能地相等，但差 2 ~ 3 cm 无妨. 两光束在感光底片上相遇时，其夹角一般可在 30°到 60°.

（3）照相处理

感光底片用一般感红光的全息干板即可. 底片放在底片架上，乳剂面向着物体. 放好底片后稍停 1 ~ 2 分钟再行曝光，在条件如（2）时，一般曝光有 3 分钟就可以了. 曝光后的底片用 D19 型显影液，在 20℃下浴洗 3 分钟，清水漂清后的底片用

F5 定影液在18℃下定影(约5分钟),开灯,再漂清,将定影后的感光底板放入漂白液中,待黑色银粒转为淡黄色时取出,底片晒干,如此,即得全息图底片.

5. 全息照相的应用举例

从上述关于全息照相理论,明显地看到,不仅光波可用全息术,而且还可以有红外的、微波的和声波的全息术,甚至用电子计算机也能制备全息模板.全息术的应用颇为广泛,已有不少专著介绍.这里只能简举数例.

(1) 全息显微术

显微术作为全息照相的一种应用,在历史上曾推动了波前再现的许多早期的工作,从本节开头介绍的伯格实验可以看到这点;伽博等人的工作也正是从这方面开始的.今天虽然不能把全息显微术作为全息照相术的主要应用,然而,它毕竟给显微术在两方面提供了特点:

其一,利用由全息图再现三维像的特性来克服一般显微镜只有很小景深的缺欠,所谓景深就是指能在同一像平面上成清晰像的物空间在光轴方向上的范围;一般来说,光学系统的相对孔径愈大,景深就愈小.在显微镜中为得高分辨本领,数值孔径(N. A.)总是尽量做得大些,结果高分辨的显微镜的景深就必然很小,所以只能看到几乎是一个平面上的物,想看一个三维的物体就要多次调焦.如果采用如图11-38所示的全息显微镜对立体的物体作出全息图,然后通过全息图显现物的三维像,就解决了一般显微镜中分辨本领跟景深的矛盾.这对观察透明体内的颗粒的分布是很重要的.

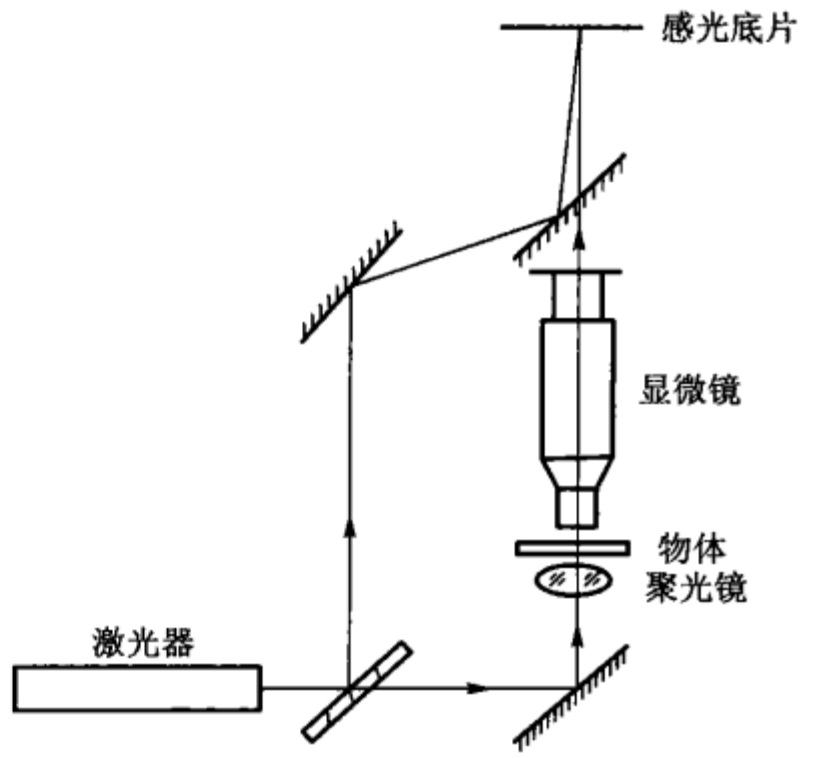


图 11-38

其二,即前述伯格实验.这一方面可获得一个很大的放大率,同时由于物体是X射线照明的,又可以获得高达几十纳米的分辨本领,并且还是三维的像.

(2) 信息存储

一般全息图的记录介质是感光乳剂,它通过受光乳剂的黑度来记录振幅分布;同样,也可以用铌酸锂($LiNbO_3$)单晶来记录,在1 m^3 大小的这种单晶内,可存储下1 000幅全息图.这是因为在光的照射下,铌酸锂折射率的改变量正比于入射光强的而表现出的纯相位分布的多层性可以记录多层全息图的缘故.其记录的分辨本领可超过1 600 mm^{-1}.

可以证明,以全息图或傅里叶频谱的方式来存储信息和恢复信息比用实像

为好,这种信息存储的方式也许就是人脑中存储信息的方式,至少为研究这类问题提供了一个可能的模型.

(3) 像差平衡　信息编码

在许多有实际意义的情况下,要求光学系统在出现有无法控制的像差时仍能成良好的像.这些像差可能是光学系统未校正好的过大的剩余像差,或元件和材料的缺欠,也可能是拍摄条件(运动)或大气抖动带来的像差,总之,就是前面光学信息处理中所说的引起图像模糊的那些因素.为消除或平衡这些模糊因素,全息照相术提供了几个不同于一般利用系统的结构(r,n,d)校正像差的独特的方法.这里只对其中之一略加介绍.

设所说的带有像差的实体——像差介质不随时间而改变并且可以在空间移动,例如一个像差欠校正的或工艺不良的照相镜头,用一个没有像差的参考光束来记录有像差的物光束的全息图[如图 11 - 39(a)].对这样全息图我们用如图 11 - 39(b)所示方式给重现光束,以形成物体的实像,这时在全息图和实像之间也必有一个像差介质的实像.设投射在像差介质上的原来的物光波为$O(\xi,\eta)$,像差介质的振幅透射率为$\exp[\mathrm{i}W(\xi,\eta)]$,则在像差介质的实像处的波,按式(11 - 62)的第四项,应为

$$O^{*}(\xi,\eta)\exp[-\mathrm{i}W(\xi,\eta)].$$

此时我们把原来的像差介质插入光路,并令它与该实像精确地重合,这样由像差

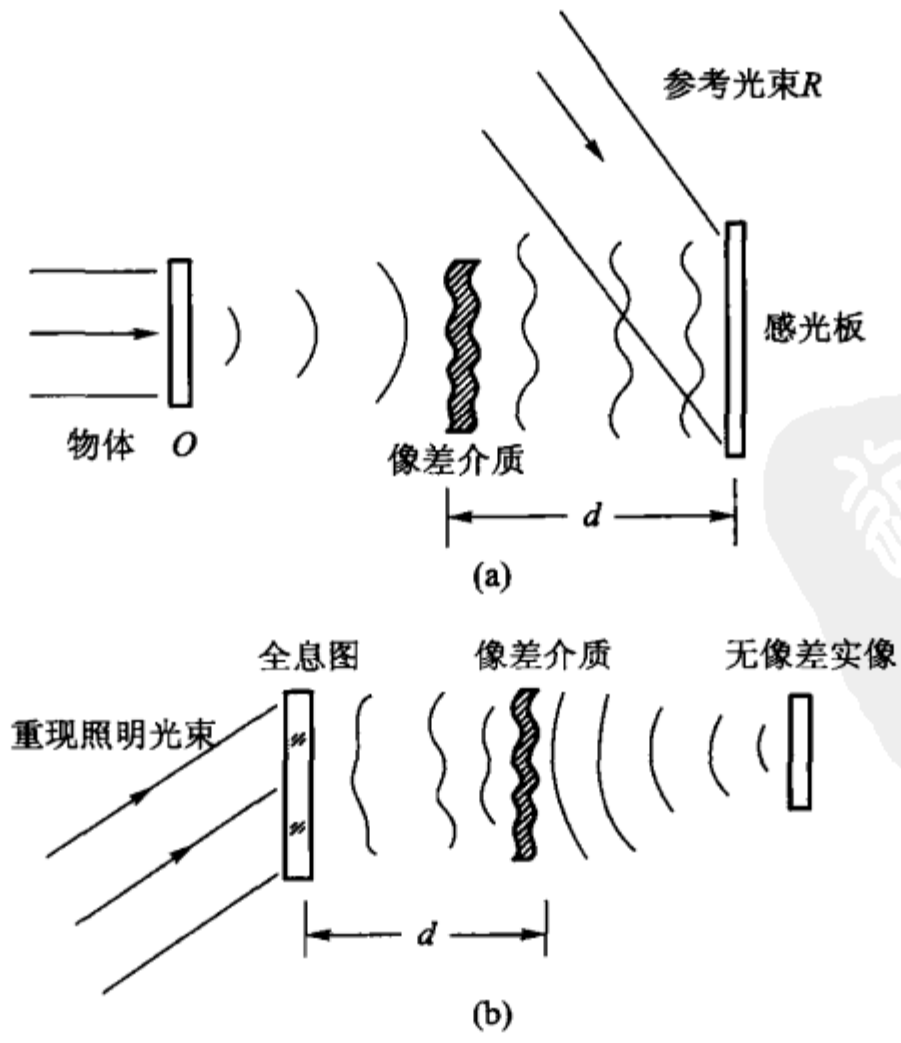


图 11 - 39

介质透射的波阵面变为

$$O^*(\xi,\eta)\exp[-\mathrm{i}W(\xi,\eta)]\exp[\mathrm{i}W(\xi,\eta)] = O^*(\xi,\eta). \quad (11-63)$$

于是,像差被完全抵消或平衡,得到了一个无像差的像.

这种校正像差的方法,与前面光学信息处理举例中的第(3)小节所讨论的逆转滤波器实质上是相同的,这里的由全息术所成的像差介质的共轭函数 $\exp[-\mathrm{i}W(\xi,\eta)]$ 正是那里所需要的逆转滤波器的传递函数 $H_s(\nu)^{-1}$.

与逆转滤波的应用一样,上述校正像差的全息术可应用于信息编码和译码,这是一种很有趣的也是十分有发展前途的技术. 一般方法是将要编码的文字、数据或照片作为物体,以一块"像差"介质板或一块特殊的码板插在物体和感光底片之间,按一般的方法制成全息图,这过程叫编码. 对编码所得的全息图如果直接去重现成像,则因其"像差"如此严重以致无法辨认. 但是,当把原来用过的那个"像差"介质或码板(或者是精密的复制品)插在重现成像光路的一定位置时,就会得到一个无"像差"的像,这过程叫译码.

全息照相术的应用远不止这里所介绍的几个,甚至这里所介绍的也不一定是最重要的,诸如全息干涉量度、全息无损探伤、全息电视或全息电影、声波全息、微波全息和红外全息等,也许是更有实际价值的.

习　题

1. 某人用望远镜来观察远方一竹栅,若已知望远镜对该物的 MTF 值为 0.5,人眼能鉴别光强度差为 5% 的图像,问该竹栅面上的最小光强和最大光强之比最低限度为何值时才能被鉴别?

2. 一般电视摄像机,在整个管靶面上有 625 行扫描并且每秒 25 帧,即水平扫描的频率为 $625\times25=15.625$ kHz,每周需时 64×10^{-6} s. 若电视的视频为 6 MHz,试求在宽为 13 mm 的靶面上水平方向的空间频率等于多少?

3. 对感光底片来说,点扩散函数和截止频率的物理意义如何?

4. 若已知某一光学系统的线扩散函数 $h(\delta)$ 如下:

δ	-4.5	-3.5	-2.5	-1.5	-0.5	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5
$h(\delta)$	0.05	0.2	0.5	0.8	1.0	1.0	0.8	0.5	0.2	0.05

试计算该光学系统对空间频率 $N=0.1$ 的 MTF 和 PTF 值.

5. 在阿贝-波特实验中,若物为透射光栅,并且在频谱平面上放置简单的滤波器,问下面情况下在像平面上得到怎样的光强分布:(1)只让零级光谱通过,(2)只挡住零级光谱,(3)只让零级和两个一级光谱通过.

6. 一张由泡室拍摄下来的高能粒子的径迹照片,如图 11-40(a)所示,问采用怎样的空间滤波器才能得到如图 11-40(b)所示的只有粒子径迹的照片?

7. 在一枚玻璃板上刻划成如图 11-41 所示的"一"、"二"、"三"三个字(黑白,没有颜

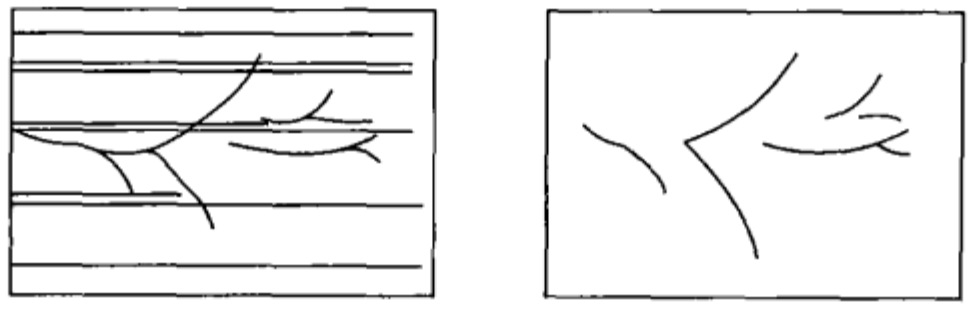


图 11－40

色),以此板作为物放在相干光学处理系统的物平面上.问:(1)它们的频谱是怎样的?(2)用怎样的空间滤波器才能在像平面上单独得到"一"或"二"或"三"?(3)用怎样的办法才能使原来没有颜色的"一"、"二"、"三"所成的像分别变为红的、绿的和蓝的?

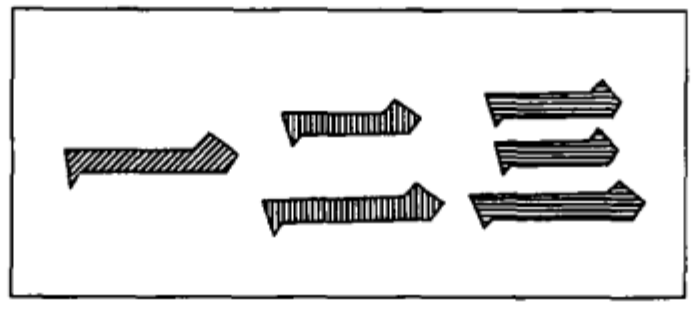


图 11－41

8. 在相干光学处理系统中,若在物平面上放一宽为 a 的狭缝

$$f(\xi)\begin{cases}=1, & |\xi| \leqslant \dfrac{1}{2}a,\\[2ex] =0, & |\xi| > \dfrac{1}{2}a,\end{cases}$$

并且在频谱平面上垂直于光轴与 $f(\xi)$ 平行地放置另一个宽为 b 的狭缝

$$T(\nu)\begin{cases}=1, & |\nu| \leqslant \dfrac{1}{2}\bar{b},\\[2ex] =0, & |\nu| > \dfrac{1}{2}\bar{b},\end{cases} \qquad \bar{b} = \frac{b}{f\lambda}.$$

试求在系统像平面上的振幅分布,并讨论 $a\,\bar{b}$ 的物理意义.

9. 若一相干光学处理系统的输入孔径为 30 mm,L_1 的焦距为 100 mm,波长为 632.8 nm.假定空间滤波器的精密度合乎要求,问此空间滤波器的定位必须精密到怎样的程度?

10. 试证匹配滤波器位置对输出的影响仅限于预期的响应出现极大值的位置.

11. 对于一个由参考光束 R 和物光束 O 记录成的全息图,当重现成像时,若所用的重现光束 B 与参考光束 R 完全相同,试绘图表示 $k|R|^2O(\xi,\eta)$ 是一个虚像;若 B 等于 R^*,则 $k|R|^2O^*(\xi,\eta)$ 恰为实像.

12. 为什么在存储信息的方式上,存储信息的全息图或信息的傅里叶频谱比直接存储实像为好?

第十二章

光在介质及其薄膜中的传播

在前面已讨论过的干涉和衍射诸现象中，为了说明问题，对于光的本质，只要了解光是一种波动的说法已足够. 而对波动的方式和性质，却没有进一步地讨论. 光是以“以太”为传播介质的机械波还是电磁波？是纵波还是横波？横波的偏振又怎样？这些问题都没有加以肯定. 在这章及以后的几章中，将在引入光的电磁理论后，对这些问题逐步地加以明确. 光的电磁理论不但能估计折射光和反射光的强度和偏振、阐明光学薄膜的特性以及光在各向异性介质中的传播情况，而当结合了对物质分子结构的假设，还能说明色散和散射现象.

* §12-1 光的电磁理论

1864 年，麦克斯韦在前人研究工作的基础上，完成了论文《电磁场的动力论》，认为光振动是电磁振动，光波是电磁波的一种. 他的关于电磁波的研究结果，可用众所周知的，以他的名字命名的麦克斯韦方程式写出. 这方程式是在安培定律、高斯定律、法拉第定律和无自由磁荷等的基础上得到的. 下面，我们先给出适用于无自由电荷和无传导电流的真空中的麦克斯韦电磁波方程式，然后，从这方程式得出光波是纯粹的横波和其在真空中的传播速度近似为 3×10^8 m/s 的结论.

设 E_x，E_y 和 E_z 是电场强度 $\boldsymbol{E}$ 在三个互相垂直轴 x，y 和 z 上的分量；H_x，H_y 和 H_z 是磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 在同一 x，y 和 z 方向上的分量. 在自由空间（真空）中，无自由电荷和传导电流存在时，麦克斯韦方程式可写作如下的微分形式：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}&=\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z},\\ \varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t}&=\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x},\\ \varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial t}&=\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y};\end{aligned}\right\}\tag{12-1a}$$

$$\left.\begin{aligned} -\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \\ -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \\ -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}; \end{aligned}\right\} \tag{12-1b}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0; \tag{12-1c}$$

和

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{12-1d}$$

其中 $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m 为真空介电常量，$\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6}$ H/m 为真空磁导率. 式(12-1a)是由电流产生磁场的安培定律的推广而得，其左端表示电场的时间变化率，右端表示由此电场变化所生的磁场在空间的分布. 式(12-1b)即为法拉第的感应电动势定律，式的左端是磁场强度的时间变化率而右端则为所生的电场在空间的分布. 这两组方程式，有十分相似的形式，不难记住. 式(12-1c)即为无自由电荷的高斯定律，而式(12-1d)是由无自由磁极存在而得到的.

设有一沿 x 轴方向传播的平面波，其波阵面与 yz 平面平行. 于是，在任一平行于 yz 平面的平面上，在任一瞬间，每一点的电场强度都是一样的，磁场强度也都是一样的. 即以 E 和 H 对 y 和 z 的偏微分为零. 由此，方程式(12-1a)—(12-1d)变为

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} &= 0, \\ \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} &= -\frac{\partial H_z}{\partial x}, \\ \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{\partial H_y}{\partial x}; \end{aligned}\right\} \tag{12-2a}$$

$$\left.\begin{aligned} -\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} &= 0, \\ -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} &= -\frac{\partial E_z}{\partial x}, \\ -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{\partial E_y}{\partial x}; \end{aligned}\right\} \tag{12-2b}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0; \tag{12-2c}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = 0. \tag{12-2d}$$

由(12-2a)的第一式与(12-2c)式同时成立可知,电场强度在电磁波的传播方向的分量 E_x 对时间和空间而言都是不变的;同样,由(12-2b)的第一式和(12-2d)式可知,H_x 也是不变的. 这些部分与波没有关系,它们代表重叠在波上的不变的电场和磁场. 因而就波本身而言,我们可以写成

$$E_x = 0, \quad H_x = 0.$$

这表明在所研究的波中没有纵向振动,即电磁波为纯粹的横波. 光波是电磁波的一种,所以光波亦是横波,由它的这种性质所产生的一些现象将在本章和下一章中加以讨论.

假定所讨论的波是电矢量只限于 y 方向的电磁波,即 $E = E_y, E_x = 0$,则由(12-2a)的第三式和(12-2b)的第二式得

$$H_y = 0.$$

这样一来,麦克斯韦方程式就只剩下面的两个方程式:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} &= -\frac{\partial H_z}{\partial x}, \\ -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{\partial E_y}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{12-3}$$

此两式表示,对于电矢量只限于某一方向的电磁波,其磁矢量 $\boldsymbol{H}$ 与电矢量 $\boldsymbol{E}$ 互相垂直并且同步.

现在求(12-3)的第一式对于时间 t 的微分,求第二式对于 x 的微分,于是有

$$\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t}, \quad -\mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2},$$

消去 H_z 的微分系数,则得

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}; \tag{12-4a}$$

用类似的方法,求(12-3)的第一式对 x 的微分并求其第二式对 t 的微分,则得

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}; \tag{12-4b}$$

这两个式子是波动方程的微分形式. 显然电磁波在真空中的传播速度为

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \tag{12-5}$$

将上述的 ε_0 和 μ_0 值代入此式则得

$$c = 2.98 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

这正是我们今天众所周知的光在真空中的传播速度.

对电磁波在均匀、各向同性介质中传播的情形,在无自由电荷和无传导电流

的条件下，上述麦克斯韦方程式中代替 ε_0 和 μ_0 则为介质的介电常量 ε 和磁导率 μ，而

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \tag{12-6}$$

其中 ε_r 为相对介电常量，在光学所用材料范围内总是

$$\mu \approx \mu_0.$$

于是电磁波在介质中的传播速度为

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}. \tag{12-7}$$

按折射率的定义，对于任意介质，由上式可得其折射率为

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}. \tag{12-8}$$

假如我们已知介质的介电常量，由此式甚至可以求出该介质的折射率.

如 §7-1 所指，设

$$E_y = f(x - vt) = a\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

于是，按照上面讨论的结果，我们可用图 12-1 表示一个向 x 方向传播的，电矢量只限于 y 方向在 $t = t_0$ 时的平面电磁波.

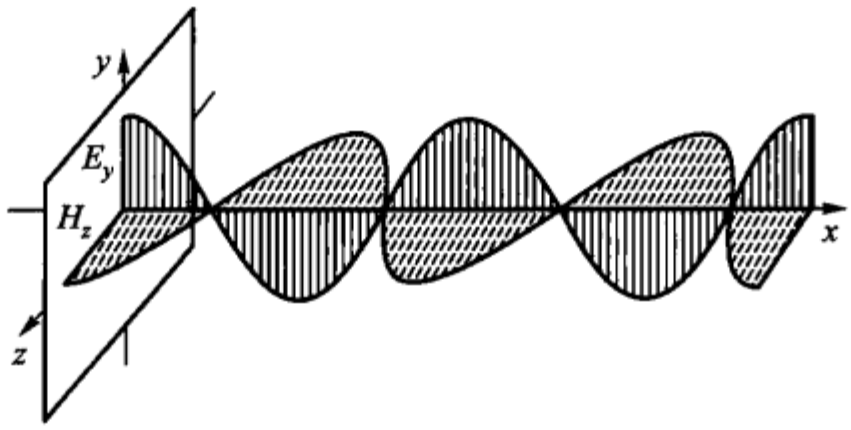


图 12-1

由于电矢量和磁矢量的单一对应关系以及其同步性，所以在讨论光振动的性质时，从两者中任选一个即可. 而就某些现象来讲，例如光化学作用，荧光效应以及光在介质中的作用等，采用电矢量似乎更自然些，而且在某些问题上，磁场的作用比电场的作用小到可以忽略不计. 为此在下面我们选用电矢量来代表光的振动.

§12-2　偏振光与自然光

如图 12-1 所示的，电矢量的振动只限于某一确定的方向的光称为平面偏振光，意思就是说，该光的电矢量取向只限于某一平面，例如图 12-1 的 yx 平

面. 这样的光亦称为线偏振光. 常用图 12-2 所示的图形表示线偏振光,其中(a)表示电矢量垂直于图面的线偏振光;(b)表示电矢量在图面内的线偏振光.



图 12-2

有时还引入振动面和偏振面两概念,前者是电矢量与光的传播方向构成的平面,而后者是垂直于前者的平面. 在图 12-2 中,(a)情况下的振动面是垂直于图面的平面,相应的偏振面为图面;(b)情况下的振动面是图面,而偏振面是垂直于图面的平面. 偏振面是历史上遗留下来的名称,现在有许多教科书只说振动面而不提偏振面.

除线偏振光外,还有这样一种偏振光,它的电矢量随时间作有规则的改变,电矢量末端在垂直于传播方向的平面上的轨迹呈椭圆或圆. 这样的光称为椭圆偏振光或圆偏振光.

实验和理论都证明了,自一个偶极子振动所生的光是线偏振光,并且偶极子在振动面内. 一个分子能产生线偏振光. 然而,实际上不可能分离出一个分子而单独研究由它发出的光波. 任何实际光源都包含着数目众多的,有各种取向的分子,因而由一个实际的光源向某一方向发出的光,例如沿图 12-3 的 x 方向传播的光,其电矢量虽然还是都垂直于光的传播方向的,但是由相互无关各分子所产生的光波的电矢量,其取向与大小都随时间作无规则的变化,各取向有同一概率,所以在一相当长的时间(1×10^{-6} s 已足够长)内,各取向上电矢量的时间平均值是相等的. 这样的光称为自然光. 图 12-3(a)表示沿 x 方向传播的自然光. 对任一取向的电矢量,均可分解为在相互垂直的两方向(例如 y 方向与 z 方向)上的分量,所有取向的电矢量分解在这两方向的时间平均值,应当彼此相等. 因

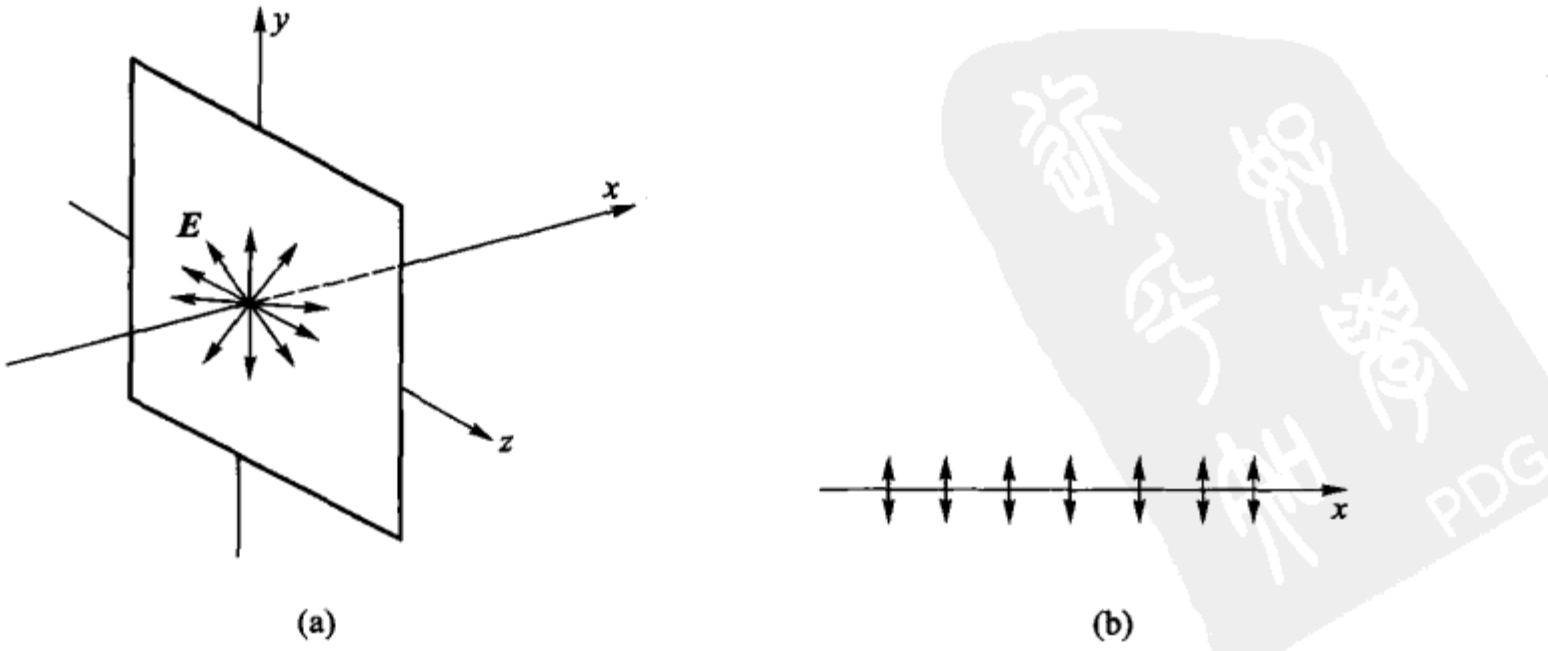


图 12-3

而自然光可用相互独立的、有等振幅的 y 方向的振动和 z 方向的振动来表示，如图 12－3(b)所示. 但是，必须注意，由于自然光内各电矢量间无固定的相位关系，因而其中任何两个取向不同的电矢量不能合为一电矢量.

介于线偏振光和自然光之间，还有这样一种光，它的电矢量在某一确定的方向上最强，或者说，有更多的电矢量取向于该方向，称这样的光为部分偏振光，由某些实际光源发出的光，常具有这种性质. 部分偏振光可用图 12－4 所示的图形表示，其中(a)表示在图面内电矢量较强的部分偏振光，(b)表示电矢量在垂直于图面方向较强的部分偏振光.



图 12－4

虽然我们不能控制光源中分子偶极子所产生的电矢量的取向，但是却有许多方法可从自然光中产生偏振光. 光在折射率不同的两介质的分界面上的反射和折射，即可用来从自然光产生偏振光. 利用光在各向异性晶体中的传播亦可产生偏振光.

§12－3　光在两种透明介质分界面上的折射和反射

当光通过两种透明介质的分界面时，入射光分为折射光和反射光两部分；此两光的进行方向，虽已由折射和反射定律决定，而这两光的相对强度和振动取向，则需由电磁理论来分析. 然而，下面所要进行的讨论的意义并不仅限于得到所述的结果，同样重要的是，这些讨论阐明了光的电磁波性质.

如前所述，自然光可用分解在两个互相垂直的方向上的分量表示，所以对自然光在两种透明介质分界面上所发生的现象的研究，可借助于分析两个特定的线偏振光来进行. 这两个线偏振光一个是振动面平行于入射面的线偏振光(又称平行分量，简称 p 分量)，另一个是振动面垂直于入射面的线偏振光(又称 s 分量). 下面，我们就来分别研究这两种线偏振光在所述分界面上的振动状态.

图 12－5 表示振动面平行于入射面的一束线偏振光在折射率为 n 和 n'，并且 $n<n'$ 的两透明介质的分界面上所产生的反射和折射. 图中 yz 平面为分界面；O 点为入射光线与分界面的交点，Ox 轴为分界面的法线；xy 面为光线的入射面、折射面和反射面. 无论是入射光线和折射光线，还是反射光线，其相应的电矢量和磁矢量恒垂直于自己的传播方向. 兹以 E_{p1}、E'_{p1}和 E_{p2}分别代表入射光线、反射光线和折射光线在入射面内的电矢量振动的振幅；H_{s1}、H'_{s1}和 H_{s2}为相应光线在垂

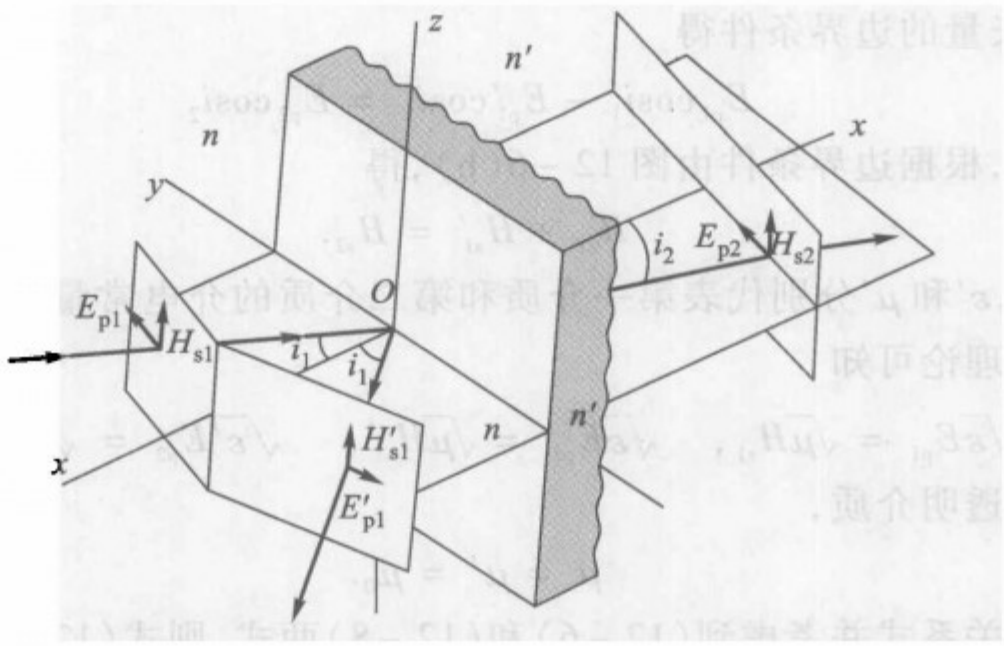


图 12 - 5

直于入射面内的磁矢量振动的振幅.

这三个光波在分界面处一定满足边界条件,即在分界面的相对两侧的各点上,电矢量 $\boldsymbol{E}$ 和磁矢量 $\boldsymbol{H}$ 沿分界面的分量有相同的大小. 当然这三个光波在其传播方向上的电场强度和磁场强度随空间的位置和时间而变. 不过我们只考虑在入射点 O 处三个光波有最大值的瞬间的情况,亦不妨碍所得结果的普遍意义. 这一瞬间,在分界面相对的两侧沿分界面的电矢量分量和磁矢量分量,如图 12 - 6 所示. 要注意,虽然图 12 - 6(a)中自同一原点划出的三个矢量分量好像都在折射率为 n' 的介质内,实际上我们是用 E_{p1} 和 E'_{p1} 来表示在折射率为 n 的介质中的分量;而在图 12 - 6(b)中,为清楚起见,把三个分量特意分开画出. 由图 12 - 6(a),在第一介质(n)中沿分界面的电矢量分量之和为

$$E_{p1}\cos i_1 - E'_{p1}\cos i_1,$$

在第二介质(n')中,沿分界面的电矢量分量为

$$E_{p2}\cos i_2.$$

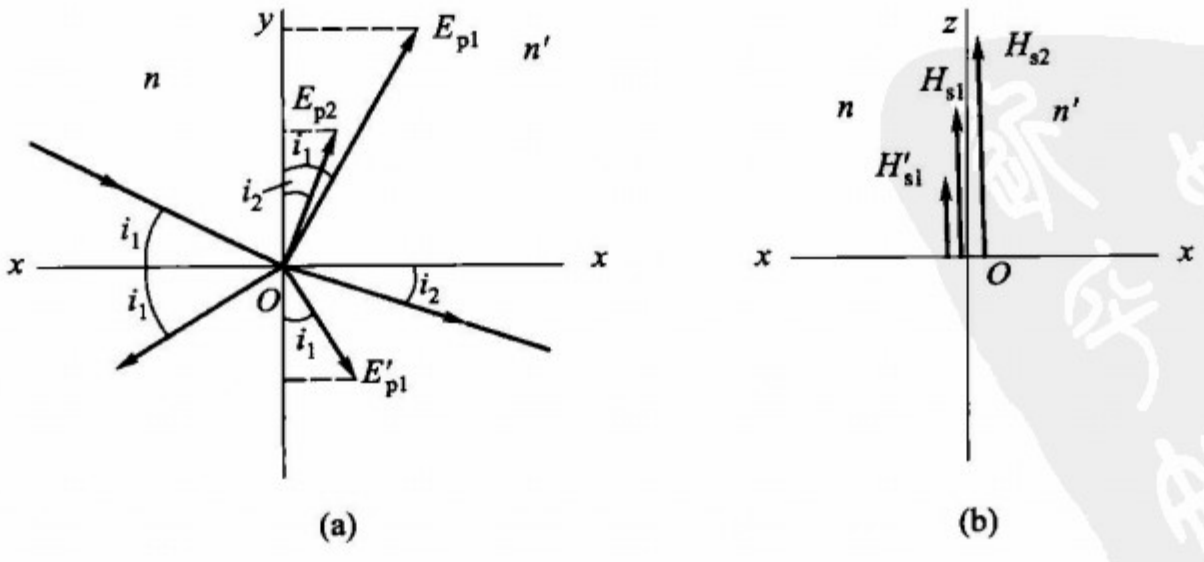


图 12 - 6

于是,由电矢量的边界条件得

$$E_{p1}\cos i_1 - E_{p1}'\cos i_1 = E_{p2}\cos i_2 \tag{12-9}$$

对于磁矢量,根据边界条件由图 12-6(b),得

$$H_{s1} + H_{s1}' = H_{s2}. \tag{12-10}$$

若以 ε 和 μ,ε'和 μ'分别代表第一介质和第二介质的介电常量和磁导率,则由电磁波的一般理论可知

$$\sqrt{\varepsilon}E_{p1} = \sqrt{\mu}H_{s1}, \quad \sqrt{\varepsilon}E_{p1}' = \sqrt{\mu}H_{s1}', \quad \sqrt{\varepsilon'}E_{p2} = \sqrt{\mu'}H_{s2}. \tag{12-11}$$

而对于所有透明介质,

$$\mu = \mu' = \mu_0. \tag{12-12}$$

利用这两个关系式并考虑到(12-6)和(12-8)两式,则式(12-10)变成

$$nE_{p1} + nE_{p1}' = n'E_{p2}, \tag{12-13}$$

这是以电场强度表示的磁场强度的边界条件.

把式(12-9)和式(12-13)联立,并以 $n\sin i_1 = n'\sin i_2$ 关系式简化之,则得反射比

$$r_p = \frac{E_{p1}'}{E_{p1}} = \frac{\tan(i_1 - i_2)}{\tan(i_1 + i_2)} \tag{12-14}$$

和透射比

$$t_p = \frac{E_{p2}}{E_{p1}} = \frac{2\sin i_2\cos i_1}{\sin(i_1 + i_2)\cos(i_1 - i_2)}. \tag{12-15}$$

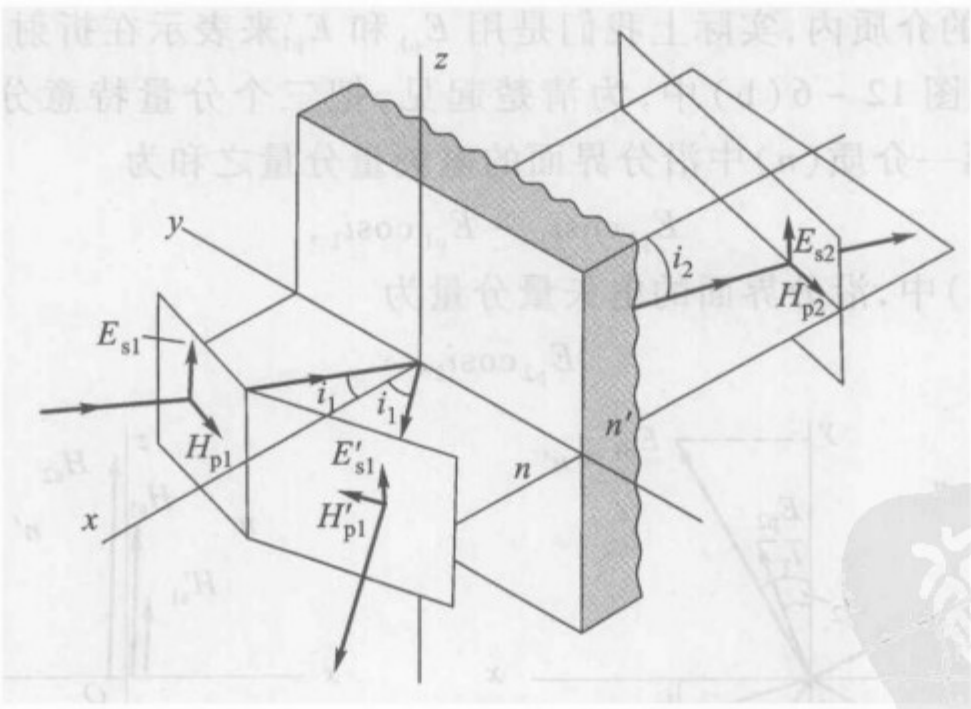


图 12-7

当入射光是振动面垂直于入射面的线偏振光时,借助图 12-7 和利用上述相同的方法,则得如下的关系:

$$r_s = \frac{E_{s1}'}{E_{s1}} = -\frac{\sin(i_1 - i_2)}{\sin(i_1 + i_2)}, \tag{12-16}$$

$$t_s = \frac{E_{s2}}{E_{s1}} = \frac{2\sin i_2 \cos i_1}{\sin(i_1 + i_2)}, \tag{12-17}$$

其中 E_{s1}, E'_{s1}和 E_{s2}分别代表入射光、反射光和折射光垂直于入射面的电矢量振动的振幅. 式(12-14)—式(12-17)称为菲涅耳公式. 并把 r 和 t 也分别称为菲涅耳反射比和菲涅耳透射比.

在关于膜系光学特性的讨论中,经常要用到式(12-14)和(12-16),并将它们写成另一种形式(读者自行证明):

$$r_p = \frac{\dfrac{n_2}{\cos i_2} - \dfrac{n_1}{\cos i_1}}{\dfrac{n_2}{\cos i_2} + \dfrac{n_1}{\cos i_1}}, \tag{12-18a}$$

$$r_s = -\frac{n_2 \cos i_2 - n_1 \cos i_1}{n_2 \cos i_2 + n_1 \cos i_1}. \tag{12-18b}$$

在光垂直入射时,即 $i_1 = i_2 = 0$,上两式简化为

$$r_p = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}, \tag{12-19a}$$

$$r_s = -\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}. \tag{12-19b}$$

将它们与式(12-18a)和式(12-18b)比较,可把后者统一到一个式子里,即

$$r = \frac{\bar{n}_2 - \bar{n}_1}{\bar{n}_2 + \bar{n}_1}. \tag{12-20}$$

对 p 分量有 $r_p = r$ 并且 $\bar{n} = n/\cos i$,而对 s 分量 $r_s = -r$ 并且 $\bar{n} = n\cos i$. $\bar{n}$ 称有效折射率. 为方便计,常把 $\bar{n}$ 写成 n,只需记住,在光垂直入射时,n 为折射率本身,而在斜入射时,n 为有效折射率,这是我们以后经常要用到的.

对于一般玻璃和空气的分界面,例如 $n' = 1.5$, $n = 1.0$,于是,由式(12-14)—式(12-17)得如图 12-8 所示的曲线,图中的纵轴代表反射比和透射比,横轴为入射角 i_1.

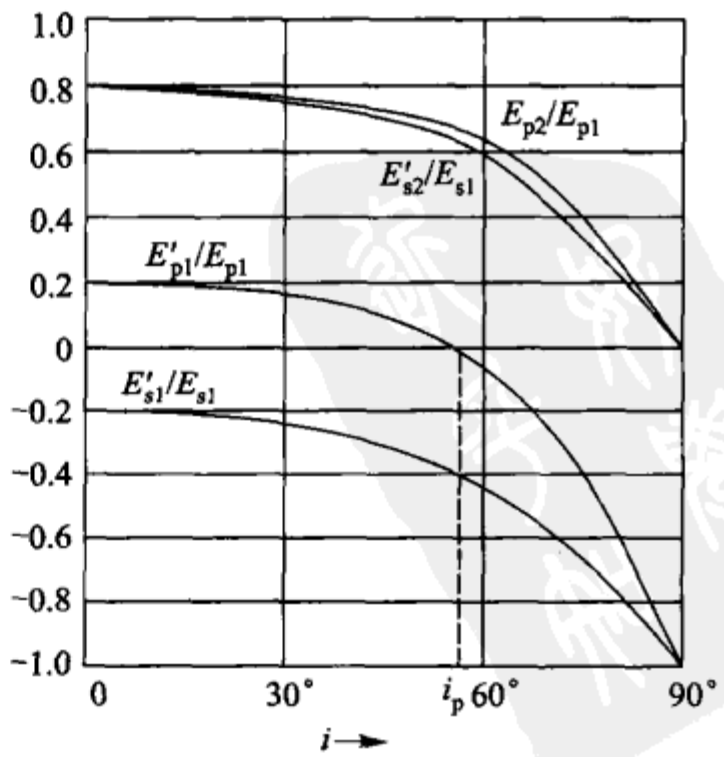


图 12-8

由式(12-14)可知,当

$$i_1 + i_2 = \frac{\pi}{2}$$

时,$E'_{p1}/E_{p1} = 0$. 这表示反射光中没有平行于入射面的电矢量,或者说,没有平行于入射面的偏振光. 再由于 $n\sin i_1 =$

$n'\sin i_2$，可得

$$i_1 = i_p = \arctan\frac{n'}{n}. \tag{12-21}$$

这公式称布儒斯特(Brewster)定律，i_p 称布儒斯特角. 将这 i_1 代入式(12-16)，可以看出 $E'_{s1}/E_{s1} \neq 0$，表示反射光中尚有垂直入射面的偏振光，故 i_p 又称为偏化角. 自然光在这角进行反射时，反射光成为垂直于入射面的线偏振光. 这一结论的正确性可由对下述简单实验的圆满解释来证明.

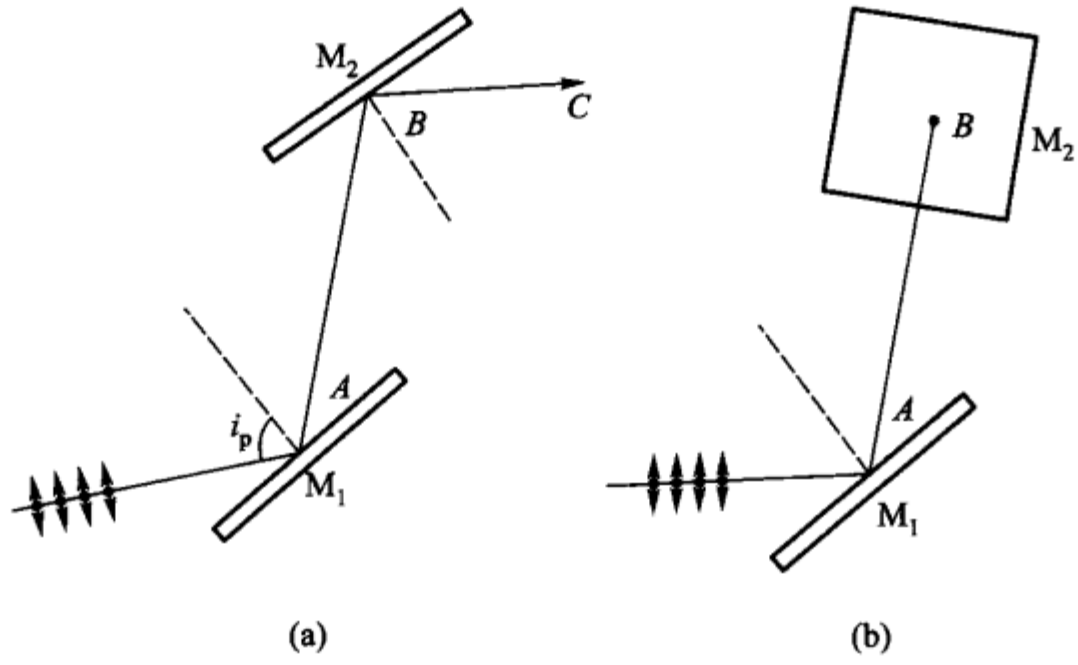


图 12-9

取折射率为 n' 的两块玻璃板 M_1 和 M_2，它们前表面是平面，另一面磨毛并涂黑(涂黑的目的是吸收该面的反射光)，将它们摆成如图 12-9(a)所示的那样，折射表面互相平行. 令自然光以约 57°的角度(一般玻璃对空气的折射率约为 1.5，故 $i_p \approx 57°$)射到 M_1 板上，在该板的前表面上即分成反射光和折射光，此反射光到 M_2 板的前表面后沿 BC 方向射出. 当以 AB 为轴旋转 M_2 板时，实验上发现，由 M_2 板射出的光的强度发生变化：当 M_1 和 M_2 的入射面平行时，出射光有最大强度，而当 M_1 和 M_2 的入射面垂直时[图 12-9(b)]，则出射光的强度为零. 这是由于以布儒斯特角入射的自然光，自 M_1 板前表面反射后，成为振动面垂直于入射面的线偏振光. 这个线偏振光在 M_2 板前表面上的反射的光强，视其振动面对 M_2 板的入射面的取向(亦即对 M_2 板的入射面的夹角)而定. 当 M_2 板与 M_1 板的入射面平行时，该线偏振光的反射像在 M_1 板上的反射一样，因而反射光强最大. 当 M_2 与 M_1 的入射面互相垂直时，则电矢量垂直于 M_1 入射面的该线偏振光，对于 M_2 板来说成为电矢量平行于入射面的线偏振光. 于是，不能被 M_2 板反射，反射光的强度为零.

从上面的讨论可知，由自然光在两透明介质分界面上产生的反射光和折射光，有不同的偏振状态. 当入射角等于布儒斯特角 i_p 时，反射光为完全线偏振光. 显然，此时折射光成为部分偏振光. 所以利用多次折射，亦可使折射光接近于

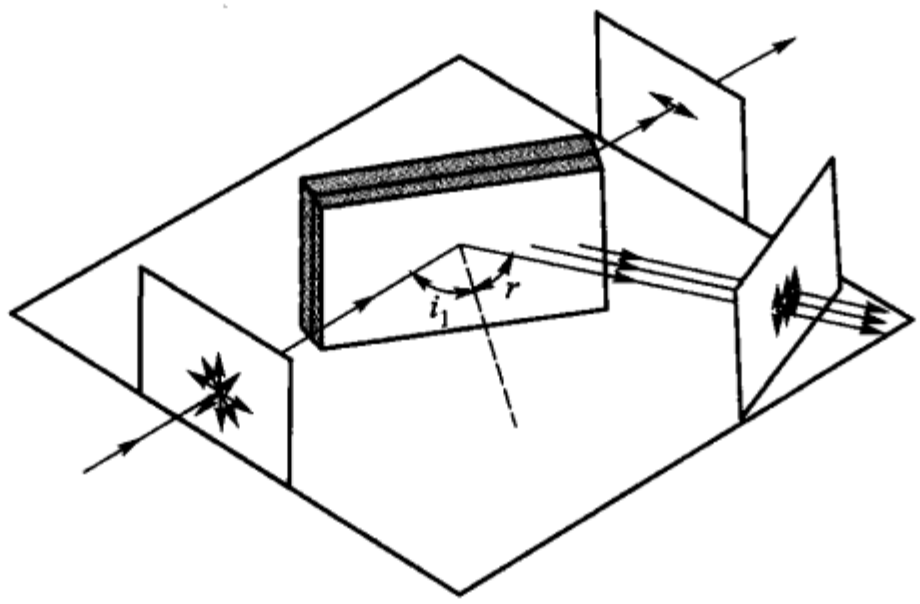


图 12－10

振动面平行于入射面的线偏振光. 图 12－10 表示由若干片平板玻璃组成的玻璃堆所产生的折射光和反射光的偏振状态.

入射角为布儒斯特角 i_p 时,反射光中没有振动面平行于入射面的光,就意味着此种偏振状态的光能百分之百地射入另一介质,利用光的这种透射特性可制备无损耗的激光器窗口,外腔式气体激光器上装有一定倾度的窗片就是这种原因,此时振动面垂直于入射面的光,由于反射损失较大,不能产生激光,因而这种激光器输出的光为线偏振光.

利用上述菲涅耳公式,可以完满地解释在牛顿环和洛埃镜中反射光相位改变 π(有时称“半波损失”)的现象. 在牛顿环中入射角接近于零度,洛埃镜中入射角接近于 90°,这是两个极限情况;然而,它们有这样一个共同点:入射光所在介质的折射率 n 小于折射光所在介质的折射率 n'.

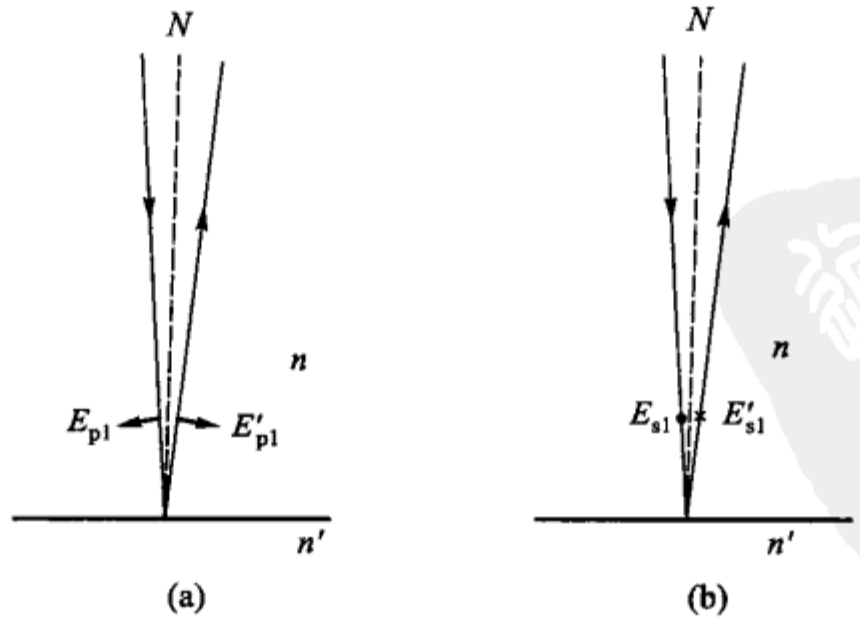


图 12－11

对于入射角接近于 0° 和 $n' > n$ 的情况(如牛顿环),由公式(12－14)和(12－16),或图 12－8 得知,在分界面上反射光的电矢量 E'_{p1} 与入射光的 E_{p1} 同符

号，而反射光的电矢量 E'_{s1} 与入射光的 E_{s1} 反符号. 这就是说，每光线各以自己进行的方向作参考，矢量 E'_{p1} 与 E_{p1} 有相同的取向，而 E'_{s1} 与 E_{s1} 有相反的取向. 亦即矢量 E_{p1} 对入射光线的取向与 E'_{p1} 对反射光线的取向相同，E_{s1} 对入射光线的取向与 E'_{s1} 对反射光线的取向相反. 用图表示则得图 12－11，其中(a)图表示两矢量对各自光线的进行方向的取向相同，但由于入射光与反射光的进行方向相反，因而在分界面上反射光的 E'_{p1} 与入射光的 E_{p1} 取向恰相反，这表示相位突然改变了 π. (b)图表示入射光的电矢量 E_{s1} 与反射光的电矢量 E'_{s1} 取向相反的情形，前者以自图面射出的箭头(·)代表，后者以射入图面的箭头(×)代表. 显然，在分界面上的 E'_{s1} 和 E_{s1} 相位差也为 π. 总之在入射角接近于 0° 和 $n' > n$ 的情况下，以反射面为参考或以观察者为参考时反射光线的电矢量，无论是平行于入射面的还是垂直于入射面的，它们对入射光的电矢量产生 π 的相位改变，这相当于反射光多走了半个波长.

对于入射角接近于 90° 和 $n' > n$ 的情况(如洛埃镜)，由公式(12－14)和(12－16)或图 12－8 可以得出图 12－12. 可以看出，在分界面上 E'_{p1} 和 E'_{s1} 的取向都分别和 E_{p1} 与 E_{s1} 的相反. 因而反射光和入射光的相位差也为 π.

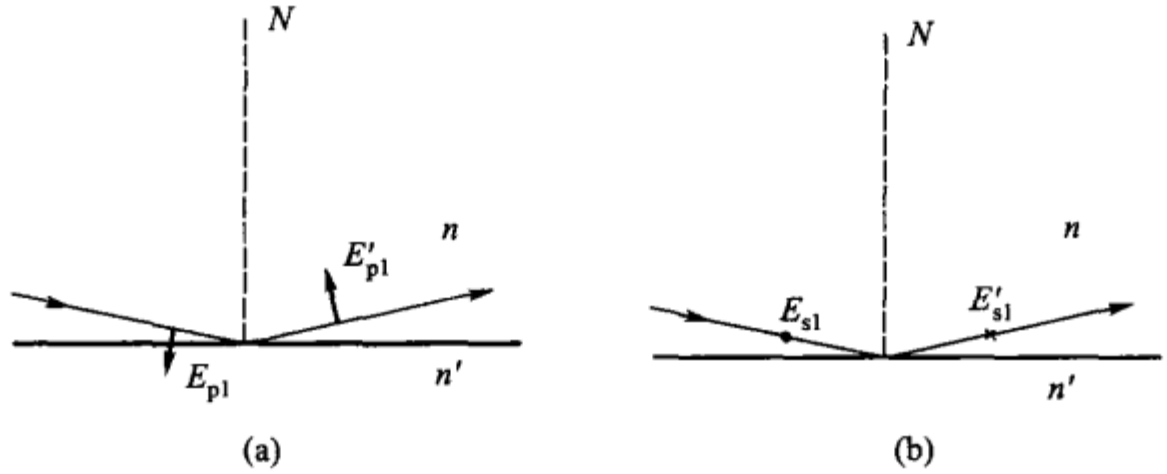


图 12－12

当光从光密介质向光疏介质入射时，$i_2 > i_1$. $n' < n$，用同样的分析方法可以得出反射光和入射光的相位差不是 π 而是 0. 牛顿环中的干涉是相位差为零的反射光和相位差为 π 的反射光的干涉. 这两光束产生了附加相位差 π，即半波损失.

现在让我们来回答本节一开始所提出的问题：对于给定的入射光，其在两透明介质分界面上所产生的反射光和折射光的相对辐射通量如何？

为了决定反射光和折射光中辐射通量，必须注意到辐射通量 $\boldsymbol{\Phi}$ 正比于坡印廷矢量 S 和辐射通量的截面积 A，即

$$\boldsymbol{\Phi} = SA.$$

我们把反射光与入射光的辐射通量 $\boldsymbol{\Phi}'_1$ 与 $\boldsymbol{\Phi}_1$ 之比称作反射率，通常用 R 表示. 因为反射光与入射光在同一介质，反射率就等于振幅平方之比.

于是，对于平行于入射面的电矢量的振动，由(12－14)式得

$$R_p = \left(\frac{\Phi_1'}{\Phi_1}\right)_p = \left(\frac{E_{p1}'}{E_{p1}}\right)^2 = \frac{\tan^2(i_1 - i_2)}{\tan^2(i_1 + i_2)} \tag{12-22}$$

对于垂直于入射面的电矢量的振动，由式(12-16)，得

$$R_s = \left(\frac{\Phi_1'}{\Phi_1}\right)_s = \left(\frac{E_{s1}'}{E_{s1}}\right)^2 = \frac{\sin^2(i_1 - i_2)}{\sin^2(i_1 + i_2)}. \tag{12-23}$$

对于自然光，可以为它的一半能量属于与入射面平行的振动，另一半属于与入射面垂直的振动，因而由自然光所生的反射光，其反射率 R 可由上两式得出：

$$R = \frac{1}{2}(R_p + R_s) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin^2(i_1 - i_2)}{\sin^2(i_1 + i_2)} + \frac{\tan^2(i_1 - i_2)}{\tan^2(i_1 + i_2)}\right] \tag{12-24}$$

我们把折射光的辐射通量 Φ_2 与入射光的辐射通量 Φ_1 的比值 Φ_2/Φ_1 称作透射率，并用 T 表示. 确定透射率的最简单的方法，是利用能量守恒定律，根据这个定律，假定分界面不吸收，则有

$$T = 1 - R.$$

由式(12-24)，此式可写成

$$T = 1 - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin^2(i_1 - i_2)}{\sin^2(i_1 + i_2)} + \frac{\tan^2(i_1 - i_2)}{\tan^2(i_1 + i_2)}\right].$$

若以纵轴代表反射率 R，横轴代表入射角 i_1，对于 $n = 1.0$ 和 $n' \approx 1.5$ 的情况，由公式(12-22)、(12-23)和(12-24)可分别得图 12-13 的曲线Ⅰ、Ⅱ和Ⅲ. 由图可见，在 n 和 n' 给定的条件下，反射率随入射角 i_1 而变，并且对于自然光，不论入射角如何，其反射率恒不为零. 只有电矢量的振动平行于入射面的偏振光，在 $i_1 = i_p$ 的情况下，反射率才为零. 此外，由图还清楚地看到，对于入射角为零或很小的入射光，不论其偏振状态如何，反射率对于给定的分界面都是同一不为零的常数.

对于垂直入射的光，$i_1 = i_2 = 0$，公式(12-22)和(12-23)之值不定，为解此不定式，可利用以下情况，即当角度甚小时，正弦及正切可用角度本身代替，即

$$R = \frac{\sin^2(i_1 - i_2)}{\sin^2(i_1 + i_2)} = \frac{\tan^2(i_1 - i_2)}{\tan^2(i_1 + i_2)} = \frac{(i_1 - i_2)^2}{(i_1 + i_2)^2}.$$

而当角度 i_1 和 i_2 甚小时，折射定律可写成 $ni_1 = n'i_2$，由此，根据式(12-22)，(12-23)和(12-24)，在垂直入射时，对于振动面在垂直于入射面的偏振光、振动面平行于入射面的偏振光和自然光，均得同一关系式：

$$R = \frac{(n' - n)^2}{(n' + n)^2}.$$

反射率依两透明介质的折射率而定；只有两介质的折射率相等时，反射率方为零. 对于一般置于空气中的透明介质表面，只要入射角不超过 30°，则由上式计算出的反射率与实际相符. 对于 $n = 1$，$n' = 1.5$ 的情况，此值约等于 0.04，即反射

光的辐射通量约等于入射光的辐射通量的4%，这正是图12－13所表示的数值.

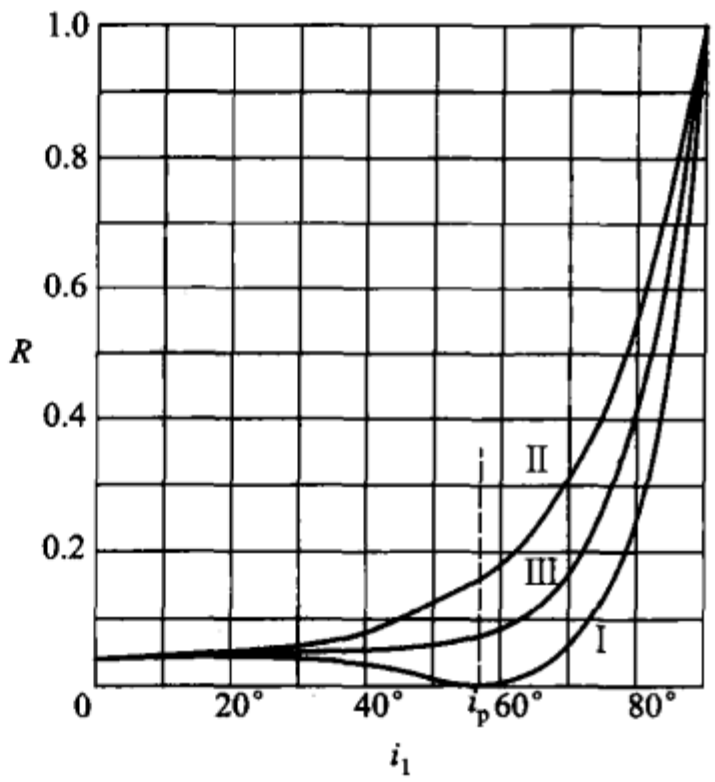


图 12－13

由于一般透镜所用玻璃的折射率多在1.50～1.60，所以可认为在透镜的每个表面上将有4%左右的入射光不能透过透镜而成为反射光. 这样，在一个透镜中将有7%～8%的入射光的辐射通量成为不能通过透镜的反射光. 而现代光学仪器，通常由许多个透镜组成，例如一个简单的显微镜少则用四、五个透镜，多则用十个或更多的透镜，在这种情况下，反射就成为减少通过光学仪器的辐射通量的主要原因. 例如，对于以六个透镜作成的光学仪器，由于反射而引起的不能通过仪器的辐射通量约占入射光的一半左右！一个现代的变焦距物镜有十几个透镜，光将无法通过. 不仅如此，这些反射光在光学仪器中形成杂散光，造成的背景将严重地影响光学成像的质量. 所以说，如果不设法消除或大大减小这种有害的反射光，现代许多复杂的光学系统就毫无意义. 解决的办法是在透镜的表面镀上一定厚度的减反射（或称增透）薄膜，利用光在膜的各表面上的反射光干涉相消的原理使反射光减为最小.

由减反射膜开始，随着科学技术的发展，又提出了对各种膜系的要求，如高反膜、带通和截止滤光片、渐变滤光片、中性分光镜等，研究这些膜系的物理过程及其技术已构成现代光学的一个分支——薄膜光学. 下面几节仅就其基础知识作一简要讨论.

§12－4　单层薄膜的光学特性

在一块透明平整的基底（通常为玻璃）表面上用物理或化学方法涂敷一层透明的介质薄膜，就形成了单层膜，我们把膜层与基底组成的系统称为膜系. 在单层膜系中，有两个界面，即入射光所在的介质（空气）和膜层的界面及膜层和基底的界面. 光波在两界面上的依次反射和透射（见图7－15），产生多光束干涉，这种干涉的结果决定了薄膜的光学性质.

薄膜的光学特性以其反射率特性和透射率特性表征. 由于能量守恒，在薄膜无吸收时，只需讨论膜系的反射率特性. 单层膜反射率特性的讨论与前面第八章

关于法布里－珀罗干涉仪的讨论基本相同，只是现在两界面的反射比不再相等.

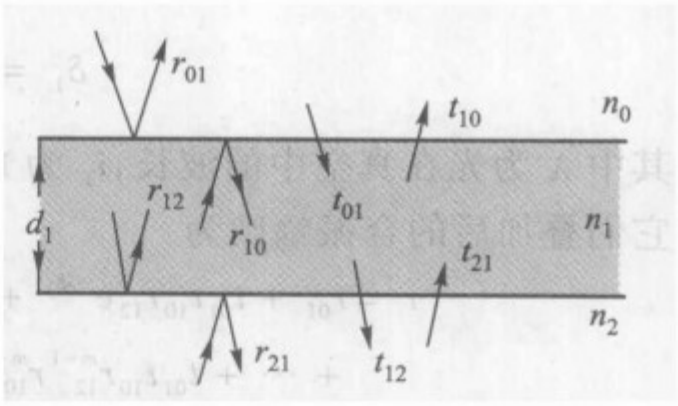


图 12－14

下面首先给出单层膜系的各菲涅耳反射比和透射比. 在图 12－14 中所示，设基底的折射率为 n_2，膜层的折射率和几何厚度分别为 n_1 和 d_1，并设光波自折射率为 n_0 的介质入射到膜层上，因此在 n_0 至 n_1 界面上的菲涅耳反射比为

$$r_{01} = \frac{n_1 - n_0}{n_1 + n_0},$$

光波自 n_1 至 n_0 界面上反射时，其菲涅耳反射比为

$$r_{10} = \frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1},$$

显然

$$r_{10} = -r_{01}.$$

同样，在 n_1 至 n_2 和 n_2 至 n_1 界面上的菲涅耳反射比分别为

$$r_{12} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1},$$

$$r_{21} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2},$$

且亦有

$$r_{21} = -r_{12}.$$

上述两界面的菲涅耳透射比分别以 t_{01}、t_{10}、t_{12} 及 t_{21} 表示，其中注脚 01 表示光从折射率为 n_0 的介质透射到折射率为 n_1 的介质的情况，其余类推.

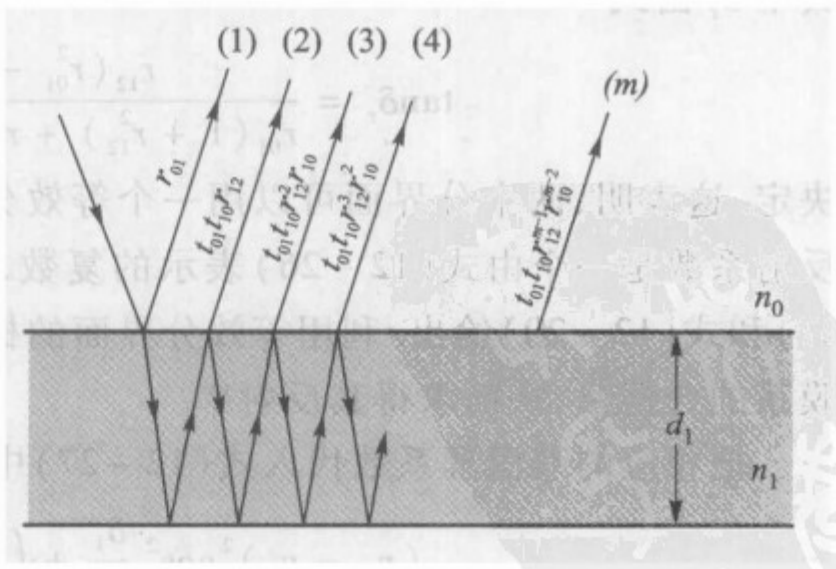


图 12－15

有了菲涅耳反射比和透射比，与图 7－15 相似，就可容易地得出各反射光波的振幅. 如图 12－15 所示，设入射光的振幅为 1，在 n_0 至 n_1 界面上反射所形成的反射光(1)的振幅则为 r_{01}，而透射光的振幅为 t_{01}，该光再经 n_1 至 n_2 界面的反射及由 n_1 至 n_0 界面的透射而形成反射光(2)，其振幅显然是 $t_{01}r_{12}t_{10}$. 同样可得如图所示的其他各反射光(3)、(4)、…、(m) 的振幅分别为 $t_{01}t_{10}r_{12}^2r_{10}$、$t_{01}t_{10}r_{12}^3r_{10}^2$、…及 $t_{01}t_{10}r_{12}^{m-1}r_{10}^{m-2}$ 等. 此外，将(1)光与(2)光或(2)光与(3)光相比可以看出，任意两相邻反射光由于光程上的差别所引起的相位差皆为

$$\delta_1 = \frac{4\pi}{\lambda} n_1 d_1 \cos i_1 , \tag{12-25}$$

其中 λ 为光在真空中的波长，i_1 为光在膜层中的折射角. 由于各光波是相干的，它们叠加后的合振幅则为

$$r = r_{01} + t_{01}t_{10}r_{12}e^{-i\delta_1} + t_{01}t_{10}r_{12}^2 r_{10}e^{-2i\delta_1} + t_{01}t_{10}r_{12}^3 r_{10}^2 e^{-3i\delta_1}$$
$$+ \cdots + t_{01}t_{10}r_{12}^{m-1} r_{10}^{m-2} e^{-(m-1)i\delta_1} + \cdots$$

这里，在界面上反射时可能存在的相位 π 的变化已包含在菲涅耳系数里. 于是有

$$r = r_{01} + \frac{t_{01}t_{10}r_{12}e^{-i\delta_1}}{1 - r_{10}r_{12}e^{-i\delta_1}},$$

由于 $t_{01}t_{10} = 1 - r_{10}^2 = 1 - r_{01}^2 = 1 + r_{01}r_{10}$（参见 §7－5 注），所以

$$r = \frac{r_{01} + r_{12}e^{-i\delta_1}}{1 + r_{01}r_{12}e^{-i\delta_1}}. \tag{12-26}$$

此式给出振幅为 1 的入射光经单层膜系反射后所得反射光的合振幅. 单层膜的反射率则为

$$R = r^2 = rr^* = \frac{r_{01}^2 + r_{12}^2 + 2r_{01}r_{12}\cos\delta_1}{1 + r_{01}^2 r_{12}^2 + 2r_{01}r_{12}\cos\delta_1}. \tag{12-27}$$

顺便指出，式(12－26)中的 r 是一个复数，它包括一实数的模 $|r|$ 和一相位因子 δ_r，所以式(12－26)又可写成

$$|r| \cdot e^{i\delta_r} = \frac{r_{01} + r_{12}e^{-i\delta_1}}{1 + r_{01}r_{12}e^{-i\delta_1}}, \tag{12-28}$$

其中 δ_r 由式

$$\tan\delta_r = \frac{r_{12}(r_{01}^2 - 1)\sin\delta_1}{r_{01}(1 + r_{12}^2) + r_{12}(1 + r_{01}^2)\cos\delta_1} \tag{12-29}$$

决定. 这表明，两个分界面可以用一个等效分界面来表示，等效分界面的菲涅耳反射系数是一个由式(12－26)表示的复数，它的实振幅和相位分别由式(12－27)和式(12－29)给出. 利用等效分界面的概念，就可以用递推法计算任意多层膜系的合振幅，从而求得其反射率.

把相应的菲涅耳系数代入式(12－27)中，则单层膜的反射率又可写成

$$R = \frac{(n_0 - n_2)^2\cos^2\frac{\delta_1}{2} + \left(\frac{n_0 n_2}{n_1} - n_1\right)^2\sin^2\frac{\delta_1}{2}}{(n_0 + n_2)^2\cos^2\frac{\delta_1}{2} + \left(\frac{n_0 n_2}{n_1} + n_1\right)^2\sin^2\frac{\delta_1}{2}}. \tag{12-30}$$

可见，单层膜的反射率 R 决定于入射介质的折射率 n_0、基底的折射率 n_2、膜层的折射率 n_1 和它的几何厚度 d_1、光波在膜层中的折射角 i_1 以及光的波长 λ 等.

图 12－16 表示，在光垂直入射和 $n_0=1$，$n_2=1.52$ 的情况下，对给定的波长 λ_0，以膜层的折射率为参数，依式(12－30)计算出的单层膜反射率随膜层光学厚度 n_1d_1 的变化规律. 它一目了然地揭示出单层膜的光学特性.

应该注意，图 12－16 所示的曲线是对给定波长 λ_0 而言的. 在实际应用的波长范围内，还应知道对于不同于 λ_0 的其他波长该膜系的光学特性. 由于折射率随波长是缓变函数，色散效应对膜系反射率的影响很小，可以忽略. 而由式(12－30)知，由于相位 δ_1 随波长变化迅速，所以对不同波长膜系有不同的反射率. 对给定的膜系，要知道反射率随波长的变化情况，就只能按式(12－30)进行计算，而且还应记住，在光斜入射时，要以有效折射率取代式中的各 n 值对 s 和 p 分量分别进行计算，所以这种计算工作量是很大的. 一般都排成计算程序由电子计算机来完成.

下面进一步分析单层膜的光学特性.

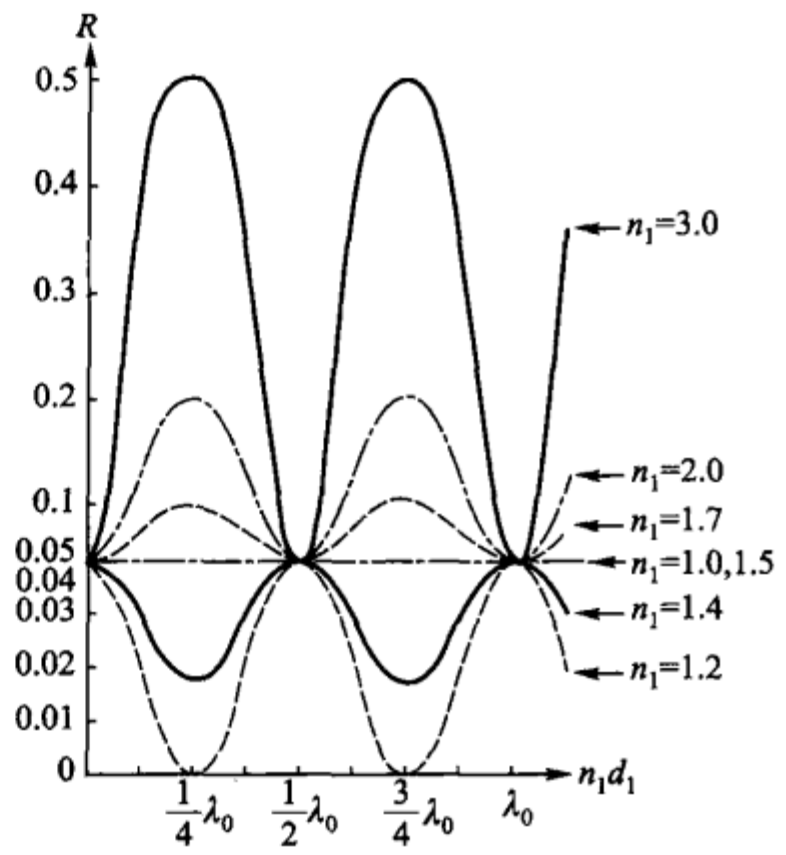


图 12－16

1. 单层增透膜

由图 12－16 可以看出，在膜层的折射率 n_1 小于基底的折射率 n_2 时，膜系的反射率比没镀膜的基底的反射率一般都低，膜层有增透作用，并且在 $n_1d_1=\lambda_0/4$ 时，有最佳的增透效果. 由式(12－25)可知，垂直入射时，由于 $\cos i_1=1$，此时 $\delta_1=\frac{4\pi}{\lambda}\frac{\lambda_0}{4}$，在波长 λ_0 处，即 $\lambda=\lambda_0$ 时，$\delta=\pi$，于是式(12－30)中的 $\cos(\delta_1/2)=0$，$\sin(\delta_1/2)=1$，表示光学厚度为 $\lambda_0/4$ 的单层膜在 λ_0 处的反射率公式简化为

$$R_{\lambda_0}=\frac{\left(\frac{n_0n_2}{n_1}-n_1\right)^2}{\left(\frac{n_0n_2}{n_1}+n_1\right)^2}=\left(\frac{n_0-\frac{n_1^2}{n_2}}{n_0+\frac{n_1^2}{n_2}}\right)^2. \tag{12-31}$$

显然，当膜层的折射率 n_1 满足

$$n_1=\sqrt{n_0n_2} \tag{12-32}$$

时，膜系在 λ_0 处的反射率为零，也就是对 λ_0 的光有 100% 的透射率特性，这一结论是单层增透膜的理论依据.

对于一般折射率在 1.5 左右的光学玻璃，为用单层膜达到 100% 的增透效

果,按式(12 - 32)则要求 $n_1 = 1.22$,折射率如此低的镀膜材料至少目前还找不到,现在一般都用折射率为 1.38 的氟化镁 MgF_2 镀制单层增透膜,因而仍有约 1.3% 的剩余反射. 对于折射率较高的光学玻璃,单层氟化镁能达到很好的增透效果.

对于其他波长,由于给定膜层的光学厚度不是它们的 1/4 或其奇数倍,增透效果差些,例如对目视仪器的单层增透膜,常把控制波长 λ_0 选在人眼最灵敏的波长 $\lambda_0 = 550$ nm 处,在远离该波长的红光和蓝光处反射率稍大些,这就是膜表面呈紫红色的原因所在. 膜的这种特性,在镀膜工艺中常被用来根据膜层表面的颜色变化判断其光学厚度.

图 12 - 17 表示的是在玻璃基底上($n_2 = 1.52$)镀有单层氟化镁($n_1 = 1.38$)膜时,反射率随波长的变化,其中光学厚度 $n_1 d_1 = \lambda_0/4$($\lambda_0 = 600$ nm),除垂直入射外,还对几种入射角度画出了 s 分量和 p 分量的反射率曲线.

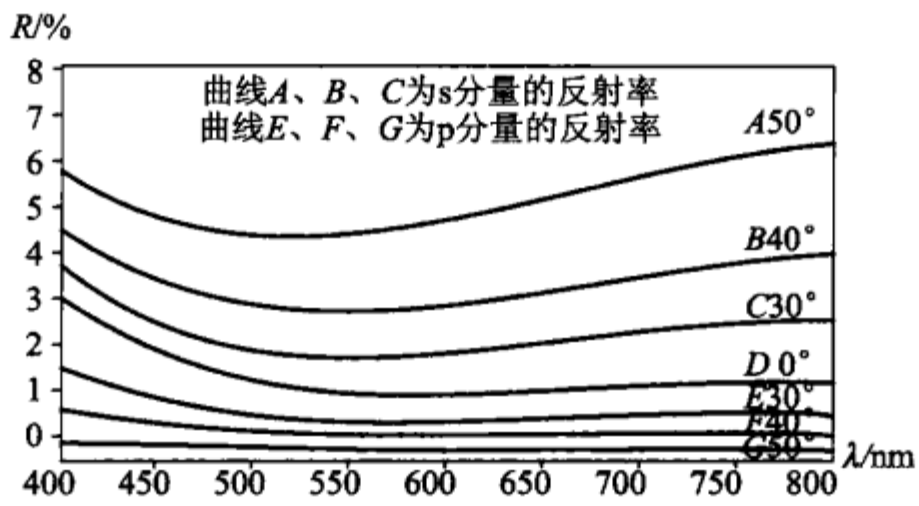


图 12 - 17

2. 单层增反膜

在膜层折射率 n_1 大于基底折射率 n_2 时,由图 12 - 16 可看出,此时单层膜有增强反射率的作用,并且在 $n_1 d_1 = \lambda_0/4$ 时,有最佳的增反效果. 光垂直入射时,和前面的讨论相似,可得在波长 λ_0 处的反射率为

$$R_{\lambda_0} = \left(\frac{n_0 - \dfrac{n_1^2}{n_2}}{n_0 + \dfrac{n_1^2}{n_2}} \right)^2, \tag{12 - 33}$$

其形式和式(12 - 31)相同,但这里它不是反射率的极小值,而是极大值. 例如在玻璃基底($n_2 = 1.52$)上镀一光学厚度为 $\lambda_0/4$ 的硫化锌 ZnS($n_1 = 2.35$)薄膜时,在波长 λ_0 处的反射率约达 33%. 并且还可看出,膜层的折射率 n_1 愈大,则其反射率愈高. 在实际应用上,由于一般总是要求膜系的反射率更高些,所以与单层增透膜的广泛应用相反,很少利用单层增反膜,多采用多层增反膜.

3. 光学厚度为半波长时膜层的特性

在膜层的光学厚度为 $\lambda_0/2$ 时，单层膜显示出另一个重要特性. 由图 12-16 可看出，此时无论膜层的折射率比基底的是大还是小，膜系在波长 λ_0 处的反射率都和未镀膜时基底的反射率相同，类似上述的讨论，此时式(12-30)变为

$$R_{\lambda_0} = \left(\frac{n_0 - n_2}{n_0 + n_2}\right)^2. \tag{12-34}$$

这正是光在入射介质与基底界面上的反射率，而与膜层无关.

* §12-5 双层增透膜

从上节讨论知，适于镀单层增透膜的 MgF_2 材料，由于其折射率为 1.38，对最常用的冕牌玻璃($n=1.5$)，仍有约 1.3% 的剩余反射. 在许多情况下，这种剩余反射仍嫌太大，必须进一步减小，为此则需采用多层增透膜.

在选择多层增透膜系上有两条途径：

其一是由于适于镀膜的材料有限，折射率不是一个可任意改变的参数，所以一个有效的途径是：选定膜系各层的折射率，以改变各层的光学厚度达到全增透(零反射)的目的. 这时就要求各膜层的光学厚度不是 $\lambda_0/4$ 的整数倍，这给镀膜工艺控制厚度带来了困难.

其二是预先选定各膜层的光学厚度为 $\lambda_0/4$ 的整数倍，计算为获得零反射所必需的折射率值. 这条途径可简化镀膜时对厚度的控制，但必须设法满足对折射率值的要求.

不论是哪一种途径，采用多层膜提高增透效果的原理是一样的. 如前所述，镀在冕牌玻璃上的 MgF_2 薄膜之所以不能达到全增透，是因为后者的折射率偏高，或者说前者的折射率偏低. 因此可以推想，如果紧贴基片镀一高折射率材料的膜层，使从效果上如同有较高折射率的“新基底”，以与 MgF_2 相匹配，从而可使 MgF_2 的增透效果更为有效. 实践证明，这种分析方法是正确的. 现先以第二种途径为例讨论双层增透膜.

设在基底上首先镀一层光学厚度为 $\lambda_0/4$ 的膜层，如上节所述，该单层膜对 λ_0 的反射率为

$$R_{\lambda_0}' = \left[\frac{n_0 - \dfrac{n_2^2}{n_3}}{n_0 + \dfrac{n_2^2}{n_3}}\right]^2 \quad \text{或} \quad R_{\lambda_0}' = \left[\frac{n_0 - Y}{n_0 + Y}\right]^2,$$

其中 n_2 和 n_3 分别为膜层与基底的折射率，$Y = n_2^2/n_3$. 此式表示该膜层与基底组成的系统可看成是具有折射率为 Y 的一个“新基底”. 在这新基底上，再镀一层折射率为 n_1 和光学厚度为 $\lambda_0/4$ 的膜层，则其在 λ_0 处的反射率为

$$R_{\lambda_0} = \left[\frac{n_0 - \frac{n_1^2}{Y}}{n_0 + \frac{n_1^2}{Y}}\right]^2,$$

将 Y 值代入则有

$$R_{\lambda_0} = \left[\frac{n_0 - \frac{n_1^2 n_3}{n_2^2}}{n_0 + \frac{n_1^2 n_3}{n_2^2}}\right]^2, \tag{12-35}$$

显然，光学厚度皆为 $\lambda_0/4$ 的双层膜系在波长 λ_0 处全增透的条件为

$$n_2 = \sqrt{\frac{n_3}{n_0}} n_1. \tag{12-36}$$

双层膜系共有三个界面，和前面假定的一样，仍令光从折射率为 n_0 的介质入射，与 n_0 相邻的膜层的折射率和几何厚度分别为 n_1 和 d_1，与基底相邻的膜层的为 n_2 和 d_2，基底的折射率为 n_3（图 12-18）. 先考虑光波从折射率为 n_1 的介质向基底上镀有折射率为 n_2 和几何厚度为 d_2 的薄膜入射，按上节讨论的结果，该膜层的反射比为

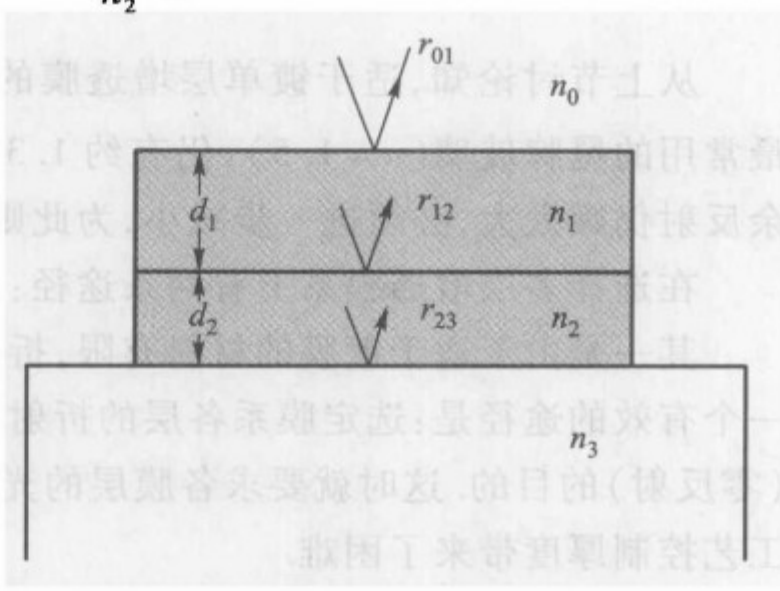


图 12-18

$$\tilde{r} = \frac{r_{12} + r_{23} e^{-i\delta_2}}{1 + r_{12} r_{23} e^{-i\delta_2}}, \tag{12-37}$$

其中

$$\delta_2 = \frac{4\pi}{\lambda} n_2 d_2 \cos i_2. \tag{12-38}$$

现在再把这单层膜看成具有菲涅耳反射系数为 $\tilde{r}$ 的“假想基底”，并在其上镀一层折射率为 n_1、几何厚度为 d_1 的膜层，令光波自介质 n_0 向该膜层入射，则其反射比为

$$r = \frac{r_{01} + \tilde{r} e^{-i\delta_1}}{1 + r_{01} \tilde{r} e^{-i\delta_1}}, \tag{12-39}$$

式中

$$\delta_1 = \frac{4\pi}{\lambda} n_1 d_1 \cos i_1. \tag{12-40}$$

于是，将式(12-37)的 $\tilde{r}$ 值代入式(12-39)后，就得到两层膜的反射比，为计

算该膜系的反射率 R,计算出 r 复数值的模平方即可.(实际上不必给出 R 的表示式,而且对多层膜也无法给出,只需利用计算公式,排成程序,在电子计算机上计算.)这里给出 R 的表示式

$$R = \frac{c^2 + d^2}{a^2 + b^2}\ ①, \tag{12-41}$$

其中(若将 r_{01}、r_{12} 和 r_{23} 分别用 r_1,r_2 和 r_3 代替)

$$a = (1 + r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1)\cos\frac{\delta_1}{2}\cos\frac{\delta_2}{2} - (1 - r_1r_2 + r_2r_3 - r_3r_1)\sin\frac{\delta_1}{2}\sin\frac{\delta_2}{2}, \tag{12-42a}$$

$$b = (1 - r_1r_2 - r_2r_3 + r_3r_1)\sin\frac{\delta_1}{2}\cos\frac{\delta_2}{2} + (1 + r_1r_2 - r_2r_3 - r_3r_1)\cos\frac{\delta_1}{2}\sin\frac{\delta_2}{2}, \tag{12-42b}$$

$$c = (r_1 + r_2 + r_3 + r_1r_2r_3)\cos\frac{\delta_1}{2}\cos\frac{\delta_2}{2} - (r_1 - r_2 + r_3 - r_1r_2r_3)\sin\frac{\delta_1}{2}\sin\frac{\delta_2}{2}, \tag{12-42c}$$

$$d = (r_1 - r_2 - r_3 + r_1r_2r_3)\sin\frac{\delta_1}{2}\cos\frac{\delta_2}{2} + (r_1 + r_2 - r_3 - r_1r_2r_3)\cos\frac{\delta_1}{2}\sin\frac{\delta_2}{2}, \tag{12-42d}$$

由式(12-41)及(12-42c)和(12-42d)可以看出,上述条件:

$$\delta_1 = \pi, \delta_2 = \pi \quad 及 \quad n_2 = \sqrt{\frac{n_3}{n_0}}n_1,$$

正是使 $R=0$ 的条件,因为此时 $c=0$ 及 $d=0$.

此外,使 $R=0$ 的条件不仅限于这一个解,还有更广泛的解,这些解正是对应上述的第一个途径. 为使 $R=0$,则要 $c=0$ 及 $d=0$,由式(12-42c)及(12-42d)联立解之,并将相应的菲涅耳系数用其依赖的折射率表示,则可得全增透的条件为

$$\tan^2\frac{\delta_1}{2} = \frac{(n_3 - n_0)(n_2^2 - n_0n_3)n_1^2}{(n_1^2n_3 - n_0n_2^2)(n_0n_3 - n_1^2)}, \tag{12-43}$$

$$\tan^2\frac{\delta_2}{2} = \frac{(n_3 - n_0)(n_0n_3 - n_1^2)n_2^2}{(n_1^2n_3 - n_0n_2^2)(n_2^2 - n_0n_3)}, \tag{12-44}$$

① 参见 M. Francon 著 Modern Application of Physical Optics(第 7 页).

这表明，在给定的折射率条件下，适当地选择两膜层的相位厚度 $\delta_1/2$ 及 $\delta_2/2$（亦即光学厚度 n_1d_1 及 n_2d_2，因为在垂直入射时，$\delta/2 = 2\pi nd/\lambda$）就可达到全增透的要求，当然这时得出的膜层相位厚度不是 $\pi/2$，即其光学厚度不是 $\lambda_0/4$.

图 12－19(a)、(b)分别给出按第一途径和第二途径计算出的双层增透膜反射率曲线，这种膜系在控制波长 λ_0 处可达 100% 的透射率，而对其他波长则不然，曲线形状如 V 形，所以有时称作 V 形增透膜.

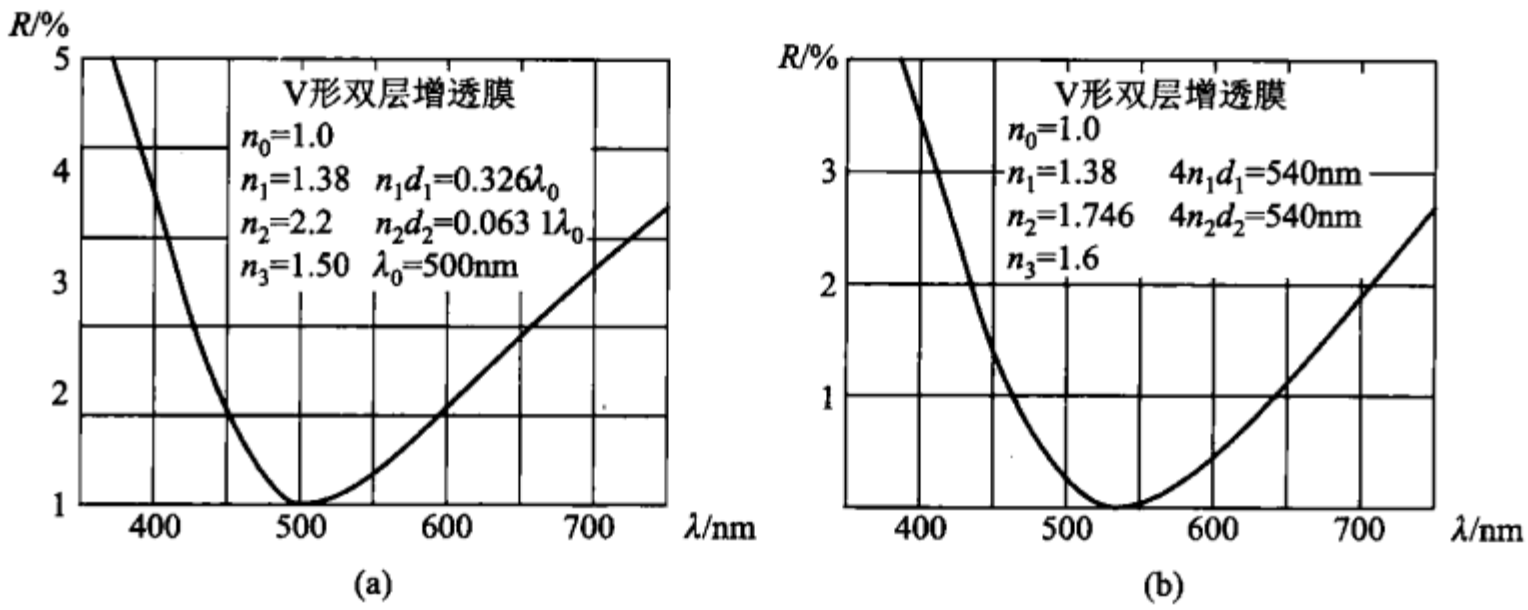


图 12－19

有时（如一般彩色电视、电影所用的镜头和电影放映镜头），并不要求在某一波长处有 100% 的透射率，而希望在较宽的波段范围内反射率都比较低而一致. 图 12－20 表示的就是接近所要求的这种膜系的反射率曲线，其形状如 W 形，故称 W 形增透膜. 其两层膜的光学厚度分别为 $n_1d_1 = \lambda_0/4$ 及 $n_2d_2 = \lambda_0/2$. 这里利用了上节所指出的 $\lambda_0/2$ 膜层的特性，它对 λ_0 来说，如同不存在一样，即在 λ_0 处的反射率由光学厚度为 $\lambda_0/4$ 的第一层膜决定，但它改善了其他波长处的透射率特性，使膜系在较宽的波段上有良好的增透效果.

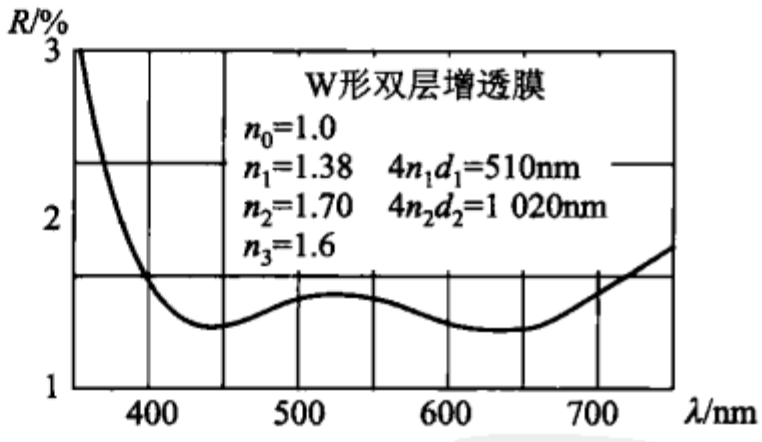


图 12－20

如果双层膜仍满足不了所需的增透要求，则需制备三层或更多层的增透膜系，这里就不详细介绍了.

* §12－6　多层高反射膜

多层高反射膜是由较高折射率 n_H 和较低折射率 n_L 的两种材料交替组成的

$\lambda_0/4$ 膜系，并且与基底和空气相邻的都是较高折射率的膜层，这种 $\lambda_0/4$ 膜系通常用下列符号表示：

$$GHLHLH\cdots LHA = G(HL)^pHA, \quad p = 1,2,3\cdots$$

其中 G 和 A 分别代表基底（玻璃）和空气，H 和 L 分别代表光学厚度为 $\lambda_0/4$ 的高、低折射率膜层，$2p+1$ 为膜系的膜层数. 半波长的光学厚度则应写成 HH 或 LL.

虽然膜系反射率的计算都是由电子计算机完成的，但对这里所讨论的 $\lambda_0/4$ 膜系，由于其在 λ_0 处的特殊性，类似式(12-35)的推导，则可很容易地得出其在该波长 λ_0 处的反射率为

$$R_{\lambda_0} = \left[\frac{n_0 - \left(\frac{n_H}{n_L}\right)^{2p}\frac{n_H^2}{n_S}}{n_0 + \left(\frac{n_H}{n_L}\right)^{2p}\frac{n_H^2}{n_S}}\right]^2. \tag{12-45}$$

显然，n_H 和 n_L 的差别愈大，层数 p 愈多，则膜系反射率 R 就愈高.

在实际应用上，除此波长外，往往还要求在一定波长范围内膜系要有高反特性. 因此，对给定的膜系，还必须计算其反射率随波长的变化. 图 12-21 表示的是典型的 $\lambda_0/4$ 高反膜系的反射率特性曲线，这是在折射率为 1.52 的玻璃基底上交替涂镀 ZnS($n_H=2.35$)和 MgF_2($n_L=1.38$)膜层而得的，膜层数作为参量标记在各曲线上，横坐标的上标尺表示的是膜层的相位厚度 $\delta/2=2\pi nd/\lambda$，下标尺为波长. 如图可见，高反带的宽度是有限的，在其两侧反射率陡然下降并且以振

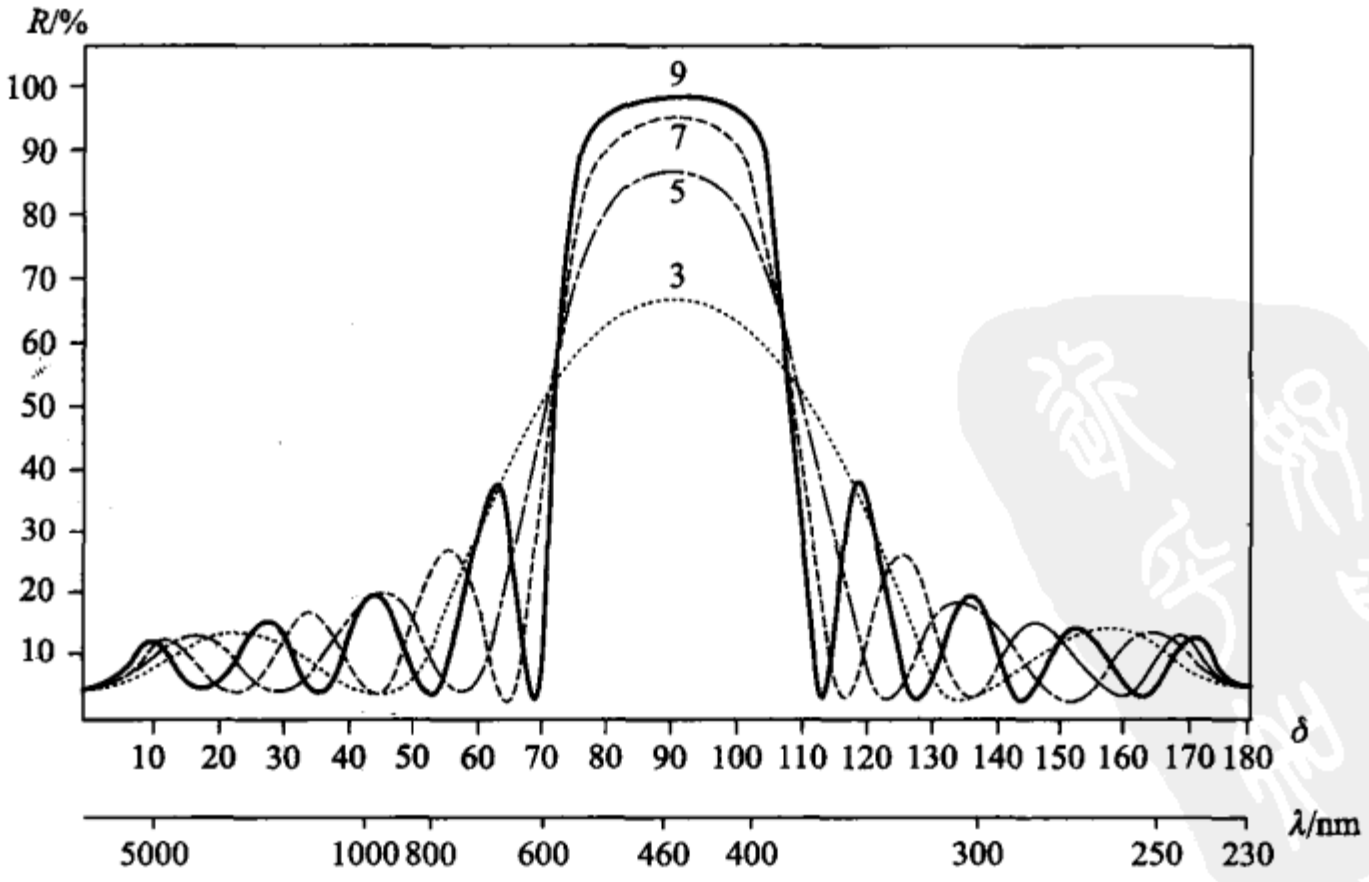


图 12-21

荡形式衰减，层数继续增加，并不影响高反带的宽度，只是增大了反射带内的反射率以及其两侧的振荡数目.

令 $g=\lambda_0/\lambda$，则高反带对应的波长范围（见图 12－22 中的 Δg）随着膜系层数的增加而趋近一个极限值

$$2\Delta g = \frac{4}{\pi}\arcsin\left(\frac{n_H - n_L}{n_H + n_L}\right),$$

其中 Δg 称作高反带的半宽度，它只与构成膜系的两种材料的折射率有关，并且比值 n_H/n_L 愈大，高反带的半宽度愈宽，如图 12－22 所示.

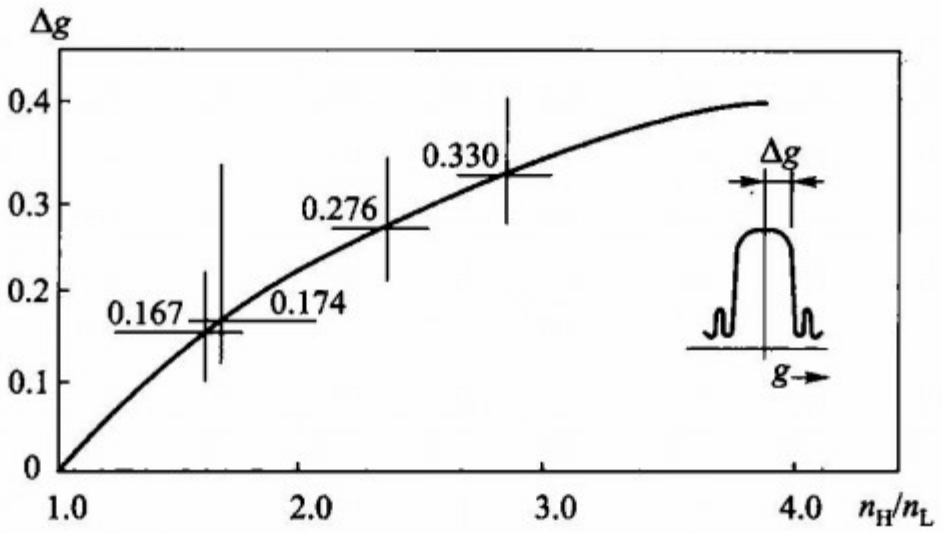


图 12－22

* §12－7　干涉滤光片

能从连续光谱中滤出所需波长范围的光的器件称作滤光片. 而利用光的干涉原理制成的滤光片则称作干涉滤光片，由于这种滤光片所能透过的光谱范围是可任意选定的，并且透过的光谱范围的宽度可达几十纳米，特窄的可达0.1 nm，所以在现代科学技术中得到了广泛的应用.

把两组膜系 $(HL)^p$ 和 $(LH)^p$ 相对地组合在一起，如图 12－23 所示，构成

$$G(HL)^p(LH)^pA, \quad (12-46)$$

就会发现，它能透过控制波长 λ_0 的光，而其他略为偏离 λ_0 的光，透射率迅速下降. 该膜系的这种滤光作用很容易由其结构看出. 我们知道，光学厚度为半波长（$\lambda_0/2$）的膜层对 λ_0 的光犹如不存在一样，所以在式(12－46)的膜系里，中间层 LL 对波长 λ_0 不起作用，可略去不计，剩下的中间层为 HH，同样可略去不计，依此类推，可看出，整个膜系对

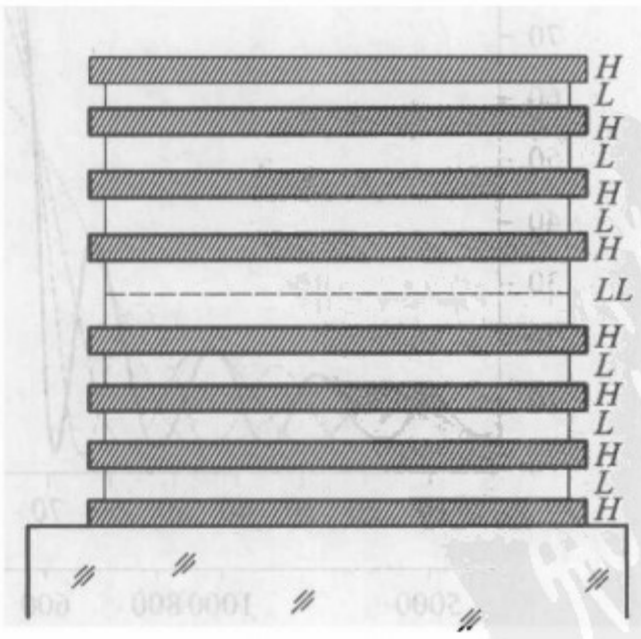


图 12－23

波长 λ_0 的光有同基底一样的透射率. 对于波长偏离 λ_0 的光,因为中间层不满足半波长的条件,因而透射率迅速下降.

实质上,式(12-46)的膜系是一个法布里-珀罗标准具,当把式(12-46)改写为

$$GH(LH)^{p-1}LL(HL)^{p-1}HA \qquad (12-47)$$

时就可看出. 显然 $H(LH)^{p-1}$ 和 $(HL)^{p-1}H$ 分别构成法布里-珀罗标准具的两个高反镜,而 LL 是其间隔层. 当然,在一般的布法里-珀罗标准具中不可能只有半个波长的光学间隔,只有在镀膜中才能实现. 因此,干涉滤光片的理论是以法布里-珀罗标准具的理论为基础的.

和其他类型的滤光片一样,干涉滤光片的光学性能也主要由三个参数表征,即中心波长位置 λ_0,通带半宽度 $\Delta\lambda$ 以及峰值透射率等. 图 12-24 一目了然地把这三个特性表示出来.

中心波长位置是指干涉滤光片透射率最大值所处的波长位置,这是首要的,它表征滤光片适用于哪一个波长. 从法布里-珀罗干涉仪的光强分布公式(8-20b)知,具有透射率最大值的波长 λ_0 由式

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} nd\cos i' = 2k\pi$$

决定,即

$$\lambda_0 = \frac{2nd}{k}\cos i'. \qquad (12-48)$$

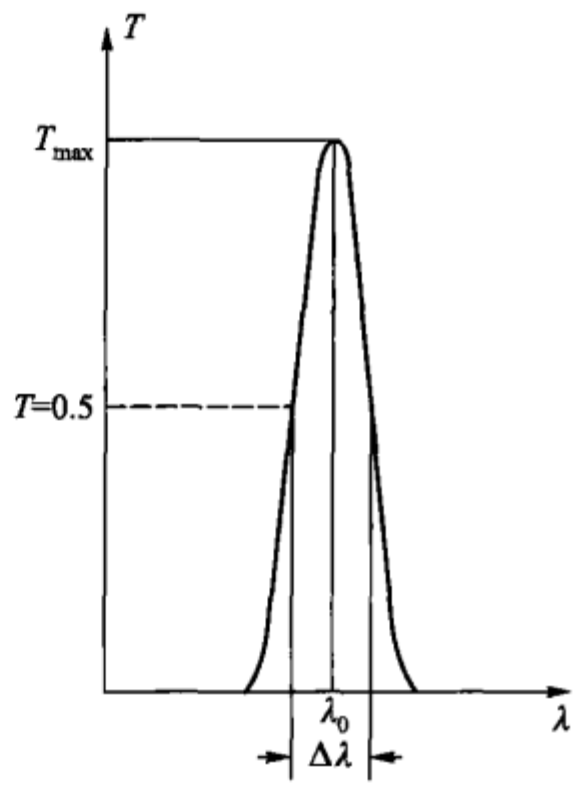


图 12-24

其中 nd 为间隔层的光学厚度,i' 为光在间隔层中的折射角,一般 $i'=0$,k 为整数,表示干涉的级次. 由该式知,为获得准确的中心波长位置,必须严格控制间隔层的光学厚度. 此外,对给定的间隔层光学厚度 nd,λ_0 并不是单值的,对应不同的干涉级次 $k=1,2,3,\cdots$,波长为 $2nd, nd, \frac{2}{3}nd, \cdots$ 的光都有最大的透射率,并且间隔层光学厚度较大时,透过的谱线也较多,因此,为滤出指定的单一波长的光,必须把不需要的谱线压缩掉,如把膜层镀在色玻璃上. 从压缩的角度看,采用对应 $k=1$ 的光学间隔最为有利,但由下面关于通带半宽度的讨论知,k 值大,则半宽度窄,因此必须视使用的要求综合考虑. 一般取 $k=1,2$ 或 3 的干涉级次.

通带半宽度是透射率为峰值之半所对应的波长范围,通常以 $\Delta\lambda$ 表示. 在法布里-珀罗干涉仪的光强分布公式(8-20b)中,使 $T=1/2$,则此时对应的 δ 值为 $\delta=2k\pi+\Delta\delta'$,于是

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + \dfrac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\dfrac{\Delta\delta'}{2}}.$$

若以 $F = 4R/(1-R)^2$，则

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + F\sin^2\dfrac{\Delta\delta'}{2}}.$$

由于 $\Delta\delta'$值很小，可使 $\sin\Delta\delta' = \Delta\delta'$，所以

$$\Delta\delta' = \frac{2}{\sqrt{F}}.$$

利用式 $\delta = 4\pi nd/\lambda$，则得

$$\Delta\lambda' = \frac{\lambda_0}{k\pi\sqrt{F}}.$$

于是通带半宽度为

$$\Delta\lambda = 2\Delta\lambda' = \frac{2\lambda_0}{k\pi\sqrt{F}}. \tag{12-49}$$

可见，对给定的中心波长 λ_0，高反膜的反射率 R 愈大，干涉级次 k 愈高，则干涉滤光片的通带半宽度愈窄，单色性愈好.

峰值透射率指干涉滤光片透射率的最大值. 按式(8－20b)理论上可达100%，在那里，忽略了光的损失. 实际上膜层对光有散射和少量的吸收，因此式(8－20b)应改写成

$$T = \frac{(1-R-A)^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\dfrac{\delta}{2}}. \tag{12-50}$$

式中 A 为在法布里－珀罗干涉仪的一个高反镜上的光能损失，所以实际上能达到的峰值透射率主要决定于镀膜工艺.

习　　题

1. 图 12－9 中，若玻璃板 M_2 以 AB 为轴转动，试写出由 M_2 反射的光的光强度变化公式.

2. 试说明看立体电影为什么要戴眼镜，此眼镜有什么光学特性？

3. 试由式 $\Phi = SA$(参见 §12－3)导出通过单一界面时透射率 T 的表达式，并证明 $T + R = 1$.

4. 振动面平行和垂直于入射面的线偏振光分别以 45°角入射到折射率为 1.52 的无吸收的玻璃平行平面板上，经玻璃板折射后，射出的光能各为原入射的百分之多少？(忽略在界面上的多次反射.)

5. 由于一般光学玻璃在红外波段不透光，所以在此波段要用锗(Ge，$n = 4$)作为光学仪器

的窗口，试问光经过由 Ge 片作的窗口时，光能至少损失多少？

若在 Ge 窗口的两表面都镀上硫化锌（ZnS，$n=2.35$）膜层，并且其光学厚度为 1.25 μm，在光垂直入射到窗口时，试问在波长 5 μm 处光能的损失为多少？

6. 若以 MgF_2（$n=1.38$）作为透镜的增透膜料，为在可见光的中心波长（550 nm）得最佳增透效果，薄膜的几何厚度应为多少？

7. 在折射率为 1.52 的玻璃的表面上镀一高反膜，它在控制波长 λ_0 处的反射率为 98.4%，试问在波长 λ 为 $\lambda_0/3$，$\lambda_0/5$ 以及波长为 $\lambda_0/2$，$\lambda_0/4$ 处此高反膜的反射率各为多少？

8. 若以 ZnS（$n_H=2.35$）和 MgF_2（$n=1.38$）作为高反膜的材料，并且控制波长选在 $\lambda_0=632.8$ nm，试问高反带的起止波长各为多少？

9. 在光自空气中以 30°角入射到由 ZnS 和 MgF_2 制成的高反膜时，若要在波长 550 nm 得最高反射率，问 ZnS 和 MgF_2 各膜层的几何厚度应为多少？为什么？

10. 若以冰晶石（$n=1.35$）作干涉滤光片的间隔层，试问将此滤光片用来滤出波长为 546.1 nm 的光时，间隔层的几何厚度最少应为多少？

第十三章

光在各向异性介质中的传播

前一章，我们通过对光波在各向同性介质中的传播的讨论，初步地接触到光的一些偏振现象. 这一章，我们将通过对光波在各向异性介质中的传播问题的讨论，除对晶体的光学性质得一些基本认识外，主要地还是继续讨论光的另一些重要的偏振现象.

§13-1 双 折 射

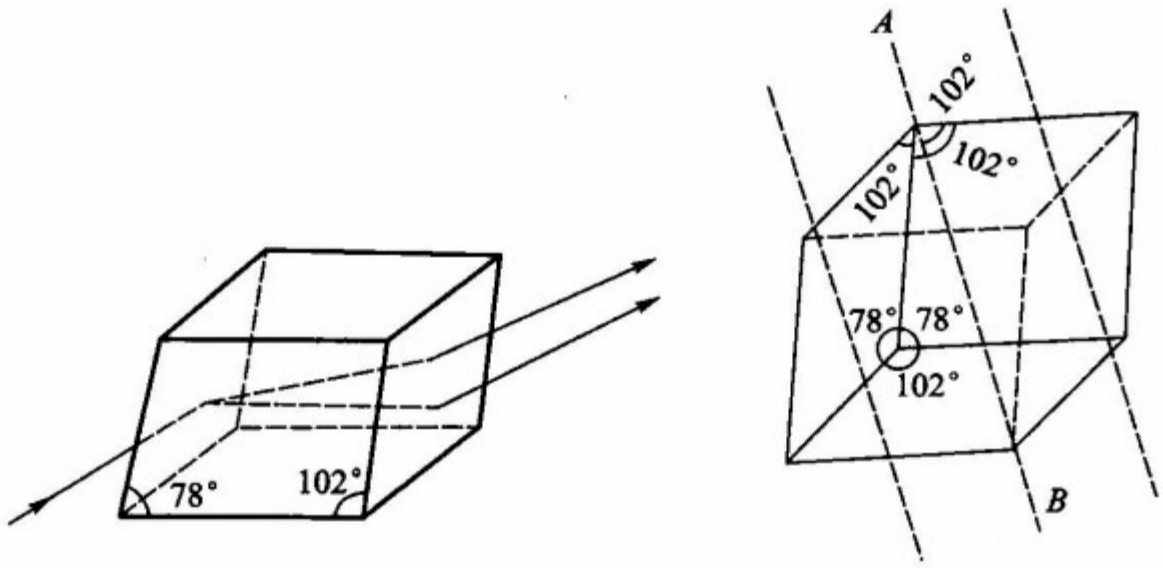
由一光束在各向同性介质(如玻璃)的表面上所产生的折射光只有一束，这已成为一般的常识. 然而，对于光学性质随方向而异的一些晶体，一束入射光常有分解为两束折射光的现象，这种现象称为双折射. 它不仅产生在某些各向异性的晶体中，而且也产生在其他种的光学各向异性介质中.

让我们先以方解石为例，研究光在其中的双折射.

方解石是碳酸钙($CaCO_3$)的六角系晶体，它有非常明显的双折射现象. 这种晶体在天然状态下相当大并且纯净，是制造产生偏振光的仪器的重要材料. 方解石晶体很容易被击裂成菱体，菱面的锐角为 78°08′，钝角为 101°52′，如图 13-1(a)所示. 一个细光束无论以多大的入射角投射在这晶体上，在晶体内部一般却总变成传播方向稍有不同的两个折射光. 当光束足够细和晶体足够厚时，则由晶体出来的将是两个在空间上完全分开的光束. 图 13-2(a)照片即为用方解石观察置于其下的一个亮斑时所获得的两个亮斑的景象.

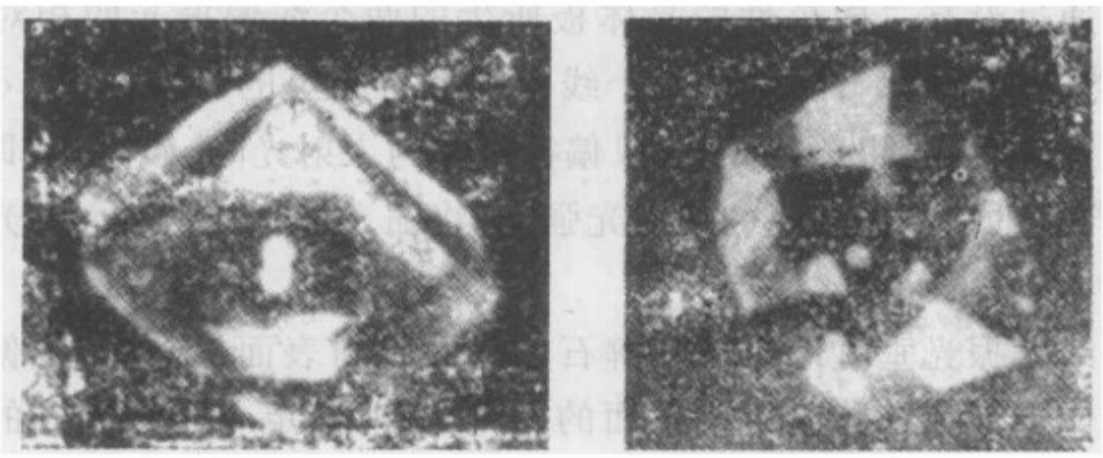
这两亮斑对应着两个不同性质的光线，其中之一在晶体内的传播方向遵从折射定律，即折射光线在入射面内，并且入射角正弦与折射角正弦之比等于晶体对该光的折射率(假定入射光所在的介质的折射率为 1)，这种光称为寻常光，简写作 o 光. 另一条光线在晶体内的进行方向与折射定律不符，即折射光线可以不在入射平面内并且入射角正弦与折射角正弦的比值不为常数，随入射角而变，这种光称为非寻常光，简写作 e 光.

在方解石中有这样一个固定的方向，沿着这个方向不发生双折射现象，光在



(a) (b)

图 13－1



(a) (b)

图 13－2

这个方向的传播如同在各向同性介质中传播一样，这个固定的方向称为晶体的光轴. 在方解石中，平行于通过三个钝角面会合的顶点并和三个面成等角的一直线[图 13－1(b)的 AB]的方向，为方解石的光轴方向. 沿此光轴方向观察紧靠在方解石下面的亮斑，只能看到一个亮斑，如图 13－2(b)所示. 像方解石这样只有一个光轴的晶体，还有石英(亦称水晶)、硝酸钠晶体和冰等，统称之为单轴晶体. 另外有些晶体，如云母和晶体硫黄等，有两个光轴，它们称为双轴晶体. 必须注意，晶体的光轴和几何光学中光学系统的光轴不同，前者是一个固定的方向而不是某一选定的线；后者是通过组成光学系统球面中心的线而平行于这个线的其他线则不是光轴. 这是完全可以理解的，因为晶体的各个部分应该具有同样的性质. 有了光轴之后，我们引出这样一个平面：包含晶体光轴和光线的平面，称它为晶体的主截面.

在实验上研究 o 光和 e 光，结果发现，这两个光都是线偏振光，不过它们的光矢量的振动方向不同. o 光是一个光矢量的振动方向垂直于自己的主截面的线偏振光；e 光则为光矢量的方向在自己的主截面内的线偏振光. 当晶体光轴

在入射面内时，o 光和 e 光的主截面重合，两者的光矢量的振动方向互相垂直. 一般情况下，o 光的主截面与 e 光的主截面有一不大的夹角，因而两光矢量的振动方向不完全相互垂直.

在某些晶体内，o 光和 e 光被晶体吸收的程度有很大不同. 电气石是一种矿石晶体，它对 o 光有强烈的吸收作用，而对 e 光则吸收得很少. 于是，当以自然光射在电气石晶体片上时，在晶体内所生的 o 光和 e 光受到不同的吸收并且在很短的路程上 o 光就会全部被吸收，因而通过的光是与晶体内 e 光相应的线偏振光. 电气石对 o 光和 e 光的不同吸收的现象称为晶本的二向色性. 除电气石外，已知还有一些有机化合物晶体，如碘化硫酸奎宁(iodo－sulphate of quinine)亦有二向色性. 这种有机的二向色性晶体，已成为产生大面积线偏振光的主要材料.

至此我们粗略地讨论了双折射现象，了解了 o 光和 e 光的基本性质. 然而，还没有涉及通过没有二向色性的晶体板所生的两个线偏振光的相对光强度问题. 对于自然光，由方解石所生的两个线偏振光有相等的光强度，即 o 光和 e 光的光强度相等. 而下面将会看到，当以偏振光作为入射光时，由晶体(即使是无二向色性)所产生的 o 光和 e 光的相对光强度，将随入射光的振动面与光在晶体内的主截面间的夹角而变.

设有一线偏振光垂直地射在方解石的天然折射表面上，并且线偏振光光矢量的振动方向与光在晶体内的主截面的夹角为 θ(假定 o 光和 e 光的主截面重合). 在图 13－3 中，A 代表入射光的振幅，$\rho\rho'$代表 o 光和 e 光的主截面. 按矢量的分解法，我们得到在晶体内垂直于主截面的光矢量振动的振幅，即 o 光的振幅，为 $A\sin\theta$；在主截面内的光矢量振动的振幅，即 e 光的振幅，为 $A\cos\theta$. 若分别以 a_o 和 a_e 表示，则有

$$a_o = A\sin\theta$$

和

$$a_e = A\cos\theta.$$

于是 o 光和 e 光的光强度分别为

$$I_o = A^2\sin^2\theta$$

和

$$I_e = A^2\cos^2\theta. \qquad (13-1)$$

此式称为马留公式，它表示 o 光和 e 光的光强度与入射光的振动面同光在晶体内的主截面的夹角有关. 显然，o 光和 e 光的光强度之比为

$$\frac{I_o}{I_e} = \frac{A^2\sin^2\theta}{A^2\cos^2\theta} = \tan^2\theta. \qquad (13-2)$$

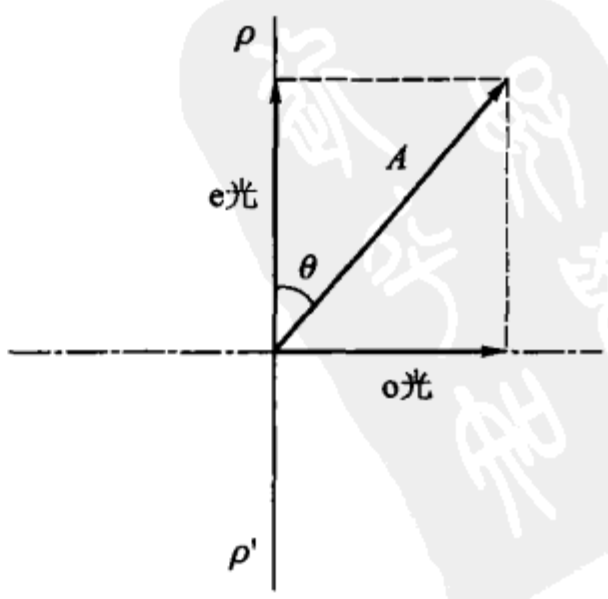


图 13－3

§13-2 单轴晶体内的波面 平面波在单轴晶体内的传播

为什么在各向异性的晶体内产生双折射现象呢？这需要借助光的电磁波理论来说明，然而也可以直接从下述已为实验所证实的假定出发来解释. 惠更斯曾假定，在晶体中，o 光的波面是球面，e 光的波面是椭圆回转面. 所谓波面就是完全包住一个单色点光源的波阵面.

在图 13-4(a)和(b)中，设 zz' 为光轴，C 为晶体内的一点光源，围绕它的圆和椭圆代表波阵面，也就是由 C 点发出的波的相位相同的点的轨迹. 若所述晶体是均匀的各向同性物质，则只有一个波阵面，是球面，表示在各方向上光波的速度都一样，然而在各向异性的晶体内，却有两个波面，一个是 o 光的波面，另一个是 e 光的波面. 对于自 C 点向各方向传播的 o 光，其电矢量垂直于光轴 zz'，传播速度相同，所以波面是球面；对于自 C 点向各方向传播的 e 光，其电矢量都在主截面内并且和光轴的夹角随光的传播方向而异，传播速度也随方向而改变，波面是椭圆回转面. 在光轴方向上，e 光的电矢量和 o 光的电矢量互相垂直并且又都垂直于光轴，有相同的传播速度，所以两波面在光轴方向相切. 把表示方解石和石英的波面的图 13-4(a)和(b)分别绕光轴 zz' 旋转就得到了所述的两波面. 圆画出一个球面，椭圆画出一个椭圆回转面. 这些曲面的三个截面如图 13-4(c)和(d)所示. 各图中的椭圆都是夸大了的，实际上它们与圆相当接近.

在方解石中，椭圆回转面在球面之外，而于光轴方向与球面相切. 这表示方解石内随方向而变的 e 光的传播速度大于 o 光的传播速度，只在光轴方向两速度才相等. 这样的晶体称为负单轴晶体. 在石英中椭圆回转面在球面之内并于光轴方向与球面相切. 这表示各方向都相同的 o 光的传播速度大于随方向而变的 e 光的传播速度，只在光轴方向两速度才相等. 这样的晶体称为正单轴晶体.

图 13-4 中也标明了 o 光和 e 光的光矢量的振动方向，同前节一样，s 表示垂直于图面的振动，p 表示在图面内的振动.

利用上述波面图和惠更斯求波阵面的作图法，很容易说明平行光在晶体表面产生双折射的原因. 仍以方解石为例说明如下.

1. 光轴在入射面内并与晶体的折射表面成一夹角

令平面波阵面 AB 以入射角 i_1 射在方解石晶体的折射表面上(图 13-5)，当波阵面的右端 B 在第一介质中传播到 C 点时，左端 A 点在晶体中产生了两个波阵面：椭圆回转面和球面，它们在光轴方向上相切，由于方解石是负单轴晶体，所以椭圆回转面在球面之外.

按惠更斯求波阵面的原理，作两个平面：CD，与球面相切；CD'，与椭圆回转面相切，两者分别代表折射的 o 光的波阵面和 e 光的波阵面. 于是自 A 点向 CD

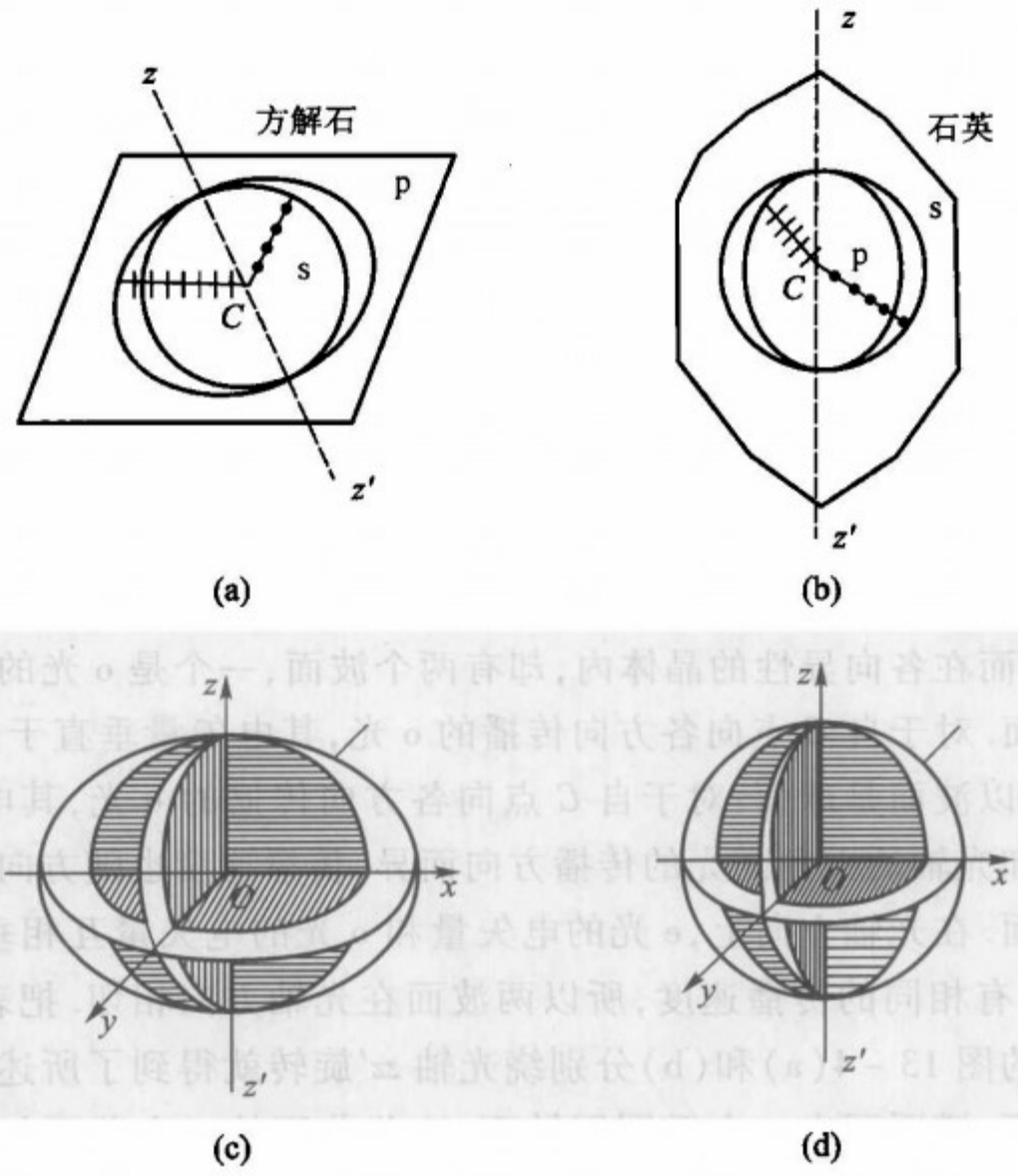


图 13 – 4

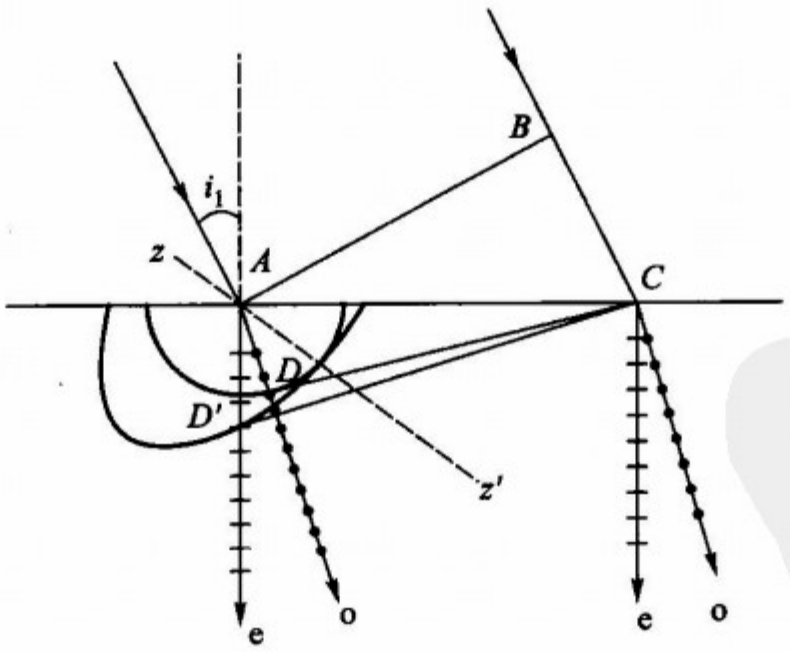


图 13 – 5

平面同球面相切点 D 作直线，则得 o 光，它的光矢量的振动方向垂直于主截面. 自 A 点向 CD' 平面同椭圆回转面相切点 D' 作直线，则得 e 光，它的光矢量的振动在主截面内. 这样，由图上可以看出在晶体中产生两种线偏振光，它们沿稍微不同的方向传播.

若光在晶体上的入射面不平行于光轴，则 o 光和 e 光不在同一平面. 当仍以图面表示入射面时，则光轴 zz' 和 e 波面的相切点不在图面内，因此，e 光也不在图面内，而 o 光仍在图面内.

2. 光轴平行于折射表面并与入射面垂直

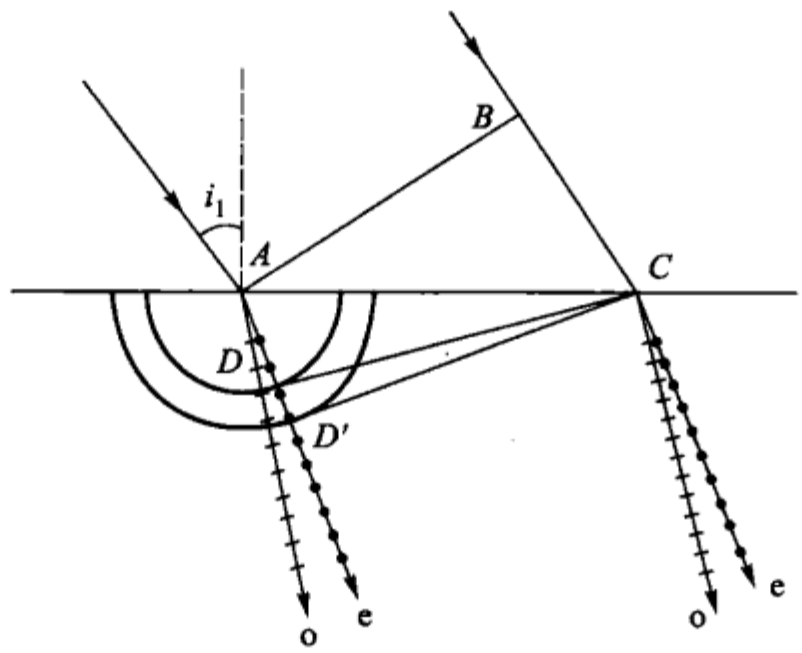


图 13－6

这种情况如图 13－6 所示，光轴 zz' 垂直于图面. 因为光轴就是椭圆回转面的回转轴，所以在给定的情况下，e 光的波面被图面截成圆形. 这圆的半径大于 o 光的波面的圆半径. 按上段所述的方法，可得如图 13－6 所示的晶体所生的 e 光和 o 光的进行方向和光矢量的振动方向.

对于单轴晶体，有两个主折射率，一个是 o 光的折射率 n_o，它在数值上等于真空中光速除以 o 光在晶体内的传播速度；另一个是 e 光的折射率 n_e，由于 e 光在晶体中于不同方向有不同的传播速度，所以特别规定真空中光速除以 e 光在垂直于光轴方向的传播速度 v_e 为晶体对 e 光的折射率（有时称此折射率为晶体的 e 光主折射率），此特定的速度 v_e 与图 13－6 中的外圆的半径成正比. 于是对于像方解石这样的负单轴晶体，$n_e < n_o$；而对于像石英那样的正单轴晶体，$n_e > n_o$. 但对于大多数的晶体，n_e 和 n_o 的差别并不大. 表 13－1 给出了几种晶体对于钠黄光（$\lambda = 589.3$ nm）的 n_o 和 n_e 的数值.

从图 13－6 很容易看出，对于任意入射角 i_1，其正弦与折射的 e 光的折射角 i_{2e} 的正弦之比：

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_{2e}} = \frac{|BC|}{b},$$

其中 b 为外圆的半径. 以 τ 表示光在第一介质（$n = 1$）内通过线段 BC 所需的时间，则

$$|BC| = c\tau, \quad b = v_e\tau.$$

由此得出

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_{2e}} = \frac{c}{v_e} = n_e. \tag{13-3}$$

于是,通过在给定情况下测量入射角 i_1 和 e 光的折射角 i_{2e} 即可得该晶体对 e 光的主折射率 n_e.

表 13-1

晶体	n_o	n_e
方解石	1.658	1.486
硝酸钠	1.585	1.337
电气石	1.64	1.62
石英	1.544	1.553
冰	1.306	1.307

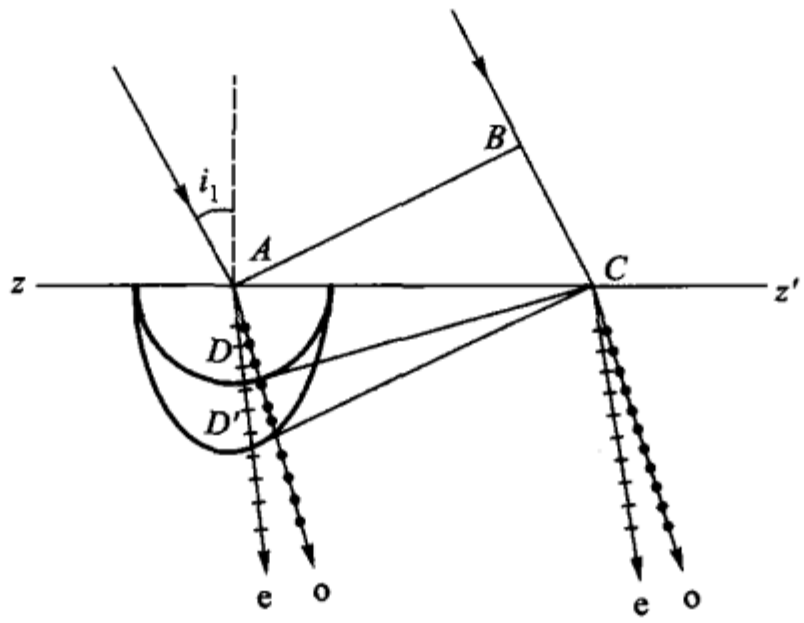


图 13-7

3. 光轴平行于晶体的折射表面并且在入射面内

在这种情况下(图 13-7)自 A 点向晶体内传播的球面波和椭圆回转面波在折射表面上相切,并且切点在入射面内,从 C 点作切面 CD 和 CD',就得到 o 光和 e 光的波阵面,自 A 点向波阵面上的切点 D 和 D' 引直线,即得 o 光和 e 光的折射光线.

4. 光轴平行于晶体的折射表面而光线垂直地射至折射表面

从图 13-8 可以看出,在这种情况下,o 光和 e 光都不产生折射,沿同一方向传播. 但两者的波阵面并不重合,在负单轴晶体内,e 光的波阵面 $A'B'$ 超前于 o 光的波阵面 $A''B''$,而正单轴晶体,则相反. 结果,e 光和 o 光之间发生一定的光程差. 这种情况在下面(如沃拉斯顿棱镜中)将遇到.

顺便指出,本节我们之所以不以石英为例,而选用负单轴晶体方解石,一方面因为方解石在偏振器件中应用得较广泛,另一方面则由于石英不是一个简单

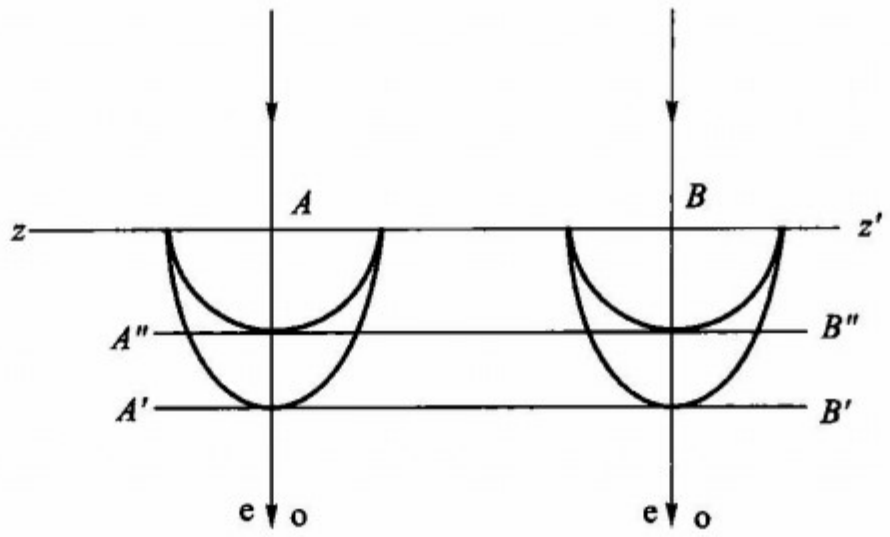


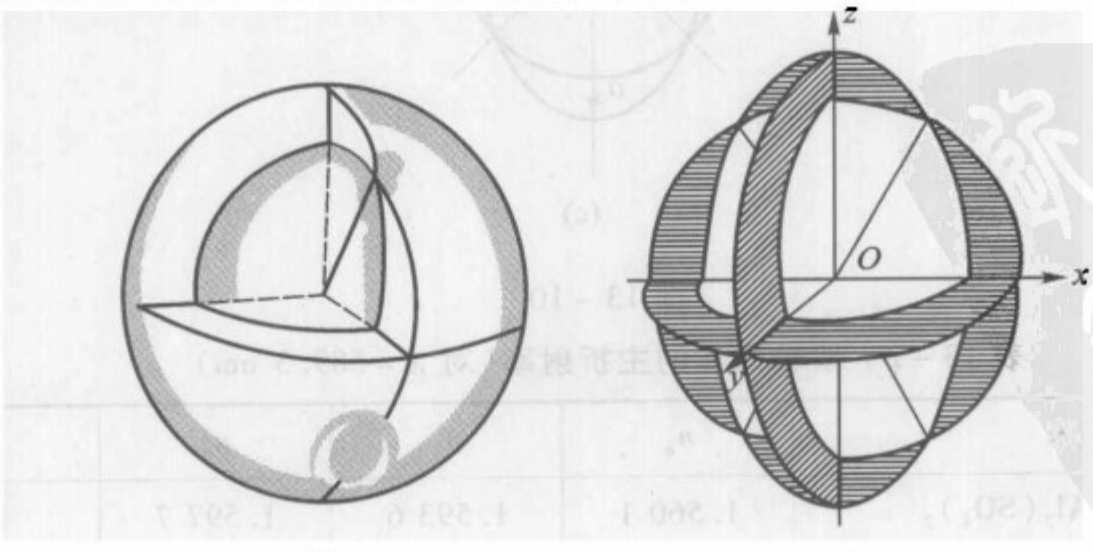
图 13-8

的正单轴晶体,实际上在它的光轴方向,o 光和 e 光的速度并不完全相等,只是近似相等.

* §13-3 双轴晶体内的波面

自然界的晶体大都是双轴的. 与单轴晶体一样,一束入射光在双轴晶体中一般也分成两束折射光,并且它们的振动面互相垂直. 但这两束光都不遵从折射定律,在这里,根本没有"寻常光"和"非常光"之分,对这两束光,它们的传播速度都随方向而变,并且一般都不在入射面内. 只有在晶体的两个方向上,无论光的振动平面有怎样的取向,它们的传播速度都相同,入射光不再分为两束,故称这种晶体为双轴晶体.

对这种晶体所产生的双折射现象我们仍用基于惠更斯原理的波面图来说明. 显然此时由晶体中一点光源发出的波面就不像图 13-4 所示的那样简单,而有图 13-9(a)所示的比较复杂的双层波面. 外层波面远看好像一个椭球,但具有四个低窝点,在此四低窝点处内波面与外波面相接、在两相对低窝点决定的方



(a) (b)

图 13-9

向上光线的传播速度相同，这两个方向称晶体的第一类光轴. 图 13 - 9(b)所示为上述波面在三个主截面上的透视图.

图 13 - 10 重新画出了波面在三个主轴上的截面图，光的振动方向仍用点和短线表示，每个截面都把两个波面切成一个圆和一个椭圆，但各截面上的圆和椭圆并不相同，三个半轴长 a,b,c 分别和三个光线速度成正比，通常把与之相应的折射率称作晶体在主轴截面上的折射率，并以 n_a、n_b 和 n_c 表示. 图中为明显起见，把椭圆和圆的差别特意夸大画出. 若光沿 x 轴传播，两个互相垂直的偏振光的速度与 b、c 对应，即晶体的折射率分别为 n_b 和 n_c，在 y 轴上为 n_a 和 n_c，而沿 z 轴则为 n_a 和 n_b. 表 13 - 2 列举出几个双轴晶体在主轴截面上对钠黄光的折射率，其中 2α 为两光轴的夹角.

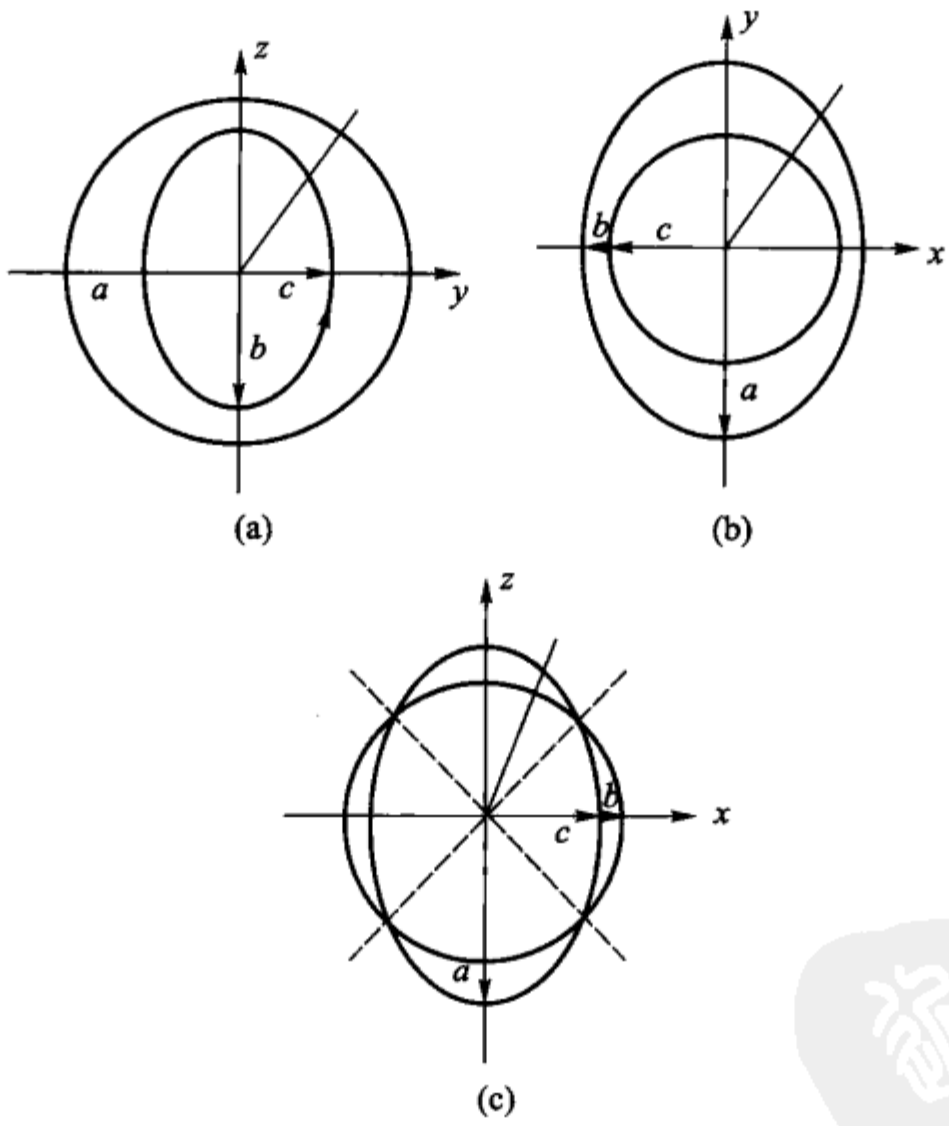


图 13 - 10

表 13 - 2　双轴晶体的主折射率(对 $\lambda = 589.3$ nm)

晶体	n_a	n_b	n_c	2α
云母 $KH_2Al_3(SO_4)_2$	1.560 1	1.593 6	1.597 7	138°
霰石 $CaO(CO)_2$	1.531	1.682	1.686	162°
辉锑矿 Sb_2S_3($\lambda = 762$ nm)	3.194	4.046	4.303	133°

续表

晶体	n_a	n_b	n_c	2α
硫 S	1.950	2.043	2.240	69°
黄玉$(2AlO)FSiO_2$	1.619	1.620	1.627	49°~66°
蓝宝石 $CuO_3Al_2O_32P_2O_59H_2O$	1.520	1.523	1.530	40°

在这里必须对光线概念加以说明. 前面所说的光线(亦称射线),根据光的电磁理论它是代表能量的传播方向的,在各向同性介质中,由于波面是球面,光线与波面法线重合,而法线是代表等相位面的传播方向的. 在各向异性介质中由于 e 光的波面是椭圆,所以它的光线和法线除在三个主轴方向外一般都不一致(图 13-11),图中 S 代表光线,N 代表法线.

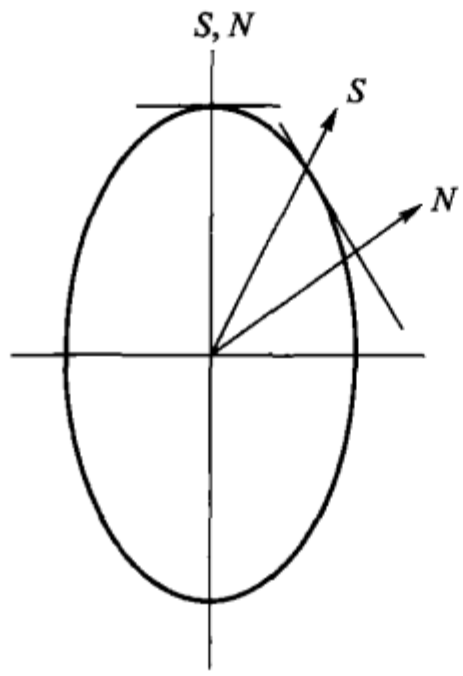


图 13-11

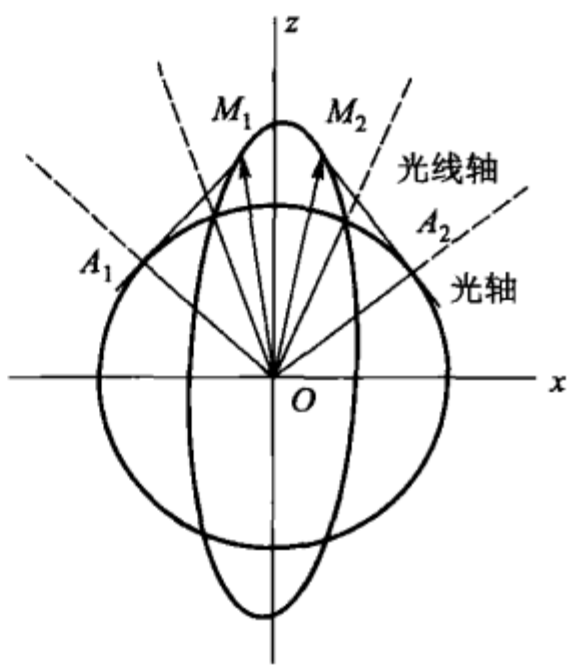


图 13-12

有了这一概念,我们再来讨论双轴晶体波面在 xz 上的截面,图 13-12 把图 13-10(c)又单独地画出,在此截面上椭圆和圆的四个交点就是图 13-9 中内、外波面的接触点,它们所决定的两个方向即为上述的第一类光轴. 因为它们是在 xz 截面内,所以又称 xz 截面为光轴面. 但这两个轴并不是晶体的光轴,光轴的方向用切面 A_1M_1 和 A_2M_2 来确定,两个切面和三度空间的外波面相切的轨迹是直径为 A_1M_1 和 A_2M_2 的两个圆,因为有一个波面的截面是圆,所以直线 OA_1 和 OA_2 与切面垂直,因此在这两条线决定的方向上圆和椭圆的法线速度相同,所以 OA_1 和 OA_2 是晶体的两个光轴,又称第二类光轴.

单轴晶体只是双轴晶体的特殊情况,当 $a=b$,即 $n_a=n_b$ 时,便成以 z 为光轴的正单轴晶体;当 $b=c$,即 $n_b=n_c$ 时,便成以 x 为光轴的负单轴晶体.

§13－4　折射率椭球

用光的电磁理论来阐明介质的各向异性，归结为光的电场 $\boldsymbol{E}$ 的作用，它在晶体内部产生了电感应（电位移）$\boldsymbol{D}$. 在各向同性介质中，介电常数 ε 是个标量，因而 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$，它们不随光在晶体中的方向而变，并且 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 有相同的振动方向. 但在各向异性介质中，ε 是个张量，一般来说，晶体中的电感应 $\boldsymbol{D}$ 和电场 $\boldsymbol{E}$ 的关系，在把坐标轴 x、y、z 取在晶体的三个主轴方向上并考虑到晶体的某些对称性时，可写作

$$D_x = \varepsilon_x E_x,$$
$$D_y = \varepsilon_y E_y,$$
$$D_z = \varepsilon_z E_z.$$

它表明，一般的 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 有不同的振动方向.

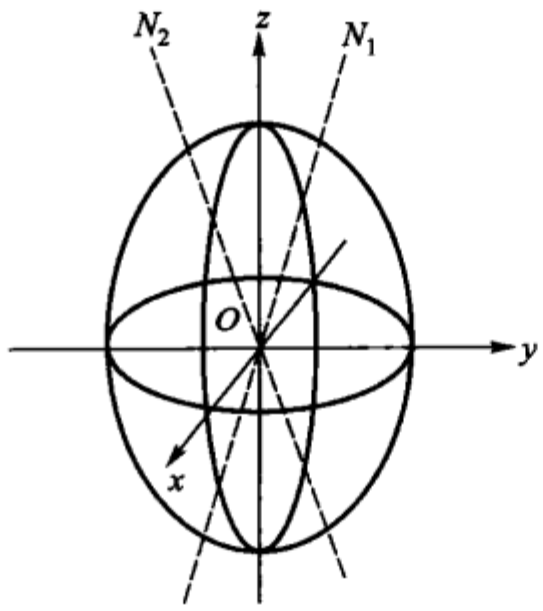
在光频范围内，$\varepsilon=n^2$，所以有

$$\varepsilon_x = n_x^2,$$
$$\varepsilon_y = n_y^2,$$
$$\varepsilon_z = n_z^2.$$

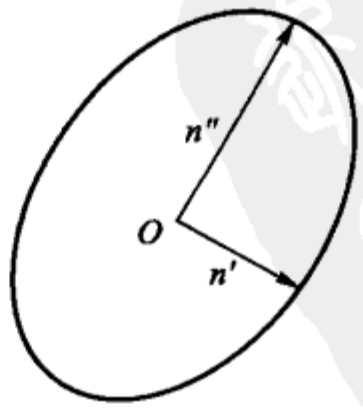
n_x，n_y 和 n_z 称作晶体的主折射率.

由光的电磁理论，电感应在晶体内的传播可用一个椭球表示，它的三个半轴长分别与主折射率 n_x，n_y 和 n_z 成正比. 故称此椭球为折射率椭球，如图 13－13(a)所示，它在三个主轴的截面都是椭圆. 这里只给出折射率椭球所代表的物理意义.

(1) 在光沿第一个主轴方向传播时，它的两个偏振光的振动方向中一个平



(a)



(b)

图 13－13

行第二主轴、另一个平行第三主轴. 第二、第三主轴的半轴长分别与相应的偏振光的折射率成正比. 例如若光沿 z 轴方向传播,一偏振光的振动方向平行 x,折射率为 n_x,另一偏振光的振动方向平行 y,折射率为 n_y. 光沿 x 或 y 方向传播时,可以此类推.

(2) 光沿其他任何方向 k 传播(k 为该方向上的单位矢量),则通过 O 点垂直 k 作一平面与椭球相割,椭球在此平面上的截面为一椭圆[图 13-13(b)]. 此椭圆的长、短轴方向分别为两偏振光的振动方向,轴的长短分别和它的在 k 方向的折射率成正比.

(3) 当光沿光轴方向传播,椭球在垂直光轴的截面为一圆,这表示相互垂直的两偏振光的折射率相等,没有双折射现象. 一个椭球能且只能被两个不同方向的平面割出圆,故有两个光轴.

(4) 当两个光轴合并在 z 方向,则成单轴晶体 $n_z = n_e$,$n_x = n_y = n_o$,椭球退化为椭圆旋转体. 对各向同性介质,则椭球退化为圆球,$n_x = n_y = n_z = n_o$.

§13-5 由双折射产生偏振光的仪器

要从自然光得到平面(线)偏振光,可以利用光在玻璃板上以布儒斯特角入射所生的反射光和以同一入射角入射在玻璃堆上所产生的透射光(图 12-10). 在红外光区域用六片氯化银叠成一组,当自然光以 63°入射时,所产生的透射光即为相当好的偏振光. 在可见光和紫外线区域,有很透明的天然双折射晶体,用它可以制成特殊的棱镜来产生偏振光. 这种产生偏振光的元件可分为两类:一类是能给出两个振动平面相互垂直的平面偏振光的元件;另一类是只给出一个振动平面为某一固定平面的平面偏振光. 兹以沃拉斯顿(Wallaston)棱镜和尼科耳(Nicol)棱镜作为两类典型分述如下:

1. 沃拉斯顿棱镜

沃拉斯顿棱镜属于能给出振动面互相垂直的两个平面偏振光的仪器,其结构如图 13-14 所示. 沃拉斯顿棱镜由两个直角的方解石棱镜组成,两棱镜沿斜边胶合起来:棱镜 ABC 的光轴平行于直角边 AB,棱镜 ACD 的光轴平行于折射棱 C(即垂直于图面). 有时也用两个石英的直角棱镜的组合来代替它.

自然光垂直地射在 AB 面上,如图 13-8 所示可知,此时由第一棱镜 ABC 所产生的 o 光和 e 光不分开,但两者以不同的速度传播. 在方解石中 e 光的传播速度大于 o 光的传播速度,或者说 n_e 小于 n_o. 由于第二棱镜 ACD 的光轴垂直于第一棱镜的光轴,所以光矢量的振动方向垂直于第一棱镜主截面的 o 光,对于第二棱镜来说,正是光矢量的振动方向平行于其主截面的 e 光. 此时光矢量的振动方向并没有改变. 这样一来,振动方向垂直于图面的 o 光在两棱镜分界面(胶合

面)上的折射为由光密介质向光疏介质的折射;而振动方向在图面内的 e 光在该面上的折射则为由光疏介质向光密介质的折射. 前者使在第二棱镜内的折射光线远法线,后者使在第二棱镜内的折射光线近法线,结果使 o 光和 e 光在第二棱镜内分开. 第二棱镜内的这两光在 CD 面还产生一次由光密到光疏的远法线折射. 最后由沃拉斯顿棱镜出来的光,是与第一棱镜中的 o 光和 e 光对应的两个平面偏振光,它们间的夹角 γ 取决于方解石两主折射率之差和棱镜的折射角 α

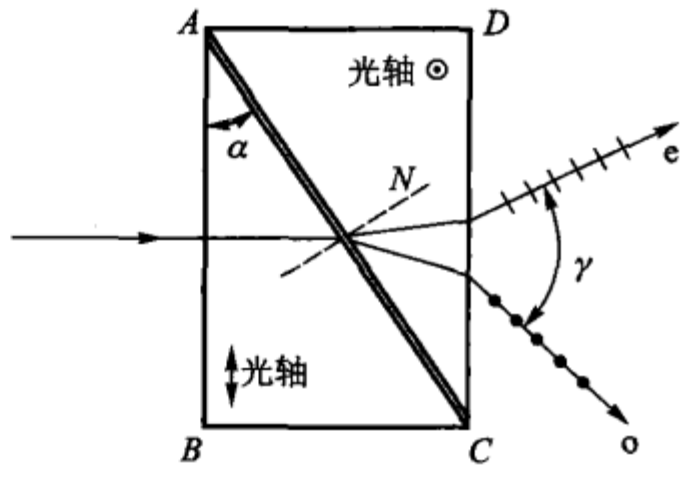


图 13 - 14

$$\gamma = 2\arcsin[(n_o - n_e)\tan\alpha]. \tag{13-4}$$

当 $\alpha = 45°$时,对于由方解石制成的沃拉斯顿棱镜,两个出射的偏振光的夹角,由上式算得,约为 20°40′.

与沃拉斯顿棱镜相似的还有如图 13 - 15 所示的各种产生两个偏振光的元件,其中(a)所示的棱镜称为洛匈棱镜,两个直角棱镜亦为方解石制成的. (b)所示的棱镜的第一棱镜是由折射率等于方解石 n_e 的玻璃制成.

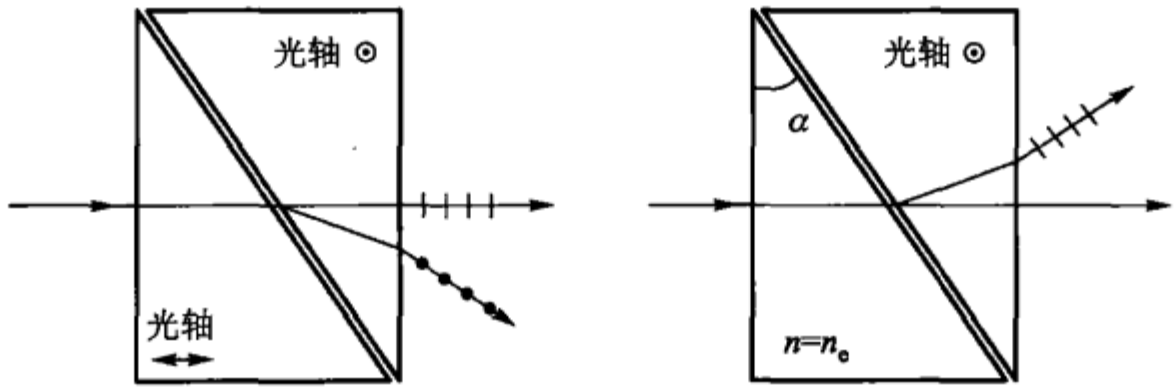


图 13 - 15

2. 尼科耳棱镜

尼科耳棱镜属于能给出一个有固定的振动面的平面偏振光的仪器,其结构如图 13 - 16 所示. 这个光学元件是这样做成的:先取一块长度约为宽度三倍的优质方解石晶体,将两端切去一部分使在主截面上的角度由 71°变成 68°. 然后将晶体沿着垂直于主截面及两端面的 $A'D'$ 切开,并把切开的面磨成光学平面,然后再用加拿大树胶胶合起来. 加拿大树胶是胶合光学元件(如透镜,棱镜,平板)所惯用的一种透明体,在此处用它还由于另外一个非常关键的原因:它对钠黄光的折射率为 1.55,介于方解石的 $n_o = 1.658$ 和 $n_e = 1.486$ 之间. 显然,对于 e 光而言,加拿大胶相对于方解石是光密介质,而对 o 光而言,加拿大胶相对于方

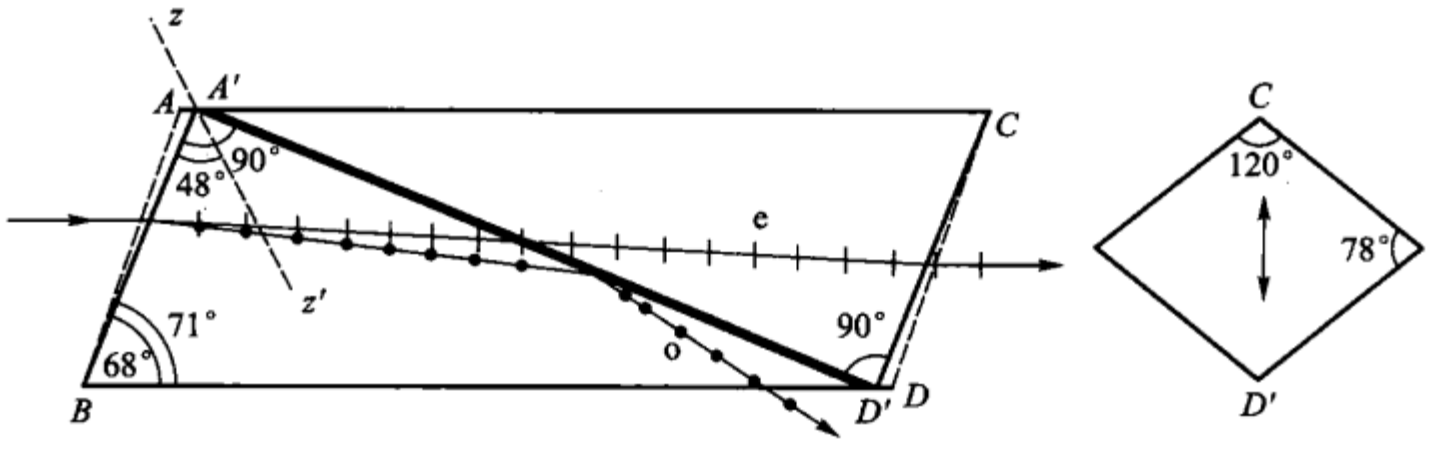


图 13－16

解石却是光疏介质.

入射光在前半个棱镜中分解为振动面互相垂直的两个线偏振光,o 光和 e 光,其中 o 光以约 76°的入射角射在加拿大胶层上,由于对 o 光来说,胶层相对于方解石是光疏介质,当入射角大于临界角 $\arcsin(1.55/1.658)\approx 70°$ 时,将产生全反射,结果 o 光自胶层全反射,不能进入胶层后的方解石,亦即不能通过尼科耳棱镜. 而由前半个棱镜所产生的 e 光,它在树胶层上不可能产生全反射($n_e < n_{加}$),总是透过. 所以自尼科耳棱镜出来的光就是与此 e 光相应的平面偏振光,它的振动方向在主截面内. 从尼科耳棱镜的端面来看,此 e 光的振动方向平行于平行四边形的对角线 CD'.

3. 二向色性的偏振片

上面列举的产生偏振光的棱镜都是采用天然单晶体为材料,其大小和数量受天然的限制. 例如,面积为 $2\times 2\ \text{cm}^2$ 的尼科耳已经很稀罕了. 这大大地限制了大面积偏振光的产生与偏振光的普遍的应用. 偏振片是用人工方法制成的二向色性多晶体薄膜. 有机晶体中如碘化硫酸奎宁,有强烈的二向色性,把它们沉淀在聚氯乙烯膜或其他塑料膜中,当这膜经过一定方向拉伸后,二向色性多晶体便会按拉伸的方向排列整齐,能在薄膜的垂直方向上表现出和单晶一样的二向色性——吸收 o 光而通过 e 光. 把这薄膜夹在两片透明塑料片或玻璃片之间,便成为偏振片. 它轻便、便宜并且不难获得大面积. 这就使它能较广泛地应用在所有不需要特别完善的偏振光的情况,如观看立体电影所用的眼镜片和许多大型仪器中产生偏振光的装置. 质量好的偏振片,已用于较精密的仪器上. 很多偏光显微镜,都已采用这种偏振片.

可用来使自然光变为一个平面偏振光的仪器,不论是尼科耳棱镜还是偏振片,反过来又都可以用来检查平面偏振光. 例如,对所观察的光,当尼科耳棱镜的主截面的取向在某一方位时得全暗,则所观察的光为完全线偏振光,并且这个完全线偏振光的振动方向垂直于尼科耳棱镜端面的对角线 CD' 的方向. 当把尼科耳棱镜或偏振片用来由自然光产生平面偏振光时,则它们被称为起偏镜(片);而当用来检查平面偏振光时,它们被称为检偏镜(片). 串联的两个尼科耳棱镜,

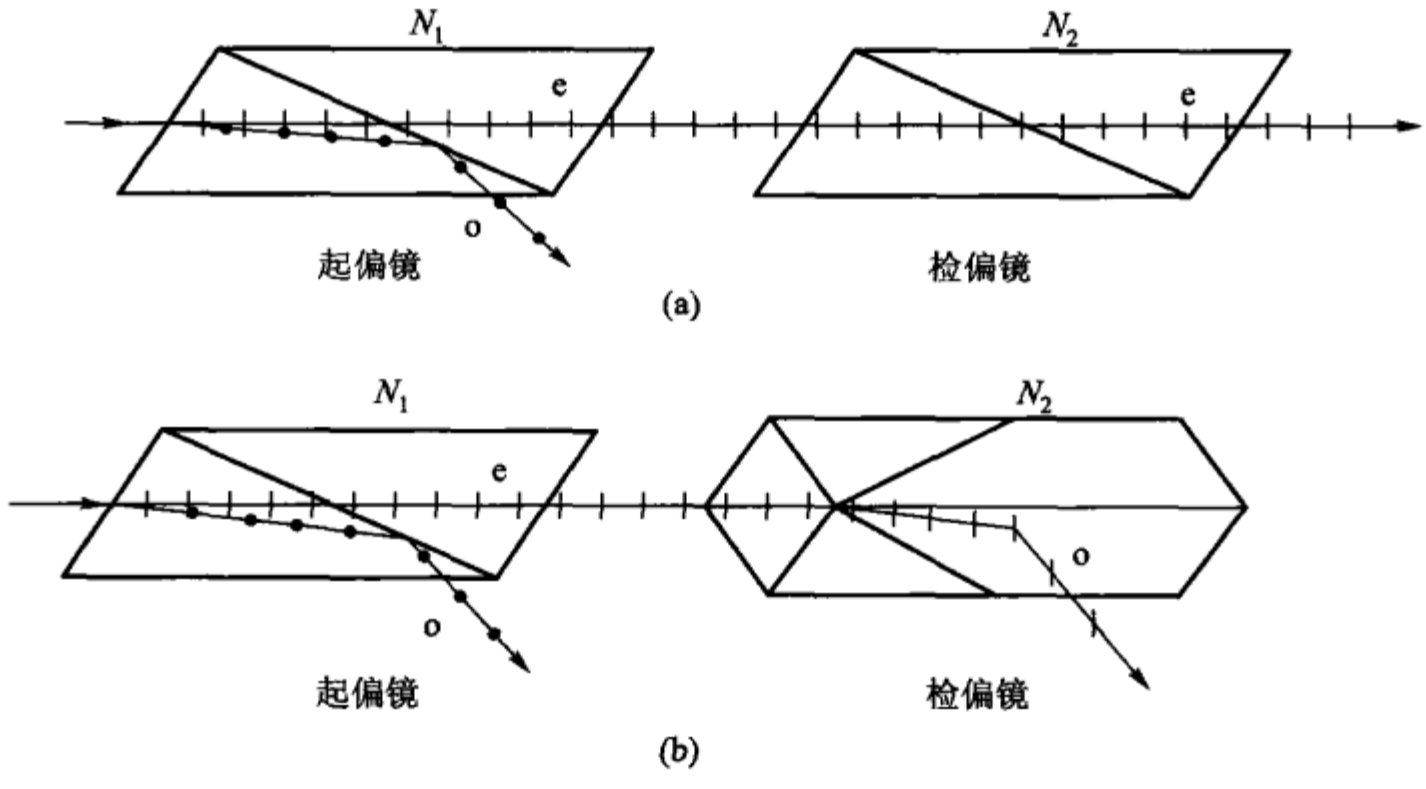


图 13 - 17

靠近光源的一个是起偏镜，另一个便是检偏镜. 当起偏镜和检偏镜的布置如图 13 - 17(a)所示的情况时，则由起偏镜产生的偏振光亦能通过检偏镜，此时从起偏镜和检偏镜组合系统出来的光有最大光强度，称这种布置为“平行棱镜”. 当起偏镜和检偏镜的布置如图 13 - 17(b)所示的情况时，则由起偏镜产生的偏振光垂直于检偏镜的主截面 N_2，完全不能通过检偏镜，此时从起偏镜和检偏镜组合系统出来的光的光强度为零，称这种布置为“正交棱镜”.

§13 - 6　椭圆偏振光和圆偏振光　波片

以两个同频率有固定相位差的相互垂直的振动同时作用于一点时，则该点的合成轨迹呈椭圆状. 在光学中，各向异性晶体内所生的 o 光和 e 光是同频率且振动方向相互垂直的两偏振光，假如能使它们之间存在一个固定的相位差，则这样的 o 光和 e 光在其相遇点的合成光(电)矢量的末端的轨迹，一般来说，呈椭圆状，这种合成光称为椭圆偏振光. 当合成光(电)矢量的末端的轨迹呈圆状时，该合成光称为圆偏振光. 圆偏振光是椭圆偏振光的一种特殊情况.

自然光在晶体内所产生的 o 光和 e 光，虽然是同频率的和振动方向相互垂直的，但是它们之间无固定的相位差. 例如图 13 - 18 中，由于在入射的自然光中垂直于图面的振动和在图面内的振动间无固定的相位关系，因而在光线进行方向上的任一点的 o 光和 e 光的相位差均随时间作无规则的改变，这样的光不是椭圆偏振光或圆偏振光. 然而，对同一晶体，当入射光是一平面偏振光时，晶体内的 o 光和 e 光是由同一光(电)矢量分解出来的，因而在光线进行方向的任一点上，o 光和 e 光间有固定的相位差，这样的光就是椭圆偏振光. 所以，将平面偏

振光垂直地射在光轴平行于折射表面的各向异性的晶体板上，即可获得椭圆或圆偏振光.

设有一平行晶体板，光轴平行于晶面，一平面偏振光垂直地射在晶面上并且其振动平面与晶体板光轴间的夹角为 θ（图 13－18），于是，在晶体表面上，o 光和 e 光的振幅分别为 $A\sin\theta$ 和 $A\cos\theta$，其中 A 为入射光的振幅，在晶体表面上，此两光同相位. 由于 o 光和 e 光在光线的进行方向的传播速度不同，所以随着在晶体中路程的增加，两者的相位差亦增大. 当它们穿过厚度为 l 的晶体时，其相位差为

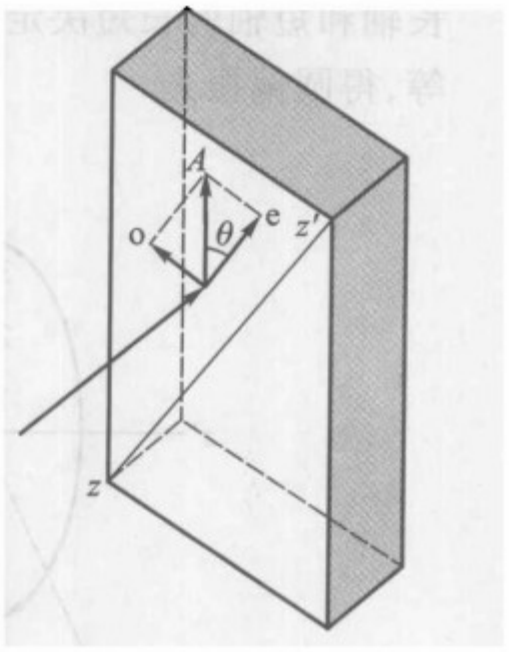


图 13－18

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_o - n_e)l, \qquad (13-5)$$

其中 n_o 和 n_e 为晶体对在真空中波长为 λ_0 的光的主折射率（见表 13－1）. 两主折射率之差愈大、晶体板的厚度愈大，则 o 光和 e 光的相位差亦愈大. 利用此式计算相位差时，$\delta>0$，表示 e 光超前；$\delta<0$，表示 o 光超前. 这一点在作下面的图 13－20 时应该注意.

1. 选择板的厚度使 $\delta=2k\pi$，$k=1,2,3,\cdots$，则自板出来的两光所合成的光仍为平面偏振光，并且振动方向与原入射光的相同. 若使 $\delta=(2k+1)\pi$，$k=0,1,2,3,\cdots$，则自板出来的两光所合成的光亦为平面偏振光，不过振动方向相对于原入射光的振动方向转了 2θ，此 θ 角为入射光的振动面与光在晶体板内的主截面间的夹角. 图 13－19(a)表示入射的偏振光在晶体表面上分解为 e 光和 o 光，(b)表示当板使 o 光和 e 光相位差为 $(2k+1)\pi$ 时，o 光和 e 光所合成的出射的平面偏振光. 显然，当 θ 角等于 45°时，出射光的振动面与原入射光的振动面成 90°角. 我们把能使 o 光和 e 光产生相位差为 π 或其奇数倍的晶体薄板，叫做二分之一波片，或简写成 $\lambda/2$ 片.

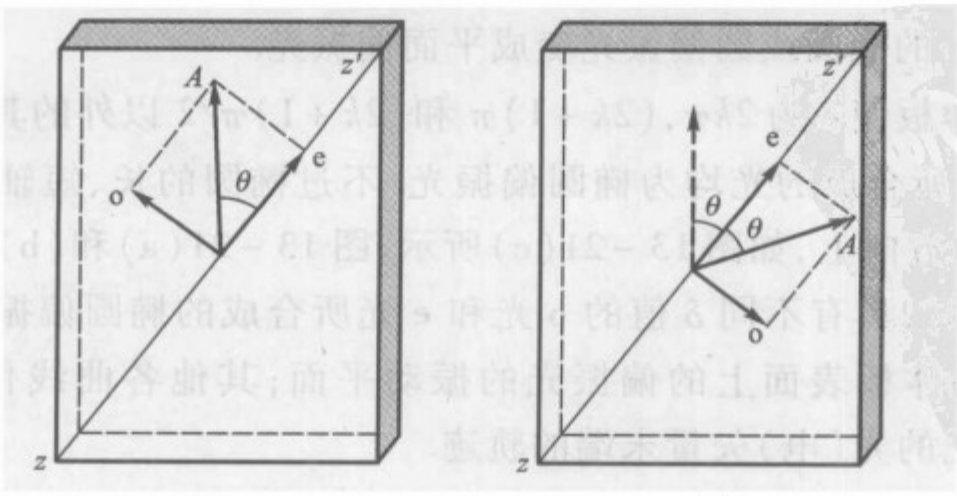


图 13－19

2. 当晶体板使 δ 等于 $(2k+1)\pi/2, k=0,1,2,3,\cdots$ 时，则从板出来的两光所合成的光为椭圆偏振光. 图 13－20(a)和(b)分别表示 $\delta=\pi/2$ 和 $\delta=-\pi/2$ 时，所合成的椭圆偏振光，它的长轴和短轴分别同 e 光和 o 光的振动方向重合. 图中具有相同数字的箭头，表示同一瞬间 o 光和 e 光的光矢量的状态. 椭圆偏振光的长轴和短轴的长短决定于入射光的振动面与光轴的夹角 θ. 当 $\theta=45°$ 时，两轴相等，得圆偏振光.

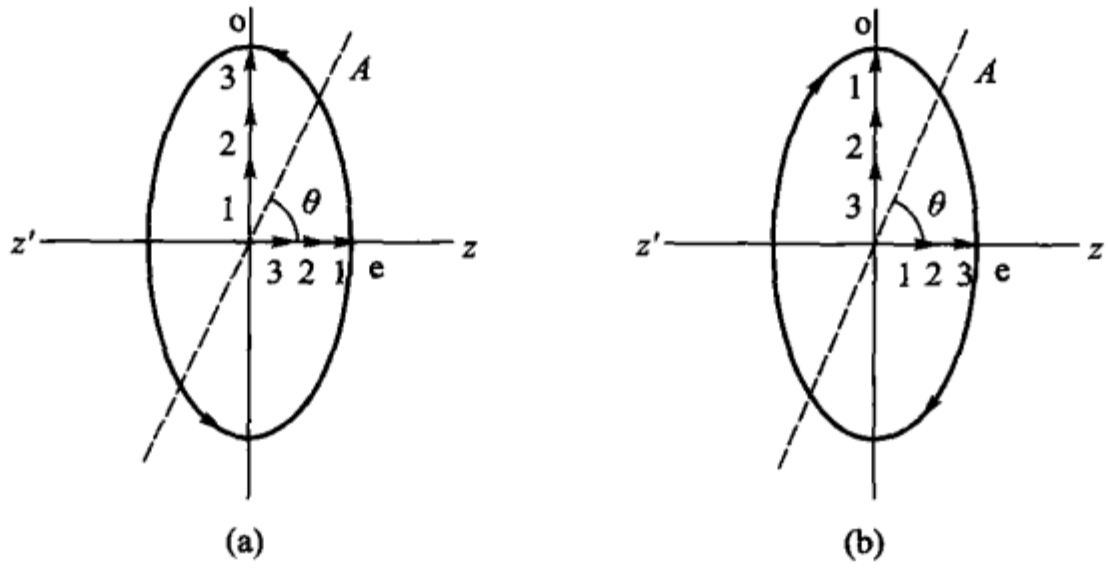


图 13－20

能使 o 光和 e 光产生的相位差为 $\pi/2$ 或其奇数倍的晶体薄板，称为四分之一波片，简写作 $\lambda/4$ 片. 它的最小厚度可由下式决定：

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{\lambda_0}l(n_o-n_e),$$

即

$$l=\frac{\lambda_0}{4(n_o-n_e)}. \tag{13-6}$$

换言之，$\lambda/4$ 片可使平面偏振光变成椭圆或圆偏振光；反之它也可使 $\delta=\pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \cdots$ 的椭圆或圆偏振光变成平面偏振光.

3. 当晶体板使 δ 为 $2k\pi$，$(2k+1)\pi$ 和 $(2k+1)\pi/2$ 以外的其他任意值时，则由 o 光和 e 光所合成的光均为椭圆偏振光. 不过椭圆的长、短轴，不在平行于或垂直于光轴的方向上，如图 13－21(c)所示，图 13－21(a)和(b)分别表示了 $\theta=45°$ 和 $\theta<45°$ 时，具有不同 δ 值的 o 光和 e 光所合成的椭圆偏振光. 图中的直线代表入射在晶体板表面上的偏振光的振动平面；其他各曲线代表相位差递增 $\pi/4$ 时，出射光的光(电)矢量末端的轨迹.

显然，$\lambda/4$ 片只能用来使平面偏振光变成如图 13－21(a)和(b)的左起第三和左起第七的椭圆或圆偏振光，或使它们变成平面偏振光，而不能产生或分析长轴或短轴在任意方向的椭圆偏振光. 再者实际的 $\lambda/4$ 片只对某一波长的 o 光和

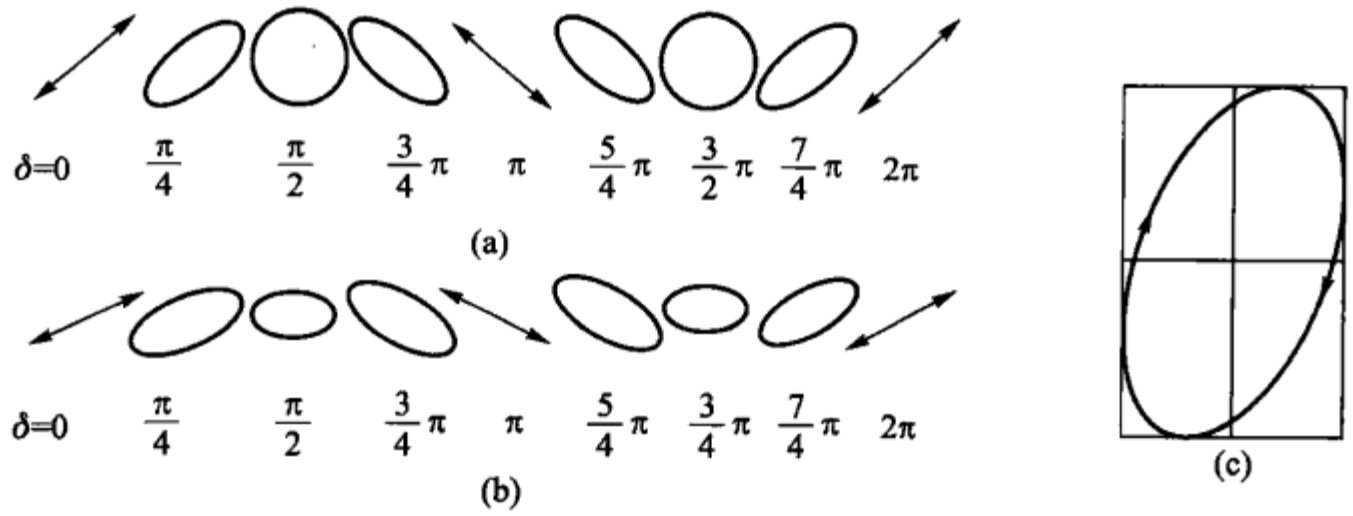


图 13－21

e 光产生 π/2 的相位差，而对其他波长的 o 光和 e 光，所产生的相位差不等于 π/2. 由于这两点，所以在产生和分析椭圆偏振光时，还需要有其他种产生椭圆偏振光的光学元件. 巴比涅(Babinet)补偿器就是其中常用的一种.

图 13－22

图 13－23

巴比涅补偿器是由两个楔形石英组成的，两楔形的光轴互相垂直，如图 13－22所示. 它与沃拉斯顿棱镜的原理相似，在上楔中为 o 光，到下楔后就变成 e 光，反之亦然. 但由于巴比涅补偿器的楔形折射角 α 非常小，所以 o 光和 e 光在实际上不分开，而在沃拉斯顿棱镜中 α 很大，o 光和 e 光分得很开. 在巴比涅补偿器中，当光线在两楔中央通过时，由于在两楔中的路程相等，所以 o 光和 e 光间不发生相位差，当光线在上楔中通过的路程的几何长度 l_1 与在下楔中通过的路程的几何长度 l_2 不同时，则两光之间产生一定的相位差. 所以随着光通过楔的不同地方(沿水平方向)，就能得到不同的相位差. 显然，这种补偿器的缺点是必须用极细的光束，因为宽光束的不同部分会发生不同的相位差. 为克服这一缺点，可用索累(Soleil)补偿器. 这种补偿器(图 13－23)是由两个光轴平行的石英楔和一个石英的平行平面薄板组成的，石英板的光轴垂直于石英楔的光轴. 上楔可由微动螺旋与其本身作平行的移动. 当楔这样移动时，两楔总厚度发生的变化可以等于或不等于下面石英薄板的厚度. 两楔的总厚度等于石英薄板的厚度时，o 光和 e 光之间相位差为零. 由改变两楔总厚度与石英薄板厚度之差可得截面充满补偿器孔径的任意偏振状态的光.

上面所述的两个能使 o 光和 e 光产生任意相位差的元件之所以被称为补偿器，是由于在实际应用中它们总是被这样的使用：对于由相位差 $\delta \neq \pi/2$ 的 o 光和 e 光合成的椭圆偏振光，为使其变成平面偏振光，由它们给两光再引进一个补偿相位差 δ'，使 δ' 和 δ 之和等于 π 或 $2k\pi$.

§13－7　偏振光的干涉

上一节所讨论的有相同频率和有固定相位差的 o 光和 e 光的合成，可视为一种特殊的干涉，它与第七章所述的干涉相比，所不同者只是相干光（o 光和 e 光）的振动方向不平行而互相垂直. 让我们在下面来研究在同一平面上振动的两偏振光的干涉，而对于这种干涉有平行的平面偏振光的干涉和会聚的平面偏振光的干涉两种. 兹分述如下：

1. 平行的平面偏振光的干涉

如 §13－4 所述，当两个尼科耳棱镜正交时，没有光能通过第二个尼科耳棱镜. 如图 13－24，在这样布置的两棱镜间，当插入一个光轴平行于折射表面的晶体薄平板 K 时，则有光从第二尼科耳棱镜射出；若晶体板成楔形，则见有明暗相间的条纹出现. 加晶体板后的这种现象即为平面偏振光的干涉现象.

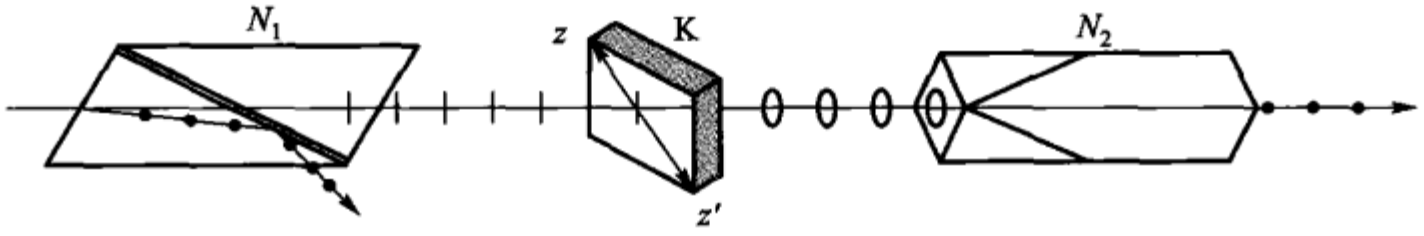


图 13－24

图 13－25 中，直线 N_1 和 N_2 代表正交的两尼科耳棱镜的主截面，zz' 代表晶体板 K 的主截面. 于是，通过起偏镜的偏振光的振动在直线 N_1 所示的方向，振幅为 A. 这个平面偏振光在晶体表面上分解成振幅为 A_o 和 A_e 的 o 光和 e 光；在刚进入晶体的瞬间，两光的相位差为零，而通过厚度为 l 的晶体薄板 K 之后，o 光和 e 光的相位差，由式(13－5)，得

$$\delta_K = \frac{2\pi}{\lambda_0} l(n_o - n_e). \quad (13-7)$$

具有这个相位差的 o 光和 e 光，再分解为在检偏镜主截面 N_2 上的分振幅 A_{2o} 和 A_{2e}，由图可算出：

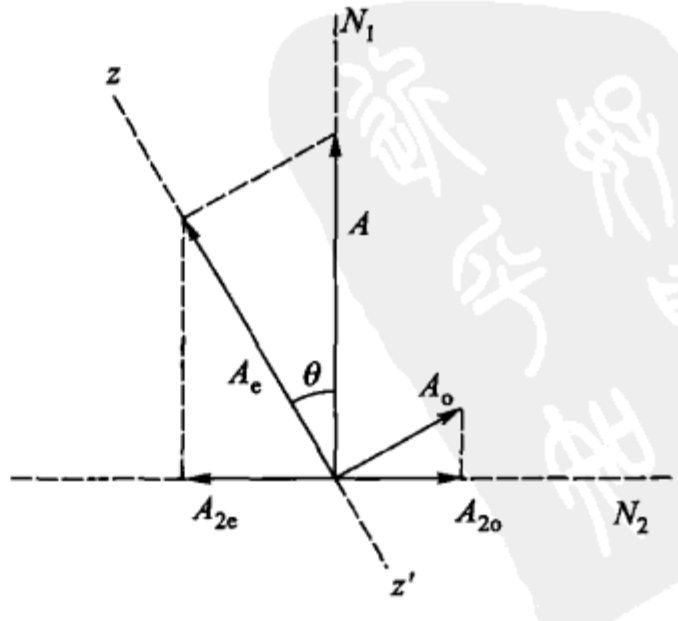


图 13－25

$$A_{2o} = A_o\cos\theta = A\sin\theta\cos\theta;$$
$$A_{2e} = A_e\sin\theta = A\cos\theta\sin\theta. \tag{13-8}$$

此两式表示,o 光和 e 光在主截面 N_2 上的振幅相等. 可见,通过 N_2 的两光是同频率、等振幅,振动在同一平面的两个相干光. 它们的相位差除了由晶体引起的可由式(13-7)计算的 δ_K 之外,还应该再加上由于 A_o 和 A_e 在主截面 N_2 投影所引入的相位差 π. 因而两相干光的总相位差为

$$\delta_\perp = \delta_K + \pi = \frac{2\pi l}{\lambda_0}(n_o - n_e) + \pi. \tag{13-9}$$

当 $\delta_\perp = 2k\pi$ 时,$k = 1,2,3,\cdots$,得干涉最大,此时通过 N_2 有最大光强度;当 $\delta_\perp = (2k+1)\pi$ 时,得干涉最小,此时没有光通过 N_2.

若两尼科耳棱镜是平行放置的(图 13-26),则

$$A_{2o} = A_o\sin\theta = A\sin^2\theta, A_{2e} = A_e\cos\theta = A\cos^2\theta. \tag{13-10}$$

此两式表示,对于给定的条件,在一般 θ 值的情况下,主截面 N_2 内的两相干光是不等振幅的. 它们的相位差只决定于 δ_K,即

$$\delta_{/\!/} = \delta_K = \frac{2\pi}{\lambda_0}l(n_o - n_e),$$

当 $\delta_{/\!/}$ 为 2π 的整数倍时,由 N_2 透射的光有最大光强度;当 $\delta_{/\!/}$ 为 π 的奇数倍时,由 N_2 透射的光,光强度最小,但不为零. 只有当 $\theta = 45°$ 时,在 $\delta_{/\!/}$ 为 π 的奇数倍的条件下,才没有光通过 N_2.

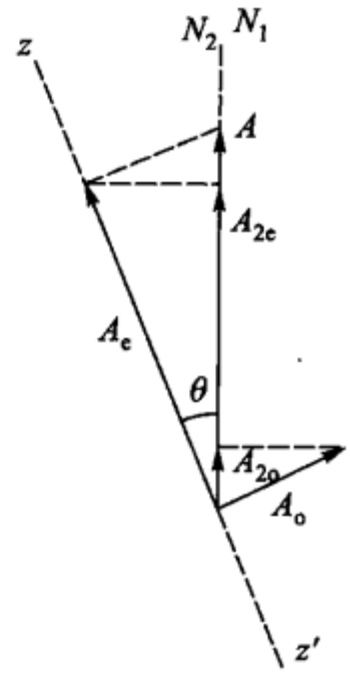


图 13-26

由于 $\delta_\perp$ 与 $\delta_{/\!/}$ 有 π 的差别,所以对于给定的一晶体薄平板,在正交棱镜中自系统出射的光为干涉最大,而在平行棱镜中却为干涉最小;反之亦然. 用白光照射系统时,对各种波长的光,干涉最大和最小的条件不是同时满足的,因而自系统出射的光呈一定的颜色. 对于同一晶板,在正交棱镜系统中所呈的颜色与在平行棱镜系统中的颜色不同,这两种颜色称为互补色. 在由正交向平行过渡时,即转动两尼科耳棱镜之一时,出射光的颜色会发生突然的变化. 这种现象称为色偏振.

色偏振是检定双折射现象的极灵敏的方法. 当两主折射率差 $n_o - n_e$ 很小时,用直接观察 o 光和 e 光的方法,很难确定双折射的发生. 但是,将具有微弱的各向异性物质作成薄片放在正交的尼科耳棱镜之间,通过视场变亮或显出颜色的现象,即表示有双折射存在.

当插入正交尼科耳棱镜中的晶体是楔形板时,自板的不同地方透过的光有不同的相位差,于是,与 $\delta_\perp = 2k\pi(k = 1,2,3\cdots)$ 相应的光得干涉最大;与 $\delta_\perp =$

$(2k+1)\pi$ 相应的光得干涉最小，光强为零. 通过 N_2 观察时，将看到明暗相间的条纹. 若入射光是白光，则这种条纹带彩色.

2. 会聚的平面偏振光的干涉

观察会聚的平面偏振光的干涉的实验布置如图 13－27 所示.

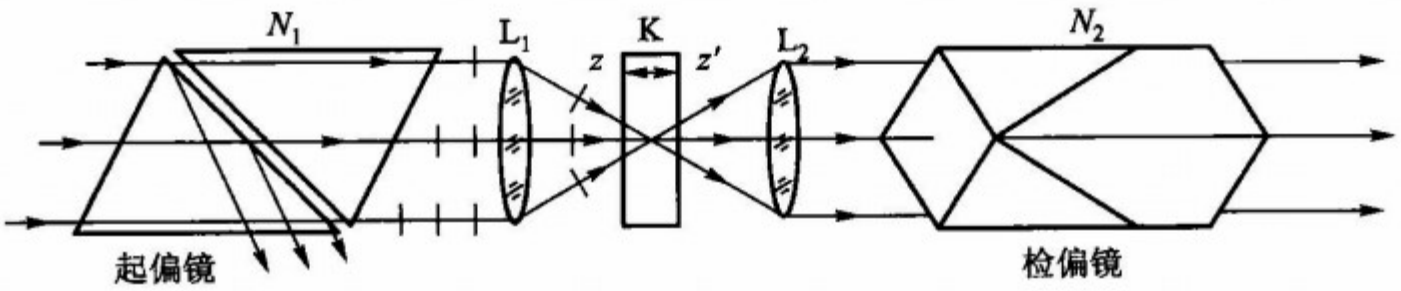
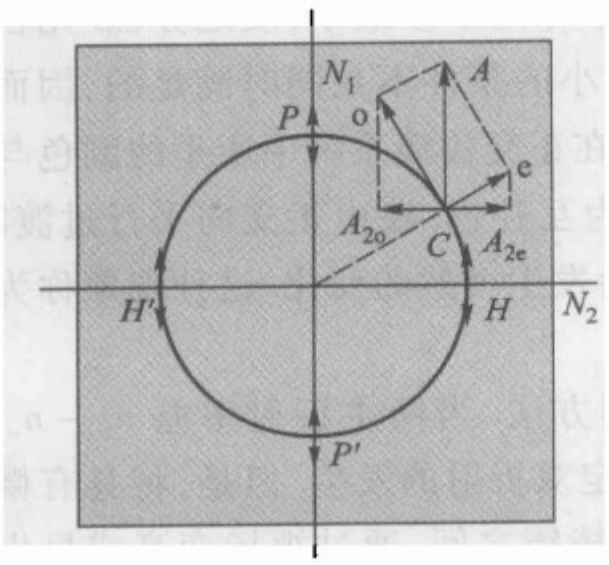


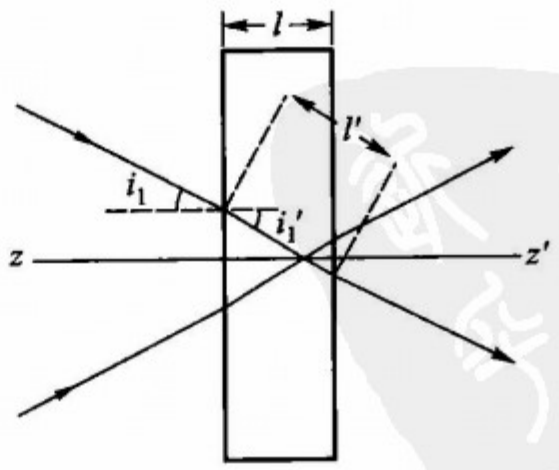
图 13－27

设晶体薄平板 K 的光轴与板面垂直并且和仪器的光轴平行. 在用平行光观察时，不能得到干涉，因为 o 光和 e 光都沿光轴进行，没有引入相位差. 而在会聚光的情况下，会产生干涉. 用透镜 L_1 使自起偏镜射出的平面偏振光会聚在晶体薄板 K 上. 再用透镜 L_2 使通过晶板后的光成平行光并射入与起偏镜正交的检偏镜中. 眼睛或投影光学系统放在检偏镜之后. 通过检偏镜所看到的干涉图样如图 13－29(a)所示，即为与起偏镜主截面 N_1 方向平行及垂直的黑十字和以透镜主光轴为中心的同心明暗相间的圆环，前者称等旋线，后者称等色线.

图 13－28(a)表示顺光线看去，会聚光在晶体薄板前折射表面上的投影. 其中圆代表自透镜 L_1 射出的、有相同孔径角(即在 K 表面上有相同入射角 i_1)的光线在该表面上的轨迹. 通过圆周上各点的偏振光的振动方向在该表面上的投影，都平行于起偏镜主截面 N_1. 在晶板 K 很薄的情况下，自它透射的 o 光和 e 光分开得很少，因而以入射角 i_1 射在薄板上的光线，可由图 13－28(b)表示其在晶体内的光路.



(a)



(b)

图 13－28

由图 13－28(a)可以看出,对于通过 P,P',H 和 H'各点的偏振光并不分解,在 $N_1 \perp N_2$ 的情况下,都不能通过检偏镜,其他同心圆周上与之相应的各点与此相同,因而通过检偏镜观看时,将看到暗的十字线,但当 $N_1 /\!/ N_2$ 时,这些点上的偏振光都能通过检偏镜,所以看到亮的十字线.

对于圆周上的其他点,例如 C 点,平行于 N_1 的矢量在晶体 K 内将分解成在该点圆周切线方向的 o 光和沿半径方向的 e 光. 在近似的情况下,两光在晶体内所通过的几何路程为 l'[图 13－28(b)],因而晶体 K 和检偏镜 N_2 给两光造成的相位差为

$$\delta = \frac{2\pi l'}{\lambda_0}(n_o - n_e') + \pi, \tag{13-11}$$

其中 $l' = l/\cos i_2$,i_2 为光在晶体内的折射角,n_e'为晶体在折射角 i_2 方向上 e 光的折射率. 因而相位差全由 i_2 来决定. i_2 相同处同在一干涉条纹上. 于是,通过 N_2 看到的干涉条纹将是一组同心环. 用白光照射时看到彩色圆环,故名等色线. 当晶体光轴在其他方向时,则所得的等旋线与等色线,可以和上述的完全不同. 这里不再进行分析了.

图 13－29(a)所示的照片即为会聚的平面偏振光通过 $l = 2$ mm 的方解石,光轴垂直于表面,$N_1 \perp N_2$ 时所产生的干涉图样. 图 13－29(b)为晶片石英薄板,光轴平行于表面,$N_1 \perp N_2$ 时的干涉图样. (c)为双轴晶体霰石在 $N_1 \perp N_2$ 时的干涉图样,其中霰石的表面与两光轴的平分线垂直.

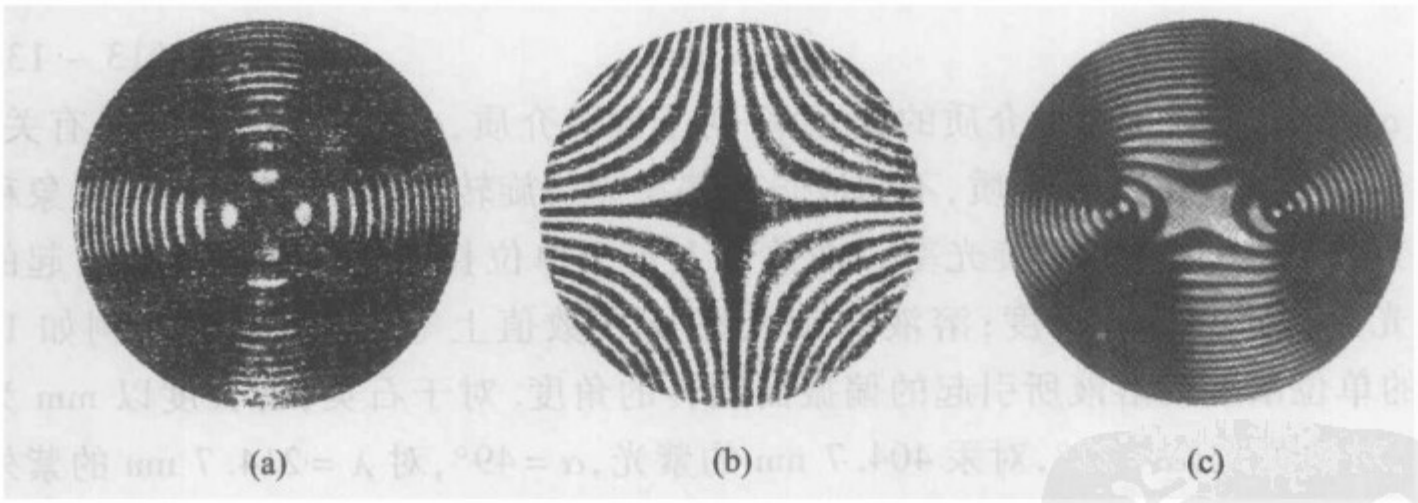


图 13－29

§13－8　偏振光振动面的旋转　旋光性

光在晶体内沿其光轴方向的传播,应该像在各向同性的均匀介质中传播一样,不产生双折射. 但对某些晶体,例如石英,当令平面偏振光沿其光轴方向传播时,却发现出射光虽然仍为平面偏振光,但其振动面相对于原入射光的振动面旋转了一个角度. 这种现象被称为偏振光振动面的旋转或偏振面的旋转,晶体的这

种性质称为旋光性.

石英是旋光性晶体. 为测量由它所产生的振动面旋转的角度,可将一个光轴垂直于两表面的石英板放在两个正交的尼科耳棱镜之间(图 13 - 30). 于是,一般来说,此时通过检偏镜的光,强度不为零. 但将检偏镜转动某一确定的角度之后,将又没有光通过检偏镜. 这种情况明显地表示,该石英板使通过它的平面偏振光的振动面以光线进行的方向为轴旋转了一定的角度. 这种现象不仅在石英晶体中发现,而且在某些溶液中亦发现. 例如偏振光通过糖溶液和松节油时亦发生偏振面的旋转.

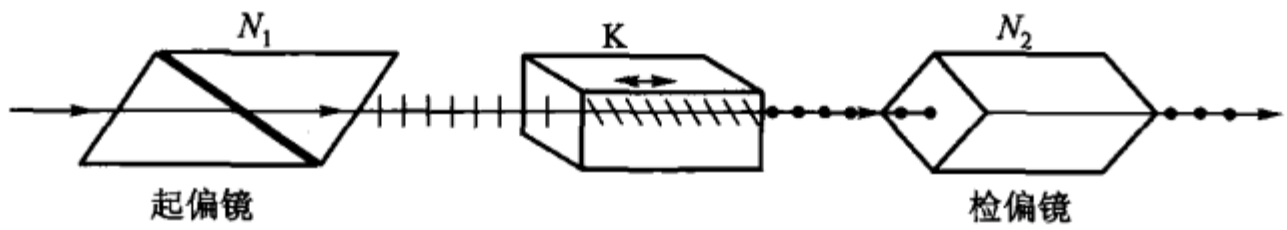


图 13 - 30

设 $\Delta\varphi$ 为旋光性介质对于某一单色的平面偏振光所产生的振动面的旋转角度,由实验得知,它正比于光在该介质中所走的路程的长度. 对于有旋光性的溶液,旋转角度除与路程长度有关外还正比于溶液中旋光性物质的浓度 c. 因此有

$$\Delta\varphi = \alpha l \tag{13 - 12}$$

和

$$\Delta\varphi = \alpha l c \tag{13 - 13}$$

其中 α 为比例系数,称为介质的旋光率. 对于同一介质,α 与偏振光的波长有关. 即对于给定长度的旋光介质,不同波长的偏振光将旋转不同的角度,这种现象称为旋光色散. 固体介质的旋光率 α 在数值上等于单位长度的旋光介质所引起的偏振光振动面的旋转角度;溶液的旋光率 α 在数值上等于单位长度(例如 10 cm)的单位浓度的溶液所引起的偏振面旋转的角度. 对于石英,若长度以 mm 为单位,对钠黄光,$\alpha = 22°$,对汞 404.7 nm 的紫光,$\alpha = 49°$,对 $\lambda = 214.7$ nm 的紫外线,$\alpha = 236°$. 可见,石英旋光性很大并且旋光的色散亦强.

此外还发现,偏振光振动面的旋转具有方向性. 有些旋光性介质使振动面这样的旋转:迎射来的光线看去振动面沿顺时针的方向旋转,称为右旋;而另一些旋光介质,迎射来的光线看去,它的振动面沿逆时针的方向旋转,称为左旋. 这样,就可以把旋光性物质分为左旋的和右旋的两种. 例如,葡萄糖为右旋,果糖为左旋;天然石英晶体也有左旋和右旋之分,两者旋光率相等但符号相反,并且它们在外貌上一个是另一个的反射镜像,如图 13 - 31 所示.

对于像在石英晶体内所产生的晶体的旋光现象,可用菲涅耳的旋光理论加以解释. 他根据力学中的原理,一个直线的简谐运动可以看做是由两个反方向的

圆周运动组合的. 他假定:沿晶体光轴传播的平面偏振光系由两个沿相反方向旋转的、等频率的圆偏振光组成的;在旋光晶体中,这两个圆振动有不同的传播速度. 在右旋晶体中,顺时针方向旋转的圆偏振光的传播速度较快,而在左旋晶体中,逆时针方向旋转的圆偏振光传播速度较快. 简言之,按菲涅耳理论,晶体的旋光性是由于在光轴方向,对于相反旋转的圆偏振光有不同的传播速度所致.

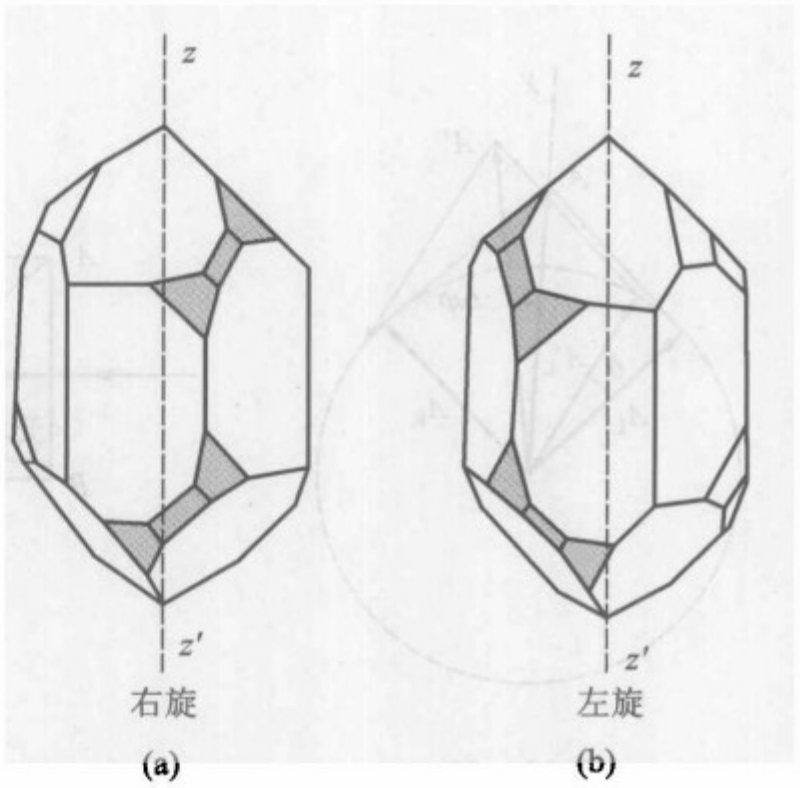


图 13－31

设 v_L 和 v_R 分别代表左旋和右旋圆偏振光在晶体内的传播速度,n_L 和 n_R 为与之相应的折射率. 对于左旋晶体,$v_L > v_R$,$n_L < n_R$;右旋晶体,$v_R > v_L$,$n_R < n_L$. 所以,组成平面偏振光的右旋圆偏振和左旋圆偏振光,沿光轴通过厚度为 l 的旋光晶体所产生的相位差为

$$\delta = \frac{2\pi l}{\lambda_0}(n_R - n_L). \tag{13-14}$$

在右旋晶体中,$n_R < n_L$,由上式得到的 δ 将是负值,这实际上表示在晶体第二折射表面上左旋较右旋光矢量落后了一个由 δ 的绝对值决定的相位差,当 δ 为正时,则表示右旋较左旋光矢量落后了一个由 δ 值决定的相位差,这与左旋晶体中所发生的情况相当.

表 13－3 给出两波长对水晶的 n_R 和 n_L 值.

表 13－3　水晶的折射率

波长/nm	n_e	n_o	n_R	n_L
396.8	1.567 71	1.558 15	1.558 10	1.558 21
762.0	1.548 11	1.539 17	1.539 14	1.539 20

图 13－32 中 yz 表示入射到晶体上的平面偏振光的振动方向. 将振幅矢量 $\boldsymbol{A}$ 分解为左旋和右旋的两矢量 $\boldsymbol{A}_L$ 和 $\boldsymbol{A}_R$. 假设薄晶板的厚度 l 恰使右旋的光矢量 $\boldsymbol{A}_R$ 刚转回到原来的位置,在右旋晶体中,此时左旋的光矢量转到 $\boldsymbol{A}_L'$,还差 δ 才能转到原来的位置. 于是合成的平面偏振光的振幅矢量 $\boldsymbol{A}'$ 相对于原入射光的振动面向右转了一个角度 $\Delta\varphi$,由几何学可知,此 $\Delta\varphi$ 值等于 δ 的一半,即

$$\Delta\varphi = \frac{\delta}{2} = \frac{\pi l}{\lambda_0}(n_R - n_L) \tag{13-15}$$

这样就解释了右旋晶体的旋光作用,而同理亦可解释左旋晶体的旋光性.

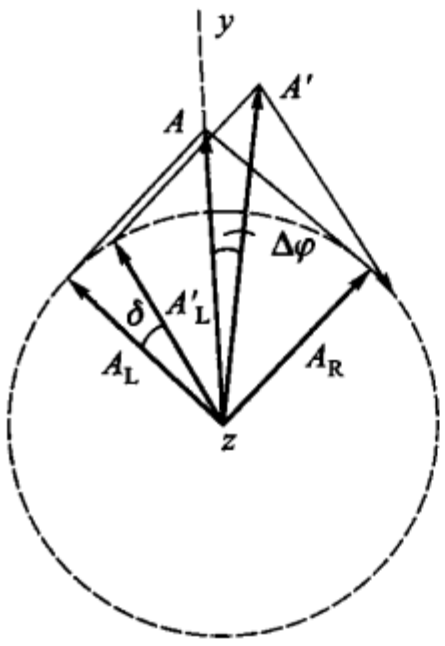


图 13 – 32

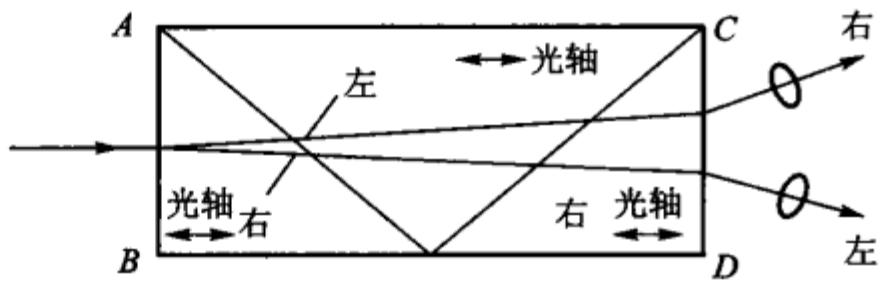


图 13 – 33

菲涅耳以下述实验证实了自己的这个旋光理论.

令一平面偏振光垂直射在如图 13 – 33 所示的组合棱镜的 AB 面上,这个复合棱镜是由光轴平行于底边的两个右旋石英直角棱镜和一个直角等腰的左旋石英棱镜胶合而成的. 光在第一棱镜内不生折射,但沿光轴的方向有左旋和右旋圆偏振光以不同的速度传播,并且 v_R 大于 v_L. 由于第二棱镜是左旋石英,v_L 反而大于 v_R,所以在第一与第二棱镜交界面上,左旋圆偏振光的传播速度由小变大,这相当于从光密介质向光疏介质折射;折射光线远法线;右旋圆偏振光在该面上传播速度由大变小,这相当于从光疏介质向光密介质折射,折射光线近法线. 结果在第二棱镜中左旋圆偏振光和右旋圆偏振光分开. 在第二和第三棱镜的交界面上,左旋圆偏振光进行一次由光疏介质到光密介质的近法线折射;右旋圆偏振光则进行一次由光密介质到光疏介质的远法线折射,结果两圆偏振光更加分开. 在棱镜的 CD 面,两圆偏振光又一次向相分离的方向折射,结果由这组合棱镜产生一左旋和一右旋的圆偏振光. 经过对出射的两光束的实验分析,证实两光确为理论所预计的两种圆偏振光.

借助于测量旋光溶液对入射的平面偏振光振动面的旋转角度 $\Delta\varphi$,可确定溶液中所含旋光物质的浓度,这种方法在测量糖的浓度方面早已采用,并有称之为量糖计的专门光学仪器. 该仪器的基本原理与图 13 – 30 所示的相似,只是用盛糖溶液的管子代替石英晶体.

由于石英能透过波长短至 180 nm 的紫外线,以及其他方面的优点,结果它成为制作紫外线的透镜和棱镜的主要材料,特别是用在紫外线的光谱仪中. 然而由于旋光性,光线通过棱镜时,会生双折射. 用一块石英做的棱镜作色散棱镜时,这将使单谱线变成“双线”. 为了消除这种缺点,考纽将左旋和右旋石英各制成

折射角为30°的棱镜,然后将这一对棱镜"光胶"起来,成一个如图13-34(a)所示的复合棱镜,称为考纽棱镜. 相类似的还有如图13-34(b)所示的考纽透镜. 在所述的元件中,第一部分由旋光性所产生的双折射恰为第二部分所抵消.

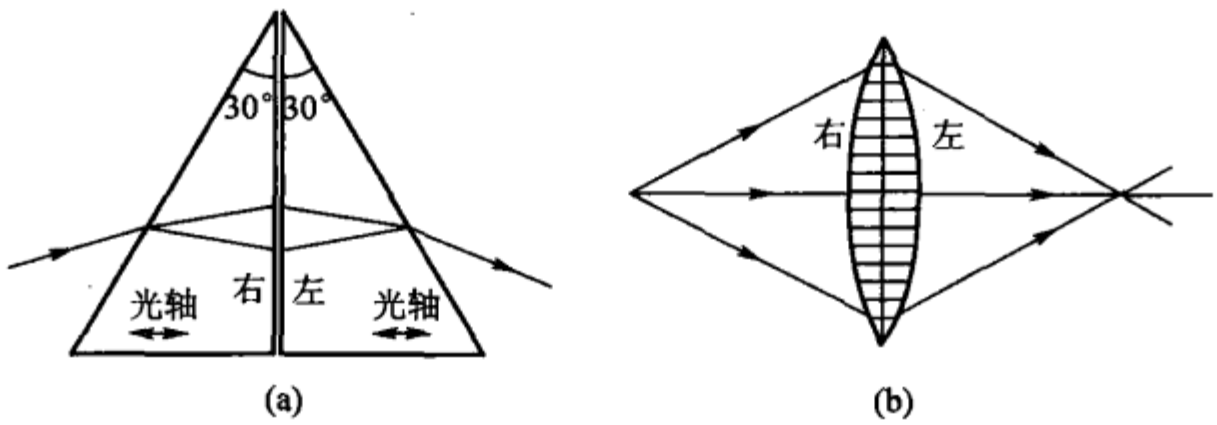


图13-34

在紫外线光谱仪中,还有第十章介绍过的利特罗(Littrow)装置,如图13-35所示,其中透镜L既为准光镜又为摄谱物镜;光线在棱镜P($\alpha=30°$)的镀银面返回,相当于通过$\alpha=60°$角的考纽棱镜,不论L和P是左旋还是右旋石英制成的,由于光在其中两次通过时的方向相反且光程相同,所以在光谱面上恒无双折射的影响. 光谱仪的这样装置,不但为了消除旋光性,而且在与一般光谱仪相比时,为获得同样的分辨本领和线色散,它可节省石英材料近半,所以大多数大型的紫外线的棱镜光谱仪都是利特罗装置.



图13-35

* §13-9 外力作用下产生的各向异性

通过外力(机械力、电场、磁场等)的作用可使各向同性介质变成各向异性质,从而产生双折射现象,也可使晶体的各向异性性质发生变化(它们都可看做是介质的折射率椭球在外力作用下的变形). 现简介如下.

1. 光弹性效应

本来是透明的各向同性的介质在机械应力作用下,显示出光学上的各向异性,这种现象称为光弹性效应,有时也称为机械双折射或应力双折射. 对物体施

以压力或张力，它就显示出负单轴晶体或正单轴晶体的特性，不管是压力还是张力，有效光轴都在应力方向上，并且所引起的双折射与应力成正比. 显然，若应力在样品上是不均匀的，在样品各处的双折射则不一致，当一光波通过它传播时将使光波上的不同点产生不同的相位差.

光弹性效应在光学上带来很多麻烦，光学玻璃退火不足或光学元件安装不细心都会在玻璃内部产生应力. 例如用于天文望远镜头的大块玻璃必须特别好地退火，先将它加热到接近熔化的温度，然后非常缓慢地冷却，冷却所需时间相当长. 此外还要特别小心产生机械应力，往往是手指的压力就足以产生明显的双折射.

但与此相反，光弹性效应是研究机械结构内部应力分布的有力工具. 如上所述，双折射与应力成正比. 设 n_e 和 n_o 分别为介质对 e 光和 o 光的折射率，p 为应力，则

$$n_e - n_o = kp. \tag{13-16}$$

两偏振光通过厚度为 l 的介质后所产生的相位差显然为

$$\delta = \frac{2\pi l}{\lambda_0} | n_e - n_o | , \tag{13-17}$$

其中 λ_0 为光在真空中的波长. 依此若把待分析的机械结构用透明材料如有机玻璃做成模型，并按实际使用时的受力情况对模型施力，于是在各受力部分产生相应的双折射. 把模型放在正交的起偏镜与检偏镜之间就可看到干涉条纹，由条纹的分布计算应力的分布情况. 图 13-36 表示的是一个横梁平放在两支撑点上在其中央加压力后所产生的应力情况，图 13-36(a)压力很小，(b)压力稍大.

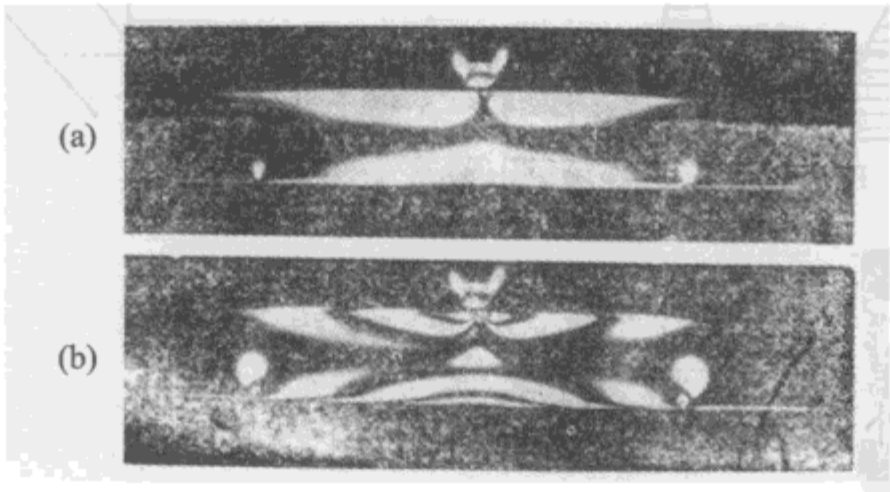


图 13-36

2. 电光效应

电光效应和磁光效应充分表明光与物质的电磁作用. 电光效应有两种.

(1) 克尔效应

克尔(Kerr)于 1875 年发现了第一个电光效应. 某些各向同性的透明介质在外加电场作用下变为各向异性，表现出双折射现象，介质具有单轴晶体的特性，

并且其光轴在电场的方向上.

设 $n_{/\!/}$ 和 $n_{\perp}$ 分别为介质在外加电场后光的电矢量平行和垂直电场方向时的折射率,实验证明,折射率差值 $\Delta n = n_{/\!/} - n_{\perp}$ 为

$$\Delta n = \lambda_0 k E^2, \tag{13-18}$$

其中 k 为克尔常数,λ_0 为光在真空中的波长. 在大多数情况下 Δn 为正值,可看做为 $\Delta n = n_e - n_o$,即介质具有正单轴晶体的性质. 表 13-4 给出几种液体的克尔常数. 由上式可见,克尔效应与电场强度的平方成正比,所以常称作二次电光效应.

表 13-4 几种液体的克尔常数

物质	克尔常数/(cm · e. s. u. 伏特$^{-2}$)
苯 C_6H_6	0.6×10^{-7}
二硫化碳 CS_2	3.2×10^{-7}
三氯甲烷 $CHCl_3$	-3.5×10^{-7}
水 H_2O	4.7×10^{-7}
硝基甲苯 $C_7H_7NO_2$	123×10^{-7}
硝基苯 $C_6H_5NO_2$	220×10^{-7}

液体的克尔效应显然是各向异性分子在电场作用下有了一致的取向而造成的. 有克尔效应的液体,它们的分子在光学上是各向异性的,这种各向异性的分子在光波的电矢量作用下,视分子对光波电矢量的取向而有不同的极化率,在一般条件下,组成介质的这些分子完全杂乱无章地排列着,所以光波在这种介质中传播时,不管其电矢量的取向如何,也不管其传播方向如何,所遇到的情况从统计上看都是一样的,介质呈现出宏观上的各向同性. 但在外电场足够强时,各向异性分子有了一致的取向,在这个方向上介质的极化率比其它方向为大,因此光波在介质中的传播速度与其传播方向和偏振状态有关,介质呈现出各向异性的性质.

克尔效应最重要的特点是几乎没有延迟时间,它随着电场的产生与消失很快地产生与消失,能追随非常快的交变外电场响应频率可达 10^{10} Hz.

图 13-37 给出的是克尔开关或克尔调制器的示意图. 两偏振镜呈正交,并且它们的偏振取向最好与电场方向分别成 ±45°角. 克尔盒为盛有介质的两端透光的容器,内有板长为 l、间隔为 d 的两平行板电容器作为电极. 在不加电场时,没有光通过检偏镜,开关关闭,若给电极加上电压 V,此时两偏振光间产生的相位差为

$$\delta = 2\pi K l V^2/d^2. \tag{13-19}$$

有相应的光通过检偏镜,当电压 V 的大小使 $\delta=\pi$ 时,即两偏振光的光程差为半

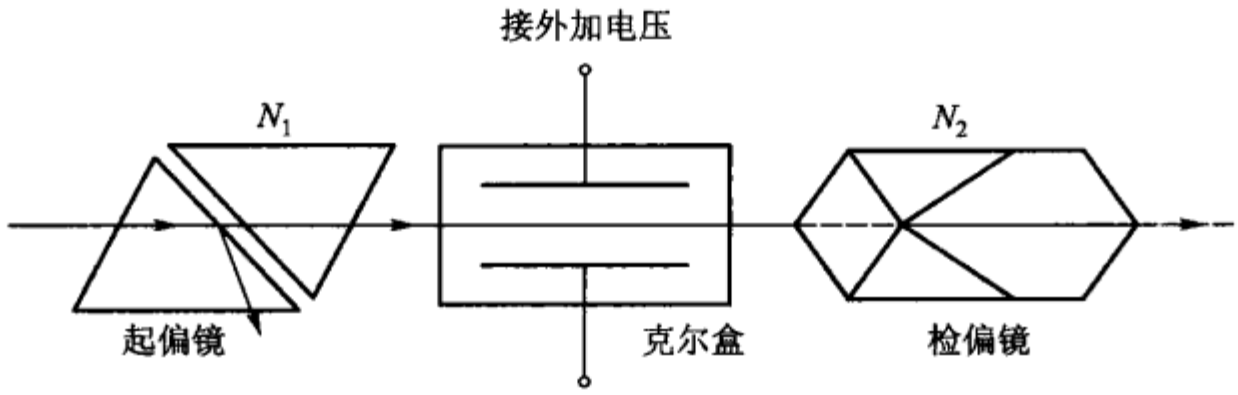


图 13 - 37

波长时，则由式(13 - 9)可知，此时有最大的光强通过检偏镜，开关处于全开状态. 我们称此时的电压为半波电压，并以 $V_{\lambda/2}$ 表示. 使电压分别取 0 和 $V_{\lambda/2}$ 值时，则克尔盒可用作电光开关.

若在克尔盒的电极上加调制信号电压，则有与信号变化相应的光强通过检偏镜，此时克尔盒变成光调制器.

由表 13 - 3 可见，只有硝基苯和硝基甲苯有较大的克尔常数，有实用价值. 在 $d = 1$ mm、$l = 5$ cm 时用硝基苯所需的半波电压约为 2 000 V，为尽可能降低半波电压并避免硝基苯的毒性和易爆性，人们对应用有克尔效应的透明固体材料如混合晶体铌酸钽钾($KTa_{0.65}Nb_{0.35}O_3$ 简称 KTN)或钛酸钡($BaTiO_7$)作电光调制器有极大的兴趣.

由于克尔效应无时间延迟，多年来克尔盒作为高速开关用在各方面，如高速摄影、光速测量中的光切割器等. 近几十年来则更多地用作脉冲激光器的 Q 开关.

(2) 泡克耳斯效应

1893 年泡克耳斯(Pockels)发现，有些晶体、特别是压电晶体，在加了电场后也能改变它们的各向异性的性质，我们称此种电光效应为泡克耳斯效应. 泡克耳斯效应是线性的，即感应双折射与电场因而也与所加电压的一次方成正比. 泡克耳斯效应只存在于没有对称中心的晶体中.

第一个可实际用作开关或调制器的泡克耳斯盒一直到 1940 年有了合适的晶体材料才实现. 其作用原理是：由控制电场强度的大小改变材料的双折射，也就是依需要来改变两偏振光间的相位差，从而改变入射的平面偏振光的偏振状态，此时泡克耳斯盒如同一个偏振调制器.

早期的装置中都用的是磷酸二氢铵($NH_4H_2PO_4$ 简称 ADP)和磷酸二氢钾(KH_2PO_4 简称 KDP)，而且至今仍广泛使用. 一个重大进展是制出了磷酸二氘钾(KD_2PO_4 简称 KD^*P)单晶，为得到相同的相位差，用此单晶所需电压比用 KDP 要降低一半左右. 现在人们正以极大的努力研究新的电光材料. 已有的如钽酸

锂、磷酸二氢铷、铌酸锂、钛酸钡以及铌酸钡钠等.

简言之,泡克耳斯盒是放在可调电场中的一个没有对称中心而有一定取向的单晶,这种装置的特点是,在有相同通光孔径的情况下其操作电压比相应的克尔盒要低$\frac{1}{5}\sim\frac{1}{10}$. KDP 的响应时间很短,一般小于 10^{-9} s,可对光束调制到高达 2.5×10^{10} Hz 的频率. 通常有两种类型的调制,一种是横向的,一种是纵向的,前者是光的传播方向与电场方向垂直,后者则互相平行. 图 13-38 所示的是纵向调制器的最基本的形式. 由于光要通过电极,所以电极通常用透明的金属氧化物如氧化锡 SnO 等制成金属薄膜、栅或环等. 在不加电场时,这类晶体一般是单轴晶体,光在此方向传播不产生双折射,加了电场后产生两偏振光,它们的相位差为

$$\delta = 2\pi n_o^3 r_{63} V/\lambda_0. \tag{13-20}$$

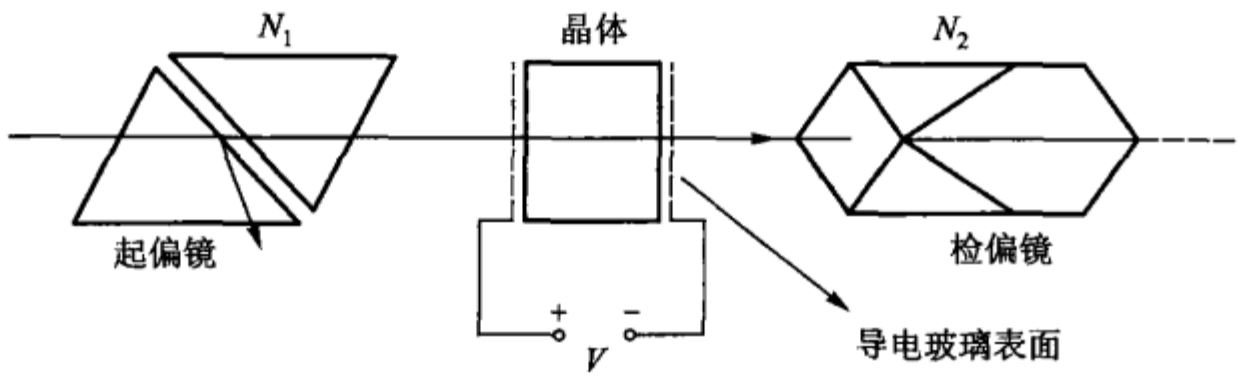


图 13-38

其中 r_{63} 是电光常数(单位是 m/V),n_o 是 o 光在晶体中的折射率,V 是电压(单位为 V),λ_0 为光在真空中的波长. 因为晶体是各向异性的,其光学特性在不同方向上不同,因此必须用一个二级电光张量 r_{ij} 描写. 可以证明,在这里只用一个元 r_{63} 就够了. 表 13-5 给出常用的四种晶体的 r_{63} 值. 在没有外加电场时,图 13-38 中的检偏镜没有光通过,开关处在关闭状态. 在外加电场使两偏振光的相位差为 π 时,有最大的光强通过检偏镜. 开关处在全开状态,此时所需的电压,即半波电压为

表 13-5 电光常数(室温下 $\lambda_0 = 546.1$ nm)

材料	$r_{63}/(10^{-12}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{V}^{-1})$	n_o(近似值)	$V_{\lambda/2}$/kV
ADP	8.5	1.52	9.2
KDP	10.6	1.51	7.6
KDA(KH_2AsO_4)	~13.0	1.57	~6.2
KD*P	~23.3	1.52	~3.4

$$V_{\lambda/2} = \frac{\lambda_0}{2n_o^2 r_{63}}. \tag{13-21}$$

例如 KDP 的 $r_{63} = 10.6 \times 10^{-12}$ m/V，$n_o = 1.51$ 所以对 $\lambda_0 = 546.1$ nm，$V_{\lambda/2} = 7.6 \times 10^3$ V. 泡克耳斯盒已用作超快开关、激光 Q 开关和高达 3×10^{10} Hz 的光调制器，它还被用在电光系统的其他方面如信息处理和显示技术等.

应该指出，要搞清泡克耳斯效应需要对晶体光学有进一步的了解，并且在制作调制器时晶体也有不同的切割方法，在此就不一一介绍了.

3. 磁致双折射

和电场作用下产生双折射的现象一样，磁场的作用也能使介质产生各向异性性质，在磁场中的介质，当光以不同于磁场的方向通过它时，也表现出双折射现象.

这里的实验装置和观察克尔效应所用的实验装置类似. 并且实验中观察到在光的传播方向与磁场方向垂直时双折射有最大值，设 n_e 和 n_o 为介质在磁场 H 作用下对两光的折射率，此时则有

$$n_e - n_o = c\lambda_0 H^2, \tag{13-22}$$

其中 λ_0 为光在真空中的波长，c 是常数，它和介质的性质和光波波长有关. 这个常数很小，所以只有用强功率的磁铁才可观察到磁致双折射现象，例如对钠黄光硝基苯的 $c = 2.41 \times 10^{-12}$ e. s. u. 电量.

磁致双折射的原因和电光效应的相类似，构成介质的分子有各向异性的性质，即具有永久磁矩. 在不加磁场时各分子的排列杂乱无章，使得介质在宏观上表现为各向同性，而在加上足够强的外磁场时，分子磁矩受到力的作用，各分子对外磁场有一定的取向，从而使介质在宏观上有各向异性的性质.

习　　题

1. 一束平面偏振光垂直射入一块方解石晶体，光的振动方向与晶体的主截面成 20°角，计算两束折射光(e 光和 o 光)的相对振幅和强度.

2. 设通过两尼科耳棱镜的光强有最大值，现若将其中一个以光的传播方向为轴转 30°角，试问透过的光其振幅和光强为原来的百分之多少？若将它转 60°和 90°又各为多少？

3. 设一束光通过两平行放置的偏振镜，试问若使透过的光强为原来的一半时，需将一偏振镜转多少角度？

4. 一束钠黄光以入射角为 50°入射到方解石平板上，设光轴与板表面平行并垂直入射面，问在晶体中 o 光和 e 光之间的夹角是多少？

5. 设一水晶棱镜的顶角为 60°，其光轴平行于折射棱，钠黄光以最小偏向角的方向在棱镜中折射，当以焦距为 1 m 的透镜对从棱镜射出的 o 光和 e 光聚焦时，在谱面上形成的 o 光和 e 光两谱线的间隔是多少？

6. 设方解石和石英薄板的光轴都平行其表面，用此两薄板制作钠黄光的 1/4 波片时，问两薄板的最小厚度各为多少？

7. 由一尼科耳棱镜射出的平面偏振光垂直射到一块石英作的 1/4 波片上，光的振动与晶体的光轴成 30°角，然后又经第二个尼科耳棱镜，此棱镜与第一棱镜成 60°角，与晶体的光轴也为 30°角，试问(1)光透过 1/4 波片后的性质，(2)求透过第二个尼科耳棱镜的光强度和偏振性质(忽略光的反射).

8. 一束光可能是平面偏振光、圆偏振光或椭圆偏振光，问怎样判断它？

9. 如图 13－39 所示，在使用激光器发出的平面偏振光的各种测量仪器上，为避免激光返回谐振腔，在激光器输出镜端放一 1/4 波片，并且其主截面与光振动平面成 45°角，说明此波片的作用？

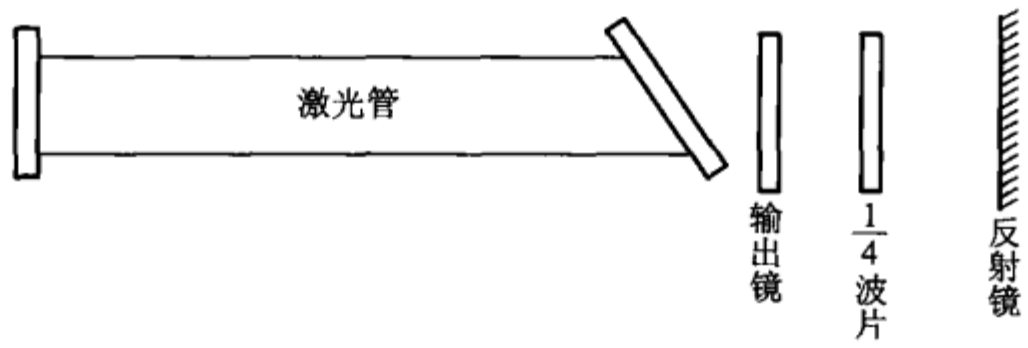


图 13－39

10. 对波长为 589.3 nm 的光，石英的旋光率为 21.7°/mm，若将一石英晶体垂直其光轴切割，放在两平行放置的偏振镜之间，试问石英为多长时没有光通过检偏镜？

第十四章

光的速度

§14-1 概　　述

光的干涉和衍射现象表明光是一种波，光的偏振现象进而表明光是横波，然而，为证明光是电磁波，还必须研究光在不同介质中的传播速度，特别是光在真空中的传播速度. 因为按麦克斯韦的光的电磁理论，光在真空中的传播速度应等于电流的电磁单位与静电单位的比值 c，$c=3\times10^{10}$ cm/s. 此外，光速的测定问题与物理学中的许多基本问题有密切的关系. 所以光速的测定是光学中(一般来说也是物理学中)一个十分重要的课题.

不过，人们测定光速并不是自建立了光的电磁理论后才开始，早在 1676 年就有天文学家罗默(Römer)第一个测出了光的速度. 事实上，关于光有一定的速度的概念，早在 17 世纪之前即已为人们意识到，例如在墨经上将光比喻作箭("熙若射")就反映了当时人们对光有一定速度的认识.

最初光速的测定是在观察天体的现象中进行的. 如罗默从观察木星的卫星食和布拉德雷(Bradley)从观测光行差测出了光的速度. 此后，经过相当长的一段时期，到 19 世纪上半叶的后期，才有菲佐(Fizeau)、傅科(Foucalt)和其他人在陆地上测出了光的速度. 麦克斯韦建立光的电磁理论后(1873 年)，更刺激了对光速进行直接测量的兴趣，迈克耳孙和他的同事们在 1879 年、1882 年、1927 年和 1935 年对光速作了多次有系统的测定. 这些测光速的实验结果，不仅验证了光是电磁波的一种，而且为深入地了解光的本性和为建立新的物理原理提供了宝贵的资料. 例如，根据傅科测光在介质(水、二硫化碳等)中的速度的实验结果，不仅最后地否定了牛顿对不同介质中光速不同的解释(他认为光在光密介质中速度大，光疏介质中速度小)，而且更重要的是引导出了波群的概念；从菲佐、迈克耳孙－莫雷(Michelson－Morley)等人对运动介质中光的速度的测量，直接地涉及爱因斯坦的狭义相对论的实验基础.

本章将先讨论各种测量光速的方法；然后，描述一些运动介质中的光学实

验;最后,扼要地介绍狭义相对论的基础.

光速的直接测量包含着对光传播的距离和所花的时间的测量.由于光速非常快,所以必须采用一个长距离和测量一个短的时间间隔,两者的比例给实验带来了很大的困难,这一困难在1607年伽利略最初尝试测光速时就深深地感觉到了.在他的实验中,令相距甚远的两观察者,各执一能遮蔽的灯,观察者A打开灯光,经过一定时间后,光到达观察者B,B立即打开自己的灯光;过了若干时间后,此信号回到A.于是A可以记下从他自己打开灯的一瞬间到信号自B返回A的一瞬间所经过间间隔t.若两观察者的距离为d并且光速在其间为常数,则光的速度$c=2d/t$.这个实验虽然没有获得任何结果,但是伽利略在这个实验中所采用的原理,却几乎保留在后来的一切测光速的实验方法之中.

根据信号光源与观察者是否同在地球上,可将测定光速的实验分成天文学方法的和实验室方法的两种.在后一种中,对光所走路程的长度,或者依据已标定的测量基点间的距离算出,或者用大地测量的方法作直接的测量;而对光传播该段路程所花的时间,总是从施予信号光源使之周期变化的频率来求得.早期的实验均不能测出光在空气中的速度与真空中的速度的差别,在近代的测光速实验中为测出这个差别,有的是令光在真空中传播,而另一些则是在可以精密确定空气折射率的条件下进行测量.

§14-2 测定光速的天文学方法

1. 罗默法

木星是一个周期为12年的太阳行星.它有十一个卫星——木星的月亮,其中四个最亮的可用合适的望远镜看到,它们绕木星旋转的轨道平面几乎重合于地球和木星绕太阳旋转的轨道面.因而木星的卫星每绕木星一周将在进入木星影处发生一次卫星食.最接近于木星的卫星,其周期是42小时28分16秒(约为7/4天),它走过自己直径那样的距离约需3.5分,因而用望远镜可以观察到它刚发生卫星食的瞬间.在这个系统里,木星的卫星食,一方面作为一个信号供地球上人来观察,同时,此卫星食的周期过程又是一个准确的时钟.如果地球相对于木星的距离不变,或者光速为无限大(信号由木星那里传到地球不需要时间),则每隔42小时28分16秒自然就看到该卫星食一次.但是,众所周知,光速不为无限大并且地球每时都在改变着它与木星的距离,所以在地球上看到的木星上相邻卫星食之间的时间间隔是变化的.显然这个变化与地球相对于木星的距离的变化和光速的大小有关.

罗默经过长期细心的观察,他发现:在图14-1中,若地球在E_1处和木星在J_1处看到一次木星卫星食,再用平均周期推算此后任一次卫星食的时间,则后一

次卫星食一般并不刚好发生在所推算的时间. 例如当地球在经过 E_1 之后约三个月行至 E_2 处,实际看到蚀的时间较推算出的时间延迟了约 10 分钟. 这是因为当地球在作自 E_1 向 E_2 而达 E_3 的运动时,地球与木星的距离在逐渐增大,自木星来的任意信号都必须比前一信号多走一些距离才到达地球. 经过由 E_1 到 E_2 的三个月,所有相邻卫星食的时间延迟的总和约为 10 分钟. 当地球继续由 E_3 经过 E_4 而向 E_5 运动时,地球与木星的距离在逐渐减小,自木星来的任一信号都比前一信号少走一些距离. 罗默从他的测量得出,光走过与地球轨道半径等长的距离所需的时间约为 11 分钟. 在罗默的时代只知道地球轨道半径的近似值,当取此半径为 149.7×10^6 km 时,算得光速 $c=215\ 000$ km/s. 现代用同法得光速 $c=2.98\times10^8$ m/s,它较新近实验室测得的光速值小约 5%.

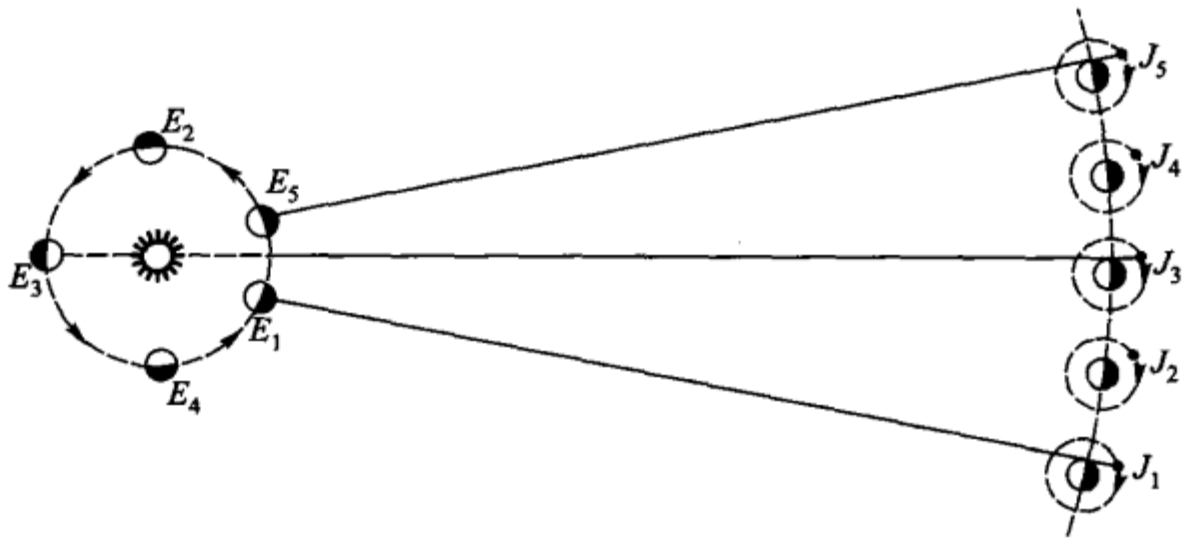


图 14 - 1

2. 布拉德雷法

光行差(stellar aberration)测定光速的另一个天文学方法是基于 1728 年首先被布拉德雷发现的光行差现象,它所包含的原理可由这样一个比拟来说明:假定有雨滴垂直下降,要令雨滴通过一个长筒,则筒轴必须平行于雨滴(垂直于地面),如图 14 - 2(a)所示. 如果一个人拿此长筒以水平速度 v 在雨中行走,则自上端进入筒内的雨滴将碰在筒壁上,而不能通过长筒. 此时为了仍使雨滴无阻地通过长筒,长筒应该向前进方向倾斜一个角度,以使筒轴下端 B 点于雨滴到达它时正好处在雨滴入筒时筒轴上端 A 点的正下方,如图 14 - 2(b). 利用图 14 - 2(c)很容易求出此倾角的大小. 设 c 为雨点的下降速度,θ 为筒轴与雨滴下降方向的夹角,则有

$$\tan\theta=\frac{v}{c}. \tag{14-1}$$

现在让图 14 - 2 的长筒代表望远镜,雨滴代表自某恒星送来的光. 如果地球不动,为观看该星必须使望远镜轴直接对准该星. 然而,由于地球在自己的轨道上运动,所以望远镜必须向前进方向倾斜一个角度 θ.

图 14 - 3 的圆 $ABCD$ 代表地球的轨道,太阳在圆心 O. 对于在通过太阳 O 且

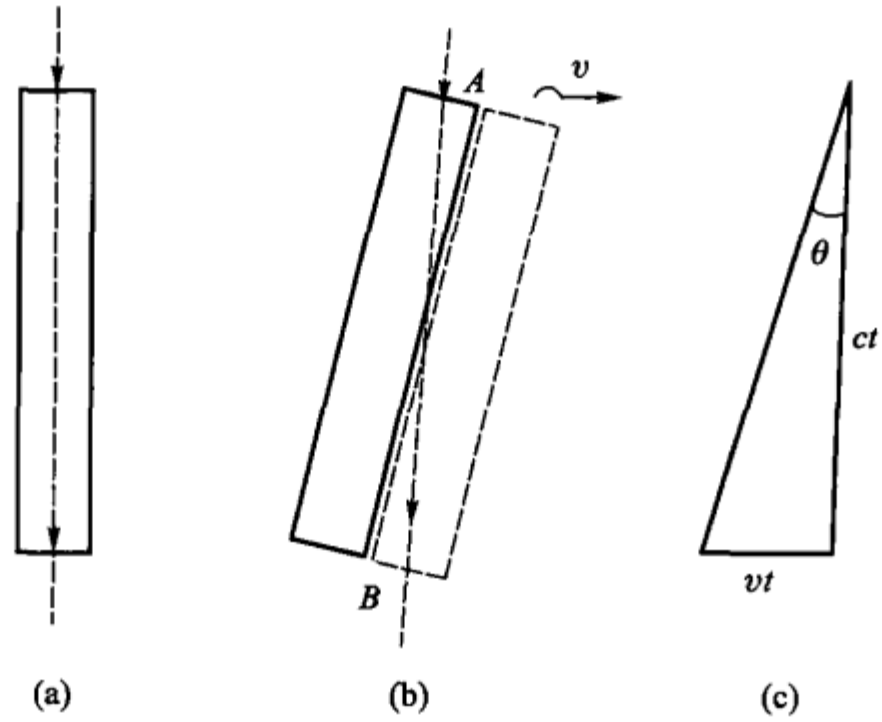


图 14－2

垂直于地球轨道平面 $ABCD$ 的直线上的一个恒星 S，当地球以速度 v 行至 A 点而从望远镜看它时，发现它呈现在 a 点，角 SAa 与图 14－2 中的 θ 相当，后来地球运行到 B 点时，恒星呈现在 b 点，余类推. 这样，在地球的一年内，从望远镜看来，该恒星好像在天空中画了一个圆圈. 对于在地球轨道面上的恒星 S'，当地球运行至 A 或 C 时，看它呈现在 a' 和 c'，而地球运行至 B 和 D 时，由于地球的运动方向与光的方向平行，恒星仍在原处 S'. 这样，在地球的一年内，从地球上的望远镜看来，该星好像画了一条小直线段. 对于其他位置的恒星，于一年内在天空中则好像画了一个椭圆. 布拉德雷发现，上述圆的直径 ac 或 bd、线段 $a'c'$ 和椭圆的长轴对地球的张角同为 40.9″. 这种现象称为恒星的光行差.

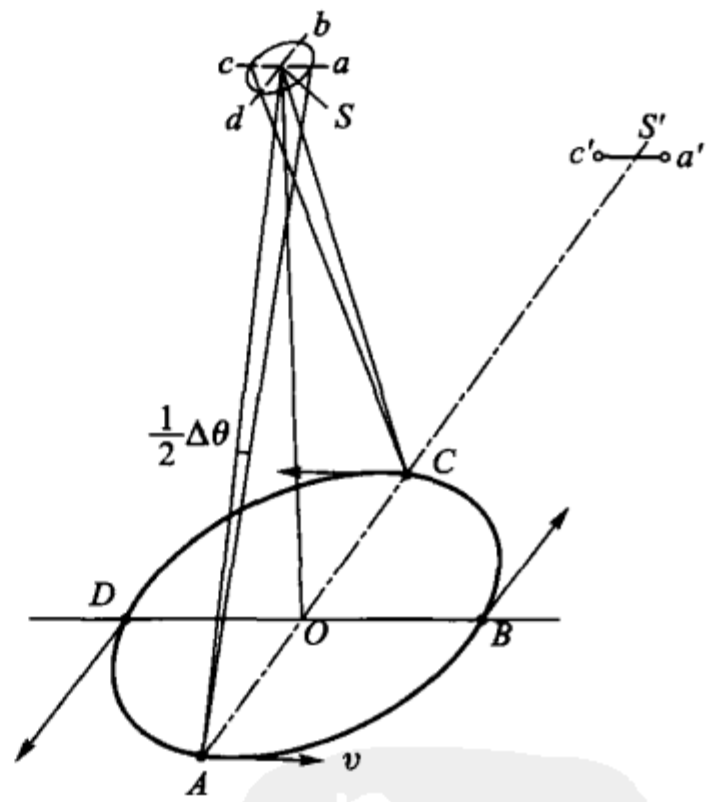


图 14－3

若地球的运动方向与光的方向不互相垂直，设 φ 为其夹角，则望远镜光轴应向前倾斜角度 θ'：

$$\tan\theta' = \frac{v}{c}\sin\varphi. \tag{14-2}$$

恒星在天空中所画椭圆的长轴对地球的夹角为

$$\Delta\theta = \frac{2v}{c},$$

由此得出

$$c=\frac{2v}{\Delta\theta}. \tag{14-3}$$

已知 $\Delta\theta$ 等于 40.9″(实际观察得到的)和地球在轨道上的速度,所以由此式可求出光速.利用此法测得 $c=303\ 000\ \text{km/s}$,它相当接近于近代实验室测得的光速数值.

§14-3　测定光速的实验室方法

1. 菲佐齿轮法

1849 年,菲佐第一个不用天文观察,而在地面上的实验装置中测得光速.此法实质上与伽利略提出的方法一致,不过用反射镜代替了第二个观察者,旋转的齿轮代替了用手启闭的开关.换言之,即用反射镜保证行至第二观察者(B)的信号能立即返回,并用齿轮来较精确的测定时间.齿轮法的装置如图 14-4 所示.光自垂直于图面的狭缝光源 S 出发,经过透镜 L_0 和有半镀银面的平板 M_1,而会聚于 F 点.

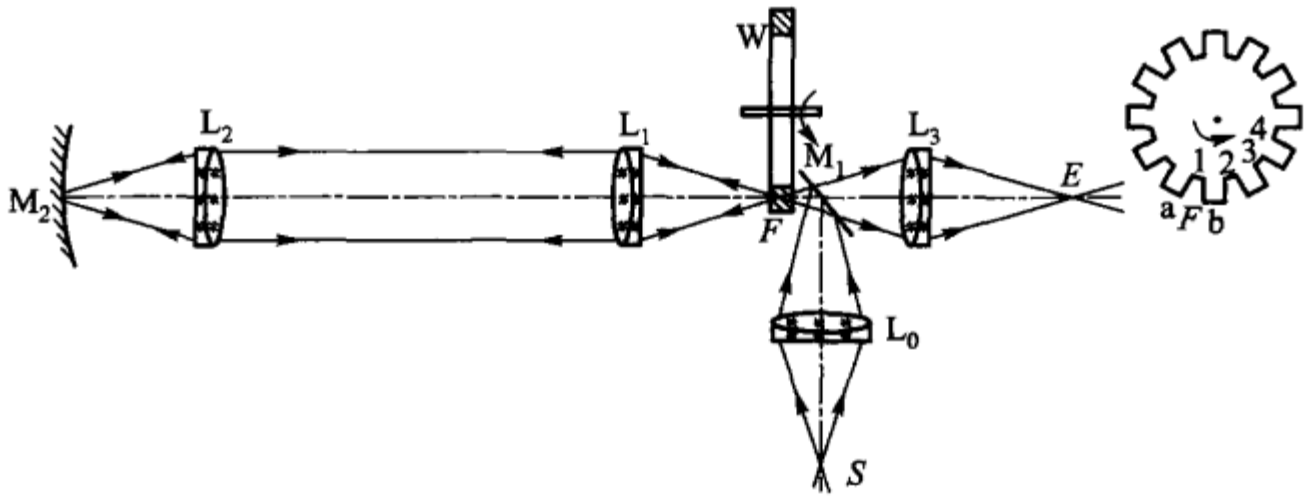


图 14-4

在 F 点所在的平面内,有一个旋转速度可变的齿轮 W,它的齿隙不遮光,而它的齿却能遮住所有会聚于 F 点的光.通过了齿隙的光,经过透镜 L_1 后成为平行光,透镜 L_2 将此平行光会聚在它自己焦点上的凹面反射镜 M_2 的表面上.光行至反射镜 M_2 后被反射沿原路返回.如果在光由 F 到 M_2 的一个往返的时间间隔 Δt 内,齿轮所旋转的角度正好使齿隙被齿所代替,则由 M_2 返回的光受阻,在透镜 L_3 后 E 处看不见光;反之,如果齿隙被另一齿隙所代替,则在 E 处能看见由 M_2 返回的光.这样,当齿轮转速由零而逐渐加快时,在 E 处将看到闪光.当齿轮旋转而达第一次看不见光时,必定是图 14-4 中的齿隙 1 为齿 a 所代替.设齿轮此时的转速为每秒 v 圈,齿数为 n,则 a 转到 1 所需的时间间隔

$$\Delta t=\frac{1}{2nv}.$$

另一方面,在此时间内光由 F 到 M_2,又由 M_2 返回 F,走了路程 $2L$,即

$$\Delta t = \frac{2L}{c}.$$

比较所得的两式,则有

$$c = 4nLv. \tag{14-4}$$

菲佐用齿数 720 的齿轮,取 $2L$ 等于 $1.726\ 6 \times 10^7$ cm,发现第一次看不见光时齿轮的旋转速度为每秒 12.6 圈,测得光速为 3.15×10^{10} cm/s. 这个实验中主要的误差是很难精确地定出看不见光的条件,因为齿有一定的宽度,当 F 不正好在齿的中央时光也能被遮住. 菲佐之后,还有考纽(1874)、福布斯(Forbes)以及珀罗汀(Perotin)等人先后改进了这个实验,所得结果均在 $2.99 \times 10^{10} \sim 3.01 \times 10^{10}$ cm/s.

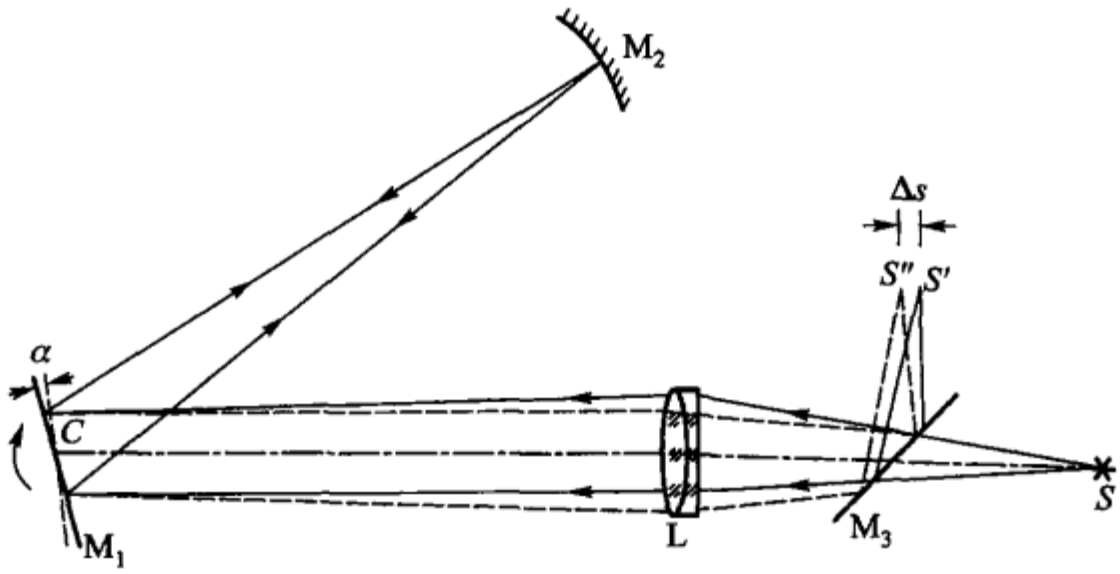


图 14-5

2. 傅科旋转镜法

此法由惠斯通(Wheastone)于 1834 年首先提出,而 1860 年傅科第一次用它,装置如图 14-5 所示. 从缝状光源 S 发出的光,经过半透明的平板 M_3 后被透镜 L 成像于凹面反射镜 M_2 的表面上,光在其间受到轴线通过 C 点的转镜 M_1 的反射. 此 M_1 的 C 点处于凹球面镜 M_2 的中心,这为的是使从 M_1 反射到 M_2 上的光容易反射回到 M_1 上来,如果 M_2 采用平面镜,则只有当 M_1 与 M_2 相互作一定的取向时,即当反射光束的轴垂直于 M_2 时,才能发生上一情况. 由 M_2 和 M_1 反射回的光,经过透镜 L 和半透明板 M_3 而会聚于 S'点. 当平面镜 M_1 绕 C 轴而高速旋转时,在光从 M_1 到 M_2 再从 M_2 到 M_1 的时间内,M_1 将转过一个小角 α,而由 M_1 反射回到 L 的光线与原光线的方向间将构成 2α 角. 于是透镜 L 使光束会聚于 S''点. 此 S'点与 S''点的间隔

$$\Delta s = 2\alpha l, \tag{14-5}$$

其中 l 为由透镜 L 到像面 $S'S''$的距离.

若 ω 为 M_1 的角速度，则转过的小角 $\alpha=\omega\cdot\Delta t$. 其中 Δt 是光在 M_1 和 M_2 间往返一次所需的时间，以 L 表示 M_1 到 M_2 距离，则有

$$\Delta t=\frac{2L}{c}.$$

由此求出转角

$$\alpha=\omega\frac{2L}{c}.$$

从式(14－5)和上式求得光速：

$$c=\frac{4\omega Ll}{\Delta s}. \tag{14-6}$$

因此，直接测量 ω,L,l 和 Δs 即可求得光速 c.

傅科用 M_1 和 M_2 间距 20 m 的装置，以能准确到 0.005 mm 的测微目镜，测得位移 Δs 为 0.7mm，结果 $c=2.98\times10^{10}$ cm/s. 在这实验中最大的误差是由于 Δs 太小难于测准. 后来考纽、纽科姆(Newcomb，1882)和迈克耳孙(1879，1882，1926，1932)等对此法作了许多改进，而主要是在保持成像亮度不减的条件下增大 M_1 到 M_2 的距离，兹将其中最后的两个，由迈克耳孙所完成的实验，旋转棱镜法和抽空长筒实验概述如下.

3. 迈克耳孙的旋转棱镜法

迈克耳孙利用多面反射镜代替傅科法中的单个反射镜 M_1，在 1926 年做出图 14－6 所示的实验装置. 光从狭缝状光源 S 发出，在一旋转的八面棱镜的一面上发生反射，再经过两个固定的平面镜 M_2 和 M_3 反射到大凹面镜 M_4(焦距约 18 m，孔径约 60 cm). M_4 把光变成平行光送至与 M_4 相距约 35 km 的 M_5 上，M_5 与 M_4 相似. M_5 把光会聚于一小平面镜 M_6，再从这里经过 M_5,M_4,M_3'(在 M_3 的下方)，M_2'和棱镜的 a'面，而到达观察者的眼睛 E 处. 在这个装置中，若在光往返一次的时间里八面镜刚好转了 1/8 圈，即与 a'面相邻的面正好转到 a'的位置，则虽转动八面镜而在 E 处看到光源 S 的像不动. 这样一来，利用旋转八面镜较利用齿轮能更准确的测定时间，同时也不必测光源 S 的像的位移. 在这个意义上来说，迈克耳孙旋转棱镜法似乎是综合旋转镜法和齿轮法而创立的.

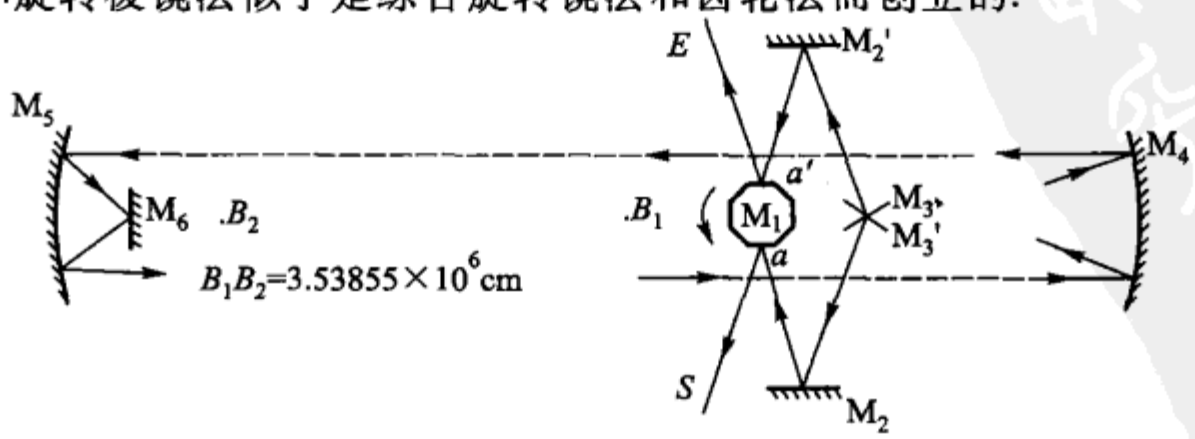


图 14－6

在迈克耳孙实验中，旋转棱镜由慢而快，当达到每秒旋转约 528 圈时，发现光源的像近于不动；用大地三角测量法非常准确地测量了 M_4 和 M_5（实际上是两个基点 B_1 和 B_2）的距离．结果得出 $c=299\ 796\pm4$ km/s①．后来，迈克耳孙把 M_4 和 M_5 的距离增大到约 130 km 来测定光速，但由于气候条件不好，结果的可靠性并不能令人满意．

在上面的讨论中，实际上是假定了光在空气中的速度与在真空中的速度一样．然而，这并不完全正确，因为空气的折射率略大于 1，光在真空中的速度比在空气中的速度约大 67 km/s．

在严格的情况下，须把在空气中测定的光速，利用已知的空气折射率的数值，换算出光在真空中的速度．然而，在像迈克耳孙这样的实验中，光路很长，其中空气的温度和压力的实际情况很难判断．因而很难对直接测定的光速值进行修正．为了避免这个困难，迈克耳孙于 1932—1935 年令光在长达 1.6 km、直径约为 1m 并且抽空到 5.5～6.5 mmHg 的长筒内做实验，并且用 32 个面的旋转棱镜代替前述八个面的旋转棱镜来测定光往返十次所需的时间．这样求得的光速 $c=299\ 774\pm2$ km/s②．

解决这个困难的另一种测定光速的方法，是在提高测定微小时间间隔的准确度的情况下缩短光路的克尔盒法．

4．克尔盒法

利用克尔盒调制光束（使光强对时间成为具有正弦波形的光信号）的方法来测定光速，是卡洛拉斯（Korolus）和密德尔斯泰（Mittelstaedt）首先采用的，而安德森（Anderson）和许特尔（Hüttel）互相独立地做了同样的实验．这些实验的细节互有不同，在此不能详述，仅以安德森实验为例来说明用克尔盒测定光速的原理．

安德森的实验装置如图 14－7 所示，自水银弧光灯 S 发出的光，通过克尔盒 K，光束的强度遂呈正弦性的变化，变化的频率与克尔盒电位改变的频率相同．光在半透明板 M_1 上反射后射到 M_2，由 M_2 又返回并通过 M_1 而到光电池 R 上．另一部分透过半透明板的光，沿 M_1，M_3，M_4，M_5 而达 M_6，并且自 M_6 沿原路反射回来，此光在 M_1 上反射后亦进入光电池 R 之中．在光电池后面加一电路将由两光束在光电池中所产生的光电流变成电压，并且放大和记录下来．可以证明，合成电压的大小决定于两光强信号的相位关系，当两相位到 R 时同相位，则合成电压最大，而当两者相差半周时，合成电压最小［参看图 14－7（a）和（b）］．M_4 可

①②　这两个值与现代公认的较精确的测量结果 $c=299\ 793.0\pm0.3$ km/s 相比较，还是迈克耳孙早期的结果①好，据报道，②的真空中测光速，由于迈克耳孙本人并未直接动手和实验上某些不理想，其结果不如①的好．

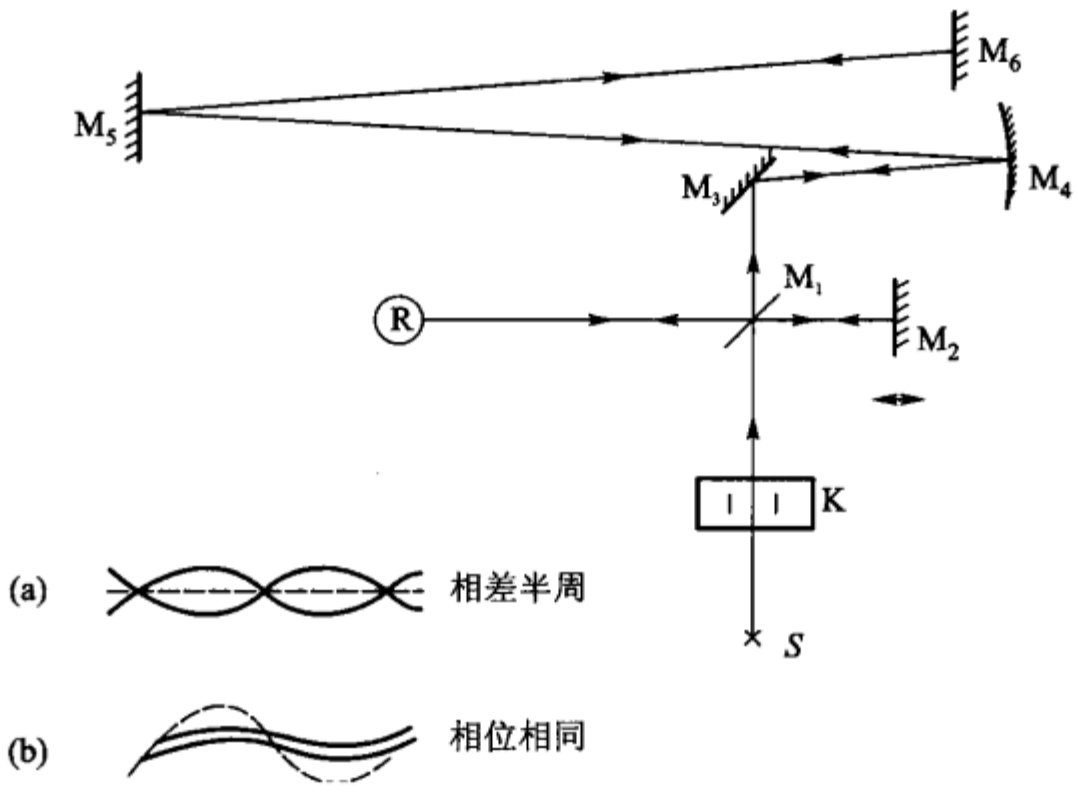


图 14 - 7

由另一个有不同焦距的凹面镜 M_4' 代替，这样可使光直接返回 M_3 而不到 M_5 和 M_6 去.

先装好 M_4'，使光自它直接返回 M_3 并以测微螺旋调节 M_2 的位置，直到由接收器 R 所给出的电流最小为止，即达到如图 14 - 7 中(a)的情况. 然后把 M_4 装好(令在 M_4，M_5，M_6 间往返一次后由 M_3 经由 M_1 而达接收器)，再调节 M_2 的位置，使再出现合成光电流为最小. 这样，光走过 M_2 的这两次位置的间隔所需的时间加上光从 M_4 到 M_5 和 M_6 的往返所需的时间就等于克尔盒施予光束的调制周期的整数倍.

安德森在他的实验中，所用的克尔盒的频率是 19.2×10^6 Hz，他给出光速 $c = 2.997\ 76 \pm 0.000\ 14 \times 10^{10}$ cm/s. 后来(1929 年)多尔西(Dorsey)对所得数据作了详细的分析，认为最好的数值是

$$c = 2.997\ 73 \pm 0.000\ 10 \times 10^{10}\ \text{cm/s}.$$

兹将由上述不同方法测定的光速数值列入表 14 - 1. 现代真空中光速的最可靠值是 $c = 299\ 793.0 \pm 0.3$ km/s. 而在较粗略的计算中可认为 $c = 3 \times 10^{10}$ cm/s.

按电磁理论，由公式(12 - 8)，可得真空中的光速

$$c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}\ (\text{SI 单位}).$$

对于真空，有

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{N} \cdot \text{s}^2/\text{C}^2,$$

$$\varepsilon_0 = (4\pi \times 8.987\ 5 \times 10^9)^{-1}\ \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2.$$

将这两数值代入上式，得

表 14－1

方法	作者	年份	光速 $c/(\mathrm{km\cdot s^{-1}})$
齿轮法	菲佐	1849	315 000
齿轮法	珀罗汀	1902	299 870 ± 50
旋转镜法	傅科	1862	298 000 ± 500
旋转镜法	迈克耳孙	1902	299 890 ± 60
旋转棱镜法	迈克耳孙	1926	299 796 ± 4
旋转棱镜法(真空筒)	迈克耳孙、皮斯等	1935	299 774 ± 2
克尔盒法	安德森	1941	299 773 ± 10

$$c=\sqrt{\frac{4\pi\times 8.987\ 5\times 10^{9}}{4\pi\times 10^{-7}}\times\frac{\mathrm{N\cdot m^{2}}}{\mathrm{C^{2}}}\times\frac{\mathrm{C^{2}}}{\mathrm{N\cdot m^{2}}}}=2.997\ 9\times 10^{8}\mathrm{m/s}$$

表 14－1 中除菲佐和傅科之外的一些较近的数值，特别是最近的 $c=299\ 793.0\pm 93\ \mathrm{km/s}$ 与计算值符合极为良好，这一方面说明各作者所测得的数值是正确的，另一方面，是给麦克斯韦的光的电磁理论提供了有力的证据.

§14－4　光在介质中的速度　相速和群速

第一个用实验直接比较光在光密介质中的速度和真空中的速度的是傅科. 他的实验是在 1862 年完成的.

傅科在图 14－5 所示的装置中，于 M_1 和 M_2 间另加一水槽，发现 S'' 位移增加，证明了光在水中的速度小于在真空或空气中的速度. 众所周知，按牛顿的理论，光在光密介质中的速度应大于在光疏介质中的速度，而惠更斯理论却得相反的结果. 这两个结论虽然在傅科完成这个实验(1862 年)之前已能判断孰真孰伪，但是，傅科的这个实验却被认为是对惠更斯理论最直接和最有力的支持.

迈克耳孙于 1885 年以较高的精密度用白光重复上述实验，结果得到：空气中的光速与水中的光速之比值为 1.33，空气中的光速与二硫化碳中的光速之比值为 1.758. 前一数值与根据光线在折射面上所产生的折射角而确定的水的折射率很符合，而后一数值却与由折射法测得的二硫化碳的折射率 1.64 相差甚大，并且这绝不是实验误差造成的. 瑞利找到了这种差别的原因，他对光速概念的复杂性进行了说明，引出光的相速和群速的概念.

如在 §7－1 所指出的，方程式(7－2)或(7－6)

$$y=a\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)$$

所代表的单色光，是一个无限长的正弦波，其中 v 为同相位面的移动速度，称作

相速. 对于单色光,相速即为其波速. 在根据惠更斯原理导出折射定律时,所研究的波速正是这个相速. 因此,在 $n = c/v$ 式中,v 为相速. 换言之,用确定折射光线方向的改变的方法所定出的介质折射率,是光在真空中的相速与光在该介质中的相速的比值.

然而,如瑞利首先指出的,在测定光速的已知各法中,就方法的实质来讲,所用的光并不是一列延绵不断的正弦波,而是有限长的波列. 换言之,在前两节所述的各种测光速实验中,所测的光并不是单色光,而是由许多个频率相近的单色光叠加而成的"复色光",因为一个有限长的波列,按傅里叶变换,可视为由许多个频率相近的及强度按一定规律分布的无限长的波叠加而成的"复色光". 如果所有这些不同波长的单色波均以同一相速传播,则此"复色光"也以同一速度传播. 在真空中各单色光的相速相同,所以其"复色光"的传播速度等于单色光的相速.

但是,在非真空介质中,各单色光以不同的相速传播,相速的大小取决于介质的性质和光的频率. 在这种情况下,"复色光"的速度问题就变得比较复杂了. 在研究这个问题时,为计算上的方便,不妨假定"复色光"是由两个振幅相同而频率相近的单色光叠加而成的,这样简化并不使所得结果失去普遍意义. 现在设两个波的振幅均为 a,它们的波长分别为 λ 和 $\lambda + \mathrm{d}\lambda$,速度分别为 v 和 $v + \mathrm{d}v$. 于是合成波可以写成二者之和:

$$y = y_1 + y_2 = a\left\{\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) + \sin\frac{2\pi}{\lambda + \mathrm{d}\lambda}[x - (v + \mathrm{d}v)t]\right\}$$

$$= 2a\sin\pi\left[x\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda + \mathrm{d}\lambda}\right) - t\left(\frac{v}{\lambda} + \frac{v + \mathrm{d}v}{\lambda + \mathrm{d}\lambda}\right)\right]$$

$$\cdot \cos\pi\left[x\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + \mathrm{d}\lambda}\right) - t\left(\frac{v}{\lambda} - \frac{v + \mathrm{d}v}{\lambda + \mathrm{d}\lambda}\right)\right].$$

由于 $\mathrm{d}\lambda$ 较 λ 小得多,可把 $\lambda(\lambda + \mathrm{d}\lambda)$ 和 λ^2 的差别忽略,所以有

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + \mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2}$$

和

$$\frac{v}{\lambda} - \frac{v + \mathrm{d}v}{\lambda + \mathrm{d}\lambda} = \frac{v\mathrm{d}\lambda - \lambda\mathrm{d}v}{\lambda^2}.$$

代入上式,则得

$$y = 2a\cos\pi\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2}x - \frac{v\mathrm{d}\lambda - \lambda\mathrm{d}v}{\lambda^2}t\right)\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt). \qquad (14-7)$$

可见,合成波的振幅 $A = 2a\cos\pi\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2}x - \frac{v\mathrm{d}\lambda - \lambda\mathrm{d}v}{\lambda^2}t\right)$,不是一个常数,而是一个缓慢变化的正弦波. 图 14-8(a)中两正弦波,一代表 y_1,另一代表 y_2. 图 14-8(b)中的虚线即为

$$2a\cos\pi\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2}x-\frac{v\mathrm{d}\lambda-\lambda\mathrm{d}v}{\lambda^2}t\right)$$

实线为(14-7)式所表示的合成波.

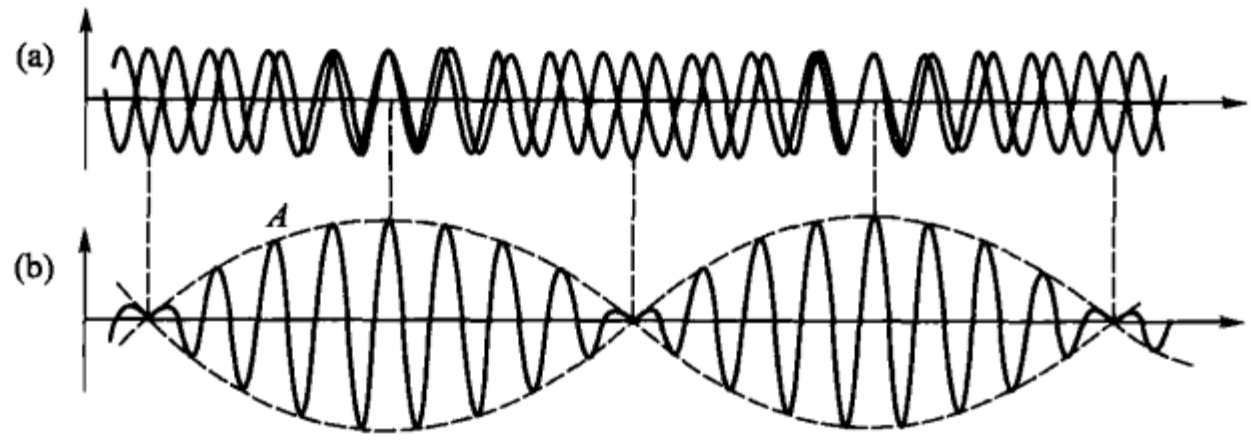


图 14-8

合成波的速度可由合成波上任选一点(例如 A)的位移速度来决定,即(14-7)式余弦部分的传播速度.要求出这个速度,需要写出 y 的振幅不变的条件,即

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2}x-\frac{v\mathrm{d}\lambda-\lambda\mathrm{d}v}{\lambda^2}t=\text{常数},$$

微分此式,则得

$$u=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v-\lambda\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{14-8}$$

按瑞利的说法,这个合成波的速度 u 称为群速.此式表示,不同频率(或波长)的单色光在介质中有不同的相速时,若 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}\lambda>0$,即随波长之变大速度 v 亦变大,则合成的"复色光"的传播速度——群速将小于波长为 λ 的单色光的相速.反之若 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}\lambda<0$,则"复色光"的传播速度将大于波长为 λ 的单色光的相速.在下一章的讨论中将看到,$\mathrm{d}v/\mathrm{d}\lambda>0$ 与正常色散相应;$\mathrm{d}v/\mathrm{d}\lambda<0$ 与反常色散相应.

有了这个关于"复色光"的群速的概念之后,对于迈克耳孙实验测得的光在空气中的速度与在二硫化碳中的速度比值 1.758 跟二硫化碳的折射率 1.64 有显著差别的原因,便十分清楚了.原来,迈克耳孙实验,与其他测光速的实验一样,也不是对单色光进行测量的,所测得的光速是相应光的群速.对于水,由于它的色散性很小,$\mathrm{d}v/\mathrm{d}\lambda$ 很小,因而,群速 u 与所用光的平均波长 λ 的相速 v 差别不大,结果,真空中的光速对它的比值与对相速的比值都近于 1.33.然而,二硫化碳是色散性很大的介质,在可见光区域,$\mathrm{d}v/\mathrm{d}\lambda$ 为不可忽略的正值,所以"复色光"的群速较某一平均波长的相速小很多.这样,迈克耳孙所测的比值 c/u 自然就比介质折射率 c/v 大很多.

* §14-5 运动介质中的光速

从对光的干涉、衍射、偏振及其速度的讨论，现在可以毫无疑问地肯定，光是电磁波. 但是，关于这种波的传播是否与声波的传播相似，是否必须借助于某种介质以及如果需有介质，这种介质的性质如何等问题，曾被 19 世纪末和 20 世纪初的许多物理学家研究过. 他们研究这个问题所遵循的路径，都是从关于运动物体和所设想的介质的相互关系的某些概念出发，建立起运动介质中的现象的某种理论，然后由实验来检查它是否正确.

在本书第一章绪言中已经提到，基于牛顿力学的经典电磁理论认为，在宇宙的一切空间都充满“以太”，光波是在“以太”中传播的. 对于“以太”的性质曾有两种主要的、也是完全相反的见解. 其一，赫兹认为，当物体运动时，以太完全被物体所拖动；其二，洛伦兹认为，以太完全静止不动，并且不参与物体的运动. 对于这两种理论，当然，只能通过实验来检验. 兹将实质上是为此目的而做的实验中的两个最主要的实验介绍如下.

1. 菲佐实验

这是一个可被认为从“以太完全被物体拖动”的赫兹观点出发的实验. 在菲佐 1859 年做出此实验之后，于 1886 年迈克耳孙重新做过. 菲佐实验的布置如图 14-9 所示. 自狭缝 S 发出的单色光分成两条，这两条光线分别穿过 A 管和 B 管. 两管中装着流动很快的水，水流方向相反，两条光经过 M_1 反射后，互换路径，在它们回到透镜 L_1 时，光线(1)穿过 A 和 B，其方向与水流方向相反，而另一光线(2)穿过同样的 A 和 B，其方向却与水流方向相同. 透镜 L_1 把这两光线聚到一起，在 S' 处形成干涉条纹.

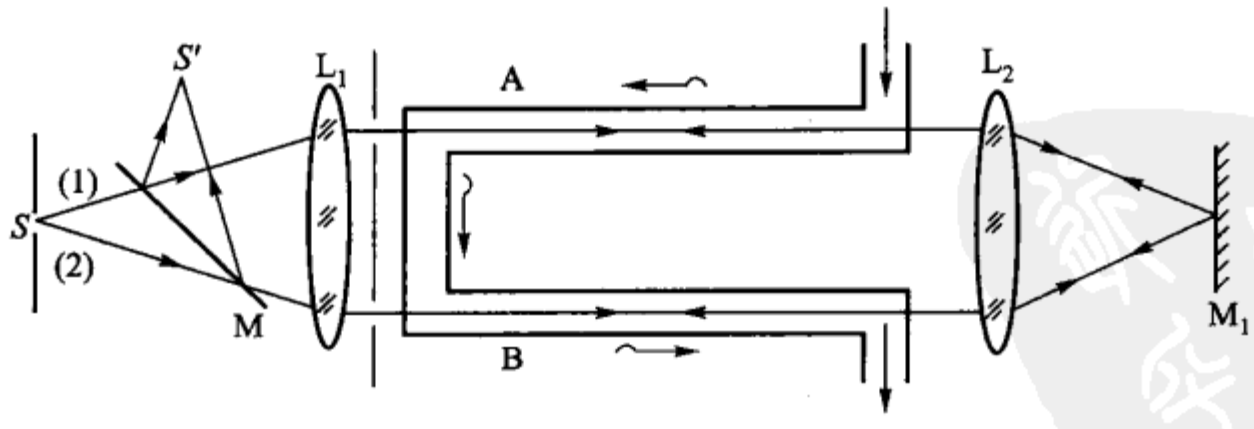


图 14-9

按赫兹的观点，光波借以传播的以太完全被运动的水拖动，光速是光相对于以太传播的速度. 光线(1)和(2)对水的速度同为 $c_1 = c/n$，其中 n 为水的折射率. 这种情况可借助一个比喻来理解：“以太”比作 P 船，光比作在 P 船中运动的球，水比作另一船 Q. 当 P 被 Q 完全拖动时，不论向什么方向运动，则球对 Q 的

速度恒等于球对 P 船的速度. 但相对于静止的仪器或观察者来说,光在通过流水这一段路程时的速度,将和水流的方向有关,这就是:对于光线(1),这个速度等于 $c_1 - v$,而对光线(2),这个速度等于 $c_1 + v$,其中 v 代表水流的速度. 这样一来,光线(1)和(2)通过仪器上的同样的路程却需要花不同的时间. 若以 l 代表 A 管或 B 管的长度,则此时间差为

$$\Delta t = \frac{2l}{c_1 - v} - \frac{2l}{c_1 + v} = \frac{4lv}{c_1^2 - v^2}, \tag{14-9}$$

此时间差 Δt 乘以 $2\pi\nu$ 即为光线(1)和(2)在透镜 L_1 的会聚点 S'处相遇时的相位差 δ,即

$$\delta = 2\pi\nu\Delta t. \tag{14-10}$$

其中 ν 为所用单色光的频率.

由上两式可以看出,当水流速度 v 改变时,干涉条纹应产生相应的位移. 菲佐采用 150 cm 长的管子,水流速度 700 cm/s. 当把水流方向反转时,他发现了一个相当于 0.46 个条纹的位移,而这个位移只有按(14-9)和(14-10)两式算出的一半,即实验值是按赫兹观点算出的理论值的二分之一. 但是这一位移和早先菲涅耳的理论倒符合得很好. 对菲涅耳的理论,可简单地说成这样:运动物体(如水)只是部分地而不是全部地拖动以太. 即当水以流速 v 相对于仪器运动时,以太对仪器的速度不是 v,而是较小的 αv,α 称为拖动系数(drag coefficient),是一个恒小于 1 的数. 于是逆流进行的光线(1),对于仪器的速度为 $c_1 - \alpha v$,而顺流进行的光线(2),对仪器的速度为 $c_1 + \alpha v$. 由此求得光线(1)和(2)在 S'点相遇时的相位差:

$$\delta' = 2\pi\nu\left(\frac{2l}{c_1 - \alpha v} - \frac{2l}{c_1 + \alpha v}\right) = 2\pi\nu\frac{4l\alpha v}{c_1^2 - \alpha^2 v^2}, \tag{14-11}$$

当假定拖动系数

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n^2} \tag{14-12}$$

时(式中 n 为物质折射率),由式(14-11)算出的干涉条纹的位移值与实验结果极为相符.

这表明赫兹关于“以太完全被拖动”的观点以及由此建立的理论是不能成立的. 同时,似乎还可以作出这样的结论:运动物质能部分地拖动以太,拖动系数 α 与物质的折射率 n 有关,折射率等于 1 的物质应不拖动以太. 进而言之,既然大气的折射率近于 1,它就不能或者只能极微弱地拖动以太. 这样,对于地球上的观察系统来说,将有“以太风”存在. 而这个推论正是洛伦兹关于“以太完全不动”的概念的一部分.

2. 迈克耳孙-莫雷实验

既然地球不拖动它周围的以太,则可以设想以太为“绝对静止”的参考系统用来测量地球在宇宙中的“绝对运动”.迈克耳孙用他自己发明的干涉仪和莫雷合作,以光在以太中的速度和地球运动速度的叠加作用来探测地球的运动,实质上,也是一个从洛伦兹的“以太完全不动”的观点来研究以太性质的实验.经过迈克耳孙和莫雷长期而细致的工作和后来其他人重复实验,都否定了预期的结果,无法测出地球的绝对运动.这一实验具有重大的意义,它涉及爱因斯坦相对论.

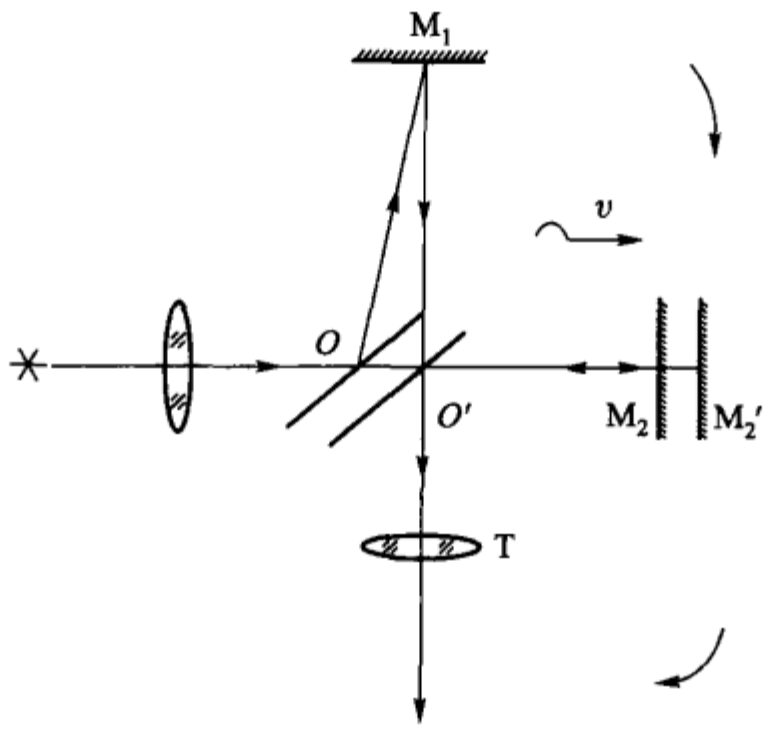


图 14 - 10

实验装置如图 14 - 10 所示.先将迈克耳孙干涉仪两臂的光程调成相等,例如其光程都等于 l,然后令两臂之一(如 OM_2)的方向与地球的运动方向相同.设 c 为相对于以太的光速,v 为地球运动的速度.于是,相对于地球上的观察者,顺地球运动方向的光速为 $(c-v)$,逆地球运动方向的速度为 $(c+v)$.于是,光在 OM_2 臂上往返一次(自 O 到 M_2 并返回到 O'的封闭光路)的时间是 T_1+T_2,即

$$T_1+T_2=\frac{l}{c-v}+\frac{l}{c+v}=\frac{2lc}{c^2-v^2}.$$

设 $v/c=\beta$,当略去 β^4 和 β^4 以上的各项时,则有

$$T_1+T_2=\frac{2l}{c}(1+\beta^2). \tag{14-13}$$

在垂直方向上,因为仪器相对于光借以传播的以太有运动,所以在封闭光路 OM_1O' 中,光走 OM_1 和 M_1O' 所花的时间为 $2T$,而 T 决定于

$$Tc=OM_1=\sqrt{l^2+v^2T^2}$$

即

$$2T=\frac{2l}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

在同样略去 β^4 和 β^4 以上各项时，则有

$$2T = \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right). \tag{14-14}$$

由式(14-13)减去式(14-14)，得

$$\Delta t = (T_1 + T_2) - 2T = \frac{1}{c}\beta^2,$$

即为在给定的情况下，光走同长但方向相互垂直的两光路所需的时间之差. 这样的两光在相遇点的相位差为

$$\delta = 2\pi\nu\Delta t = 2\pi\nu\frac{l}{c}\beta^2; \tag{14-15}$$

相当的光程差为

$$\Delta = l\beta^2. \tag{14-15a}$$

若地球能突然地停止运动，β 由有限值突然变为零，则应见到干涉条纹在视场中有位移. 然而地球不能这样，所以必须寻求改变 v 的其他方法. 迈克耳孙和莫雷将干涉仪装在一个浮在水银面上的大石板上，石板可绕垂直轴缓慢(6 分钟转 90°)而连续地旋转. 在石板旋转的过程中进行观察，这样又可避免因启动或停止仪器时可能引起的仪器形变，又可避免外来振动. 仪器和地球在不断旋转过程中，两者相互取向总会有如图 14-10 一致的. 当仪器从这方向再转过 90°，于是，OM_1 臂变成平行于地球运动的方向，OM_2 变成垂直于地球的运动方向. 原来花时间较多的是 OM_2 臂变成花时间较少的臂，而现在花时间较多的却是原来花时间较少的 OM_1. 这样一来，在转 90°角的过程中相当的光程差改变了 $2l\beta^2$，所以应该看到干涉条纹有一定的位移. 条纹位移的数目(以相邻两条纹的间隔作为单位来计算)等于 $2l\beta^2/\lambda$，λ 为所用单色光的波长.

显然，为了获得干涉条纹的较大位移，必须设法增大干涉仪的臂长 l，假设地球的运动速度为 3×10^4 m/s，$\beta^2 = 10^{-8}$. 迈克耳孙-莫雷用多次反射的方法，将光臂长增加到 $l = 11$ m. 这样就相当有 2.2×10^{-5} cm 的光程差改变，它较钠黄光波长的一半稍少些，因而干涉条纹应有近于半个波长的位移. 然而，实际上所观察出的干涉条纹的位移还不及这个数量的 1/20，甚至有时还不及它的 1/40. 在不同季节和不同地点(纬度)进行实验都得不到预期的结果.

这一实验的否定结果指出：以太完全被地球所拖动，不存在绝对静止的以太，否定了洛伦兹关于以太绝对静止的观点. 但这个结论又与菲佐实验结果相矛盾. 这样的问题引起了物理学界广泛而激烈的科学争论. 曾作了各种尝试，企图在不推翻以太概念的情况下来解释迈克耳孙-莫雷实验. 其中值得特别提起的是斐兹杰惹(Fitzgerald，1851—1901)和洛伦兹的理论. 斐兹杰惹和洛伦兹曾分别地提出理论，认为迈克耳孙-莫雷实验的否定结果是由于干涉仪在地球运动方向上臂的缩短而引起的补偿作用造成的. 从式(14-13)和(14-14)可以看出，

如果在运动方向上的臂长对在垂直运动方向上的臂长的比值为$(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}$,或者说,若一切物体在运动方向上的长度都比该物体在以太中静止时的短,并且前者对后者的比值是$(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}$,则无论$v$值如何,光在两臂的封闭光路中所花的时间,在略去$\beta^4$项时,应该相等,即

$$T_1+T_2=\frac{2l(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}(1+\beta^2)}{c}=\frac{2l}{c}(1+\frac{1}{2}\beta^2)=2T.$$

洛伦兹基于电子论,进而认为这种缩短对于物质来说具有普遍的意义.然而,长度缩短论也并没有解释其他一些旨在测"以太风"的实验的否定结果.

1905年,爱因斯坦(Albert Einsten)发表了著名的狭义相对论①,从一个完全新的角度,废弃以太的概念使上述测光速的整个问题得到了合理地解决.

* §14-6 狭义相对论的概念

爱因斯坦在分析了何以所有旨在测出"以太风"的实验都得到否定结果之后,断然认为,这些实验无疑地是证明了对于这些实验的观察者来说,光速是一个常数,他并且用这个观点重新审查了上节所述的运动物体中光的运动学问题.原来,在运动学中每一个运动问题都与一坐标系和一时钟相联系.假定某一给定力学现象与坐标系x,y,z,t联系在一起,并且已知其运动方程.于是,当知道此x,y,z,t和另一坐标系x',y',z',t'的关联方程式之后,即可将此力学现象用x',y',z',t'来表示.这样的关联式称为变换式.在最简单的情况下,如果两坐标系的差别仅在于带撇系统(S'系)的原点O'在不带撇系统(S系)的x轴上距原点O为a的地方,则变换式为

$$x'=x-a;y'=y;z'=z;t'=t.$$

若两坐标系在沿x轴方向有一相对运动,则在牛顿力学中,此变换式为

$$\left.\begin{aligned}x'&=x-vt,\\y'&=y,\\z'&=z,\\t'&=t.\end{aligned}\right\}\tag{14-16}$$

---

① 1905年9月,德国"物理年鉴"(Annalen der Physik)发表了爱因斯坦的一篇论文《关于运动介质的电动力学》,其中提出了狭义相对论的基本原理.论文中指出,从伽利略和牛顿时代以来占统治地位的古典物理学,其应用范围只限于速度远远比光速小的情况.新力学和电动力学则扩大了这些界限,它可以解释与很大运动速度有关的过程的特征.

后来,1916年,爱因斯坦又提出了广义相对论,进一步推广了狭义相对论.

关于狭义相对论和广义相对论,爱因斯坦于1921年在他所著《相对论的意义》(中译本见科学出版社,1965)一书中又作了系统的阐述.

爱因斯坦于1955年4月18日逝世于美国普林斯顿大学,享年76岁.

利用这个变换式可以证明,在相互作等速运动的S′系和S系中,力学定律完全相同.对于在S系中沿x轴以速度u作等速运动的一个质点,有

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \\ u' &= \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - v = u - v. \end{aligned}\right\} \tag{14-17}$$

此式在一般速度的情况下与实验结果很相符.例如,在已知风的速度和飞机相对于空气的速度时,可利用它求出飞机相对于地面的速度,但是对于光来说,迈克耳孙-莫雷实验以及其他一些实验已经证明

$$c' = c, \tag{14-18}$$

也就是式(14-17)不能应用于光.

爱因斯坦于1905年作了两个假设:

(1) 两个作等速直线运动的系统是等价的,永远不可能测知物体的绝对运动,而只能借助另一物体得知相对运动.

(2) 在任何作等速直线运动的坐标系中,测得的光在真空中的速度均为一常数c.

这两个假设就是相对论的基本原理,基于这两个假设,我们可导出一个代替式(14-16)的新的变换式,称为相对论变换式.若我们假定变换式是线性齐次式,并且在垂直于运动方向上两坐标系有相同的坐标,则很容易导出此新变换式.

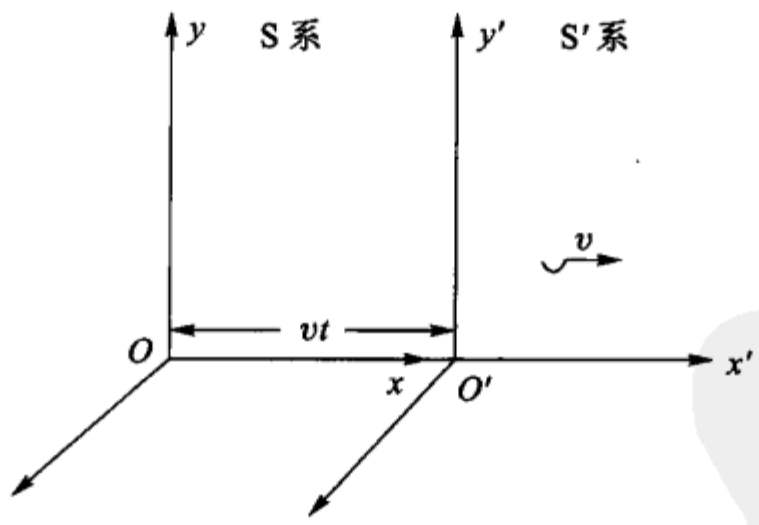


图14-11

我们取两个处于相对运动的坐标系,令它们的Ox和$O'x'$轴都在有相对运动的方向上(图14-11),并且在$t=0$时,$t'=0$,此时两原点亦重合.我们设想在$t=0$的瞬间自O点发出一个光信号,于是在t时间后,这个信号将到达$x^2+y^2+z^2=c^2t^2$的球上,而从S′系来看,在与t对应的t'时间,同一光信号将到达

$$x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$$

的球上,于是,必定有

$$(x^2+y^2+z^2-c^2t^2)\equiv\gamma(x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2), \tag{14-19}$$

其中 γ 为一常数. 应该注意,在写出这两个球的方程式时,是假定了光在两坐标系中的速度都等于 c,即利用了爱因斯坦所提的第二个假设. 再由第一假设,物理定律在一切坐标系中都是相同的,得上式中的常数 $\gamma=1$. 此外,在给定的条件下,还有 $y=y'$,$z=z'$,这样上式就变成

$$x^2-c^2t^2\equiv x'^2-c^2t'^2. \tag{14-20}$$

在上述情况中,从 S 系来看,O'点相对于 O 点的运动速度为 v,而在 S′系来看,O 点相对于 O'点的运动速度为 $-v$,对于与运动坐标系(S′系)原点 O'重合的一个点,其在 S′系中的坐标,显然是

$$x'=0. \tag{14-21}$$

而同一点在 S 系中于瞬时 t,其坐标 $x=vt$,可写成

$$x-vt=0, \tag{14-22}$$

同样,对于与 S 系原点 O 重合的一个点,

$$x=0 \tag{14-23}$$

和

$$x'+vt'=0. \tag{14-24}$$

比较式(14-21)和(14-22),(14-23)和(14-24),很自然地假定,x'与 $x-vt$,x 与 $x'+vt'$的不同仅在于比例常数. 因而有

$$x'=k(x-vt) \tag{14-25}$$

和

$$x=k'(x'+vt'), \tag{14-26}$$

其中 k 和 k'为两个取决于相对速度 v 的常数. 将式(12-25)的 x'值代入式(14-26)中,可得

$$t'=k\left[t-\frac{x}{v}\left(1-\frac{1}{kk'}\right)\right]. \tag{14-27}$$

式(14-25)和(14-27)给出了以 x 和 t 表示的 x'和 t'. 现在把此两式的 x'和 t'代入式(14-20)的右端,由于恒等式两端的 x^2,t^2 和 xt 的系数相等,所以可得对 k 和 k'的联立方程式. 结果发现该联立方程式的解是

$$k=k'=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{14-28}$$

将此 k 和 k'值代入式(14-25),(14-26)和(14-27)后,所求的变换式——相对论变换式:

$$\left.\begin{aligned} x'&=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\beta^2}},\\ t'&=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{14-29}$$

并且还有

$$y = y', \quad z = z'.$$

这组公式是基于爱因斯坦的两个假设而导出的，是将一个坐标系的坐标和时间转换到另一坐标系的坐标和时间的变换式. 它适用于相对速度无论为多大的所有情况，而前述牛顿力学中的变换式(14-16)，只不过是在 β 近于零时式(14-29)的极限.

* §14-7 由狭义相对论得出的一些推论

让我们现在来讨论由公式(14-29)所得的四个推论.

1. 同时的相对性

从式(14-29)可以得出这样的结论：在 S 系中的不同地方同时发生的两件事情，而在与之相对运动的 S′系中并不是同时发生的.

因为，若 $t_1 = t_2$，则按式(14-29)有

$$t_1' = \frac{1}{\alpha}\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1\right) \quad 和 \quad t_2' = \frac{1}{\alpha}\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2\right), \tag{14-30}$$

其中 α 为 $(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}$ 的缩写. 显然，当 $x_1 \neq x_2$ 时，$t_1' \neq t_2'$.

2. 时间的相对性

利用式(14-29)还可以得出这样的结论：在 S 系的某一点(x_1)先后发生的两件事情的时间间隔 $t_2 - t_1$，不等于在 S′系(与 S 系有相对运动的)中发生该两件事情的时间间隔 $t_2' - t_1'$. 因为

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{1}{\alpha}\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2\right) - \frac{1}{\alpha}\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1\right) = \frac{t_2 - t_1}{\alpha}. \tag{14-31}$$

而 $t_2 - t_1 = \Delta t$，即 $\Delta t' \neq \Delta t$.

由于 α 永远小于 1，所以 $\Delta t'$ 永远大于 Δt. 这就是说，发生在某一点(x_1)的两件事，在与该点相对静止的坐标系内的时间间隔，永远小于对于该点有相对运动的坐标系内的时间间隔.

3. 长度的相对性

由式(14-29)也可得出这样的结论：同一物体，在相对于它静止的坐标系中，和对它运动的坐标系中，具有不同的长度.

设有一棒，静置于 S 系中，一相对于 S 系亦静止的观察者可将一根米尺紧靠住棒，读出棒的两端在米尺上的读数 x_1 和 x_2，而得棒长 $l = x_2 - x_1$. 在 S′系中的一观察者也能用一根米尺(在 S′系的)来测同一棒的长度，但是他必须在 S′系的某一瞬时 t' 同时地读出棒两端在米尺上的读数 x_2' 和 x_1'. 于是在 S′系中该棒的长度 l' 为

$$x_2' - x_1' = [x_2(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} - vt'] - [x_1(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} - vt']$$
$$= (x_2 - x_1)(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}},$$

或写成

$$l' = l(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} = \alpha l. \tag{14-32}$$

此式表示,对于给定的棒,在相对于它静止的坐标系中,它的长度最大,而在相对于它运动的坐标系中,长度变短. 这个结论与洛伦兹打算不放弃以太学说来解释迈克耳孙-莫雷实验而提出的长度在运动方向上变短的假说一致. 但是,两者的前提明显地不同,而这种不同具有本质上的区别.

4. 速度的合成原理

假定有一质点在 x 轴和 x' 轴的共同方向上运动,在 S 系中一观察者测得质点的速度为 u,而在 S′系(相对于 S 系的运动速度为 v)中一观察者测得质点的速度为 u'. 于是,有

$$u = \frac{dx}{dt} \quad 和 \quad u' = \frac{dx'}{dt'}.$$

由式(14-29)的 x 值和 t 值得

$$u = \frac{d\left[\frac{x' + vt'}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}\right]}{d\left[\frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}\right]} = \frac{d(x' + vt')}{d\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)}$$
$$= \frac{\frac{d}{dt'}(x' + vt')}{\frac{d}{dt'}\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}.$$

因此,有

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'}, \tag{14-33}$$

这个公式表示了相对论的速度合成原理,但它只适用于两个速度在同一方向的情况,与经典力学中的式(14-17)的第二式相当. 对于在 S′系的光,$u' = c$,由上式可求出在 S 系中该光的速度为

$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c^2}v} = c, \tag{14-34}$$

即在相互作等速运动的一切坐标系中,光速为一常数 c,这正是前述两基本假设之一. 如果用牛顿力学的速度合成原理[式(14-17)的第二式],显然得到 $u =$

$c-v$,这正是在所有测以太实验中用的速度合成加法.

由式(14-34)还可非常明显地看到,光速的极限为 c,因为令 u' 和 v 都等于 c 时,u 仍等于 c.

本节所得的四个结论与人们一般关于时间、空间和速度合成的概念不同. 这主要是因为日常人们对所研究的现象或所测的物体来说,或者是处在相对静止状态,或者是处在相对速度较光速小得多的情况,时间和长度的相对性无显著的效应,以至于用精密的仪器都无法察知. 这样,人们在一般情况下就作出了时间和长度与观察者的运动无关的结论. 也正是在这样的基础上导出了牛顿运动学中的速度合成原理. 诚然,在一般情况下,牛顿运动学与实际相符甚好. 但在原则上,牛顿力学只承认运动的相对性而认为时间是绝对的. 时间的绝对性和运动的相对性是牛顿力学的基本特点. 而爱因斯坦的狭义相对论,不但承认运动的相对性,也同时承认空间和时间的相对性,即长度和时间均与观察者的相对速度有关.

爱因斯坦在 1916 年又将相对论推广到相互作加速度运动的坐标系,即将相对论用于所有坐标系而得广义相对论.

* §14-8 运动坐标系统中的光学与狭义相对论

既然不能在不放弃以太学说的情况下统一地解释菲佐实验和迈克耳孙-莫雷实验,在有了相对论后自然就会发生这样的问题:如何用相对论统一地解释所有运动物体的光学现象呢?

因为相对论的两个基本假定与迈克耳孙-莫雷实验结果一致,所以对于迈克耳孙-莫雷实验不需要再讨论,只需讨论菲佐实验及其他一些光学现象.

1. 相对论对菲佐实验的解释

用相对论的速度合成原理,式(14-34)可以毫不费力地解释菲佐的实验结果.

设仪器在 S 系中,流水在以速度 v 相对于仪器运动的 S′系中. 光在 S′系的速度 $u'=c_1=c/n$,其中 n 为水的折射率. 按相对论的速度合成原理,在 S 系即在仪器中,顺水而行的光线(2)(见图 14-9)的速度为

$$u=\frac{u'+v}{1+\frac{v}{c^2}u'}=\frac{\frac{c}{n}+v}{1+\frac{v}{c^2}\cdot\frac{c}{n}}\approx\left(\frac{c}{n}+v\right)\left(1-\frac{v}{cn}\right).$$

在菲佐这类实验中,$\frac{v}{c}$很小,可以略去,于是上式变成

$$u = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \tag{14-35}$$

同样,对逆水而行的光线(1),其在仪器中的速度为

$$u = \frac{c}{n} - v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \tag{14-35a}$$

将此二式与借助"部分拖动以太"的菲涅耳理论而建立起来的式(14-11)的分母相比,得拖动系数为

$$\alpha = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

因为引入拖动系数 α 后,实验结果与计算结果相符,所以这就是完满地解释了菲佐实验,但是在相对论看来,这只不过是速度合成的必然结果,并不是什么以太被部分地拖动. 两种理论中拖动系数虽然同是 $1-1/n^2$,但菲涅耳的假设和相对论的速度合成原理间却有原则上的不同.

2. 用相对论解释光源和观察者处于相对运动状态下的光学现象

本章 §14-2 所述的光行差现象以及在下面要讲到的多普勒效应都是当光源和观察者处于相对运动的情况下发生的现象. 光行差亦曾被用来证明以太被运动物体部分地拖动,而多普勒效应曾有人企图用来测地球相对于以太的运动. 所以用相对论来统一地解释这些现象就成为必要的了. 这一解释的成功,反过来也就是证明了相对论原理的普遍正确性,尤其是多普勒效应在对相对论的证明上具有特殊重要的地位. 此外,也由于这些现象在天文学和物理学中均有十分重要的应用. 所以也希望用相对论原理给以解释.

归结起来,光行差现象和多普勒效应实际上是一个问题的不同方面,前者实质上是在 S 系中,用望远镜观看 S′系的光源的表观位置随两坐标系之相对运动而生变化的现象;后者是在 S 系中,用如摄谱仪等测波长和频率的仪器研究 S′系的光源发出光的频率或波长受两坐标系相对运动而产生改变的现象.

在用相对论对这些现象进行分析之前,让我们先把多普勒现象的经典理论扼要地回顾一下. 当光源在传播光波的介质中运动时,测量者所接收到的频率 ν 将不同于光源所发出的 ν',在光源与仪器相近而行的情况下,频率 ν 与 ν' 间有这样的关系:

$$\nu = \nu' \frac{V \pm v_1}{V \pm v_2} \tag{14-36}$$

其中 V 为光在介质中的速度,v_1 和 v_2 分别是接收光的仪器的速度和光源的速度在两者连线上的分量,若 v_1 和 v_2 的方向与光的进行方向相反,则 v_1 和 v_2 为正. 式(14-36)表明,测得的频率并不随相对速度 $v_1 - v_2$ 而改变,而随光源和仪器自身相对于介质的速度 v_1 及 v_2 的大小而变. 从这个观点来看,对频率的改变的

测量就可作为确定介质中光源或仪器的速度的实验.

当考虑光是在以太中传播时,可以认为多普勒效应中的频率改变表现出相对于以太的运动;如果认为以太静止不动,也就能表现出绝对的运动.

还需注意,在经典理论中,只存在上述的多普勒效应,即只存在光源和仪器的运动速度在两者的连线上有分量的所谓纵向效应. 按公式(14-36)可以得出这样的结论:光源和仪器即使在垂直于两者的连线(即光的传播方向)方向上有相对运动,亦无频率的改变. 这是经典理论的结论.

下面让我们从相对论的变换式再来研究在光源和仪器作相对运动的情况下,光的频率和光源的表观方向问题.

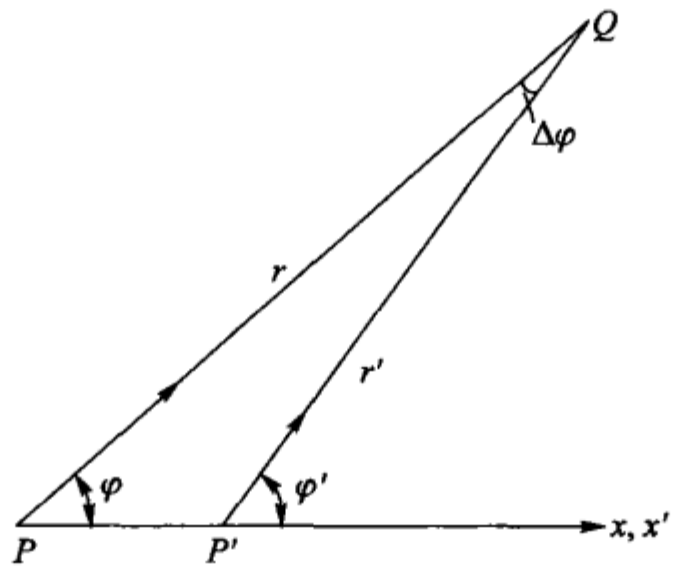


图 14-12

假定仪器(如望远镜、摄谱仪等)静止在 S 系的 Q 点(图 14-12),光源(如星)静止在 S′系中. 两坐标系在沿 x 轴和 x'轴的共同方向上有一相对运动. 在 S′系的 P'点发的光可由下式表示:

$$s' = a'\cos 2\pi\nu'\left(t' - \frac{r'}{c}\right), \tag{14-37}$$

其中 a'为振幅,ν'为 S′系中光源所发出光的频率.

令光自 P'点到仪器所在的 Q 点与 x'轴成 φ'角,于是,上式中的距离 r'可写成

$$r' = x'\cos\varphi' + y'\sin\varphi'.$$

代入式(14-37),则该式变成

$$s' = a'\cos 2\pi\nu'\left(t' - \frac{x'\cos\varphi' + y'\sin\varphi'}{c}\right). \tag{14-38}$$

在 S 系中,同一光由下式表示:

$$s = a\cos 2\pi\nu\left(t - \frac{r}{c}\right) = a\cos 2\pi\nu\left(t - \frac{x\cos\varphi + y\sin\varphi}{c}\right). \tag{14-39}$$

但是,利用式(14-29)将式(14-38)转换成为用 t 和 x 表示的式子,与式(14-

39)完全相等,即

$$2\pi\nu'\left\{\frac{1}{\alpha}\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)-\frac{1}{c}\left[(x-vt)\frac{1}{\alpha}\cos\varphi'+y\sin\varphi'\right]\right\}$$

$$\equiv 2\pi\nu\left[t-\frac{1}{c}(x\cos\varphi+y\sin\varphi)\right], \tag{14-40}$$

其中 $\alpha\approx(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}$. 将此式的左端依 x 和 t 整理,并令两端 x 和 t 的系数相等,则得

$$\nu=\frac{1}{\alpha}\left(\nu'+\frac{\nu'}{c}v\cos\varphi'\right)$$

或

$$\nu=\frac{\nu'}{\alpha}(1+\beta\cos\varphi') \tag{14-41}$$

和

$$\cos\varphi=\frac{\nu'}{\alpha\nu}(\cos\varphi'+\beta)$$

或

$$\cos\varphi=\frac{\cos\varphi'+\beta}{1+\beta\cos\varphi'}. \tag{14-42}$$

式(14-41)是在 S 系的仪器上测得的、自 S′系的 P'点发出的光的频率的公式,而(14-42)式则为确定 P'在 S 系的方向的公式.

当光源和仪器在两者的连线方向上相趋近地运动时,$\varphi'=0$,则由式(14-42)和式(14-41)得

$$\varphi=0$$

和

$$\nu=\frac{\nu'}{\alpha}(1+\beta). \tag{14-43}$$

在近似的情况下,多普勒效应的经典公式(12-36)可改写成

$$\nu=\nu'\frac{1+\frac{v_1}{V}}{1+\frac{v_2}{V}}\approx\nu'\left(1+\frac{v_1-v_2}{V}\right)=\nu'\left(1+\frac{v}{V}\right), \tag{14-44}$$

比较上面的这两式可以看到:两者间只差一个因数 α,而在略去 β^2 项的情况下式(14-43)可写作

$$\nu=\nu'(1+\beta),$$

这就和式(14-44)相同了. 虽然如此,但是必须看到,(14-43)和(14-44)两式之间有原则性的差别:在式(14-43)中只有光源和仪器的相对速度,而在导出的式(14-44)和式(14-36)中,却分别含有仪器的速度 v_1 和光源的速度 v_2.

若在垂直于相对速度的方向上$\left(\varphi=\frac{\pi}{2}\right)$测量由光源 P'点发出的光,则由式(14-42)和式(14-41)得

$$\cos\varphi' = -\beta = -\frac{v}{c} \tag{14-45a}$$

和

$$\nu = \frac{\nu'}{\alpha}(1-\beta^2) = \nu'\alpha$$

或

$$\nu = \nu'\left(1-\frac{1}{2}\beta^2\right), \tag{14-45b}$$

后一式表示,依照相对论,即使当光的传播方向垂直于相对运动时,也该有多普勒效应,通常称这个效应为横向多普勒效应,而以前的称为纵向多普勒效应. 这是相对论预见到的新现象,是经典理论所完全不能解释的. 横向多普勒效应的实验困难主要是因为它比纵向多普勒效应小得多,以至于即使运动方向和光的传播方向稍有不垂直,也将得不到所期望的结果,直到 1938 年才由艾弗斯(Ives)克服这个困难而实验成功. 在艾弗斯实验中,是用氢极隧射线束作为光源,这种射线的速度很高,v 约为 10^8 cm/s;此外,为了获得单一的射线速度,还用了一个特殊构造的筒. 艾弗斯用摄谱仪观测由射线直接射来的光和从摄谱仪前放置的反射镜反射来的光. 利用所得的谱线形状对原线的不对称,算出横向效应的频率变化量.

回顾式(14-45a),它表示在望远镜所在的 S 系中垂直于相对运动的方向,和 S′系中与运动方向成夹角 $\varphi' = \arccos(-v/c)$ 的方向相应,如图 14-13所示. 换言之,为了在 S 系中用望远镜看到在 S′系中在 φ'方向的星 P',望远镜须正对着垂直于相对速度的方向. 这两个方向之差 $\Delta\varphi$ 为

$$\sin\Delta\varphi = \sin\left(\varphi' - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\varphi' = +\frac{v}{c}.$$

由于 $\Delta\varphi$ 实际上很小,所以上式可写成

$$\Delta\varphi = \frac{v}{c}. \tag{14-46}$$

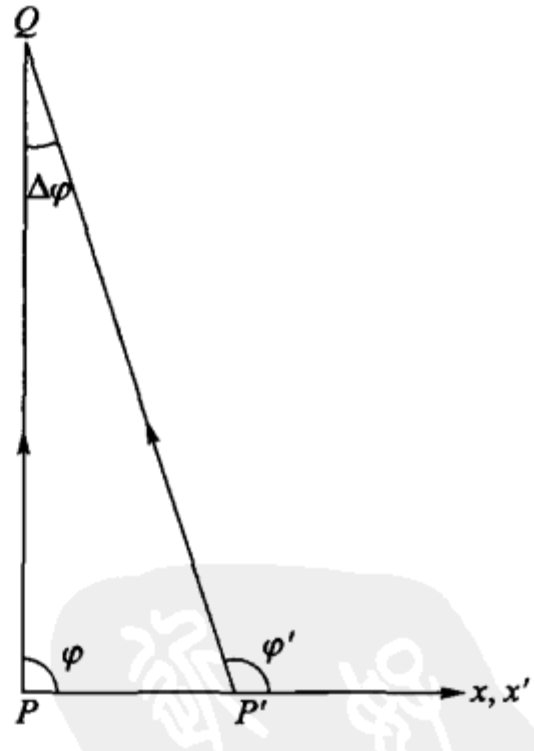


图 14-13

将此小角度 $\Delta\varphi$ 与利用光行差现象计算光速的式(14-3)的分母 $\Delta\theta$ 相比,可以看出,$\Delta\varphi$ 正是一年内恒星在天穹中的表观位置所作的椭圆轨迹的半长轴对地球的夹角. 这样,光行差现象也就得到了相对论统一的解释.

本节讨论所得的结果表明,所有运动物体的光学现象都使我们不得不承认相对论卓著成效. 但是本章所讨论的相对论还不是狭义相对论的全部,为较完全地了解相对论原理还需讨论相对论力学,在那里质量是依速度而变的,能量与质量间有一个相互关系等,在此从略.

习 题

1. 假定光的速度为 3×10^8 cm/s,现在有无方法来测量它通过 30 cm 这样一段距离的时间?

2. 若光的速度为 299 793 km/s,假定地球跟太阳的平均距离为 1.497×10^8 km,试求光行差等于多少角秒.

3. 与 2 题相反,若已知光行差的数值,试求地球在它轨道上的公转速度.

4. 试计算下列各情况下的群速:

(1) 相速 $v=k$(常数)(无色散介质,如空气中的声波);

(2) 相速 $v=k\lambda$;

(3) 相速 $v=k\sqrt{\lambda}$(重力在水面上所引起的波);

(4) 相速 $v=\dfrac{k}{\sqrt{\lambda}}$(在水面上的表面张力波);

(5) 相速 $v=\dfrac{k}{\lambda}$(弹性薄片在弯曲时所产生的波).

5. 测量二硫化碳得:

(1) 在 $\lambda=589$ nm 时,$n=1.629$;

(2) 在 $\lambda=527$ nm 时,$n=1.642$;

(3) 在 $\lambda=656$ nm 时,$n=1.620$.

求相速和群速的关系.

6. 汽车开到怎样的速度时将分不清红信号灯和绿信号灯?

7. 用连续光谱可否观察到多普勒效应?如何用多普勒效应证明太阳是自转的?

8. 为观察氢极隧射线的横向多普勒效应,假定粒子的速度 $v=5\times10^7$ cm/s,问用怎样的光栅才能分辨?

第十五章

光的吸收、色散和散射

光通过介质时，一部分光被介质吸收，另一部分光被散射，余下来的部分按原来传播的方向继续前进. 所以自介质出射的光较入射光减弱了，这是一方面，另一方面，不同波长的光在介质中有不同的传播速度，即介质对不同波长的光有不同的折射率. 所以一束“白光”或多色光在折射时只要入射角不为零，不同波长的光就会按不同折射角而散开，这种现象叫色散. 由此可见，光的吸收、散射和色散是光在介质中传播时所发生的普遍现象，并且它们是互相联系的. 通过对这些现象的讨论，一方面可以了解光和物质的相互作用，另一方面还可以利用这些关系来解决一些实际问题. 下面就分别地来讨论它们.

§15－1　光的吸收

除了真空，没有一种介质对任何波长的电磁波是完全透明的. 所有的物质都是对某些范围内的光透明，而对另一些范围内的光不透明. 例如石英，它对可见光几乎是完全透明的，而对波长自 3.5～5.0μm 的红外线却是不透明的，即石英对可见光的吸收很少，而对所述的红外线有强烈的吸收. 进而言之，吸收是物质的普遍性质，如石英对可见光的那种吸收称一般吸收，它的特点是吸收很少并且在给定波段内几乎是不变的；另一方面，如石英对 3.5～5.0 μm 的红外线那样的强烈吸收称选择吸收，它的特点是吸收很大并且随波长有急剧的改变. 任一介质对光的吸收都是由这样两种吸收（一般吸收和选择吸收）组成的.

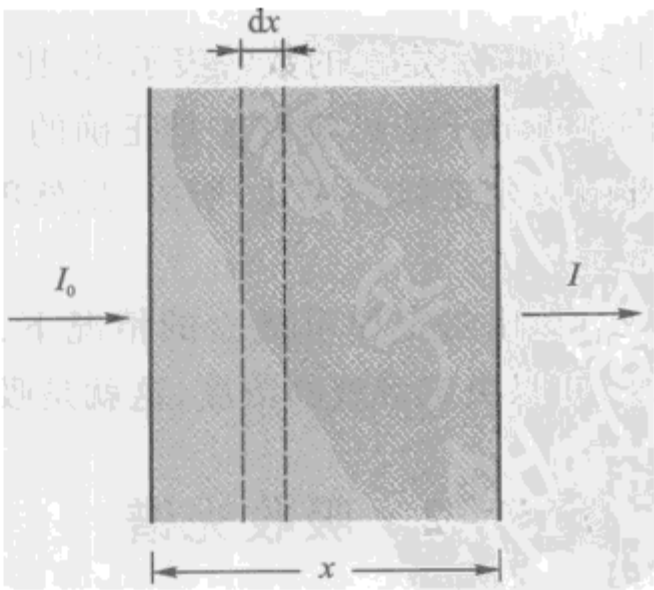


图 15－1

令平行光通过均匀的介质传播，经过薄层 dx 后，光强度从 I 减少到 $I-\mathrm{d}I$（图 15－1）. 朗伯（Lambert）指出：$\mathrm{d}I/I$ 应与吸收层的厚度 dx 成正比，即

$$\frac{dI}{I} = -k dx, \tag{15-1}$$

其中 k 称吸收系数. 对于厚度为 x 的介质层,由此式得

$$\lg I = -kx + C,$$

其中 C 为一积分常数. 如当 $x=0$ 时,$I=I_0$,则 $C=\lg I_0$,所以

$$I = I_0 e^{-kx}, \tag{15-2}$$

此即朗伯定律的数学表示式.

吸收系数 k 是波长的函数. 在一般吸收的波段内,k 值很小,并且近似于一常数;在选择吸收的波段内,k 值很大,并且随波长不同而有显著的变化.

吸收系数 k 愈大,光被吸收得愈强烈. 当 $x=1/k$ 时,由式(15-2)得

$$I = \frac{I_0}{e} \approx \frac{I_0}{2.72};$$

也就是,厚度等于 $1/k$ 的介质层,可使光强度减少到原光强的 1/2.72.

以后会看到有时引入消光系数 η 来说明介质的吸收将更方便,吸收系数 k 与消光系数 η 之间有如下的关系:

$$k = \frac{4\pi}{\lambda_0} n\eta, \tag{15-3}$$

其中 λ_0 为光在真空中的波长,n 为介质的折射率. 如此,朗伯定律可写作如下形式:

$$I = I_0 e^{-\frac{4\pi}{\lambda_0} n\eta x}. \tag{15-4}$$

有时我们也称 $n\eta$ 为吸收率.

实验指明:在溶液中,溶液的吸收系数与浓度有关. 比尔定律指出:溶液的吸收系数 k 与其浓度 C 成正比. $k=\alpha C$,此处 α 为一与浓度无关的新常数. 它只决定于吸收物质的分子特性. 如此则式(15-2)变为

$$I = I_0 e^{-\alpha C x}. \tag{15-5}$$

上式即比尔定律的数学表示式. 比尔定律只有在物质分子的吸收本领不受它周围邻近分子的影响时才是正确的. 当浓度很大时,分子间的相互影响不可忽略,此时比尔定律不成立. 所以,虽然朗伯定律始终是成立的,但比尔定律有时并不成立.

在比尔定律可成立的情况下,根据式(15-5),由光在溶液中被吸收的程度,可以决定溶液的浓度,这就是吸收光谱分析的原理.

* §15-2　吸收光谱

发射连续光谱的光(参看第十六章),通过有选择吸收的介质,再通过分光

仪,表现出某些波段的光或某些波长的光被吸收,形成吸收光谱.固体和液体一般在比较宽的波段内有选择吸收,而稀薄的原子气体吸收波段很窄.图 15-2 为钠蒸气的吸收光谱.不是所有的发射光谱线系都有相应的吸收光谱.例如钠发射光谱中,只有主线系表现在吸收光谱中.

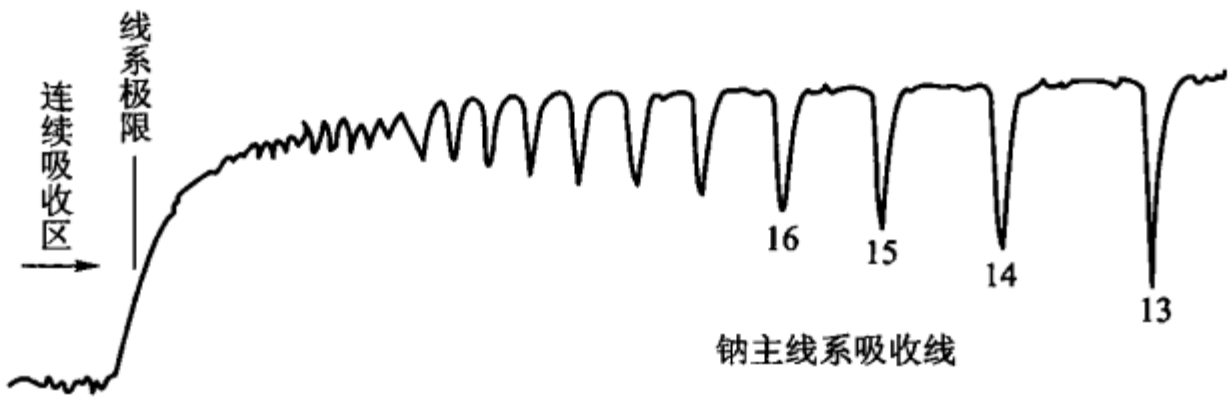


图 15-2

太阳内部发射连续光谱.由于太阳四周大气,吸收内部的辐射,因而在连续光谱的背景上呈现一条条黑的吸收线,如图 15-3 所示.夫琅禾费首先发现,分别以字母标志这些主要的吸收线.

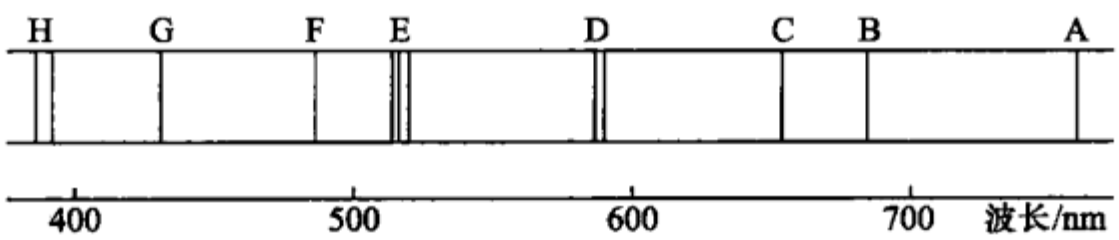


图 15-3

它们的波长及相应的吸收元素,列于表 15-1 中.从而我们可以知道太阳大气中有哪些元素.在标明光学玻璃或其他介质的折射率所指波长时,一般用这些字母来表示,如 n_C,n_D,n_F 等.

表 15-1

符号	波长/nm	吸收元素	符号	波长/nm	吸收元素
A	759.4 ~ 762.1	O	b_1	518.362	Mg
B	686.7 ~ 688.4	O	F	486.133	H
C	656.282	H	G	430.791	Fe
D_1	589.592	Na		430.774	Ca
D_2	588.995	Na		422.673	Ca
D_3	587.562	He	H	396.849	Ca
E	526.954	Fe	K	393.368	Ca

原子吸收光谱的灵敏度很高,极少量混合物或化合物中原子含量的变化,会在光谱中反映出很大的吸收系数的改变.所以在近几十年来,在定量分析中,发展原子吸收光谱应用.

地球大气对可见光、紫外线是透明的，但对红外线的某些波段有吸收，而另一些波段比较透明. 透明的波段，称“大气窗口”. 波长从 1 ~ 15 μm 有七个“窗口”(图 15 - 4). 充分研究大气的条件与窗口的关系，有助于红外导航、跟踪等工作. 大气中主要吸收气体为水蒸气、二氧化碳与臭氧，研究它们的含量变化，对气象预报很有参考价值.

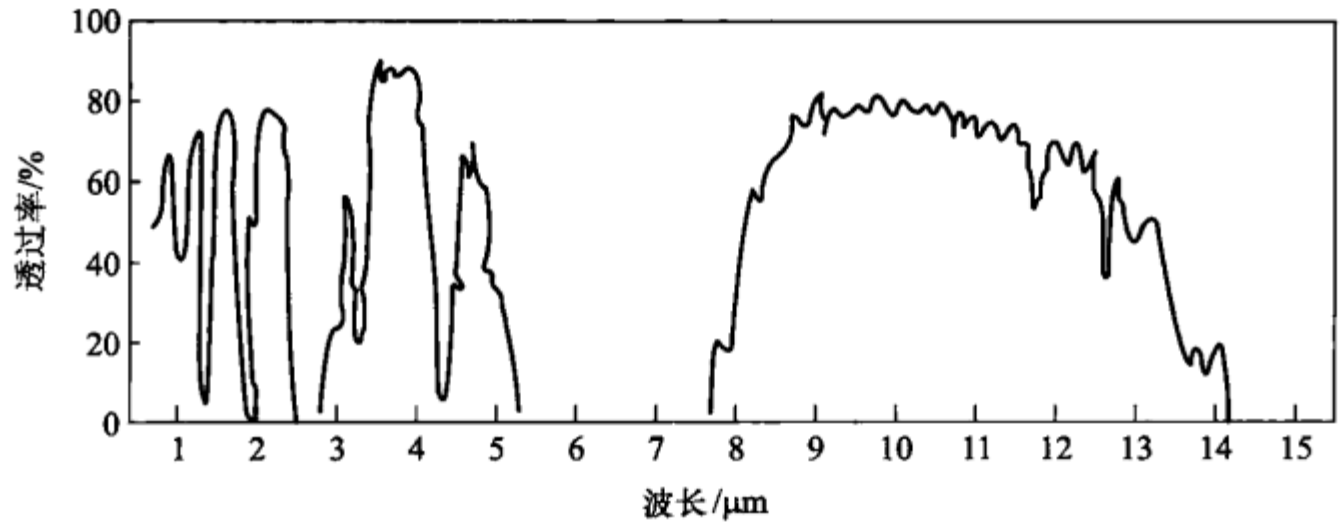


图 15 - 4

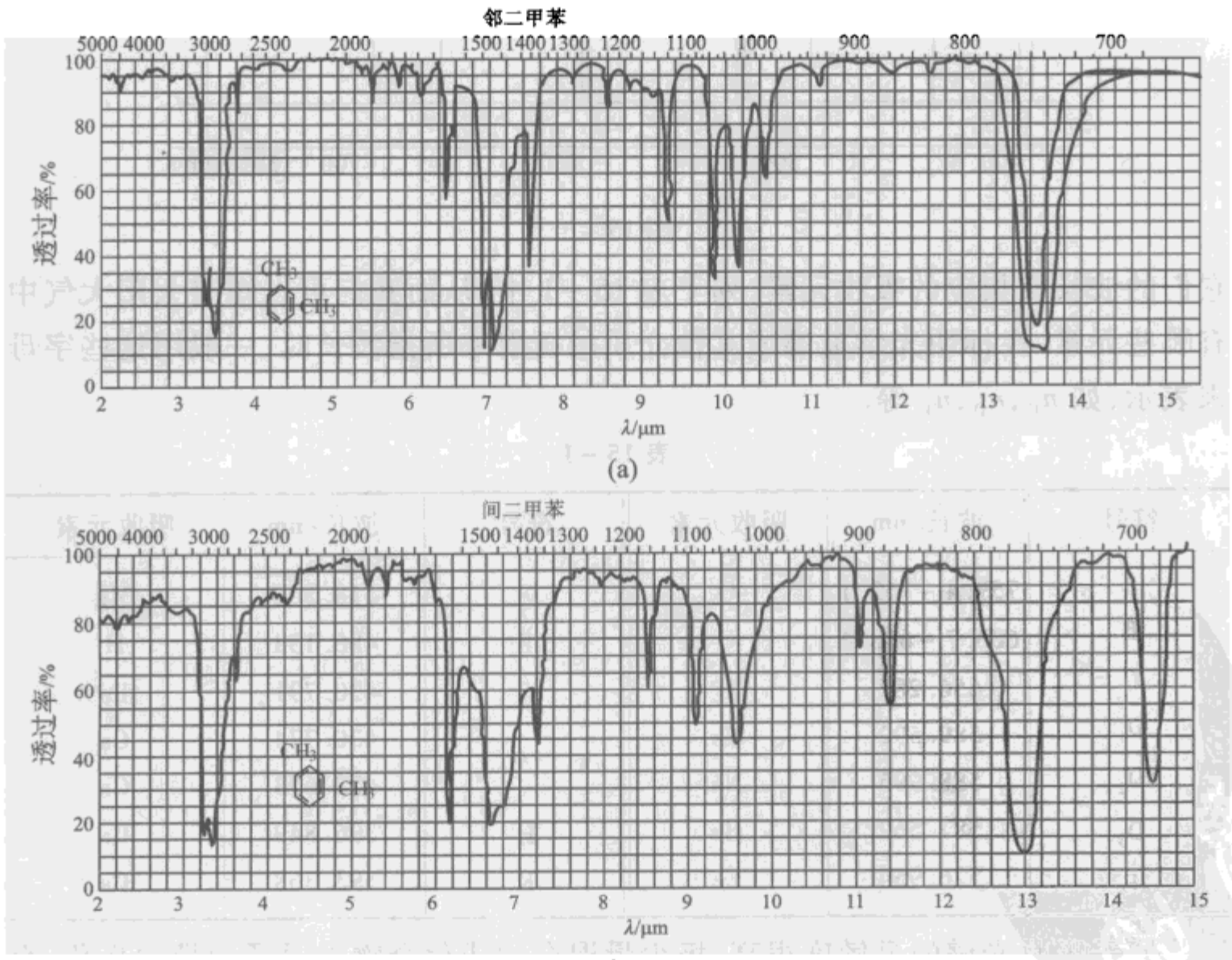


图 15 - 5

研究固体液体分子的红外吸收光谱,可理解分子振动频率,有助于分子结构、分子力等的研究,不同分子有显著不同的红外吸收光谱.即如分子量相同,其他物理化学性质亦大致相同的同质异构体,也有明显不同的红外吸收光谱.例如邻二甲苯与间二甲苯二个异构体,用其他方法来区别,费样品多,手续麻烦.但做它们的红外吸收光谱,所费样品很少(不到 1 g),手续简单,所得谱图[(图 15-5(a),(b)]很易区别.因而在有机化学研究及生产上,红外光谱得到广泛的应用.

§15-3 光的色散

1672 年牛顿就发现了光的色散现象.他令一束近乎平行的白光通过如图 3-12所示的玻璃棱镜.在棱镜后的屏上得到一条彩色光带.光的色散表明,不同颜色(波长)的光的折射率不同.即折射率 n 是波长 λ 的函数:

$$n=f(\lambda). \tag{15-6}$$

为表征介质折射率随波长变化的程度,我们引入色散率 ν,它在数值上等于介质对于波长差为 1 单位的两光的折射率之差,即

$$\nu=\frac{n_2-n_1}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{\Delta n}{\Delta\lambda}, \tag{15-7}$$

或

$$\nu=\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{\mathrm{d}f(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{15-8}$$

表示折射率 n 与波长 λ 关系的色散曲线,首先是从实验上获得的.用不同波长的单色光仔细测量棱镜在该波长下的最小偏向角,再用式(3-12)计算 n 即可求得.图 15-6 是几种介质的色散曲线.从图上可以看出,波长增加时折射率和色散率都减小.这样的色散称为正常色散.

所有不带颜色的透明介质,在可见光区域内,都表现正常色散,即紫光折射率比红光折射率大些,紫光的色散率比红光的也大些.所以用棱镜产生的光谱,紫色一端要比红色一端展开得大得多,与由光栅所得的正比光谱不同.

从图 15-6 的曲线可以看出,各种介质的色散曲线的形状都不一样.所以各种材料做成的棱镜,得到的光谱所对应的谱线间隔绝不会完全一致.

描述正常色散的公式是柯西(Cauchy)于 1836 年首先得到的:

$$n=A+\frac{B}{\lambda^2}+\frac{C}{\lambda^4}. \tag{15-9}$$

这是一个经验公式.式中 A、B 和 C 是由所研究的介质的特性决定的常数,这些数值可以由实验求出.只需测出三个已知波长的 n 值代入式(15-9),然后解这三个联立方程式即可求得.当波长间隔不太大时,取公式(15-9)的前两项就

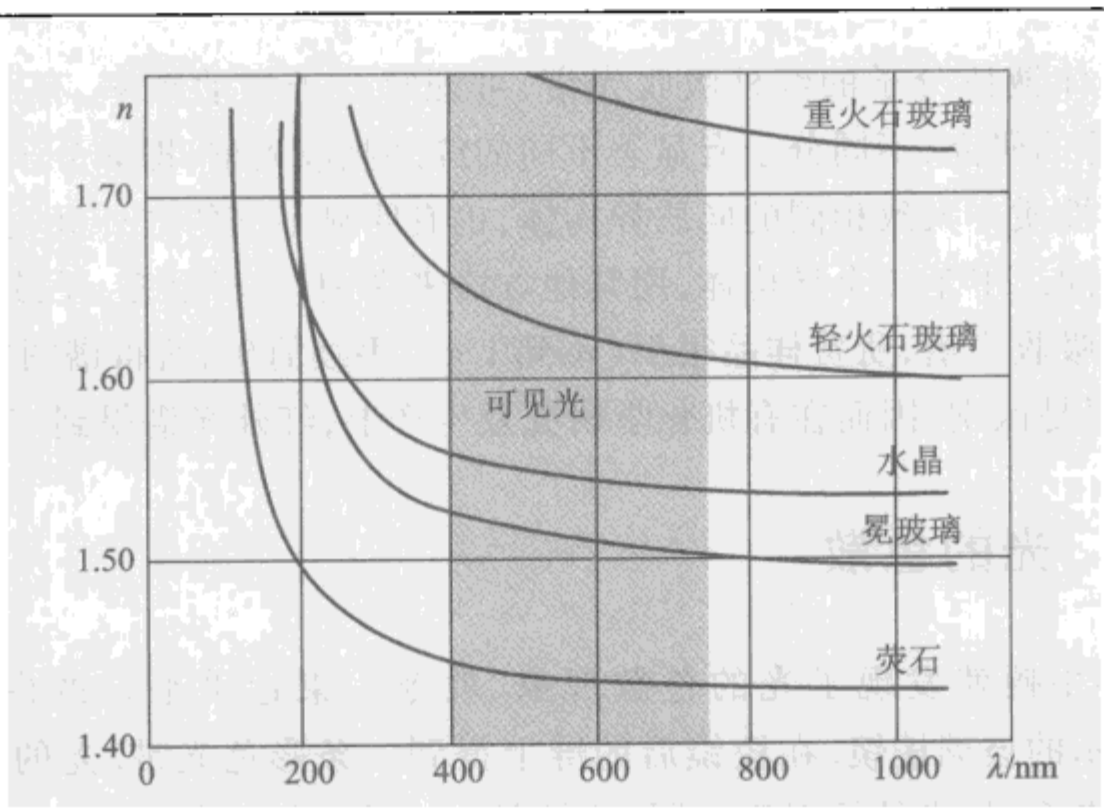


图 15－6

够了.

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}, \tag{15-10}$$

并且

$$\nu = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3}. \tag{15-11}$$

由于 A、B 都是正的，式(15－10)和(15－11)表明：当波长 λ 增加时，折射率 n 和色散率 ν 都减小.

牛顿用交叉棱镜法极其直观地观察到棱镜介质的色散过程. 实验装置如图 15－7 所示. 通过垂直狭缝 S 和透镜 L_1 出来的、近乎平行的白光，被两个折射棱互相垂直的交叉棱镜 P_1 和 P_2 色散后，由透镜 L_2 聚焦在屏 A 上. 当只有折射棱为垂直的棱镜 P_1 时，在屏 A 上只能得到水平方向的连续光谱，如图中虚线所示的带 ab. 当加上折射棱为水平的棱镜 P_2 后，由于 P_2 的色散作用，由 P_1 色散出来的每一条光线将向下偏转，偏转的大小与折射率的大小有关. 因此，整个的带 ab 向下移到带 a_1b_1 的位置，将棱镜中的色散过程明显地表示出来了. 但是必须指出，a_1b_1 的坐标与 n 和 λ 都不成正比. 所以它并不是表示 n 和 λ 间的定量关系的

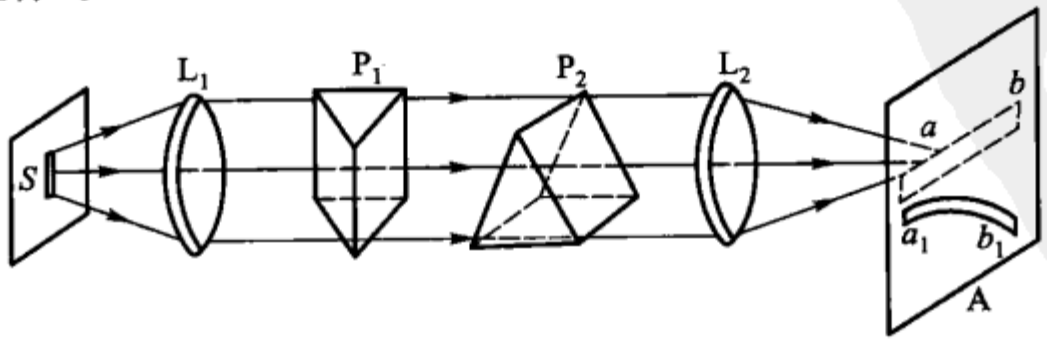


图 15－7

色散曲线.

§15-4 反常色散

1862年勒鲁(Le Roux)曾用充满碘蒸气的三棱镜,观察到紫光的折射比红光的折射小(紫光与红光之间的光线,因为被碘蒸气吸收没有观察到).由于这个现象与前述的正常色散现象相反,勒鲁称它为反常色散.这个名称一直沿用到今天.以后孔特(Kundt)系统地研究了反常色散现象后,发现反常色散与物质对光的选择吸收有密切联系.我们知道,所有的物质,在一定的波长区域内,都会有选择吸收.所以,所谓的"反常"色散正是物质的一种普遍性质,并无任何反常之处.反常色散这一名称在今天不过只是具有历史意义而已.从以下的讨论中我们将看到,任何物质的全部色散图都是由反常色散区域和正常色散区域所构成的,正像物质的全部吸收图是由一般吸收波段(带)和选择吸收波段(带)组成的一样,其中反常色散区域相当于选择吸收带内或选择吸收线附近的区域,而正常色散区域则是分布在各选择吸收带(线)之间的一般吸收区域.

对于在可见光区域内透明的介质,例如石英,它在可见光区域内的折射率可由(15-9)的柯西公式准确地表示出来.如果将折射率的测量扩展到红外区域,当接近介质所吸收的波长时,折射率减少得比柯西公式所表示的要快得多.图15-8的PQR曲线是实际测量所得的色散曲线.而按照柯西公式,在接近吸收带处色散曲线应如图中的虚线QS所示.在吸收带内光的吸收很强,带内的测量需用薄膜进行,但吸收中心的n仍是很难测量的.测量结果如图中的虚线RT所示.如果后面还有第二个吸收带,则两个吸收带之间的色散曲线如TUV所示.曲线TU和WX也都能准确地由柯西公式表示,不过所用的常数A、B、C与PQ曲线的不同.从图中可看出,吸收带之间的区域是正常色散.而吸收带附近是反常色散,因为带内的折射率n是随波长λ的增加而增加.

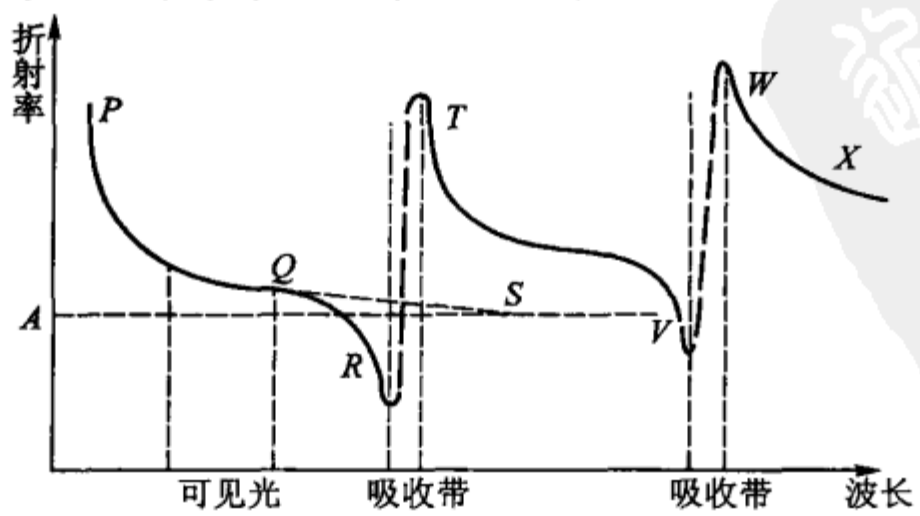


图15-8

图15-9为用交叉棱镜法观察钠蒸气反常色散的实验装置示意图.T为一

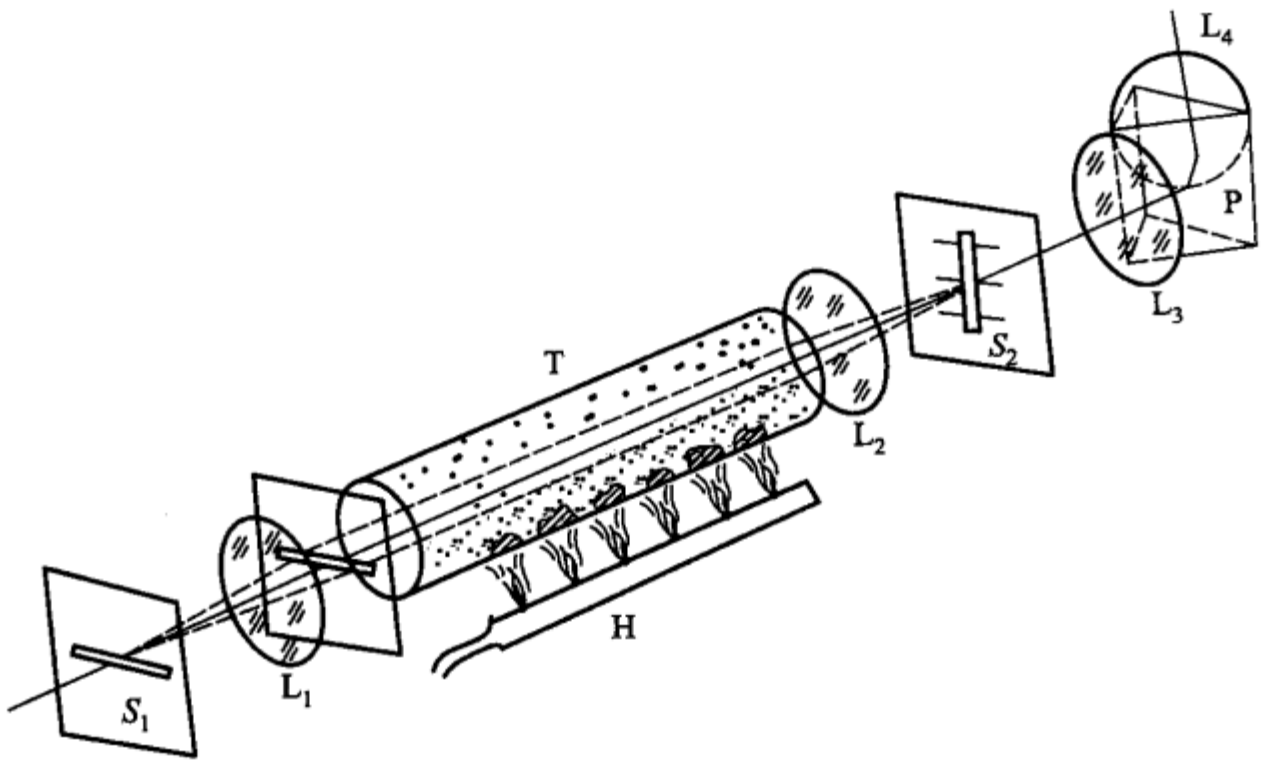


图 15 – 9

钢管，两边有带水冷装置的玻璃窗. 沿管底放置了一些金属钠. 管子被抽成部分真空. H 为在管底加热的煤气灯. 当钠被加热时，钠蒸气从管底向顶部扩散. 所以管内蒸气的密度是从管的顶部向底部逐渐增加的. 这相当于一蒸气棱镜，其厚度由上往下增加，其折射棱水平并与管轴垂直. 白光经水平狭缝 S_1 后，由透镜 L_1 而成近乎平行的光，再由 L_2 聚焦在垂直狭缝 S_2 上 S_2、L_3、P 及 L_4 构成一棱镜分光仪，棱镜 P 的折射棱是垂直的. 当管子未加热时，管内只有均匀的气体. S_1 的白光像经分光仪的狭缝 S_2 后，在分光仪的焦面上得到一条很窄的水平连续光谱带. 当钠被蒸发时，由于管内蒸气的棱镜色散作用，使 S_1 的像沿 S_2 的长度方向色散开来. 当波长远离钠的吸收线时，蒸气的折射率近于 1，分光仪焦面上的水平连续光谱不受影响. 当从短波方向接近吸收线时，蒸气的折射率小于 1，因此，光将被蒸气棱镜向上偏转. 由于透镜 L_2，L_3，L_4 逐次成像的结果，实际观察到的是连续光谱带向下偏转. 当由长波方向接近吸收线时，蒸气的折射率大于 1，光将被蒸气棱镜向下偏转. 同样由于透镜成像的结果，观察到的是连续光谱带向上偏转. 图 15 – 10 为钠蒸气的两条吸收线 D_1(589.0 nm)和 D_2(589.6 nm)的反常色散. 当钠蒸气的密度大到使两条吸收线 D_1 和 D_2 重叠为一带时，观察到的反常色散如图 15 – 10(a)所示. 当钠蒸气的密度很小时，可观察到与两条吸收线相对应的两个反常色散区域. 见图 15 – 10(b)和(c).

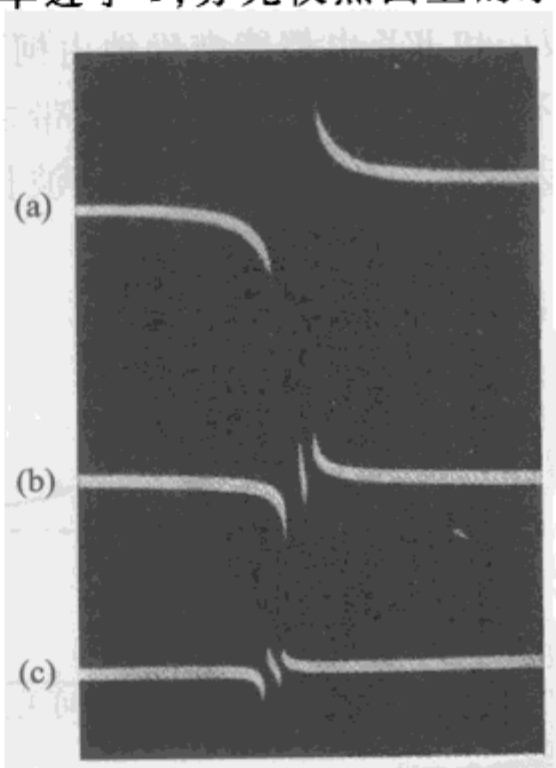


图 15 – 10

* §15-5 吸收和色散的经典理论

光的吸收、色散和散射的过程实际上就是光与介质中的原子或分子相互作用的过程. 要深入研究它就必须考虑原子或分子那样一个复杂的电学系统与电磁波的相互作用. 洛伦兹从原子和分子的观点提出的电子论,说明了电磁波的频率对 n 的影响. 以后我们会知道光与物质的相互作用是一个微观过程,它的运动规律与宏观现象的运动规律不同. 研究微观过程必须用量子理论. 用建立在经典理论基础上的电子论来解释吸收、色散和散射虽然仍旧是比较粗浅,但却能定性地说明问题.

洛伦兹的电子论假定:组成物质的原子或分子内的带电粒子(电子、离子)被准弹性力保持在它们的平衡位置附近,并且这些带电粒子还具有一定的固有振动频率. 在入射光的作用下,原子或分子发生极化,并依入射光的频率作强迫振动,形成振动的偶极子,从而发出次波. 在均匀介质中,这些次波叠加的结果,使光只在折射方向上继续传播下去,在其他方向上,因次波的干涉而互相抵消,所以没有光出现. 在非均匀介质中,由于不均匀质点破坏了次波的相干性,使在其他方向上出现了散射光. 现在先讨论在均匀介质中的情况,在非均匀介质中的情况留待下节讨论.

为了简单起见,我们假设所研究的色散介质中,只有一种原子,并且每个原子内只有一个电子能发生强迫振动,振动着的电子具有电偶极矩

$$p = er, \tag{15-12}$$

式中 e 为电子的电荷,r 为电子离开平衡位置的距离. 如果单位体积中有 N 个原子,则单位体积内的平均电偶极矩

$$P = Np = Ner. \tag{15-13}$$

根据牛顿第二定律,作强迫振动的电子的运动方程式可写作

$$m\ddot{r} = eE - fr - g\dot{r}, \tag{15-14}$$

式中 $-fr$ 为准弹性力,$-g\dot{r}$ 为阻尼力,eE 是强迫力,其中 $E = E_0\sin\omega t$,是光波的电场强度.

引入衰减系数 $\gamma = g/m$ 及电子的固有频率 $\omega_0 = \sqrt{f/m}$,使式(15-14)变成如下形式:

$$\ddot{r} = \frac{eE}{m} - \omega_0^2 r - \gamma\dot{r}. \tag{15-15}$$

下面我们分两种情况来讨论:

(1) 不考虑衰减,即假设 $\gamma = 0$,则式(15-15)简化为

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = \frac{e}{m}E_0\sin\omega t, \tag{15-16}$$

解上式得到

$$r=\frac{eE_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\sin\omega t, \tag{15-17}$$

代入式(15-13)得到

$$P=N\frac{e^2}{m}E_0\frac{\sin\omega t}{\omega_0^2-\omega^2}, \tag{15-18}$$

再由关系式 $D=\varepsilon E=E+4\pi P$ 及式(15-18)即可求得

$$\varepsilon=n^2=1+\frac{4\pi Ne^2}{m(\omega_0^2-\omega^2)}. \tag{15-19}$$

上式表明,在从 $\omega=0$ 到 $\omega=\omega_0$ 的区域内 $n>1$,并且 n 随着频率 ω 的增加而增加(正常色散),当 $\omega=\omega_0$ 时,$n=\pm\infty$;在 $\omega=\omega_0$ 到 $\omega=\infty$ 的区域内,$n<1$,并且 n 从 $-\infty$ 增加到 1(正常色散).

折射率 n 变成∞是没有物理意义的,这是由于忽略了衰减所导致的结果.

将 $\omega_0=2\pi c/\lambda_0$ 及 $\omega=2\pi c/\lambda$ 代入式(15-19),即可将式(15-19)变换成柯西公式的形式.

如果在物质中有好几种带电粒子,则式(15-19)应写作如下的形式:

$$n^2=1+\sum_j\frac{4\pi N_je_j^2}{m_j(\omega_{0j}^2-\omega^2)}, \tag{15-20}$$

式中各物理量的下角标 j,表示该物理量属于第 j 种粒子.

(2) 考虑衰减,即 $\gamma\neq0$ 时. 在实际情况中,由于辐射或是由于原子间的相互作用,都会使得电子逐渐失去能量,即电子的振动实际上是衰减振动. 故应解式(15-15),因而求得

$$\tilde{n}^2=1+\frac{4\pi Ne^2}{m(\omega_0^2-\omega^2+\mathrm{i}\gamma\omega)}. \tag{15-21}$$

因为上式右边是复数,可设想左边也是复数,现用 $\tilde{n}$ 表示之,并设它为

$$\tilde{n}=n(1-\mathrm{i}\eta), \tag{15-22}$$

为了易于看出色散与吸收的关系起见,我们将入射光波电场强度 E 用下面的指数函数形式表示:

$$E=E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$

则在介质中沿 x 方向传播的折射光可表示为

$$E=E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-\tilde{n}x/n)}.$$

将式(15-22)代入上式,然后取其实数部分,则得到

$$\begin{aligned}E&=E_0\mathrm{e}^{-\frac{\omega}{c}n\eta x}\cos\omega\left(t-\frac{nx}{c}\right)\\&=E_0\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\lambda_0}n\eta x}\cos2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{nx}{\lambda_0}\right).\end{aligned} \tag{15-23}$$

由上式可看到，$\tilde{n}$ 中的虚数项，描写着折射光随着它所透射的路程 x 而衰减的情形. 系数 η 即前述的消光系数，$n\eta$ 即吸收率，表示光在物质中的吸收. 关于这点，只要将式(15-23)与式(15-4)相比，并且注意到光强与振幅的平方成正比，就显而易见了.

由式(15-21)我们可以得到

$$n^2(1-\mathrm{i}\eta)^2$$

$$=1+\frac{4\pi Ne^2}{m}\left[\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}-\mathrm{i}\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}\right],$$

由此得出

$$\left.\begin{aligned} n^2(1-\eta^2)&=1+\frac{4\pi Ne^2}{m}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2},\\ 2n^2\eta&=\frac{4\pi Ne^2}{m}\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}. \end{aligned}\right\} \tag{15-24}$$

n 与 $n\eta$ 随频率 ω 变化的规律如图 15-11 所示. $n\eta$ 的变化规律与吸收带线的形状有关，MN 是反常色散区域.

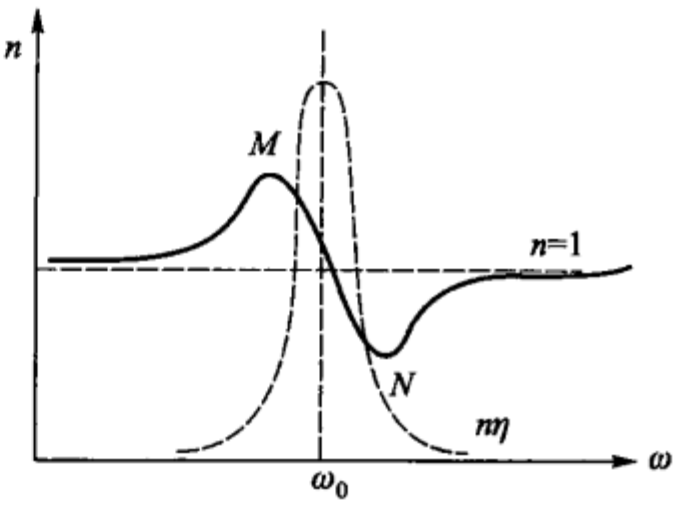


图 15-11

在远离吸收频率 ω_0 的区域中，吸收很小，$\eta\to 0$，并且与 $(\omega_0^2-\omega^2)^2$ 相比，分母中的 $\gamma^2\omega^2$ 这一项可以略去. 如此，(15-24)中的第一式就变成了简化后的结果式(15-20).

在色散与光的吸收之间建立起密切的联系，是色散的经典电子论最重要的结果.

在有好几种带电粒子的情形下，公式(15-24)应变成以下形式：

$$\left.\begin{aligned} n^2(1-\eta^2)&=1+\sum_j\frac{4\pi N_je_j^2}{m_j}\frac{\omega_{0j}^2-\omega^2}{(\omega_{0j}^2-\omega^2)^2+\gamma_j^2\omega^2},\\ 2n^2\eta&=\sum_j\frac{4\pi N_je_j^2}{m_j}\frac{\gamma_j\omega}{(\omega_{0j}^2-\omega^2)^2+\gamma_j^2\omega^2}. \end{aligned}\right\} \tag{15-25}$$

前章在光速中已指出，有色散时，群速度 u 与相速度 v 是不同的. 在正常色散区域内 $u<v$，在反常色散区域内 $u>v$. 此外，对于略小于被吸收波的波长而言，可能有 $n<1$，因而相速度 $v>c(n=c/v)$. 由此可得出结论，在反常色散区域内，群速度也可能具有大于 c 的值. 这一结论是否与相对论关于能量的传播速度不可能大于真空中的光速 c 的结论相矛盾呢？我们知道，任何测量光速的方法，实际上测得的不是相速度而是能量传播的速度. 严格的理论证明，只有在真空中，群速度与能量传播速度才可以视为一致. 而在反常色散区域内，能量的传播

速度与群速度有显著的不同，并且永远小于 c. 其实，在反常色散区域内，由于色散曲线变化很快，不同波长的单色光的相位差很大，群速度已不再有实际意义.

§15 -6　光的散射

到现在为止，我们已研究了光在各向同性介质与各向异性介质中的折射现象、反射现象、吸收现象与色散现象. 这些现象给我们提供了许多关于物质的结构和性质方面的知识. 散射光的一切性质——它的强度、偏振与光谱成分，也都反映了散射介质的性质. 研究光的散射现象可以使我们得到关于物质结构的丰富的知识.

§15 -5 中已指出，在均匀介质中，光只能沿着折射光线的方向传播，在这种情形下，光朝各方向散射是不可能的. 这是因为当光通过光学均匀的介质（即折射率到处都一样的）时，介质中偶极子发出的次波具有与入射光相同的频率，并且由于偶极子之间有一定的相位关系，因而它们是相干光. 其结果正如计算所表明的，在跟折射光线不同的一切方向上，它们互相抵消. 因此，均匀介质是不能散射光的. 为了能散射光，就必须有能够破坏次波干涉的不均匀结构. 各种不均匀结构，按其性质与物理意义来说可以是不同的，但其存在却总是会引起光的散射. 混浊介质的情形就是一个最简单的例子，这种介质含有许多大质点，它们的数量级等于光波的波长，它们的折射率跟周围的均匀介质的折射率不同. 乳状液、悬浮物、胶体溶液等，都是这样的系统. 具有上述性质的质点的无规则排布所引起的光的散射称廷德尔（Tyndall）散射.

令一束光通过滴有几滴牛奶的水皿 C（图 15 -12），从水皿的侧旁可以清楚地看到散射光.

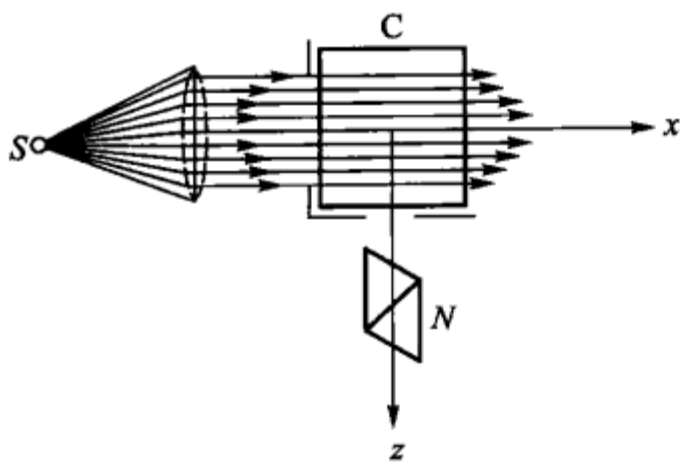


图 15 -12

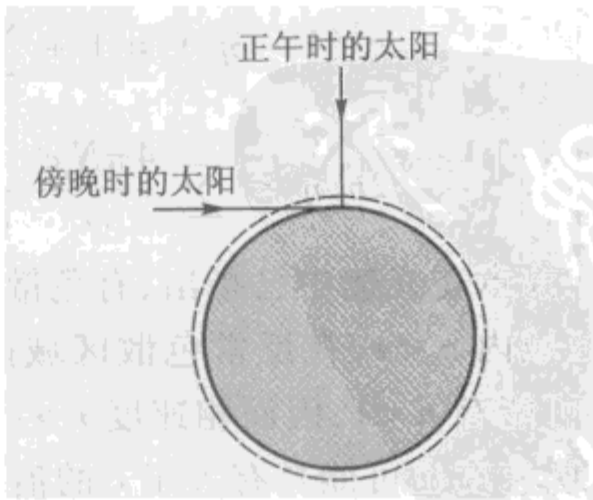


图 15 -13

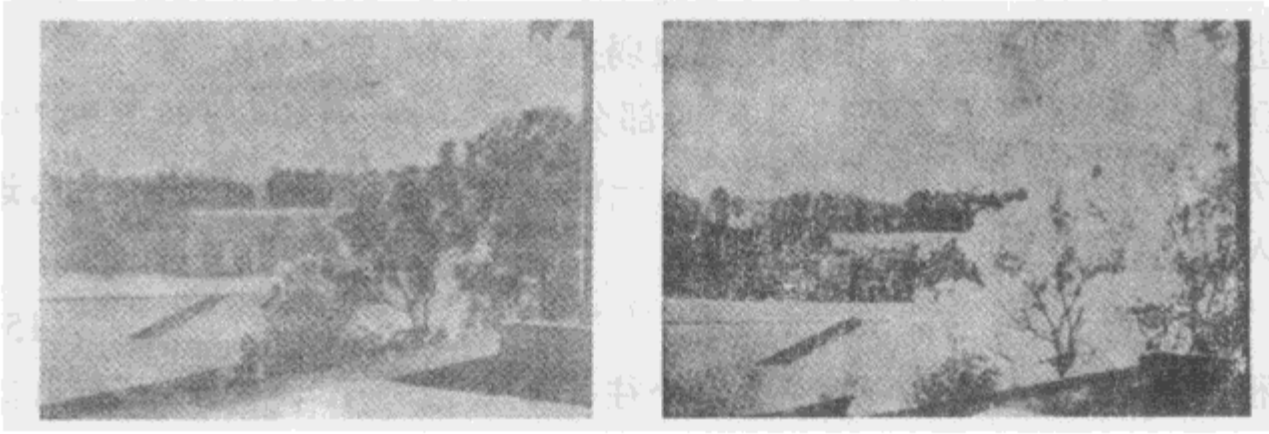
在表面上看来是均匀纯净的介质中，亦能观察到散射光，当然它远不如混浊

介质所引起的散射那么厉害. 这种散射称为分子散射. 例如,大气中气体分子散射太阳光,使天穹呈蔚蓝色. 所以,散射有两类,一类是廷德尔散射,一类是分子散射.

关于分子散射的理论,首先是由瑞利提出来的. 瑞利认为由于分子质点的热运动破坏了分子间固定的位置关系,使分子所发出的次波不再相干,因而产生了旁向散射光. 所以在计算散射光强时,不必按次波振幅的叠加来计算,而只要把每个次波的强度叠加起来. 按照电磁理论,每个次波的振幅是和它的频率 ν 的平方成正比,而每个次波的光强,又和它的振幅的平方成正比. 因而叠加这些次波的光强,得到散射光强和波长的四次方成反比的瑞利定律:

$$I \propto \nu^4 \propto \frac{1}{\lambda^4}. \tag{15-26}$$

日落西山时,直接从太阳射来的光所穿过的大气层厚度,较之正午时直接由太阳射来的光所穿过的大气层厚度要厚得多(见图 15－13). 按照瑞利定律,落日的光由于较厚的大气层的散射,被散射掉的短波的蓝光比被散射掉的长波的红光显著地增多,所以落日看起来呈红色. 由于薄雾的散射,用红色滤光片加在照相机物镜前拍摄薄雾中的景物,可以获得很清晰的照片,比较图 15－14 的两张照片即可看出. 在浓雾时,用红色滤光片拍照没有什么好处. 因为浓雾的质点较大,其散射光强不遵守瑞利定律.



(a)　(b)

图 15－14

曼杰利斯塔姆(Мандельштам)认为瑞利定律虽然与实验结果相符,但瑞利的理论所根据的前提是错误的. 曼杰利斯塔姆不同意分子热运动破坏了次波的相干性这种解释. 因为分子是受入射光的感应作强迫振动,其初相位随入射光的相位随时在改变. 不能看做分子是在自主地、并且连续不断地发出次波,因而在它运动时,不会影响它和其他分子的次波的相位关系. 分子运动只是分子位置的交替更换,并不会影响强迫振动的相位关系,所以次波连续相干. 曼杰利斯塔姆(1907)认为散射的必要条件是破坏介质的光学均匀性,例如,由于介质中存在着局部的密度与平均密度有统计性的偏离——密度起伏,破坏了介质的光学均

匀性，从而导致了散射光. 从这个观念出发他导出了和瑞利定律相同的反四次方定律，但这仅是一种巧合.

斯模卢鹤夫斯基(M. Смолуховский)关于临界乳光的解释(1908)，支持了曼杰利斯塔姆的观念. 人们很早就知道，在气液二相的临界点上，会出现强烈的光的散射——临界乳光. 斯模卢鹤夫斯基注意到，在临界点上介质的压缩率很大，很容易在不大的体积内造成显著的密度起伏. 因而产生强烈的散射光. 1910年，爱因斯坦在密度起伏观念的基础上提出了光的分子散射的定量理论. 关于这点，我们不再在这里讨论了.

在各向异性的介质中，除由密度起伏引起散射光外，还有由于各向异性起伏引起的散射光，二者互相独立，互不相干. 所谓各向异性起伏，即局部的分子的取向与均匀一致的取向有偏离，使分子的极化率有起伏.

当光通过介质时不仅介质的吸收会使透射光强减弱，同时，介质的散射也是使透射光减弱的原因之一. 设光通过介质薄层 dx 后，由于散射而减弱的光强为 $-dI$，它与入射光强 I_0 及薄层厚度 dx 成正比：

$$-dI = I_0 dx,$$

$$-dI = hI_0 dx,$$

比例常数 h 称为散射系数. 由上式积分可得

$$I = I_0 e^{-hx}. \tag{15-27}$$

I 为通过厚度为 x 的介质后，由于散射减弱后的透射光强.

在测量吸收时，要注意到有散射的部分. 一般测量到的“吸收系数”实际包含两部分：一部分是真正的吸收系数 k，一部分是散射系数 h. 严格地讲，透射光强 I 与入射光强 I_0 的关系应为

$$I = I_0 e^{-(k+h)x}. \tag{15-28}$$

在很多情况下，k 和 h 二者中，一个往往比其他一个小得多，因而可以忽略不计. 但在有些情况下，两种作用常是同样重要的.

以上所讨论的散射光，其波长与入射光相同，称瑞利散射. 还有一类散射叫做联合散射，即拉曼(Raman)散射. 其波长与入射光的波长不同. 这种散射留待本章最后再讨论.

* §15-7　散射光的偏振

一束平面偏振光(设其电矢量 $\boldsymbol{E}$ 在 y 方向)沿 x 方向射在线度比波长小的荷电质点 e 上时，如果质点 e 是各向同性的，它将只在与入射光电矢量平行的方向(y 方向)作受迫振动，并产生以 e 为中心的球形波. 因为光波是横波，所以各方向散射光的振幅等于质点 e 振动的振幅在各散射光方向上的垂直分量. 如此

则从图 15-15 可看出,各方向上的散射光应都是平面偏振光,但光强不同. 设 A 为质点 e 振动的振幅,则在 xy 平面内,沿 eB 方向传播的散射光的振幅等于 $A\cos\varphi$,光强等于 $A^2\cos^2\varphi$,图 15-16 给出了在 xy 平面内的散射光强分布的矢量图解. 在 yz 平面内的散射光强分布与 xy 平面内的一样. 在 zx 平面内,各方向上的散射光强相等.

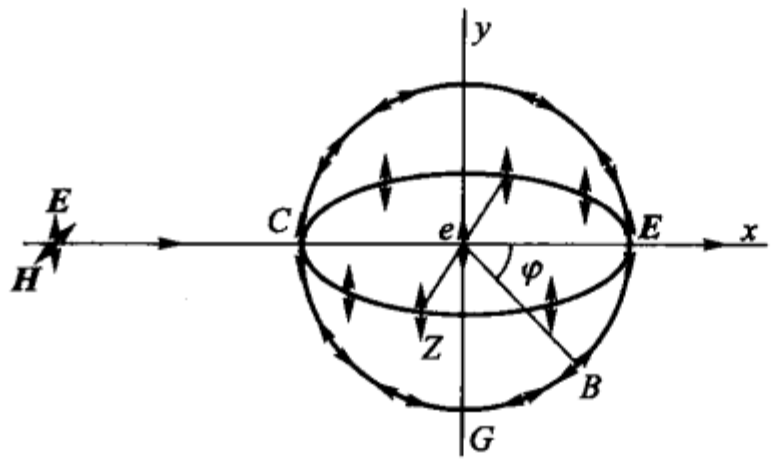


图 15-15

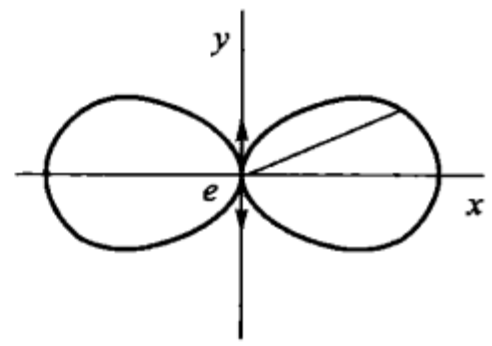


图 15-16

如果入射光是自然光,并且也沿 x 轴传播,则其电矢量 $\boldsymbol{E}$ 可以在 yz 平面内的任何方向上振动,而每一个振动都是散射波的波源. 那么由图 15-17 很容易推论到:只有在 yz 平面内,各方向上的散射光才是平面偏振光,并且光强相等. 在 xy 平面内,散射光是部分偏振光,在与入射光方向(x 方向)成 φ 角的方向上,散射光强 $I\propto 1+\cos^2\varphi$. 图 15-18 给出了 xy 平面内的散射光强分布图. 在 zx 平面内的散射光也是部分偏振光,其光强分布与 xy 平面内的一样.

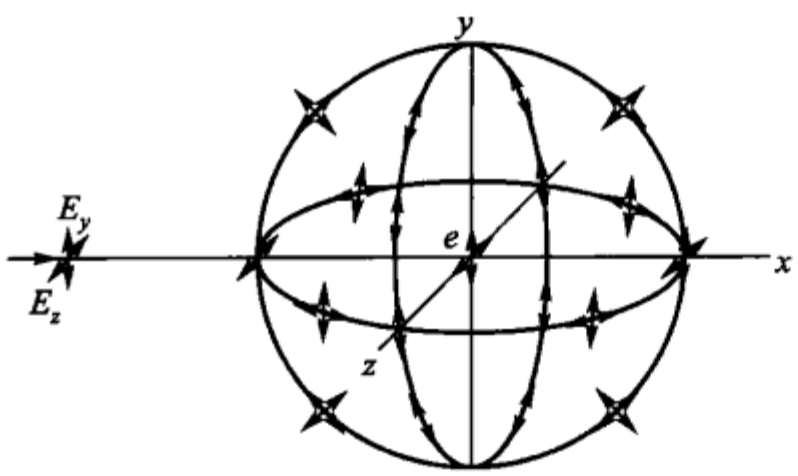


图 15-17

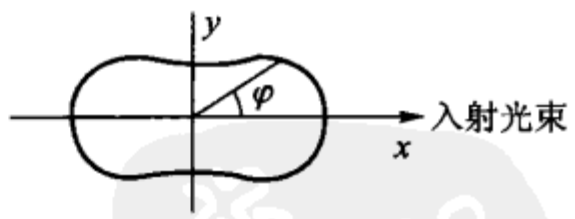


图 15-18

上述各规律只有当散射质点的线度比波长小时才是正确的. 当散射质点的线度与波长差不多时(在胶体溶液中常有这种情况),上述各规律就不正确了. 对于这种较大的质点来说,散射光的强度与波长的关系不很显著. 并且散射光是部分偏振光,偏振程度与质点的大小和形状有关. 光在较大质点上的散射,已被成功地用于分析化学中. 在研究生物化学及研究照相乳胶层等方面,也已有所

应用.

在分子散射中,散射光的偏振情况较复杂.不论入射光是平面偏振光还是自然光,在与入射光线垂直的方向上,如果散射光是由于密度起伏而产生,散射光为平面偏振光(当入射光为平面偏振光时,在平行于电矢量 $\boldsymbol{E}$ 振动的方向上散射光强等于零),若是由于各向异性起伏所产生,则散射光就不是平面偏振光,而是部分偏振光,其偏振程度与分子的各向异性程度有关.如两种起伏同时都存在(实际情况常是如此),则散射光是部分偏振光.

设入射光沿 x 方向进行,在垂直于 x 的 z 方向观察散射光.沿 x 方向偏振的光强以 I_x 表示,沿 y 方向偏振的光强以 I_y 表示.如介质为各向同性,分子中各方向的极化相同,则散射光仅由密度起伏所产生,分子中的强迫振动和入射波的电矢量方向一致,即沿 yz 平面,垂直于入射光线[图 15 - 19(a)].因此如前所述,不论入射光的偏振情况如何,在与入射光垂直的 z 方向上散射光应当是平面偏振光($I_y \neq 0, I_x = 0$).但实验证明,在绝大多数的散射情形下,在 z 方向上也能观察到分量 I_x,即散射光是部分偏振的.这证明了分子的光学各向异性.在各向异性分子中,强迫振动可能不与入射波电矢量方向一致,因而可能超出 yz 平面[图 15 - 19(b)].这时散射光中不仅有沿 y 的振动,也有沿 x 的振动.对于瑞利散射,这一结论已经很好地被证实,并已用它来估计分子的光学各向异性.

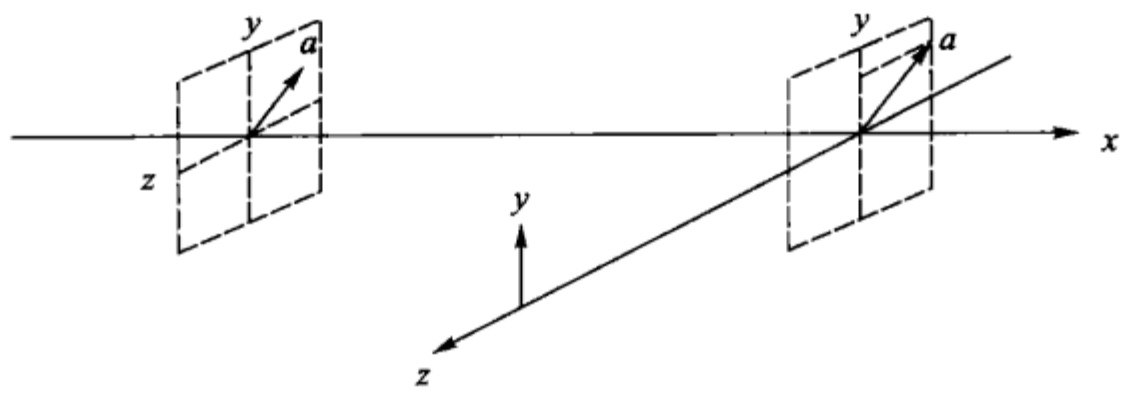


图 15 - 19

我们常用散射光的退偏振度来表示分子各向异性的程度. 如入射光沿 x 方向进行,在 z 方向观察散射光,则退偏振度 Δ 定义为

$$\Delta = \frac{I_x}{I_y}. \tag{15－29}$$

分子的各向异性程度愈大,Δ 愈大. 对于各向同性的分子,$\Delta = 0$. 图 15－20 为测量退偏振度 Δ 的装置. S 为光源,被测气体置于十字形容器内,P 为渥拉斯顿棱镜,它将散射光分解为两个互相垂直的偏振光 E_y 和 E_x. 转动尼科耳棱镜 N,使两光强度相等,此时,尼科耳棱镜的主截面与渥拉斯顿棱镜 P 的一光轴成 α 角(见图 15－20),则

$$\Delta = \frac{I_x}{I_y}\tan^2\alpha. \tag{15－30}$$

因此只要测出 α 角即能求出退偏振度.

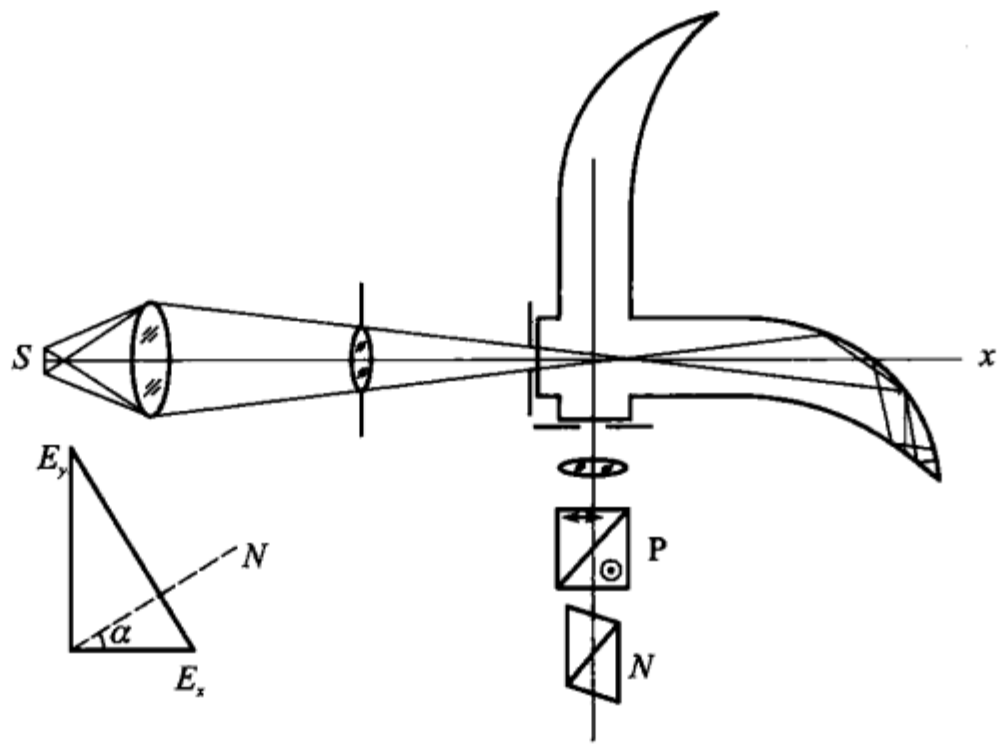


图 15－20

§15－8　拉曼散射

1928 年印度的拉曼和苏联的曼杰利斯塔姆,几乎是同时分别在研究液体和晶体内的散射时,发现散射光中除有与入射光频率 ν_0 相同的瑞利散射线外,在瑞利线的两侧还有频率为 $\nu_0 \pm \nu_1, \nu_0 \pm \nu_2, \cdots$ 的散射线存在. 这种散射现象称拉曼散射亦称联合散射.

观察拉曼散射的仪器装置示意图如图 15－21 所示,其中 A 为一水银弧光灯,B 为盛有被研究液体的玻璃管. 由 B 管出来的散射光束经透镜 L 进入摄谱仪

S. 照片 15 – 22(a)为水银弧光谱,(b)为四氯化碳的拉曼散射光谱.

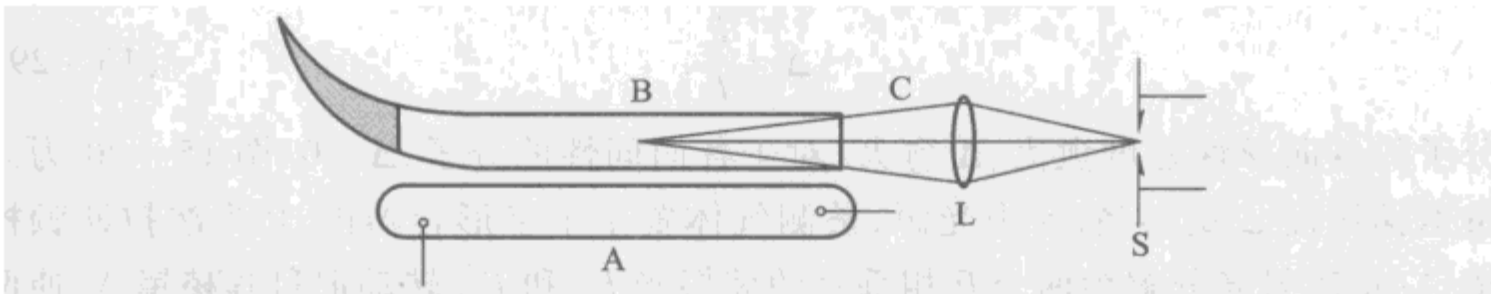


图 15 – 21

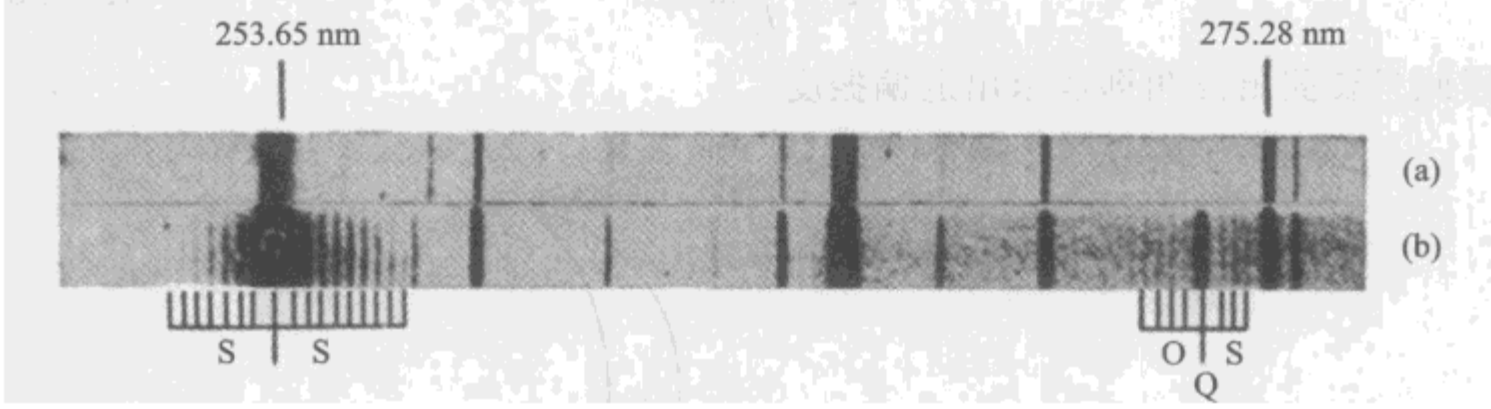


图 15 – 22

测量散射谱线的波长,计算它们与入射水银光谱线的频率差,以波数来表示,分别得

$\nu_1 = 218\ \mathrm{cm}^{-1}, \nu_2 = 314\ \mathrm{cm}^{-1}, \nu_3 = 458\ \mathrm{cm}^{-1}, \nu_4 = 762\ \mathrm{cm}^{-1}, \nu_5 = 791\ \mathrm{cm}^{-1}$.

仔细分析这些结果,发现有下面几点规律:

(1) 在每一条原始入射光谱线旁都伴有散射线. 在原始光长波方面的称红伴线又称斯托克斯线,在短波方面的称紫伴线,又称反斯托克斯线. 它们各自和原始光的频率差相同,只是反斯托克斯线出现得少而弱.

(2) 这些频率差的数值和入射光波长无关. 即不同入射光所产生的散射线和入射光的频率差都相同.

(3) 每种散射介质有它自己一套频率差 $\nu_1, \nu_2, \cdots$. 其中有些和红外吸收的频率相等. 它们表征了散射介质的分子振动频率.

拉曼散射的产生是与分子的极化率的改变相联系的. 在入射光电场的作用下,分子获得感应电偶极矩

$$P = \alpha E = \alpha E_0 \cos 2\pi\nu_0 t, \tag{15-31}$$

α 为分子的极化率. 如果极化率是一与时间无关的常数,则感应电偶极矩 P 以入射光的频率 ν_0 作周期性的变化,由此所得到的散射光,其频率与入射光的一

样——瑞利散射.

但是因为分子以固有频率 ν 在作振动,所以分子的极化率不是常数,而是以频率 ν 作周期性变化的. 我们令

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_\nu \cos 2\pi\nu t, \tag{15-32}$$

α_0 相当于分子静止在平衡位置时的极化率,α_ν 相当于因分子固有振动而引起的作周期性变化的极化率的振幅. 将式(15-32)代入式(15-31)得

$$\begin{aligned} P &= \alpha_0 E_0 \cos 2\pi\nu_0 t + \alpha_\nu E_0 \cos 2\pi\nu t \cos 2\pi\nu_0 t \\ &= \alpha_0 E_0 \cos 2\pi\nu_0 t + \frac{1}{2}\alpha_\nu E_0 [\cos 2\pi(\nu_0 + \nu)t + \cos 2\pi(\nu_0 - \nu)t]. \end{aligned} \tag{15-33}$$

从上式可看出,感应电偶极矩 P 变化的频率有 $\nu_0, \nu_0 \pm \nu$ 三种,因此散射光中也应含有这三种频率. 频率为 ν_0 的散射光即瑞利散射,频率为 $\nu_0 \pm \nu$ 的散射光即拉曼散射光. $\nu_0 - \nu$ 的拉曼散射线又称斯托克斯线,$\nu_0 + \nu$ 的线又称反斯托克斯线.

如果分子有几种固有频率:$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \cdots$,则在拉曼散射线中也将出现频率为 $\nu_0 \pm \nu_1, \nu_0 \pm \nu_2, \nu_0 \pm \nu_3, \cdots$ 的线. 拉曼散射线的频率是由入射光的频率及分子的固有频率联合而成的,故而又名联合散射.

上述关于拉曼散射的经典理论也是不够完善的,例如它不能正确地说明散射光的强度问题. 完整的解释要用到量子理论.

拉曼散射是研究分子结构的重要方法. 利用它可以确定多原子分子(特别是有机化合物)的固有频率. 如果某些分子的固有频率是已知的,则利用拉曼散射方法可以进行成分分析. 例如,已成功地作出了汽油(复杂的碳氢化合物)的成分分析. 利用拉曼散射方法还可以研究分子结构. 它与另一重要方法红外吸收法相比,拉曼散射有设备较简单及可用可见光作光源等优点,所以它已成为分子光谱学的重要部分,并且成功地补充了红外吸收方法.

自激光问世以来,强而细的激光光束入射到少量样品上,就可获得够强的散射光谱. 在需要样品量少这点上,已能与红外吸收光谱较量. 其次由于激光单色性好,瑞利散射线较细,在它附近的频率差仅十余波数的散射线亦容易观察. 再者,当激光强度达到一定水平时,激光引起的非线性效应,可观察到受激拉曼散射等现象.

习　题

1. 图 15-1 中 I/I_0 称为透射比. 当 $x = 1$ 单位,$(I_0 - I)/I_0$ 称为吸收比. 证明当吸收系数 k 较小时,吸收比等于吸收系数.

2. 某种 K 玻璃在不同波长实测得折射率如下表：

λ/nm	656.3	643.9	589.0	533.8	508.6	486.1	434.0	398.8
n	1.52441	1.52490	1.52704	1.52987	1.53146	1.53303	1.53790	1.54245

用柯西公式($n = A + B/\lambda^2$)，计算七个波长间隔的 A 与 B 值. 取平均值作出色散曲线，与实测曲线比较.

3. 有一介质，吸收系数 $k = 0.32\ \text{cm}^{-1}$，求透射光强为入射光强的 0.1，0.2，0.5 及 0.8 时，介质的厚度各为若干.

4. 苯(C_6H_6)的拉曼散射中较强的谱线与入射光的波数差为 607，992，1178，1586，3047，3062 cm^{-1}. 今以氩离子激光 $\lambda = 488.0$ nm 为入射光，计算各斯托克斯及反斯托克斯线的波长.

第十六章

光的发射

§16-1 两种不同形式的光的发射

物体发射光能有两种不同形式.第一种形式,物体在发射辐射过程中不改变内能,只要通过加热来维持它的温度,辐射就可继续不断地进行下去.这种辐射称热辐射或称温度辐射.任何物体,固体、液体、甚至相当厚的气体都发射这种辐射.温度低(如室温)的物体,辐射不可见的红外线.加热到500℃左右,开始辐射一部分暗红的可见光.温度更高,波长较短的辐射丰富起来,大约在1500℃时开始发出白光,其中还有相当多的紫外光.热辐射的光谱是连续光谱,不同波长的能量随波长连续改变.

第二种形式,物体在发射辐射过程中不能仅用维持其温度来使辐射继续下去,而要依靠其他一些激发过程来获得能量以维持辐射.这种辐射称为"发光"(luminescence)①.维持"发光"的来源是多种多样的,但也不外乎下列几方面:

(1) 物体中的原子或离子受到被电场加速的电子的轰击,使原子中的电子受到激发.当它由激发状态回复到正常状态时,就会发出辐射,这一过程称电致发光.如稀薄的气体或蒸气在放电管中所发出的辉光,就是这种过程.

(2) 物体被光照射或预先被照射而引起它自身的发射,称光致发光.荧光和磷光是属于这一类.日光灯管壁上发出的荧光是被管内水银蒸气的辉光所激发的.钠蒸气当被另一钠光灯发出的黄光照射时,也会发出黄光,这就是所谓共振辐射.

(3) 由于化学反应而发光称化学发光.例如磷或腐物中的磷在空气中被缓慢氧化而发光.

(4) 物体加热到一定温度也会发射辐射,称热发光.本生火焰中放入钠或钠盐就能发出钠的黄光.热发光和热辐射不同,后者在任何温度下都在进行,而前

---

① "发光"这名称并不统一,有人把发光一词仅限于指荧光和磷光,而与这里所指的不同.

者要达到一定温度后才产生.达到一定温度,火焰中的质点(原子、分子、离子、电子)有足够的动能去碰撞钠原子,使钠原子激发.

当然上面所提的几种过程并不是绝对分开的.化学发光也可能是由于化学反应产生足够的热能或电能去激发磷化合物的分子;电弧中同时存在电激发与热激发.但是它们共同的特点都是非平衡辐射,不能仅用温度来描述;它们的光谱主要是线光谱、带光谱,但也有连续光谱(例如弧柱中的固体质点及炽热的电极头所发出的就是连续光谱).

在本章中,讨论热辐射的基本现象、规律及其应用,并且介绍几种常用的光源.关于第二种形式辐射的讨论在这里仅通过简单氢原子光谱与氢原子结构间的关系,以建立能级的概念.物质的结构及光谱规律,则留在原子物理学及光谱学中去讨论.

§16-2 热辐射和基尔霍夫定律

在热辐射现象中很容易看到,不同物体虽然达到同一温度,但它们所辐射的光谱分布是不同的.例如钢块在800℃时发出樱桃红的光,而在同一温度下熔石英却不发出可见光.基尔霍夫(Kirchhoff)定律说明了这个问题.

在叙述基尔霍夫定律之前,我们先定义物体的辐出度和吸收本领.每单位面积的辐射体,在温度 T,属于波长 λ 的每单位波长间隔,向 2π 立体角所发出的辐射通量,称为物体的光谱辐出度,以 $M_{\lambda,T}$ 或以 M_λ 表示之.总和一切可能波长的辐出度 M 是

$$M = \int_0^\infty M_{\lambda,T}\mathrm{d}\lambda, \tag{16-1}$$

$M_{\lambda,T}$ 的单位是 $\mathrm{W/(m^2 \cdot \mu m)}$,$M$ 的单位是 $\mathrm{W/m^2}$.它们和第五章光度学中的面发光度相对应.只是在那里指的是限于能激发视觉的那部分光通量,而这里包括了所有可能的波长的辐射能.在本章末将度量辐射的各种名称、符号、定义、单位、英文名称及相对应的度量光度的名称等列一表便于对照,以供参考.对每一名称几乎都有相对应的光谱的辐射度量,以加下角标 λ 表示,如 M_λ、L_λ 等,表示属于波长 λ 每单位波长间隔的各该辐射度量.为简明计它们不再列入表中.同样理由,在书写上有时省略"光谱"两字.

射在物体表面上的辐射通量,一部分为物体所散射或反射(对于透明物体还有一部分透过),其余的为物体所吸收.如以 $\mathrm{d}\Phi$ 表示射在物体表面上的辐射通量,$\mathrm{d}\Phi'$ 表示物体所吸收的辐射通量,则 $\mathrm{d}\Phi'/\mathrm{d}\Phi = a$ 就是物体的吸收本领.吸收本领也是温度和波长的函数.以后就用 $a_{\lambda,T}$ 表示物体在温度 T 时属于波长 λ 的单位波长间隔内的吸收本领.物体的辐出度和吸收本领亦可分别用 $M_{\nu,T}$ 及 $a_{\nu,T}$

表示为温度 T 和频率 ν 的函数.

设将温度不同的物体 A_1, A_2, A_3(图 16-1)放置在一个与外界隔离的封闭的容器内(它与外界无能量交换). 如果容器内部是真空的,则物体之间只能通过辐射相互交换能量. 实验证明,经过一段时间后,所有的物体包括容器在内都会达到相同的温度,建立热平衡. 即此时各物体在单位时间内放出的能量恰等于吸收的能量. 这个实验结果说明辐出度较大的物体,其吸收本领一定也较大;辐出度较小的物体,其吸收本领一定也较小. 基尔霍夫将这个关系用定律的形式表达如下:物体的辐出度和吸收本领的比值与物体的性质无关,对于所有物体,这个比值是波长和温度的普适函数. 下式是基尔霍夫定律的数学表达式:

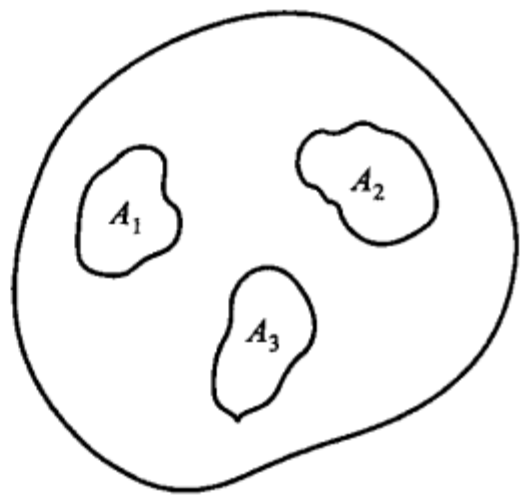


图 16-1

$$\frac{M_{\lambda,T}}{a_{\lambda,T}} = f(\lambda, T). \tag{16-2}$$

很显然,对于一定波长在一定温度下这个比值是与物体性质无关的常数.

§16-3 黑　体

能够在任何温度下全部吸收任何波长的辐射的物体称绝对黑体,简称黑体. 黑体的吸收本领与波长和温度无关,是等于 1 的常数($a_{\lambda,T} = 1$). 因此,由式(16-2)可知黑体的光谱辐出度 $M_{\lambda,T}$ 等于普适函数 $f(\lambda, T)$,即

$$M_{\lambda,T} = f(\lambda, T). \tag{16-3}$$

实际上,并不存在完全理想的黑体. 但人工制造黑体却是可能的. 为此只要做一如图 16-2 所示的带有小孔 C 的几乎密闭的容器 A. 将容器均匀地加热到某一温度 T,从孔 C 发出的辐射与在该温度下的理想黑体的辐射相差很少. 因为从孔 C 射入容器内的光线要在容器内壁上多次反射后才能由孔 C 射出来. 设容器内壁的反射本领为 ρ,ρ 永远小于 1. n 次反射后,反射光能量是入射光能的 ρ^n 倍. 当 n 足够大时,数值 ρ^n 就很小了. 故只有极微小的一部分光线能从孔 C 射出来. 亦即,孔 C 的吸收本领对于所有的波长都几乎等于 1. 根据基尔霍夫定律,孔 C 的辐出度将很接近黑体的辐出度.

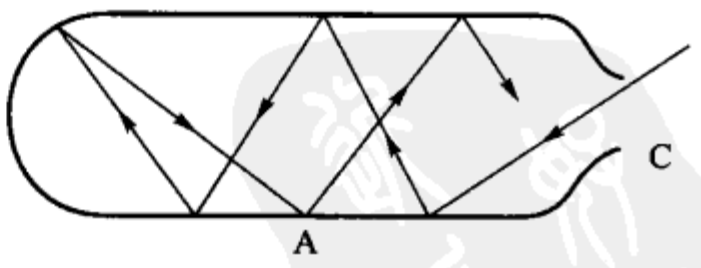


图 16-2

非黑体的吸收本领 $a_{\lambda,T}$ 永远小于 1. 因而对于任何波长,非黑体的辐出度永

远小于在同一温度下的黑体的辐出度. 设以 $M_{\lambda,T}$ 及 $M'_{\lambda,T}$ 分别表示黑体及非黑体的辐出度,以 $\varepsilon_{\lambda,T}$ 表示两辐出度的比,由式(16 -2)及(16 -3)可得

$$\varepsilon_{\lambda,T}=\frac{M'_{\lambda,T}}{M_{\lambda,T}}=a_{\lambda,T}.$$

有时 $\varepsilon_{\lambda,T}$ 定义为发射本领,物体的发射本领等于它的吸收本领.

吸收本领与波长无关的非黑体称灰体. 灰体的辐射能量分布曲线与在同一温度下黑体的辐射能量分布曲线相似. 这是由于灰体的 a 是对各波长都一样的常数,所以灰体对各不同波长的辐射,等于 $a(<1)$ 乘以相应的各波长的黑体的辐射. 实际上也没有完全理想的灰体. 有些物体只在某一有限的波长区域内有与灰体相近的特性.

实验室中用的黑体模型有许多种. 图 16 -3 所示的一种是一个有夹墙(图中划斜线的部分)的金属瓶. 夹墙的空间可用来作为"恒温池"以保持恒定的和均匀的温度. 为此可充以沸水,或者为了在低温下用,可装水或固体二氧化碳或液体空气等. 图 16 -4 是用于高温辐射的黑体. 它是用耐火材料做成的长管,管内装有许多防止斜入射光立刻反射出去和阻止外来空气产生冷却作用的横隔挡. 用铂金加热器来使管壁达到所需的温度. 温度值可用热电偶测量.

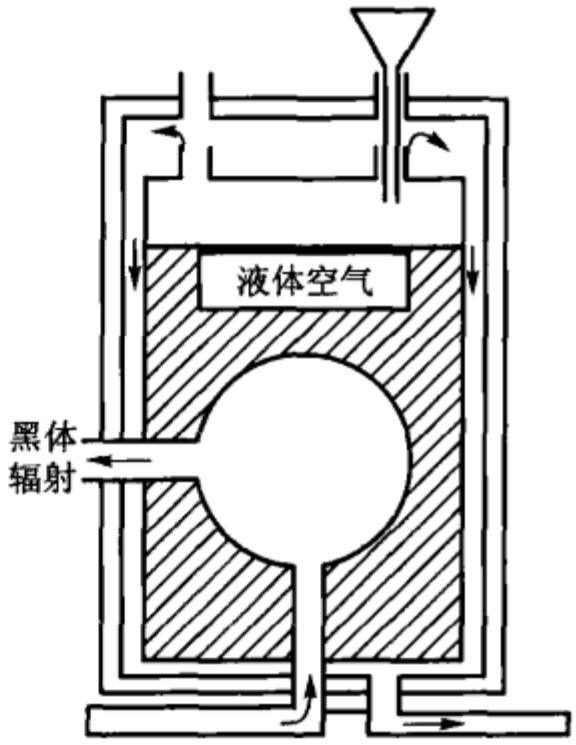


图 16 -3

借助如图 16 -5 的装置可以研究黑体光谱中的能量分布. A 是黑体,L 是透镜,S_p 是装有光栅的单色仪,T 是接收器.

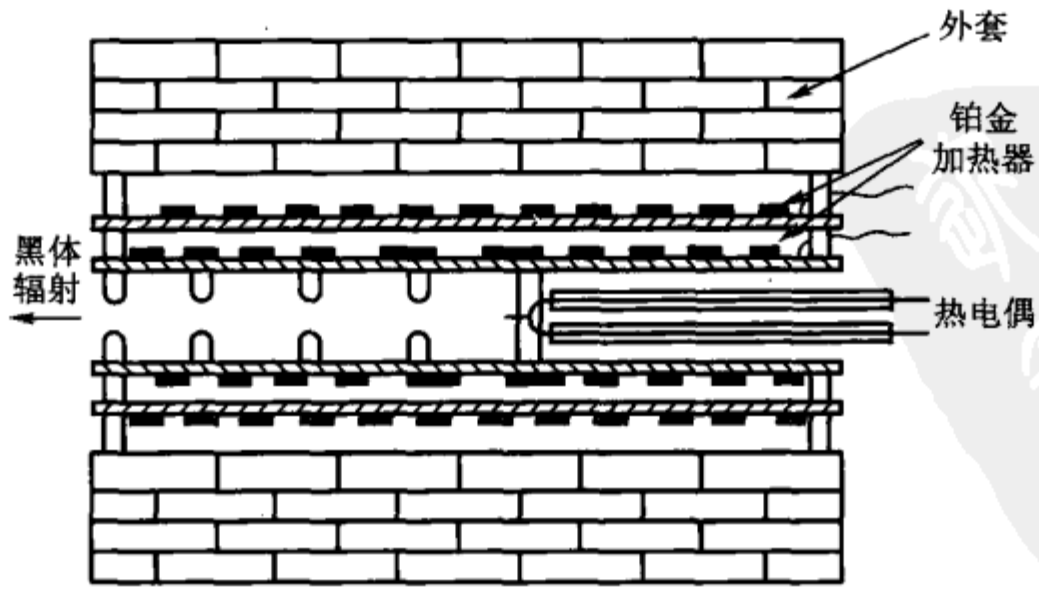


图 16 -4

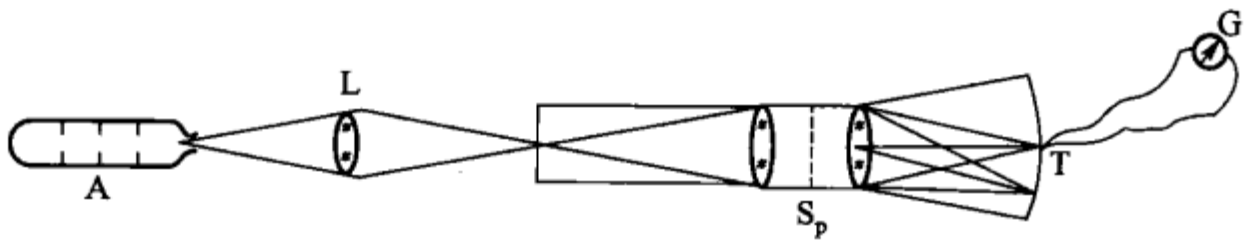


图 16-5

图 16-6 为一组在不同温度下黑体的光谱能量分布曲线. 可以看出:每一条曲线都有一个极大值. 随着温度上升,黑体的光谱辐出度 $M_{\lambda,T}$ 迅速增大,并且曲线的极大值逐渐向短波方向移动.

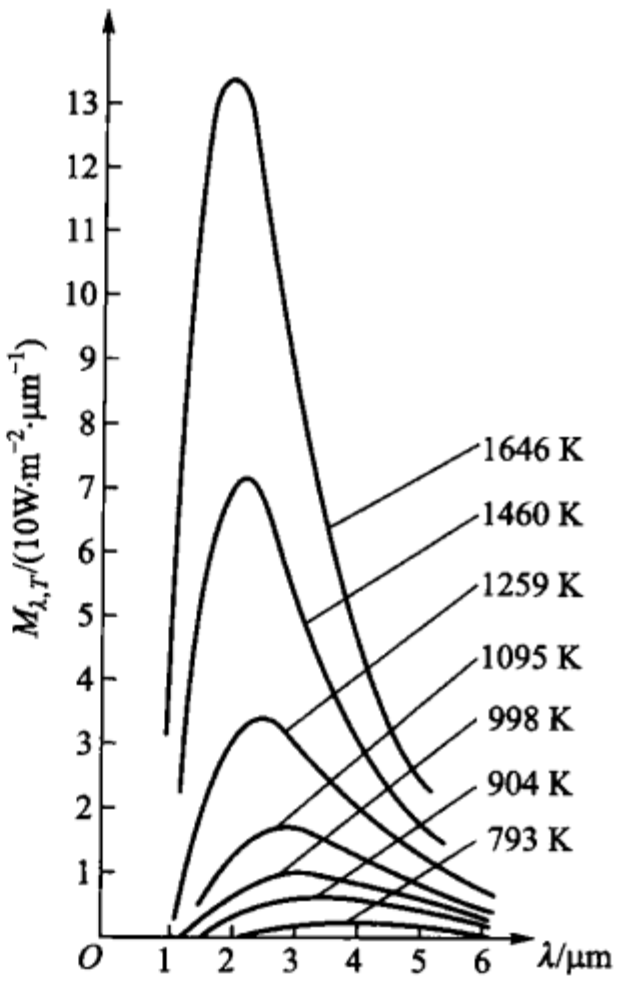


图 16-6

对辐射体也具有和光度学上相对应的"亮度"这一术语. 辐射体向某一方向发射辐射通量. 辐射亮度 L 是指从垂直此方向上辐射体表面投影的单位面积在单位立体角内每秒所发出的辐射能量. 它的单位是 W/(sr·m^2)(瓦每球面度平方米). 同样有光谱辐射亮度 $L_{\lambda,T}$ 指在某波长范围单位波长间隔的亮度. 和光度学上亮度不同,这里是包括了所有可能的波长的辐射能.

黑体是余弦辐射体,它的表面亮度与方向无关,故黑体的辐出度 M 与其辐射亮度 L 应有以下关系:

$$L=\frac{1}{\pi}M.$$

因此,相当于单位波长间隔的光谱辐射亮度 $L_{\lambda,T}$ 和黑体光谱辐出度 $M_{\lambda,T}$ 之间有如下关系:

$$L_{\lambda,T}=\frac{1}{\pi}M_{\lambda,T}. \tag{16-4}$$

所以如果将图 16-6 中的纵坐标换以 $L_{\lambda,T}$,曲线的形状不变.

§16-4 黑体辐射定律和普朗克公式

由式(16-3)已知黑体的光谱辐出度 $M_{\lambda,T}$ 等于普适函数 $f(\lambda,T)$,因此,要解释上节中实验所得的黑体辐射能量分布曲线(图 16-6),归根到底就是要确定未知函数 $f(\lambda,T)$ 的形式. 然而,所有想从经典理论中得出这一函数的正确形式的尝试都遭到了失败.

维恩(Wien)由热力学的讨论得出黑体辐射能量的分布公式为

$$M_{\lambda,T}\mathrm{d}\lambda = \frac{c^5}{\lambda^5} f\left(\frac{c}{\lambda T}\right)\mathrm{d}\lambda , \tag{16-5}$$

式中 c 为光速. 函数 $f(c/\lambda T)$ 的形式不能单独由热力学得出. 维恩在进一步对黑体的发射和吸收过程作了一些特殊假设后得出

$$M_{\lambda,T}\mathrm{d}\lambda = C_1\lambda^{-5}\mathrm{e}^{-\frac{C_2}{\lambda T}}\mathrm{d}\lambda , \tag{16-6}$$

其中 C_1, C_2 是常数. 维恩公式只能应用在黑体辐射能量分布曲线的短波部分. 图 16-7 给出了在 1 600 K 时的实验曲线与维恩公式符合的情况.

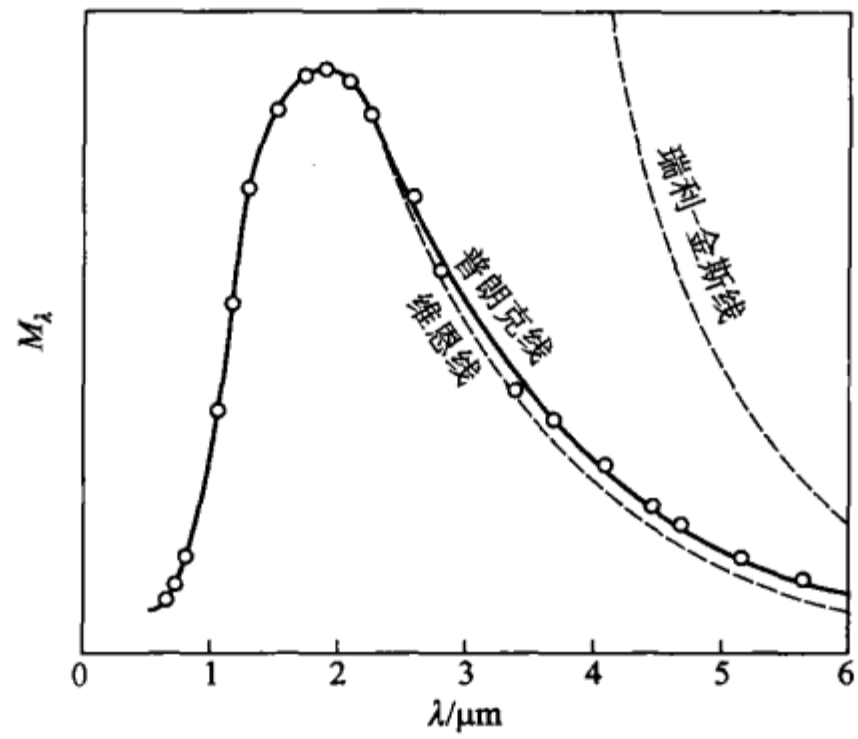


图 16-7

随后瑞利与金斯(Jeans)曾尝试用经典的电磁理论及能量均分定理来解决这个问题. 他们从经典的电磁理论求得在一封闭空腔内的单位体积及频率间隔 $\mathrm{d}\nu$ 内的自由振动频率的数目是 $(8\pi\nu^2/c^3)\mathrm{d}\nu$. 按照能量均分定理,每一种振动频率应配以平均能量 kT, k 是玻耳兹曼(Boltzmann)常数, T 是热力学温度,因此求得频率间隔 $\mathrm{d}\nu$ 内的能量密度 $\rho_{\nu,T}\mathrm{d}\nu$ 为

$$\rho_{\nu,T}\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT\mathrm{d}\nu .$$

很容易证明能量密度 $\rho_{\nu,T}$ 与辐出度 $M_{\nu,T}$ 之间有下面的关系:

$$\rho_{\nu,T} = \frac{4M_{\nu,T}}{c} ,$$

其中 c 是光速. 由此得到

$$M_{\nu,T}\mathrm{d}\nu = \frac{2\pi}{c^2}\nu^2 kT\mathrm{d}\nu . \tag{16-7}$$

由关系 $\nu = c/\lambda$，$|d\nu| = (c/\lambda^2)d\lambda$ 及 $M_{\nu,T}d\nu = M_{\lambda,T}d\lambda$，可将式(16-7)表为按波长的分布：

$$M_{\lambda,T}d\lambda = \frac{2\pi c}{\lambda^4}kTd\lambda. \tag{16-8}$$

式(16-7)和(16-8)即著名的瑞利-金斯公式. 由图 16-7 可看出，它只在波长相当长的部分才与实验曲线相符. 而随着波长减小，辐出度无限增大，因而总辐出度 $\int_0^\infty M_{\lambda,T}d\lambda$ 也等于无限大，这显然是荒谬的，可见，经典理论在解释黑体辐射现象上遇到了困难.

在 1900 年，普朗克(Planck)找到了一个开始是纯粹经验的公式，这个公式与实验符合得很好，并且在对于长波和短波的两种极限情况下，能对应地过渡到瑞利-金斯公式或维恩公式. 普朗克公式解决了寻求黑体辐射能量分布的数学表达式的问题. 然而，为了从理论上推导出这个公式，必须做一个与经典理论相矛盾的假设. 普朗克在公式的推导中，首先假设黑体是由带电的线性谐振子所组成. 其次他假设这些谐振子的能量不能连续变化，只能取一些分立值，这些分立值是最小能量 E_ν 的整数倍，即 $0, E_\nu, 2E_\nu, \cdots, nE_\nu, \cdots$ 称为谐振子的能级，当谐振子从这些能级中之一过渡到其他能级时就发射或吸收辐射. 此处 $E_\nu = h\nu$，每份能量与谐振子的频率 ν 成正比，比例常数 h 为一新常数，称普朗克常数. 按照玻耳兹曼定理，具有能量 $0, E_\nu, 2E_\nu, \cdots$ 的振动的概率有如下比例关系：

$$1 : e^{\frac{-E_\nu}{kT}} : e^{\frac{-2E_\nu}{kT}} : \cdots,$$

所以平均能量应为

$$\overline{\varepsilon_\nu} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon_\nu e^{\frac{-nE_\nu}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{-nE_\nu}{kT}}} = -\varepsilon_\nu \frac{\frac{d}{dz}\left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nz}\right]}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nz}},$$

此处

$$Z = \frac{E_\nu}{kT},$$

于是

$$\overline{\varepsilon_\nu} = \frac{E_\nu}{e^{\frac{E_\nu}{kT}} - 1} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

将此 $\overline{\varepsilon_\nu}$ 值代替式(16-7)中的 kT. 于是得到

$$M_{\nu,T}d\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}d\nu. \tag{16-9}$$

按波长分布表示，则可写为

$$M_{\lambda,T}d\lambda = 2\pi hc^2\lambda^{-5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}d\lambda \tag{16-10a}$$

和
$$L_{\lambda,T}\mathrm{d}\lambda = 2hc^2\lambda^{-5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}\mathrm{d}\lambda\ . \qquad (16-10b)$$

以上三式,都称为普朗克黑体辐射公式. 图 16 - 8 为按式(16 - 10b)计算的在几种不同温度下 $L_{\lambda,T}$ 与 λ 曲线系. 横坐标是波长的对数标,单位是 μm,纵坐标是光谱辐射亮度的对数标,单位是 $\mathrm{W\cdot sr\cdot m^{-2}\cdot \mu m^{-1}}$. 所以在图 16 - 8 上,维恩位移律表现为一直线.

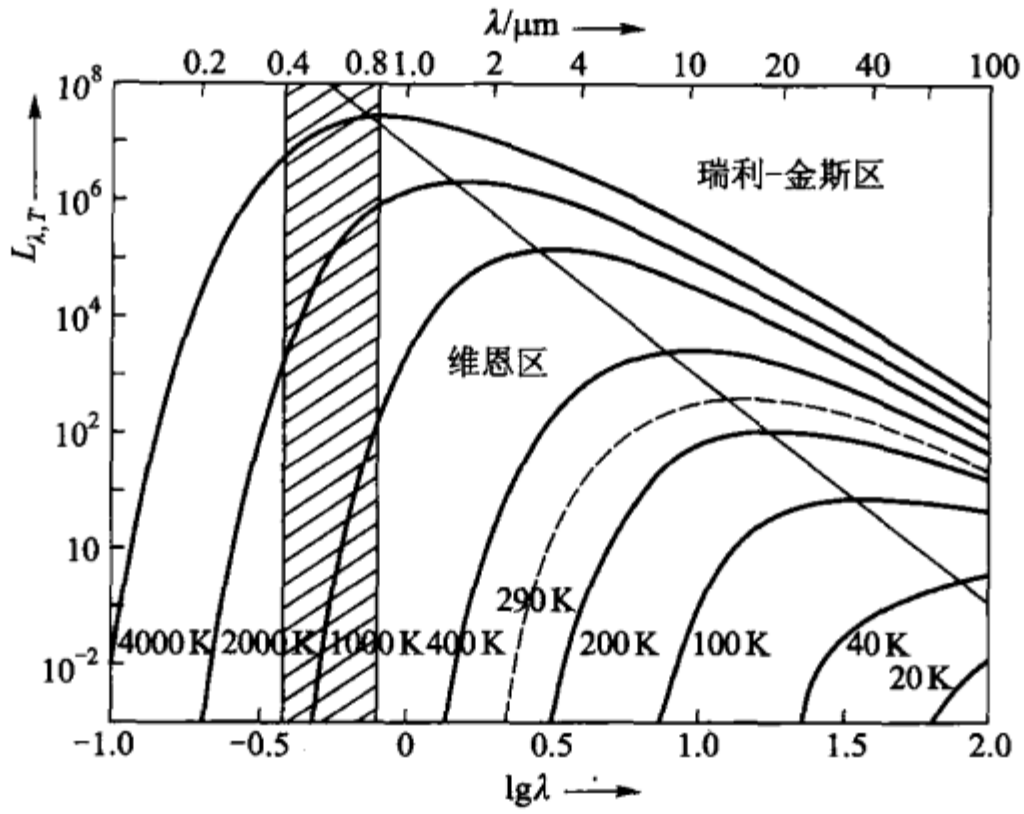


图 16 - 8

普朗克常量的数值可由多种实验方法测得,由黑体辐射定律给出 $h = 6.53\times10^{-34}\mathrm{J\cdot s}$. 较准确地测定 h 的方法是根据伦琴光谱短波限的测定计算 h,由此法得出 $h = 6.624\times10^{-34}\mathrm{J\cdot s}$.

普朗克公式与实验结果符合得很好,见图 16 - 7. 当辐射波长很短,使得 $ch/\lambda kT \gg 1$ 时,式(16 - 10a)分母中的 1 可以略去,于是得到

$$M_{\lambda,T}\mathrm{d}\lambda = 2\pi hc^2\lambda^{-5}e^{-\frac{hc}{\lambda kT}}\mathrm{d}\lambda.$$

令 $2\pi hc^2 = C_1$,$hc/k = C_2$,则上式就是维恩公式(16 - 6). 当辐射波长很长(或温度很高),亦即 λT 足够大,使得 $ch/\lambda kT \ll 1$ 时,当将式(16 - 10)分母中的指数 $e^{\frac{hc}{\lambda kT}}$ 按下面的级数展开后

$$e^{\frac{hc}{\lambda kT}} = 1 + \frac{hc}{\lambda kT} + \frac{h^2c^2}{2\lambda^2k^2T^2} + \cdots,$$

可只取前两项,则有

$$e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 = \frac{hc}{\lambda kT}.$$

将以上关系式代入式(16 - 10)就得到瑞利 - 金斯公式(16 - 7).

为了定出与黑体辐射能量分布曲线极大值相应的波长 λ_m 可将式(16-10)对λ 微分,并令其导数为零,于是得到

$$e^{\frac{hc}{\lambda_m kT}}\frac{hc}{\lambda_m kT}=5\left(1-e^{\frac{hc}{\lambda_m kT}}\right).$$

这是一个超越方程式,其解为

$$\frac{hc}{\lambda_m kT}=4.9651.$$

当 λ_m 用 μm 作单位,T 用 K 作单位,并代入 h,c 和 k 的数值时,求得

$$\lambda_m=\frac{2\,896}{T}(\mu m). \tag{16-11}$$

λ_m 反比于 T,即当温度增加时,图 16-6 的分布曲线的极大值向短波方向移动.式(16-11)即维恩在普朗克公式之前从另一途径得到的维恩位移律.

由式(16-11)可以算出,在通常可以达到的温度下,与黑体辐出度的极大值相当的波长位于红外部分.当温度为 3 000 K 时,最大辐出度仍位于可见光谱长波端范围之外,靠近 $\lambda=0.96$ μm 处.只有当温度达到 5 000 K 时,最大值才落到光谱的黄绿部分,$\lambda_m=0.577$ μm.当温度高于 7 200 K 时,最大值落到紫外部分.

将式(16-10)积分即可求得光出射度 M,

$$\begin{aligned}M&=\int_0^\infty M_{\lambda,T}d\lambda=\int_0^\infty 2\pi hc^2\lambda^{-5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}d\lambda\\&=\frac{2\pi^2k^4}{15c^2h^3}T^4=\sigma T^4,\end{aligned} \tag{16-12}$$

其中 $\sigma=5.670\times10^{-8}\,J/(m^2\cdot s\cdot K^4)$.式(16-12)即斯忒藩(Stefan)在普朗克之前于 1879 年从实验所获得的定律.在 1884 年,玻耳兹曼根据热力学的研究,从辐射能量有压力以及此压力与辐射能量的密度成比例这一思想出发,用经典理论证明了式(16-12).所以式(16-12)一般称斯忒藩-玻耳兹曼定律.

对于非黑体,

$$M=\int_0^\infty M'_{\lambda,T}\,d\lambda=\int_0^\infty \varepsilon_{\lambda,T}M_{\lambda,T}d\lambda.$$

因而对于非黑体,斯忒藩-玻耳兹曼定律可写作

$$M=K\sigma T^4,$$

系数 K 为物体的平均发射本领,它与物质的性质、温度及表面状况等有关.对于灰体,K 就等于发射本领 ε 或吸收本领 a,其值与波长无关.

* §16-5 光测高温学

人们常常用眼睛观测剧热物体的颜色和亮度来估计剧热物体的温度,这当

然是很不可靠的,即便用温差电偶或其他测辐射热器等来测量也常是不很准确的.由前几节的讨论我们知道,炽热物体所辐射的能量是与它的温度有关的,但是只有黑体的辐射能量与温度之间的关系已从理论上研究清楚,并且得到一系列的黑体辐射定律,黑体或是非常接近黑体的物体(例如熔铁炉)的温度才可以准确地用黑体辐射定律来确定.利用黑体辐射定律来测定温度的方法,称光测高温方法.对于非黑体,如果已经知道它们的特性,间接地利用光测高温方法也可比较简单和比较准确地测定它们的温度.

由于测量高温时所根据的黑体辐射定律不同,光测高温方法可以分为以下三类:

1. 亮温度和隐丝光测高温计

测高温度最合适的仪器是隐丝光测高温计.它所依据的原理,简单地讲,就是将被测物体在一定波长间隔内的亮度与黑体在同一波长间隔内的亮度加以比较.隐丝光测高温计的光学系统就像望远镜一样.图 16-9(a)中的 O 是望远镜的物镜,O′即目镜.在物镜 O 的焦平面内装有一灯泡玻璃均匀而透明的小电灯 A,用作比较光源.小电灯的灯丝 a 通常弯成半圆形[图 16-9(b)].被研究的光源 S 经过物镜 O 也成像在物镜 O 的焦平面内.目镜 O′可以用来同时观察小电灯 A 的灯丝和光源 S 的像.在目镜与小电灯 A 之间放置一有色玻璃 F,以便滤出所需的波长间隔.通常采用的波长 $\lambda = 660$ nm.用隐丝光测高温计测量物体的温度的具体方法一般有两种:一种是改变灯丝的亮度来与待测光源的亮度进行比较,如图 16-8 所示.灯丝的亮度,可借助变阻器调节灯丝电流强度来改变.若灯丝的亮度比待测光源的像的亮度大,则灯丝在光源的像上呈现出亮线;反之,则呈现为暗线.当二者亮度相等时,灯丝即在光源的像上消失.取黑体作为标准,预先确定相当于不同黑体温度(亮度)下,灯丝消失时的电流强度 I,并在表 G 上作好刻度.以后可直接由表 G 读出黑体的温度.如果所测的物体是非黑体,则所测得的并非物体的实际温度,称物体的亮温度,以 T_b 表示.物体的亮温度一般比物体的实际温度小.当我们说到某一非黑体在 $\lambda = 660$ nm 处具有 1 500 K 的亮温度时,就是说它在这个波长间隔内具有与 1 500 K 时的黑体相同的亮度.

为了延长电灯 A 的使用寿命,灯丝温度不应灼热过高.钨丝灯的保险温度约在 2 000 K 左右.而实际上常常会遇到要测量比 2 000 K 高很多的温度.此时,使用改变灯丝亮度的方法就不合适了.应该采用另一种类型的光测高温计.这种光测高温计在物镜前或在物镜与电灯 A 之间加一圆的楔形吸收器,用来改变待测光源在物镜焦平面处的像的亮度,以达到平衡光源的像和灯丝的亮度的目的.预先用黑体校准灯丝消失时吸收器的位置,作好刻度后,即可由刻度直接读出光源的亮温度.

根据亮温度的定义及黑体辐射能量分布定律,很容易找到非黑体的亮温度

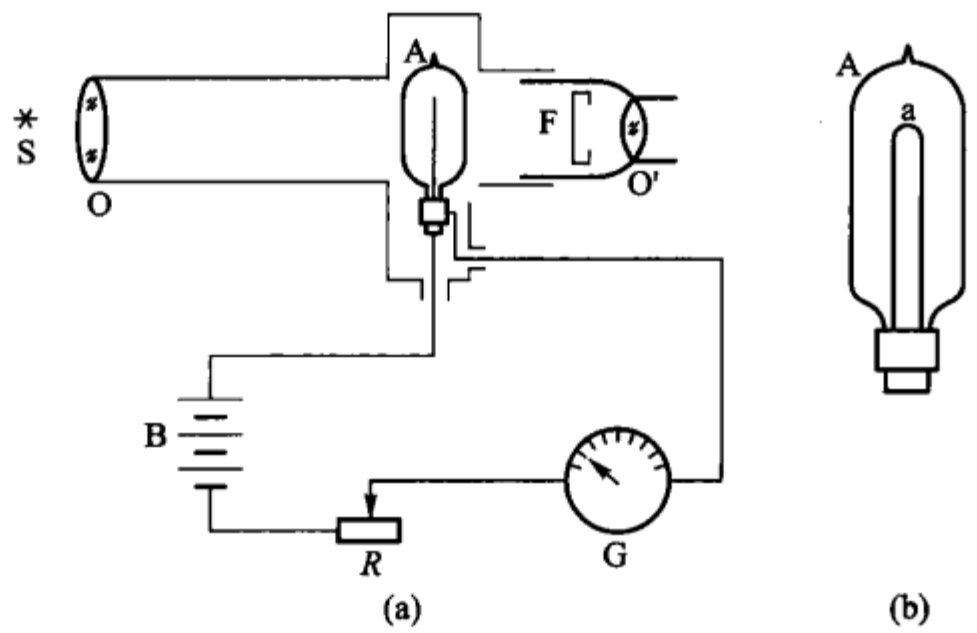


图 16-9

和其实际温度间的关系.

设物体的实际温度为 T,对于波长 λ,其亮度为 $L'_{\lambda,T}$,亮温度为 T_b. 同一温度 T 的黑体对于波长 λ 的亮度为 $L_{\lambda,T}$. $L'_{\lambda,T}$ 与 $L_{\lambda,T}$ 是不相等的. 设二者的比值为 $\varepsilon_{\lambda,T}$,

$$\varepsilon_{\lambda,T}=\frac{L'_{\lambda,T}}{L_{\lambda,T}}, \tag{16-13}$$

根据亮温度的定义

$$L'_{\lambda,T}=L_{\lambda,T_b}, \tag{16-14}$$

式中 L_{λ,T_b} 是温度为 T_b 时的黑体的亮度. 由式(16-13)及(16-14)可得到

$$\varepsilon_{\lambda,T}L_{\lambda,T}=L_{\lambda,T_b}. \tag{16-15}$$

如果 $\lambda<\lambda_m$,可简单地用维恩公式(16-6)来表示黑体的亮度:

$$L_{\lambda,T}=\frac{c_1}{\pi}\lambda^{-5}e^{-\frac{c_2}{\lambda T}},$$

$$L_{\lambda,T_b}=\frac{c_1}{\pi}\lambda^{-5}e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}.$$

将上二式代入式(16-15)即得

$$\varepsilon_{\lambda,T}\frac{c_1}{\pi}\lambda^{-5}e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}=\frac{c_1}{\pi}\lambda^{-5}e^{-\frac{c_2}{\lambda T_b}},$$

由此得

$$\varepsilon_{\lambda,T}=e^{\frac{c_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_b}\right)}.$$

取对数后求得

$$T=\frac{c_2 T_b}{\lambda T_b \ln \varepsilon_{\lambda,T}+c_2}. \tag{16-16}$$

当温度不超过 3 000 K 时，黑体的分布曲线的极大值 λ_m 位于红外部分，所以通常 λ 选在 660 nm 处. 如果已知亮度比值 $\varepsilon_{6600,T}$，我们就可以由式(16-16)从亮温度求得物体的实际温度.

很多物质的 $\varepsilon_{6600,T}$ 的值都已测定，它随温度略有变化，其中某些值列于表 16-1 中.

非黑体的亮度与方向有关，表 16-1 中所列的 ε_{6600} 的值都是在辐射表面法线方向的值. 故光测高温计应对准法线方向测量.

表 16-1

物质	温度/K	ε_{6600}	物质	温度/K	ε_{6600}
钼	1300	0.40	氧化铁	1500	0.92
	2300	0.36	镍	熔化温度	0.37
钽	1300	0.44	氧化镍	1500	0.85
	3200	0.38	铂	固态的	0.31
碳	1500	0.89		液态的	0.35
	2500	0.84	熔化铜	1500	0.15
银	熔化温度熔化的	0.05	氧化铜	1300	0.80
		0.07		1500	0.60
铁	熔化温度	0.36			

2. 色温度

在不同温度下黑体辐射能量按波长分布的曲线有如图 16-6 的形状. 与分布曲线极大值相应的波长 λ_m 与温度 T 之间遵从维恩位移律(16-11). 因此，由黑体分布曲线极大值定出 λ_m，即可由式(16-11)求得黑体的温度 T.

对于非黑体，不能应用维恩位移律. 但如某物体在温度 T 时，它的辐射能量随波长分布的曲线大致和温度为 T_c 的黑体的分布相同时，则 T_c 为该物体的色温度(color temperature)，简称色温. 由于分布大致相同，所以该物体发出的光的颜色和在温度 T_c 的黑体的颜色很接近. 例如，说钨丝灯的色温度为 2 854 K，即表示它辐射的颜色和在 2 854 K 时的黑体所辐射的有相同的成分.

所谓能量分布相同，也就是物体的亮度的最高峰及其左右每两个不同波长的亮度的比值和黑体的相应各波长的亮度的比值相等. 在某些特殊工作中，取两个不同波长(二色法)或三个不同波长(三色法)的亮度来比，也就可以了. 以二色法为例：设 $L(\lambda_1,T)$，$L(\lambda_2,T)$ 各为黑体在温度 T 时在 λ_1，λ_2 处的亮度；

$\varepsilon(\lambda_1,T)$,$\varepsilon(\lambda_1,T)$为物体在温度 T 时在 λ_1,λ_2 处的发射本领,则物体在温度 T 时的亮度为 $\varepsilon(\lambda_1,T)L(\lambda_1,T)$ 及 $\varepsilon(\lambda_2,T)L(\lambda_2,T)$,黑体在温度 T_c 时在 λ_1,λ_2 处的亮度为 $L(\lambda_1,T_c)$,$L(\lambda_2,T_c)$. 则根据色温度的定义有

$$\frac{L(\lambda_1,T_c)}{L(\lambda_2,T_c)}=\frac{\varepsilon(\lambda_1,T)L(\lambda_1,T)}{\varepsilon(\lambda_2,T)L(\lambda_2,T)} \tag{16-17}$$

当温度不超过 3 000 K 时,可在可见光区域中取 $\lambda_1=0.47\ \mu m$,$\lambda_2=0.66\ \mu m$,并可将黑体的亮度用维恩公式近似地表示. 则由式(16-17)可得到

$$\frac{1}{T}-\frac{1}{T_c}=\frac{\ln\dfrac{\varepsilon(\lambda_1,T)}{\varepsilon(\lambda_2,T)}}{C_2\left(\dfrac{1}{\lambda_1}-\dfrac{1}{\lambda_2}\right)}. \tag{16-18}$$

所以对于一给定的物体若已知该物体在同一温度下这两个波长的发射本领,即可以从色温度求得该物体的实际温度.

显然,如物体为黑色[$\varepsilon(\lambda_1)=\varepsilon(\lambda_2)=1$]或灰体[$\varepsilon(\lambda_1)=\varepsilon(\lambda_2)<1$],则色温度等于实际温度.

对于辐射选择性很大的物体,它的辐射分布不可能和任何一温度的黑体的分布接近,因而色温度的概念对于这些物体便失去了意义. 但人们有时在相当窄的波段范围内(特别是可见光的范围内),仍用色温度来描述光源在这一波段中辐射分布的情形,以比较在这一波段内光源所含的颜色和哪一温度的黑体相似. 因而在照明及摄影技术中常常给有选择散射的天空以 10 000 ~ 20 000 K 的色温,给非热平衡辐射的日光灯以 6 000 ~ 7 000 K 的色温.

在色度学中,色温的定义比本书中的定义更广义些,但在一般的光测高温工作中,多系采用本书中所述的定义.

3. 辐射温度和辐射高温计

测量出黑体的辐出度由斯忒藩 - 玻耳兹曼定律也可求得黑体的温度.

图 16-10 为辐射高温计的简图. L 是透镜,ab 是热电偶,G 是电流计,用来测量热电偶中产生的电流强度. 将仪器对准黑体的表面 S,使表面 S 由透镜 L 成像于热电偶 ab 处. 则热电偶中所产生的电流与黑体的辐出度成正比,而辐出度等于 T^4. 故预先用已知温度的黑体将光测高温计校好刻度,即可用来测量温度. 对于非黑体,这样测得的不是实际温度,而是辐射温度 T_r,它相当于辐出度等于被测物体的辐出度的黑体的温度.

以 M_T'代表非黑体在温度 T 时的辐出度,M_{T_r}代表黑体在温度 T_r 时的辐出度,则根据辐射温度的定义及式(16-12)和式(16-13),有

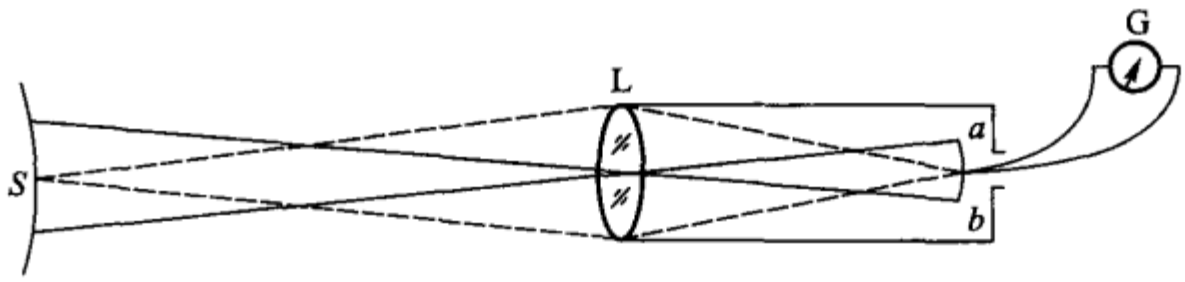


图 16－10

$$M_T' = M_{T_r},$$

$$K\sigma T^4 = \sigma T_r^3,$$

$$T = \frac{T_r}{\sqrt[4]{K}}. \tag{16-19}$$

因此，只要知道非黑体的平均发射本领 K 即可由辐射温度 T_r 算出其实际温度 T. 根据测量结果，K 值小于 1，故物体的辐射温度小于其实际温度. K 通常随温度增高而增大，表 16－2 给出了一些物质的 K 值.

表 16－2

物质	温度/K	K	物质	温度/K	K
钨	1 300	0.15	铁	1 500	0.11
	2 300	0.29	氧化铁	1 500	0.89
	3 300	0.34	镍	1 500	0.06
钼	1 300	0.12	氧化镍	1 500	0.85
	2 300	0.23	铂	1 500	0.15
钽	2 300	0.25	熔化铜	1 400	0.15
碳	1 500	0.52	氧化铜	1 400	0.54
银	1 300	0.04			

§16－6　线光谱　氢原子光谱

前面讨论了密集谐振子所产生的连续光谱，表明人们不需要规定构造黑体空腔的物质结构. 现在来讨论 §16－1 所提出的第二种形式的辐射，那就要依赖于产生辐射的原子或分子的结构了. 这种辐射的光谱，呈现许多分离的明线条，故名线光谱. 最简单的线光谱是氢光谱，因为氢原子的构造是所有元素中最简单的一员.

人们从氢光谱的排列规律，发现氢原子构造，从而了解到原子分立的能级，以及由于能级间的跃迁而产生光的辐射. 这里仅介绍氢原子与其光谱的简单的

关系,以建立原子的能级概念.较复杂的原子光谱,将留在原子物理或量子物理课程中去讨论.

图 16-11 为一氢放电管,管内是稀薄氢气,压力在 133.322 Pa.管一端有石英窗,以便透出紫外线.当两电极通以 2~3kV 电压,管内放电.把从窗口出射的光,投射到一紫外摄谱仪上,可获得如图 16-12(a)的谱线.图 16-12(b)是太阳光谱的夫琅禾费吸收线,其中包含氢元素的特征吸收谱线,它表示太阳表面也存在氢元素.光谱从红光到紫外,有一系列分立的明线,称巴耳末线系.在红端排列稀,在紫端排列密,到紫外更密,逐渐不可分开.在那里有个界限,称线系极限.过此界限尚有一段连续紫外光谱.这系列谱线的前几条谱线的符号与波长列于表 16-3 中.用分辨率高的摄谱仪,可观察到 30 余条.

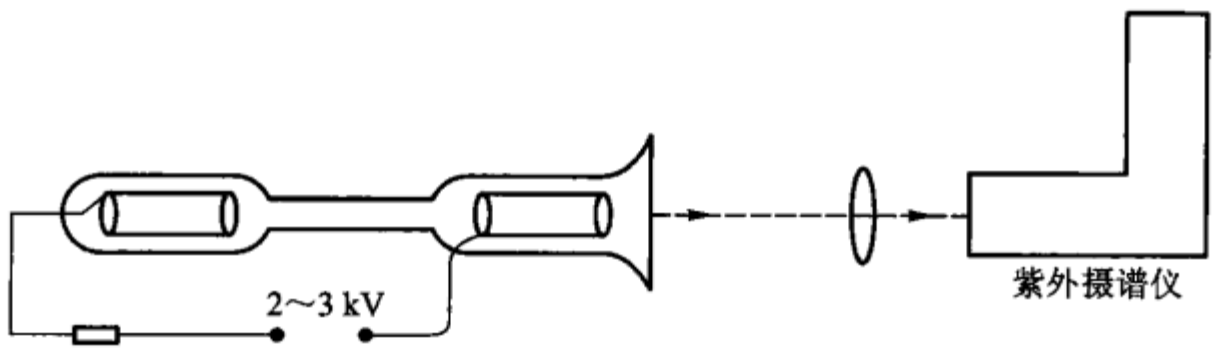
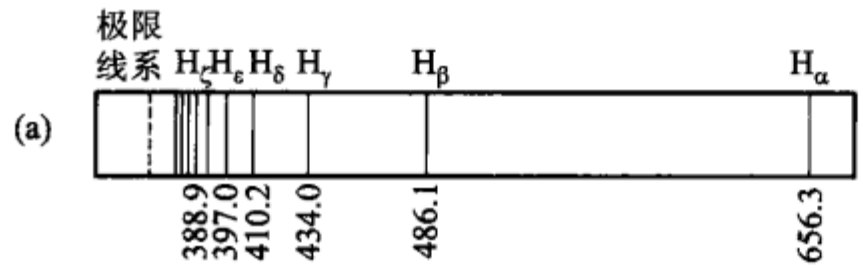


图 16-11



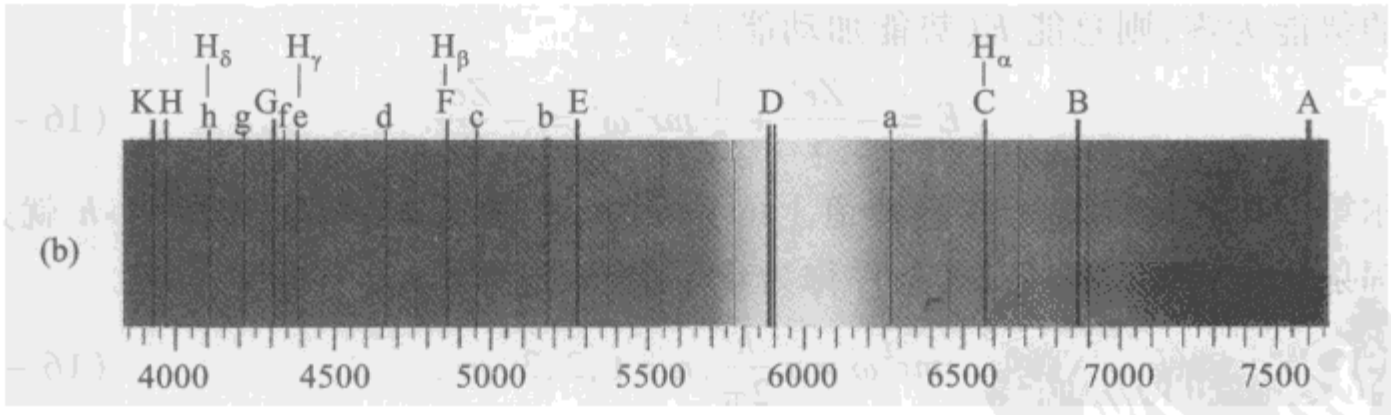


图 16-12

表 16-3 氢光谱的部分谱线符号与波长

谱线符号	波长/nm	谱线符号	波长/nm	谱线符号	波长/nm
H_α	656.3	H_ζ	388.9	H_λ	373.4
H_β	486.1	H_η	383.5	H_μ	372.1
H_γ	434.0	H_θ	379.7	H_ν	371.1
H_δ	410.2	H_ι	377.0		
H_σ	397.0	H_κ	375.0		

观察这些谱线的波长，发现它们的分布并非漫无规则的. 早在 1885 年英国人巴耳末发现每一条谱线的波长，可用下列简单的经验公式来计算：

$$\lambda = 364.56 \times \frac{n_2^2}{n_2^2 - n_1^2}, \tag{16-20}$$

其中 n_1 与 n_2 是小的整数. 当 $n_1 = 2, n_2 = 3,4,5,\cdots$ 就可算出 $H_\alpha, H_\beta, H_\nu, \cdots$ 一系列谱线的波长. 它们与实验测量值符合得很好. 这个发现对光谱学提供了重要的开端. 后来人们在氢光谱的其他区域发现许多线系，它们的波长都可以概括在下面一个简单的公式中. 以波数 $\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda}$ 来表示：

$$\tilde{\nu} = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right), \tag{16-21}$$

其中 R 是个常数，当 $n_1 = 1, n_2 = 2,3,4,\cdots$ 为在紫外区的莱曼线系. 当 $n_1 = 2, n_2 = 3,4,5,\cdots$ 为在可见及紫外区的巴耳末线系. 当 $n_1 = 3, n_2 = 4,5,6,\cdots$ 为在近红外区的帕邢线系. $n_1 = 4, n_2 = 5,6,7,\cdots$ 为在红外区的布拉开线系. 当 $n_1 = 5, n_2 = 6,7,8,\cdots$ 为在远外区的普丰德线系.

在这些辐射的规律的启示下，丹麦人玻尔(Bohr)设想了一氢原子模型. 玻尔第一假定氢原子中只有一个电子. 它在围绕着原子核作圆运动，当有心库仑力 e^2/r^2，正好与角频率为 ω 的离心力 $mr\omega^2$ 平衡时，圆运动就稳定在半径为 r 的轨道上. 此时

$$\frac{Ze^2}{r^2} = mr\omega^2. \tag{16-22}$$

式中 m 是电子的质量，e 是它的电荷，Z 是原子序数. 设电子距原子核为无穷远处的势能为零，则总能 E(势能加动能)为

$$E = -\frac{Ze^2}{r} + \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = -\frac{Ze^2}{2r}. \tag{16-23}$$

玻尔第二个假定是电子在它轨道上的角动量，必须是 $h/2\pi$ 的整数倍. h 就是黑体辐射中的普朗克常量. 这条件称为量子化条件. 即

$$mr^2\omega = n\frac{h}{2\pi}, n = 1,2,3,\cdots, \tag{16-24}$$

所以电子运动的轨道是量子化的，不能有 n 为分数的居间的轨道. 将式(16-24)代入式(16-22)得轨道的半径为

$$r = \frac{n^2h^2}{4\pi^2mZe^2}, \tag{16-25}$$

因而原子的总能也是量子化的，有级的，不可能有连续的或居间的能级. 将式(16-25)代入式(16-23)，对于氢 $Z = 1$，得

$$E = -\frac{2\pi^2me^4}{n^2h^2}. \tag{16-26}$$

所以当 n 一定时,原子具有一定能态,处于一定能级.

玻尔第三个假定:氢原子在稳定状态,亦称正常状态,电子在 $n=1$ 的轨道上运动.当被放电管中的电子或离子碰撞时,电子就跃迁到 n 较大的轨道上运动.这时称氢原子在激发态.激发态能量较大,是不稳定的.当电子跃迁回到低能态时,发射辐射 $h\nu$.辐射的频率,是由两能级的能量差给出的.设 E_1 为原子在低能级的能量,E_2 为在高能级的能量,仍以波数 $\tilde{\nu}$ 来表示:

$$\tilde{\nu}=\frac{E_2-E_1}{ch}=\frac{2\pi^2me^4}{ch^3}\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right)=R\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right), \tag{16-27}$$

这公式和巴耳末的经验公式是一致的.R 称为里德伯(Rydberg)常量.计算值 $R=1.097\times10^7\,\mathrm{m}^{-1}$ 与实验测定值符合,表明玻尔假设的正确.

图 16-13 表示氢原子的电子的各种可能的轨道.最内 $n=1$ 轨道是稳态或称正常态,也称基态.把数字代入公式(16-26),当 $n=1$,$r=0.0528$ nm.故电子最内轨道的直径约为 0.1 nm.这数值和用其他方法测得的相符.其他轨道半径和 n^2 成正比,为 $4r_1$,$9r_1$,….能级间的跃迁,图中用箭头来表示.当激发电子的能量大得足够电子脱离原子核的吸引力时,电子游离,获得自由运动.那时电子除有 $n=\infty$ 的能量外,还可有非量子化的动能.当这些电子跃迁到轨道上来,放出的能量是连续的动能,因而得到在线系极限外的连续光谱,我们在紫外吸收光谱方法中,以此作为紫外连续光源.

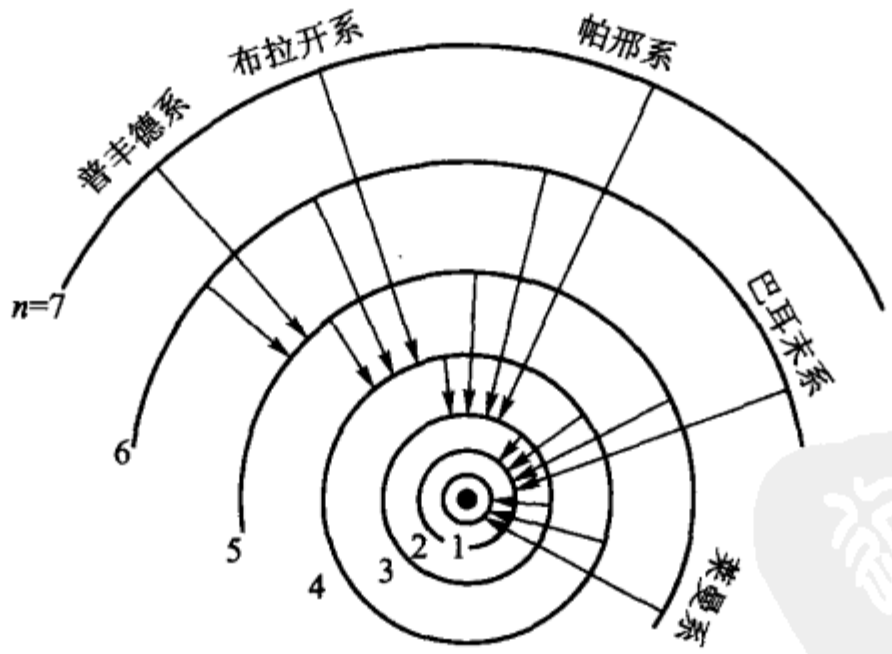


图 16-13

由于用轨道来表示电子能量,当 n 大时,相当不便.图 16-14 中我们放弃了圆轨道,索性只画几条横平行线,每一线代表一个与轨道相应的能级.它们在纵坐标上的位置和相应的能量成正比.当 $n=\infty$,$E=0$ 这是能量的起点,也是线系的极限.其他 n 值相应的 E 值都是负数.只有超过 $n=\infty$,脱离原子核吸力的电子,E 才是正的.这时 E 代表电子自由动能.这样比画轨道省地方,而且便于我们在需要时,放弃轨道模型,而只留能级或能态的概念.图中向上箭头表示原子受

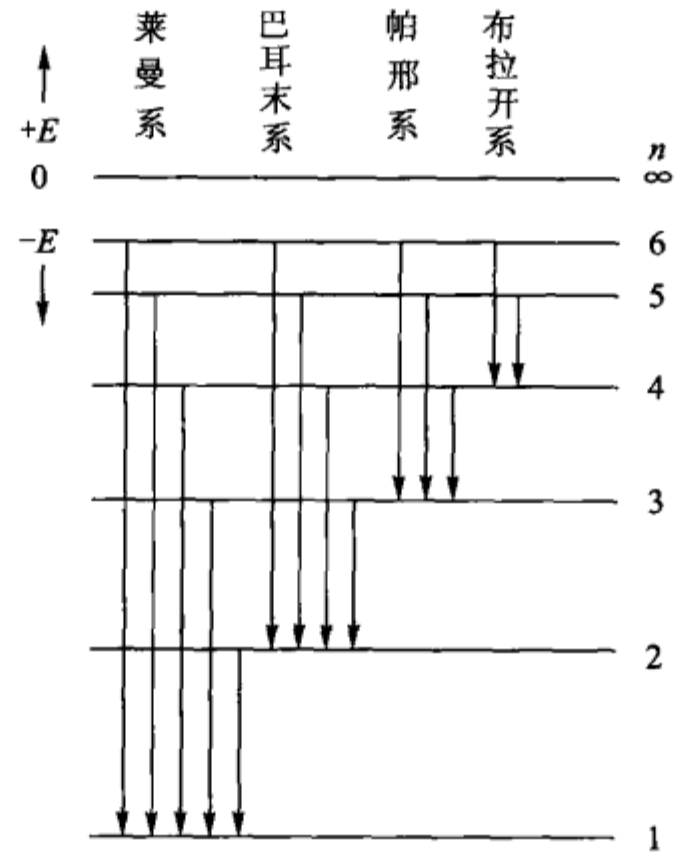


图 16 - 14

电子碰撞获得能量或吸收光的辐射能而激发,向下箭头表示辐射.

进一步研究稍复杂的原子,发现它们的光谱很复杂,不像氢原子光谱那样简单. 即使氢的谱线,在分辨率稍高的光谱仪中,也能观察到谱线有分裂. 因此仅用 n 这个量子数不能够描述分裂的能级. 稍后德国人索末菲(Sommerfeld)设想对 $n>1$ 的轨道除圆形外还有椭圆形的. 首先,要描述一个在二维空间作运动的电子,除角动量量子化外,还需要有径向动量的量子化. 其次,在三维空间中轨道平面在和某一特定的方向的取向也产生量子化(如在外磁场电场等方向上),这种取向的量子化称空间量子化. 再次,电子还有自旋的量子化. 这些动量的相互作用,及转动时产生磁矩的相互作用,使能级分裂. 在复杂原子中,价电子多,它们的轨道与自旋相互作用更复杂,能级分裂更多,所表现的光谱更复杂,这里不再深入谈了.

氢原子模型虽简单明了,有助于我们阐明光的发射的一些概念,但我们不能硬性依靠它,因为模型毕竟是机械图像. 辩证唯物主义告诉我们:运动着的物质世界图像,不一定全是机械的,而是某种更复杂的或是电磁图像. 我们不能把机械图像推广到光子、电子、原子等微粒子范围,因为它们归根到底,不是缩小了的弹球. 处理微观世界的光子、电子、原子等,只有用量子力学才能比较成功地得到解决. 虽然上面所提到的名称及某些含义还保留着,但有些意义却不同了. 例如“轨道”,按量子力学,它是电子在空间的概率密度最大的所在,没有具体表示某电子在那里围绕的概念. 而能级、能态的概念亦获得广泛应用.

* §16-7 带 光 谱

带光谱是分子发射光谱. 最简单的是双原子分子光谱. 常见的带光谱可由碳棒在空气中放电获得. 不太稀薄的稳定双原子分子气体,在放电管中也发射带光谱,如 N_2、NO、CN、CO 等 . 它们的光谱是一段段的带. 用高分辨率光谱仪观察,每一带包含着很多细线,比原子光谱还复杂.

从能级观点,分子的总能量包含三部分:(1)分子中二个原子的价电子的能量 E_e;(2)二个原子相互作用的振动能量 E_v;(3)二个原子核围绕着通过它们重心的轴作转动的能量 E_r. 因此分子总能量 E 为

$$E = E_e + E_v + E_r, \tag{16-28}$$

这些能量都是量子化的. 所以每个电子能级上叠加许多振动能级,每个振动能级上又叠加许多转动能级,但光的发射仍然是能级间的跃迁,即

$$h\nu = E - E' = (E_e - E_e') + (E_v - E_v') + (E_r - E_r'), \tag{16-29}$$

这些能级差的大小不一样. 一般 $E_e - E_e' >> E_v - E_v' >> E_r - E_r'$ 电子能级跃迁相当于发射紫外线到可见光(波数 $\tilde{\nu} \sim 25\,000\ \mathrm{cm}^{-1}$),单纯振动能级的跃迁,相当于发射红外光(波数 $\tilde{\nu} \sim 1\,000\ \mathrm{cm}^{-1}$),单纯转动能级的跃迁相当于发射远红外线(波数 $\tilde{\nu} \sim 20\ \mathrm{cm}^{-1}$),三种叠加在一起,仍在可见光到紫外区域,称分子的电子光谱. 振动与转动叠加在一起,在红外区,称振转光谱.

典型的带光谱如图 16-15 所示. 图中 $a, b, c, \cdots$ 称为带;$A, B, C, \cdots$ 称为带组. 每一带中各条谱线相当于在 $(E_v - E_v')$ 及 $(E_e - E_e')$ 不变时 $(E_r - E_r')$ 的改变. 这就是说在一定带中,由于转动能级的跃迁形成一组谱线,成为一带. 当 $(E_e - E_e')$ 不变时,$(E_v - E_v')$ 的改变得出带 $a, b, c, \cdots$,如 $E_e - E_e'$ 也改变,得出带组 $A, B, C, \cdots$. 这些是典型带光谱的示意图. 因为实际上有些带组常常彼此交错或重叠,增加了识别分子光谱的困难.

单纯转动光谱及振转光谱较简单些,一般研究从振转开始. 在分辨率较低的仪器中,只显示振动能级跃迁的光谱,而转动能级跃迁的谱线合并为一条粗线.

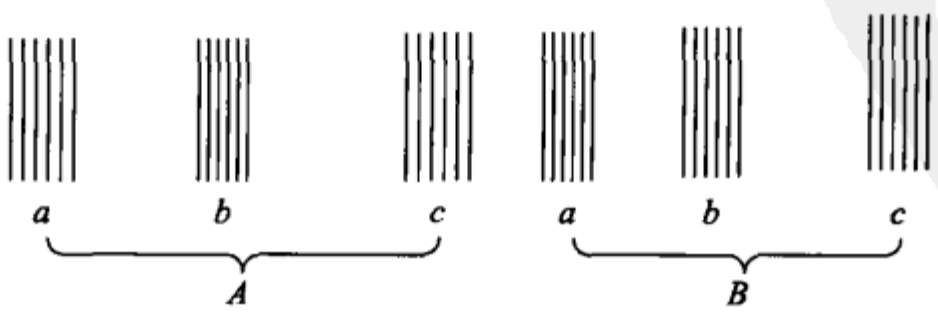


图 16-15

图 16-16 是空气中的氮分子及一氧化氮的几段带光谱的正片. 波长范围是

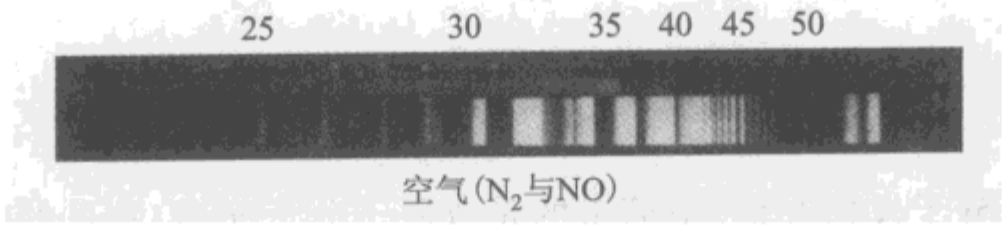


图 16 – 16

230 ~ 650 nm.

至于多原子分子光谱则更复杂. 除少数稳定分子外,难以用一般激发的办法来产生. 因在激发过程中,分子早已分解了. 所以研究多原子分子,经常采用红外吸收光谱或拉曼散射光谱法,研究它们的振转或转动.

* §16 – 8　光　　源

如第一节中所述,物体发射光能共有两种形式:一种是热辐射;一种是"发光". 目前照明用的光源大多数是热辐射形式的赤热固体光源. 而用各种激发方法维持发光的光源,一般常用于实验工作中. 光源的种类很多,下面简单介绍几种常用的光源.

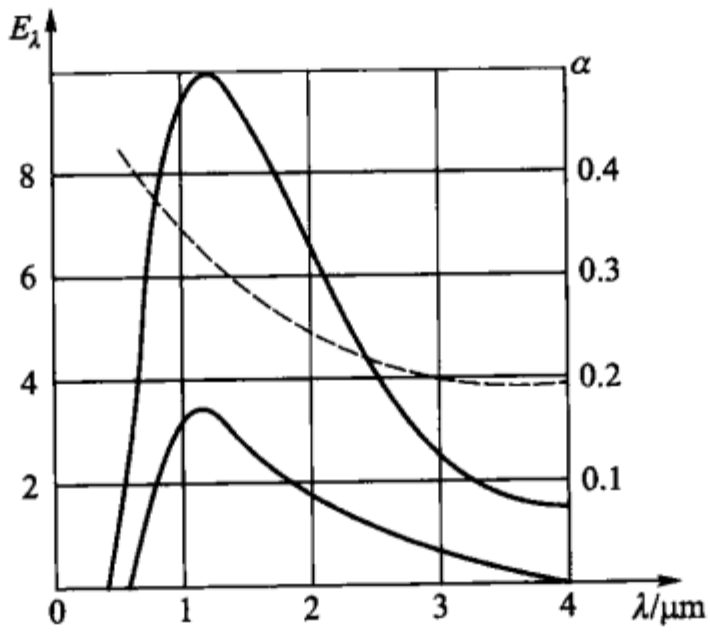


图 16 – 17

1. 钨丝灯

日常照明用的电灯就是钨丝灯. 钨丝是非黑体,其面发光度比同一温度下黑体的小. 图 16 – 17 中两实曲线即为在 2 450 K 时钨及黑体的辐射能量分布曲线. 虚线是两实曲线纵坐标的比值 α. 从这条曲线可看出,当波长减少时,钨的辐射本领增加得比黑体的快. 这一特点使得在一定的温度下,钨丝可能比同一温度下的黑体具有更大的发光效率. 所谓发光效率是指:光源辐射能量中,对照明有贡献的可见光部分的辐射能与光源的总辐射能之比:

$$\text{发光效率} = \frac{\int_0^\infty V(\lambda) M_{\lambda,T} \mathrm{d}\lambda}{\int_0^\infty M_{\lambda,T} \mathrm{d}\lambda}, \tag{16-30}$$

式中 $V(\lambda)$ 为视见函数，$\int_0^\infty V(\lambda) M_{\lambda,T} \mathrm{d}\lambda$ 即在第五章中所表示的光源表面面积元发射的总辐射能所产生的总光能.

增加钨丝的温度可以提高发光效率. 钨丝的熔点虽然高达 3 655 K，但由于它灼热时，在真空中很易蒸发，故超过 2 500 K 就会烧毁. 所以真空钨丝灯不能有较高的发光效率. 目前用的电灯，泡内都充有氮、氩等惰性气体，以减少钨丝的蒸发. 这样，在 3 000 K 或更高的温度下都不致缩短使用寿命，而发光效率可以提高，在钨丝灯泡内加入微量碘或溴的碘钨灯或溴钨灯，可以保证钨丝不被蒸发，使发光效率大大增加，延长使用寿命. 碘钨灯泡的外壳是用耐高温的石英制成，体积很小，并且亮度稳定，是摄影和放映电影的好光源，也可以作机场、广场、工地等场所的照明光源.

对钨在几种不同温度的发射和黑体的比较，人们已做过详细的研究. 钨丝灯用黑体辐射标准校过后，是很方便的次级标准光源. 将钨丝盘成锥状或用钨带，使有约 1 cm^2 的发射面积. 在要求不太高的工作中，它在色温 T 给出的光谱，接近黑体在温度 T 的辐射，它的光谱辐出度就可以按普朗克公式(或维恩公式)来计算.

钨丝灯在近红外和可见光区域的辐射能很强，故在可见光和近红外吸收光谱研究中常用钨丝灯作光源.

2. 直流电弧

当两根连在直流电源上的金属电极先碰在一起，然后分开时，在两金属电极间可得到一极亮的电弧. 图 16-18 所示为简单的直流电弧线路. a，b 为两金属电极. 因为电弧都有负阻特性，所以电路中一定要串联一个能通大电流的电阻，才能保持电弧的稳定和避免电路烧毁. 调节电阻可获得所需的电流值. 电流为 3 ~ 5A 时，电弧温度可达 4 000 ~ 7 000 ℃，电流大到十几安培时，电弧温度可达 12 000 ℃. 电弧焰口的亮度很大. 普通碳弧焰口的亮度约 13 000cd/cm^2. 在气压达到 20atm(约 2×10^6Pa)以上的高压惰性气氛中放电的碳弧，焰口温度可增至 7 600 ℃. 而亮度大约增至 280 000cd/cm^2，即已超过了太阳的亮度. 在碳极内加入一些稀土金属的盐类，还可以使两电极间的赤热蒸气云的亮度大大增加，这样

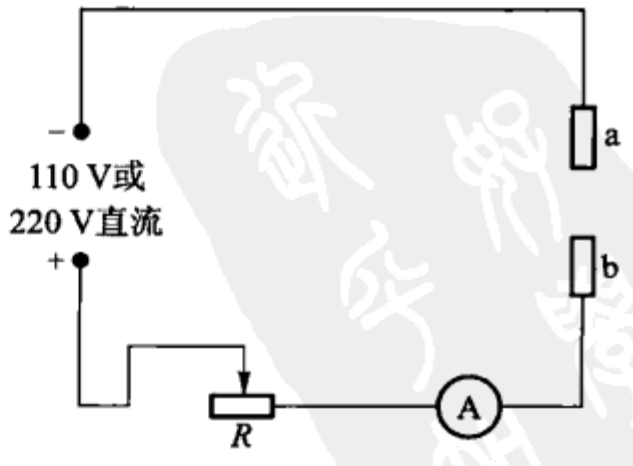


图 16-18

的碳弧常用于放映电影及用作探照灯.

在电弧中极间蒸气几乎完全是电极物质的原子和离子蒸气,它们受激发后发出线光谱.根据这些线光谱可对电极物质成分进行定性和定量分析.直流弧由于灵敏度高,特别适于做低含量的定性分析.电弧焰口所发射的是炽热电极的连续光谱.电弧所辐射的光谱中有许多紫外光谱,故在使用电弧时,必需带上玻璃的保护眼镜,否则会引起眼睛疼痛.

3. 交流电弧

在两金属电极间加以高压交流电源,即可得到高压交流电弧.简单的线路如图 16 - 19 所示.L 是扼流圈,R 是电阻,T 是升压变压器,将 220V 的低压升高到 5 000 V 左右.

低电压的交流弧不易点燃,必须另有助燃线路方能保持电弧不减.其线路较复杂,可参阅一般光谱分析书籍,此处从略.

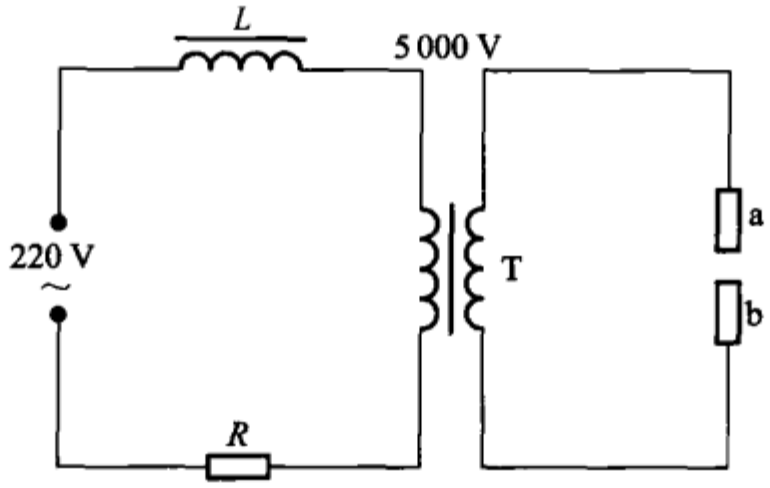


图 16 - 19

4. 电火花

图 16 - 20 为简单的电容火花线路.其中 T 为 10 000 V 左右的高压变压器,C 为 0.001 ~ 0.01 μF 的电容器.当电路接通时,在金属电极 a、b 间即可得到极亮的电容火花,其温度可高达 10 000 ℃,故所辐射的光谱线多为离子的谱线,放

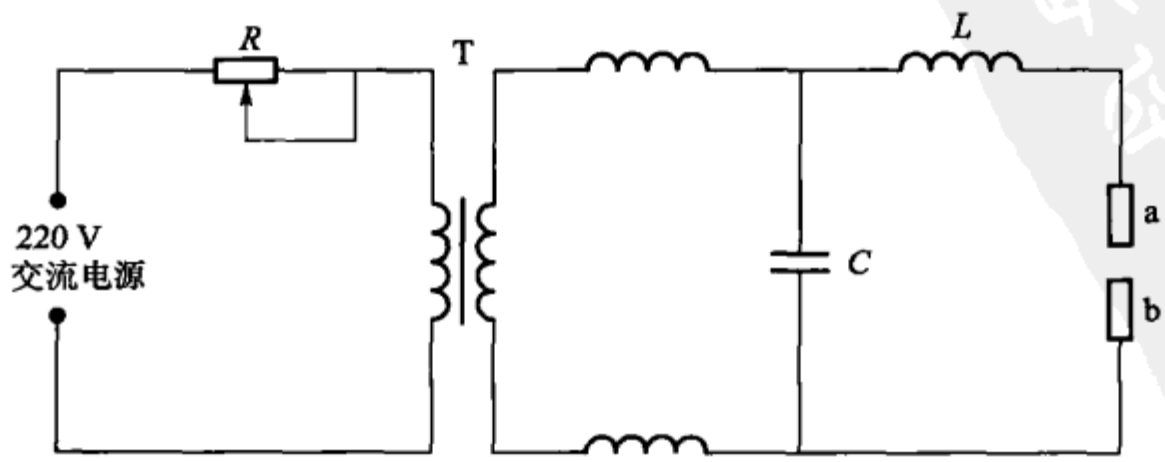


图 16 - 20

电间隙中的气体亦大部分是电极物质的蒸气. 由于电容火花的稳定性较好,特别适用于作电极物质成分的定量分析.

5. 低压水银弧

这种弧通常在十万帕或小于十万帕下工作. 在光学测试及光谱研究中,常被用作产生水银主要谱线的单色光源.

在实验室可以自制简单低压水银弧,如图 16-21 所示. 真空玻璃容器内装适量净水银. 电弧发生在内径约 3 ~ 4 mm. 玻璃管 AB 段,长约 3 cm. 它的像,正好被光谱仪的聚光镜聚焦在光谱仪的狭缝上. 用 110 V 直流电. 点燃时稍稍摇动容器,使两电极水银柱接通,然后分开,形成电弧. 电路中需要合适的 L 与 R 以稳定与限止电流,维持电流在 1A 左右. 管内水银蒸气压力不会太大,因为部分蒸气会在球壁冷却,凝结为液体,如欲获得紫外线,应改用熔凝石英做的容器.

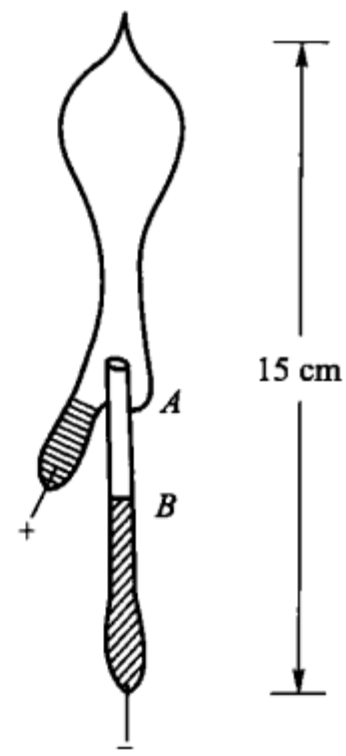


图 16-21

6. 高压水银弧

增加水银弧的蒸气压可以提高弧的亮度. 高压水银弧的蒸气压可到几十万帕,甚至几百万帕,2 500 kPa 以上的水银灯称超高压水银灯. 一般的高压水银灯的构造如图 16-22 所示. 真空的圆柱形石英管的两端是电极,为了使电极易于放出热电子,电极上涂有氧化物,管内充有水银和一些氩气. 高压水银弧的电源可用 220 V 的交流电,但在电路中一定要串以足够大的扼流圈.

高压水银弧特别是超高压水银弧是科学研究工作中的一种重要光源. 超高压水银弧的蒸气压已有达 80atm 以上的,其构造与一般的高压水银弧有所不同. 它主要是用作 50 ~ 1 000 μm 的远红外光谱区的光源.

在图 16-22 的灯管外,加上一个里面涂有荧光粉的玻璃泡,就制成了高压水银荧光灯(图 16-23)高压水银荧光灯的发光效率等于普通灯泡的 3 ~ 4 倍,寿命比普通灯泡的高 5 倍以上,并且耐震不易断丝. 由于高压水银弧发出的紫外线可使荧光粉发光,选择合适的荧光物质,可使高压水银荧光灯的光色接近于日光,并且柔和而明亮,适用于街道、广场及工厂厂房照明用.

7. 日光灯

常用的日光灯实际上就是灯管内壁涂有一层荧光粉的水银灯. 水银蒸气发出的紫外线照射荧光物质使其发射出波长较长的可见光来. 可选配适当的荧光物质,使它们发出的荧光与太阳光的可见光部分相近. 常用的荧光物质有钨酸镁、硅酸锌、铍和硼酸镉等.

日光灯不像钨丝灯那样有很多没有用的辐射(红外光),它也不是热辐射,灯的温度只有三四十摄氏度,所消耗的电能要比钨丝灯节省 4 倍.

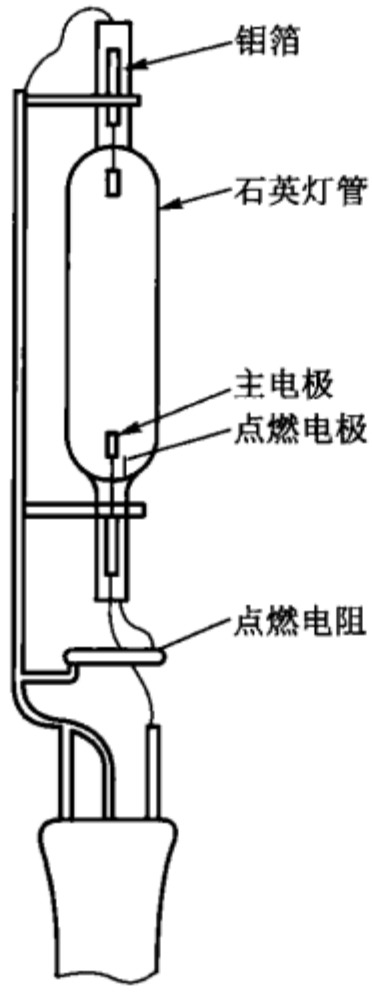


图 16 – 22



图 16 – 23

日光灯的构造和电路连接如图 16 – 24 所示. 其中 Ne 为有点燃作用的小氖气灯泡. 当电源接通后,氖灯放电,使泡内的一对金属片电极受热伸展而互相接触,于是氖灯自动熄灭. 在此瞬时,水银灯管内涂有氧化物的灯丝因有较大电流通过而发出电子,使水银灯放电. 同时小氖灯已冷却,两电极又分开. 但因水银灯已点燃,氖灯两端电压已降到氖灯放电电压以下,所以氖灯一直保持熄灭,除非水银灯熄灭时再起作用.

8. 钠弧灯

钠灯发出的光是单一的黄色(589 nm 及 589.6 nm),而且发光效率特别高(200 lm/W),是研究黄色光谱的好光源. 大功率的钠灯能穿透浓雾,所以它在港口、机场、船航信号方面得到广泛的应用. 但是由于它发的光是黄色的,所以不适合用于一般照明.

图 16 – 25 所示为具有旁热电极的电弧灯,其中充以钠蒸气就成为钠弧灯. 如充以其他金属蒸气,例如镉、铊、锌、铯、钾等的蒸气,就可制成各种金属蒸气弧. 为了易于点燃,管中也充有少量的氖气或氩气. 灯管必须使用不被所充金属蒸气腐蚀的特种玻璃制作.

镉弧灯有一条很锐细的特征红线 643.84696 nm,曾被采用为原始的波长

标准.

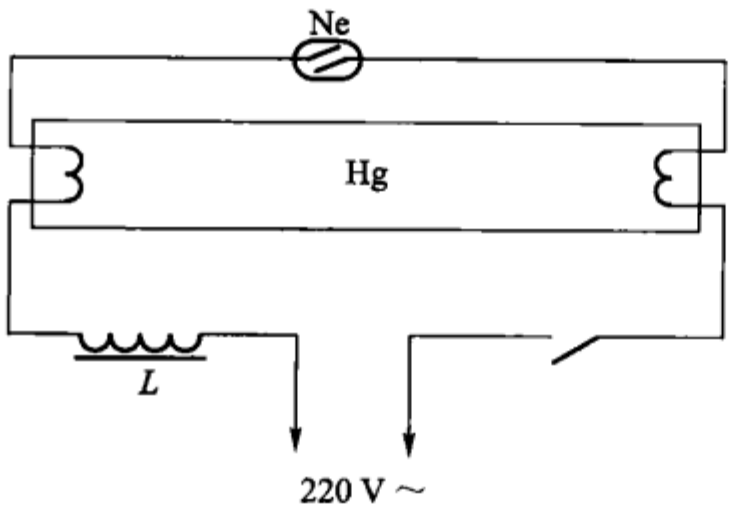


图 16 - 24

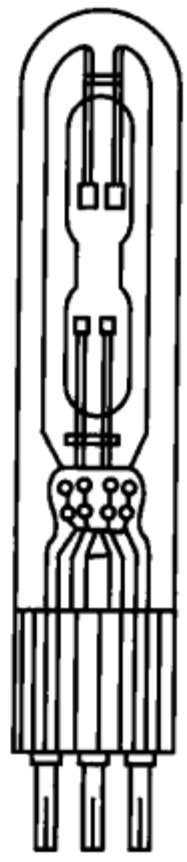


图 16 - 25

9. 氙灯

氙灯是利用氙气放电而发光的电光源. 氙灯可以分为长弧氙灯、超高压短弧氙灯和脉冲氙灯三类.

高压长弧氙灯的外形是一根石英管,两端各有一个钨金属电极,管内充有较高纯度的氙气. 通上电流以后,管内氙气受激发而发出强烈的光. 它的功率大,可从六千瓦至十几万瓦,甚至几十万瓦,而体积却比较小. 它的光特别明亮,一盏 50 kW 的长弧氙灯发出的光亮,大约相当于 1 000 盏 100 W 的普通灯泡、880 多盏 40 W 的日光灯的光量. 有一盏长弧高压氙灯,就可以节省大批灯柱和电气材料. 因此在广场、马路、车站、港口等处做照明光源有独特的优越性. 这种灯的光色和太阳光相似,它不像高压水银灯偏蓝色,也不像普通灯的光呈红黄色,故有“人工太阳”之称.

至于超高压短弧氙灯,可作强点光源,用于电影机及探照灯.

脉冲氙灯的灯管内充有氙气,它在很强的电流作用下,在瞬时(几个毫秒)内能发出巨大的光量,它的亮度可以达到太阳表面的几倍. 主要用于高速摄影和激光的抽运.

脉冲光源的种类很多,摄影用的闪光灯泡就是最常见最简单的一种. 它是在普通灯泡的玻璃壳里边装进镁等金属制成的. 这种灯光闪光一次就废了,而脉冲氙灯却可以工作几百次到几万次.

10. 辉光放电气体发光管

辉光放电管一般在小于 1 kPa 及较小的电流密度下工作. 熟知的盖斯勒(Geissler)放电管(图 16 - 26)是这类放电管的代表. 图中 a 是铝电极.

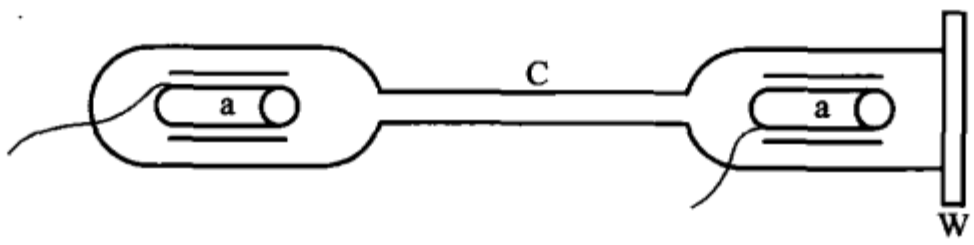


图 16 - 26

辉光放电管发出的光谱线很锐细,故适用于作波长标准的参考或用于干涉计中. 辉光放电管虽然制作简便,但由于必须使用高压电源(5 000 ~ 15 000 V),并且光较弱,目前在实验工作中已用得比较少.

附表:辐射名称与相对应的光度名称对照表

辐射名称	符号	定义	单位	英文名称
辐[射]能	W		J	radiant energy
辐[射]能密度	ω	$\omega = \partial W/\partial V$	J/m^3	radiant energy density
辐[射能]通量	Φ	$\Phi = \partial W/\partial t$	W	radiant energy flux
辐[射]出[射]度	M	$M = \partial \Phi/\partial S$	W/m^2	radiant
辐[射]照度	E	$E = \partial \Phi/\partial S$	W/m^2	irradiance
辐[射]强度	I	$I = \partial \Phi/\partial \Omega$ Ω:从点源发出辐射通量的立体角	W/sr	radiant intensity
辐射度, 辐[射]亮度	L	$L = \partial^2 \Phi/\partial \Omega \partial S\cos\theta$ $= \partial I/\partial S\cos\theta$ θ:发射面法线与视线夹角	$W/(sr \cdot m^2)$	radiance
吸收本领,吸收比	a	a = 吸收(*)/入射(*) (*)代表上面相应各量	比值	absorptance
反射本领,反射比	r	r = 反射(*)/入射(*)	比值	reflectance

续表

辐射名称	符号	定义	单位	英文名称
透射本领,透射比	t	t = 透射(*)/入射(*)	比值	transmittance
发射本领,发射率	ε	$\varepsilon = \dfrac{\text{某物体}(*)}{\text{与该物体等温的黑体}}$	比值	emissivity
光能			J	luminous energy
光能密度			J/m^3	luminous density
光通量	Φ		lm	luminous flux
光出射度	R	$d\Phi/dS$	lm/m^2	luminous luminous exitance
光照度	E	$d\Phi/dS$	lm/m^2	illuminance
发光强度	I	$d\Phi/d\Omega$	cd	luminous intensity
光亮度	L	$d^2\Phi/dS\cos\theta d\Omega$	cd/m^2	luminance

习　题

1. 设从壁炉小孔,用光测辐射法测得辐出度为 22.8 W/cm^2,计算炉内温度.

2. 从光谱辐射体亮度 L_λ 导出每平方米黑体在球面度内每微米波长间隔所发出的光子数为

$$n_\lambda = \frac{2c}{\lambda^4\left(e^{hc/\lambda kT}-1\right)}.$$

并证明 $\lambda_m T = 3\,670\mu m \cdot K$.

3. 计算波长 0.5μm 绿光的光子能量,以 J 及 eV 为单位,并同样计算频率为 1MHz 的无线电波的光子能量.

4. 在火箭上将大气层外的太阳光谱记录下来,测得它的最高峰在 465 μm. 把太阳作为黑体,计算太阳表面温度.

5. 钨带灯的发射面积 1 cm^2,色温为 3 000 K. 把它当作该温度的黑体,利用图 16-8,求距灯 50 cm 处在 $1cm^2$ 面积上受到的单色辐射功率. $\lambda = 0.4, 0.8, 1.0, 2, 4$ μm,波长间隔为 1 μm.

6. 设空腔黑体的腔壁上小孔的辐出度为 M,腔内能量密度为 u,证明

$$u = \frac{4}{c}M, \quad \text{因而 } u_{\lambda,T} = \frac{4}{c}M_{\lambda,T}.$$

提示:在等温黑体腔内,任何处任何方向的光亮度都一样. 用光度学的公式计算在球心 dS 向腔壁 dA 发射的功率.

7. 氦原子 $Z=2$,有两个价电子. 将其中一个价电子游离,它的光谱和氢光谱类似. 证明式

(16 - 27)成为

$$\tilde{\nu} = 4R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right).$$

8. 把原子核看做静止不动,得式(16 - 27)中之 R. 严格地说,电子和原子核围绕它们的质量中心而转,应以约化质量 μ 替代电子质量 m,即

$$\mu = \frac{m}{1 + m/M},$$

其中 M 是原子核质量,因而得 $R_{\mathrm{H}} = 109\ 677.459\ \mathrm{cm}^{-1}$, $R_{\mathrm{H}\theta} = 109\ 722.403\ \mathrm{cm}^{-1}$, $R_{\infty} = 109\ 737.424\ \mathrm{cm}^{-1}$, ∞ 表示氢原子核静止不动,若它的质量为 ∞,试核算这些数据.

取 $e = 4.8032505 \times 10^{-10}$ e. s. u. 电量, $h = 6.626196 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$, $m = 9.109958 \times 10^{-28}\ \mathrm{g}$, $M_{\mathrm{H}} = 1.6608 \times 10^{-24}\ \mathrm{g}$, $c = 2.9979250 \times 10^{10}\ \mathrm{cm/s}$. 得 $R_{\mathrm{H}} = 109\ 677.90\ \mathrm{cm}^{-1}$, $R_{\mathrm{He}} = 109\ 722.47\ \mathrm{cm}^{-1}$, $R_{\infty} = 109\ 737.33\ \mathrm{cm}^{-1}$.

第十七章

激　　光

§17-1　激光原理

激光是受激而发射的光，是被其他辐射感应而发生的辐射，故也称感应辐射．它是经过受激辐射放大产生的光束．它和一般光大不相同．在前面的干涉、衍射等现象及应用中充分表现了它的特性．在这里把它的特性归纳为下列三点：第一，普通光向四面八方发射，分散到 4π 立体角内，而激光则沿一条直线传播，仅在被衍射规定的小角内发散．第二，激光的相干性很好．普通钨丝灯、太阳光等是非相干光．就是作为长度标准的氪 86 的谱线 605.7 nm 的相干长度也只有数十厘米．而氦氖激光器发出的谱线 632.8 nm，相干长度可达数十米甚至数百米．第三，激光的输出功率虽然有个限度，但由于光束细，功率密度特别大，一般激光的亮度远比太阳的亮度还大．由于这些特点，激光从 1958 年发现以来，得到迅速发展与广泛应用，为光学开辟了一新纪元，引起科学技术的重大变化．

早在 1917 年，爱因斯坦在他的辐射理论中预见有受激发射存在，设物质的粒子（原子、离子、分子等总称）存在着一系列分立的能级，其中有上下能级 E_2 与 E_1．设 N_1 与 N_2 分别为单位体积内下能级为 E_1 与上能级为 E_2 的粒子数，在热平衡条件下粒子数服从玻耳兹曼分布，即

$$\frac{N_2}{N_1} = \mathrm{e}^{-(E_2-E_1)/kT} = \mathrm{e}^{-h\nu/kT}. \tag{17-1}$$

在常温下处于 E_2 的粒子数 N_2 是很少的，极大部分粒子都处于下能级 E_1（基态）中．假定在粒子的能级和辐射间存在着一种平衡，那么在单位时间内粒子吸收一个光子 $h\nu = E_2 - E_1$ 而将它自己从能级 E_1 上升到 E_2，这部分粒子数应当正好等于因发射同样光子而从能级 E_2 跃迁到 E_1 的粒子数，这里存在着三种类型的跃迁，以建立细致平衡．

1．上能级 E_2 的粒子，会自发地跃迁到下能级 E_1，发出光子 $h\nu$．这过程称自发发射．这部分粒子每秒跃迁总数与上能级粒子数 N_2 成正比与外来辐射密度无

关. 因此每秒自发发射的粒子总数为 $A_{21}N_2$，其中 A_{21} 称为自发发射概率，它的倒数表示粒子处于 E_2 的寿命.

2. 粒子吸收辐射 $h\nu$ 而从下能级 E_1 跃迁到上能级 E_2，每秒跃迁的粒子总数与辐射能密度 $\rho(\nu)$ 成正比并与处于下能级粒子数 N_1 成正比，写作 $B_{12}\rho(\nu)N_1$，其中比例常数 B_{12} 称为单位辐射密度的受激吸收概率.

3. 在上能级 E_2 的粒子，有一部分被辐射感应而跃迁到下能级 E_1 发出光子 $h\nu$，称受激发射. 这部分的粒子每秒跃迁总数当与上能级粒子数 N_2 及辐射能量密度 $\rho(\nu)$ 成正比，写作 $B_{21}\rho(\nu)N_2$，B_{21} 称为单位辐射能密度的受激发射概率.

A_{21}，B_{21} 及 B_{12} 统称爱因斯坦系数. 在热平衡下，每秒吸收光子数必需等于每秒自发发射与受激发射发出的光子数之和，即

$$B_{12}N_1\rho(\nu) = A_{21}N_2 + B_{21}N_2\rho(\nu). \tag{17-2}$$

由于热平衡系统粒子数按玻耳兹曼分布，由(17-1)和(17-2)式得

$$\rho(\nu) = \frac{A_{21}}{B_{12}e^{h\nu/kT} - B_{21}} \tag{17-3}$$

这样一个平衡系统，辐射能密度 $\rho(\nu)$ 必须与黑体辐射的 $\rho(\nu)$ 相等，故得

$$B_{12} = B_{21} = B, \tag{17-4}$$

$$A_{21}/B = 8\pi h\nu^3/c^3. \tag{17-5}$$

虽说自发发射粒子间相互关系是独立的，所发出光子间，没有固定相位关系；而受激发射与去感应的辐射有同频率与初相位，因而发出光比自发的光强. 然而从(17-5)式，得自发发射概率与受激发射概率之比 R 为

$$R = \frac{A_{21}}{B\rho(\nu)} = e^{h\nu/kT} - 1. \tag{17-6}$$

在室温下，对波长为 600 nm 光，$\nu = 5\times10^4$ Hz，代入(17-6)式，得

$$R \approx 10^{35}.$$

这估计表示在室温下在可见光区域，受激发射概率之小，几乎可忽略. 所以一般光源的发射，都是自发发射. 而其中受激发射，使人无法觉察. 难怪汤斯(Townes)等人在 1958 年先在微波制成了受激发射量子放大器(maser)后，才在可见光区域提出产生激光的理论与实验. 现在激光的英文名词为 Light amplification by stimulated emission of radiation 简称 Laser 是从 Maser 这字演变而得，译名莱塞，可见于一般读物中.

所以要产生激光，就要人们创造二个重要条件：第一，要颠倒热平衡系统中公式(17-2)所给的 $N_1 > N_2$ 的粒子分布. 要在非平衡系统中找到跃迁能级，在那里上能级粒子寿命较长的粒子数 N_2，要大于下能级粒子数 N_1. 就是要找到具有实现能级粒子数反转的工作物质. 第二，要建立一个谐振腔. 当某一频率信号(外来的，也可以是腔内自发的)在腔内谐振，在工作物质中多次往返时有足够

机会去感应处于粒子数反转状态的工作物质，才能产生激光. 被感应的辐射具有和去感应的辐射同方向、同相位、同频率与同偏振. 这些被感应的辐射，继续去感应其他粒子，造成连锁反应，雪崩似的获得放大效果，因而产生强烈的激光. 下面我们通过具体例子来理解这两个条件.

* §17 - 2　红宝石激光器

1960 年美国人梅曼(Maiman)首先做成红宝石激光器. 主要内容如图17 - 1所示. 红宝石磨成直径约 0.8 cm、长约 8 cm 的圆棒. 二端面抛光，成一对平行平面镜，平行度在 1′以内. 一端镀全反射膜，另一端有 10% 的透过率，让激光透出来. 氙闪光灯为螺旋形管，包围红宝石. 亦可为直条形，与红宝石平行放置在一聚光器内. 我们来看它是怎样给激光的产生创造条件的.

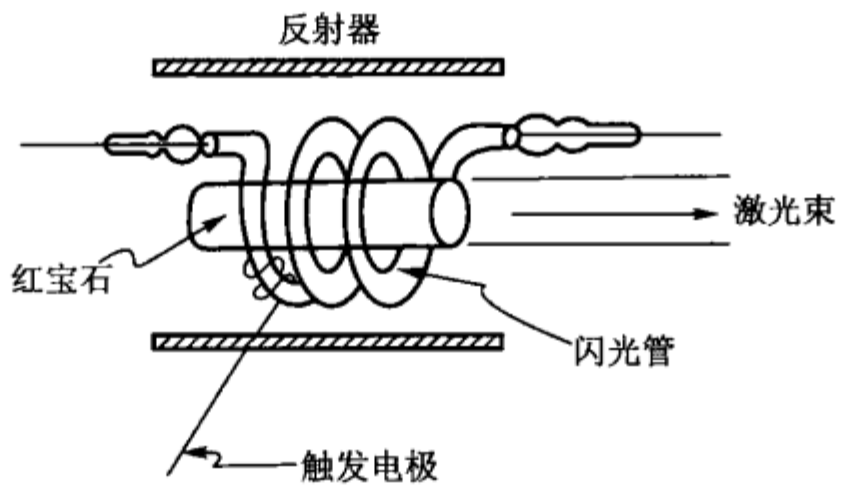


图 17 - 1

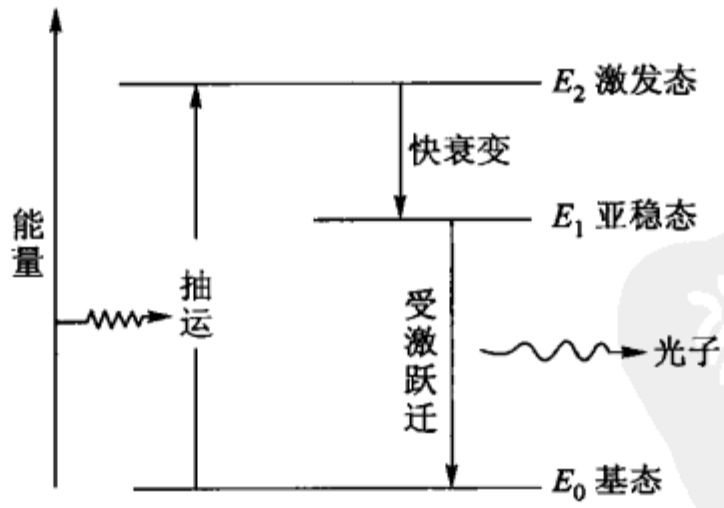


图 17 - 2

红宝石是三氧化二铝，含有重量 0.035% 铬离子. 铬离子是作为杂质，它们在 Al_2O_3 基质中有三能级 E_0，E_1，E_2[图(17 - 2)]. E_0 是稳态，E_2 是激发态，实际上 E_2 是两个宽带. E_1 是亚稳态，也包含两个挨近的能级. 处于 E_0 的粒子，被氙灯闪光激发到 E_2，这种激发称光抽运. 粒子在 E_2 是不稳定的，寿命很短，在约

10^{-7}s 内,很快自发无辐射地落入亚稳态 E_1. 粒子在那里寿命较长,约 10^{-3}s. 只要激发光足够强,在闪光时间内,亚稳态的粒子数增多,基态的粒子数减少,实现了粒子数反转.

红宝石两端的平行反射面反射率很高. 它们构成一个长间距的法布里 - 珀罗标准具. 光在两面间进行多次反射,要符合多光束干涉加强原理,即 $2nL = k\lambda$ 其中 n 是工作物质的折射率,L 是两镜面距离,也就是腔长,k 是多光束干涉级数,λ 是加强的波长. 只有满足这条件的光,才能形成持续振荡. 这就所谓谐振腔或称共振腔. 所以腔有两个作用. 第一个作用就是上节所述使在轴向光束来回反射不受损失,并在它们进行中不断感应处于粒子数反转的激发态粒子,产生受激光,参加这行列,继续感应其他同伴,因而获得放大. 腔还有一个作用是使在轴向进行的光束中符合多光束干涉加强的波长,谱线宽度变窄,强度增加,才有可能从透过率为 10% 窗口射出来. 对其他方向的光束,则反射数次后就偏出腔外. 对其他波长,亦因干涉相消而消失. 所以谐振腔还起了限制光束的方向及光的频率的作用. 如若没有谐振腔,纵然形成了粒子数反转,在亚稳态的粒子,亦只能通过自发发射发出红色荧光. 所以在这里要使受激发射产生,谐振腔是必需的. 当然能满足 $2nL = k\lambda$ 条件的,不止一个波长. 这就是以后要说明的模的问题.

从 10% 透过率窗口出来的激光是波长为 694.3 nm 的脉冲激光. 当氙灯另一次放电时,又产生另一脉冲激光. 两脉冲的时间间隔,决定于散热的措施. 上述红宝石棒的尺寸,每脉冲在 1 ms 内,输出的能量为焦耳数量级. 但输入能量很大,约为数千焦耳. 故效率不到 0.1%,绝大部分能量转化为热能. 这就限制了脉冲的时间间隔. 由于是脉冲,光的单色性较差,相干长度仅毫米数量级.

§17 -3 氦氖激光器

第一个连续工作气体激光器是在 1960 年由雅文(Javan),贝内特(Bennett)和赫利欧特(Herriott)制成的氦氖激光器. 它是一个气体放电管. 管内充入压强为 130 Pa 的氦气和压强为 13 Pa 的氖气的混合气体. 当时激光器的构造较复杂,主要因反射镜贴在放电管两端,需要复杂的调平行的机构. 现在一般用的激光器示意如图 17 -3. 谐振腔两端的反射镜,放置在放电管外,便于调节与更换. 反射镜有用两个凹球面的,有用两个平面的,有用一凹一平的. 也有一个贴在放电管口,一个放在管外的,视需要而定. 如用两个相同凹球面镜布置在它们的距离等于球面镜的曲率半径处,则容易调节成谐振腔,称共焦腔. 放电管的窗口与管轴成布儒斯特角. 这样比与轴垂直放置窗口的损失小. 因为虽然垂直纸面的偏振光经布儒斯特窗口多次反射完全反射到腔外来,但平行纸面的偏振光则毫无损失,能满足谐振的要求. 所以有布儒斯特窗口的激光器,发出的是完全偏振光.

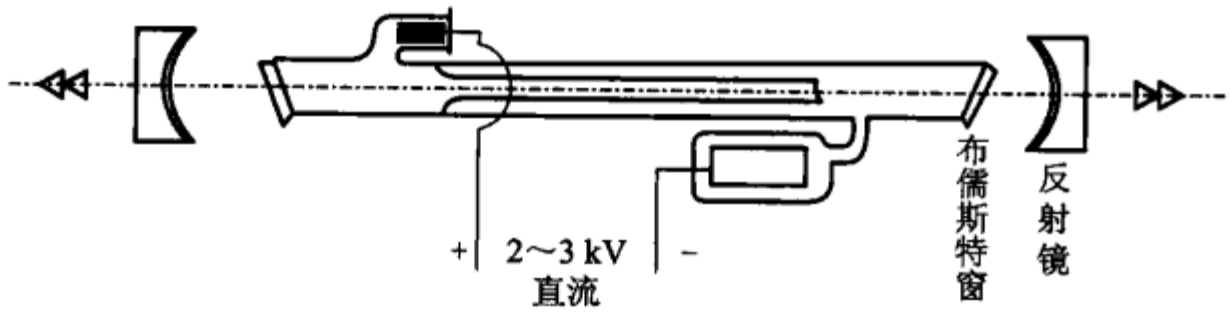


图 17－3

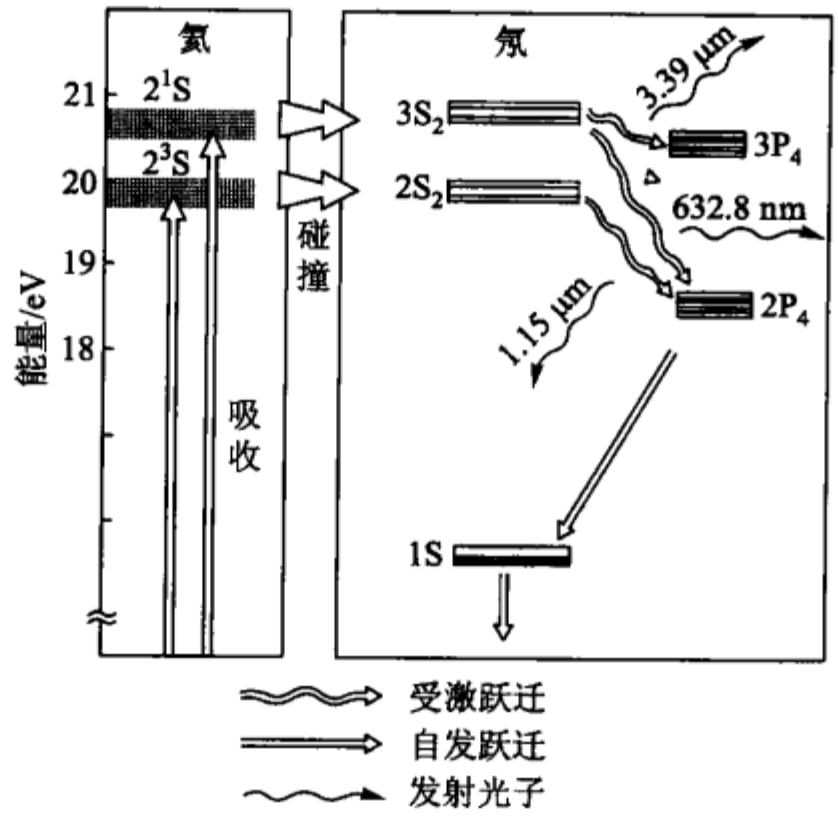


图 17－4

氦氖混合气体的能级如图 17－4 所示. 能级上注的 2S,3S 等字母是光谱学上的符号,在这里暂时不去管它们. 图上绘出的主要三条受激发射谱线 3.39 μm,1.15 μm 及 632.8 nm,是氖的谱线. 氦的作用是由电子冲击激发到 2^3S 及 2^1S 激发态的氦原子,去碰撞基态氖原子,使氖原子激发到 2S 或 3S 态,而氦自己又落到基态. 因为氦的这两个能级,分别与氖的两能级很近,能量容易交换. 这个方法,可使氖的 2S 与 3S 态的粒子数与 P 态粒子数形成反转. 而 P 态粒子,通过自发发射,在 10^{-8} s 内很快落到氖的 1S 态. 它再和管壁碰撞,而落到基态.

电极用铝制以减少溅射. 两端通以 2～3 kV 直流电管长从 10～100 cm,相应的毛细管内径从 1～5 mm. 如反射镜的反射峰配合在 632.8 nm,则抑制其他几个波长的谐振,使 632.8 nm 输出为最大. 从这类最常用的激光器,人们可获得从 1 mW 到数十毫瓦的连续单色平面偏振红光输出. 由于单色性好,相干长度可达数十米以至数百米,应用最广.

§17 -4 纵模 横模

把氦氖激光器输出光束投射到白屏幕上,当调节谐振腔的反射镜的距离与角度,可在屏幕上出现如图 17 -5 所示的几种光斑图样. 它们是几种简单的横模的表现. 图上的标记符号,是从微波技术上接过来的,后面再说明.

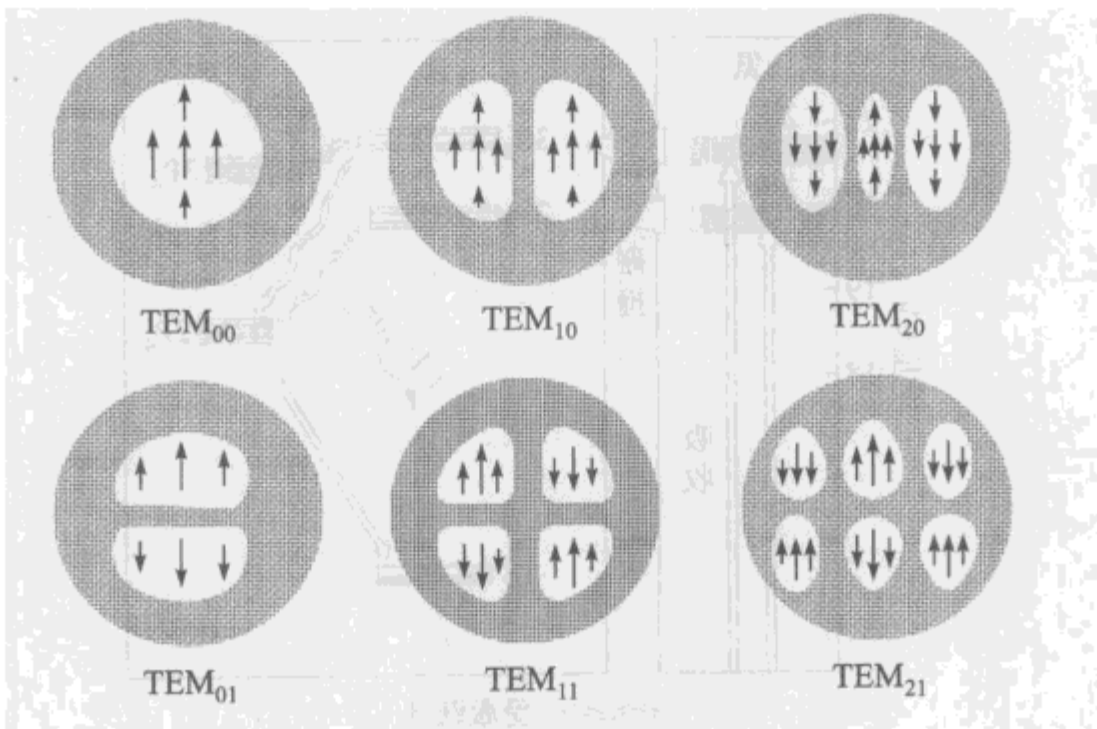


图 17 -5

所谓模就是在腔内获得振荡的几种波长稍微不同的波型,也就是法布里 - 珀罗标准具中满足加强反射的几种波长. 模的数目可以看成在两反射镜间形成驻波的波节数. 下面就从这简单分析来讨论纵模和横模.

纵模也名轴模. 在两反射镜间沿轴进行的光束,由于腔长 L 与光波波长比是一个很大的数目,所以必然有数不清不同波长的光波,能符合加强反射的条件,即

$$2nL = k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2 = \cdots, \tag{17-7}$$

式中 n 是腔内工作物质的折射率,k 是纵模模数. 对腔长为 1 m,波长为0.5 μm,k 可达 4×10^6. 但由于产生激光的某一波长的单色光或荧光,存在着一定宽度,如多普勒展宽或荧光谱线宽度,所以在这范围内,能获得干涉加强的模数,还是有限几个.

微分(17 -7)式得 $\Delta\lambda = -\dfrac{\lambda}{k}\Delta k$. 两邻近模,$\Delta k = 1$,它们的波长差 $\Delta\lambda$ 和频率差 $\Delta\gamma$ 分别为

$$\Delta\lambda = -\frac{\lambda^2}{2nL}, \tag{17-8a}$$

$$\Delta\gamma = \frac{c}{2nL}. \tag{17-8b}$$

因此纵模的分布如图 17-6 所示. 如腔长为 1 m,对 0.6328 μm 的氦氖激光,由于多普勒宽度约为 0.0012 nm(约 1 GHz),按式(17-8a)和(17-8b)两邻近纵模的波长差 $\Delta\lambda = 0.0002$ nm 或频率差 $\Delta\nu = 150$ MHz. 故最大纵模数为 6. 缩短腔长到 15 cm,增加纵模波长间隔,使在多普勒轮廓范围内,只有一种波长. 相邻的纵模,越出多普勒范围而消失. 纵模无法以直观方法观察到. 把光束进入一适当间距的法布里-珀罗干涉仪. 通过拍摄干涉环,可得不同纵模的干涉环.

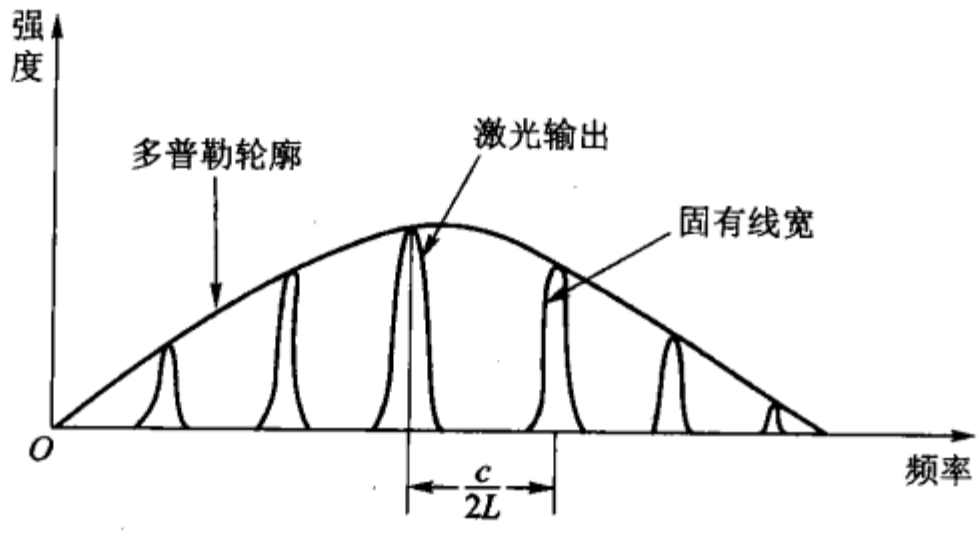


图 17-6

至于横模虽容易观察,但其产生原因较复杂,如不在轴上光束的加强干涉,工作物质的色散、散射效应及腔内光束的衍射效应等,都对横模有影响. 在这里我们只就第一种原因作简单分析,认为在腔内光束除与腔轴严格平行外,还有那些稍微偏离走"Z"字形的光束,虽经多次反射后,仍未偏出腔外,能符合 $2nL\cos\theta = k\lambda$ 条件,因而在某一 θ 方向存在着加强干涉的波长. 设以 z 代表腔轴方向,垂直 z 的截面为 xy 平面. 在这截面所产生的部分横模如图 17-5. 标记 TEM_{mn} 中 TEM 代表电磁横波,m 代表 x 方向上的波节数,n 代表 y 方向上波节数. 以轴为基准,TEM_{00} 代表单膜或名基模. 基膜有最广泛的用途,因为光束截面上各点的相位相同,故有良好的空间相干性. 并且光束发散角最小,有利于聚焦在一小点. TEM_{10} 代表 $m=1$,$n=0$ 的模,其余类推.

相邻横模的波长差,随着具体的腔的结构及反射镜的调节不同颇不一致. 又相邻横模的偏振方向虽相同,但有的有 π 相位差,如图 17-5 中所示的箭头.

欲获得相干性良好的光束集中的激光,选模工作是很重要的. 选模的方法很多,例如除调节反射镜外,在腔内(或外)放一小孔,只让 TEM_{00} 模通过,抑制其他低次级模的产生. 对于纵模,可在腔内加一熔凝石英片,作为法布里-珀罗标准具,以滤掉多余的纵模.

* §17-5 氮分子激光器

上面描述的两种激光器,是典型的固体及气体激光器,它们是早期发明的激

光器,都有一个谐振腔,因此需要精密光学零件、工艺及完善的真空系统才能制造.氮分子激光器是在1970年前后问世的.它与上述两种有显明不同的是不需要谐振腔.这里介绍1974年美国人斯莫尔(Small)根据英国人勃伦兰(Blumlein)提出的火花开关结构而设计的一架.脉冲输出337.1 nm紫外线,功率在50~100 kW是很容易做到的.每脉冲持续约5 ns,故每脉冲能量为毫焦耳数量级.凡有光学及电学基础知识及技术的非专业人员,再具备一些普通器材,就能自己制作一套简易的氮激光器.

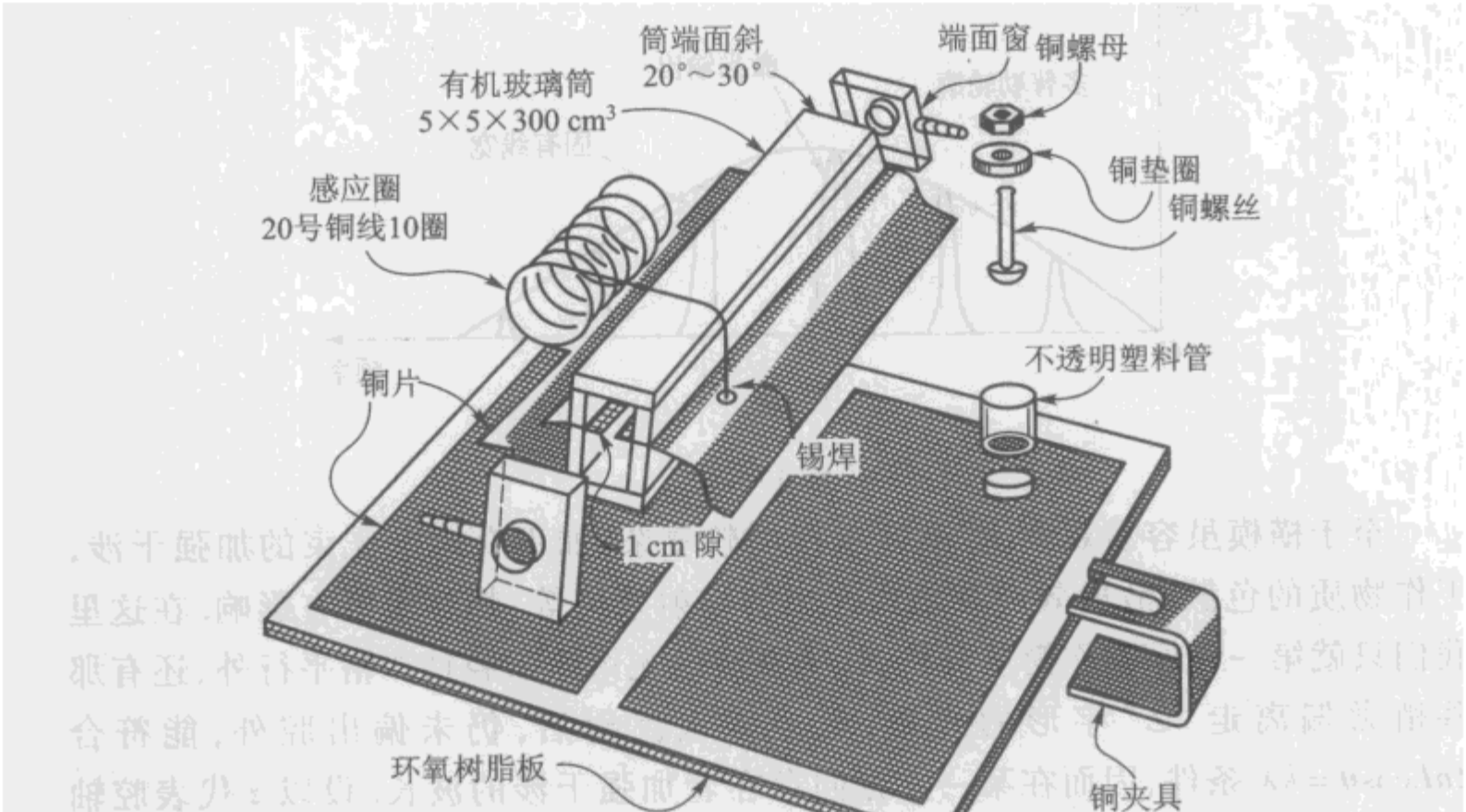


图 17-7

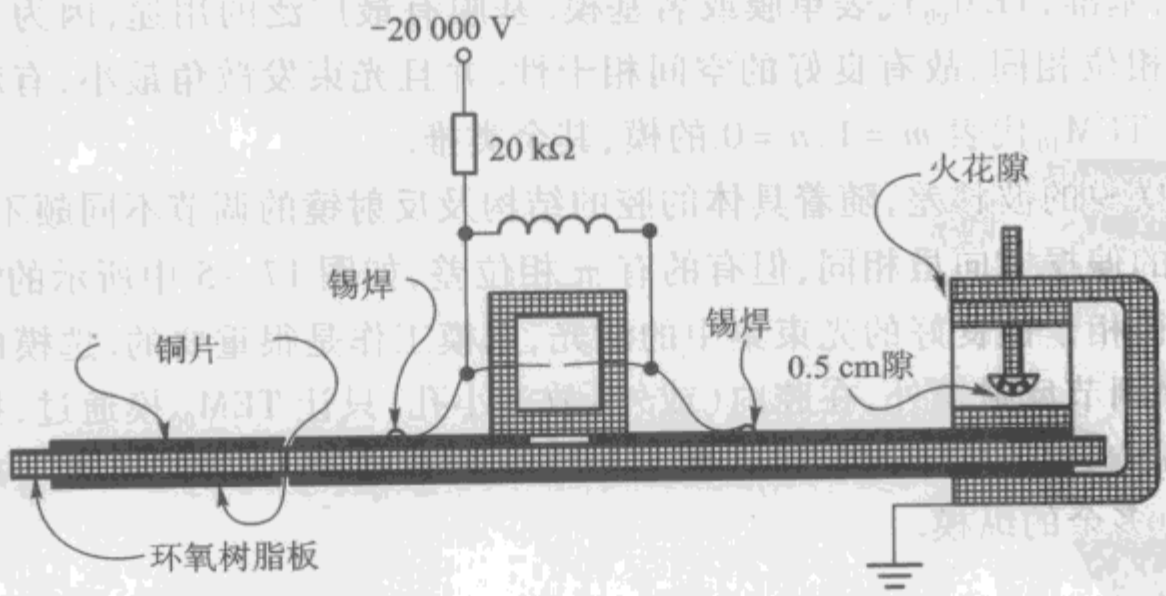


图 17-8

图17-7,图17-8和图17-9所示为该激光器的结构与原理.利用一块环

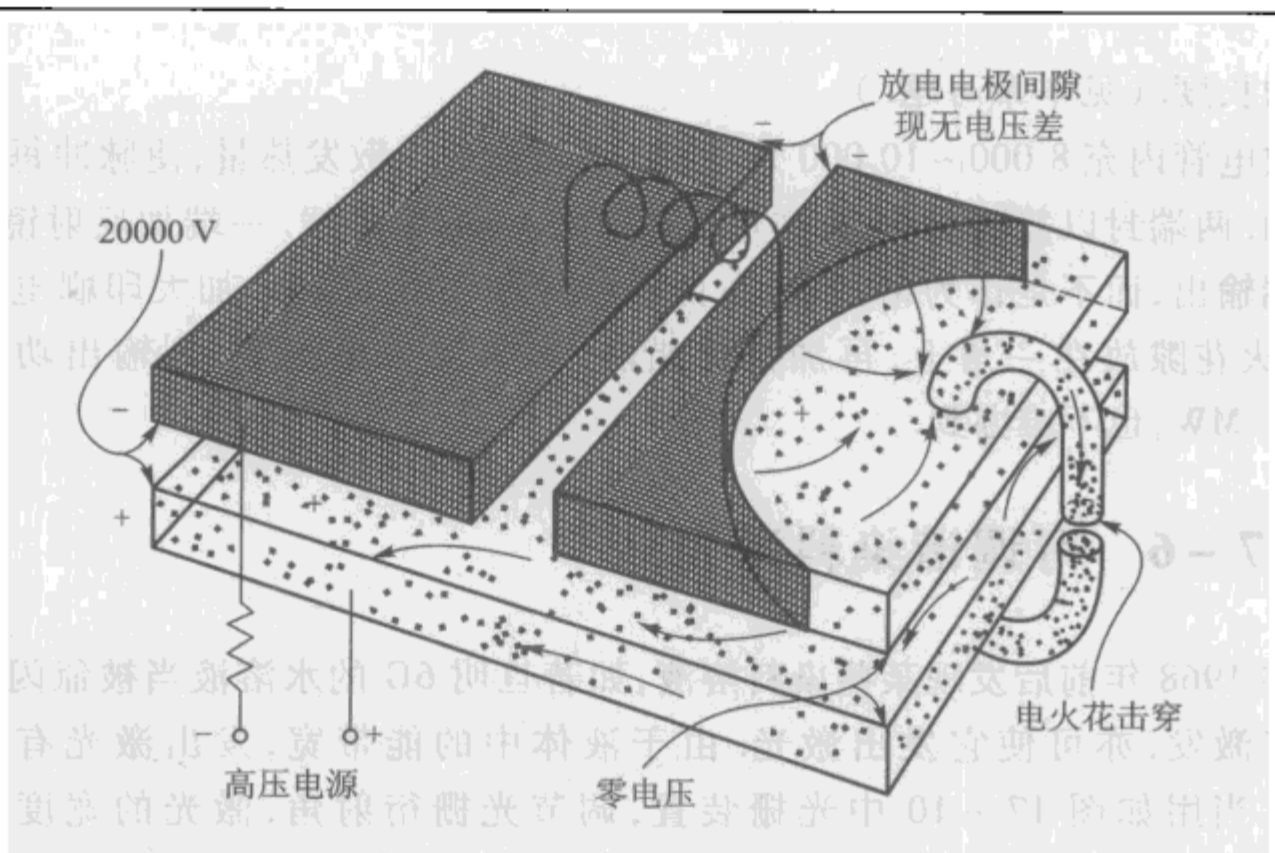


图 17－9

氧树脂的双面印刷电路板做电容器. 下面铜片是整块的,上面铜片分为两半,每块约 18 × 26 cm. 中间相隔 8 cm,形成以厚约 0.4 mm 的环氧树脂为电介质的两个电容器. 为防止上下跳火花,上、下铜片四周剥去 2 cm. 图 17－8 为图 17－7 装配后的截面. 当上、下铜片接上直流 10～20 kV 高压电. 达到一定电压,右边火花隙击穿放电,该点电压突然降到零,与下铜片的零电压相等. 这零电压,以火花隙为圆心,向左传播,波阵面逐渐扩大(图 17－9). 左铜片虽经常和负高压相接,但由于和右片串联一感抗 L,在很短时间内(几纳秒)等于和右片不通,负高压传不到右片. 当零电压扩展到放电管电极的中心点,便和该点相对的高负压电极,激励管中氮分子,建立两个能级的粒子数反转,从而发出受激光. 这光在放电管管轴方向上,沿着电极向两端传播. 此时零电压继续扩展,当零电压达到放电管电极的其他点时,在该点造成粒子数反转,等待着由电极中心发出的光去感应,使再产生受激辐射. 如此继续,沿着放电管轴前进,得到加强的激光. 这是一种行波激励法,没有共振腔,称超辐射.

在几纳秒后,辐射停止,右片通过 L 再充电,达到一定电压,火花隙再击穿,开始另一脉冲. 如此循环,每秒约放电几次.

根据行波激励的原理去计算电磁波在介质中传播到放电管中电极隙某一点的时间,应当等于或稍小于电磁波在介质中传播电极中心点的时间加上光在放电管内传播到该点的时间,则得板的尺寸关系为

$$\frac{b}{2} = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon - 1}a ,$$

其中 ε 为环氧树脂的电介质常数,a 为垂直放电管铜片的宽度,b 为平行放电管

铜片的长度.(见本章习题.)

放电管内充 8 000 ~ 10 000 Pa 氮气,可以流通以散发热量,使脉冲每秒次数可增加.两端封以普通薄玻璃,亦可透过 337.1 nm 紫外线.一端加反射镜 ,转向另一端输出,而不是作为谐振腔.总的转换效率不到 0.1%.加大印刷电容器尺寸,把火花隙放在一角上,再加其他措施,如加第三电极等,则输出功率达到 0.5 ~ 1 MW,也不难办到.

* §17 -6 可调谐染料激光器

在 1968 年前后发现某些染料溶液,如若旦明 6G 的水溶液当被氙闪光或其他激光激发,亦可使它发出激光.由于液体中的能带宽,发出激光有的宽达 10 nm.当用如图 17 - 10 中光栅装置,调节光栅衍射角,激光的宽度可减到 0.01 nm左右.若再加一个标准具,则宽度可达到 10^{-3} nm 以下.更换其他染料可获得其他波长范围的激光.表 17 - 1 列出各染料所发激光的波长范围.

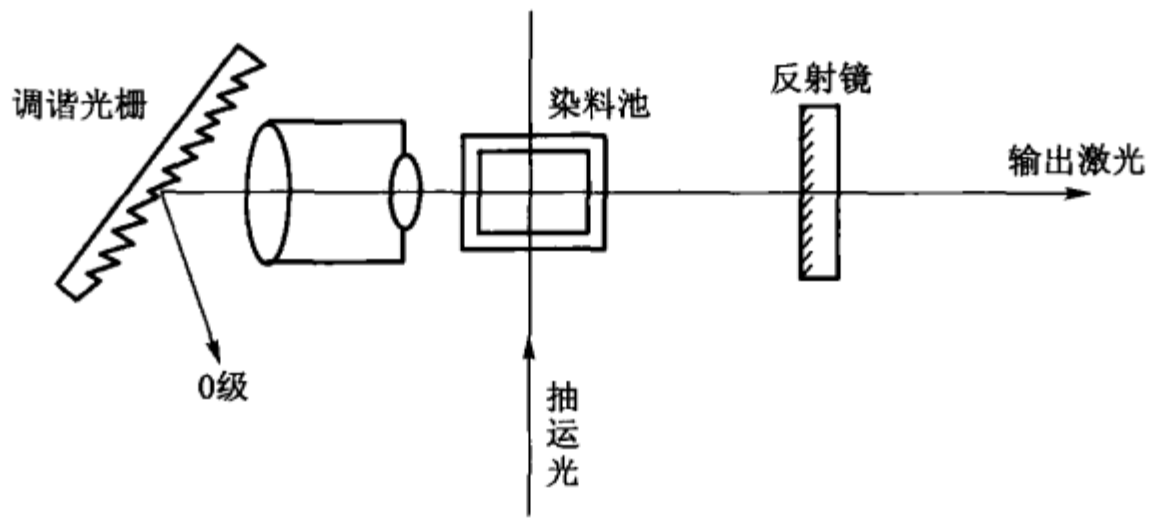


图 17 - 10

表 17 - 1 几种染料所发激光的波长范围

染料	溶剂	可调范围/μm
Calcein 蓝	乙醇	0.449 ~ 0.490
二苯基苯并呋喃	乙醇	0.484 ~ 0.518
荧光素	碱性水溶液	0.527 ~ 0.570
若旦明 6G	乙醇、水	0.560 ~ 0.650
若旦明 B	乙醇、水	0.590 ~ 0.700
甲酚紫	乙醇	0.630 ~ 0.690

由此,人们可从 0.350 ~ 0.750 μm 整个可见光范围内,获得所需的激光.氙灯,氮分子激光器或其他固体激光器可作为它的抽运光. 虽是脉冲,因峰值高,

可激发高阈值的染料. 如用 1 W 氩离子连续光抽运,则输出约为几十毫瓦. 此时液体需要连续流动以散热. 染料激光的转换效率高,有的可达 25%.

* §17-7 其他激光器

上述四种激光器,代表四种不同典型. 红宝石是第一个问世的固体脉冲激光器. 氦氖激光器是第一个气体连续激光器. 氮分子激光器代表不需要谐振腔的超辐射类型. 染料激光器代表可连续调谐波长的类型. 它们不一定是功率大的或效率高的激光器. 功率大的都要水冷、通风或其他降温措施. 常用的激光器还有很多种. 在表 17-2 中列出,以作比较,不再进行分析. 输出功率随器件大小而不同. 表中所列数据均指一般尺寸.

表 17-2 常用激光器参数对比

激光器名称	主要谱线波长 /μm	输出功率	能量转换效率 /%	脉冲或连续
红宝石,Cr^{3+}	0.6943	10kW	0.1	脉冲
钕玻璃,Nd^{3+}	1.06	50kW	1	脉冲
钇铝石榴石,Nd^{3+}	1.06	5W	1	连续
	1.08			
砷化镓半导体	0.9	5W,常温	10	脉冲
氦氖	0.6328	2mW	0.1	连续
	1.1523	1mW		连续
	3.3913	1mW		连续
氩离子	0.4880	1W	0.05	连续
	0.5145	1W		连续
氪离子	0.5309	200mW		连续
	0.6471	500mW		连续
氦镉离子	0.3250	4mW		连续
	0.4416	20mW		连续
二氧化碳	10.6	100W	20	连续
二氧化碳,横向激励	10.6	1kW	20	连续
二氧化碳,横向激励	10.6	50kW	20	脉冲
氮分子	0.3371	500kW	~0.1	脉冲

§17-8 激光的重要应用

激光的应用范围很广.各类型的激光特性不同,应用范围也不同.正如在绪论中提到,大至核聚变反应中的触发作用,小至实验室内检测工作的改革,激光都有用武之地.又如在第八章中描述的激光球面干涉仪及激光比长仪,在第十一章信息处理中激光的应用及全息照相都是很出色的例子.兹再举以下几方面,以示激光应用中的原理.至于详细方法与技术,一般激光读物中已有描述,这里不再重复.

1. 激光用作热源

激光光束细小,且带着巨大能量.更可用透镜聚焦,照在物体的微小面积上,产生巨大的热量,使这小部分物体熔化或气化.这个现象可应用于细小的打孔、切割等工作.用红宝石 、钕玻璃脉冲激光打钻石孔,作为拉拔金属细丝的模具,在我国已有近十年历史了.由于二氧化碳激光器的效率高达 20%,有很多工厂用它来做打孔、切割、焊接等工作.医院里还有用它来做手术刀.为使打出孔径及切割线准确、细致,要选择激光的横模中的基模,但对纵模则无影响.功率特大的横向激励的二氧化碳激光器,还被设想用来射向入侵的飞机、坦克等,使它们的重要部件烧毁、爆炸或失去作用.在这种应用上,要求输出能量愈大愈好.

在光谱分析中,将激光照在样品某点上,使这微小区域的物质气化.配合适当火花电极,使电极间的火花的光进入摄谱仪,能发现一般火花所不易激发的谱线,并且所获光谱,仅反应这微小区域的化学成分(称微区光谱分析).而一般火花电极所得的光谱分析结果,表示比较大区域的平均值.用这种办法可检查物质的不均匀性.

2. 激光测距

利用激光的方向性好、射得远,可作测距仪的光源.测距有两种不同方法.一种是用连续激光,如氦氖激光器的 632.8 nm,通过第十章所述的电光晶体,被波长为十米左右的电振荡振幅所调制,从调制器出来后,激光的强弱受到调制,它的两个峰值的间隔正好是电振荡的半个波长.这强弱相间的激光,射向设置有反射镜的目标.反射回来的激光,经光电接收后,测出在此路程中有多少个半波长及其余数,即能得出目标的距离.设 L 为要测的距离,λ_1 为电振荡的波长,n 是半波长的整数,x_1 是半波长的余数,它们有

$$L = n\frac{\lambda_1}{2} + x_1\frac{\lambda_1}{2},$$

n 可不必测.改变调制电波到另一波长 λ_2,使这次半波长的整数,正好比刚才的

多(或少)一个,则

$$L=(n+1)\frac{\lambda_2}{2}+x_2\frac{\lambda_2}{2},$$

这样可消去 n. 精确地测量 x_1,x_2 实属必要. 这靠仪器中的测电波的相位装置来完成. 在数千米的距离上,可准确到厘米数量级. 这种方法除用于大地测量外,还对近距离复杂地形的工程测量大有帮助,避免用钢皮尺直接测量.

另一种方法是激光雷达测距法. 它与上述原理不同. 当目标距离较远,而且不能在那里设置反射镜时,用强烈脉冲激光发射出去,接收从目标漫反射或散射回来的激光信号,测出此反射信号和发射信号间的时间差 Δt. 由于 $L=c\Delta t$,可决定目标的距离. 当然脉冲本身的时间是已知的、准确的,并且是很短暂的(纳秒数量级). 激光雷达还有和普通雷达一样的用途,但只局限于对光波透明及无阻挡的空间. 正因为这样,它可以测对普通雷达透明的云层烟雾等目标的距离. 此外还可利用烟雾的拉曼散射光或荧光,探测烟雾、大气污染某种含量. 由于光波比普通雷达波长小得多,所以分辨本领较高,能较普通雷达分辨出目标更多的细节.

3. 激光通信

和激光测距相似,激光通信是以光波为载波,以信息振幅去调制这载波. 用于通信的无线电载波的频率在 $10^6\sim10^{10}$ Hz,而光波频率在 $10^{11}\sim10^{15}$ Hz,因而光波比电波能容纳更多的信息量. 缺点是光波易被障碍物遮住. 且在无遮挡的空间,由于大气的吸收和散射,距离一长,衰减增加. 故目前激光通信还局限于短距离的海面、大楼间、山顶间与宇宙空间. 将来趋势是以激光在光导纤维中传送,来替代现用的电波在电缆中传送. 到那时地面通信,包括声音、图像都可畅通无阻.

4. 受控核聚变中的应用

将激光射到氘与氚混合体,激光所带给它们巨大能量,产生高压与高温,促使两种原子核聚合变为氦与中子,并同时放出巨大辐射能量. 由于氘氚混合物的质量及激光的能量都可被控制,我们称这过程为受控核聚变,人们有可能利用聚变中发生的能量,作为电力的能源.

图 17－11 是实验装置示意,用一个钕玻璃激光器发出每脉冲仅几个毫焦耳的激光,分为 12 路,每路放大 11 级,每光束截面逐渐扩大,最后扩大到 30～40 cm直径,每路每脉冲能量可达 100～1000 J. 这 12 路激光,由于从同一个发生器出发,是完全同步的. 从发生到最后放大,行经 50 m 长的路程最后对称地聚焦到一内径为 4 m 的球中心. 在那里,不断滴入直径约为 1 mm 的氘氚混合小球. 小球被 12 路激光从各方向照射后,在脉冲的瞬时内,发生爆炸而聚变,放出比输入激光能量大成千上万倍的原子能. 在 4 m 直径的球外,除有防止辐射向外发散的装置外,还有吸收装置,以吸收能量,供发电或其他用. 图 17－12 是美国点火

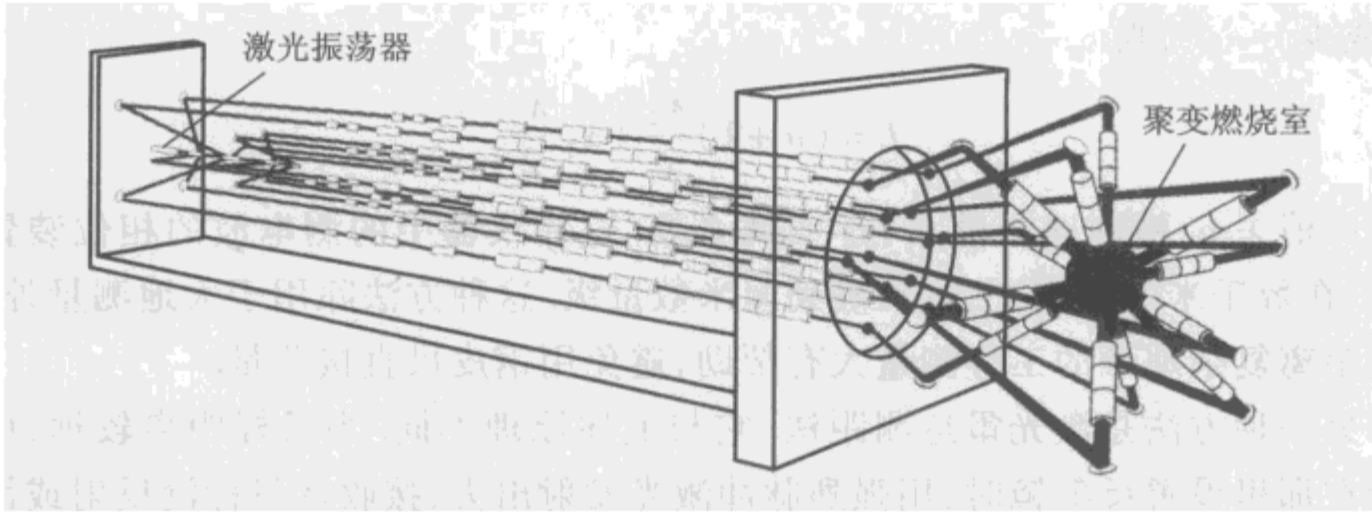


图 17 - 11

试验室(National Ignition Facility)使用的激光核聚变反应堆示意图,该系统中采用了 192 个激光光束,使它成为现在世界上最大的激光光学系统. 通过与图中右下角的一辆卡车体积的比较,可以想象出该系统体积是多么庞大!

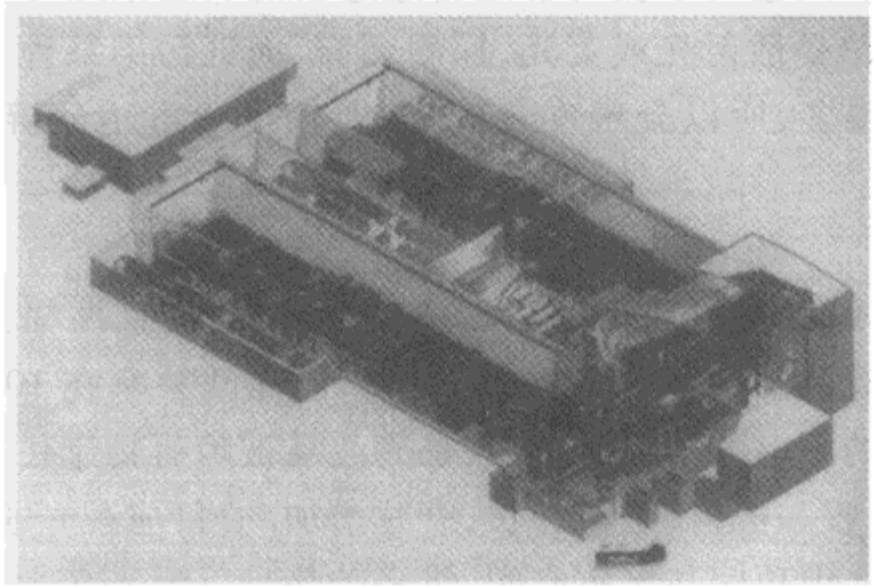


图 17 - 12

要建立一个实际规模的能源站,尚需进一步对某些问题做深入研究. 例如钕激光器效率不高,散热不易,每秒脉冲次数不能多(如不到 100 次),就要找寻新型高效气体激光器. 因为快速流动的气体,比靠固体传导能更快地带走废热. 又如激光波长最好在 0.3 ~ 0.8 μm 间,波长太长,易击穿气体介质;波长太短,易被介质吸收而得不到放大. 又如怎样把大部分聚变的放射性能量直接转化为电能,而不是间接通过热能去转动发电机,则效率更高. 这里所介绍的受控核聚变中的激光应用是一个远景,而不是叙述一个已完成的实验站.

5. 非线性效应

激光强大的电场与物质作用,产生非线性效应,为学科本身开辟了一个应用方向. 第十五章中曾把光与物质的作用认为是光的电场感应物质中的分子、原子成为偶极子,从而引起它们的振动. 振动的偶极子成为电磁辐射源,发出次波. 从这观点出发,解释有关介质的折射、反射、色散、散射及发射诸现象. 偶极子的振幅随着入射光电场强度增加而增加. 对小振幅,它们存在着线性关系. 而对巨大

的振幅,则非线性关系明显起来. 以 P 代表单位体积内感应偶极矩,E 代表入射光的电场强度,它们有

$$P = \alpha E + \beta E^2 + \gamma E^3 + \cdots. \tag{17-9}$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 称极化系数,$\alpha >> \beta >> \gamma >> \cdots$. 通常由于 E 小,第二项及以后的高次项都可忽略,只保留第一项,近似为线性关系. 今激光功率密度可达 10^7 W/cm^2 以上,相当于电场强度为 10^5 V/cm^2 以上,第二项、第三项就不能不考虑了.

例如二次谐波(倍频)的出现,是目前最为成熟的非线性效应的结果,设入射光频率为 ω,电场强度 E 为

$$E = E_0 \sin\omega t,$$

暂时忽略第三项,给出

$$P = \alpha E_0 \sin\omega t + \beta (E_0 \sin\omega t)^2 = \alpha E_0 \sin\omega t + \frac{1}{2}\beta E_0^2 (1 - \cos 2\omega t). \tag{17-10}$$

感应偶极矩中包含有 2ω 的振荡,出现二次谐波的辐射.

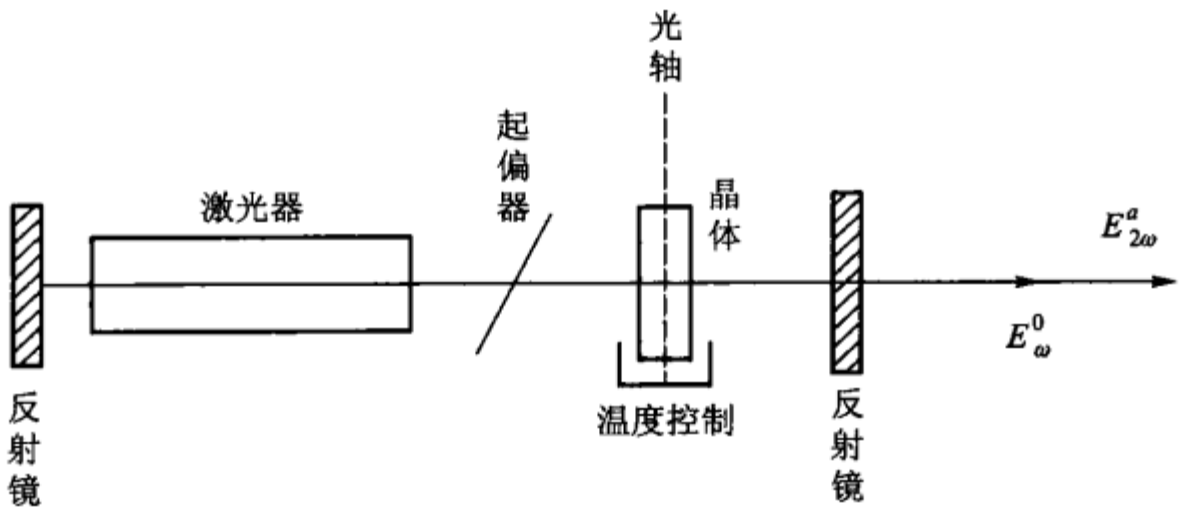


图 17-13

实验上将钕玻璃激光器的 1.06 μm,射到铌酸钡钠晶体(图 17-13),可得波长为 0.53 μm 的绿光输出. 其他 KDP、ADP 等晶体,亦可获得同样效果. 这个结果表示,光波也能和波长较长的电波一样产生二次谐波. 其他如三次谐波,和频及差频等现象也相继发现. 总之激光和波长较长的电波一样能被控制的性能,已逐渐在增多.

习　题

1. 激光器的两个反射镜是曲率半径相同的两个凹球面反射镜(图 17-14). 它们相距等于曲率半径 R,因而反射镜的焦点在 $R/2$ 处重合. 这样的谐振腔称共焦腔. 在离轴高为微小量 h 的镜面上 B 点发出平行轴的光束 E,又在 B 点经腔内反射后再在 B 点出射的光束 E',证明 EE' 的光程差 Δ 为

$$\Delta = 4nR + nR\left(\frac{h}{R}\right)^4,$$

其中 h 是微小数，R 是反射镜的曲率半径，n 是管中介质的折射率.

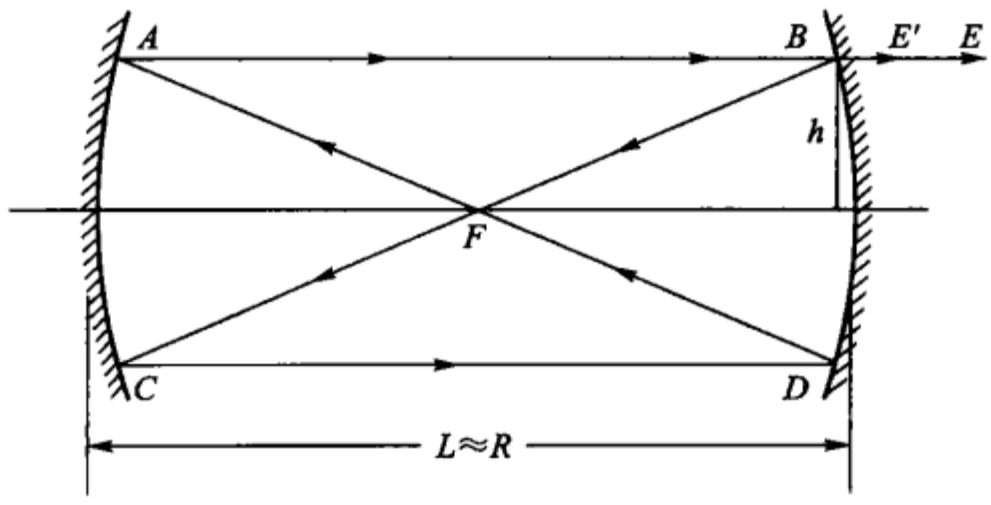


图 17 - 14

2. 设氩离子激光器输出的基模 488 nm 的频宽范围为 4000 MHz，求腔长 1 m 时，光束中包含几个纵波？两邻近纵波相隔波长为多少？

3. 如按电磁波在环氧树脂中的速度与电磁波在放电管中速度，设计氮激光器放电电容器的尺寸，设 a = 垂直放电管的宽度，b = 平行放电管的长度，ε = 环氧树脂的电介质常数，证明

$$\frac{b}{2} = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon - 1}a.$$

（图 17 - 7 所示尺寸与此式有出入.）

4. 设氩离子激光器输出 488 nm 的功率为 2 W，光束截面直径为 2 mm，求它的电场强度. 又太阳照到地球上的辐射能每分钟每平方厘米为 8.4 J，求它的电场强度.

第十八章

光子　光的二象性

回顾本书前面各章，我们已经浏览了光现象的大部分，既看到了光在其传播过程中所表现出的电磁波的性质和在近似情况下传播的直线性，也看到了光在其发射和与物质相互作用过程中所表现出的量子性. 于是，很自然地就会产生这样的问题：光是波还是粒子？光究竟是什么？如果说，它既是波又是粒子，那么这两种性质之间是怎样相互关联的？作为一个教学参考书，在结尾这一章确实应该对这方面的问题作一回答，以使读者对光的本性有个概念上的认识. 但是，应该预先说明，一是由于编者的水平，更重要的是由于科学现阶段的实际，这种讨论决不是最后的答案.

在进一步讨论光的本性之前，还有几个对光量子是很突出的实验，需要在这里补充. 它们是光电效应、康普顿效应、光压实验和暗弱光的量子起伏. 此外，还要简要地介绍物质波及有关的一些近代的实验.

§18－1　光电效应

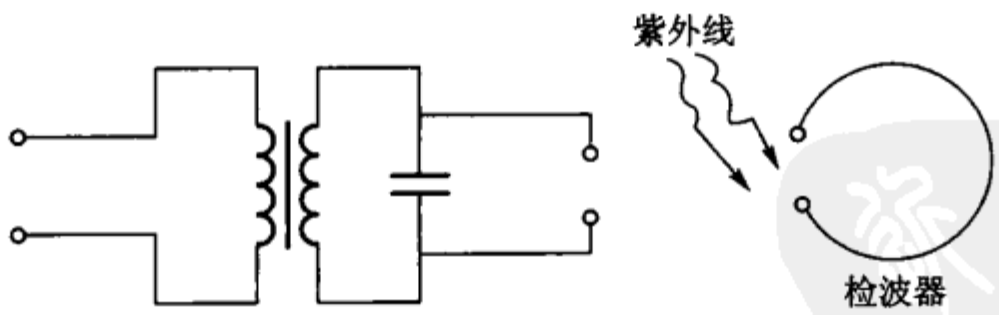


图 18－1

麦克斯韦的电磁理论预言了电磁波的存在，1887 年赫兹(Hertz)用实验证明了这个预言. 而光电效应碰巧又是赫兹在进行这一实验时偶然发现的现象. 他发现如果检波器中的两个小锌球之一(图 18－1)受到紫外线照射时，两小球之间就很容易有电火花跳过. 赫兹的这个发现吸引了当时的许多研究者. 如哈耳瓦克(Hallwack)发现若用紫外线照射与验电器相连接的充有负电荷的锌片，则验电器便很快地放电；但同一锌片若充正电荷，则无论怎样照射，总也没看到有同样

的放电效应.哈耳瓦克认为,这是因为带负电荷的锌片受照射时能发出带负电荷的质点.他还观察到,没有带电的金属片在紫外线的作用下会带正电,即失去了一部分负电荷,这种负电荷是原来与正电荷中和而在金属中的.

埃尔斯特(Elster)和盖泰尔(Geitel)证明金属的接触电压与光电效应之间有密切的关系.金属的正电性越大,能产生光电效应的光波的波长越长.碱金属钠、钾、铷用可见光照射就会产生光电效应.

勒纳(Lenard)的实验证明,光电效应所产生的带负电荷的质点在磁场中的偏转与阴极射线一样,并且由在已知磁场中该负电质点偏转的大小测得的电荷与质量的比值与其他方法测得的电子的荷质比 e/m 值相符,从而证明该负电质点为电子,称为光电子.

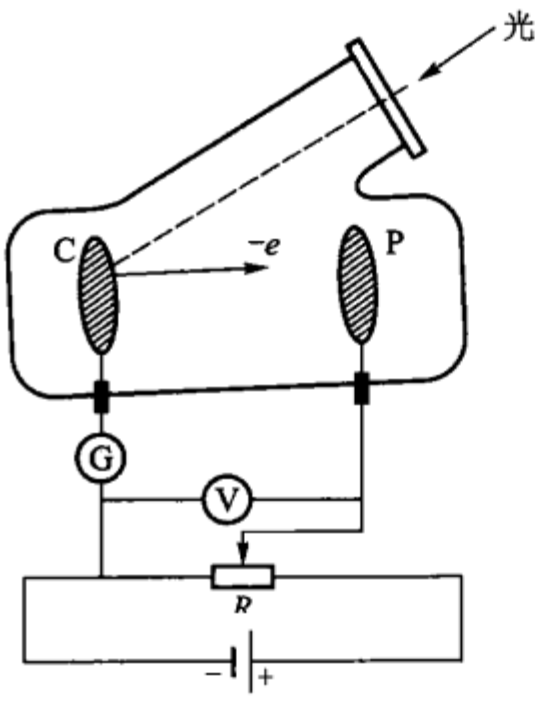


图 18-2

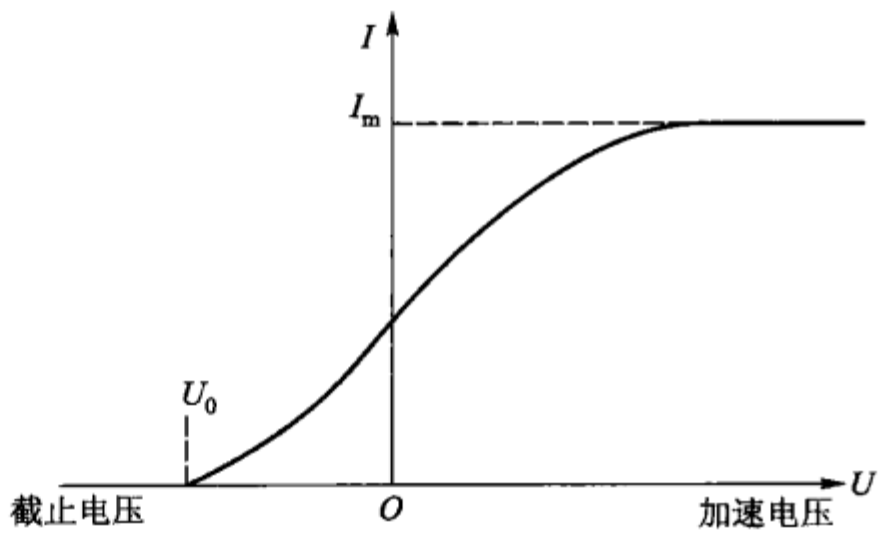


图 18-3

早期研究光电效应的实验装置如图 18-2 所示.电极 C 和 P 封在高真空容器内,光经石英窗照射到负电极 C 上,由光电效应产生的光电子受电场加速向电极 P 迁移而构成光电流.光电流的大小与照射光的强度成正比,照射光中紫外线越强,光电效应越强.用一定强度和给定频率的光照射电极 C 所得到的光电流 I 和两极间的电压 U 的实验曲线如图 18-3 所示.当 U 足够大时,光电流达到饱和值 I_m,当 $U \leqslant -U_0$ 时,光电流停止,U_0 称截止电压.

总结所有的实验结果,光电效应的规律可归纳如下:

(1) 饱和光电流 I_m 的大小与入射光的强度成正比.因为 $I_m = ne$,n 为单位时间内从电极 C 上击出的电子数目,故单位时间内逸出的光电子数目与光的强度成正比.

(2) 截止电压 $-U_0$ 的物理意义是:如果反向电场的电压等于 U_0,则逸出金属电极 C 后具有最大动能的电子也不能到达电极 P,此时

$$eU_0 = \frac{1}{2}mv_m^2,$$

e 为电子的电荷，v_m 为电子的最大速度. 实验得出光电子的能量与入射光的强度无关，而只与入射光的频率有关，频率越高，光电子的能量就越大.

（3）当入射光频率低于某极限值 ν_0（随不同金属而异）时，不论光的强度如何，照射时间多长，都没有光电子产生.

（4）即使光的强度非常微弱，只要照射光的频率 ν_1 大于某一极限值，在开始照射后立即有光电子产生，所经过的时间至多为 10^{-9}s 的数量级.

以上的各点结论，都无法用电磁波的概念来解释. 按照电磁波理论，电子从波阵面连续地获得能量，获得能量的大小应当与光的强度有关，与光照射的时间长短有关，而与频率无关. 因此对于任何频率，只要有足够的光强度或足够的照射时间，总会发生光电效应. 这些结论是与实验结果直接矛盾的.

§18－2　爱因斯坦公式和密立根实验

1906 年爱因斯坦推广了 1900 年普朗克关于黑体辐射的“一定频率的辐射只能有一定大小的能量”的假设，提出了光子的概念. 他认为光能并不像电磁波理论所想象的那样，分布在波阵面上，而是集中在被称为光子（或光量子）的微粒上. 但对这种微粒仍保持着频率（或波长）的概念，频率为 ν 的光子具有能量 $E=h\nu$，h 为普朗克常数. 当光子照射到金属表面时，一次为金属中的电子全部吸收，而无需累积能量的时间. 电子把这能量的一部分用来克服金属表面对它的吸力，余下的就变为电子离开金属表面后的动能，按照能量守恒原理，可写作

$$h\nu = \frac{1}{2}mv_m^2 + A_0, \qquad (18-1)$$

式中 A_0 是电子逸出金属表面所需作的功，称为逸出功（亦称功函数）.

（18－1）式即爱因斯坦公式. 它说明：（1）光子能量 $h\nu$ 小于 A_0 时，电子不能逸出金属，因而没有光电效应产生.（2）光电子的能量决定于光子的频率 ν，光子的频率越高，光电子的能量就越大. 而光的强度只能影响光子的数目，即只影响光电流的大小. 从而成功地解释了经典理论所不能解释的光电效应的规律.

1916 年密立根对一些金属进行测量，得出了光电子的最大动能 $mv_m^2/2$ 和入射光频率 ν 之间的严格的线性关系（图 18－4）. 直线在横轴上的交点 ν_0，说明光频率小于 ν_0 时不能从金属中击出光电子来. 不同的金属其 ν_0 值不同. 但对于所有的金属直线的斜率却是不变的，现代求得这直线的斜率为 6.6262×10^{-34} J·s. 这个数值与前述的普朗克常量 h 的值是一致的.

代表该直线的方程式可写作

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = h(\nu - \nu_0)$$

或

$$h\nu = \frac{1}{2}mv_m^2 + h\nu_0 = \frac{1}{2}mv_m^2 + A_0. \tag{18-2}$$

至此爱因斯坦公式获得了实验上的证明.

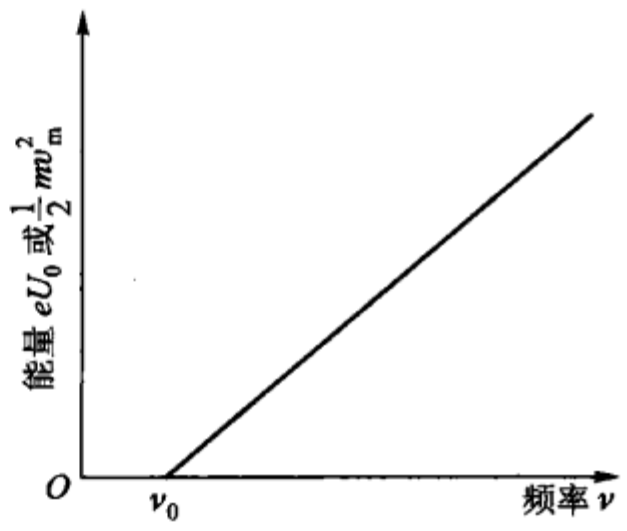


图 18-4

卢庚斯克和普雷列日夫及李恰逊和康普顿等改进了研究光电效应的装置,更加精确地测量了光电子的能量和频率 ν 之间的关系.

改进后的装置如图 18-5 所示,A 为内部镀银的玻璃球作为球形电容器的外电极. 由待研究的金属所制成的小球 C 作为球形电容器的内电极. 通过旁管 T 将泡抽成真空. 光线可经石英窗 W 照射在小球 C 上. 电极 A 与象限静电计 Q 相联. 用电位计 R 可使小球 C 与电极 A 之间产生不同数值不同符号的电压;电压用伏特计 V 来测量. 采用此装置有以下两个优点:第一,由于电极 A 包围着小球 C,而小球 C 又比外球 A 小得多,因此,即使加速电压等于零,所有由小球 C 逸出的电子也都能达到电极 A. 亦即当电极 A 与小球 C 之间的电压为零时,电流即可达到饱和,见图 18-6. 第二个优点是可以准确地测定使光电流等于零的截止电压.

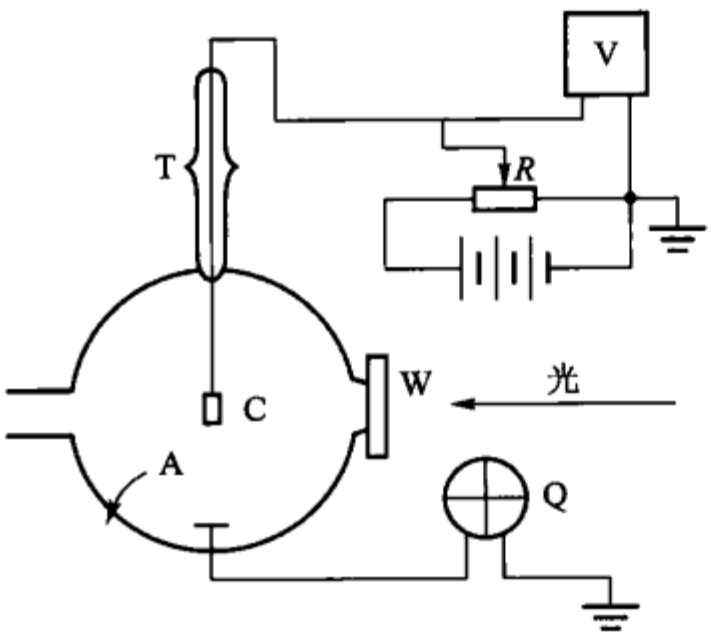


图 18-5

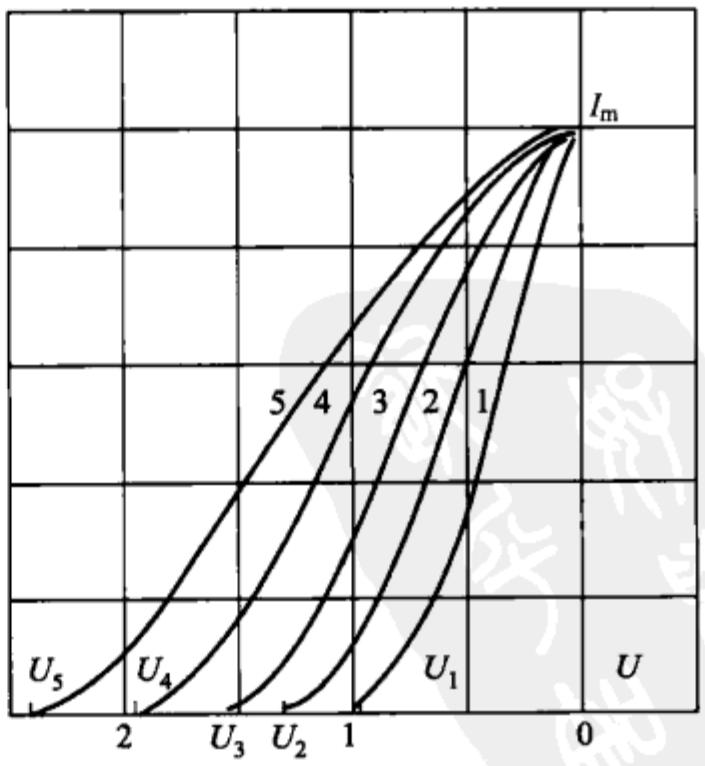


图 18-6

频率 ν_0(或波长 $\lambda_0 = c/\nu_0$)称为光电效应的极限频率(或红限). 当金属的正

电性越大时，即金属越容易失去它的电子时，极限频率就越小（波长越长）. 例如碱金属以及钡和锶的极限频率在可见光区域内，铈的在红外. 而其他大多数金属的极限频率则在紫外区域. ν_0 的数值与物体表面的清洁程度和其上吸留气体有极大关系. 表 18－1 中列有某些纯净金属的“红限”的值.

表 18－1

金属	K	Na	Li	Hg	Fe	Ag	Au	Ta	Cs
λ_0/nm	550	540	500	273.5	262	261	265	305	460

§18－3　康普顿效应

1923 年康普顿（A. H. Compton）发现，当伦琴射线被物质散射时，散射光的波长比入射光的波长长. 他测量了波长移动的大小，并且提出了一个完全能解释实验的理论.

从经典理论的观点看来，伦琴射线的散射与物质中电子的受迫振动有关，因此散射光的频率应当等于入射光的频率. 但是康普顿的理论和其同事所做的精确测量表明，在被散射的伦琴射线中，除了波长不变的散射光外，还有波长较大的散射光出现.

康普顿及其同事实验的示意图如图 18－7 所示. 由光阑 D_1D_2 出来一窄束单色伦琴射线被轻原子的物质（碳、石蜡等）所散射. 被散射的光用伦琴射线摄谱仪来研究（照相的或游离室的方法）.

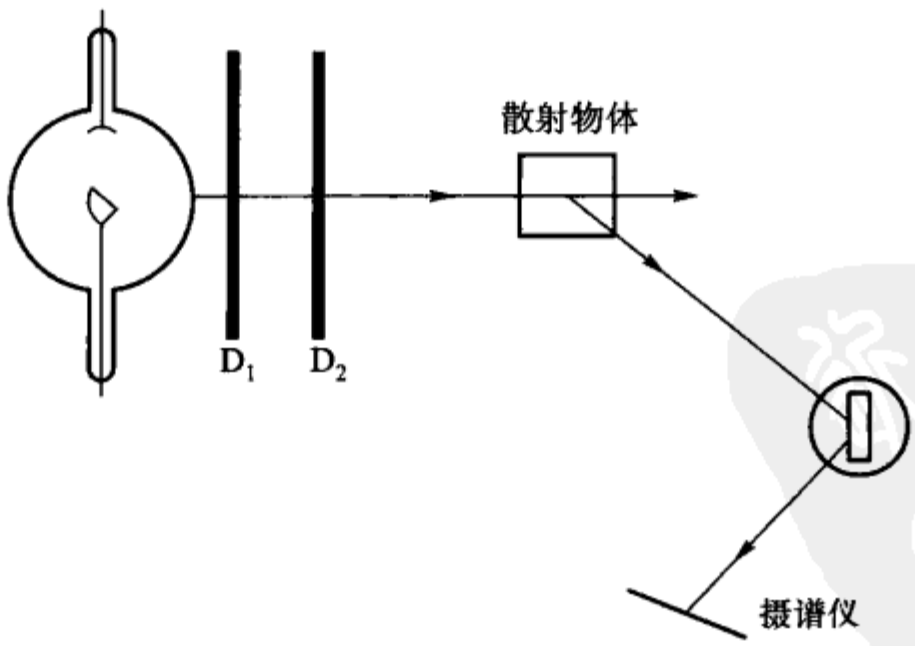


图 18－7

由观测得出，波长的改变量 $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ 与入射伦琴射线的波长 λ 以及与散射物质都无关，而与散射方向有关. 如果我们用 θ 表示入射线方向与散射线方向间的夹角，则波长的改变量 $\Delta\lambda$ 与角 θ 的关系为

$$\Delta\lambda = 2k\sin^2\frac{\theta}{2}, \tag{18-3}$$

式中 $k = 0.002\ 41$ nm，是一个由实验测出的常数，它等于散射角为 90°时，散射光波长改变的值.

图 18－8 为以石墨为散射物质的康普顿效应的记录.（a）代表在入射线（钼的 K_α 线，$\lambda = 0.071\ 260\ 5$ nm）中强度的分布；（b），（c），（d）给出不同散射角时辐射的光谱结构. 可以清楚地看出在散射光谱中，有与入射光波长相同的成分和比入射光波长大的新成分，新成分位移的数值与散射角有关，即随散射角增大而增大.

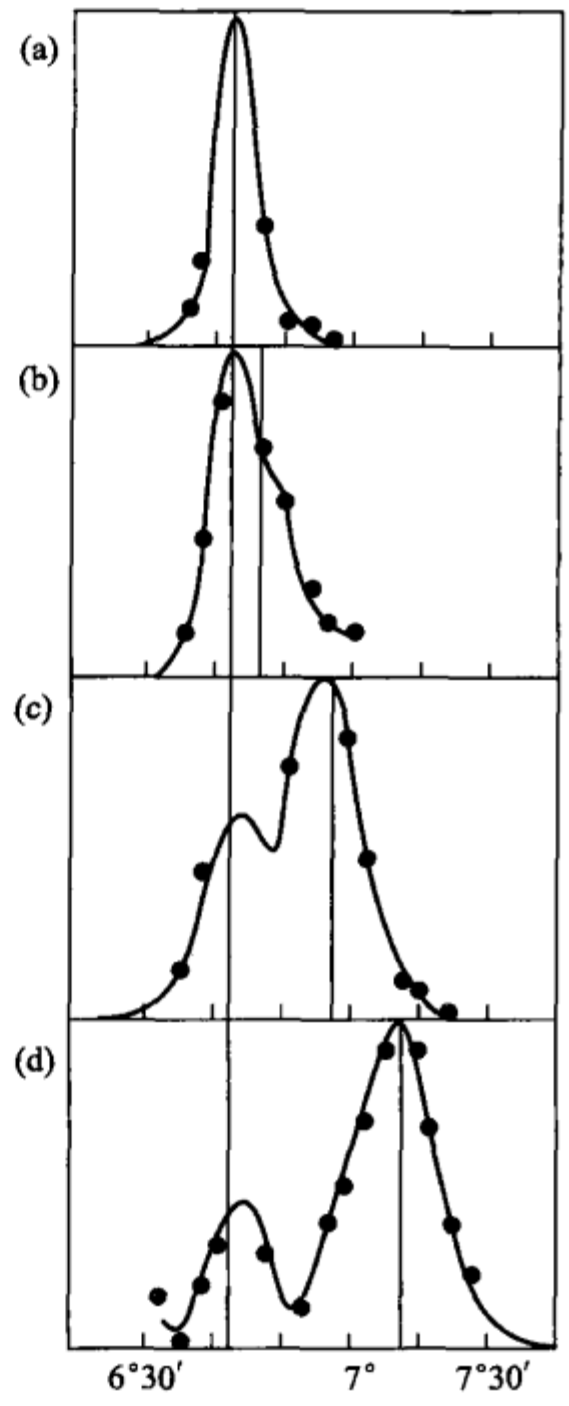


图 18－8

（a）钼的 K_α 线；（b）石墨在 45°角的散射

（c）90°角的散射；（d）135°角的散射

康普顿用光子的概念简单而成功的解释了这个现象. 在这种解释中，光的粒子性的图像特别突出. 他假设入射光是由许多光子组成，这些光子不但具有能量 $h\nu$ 而且具有动量 $h\nu/c$. 并且用普通质点的碰撞观点来处理具有动量和能量的光子与一原来处在静止的电子的碰撞（图 18－9）. 为要同时满足能量和动量守恒定律，光向某一定方向散射时，电子应发生反冲. 因为电子反冲后具有一定的动能，所以光子必将损失一些能量，以满足能量守恒定律. 因为光子的能量等于 $h\nu$，显然，散射后的频率会比原来的频率小.

因为电子在散射后可以有很大的速度，所以在写能量守恒方程式时，应当考虑到电子的质量与速度的关系. 设 m_0 为电子的静止质量，m 为因散射而获得速度 v 后的质量，则由狭义相对论可以证明

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

则能量守恒的方程式可写作

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2, \tag{18-4}$$

按动量守恒原理，由图 18－9 中的三角形 ABC，应用三角定律，得

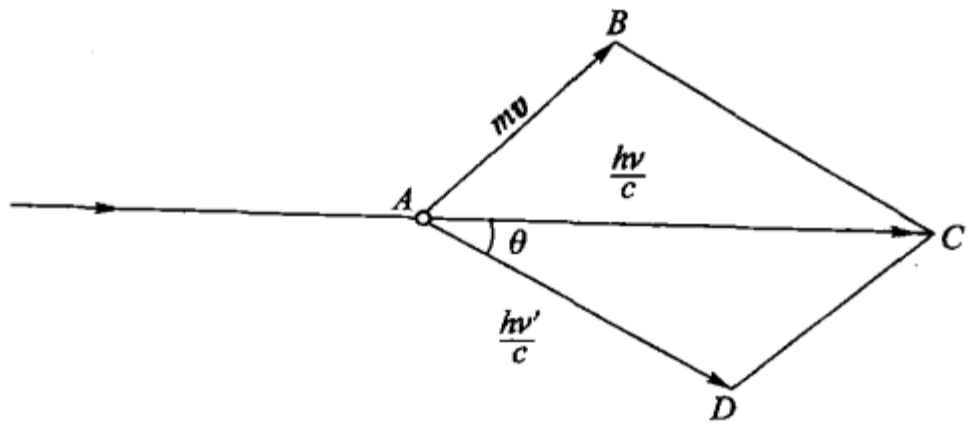


图 18-9

$$(mv)^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - 2h^2\frac{\nu\nu'}{c^2}\cos\theta. \tag{18-5}$$

将(18-4)式改写为以下形式:

$$mc^2 = h(\nu - \nu') + m_0c^2,$$

并取其平方得

$$m^2c^4 = (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h^2\nu\nu' + m_0^2c^4 + 2hm_0c^2(\nu - \nu'). \tag{18-6}$$

将(18-5)式通分,再与(18-6)式相减便得

$$m^2c^2(c^2 - v^2) = m_0^2c^4 - 2n^2\nu\nu'(1 - \cos\theta) + 2hm_0c^2(\nu - \nu').$$

因为 $m_0^2c^4 \approx m^2c^2(c^2 - v^2)$,故有

$$h\nu\nu'(1 - \cos\theta) = m_0c^2(\nu - \nu'). \tag{18-7}$$

把频率 ν 换成波长 λ,并令 $(\nu - \nu') = \Delta\nu$,及 $(\lambda - \lambda') = \Delta\lambda$,即得

$$\frac{hc^2}{\lambda\lambda'}(1 - \cos\theta) = m_0c^2\frac{c\Delta\lambda}{\lambda\lambda'},$$

或写成

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta) = \frac{2h}{m_0c}\sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{18-8}$$

将上式与(18-3)式相比,可看出 $k = 2h/m_0c$,代入 h,m_0 和 c 的值,求得 $h/m_0c = 0.002\,426$ nm,与观测所得的 k 值很相符.从表 18-2 可看出,理论值与实验值符合得很好.

表 18-2

物质	λ/nm	θ	Δλ(计算)	Δλ(测量)
石墨	0.0708	72°	0.0138	0.0170
石墨	0.0708	90°	0.0243	0.0241
		110°	0.0345	0.0350
		160°	0.0469	0.0470
石蜡	0.0708	170°	0.0480	0.0482

以上我们将电子当作是自由的.公式(18-8)与实验一致说明这一假设是成立的.事实上,一般在原子中被束缚得不太紧密的电子,在近似程度上可以是当作自由的.当然,原子中也有被束缚得紧密的电子,特别是在重原子中,被束缚得紧密的电子更多些,当光子打在这些电子上时,实际上,等于和整个原子相碰.原子的质量比电子的质量大得多(最轻的氢原子的质量比电子的质量约大2000倍),因此由于碰撞,光子传给原子本身而使其运动的能量很小,亦即 $\Delta\lambda$ 的变化很小.这个变化实际观察不到,这就是散射光中有波长不变的谱线的原因.

* §18-4 光 压

早在开普勒解释彗星尾巴的形状时,就曾提出过光压的概念.麦克斯韦曾用电磁波的观点论证了光压的必然性,并算出了光压的值.第一次从实验中发现光压并测量了光压的是列别捷夫(Н. ЛеБедев).

光压的测量是很困难的,因为在通常的实验条件下,光压力只有 $10^{-7}\sim10^{-6}\mathrm{N/m^2}$.只有完全消除了"辐射计"效应后,才能测出真正的光压."辐射计"效应是一种测量辐射的真空管内剩余气体因受热而对流所产生的作用.它与光压无丝毫共同点,但却常与光压现象相混淆.列别捷夫在克服了种种实验困难后,首先完成了测量光压的实验.

列别捷夫所用仪器的主要部分是一用细线悬挂起来的极轻的悬体 R,其上固定有小翼 a 及 b(图 18-10),其中一个涂黑,另一个则是光亮的.将悬体 R 置于图 18-11 中的真空容器 G 内.借助透镜及平面镜系统将由弧光灯 B 发出的光线射向小翼中的一个.由于作用在小翼上的光压力,使悬体 R 转动.转动的大小,可借助望远镜及固定于轴线上的小镜观察到.移动双镜 S_1,S_2 能使光或者射在涂黑的小翼上,或者射在发亮的小翼上.比较两种情况下悬体转动的大小,列别捷夫测得,涂黑表面所受的光压比反射表面所受的压力小一半,与理论完全符合.

借助薄片 P_1 使光流的一定部分射到温差电池 T 上,可以度量入射光能量的大小,因而可以对理论作定量的验证.

从光子学说的观点看,光压是由于光子把它的动量传给物体的结果.设频率为 ν 的单色光,每秒垂直入射到物体表面每平方厘米上的能量为 E,则每秒垂直入射在物体表面每平方厘米上的光子数 $N=E/h\nu$.因为每一个光子具有动量 $h\nu/c$,当光子为物体所吸收时,每个光子传给物体的动量为 $h\nu/c$,如果入射的光子全部为物体所吸收,则物体表面每平方厘米在每秒内所获得的动量应等于 $Nh\nu/c=E/c$.物体表面每平方厘米在每秒内所获得的动量,也就是作用在这个面上的压力.当光子为物体所反射时,每个光子传给物体的动量为 $2h\nu/c$,因为在反

射时,光子的动量从 $+h\nu/c$ 变到 $-h\nu/c$. 如果入射的光子全部为物体所反射,则作用于物体表面上的压力为 $p=2E/c$. 在一般情况下,当物体表面的反射系数为 ρ 时,则在每秒内入射的全部 N 个光子中,有 $(1-\rho)N$ 个被吸收而 ρN 个被反射,所以作用于物体表面上的压力等于

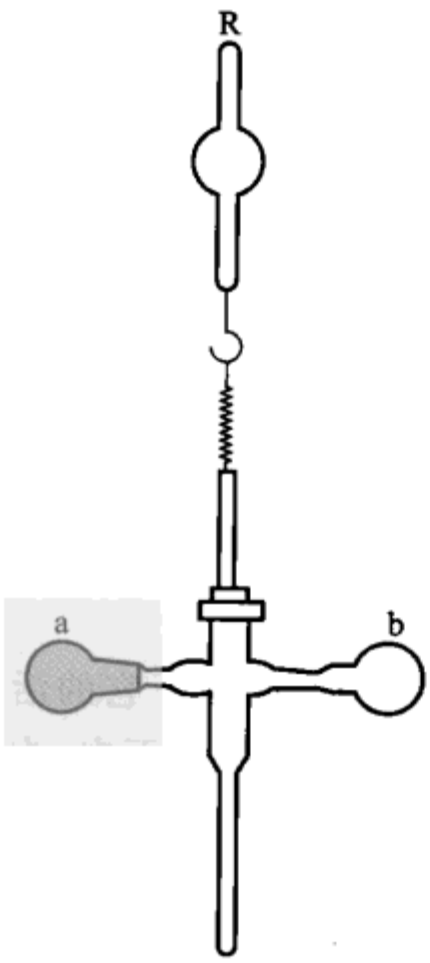


图 18-10

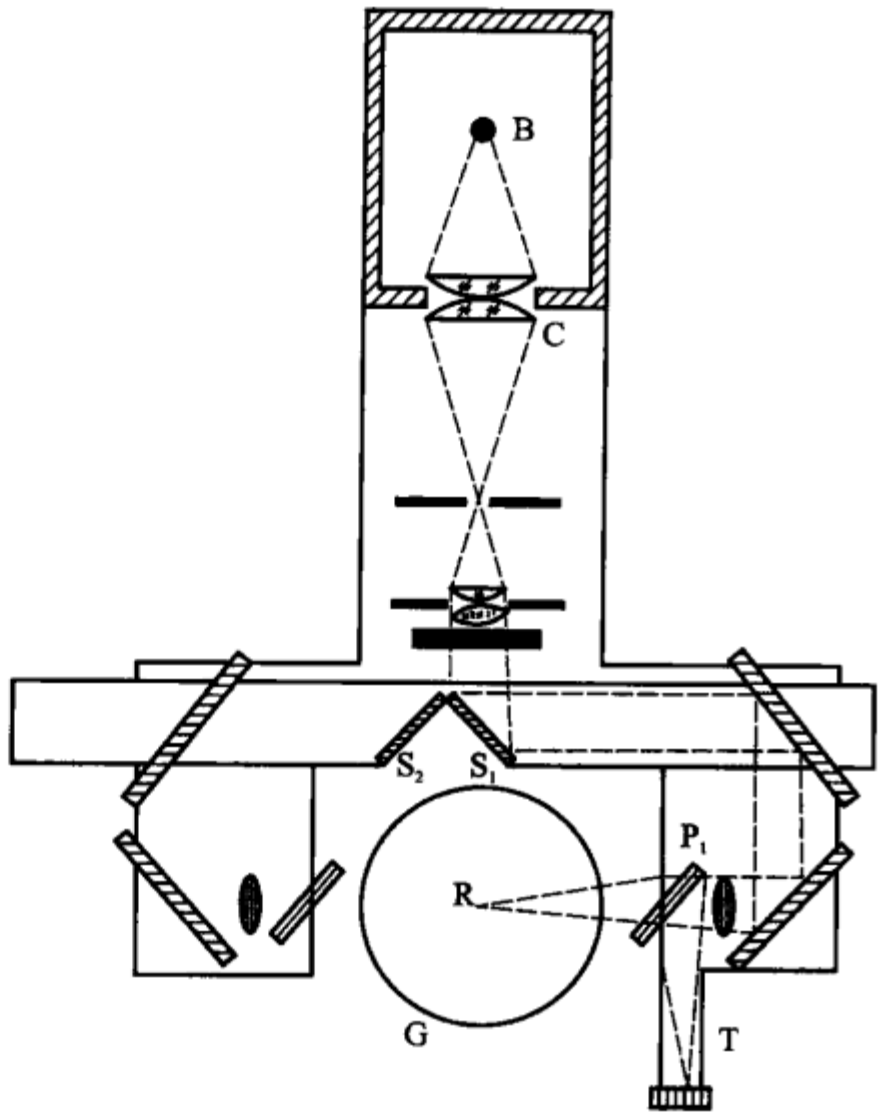


图 18-11

$$p=(1-\rho)N\frac{h\nu}{c}+\rho N2\frac{h\nu}{c}$$

$$=N\frac{h\nu}{c}(1+\rho)=\frac{E}{c}(1+\rho). \tag{18-9}$$

根据列别捷夫的测量,光压力的数值在测量的误差范围内与理论值符合得相当好.

* §18-5 微弱光流的量子起伏——瓦维洛夫实验

适应于暗弱视觉的眼睛具有不变的视觉阈,而且与这视觉阈相对应的是非常小的辐射通量. 在眼睛最灵敏的范围内这辐射通量约为 4×10^{-17} J/s、差不多相当于每秒 100 个黄色的光子. 因此有可能利用眼睛来观察微弱光流的不连续

的量子结构.假定我们的眼睛看在一个发着弱光的小点 L 上(图 18 - 12).它的光亮度借助楔形减光器 K 可以任意地减弱.假定光源的光亮度减弱到这样的程度,它送到我们眼睛里来的光子平均每秒只有 100 个.光量子不会以相等的时间间隔有规律地一个跟着一个地飞来,而是无秩序地飞来,有时数目大于 100 个,有时数目小于 100 个.在后一种情况下,眼睛感觉不到光流.因此逐渐降低光源的亮度时,应当有这样的时机来临,即眼睛应看到光源从不变的光转变为闪烁的光.

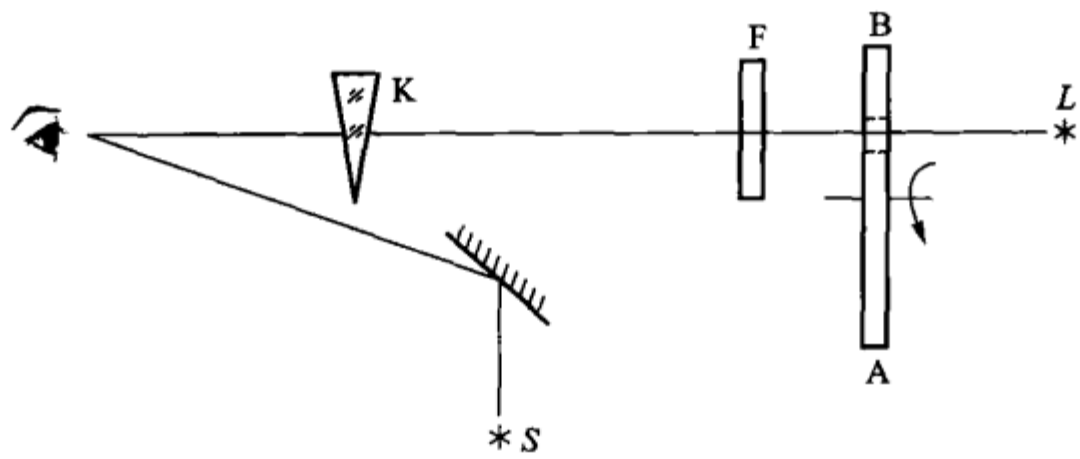


图 18 - 12

为了避免误差必须考虑以下两点:第一,眼球是非常活动的,由于它的活动即使在高强度的条件下,亦能得到亮度的涨落.所以应当把眼睛固定下来,为此在发光点 L 的同一方面放一个较明亮的(普通为红色)发光点 S,令眼睛盯在它上面.这样在网膜中央就得到 S 点的像,而 L 的像位于旁边,离中心有一固定的距离.

其次,眼睛具有视觉暂留的本领,这一特性亦会使眼睛不能准确地感觉光的涨落.要避免这一困难,可在眼睛与光源之间放一带孔的圆盘 AB,圆盘每秒转一次,只有当光源到眼睛的直线穿过小孔的时候,眼睛才看到光源 L(例如 0.1s 的时间),即眼睛在每秒钟内只看到一次短的闪光.假如每一闪光时间内穿过小孔的量子数都是一样而且大于视觉阈,那么每穿过小孔一次就有一次闪光.如果光穿过小孔的时间内量子数有显著的统计性的涨落,那么显然,不是每一次穿过小孔的光都相当一个可见的闪光.

实验证实了这一预计.事实上,对大强度的光源,固定好的眼睛对于每一次小孔经过光源与眼睛间的连线时都看到闪光,但当光亮度逐渐减低时,就开始看到闪光的空缺,光亮度愈弱,空缺变得愈多.

计算空缺和闪光的数目,按照统计学定律就可以决定在这样的条件下,在每一闪光的时间内,辐射量子的平均数,因此眼睛在事实上就"亲眼看到",并足以相信光的量子的和不连续的结构.

§18-6 光的二象性 粒子的二象性

当我们研究了所有的各种光学现象后,清楚地看到,对于这些光学现象的解释,在物理概念中必需引入"光的波、粒二象性". 这种二象性在表示光子的能量和动量的两个式子中表现得特别明显:

$$E = h\nu, \tag{18-10}$$

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \tag{18-11}$$

在以上两式中,等号的左边表示微粒的性质,即光子的能量 E 和动量 p;等号的右边则表示波动的性质,即电磁波的频率 ν 和波长 λ. 这两种性质通过普朗克常数 h 定量地联系了起来. 显然,这种联系绝不是偶然的.

由于普朗克和爱因斯坦关于光的微粒性理论取得成功,又由于在建立描写微观粒子运动规律的理论中遭到困难,德布罗意在光的二象性的启发下,提出实物粒子例如,电子、原子、中子等也具有波粒二象性的假设. 他认为 19 世纪在对光的研究上,只重视了光的波动性,忽略了光的微粒性;而在实物的研究上,可能发生了相反的情况,即过分重视了实物的微粒性,而忽略了实物的波动性. 因此,他提出了微观粒子也具有波动性的假设. 即粒子的能量 E 和动量 p 与平面波的频率 ν 和波长 λ 之间的关系正像光子与光波的关系一样,也可用 $E = h\nu$, $\lambda = h/mv$联系起来. 我们称式

$$\lambda = \frac{h}{mv} \tag{18-12}$$

为德布罗意波方程式.

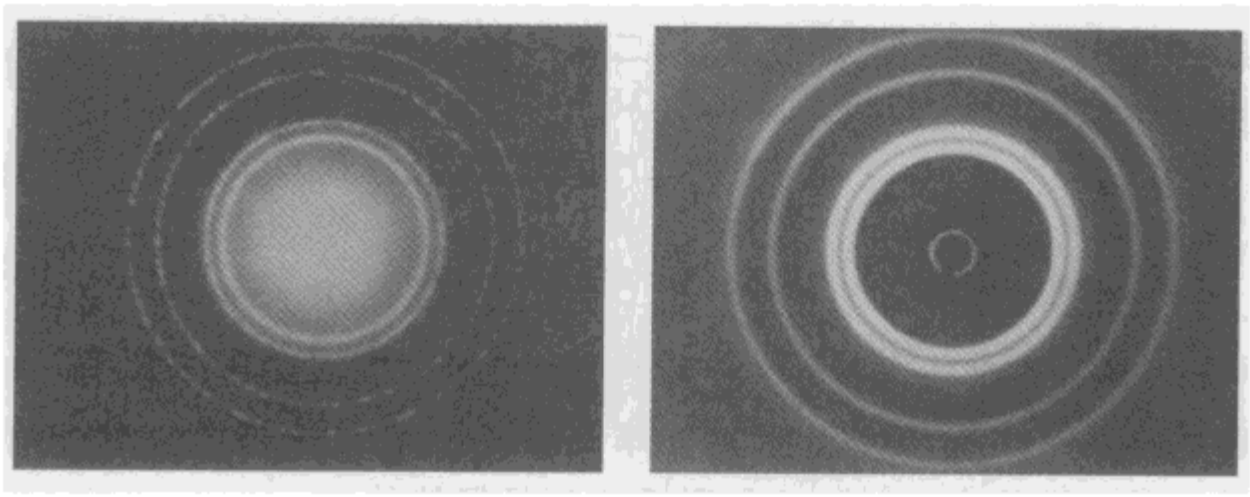
德布罗意的关于粒子具有波动性的假设,从经典物理的角度上来看是很难理解的. 因此,究竟这个假设是否符合客观实际,关键在于能否得到实验上的验证. 1927 年戴维森(Davisson)和革末(Germer)在研究电子束在晶体表面的散射时,观察到电子束的强度按散射角的分布与波衍射时的强度分布很相近. 根据衍射理论,衍射最大值由下面的公式决定:

$$n\lambda = d\sin\theta. \tag{18-13}$$

式中 n 是衍射最大值的序数,λ 是衍射线的波长,d 是晶体平面栅常数. 戴维森和革末用这个公式计算电子的波长时得到与德布罗意关系符合得很好的结果. 其实,它们是碰巧,从无意中获得这样的结果.

汤姆孙(Thomson)倒是专门为了证明电子的波动性作了一个实验,令一束高速电子通过一枚多晶的铝箔片(厚约为 100 nm)观察其衍射效应,他得到了如图 18-13(a)所示的电子衍射图样,图 18-13(b)是作为对比拍的 X 射线对同

一箔片的衍射照片. 鲁普(Rupp)在 130/mm 的金属质光栅上用电子观察到了第一、第二和第三级的像;埃斯特曼(Estermann)还用氦原子和氢分子分别表演了它们的衍射现象.



(a)　　(b)

图 18 - 13

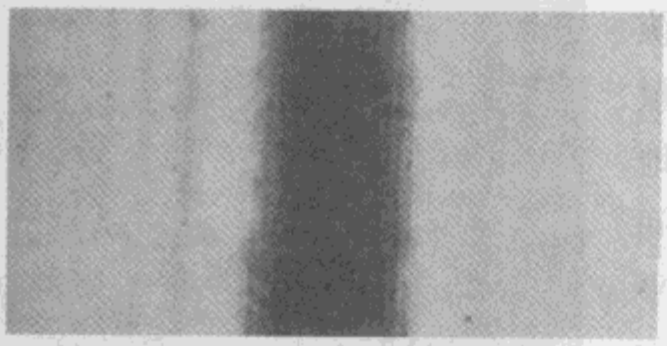
迄今,许多物理实验室成功地获得了电子束的干涉和衍射图样,如图18 - 14的一组即为所得的照片. 它们与光波的衍射和干涉图样毫无二致. 其中(a)图是1972 年拍摄的电子束的菲涅耳衍射图样,图(b)是电子束的直边衍射,图(c)是双电子束干涉装置中得到的干涉图样,图(d)是氧化锌晶体的菲涅耳电子衍射图样,图(e)是 UO_2 晶体的电子衍射图样.

所有这些实验都进一步表明:不论微粒的特性和结构如何,都表现出波动性,并且联系着微粒的动量和波长的德布罗意关系式具有普遍的意义. 换言之,德布罗意的物质波的假设是符合客观规律的.

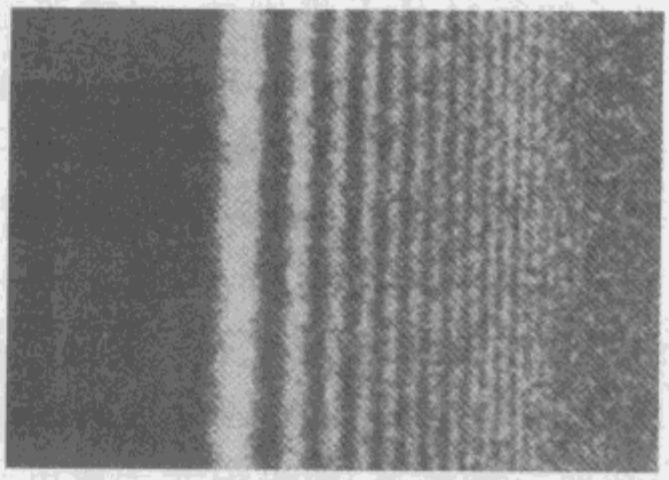
这样,不仅光有粒子和波的二象性,客观的实物也有粒子和波的二象性;二象性是普遍的.

为了进一步理解波、粒二象性之间的关系,让我们回到汤姆孙的粒子衍射实验. 设想用萤光照相板来记录由铝晶体薄膜衍射出来的电子,如果入射的电子流的强度很大,即单位时间内有许多电子从晶体薄膜衍射出来,则萤光照相板上立即出现衍射图样. 如果入射电子流的强度很小,以至于电子一个一个地从晶体薄膜出来,这时萤光照相板上就出现了一个一个的点子,显出电子的微粒性. 这些点子在照相板上的位置并不重合而是无规则地散布着(如图 18 - 15),但随着时间的延长,点子数目逐渐增多,它们在荧光照相板上的分布最终形成了衍射图样,显示出电子的波动性.

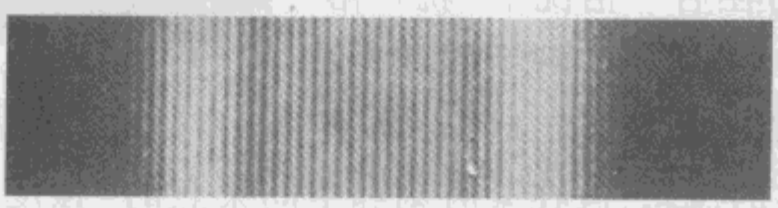
同样,用光子做衍射实验,在极端微弱的光强下照相底片上记录出无规则分布的光子,但长时间曝光所得到的衍射图样却与在强光下曝光很短时间所得的



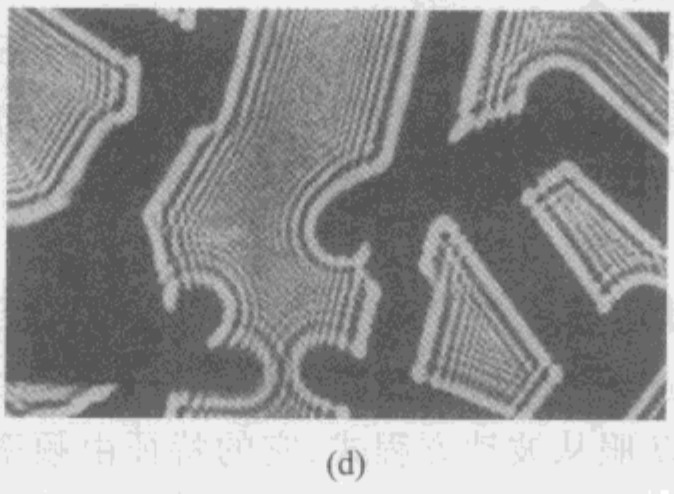
(a)



(b)



(c)



(d)



(e)

图 18－14

衍射图样完全一样.

光子和电子的这类实验揭示了粒子性和波动性之间的关系,单个光子或单

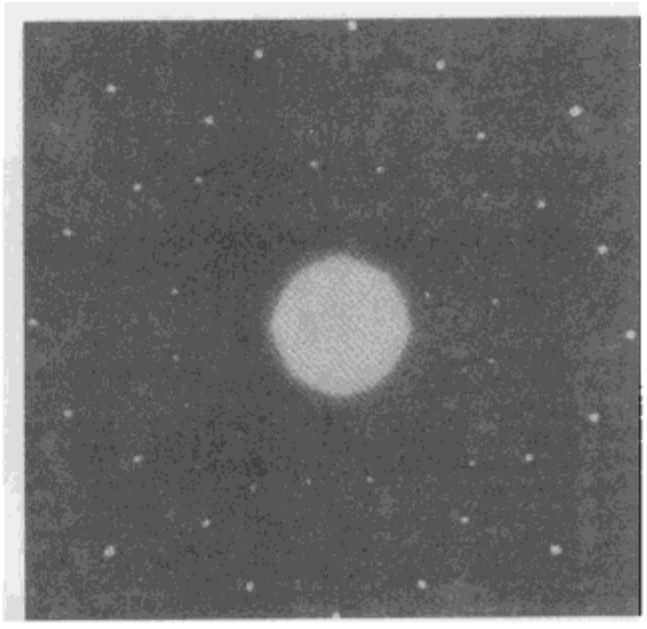


图 18－15

个电子的行径是无规则的，间或落在这一点，间或落在那一点；而大量光子的或电子的分布却与波动理论计算的一致，是一种统计平均的分布. 因此，从统计的观点看，大量的光子或电子同时通过与它们一个一个地通过之间的差别，只在于前一实验是对空间的统计平均，后一实验是对时间的统计平均；在前一情况下，如果说光子或电子落在某些地方稠密些，而在后一情况下，就是落到这些地方的光子或电子频繁些. 因此，我们可以从统计的观点来把波、粒二象性联系起来，从而形成这样的概念：波在某时刻和空间某点的“强度”（振幅绝对值的平方）就是该时刻在该点找到粒子的概率.

这种统计的观点确实统一了微粒概念和波动概念，在微粒方面的集中的能量、动量和质量，也就是光或实物的一般微粒性；而波动方面，则是在某处发现它们的概率，由这个概率可以算出光子或电子在空间的分布，这分布与波动的概念一致.

以上是从微粒运动的统计来了解波动，我们也可以反过来从波动场的量子化来了解微粒. 在作这样了解时，我们说辐射是一种以极大频率交变的电磁场，电场和磁场强度 E 和 H 服从波动方程式，它的特征由频率 ν 或波长 λ 和振幅 A 来描述.

按经典电动力学，电磁场有能量密度 $u=\varepsilon E^2\mu H^2/8\pi$ 和动量密度 $g=u/c$，u 和 g 是连续地分布在空间的. “连续分布”是经典电动力学的特征. 然而，在 1905 年爱因斯坦指出：辐射的能量在空间上的分布是不连续的，它表现得好像在有单位体积内有 $u/h\nu$ 个粒子，而每个粒子的能量等于 $h\nu$. 同样，辐射的动量也是量子化的，它的单位等于 $h\nu/c=h/\lambda$. 事实上爱因斯坦的光子学说就是根据这点并结合普朗克的量子论而建立起来的.

如上所述，我们有了关于光和实物都普遍有波粒二象性的认识，并且也了解了波粒二象性的上述统计关系，但是光究竟是波还是粒子的问题并没有得到解答. 那么，是不是可以设计一个实验来测量光究竟是波还是粒子呢？是不是可以测量单个电子或光子的行径呢？到目前为止，还没有找到这种实验的方法. 因为测量的过程和被测量的现象之间存在着内在的联系，以至于任何这种企图都不会成功. 这就涉及量子力学中的海森伯（Heisenberg）测不准原理（uncertainty principle）.

例如，我们设想一个双狭缝干涉实验，如图 18－16(a). 屏上的干涉条纹很

容易用波动性加以说明;用电子也得到了同样的结果[图 18-14(c)]. 这就是,当两个狭缝 A 和 B 都开着时,电子在屏上的分布取决于双狭缝干涉的规则. 沿用我们习惯上的波动概念,首先想到这是由于通过两狭缝的电子或光子互射影响各自的常轨而生的一般的干涉图样. 然而,如果把电子流或光流减到那样的微弱,以至于在任一时间通过两狭缝的都只有一个电子或一个光子,这就不能说有相互影响常轨的因素了,但是,延长露光时间也仍然能得到同样的干涉图样. 可见我们无法区别光是波还是粒子.

如果我们在这实验里为检知单个电子或光子的行径而将两狭缝之一遮住,结果在屏上原来双狭缝都开着时从来没有电子或光子的地方(如 C 点)却有了电子或光子[图 18-16(b)]. 测量的过程改变了原来的现象,双狭缝干涉变成了单狭缝衍射. 电子或光子的位置测准确了(如通过缝 A),但电子或光子的动量所表现的在屏上的落点就不能确定,无法测知单个电子或光子的行径.

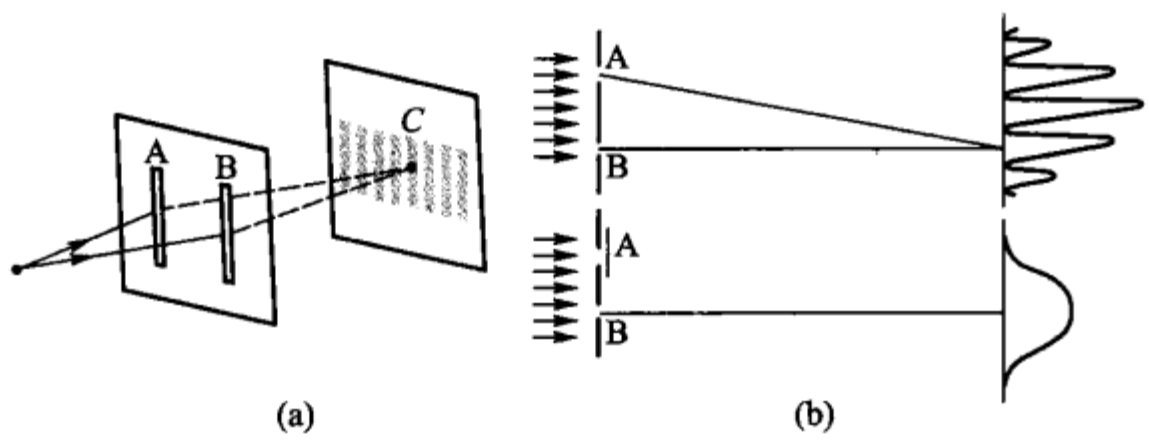


图 18-16

许多物理学家,包括爱因斯坦在内,试图设计一个测量通过一个狭缝的单个电子或光子而不影响干涉图样的实验,都没有成功. 这可以说,对于单个电子或光子,除了在它与物质相互作用时之外,它在空间上没有确定的位置,要同时测准光子的位置和动量是不可能的. 海森伯将测光子或电子的动量的误差 Δp 和其位置的误差 Δx 的关系写成

$$\Delta p \Delta x \approx h, \tag{18-14}$$

此式称海森伯测不准原理,其中 h 为普朗克常数. 例如,对某一以 200 m/s 运动的电子,若其动量的测量误差为 0.1%,则由式(18-14)算出的电子位置的误差最小为 3.64 mm(见本章习题). 这里所说的测量误差并不是由测量技术上造成的,而是光子和电子这样的量子的固有性质造成的.

总而言之,我们现在除了承认光和电子既具有我们宏观世界所了解的波动性质,又具有我们在宏观世界所了解的粒子性质之外,别的还弄不清楚,至少我

们还没有满意的理论.

但是,从我们直接经验所看到的关于光子和电子(也包括其他微粒子)的现象中,也确实还有许多是它们有明显差别(如果不说是矛盾的话)的地方.

例如,在速度方面,光在真空中的传播速度只有一个速度,即光束 c;而电子可以有小于光速的任何速度;在质量方面,电子有所谓静止的质量,而光子的静止质量等于零. 光子动量上的差异只能从传播方向的不同表现出来,能量上的差异只能通过不同频率表现出来,而电子却不这样. 此外,在涉及大量光子和大量电子的行为方面,也有一些重要的差别. 例如,对一个多电子组成的系统,它与多光子组成的相干光束有很大的不同. 由许多电子和许多原子核组成的有规则的系统是固态结晶体,物质的原子是由原子核和围绕它的电子组成的,晶体则是由原子核的阵列所组成,其中每个原子核都紧紧地维系住一些电子,同时另一些电子则为其他原子核所共有,然而,多光子构成的相干光束却没有这种性质.

既然如此,是不是可以说光子和电子是完全没有内在联系的呢? 而事实上,也不是这样,因为近代实验已经发现,波长约为 10^{-3}nm 的光子(γ 射线)在强电场中可变成两个带相反电荷的质点——电子和阳电子的现象. 这一现象无疑地揭示着光子与电子之间确实存在着深刻的联系,而不是相互无关的. 但是我们怎样去解释呢? 可以说,除了不能令人满意的狄拉克(Dirack)理论外,还没有别的理论来解释.

在这些暂时还没有解决的问题的面前,让我们回过头来考察一下人们在研究这些客观事物所用的概念,也许会对我们探讨问题的思想有些帮助.

我们说光和电子具有波动和粒子的二象性. 而这里所说的波动和粒子只不过是人们从其所生活的宏观世界的直接经验中得到的对物质的一种抽象和近似. 对于能直接观察到或用宏观仪器能测量到的事物来说,这种抽象和近似是如此之真实,以至于可以把它看成是完全正确的,甚至是绝对无误的. 但是,在电子、光子以及普遍的基本粒子的微观世界中,如前面所说的那样,我们却从来无法找到一个实验能够把“理想的粒子”和“理想的波”区别开来. 所以要问一个电子或一个光子究竟是一个粒子还是一个波,就像问一个电子的颜色和味道一样,是一个无法回答的问题. 粒子和波不过是一种简化了的模型,当我们作精密测量时,就会发现,客观物质并不真正具有我们在粒子和波这些模型中所规定的那样严格的区别. 用已知的、宏观上的、简单近似概念硬套在未知的、另一微观世界的、复杂的客观事物上去求解,也许就是问题的所在,当然,得不到真解.

然而,我们却不能由此而否定今日的关于光的本性的基本认识,因为这些认识虽然还只具有相对真理的意义,但另一方面,也确是一定条件下的具有客观真理性的知识. 更何况每一历史时期对光的认识都较它前一时期更接近客观真理. “光究竟是什么”的问题的“最终解答”,只能通过无止境地逐渐接近真理的认识

过程来获得.

习　题

本章习题常用到的几个物理常数:

电子质量 $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg,

1 eV = 1.6×10^{-19} J,

普朗克常数 $h = 6.6262 \times 10^{-34}$ J·s,

1 J = 10^7 erg,

光速 $c \approx 3 \times 10^8$ m/s.

1. 试计算出波长为 600 nm 和 400 nm 的光子能量和动量.

2. 某 X 射线的波长为 0.1 nm,求其光子的能量和动量.

3. 试以电子伏特为单位来表示(1)2.5 μm 的红外线和(2)280 nm 的紫外线的光子的能量.

4. 某电台发射功率为 10 kW,频率为 1.6 MHz,试求:

(1) 每秒发射多少个量子;

(2) 假定光源向四面八方均匀发射,试求在相距 5 km 处直径为 2 m 的天线,每秒中能接到多少量子.

5. 已知单色光 488 nm,它通过 1 cm^2 截面的辐射通量为 20 W,试求该单色光的 1 mm^3 内光子的数目.

6. 某一个功率为 100 W 的白炽灯,已经使用了 100 天. 求在这种发射过程中消耗了多少克质量?

7. 某一电子的运动速度已达光速的五分之一,求该电子的波长.

8. 试求动能为 60 eV 的电子的速度、动量和波长.

9. 设中子的质量为 1.67×10^{-27} kg,试求为使动能为 20 keV 的中子通过圆孔衍射后其中心最大与第一最小的夹角为 2°时圆孔的直径的大小.

10. 岩盐晶体的空间格子常数 $d = 0.28$ nm,问中子的速度应该多大才能在与法线成 20°的方向将衍射第一级?

11. 波长为 0.062 nm 的 X 射线经某固体后沿与前进方向成 60°的方向散射,求由于康普顿散射而发生的波长的改变量.

12. 波长为 0.02 nm 的 X 射线经固体散射后沿与原前进方向成 90°角的方向散射,假定被碰撞的电子是静止的,求:(1)康普顿效应产生的频率改变;(2)散射后 X 射线的新波长.

13. 以紫外线(300 nm)射到逸出功为 2.0 eV 的金属表面,求光电子从表面发射出来时的速度.

14. 已知从铯表面发射出的光电子的动能为 2 eV,铯的逸出功为 1.8 eV. 求入射光的波长.

15. 波长为 380 nm 的紫光射到一金属表面,产生的光电子的速度为 6.2×10^5 m/s,求:(1)光电子的动能;(2)该金属的逸出功.

16. 波长为 320 nm 的光子打在一个逸出功为 2.2 eV 的金属表面上,试求射出的光电子的速度.

17. 一电子速度为 200 m/s,精确度 0.1%. 问确定此电子的位置的精确度如何?

附　　录

一、基本物理常量[①]表

物理常量名称	符号	数值	单位
阿伏伽德罗常量	N_A	$6.022\ 141\ 79(30)\times10^{23}$	mol^{-1}
玻耳兹曼常量	k	$1.380\ 650\ 4(24)\times10^{-23}$	$J\cdot K^{-1}$
元电荷	e	$1.602\ 176\ 487(40)\times10^{-19}$	C
电子比荷	$-e/m_e$	$-1.758\ 820\ 150(44)\times10^{11}$	$C\cdot kg^{-1}$
1 电子伏特的能量	eV	$1.602\ 176\ 487(40)\times10^{-19}$	J
伏特 - 波长换算因子	hc/e	$1.239\ 841\ 875\times10^{8}$	$V\cdot m$
第一辐射常量($2\pi hc^2$)	c_1	$3.741\ 771\ 18(19)\times10^{-16}$	$W\cdot m^2$
电子质量	m_e	$9.109\ 382\ 15(45)\times10^{-31}$	kg
普朗克常量	h	$6.626\ 068\ 96(33)\times10^{-34}$	$J\cdot s$
第二辐射常量(hc/k)	c_2	$1.438\ 775\ 2(25)\times10^{-2}$	$m\cdot K$
真空中光速	c	299 792 458	$m\cdot s^{-1}$
斯忒藩 - 玻耳兹曼常数	σ	$5.670\ 400(40)\times10^{-8}$	$W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}$
光(0.555 μm)的最小力学当量	K_m	685	$lm\cdot W^{-1}$

二、角度换算表

	度	分	秒
1°(度) =	1	60	3600
1′(分) =	0.016667	1	60
1″(秒) =	2.77778×10^{-4}	0.016667	1
1rad(弧度) =	57.2958	3437.75	2.06265×10^{5}
1mrad(毫弧度) =	0.0572958	3.43775	206.265
1 圆周 =	360	2.16×10^{4}	1.296×10^{6}
1 象限 =	90	5400	3.24×10^{5}

① 根据国际科技数据委员会(CODATA)2006 年正式发表的推荐值.

续表

	弧度	毫弧度	圆周	象限
1°(度) =	0.017453	17.453	0.0027778	0.011111
1′(分) =	2.9089×10^{-4}	0.29089	4.6296×10^{-5}	1.8519×10^{-4}
1″(秒) =	4.8481×10^{-6}	0.0048481	7.71605×10^{-7}	3.0864×10^{-8}
1rad(弧度) =	1	1000	0.159155	0.63662
1mrad(毫弧度) =	0.001	1	1.59155×10^{-4}	6.3662×10^{-4}
1 圆周 =	6.28319	6283.19	1	4
1 象限 =	1.5708	1570.8	0.2500	1

三、一些常用波长

(在 15℃和 1.013×10^5Pa 条件下,波长单位:nm)

(a) 氢

656.28H_α

486.13H_β

434.05H_γ

410.17H_δ

397.01H_ε

388.90H_ξ

(b) 汞

690.716

623.437

612.327

607.264

579.065

576.959

546.074

491.604

435.835

434.750

433.924

407.781

404.656

(c) 氦

706.52

667.81

587.56

504.77

501.57

492.19

471.31

447.15

443.75

438.79

414.38

412.08

402.62

396.47

388.86

(d) 氖

692.95

671.70

667.83

659.90

653.29

650.65

640.22

638.30

633.44

630.48

626.65

621.73

616.36

614.31

609.62

607.43

603.00

597.55

594.48

588.19

585.25

582.02

576.44

540.06

534.11

533.08

(e) 夫琅禾费线

(太阳吸收线)

B 687.00 O_2

C 656.28 H

D_1 589.593 Na

D_2 588.996 Na

E 527.01 Fe,Ca

F 486.13 H_β

G′434.05 H_γ

H 396.85 Ca Ⅱ

K 393.37 Ca Ⅱ

(f) 其他谱线

670.79 Li

643.85 Cd

610.36 Li

589.593 Na

588.996 Na

553.55 Ba

508.58 Cd

479.99 Cd

467.82 Cd

396.85 Ca Ⅱ

393.37 Ca Ⅱ

四、各种物质的折射率

（a）一些气体折射率（对 $\lambda = 589.3$ nm）

（在 0℃ 和 1.013×10^5 Pa 条件下）

气体名称	n_D
空 气	1.0002926
氢 气	1.000132
氮 气	1.000296
氧 气	1.000271
二氧化碳	1.000448
甲 烷	1.000444

（b）一些液体的折射率

液体名称	温度/℃	n_D
水	20	1.3330
丙酮	20	1.359
氨水	16.5	1.325
苯	20	1.501
溴	20	1.654
二硫化碳	18	1.6255
二氧化碳	15	1.195
三氯甲烷	20	1.446
甘油	20	1.474
酒精	20	1.3605
乙醚	22	1.351
甲醇	20	1.329
甲苯	20	1.495
加拿大树胶	20	1.530

（c）一些单轴晶体的 n_o 和 n_e（对 $\lambda = 589.3$ nm）

物质名称	n_o	n_e
方解石	1.6584	1.4864
冰	1.3091	1.3104
石英（晶体）	1.5442	1.5533
电石	1.669	1.638
硝酸钠	1.5874	1.3361
锆石	1.923	1.968

（d）一些双轴晶体的光学常量（$\lambda = 589.3$ nm）

物质名称	n_α	n_β	n_γ
云母	1.5601	1.5936	1.5977
硝酸钾	1.3346	1.5056	1.5061
蔗糖	1.5397	1.5667	1.5716
酒石酸	1.4953	1.5353	1.6046

（e）晶体石英对不同波长的 n_o 和 n_e

λ/nm	n_o	n_e	$n_e - n_o$
200	1.64943	1.66237	0.01294
300	1.57709	1.58838	0.01129
400	1.55774	1.56731	0.00957
500	1.54878	1.55805	0.00927
589.3	1.544246	1.553355	0.009109
600	1.54385	1.55295	0.00910
700	1.54067	1.54966	0.00899
800	1.53838	1.54729	0.00891
1000	1.53503	1.54381	0.00878
1200	1.53232	1.54098	0.00866
1400	1.52972	1.53826	0.00854
1600	1.52703	1.53545	0.00842
1800	1.52413	1.53242	0.00829
2000	1.51158	1.5195	0.0080

（f）熔石英（20℃）对不用波长的折射率

λ/nm	n	λ/nm	n	λ/nm	n
302.15	1.487194	361.051	1.474536	508.582	1.461863
330.259	1.480539	404.656	1.469618	546.074	1.460078
334.148	1.479763	435.835	1.466693	576.959	1.458846
340.365	1.478584	467.816	1.464292	589.3	1.45843
346.624	1.477468	486.133	1.463126		

（g）ADP($NH_4H_2PO_4$)的 n_o 和 n_e

波长/nm	n_o(20℃)	n_e
690.7	1.5192	1.4753
643.8	…	…
623.4	1.5223	1.4775
577.9	1.5246	1.4792
546.1	1.5265	1.4808
491.6	1.5303	1.4838
435.8	1.5357	1.4882
407.8	1.5392	1.4912
404.7	1.5396	1.4915
365.3	1.5457	1.4970

（h）KDP(KH_2PO_4)的 n_o 和 n_e

波长/nm	n_o(20℃)	n_e
690.7	1.5052	1.4655
623.4	1.5079	1.4672
579.1	1.5099	1.4686
546.1	1.5117	1.4700
491.6	1.5152	1.4727
435.8	1.5200	1.4766
407.8	1.5232	1.4792
404.7	1.5235	1.4795
365.3	1.5292	1.4843

（i）几种常用无色光学玻璃表①

牌号	589.3nm n_D	$(n_F-n_C)\times10^5$	ν_D	656.3 nm n_C	546.1 nm n_e	486.1 nm n_F	4358 nm n_q
QK3	1.48740	696	70.0	1.48531	1.48912	1.49227	1.49596
K5	1.51000	805	63.4	1.50760	1.51189	1.51565	1.51998
K7	1.51470	849	60.6	1.51218	1.51681	1.52067	1.52526
K9	1.51630	806	64.1	1.51390	1.51829	1.52196	1.52627

① 详见：光学玻璃汇编．北京：机械工业出版社，1977.

续表

牌号	589.3nm n_D	$(n_F - n_C) \times 10^5$	ν_D	656.3 nm n_C	546.1 nm n_e	486.1 nm n_F	4358 nm n_q
BaK2	1.53990	905	59.7	1.53723	1.54214	1.54628	1.55120
BaK7	1.56880	1015	56.0	1.56582	1.57131	1.57597	1.58154
BaK8	1.57240	996	57.5	1.56947	1.57486	1.57943	1.58487
ZK3	1.58910	962	61.2	1.58624	1.59148	1.59586	1.60105
ZK9	1.62030	1029	60.3	1.61728	1.62887	1.62757	1.63314
ZK19	1.61365	1088	56.4	1.61046	1.61634	1.62134	1.62731
LaK1	1.65940	1150	57.3	1.65600	1.66224	1.66750	1.67377
KF3	1.52620	1032	51.0	1.52319	1.52875	1.53351	1.53925
QF1	1.54800	1195	45.9	1.54454	1.55094	1.55649	1.56328
QF3	1.57490	1392	41.3	1.57090	1.57833	1.58482	1.59281
BaF1	1.54800	1016	53.9	1.54502	1.55051	1.55518	1.56081
BaF8	1.62590	1601	39.1	1.62133	1.62984	1.63734	1.64660
F2	1.61280	1590	37.9	1.59856	1.60702	1.61446	1.62367
F4	1.61990	1706	36.3	1.61504	1.62408	1.63210	1.64205
ZBaF3	1.65680	1285	51.1	1.65306	1.65996	1.66591	1.67306
ZF1	1.64750	1912	33.9	1.64208	1.65219	1.66120	1.67245
ZF6	1.75000	2743	27.5	1.74733	1.76171	1.77476	1.79135
LaF1	1.71687	1497	47.9	1.71248	1.72056	1.72745	1.73578
LaF7	1.78816	1664	47.4	1.78330	1.79227	1.79994	1.80917

五、光度学单位换算表

(a) 光亮度的单位换算表

换算系数 单位 / 单位	cd/m^2 (坎德拉每平方米)	cd/cm^2 (坎德拉每平方厘米)	cd/ft^2 (坎德拉每平方英尺)	cd/in^2 (坎德拉每平方英寸)	ft-Lambert (英尺-朗伯)
cd/m^2	1	1000	10.764	1550	3.426
cd/cm^2	0.0001	1	0.001076	0.155	0.0003426
cd/ft^2	0.0929	929	1	144	0.3183
cd/in^2	0.000645	6.452	0.00694	1	0.002211
ft-Lambert	0.2919	2919	31416	452.4	1

（b）光照度的单位换算表

换算系数 单位 / 单位	ft·cd（英尺坎德拉）	lm/m^2 或 lx（流明每平方米或勒克斯）	ph（辐透）	mph（毫辐透）
ft·cd	1	0.0729	929	0.929
lm/m^2 或 lx	10.764	1	10000	10
ph	0.00108	0.0001	1	0.001
mph	1.076	0.1	1000	1

（c）由英尺坎德拉换算成勒克斯的数值表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	11	21	32	43	54	65	75	86	97
10	108	118	129	140	151	161	172	183	194	204
20	215	226	237	247	258	269	280	291	301	312
30	323	334	344	355	366	377	387	398	409	420
40	430	441	452	463	473	484	495	506	516	527
50	538	549	560	570	581	592	603	613	624	635
60	646	656	667	678	689	699	710	721	732	742
70	753	764	775	785	796	807	818	829	839	850
80	861	872	882	893	904	915	925	936	947	958
90	968	979	990	1000	1011	1022	1033	1044	1054	1065
100	1076	1087	1098	1108	1119	1130	1141	1151	1162	1173

注：例如，65 英尺坎德拉 = 699 勒克斯，表中加灰处数值.

部分习题答案

第 三 章

2. 179°12′

4. 1°26′

5. $d(1-1/n)$

7. 否

8. 否

9. 0.557

10. 1.714

12. 红光出液面,蓝光全内反射

13. 色散与像散

14. 22°12′57″

16. 1.1315 mm

17. 边厚 5.087 mm;板厚 7.41 mm

19. 1.504; −75.15 mm

20. 球心;离球心 39.526 mm 处

21. −4.159 mm;3.467 mm

22. (1)200 mm;(2)800 mm

23. $n=2$

24. $-R/3$

25. 平行光

26. (1)镜前 $\left|\frac{5}{8}R\right|$;(2)镜前 $\left|\frac{3}{8}R\right|$

27. 镜前 85.36 mm

28. 镜后 103.4 mm;像高 1.724 mm

29. −533.332 mm

30. −13.846 cm;19.259 D

32. (1)成像在第二块反射镜左方 60 cm 处,放大率为 −1;

(2)成像在第一块反射镜右方 70 cm 处,放大率为 2.

33. 189.5 mm

34. 28.125 mm; −37.5 mm

35. 像在透镜后 100 mm 处,高 4 mm,倒立;像在透镜后 72.72 mm 处,高 1.818 mm,倒立

36. $f_1'=40$ mm,$f_2'=240.2$ mm

37. 第一次 $s_1=-58.117$ mm;第二次 $s_1=-91.887$ mm

38. $f'=10$ cm

39. (1) $x'=-15,-22.5,-45$ mm,β 递增 1∶1.5∶3;(2)用于变集系统

40. 60 cm

42. 无焦系统,$\Phi=0$

43. $f'=-90$ mm; −14.815D

44. $f'=-f=38.5$ mm;$x_H'=-27$ mm;$x_H=27$ mm,H 和 H'重合

45. 测焦距；$f_2' = \dfrac{h'}{h} f_1$

47. $x_H = 0.397$ cm；$x_H' = -1.17$ cm；$s_2' = 17.862$ cm；$\beta = -0.236$

48. -4.16 D　　49. 1.4024

50. $n = 1.5$；$r = -24$ cm　　51. $f' = 200$ mm；$f = -150$ mm

52. $f' = 45$ mm；$x_H' = -30$ mm；$x_H = 30$ mm

53. $f' = 36$ mm；$x_H' = -24$ mm；$x_H = 48$ mm

55. $f' = 100$ mm；$x_H' = -50$ mm；$x_H = 100$ mm

56. $f' = 543.48$ mm；$\Phi = 1.84$ 屈光度；$x_H' = -260.37$ mm；$x_H = -347.83$ mm. F'点在负片后 281.61 mm 处

57. $f' = 543.48$ mm，F'点在正片后面 891.3 mm

第 四 章

5. $r_1 = 69.2$ mm；$r_2 = 6470$ mm

6. $r_1 = 100$ mm；$r_2 = 150$ mm

7. (1)$\beta = n^4$；(2)色差，后加胶和透镜

第 五 章

1. 0.4932 lm；0.5×10^{-7}　　2. 906 J

3. $r_1 = \dfrac{1}{3}$ m；$r_2 = \dfrac{2}{3}$ m　　4. 11.36 lx

6. 137000 lx　　7. 0.1

第 六 章

1. 4 ×；10 cm　　2. 16 cm；-4 cm

3. (1)6 D，66.7 cm；(2) -6 D，33.3 cm

4. 800 ×

5. 25.815，∞，8.601；∞，33.34 mm

第 七 章

3. 632.8 nm　　4. 4.3 mm

5. $\Delta l = 0.00118L$　　7. 22°8′

8. 634.5 nm　　10. 0.0054 mm

第 八 章

2. 1.18 mm　　3. 12.25 m

5. 0.145 mm　　8. 29.8 mm

10. 2.2″

第 九 章

3. 48

5. 156 cm;52 cm;31.2 cm

6. 0.82 mm

7. 1.66 mm;3.32 mm;4.28 mm

9. 0.047;0.014

10. 7.24×10^{-3} mm

11. 约 290.3 km;290.3 m 和 116 m

12. 0.2184 mm;0.0273 mm

第 十 章

1. 0.268×10^{-6} rad;830

2. 1 m

3. 1.06;45°

4. $f/2$

5. 6560 m

7. 约 600/mm;5 mm

8. 4.2×10^{-2} mm

9. 35.7 mm

10. 320 mm

11. $k=-1,\theta=-64°;k=0,\theta=-17°;k=1,\theta=17°;k=2,\theta=64°$

13. 14.7°;30.9°

14. 6°

第 十 一 章

1. 0.92

2. 29.5/mm

4. MTF(0.1) = 0.4926;PTF = 0

8. $f'(\xi')=\frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_0^{z_-}\left(\frac{\sin u}{u}\right)\mathrm{d}u-\frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_0^{z_+}\left(\frac{\sin u}{u}\right)\mathrm{d}u$

其中 $u=2\pi\nu\left(\xi\pm\frac{1}{2}a\right),z_+=\pi\bar{b}\left(\xi+\frac{1}{2}a\right),z_-=\pi\bar{b}\left(\xi-\frac{1}{2}a\right)$

9. 2×10^{-3} mm

第 十 二 章

4. $T_s=81.6\%;T_p=98.1\%$

5. 59%;5%

6. 99.64 nm

7. 98.4%;4%

8. 542 nm,260.2 nm

9. $d_H=60$ nm;$d_L=107$ nm

10. 202.3 nm

第 十 三 章

1. $A_e/A_0=2.75;I_e/I_0=7.55$

3. 45°

4. 3°31′

5. 14.38 mm

6. $l_{方}=8.565\times10^{-4}$ mm;$l_{石}=0.0162$ mm

7. (1)椭圆偏振光;(2)$0.625I_0$ 在第二个尼科耳棱镜的主平面内振动的线偏振光

10. 4.15 mm

第十四章

2. 约 20.5″

6. 取红光波长 $\lambda = 0.65$ nm,绿光波长 $\lambda = 0.55$ nm,$v \approx 0.182\ c$

8. 1200/mm,宽 300 mm 的光栅用于 2 级

第十五章

2. 平均值 $B = 0.004521 \times 10^6 \text{nm}^2$,$A = 1.51396$

3. 7.19,5.03,2.17,0.697 cm

4. 斯托克斯线:502.89,512.82,517.76,528.93,573.23,573.73 nm;反斯托克斯线:473.96,465.46,461.47,452.94,424.83,424.54 nm

第十六章

1. 1416 K

3. 3.975×10^{-19} J,2.481 eV;6.625×10^{-28} J,4.135×10^{-9} eV

4. 6232 K

5. 0.25×10^{-2},3.2×10^{-2},4.0×10^{-2},1.3×10^{-2},0.20×10^{-2} W

第十七章

2. 26.6 个,0.000 12 nm　　4. 1.5×10^4 V/m;730 V/m

第十八章

1. 3.32×10^{19}J,1.11×10^{-27} kg · m/s;4.97×10^{-19} J,1.66×10^{-27} kg · m/s

2. 1.99×10^{-15} J,6.63×10^{-27} kg · m/s

3. (1)0.5 eV; (2)4.30 eV

4. (1)10^{31};(2) 10^{23}　　5. 1.63×10^6个

6. 9.6×10^{-6} g　　7. 0.01214 nm

8. 4.6×10^6 m/s;4.19×10^{-24} kg · m/s;0.158 nm

9. 0.0074 nm　　10. 754 km/s

11. 0.0012 nm　　12. (2)0.02241 nm

13. 870 km/s　　14. 326 nm

15. (1)1.747×10^{-19} J; (2)2.16 eV

16. 771 km/s　　17. 3.64 mm

[General Information]
书名=光学
作者=
页数=
出版社=
出版日期=
SS号=12316407
DX号=000006760116
url=http://www.zhengzhifl.cn/DrsPath.do?kid=696A6B696E6C6863F3530373733332313138&username=hzsfxy&spagenum=1&pages=50&fid=14311401&a=879b987c6081fbba39d63238a3774b58&btime=2013-03-02&etime=2013-03-22&template=bookdsr1&firstdrs=http%3A%2F%2Fbook.duxiu.com%2FbookDetail.jsp%3FdxNumber%3D000006760116%26d%3DC05F455329454D5AA1D3392B0C79949F3