普通高等教育“十一五”国家级规划教材

蔡履中／编著

光学

OPTICS

（第三版）

科学出版社
www.sciencep.com

(O-2783.0101)

光学

2006年国家精品课程配套教材

丰富教学资源尽在

www.optics.sdu.edu.cn

ISBN 978-7-03-019146-5

9 787030 191465 >

定 价：40.00 元

高等教育出版中心·数理出版分社

联系电话：010-64015178

E-mail：mph@mail.sciencep.com

043/49
2007

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

光　学

（第三版）

蔡履中　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是作者以多年来在山东大学光学系讲授光学课程的讲稿及讲义为基础充实整理而写成的. 全书内容包括几何光学,波动光学通论,光的干涉,光的衍射,光在晶体中的传播,光的吸收,色散和散射,光的量子性与激光共7章. 在选材上以基础光学的传统内容为主,以波动光学为主,同时对现代光学的发展亦有充分的反映. 在内容编排及讲法上注意从光学知识的内在规律性和系统性出发,突出和加强基本的物理概念、物理思想和物理图像的阐述,并注意各部分内容的内在联系及自洽. 全书内容丰富、思路清晰、解说翔实、析理透彻;并注意将基本内容与选讲内容分开,以适应不同层次的需要.

编著者主讲的以本书为教材的光学课程已于2006年被评为国家精品课程.

本书可作为综合性大学或其他高等院校物理类和电子信息类学科的光学教材,对其他学习光学者及有关科技人员亦是一本有价值的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

光学/蔡履中编著. —3版. —北京:科学出版社,2007
普通高等教育"十一五"国家级规划教材
ISBN 978-7-03-019146-5

Ⅰ.光… Ⅱ.蔡… Ⅲ.光学-高等学校-教材 Ⅳ.O43

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第132304号

责任编辑:昌 盛 贾 杨 杨 然 / 责任校对:张怡君
责任印制:张克忠 / 封面设计:陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1992年6月山东大学出版社第一版
2002年8月山东大学出版社第二版
2007年10月第 三 版 开本:B5(720×1000)
2007年10月第一次印刷 印张:29
印数:1—3 500 字数:551 000

定价:40.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈明辉〉)

第三版前言

2006年，笔者主讲的以本书为教材的山东大学光学系光学课程被评为国家精品课程，本书也被列入国家“十一五”教材出版规划，这为笔者提供了一次对本书进行重新审视和修订的机会.

编写本书的一些初衷和想法已经在初版及再版前言中有所反映，长期的教学实践使我们相信它们至今仍是正确和适宜的. 无疑地，光学学科正处于迅速发展之中，但基础光学的基本内容、基本思想和基本分析方法近年来并无本质变化. 相对于为了使基础课教材呈现“现代化”的面目而将许多专业课才能讲清楚的名词术语镶嵌于其中，我们更倾向于保持基础课的基础性、普适性和相对稳定性. 尽管本书包含相当篇幅与近代光学有关的拓展性选讲内容，但它整体上仍属于普通物理范畴. 普通物理课的使命是为学生在物理方面奠基固本，它不可能也不应该承担后继专业课的任务. 我们曾表示过试图使本书成为一本较好的普通物理范畴的光学原理教材的愿望，这仍是我们的努力方向.

利用这次改版的契机，笔者对全书进行了全面的审核、修订和改写，特别是第1、5、6、7诸章. 主要变动如下：

1. 内容编排上作了少量调整. 例如，第5章单独辟出一节“人工双折射及其应用”；第7章删去了7.6节. 某些节、段的标题稍有更动.

2. 对一些概念或表述尚欠准确或清晰的节、段、句进行了修改、补充或重写. 这方面的内容涉及较多. 例如，1.2.6节标题改为“傍轴光学的矩阵方法”并全文重写；第5、6、7诸章不少节、段也经过了改写或重写，以期尽量符合科学性、系统性及自洽性的要求.

3. 更新及补充了一些图表. 例如，第5章中增加了系统地描述偏振光检验程序及其中每一步偏振态变化的大图；旋光部分换用了自行设计的天然旋光与磁致旋光的比较图；附录表格尽量采用最新的国际标准数据等.

4. 增加了一些脚注和参考文献. 例如，“圆偏振器”一词在许多教本中都有应用，但其所指装置与Jones矩阵表中的圆偏振器并不一致，我们所增加的脚注和参考文献可帮助读者解除这一困惑，更准确地理解圆偏振器的意义及有关内容. 书末还提供了参考书目及作者部分有关教学研究论文目录，供读者参考.

5. 重写及增加了部分观察思考和讨论题. 例如，第1章中“水下观察者的视觉形象”；第3章中的“非共面多束平行光的干涉及周期性微结构的生成”，由此可将近代光学前沿之一光子晶体与经典干涉内容沟通起来；第4章的“空间滤

波和假彩色编码”及“佛光”；第 5 章中的“斯托克斯参量”等.

6. 修正及增加了部分习题答案.

7. 对全书包括英汉索引等进行了文字订正或修饰.

我们相信，经全面修订后，本书在科学性、准确性及适用性方面能有较大的提升. 当然，其中仍难免有疏漏甚至错误之处，望有关专家及读者指正.

本书修订过程中得到了一些同事、同行及历届学生和研究生的关心和帮助，谨此一并致谢!

蔡履中

2007 年 2 月

修订版前言

本书第一版于1992年出版. 出版10年来，在山东大学光电系、物理系及部分兄弟院校的使用情况证明，该书在体系结构、内容编排、讲解思路和方法等方面是合理和适宜的，达到了我们在第一版前言中的设想和预期目的. 该书曾获山东大学优秀出版一等奖，华东地区大学出版系统二等奖，并得到诸多专家和读者的好评. 本书修订版是在第一版的基础上修订而成的.

光学是一门迅速发展的学科. 新课题、新方法、新技术、新材料不断出现. 如何做到光学教学现代化，是一个许多人都在探讨的课题. 本书整体上属于普通物理光学范畴. 我们始终认为，普通物理光学与后继的光学专门课程各自具有不同的任务. 前者的基点应是让学习者对光学中的一些基本思想、基本概念、基本分析方法建立起系统的、清晰的物理图像，为进一步的学习打下坚实的物理基础. 在这方面，玻恩、沃耳夫所著，半个世纪以来在国际光学界享有盛誉的《光学原理》树立了一个很好的范例. 我们不敢奢望追随这本名著，但的确希望本书能成为一本较好的普通物理范畴内的光学原理教材，并能从物理思想上沟通其与现代光学的联系. 这种注重物理基础、突出物理思想、兼顾现代发展的编写思路已在第一版中得到体现，我们仍认为是适宜的.

这次修订中主要进行了下述几项工作.

1. 内容上作了少量增删. 例如，删去了原版中一般不讲的光度学、偏振光模型的多样性与等效性、傅里叶级数、圆二向色性等内容. 增添了7.6节“现代光学进展简介”. 原书中已有多节关于现代光学内容，例如，矩阵方法、薄膜光学、部分相干性理论、傅里叶光学与全息学、非线性光学等的介绍等，新版中仍作为小字内容保留，供使用者选用或参考.

2. 各章增加了“观察思考及讨论题”. 教学实践证明，本部分内容对提高学生学习兴趣，培养学生观察、分析和解决问题的能力，以及引导部分基础较好的学生早日进入研究阶段是十分有益的.

3. 增加了“部分习题答案”.

4. 校正了某些编排错误及疏漏之处，对某些问题用脚注形式进行了进一步说明.

5. 增补了汉英名词索引.

修订过程中观察思考及讨论题部分及汉英名词索引由蔡履中撰写，习题答案由王成彦撰写，7.6节现代光学进展简介由周玉芳撰写. 三人共同修订全书，由

蔡履中定稿.

虽经修订，但错误及不妥之处仍难以避免，望专家及读者指正.

衷心感谢山东大学出版基金对本书修订版的支持.

蔡履中　王成彦　周玉芳

2002 年 4 月

第一版前言

本书是作者以多年来在山东大学光学系和物理系讲授光学课程的讲稿及讲义为基础，参照国内外有关资料及文献，并结合作者个人教学研究心得而写成的.

本书旨在从普通物理光学课本身的特点及规律出发，比较系统地、翔实地、透彻地讲清基本的物理概念、物理思想及物理图像，同时与近代光学沟通起来. 在编写过程中注意了以下几点：

首先，在选材上以普通物理光学的传统内容为主，以波动光学为主，同时兼顾现代光学的发展及某些提高性课题. 后者大部分用小字排出，内容包括几何光学中的矩阵方法，波动光学中的傅里叶分析，隐失波，部分相干性理论，薄膜干涉定域及光源容许宽度的进一步讨论，薄膜光学简介，相干光成像系统的频谱分析，全息照相的原理与特点，偏振态及其变换的矩阵描述，非线性光学简介等.

其次，在内容编排上注意了知识本身的内在规律性、系统性及相互联系. 以波动光学为例可以看到以下特点：设置“通论”一章较系统地讨论波的叠加及有关概念，并以叠加原理（包括其更精细的形式惠更斯-菲涅耳原理）为主线贯穿整个波动光学；从不同环节反复阐明对波的时空限制会造成波在时间频率域和空间频率域的展宽；对相位规定、坐标系选取、相应公式及偏振态判据建立起一套前后一致且自洽的系统，并阐明了它们的关系；从不同角度论证了几何光学是波动光学的极限情况. 在每一章节也尽量启发学习者注意各部分知识的内在联系与区别. 为此书中运用了一系列表格，例如，几种典型干涉条纹的形成及异同，棱镜、光栅、法-珀干涉仪三种分光装置的比较，以及全息照相与普通照相的比较等.

第三，也是最重要的一点，是在讲法上注意突出和加强基本的物理思想和物理图像. 例如，几何光学中对费马原理的讨论，波动光学中对叠加原理以及物理学以可观测量为基础这一思想的阐述. 从后者出发可以阐明光的干涉中波的即时叠加—暂态干涉—稳定干涉这三个层次，并容易理解偏振光模型的实质及其多样性和等效性. 在衍射一章，则有意识地培养学习者从直观的物理图像及矢量图解法分析与解决问题的能力.

当然，强调物理图像并不等于忽视数学分析，本书在后一方面内容亦很充实. 例如，对各种干涉、衍射图样的形成及特征有相当详尽的讨论，对数量众多的提高性课题也以小字给出了数学推证.

总之，我们力图使本书既有较高层次的深度和广度，又便于讲解和学习者应

用. 其基本内容部分力求讲清讲透，“泛读”部分则可拓展思路及开阔视野. 因此授课时间也可根据各校的不同情况有较大的伸缩余地，可从 72 课时（大字内容亦可适当删减）直到 120 课时（全讲）.

最后说明，在可能的情况下，本书所用名词和术语皆以全国自然科学名词审查委员会于 1988 年公布的《物理学名词》为准，故某些译名与传统教本略有差异，如夫琅和费已改为夫琅禾费、洛埃改成劳埃德等. 对尚未见统一规定的名词，如辐射度量学中的某些物理量，则参考中外名称尽量采用较为准确及应用较广的提法. 有时也同时给出几种提法，将非标准或并行名词在括号中注明，以便参阅其他文献，如衬比度（又称反衬度、对比度或可见度）等.

本书绪论、第 2、3、4 章由蔡履中撰稿；第 1、5、6、7 章由王成彦撰稿，其中 5.3.4、5.5、7.3、7.5 节由蔡履中撰写；后由蔡履中承担全书的改写、补充及统稿.

山东大学出版基金委员会对本书提供了一等出版基金，山东大学马伯福教授及山东师范大学林典要教授对本书的编写一直给予关心和支持，作者表示衷心的感谢.

限于作者水平，加之整理时间仓促，书中必有疏漏之处，望使用者不吝指教.

蔡履中　王成彦

1991 年 9 月

目　录

第三版前言
修订版前言
第一版前言
绪论……(1)
第1章　几何光学……(6)
1.1　光线传播的基本规律……(6)
1.1.1　光线传播的实验规律……(6)
1.1.2　费马原理——光线传播的普遍规律……(10)
1.2　成像的基本原理……(17)
1.2.1　成像的基本概念……(17)
1.2.2　单球面及共轴球面系统傍轴成像(逐次成像)……(19)
1.2.3　薄透镜傍轴成像……(26)
1.2.4　光焦度．高斯公式和牛顿公式　作图法……(29)
1.2.5　共轴球面系统傍轴成像(基面成像)……(33)
*1.2.6　傍轴光学的矩阵方法……(41)
1.3　成像仪器……(47)
1.3.1　眼睛……(47)
1.3.2　放大镜和目镜……(50)
1.3.3　显微镜……(53)
1.3.4　望远镜……(55)
1.4　光阑与像差……(57)
1.4.1　光阑……(57)
*1.4.2　像差……(60)
习题……(64)
观察思考及讨论题……(70)
第2章　波动光学通论……(74)
2.1　波的概念与光的电磁理论基础……(74)
2.1.1　波的基本概念……(74)
2.1.2　光的电磁理论基础……(75)
2.2　波的数学描述……(78)

2.2.1 波的实数表示与时空周期性 …… (78)
2.2.2 波的复数表示与复振幅 …… (86)
2.2.3 波的矢量表示 …… (90)
2.3 波的叠加 …… (90)
2.3.1 波的叠加原理 …… (90)
2.3.2 同频率简谐波叠加的一般分析及干涉概念 …… (91)
2.3.3 两列同频率、同向振动的平面波的叠加 …… (92)
2.3.4 两列同频率、同向振动、反向传播的平面波的叠加
——光驻波 …… (96)
2.3.5 两列同频率、振动方向互相垂直、同向传播的平面波的叠加
——椭圆偏振光的形成及特征 …… (99)
2.3.6 两列频率相近、同向振动、同向传播的平面波的叠加
——光学拍 …… (104)
2.4 光的偏振态 …… (106)
2.4.1 完全偏振光——线偏振光，圆偏振光，椭圆偏振光 …… (106)
2.4.2 非偏振光——自然光 …… (107)
2.4.3 部分偏振光及偏振度 …… (109)
2.4.4 偏振片及其光强响应 …… (110)
2.5 波的傅里叶分析及时空域中的反比关系 …… (114)
*2.5.1 波的傅里叶分析 …… (114)
2.5.2 波在空域和时域中的反比关系 …… (116)
2.6 光在两种各向同性介质界面的反射与折射 …… (119)
2.6.1 反射与折射时光的振幅比 菲涅耳公式 …… (119)
2.6.2 反射与折射时光的光强比与能流比 …… (122)
2.6.3 反射光与折射光的相位变化 …… (126)
2.6.4 反射光与折射光的偏振态 …… (130)
2.6.5 全反射与隐失波 …… (132)
习题 …… (136)
观察思考及讨论题 …… (141)
第3章 光的干涉 …… (144)
3.1 光的相干条件 …… (144)
3.1.1 光的相干条件 …… (144)
3.1.2 干涉条纹的衬比度 …… (147)
3.1.3 相干光束的产生方法 …… (148)
3.2 分波前干涉 …… (149)

3.2.1　杨氏实验 …… (149)
3.2.2　其他分波前装置 …… (155)
3.3　光场的相干性 …… (159)
3.3.1　光源空间展宽的影响　光场的空间相干性 …… (159)
3.3.2　光源光谱展宽的影响　光场的时间相干性 …… (166)
*3.3.3　部分相干性理论基础 …… (171)
3.4　分振幅干涉(一):薄板的双光束干涉 …… (175)
3.4.1　点光源的干涉及干涉条纹的定域概念 …… (175)
3.4.2　等倾干涉 …… (177)
3.4.3　等厚干涉 …… (181)
*3.4.4　薄膜干涉定域及光源临界宽度的进一步讨论 …… (188)
3.4.5　迈克耳孙干涉仪 …… (191)
3.5　分振幅干涉(二):平行平板的多光束干涉 …… (198)
3.5.1　平行平板多光束干涉的分析 …… (198)
3.5.2　法布里-珀罗干涉仪 …… (204)
*3.5.3　光学薄膜简介 …… (209)
习题 …… (211)
观察思考及讨论题 …… (216)
第4章　光的衍射 …… (219)
4.1　衍射的基本原理及分类 …… (219)
4.1.1　衍射现象概述 …… (219)
4.1.2　惠更斯-菲涅耳原理及平面屏衍射理论 …… (220)
4.1.3　衍射问题的近似处理及分类 …… (225)
4.2　菲涅耳衍射 …… (229)
4.2.1　菲涅耳衍射的分析方法 …… (229)
4.2.2　圆孔、圆屏及某些环扇形孔径的衍射 …… (232)
4.2.3　菲涅耳波带片 …… (238)
4.3　夫琅禾费衍射(一):连通孔径 …… (242)
4.3.1　单缝衍射 …… (242)
4.3.2　矩孔衍射 …… (249)
4.3.3　圆孔衍射 …… (252)
4.4　光学成像系统的分辨本领 …… (254)
4.5　夫琅禾费衍射(二):非连通孔径 …… (258)
4.5.1　多缝衍射 …… (258)
4.5.2　夫琅禾费衍射的一般性质及其他孔径的衍射 …… (264)

4.6 光栅 …… (266)
4.6.1 光栅的主要性能 …… (267)
4.6.2 闪耀光栅、阶梯光栅及三维光栅 …… (270)
4.6.3 棱镜光谱仪及其与光栅、法-珀干涉仪分光性能的比较 … (274)
*4.7 相干光成像系统的频谱分析 …… (277)
4.7.1 复振幅透过率及其空间频率谱的物理意义 …… (278)
4.7.2 透镜的傅里叶变换作用 …… (279)
4.7.3 阿贝成像理论及空间滤波 …… (280)
*4.8 全息照相的原理与特点 …… (285)
习题 …… (288)
观察思考及讨论题 …… (293)
第5章 光在晶体中的传播 …… (296)
5.1 晶体双折射 …… (296)
5.1.1 双折射现象 基本定义与规律 …… (296)
5.1.2 单轴晶体中的波面——惠更斯假设 …… (299)
5.1.3 平面波在单轴晶体内的传播——惠更斯作图法 …… (301)
*5.1.4 单轴晶体双折射的进一步讨论 …… (303)
5.2 晶体光学器件·偏振光的检验 …… (308)
5.2.1 线偏振器 …… (308)
5.2.2 相位延迟器——波晶片和补偿器 …… (312)
5.2.3 圆起偏器和圆检偏器 …… (315)
5.2.4 光通过波晶片后偏振态的变化 …… (318)
5.2.5 偏振光的检验 …… (320)
5.3 偏振光的干涉 …… (323)
5.3.1 平行偏振光的干涉 …… (323)
*5.3.2 会聚偏振光的干涉 …… (327)
*5.3.3 波动光学中相位规定的自洽性 …… (329)
5.4 人工双折射及其应用 …… (332)
5.4.1 应力双折射 …… (332)
5.4.2 克尔效应 …… (333)
*5.4.3 泡克耳斯效应 …… (335)
5.5 旋光 …… (336)
5.5.1 旋光 …… (336)
5.5.2 磁致旋光 …… (340)
*5.6 偏振态及其变换的矩阵描述 …… (342)

习题 …… (348)
观察思考及讨论题 …… (351)
第6章　光的吸收　色散和散射 …… (354)
6.1　光的吸收 …… (354)
6.1.1　光的线性吸收规律与复折射率 …… (354)
6.1.2　吸收与波长的关系 …… (356)
6.2　光的色散 …… (359)
6.2.1　色散概念及其规律 …… (359)
*6.2.2　吸收和色散的经典电子理论 …… (362)
6.2.3　光的相速和群速 …… (364)
6.3　光的散射 …… (369)
6.3.1　瑞利散射　米氏散射及大粒子散射 …… (369)
6.3.2　拉曼散射 …… (373)
习题 …… (375)
观察思考及讨论题 …… (376)
第7章　光的量子性　激光 …… (378)
7.1　黑体辐射 …… (378)
7.1.1　两种不同形式的辐射 …… (378)
7.1.2　基尔霍夫热辐射定律 …… (379)
7.1.3　黑体辐射的实验规律 …… (381)
7.1.4　黑体辐射的经典理论及其与实验的矛盾 …… (384)
7.1.5　能量子假设与普朗克公式 …… (387)
*7.1.6　光测高温法 …… (389)
7.2　光的粒子性及其实验基础 …… (390)
7.2.1　光电效应 …… (391)
7.2.2　康普顿效应 …… (394)
*7.2.3　光压 …… (398)
7.3　光的波粒二象性 …… (399)
7.3.1　光的粒子性 …… (399)
7.3.2　光的波粒二象性*及其概率解释 …… (400)
7.4　激光 …… (402)
7.4.1　产生激光的基本原理 …… (402)
7.4.2　激光器的组成及工作过程 …… (407)
7.4.3　激光的主要特点和应用 …… (414)
*7.5　非线性光学简介 …… (416)

习题 …… (418)
观察思考及讨论题 …… (420)
参考文献 …… (421)
一、参考书目 …… (421)
二、作者部分教学研究论文目录 …… (422)
附录 …… (424)
附录Ⅰ 常用物理常数表 …… (424)
附录Ⅱ 一些光学介质的折射率 …… (424)
附录Ⅲ 一些典型谱线的波长 …… (425)
汉英名词索引 …… (426)
部分习题答案 …… (442)

绪　论

光学是一门古老而又年轻的学科. 其悠久的历史几乎和人类文明史本身一样久远；近半个世纪以来，它又以令人炫目的发展速度、奇迹般层出不穷的研究成果以及所蕴含的巨大潜力和希望，使自己跻身于现代科学技术的前沿. 在全面展开对光学基本知识的讨论之前，了解一下光学的概貌及发展过程将有所裨益，尽管这种介绍只能是相当粗糙而简略的.

1. 光学的研究范畴

光学是研究光现象的学科，它包括光的本性、光的传播以及光与物质相互作用的规律及其应用.

从波动观点看来，光是一种电磁波. 电磁波可以按其频率或波长排列成**波谱**，如图 0.1 上部所示，它覆盖了从 γ 射线到长波无线电波的一个广大范围. 人眼可以感受的可见光只占其中很窄一个谱带，通常取为波长（真空中）$\lambda = 390 \sim 760$ nm ($1\ \text{nm} = 10^{-9}$ m)，或等价地表示为频率 $\nu = 3.9 \sim 7.7 \times 10^{14}$ Hz[①]. 在可见光范围内，随着波长从小到大，所引起的视觉颜色也逐渐从紫色过渡到红色，如图 0.1 下部所示. 一般所谓光学波段，除可见光外，还包括波长小于紫光波长的**紫外线**和波长大于红光波长的**红外线**，其波长范围大致从 1 nm 到 1 mm.

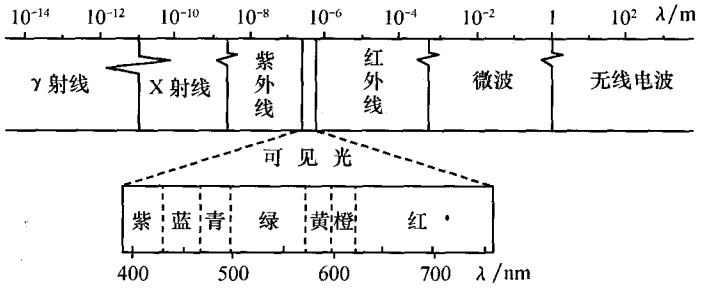


图 0.1　电磁波谱与可见光范围

在基础光学中，常根据研究问题的不同出发点把光学分为**几何光学**和**物理光**

① 实际上，人眼可感觉谱带稍大于此范围，但在此谱带两侧敏感度已很低，故可忽略；由于所取视见函数的阈值不同，不同文献给出的可见光范围可稍有区别.

学，后者又可分为**波动光学**和**量子光学**. 几何光学中以光线概念为基础研究光的传播，其基本实验规律为光的直进及反射、折射定律，而这些规律均可看做是一个更为普遍的原理——费马原理的必然结果. 波动光学中把光看做是在空间中连续分布的波动，其主要内容包括光的干涉、光的衍射、光的偏振，以及以波动理论对光与物质相互作用的描述. 量子光学则把光视为一个个分立的粒子，它主要用于分析辐射、光发射以及某些在物质的微观结构起重要作用时光与物质的相互作用现象.

实际上，以上区分只是在不同条件下反映了光的本性和性质的不同侧面. 光同时具有波动性和粒子性. 可以证明，几何光学可以看做是波动光学当其衍射效应可以忽略时的极限情况；而在波动光学适用的范围内量子光学亦会给出同样的测量结果. 因为在大量实际问题中光的粒子性并不起显著作用，所以本书的侧重点为波动光学.

2. 光学发展的历史回顾

几何光学的制造工艺可以追溯到3000年前甚至更早的时期，当时在埃及及中国等地即已会用铜合金制造镜子. 公元前4世纪前后，光学的发展在中国与希腊几乎同时达到了一个高峰. 在中国，墨翟(公元前468～公元前376)及其弟子所著《墨经》"经下"篇中就有八条关于几何光学的记载. 前五条讨论影的形成，用针孔成像说明光的直线传播；后三条分别讨论平面镜、凹面镜及凸面镜的成像，并具体分析了物、像的正倒及大小关系. 它们首尾相应，自成体系，可以说是世界上较为系统的关于光学知识的最早记录. 约100多年后，古希腊数学家欧几里得(Euclid，约公元前330～约公元前275)在其著作中宣布了光的反射定律. 在其后一段漫长的封建时代，东西方科学发展均受到很大压抑. 这期间值得提出的著作有阿拉伯杰出的科学家伊本·海赛木(Ibn al-Haitham，约965～约1039)的《光学书》(又译作《光学全书》或《光学宝鉴》)及中国沈括(1031～1095)的《梦溪笔谈》. 前者在欧几里得认识到反射角等于入射角的基础上进一步指出了反射线与入射线在同一平面内，研究了球面镜和抛物面镜的性质，并对人眼的构造及视觉作用作了详尽的叙述；后者对光的直线传播及球面镜成像作了比较深入的研究，并认识到"月本无光犹银丸，日耀之乃光耳"，"日月相值，乃相凌掩"，从而科学地说明了月相的变化规律及月食的成因.

到17世纪，在经历了文艺复兴的大潮之后，欧洲的科学又进入一个蓬勃发展的时期，1621年斯涅耳(W. Snell，1591～1626)从实验上发现了折射定律，而笛卡儿(R. Descartes，1596～1650)第一个把它表示为现代的正弦形式. 1657年费马(P. de Fermat，1601～1665)提出了最小时间原理[①]，并说明由此可推出光的反射和光的折射定律. 至此几何光学的基础已基本奠定.

如果不考虑古希腊时代一些哲学家把光看做微粒的朴素猜想，人们对物理光

① 费马的最小时间原理是不严格的，在1.1.2节中将给出费马原理更普遍的表述并讨论其各种可能性.

学真正的实验研究亦始于17世纪. 格里马耳迪(F. M. Grimaldi,1618～1663)首次详细地描述了光的衍射现象. 胡克(R. Hooke,1635～1703)和玻意耳(R. Boyle,1627～1691)各自独立地发现了现称为牛顿环的在白光下薄膜的彩色干涉图样. 胡克还明确主张光由振动组成,每一振动产生一个球面并以高速向外传播,这可以认为是波动说的发端. 1690年惠更斯(C. Huygens;1629～1695)在其著作《论光》中大力阐发了光的波动说,并提出了后来以他的名字命名的著名原理.

1704年,身为英国皇家学会会长的牛顿(I. Newton,1643～1727)出版了自己一生中最重要的两部著作之一《光学》. 牛顿对光学的贡献无疑是巨大的,他研究了棱镜的分光作用,指出白光系由各色光复合而成,并分析了牛顿环的生成及色序问题. 在光的本性方面,总的看来牛顿是持微粒说的,这在该书中有多处反映,他并由此作出了光速在介质中比真空中要快的错误论断. 牛顿的巨大声望使得微粒说在整个18世纪占据统治地位. 但是,现在重新考察牛顿的思想,可以发现它在很多方面是与波动说相通的. 例如,他在解释干涉时所用"突发(fit)间隔"的概念可以看做与光的周期性即波长概念相联系;为说明衍射,他揣测光可能"像鳗鱼那样"弯曲运动;在解释双折射时,他提出"光线的侧面"的概念,这可以认为是对光的偏振性质直觉和天才的猜想.

19世纪上半叶是波动说重新崛起并通过斗争走向胜利的时期. 1801～1803年,杨(T. Young,1773～1829)连续发表数篇论文,用干涉原理成功地解释了双缝干涉实验及薄膜的彩色条纹,但被有些人说成是"毫无价值". 十几年后,菲涅耳(A. J. Fresnel,1788～1827)在并不了解杨氏工作的情况下,吸收了惠更斯的子波思想,并补充以干涉原理,提出了惠更斯-菲涅耳原理,成功地解释了衍射现象. 1818年他以自己关于衍射的论文参加了法国科学院举行的征文竞赛,由此引出了"泊松(S. D. Poisson,1781～1840)亮点"的轶事(参见4.2.2节),它为波动说的正确性提供了一个有力证据. 1850年傅科(J. Foucault,1819～1868)用旋转镜法测定光速,确定光在水中的速度比空气中要小(这是波动说所预言的结果),宣告波动说对微粒说取得了决定性的胜利. 待到麦克斯韦(J. C. Maxwell,1831～1879)以对称和谐的方程组形式集电磁波理论之大成后,波动说看来已达到了尽善尽美的境界.

但是,在19世纪末和20世纪初,当人们的研究深入到光与物质的相互作用这一领域时,却困惑地发现许多问题是无法用波动说加以解释的. 其中最著名的难点是黑体辐射能谱与经典理论的矛盾,当时极有声望的物理学家开尔文(W. Thomson,Lord Kelvin,1824～1907)在世纪之交的一次著名演讲中曾把它称为笼罩在物理学上空的两朵乌云之一[①]. 为解释这一问题,普朗克(M. Planck,

① 另一朵乌云系指迈克耳孙测定以太漂移的否定结果,它促成了现代物理学另一基石——相对论的诞生.

1858～1947)于 1900 年提出了能量子假说. 1905 年爱因斯坦(A. Einstein, 1879～1955)将它发展为光子学说,并用它成功地解释了光电效应. 这样,光的粒子说似乎又复活了,但这种粒子已经完全不同于牛顿时期的粒子概念. 1924 年德布罗意(L. de Broglie,1892～1987)提出物质波概念,认为每一粒子的运动都与一定波长的波动相联系,此假说很快就被电子通过金属箔的衍射实验所证实. 在 20 年代中期,薛定谔、海森伯、狄拉克和玻恩(M. Born,1882～1970)等人建立了量子力学,其中波动性与粒子性在新的形式下得到了统一.

光学史是一部内容丰富、精彩纷呈的历史. 限于篇幅,以上叙述是挂一漏万的. 通过这极为简略的回顾,我们也可看出:人类认识的发展是无限的,而认识的发展过程是遵从辩证规律的. 从原始的朴素的粒子说到波动说,再到新的光子说和波粒二象性,似乎经历了一次否定之否定和"正—反—合"的认识过程,而这种否定之否定并非是机械循环,而是一种质的飞跃.

3. 光学现代进展管窥

现代光学一般认为起源于 20 世纪中期. 当时光学研究无论在思想、方法、技术(包括设备、材料、工艺)等方面都产生了一系列重大的突破,新的分支学科如雨后春笋般诞生. 这里只能择取与基础光学关系密切者简要介绍之.

光学与通信理论的结合促成了**傅里叶光学**的出现. 它利用系统概念和频谱语言来描述光学变换过程. 实际上它可看做是经典波动光学的扩展与深化. 在本质上它与经典衍射理论并无根本区别,但在处理方法与观察角度上有全新的创造与发展,故得到了许多新的极有价值的结论. 用傅里叶光学的概念和方法可对光学信息(图像)实施各种处理和变换,例如,空间滤波、图像识别等,这部分内容称为**光学信息处理**.

与傅里叶光学有联系的另一学科分支是**全息学**,它由伽伯(D. Gabor,1900～1979)于 1948 年首次提出. 全息学利用与已知参考波相干涉的办法来实现对物波振幅与相位的同时记录,该干涉图样称为全息图. 用与原参考波相同的波照明全息图则可重现原来的物波,所以这种方法也叫波前再现或波前重建,所重现的物体与原物具有相同的三维体视特性. 全息术在干涉计量、特征识别、高密度存贮及三维显示等方面都有着重要应用.

1960 年出现了第一台激光器. **激光**具有普通光源所无法比拟的高强度和高相干性(高单色性及高方向性),它的诞生使得光学研究及应用在许多方面达到了全新的阶段或开辟了全新的领域. 全息术在 60 年代的迅速发展即得益于激光器的问世. 现在激光技术已广泛应用于通信、测距、加工、医疗、光谱学、激光制导、激光武器以及激光核聚变等各个方面.

高强度激光的出现亦促进了另一光学分支——**非线性光学**的迅速发展,它研究

当介质已不满足线性叠加原理时所产生的一些新现象，如倍频、混频、自聚焦等.

另外，材料与工艺的改进亦使得光学的其他许多领域得到蓬勃发展. 例如，对光学薄膜的研究形成了**薄膜光学**；对光导纤维的研究形成了**纤维光学**或**导波光学**；将集成电路的概念和方法引入光学则促成了**集成光学**的出现. 特别值得指出的是，现代科学的发展使各学科或其分支的互相渗透越来越强. 导波光学、电子学及通信理论的结合使得**光通信**得到迅速发展和应用. 非线性光学、信息光学及集成光学等理论与技术的综合可能会导致新一代计算机——**光计算机**的诞生，它具有大容量、高速度、并行处理等优点，并可部分实现人脑的功能（如学习和联想），它的成功将意味着现代科学技术产生又一重大突破.

光学的历史是一部闪耀着人类智慧和创造力光辉的灿烂画卷，光学的未来则更显示出诱人的前景. 中国人在此领域中曾一度领先，近年来在不少方面也已接近或达到国际先进水平，但总体上仍有差距. 所有与此领域有关的有志之士，特别是年轻一代，均应为振兴及弘扬我国光学以至整个科学事业而奋发努力！

第1章　几何光学

光学中以光线概念为基础研究光的传播和成像规律的一个重要分支是**几何光学**. 在几何光学中，把组成物体的物点看做是几何点，把它发出的光束看做是互相关联的无数几何光线的集合. 光线传播的路径和方向代表光能传播的路径和方向. 但由于光的波动性的存在，这种几何光线并不能严格反映真正的光场，而只是一种理想模型和近似处理方法. 以后我们将看到，几何光学只是波动光学当波长$\lambda \to 0$时的极限情况，它在光的波动性不起显著作用的情况下能够给出与实际观测符合很好的结果.

1.1　光线传播的基本规律

1.1.1　光线传播的实验规律

1. 实验定律和原理

17世纪30年代，光线传播所遵循的三个实验定律业已确立，这便是人们熟知的光的直线传播定律、光的独立传播定律、光的反射和折射定律. 现分述如下.

(1) **光的直线传播定律**：光在均匀介质中沿直线传播.

(2) **光的独立传播定律**：两束光在传播途中相遇时互不干扰，即每一束光的传播方向及其他性质(如频率、波长、偏振状态等)都不因另一束光的存在而发生改变. 第2章中将对光的独立性原理的意义和适用范围作进一步的阐述.

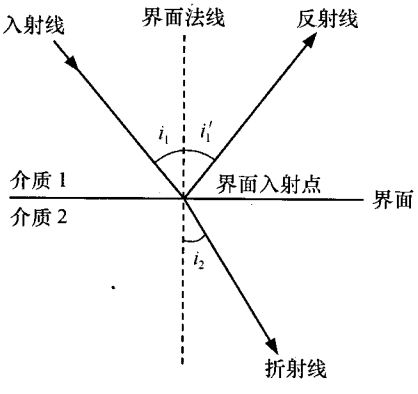


图1.1.1　光的反射和折射

(3) 光的反射和折射定律. 当光入射到透明、均匀、各向同性的两种介质的平滑界面上时，一般情况下，一部分光从界面上反射，形成反射线；一部分光将进入另一介质，形成折射线，如图1.1.1所示. 将入射线与入射点处界面法线构成的平面(图中纸面)称为**入射面**，入射线、反射线、折射线与界面法线的夹角分别称为**入射角**、**反射角**和**折射角**. 实验证明有下述规律：

光的反射定律：反射线位于入射面内，反射线和入射线分居法线两则，反射角等于入射角，即

$$i_1' = i_1; \tag{1.1.1}$$

光的折射定律：折射线位于入射面内，折射线与入射线分居法线两侧，入射角的正弦与折射角的正弦之比为一与入射角无关的常数，即

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \tag{1.1.2}$$

或

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2. \tag{1.1.2}'$$

上两式中常数 n_1，n_2 分别为第 1 种和第 2 种介质的**折射率**；n_{21} 称为第 2 种介质对第 1 种介质的**相对折射率**.

当界面粗糙时，各入射点处法线不平行，即使入射光是平行的，反射光和折射光也向各方向分散开来，这种现象称为漫反射和漫折射，统称**漫射**. 实际上，任何界面都或多或少存在着漫射现象.

从光的反射和折射定律不难看出，当光线的方向逆转时，它将沿着同一路径传播. 这个带有普遍性的推论，称为**光路可逆性原理**. 利用光路可逆性原理，常常可以通过简单的推理而获得某些重要的结论.

2. 折射率

光在真空中的传播速度为一恒量，记为 c，$c=299792458$ m/s，约等于 3×10^8 m/s. 在介质中，光的传播速度将会减小. 某种介质的折射率（有时亦称绝对折射率）等于光在真空中的速度 c 与在该介质中的速度 v 之比值，即

$$n = \frac{c}{v}. \tag{1.1.3}$$

一般地，折射率 n 随介质而异，且与波长有关. 它是介质的一个基本参量. 附录Ⅱ列出了若干种光学介质的折射率数值.

两种介质的相对折射率 n_{21} 与两种介质的折射率之间有如下关系：

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \tag{1.1.4}$$

显然

$$n_{12} = \frac{1}{n_{21}}. \tag{1.1.5}$$

对于折射率不同的两种介质，习惯上称折射率较大者为**光密介质**，称折射率较小者为**光疏介质**. 显然，当光线从光疏介质经界面进入光密介质时，折射角小于入射角，折射线靠近法线；当光线从光密介质经界面进入光疏介质时，折射角大于入

射角，折射线远离法线.

应当指出，光的直线传播定律中所谓“均匀”介质指的是折射率处处相同的介质，这种介质可称为是光学均匀的. 两种不同的介质(如溶液)，如它们的 n 相同，则它们也是光学均匀的，光从一种介质进入另一种介质时将直线传播，不发生反射和折射；相反，即使同一种介质(如空气)，若各处 n 不相同，光线传播时也会发生弯曲.

3. 临界角

(1) 当光从光密介质(折射率 n')射向光疏介质(折射率 n)时，一般情况下，折射角大于入射角. 当入射角从 0 增大到某一 i_c 角时，折射角等于 $\pi/2$(图 1.1.2)，折射线沿界面传播. 若入射角继续增大，就不再有折射光了，此时入射光光能将全部返回光密介质，且反射角等于入射角，这种现象叫做**全反射**，i_c 称为**全反射临界角**，它是产生全反射现象的最小入射角. 根据折射定律(1.1.2)′式，可以导出全反射临界角公式

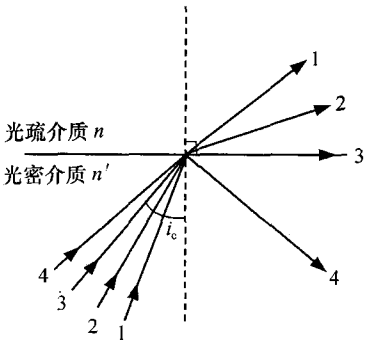


图 1.1.2　全反射临界角

$$i_c = \arcsin\frac{n}{n'}. \qquad (1.1.6)$$

表 1.1.1 给出了由不同折射率的玻璃到空气对应的全反射临界角的数值.

表 1.1.1　玻璃到空气的临界角

n'	1.50	1.52	1.54	1.56	1.58	1.60	1.62	1.64	1.66
i_c	41°48′	41°8′	40°30′	39°52′	39°16′	38°41′	38°7′	37°34′	37°3′

钻石之光彩夺目乃是由于它的高折射率及小临界角使得光线容易在其中发生全反射. 利用全反射原理可以制成多种全反射棱镜. 另一重要应用是光导纤维，如图 1.1.3 所示，图中圆柱形芯线的折射率 n_1 大于其外部包层的折射率 n_2，因此，当光线在端面的入射角 i 较小时，光线将在芯线内发生多次全反射而不逸出. 光导纤维已广泛用于传像、通信等领域. 不难看出，对给定的 n_1 和 n_2，入射孔径角 i 的大小有一定限制，超过该值时将不再发生全反射.

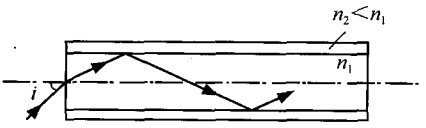


图 1.1.3　光导纤维

(2) 当光从光疏介质射向光密介质时，一般情况下，折射角小于入射角. 当入射角从 0 增大到 $\pi/2$ 时，相应的折射角从 0 增大到某一 i'_c 角. 显然，在光密介质中存在一个无光区(图 1.1.4 中阴影区). 根据折射定律(1.1.2)′式有

$$i'_c = \arcsin\frac{n}{n'}, \qquad (1.1.7)$$

i'_c 可称为**折射临界角**，它是折射角的极限.

(1.1.7)式与(1.1.6)式在形式上完全相同，这正是光路可逆性原理的必然结果.

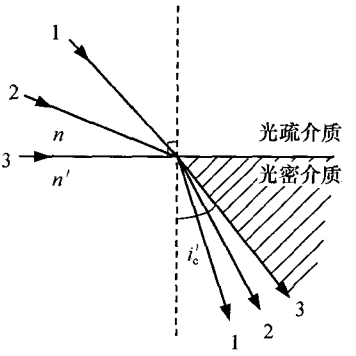


图 1.1.4 折射临界角

4. 折射棱镜

棱镜由抛光平面包围着的透明介质所构成，就其改变光线传播方向的方式而言，可分为折射棱镜和反射棱镜；它们在光学系统中主要起到偏向、色散、分束、起偏等作用.

这里仅介绍一种最简单的折射棱镜——**三棱镜**. 如图 1.1.5(a)所示，$AA'B'B$ 平面与 $AA'C'C$ 平面为两个工作平面，$BB'C'C$ 为底面. 两工作平面的交线 AA' 称为**折射棱**；所夹角称为**顶角**或**折射棱角**；垂直于折射棱的平面称为**主截面**. 三棱镜的主截面通常是等腰三角形. 使用三棱镜时，通常人们让入射线位于其主截面内.

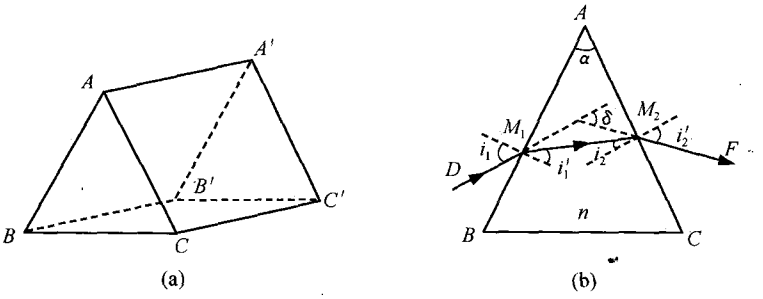


图 1.1.5 三棱镜和光线在其主截面内的折射

下面来寻求光线在等腰三棱镜主截面内的折射规律. 如图 1.1.5(b)所示，设顶角为 α，折射率为 n 的三棱镜置于空气之中，入射线 DM_1 在第一界面 AB 的 M_1 处折射，第一入射角为 i_1，第一折射角为 i'_1；折射线 M_1M_2 在第二界面 AC 的 M_2 处折射，第二入射角为 i_2，第二折射角为 i'_2，称 M_2F 为三棱镜的出射线. 定义三棱镜的出射线与入射线的夹角 δ 为三棱镜的**偏向角**，那么由图 1.1.5(b)可知

$$\delta = (i_1 - i'_1) + (i'_2 - i_2).$$

因为

$$i_1' + i_2 = \alpha, \tag{1.1.8}$$

于是

$$\delta = i_1 + i_2' - \alpha. \tag{1.1.9}$$

由于折射定律的制约，i_2' 系 i_1 的函数；对于某三棱镜而言，α 为定值，故(1.1.9)式表明，三棱镜的偏向角随第一入射角 i_1 的变化而变化.

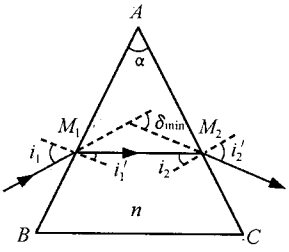


图 1.1.6 三棱镜的最小偏向角

进一步的分析和实验表明；当 i_1 变化时，三棱镜的偏向角 δ 有一最小值，称为**最小偏向角**，记作 δ_{min}；此时，入射线与出射线对三棱镜取对称分布，三棱镜内的光线平行于其底边，如图 1.1.6 所示. 因为 $i_2 = i_1'$，由(1.1.8)式有

$$i_1' = \frac{\alpha}{2};$$

又因为 $i_2' = i_1$，则由(1.1.9)式得

$$i_1 = \frac{\alpha + \delta_{min}}{2},$$

在 M_1 点应用折射定律，

$$\sin i_1 = n \sin i_1',$$

综合上述三式，可以得到**三棱镜最小偏向角公式**

$$n = \frac{\sin\dfrac{\alpha + \delta_{min}}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}. \tag{1.1.10}$$

在已知顶角 α 的条件下，测量 δ_{min}，利用上式可以算出三棱镜材料的折射率.

顶角 α 很小的三棱镜称为**光楔**. 由(1.1.10)式和小角度近似容易得到**光楔的偏向角公式**

$$\delta = (n-1)\alpha. \tag{1.1.11}$$

1.1.2 费马原理——光线传播的普遍规律

折射定律的发现标志着光线传播实验定律的最终确立. 此后许多物理学家纷纷从不同的角度，采用不同的数学工具来解释、证明和概括光线传播的实验定律. 费马原理即是途径之一. 为讲述该原理首先介绍光程概念.

1. 光程

在均匀介质中，**光程**[l]为光在介质中通过的几何路程 l 与该介质折射率 n 的

乘积，即

$$[l]=nl. \tag{1.1.12}$$

由 $n=c/v$，上式可改写成

$$\frac{[l]}{c}=\frac{l}{v},$$

该式左端表示光在真空中通过光程$[l]$所需的时间，而右端表示光在介质中通过几何路程 l 所需的时间. 可见利用光程概念，可将光在介质中通过的几何路程折算到在真空中通过的路程，从而便于直接用真空中光速 c 来计算光在不同介质中通过一定几何路程 l 所需时间，即

$$t=\frac{[l]}{c}=\frac{nl}{c}. \tag{1.1.13}$$

可以将光程概念推广到分区均匀介质中，如图 1.1.7 所示，光从 A 点到 B 点所历光程为

$$[l]=\sum_{i=1}^{k}n_i l_i, \tag{1.1.14}$$

从 A 到 B 所需时间为

$$t=\frac{[l]}{c}=\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{k}n_i l_i. \tag{1.1.15}$$

更普遍的情况是在由 A 点到 B 点的空间中充满着折射率连续变化的介质，即 $n=n(x,y,z)$，如图 1.1.8 所示，这时，光从 A 点到 B 点所历光程为

$$[l]=\int_{(l)A}^{B}n\,\mathrm{d}l, \tag{1.1.16}$$

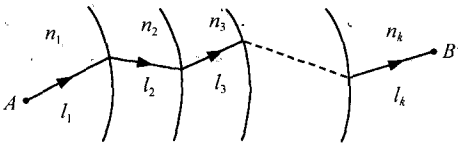


图 1.1.7 分区均匀介质中的光程

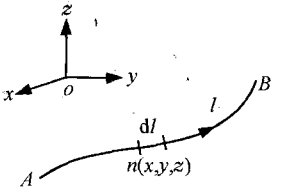


图 1.1.8 折射率 n 连续变化介质中的光程

所需时间为

$$t=\frac{[l]}{c}=\frac{1}{c}\int_{(l)A}^{B}n\,\mathrm{d}l, \tag{1.1.17}$$

式中积分路径 l 是光从 A 到 B 所经路径.

2. 费马原理的表述及讨论

如果不受任何规律的约束，则光从空间一点 A 传播到另一点 B 有着无限多可

能的路径. 但经验告诉我们,并非所有这些路径都是可以实现的. 费马原理就是实际光线所受的一种约束或所应遵循的规律,它可以从各种几何上可能的光线路径中"筛选"出物理上实际可行的光线路径,而这种筛选过程是自然界随时随地都在自行完成的.

费马原理可以表述如下:空间中两点间的实际光线路径是所历光程平稳的路径. 这里所谓"平稳",指的是当光线以任何方式对该路径有无限小的偏离时,相应光程的一阶改变量为零;如果有改变,此改变量只能是二阶或二阶以上的无限小量.

对一般一元或多元函数,当自变量发生变化时,函数的一阶或高阶改变量可以表示成函数的一阶或高阶微分. 但光程与一般空间坐标函数有所不同. 对给定端点 A,B,每一可能的光线路径均为空间坐标的函数;而光程一般地随不同路径而变化,即它可以称为函数的函数. 这时光程的改变一般称为变分.

利用变分概念,费马原理可以表述为:对实际光线路径,光程的一阶变分为零,即

$$\delta[l]=\delta\left[\int_{(L)}^{B}n\mathrm{d}l\right]=0. \tag{1.1.18}$$

显然,以上各表述中之光程可以等效地用光的传播时间来代替,这时上式化为

$$\delta t=\delta\left[\frac{1}{c}\int_{(L)}^{B}n\mathrm{d}l\right]=0. \tag{1.1.19}$$

在满足费马原理的条件下,光线光程随路径变化的关系也可以有各种形式. 图 1.1.9 为几种情况的示意图,图中横坐标表示各种可能的光线路径,纵坐标表示光程,A 点横坐标相应于实际路径. 各种情况下 A 点切线均为水平方向,即光程的一阶变化率为零. 在图 1.1.9(a),(b)中,光程的二阶变化率分别大于和小于零,A 点分别相应于光程极小和极大路径;在图(c)中,光程的二阶变化率为零,A 点相应于光程函数的拐点;在图(d)中,光程的各阶变化率皆为零,即光程为常数,这时 A 点可在任意位置.

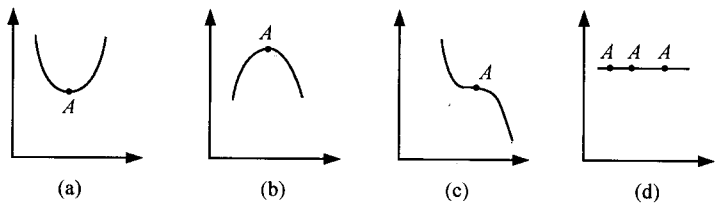


图 1.1.9 光程随路径变化的示意图

究竟实际光线采取以上几种情况中的何种形式,即其光程究竟相应于极小值、极大值、常数值或拐点,应视具体问题中光学系统对光线的约束状况而定. 最简单

的例子是光线在均匀介质中的传播，这时光线的可能路径不受任何约束，光程只可能具有极小值. 在较复杂的条件下，以上各种情况都可能发生，图 1.1.10 中以二维情况下椭圆及其内切和外切圆界面的反射为例说明这一点. 图中 F_1、F_2 为椭圆的两个焦点，实线为实际光线路径，虚线为与其相邻的各种可能的光线路径. 显然，对图(a)中椭圆面各条实际光线均是等光程的；对图(b)中椭圆的内切圆，实际光线对应于最大光程；对图(c)中椭圆的外切圆，实际光线对应于最小光程；对图(d)中椭圆的部分内切圆与部分外切圆相合成的弯曲界面，实际光线对应于光程的拐点.

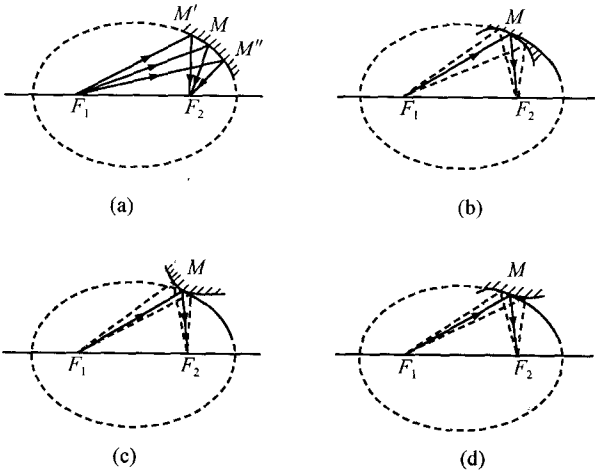


图 1.1.10 几种情况下的实际光线(实线)

由于实际光线相应于光程拐点这种情况在实用中较少遇到，费马原理也常粗略地表示为：空间中两点间的实际光线路径，与其他相邻的可能路径相比较，其光程(或传播时间)取极值. 这种表述常称为**光程极值原理**或**时间极值原理**. 这里的“极值”包括极大值、极小值或常数值. 因为在多数情况下，这种极值为极小值，所以该原理亦曾称为最小时间(或光程)原理，但这种提法是缺乏普遍性的.

3. 费马原理对诸实验规律的概括

我们将看到，光的直线传播定律、光路可逆性原理、光的反射定律以及光的折射定律均可归纳于费马原理之中.

(1) 根据两点间直线距离最短这一几何公理，对于均匀介质或真空，费马原理直接引导到光线的直线传播定律.

(2) 费马原理只涉及光线传播的路径，并未涉及光线的传播方向. 若路径 AB 的光程取极值，则其逆路径 BA 的光程亦取极值. 因此该原理可很自然地导出光路可逆性原理.

(3) 由费马原理导出光的反射定律.

设两种透明均匀各向同性介质的界面是平面,折射率分别为 n_1 和 n_2. 光线通过定点 A 经界面反射而通过定点 B(图 1.1.11). 通过 A、B 两点作平面垂直于界面,将它们的交线取作 x 轴,z 轴在界面内. A 点的坐标为$(x_1,y_1,0)$,B 点的坐标为$(x_2,y_2,0)$. 设入射光在界面上 M' 点反射,M' 点的坐标为$(x,0,z)$,则由 A 点到 B 点的光程为

$$[l]=n_1\overline{AM'}+n_1\overline{M'B}$$
$$=n_1\sqrt{(x-x_1)^2+y_1^2+z^2}+n_1\sqrt{(x-x_2)^2+y_2^2+z^2}. \quad (1.1.20)$$

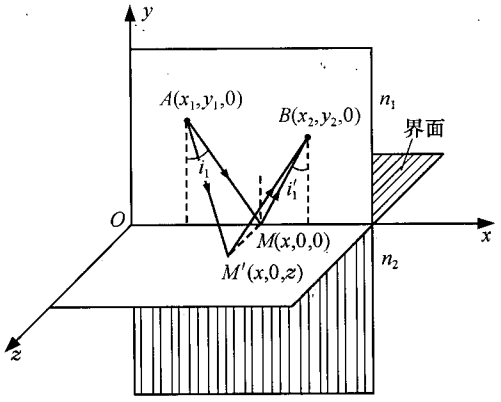


图 1.1.11 由费马原理导出光的反射定律

根据费马原理,实际光线光程的一阶变化率应为 0,故有

$$\frac{\partial[l]}{\partial x}=\frac{n_1(x-x_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2+y_1^2+z^2}}+\frac{n_1(x-x_2)}{\sqrt{(x-x_2)^2+y_2^2+z^2}}=0, \quad (1.1.21)$$

$$\frac{\partial[l]}{\partial z}=\frac{n_1 z}{\sqrt{(x-x_1)^2+y_1^2+z^2}}+\frac{n_1 z}{\sqrt{(x-x_2)^2+y_2^2+z^2}}=0. \quad (1.1.22)$$

由(1.1.22)式得

$$z=0. \quad (1.1.23)$$

上式表明,光程$[l]$取平稳值的入射线和反射线应位于 xy 平面内. 过 $M'(x,0,z)$点在 xz 平面内向 x 轴作垂线交 x 轴于$M(x,0,0)$点,显然,$\overline{AM}+\overline{MB}<\overline{AM'}+\overline{M'B}$,这说明光程$[l]$取极小值. 由(1.1.21)式并取 $z=0$,有

$$\frac{n_1(x-x_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2+y_1^2}}=\frac{n_1(x_2-x)}{\sqrt{(x-x_2)^2+y_2^2}}, \quad (1.1.24)$$

而

$$\frac{x-x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+y_1^2}}=\sin i_1,\quad \frac{x_2-x}{\sqrt{(x-x_2)^2+y_2^2}}=\sin i_1',$$

所以可得到相应于极小光程的 M 点所满足的关系

$$i_1'=i_1, \tag{1.1.25}$$

即反射角等于入射角. 不难看出,(1.1.23)式及(1.1.25)式正是反射定律.

(4) 利用上述方法,可由费马原理导出光的折射定律(见习题 1.7). 在这里,光程仍然取极小值.

总之,费马原理概括了光线传播的实验规律,可看做光线传播的普遍规律和几何光学的基本原理①. 根据费马原理可以导出光线方程,确定光在非均匀介质中的传播路径. 在很多情况下,它可以帮助人们在不涉及具体物理机制的前提下获得一幅光线传播的正确图像,因此它有着十分广泛的应用.

例 1.1.1 求证与旋转抛物面镜的旋转轴平行入射的光线经抛物面镜反射后都通过该镜的焦点.

证明 图 1.1.12 为抛物面镜的截面图,其中 FO 为其旋转对称轴,F 为焦点,AB 为准线. 由几何知识,抛物线上任一点到 F 的距离与到准线的(垂直)距离相等.

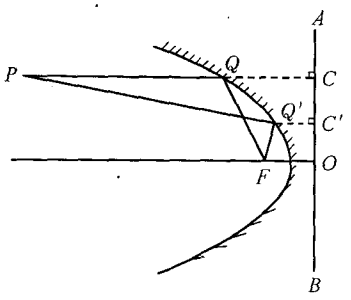


图 1.1.12 例 1.1.1 图

先证从 F 发出的光线经抛物面反射后平行于轴 FO. 设从 F 到某点 P 光线的两条可能路径分别是 FQP 和 $FQ'P$,其中 $PQ/\!/FO$, $PQ'\not/\!/FO$. 从 Q 和 Q' 分别向 AB 作垂线,垂足分别为 C 和 C',则有 $\overline{QC}=\overline{QF}$, $\overline{Q'C'}=\overline{Q'F}$. 路径 FQP 的光程为

$$[l]_{FQP}=n(\overline{PQ}+\overline{QF})=n(\overline{PQ}+\overline{QC})=n\cdot\overline{PC},$$

路径 $FQ'P$ 的光程为

$$[l]_{FQ'P}=n(\overline{PQ'}+\overline{Q'F})=n(\overline{PQ'}+\overline{Q'C}),$$

式中 n 为抛物面镜所在空间的折射率. 显然

$$[l]_{FQP}<[l]_{FQ'P}.$$

因 $FQ'P$ 可代表任一条反射线不平行于轴的光线路径,上式表明,FQP 为光程取极(小)值的路径,也即光线的实际路径. 这样就证明了从 F 点发出的光反射后平行于轴.

再依光路的可逆性及抛物面镜的旋转对称性,可知与轴平行入射的光经抛物面镜反射后均聚焦于焦点 F.

---

① 几何光学的基本原理尚有其他表达方式,如马吕斯(Malus)-杜平(Dupin)定理等,对它们的详细讨论已超出了本书的范围.

4. 梯度折射率介质中光线的弯曲

折射率随不同位置呈连续变化的介质称为**梯度折射率介质**. 作为费马原理的应用,可以定性地讨论光在梯度折射率介质中的传播.

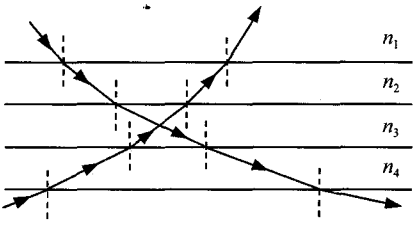


图 1.1.13　光在分层均匀介质中的传播

首先,考察分层均匀介质的情况,如图 1.1.13 所示,其中 $n_1>n_2>n_3>n_4$. 由折射定律可知光线的传播呈折线. 设想各层厚度趋于 0 且其折射率趋于连续变化,则得到梯度折射率的情形. 图 1.1.14(a)和(b)分别示出 n 随高度上升逐渐增大和减小两种情况下的光线传播路径,显然它们是弯曲的.

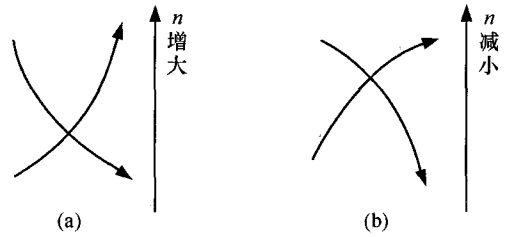


图 1.1.14　梯度折射率介质中光线的弯曲

利用梯度折射率介质中光线的弯曲可以解释某些现象,如蜃景的形成. 图 1.1.15(a)和(b)分别示出了由于地表不同高度处温度的不同使得空气折射率发生微小变化,从而导致了下现蜃景和上现蜃景的产生. 图中 h 表示离开地表的高度,n 表示空气的折射率,A 为实际物体,A'为其表观位置.

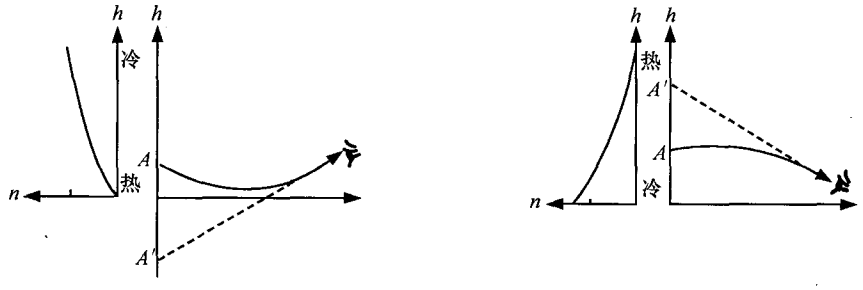


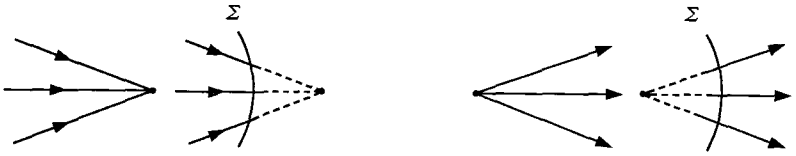
图 1.1.15　蜃景的形成

1.2 成像的基本原理

1.2.1 成像的基本概念

1. 同心光束

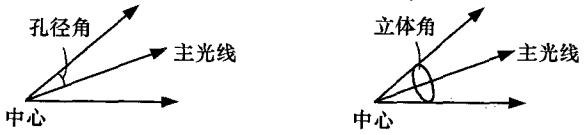
几何光学中，相互关联的无数光线构成**光束**. 如果一光束中各光线本身或其延长线相交于一点，则称此光束为**同心光束**；光线本身或其延长线的交点称为同心光束的**中心**. 同心光束可分为**会聚光束**和**发散光束**两大类，它们的中心分别称为会聚中心和发散中心，如图 1.2.1 所示，图中 Σ 表示反射面或折射面. **平行光束**可以看做是同心光束的一种特例，它的中心位于无限远处.



(a) 会聚光束　　(b) 发散光束

图 1.2.1 同心光束

同心光束有三个要素：**中心**、**主光线**以及**孔径角**或**立体角**(图 1.2.2). 主光线表示同心光束的方向；立体角所包含的空间就是光能量传播的空间.



(a) 二维平面　　(b) 三维空间

图 1.2.2 同心光束的三要素

2. 成像

若干个反射面、折射面构成一个**光学系统**. 在不致引起混乱的前提下，今后简称为**系统**.

如图 1.2.3 所示，圆括号代表一个系统，两侧的介质折射率分别为 n 和 n'. 向系统入射的光是一个以 P 为中心的同心光束，它通过系统后，如果出射光仍然是一个同心光束，其中心为 P'，即称该系统使 P 成像于 P'；P 称为**物点**，P' 称为**像**

点. 图(a)和图(b)中，物点 P 是发散光束的中心，称 P 为**实物**；图(c)和图(d)中，物点 P 是会聚光束中光线延长线的交点，称 P 为**虚物**. 图(a)和图(c)中像点 P' 是会聚光束的中心，称 P' 为**实像**；图(b)和图(d)中，像点 P' 是发散光束中光线反向延长线的交点，称 P' 为**虚像**. 显然成像的实质是系统将入射同心光束转化为出射同心光束，图 1.2.3 则显示了一个系统成像的全部可能的情况.

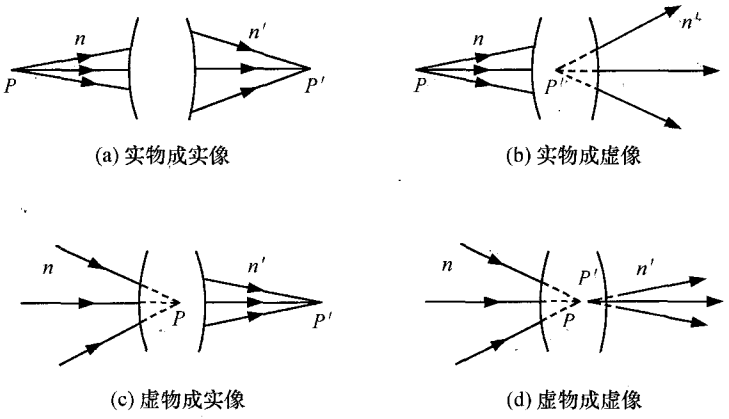


图 1.2.3 光学系统的成像

由图 1.2.3 还可以看到，一个成像的光学系统将现实空间分成两部分，记两侧空间介质折射率分别为 n 和 n'，定义入射的同心光束在其中传播的空间为**物空间**，n 为**物方折射率**；出射的同心光束在其中传播的空间为**像空间**，n' 为**像方折射率**.

3. 理想光学系统

一个能实现同心光束变换的光学系统称为**理想光学系统**. 理想系统将其物空间中的每一点 P 和它在像空间中相应的点 P' 构成一一对应的关系. 根据光路可逆性原理，如果将物点像点互易，即光线沿反方向入射系统，点 P 和 P' 的对应关系仍然成立. 这样一对互相对应的点 P 和点 P' 称为**共轭点**. 推而广之，物空间中的一条线和一个面也分别与像空间中的一条线及一个面有一一对应的关系，它们可以分别称为**共轭线**和**共轭面**. 这种性质称为**物像共轭性**.

理想系统成像时尚有另一个重要性质：从物点 P 到像点 P' 的各光线的光程相等，称为**物像之间的等光程性**. 利用费马原理很容易证明这一点. 如图 1.2.4 所示，物点 P 发出的同心光束，通过理想系统后转化为中心在像点 P' 的同心光束. 在这同心光束中，连续

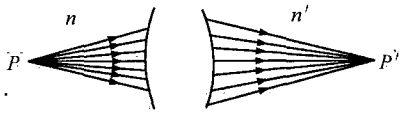


图 1.2.4 物像之间的等光程性

分布着无数条实际的光线路径. 根据费马原理，它们的光程应取变化率为 0 的值. 对于这些连续分布的实际光线而言，其光程都取极大值或极小值是不可能的，惟一的可能性是光程取恒定值，即它们的光程都相等①.

1.2.2 单球面及共轴球面系统傍轴成像(逐次成像)

复杂的共轴球面系统是由许多单球面组成的. 下面我们从单球面折射入手进行讨论.

1. 球面折射的一般分析

设有两种透明均匀的各向同性介质，界面 Σ 为球面的一部分，两侧介质折射率分别为 n 和 n'，且 $n<n'$，如图 1.2.5 所示. 折射球面 Σ 的曲率中心 C 与顶点 O 的联线称为**主光轴**，简称**主轴**(Σ 面是关于主轴的旋转对称面).

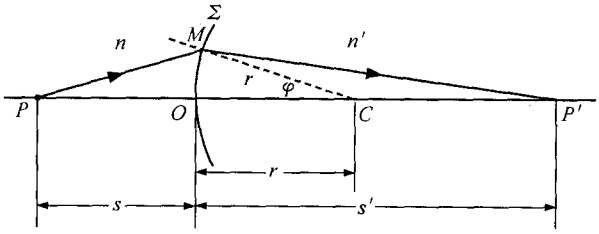


图 1.2.5 光在单球面上的折射

设主轴上球面顶点 O 的左方有一真实发光点 P，它发出的同心光束中的任意一条光线自左向右入射到 Σ 面上的 M 点，相应的折射线与主轴交于 P' 点. 以球面顶点 O 为基准点(计量原点)，记球面曲率半径 $\overline{OC}=r$，$\overline{OP}=s$，$\overline{OP'}=s'$，$\angle MCO=\varphi$. PMP' 的光程

$$[l]=n\overline{PM}+n'\overline{MP'}$$

$$=n\sqrt{r^2+(s+r)^2-2r(s+r)\cos\varphi}+n'\sqrt{r^2+(s'-r)^2+2r(s'-r)\cos\varphi}. \tag{1.2.1}$$

根据费马原理，光程变化率应为 0，即

$$\frac{\mathrm{d}[l]}{\mathrm{d}\varphi}=0, \tag{1.2.2}$$

代入 $[l]$ 的表达式进行求导，有

① 从干涉的观点，像点可以看做是各光线等光程的相长干涉位置.

$$n\frac{2r(s+r)\sin\varphi}{\sqrt{r^2+(s+r)^2-2r(s+r)\cos\varphi}}=n'\frac{2r(s'-r)\sin\varphi}{2\sqrt{r^2+(s'-r)^2+2r(s'-r)\cos\varphi}}.$$

经计算整理后得到

$$\frac{s^2}{n^2(s+r)^2}-\frac{s'^2}{n'^2(s'-r)^2}$$

$$=-2r(1-\cos\varphi)\left[\frac{1}{n^2(s+r)}+\frac{1}{n'^2(s'-r)}\right]. \tag{1.2.3}$$

给定 s 和 φ，s' 可由(1.2.3)式定出. 一般说来，s' 与 φ 有关，这意味着由同一 P 点发出的同心光束中的各条光线，经 Σ 面折射后，不再汇交于一点，即球面折射破坏了光束的同心性，使轴上发光点不能成像. 但是，有两种特殊情况值得注意. 其一，令(1.2.3)式两端同时等于零，即

$$\frac{s^2}{n^2(s+r)^2}-\frac{s'^2}{n'^2(s'-r)^2}=0, \tag{1.2.4}$$

$$\frac{1}{n^2(s+r)}+\frac{1}{n'^2(s'-r)}=0. \tag{1.2.5}$$

求出这组联立方程的解，从而把 s 和 s' 同时确定下来，它们均与 φ 无关，此时的 P 和 P' 是一对特殊的共轭点，称为球面折射的**齐明点**或**不晕点**. 对一对齐明点，宽光束经球面折射后仍能成像. 其二是把光束限制在傍轴区内，即 $\cos\varphi\approx1$，此种情况的讨论详见下文.

2. 球面折射轴上物点傍轴成像

1) 物像距公式

在傍轴区，$\cos\varphi\approx1$，(1.2.3)式中的 $1-\cos\varphi\approx0$，s' 与 φ 近似无关，则有

$$\frac{s^2}{n^2(s+r)^2}=\frac{s'^2}{n'^2(s'-r)^2}, \tag{1.2.6}$$

将上面等式两端同时开方，经数学处理后，可得如下简单关系式：

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}. \tag{1.2.7}$$

上式表明，在 n、n' 和 r 给定的条件下，在傍轴区，轴上物点 P 经球面 Σ 折射后可在轴上得一相应的像点 P'. 从球面顶点 O 到像点 P' 的距离 s' 称为**像距**；从球面顶点 O 到物点 P 的距离 s 称为**物距**；n' 和 n 分别称为像方折射率和物方折射率，(1.2.7)式称为球面折射傍轴成像的**物像距公式**.

2) 符号规则

上述物像距公式是图 1.2.5 所示的特定情况下利用傍轴条件导出的，属实物成实像. 然而，实际情况尚有其他三种可能. 几何光学中，为确保包括物像距公式在

内的诸多公式在各种情况下具有同一形式，人们基于不同的考虑，建立了不止一种**符号规则**，现将本书中所用符号规则说明如下：

设入射光自左向右传播，以球面顶点 O 作为基准点，主轴作为基准线，规定：

(1) 若球面曲率中心 C 在 O 右方，则曲率半径 r 为正；若 C 在 O 左方，则曲率半径 r 为负.

(2) 若 P 在 O 左方即实物，则物距 s 为正；若 P 在 O 右方即虚物，则物距 s 为负.

若 P' 在 O 右方即实像，则像距 s' 为正；若 P' 在 O 左方即虚像，则像距 s' 为负.

(3) 记物点和像点到主轴的距离分别为 y 和 y'. 当物点或像点在主轴上方时，y 或 y' 为正；反之为负.

(4) 从主轴转到光线的方向为逆时针时所成锐角为正；顺时针时所成锐角为负.

(5) 光路图中仅标记线量或角量的绝对值. 因此，若用字母所表示的量实际上为负量时，则应在该字母前冠以“－”号.

有了上述符号规则，物像距公式即(1.2.7)式就成为球面折射傍轴成像的普遍公式.

3) 焦距公式

如果位于主轴上的物点位置改变，则与之共轭的像点在主轴上的位置必有相应改变. 轴上无限远处物点的共轭像点称为折射球面的**像方焦点**，记作 F'；球面顶点 O 到像方焦点 F' 的距离称为**像方焦距**，记作 f'. 轴上无限远处像点的共轭物点称为折射球面的**物方焦点**，记作 F；球面顶点 O 到物方焦点 F 的距离称为**物方焦距**，记作 f. 由前文关于物距、像距的符号规则可知：当 F' 在 O 点右方时 $f'>0$，在 O 点左方时 $f'<0$；当 F 在 O 点左方时 $f>0$，在 O 点右方时 $f<0$.

根据(1.2.7)式及上述焦点定义，不难得到**焦距公式**

$$f'=\frac{n'r}{n'-n},\quad f=\frac{nr}{n'-n}. \tag{1.2.8}$$

可见，折射球面的两个焦距与它的几何形状(r)及其两侧介质折射率(n,n')有关. 由(1.2.8)式可得两个焦距之比为

$$\frac{f'}{f}=\frac{n'}{n}. \tag{1.2.9}$$

上式表明，折射球面的两个焦距数值一般不等，但符号恒同，因此，相应的两个焦点必定分居球面顶点两侧不等距离处.

3. 球面折射傍轴物点傍轴成像

如图 1.2.6 所示，主轴上的 P、P' 是一对共轭点. 设想将主轴绕折射球面曲率

中心 C 并在图面内沿顺时针方向旋转一小角度 θ，主轴变成**副轴**，P、P' 点分别转到 Q、Q' 点. 由于球对称性，Q、Q' 必然也是一对共轭点，这就证明了傍轴物点可以成像. 由于 θ 角很小(在傍轴区)，可以认为 $\overset{\frown}{PQ}\approx\overline{PQ}$，$\overset{\frown}{P'Q'}\approx\overline{P'Q'}$，且 $\overline{QP}$ 和 $\overline{Q'P'}$ 近似地垂直于主轴，P、P' 点分别是 Q、Q' 点在主轴上的垂足，所以 s 和 s' 分别为傍轴物点 Q 的物距和像点 Q' 的像距，它们满足(1.2.7)式.

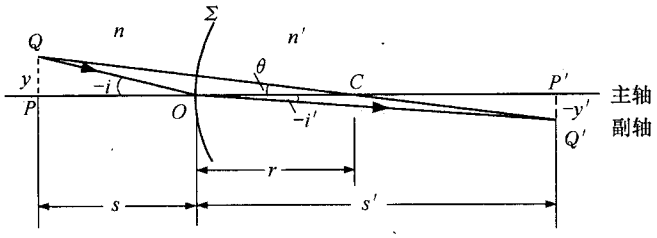


图 1.2.6 球面折射傍轴物点成像

傍轴物点及其共轭像点到主轴的距离分别称为**物高**和**像高**，用 y 和 y' 表示. 引入**横向放大率** β，其定义为像高与物高之比，即

$$\beta=\frac{y'}{y}. \tag{1.2.10}$$

显然，$\beta>0$ 表示物与像同在主轴上方或下方，$\beta<0$ 表示物与像分居主轴上下两方；$|\beta|>1$ 表示放大，$|\beta|<1$ 表示缩小.

下面导出球面折射的横向放大率公式(参见图 1.2.6). 作入射线 QO，折射线 OQ'；入射角、折射角分别为 $-i$ 和 $-i'$. 依据傍轴区的折射定律，即

$$n(-i)=n'(-i'), \tag{1.2.11}$$

有

$$n\left(\frac{y}{s}\right)=n'\left(\frac{-y'}{s'}\right). \tag{1.2.12}$$

利用横向放大率定义，可得

$$\beta=-\frac{ns'}{n's}. \tag{1.2.13}$$

若将图 1.2.6 中的 $\overline{QP}$ 视为傍轴物点的集合即垂轴小物，那么 $\overline{Q'P'}$ 便可视为该垂轴小物的像. 不难理解，垂轴小平面物，亦可成一垂轴平面像. 总之，对于折射球面，当物处在傍轴区并用窄光束成像时，点物成点像、直线物成直线像、平面物成平面像.

最后应指出，平面折射可作为球面折射当 $r\to\infty$ 时的特殊情况，由此极限及(1.2.7)式可得到**平面折射的物像距公式**

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=0. \tag{1.2.14}$$

由(1.2.13)、(1.2.14)两式可知，平面折射成像的横向放大率恒等于1.

4. 共轴球面系统傍轴成像(逐次成像)

大多数光学仪器是由球心在同一直线上的一系列折射或反射球面组成，这种光学系统叫做**共轴球面系统**. 各球面球心的连线叫做系统**主光轴**，简称**主轴**. 在傍轴区，系统可近似看做是理想光学系统.

共轴球面系统的傍轴成像，是同心光束依次在组成系统的每个球面上折射或反射的结果. 在成像过程中，某一球面所成的像，即为相邻后一球面的物. 据此，共轴球面系统所成的最终像，可由第一球面所成之像作为第二球面之物、第二球面所成之像作为第三球面之物……逐次计算而得. 求系统最终像的这种方法称为**逐次成像法**或**以像作物法**. 现以一双凸厚透镜成像为例加以说明.

例 1.2.1 沿水平方向置于空气中的一粗圆玻璃棒，折射率为1.50，将其左、右两端分别磨成半径为5.0 cm、10 cm的半球面，构成一双凸厚透镜，其厚度 d 为10 cm(图1.2.7). 今有一高为1 mm的垂轴小物正立于透镜左半球面顶点左方20 cm处. 试求最终像的位置并判断最终像的性质.

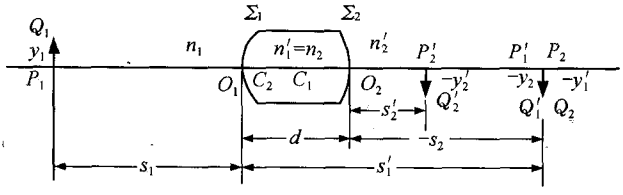


图1.2.7 例1.2.1图

解 折射球面 Σ_1 第一次成像，以顶点 O_1 为基准点. 利用物像距公式

$$\frac{n_1'}{s_1'}+\frac{n_1}{s_1}=\frac{n_1'-n_1}{r_1},$$

其中 $s_1=20$ cm，$n_1'=1.50$，$n_1=1.00$，$r_1=5.0$ cm，解得

$$s_1'=30 \text{ cm(中间像，实像)}.$$

利用横向放大率公式

$$\beta_1=-\frac{ns_1'}{n's_1},$$

代入数据，求得

$$\beta_1 = -1(\text{倒立}).$$

折射球面 Σ_2 第二次成像，以顶点 O_2 为基准点. 利用物像距公式

$$\frac{n_2'}{s_2'} + \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_2' - n_2}{r_2},$$

其中 $s_2 = -20$ cm(以中间像作虚物)，$n_2' = 1.00$，$n_2 = 1.50$，$r_2 = -10$ cm，解得

$$s_2' = 8.0 \text{ cm}(\text{最终像，实像}).$$

利用横向放大率公式

$$\beta_2 = -\frac{n_2 s_2'}{n_2' s_2},$$

代入数据，求得

$$\beta_2 = 0.6(\text{正立}).$$

两次成像的横向放大率为

$$\beta = \beta_1\beta_2 = -0.6(\text{最终像，倒立}),$$

最终像像高

$$y' = \beta y = -0.6 \text{ mm}.$$

计算结果表明，最终像位于球面 Σ_2 顶点 O_2 右侧 8.0 cm 处，为一倒立、缩小的实像，像高为 −0.6 mm.

5. 角放大率　拉格朗日-亥姆霍兹定理

现在回到轴上物点成像光束上来，研究同心光束的孔径角在成像过程中的变化问题. 为此，引入**角放大率** γ 的概念. 如图 1.2.8 所示，设 P、P' 为主轴上的一对共轭点. 从物点 P 发出的傍轴光线 PM 对主轴的倾角为 u，其共轭光线对主轴的倾角为 u'，这样一对共轭光线对主轴倾角的比值称为角放大率，即

$$\gamma = \frac{u'}{u}. \tag{1.2.15}$$

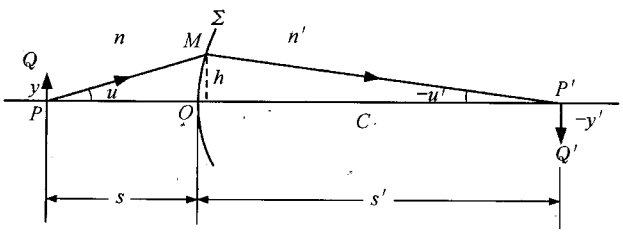


图 1.2.8　角放大率

在傍轴区，$u \approx h/s$，$-u' \approx h/s'$，故

$$\gamma = -\frac{s}{s'}, \tag{1.2.16}$$

此式称为球面折射**角放大率公式**.

将(1.2.16)式代入(1.2.13)式可得

$$\beta\gamma = \frac{n}{n'}. \tag{1.2.17}$$

给定两种介质,n/n'为定值,故横向放大率与角放大率成反比. 当像放大时,成像光束与入射光束相比,其张角缩小;当像缩小时,张角增大.

将 $\beta=y'/y$,$\gamma=u'/u$ 代入(1.2.17)式,则有

$$nyu = n'y'u'. \tag{1.2.18}$$

此关系式称为**拉格朗日-亥姆霍兹**(J. L. Lagrange, H. von Helmholtz)**定理**,它表示在傍轴区,nyu 这个乘积在成像过程中为一恒量,它是物空间和像空间的各共轭量之间必须遵守的制约关系. 该定理很容易推广到多个共轴球面构成的系统,这时有关系式

$$nyu = n'y'u' = n''y''u'' = \cdots$$

将共轴球面系统的物空间和像空间的各共轭量联系起来.

6. 球面反射傍轴成像

如图 1.2.9 所示,设轴上物点 P 发出的光线经球面 Σ 上 M 点反射,反射线交于主轴上 P' 点,则光程 $[PMP']=n\overline{PM}+n\overline{MP'}$. 设球面曲率半径为 r(因曲率中心 C 在 O 点左方,此处 $r<0$),则 $\overline{OC}=\overline{MC}=-r$,由几何关系可得

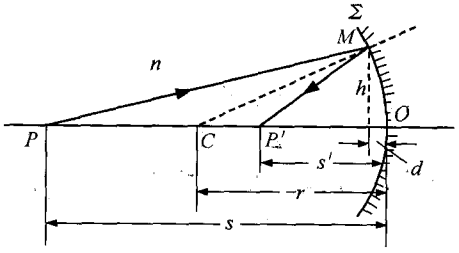


图 1.2.9 光在单球面上的反射

$$h^2 = d(2|r|-d) = -d(2r+d),$$

$$\overline{PM} = \sqrt{(s-d)^2+h^2} = \sqrt{s^2-2d(r+s)},$$

$$\overline{MP'} = \sqrt{(s'-d)^2+h^2} = \sqrt{s'^2-2d(r+s')}.$$

在傍轴区,$d \ll s, s', |r|$,略去二阶以上无穷小量得

$$\overline{PM} \approx s\left[1-\frac{d(r+s)}{s^2}\right],$$

$$\overline{MP'} \approx s'\left[1-\frac{d(r+s')}{s'^2}\right].$$

因此,光程

$$[PMP'] = ns\left[1-\frac{d(r+s)}{s^2}\right]+ns'\left[1-\frac{d(r+s')}{s'^2}\right].$$

现要求从物点 P 发出的所有光线经球面 Σ 反射后到 P' 点的光程都相等，即

$$[PMP'] = [POP'],$$

可得方程

$$ns\left[1-\frac{d(r+s)}{s^2}\right]+ns'\left[1-\frac{d(r+s')}{s'^2}\right]=ns+ns'.$$

解此方程可以求得

$$s'=-\frac{rs}{r+2s}. \tag{1.2.19}$$

可见，s' 只与 s、r 有关，与 d 无关. 由费马原理的推论——物像等光程性可知，P 点发出的傍轴光经球面反射后成像于 P' 点，此时，s 和 s' 分别为物距和像距.

鉴于反射线的方向倒转为从右向左，符号规则中关于像距的规定需作如下变动：若 P' 在 O 左方即实像，则像距 s' 为正；若 P' 在 O 右方即虚像，则像距 s' 为负.

这样，由(1.2.19)式可得球面反射傍轴成像的**物像距公式**

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=-\frac{2}{r}. \tag{1.2.20}$$

根据焦点和焦距的定义，由(1.2.20)式可得**焦距公式**

$$f'=f=-\frac{r}{2}. \tag{1.2.21}$$

上式表明，反射球面的两个焦距数值相等，符号相同，因此两焦点重合.

由将图 1.2.9 中的主轴绕球面曲率中心 C 在图面内旋转一小角度 θ 的方法，容易得到反射球面的**横向放大率公式**

$$\beta=-\frac{s'}{s}. \tag{1.2.22}$$

最后应指出，平面反射可作为球面反射当 $r\to\infty$ 时的特殊情况，由此极限及(1.2.20)式可得到反射平面的**物像距公式**

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=0. \tag{1.2.23}$$

由(1.2.22)、(1.2.23)两式可知，平面反射成像的横向放大率恒等于 1.

1.2.3 薄透镜傍轴成像

以两个折射曲面为边界的透明体称为**透镜**，通常多以光学玻璃为材料. 透镜按折射曲面的几何形状可以分为下列几种：球面透镜、轴对称的非球面透镜、柱面透镜以及阶梯透镜(菲涅耳透镜)等. 本节只讨论球面透镜，若其中央部分比边缘部分厚，称为**凸透镜**；反之，则称为**凹透镜**(图 1.2.10).

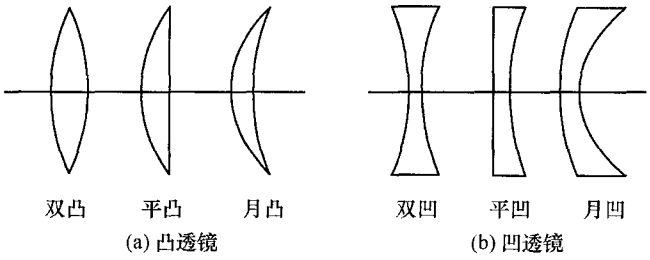


图 1.2.10 球面透镜的分类

1. 物像距公式

设透镜材料的折射率为 n_L，两侧介质折射率为 n、n'，两球面 Σ_1、Σ_2 的顶点分别为 O_1、O_2，透镜厚度 $d=\overline{O_1O_2}$（图 1.2.11），两球面曲率半径 r_1 和 r_2 未在图中标出.

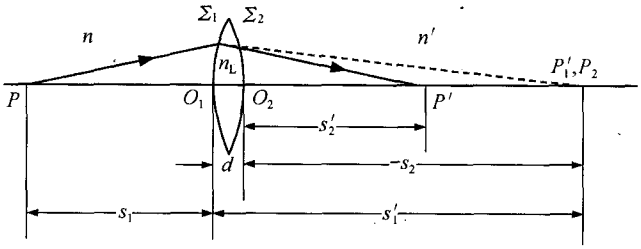


图 1.2.11 透镜傍轴成像

分别写出两折射球面的物像距公式：

$$\frac{n_L}{s_1'}+\frac{n}{s_1}=\frac{n_L-n}{r_1}\quad(\text{以 } O_1 \text{ 为基准点}),$$

$$\frac{n'}{s_2'}+\frac{n_L}{s_2}=\frac{n'-n_L}{r_2}\quad(\text{以 } O_2 \text{ 为基准点}).$$

由图 1.2.11 可以看出，$-s_2=s_1'-d$. 当 $d\ll s_1'$ 以至可以被忽略时，透镜称为**薄透镜**[①]，此时可认为两球面顶点 O_1 和 O_2 重合并记作 O，称为薄透镜**光心**. 现以薄透镜光心 O 为基准点（在图 1.2.11 中未标出），物距 $s=\overline{OP}\approx s_1$，像距 $s'=\overline{OP'}\approx s_2'$，此外 $s_2\approx -s_1'$. 将它们代入上面两式，消去 s_2 和 s_1'，可得

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n_L-n}{r_1}-\frac{n_L-n'}{r_2}. \tag{1.2.24}$$

① 当一透镜的厚度远小于与它的光学性质有关的距离时，定义为薄透镜. 这里所说的有关距离是指两球面曲率半径、两个焦距，以及物距和像距等.

上式称为薄透镜傍轴成像的**物像距公式**.

2. 焦距公式

依次令(1.2.24)式中 $s=\infty, s'=f'$ 和 $s'=\infty, s=f$,即得薄透镜的**焦距公式**

$$f'=\frac{n'}{\dfrac{n_L-n}{r_1}-\dfrac{n_L-n'}{r_2}},$$
$$f=\frac{n}{\dfrac{n_L-n}{r_1}-\dfrac{n_L-n'}{r_2}}. \tag{1.2.25}$$

f' 和 f 分别称为像方焦距和物方焦距. 上式表明,薄透镜的两个焦距除了取决于它的几何形状(r_1, r_2)和材料(n_L)外,还与其两侧介质折射率(n, n')有关. 两焦距之比为

$$\frac{f'}{f}=\frac{n'}{n}. \tag{1.2.26}$$

可见 f' 和 f 符号相同,因此相应的两个焦点 F'、F 必定分居薄透镜光心 O 的两侧,一般说来 f' 与 f 不等.

在 $n=n'=1$ 的情况下,

$$f=f'=\frac{1}{(n_L-1)\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)}. \tag{1.2.27}$$

上式称为**透镜制造者公式**.

具有实焦点(f' 和 $f>0$)的透镜叫做**正透镜**或**会聚透镜**;具有虚焦点(f' 和 $f<0$)的透镜叫做**负透镜**或**发散透镜**. 当透镜材料折射率 n_L 大于其两侧介质折射率 n, n' 时,凸透镜是正透镜,凹透镜是负透镜.

3. 横向放大率公式

参见图 1.2.11,分别写出两折射球面的横向放大率公式:

$$\beta_1=-\frac{ns_1'}{n_L s_1}, \qquad \beta_2=-\frac{n_L s_2'}{n' s_2}.$$

选薄透镜光心 O 为基准点,物距 $s\approx s_1$,像距 $s'\approx s_2'$,且 $s_2\approx -s_1'$. 将它们代入上面两式后再相乘,可得薄透镜成像的**横向放大率公式**

$$\beta=\beta_1\beta_2=-\frac{ns'}{n's}. \tag{1.2.28}$$

在 $n=n'=1$ 的情况下,有

$$\beta=-\frac{s'}{s}. \tag{1.2.29}$$

1.2.4 光焦度 高斯公式和牛顿公式 作图法

本节首先寻求折射球面、反射球面和薄透镜三者的共性，然后讨论它们傍轴成像时的共同规律，最后介绍作图求像的根据和方法.

1. 光焦度

傍轴成像时物像距公式如下：

折射球面 $$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r},$$

反射球面 $$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=-\frac{2}{r},$$

薄透镜 $$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n_L-n}{r_1}-\frac{n_L-n'}{r_2}.$$

注意球面反射时物、像方折射率相等，故反射球面物像距公式可改写成

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=-\frac{2n}{r}\qquad(n'=n).$$

可见上述三者之物像距公式左端形式完全相同，而右端均为一常量，若以 Φ 记之，则

折射球面 $$\Phi=\frac{n'-n}{r}, \tag{1.2.30}$$

反射球面 $$\Phi=-\frac{2n}{r}\qquad(n'=n), \tag{1.2.31}$$

薄透镜 $$\Phi=\frac{n_L-n}{r_1}+\frac{n'-n_L}{r_2}=\Phi_1+\Phi_2. \tag{1.2.32}$$

它们分别称为折射球面、反射球面和薄透镜的**光焦度**. (1.2.32)式表明，薄透镜的光焦度为其两个折射球面光焦度的代数和.

光焦度 Φ 与焦距 f'、f 关系密切. 若用相应的 f' 和 f 的表达式分别改写以上三式，则折射球面、反射球面和薄透镜的光焦度可取统一形式，即

$$\Phi=\frac{n}{f}=\frac{n'}{f'}. \tag{1.2.33}$$

光焦度是描述单球面或薄透镜屈光能力的一个量，其绝对值愈大，屈光能力愈强. 若(1.2.33)式中的焦距以米(m)为单位，则所求的光焦度值的单位叫做**屈光度**，记为 D. 实用上常以 1 屈光度的 1/100 表示光焦度的大小，称为 1 度. 例如：空

气中 $f=-50.0$ cm 的凹透镜，其光焦度 $\Phi=\dfrac{1}{-0.500\ \text{m}}=-2.00$ D，其度数是 -200.

2. 高斯公式与牛顿公式

如果利用折射球面、反射球面和薄透镜的两个焦距 f' 和 f 的表达式，对它们各自的物像距公式加以改造，可以得到一个对上述三者均适用的形式全同的物像距关系式

$$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1. \tag{1.2.34}$$

上式称为**高斯物像距公式**，简称**高斯公式**. 一般说来，只有在已知或求得焦距的前提下，它的实用价值才能得以体现.

对于反射球面或空气中使用的薄透镜，因 $f'=f$，高斯公式取如下简明形式

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{f}\quad\text{或}\quad\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}. \tag{1.2.35}$$

迄今为止，物、像距 s、s' 都是从单球面顶点 O 或薄透镜光心 O 量起的，它们也可以分别从焦点 F、F' 量起. 物距从 F 量起，记作 x，称为**焦物距**；像距从 F' 量起，记作 x'，称为**焦像距**. 符号规则如下：

(1) 若物点 P 在 F 左方，则焦物距 x 为正；若 P 在 F 右方，则焦物距 x 为负.

(2) 若像点 P' 在 F' 右方，则焦像距 x' 为正；若 P' 在 F' 左方，则焦像距 x' 为负.

由图 1.2.12 可知

$$s=f+x,\quad s'=f'+x', \tag{1.2.36}$$

将它们代入(1.2.34)式，可以得到

$$xx'=ff'. \tag{1.2.37}$$

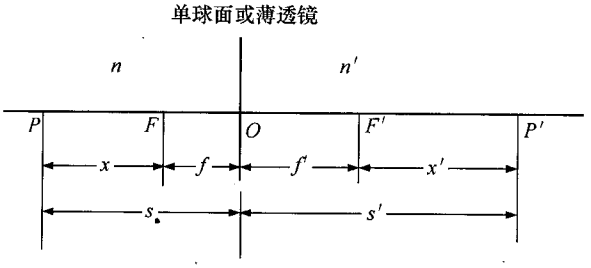


图 1.2.12　s,x,f 和 s',x',f' 的相互关系

上式称为**牛顿焦物像距公式**，简称**牛顿公式**. 对于反射球面或空气中的薄透镜，牛顿公式有如下简明形式：

$$xx' = f^2 \quad 或 \quad xx' = f'^2. \tag{1.2.38}$$

若物、像方折射率分别为 n,n'，由 $\beta=-ns'/n's$ 和 $f'/f=n'/n$，可得与高斯公式相应的横向放大率公式

$$\beta=-\frac{fs'}{f's}. \tag{1.2.39}$$

利用(1.2.36)、(1.2.37)两式对上式作简单计算，可以得到与牛顿公式相应的横向放大率公式

$$\beta=-\frac{f}{x}=-\frac{x'}{f'}. \tag{1.2.39)'}$$

3. 作图法

欲求折射球面、反射球面和薄透镜成像的位置并判断像的性质，可以利用解析法，也可利用作图法，后者对成像过程的反映更为直观和清晰.

在傍轴区内折射球面、反射球面和薄透镜能够实现同心光束的变换这一性质是作图法的根据. 只要找出与来自或通过物点的任意两条入射光线共轭的出射光线的交点，像点即可确定.

1) 求傍轴物点或垂轴小物的像

有两对基本的共轭光线：

(1) 通过物方焦点 F 的入射光线，经球面折射、球面反射或薄透镜后平行于主轴.

(2) 平行于主轴的入射光线，经球面折射、球面反射或薄透镜后通过像方焦点 F'.

有一对特殊的共轭光线：

对于单球面，通过球面曲率中心 C 的光线经球面折射或反射后方向不变；对于薄透镜，当物、像方折射率相同时，通过光心 O 的光线经薄透镜后方向不变.

下面以空气中的薄透镜为例，利用作图法求傍轴物点 Q 的像 Q'(图 1.2.13). 图中 1—1′，2—2′，3—3′分别表示上述三对共轭光线.

2) 求轴上物点的像

首先介绍焦面的概念. 在傍轴区，通过折射球面、反射球面和薄透镜的物方焦点 F 且垂直于主轴的平面，称为**物方焦面**，记作 $\mathscr{F}$；通过像方焦点 F' 且垂直于主轴的平面，称为**像方焦面**，记作 $\mathscr{F}'$.

其次以折射球面为例，介绍焦面的性质(图 1.2.14). 以物方焦面 $\mathscr{F}$ 上主轴外任意一点 Q 为发散中心或会聚中心的入射同心光束，经球面 Σ 折射后转化成一束与主轴成一定倾角的平行光束，其方向即 Q 点与球面曲率中心 C 的连线方向(图(a)). 与主轴成一定倾角的平行光束，经球面 Σ 折射后转化成一束会聚光束或发

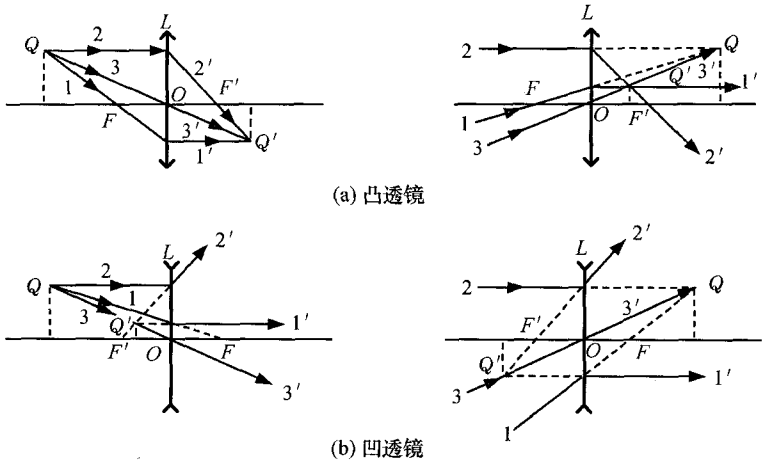


图 1.2.13　作图法求傍轴物点的像

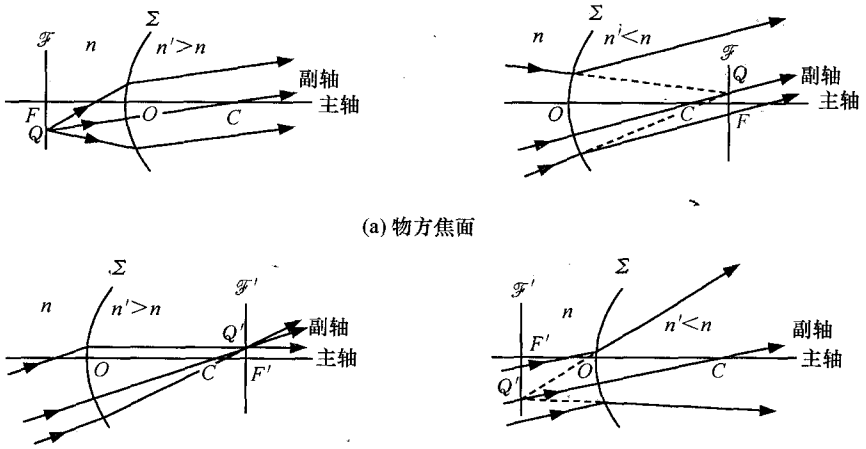


图 1.2.14　焦面的性质

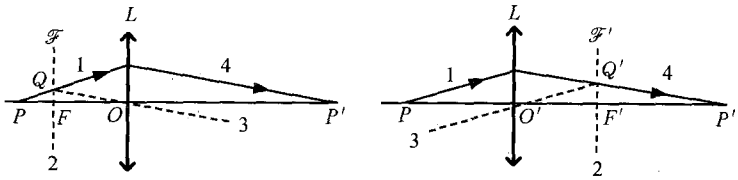
散光束，它们的中心位于像方焦面 $\mathscr{F}'$ 上主轴外一点 Q'，Q' 点即直穿球面曲率中心 C 的光线或其反向延长线与 $\mathscr{F}'$ 的交点(图(b))．

与称球面曲率中心 C 与顶点 O 的连线为主轴相类似，常将 C 与 Q 或 Q' 的连线称为单球面的**副轴**；在作图法中，副轴常以辅助线的形式出现，并用虚线表示．

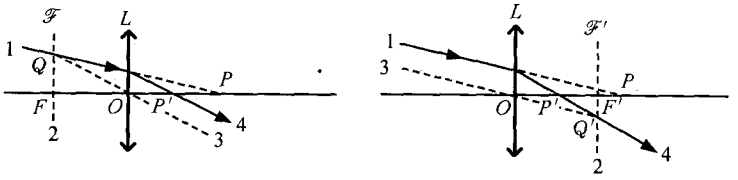
当物、像方折射率相同时，薄透镜光心 O 与 Q 或 Q' 的连线称为薄透镜的**副轴**．

最后以空气中的凸透镜为例，利用焦面性质和副轴，作图求轴上物点 P 的像 P'(图 1.2.15)，图中的数字 1，2，3，…表示习惯上画线的先后顺序，顺便指出，这

里的方法也可以用来求任意光线的共轭光线.



(a) 实物点，利用$\mathscr{F}$和副轴求像　　(b) 实物点，利用$\mathscr{F}'$和副轴求像



(c) 虚物点，利用$\mathscr{F}$和副轴求像　　(d) 虚物点，利用$\mathscr{F}'$和副轴求像

图 1.2.15　作图法求轴上物点的像

1.2.5　共轴球面系统傍轴成像(基面成像)

在傍轴区，共轴球面系统可近似看做是理想光学系统. 当把共轴球面系统作为一个整体(无论其内部结构简单或复杂)，而不逐一地研究系统的每个球面成像时，可用系统的几对特殊的点和面来确定物像之间的共轭关系. 这几对特殊的点和面称为共轴球面系统的**基点**和**基面**. 基点和基面的选取有很大的任意性，人们普遍选择的基点和基面是：焦点和焦面、主点和主面、节点和节面. 在某些特殊的场合下，也选用负主点和负主面、负节点和负节面.

1. 共轴球面系统的基点和基面

1) 焦点和焦面

系统的焦点和焦面的定义与前面对单球面和单透镜所引入的相同. 系统主轴上无限远处物点的共轭像点称为系统的**像方焦点**，记作 F'；通过 F' 且垂直于主轴的平面，称为系统的**像方焦面**，记作 $\mathscr{F}'$. 系统主轴上无限远处像点的共轭物点称为系统的**物方焦点**，记作 F；通过 F 且垂直于主轴的平面，称为系统的**物方焦面**，记作 $\mathscr{F}$.

系统的焦面的性质亦与前节所述相同：中心在焦面上的同心光束，其共轭光束是平行光束；若中心在焦点上，其共轭光束与主轴平行.

2) 主点和主面

只要系统焦点不在无限远处，该系统总有并且只有一对横向放大率 $\beta=1$ 的共

轭平面，这一对共轭平面称为系统的**主面**，它和主轴的交点称为**主点**. 依它们属于物空间和像空间可分别称为**物方主面**（记作 $\mathscr{H}$）、**物方主点**（记作 H）和**像方主面**（记作 $\mathscr{H}'$）、**像方主点**（记作 H'）.

系统的主面具有如下性质：若入射光线（或其延长线）交于物方主面 $\mathscr{H}$ 上某一点 M，则其共轭光线（或其延长线）必通过像方主面 $\mathscr{H}'$ 上等高的一点 M'，即中心在 $\mathscr{H}$ 上的同心光束转化为中心在 $\mathscr{H}'$ 上且等高的同心光束.

利用这一性质，可以通过作图法确定系统的主面和主点的位置. 如图 1.2.16 所示，已知系统及其两个焦点，作出平行主轴的入射光线 AB 的共轭光线 $B'F'$，以及平行主轴且与 AB 等高的出射光线 $E'D'$ 的共轭光线 FE，则 AB 延长线与 $B'F'$ 反向延长线的交点 M' 及 $E'D'$ 反向延长线与 FE 延长线的交点 M 是一对 $\beta=1$ 的共轭点. 过 M 和 M' 且与主轴垂直的平面即分别为系统的物方主面 $\mathscr{H}$ 和像方主面 $\mathscr{H}'$，它们与主轴的交点即分别为系统的物方主点 H 和像方主点 H'.

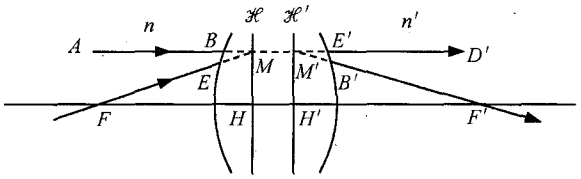


图 1.2.16　系统的主面和主点

系统的主点一经确定，就可将它们作为系统的基准点来定义系统的焦距：自物方主点 H 到系统的物方焦点 F 的距离为系统的**物方焦距**，记作 f；自像方主点 H' 到系统的像方焦点 F' 的距离为系统的**像方焦距**，记作 f'. 关于焦距的符号规则如下：F 在 H 左方时 f 为正，F 在 H 右方时 f 为负；F' 在 H' 右方时 f' 为正，F' 在 H' 左方时 f' 为负.

根据主点的定义可知，单球面的一对主点 H，H' 与其顶点 O 重合；薄透镜的一对主点 H、H' 与其光心 O 重合.

应当注意，一般而言，系统的一对主面并不总在系统之内；物方主面也不总在像方主面之左侧.

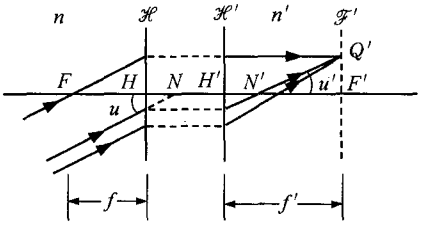


图 1.2.17　系统的节点

3）节点和节面

系统的主点、主面确定之后，就可以用它们表示系统.

图 1.2.17 中，与系统主轴成一定倾角的平行光束入射到系统的物方主面 $\mathscr{H}$ 上，光束中各光线在各自入射点的等高处从系统像方主面 $\mathscr{H}'$ 出射，汇交在系统像方焦面 $\mathscr{F}'$

上的Q'点. 在入射光束和出射光束中，必存在一对共轭光线，它们相互平行. 这对共轭光线与主轴的交点分别称为系统的**物方节点**(记作 N)和**像方节点**(记作 N'). 若这对共轭光线对主轴的倾角分别为 u 和 u'，显然，$u'=u$，即系统的节点是角放大率 $\gamma=1$ 的一对共轭光线与主轴的交点.

过物方节点 N 且与主轴垂直的平面称为系统的**物方节面**，记作 $\mathscr{N}$；过像方节点 N' 且与主轴垂直的平面称为系统的**像方节面**，记作 $\mathscr{N}'$(在图 1.2.17 中 $\mathscr{N}$ 与 $\mathscr{N}'$ 均未画出).

根据节点的性质可知，单球面的一对节点 N、N' 与球面曲率中心 C 重合；对于物、像方折射率相同的薄透镜，其一对节点 N、N' 与光心 O 重合.

4) 系统的 6 个基点不是完全独立的

记系统的物方焦距 $f=\overline{HF}$，像方焦距 $f'=\overline{H'F'}$，物方焦节距$=\overline{FN}$，像方焦节距$=\overline{F'N'}$，并设物、像方折射率为 n、n'，可以证明：若系统的 H，H' 和 F(或 F')的位置已知，则另外三个基点位置可由下面三个关系式确定：

$$(1)\ \frac{f'}{f}=\frac{n'}{n}, \tag{1.2.40}$$

$$(2)\ \overline{FN}=\overline{H'F'}=f', \tag{1.2.41}$$

$$(3)\ \overline{F'N'}=\overline{HF}=f. \tag{1.2.42}$$

2. 基面成像

1) 作图法

图 1.2.18 示出了可供选择的三对共轭光线：

(1) 由轴外物点 Q 作通过物方焦点 F 的光线 1，遇物方主面 $\mathscr{H}$ 于 M_1 点，其共轭光线 1′通过像方主面 $\mathscr{H}'$ 上的等高点 M_1' 且与主轴平行.

(2) 由 Q 点作平行于主轴的光线 2，遇 $\mathscr{H}$ 于 M_2 点，其共轭光线 2′通过 $\mathscr{H}'$ 上的等高点 M_2' 和像方焦点 F'.

(3) 由 Q 点作通过物方节点 N 的光线 3，遇 $\mathscr{H}$ 于 M_3 点，其共轭光线 3′通过 $\mathscr{H}'$ 上的等高点 M_3' 和像方节点 N'.

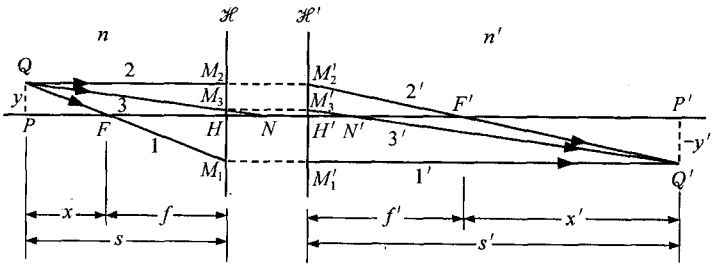


图 1.2.18 作图求像和物像关系

以上三条共轭光线中的任意两条共轭光线的交点即为傍轴物点 Q 的像点 Q'.

利用焦面和节点的性质作图可求轴上物点的像.

2)·物像关系

对于共轴球面成像系统,定义自物方主点 H 到物点 P 的距离为**物距**,记作 s,并规定若 P 在 H 左方,则 s 为正,若 P 在 H 右方,则 s 为负;自像方主点 H' 到像点 P' 的距离为**像距**,记作 s',并规定若 P' 在 H' 右方,则 s' 为正,若 P' 在 H' 左方,则 s' 为负. 设物、像高分别为 y,y',由图 1.2.18 可以看出 $\triangle M_2'H'F'\sim\triangle M_2'M_1'Q'$, $\triangle M_1HF\sim\triangle M_1M_2Q$,故有

$$\frac{f'}{s'}=\frac{\overline{M_2'H'}}{\overline{M_2'M_1'}}=\frac{y}{y-y'},$$

$$\frac{f}{s}=\frac{\overline{M_1H}}{\overline{M_1M_2}}=\frac{-y'}{y-y'}.$$

将以上两式相加可以得到**高斯公式**

$$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1. \tag{1.2.43}$$

将以上两式相比可以得到**横向放大率公式**

$$\beta=\frac{y'}{y}=-\frac{fs'}{f's}. \tag{1.2.44}$$

定义焦物距 $x=\overline{FP}$,焦像距 $x'=\overline{F'P'}$,它们的符号规则与 1.2.4 节中的规定相同. 由图 1.2.18 可以得到 $s=f+x$,$s'=f'+x'$,将它们代入(1.2.43)式可以得到**牛顿公式**

$$xx'=ff'. \tag{1.2.45}$$

由图 1.2.18 还可以得到与牛顿公式相应的**横向放大率公式**

$$\beta=-\frac{f}{x}=-\frac{x'}{f'}. \tag{1.2.46}$$

过主轴上共轭点 P、P' 作一对共轭光线并分别交主面 $\mathscr{H}$、$\mathscr{H}'$ 于 M、M' 点(如图 1.2.19 所示). 因

$$u=\frac{\overline{MH}}{s},$$

$$-u'=\frac{\overline{M'H'}}{s'},$$

$$\overline{MH}=\overline{M'H'},$$

并根据角放大率的定义,可以得到与高斯公式相应的系统的**角放大率公式**

$$\gamma=\frac{u'}{u}=-\frac{s}{s'}. \tag{1.2.47}$$

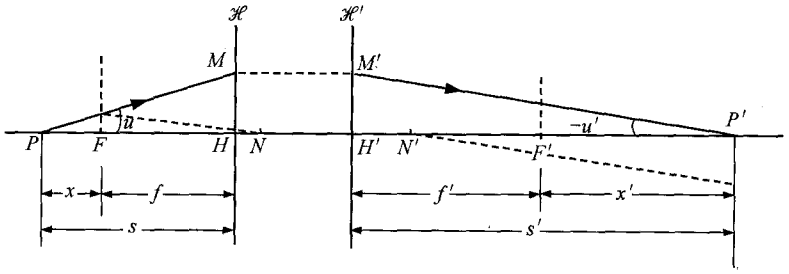


图 1.2.19 角放大率

利用 $x=s-f, x'=s'-f'$ 以及牛顿公式，可得与牛顿公式相应的系统的**角放大率公式**

$$\gamma=-\frac{x}{f'}=-\frac{f}{x'}. \tag{1.2.48}$$

不难看出

$$\beta\gamma=\frac{f}{f'}. \tag{1.2.49}$$

至此，我们在规定了系统的一系列基点和基面，并将焦距、物距、像距等概念作相应的推广之后，共轴球面系统的成像公式与单球面或单透镜的成像公式在形式上完全相同.

3. 共轴球面系统的组合

几个共轴球面系统沿其共同的主轴方向连接起来，可以组成**组合系统**. 下面介绍如何确定组合系统的基点和基面.

如图 1.2.20 所示，已知系统 Ⅰ 的 $\mathscr{H}_1$、$\mathscr{H}'_1$、H_1、H'_1、F_1、F'_1 以及系统 Ⅱ 的 $\mathscr{H}_2$、$\mathscr{H}'_2$、H_2、H'_2、F_2、F'_2. 从系统 Ⅰ 的像方主点 H'_1 到系统 Ⅱ 的物方主点 H_2 的距离 d 称为**两系统的距离**，并且规定：若 H_2 在 H'_1 右方，则 d 为正；若 H_2 在 H'_1 左方，则 d

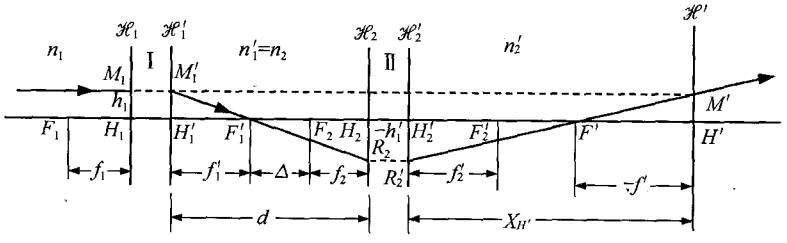


图 1.2.20 共轴球面系统的组合

为负. 从系统Ⅰ的像方焦点 F_1' 到系统Ⅱ的物方焦点 F_2 的距离 Δ 称为**两系统的光学间隔**，并且规定：若 F_2 在 F_1' 右方，则 Δ 为正；若 F_2 在 F_1' 左方，则 Δ 为负. 由图 1.2.20 看出，d 与 Δ 满足如下关系：

$$d = f_1' + \Delta + f_2, \tag{1.2.50}$$

或

$$\Delta = d - f_1' - f_2. \tag{1.2.51}$$

设一条与主轴平行且到主轴距离为 h_1 的入射光线交 $\mathscr{H}_1$ 上的 M_1 点，则由 $\mathscr{H}_1'$ 上的等高点 M_1' 出射的光线必定通过 F_1' 点. 设其与 $\mathscr{H}_2$ 交于 R_2 点，$\overline{H_2R_2} = -h_1'$，在 $\mathscr{H}_2'$ 上等高点 R_2' 出射的光线与主轴的交点就是组合系统的像方焦点 F'. 延长入射光线且与组合系统的出射光线交于 M' 点，过 M' 点且与主轴垂直的平面即为组合系统的像方主面 $\mathscr{H}'$，它与主轴的交点即为组合系统的像方主点 H'. $\mathscr{H}'$ 或 H' 的位置由从 H_2' 到 H' 的距离 $X_{H'}$ 决定，即 $X_{H'} = \overline{H_2'H'}$；且规定若 H' 在 H_2' 右方，则 $X_{H'}$ 为正；若 H' 在 H_2' 左方，则 $X_{H'}$ 为负.

下面导出组合系统的像方焦距公式和像方主面位置公式. 根据图 1.2.20，有 $\triangle M_1'H_1'F_1' \sim \triangle R_2H_2F_1'$，$\triangle M'H'F' \sim \triangle R_2'H_2'F'$，故

$$\frac{h_1}{-h_1'} = \frac{f_1'}{\Delta + f_2}, \quad \frac{h_1}{-h_1'} = \frac{-f'}{f_2' + \overline{F_2'F'}}.$$

由以上两式可得

$$f' = -\frac{f_1'(f_2' + \overline{F_2'F'})}{\Delta + f_2}. \tag{1.2.52}$$

注意到 F_1' 与 F' 是系统Ⅱ的一对共轭点，利用牛顿公式可得

$$\overline{F_2'F'} = \frac{f_2f_2'}{\Delta}. \tag{1.2.53}$$

将(1.2.53)式代入(1.2.52)式，有

$$f' = -\frac{f_1'f_2'}{\Delta}, \tag{1.2.54}$$

上式称为组合系统的**像方焦距公式**. 由图 1.2.20 可以看出

$$X_{H'} = f_2' + \overline{F_2'F'} - f',$$

将(1.2.53)、(1.2.54)式代入上式并注意到(1.2.50)式，可得

$$X_{H'} = \frac{d}{\Delta}f_2'. \tag{1.2.55}$$

上式称为组合系统的**像方主面位置公式**.

同样，在像空间引一条平行于主轴且到主轴距离为 h_1 的光线，重复上述步骤，可以导出组合系统的**物方焦距公式**和**物方主面位置公式**

$$f=-\frac{f_1f_2}{\Delta}, \tag{1.2.56}$$

$$X_H=\frac{d}{\Delta}f_1. \tag{1.2.57}$$

这里需要指出,(1.2.57)式中的 X_H 是指从系统Ⅰ的物方主点 H_1 到组合系统的物方主点 H 的距离,即 $X_H=\overline{H_1H}$;并且规定若 H 在 H_1 左方,则 X_H 为正;若 H 在 H_1 右方,则 X_H 为负.

4. 组合系统的光焦度

设系统Ⅰ和系统Ⅱ的物、像方折射率分别为 n_1、n_1' 和 n_2、n_2'(注意 $n_1'=n_2$),系统Ⅰ、系统Ⅱ和组合系统的光焦度分别为

$$\Phi_1=\frac{n_1'}{f_1'}=\frac{n_1}{f_1},$$

$$\Phi_2=\frac{n_2'}{f_2'}=\frac{n_2}{f_2},$$

$$\Phi=\frac{n_2'}{f'}=\frac{n_1}{f}.$$

利用(1.2.54)式并注意到(1.2.51)式,有

$$\Phi=\frac{n_2'}{f'}=\frac{n_2'f_2}{f_1'f_2'}+\frac{n_2'f_1'}{f_1'f_2'}-d\frac{n_2'}{f_1'f_2'},$$

因为 $f_2/f_2'=n_2/n_2'$,$n_1'=n_2$ 并记为 n,所以

$$\Phi=\frac{n_1'}{f_1'}+\frac{n_2'}{f_2'}-\frac{dn_1'n_2'}{nf_1'f_2'},$$

即

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2-\frac{d}{n}\Phi_1\Phi_2. \tag{1.2.58}$$

上式称为组合系统的**光焦度公式**.

设厚透镜材料的折射率为 n_L,厚度为 d,两折射球面的光焦度分别为 Φ_1 和 Φ_2,则由(1.2.58)式可得厚透镜的光焦度

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2-\frac{d}{n_L}\Phi_1\Phi_2. \tag{1.2.59}$$

将 $d=0$ 代入(1.2.59)式可得薄透镜的光焦度

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2. \tag{1.2.60}$$

设空气中两薄透镜的光焦度分别为 Φ_1 和 Φ_2,两镜距离为 d,则由(1.2.58)式可得分立薄透镜组的光焦度

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - d\Phi_1\Phi_2. \tag{1.2.61}$$

将 $d=0$ 代入上式，便得密接薄透镜组的光焦度

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2. \tag{1.2.62}$$

例 1.2.2 一双凸厚透镜置于空气中，透镜材料折射率 $n_L=1.5$，厚度 $d=10$ cm，左端(第一)球面曲率半径 $r_1=5.0$ cm，右端(第二)球面曲率半径 $r_2=-10$ cm. (1)试确定该透镜的主点和焦点的位置；(2)已知正立垂轴小物位于左端球面顶点左方 20 cm 处，试求像的位置和横向放大率.

解 (1) 空气折射率 $n=1$. 由(1.2.8)式，第一球面和第二球面的物、像方焦距分别为

$$f_1 = \frac{nr_1}{n_L - n} = \frac{1.0\times 5.0}{1.5-1.0} = 10 \text{ cm},$$

$$f_1' = \frac{n_L r_1}{n_L - n} = \frac{1.5\times 5.0}{1.5-1.0} = 15 \text{ cm},$$

$$f_2 = \frac{n_L r_2}{n - n_L} = \frac{1.5\times(-10)}{1.0-1.5} = 30 \text{ cm},$$

$$f_2' = \frac{nr_2}{n - n_L} = \frac{1.0\times(-10)}{1.0-1.5} = 20 \text{ cm}.$$

由(1.2.51)式可由已知量 d 求得光学间隔

$$\Delta = d - f_1' - f_2 = 10 - 15 - 30 = -35 \text{ cm}.$$

由(1.2.55)式和(1.2.57)式代入数据得

$$X_{H'} = \frac{d}{\Delta}f_2' = \frac{10}{-35}\times 20 = -\frac{40}{7} \text{ cm} = -5.71 \text{ cm},$$

$$X_H = \frac{d}{\Delta}f_1 = \frac{10}{-35}\times 10 = -\frac{20}{7} \text{ cm} = -2.86 \text{ cm}.$$

这表明透镜的物方主面位于第一球面顶点右方 2.86 cm 处；像方主面位于第二球面顶点左方 5.71 cm 处.

由(1.2.54)式和(1.2.56)式代入数据得

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta} = -\frac{15\times 20}{-35} = \frac{60}{7} \text{ cm} = 8.57 \text{ cm},$$

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} = -\frac{10\times 30}{-35} = \frac{60}{7} \text{ cm} = 8.57 \text{ cm}.$$

这表明透镜的物方焦点位于其物方主面左方 8.57 cm；像方焦点位于其像方主面右方 8.57 cm 处.

(2) 利用(1.2.43)式代入数据 $s=20+\frac{20}{7}=\frac{160}{7}$ cm，$f'=f=\frac{60}{7}$ cm，可以解得

像距

$$s' = \frac{96}{7}\ \text{cm} = 13.71\ \text{cm}.$$

这表明像位于透镜的像方主面右方 13.71 cm 处，即位于透镜第二球面顶点右方 8.0 cm 处.

由(1.2.44)式代入数据可解得横向放大率

$$\beta = -0.6.$$

*1.2.6 傍轴光学的矩阵方法

1. 光线状态的描述

在共轴球面系统的傍轴区，光线在传播过程中可能发生多次折射. 例如，在图 1.2.21 中，从编号为 0 的位置发出的光线在不同界面点 1、2、3、4 和 5 发生折射或反射，最后到达点 6. 在任一位置，光线的状态可由两个参数决定：该位置离光轴(z 轴)的高度 y 及光线与光轴的夹角 u. y 和 u 称为光线的两个**状态参量**，它们的符号规定同前文所述. 这两个状态参量可以合并写为一个二维列矢量

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}, \tag{1.2.63}$$

$\boldsymbol{L}$ 称为**光线状态矢量**.

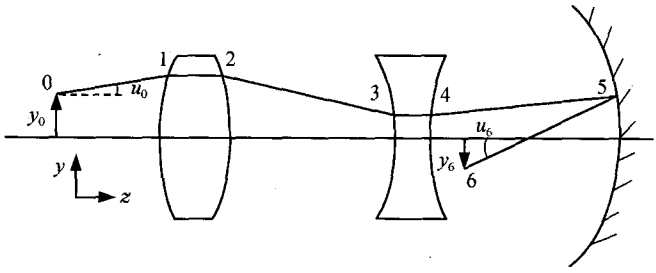


图 1.2.21 共轴球面系统中光线的传输

傍轴光学的矩阵方法给出一套规则和算法，根据这套算法，可以对给定系统由一处的光线状态矢量确定下一处的光线状态矢量，从而确定光线在整个系统中的传输过程. 它对于分析共轴球面系统傍轴成像等问题特别方便. 以下我们先介绍几种传输矩阵，再说明它们对分析成像问题的应用.

2. 光线传输矩阵

光学系统中两个不同位置处的光线状态矢量可以用一个变换矩阵联系起来，此矩阵称为**光**

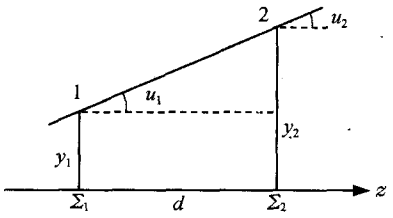


图 1.2.22 平移矩阵的推导

线传输矩阵. 显然，光线传输矩阵的具体形式由所考察两点间的具体光学系统所决定. 以下给出几种典型的光线传输矩阵. 在分析中我们均设系统为关于光轴的轴对称系统，并只讨论在 yz 平面传播的傍轴光线.

1) 平移矩阵

考察一条光线在均匀介质中的传播，如图 1.2.22 所示. 这时光线沿直线传播. 记在输入面 Σ_1 和输出面 Σ_2 的光线参量分别为 (y_1, u_1) 和 (y_2, u_2)，两平面之间的距离为 d，显然有 $u_2=u_1$，$y_2=y_1+d\tan u_1$. 傍轴近似下有 $\tan u_1=u_1$，故

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ u_1 \end{pmatrix}, \tag{1.2.64}$$

式中变换矩阵

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.2.65}$$

称为**平移矩阵**.

2) 折射矩阵

图 1.2.23 画出了一条光线 PA 在球面 Σ 上 A 点发生折射的情形，图中 C 为球面曲率中心，r 为球面半径，n 和 n' 分别是入射和折射介质的折射率. 考察 A 点的入射光线和折射光线，易见 $y_2=y_1$，$u_1=\theta_1-\varphi$，$u_2=\theta_2-\varphi$. 在傍轴条件下，有 $\varphi=y_1/r$，$n\theta_1=n'\theta_2$，故得

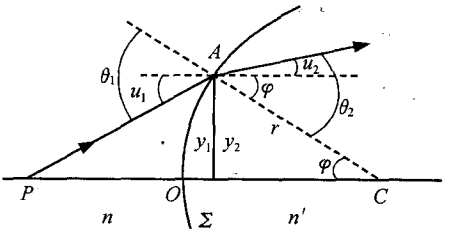


图 1.2.23 球面折射矩阵的推导

$$\begin{cases} y_2 = y_1, \\ u_2 = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{n}{n'}-1\right)y_1 + \dfrac{n}{n'}u_1. \end{cases} \tag{1.2.66}$$

将上式写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{F}} \begin{pmatrix} y_1 \\ u_1 \end{pmatrix}, \tag{1.2.67}$$

其中

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{n}{n'}-1\right) & \dfrac{n}{n'} \end{bmatrix} \tag{1.2.68}$$

称为**球面折射矩阵**. 注意式中 r 的符号规定同前，即当 C 点在球面顶点 O 右方时 r 为正，反之为负.

显然，若令 $r\to\infty$，则可得到平面界面的折射矩阵

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{n}{n'} \end{pmatrix}. \tag{1.2.69}$$

3) 反射矩阵

图 1.2.24 画出了一条傍轴光线在球面反射面 Σ 上 A 点发生反射的情况. 图中 C 为球心，根据前文符号规定，此时球面半径 r 为负值. 关于角度的符号规定如图右方所示. 此时仍有 $y_2=y_1$. 依角度关系 $u_1=2\theta-u_2$，$\theta=u_1-\varphi$，以及傍轴近似 $\varphi=y_1/(-r)$，可得

$$\begin{cases} y_2 = y_1, \\ u_2 = \dfrac{2}{r}y_1 + u_1. \end{cases} \tag{1.2.70}$$

将上式写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{R}} \begin{pmatrix} y_1 \\ u_1 \end{pmatrix}, \tag{1.2.71}$$

其中

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{2}{r} & 1 \end{pmatrix} \tag{1.2.72}$$

称为**球面反射矩阵**. 显然，若令 $r\to\infty$，则可得到**平面反射矩阵**

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.2.73}$$

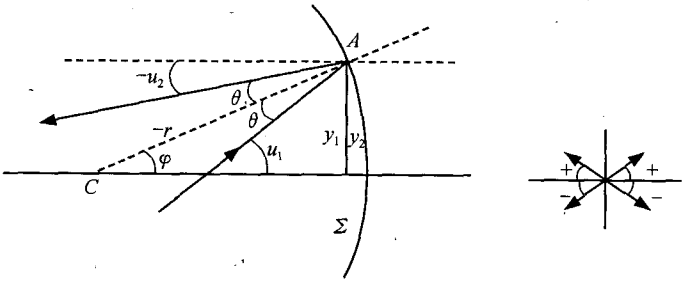


图 1.2.24 球面反射矩阵的推导

4) 共轴球面系统的系统矩阵

设 N 个共轴球面界面构成一个共轴系统，如图 1.2.25 所示. 一光线从 M_1 点入射，从 M_N 点出射. 依矩阵方法，光线在每一界面的偏折可由该界面的折射矩阵表示，在两界面之间的传输可由该介质中的平移矩阵表示. 若记入射光线状态矢量为 $\boldsymbol{L}_1$，则经 Σ_1 面折射后的光线状态矢量为 $\boldsymbol{L}_1'=\boldsymbol{M}_{\mathrm{F}_1}\boldsymbol{L}_1$，到达界面 Σ_2 时的状态矢量为 $\boldsymbol{L}_2=\boldsymbol{M}_{\mathrm{T}_{12}}\boldsymbol{L}_1'=\boldsymbol{M}_{\mathrm{T}_{12}}\boldsymbol{M}_{\mathrm{F}_1}\boldsymbol{L}_1$，这里 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{F}_1}$ 和 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{T}_{12}}$ 分别是界面 Σ_1 的折射矩阵和界面 Σ_1 及 Σ_2 之间的介质(厚度 d_{12})的平移矩阵. 以下以此类推. 最后在界面 Σ_N 出射的光线的状态矢量为

$$\boldsymbol{L}_N' = \boldsymbol{M}_{\mathrm{F}_N}\boldsymbol{M}_{\mathrm{T}_{N-1\,N}}\boldsymbol{M}_{\mathrm{F}_{N-1}}\boldsymbol{M}_{\mathrm{T}_{N-2\,N-1}}\cdots\boldsymbol{M}_{\mathrm{F}_2}\boldsymbol{M}_{\mathrm{T}_{12}}\boldsymbol{M}_{\mathrm{F}_1}\boldsymbol{L}_1. \tag{1.2.74}$$

将上式写成矩阵形式

$$\boldsymbol{L}_N' = \boldsymbol{M}\boldsymbol{L}_1, \tag{1.2.75}$$

其中

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{F}_N}\boldsymbol{M}_{\mathrm{T}_{N-1\,N}}\boldsymbol{M}_{\mathrm{F}_{N-1}}\boldsymbol{M}_{\mathrm{T}_{N-2\,N-1}}\cdots\boldsymbol{M}_{\mathrm{F}_2}\boldsymbol{M}_{\mathrm{T}_{12}}\boldsymbol{M}_{\mathrm{F}_1} \tag{1.2.76}$$

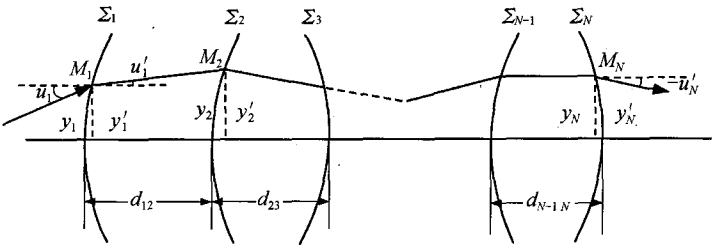


图 1.2.25　共轴球面系统中光线状态的变换

称为**共轴球面系统的系统矩阵**. 不难看出，系统矩阵是该系统中所包含的每一个界面和介质层各自矩阵的乘积. 由于矩阵乘法不满足交换律，应注意上式中各矩阵从前向后的排列次序与共轴系统中各器件从左向右的排列次序刚好是相反的，应用中不可弄错.

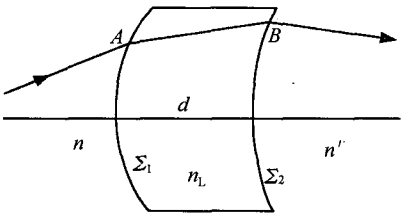


图 1.2.26　厚透镜中光线的偏折

5) 厚透镜与薄透镜的系统矩阵

作为系统矩阵的一个计算实例，我们考察图 1.2.26 中所示的厚透镜，其中两球面半径分别为 r_1 和 r_2，透镜材料折射率为 n_L，中心厚度为 d，透镜前后介质的折射率分别是 n 和 n'. 设 A、B 分别是光线在透镜前后表面的入射点和出射点，依前文分析，系统矩阵应为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}&=\boldsymbol{M}_{\mathrm{F}_2}\boldsymbol{M}_{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{\mathrm{F}_1}\\&=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \dfrac{1}{r_2}\left(\dfrac{n_L}{n'}-1\right) & \dfrac{n_L}{n'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & d\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \dfrac{1}{r_1}\left(\dfrac{n}{n_L}-1\right) & \dfrac{n}{n_L}\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{1.2.77}$$

为简化表示，我们考虑 $d\to 0$ 的情况，此时厚透镜转化为薄透镜，上式可化为

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \dfrac{n_L-n'}{r_2n'}-\dfrac{n_L-n}{r_1n'} & \dfrac{n}{n'}\end{pmatrix}.\tag{1.2.78}$$

显然，对 $n'=n=1$ 的最常见情况，上式可简化为

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{1}{f} & 1\end{pmatrix},\tag{1.2.79}$$

其中

$$f=\frac{1}{(n_L-1)\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)}\tag{1.2.80}$$

即(1.2.27)式所表示的薄透镜焦距.

3. 系统矩阵相应的行列式值

一般的系统矩阵可以写成

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix} \tag{1.2.81}$$

的形式，其中 A、B、C、D 为四个矩阵元. 单界面或者单层介质可以看作是系统的特例. 由球面折射矩阵(1.2.68)式，可知其相应行列式的值 $|\boldsymbol{M}_{\mathrm{F}}|=n/n'$，其中 n 和 n' 分别是入射和折射介质的折射率. 对平移和反射矩阵，则有 $|\boldsymbol{M}_{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{M}_{\mathrm{R}}|=1$，此式可以看作前一公式的特例，因为在平移和反射的情况中 $n'=n$. 这样，对传输矩阵一般有

$$|\boldsymbol{M}|=\frac{n}{n'}, \tag{1.2.82}$$

其中 n 和 n' 分别为入射光和出射光所在介质的折射率.

对于一个由 N 个单元组成的系统，前文已说明其系统矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_N\boldsymbol{M}_{N-1}\boldsymbol{M}_{N-2}\cdots\boldsymbol{M}_3\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1, \tag{1.2.83}$$

因此系统矩阵相应行列式的值等于各组元矩阵行列式的值的乘积. 对各组元应用公式(1.2.82)，并注意到前一组元的出射介质即为后一组元的入射介质，因此中间所有折射率相互消去，最后得

$$|\boldsymbol{M}|=\frac{n_{\mathrm{in}}}{n_{\mathrm{out}}}, \tag{1.2.84}$$

其中 n_{in} 和 n_{out} 分别是整个系统的入射光和出射光所在介质的折射率.

若系统置于空气中，$n_{\mathrm{in}}=n_{\mathrm{out}}=1$，则 $|\boldsymbol{M}|=1$，即

$$AD-BC=1. \tag{1.2.85}$$

4. 由系统矩阵的矩阵元判断系统性质

记系统的输入面为 P_1，输出面为 P_2，由 P_1 到 P_2 的光线变换关系可写为

$$\begin{pmatrix}y_2\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ u_1\end{pmatrix}. \tag{1.2.86}$$

设输入面及输出面处为同一介质，即 $n_2=n_1$，则 $AD-BC=1$. 以下我们考察当某一个矩阵元为 0 时系统有何性质.

1) $A=0$

此时由(1.2.86)式可得 $y_2=Bu_1$，即 y_2 只取决于 u_1 而与 y_1 无关. 换言之，在输入面不同高度 y_1 依相同倾角 u_1 入射的光线将通过输出面上同样高度 y_2 的一点，如图 1.2.27 所示. 显然，此情况相当于平行光入射经系统后会聚的情况，而 P_2 平面即系统的后焦面.

2) $B=0$

此时 $y_2=Ay_1$，与 u_1 无关. 即过输入面高度为 y_1 的一点 Q_1 以不同角度射入系统的光线经系统后在输出面会聚于高度为 $y_2=Ay_1$ 的同一点 Q_2，如图 1.2.28 所示. 显然这是成像的情况，Q_1 和 Q_2 分别为物点和像点，P_1 和 P_2 则是一对物像共轭面. 成像系统的横向放大率则简单地等于 A.

$$A=\frac{y_2}{y_1}. \tag{1.2.87}$$

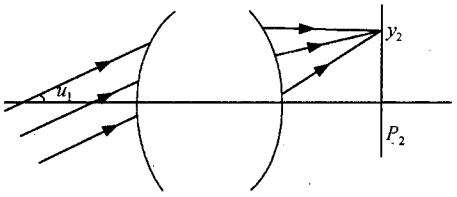


图 1.2.27　$A=0$ 的情况

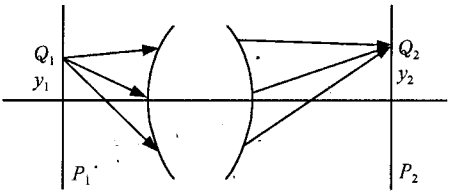


图 1.2.28　$B=0$ 的情况

3) $C=0$

此时 $u_2=Du_1$，与 y_1 无关. 这意味着在输入面不同高度处以同样倾角 u_1 入射的光线经系统后以同样倾角 u_2 射出. 显然，该系统实现了由入射平行光到出射平行光的转换，如图 1.2.29 所示. 矩阵元 D 则代表了系统的角放大率，

$$D=\frac{u_2}{u_1}. \tag{1.2.88}$$

4) $D=0$

此时 $u_2=Cy_1$，与 u_1 无关. 对一确定的 y_1 可以得到一确定的 u_2. 这意味着通过输入面上同一点以不同角度入射的光线经系统后以同样倾角出射，如图 1.2.30 所示. 显然这相当于点光源发出的球面波经系统后变成平行光的情况，此时输入面 P_1 为系统的前焦面.

若已知共轴球面系统的系统矩阵，系统的光学性质即可确定. 我们还可以由系统矩阵求出系统的一系列基点，如主点、焦点和节点的位置. 这方面的讨论可参见有关文献，此处不再详述.

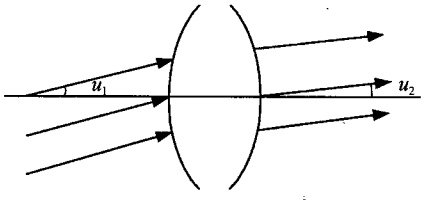


图 1.2.29　$C=0$ 的情况

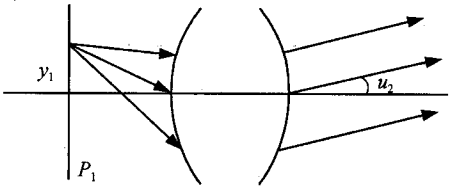


图 1.2.30　$D=0$ 的情况

例 1.2.3　仍以例 1.2.1 中的情况为例，一个双凸厚透镜置于空气中，透镜材料的折射率 $n_L=1.5$，厚度 $d=10$ cm，透镜前后两球面半径分别为 $r_1=5.0$ cm 和 $r_2=-10$ cm. 垂轴小物正立于透镜左方，与第一球面顶点的距离为 $s=20$ cm. 用矩阵法求像的位置和横向放大率.

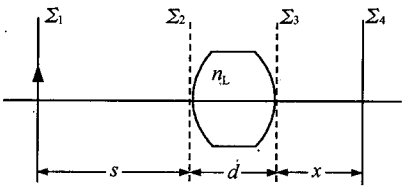


图 1.2.31　例 1.2.3 图

解　设成像平面在透镜后表面右方距离为 x 处. 图 1.2.31 中画出了各个特征面：输入面 Σ_1，透镜前表面 Σ_2，后表面 Σ_3，以及输出面 Σ_4. 将从 Σ_1 到 Σ_2 的平移矩阵、Σ_2 的折射矩阵、Σ_2 到 Σ_3 的平移矩阵、Σ_3 的折射矩阵、以及从 Σ_3 到 Σ_4 的平移矩阵分别记为 $\boldsymbol{M}_1$、$\boldsymbol{M}_2$、

$\boldsymbol{M}_3$、$\boldsymbol{M}_4$和$\boldsymbol{M}_5$，由前文可写出

$$\boldsymbol{M}_1=\begin{pmatrix}1 & s\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{M}_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{r_1}\left(\frac{1}{n_L}-1\right) & \frac{1}{n_L}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}_3=\begin{pmatrix}1 & d\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}_4=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{r_2}(n_L-1) & n_L\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}_5=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

代入$s=20, d=10, r_1=5.0, r_2=-10$，可得系统矩阵

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}&=\boldsymbol{M}_5\boldsymbol{M}_4\boldsymbol{M}_3\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1\\ &=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{20} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1 & 10\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{15} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1 & 20\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}-\frac{7}{60}x & \frac{40}{3}-\frac{5}{3}x\\ -\frac{7}{60} & -\frac{5}{3}\end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{1.2.89}$$

为验证上式，可计算其行列式的值，

$$|\boldsymbol{M}|=-\frac{5}{3}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{7}{60}x\right)+\frac{7}{60}\times\left(\frac{40}{3}-\frac{5}{3}x\right)=1.$$

根据前文分析，欲使Σ_4为像平面，必须使上式中的矩阵元

$$B=\frac{40}{3}-\frac{5}{3}x=0,$$

由此式可解得$x=8$ cm.

前文已指出，成像系统的横向放大率等于系统矩阵的矩阵元A. 当$x=8$时，(1.2.89)式中的矩阵元

$$A=\frac{1}{3}-\frac{7}{60}x=\frac{1}{3}-\frac{7\times 8}{60}=-0.6.$$

因此，像的位置在透镜后表面顶点右方8.0 cm处，横向放大率为-0.6，即为一倒立缩小的实像. 以上结论与例1.2.1完全一致.

1.3 成像仪器

光学仪器是几何光学仪器、光谱仪、干涉仪、光度仪等仪器的总称. 几何光学仪器主要指成像仪器，且按成像之实虚可又分两类：照相机、电影放映机、幻灯机、投影仪等属成实像的仪器；而放大镜、目镜、显微镜、望远镜等则属成虚像的仪器. 本节首先介绍人的眼睛，然后介绍放大镜等仪器的基本原理.

1.3.1 眼睛

眼睛是人的视觉器官. 来自外界物体的光线进入眼内，落在视网膜上，引起人

眼对其形状、颜色、位置、亮度等的感觉. 眼睛与照相机相似，由两大部分组成：一是光学成像系统，二是与照相底片相似的感光层(视网膜上的感光细胞及其外段的光敏色素). 不过，眼睛比照相机复杂得多，除了有一套自动调节机构外，还能将光携带的信息转化成神经电讯号，并经初步加工处理，传至大脑.

1. 光学成像系统

人眼大致为一球形，其直径因人及年龄而异，约 16～24 mm. 眼睛的结构如图 1.3.1 所示，其前部是透明的**角膜**，它嵌入白色的巩膜中. 角膜的折射率约为 1.38，它对眼睛的屈光作用有很大贡献. 角膜后面的空间称为前房，内部充满透明的**水状液**(折射率为 1.337). 前房的后面是虹膜，其中心为**瞳孔**. 靠近虹膜的是**晶状体**，其折射率由外层的 1.386 到中心的 1.406 逐渐变化. 晶状体后的内腔称为后房，其中充满着一种透明的**玻璃体液**(折射率为 1.336)，占整个眼球容积的 4/5. 眼球后部为**视网膜**. 大约在视网膜中部，有一个直径为 2.5～3 mm 的小区域叫**黄斑**.

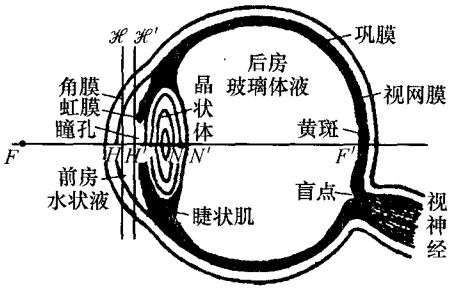


图 1.3.1　人眼的生理结构

眼睛的屈光能力主要来自空气—角膜、水状液—晶状体、晶状体—玻璃体液三个界面的折射，其中第一个界面的折射最为显著. 作为一个反映整体效果的简化模型，可以把眼睛看做一个单球面折射系统，其球面曲率半径 $r=5.8$ mm，物方折射率 $n=1.00$，像方折射率 $n'=1.34$. 由(1.2.8)和(1.2.30)两式可求得其物方焦距、像方焦距及光焦度分别为

$$f=17.1\text{ mm},\quad f'=22.9\text{ mm},\quad \Phi=59\text{ D}.$$

当然，这种模型是最为简单的一种，尚有其他稍微复杂的模型，这时人眼被看做是一共轴球面系统，其两个主面位置稍有分离. 不同的眼模型中各参数不尽相同，但其差别并不太大.

外部物体在人眼视网膜上所成的像显然为倒像，但人却产生了正立的感觉，这种“自动校正”来自神经系统的作用. 眼睛可以通过瞳孔的收缩来调节入射光的强弱，这时瞳孔起到了一个可变光阑的作用. 直径可在 2～8 mm 间自行变化. 人眼也可以通过睫状肌的收缩增大晶状体的曲率，从而改变眼睛的焦距，使得不同距离的物都能精确成像在视网膜上，这种能力称为**调焦**作用. 但是，这种调焦功能是有限度的，f 和 f' 的变化范围分别约为 3 mm 和 4 mm.

眼睛处于完全松弛的状态下能看清楚的最远点称为**远点**；在睫状肌最大收缩(这时焦距最短)时能看清楚的最近点称为**近点**. 正常眼的远点在无限远处；近点约

在离眼 10 cm 处. 随着人的年龄增长，人眼的调焦能力会逐渐减弱，近点会逐渐变远. 一般说来，在照明条件较好的条件下，物体距眼 20～30 cm 左右，观察起来最为舒适. 因此通常规定 25 cm 为人眼的**明视距离**.

眼睛的光学系统最常见的缺陷是近视、远视和散光. **近视眼**的眼球过长，当睫状肌完全松弛时，无限远处物体成像在视网膜的前方，它的远点在有限远的位置，可用凹透镜矫正. **远视眼**的眼球过短，无限远处物体成像在视网膜的后方，它的近点比正常眼的要远，可用凸透镜矫正. 角膜的缺陷可能造成眼睛在一个平面（例如铅直平面）内对光的折射比另一个平面（如水平平面）内大，导致眼睛所看到的物像失真，此为**散光**，可用柱面透镜矫正.

2. 视网膜

视网膜是眼睛的感光部分，感光物质位于感光细胞内. 引起人眼视觉的电磁辐射的波长范围约为 390～760 nm. 对大量人眼所做的实验表明，人眼对不同波长的辐射敏感程度不同，即不同波长的同等数量的辐射通量所引起的明亮感觉不同，或者欲引起人眼相同的明亮感觉所需不同波长的辐射通量不同. 在光照充足（明视觉）时人眼对 555 nm 的绿光最敏感；在光照微弱（暗视觉）时人眼对 505 nm 的青绿光最敏感. 这种差异源于人眼视网膜上的两类感光细胞，即**视锥细胞**和**视杆细胞**. 暗视觉只对明暗有感觉，而明视觉则与色觉和分辨像的细节有关. 在白昼条件下，视锥细胞起作用；而在黑暗或微光的环境中，视杆细胞起作用. 视网膜中心区的黄斑是眼睛的敏感区. 其中有一个直径约为 0.25 mm 的凹部叫中央凹，在这里密集排列着大量的视锥细胞，是视觉最为灵敏的地方. 眼球本能的转动可使最感兴趣的目标成像在中央凹及其附近，以达到最清晰的观察效果. 视神经出口区无感受器，对光不敏感，故称为盲点；但由于观察物体时眼球在不断地转动，盲点的影响一般并不易觉察.

3. 视角与最小分辨角

物体对人眼的张角称为**视角**，记为 ω（图 1.3.2）. 视角愈大，物体成在视网膜上的像愈大. 注意，这里对视角 ω 正负的规定，与 1.2.2 节中关于角度正负的规定恰好相反，即正立物所对应的视角为正，倒立物所对应的视角为负. 下面将要介绍的放大镜、显微镜、望远镜等助视光学仪器均是为增大物体对人眼的视角而设计的.

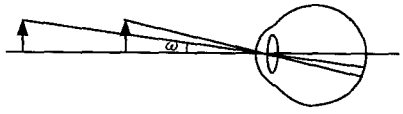


图 1.3.2 视角

能够分辨的最靠近的两点对人眼所张的视角称为**最小分辨角**. 从几何光学角度，最小分辨角只由视网膜上视锥细胞排列的精细度所决定；而波动光学则进一步

指出它亦受到光学系统的衍射效应所限制，此问题后文将作定量分析.

1.3.2　放大镜和目镜

1. 放大镜

最简单的放大镜就是一个焦距显著小于明视距离的会聚透镜. 如图 1.3.3(a)所示，将高为 y 的待测物体 PQ 置于焦距为 f' 的透镜 L 物方焦点 F 内侧附近，PQ 经 L 在明视距离或其之外的某处成一正立放大的高为 y' 的虚像 $P'Q'$，它作为物在眼睛的视网膜上成一倒立缩小的实像. 设 L 的光心 O 到 $P'Q'$ 的距离为 s'，到人眼等效折射球面曲率中心的距离为 l，若 $P'Q'$ 对人眼的视角为 ω，则有

$$\tan\omega = \frac{y'}{-s'+l}.$$

如果不用透镜，人眼直接观察放在明视距离 s_0 处的待测物体 PQ(图 1.3.3(b))，视角为 ω_e，则

$$\tan\omega_e = \frac{y}{s_0}.$$

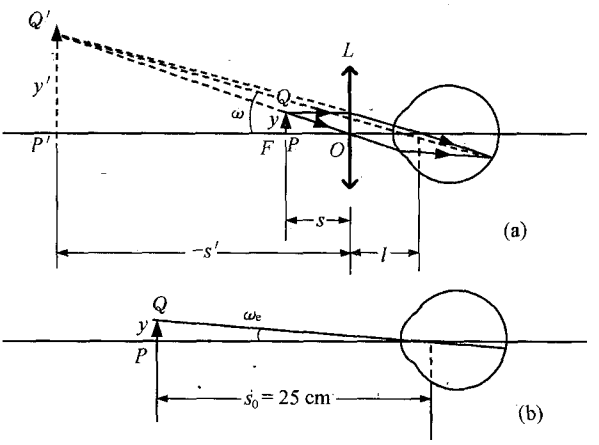


图 1.3.3　放大镜的视角放大率

引入**视角放大率** M 的概念，它定义为用助视仪器时像的视角的正切与不用仪器直接观察物体(在明视距离处)时的视角正切之比，即

$$M = \frac{\tan\omega}{\tan\omega_e}. \tag{1.3.1}$$

根据上述定义，放大镜的视角放大率

$$M=\frac{y'}{y}\frac{s_0}{-s'+l}=\beta\frac{s_0}{-s'+l}, \tag{1.3.2}$$

其中 $\beta=y'/y$ 为透镜的横向放大率. 利用(1.2.39)′式,(1.3.2)式可写成

$$M=\frac{s_0}{f'}\frac{f'-s'}{l-s'}. \tag{1.3.3}$$

上式表明,放大镜的视角放大率与透镜焦距 f' 和明视距离 s_0 有关,而且还与使用放大镜的方法(它确定了参量 l、s')有关.

两种使用放大镜的典型方法是:

(1) 将物体置于放大镜物方焦面上,这时 $s'=\infty$,由(1.3.3)式有

$$M=\frac{s_0}{f'}=\frac{25\ \text{cm}}{f'}, \tag{1.3.4}$$

式中 f' 用厘米(cm)作单位. 这种使用方法使得视角放大率与放大镜到眼睛的距离无关.

(2) 将放大镜所成虚像调到人眼明视距离处,即 $l-s'=s_0$,则由(1.3.3)式有

$$M=\frac{f'-s'}{f'}=\frac{f'+(s_0-l)}{f'}=\left(\frac{s_0}{f'}+1\right)-\frac{l}{f'}.$$

如果人眼紧靠放大镜,即 $l\approx 0$,则上式可写成

$$M=\frac{s_0}{f'}+1. \tag{1.3.5}$$

比较(1.3.4)式和(1.3.5)式不难发现,按上述两种方法使用放大镜时,它们的视角放大率仅差 1 倍,况且事实上 l 也不可能严格等于零,所以当 f' 显著小于 s_0 时,两种使用方法的视角放大率可认为近似相等. 今后将(1.3.4)式称为放大镜的**视角放大率公式**.

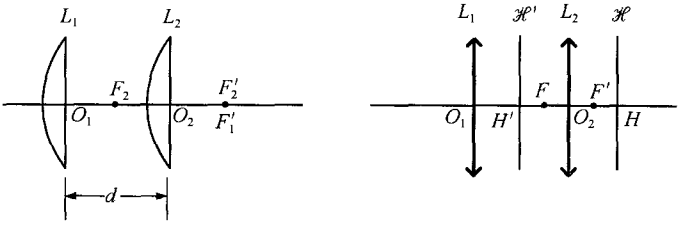
为了增大视角放大率,应设法减小透镜的焦距. 对单个透镜说来,这意味着减小透镜表面的曲率半径. 例如,对于 $n_L=1.50$,$r_1=-r_2=r$ 的双凸透镜,由(1.2.27)式计算可得 $f'=r$,当 $M=10$ 时由(1.3.4)式可得 $r=2.5$ cm,这样小的 r,制造上难度颇大并且像差显著. 一般说来,单个透镜的视角放大率只有几倍. 提高 M 的有效方法是采用复合透镜,M 可达 20 倍(记作 20×)左右.

2. 目镜

目镜的作用相当于一个放大镜. 不过放大镜通常用来观察实际物体,而目镜则是用来观察仪器中物镜所成之像. 目镜通常由两个或两个以上的透镜复合而成,其中靠近物镜生成像的透镜称为**向场镜**,靠近眼睛的透镜称为**接目镜**. 目镜的种类很多,最典型的是**惠更斯目镜**和**拉姆斯登**(J. Ramsten)**目镜**.

1）惠更斯目镜

惠更斯目镜由两个相同材料制成的平凸透镜组成，凸面都迎着光线. 设向场镜 L_1 与接目镜 L_2 的焦距分别为 f_1' 与 f_2'，焦距比 f_1'/f_2' 约为 1.5 至 3.0，两透镜光心间的距离 $d=(f_1'+f_2')/2$. 在图 1.3.4 所示的惠更斯目镜中，$f_1'=3a$，$f_2'=a$，$d=2a$. 图(a)为结构图. 利用作图法或利用(1.2.54)～(1.2.57)式计算，可以得到系统参数 $f'=f=3a/2$，$X_{H'}=-a$，$X_H=-3a$，图(b)中标出了 $\mathscr{H}'$、$\mathscr{H}$、H'、H、F' 和 F 的位置. 由于惠更斯目镜的物方焦点 F 在两透镜之间，故它只能用来观察像，不能直接观察实际物体.

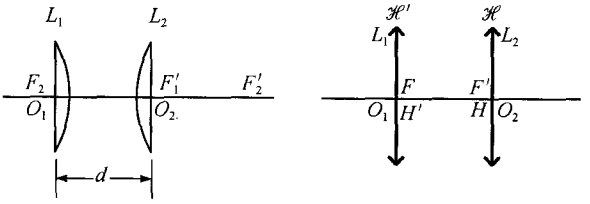


(a) 结构　　(b) 基点和基面

图 1.3.4　惠更斯目镜

2）拉姆斯登目镜

拉姆斯登目镜由两个相同材料制成的平凸透镜组成，凸面相对，平面朝外. 该目镜的结构特征是 $f_1'=f_2'=d$，其中 f_1'，f_2' 分别是向场镜 L_1、接目镜 L_2 的焦距，d 为两透镜光心间的距离，如图 1.3.5(a)所示. 利用作图法或公式计算，不难确定目镜的主面位置和焦点位置(见图 1.3.5(b)).



(a) 结构　　(b) 基点和基面

图 1.3.5　拉姆斯登目镜

还有一种拉姆斯登(改进型)目镜，其结构特征是 $f_1'：f_2'：d=1：1：2/3$. 读者不妨自行确定其基面和基点. 可以发现，这种目镜不仅可用来观察像，且可直接观察实际物体，即可作为放大镜使用.

3. 焦深

对于放大镜和目镜，只要它成的放大正立虚像位于人眼明视距离及其以外，

那么这个虚像均可被人眼观察. 与此虚像位置的容许范围相对应的物体(或物镜产生的中间像)轴向距离的容许范围称为**焦深**,记为 Δx. 显然,Δx 的左端点为放大镜或目镜的物方焦点 F,右端点则为当虚像成在明视距离处时相应的轴上物点位置.

参见图 1.3.3(a),设虚像成在人眼明视距离 s_0 处,且 $l\approx 0$,此时物距为 s,依牛顿物像公式有

$$\frac{1}{s}-\frac{1}{s_0}=\frac{1}{f'},$$

由此可解出 $s=f's_0/(f'+s_0)$,因此焦深

$$\Delta x = f'-s=\frac{f'^2}{f'+s_0}. \tag{1.3.6}$$

利用(1.3.4)式 $M=s_0/f'$,上式可改写为

$$\Delta x=\frac{f'}{M+1}=\frac{s_0}{M(M+1)}, \tag{1.3.7}$$

式中 $s_0=25$ cm. 可见放大镜或目镜的焦距愈短,即视角放大率愈高,其焦深愈短.

1.3.3 显微镜

显微镜由物镜和目镜组成,其中物镜的焦距甚短,而目镜的视角放大率较高. 物镜和目镜通常都是复杂的透镜组,但在研究显微镜工作原理时,可采用单个凸透镜来表示物镜和目镜(图 1.3.6(a)). 将高为 y 的被观察物体 PQ 置于物镜 L_o 物方焦点 F_o 外侧附近,物体经 L_o 成一高为 y_1' 的放大倒立实像 $P_1'Q_1'$(中间像),其位置正好适合眼睛通过目镜来观察,即中间像位于目镜 L_e 物方焦点 F_e 内侧附近,它经 L_e 成一高为 y' 的放大倒立虚像 $P'Q'$(最终像)于眼睛明视距离或其之外的某处. 由于眼睛离目镜 L_e 很近,由图可见最终像对眼睛的视角近似等于中间像对目镜光心 O_e 的张角,即有

$$\tan(-\omega)=\tan(-\omega').$$

因 O_e 到中间像的距离近似等于目镜物方焦距 f_e(注意 $f_e=f_e'$),故 $\tan(-\omega')=-y_1'/f_e'$,于是有

$$\tan\omega=\tan\omega'=\frac{y_1'}{f_e'}.$$

如果不用显微镜,人眼直接观察放在明视距离 s_0 处的被观察物体 PQ(图 1.3.6(b))时视角为 ω_e,则

$$\tan\omega_e=\frac{y}{s_0}.$$

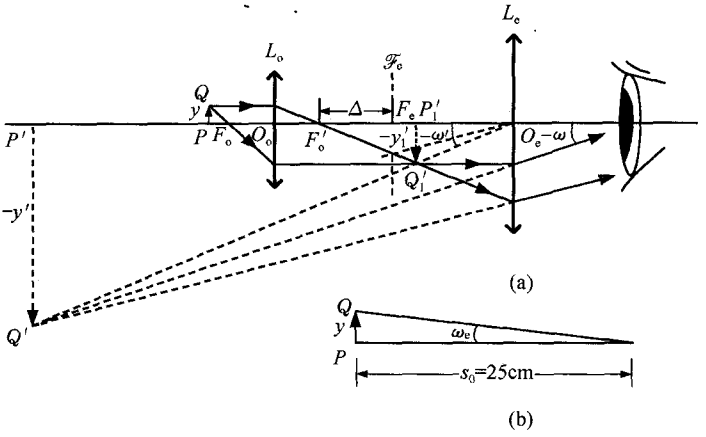


图 1.3.6　显微镜的视角放大率

由视角放大率定义及以上各式可得显微镜的**视角放大率公式**

$$M=\frac{\tan\omega}{\tan\omega_e}=\frac{y_1'}{y}\frac{s_0}{f_e'}=\beta_o M_e. \tag{1.3.8}$$

即显微镜的视角放大率等于物镜横向放大率与目镜视角放大率的乘积. 由于采用了两级放大，故显微镜的视角放大率比用单一放大镜时大为提高.

根据显微镜的光学结构特征，可将(1.3.8)式进一步具体化. 设 Δ 为 F_o' 到 F_e 的距离(称为光学筒长，一般取为 16 cm)，根据(1.2.39)′式，其中 $x'\approx\Delta$，$f'=f_o'$，得

$$\beta_o=-\frac{\Delta}{f_o'}.$$

将上式及(1.3.4)式代入(1.3.8)式，最后可以得到

$$M=-\frac{\Delta}{f_o'}\frac{s_0}{f_e'}. \tag{1.3.9}$$

式中负号表示显微镜成倒立虚像. 从(1.3.9)式可以看出显微镜的视角放大率与其光学筒长成正比，与物镜、目镜焦距成反比. 若注意到显微镜光学系统的像方焦距 $f'=-f_o'f_e'/\Delta$，则(1.3.9)式还可以进一步简化成

$$M=\frac{s_0}{f'}=\frac{25\text{ cm}}{f'}. \tag{1.3.10}$$

上式与放大镜的视角放大率公式具有相同形式.

显微镜的目镜焦深可按(1.3.7)式计算. 物镜焦深可通过牛顿公式微分运算(取绝对值)求得. 可以发现物镜焦深近似为零，这说明在光学筒长固定的情况下，显微镜与被观察物体之间的距离被严格确定，几乎没有什么调节的余地.

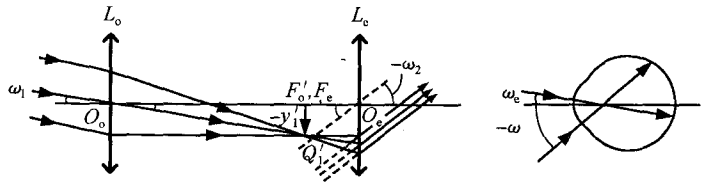
近代科学的发展对显微镜提出各种特殊要求，于是出现了双目立体显微镜、金相显微镜、干涉显微镜、偏光显微镜、荧光显微镜、相衬显微镜、X 射线显微镜等等，

它们在生产实践和科学研究中得到了广泛应用.

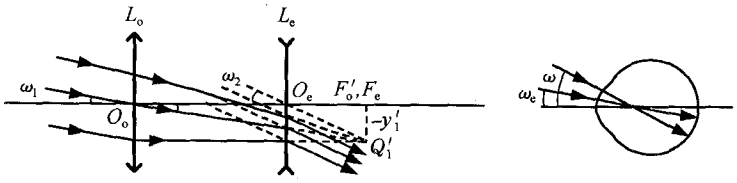
1.3.4 望远镜

显微镜是一种用来观察近物放大像的光学系统,望远镜则是一种用来观察远物放大像的光学系统. 望远镜也是由物镜和目镜组成,其中物镜具有较长的焦距. 当用望远镜观察天体时,物镜像方焦点与目镜物方焦点重合,即光学间隔为零;观察有限远景物时,需将目镜沿光轴后移一段距离,即光学间隔不为零但很小. 下面以前一情况为例,介绍望远镜的工作原理.

开普勒(J. Kepler)**望远镜**和**伽利略**(G. Galilei)**望远镜**是常见的折射望远镜,光路如图 1.3.7 所示. 一束来自远方且与主轴成倾角 ω_1 的平行光束,经物镜 L_o 成像(中间像)在物镜像方焦面(也是目镜 L_e 的物方焦面)上的 Q'_1 点,再经目镜成为一束平行于 Q'_1O_e 连线、与光轴成倾角 ω_2 的平行光束,它所成的像(最终像)位于无限远处.



(a) 开普勒望远镜



(b) 伽利略望远镜

图 1.3.7 望远镜光路($\Delta=0$)和视角

望远镜所成最终像对眼睛的视角 ω 即倾角 ω_2,无限远处物体对眼睛的视角 ω_e 即倾角 ω_1[①],于是对于(a)所示的开普勒望远镜有

$$\tan(-\omega)=\tan(-\omega_2)=-\frac{y'_1}{f_e}=-\frac{y'_1}{f'_e},$$

① 望远系统中物在无限远处,每一物点所发出的光均可认为是某一确定方向的平行光. 故望远镜的作用即为放大平行光束的夹角. 文中叙述和图示相当于设无限远处物体两横向端点一在轴上一在轴外.

对于图(b)所示的伽利略望远镜则有(注意对凹透镜 L_e 有 $f_e=f'_e<0$)

$$\tan\omega=\tan\omega_2=\frac{-y'_1}{-f_e}=\frac{y'_1}{f'_e}.$$

显然,两者具有相同形式,即

$$\tan\omega=\frac{y'_1}{f'_e}, \tag{1.3.11}$$

同时,两者同有

$$\tan\omega_e=\tan\omega_1=-\frac{y'_1}{f'_o}. \tag{1.3.12}$$

以上诸式中,f_e、f'_e为目镜的物、像方焦距;f'_o为物镜的像方焦距.

望远镜的视角放大率 M 应定义为用望远镜时最终像的视角的正切与不用望远镜直接观察物体(在其实际位置)时的视角正切之比,即

$$M=\frac{\tan\omega}{\tan\omega_e}. \tag{1.3.13}$$

将(1.3.11)式和(1.3.12)式代入上式,于是得到物在无限远处时望远镜的**视角放大率**为

$$M=-\frac{f'_o}{f'_e}. \tag{1.3.14}$$

可见物镜焦距愈长,目镜焦距愈短,视角放大率愈高.对于开普勒望远镜 $M<0$,生成倒立像;而伽利略望远镜 $M>0$,生成正立像.

在图 1.3.8 中,我们以轴向平行光入射为例画出了开普勒望远镜中光束行进的情况.因一般应用中有 $n=n'=1$,这时可不必区别 f_o 和 f'_o,以及 f_e 和 f'_e.在充分利用光能的情况下,由图可见物镜直径 D_o 与目镜直径 D_e 的比值应满足

$$\frac{D_o}{D_e}=\frac{f_o}{f_e}=|M|, \tag{1.3.15}$$

式中 $|M|$ 为望远镜视角放大率的绝对值.一般地,D_e 应取得大于人眼瞳孔直径.由上式可估算一个望远镜的视角放大率大小.

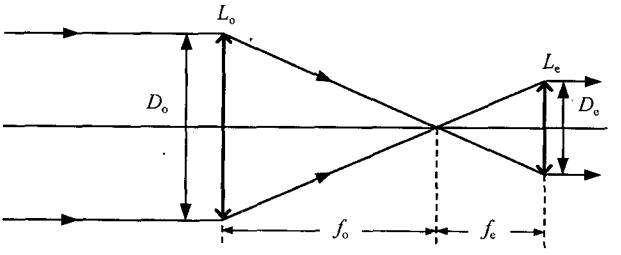


图 1.3.8 开普勒望远镜中的光束变换

比较显微镜和望远镜，可见它们既有共同点，也有不同点. 其共同点是：二者都以放大视角为目的，为此，都用物镜 L_o 产生尽量大的中间像，并通过目镜 L_e 进一步产生放大虚像. 在第二步中，f'_e 越小，中间像与 L_e 相距越近，最终像视角越大，故 M 皆与 f'_e 成反比. 但是，由于所观测物体的距离不同，两种装置中为达到产生尽量大中间像这一目的所采用的方法也有所不同. 对显微镜，物距很近（F_o 点稍外），为增大中间像必须增大 Δ（增大像距）或减小 f'_o（减小物距）；对望远镜，物在无限远处，入射光为平行光，为增大夹角给定的两平行光束在物镜焦面上会聚点的分离量，必须采用长焦距物镜，即增大 f'_o.

除了折射望远镜外，还有反射和折反射两类望远镜，它们的主要区别在于物镜的结构. 折射望远镜的物镜由透镜组成；反射望远镜的物镜由反射镜组成；折反射望远镜的物镜由透镜（或校正板）和反射镜共同组成. 现代望远镜已不再单纯作为助视仪器，它已广泛应用于照相、光谱分析、光度计量等许多领域.

1.4 光阑与像差

本节将首先介绍限制成像光束的元件——光阑，然后扼要地讨论实际光学系统中像差的种类、特点及校正方法.

1.4.1 光阑

光学系统中各个元件都有各自的边缘（大多数情况下是圆形），有时还在系统中加入固定的或可变的带孔屏障，这些边缘或带孔屏障称为**光阑**. 光阑具有限制成像光束孔径角和限制成像范围两方面的作用，它们分别影响像的清晰度、照度、景深和成像景物的大小.

1. 孔阑　入瞳和出瞳

在光学系统的所有光阑中，一定有一个具有限制轴上物点成像光束孔径角作用的光阑，此光阑称为系统的**孔径光阑**，简称**孔阑**.

从原理上讲，孔阑与轴上物点的位置有关，因此欲确定孔阑，必须明确是对主轴上哪个物点（包括无限远处的物点）而言的孔阑. 确定一个系统的孔阑的方法如下：将系统中各光阑分别经其前面的光学元件成像于系统的物空间，其中对轴上物点张角最小的那个像所对应的光阑即为系统的孔阑.

孔阑经其前面的光学元件成在系统物空间的像称为系统的**入射光瞳**，简称**入瞳**. 入瞳半径对轴上物点的张角称为**入射孔径角**，记作 u_0，它表征进入系统光束的宽窄.

孔阑经其后面的光学元件成在系统像空间的像称为系统的**出射光瞳**，简称出

瞳. 出瞳半径对轴上物点的共轭像点的张角称为**出射孔径角**，记作 u_0'，它表征从系统出射光束的宽窄.

如果忽略光阑的像差，入瞳是物平面上各点成像光束的公共入口；出瞳是成像光束的公共出口. 通过孔阑中心的光线称为**主光线**，因共轭关系，它必通过入瞳中心和出瞳中心，因此，主光线是成像光束的中心线.

2. 场阑　入窗和出窗

在光学系统的所有光阑中，一定有一个具有限制成像范围作用的光阑，此光阑称为系统的**视场光阑**，简称**场阑**. 在有中间实像平面的系统（例如开普勒望远镜和显微镜）和有实像平面的系统（例如摄影系统）中，场阑一般设置在这种像平面上.

确定一个系统的场阑的方法如下：将系统中各光阑分别经其前面的光学元件成像于系统的物空间，确定出系统的入瞳；对入瞳中心张角最小的那个像所对应的光阑即为系统的场阑.

场阑经其前面的光学元件成在系统物空间的像称为系统的**入射窗**，简称**入窗**. 入窗半径对入瞳中心的张角称为**物方视场角**，记作 ω_0. 物平面上被 ω_0 所限制的范围称为**物方视场**.

场阑经其后面的光学元件成在系统像空间的像称为系统的**出射窗**，简称**出窗**. 出窗半径对出瞳中心的张角称为**像方视场角**，记作 ω_0'. 物平面的共轭像平面上被 ω_0' 所限制的范围称为**像方视场**.

例 1.4.1　如图 1.4.1 所示，L_1，L_2 是两个共轴放置在空气中的会聚透镜，DD 是光阑，P 为物点. 已知焦距 $f_1=8$ cm，$f_2=4$ cm，图中标示的各距离分别为 $s=40$ cm，$l=16$ cm，$d=24$ cm，$r_1=r_2=3$ cm，$r_D=1$ cm. 试求此光学系统的

(1) 孔阑、入瞳和出瞳的位置和大小；

(2) 场阑、入窗和出窗的位置和大小.

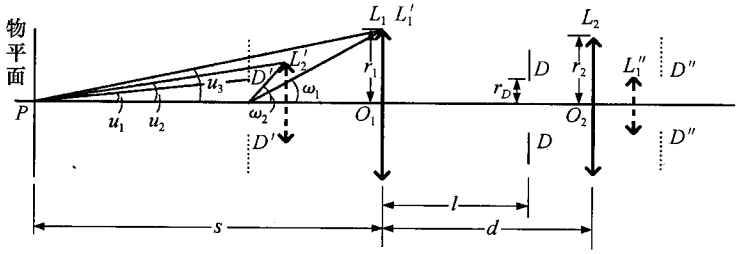


图 1.4.1　例 1.4.1 图

解　(1) 确定孔阑、入瞳和出瞳.

L_1 前面无光学元件，它在系统物空间的像 L_1'（见图 1.4.1）即为 L_1 自身，其半径 $r_1'=r_1=3$ cm.

DD 经前面的 L_1 成像. 此时 $s_D=l=16$ cm,可以求得

$$s'_D=\frac{s_Df_1}{s_D-f_1}=\frac{16\times 8}{16-8}=16\text{ cm},$$

$$\beta_D=-\frac{s'_D}{s_D}=-\frac{16}{16}=-1,$$

$$r'_D=|\beta_D|r_D=1\text{ cm},$$

式中 r'_D为 DD 的像 $D'D'$(见图 1.4.1)的半径.

L_2 经前面的 L_1 成像,此时 $s_2=d=24$ cm,可以求得

$$s'_2=\frac{s_2f_1}{s_2-f_1}=\frac{24\times 8}{24-8}=12\text{ cm},$$

$$\beta_2=-\frac{s'_2}{s_2}=-\frac{12}{24}=-\frac{1}{2},$$

$$r'_2=|\beta_2|r_2=\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2}\text{ cm},$$

式中 r'_2 为 L_2 的像 L'_2(见图 1.4.1)的半径.

比较 $D'D'$、L'_2、L'_1对轴上物点 P 的张角 u_1、u_2、u_3(见图 1.4.1)的大小,

$$\tan u_1=\frac{r'_D}{s-s'_D}=\frac{1}{40-16}=\frac{1}{24}=0.0417,$$

$$\tan u_2=\frac{r'_2}{s-s'_2}=\frac{3/2}{40-12}=\frac{3}{56}=0.0536,$$

$$\tan u_3=\frac{r'_1}{s}=\frac{3}{40}=0.0750,$$

可见 $u_1<u_2<u_3$,因此 $D'D'$所对应的光阑 DD 即为孔阑,半径为 1 cm.

孔阑 DD 经前面的 L_1 所成的像 $D'D'$即为入瞳,它位于 L_1 左方 16 cm 处,半径为 1 cm.

孔阑 DD 经后面的 L_2 成像,此时 $s_D=d-l=8$ cm ,可以求得

$$s'_D=\frac{s_Df_2}{s_D-f_2}=\frac{8\times 4}{8-4}=8\text{ cm}.$$

$$\beta_D=-\frac{s'_D}{s_D}=-\frac{8}{8}=-1,$$

$$r''_D=|\beta_D|r_D=1\text{ cm},$$

式中 r''_D为 DD 的像 $D''D''$(见图)的半径. $D''D''$即为出瞳,它位于 L_2 右方 8 cm 处,半径为 1 cm.

(2) 确定场阑、入窗和出窗.

现已求得系统的入瞳 $D'D'$. 比较 L'_1、L'_2 对入瞳中心的张角 ω_1、ω_2(见图

1.4.1)的大小.

$$\tan\omega_1 = \frac{r_1'}{s_D'} = \frac{3}{16},$$

$$\tan\omega_2 = \frac{r_2'}{s_D' - s_2'} = \frac{3/2}{16-12} = \frac{3}{8}.$$

可见 $\omega_1 < \omega_2$. 因此 L_1' 所对应的 L_1 的边缘即为系统的场阑，并兼为入窗.

场阑 L_1 的边缘经 L_2 成像，此时 $s_1 = d = 24$ cm，可以求得

$$s_1' = \frac{s_1 f_2}{s_1 - f_2} = \frac{24 \times 4}{24-4} = \frac{24}{5} = 4.8 \text{ cm},$$

$$\beta_1 = -\frac{s_1'}{s_1} = -\frac{4.8}{24} = -0.2,$$

$$r_1'' = |\beta_1| r_1 = 0.6 \text{ cm},$$

式中 r_1'' 为 L_1 的像 L_1''（见图）的半径. L_1'' 为出窗，它位于 L_2 右方 4.8 cm 处，半径为 0.6 cm.

*1.4.2 像差

实际光学系统根据需要，有时不得不加大成像光束的孔径或使视场较为广阔，从而破坏了能近似实现理想成像的傍轴条件. 此时，物点发出的光线中，部分或全部远离傍轴区，实际光路与傍轴光路有所偏离，若干偏离理想成像的现象随之出现，这些现象统称为**像差**. 这里必须注意，光学系统的像差与光学系统的欠缺不同，后者指组成实际光学系统的折射面、反射面不够完善，介质折射率欠均匀以及各曲面的曲率中心不严格在同一直线上等等. 实际上，即使技术上使光学系统不存在欠缺，一个实际光学系统（平面镜元件除外）仍可能有显著的像差.

通常将像差分成两类：一类是单色光成像时的像差，称为**单色像差**；另一类是复色光成像时，由于介质折射率与光的颜色（波长）有关引起的像差，称为**色差**.

1. 单色像差

单色像差是由非傍轴光线成像时所产生的像差，它可分为球面像差（简称球差）、彗形像差（简称彗差）、像散、像场弯曲（简称场曲）和畸变五种.

球差和彗差是由轴上物点和傍轴物点用宽光束成像时所表现出来的像差，而像散、场曲和畸变是由远轴物点用大倾斜度的窄光束成像时所表现出来的像差. 不难看出，单色像差都是由于光线与主轴间的夹角较大使得傍轴条件不再满足而引起的. 上述五种单色像差彼此有密切联系，常常几种同时存在. 所有像差的精确值，可以根据它们的定义，利用光线追迹法来求得. 在这里主要以薄透镜为例对各种像差给予简单介绍.

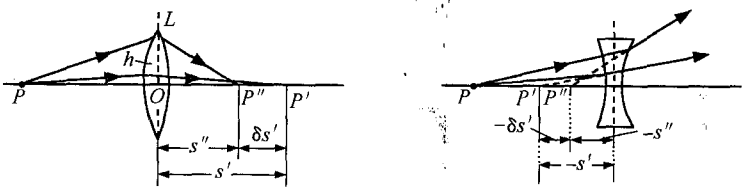
1) 球差

轴上物点发出的宽光束经薄透镜后不再交于一点，这种现象叫做**球差**. 以凸透镜为例，如图 1.4.2(a)所示，设傍轴光线在像空间中与主轴交点为 P'（称为**高斯像点**），非傍轴光线与主轴交

点为 P''，h 表示非傍轴光线穿越透镜时的离轴高度. 若用一个垂直于光轴的屏在 P'' 点接收出射光束，得到的是一个圆形弥散光斑. 球差的大小一般用 P'' 到 P' 点的轴向距离 $\overline{P''P'}$ 即 s' 与 s'' 之差值来度量，即

$$\delta s' = \overline{P''P'} = s' - s'', \tag{1.4.1}$$

$\delta s'$ 称为轴向球差. 对于会聚透镜，$\delta s' > 0$；对于发散透镜，$\delta s' < 0$. 显然，$|\delta s'|$ 与 h 有关，h 越大，$|\delta s'|$ 越大.



(a) 会聚透镜 $\delta s' > 0$　　(b) 发散透镜 $\delta s' < 0$

图 1.4.2 球差

图 1.4.3 所示的两条曲线(a)，(b)分别代表会聚透镜、发散透镜的轴向球差曲线，它们只是表明 $\delta s'$ 的符号及与 h 的关系，而没有考虑各透镜的焦距和形状. 由图可见，会聚透镜和发散透镜的 $\delta s'$ 符号相反，故可用二者的组合来减少球差.

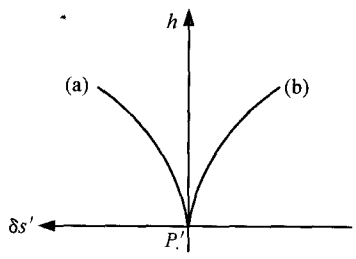


图 1.4.3 轴向球差曲线

2) 彗差

傍轴物点发出的宽光束经透镜后不再交于一点，而在高斯像面上形成彗星状弥散斑，这种现象叫做彗差.

彗差的产生可由图 1.4.4 说明. 轴外物点射在透镜上不同半径的环带上的光经透镜后在高斯像平面上仍成一个个环带，但这些环带不是同心的，与透镜上半径愈大的环带相应的像平面上的环带半径愈大，其中心距高斯像点 Q' 也愈远. 图 1.4.4(b)中示出了透镜上半径较大的一个环，图(c)中底部的圆则具体示出了该环上各点相应的成像位置. 像平面上的各环带的叠加即形成彗差.

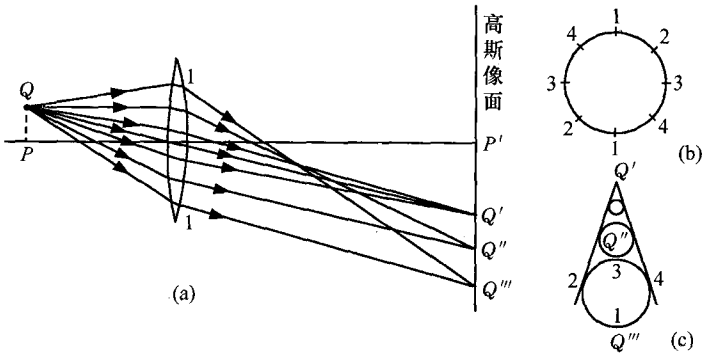


图 1.4.4 彗差

球差和彗差往往混在一起，只有当轴上物点的球差消除时，才能明显地观察到傍轴物点的彗差. 利用物像之间等光程性可以证明：在轴上物点的球差已被消除的条件下，傍轴物点以宽光束成像的条件是

$$ny\sin u = n'y'\sin u', \tag{1.4.2}$$

式中 n、n' 分别为物、像方折射率，y、y' 分别为物、像高，u、u' 分别为物、像方孔径角. (1.4.2)式称为**正弦条件**，满足这个条件的一对共轭点能够消除彗差.

单个透镜对于一定位置的物体成像时，其彗差的大小与透镜的形状和孔阑位置有关. 对于给定孔阑可通过配曲法使彗差消失，也可以通过与其他透镜组合起来消除彗差.

3) 像散和场曲

远轴物点发出的窄光束经透镜后不再交于一点，这种现象称为**像散**.

为说明像散，可引入**子午平面**和**弧矢平面**，前者为包含轴外物点与主轴的平面，后者为包含主光线且与前者垂直的平面. 两平面内的光束分别称为**子午光束**和**弧矢光束**.

设物平面位于无限远处，大倾角入射的窄平行光束经透镜后子午光束的焦点和弧矢光束的焦点位于主光线上的不同位置. 就整体而言，在子午焦点处得到的是一垂直于子午平面的短线，称为**子午焦线**；在弧矢焦点处得到的是一垂直于弧矢平面的短线，称为**弧矢焦线**；在其他位置上出射光束在垂直于主轴的平面上的截面为椭圆弥散斑，在子午焦线和弧矢焦线之间的某个位置上为圆弥散斑，通常认为这是出射光束聚焦最清晰的地方，此圆弥散斑称为**最小模糊圆**，如图 1.4.5 所示. 像散的大小一般用子午焦点 A'_t 和弧矢焦点 A'_s 投影到主轴上的间距 $\Delta x'$ 表示，即

$$\Delta x' = x'_t - x'_s, \tag{1.4.3}$$

其中 x'_t、x'_s 是两焦点到高斯焦面的距离.

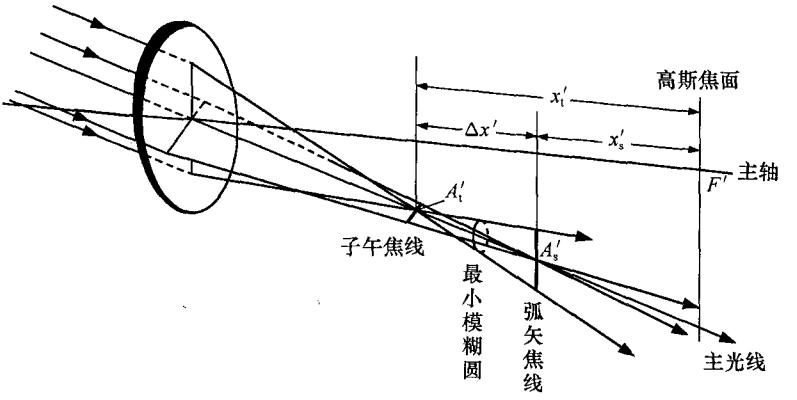


图 1.4.5 像散

如果物平面不在无限远处，A'_t 和 A'_s 可改称为子午像点和弧矢像点，而问题的实质并未发生变化，(1.4.3)式仍可适用.

当物点到光轴的距离变化时，A'_t 和 A'_s 与透镜主轴的距离亦随之变化. 因此，同一物平面相应有两个弯曲的像面，子午像点所在的面为**子午像面**，弧矢像点所在的面为**弧矢像面**，这种像面弯曲称为**像场弯曲**，简称**场曲**，见图 1.4.6. 图中 Σ'_t、Σ 和 Σ'_s 分别代表子午像面、最小模糊圆所在

曲面和弧矢像面.

透镜的像散与孔阑位置和透镜形状有关. 为校正像散和场曲,常需要复杂的透镜组合系统.

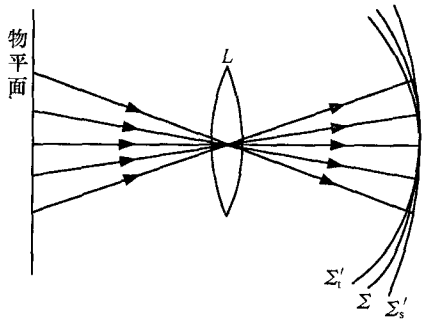
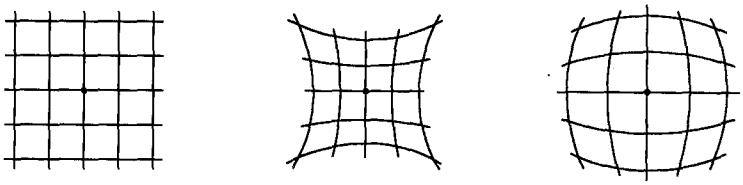


图 1.4.6 场曲

4) 畸变

当物体发出的光线与主轴有大倾角时,即使是窄光束,所成的像与原物体也不再相似,这种现象称为**畸变**. 具有畸变的系统并不破坏光束的同心性,但是其横向放大率在整个视场范围内不能保持为一常数,从而破坏了平面像与平面物之间的几何相似性. 例如,当该系统对一个方格网状物体(图 1.4.7(a))成像时,若视场中心部分横向放大率比边缘部分低,则形成一枕头形的像(图 1.4.7(b)),称为**枕形畸变**;反之,则形成一啤酒桶形的像(图 1.4.7(c)),称为**桶形畸变**.

一般地,畸变大小随孔阑位置而异. 如果光学系统在孔阑两侧的结构相互对称,可以实现无畸变成像,因此对消除畸变要求严格的系统往往采用对称或准对称形式.



(a) 物 (b) 枕形畸变 (c) 桶形畸变

图 1.4.7 畸变

2. 色差

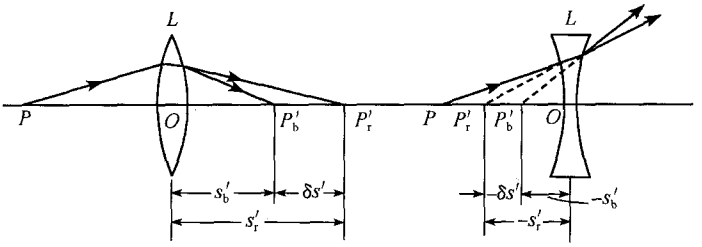
介质折射率 n 与光的颜色(波长 λ)有关,通常情况下 n 随 λ 的增加而减小. 因此,一个光学系统的焦距一般与入射波长有关,例如,由(1.2.27)式可知,一个空气中的薄透镜的焦距将随 λ 的增大(n_L 减小)而增大. 这样,用白光或复色光经光学系统成像时,不同色光的像的位置或大小会有所不同,这种现象称为**色差**. 色差分两种:位置色差和放大率色差.

1) 位置色差

轴上物点发出的一束白光经透镜后各色光的像点位置不同,这种现象称为**位置色差**或**轴向色差**. 如图 1.4.8 所示,设白光中的红光成像在 P_r',蓝光成像在 P_b'点,像距分别为 s_r',s_b',位置色差可表示为

$$\delta s' = s_r' - s_b'. \tag{1.4.4}$$

对于会聚透镜,$\delta s'>0$;对于发散透镜,$\delta s'<0$. 存在位置色差时,轴上物点的像为一带色的圆形弥散斑. 单个透镜的位置色差是无法消除的. 用不同介质制成的会聚、发散透镜的组合系统,可以对选定的两种波长消除位置色差.



(a) 会聚透镜 $\delta s'>0$ (b) 发散透镜 $\delta s'<0$

图 1.4.8 位置色差

2) 放大率色差

轴外物点发出的一束白光经透镜后各色光的像点高度不同，这种现象称为**放大率色差**或**垂轴色差**. 如图 1.4.9 所示，设白光中的红光成像高度为 y'_r，蓝光成像高度为 y'_b，放大率色差可表示为

$$\delta y' = y'_r - y'_b, \tag{1.4.5}$$

或用放大率表示为

$$\delta\beta = \beta_r - \beta_b. \tag{1.4.6}$$

存在放大率色差时，像点边缘带色.

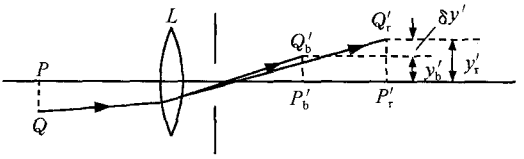


图 1.4.9 放大率色差

单个透镜总存在放大率色差. 研究表明，用相同材料制成的双薄透镜组合系统，使其间距 d 等于两透镜焦距之和(f_1+f_2)的一半，即

$$d = \frac{f_1 + f_2}{2}, \tag{1.4.7}$$

则可对某波长附近的光消除放大率色差. 在 1.3.2 节中介绍的惠更斯目镜和拉姆斯登目镜满足(1.4.7)式，故它们是消放大率色差的.

应当注意，对于一个实际光学系统，上述各种单色像差和色差可能是同时存在的，要将它们完全消除是不可能的，也是不必要的. 实用中可根据每种光学仪器的用途和要求将起关键作用的像差或色差降低到容许限度即可.

习 题

1.1 有一演示折射现象的半圆玻璃砖，其圆心为 O，半径为 R，折射率为 n(如题图所示). 空气中一光线以 i 角在 A 点($\overline{OA}=d$)入射并经 B 点出射. 求出射光线与 B 点处的法线方向的夹角 β 为多大?

1.2　如题图所示，光线以 i_1 角入射到一块平行平面透明板的表面. 试证：(1) $i_2'=i_1$；(2)出射光的侧向位移由下式给出：

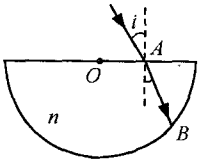
$$\overline{PQ}=\frac{\sin(i_1-i_1')}{\cos i_1'}h,$$

式中 h 为平板厚度；

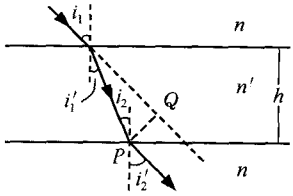
(3) 当入射角 i_1 很小时，

$$\overline{PQ}=\frac{n'-n}{n'}i_1h,$$

式中 n' 为平板的折射率，n 为平板两侧介质折射率.



题 1.1 图



题 1.2 图

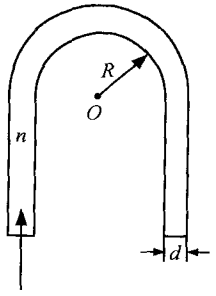
1.3　将一根截面是矩形的玻璃棒($n=1.5$)弯成马蹄形(见题图)，矩形宽为 d，弯曲部分是一个半圆，内半径为 R. 一束光线从一个端面正入射. 试求：若要使光线从另一端面全部射出，R/d 应为多大？

1.4　如图 1.1.3 所示的光导纤维，其端面垂直于纤维轴线，外界介质折射率为 n_0，求：(1)能使光线在纤维内发生全反射的入射光束的最大孔径角 i_1 为多大？(2)光导纤维的数值孔径($n_0\sin i_1$)与 n_1、n_2 的关系；(3)若 $n_1=1.51$，$n_2=1.50$，$n_0=1.00$，数值孔径及 i_1 各为多大？

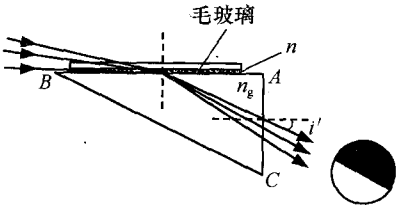
1.5　如题图所示，BAC 是直角棱镜，其折射率 n_g 已知. 将待测液体涂一层于其上表面，再盖上一片毛玻璃(如待测样品为固体，应将表面抛光后置于 AB 面上). 用扩展光源在掠入射的方向照明，从棱镜 AC 面出射的光线的折射角有一下限 i'(用望远镜观察，则在视场中出现分界线明显的半明半暗区). 证明：待测液体(或固体)的折射率 n 可按下式算出：

$$n=\sqrt{n_g^2-\sin^2 i'}.$$

用这种方法测液体(或固体)的折射率，测量范围受到什么限制？



题 1.3 图



题 1.5 图

1.6 (1)已知某三棱镜的顶角为60°,在空气中测得 $\delta_{min}=53°14'$,求此棱镜材料的折射率.(2)一顶角为50°的三棱镜,在空气中测得 $\delta_{min}=35°$,如果将它浸在水中,试求最小偏向角等于多少(水的折射率为1.33)?

1.7 由费马原理导出光的折射定律.

1.8 将一根40 cm长的透明玻璃棒的左端磨平,右端磨成半径为12 cm的凸半球面.有一点物嵌在棒轴上并与棒两端等距.当从棒左端面看去时,该物的表观深度为12.5 cm,试问从棒右端面看去时它的表观深度为多少?

1.9 置于空气中的一直径为54 mm的玻璃($n=1.54$)球,一平行光束沿其直径方向入射,求傍轴光焦点到球心的距离.

1.10 将一个厚为2 cm的双凸透镜安装在水槽的一端,透镜两球面曲率半径均为2 cm.空气中有一高为1 mm的垂轴小物正立在主轴上并位于透镜左球面顶点左方5 cm处.求最终像的位置并判断该像的性质.设空气、透镜材料和水的折射率分别为1.00、1.50和1.33.

1.11 (1)一会聚光束的中心光线与一块厚度为 d、折射率为 n 的平行平面板正交,证明此时会聚点向外移动的距离为 $[1-(1/n)]d$;(2)一实际发光点经一块厚度为 d、折射率为 n 的平行平面板成像,求发光点到最终像的距离.

1.12 高为2 cm的垂轴小物正立在曲率半径为16 cm的凹球面反射镜前10 cm处,试求:(1)球面镜的焦距;(2)像的位置和大小.

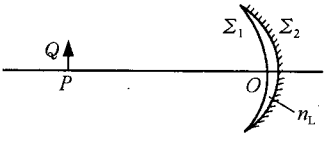
1.13 曲率半径分别为40 cm和80 cm的两个凹球面镜相距1 m,面对面地左右放置.一小物放在靠近较弯曲的凹面镜前10 cm处,试求下列两种情形下像的位置和大小:(1)光先在其较近的凹面镜上反射;(2)光先在其较远的凹面镜上反射.

1.14 一小物置于曲率半径为50 cm的凸球面镜前20 cm处,试求:(1)球面镜的焦距;(2)像的位置;(3)横向放大率.

1.15 (1)凹面镜的半径为40 cm,物体放在何处成放大两倍的实像?放在何处成放大两倍的虚像?(2)物与像相距1 m,如果物高4倍于像高,求凹面镜的曲率半径.

1.16 在曲率半径为120 cm的凹面镜的主轴上,离镜面95 cm处有一个实物以8 cm/s的速度沿轴离去.试求像的移动速度.

1.17 一半径为 R 的球形鱼缸(缸壁很薄,可忽略其折射作用)放置在平面镜之前,鱼缸的中心到平面镜的距离为 $3R$.缸中充满水($n=4/3$),观察者在远处通过球心并与平面镜垂直注视鱼缸.现有一条小鱼以速度 v 在与平面镜靠近的一侧沿鱼缸壁向上缓慢地匀速游动,试计算观察者所看到的鱼的两个像之间的距离及它们的相对速度.



题1.18图

1.18 一个新月形薄透镜($n_L=1.5$),它的两个球面 Σ_1 和 Σ_2 的曲率半径分别为20 cm和15 cm(见题图),并在 Σ_2 表面上镀一银膜.高为1 cm的垂轴小物 PQ 正立在镜前40 cm处,求最终像的位置并判断该像的性质.

1.19 一个用玻璃($n_L=1.53$)制成的薄透镜在空气($n_1=1.00$)中和在二硫化碳($n_2=1.63$)中使用时,其焦距及性质有何改变?

1.20 今有一双凸薄透镜,其两球面曲率半径均为10 cm;另有一双凹薄透镜,其两球面曲

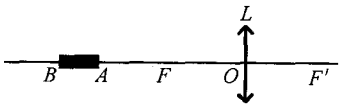
率半径均为 15 cm;两镜均由玻璃($n_L=1.50$)制成.将两透镜相距 10 cm 在空气中依次共轴放置.一高为 1 cm 的垂轴正立小物放在凸透镜前 20 cm 处.求最终像的位置并判断该像的性质.

1.21　一凹球面镜浸没在水($n=1.33$)中,物在镜前 30 cm 处,像在镜前 9 cm 处,求该镜的曲率半径和光焦度.

1.22　一薄透镜($n_L=1.500$)在空气中的光焦度为 10.00D,将它浸没在某种液体中,其光焦度变为 1.00D,求液体的折射率.

1.23　若光源不动,焦距为 f' 的透镜以速率 u 向光源移动,求当光源与透镜相距 a 时,光源的实像相对于光源的速率.

1.24　如题图所示,在焦距 $f'=10$ cm 的凸透镜的主轴上,沿轴放置一根粗细均匀的细棍 AB,AB 长 $l=5$ cm,A 端离透镜的距离 $\overline{AO}=20$ cm.试求:(1)像长与物长之比;(2)像的哪一端较粗?



题 1.24 图

1.25　光源与屏的距离为 D,将一焦距为 $f'(4f'<D)$ 的凸透镜插在两者之间,在两个适当位置该透镜将在屏上产生清晰的实像.证明:

(1) 透镜所在的这两个位置的间距为

$$d=\sqrt{D(D-4f')};$$

(2) 透镜在上述两个位置上分别形成的像的长度之比为

$$\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^2.$$

1.26　某一正透镜将某物成像于屏上,已知实像 $|y'|=5.0$ cm,物到屏的距离为 15.0 cm.在物到屏的距离不变的条件下,如何移动透镜才能在屏上获得 $|y'|=2.0$ cm 的实像?

1.27　一平凸薄透镜的焦距为 f',平面上镀银膜.在凸面前 $2f'$ 处置一高为 y 的垂轴小物,求最终像的位置并判断该像的性质.

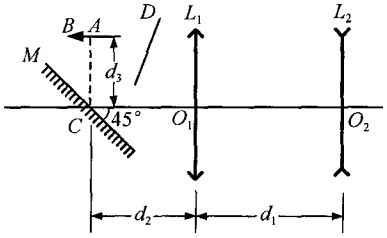
1.28　焦距为 6.0 cm 的薄凸透镜和曲率半径为 20 cm 的凹球面镜在空气中共轴放置,相距 2 cm.今在透镜前 12 cm 处有一高为 4 mm 的垂轴正立小物,试求最终像的位置并判断该像的性质.

1.29　如题图所示,薄透镜 L_1 和 L_2 组成共轴系统,平面镜 M 与系统主轴成 45°角并交主轴于 C 点.在 C 点上方有一平行于主轴的物体 AB,遮光板 D 使物体发出的光不能直接射到系统中.已知 $f_1=10$ cm,$f_2=-15$ cm,$d_1=15$ cm,$d_2=10$ cm,$d_3=8$ cm,试求最终像的位置并判断该像的性质.

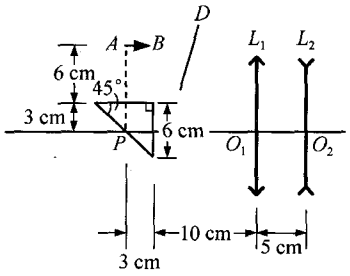
1.30　如题图所示,一个光学系统由棱镜($n=1.5$)P,两个薄透镜 L_1 和 L_2 以及遮光板 D 组成.AB 为一平行于系统主轴的物体.已知 $f_1'=20$ cm,$f_2'=-10$ cm,$\overline{AB}=1$ cm,求物体经系统所成的最终像的位置并判断该像的性质.

1.31　在曲率半径为 25 cm 的凸球面镜前 60 cm 处放置一高为 1.0 cm 的垂轴小物,求像的位置、大小并作图验证.

1.32　焦距为 5.0 cm 的会聚透镜 L_1 和焦距为 10 cm 的发散透镜 L_2 相距 5.0 cm 共轴放置,在 L_1 左方 10 cm 处置一小物,求最终像的位置,判断该像的性质并作图验证.

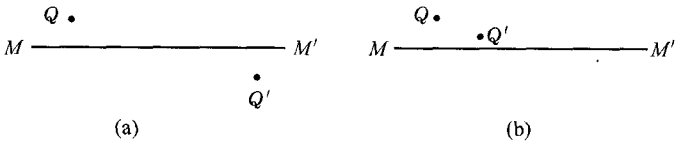


题 1.29 图



题 1.30 图

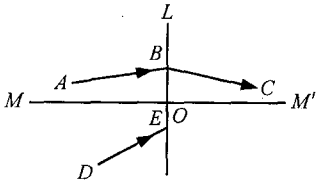
1.33　如题图(a)、(b)所示，MM'为薄透镜的主轴，Q、Q'分别为发光点及其像点. 用作图法确定透镜光心和焦点位置.



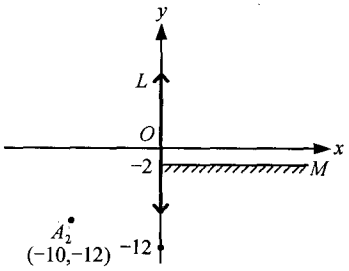
题 1.33 图

1.34　如题图所示，L 为薄透镜，MM'为其主轴，ABC 为已知的一条通过该镜的光线路径. 用作图法确定任意一条光线 DE 的共轭光线.

1.35　如题图所示，焦距为 10 cm 的凸透镜 L 的主轴与 x 轴重合，光心 O 是坐标原点，有一平面镜 M 放在 $y=-2$ cm，$x>0$ 的位置，眼睛从平面镜反射的光中看到发光点 A 的像位于 A_2 处，A_2 的坐标见图. (1)求此发光点 A 的位置；(2)写出用作图法确定 A 位置的步骤并作图.



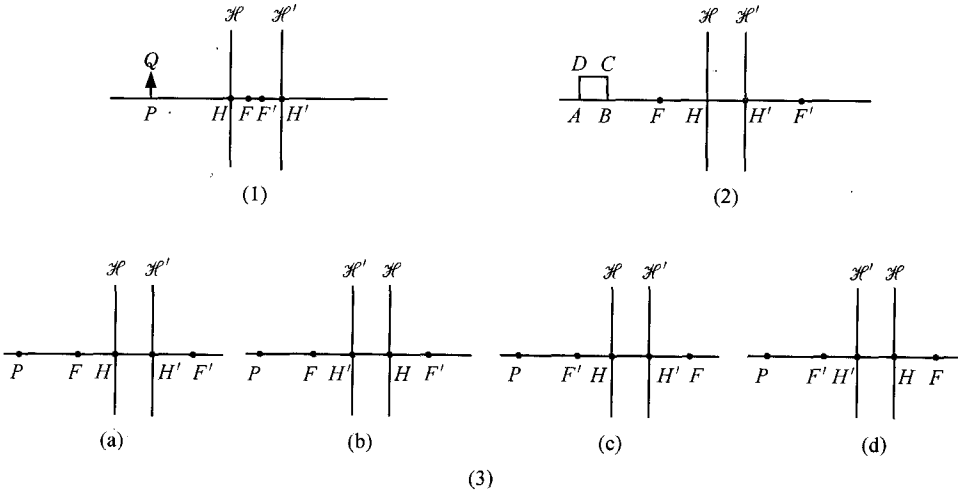
题 1.34 图



题 1.35 图

1.36　如题图所示，用作图法求像(入射光线自左向右). (1)求 PQ 的像；(2)求正方形 $ABCD$ 的像；(3)求 P 的像.

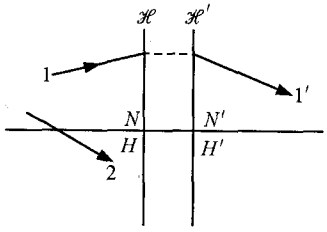
1.37　已知 1-1′是一对共轭光线，求光线 2 的共轭光线 2′(见题图).



题 1.36 图

1.38　试求置于空气中的折射率为 1.54，直径为 54 mm 的玻璃球的主点、焦点和节点的位置，并绘制一图将结果标示出来.

1.39　一个双凸薄透镜(两球面的曲率半径均为 10 cm、厚度为 2 cm、材料折射率为 1.61)的左右两侧介质分别为空气($n=1.00$)和水($n=1.33$)，求此系统的主点位置和焦距. 如果在透镜左球面前 60 cm 处置一高为 1 cm 的物体，求像的位置和大小.



题 1.37 图

*1.40　置于空气中的两薄透镜 L_1 和 L_2 相距 $d_{12}=10$ cm，它们的焦距分别为 $f_1=20$ cm，$f_2=-30$ cm，一高为 1 cm 的物体位于 L_1 前方 5 cm 处. 试用矩阵法求该物经系统所成的像.

*1.41　一平凸透镜的结构参数：$n=n'=1.0$，$n_L=1.5$，$r_1=\infty$，$r_2=-10$ cm，$d_{12}=2$ cm. 试用矩阵法求该透镜的主点位置、顶焦距和顶节距，并绘制一图将主点、焦点和节点标示出来.

1.42　某人对 2.5 m 以外的物看不清，需配怎样的眼镜？眼镜的度数是多少？另一人对 1 m 之内的物看不清，需配怎样的眼镜？眼镜的度数是多少？

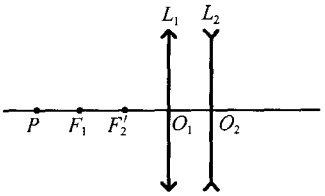
1.43　一放大镜的焦距为 5 cm，试求其视角放大率和焦深. 若像成在该放大镜前 25 cm 处，试求物所在位置及横向放大率.

1.44　一显微镜的物镜焦距 $f'_o=1$ cm，目镜的焦距 $f'_e=3$ cm，两镜间的距离 $d=20$ cm，求该显微镜的视角放大率. 物体应放在何处，才能使最终像成在目镜前方 25 cm 处？此时，显微镜系统的横向放大率等于多少？

1.45　一显微镜的物镜焦距为 4 mm，中间像成在其像方焦点后方 160 mm 处，如果目镜是 20 倍的，试求该显微镜的视角放大率是多少？目镜与物镜的焦深各为多少？

1.46　一伽利略型望远镜的物镜和目镜相距 12 cm，若视角放大率为 4，求两镜的焦距.

1.47　用视角放大率为 M 的开普勒望远镜观察天体时，物镜和目镜的距离为 d；为了看到另一较近的物体，目镜必须后移的距离为 b，求物镜到该物体的距离 s.



题 1.48 图

1.48　试用作图法确定题图中所示光学系统对轴上物点 P 的孔阑、入瞳和出瞳的位置和大小.

1.49　在开普勒天文望远镜中通常物镜边缘即为孔阑. 设 $f_o \gg f_e$,(1)求入瞳和出瞳的位置;(2)证明入瞳直径 D 与出瞳直径 D' 之比等于视角放大率 M 的绝对值.

1.50　在一个孔径为 4.0 cm、焦距为 +5.0 cm 的薄透镜的左方 3.0 cm 处放置一个直径为 2.0 cm 的圆孔光阑. 如果在透镜左方 20 cm 处有一轴上物点,问哪个元件是孔阑? 求出瞳的位置和大小.

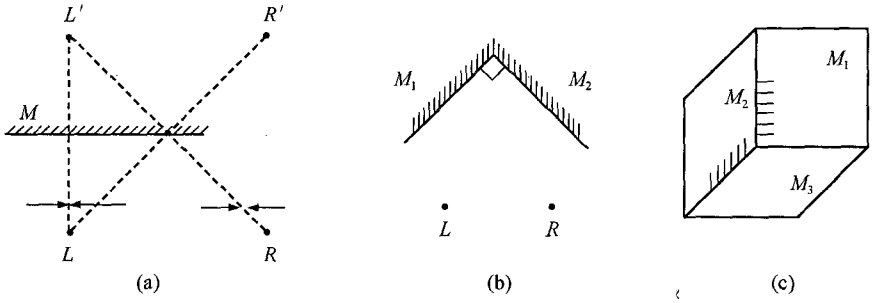
1.51　相距 5 cm 共轴放置的两个薄透镜 L_1 和 L_2,它们的焦距分别为 +9 cm 和 +3 cm、直径分别为 6 cm 和 4 cm,在两透镜之间距 L_2 为 2 cm 处置一直径为 2 cm 的圆孔光阑. 求该系统对 L_1 前 12 cm 处的轴上物点的孔阑、入瞳和出瞳的位置和大小.

1.52　一开普勒天文望远镜的物镜焦距为 100 cm,直径为 5 cm;目镜焦距为 20 cm,直径为 2 cm;两镜相距 120 cm. 今在物镜像方焦点处放置一直径为 1.6 cm 的圆孔光阑. 试求此光学系统的(1)孔阑、入瞳和出瞳的位置和大小;(2)场阑、入窗和出窗的位置;(3)物方视场角和像方视场角.

观察思考及讨论题

1.1　关于平面镜的观察与实验

(1) 人眼的纵深感来源于双眼视差,即左右眼对同一三维物体成像的微小差别. 为验证这一点,可用一面小镜子 M 放在双眼前方(图(a)),M 的位置使得左眼 L 能同时看到镜中的左眼像 L' 和右眼像 R',而右眼 R 只能看到 L'. 拿两个削尖的铅笔分别放在 L 和 R 前方,试图把两个铅笔尖对准. 你感觉在哪一位置更为困难? 为什么?



讨论题 1.1 图

(2) 在照镜子时,人眨左眼,镜中像会眨右眼,即镜中像发生了左右反转. 能否作到人眨左眼时镜中像亦眨左眼呢? 图(b)是一种可能的方案,其中用了两个互成直角的平面镜. 观察该现象并说明其原理.

(3) 用三个互成直角的平面镜可以组成一个光束反向器(图(c)),它能把任意方向射来的光沿逆方向反射回去(位置有一定平移). 说明其原理和可能的应用.

1.2 观察并解释下述现象

(1) 夜空中星光常有闪烁和抖动.

(2) 视线掠过一热物体(例如烧水的铁壶)的边缘观察直线型的目标(如一根管道或墙角线),可以看到直线的弯曲和抖动.

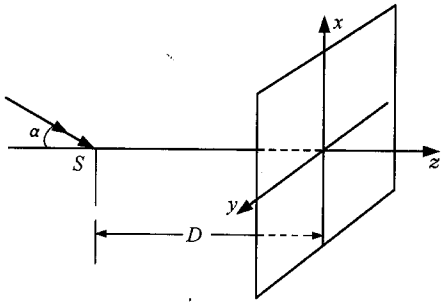
(3) 在电视节目"动物世界"中,热带非洲远处地平线上景物常有模糊和无规弯曲.

(4) 夏天在高速公路上观察远处车辆,常见车前路面好像有一层水一样反射出来的倒影.

(5) 将一个玻璃片涂上一层炭黑,它自然呈现黑色.但是,将它放入水中时,它却变得银光闪亮.

1.3 细圆柱体的反射

(1) 一细圆柱体沿 z 方向放置,一平行光束在 xz 平面内以 α 角掠入射,求圆柱上半侧面不同位置处反射光的方向?



讨论题 1.3 图

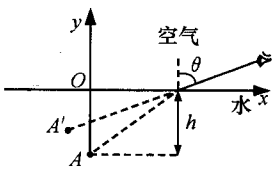
(2) 以一个小收音机的拉杆天线作为细圆柱体,细平行光束入射点 S 与 xy 平面距离为 D,导出反射光在 xy 平面的分布轨迹方程(可忽略杆的半径),并实验观察以验证你的结论.

1.4 水下物体的视位置

(1) 一些书中①以题图表示当人观察水下物点 A 时其视位置为 A',你认为该图正确吗?

(2) 已知 A 的深度 h,建立坐标系 Oxy,求出当从 θ 角方位观察时 A 点真实视位置 A' 的坐标.

(3) 令 θ 从 0 变化到 90°,画出 A' 点的轨迹.



讨论题 1.4 图

(4) 将水下物点扩展为水下物体,例如页面内的一个正方形,它的视像应是什么形状?有的书中②说:"由于光线折射的缘故,物体在水下看起来要比在水面上大."你认为这种说法正确吗?为什么?

(5) 若水下同一深度并排放置一个红球,一个绿球和一个蓝球,在水面上观察时它们的深

① 例如,别莱利曼.趣味物理学续编.滕砥平译.第二版.北京:中国青年出版社,1979.237.

② 英国著名科幻小说作家威尔斯的小说《海底探险记》.见赫·乔·威尔斯.水晶蛋.王文江等译.西安:太白文艺出版社,2004.286.

度还相同吗？若有不同哪一个更深一点？为什么？

(6) 实际观察以验证你的结论.

1.5 水下观察者的视觉形象

(1) 若观察者位于水下，他对水下景物及水面以上景物的视觉形象如何？

(2) 试想有一根直杆立于水中并在水面之上有很大高度，在水中的观察者看来它在水面上下分别为什么形状？

(3) 把水面之上的天空设想为一个半球面，在水下观察者的眼中这个半球面呈什么形状？

(4) 井口和井深相同的两口井，一口是枯井，一口是水井. 青蛙从井底中央向上看，哪个井中的青蛙觉得井口更大？哪一只看到的星星更多？

1.6 扁圆的太阳

在有些照片或电视画面上，可以看到地平线附近的旭日或落日呈上下方向稍微压扁的椭圆形. 为近似分析这一现象的成因，可假定地面为平面，地表覆盖一层折射率稍大于 1 的均匀大气，大气层上方为真空. 在这种简化模型下计算阳光掠入射进入大气层时地面上观察者所看到的太阳在竖直和水平两个方向的角直径之比，并由此说明为什么只有在地表附近才能看到这一现象.

1.7 虹与霓的形成

(1) 一光线以 i 角入射折射率为 n 的球形水滴，求光线在水滴内球面另一侧的入射角 α. 此光线是被全反射还是部分反射？

(2) 求光线经水滴折射、反射再折射而穿出后出射光线方向相对于入射光线方向的偏向角 δ 的表达式.

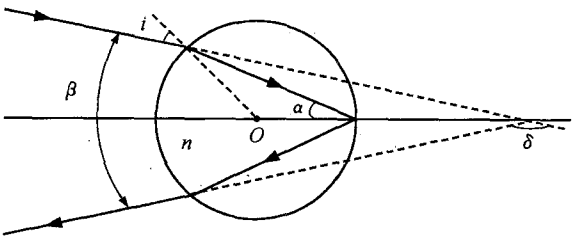
(3) 偏向角 δ 最小时，入射角 i 应为多大？此时的 δ 及 β 角各为多大？

(4) 由以上分析说明彩虹的成因及观察条件.

(5) 利用 n 随波长 λ 的变化说明彩虹中内外环的色序.

(6) 类似的分析可扩展到光线在水滴内有两次反射的情况，这时形成第二道彩虹——霓. 说明其角位置及色序.

(7) 实地观察天然或人工(如喷泉)形成的彩虹，验证你所得到的结论.



讨论题 1.7 图

1.8 费马原理与光程

(1) 在实际光线光程的四种可能中，生活和实验中最常见的是哪几种情况？实际光线究竟

取哪种情况取决于什么因素?

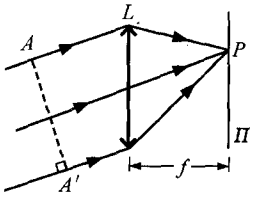
(2) 比较费马原理和重力场中的一个小球在平面和不同形状曲面上的稳定情况.

(3) 对于物距和像距均为 $2f$ 的薄透镜(焦距 f)傍轴成像的情况,计算从轴上物点到轴上像点沿轴和离轴光线的光程,证明它们是相等的.

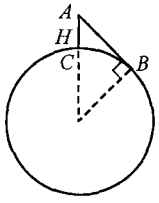
(4) 一平行光束沿倾斜方向(满足傍轴近似)射向透镜 L(下图),并会聚于后焦面 Π 上一点 P. 说明从入射光束波面 AA' 上各点到 P 点光程相等.

1.9 大气折射引起可视距离的增加

人站在高度为 H 的山顶 A 上,若设大气折射率不变,则地平线位于 B 处,弧线 $\overset{\frown}{BC}$ 的长度即为沿地表可视距离. 实际上大气密度随高度增大而逐渐减小,其折射率也随高度增大而逐渐减小. 大致画出考虑大气折射率变化时从人眼到新地平线的光线路径,从而说明大气折射可造成可视距离增加. 精确计算表明,尽管大气折射率的变化不超过 3/10000,但它所引起的可视距离增加的数量级为 1/10,这的确超出了许多人的预料.



讨论题 1.8 图



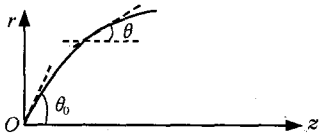
讨论题 1.9 图

1.10 梯度折射率光纤中光的自聚焦

(1) 设介质折射率随 r 逐渐变化,证明光线传播时满足 $n\cos\theta=n_0\cos\theta_0$,其中 θ 为光线与 z 轴正向夹角. n_0 与 $\cos\theta_0$ 表示在初始点 O 的 n 与 $\cos\theta$ 值.

(2) 设在考察的区域内 $n^2=n_0^2-a^2r^2$,a^2 为正常数,求光线斜率 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}z$ 的表达式及光线轨迹方程 $r=r(z)$.

(3) 将 r 设想为以 z 轴为中心轴线的圆柱体半径,由(2)中分析说明从轴上点 O 发出的所有傍轴光线传播一段距离后将会聚于同一轴上点. 此现象称为光束的**自聚焦**.



讨论题 1.10 图

第 2 章　波动光学通论

在具体分析波的干涉、衍射、偏振等现象之前，本章集中讨论波动光学中的一些基础性概念及原理. 首先介绍波的有关概念及数学描述，其重点是波的时空周期性及复振幅概念；其次讨论波的叠加原理及各种典型的叠加过程，并由此引入光的干涉概念及光的偏振态；作为波的叠加的逆运算，对波的分解亦作简要介绍，从中可得出波在时域和空域中的反比关系；最后对波在两种介质的界面上反射和折射的有关问题进行较细致的考察与分析.

2.1　波的概念与光的电磁理论基础

2.1.1　波的基本概念

从力学中已经知道，扰动在空间的传播形成了**波**. 引起扰动的振源称为**波源**，扰动所到达的空间区域称为**波场**. 波是自然界中物质运动的一种相当普遍的形式，如力学中的机械波、声波，电磁学中的电磁波等. 在波动中，波场中任一点总有某一个(或数个)物理量随时间变化而振动，该物理量一般是矢量，如机械波中质点的位移，电磁波中的电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 和磁场强度矢量 $\boldsymbol{H}$ 等，我们可以把这种矢量称为振动矢量，相应的波亦称为**矢量波**. 依振动矢量的方向与波的传播方向是垂直还是平行，可以把波分为**横波**和**纵波**. 在某些情况下，如果所考察的振动物理量是标量，如在声波中当不仔细分析介质中质点的位移，而考察空间中某一宏观上足够小而微观上又充分大的局域的密度随时间的变化时，相应的波则称为**标量波**. 在许多实际应用中，当振动物理量的矢量性对所考察的具体问题不起显著作用，或者仅考虑振动矢量的某一个分量时，亦可把矢量波简化为标量波进行处理.

在波动中，如果空间中各点的振动物理量都作同样频率的简谐振动，则相应的波称为**单色简谐波**. 以后我们将看到，单色简谐波仅是一种理想模型，它在现实世界中并不存在；但它的引入将对波动问题的处理带来极大的简化和方便. 实际上的波动总可以看做是各种不同频率的单色简谐波的叠加.

表示波场中能流的强弱及方向的一个重要物理量是**能流密度矢量**，又称**坡印亭**(Poynting)**矢量**，其瞬时值可用 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$ 表示，$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$ 的大小等于在时刻 t 附近单位时间间隔中通过空间坐标为 $\boldsymbol{r}$ 的某处垂直于波的传播方向的单位面积(为反映

某点的瞬时值，计算 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$ 时所取时间间隔及面积元应充分小，实质上是一个极限概念）的波动能量，$\boldsymbol{S}$ 的方向即为能量传播的方向. 在某段时间间隔 T 中的平均能流密度矢量则定义为

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})=\langle \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},T)\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}t, \tag{2.1.1}$$

这里用〈〉表示时间平均运算. 对周期函数，上式中 T 可取为一个周期.

2.1.2 光的电磁理论基础

1. 电磁场的波动性

光波是一种电磁波，即电磁扰动的传播. 它的存在和波动性可以由麦克斯韦方程组得到说明. 对各向同性介质，在不考虑自由电荷和传导电流的情况下，国际单位制中的麦克斯韦方程组形式为

$$\begin{cases}\nabla\cdot \boldsymbol{E}=0,\\ \nabla\cdot \boldsymbol{H}=0,\\ \nabla\times \boldsymbol{E}=-\mu\dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t},\\ \nabla\times \boldsymbol{H}=\varepsilon\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}.\end{cases} \tag{2.1.2}$$

其中 μ 和 ε 分别为介质的磁导率和电容率（又称介电常数）. 对第三式取旋度，并将第四式代入，利用矢量分析公式和第一式，可得到

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0, \tag{2.1.3}$$

对于 $\boldsymbol{H}$，同理可得到

$$\nabla^2\boldsymbol{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=0. \tag{2.1.4}$$

令

$$v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \tag{2.1.5}$$

(2.1.3)和(2.1.4)式可写为

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0, \tag{2.1.6}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{H}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=0. \tag{2.1.7}$$

以上两式称为 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的**波动微分方程**，它表示 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的时空变化关系. 为更清楚

地了解其物理意义，可分析一维情况，即设 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 仅是空间坐标 z 和时间 t 的函数. 这时(2.1.6)式简化为

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial z^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0. \tag{2.1.8}$$

上式的通解为

$$\boldsymbol{E}(z,t)=C_1\boldsymbol{g}_1(z-vt)+C_2\boldsymbol{g}_2(z+vt), \tag{2.1.9}$$

式中 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 为两个任意函数，C_1、C_2 为任意常数. 显然 $\boldsymbol{g}_1$ 表示以速度 v 沿 z 轴正方向传播的波，$\boldsymbol{g}_2$ 表示以同一速度沿 z 轴负方向传播的波. 这里对 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 的具体波形并未作限定，但是，由于任意波形均可看做是简谐波的叠加(这一点将在 2.5 节中具体讨论)，取简谐波形式的特解进行分析和研究是适宜和方便的. 若只考虑沿 z 轴正向行进的波，则此特解可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(z,t)&=\boldsymbol{E}_0\cos k(z-vt)\\&=\boldsymbol{E}_0\cos(kz-\omega t),\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

其中 $k=2\pi/\lambda$，λ 为波长，$\omega=kv=2\pi v/\lambda=2\pi\nu$，$\nu$ 和 ω 分别为波的**频率**和**角频率**(又称圆频率). 我们把 $\boldsymbol{E}_0$ 称为振动的**振幅矢量**，把上式中余弦函数的宗量 $kz-\omega t$ 称为振动的**相**或**相位**.

对 $\boldsymbol{H}$ 可以得到完全类似的结论. 因此，由麦克斯韦方程组所导出的波动方程不仅预言了电磁波的存在，而且具体给出了波的传播速度(2.1.5)式. 若记真空中的磁导率为 μ_0，电容率为 ε_0，光速为 c，易见

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}. \tag{2.1.11}$$

记介质的相对磁导率和相对电容率分别为 μ_r 和 ε_r，即令

$$\mu_r=\frac{\mu}{\mu_0},\quad \varepsilon_r=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0},$$

则该介质中光速为

$$v=\frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}=\frac{c}{n}, \tag{2.1.12}$$

其中 $n=\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$ 称为介质的**折射率**. 对光学波段，近似有 $\mu_r=1$，故可认为

$$n=\sqrt{\varepsilon_r}. \tag{2.1.13}$$

电磁学中已证明，电磁波为横波，$\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{H}$，并且二者相位相同. 因此，一个沿 z 轴正向传播的振幅恒定的简谐波在某一时刻的波形可用图 2.1.1 表示，此波形随着 t 的增加沿 z 轴正方向以速度 v 推移.

具有确定频率的光称为**单色光**，它所占据的光谱宽度等于零，单色光仅是一种理想模型. 实际光波总占据某一有限的光谱宽度，此宽度可以用频率范围 $\Delta\nu$ 或波长范围 $\Delta\lambda$ 来表示. 若满足 $\Delta\nu\ll\bar{\nu}$ 或 $\Delta\lambda\ll\bar{\lambda}$，这里 $\bar{\nu}$ 和 $\bar{\lambda}$ 分别表示光波的平均频率和

平均波长，则该光波称为**准单色光**，如激光的某一谱线. 在许多实际问题中，当不涉及光谱展宽的效应时，准单色光可以近似看做单色光进行处理.

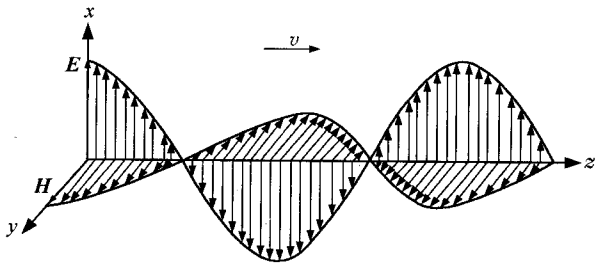


图 2.1.1 沿 z 轴正向传播的电磁波

2. 光的检测与光强

通过光与物质的相互作用，可以检测光场的存在及强弱. 人眼就是一种最普通的光检测器，其他检测器可举出各种感光材料(如照相胶片)、光电管、摄像机等. 这里有两点需要说明. 第一，虽然光波中同时具有 $\boldsymbol{E}$ 振动和 $\boldsymbol{H}$ 振动，但在光与物质的相互作用中通常是电场起重要作用. 如果把这种作用的机制看做是电磁场对物质中带电粒子的作用，并注意到当粒子速度比光速小得多时它所受的磁场力要远远小于电场力，这一点是很容易理解的①. 因此，在光学中通常把 $\boldsymbol{E}$ 称为**光矢量**. 第二，任何检测器件均有一定的响应时间(可分辨的最小时间间隔)τ_0，如人眼的响应时间约为 0.1 秒，光电探测器的响应时间可以达到 10^{-9} 秒(ns)甚至更短. 由于可见光频率极高，目前响应最快的检测器件的响应时间 τ_0 也远大于光的周期 T，故测定光的瞬时振动是不可能的. 实际问题中观察时间 τ 通常又远大于 τ_0，因此，所测数值所反映的是在时间 τ 中探测器所在区域光场的平均能流. 我们把光场中某处的平均能流密度称为该点的**光强**，用 I 来表示，即

$$I(\boldsymbol{r}) = \langle S(\boldsymbol{r},t)\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} S(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}t. \tag{2.1.14}$$

由电磁学知

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t), \tag{2.1.15}$$

即 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H},\boldsymbol{S}$ 三矢量依其顺序组成右手正交系，$\boldsymbol{S}$ 指向光的传播方向. 利用关系式 $\sqrt{\varepsilon}E=\sqrt{\mu}H$，可以得到

① 此结论可通过以下特例得到说明. 设一运动电荷 q 在自由空间中同时受到电场和磁场(方向与电荷运动方向垂直)的作用，由电磁学可知电场力和磁场力分别为 $F_e=Eq$，$F_b=qBv$，且有 $F_e/F_b=c/v$，v 为电荷运动速度. 通常 $v\ll c$，故 $F_b\ll F_e$.

$$S(\boldsymbol{r},t)=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2(\boldsymbol{r},t), \tag{2.1.16}$$

故有

$$I(\boldsymbol{r})=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\langle E^2(\boldsymbol{r},t)\rangle. \tag{2.1.17}$$

对简谐波,(2.1.14)式中的积分时间 τ 可取为一个周期 T,由于函数 $\cos^2(\varphi-\omega t)$(φ 与 t 无关)在一个周期中的平均值为 1/2,可知

$$I(\boldsymbol{r})=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2(\boldsymbol{r}), \tag{2.1.18}$$

式中 $E_0(\boldsymbol{r})$是光场中位置矢量为 $\boldsymbol{r}$ 处 $\boldsymbol{E}$ 振动的振幅. 由(2.1.11)和(2.1.12)式,光强 I 也可以用折射率表示为

$$I(\boldsymbol{r})=\frac{n}{2\mu c}E_0^2(\boldsymbol{r}). \tag{2.1.19}$$

因为 $\mu=\mu_0$,c 为常数,若考察同一介质中光的传播,n 亦为常数,$I(\boldsymbol{r})$的变化仅由 $E_0^2(\boldsymbol{r})$确定. 在许多实际问题中我们所关心的仅是光强的空间分布,即光场中各处的相对强度,这时可舍弃(2.1.19)式中的常系数,而直接把光强写为

$$I(\boldsymbol{r})=E_0^2(\boldsymbol{r}). \tag{2.1.20}$$

但是,当问题涉及光在两种不同介质中的传播时,为比较不同介质中的光强,必须利用(2.1.19)式以计入不同 n 值的影响,这一思想将在 2.6.2 节关于折射光强比的讨论中得到体现.

2.2 波的数学描述

本节的讨论对象限于理想单色波,非单色波的数学描述将在 2.5 节中讨论;另外,分析中均采用标量波形式,并设介质为各向同性.

2.2.1 波的实数表示与时空周期性

波动方程的简谐波形式的特解因其振幅 $E_0(\boldsymbol{r})$随空间位置 $\boldsymbol{r}$ 的变化规律不同而可以具有多种形式. 这里讨论三种典型的波:平面波、球面波和柱面波.

1. 平面波 波的时空周期性

1) 平面波的意义及一维平面波

严格说来,**单色平面波**所指的是振幅与传播方向均不变,在时空中无限延续的简谐波,因为在时空中对波的任何限制都将破坏波的单色性和其传播方向的不变

性. 显然，这一概念仅是一种理想模型. 在实际问题中，将一个线度很小、单色性很好的光源 S 放在一个口径充分大的透镜 L 的前焦点(图 2.2.1)，通过透镜的出射光可以近似认为是单色平面波. 这时光源 S 可近似认为是一个“点光源”. 易见**点光源**也是一种理想模型. 在何种条件下一个实际光源可以看做点光源取决于具体问题的性质及精度要求，此处则应有 S 的大小远小于透镜大小和它到透镜的距离.

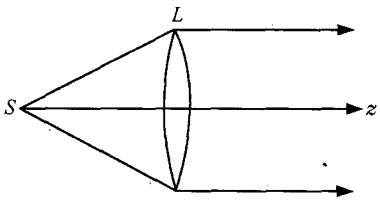


图 2.2.1 近似平面波的产生

考虑沿 z 轴正方向行进的波，参照(2.1.10)式，可得到一维平面波的**波动公式**(或称**波函数**)为

$$E(z,t) = E_0\cos(kz - \omega t + \varphi_0), \tag{2.2.1}$$

这里常数 E_0 表示振幅，余弦函数的宗量

$$\varphi(z,t) = kz - \omega t + \varphi_0 \tag{2.2.2}$$

为 t 时刻 z 处的振动相位，常数 φ_0 为时空原点($t=0, z=0$)的振动相位，即空间原点的初相位或称**初相**. 在研究单一平面波时，可通过适当选取时空原点(如在 $z=0$ 处的振动相位恰为零时开始计时)使得 $\varphi_0=0$，故这时 φ_0 项并不具有重要意义，在书写中常常略去. 但当多个波同时存在时，一般并不能通过选取时空原点的方法使各波的初相同时为零，这时各波初相之差常对问题产生实质性的影响.

附带说明，由于 $\cos\alpha=\cos(-\alpha)$，亦可以取 $-\varphi(z,t)=\omega t-kz-\varphi_0$ 作为相位而不对 $E(z,t)$ 的描述带来任何变化. 本书自始至终均采用前一种规定，即将(2.2.2)式或其在三维情况下的推广作为相位定义，并将在 5.3.3 节中对这两种规定的关系给出更为细致的讨论.

在(2.2.2)式的规定中，相位 $\varphi(z,t)$ 将随 z 的增大而增大，随 t 的增大而减小. 我们将相位增大称为滞后，将相位减小称为超前. 这样，在某一固定时刻，沿波的传播方向各点相位渐次滞后.

波场中相位相同的点的集合称为**等相面**或**波面**. 显然，对上述一维平面波，在任意时刻其等相面均是 z 为定值的平面，即波面与波的传播方向互相垂直. 考察相位 $\varphi(z,t)$ 等于某一确定值的波面，它在 t 时刻位于位置 z 处，在 $t+\Delta t$ 时刻位于 $z+\Delta z$ 处，由

$$\begin{aligned}\varphi(z,t) &= kz - \omega t + \varphi_0 = k(z+\Delta z) - \omega(t+\Delta t) + \varphi_0\\ &= \text{定值},\end{aligned}$$

可得波面的推移速度，即波的传播速度

$$v = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{k}. \tag{2.2.3}$$

波动的一个重要特点是具有**时空周期性**. 为明显看出这一点，可以利用关系 $k=2\pi/\lambda$，$\omega=2\pi\nu=2\pi/T$ 将(2.2.1)式改写为

$$E(z,t)=E_0\cos\left[2\pi\left(\frac{z}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)+\varphi_0\right]. \tag{2.2.4}$$

显然，z 每变化 λ，或者 t 每变化 T，则相位改变 2π，$E(z,t)$ 复原，因此 λ 和 T 分别表示波的**空间周期**和时间周期. 正如时间周期 T 的倒数 $\nu=1/T$ 称为时间频率，也可以把空间周期 λ 的倒数 $f=1/\lambda$ 称为**空间频率**，它表示在任一时刻沿波的传播方向单位距离中所含的波的周期或波长数，故亦称**波数**. 类似地，与时间角频率 $\omega=2\pi\nu=2\pi/T$ 相比拟，也可以把 $k=2\pi f=2\pi/\lambda$ 称为**空间角频率**. 由(2.2.1)式容易看出，时间角频率 ω 表示在空间同一位置经过单位时间间隔振动相位的改变量，而空间角频率 k 则表示在同一时刻沿波的传播方向经过单位距离振动相位的改变量.

习惯上，时间周期、时间频率和时间角频率可简单地称为周期、频率和角频率，而与空间有关的相应量则须冠之"空间"二字. 为对照方便，我们将反映波的时空周期性的各个物理量的意义及其相互联系列于表 2.2.1.

表 2.2.1 波的时空周期性

波的时间周期性	波的空间周期性
周期 T	空间周期 λ
频率 $\nu=\dfrac{1}{T}$	空间频率 $f=\dfrac{1}{\lambda}$
角频率 $\omega=2\pi\nu=\dfrac{2\pi}{T}$	空间角频率 $k=2\pi f=\dfrac{2\pi}{\lambda}$
时空联系 $v=\nu\lambda=\dfrac{\lambda}{T}=\dfrac{\omega}{k}$	

2) 三维平面波

为将上述对一维平面波的讨论推广到三维情况，首先定义**波矢量**(简称**波矢**，又称传播矢量)$\boldsymbol{k}$，其方向指向波的传播方向，其数值 $k=2\pi/\lambda$ 称为波的**传播常量**或**传播数**. 现在考察当一列平面波沿任意方向 $\boldsymbol{k}$ 传播时，空间中任一场点 P(其位置由直角坐标系中的位置矢量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 表示，见图 2.2.2)处的振动方程. 为此，可取一新的坐标轴 Oz'，其正方向与 $\boldsymbol{k}$ 方向一致，则此平面波可看做沿 Oz' 轴正向前进的一维平面波. 过 P 点作平面 Σ 垂直于 Oz' 轴并交该轴于 Q，则 Σ 为波的等相面，$\varphi(P)=\varphi(Q)$；而 $\varphi(Q)$ 则可应用前文一维平面波的结果直接得到，

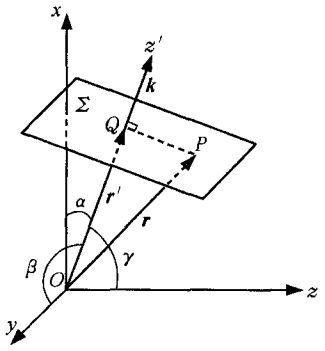


图 2.2.2 三维平面波

$$\varphi(Q) = kr' - \omega t + \varphi_0,$$

其中 r' 为 r 在 $\overrightarrow{Oz'}$ 方向的投影. 因

$$kr' = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} = k_x x + k_y y + k_z z,$$

平面波场中任意点的振动振幅均为常量 E_0，故 P 点的波场可表示为

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{r},t) &= E_0 \cos\varphi(P) = E_0 \cos\varphi(Q) \\ &= E_0 \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t + \varphi_0) \\ &= E_0 \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi_0), \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

式中 k_x、k_y、k_z 分别为波矢 $\boldsymbol{k}$ 在 x、y、z 方向的分量. 由上式可见在任意时刻三维平面波的等相面即 $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}$ = 常数的平面，它垂直于波的传播方向，这与一维平面波的情况是一致的.

记波矢 $\boldsymbol{k}$ 与 x、y、z 轴正向的夹角分别为 α、β、γ，显然有

$$k_x = k\cos\alpha, \quad k_y = k\cos\beta, \quad k_z = k\cos\gamma, \tag{2.2.6}$$

故(2.2.5)式可写为

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{r},t) &= E_0 \cos[k(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) - \omega t + \varphi_0] \\ &= E_0 \cos\left[2\pi\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}x + \frac{\cos\beta}{\lambda}y + \frac{\cos\gamma}{\lambda}z - \frac{t}{T}\right) + \varphi_0\right]. \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

由此可看出三维平面波的时空周期性. 其中由 ω 或 T 表征的时间周期性是显而易见的，这里重点讨论其空间周期性. 考察上式可知，若 x, y, z 分别改变

$$d_x = \frac{\lambda}{\cos\alpha}, \quad d_y = \frac{\lambda}{\cos\beta}, \quad d_z = \frac{\lambda}{\cos\gamma}, \tag{2.2.8}$$

则波的相位改变 2π，波函数复原，故 d_x、d_y、d_z 分别称为波场在 x、y、z 方向的空间周期；它们的倒数

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{1}{d_x} = \dfrac{\cos\alpha}{\lambda}, \\ f_y = \dfrac{1}{d_y} = \dfrac{\cos\beta}{\lambda}, \\ f_z = \dfrac{1}{d_z} = \dfrac{\cos\gamma}{\lambda}, \end{cases} \tag{2.2.9}$$

分别称为波场在 x、y、z 方向的空间频率；相应的空间角频率则分别为

$$k_x = 2\pi f_x, \quad k_y = 2\pi f_y, \quad k_z = 2\pi f_z. \tag{2.2.10}$$

将上式用矢量表示，则有

$$\boldsymbol{k} = 2\pi \boldsymbol{f}, \tag{2.2.11}$$

其中 $\boldsymbol{f}$ 称为**空间频率矢量**，其方向与波的传播方向一致，它在 x, y, z 方向的分量分别为 f_x, f_y, f_z. 相应地，波矢 $\boldsymbol{k}$ 实际上即波场的**空间角频率矢量**.

由于 $\boldsymbol{k}$ 的三个方向余弦满足

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1, \tag{2.2.12}$$

利用(2.2.9)式可得到

$$f=(f_x^2+f_y^2+f_z^2)^{1/2}=\frac{1}{\lambda}, \tag{2.2.13}$$

即 f 的数值即为波数，这一点亦可由(2.2.11)式直接看出. 对 k 有相应的公式

$$k=(k_x^2+k_y^2+k_z^2)^{1/2}=\frac{2\pi}{\lambda}. \tag{2.2.14}$$

可见，对给定波长的三维平面波，$\boldsymbol{f}$ 或 $\boldsymbol{k}$ 的三个分量中只有两个是独立的. 尽管沿不同方向波的空间频率可以不同，但沿波的传播方向波场的空间周期恒为波长 λ，空间频率恒为 $f=1/\lambda$，这与一维平面波是一致的.

利用空间频率矢量 $\boldsymbol{f}$ 及其分量，波函数亦可表示为

$$\begin{aligned}E(\boldsymbol{r},t)&=E_0\cos[2\pi(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{r}-\nu t)+\varphi_0]\\&=E_0\cos[2\pi(f_xx+f_yy+f_zz-\nu t)+\varphi_0].\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

从上式出发可直接求得波场中沿任一方向的空间频率. 设所考察方向 $\boldsymbol{r}$ 与波的传播方向成角度 θ，上式可写为

$$E(\boldsymbol{r},t)=E_0\cos[2\pi(fr\cos\theta-\nu t)+\varphi_0]. \tag{2.2.16}$$

易见 $\boldsymbol{r}$ 方向的空间频率和空间周期分别为

$$f_\theta=f\cos\theta=\frac{\cos\theta}{\lambda}, \tag{2.2.17}$$

$$d_\theta=\frac{1}{f_\theta}=\frac{\lambda}{\cos\theta}. \tag{2.2.18}$$

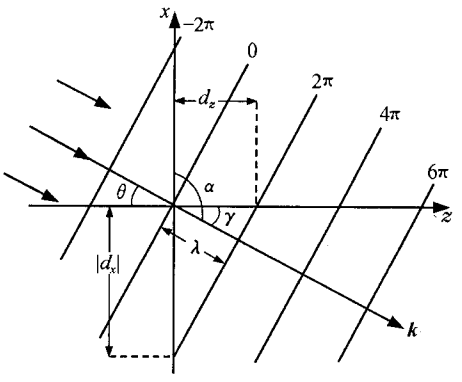


图 2.2.3 例 2.2.1 图

实际上，前文所得出的 f_x、f_y、f_z 及 d_x、d_y、d_z 都可以看做是以上两式中当 θ 分别取 α、β、γ 时的特例. f_θ 与 d_θ 随 θ 的变化而变化，其符号亦可正($\theta<\pi/2$ 时)可负($\theta>\pi/2$ 时)；这种符号区别仅反映了所考察方向与波传播方向的相对方位.

例 2.2.1 真空中一列波长为 λ，振幅为 E_0 的平面波，其波矢方向在 xz 平面内，且与 z 轴成角 θ(图 2.2.3)，求波函数的表达式及 x、y、z 方向的空间频率及空间周期.

解 $\boldsymbol{k}$ 与 x，y，z 轴正向的夹角分别为 $\alpha=\frac{\pi}{2}+\theta$，$\beta=\frac{\pi}{2}$，$\gamma=\theta$. 对单列波可取原

点 O 初相 $\varphi_0=0$，利用 $\omega=kc=2\pi c/\lambda$，c 为光速，代入(2.2.7)式可得三维空间中的波函数为

$$E(x,y,z;t)=E_0\cos\left\{\frac{2\pi}{\lambda}\left[x\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+y\cos\frac{\pi}{2}+z\cos\theta-ct\right]\right\}$$

$$=E_0\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(-x\sin\theta+z\cos\theta-ct)\right]. \tag{2.2.19}$$

将上式与(2.2.15)式相对比可得各空间频率为

$$f_x=-\frac{\sin\theta}{\lambda},\quad f_y=0,\quad f_z=\frac{\cos\theta}{\lambda}.$$

相应的空间周期为

$$d_x=-\frac{\lambda}{\sin\theta},\quad d_y=\infty,\quad d_z=\frac{\lambda}{\cos\theta}.$$

$f_y=0$ 及 $d_y=\infty$意味着波场在 y 方向的空间分布是均匀无变化的. 图 2.2.3 中绘出了空间中一族相位彼此相差 2π 的波面与 xz 平面的截线，从中可直观地看出 λ、d_x、d_z(d_y 无法示出)的意义. 当不考虑波矢方向这一因素时，各空间周期也可以取绝对值.

波动沿某一坐标轴方向传播的情况可以作为前文已讨论过的一般情况的特例. 在上例中已看到，当波的传播方向与 xy、yz 或 zx 三平面之一相平行时，波函数中只含两个位置变量. 当传播方向沿某一坐标轴时则波函数中只保留一个位置变量. 例如，对沿 z 轴正向传播的平面波，有 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$，$\gamma=0$，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=kz$，故波函数为

$$E(z,t)=E_0\cos(kz-\omega t+\varphi_0); \tag{2.2.20}$$

对沿 z 轴负向传播的平面波，有 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$，$\gamma=\pi$，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=-kz$，

故波函数为

$$E(z,t)=E_0\cos(-kz-\omega t+\varphi_0)$$

$$=E_0\cos(kz+\omega t-\varphi_0). \tag{2.2.21}$$

2. 球面波

波面为球面的波称为**球面波**. 依波矢 $\boldsymbol{k}$ 背离球心或指向球心，可以把球面波分为**发散球面波**或**会聚球面波**.

1) 发散球面波

若各向同性介质中有一点光源 S，它所产生的扰动以同样速度 v 向四面八方传播，经任一时间 t 之后扰动所到达的区域（即等相面或波面）形成一个以 S 为球

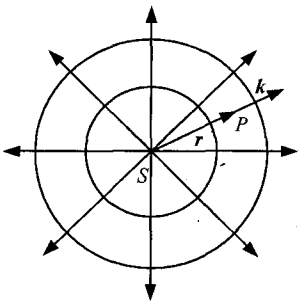


图 2.2.4　发散球面波

心，以 vt 为半径的球面(图 2.2.4)，显然，这种波就是发散球面波. 对发散球面波，波的传播方向，即波矢 $\boldsymbol{k}$ 的方向总是沿径向背离球心 S 的. 对空间中任何一点 P，该处的 $\boldsymbol{k}$ 总是与表示 P 点空间位置的矢径 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{SP}$ 方向一致，故 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=kr$，$P$ 点的振动相位可写为

$$\varphi(P)=kr-\omega t+\varphi_0,$$

式中 φ_0 为 $t=0$ 时刻 S 点的振动相位，即 S 点的初相.

另一方面，由于球面面积等于 $4\pi r^2$，设距源点单位距离处光强为 I_0，所考察的场点 P 处光强为 I_P，根据能量守恒，在仅考虑数值关系时有

$$I_0\cdot 4\pi\cdot 1^2=I_P\cdot 4\pi r^2,$$

即

$$I_P=\frac{I_0}{r^2}.$$

又因 $I_P=E_P^2$，$I_0=E_0^2$，E_P 与 E_0 分别为 P 点和距源点 S 单位距离处的参考点的振幅，故有①

$$E_P=\frac{E_0}{r}.$$

综合振幅 E_P 和相位 $\varphi(P)$，可以写出 P 点的振动方程为

$$E(r,t)=\frac{E_0}{r}\cos(kr-\omega t+\varphi_0). \tag{2.2.22}$$

可以看出，球面波的振幅已不再是常量，它与离开源点的距离 r 成反比. 其等幅面是 r 为常量的球面，与等相面重合.

在实际问题中，理想点光源是不可能实现的，但只要所考察的场点与光源的距离 r 远大于光源的线度，即可认为该处波场为球面波场；如果所考察的波场区域亦远远小于 r，甚至可以认为该处波场近似为平面波场，如射向地面的阳光即可认为是平行光. 从这种意义上，可以把平面波看做是球面波当 $r\to\infty$ 且所考察面积趋于零时的一种极限情况.

注意(2.2.22)式中的 r 是指源点 S 到场点 P 的距离. 若将源点 S 取为直角坐标系的原点 O，则

$$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2};$$

① 这里仅考虑了各量间的数值关系. 若考虑量纲，则式 $E_P=E_0/r$ 中之 E_0 应具有振幅与距离乘积的量纲，它常称为源强度.

若坐标原点不在 S 点(图 2.2.5),则有

$$r=[(x-x_s)^2+(y-y_s)^2+(z-z_s)^2]^{1/2},$$

式中(x,y,z)和(x_s,y_s,z_s)分别为 P 点和 S 点的坐标.

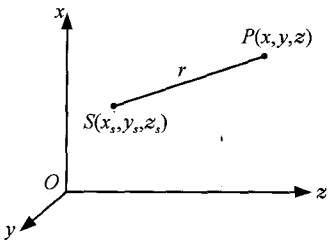


图 2.2.5 球面波表达式中 r 的意义

2) 会聚球面波

会聚球面波指波的传播方向指向球心 S 的球面波(图 2.2.6).其波函数可以用与发散球面波完全类似的分析方法而得到,但需注意这时对空间任一场点 P,波矢 $\boldsymbol{k}$ 与矢径 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{SP}$ 反向,故 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=-kr$. 同样记球心 S 的初相为 φ_0,其波函数形式为

$$E(r,t)=\frac{E_0}{r}\cos(-kr-\omega t+\varphi_0)$$

$$=\frac{E_0}{r}\cos(kr+\omega t-\varphi_0). \qquad (2.2.23)$$

实际问题中会聚球面波常通过平行光聚焦或点光源成像而得到,而且(除非在焦面或像面接收)它通常要继续传播形成发散球面波. 如图 2.2.7 中,在像点 S 前后的波场分别是会聚波和发散波,相应的波函数应分别采用(2.2.23)和(2.2.22)式,式中 r 均指场点(P_1 和 P_2)到 S 点的距离(r_1 和 r_2).

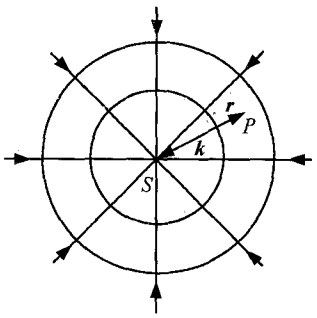


图 2.2.6 会聚球面波

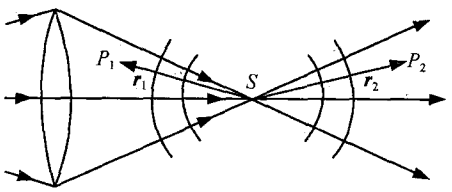


图 2.2.7 会聚波与发散波一般同时存在

3. 柱面波

波面为同轴圆柱面的波称为**柱面波**. 它亦有发散与会聚两种情况. 发散柱面波可以用一无限长线光源 SS' 产生(图 2.2.8). 依与球面波中类似的分析方法,可知柱面波中光强与 r 成反比,故振幅与 $\sqrt{r}$ 成反比. 发散柱面波的波函数可写为

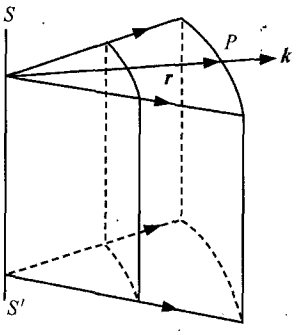


图 2.2.8 发散柱面波

$$E(r,t)=\frac{E_0}{\sqrt{r}}\cos(kr-\omega t+\varphi_0); \tag{2.2.24}$$

而会聚柱面波的波函数则为

$$E(r,t)=\frac{E_0}{\sqrt{r}}\cos(-kr-\omega t+\varphi_0)$$

$$=\frac{E_0}{\sqrt{r}}\cos(kr+\omega t-\varphi_0). \tag{2.2.25}$$

上两式中 r 均为场点到圆柱轴线的距离(即场点所在波面半径),E_0 在数值上等于距轴线单位距离处的振幅,φ_0 为轴线处的初相.

实用中,用平行光照射一细长狭缝,在缝后傍轴区域可得到近似性很好的发散柱面波;会聚柱面波则可由平行光通过柱透镜而获得.

由球面波及柱面波的波函数可以看到,它们的空间周期性仅表现于沿径向的相位分布,沿其他方向这种周期性已不复存在,这是与平面波的显著区别.

2.2.2 波的复数表示与复振幅

1. 复波函数与复振幅概念

由

$$e^{\pm i\alpha}=\cos\alpha\pm i\sin\alpha,$$

可得

$$\cos\alpha=\mathrm{Re}\{e^{\pm i\alpha}\},$$

即一实函数可表示为一复函数的实部. 将此方法应用于实波函数

$$E(\boldsymbol{r},t)=E_0(\boldsymbol{r})\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\varphi_0),$$

有

$$E(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{Re}\{E_0(\boldsymbol{r})\exp[\pm i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\varphi_0)]\}. \tag{2.2.26}$$

通常习惯将指数中 ωt 项的符号取为负号,依这种规定,

$$E(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{Re}\{E_0(\boldsymbol{r})\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0)]e^{-i\omega t}\}. \tag{2.2.27}$$

上式中括号{ }内的函数称为**复波函数**,常用 $\tilde{E}(\boldsymbol{r},t)$ 表示. 在考察单色简谐波的波场时,各场点复波函数中的时间相因子 $e^{-i\omega t}$ 都是相同的,故可以将它分离出来. 将剩余的空间依赖项记为

$$\tilde{E}(\boldsymbol{r})=E_0(\boldsymbol{r})\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0)], \tag{2.2.28}$$

$\tilde{E}(\boldsymbol{r})$ 称为波的**复振幅**,它的模即实数振幅 $E_0(\boldsymbol{r})$,它的辐角是 $\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0)]$ 的指数项 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0$,空间依赖项 $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ 常称为**空间相因子**(简称**相因子**).

引入复振幅的理由可以从以下两方面得到说明. 首先,若某一实波函数 $E(\boldsymbol{r},t)$ 满足波动方程(2.1.6)式,其相应的复振幅为 $\tilde{E}(\boldsymbol{r})$,则复波函数 $\tilde{E}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$ 亦满足同样的波动方程. 故从遵守波动方程,即遵从电磁波的传播规律的角度来说,实数描述和复数描述是完全等价的. 其次,复振幅的运算一般比实波函数的运算简便得多,而且从复振幅可以很方便地(乘以 $e^{-i\omega t}$ 再取实部)得到相应的实波函数. 因此,复振幅在光学及其他有关学科中得到了广泛的应用.

2. 单色简谐波的复振幅

根据复振幅写法的上述约定,可以从实波函数直接写出相应的复振幅,方法是:①若实波函数相位中 ωt 项为负号(如(2.2.20)式),则将该项之外的其他项直接移植于复指数中再乘以实振幅;②若实波函数相位中 ωt 项为正号(如(2.2.21)式),则将该项之外的其他项反号后移植于复指数中再乘以实振幅. 例如,由前文各实波函数表达式可以得到

(1) 沿 z 轴正向传播的平面波的复振幅

$$\tilde{E}(z)=E_0\exp[\mathrm{i}(kz+\varphi_0)]; \tag{2.2.29}$$

(2) 沿 z 轴负向传播的平面波的复振幅

$$\tilde{E}(z)=E_0\exp[\mathrm{i}(-kz+\varphi_0)]; \tag{2.2.30}$$

(3) 沿任意方向传播的平面波的复振幅

$$\begin{aligned}\tilde{E}(\boldsymbol{r}) &=E_0\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0)]\\ &=E_0\exp[\mathrm{i}(k_xx+k_yy+k_zz+\varphi_0)]\\ &=E_0\exp\{\mathrm{i}[k(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)+\varphi_0]\}\\ &=E_0\exp\{\mathrm{i}[2\pi(f_xx+f_yy+f_zz)+\varphi_0]\};\end{aligned} \tag{2.2.31}$$

(4) 发散球面波的复振幅

$$\tilde{E}(r)=\frac{E_0}{r}\exp[\mathrm{i}(kr+\varphi_0)]; \tag{2.2.32}$$

(5) 会聚球面波的复振幅

$$\tilde{E}(r)=\frac{E_0}{r}\exp[\mathrm{i}(-kr+\varphi_0)]. \tag{2.2.33}$$

以上各式中 φ_0 为空间坐标原点(对平面波)或球心处(对球面波)的初相. (2.2.31)式中有意识地列举了多种表达形式,以便依不同情况选用.

3. 平面上的复振幅分布 波前

前文给出了三维空间中波场的复振幅分布的一般公式. 在许多实际问题中,我们所关心的是某一个面(通常是平面,如感光胶片的药膜面)上的复振幅分布. 这时所考察面可以称为空间光场的**波前**,而波前上的复振幅分布常称为**波前函数**(或直

接简称为波前),它可以通过把确定该考察面的空间约束条件代入上述三维复振幅分布的普遍表达式而得到.

例 2.2.2 求例 2.2.1 中的三维平面波在 xy 平面和 yz 平面的复振幅分布(图 2.2.3).

解 仍设 $\varphi_0=0$,由该三维平面波的实波函数(2.2.19)式可得其复振幅的一般表达式

$$\tilde{E}(x,y,z)=E_0\exp[ik(-x\sin\theta+z\cos\theta)]. \tag{2.2.34}$$

代入 $z=0$,可得 xy 平面上的复振幅分布

$$\tilde{E}(x,y,0)=E_0\exp(-ikx\sin\theta); \tag{2.2.35}$$

代入 $x=0$,可得 yz 平面上的复振幅分布

$$\tilde{E}(0,y,z)=E_0\exp(ikz\cos\theta). \tag{2.2.36}$$

对球面波可作类似处理. 例如,由源点 $S(x_s,y_s,z_s)$ 发出的球面波在三维空间的复振幅分布为(仍设 $\varphi_0=0$)

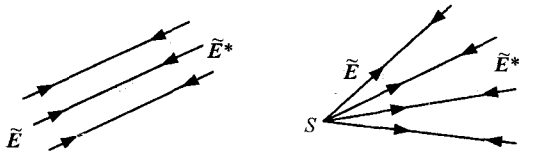
$$\tilde{E}(x,y,z)=\frac{E_0}{[(x-x_s)^2+(y-y_s)^2+(z-z_s)^2]^{1/2}}\cdot\exp\{ik[(x-x_s)^2+(y-y_s)^2+(z-z_s)^2]^{1/2}\}; \tag{2.2.37}$$

而 xy 平面($z=0$)上的复振幅分布则为

$$\tilde{E}(x,y,0)=\frac{E_0}{[(x-x_s)^2+(y-y_s)^2+z_s^2]^{1/2}}\cdot\exp\{ik[(x-x_s)^2+(y-y_s)^2+z_s^2]^{1/2}\}. \tag{2.2.38}$$

4. 共轭波

若某一波的复振幅为 $\tilde{E}(\boldsymbol{r})=E_0(\boldsymbol{r})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$,则以其复共轭函数 $\tilde{E}^*(\boldsymbol{r})=E_0(\boldsymbol{r})\cdot e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ 为复振幅的波称为原波的**共轭波**. 可见共轭波与原波相比,实振幅的空间分布 $E_0(\boldsymbol{r})$ 相同,只是其波矢量由 $\boldsymbol{k}$ 变为 $-\boldsymbol{k}$,即传播方向反转;因此一般说来,共轭波是原波的*逆行波*. 图 2.2.9 中以平面波和球面波为例示出了原波 $\tilde{\boldsymbol{E}}$ 和共轭波 $\tilde{\boldsymbol{E}}^*$ 的关系,注意发散波的共轭波变成了会聚波.



(a) 平面波 (b) 球面波

图 2.2.9 原始波与共轭波

上述分析是对三维空间中的普遍情况而言,这时某一确定的波的共轭波有一

个，并且只能有一个. 但是，若考虑某一平面的复振幅分布，则产生其共轭复振幅的共轭波有两个. 例如，对例 2.2.1 和例 2.2.2 中的三维平面波，当只考虑 $z=0$ 平面时，其复振幅分布如(2.2.35)式所示，它的共轭复振幅为

$$\tilde{E}^*(x,y,0) = E_0\exp(\mathrm{i}kx\sin\theta). \tag{2.2.39}$$

上式与(2.2.35)式相比，仅相当于 k_x 反号，故相应的共轭波有两个，它们关于 xy 平面互为对称(图 2.2.10). 可以想见，与 $x=0$ 平面的复振幅共轭的波也有两个，它们关于 yz 平面对称. 对球面波亦有类似情况.

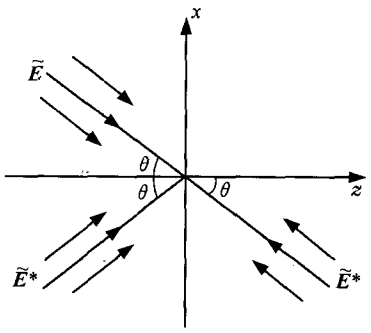


图 2.2.10 只考虑 $z=0$ 平面上的复振幅分布时，共轭波有两个

5. 复振幅的运算

在许多情况下，需要对波函数进行加、减、乘、微分和积分等运算. 既然引入了复振幅，就需要了解应用实波函数进行运算和应用复振幅运算所得结果之间的关系，从而确定在何种情况下可以将前一种运算转化为后一种运算而同时保持结果的合理性.

以波函数相加为例. 设二同频率实波函数

$$E_1(\boldsymbol{r},t) = E_{10}\cos[\varphi_1(\boldsymbol{r}) - \omega t] = \mathrm{Re}\{\tilde{E}_1(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\},$$

$$E_2(\boldsymbol{r},t) = E_{20}\cos[\varphi_2(\boldsymbol{r}) - \omega t] = \mathrm{Re}\{\tilde{E}_2(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\},$$

式中 $\tilde{E}_1(\boldsymbol{r})=E_{10}\exp[\mathrm{i}\varphi_1(\boldsymbol{r})]$ 和 $\tilde{E}_2(\boldsymbol{r})=E_{20}\exp[\mathrm{i}\varphi_2(\boldsymbol{r})]$ 分别为 $E_1(\boldsymbol{r},t)$ 和 $E_2(\boldsymbol{r},t)$ 的复振幅，则有

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{r},t) &= E_1(\boldsymbol{r},t) + E_2(\boldsymbol{r},t) \\ &= \mathrm{Re}\{\tilde{E}_1(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \tilde{E}_2(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\} \\ &= \mathrm{Re}\{[\tilde{E}_1(\boldsymbol{r}) + \tilde{E}_2(\boldsymbol{r})]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\}. \end{aligned} \tag{2.2.40}$$

记 $E(\boldsymbol{r},t)$ 的复振幅为 $\tilde{E}(\boldsymbol{r})$，即令

$$E(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\{\tilde{E}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\}. \tag{2.2.41}$$

比较(2.2.40)和(2.2.41)式，易见

$$\tilde{E}(\boldsymbol{r}) = \tilde{E}_1(\boldsymbol{r}) + \tilde{E}_2(\boldsymbol{r}). \tag{2.2.42}$$

上式表明，两同频率实波函数之和的复振幅等于它们各自的复振幅之和，即波函数相加时可以直接用复振幅进行计算.

进一步的分析证明，对同频率波函数的线性运算(包括加、减、与常数相乘、对空间坐标的微分与积分)，可以直接用复振幅计算；其结果乘以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 后再取实部，即可得到结果的实数表达式.

注意，波函数相乘一般不是线性运算，即两实波函数的乘积并不能由其复振幅之积乘以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 再取实部而得到(见习题 2.15).

6. 光强的复振幅表示

(2.1.20)式已指出，在只考虑同一介质中光场强度的相对分布时，可以把光强表示为

$$I(\boldsymbol{r}) = E_0^2(\boldsymbol{r}),$$

而实振幅为 $E_0(\boldsymbol{r})$ 的光场的复振幅为 $\tilde{E}(\boldsymbol{r}) = E_0(\boldsymbol{r})\exp[\mathrm{i}\varphi(\boldsymbol{r})]$，故有

$$I(\boldsymbol{r}) = |\tilde{E}(\boldsymbol{r})|^2 = \tilde{E}(\boldsymbol{r})\tilde{E}^*(\boldsymbol{r}). \tag{2.2.43}$$

2.2.3 波的矢量表示

由波的实数表示 $E(\boldsymbol{r},t) = E_0(\boldsymbol{r})\cos[\varphi(\boldsymbol{r}) - \omega t]$ 出发，可以得到波的矢量表示方法(图 2.2.11)：从原点 O 向右引一水平半直线(图中以虚线表示)作为参考方向，从该方向逆时针转一角度 φ 作矢量 $\overrightarrow{OP}$，并令 $\overrightarrow{OP} = E_0(\boldsymbol{r})$，则矢量 $\overrightarrow{OP}$ 在水平方向的投影即可代表 $t=0$ 时刻的实波函数. 为得到任一时刻的振动，可使 $\overrightarrow{OP}$ 随 t 的增大沿顺时针方向以角速度 ω 匀速旋转. 容易看出，由于不同频率的简谐波相应的矢量的旋转角速度 ω 不同，它们的相对位置将随时间的推移而发生变化. 因此这种矢量图法一般用来求相同频率的简谐波的合成，这时($-\omega t$)项对所有波是相同的，各矢量的相对位置不随时间发生变化，故作图中可略去此项，即各矢量可不再考虑旋转问题. 实际上，此时矢量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度 $E_0(\boldsymbol{r})$ 和与参考方向的夹角 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 分别代表复振幅的模和幅角，该矢量通常称为波函数的**相幅矢量**.

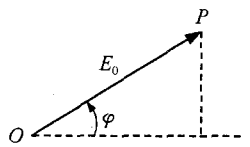


图 2.2.11 波的矢量表示

2.3 波的叠加

波动光学的主要内容包括光的干涉、衍射和偏振，它们的共同基础是波的叠加(有时需要先采取适当方式分解再进行叠加). 波的叠加研究在两列或多列波的重叠区域波场的行为，即每个组分波的特征(振动方向、振幅、相位、频率等)如何影响和决定了合成扰动的最终形式. 从不同侧面和在不同条件下对波的叠加过程的分析和讨论构成了波动光学中互有区别而又有内在联系的丰富多彩的篇章.

2.3.1 波的叠加原理

波的叠加原理可以表述为：在两列或多列波的交叠区域，波场中某点的振动等于各个波单独存在时在该点所产生的振动之和. 由于振动量通常是矢量，所以一般

情况下此处之"和"应理解为矢量和，即

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r},t)+\cdots, \tag{2.3.1}$$

式中 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\cdots$ 分别表示各列波单独存在时某时刻 t 在某一确定场点 $\boldsymbol{r}$ 处产生的振动矢量，而 $\boldsymbol{E}$ 则表示该场点在该时刻的合扰动（即物理上真实表现出的振动）的振动矢量. 前文曾经说明，对光波，振动矢量通常取为电场强度矢量，但这里的 $\boldsymbol{E}$ 并不局限于电场强度矢量，上式可表示任何矢量波的叠加.

对于标量波，或者只考虑矢量波的某一分量而按标量波进行处理时，上式中的矢量和简化为代数和：

$$E(\boldsymbol{r},t)=E_1(\boldsymbol{r},t)+E_2(\boldsymbol{r},t)+\cdots. \tag{2.3.2}$$

叠加原理的依据和合理性可以追溯到波动方程的解的可加性. 2.1.2 节中已经指出，若 $g_1,g_2,\cdots$（或其标量形式）是波动方程的解，则它们的线性组合 $g_1+g_2+\cdots$ 也是同一方程的解，这就保证了叠加后的波场亦满足同样的波动方程，即遵从同样的波动传播规律，因此它在物理上是可以存在的、合理的.

另一方面，叠加原理可以看做是波的独立传播原理的必然结果. 依照这一原理，当两列或多列波在同一波场中传播时，每一列波的传播方式都不因其他波的存在而受到影响. 这和我们的日常生活经验是完全相符的. 例如，当两束光波在空间相遇再分开之后，每列波仍保持着自己本来的特性，如频率、振动方向（它可以通过适当的方法进行检测）、强度等. 在波与物质相互作用的情况中，此原理亦可称为**波的独立作用原理**，即每一列波的作用都不因其他波的作用的存在而受到影响.

和一切物理定律一样，波的叠加原理和独立性（独立传播或独立作用）原理也有其适用条件和范围. 除了在真空中这些原理总是成立之外，能够使叠加原理成立的介质称为**线性介质**. 一种介质是否能看做线性介质，不仅取决于介质本身，而且取决于光的强度. 在通常光强下，一般介质均可认为是线性介质. 通常介质只有在光强很大的情况下，如对高强度激光（它所产生的场强可以超过 $10^{10}\,\mathrm{V/m}$），才呈现出明显的非线性. 某些特殊材料（如光折变材料）则会在普通光强下呈现非线性. 光学中研究非线性现象的分支称为非线性光学（7.5 节中将作简略介绍）. 今后若不特别声明，我们的研究都限于线性介质，即认为波动服从叠加原理.

2.3.2 同频率简谐波叠加的一般分析及干涉概念

设两列同频率简谐波在其波场交叠区某点 P 各自产生的复振幅分别为

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_1(P)=\boldsymbol{E}_{10}(P)\exp[\mathrm{i}\varphi_1(P)], \tag{2.3.3}$$

$$\tilde{\boldsymbol{E}}_2(P)=\boldsymbol{E}_{20}(P)\exp[\mathrm{i}\varphi_2(P)], \tag{2.3.4}$$

这里为了强调 $\boldsymbol{E}$ 的振动方向对叠加结果的影响，复振幅表示中采用了矢量波形式，可以称为**复振幅矢量**. P 点合振动的复振幅矢量为

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(P)=\tilde{\boldsymbol{E}}_1(P)+\tilde{\boldsymbol{E}}_2(P), \tag{2.3.5}$$

而 P 点光强为

$$\begin{aligned} I(P)&=\tilde{\boldsymbol{E}}(P)\cdot\tilde{\boldsymbol{E}}^*(P)=[\tilde{\boldsymbol{E}}_1(P)+\tilde{\boldsymbol{E}}_2(P)]\cdot[\tilde{\boldsymbol{E}}_1^*(P)+\tilde{\boldsymbol{E}}_2^*(P)]\\ &=E_{10}^2(P)+E_{20}^2(P)+2\boldsymbol{E}_{10}(P)\cdot\boldsymbol{E}_{20}(P)\cos[\varphi_2(P)-\varphi_1(P)]. \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

令

$$I_1(P)=E_{10}^2(P),\quad I_2(P)=E_{20}^2(P),$$
$$\delta(P)=\varphi_2(P)-\varphi_1(P), \tag{2.3.7}$$

$I_1(P)$和 $I_2(P)$分别表示两列波单独在 P 点产生的光强，而 $\delta(P)$表示两波在 P 点的相差，则上式可写成

$$I(P)=I_1(P)+I_2(P)+2\boldsymbol{E}_{10}(P)\cdot\boldsymbol{E}_{20}(P)\cos\delta(P). \tag{2.3.8}$$

若在两波的交叠区波场的强度分布不是简单地等于每列波单独产生的强度之和，即一般地

$$I(P)\neq I_1(P)+I_2(P), \tag{2.3.9}$$

则称这两列波发生了**干涉**. 易见对干涉的贡献来自(2.3.8)式中的第三项——干涉项. 为使该项具有不为零的稳定贡献，必须有

(1) $\boldsymbol{E}_{10}\cdot\boldsymbol{E}_{20}\neq0$，即 $\boldsymbol{E}_{10}$ 不垂直于 $\boldsymbol{E}_{20}$；

(2) 对给定点 P，相差 $\delta(P)$恒定，不随时间而变化.

对前面分析的理想单色简谐波，各列波的初相 φ_{10} 和 φ_{20} 皆为定值，$\varphi_1(P)$和 $\varphi_2(P)$只与 P 点的空间位置有关，$\delta(P)$满足条件(2)是不言而喻的. 故只要振动方向不互相正交，理想单色波总是**相干**的. 但对于普通实际光源，φ_{10} 和 φ_{20} 可能会随时间作随机变化，从而 $\delta(P)$亦随时间作随机变化. 若这种变化充分剧烈，以至于使得在观测时间内 $\cos\delta$ 的时间平均值为零，干涉效应将不复存在，这时我们称这两列波是**非相干**的. 在 3.1.1 节中将更详尽地分析这一问题. 以下仅讨论理想单色平面波的叠加情况.

2.3.3 两列同频率、同向振动的平面波的叠加

设两列三维平面波的频率相同，振动方向相同(故可用标量波表示)，其复振幅分别为

$$\tilde{E}_1(\boldsymbol{r})=E_{10}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_{10})], \tag{2.3.10}$$
$$\tilde{E}_2(\boldsymbol{r})=E_{20}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_{20})], \tag{2.3.11}$$

式中 $\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2$ 分别为两列波的波矢量，$\boldsymbol{r}$ 为所考察点的空间位置矢量，$\varphi_{10},\varphi_{20}$ 分别为两列波的初相. 由(2.3.6)式，注意到此时 $\boldsymbol{E}_{10}/\!/\boldsymbol{E}_{20}$，$\boldsymbol{E}_{10}\cdot\boldsymbol{E}_{20}=E_{10}E_{20}$，可得到光场中的光强分布为

$$I(\boldsymbol{r})=E_{10}^2+E_{20}^2+2E_{10}E_{20}\cos\delta, \tag{2.3.12}$$

或写为

$$I(\boldsymbol{r}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta, \tag{2.3.13}$$

式中 $I_1 = E_{10}^2$, $I_2 = E_{20}^2$, 而

$$\begin{aligned}\delta &= \varphi_2 - \varphi_1 = (\boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{k}_1)\cdot\boldsymbol{r} + \varphi_{20} - \varphi_{10} \\ &= k[(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)x + (\cos\beta_2 - \cos\beta_1)y + (\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1)z] + \varphi_{20} - \varphi_{10},\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

其中 α_1、β_1、γ_1 和 α_2、β_2、γ_2 分别为 $\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{k}_2$ 的方位角. 由于 E_{10}、E_{20}、φ_{10}、φ_{20} 均为常数, $\boldsymbol{k}_1$、$\boldsymbol{k}_2$ 为常矢量(其大小均为 $k=2\pi/\lambda$, 但指向不同), 故由以上两式可以看出, 光强仅随位置 $\boldsymbol{r}$ 变化而变化. 在某些特定位置, 使得

$$\delta = 2m\pi, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{2.3.15}$$

光强 I 取得极大值

$$I_M = E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20} = (E_{10} + E_{20})^2, \tag{2.3.16}$$

这时称两列波发生了相长干涉; 在另一些特定位置, 使得

$$\delta = (2m+1)\pi, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{2.3.17}$$

I 取得极小值

$$I_m = E_{10}^2 + E_{20}^2 - 2E_{10}E_{20} = (E_{10} - E_{20})^2, \tag{2.3.18}$$

这时称两列波发生了相消干涉. δ 相同的点的集合构成了三维空间中的等强度面, 由(2.3.14)式可知这种等强度面的方程是

$$(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)x + (\cos\beta_2 - \cos\beta_1)y + (\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1)z = \text{常数}. \tag{2.3.19}$$

我们把两列(或多列)相干波的交叠区称为**干涉场**, 将干涉场中光强随空间位置的分布称为**干涉图样**. 由以上分析可知, 两列同频率平面波的干涉图样是三维空间中一族光强极大与极小相间排列的平行平面. 由于在 I_1、I_2 给定时, 光强 I 仅取决于 $\cos\delta$, 而由(2.3.14)式易见 $\cos\delta$ 随 x、y、z 的变化具有周期性, 故干涉场的强度变化亦具有空间周期性. 将(2.3.14)式与相位的空间频率表达式

$$\delta = 2\pi(f_x x + f_y y + f_z z) + \varphi_0 \tag{2.3.20}$$

相比较, 可以得到光强分布在 x、y、z 方向的空间频率分别为

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1}{\lambda} = f_{2x} - f_{1x}, \\ f_y = \dfrac{\cos\beta_2 - \cos\beta_1}{\lambda} = f_{2y} - f_{1y}, \\ f_z = \dfrac{\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1}{\lambda} = f_{2z} - f_{1z}, \end{cases} \tag{2.3.21}$$

其中 f_{1x}、f_{1y}、f_{1z} 和 f_{2x}、f_{2y}、f_{2z} 分别为第一和第二列波在 x、y、z 方向的空间频率. 上式亦可写成矢量形式

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_2 - \boldsymbol{f}_1, \tag{2.3.22}$$

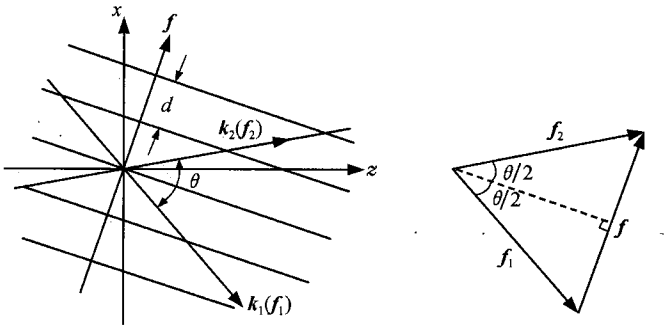
式中 $\boldsymbol{f}_1$、$\boldsymbol{f}_2$ 分别是第一列波、第二列波的空间频率矢量，$\boldsymbol{f}$ 是干涉图样(在垂直于等强度面方向)的空间频率矢量. 由于 $f_1=f_2=1/\lambda$，$\boldsymbol{f}$ 的方向为等强度面的法线方向，由上式可知等强度面位于 $\boldsymbol{f}_1$ 和 $\boldsymbol{f}_2$(亦即 $\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{k}_2$)的角平分面，且有

$$f=\frac{2}{\lambda}\sin\frac{\theta}{2}, \tag{2.3.23}$$

式中 θ 为 $\boldsymbol{k}_1$ 和 $\boldsymbol{k}_2$ 的夹角. 对 f_x、f_y、f_z 取倒数可以得到干涉图样在 x、y、z 方向的空间周期 d_x、d_y、d_z. 相邻光强极大(或极小)平面的间距则为

$$d=\frac{1}{f}=\frac{\lambda}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}. \tag{2.3.24}$$

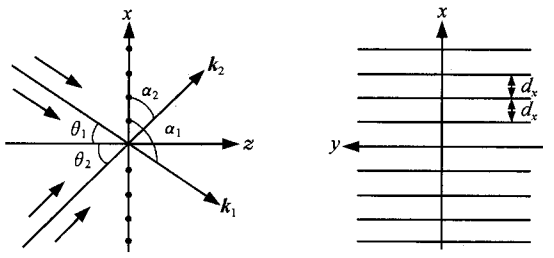
图 2.3.1 中以 $\boldsymbol{k}_1$、$\boldsymbol{k}_2$ 均在 xz 平面为例画出了相位彼此相差 2π 的等强度面(若 $\varphi_{20}-\varphi_{10}=0$，则它们代表一族光强极大面)的方位及 $\boldsymbol{f}_1$、$\boldsymbol{f}_2$ 与 $\boldsymbol{f}$ 的关系. 任一平面上的干涉图样可以作为以上所讨论的三维空间的普遍情况之特例而得到.



(a) 干涉场　　(b) 空间频率矢量

图 2.3.1　两列同频率平面波的干涉场及各空间频率矢量的关系

例 2.3.1　设 $\boldsymbol{k}_1$，$\boldsymbol{k}_2$ 均在 xz 平面内，两列同频率平面波从 xy 平面法线异侧入射，入射角分别为 θ_1 和 θ_2(图 2.3.2(a))，分析 xy 平面的干涉图样.



(a) 干涉　　(b) 干涉图样

图 2.3.2　两列同频率平面波在 $z=0$ 平面的干涉及干涉图样

解 此时有 $\alpha_1=\frac{\pi}{2}+\theta_1$，$\alpha_2=\frac{\pi}{2}-\theta_2$，$\beta_1=\beta_2=\frac{\pi}{2}$，$z=0$，代入(2.3.14)及(2.3.13)式，可得 xy 平面的光强分布为

$$I(x,y)=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos[k(\sin\theta_2+\sin\theta_1)x+\varphi_{20}-\varphi_{10}],$$

干涉图样在 x、y 方向的空间频率分别为

$$f_x=\frac{\sin\theta_2+\sin\theta_1}{\lambda},\quad f_y=0, \tag{2.3.25}$$

相应的空间周期为

$$d_x=\frac{\lambda}{\sin\theta_2+\sin\theta_1},\quad d_y=\infty. \tag{2.3.26}$$

易见 xy 平面的干涉条纹是一族与 y 轴平行、间距为 d_x 的等距直线(图 2.3.2(b))．它可以看做是图 2.3.1(a)所示普遍的三维情况下等强度面与 xy 平面的截线．$\varphi_{20}-\varphi_{10}$仅确定了 $x=0$ 处条纹的亮暗，例如，当 $\varphi_{20}-\varphi_{10}=0$ 时该处为亮纹，当 $\varphi_{20}-\varphi_{10}=\pi$ 时该处为暗纹．当两束光从法线同侧入射时，不难看出只需把 f_x 和 d_x 两式中的“+”号换成“−”号．

以上分析中利用了复振幅，我们也可以用矢量图解法求波的合成．对上述两列波的情况(图 2.3.3)，分别作矢量$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$，令$\overrightarrow{OA}=E_{10}$，$\overrightarrow{OB}=E_{20}$，$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$与参考方向的夹角分别为 $\varphi_1=\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_{10}$和 $\varphi_2=\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_{20}$，它们的夹角 $\delta=\varphi_2-\varphi_1$，则$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的合矢量$\overrightarrow{OC}$即表示合成波的振幅 E_0，而光强则等于 E_0^2．由余弦定理不难得出同样的光强表达式(2.3.13)．

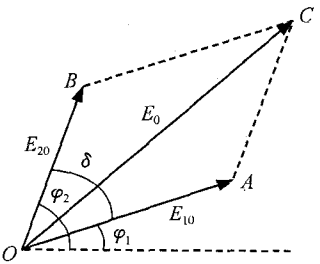


图 2.3.3 利用矢量图解法求波的叠加

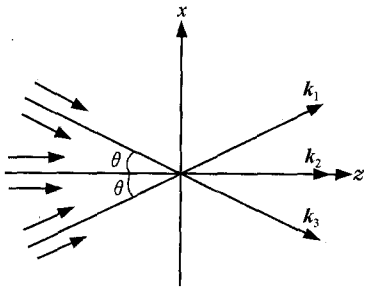


图 2.3.4 例 2.3.2 图

在求多列波的叠加时，可以利用矢量合成的多边形法则．即将各列波的相幅矢量依次首尾相接，则从第一个矢量的始端指向最终矢量末端的矢量即为合成波的相幅矢量．

例 2.3.2 三束同频平面波在原点的初相 $\varphi_{10}=\varphi_{20}=\varphi_{30}=0$，振幅比 $E_{10}:E_{20}:E_{30}=1:2:3$，传播方向均在 xz 面内，方位如图 2.3.4 所示，求 $z=0$ 平面上光强的相对分布．

解 (1) 复振幅法．

因只考虑光强的相对分布，不妨取 $E_{10}=1$，各列波在 $z=0$ 平面的复振幅分布为

$$\tilde{E}_1 = \exp(\mathrm{i}kx\sin\theta),$$
$$\tilde{E}_2 = 2,$$
$$\tilde{E}_3 = 3\exp(-\mathrm{i}kx\sin\theta),$$
$$I = \tilde{E}^*\tilde{E} = (\tilde{E}_1+\tilde{E}_2+\tilde{E}_3)(\tilde{E}_1^*+\tilde{E}_2^*+\tilde{E}_3^*)$$
$$= [\exp(\mathrm{i}kx\sin\theta)+2+3\exp(-\mathrm{i}kx\sin\theta)][\exp(-\mathrm{i}kx\sin\theta)+2+3\exp(\mathrm{i}kx\sin\theta)]$$
$$= 14+16\cos(kx\sin\theta)+6\cos(2kx\sin\theta).$$

(2) 矢量图解法.

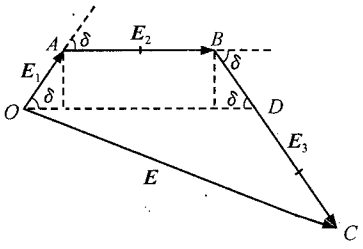


图 2.3.5 用矢量合成法解例 2.3.2

作矢量合成图，即图 2.3.5，其中$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$分别表示 $\boldsymbol{E}_1$，$\boldsymbol{E}_2$，$\boldsymbol{E}_3$，$\overline{OA}=1$，$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=3$，相邻两矢量辐角依次减小 $\delta=kx\sin\theta$. 由图中可见，$\overline{OD}=2+2\cos\delta$，利用余弦定理

$$I=\overline{OC}^2=\overline{OD}^2+\overline{DC}^2+2\,\overline{OD}\cdot\overline{DC}\cos\delta,$$

代入$\overline{DC}=\overline{BC}-\overline{BD}=3-1=2$及$\overline{OD}$表达式，进行计算并化简可得与前文相同的结果.

2.3.4 两列同频率、同向振动、反向传播的平面波的叠加——光驻波

设两列平面波的频率均为 ω，振动方向相同，但传播方向相反，其合成波的光强分布可以由上节导出的普遍公式中令 $\boldsymbol{k}_2=-\boldsymbol{k}_1$ 而得到. 但为了更明显地看出波形对时间的依赖关系，以下采用实波函数来进行分析.

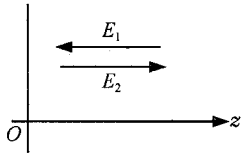


图 2.3.6 光驻波的形成

设两列波 E_1 和 E_2 的传播方向分别沿 z 轴的负方向和正方向(图 2.3.6). 对第一列波，不妨通过适当选取时空原点的办法使其初相 $\varphi_{10}=0$，这样其实波函数为

$$E_1(z,t) = E_{10}\cos(kz+\omega t). \tag{2.3.27}$$

时空原点一旦这样选定，一般说来，第二列波的初相即不一定为零. 设两列波的初相之差为 $\delta_0=\varphi_{20}-\varphi_{10}=\varphi_{20}$，则 E_2 的实波函数可写为

$$E_2(z,t) = E_{20}\cos(kz-\omega t+\delta_0). \tag{2.3.28}$$

为突出波叠加时的主要特征，设 $E_{10}=E_{20}$，则合成波为

$$E(z,t) = E_1(z,t)+E_2(z,t)$$
$$= 2E_{10}\cos\left(kz+\frac{\delta_0}{2}\right)\cos\left(\omega t-\frac{\delta_0}{2}\right). \tag{2.3.29}$$

上式中第二项表明波场中任一点仍作角频率为 ω 的简谐振动，而第一项的绝对值

则表示坐标为 z 处的振动振幅，将此振幅记为 $E_0(z)$，即有

$$E_0(z)=\left|2E_{10}\cos\left(kz+\frac{\delta_0}{2}\right)\right|. \tag{2.3.30}$$

显然，各点的振幅不再是常数，而随其空间位置 z 而变化. 在满足

$$kz+\frac{\delta_0}{2}=m\pi,\quad (m=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{2.3.31}$$

的位置，振幅 $E_0(z)$ 取得最大值 $2E_{10}$，这些点称为**波腹**. 在满足

$$kz+\frac{\delta_0}{2}=\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi,\quad (m=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{2.3.32}$$

的位置，振幅 $E_0(z)$ 为最小值零，这些点称为**波节**. 容易看出，波腹与波节相间分布，相邻波腹(或波节)的间距皆为 $\lambda/2$. 图 2.3.7 中以 $\delta_0=\pi$ 为例画出了 $E_0(z)$ 的分布图，这时 $z=0$ 处为波节.

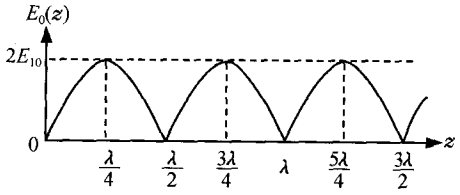


图 2.3.7 $\delta_0=\pi$ 时合成波的振幅分布

为了分析各点的振动相位，可以利用振幅 $E_0(z)$ 将(2.3.29)式改写为

$$E(z,t)=\begin{cases}E_0(z)\cos\left(\omega t-\dfrac{\delta_0}{2}\right), & \left(\cos\left(kz+\dfrac{\delta_0}{2}\right)\geqslant 0\text{ 时}\right)\\[2ex] E_0(z)\cos\left(\omega t-\dfrac{\delta_0}{2}+\pi\right), & \left(\cos\left(kz+\dfrac{\delta_0}{2}\right)<0\text{ 时}\right)\end{cases} \tag{2.3.33}$$

上式说明，在两个波节之间($\cos(kz+\delta_0/2)$ 不改变符号)，虽然各点的振动幅度不等，但振动的步调是一致的，即在任一时刻 t 它们的振动相位相同，与位置 z 无关；在每一波节的两侧，振动步调则相反(一方为正时另一方为负)，相当于相位相差 π，或称相位反转. 图 2.3.8 中以 $\delta_0=\pi$ 为例画出了在不同 t 时刻的振动波形. 可见这种振动类似于力学中的弦振动. 由于整个波形并不发生空间推移，所以这种波称为**驻波**. 相应地，前文所讨论的各种在空间传播的波则可以称为**行波**.

如果 $E_{10}\neq E_{20}$，以上所讨论的驻波的各种主要结论依然成立，不同处只是波节点的振幅不再为零，而保持某一极小值.

在以上分析中如果令 $\delta_0=0$，易见产生的变化仅是 $z=0$ 处由波节变成了波腹，整个 z 轴上波节与波腹位置互易(图 2.3.9)，而相邻波节(或波腹)的间距并不改变.

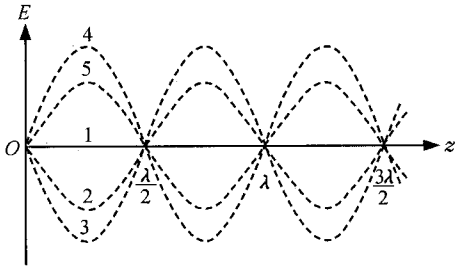


图 2.3.8　$\delta_0=\pi$ 时不同时刻的驻波波形

1. $\omega t=0,\pi$；　2. $\omega t=\frac{1}{4}\pi,\frac{3}{4}\pi$；　3. $\omega t=\frac{\pi}{2}$；

4. $\omega t=\frac{3}{2}\pi$；　5. $\omega t=\frac{5}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi$

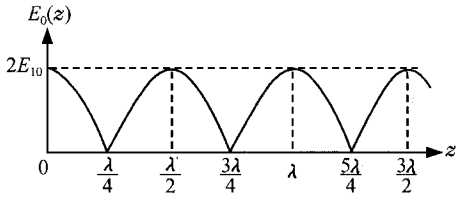


图 2.3.9　$\delta_0=0$ 时合成波的振幅分布

由于光强正比于 $E_0^2(z)$，可以想见，如果在驻波场中放置一感光胶片，经足够长时间曝光后可以得到一张有亮暗交替条纹的负片. 其中暗处(曝光量大)代表波腹位置，亮处(曝光量小)代表波节位置. 历史上，维纳(O. Wiener)曾经作了这样一个著名的实验，它既验证了光驻波的存在，也证实了在光化学反应中对物质起主要作用的是电场而不是磁场.

维纳实验的原理如图 2.3.10 所示，图中 M 为一平面反射镜，波长为 λ 的单色

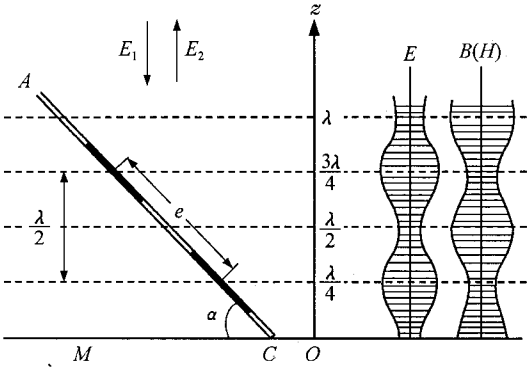


图 2.3.10　维纳光驻波实验

平面波 E_1 垂直入射到 M 上，经反射后形成反向传播的波 E_2. 在合成波场中置一薄感光胶片 AC 以记录驻波条纹. 由前文分析，在垂直于镜面的 z 方向相邻波腹间距为 $\lambda/2$，此间隔是极小的，以至于普通胶片难以分辨. 为"放大"条纹间距，让胶片平面与 M 成一小角度 α（图中大大夸大了此角度），这样，感光后的胶片上的条纹间距将变为

$$e=\frac{\lambda}{2\sin\alpha}. \tag{2.3.34}$$

当 α 很小时，e 值将足够大，以便于观察和测量.

维纳实验确实得到了亮暗相间的条纹，而且条纹间距与上式相符，从而证实了以上分析的合理性. 另一方面，实验结果显示，胶片与平面镜 M 的接触处 C 在感光后的负片上是亮区，即镜面是驻波的波节. 这一点为我们确定光矢量的性质提供了依据. 因为依电磁理论，当电磁波从空气垂直射向介质而发生反射时，反射波与入射波相比，$\boldsymbol{E}$ 矢量在界面要产生数值为 π 的相位跃变（此问题将在 2.6.3 节中进一步讨论），而 $\boldsymbol{H}$（或磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$）则无此跃变. 利用前文中关于 δ_0 的规定，即对 $\boldsymbol{E}$ 来说 $\delta_0=\pi$；而对于 $\boldsymbol{H}$ 有 $\delta_0=0$. 因此，界面处应是 $\boldsymbol{E}$ 驻波的波节，而是 $\boldsymbol{H}$（或 $\boldsymbol{B}$）驻波的波腹，如图 2.3.10 右侧所示①. 既然实验表明该处是波节，就说明对感光胶片起作用的量是 $\boldsymbol{E}$ 而不是 $\boldsymbol{H}$. 其他实验也进一步显示，不仅在光化学反应中，而且在其他光与物质的相互作用中，一般皆是电场起主要作用. 故通常将 $\boldsymbol{E}$ 称为**光矢量**.

2.3.5 两列同频率、振动方向互相垂直、同向传播的平面波的叠加——椭圆偏振光的形成及特征

取互相垂直的两个振动方向分别为 x 和 y 轴，波的传播方向为 z（图 2.3.11）. 不失其一般性，取 $\varphi_{x0}=0$，并记 y 振动相对于 x 振动的相差为

$$\delta=\varphi_y-\varphi_x, \tag{2.3.35}$$

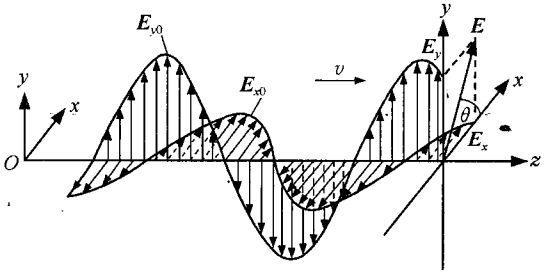


图 2.3.11 两列同频率、振动方向垂直、同向传播的平面波的合成

① 一般反射表面的反射率不可能等于 1，即反射波振幅要小于入射波振幅. 这时合成波波节处光强不为零，但仍为极小值；只要其相对强度明显小于光强极大值，就不影响波节、波腹位置的确定及 e 的测量.

则 x,y 方向的矢量实波函数可分别写为

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_x(z,t) = \boldsymbol{E}_{x0}\cos(kz-\omega t), \\ \boldsymbol{E}_y(z,t) = \boldsymbol{E}_{y0}\cos(kz-\omega t+\delta). \end{cases} \tag{2.3.36}$$

波场中任意位置和时刻的合振动应为

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{E}_x(z,t) + \boldsymbol{E}_y(z,t). \tag{2.3.37}$$

因为两列波均沿 z 方向等速传播，故其合成波亦沿同方向以同样速度传播，并且合矢量 $\boldsymbol{E}$ 仍在 xy 平面内，即光波仍保持其横波性. 以 θ 表示 $\boldsymbol{E}$ 矢量与 x 轴正向所成的角，则有

$$\tan\theta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{E_{y0}\cos(kz-\omega t+\delta)}{E_{x0}\cos(kz-\omega t)}. \tag{2.3.38}$$

可见，一般地说，θ 的大小，即 $\boldsymbol{E}$ 在 xy 平面内的指向将随位置 z 和时间 t 而变化. 以下分别讨论其时空依赖关系.

1. 光矢量 $\boldsymbol{E}$ 的时间变化

设 z 为定值，我们首先分析几种常见的特例，然后给出一般情况下的结果. 另外，由于 δ 与 $\delta+2m\pi(m=\pm1,\pm2,\cdots)$ 的效果是等价的，为表示方便，只需把 δ 限制在一宽度为 2π 的区间内，此处取该区间为 $[-\pi,\pi]$.

1) $\delta=0$

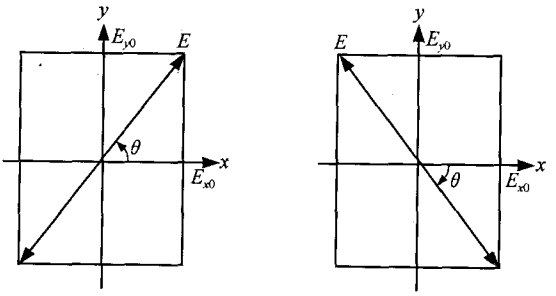
这时(2.3.38)式化为

$$\tan\theta = \frac{E_{y0}}{E_{x0}}, \tag{2.3.39}$$

即 $\tan\theta$ 为一正常数，故合矢量 $\boldsymbol{E}$ 位于一、三象限中一个确定的平面(振动面)内，图 2.3.12(a)示出了该面与 xy 平面的交线. 这种光称为**线偏振光**. 易见合成波的振幅

$$E = \sqrt{E_{x0}^2 + E_{y0}^2}, \tag{2.3.40}$$

而其强度



(a) $\delta=0$ (b) $\delta=\pi$

图 2.3.12 线偏振光

$$I = E_{x0}^2 + E_{y0}^2 = I_x + I_y, \tag{2.3.41}$$

其中 I_x、I_y 分别表示 E_x、E_y 两列波的强度.

2) $\delta = \pi$

这时(2.3.38)式化为

$$\tan\theta = -\frac{E_{y0}}{E_{x0}}. \tag{2.3.42}$$

显然,$\boldsymbol{E}$ 矢量的振动面位于二、四象限(图 2.3.12(b)),合成波亦是线偏振光,其振幅与强度仍满足(2.3.40)与(2.3.41)式.

3) $\delta = \dfrac{\pi}{2}$

这时(2.3.38)式形式为

$$\tan\theta = -\frac{E_{y0}}{E_{x0}}\tan(kz - \omega t). \tag{2.3.43}$$

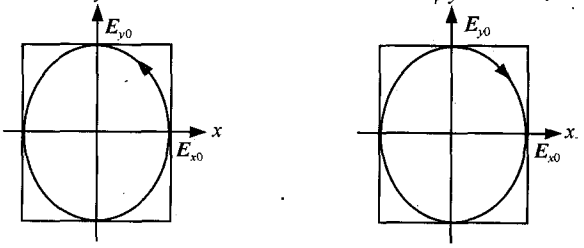
对给定的 z,θ 是 t 的函数,即合矢量 $\boldsymbol{E}$ 的空间指向将随时间变化发生旋转. 为分析其旋转方向,不妨取 $z=0$ 的平面,这时上式化为

$$\tan\theta = \frac{E_{y0}}{E_{x0}}\tan(\omega t). \tag{2.3.44}$$

易见 θ 将随着 t 的增大而增大. 当迎着光的传播方向(即面向 z 轴负方向)观察时,将会"看到"光矢量 $\boldsymbol{E}$ 沿逆时针方向转动(图 2.3.13(a)),光学中把这种旋向称为**左旋**. 不难看出当 z 为其他值时光矢量也是左旋的. 将 $\delta=\pi/2$ 代入(2.3.36)式,很容易得到下列方程

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 = 1. \tag{2.3.45}$$

此方程即合矢量 $\boldsymbol{E}$ 的末端随时间变化在 xy 平面上扫描出的轨迹,显然它是一个椭圆,其两半轴分别位于 x 轴和 y 轴,两半轴长分别为 E_{x0} 和 E_{y0}. 这种两半轴方位正好与 x、y 轴重合的椭圆称为**正椭圆**. 综合以上两种因素,可以把合成光波称为



(a) $\delta=\frac{\pi}{2}$,左旋　　(b) $\delta=-\frac{\pi}{2}$,右旋

图 2.3.13　正椭圆偏振光

左旋正椭圆偏振光. 对 $E_{x0}=E_{y0}$ 的特例，它转化为**左旋圆偏振光**，这时由(2.3.44)式可得 $\theta=\omega t$，即 $\boldsymbol{E}$ 以角速度 ω 匀角速旋转. 对椭圆偏振光，这种旋转的角速度则并非恒量，而与 $\boldsymbol{E}$ 的方位有关.

4) $\delta=-\dfrac{\pi}{2}$

此情况的分析与 $\delta=\pi/2$ 时完全类似，光矢量 $\boldsymbol{E}$ 的末端随时间的变化仍扫描出一个方程为(2.3.45)式的正椭圆；不过当迎着光的传播方向看去时，$\boldsymbol{E}$ 的转动方向是顺时针的，这种旋向称为**右旋**，相应的光称为**右旋正椭圆偏振光**(图 2.3.13(b)). 对 $E_{x0}=E_{y0}$ 的特例它转化为**右旋圆偏振光**.

5) 一般情况

由(2.3.36)式经适当的数学变换，可以证明(习题 2.24)，当 δ 为任意值时 $\boldsymbol{E}$ 矢量末端随时间 t 的变化在空间扫描出的轨迹由以下方程所确定：

$$\frac{E_x^2}{E_{x0}^2}+\frac{E_y^2}{E_{y0}^2}-2\frac{E_xE_y}{E_{x0}E_{y0}}\cos\delta=\sin^2\delta. \tag{2.3.46}$$

显然，一般说来这是一个"**斜椭圆**"(两半轴方位不与 x、y 轴重合)方程，相应的光称为**椭圆偏振光**. 此斜椭圆当 $\delta=0$、π 时退化为直线，当 $\delta=\pm\pi/2$ 时转化为正椭圆，这与前文分析结果完全一致. $\boldsymbol{E}$ 的旋向仍可利用(2.3.38)式进行分析，结果表明：在 $0<\delta<\pi$ 或 $\sin\delta>0$ 时椭圆是左旋的；在 $-\pi<\delta<0$ 或 $\sin\delta<0$ 时椭圆是右旋的.

为便于比较，我们将各种情况下迎着光的传播方向观察时合矢量 $\boldsymbol{E}$ 随时间变化在 xy 平面所扫描出的轨迹及旋向一并在图 2.3.14 中示出. 图中 x 轴正向水平向右，y 轴正向竖直向上，各图形均位于在 x、y 方向宽度分别为 $2E_{x0}$、$2E_{y0}$ 的矩形之内.

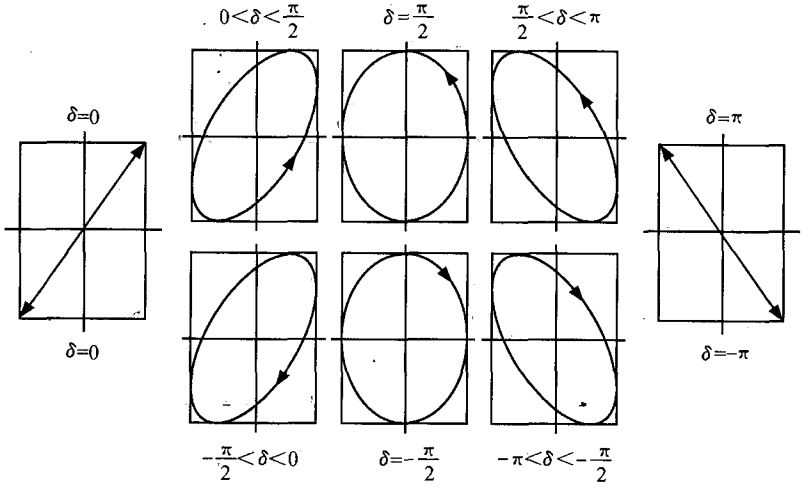


图 2.3.14　光的偏振态与 $\delta=\varphi_y-\varphi_x$ 的关系

2. 光矢量 $\boldsymbol{E}$ 的空间变化

由(2.3.38)式同样可以分析在给定时刻 t 光矢量 $\boldsymbol{E}$ 在不同位置 z 的取向变化，这相当于观察“凝固”了的波形. 当 $\delta=0$、π 时，易见振动平面的空间取向是不变的，其他情况下 θ 随 z 的改变而改变. 这里只分析左、右旋圆偏振光. 为简明起见，可取 $t=0$ 时刻而不影响结果的一般性.

1) 左旋圆偏振光

在(2.3.38)式中代入 $E_{x0}=E_{y0}$，$t=0$，$\delta=\pi/2$，有 $\tan\theta=-\tan(kz)$. 由 θ 的连续性，可得合理的解为

$$\theta=-kz. \tag{2.3.47}$$

故当 z 值从零增大时，θ 值将线性减小. 若仍迎着光的传播方向观察，则 $\boldsymbol{E}$ 矢量将沿着光的传播方向顺时针依次排列. 由于 $\boldsymbol{E}$ 的长度保持不变，其末端在一个以 xy 平面上半径为 E 的圆为底，以 z 轴为轴线的正圆柱的侧面上描绘出一条螺旋线. 图 2.3.15 中绘出了 $\boldsymbol{E}$ 的方向变化及所形成的螺旋线的示意图. 易见这种螺旋是*左手螺旋*，即用左手握圆柱，四指沿螺线方向转动时，拇指即指向螺旋的进动方向.

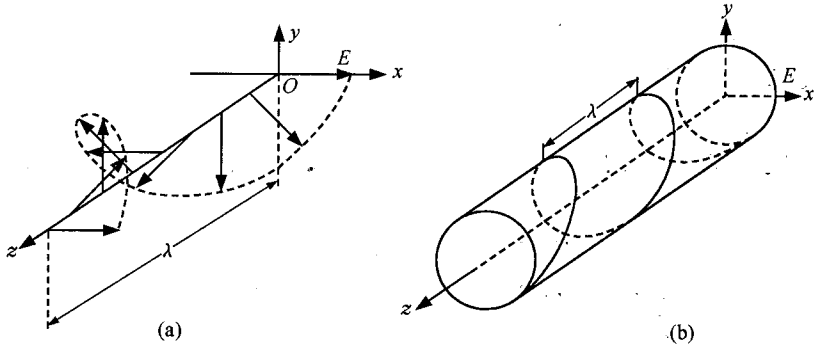


图 2.3.15 给定时刻左旋圆偏振光 $\boldsymbol{E}$ 矢量的空间指向(a)及其末端的轨迹(b)

2) 右旋圆偏振光

此情况与左旋圆偏振光的区别仅是 $\delta=-\pi/2$，同样的分析导致

$$\theta=kz. \tag{2.3.48}$$

故 $\boldsymbol{E}$ 矢量将沿着光的传播方向作逆时针依次排列，相应地，$\boldsymbol{E}$ 末端描出的螺旋线也变成了*右手螺旋*. 图 2.3.16 中画出了 $\boldsymbol{E}$ 的方位变化及所形成的螺线结构.

注意不要将这里 $\boldsymbol{E}$ 矢量的排列方向与前文关于左旋和右旋的规定混淆起来. 这里所说 $\boldsymbol{E}$ 依顺时针或逆时针方向排列是指某一固定时刻沿波的传播方向 $\boldsymbol{E}$ 指向的空间变化，而光的左旋或右旋的定义所反映的是在同一位置 $\boldsymbol{E}$ 指向的时间变化.

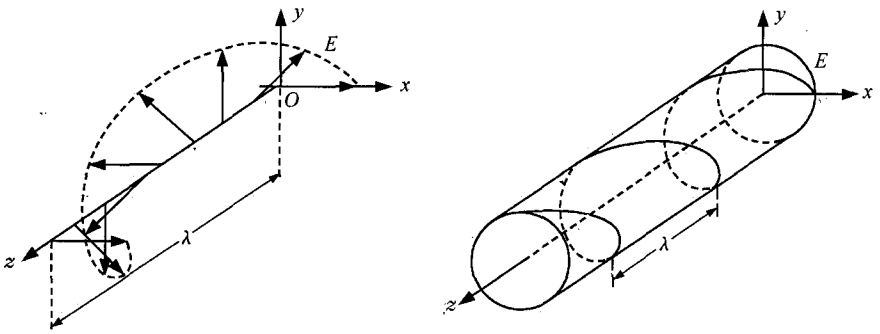


图 2.3.16　给定时刻右旋圆偏振光 $\boldsymbol{E}$ 矢量的空间指向(a)及其末端的轨迹(b)

将上述在时域和空域中的讨论结合起来，即可对左、右旋圆偏振光的时空特性有一个完整的理解. 作为直观模型，可以令图 2.3.15(a)中凝固了的左旋光波形以波速 v 沿 z 轴正方向推移，就得到了在时空中运动的左旋圆偏振光. 容易看到，在波形推移过程中穿过 $z=$常量的任意平面的光矢量 $\boldsymbol{E}$ 的指向(在迎着光波看去时)的确是沿逆时针方向旋转的. 同样，在图 2.3.16(a)中的波形沿 z 轴正方向推移时，穿过 $z=$常量的任意平面的 $\boldsymbol{E}$ 的指向则是顺时针旋转的. 这和前文关于左、右旋光的定义完全一致.

2.3.6　两列频率相近、同向振动、同向传播的平面波的叠加——光学拍

设两列平面波均沿 z 轴正方向传播，其振动方向相同，振幅皆为 E_0，两列波的传播数和角频率分别为 k_1、ω_1 和 k_2、ω_2. 取第一列波的初相为零，第二列波相对于第一列波的初相差为 δ_0，则两列波的实波函数可写为

$$\begin{cases} E_1(z,t) = E_0\cos(k_1 z-\omega_1 t), \\ E_2(z,t) = E_0\cos(k_2 z-\omega_2 t+\delta_0). \end{cases} \tag{2.3.49}$$

任一时刻及位置波场中的合振动可表示为

$$\begin{aligned} E(z,t) &= E_1(z,t)+E_2(z,t) \\ &= 2E_0\cos\left(\frac{\Delta k}{2}z-\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\delta_0}{2}\right)\cos\left(\bar{k}z-\bar{\omega}t+\frac{\delta_0}{2}\right), \end{aligned} \tag{2.3.50}$$

式中

$$\Delta k = k_1-k_2,\quad \Delta\omega = \omega_1-\omega_2,$$

$$\bar{k} = \frac{1}{2}(k_1+k_2),\quad \bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2).$$

设两列波频率相近，即

$$|\Delta\omega| \ll \bar{\omega}, \qquad |\Delta k| \ll \bar{k},$$

则(2.3.50)式中第一项因子在时空中的变化速度要比第二项缓慢得多，因此可以把后者看做是高频载波，而把前者看做是对载波的低频调制. 载波的角频率为 $\bar{\omega}$，其振幅为

$$A = \left| 2E_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}z - \frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\delta_0}{2}\right)\right|. \tag{2.3.51}$$

A 的分布构成了调制后的载波的包络线. 合成波的强度则为

$$I(z,t) = A^2 = 2I_1[1+\cos(\Delta k \cdot z - \Delta\omega \cdot t - \delta_0)], \tag{2.3.52}$$

式中 $I_1 = E_0^2$ 为单列波的强度. 可见光强变化的时间角频率恰为 $|\Delta\omega| = |\omega_1 - \omega_2|$，即参与合成的两列波的角频率之差，其时间频率 ν 当然也等于两波频率之差 $|\nu_1 - \nu_2|$. 一般把这种两列频率相近的简谐波叠加时合成波的强度随时间作差频振荡的现象称为**拍**，而将 $\nu = |\nu_1 - \nu_2|$ 称为**拍频**. 图 2.3.17 画出了某一时刻两波及其合成波的波形及强度的空间分布.

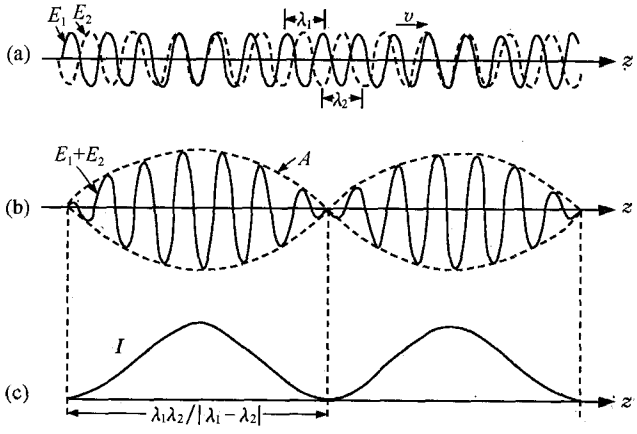


图 2.3.17 拍的形成

应该注意，虽然图 2.3.17(b)类似于驻波，但拍与驻波有着本质的区别. 驻波并不在空间传播，其波腹与波节的位置是固定不动的；而拍的波形则要随着两波的传播而向同一方向推移. 图 2.3.17 所表示的只是一种“凝固”了的波形.

另外，前文中拍的表述主要着眼于时间域中的差频现象，因为历史上对拍的研究主要集中于声学、电磁学等领域，其中对观测起作用的是时间差频效应，如声学中两个频率分别为 ν_1 和 ν_2 的音叉共同振动时会产生一个频率为 $|\nu_1 - \nu_2|$ 的低频波，无线电中也常用差频技术获得所需频率的振荡. 但是，由(2.3.52)式可以看出，不仅在时间域有差频现象，在空间域亦同样有差频现象. 具体地说，若参与合成的两列波的传播数分别为 k_1 和 k_2，其空间频率分别为 $f_1 = k_1/2\pi = 1/\lambda_1$ 和 $f_2 =$

$k_2/2\pi=1/\lambda_2$，则合成波强度分布的空间角频率为 $|\Delta k|=|k_1-k_2|$，相应的空间频率和空间周期分别为

$$f=\frac{|\Delta k|}{2\pi}=|f_1-f_2|, \tag{2.3.53}$$

$$d=\frac{1}{f}=\frac{\lambda_1\lambda_2}{|\lambda_1-\lambda_2|}. \tag{2.3.54}$$

因为光学中所关心的主要是光强的空间分布，所以这种空间域中的差频现象在光学计量中得到了广泛的应用. 空间中两个周期稍有区别的光强分布可以看做是两列凝固了的波，它们重叠后即可得到一个空间周期长得多的光强分布，在一维情况下它由(2.3.54)式所确定. 因 λ_1、λ_2 一般很小，难于直接测量，而 d 则易于测量. 在 λ_1、λ_2 相近时，上式中 $\lambda_1\lambda_2\approx\bar{\lambda}^2$，由平均波长 $\bar{\lambda}$ 及 d 即可计算出波长差或频率差.

以上一维空间差频现象亦可推广到二维. 将两块窗纱或纱巾叠在一起. 可以看到比窗纱或纱巾本身的网状结构稀疏得多的二维明暗条纹. 这种由空间差频现象所形成的条纹称为**莫阿**(moiré)**条纹**或云纹. 现在莫阿条纹的分析已经成为光学测试的一个重要手段.

2.4 光的偏振态

从上节可以看到，两列同频率平面波的叠加结果与两波的振动方向直接有关. 当两列波的振动方向相同时，合成波光矢量仍做同方向的振动；当两列波的振动方向垂直时，合成波光矢量一般要做椭圆振动. 光的横波性只规定了光矢量 $\boldsymbol{E}$ 位于与传播方向垂直的平面内，并未限定 $\boldsymbol{E}$ 在该平面内的具体振动方式，这种具体振动方式(振幅与相位随方位的分布)称为**光的偏振结构**或**光的偏振态**. 光的偏振态可以分为三类：完全偏振光，非偏振光即自然光，以及部分偏振光.

2.4.1 完全偏振光——线偏振光，圆偏振光，椭圆偏振光

设光的传播方向为 z 轴正向，$\boldsymbol{E}$ 位于 xy 平面，根据正交分解法，任何形式的光振动总可以分解为 x、y 方向的两个分振动 $\boldsymbol{E}_x$ 和 $\boldsymbol{E}_y$. 如果这两个分振动完全相关，即有完全确定的相位关系，则相应的光称为**完全偏振光**，简称**偏振光**.

由于理想简谐波的两个正交分量均有确定不变的初相，在空间任一点 $\boldsymbol{E}_y$ 与 $\boldsymbol{E}_x$ 的相位差是一不随时间而改变的定值(实际上即它们的初相之差)，故一列理想单色波必定是一种完全偏振光.

完全偏振光有三种基本态，它们在 2.3.5 节已有讨论，这里归纳如下：

1) 线偏振光

光矢量 $\boldsymbol{E}$ 的振动方位保持不变的光称为**线偏振光**. 若固定某一位置观察光矢量的时间变化，则其末端在 xy 平面上扫描出一个方位确定的线段(图 2.3.12)；若固定某一时刻考察光矢量的空间变化，则各处光矢量位于一个取向确定的平面、即 $\boldsymbol{E}$ 与光的传播方向构成的平面内，此平面称为**振动面**(图 2.4.1).

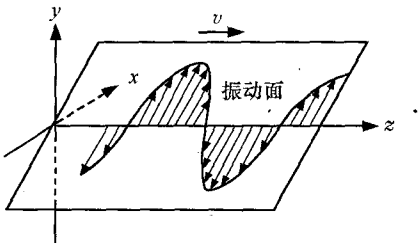


图 2.4.1 线偏振光及其振动面

2) 圆偏振光

在任一位置光矢量 $\boldsymbol{E}$ 的末端随时间变化在 xy 平面上扫描出一个圆的光称为**圆偏振光**. 根据 $\boldsymbol{E}$ 的旋向可以进一步把它分为左旋圆偏振光和右旋圆偏振光，其中光矢量的时空变化已分别在图 2.3.13、图 2.3.15 和图 2.3.16 中给出.

3) 椭圆偏振光

在任一位置光矢量 $\boldsymbol{E}$ 的末端随时间变化在 xy 平面上扫描出一个椭圆的光称为**椭圆偏振光**，它亦可分为左旋椭圆偏振光和右旋椭圆偏振光.

由 2.3.5 节中的分析，以上三种偏振态都可以看做是两个垂直方向的同频率振动 $\boldsymbol{E}_x$ 和 $\boldsymbol{E}_y$ 的合成，合成波的振动方式取决于两个分振动的振幅比 E_{y0}/E_{x0} 和相位差 $\delta=\varphi_y-\varphi_x$；而且，线偏振光和圆偏振光均可看做是椭圆偏振光的特例. 即对线偏振光，有 $\delta=0$ 或 π；对圆偏振光，$E_{y0}=E_{x0}$，左旋时 $\delta=\pi/2$，右旋时 $\delta=-\pi/2$.

2.3.2 节中的讨论表明，对于两个垂直振动的合成，不论相位差 δ 为何值，关系 $\boldsymbol{E}_x\perp\boldsymbol{E}_y$ 总导致

$$I=I_x+I_y, \tag{2.4.1}$$

即合振动的强度简单地等于两个垂直分振动的强度之和. 这对线、圆及椭圆偏振光都是适用的.

2.4.2 非偏振光——自然光

前文已指出，理想单色波是完全偏振的；在 2.5 节中将进一步说明它来源于波在时空中的无限延续性. 但普通光源，如白炽灯等依靠受热而产生辐射的热光源所发出的光并非如此. 首先，这是由于普通光源总包含着数目极多的辐射微元(原子或分子)，各个元辐射体发光的时间、振动方向和相位等都是互相独立、彼此无关的. 其次，即使考察每一个单独的元辐射体，它所发出的光也不是理想的无限长波列. 因为原子的发光过程是不连续的，每次辐射的持续时间 Δt 大约只有 10^{-8} 秒或更短，这段时间内其振动方向和初相恒定，但是，各次辐射中其振动方向和初相都

在作随机变化，如图 2.4.2 所示，图中上、中、下三排分别示出了在相继时间中原子所发的不同波列及其振动方向与初相的随机变化. 由于我们的观察时间一般总比原子每次辐射的时间长得多，因此，即使是对单独的原子光源，其探测结果亦是大量接踵而来的、振动方向与初相均在作迅速无规变化的一系列有限长偏振波列的总效应. 加之大量原子辐射的同时存在，所以实际普通光源的光场中，在任一时刻总存在着各种振动方向及相位独立无关的大量振动.

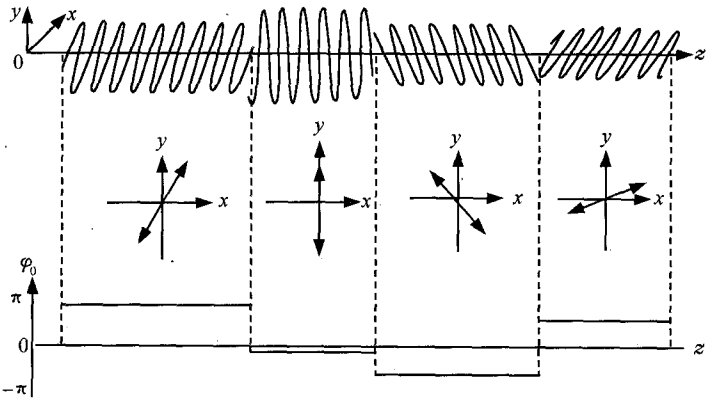
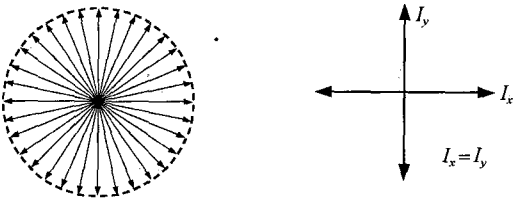


图 2.4.2　普通光源原子发光的示意图

考虑到在垂直于波的传播方向的 xy 平面上的空间各向同性，就其在较长时间中的总效果而言，任一方向的振动都不应比其他方向的振动更占优势. 因此，在统计平均的意义上，普通光源的光场可以用图 2.4.3(a)来表示，这里各种方向的振动在 xy 平面上呈各向同性分布，每一方向的振动幅度或强度都相等，而各振动之间的相位彼此独立无关. 显然，若将这种**圆模型**中的各个线偏振光在两个正交方向(如 x，y)分解，并注意到各线偏振光之间的相位无关性即非相干性，从而将各 x 分量和 y 分量依强度分别叠加起来，即可将圆模型简化为**正交模型**：两个振动方向互相垂直、振幅或强度相等、相位独立无关的线偏振光(图 2.4.3(b)). 这种光波称为**非偏振光**或**自然光**.



(a) 圆模型　　(b) 正交模型

图 2.4.3　自然光的两种模型

用自然光的正交模型，其光强可表示为

$$I_n = I_x + I_y = 2I_x = 2I_y. \tag{2.4.2}$$

应当指出的是，自然光的正交模型与圆偏振光的分量表示虽然形式上相似，但两个正交振动的相位关系有着本质的区别，前者是完全不相关，后者是完全相关. 以后将会继续看到这种相位关系对偏振结构的重要影响.

2.4.3 部分偏振光及偏振度

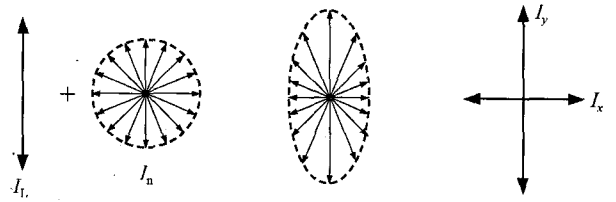
在许多实际问题中，光波既不是完全偏振光，也不是自然光，而是两者的混合，这种光称为**部分偏振光**. 依部分偏振光中所含偏振光的性质，可以把部分偏振光分为**部分线偏振光**，**部分圆偏振光**及**部分椭圆偏振光**. 若部分偏振光中自然光和偏振光成分的强度分别为 I_n 和 I_p，则其总强度为

$$I = I_n + I_p. \tag{2.4.3}$$

为表示部分偏振光中所含偏振光成分的相对强度，可引入**偏振度**，其定义为

$$p = \frac{I_p}{I} = \frac{I_p}{I_n + I_p}. \tag{2.4.4}$$

自然光与线偏振光的混合称为部分线偏振光，如图 2.4.4(a)所示，其中线偏振光振动方向设为 y 方向，强度为 I_L. 这种光波的形成可以看做是由于某种原因对自然光中 xy 平面上振幅分布的空间各向同性的破坏所致，这时某一方位(设为 y 方向)的振动较强，而与其垂直的方位(x 方向)振动较弱，故部分线偏振光的模型亦可表示为图 2.4.4(b). 以 I_x 和 I_y 分别表示两正交振动的强度，该模型可简化为图 2.4.4(c). 注意这里 I_x 与 I_y 不仅强度不等，而且两振动的相位也是独立无关的.



(a) 线圆模型　　(b) 椭圆模型　　(c) 正交模型

图 2.4.4　部分(线)偏振光的三种模型

图 2.4.4 中部分线偏振光的三种模型可以分别称为**线圆模型**、**椭圆模型**和**正交模型**. 这里主要讨论线圆和正交模型. 在这两种模型中部分线偏振光的总光强可

表示为

$$I = I_n + I_L = I_x + I_y. \tag{2.4.5}$$

另一方面，将线圆模型中的自然光分解为 x、y 方向两种振动，利用(2.4.2)式并与正交模型相比较，可知

$$\begin{cases} I_x = \dfrac{1}{2} I_n, \\ I_y = \dfrac{1}{2} I_n + I_L. \end{cases} \tag{2.4.6}$$

上式给出了线圆模型参量(I_n, I_L)与正交模型参量(I_x, I_y)的相互关系. 部分线偏振光的偏振度在两种模型中则可分别表示为

$$p = \frac{I_L}{I_n + I_L}, \tag{2.4.7}$$

和

$$p = \frac{I_y - I_x}{I_y + I_x}. \tag{2.4.8}$$

实际上，自然光和线偏振光均可看做是部分线偏振光的极端情况. 对线偏振光，只有单方向的振动，即 $I_x = 0$, $p = 1$; 对自然光，$I_x = I_y$, $p = 0$. 对一般的部分线偏振光，$0 < p < 1$; p 值越接近 1，说明该光波越远离自然光而接近线偏振光.

根据物理学以可观测量作为基础的思想，还可以对部分线偏振光构造出其他模型. 这些模型对于宏观观测是完全等效的，各模型参量与宏观可测量有着确定的对应关系，各模型之间可依一定的规律互相转换；在微观上，它们赖以建立的共同基础则是各元振动之间的统计独立性①. 由于部分线偏振光较为常见，以后如无特别说明，所谓部分偏振光皆指部分线偏振光.

2.4.4 偏振片及其光强响应

由于普通光源发出的光是非偏振光，要得到偏振光往往要通过光与物质的相互作用使自然光的偏振形态产生某种改变. 能够使自然光变为某种偏振光的光学器件称为**起偏器**. 根据输出光的偏振形态可以把起偏器分为**线起偏器**、**圆起偏器**等. 各种起偏器的作用过程都必须包含某种不对称性，它可以是介质在不同作用条件(如不同的入射角)下的不同响应，更多的则是介质本身的各向异性.

① 关于此问题的详细讨论可参见蔡履中，王成彦. 光学. 济南：山东大学出版社，1992. 2.4.5 节.

1. 偏振片的功能与作用机制

常用的线起偏器是**偏振片**，它可以由自然光得到线偏振光. 实用的偏振片有多种类型，其中之一是基于某些晶体的**二向色性**，即对不同方向的电磁振动具有不同吸收的性质. 偏振片的原理可以用图 2.4.5 中的线栅模型来说明. 将一排排很细的金属丝水平排列组成线栅，入射的自然光可以分解为 x 振动与 y 振动两种组分，其中 $\boldsymbol{E}_x$ 可以驱使金属丝中的电子水平运动而作功，即把电场能量传递给金属丝，而电场能本身则受到很大衰减. 在 y 方向，电子无法自由运动，故并不吸收 $\boldsymbol{E}_y$ 分量的电场能. 因此透过线栅的光波主要是 y 方向的振动. 通常把可以透过偏振片的光矢量 $\boldsymbol{E}$ 的振动方向称为偏振片的**透振方向**. 显然，线栅的透振方向垂直于金属丝的延伸方向.

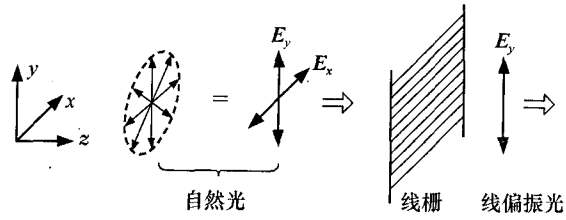


图 2.4.5 自然光通过线栅后变为线偏振光

欲使线栅对光波能起到理想偏振片的作用，即将 x 振动的能量完全吸收，金属丝之间的间隔应非常小，要做到这一点是很困难的. 在实用中，可以用含有传导电子的聚合物分子长链来代替这种线栅. 例如，将某些塑料物质加热后拉伸，其链状分子即会沿拉伸方向平行地排列起来；使某种碘的化合物沉积在这种塑料膜中，碘原子中所含的传导电子即能沿分子长链运动，就像沿着线栅中的金属丝运动一样. 这种偏振片已经得到广泛应用，容易看出，其透振方向垂直于薄膜的拉伸方向.

2. 偏振片对不同偏振态的光强响应

以下讨论各种偏振结构的光通过理想偏振片时的光强变化.

1) 自然光

自然光可以分解为两个任意正交方位的等强度独立振动. 以偏振片作参考系统，此二正交方位自然可取为透振方向及其垂直方向. 对理想偏振片，前一方向的光振动完全通过，而后一方向的光振动则被完全吸收. 因此，若入射光强为 I_n，则透射光强为

$$I = \frac{1}{2} I_n. \tag{2.4.9}$$

当偏振片在 xy 平面内旋转时，易见透射光强是不变的.

2) 线偏振光

设振幅为 E_L、强度为 I_L 的线偏振光透过偏振片 P，线偏振光的振动方向与偏振片的透振方向(由虚线表示，见图 2.4.6)的夹角为 θ. 将 $\boldsymbol{E}_L$ 分解为平行和垂直于 P 的透振方向的两个分量，只有平行分量 $E_P=E_L\cos\theta$ 才能透过 P，因此透射光的强度为

$$I = E_L^2\cos^2\theta = I_L\cos^2\theta. \tag{2.4.10}$$

上式称为**马吕斯**(E. L. Malus)**定律**. 不难看出，当 θ 变化(偏振片旋转)时，I 随之变化. 当 $\theta=0$ 时，光强最大；$\theta=\pi/2$ 时，$I=0$，此时称为消光.

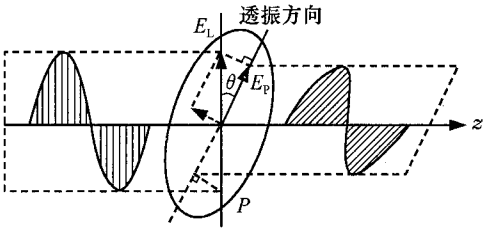


图 2.4.6　线偏振光通过偏振片

3) 椭圆偏振光和圆偏振光

设椭圆偏振光的两正交分量分别沿 x、y 轴，其振幅分别为 E_{x0}、E_{y0}，相差为 $\varphi_y-\varphi_x=\delta$；并设偏振片 P 的透振方向与 x 轴成角度 α(图 2.4.7). 为求得透过 P 的光强 I，可将 E_{x0} 与 E_{y0} 在 P 的透振方向投影，得到

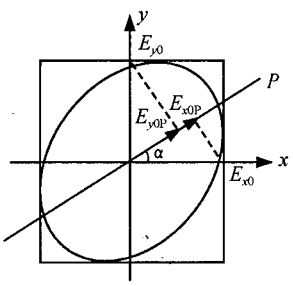


图.2.4.7　椭圆偏振光通过偏振片

$$\begin{cases} E_{x0P} = E_{x0}\cos\alpha, \\ E_{y0P} = E_{y0}\sin\alpha. \end{cases} \tag{2.4.11}$$

此二投影振动方向相同，有确定相差，可以发生干涉，其最终强度为

$$\begin{aligned} I &= E_{x0P}^2 + E_{y0P}^2 + 2E_{x0P}E_{y0P}\cos\delta \\ &= I_x\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha + 2\sqrt{I_xI_y}\cos\alpha\sin\alpha\cos\delta, \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

这里 $I_x=E_{x0}^2$ 和 $I_y=E_{y0}^2$ 分别表示椭圆偏振光中两个正交分量的强度.

将上式中 I 看做 α 的函数，并令 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha=0$，可求得光强取得极大值 I_M 和极小值 I_m 时偏振片相应的角位置 α_1 和 α_2，并可证明 α_1 和 α_2 相差 $\pi/2$，即此二方向互相垂直，它们分别相应于椭圆的长轴方向和短轴方向. 实用中可以通过测量偏振片旋转时的光强变化来确定此二方向，并测出最大透射光强 I_M 和最小透射光强 I_m.

以椭圆长短轴分别作为新的 y' 轴和 x' 轴，则在新坐标下 y' 和 x' 分振动的相位差为 $\delta'=\pm\pi/2$，故偏振片在任一方位 θ（透振方向与长轴夹角）时的透射光强即为

$$I = I_M\cos^2\theta + I_m\sin^2\theta. \tag{2.4.13}$$

对圆偏振光的特例，$I_M=I_m=\frac{1}{2}I_c$，I_c 为入射圆偏振光的光强，故有

$$I=\frac{1}{2}I_c, \tag{2.4.14}$$

此关系式与自然光的光强透射率相同.

4）部分偏振光

将部分偏振光表示为强度分别为 I_M 和 I_m 的两个正交分量，以 θ 表示偏振片的透振方向与 I_M 的方向（即旋转偏振片时透射光强最大的方位）的夹角，如图 2.4.8 所示. 对 I_M、I_m 分别应用马吕斯定律，并注意到 I_M、I_m 互不相干，可得到

$$I = I_M\cos^2\theta + I_m\sin^2\theta. \tag{2.4.15}$$

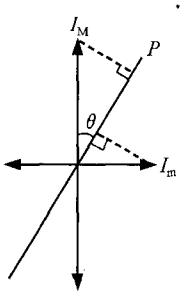


图 2.4.8 部分偏振光通过偏振片

可见此式与椭圆偏振光透射光强的表达式相同，但需注意导致这同一表达式的物理机制是不同的. 对椭圆偏振光，I_M、I_m 在 P 方向的投影有确定的相位差，但此相差为 $\pm\pi/2$，故干涉项为零；对部分偏振光，此二投影无确定相差，根本不发生干涉，故总光强是二分量光强的直接叠加.

利用部分偏振光的线圆模型及(2.4.9)、(2.4.10)式，亦可将透射光强表示为

$$I=\frac{1}{2}I_n + I_L\cos^2\theta, \tag{2.4.16}$$

式中 I_n 和 I_L 分别为部分偏振光中所含自然光及线偏振光的强度.

例 2.4.1 通过一理想偏振片观察部分偏振光，当偏振片从最大光强方位转过 30°时，光强变为原来的 7/8，求

(1) 此部分偏振光中线偏振光与自然光强度之比；

(2) 入射光的偏振度；

(3) 旋转偏振片时最小透射光强与最大透射光强之比；

(4) 当偏振片从最大光强方位转过 60°时的透射光强与最大光强之比.

解 (1) 由(2.4.16)式可得到

$$\frac{I_{30^\circ}}{I_M}=\frac{\frac{1}{2}I_n + I_L\cos^2 30^\circ}{\frac{1}{2}I_n + I_L}=\frac{\frac{1}{2}I_n+\frac{3}{4}I_L}{\frac{1}{2}I_n+I_L}=\frac{7}{8},$$

由此解得 $\frac{I_L}{I_n}=\frac{1}{2}$；

(2) $p=\dfrac{I_L}{I_n+I_L}=\dfrac{I_L/I_n}{1+I_L/I_n}=\dfrac{1/2}{1+1/2}=\dfrac{1}{3}$;

(3) $\dfrac{I_m}{I_M}=\dfrac{\frac{1}{2}I_n}{\frac{1}{2}I_n+I_L}=\dfrac{\frac{1}{2}I_n}{\frac{1}{2}I_n+\frac{1}{2}I_n}=\dfrac{1}{2}$;

(4) $\dfrac{I_{60°}}{I_M}=\dfrac{\frac{1}{2}I_n+I_L\cos^2 60°}{\frac{1}{2}I_n+I_L}=\dfrac{\frac{1}{2}I_n+\frac{1}{2}I_n\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}I_n+\frac{1}{2}I_n}=\dfrac{5}{8}$.

2.5 波的傅里叶分析及时空域中的反比关系

既然单色简谐波只是一种理想模型，为了处理实际问题，就需要在实际光波与这种理想模型之间建立起一种联系. 分析证明，任意实际光波都可以表示成(有限或无限)多个单色简谐波的叠加. 求已知光波的各个谐波组分(振幅及相对相位)的运算常称为波的**傅里叶**(J. B. J. Fourier)**分析**或波在(时间或空间)频率域的分解. 本节对波的分解方法的介绍并不注重数学上的系统性，而是力图从应用的角度阐明其基本思想及物理意义.

*2.5.1 波的傅里叶分析

对于空间函数 $g(x)$，可以将其表示为基元函数 $\exp(\mathrm{i}2\pi f_x x)$ 的叠加积分

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}G(f_x)\exp(\mathrm{i}2\pi f_x x)\mathrm{d}f_x. \tag{2.5.1}$$

可以证明，$G(f_x)$ 的表达式为

$$G(f_x)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\exp(-\mathrm{i}2\pi f_x x)\mathrm{d}x. \tag{2.5.2}$$

(2.5.1)式的物理意义是很明显的，它表明(实或复)空间函数 $g(x)$ 可以看成是一系列空间频率 f_x 连续变化的空间简谐波的叠加，其中空间频率为 f_x 的简谐波的复振幅为 $G(f_x)$. $G(f_x)$ 称为 $g(x)$ 的**空间频率谱**，它一般为复数，其绝对值(模)表示该谐波的振幅，其辐角表示相位. 一般地，对周期函数 $g(x)$，其频谱为**离散谱**；对非周期函数 $g(x)$，其频谱为**连续谱**. 由函数 $g(x)$ 求其频谱 $G(f_x)$ 的运算(2.5.2)式称为 $g(x)$ 的**傅里叶变换**，常以算符 $\mathscr{F}$ 记之；而叠加积分(2.5.1)式则称为 $G(f_x)$ 的**逆傅里叶变换**，以算符 $\mathscr{F}^{-1}$ 记之，即

$$G(f_x)=\mathscr{F}\{g(x)\},$$
$$g(x)=\mathscr{F}^{-1}\{G(f_x)\},$$

$g(x)$ 和 $G(f_x)$ 称为空间域中的一**傅里叶变换对**，记为

$$g(x)\rightleftharpoons G(f_x).$$

例 2.5.1 图 2.5.1(a)中的矩形函数可表示为

$$g(x)=\mathrm{rect}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant\dfrac{\Delta x}{2}\\ 0, & x\text{为其他值}\end{cases}\tag{2.5.3}$$

求它的傅里叶变换.

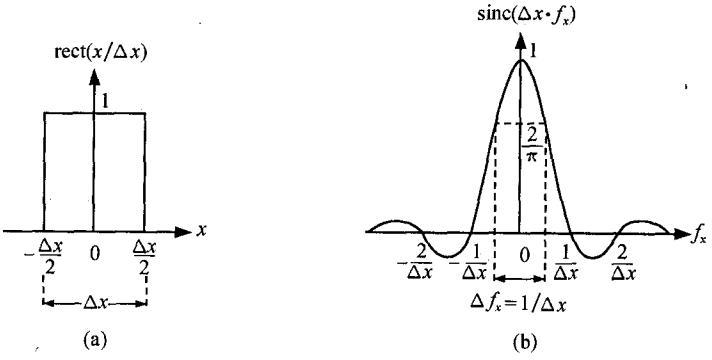


图 2.5.1 函数 $\mathrm{rect}(x/\Delta x)$及其频谱

解
$$G(f_x)=\mathscr{F}\{g(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)\exp(-\mathrm{i}2\pi f_x x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2}\exp(-\mathrm{i}2\pi f_x x)\,\mathrm{d}x=\frac{\sin(\pi f_x\Delta x)}{\pi f_x}.$$

定义函数

$$\mathrm{sinc}(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x},\tag{2.5.4}$$

则有

$$G(f_x)=\Delta x\,\mathrm{sinc}(\Delta x\cdot f_x).$$

写成傅里叶变换形式,即

$$\mathrm{rect}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)\rightleftharpoons\Delta x\cdot\mathrm{sinc}(\Delta x\cdot f_x).\tag{2.5.5}$$

当 $\Delta x=1$ 时,上式简化为

$$\mathrm{rect}(x)\rightleftharpoons\mathrm{sinc}(f_x).\tag{2.5.6}$$

归一化(最大值化为 1)的频谱 $\mathrm{sinc}(\Delta x\cdot f_x)$的图像如图 2.5.1(b)所示,可见该函数随$|f_x|$的增大呈振荡衰减趋势,只有在中心附近某个区域函数有较大值,此区域的宽度可定义为有效空间频率带宽,简称**空频带宽**.对同一问题,空频带宽的数值可因所取函数下限的不同而稍有区别,但其数量级应是相同的.本例中为简便起见可取振幅谱下降到最大值的 $2/\pi$,即强度谱下降到最大值的 $4/\pi^2\approx0.4$ 处(在更多情况下此值取为 1/2,相应位置称为**半强度点**)为谱带边缘,从而得到空频带宽

$$\Delta f_x=1/\Delta x.$$

例 2.5.2 求有限长等幅波列(图 2.5.2(a))

$$g(x)=\begin{cases}\cos(2\pi f_0 x), & |x|\leqslant\dfrac{\Delta x}{2}\\ 0, & x\text{为其他值}\end{cases}$$

的傅里叶变换.

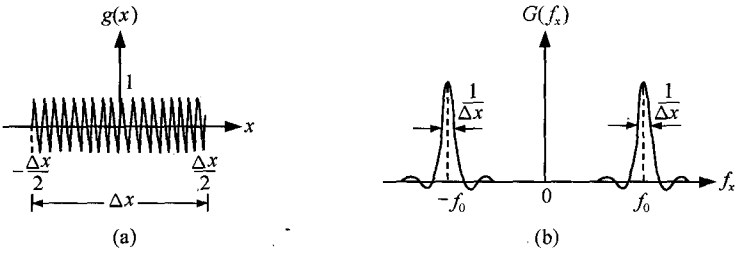


图 2.5.2 有限长等幅波列及其频谱

解

$$\begin{aligned}G(f_x)&=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\exp(-\mathrm{i}2\pi f_x x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2}\cos(2\pi f_0 x)\exp(-\mathrm{i}2\pi f_x x)\mathrm{d}x\\&=\frac{\sin[\pi(f_x-f_0)\Delta x]}{2\pi(f_x-f_0)}+\frac{\sin[\pi(f_x+f_0)\Delta x]}{2\pi(f_x+f_0)}\\&=\frac{\Delta x}{2}\{\mathrm{sinc}[\Delta x(f_x-f_0)]+\mathrm{sinc}[\Delta x(f_x+f_0)]\}.\end{aligned}$$

此频谱在图 2.5.2(b)中示出. 显然它相当于将上例中之频谱中心移到了 $f_x=\pm f_0$ 处，f_0 相当于信号的载波频率，而以 $\pm f_0$ 为中心的频谱分布则相当于因信号有限宽度 Δx 的限制引起的谱带展宽. 由于正负频域中频谱是对称的，负频率的出现仅是为保证最后合成的结果为实数，并未提供新的信息，故可以只考虑单侧频谱，易见其空频带宽仍为 $\Delta f_x=1/\Delta x$.

为简化表示而不对问题的物理实质产生任何影响，原函数 $g(x)$ 常写成复数形式，如例 2.5.2 中的 $\cos(2\pi f_0 x)$ 可写成 $\exp(\mathrm{i}2\pi f_0 x)$，这时频谱 $G(f_x)$ 中只出现正频率单侧谱带.

2.5.2 波在空域和时域中的反比关系

前一节中以波的空间分布 $g(x)$ 为例讨论了波的分解，其主要结论如下：

1. 空间函数 $g(x)$ 可表示为空间频率 f_x 连续分布的无限多基元简谐波 $\exp(\mathrm{i}2\pi f_x x)$ 的叠加积分

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}G(f_x)\exp(\mathrm{i}2\pi f_x x)\mathrm{d}f_x. \tag{2.5.7}$$

2. 上式中 $G(f_x)$ 为基元简谐波 $\exp(\mathrm{i}2\pi f_x x)$ 的复振幅，$G(f_x)$ 随 f_x 的分布称为 $g(x)$ 的**空间频率谱**. 空间频率谱是空间函数 $g(x)$ 的傅里叶变换，

$$G(f_x)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\exp(-\mathrm{i}2\pi f_x x)\mathrm{d}x. \tag{2.5.8}$$

3. 对波的空间限制必然导致其空间频率谱的展宽，一般地，波的空间宽度 Δx 与该方向的空间频率带宽 Δf_x 成反比，在数量级上有

$$\Delta f_x \cdot \Delta x \approx 1. \tag{2.5.9}$$

若把函数 $g(x)$ 中的自变量看成时间变量，并依惯例写成 $g(t)$，显然前文所有分析和结论仍然成立，只需将空间量改换成相应的时间量，即 x 换为 t，空间频率 f_x 换为(时间)频率 ν，波的空间宽度 Δx 换为在同一处振动的延续时间 Δt. 这时以上三式相应变为

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu)\exp(\mathrm{i}2\pi\nu t)\,\mathrm{d}\nu, \tag{2.5.10}$$

$$G(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\exp(-\mathrm{i}2\pi\nu t)\,\mathrm{d}t, \tag{2.5.11}$$

$$\Delta\nu \cdot \Delta t \approx 1. \tag{2.5.12}$$

以上各式中 $\exp(\mathrm{i}2\pi\nu t)$ 为时域中的基元简谐波；$G(\nu)$ 为时间函数 $g(t)$ 的傅里叶变换或**时间频率谱**，它表示 $g(t)$ 中所含的频率为 ν 的基元简谐波的复振幅；$\Delta\nu$ 为 $G(\nu)$ 的**频带宽度**①(对准单色光常称为**谱线宽度**或**线宽**).

(2.5.9)和(2.5.12)式分别称为波在空域和时域中的反比关系. 对行波来说，波函数中既有时间变量，又有空间变量. 若考察某一给定时刻的波形，它可看做是空间的函数；若考察某一给定场点的振动，它又可看做是时间的函数. 由于波列在给定点的延续时间 Δt 与其沿传播方向的纵向空间展宽(即波列长度) Δx 通过波速 v 联系起来($\Delta x = v\Delta t$)，对波在时域中的限制必然会带来空域中的限制，反之亦然. 故前文在空域和时域中的讨论实际上是描述同一物理过程的两个侧面. 简言之，波的反比关系表明，在时空域对波的任何限制均会引起其在相应频域的展宽；而且限制愈甚，展宽愈大.

波的反比关系可以使我们对一些物理概念和物理过程有更深刻的理解. 首先讨论波的单色性问题. 理想单色波应有确定的频率值，即其频率展宽 $\Delta\nu = 0$. 由波的反比关系，这只有当 $\Delta t \to \infty$，相应亦有 $\Delta x \to \infty$ 时才可做到，故理想单色波是一种在时域和空域中均无限延续的简谐波. 任何实际波总要受到不同程度的时空限制，即其波列持续时间 Δt 和波列长度 Δx 都是有限的，故总要有一定的频率展宽 $\Delta\nu$. $\Delta\nu$ 越小，波的单色性越好. 当 Δt 或 Δx 足够大，使得 $\Delta\nu$ 很小，满足 $\Delta\nu \ll \bar{\nu}$ 时，可以把该波称为准单色波. 在另一极端，若 $\Delta t \to 0$，则 $\Delta\nu \to \infty$，这意味着一个无限窄脉冲包含有各种频率成分.

其次，考察对波的横向(垂直于传播方向)空间限制所引起的波的横向空间频

① 因 $G(\nu)$ 表示谐波复振幅的光谱分布，$|G(\nu)|^2$ 即表示谐波强度的光谱分布，故可把 $|G(\nu)|^2$ 称为(时间域中的)**强度谱**或**功率谱**. 实用中，$\Delta\nu$ 常取为两个半强度点(即 $|G(\nu)|^2$ 下降到最大值的一半)的间隔，称为**半值宽度**.

率展宽的效应. 例如，图 2.5.3 中，单色平面波垂直射向一宽度为 a 的单缝，入射光波矢 $\boldsymbol{k}$ 沿 z 方向，它在 x 方向的分量 k_x 及相应的空间频率 $f_x=k_x/2\pi$ 均为零. 单缝的存在相当于对入射光施加了 $\Delta x=a$ 的横向空间限制，由前文分析，光波在 x 方向的空间频率 f_x 要产生一定展宽. 参照图 2.5.1(b)(此时 $\Delta x=a$)可知，当只考虑空间频率谱的中央峰时，f_x 的分布范围(正负方向两个一级零点的间隔)是从 $-1/a$ 到 $1/a$，相应地，k_x 的分布范围为从 $-2\pi/a$ 到 $2\pi/a$. 因 k_x 是出射光波矢 $\boldsymbol{k}$ 在 x 方向的投影，而 $k=2\pi/\lambda$ 为常量，故 k_x 有一定分布范围意味着出射光波矢的方位角 θ 有一定分布范围. 由以上数值及图 2.5.3(b)可求得此角范围之半的宽度，即半角宽为

$$\Delta\theta=\sin^{-1}\frac{\lambda}{a}, \tag{2.5.13}$$

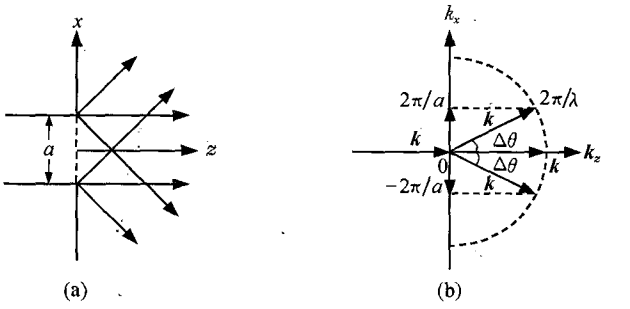


图 2.5.3　单缝对波的横向空间限制(a)及相应的空间频率展宽(b)

而出射光的传播方向基本上限制于以 z 轴正向为中心，向 x 轴正负方向对称扩展，角范围为 $2\Delta\theta$ 的区域之内，各方向的相对光强与图 2.5.1(b)所示振幅谱的平方成比例. 若考虑到该频谱除中央峰外在两侧还有一些小的起伏，则在 $2\Delta\theta$ 区域外还有一些小的光强变化. 这种对波的横向空间限制所造成的光的传播方向横向扩展的现象就是光的衍射. 由(2.5.13)式易见 λ 越大，a 越小，$\Delta\theta$ 越大，衍射现象越显著. 在 4.3.1 节中还将从其他途径进一步讨论单缝衍射，从而印证此处的结果.

最后应当说明，为简明起见，前文对波在空域中的傅里叶分析只给出了一维表达式. 实际上，空间具有三个方向(x,y,z)，所以在最一般情况下这种分析应推广到三维情况. 考虑到在光学中通常关心的是二维平面上的光场分布，以下只给出二维情况下(2.5.7)～(2.5.9)式的推广形式：

$$g(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}G(f_x,f_y)\exp[\mathrm{i}2\pi(f_xx+f_yy)]\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y, \tag{2.5.14}$$

$$G(f_x,f_y)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)\exp[-\mathrm{i}2\pi(f_xx+f_yy)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{2.5.15}$$

$$\Delta f_x\cdot\Delta x\approx 1,\quad \Delta f_y\cdot\Delta y\approx 1. \tag{2.5.16}$$

式中 $\exp[i2\pi(f_x x+f_y y)]$是二维基元函数;$G(f_x,f_y)$是空间函数 $g(x,y)$中所含基元简谐波 $\exp[i2\pi(f_x x+f_y y)]$的复振幅,即 $g(x,y)$的二维空间频率谱;Δx、Δy和 Δf_x、Δf_y 分别是 $g(x,y)$在 x、y 方向的空间展宽和其频谱 $G(f_x,f_y)$在相应方向的空间频率展宽.(2.5.15)和(2.5.14)式分别称为二维傅里叶变换和二维逆傅里叶变换,$g(x,y)$和 $G(f_x,f_y)$构成一二维傅里叶变换对,记为

$$g(x,y) \rightleftharpoons G(f_x,f_y)$$

(2.5.16)式指出,在某一方向对波的空间限制愈甚,则该方向波的空间频率展宽愈大.

2.6 光在两种各向同性介质界面的反射与折射

在几何光学中已指出,只有在均匀介质(n 为常数)中光才是直线传播的,对介质均匀性的破坏则会导致光的偏折.当这种非均匀结构的线度很小时,可以产生后文将要介绍的衍射或散射.本节只讨论光波在两种各向同性的透明(无吸收)介质所形成的大尺度界面的行为,而且这种界面理想化为无限大平面.通常宏观尺度的平面界面对光波而言可以认为是这一模型很好的近似.在这种情况下,从波动光学的观点出发,亦可以导出光的反射和折射定律.由于这些结论已是熟知的,本节的注意力主要集中于分析平面波在界面发生反射和折射时各列波的振幅、强度、能流的关系,以及反射波与折射波的相位与偏振态的变化,这些结果在理论及实践中均有重要的应用.

2.6.1 反射与折射时光的振幅比 菲涅耳公式

设介质 1 和介质 2 皆为各向同性均匀透明介质,其界面为平面.单色平面波从介质 1(折射率为 n_1)射向介质 2(折射率为 n_2).依反射和折射定律,反射波、折射波的波矢方向与入射波的波矢方向应在同一平面即入射面内,且反射角、折射角与入射角满足几何光学中已给出的关系(图 2.6.1).以入射面为基准,任一振动矢量可以分解为两个方向正交的振动分量.其中一个振动方向垂直于入射面,另一个振动方向在入射面之内;前者称为 s 振动或 s 态,后者称为 p 振动或 p 态.因电磁波是横波,满足 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{S}$,若 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 中一个为 s 态,另一个必为 p 态.$\boldsymbol{E}$ 为 s 态,$\boldsymbol{H}$ 为 p 态的波称为**横向电偏振**,记为 TE 波;$\boldsymbol{H}$ 为 s 态,$\boldsymbol{E}$ 为 p 态的波称为**横向磁偏振**,记为 TM 波.这样,任一偏振态的

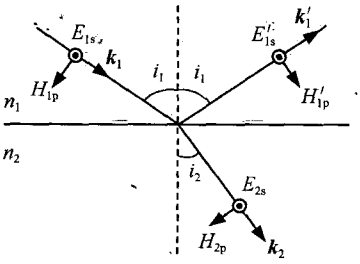


图 2.6.1 TE 波中各量的正向规定

入射光均可依正交分解法看做是 TE 波和 TM 波这两种线偏振光的叠加，所以我们只需考虑这两种基本模式的反射和折射.

根据 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量在界面连续的条件，以及入射波、界面及两侧介质关于入射面的空间对称性，可以判定当入射波中 $\boldsymbol{E}$ 为 s 态、$\boldsymbol{H}$ 为 p 态时，反射波及折射波中 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 也分别为 s 态和 p 态. 为了表述方便，需要对 s、p 态振动的正方向作一规定，这里取 s 态正向为垂直于入射面(即纸面)向外，而 p 态的正向则依据 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{k}$ 依其顺序组成右手正交系来确定.

对于 TE 波，这种规定下各量的正方向如图 2.6.1 所示，其中标记 1、1 和上标“′”、以及 2 分别表示入射光、反射光和折射光，各量皆对界面上同一点而言. 由切向分量连续的边界条件可以得到

$$E_{1s}+E'_{1s}=E_{2s}, \tag{2.6.1}$$

$$-H_{1p}\cos i_1+H'_{1p}\cos i_1=-H_{2p}\cos i_2, \tag{2.6.2}$$

其中 i_1 和 i_2 分别为入(反)射角及折射角. 在光学波段，一般介质均可看做非磁介质，即可认为 $\mu_1=\mu_2=\mu_0$，由电磁理论可得到

$$H=\frac{n}{\mu_0 c}E. \tag{2.6.3}$$

将上式代入(2.6.2)式，有

$$n_1(E_{1s}-E'_{1s})\cos i_1=n_2E_{2s}\cos i_2. \tag{2.6.4}$$

联立(2.6.1)和(2.6.4)式，可解得

$$r_s=\frac{E'_{1s}}{E_{1s}}=\frac{n_1\cos i_1-n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1+n_2\cos i_2}, \tag{2.6.5}$$

$$t_s=\frac{E_{2s}}{E_{1s}}=\frac{2n_1\cos i_1}{n_1\cos i_1+n_2\cos i_2}. \tag{2.6.6}$$

式中 r_s 称为 s 光的**振幅反射率**，它表示界面上反射波中 $\boldsymbol{E}$ 矢量的 s 分量的振幅与入射波中 $\boldsymbol{E}$ 矢量的 s 分量的振幅之比；t_s 称为 s 光的**振幅透射率**，它表示界面上透射波中 $\boldsymbol{E}$ 的 s 分量的振幅与入射波中 $\boldsymbol{E}$ 的 s 分量的振幅之比.

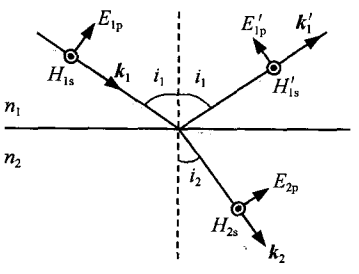


图 2.6.2 TM 波中各量的正向规定

对 TM 波，依前述规定，各量的正方向如图 2.6.2 所示，利用完全类似的方法，可导出

$$r_p=\frac{E'_{1p}}{E_{1p}}=\frac{n_2\cos i_1-n_1\cos i_2}{n_2\cos i_1+n_1\cos i_2}, \tag{2.6.7}$$

$$t_p=\frac{E_{2p}}{E_{1p}}=\frac{2n_1\cos i_1}{n_2\cos i_1+n_1\cos i_2}. \tag{2.6.8}$$

其中 r_p 和 t_p 分别称为 p 光的振幅反射率和振幅透射率，它们分别表示反射和透射波中 $\boldsymbol{E}$ 的 p 分量的振幅与入射波中 $\boldsymbol{E}$ 的 p 分量的振幅之比.

利用关系式 $n_1\sin i_1=n_2\sin i_2$ 可把以上四式化为如下形式：

$$r_s=-\frac{\sin(i_1-i_2)}{\sin(i_1+i_2)}, \tag{2.6.9}$$

$$t_s=\frac{2\cos i_1\sin i_2}{\sin(i_1+i_2)}, \tag{2.6.10}$$

$$r_p=\frac{\tan(i_1-i_2)}{\tan(i_1+i_2)}, \tag{2.6.11}$$

$$t_p=\frac{2\cos i_1\sin i_2}{\sin(i_1+i_2)\cos(i_1-i_2)}. \tag{2.6.12}$$

(2.6.5)～(2.6.8)式或其等价形式(2.6.9)～(2.6.12)式称为**菲涅耳公式**.

以下对菲涅耳公式作几点说明. 首先，由于 E_s 和 E_p 是同一矢量 $\boldsymbol{E}$ 的 s 分量和 p 分量，它们具有相同的时间频率，以上各式中各个 E_s，E_p 既可看做是复振幅，也可以看做是瞬时值. 其次，在不同的正向规定下，某些公式的符号可能有所变化，但这种正向规定当然不应也不会影响问题的物理实质. 若在某种正向规定下求得某个量为正值，表明该分量的实际方向与所规定的正向相同，负值则表示相反. 最后，该公式显示，反射波及透射波的 s 分量只与入射波的 s 分量有关，反射波及透射波的 p 分量只与入射波的 p 分量有关，即 s 态线偏振光与 p 态线偏振光是互相独立的，这又一次说明将一般振动分解为 s 态与 p 态的合理性.

为将 r_s，t_s，r_p，t_p 表示为入射角 i_1 的函数，可利用折射定律从(2.6.5)～(2.6.8)各式中消去 i_2 而得到

$$r_s=\frac{\cos i_1-\sqrt{n_{21}^2-\sin^2 i_1}}{\cos i_1+\sqrt{n_{21}^2-\sin^2 i_1}}, \tag{2.6.13}$$

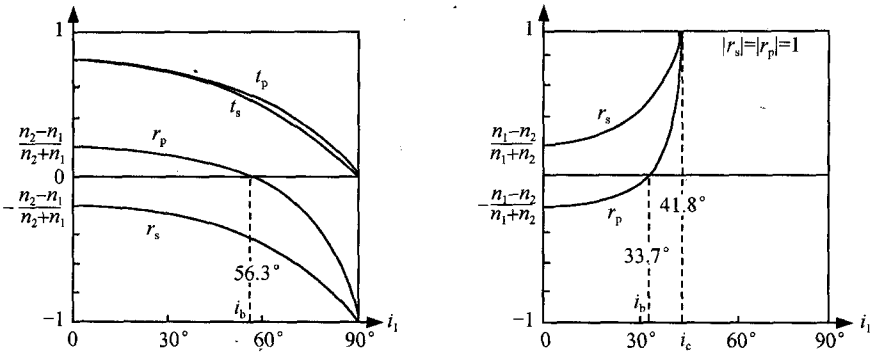
$$t_s=\frac{2\cos i_1}{\cos i_1+\sqrt{n_{21}^2-\sin^2 i_1}}, \tag{2.6.14}$$

$$r_p=\frac{n_{21}^2\cos i_1-\sqrt{n_{21}^2-\sin^2 i_1}}{n_{21}^2\cos i_1+\sqrt{n_{21}^2-\sin^2 i_1}}, \tag{2.6.15}$$

$$t_p=\frac{2n_{21}\cos i_1}{n_{21}^2\cos i_1+\sqrt{n_{21}^2-\sin^2 i_1}}, \tag{2.6.16}$$

式中 $n_{21}=n_2/n_1$ 为介质 2 对介质 1 的相对折射率.

$n_2>n_1$ 即 $n_{21}>1$，从光疏介质射向光密介质的情况称为**外反射**，如从空气射向玻璃；$n_2<n_1$ 即 $n_{21}<1$，从光密介质射向光疏介质的情况称为**内反射**，如从玻璃射向空气. 由以上四式所得到的外反射和内反射时各振幅比的图线在图 2.6.3(a)和(b)中示出. 其中有三个特殊的入射角度值得注意.



(a) 外反射 (n_{21}=1.5) (b) 内反射 (n_{21}=1/1.5)

图 2.6.3 反射及折射时的振幅比(以空气—玻璃界面为例)

(1) 正入射,$i_1=0$. 此时不论外反射还是内反射,均有

$$r_s=-\frac{n_{21}-1}{n_{21}+1}=\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}, \tag{2.6.17}$$

$$r_p=-r_s=\frac{n_{21}-1}{n_{21}+1}=\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1}, \tag{2.6.18}$$

$$t_s=t_p=\frac{2}{n_{21}+1}=\frac{2n_1}{n_1+n_2}. \tag{2.6.19}$$

(2) 不论是外反射还是内反射,都存在一特殊角度

$$i_b=\tan^{-1}n_{21}=\tan^{-1}\frac{n_2}{n_1}, \tag{2.6.20}$$

当 $i_1=i_b$ 时,$r_p=0$. i_b 称为**布儒斯特**(D. Brewster)**角**.

(3) 对内反射,存在一特殊角度

$$i_c=\sin^{-1}n_{21}=\sin^{-1}\frac{n_2}{n_1}, \tag{2.6.21}$$

当 $i_1=i_c$ 时,$r_s=r_p=1$. 角度 i_c 称为**全反射临界角**.

2.6.2 反射与折射时光的光强比与能流比

(2.1.19)式中已引入光场的平均能流密度即光强的表达式

$$I=\frac{n}{2\mu c}E_0^2,$$

其中 E_0 为振幅. 在同一介质中,n、μ 为常数,考虑相对强度时可定义 $I=E_0^2$. 在反射与折射问题中,尽管 $\mu_1=\mu_2=\mu_0$,但一般地 $n_1\neq n_2$,故 $I\propto nE_0^2$,即计算不同介质中的光强比时要考虑到不同折射率的影响. 由此可得到光强比的下列表达式:

s 光的**光强反射率**

$$R_s = \frac{I'_{1s}}{I_{1s}} = \frac{n_1 \mid E'_{1s} \mid^2}{n_1 \mid E_{1s} \mid^2} = \mid r_s \mid^2, \tag{2.6.22}$$

p 光的光强反射率

$$R_p = \frac{I'_{1p}}{I_{1p}} = \frac{n_1 \mid E'_{1p} \mid^2}{n_1 \mid E_{1p} \mid^2} = \mid r_p \mid^2, \tag{2.6.23}$$

s 光的**光强透射率**

$$T_s = \frac{I_{2s}}{I_{1s}} = \frac{n_2 \mid E_{2s} \mid^2}{n_1 \mid E_{1s} \mid^2} = \frac{n_2}{n_1} \mid t_s \mid^2, \tag{2.6.24}$$

p 光的光强透射率

$$T_p = \frac{I_{2p}}{I_{1p}} = \frac{n_2 \mid E_{2p} \mid^2}{n_1 \mid E_{1p} \mid^2} = \frac{n_2}{n_1} \mid t_p \mid^2. \tag{2.6.25}$$

另一方面，可以由光强比分析通过界面上某一面积的入射光、反射光和折射光的光通量之比，即能流比. 在图 2.6.4 中，W_1、W'_1和 W_2 分别表示面元 A 所对应的入射能流、反射能流和透射能流. 显然，穿过 A 的入射光束和反射光束的垂直截面面积相等，记为 A_1；折射光束的垂直截面面积记为 A_2. 由光通量定义，

$$W_1 = I_1 A_1 = I_1 A \cos i_1,$$
$$W'_1 = I'_1 A_1 = I'_1 A \cos i_1,$$
$$W_2 = I_2 A_2 = I_2 A \cos i_2,$$

式中 I_1、I'_1和 I_2 分别表示入射光、反射光和折射光的光强，可以得到 s 光的**能流反射率**

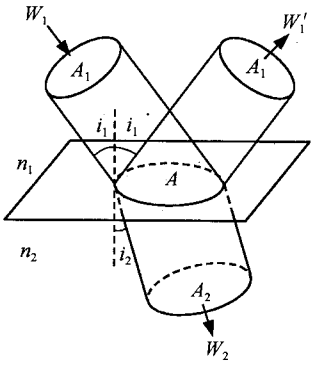


图 2.6.4 穿过面元 A 的入射能流、反射能流及透射能流

$$\mathscr{R}_s = \frac{W'_{1s}}{W_{1s}} = \frac{I'_{1s}}{I_{1s}} = R_s, \tag{2.6.26}$$

p 光的能流反射率

$$\mathscr{R}_p = \frac{W'_{1p}}{W_{1p}} = \frac{I'_{1p}}{I_{1p}} = R_p, \tag{2.6.27}$$

s 光的**能流透射率**

$$\mathscr{T}_s = \frac{W_{2s}}{W_{1s}} = \frac{I_{2s}\cos i_2}{I_{1s}\cos i_1} = \frac{\cos i_2}{\cos i_1} T_s, \tag{2.6.28}$$

p 光的能流透射率

$$\mathscr{T}_p = \frac{W_{2p}}{W_{1p}} = \frac{I_{2p}\cos i_2}{I_{1p}\cos i_1} = \frac{\cos i_2}{\cos i_1} T_p. \tag{2.6.29}$$

可见对反射光，能流反射率 $\mathscr{R}$ 与光强反射率 R 相同；对折射光，能流透射率 $\mathscr{T}$ 与光

强透射率 T 一般有所区别，只是在正入射时二者相同.

由以上各式及菲涅耳公式可以得到

$$\mathscr{R}_s+\mathscr{T}_s=1, \tag{2.6.30}$$

$$\mathscr{R}_p+\mathscr{T}_p=1. \tag{2.6.31}$$

在物理上，它们反映了反射与折射时 s 态光与 p 态光各自的能量守恒关系.

实用中经常遇到自然光入射的情况，观测量一般是(s 态和 p 态的)总光强或总能流. 定义**总能流反射率**

$$\mathscr{R}=\frac{\text{总反射能流 } W_1'}{\text{总入射能流 } W_1}=\frac{W_{1s}'+W_{1p}'}{W_{1s}+W_{1p}}. \tag{2.6.32}$$

对自然光，两个正交的线偏振光分量强度相等，即 $W_{1s}=W_{1p}=W_1/2$，故有

$$\mathscr{R}=\frac{W_{1s}'+W_{1p}'}{W_1}=\frac{W_{1s}'}{2W_{1s}}+\frac{W_{1p}'}{2W_{1p}}=\frac{1}{2}(\mathscr{R}_s+\mathscr{R}_p). \tag{2.6.33}$$

类似可得**总光强反射率**

$$R=\frac{\text{总反射光强 } I_1'}{\text{总入射光强 } I_1}=\frac{I_{1s}'+I_{1p}'}{I_{1s}+I_{1p}}=\frac{1}{2}(R_s+R_p)=\mathscr{R}. \tag{2.6.34}$$

由能量守恒关系

$$\mathscr{R}+\mathscr{T}=1, \tag{2.6.35}$$

可以得到**总能流透射率**

$$\mathscr{T}=1-\mathscr{R}=1-R. \tag{2.6.36}$$

自然光的**总光强透射率**则为

$$T=\frac{\text{总透射光强 } I_2}{\text{总入射光强 } I_1}=\frac{I_{2s}+I_{2p}}{I_{1s}+I_{1p}}=\frac{1}{2}(T_s+T_p). \tag{2.6.37}$$

为便于比较，将各种反射率和透射率的定义及有关公式列于表 2.6.1.

表 2.6.1 各种反射率及透射率的定义及有关公式

	s 分量	p 分量	自然光*
振幅反射率	$r_s=\frac{E_{1s}'}{E_{1s}}$	$r_p=\frac{E_{1p}'}{E_{1p}}$	
振幅透射率	$t_s=\frac{E_{2s}}{E_{1s}}$	$t_p=\frac{E_{2p}}{E_{1p}}$	
光强反射率	$R_s=\frac{I_{1s}'}{I_{1s}}=\lvert r_s\rvert^2$	$R_p=\frac{I_{1p}'}{I_{1p}}=\lvert r_p\rvert^2$	$R=\frac{I_1'}{I_1}=\frac{1}{2}(R_s+R_p)=\mathscr{R}$
光强透射率	$T_s=\frac{I_{2s}}{I_{1s}}=\frac{n_2}{n_1}\lvert t_s\rvert^2$	$T_p=\frac{I_{2p}}{I_{1p}}=\frac{n_2}{n_1}\lvert t_p\rvert^2$	$T=\frac{I_2}{I_1}=\frac{1}{2}(T_s+T_p)$
能流反射率	$\mathscr{R}_s=\frac{W_{1s}'}{W_{1s}}=R_s$	$\mathscr{R}_p=\frac{W_{1p}'}{W_{1p}}=R_p$	$\mathscr{R}=\frac{W_1'}{W_1}=\frac{1}{2}(\mathscr{R}_s+\mathscr{R}_p)$
能流透射率	$\mathscr{T}_s=\frac{W_{2s}}{W_{1s}}=\frac{\cos i_2}{\cos i_1}T_s=1-R_s$	$\mathscr{T}_p=\frac{W_{2p}}{W_{1p}}=\frac{\cos i_2}{\cos i_1}T_p=1-R_p$	$\mathscr{T}=\frac{W_2}{W_1}=1-\mathscr{R}=1-R$

* 对自然光，各反射率和透射率皆对总光强和总能流而言.

图 2.6.5(a)和(b)中以空气($n=1$)-玻璃($n=1.5$)界面为例分别绘出了外反射及内反射时的反射光强比及透射能流比的曲线,其中虚线是对自然光入射而言.

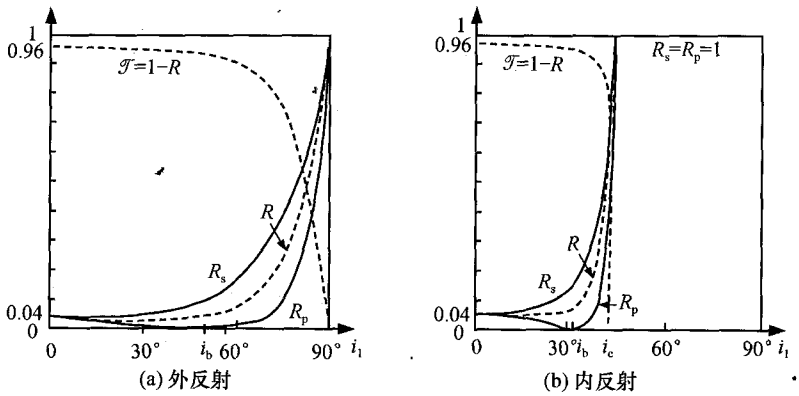


图 2.6.5 反射光强比及透射能流比曲线(以空气-玻璃界面为例)

值得注意的是,无论外反射或内反射,正入射时均有

$$R_s=R_p=R=\left(\frac{n_{21}-1}{n_{21}+1}\right)^2=\left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2, \tag{2.6.38}$$

$$T_s=T_p=T=\frac{4n_{21}}{(n_{21}+1)^2}=\frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}. \tag{2.6.39}$$

对空气-玻璃界面,有 $R=0.04$,$T=0.96$. 在外反射时,R 一般随入射角 i_1 的增大而增大,当 $i_1\to 90°$即掠入射时,R_s、R_p 及 R 均趋于 1. 利用这些结论可以解释许多自然现象. 例如,在湖岸边观察水下物体时近物要比远物更加清楚;与此相反,远处物体在湖面的倒影则比近物的倒影更加清晰.

例 2.6.1 (1) 求证:当光线以布儒斯特角入射时,折射线与反射线互相垂直.

(2) 讨论当 p 光以布儒斯特角入射时透射光与入射光的能流比及光强比.

解 (1) $i_1=i_b$ 时,有 $\tan i_1=n_{21}$. 代入折射定律,$\sin i_1=n_{21}\sin i_2=\tan i_1\sin i_2$,得 $\cos i_1=\sin i_2$. 因 i_1,i_2 均为锐角,故有 $i_1+i_2=\pi/2$.

(2) 此时 $r_p=0$,$\mathcal{R}_p=0$,$\mathcal{T}_p=1-\mathcal{R}_p=1$,即能量全部进入第二介质.

由(2.6.12)式,并注意到 $i_1+i_2=\pi/2$,可得

$$t_p=\frac{2\cos i_1\sin i_2}{\sin(i_1+i_2)\cos(i_1-i_2)}=\frac{2\cos^2 i_1}{\cos\left[i_1-\left(\frac{\pi}{2}-i_1\right)\right]}$$

$$=\frac{2\cos^2 i_1}{\sin 2i_1}=\frac{1}{\tan i_1}=\frac{1}{n_{21}}.$$

代入(2.6.25)式,得 $T_p=n_{21}|t_p|^2=\dfrac{1}{n_{21}}$.

可见当光从光疏介质进入光密介质时，$n_{21}>1$，$T_p<1$，透射光强小于入射光强；当光从光密介质进入光疏介质时，$n_{21}<1$，$T_p>1$，透射光强大于入射光强. 此结论很容易用几何作图法根据光束截面的相对大小来验证.

2.6.3 反射光与折射光的相位变化

将菲涅耳公式中 E_s、E_p 各量看做复振幅，则 r、t 各量表示反射波、折射波的复振幅与入射波复振幅之比. 一般地说复振幅之比亦是复数，其模表示实振幅之比，其辐角表示反射波、折射波相对于入射波的相位变化，或称**附加相移**. 本节只讨论外反射和 $i_1<i_c$ 的内反射，由菲涅耳公式易见这时各 r、t 皆为实数. 当它们为正值时，表示附加相移为零；当它们为负值时，表示附加相移为 π(或 $-\pi$). 以下分别说明几种情况.

1. 折射光永无相移

考查(2.6.10)及(2.6.12)式，由于 i_1 与 i_2 的取值范围不超过 0～90°，i_1+i_2 与 i_1-i_2 的变化范围分别不超过 0～180°和 ±(0～90°)，这时不论 i_1(以及 n_1、n_2)为何值，恒有 $t_s>0$，$t_p>0$，即透射光永远与入射光同相.

2. 反射光的相位变化

1) 外反射，$n_1<n_2$，$i_1>i_2$.

对 s 光，由(2.6.9)式知 $r_s<0$，即 E'_{1s} 与 E_{1s} 反相.

对 p 光，由(2.6.11)式知，当 $i_1<i_b$ 时，$i_1+i_2<90°$，$r_p>0$，E'_{1p} 与 E_{1p} 同相；当 $i=i_b$ 时，$i_1+i_2=90°$，$r_p=0$，无反射 p 光；当 $i_1>i_b$ 时，$i_1+i_2>90°$，$r_p<0$，E'_{1p} 与 E_{1p} 反相.

2) 内反射，$n_1>n_2$，$i_1<i_2$.

对 s 光，当 $i_1<i_c$ 时，由(2.6.9)式知 $r_s>0$，即 E'_{1s} 与 E_{1s} 同相.

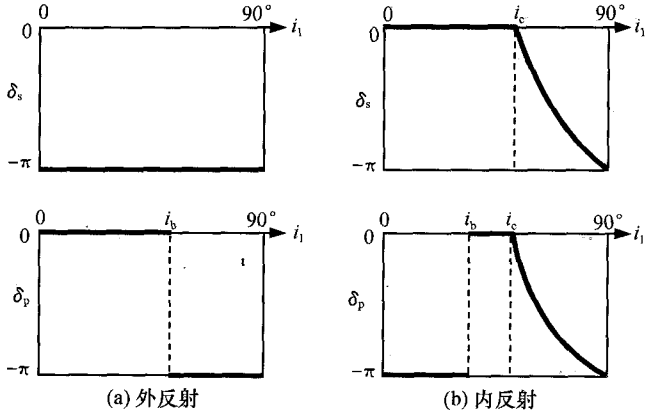
对 p 光，由(2.6.11)式知，当 $i_1<i_b$ 时，$r_p<0$，E'_{1p} 与 E_{1p} 反相；当 $i_1=i_b$ 时，$r_p=0$，无反射 p 光；当 $i_b<i_1<i_c$ 时，$r_p>0$，E'_{1p} 与 E_{1p} 同相.

记

$$r_s=|r_s|e^{i\delta_s},\quad r_p=|r_p|e^{i\delta_p},\tag{2.6.40}$$

则 δ_s、δ_p 的取值如图 2.6.6 所示①，其中内反射时 $i_1>i_c$ 的部分将在 2.6.5 节中讨论.

① 其中图(a)中之 δ_s 及图(b)中 $i_1<i_b$ 时 δ_p 值之 $-\pi$ 亦可换为 π，采用 $-\pi$ 是为与图(b)中 $i_1>i_c$ 部分的表示一致.



(a) 外反射　　(b) 内反射

图 2.6.6　反射引起的附加相移

3. 关于半波损失问题的讨论

1) 单个界面的反射和折射

从前文分析可以看出，在某些情况下，界面上反射波的 $\boldsymbol{E}$ 矢量相对于入射波的 $\boldsymbol{E}$ 矢量可以发生方向反转. 这种方向反转相当于产生了相位跃变 $\pm\pi$，或者光程跃变 $\pm\lambda/2$，习惯上常称为**半波损失**或半波损. 显然，$\boldsymbol{E}$ 矢量方向反转时其两个正交分量(s 分量与 p 分量)均发生方向反转. 在一般斜入射时，反射光及折射光中的 p 分量与入射光中的 p 分量互成一定角度，既不同向也不反向，所以谈不到 $\boldsymbol{E}$ 矢量反转的问题. 只有对正入射或掠入射的情况才可能发生 $\boldsymbol{E}$ 方向反转.

先看正入射的情况. 这时 $i_1=0$，由菲涅耳公式或图 2.6.6 可确定在外反射和内反射时各振幅比的符号如表 2.6.2 所示.

表 2.6.2　正入射时振幅比的符号

	外反射($n_1<n_2$)	内反射($n_1>n_2$)
r_s	−	+
r_p	+	−
t_s	+	+
t_p	+	+

振幅比的正负分别说明相应 $\boldsymbol{E}$ 分量的实际方向与规定正向一致或相反. 由图 2.6.1 和 2.6.2，可以看出正入射时 $\boldsymbol{E}$ 的 s 分量和 p 分量的规定正向如图 2.6.7(a)所示. 设界面处入射波场的实际方向与所规定的正向一致，在外反射时，由于 $r_s<0$，反射波 s 分量的实际方向与规定正向相反；由于 r_p、t_s、t_p 均大于零，反射波的 p 分量与透射波的 s、p 分量均与各自的规定正向一致. 这样，外反射时各波场的实际方向如图 2.6.7(b)所示. 同理，可以得到内反射时各波场的实际方向如图 2.6.7(c)

所示. 显然,外反射时反射波 $\boldsymbol{E}$ 矢量的 s、p 分量与入射波相比都发生了方向反转,且 $|r_s|=|r_p|$,故 $\boldsymbol{E}$ 亦发生方向反转,即产生了半波损失;而内反射时反射波 $\boldsymbol{E}$ 矢量与入射波 $\boldsymbol{E}$ 矢量同向,不发生半波损失. 对透射波,则不论外反射或内反射,均无半波损失.

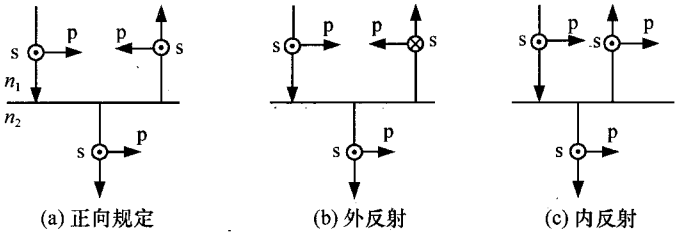


图 2.6.7　正入射时波场的规定正向[(a)]与实际方向[(b)、(c)]

同样可分析掠入射的情况. 只考虑外反射,$n_1<n_2$,因 $i_1\to 90°$,由菲涅耳公式或图 2.6.6(a)或图 2.6.3(a)均可看出 $r_s<0$,$r_p<0$,且 $|r_s|=|r_p|\approx 1$. 设界面上入射波场两分量的实际方向均与其规定正向(图 2.6.8(a))一致,则反射波场中 $\boldsymbol{E}$ 矢量的 s、p 分量的实际方向(图 2.6.8(b))均与其规定正向相反,亦与入射波中两相应分量方向相反. 从而反射波的 $\boldsymbol{E}$ 矢量与入射波的 $\boldsymbol{E}$ 矢量相比发生了方向反转,即产生了半波损失.

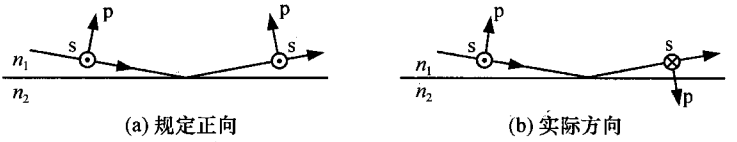


图 2.6.8　掠入射时波场的规定正向与实际方向

2) 介质板上下表面的反射与折射

设一块折射率为 n 的平行透明介质板置于折射率为 n_0 的介质中,如图 2.6.9 所示,单色平行光束 0 以 i_0 角入射,由于光线在介质板内的多次反射,在上下界面分别发出一系列互相平行的反射光束 1,2,3,…和透射光束 1′,2′,3′,…. 现在考察反射与折射对光束 1,2,3,…或 1′,2′,3′,…之间的相位差带来什么影响.

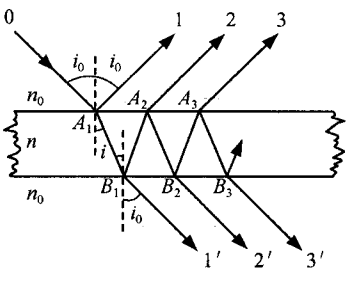


图 2.6.9　光束经平行平面介质板的多次反射及透射

先分析 $n>n_0$ 的情况. 设入射光束 0 在界面处 $\boldsymbol{E}$ 振动的 s、p 分量与规定正向一致. 在 i_0 小于上界面的布儒斯特角 $i_{b0}=\tan^{-1}(n/n_0)$ 时,由图 2.6.6(a)知对反射光有 $r_s<0$,$r_p>0$;对 A_1—B_1 的

折射光及透射光 1′则有 $t_s>0, t_p>0$. 由此可得出反射光束 1、折射光束 A_1B_1(不计介质厚度引起的光程差，只考虑反射及折射影响时，下同)及透射光束 1′中场的实际方向如图 2.6.10(a)所示. 另外可以证明，在 $i_0<i_{b0}$ 的条件下，下界面的入射角 i 亦小于该界面相应的布儒斯特角 $i_b=\tan^{-1}(n_0/n)$，由图 2.6.6(b)知光束 A_1B_1 在下界面反射时有 $r_s>0, r_p<0$；这样便可得出光束 B_1A_2 中场的实际方向. 当此光束穿出上界面时，$t_s>0, t_p>0$，光束 2 中场的实际方向与 B_1A_2 段相比除光线偏折对 p 分量方向的影响之外是相同的. 依此类推，可以得出各个光束中 $\boldsymbol{E}$ 的 s 分量与 p 分量的实际方向. 可见反射光束中，2，3，…诸光束 $\boldsymbol{E}$ 振动方向均相同，且都与光束 1 中 $\boldsymbol{E}$ 振动反向；而所有透射光束中 $\boldsymbol{E}$ 振动方向皆相同. 由于以上分析中未计及介质厚度引起的光程差，它所考虑的只是由于反射和折射所带来的附加的 $\boldsymbol{E}$ 振动方向变化，其等效的相位或光程变化常称为**附加相差**或**附加程差**. 对光束 1，2，其附加相差为 $\pm\pi$，或说附加程差为 $\pm\lambda/2$；在光束 2，3，4，…或光束 1′，2′，3′，…之间附加相差或附加程差均为零.

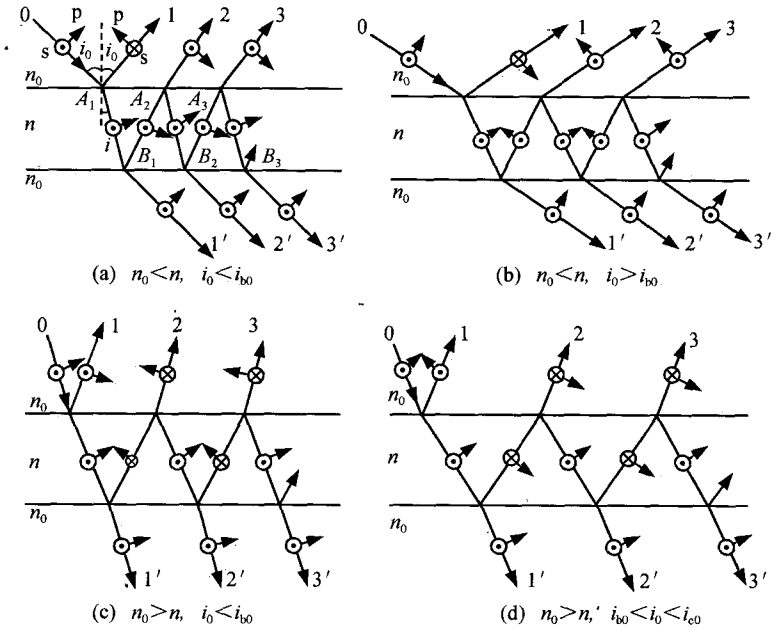


图 2.6.10 介质板的反射与折射所引起的附加相差

同理可分析 $n_0<n$、$i_0>i_{b0}$，$n_0>n$、$i_0<i_{b0}$ 以及 $n_0>n$、$i_{b0}<i_0<i_{c0}$ 的情况，在不计介质厚度引起的光程差时各光束的实际振动方向分别在图 2.6.10(b)、(c)、(d)中示出.

总结 1)、2)中的分析，对各种情况下计算光程差时是否要引入半波损可得出

以下结论：

(1) 单一界面：

① 当光从光疏介质射向光密介质，正入射及掠入射时反射光均有半波损；

② 当光从光密介质射向光疏介质，正入射时反射光无半波损(掠入射时发生全反射，这里不予讨论)；

③ 任何情况下透射光均无半波损.

(2) 介质板放于均匀介质中：

任何情况下，当计算反射光束 1,2 之间的光程差时需引入附加半波程差；而在反射光束 2,3,4,…之间或透射光束 1′,2′,3′,…之间则无需引入附加程差.

2.6.4　反射光与折射光的偏振态

任何偏振态的入射光均可分解为 s、p 两个正交分量，由于 r_s 与 r_p，以及 t_s 与 t_p 一般是不同的，所以反射光及折射光中 s、p 两分量的相对大小及相对相位关系与入射光相比可以发生变化，即可以与入射光具有不同的偏振结构. 本节只讨论外反射及内反射中 $i_1<i_c$，即 r_s、r_p、t_s、t_p 均为实数的情况. 以下考虑几种常见的情形.

1) 入射光为线偏振光

对入射线偏振光，其 s、p 分量的相位差非 0 即 π；因 r_s、r_p 非正即负，反射引起的 s、p 分量各自的相位变化亦非 0 即 π. 这样，反射光中两分量的相对相位差仍非 0 即 π，因而反射光仍是线偏振光. 但由于 r_s、r_p 的符号和大小一般不同，故反射光中 $\boldsymbol{E}$ 矢量的取向及大小与入射光中 $\boldsymbol{E}$ 的取向及大小一般不同. 以下以一个例子说明反射时的情况，对折射光可作类似分析.

例 2.6.2　一束线偏振平面波从空气($n_1=1$)射向玻璃($n_2=1.5$)，入射角为 30°，入射光光矢量 $\boldsymbol{E}_1$ 与入射面成 45°度角，如图 2.6.11 所示. 求反射光光矢量的取向及相对大小，以及反射光与入射光的光强比.

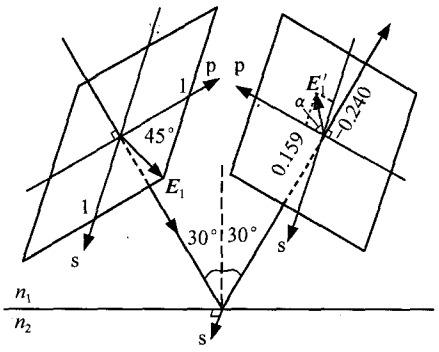


图 2.6.11　例 2.6.2 图

解　将入射光及反射光均分解为两正交分量 s 光与 p 光，其正向如图中所示. 将 $i_1=30°$，$n_{21}=n_2/n_1=1.5$ 代入(2.6.13)及(2.6.15)式，可求得

$$r_s=\frac{\cos30°-\sqrt{1.5^2-\sin^2 30°}}{\cos30°+\sqrt{1.5^2-\sin^2 30°}}=-0.240,$$

$$r_p=\frac{1.5^2\cos30°-\sqrt{1.5^2-\sin^2 30°}}{1.5^2\cos30°+\sqrt{1.5^2-\sin^2 30°}}=0.159.$$

设某时刻 $\boldsymbol{E}_1$ 方位如图示，因 $\boldsymbol{E}_1$ 与入射面成 45°角，取相对标度，可记 $E_{1s}=E_{1p}=1$，该时刻反射光光矢量 $\boldsymbol{E}_1'$ 两分量的相对大小为 $E_{1s}'=r_sE_{1s}=-0.240$ 和 $E_{1p}'=r_pE_{1p}=0.159$，由此二分量可得到 $\boldsymbol{E}_1'$ 的方位及相对大小如图中所示，并可求出 $\boldsymbol{E}_1'$ 与入射面的夹角 $\alpha=\arctan(0.240/0.159)=56.5°$.

将 r_s，r_p 看作振幅比，可求得反射光与入射光的光强比

$$\frac{I_1'}{I_1}=\frac{E_{1s}'^2+E_{1p}'^2}{E_{1s}^2+E_{1p}^2}=\frac{r_s^2+r_p^2}{1^2+1^2}=\frac{1}{2}\times[(-0.240)^2+0.159^2]=0.0414.$$

2）入射光为圆偏振光

由于一般 $|r_s|\neq|r_p|$，反射光将变为椭圆偏振光（$i_1=i_b$ 时为线偏振光）. 反射光旋向与入射光旋向的关系，则由 r_s 和 r_p 的符号而定. 从图 2.6.6 可看出，当 $i_1<i_b$ 时，无论外反射或内反射，由反射所引起的 s 光与 p 光的相对附加相差（各自附加相移之差）均为 $\Delta\delta=\delta_s-\delta_p=\pm\pi$，故反射光旋向与入射光旋向相反①. 当外反射中 $i_1>i_b$ 和内反射中 $i_b<i_1<i_c$ 时，$\Delta\delta=0$，反射光与入射光旋向相同.

3）入射光为自然光

与圆偏振光类似，自然光亦可分解为两个强度相等的正交振动 s 光和 p 光，不过这时 s 光与 p 光并无确定的相位关系，故各振幅比的符号对宏观观测不起作用. 反射光中两正交分量强度之比决定于 R_s 与 R_p 之比. 由于一般地 $R_s\neq R_p$，并且对外反射和 $i_1<i_c$ 的内反射通常有 $R_s>R_p$（参见图 2.6.5），因此反射光通常为部分偏振光，且 s 光强度要大于 p 光强度. 同理可知折射光一般亦为部分偏振光，且 p 光强度较大.

这里仍需注意三个特殊入射角的情况：

（1）正入射（包括外反射和内反射）及掠入射（只考虑外反射）时，由于 $R_s=R_p$，反射光仍为自然光；由 s 光与 p 光各自的能量守恒关系，知折射光亦是自然光.

（2）以布儒斯特角 i_b 入射（包括外反射及内反射）时，由于 $R_p=0$，反射光为 *s* 态线偏振光；折射光中因 s 光成分的减少而变成 p 态占优势的部分偏振光.

实际上，任意偏振态的光以 $i=i_b$ 角入射时，反射光均变成 s 态线偏振光（除非 p 态线偏振光入射，这时无反射光），因此角度 i_b 又称**全偏振角**或**起偏角**. 此现象提供了从自然光中获取线偏振光的一个简便而有效的方法. 由于实用中往往不希望改变光的传播方向，所以多利用平板玻璃的透射光. 可以证明（习题 2.43），当入射光在平板的上界面满足布儒斯特角条件时，折射光在下界面也满足布儒斯特角条件. 这样，当利用多片彼此平行放置的、由同样材料制成的平行玻璃板（常称为**玻片**

① 由图 2.6.1 和图 2.6.2 可知，根据本节规定，无论对入射光、反射光和折射光，$\boldsymbol{E}_p$、$\boldsymbol{E}_s$ 和 $\boldsymbol{k}$ 的规定正向均依其次序组成右手正交系. 故可将 $\boldsymbol{E}_p$、$\boldsymbol{E}_s$ 正向分别看做 x、y 轴正向而利用 2.3.5 节和 2.4 节中的有关分析和判据来确定光的偏振态.

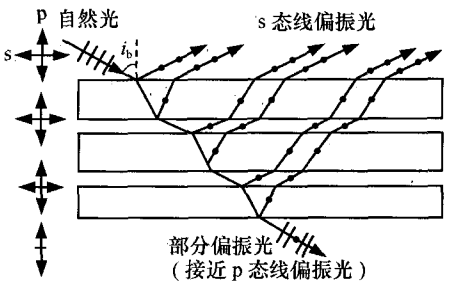


图 2.6.12 玻片堆引起的偏振

堆，如图 2.6.12 所示)时，只要光在第一个界面的入射角为布儒斯特角，则在以下各界面的入射角均为布儒斯特角，各个界面的反射光均为 s 光. 每经过一个界面，透射光中 s 光成分就减少一些，而 p 光成分则完全通过，故折射的部分偏振光的偏振度会逐次增大. 经过多层玻璃板，最后的透射光基本上已没有 s 光成分，而成为 p 态线偏振光.

生活中常会遇到反射引起部分偏振的现象. 例如，在拍摄水上景物时，水面炫目的反射光往往会破坏摄影效果，这种反射眩光是 s 态占优势的部分偏振光. 欲减弱它的影响，只需在镜头前附加一个透振方向在入射面内的偏振片.

2.6.5 全反射与隐失波

1. 全反射

当光从光密介质 1 射向光疏介质 2 且入射角 $i_1 > i_c$ 时，由(2.6.13)式及(2.6.15)式，知 r_s、r_p 成为复数，即

$$r_s = \frac{\cos i_1 - \mathrm{i}\sqrt{\sin^2 i_1 - n_{21}^2}}{\cos i_1 + \mathrm{i}\sqrt{\sin^2 i_1 - n_{21}^2}}, \tag{2.6.41}$$

$$r_p = \frac{n_{21}^2\cos i_1 - \mathrm{i}\sqrt{\sin^2 i_1 - n_{21}^2}}{n_{21}^2\cos i_1 + \mathrm{i}\sqrt{\sin^2 i_1 - n_{21}^2}}. \tag{2.6.42}$$

易见 $|r_s| = |r_p| = 1$，即 $\mathscr{R} = \mathscr{R}_s = \mathscr{R}_p = 1$，入射波的全部能量都被反射回介质 1 中，所以这种情况被称为全内反射或全反射.

由以上两式还可以求得全反射时 s 光的相移 δ_s 及 p 光的相移 δ_p：

$$\delta_s = \arg\{r_s\} = -2\arctan\frac{\sqrt{\sin^2 i_1 - n_{21}^2}}{\cos i_1}, \tag{2.6.43}$$

$$\delta_p = \arg\{r_p\} = -2\arctan\frac{\sqrt{\sin^2 i_1 - n_{21}^2}}{n_{21}^2\cos i_1}. \tag{2.6.44}$$

相应的曲线已示于图 2.6.6(b). 由于一般 $\delta_s \neq \delta_p$，故全反射可对 s 光和 p 光引入附加的相对相位差 $\Delta\delta = \delta_s - \delta_p$. 因此，当线偏振光入射时，全反射光一般变为椭圆偏振光.

2. 隐失波

全反射时，射向第二介质的能流被完全反射回第一介质中，没有流向第二介质的平均能流. 但由前文关于单界面反射时半波损的分析以及全反射时 δ_s 和 δ_p 的表达式，可知在界面处入射波 $\boldsymbol{E}$ 矢量与反射波 $\boldsymbol{E}$ 矢量一般不会反向，故界面上表面的总波场并非为零. 依 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 的切向连续性，下表面亦应有波场存在，即波场将延伸到第二介质中. 以下用与普通折射(图 2.6.13)相同的方式写出透射波的一般表达式，然后用复数运算求得透射波的具体形式，这种运算的合理性已被实践所证实.

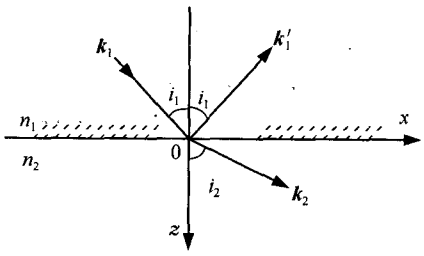


图 2.6.13 分析全反射用坐标系

对普通折射建立图 2.6.13 所示的坐标系，透射波波函数可写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_2 &= \boldsymbol{E}_{20}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]\\ &= \boldsymbol{E}_{20}\exp[\mathrm{i}k_2(x\sin i_2+z\cos i_2)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},\end{aligned}\tag{2.6.45}$$

式中 $k_2=2\pi/\lambda_2$，λ_2 为介质 2 中光波波长. 当 $i_1>i_c$ 时，由折射定律 $\sin i_1=n_{21}\sin i_2$，可得 $\sin i_2>1$，在实数范围 i_2 已无意义. 但我们仍可作如下的形式运算：

$$\begin{aligned}\cos i_2 &= \pm\sqrt{1-\sin^2 i_2} = \pm\mathrm{i}\sqrt{\sin^2 i_2-1}\\ &= \pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{\sin^2 i_1}{n_{21}^2}-1} = \pm\mathrm{i}\beta,\end{aligned}\tag{2.6.46}$$

式中

$$\beta=\sqrt{\frac{\sin^2 i_1}{n_{21}^2}-1}\tag{2.6.47}$$

为正实数. (2.6.45)式化为

$$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_{20}\mathrm{e}^{\mp k_2\beta z}\exp(\mathrm{i}k_2 x\sin i_1/n_{21})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}.\tag{2.6.48}$$

上式中因子 $\mathrm{e}^{k_2\beta z}$ 意味着在第二介质中随深度的增加波场振幅将趋于无限大，这显然是不合理的，故舍去此形式的解，从而有

$$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_{20}\exp(-k_2\beta z)\exp(\mathrm{i}k_2 x\sin i_1/n_{21})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}.\tag{2.6.49}$$

上式中第一项指数因子表示波的振幅随深度 z 的增加呈指数衰减. 通常定义第二介质中波的振幅衰减到最大值(界面处)的 1/e 时的深度为**穿透深度** z_0，易见

$$z_0=\frac{1}{k_2\beta}=\frac{\lambda_1}{2\pi\sqrt{\sin^2 i_1-n_{21}^2}},\tag{2.6.50}$$

λ_1 为介质 1 中的波长. 当 i_1 不太接近 i_c 时，z_0 很小，只有波长数量级，因此介质 2 中的波随深度增加衰减很快. 这种在空域中迅速衰减的波称为**隐失波**(evanescent

wave，曾用名尚有倏逝波、衰逝波等).

*3. 全反射时波场与能流的时空特性①

全反射时介质 1 和 2 中的波场具有某些与过去所讲过的波场均不相同的性质，以下对此略作分析. 为方便起见，设入射光为 s 态，对 p 态光亦可得到类似的结论.

介质 1 中的入射波场和反射波场可分别用复波函数表示为

$$\begin{aligned} E_{1s}(\boldsymbol{r},t) &= E_{10}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)] \\ &= E_{10}\exp[\mathrm{i}(k_1 x\sin i_1 + k_1 z\cos i_1 - \omega t)], \end{aligned} \tag{2.6.51}$$

$$\begin{aligned} E'_{1s}(\boldsymbol{r},t) &= r_s E_{10}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}'_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)] \\ &= E_{10}\exp[\mathrm{i}(k'_1 x\sin i_1 - k'_1 z\cos i_1 + \delta_s - \omega t)]. \end{aligned} \tag{2.6.52}$$

这里 $\boldsymbol{k}_1$、$\boldsymbol{k}'_1$ 分别表示入射波和反射波的波矢，$k_1=k'_1=2\pi/\lambda_1$；$r_s=\exp(\mathrm{i}\delta_s)$ 为 s 光的振幅反射率. 用以上两式的实数形式，可将两波的合振幅写为

$$\begin{aligned} E_1(\boldsymbol{r},t) &= E_{1s}(\boldsymbol{r},t) + E'_{1s}(\boldsymbol{r},t) \\ &= 2E_{10}\cos\left(k_1 z\cos i_1 - \frac{\delta_s}{2}\right)\cos\left(k_1 x\sin i_1 + \frac{\delta_s}{2} - \omega t\right). \end{aligned} \tag{2.6.53}$$

上式中第二项表示一个沿 x 轴正方向传播的行波，而第一项的绝对值则可表示此行波的振幅，可见此行波的等相面(x 相同的面)与等幅面(z 相同的面)是互相垂直的，这一点与一般波动中二者互相重合有明显的区别. 等幅面与等相面互相重合的波称为**均匀波**(homogeneous wave)，而二者不重合的波称为**非均匀波**(inhomogeneous wave)，全反射中的波场是非均匀波的一个典型例子.

实际上，介质 1 中的波场可看做 z 方向的驻波与 x 方向的行波的结合. z 方向驻波的形成系由入射波与反射波在 z 方向的分量叠加而得到. 容易看出该驻波的各波节面均与界面平行且等距分布，其间距为 $d_z/2=\lambda_1/2\cos i_1$，这里 d_z 为合成波场在 z 方向的空间周期. 波节面上无能流，各波节面之间形成能流层. 更精细的分析证明，在合成波场中 $\boldsymbol{E}$ 仍保持 s 态线偏振的同时，$\boldsymbol{H}$ 呈入射面内的正椭圆偏振，从而能流层中任一点的瞬时能流密度矢量 $\boldsymbol{S}$ 的末端随时间的变化描出一个椭圆，而该矢量的始端则位于该椭圆的左端点(图 2.6.14). 同一时刻不同点处的瞬时能流密度矢量的方向是不断变化的，故可认为能量在各能流层中以曲折路线从左向右传输，各能流层之间并无能量交换，而能流层中任一点的平均能流密度矢量$\langle\boldsymbol{S}\rangle$总是指向右方的.

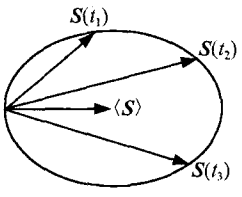


图 2.6.14 瞬时坡印亭矢量($t_1<t_2<t_3$)和平均坡印亭矢量

由(2.6.49)式可以看出，下半空间的波也是一种非均匀波，其等幅面($z=$常数)垂直于等相面($x=$常数). 在 x 方向，它呈行波形式，在 z 方向则单调衰减. 分析证明，下半空间任一点坡印亭矢量的时间行为仍如图 2.6.14 所示，而且在任一时刻整个下半空间坡印亭矢量的取向均保持界面上相同 x 坐标处该矢量的取向，相应的椭圆也保持该处坡印亭矢量椭圆的形状，只是矢量

① 关于此问题的详细讨论可参见蔡履中. 大学物理，1984，11：7.

的大小随深度 z 的增加而呈指数减小. 各处坡印亭矢量的时间平均值当然亦指向 x 轴正方向.

图 2.6.15(a)示出了某一确定时刻介质 1、2 中各处的瞬时能流密度的大小和方向，图 2.6.15(b)则为空间波场的大致示意图. 注意图(b)中各曲线只用来表示波场在 x 方向(整个空间)及 z 方向(上半空间)的空间周期性，各曲线的振幅则定性说明各平行平面层处光矢量振幅的相对大小.

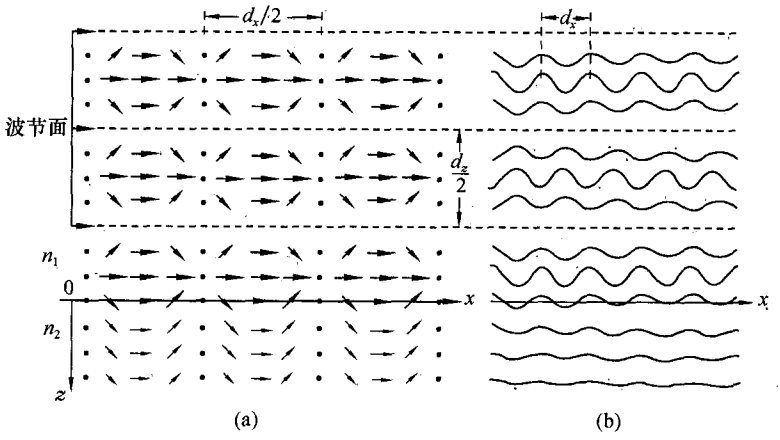


图 2.6.15 全反射时能流(a)及波场(b)分布的示意图

从图 2.6.15(a)可以看到，由于界面一般并非波节面，故界面上不同处在同一时刻有不同方向的能流，而且在同一处能流方向亦随时间而变化，其平均效果则指向 x 轴正向. 在任一点，该矢量有时指向右下方，即能流从介质 1 流向介质 2；有时指向右上方，即能流从介质 2 返回介质 1. 但在两种介质之间这种能量"吞吐"的时间平均效果为零，即两介质之间只有瞬时的局域能量交换，而无整体的平均能量交换.

附带说明，不难看出，上半空间的场实质上是一种入射平面波与反射平面波的干涉场. 干涉中对波场的一次量(振幅)可以直接相加(矢量和或代数和)，但对波场的二次量(强度、能量密度、能流密度)不能直接相加. 例如，考虑介质 1 中 x 方向的能流密度，

$$\begin{aligned} S_{1x} &= E_1 H_{1z} = (E_{1s} + E'_{1s})(H_{1pz} + H'_{1pz}) \\ &= E_{1s} H_{1pz} + E'_{1s} H'_{1pz} + E_{1s} H'_{1pz} + E'_{1s} H_{1pz}. \end{aligned}$$

上式右端前两项分别相应于入射波能流和反射波能流的 x 分量，而 S_{1x} 中除三者之外还多出了后两个交叉乘积项，它们的出现是干涉现象的本质特征. 也正是这种干涉效应使得介质 1 中的场可看做 z 方向驻波与 x 方向行波的复合，从而使得它具有一般平面波和驻波都不具备的某些特殊性质.

*4. 全反射及隐失波的某些应用

在几何光学部分已提到利用全反射现象可制成光导纤维，此处再简单介绍几种应用.

1) 光学平面波导

将一块平行平面透明介质板(图 2.6.16 中之 B)置于空气中，若用某种方式将一束平行光

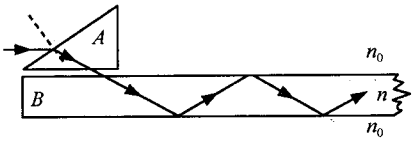


图 2.6.16　平面波导(B)及耦合棱镜(A)

引入板内，并使得该光束在板内界面的入射角大于相应的临界角，则此光束将通过在板内两界面之间多次全反射的方式被引导向板的右端面. 这种装置称为**光学平面波导**. 波导中场的特性可用与前文对单反射面的讨论完全类似的方法进行分析. 由于此时有上、下两个反射面，为了使合成波场不至于复杂化，应使两个反射面各自形成的波节面位置重合. 这样，多次反射的合成波场就如同平面波单次反射一样. 对光学波导的研究现已成为近代光学的一个重要分支.

2) 受抑全反射及其应用

既然全反射时电磁波场已"渗透"到第 2 介质的表层，可以想见，如果在该光疏介质的下方再放置第 3 种光密介质，而且使得两种光密介质间隔足够近，则光场可以以可观的振幅进入第 3 介质. 这时从整体上看，电磁波从第 1 介质穿透第 2 介质的薄隙后向第 3 介质深处传去，1、2 两介质界面上的全反射已受到抑制而失效，这种现象称为**受抑全反射**. 它在现代光学中有许多应用，兹举两例.

(1) 耦合棱镜.

图 2.6.16 示出了如何利用耦合棱镜 A 将光波引入平面波导 B. 这里 A、B 之间有一层非常薄(一般不到 $\lambda/2$)的空气隙，以适当角度射向 A 的光线使它在棱镜底面的入射角大于其临界角，空气隙中将产生隐失波，而波导 B 则作为第 3 介质接收部分光能.

(2) 可调分束器.

可调分束器由两块斜面平行放置的等腰直角三角形棱镜所组成(图 2.6.17). 设其折射率 $n=1.5$，可算出它在空气中的临界角 $i_c=41.8°$. 故若无棱镜 B，图中入射光将在 A 内发生全反射而从下部穿出. 然而 B 的存在使得全反射失效，一部分光能将穿过空气隙(图中虚线表示隐失波的平均能流方向)和棱镜 B 从右方射出. 改变空气隙的厚度，可以改变透过 B 的光强与入射光强之比.

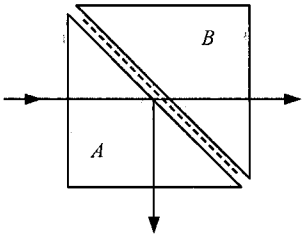


图 2.6.17　可调分束器

习　题

2.1　验证(2.1.10)式为(2.1.8)式的一个特解.

2.2　地球表面在垂直于光照方向每平方米接收到来自太阳的功率约为 1.33 kW，试计算地表阳光的电场强度.

2.3　人眼和目前响应很快的光电探测器对光信号的响应时间分别为 0.1 s 和 10^{-9} s，在这两段时间中光扰动分别经历了多少个周期(取 $\bar{\lambda}=550$ nm).

2.4　一个平面电磁波可以表示为

$$E_x=0,\quad E_y=3\cos\left[2\pi\times10^{14}\left(\frac{z}{c}-t\right)+\frac{\pi}{3}\right],\quad E_z=0.$$

(1) 求其频率、波长、振幅及原点的初相；

(2) 波的传播和电矢量振动取何方向；

(3) 求 H 的表达式.

2.5　一束平面波在玻璃中传播时可表示为

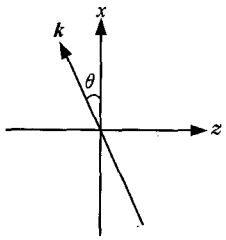
$$E_y=0,\quad E_z=0,\quad E_x=10\cos\left[10^{15}\pi\left(\frac{z}{0.65c}-t\right)\right],$$

求光的频率、波长及玻璃的折射率.

2.6　某平面波实波函数为

$$E(\boldsymbol{r},t)=A\cos[(3x+4y+5z)-15\sqrt{2}\times10^8t].$$

其中 A 是常数，x、y、z 单位是米，t 单位是秒，求该平面波的(1)波矢 $\boldsymbol{k}$(大小和方向)，(2)波长 λ，(3)频率 ν，(4)波速 v，(5)x、y、z 方向的空间频率.



题 2.7 图

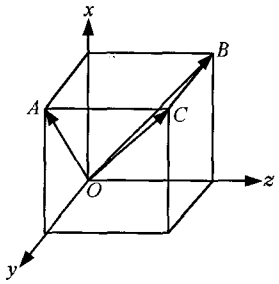
2.7　如题图所示，真空中一列波长为 λ，振幅为 E_0 的单色平面波，其波矢方向在 xz 平面内，且与 x 轴正向成角 $\theta=30°$，求实波函数的表达式及 x，y，z 方向的空间频率及空间周期.

2.8　一个三维平面波的实波函数为

$$E(\boldsymbol{r},t)=A\cos[(2x-3y+4z)-5t],$$

式中 x、y、z 以厘米(cm)计，时间以秒(s)计.

(1) 写出该平面波的复波函数和复振幅；



题 2.9 图

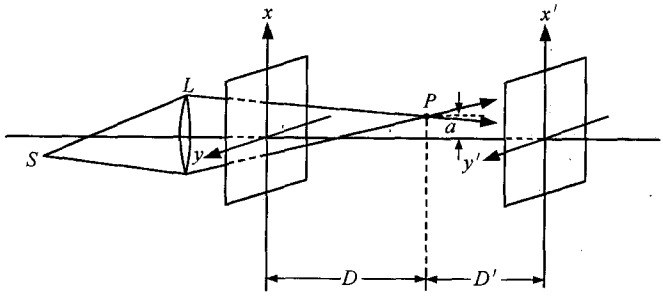
(2) 求波长及 x、y、z 方向的空间频率和空间周期.

2.9　已知 ω，k，O-ABC 为一正方体，分别求沿 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 方向传播的平面波的实波函数、复振幅及 x、y、z 方向的空间频率和空间周期.

2.10　(1) 分别写出 2.9 题中沿 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 方向传播的平面波的共轭波的复振幅；

(2) 只考虑 xy 平面上的复振幅分布，其复振幅与沿 $\overrightarrow{OC}$ 方向传播的平面波的复振幅相共轭的平面波有几个？它们的波矢量分别沿什么方向？

2.11　如题图所示，单色点光源 S 经透镜 L 成像于光轴上方 P 点，然后继续传播. P 点与光轴距离为 a，已知距离 D、D'，求 xy 和 $x'y'$ 两平面上的复振幅分布.



题 2.11 图

2.12　S_1 和 S_2 分别为直角坐标系中的两个单色点源，其坐标分别为$(0,0,z_1)$和(x_2,y_2,z_2)，求它们所发出的球面波在平面 $z=D(D>z_1,z_2)$上的复振幅分布.

2.13　只考虑 $z=D$ 平面上的复振幅分布，上题中两列球面波的共轭波是什么波？

2.14　以实波函数 $E(z,t)=E_0(z)\cos(kz-\omega t)$为例，写出其复振幅 $\tilde{E}(z)$，并验证

$$\frac{\mathrm{d}E(z,t)}{\mathrm{d}z}=\mathrm{Re}\left\{\frac{\mathrm{d}\tilde{E}(z)}{\mathrm{d}z}\exp(-\mathrm{i}\omega t)\right\}.$$

2.15　E_1、E_2 表示两同频率同振动方向简谐波的实波函数，$\tilde{E}_1$、$\tilde{E}_2$ 表示其相应复振幅，

(1) 验证　$E_1E_2\neq\mathrm{Re}\{\tilde{E}_1\tilde{E}_2\exp(-\mathrm{i}\omega t)\}$，

(2) 证明　$\langle E_1E_2\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\tilde{E}_1\tilde{E}_2^*\}$.

2.16　两个振动方向相同的单色平面波在空间某一点产生的振动分别表示为 $E_1=E_{10}\cos(\varphi_1-\omega t)$和 $E_2=E_{20}\cos(\varphi_2-\omega t)$. 若 $\omega=2\pi\times10^{15}$ Hz，$E_{10}=6$ V/m，$E_{20}=8$ V/m，$\varphi_1=0$，$\varphi_2=\pi/2$，求该点的合振动表达式.

2.17　设有振幅、波速和频率均相同的两列平面波

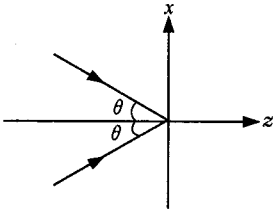
$$E_1(z,t)=A\cos(kz+\omega t),\quad E_2(z,t)=A\cos(kz-\omega t+\pi).$$

(1) 写出 $E_1(z,t)$和 $E_2(z,t)$的复振幅；

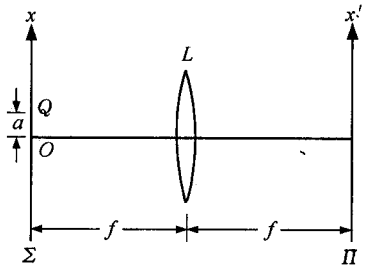
(2) 求合扰动的复振幅、实波函数及光强分布.

2.18　两列同频率平面波波矢量均在 xz 平面内，入射角均为 θ(见题图)，且入射方向关于 z 轴对称，分析 xy 平面上干涉条纹的形状及间距. 设 $\lambda=632.8$ nm，对 $\theta=5°$、30°、60°分别求出条纹间距. θ 等于多大时条纹最密，此时条纹间距多大？

2.19　如题图所示，透镜 L 前焦面 Σ 上有二相干点源 O 和 Q，它们在 x 方向的分离距离为 a(满足傍轴条件).



题 2.18 图



题 2.19 图

(1) 分析后焦面 Π 上干涉条纹的特征(形状、间距)；

(2) 若 Π 平面远离透镜，干涉条纹如何变化？

2.20　上题中若 O 仍为轴上点，而 Q 点坐标为(x,y)，

(1) 写出 Π 平面上光强分布的表达式并分析条纹特点；

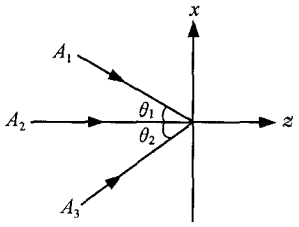
(2) 证明干涉条纹的空间频率 $f_x=\frac{x}{\lambda f}$，$f_y=\frac{y}{\lambda f}$；

(3) 证明干涉条纹取向与 x' 轴夹角 θ 满足 $\tan\theta=-\frac{x}{y}$；

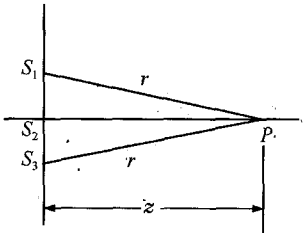
(4) 若 Π 平面远离透镜，干涉条纹如何变化？

2.21　如题图所示，有三列在 xz 平面内传播的同频率单色平面波，其振幅分别为 A_1、A_2、A_3，传播方向如图，求 xy 平面上的光强分布（可设三列波在坐标原点初相均为 0）. 若设振幅比为 1∶2∶1，$\theta_1=\theta_2=\theta$，求光强分布.

2.22　如题图所示，S_1、S_2、S_3 三个点光源的初相分别为 φ_0、0、$-\varphi_0$，它们在 P 点所产生的振动振幅、频率及振动方向均相同，已知 λ、z、r，求 P 点光强. 若 $\varphi_0=0$，$r-z$ 从 0 逐渐增大，P 点光强第一次出现极小时 $r-z=$？



题 2.21 图



题 2.22 图

2.23　在维纳光驻波实验中，涂有感光乳剂的玻璃片的长度为 1 cm，其一端与反射镜面接触，另一端与反射镜面相距 10 μm，测出感光片上两个黑纹的间距为 250 μm，求所用光波的波长.

2.24　由(2.3.36)二式中消去 $kz-\omega t$，从而证明(2.3.46)式.

2.25　以 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 表示沿 x，y 轴正方向的单位矢量，波动 $\boldsymbol{E}$ 可表示为 $\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{i}+E_y\boldsymbol{j}$. 试指出波函数

(1) $\boldsymbol{E}=E_0[\cos(kz-\omega t)\boldsymbol{i}-\cos(kz-\omega t)\boldsymbol{j}]$，

(2) $\boldsymbol{E}=E_0[\cos(kz-\omega t)\boldsymbol{i}+\sin(kz-\omega t)\boldsymbol{j}]$，

(3) $\boldsymbol{E}=E_0[\sin(kz-\omega t)\boldsymbol{i}+\cos(kz-\omega t)\boldsymbol{j}]$，

(4) $\boldsymbol{E}=E_0\left[\sin(\omega t-kz)\boldsymbol{i}+\sin\left(\omega t-kz-\frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{j}\right]$

各表示怎样的偏振态？

2.26　一列沿 z 方向传播的椭圆偏振光可以表示为

$$\boldsymbol{E}(z,t)=E_0\cos(kz-\omega t)\boldsymbol{i}+E_0\cos\left(kz-\omega t-\frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{j}.$$

(1)求该椭圆的方程；(2)确定该椭圆的长轴方向；(3)求该椭圆的长半轴和短半轴.

2.27　已知钠黄光两谱线波长分别为 589.0 nm 和 589.6 nm，求它们沿同方向传播时所形成光学拍强度变化的空间周期.

2.28　一束部分线偏振光是由强度为 3 W/m^2 的线偏振光和强度为 7 W/m^2 的自然光组成，试确定该光束的偏振度.

2.29　让入射光连续通过两个偏振片，前者称为起偏片，后者称为检偏片，通过改变二者透振方向之间的夹角可调节出射光强. 设入射光为自然光，通过起偏片后的光强为 1. 要使出射光强减弱为 1/2、1/4、1/8，试问二偏振片透振方向的夹角各是多少？

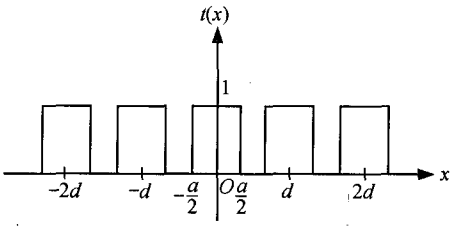
2.30　在两个透振方向正交的偏振片之间有一个偏振片以匀角速度 ω 以光线传播方向为

轴旋转. 试证明：自然光通过此装置后，出射光强为

$$I=\frac{I_0}{16}(1-\cos 4\omega t),$$

式中 I_0 为入射光强.

2.31　通过一理想偏振片观察部分偏振光，当偏振片由光强极大位置转过 45°时，光强变为原来的 2/3，求(1)入射部分偏振光中线偏振光与自然光强度之比；(2)入射光的偏振度；(3)旋转偏振片时最小透射光强与最大透射光强之比；(4)当偏振片从最大光强方位转过 30°时透射光强与最大光强之比.



题 2.33 图

2.32　一束部分偏振光通过旋转的理想偏振片时，出射光强最大值是最小值的 5 倍. 试求光束中两种成分的光强比.

*2.33　缝宽为 a，相邻缝中心间距为 d 的多缝光栅的振幅透射率 $t(x)$ 可表示为题图，把它展成傅里叶级数，并对 $d=2a$ 写出其具体表达式，画出频谱图及前三个谐波波形.

*2.34　若 $g(x)\rightleftharpoons G(f_x)$，$x_0$、$a$ 为常数.

求证　(1) $g(x\pm x_0)\rightleftharpoons \exp(\pm \mathrm{i}2\pi f_x x_0)G(f_x)$；

(2) $g(ax)\rightleftharpoons \frac{1}{|a|}G\left(\frac{f_x}{a}\right)$；

(3) $\mathscr{F}^{-1}\{\mathscr{F}\{g(x)\}\}=g(x)$；

(4) $\mathscr{F}\{\mathscr{F}\{g(x)\}\}=g(-x)$.

*2.35　若 $g(x)$ 是实函数，求证

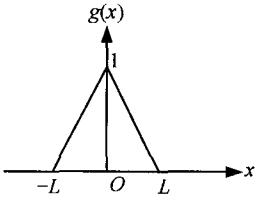
$$G(-f_x)=G^*(f_x).$$

*2.36　求题图三角形脉冲 $g(x)$ 的傅里叶变换.

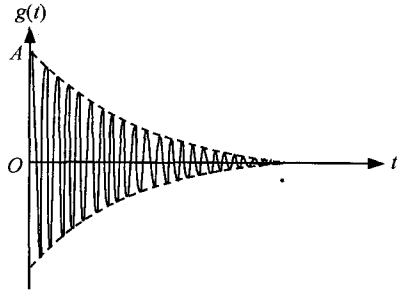
*2.37　如题图所示，一振子在振动过程中由于辐射能量而使其振幅衰减，其振动可表示为

$$g(t)=A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\exp(\mathrm{i}2\pi\nu_0 t),$$

式中 $t>0$，τ 为正常数，称为振子寿命，求功率谱 $|G(\nu)|^2$ 及其半功率宽度 $\Delta\nu$.



题 2.36 图

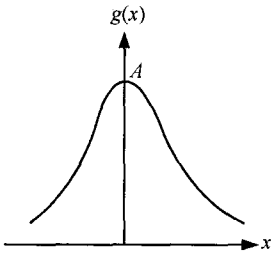


题 2.37 图　相应的实波函数

*2.38 求题图所示高斯函数

$$g(x) = A\exp(-ax^2)$$

的傅里叶变换 $G(f_x)$，式中 a 为正常数. 将 $|g(x)|^2$ 和 $|G(f_x)|^2$ 下降到其最大值之半的宽度分别记为半功率宽度 Δx 和 Δf_x，求 Δx，Δf_x 及 $\Delta x\Delta f_x$.



题 2.38 图

2.39 氪同位素 Kr^{86} 放电管发出的红光波长为 $\lambda=605.7$ nm，波列长度约为 700 mm，求该谱线的波长展宽和频率展宽.

2.40 由(2.6.1)及(2.6.4)式导出(2.6.5)及(2.6.6)式.

2.41 如果已测出光在某种介质中的全反射临界角为 45°，试求光从空气射向这种介质界面时的布儒斯特角.

2.42 一块 $n=1.5$ 的玻璃平板置于空气中，求光正入射时透射光与入射光的光强之比.

2.43 折射率为 n 的平行平板放在折射率为 n_0 的介质中，求证当入射光在上界面的入射角满足布儒斯特条件时，平板内的折射光在下界面也满足布儒斯特条件.

2.44 一束自然光从空气射向折射率 $n=1.5$ 的玻璃板，求：(1)入射角为 30°时反射光的偏振度；(2)在布儒斯特角入射时玻璃中折射光的偏振度；(3)在布儒斯特角入射时，透过玻璃板的透射光的偏振度.

2.45 自然光以布儒斯特角从空气射向玻璃($n=1.5$)，计算能流反射率 $\mathscr{R}_s$、$\mathscr{R}_p$ 和能流透射率 $\mathscr{T}_s$、$\mathscr{T}_p$.

2.46 右旋圆偏振光从空气中正入射到玻璃板上，反射光是何种偏振态？

2.47 电矢量 $\boldsymbol{E}$ 振动方向与入射面成 45°的一束线偏振光入射到两介质界面上，$n_1=1$，$n_2=1.5$，当入射角 i_1 分别为 50°和 60°时，反射光电矢量与入射面所成的角度各为多少？

2.48 线偏振光的振动面与入射面之间的夹角称为振动方位角.

(1) 设入射光为线偏振光，方位角为 α，用 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{T}$ 分别表示总能流反射率和总能流透射率，证明

$$\mathscr{R}=\mathscr{R}_s\sin^2\alpha+\mathscr{R}_p\cos^2\alpha,$$

$$\mathscr{T}=\mathscr{T}_s\sin^2\alpha+\mathscr{T}_p\cos^2\alpha;$$

(2) 证明 $\mathscr{R}+\mathscr{T}=1$；

(3) 将入射光换为自然光和圆偏振光，分别求 $\mathscr{R}$、$\mathscr{T}$ 与 $\mathscr{R}_s$、$\mathscr{R}_p$ 和 $\mathscr{T}_s$、$\mathscr{T}_p$ 的关系.

2.49 由(2.6.41)及(2.6.42)式导出(2.6.43)及(2.6.44)式.

2.50 图 2.6.17 中设 He—Ne 激光($\lambda=632.8$ nm)以 45°入射角射向玻璃($n=1.5$)-空气界面，求光束在空气层中的穿透深度.

观察思考及讨论题

2.1 波的数学描述和时空周期性

(1) 说明波动光学中常用复振幅而不用实波函数描述波场的理由. 当波场中有多个频率不同的波时还能用复振幅分析吗？为什么？

(2) 平面波场中沿任意方向都有空间周期性，对柱面波和球面波呢？

2.2 从以下几方面比较光驻波与光学拍的异同：

(1)形成条件；(2)强度分布；(3)时空行为.

2.3 光学拍和莫阿条纹的观察

(1) 找一个齿宽及齿距都较均匀的梳子，其齿及隙的周期空间分布可表示一列“凝固的”平面波. 再找一个齿距稍有差别的梳子，将二者梳齿平行地叠合在一起，对着亮处观察，即可看到亮暗交替变化的光学拍现象. 测出每个梳子的平均齿距及拍的周期，验证所学公式.

(2) 将两片窗纱或两片薄布叠合在一起，可观察到二维条纹，改变布的相对取向及拉紧程度，可以看到条纹的变化，解释这种现象.

2.4 圆偏振光的模型

(1) 有人将圆偏振光想像为光矢量一边以光速行进一边以角速度 ω 旋转. 这种图像正确吗？如果不正确，应该如何？

(2) 将一些大头针依次绕转钉在一根木质铅笔杆上，可以作成一个“凝固的”圆偏振光模型，它表示了什么？

(3) 沿轴向拉动以上模型，可以看出在某一固定空间截面处光矢量的时间变化. 用以上模型分别说明左旋光和右旋光的形成. 二者的区别何在？

2.5 椭圆偏振光的模型①

(1) 在空间一个确定点，圆偏振光模型中光矢量的方向随时间变化，以光的角频率 ω 为角速度匀速旋转. 有人认为椭圆偏振光也是如此，某些教材中也有这种观点，这种看法正确吗？

(2) 对正椭圆偏振光，若已知椭圆两半轴 A_{x0}、A_{y0} 以及光的角频率 ω，导出光矢量旋转角速度公式，从而说明它一般并不等于 ω.

(3) 证明在椭圆偏振光模型中，光矢量在相同时间内所扫过的面积是相等的.

2.6 反射引起的偏振及布儒斯特角

日光或准直较好的手电筒光可近似看做平行自然光. 设玻璃的折射率为 1.5，让平行自然光以布儒斯特角照射玻璃片 A(不要用镀膜的镜子，为什么?)，反射光是什么光？让该反射光射向另一玻璃片 B，改变 B 的方位，可以看到反射光强的变化. 若欲使 B 的反射光消光，B 应如何放置？设计并进行该实验以验证你的分析. 实际上 B 的反射光不能完全消失，你认为原因是什么？

2.7 用实际偏振片检测部分偏振光的偏振度②

理想偏振片对其透振方向的光振动光强透射率 $T_M=1$，对其正交振动透射率 $T_m=0$. 但实际偏振片由于吸收等各种原因做不到这一点，一般有 $0<T_m<T_M<1$. 设已测出了某实际偏振片的 T_M 和 T_m 值，如何根据实测的最大透射光强 I_M 和最小透射光强 I_m 求出入射的部分偏振光的偏振度？

2.8 光的反射与折射

(1) 当光从第一介质射向第二介质时，光能全部反射吗？能全部透射吗？如果能，说明其条件.

(2) 光从第一介质射向第二介质时，何时第二介质中光强大于第一介质中光强？

---

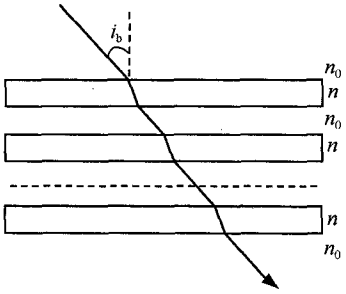
① 关于此问题的详细讨论可参见蔡履中等. 物理通报，1990，7：5.

② 关于此问题的详细讨论可参见蔡履中等. 物理实验，2000，8：10.

(3) 改变视角观察水面倒影和水底物体，从而验证光强反射率及透射率随入射角的变化规律.

2.9 玻片堆透射光的偏振度

折射率为 n 的 N 块平面平行玻璃板叠放在折射率为 n_0 的周围介质中，一束自然光以布儒斯特角射向该玻片堆，求从该玻片堆底部出射的光的偏振度.

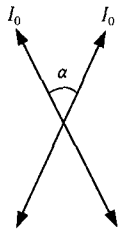


讨论题 2.9 图

2.10 部分偏振光模型的多样性和等效性①

物理学以可观测量为基础. 光的瞬时振动是不可测的. 对部分偏振光，可测量可举出 5 个：通过偏振片的最大光强 I_M 及最小光强 I_m，总光强 I，偏振片在 θ 方位(透振方向与最大光强方向夹角)时透射光强 I_θ 以及偏振度 p. 它们满足一定关系. 若不同模型在相同条件下可以给出满足这些关系的正确的可测量，它们就是合理的和彼此等价的.

(1) 书中讲了部分偏振光的三种模型：椭圆模型、线圆模型和正交模型. 验证这三者的等价性，并求出各模型间的参数转换关系.



讨论题 2.10 图

(2) 可另外建立斜交模型，它由两个强度均为 I_0，振动方向夹角为 $\alpha \leqslant \pi/2$ 的独立线偏振光所组成. 证明在此模型下各可测量为

$$\begin{cases} I = 2I_0, \\ I_M = I_0(1+\cos\alpha), \\ I_m = I_0(1-\cos\alpha), \\ p = \cos\alpha. \end{cases}$$

(3) 还可以提出其他模型吗？由此你对“物理学以可观测量作为基础”这一思想有何进一步的理解？

① 关于本题目的详细讨论可参见蔡履中，王成彦. 光学. 济南：山东大学出版社，1992. 2. 4. 5 节.

第3章　光的干涉

在第2章中已通过波的叠加引入了干涉概念，本章将进一步讨论光的相干条件，分析干涉现象显著与否的决定因素——光场的空间和时间相干性，并具体介绍各种干涉装置以及它们所产生的干涉图样的特征. 这些分析和结论不仅在理论上具有重要意义，而且在实践中有着广泛应用.

3.1　光的相干条件

3.1.1　光的相干条件

在2.3.2节中基于简谐波的叠加引入光的干涉概念时，曾得到两列波的**相干条件**为

(1) 频率相同；

(2) 振动方向不互相正交；

(3) 相位差恒定.

我们把以上要求称为相干条件的第一种表述. 根据这种表述，不同频率的光及互相独立的光源是不相干的.

但是，在近代一些研究文献中，亦可发现某些不同的提法和实验验证. 例如，在20世纪50年代已观察到Hg元素的546.1 nm谱线在磁场中分裂而产生的波长稍有差别的两谱线相应的光波可以发生干涉；60年代还成功地用高速快门拍摄到两个独立红宝石激光器形成的干涉条纹. 到底不同频率的光及不同光源发出的光能不能干涉？为了回答这些问题，并进一步弄清干涉的物理实质及意义，更精细地考察一下不同频率的波的叠加过程是有益的. 为明显地看出时间项的影响，以下采用实矢量波函数形式.

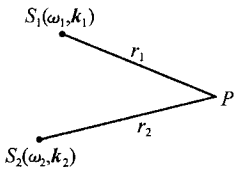


图3.1.1　两列不同频率波的叠加

设角频率分别为ω_1和ω_2(设$\omega_2>\omega_1$)的两单色点源S_1和S_2在波场中某点P产生的振动分别为(图3.1.1)

$$\boldsymbol{E}_1(P,t)=\boldsymbol{E}_{10}(P)\cos(k_1r_1-\omega_1t+\varphi_{10}),\quad(3.1.1)$$

$$\boldsymbol{E}_2(P,t)=\boldsymbol{E}_{20}(P)\cos(k_2r_2-\omega_2t+\varphi_{20}),\quad(3.1.2)$$

P点的瞬时合振动为

$$\boldsymbol{E}(P,t)=\boldsymbol{E}_1(P,t)+\boldsymbol{E}_2(P,t).\quad(3.1.3)$$

在第2章中已经指出，由于光振动频率极高，$\boldsymbol{E}$的瞬时值是

无法测定的，实际可观测量是在某段时间间隔 τ 中的平均能流密度即光强，忽略某些常数，它可记为

$$I(P)=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}E^2(P,t)\mathrm{d}t=\langle E^2(P,t)\rangle. \tag{3.1.4}$$

计算可知

$$\begin{aligned}E^2(P,t)&=(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2)\cdot(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2)=E_1^2+E_2^2+2\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2\\&=E_{10}^2\cos^2(k_1r_1-\omega_1t+\varphi_{10})+E_{20}^2\cos^2(k_2r_2-\omega_2t+\varphi_{20})\\&\quad+\boldsymbol{E}_{10}\cdot\boldsymbol{E}_{20}\cos[(k_2r_2+k_1r_1)-(\omega_1+\omega_2)t+\varphi_{10}+\varphi_{20}]\\&\quad+\boldsymbol{E}_{10}\cdot\boldsymbol{E}_{20}\cos[(k_2r_2-k_1r_1)-\Delta\omega\cdot t+\Delta\varphi_0],\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

式中

$$\Delta\omega=\omega_2-\omega_1,\quad \Delta\varphi_0=\varphi_{20}-\varphi_{10}.$$

目前已有探测器的响应时间 τ_0 均远大于光的周期 T，而实际观测时间 τ 又总是大于 τ_0，故有 $(\omega_1+\omega_2)\tau\gg2\pi$，即在观测时间内，(3.1.5)式中第三项已经历了成千上万以至更多次振动，其时间平均值趋于零. 对其他三项取时间平均，可得与(2.3.13)式类似但更具普遍性的公式

$$I(P)=I_1(P)+I_2(P)+2\sqrt{I_1(P)I_2(P)}\cos\theta\langle\cos\delta\rangle, \tag{3.1.6}$$

式中 $I_1(P)$ 和 $I_2(P)$ 分别为两列波单独在 P 点产生的光强①，θ 为 $\boldsymbol{E}_{10}$ 和 $\boldsymbol{E}_{20}$ 的夹角，而

$$\delta(P,t)=k_2r_2-k_1r_1-\Delta\omega\cdot t+\Delta\varphi_0 \tag{3.1.7}$$

为两列波在 P 点及 t 时刻的相位差.

为保证干涉的存在，即(3.1.6)式中第三项一般不为零，必须有

(1) $\theta\neq\pi/2$，即 $\boldsymbol{E}_{10}$，$\boldsymbol{E}_{20}$ 不互相正交；

(2) 在时间间隔 τ 中 $\langle\cos\delta\rangle\neq0$.

此即在时间 τ 中可以看到干涉效应的两个必要条件，它可称为相干条件的第二种表述. 这里条件(1)是显而易见的，以下重点讨论条件(2).

对给定点 P，r_1、r_2 是常量；对理想单色波，φ_{10}、φ_{20} 亦是常量，从而 $\Delta\varphi_0$ 是恒量. 但是，正如 2.4.2 节中所指出，实际光源所发射的光波是一系列间断的、彼此独立无关的波列，只有在一个波列的持续时间 Δt($\sim10^{-8}$ 秒或更短)中波的初相才保持恒定，故在较大的时间间隔 τ 中，$\Delta\varphi_0$ 将随时间 t 而变化. 这样，由(3.1.7)式，在光场中任一点，δ 一般地将是 $\Delta\omega\cdot t$ 和 $\Delta\varphi_0(t)$ 的函数，即

---

① 因为 $\langle\cos^2(\varphi-\omega t)\rangle=1/2$，对含时间项的实波函数的平方取时间平均值时将得到光强表达式 $I=E_0^2/2$，与通常使用复振幅时相差一因子 1/2. 但由于在用同一种波函数表达式时该因子是共同的，故它并不影响表示光强关系的最终结果.

$$\delta(t) = \delta(\Delta\omega \cdot t, \Delta\varphi_0(t)).$$

为方便起见，分别讨论 $\delta(t)$ 中两变量的影响.

首先，设 $\Delta\varphi_0$ 在时间 τ 中保持恒定，$\delta(t)$ 随 t 的变化只体现在 $\Delta\omega \cdot t$ 项. $\cos\delta$ 的变化周期即频率为 ω_1 及 ω_2 的两简谐波所形成的光学拍的周期

$$T_b = \frac{2\pi}{\Delta\omega}. \tag{3.1.8}$$

若观测时间 $\tau \ll T_b$，则在时间 τ 中 δ 的变化量 $\Delta\omega \cdot \tau \ll 2\pi$，而 $\cos\delta$ 的变化量远小于1，$\langle\cos\delta\rangle \neq 0$，这时可以记录到干涉效应. 反之，若 $\tau \gg T_b$，$\Delta\omega \cdot \tau \gg 2\pi$，在时间 τ 中 $\cos\delta$ 的变化已经历了许多个周期，故 $\langle\cos\delta\rangle \to 0$，这时干涉效应已不再能显示出来. 可见要能观测和记录到两不同频率的简谐波的干涉效应，必须保证 τ 及 $\Delta\omega$ 均足够小，即应使用高速快门及频率十分相近的两束光. 以钠黄光为例，它包含589.0 nm和589.6 nm两谱线，$\Delta\lambda = 0.6$ nm，$\Delta\omega = 3\times10^{12}$ Hz，$T_b = 2\times10^{-12}$ s，要做到 $\tau \ll T_b$ 是极其困难的. 但对于单色性很好，即 $\Delta\lambda$ 很小的激光，则可能实现上述要求；即便如此，此时所需的 τ 也是很小的，往往要比微秒级更短. 因此，这种干涉可称为**暂态干涉**.

其次，设 $\Delta\omega = 0$ 而考虑 $\Delta\varphi_0(t)$ 对 $\delta(t)$ 的影响. 因普通光源的辐射只能在 $\Delta t \sim 10^{-8}$ s 或更短的时间中保持确定的初相，来自两不同光源的光波保持恒定相位差的时间也不会超过此值. 粗略地，可认为 $\Delta\varphi_0(t)$ 在 Δt 时间中保持为定值，而在不同的 Δt 序列中在区间 $[-\pi, \pi]$ 中作等几率的随机变化，如图 3.1.2(a)所示. 在每一个 Δt 间隔中，δ 与 t 无关，从而 $\langle\cos\delta(P,t)\rangle = \cos\delta(P)$ 只与 P 点位置有关，使得空间不同点具有不同光强，即形成了干涉条纹. 但这种干涉也具有暂态性：干涉图样只能在每一 Δt 时间中维持不变；在下一个 Δt 间隔中 $\Delta\varphi_0$ 已变成了另一定值，干涉条纹则在空间产生了某种随机的位置平移(图3.1.2(b))；而且这种条纹闪动的频率极高，达到每秒 10^8 次以上. 因此，若观测时间 $\tau \gg \Delta t$，则相继形成的多个暂态条纹在空间中极其迅速地位置随机错动的平均效果将使得空间各点的光强被均匀化，从而显示不出干涉效应.

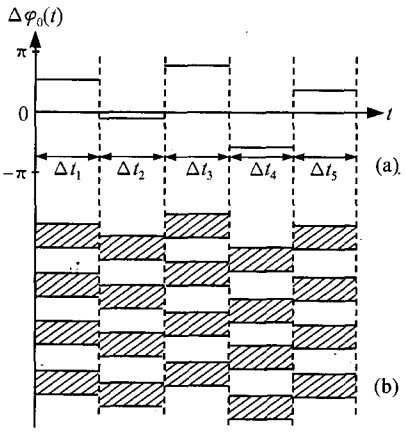


图 3.1.2 不同 Δt 序列中 $\Delta\varphi_0$ 的随机变化(a)及所引起的干涉条纹的位置错动(b)

综上所述，对于光的干涉及相干条件可以得出以下几点结论：

(1) 由于光的振动周期远小于探测仪器的响应时间和观测时间，任何探测器均无法追踪光场的即时振动，而只能显示其时间平

均效应——光强，故干涉问题实质上是一个时间域中的统计平均问题. 一般地，讨论相干条件不能离开观测条件.

(2) 只要是在线性介质中，且 $\boldsymbol{E}_1$ 不垂直于 $\boldsymbol{E}_2$，则由叠加原理，合场强平方即 $E^2(P,t)$ 的表达式中总含有两光场的交叉乘积项，它是产生干涉现象的基础. 但这种即时交叉项能否转化为可以被观测和记录的不为零的时间平均交叉项(常称为干涉项)，则取决于在观测时间 τ 中两光场相位差 δ 能否基本上保持恒定.

(3) 在 τ 值充分小时，可以得到暂态干涉，它并不要求两光波频率完全相同及其相差完全恒定，只需要在 τ 时间中干涉项不为零，这时相干条件即表述 2 中的两条件.

(4) 若 τ 值较大，即它远大于 $\omega_1 \neq \omega_2$ 时拍的周期 T_b 或光源保持恒定初相的时间 Δt，则各暂态干涉的效果被匀化而消失. 若要在充分长的时间中观测到稳定的干涉效应，即在 $\tau \to \infty$(实际上只需 $\tau \gg T_b$ 或 Δt)时仍能得到 $\langle \cos\delta \rangle \neq 0$，由(3.1.7)式易见只有 $\Delta\omega = 0$ 且 $\Delta\varphi_0 =$ 恒量，这时表述 2 中的条件(2)自动转化为表述 1 中的条件(2)、(3).

质言之，干涉的形成过程可以依所考察的时间不同而分为三个层次：场的即时叠加—暂态干涉—稳定干涉. 在线性介质中第一层次总是存在的，它能否过渡到第二、第三层次则与观测条件有关. 不同的观测条件导致了对相干条件的不同提法，它们在本质上是完全一致的，除对振动方向的要求之外，起关键作用的是在所考察点各振动之间的相位关系. 若在所考察时间间隔内各振动相位具有较好的相关性，则它们是相干的；若各振动相位是彼此独立无关的，则它们是不相干的. 相干条件的表述 2 和表述 1 可分别称为**暂态干涉条件**和**稳定干涉条件**，而后者是前者当 $\tau \to \infty$ 时的必然推论. 在以后各章节中我们只考虑稳定干涉，故可以应用稳定干涉三条件.

3.1.2 干涉条纹的衬比度

在光场满足稳定干涉三条件时，δ 只是空间位置的函数，而与时间无关，即 $\langle \cos\delta \rangle = \cos\delta(P)$，从而(3.1.6)式简化为

$$I(P) = I_1(P) + I_2(P) + 2\sqrt{I_1(P)I_2(P)}\cos\theta\cos\delta(P). \tag{3.1.9}$$

在干涉场中某些满足 $\cos\delta(P) = 1$ 的位置，光强取得极大值

$$I_M = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\theta; \tag{3.1.10}$$

反之，在满足 $\cos\delta(P) = -1$ 的位置，光强取得极小值

$$I_m = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\theta. \tag{3.1.11}$$

干涉场中光强随空间位置的变化形成了**干涉图样**，它通常呈亮暗变化的条纹形式.

为反映其亮暗对比的鲜明程度，引入**衬比度**（又称反衬度、对比度或可见度）这一概念，其定义为

$$V=\frac{I_M-I_m}{I_M+I_m}. \tag{3.1.12}$$

易见 $0\leqslant V\leqslant 1$，V 值越大，条纹亮暗对比越鲜明、越清晰. 其一个极端情况是 $I_m=0$，即干涉极弱处完全消光，这时 $V=1$；另一极端情况是 $I_M=I_m$，即干涉场中光强一片均匀，条纹完全消失，这时 $V=0$. 一般地，由(3.1.10)及(3.1.11)式可得

$$V=\frac{2\sqrt{I_1I_2}}{I_1+I_2}\cos\theta=\frac{2\sqrt{K}}{1+K}\cos\theta, \tag{3.1.13}$$

式中 $K=I_1/I_2$ 为参与干涉的两束光的光强比.

由上式可见，在相干条件得到满足时，干涉条纹的衬比度仍要受到 θ 与 K 两因素的制约. 当 K 为定值时，$V\propto\cos\theta$，$\theta=0$ 时 V 最大，$\theta=\pi/2$ 时 $V=0$；当 θ 为定值时，V 在 $K=1$ 时达到最大. V 值太小将使得干涉条纹亮暗对比太弱而无法分辨. 因此，为得到清晰的干涉条纹，除上节讲到的相干条件之外，还应补充两点技术上的要求：

(1) 两束光的振动方向尽可能一致；

(2) 两束光的光强尽可能接近.

利用衬比度，可以将干涉光强的一般公式(3.1.9)写为

$$I(P)=\bar{I}[1+V\cos\delta(P)], \tag{3.1.14}$$

上式中 $\bar{I}=I_1+I_2$ 表示光场中 P 点附近的平均光强，而 $\bar{I}V\cos\delta$ 项表示由于干涉效应所产生的实际光强在其平均值上下的变化，这一干涉顶或振荡项的调制度即衬比度 V.

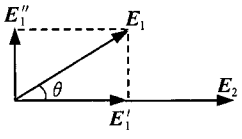


图 3.1.3 斜交光矢量的分解

一般地，对两束光矢量以任意角度斜交的线偏振光 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$，可以将其中一矢量、例如 $\boldsymbol{E}_1$ 分解为与 $\boldsymbol{E}_2$ 平行的分量 $\boldsymbol{E}_1'$ 和与 $\boldsymbol{E}_2$ 垂直的分量 $\boldsymbol{E}_1''$（图 3.1.3），则 $\boldsymbol{E}_1'$ 与 $\boldsymbol{E}_2$ 完全相干，而 $\boldsymbol{E}_1''$ 与 $\boldsymbol{E}_2$ 不相干. 故以后分析中除非特别必要，不再考虑 θ 对干涉的影响，而假设两束光振动方向完全一致，即 $\theta=0$. 这时(3.1.13)式简化为

$$V=\frac{2\sqrt{K}}{1+K}. \tag{3.1.15}$$

当 $K=1$ 时 $V=1$；当 $K\to 0$ 或 ∞ 时 $V\to 0$.

3.1.3 相干光束的产生方法

前文已经说明，不同辐射微元发出的波列，以及同一辐射微元在相异时间所发

出的不同波列其相位独立无关，因而是不相干的. 所以，为了获得相干光束，一般需将同一波列通过适当装置分割为两束或多束光，使它们通过不同途径后再重新相遇. 这样，在相遇点各光束因来自同一波列，自然具有同样的频率和由不同路径引起的确定的相位差，光路的设置并使得它们具有相同或基本相同的振动方向，故稳定干涉三条件均可满足，而各光束可以重新交叠的区域则形成了干涉场.

将同一波列分割为两束或多束光的方法主要有两种：

第一种方法是在点光源形成的波场中设置不透光屏，其上开设两个或多个细小的孔或缝，这样，同一波列的光经不同孔、缝后会因衍射而弥散开来，从而在屏后某些区域产生交叠而形成干涉场. 由于该不透光屏一般并不要求恰好是点光源光场的等相面(波面)，而可以是光场的某一波前，孔和缝则起到了空间上分割该波前的作用，所以这类装置常称为分波前装置，相应的干涉过程称为**分波前干涉**. 杨氏实验即是一种典型的分波前干涉.

第二种方法是利用光在两种透明介质界面上的反射和折射将一束光分裂为两束或多束光. 为了使它们能重新交叠，通常需要两个界面及多次反射与折射. 若把界面看做是入射光场的波前，则这时光束的分裂发生于波前的同一位置，这与分波前装置是不同的. 实际上，在光束分裂时入射光束的能量一部分被反射，另一部分被折射. 由于光的能流密度正比于光场振幅的平方，习惯上人们把这种能量分割过程称为分振幅，相应的干涉称为**分振幅干涉**. 3.4 节中将要介绍的薄板(膜)干涉和迈克耳孙干涉仪，就是典型的双光束分振幅干涉装置；多光束的分振幅干涉则将在 3.5 节介绍.

3.2 分波前干涉

3.2.1 杨氏实验

自 1801 年起，托马斯·杨在英国皇家学会连续宣读了数篇基于光的波动说分析干涉现象的论文，他所进行的著名的分波前双孔(缝)干涉实验以后被称为**杨氏实验**. 杨氏实验在物理学史上有着重要的地位，而且通过对其干涉条纹特性的分析可以得出许多具有重要理论及实际意义的结论，从而大大丰富和深化人们对干涉原理及光场相干性的认识. 本节讨论光源为单色点(线)源的理想情况，对理想情况的偏离所带来的影响则在 3.3 节介绍.

1. 条纹形状及强度公式

图 3.2.1 为杨氏干涉的示意图. 以单色光照明屏 Σ_0，Σ_0 上有一小孔 S，透过 S

的光照射平面Σ,Σ上有两个小孔S_1、S_2.依惠更斯原理,光场中每一点可以看做一个次波源,故当S、S_1、S_2均足够小(可看做是点源)时,可以认为S发出球面波,而S_1、S_2则作为该球面波前上的两个次级点源发出次级球面波,它们向右传播时产生交叠.在Σ右侧空间任一点P,来自S_1、S_2的波形成的光程差为

$$\Delta = (R_2 + r_2) - (R_1 + r_1), \tag{3.2.1}$$

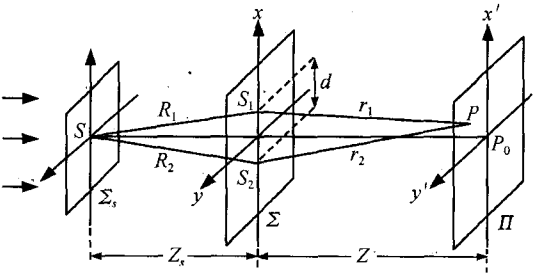


图 3.2.1 杨氏双孔干涉实验

相应的相位差为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}[(R_2 + r_2) - (R_1 + r_1)], \tag{3.2.2}$$

式中R_1、R_2、r_1、r_2各量意义如图 3.2.1 所示,λ为单色光的波长.显然,δ对给定位置P是一恒量;同时,两列次波在P点的振动方向相同(当入射光的振动方向沿y轴时)或基本相同(当入射光的振动方向在xz平面内且$\angle S_1PS_2$很小时),故两次波交叠区产生稳定干涉.在干涉场中放置一观察屏Π,即可看到干涉条纹.

为简化分析,设S位于S_1、S_2的中垂线,即$R_1 = R_2$,S_1、S_2位于S的同一波面,这时Δ和δ只与$r_2 - r_1$有关;并设两次波在P点振动方向相同.由 2.3.2 节的分析,P点光强为

$$I(P) = E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20}\cos\delta, \tag{3.2.3}$$

式中E_{10}和E_{20}分别是次波源S_1、S_2单独在P点产生光场的振幅,而

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1). \tag{3.2.4}$$

当P点位置满足

$$\Delta = r_2 - r_1 = m\lambda \quad 或 \quad \delta = 2m\pi \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{3.2.5}$$

时,两次波在该点相长产生干涉极大,从而形成亮区;反之,当P点位置满足

$$\Delta = r_2 - r_1 = (m + \frac{1}{2})\lambda \quad 或 \quad \delta = (2m+1)\pi \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{3.2.6}$$

时,两次波在该点相消产生干涉极小,从而形成暗区.可见每一亮区与暗区均为等

Δ(或 δ)面，只是 Δ(或 δ)的取值分别为波长 λ(或相位 2π)的整数倍或半整数倍. 由几何知识，这些面在三维空间中构成了以 S_1、S_2 为焦点、以 S_1 和 S_2 的连线为对称轴的旋转双曲面族，且亮面与暗面相间排列(图 3.2.2). 在干涉场中任一平面观察屏上所看到的干涉图样则是此双曲面族与该平面的截线，显然，屏在不同位置时干涉图样是不同的.

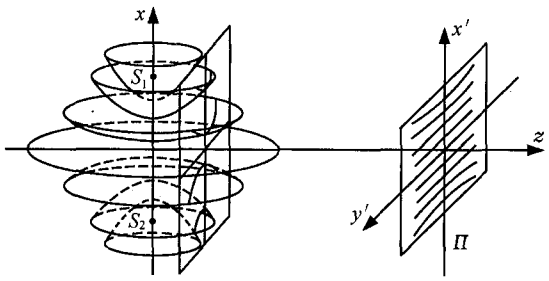


图 3.2.2 两球面波的干涉场

由(3.2.3)式可知亮面与暗面光强分别为

$$I_M = (E_{10} + E_{20})^2 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}, \tag{3.2.7}$$

$$I_m = (E_{10} - E_{20})^2 = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}, \tag{3.2.8}$$

式中 I_1、I_2 分别为 S_1、S_2 单独在 P 点所产生的光强. 若 S_1、S_2 两次波源强度相同，且 P 点与 S_1、S_2 的距离远大于 $\overline{S_1S_2}$，则可认为 $I_1 \approx I_2$，这时(3.2.3)式变为

$$I = 2I_1\left[1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)\right] = 4I_1\cos^2\frac{\pi}{\lambda}(r_2 - r_1). \tag{3.2.9}$$

显然，$I_M = 4I_1$，$I_m = 0$，而其平均值为 $2I_1$.

2. 傍轴近似下的简化

通常观察平面 Π 与双缝平面 Σ 相平行，如图 3.2.1 所示. 取该图所示坐标系，并设 $R_1 = R_2$，$x_{s1} = \frac{d}{2}$，$x_{s2} = -\frac{d}{2}$，则对于 Π 平面上任一点 $P(x', y')$，有

$$r_1 = \left[Z^2 + \left(x' - \frac{d}{2}\right)^2 + y'^2\right]^{1/2},$$

$$r_2 = \left[Z^2 + \left(x' + \frac{d}{2}\right)^2 + y'^2\right]^{1/2},$$

其中 Z 为平面 Π 与平面 Σ 的距离. 如果满足

$$d^2 \ll Z^2, \qquad \rho_M^2 = (x'^2 + y'^2)_M \ll Z^2, \tag{3.2.10}$$

式中 ρ_M 为观测区域的最大横向半径，则依据 $|a| < 1$ 时的二项式展开式

$$(1+a)^{1/2}=1+\frac{1}{2}a-\frac{1}{8}a^2+\frac{3}{48}a^3-\cdots, \tag{3.2.11}$$

可以略去 r_1、r_2 展式中自变量 x'、y' 二次方以上的高次项，从而得到近似式

$$r_1\approx Z\left[1+\frac{\left(x'-\frac{d}{2}\right)^2+y'^2}{2Z^2}\right], \tag{3.2.12}$$

$$r_2\approx Z\left[1+\frac{\left(x'+\frac{d}{2}\right)^2+y'^2}{2Z^2}\right]. \tag{3.2.13}$$

这时有

$$\Delta=r_2-r_1=\frac{d}{Z}x', \tag{3.2.14}$$

$$\delta=\frac{2\pi d}{\lambda Z}x'. \tag{3.2.15}$$

(3.2.10)式的要求称为**傍轴近似**条件，其中两不等式表示 S_1、S_2 及场点 P 均位于**傍轴区**. 为满足该近似，实验中各几何参量取值的数量级大致为 d：0.1～1 mm，ρ_M：1～10 cm，Z：1～10 m.

由(3.2.14)及(3.2.15)式，可知在傍轴近似下，对给定的几何配置(d、Z 确定)，Δ 和 δ 仅与 x' 有关. 对于同样的孔 S_1 和 S_2，傍轴近似亦导致 $I_1(P)\approx I_2(P)\approx I_{10}$，$I_{10}$ 表示 S_1 或 S_2 单独在屏 Π 中心点 P_0 所产生的光强. 代入(3.2.9)式，可得屏 Π 上的光强分布为

$$I(P)=I(x')=4I_{10}\cos^2\frac{\pi d}{\lambda Z}x'. \tag{3.2.16}$$

图 3.2.3 中分别以 δ、Δ、x' 为自变量画出了此时的光强分布. 我们把(3.2.5)或(3.2.6)式中的整数 m 称为亮线或暗线的**干涉级**，图中标出了亮线的级别. 分析(3.2.16)式或图 3.2.3 可对干涉条纹的表观特性得出如下结论：

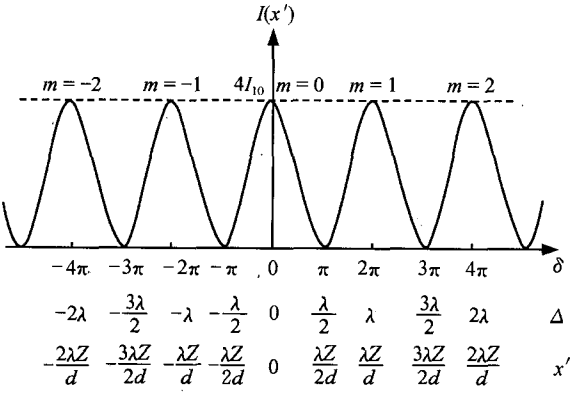


图 3.2.3　杨氏实验中傍轴区光强分布

(1) 干涉条纹的形状是一族取向与双孔 S_1、S_2 连线相垂直的平行等距直线.

(2) 干涉条纹的间距,即两相邻亮纹或两相邻暗纹之间的距离皆为

$$e=\frac{\lambda Z}{d}. \tag{3.2.17}$$

(3) 零级亮纹位于 S_1、S_2 的中垂面上,正、负级别条纹在其两侧对称排列,越向外侧干涉条纹的级次越高.

3. 几点讨论

(1) 从(3.2.7)和(3.2.8)式可以看出,在某一个包含足够多亮暗变化的空间区域中,光强的平均值仍是该处两列波单独所产生的光强 I_1 与 I_2 之和. 因此干涉现象并没有使空间光场的总能量增大或减小,只是在满足总能量守恒的条件下使能量在空间发生了重新分布,即光场的能量密度从非相干时的单调缓慢变化(傍轴区近似均匀)变成了相干时的振荡式迅速变化.

(2) 从推导过程中可以看出,干涉条纹是平行等距直线的结论只有在傍轴近似下才成立. 实际上,由图 3.2.2 可见,即使对于平行于 S_1、S_2 连线放置的观察屏,在大范围内干涉条纹仍是一族关于 y' 轴对称的双曲线,只有在原点 P_0 附近的小区域内才可近似看做平行等距的. 这一结论也可类比于 2.3.3 节中讲过的平行光干涉而得到. 对 Π 平面上场点 P 处一很小局域,从 S_1、S_2 发出的球面波可近似看做是平面波. 由平面波干涉公式,有

$$e=\frac{\lambda}{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2},$$

其中 $\sin\alpha_1=\overline{S_1A}/r_1$,$\sin\alpha_2=\overline{S_2A}/r_2$,各量意义如图 3.2.4 所示. 傍轴近似使得 $1/r_1\approx1/r_2\approx1/Z$,故有

$$e\approx\frac{\lambda}{\overline{S_1A}/Z+\overline{S_2A}/Z}=\frac{\lambda Z}{\overline{S_1S_2}}=\frac{\lambda Z}{d}.$$

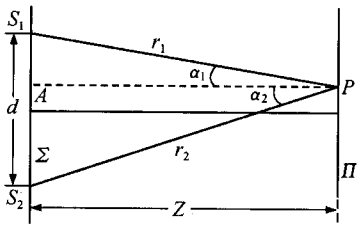


图 3.2.4 类比平行光干涉求条纹间距

(3) 间距 e 即 Π 平面上干涉条纹的空间周期,这种空间周期性的形成是光波的时空周期性和叠和原理的必然结果. 由于光波的空间周期 λ 极小,且行波在空间迅速移动,故 λ 是难以直接测量的. 干涉过程则把这一空间周期转化为稳定的、且放大到 Z/d 倍的另一空间周期 e,而后者是可以直接测量的. 简言之,条纹周期性是光波周期性通过干涉效应的另一表现形式,这一转化为实用中通过测定 e 反推 λ 提供了方便.

(4) 以上关于干涉条纹定位的分析是对 $R_1=R_2$ 而言. 当 $R_1\neq R_2$ 时,由(3.2.1)式可知,零级亮纹将移到满足 $\Delta=(R_2+r_2)-(R_1+r_1)=0$ 的点,条纹的其

他基本性质并不改变. 对于图 3.2.1 所示情况，可知当 S 点下移时 Π 平面上的干涉条纹整体向上平移，S 点上移时则条纹整体下移. 另外，若 S 一直保持在 S_1、S_2 的中垂面上，则 S 点沿 z 向或 y 向移动时并不破坏 $R_1=R_2$，故干涉条纹不变. 因此可使用沿 y 方向延伸的线光源代替点光源，以提高干涉条纹的亮度.

(5) 为进一步提高光能利用率，S、S_1、S_2 可皆利用互相平行的细缝代替小孔，如图 3.2.5 所示. 图中左方用单色平行光照明，S 发出的一级次波与 S_1、S_2 发出的二级次波皆为柱面波，两二级次波在 Σ 右半空间干涉而形成条纹. 由于柱面波在其轴向(y 方向)分布并无变化，故这种双缝干涉的分析中并不涉及 y' 参量，Π 平面上所得条纹亦是严格与 y' 轴平行的，这一点比双孔干涉更为简单和便于应用. 不过条纹的等距性仍需要 x' 方向的傍轴条件予以保证. 图 3.2.6 给出了双缝干涉实验结果的照片，其中水平方向相应于 x' 方向.

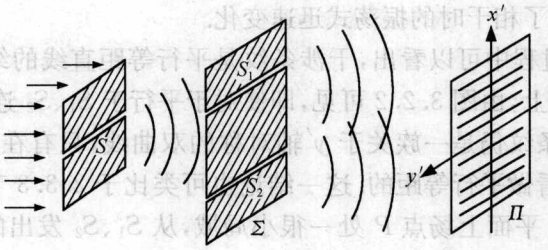
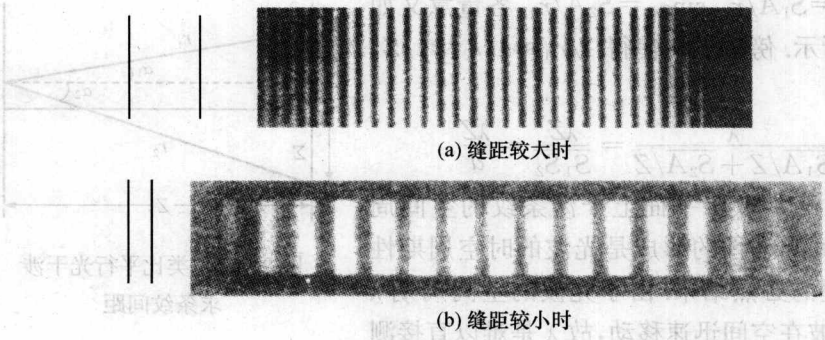


图 3.2.5　杨氏双缝干涉



(a) 缝距较大时

(b) 缝距较小时

图 3.2.6　双缝干涉的实验结果

例 3.2.1　仍用图 3.2.1 表示杨氏双缝实验，已知 $d=0.5$ mm，$\lambda=500$ nm. (1) 欲使屏 Π 上条纹间距为 1 mm，屏与 Σ 平面应相距多远？(2) 若用一折射率 $n=1.5$、厚度 $h=10$ μm 的薄玻璃片覆盖缝 S_2，屏上条纹有何变化？

解 (1) 由 $e=\frac{\lambda Z}{d}$ 可得

$$Z=\frac{ed}{\lambda}=\frac{1\times 0.5}{5\times 10^{-4}}\ \text{mm}=10^{3}\ \text{mm}=1\ \text{m}.$$

(2) 不加玻片时，屏上坐标为 x' 的点 P 处相应的光程差为 $x'd/Z$，零级条纹中心在 $x'=0$ 处.

加玻片后玻片引起附加光程差 $(n-1)h$，故 P 点光程差为

$$\Delta=\frac{x'd}{Z}+(n-1)h.$$

由 $\Delta=0$ 可知零级条纹中心坐标变为

$$x'=-\frac{(n-1)hZ}{d}=-\frac{(1.5-1)\times 10\times 10^{-3}\times 10^{3}}{0.5}\ \text{mm}=-10\ \text{mm},$$

即干涉条纹保持整体形状不变向下平移 10 mm.

3.2.2 其他分波前装置

除杨氏实验外，尚有其他多种分波前装置，本节择要介绍几种. 它们在原理上均与杨氏实验相同，即都是从单点(线)源获得次级双点(线)源，但为达到这一共同目的，每一装置的具体安排各有特色.

1. 菲涅耳双面镜

菲涅耳双面镜由两面夹角 θ 很小的平面镜 M_1 和 M_2 所组成，如图 3.2.7 所示. 点(线)光源 S 发出的光经 M_1、M_2 反射后射向观察屏 Π，此两束反射光可看做分别从 S 关于 M_1、M_2 的镜像 S_1、S_2 所发出，故 S_1 和 S_2 即相当于杨氏实验中的两个次级点(线)源. 它们是同一点(线)源 S 的像，当然具有相同的相位关系，因而是相干的. 在屏 Π 上双光束的交叠区(图中阴影区)即形成了干涉条纹.

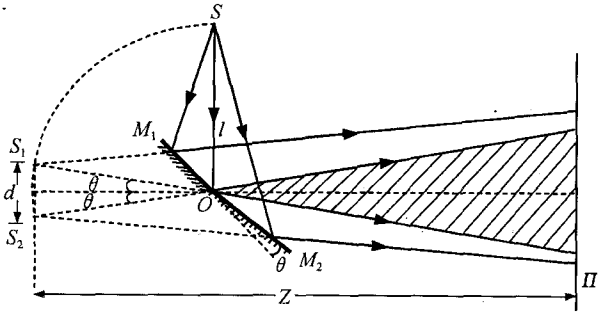


图 3.2.7 菲涅耳双面镜

设 O 是两镜面交线，若 $\overline{SO}=l$，当 θ 很小时利用近似 $\sin\theta\approx\theta$，可得到 S_1 和 S_2 的间距

$$d = 2l\theta, \tag{3.2.18}$$

从而干涉条纹的间距为

$$e = \frac{\lambda Z}{d} = \frac{\lambda Z}{2l\theta}, \tag{3.2.19}$$

这里 Z 是 S_1、S_2 所在平面与 Π 平面的距离.

2. 菲涅耳双棱镜

菲涅耳双棱镜 L 由两个顶角 θ 相同且很小的棱镜结合而成，如图 3.2.8 所示. 点(线)光源 S 发出的光波经上下两半棱镜折射后形成两束相干光波，从而在屏 Π 上的交叠区域形成干涉条纹. 这两列相干波可以认为分别从 S 的折射虚像 S_1 和 S_2 所发出. 设棱镜材料的折射率为 n，在 θ 很小时它对入射光的偏向角近似为 $(n-1)\theta$，因此 S_1，S_2 的横向距离

$$d = 2(n-1)l\theta, \tag{3.2.20}$$

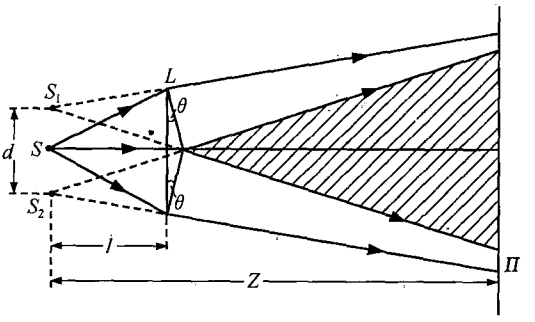


图 3.2.8 菲涅耳双棱镜

而屏幕上条纹间距为

$$e = \frac{\lambda Z}{d} = \frac{\lambda Z}{2(n-1)l\theta}, \tag{3.2.21}$$

式中各量意义如图示.

3. 劳埃德镜

点(线)光源 S 放在平面镜左侧且接近镜平面处，在右侧垂直于镜面方位放置接收屏，就构成了**劳埃德**(H. Lloyd)**镜**实验装置(图 3.2.9). 这里两相干光束是 S 的直射光及经由镜面的反射光，相应的两相干点(线)源则是 S 和 S 关于镜面的反射虚像 S'. $d=\overline{SS'}$ 显然等于 S 与镜面距离 a 的 2 倍，而 e 则可通过公式 $\lambda Z/d$ 算

出. 值得指出的是，若将屏幕 Π 移近镜面，使得它与镜右端 A 相接触，可以发现 A 处的条纹是暗纹，这是掠入射时反射光有半波损的一个实验验证.

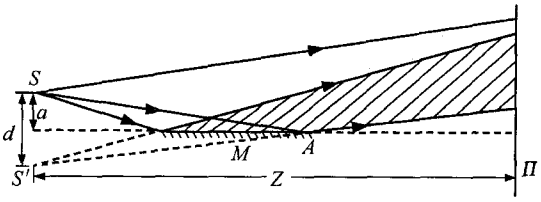


图 3.2.9 劳埃德镜

4. 比耶对切透镜

比耶(F. Billet)**对切透镜**是将一个凸透镜沿直径切成两半，并沿横向分开一点距离而构成(图 3.2.10). 这里两相干源是点源 S 通过上、下两半透镜分别形成的二实像 S_1 和 S_2，由几何光学可计算 S_1、S_2 的间距 d，并可用与前类似的公式求出屏 Π 上光束交叠区中干涉条纹的间距 e. 另一种构造剖镜的方法是将一透镜沿其直径切去一个窄条，然后将剩下的两半对接粘合，这时的成像及干涉过程可类似分析.

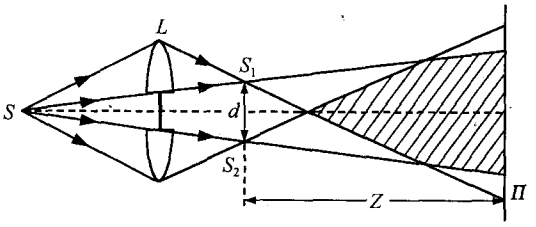


图 3.2.10 比耶对切透镜

5. 梅斯林实验

将一个凸透镜沿直径切开后纵向分开一段距离，即得到所谓**梅斯林**(G. Meslin)**实验装置**，如图 3.2.11 所示. 若将点光源 S 置于光轴上透镜左方，则在透镜右方光轴上不同位置 S_1、S_2 处将形成 S 的两个实像. 在 S_1、S_2 之间放一观察屏，在两光束交叠区即会出现干涉条纹. 应该注意的是，与以前所有观察方式均不同，此实验中观察屏平面 Π 垂直于 S_1、S_2 的连线；另外与两次波源相联系的波一为发散波(中心 S_1)，一为会聚波(中心 S_2). 因此，这里不能用前文公式 $e=\lambda Z/d$ 计算条纹间距，而应该根据波的叠加由二光波在 Π 平面的复振幅分布来求出该平面上的强度分布.

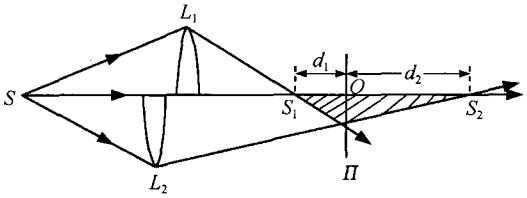


图 3.2.11　梅斯林实验装置

例 3.2.2　讨论梅斯林实验中屏 Π 上干涉图样的形状及特点.

解　参见图 3.2.11,设屏 Π 位于 S_1、S_2 之间,与 S_1、S_2 的距离分别为 d_1、d_2. 设次级点源 S_1 初相为 0,由于轴向光线通过 S_1 后再经距离 d_1+d_2 而到达 S_2,故 S_2 点初相为 $k(d_1+d_2)$. 中心在 S_1 的发散波和中心在 S_2 的会聚波在 Π 平面的复振幅分布分别为(设 S_1、S_2 强度近似相同)

$$\tilde{E}_1=\frac{A}{r_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_1},\quad \tilde{E}_2=\frac{A}{r_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr_2}\exp[\mathrm{i}k(d_1+d_2)],$$

式中 A 为常数,r_1、r_2 分别为 Π 面上所考察点 $P(x,y)$ 到 S_1、S_2 的距离,即

$$r_1=\sqrt{d_1^2+\rho^2},\quad r_2=\sqrt{d_2^2+\rho^2},$$

其中 $\rho^2=x^2+y^2$. 傍轴近似下有

$$\tilde{E}_1=\frac{A}{d_1}\exp\left[\mathrm{i}kd_1\left(1+\frac{\rho^2}{2d_1^2}\right)\right],$$

$$\tilde{E}_2=\frac{A}{d_2}\exp\left[-\mathrm{i}kd_2\left(1+\frac{\rho^2}{2d_2^2}\right)\right]\exp[\mathrm{i}k(d_1+d_2)]$$

$$=\frac{A}{d_2}\exp\left[\mathrm{i}k\left(d_1-\frac{\rho^2}{2d_2}\right)\right].$$

Π 平面上光强分布为

$$I=|\tilde{E}_1+\tilde{E}_2|^2=|A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kd_1}|^2\cdot\left|\frac{1}{d_1}\exp\left(\mathrm{i}\frac{k\rho^2}{2d_1}\right)+\frac{1}{d_2}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{k\rho^2}{2d_2}\right)\right|^2$$

$$=A^2\left\{\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\frac{2}{d_1d_2}\cos\left[\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)\rho^2\right]\right\}.$$

轴上点 $\rho=0$,为零级亮点①;第 m 级亮纹发生于

$$\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)\rho^2=2m\pi.$$

显然,这些条纹为以轴上点为中心的圆环,其半径及圆环间距分别为

① 这里未考虑会聚光通过焦点时的相位变化. 更精细的分析表明,焦点前后的相位会有较复杂的变化,而相位变化 π 会使得中心点成为暗点.

$$\rho_m = \sqrt{\frac{2m\lambda d_1 d_2}{d_1 + d_2}} \propto \sqrt{m},$$

$$e_m = \frac{\mathrm{d}\rho_m}{\mathrm{d}m} = \sqrt{\frac{\lambda d_1 d_2}{2m(d_1 + d_2)}} \propto \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

可见圆环越向外越密. 考虑到干涉场的区域限制，Π 面上只呈现各圆环的下半部. 读者可自行分析 Π 面沿轴向移动时条纹密度及衬比度的变化.

3.3 光场的相干性

上节讨论中均假定光源 S 为单色点光源或线光源，显然这只是一种理想模型. 实际上光源总有一定的大小或宽度，也总有一定的辐射波长范围；前者称为光源的**空间展宽**，后者称为光源的**光谱展宽**. 以杨氏实验为例，即使 S_1、S_2 仍为理想的点或细缝(它们的空间展宽的效应将在衍射一章予以讨论)，S 的两种展宽也将对干涉条纹的特性产生明显影响. 本节将具体分析这两种展宽的作用，即**光场的相干性**问题. 讨论中仍以杨氏实验为基础. 为方便起见，对这两种展宽分别予以考察，即在分析一种展宽的效果时假定另一展宽并不存在.

3.3.1 光源空间展宽的影响 光场的空间相干性

1. 光源空间展宽对干涉条纹衬比度的影响

1) 分离点源

首先，考虑杨氏实验中光源为两同波长分离点源 S 和 S' 时干涉条纹的变化，如图 3.3.1 所示(该图亦可理解为使用线光源及双缝时的截面图). 依上节分析，若 S 位于 z 轴(S_1、S_2 中垂线)，即 $R_1 = R_2$，则屏 Π 上零级条纹的中心 P_0 亦位于 z 轴上，从而有 $r_1 = r_2$，以满足 $R_1 + r_1 = R_2 + r_2$. 设另一点源 S' 位于 S 上方且与 S 距离为 b，则它在屏 Π 上产生的零级条纹中心 P_0' 相对 P_0 应有一定的位置错动量 a，此间距满足 $R_1' + r_1' = R_2' + r_2'$，即 $R_2' - R_1' = r_1' - r_2'$. 在傍轴近似下，有

$$R_2' - R_1' = \frac{d}{Z_s} b = b\beta, \quad r_1' - r_2' = \frac{d}{Z} a = a\alpha, \tag{3.3.1}$$

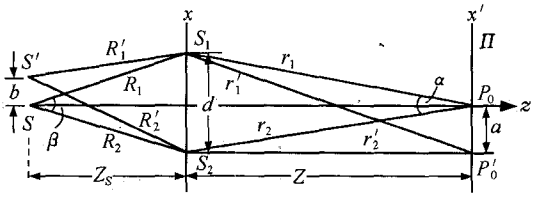


图 3.3.1 杨氏实验中点源 S 和 S' 形成的条纹错动

其中 $\beta=d/Z_s$ 和 $\alpha=d/Z$ 分别为 $\overline{S_1S_2}$ 对 S 点和 P_0 点的张角. 由以上各式易得到

$$a=\frac{Z}{Z_s}b. \tag{3.3.2}$$

这里 a 与 b 均取正值，实际上 P_0' 相对于 P_0 的移动方向应与 S' 相对于 S 的移动方向相反.

由于各独立点源是不相干的，当两点源同时照明时，屏 Π 上的光强分布应是各点源单独产生的强度分布之和，亦即沿 x' 方向错动距离为 a 的两套干涉条纹的强度之和. 因为这两套条纹互相平行，间距亦相等，可以想见当 b 从零逐渐增大时其合强度分布的衬比度 V 从 1 逐渐下降；当 b 增大到使 a 等于每套条纹的间距 e 的一半时，一套条纹的极强位置恰好与另一套条纹的极弱位置重合，即两套条纹强弱互补，若 S 与 S' 强度相同，则此时合强度呈一片均匀，使得 V 降为零. 由(3.2.17)和(3.3.2)式，以及 $a=e/2$ 可求得此时的 b 值为

$$b_1=\frac{Z_s}{Z}\cdot\frac{e}{2}=\frac{\lambda Z_s}{2d}=\frac{\lambda}{2\beta}. \tag{3.3.3}$$

当 b 再增加时衬比度又逐渐回升；一直到 $b=2b_1$，$a=e$ 时，两套条纹在互相错动一个条纹间距后又实现了极强与极强重合、极弱与极弱重合，使得 $V=1$. 图 3.3.2 分别画出了这几种情况(其中(a)图为单点源情况以作对比)，图中虚线为各点源单独产生的强度，实线为合强度. 若 b 继续增加，则合强度周而复始地重复以上变化过程，干涉条纹衬比度 V 也相应地在 1 和 0 之间呈周期性变化，如图 3.3.3 所示.

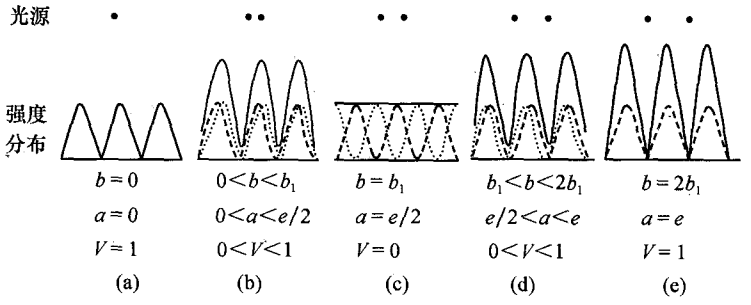


图 3.3.2　(a)单点源干涉强度分布，(b)～(e)二分离点源产生的干涉强度分布

2) 扩展光源

现在讨论在 x 方向宽度为 b 的扩展光源所形成的干涉条纹的衬比度. 仍可利用图 3.3.1，但这时在 S 与 S' 之间有无限多点光源连续分布. 设光源的强度分布是均匀的，则其强度合成图中 S 与 S' 单独形成的干涉图样之间连续均匀地分布着许多由中间源点形成的、幅度相等而位置沿 x' 方向相继错开的干涉图样，各套条纹之间的最大错动量 a 仍依(3.3.2)式由 $\overline{SS'}=b$ 来确定. 与二分离点源情况不同的

是，当 $b=b_1$，$a=e/2$ 时，尽管 S 和 S' 两端点产生的条纹亮暗互补，但由于中间连续源点的存在，其合强度分布仍具有一定起伏，即 $V\neq 0$，如图 3.3.4(a)所示. 只有当 b 增大到 $2b_1$，光源两端点产生的条纹错动量恰为 e 时，才使屏幕上合强度一片均匀，从而 $V=0$，如图 3.3.4(b)所示. 与二分离点源情况的另一重要区别是，当 b 从 $2b_1$ 继续增大时，对连续源，V 并不在 1 和 0 之间作等幅度周期变化，尽管会有一些小的起状，但其整体趋势呈逐渐衰减并趋于零. 这一点也可由以上作图方法定性看出.

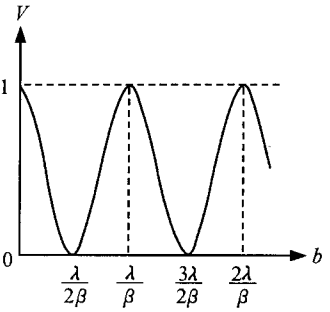


图 3.3.3 二点源分离量与干涉条纹衬比度的关系

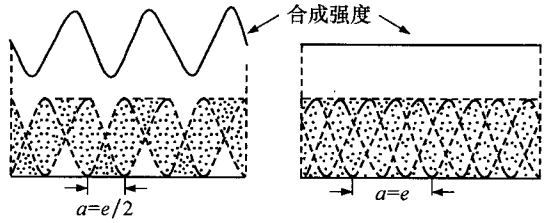


图 3.3.4 光源扩展对干涉强度的影响

为求出扩展源所形成的干涉条纹的衬比度 V 随光源宽度 b 变化的定量表达式，可以进行如下计算.

取图 3.3.5 所示坐标系，并设光源在 x 方向的延展为从 $x_s=-b/2$ 到 $x_s=b/2$. 考虑光源上位于坐标 x_s 处、宽度为 $\mathrm{d}x_s$ 的微元，它在屏 Π 上产生的光强分布应为

$$\mathrm{d}I(x_s,x')=2I_0\,\mathrm{d}x_s[1+\cos\delta(x_s,x')], \tag{3.3.4}$$

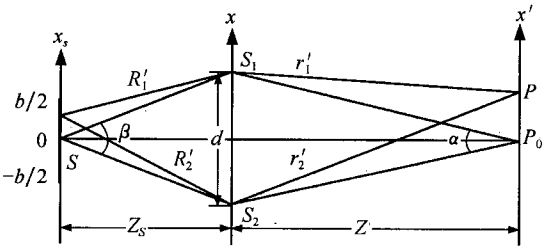


图 3.3.5 计算扩展源对干涉强度影响的附图

式中 I_0 为一常数，它在数值上等于单位宽度的光源发出的光通过一条缝照明 Π 平面时在 $P(x')$ 点产生的强度，δ 为从 $\mathrm{d}x_s$ 发出在 P 点干涉的两束光的相位差，

$$\delta(x_s,x')=\frac{2\pi}{\lambda}[(R'_2+r'_2)-(R'_1+r'_1)]. \tag{3.3.5}$$

运用傍轴近似，上式可化为

$$\delta(x_s, x') = \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x' + \beta x_s). \tag{3.3.6}$$

由于各个源点是互不相干的，Π 平面上总的光强分布应为所有元光源所产生干涉图样的光强分布的叠加，即

$$I(x') = \int_{-b/2}^{b/2} \mathrm{d}I(x_s, x'). \tag{3.3.7}$$

将(3.3.4)和(3.3.6)式代入上式，积分后可以得到

$$I(x') = 2I_0 b\left[1 + \frac{\lambda}{\pi b\beta}\sin\left(\frac{\pi b\beta}{\lambda}\right)\cos\left(\frac{2\pi\alpha}{\lambda}x'\right)\right]. \tag{3.3.8}$$

显然，干涉条纹的最大和最小强度分别为

$$I_M = 2I_0 b\left[1 + \left|\frac{\lambda}{\pi b\beta}\sin\left(\frac{\pi b\beta}{\lambda}\right)\right|\right],$$

$$I_m = 2I_0 b\left[1 - \left|\frac{\lambda}{\pi b\beta}\sin\left(\frac{\pi b\beta}{\lambda}\right)\right|\right].$$

而条纹的衬比度则为

$$V = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} = \left|\frac{\lambda}{\pi b\beta}\sin\left(\frac{\pi b\beta}{\lambda}\right)\right|$$

$$= \left|\mathrm{sinc}\left(\frac{\beta b}{\lambda}\right)\right|. \tag{3.3.9}$$

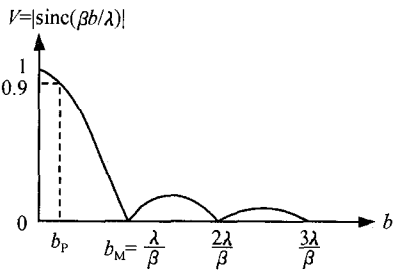


图 3.3.6 干涉条纹衬比度与扩展光源宽度的关系

V 随 b 的变化曲线如图 3.3.6 所示.

无论从定性分析或定量计算均可看出，衬比度 V 第一次降为 0 时的光源宽度为

$$b_M = \frac{\lambda}{\beta} = \frac{\lambda Z_s}{d}. \tag{3.3.10}$$

当 b 由此值继续增大时，V 以振荡衰减形式迅速趋于零，而且其值均显著小于 1(第一峰值也仅为 0.21). 这说明当 $b > b_M$ 时干涉条纹的衬比度已经很低，通常已难以分辨，因此 b_M 称为光源的**临界宽度**，即可以看到干涉条纹的光源的极限宽度. 实用中为保证干涉条纹有足够高的衬比度以便于观察，光源的**容许宽度** b_p 应显著小于 b_M. b_p 的具体取值有一定的任意性，一般常取为

$$b_p = \frac{1}{4}b_M = \frac{\lambda}{4\beta}, \tag{3.3.11}$$

相应的 V 值约为 0.9.

2. 光场的空间相干性

1) 空间相干性的概念及度量

在第 2 章波的叠加的讨论中，曾把光场(或相应光源)分为相干和非相干两类.

严格地说，它们只是两种极端情况，实际问题中常遇到介于完全相干与完全非相干的中间类型. 例如，在杨氏实验中设有 S、S' 两个独立点源，源点 S 发出的光通过孔 S_1 在屏上某点产生的光场为 E_{S1}，通过孔 S_2 在该点产生的光场是 E_{S2}；源点 S' 发出的光通过 S_1、S_2 在屏上同一点所产生的光场分别是 E'_{S1} 和 E'_{S2}. 由叠加原理，屏上该点光场应为 $E_{S1}+E_{S2}+E'_{S1}+E'_{S2}$. 因前两项光场是同一点源 S 产生的，它们是相干的；同理，后两项光场也是相干的. 但第一项与第三项、第一项与第四项、第二项与第三项、以及第二项与第四项因分别表示来自不同源点的光场，故它们是非相干的. 这样，屏上某点光场各组分中既包含相干的成分，也包含非相干的成分，产生这种光场的次波源 S_1 和 S_2 被称为**部分相干**的.

在干涉过程中，两次波源光场的瞬时变化是不可测的，但它们所产生的宏观效果——干涉条纹是可以观测的，而且干涉条纹的衬比度直接与两次波源的相干程度有关. 因此，干涉条纹衬比度 V 这一可测量就成为产生该条纹的两次波源的相干度的度量. V 越大，两次波源的相干度越高.

仍以杨氏实验为例，若 S 为点光源，所产生干涉条纹 $V=1$，次波源 S_1、S_2 是完全相干的. 若 S 为扩展光源，S_1、S_2 一般是部分相干的，这时 $0<V<1$. 具体地说，当 $b\leqslant b_p$ 时，V 接近 1，S_1、S_2 相干度较高；当 b 增加时，V 逐渐减小，S_1、S_2 的相干度逐渐下降；当 b 增大到临界宽度 b_M 时，$V=0$，S_1、S_2 完全不相干；当 $b\geqslant b_M$ 时，因 V 值很小且迅速衰减，S_1、S_2 也基本上认为是不相干的.

应该指出，虽然用 Π 平面上干涉条纹的衬比度可以直观地测量 S_1、S_2 两次波源的相干度，但容易想到，即使 Π 平面并不存在，或者进一步将屏 Σ 也移去，S_1、S_2 两点处空间光场的相干度仍保持原来的状态. 质言之，用屏 Σ 取出 S_1、S_2 两点作为次波源并用屏 Π 测定它们形成的干涉条纹的衬比度是确定 S_1、S_2 处光场相干度的实验手段，但 S_1、S_2 处光场的相干性并不因为人们是否在测量它而存在或消失，它是一种客观实在，反映了这两处光场相互关联的紧密程度. 我们把空间中不同位置的两点处光场的相关程度称为光场的**空间相干性**. 在杨氏实验中，S_1、S_2 处光场是由左方光源 S 所激发的，S_1、S_2 的连线与 S 射来的光的传播方向垂直或基本垂直，这时 S_1、S_2 处光场的空间相干性常称为**横向空间相干性**，有时也简称为空间相干性.

2) 光场的横向相干范围

由前文分析，当 S_1、S_2 位置给定时，该两点光场的空间相干性取决于光源 S 的宽度. 反之，若光源宽度 b 给定，S_1、S_2 的横向分离 d 越大，则 S_1、S_2 处光场的相干性越差. 由(3.3.10)式可知，在 S_1、S_2 的相干性刚好消失的临界情况下，d 值为

$$d_M=\frac{\lambda Z_s}{b}=\frac{\lambda}{\gamma}, \tag{3.3.12}$$

式中 $\gamma=b/Z_s$ 为光源宽度对 S_1、S_2 中心的张角. 当 d 由 d_M 再增大时，S_1、S_2 两点的相干性亦基本为零. 因此，可以定义 d_M 为给定光源下光场的**横向相干宽度**.

由(3.3.12)式可以看出，对给定 b，Z_s 越大，d_M 越大，而比值 d_M/Z_s 是不变的，故光场的横向相干范围的另一更为方便的表达方式是利用角宽度

$$\beta_M=\frac{d_M}{Z_s}=\frac{\lambda}{b},\tag{3.3.13}$$

β_M 是光场中保持相干性的两点的最大横向分离相对于光源中心的张角，常称为**相干孔径角**.

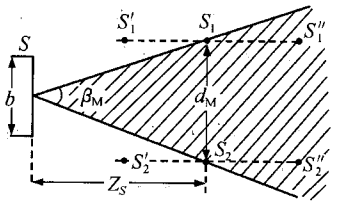


图 3.3.7　扩展光源的横向相干范围

图 3.3.7 绘出了 d_M、β_M、b 等量的关系，图中阴影区表示横向相干范围，S_1、S_2 两点恰处于刚好不相干的临界状态. 若将此两点保持横向距离不变而移近 S，如到 S_1'、S_2' 处，则该两点仍不相干；但若使它们远离 S，如移到 S_1''、S_2'' 处，则可以成为相干的. 可见即使是对于较大的光源，如果在距离光源很远处取相距很近的两点，亦可得到两相干次波源.

利用相干孔径角可以求出各种干涉装置中对光源宽度的限制. 其基本思想是：对宽度为 b 的光源，若欲使在观察屏上同一点(通常取为零级条纹中心)交会的两条光线保持一定程度的相干性，则这两条光线从光源中心发出时的夹角不能超过 $\beta_M=\lambda/b$. 此方法对于菲涅耳双面镜、双棱镜及劳埃德镜等都是适用的.

例 3.3.1　分析菲涅耳双面镜干涉实验中对光源宽度的要求.

解　图 3.3.8 示出了干涉条纹刚好消失，即 S_1、S_2 的相干性刚好降为零的临界情况. 这时在屏 Π 中心点 P_0 处交会的两条光线从 S 中心发出时的夹角恰为 $\beta=\lambda/b$，由图中几何关系可知

$$\frac{\beta}{2}=\theta-\frac{l\theta}{Z},$$

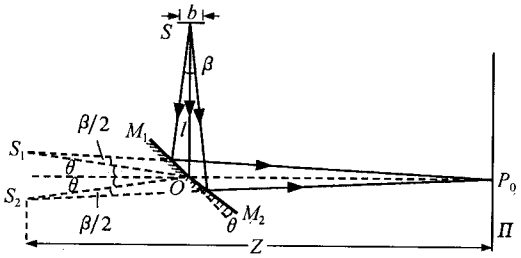


图 3.3.8　菲涅耳双面镜光源临界宽度的确定

故光源的临界宽度

$$b_M=\frac{\lambda}{\beta}=\frac{\lambda}{2\theta(1-l/Z)}=\frac{\lambda Z}{2(Z-l)\theta},$$

其容许宽度可取 $b_P=b_M/4$.

以上关于一维情况的讨论很容易推广到二维情况. 设光源在 x、y 方向的展宽分别为 b_x、b_y，则 x、y 方向的相干孔径角分别为

$$\beta_{Mx}=\frac{\lambda}{b_x},\quad \beta_{My}=\frac{\lambda}{b_y}. \tag{3.3.14}$$

而距离光源 Z_s 处的横向相干宽度分别为

$$d_{Mx}=\frac{\lambda Z_s}{b_x},\quad d_{My}=\frac{\lambda Z_s}{b_y}. \tag{3.3.15}$$

我们把光场中横向相干范围的区域大小

$$A_c=d_{Mx}d_{My}=\frac{\lambda^2 Z_s^2}{b_x b_y}=\frac{\lambda^2 Z_s^2}{A_s} \tag{3.3.16}$$

定义为**相干面积**，在此面积内取两点作次波源可以得到一定的相干性. 可见相干面积与光源面积 A_s 成反比 . 上式是以矩形光源为例得出的. 对圆形光源，精确的计算比较复杂，但仍可利用以上各式进行数量级的估算.

3) 小结——一组反比关系

为便于比较和记忆，双缝干涉中各线量和角量重绘于图 3.3.9，并将有关公式重写如下：

$$e\alpha=\lambda, \tag{3.3.17}$$

$$b\beta=\lambda, \tag{3.3.18}$$

$$d\gamma=\lambda. \tag{3.3.19}$$

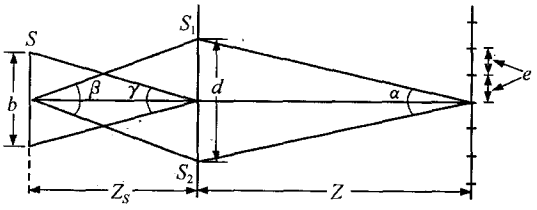


图 3.3.9 双缝干涉中各线量和角量的关系

注意以上三式形式完全相似，皆是一横向线量与一角量的乘积等于 λ，而且其中每一角量都以相应线量的中心为顶点. 不过三式的适用范围是不同的，(3.3.17)式适用于干涉条纹存在的一般情况，常用来求条纹间距；而(3.3.18)和(3.3.19)式则适用于相干性刚好消失时的临界情况，常用来求给定光源下的相干孔径角 β_M 及横向相干宽度 d_M，或者反过来由给定的 S_1、S_2 间距或 β 求光源的临界宽度 b_M. 以上三式皆表示一线量和一角量的反比关系. 其中后两式，即空间相干性的反比关系指出：光场的空间相干性来源于光源的空间展宽；普通光源的空间展宽越大，其光场的空间相干范围越小. 这在理论及实践上均具有重要意义.

3.3.2 光源光谱展宽的影响 光场的时间相干性

1. 光源光谱展宽对干涉条纹衬比度的影响

本节仍以杨氏实验为例讨论光源的非单色性对干涉效果的影响，为突出这一因素，设光源 S 为点源(对柱面波双缝干涉实际上为线源，但在 xz 截面上仍为点源)，但具有一定的光谱宽度 $\Delta\lambda$. 由前文分析，在屏 Π 上满足 $R_1+r_1=R_2+r_2$ 的某点 P_0，发生干涉的两束光总是等光程的，即对各种波长均有 $\Delta=0$，故该点是所有波长共同的零级极大位置. 但由于条纹间距 $e=\lambda/\alpha$ 与 λ 有关，不同 λ 的色光形成条纹的间距不同，所以除零级条纹之外，其他各级条纹会在 x' 方向发生色散，而且距零级条纹越远处色散量越大.

图 3.3.10 画出了白光点源形成的干涉条纹的示意图. 由于白光的光谱范围 $\Delta\lambda$ 相对其平均波长 $\bar{\lambda}$ 是很宽的，故除零级中心为白色，一级条纹有着内紫(v)外红(r)的清晰色序之外，从二级条纹的外侧起各级条纹即有交叠，而且级别越高交叠越甚，使得较高级条纹逐渐模糊以至于完全匀化而消失.

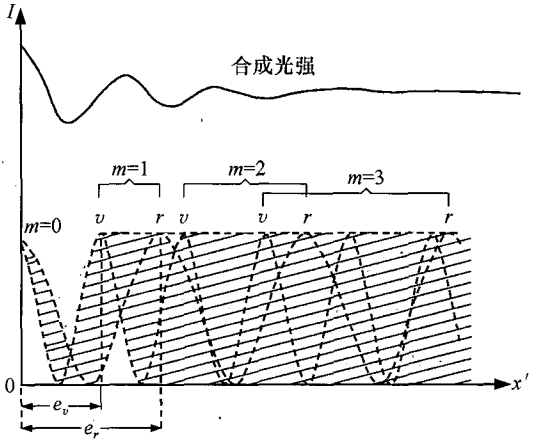


图 3.3.10 白光点源形成的杨氏条纹

以下分析准单色光，即 $\Delta\lambda\ll\bar{\lambda}$(这时 λ 与 $\bar{\lambda}$ 可不再区分)的情况，$\Delta\lambda$ 为光源的谱线宽度. 图 3.3.11 中以屏 Π 上坐标为 x' 处(取零级条纹中心为坐标零点)相应的光程差 $\Delta=x'\alpha$ 为横坐标画出了光源的两个极端波长 λ 和 $\lambda+\Delta\lambda$ 产生的各级干涉极大位置，中间波长各色光的极大位置以阴影表示. 可以看到，Δ 越小，干涉条纹越清晰. 当 Δ 增大到 Δ_M，使得两极端波长的同级干涉极大恰好错开一个条纹间距，即 $\lambda+\Delta\lambda$ 色光的 m 级极大恰与 λ 色光的 $m+1$ 级极大位置重合时，干涉条纹开始完全模糊. 根据此条件可以求得能够看到条纹的最大光程差 Δ_M，即由

$$\Delta_M = (m+1)\lambda = m(\lambda+\Delta\lambda), \tag{3.3.20}$$

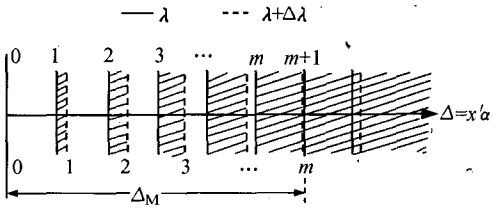


图 3.3.11 光谱展宽为 $\Delta\lambda$ 的光源所形成的干涉极大位置的色散

可得

$$m\Delta\lambda = \lambda,$$

所以能够看到条纹的最高干涉级为

$$m_M = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}; \tag{3.3.21}$$

代入(3.3.20)式得

$$\Delta_M = \left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda}+1\right)\lambda \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}, \tag{3.3.22}$$

上式最后一步利用了准单色近似.

回顾 2.5 节中的分析,光源的光谱展宽($\Delta\nu$ 或 $\Delta\lambda$)是由于对光源所发出的波列的持续时间 Δt 的限制而引起的,且有关系式

$$\Delta\nu \cdot \Delta t = 1.$$

由 $\nu = c/\lambda$,c 为光速,得 $\Delta\nu = c\Delta\lambda/\lambda^2$,这里 $\Delta\nu$、$\Delta\lambda$ 均为绝对值,所以波长展宽为 $\Delta\lambda$ 的光源所发波列的持续时间为

$$\Delta t = \frac{1}{\Delta\nu} = \frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda},$$

相应的波列长度为

$$L_c = c\Delta t = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}. \tag{3.3.23}$$

可见最大光程差 Δ_M 恰好等于光源所发波列的长度 L_c. 此结论的物理意义是显而易见的. 因为只有在 $\Delta \leqslant L_c$ 时,观察屏上同一点 P 才能接收到光源 S 发出的同一波列. 当 $\Delta > L_c$ 时,屏上某点所接收到的从 S_1、S_2 分别传播来的光波已经属于光源 S 在相继时间所发出的不同波列,而不同波列的初相独立无关,故它们不能相干. 因此由(3.3.23)式所确定的 L_c 值,即波列长度,通常称为**相干长度**.

综上所述,关于光源光谱展宽对干涉条纹的影响可得出如下结论:

(1) 单色点光源才能得到 $V=1$ 的条纹,光源的光谱扩展将导致衬比度的劣化;

(2) 对给定的光源光谱展宽 $\Delta\lambda$，所允许最大光程差，亦即光源发光的波列长度由(3.3.23)式确定，相应的最高干涉级次则由 $\lambda/\Delta\lambda$ 确定；

(3) 在 $\Delta<L_c$ 或 $m<\lambda/\Delta\lambda$ 的范围内可以看到干涉条纹，但其衬比度将随 Δ 或 m 的增加而单调下降；

(4) 只有零级条纹是消色散的，其他各级条纹均有色散，同级条纹中短波长在内侧，长波长在外侧，级别越高色散越大.

其中(3)、(4)两点可由图 3.3.11 中直观看出.

例 3.3.2 杨氏双缝干涉实验中线光源发光的平均波长为 $\lambda=600$ nm，光谱范围 $\Delta\lambda=10$ nm，$d=1$ mm，$Z=1$ m. 求屏幕上能看到条纹的区域宽度，此区域一共有多少条纹？

解 设屏幕上零级条纹中心坐标为 $x=0$，能看到条纹的区域的边缘坐标为 $x=\pm x_M$，由

$$\Delta_M = L_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = \frac{d}{Z}x_M,$$

可得

$$x_M = \frac{Z\lambda^2}{d\Delta\lambda} = \frac{10^3\times(6\times10^{-4})^2}{1\times10^{-5}}\text{mm} = 36\text{ mm}.$$

条纹区域宽度为 $2x_M=72$ mm，包含的条纹数目(即亮暗纹对数)为

$$N = 2\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 2\times\frac{600}{10} = 120.$$

也可以先用 $N=2m_M=2\lambda/\Delta\lambda$ 求得 N，再利用 $2Ne$ 求得条纹区域宽度，其中 m_M 为最高干涉级次，e 为用 λ 算得的条纹间距.

以下定量计算条纹衬比度与光源光谱展宽及光程差的关系. 光强的光谱分布可用光强谱密度或称**光谱强度** $i(\lambda)=\mathrm{d}I(\lambda)/\mathrm{d}\lambda$ 来表示，其中 $\mathrm{d}I(\lambda)$ 是在 λ 附近、$\lambda\sim\lambda+\mathrm{d}\lambda$ 区间中的辐射光强. 为计算方便，可利用 $k=2\pi/\lambda$ 将 $i(\lambda)$ 转化为 $i(k)$. 函数 $i(\lambda)$ 或 $i(k)$ 的具体形式称为**光谱线型**. 对观察屏上相应光程差为 Δ 的某点 P，波矢量数值为 $k\sim k+\mathrm{d}k$ 的无限窄带光形成的干涉强度应为

$$\mathrm{d}I(k) = 2i(k)\mathrm{d}k[1+\cos(k\Delta)], \tag{3.3.24}$$

这里 $i(k)\mathrm{d}k$ 表示此窄带光通过单缝在 P 点产生的光强. 由于不同色光是不相干的，屏上总光强应为各元窄带光光强贡献之和，即

$$I=\int\mathrm{d}I(k) = \int_0^\infty 2i(k)[1+\cos(k\Delta)]\mathrm{d}k$$

$$= 2I_0 + 2\int_0^\infty i(k)\cos(k\Delta)\mathrm{d}k, \tag{3.3.25}$$

其中

$$I_0 = \int_0^\infty i(k)\mathrm{d}k$$

表示单缝在 P 点产生的总光强，而 $2I_0$ 显然为干涉场中的平均强度. 对光谱强度在 $k_0-\Delta k/2\sim$

$k_0+\Delta k/2$ 之间均匀分布的光源(图 3.3.12,常称为矩形线型),为满足上式,可取

$$i(k)=\begin{cases}\dfrac{I_0}{\Delta k}, & k_0-\dfrac{\Delta k}{2}\leqslant k\leqslant k_0+\dfrac{\Delta k}{2}\\ 0, & k\text{ 为其他值}\end{cases}$$

代入(3.3.25)式,可得

$$I=2I_0\left[1+\frac{\sin\left(\frac{\Delta k\cdot\Delta}{2}\right)}{\frac{\Delta k\cdot\Delta}{2}}\cos(k_0\cdot\Delta)\right]. \tag{3.3.26}$$

因此干涉条纹的衬比度为

$$V=\left|\frac{\sin\left(\frac{\Delta k\cdot\Delta}{2}\right)}{\frac{\Delta k\cdot\Delta}{2}}\right|=\left|\frac{\sin\left(\frac{\pi\Delta\lambda\cdot\Delta}{\lambda^2}\right)}{\frac{\pi\Delta\lambda\cdot\Delta}{\lambda^2}}\right|$$

$$=\left|\operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta}{L_c}\right)\right|, \tag{3.3.27}$$

式中 $L_c=\lambda^2/\Delta\lambda$ 为相干长度.

图 3.3.13 画出了对给定 $\Delta\lambda$ 衬比度 V 随光程差 Δ 变化的示意图,可见 V 随 Δ 的增加而迅速振荡衰减,当 $\Delta\geqslant L_c$ 时 V 值很小,故可认为是不相干的. 因(3.3.27)式中 Δ 与 $\Delta\lambda$ 的地位是对等的,故在 Δ 给定时 V 随 $\Delta\lambda$ 的变化情况亦与此曲线完全类似. 这些曲线可以定量地证实前文中的所有结论.

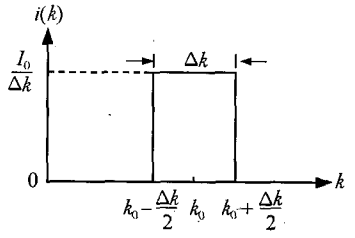


图 3.3.12 在 Δk 区间内均匀分布的光谱强度

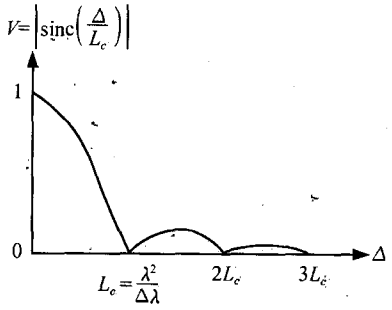


图 3.3.13 干涉条纹衬比度与光程差的关系

最后作一点说明. 图 3.3.13 中显示当 $\Delta>L_c$ 时 $V\neq0$ 且稍有回升,若用前文有限长波列模型这是难以解释的. 产生这种不一致性的原因是由于波在空域中的有限长等幅波列模型和在频域中的矩形模型并不自洽. 由 2.5 节可知,有限长等幅波列模型相应的频谱应为 sinc 函数而非矩形函数,而矩形线型频谱相应的空间波形也应为 sinc 函数而非有限长等幅波列. 更接近实际的光谱线型应为 $i(k)$ 随 $|k-k_0|$ 的增大而单调减小并趋于零(如与习题 2.38 中曲线类似的高斯线型),这时可证明 V 将随 Δ(或 $\Delta\lambda$)的增大而单调下降并趋于零. 实用中可规定 V 的某一下界相应的 Δ 值为 $\Delta_M=L_c$;虽然不同规定下 L_c 值会稍有差别,但其数量级仍满足(3.3.23)式.

2. 光场的时间相干性

利用点光源 S 作杨氏实验时，只要屏 Π 上某点 P 相应的光程差 $\Delta\neq 0$，则在同一时刻在该点交会并叠加的两光场相应于 S 在不同时刻发出的光波. 具体地说，设光源 S 所辐射的光场随时间的变化形式为 $E_s(t)$，则此光波通过 S_1、S_2 衍射后到达 P 点的光场形式分别为 $E_1=K_1E_s(t-t_1)$ 和 $E_2=K_2E_s(t-t_2)$，其中 K_1、K_2 分别为从 S 经 S_1、S_2 到达 P 光场的传播因子，它由系统的几何配置所确定，$t_1=(R_1+r_1)/c$，$t_2=(R_2+r_2)/c$，t_2 相对于 t_1 的延迟量为

$$\Delta t_P=t_2-t_1=\frac{\Delta}{c}. \tag{3.3.28}$$

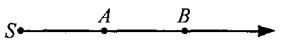


图 3.3.14 时间相干性即纵向空间相干性

这样，P 点的干涉效果取决于同一源点在时间差为 Δt_P 的不同时刻所发出的两光场 E_1 和 E_2 的相关程度，此相关程度称为光场的**时间相干性**. 由于同一点源 S 在不同时刻发出的光波沿波的传播方向(纵向)传播到不同位置 A 和 B(图 3.3.14)，故时间相干性也即沿纵向不同位置处 A、B 两点光场的空间相干性，可称为**纵向空间相干性**.

因理想单色波的波列是无限长的，A、B 两点相距再远也属于同一波列，该两点光场总保持确定的相位关系，故它们总是相干的. 对非单色波则不然，这时波列为有限长，A、B 两点光场的相关程度取决于该两点能否以及在多大程度上(如相对时间是多少)处于同一波列之中. 因此，时间相干性问题的产生来源于光源所发波列长度的有限性，亦即光源的非单色性或光谱展宽. 它可以由互相等价的三种量来描述：

(1) 相干长度 L_c，即波列长度；

(2) 相干时间 Δt，即光源辐射一个波列的时间；

(3) 光源的光谱展宽 $\Delta\lambda$ 或 $\Delta\nu$.

以上三种量通过(3.3.23)式联系起来，任知其中一种量即可通过有关参量求得另两种量. $\Delta\lambda$ 或 $\Delta\nu$ 的增大将使得 L_c 或 Δt 减小. 当 $\Delta\lambda$ 或 $\Delta\nu$ 很大，使得 $\Delta\geqslant L_c$ 或 $\Delta t_P\geqslant\Delta t$ 时，光场是不相干的；当 $\Delta<L_c$ 或 $\Delta t_P<\Delta t$ 时具有一定的相干性，且此相干性随相对比值 Δ/L_c 或 $\Delta t_P/\Delta t$ 的减小而逐渐增强. 因此，光源单色性越高($\Delta\lambda$ 或 $\Delta\nu$ 越小，L_c 或 Δt 越大)，所考察点处两光束的光程差 Δ 越小，时间相干性越好，即在该点作为相干性度量的干涉条纹的衬比度越大.

最后对相干长度的数量级给出几个实例. 对白光可以取 $\lambda=550$ nm，$\Delta\lambda=300$ nm，由(3.3.23)式可得 $L_c\approx 0.001$ mm$\approx 2\bar{\lambda}$. 汞灯的绿线 $\lambda=546.1$ nm，$\Delta\lambda=0.025$ nm，$L_c=1.2$ cm. 单色性最好的气体放电源之一是 Kr^{86} 的 605.7 nm 谱线，其线宽仅为 4.7×10^{-4} nm，相应 L_c 达 78 cm. 激光源可以达到的相干长度远超过任何非激光源，如 CO_2 激光的 10.6 μm 谱线，$\Delta\lambda=1\times10^{-5}$ nm，L_c 可达 11 km；精

密控制下的 He-Ne 激光可达到更长的相干长度. 但由于各种原因，实验室中普通激光器的相干长度通常要比以上数值短得多.

*3.3.3 部分相干性理论基础

前文分别分析了光场的空间相干性和时间相干性. 实际上，这两种相干性通常是同时存在的. 它们可以作为更普遍的相干理论的特例而得到. 本节仍以杨氏实验为基础，对普遍的相干理论简单地作一介绍.

1. 互相干函数与复相干度

在杨氏实验(图 3.3.15)中，设 S 为准单色扩展光源，S_1、S_2 两点光场分别用复波函数表示为 $E(S_1,t)$ 和 $E(S_2,t)$，则屏 Π 上某点 P 的光场应为 S_1、S_2 两次波源在该点激发的光场之和，即

$$E(P,t)=K_1E\left(S_1,t-\frac{r_1}{c}\right)+K_2E\left(S_2,t-\frac{r_2}{c}\right), \tag{3.3.29}$$

其中 K_1、K_1 分别为从 S_1、S_2 到 P 点的传播因子①，r_1/c 和 r_2/c 分别为路径 S_1P 和 S_2P 所造成的时间延迟. P 点光强为

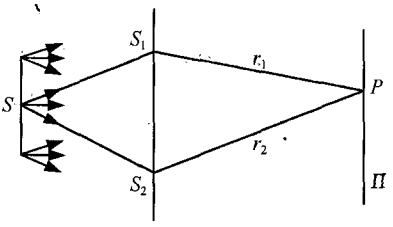


图 3.3.15 准单色扩展光源的相干性

$$\begin{aligned}I(P)&=\langle E(P,t)E^*(P,t)\rangle\\&=|K_1|^2\left\langle\left|E\left(S_1,t-\frac{r_1}{c}\right)\right|^2\right\rangle+|K_2|^2\left\langle\left|E\left(S_2,t-\frac{r_2}{c}\right)\right|^2\right\rangle\\&\quad+K_1K_2^*\left\langle E\left(S_1,t-\frac{r_1}{c}\right)E^*\left(S_2,t-\frac{r_2}{c}\right)\right\rangle\\&\quad+K_1^*K_2\left\langle E^*\left(S_1,t-\frac{r_1}{c}\right)E\left(S_2,t-\frac{r_2}{c}\right)\right\rangle.\end{aligned} \tag{3.3.30}$$

上式中右端第一项和第二项分别为次波源 S_1、S_2 单独在 P 点产生的光强，将它们分别记为 $I_1(P)$ 和 $I_2(P)$，并定义

$$\Gamma_{12}(\tau)=\langle E(S_1,t+\tau)E^*(S_2,t)\rangle. \tag{3.3.31}$$

对平稳光场，求时间平均值时时间原点可以移动，(3.3.30)式可表示成

$$I(P)=I_1(P)+I_2(P)+K_1K_2^*\Gamma_{12}(\tau)+K_1^*K_2\Gamma_{21}(-\tau), \tag{3.3.32}$$

其中 $\tau=(r_2-r_1)/c$，$\Gamma_{12}(\tau)$ 表示 S_1、S_2 两点光场在有相对时间延迟 τ 时的相关性，称为 S_1、S_2 两点光场的**互相干函数**，它是相干理论中最基本的一个物理量. 由(3.3.31)式可知

$$\Gamma_{21}(-\tau)=\Gamma_{12}^*(\tau),$$

故(3.3.32)式也可写为

$$I(P)=I_1(P)+I_2(P)+2|K_1K_2|\,\mathrm{Re}\{\Gamma_{12}(\tau)\}. \tag{3.3.33}$$

场的平稳性亦导致

① 因次波比初波相位超前 $\pi/2$，故 K_1、K_2 为复数. 第 4 章中对此将作进一步说明.

$$I_1(P)=|K_1|^2\left\langle\left|E\left(S_1,t-\frac{r_1}{c}\right)\right|^2\right\rangle$$
$$=|K_1|^2\langle|E(S_1,t)|^2\rangle$$
$$=|K_1|^2\langle E(S_1,t)E^*(S_1,t)\rangle$$
$$=|K_1|^2\Gamma_{11}(0), \tag{3.3.34}$$

同理

$$I_2(P)=|K_2|^2\Gamma_{22}(0), \tag{3.3.35}$$

这里$\Gamma_{11}(0)$和$\Gamma_{22}(0)$分别称为S_1和S_2点光场在$\tau=0$时的**自相干函数**，显然它们分别表示S_1和S_2点的光强，即

$$I(S_1)=\Gamma_{11}(0),\quad I(S_2)=\Gamma_{22}(0). \tag{3.3.36}$$

定义规范化的互相干函数为

$$\gamma_{12}(\tau)=\frac{\Gamma_{12}(\tau)}{[\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)]^{1/2}}, \tag{3.3.37}$$

$\gamma_{12}(\tau)$称为**复相干度**. 它一般为复数，对准单色光可表示为

$$\gamma_{12}(\tau)=|\gamma_{12}(\tau)|\exp\{-i[2\pi\bar{\nu}\tau-\alpha_{12}(\tau)]\}. \tag{3.3.38}$$

从而(3.3.33)式可改写为

$$I(P)=I_1(P)+I_2(P)+2\sqrt{I_1(P)I_2(P)}\,|\gamma_{12}(\tau)|\cos[2\pi\bar{\nu}\tau-\alpha_{12}(\tau)]. \tag{3.3.39}$$

这里$\bar{\nu}$表示光波的平均频率. 显然，上式中第三项反映了干涉条纹的形成，其中$2\pi\bar{\nu}\tau=2\pi(r_2-r_1)/\bar{\lambda}$表示由于$P$点位置不同所产生的在该点交会的两列波的相位差，$\alpha_{12}(\tau)$确定了干涉条纹的初相(即零级条纹的定位). 干涉条级的衬比度则为

$$V=\frac{2\sqrt{I_1I_2}}{I_1+I_2}|\gamma_{12}(\tau)|. \tag{3.3.40}$$

当$I_1(P)=I_2(P)$时，上式简化为

$$V=|\gamma_{12}(\tau)|. \tag{3.3.41}$$

数学上可以证明

$$\Gamma_{12}(\tau)\leqslant[\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)]^{1/2},$$

故有

$$0\leqslant|\gamma_{12}(\tau)|\leqslant1, \tag{3.3.42}$$

这与$\gamma_{12}(\tau)$的物理意义(3.3.41)式是完全相符的.

一般地，$|\gamma_{12}(\tau)|$确定了S_1、S_2两次波源光场在有时间延迟τ的某点P产生的干涉条纹的衬比度，故它可以表征此二光场的相干性，并被称为**相干度**. 若$|\gamma_{12}(\tau)|=1$，此二光场是完全**相干**的；若$|\gamma_{12}(\tau)|=0$，二光场是完全**非相干的**. 以上两种情况是相干状态的两种理想极限. 通常有$0<|\gamma_{12}(\tau)|<1$，它表示了**部分相干**，且$|\gamma_{12}(\tau)|$越接近1相干性越好.

2. 空间相干性

若不计时间延迟因素，即令$\tau=0$，只考虑空间两点光场$E(S_1,t)$和$E(S_2,t)$的相关性，则该相关性称为光场的空间相干性. 它由$\Gamma_{12}(0)$或规范化后的$\gamma_{12}(0)$所表征，$\Gamma_{12}(0)$称为S_1、S_2两点的**互强度**. 例如，杨氏实验中，若考虑零级条纹($r_1=r_2$，$\Delta=0$，$\tau=0$)附近的条纹衬比度，则有

(设 $I_1=I_2$)$V=|\gamma_{12}(0)|$.

前文已得到了当光源宽度为 b 时 S_1、S_2 两点的横向分离量与相干性的关系. 更一般地,有

范西特-泽尼克(P. H. van Cittert-F. Zernike)**定理**:设 S 为准单色非相干面光源,所考察两点 S_1、S_2 所在平面与 S 平面相平行,两平面之间为均匀介质,则 S_1、S_2 两点的互强度 $\Gamma_{12}(0)$ 为光源 S 强度分布的傅里叶变换,即

$$\Gamma_{12}(0)(\Delta x,\Delta y)=C\iint_{-\infty}^{\infty}I(x_s,y_s)\exp\left\{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda Z_s}(x_s\Delta x+y_s\Delta y)\right\}\mathrm{d}x_s\mathrm{d}y_s, \quad (3.3.43)$$

式中 C 为复常数,Δx 和 Δy 分别为 S_1、S_2 在 x 和 y 方向的距离,其他量的意义如图 3.3.16 所示.

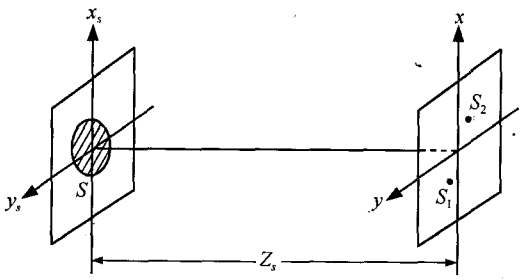


图 3.3.16 范西特-泽尼克定理所用坐标系

将上式应用于一维情况,设 S 为在 y_s 方向延伸的条带光源,在 x_s 方向宽度为 b,强度分布均匀,则光源强度分布可表示为

$$I(x_s,y_s)=I(x_s)=I_0\,\mathrm{rect}\left(\frac{x_s}{b}\right),$$

其中 I_0 为常数. 对上式进行傅里叶变换可得到

$$\Gamma_{12}(0)(\Delta x)=C\int_{-\infty}^{\infty}I_0\,\mathrm{rect}\left(\frac{x_s}{b}\right)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda Z_s}x_s\Delta x\right)\mathrm{d}x_s$$

$$=cb\,\mathrm{sinc}\left(\frac{b\Delta x}{\lambda Z_s}\right),$$

式中 c 为另一常数. 规范化后得到

$$\gamma_{12}(0)=\mathrm{sinc}\left(\frac{b\Delta x}{\lambda Z_s}\right),$$

所以干涉条纹的衬比度为

$$V=|\gamma_{12}(0)|=\left|\mathrm{sinc}\left(\frac{b\Delta x}{\lambda Z_s}\right)\right|. \quad (3.3.44)$$

注意到这里 Δx 相当于前文中双缝在 x 方向的间距 d,$\Delta x/Z_s$ 即前文之 β,可见上式与(3.3.9)式是完全一致的.

3. 时间相干性

若考虑同一点,如 S_1,有相对时间延迟 τ 的两光场 $E(S_1,t)$ 和 $E(S_1,t+\tau)$ 的相关程度,即得到时间相干性,它由自相干函数 $\Gamma_{11}(\tau)$ 或规范化后的 $\gamma_{11}(\tau)$(对给定点下标可略去)来表征. 前

文对点光源 S 在某段光谱范围 $\Delta\lambda$ 或 $\Delta\nu$ 内具有均匀光谱强度的情况进行了分析. 更普遍地可以证明，$\gamma(\tau)$ 是光源的规范化的光谱强度(或功率谱) $i(\nu)$ 的傅里叶变换，即

$$\gamma(\tau)=\int_0^{\infty} i(\nu)\exp(-\mathrm{i}2\pi\nu\tau)\mathrm{d}\nu. \tag{3.3.45}$$

这里 $i(\nu)$ 指光源辐射功率的光谱分布，即在频率 ν 附近单位频率间隔中的辐射功率；规范化意味着令此函数在从 0 到∞的全部频率范围中的积分值，即 $i(\nu)$ 曲线下的面积为 1 个单位.

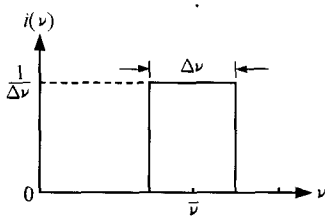


图 3.3.17 在 $\Delta\nu$ 范围内均匀分布的规范化的光谱强度

对中心频率为 $\bar{\nu}$、频带宽度为 $\Delta\nu$、在此范围内光谱强度均匀分布(矩形线型)的光源(图 3.3.17)，有

$$i(\nu)=\frac{1}{\Delta\nu}\mathrm{rect}\left(\frac{\nu-\bar{\nu}}{\Delta\nu}\right),$$

其傅里叶变换为

$$\gamma(\tau)=\mathrm{sinc}(\Delta\nu\cdot\tau)\exp(-\mathrm{i}2\pi\bar{\nu}\tau).$$

由此可得到

$$V=|\gamma(\tau)|=|\mathrm{sinc}(\Delta\nu\cdot\tau)|. \tag{3.3.46}$$

其第一零点位于 $\tau=1/\Delta\nu$，相应的最大光程差 $\Delta_M=c\tau=c/\Delta\nu=\bar{\lambda}^2/\Delta\lambda=L_c$，这与前文结论完全一致. 实际上，(3.3.46)式即(3.3.27)式的另一形式.

4. 相干性小结

(1) 相干性所表示的是空间中两点的光扰动(可以有相对时间延迟)的关联程度：它们是相互独立的，还是相互关联的，以及关联程度究竟有多大. 它在本质上是一个统计问题，其宏观表现和度量则是以该两点作为次波源所形成的干涉条纹的衬比度.

(2) $\Gamma_{12}(\tau)$ 和 $\gamma_{12}(\tau)$ 表示空间 S_1、S_2 两点有相对时延 τ 的两光场(异地异时)的关联程度(图 3.3.18(a))，它同时反映了光场的空间有序性(由不同点 S_1、S_2 表征)和时间有序性(由时间延迟 τ 表征)，故它是描述光场相干性的最普遍的物理量. 这里有序性主要是指光场的相位变化在多大空间范围和时间范围中是可以预见的. $\Gamma_{12}(0)$ 和 $\gamma_{12}(0)$ 表示空间两点 S_1、S_2 的即时光场(异地同时)的关联程度(图 3.3.18(b))，即光场的横向空间有序性，它常称为空间相干性. $\gamma(\tau)$ 表示在空间同一点时间差异量为 τ 的两不同时刻光场(同地异时)的关联程度(图 3.3.18(c))，即光场的时间有序性；或等价地说，在沿光传播方向相距 $c\tau$ 的两点光场的空间有序性，它称为光场的时间相干性或纵向空间相干性.

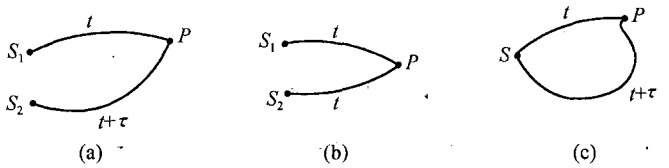


图 3.3.18 时间和空间相干性的示意图

(3) 空间相干性来源于光源的空间扩展. 对准单色非相干面源，$\Gamma_{12}(0)$ 和 $\gamma_{12}(0)$ 正比于光源强度空间分布的傅里叶变换；光源线度越大，空间相干性越低.

(4) 时间相干性来源于光源的光谱扩展. $\Gamma(\tau)$ 和 $\gamma(\tau)$ 正比于光源强度光谱分布的傅里叶变

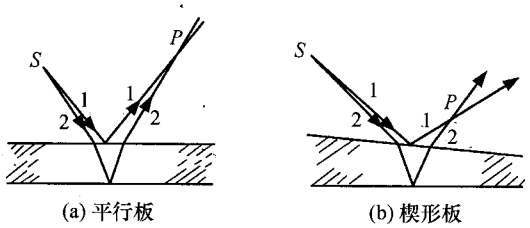
换;光源的光谱扩展越宽,时间相干性越低.

3.4 分振幅干涉(一):薄板的双光束干涉

如在图 2.6.9 中已经示出的,如果一束光射向透明薄板或薄膜,则由于光线在板内的多次反射,在上下界面均有多束光出射.如果以适当方式使各反射光束或各透射光束交会,则可能产生干涉效应.对一般介质板,在入射角不太大时其光强反射率很小.读者可以正入射为例自行验证(习题 3.24),这时除上表面前两个反射光束 1、2 光强彼此相近外,其他反射光束及所有透射光束的光强皆随其序号的增加而迅速衰减.回顾 3.1.2 节中干涉条纹衬比度与光束光强比的关系,易知只有反射光束 1、2 的干涉才具有实际意义.本节集中讨论这种反射光中的双光束干涉,多光束干涉的情况则将在 3.5 节介绍.

3.4.1 点光源的干涉及干涉条纹的定域概念

作为一个简单但具有启发性的例子,首先介绍点光源产生的干涉效应.图 3.4.1(a)、(b)分别示出了单色点光源 S 发出的光经平行板和楔形板的上下表面反射后在上半空间中一点 P 重新相交的情况.不难看出,对任意源点和上半空间任一点 P,都有并且仅有从 S 发出的两条光线(光线 1 经过一次反射,光线 2 经过折射、反射再折射)在 P 点相交.这两条光线具有确定的路径,因而具有确定的光程差和相位差,可以在 P 点干涉.不管在上半空间任何区域放上观察屏,屏上均可呈现出干涉条纹.这种可以用屏直接接收的条纹称为**实条纹**,干涉条纹分布于整个上半空间这一事实称为该条纹是**非定域**的.若光源并非理想单色而具有一定的光谱扩展,则条纹范围要受到 1、2 两光线光程差应小于光源发光的相干长度这一限制.



(a) 平行板　　(b) 楔形板

图 3.4.1 点光源经平行板及楔形板的分振幅干涉

由于装置的简单及条纹的非定域性,单色点光源的干涉很易于演示.图 3.4.2 示出一实例.S 为一激光点源,它发出的球面波射向一平板玻璃片,其中心光线(光轴)与玻片表面相垂直,在光源一侧垂直于光轴放置一观察屏 Π,则屏上出现以 S

为中心的圆环状条纹.

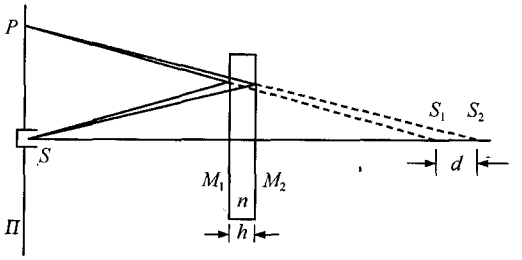


图 3.4.2 点光源的干涉

这种现象可解释如下：S 所发光束经玻片前表面 M_1 反射后仍为同心光束，其中心是 S 关于 M_1 面的镜像 S_1；在傍轴近似下，可证 S 所发光束经 M_1 面折射、M_2 面反射、再经 M_1 面折射后也为同心光束，其中心在光轴上 S_1 右侧 S_2 处，并且 S_2 与 S_1 相距 $d=2h/n$，其中 h 和 n 分别为玻片的厚度和折射率(习题 3.25). 由于 S_1、S_2 源于同一点源 S，它们当然具有确定的相位关系，因而是相干的. 这样，平板左方的光场即可看做是二**等效镜像源** S_1 和 S_2 形成的干涉场. 这相当于在杨氏实验中把观察屏放在 S_1、S_2 之外且与其连线相垂直的方位. 回顾图 3.2.2，可知屏上干涉图样确应为同心圆环.

若将平行板换成两表面夹角很小的楔形板，亦可证明在傍轴近似下经后表面反射后的出射光束仍保持同心，这样也可得到点光源 S 关于 M_1、M_2 的两个等效镜像源点 S_1 和 S_2，它们同样能在左半空间形成杨氏实条纹. 这种由等效镜像源分析干涉条纹的方法对某些问题是很有效的；而且，上述点源经薄板的干涉条纹可以成为测量薄板某些参量，如厚度和楔角的有用的手段.

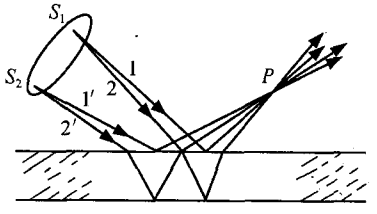


图 3.4.3 扩展光源的分振幅干涉

若光源并非点源而具有一定的空间扩展(图 3.4.3)，由于从光源上不同点(如 S_1、S_2)发出而在光场中某点(如 P)交会的两对光线的光程差(Δ_{12} 和 $\Delta_{1'2'}$)一般是不同的，从而各源点在空间中同一场点产生的相位差和干涉条纹的亮暗也有所不同. 因各源点是不相干的，空间中最终的光强分布是所有源点各自产生的干涉强度分布之和. 可以想见，不同源点产生的干涉条纹在空间中一般会有相对的位置错动，某一源点产生的亮点位置可能是另一源点的暗点位置，这种平均效应将使得光场很大一部分区域中干涉条纹消失，而只在某些特定的空间区域(该区域中各源点产生的干涉条纹彼此无位置错动或错动量明显小于一个条纹间距)才能看到条纹，这种条纹称为**定域条纹**，可以观察到条纹的区域称为**干涉条纹的定域**. 可见定域问题的

产生来源于光源的空间扩展.

3.4.2 等倾干涉

1. 等倾干涉的形成及一般特点

一个厚度为 h、折射率为 n 的透明平行平板放在上下方折射率分别为 n_0 和 n_g 的均匀介质中(图 3.4.4),设一点源 S 所发出的光以入射角 i_0 射向平板,则该光线经平板上下表面反射后的出射光线 1 与 2 仍保持平行,且与板面法线成同样角度 i_0. 若另一点源 S' 发出的光线以同样的方向入射,则相应的出射光线 $1'$ 与 $2'$ 仍保持和 1 与 2 相平行. 容易看出,光线 1、2 之间的光程差与光线 $1'$、$2'$ 之间的光程差是相同的. 若在平板的上半空间放置一正透镜 L 接收这些平行光线,它们将会聚于 L 后焦面 Π 上的同一点 P. 这样,光线对 1、2 与光线对 $1'$、$2'$ 均会在 P 点发生干涉;而且由于两光线对具有相同的相位差,它们在 P 点产生的干涉条纹的强弱分布也是相同的,若相长均为相长,若相消均为相消.

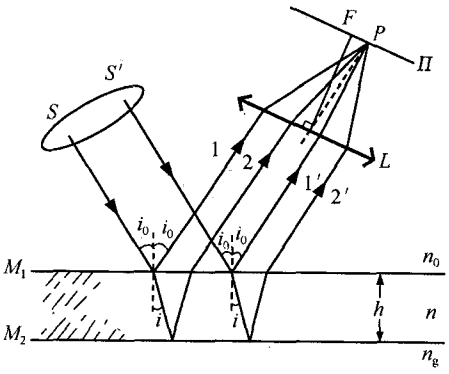


图 3.4.4 平行平板的等倾干涉

显然,这种双点源的情况可以推广到多个点源及连续分布的扩展源. 只要光线的入射方向相同,各源点均在 L 后焦面上同一点产生相同的干涉强度. 由于光程差及干涉强度取决于入射角 i_0,而同一 i_0 值可以对应于空间中不同的入射方向,这些入射方向以平面法线为中心构成一个圆锥面,相应的出射光线则在屏 Π 上形成同一干涉条纹. 因每一条纹对应于同样的光线倾角,这种干涉称为**等倾干涉**,其条纹亦称为**等倾条纹**.

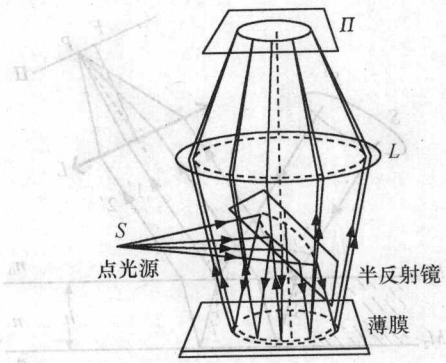
由此分析可以得到等倾干涉的一般特点:

(1) 因各点源形成的干涉条纹位置完全重合,故可以使用(单色或准单色)扩展光源以增加干涉条纹的亮度而不带来衬比度的下降.

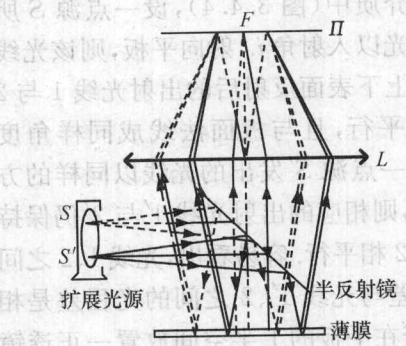
(2) 因相干光束是彼此平行的,它们只有(理论上)在无限远处或(实际上)在正透镜的后焦面才能相交,故等倾条纹定域在无限远处或正透镜后焦面.

(3) 观察面(L 后焦面 Π)上一个点对应着一个入(出)射方向,一个条纹对应于一个入(出)射角 i_0 值. 换言之,干涉条纹是以同样角度入(出)射(注意区别出射角与出射方向)的平行光线在 Π 面会聚点的轨迹. 因此,若 L 放置的空间方位不

同，条纹的形状也会不同. 例如，若 L 的光轴垂直于平行平板面，由 i_0 角相对于光轴的对称性可知干涉条纹也具有对称性，即为以焦点 F 为中心的同心圆环，这种条纹称为**等倾圆环条纹**. 图 3.4.5(a)和(b)分别示出了观察等倾圆环条纹的实验装置中点光源及扩展光源的作用((b)为剖面图). 图 3.4.6 为等倾圆环条纹的照片. 若 L 光轴不与板面相垂直，则干涉条纹的形状可能会变成椭圆、双曲线等圆锥截线.



(a) 点光源的作用



(b) 扩展光源的作用

图 3.4.5　等倾圆环条纹的形成

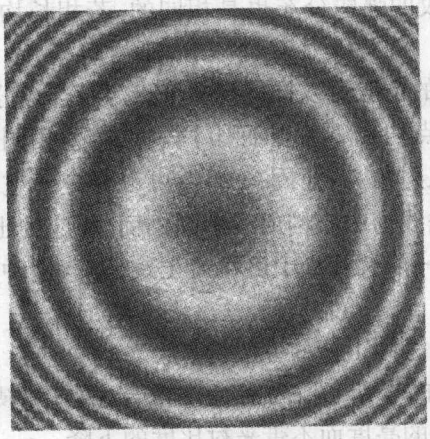


图 3.4.6　双光束干涉等倾圆环条纹的照片

2. 光程差

为对干涉条纹进行具体的分析与计算，首先应求得光程差 Δ 的表达式. 图 3.4.7 中重绘出一束入射光经平行平板的反射和折射后分裂成两束平行出射光 1

和2的情形. 作 CE 垂直于光线1并交光线1于 E, 从 C 点和 E 点通过路径1和2到达屏 Π 上同一点 P 的光程相同,故1、2光光程差来自于路径 AE 和路径 ABC 的光程差别,即

$$\Delta = n(\overline{AB}+\overline{BC}) - n_0\cdot\overline{AE}.$$

作 $AG\perp BC$ 并交 BC 于 G,由折射定律及几何关系可得到 $n\cdot\overline{GC}=n\cdot\overline{AC}\sin i=n_0\cdot\overline{AC}\sin i_0=n_0\cdot\overline{AE}$, i 为平板内光线的折射角,所以上式化为

$$\Delta = n(\overline{AB}+\overline{BG}) = n\cdot\overline{DG},$$

这里 D 为 A 关于平板下表面的对称点,显然 $\overline{DG}=2h\cos i$,故有

$$\Delta = 2nh\cos i, \qquad (3.4.1)$$

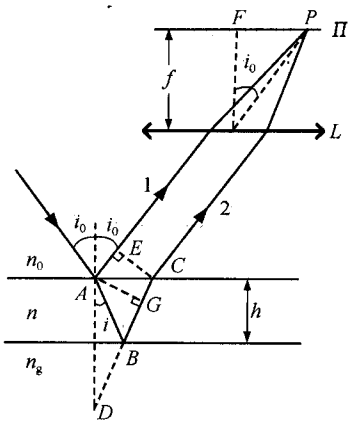


图 3.4.7 平行平板光程差的计算

上式中之 Δ 仅表示由于光线路径不同产生的光程差. 考虑到上下两界面的反射可能使光束1、2产生附加的半波程差,上式可补充为

$$\Delta = 2nh\cos i\left(+\frac{\lambda}{2}\right), \qquad (3.4.2)$$

式中 λ 为真空中波长,括号表示该项是否需要应视具体情况根据 n_0、n、n_g 的相对大小及2.6.3节中的结论来确定.

与光程差 Δ 相应的相位差为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta = \frac{4\pi}{\lambda}nh\cos i(+\pi), \qquad (3.4.3)$$

式中括号一项仍然只在光束1、2有附加半波程差时才需要. 干涉强度公式则为

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta. \qquad (3.4.4)$$

由折射定律经简单的几何计算后,Δ 亦可直接表示为入射角 i_0 的函数,

$$\Delta = 2h\sqrt{n^2 - n_0^2\sin^2 i_0}\left(+\frac{\lambda}{2}\right). \qquad (3.4.5)$$

因为干涉条纹即干涉场中的等相位差或等光程差线,而当 n_0、n、h 给定时 δ 或 Δ 仅仅取决于入射角,也即平板上界面出射光线的倾角 i_0,故上式表明这时干涉条纹确系等倾条纹.

3. 等倾圆环条纹的分析与计算

实用中常令透镜光轴垂直于板面以观察等倾圆环条纹,以下对这种条纹的特征作一些定量分析. 分析中设板上下方为同一介质,即 $n_0=n_g$,这时存在附加半波程差.

1) 条纹级别的变化

在屏幕 Π 中心点即焦点 F 处交会的光线是正入射的，即有 $i=i_0=0$，相应的光程差为

$$\Delta_0 = 2nh + \frac{\lambda}{2}, \tag{3.4.6}$$

由亮纹条件 $\Delta=m\lambda$，可得中心点干涉级次为

$$m_0 = \frac{\Delta_0}{\lambda} = \frac{2nh}{\lambda} + \frac{1}{2}. \tag{3.4.7}$$

一般地，m_0 不一定是整数. 为简化表示，这里设 m_0 为整数，即中心恰为 m_0 级亮点. 此假设并不影响对条纹性质所得的结论.

由(3.4.5)式，由中心向外 i_0 角逐渐增大，Δ 逐渐减小，相应的干涉级次也逐渐降低. 图 3.4.8 示出了从中心起向外数的亮纹序号与干涉级次的关系，显然第 N 个亮环相应的干涉级是

$$m_N = m_0 - N. \tag{3.4.8}$$

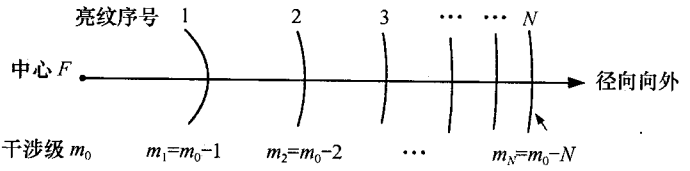


图 3.4.8 m_0 为整数时从中心计起的亮纹序号与干涉级次的关系

2) 第 N 个亮环的半径

从中心向外数第 N 个亮环相应的光程差为

$$\Delta_N = 2nh\cos i_N + \frac{\lambda}{2} = m_N\lambda, \tag{3.4.9}$$

这里 i_N 是相应光线在平板中的折射角. 在接近正入射、即 $i_N\approx 0$ 时，有近似式

$$\cos i_N \approx 1 - \frac{1}{2}i_N^2.$$

将上式、(3.4.8)式，以及 $m_0\lambda = 2nh + \lambda/2$ 代入(3.4.9)式，可以得到

$$i_N = \sqrt{\frac{\lambda}{nh}(m_0 - m_N)} = \sqrt{\frac{N\lambda}{nh}}. \tag{3.4.10}$$

利用折射定律在小角度下的近似式 $n_0 i_0 = ni$，可将 i_N 转化为出射光倾角，即

$$i_{0N} = \frac{1}{n_0}\sqrt{\frac{n\lambda}{h}(m_0 - m_N)} = \frac{1}{n_0}\sqrt{\frac{nN\lambda}{h}}, \tag{3.4.11}$$

i_{0N} 即屏上第 N 个亮环的角半径. 设透镜 L 的焦距为 f，则第 N 个亮环的半径为

$$r_N = fi_{0N} = \frac{f}{n_0}\sqrt{\frac{nN\lambda}{h}}. \tag{3.4.12}$$

3) 相邻亮环的间距

由(3.4.11)式对 N 求导数可以得到第 N 个亮环处相邻亮环的角间距

$$\delta i_{0N}=\frac{\mathrm{d}i_{0N}}{\mathrm{d}N}=\frac{1}{2n_0}\sqrt{\frac{n\lambda}{Nh}}, \tag{3.4.13}$$

或用 i_{0N}表示为

$$\delta i_{0N}=\frac{n\lambda}{2n_0^2 h i_{0N}}. \tag{3.4.14}$$

条纹间距 e_N 则可由下式而得到:

$$e_N=f\cdot\delta i_{0N}. \tag{3.4.15}$$

由以上三式可以看出,δi_{0N}及 e_N 均正比于 $1/\sqrt{N}$. 随着从中心向外 N 及 i_{0N}逐渐增大,δi_{0N}及 e_N 逐渐减小,即圆环条纹越向外越密.

例 3.4.1 用波长 λ 的单色光观察平行平板的等倾圆环条纹,测得从中心起向外数第 N_1、N_2 个亮环的半径分别为 r_{N1}、r_{N2},已知 n_0、n、f、$n_g=n_0$,求平板厚度.

解 当 m_0为整数时由(3.4.12)式知

$$r_{N1}^2=\frac{f^2N_1n\lambda}{n_0^2h},$$

$$r_{N2}^2=\frac{f^2N_2n\lambda}{n_0^2h}.$$

两式相减得

$$r_{N2}^2-r_{N1}^2=\frac{f^2n\lambda}{n_0^2h}(N_2-N_1),$$

所以

$$h=\frac{f^2n\lambda\Delta N}{n_0^2(r_{N2}^2-r_{N1}^2)}.$$

其中 $\Delta N=N_2-N_1$. 当 m_0非整数时,可设 $m_0=[m_0]+\varepsilon$,这里$[m_0]$为 m_0的整数部分,$0<\varepsilon<1$. 类似分析可得到同样结果. 可见实际测定时并不需要知道难以准确测出的 ε 和 N_1、N_2 的确切数值,只要知道差值 ΔN 即可.

3.4.3 等厚干涉

1. 薄膜干涉及其定域

前文分析了平行平板对光束的分割和引起的干涉. 显然,即使板的上下表面并不平行,这种光束分割仍是存在的,故仍可产生干涉效应. 习惯上把这种薄板或薄膜所产生的分振幅干涉通称为**薄膜干涉**.

图 3.4.9 示出了同一光线入射时由夹角为 α 的楔形板(膜)的上下表面反射的

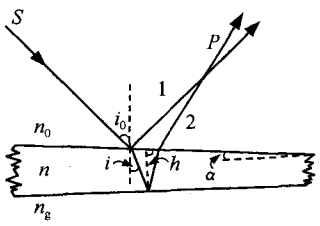


图 3.4.9　楔形膜干涉

两束光 1、2 在空间某点 P 交会的情形. 计算表明，当 α 很小时，在 P 点两束光的光程差仍近似满足 (3.4.2)式，即

$$\Delta = 2nh\cos i\left(+\frac{\lambda}{2}\right).$$

当 n_0, n, n_g 确定后，Δ 一般地与板厚 h 与光线入射角 i_0（它通过折射定律确定了 i）两种因素有关.

在具体考察干涉条纹的特性以前，首先对薄膜干涉的定域问题作一分析. 在单色点光源的情况下，由 3.4.1 节的讨论可知条纹是非定域的，它可以看做是点光源经薄膜上下表面反射（后者尚有折射）所产生的两等效镜像源在空间形成的杨氏条纹. 光源宽度 b 的扩展将使得它发出光线的相干孔径角 β_M 减小，且有 $\beta_M = \lambda/b$. 图 3.4.10 以截面图示出了光束的相干范围，其中光线 1、2 或膜上相应点 A_1、A_2 是相干性刚好消失的极限分离情况. 若两光束从光源发出时的夹角 β 超过 β_M，即使它们经薄膜上下表面反射后在某点相交，该点也不会形成干涉条纹. 当 $\beta < \beta_M$ 时，如图中光线 1′ 和 2′，则相应场点 A_1' 和 A_2' 具有一定的相干性，此二光线在 A_1' 和 A_2' 分别经两表面反射后在其交点可以相干；而且 β 越小，即 A_1' 和 A_2' 相距越近时相干性越好. 不难想到，相干性最好的情况是 $\beta = 0$，这时 A_1' 和 A_2' 合为一点 A. 因此，令 $\beta = 0$，即从光源上（一般取中心点）引出单根光线，再找出它通过薄膜上下表面反射后在空间的交点 P，P 点就是光场中两相交光束相干度最高、亦即干涉条纹衬比度最大的点，这种点称为干涉条纹的**定域点**. 以上确定定域点的作图方法可以称为单光线（入射）作图法. 改变光线的入射方向，定域点的位置也发生变化，它们在空间的集合构成了**定域面**.

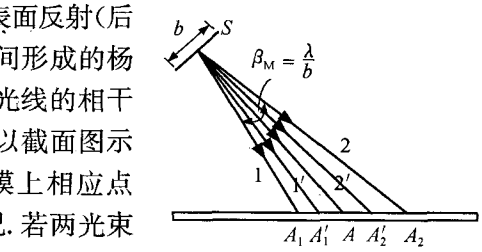


图 3.4.10　扩展光源所发出各光束间的相干性

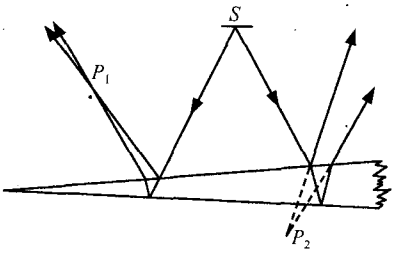


图 3.4.11　楔形膜干涉定域点的确定

图 3.4.11 分别画出了对于楔形板当入射光线指向或背离楔棱方向时定域点的位置. 在前一情况下定域点 P_1 在板表面上方，干涉条纹为实条纹；后一情况下定域点 P_2 在板表面下方，干涉条纹为**虚条纹**. 在入射角不太大及板较薄时，定域点（面）一般在表面附近.

定域点及定域面统称为**定域中心**. 实际上，由于 b 不可能为无穷大，β_M 总为一有限值，这样，与确定定域中心时所考虑的单根光线有一定角度偏离 $\beta < \beta_M$ 的其他光线均与该中心光线有一定的相干性，这些光线经薄板的一个面反射后与该中心

光线经另一面反射后的交点的集合构成了可以形成干涉条纹的空间范围,此范围称为**定域范围**.易见定域范围基本上以定域中心为中间位置作上下延展.离定域中心越远处干涉条纹的衬比度越低.定域范围上下两界面之间的距离称为**定域深度**.一般地,b 越小,β_M 越大,定域深度越大.

在一些实际问题中,光源可能有很大扩展,但当我们凝视薄膜上某一点 P 时,真正能进入瞳孔的光束仅来自光源上一个很小的局域(图 3.4.12 中 S_2S_3 部分).这种接收器孔径的限制相当于使光源的有效宽度 b 减小,从而增大了定域深度,使得薄膜干涉的定域范围通常可包容薄膜表面.这就是在较大光源下有时仍能观察到薄膜表面干涉条纹的原因.

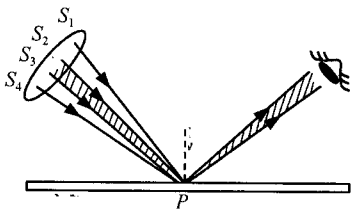
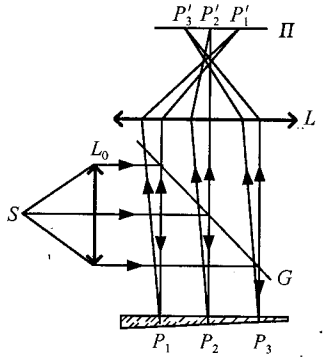


图 3.4.12 瞳孔对光源有效宽度的限制作用

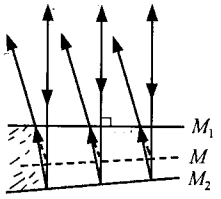
2. 等厚干涉的形成与观察

由(3.4.2)式可以看出,对 n 为常数的均匀薄膜,若能保持光线的入射角 i_0、从而折射角 i 不变,则 Δ 仅与膜的厚度 h 有关.这时,作为等强度线即等光程差线的干涉条纹简单地相应于薄膜的等厚线,即每一条纹与薄膜上一个确定的厚度相对应.这种干涉称为**等厚干涉**,所产生的条纹称为**等厚条纹**.

为易于保证入射角相同,较严格的等厚干涉一般采用正入射方式,如图 3.4.13(a)所示.其中点源 S 发出的光经透镜 L_0 准直及半透镜 G 反射后照射楔形板,透镜 L 将板面成像于 Π 平面,微调 Π 位置,即可在该面观察到等厚条纹(L 也可用人眼代替,Π 平面相应于人眼的视网膜).图 3.4.13(b)则以夸大的楔角示出了此时的定域面 M,易见它位于楔形板上下两表面之间,上述微调过程正是为将 M 面精确成像于 Π 面或视网膜.



(a) 干涉装置



(a) 定域面的确定

图 3.4.13 等厚干涉的观察

如果板或膜厚度很小，可证入射角 i_0 的变化对光程差的影响远不知 h 变化影响显著，这时在 i_0 角变化不大的条件下也可用普通发散光源观察到近似的等厚条纹，其定域亦在膜表面附近.

3. 两种典型的等厚干涉

1) 楔形板(膜)的等厚干涉

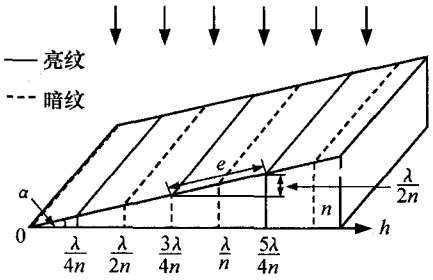


图 3.4.14　楔形板的等厚干涉

让一束单色平行光正入射射向一块楔角 α 很小，折射率为 n 的楔形板，如图 3.4.14 所示，图中大大夸大了 α. 由于 α 很小，入射光究竟是垂直于上表面或下表面不必仔细区分，i_0 与 i 均近似为 0. 设板上下方为同种介质，光程差公式有简单形式

$$\Delta = 2nh + \frac{\lambda}{2}. \qquad (3.4.16)$$

显然，对给定材料，Δ 仅与 h 有关，板面附近会出现等厚条纹. 当 $\Delta = m\lambda$，即

$$h = \frac{(m-1/2)\lambda}{2n} \qquad (m = 1,2,3,\cdots) \qquad (3.4.17)$$

时，条纹为亮纹；当 $\Delta = (m+1/2)\lambda$，即

$$h = \frac{m\lambda}{2n} \qquad (m = 0,1,2,\cdots) \qquad (3.4.18)$$

时，条纹为暗纹. 图 3.4.14 中分别以实线和虚线画出了亮纹和暗纹的位置. 显然这些条纹都是与楔棱平行、且彼此等距的直线. 楔棱处为暗纹系由上下表面反射光的附加半波程差所导致. 相邻亮纹或暗纹间光程差变化一个 λ，厚度 h 变化 $\lambda/2n$，而板面上的条纹间距则为

$$e = \frac{\lambda}{2n\alpha}. \qquad (3.4.19)$$

实用中经常用两块平行平面玻璃板 A 和 B 之间所夹的一层空气楔代替前文中的楔形板进行精密测量，如图 3.4.15 所示. 这时相干光线对是分别由正入射光线经 A 的下表面和 B 的上表面反射而得到的. 此装置可用于测定小的角度 α 和小的线度 d，计算中仍利用公式(3.4.16)～(3.4.19)，只需注意此时 $n=1$. 另外，也可用一标准平板与被测平面之间空气层的等厚干涉条纹来检验被测平面的不平度或缺陷.

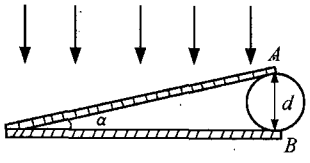


图 3.4.15　用空气楔进行精密测量

由(3.4.19)式，条纹间距与波长有关，波长越大条纹间距越大. 故在楔形板干涉中，若使用白光正入

射,除楔棱处是各色光的公共暗纹外,其他各级条纹均发生色散,同级条纹中紫色(v)靠近楔棱,红色(r)远离楔棱,而且级别越高色散越大,如图 3.4.16 所示. 结果只有在靠近楔棱的很少几级能看到彩色条纹,较高级别处则因各色光的交叠混合而使得色彩和条纹均消失. 这也是为什么在白光下只有很薄的膜(如 h 为波长级的肥皂膜或油膜)才能呈现出色彩,而普通玻璃板则看不到此现象的原因.

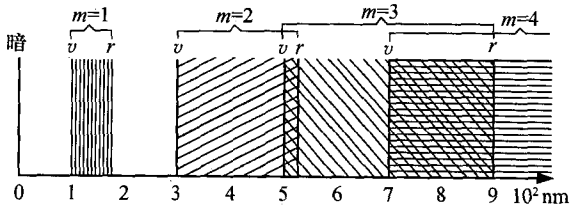


图 3.4.16 白光入射时空气楔等厚条纹各级极大位置的色散,$\lambda_v=400$ nm,$\lambda_r=700$ nm

2) 牛顿环

将一个曲率半径 R 很大的平凸透镜 A 凸面朝下放置在一块平板玻璃 B 上,则 A、B 之间形成一厚度 h 从中心 O 向外逐渐增大且旋转对称的空气薄层(图 3.4.17). 当单色光正入射时,空气层处亦会产生等厚条纹. 显然此等厚条纹是以 A、B 接触点 O 为中心的同心环,这种圆环条纹称为**牛顿环**. 由于此时由空气层上下表面反射的光线也具有附加半波程差,而且 $n=1$,故光程差公式为

$$\Delta = 2h + \frac{\lambda}{2}. \tag{3.4.20}$$

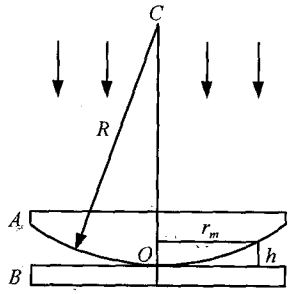


图 3.4.17 牛顿环干涉装置

在中心点 O,$h=0$,$\Delta=\lambda/2$,故该点为暗点. 从中心向外数第 m 个暗环满足 $\Delta=(m+1/2)\lambda$,即

$$h = m\frac{\lambda}{2}. \tag{3.4.21}$$

设第 m 个暗环的半径为 r_m,由几何关系及 $R \gg h$ 可得到

$$r_m^2 = h(2R-h) \approx 2Rh = mR\lambda,$$

因此有

$$r_m = \sqrt{mR\lambda}. \tag{3.4.22}$$

在第 m 个暗环处相邻暗(或亮)环的间距则为

$$e_m = \frac{\mathrm{d}r_m}{\mathrm{d}m} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R\lambda}{m}}. \tag{3.4.23}$$

从中心点向外 h 逐渐增大,干涉级 m 逐渐增高,圆环间距 e_m 逐渐减小,即越向外圆环越密. 图 3.4.18 示出了牛顿环的照片.

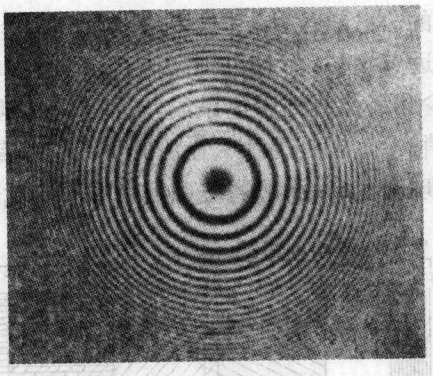


图 3.4.18　牛顿环的照片

由(3.4.22)式可通过 r_m 的测量求出 R. 但该式是在 A、B 为点接触的理想情况下导出的,实际上由于 A 的自重等因素常使触点扩大,这时所看到的中心区由暗点变为暗斑. 为消除此因素给测量带来的误差,可测出某环半径 r_m(m 的数值不必知道)和由它向外数第 Δm 个环的半径 $r_{m+\Delta m}$,则可用与例 3.4.1 类似的方法证明

$$R=\frac{r_{m+\Delta m}^2-r_m^2}{\Delta m\cdot\lambda}. \tag{3.4.24}$$

利用(3.4.21)～(3.4.23)式可以分析牛顿环的动态变化,即 A、B 有相对移动时条纹的改变. 例如,在图 3.4.17 中,若将 A 竖直上提,由于给定 r 处 h 增加,而给定 h 处 r 减小,故在表观上产生下述效果:

(1) 中心点呈亮暗交替的周期性变化;

(2) 各圆环均向中心点收缩而渐次沉没;

(3) 由于 A 的提升对各点引起的光程差变化均是相同的,故任一点(r 固定)处条纹间距并不改变,即条纹的整体形状及疏密保持不变.

另一方面,亦可分析白光正入射所产生的影响. 这种情况在原理上与白光正入射楔形膜(图 3.4.16)相类似,其区别在于:①这里 h 随与触点 O(相应于楔形膜的楔棱)距离的增加而增大并不是线性的;②楔形膜中只需考虑一维变化,而这里 h 是旋转对称的. 因此将图 3.4.16 中横坐标的线性标度换为适当的非线性标度,再设想将该图绕左端点旋转一周,即可得到牛顿环的情形. 易见此时中心点仍为暗点,中心点附近可见少数几级彩环,每级紫色在内红色在外,级别较高处条纹则因交叠匀化而消失.

例 3.4.2　图 3.4.19 上部装置中,平凸透镜 A 和平板玻璃 B 的折射率分别为 $n_A=1.5$ 和 $n_B=1.7$,A、B 之间的空隙左半侧为空气,右半侧充以 $n=1.6$ 的高折射率液体,分析单色光正入射时干涉条纹的特点.

解　左右侧干涉图样均为以 A、B 触点 O 为中心的内疏外密的同心圆环,但

两侧图样有两点明显区别:

(1) 左侧空气膜折射率 $n=1$,小于 n_A 和 n_B,上下表面反射光有附加相差 π,故中心区为暗斑;右侧油膜 n 介于 n_A、n_B 之间,两反射光无附加相差,故中心区为亮斑.

(2) 左侧条纹暗纹半径 r_m,条纹间距 e_m 各量前文已给出.对右侧条纹相应各式变为:

光程差 $\Delta=2nh$,亮纹条件 $2nh=m\lambda$,

亮纹半径 $r_m=\sqrt{\dfrac{mR\lambda}{n}}$,

条纹间距 $e_m=\dfrac{\mathrm{d}r_m}{\mathrm{d}m}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{R\lambda}{nm}}$.

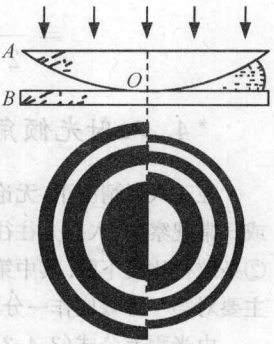


图 3.4.19 例 3.4.2 图,下部阴影区为暗纹

与(3.4.22)及(3.4.23)式相比,可见右侧条纹的 r_m、e_m 变为左侧的 $1/\sqrt{n}=0.79$,故右侧条纹比左侧更密.图 3.4.19 下图大致画出了两侧条纹的关系.

例 3.4.3 沿与其表面法线成 45°角的方向观察空气中的肥皂膜($n=1.33$),发现在此方位可见光范围(取为 400～700 nm)内只有 $\lambda=600$ nm 一个极大,试确定膜的厚度.

解 光强极大条件为 $2nh\cos i+\dfrac{\lambda}{2}=m\lambda$,即

$$2nh\cos i=\left(m-\frac{1}{2}\right)\lambda,\qquad (m=1,2,\cdots) \tag{E.1}$$

设与 λ 相邻的极大出现于 λ_1(短波一侧)和 λ_2(长波一侧),则应有

$$2nh\cos i=\left[(m+1)-\frac{1}{2}\right]\lambda_1=\left[(m-1)-\frac{1}{2}\right]\lambda_2.$$

由以上二式及题意可知

$$\lambda_1=\frac{m-1/2}{m+1/2}\lambda<400\ \text{nm},\qquad \lambda_2=\frac{m-1/2}{m-3/2}\lambda>700\ \text{nm}.$$

代入 $\lambda=600$ nm 可得

$$\frac{m-1/2}{m+1/2}<\frac{2}{3},\qquad \frac{m-1/2}{m-3/2}>\frac{7}{6}.$$

两不等式的正整数解分别为 $m=1$、2 和 $m=2\sim7$,取公共解得 $m=2$,代入(E.1)式并利用 $\sin i_0=n\sin i$ 及 $i_0=45°$可得到

$$h=\frac{(m-1/2)\lambda}{2n\sqrt{1-\sin^2 i}}=\frac{(m-1/2)\lambda}{2\sqrt{n^2-\sin^2 i_0}}.$$

$$= \frac{1.5 \times 6 \times 10^{-4}}{2 \times \sqrt{1.33^2 - \sin^2 45^\circ}} \text{ mm} = 4 \times 10^{-4} \text{ mm}.$$

*4. 入射光倾角对条纹的影响

在正入射情况下，无论是楔形板或牛顿环实验中，干涉条纹均确系等厚线. 但在非精密测量或日常观察中，入射光往往具有一定的倾角范围，它将产生两种影响：①条纹形状偏离等厚线；②条纹衬比度下降. 其中第二种效应可以归结于光源的空间扩展所引起的相干性的降低，以下主要对第一种效应作一分析.

由光程差公式(3.4.2)，当入射角 i_0 变化时折射角 i 亦发生变化，Δ 同时依赖 h 和 i 两个变量，而不再是 h 的单值函数，当然条纹(等光程差线)已不再是等厚线. 为具体讨论各量的影响，可对该式求微分，得

$$\mathrm{d}\Delta = 2n\cos i\mathrm{d}h - 2nh\sin i\mathrm{d}i. \tag{3.4.25}$$

对同一条纹，$\mathrm{d}\Delta=0$，故有

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}i} = h\tan i > 0. \tag{3.4.26}$$

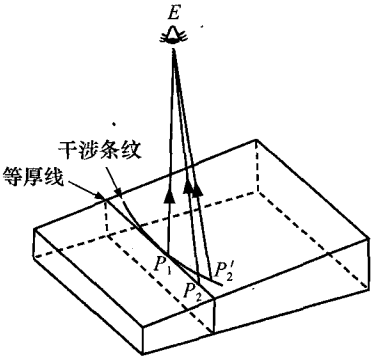


图 3.4.20 入射角变化造成干涉条纹对等厚线的偏离

即当 i 增大时 h 亦随之增大，这意味着同一条纹上入射角大(i 亦大)处相应的厚度 h 亦大. 这一点也可由光程差的表达式直接理解：i_0 和 i 变大时 $\cos i$ 减小，欲保持光程差不变必须 h 增大. 图 3.4.20 中以人眼 E 直接观察楔形板为例示出了这种效应. 其中 P_1P_2 为真正的等厚线. 由 P_1 到 P_2，i 增大，故 P_2 点 Δ 比 P_1 点减小，为使 Δ 不变，P_2 必须移到 h 更大的 P_2'. 因此，干涉条纹由直线变成了曲线，其弯曲方向为向楔棱方向凸出.

由(3.4.26)式可以看出，h 越大，i 越大，入射角变化对干涉条纹对等厚线的偏离的影响越大. 故利用薄膜和尽量接近正入射可以减小这种影响.

*3.4.4 薄膜干涉定域及光源临界宽度的进一步讨论

薄膜干涉定域问题在理论上和实践上都具有重要意义，并且容易在概念上引起一些混乱. 以下讨论中将着重讲清一些基本的物理思想，并指出它们在实际问题中的应用.

1. 定域中心的意义

因介质膜可以利用某些方法转化为等效的空气膜，为简化计算，以下均以空气膜($n=1$)为例. 图 3.4.21 中，设单色光源在垂直于入射方向的扩展为 $b=2r$，中心点为 S. 考察干涉场中某点 P，它关于薄膜上下表面 M_1、M_2 的镜像点分别是 P_1 和 P_2，从 S 点发出在 P 点相遇的二光线在离开光源时夹角为 β，在不计半波损时，此光线对的光程差为

$$\Delta_{SP}=\overline{SP_2}-\overline{SP_1}=L_2-L_1, \tag{3.4.27}$$

这里 L_1、L_2 分别表示从源中心 S 到场点 P 两路相干光的光程. 若满足近似条件 $r^2\ll L_1^2$、L_2^2, $\sin\beta\approx\beta$, 可以求得从光源一个端点 S' 发出在 P 点相遇的一对光线的光程差为

$$\begin{aligned}\Delta_{S'P}&=\overline{S'P_2}-\overline{S'P_1}\\&=L_2-L_1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{L_1}-\frac{1}{L_2}\right)r^2-\beta r.\end{aligned} \tag{3.4.28}$$

而 S 发出的一对相干光束与 S' 发出的一对相干光束在 P 点的光程差之差为

$$(\delta\Delta)_{SS'}=\Delta_{SP}-\Delta_{S'P}=\beta r+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{L_1}-\frac{1}{L_2}\right)r^2. \tag{3.4.29}$$

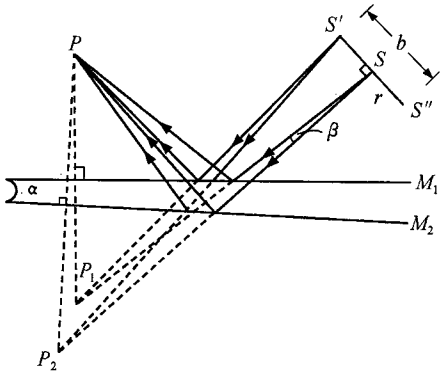


图 3.4.21 空气膜干涉中光程差的计算

同理可以得到

$$(\delta\Delta)_{SS''}=-\beta r+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{L_1}-\frac{1}{L_2}\right)r^2, \tag{3.4.30}$$

$$(\delta\Delta)_{S'S''}=(\delta\Delta)_{SS'}-(\delta\Delta)_{SS''}=2\beta r=\beta b. \tag{3.4.31}$$

若 P 点为定域中心,则 $\beta=0$. $(\delta\Delta)_{S'S''}=0$,而 $(\delta\Delta)_{SS'}$ 即为在定域中心附近的场点来自所有源点的相干光线对的光程差之差的最大值. 由(3.4.29)式,$(\delta\Delta)_{SS'}$ 可以看做光源扩展的一次项 $(\delta\Delta)_1$ 和二次项 $(\delta\Delta)_2$ 之和,即

$$(\delta\Delta)_{SS'}=(\delta\Delta)_1+(\delta\Delta)_2. \tag{3.4.32}$$

其中

$$(\delta\Delta)_1=\beta r,\quad (\delta\Delta)_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{L_1}-\frac{1}{L_2}\right)r^2. \tag{3.4.33}$$

显然,$(\delta\Delta)_1$ 随 β 增大而增大,$(\delta\Delta)_2$ 随膜厚增大而增大. 一般地,$L_1\neq L_2$, $(\delta\Delta)_2\neq 0$. 但通过令 $\beta=0$ 可使 $(\delta\Delta)_1=0$,从而使 $(\delta\Delta)_{SS'}$ 在给定膜厚和光源扩展下达到最小. 因此,定域中心是由条件 $\beta=0$ 所确定的场点的集合,在这些点,来自光源上各个点的光线对的光程差之差为最小,但一般并不为零;故在定域中心干涉条纹的衬比度最大,但一般并不为 1.

若利用数学语言,也可以这样说明定域中心与非定域中心的区别:将 r 看做是光源无限小的元扩展,则在非定域中心,$\delta\Delta$ 是 r 的一级无限小量,而在定域中心 $\delta\Delta$ 则是 r 的二级无限小量. 这又一次表明在定域中心干涉条纹受光源扩展的影响要比在非定域中心小.

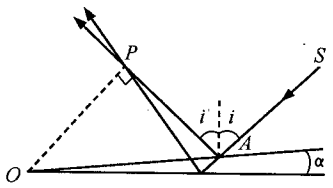


图 3.4.22 用单光线作图法寻找定域中心

2. 定域中心的作图法

对楔棱为 O、楔角为小角度 α 的空气楔(图 3.4.22),利用 $\beta=0$ 的方法(即单光线作图法)寻找定域点 P,可以看出当 i 很小时,P 点在表面附近;并可证明当 i 较大(满足 $i\gg\alpha$)时,有 $AP\perp OP$,其中 A 是光线在

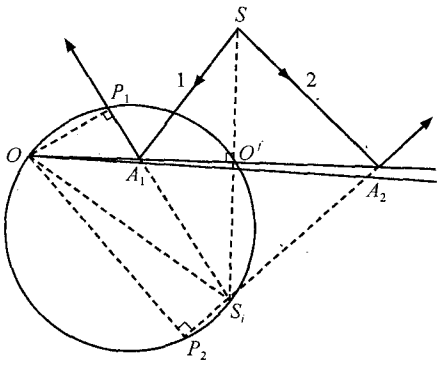


图 3.4.23 楔形膜定域中心作图法

膜面的反射点，由此可以得到楔形膜定域面的下述作图法(图 3.4.23)：

(1) 作光源中心 S 关于膜面的镜像点 S_i①；

(2) 连接 OS_i，以 $\overline{OS_i}$ 为直径作圆，此圆即为定域中心的轨迹(定域中心圆).

由此作图法可以看出：

(1) 定域中心圆总过楔棱 O 和光源在膜表面的垂足 O'，即正入射时定域中心在膜表面①.

(2) 当光线向楔棱方向入射时，定域中心在膜上方(光线 1 及点 P_1)，条纹为实条纹；当光线背离楔棱方向入射时，定域中心在膜下方(光线 2 及点 P_2)，条纹为虚条纹.

(3) 若入射光线为平行光，定域中心圆转化为直线. 即定域面为平面，它过 O 且与膜表面夹角为 i；正入射时 $i=0$，定域面即为膜表面.

一般实际薄膜并非理想楔状，其厚度往往有不规则变化，把它看成许多楔棱方位不同的楔形膜部分的组合，应用上述作图法，可以看出其定域中心一般仍在膜表面附近.

3. 定域深度

图 3.4.24 中，以单光线 0 确定定域中心 P，并作与光线 0 有角偏离 $\beta=\lambda/b$ 的两光线 1 和 2，则 A_1、A_2 点为与 A 点光场相干的最大范围，A_1、A_2 点的反射光线与过 A 点在膜的下表面反射的光线的交点(或光线反向延长线的交点) P_1 和 P_2 则表示相干性刚好消失的极限位置. P_1P_2 可称为在定域中心 P 附近的定域范围，而其在垂直于膜面方向的距离可称为定域深度. 定域深度的计算比较复杂，但可以看出，b 越小，β 越大，定域深度越大. 当 b 不是太大时，薄膜的定域范围常可包容其表面.

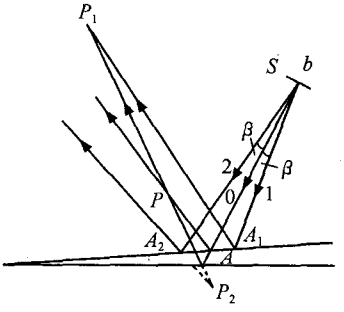


图 3.4.24 定域范围的确定

4. 光源临界宽度的确定

由(3.4.29)～(3.4.31)式可以看出，当光源较小(r 小)及膜较薄($L_1\approx L_2$)时，对非定域中心点($\beta\neq0$)，$\delta\Delta$ 中的二次项$(\delta\Delta)_2$ 与一次项$(\delta\Delta)_1$ 相比可以忽略，这时$(\delta\Delta)_{S'S''}=\beta b$ 可以代表$(\delta\Delta)_{SS'}$，$(\delta\Delta)_{SS''}$和$(\delta\Delta)_{S'S''}$诸量中的最大值. 因此在考虑非定域中心处的干涉场时，光源的临界宽度 b_M 可由公式 $\beta b_M=\lambda$ 来确定，从而得到 $b_M=\lambda/\beta$，这与 3.3.1 节中的结论是一致的. 这里应注意，在 3.3 节中的分波前干涉中，由于次波源 S_1、S_2 是分离的，一般场点均非定域中心. 例如，

① 由于 α 很小，膜很薄，在实际问题中一般可不仔细区分膜的上下表面. 若作更精细的分析可以证明，对空气膜，当光线正入射上表面时定域点在下表面，当光线正入射下表面时定域点在上表面；而 S_i 点可取为 S 关于膜的中心面的镜像点.

杨氏实验中双缝平面右侧各处皆非定域中心;菲涅耳双面镜实验中(参见图 3.2.7),定域中心应在双镜的交线 O 处,通常的观察平面 Π 也非定域中心.

但是,若考察定域中心处的条纹,情况则有所不同,这时 $\beta=0$,$(\delta\Delta)_1=0$,

$$(\delta\Delta)_{SS'}=(\delta\Delta)_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{L_1}-\frac{1}{L_2}\right)r^2 \tag{3.4.34}$$

可以代表光源上不同点发出在考察点交会的光线对的光程差之差的极大值. 光源的**临界半径** r_M 可由

$$(\delta\Delta)_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{L_1}-\frac{1}{L_2}\right)r_M^2=\lambda \tag{3.4.35}$$

来确定. 设光源正入射,L_1、$L_2\gg h$,利用 $L_1L_2\approx L^2$,$L_2-L_1=2h$,可由上式得到

$$r_M=L\sqrt{\frac{\lambda}{h}}, \tag{3.4.36}$$

其中 L 为光源到膜表面的垂直距离. 为求出光源**容许半径** r_P,利用与 3.3.1 节相同的物理思想,将(3.4.35)式右端之 λ 改为 $\lambda/4$,从而得到

$$r_P=\frac{L}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{h}}. \tag{3.4.37}$$

以上两式也可以用光源的**临界角半径** θ_M 和**容许角半径** θ_P 来表示,

$$\theta_M=\frac{r_M}{L}=\sqrt{\frac{\lambda}{h}},$$

$$\theta_P=\frac{r_P}{L}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{h}}. \tag{3.4.38}$$

图 3.4.25 以精密测量所用的等厚干涉仪为例说明上式的应用,这时直径为 b 的圆形光源置于焦距为 f 的透镜的后焦面,由上式可得光源的容许直径为

$$b_P=2f\theta_P=f\sqrt{\frac{\lambda}{h}}. \tag{3.4.39}$$

考虑到膜的折射率 n 一般并不等于 1,上式可修正为

$$b_P=f\sqrt{\frac{n\lambda}{h}}, \tag{3.4.40}$$

此式已得到实际应用. 可见膜越薄,光源的容许扩展越大.

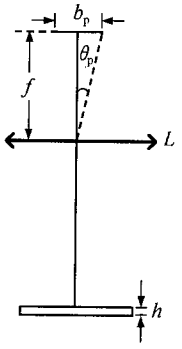


图 3.4.25 光源的容许半径及容许角半值

3.4.5 迈克耳孙干涉仪

迈克耳孙干涉仪是由迈克耳孙(A. A. Michelson)提出并加以发展的一种最典型的双光束干涉装置. 它在物理学史上曾经起过重要作用,并至今仍在许多方面有着广泛的应用. 由于它在不同条件下可分别产生等倾条纹和等厚条纹,故本段也是对前文双光束干涉内容的总结与拓展.

1. 仪器结构与工作原理

图 3.4.26 示出了迈克耳孙干涉仪的基本结构(俯视图). 图中 G_1 和 G_2 是沿与

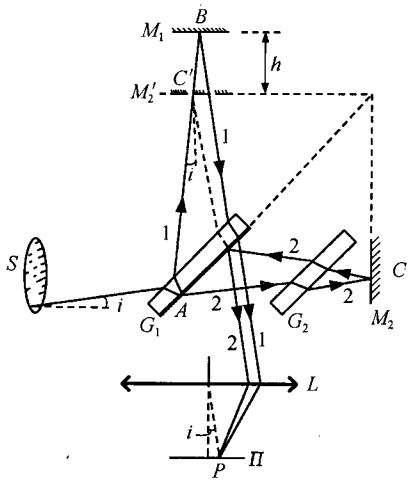


图 3.4.26 迈克耳孙干涉仪的结构及等倾干涉光路

水平方位成 45°放置的两块材料及厚度均相同的平行平面玻璃板，M_1 与 M_2 是两面平面反射镜，大体上分别沿水平与竖直方向放置，其倾角可以微调. S 为扩展光源，L 为观测透镜，Π 为接收平面（L 与 Π 亦可用人眼代替）.

从光源上某点发出的光线在 G_1 的下表面某点 A 同时发生反射和透射（为使这两束光光强匹配，通常 G_1 下表面镀有金属膜），其中反射光（图中光线 1）经 M_1 反射后再穿过 G_1 射向 L；透射光（光线 2）经 M_2 反射后再经 G_1 下表面反射射向 L，两束光在 Π 面上某点相交. 因光线 1、2 系由同一光束分裂经不同光程而相遇，故它们可以干涉. G_1 起到了将光束一分为二的作用，故称为**分束板**. 若无 G_2，则光线 1 来回穿越 G_1 板三次，而光线 2 只有一次，这对单色光干涉并无影响，但若光源有光谱扩展，则会由于玻璃板介质的色散作用（n 与 λ 有关）而使得光线对 1、2 中不同波长的光的光程差有所不同，这对干涉效应显然是不利的. G_2 的应用正是为了补偿光线 2 在介质中所历光程，使它与光线 1 一致，这样由玻璃板引入的光程对光线 1、2 及各种色光完全相同，在计算这一光线对的光程差时就不必考虑玻璃板的作用及其色散了，因此 G_2 称为**补偿板**.

为直观地看出 1、2 光的光程差，可以作出 M_2 关于 G_1 下表面的镜像 M_2'，易见光线 2 从 M_2 上 C 点的反射相当于光线 1 从 M_2' 上相应点 C'（C 的虚像）的反射，从而干涉效应可以归结于光线 1 从实表面 M_1 和虚表面 M_2' 分别反射所致，这里 M_1 和 M_2' 所夹的空气层相当于前文薄膜干涉中的薄膜，可称为**等效空气膜**或等效虚膜. 由前文分析，当 M_2' 与 M_1 平行或夹角很小时，两反射光的光程差为

$$\Delta = 2h\cos i + \frac{\lambda}{2}, \tag{3.4.41}$$

其中利用到 $n=1$，i 与 i_0 此时可不再区分，h 为等效虚膜的厚度，$\lambda/2$ 项相应于不考虑板面镀膜的情况①. 在有镀膜时附加程差较为复杂，这里不予讨论.

2. 干涉条纹

由(3.4.41)式可知，视条件不同，此仪器既可形成等倾条纹，也可形成等厚条纹.

① 注意光线 1 经历了一次外反射，而光线 2 经历两次外反射. 在不考虑镀膜时由 2.6.3 节的分析可知此因素可造成两光线的附加半波程差.

1) 等倾圆环条纹

在图 3.4.26 中,若(1)M_1 和 M_2 分别沿水平和竖直方向放置,即 $M_1 \perp M_2$,$M_1 // M_2'$;(2)L 的光轴垂直于 M_1 和 M_2',则可形成等倾圆环条纹. 此时可以利用扩展光源观察以增加条纹亮度,条纹的定域面则位于 L 的后焦面. 该图还示出了从光源上某点所发出与水平方向成角度 i 的光线在此条件下的分束光路及相干过程.

不考虑渡膜时(下同),由(3.4.41)式,第 m 级暗环应满足 $\Delta=(m+1/2)\lambda$,即

$$2h\cos i = m\lambda. \qquad (m = 0,1,2,\cdots) \tag{3.4.42}$$

对上式求微分,可得到相邻暗(或亮)环的角距离

$$\delta i = \left|\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}m}\right| = \frac{\lambda}{2h\sin i} \approx \frac{\lambda}{2hi}, \tag{3.4.43}$$

相邻环的线距离则为

$$e = f\delta i = \frac{f\lambda}{2h\sin i} \approx \frac{f\lambda}{2hi}. \tag{3.4.44}$$

其中用到了 i 的小角度近似,f 是透镜 L 的焦距. 可见越向外环越密.

仪器中有导轨可在竖直方向精密调节 M_1 的位置,即调节虚膜的厚度 h. 当 $h=0$,即 M_1 与 M_2' 重合时,$\Delta=\lambda/2$,整个视场应为均匀暗区①. 当移动 M_1 使得它与 M_2' 的距离 h 增大时,由以上各式可知有以下现象:

(1) 中心点暗亮交替,h 每改变 $\lambda/4$,从而光程差改变 $\lambda/2$,暗亮转换一次;

(2) 圆环不断从中心涌出并向外散开,h 每增加 $\lambda/2$ 从中心生出一个新的亮点;

(3) 同一位置(i 固定)处条纹越来越细密.

在 h 减小时现象(1)仍相同,但现象(2)、(3)则相反,即圆环向中心聚拢沉没并逐渐变疏.

若以白光入射,可知除 $h=0$ 时视场应为均匀暗场外,当 $h\neq 0$ 时各圆环应呈现彩色. 由亮环条件

$$\Delta = 2h\cos i + \frac{\lambda}{2} = m\lambda,$$

对同一 m,λ 增大时 i 应相应减小,故同级圆环条纹中红光位于内侧,紫光位于外侧. 但因白光的相干长度只有波长数量级,故只有在 h 小到波长级时才能看到这种彩色圆环条纹②.

2) 等厚条纹

当(1)$M_1 \not// M_2'$、但其不平行度很小;(2)射向等效虚膜的光线为正入射或近似正入射;(3)h 不太大时,在虚膜表面附近可形成等厚条纹. 这时观测平面 Π 应与虚

① 实际上由于镀膜的存在,此时视场并不全暗.

② 看到彩环要求 M_1 与 M_2' 严格平行;实际上在白光照射下更容易看到的是后文介绍的彩线.

膜满足物像共轭关系. 条纹形状视 M_1 和 M_2' 的具体形式而定. 设 M_1、M_2' 均为理想平面但有一小的夹角 α，则干涉图样即为 3.4.3 节中分析过的楔形空气膜的等厚条纹. 它是一族平行等距直线，但在 h 较大时向楔棱，即 M_1 和 M_2' 的交线方向凸出. 上述条件(3)正是为了减少条纹对等厚线的这种偏离；而条件(2)可采用近似点光源经透镜准直而实现. 当 h 增大时，易见整套条纹将向楔棱方向移动.

当白光入射时，依据 3.4.3 节中的分析(图 3.4.16)，可知只有在 h 很小(波长级)时才能看到条纹. 这时 M_1 与 M_2' 的交线为暗线；在此暗线两侧对称排布着很少几级彩色条纹，每级均是紫色在内(靠近交线)，红色在外；距此交线较远处条纹逐渐模糊消失. 由此在调整光路时可根据是否有消色差暗线及两侧的彩线出现来判定 M_1 和 M_2' 是否相交[①]，从而确定光路两臂间的等光程位置.

图 3.4.27 和图 3.4.28 分别示出了不同情况下的等倾圆环条纹和楔形虚膜的

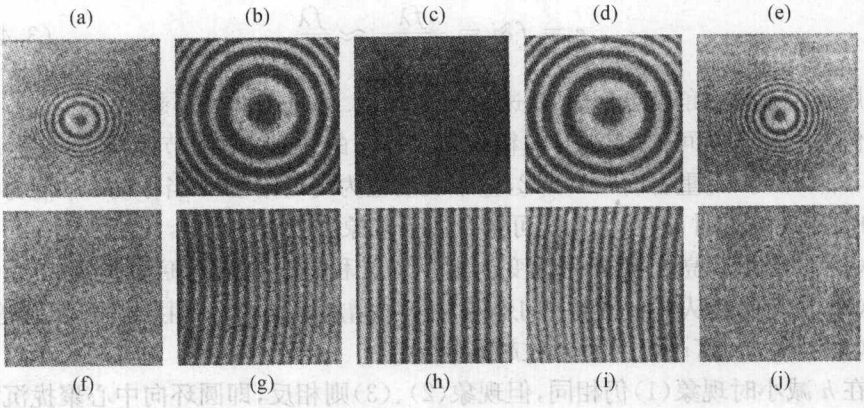


图 3.4.27　迈克耳孙干涉仪产生的各种干涉条纹

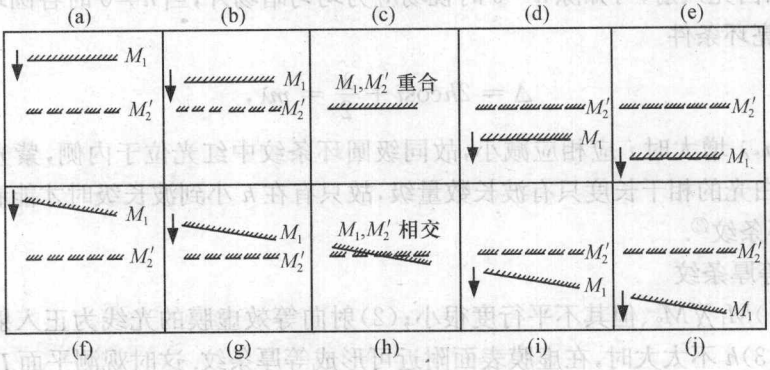


图 3.4.28　产生图 3.4.27 中各种条纹时 M_1、M_2' 的相应位置

① 由于 G_1 板镀膜的存在，中心暗线往往并不完全消光.

等厚条纹,以及产生这些条纹时 M_1 和 M_2' 的相对位置,从中可以验证前文所有结论.

若将 M_1、M_2 中之一换成透镜表面,并仍保持正入射,显然可以得到牛顿环条纹. 移动二者之一使 h 改变则容易观测到条纹的动态变化.

例 3.4.4 用波长为 λ 的单色光观察迈克耳孙等倾圆环条纹. 初态干涉场中有 20 个暗环,且中心为暗点;移动 M_1 后看到中心吞吐 20 环,而干涉场中还剩有 10 个暗环. 求(不考虑镀膜):

(1) M_1 移动时虚膜厚度增大还是减小? 条纹是从中心"吐出"还是在中心被"吞没"?

(2) M_1 移动的距离;

(3) 初态中心暗点的干涉级;

(4) 终态从中心向外数第 5 个暗环的角位置.

解 (1) 在同样的视场中,初态有 20 环,终态有 10 环,条纹变稀疏了. 由(3.4.44)式知由初态到终态虚膜厚度 h 逐渐减小,故条纹不断向中心沉没.

(2) 记初态与终态虚膜厚度分别为 h_1 和 h_2,视场角为 i,由题意及(1)中分析,初态及终态视场的中心暗点及外缘暗环的级别可分别由图 3.4.29(a)、(b)表示,对各暗点(环)可得如下方程:

$$2h_1+\frac{1}{2}\lambda=\left(m_0+\frac{1}{2}\right)\lambda, \tag{E.1}$$

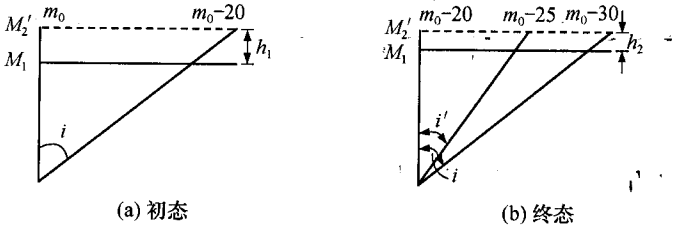
$$2h_1\cos i+\frac{1}{2}\lambda=\left(m_0-20+\frac{1}{2}\right)\lambda, \tag{E.2}$$

$$2h_2+\frac{1}{2}\lambda=\left(m_0-20+\frac{1}{2}\right)\lambda, \tag{E.3}$$

$$2h_2\cos i+\frac{1}{2}\lambda=\left(m_0-30+\frac{1}{2}\right)\lambda. \tag{E.4}$$

(E.1)−(E.3),得

$$h_1-h_2=10\lambda,$$



(a) 初态　　(b) 终态

图 3.4.29 例 3.4.4 图

(E.2)－(E.4)，得

$$(h_1 - h_2)\cos i = 5\lambda,$$

故

$$\cos i = \frac{1}{2}, \quad i = 60°.$$

(E.1)－(E.2)，得 $2h_1(1-\cos i)=20\lambda$，代入 $\cos i=1/2$，得 $h_1=20\lambda$. 代回(E.1)式，得 $m_0=40$.

(3) 设终态第5个暗环角半径为 i'，有

$$2h_2\cos i' + \frac{1}{2}\lambda = \left(m_0 - 25 + \frac{1}{2}\right)\lambda,$$

代入 $h_2=h_1-10\lambda=10\lambda$，$m_0=40$，得

$$\cos i' = \frac{3}{4},$$

故

$$i' = \cos^{-1}\frac{3}{4} = 41.41°.$$

3. 三种条纹的比较

比较图3.4.6、图3.4.18及图3.4.27中(a)～(c)，可见等倾圆环条纹与牛顿环在表观上非常相似. 表3.4.1列出了它们的异同. 为完整起见，表中也包括了另一类重要的干涉——楔形膜干涉.

表3.4.1 三种干涉条纹的比较

条纹种类	等倾圆环条纹	牛顿环①	楔形膜等厚条纹
形成条件	$M_1 /\!/ M_2'$，扩展光源	α 很小，正入射(点光源准直)	
定　域	无穷远处或透镜焦平面	膜表面附近	
形　状	同心环，内疏外密		平行等距直线
动态变化 (以 h 增大为例)	中心亮暗交替； 条纹从中心涌出并向外扩散； 条纹变密.	中心亮暗交替； 条纹向中心收缩并沉没； 条纹密度不变.	条纹向楔棱平移； 条纹密度不变； h 大时条纹向楔棱凸出.
白光条纹	$h=0$，均匀暗场②； h 很小时，条纹为彩环，内红外紫.	$h=0$，暗点； 中心附近数条彩环，内紫外红.	$h=0$，暗线③； 两侧数条对称彩带，内(靠近楔棱)紫外红.

① 以平凸透镜和平板形成为例，中间为空气.
② 不考虑镀膜时.
③ 设膜上下方为同一介质.

4. 迈克耳孙干涉仪的应用

与以前讲过的所有双光束干涉(包括分振幅与分波前)装置相比，迈克耳孙干涉仪一个明显的优点是它利用巧妙的几何安排，使相干光线对中两束光的光路在

空间完全分离(分居于互相垂直的两臂).这样既有利于在一臂放置待测样品而不干扰另一路光束,又便于调整两臂间的光程差,因此它成为现代干涉计量的一个重要手段.以下简介几种应用.

1) 测定长度及光的相干长度

利用条纹的动态变化可以实施长度测量,其原理如下:将待测样品沿纵向放入迈克耳孙干涉仪的一臂,如 M_2 所在一臂,并以两个镜面 M_{21} 和 M_{22} 分别标志其前后端面位置,平移 M_1,使它在始末两态分别与 M_{21} 和 M_{22} 关于 G_1 下表面的镜像 M'_{21} 和 M'_{22} 重合.若为等倾干涉($M_1 // M'_{21} // M'_{22}$),则此过程中可看到视场中心冒出(或沉没)$N$ 个条纹;若为等厚干涉($M'_{21} // M'_{22}$,但与 M_1 夹一小角度),则视场中某固定位置处平移过 N 个条纹.由于每变化一个条纹光程差改变 λ,M_1 移过 $\lambda/2$,故在两种情况下待测长度均为

$$l = N\frac{\lambda}{2}. \tag{3.4.45}$$

若光源为非单色光,l 的最大量程 l_M 应为相干长度之半,对准单色光即

$$l_M = \frac{1}{2}L_c = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}. \tag{3.4.46}$$

显然,由测定 l_M 可以确定相干长度 L_c,它即干涉条纹刚好消失时两路光的最大光程差.

*2) 光谱分析——傅里叶变换光谱仪

3.3.2 节中曾以双缝干涉为例得到在给定光谱强度分布 $i(k)$ 下干涉强度随光程差的变化关系(3.3.25)式,为与本书所定义的傅里叶变换的标准形式相比较,它可以重写为

$$i(\Delta) = 2\int_0^\infty i(\kappa)\cos(2\pi\kappa\Delta)\,\mathrm{d}\kappa. \tag{3.4.47}$$

其中 $i(\Delta)=I-2I_0$ 表示干涉强度的交变成分,$\kappa=1/\lambda$ 为波数,$k=2\pi\kappa$,$i(\kappa)$ 为用波数表示的光谱强度,它满足 $i(k)\,\mathrm{d}k=i(\kappa)\,\mathrm{d}\kappa$.上式称为傅里叶余弦变换.由于 $i(\Delta)$ 是实偶函数(光程差 $\pm\Delta$ 导致同样的干涉强度),可以证明此傅里叶余弦变换具有对称性,即亦有

$$i(\kappa) = 2\int_0^\infty i(\Delta)\cos(2\pi\kappa\Delta)\,\mathrm{d}\Delta. \tag{3.4.48}$$

为利用已有的傅里叶变换程序,也可将 $i(\kappa)$ 的定义域扩展到负频域,并定义 $i(-\kappa)=i(\kappa)$.这时(3.4.47)式可写为

$$i(\Delta) = \int_{-\infty}^\infty i(\kappa)\exp(\mathrm{i}2\pi\kappa\Delta)\,\mathrm{d}\kappa. \tag{3.4.49}$$

显然 $i(\Delta)$ 与 $i(\kappa)$ 构成傅里叶变换对,

$$i(\kappa) = \int_{-\infty}^\infty i(\Delta)\exp(-\mathrm{i}2\pi\kappa\Delta)\,\mathrm{d}\Delta. \tag{3.4.50}$$

以上关系在原则上亦适用于其他干涉仪,故测出 $i(\Delta)$ 后可由

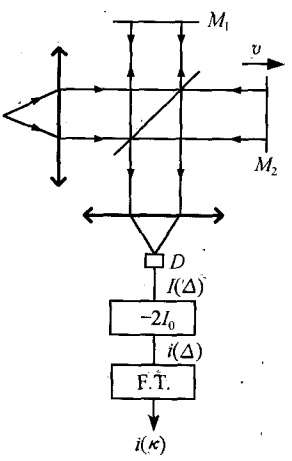


图 3.4.30 傅里叶变换光谱仪

傅里叶变换求出光源强度的光谱分布 $i(\kappa)$. 用迈克耳孙干涉仪测定 $i(\Delta)$是非常方便的,实用中常采用固定 M_1 而使 M_2 以匀速度 v 向右运动的方法来连续改变Δ(图 3.4.30),以探测器 D 测定干涉强度 $I(\Delta)$随 Δ 的变化曲线(通常称为干涉图),$I(\Delta)$减去其平均值得到 $i(\Delta)$,然后经计算机作傅里叶变换即可求得 $i(\kappa)$.

3.5 分振幅干涉(二):平行平板的多光束干涉

在透明平板的分振幅干涉中,若采用某些方法(一般为镀膜)使界面反射率增大,则由板内多次反射所引起的各束反射光和透射光光强随其序号的增加而递减的过程会越来越慢,从而使得光强不能忽略的光束越来越多,此时即应考虑多光束干涉问题. 尽管多光束干涉的基本原理与双光束干涉是相同的,但参与干涉的光束的增多将会使干涉结果产生某些有别于双光束干涉的明显特点.

3.5.1 平行平板多光束干涉的分析

1. 光强公式

1) 各光束的振幅与相位变化

如图 3.5.1 所示,光束 0 射向一厚度为 h、折射率为 n 的透明平行平面介质板,该板放在折射率为 n_0 的均匀介质中,各反射光束分别记为 1,2,3,…各透射光束分别记为 $1',2',3',\cdots$两族光束各自保持相互平行. 设当光束从折射率为 n_0 的介质射向折射率为 n 的介质时振幅反射率为 r,振幅透射率为 t;当光束从后者射向前者时振幅反射率为 r',振幅透射率为 t'. 图中标出了光束在各个界面上反射和折射时的振幅比.

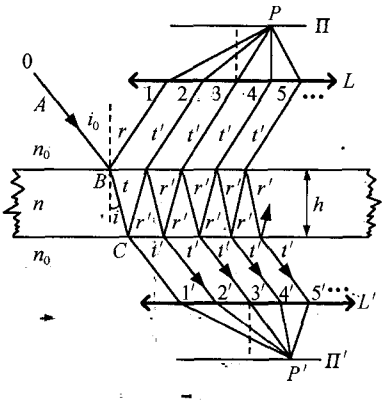


图 3.5.1 平行平板多光束干涉光路及各界面的振幅比

记入射光束振幅为 A,依该图将所考察光束在行进路径中所经历的各次反射和折射相对应的振幅比相乘,可知各反射光束的振幅依次为

$$Ar, Atr't', Atr'^3t', Atr'^5t', \cdots;$$

各透射光束的振幅依次为

$$Att', Atr'^2t', Atr'^4t', Atr'^6t', \cdots.$$

易见除反射光前两项外,每一系列中后项比其前项均多出一个因子 r'^2,这是由于后一光束均比前一光束多经历了两次板内反射.

另一方面,由与双光束干涉类似的分析可知,每一光束族中后一光束均比前一

光束多经历了光程

$$\Delta = 2nh\cos i, \tag{3.5.1}$$

它相应于相位延迟量

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda}nh\cos i. \tag{3.5.2}$$

将上述振幅与相位分析综合起来,并设入射光束在上界面入射点 B 处初相为零,即入射光复振幅为 $\widetilde{E}_0 = Ae^{i\cdot 0} = A$,则各反射光束的复振幅分别为

$$\begin{cases} \widetilde{E_1} = Ar, \\ \widetilde{E_2} = Atr't'e^{i\delta}, \\ \widetilde{E_3} = Atr'^3t'e^{i2\delta}, \\ \widetilde{E_4} = Atr'^5t'e^{i3\delta}, \\ \cdots\cdots \end{cases} \tag{3.5.3}$$

各透射光束的复振幅分别为

$$\begin{cases} \widetilde{E_1'} = Att'e^{i\delta_0}, \\ \widetilde{E_2'} = Atr'^2t'e^{i\delta_0}e^{i\delta}, \\ \widetilde{E_3'} = Atr'^4t'e^{i\delta_0}e^{i2\delta}, \\ \widetilde{E_4'} = Atr'^6t'e^{i\delta_0}e^{i3\delta}, \\ \cdots\cdots \end{cases} \tag{3.5.4}$$

式中常数 δ_0 反映了光束 1′从 B 到 C 产生的相移.

2) 斯托克斯倒逆关系

为简化数学表示,我们希望找出 r, r', t, t' 四个量的关系,这可以由光路可逆性而得到. 图 3.5.2(a)表示振幅为 A 的入射光 1 从折射率为 n_0 的介质射向折射率为 n 的介质,这时反射光 2 的振幅为 Ar,折射光 3 的振幅为 At. 依光路可逆性,若光线 2 和 3 保持原来的振幅逆向传播,则会得到光线 1 的逆行光,其振幅仍为 A. 图 3.5.2(b)示出光线 2,3 逆行时在界面上所产生的反射和折射,依上述分析,其总效果应为

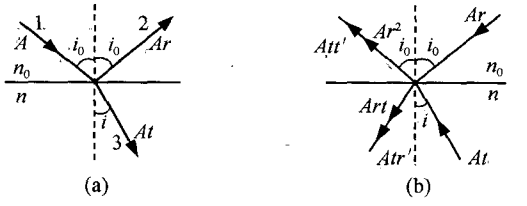


图 3.5.2 推导斯托克斯倒逆关系

$$\begin{cases} Ar^2 + Att' = A, \\ Art + Atr' = 0, \end{cases}$$

由此可得到

$$\begin{cases} r^2 + tt' = 1, \\ r' = -r. \end{cases} \tag{3.5.5}$$

上式称为**斯托克斯**(G. G. Stokes)**倒逆关系**,其中负号的意义将于后文讨论.

3) 干涉强度公式及强度曲线

由于各反射光束系由同一光束分裂而得到,故它们是相干的. 若在反射光路中放置透镜 L,则可在 L 后焦面 Π 上观察到干涉条纹. 对确定的入射方向,所有反射光线会聚于 Π 面上同一点 P,该点光场的复振幅是所有反射光束复振幅的叠加,即

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_r &= \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{E}_i = A[r + tr't'e^{i\delta}(1 + r'^2 e^{i\delta} + r'^4 e^{i2\delta} + \cdots)] \\ &= A\left(r + tt'r'e^{i\delta}\frac{1}{1 - r'^2 e^{i\delta}}\right), \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

式中用到了无穷等比级数的求和公式. 利用斯托克斯关系,并记光强反射率为 $R = r^2 = r'^2$,上式可化为

$$\widetilde{E}_r = Ar \cdot \frac{1 - e^{i\delta}}{1 - Re^{i\delta}},$$

故 P 点光强为

$$I_r = |\widetilde{E}_r|^2 = \frac{4R\sin^2\frac{\delta}{2}}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\frac{\delta}{2}} I_0 = \frac{F\sin^2\frac{\delta}{2}}{1 + F\sin^2\frac{\delta}{2}} I_0, \tag{3.5.7}$$

其中 $I_0 = A^2$ 为入射光强,而

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2} \tag{3.5.8}$$

称为**精细度系数**,$[1 + F\sin^2(\delta/2)]^{-1}$ 常称为艾里(G. B. Airy)函数.

同理,若在透射光路中放置透镜 L',则所有透射光束将在 L' 后焦面上一点 P' 会聚而发生干涉,P' 点的光强为

$$I_t = \frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\frac{\delta}{2}} I_0 = \frac{1}{1 + F\sin^2\frac{\delta}{2}} I_0, \tag{3.5.9}$$

其中 $T = tt' = 1 - r^2 = 1 - R$.

由(3.5.7)式和(3.5.9)式容易看到

$$I_r + I_t = I_0, \tag{3.5.10}$$

上式实际上是能量守恒关系的一种表现.

图 3.5.3 中以相邻光线之间的相位差 δ 为横坐标、以相对光强 I_r/I_0 和 I_t/I_0 为纵坐标、以 R 为参数画出了由(3.5.7)和(3.5.9)两式所给出的强度曲线. 注意图中两纵坐标指向相反. 由于 I_r/I_0 与 I_t/I_0 之和恒为 1,故反射光较强处透射光较弱,反之亦然;两种相对强度曲线及相应的干涉图样呈互补关系.

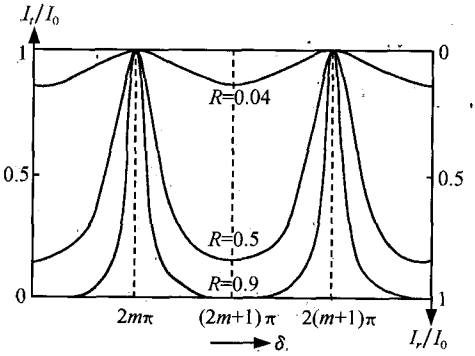


图 3.5.3 透射光与反射光的相对强度曲线

2. 干涉条纹的特点

1) 条纹的形状和定域

由(3.5.7)式和(3.5.9)式可以看出,对于确定的 I_0 和 R(以及 F),I_r、I_t 仅取决于 δ,即取决于折射角 i 或入射角 i_0,故干涉条纹是等倾条纹,它定域于接收透镜的后焦面. 以上两公式并具体给出了反射光及透射光的亮纹及暗纹条件,即

$$\text{反射条纹}\begin{cases}\text{亮纹} & \delta=(2m+1)\pi,\\ \text{暗纹} & \delta=2m\pi;\end{cases}\qquad (m=0,1,2,\cdots)\qquad (3.5.11)$$

$$\text{透射条纹}\begin{cases}\text{亮纹} & \delta=2m\pi,\\ \text{暗纹} & \delta=(2m+1)\pi.\end{cases}\qquad (m=0,1,2,\cdots)\qquad (3.5.12)$$

由于这里 δ 的表达式与双光束等倾干涉时相同,故条纹的整体形状也与双光束等倾干涉条纹非常相似. 当接收透镜光轴与板面垂直时,条纹呈同心圆环状,中心在透镜的后焦点,内疏外密,并可用扩展光源观察.

2) 条纹的衬比度和表观特性

由(3.5.7)式,反射光在干涉极弱处可以消光,即 I_r 的极小值为零,故反射条纹的衬比度 $V_r=1$. 由(3.5.9)式,透射光强的极大值 $I_{t\mathrm{M}}=I_0$,极小值 $I_{t\mathrm{m}}=I_0/(1+F)$,故透射条纹的衬比度为

$$V_t=\frac{F}{2+F}=\frac{2R}{1+R^2}.\qquad (3.5.13)$$

可见 V_t 恒小于 1,但这并不意味着透射条纹的实用性总劣于反射条纹. 从图 3.5.3 可知,当 R 增大时,反射条纹的亮线越来越宽,而透射条纹的亮线则越来越窄. 当

$R\to1$ 时，反射条纹是亮背景上的一组很细的暗线，透射条纹则是暗背景上一组很细的亮线，而且此时 $V_t\to1$，后者比前者更容易观察和识别. 故对高反射率平板通常皆应用透射条纹.

3) 透射亮纹的锐度

图 3.5.4 中以 δ 为横坐标示出了透射光干涉图样中的一条亮纹. 由于这种亮纹两侧并无零点(当 $R\to1$ 时其极小值可趋近于零但总不等于零)，在实用中通常引入半值宽度(简称半宽度)的概念来描述其细锐程度. 所谓半值宽度即光强等于其极大值之半时曲线上相应两点的间隔. 显然，取不同的量作为自变量，就有不同的半值宽度. 从(3.5.9)式出发，最方便的方式是取相位差 δ 作自变量，这样得到的半值宽度 $\Delta\delta$ 称为**相半宽度**. 由半值宽度定义，当 $\delta=2m\pi\pm\Delta\delta/2$ 时应有 $I_t/I_0=1/2$，即

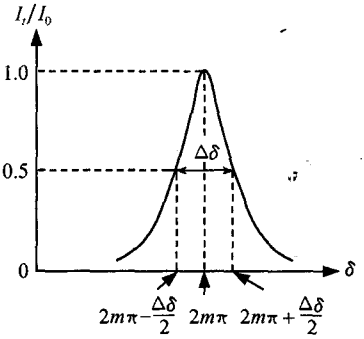


图 3.5.4　透射亮纹的相半宽度

$$\frac{I_t}{I_0}=\frac{1}{1+F\sin^2\left(m\pi\pm\frac{\Delta\delta}{4}\right)}=\frac{1}{2}.$$

对于锐线，有 $\Delta\delta\ll2\pi$，应用近似式 $\sin(\Delta\delta/4)\approx\Delta\delta/4$，可得

$$\Delta\delta=\frac{4}{\sqrt{F}}=\frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}. \tag{3.5.14}$$

可见 R 越大，$\Delta\delta$ 越小，透射亮纹越细锐.

为了直接与可测量对应，也可以用 i 作为自变量来表示半值宽度. 对(3.5.2)式求微分并取绝对值，有

$$\Delta\delta=\frac{4\pi}{\lambda}nh\sin i\Delta i,$$

将(3.5.14)式代入上式可得到

$$\Delta i=\frac{\lambda}{2\pi nh\sin i}\cdot\frac{1-R}{\sqrt{R}}, \tag{3.5.15}$$

Δi 称为**角半宽度**，它表示同一透射亮纹的两个半强度点的角(i)距离. Δi 越小，亮环条纹越细锐. 上式明显指出亮纹的锐度与以下三种因素有关：

(1) 光强反射率 R，R 越大，Δi 越小，亮纹越细锐；

(2) 板厚 h，其他因素不变时，h 越大条纹越细锐；

(3) 角度 i(及与此相关的 i_0)，其他因素给定时，i 越大 Δi 越小，故干涉场中越向外亮环越细锐.

有时也用两相邻亮纹之间的相位间隔 2π 与亮纹本身的相半宽度 $\Delta\delta$ 之比来表示条纹的细锐程度，记为 $\mathscr{F}$，由(3.5.14)式可知

$$\mathscr{F}=\frac{2\pi}{\Delta\delta}=\frac{\pi\sqrt{F}}{2}=\frac{\pi\sqrt{R}}{1-R},\tag{3.5.16}$$

$\mathscr{F}$称为条纹的**精细度**;$\mathscr{F}$越大,条纹越细锐.

3. 两点讨论

1) 多光束等倾干涉与双光束等倾干涉的异同

图 3.5.5 示出了对高反射率 $R(>0.9)$所得到的多光束干涉透射圆环条纹.将它与图 3.4.6 所示双光束等倾圆环条纹相比较,可见二者的整体形状及疏密分布是完全相似的,这是由于决定条纹形状及间距的光程差公式及有关条件(两表面平行、扩展源)对二者均相同.但多光束干涉具有一明显特点:亮纹比双光束干涉时要细锐得多.

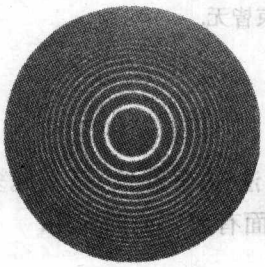


图 3.5.5 多光束干涉透射圆环条纹的照片

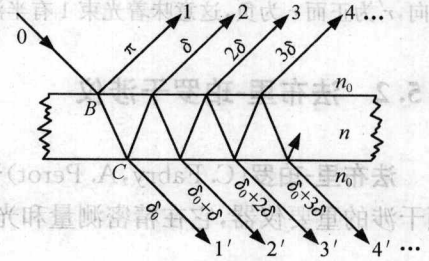


图 3.5.6 $n>n_0$ 时各光束的相对相位关系

此差别除在前文已作过定量分析之外,尚可从物理图像上作下述定性理解:干涉极大是参与干涉的诸光束相位同步的结果,亮纹可大致看成是诸光束基本同步的区域.在各光束依次有等量相差时,若欲使很多光束的整体相移保持在一定范围内,则对相邻两光束的相移量的要求要比仅有两光束时严格得多.这正如队列行进时两人一横排容易走,而 100 人一横排则很不容易.因为若每排所允许的前后错动量为 1 米,则对前者两人的允许错动量即为 1 米,而对后者(当每人有等量同向错动时)相邻两人的允许错动量只有 0.01 米.所以参与相干的光束的增多必然导致对相邻光束同步要求的苛刻化及同步范围的降低,亦即亮线宽度的减小.(3.5.16)式中的精细度$\mathscr{F}$相当于参与干涉的有效光束数目.R 增大时,各透射光束光强的递减速率变慢,故参与干涉的有效光束数目增加,亮线的锐度亦随之变大.

*2) 各光束的相对相位及半波损问题

由(3.5.11)及(3.5.12)式可知,当相邻光束相位差 $\delta=2m\pi$ 时透射光可形成干涉极大,这是容易理解的;但反射光却形成了干涉极小,这似乎与关于干涉的普通认识相矛盾.当然,从能量守恒可以说明这一点,但能否从相位关系本身更具体而明确地作一解释呢?

回答是肯定的.这里需要注意以上各式中之 δ 是由于在平行板中行进的光程所造成的相邻

光束的相位差，它并不包括由界面反射可能产生的附加程差即半波损. 如图 3.5.6 所示，设光束近似正入射(实用中均如此，但图中夸大了入射角)，$n>n_0$，设某时刻入射光在与上界面交点 B 处相位为零，由于反射光束 1 有半波损，它对该光束引入了附加相移 π，而反射光束 2,3,4,…等均未经历半波损，故光束 2 与光束 1 的实际相差应为 $\delta-\pi$，而 2,3,4,…之间相邻光束的相差仍为 δ. 当 $\delta=2m\pi$ 时，光束 2,3,4,…均同相，但与光束 1 反相；并且可以证明，此时光束 2,3,4,…等的振幅之和恰等于光束 1 的振幅. 这时各复振幅的矢量图可用图 3.5.7 表示，可见所有反射光束相应矢量的合矢量恰好为零，故反射光消光. 透射光则不存在半波损问题，此时所有光束的相幅矢量完全同向，所以形成干涉极大.

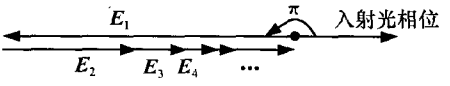


图 3.5.7 诸反射光的相对相位及矢量合成图

最后还有一个问题：在推导(3.5.7)式及(3.5.9)式时并未具体考虑过半波损，为什么所得公式却是相当于计入了半波损效应的正确结果呢？其原因在于斯托克斯公式 $r=-r'$ 中已包含了半波损因素：负号相当于相位差 $\pi(-1=\exp(i\pi))$. 当 $n>n_0$ 时，以入射光光矢量方向为规定正向，r' 为正而 r 为负，这意味着光束 1 有半波损而其他光束皆无.

3.5.2 法布里-珀罗干涉仪

法布里-珀罗(C. Fabry, A. Perot)**干涉仪**(简称**法-珀干涉仪**)是实施多光束等倾干涉的重要仪器，它在精密测量和光谱分析等方面有着广泛的应用.

1. 仪器结构

图 3.5.8 示出了法-珀干涉仪的结构及工作过程. 该装置的核心部分是两块内表面 M_1、M_2 均精密抛光、互相严格平行、且反射率很高(利用镀膜方法实现)的透明介质(如玻璃或石英)板 G_1 和 G_2. 从扩展光源 S 上某点发出的光经透镜 L_1 准直后射向 G_1，在 M_1、M_2 之间经历来回多次反射，从而形成多束互相平行的透射光束，这些光束在透镜 L_2 的后焦面 Π 上会聚而产生干涉. L_1、L_2 的光轴与 M_1、M_2、Π 平面相垂直，故干涉图样为多光束干涉等倾圆环条纹. G_1、G_2 的外表面与其内表面有一个小的倾角，这是为了使两外表面(非工作表面)的反射光与两内表面(工作表面)的反射光产生空间分离而利于排除前者的干扰. 这种装置有时也称为**法-珀标准具**.

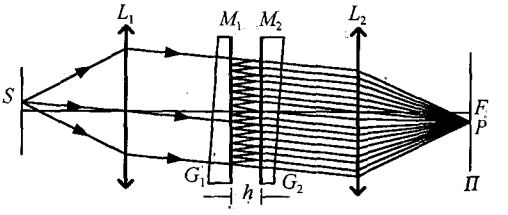


图 3.5.8 法-珀干涉仪的结构及光路

该仪器的工作原理在 3.5.1 节中已作过分析. 注意这里起作用的平行平板是 M_1、M_2 所夹的空气膜，故相位差公式(3.5.2)式中 $n=1$，而 i 系指空气膜中光线与 M_1、M_2 法线即光轴的夹角. 另外该式并未考虑镀膜的影响，在 M_1、M_2 有高反射率

镀层时该镀层会给反射光带来附加相移.此问题的仔细分析是相当复杂的,好在我们无需知道其具体形式.一般地,设两表面镀层相同,每次反射膜面所引起的附加相移为 ϕ,则(3.5.2)式可改写为

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} h\cos i + 2\phi. \tag{3.5.17}$$

因 2ϕ 为常数,它对前文中的主要结论并无实质性影响,因此在以下分析中不再考虑.

用单色光源得到的法-珀干涉仪圆环条纹已在图 3.5.5 中示出.

2. 作为光谱仪的分光特性

法-珀干涉仪常作为光谱仪用来分析光谱线的超精细结构.表征一台光谱仪的分光特性有三个主要的物理量,以下分别介绍之.

1) 色散本领

色散本领表示光谱仪将不同波长的谱线在位置上分开的能力.考虑法-珀干涉仪的同级(如 m 级)亮纹,它满足

$$\Delta = 2nh\cos i = m\lambda,$$

由此可得到

$$\frac{\delta i}{\delta\lambda} = -\frac{m}{2nh\sin i}. \tag{3.5.18}$$

定义**角色散本领**

$$D_i = \frac{\delta i}{\delta\lambda}, \tag{3.5.19}$$

它的绝对值等于在同级亮纹中波长差为一个单位的两谱线所分开的角距离.$|D_i|$ 越大,表示该光谱仪的色散本领越强.由(3.5.18)式易知

$$D_i = -\frac{m}{2nh\sin i}. \tag{3.5.20}$$

利用 $m=2nh\cos i/\lambda$,上式亦可化为

$$D_i = -\frac{1}{\lambda\tan i}. \tag{3.5.21}$$

$D_i<0$ 表示同级条纹中波长较大的谱线居于内侧.另外,由以上二式可看出,$|D_i|$ 将随 m 的增高,即 i 的减小而增大.故对给定波长差 $\Delta\lambda$ 的两谱线,愈靠近干涉图样中心其分离量愈大,这意味着圆环中心 F 点附近光谱纯度最高.以上结论以图 3.5.9 明显示出.

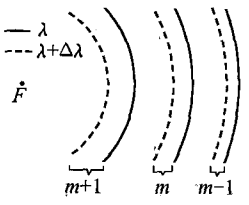


图 3.5.9 两相邻谱线的色散

在傍轴近似下,两谱线分离的角距离 δi 乘以透镜 L_2 的焦距 f 即得到它们在谱面 Π 上分离的实际距离.

2) 色分辨本领

角色散只反映不同波长的谱线中心(干涉极大)在位置上拉开的距离,但位置拉开并不等于可以分辨,后者还取决于每一谱线本身的宽度. 为说明这一点,图3.5.10中示出了角色散 δi(取绝对值)相同的两等强度谱线的三种分布情况. 在第一种情况下由于每一谱线本身的半值宽度很大,两谱线的合强度分布(图中未画出)将不出现中心凹陷,故二者不可分辨. 对第二种情况,两谱线的强度分布曲线恰在半强度点相交,这时合强度分布(图中虚线)出现中心凹陷(鞍点),使分辨成为可能. 第三种情况下合强度(未画出)的中心凹陷更大,分辨更容易.

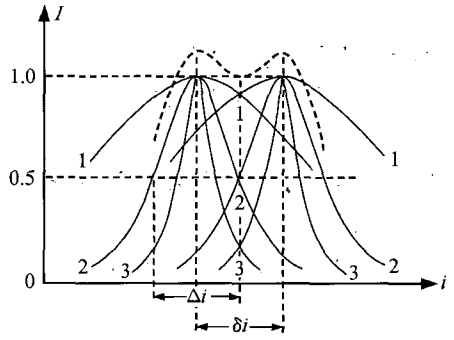


图 3.5.10 分辨率不同的三种情况及泰勒判据

显然,究竟何时方能分辨带有一定的人为性,由此产生了多种判据. 这里我们采用情况2作为刚能分辨的临界情况,相应的判据称为**泰勒**(Taylor)**判据**. 根据此判据,在刚能分辨时两亮纹中心的距离恰等于每一亮纹的半值宽度,用角度 i 表示,即为

$$\delta i = \Delta i, \tag{3.5.22}$$

式中 Δi 表示单一谱线的角半宽度.

由(3.5.18)式,知两谱线中心角分离的绝对值

$$\delta i = \frac{m}{2nh\sin i}\delta\lambda. \tag{3.5.23}$$

将上式及(3.5.15)式代入(3.5.22)式,可以得到

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{m\pi}\cdot\frac{1-R}{\sqrt{R}}. \tag{3.5.24}$$

此 $\delta\lambda$ 值即为第 m 级谱线中可以分辨的两谱线的最小波长间隔,亦称**分辨极限**.

实用中常用**色本辨本领** A 来表征光谱仪对相近谱线的分辨能力,它定义为

$$A = \frac{\lambda}{\delta\lambda}, \tag{3.5.25}$$

此处 $\delta\lambda$ 为在波长 λ 附近的分辨极限. 显然,$\delta\lambda$ 越小,A 越大,光谱仪的色分辨能力越强. 由以上两式可以得到

$$A = m\frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} = m\mathscr{F}. \tag{3.5.26}$$

上式指出了提高 A 的两个途径:①增大 m,它可以通过增大两反射面 M_1、M_2 的距离 h 来实现;②增大 $\mathscr{F}$,它可通过在反射面上镀膜以提高 R 来实现. 实用中 h 可从毫米到米数量级,对可见光 m 可达数万以至数百万;R 可高达 0.9～0.99,相应 $\mathscr{F}$ 可从数十到数百,因此 A 可高达 10^6 以上,这是其他光谱仪(例如棱镜或后文将讲到的普通光栅)所难以达到的.

3) 自由光谱范围

色散效应使不同波长的谱线位置相互错开,从而使得光谱仪的基本作用——分光成为可能. 但同时它也带来另一问题:若入射光的光谱范围 $\Delta\lambda$ 较大,使得同级谱中各色谱线的色散量太大,以至于超过了该处的条纹间距,则会发生各级谱的越级交叠,从而使各谱线变得模糊而不可分辨. 故实用中对 $\Delta\lambda$ 要有一定限制. 我们把各色光干涉极大不发生级次交叠的最大波长范围称为仪器的**自由光谱范围**,记为 $\Delta\lambda_F$.

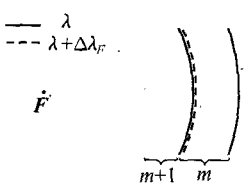


图 3.5.11 第 m 级谱不发生级次交叠的极限情况

为求出 $\Delta\lambda_F$,图 3.5.11 画出了尚不发生级次交叠的极限情况,这时由 $\Delta\lambda_F$ 造成的色散恰好盖满一个条级间距,即 $\lambda+\Delta\lambda_F$ 色光的第 m 级谱线刚好与 λ 色光的第 $m+1$ 级谱线相接. 由亮纹条件 $2nh\cos i=m\lambda$,可求得波长为 λ 色光的第 m 级亮环与第 $m+1$ 级亮环的角距离为

$$\delta i_m = \left|\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}m}\right| = \frac{\lambda}{2nh\sin i}, \tag{3.5.27}$$

(3.5.23)式则给出了 $\Delta\lambda_F$ 引起的角色散

$$\delta i = \frac{m}{2nh\sin i}\Delta\lambda_F.$$

由 $\Delta\lambda_F$ 的定义,以上二式应该相等,从而得到

$$\Delta\lambda_F = \frac{\lambda}{m}. \tag{3.5.28}$$

利用 m 的表达式,上式亦可写成

$$\Delta\lambda_F = \frac{\lambda^2}{2nh\cos i} \approx \frac{\lambda^2}{2nh}, \tag{3.5.29}$$

其中最后一步用到了小角度近似.

可见 h 或 m 增大时,$\Delta\lambda_F$ 将减小,这与 A 对 m 或 h 的依赖关系恰好相反. 对于较大的 h,分辨本领提高了,但仪器可以工作的波长范围也压窄了;h 较小时则相反. 实用中应根据不同目的兼顾 A 和 $\Delta\lambda_F$ 来适当选取 h.

3. 作为滤光器的选频作用

当用一束非单色光正入射($i=0$)照射法-珀干涉仪时,各光束在两标准平面之间来回反射,形成一系列彼此光程差为 $2nh$、沿同一方向出射的透射光束. 由于各透射光束之间的干涉效应,只有波长满足

$$\Delta = 2nh = m\lambda \tag{3.5.30}$$

的特定色光才能形成透射极大,偏离上式较远的波长则基本上不能透过,这种作用称为选频或滤光作用. 因此,一对互相平行的高反射率标准平面即可作为滤光器. 这种滤光器以干涉为工作原理,而不是基于像有色玻璃那样的选择吸收作用,故称为干涉滤光器或**干涉滤光片**.

干涉滤光片的性能主要由三个参数来表征,以下分别予以讨论.

1) 中心波长或中心频率

滤光片的**中心波长**即可以形成透射干涉极大的波长,由(3.5.30)式可知它们为

$$\lambda_m = \frac{2nh}{m}, \qquad (m = 1,2,3,\cdots) \tag{3.5.31}$$

这里 n 与 h 分别是滤光片两平行平面之间介质的折射率与厚度. 与 λ_m 相应的频率,即**中心频率**为

$$\nu_m = \frac{c}{\lambda_m} = \frac{mc}{2nh}. \tag{3.5.32}$$

可见各中心频率等间距分布,其频率间隔

$$\delta\nu = \frac{c}{2nh} \tag{3.5.33}$$

与 h 成反比. 图 3.5.12 以 ν 为横坐标画出了入射光(虚线)与透射光(实线)的光谱分布,其中每一透射谱线常称为一个**纵横**. 实用中通过改变 h 可调整频率间隔.

2) 透射谱线的半值宽度

对相位差公式

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda}nh$$

求微分,可得到(取绝对值)

$$\Delta\delta = \frac{4\pi nh}{\lambda^2}\Delta\lambda.$$

将相半宽度的表达式(3.5.14)代入上式,可得中心波长为 λ_m 的谱线用波长表示的半值宽度为

$$\Delta\lambda_m = \frac{\lambda^2}{2\pi nh}\cdot\frac{1-R}{\sqrt{R}} = \frac{\lambda}{m\mathscr{F}}, \tag{3.5.34}$$

或用频率间隔表示为(参见图 3.5.12)

$$\Delta\nu_m = \frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda_m = \frac{c}{m\lambda\mathscr{F}}. \quad (3.5.35)$$

可见增大 h 以增大 m,或者增大 R 以增大 $\mathscr{F}$,都可以使谱线变窄.

综合以上两点分析,可知干涉滤光片具有从入射宽带光中挑选出一系列离散的透射中心波长,并大大压缩其线宽的使用. 若以某种方式取出单一纵模,则输出光的单色性将大大提高.

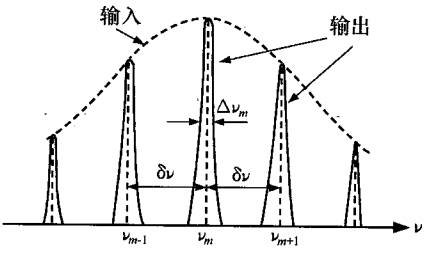


图 3.5.12 法-珀干涉仪的选频作用

3) 峰值透射率

此参量即在透射谱线的中心波长透射光强与入射光强之比值. 由(3.5.9)式或图 3.5.3,在理论上它可达到 1. 但实际上膜层总产生一定的吸收和散射,故该值恒小于 1.

*3.5.3 光学薄膜简介

观察照相机镜头时,常会发现它呈现某种彩色(如紫色),这种色彩的出现是由于镜头镀上了薄膜. 一般玻璃的光强反射率在正入射时约为 4%,较复杂的透镜组常包括几个甚至十几个透镜,所有透镜表面均会发生反射,其总的光能损失是很可观的;这些反射光还会形成杂散光,从而降低成像质量. 因此这里镀膜的目的是为了减小反射率,相应的膜称为**增透膜**. 对某些应用,如法-珀干涉仪的两工作表面,镀膜是为了提高反射率,这种膜称为**增反膜**. 光学薄膜还有其他多种用途,实际上,对它的研究已经发展成为现代光学中的一个重要分支——**薄膜光学**. 系统地讨论薄膜(特别是多层膜)特性往往采用矩阵方法,这已超出了本书的容量范围. 这里仅以多光束干涉概念为基础,简单地介绍一下薄膜的原理及应用.

1. 单层膜

设在一表面为平面的玻璃基片上镀上一层折射率为 n、厚度为 h 的均匀透明薄膜(图 3.5.13),根据 3.5.1 节中的分析,当光束入射到薄膜上表面时,会得到一系列互相平行的反射光束和透射光束,并可用类似方法求得反射光及透射光的合成复振幅. 这里与前文的区别仅在于薄膜上下方的介质不同,其折射率分别以 n_0 和 n_g 表示.

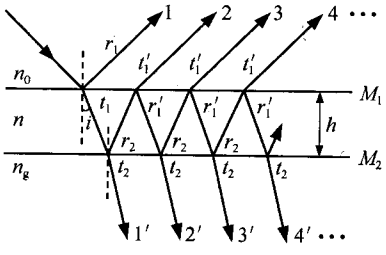


图 3.5.13 单层膜各界面反射及折射时的振幅比

设光束由上方介质射向薄膜时的振幅反射率为 r_1、振幅透射率为 t_1;光束由薄膜内部射向上表面时振幅反射率为 r_1'、振幅透射率为 t_1';光束由薄膜内部射向基片时振幅反射率为 r_2、振幅透射率为 t_2(振幅比因子已示于图 3.5.13),可由计算得到反射光的合成复振幅为

$$\widetilde{E}_r = A\frac{r_1 + r_2(t_1t_1' - r_1r_1')\exp(i\delta)}{1 - r_1'r_2\exp(i\delta)},$$

这里 A 为入射光振幅，δ 仍为前文中之相邻光束相位差，即

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} nh\cos i.$$

将斯托克斯公式应用于薄膜上表面，有

$$r_1' = -r_1, \qquad r_1^2 + t_1 t_1' = 1.$$

将以上关系代入 $\widetilde{E}_r$ 表达式，可得到

$$\widetilde{E}_r = A\frac{r_1 + r_2\exp(i\delta)}{1 + r_1 r_2\exp(i\delta)}, \tag{3.5.36}$$

因此反射光强度为

$$I_r = |\widetilde{E}_r|^2 = I_0\frac{r_1^2 + 2r_1 r_2\cos\delta + r_2^2}{1 + 2r_1 r_2\cos\delta + r_1^2 r_2^2}, \tag{3.5.37}$$

其中 $I_0 = A^2$ 为入射光强.

为简单计，以下分析正入射情况. 由(2.6.17)式及(2.6.18)式知此时有

$$r_1 = \pm\frac{n_0 - n}{n_0 + n}, \qquad r_2 = \pm\frac{n - n_g}{n + n_g}, \tag{3.5.38}$$

式中正负号分别相应于 s 光和 p 光. 因以上两式同时取正号或负号，故不论入射光是 s 光、p 光，以及可以表示为二者组合的自然光，乘积 $r_1 r_2$ 均为正号，代入(3.5.37)式并经过计算可以得到

$$R = \frac{I_r}{I_0} = \frac{n^2(n_0 - n_g)^2\cos^2\frac{\delta}{2} + (n^2 - n_0 n_g)^2\sin^2\frac{\delta}{2}}{n^2(n_0 + n_g)^2\cos^2\frac{\delta}{2} + (n^2 + n_0 n_g)^2\sin^2\frac{\delta}{2}}, \tag{3.5.39}$$

这里 R 表示薄膜的光强反射率，而

$$\delta = \frac{4\pi nh}{\lambda}. \tag{3.5.40}$$

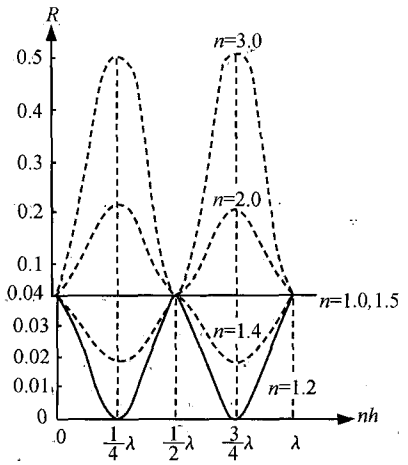


图 3.5.14 单层膜的光强反射率

图 3.5.14 中对常见的 $n_0 = 1$(空气)、$n_g = 1.5$(玻璃)的情况，以不同 n 为参数，以膜的光学厚度 nh 为横坐标示出了由(3.5.39)式所求得的 R 的变化曲线. 作为比较，无镀膜时的光强反射率由下式给出

$$R_0 = \left(\frac{n_0 - n_g}{n_0 + n_g}\right)^2. \tag{3.5.41}$$

分析(3.5.39)式及图 3.5.14 可得出以下结论：

(1) 若膜的光学厚度满足

$$nh = (2m+1)\frac{\lambda}{4}, \qquad (m = 0,1,2\cdots) \tag{3.5.42}$$

这种膜称为 1/4 波长膜，或 $\lambda/4$ 膜，它相应 $\delta = \pi$ 或其奇数倍，这时(3.5.39)式给出

$$R = \left(\frac{n^2 - n_0 n_g}{n^2 + n_0 n_g}\right)^2, \tag{3.5.43}$$

可见若

$$n = \sqrt{n_0 n_g}, \tag{3.5.44}$$

则 $R=0$，这意味着波长满足(3.5.42)式的入射光全部透射而无反射，(3.5.44)式可称为**全透条件**. 对上述 n_0、n_g 值可算出 $n=1.22$，可惜目前尚未找到折射率如此之低而又适于镀膜的材料.

(2) 即使不严格满足(3.5.44)式，只要有

$$n_0 < n < n_g, \tag{3.5.45}$$

则可证明对波长满足(3.5.42)式的入射光，有 $R<R_0$，即透射光比无镀膜时增强，故以上不等式称为**增透条件**. 实用中增透膜常用 $n=1.38$ 的 MgF_2 镀成，这时 R 值约为 0.014.

(3) 如果

$$n_0 < n > n_g \quad 或 \quad n_0 > n < n_g, \tag{3.5.46}$$

则可证明对波长满足(3.5.42)式的入射光，有 $R>R_0$，即反射光比无镀膜时增强，以上两不等式称为**增反条件**.

(4) 不论 n 为何值，只要 $nh=\lambda/2$(或其整数倍)，则有 $R=R_0$，即该膜在此波长下不起作用.

以上由数学推导得出的结论亦很容易从干涉的观点得到解释. 以满足 $nh=\lambda/4$、$n_0<n<n_g$ 的增透膜为例(图 3.5.15)，透射光束 2 与光束 1 相比多经历了 A、B 点的两次反射及 ABC 一段光程. ABC 光程为 $\lambda/2$，所产生的相移为 π；B 点反射时无半波损，A 点反射时则有半波损即附加相移 π. 故光束 2 相对光束 1 总的相移量为 2π. 二者同相. 同理，其他各透射光束亦彼此同相，故此时透射光干涉相长而加强. 增反的情况读者可自行分析.

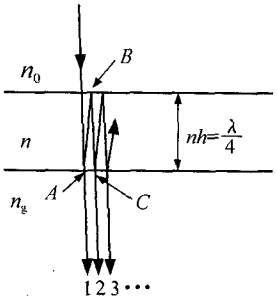


图 3.5.15　增透膜使各透射光干涉相长

2. 多层膜

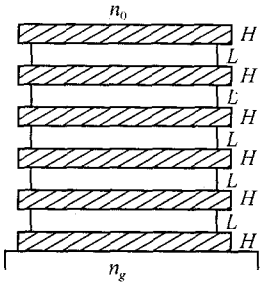


图 3.5.16　多层增反膜系

有时单层膜尚达不到所要求的增透或增反指标，这时可以采用**多层膜系**. 这里仅用多层增反膜为例说明膜层增多时的效果. 这种膜系由一系列光学厚度均为 $\lambda/4$ 的高折射率层(记为 H)和低折射率层(记为 L)相间排列而成，如图 3.5.16 所示. 由于这里每层膜的折射率均大于或小于相邻两层的折射率，即每层膜均满足增反条件(3.5.46)式，所以入射光在每一膜层都获得强烈的反射. 经过多层反射之后，最终的透射光强就所剩无几了. 显然，膜层越多，总的透射率越低，而反射率越高. 有些高反射膜涂层可达十几层，对特定波长 R 可高达 99.5%以上.

习　题

3.1　两束同频率单色光发生干涉. (1)设 $\boldsymbol{E}_{10}\,//\,\boldsymbol{E}_{20}$，光强比 I_1/I_2 分别为 1、5、1/5，计算干涉条纹的衬比度；(2)设 $\boldsymbol{E}_{10}$ 和 $\boldsymbol{E}_{20}$ 夹角为 30°，重复上述计算.

3.2　在杨氏双孔实验中，双孔中心间距 $d=0.7$ mm，双孔屏到屏幕的距离 $Z=5$ m，分别求照明波长为 400 nm、550 nm 和 700 nm 时的干涉条纹间距.

3.3　用杨氏双缝实验测量光波波长. 设 $d=0.45$ mm，$Z=1.15$ m，用读数显微镜测得 10 个

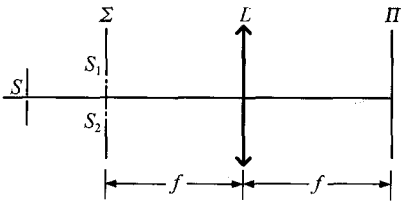
条纹间距的总宽度 $l=15$ mm. 求所用单色光的波长.

3.4　杨氏实验中,已知 $d=3.3$ mm,$Z=3$ m,单色光的波长 $\lambda=0.5$ μm,求条纹间距. 现在上方狭缝后置一厚度 $h=0.01$ mm 的平行平面玻璃片,试确定条纹移动方向. 若测得条纹移动 4.73 mm,求玻璃的折射率.

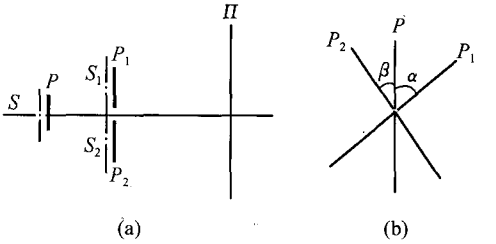
3.5　双缝被包含两种波长的平行光所照明,其中一种谱线的波长为 436 nm,观察到屏幕上该色光从中心向外的第 4 个极小恰与另一谱线的第 3 级极大位置重合,求另一谱线的波长.

3.6　在杨氏双孔干涉装置(见题图)中,$\overline{SS_1}=\overline{SS_2}$,双孔平面 Σ 和观察屏 Π 分别位于透镜 L 的前后焦面上. 已知透镜焦距 $f=10$ cm,双孔间距 $d=0.2$ mm,$\lambda=500$ nm. (1)试问 Π 上干涉条纹形状、取向如何? 求条纹间距. (2)Σ、L 位置不动,Π 平面右移,干涉图样有何变化? (3)Σ、Π 位置不动,透镜 L 左移 2 cm,屏幕 Π 上干涉图样如何变化? 求条纹间距.

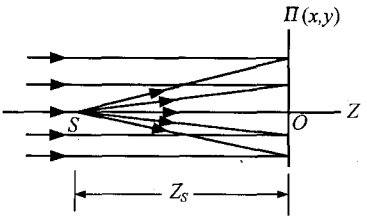
3.7　用单色自然光点光源作杨氏实验(如题图(a)所示),P、P_1 和 P_2 为理想偏振片,P_1,P_2 的透振方向与 P 的透振方向的夹角分别为 α 和 β(如题图(b)所示),求屏幕 Π 上干涉条纹的衬比度.



题 3.6 图



题 3.7 图



题 3.8 图

3.8　一束正入射平面波和与之相干的同波长球面波在屏 Π 上发生干涉(如题图),已知波长 λ 及点源 S 距屏 Π 的距离 Z_S,在傍轴近似下求 Π 平面上干涉强度分布及条纹特点.

3.9　菲涅耳双面镜的夹角为 1.0×10^{-3} rad,缝光源、和观察屏到双面镜交线的距离分别为 0.5 m 和 1.5 m,光波长为 500 nm,试求:(1)观察屏上的条纹间距;(2)最多可以看到多少条亮纹?

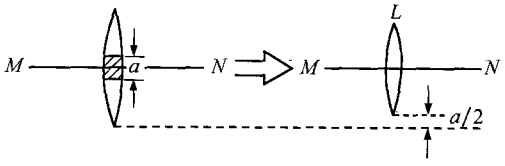
3.10　在菲涅耳双棱镜实验中,双棱镜到缝光源和观察屏的距离分别为 60 cm 和 120 cm,已知棱镜材料折射率为 1.50,光波长为 589.0 nm,在观察屏上用显微镜在每毫米宽度中能看到 5 对亮暗条纹. (1)求双棱镜的顶角;(2)求屏幕上能看到条纹的区域宽度.

3.11　在劳埃德镜实验中,点光源在平面镜上方 2 mm 处,平面反射镜位于光源和观察屏正中间,镜长为 40 cm,屏到光源的距离为 1.5 m,光波长为 500 nm,求:(1)干涉条纹间距;(2)屏上干涉条纹的范围;(3)干涉条纹数目.

3.12　在比耶对切透镜实验中,设透镜半径足够大,上、下两半透镜相距 2 mm,透镜焦距为 50 cm,透镜到线光源和观察屏的距离分别为 3 m 和 4.5 m,照明光波长为 500 nm. 求条纹间距

及屏上条纹数目.

3.13　将焦距 $f=50$ cm 的薄透镜切去宽为 a 的中央部分，再将剩余的两部分粘合起来(见题图). 在 MN 轴上透镜左侧置一单色点光源($\lambda=600$ nm)，右侧置一垂直于 MN 的观察屏，屏上有条纹间距为 0.5 mm 的干涉条纹出现，且当屏沿 MN 方向左右移动时条纹间距不发生变化. 试求 a.



题 3.13 图

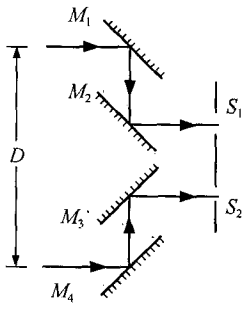
3.14　在上题所述的装置中，设透镜未剖切前直径为 6 cm，问：屏在什么位置时干涉条纹消失？屏在什么位置时干涉条纹数目最大，这时条纹数目等于多少？

3.15　在梅斯林实验(图 3.2.11)中，分析当屏 Π 轴向移动时干涉条纹的密度及衬比度的变化.

3.16　在杨氏双缝实验中，扩展光源发出波长 $\lambda=632.8$ nm 的单色光，双缝屏位于光源后 1 m处，缝距为 2 mm，试求光源的临界宽度和容许宽度.

3.17　杨氏双缝实验中采用 $\lambda=600$ nm，宽度为 0.5 mm 的线光源 S，双缝平面与光源距离为 1 m. 问能看到干涉条纹时双缝中心的最大间距是多少？若双缝平面移到距光源 2 m 处，双缝最大间距又是多少？

3.18　题图为**迈克耳孙测星干涉仪**的原理图，其中 M_1、M_2、M_3、M_4 均为平面反射镜，来自远处的星光经它们反射后分别穿过小孔 S_1、S_2 产生杨氏干涉. 当 D 逐渐增大时干涉条纹的衬比度将逐渐降低. 说明这一现象. 若某星体的 $\bar{\lambda}=570$ nm，当 D 增大到 3.07 m 时条纹消失，求该星体的角直径.



题 3.18 图

3.19　太阳直径对地面的张角约为 0.01 rad，取白光平均波长为 $\bar{\lambda}=0.55$ μm，估算地球表面的相干面积.

3.20　图 3.2.8 菲涅耳双棱镜实验中，已知 λ、L、Z，双棱镜的顶角 θ 及折射率 n，求线光源 S 的临界宽度和容许宽度.

3.21　劳埃德镜实验(图 3.2.9)中，(1)若使用具有一定宽度的单色线光源 S，屏 Π 上何处(上部还是下部)条纹最清晰，为什么？(2)利用题 3.11 中的数据，求屏上条纹刚好消失时光源的临界宽度.

3.22　迈克耳孙曾用镉(Cd)红线($\lambda=643.8$ nm)进行干涉实验，发现其相干长度可达 30 cm，计算该谱线的宽度 $\Delta\lambda$、$\Delta\nu$ 以及相干时间 Δt.

3.23　用平均波长 $\lambda=500$ nm 的准单色点光源作杨氏实验，已知 $\overline{S_1S_2}=d=1$ mm，双缝屏与观察屏的距离为 1 m. 欲使观察屏上干涉条纹区域宽度达 10 cm，问光源的光谱宽度 $\Delta\lambda$ 不能

超过多少?

3.24 图 2.6.9 中,设 $n_0=1.0$,$n=1.5$,入射光强度为 1 个单位,入射角 $i_0\approx 0$,计算:(1)反射光束 1、2、3 和透射光束 1′、2′、3′的相对强度;(2)光束 1、2 干涉时条纹的衬比度;(3)光束 1′、2′干涉时条纹的衬比度.

3.25 图 3.4.2 中,证明在傍轴条件下,由点光源 S 发出的光经平板折射及后表面反射后出射光束仍为同心光束,且中心位置 S_2 满足关系 $\overline{S_1S_2}=2h/n$.

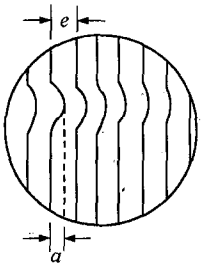
3.26 图 3.4.5 装置中,设 $\lambda=600$ nm,平行平板(即图中薄膜)的厚度 $h=2$ mm,$n=1.5$,该平板下表面涂有 $n_g>n$ 的基底介质.(1)在反射光方向观察到的干涉圆环条纹的中心是亮斑还是暗斑?(2)设透镜 L 的焦距为 20 cm,求从中心向外第 10 个亮环的半径;(3)求第 10 个亮环处的条纹间距.

3.27 上题中,若透镜 L 的视场角为 3°,其他条件不变,问能看到几个亮环?

3.28 若从与膜面法线成 35°反射方向去看空气中的肥皂水膜($n=1.33$),它呈现青绿色($\lambda=500$ nm),求膜的最小厚度?

3.29 白光垂直照射玻璃表面的油膜($n=1.30$),在反射光中观察,发现可见光中只有 450 nm和 630 nm 两种干涉极小波长,确定油膜厚度及干涉级.

3.30 白光正入射空气中的一个厚度为 380 nm 的肥皂水($n=1.337$)膜,求可见光在水膜正面反射最强的光波长及水膜背面透射最强的光波长.如果水膜厚度远小于 38 nm,情况又如何?



题 3.32 图

3.31 在楔形玻璃板上垂直入射波长为 589.3 nm 的钠黄光,测得条纹间距为 5 mm,已知玻璃的折射率为 1.52,求楔角.

3.32 为测一件工件表面的不平度,将一平晶放在工件上,使其间形成空气楔.用波长500 nm的光垂直照射.从正上方看到的干涉条纹如题图所示.试问:(1)不平处是凸起还是凹陷?(2)如果条纹间距 $e=2$ mm,条纹的最大弯曲量 $a=0.8$ mm,凸起的高度或凹陷的深度为多少?

3.33 在反射光中观察图 3.4.17 装置所形成的牛顿环,如果第 2 和第 3 暗环的间距为1 mm,试求第 20 和第 21 个暗环的间距为多少?

3.34 利用平凸透镜和玻璃平板间的空气膜获得牛顿环(图 3.4.17),在反射光中观察,第三个暗环半径为 1.1 mm.光波长为 589.3 nm.求:(1)透镜的曲率半径;(2)第三个亮环的半径.

3.35 将一块平面平行玻璃板放在双凸透镜的一个表面上,在钠光灯($\lambda=589.3$ nm)的反射光中观察牛顿环.测得第 20 级暗环半径 $r_1=2$ mm.若将平板放在透镜的另一表面上,测得第 20 级暗环半径 $r_2=4$ mm.已知板和透镜材料的折射率均为 1.5,求该透镜的焦距.

3.36 将一平凸透镜放在一块平板上,利用这个装置在反射的蓝光($\lambda=450$ nm)中观察牛顿环,发现第三个亮环半径等于 1.06 mm.用红色滤光片代替蓝色滤光片后,测得第五个亮环半径等于 1.77 mm.试求透镜的曲率半径 R 和红光的波长 λ'.

3.37 使两个平凸透镜的凸面彼此接触,在反射光中观察牛顿环.若光波长为 λ,两个透镜的凸面的曲率半径分别为 R_1 和 R_2,求第 m 个暗环的半径 r_m.

3.38 将曲率半径为 R_1 的平凸透镜放在曲率半径 $R_2>R_1$ 的凹球面上,得到牛顿环.若光波长为 λ,问在反射光中观察牛顿环时,第 m 级暗环的半径 r_m 为多大?

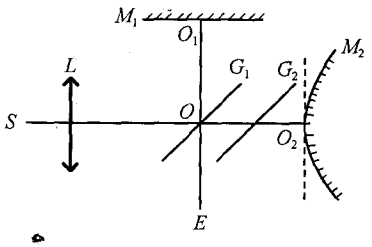
3.39　在菲涅耳双面镜、菲涅耳双棱镜及劳埃德镜实验中，干涉条纹的定域中心各位于何处？当观察屏逐渐远离镜面时干涉条纹的衬比度如何变化？

3.40　用迈克耳孙干涉仪可测量单色光的波长．若动臂反射镜移动 0.3220 mm，干涉条纹移过 1024 条，求所用光的波长．

3.41　将折射率为 1.54 的玻璃板插入迈克耳孙干涉仪的一臂内，观察到 20 个条纹的移动．若所用的光波长 $\lambda=590$ nm，求薄板厚度．

3.42　钠黄光($\bar{\lambda}=589.3$ nm)由波长稍有区别的双谱线组成．在钠灯下调节迈克耳孙干涉仪，发现干涉场的衬比度随动臂反射镜的移动发生周期性变化，解释这种现象．若当条纹由最清晰到最模糊再到最清晰，测得视场中吞(吐)了 980 个圆环，求钠双线的两个波长．

3.43　迈克耳孙干涉仪用中心波长为 643.847 nm、线宽 $\Delta\lambda=0.0013$ nm 的镉红光照明．初始位置两臂光程差为零，然后缓慢移动动臂反射镜，直到视场中干涉条纹消失．试求动臂反射镜移过了多少距离？它相当于多少个波长？



题 3.44 图

3.44　在迈克耳孙干涉仪中使用单色点光源，并将一臂中之平面镜代之以其他光学器件，即得到**泰曼-格林**(Twyman-Green)**干涉仪**(如题图)．将曲率半径为 10 m 的球面镜 M_2 取代原来的平面镜，并设 $\lambda=546.1$ nm，在初始位置$\overline{OO_1}$和$\overline{OO_2}$两光程相等，问：(1)在 E 处观察时干涉条纹呈什么形状？(2)从中心起第三个暗环的半径是多少(不考虑镀膜问题)？(3)M_1 向下平移时条纹如何变化？

3.45　由(3.5.6)式直接验证当 $\delta=2m\pi$ 时$\widetilde{E_r}=0$．

3.46　在平行平板多光束干涉中，已知振幅反射率 $r=0.8944$．求：(1)精细度系数 F；(2)透射亮纹的相半宽度 $\Delta\delta$；(3)条纹的精细度 $\mathscr{F}$；(4)透射条纹的衬比度 V_t．

3.47　法布里-珀罗干涉仪两个反射镜间隔为 1.00 cm，在波长为 $\lambda=500$ nm 的光波照明下，视场中心正好是一亮点，求第 20 个亮环的角半径．

3.48　法布里-珀罗干涉仪中反射镜的振幅反射率 $r=0.90$．若要求它能分辨波长差为 0.0136 nm的两条 H_α 谱线，试求两个反射镜的最小间距是多少？已知 H_α 谱线波长为 656.3 nm．

3.49　激光器的共振腔就是一个法布里-珀罗标准具．一台氦氖激光器($\lambda=632.8$ nm)要求能分辨频率间隔为 500 MHz 的两个振荡模式．(1)试问所需器件的色分辨本领为多大？(2)设构成标准具的两平面反射镜的光强反射率 $R=0.99$，问它们相距多远才能达到上述要求？

3.50　法布里-珀罗标准具的两平面镜的间距为 5 cm，以光波长为 0.50 μm 的扩展光源做实验．试问：(1)干涉图样中心的干涉级次为多少(不考虑镀膜引起的相移)？(2)在中心级别的自由光谱范围是多大？(3)若两平面镜的光强反射率 $R=0.98$，求该标准具在中心级别的色分辨本领及可分辨的最小波长间隔．

*3.51　在玻璃基片($n_g=1.52$)上镀硫化锌薄膜($n=2.38$)，入射光波长 $\lambda=0.5$ μm，求正入射时给出最大反射率及最小反射率的膜厚及相应的反射率．

*3.52　为增大光的透射率，照相物镜上镀一层光学厚度 $nh=5\bar{\lambda}/4$($\bar{\lambda}=550$ nm)的低折射率膜．试求在可见光区反射率最大的波长．该膜在反射光中观察会呈现什么颜色？

观察思考及讨论题

3.1 光的相干条件

(1) 如何认识光的即时叠加—暂态干涉—稳定干涉三个层次？各层次的形成需要什么条件？

(2) 稳定干涉需要相位差恒定，这里“恒定”是对空间域还是对时间域而言？

(3) 稳定干涉三条件及技术上的两点要求在地位和着眼点上有何区别？

3.2 薄膜干涉的观察与思考

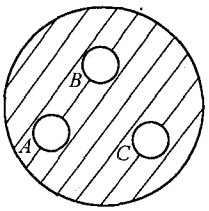
(1) 观察白光下肥皂膜或油膜的干涉条纹. 注意其色彩随膜上位置和观察角度的变化，实际看到的色彩应由哪些因素确定？

(2) 为什么在自然光下看不到厚膜(如窗玻璃)形成的干涉条纹？

(3) 刚吹起的小肥皂泡往往是无色的，当吹大到一定程度后会出现随肥皂泡增大而改变的色彩，当肥皂泡很薄时(破裂前的瞬间)会变得暗而无色，观察并解释这些现象.

(4) 为什么一些相机镜头看起来有色彩？

3.3 两平板玻璃 M、N 之间放三个小球 A、B、C，波长为 λ 的单色光从正上方正入射观察等厚条纹.





讨论题 3.3 图

(1) 若条纹如题图所示. 对 A、B、C 三球直径的相对大小可作何结论？

(2) 若手指轻按 C 球上方(使 C 球稍微压扁)，可看到条纹变密，由此可对 A、B、C 三球的相对大小作何种进一步的结论？

(3) 基于(2)中结论，若此时轻压 A 球或 B 球上方，干涉条纹分别有何变化？

3.4 从干涉观点解释(1)光的反射定律，(2)透镜成像，(3)波带片成像(第三种情况可在讲完 4.2 节后再考虑).

3.5 干涉条纹的比较

(1) 从外观上能区别开牛顿环与平行板双光束等倾圆环干涉条纹吗？通过何种途径能将二者的区别揭示出来？

(2) 从条纹形状、间距、锐度等方面比较平行平板双光束及多光束等倾干涉条纹的异同，造成这种相同点及不同点的原因是什么？

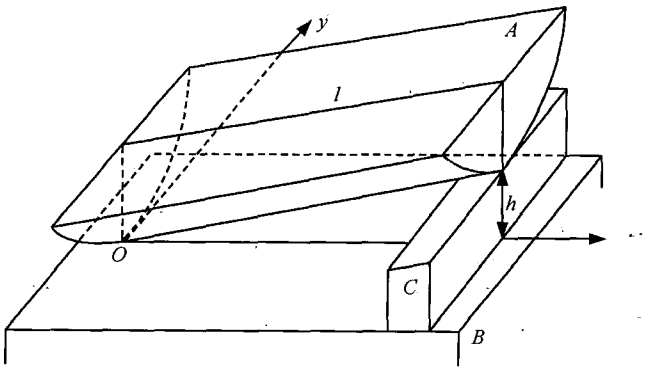
3.6 定域中心与条纹衬比度

分析下列干涉实验中干涉场有无定域中心，若有在何处？干涉场中何处条纹最清晰？条纹清晰度如何随观察位置的变化而变化？(1)杨氏双缝干涉，(2)双面镜干涉，(3)双棱镜干涉，(4)劳埃德镜干涉.

3.7 波长为 λ 的单色光从正上方照射一半径很大的玻璃半圆柱体的切片 A，A 的右端有一高度为 h(很小)的垫片 C，B 为玻璃平板，已知圆柱半径 R，切片长度 l，A 和 B 的接触点为 O.

(1) 从正上方看到的条纹呈何形状？在 xOy 坐标系中求出干涉条纹方程并画出前几级干涉条纹.

(2) 条纹在 x，y 方向的间距分别为多大？



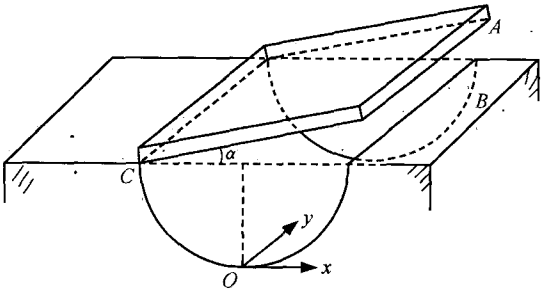
讨论题 3.7 图

3.8 平板玻璃 A 放在有一半圆柱形凹槽的玻璃板 B 上，A、B 在左侧槽棱 C 处接触. 已知 λ、α、凹槽半径 R. 光从正上方正入射，从上方观察条纹.

(1) 导出第 m 级干涉暗纹位置(用坐标 x 表示)的表达式.

(2) 何处条纹最密？何处最疏？说明理由.

(3) 画出在 xy 平面上条纹的大致分布，注意表示出其疏密的区别.



讨论题 3.8 图

3.9 镜面散射光干涉的观察与分析①

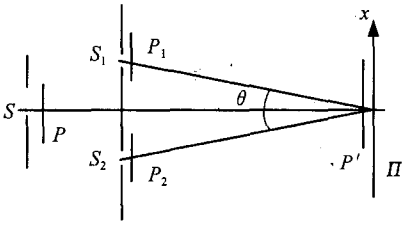
在墙壁上挂一面较大的普通照面镜. 去掉手电筒的前罩及反光面，只留小电珠作近似点光源. 镜面撒少许滑石粉(或轻呵一口气)，退至距镜面约 1 米处，在暗室中开亮小电珠，闭上一只眼睛，让小电珠靠近另一只眼睛(距离 1 cm 在右)，仔细观察平面镜中小电珠像的周围区域，可以看到彩色条纹. 该条纹的形状及疏密随小电珠与眼睛的相对位置及距离而变化(在呵气观察时随着镜面小水珠的蒸发条纹会较快消失，继续观察时要再次呵气). 这种条纹不可能是由玻璃的前后表面反射光干涉生成的，为什么？实际上，它由以下两束光干涉形成：一束是入射光经附着于镜面的微粒子散射后再经后表面反射而出，另一束由入射光经后表面反射后再经微粒子散射而出. 设入射光正入射，两束出射光为平行光，定量分析两束光的光程差，并进而求出镜面上所见干涉条纹的方

① 此问题的详细讨论见蔡履中. 大学物理，1992，9：15.

程. 由该方程分析条纹的形状、取向、疏密、色序及随观察条件的变化，并作进一步观察验证你的分析.

3.10 偏振态对干涉条纹衬比度的影响

杨氏实验中，S 为自然光单色点光源，P，P_1，P_2，P' 为理想偏振片. 下列情况下屏 Π 上有无干涉条纹？若有，条纹衬比度是多大？



讨论题 3.10 图

(1) P 透振方向与纸面垂直，无 P_1、P_2、P'.

(2) P 透振方向在纸面内上下方向，无 P_1、P_2、P' (需考虑 θ 的影响).

(3) 无 P、P_1、P_2、P'，θ 很小.

(4) 无 P、P'，$P_1 \perp P_2$，θ 很小.

(5) 无 P，$P_1 \perp P_2$，P' 与 P_1、P_2 成 45°角，θ 很小.

(6) $P \perp P'$，$P_1 \perp P_2$，P 与 P_1、P_2 成 45°角，θ 很小.

(7) 无 P、P_2、P'，θ 很小.

(8) 无 P、P'，P_1 与 P_2 成 α 角，θ 很小.

3.11 非共面多束平行光的干涉及周期性微结构的生成①

第2章中曾经讲到，两束平行光干涉时可在波场交叠区形成干涉强度极大与极小相间排列的平行平面层，即一维周期性光强分布. 如果引入第三束波矢与前面两束光波矢不在同一平面的平面波参与干涉，试想干涉结果可形成什么样的光强分布？如果进一步引入第四束非共面平面波呢？可以证明，一般地说，三束非共面平面波干涉可以形成三维空间中的二维周期性光强分布，而四束非共面平面波干涉可以形成三维周期性光强分布. 若采用某种处理方法将介质中干涉光场光强大于(或者小于)某一阈值的区域洗去，由这种周期性光强分布就可以得到二维或三维周期性空间结构. 由于光波的波长非常短，这种空间周期结构的周期也非常短(波长量级). 已有研究表明，它们具有一些特殊而非常有用的性质，可以在光电子学的许多领域发挥独特的作用. 这种结构可以称为**光子晶体**，它已成为近年来的一个研究热点，而干涉法已成为制备光子晶体的途径之一.

作为一个简单例子，设想有三束波长及强度均相同的相干平面波，其波矢分别指向直角坐标系的 x、y、z 方向，这三列波的干涉可能形成何种周期性微结构？这时各光束的偏振态会对干涉结果发生重要影响. 设三光束均为线偏振光并设想几种简单的偏振态组合，分析干涉场的强度分布. 干涉过程中各光束的初相位对最终结果有实质影响吗？

① 关于此问题的详细讨论见蔡履中. 大学物理，2006，2：1；3：1.

第4章　光的衍射

衍射是波动光学的重要内容，也是现代光学的一些重要分支，如傅里叶光学的基础. 本章将重点从物理思想和物理图像上阐明衍射的基本概念和基本分析方法. 我们将首先介绍衍射的基本原理，说明其与干涉现象的联系与区别；然后分别讨论菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射的分析方法、主要现象及基本应用；最后，作为衍射问题的拓展，介绍信息光学和全息学的一些基本概念，从思想上沟通基础光学与近代光学的联系.

4.1　衍射的基本原理及分类

4.1.1　衍射现象概述

在第3章关于光的干涉的分析中，已经遇到过衍射现象. 例如，在杨氏实验中，从点(线)源 S 发出的光经过小孔(狭缝)S_1 和 S_2 之后，并不是仅仅沿 S 和 S_1、S_2 的连线方向直线传播，而是在每一孔(缝)后发散开来成为次级球(柱)面波. 正是这种效应使得两次波可以在空间发生交叠，从而使干涉成为可能. 像这样*波在传播过程中遇到障碍物时偏离几何光学路径的现象称为波的*衍射.

回顾中学中曾经讲到的单缝衍射和圆孔衍射，可以看到衍射现象在表观上有以下共同特征：①波动可以绕到几何阴影区；②衍射区光强的空间分布一般有多次起伏变化，即出现明暗交替的条纹或圆环，它们称为**衍射图样**；③对光束的空间限制越甚，则该方向的衍射效应越强. 例如，单缝衍射中，缝越窄，在垂直于缝的方向衍射光散得越开；圆孔衍射中，孔越小，衍射图样的中心亮斑越大. 对这些现象的数学分析、物理诠释和某些基本应用的介绍构成了本章的主要内容.

在具体展开衍射问题的讨论之前，重申及指出以下几点是有益的：

(1) 衍射与干涉一般是同时存在的. 仍以杨氏双缝实验为例，所谓干涉是指从 S_1、S_2 两个次波源发出的波的相互作用；而对每一个缝来说，所发生的现象是单缝衍射. 若缝可以看做是无限窄，每缝的衍射波可以简单地认为是理想柱面波，此过程常称为双缝干涉；若缝的宽度不能忽略，衍射波已非理想柱面波，而具有一定的空间强弱分布，这时需同时考虑单缝的衍射效应及双缝之间的干涉效应，该过程通常被称为双缝衍射. 由此看来，干涉和衍射是不可分割的，一种现象到底是称为干

涉还是衍射，一方面看该过程中是何因素起主导作用，另一方面也与习惯有关. 后文中还将从次波相干叠加的观点进一步阐明干涉和衍射的共同本质及其形式上的区别.

(2) 衍射是一切波动的固有特性. 无论是机械波(如水波、声波)、电磁波、物质波(如电子束的德布罗意波)，都会发生衍射效应. 但是，为什么有的波，如声波的衍射现象相当明显；而对另外一些波，如可见光波，其绕过障碍物的能力就不太容易觉察呢？这是由于衍射现象的明显程度和所考察波动的波长 λ 与引起衍射的障碍物(或孔径)的线度 a 之比密切有关；比值 λ/a 越大，衍射现象越显著. 大致说来，若此比值小于 10^{-3}，则衍射现象不明显；若此比值在 $10^{-2}\sim10^{-1}$ 数量级，则衍射现象显著；若此比值再增大，即粒子或孔径的线度近于或小于波长量级，则衍射光强对空间方位的依赖关系逐渐减弱，这时衍射现象逐渐过渡为散射现象.

(3) 引起衍射的障碍物可以是振幅型的，也可以是相位型的. 前文中之孔和缝均属于前者，光学厚度 nh 不均匀的透明玻璃板则可作为后者的例子. 一般说来，只要以某种方式使波前的振幅或相位分布发生变化，即引入空间不均匀性，而且这种不均匀性的特征线度 a 与 λ 的相对大小在前述适当范围内，就会发生衍射现象. 这里，仍是特征比值 λ/a 决定了衍射与介质不均匀性所引起的其他现象，如大尺度不均匀性所形成的反射或折射以及极小尺度不均匀性所形成的散射的区别.

(4) 既然衍射现象的显著程度与比值 λ/a 有关，可以想见，若此比值趋于零，则衍射现象消失，波动将按照几何光学的规律传播. 因此，几何光学可以看做是波动光学当 $\lambda/a\to0$ 时的极限情况. 后文还会通过各种实例具体阐明这一命题.

4.1.2 惠更斯-菲涅耳原理及平面屏衍射理论

1. 惠更斯-菲涅耳原理

1) 原理的表述及意义

惠更斯-菲涅耳原理是波动光学的基本原理，是处理衍射问题的理论基础.

早在17世纪末叶，惠更斯就提出了后来以他的名字命名的一个原理：波面上每一点都可以看做是一个次级扰动中心，所有这些次波中心所发出的球面次波的包络面就是某一后继时刻的波面.

惠更斯原理可以成功地解释几何光学的一些基本规律，但它无法说明干涉和衍射现象，并且无法解释为什么实际上并不存在由波面指向波源的倒退波. 之所以出现这些困难，原因在于该原理仅注意到波动是扰动的传播这一简单事实，而忽略了波动的基本性质——时空周期性. 实际上，时空周期性这一概念已隐含了空间各次波源在相位方面的确定联系，故各次波是可以相干的. 由于惠更斯原理在这方面

的实质性缺陷，它对处理以波的叠加和干涉为基础的波动光学问题无能为力，所以它本质上只是一种确定波面的几何作图法或几何光学原理.

1818 年左右，菲涅耳在参加巴黎科学院举办的以解释衍射现象为内容的有奖竞赛的获奖论文及其他一系列工作中，吸收了惠更斯原理中的次波概念，并受干涉现象的启示，补充引入了“次波相干叠加”这一重要思想，从而将惠更斯原理发展成为一个全新的、更加严格和完善、可以定量处理各类衍射问题的原理，后人称之为惠更斯-菲涅耳原理.

惠更斯-菲涅耳原理可以表述如下：波前上每一点都可看做是次波中心，光场中某一点的扰动是包围光源的任一闭曲面波前上所有点发出的次波在该点的相干叠加.

图 4.1.1 为该原理的示意图，其中 S 为光源，P 为所考察场点，Σ 为包围 S、但不包围 P 的一个闭曲面，Q 为 Σ 上任一点. 设 Q 点处一无限小面元 $\mathrm{d}\sigma$ 作为次波源所发出的次波在 P 点产生的复振幅是 $\mathrm{d}\tilde{E}(P)$，则依该原理，P 点光场复振幅应为

$$\tilde{E}(P)=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}\tilde{E}(P), \qquad (4.1.1)$$

式中积分遍及闭曲面 Σ.

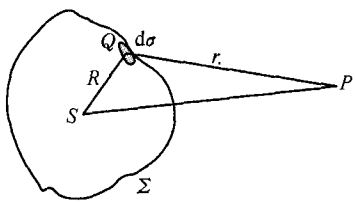


图 4.1.1 惠更斯-菲涅耳原理的示意图

关于该原理可作如下几点说明：

(1) 尽管在分析问题中常设 S 为单色点光源，但由于任意照明光源可以分解为(可以是无限多个)点源的集合，非单色波也可以分解为基元单色波的集合，故此原理亦可采取适当形式推广到非点源和非单色波情况.

(2) 原理中“相干叠加”意指 P 点复振幅是各次波复振幅的叠加积分，它是次波假设和叠加原理的必然结果.

(3) 一般地，Σ 不必是波面，但由于波面上各点相位相同，给分析带来方便，故通常将 Σ 取为波面.

(4) 当波前的某些部分受到障碍物的阻挡时，参与相干叠加的只是那些未被阻挡的波前区域所发出的次波，这时(4.1.1)式中的积分区域 Σ 仅为波前上未受阻挡的部分. 如果未受阻挡的波前区域由多个互不连通的子区域构成，而且每一子区域所发出的光波可以当作一个整体进行处理时，相应的叠加过程一般称为干涉(如考察杨氏试验中双缝的相互作用时)；如果考察的波前区域是连通的，必须处理无限多连续分布的次波源所发出次波的叠加，该过程一般称为衍射(例如考察杨氏实验中有限大小的单孔或单缝的作用时). 因此，从惠更斯-菲涅耳原理看来，干涉与衍射本质上是相同的，均为次波相干叠加；其区别仅在于所处理的次波源(或相应光束)是空间分离的还是空间连续的，其数学形式则分别相应于求和和积分.

2) 菲涅耳衍射积分公式

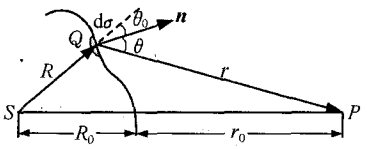


图 4.1.2 惠更斯-菲涅耳原理对点源的应用

以下以单色点光源的波场在自由空间中的传播为例具体说明惠更斯-菲涅耳原理的应用. 将图 4.1.1 的局部重绘于图 4.1.2,图中 $\boldsymbol{n}$ 为 Σ 面上 Q 点处无限小面元 $\mathrm{d}\sigma$ 的法线,θ_0 和 θ 分别为 $\overrightarrow{SQ}$ 和 $\overrightarrow{QP}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角,$R=\overline{SQ}$,$r=\overline{QP}$. 设源点 S 的初相为 0,它在 Q 点产生的初级波复振幅 $\tilde{E}(Q)$ 可以表示为 $A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}/R$,式中 A 为一由源强度所决定的常数. 面元 $\mathrm{d}\sigma$ 作为次波中心辐射出球面次波,其频率与传播速度均与初波相同,它在 P 点所引起的扰动的复振幅 $\mathrm{d}\tilde{E}(P)$ 显然应与初波振幅 $\tilde{E}(Q)$、面元大小 $\mathrm{d}\sigma$、以及从 Q 点到 P 点的球面波传播因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}/r$ 成正比. 另外,考虑到面元 $\mathrm{d}\sigma$ 向不同方向可以具有不同的辐射强度,引入一函数 $F(\theta_0,\theta)$ 表示这种方位依赖关系,$F(\theta_0,\theta)$ 称为**倾斜因子**,它应该在 $\theta_0=\theta=0$ 时有最大值 1,并随着两角度的增大而减小. 将以上比例关系写成等式,即有

$$\mathrm{d}\tilde{E}(P)=C\tilde{E}(Q)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}F(\theta_0,\theta)\mathrm{d}\sigma, \tag{4.1.2}$$

式中 C 为一比例常数. 将上式代入(4.1.1)式,可得

$$\tilde{E}(P)=C\iint_{\Sigma}\tilde{E}(Q)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}F(\theta_0;\theta)\mathrm{d}\sigma, \tag{4.1.3}$$

上式称为**菲涅耳衍射积分公式**.

菲涅耳衍射积分公式的最初得来在某种程度上说是基于物理上的直觉和猜想,而缺乏严格的数学论证. 这方面可举出两个问题:①菲涅耳采用球面波面 Σ,从而 $\theta_0=0$,并设 $F(\theta)$ 在 $\theta<\pi/2$ 时等于 $\cos\theta$,在 $\theta\geqslant\pi/2$ 时等于 0. 这一假设是为了排除倒退波而引入的,理论根据不足,人为的痕迹相当明显. ②常数 C 的形式未能确定. 若设 C 为正实数,则从该式所求得的自由传播时 P 点光场的复振幅 $\tilde{E}(P)$ 要比不通过该公式而直接从传播过程得到的复振幅表达式 $A\exp[\mathrm{i}k(R_0+r_0)]/(R_0+r_0)$ 相位落后 $\pi/2$(参见习题 4.3),这是惠更斯-菲涅耳原理本身所无法解释的.

尽管如此,由于 C 对相对光强分布并无影响,菲涅耳的衍射理论在解释许多平面孔径(如矩孔、圆孔等)的衍射现象中仍然取得了巨大的成功,这时 Σ 自然取在该平面上,而积分区域则仅为平面屏的透光部分. 这种与实验结果的良好一致性充分说明公式(4.1.3)有着合理的内核. 为了利用这种合理的内核并把它建立在更为坚实的理论基础上,从而消除某些人为的假定,历史上曾发展起一系列衍射理论,基尔霍夫的平面屏衍射理论即是其中之一.

2. 平面屏衍射的基尔霍夫理论

现在考虑无限大不透光平面屏上一个孔径所引起的衍射问题,如图 4.1.3 所

示，其中 S 为单色点光源，P 为所考察场点. 数学上可以证明：光场中任一点的扰动可以通过曲面积分用包围该点的任一闭曲面上的场值及场的梯度值表示出来. 为了把此结论用于平面屏衍射问题，基尔霍夫(G. R. Kirchhoff)做了两个假定：

(1) 开孔(Σ)处光场及其梯度值与无屏时相同；

(2) 紧贴屏后(Σ_1)处无扰动，即光场及其梯度值均为零.

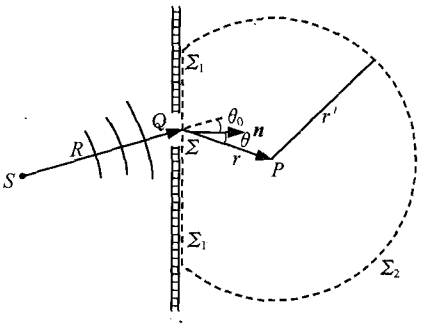


图 4.1.3 平面屏衍射与基尔霍夫假设

这两个假定称为**基尔霍夫边界条件**. 其中假定 1 忽略了屏的存在对孔径处入射波场的影响；假定 2 忽略了入射波场在不透光屏背光面的扩展. 严格说来，它们与实际情况是不尽相符的，因为屏的存在总要在一定程度上对入射场产生影响，而入射场也总会在屏后几何阴影区一定范围内产生一些扰动. 但由于这些影响和扰动仅局限于孔径边缘附近距离为 λ 量级的极小范围，所以只要开孔 Σ 的线度及所考察场点与开孔的距离均远大于 λ(这在实际问题中通常是满足的)，则这些边缘处的精细效应完全可以忽略不计.

在上述假定下，取包围 P 点的闭曲面 Σ' 计算积分，Σ' 由三部分组成：开孔 Σ，屏的后表面 Σ_1，以及以 P 为中心、r' 为半径的部分球面 Σ_2. 这样闭曲面积分可以拆为三项，

$$\oint_{\Sigma'}\cdots d\sigma=\iint_{\Sigma}\cdots d\sigma+\iint_{\Sigma_1}\cdots d\sigma+\iint_{\Sigma_2}\cdots d\sigma.$$

由边界条件 2，右端第二项为零. 令 $r'\to\infty$，可以证明第三项趋于零. 故右端只剩下第一项. 经过某些运算，可以得到

$$\tilde{E}(P)=\frac{1}{i\lambda}\iint_{\Sigma}\tilde{E}(Q)\frac{e^{ikr}}{r}\cdot\frac{1}{2}(\cos\theta_0+\cos\theta)d\sigma, \tag{4.1.4}$$

上式称为**基尔霍夫衍射积分公式**.

与菲涅耳衍射积分公式(4.1.3)相比，基尔霍夫公式有以下几点区别：

(1) 积分区域已按基尔霍夫边界条件转化为透光孔径 Σ.

(2) 具体求出了倾斜因子的形式

$$F(\theta_0,\theta)=\frac{1}{2}(\cos\theta_0+\cos\theta). \tag{4.1.5}$$

此形式与最初菲涅耳的假定不同. 例如，当 $\theta_0=0$ 时，$F(\theta)=(1+\cos\theta)/2$，当 θ 增大到 π、而非 $\pi/2$ 时，$F(\theta)$ 才降为零. 但二者都随 θ 的增大而减小，总体趋势是相同的.

(3) 具体求出了 C 的表达式

$$C=\frac{1}{\mathrm{i}\lambda}=\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}. \tag{4.1.6}$$

考虑因子 C 之后，Q 点处次波复振幅可写为

$$\widetilde{E}'(Q)=\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}\widetilde{E}(Q)=\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}\cdot\frac{A}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}. \tag{4.1.7}$$

可见它与初波(真实的入射波)在该点的复振幅 $\widetilde{E}(Q)$ 相比，相位超前 $\pi/2$，而且多出一个与 λ 成反比的因子. 前者保证了按基尔霍夫衍射积分公式所算出的 $\widetilde{E}(P)$ 的相位与真实的相位一致，后者则保证了 $\widetilde{E}(P)$ 与 $\widetilde{E}(Q)$ 量纲一致. 换言之，为了保证最终结果的合理性，次波源必须具有上式所表示的难以作出直观物理解释的性质. 具有这种性质的次波源已非真实的光源，而宁可看做是一种数学模型.

进一步的分析表明，基尔霍夫对边界条件的假设不但是近似的，而且具有内在的不自洽性. 为消除这种不自洽性，也有人提出其他理论. 严格的衍射理论则应当采用矢量波理论. 这些都超出了本书的范围. 最后我们只想指出：在标量波衍射理论适用的条件下，即①衍射孔径的线度远大于波长；②观测点与孔径的距离远大于波长时，无论是菲涅耳公式，还是基尔霍夫公式，对衍射图样的相对光强分布都能给出相当精确的结果.

3. 巴俾涅原理

可以对入射波前的振幅或相位进行空间调制，从而引起衍射的任意平面障碍物称为**衍射屏**. 最简单的振幅型衍射屏即是分为透光区和不透光区的平面屏. 如果一个衍射屏的透光区恰好是另一个衍射屏的不透光区，这两个衍射屏称为是**互补**的. 例如，一个开有圆孔的无限大不透光屏和一个与圆孔同样大小的不透光圆屏就构成一对**互补屏**. 一对互补屏的透光区域 Σ_a 和 Σ_b 之和是整个透光平面 Σ_F，它相应于无屏时自由传播的情形. 因此，当利用基尔霍夫衍射公式(4.1.4)对给定源点和场点求一对互补屏引起的复振幅分布时(图 4.1.4)，根据

$$\iint_{\Sigma_a}\cdots\mathrm{d}\sigma+\iint_{\Sigma_b}\cdots\mathrm{d}\sigma=\iint_{\Sigma_F}\cdots\mathrm{d}\sigma,$$

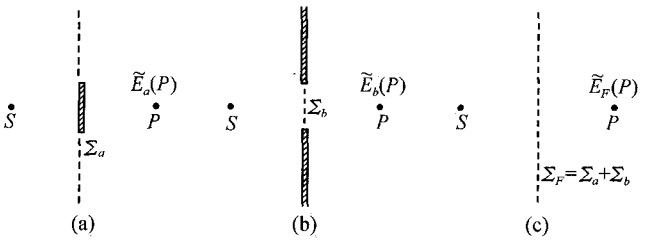


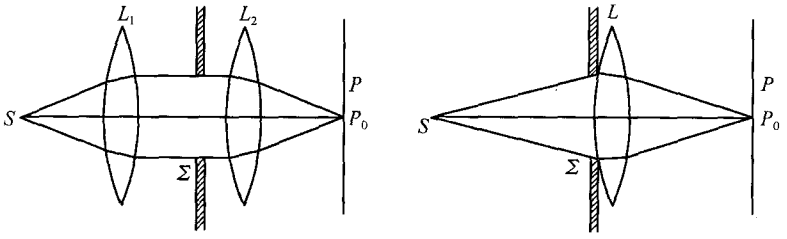
图 4.1.4 互补屏(a)与(b)之合成相当于自由传播(c)

显然可以得到

$$\tilde{E}_a(P)+\tilde{E}_b(P)=\tilde{E}_F(P). \tag{4.1.8}$$

上式表明，一对互补屏各自在衍射场中某点所产生的复振幅之和等于自由传播时该点的复振幅，此结论称为**巴俾涅**(A. Babinet)**原理**.

对一种特殊情况，即 $\tilde{E}_F(P)=0$ 时，巴俾涅原理应用起来特别方便. 这种情况可举出平行光经过衍射屏后在透镜后焦面的衍射(图 4.1.5(a))以及点光源发出的光经过衍射屏后在像平面的衍射(图 4.1.5(b)). 对于这两种情形，在自由传播时观察平面上仅形成一个亮点 P_0，即光束的焦点或像点，其他区域皆无光场，即 $\tilde{E}_F(P)=0$. 因此由巴俾涅原理，有 $\tilde{E}_a(P)=-\tilde{E}_b(P)$，$I_a(P)=I_b(P)$，即一对互补屏所形成的衍射图样的光强分布在除光源的几何像点之外的所有区域中均相同！



(a) 焦平面的衍射　　(b) 像平面的衍射

图 4.1.5　在焦平面和像平面观察衍射图样

4.1.3　衍射问题的近似处理及分类

1. 平面屏衍射问题的近似处理

图 4.1.6 为平面屏衍射的示意图，其中 Σ 为孔径平面，Π 为观察平面. 为简化问题，设照明光为正入射的单色光. 利用基尔霍夫衍射积分公式，可以得到

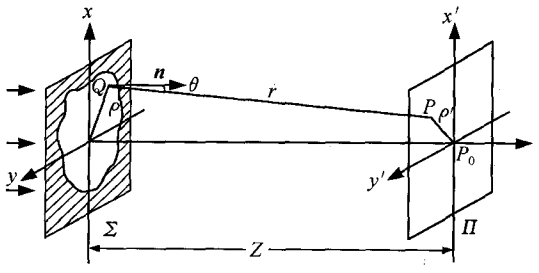


图 4.1.6　平面屏衍射所用坐标系统

$$\tilde{E}(x',y')=\frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\iint_{\Sigma}\tilde{E}(x,y)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\cdot\frac{1}{2}(1+\cos\theta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{4.1.9}$$

式中各量意义如图示. 严格计算此积分是相当困难的. 为简化运算,通常取下列两种近似:

1) 傍轴近似

此种近似在讨论杨氏实验时已经引入过,由于这里孔径平面上的点 Q 和 Π 平面上观测点 P 均应满足傍轴近似,故该近似条件可以表示为

$$\rho_{\mathrm{M}}^2=(x^2+y^2)_{\mathrm{M}}\ll Z^2,\quad \rho_{\mathrm{M}}'^2=(x'^2+y'^2)_{\mathrm{M}}\ll Z^2, \tag{4.1.10}$$

其中 ρ_{M} 和 ρ_{M}' 分别表示 Q 点与 P 点对纵轴(z)的最大横向偏离. 在此条件下,有

$$\begin{cases}\cos\theta\approx 1, \quad \dfrac{1}{r}\approx\dfrac{1}{Z},\\ r=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+Z^2}\\ \quad\approx Z\left[1+\dfrac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{2Z^2}\right].\end{cases} \tag{4.1.11}$$

将以上结果代入(4.1.9)式,可得

$$\begin{aligned}\tilde{E}(x',y')&=\frac{1}{\mathrm{i}\lambda Z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kZ}\iint_{\Sigma}\tilde{E}(x,y)\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{2Z}[(x'-x)^2+(y'-y)^2]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\frac{1}{\mathrm{i}\lambda Z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kZ}\exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2Z}(x'^2+y'^2)\right]\iint_{\Sigma}\tilde{E}(x,y)\\ &\quad\times\exp\left[\mathrm{i}\frac{\pi}{\lambda Z}(x^2+y^2)\right]\exp\left[-\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda Z}(xx'+yy')\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

而屏 Π 上的光强分布为

$$\begin{aligned}I(x',y')&=|\tilde{E}(x',y')|^2\\ &=\frac{1}{(\lambda Z)^2}\left|\iint_{\Sigma}\tilde{E}(x,y)\exp\left[\mathrm{i}\frac{\pi}{\lambda Z}(x^2+y^2)\right]\right.\\ &\quad\left.\times\exp\left[-\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda Z}(xx'+yy')\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|^2.\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

傍轴近似通常又称为**菲涅耳近似**,故由此得到的以上两式又称为**菲涅耳衍射公式**.

2) 远场近似

如果 Q 点进一步满足条件

$$\frac{\pi}{\lambda Z}\rho_{\mathrm{M}}^2\ll\pi,\quad \text{即}\quad Z\gg\frac{\rho_{\mathrm{M}}^2}{\lambda}, \tag{4.1.14}$$

则在孔径 Σ 的整个透光区有 $\exp\left[\mathrm{i}\frac{\pi}{\lambda Z}(x^2+y^2)\right]\approx 1$,这时(4.1.12)和(4.1.13)式可以简化为

$$\tilde{E}(x',y')=\frac{1}{\mathrm{i}\lambda Z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kZ}\exp\left[\mathrm{i}\frac{k}{2Z}(x'^2+y'^2)\right]\times\iint_{\Sigma}\tilde{E}(x,y)\exp\left[-\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda Z}(xx'+yy')\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{4.1.15}$$

$$I(x',y')=\frac{1}{(\lambda Z)^2}\left|\iint_{\Sigma}\tilde{E}(x,y)\exp\left[-\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda Z}(xx'+yy')\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|^2. \tag{4.1.16}$$

在光波波段，近似(4.1.14)通常要比傍轴近似(4.1.10)强得多. 例如，设 $\rho_M=1$ cm，$\lambda=0.6$ μm，则 Z 取 10 cm 量级即可充分满足傍轴近似；但要满足近似(4.1.14)，则必须有 $Z\gg 167$ m[①]! 因此，近似条件(4.1.14)式通常称为**远场近似**，又称**夫琅禾费**(J. von Fraunhofer)**近似**，相应的公式(4.1.15)和(4.1.16)也称为**夫琅禾费衍射公式**.

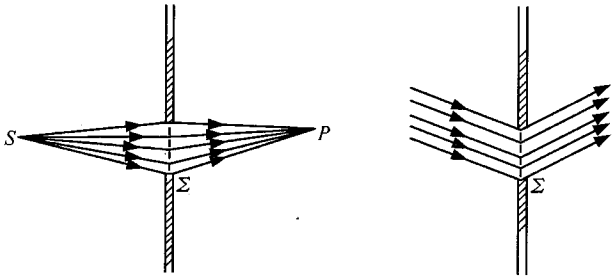
考察(4.1.12)式和(4.1.15)式，可以看出两种近似的实质都是以有理化了的近似表达式来代替球面次波相位项中 r 的无理表达式，只是近似的程度有所不同. 若舍弃积分号前与光强分布无关的因子，菲涅耳近似中是以二次曲面相因子来代替球面波相因子，而夫琅禾费近似则进一步用平面波相因子来代替之. 另外，易见(4.1.15)和(4.1.16)式中积分号内的运算实际上就是孔径平面光场复振幅分布的傅里叶变换. 只是 $\tilde{E}(x',y')$ 表达式中积分号外仍有一复指数因子，一般关心的是光强分布，这时该因子并无影响. 总之，以上两式不仅表明可以利用通用的傅里叶变换程序来计算夫琅禾费衍射问题，更重要的是证明了傅里叶变换可以用光学方法来模拟实现，正是这一点为现代光学的许多新发展和新应用提供了基础.

2. 衍射的分类

前文在平行光正入射的条件下讨论了场点与孔径平面的距离对衍射的影响，从而得到了两种衍射公式，实际上已把衍射分成了两类. 对于球面波入射的情况亦可做类似讨论. 将两者综合在一起，可以根据源点和场点距孔径平面的远近将衍射作这样的区分：若源点和场点均满足远场近似，则所观察到的衍射称为**夫琅禾费衍射**；若二者均满足傍轴近似，但并不同时满足远场近似，则相应的衍射称为**菲涅耳衍射**. 因远场的极端是无限远，相应的光束是平行光，所以也可用源点和场点是否位于无限远处，或入射光及衍射光是否为平行光束来区别夫琅禾费衍射和菲涅耳衍射. 以上各种表述在表 4.1.1 中以序号 1～3 列出，并以图 4.1.7 示出了两种衍射的区别. 注意表述 1～3 皆是对在光源和接收平面之间除孔径外没有其他光学装置的情况而言，而在这三种表述中又以第一种最为精确，因为远场近似与无限远在

① 傍轴条件及远场条件皆仅具有数量级的意义，故有些文献中远场条件亦有其他写法. 另外，何时算"远大于"亦无严格规定. 一般超过 1、2 个数量级即可. 实用中常取远场条件为 $\pi\rho_M^2/\lambda Z\leqslant\pi/10$. 即 $Z\geqslant 10\,\rho_M^2/\lambda$.

概念上毕竟是不同的.



(a) 菲涅耳衍射　　(b) 夫琅禾费衍射

图　4.1.7

表 4.1.1　关于衍射分类的几种表述

	菲涅耳衍射	夫琅禾费衍射
1	源点和场点均满足傍轴近似，但并不同时满足远场近似	源点和场点均满足远场近似
2	源点和场点(或二者之一)在有限远处	源点和场点均在无限远处
3	非平行光的衍射	平行光的衍射
4	光源面和接收平面非物像共轭面	光源面和接收平面为物像共轭面

由前文的计算实例可知，若不用任何光学仪器直接在远场区观察夫琅禾费衍射是相当困难的. 为在实践中解决这一问题，可以如图 4.1.5(a)所示，将源点和接收平面分别置于透镜 L_1 和 L_2 的前后焦面，这样透过孔径 Σ 的光即为平行光，或说源点和场点相对于孔径而言已分别通过透镜的作用等效地移到了前后方无限远处，故接收平面上观察到的衍射图样是孔径的夫琅禾费衍射. 再设想在该图中保持光源在 L_1 的前焦面，接收屏在 L_2 的后焦面，但使 L_1、L_2 逐渐靠近，最后合二为一(L)，则接收屏上衍射图样不应发生变化. 这时对透镜 L 来说，光源平面与接收面是一对物像共轭面，如图 4.1.5(b)所示. 综合这两种情况，可知可以用光源面和接收面是否物像共轭面来区分夫琅禾费衍射和菲涅耳衍射，从而得到表 4.1.1 中的表述 4，它对更复杂的光学系统仍然适用. 因此，在任何成像装置中，光源像平面处的光场总是系统孔径的夫琅禾费衍射或傅里叶变换.

更仔细地，可以从孔径平面开始由近及远把光场依次划分为几何阴影区、菲涅耳衍射区和夫琅禾费衍射区，但这三个区域是逐渐过渡的，并无严格清晰的分界. 另外，由于夫琅禾费近似只不过是在满足菲涅耳近似条件下一种更强的要求，所以菲涅耳衍射的处理方法对于处理夫琅禾费衍射仍然适用，从这种意义上，也未尝不

可把夫琅禾费衍射区看做是菲涅耳衍射区的一部分. 但是,由于夫琅禾费衍射有其特殊的简单性和规律性,传统上仍把它从菲涅耳衍射中区分开来.

4.2 菲涅耳衍射

4.2.1 菲涅耳衍射的分析方法

直接利用公式(4.1.12)和(4.1.13)计算菲涅耳衍射是十分困难的,一般需要繁冗的数值积分. 但是,若衍射屏只是简单地分为透光部分与不透光部分,而且透光孔径又具有一定的几何对称性,则往往可以采用定性及半定量的方法,依据物理图像的分析而不是复杂的计算而得到近似性相当好的结果. 以下介绍两种方法,它们均以次波相干叠加概念及相幅矢量的合成法则作为基础.

1. 矢量图解法

仍以单色点光源的光场在自由空间中的传播为例,如图 4.2.1 所示,Σ 为以源点 S 为中心的球面波面,半径为 R;场点 P 与 Σ 面的最短距离为 r_0. 为求得 P 点的扰动,根据惠更斯-菲涅耳原理,应该把 Σ 分割为许多元波面,再把每个元波面对 P 点光场的贡献叠加起来.

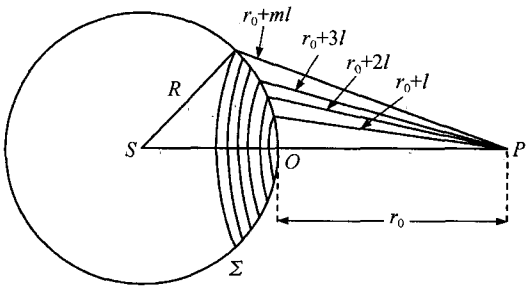


图 4.2.1 点光源波面的波带分割

由对称性的分析,元波面的分割可以采取下列方式:以 P 点为中心,取某一小正数 l,以 $r_0+l, r_0+2l, r_0+3l, \cdots$ 为半径作球面,这些球面与 Σ 相截得到一组交线圆,相邻交线之间形成一圈圈环带,这些环带称为**波带**. 当 $l \ll \lambda$ 时,每一波带即可认为是无限窄之波面,这种波带可称为**元波带**;同一元波带上各点到 P 点的光程可以认为是相同的,而相邻元波带到 P 点的光程均相差 l.

为了把每一波带在 P 点的贡献叠加起来,需要具体分析各波带在 P 点产生的光场的振幅和相位.

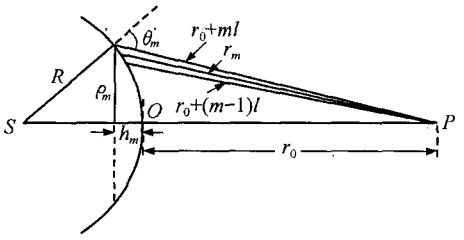


图 4.2.2 第 m 个波带的截面图

首先考虑振幅. 图 4.2.2 绘出了从中心起第 m 个波带的截面图，设其面积为 $d\sigma_m$，它与 P 点的平均距离为 r_m，倾斜因子为 $F(\theta_m)$，则该波带在 P 点产生的振幅应为

$$\Delta A_m \propto \frac{d\sigma_m}{r_m}F(\theta_m). \qquad (4.2.1)$$

设 ρ_m 为该波带外缘半径，h_m 为图示球冠高度，由关系式

$$\rho_m^2 = h_m(2R-h_m) = (r_0+ml)^2-(r_0+h_m)^2, \qquad (4.2.2)$$

可得到

$$h_m = \frac{mr_0l}{R+r_0}\left(1+\frac{ml}{2r_0}\right).$$

代入前 m 个波带所构成的球冠的面积公式 $S_m=2\pi Rh_m$，可以求得

$$d\sigma_m = S_m - S_{m-1} = \frac{2\pi Rl}{R+r_0}\left[r_0+\left(m-\frac{1}{2}\right)l\right].$$

取第 m 个波带外缘和内缘到 P 点距离的平均值作 r_m，即

$$r_m = \frac{1}{2}\{(r_0+ml)+[r_0+(m-1)l]\} = r_0+\left(m-\frac{1}{2}\right)l.$$

由以上两式，可知比值

$$\frac{d\sigma_m}{r_m} = \frac{2\pi Rl}{R+r_0}$$

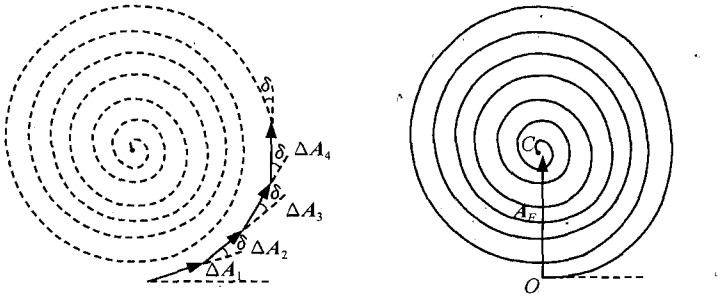
与 m 无关. 这是由于从中心向外，各环带面积和与 P 点的距离均渐次增大，而且二者增长的速率是相同的. 这样，各波带在 P 点振幅 ΔA_m 的变化仅来源于倾斜因子 $F(\theta)$ 的不同. 当 θ 从零增大时，$F(\theta)$ 从 1 单调下降到零，故 ΔA_m 随 m 的增加而单调减小到零. 但是，由于元波带分割极密，相邻元波带之间 $F(\theta)$ 的差别极小，故 ΔA_m 递减的速率相当缓慢，往往要经过成百上千个波带才有显著变化.

其次考虑相位. 易见 m 每增加一个序号相应波带在 P 点产生的振动相位都比前一波带落后一个定值

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}l. \qquad (4.2.3)$$

综合以上分析，可以作出自由传播时各波带在 P 点产生振动的相幅矢量的合成图，如图 4.2.3(a)所示. 其中取图 4.2.2 中 O 点次波源在 P 点引起的振动相位为 0，并表示为水平轴正方向. 从 O 点向外每相差一个元波带相位落后 δ，相应相幅矢量的辐角增加 δ；又因各元波带相幅矢量长度由于 $F(\theta)$ 的作用单调缓慢减小，最后降为 0，故 Σ 面上所有元波带贡献的矢量合成图形成一个向中心点逐渐盘曲

的极密的螺旋折线(图(a)中只画出前几个矢量,其他部分以虚线示意). 当 $l\to 0$ 时,图中每一元矢量 $\Delta\boldsymbol{A}_m$ 的长度皆趋于零,此螺旋折线转化为螺线,如图 4.2.3(b)所示. 螺线上每点相应的相位由该点切线(指向螺心一方)的辐角来表示. 螺线每转一圈表示 r 增加 λ,相位变化 2π;如果无 $F(\theta)$之影响,它将与始点相接形成一个圆,正是由于 $F(\theta)$的作用使得它每转一周收缩一点. 但这种收缩是极其缓慢的,图中大大夸张了收缩速度.



(a) l 为小正数　　(b) $l\to 0$

图 4.2.3　自由传播时的矢量合成图

在矢量图中,从螺线的起始点 O 指向中心 C 点的相幅矢量 $\boldsymbol{A}_F$ 综合了波面 Σ 上所有波带的贡献,故它表示自由传播时 P 点光场的复振幅,相应的光强则可由 $I_F=A_F^2$ 来求得.

从图 4.2.3(b)可以看出,自由传播时的合矢量 $\boldsymbol{A}_F$ 指向上方,其相位比 O 点次波在 P 点的相位落后 $\pi/2$. 由于自由传播时 P 点的真实相位应与 O 点次波在该点的相位相同,故由矢量图解法所求得的 P 点振动的复振幅与真实情况相比总有 $\pi/2$ 的相位落后量. 此偏差是惠更斯-菲涅耳原理尚不够精细与严格之一例. 在基尔霍夫理论中,次波相位应比初波超前 $\pi/2$,即若设初波在 P 点相位为零,则 O 点次波在 P 的相位应为 $-\pi/2$,在矢量图中应指向下方,如图 4.2.4 之 $\boldsymbol{A}_0$ 所示. 以初始方向向下来画螺线,最后得到的合矢量 $\boldsymbol{A}_F$ 即为水平向右,与自由传播时相同. 但由于一般只关心光强分布,合矢量的相位并不影响强度,故后文中将不再考虑次波的 $\pi/2$ 相移问题,而仍采用图 4.2.3 的画法.

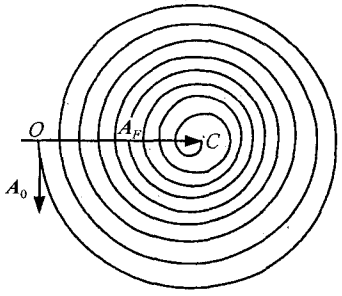


图 4.2.4　考虑次波相移 $\pi/2$ 时的矢量图

2. 半波带法

取 $l=\lambda/2$,即每相邻波带之间光程差为半个波长,相位差为 π,则相应的波带

称为**半波带**. **半波带法**是指在矢量合成时把每一个半波带作为一个整体来加以考虑，它相当于把螺线上每一个极近似于半圆的弧简化为一个单矢量. 如图 4.2.5 左方所示，从螺线起点 O 到最高点 M_1，切线指向由水平向右变为水平向左，意味着相位变化 π，故 $\overset{\frown}{OM_1}$ 相应于第一个半波带，其整体贡献为振幅 $\boldsymbol{A}_1=\overrightarrow{OM_1}$. 同理，第二个半波带的贡献为 $\boldsymbol{A}_2=\overrightarrow{M_1N_1}$，第三个半波带的贡献为 $\boldsymbol{A}_3=\overrightarrow{N_1M_2}$，以下依次类推. 图中右方示出了自由传播时所有半波带的合成过程. 由于螺线逐渐旋向中心，各半波带相应矢量的振幅也逐渐减小到零，因此所得到的自由传播时 P 点振动的相幅矢量 $\boldsymbol{A}_F$ 仍是从螺线始点 O 指向螺线中心，其大小

$$\boldsymbol{A}_F=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}_1, \tag{4.2.4}$$

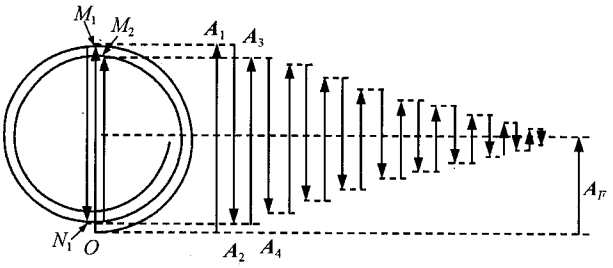


图 4.2.5　矢量图解法简化为半波带法

相应光强关系为

$$I_F=\frac{1}{4}I_1. \tag{4.2.5}$$

这里 A_1 和 I_1 分别表示第一个半波带单独在 P 点所产生的光场振幅和光强.

从以上分析可以看出，半波带法实质上是对用螺线表示的矢量图解法的一种归并和简化. 显然它不如矢量图解法精细，无法处理半波带数目非整数的问题. 但是，对于光程变化比较大的情况，用它来分析光强的极大值和极小值条件还是很方便的.

4.2.2　圆孔、圆屏及某些环扇形孔径的衍射

1. 圆孔衍射

利用上节的方法，很容易分析一个无限大屏幕上的透光圆孔所产生的菲涅耳衍射. 如图 4.2.6 所示，S 为单色点光源，Σ 为圆孔孔径，ρ 为其半径. 为简化问题，设 S 位于过圆孔中心且与 Σ 平面垂直的轴线上，P 为所考察的场点.

以下重点分析 P 为轴上点的情况. 首先应确定圆孔中露出的波面对 P 点而言

相当于几个半波带. 在 $h \ll 2R$ 时，由(4.2.2)式可以得到

$$\rho_m = \left[2ml\,\frac{Rr_0}{R+r_0}\left(1+\frac{ml}{2r_0}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

对半波带，$l=\lambda/2$；若圆孔的半径不太大，使得 $m\lambda/2 \ll r_0$ 成立①，则上式可简化为

$$\rho_m = \sqrt{\frac{Rr_0}{R+r_0}m\lambda}. \qquad (4.2.6)$$

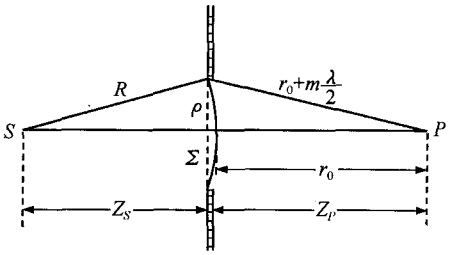


图 4.2.6 圆孔菲涅耳衍射：轴上点

令 $\rho_m=\rho$，上式可改写为

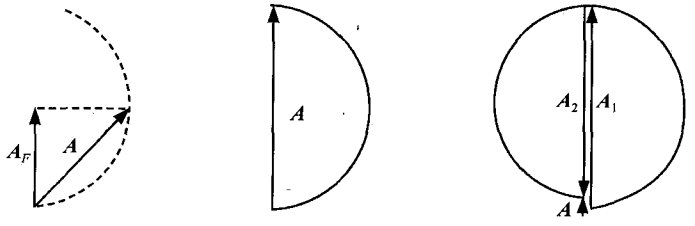
$$m = \left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r_0}\right)\frac{\rho^2}{\lambda}. \qquad (4.2.7)$$

此即圆孔所露出的半波带数与圆孔半径 ρ 及系统几何参量 R、r_0 的关系式. 在圆孔半径显著小于 R 和 r_0(满足傍轴近似条件)时，上式中之 R 和 r_0 也可以分别用源点和场点与孔径平面的距离 Z_S 和 Z_P 来代替，即有

$$m = \left(\frac{1}{Z_S}+\frac{1}{Z_P}\right)\frac{\rho^2}{\lambda}. \qquad (4.2.8)$$

一旦求得 m，即可视 m 为整数或非整数分别用半波带法或矢量图解法来求解合振幅 A. 图 4.2.7(a)、(b)、(c)分别示出了当 $m=1/2,1,2$ 时的矢量合成图以及合振幅与光强的结果. 图 4.2.8(a)和(b)则分别示出了 m 为奇数和偶数时用半波带法的矢量合成图，从中可以看出，若因某一参数的改变使得 m 发生变化，则当 m 为奇数时合振幅取得极大值

$$A_{奇} = \frac{1}{2}(A_1 + A_m), \qquad (4.2.9)$$

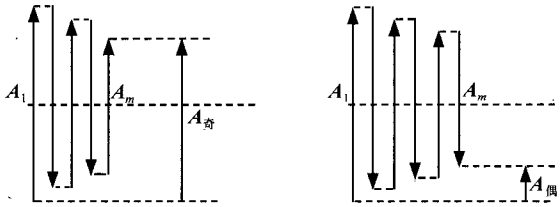


(a) (b) (c)

$m=1/2, A=\sqrt{2}A_F, I=2I_F$. $m=1, A=A_1=2A_F, I=4I_F$. $m=2, A=A_1-A_2\approx 0, I\approx 0$.

图 4.2.7 用矢量图解法分析圆孔衍射

① 此条件相当 S、P 及孔径三者满足傍轴近似：$\rho^2 \ll Z_S^2, Z_P^2$，即 S、P 均位于菲涅耳衍射区.



(a) m 为奇数　　(b) m 为偶数

图 4.2.8　用半波带法分析圆孔衍射

当 m 为偶数时合振幅取得极小值

$$A_{偶}=\frac{1}{2}(A_1-A_m). \tag{4.2.10}$$

在极大值处场点为亮点，极小值处场点为暗点（当 m 很小时，暗点处可近似认为消光）. 故随着 m 的增大，P 点亮暗交替，但因相邻 $A_{奇}$ 与 $A_{偶}$ 的差别越来越小，相邻亮暗的起伏幅度也越来越小.

由(4.2.8)式可知，当 λ 给定时，ρ、Z_S、Z_P 三个几何参量中任一个发生变化均会引起 m 值的改变；而 m 值决定了场点 P 处光场相幅矢量 $\boldsymbol{A}_P$ 的终端在螺线图上的位置，从而 A_P 与 I_P 亦随之发生变化，其具体趋势可由矢量图进行分析.

例 4.2.1　图 4.2.6 中，S 为点光源，$\lambda=600$ nm，$Z_S=1$ m，$\rho=0.5$ mm，P 为轴上点，$Z_P=0.5$ m.

(1) 求 P 点光强 I_P 与自由传播时光强之比；

(2) 其他参量不变，ρ 稍微增大时 I_P 如何变化？

(3) 其他参量不变，P 点稍微向孔径平面移近时 I_P 如何变化？

(4) 其他参量不变，P 点从初始位置向孔径平面移近，距该平面多远时 I_P 第一次出现极大？

解　(1) 由(4.2.8)式，有

$$m=\left(\frac{1}{1000}+\frac{1}{500}\right)\times\frac{0.5^2}{6\times10^{-4}}=1\frac{1}{4}.$$

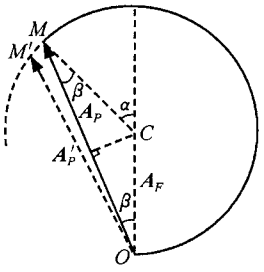


图 4.2.9　例 4.2.1 图

P 点相幅矢量 $\boldsymbol{A}_P$ 如图 4.2.9 中 $\overrightarrow{OM}$ 所示，$\overset{\frown}{OM}$ 对应 $1\frac{1}{4}$ 个半圆. 由几何关系可知 $\alpha=45°$，$\beta=22.5°$，$A_P=2A_F\cos\beta$，代入数值可求得

$$\begin{aligned}A_P&=2A_F\cos22.5°\\&=2A_F\sqrt{(1+\cos45°)/2}=1.85A_F,\end{aligned}$$

故

$$\frac{I_P}{I_F}=1.85^2=3.42.$$

(2) 由(4.2.8)式，ρ 稍微增大时 m 增大，M 移向 M'，$\overline{OM'}<\overline{OM}$，故 P 点光强减小.

(3) 同理，Z_P 稍微减小时 m 亦增大，I_P 减小.

(4) 初态 $m=1\frac{1}{4}$，既然 Z_P 减小时 m 增大，可知第一次出现极大值时 $m=3$，代入(4.2.8)式，

$$\left(\frac{1}{1000}+\frac{1}{Z_P}\right)\times\frac{0.5^2}{6\times10^{-4}}=3,$$

可解得 $Z_P=161\ \text{mm}=16.1\ \text{cm}$.

最后简单讨论 P 为轴外点的情况，如图 4.2.10 所示. 这时可先设想衍射屏不存在，以 SP 为轴分割半波带，然后放上屏，考察圆孔所露出的半波带分布，显然它们已非中心对称的圆环，因为有些半波带仅露出一部分. P 点合振动不仅取决于露出半波带的数目，而且取决于每带所露出部分的大小. 例如，图 4.2.11(a)中示出对某一位置 P 圆孔所露出半波带的分布，由于相邻半波带的贡献大致抵消，故 P 点光强很弱. 对 P 点之外的某点 P'，露出半波带的分布如图 4.2.11(b)所示，这时除相邻半波带 1 与 2，3 与 4 的贡献大致抵消外，又多出一部分新的半波带 5，故 P' 点光强较大. 因此，从观察平面 P_0 沿径向向外光强会有亮暗交替. 再根据系统的轴对称性，易知衍射图样为以 P_0 为中心的亮暗交替的圆环，当然其具体分布(如中心点的亮暗)依赖于 ρ、Z_S、Z_P 各参数. 图 4.2.12 示出了当圆孔逐渐增大时几个衍射图样的照片.

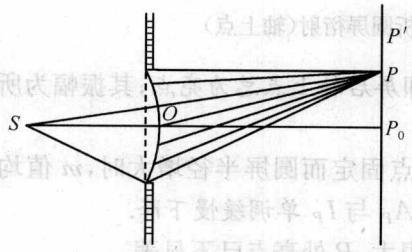


图 4.2.10 圆孔菲涅耳衍射：轴外点

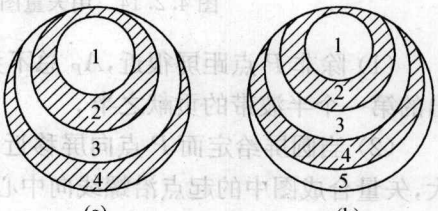


图 4.2.11 对不同轴外点圆孔所露出的半波带分布

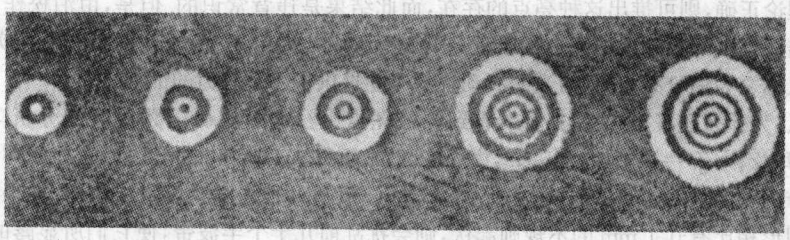


图 4.2.12 圆孔菲涅耳衍射图样的照片

2. 圆屏衍射

光场中不透光圆屏所形成的衍射称为圆屏衍射. 如图 4.2.13 所示，图中 D 为圆屏，取过圆屏中心并垂直于圆屏的直线为光轴，并设点光源 S 位于轴上.

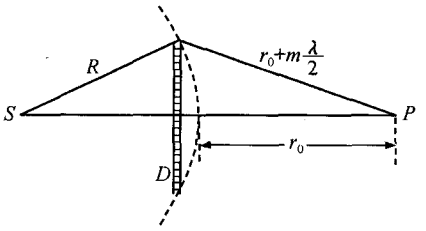


图 4.2.13　圆屏衍射中的各参量

首先考察轴上点 P 的光扰动. 用与前文相同的方法可求出圆屏所挡住的半波带数目 m，然后在自由传播时的矢量合成螺线上将与前 m 个半波带相应的部分$\overset{\frown}{OM}$舍去，则从剩余部分的起点 M 指向螺线中心 C 的矢量 $\boldsymbol{A}_P$ 即代表 P 点振动的复振幅. 图 4.2.14 (a)、(b)、(c)分别以圆屏挡住了前半个、前两个和前许多个半波带为例画出了 $\boldsymbol{A}_P$ 的矢量合成图(图中向中心盘曲的实螺线未完全画出). 从中可以得到下述结论：

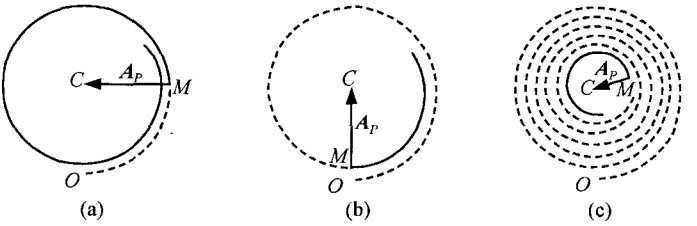


图 4.2.14　用矢量图解法分析圆屏衍射(轴上点)

(1) 除非 P 点距屏很近，A_P 总不为零，即屏后轴上点总为亮点；其振幅为所露出的第一个半波带的贡献之半.

(2) 当圆屏给定而 P 点向屏移近，或 P 点固定而圆屏半径增大时，m 值均增大，矢量合成图中的起点沿螺线向中心趋近，A_P 与 I_P 单调缓慢下降.

(3) 当屏较大或 P 点距屏很近时，m 值很大，P 处亮点已不显著.

屏后几何阴影区的中心会出现亮点，这一结论从日常经验看来是颇为荒谬的. 因此，当1818年菲涅耳向巴黎科学院提出自己关于衍射研究的论文时，泊松即提出了这样的反证：若菲涅耳的理论正确，则可推出这种亮点的存在，而此结果是违背常识的. 但是，由泊松作为对波动说的反诘而提出的关于这种亮点的推证，很快就由阿拉果(D. F. Arago)从实验中证实了. 这种亮点后人称之为**泊松亮点**，它为光的波动说的确立提供了一个有力的证据.

那么，为什么在日常生活中很难看到泊松亮点呢？这里应切记数量级的分析. 假设 $\lambda\sim 0.5\ \mu m$，取 $Z_S=Z_P=1\ m$，$\rho=2.5\ cm$，由(4.2.8)式可知 $m=2500$，圆屏边缘之外所露出的第一个半波带的宽度为 $\Delta\rho_m=\rho_{m+1}-\rho_m\approx 0.003\ mm$，此值与日常线度相比是很小的. 如果圆屏边缘与理想圆形相比有 0.1 mm 的不规则起伏，则会扰乱前几十个半波带，使它们所显露的面积(以及在 P 点产生的振幅)呈无规变化，以至于使亮点消失. 更何况日常生活中的光源均与点光源相

差甚远. 因此，要看到泊松亮点应满足以下要求：①光源应尽量接近点光源，且要有足够的亮度；②必须使所露出的第一个半波带与屏边缘的不规则起伏相比足够宽. 这意味着屏要小而圆，距离 Z_S、Z_P 要尽量大.

较理想的光源是激光源，将激光束经透镜聚焦，并在焦点处置一针孔可以得到明亮的近似点源. 图 4.2.15 为用 He-Ne 激光束照明一个直径约为 3 mm 的滚珠在数米外形成的衍射图样的照片，其中心即为泊松亮点.

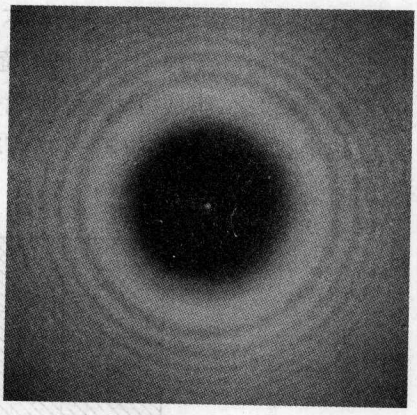


图 4.2.15 圆屏菲涅耳衍射图样的照片

至于轴外点，可以仿照对圆孔衍射的分析，说明这时也产生了一些以泊松亮点为中心的亮暗交替的圆环状条纹(图 4.2.15).

3. 某些环、扇形孔径的衍射

如果衍射屏上的透光区是一些环带或扇形，而且这些环、扇区域对于轴上某点 P 恰是一些半波带或半波带的一部分，则容易利用矢量图解法或半波带法求得 P 点光场的振幅及光强. 这里举例说明之.

图 4.2.16(a)中透光孔径(非阴影区)由一个圆孔及一个圆环组成，图中数字表示相应圆周与轴上场点 P 的距离(孔径中心与 P 点距离为 r_0). 可见对 P 点而言该孔径露出了第一和第三两个半波带，在矢量图上把这两个半波带相应的矢量 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_3$ 叠加起来，如图 4.2.16(b)所示，即得合矢量 $\boldsymbol{A}_P$. 因 $A_3 \approx A_1$，故 $A_P = 2A_1 = 4A_F$，而 $I_P = A_P^2 = 16I_F$.

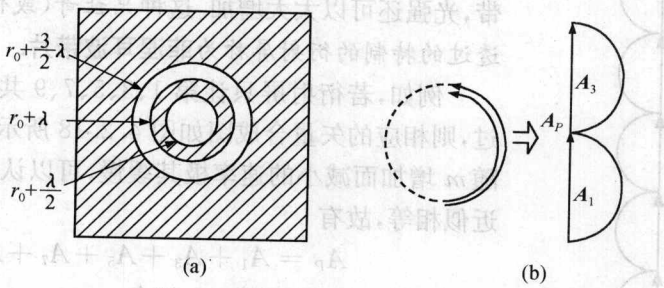


图 4.2.16 圆、环孔径(a)与相应的矢量合成图(b)

图 4.2.17 示出另一种情况. 图(a)中透光孔径为第一个半波带的半侧，相应的矢量图在图(b)中画出，图中$\overset{\frown}{ON}$为整个第一半波带相应的矢量图. 注意不要因实际上第一半波带只露出一半而把其相应矢量看做$\overrightarrow{OM}$，其中 M 是$\overset{\frown}{ON}$的中点. 因为 M 点与 O 点相比相移只有 $\pi/2$，而图(a)中从圆心到半圆周上任一点相应相移均为

π. 所以，将该半波带遮住一半并不影响从中心到边缘的相移量，而只意味着组成该半波带的每一无限窄元波带的面积减半，从而它们在 P 点产生的振幅减为原来的一半. 换言之，组成$\overset{\frown}{ON}$的每一元矢量的长度皆减半，形成$\overset{\frown}{OC}$，其合成后的长度当然也减半，即从$\overline{ON}$变为$\overline{OC}=\overline{ON}/2$. 这样，最后的合矢量大小 $A_P=\overline{OC}=A_F$，而光强 $I_P=I_F$.

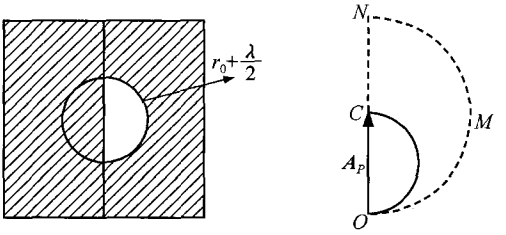


图 4.2.17　半圆孔径(a)与相应的矢量图(b)

将以上两种情况结合起来，可以处理更复杂的孔径. 实际上即使孔径上各环、扇带边缘不恰好构成整数半波带(如与 P 点距离为 $r_0+3\lambda/4$)，也可用矢量图解法，在螺线上找出与孔径相对应的线段，并通过矢量叠加及数学运算来求得 A_P 和 I_P.

4.2.3　菲涅耳波带片

上节已经指出，若衍射屏只露出第一个半波带，则轴上点光强增大到自由传播时光强的 4 倍；若露出第一、第三两个半波带，则光强增大到 16 倍. 不难推论，若露出更多的奇(或偶)序数半波带，光强还可以大大增加. 这种只让奇(或偶)序数半波带透过的特制的衍射屏称为**菲涅耳波带片**.

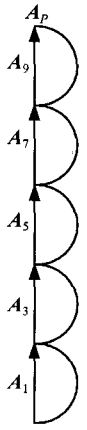


图 4.2.18　前 5 个半波带的矢量合成图

例如，若衍射屏只让第 1、3、5、7、9 共五个半波带透过，则相应的矢量合成图如图 4.2.18 所示. 由于振幅 A_m 随 m 增加而减小的速率极其缓慢，可以认为 A_1 至 A_9 均近似相等，故有

$$\begin{aligned} A_P &= A_1+A_3+A_5+A_7+A_9 \\ &= 5A_1 = 10A_F, \end{aligned}$$

而 $I_P=A_P^2=100I_F$，这意味着 P 点光强增加到自由传播时的 100 倍.

点光源 S 发出的光经过菲涅耳波带片后可在适当位置 P 形成很强的亮点，这种过程和普通透镜成像非常相似，这里 S 和 P 分别相当于物点和像点，而波带片则相当于透镜. 透镜具有焦距，波带片也应有自己的焦距.

实际上，把半波带公式(4.2.8)改写为

$$\frac{1}{Z_S}+\frac{1}{Z_P}=\frac{1}{\rho_m^2/m\lambda}, \tag{4.2.11}$$

并把上式与透镜成像公式

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}$$

类比，容易看出，Z_S、Z_P 分别相当于物距 s 和像距 s'，而波带片的**焦距**为

$$f=\frac{\rho_m^2}{m\lambda}. \tag{4.2.12}$$

由于(4.2.6)式中已指出第 m 个半波带半径 $\rho_m\propto\sqrt{m}$，故由上式确定的 f 实际上是一个与 m 无关的常量.

这种波带片可以用下述方法制作. 首先，确定工作波长 λ 及所需要的焦距 f，然后由(4.2.12)式的变形

$$\rho_m=\sqrt{m\lambda f}, \tag{4.2.13}$$

对 $m=1,2,3,\cdots$ 算出相应的半径 $\rho_1,\rho_2,\rho_3,\cdots$. 考虑到照相制版时通常采用缩微方法，取适当的放大倍数 M，以 $M\rho_1,M\rho_2,M\rho_3,\cdots$ 为半径在白纸上画出一系列同心圆，并将各个环带相间涂黑. 最后将该图形以照相方法缩小到原来的 $1/M$，记录到底片或干板上. 这样得到的波带片的实际焦距就是 f. 图 4.2.19 示出了波带片的一种结构，显然将其透光带与不透光带反转时波带片仍有同样的功能.

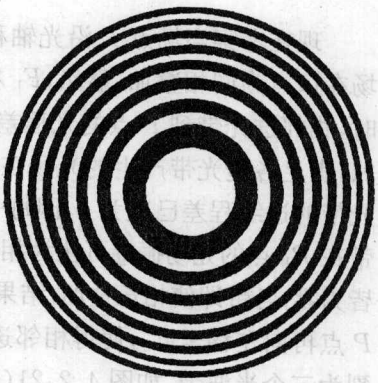


图 4.2.19 菲涅耳波带片

尽管波带片与普通透镜的功能有相似之处，但二者仍有一些原则上的区别，以下指出三点：

1) 波带片有多个焦点

图 4.2.20 中以单色平行光正入射来说明波带片多焦点的形成(为明显起见，图中竖直方向的线度大大夸大了). 对于给定的波带片，设其右方满足焦距公式(4.2.12)的焦点为 F_1，当平行光正入射时，从相邻两半波带(指相应位置，如均取中点)到 F_1 点的光程差为 $\lambda/2$，故从相邻两透光带(亦指相应位置，下同)到 F_1 点的光程差为 λ，各半波带在 F_1 点产生的扰动同相，所以 F_1 点形成亮点(参见图

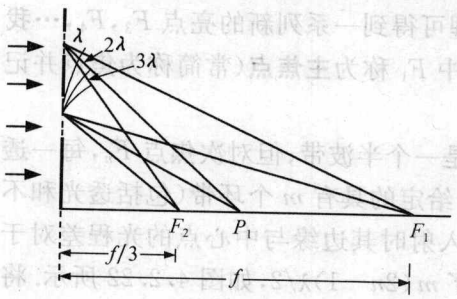


图 4.2.20 波带片多个焦点的形成

4.2.21(a)).

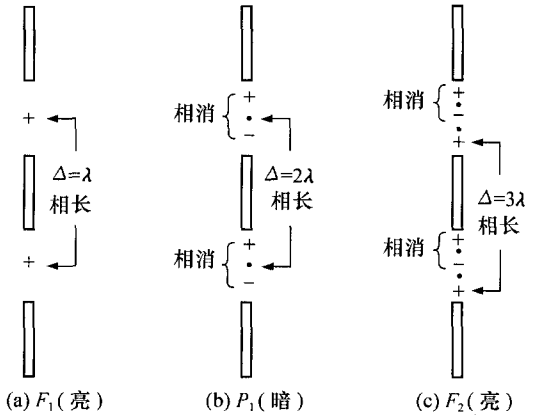


图 4.2.21　与图 4.2.20 中 F_1、P_1、F_2 三点相应的各半波带的划分及相位关系

现在考察当场点 P 沿光轴移动时还是否有其他位置能使得不同透光带的光场在该点为同相叠加. 显然，F_1 右方这种位置是不存在的. 当 P 点向 F_1 左方移动时，相邻透光带到 P 点的光程差逐渐增加，必然存在这样一点 P_1，使得此光程差为 2λ，满足各透光带产生的光场在 P_1 点同相的要求. 但是，由于对 P_1 点而言每一透光带的边缘程差已变为 λ，即每一透光带的波面恰包含两个半波带，而相邻两半波带在 P_1 点的光场振幅可认为相等，但相位相反，互相抵消，所以每一透光带的贡献皆为零；各带即使相长叠加，结果亦为零，故 P_1 是暗点而非亮点(图 4.2.21(b)). 若 P 点再向左移至 F_2，使得相邻透光带到 F_2 的光程差变为 3λ 时，每一透光带已分裂为三个半波带，如图 4.2.21(c)所示，其中两相邻半波带的效果基本抵消后，仍能剩下一个为 F_2 点光场作出贡献；又因各个透光带在 F_2 点产生的扰动同相，故 F_2 点可因相长干涉而形成亮点. 图 4.2.21 示出了以上三种情况下半波带的划分，正负号表示各半波带的相位关系，并注明了各个半波带相消或相长的效果.

当 P 点继续向波带片方向移近时，同理可得到一系列新的亮点 F_3，F_4，…我们把 F_1，F_2，F_3，…均称为*波带片的焦点*，其中 F_1 称为**主焦点**(常简称为焦点并记为 F)，F_2，F_3，…称为**次焦点**.

对主焦点 F_1，波带片上每一透光带都是一个半波带；但对次焦点 F_n，每一透光带已分割为$(2n-1)$个半波带. 因此，一个给定的具有 m 个环带(包括透光和不透光带)，半径为 ρ_m 的波带片，当平行光正入射时其边缘与中心点的光程差对于 F_1 点而言是 $m\lambda/2$，对于 F_n 点而言已变成了 $m(2n-1)\lambda/2$，如图 4.2.22 所示. 将图中几何关系式

$$\rho_m^2+f_n^2=\left[f_n+m(2n-1)\frac{\lambda}{2}\right]^2$$

展开，并忽略 λ^2 项，可以得到与 F_n 相应的焦距

$$f_n=\frac{1}{(2n-1)}\cdot\frac{\rho_m^2}{m\lambda}=\frac{1}{2n-1}f. \quad (n=1,2,3,\cdots) \tag{4.2.14}$$

当 $n=1$ 时，$f_1=f$，称为**主焦距**或简称焦距；$n\neq1$ 时，各次焦点相应的焦距可称为**次焦距**，各次焦距分别为主焦距的 1/3,1/5,1/7,…

另外，由几何对称性可知，当平行光正入射时，若从相邻透光带到右方轴上某点 F_n 的两条光线 1 和 2 的光程差的绝对值为 Δ，则反向延长线交于 F_n 关于波带片的对称点 F_n' 的两条光线 1′和 2′的光程差的绝对值 Δ' 亦与 Δ 相同(图 4.2.23)．因此，若 F_n 是亮点，则迎着 1′和 2′的方向看去时 F_n' 也是亮点．这说明波带片除具有一系列**实焦点** $F_1,F_2,F_3,\cdots$ 外，还具有一系列**虚焦点** $F_1',F_2',F_3',\cdots$，实、虚焦点分居于波带片两侧光轴上，并关于波带片对称．

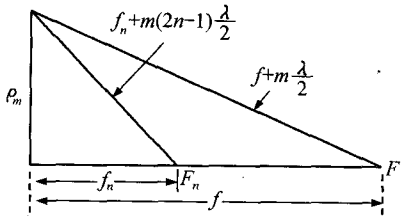


图 4.2.22 推导 f_n 表达式的几何关系

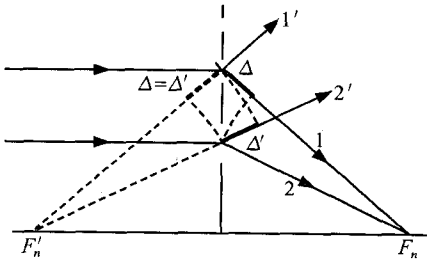


图 4.2.23 波带片的实焦点和虚焦点

2）波带片的色散关系与普通玻璃透镜相反

在可见光范围内，普通光学玻璃的折射率 n 随波长 λ 的增大而减小，故其焦距将随 λ 的增大而增大．而由(4.2.12)式可以看出，波带片的焦距随 λ 的增大而减小．有时可利用这种相反的色散关系将二者联合运用以校正纵向色差．

3）波带片的成像原理与普通透镜不同

对普通透镜，从物点到像点是等光程的，这种成像过程也可以看做是一种各光束光程相等的相长干涉过程．对波带片则不然，这时由物点通过不同透光环带到达像点的光程是各不相同的，但其差值均为波长的整数倍，所以也可以形成亮点，这种过程实质上是一种各光束光程不等的相长干涉．

最后应该说明，只要衍射屏上具有 $\rho_m\propto\sqrt{m}$ 的环带结构，而且随着环带序数的变化可对入射光的振幅或相位进行周期性的空间调制①，这种衍射屏均可作为波

① 这里之周期性系对环带序数 m，或波带片半径平方 ρ^2 而言；并非对半径 ρ．

带片. 根据它是调制入射光的振幅还是相位可以把波带片分为振幅型和相位型. 本节只分析了振幅型中最简单的一种，即各环带仅分为透光和不透光两种情况. 振幅型波带片还有其他形式. 例如，我们已经知道牛顿环的半径与$\sqrt{m}$成比例，因此可以想到，一幅记录牛顿环图样的底片或干板即可当波带片使用，这时板上曝光量大的环带相当于不透光带，曝光量小的环带相当于透光带. 不过，由于此情况下板上透过率的分布是渐变而非突变的，除主焦点外，其他次焦点将不再出现(参见4.7.1节对正弦光栅的讨论).

4.3 夫琅禾费衍射(一)：连通孔径

从本节开始将讨论夫琅禾费衍射. 本节首先讨论连通孔径，即衍射屏上的透光区域为连通区域的情形，如单缝、矩孔和圆孔.

4.3.1 单缝衍射

1. 理论分析

图4.3.1中，S为单色点光源，它发出的光经透镜L_1准直后垂直照射衍射屏Σ，Σ上有一条宽度为a的细缝，其延伸方向垂直于纸面. 在Σ右方放置另一透镜L_2，即可在L_2的后焦面Π上看到夫琅禾费衍射图样. 这里设L_2充分大，它对光束的限制作用可以不计，故仅取图示截面图作一维分析即可. 虽然利用有关公式可以直接求得衍射图样的强度分布，但为了加深对物理图像的理解及便于比较，以下同时给出三种分析方法.

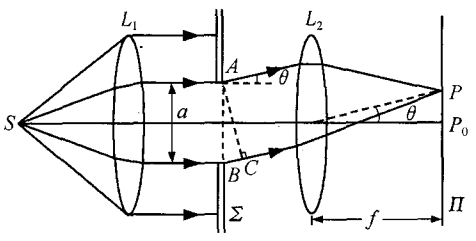


图4.3.1 单缝夫琅禾费衍射

1) 半波带法

夫琅禾费衍射是平行光的衍射. 对单缝来说，衍射发生于垂直于缝长的方向，与光轴成同一角度(衍射角)的平行衍射光会聚于Π平面上同一点P. 图4.3.1画出了衍射角为θ的衍射光束的上下两条边缘光线的行进路径. 作$AC\perp BC$并交BC于C，则这两条边缘光线的光程差为

$$\Delta = \overline{BC} = a\sin\theta. \tag{4.3.1}$$

当$\theta=0$时，$\Delta=0$，所有元光束在屏上相应点P_0同相，P_0即几何光学像点.

当$\theta\neq0$时，$\Delta\neq0$，可以仿照前文中环形半波带的划分方法，根据不同的θ值将

整个单缝波面分割成不同数目的长条形半波带,并由半波带数的奇偶来确定屏 Π 上相应点的亮暗. 例如,当 $\theta=\theta_1$,使得 $a\sin\theta_1=\lambda/2$ 时,整个单缝波面为一个半波带,屏上相应点 P_1 处光场振幅记为 A_1,它要小于几何像点 P_0 处之振幅 A_0. 当 $\theta=\theta_2$,使得 $a\sin\theta_2=\lambda$ 时,整个波面分为两个半波带,其作用互相抵消,屏上相应点 P_2 为暗点. 当 $\theta=\theta_3$,使得 $a\sin\theta_3=3\lambda/2$ 时,波面分成三个半波带,其中两个相邻者作用抵消,还剩下一个可以在屏上相应位置 P_3 形成亮点;不过,由于这时波面的有效作用面积仅为整个波面的 1/3,所以 P_3 点光场振幅 A_3 也仅为 A_1 的 1/3. 以下可依次类推,屏 Π 上另一侧(图中下半部)的光强分布则可由对称性而得到.

表 4.3.1 上半部列出了以 $\sin\theta$ 所表示的场点位置与相应的 Δ、半波带数、振幅 A_θ 以及强度 $I_\theta=A_\theta^2$ 的关系. 图 4.3.2 则画出了以 $\sin\theta$ 为横坐标的光强变化曲线及屏上

表 4.3.1 不同方法对单缝夫琅禾费衍射的分析

	场点	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
半波带法	$\sin\theta$	0	$\frac{\lambda}{2a}$	$\frac{\lambda}{a}$	$\frac{3}{2}\frac{\lambda}{a}$	$2\frac{\lambda}{a}$	$\frac{5}{2}\frac{\lambda}{a}$	$3\frac{\lambda}{a}$	$\frac{7}{2}\frac{\lambda}{a}$
	$\Delta=a\sin\theta$	0	$\frac{\lambda}{2}$	λ	$\frac{3}{2}\lambda$	2λ	$\frac{5}{2}\lambda$	3λ	$\frac{7}{2}\lambda$
	半波带数	0	1	2	3	4	5	6	7
	振幅 A_θ	A_0	$A_1<A_0$	0	$\frac{1}{3}A_1$	0	$\frac{1}{5}A_1$	0	$\frac{1}{7}A_1$
	光强 I_θ	I_0	$I_1<I_0$	0	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 I_1$	0	$\left(\frac{1}{5}\right)^2 I_1$	0	$\left(\frac{1}{7}\right)^2 I_1$
矢量图解法及公式法	$\sin\theta$	0	$\frac{\lambda}{2a}$	$\frac{\lambda}{a}$	$1.43\frac{\lambda}{a}$	$2\frac{\lambda}{a}$	$2.46\frac{\lambda}{a}$	$3\frac{\lambda}{a}$	$3.47\frac{\lambda}{a}$
	光强 I_θ	I_0	$I_1=0.4053I_0$	0	$0.04718I_0$	0	$0.01694I_0$	0	$0.00834I_0$

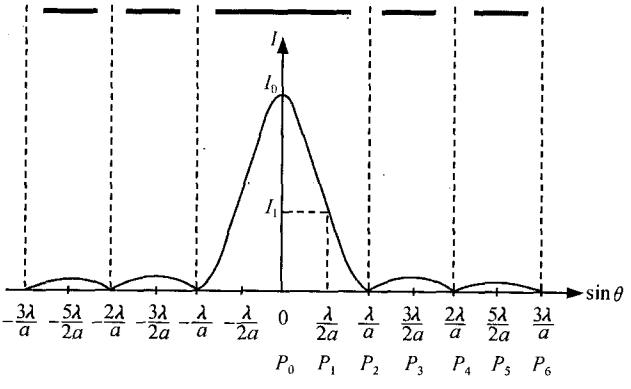


图 4.3.2 单缝夫琅禾费衍射光强分布

强度分布(图上部所示,黑线表示亮区). 可见主极大发生于几何像点,暗点发生于波面分割为偶数个半波带时,相邻暗点之间形成次极大,它们相应的半波带为奇数. 各次极强光斑的宽度在 $\sin\theta$ 轴上相同,而主极强光斑的宽度则是它们的 2 倍.

2) 矢量图解法

半波带法只适用于分析波面可以分割成整数个半波带的情况,更精细的讨论则应利用矢量图解法. 这时把单缝波面分割成许多宽度相等且极窄的条形元波带,其截面如图 4.3.3 所示,图中从上到下各元波带在场点 P 的振幅相等,但相位渐次落后. 故在图 4.3.4 中各元波带相应的元矢量长度相同,但辐角渐次增大. 将所有这些元矢量首尾相接,即得到代表 P 点光场振幅的场矢量 $\boldsymbol{A}_\theta$. 显然,当元波带无限变窄时矢量合成图由多边形的一部分变成圆的一部分,图中线段 $\overline{OM}$ 和弧 $\overset{\frown}{ON}$ 分别表示 $\theta=0$ 和 $\theta\neq0$ 的情况. 由边缘光线光程差 Δ 可求出边缘光线相位差为 $2\pi a\sin\theta/\lambda$,将它记为 2α,即令

$$\alpha=\frac{\pi}{\lambda}a\sin\theta, \tag{4.3.2}$$

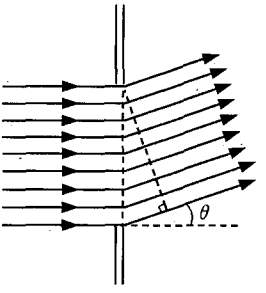


图 4.3.3 单缝元波带分割之截面

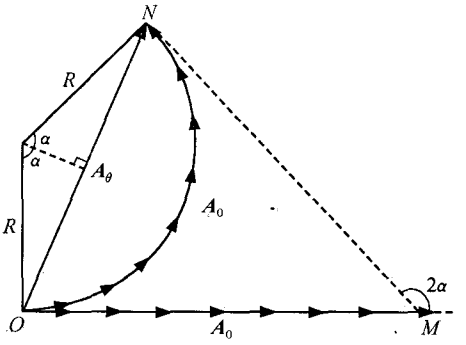


图 4.3.4 用矢量图解法求单缝衍射光强

显然,2α 即 N 处元矢量指向与 $\boldsymbol{A}_0=\overrightarrow{OM}$ 指向的夹角. 在 θ 较小时,可忽略 $F(\theta)$ 的影响,即认为每一元矢量的长度不随 θ 而变化,这时弧 $\overset{\frown}{ON}$ 应与 $\overline{OM}$ 等长. 设圆弧半径为 R,由图中几何关系可得

$$A_\theta=2R\sin\alpha,\quad R\cdot2\alpha=\overset{\frown}{ON}=\overline{OM}=A_0,\quad R=\frac{A_0}{2\alpha},$$

故有

$$A_\theta=A_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}, \tag{4.3.3}$$

相应光强

$$I_\theta=A_\theta^2=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2. \tag{4.3.4}$$

式中 I_θ 为平行光正入射时衍射角为 θ 的平行光在透镜 L_2 后焦面上会聚点 P_θ 处产生的光强,$I_0=A_0^2$ 为几何像点的光强,α 为单缝边缘光相位差之半.

由矢量图解法,即使不利用上式也可由几何关系很容易地求出半波带法中无法确定的 A_1,如图 4.3.5 所示. 将长度为 A_0 的线段弯成一个半圆,A_1 为其直径,显然 $A_1=2A_0/\pi$,而

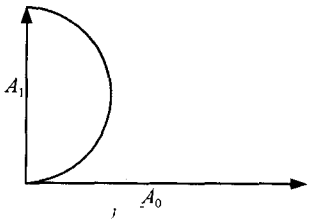


图 4.3.5 用矢量图解法求 A_1

$$I_1=A_1^2=\frac{4}{\pi^2}I_0=0.4053I_0.$$

3) 公式计算法

取图 4.3.6 所示坐标系,并设 $F(\theta)=1$,衍射积分公式可写为

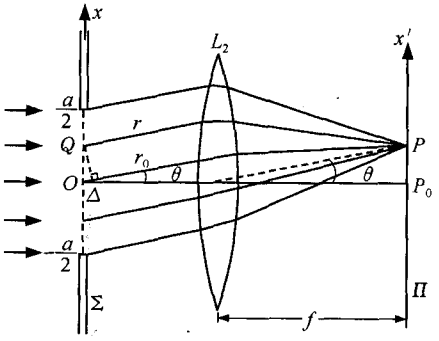


图 4.3.6 计算单缝衍射所用坐标系

$$\tilde{E}(P)=C\iint_\Sigma \tilde{E}(Q)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\,\mathrm{d}\sigma, \tag{4.3.5}$$

其中 Q 为单缝波面上任一点,复数 C 代表了所有可以提出积分号的常数,它们对 Π 平面上光强的相对分布并无影响. 基于同样的理由,可假设入射光具有单位振幅,且在孔径平面处的初相为零,则 $\tilde{E}(Q)$ 在孔径透光区为 1,在不透光区为 0. Q 点到场点 P 的光程可以表示为

$$r=r_0-\Delta, \tag{4.3.6}$$

其中 r_0 为 Σ 中心点 O 到 P 的光程,Δ 为 r 和 r_0 二者之差,显然

$$\Delta=x\sin\theta. \tag{4.3.7}$$

将以上两式代入(4.3.5)式,并将与积分无关的因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}$ 提出合并于 C 中,则可得到

$$\tilde{E}(P)=C\iint_\Sigma \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\Delta}\,\mathrm{d}\sigma, \tag{4.3.8}$$

其中积分区域为孔径透光区. 上式是以后计算中会经常用到的一个很方便的公式. 实际上,计算 Δ 时所用的参考光程 r_0 可以从孔径平面上任一点算起,它只使因子 C 发生变化,而不影响衍射光相对光强的分布.

对单缝衍射,因不考虑 y 方向对光束的限制,故可进行一维处理,代入 Δ 表达式,上式化为

$$\tilde{E}(P)=\tilde{E}_\theta=C\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\exp(-\mathrm{i}kx\sin\theta)\,\mathrm{d}x, \tag{4.3.9}$$

积分结果为

$$\tilde{E}_\theta = Ca\,\frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

其中 α 的意义同前. 相应衍射光强为

$$I_\theta = |\tilde{E}_\theta|^2 = |C|^2 a^2 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2. \tag{4.3.10}$$

当 $\theta=0$ 时，$\alpha=0$，$\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$，而 $|C|$ 不变①. 因此若记几何像点光强为 I_0，则 $I_0=|C|^2a^2$，而

$$I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2, \tag{4.3.11}$$

此式与用矢量图解法得到的结果完全一致.

若利用观察平面坐标 x' 为自变量，代入(4.3.2)式并利用傍轴近似

$$\sin\theta \approx \theta \approx \frac{x'}{f},$$

其中 f 为透镜 L_2 的焦距，则光强表达式可化为

$$I(x') = I_0\left[\frac{\sin(\pi a x'/\lambda f)}{\pi a x'/\lambda f}\right]^2 = I_0\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{a x'}{\lambda f}\right). \tag{4.3.12}$$

2. 关于单缝衍射因子的讨论

决定单缝衍射的相对光强分布的因子 $\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$ 称为**单缝衍射因子**，它的变化曲线已大致示于图 4.3.2 中，其极值位置及相应极值的计算结果也已列于表 4.3.1 下半部. 以下对其特点再作某些综述和讨论.

1) 主极强中心即几何光学像点

函数 $\sin\alpha/\alpha$ 的中央峰称为**零级衍射斑**或**主极强**；其中心点 P_0 是所有光束等光程相长干涉的位置，也即几何光学像点. 此结论对于其他形式的入射光，如平行光斜入射也是成立的.

2) 极小位置在主极强两侧以 $\sin\theta$ 为轴等距排列

由(4.3.11)式可知 I_θ 极小值发生于 $\alpha=m\pi$，即

$$\sin\theta = m\,\frac{\lambda}{a}, \qquad (m=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots) \tag{4.3.13}$$

它们在 $\sin\theta$ 轴上以 λ/a 为间隔等距排列(中心点 P_0 除外)，这些点皆为消光位置. 当 θ 较小时，它们在屏上的实际距离也近似是等间隔的.

---

① 因 C 中含有因子 $\exp(ikr_0)$，而 r_0 对 Π 平面不同点一般是变化的，故 C 一般与 x' 有关，但 $|\exp(ikr_0)|$ 总等于 1. 关于 C 的具体形式及它对光传输过程影响的详细讨论可参见蔡履中. 大学物理，2001，7：7.

3) 次极强中心大致位于相邻暗点的中点

中央峰两侧的亮区称为**高级衍射斑**或**次极强**.其中心位置由极值条件$dI_\theta/d\alpha=0$来确定,此式给出

$$\tan\alpha = \alpha. \qquad (4.3.14)$$

为求解α可以采取数值计算,也可以采用作图法;如图 4.3.7 所示.图中以α为横坐标同时作出直线$f_1(\alpha)=\alpha$和曲线族$f_2(\alpha)=\tan\alpha$,二者交点的横坐标即为上式的解.将这些α值代入(4.3.2)式即可得到相应的θ,若代入(4.3.11)式则可求出各次极强的峰值.表 4.3.1 下部已列出了用$\sin\theta$表示的各次极强中心位置及相应的峰值强度.可见各次极强中心大致处于相邻暗点的中间,而且各次极强的峰值强度均远小于中央峰值强度,即使在次极强中最强的一级衍射斑其峰值强度也不到中央峰值的 5%.

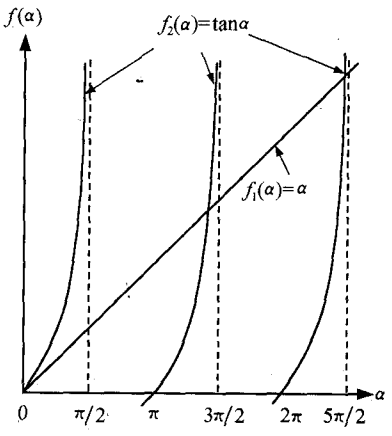


图 4.3.7 图解法求次极大位置

可利用矢量图解法近似估计各级次极强的相对峰值强度,并解释由上式得到的次极强中心位置与半波带法结果的微小偏差.以一级次极强为例,从矢量图中看,可粗略地认为其峰值振幅A可用将A_0长度不变地盘曲一圈半时所得到的合矢量$\overrightarrow{OM}$来表示(图 4.3.8),从而得到

$$A=\frac{1}{1.5\pi}A_0,\quad I=\frac{1}{(1.5\pi)^2}I_0=0.045I_0,$$

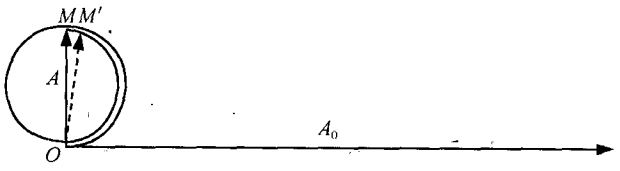


图 4.3.8 矢量图解法求一级次极强振幅

此I值与精确结果$0.04718I_0$相比约有 4%的偏差.对此可定性说明如下:若图中圆半径保持不变,当然$\overrightarrow{OM}>\overrightarrow{OM'}$,即$\overrightarrow{OM}$相应于极大值;但是,由于螺线的总长应保持常量$A_0$,故在螺线盘曲过程中圆半径会逐渐缩小,从而与极大值A相应的矢量终端并不在圆的正上方M,而位于比M稍靠前的某点M'.因此,由公式(4.3.11)精确求出的次极强中心位置相应的θ值总比用半波带法估算的结果稍小一些,得到的I_θ也会稍微增大.

3. 主极强的半角宽度

各衍射斑的宽度可由其两侧零点之间的角距离来表示.由对称性,主极强的角宽度为从几何像点到第一零点的角距离的 2 倍.因而可将从几何像点到第一零点的角距离称为**主极强的半角宽度**,以$\Delta\theta$表示,如图 4.3.9 所示.由条件$a\sin\Delta\theta=\lambda$

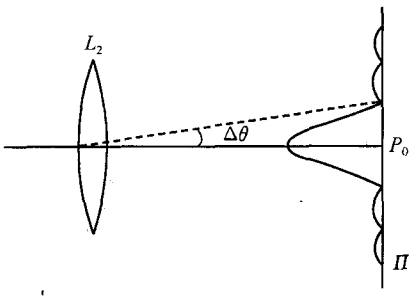


图 4.3.9　主极强的半角宽度

及傍轴近似 $\sin\Delta\theta\approx\Delta\theta$，可知

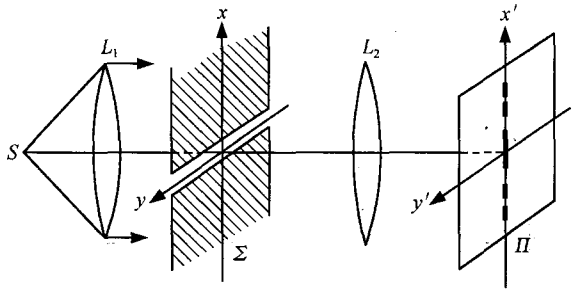
$$\Delta\theta=\frac{\lambda}{a}. \tag{4.3.15}$$

各次极强的宽度大致等于主极强宽度之半.

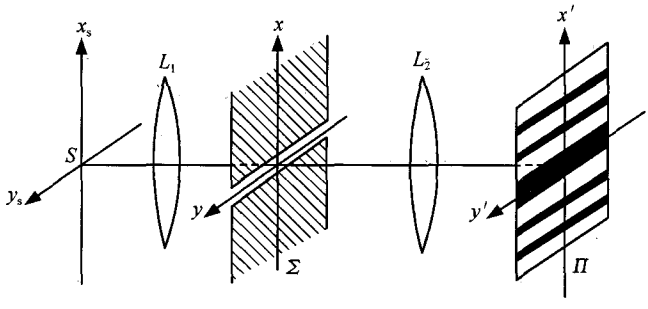
由于各次极强相对强度均很小，衍射光场的绝大部分能量集中于零级衍射斑，所以可以把零级衍射斑的大小看做是由于衍射而引起的光束扩展区域.(4.3.15)式常称为衍射反比关系，它表明对给定 λ，对光束的空间限制越甚，即缝越窄，则在与缝垂直方向由衍射引起的光束空间扩展越大；若 $a\to\infty$ 或 $\lambda\to0$，则 $\Delta\theta\to0$，这时屏 Π 上即得到几何光学像点. 故几何光学可以看做是波动光学当 $\lambda/a\to0$ 以至于衍射效应可以忽略时的极限情况.

4. 观察方法与实验结果

单缝衍射的观察方法可以有两种：第一种是利用点光源，如图 4.3.10(a)所示，这时由于光束在 y 方向不受限制，衍射引起的扩展只在 x 方向，故 Π 面上的衍射图样只分布于 x' 轴上. 第二种是利用取向与缝长平行的线光源，如图 4.3.10(b)



(a) 点光源



(b) 线光源

图 4.3.10　单缝夫琅禾费衍射的两种观察方法及相应的衍射图样

所示,这时线光源上每一点单独产生的衍射图样在 y' 方向互相错开,故总的衍射图样在 x' 方向不变,而在 y' 方向扩展,形成一条条亮暗交替的平行带(图中黑线区表示亮区). 中央亮带宽度约为其他亮带宽度的两倍,中央亮带的中心线则是线光源的几何像. 图 4.3.11 分别示出了点光源(上部)和线光源(中、下部,其中中部相应缝较宽,下部缝较窄)单缝衍射的实验结果,其中水平方向相应于 x' 方向.

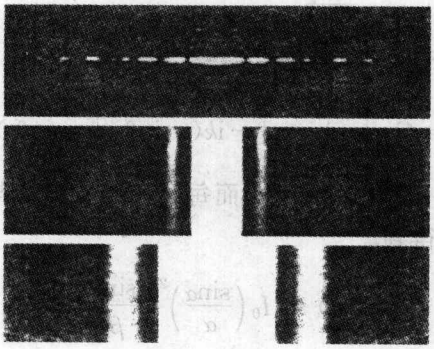


图 4.3.11 单缝夫琅禾费衍射图样的照片

上:点光源;中、下:线光源.

4.3.2 矩孔衍射

将图 4.3.10(a)中之单缝换成矩形开孔,则可在 L_2 的后焦面得到矩孔的夫琅禾费衍射图样. 图 4.3.12 绘出矩孔衍射的示意图,取坐标系 xy 的原点 O 位于矩孔中心,坐标轴与矩孔两对边分别平行,记矩孔在 x、y 方向的宽度分别为 a 和 b. 仍设单色平行光正入射,孔径上任一点 Q 到场点 P 的光程为 r,并取从 O 点发出的光到达 P 点的光程为参考光程 r_0,由图中可知二者光程差为 $\Delta=\overrightarrow{OQ}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_0$,其中 $\hat{\boldsymbol{r}}_0$ 为 $\boldsymbol{r}_0$ 方向的单位矢量. 由于在 P 点会聚的所有光束从孔径平面出射时是平行

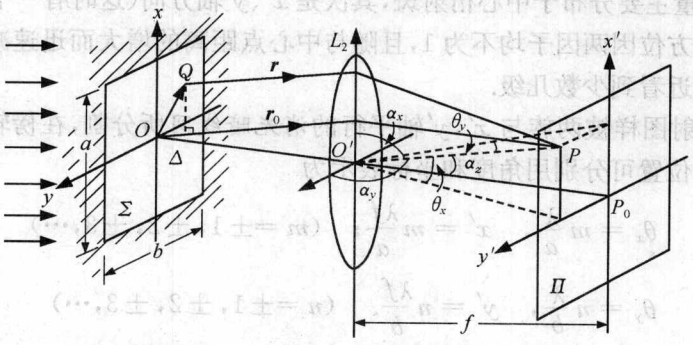


图 4.3.12 矩孔衍射中各量示意图

的，其出射方向均可用从透镜 L_2 中心 O' 指向 P 点的矢量 $\overrightarrow{O'P}$ 表示，设其方向余弦分别为 $\cos\alpha_x$、$\cos\alpha_y$、$\cos\alpha_z$，并设衍射光在 x，y 方向的衍射角分别为 θ_x、θ_y，易见 $\theta_x=(\pi/2)-\alpha_x$、$\theta_y=(\pi/2)-\alpha_y$，故 $\hat{\boldsymbol{r}}_0$ 可用其三个分量表示：

$$\hat{\boldsymbol{r}}_0=(\cos\alpha_x,\cos\alpha_y,\cos\alpha_z)=(\sin\theta_x,\sin\theta_y,\cos\alpha_z).$$

又因 $\overrightarrow{OQ}=(x,y,0)$，所以

$$\Delta=\overrightarrow{OQ}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_0=x\sin\theta_x+y\sin\theta_y. \tag{4.3.16}$$

将上式代入(4.3.8)式，得到

$$\tilde{E}(P)=C\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\exp[-ik(x\sin\theta_x+y\sin\theta_y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4.3.17}$$

显然上式可化为两个一维积分的乘积，而每个一维积分皆与单缝衍射中的积分形式相同. 同样的计算可得到

$$I(P)=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2, \tag{4.3.18}$$

其中

$$\alpha=\frac{\pi}{\lambda}a\sin\theta_x,\quad \beta=\frac{\pi}{\lambda}b\sin\theta_y, \tag{4.3.19}$$

I_0 为衍射图样中心点的光强. 在傍轴近似下，(4.3.18)式也可化为用坐标做自变量的表达式

$$I(x',y')=I_0\mathrm{sinc}^2\left(\frac{ax'}{\lambda f}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{by'}{\lambda f}\right). \tag{4.3.20}$$

不难看出，矩孔衍射图样的光强分布取决于 x、y 方向两个单缝衍射因子的乘积，由此可分析其各种特点，例如：

(1) 每一方向的相对光强分布相当于宽度等于此方向孔径宽度的单缝衍射图样.

(2) 能量主要分布于中心衍射斑，其次是 x'、y' 轴方向(这时有一个因子为1)；在其他倾斜方位因两因子均不为1，且随与中心点距离的增大而迅速减小，故只能在中心斑附近看到少数几级.

(3) 衍射图样被两族与 x'，y' 轴平行的消光暗线网所分割，在傍轴近似下，消光暗线网的位置可分别用角度和坐标表示为

$$\theta_x=m\frac{\lambda}{a},\quad x'=m\frac{\lambda f}{a};\quad (m=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots) \tag{4.3.21}$$

$$\theta_y=n\frac{\lambda}{b},\quad y'=n\frac{\lambda f}{b}.\quad (n=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots) \tag{4.3.22}$$

(4) x 和 y 方向主极强半角宽和各次极强角宽度在傍轴近似下分别为

$$\Delta\theta_x = \frac{\lambda}{a}, \quad \Delta\theta_y = \frac{\lambda}{b}. \tag{4.3.23}$$

由此衍射反比关系,在孔径窄的方向衍射斑宽而疏,在孔径宽的方向衍射斑窄而密.

图 4.3.13 中示出了第一象限中各极强中心(以黑点表示)的分布及相对光强,每一非轴上点相对光强等于两相应轴上点相对光强的乘积;图中虚线表示消光线位置. 其他象限的分布可由衍射图样的中心对称性而得到. 图 4.3.14 为矩孔及方孔实验结果的照片,图中右下方示出孔径形状.

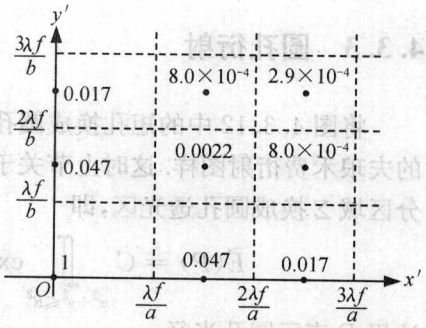


图 4.3.13 矩孔衍射中各极大位置(黑点)、相对强度及消光线(虚线)

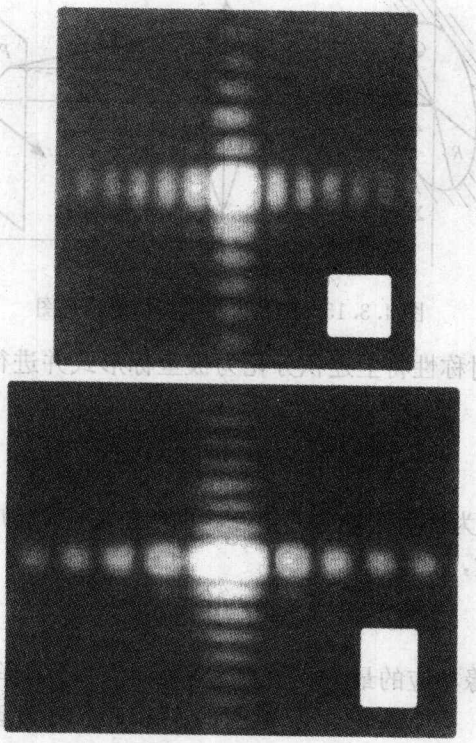


图 4.3.14 方孔(上)和矩孔(下)夫琅禾费衍射图样的照片

在作单缝衍射实验时,由于仪器孔径的限制,真正可以利用的缝长 b 不可能为无限大,故所得结果实际上相当于 $b \gg a$ 时的矩孔衍射. 所以即使 S 为点光源,衍射光斑在 y' 方向仍有一定宽度;只有在 $b \to \infty$ 的理想情况下衍射光才完全收缩于 x' 轴上.

4.3.3　圆孔衍射

将图 4.3.12 中的矩孔换成圆孔，如图 4.3.15 所示，即可在观察屏上得到圆孔的夫琅禾费衍射图样. 这时上节关于 Δ 的推导仍然成立，只是在求 $\tilde{E}(P)$ 时需把积分区域 Σ 换成圆孔透光区，即

$$\tilde{E}(P)=C\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\exp[-ik(x\sin\theta_x+y\sin\theta_y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{4.3.24}$$

这里 R 表示圆孔半径.

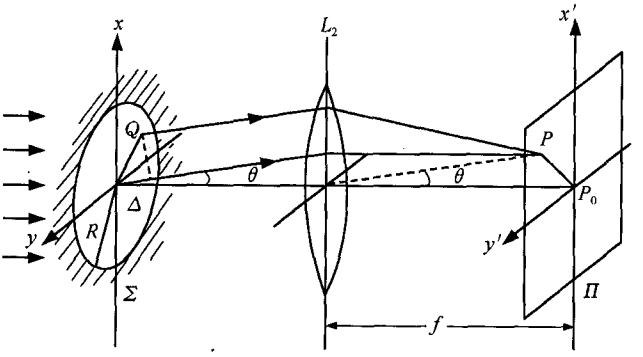


图 4.3.15　圆孔夫琅禾费衍射示意图

利用系统的轴对称性将上述积分化为极坐标形式并进行计算，可以得到最终的光强表达式为

$$I(P)=I_\theta=I_0\left[\frac{2J_1(u)}{u}\right]^2, \tag{4.3.25}$$

其中 θ 为衍射角，I_0 为衍射图样中心点 P_0 处光强，$J_1(u)$ 为变量 u 的一阶第一类贝塞尔(Bessel)函数，而

$$u=\frac{2\pi}{\lambda}R\sin\theta, \tag{4.3.26}$$

即 u 仍表示孔径边缘相应的最大相位差之半. 对 $J_1(u)$ 的详细讨论已超出了本书范围，这里仅绘出该函数的部分曲线(图 4.3.16)，并指出其以下几点性质：①$u=0$ 时，$J_1(u)=0$，但 $J_1(u)/u$ 有最大值 1/2；②$J_1(u)$ 的第一零点在 $u=1.22\pi$ 处；③$J_1(u)$ 随 u 的增大大体以振荡形式衰减.

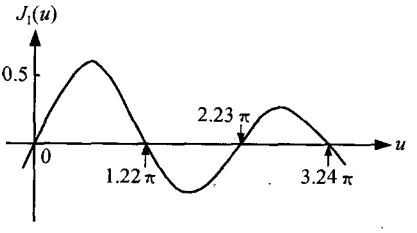


图 4.3.16　函数 $J_1(u)$ 的部分曲线

对某一衍射角 θ，可由(4.3.26)式求出 u，然后通过查表求出 $J_1(u)$，最后代入(4.3.25)

式求出相应光强 I_θ. 图 4.3.17 中以 $\sin\theta$ 为横坐标给出了相对光强的分布曲线,图 4.3.18 给出了衍射图样的照片. 从中可以看出圆孔衍射具有以下特点:

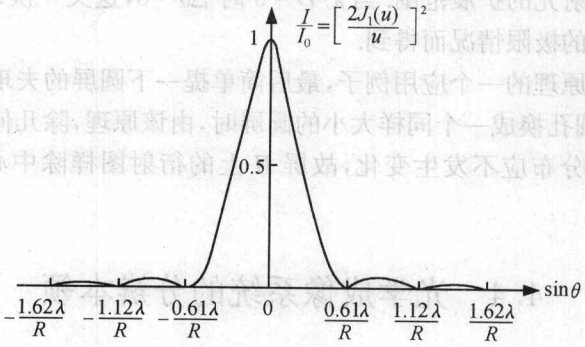


图 4.3.17 圆孔夫琅禾费衍射的相对光强分布

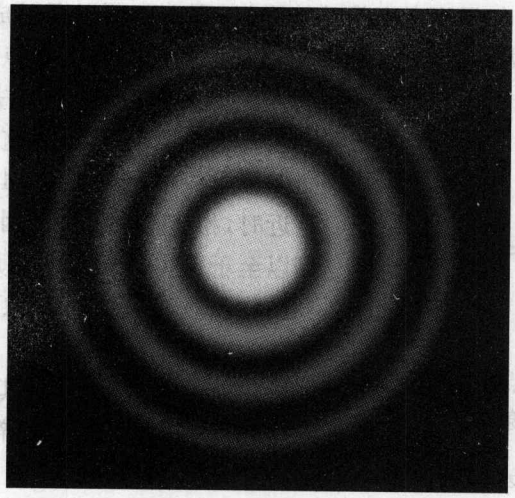


图 4.3.18 圆孔夫琅禾费衍射图样的照片

(1) 光强分布具有以 P_0 点为中心的圆对称性.

(2) 在几何光学像点 P_0 光强具有最大值,主极强系一以 P_0 为中心的圆斑,此圆斑通常称为**艾里斑**.

(3) 从艾里斑向外,衍射图样形成一组亮暗交替的同心圆环,但随着半径的增大各亮环的亮度急剧下降.

(4) 设第一暗环的半角宽为 $\Delta\theta$,由 $u=2\pi R\sin\Delta\theta/\lambda=1.22\pi$ 和 $\sin\Delta\theta\approx\Delta\theta$,可得到艾里斑的角半径为

$$\Delta\theta=\frac{0.61\lambda}{R}=\frac{1.22\lambda}{D}, \tag{4.3.27}$$

式中 $D=2R$ 为圆孔直径. 艾里斑的线半径则为 $f\Delta\theta$, f 为透镜 L_2 的焦距.

由于艾里斑中集中了衍射光能的很大一部分(约 84%),通常可以把它看做是在圆形孔径下衍射光的扩展范围. 当 $\lambda/D\to 0$ 时 $\Delta\theta\to 0$,这又一次表明几何光学可以作为波动光学的极限情况而得到.

作为巴俾涅原理的一个应用例子,最后简单提一下圆屏的夫琅禾费衍射. 当把图 4.3.15 中之圆孔换成一个同样大小的圆屏时,由该原理,除几何像点之外,整个衍射光场中光强分布应不发生变化,故屏 Π 上的衍射图样除中心点外是完全相同的.

4.4 光学成像系统的分辨本领

1. 问题的提出及有关概念

在几何光学中,如果不考虑像差等因素,则点物可以通过成像系统形成点像. 这时只要系统的放大率足够大,则横向相距任意近的两个物点均可形成横向分离足够大的两个像点,所以对系统可以分辨的两物点的最小间距是没有限制的.

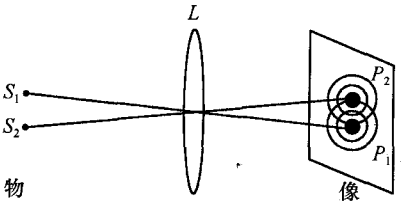


图 4.4.1 两物点在像平面形成两衍射斑

波动光学中则不同,这时每一物点在像平面上形成一衍射斑(图 4.4.1). 当两物点相距甚近时,相应两衍射斑可因部分交叠而变得模糊以至于不可分辨. 因此就产生一个问题:究竟两物点靠得多近时其像斑尚可分辨? **成像系统的分辨本领**即指该系统分辨两个相邻物点的像的能力. 可以分辨其相应像斑的两物点靠得越近,则该系统的分辨本领越高.

本节关于分辨本领的讨论中采用下述约定:

(1) 成像系统是无像差的理想光学系统,其分辨本领仅受衍射这一因素的限制. 回顾 4.1.3 节中对衍射分类的说明并参见图 4.1.5,可知点物的成像可以看做孔径的夫琅禾费衍射. 更一般地可以证明,物点经理想光学成像系统后在像平面的光强分布是以其几何像点为中心的,系统出射光瞳的夫琅禾费衍射图样;前文对平行光入射时后焦面光强分布的分析与结论亦适用于点物发出的光经成像系统后像平面的光场分布,只需把前一情况下的透镜焦距 f 改换成成像系统出瞳到像面的距离 Z_i.

(2) 各物点发光是非相干的,这时像平面光强分布是每一物点单独所形成的像斑的强度叠加.

(3) 为简便起见,设待分辨的两物点亮度相同.

2. 瑞利判据

两点靠得多近才算刚好可以分辨与多种因素有关，且具有一定的人为性. 3.5.2 节中曾引入分辨两亮线的泰勒判据，它当然亦可应用于两个像斑. 但是，在那里该判据的引入主要是为了计算方便. 光学中应用更广泛的则是另一判据——瑞利(J. W. Rayleigh)判据.

瑞利判据认为，如果一个物点所产生的衍射图样的主极强中心恰与另一物点的衍射图样的第一零点位置重合，则这两个像斑或相应两物点是刚可分辨的.

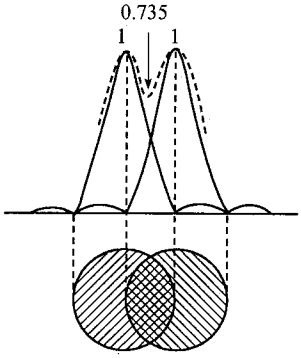


图 4.4.2 瑞利判据应用于圆形孔径

光学成像系统中之衍射孔径通常为圆孔(如透镜边缘)，这时此临界情况意味着一个物点通过成像系统所形成的艾里斑中心恰好落在另一物点相应艾里斑的边缘(第一暗环)上. 图 4.4.2 下部画出了刚能分辨时两艾里斑的相对位置，图上部则以两等亮度物点为例示出了它们各自的(实线)与合成的(虚线)相对强度分布. 应当指出，根据瑞利判据，对圆孔衍射合强度曲线鞍点处的相对光强约为 0.735，与两侧峰值的差别达 26%以上；即使孔径为单缝，此差别也达到 19%. 实际上许多人可在 10%的中间凹陷下将两相邻亮点分辨开来，故此判据比实际分辨极限更为苛刻一些.

3. 成像仪器的分辨本领

图 4.4.3 中以单透镜成像为例示出了在刚好满足瑞利判据时物方和像方各量的关系，其中 O、I 分别为物平面和像平面，S_1、S_2 为刚能分辨的两个物点，P_1、P_2 为其像斑中心，n 和 n' 分别为物方和像方折射率，Z_0 和 Z_i 分别为物距和像距. $\delta y=\overline{S_1S_2}$，$\delta y'=\overline{P_1P_2}$，$\delta\theta$ 和 $\delta\theta'$ 分别为它们对透镜中心的张角. 在此临界情况下，我们把 $\delta\theta$ 和 $\delta\theta'$ 分别称为物方和像方的**最小分辨角**，δy 和 $\delta y'$ 则分别称为物方和像方的**最小分辨距离**，它们常通称为**分辨极限**.

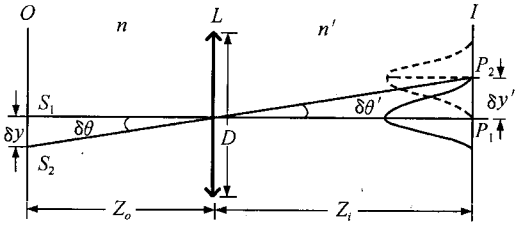


图 4.4.3 刚能分辨时物方、像方各量关系

依瑞利判据，此时每一艾里斑的半角宽度恰等于两像斑中心的角分离量，即

$$\Delta\theta = \delta\theta'. \tag{4.4.1}$$

利用上式及(4.3.27)式，注意其中波长应为像方波长，这里记为 λ_i，并有 $\lambda_i=\lambda/n'$，λ 为真空中波长，则有

$$\delta\theta' = \frac{1.22\lambda_i}{D} = \frac{1.22\lambda}{n'D}, \tag{4.4.2}$$

$$\delta y' = Z_i\delta\theta' = \frac{1.22\lambda Z_i}{n'D}. \tag{4.4.3}$$

利用折射定律的傍轴近似形式可得到

$$n\delta\theta = n'\delta\theta'. \tag{4.4.4}$$

由此可将像方分辨极限转化为物方分辨极限，即

$$\delta\theta = \frac{n'}{n}\delta\theta' = \frac{1.22\lambda}{nD}, \tag{4.4.5}$$

$$\delta y = Z_o\delta\theta = \frac{1.22\lambda Z_o}{nD}. \tag{4.4.6}$$

可见 $\delta\theta$ 与 $\delta\theta'$，δy 与 $\delta y'$ 的表达形式是完全相同的，只是前者均采用物方量，后者均采用像方量；所以求物方分辨极限时实际上并不需要像方折射率及像距.

以下分别讨论几种常见情况.

1) 人眼

人眼可看做一等效折射球面或等效正透镜，物方折射率 $n=1$，像方折射率 $n'=1.336$，瞳孔为直径可变的圆形光阑，视网膜为像平面. 由(4.4.5)式可得到物方最小分辨角为

$$\delta\theta_e = \frac{1.22\lambda}{D_e}. \tag{4.4.7}$$

其中 D_e 为瞳孔直径，它可以依不同光照条件在 2～8 mm 之间变化. 若取 $D_e=2$ mm，λ 为白光平均波长 550 nm，则 $\delta\theta_e=3.4\times10^{-4}$ rad$=70''$. 通常取 $1'$ 作为人眼的最小分辨角，它在明视距离 25 cm 处相应的最小分辨间距约为 0.073 mm. 人眼等效透镜到视网膜的距离 Z_i 约为 20 mm，由此可求得像方艾里斑的大小，视网膜上神经元的细微结构恰好与人眼的分辨极限相适应.

2) 照相物镜

对照相机，$n=n'=1$，当物不是太近时，$Z_i\approx f$，由(4.4.3)式可得到像方的最小分辨距离为

$$\delta y' = 1.22\lambda\frac{f}{D}, \tag{4.4.8}$$

其中 f 为物镜焦距，D 为所利用的物镜直径. 比值 D/f 称为物镜的**相对孔径**，它的倒数称为 F 数，F 数通常以逐次加倍的偶数的平方根的序列，如 1.4，2，2.8，…的

形式显示于照相机的光圈调节环上. D 越小，F 数越大，分辨能力越低. 但应指出，当用普通胶片时，胶片本身由于感光颗粒不够精细等因素对分辨本领的限制往往要比衍射效应的限制更甚.

3) 望远镜

对望远物镜，物点可认为在无限远处，故 $Z_i=f$，f 为物镜焦距. 利用 $n=n'=1$，可得到其最小分辨角为

$$\delta\theta=\delta\theta'=\frac{1.22\lambda}{D}, \tag{4.4.9}$$

D 为物镜直径，它通常远大于瞳孔直径 D_e，如大型天文望远镜之 D 可达到数米. 由于上式中 $\delta\theta$ 很小，人眼不能直接分辨，故需利用目镜将其放大到人眼可分辨之视角 $\delta\theta_e$，这样，一个结构合理的望远镜的放大率(常称为正常放大率)应为

$$M=\frac{\delta\theta_e}{\delta\theta}=\frac{D}{D_e}. \tag{4.4.10}$$

若实际 M 值小于上式之值，则物镜的高分辨能力不能充分利用；通常为了观察起来舒服一些，M 应设计得比此值稍大.

由以上分析可知，望远镜分辨本领的提高从本质上说是依赖于物镜的大口径. 若物镜不能分辨之两点，用目镜再放大亦不能分辨，如图 4.4.4 所示(图中实线表示每一像斑的强度分布，虚线为合强度)，因为单纯的几何放缩并不能改变两光斑的相对交叠程度. 目镜的作用只是将依瑞利判据已经分离开的两像斑放大到人眼可以观察的程度.

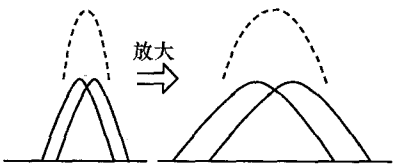


图 4.4.4 不可分辨之两像斑放大后仍不可分辨

4) 显微镜

对显微物镜(图 4.4.5)，通常物方孔径角 u 较大，不满足傍轴近似；而像方孔径角 u' 较小，满足傍轴近似. 故可首先利用(4.4.3)式得到像方分辨极限

$$\delta y'=\frac{1.22\lambda Z_i}{n'D},$$

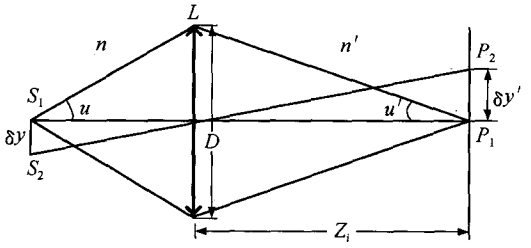


图 4.4.5 显微物镜的分辨极限

然后将此式代入物镜所满足的正弦条件

$$n\delta y\sin u = n'\delta y'\sin u', \tag{4.4.11}$$

并利用傍轴近似 $\sin u' = (D/2)/Z_i$，从而得到物方分辨极限

$$\delta y = \frac{0.61\lambda}{n\sin u}, \tag{4.4.12}$$

式中 $n\sin u$ 称为物镜的**数值孔径**，通常记为 N. A..

上式指出了提高显微镜分辨率的两条途径：

(1) 增大数值孔径. 这可以通过减小物镜焦距或者在物空间浸以高折射率的油类液体来实现，后者称为油浸物镜. 但是，由于 $\sin u$ 总小于 1，n 也不能太大，这种方法对增大 N. A. 的作用是有限制的，通常只能达到 1.5 左右.

(2) 减小照明波长 λ. 例如，可以用波长比可见光更短的紫外光(200～250 nm)照明. 更先进的方法是利用电子束的物质波代替光波进行工作，由此产生了电子显微镜. 高速运动的电子束相应的波长可达 10^{-1}～10^{-3} nm 数量级，即使考虑到电子显微镜中为校正像差而使用较小的数值孔径(孔径角不到 10°)，其放大倍数仍可高达数万至数百万倍，与普通光学显微镜只能达到数百倍相比提高 2～4 个数量级.

4.5 夫琅禾费衍射(二)：非连通孔径

所谓非连通孔径是指衍射屏上具有许多彼此不相连通的透光区域. 以下重点讨论其中最简单的情况——多缝衍射，然后对夫琅禾费衍射的一般特点及其他有关孔径的衍射作简要的介绍.

4.5.1 多缝衍射

1. 物理图像分析

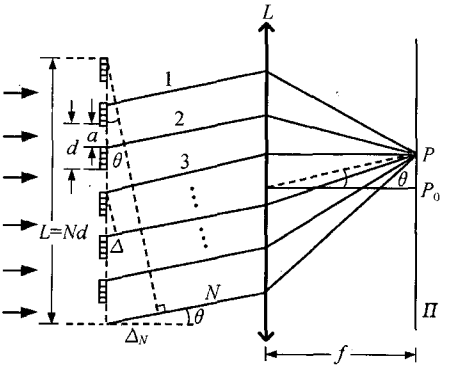


图 4.5.1 多缝夫琅禾费衍射

设衍射孔径 Σ 由 N 个互相平行的单缝在空间周期性排列而组成，每缝宽度为 a，相邻缝对应点的间隔为 d，如图 4.5.1 所示. 当单色平行光正入射时，在透镜 L 的后焦面 Π 上会得到夫琅禾费衍射图样，这种衍射称为多缝夫琅禾费衍射.

从物理图像上，多缝衍射可以看做是单缝衍射和缝间干涉两种效应共同作用的结果. 首先，就每一单缝而言，它们都在屏 Π 上产生强度分布相同的单缝夫琅禾费衍

射图样(缝作上下平移并不改变衍射图样的位置和形状). 如果这些缝彼此之间毫无关联,即彼此非相干,则 Π 上的衍射图样仍与单缝时相同,只是其强度增大到 N 倍. 但实际上,由于各缝处于平面波的同一波面,它们发出的次波是相干的;同时,只有衍射方向相同的光才能在屏 Π 上同一点相遇,所以这里又存在 N 个平行光束的干涉问题. 若屏上某点恰是单光束衍射的零点,不管这 N 个光束如何干涉,该点最终光强仍然为零. 若屏上某点并非单缝衍射的零点,则可能有两种极端情况:如果各单光束发生完全相长的干涉,则该处光场振幅将增大到单缝时的 N 倍,而光强增大到 N^2 倍;如果各单光束干涉结果是相消的,则该处光强将变为零. 因此多缝衍射图样的强度分布应具有下述特点:①其包络线形状与单缝衍射时相似,但强度增大到单缝时的 N^2 倍;②比单缝衍射时多增加了一些零点以及随之而来的起伏.

以下分析在何种情况下缝间干涉效应使得合振幅相长或相消,这时利用矢量图解法是很直观的. 为分析方便,引入以下几个参量(参见图 4.5.1):

缝间光程差 $\Delta=d\sin\theta$,

缝间相位差 $\delta=\dfrac{2\pi}{\lambda}\Delta=\dfrac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta$,

N 缝总光程差 $\Delta_N=N\Delta=Nd\sin\theta$,

N 缝总相位差① $\delta_N=\dfrac{2\pi}{\lambda}\Delta_N=N\delta$.

将每一单光束的振幅贡献看做一个分矢量,由于各缝宽度相同,在同一 θ 下各分矢量的长度应该相等,只是相邻矢量产生了大小为 δ 的辐角变化,而这 N 个首尾相接的分矢量总的转角则为 $\delta_N=N\delta$.

显然,当 $\theta=0$ 时,$\delta=0$,各分矢量取向相同(图 4.5.2(a)),合矢量为 NA_{10},相应光强为 N^2I_{10},这里 A_{10} 和 I_{10} 分别表示单缝衍射时中心点 P_0 的振幅和强度,而 P_0 点称为零级主极强.

当 $\Delta=\lambda/N$ 时,$\Delta_N=\lambda$,$\delta_N=2\pi$,N 个分矢量恰好盘曲一周(图 4.5.2(b)),故合矢量的振幅与强度均为零,相应位置称为第一零点.

当 $\Delta=3\lambda/2N$ 时,$\Delta_N=3\lambda/2$,$\delta_N=3\pi$,矢量合成图转过一圈半(图 4.5.2(c)),合矢量取得极大值,称为一级次极强.

当 $\Delta=2\lambda/N$ 时,$\Delta_N=2\lambda$,$\delta_N=4\pi$,矢量合成图转过两圈(图 4.5.2(d))②,由此得到了第二零点.

---

① 这里的 Δ_N 和 δ_N 是为了后文用矢量图解法分析零点位置而引入的,它不是第 1 缝和第 N 缝的光程差和相位差,显然,欲使 N 个矢量首尾相接盘曲一周,相邻矢量的转角必须为 $2\pi/N$ 而非 $2\pi/(N-1)$.

② 由于此时各分矢量大小相等,故图 4.5.2(d)中矢量合成图盘曲时各圈半径并不收缩,即图中两圈并不分离,终端与始端恰好相接;这里画成两圈分开仅是为了易于观察. 图(c)亦有类似情况.

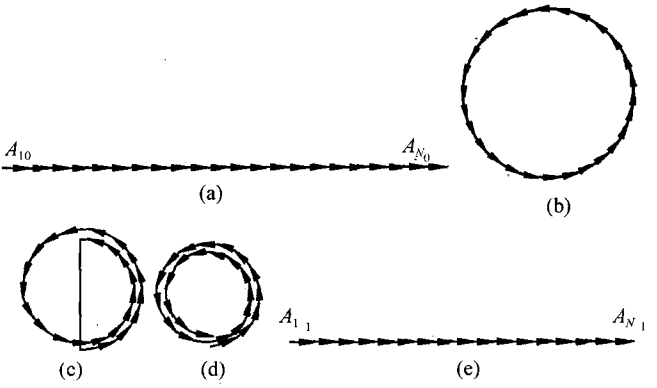


图 4.5.2 由矢量图解法分析多缝衍射中的极值点

以下类推可以依次得到各高级次极强和零点. 直到 $\Delta=\lambda$ 时，$\delta=2\pi$，各分矢量在后者比相邻前者多转过一圈的条件下又全部同向排列起来(图 4.5.2(e))，这时合成光强为 $N^2 I_{1\theta_1}$，$I_{1\theta_1}$ 表示在此衍射角 θ_1 下单缝衍射的强度，相应位置 θ_1 称为一级主极强.

θ 再增加时，又重复零点和次极大交替出现的过程，直到 $\Delta=2\lambda$ 时出现二级主极强. 然后零点和次极强又交替重复，直到 $\Delta=3\lambda$ 时出现三级主级强……

2. 光强分布曲线作图法

由上述分析可得到各主极强、零点及次极强的位置，并由此产生多缝夫琅禾费衍射光强分布曲线的以下作图方法(由对称性仅绘出单侧即可)：

(1) 以 $\sin\theta$ 为横轴，作分点(可称为一级分点)λ/a，$2\lambda/a$，$3\lambda/a$，…以这些分点为零点，以单缝衍射强度的 N^2 倍作包络线(一般画虚线)；

(2) 把每一个 λ/a 区间分成 $n=d/a$ 等份，得分点(可称为二级分点)λ/d，$2\lambda/d$，$3\lambda/d$，…每一个 λ/a 区间这种分点有 $n-1$ 个，这些点相应于主极强；

(3) 把两相邻主极强之间再分成 N 等份，得分点(可称为三级分点)λ/Nd，$2\lambda/Nd$，$3\lambda/Nd$，…两相邻主极强之间这种分点共有 $N-1$ 个，这些点为零点，中间夹着 $N-2$ 个次极强.

图 4.5.3 示出了各级分点的划分方法和意义，为表示清楚，在画二、三级分点时横坐标进行了放大. 图 4.5.4 中则以 $N=6$，$d=3a$ 为例绘出了衍射强度的分布曲线，并标出了各主极强的级别. 可见其第 3，6，…级主极强因为恰与单缝衍射的零点位置重合而消失，此现象称为**缺级**. 不难看出，此例中凡是级别是 3 的整倍数的主极强均为缺级.

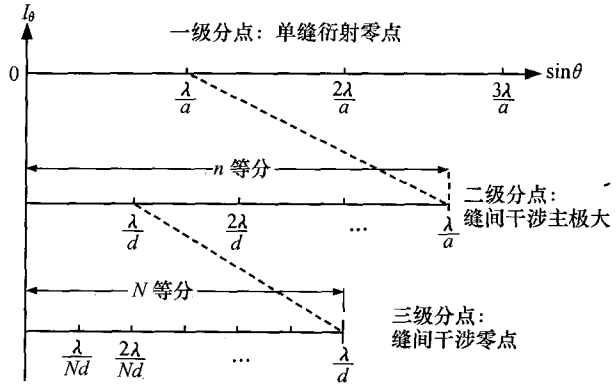


图 4.5.3 多缝衍射光强曲线横坐标各级分点的划分及意义

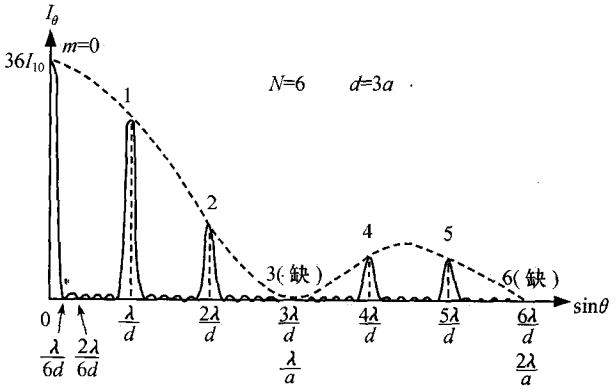


图 4.5.4 多缝衍射光强曲线之一例

3. 衍射光强公式的推导

实际上从以上分析及作图法已可以得到多缝衍射光强分布的全部特点,但为完整起见,以下用两种不同方法导出其光强公式.

1) 矢量图解法

前文已记单缝衍射在 $\theta=0$ 处的振幅为 A_{10},设其在衍射角为 θ 处振幅为 $A_{1\theta}$,则由(4.3.3)式知

$$A_{1\theta}=A_{10}\frac{\sin\alpha}{\alpha}, \tag{4.5.1}$$

其中 α 表达式与前相同,即

$$\alpha=\frac{\pi}{\lambda}a\sin\theta. \tag{4.5.2}$$

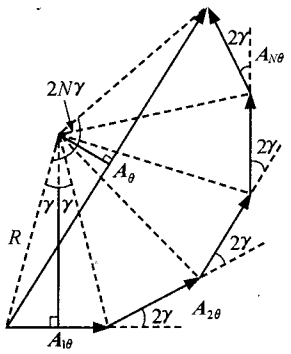


图 4.5.5 多缝衍射矢量合成图

再考虑缝间干涉作用. 将两相邻缝间的相位差 δ 的一半记为 γ，即令

$$\gamma = \frac{\pi}{\lambda} d\sin\theta, \tag{4.5.3}$$

则对于给定衍射角 θ，各缝相应的分矢量 $\boldsymbol{A}_{1\theta}, \boldsymbol{A}_{2\theta}, \cdots, \boldsymbol{A}_{N\theta}$ 首尾相接，辐角依次增大 2γ，排成了正多边形的一部分，如图 4.5.5 所示. 由图中几何关系，

$$A_\theta = 2R\sin N\gamma, \qquad A_{1\theta} = 2R\sin\gamma,$$

并利用(4.5.1)式，可得到合振幅

$$A_\theta = A_{10}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{\sin N\gamma}{\sin\gamma}, \tag{4.5.4}$$

相应光强公式为

$$I_\theta = I_{10}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\gamma}{\sin\gamma}\right)^2. \tag{4.5.5}$$

上式中最后一因子称为**缝间干涉因子**.

2) 复振幅计算法

光强公式也可以利用衍射积分公式(4.3.8)而求得，只需注意由于孔径的不连续性，此积分已化为 N 个单缝积分的叠加. 因为单缝衍射的结果已经求出，故更为方便的方法是把每一单缝光束看做一个整体，利用 N 个光束的复振幅叠加来求得总的复振幅和光强. 参见图 4.5.1，记在衍射角为 θ 时光束 1 在 P 点产生的复振幅为 $\tilde{E}_{1\theta}$，并取 $\tilde{E}_{1\theta}$ 的初相为零，则由单缝衍射的分析知

$$\tilde{E}_{1\theta} = A_{1\theta} = A_{10}\frac{\sin\alpha}{\alpha}. \tag{4.5.6}$$

因为每后一光束与前一光束相比振幅相同而相位滞后 δ，故其他光束在 P 点产生光场的复振幅可记为

$$\tilde{E}_{2\theta} = \tilde{E}_{1\theta}e^{i\delta}, \quad \tilde{E}_{3\theta} = \tilde{E}_{1\theta}e^{i2\delta}, \quad \cdots, \quad \tilde{E}_{N\theta} = \tilde{E}_{1\theta}e^{i(N-1)\delta},$$

P 点合光场复振幅

$$\begin{aligned}\tilde{E}_\theta &= \sum_{n=1}^{N}\tilde{E}_{n\theta} = \tilde{E}_{1\theta}[1 + e^{i\delta} + e^{i2\delta} + \cdots + e^{i(N-1)\delta}] \\ &= \tilde{E}_{1\theta}\frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}}.\end{aligned}$$

代入 $\tilde{E}_{1\theta}$ 表达式(4.5.6)及 $\delta=2\gamma$，可求得光强

$$I_\theta = |\tilde{E}_\theta|^2 = I_{10}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\gamma}{\sin\gamma}\right)^2,$$

此结果与(4.5.5)式完全相同.

4. 光强分布的特点

无论是从光强公式的分析，还是由前文物理图像及作图法的讨论，都可以看出

多缝衍射中光强分布的特点,现综述如下:

(1) 图样的包络线是单缝衍射光强分布的 N^2 倍,其零点位于

$$\sin\theta = M\frac{\lambda}{a}. \qquad (M = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots) \tag{4.5.7}$$

(2) 主极强位于

$$\sin\theta = m\frac{\lambda}{d}. \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{4.5.8}$$

在这些点衍射光强等于单缝衍射时相应光强的 N^2 倍. 此结论的物理意义已于前文说明,数学上,由于此时 $\gamma = m\pi$ 是函数 $(\sin N\gamma)/(\sin\gamma)$ 的可去奇点,该函数取值 N,故有 $I_\theta = N^2 I_{1\theta}$.

(3) 两相邻主极强之间有 $N-1$ 个零点,它们位于

$$\sin\theta = \left(m + \frac{K}{N}\right)\frac{\lambda}{d}. \qquad (K = 1, 2, \cdots, N-1) \tag{4.5.9}$$

从光强公式中可以看出此时缝间干涉因子为零.

(4) 两相邻主极强之间有 $N-2$ 个次极强,它们夹在上述 $N-1$ 个零点之间.

次极强的精确位置和强度可通过对缝间干涉因子求极值点及相应极值的运算来求出,也可由矢量图解法作出近似性很好的估计. 如前文所指出,这些次极强大致位于相邻两零点的中心. 以最内侧的一级次极强为例,由相应的矢量图图 4.5.2(c)可由几何方法求得合矢量 $A = A_0/(1.5\pi)$,相应强度 $I = 0.045I_0$,此值小于零级主极强的 5%. 同理可求得二级次极强强度约为 $I_0/(2.5\pi)^2 = 0.016I_0$. 其他高级次极强强度更弱且衰减很快. 故在图 4.5.4 中各次极强画得很低,在实际问题中可忽略不计.

(5) 缺级现象:若 $d = na$,则使

$$m = n'n = n'\frac{d}{a} \qquad (n' = \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{4.5.10}$$

为整数的主极强为缺级. 例如,若 $n=2$,缺级为 $\pm 2, \pm 4, \cdots$;若 $n=1.6$,缺级为 $\pm 8, \pm 16, \cdots$.

(6) 主极强的半角宽度.

以上所谓主极强或次极强位置皆指极大值点位置,有时也将该处的整个衍射斑称为主极强或次极强. 由此可将主极强中心到其一侧零点的角宽度定义为主极强的半角宽度. 在 $\sin\theta$ 轴上,此间隔为 $\lambda/(Nd)$,代入微分式

$$\Delta(\sin\theta) = \cos\theta\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd},$$

可以得到第 m 级主极强的半角宽度为

$$\Delta\theta_m = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta_m}, \tag{4.5.11}$$

式中 θ_m 为该级主极强相应的衍射角.

总之,多缝衍射的光强分布可以看做是单缝衍射与缝间干涉两个因子的乘积.前者为缓变项,决定了包络线的形状;后者为迅变项,决定了包络线的幅度(N^2 倍),多个主极强、零点及次极强的出现,以及主极强的半角宽度.与单缝衍射相比,多缝衍射有以下明显区别:

(1) 主极强的出现使亮纹增多,在 $\sin\theta$ 轴上亮纹间距从 λ/a(对单缝不包括中心亮纹)减小到 λ/d;

(2) 光能向主极强集中,使该处强度增大到单缝时的 N^2 倍;

(3) 主极强宽度变窄,如零级条纹半角宽从 λ/a 减小到 $\lambda/(Nd)$.

简言之,在多缝衍射中,亮纹变得更密、更亮、更细.这一点通过图 4.5.6 中缝数逐渐增多时衍射图样变化的照片很容易看出.该照片是利用点光源准直拍摄的,这时图样在缝长方向的扩展很小;如果使用与缝平行的线光源,则衍射图样将在缝长方向延展成光带.

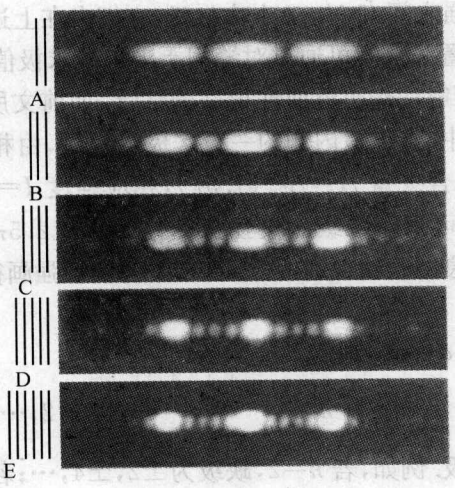


图 4.5.6　2～6 缝夫琅禾费衍射图样的照片

4.5.2　夫琅禾费衍射的一般性质及其他孔径的衍射

1. 夫琅禾费衍射的一般性质

由于夫琅禾费衍射积分可以写成傅里叶变换形式,所以对夫琅禾费衍射性质的严格讨论和推证应该借助于傅里叶变换的性质(参见习题 2.34,2.35 并推广到二维情况).这里仅从应用的角度对其特点予以简要介绍.

(1) 衍射图样的中央主极大恒为光源的几何光学像.

(2) 平移不变性 若衍射孔径在自身平面内平移,则衍射图样的强度分布不变.

(3) 中心对称性 无论透光孔形状如何,衍射图样总是关于其中心点为对称(即图样绕中心点旋转 180°后又恢复原状).

(4) 尺度反比关系 若衍射孔径的尺度在某一方向放大到原来的 M 倍,则该方向衍射图样的尺度缩小到原来的 $1/M$;反之亦然. 作为特例,若衍射孔径形状不变地放大到原来的 M 倍,则相应的衍射图样也形状不变地缩小到原来的 $1/M$;反之亦然.

实际上,性质(1)、(2)已在前文中提到,性质(4)则可视为衍射反比关系对一般二维孔径情况的表述.

2. 某些其他孔径的夫琅禾费衍射

1) 如何大致判断某些孔径的衍射图样

利用已有知识及对称性的考虑,可以对某些孔径衍射图样的形状作出大致的判断,这时应特别注意孔径的周期性结构和边缘. 例如(参见图 4.5.7),字母 E 的衍射图样可以看做竖直方向扩展的三缝衍射和水平方向扩展的单缝衍射的组合;字母 A 的衍射则可看做竖直方向扩展的单缝衍射和两个在与 A 的两斜线相垂直的方向扩展的单缝衍射的组合. 正六边形孔径有三组对边,其衍射光分别向与其垂直的方向扩展,最后图样呈六角雪花状. 正五边形孔径有取向各不相同的五条边,每条边均使衍射光在与其垂直的方向扩展(注意这种扩展亦是双侧而非单侧),故其衍射图样中环绕中心斑有 10 个辐射状突出部分. 换言之,正五边形孔径所形成的衍射斑的光强空间分布要比正六边形孔径所产生的分布(6 个突出部分)更加均匀,因此照相机中作为光阑的叶片型快门常把叶片数取为奇数.

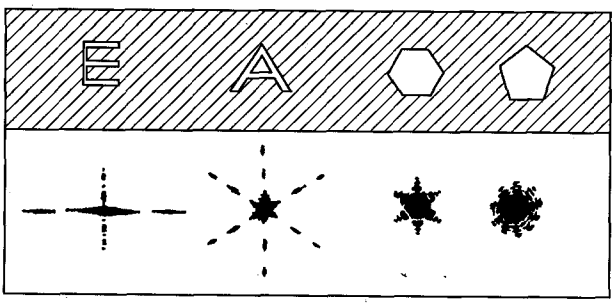


图 4.5.7 不同孔径(上排)夫琅禾费衍射图样的大致形状(下排)

*2) 相同孔径的阵列的衍射

若衍射屏上分布着 N 个形状、大小及取向均相同的透光孔径(图 4.5.8 中以圆孔作为代表,但其形状并不限于圆孔),用单色平行光照明,其夫琅禾费衍射图样有何特点呢? 对此可从物理图像上作一定性的分析.

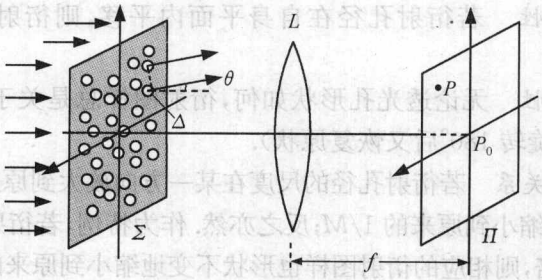


图 4.5.8　相同孔径阵列的夫琅禾费衍射

将每一孔径的衍射光束作为一个单元，屏 Π 上某点光场是 N 个单光束叠加的结果. 如果孔径的空间分布具有周期性，对给定衍射角每相邻两光束间的相位差是相同的. 若在某衍射角下两相邻光束产生相长干涉，则所有光束都是相长的，与多缝衍射类似，此时可形成主极强光斑，而衍射图样的最终形式仍可看做是孔间干涉因子受到单孔衍射因子光强分布所调制的结果.

若这些单孔径的空间分布是无规的，结果则有本质的区别. 这时除几何像点之外，屏 Π 上其他点相对应的各光束的相位差是无规分布的；只要 θ 不是太小，该变化范围即远大于 2π. 对某两束光是相长的，对另两束光则可能是相消. 当 N 很大时，其平均效果相当于非相干情况. 因此，在离几何像点较远处，衍射图样大体上与单孔径时相同，只是强度增大到 N 倍. 在几何像点，则因各光束同相叠加而使光强增至单光束时的 N^2 倍. 当然这种说明是比较粗糙的，更仔细的分析必须考虑衍射场中光强分布的无规涨落，即**散斑**结构.

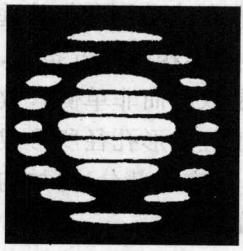


图 4.5.9　双圆孔夫琅禾费衍射图样的照片

作为一个有启发性的例子，可以举出双圆孔的夫琅禾费衍射. 该衍射图样由单孔衍射和双孔干涉两因素所确定，前者给出了图样的整体形状，后者给它叠加上一些亮暗条纹，条纹取向与双孔中心连线相垂直，如图 4.5.9 所示. 在几何配置给定时读者可自行分析衍射图样的各个参数.

4.6　光　　栅

广义地说，可以对入射光的振幅或相位作周期性空间调制的任何装置均可称为**光栅**. 依其调制量是入射光的振幅还是相位，可以把光栅分为**振幅光栅**和**相位光栅**；依其工作方式可以分为**透射光栅**和**反射光栅**；依其结构可以分为**平面光栅**和**立体(三维)光栅**. 前文所讲的多缝衍射屏，实际上就是振幅型平面透射光栅的形式之一. 在其开口区，透射波振幅与入射波相同；在其挡光区，透射波振幅为零. 这种多缝屏称为**朗奇**(V. Ronchi)**光栅**. 以下将以朗奇光栅为例分析光栅的主要性能和参数，然后介绍几种实际光栅.

4.6.1 光栅的主要性能

1. 光栅方程

在多缝衍射的分析中已指出，在平行光正入射时，主极强的位置由下式决定

$$d\sin\theta = m\lambda. \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \qquad (4.6.1)$$

对于光栅，缝距 d 常称为**光栅常数**，第 m 级主极强称为光栅的第 m 级谱线. 易见正入射时光栅的各级谱线以轴上点为中心在两侧对称排列.

当平行光斜入射时，对图 4.6.1(a)、(b)所示两种衍射方向，缝间光程差分别为

$$\Delta = d(\sin i \pm \sin\theta), \qquad (4.6.2)$$

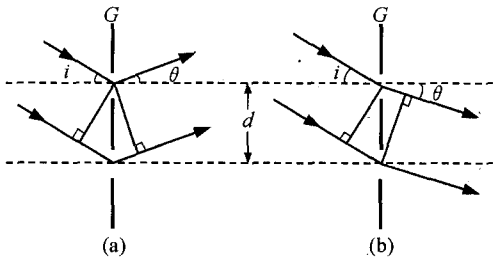


图 4.6.1　缝间光程差的推导

其中入射角 i 与衍射角 θ 均取正值，正负号分别相应于衍射线与入射线位于光栅面法线的同侧和异侧两种情况. 在作以下符号规定后，这两种情况下的主极强位置可以用同一公式

$$d(\sin i + \sin\theta) = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \qquad (4.6.3)$$

来描述，这里规定当入射线与衍射线在光栅面法线同侧时，i 与 θ 均取正值；当二者位于法线异侧时，i 与 θ 取相反符号. 当 i 给定而 θ 变化时，可将 i 取为正值，而 θ 则视衍射线与入射线位于法线同侧还是异侧分别取正值和负值.

式(4.6.3)称为**光栅方程**. 由此方程可以看出，当 $m=0$ 时，$\theta=-i$，这时衍射方向与入射方向相同，即零级谱线总是光源的几何光学像. 由于 $i\neq 0$，在零级谱线两侧所能观察到的谱线数目已不再相等，显然在入射线同侧谱线较多，如图 4.6.2 所示. 对透镜 L 与屏 Π 均为

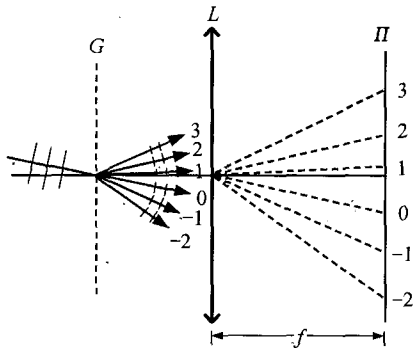


图 4.6.2　斜入射时光栅的衍射

无限大的理想情况，可由 $\theta=\pi/2$ 的极限情况计算出在给定入射角 i 下所能看到的谱线的最高级次

$$m_{\mathrm{M}}=\left[\frac{(1+\sin i)d}{\lambda}\right], \tag{4.6.4}$$

上式之中括号表示取该数值的整数部分.

2. 光栅的分光性能

由光栅方程可知，当入射光为非单色光时，不同波长的同级主极大在位置上互相错开，如图 4.6.3 所示(图中设入射光为正入射)，故光栅具有色散作用，可用作分光器件. 当入射光波长在 λ 和 λ' 之间连续分布时，除零级外每级主极强都形成位置依波长排列的连续光谱带. 以下介绍光栅光谱仪的几个主要参数，每个参数的意义已在法-珀干涉仪的讨论中作过说明.

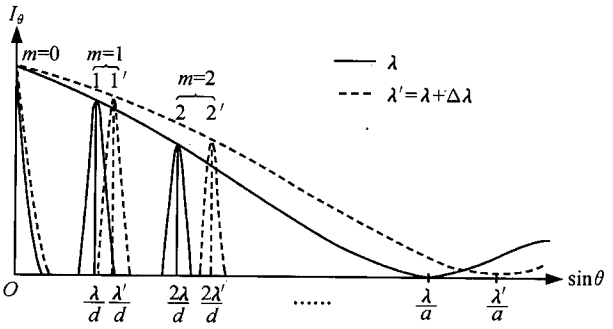


图 4.6.3 正入射时光栅的色散作用

1) 色散本领

衡量光栅的色散本领(D)可应用两个参量：**角色散本领** D_θ 和**线色散本领** D_l. 其定义如下：

$$D_\theta=\frac{\delta\theta}{\delta\lambda}, \tag{4.6.5}$$

$$D_l=\frac{\delta l}{\delta\lambda}, \tag{4.6.6}$$

D_θ 和 D_l 在数值上分别等于在同级谱中单位波长间隔的两个主极大[①]所分开的角距离和接收屏上的线距离，其常用单位分别为 rad/nm 和 mm/nm. 设接收屏前聚焦透镜的焦距为 f，傍轴近似下有 $\delta l=f\delta\theta$，故

$$D_l=fD_\theta. \tag{4.6.7}$$

① 本节中“主极大”及“谱线位置”均指所考察谱线的中心位置.

由光栅方程(4.6.3)，固定 i 值对两边微分，可以得到 $d\cos\theta\delta\theta=m\delta\lambda$，因此

$$D_\theta=\frac{\delta\theta}{\delta\lambda}=\frac{m}{d\cos\theta_m},\tag{4.6.8}$$

其中 θ_m 表示第 m 级谱线的角位置. 在正入射时，利用 $m=d\sin\theta/\lambda$，亦可将上式改写为

$$D_\theta=\frac{\tan\theta}{\lambda}.\tag{4.6.9}$$

由(4.6.8)式可得出下述结论：

(1) $m=0$ 时 $D_\theta=0$，即零级谱线无色散.

(2) 在傍轴区，$\cos\theta\approx1$，$D_\theta\approx m/d$，$D_l\approx mf/d$，对同级谱 D 为常数，$\delta\theta$ 和 δl 正比于 $\delta\lambda$，即谱线位置与其波长成线性关系，这种光谱称为匀排光谱. 这是光栅光谱区别于棱镜光谱的一个重要特点和优点，它便于人们使用线性内插法来确定 λ.

(3) D 与光栅总刻线数 N 无关.

2) 色分辨本领

色散本领只反映光谱仪将两相近谱线的中心在位置上拉开的程度，能否分辨此二谱线还取决于每一谱线本身的宽度. 反映光谱仪对两条相近谱线的分辨能力的参量是**色分辨本领**，其定义仍为

$$A=\frac{\lambda}{\delta\lambda},\tag{4.6.10}$$

式中 $\delta\lambda$ 为波长 λ 附近刚能分辨的两谱线的波长差. 根据瑞利判据，恰能分辨时两谱线中心的角色散 $\delta\theta$ 应该等于单谱线的半角宽 $\Delta\theta$(图 4.6.4)，而由(4.6.8)及(4.5.11)式，

$$\delta\theta=D_\theta\delta\lambda=\frac{m\delta\lambda}{d\cos\theta_m},$$

$$\Delta\theta=\frac{\lambda}{Nd\cos\theta_m}.$$

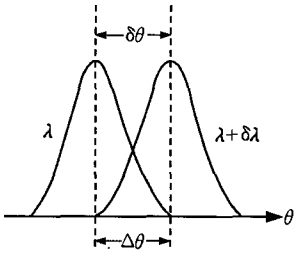


图 4.6.4　恰能分辨时两谱线的位置关系

上两式右边相等导出 $\delta\lambda=\lambda/(mN)$，故得到

$$A=\frac{\lambda}{\delta\lambda}=mN.\tag{4.6.11}$$

可见欲提高 A，需尽可能利用高级谱并增加光栅总刻线数 N.

色分辨本领还有另一种表示方式. 利用光栅方程(4.6.3)式得到 m，代入前式得

$$A=\frac{Nd}{\lambda}(\sin i+\sin\theta)=\frac{L}{\lambda}(\sin i+\sin\theta),\tag{4.6.12}$$

式中 L 为所利用的光栅宽度. 实际上，以上两式均表明，A 等于 N 缝总光程差 Δ_N 与 λ 之比. 另外亦可看到 A 与 d 无直接关系，这是由于 d 变化时 $\Delta\theta$ 与 $\delta\theta$ 依同一

比例缩放，两谱线的相对交叠情况不变.

3）自由光谱范围

自由光谱范围即谱线不发生级次交叠的最大波长范围，仍记为 $\Delta\lambda_F$. 与法-珀干涉仪中的分析相类似，$\Delta\lambda_F$ 由下述临界情况来确定：$\lambda+\Delta\lambda_F$ 的 m 级谱线恰好与 λ 的$(m+1)$级谱线位置重合(图 4.6.5)，这时有

$$\Delta = m(\lambda+\Delta\lambda_F) = (m+1)\lambda, \tag{4.6.13}$$

因此光栅的第 m 级光谱的自由光谱范围为

$$\Delta\lambda_F = \frac{\lambda}{m}. \tag{4.6.14}$$

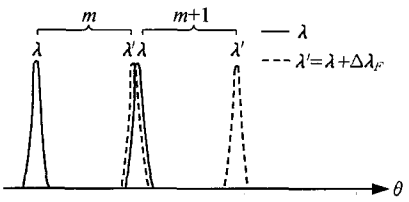


图 4.6.5 不发生级次交叠的极限情况

因每级光谱均有一定的波长范围，由图 4.6.5 及(4.6.13)式可知，上式中之 λ 实际上是指该级谱的波长下界 λ_m，故实用中所允许的波长范围常取为 $\Delta\lambda<\lambda_m/m$. 以一级谱为例，即 $\Delta\lambda<\lambda_m$，而工作波长上界 $\lambda_M=\lambda_m+\Delta\lambda<2\lambda_m$.

另外，光栅常数 d 也为工作波长设置了一个上限. 以正入射为例，主极强发生于 $d\sin\theta=m\lambda$，最小可用 m 值为 1，最大值 θ 为 $\pi/2$，故工作波长 $\lambda<d$.

最后，对于普通平面光栅给出各参量的一些数量级概念. 光栅刻痕每毫米可以有 $10^2\sim10^3$ 条，故 d 值为 $10^{-2}\sim10^{-3}$mm，相应 D_θ 为 $1\sim10'/$nm，焦距 f 为米数量级，故 D_l 为 1～10 mm/nm；光栅宽度 L 一般为厘米数量级，N 可达数万，对可见光在一级谱中可分辨的最小波长差 $\delta\lambda$ 约为 10^{-2} nm 数量级；因普通光栅 m 级不能很大，故其自由光谱范围甚宽，可达 10^2 nm 以上.

4.6.2 闪耀光栅、阶梯光栅及三维光栅

实际光栅有多种形式，本节仅取具有代表性的三种予以讨论. 还有一些有重要理论及实用意义的光栅如正弦光栅则将在 4.7.1 节中予以简单介绍.

1. 闪耀光栅

对普通光栅衍射，很大一部分能量集中于零级，而零级是无色散的，这对以分光为目的的光谱仪来说无疑是一种能量的浪费. 这种现象的产生是由于普通光栅中单缝衍射的零级主极强方向与缝间干涉的零级主极强方向完全一致. 但从物理概念上说二者是有区别的. 前者是单缝中各连续点的等光程方向，而后者则是各缝之间(以相应点，如均取中点来代表)的等光程方向. 如果采用适当方法使此二方向在空间分离开来，就可以将大部分光能(单缝衍射的零级)集中到所需光谱级(缝间干涉的非零级)上. 为此目的已发展起多种光栅，闪耀光栅即是其中之一.

闪耀光栅是一种平面反射光栅. 它是由劈形钻石刀头在磨光的金属板或镀上金属膜的玻璃板坯上刻出一系列平行等距的锯齿形槽面而制成，其截面如图 4.6.6 所示，其中槽面与光栅整体平面之间的夹角 θ_b 称为**闪耀角**，$\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{n}'$ 分别表示光栅整体平面和刻槽面的法线.

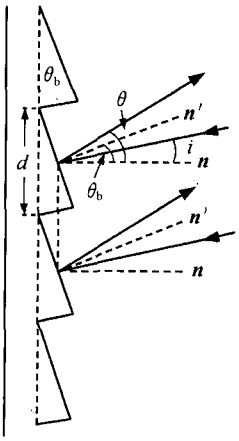


图 4.6.6　闪耀光栅的各个量

当平行光入射时，显然单槽衍射的零级主极大方向即槽面的镜面反射方向. 为考察槽间干涉的影响，可利用光栅方程，简单的分析表明，对反射光栅该方程形式仍为(4.6.3)式，即

$$\Delta = d(\sin i + \sin\theta) = m\lambda,$$

其中 i 和 θ 分别为入射线和衍射线与光栅面法线 $\boldsymbol{n}$ 的夹角，当它们位于 $\boldsymbol{n}$ 的同侧时符号相同，异侧时符号相反. 若令 $m=0$，则得到 $\theta=-i$，这意味着槽间干涉的零级主极大方向是入射光关于光栅平面的镜面反射方向. 因刻槽面与光栅平面有一夹角 θ_b，当然以上两个零级方向也在空间分离开来. 图 4.6.6 示出了当衍射光是槽面的镜面反射光的情况，由反射定律及几何关系可知此时有 $\theta=2\theta_b-i$，代入光栅方程可得到

$$\Delta = 2d\sin\theta_b\cos(\theta_b - i) = m\lambda. \qquad (4.6.15)$$

这说明单槽衍射的零级方向，也即光能的主要分布方向，已转移到槽间干涉的 m 级谱.

闪耀光栅的工作方式通常有以下两种：

(1) $i=\theta_b$，即沿槽面法线方向照射. 这时上式化为

$$\Delta = 2d\sin\theta_b = m\lambda. \qquad (4.6.16)$$

满足上式之 λ 称为第 m 级**闪耀波长**. 对给定 λ 可通过适当选取 θ_b 使得某特定 m 级光谱发生闪耀. 这时由于 $a\approx d$，槽间干涉的其他级主极强大致处于单槽衍射的零点位置而形成缺级，故闪耀级集中了大部分(>80%)光能. 图 4.6.7 以 $m=1$ 为例示出了闪耀级的形成原理，在实际光栅光谱仪中则往往不用聚焦透镜而用凹面反射镜.

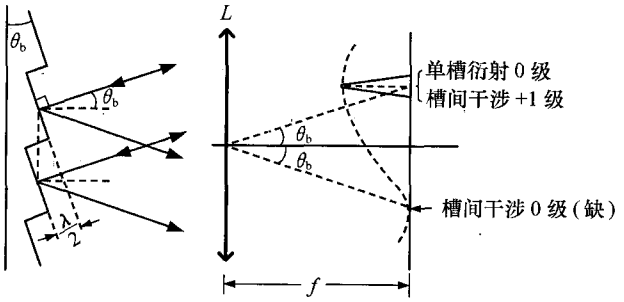


图 4.6.7　沿槽面法线入射时闪耀级(以 $m=1$ 为例)的形成

(2) $i=0$，即沿光栅平面法线照射. 这时(4.6.15)式化为

$$\Delta = d\sin 2\theta_b = m\lambda. \tag{4.6.17}$$

此情况的分析与前者完全类似.

在闪耀光栅中，各槽面的反射率是相同的，故可忽略它对振幅的调制，光栅的作用体现于它通过其表面的锯齿形结构使入射波前的相位产生了周期性的空间变化. 换言之，它所调制的是相位而非振幅，因此这种光栅属于相位光栅.

2. 阶梯光栅

另一种可以使衍射零级和干涉零级产生空间分离的相位光栅是**阶梯光栅**. 其结构如图 4.6.8 所示，它由一系列在一端彼此等距离错开的平行平面玻璃板组成，平行光通过光栅后在各个阶梯面穿出时发生衍射. 每一个阶梯的效应相当于单缝衍射，各个阶梯出射光束的相互作用相当于多缝干涉. 与普通多缝衍射所不同的是，这种阶梯形结构给相邻阶梯的出射光束引入了附加光程差，因此单阶梯衍射的零级主极大方向($\theta=0$)已不再是梯间干涉的零级方向.

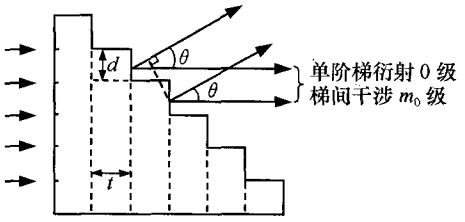


图 4.6.8　阶梯光栅

参照图 4.6.8 可求得相邻两阶梯衍射光的光程差为

$$\Delta = (n-\cos\theta)t + d\sin\theta. \tag{4.6.18}$$

式中 n 和 t 分别是玻璃板的折射率和每一玻璃板的厚度；d 为阶梯高度，它既相当于多缝衍射中的缝距 d，也相当于缝宽 a. 当衍射角 θ 满足小角度近似时，上式及光栅方程可简化为

$$\Delta = (n-1)t + d\theta = m\lambda. \tag{4.6.19}$$

在单阶梯衍射零级主极强的方向，$\theta=0$，相邻阶梯出射光的光程差为 $(n-1)t$，而相应的光谱级为

$$m_0 = \frac{(n-1)t}{\lambda}. \tag{4.6.20}$$

若 $t=1$ cm，则 m_0 对可见光可达 10^4 左右，故这种光谱仪的分辨本领很高，而自由光谱范围很窄. 又因 $a=d$，故在单阶梯衍射零级区域中只能看到一两条光谱线，此情况与闪耀光栅相类似. 阶梯光栅也可以反射式工作，这时它也可看做是一种闪耀光栅.

3. 三维光栅——晶体衍射

前文的所有分析均说明，不管其具体形式如何多种多样，光栅的作用都来源于

其自身结构的空间周期性. 从这种意义上说，任何呈周期性空间分布的客体都可以作为光栅，只要其空间周期与所考察的波长相比满足衍射现象显著的条件. 前面所讨论过的所有光栅的结构只在一个方向具有空间周期性，故均可称为一维光栅. 一块由经线和纬线交织而成的非常细密的手绢，可以作为二维光栅的例子，通过它观察远方的路灯确实会看到二维衍射图样. **三维光栅**的典型例子则是晶体. 晶体中的粒子在空间作周期性排列而构成空间点阵，在受到光照时，每一粒子均可以看做是一个散射中心，这些散射中心作为次波源在空间周期排列，使得散射次波在某些特定方向可以形成干涉极大，而另一些方向则形成干涉极小. 近年来晶体衍射已发展成一门相当成熟的技术，并已在许多方面得到应用. 以下仅介绍晶体衍射的基本原理.

1) 单层晶面的衍射——点间干涉

晶体可看做是由许多相互平行的晶面所构成，故需首先考察单层晶面的衍射. 这在入射线、衍射线及晶粒连线共面时是很容易分析的. 如图 4.6.9，图中入射方向与衍射方向分别用掠射角 i 和衍射角 θ 表示，a 为晶粒间距，光栅方程

$$\Delta = a(\cos\theta - \cos i) = m\lambda \tag{4.6.21}$$

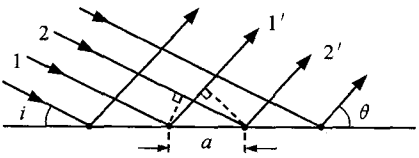


图 4.6.9　一维点阵的衍射

决定了 m 级衍射极强的方向.

为了从不同角度加深对一个问题的理解，我们不妨再回顾一下过去讲过的平面反射问题. 对普通平面，仍考虑一维情况，图 4.6.9 中直线上的粒子分布不再具有空间周期性，(4.6.21)式中的 a 也不再具有确定值. 若欲使该式对任何 a 值均成立，惟一的可能就是 $m=0$，$\theta=i$. 此情况相应于平面的镜面反射. 可见，几何光学的反射定律与波动光学中关于干涉的分析结果是完全一致的. 事实上，零级衍射方向即几何光学方向这一结论具有普遍性，它对二维平面仍然成立，而且它与该平面本身的空间结构无关. 简言之，反射波零级衍射光为镜面反射光并非是晶面结构的周期性的结果. 当然，它在本质上仍是点间干涉，即平面上各次波中心所发出的次波相干叠加的结果；不过，即使这些次波中心的分布是无规的，镜面反射方向仍是各次波的等光程方向. 晶面上粒子周期分布的效果体现在(4.6.21)式已经指出的高级衍射极强方向的出现.

2) 晶体的衍射——面间干涉及布拉格条件

由于空间点阵的三维周期性，晶体中可形成许多晶面族，每族中各晶面互相平行，而不同族之间晶面取向不同. 分析表明，当计及各种可能的晶面族时，单层晶面的衍射可只考虑零级主极强. 因此，每一晶面族最终的衍射极强方向应是其各晶面零级衍射可以发生相长干涉的方向.

图 4.6.10 对某一晶面族示出了一束平行光入射时各晶面的零级衍射光. 从图

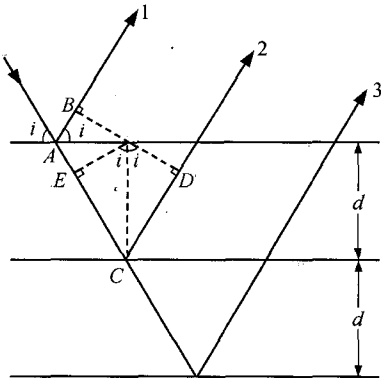


图 4.6.10　布拉格条件的推导

中可见，相邻两晶面反射光的光程差为 $\Delta=\overline{AC}+\overline{CD}-\overline{AB}$，而 $\overline{AE}=\overline{AB}$，故有

$$\Delta=\overline{EC}+\overline{CD}=2d\sin i,$$

其中 d 为相邻晶面的间距，i 为掠入射角. 欲产生面间干涉极大，必须满足

$$2d\sin i=m\lambda,\qquad(4.6.22)$$

其中 m 为正整数，此式称为**布拉格**(W. L. Bragg)**条件**. 由此条件可对晶体衍射作如下讨论：

(1) 晶体中 d 只有 10^{-1} nm 的数量级，它远远小于可见光波长，故对可见光不可能找到 i 满足上式. 欲观察晶体衍射，必须利用波长可以与 d 相比拟的波，即 X 射线①.

(2) 布拉格公式中有三个变量：d、i、λ. 不同晶面族 d 值可有所不同，故每一晶面族均有自己的布拉格条件；i 值则依赖于入射光与晶体的相对取向. 当入射方向、晶体取向及入射波长三者均给定之后，每一晶面族的 i 值均已限定，即 d、i、λ 三个量都为确定值，一般说来，它们并不见得恰好满足布拉格条件. 因此，为观察晶体衍射，常使入射波长或晶体取向二者之一发生变化，由此形成了以下两种基本方法.

第一种方法称为**劳厄**(M. von Laue)**法**，是用连续谱 X 射线照射单晶体. 这时晶体取向给定而波长可变，每一晶面族可依其 d、i 值选取适当波长来满足布拉格条件，从而在观察平面上得到一系列与各晶面族镜面反射方向相应的波长不同的亮点，这种衍射图样称为劳厄相. 第二种观察方法称为**粉末法**，即用单色光照射由大量细微晶粒所组成的晶体粉末. 这时 λ 给定而各晶粒的取向呈无规分布，对具有某一 d 值的晶面族总能找到某些取向适当的晶粒使得相应的 i 值满足布拉格条件，相应的衍射图样通常呈圆环状，称为德拜(Debye)相.

由晶体衍射可用已知波长的 X 射线研究晶体结构，或者用已知其结构的晶体来分析入射 X 射线的光谱组成. 它在结晶学和许多相关领域中有着广泛的应用.

4.6.3　棱镜光谱仪及其与光栅、法-珀干涉仪分光性能的比较

1. 棱镜光谱仪

在几何光学中已指出棱镜具有色散能力，故它也可以作为分光装置. 与法-珀干涉仪和光栅类似，棱镜光谱仪也具有以下三个基本参数：

① X 射线的波长范围为 $10^{-3}\sim10$ nm. 在短波与长波端分别与 γ 射线及远紫外线交叠；只有当波长 $\lambda\leqslant 2d$ 时才有可能发生布拉格衍射.

1) 色散本领

通常应用中棱镜均置于产生最小偏向角的方位，如图 4.6.11 所示. 由于不同波长的光最小偏向角 θ_m 不同，故棱镜的角色散本领为

$$D_\theta = \frac{\delta\theta_m}{\delta\lambda} = \frac{d\theta_m}{dn}\frac{dn}{d\lambda} = \left(\frac{dn}{d\theta_m}\right)^{-1}\frac{dn}{d\lambda}. \tag{4.6.23}$$

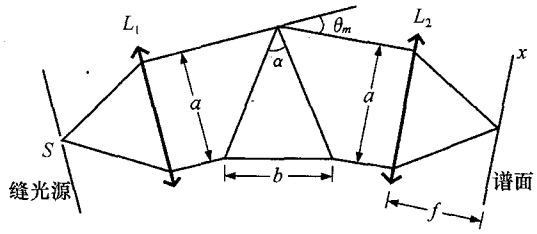


图 4.6.11　棱镜光谱仪工作原理

利用最小偏向角公式

$$n = \frac{\sin\frac{\alpha+\theta_m}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \tag{4.6.24}$$

其中 n 和 α 分别为棱镜的折射率和顶角，可求得

$$\frac{dn}{d\theta_m} = \frac{\cos\frac{\alpha+\theta_m}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

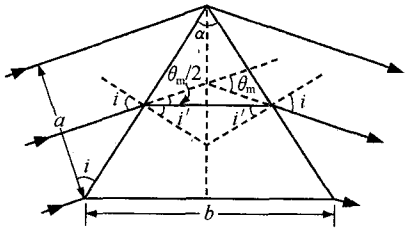


图 4.6.12　最小偏向角情况下各量之关系

由图 4.6.12 中几何关系，可知 $i' = \alpha/2$，$i = (\alpha+\theta_m)/2$，故

$$\cos\frac{\alpha+\theta_m}{2} = \cos i = \sqrt{1-\sin^2 i}$$

$$= \sqrt{1-n^2\sin^2 i'} = \sqrt{1-n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

式中各量意义如图示. 将以上结果代入(4.6.23)式，可得

$$D_\theta = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-n^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}\frac{dn}{d\lambda}. \tag{4.6.25}$$

又因(参见图 4.6.12)

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\theta_m}=\frac{\cos i}{2\sin i'}=\frac{a}{b},$$

故 D_θ 亦可表示为

$$D_\theta=\frac{b}{a}\cdot\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}, \tag{4.6.26}$$

这里 b 为棱镜底边长度，a 为射向棱镜的光束宽度. 一般材料的色散率 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda<0$，故 D_θ 为负号，表明长波谱线偏向角较小. 由上式可见，为提高色散本领，应采用 n 和 $|\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda|$ 均较大的材料；对棱镜形状则要求其顶角 α 或底边 b 尽量大.

若摄谱透镜的焦距为 f，则棱镜的线色散本领为

$$D_l=fD_\theta. \tag{4.6.27}$$

2) 色分辨本领

由图 4.6.11，在 x 方向棱镜的衍射效应相当于一个宽度为 a 的单缝的作用，故每条光谱线的半角宽度为

$$\Delta\theta=\frac{\lambda}{a};$$

另一方面，在最小偏向角附近，波长差为 $\delta\lambda$ 的两谱线的角色散为

$$\delta\theta=|D_\theta|\delta\lambda.$$

根据瑞利判据，当 $\delta\lambda$ 为刚能分辨的两谱线的波长间隔时，应有 $\delta\theta=\Delta\theta$，代入以上二式，可得到棱镜的色分辨本领为

$$A=\frac{\lambda}{\delta\lambda}=a|D_\theta|. \tag{4.6.28}$$

利用(4.6.26)式，亦可将上式化为

$$A=b\left|\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right|. \tag{4.6.29}$$

这说明当棱镜材料相同时，其色分辨本领取决于棱镜底边长度，而与其顶角 α 无关.

3) 自由光谱范围

与法-珀干涉仪和光栅不同，棱镜没有零级和高级谱，故不会产生级次重叠现象，所以对于理想的无吸收棱镜，自由光谱范围是不受限制的. 当然，实际棱镜材料总是在一定波长范围内才可以认为是透明的，其自由光谱范围取决于材料的光谱透射特性.

2. 棱镜光谱仪、光栅和法-珀干涉仪分光性能的比较

为便于比较，表 4.6.1 中列出了三种分光装置主要参数的表达式及其大致的数量级，表中设工作波段为可见光，光栅则以普通平面透射光栅(Ronchi 光栅)作为代表.

表 4.6.1 三种分光装置性能的比较

	棱 镜	普通(Ronchi)光栅	法-珀干涉仪
角色散本领 $D_\theta=\frac{\delta\theta}{\delta\lambda}$ $D_i=\frac{\delta i}{\delta\lambda}$	$D_\theta=\frac{b}{a}\cdot\frac{dn}{d\lambda}$ $\frac{b}{a}$:1 $\left\|\frac{dn}{d\lambda}\right\|$:$10^{-4}$nm^{-1} $\|D_\theta\|$:10^{-4}nm^{-1}	$D_\theta=\frac{m}{d\cos\theta}$ $D_\theta=\frac{\tan\theta}{\lambda}$(正入射) d:$10^{-2}\sim10^{-3}$mm $m=1$ 时 D_θ:$10^{-4}\sim10^{-3}$ nm^{-1}	$D_i=-\frac{1}{\lambda\tan i}$ $i\to0$ 时 $D_i\to\infty$
色分辨本领 $A=\frac{\lambda}{\delta\lambda}$	$A=b\left\|\frac{dn}{d\lambda}\right\|$ b:1$\sim$10 cm A:$10^3\sim10^4$	$A=mN$ $A=\frac{L}{\lambda}\sin\theta$ (正入射) m:数级 L:1$\sim$10 cm N:$10^3\sim10^5$ A:$10^3\sim10^5$	$A=m\mathscr{F}$ m:$10^4\sim10^6$ $\mathscr{F}$:10$\sim10^2$ A:$10^5\sim10^7$
自由光谱范围 $\Delta\lambda_F$	∞ 实际上仅受材料 光谱透射率限制	$\Delta\lambda_F=\frac{\lambda}{m}$ $\sim10^2$ nm	$\Delta\lambda_F=\frac{\lambda}{m}$ $10^{-3}\sim10^{-1}$ nm

实用中很重要的是色分辨本领与自由光谱范围两个量. 由上表可以看出,法-珀干涉仪的分辨本领是最高的. 这是由于普通光栅一般在低级次工作,要提高 A 主要靠增大 N,而这往往要受到技术条件的限制;法-珀干涉仪中 $\mathscr{F}$ 不能太大(一般为数十),但可以用增大 h 的方法很方便地得到很大的 m 值,故 A 值比普通光栅与棱镜都高. 但是,利用高衍射级次工作也使得法-珀干涉仪的自由光谱范围大大减小. 因此,在实际工作中棱镜与光栅常用来作宽谱带光的分析,而法-珀干涉仪则用来对窄带光作超精细分析. 当然,正如前文已指出,这里的光栅是指普通光栅,若用闪耀或阶梯光栅,亦可以得到级别 m 很高的谱线,从而实现高的分辨本领和窄的自由光谱范围.

*4.7 相干光成像系统的频谱分析

由电路构成的通信系统和由光路构成的成像系统在许多方面有着相似之处,它们都是用来收集、传递和改变信息的,不过前者的处理对象一般是随时间而改变的信号,后者则为随空间而改变的信号(如一幅二维图像),因此二者可用类似的数学方法进行描述. 将系统概念和处理方法、以及傅里叶分析这一工具引入光学系统,导致了近代光学的一个重要分支——**傅里叶光学**的诞生. 它主要利用空间频率谱的概念,将输入光场分解为许多不同频率的基元平面波的组合,然后研究每一频率成分是如何在系统中传输和变换的,最后将其效应综合起来得到输出光场. 系统讲解傅里叶光学是有关课程的任务,这里仅把它作为衍射课题的延伸,着眼于物理图像而非数学处理上的严格性,择要介绍某些有关概念及内容.

4.7.1 复振幅透过率及其空间频率谱的物理意义

光学成像系统的输入物一般为二维图片. 以透射观察为例,图片的空间特性可以用其**复振幅透过率** $\tilde{t}(x,y)$ 来描述;其定义为

$$\tilde{t}(x,y)=\frac{\tilde{E}_t(x,y)}{\tilde{E}_i(x,y)}, \tag{4.7.1}$$

式中 (x,y) 为物平面坐标,$\tilde{E}_i(x,y)$ 和 $\tilde{E}_t(x,y)$ 分别表示入射光场和透射光场在该平面上的复振幅分布. 因 $\tilde{E}_i$,$\tilde{E}_t$ 一般为复数,$\tilde{t}$ 一般也为复数.

若令单位振幅的平行光正入射,即取 $\tilde{E}_i(x,y)=1$,则有 $\tilde{E}_t(x,y)=\tilde{t}(x,y)$,即透射光场的复振幅分布简单地等于物平面的复振幅透过率. 在此情况下,对 $\tilde{t}(x,y)$ 作傅里叶变换,可求得透射光场的空间频率谱

$$\tilde{T}(f_x,f_y)=\iint_{-\infty}^{\infty}\tilde{t}(x,y)\exp[-\mathrm{i}2\pi(f_xx+f_yy)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{4.7.2}$$

而透射光场可表示为

$$\tilde{t}(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}\tilde{T}(f_x,f_y)\exp[\mathrm{i}2\pi(f_xx+f_yy)]\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y, \tag{4.7.3}$$

以上各式中 f_x、f_y 表示透射光场在 x,y 方向的空间频率. 显然 $\exp[\mathrm{i}2\pi(f_xx+f_yy)]$ 表示一列在 x、y、z 方向波矢分量分别为

$$k_x=2\pi f_x,\qquad k_y=2\pi f_y,\qquad k_z=\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2} \tag{4.7.4}$$

的基元平面波. 因 $k=2\pi/\lambda$,对给定 λ,一旦 f_x、f_y 确定,k_x、k_y、k_z 皆已确定,此平面波的传播方向也已确定,它可用波矢 $\boldsymbol{k}$ 的方向余弦表示,即

$$\cos\alpha_x=\frac{k_x}{k},\qquad \cos\alpha_y=\frac{k_y}{k},\qquad \cos\alpha_z=\frac{k_z}{k}. \tag{4.7.5}$$

(4.7.3)式为一叠加积分,它表明透射波场可看做一系列传播方向不同的平面波的叠加,而其中在 x、y 方向空间频率分别为 f_x、f_y 的平面波的复振幅为 $\tilde{T}(f_x,f_y)$.

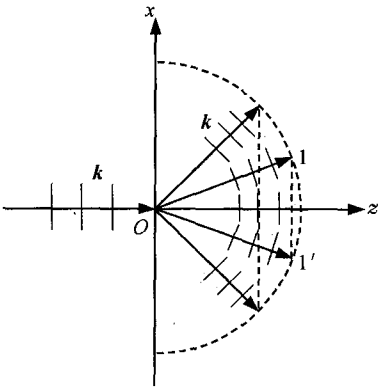


图 4.7.1 一维光栅透射波波矢的空间分布

图 4.7.1 中以平面波正入射、物平面复振幅透过率只随 x 变化的一维情况(如普通光栅)为例示出了透射波波矢量的空间分布. 以同一点 O 作为起点时,各波矢 $\boldsymbol{k}$ 的终端分布在以 O 为中心、k 为半径的右半圆上. $\tilde{t}(x)$ 为实数时,可证(习题 2.35)$\tilde{T}(-f_x)=\tilde{T}^*(f_x)$,$|\tilde{T}(-f_x)|=|\tilde{T}(f_x)|$,即向某一方向(如图中 1)的衍射总是与向其 yz 平面的镜像方向(图中 1′)的衍射同时存在的,而且此二基元平面波具有相等的强度. 正入射时夫琅禾费衍射图样的中心对称性已经证实了这一点.

物理上更简单的一种光栅是**振幅型正弦光栅**,它可由用照相底片记录两列平行光干涉的光强分布而得到,

经适当处理后，底片的振幅透过率正比于曝光时的光强分布，即

$$t(x)=\frac{1}{2}[1+V\cos(2\pi f_0 x)], \tag{4.7.6}$$

其中 $f_0=1/d$ 为光栅基频，d 为光栅周期，V 为记录时条纹的衬比度，系数 1/2 是为了保证 $t\leqslant 1$ 而引入. 即使不对上式进行傅里叶变换，利用欧拉公式将其展为复指数形式，即

$$t(x)=\frac{1}{2}+\frac{V}{4}\exp(\mathrm{i}2\pi f_0 x)+\frac{V}{4}\exp(-\mathrm{i}2\pi f_0 x), \tag{4.7.7}$$

亦能明显看出各项所代表的物理意义(参见图 4.7.2)：第一项(零级光)表示单位振幅的平行光正入射时的直透光，其波矢记为 $\boldsymbol{k}_0$；第二项(1 级衍射光)表示传播方向在 xz 平面内指向右上方的平面衍射光，其波矢在图中记为 $\boldsymbol{k}_1$，由其相应的空间频率 $f_x=f_0$ 以及关系式

$$\sin\theta_x=\cos\alpha_x=\frac{k_x}{k}=\frac{2\pi f_0}{2\pi/\lambda}=\lambda f_0=\frac{\lambda}{d}, \tag{4.7.8}$$

可以确定其衍射角 θ_x；第三项(−1 级衍射光)平面波的空间频率 $f_x=-f_0$，显然其衍射角为 $-\theta_x$，相应的波矢 $\boldsymbol{k}_{-1}$ 与 $\boldsymbol{k}_1$ 关于平面 yz 对称. 这些结果与朗奇光栅的光栅方程是一致的，只是这时高级衍射光已不复出现.

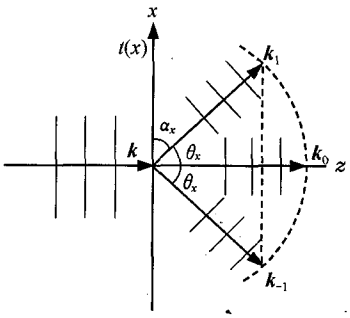


图 4.7.2 振幅型正弦光栅的衍射

由此可见，一幅振幅型透射图片($\tilde{t}(x,y)$为实数 $t(x,y)$)的引入相当于对入射波面的振幅分布进行了空间调制，从而使透射波场中产生了向不同方向传播的平面衍射波；在平面波正入射时，这些衍射波的传播方向是关于 z 轴对称分布的. 由于任何形式的二维结构 $t(x,y)$ 总能分解为有限多(对周期性结构)或无限多(对非周期性结构)正弦或余弦函数的叠加，故此时任何图片的透射波场总能看成是有限或无限多对关于 z 轴对称分布的基元平面衍射波的组合.

4.7.2 透镜的傅里叶变换作用

4.3 节中曾从(4.3.5)式出发，对于孔径简单地分为透光区及不透光区的情况导出了(4.3.8)式. 若将这种简单孔径推广为复振幅透过率为 $\tilde{t}(x,y)$ 的衍射屏，即上文之物平面，并仍设单位振幅之平行光正入射，显然(4.3.5)式中之 $\tilde{E}(Q)=\tilde{t}(x,y)$；仍将与积分无关的常数合并为复常数 C，记透镜后焦面坐标为 x'、y'，则该式化为

$$\tilde{E}(x',y')=C\iint_{-\infty}^{\infty}\tilde{t}(x,y)\exp(-\mathrm{i}k\Delta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4.7.9}$$

将二维情况下的表达式(4.3.16)

$$\Delta=x\sin\theta_x+y\sin\theta_y$$

以及傍轴近似关系

$$\sin\theta_x\approx\theta_x\approx x'/f,\qquad \sin\theta_y\approx\theta_y\approx y'/f$$

代入(4.7.9)式，可以得到

$$\tilde{E}(x',y') = C\iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{t}(x,y)\exp\left[-\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda f}(x'x+y'y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= C\tilde{T}(f_x,f_y), \tag{4.7.10}$$

式中

$$f_x = \frac{x'}{\lambda f}, \qquad f_y = \frac{y'}{\lambda f}, \tag{4.7.11}$$

这可由将(4.7.10)式与(4.7.2)式相比较而看出. 因此,若不考虑与相对光强分布无关的复常数因子,透镜后焦面上光场的复振幅分布实际代表了物平面透射光场的二维傅里叶变换,即其空间频率谱分布. 这样,用透镜和相干光入射即可即时(忽略光的传播时间)实现由光场复振幅到其空间频率谱的转换.

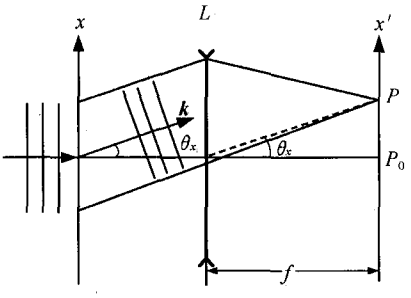


图 4.7.3 透镜的傅里叶变换功能

透镜的这种傅里叶变换功能从物理图像上是容易理解的. 图 4.7.3 中示出了物平面透射波中波矢为 k 的某一基元平面衍射波,它在 x 方向的衍射角为 θ_x. 该平面波在透镜 L 后焦面会聚点 P 的坐标 x' 应满足

$$x' = f\tan\theta_x.$$

傍轴近似下,有 $\tan\theta_x \approx \sin\theta_x$,又因

$$k_x = 2\pi f_x = k\sin\theta_x = \frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta_x,$$

故有 $\sin\theta_x = \lambda f_x$;对 y 方向可作同理分析,最后得到

$$x' = \lambda f f_x, \qquad y' = \lambda f f_y, \tag{4.7.12}$$

此即(4.7.11)式之关系. 可见透镜后焦面上一个点,或说一对坐标(x',y')对应着一个衍射方向,即一对特定的基元平面波空间频率(f_x,f_y);该点光场的强弱则代表了该基元平面波的强度. 这样,物平面空间频率谱的分布和强弱就在透镜后焦面以夫琅禾费衍射图样的形式,并按照固定的标度关系(4.7.11)或(4.7.12)式直观地显示出来,所以 L 的后焦面称为**频谱面**.

从这种意义上,前文所有在透镜后焦面观察的夫琅禾费衍射均可看做是一种物面光场与其空间频率谱的变换过程. 例如,对缝距为 d 的朗奇光栅,其基频为 $f_0 = 1/d$,第 m 级衍射波的空间频率 $f_m = mf_0$,它在谱面上的相应位置应为 $x'_m = \lambda f f_m = m\lambda f/d$,在傍轴近似下,这与 4.5.1 节中的结果是完全相同的.

附带说明,本节推导中所用傍轴近似对于普通透镜是必要的. 但专门的傅里叶变换透镜是按照主光线满足正弦条件设计的,其工作范围并不仅限于傍轴区.

4.7.3 阿贝成像理论及空间滤波

1. 阿贝成像理论

图 4.7.4 为相干平行光照明下像的形成的示意图,其中 O、L、F、I 分别表示物平面、成像透镜、焦平面和像平面. 通常关于成像的分析利用点点对应的观念,即物点 A、B、C 经 L 后分别成像于 A_i、B_i、C_i,后者在几何光学中为理想点,在波动光学中为艾里斑. 这种观念可称为一步成像分析法.

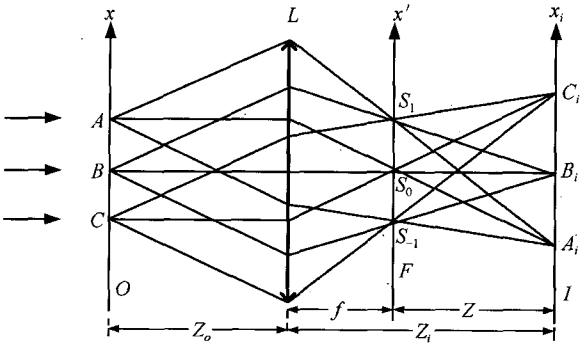


图 4.7.4 分析成像的两种观点

1873 年,阿贝(E. Abbe)提出了另一种观念,即成像过程可以分为两步考察:第一步是从物平面到谱平面(L 后焦面),此过程中物面光场转换为其空间频率谱;第二步是从谱平面到像平面,此过程中物的空间频率谱重新转换为像面光场. 这种两步成像观点称为**阿贝成像理论**.

第一步属于夫琅禾费衍射 . 仍设物平面复振幅透过率为 $\tilde{t}(x,y)$,则频谱面光场分布即(4.7.10)式所得之 $C\tilde{T}(x',y')$. 第二步中因谱面与像面相距较近,中间又无任何光学器件,从谱面到像面的衍射显然为菲涅耳衍射,应用菲涅耳衍射公式(4.1.12),注意将该处坐标 x、y、x'、y' 分别改换为图 4.7.4 所示之 x'、y'、x_i、y_i,然后将式中 $\tilde{E}(x,y)$ 代之以 $C\tilde{T}(x',y')$,可得

$$\tilde{E}(x_i,y_i)=C_1\iint_{-\infty}^{\infty}C\tilde{T}(x',y')\exp\left[\mathrm{i}\frac{\pi}{\lambda Z}(x'^2+y'^2)\right]\exp\left[-\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda Z}(x'x_i+y'y_i)\right]\mathrm{d}x'\mathrm{d}y',$$

其中 C_1 为一与积分无关的复数因子,$Z=Z_i-f$ 为谱面到像面的距离. 较精细的分析表明,这里之复系数 C 含有一会聚球面波相位因子 $\exp[-\mathrm{i}\pi(x'^2+y'^2)/\lambda Z]$,它在物理上表示从物点发出射向谱面的照明光(在不考虑衍射等因素时)是会聚于像点的球面波;易见该因子恰与上式积分号内之二次相位因子 $\exp[\mathrm{i}\pi(x'^2+y'^2)/\lambda Z]$ 相消,从而上式简化为

$$\tilde{E}(x_i,y_i)=C_2\iint_{-\infty}^{\infty}\tilde{T}(x',y')\exp\left[-\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda Z}(x'x_i+y'y_i)\right]\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'. \tag{4.7.13}$$

式中 C_2 为另一与积分无关的复数因子. 这样,$C\tilde{T}$ 的菲涅耳衍射已转化为 $\tilde{T}$ 的夫琅禾费衍射①,即以上两步中每一步都相当于一次二维傅里叶变换.

根据傅里叶变换的性质(参见习题 2.34(2)、(4)并推广到二维情况),可由(4.7.10)、(4.7.11)及(4.7.13)诸式得到

$$\tilde{E}(x_i,y_i)=C_3\tilde{t}\left(\frac{x_i}{M},\frac{y_i}{M}\right), \tag{4.7.14}$$

式中 C_3 为复常数因子,而

$$M=-\frac{Z}{f}=-\frac{Z_i}{Z_o}$$

① 一般地可以证明,为会聚波所照明的孔径光场在照明波会聚平面的菲涅耳衍射即该孔径函数本身的夫琅禾费衍射.

为像的横向放大率. 像面光强分布则为

$$I(x_i,y_i)=|C_3|^2 I_0\left(\frac{x_i}{M},\frac{y_i}{M}\right), \tag{4.7.15}$$

其中 $I_0(x,y)=|\tilde{t}(x,y)|^2$ 表示物面光强分布. 以上两式表明,在对透镜孔径及谱面大小不加任何限制的理想情况下,除一常数因子和比例缩放之外,像面光场的复振幅和强度分布完全复现了物平面光场的复振幅和强度分布.

阿贝成像原理可简单地用下列模式来表示:

$$\text{物}\ \tilde{t}(x,y)\xrightarrow[\text{F. T.}]{\text{分解}}\text{谱}\ \tilde{T}(f_x,f_y)\xrightarrow[\text{F. T.}]{\text{综合}}\text{像}\ \tilde{t}\left(\frac{x_i}{M},\frac{y_i}{M}\right)$$

其中第一步相当于将物面光场分解为空间频率谱,第二步再把这些不同空频成分的贡献综合起来形成像面光场. 两次傅里叶变换(F. T.)使得像复原了物,只是发生了方向倒转($M<0$)及尺度变化.

图 4.7.4 中以振幅型正弦光栅作为物说明了这一过程. 在平行光正入射照明时,由 4.7.1 节的分析可知,透过物平面的光形成了零级直透光及±1 级衍射光共三列基元平面波,它们分别会聚于透镜 L 后焦面的 S_0、S_1、S_{-1} 三点,此即物的空间频率谱. 在第二步,S_0、S_1、S_{-1} 作为具有确定的相位关系的相干点源发出球面波继续向右传播并发生干涉,从而在像平面 I 上重新得到放大倍率为 M 的正弦光栅图样.

阿贝成像原理的价值在于它提供了一种全新的频谱语言①来描述和分析成像过程. 既然光场与其频谱构成一个一一对应的傅里叶变换对,而且用透镜又很容易实现光场的傅里叶变换,这就启示人们可以*用分析频谱的方法来分析物面结构,用改变频谱的方法来改变像面结构*,从而实现二维图像信息的检测和变换.

2. 频谱分析——分析频谱以推断物面结构

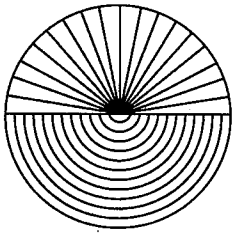


图 4.7.5 环楔探测器

空间频率谱是物面结构的另一种表现形式. 例如,直流(零频)成分代表了 $t(x,y)$ 的平均值;低频成分代表其缓变部分;而高频成分则相应于其迅变部分,如图像的细节、边缘以及细微的颗粒噪声. 根据频谱分布的方向性还可判断物面结构的方向性. 因此,在频谱面设置适当的探测器,记录频谱的分布并加以分析,即可推知物面结构的特点,这种方法称为**频谱分析**. 图 4.7.5 为一种环楔探测器的示意图,其中环形部分探测频谱的径向分布,楔形部分探测频谱的方位分布,各部分输出可与计算机相连进行分析和判读. 它已经在许多领域得到实际应用.

3. 空间滤波——改变频谱以改变像面结构

在图 4.7.4 中,若物面的各频谱成分能完全地不变地传递到像面,自然像与物的结构是等同的. 若人为地将某种可以改变光场的振幅或相位的模板放在焦面 F,使得透过模板的频谱分布发生改变,当然像与物亦不再相同. *这种改变空间频率谱的操作称为*__空间滤波__,相应的模板称

① 本节中频谱皆指空间频率谱.

为**空间滤波器**.

前文已说明,不论物平面放在透镜之前何种位置,在透镜后焦面总可以得到物面光场的傅里叶变换,不过一般情况下此变换式前面有一个复数因子 C,它在物理上代表一种相位弯曲. 可以证明,若将物体准确地置于透镜前焦面,则此相位弯曲项消失. 所以,为了实现精确的傅里叶变换,经常采用图 4.7.6 所示的所谓 $4f$ 系统,其中 S 为单色点光源,L_0 为准直透镜,O、F、I 分别为物面、谱面和像面,它们分别位于 L_1、L_2 的前后焦面,f 为 L_1、L_2 的焦距. 在忽略某些不影响光场分布的常数时,从 O 面到 F 面,以及从 F 面到 I 面,光场分布均经历一次傅里叶变换. 仍设物面光场分布为 $\tilde{t}(x,y)$,则 F 面的光场可分别用空间频率坐标 f_x、f_y 或谱平面坐标 x'、y' 表示为(忽略某些复常数因子,下同)

$$\tilde{T}(f_x,f_y)=\tilde{T}\left(\frac{x'}{\lambda f},\frac{y'}{\lambda f}\right)=\mathscr{F}\{\tilde{t}(x,y)\}, \tag{4.7.16}$$

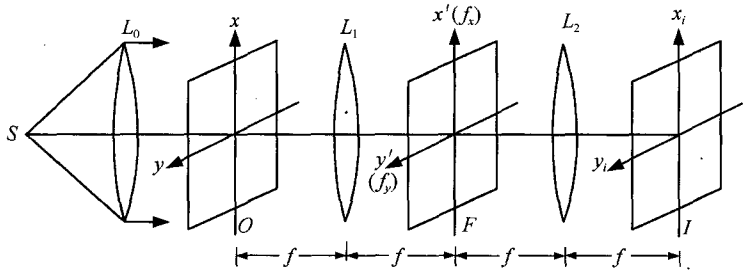


图 4.7.6 $4f$ 相干光处理系统

这里 $\mathscr{F}$ 仍为傅里叶变换算符. 若 F 面不加任何模板,则像面光场分布为

$$\tilde{E}(x_i,y_i)=\mathscr{F}\{\tilde{T}(f_x,f_y)\}=\tilde{t}(-x_i,-y_i), \tag{4.7.17}$$

这说明像与物等同,只是方位倒转($M=-1$). 若 F 面放置一块复振幅透过率为

$$\tilde{H}(f_x,f_y)=\tilde{H}\left(\frac{x'}{\lambda f},\frac{y'}{\lambda f}\right)$$

的模板,则透过模板的光场为 $\tilde{T}(f_x,f_y)\tilde{H}(f_x,f_y)$,而像面光场的复振幅分布变为

$$\tilde{E}(x_i,y_i)=\mathscr{F}\{\tilde{T}(f_x,f_y)\tilde{H}(f_x,f_y)\}, \tag{4.7.18}$$

像面光强分布则为

$$I(x_i,y_i)=|\tilde{E}(x_i,y_i)|^2.$$

由此可以看出,模板的引入相当于使透过谱面的光场由 $\tilde{T}$ 变成了 $\tilde{T}\tilde{H}$,即将物的频谱 $\tilde{T}$ 改变为像的频谱 $\tilde{T}\tilde{H}$,谱的改变必然伴随着像的改变. 故可适当选取 $\tilde{H}(f_x,f_y)$ 的形式,使得它对输入的 $\tilde{T}(f_x,f_y)$ 产生不同的空间调制,从而使像与物相比产生不同的变化. 以下介绍几种简单情况.

1) 方向滤波

仅让某一方向的频谱通过的滤波操作称为**方向滤波**,它可以突出某一方向的结构,而抑制其他方向的结构. 图 4.7.7 以正交网格状输入物为例说明了这一点. 图中(a)、(b)分别为物与其频谱,(c)为两种滤波方式(阴影区为遮挡部分),(d)为相应的输出像. 这种方法有许多实际应用,例如从图片中滤掉其扫描线背景,检出某一特定方向的结构,集成电路检验等.

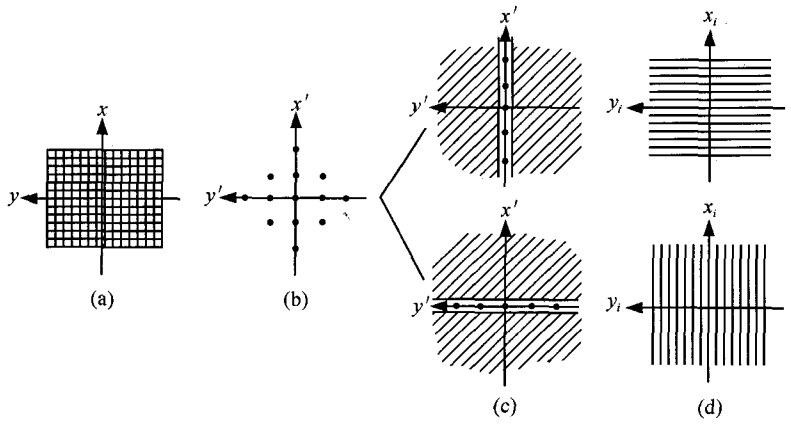
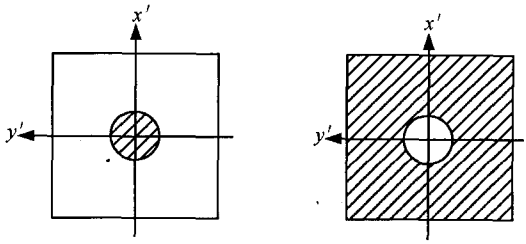


图 4.7.7 方向滤波及其效果

2) 高通滤波

仅让高频成分通过的滤波过程称为**高通滤波**，相应滤波器称为高通滤波器. 其最简单的结构是一个不透光小圆屏，如图 4.7.8(a)所示，将它置于谱面中心，可以挡掉零频和低频成分. 高通滤波操作可以突出图像的细节部分，特别是边缘，经常用于勾画图形的轮廓线.



(a) 高通滤波器　　(b) 低通滤波器

图 4.7.8

3) 低通滤波

仅让低频成分通过的滤波过程称为**低通滤波**，相应的滤波器称为低通滤波器. 不透光屏上的一个小圆孔即可作为一种简单的低通滤波器，如图 4.7.8(b)所示. 低通滤波操作常用于压低图片的噪声或某些具有细密结构的背景(如印刷过程中的点阵结构)，使图像均匀化而变得柔和些(当然以损失一些细节为代价).

以上各例中所用滤波模板都仅分为透光或不透光两种区域，即滤波函数 $\widetilde{H}$ 在不同区域仅具有 1 和 0 两个分立值，这种滤波器可称为二元滤波器. 实际上 $\widetilde{H}(f_x, f_y)$亦可以是渐变的，甚至可以做成复数形式，这时它可以对入射光场的振幅或相位进行更精细的调制，从而实现更复杂的功能，如图像的消模糊、相位物体的观察及图像识别等. 对这一技术的详细讨论已属于光学信息处理的范畴.

4. 相干光成像系统的截止频率

在成像系统中，尽管物平面光场分布可以有各种不同的空间频率成分，它们相应于向不同方向衍射的基元平面波，但是由于光阑等因素，并非所有空间频率成分都可传输到像面. 可以通过成像系统的频带中的最高空间频率称为**截止频率**.

若频谱面不设置模板，则在相干光成像系统中对通频带的限制仅来自透镜 L 的有限大小. 图 4.7.9 以单透镜成像为例示出了截止频率的确定方法. 设透镜直径为 D，在傍轴近似下，与可以通过透镜的最高空间频率 f_{oM} 相应的衍射角 $\theta_M = D/(2Z_o)$，由

$$2\pi f_{oM} = k\sin\theta_M \approx k\theta_M \text{ 及 } k = 2\pi/\lambda$$

可以得到

$$f_{oM} = \frac{\theta_M}{\lambda} = \frac{D}{2\lambda Z_o}, \qquad (4.7.19)$$

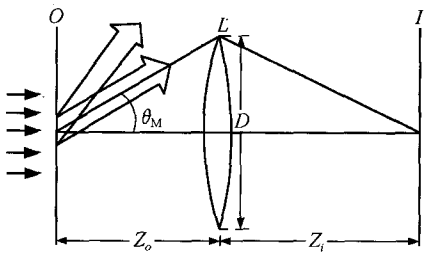


图 4.7.9 物方截止频率的确定

这里 f_{oM} 称为**物方截止频率**. 根据成像系统关于光轴的对称性，可以看出此频率对于物面的各个方向都是相同的. 利用成像放大率公式可以将它换算为**像方截止频率**

$$f_{iM} = \frac{f_{oM}}{|M|} = \frac{D}{2\lambda Z_i}. \qquad (4.7.20)$$

例如，若照相机透镜直径 $D=22$ mm，$\lambda=550$ nm，物距 $Z_o=1$ m，可求得 $f_{oM}=20$ mm^{-1}. 超过此值的空间频率成分不能通过透镜. 若物为光栅，当其每毫米刻痕数超过 20 条时将不能成像. 因此，透镜的有限孔径实际上起到了低通滤波器的作用.

*4.8 全息照相的原理与特点

我们知道，光场具有振幅和相位两种信息，但普通照片仅记录了其强度分布，相位信息已经丧失. 能否把这两种信息同时记录下来呢？1948 年，伽伯(D. Gabor)提出了一种全新的思想，它利用干涉的方法实现了光场振幅和相位的同时记录，所得到的干涉图称为**全息图**或全息照片，这种技术则称为全息术或**全息学**(Holography，词头 holo 来源于希腊语，是完整之意). 随着 20 世纪 60 年代激光器的出现，全息学得到了蓬勃的发展，目前已在许多方面如全息干涉计量、全息存储、全息显示、信息处理等领域中得到广泛应用.

1. 全息照相的基本原理

前文已多次指出，任何探测器或感光介质所记录的只能是光强分布. 所谓同时记录某光场的振幅和相位，是指引入另一个振幅与相位分布已知的光场与前者发生干涉. 一般将前者称为**物光**，后者称为**参考光**. 这时实际记录的仍是二光场干涉图样的光强分布，但其中已蕴含着物光场的振幅和相位信息.

例如，若用一单色点光源 S 照射记录胶片 H，则在 H 上傍轴区呈现一片均匀的光强分布，这时该球面波 O(物光)的相位信息丧失了. 若引入另一同波长平面波 R(参考光)与此球面波发生干涉(图 4.8.1(a))，则干涉图样呈牛顿环状，每一环带相应于 H 平面上球面波前的一条等相线，曝光量极大和极小的环分别相应于球面波与平面波同相和反相的区域，邻环间距则是球面波前相位变化 2π 所对应的径向距离. 这样，H 面上球面波前的相位变化规律即可通过干涉条纹的形状和疏密显示出来. 此例中经曝光和处理后的胶片实质上是一种振幅透过率渐变的波带片，亦即点物 S 的同轴(参考光与物光共轴)全息图. 若用 R 的共轭光 R^* 照射处理后的底片 H，由波带片性质可知透射光将会聚于焦点 I(这时同一侧只有一个焦点)，而 I 与 S 位置等同(图 4.8.1(b)). 若把 S 当作物点，I 当作像点，则图中(a)、(b)两过程分别相应于全息图的**记录**和全息像的**再现**过程.

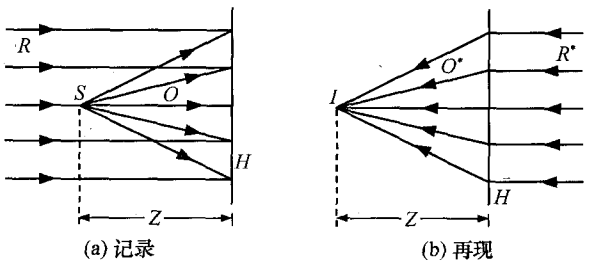


图 4.8.1 点物 S 的同轴全息图的记录和再现

一般地，全息照相的原理可用以下数学形式来描述. 设 (x,y) 为全息片 H 上之坐标系，记录过程中物光与参考光(后者通常采用平面波或球面波)在该平面的复振幅分布可分别表示为

$$\tilde{E}_O(x,y) = A_O(x,y)\exp[\mathrm{i}\varphi_O(x,y)], \tag{4.8.1}$$

$$\tilde{E}_R(x,y) = A_R(x,y)\exp[\mathrm{i}\varphi_R(x,y)]. \tag{4.8.2}$$

全息片上的光强分布为

$$\begin{aligned} I(x,y) &= |\tilde{E}_O+\tilde{E}_R|^2 = |\tilde{E}_O|^2+|\tilde{E}_R|^2+\tilde{E}_O\tilde{E}_R^*+\tilde{E}_O^*\tilde{E}_R \\ &= A_O^2+A_R^2+2A_OA_R\cos(\varphi_O-\varphi_R). \end{aligned} \tag{4.8.3}$$

上式中第三项以干涉条纹的形式将物波相位 φ_O 通过与参考相位 φ_R 的差值记录下来. 将已曝光的底片经适当处理，使得其振幅透过率与曝光时的光强分布成线性关系，即

$$t = t_0+\beta I = t_0+\beta(|\tilde{E}_O|^2+|\tilde{E}_R|^2)+\beta\tilde{E}_O\tilde{E}_R^*+\beta\tilde{E}_O^*\tilde{E}_R, \tag{4.8.4}$$

式中 t_0、β 为常数，$\beta>0$ 相应于正片，$\beta<0$ 相应于负片.

若用与记录时同波长的相干光 C(**再现光**)照明全息图，设其在 H 平面的复振幅分布为

$$\tilde{E}_C(x,y) = A_C(x,y)\exp[\mathrm{i}\varphi_C(x,y)], \tag{4.8.5}$$

则透过全息片的光场为

$$\tilde{E}_t(x,y) = t\tilde{E}_C = t_0\tilde{E}_C+\beta\tilde{E}_C(|\tilde{E}_O|^2+|\tilde{E}_R|^2)+\beta\tilde{E}_C\tilde{E}_O\tilde{E}_R^*+\beta\tilde{E}_C\tilde{E}_O^*\tilde{E}_R. \tag{4.8.6}$$

显然，上式右端第一项为直透光；第二项相当于直透光受到 $A_O^2+A_R^2$ 的调制，由于 $A_O^2(x,y)$ 和 $A_R^2(x,y)$ 在 H 平面上一般变化不大，此调制起伏小而缓慢，相应透射光的方向分布仍在直透光附近；第三、第四项分别包含 $\tilde{E}_O$ 和 $\tilde{E}_O^*$，故为成像光.

当 $\tilde{E}_C=\tilde{E}_R$，即用与参考光等同的再现光照明全息图时，$\tilde{E}_C\tilde{E}_R^*=|\tilde{E}_R|^2$ 为实数，(4.8.6)式右端第三项正比于原物光 $\tilde{E}_O$，故该光场可重现与原物有相同体视特性的无畸变的像，此像称为**原始像**及**正视像**；此时第四项中含有原物光的共轭光因子 $\tilde{E}_O^*$，故该光场可重现与原物有相反体视特性的像，此像称为**共轭像**及**膺视像**，但因 $\tilde{E}_O^*$ 前的系数 $\tilde{E}_R^2$ 一般并非实数，共轭像通常会有畸变. 当 $\tilde{E}_C=\tilde{E}_R^*$，即用原参考光的共轭光照明全息图时，第四项中 $\tilde{E}_O^*$ 的系数 $\tilde{E}_C\tilde{E}_R=|\tilde{E}_R|^2$ 为实数，故共轭像无畸变；而第三项相应的原始像有畸变. 当再现光既非 $\tilde{E}_R$ 又非 $\tilde{E}_R^*$ 时，两像通常都有畸变.

由于以上记录过程中物光和参考光在 H 平面的分布均属菲涅耳衍射，物光与参考光亦不共轴，故所形成的全息图称为**离轴菲涅耳全息图**. 对这种全息图，除原始像恒为正视像、共轭像恒为膺视像外，原始像和共轭像的位置、虚实、倒正均可随记录与再现条件(例如物点、参考光源点与再现光源点的相对位置)的不同而发生变化①.

图 4.8.2(a)、(b)以参考光和再现光均为同波长平面波，并且 $\tilde{E}_C=\tilde{E}_R$ 为例画出了菲涅耳全息图的记录和再现过程，图中 O、R、C 分别表示物光、参考光和再现光. 这时原始像为正立(与原物相比)虚像，与原物同位置；共轭像为正立实像，位于原物异侧. 注意原始虚像只能用眼睛或成像仪器观察，而共轭实像则可直接用屏幕接收. 当迎着透射光方向观察这两个像时，原始像保持与原物相同的三维特性，而共轭像则发生了空间深度反转(原来正面 A 的像 A' 移到背面了). 由于此时形成原始像的波前(图中 -1 级衍射波)与记录时的物光波前除强度可以相差一常倍数之外是完全相同的，故全息成像过程亦称为物光的**波前重现**或**波前再建**.

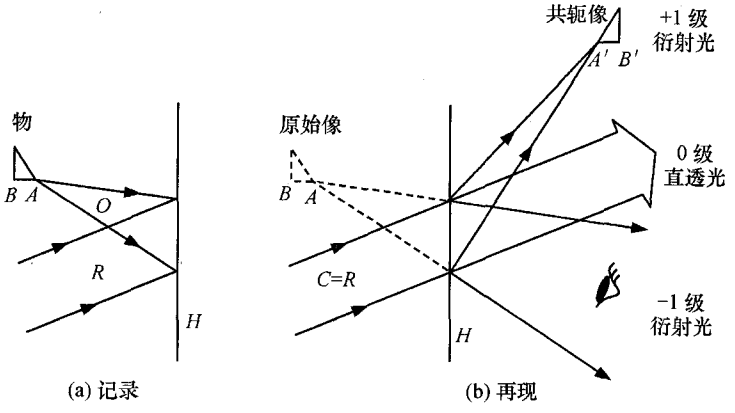


图 4.8.2 离轴菲涅耳全息图的记录与再现

2. 全息照相与普通照相的比较

除菲涅耳全息图外，全息图尚有其他许多类型，这里不再一一介绍. 为更清楚地认识全息照相的特点，在表 4.8.1 中以菲涅耳全息图为例对全息照相和普通照相进行了比较.

① 关于此问题的详细讨论可参见蔡履中. 山东大学学报(自然科学版)，1990，1：52.

表 4.8.1 全息照相与普通照相的比较

	普通照相	全息照相(菲涅耳全息图)
成像原理	几何光学(透镜成像)	波动光学(干涉,衍射)
记录光源	非相干光	相干光
记录信息	像的强度分布	物光的振幅及相位(借助于参考光及干涉过程)
底片图样	与物相似	与物不相似(干涉图样)
再现光源	非相干光	相干光
再现像的体视特性	平面	立体(有景深和视差)
底片破损的效果	像不完整	像仍完整(因物光信息分布于整个底片),但分辨率下降(因孔径减小)

这里应再次强调,表中所列全息照相的特性是对普通菲涅耳全息图而言,对其他类型的全息图表中某些项可能不再适用. 例如彩虹全息图和像面全息图均可用白光再现;像面全息图破碎后也无法再现物的整体.

习 题

4.1 一圆形孔径直径为 $D=2$ mm,场点 P 位于过圆孔中心且与孔径平面 Σ 垂直的轴线上,与 Σ 平面距离 $Z=1$ m,波长 $\lambda=0.5$ μm. 求圆孔边缘到 P 点的距离 r. 验证 $1/r\approx 1/Z$,$\rho_M^2 \ll Z^2$,但 Z 不满足 $Z\gg\rho_M^2/\lambda$,从而 P 点满足傍轴近似而不满足远场近似. 利用判据 $Z>10\rho_M^2/\lambda$,求满足远场近似的最小 Z 值.

4.2 写出平面波正入射平面屏时倾斜因子的表达式. 若将此因子取为 1,且要求这种近似所引起的相对误差分别不超过 1%和 5%,求衍射角 θ 应分别不超过多大?

4.3 根据自由传播时场点 P 振幅是第一个半波带贡献之半的道理,利用(4.1.3)式对单色点源求第一个半波带在 P 点产生的复振幅 $\tilde{E}_1(P)$,从而确定 $\tilde{E}(P)$;将其与根据球面波自由传播直接写出的复振幅表达式相比较,确定出(4.1.3)式中 C 的形式,并说明用前一种方法得到的 $\tilde{E}(P)$ 比后一结果相位落后 $\pi/2$.

4.4 平面单色波($\lambda=0.6$ μm)正入射一圆孔,轴上场点 P 与圆孔平面相距 0.5 m. (1)对 P 点而言,求第一个半波带的半径 ρ_1;(2)若圆孔半径为 1 cm,它包含了多少个半波带? (3)最外侧半波带的倾斜因子为多大?

4.5 一不透光屏开有直径为 3 mm 的圆孔,被 $\lambda=0.55$ μm 的平面波正入射照明. 一很小的光强探测器沿圆孔的轴线从很远处移近,求前三个光强极大和前三个光强极小所相应的探测器的位置.

4.6 将上题中平面波照明改为单色点光源照明,该点源为屏左方轴上点且与屏的距离为 1 m,重复上述计算.

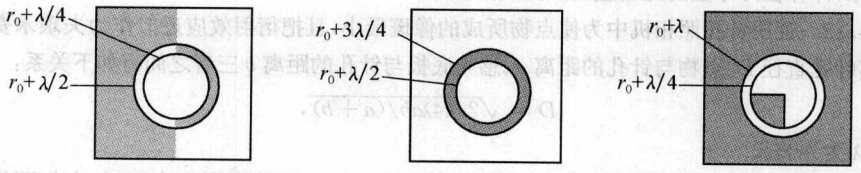
4.7 钠黄光($\lambda=589.3$ nm)正入射照明一圆孔,探测器固定于轴上点距屏 1.5 m 处. 当圆孔直径从零逐渐增大时,所探测到的光强发生强弱交替变化. 求前两个极大和前两个极小相应的圆孔直径.

4.8 直径 2 mm 的圆孔,用 $\lambda=514.5$ nm 的单色点光源照明. 源点 S 及场点 P 均为轴上点,与圆孔屏的距离分别为 1 m 和 1.25 m. 求 P 点处光强为自由传播时的多少倍? 此时若圆孔

稍微增大或点源向圆孔屏稍微移近时，问 P 点光强是增大还是减小？

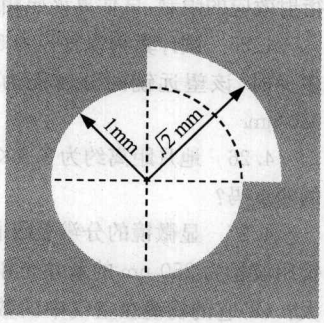
4.9 将一无限大半平面不透光屏置于点光源的光场中，屏后衍射场常称为**直边衍射**. 试求屏边缘几何阴影线处的光强与自由传播时的光强之比.

4.10 单色平面波垂直照射题图所示的衍射屏，图中标出的是该处到轴上场点的光程，屏中心到场点的光程为 r_0，阴影区为不透光区. 试用矢量图解法求场点的光强与波自由传播时该场点的光强之比值.



题 4.10 图

4.11 一振幅为 A、光强为 I 的平面波正入射题图所示的衍射屏上，轴上场点距屏 2 m，光波长为 500 nm，试计算场点处的振幅和强度.



题 4.11 图

4.12 一个菲涅耳波带片对 $\lambda=500$ nm 的单色光波的焦距 $f=1$ m，中心为一透明开带，且共有 10 个开带. 求该波带片的有效工作面积的直径为多大？

4.13 要求制作一个对 Ne-He 激光($\lambda=632.8$ nm)焦距为 2 m 的波带片. 先在白纸上画出 20 个黑白交替的同心圆环，然后用照相法缩板. (1)如果纸上第一个环的半径为 11.25 cm，照相时应缩小到多少分之一？(2)纸上最外一个环的半径应为多少？

4.14 一个菲涅耳波带片的第 8 个半波带的直径为 5 mm. (1)求此波带片对 $\lambda=500$ nm 的单色光的主焦距及前两个次焦距；(2)若用此波带片对 3 m 之外的轴上白光(λ:390～760 nm)点光源成像(只考虑与主焦距相应的像)，问像点的轴向色差为多大？

4.15 单缝夫琅禾费衍射中，若屏 Π 上某点相应的单缝边缘光程差 $\Delta=2\lambda/3$，分别用矢量图解法和公式法求该点光强 I 与中心点光强 I_0 之比.

4.16 用矢量图解法求单缝夫琅禾费衍射中第二、第三级次极强的相对强度(以中央主极大强度为 1).

4.17 在单缝夫琅禾费衍射实验中，已知光波长为 0.63 μm，缝宽为 0.1 mm，缝后透镜焦距为 0.55 m，求透镜焦面上中央亮纹的宽度.

4.18 利用波长 0.63 μm 的平行激光束测一单缝宽度. 粗测肯定缝宽小于 1 mm，将观察屏置于缝平面后 5 m 处，测得中心附近两侧第 5 级极小间的距离为 6.3 cm. (1)说明屏上衍射图样为夫琅禾费衍射；(2)求缝宽.

4.19 太阳光的平行光束垂直照射边长 $L_0=0.2$ cm 的正方形孔，观察屏在离孔 50 m 处，

屏面与孔面平行，试求屏上中心斑的尺寸 $L\times L$(取可见光范围为 0.4～0.7 μm).

4.20 波长 $\lambda=500$ nm 的单色平面波沿直径 $D=1$ cm、焦距 $f=10$ cm 的正透镜的主轴入射，求透镜后焦面上艾里斑的直径.

4.21 一束直径为 2 mm 的氦氖激光($\lambda=632.8$ nm)自地面射向月球. 已知月地距离为 3.76×10^5 km，假设激光器出射光束截面上强度分布均匀，计算激光束在月球上的光斑直径有多大？(不计大气影响). 若把这样的激光束经扩束器扩充成直径为 2 m 和 5 m 的平行光，再发往月球，计算在月球上的光斑直径又分别为多大？

4.22 证明针孔照相机中为使点物所成的像斑最小，且把衍射效应近似作为夫琅禾费衍射时，其针孔直径 D、点物与针孔的距离 a、感光底板与针孔的距离 b 三者之间有如下关系：

$$D=\sqrt{2.44\lambda ab/(a+b)},$$

式中 λ 为光波长.

4.23 夜间迎面而来的汽车的两个车头灯相距 1.5 m，问汽车离人多远时，它们刚好能为人眼所分辨？设此时人眼瞳孔直径为 6 mm，光波长为 0.60 μm.

4.24 一台照相机的镜头具有 50 mm 的焦距和 25 mm 的直径，如果它的分辨本领仅受到衍射效应的限制，试估算该照相机的像方的最小分辨间距(取 $\bar{\lambda}=550$ nm).

4.25 试计算物镜直径为 5 cm 的小型望远镜的最小分辨角. 当其放大率的设计值不小于多少时，该望远镜的分辨能力才能被充分利用？设人眼的瞳孔直径为 5 mm，光波长 $\lambda=550$ nm.

4.26 地月距离约为 3.8×10^5 km，用口径为 1 m 的天文望远镜能分辨月球表面相距100 m 的两点吗？

4.27 显微镜的分辨极限通常指被观察面上恰好能被分辨开的两物点的间距 δy. (1)显微镜用波长为 250 nm 的紫外光和用波长为 500 nm 的可见光作照明光时，其分辨极限之比为多大？(2)它的物镜在空气中的数值孔径约为 0.75，用上述紫外光照明时，其分辨极限为多大？(3)用折射率为 1.56 的油浸系统时，在上述紫外光照明下，其分辨极限又为多大？

4.28 以 $\sin\theta$ 为横轴对以下各种情况画出多缝夫琅禾费衍射光强分布曲线，并标出级别和缺级：(1) $N=4$，$d=4a$，至少画到第 9 级主极强；(2) $N=2$，$d=2a$，至少画到第 7 级主极强；(3) $N=5$，$d=1.5a$，至少画到第 7 级主极强.

4.29 对给定整数 $n=d/a$，由光强分布曲线说明双缝夫琅禾费衍射中在单缝衍射中央峰区域内能看到几个亮纹？若每缝宽为 0.3 mm，中央峰区有 13 条亮纹，求双缝中心间距.

4.30 对平行光正入射的多缝夫琅禾费衍射，记 $n=d/a$. (1)利用衍射光强公式证明第 m 级主极强的相对强度(取中央主极大光强为 1)可表示为

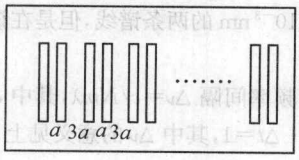
$$I_m=\left(\frac{\sin\frac{m\pi}{n}}{\frac{m\pi}{n}}\right)^2=\mathrm{sinc}^2\left(\frac{m}{n}\right);$$

(2)利用上式计算 $n=4$ 时第 1,2,3 级主极强的相对强度.

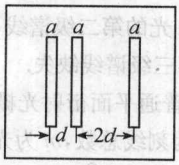
4.31 分别利用矢量图解法和复振幅叠加方法，导出缝宽分别为 a 和 $2a$、两缝中心间距 $d=3a$ 的不等宽双缝的夫琅禾费衍射光强公式，推导过程中可利用单缝夫琅禾费衍射振幅分布公式.

4.32 有 $2N$ 条平行狭缝，缝宽皆为 a，缝间不透光部分的宽度作周期性变化：a，$3a$，a，$3a$，…（见题图），分别从两种观点求其夫琅禾费衍射光强公式：(1)两组（奇数缝和偶数缝）N 缝光栅衍射的相干叠加；(2)N 组双缝衍射的相干叠加.

4.33 有三条平行狭缝，缝宽皆为 a，缝距分别为 d 和 $2d$（见题图），导出正入射时其夫琅禾费衍射强度分布公式.



题 4.32 图



题 4.33 图

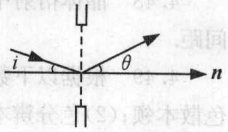
4.34 波长为 λ 的平行光正入射刻有三缝的衍射屏，每缝宽度皆为 a，缝距皆为 d，中间缝前覆盖一个 π 相移片（它使得通过该缝的光场相位与另两缝相比相差 π）. 导出该孔径夫琅禾费衍射强度分布公式，并求 $\theta=0$ 时的强度.

4.35 宽度为 a 的单缝的半侧（从缝中线到一侧边缘）被宽度为 $a/2$ 的长条形 π 相移片所覆盖，导出单色光（波长 λ）正入射时夫琅禾费衍射强度分布公式. 在 $\theta=0$ 时强度为多大？此结论能否不借助于计算而通过物理图像的分析直接得到？

4.36 证明单色平行光斜入射（如题图）时多缝夫琅禾费衍射公式仍为(4.5.5)式，但 α 和 γ 变为

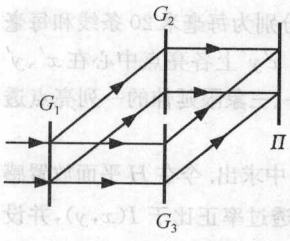
$$\alpha=\frac{\pi}{\lambda}a(\sin i+\sin\theta),$$

$$\gamma=\frac{\pi}{\lambda}d(\sin i+\sin\theta),$$



题 4.36 图

式中 i 为入射角，取正值；θ 为衍射角，视其与 i 在光栅面法线 $\boldsymbol{n}$ 同侧和异侧分别取正值和负值.



题 4.37 图

4.37 题图是一种产生白光干涉条纹的装置，其中 G_1、G_2、G_3 为三块取向及光栅常数 d 均完全相同的一维光栅，它们和接收屏 Π 在位置上构成一平行四边形. 设相干平行光正入射 G_1，其 $+1$ 级衍射光射向 G_2，经 G_2 后的 -1 级衍射光射向 Π；过 G_1 的直透光经 G_3 衍射后的 $+1$ 级衍射光亦射向 Π. 求证 Π 平面上的干涉条纹间距与入射波长无关，并求此间距.

4.38 用每毫米刻有 500 条刻线的平面衍射光栅观察钠光谱线（$\lambda=0.59\ \mu m$），在(1)光线正入射、(2)光线以 30°角入射、(3)光线以 45°角入射时，可获得谱线的最高级次和谱线总数分别是多少？

4.39 一平面衍射光栅宽为 5 cm，缝宽为 0.0001 cm，不透光部分的宽度为 0.0002 cm，光波长为 550 nm 且为正入射. 试求：(1)光栅常数 d；(2)能获得多少条谱线？(3)是否有缺级现象发生？(4)一级谱线的角宽度及色分辨本领.

4.40 一平面衍射光栅，每厘米有 4000 条刻线，试求在第二级光谱中氢原子的 α 和 δ 谱线间的角距离. 已知 $\lambda_\alpha=656$ nm，$\lambda_\delta=410$ nm，光线正入射.

4.41 设波长为 400 nm 到 700 nm 的可见光正入射到光栅常数为 0.002 mm 的透射光栅上，测得第一级谱线的宽度约为 50 mm，试求摄谱透镜的焦距.

4.42 一光栅每毫米有 100 条刻线，刻线区宽度为 10 cm，用 $\lambda=0.5\ \mu m$ 的平行光正入射时第 4 级谱缺失，求：(1)缝宽 a；(2)第二级亮纹的半角宽；(3)第二级谱中可分辨的最小波长间隔.

4.43 设计一个平面光栅(即求出 d,a,N,L 等参数). 当白光正入射时能在 30°角衍射方向上获得 600 nm 光的第二级谱线，并能在此处分辨 $\delta\lambda=5\times10^{-3}$ nm 的两条谱线，但是在该方向上 400 nm 光的第三级谱线缺失.

4.44 对普通平面衍射光栅，证明：(1)刚好能分辨的频率间隔 $\Delta\nu=c/Nm\lambda$，其中 c 为真空中的光速，N 为刻线总数，m 为光谱级次；(2)存在关系 $\Delta\nu\cdot\Delta t=1$，其中 $\Delta\nu$ 的意义见上，Δt 为光栅边缘的两条光线的传播时间差.

4.45 一闪耀光栅的闪耀角为 30°，光栅常数为 1.2 μm，试求在 $i=\theta_b$ 和 $i=0$ 两种通常工作方式下，它在可见光区的闪耀波长各有几个？它们是多少？

4.46 一闪耀光栅预定工作于 $\lambda=200$ nm 的紫外波段，色分辨本领设计为 3×10^5，刻痕区宽度为 15 cm，对于 $i=\theta_b$ 和 $i=0$ 两种工作方式，分别确定其闪耀角.

4.47 一透射式阶梯光栅由 40 块折射率 $n=1.5$、厚度 $t=0.5$ cm、阶梯高度 $d=0.1$ cm 的玻璃平板叠合而成. 以 $\lambda=0.5\ \mu m$ 的单色光正入射，求：(1)在入射光方向干涉主极大的级次；(2)该方向的角色散和色分辨本领(不考虑玻璃折射率随波长的变化).

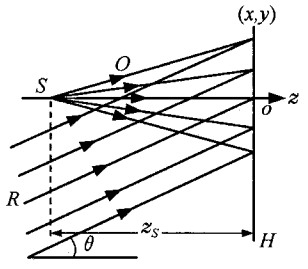
4.48 晶体衍射中，$\lambda=0.13$ nm 的 X 射线的一级衍射极大相应的掠射角为 22°，求晶面间距.

4.49 根据以下数据比较棱镜、光栅光谱仪和法布里-珀罗干涉仪三者的分光性能：(1)角色散本领；(2)色分辨本领；(3)自由光谱范围.

棱镜底边 $b=5$ cm，顶角 $\alpha=60°$，折射率 $n=1.5$，色散率 $|dn/d\lambda|=6\times10^{-5}$/nm；光栅有效宽度 $L=5$ cm，刻线密度 $1/d=600$ 条/mm；法-珀腔长 $h=5$ cm，光强反射率 $R=0.99$. 取 $\lambda=550$ nm.

*4.50 若图 4.7.7(a)中网格状输入物在 x、y 方向的空间频率分别为每毫米 20 条线和每毫米 15 条线，设透镜 L_1 的焦距为 40 cm，入射光 $\lambda=0.63\ \mu m$. 问谱面 $x'y'$ 上各亮点中心在 x'、y' 方向的间距分别是多少？若谱面上的滤波狭缝只允许过中心且在一、三象限延伸的一列亮点透过，像面呈何形状？

*4.51 图 4.8.1(a)中 H 平面的光强分布 $I(x,y)$ 已在习题 3.8 中求出. 今在 H 平面放置感光板，设曝光及处理后其复振幅透过率正比于 $I(x,y)$，并设照明光 $C=R^*$(图 4.8.1(b))，写出透过 H 后波的表达式，说明各项意义，并确定原始像和共轭像的位置和虚实. 由此可理解同轴全息图的原理.



题 4.52 图

*4.52 (1)计算题图中 S 点发出的单色球面波 O 与一列相干平面波 R 在 H 平面干涉产生的光强分布 $I(x,y)$. (2)在 H 平面上置感光板，曝光及处理后其复振幅透过率正比于 $I(x,y)$，设照明光 $C=R$，写出透过 H 后波的表达式，说明

各项意义，并确定原始像和共轭像的位置和虚实. 由此可理解离轴全息图的原理.

观察思考及讨论题

4.1 衍射现象的观察与思考

(1) 通过细缝(如指缝)和经纬线细而密的布观察远处小而亮的光源的衍射，改变缝或布的取向时衍射图样有何变化?

(2) 日常观察衍射现象的一个困难是通常周期性结构的空间周期都较大，此时各级衍射角的偏差很小以至于难以分辨. 解决这一问题的方法之一是掠射入射及掠射观察，用这种方法，甚至可以看到间距为 1 mm 的刻痕所引起的反射光的衍射，尝试一下并说明其原因.

(3) 市售粉笔大小的激光指向器可近似用作单色平行光源，自己设计一些实验，用它观察不同孔径或物体的衍射并加以分析.

(4) 近视眼眯起眼睛或戴上小孔眼镜常会看得更清楚些，这是否与衍射理论相矛盾? 为什么?

(5) 比较无线电波、声波与光波绕射能力的强弱，并说明其原因.

(6) 较小的动物往往能听到频率更高的声音(如狗能听到的最高声频大致是人的两倍). 从衍射的角度，你认为这种自然选择的结果有什么合理性?

4.2 单缝衍射与双缝干涉

(1) 单缝衍射和双缝干涉都产生明暗相间的条纹，它们的产生机制和条纹形式有何不同?

(2) 单缝衍射中当缝宽远大于或远小于波长时，能否看到衍射条纹? 为什么?

(3) 双缝干涉实验中如遮闭一缝，屏上条纹有何变化? 这时屏上亮纹是否会在打开另一缝时变成暗纹? 屏上暗纹是否会在打开另一缝时变成亮纹?

(4) 双缝干涉一般同时伴随着单缝衍射，何时能忽略后者的影响?

4.3 较早发行的五分硬币外缘呈锯齿形，其内直径约为 2.36 cm，外直径约为 2.40 cm，用 $\lambda=550$ nm 的单色平行光正入射，场点位于轴上距硬币 1 m 处. 问：(1)锯齿状起伏干扰了前几个半波带? (2)硬币所露出的第一个半波带的宽度? (3)若欲使锯齿状起伏小于第一个半波带宽度的 1/10，场点应距硬币多远? 通过此问题的分析可理解为什么在通常条件下不易看到泊松亮点.

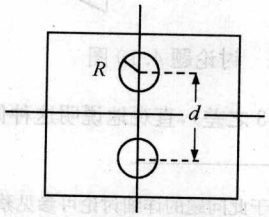
4.4 分析在下列各种情况下图 4.3.10 所示单缝夫琅禾费衍射实验中衍射图样各如何变化：(1)缝宽增减；(2)单缝横向上下平移；(3)单缝纵向前后平移；(4)点光源照明时，单缝在 xy 平面内旋转；(5)点源横向移动；(6)线源保持与缝平行，上下平移；(7)线源在 $x_s y_s$ 平面内旋转；(8)点源与线源由单色光换成白光.

4.5 大致判断题图所示孔径的夫琅禾费衍射图样.

4.6 平行光正入射照射双圆孔孔径(见题图)，孔半径为 R，双孔中心距离 $d=6R$，画出其夫琅禾费衍射图样，在艾里斑内共能看到几道条纹?



讨论题 4.5 图



讨论题 4.6 图

4.7 菲涅耳圆孔衍射图样中心的亮暗会随孔直径的变化而变化，而菲涅耳圆屏衍射及夫琅禾费圆孔衍射图样的中心点则总是亮的，如何理解这一差别？

4.8 光学系统的分辨本领

(1) 从本质上讲，光学系统有限的分辨本领来源于光的什么性质？

(2) 人能看到可见光而听到声波．设想如果把人的视觉敏感波段与听觉敏感波段交换一下，会发生什么现象？

(3) 望远镜和显微镜中分别用什么途径来提高分辨本领？如何大致估算普通望远镜的放大率？

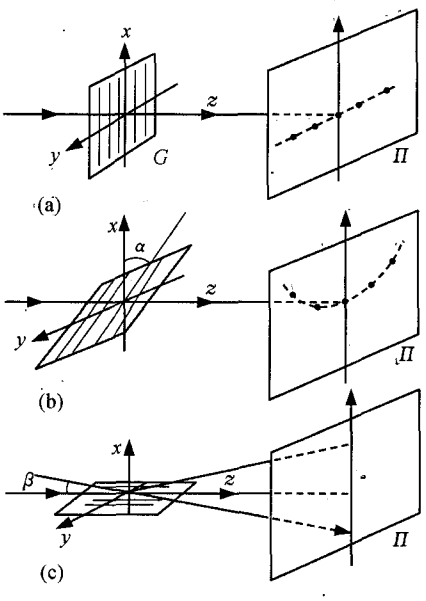
4.9 光栅

(1) 光栅有三个基本参数：缝宽 a、缝距 d 及总缝数 N，说明各参数对主极强位置、主极强亮度及主极强半角宽的影响，并进而说明它们对光栅的色散本领、色分辨本领及自由光谱范围的影响，从物理思想上理解这些结果.

(2) 光栅分辨率公式 $A=mN$ 是对理想点或线光源导出的. 实际线光源总有一定宽度，它对分辨率有何影响？试导出此时光栅分辨率与光源宽度的关系①.

4.10 大角度及倾斜光栅的衍射

(1) 细光束正入射一刻线较密的光栅 G，观察平面 Π 与 G 平行(图(a))，可以看到在衍射角较大时 Π 上衍射光点的分布并不是均匀的，从中心向外间距变大还是变小？为什么？



讨论题 4.10 图

(2) 将光栅 G 绕 y 轴转一角度 α，屏上光点不再位于一直线(图(b))，试解释之.

(3) 若光栅位于 yz 平面内，光栅刻线沿 z 方向，细光束在 xz 平面内以 β 角掠入射(图(c))，推导 Π 平面光点分布(包括透射光衍射及反射光衍射)位置的表达式②.

4.11 矢量图解法在衍射中的应用

(1) 菲涅耳衍射的图解分析中若设初始矢量水平向右，则会造成自由传播时合矢量的 $\pi/2$ 相位差异，如何消除这一差异？这一差异对光强结果有影响吗？

(2) 菲涅耳衍射的矢量图中螺线转一圈并不精确地回到初始点，为什么在分析夫琅禾费衍射时矢量图转一圈能精确回到初始点呢？

(3) 用半波带法分析单缝夫琅禾费衍射时，所得各级次极强角位置与严格计算有微小偏差(如1.5与1.43之差)，直观地说明这种偏差产生的原因.

① 关于此问题的详细讨论可参见蔡履中. 大学物理，1985，10：21.

② 此现象常称为“锥形衍射”，其详细讨论可参见蔡履中等. 物理实验，1993，3：100.

(4) 一单色线光源发出的光越过一个边缘与线光源平行的不透光半平面屏所产生的衍射常称为“直边衍射”. 用矢量图解法求屏边缘几何投影处的光强与自由传播时光强之比，并大致画出其附近的光强分布.

4.12 佛光

佛光是一种罕见而奇妙的光学现象，由于此现象在中国四川峨眉山最为有名，故又称为峨眉佛光，在国外则称为“布罗肯(地名)的幽灵(Spectra of Brocken)”. 有幸亲见佛光的人是不多的，但这方面的报道和照片不难找到. 搜集这方面的资料，并注意以下问题：

(1) 佛光的出现一般是在什么天气，为什么？

(2) 出现佛光时太阳、观察者及光影三者处于什么相对方位？为什么？

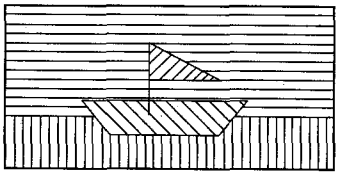
(3) 为什么人活动时光影亦随之活动？

(4) 观察影外的彩色光环，它能否清晰呈现彩虹一般的七种色彩？为什么？

概括的讲，佛光的形成有三个因素：几何投影，后向散射及衍射. 从这三个方面分析此现象的生成条件和表观特性.

4.13 空间滤波和假彩色编码

一黑白幻灯片的不同部分被不同取向的平行等距条纹所调制(如图)，将它放在 $4f$ 系统的物平面，用白光正入射照明，描述其频谱分布，若欲在像面得到蓝天、绿水、红船、白帆，应在谱面加何种空间滤波器？这种依图像的不同特征人为地将黑白图像转换为彩色图像的技术称为**假彩色编码**. 由于人们对不同色彩的分辨能力远大于对不同灰级的分辨能力，将黑白图像彩色化可大大提高人们的判读能力，它已在遥感等领域得到广泛应用.



讨论题 4.13 图

第 5 章　光在晶体中的传播

前几章中我们均假设光波所在介质为各向同性，这对于常见情况如空气、水、玻璃等是完全适用的. 但是，也有一些材料的性质与所考察的空间方向有关，这种材料称为是各向异性的. 典型的各向异性材料是晶体. 现在，晶体在激光技术和光电子学中得到了非常广泛的应用，晶体光学也成为了光学的一个重要分支. 本章我们将讨论光在各向异性晶体中传播的一些基本现象和规律. 容易想到，在这些材料中，与光振动方向性有关的一个重要性质——光波的偏振——将起到重要作用. 故本章也可看作是对光的偏振的讨论的进一步拓展和实际应用.

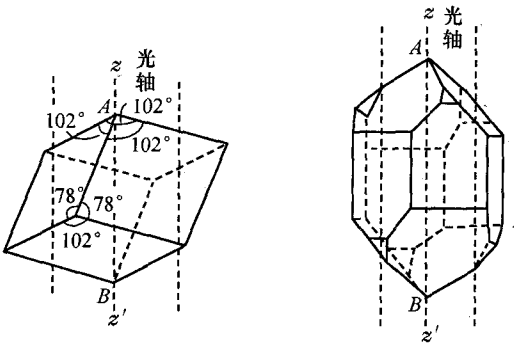
5.1　晶体双折射

5.1.1　双折射现象　基本定义与规律

1. 晶体

原子(离子或分子)呈空间周期性排列的固体称为**晶体**. 某些天然晶体，如方解石、石英等，呈规则的多面体外形. 这种整体上保持空间有序结构的晶体称为**单晶体**. 除立方晶系以外，一般单晶体均具有空间各向异性. 另一类晶体是由大量单晶体或晶粒无规则排列而组成的，它们称为**多晶体**，这种无规则排列的空间平均效应将使得多晶体在整体上呈空间各向同性. 以下除非特别说明，所谓晶体皆指单晶体.

方解石和**石英**是两种常用的光学晶体. 方解石又叫冰洲石，它的化学成分是碳酸钙($CaCO_3$). 方解石样品容易裂开，形成的光滑表面称为**解理面**. 解理面是依赖于原子排列的，如果切割方解石时使得每个表面都是解理面，则方解石的外形就和它的原子的基本排列联系起来，这种标本叫做**解理形式**. 方解石的解理形式是斜六面体，如图 5.1.1(a)所示，每个面都是平行四边形，各面的锐角为 78°5′，钝角为 101°55′，斜六面体有 8 个顶点，其中有两个彼此相对的顶点 A 和 B 是由 3 个钝角面会合而成的. 石英又叫水晶，它的化学成分是二氧化硅(SiO_2)，它的解理形式如图 5.1.1(b)所示，它有两个尖端，其端点记为 A 和 B.



(a) 方解石　　(b) 石英

图 5.1.1　方解石和石英的解理形式

2. 双折射现象

让一束光由空气射到某些各向异性晶体表面，一般情况下，在晶体内将产生两束折射光，这种现象称为**双折射**. 此现象首先由巴托莱那斯(E. Bartholinus)于1669年在方解石晶体中发现. 将一块方解石晶体放在一张字母表上，则可以通过它看到每个字母的双像. 除方解石外，其他许多透明晶体(如石英、云母、冰)也会产生双折射，但属于立方晶系的晶体(如岩盐)不产生双折射.

3. 基本定义与规律

1) o光与e光

实验发现，同一束入射光在双折射晶体内所产生的两束折射光中，其中一束光遵从折射定律，而另一束光一般情况下并不遵从折射定律，即其折射线一般不在入射面内，并且当两种介质一定时 $\sin i_1/\sin i_2$ 随入射角的改变而变化. 按照巴托莱那斯的提议，前者称为**寻常光**(ordinary light)，简称 **o 光**，后者称为**非(寻)常光**(extraordinary light)，简称 **e 光**. 让一束自然光正入射方解石晶体的某一表面，可以发现 o 光沿原入射方向在方解石内传播，而 e 光一般地会偏离原入射方向；而且 e 光的传播方向不仅取决于入射光的方向，还与晶体的取向有关. 以入射线为轴旋转方解石时，则在屏幕上看到 e 光的光点绕 o 光的光点旋转(图 5.1.2).

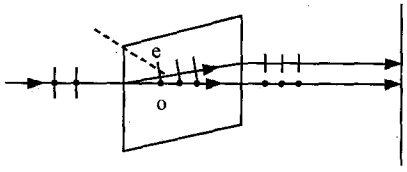


图 5.1.2　o光和e光

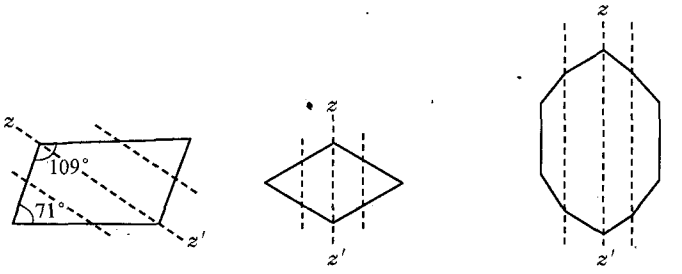
2) 晶体光轴

晶体中存在一个特殊方向，沿此方向传播的光不发生双折射，这一特殊方向称为晶体的**光轴**. 实验发现，沿方解石的两个顶点 A、B(图 5.1.1)的联线方向是方解

石的光轴；沿石英的两个尖端 A、B 的联线方向是石英的光轴. 注意，晶体光轴只表示晶体中的一个方向，并非指某一特定的直线，所以在晶体中平行于这个方向的任何直线都是晶体光轴. 只有一个光轴的晶体称为**单轴晶体**，如方解石、石英、冰、红宝石、金红石等；有两个光轴的晶体称为**双轴晶体**，如云母、硫磺、石膏等. 今后我们将以方解石和石英为代表讨论单轴晶体的双折射，并常以虚线或字母 zz' 标记晶体光轴方向.

3）晶体主截面

当光线入射晶体时，晶体该入射表面的法线与晶体光轴构成的平面称为晶体的**主截面**. 方解石和石英的主截面实例如图 5.1.3 所示.



(a) 方解石　　(b) 石英

图 5.1.3　方解石和石英的主截面

4）o 光主平面　e 光主平面

晶体中的 o 光线与晶体光轴构成的平面叫做 **o 光主平面**；e 光线与晶体光轴构成的平面叫做 **e 光主平面**. 一般情况下，o 光主平面与 e 光主平面并不重合. 但是理论与实验均表明，*当入射线在晶体主截面内时，o 光主平面和 e 光主平面均与晶体主截面重合*. 实用中一般均取入射线在晶体主截面内，以使双折射现象的分析大为简化.

5）o 光与 e 光光矢量的振动方向

利用检偏器来观察，可发现 o 光和 e 光都是线偏振光，但它们的光矢量的振动方向各不相同. *o 光光矢量的振动方向垂直于 o 光主平面，而 e 光光矢量的振动方向则在 e 光主平面内*. 图 5.1.2 示出了自然光在方解石主截面内正入射时 o 光和 e 光的传播方向和振动方向，这时晶体主截面、o 光主平面和 e 光主平面三者合一，均为纸面. 在非正入射的更一般情况下，方解石中 o、e 光的传播及偏振态则如图 5.1.4 所示. 至于晶体中 o 光和 e 光的传播方向的确定方法，将在下面介绍.

除上述各向异性晶体外，**液晶**亦有双折射性质. 液晶乃是介于各向同性液体与晶体之间的一种过渡相态. 1888 年奥地利植物学家赖尼策尔(F. Reinitzer)在胆甾醇苯酸酯中首先观察到，翌年，德国晶体学家勒曼(O. Lehman)命名为液晶. 目前所知具有液晶相的材料都是长形分子或

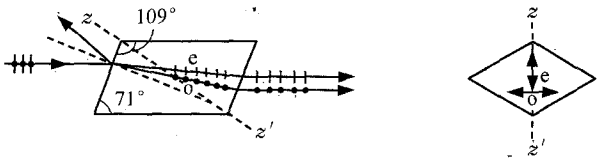


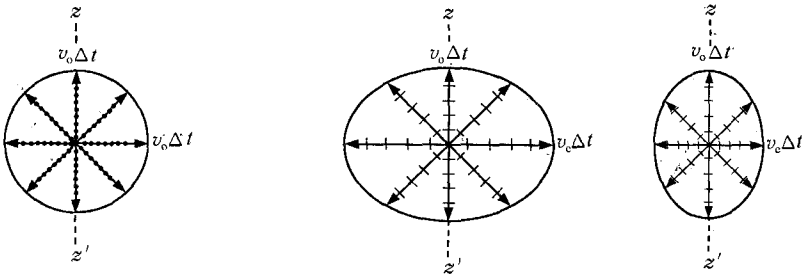
图 5.1.4 方解石主截面内 o 光和 e 光的偏振态

盘形分子有机化合物. 液晶的特点是同时具有流动性和光学各向异性. 光学中经常利用液晶的电光效应作为空间光调制器. 稍后,我们还会介绍利用人工方法(外加应力、电场、磁场等)可以产生双折射效应.

5.1.2 单轴晶体中的波面——惠更斯假设

惠更斯于 1678 年完成,于 1690 年在莱顿出版的《论光》中,对光的波动说大大地加以改进和补充,提出了一个原理,即今日的惠更斯原理,并借助该原理成功地推导出反射定律和折射定律. 此外,惠更斯对晶体中的波面作出一个基本假设后,利用该原理成功地解释了双折射现象.

关于单轴晶体中的波面,惠更斯假设:*单轴晶体中一点光源所激发的 o 光与 e 光两种扰动分别形成两个波面;o 光波面为球面,e 光波面为旋转椭球面,它们在晶体光轴上相切*. 在这个假设中,点光源可以是一真正的点光源,也可以是惠更斯原理中的次波源. 所谓波面乃是指晶体中点光源激发的扰动同时到达的空间各点的轨迹,亦即等相面. o 光波面为球面,这意味着在晶体中 o 光的传播规律与光在各向同性介质中的传播规律无异,它沿各方向传播的速度均相同,记为 v_o (图 5.1.5(a)). e 光的波面为旋转椭球面,它体现了在晶体中 e 光沿各方向传播的速度 v_e' 不同;两波面相切,表明 e 光沿晶体光轴方向的传播速度与 o 光的传播速度相同,也是 v_o;e 光沿垂直光轴方向的传播速度则取另一数值,记为 v_e. 总之,e 光的传播速度随其传播方向与晶体光轴的夹角不同而变化(图 5.1.5(b)).



(a) o光 (b) e光

图 5.1.5 单轴晶体中的波面

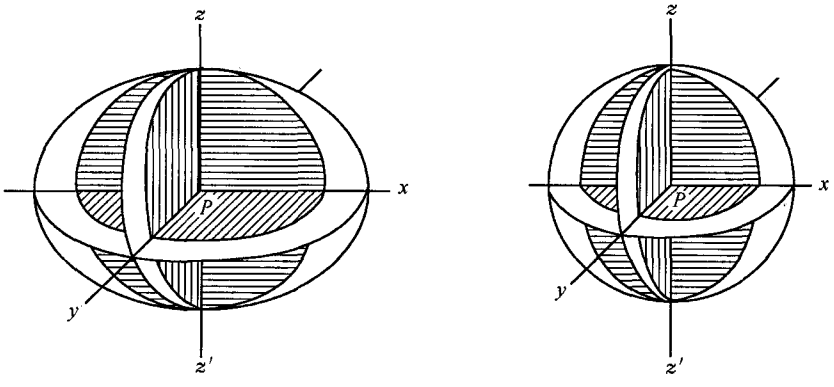
从图 5.1.5 不难看出，单轴晶体中的 o 光光线处处正交于 o 光波面，这与各向同性介质中情况无异. 值得注意的是 e 光线与 e 光波面已不再是处处正交，只是在沿晶体光轴或垂直于光轴的方向上两者正交.

我们知道，介质折射率 n 等于真空中光速 c 与介质中光速 v 之比值. 单轴晶体的**寻常折射率**或 **o 光折射率** $n_o=c/v_o$ 为一常数值，与方向无关；但是，e 光在不同方向上的传播速率不同，故在不同方向上**非(寻)常折射率**或 **e 光折射率**亦不同. 沿晶体光轴方向传播时，e 光折射率等于 n_o；沿垂直于晶体光轴方向传播时，e 光折射率记作 n_e，且 $n_e=c/v_e$；沿其他方向，e 光折射率 n_e' 介于 n_o、n_e 之间. 通常将 n_o、n_e 称为晶体的**主折射率**. 表 5.1.1 列出了几种单轴晶体的主折射率.

表 5.1.1 单轴晶体的主折射率

晶体种类	晶体名称	入射光波长/nm	n_o	n_e
负晶体	方解石	589.3	1.65836	1.48641
	电气石	589.3	1.669	1.638
	硝酸钠	589.3	1.5854	1.3369
	红宝石	700.0	1.769	1.761
正晶体	石英	589.3	1.54425	1.55336
	冰	589.3	1.309	1.313
	金红石	589.3	2.616	2.903
	锆石	589.3	1.923	1.968

依 v_o、v_e 的相对大小可将单轴晶体分为两类：一类以方解石为代表，$v_e>v_o$，即 $n_o>n_e$，其复合波面图中旋转椭球面的短半轴与球面半径相等，旋转椭球面外切于球面(图 5.1.6(a))，这类晶体称为**负晶体**. 另一类以石英为代表，$v_o>v_e$，即 $n_e>n_o$，其复合波面图中旋转椭球面的长半轴与球面半径相等，旋转椭球面内切于球面(图 5.1.6(b))，这类晶体称为**正晶体**.



(a) 负晶体　　(b) 正晶体

图 5.1.6 单轴晶体中的复合波面

5.1.3 平面波在单轴晶体内的传播——惠更斯作图法

平面波入射到晶体表面时，波面上的每一点都可视为次波源，并同时发出波面为球面和旋转椭球面（在晶体内实际上是半球面和部分旋转椭球面）的次波，利用上述复合波面图和惠更斯作图法，可以确定晶体内 o 光和 e 光的传播方向.

设有一方解石晶体，其表面为一平面 MN，光轴在纸面内并与 MN 成一夹角. 今有一平面波斜入射到方解石表面，入射光线亦在纸面内（图 5.1.7）. 为确定方解石内 o 光和 e 光的传播方向，作图的具体步骤如下：

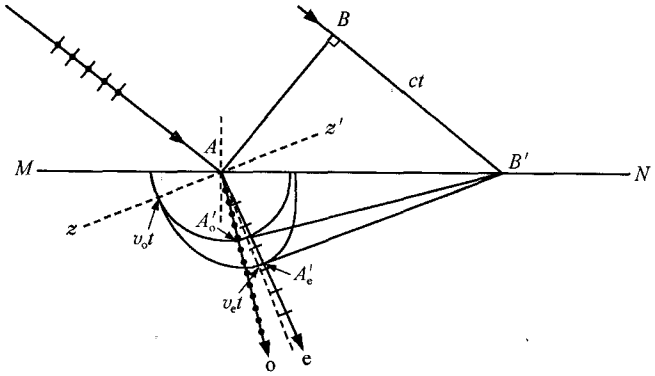


图 5.1.7 方解石中 o 光和 e 光的传播

(1) 画出斜入射平面波中的两条平行光线，它们与界面的交点分别为 A、B'.

(2) 从以上两条光线中首先到达界面的光线与界面的交点 A 作另一光线的垂线 AB，AB 即入射光波的波面. 显然 B 到 B' 的时间 $t=\overline{BB'}/c$，c 为真空或空气中的光速. 作出在此时间内 A 点次波源在方解石内产生的两个次波面：一个是以 $v_o t$ 为半径的半球面——o 光次波面；另一个是与球面在光轴方向上相切的部分旋转椭球面——e 光次波面，它与光轴垂直的那个长半轴长度为 $v_e t$（注意：当 $\lambda=589.3$ nm 时，$v_e t/v_o t=v_e/v_o=n_o/n_e\approx 1.1157$，画图时可稍夸大，但莫要过分夸大）. 在此时间内 A，B' 之间各点次波源在方解石内形成半径或半轴逐渐减小的次波面.

(3) 通过 B' 点作上述球面的切面 $B'A'_o$ 和旋转椭球面的切面 $B'A'_e$. 这两个平面就是界面 AB' 各点次波源所发次波波面的包络面，它们分别代表方解石中 o 光和 e 光的折射波面.

(4) 从 A 点分别连接折射波面与该点次波面的切点 A'_o、A'_e，则射线 $\overrightarrow{AA'_o}$ 和

$\overrightarrow{AA'_e}$的方向就分别表示方解石中 o 光和 e 光的传播方向.

在图 5.1.7 中,入射光线在晶体的主截面内,这时晶体主截面、o 光主平面、e 光主平面均与入射面重合,可根据 o 光振动垂直于主平面、e 光振动在主平面内的道理,将 o 光和 e 光的光矢量振动方向分别用黑点和短线标记在图上. 当入射线不在晶体主截面内,即光轴不在入射面内时,若仍以图面表示入射面,则光轴与 e 光次波面相交点一般不在图面内,因此 e 光主平面也不在图面内,它不再与方解石主截面或 o 光主平面重合.

下面讨论几个简单但有重要实际意义的特例(图 5.1.8).

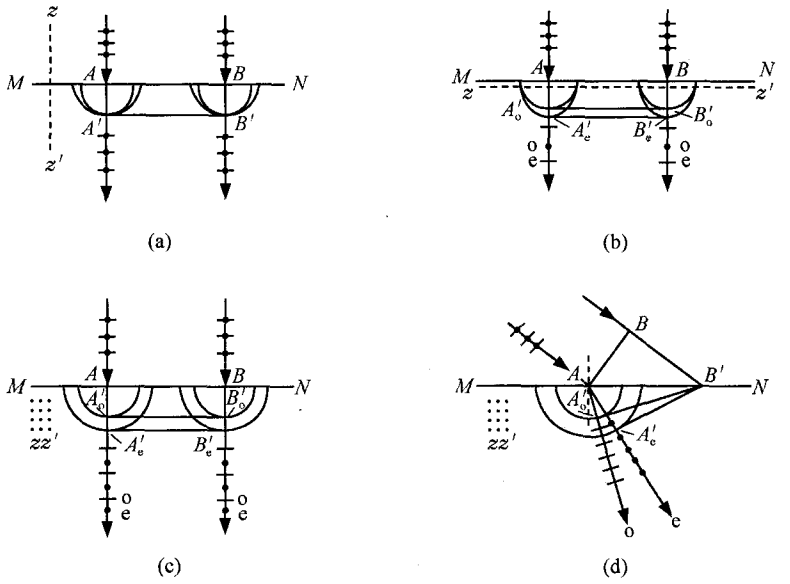


图 5.1.8 平面波在方解石中传播的特例

(1) 平面波正入射,光轴垂直于界面(图(a)).

按照上述惠更斯作图法可知:入射波中两条光线同时到达界面上 A、B 两点,它们作为次波源在晶体内同时产生两个 o 光次波面(半径相等)和两个 e 光次波面(形状全同),并且 o 光次波面与 e 光次波面分别相切于光轴方向上的 A' 与 B' 点. 过 A'、B' 点所作的垂直于纸面的平面即是 A,B 之间各点次波源产生的两种次波面的公共包络面,AA' 和 BB' 的连线方向即为 o 光和 e 光的传播方向. 由图可以看到,晶体中 o 光和 e 光的波面完全重合,且 o 光和 e 光均沿光轴方向传播,故传播速度相同,即均为 v_o,所以在此特例中没有双折射发生,这与平面波垂直入射各向同性介质时产生的效果相同.

(2) 平面波正入射,光轴平行于界面并且在纸面内(图(b)).

与(1)不同的是,此时相应的两种次波面的包络面沿纵向(入射方向)分离开来,即 o 光和 e 光仍然都沿垂直于光轴的方向传播,但是它们的传播速度不同,分别为 v_o 和 v_e. 此种现象仍属双折射.

(3) 平面波正入射,光轴平行于界面并且垂直于纸面(图(c)).

在这种情况下,晶体内从 A 和 B 点发出的 e 光光波在纸面内向各个方向传播时其传播方向均与光轴相垂直,故其传播速度都是 v_e,因此,A 和 B 发出的 o 光次波面与 e 光次波面均为圆形;对负晶体,后者半径大于前者半径. 通过作图可以看出,两种光的波面互相平行但位置不同,即 o 光和 e 光传播方向相同,但传播速度不同. 此种现象也属双折射,它与情况(2)在效果上并无差异.

(4) 平面波斜入射,光轴平行于界面并且垂直于纸面(图(d)).

这时由 A 点产生的两种次波面在纸面内的截线是同心圆;o 光和 e 光分别以速度 v_o 和 v_e 传播. 在这个特殊情况下,o 光和 e 光都遵从折射定律,只不过折射率分别为 n_o 和 n_e.

以上分析均以负晶体为例,正晶体的分析完全与此类似.

例 5.1.1 一束平行的钠黄光以 50°的入射角从空气射到方解石制成的厚度为 4.20 cm 的平行平板的上表面上. 设光轴与平板表面平行,并垂直于入射面,试求 o 光和 e 光射到平板下表面时两光束的分离量. 已知对钠黄光方解石的 $n_o=1.65836$, $n_e=1.48641$.

解 在此特殊情况下,o 光线与 e 光线在方解石内的传播均服从折射定律,即

$$\sin i = n_o \sin i_o, \qquad \sin i = n_e \sin i_e.$$

以 $i=50°$, $n_o=1.65836$, $n_e=1.48641$ 代入以上两式,可以算出

$$i_o = 27.51°, \qquad i_e = 31.02°.$$

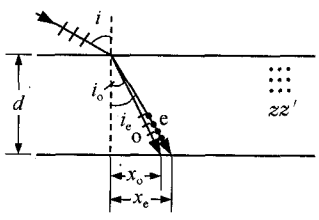


图 5.1.9 例 5.1.1 图

由此可对某一入射光线求出 o 光线和 e 光线在方解石平板下表面两出射点的位置坐标(图 5.1.9)

$$x_o = d\tan i_o = 4.20 \times 0.5208 = 2.19 \text{ cm},$$

$$x_e = d\tan i_e = 4.20 \times 0.6014 = 2.53 \text{ cm}.$$

所以两光束的分离量为

$$\Delta x = x_e - x_o = 0.34 \text{ cm}.$$

*5.1.4 单轴晶体双折射的进一步讨论

在各向同性介质中,波面、波的传播方向和传播速度、介质折射率等概念,是简单而明确的. 点源的波面即等相面是球面;波的传播方向用波矢 $\boldsymbol{k}$ 表征,其方向沿波面的法线,它既是波面向

前推进的方向，也是能流密度矢量 $\boldsymbol{S}$ 的方向；波速指波面沿法向向前推移的速度 $v=\lambda/T=\omega/k$，也就是相速；介质折射率 $n=c/v$，c 为真空中的光速.

在单轴晶体中上述概念就变得复杂了. 下面我们首先说明晶体中 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{k}$ 各矢量的方向关系，然后以点源激发的波面假设——惠更斯模型为出发点，导出单轴晶体中 e 光的射线速度与法线速度，射线面与法线面，射线折射率公式与折射率公式，以及折射率椭球等.

1. 晶体中 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{k}$ 的方向关系

从上节惠更斯作图法中已经看出，在各向异性晶体中 e 光传播方向一般并不与 e 光波面垂直，如何从光的横波性解释这一现象？此时波矢 $\boldsymbol{k}$ 如何确定？为回答这些问题，可以较深入地考察一下晶体中各个有关矢量的方向关系.

在无自由电荷和传导电流的情况下，晶体中下述麦克斯韦方程组依然成立：

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=-\mu\dfrac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t},\\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t},\end{cases}\tag{5.1.1}$$

式中 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分别为电场强度矢量、电位移矢量和磁场强度矢量. 考虑用矢量复波函数所表示的平面波解，这时 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{D}$ 各表示式中均包含复数相因子 $\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]$，容易看出上列各式中之时间微分及矢量积运算可通过下述算符代换来实现：

$$\nabla\longrightarrow\mathrm{i}\boldsymbol{k},\qquad\frac{\partial}{\partial t}\longrightarrow-\mathrm{i}\omega.\tag{5.1.2}$$

故(5.1.1)式化为

$$\begin{cases}\mathrm{i}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}=\mathrm{i}\mu\omega\boldsymbol{H},\\ \mathrm{i}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}=-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{D}.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}=\mu\omega\boldsymbol{H},\\ \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{k}=\omega\boldsymbol{D}.\end{cases}\tag{5.1.3}$$

从第 2 章已知能流密度矢量

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}.\tag{5.1.4}$$

结合(5.1.3)、(5.1.4)两式可以看出：

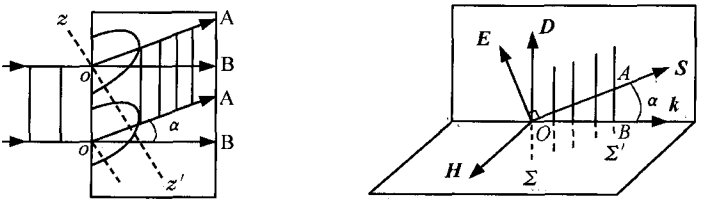
(1) $\boldsymbol{D}\perp\boldsymbol{H},\boldsymbol{k}$；$\boldsymbol{H}\perp\boldsymbol{E},\boldsymbol{k}$；从而 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{k}$(依其顺序)组成一右手正交系；

(2) $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{S}$(依其顺序)组成一右手正交系；

(3) $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{S}$ 四矢量均垂直于 $\boldsymbol{H}$，故它们位于同一个垂直于 $\boldsymbol{H}$ 的平面内；

(4) 因 $\boldsymbol{k}\perp\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{S}\perp\boldsymbol{E}$，在各向异性介质中，$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$ 不再通过一个比例常数 ε，而是通过一张量(其数学表示为矩阵)联系起来，它们一般并不同向，故 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 一般并不同向.

图 5.1.10(a)中以负晶体为例示出了平行光正入射时晶体内 e 光的传播方向($\overrightarrow{OA}$)和波面(如 AA)，图(b)中示出了相应的 $\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 各矢量的方向. 注意 $\boldsymbol{S}$ 的方向即光线方向，而 $\boldsymbol{k}$ 的方向即等相面(波面)的法线方向，这时二者有一夹角 α.



(a) e 光在负晶体中的传播　　(b) 晶体中各矢量的方向关系

图 5.1.10

2. 射线速度和法线速度

波速这一概念是基于波面随时间变化在空间推移这一事实而引入的. 但从某一波面 Σ 上同一点可以引出各种方向到达另一波面 Σ'，它们相应的传播时间 Δt 均是相同的，故经何种路径计算波速即成为一个问题. 在各向同性介质中，$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{k}$ 方向一致，自然取该方向来定义波速. 在各向异性介质中，如图 5.1.10(b)所示，$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{k}$ 方向不一致，相应地对 e 光亦可定义两种波速. 波面沿 $\boldsymbol{S}$ 方向的推移速度称为**射线速度**，记为 v_r，它即扰动或能量的传播速度，又称**光线速度**；波面沿 $\boldsymbol{k}$ 方向即波面法线方向的推移速度称为**法线速度**，记为 v_N，它即波的相速度. 参见图 5.1.10(b)，设从波面 Σ 推移到 Σ' 的时间为 Δt，则

$$v_r = \frac{\overrightarrow{OA}}{\Delta t}, \qquad v_N = \frac{\overrightarrow{OB}}{\Delta t}. \tag{5.1.5}$$

易见

$$v_N = v_r \cos\alpha. \tag{5.1.6}$$

为确定一般情况下 v_r 和 v_N 二者方向的联系，图 5.1.11 中以负晶体为例画出了点源 O 在单轴晶体中产生的 e 光的两个波面. 由于这些波面是以光轴(取为 z 轴)为转轴的旋转椭球面，故只需在 xz 平面内讨论即可. 图中 $\boldsymbol{r}$ 方向即 $\boldsymbol{S}$ 方向，波面法线 $\boldsymbol{N}$ 方向即 $\boldsymbol{k}$ 方向，ξ 和 θ 分别为 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 与光轴的夹角，两者之间的夹角 $\alpha=\xi-\theta$.

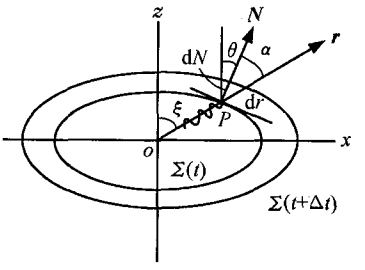


图 5.1.11　e 光波面随时间在空间的推移

时刻 t 的 e 光波面可用椭圆方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \tag{5.1.7}$$

来表示，其中 $a=v_e t, b=v_o t$. 椭圆在 P 点的切线对 x 轴的斜率为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{z} = -\frac{n_e^2}{n_o^2}\tan\xi,$$

而法线对 z 轴的斜率为

$$\tan\theta = -\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},$$

故

$$\tan\theta = \frac{n_e^2}{n_o^2}\tan\xi. \tag{5.1.8}$$

由此可见，知道光线方向或射线速度，便可由(5.1.8)、(5.1.6)两式导出法线方向或法线速度，反之亦然. 例如，当平行光在主截面内正入射于晶体表面时，不论光轴如何取向，由分析可断定波面仍然保持与表面平行的方向在晶体内传播，即波法线方向仍沿原来的入射方向，此时 θ 角即可定出，按(5.1.8)式可算出 ξ 角，确定光线方向，然后可利用下面将要介绍的各向异性速度公式求得 $v_N(\theta)$ 和 $v_r(\xi)$. 这是一种有重要意义的情况，例如，几乎所有用于电光调制的晶体都切成等厚晶片，且在平行光正入射条件下工作. 在一般情形下，我们可以从晶体的惠更斯作图法中首先定量地求出包络面(即宏观波面)方程，此时由解析几何学确定其法线方向显然是方便的，再利用上述法线速度与射线速度的关系来确定光线方向和速度.

(5.1.8)式表明，$\theta=0$ 时 $\xi=0$；$\theta=\frac{\pi}{2}$ 时 $\xi=\frac{\pi}{2}$. 在这两个极端方向 $\alpha=0$. 换言之，当 θ 或 ξ 于 $[0,\pi/2]$ 内变动时，α 角出现极值. 可以证明，当 θ 角满足

$$\tan\theta = \frac{n_e}{n_o}$$

时，偏离角 α 最大，最大值 α_M 由下式给出

$$\tan\alpha_M = \frac{n_o^2 - n_e^2}{2n_o n_e}. \tag{5.1.9}$$

3. 射线面与法线面

图 5.1.12(a)画出了 e 光的一个波面，它表示扰动沿 $\boldsymbol{r}$ 方向经历时间 t 及路程 r 而达到 P 点. 利用 $x=r\sin\xi, z=r\cos\xi$，可将波面椭圆方程(5.1.7)改写为极坐标形式

$$r^2(\xi) = \frac{1}{\cos^2\xi/b^2 + \sin^2\xi/a^2}. \tag{5.1.10}$$

以 $a=v_e t=ct/n_e, b=v_o t=ct/n_o$ 代入，可求得射线速度各向异性的一般公式为

$$v_r^2(\xi) = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{c^2}{n_o^2\cos^2\xi + n_e^2\sin^2\xi}$$

$$= \frac{1}{\cos^2\xi/v_o^2 + \sin^2\xi/v_e^2}. \tag{5.1.11}$$

为使射线速度各向异性更为形象化，可在空间中画出射线速度矢量端点的轨迹面，即**射线速度面**，简称**射线面**，如图 5.1.12(b)所示. (5.1.11)式表明射线面是旋转椭球面，在 xz 平面内是一个椭圆，其形态与波面几何相似. 实际上它可以被理解为点源激发的 e 扰动经单位时间以后的那个波面. 5.1.3 节的惠更斯作图法中使用的 e 光次波面(等相面)，正是射线面的几何相似形.

由法线速度与射线速度关系可以导出法线速度各向异性的一般公式

$$v_N^2(\theta) = v_r^2(\xi)\cos^2\alpha = v_r^2(\xi)\cos^2(\xi-\theta)$$

$$= \frac{c^2}{n_o^2\cos^2\xi + n_e^2\sin^2\xi}(\cos\xi\cos\theta + \sin\xi\sin\theta)^2.$$

上式可化为

$$v_N^2(\theta) = c^2\,\frac{(\cos\theta + \tan\xi\sin\theta)^2}{n_o^2 + n_e^2\tan^2\xi},$$

利用(5.1.8)式，化简可得

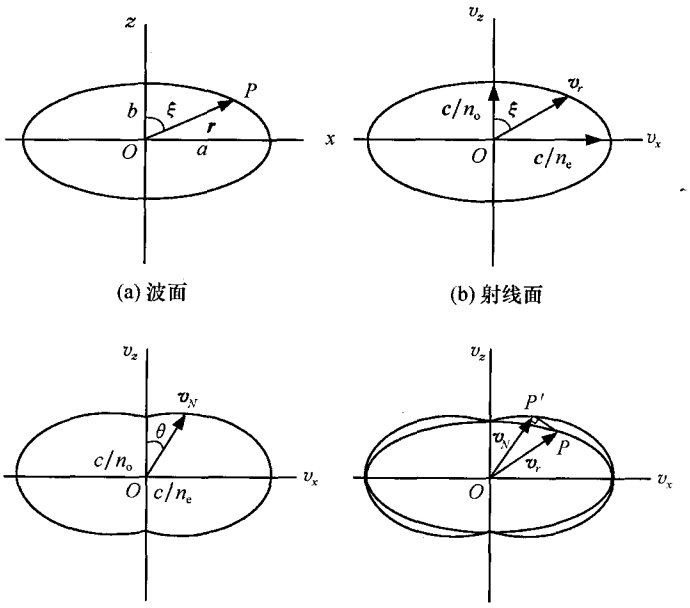


图 5.1.12 射线面与法线面

$$v_N^2(\theta)=c^2\left(\frac{\cos^2\theta}{n_o^2}+\frac{\sin^2\theta}{n_e^2}\right)$$
$$=v_o^2\cos^2\theta+v_e^2\sin^2\theta. \tag{5.1.12}$$

在空间中以 θ 为变量，画出法线速度矢量端点的轨迹面，即**法线速度面**，简称**法线面**或**波法面**. (5.1.12)式表明法线面的形状不是旋转椭球面，而是旋转卵形面. 图 5.1.12(c)示出了法线面的一种可能形式，当然方程(5.1.12)规定的法线面不一定出现“凹陷”，即使出现凹陷也可能在 x 轴方向，这取决于 n_o 与 n_e 的比值. 理论上可以证明：当 $n_o/n_e>\sqrt{2}$ 时，法线面在 z 轴出现凹陷；当 $n_e/n_o>\sqrt{2}$ 时，法线面在 x 轴出现凹陷. 但现实晶体的 n_e 与 n_o 没有如此大的差别. 为了突出法线面与射线面的区别，图 5.1.12(c)中有意地将法线面画成有凹陷的形态.

若将射线面与法线面画在一起，如图 5.1.12(d)，两者在坐标轴方向相切，说明两种速度在这两个方向数值相同且方向一致. 在其他方向，法线面包围射线面. 是否因此法线速度就一定大于射线速度呢？不然. (5.1.8)式表明法线角 θ 与射线角 ξ 两者之间不是独立的，对给定介质，知道二者之一即可确定另一角度. 与法线角相应的射线角应该这样确定(参见图 5.1.12(d))：在法线面上过 P' 点作一直线垂直于 $\boldsymbol{v}_N$，相交于射线面上 P 点，矢量 $\overrightarrow{OP}$ 便是对应的射线速率 $\boldsymbol{v}_r$. 这样确定的 θ 与 ξ 关系，$\boldsymbol{v}_N$ 与 $\boldsymbol{v}_r$ 关系同(5.1.8)、(5.1.6)式一致.

总之，射线面和法线面分别是用以反映射线速度和法线速度各向异性的几何面，在概念上应该将它们与波面区别开来. 它们不含时间变量，在空间是“冻结”的；二者的矢径长度不表示空间距离，而表示速度取值. 在具体形状上，射线面与波面相似，法线面与波面不相似.

4. 两种折射率 折射率椭球

取速度面的倒数面，便形成折射率面. 由(5.1.11)式可导出**射线折射率**各向异性的一般公式为

$$n_r^2(\xi)=\left(\frac{c}{v_r}\right)^2=n_o^2\cos^2\xi+n_e^2\sin^2\xi. \tag{5.1.13}$$

显然，$n_r(\xi)$在空间的形状不是旋转椭球面，而是旋转卵形面.

在各向异性介质中，任意方向 e 光的**折射率** n 通常定义为真空中光速 c 与该方向的相速度 v_N 之比. 由前文分析可知它一般是 θ 的函数，即

$$n(\theta)=\frac{c}{v_N(\theta)}. \tag{5.1.14}$$

由(5.1.12)式可导出折射率各向异性的一般公式为

$$n^2(\theta)=\left(\frac{c}{v_N}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\theta/n_o^2+\sin^2\theta/n_e^2}. \tag{5.1.15}$$

显然，$n(\theta)$在空间的形状倒变得简单了，成为一个旋转椭球面，在 xz 平面内为一椭圆，长短轴分别为 n_o 和 n_e.

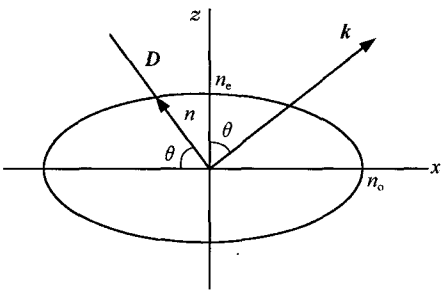


图 5.1.13 折射率椭球

为了赋予折射率面更丰富的内容，令它集中反映波法线方向、折射率取值、横波性等三者的内在联系，通常不在 $\boldsymbol{k}$ 或 $\boldsymbol{N}$ 方向取一段表示折射率值，而改换在与 $\boldsymbol{k}$ 垂直方向 $\boldsymbol{D}$ 上取一段长度表示折射率值，画成图 5.1.13，这相当于将(5.1.15)式画成椭圆并在保持 $\boldsymbol{k}$ 不动的条件下旋转 $\pi/2$. 于是，长短轴互换，z 轴取值 n_e，x 轴取值 n_o，在三维空间中 y 轴取值也是 n_o. 将此旋转椭球面写成直角坐标下的函数形式为

$$\frac{x^2}{n_o^2}+\frac{y^2}{n_o^2}+\frac{z^2}{n_e^2}=1. \tag{5.1.16}$$

该椭球面常称为**折射率椭球**. 对于射线折射率面的几何形状的描绘也可以照此处理.

5.2 晶体光学器件 偏振光的检验

5.2.1 线偏振器

可以由入射自然光得到线偏振光的器件称为**线偏振器**. 第 2 章中介绍过的偏振片就是一种简易的线偏振器，性能良好的线偏振器则一般用双折射晶体制成.

1. 偏振棱镜

利用单轴晶体中的双折射现象，将晶体制成各种棱镜，可以获得线偏振光，这

种棱镜称为**偏振棱镜**. 以下介绍几种典型的偏振棱镜.

1) 尼科耳棱镜

尼科耳(W. Nicol)棱镜是用得最广泛的双折射偏振器件之一. 取长为宽约 3 倍的优质方解石晶体,将两端面磨去一部分,使其主截面上的锐角由 71°减到 68°,再将晶体沿着短对角线切开并将切开面磨平抛光,最后用加拿大树胶粘合在一起(图 5.2.1),即得到尼科耳棱镜. 对于钠黄光 $\lambda=589.3$ nm,方解石晶体主折射率 $n_o=1.6584$,$n_e=1.4864$,而加拿大树胶折射率 $n_c=1.550$,介于二者之间. 当平行于棱边 BD' 的自然光从端面射入棱体时,o 光和 e 光都发生折射. o 光的折射率是 n_o;而 e 光由于其传播方向一般既不平行也不垂直于光轴(虚线 zz' 所示),其折射率既不是 n_o 也不是 n_e,这里记为 n'_e. 不难看出,n'_e 介于 n_o 和 n_e 之间,而且与 e 光传播方向有关. 当 e 光传播方向越靠近光轴方向,n'_e 越接近 n_o,反之越接近 n_e. 因 $n_o>n'_e$,晶体中 o 光向下偏离入射光线的角度更大. 当两束光到达树胶层斜面时,由于 $n'_e<n_c$,e 光可以透过;而 $n_o>n_c$,若 o 光入射角大于其全反射临界角($i_c=\sin^{-1}(n_o/n_c)\approx69°$),则它将被树胶层全反射到边缘而为黑色涂层吸收或从侧面射出. 因此,从 CD 端面出射的光只有棱镜中的 e 光,其振动方向在图 5.2.1(a)中已用短线标出;从输出端面看,其振动方向平行于端面的短对角线(图 5.2.1(b)).

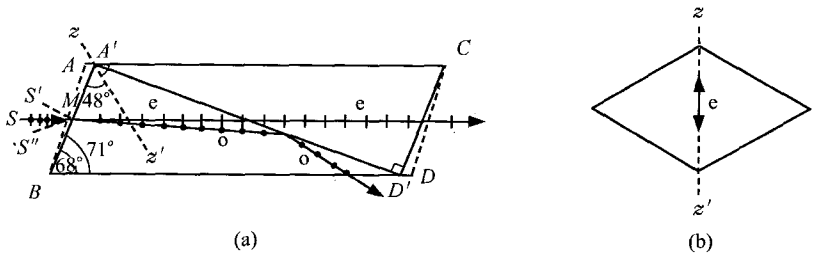


图 5.2.1 尼科耳棱镜

尼科耳棱镜的一个缺点是入射光束的会聚角不能很大. 因为当入射光线从 SM 方向向 $S'M$ 方向偏转时,晶体内 e 光方向与光轴的夹角变小,n'_e 更接近 n_o,即其值增大,e 光在树胶层面的入射角亦增大,在某一临界方向可能使 $n'_e>n_c$,e 光在树胶层面亦发生全反射. 另一方面,若入射光线向 $S''M$ 方向偏转时,o,e 光在树胶层面的入射角均减小,在某一临界方向可使 o 光入射角亦小于其临界角而发生透射. 计算表明,光线上、下两方的极限角 $\angle S'MS=\angle S''MS\approx14°$[①]. 在紫外区工作的棱镜,要将加拿大树胶换以甘油或蓖麻油. 由于端面是斜面,入射光与透射光虽然

① 实用中将晶体端面磨去一部分的目的,就是为使两极限角近似相等,以利于调节中心光线 SM,使其平行于棱边 BD'.

方向相同，但不在同一条直线上，有一个平移，所以尼科耳棱镜的另一缺点是透射光线随着棱镜的转动而移动，在转动使用时颇有不便.

2）格兰棱镜

两块方解石磨成光轴平行于棱边的直角三棱镜，斜面相互平行，中间为一空气层或用加拿大树胶粘合，如图 5.2.2 所示，即构成**格兰-傅科**(Glan-Foucault)**棱镜**或**格兰-汤普森**(Glan-Thompson)棱镜. 自然光从端面垂直入射时，进入第一棱镜后所分解的 o 光和 e 光按原入射方向传播，不发生偏折，它们在斜面上的入射角等于棱镜的楔角 α. 选择 α 角使得它大于 o 光的全反射临界角而小于 e 光的临界角，于是 o 光将发生全反射，被侧面吸收或从侧面射出；e 光则可以透过晶体. 格兰棱镜的优点有二：由于光垂直于入射端面，光强反射率较小；透射光线方向与入射光线方向一致且在同一条直线上.

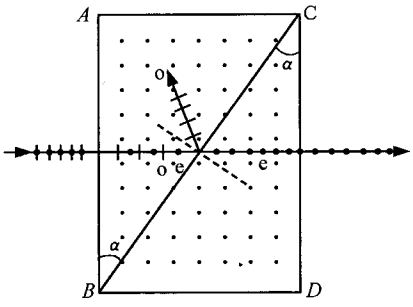
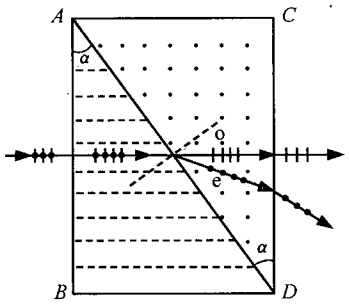


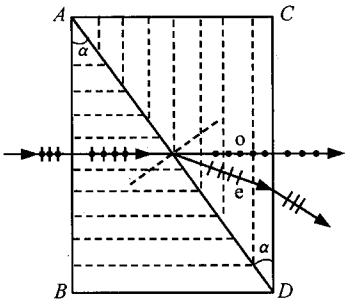
图 5.2.2　格兰棱镜

3）洛匈棱镜和塞那蒙特棱镜

洛匈(Rochon)**棱镜**的结构和光路如图 5.2.3(a)所示，它由两块光轴方向互相垂直的方解石直角三棱镜粘合而成. 一束自然光垂直于第一块棱镜的 AB 面射入后，在其内部不产生双折射，并以速度 v_o 沿光轴方向传播，其折射率为 n_o. 两种振动方向相互垂直的光束进入第二块棱镜后，振动方向在纸面内的光为 o 光，其折射率仍为 n_o，故该光束在界面 AD 不发生折射，仍以原入射方向穿过晶体；振动方向垂直于纸面的光为 e 光，相应折射率由 n_o 变为 n_e，故该光束在界面 AD 发生折射，再从后表面 CD 透射穿出晶体. 注意，后者在界面 AD 的折射满足折射定律. 因为 $n_e<n_o$，图中 e 光折射线将向下方偏折. 这时透过洛匈棱镜的光束即成为两束空间分离的振动方向互相垂直的线偏振光.



(a) 洛匈棱镜



(b) 塞那蒙特棱镜

图 5.2.3

塞那蒙特(Senarmont)**棱镜**的结构和光路如图 5.2.3(b)所示. 这种棱镜也是由两块方解石直角三棱镜粘合而成,它们的光轴也是相互垂直,但均在图面之内. 该棱镜的工作原理读者可自行分析.

4) 渥拉斯顿棱镜

为了增大两束出射线偏振光之间的分束角,可使用**渥拉斯顿**(W. H. Wollaston)**棱镜**,该镜的结构和光路如图 5.2.4(a)所示,它也是由两块方解石直角三棱镜胶合而成,与洛匈棱镜不同之处,在于第一块直角棱镜的光轴在图面内且与端面 AB 平行. 渥拉斯顿棱镜和洛匈棱镜工作原理之异同,请读者自己分析. 可以证明,只要楔角 α 不是太大,两出射光束相对原入射光方向对称分开,并且其分束角近似为

$$\gamma = 2\sin^{-1}[(n_o - n_e)\tan\alpha]. \tag{5.2.1}$$

为了进一步增大两束出射线偏振光的分束角,还可以在渥拉斯顿棱镜之后再增加一个棱镜,成为如图 5.2.4(b)所示的**双渥拉斯顿棱镜**.

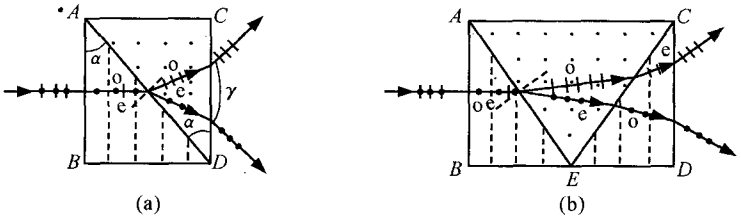


图 5.2.4 单、双渥拉斯顿棱镜

2. 利用二向色性制成的偏振片

某些双折射晶体(如电气石等)对光矢量的振动方向互相垂直的两种线偏振光具有强烈的选择吸收性,这种性质称为**二向色性**.

天然矿物电气石,是化学成分各不相同的硅酸硼化物. 若将电气石晶体沿光轴方向切制成晶片(图 5.2.5(a)),让自然光白光正入射晶片表面,则 1 mm 厚的电气

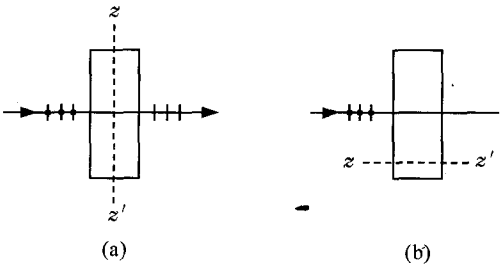


图 5.2.5 电气石的二向色性

石晶片，几乎将入射光中光矢量垂直于光轴的分量全部吸收，而对入射光中光矢量平行于光轴的分量吸收很少，这时电气石片呈绿色；若将电气石晶体垂直于光轴方向切割成晶片(图 5.2.5(b))，让自然光白光正入射晶片表面，则由于自然光中两种正交振动的方向均与光轴垂直，它们均被晶片吸收，这时无光透射，电气石片呈黑色.“二向色性”一词便是源于此种现象，它意味着电气石在两个方向上有两种颜色. 顺便指出，在图(a)中，透射光呈绿色而非白光，表明电气石在对不同的光振动方向具有选择吸收性质的同时，对不同波长也存在选择吸收.

利用电气石这类二向色性的双折射晶体，可以制作偏振片，但因略带颜色且大小受限，故用得不多. 实用中可利用线栅起偏器或人造偏振片，其原理已在 2.4.4 节中介绍过，其中人造偏振片可用碘化硫酸奎宁胶体溶液或浸碘聚乙烯醇薄膜材料拉伸而成. 这种薄膜偏振片有偏振不纯及透射光强较弱的缺点，但它有接近 180°的孔径，线度可达数十厘米，成本低廉、可大量生产，所以得到了广泛的应用.

前文中尼科耳棱镜、偏振片、线栅起偏器等器件均作为起偏器使用. 当然，它们也可以作为检偏器使用.

5.2.2　相位延迟器——波晶片和补偿器

利用晶体中 n_o 和 n_e 的差别使得 o 光和 e 光产生不同相位延迟的器件称为**相位延迟器**，它包括波晶片和补偿器.

1. 波晶片及其功能

将单轴晶体沿其光轴方向切制而成的具有一定厚度的平行平面板称为**波晶片**，如图 5.2.6(a)所示. 正入射波晶片的一束平行光在波晶片 C 内分解成的 o 光

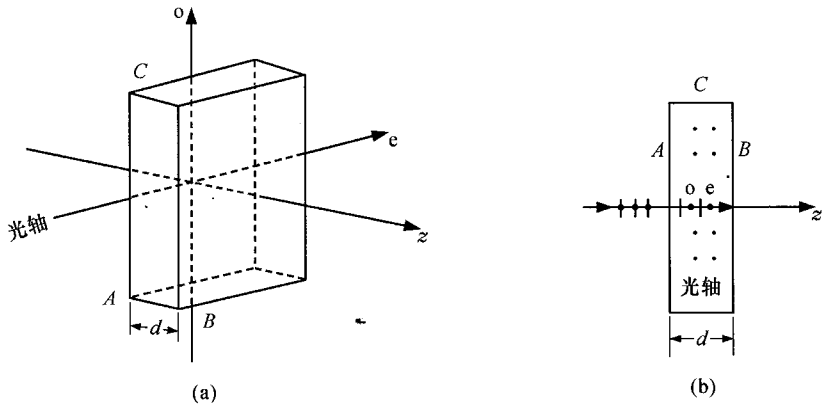


图 5.2.6　波晶片

和 e 光的传播方向虽不改变，但其传播速度及相应的折射率不同. 设 C 的厚度为 d，则 o 光和 e 光通过 C 的光程分别为 $n_o d$ 和 $n_e d$. 在晶片入射平面 A 和出射平面 B(图 5.2.6(b))，o、e 光的相位关系可用表 5.2.1 表示，其中 λ 为真空中波长.

表 5.2.1 光通过波晶片时的相位变化

	输入面 A	波晶片产生的相位延迟	输出面 B
o 光相位	φ_{oA}	$\delta\varphi_o=\frac{2\pi}{\lambda}n_o d$	$\varphi_{oB}=\varphi_{oA}+\delta\varphi_o$
e 光相位	φ_{eA}	$\delta\varphi_e=\frac{2\pi}{\lambda}n_e d$	$\varphi_{eB}=\varphi_{eA}+\delta\varphi_e$
o、e 光相差	$\delta_A=\varphi_{oA}-\varphi_{eA}$	$\delta_C=\delta\varphi_o-\delta\varphi_e$	$\delta_B=\delta_A+\delta_C$

由上表易见波晶片产生的 o 光相对 e 光的相差为

$$\delta_C=\delta\varphi_o-\delta\varphi_e=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d. \tag{5.2.2}$$

显然，晶体主折射率之差 $|n_o-n_e|$ 愈大，波晶片厚度 d 愈厚，o 光相对于 e 光的相差愈大. 对于负晶体，$n_o>n_e$，故 $\delta_C>0$；对于正晶体，$n_o<n_e$，故 $\delta_C<0$.

晶片中 e 光和 o 光的振动方向互相正交，这两个方向可分别称为 e **轴**和 o **轴**，它们分别与光轴方向平行和垂直. 由于在 2.3.5 节中已用相差 $\delta=\varphi_y-\varphi_x$ 来建立光的偏振态的判据，在表 5.2.1 和(5.2.2)式中则将 δ 写成 $\varphi_o-\varphi_e$，虽然晶体光轴本身无正向和负向之分，但为了与以前建立的判据自洽，这里必须将 e 轴正向取作 x 轴正向，将 o 轴正向取作 y 轴正向，光传播方向取作 z 轴正向，即使 eoz 依其顺序构成右手正交系，如图 5.2.6(a)所示. 以后我们一直使用这一约定. 此问题更详尽的讨论可见 5.3.3 节.

顺便提及，人们常把晶片中 e 轴和 o 轴中光矢量沿该轴的光传播速度较大的那个方向称为**快轴**，另一个称为**慢轴**. 波晶片上通常用一个箭头标明快轴方向. 显然，对于负晶体，e 轴为快轴；对于正晶体，o 轴为快轴.

2. 几种波晶片

1) 1/4 波片($\lambda/4$ 片)

对于波长为 λ 的单色光，选择波晶片的厚度，使 o 光相对 e 光的光程差为

$$\Delta=(n_o-n_e)d=(2m+1)\frac{\lambda}{4}, \tag{5.2.3}$$

相应的相差为

$$\delta_C=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d=(2m+1)\frac{\pi}{2}, \tag{5.2.4}$$

这里 m 是任意整数(对下述 $\lambda/2$ 片和 λ 片的情况也是这样)，这样的波晶片使 o 光

和 e 光的相差为 $\pi/2$ 的(正或负)奇数倍. 由于相差为 2π 整数倍的相位是等效的,故这种晶片产生的有效相差只有 $\pm\pi/2$ 两种可能,它们相应的有效光程差为 $\pm\lambda/4$,故人们常统称凡使 o 光和 e 光的相差为 $\pi/2$ 奇数倍的波晶片为**四分之一波片**(简称 **$\lambda/4$ 片**). 易见 $\lambda/4$ 片的最小厚度为

$$d=\frac{1}{|n_o-n_e|}\frac{\lambda}{4}. \tag{5.2.5}$$

由(5.2.4)式可知,无论对正晶体还是负晶体,随着 d 或 m 的变化其有效相差均既可为 $\pi/2$,又可为 $-\pi/2$. 为避免这种不确定性,今后在使用 $\lambda/4$ 片一词时专指最小厚度的波片,这时对正晶体有 $\delta_C=-\pi/2$,对负晶体有 $\delta_C=\pi/2$. 此规定对其他波晶片亦适用.

2) 半波片($\lambda/2$ 片)

对于波长为 λ 的单色光,选择波晶片的厚度,使 o 光相对 e 光的光程差和相差分别为

$$\Delta=(n_o-n_e)d=(2m+1)\frac{\lambda}{2}, \tag{5.2.6}$$

$$\delta_C=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d=(2m+1)\pi, \tag{5.2.7}$$

即 δ_C 为 π 的奇数倍,这种晶片称为**半波片($\lambda/2$ 片)**. $\lambda/2$ 片的最小厚度为

$$d=\frac{1}{|n_o-n_e|}\frac{\lambda}{2}. \tag{5.2.8}$$

由于 $\pm\pi$ 等价,这时可不区分正负晶体.

3) 全波片(λ 片)

如果

$$\Delta=(n_o-n_e)d=m\lambda, \tag{5.2.9}$$

或

$$\delta_C=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d=2m\pi, \tag{5.2.10}$$

这样的波晶片使 o 光和 e 光的相差为 2π 的整数倍,称为**全波片**(简称 **λ 片**). λ 片的最小厚度为

$$d=\frac{1}{|n_o-n_e|}\lambda. \tag{5.2.11}$$

应当注意,上述各种波片均只对某一特定波长而言.

3. 补偿器

补偿器是可以连续改变 o、e 光相差的装置,它可以看做是一种有效厚度可变的波晶片. 图 5.2.7 所示的一种实例称为**索累**(Soleil)**补偿器**,它由两个石英

直角劈和一个石英平行平面薄板组成. 两个石英劈的光轴平行且在图面内，石英板的光轴垂直于图面，上劈可由微动螺旋使之平行移动. 当波长为 λ 的单色光正入射补偿器上表面时，振动方向在图面之内的光在石英劈中为 e 光，进入石英板后变为 o 光；振动方向与图面垂直的光则相反，在石英劈中为 o 光，在石英板中为 e 光，且它们的传播方向均与入射光方向相同. 设入射光通过两石英劈的厚度为 d_1，通过石英板的厚度为 d_2，补偿器对于这两种线偏振光引入的光程差分别为

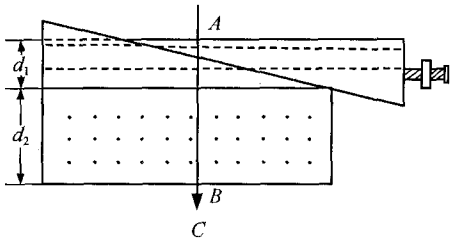


图 5.2.7 索累补偿器

$$\Delta_{/\!/} = n_e d_1 + n_o d_2,$$
$$\Delta_{\perp} = n_o d_1 + n_e d_2.$$

由补偿器所引入的这两种光之间的相差则为

$$\delta_C = \frac{2\pi}{\lambda}[(n_e d_1 + n_o d_2) - (n_o d_1 + n_e d_2)]$$
$$= \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)(d_2 - d_1). \tag{5.2.12}$$

通过改变 d_1，可任意调整补偿器的有效厚度$(d_2 - d_1)$，从而连续改变 δ_C 值.

5.2.3 圆起偏器和圆检偏器

1. 圆起偏器

让自然光相继通过一个线偏振器(如偏振片)和一个 1/4 波片，可以获得圆偏振光. 因此，这两个器件的组合可以称为**圆起偏器**. 其工作原理可由图 5.2.8(a)表示，图中 P 表示偏振片的透振方向，$\lambda/4$ 片由方解石制成，其 e 轴(光轴)与 P 方向所夹锐角 $\theta=45°$，并在其上建立 eoz 坐标系. 一束单色自然光沿 z 轴通过偏振片后成为线偏振光. 设该线偏振光光矢量为 $\boldsymbol{E}$(振幅为 A)，在 $\lambda/4$ 片输入面 A 上，$\boldsymbol{E}$ 分解成 $\boldsymbol{E}_e$ 和 $\boldsymbol{E}_o$(图 5.2.8(b))，其振幅 $A_e = A\cos 45°$，$A_o = A\sin 45°$，两振幅相等，其相差 $\delta_A = 0$；设晶片无吸收(下同)，则在 $\lambda/4$ 片输出面 B 出射光振幅仍为 A_e，A_o，相差 $\delta_B = \delta_A + \delta_C$. 依前文分析，对负晶 $\lambda/4$ 片，$\delta_C = \pi/2$，故有 $\delta_B = \pi/2$. 根据 2.3.5 节中建立的确定光的偏振态的判据，可知从 $\lambda/4$ 片出射的光是一束左旋圆偏振光，图 5.2.8 所示装置称为**左旋圆起偏器**. 假如 $\lambda/4$ 片的 e 轴与 P 方向所夹锐角 $\theta = -45°$(图 5.2.8(c))，振幅 A_e 仍然等于 A_o，但 $\delta_A = \pi$，$\delta_B = 3\pi/2$(或 $-\pi/2$)，故从 $\lambda/4$ 片出射的光是一束右旋圆偏振光，此时圆起偏器称为**右旋圆起偏器**.

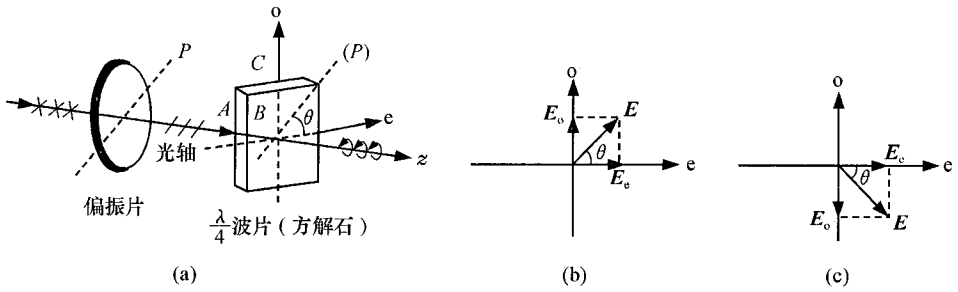


图 5.2.8　圆起偏器原理图

如果用一个石英制成的 $\lambda/4$ 片代替图(a)中的方解石 $\lambda/4$ 片，那么该装置变成一个右旋圆起偏器；假如 $\theta=-45°$，则该装置成为一个左旋圆起偏器.

综上所述可以看到，一个圆起偏器是左旋的还是右旋的，由两个因素决定：一个是制成 $\lambda/4$ 片的晶体的正负性，它决定了 δ_C 的负正；另一个是 $\lambda/4$ 片的 e 轴与偏振片透振方向所夹锐角 θ 的正负性①，它决定了 δ_A 是 0 或 π；两者共同决定 δ_B. 不难发现，*两者同性为右旋圆起偏器；两者异性为左旋圆起偏器.*

2. 圆检偏器

若将圆起偏器的输出端作为输入端，而将其输入端作为输出端来使用，这个圆起偏器就转化成一个**圆检偏器**. 对应于图 5.2.8 的圆起偏器，相应的圆检偏器如图 5.2.9 所示.

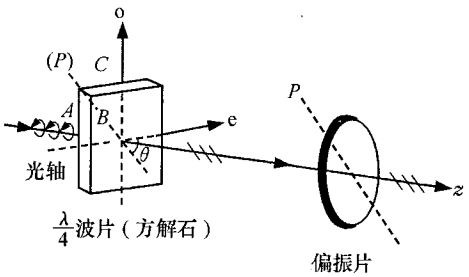


图 5.2.9　圆检偏器原理图

一束单色左旋圆偏振光沿 z 轴入射，其光矢量 $\boldsymbol{E}_L$ 在 $\lambda/4$ 片输入面 A 上分解成 $\boldsymbol{E}_e$ 和 $\boldsymbol{E}_o$，两振幅 A_e、A_o 相等，$\boldsymbol{E}_o$ 与 $\boldsymbol{E}_e$ 之间的相差 $\delta_A=\pi/2$；在 $\lambda/4$ 片输出面 B 上，出射光振幅仍为 A_e、A_o，相差 $\delta_B=\delta_A+\delta_C=\pi$. 根据 2.3.5 节中建立的确定光的偏振态的判据，可知从 $\lambda/4$ 片出射的光是一束线偏振光，其光矢量振动方向与 e 轴夹角 $\theta=-45°$，此方向恰好与偏振片透振方向一致，故可以完全透过偏振片. 假如正入射 $\lambda/4$ 片的是一束右旋圆偏振光，通过分析不难得知，从偏振片无光射出. 故通过出射光的有无可判断入射圆偏振光的旋向. 若将偏振片旋转 90°，则结论相反.

---

① 这里规定当入射到晶片前表面 A 的线偏振光的振动方向在 e、o 坐标系中一、三象限时 $0<\theta<\pi/2$；在二、四象限时 $-\pi/2<\theta<0$.

例 5.2.1 右旋圆偏振光正入射通过两个全同的石英 $\lambda/4$ 片，当两晶片的光轴夹角 θ 分别为 0°、45°、90°时，求出射光的偏振态.

解 (1) $\theta=0°$时，两个 $\lambda/4$ 片的共同作用相当于一个 $\lambda/2$ 片，它所引起的 o、e 光相差 $\delta_C=-\pi$ 或 π. 对入射的右旋光，$\delta_A=-\pi/2$，故通过两晶片后 o、e 光相差 $\delta_B=\delta_A+\delta_C=-\pi/2+\pi=\pi/2$，故出射光为左旋圆偏振光.

(2) $\theta=45°$时，两晶片光轴方位如图 5.2.10(a)所示. 已知 $\delta_{A1}=-\pi/2$，对正晶体 $\lambda/4$ 片，$\delta_{C1}=\delta_{C2}=-\pi/2$. 从晶片 C_1 出射的光有 $\delta_{B1}=\delta_{A1}+\delta_{C1}=-\pi$，它等效于 π，故其偏振态为振动方向沿 o_2 轴方向的线偏振光. 此线振偏光在通过晶片 C_2 时并不分解，最终出射光仍为该方向的线偏振光.

(3) $\theta=90°$时，两晶片光轴方位如图 5.2.10(b)所示. 从 C_1 出射的光仍为位于 e_1o_1 坐标系二、四象限、且与 e_1 轴成 45°角的线偏振光. 该线偏振光位于 e_2o_2 坐标系一、三象限，故对晶片 C_2 而言入射光之 $\delta_{A2}=0$，又 $\delta_{C2}=-\pi/2$，$\delta_{B2}=\delta_{A2}+\delta_{C2}=-\pi/2$，故出射光为右旋圆偏振光. 此情况亦可从另一角度说明，因两晶片性质全同，只是 e、o 轴互易，同一振动在 C_1 中为 e 光，在 C_2 中则为 o 光，反之亦然. 故二者互相补偿，对入射两正交振动引入的总的有效相差为零，因此出射光的偏振态不变.

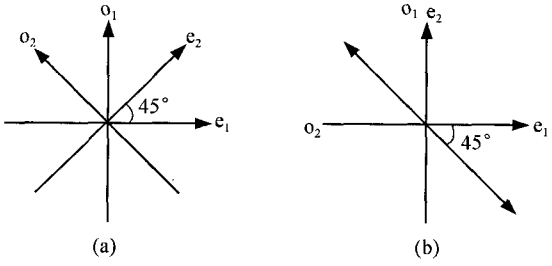


图 5.2.10 例 5.2.1 图

由于自然光通过偏振片及 $\lambda/4$ 片的组合可以得到圆偏振光，一般常将这种组合称为圆偏振器，这对于实际应用是比较方便的. 但是，从正交完备本征态的理论角度，将这种组合作为圆偏振器的定义是不确切的. 后文 5.6 节中将会说明正交本征偏振态的概念. 两个振动方向垂直的线偏振光是一对正交偏振态，而线偏振器是线偏振光的本征器件，它允许这对正交线偏振态中的一个完全通过，而另一个则完全通不过. 类似地，左右旋圆偏振光也组成一对正交完备本征态. 作为圆偏振光的本征器件，圆偏振器也应该允许左右旋圆偏振光其中之一完全透过而另外一态完全通不过. 显然，上述线偏振器和 $\lambda/4$ 片的组合是不满足这一条件的. 忽略此处的说明对一般问题的分析并无太大影响，但可能对理解某些文献或结果，如后文 5.6 节中圆偏振器的琼斯矩阵和思考题 5.9 中的斯托克斯参量带来困难. ①

① 关于此问题的详细讨论可参见蔡履中. 大学物理，2005，1：15.

5.2.4　光通过波晶片后偏振态的变化

在圆起偏器工作原理及例 5.2.1 中，已初步涉及这个问题，现将研究光通过波晶片后偏振态变化的方法和步骤归纳如下：

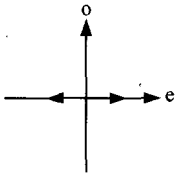
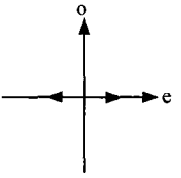
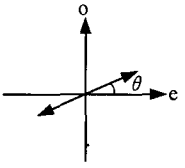
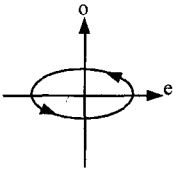
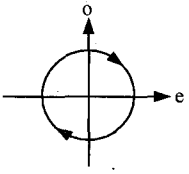
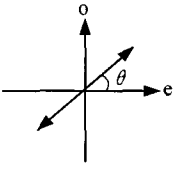
(1) 将入射光的电矢量 $\boldsymbol{E}$ 按照波晶片的 o 轴和 e 轴分解成 $\boldsymbol{E}_o$ 和 $\boldsymbol{E}_e$，求其振幅 A_o，A_e，并根据入射光的偏振态确定在波晶片输入面 A 上 o 光相对 e 光的相差 δ_A.

(2) 在波晶片输出面 B 上出射 o 光和 e 光的振幅仍为 A_o 和 A_e；其相差为 $\delta_B=\delta_A+\delta_C$，其中 $\delta_C=\dfrac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d$ 是波晶片所引起的 $\boldsymbol{E}_o$ 相对于 $\boldsymbol{E}_e$ 的相差.

(3) 出射光的偏振态可由其振幅比 A_o/A_e 和相位差 δ_B 根据 2.3.5 节中建立的确定光的偏振态的判据来判定.

现将几种偏振光经负晶体(如方解石)制成的 $\lambda/4$ 片和 $\lambda/2$ 片后偏振态的变化情况列在表 5.2.2 及表 5.2.3 中. 对正晶体(如石英)制成的 $\lambda/4$ 片可作类似分析. 显然，正、负晶体 $\lambda/2$ 片对光的偏振态的影响是相同的，而任何偏振态的光经全波片后其偏振态并不发生变化.

表 5.2.2　偏振光经 $\lambda/4$ 片($\delta_C=\pi/2$)后偏振态的变化

入射光偏振态	经 $\lambda/4$ 片后	说　明
		入射光为线偏振光，且其振动方向沿 e 轴或 o 轴时，在 $\lambda/4$ 片或任何波晶片中只存在 e 光或 o 光，故经 $\lambda/4$ 片或任何波晶片，出射光偏振态均不变.
 $\delta_A=0$	 $\delta_B=0+\pi/2=\pi/2$	入射光为一、三象限的线偏振光，出射光为左旋正椭圆偏振光； 入射光为二、四象限的线偏振光，出射光为右旋正椭圆偏振光.
 $\delta_A=-\pi/2$	 $\delta_B=-\pi/2+\pi/2=0$	入射光为右旋圆偏振光，出射光为一、三象限的线偏振光，$\theta=45°$； 入射光为左旋圆偏振光，出射光为二、四象限的线偏振光，$\theta=-45°$.

续表

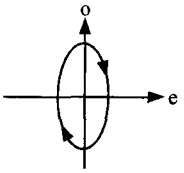
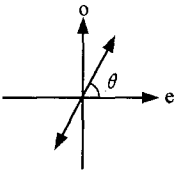
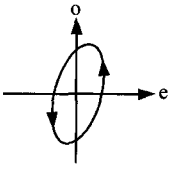
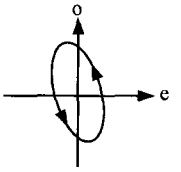
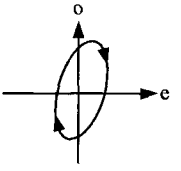
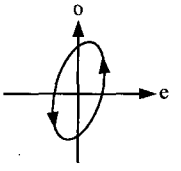
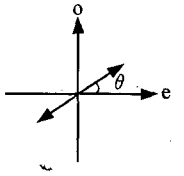
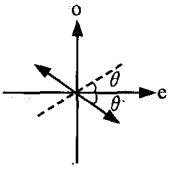
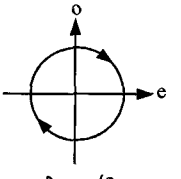
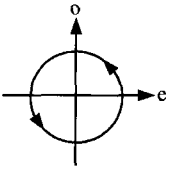
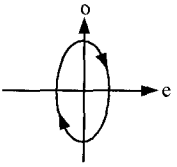
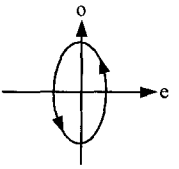
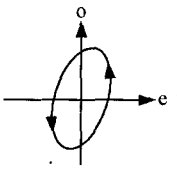
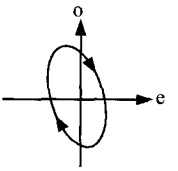
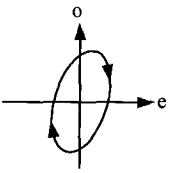
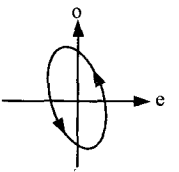
入射光偏振态	经 $\lambda/4$ 片后	说 明
 $\delta_A=-\pi/2$	 $\delta_B=-\pi/2+\pi/2=0$	入射光为右旋正椭圆偏振光，出射光为一、三象限的线偏振光； 入射光为左旋正椭圆偏振光，出射光为二、四象限的线偏振光.
 $0<\delta_A<\pi/2$	 $\pi/2<\delta_B<\pi$	入射光为斜椭圆偏振光，出射光仍为斜椭圆偏振光，但是旋向或长轴所在象限二者之一发生变化.
 $-\pi/2<\delta_A<0$	 $0<\delta_B<\pi/2$	

表 5.2.3 偏振光经 $\lambda/2$ 片($\delta_C=\pi$)后偏振态的变化

入射光偏振态	经 $\lambda/2$ 片后	说 明
 $\delta_A=0$	 $\delta_B=0+\pi=\pi$	入射光为线偏振光，出射光仍为线偏振光，其振动面相对 e 轴转过 2θ 角，即转向关于光轴对称方位.
 $\delta_A=-\pi/2$	 $\delta_B=-\pi/2+\pi=\pi/2$	入射光为圆偏振光，出射光仍为圆偏振光，但旋向反转.

续表

入射光偏振态	经 λ/2 片后	说 明
 $\delta_A=-\pi/2$	 $\delta_B=-\pi/2+\pi=\pi/2$	入射光为正椭圆偏振光，出射光仍为正椭圆偏振光，但旋向反转.
 $0<\delta_A<\pi/2$	 $\pi<\delta_B<3\pi/2$ $(-\pi<\delta_B<-\pi/2)$	入射光为斜椭圆偏振光，出射光仍为斜椭圆偏振光，但是旋向相反，同时椭圆长轴方向转向关于光轴对称的方位.
 $-\pi/2<\delta_A<0$	 $\pi/2<\delta_B<\pi$	

最后应指出，自然光通过任何厚度的波晶片后仍然是自然光. 为说明这一点，可利用正交模型并参照波晶片光轴的方位，将自然光分解成强度相等、振动方向分别平行于波晶片的 e 轴和 o 轴、相位彼此无关的两个线偏振光. 它们经过波晶片后仍保持各自的强度和振动方向不变，只是其相位关系在原来彼此无关的基础上又加上一个常量相差 δ_C. 显然，若两个量本来独立无关，则每个量加上一个常量后，二者仍保持独立无关. 因此，透过波晶片后的光仍是自然光. 由于部分偏振光可看做自然光与偏振光的混合，而通过任意厚度的波晶片后自然光仍是自然光，偏振光仍是偏振光(其偏振态可能发生变化)，故部分偏振光通过任意波晶片后仍是部分偏振光.

5.2.5 偏振光的检验

迄今为止，我们已分别介绍了各种偏振光通过偏振片后光强的变化以及光通过波晶片后偏振态的变化. 现在以此为基础来讨论偏振光的检验问题.

在 2.4 节中，把偏振光分为三类 7 种，即非偏振光(自然光)，完全偏振光(包括线偏振光、圆偏振光和椭圆偏振光 3 种)和部分偏振光(包括部分线偏振光、部分圆偏振光和部分椭圆偏振光 3 种). 根据入射光通过旋转的偏振片时光强无变化及有变化可以将它们初步分成两大组：自然光、圆偏振光和部分圆偏振光为一组，余者为另一组. 为了进一步区分同一组中的不同种偏振态，可以再引入一块 $\lambda/4$ 片及第二个偏振片. 为了说明这 7 种偏振态在通过偏振片 P_1 及 $\lambda/4$ 波片 C——偏振片 P_2 这一系统时的不同行为，我们在图 5.2.11 中示意给出了未知光经旋转 P_1 分组后的各种偏振光经 C 及 P_2 后偏振态的变化和出射光强的特点. 图中椭圆偏振光以正椭圆为代表. 因为正与斜是相对于晶片光轴的方位而言，在通过偏振片观察斜椭圆偏振光时，若旋转偏振片找到光强最大方位，则偏振片的透振方向已对准了椭圆长轴，这时若令 $\lambda/4$ 片光轴方向与偏振片的透振方向一致，则该椭圆在该晶片的 eo 坐标系中已化为正椭圆. 因此我们只考虑正椭圆的情况即可. 在该配置下，部分线偏振光中线偏振光的振动方向也与晶片光轴方向一致.

由图 5.2.11 的分析，可以根据未知光穿过偏振片或 $\lambda/4$ 晶片与偏振片构成的系统时输出光强的不同特点来反推输入光的偏振态，此即偏振态的检验问题. 在表 5.2.4 和表 5.2.5 中，我们根据这一思路给出了 7 种偏振光的具体检验方法和程序；图 5.2.11 则直观地示出了每步检验过程中偏振态的变化以及最终输出光强检测结果的区别.

表 5.2.4 偏振光检验法(一)(单用旋转偏振片光强无变化时)

把 $\lambda/4$ 片置于偏振片前，如旋转偏振片时光强无变化，则为自然光.	把 $\lambda/4$ 片置于偏振片前，旋转偏振片时光强有变化	
	如有消光位置则为圆偏振光.	如无消光位置，则为部分圆偏振光.

表 5.2.5 偏振光检验法(二)(单用旋转偏振片光强有变化时)

<table>
<tr><td rowspan="3">旋转偏振片时如有消光位置，则为线偏振光.</td><td colspan="3">旋转偏振片时，如无消光位置，将偏振片置于透射光强最大位置，并把 $\lambda/4$ 片置于偏振片前，使其光轴与偏振片透射光强最大方位平行.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">如旋转偏振片时有消光位置，则为椭圆偏振光.</td><td colspan="2">如旋转偏振片时无消光位置</td></tr>
<tr><td>偏振片在原来的位置时，光强最大，则为部分线偏振光.</td><td>偏振片不在原来的位置时，光强最大，则为部分椭圆偏振光.</td></tr>
</table>

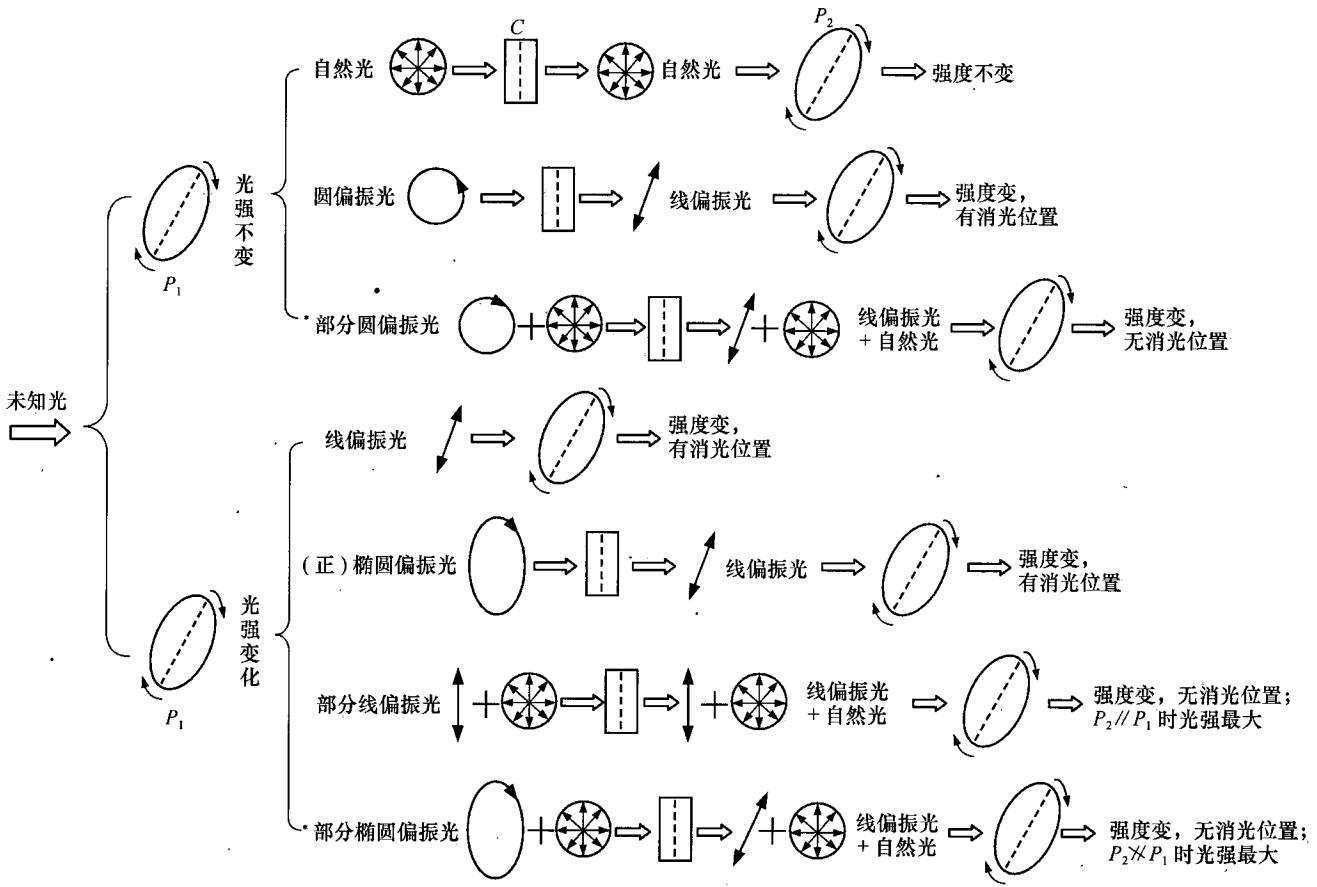


图 5.2.11　未知偏振光经旋转偏振片 P_1 分组以及各种偏振光通过 $\lambda/4$ 片 C-偏振片 P_2 系统时偏振态及强度的变化，图中波晶片光轴已对准旋转 P_1 时光强最大方位

5.3 偏振光的干涉

当线偏振光通过波晶片时，出射光分解为 o 光和 e 光，它们频率相同，相差恒定，但振动方向互相垂直，故不会发生干涉效应，而是一般地合成一椭圆偏振光. 若在出射光中置一偏振片，此两束光通过偏振片后变成振动方向相同的线偏振光，这时稳定干涉三条件均得到满足，故它们可以发生干涉. 这种产生相干光的方法称为**分振动面法**，相应的干涉现象称为**偏振光的干涉**.

偏振光的干涉可分为平行偏振光的干涉和会聚偏振光的干涉两种情况，下面分别加以讨论.

5.3.1 平行偏振光的干涉

1. 干涉装置及干涉光强的计算

平行偏振光干涉装置如图 5.3.1 所示，一波晶片 C 置于两个偏振片 P_1 和 P_2 之间，后面置一观察屏幕 Π，其中 P_1 将入射自然光变成线偏振光，C 使该线偏振光分解为振动方向互相垂直的 o 光和 e 光并产生确定的相差，P_2 则从这两束光中取出振动方向与其透振方向相同的分量使得干涉可以发生.

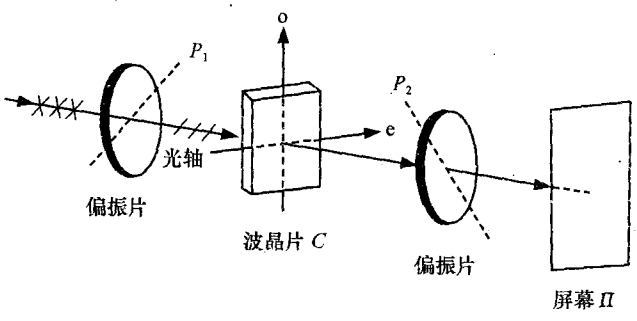


图 5.3.1 平行偏振光干涉装置

干涉光强的计算可分为以下步骤：

1) 振幅分析

根据图 5.3.1 干涉装置，迎着光源或光传播方向，正确画出 P_1，eo 正交坐标轴和 P_2 在空间中的相对取向，如图 5.3.2 所示. 设波晶片 C 的 e 轴与 P_1 和 P_2 所夹锐角分别为 θ_1 和 θ_2（这里均取正值），并设经 P_1 出射的线偏振光的光矢量

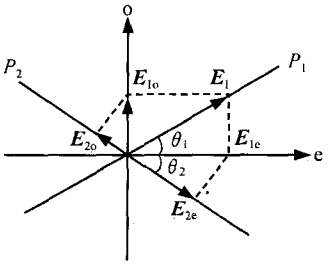


图 5.3.2　空间相对取向和光矢量的分解

为 $\boldsymbol{E}_1$(振幅为 A_1),在波晶片中它按 eo 正交轴分解成 $\boldsymbol{E}_{1e}$和 $\boldsymbol{E}_{1o}$,它们的振幅分别是

$$A_{1e}=A_1\cos\theta_1,\qquad A_{1o}=A_1\sin\theta_1.$$

$\boldsymbol{E}_{1e}$和 $\boldsymbol{E}_{1o}$在偏振片 P_2 的透振方向上的投影分别为 $\boldsymbol{E}_{2e}$和 $\boldsymbol{E}_{2o}$,它们的振幅分别是

$$\begin{cases}A_{2e}=A_{1e}\cos\theta_2=A_1\cos\theta_1\cos\theta_2,\\ A_{2o}=A_{1o}\sin\theta_2=A_1\sin\theta_1\sin\theta_2.\end{cases}\tag{5.3.1}$$

上式即是干涉装置分振动面所得两束相干的线偏振光的振幅表达式.

2) 相差分析

将由 P_2 出射的光束 $\boldsymbol{E}_{2o}$相对于 $\boldsymbol{E}_{2e}$的相差用 δ 标记,它由三部分构成:

(1) o 光和 e 光在波晶片 C 前表面的相差 δ_A

$$\delta_A=\begin{cases}0,\\ \pi.\end{cases}\quad\left(\text{当 }P_1\text{ 方向在 eo 平面}\begin{matrix}\text{一、三}\\ \text{二、四}\end{matrix}\text{象限时}\right)\tag{5.3.2}$$

(2) 厚度为 d 的波晶片 C 所引起的 o,e 光的相差 δ_C

$$\delta_C=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d.\tag{5.3.3}$$

(3) e 轴和 o 轴正向在 P_2 上投影时引起的附加相差 δ'

$$\delta'=\begin{cases}0,\\ \pi.\end{cases}\quad\left(\text{当 }P_2\text{ 方向在 eo 平面}\begin{matrix}\text{一、三}\\ \text{二、四}\end{matrix}\text{象限时}\right)\tag{5.3.4}$$

因此,两相干光间的最终相差为

$$\delta=\delta_A+\delta_C+\delta'.\tag{5.3.5}$$

在图 5.3.2 所示的情况下,$\delta=0+\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d+\pi$.

δ 尚有另一种更为简单的表达方式,即

$$\delta=\delta_C+\delta'',\tag{5.3.6}$$

式中 δ''为将入射线偏振光在晶片的 e、o 轴及 P_2 方向两次投影所产生的附加相差,其数值

$$\delta''=\begin{cases}0,\\ \pi.\end{cases}\quad\left(\text{当 }\boldsymbol{E}_{2o}\text{ 和 }\boldsymbol{E}_{2e}\begin{matrix}\text{同}\\ \text{反}\end{matrix}\text{向时}\right)\tag{5.3.7}$$

不难验证以上两种表达方式是等价的,实际上有 $\delta''=\delta_A+\delta'$.

3) 强度公式

由前文振幅及相差分析可以得到偏振光干涉强度公式

$$\begin{aligned}I&=A_{2e}^2+A_{2o}^2+2A_{2e}A_{2o}\cos\delta\\ &=I_1(\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2+2\cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\delta).\end{aligned}\tag{5.3.8}$$

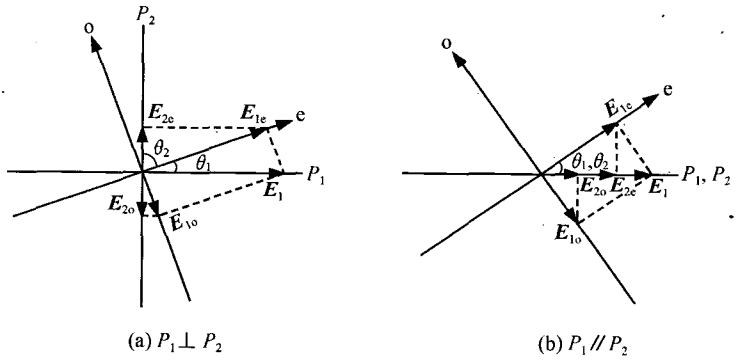
其中 $I_1=A_1^2=\frac{1}{2}I_0$，I_0 为入射自然光的强度. 由上式可知，平行偏振光干涉强度的分布与两块偏振片在 eo 正交系中的方位角(θ_1，θ_2)及相差 δ 有关. 单色光照明时，屏幕上各处强度均匀，如果转动 P_1、C 及 P_2 中任何一个器件，θ_1、θ_2 发生变化，屏幕上的干涉强度亦相应发生变化，这是单色平行偏振光干涉的特点.

2. 几种干涉现象的讨论

1) 波晶片旋转时光强的变化与偏振片旋转时的光强互补现象

设两偏振片正交，即 $P_1\perp P_2$，波晶片的光轴方向位于 P_1，P_2 透振方向之间(图 5.3.3(a))，易见此时有 $\theta_1+\theta_2=\pi/2$，$\delta''=\pi$，由(5.3.8)及(5.3.6)式可得干涉光强为

$$\begin{aligned} I_\perp &= \frac{1}{2}I_1\sin^2 2\theta_1(1+\cos\delta) \\ &= \frac{1}{2}I_1\sin^2 2\theta_1(1-\cos\delta_C). \end{aligned} \tag{5.3.9}$$



(a) $P_1\perp P_2$ (b) $P_1 /\!/ P_2$

图 5.3.3 光强互补现象

由上式可知旋转波晶片时，θ_1 变化，$I_\perp$ 亦随之变化. 当 $\theta_1=0,\pi/2,\cdots$ 时消光；当 $\theta_1=\pi/4,3\pi/4,\cdots$ 时光强极大.

若两偏振片平行，即 $P_1 /\!/ P_2$，波晶片的光轴方向位于 P_1、P_2 透振方向同侧(图 5.3.3(b))，则有 $\theta_1=\theta_2$，$\delta''=0$，由(5.3.8)及(5.3.6)式可得干涉光强为

$$\begin{aligned} I_{/\!/} &= I_1\left[1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta_1(1-\cos\delta)\right] \\ &= I_1\left[1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta_1(1-\cos\delta_C)\right]. \end{aligned} \tag{5.3.10}$$

由上式同样可分析波晶片旋转时 θ_1 变化所引起的 $I_{/\!/}$ 的变化. 另外可以看到

$$I_{\perp}+I_{/\!/}=I_1, \tag{5.3.11}$$

即对于同一波晶片方位角 θ_1，当转动 P_2 使其位置从与 P_1 正交变为与 P_1 平行时，相应的干涉强度呈互补关系. 此互补关系对于各种波晶片及各种方位角 θ_1 均适用. 读者可自行分析不同 δ_C 及 θ_1 时 $I_{\perp}$ 及 $I_{/\!/}$ 的数值，以确定不同波晶片 $I_{\perp}$ 与 $I_{/\!/}$ 的极值方位，当其中一个为极大时，另一个必为极小.

2) 显色偏振

由 δ_C 的表达式可知，当 n_o、n_e、d 给定时，δ_C 是光波长 λ 的函数. 当白光照明时，不同 λ 的色光具有不同的 δ_C，故有不同的干涉强度. 设当 $P_2\perp P_1$ 时，某一波长 λ_1 具有最大的干涉强度，另一波长 λ_2 具有最小的干涉强度，则由互补关系，当 $P_2/\!/P_1$ 时，λ_1 和 λ_2 分别具有最小和最大的干涉强度. 这两种情况下屏幕上的颜色(干涉色)称为互补色. 自然地，当转动 P_2 时，屏幕上色彩将随之变化，这种现象称为**显色偏振**.

显色偏振在晶体分析中十分有用. 根据是否出现显色偏振现象，可以判断样品片是否为晶片. 若为晶片，还可以进一步根据屏幕上出现的干涉色，判断出产生消光的光的波长，从而求出晶片的(n_o-n_e)或 d 的值.

3) 尖劈形晶片的干涉现象

在图 5.3.1 的装置中，将平行平面波晶片用一尖劈形晶片 C 代替，P_1、C 及 P_2 的相对方位示于图 5.3.4(a)，并令单色自然平行光正入射. 光束透过偏振片 P_1 后变成线偏振光，在晶片 C 中它分解为 o 光和 e 光，出射为两束振动方向互相垂直的线偏振光，它们相对于入射方向的偏向角分别为

$$\begin{aligned}\delta_o &\approx (n_o-1)\alpha,\\ \delta_e &\approx (n_e-1)\alpha,\end{aligned} \tag{5.3.12}$$

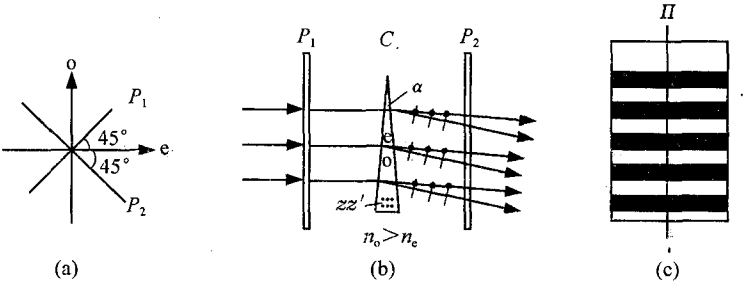


图 5.3.4 尖劈形晶片的干涉

其中 α 为尖劈形晶片顶角. 这两束线偏振光通过偏振片 P_2 后振动方向变为一致，故屏幕 Π 上产生平行等距的干涉条纹，如图 5.3.4(c)所示. 条纹的取向与劈棱方向平行，条纹间距则为

$$e=\frac{\lambda}{|\sin\delta_o-\sin\delta_e|}\approx\frac{\lambda}{|\delta_o-\delta_e|}=\frac{\lambda}{|(n_o-n_e)\alpha|}. \tag{5.3.13}$$

这种干涉条纹亦可看做是等厚条纹. 当 $P_1\perp P_2$ 时,$\delta''=\pi$,在 δ_C 等于 π 的奇数倍,即晶片相当于半波片处,入射晶片的线偏振光经过晶片后其振动方向转到了关于光轴的对称方位,即与 P_2 透振方向一致,故该处相应于亮纹;在 δ_C 等于 π 的偶数倍,即晶片相当于全波片处,透过晶片的光仍保持从 P_1 出射时的偏振状态,它无法透过 P_2,故该处出现暗纹. 由此看法得到的条纹间距仍为(5.3.13)式.

若用白光照明,因 δ_C 与 λ、d 两因素有关,不同 d 处有不同 λ 满足极大值条件,故屏幕上出现彩色条纹,等色线对应于等厚线. 对尖劈形晶片等色条纹仍平行于劈棱;若晶片厚度不规则,则等色线具有不规则形状. 转动 P_1、C、P_2 中任一元件,彩色条纹分布均发生变化. 当 P_2 从垂直于 P_1 转到平行于 P_1 时,在同一处色彩变为其互补色.

*5.3.2 会聚偏振光的干涉

在 5.3.1 节中讨论了平行偏振光的干涉,在那里光束垂直透过晶片,对给定波长相差 δ_C 仅随波晶片的厚度而改变. 对于厚度均匀的波晶片而言,δ_C 也可随其内光线的倾角而改变,会聚偏振光的干涉的特点就在于此.

1. 实验装置及干涉现象

会聚偏振光干涉的实验装置如图 5.3.5 所示,图中 S 是点光源,L_1、L_2、L_3、L_4 是透镜,P_1、P_2 是正交偏振片,C 是光轴与晶体表面垂直的晶片,Π 是屏幕. 短焦距透镜 L_2 将透过 P_1 的平行偏振光转化成一束会聚偏振光入射到晶片 C 上,从 C 出射的光再经同样的透镜 L_3 后转化为平行光入射到偏振片 P_2,最后透镜 L_4 把 L_3 的后焦面成像于屏幕 Π 上. 这样,凡以相同方向通过晶片 C 的光线,最后将会聚到 Π 上同一点. 易见该光路对轴线 SO 具有轴对称性. 这种装置产生的干涉图样示于图 5.3.6,它也具有中心对称性,是一组以 O 点为中心的明暗相间的同心圆环;圆环上有一个与 P_1 方向平行及垂直的黑十字形"刷子". 白光照明时,干涉图样呈彩色.

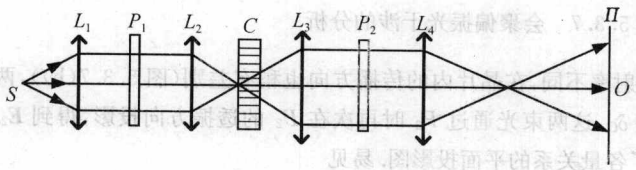


图 5.3.5 会聚偏振光干涉装置

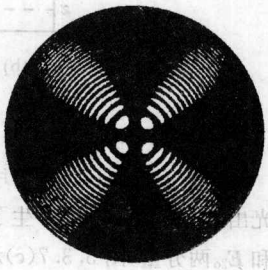


图 5.3.6 会聚偏振光干涉图样的照片

2. 干涉图样的分析

1) 干涉强度公式

图 5.3.7(a)示出了图 5.3.5 中几种主要部件的立体视图. 入射平行自然光经 P_1 后变为振动方向沿 P_1 透振方向的线偏振光,它经 L_2 后会聚于晶片 C 上的 Q 点. 除沿光轴方向前进的主光线外,其他光线在晶片内均可分解为 o 光和 e 光,如图 5.3.7(b)所示. 该图(a)中画出从透镜 L_2 上一点 B 射向晶片的光线,它与晶片光轴方向所成平面用阴影区表示,此平面方位即可代表以 BQ 方向入射的光所相应的晶片内的主截面方位. 以该主截面作参考平面,可以将光线 BQ 的光矢量 $\boldsymbol{E}_1$ 分解为在该平面内的分量 $\boldsymbol{E}_{1e}$ 和垂直于该平面的分量 $\boldsymbol{E}_{1o}$. 设该主截面与 P_1 透振方向夹角为 θ,$\boldsymbol{E}_1$ 的振幅为 A_1,显然 $\boldsymbol{E}_{1e}$ 和 $\boldsymbol{E}_{1o}$ 的振幅分别为 $A_{1e}=A_1\cos\theta$,$A_{1o}=A_1\sin\theta$.

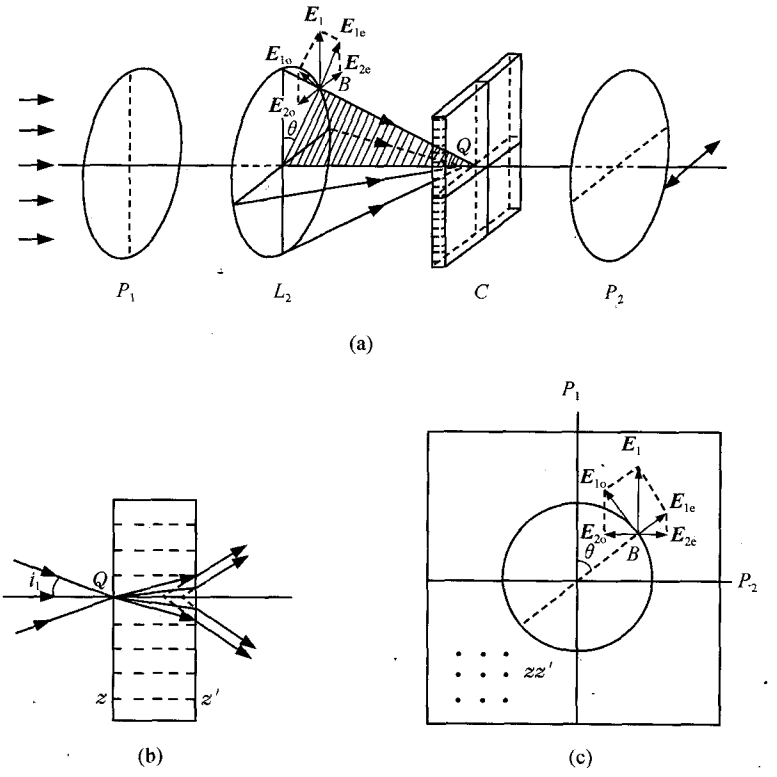


图 5.3.7　会聚偏振光干涉的分析

由于 e 光和 o 光在晶片内折射率不同,在晶片内的传播方向也稍有差别(图 5.3.7(b)),两光出射时晶片使它们产生了相差 δ_C. 这两束光通过 P_2 时再次在 P_2 的透振方向投影,得到 $\boldsymbol{E}_{2e}$ 和 $\boldsymbol{E}_{2o}$ 两分量,图 5.3.7(c)示出了各量关系的平面投影图. 易见

$$A_{2e}=A_{1e}\sin\theta=A_1\cos\theta\sin\theta,$$

$$A_{2o}=A_{1o}\cos\theta=A_1\sin\theta\cos\theta,$$

考虑到 $\boldsymbol{E}_{2e}$ 和 $\boldsymbol{E}_{2o}$ 方向相反，此时存在附加相差 $\delta''=\pi$，故沿 BQ 方向入射的光束经 P_2 后的干涉光强为

$$\begin{aligned} I &= A_{2e}^2 + A_{2o}^2 + 2A_{2e}A_{2o}\cos(\delta_C+\pi) \\ &= \frac{1}{2}I_1\sin^2 2\theta(1-\cos\delta_C). \end{aligned} \tag{5.3.14}$$

其中 $I_1=A_1^2$. 可见上式与 $P_1\perp P_2$ 时的平行偏振光干涉强度公式相同.

2) 干涉圆环的成因

根据干涉装置绕光轴方向的旋转对称性，并参见图 5.3.7(b)，可知以同样角度 i_1 入射到晶片的光线在出射时 o，e 光的相差 δ_C 是相同的；当入射光线的倾角 i_1 发生变化时，它在晶片内所分解的 o，e 光的传播方向发生变化，相应 δ_C 亦随之变化. 若暂不考虑上式中因子 $\sin^2 2\theta$ 的影响，干涉图样的等强度线应为等 δ_C 线，即等 i_1 线，故干涉条纹为等倾圆环条纹. 其中心点 O 相应的 $\delta_C=0$，由(5.3.14)式，知 O 点为零级暗点. 沿径向向外，i_1 逐渐增大，δ_C 随之增大，干涉级次逐渐升高. 考虑到 i_1 增大时不仅晶片内 o 光、e 光的传播路程增加，而且 e 光的折射率 n_e' 与 n_o 的差别也逐渐增大，所以光程差随倾角增加非线性地上升①，从中心向外干涉环越来越密②.

3) 十字“刷子”的成因

(5.3.14)式说明等倾圆环条纹的强度受到了因子 $\sin^2 2\theta$ 的调制. 对上述 $P_1\perp P_2$ 的情况，易见当 $\theta=0$ 和 $\pi/2$ 时，$I=0$，所以干涉图样中在 P_1 和 P_2 的透振方向出现了暗十字. 从物理图像看，当 θ 为上述值时，经 L_2 后会聚光对晶片来说只是一种 o 光或 e 光，不发生双折射，晶片不起作用，故 $P_1\perp P_2$ 使得出射光消失. 若装置中 $P_1/\!/P_2$，读者可自行分析，这时干涉圆环形状不变，但强度分布与 $P_1\perp P_2$ 时互补，即暗纹处变为亮纹，暗十字也变成了亮十字.

4) 白光条纹

当白光入射时，易知干涉图样为彩色圆环，每级条纹内紫外红. 在亮或暗的十字线方位由于各色光的交叠而呈白或黑色. 由 $P_1\perp P_2$ 变为 $P_1/\!/P_2$ 时十字处黑白互易，其他各处色彩互补.

*5.3.3 波动光学中相位规定的自洽性③

1. 波动相位的两种规定

在实函数表示中，沿 z 轴正方向行进的平面波既可写为

$$E(z,t)=E_0\cos(kz-\omega t), \tag{5.3.15}$$

① 注意这里之 n_e' 并非前文所定义的 e 光主折射率 n_e，因在晶片内 e 光传播方向并不与晶片光轴垂直. 一般地，n_e' 要随 e 光传播方向的变化而变化. 当 $i_1=0$ 时，$n_e'=n_o$；当 i_1 增大时，e 光越来越偏离光轴方向，n_e' 也越来越偏离 n_o 而接近 n_e.

② 干涉环的疏密与牛顿环和平板等倾干涉条纹类似，关于此问题的详细讨论可参见蔡履中. 大学物理，2001，1：6.

③ 此文主要内容见蔡履中. 大学物理，1990，5：12.

也可写为

$$E(z,t) = E_0\cos(\omega t - kz). \tag{5.3.16}$$

由于余弦函数是偶函数，以上两种表述是完全等价的. 实际上，从上两式都可得到等相面随 t 的增加而沿 z 轴正向推移的结论. 波的传播速度都是 $v=\mathrm{d}z/\mathrm{d}t=\omega/k$，故这两种表述对描述右行波同样有效. 推广到三维空间的一般波动，同样地既可把$(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)$定义为相位，也可以把$(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$定义为相位. 我们把这两种定义分别称为关于相位规定的$(-\boldsymbol{\omega t})$**语言**和$(\boldsymbol{\omega t})$**语言**.

2. 相位规定对现象描述的影响

显然，物理现象或过程是客观存在的，在同样条件下对它的测量结果应该是确定的. 但是，对这种现象或过程如何描述，则与我们使用何种语言有关，而语言的选取是带有一定随意性的. 目前不同教材中对相位的规定是不统一的. 为便于读者比较和参阅其他文献，并对某些物理概念有更深入的理解，这里简单地讨论一下相位规定与现象描述的自洽性.

1) 两种语言对光的偏振态的描述

以左旋正椭圆偏振光为例，取 z 轴正向表示光的传播方向. 坐标系 xyz 为右手系(图 5.3.8)，则其偏振态可表示为

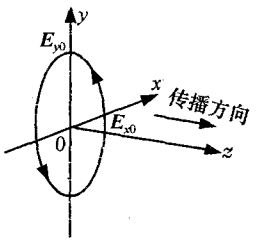


图 5.3.8 左旋正椭圆偏振光

$$\begin{cases} E_x = E_{x0}\cos\omega t, \\ E_y = E_{y0}\sin\omega t. \end{cases}$$

上式可写成

$$\begin{cases} E_x = E_{x0}\cos\varphi_x, \\ E_y = E_{y0}\cos\varphi_y, \end{cases}$$

φ_x，φ_y 分别表示 x，y 方向的振动相位. 在(ωt)语言中，φ_x，φ_y 中 ωt 项的符号规定为正，易见 $\varphi_x=\omega t$，$\varphi_y=\omega t-\pi/2$，故 y 振动相对于 x 振动的相差

$$\delta = \varphi_y - \varphi_x = -\frac{\pi}{2}.$$

在$(-\omega t)$语言中，ωt 项的符号规定为负，故应取 $\varphi_x=-\omega t$，$\varphi_y=\pi/2-\omega t$，从而得到

$$\delta = \varphi_y - \varphi_x = \frac{\pi}{2}.$$

可见同一偏振态相应的 δ 值在两种语言中是不同的，此结论可推广到一般的椭圆偏振态.

2) 光通过介质板和晶片时的相位变化

设波长为 λ(真空中)的单色光正入射通过厚度为 d、折射率为 n 的介质板(图 5.3.9)，考察同一时刻光波在出射面 B 相对于入射面 A 的相位变化 δ. 在(ωt)语言中，

$$\begin{aligned} \delta &= \varphi_B - \varphi_A \\ &= (\omega t - kz_B) - (\omega t - kz_A) \\ &= -kd = -\frac{2\pi}{\lambda}nd; \end{aligned} \tag{5.3.17}$$

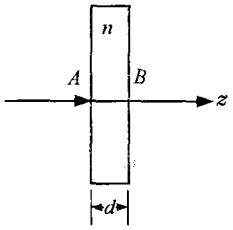


图 5.3.9 光通过介质板

在$(-\omega t)$语言中则有

$$\delta = \varphi_B - \varphi_A = (kz_B - \omega t) - (kz_A - \omega t) = kd = \frac{2\pi}{\lambda} nd. \tag{5.3.18}$$

可见相位差 δ 的符号在两种语言中是相反的，这是由于(ωt)语言中规定相位 φ 随 z 增大而减小，而($-\omega t$)语言则规定 φ 随 z 增大而增大.

将上述介质板换为波晶片，并记 o，e 光相位差 $\delta = \varphi_o - \varphi_e$. 由 5.2.2 节中分析可知

$$\delta_B = \delta_A + \delta_C. \tag{5.3.19}$$

其中 δ_A 表示入射光 o，e 分量的相差，它取决于入射光的偏振态；δ_C 为晶片本身所引起的 o 光相对于 e 光的相差. 参照对介质板的结论(5.3.17)和(5.3.18)式容易看出：在(ωt)语言中，

$$\delta_C = \left(-\frac{2\pi}{\lambda} n_o d\right) - \left(-\frac{2\pi}{\lambda} n_e d\right) = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d; \tag{5.3.20}$$

而在($-\omega t$)语言中，有

$$\delta_C = \frac{2\pi}{\lambda} n_o d - \frac{2\pi}{\lambda} n_e d = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d. \tag{5.3.21}$$

3) 光通过晶片时偏振态的变化

利用(5.3.19)式可以分析光通过晶片时偏振态的变化. 这里不再举例说明，只指出需注意的几点：

(1) δ 的定义(如 $\delta = \varphi_y - \varphi_x$ 或 $\delta = \varphi_o - \varphi_e$)确定之后，其具体表达式仍与所用语言有关，语言不同时其符号一般相反；

(2) 由 δ 数值确定偏振态的判据不仅和所用语言有关，而且也和坐标系正向的选取方式有关. 由于光轴仅是一个空间方位，它本身并无什么正向，因此从原则上说，e，o 轴的正向可以任意选取. 但是，如果一旦确定利用 $\delta = \varphi_y - \varphi_x$ 的数值作为偏振态的判据，而且把晶片中的 δ_C 表示为 $\varphi_o - \varphi_e$，为利用已确定的判据，就必须把 e 轴正向取为 x 轴正向，o 轴正向取为 y 轴正向，即 e，o，z 依其顺序组成右手系.

当然，一个物理过程的结果是客观的，它不应随人们对描述语言或坐标正向的不同选取而有差异，但所用语言、坐标系及判据三者必须自洽. 例如，若改取 o，e，z 为右手系，则 δ_C 应定义为 $\varphi_e - \varphi_o$ 才能利用由 $\delta = \varphi_y - \varphi_x$ 所导出的偏振态判据，这时(5.3.20)与(5.3.21)两式均应反号.

以上思想对分析偏振光的干涉亦同样适用. 读者可自行导出和比较在不同语言和坐标系选取下各式的差别并验证干涉结果的客观性. 以下仅综合指出几点结论.

3. 结论

1. 同一光学现象用(ωt)语言和($-\omega t$)语言描述时，与相位有关的公式和判据是不同的，一般地说是相反的(公式反号或左右旋判据相反).

2. 原则上讲，相位语言及坐标系的选取都是有随意性的. 但是，为了使我们在不同部分所作的规定及所得公式能前后一致，我们应将同一语言贯彻始终，并使各公式的表述与 e、o 轴的正向选取相配合，以组成一个整体上自洽的规定、判据和公式系统. 这时各公式的符号及 e、o 正向的规定并不能同时随意选取.

例如，在规定 $\delta = \varphi_y - \varphi_x$ 并取 e，o，z 为右手系时，可将两种语言中自洽系统的异同列成表 5.3.1.

表 5.3.1 两种相位语言中的自洽系统

相位规定	$\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t$
光的偏振态的描述	$0<\delta<\pi$，右旋 $-\pi<\delta<0$，左旋	$0<\delta<\pi$，左旋 $-\pi<\delta<0$，右旋
光通过介质时的相位变化	$\delta=-\frac{2\pi}{\lambda}nd$ 相位减小	$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}nd$ 相位增大
光通过晶片时晶片引起的 o，e 光相差	$\delta_C=\frac{2\pi}{\lambda}(n_e-n_o)d$ 正晶 $\delta_C>0$，负晶 $\delta_C<0$	$\delta_C=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d$ 正晶 $\delta_C<0$，负晶 $\delta_C>0$
光通过波晶片时的偏振态	$\delta_B=\delta_A+\delta_C$	
平行偏振光的干涉	$\delta=\delta_C+\delta''$ 其中 $\delta''=\begin{cases}0,\\ \pi.\end{cases}$ 当 $\boldsymbol{E}_{2o},\boldsymbol{E}_{2e}$ 同/反向时	

3. 只要做到上述自洽及统一性，用何种语言定义相位并不会对一客观物理过程的结果产生影响，因此两种语言在物理上是等效的. 但对这种自洽性的破坏则会引起混乱.

4. 波动的复数表达式中一般将时间项写为 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$，故当用$(-\omega t)$语言时可以将相位直接移植于复指数，而用$(\omega t)$语言时则需反号并作一些附加解释. 从这一角度(也仅仅从这一角度)，选用$(-\omega t)$语言似乎更方便一些.

本书自始至终采用$(-\omega t)$语言.

5.4 人工双折射及其应用

利用人工方法(外加应力、电场、磁场等)可使某些各向同性介质变成各向异性介质，从而产生双折射；也可使某些各向异性晶体产生附加的双折射，这种双折射称为**人工双折射**. 人工双折射的许多实际应用与偏振光的干涉有着密切的联系，以下介绍几种效应及其应用.

5.4.1 应力双折射

通过施加外力所产生的人工双折射现象称为**应力双折射**，也称为**机械双折射**或**光测弹性效应**. 塞贝克(T. J. Seebeck)在 1813 年和布儒斯特在 1816 年最早研究了这一现象. 实验表明，当沿着某个方向对某些各向同性介质施加压力或张力作用时，该介质会变成各向异性介质，应力方向相当于各向异性晶体的光轴. 设对于沿应力方向的光振动介质的折射率为 n_e，对垂直于应力方向的光振动介质的折射率为 n_o，P 为应力，则有

$$n_o - n_e = KP, \tag{5.4.1}$$

式中 K 为一常数[①]. 因此，通过厚度为 d 的介质，两偏振光的相差为

$$\delta_C = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d = \frac{2\pi}{\lambda}KPd. \tag{5.4.2}$$

应用偏振光干涉原理，对在应力作用下能产生人工双折射的材料做成力学构件模型进行应力测试实验的仪器称为**光测弹性仪**，简称**光弹仪**. 经典的透射式光弹仪的示意图如图 5.4.1 所示. 将由透明光弹材料制成的力学构件模型 M 放在两正交偏振器 P_1 与 P_2 之间，取光传播方向为 z 轴，模型在 z 轴方向长度为 d，应力与 z 轴垂直. 在应力 P 作用下，M 所引起的 o 光和 e 光的相差为(5.4.2)式，应力越集中处 $|\delta_C|$ 越大，故干涉图样反映了模型中的应力分布. 若以白光照明，迎着 z 方向观察，可以看到彩色的偏振光干涉图样. 借助补偿器 B 可以测量应力双折射的大小.

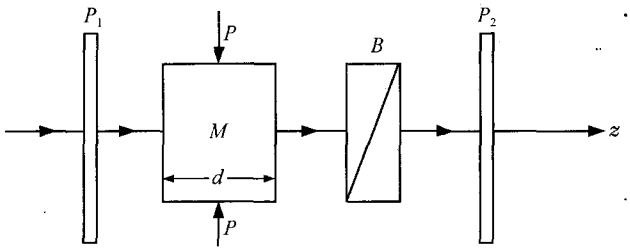


图 5.4.1 光弹仪示意图

5.4.2 克尔效应

利用外电场产生人工双折射的效应称为**电光效应**.

1875 年苏格兰物理学家克尔(J. Kerr)发现了第一种电光效应，即某些本来是各向同性的液体电解质在外加电场的作用下可变成各向异性介质，从而产生双折射，这种效应称为**克尔效应**.

实验表明，克尔效应中外电场方向相当于电解质在外电场作用下所转变成的各向异性晶体的光轴. 设光矢量振动方向沿外电场方向时介质折射率为 n_e，垂直于该方向时折射率为 n_o，电场强度为 E，实验表明

$$n_o - n_e = K\lambda E^2. \tag{5.4.3}$$

式中 λ 为光在真空中的波长，K 为一个与物质性质和温度有关的常数，称为**克尔常数**. 大多数情况下 K 为负数，即介质具有正单轴晶体的性质. 表 5.4.1 给出几种液

① 通常在介质受压力时 $n_o - n_e > 0$，受拉力时 $n_o - n_e < 0$. 故可取常数 $K > 0$，而规定应力 P 是压力时为正，是拉力时为负.

体的克尔常数. 由于克尔效应中折射率之差正比于电场强度的平方，所以常称为**二级电光效应**.

表 5.4.1 几种液体的克尔常数(20℃，$\lambda=589.3$ nm)

物质		克尔常数 $K/(\mathrm{m/V^2})$
苯	C_6H_6	-0.67×10^{-14}
二硫化碳	CS_2	-3.56×10^{-14}
水	H_2O	-5.10×10^{-14}
硝基甲苯	$C_5H_7NO_2$	-1.37×10^{-12}
硝基苯	$C_6H_5NO_2$	-2.44×10^{-12}

图 5.4.2 所示的装置叫做**克尔盒**. 两偏振片 P_1 上 P_2，它们的取向分别与电场方向成±45°角，克尔盒为盛有介质的两端透光的容器，内有板长为 d、间隔为 h 的平行板电容器作为电极. 在未加外电场时，没有光通过 P_2，克尔盒关闭. 若给电极加上电压 V，设电场是均匀的，$E=V/h$，此时两线偏振光间的相差为

$$\delta_C=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d=\frac{2\pi KdV^2}{h^2}, \tag{5.4.4}$$

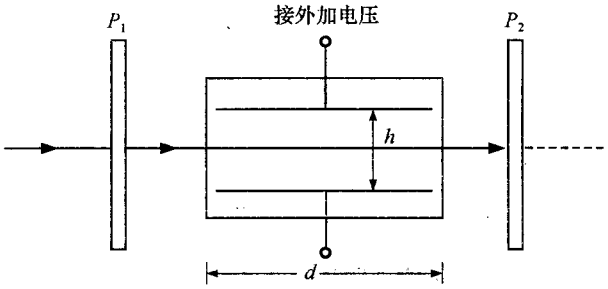


图 5.4.2 克尔盒

则有光通过 P_2. 由于 δ_C 随 V 而变化，故克尔盒相当于一个相差可变的波晶片.

当电压 V 的大小恰使 $\delta_C=-\pi$ 时，克尔盒具有 $\lambda/2$ 片的性质，它使得通过 P_1 的线偏振光的振动方向转动 90°，故透过 P_2 的干涉强度达到最大，克尔盒处于全开状态. 此时的电压称为**半波电压**，以 $V_{\lambda/2}$ 表示. 由(5.4.4)式可得

$$V_{\lambda/2}=\frac{h}{|2Kd|^{1/2}}. \tag{5.4.5}$$

使电压分别取 0 和 $V_{\lambda/2}$，则克尔盒可当作电光开关.

若在克尔盒的电极上加调制信号电压，则由(5.3.9)(其中 $\theta_1=45°$)和(5.4.4)式可得

$$\frac{I_{\perp}}{I_1}=\sin^2\frac{\delta_C}{2}=\sin^2\left(\frac{\pi KdV^2}{h^2}\right). \tag{5.4.6}$$

可见透射光强随所加电压而改变，此时克尔盒可当作光调制器. 常用硝基苯的克尔盒来作电光开关和光调制器，它们在高速摄影、光束测距、激光通讯、激光电视等方面有广泛的应用.

*5.4.3 泡克耳斯效应

1893 年德国物理学家泡克耳斯(F. Pockels)首先发现并研究了另一种电光效应. 某些晶体，特别是压电晶体在电场作用下会产生附加的双折射，使其各向异性性质发生变化，这种效应称为**泡克耳斯效应**. 泡克耳斯效应只存在于没有对称中心的晶体之中，许多晶体和所有的液体都不会产生这种效应.

光传播方向与电场方向平行的情况称为**纵向电光效应**；光传播方向与电场方向垂直的情况称为**横向电光效应**. 这里仅介绍纵向电光效应.

如图 5.4.3 所示的装置中，两偏振片 $P_1\perp P_2$，中间放一块 KDP(磷酸二氢钾，KH_2PO_4)晶体. KDP 是单轴晶体，将其沿垂直于光轴方向切成长方体，两端面为正方形，与光轴垂直，与 P_1 和 P_2 平行，并镀上一层透明的电极(图 5.4.3 中未画出)，构成一个**泡克耳斯盒**. 若在两极间加一强电场(电压 4000 伏左右)，则 KDP 晶体的光轴发生了变化，原来的光轴(z 方向)不再是光轴，而在正方形入射端面的对角线 x'，y'方向上形成两个主振动方向，即 KDP 晶体由单轴晶体转化为双轴晶体. 当光矢量平行于 x'和 y'方向的两线偏振光在晶体中传播时，相应的折射率分别为 $n_{x'}$和 $n_{y'}$，实验和理论均指出，

$$n_{y'}-n_{x'}=n_o^3\gamma E, \tag{5.4.7}$$

式中 n_o 是未加电场时晶体中 o 光折射率；E 是电场强度，γ 为一常数，称为**电光系数**，单位是“米/伏”；$(n_{y'}-n_{x'})$称为**感生折射率差**. (5.4.7)式表明，感生折射率差与电场强度的一次方成正比，故泡克耳斯效应称为**一级电光效应**.

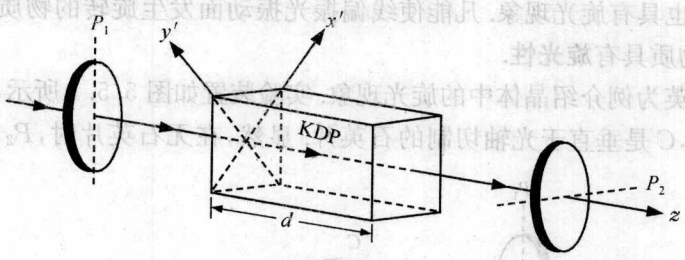


图 5.4.3 KDP 晶体的纵向电光效应

设电场是均匀的，则 $E=V/d$(d 为 KDP 晶体长度)，晶体所引起的两线偏振光间的相差为

$$\delta_C=\frac{2\pi}{\lambda}(n_{y'}-n_{x'})d=\frac{2\pi}{\lambda}n_o^3\gamma Ed$$

$$=\frac{2\pi}{\lambda}n_o^3\gamma V, \tag{5.4.8}$$

式中 V 为两电极间的电压. 在没有外加电场时，从 P_2 无光出射，泡克耳斯盒处于关闭状态. 当外加电场使 $\delta_C=\pi$ 时，泡克耳斯盒处于全开状态，此时所需的电压称为**半波电压**，并以 $V_{\lambda/2}$ 表示，由(5.4.8)式得

$$V_{\lambda/2}=\frac{\lambda}{2n_o^3\gamma}. \tag{5.4.9}$$

表 5.4.2 给出几种晶体的电光系数及半波电压.

表 5.4.2 几种晶体的电光系数及半波电压(室温，$\lambda=546.1$ nm)

晶 体	$\gamma/(10^{-12}\text{m/V})$	n_o	$V_{\lambda/2}$/kV
ADP($NH_4H_2PO_4$)	8.5	1.52	9.2
KDP(KH_2PO_4)	10.6	1.51	7.6
KDA(KH_2AsO_4)	~13.0	1.57	~6.2
KD* P(KD_2PO_4)	~23.3	1.52	~3.4

泡克耳斯盒可用作快速电光开关，例如利用电光晶体 KD* P(磷酸二氘钾)制成的电光开关，其响应时间可小于 1 纳秒，它在激光技术中有着重要应用.

5.5 旋 光

5.5.1 旋光

1. 旋光现象与规律

当线偏振光通过某些透明物质(如石英、糖溶液、酒石酸溶液等)后，其振动面将以光的传播方向为轴旋转一定的角度，这种现象称为**旋光现象**. 1811 年阿拉果首先发现石英有旋光现象，以后毕奥(J. B. Biot)和其他人又发现许多有机液体和有机物溶液也具有旋光现象. 凡能使线偏振光振动面发生旋转的物质称为**旋光物质**，或称该物质具有**旋光性**.

现以石英为例介绍晶体中的旋光现象. 实验装置如图 5.5.1 所示，P_1、P_2 是两正交偏振片，C 是垂直于光轴切制的石英片. 显然，在无石英片时，P_2 后面的视场

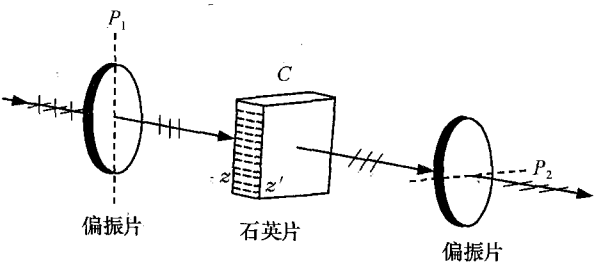


图 5.5.1 石英的旋光现象

是暗的. 当在 P_1 和 P_2 之间放置石英片 C 时，P_2 后面的视场变亮；将 P_2 旋转某一角度后，视场又由亮变暗. 这说明线偏振光透过石英片后仍是线偏振光，但是其振动面旋转了一个角度，它显然等于偏振片 P_2 旋转的角度. *振动面旋转的角度称为* **旋光度**，用 ψ 表示，单位是°(度).

实验结果指出旋光现象具有以下规律：

(1) 不同的旋光物质可以使线偏振光的振动面向不同的方向旋转. 人们对旋光方向作下述约定：*迎着光传播方向观察，若出射光振动面相对于入射光振动面沿顺时针方向旋转为右旋；沿逆时针方向旋转称为左旋.* 例如葡萄糖为右旋物质，果糖为左旋物质；天然石英晶体也有右旋石英和左旋石英两种类型，其外形是镜像对称的. 这种由物质结构决定的旋光性称为**天然旋光性**.

(2) 线偏振光通过旋光晶体时，旋光度 ψ 与晶体的厚度 d 成正比，即

$$\psi = \alpha d. \tag{5.5.1}$$

式中 α 是比例系数，与旋光晶体的性质、温度以及光的频率有关，称为该晶体的**旋光率**，其单位是°(度)/毫米.

(3) 线偏振光通过旋光物质的溶液时，旋光度 ψ 与溶液层厚度 d、溶液重量浓度 N 成正比，即

$$\psi = [\alpha]Nd, \tag{5.5.2}$$

式中[α]是比例系数，与溶液的性质、温度以及光频率有关，称为该溶液的**旋光率**，化学上又称为**比旋光度**，其单位是°(度)/[分米·(克/毫升)].

(4) 旋光色散现象.

在图 5.5.1 装置中，若用白光照射，因石英旋光率的数值随波长而异(见表 5.5.1)，不同色光的旋光度不同，不能同时消光，故在 P_2 后面的视场是有色彩的，旋转 P_2 时其色彩会产生变化，这种现象叫做**旋光色散**.

表 5.5.1　石英的旋光率与波长的关系

波长 λ/nm	589.3(钠黄光)	546.1(绿光)	486.1(青光)	404.7(紫光)	344.1(紫外光)
旋光率 α/(°/mm)	21.7	25.5	32.8	48.9	70.6

利用旋光现象，通过测定旋光度，可以确定溶液中所含旋光物质的浓度，这种检验方法在制糖、制药、化学工业中普遍使用. 此外，旋光测量还用于化学结构分析.

2. 菲涅耳关于旋光现象的解释及实验证实

1825 年菲涅耳针对石英一类旋光晶体中的旋光现象提出了一个解释. 这个解释的根据是力学中的一个原理，即任意一个角频率为 ω、振幅为 A 的直线简谐运动可以视为两个角速度均为 ω、振幅均为 $A/2$ 的左旋、右旋圆运动的合成，如图 5.5.2 所示.

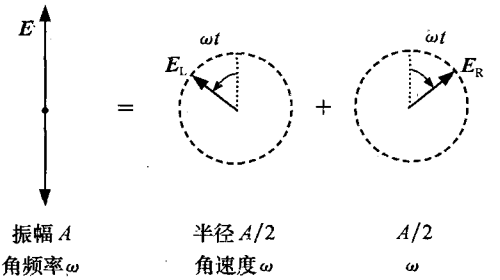


图 5.5.2　直线简谐振动可看作左、右旋圆运动的叠加

菲涅耳假设：线偏振光沿晶体光轴方向传播时分解成左旋和右旋圆偏振光(L 光和 R 光)；在旋光晶体中，它们的传播速度略有不同，或者说旋光晶体对它们的折射率略有不同. 按照菲涅耳假设，晶体中的旋光现象可视为一种特殊的双折射——**圆双折射**. 若设 L 光和 R 光沿旋光晶体光轴方向的传播速度分别为 v_L 和 v_R，定义相应的折射率 $n_L=c/v_L$ 和 $n_R=c/v_R$(c 为真空中光速)，则它们在旋光晶体内沿光轴方向传播距离 d 时，L 光相对 R 光的相差为

$$\delta_C=\frac{2\pi}{\lambda}(n_L-n_R)d, \tag{5.5.3}$$

式中 λ 为真空中波长，d 为晶片的轴向厚度.

为定量分析旋光度的大小，图 5.5.3(a)、(b)中分别示出了在同一时刻迎着光传播方向观察时晶体前、后表面的光矢量图. 为简单起见，在图(a)中，设线偏振光振动面在 x 轴方向，其光矢量为 $\boldsymbol{E}$，它分解成的 L 光和 R 光的光矢量分别为 $\boldsymbol{E}_L$ 和 $\boldsymbol{E}_R$；在图(b)中，L 光和 R 光的光矢量分别为 $\boldsymbol{E}'_L$ 和 $\boldsymbol{E}'_R$，它们的合矢量为 $\boldsymbol{E}'$，其振动面在 ox' 方向. 根据 2.3.5 节介绍过的圆偏振光在给定时刻不同空间位置光矢量

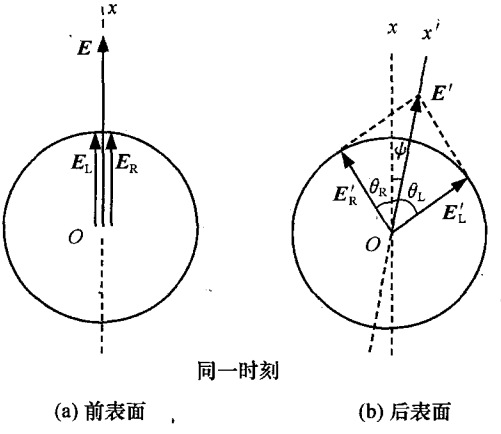


图 5.5.3　旋光性的解释

取向变化的图像及(2.3.47)式和(2.3.48)式可知，$\boldsymbol{E}'_{\mathrm{L}}$与 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}$ 相比沿顺时针方向转过一角度(绝对值)

$$\theta_{\mathrm{L}} = \frac{2\pi}{\lambda} n_{\mathrm{L}} d; \tag{5.5.4}$$

而 $\boldsymbol{E}'_{\mathrm{R}}$与 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}$ 相比沿逆时针方向转过一角度(绝对值)

$$\theta_{\mathrm{R}} = \frac{2\pi}{\lambda} n_{\mathrm{R}} d. \tag{5.5.5}$$

由简单的几何计算可知 $\boldsymbol{E}'$相对 $\boldsymbol{E}$ 转过的角度为

$$\psi = \frac{1}{2}(\theta_{\mathrm{L}} - \theta_{\mathrm{R}}) = \frac{\pi}{\lambda}(n_{\mathrm{L}} - n_{\mathrm{R}}) d. \tag{5.5.6}$$

上式中规定右旋时 $\psi>0$；左旋时 $\psi<0$. 从旋光晶片出射的线偏振光已不再受到晶片的影响，自然其振动面不再发生改变.

这样，根据菲涅耳假设就解释了晶体中的旋光现象，而且由(5.5.6)式可以看出：

(1) 线偏振光振动面转过的角度即旋光度 ψ 与旋光晶片的厚度及 n_{L} 与 n_{R} 之差成正比.

(2) 若 $v_{\mathrm{R}}>v_{\mathrm{L}}$ 即 $n_{\mathrm{L}}>n_{\mathrm{R}}$ 时，$\psi>0$，振动面右旋；若 $v_{\mathrm{L}}>v_{\mathrm{R}}$ 即 $n_{\mathrm{L}}<n_{\mathrm{R}}$ 时，$\psi<0$，振动面左旋.

表 5.5.2 给出右旋石英的 n_{R}，n_{L} 值，可见两折射率值相差甚微.

表 5.5.2　右旋石英的折射率

波长/nm	n_{L}	n_{R}
396.8	1.55821	1.55810
589.3	1.54427	1.54420
762.0	1.53920	1.53914

菲涅耳在提出上述假设的同时，还设计了一个验证该假设正确性的实验. 令一束线偏振光垂直入射如图 5.5.4 所示的由两个右旋石英直角棱镜与一个左旋石英等腰棱镜粘合成的复合棱镜，其中各单棱镜的光轴均与 AB 面垂直，图中用虚线表示. 如果线偏振光在石英晶体内确如假设的那样，分解为传播速度不同的一束左旋和一束右旋圆偏振光，则由于它们在各倾斜界面两侧介质中折射率不同，L 光和 R 光会向不同方向折射. 具体地说，由于在右旋介质中 $n_{\mathrm{L}}>n_{\mathrm{R}}$，在左旋介质中 $n_{\mathrm{L}}<n_{\mathrm{R}}$，在从右旋介质射向左旋介质时，对右旋光是从光疏介质进入光密介质，折射线要比入射线更加靠近法线；而左旋光则是从光密介质进入光疏介质，折射线要更加远离法线. 因此光线进入左旋介质后两种旋向的光的前进方向已经分开了. 当它们再进入右旋介质时，其传播方向的差别会进一步增大. 从而菲涅耳预言，最终从复合棱镜的 CD 面出射的应该是在空间分开的一束 L 光和一束 R 光. 对两出射光束偏振态的实验鉴别使该预言得到了证实.

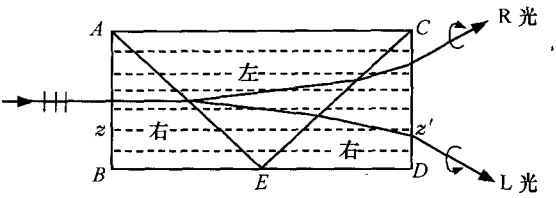


图 5.5.4　菲涅耳复合棱镜

最后应该指出，菲涅耳关于旋光现象的解释只是一种惟象描述，并未涉及旋光性的微观机制，它不能回答为什么在旋光物质中两圆偏振光的传播速度不同. 回答这些问题必须考虑物质的微观结构. 实际上旋光性源于物质中原子排列的螺旋结构.

5.5.2　磁致旋光

在磁场作用下物质的光学性质发生改变的现象称为**磁光效应**. 其中*在磁场作用下线偏振光的振动面发生旋转的现象称为*__磁致旋光__，它是由法拉第(M. Faraday)首先加以研究的，故又称__法拉第旋转效应__.

观察法拉第旋转效应的装置如图 5.5.5 所示，在两个正交偏振片 P_1，P_2 间放置一个带孔的电磁铁或螺线管，使光沿着或逆着外磁场方向通过样品. 当励磁线圈不通电时，无光从 P_2 出射；当励磁线圈通电产生强磁场后，则有光从 P_2 出射；这时将 P_2 旋转角度 ψ_F 后可以重新消光. 这说明从样品出射的光仍为线偏振光，但其振动面相对于入射线偏振光的振动面转过了角度 ψ_F，即本来不具有旋光性的物质在外磁场作用下产生了旋光性.

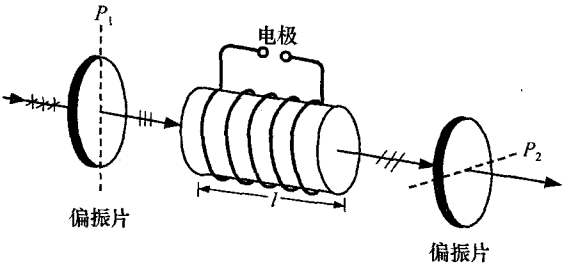


图 5.5.5　法拉第旋转效应

实验结果指出：

(1) 磁致旋光中振动面的旋转角 ψ_F 和样品长度 l 及磁感应强度 B 成正比，即有

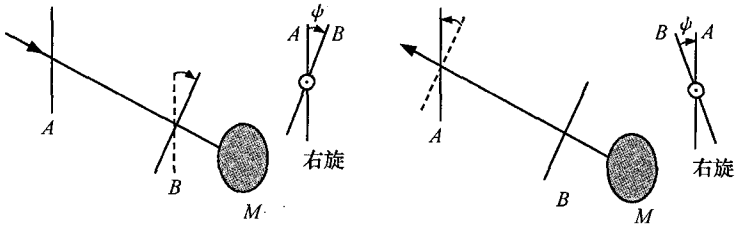
$$\psi_F = VlB, \tag{5.5.7}$$

式中 V 是一个与物质的性质、光的频率有关的常数，称为**维尔德(Verdet)常数**，某些物质的维尔德常数值见表 5.5.3.

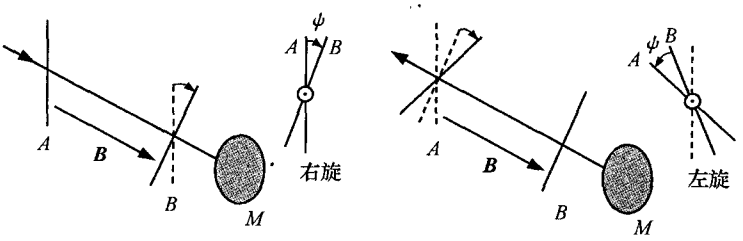
表 5.5.3　几种物质的维尔德常数值(λ=589.3 nm)

物　质	温度(℃)	V/(°/T·m)
轻火石玻璃	18	5.28×10^2
水晶(垂直于轴)	20	2.77×10^2
食盐(NaCl)	16	5.98×10^2
水	20	2.18×10^2
二硫化碳(CS_2)	20	7.05×10^2
乙醇	25	1.85×10^2
磷(P)	33	2.21×10^3

(2) 旋转角 ψ_F 在空间中的实际方向决定于外加磁场的方向，与光的传播方向无关. 显然，这与天然旋光性物质产生的旋光度 ψ 不同. 例如线偏振光通过天然右旋物质时，迎着光传播方向观察，振动面总是顺时针旋转. 因此，如果某一线偏振光通过天然右旋物质，再经一平面镜反射，当反射光沿原路径逆向再次通过该右旋物质后，振动面将回复原位(图 5.5.6(a)). 但是当线偏振光通过磁光物质时，如沿磁场方向传播时振动面顺时针旋转，在透射光经一平面镜反射后，反射光在空间的实际旋转方向并不发生变化，可是由于这时光的传播方向已经逆转，若迎着反射光的传播方向看，振动面将逆时针旋转. 所以一束线偏振光往返两次通过磁光物质后，振动面的最终位置相对其初始位置将转过 $2\psi_F$ 的角度(图 5.5.6(b)). 简言之，天然旋光物质的左、右旋性质是确定不变的；故当光线传播方向逆转时，光振动面的空间实际转向相反. 而对确定的磁场方向，磁致旋光的空间实际转向是确定不变的；故当光线传播方向逆转时，其左、右旋性质相反.



(a) 天然旋光(以右旋晶体为例)



(b) 磁致旋光

图 5.5.6　天然旋光和磁致旋光的比较

A、B 之间为旋光介质，M 为反射镜，每图右侧的小图表示迎着光线看去时 A、B 两平面线偏振光的振动方向和旋向.

利用磁致旋光的上述性质可以制作光隔离器、光调制器等器件. **光隔离器**的原理可由图 5.5.7 表示，其中两偏振片 P_1，P_2 的透振方向成 45°角，中间放置磁致旋光装置，一般称为**法拉第盒**. 当法拉第盒所产生磁场的方向和大小适当时，可使通过 P_1 的线偏振光通过该盒后振动方向刚好右旋 45°，即能完全透过 P_2. 设想另一束逆向传播的光，它通过 P_2 后再经过法拉第盒，其振动方向变得与 P_1 的透振方向相垂直，从而被 P_1 完全遮挡. 这样，该装置将起到使一个方向的光（图中右行光）通过而不让相反方向的光（图中左行光）通过的作用，类似于一个单通闸门，故又称单通光闸. 它常用于激光器中排除某些杂散光的干扰.

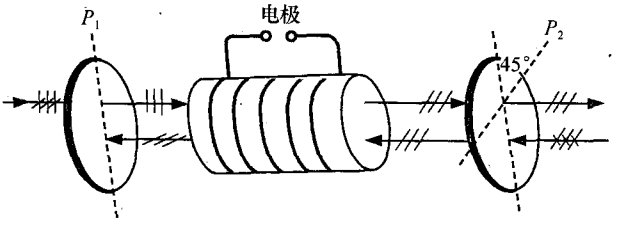


图 5.5.7　光隔离器

在图 5.5.5 中，若改变通过螺线管的电流 I，则可以改变磁感应强度 B，由 (5.5.7)式，相应的 ψ_F 及透过 P_2 的光强亦发生改变. 从而实现电光调制.

*5.6　偏振态及其变换的矩阵描述

1941 年，琼斯(R. C. Jones)提出了一种用列向量和矩阵描述偏振态和偏振器件的方法，这种方法具有形式简明、运算方便的优点，以下予以简要介绍.

1. 偏振态的表示——琼斯矢量

取单色波的传播方向为直角坐标系的 z 轴正向，不论该光波的偏振态如何，其光矢量 $\boldsymbol{E}$ 总可用其 x，y 分量表示，即

$$\begin{cases} \widetilde{E}_x = E_{x0}\exp(\mathrm{i}\varphi_x) = E_{x0}\exp[\mathrm{i}(kz-\omega t+\varphi_{x0})], \\ \widetilde{E}_y = E_{y0}\exp(\mathrm{i}\varphi_y) = E_{y0}\exp[\mathrm{i}(kz-\omega t+\varphi_{y0})]. \end{cases} \tag{5.6.1}$$

式中 E_{x0}，E_{y0} 和 φ_{x0}，φ_{y0} 均为实数，分别表示 x，y 方向的振动振幅及初相. 上式亦可写成列向量形式：

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \widetilde{E}_x \\ \widetilde{E}_y \end{pmatrix} = \exp[\mathrm{i}(kz-\omega t)]\begin{pmatrix} E_{x0}\exp(\mathrm{i}\varphi_{x0}) \\ E_{y0}\exp(\mathrm{i}\varphi_{y0}) \end{pmatrix}. \tag{5.6.2}$$

因两分量的共同因子 $\exp[\mathrm{i}(kz-\omega t)]$ 并不影响光的偏振态，所以在考虑偏振态的表示时此因子

可以略去不计，从而得到

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\widetilde{E}_x\\ \widetilde{E}_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_{x0}\exp(\mathrm{i}\varphi_{x0})\\ E_{y0}\exp(\mathrm{i}\varphi_{y0})\end{pmatrix}. \tag{5.6.3}$$

这种表示偏振态的列向量称为**琼斯矢量**.

由于同一偏振态的光可以具有不同强度，为了使偏振态的表示是确定的，通常取光波的强度为一个单位，即将(5.6.3)式用其强度归一化. 容易看到，该光波强度为

$$|\boldsymbol{E}|^2=E_{x0}^2+E_{y0}^2,$$

故归一化后的琼斯矢量为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sqrt{E_{x0}^2+E_{y0}^2}}\begin{pmatrix}E_{x0}\exp(\mathrm{i}\varphi_{x0})\\ E_{y0}\exp(\mathrm{i}\varphi_{y0})\end{pmatrix}. \tag{5.6.4}$$

若引入 y 振动与 x 振动的振幅比

$$\gamma=\frac{E_{y0}}{E_{x0}} \tag{5.6.5}$$

和相位差

$$\delta=\varphi_y-\varphi_x=\varphi_{y0}-\varphi_{x0}, \tag{5.6.6}$$

并略去共同的相因子 $\exp(\mathrm{i}\varphi_{x0})$，则归一化的琼斯矢量亦可表示为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\begin{pmatrix}1\\ \gamma\exp(\mathrm{i}\delta)\end{pmatrix}. \tag{5.6.7}$$

可见 γ 与 δ 两参数即决定了光的偏振态.

以下用(5.6.7)式求出几种偏振光的归一化琼斯矢量.

1) 线偏振光

设 $\boldsymbol{E}$ 与 x 轴成 θ 角(图 5.6.1)，其振幅为 E_0，无论从 $\widetilde{E}_x=E_0\cos\theta$，$\widetilde{E}_y=E_0\sin\theta$，或是从 $\gamma=\tan\theta$，$\delta=0$ 均可得到其琼斯矢量为

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}. \tag{5.6.8}$$

这里规定 θ 在第一象限为正，第四象限为负. 由此式容易得到 $\theta=0$、$\pm\pi/2$、$\pm\pi/4$ 时的一些特例.

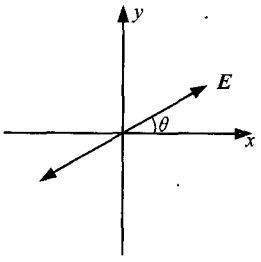


图 5.6.1 线偏振光

2) 圆偏振光

(1) 左旋光 $\gamma=1$，$\delta=\pi/2$，故有

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}=\frac{1}{\sqrt{1+1}}\begin{pmatrix}1\\ \exp(\mathrm{i}\pi/2)\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}; \tag{5.6.9}$$

(2) 右旋光 $\gamma=1$，$\delta=-\pi/2$，故有

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}=\frac{1}{\sqrt{1+1}}\begin{pmatrix}1\\ \exp(-\mathrm{i}\pi/2)\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix}. \tag{5.6.10}$$

对一般椭圆偏振光，γ 与 δ 可任意取值，必须利用(5.6.7)式进行具体运算. 为比较方便，现将各种偏振光的归一化琼斯矢量综合于表 5.6.1 中列出.

表 5.6.1 偏振态的归一化琼斯矢量

偏振态		琼斯矢量
线偏振光	一般式（$\boldsymbol{E}$ 与 x 轴成 θ 角）	$\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$
	$\boldsymbol{E}$ 沿 x 轴	$\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$
	$\boldsymbol{E}$ 沿 y 轴	$\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$
	$\boldsymbol{E}$ 与 x 轴成±45°角	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \pm 1\end{pmatrix}$
圆偏振光（$\gamma=1$）	左旋$\left(\delta=\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}$
	右旋$\left(\delta=-\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix}$
正椭圆偏振光（$\gamma\neq 1$）	左旋$\left(\delta=\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\begin{pmatrix}1\\ \gamma\mathrm{i}\end{pmatrix}$
	右旋$\left(\delta=-\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\begin{pmatrix}1\\ -\gamma\mathrm{i}\end{pmatrix}$
一般椭圆偏振光（γ 为任意正数，δ 为任意实数）		$\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\begin{pmatrix}1\\ \gamma e^{i\delta}\end{pmatrix}$

2. 正交偏振

设两束光的偏振态可分别用琼斯矢量表示为

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{pmatrix}X_1\\ Y_1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{E}_2=\begin{pmatrix}X_2\\ Y_2\end{pmatrix}. \tag{5.6.11}$$

若它们满足

$$\boldsymbol{E}_1^*\cdot\boldsymbol{E}_2=X_1^*X_2+Y_1^*Y_2=0, \tag{5.6.12}$$

这里矢量上的*号表示转置共轭，分量上的*号表示共轭，则此二偏振态 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 称为是**正交**的.

对正交偏振可作如下说明：

(1) 对两线偏振光 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$，X_1、Y_1、X_2、Y_2 皆为实数，这时二者正交简单地意味着 $\boldsymbol{E}_1\perp\boldsymbol{E}_2$.

(2) 但一般地说，正交偏振态并不仅仅局限于振动方向相互垂直的两线偏振光. 例如，由(5.6.9)及(5.6.10)二式可知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}^*\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{R}}&=\frac{1}{\sqrt{2}}(1\quad -\mathrm{i})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{2}[1+(-\mathrm{i})(-\mathrm{i})]=0,\end{aligned}$$

所以左、右旋圆偏振光是互相正交的.

(3) 两偏振态 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{E}_2$ 正交说明此二态是线性无关或独立的,故任一偏振态 $\boldsymbol{E}$ 可以以它们为基矢展开成线性叠加的形式,即

$$\boldsymbol{E} = C_1\boldsymbol{E}_1 + C_2\boldsymbol{E}_2, \tag{5.6.13}$$

其中 C_1,C_2 为二复常数.

例如,偏振光 $\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ 既可分解为两个正交线偏振光的叠加,即

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} = X\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+Y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

也可分解为左、右旋两个圆偏振光的叠加,即

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(X-\mathrm{i}Y)\begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\end{pmatrix}+\frac{1}{2}(X+\mathrm{i}Y)\begin{pmatrix}1\\-\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

在前文讨论界面的反射与折射时我们曾将入射光分解为 s 光和 p 光,在讨论晶体双折射时将入射光分解为 e 光和 o 光,在讨论旋光性时则分解为左旋圆偏振光和右旋圆偏振光. 不难看出,所有这些分解方式均是将一偏振态分解为两个互相正交的偏振态,其根据则为正交偏振态的线性独立性. 至于在某一问题中究竟应取何种分解方式,则视该问题的具体性质而定. 对光学器件,总有某些振动方式通过其后不改变自身的偏振态,这种振动方式称为该器件的**本征振动**. 一般地,器件的两个本征振动是互相正交的,任一振动方式可以以这两个本征振动作为基矢进行分解.

3. 偏振器件的表示——琼斯矩阵

当光通过偏振器件时,由于光与物质的相互作用,透射光的偏振态可以不同于入射光的偏振态. 设入射光和透射光的偏振态分别用 $\boldsymbol{E}_1=\begin{pmatrix}X_1\\Y_1\end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{E}_2=\begin{pmatrix}X_2\\Y_2\end{pmatrix}$ 表示,如图 5.6.2 所示,在线性光学范围内,可以认为偏振器件 M 的输出与输入呈线性关系,即

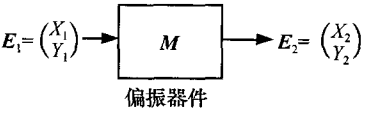


图 5.6.2 偏振器件使偏振态发生变化

$$\begin{cases}X_2 = aX_1 + bY_1,\\ Y_2 = cX_1 + dY_1,\end{cases}$$

上式可用矩阵形式写为

$$\begin{pmatrix}X_2\\Y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\Y_1\end{pmatrix}, \tag{5.6.14}$$

其中矩阵

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \tag{5.6.15}$$

称为该偏振器件的**琼斯矩阵**. 由于不同的偏振器件可以以不同方式改变入射光的振偏态,故它们具有不同的琼斯矩阵. 以下介绍几种偏振器件的琼斯矩阵.

1) 线偏振器

偏振片即线偏振器，它只允许某一方向的光振动通过. 设其透振方向与 x 轴成 θ 角，如图 5.6.3 所示，记入射光琼斯矢量的 x,y 分量分别为 X_1,Y_1，将它们在透振方向的投影叠加起来，再分解为 x,y 分量，可以得到出射光为

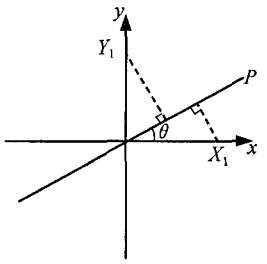


图 5.6.3 线偏振器对偏振态的影响

$$\boldsymbol{E}_2=\begin{pmatrix}X_2\\Y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(X_1\cos\theta+Y_1\sin\theta)\cos\theta\\(X_1\cos\theta+Y_1\sin\theta)\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos^2\theta & \frac{1}{2}\sin2\theta\\ \frac{1}{2}\sin2\theta & \sin^2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\Y_1\end{pmatrix},$$

因此线偏振器的琼斯矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\cos^2\theta & \frac{1}{2}\sin2\theta\\ \frac{1}{2}\sin2\theta & \sin^2\theta\end{pmatrix}. \tag{5.6.16}$$

由上式可得到 θ 为不同角度时 $\boldsymbol{M}$ 的具体表达式.

2) 波晶片

设晶片快轴与 x 轴成角度 θ，如图 5.6.4 所示. 由于振动方向沿慢轴方向的光的光速较小，折射率及光程较大，故相位延迟量较大. 记波晶片所引起的慢轴方向相对于快轴方向光振动的相位差为 δ，将入射光琼斯矢量两分量 X_1,Y_1 投影到快、慢轴上，考虑到相位差 δ 后再重新沿 x,y 方向分解，可以得到出射光为

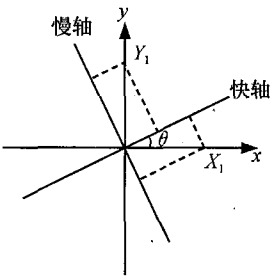


图 5.6.4 晶片对偏振态的影响

$$\boldsymbol{E}_2=\begin{pmatrix}(X_1\cos\theta+Y_1\sin\theta)\cos\theta+(X_1\sin\theta-Y_1\cos\theta)\exp(\mathrm{i}\delta)\sin\theta\\(X_1\cos\theta+Y_1\sin\theta)\sin\theta-(X_1\sin\theta-Y_1\cos\theta)\exp(\mathrm{i}\delta)\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos^2\theta+\exp(\mathrm{i}\delta)\sin^2\theta & \frac{1}{2}(1-\exp(\mathrm{i}\delta))\sin2\theta\\ \frac{1}{2}(1-\exp(\mathrm{i}\delta))\sin2\theta & \sin^2\theta+\exp(\mathrm{i}\delta)\cos^2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\Y_1\end{pmatrix}$$

$$=\exp\left(\frac{\mathrm{i}\delta}{2}\right)\cos\frac{\delta}{2}\begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\tan\frac{\delta}{2}\cos2\theta & -\mathrm{i}\tan\frac{\delta}{2}\sin2\theta\\ -\mathrm{i}\tan\frac{\delta}{2}\sin2\theta & 1+\mathrm{i}\tan\frac{\delta}{2}\cos2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\Y_1\end{pmatrix},$$

略去上式中绝对值为 1 的公共因子 $\exp(\mathrm{i}\delta/2)$，可得波晶片的琼斯矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\cos\frac{\delta}{2}\begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\tan\frac{\delta}{2}\cos2\theta & -\mathrm{i}\tan\frac{\delta}{2}\sin2\theta\\ -\mathrm{i}\tan\frac{\delta}{2}\sin2\theta & 1+\mathrm{i}\tan\frac{\delta}{2}\cos2\theta\end{pmatrix}. \tag{5.6.17}$$

由此普遍表达式可得出各种波晶片(例如 $\lambda/4$ 片、$\lambda/2$ 片)在各种方位下琼斯矩阵的具体形式.

表 5.6.2 中列出了各种偏振器件的琼斯矩阵. 应该指出，琼斯矩阵的形式并非是惟一的，可以相差一个绝对值为 1 的复常数因子；另外，依惯例常将其中第一行第一列的元素 a 取为 1.

表 5.6.2 偏振器件的琼斯矩阵

偏振器件			琼斯矩阵
线偏振器	一般形式——透振方向与 x 轴成 θ 角		$\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \frac{1}{2}\sin 2\theta \\ \frac{1}{2}\sin 2\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$
	透振方向沿 x 轴		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
	透振方向沿 y 轴		$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
	透振方向与 x 轴成±45°角		$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix}$
波晶片	一般形式——快轴与 x 轴成 θ 角，慢轴方向相位滞后 δ		$\cos\frac{\delta}{2}\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i}\tan\frac{\delta}{2}\cos 2\theta & -\mathrm{i}\tan\frac{\delta}{2}\sin 2\theta \\ -\mathrm{i}\tan\frac{\delta}{2}\sin 2\theta & 1+\mathrm{i}\tan\frac{\delta}{2}\cos 2\theta \end{pmatrix}$
	$\frac{\lambda}{4}$ 片 $\delta=\frac{\pi}{2}$	快轴沿 x 轴	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$
		快轴沿 y 轴	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$
		快轴与 x 轴成±45°角	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & \mp\mathrm{i} \\ \mp\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$
	$\frac{\lambda}{2}$ 片 $\delta=\pi$	快轴沿 x 或 y 轴	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
		快轴与 x 轴成±45°角	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
圆①偏振器	左旋		$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$
	右旋		$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$

4. 利用琼斯矢量和琼斯矩阵的运算

当入射光 $\boldsymbol{E}$ 连续通过多个偏振器件时(图 5.6.5)，易见输出光可表示为

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{M}_N\boldsymbol{M}_{N-1}\cdots\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{E}, \tag{5.6.18}$$

其中 $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \cdots, \boldsymbol{M}_N$ 为依次通过的各偏振器件的琼斯矩阵，这时偏振态的变化简单地化为矩阵运算.

① 关于圆偏振器的物理意义及其琼斯矩阵的推导与讨论可参见蔡履中. 大学物理，2005，1：15.

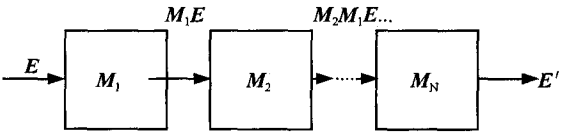


图 5.6.5　入射光连续通过多个偏振器件

例 5.6.1　设有一束振幅为 A、沿 x 方向振动的线偏振光，先通过一透振方向与 x 轴成 45° 的偏振片，再通过一快轴沿 x 方向放置的方解石 $\lambda/4$ 片(图 5.6.6)，求出射光的偏振态及强度.

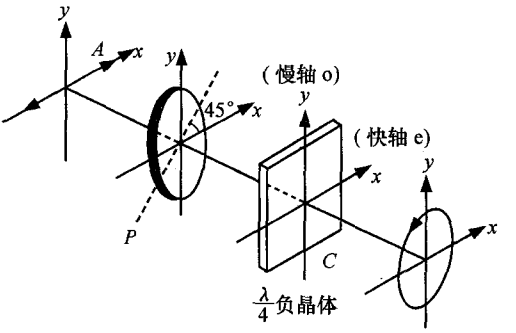


图 5.6.6　例 5.6.1 图

解　依题意，输入光的琼斯矢量是 $\boldsymbol{E}=A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，偏振片 P 和晶片 C 的琼斯矩阵分别为

$$\boldsymbol{M}_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{M}_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

代入(5.6.18)式，可得到出射光的琼斯矢量为

$$\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \mathrm{i}\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\A\end{pmatrix}=\frac{A}{2}\begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\end{pmatrix}=\frac{A}{2}\begin{Bmatrix}1\\\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right)\end{Bmatrix}.$$

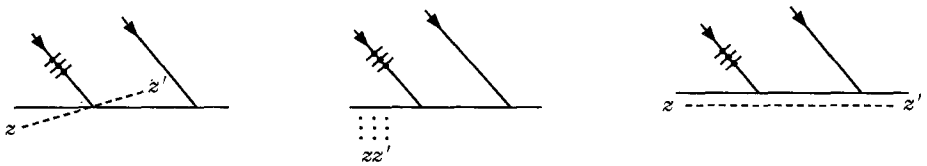
上式表明，输出光的 x，y 分量振幅均为 $A/2$，但 y 振动与 x 振动的相位差为 $\pi/2$，故出射光为左旋圆偏振光；此结论亦可以由将上式结果与表 5.6.1 相比较而直接看出. 出射光的强度则为

$$I'=\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{A}{2}\right)^2=\frac{1}{2}A^2=\frac{1}{2}I,$$

这里 I 为入射光强度.

习　题

5.1　利用惠更斯波面作图法，求题图所示各情况下的双折射光线. 设 zz' 为晶体的光轴方向，平行自然光由空气斜入射到晶体表面. 要求对正、负晶体各作一图.



(a)　(b)　(c)

题 5.1 图

5.2　一束线偏振的钠黄光正入射一块方解石晶体，其振动面与晶体主截面成 20°角. 设光轴与晶体表面平行，求透过晶体后 o 光和 e 光的振幅比和强度比.

5.3　一束钠黄光以 60°角入射到方解石($n_o=1.6584$, $n_e=1.4864$)平板上，设光轴与平板表面平行且垂直于入射面，试求晶体中 o 光与 e 光的夹角是多少？若方解石平板厚度为 1 cm，试求在板出射面两细光束之间分开的距离是多少？

5.4　试求顶角等于 60°的 ADP(磷酸二氢铵，$NH_4H_2PO_4$)棱镜对 o 光和 e 光的最小偏向角及它们的差值. 设 $n_o=1.525$, $n_e=1.479$，晶体光轴平行于棱镜的折射棱.

5.5　设以钠黄光入射图 5.2.1(a)所示的尼科耳棱镜，入射线 SM 平行于 BD'，$\angle S'MS''$是可以产生双折射现象的入射光束的最大会聚角，求$\angle S''MS$.

5.6　证明渥拉斯顿棱镜(图 5.2.4(a))的分束角

$$\gamma \approx 2\sin^{-1}[(n_o-n_e)\tan\alpha].$$

设以钠黄光入射，$\alpha=15°$，试求两出射光线的夹角(棱镜为方解石制成).

5.7　设方解石和石英薄板的光轴都平行于其表面并用它们制作钠黄光的 $\lambda/4$ 片，试求薄板的最小厚度各为多少？

5.8　让一束线偏振光通过石英薄片产生左旋椭圆偏振光，欲使椭圆的长轴或短轴在薄片的光轴方向且长短轴之比为 2∶1，求石英片的最小厚度. 如何放置？设 $\lambda=589.3$ nm, $n_o=1.5442$, $n_e=1.5533$.

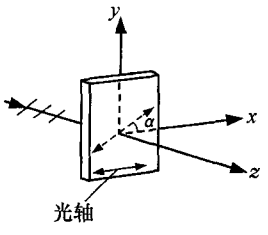
5.9　(1) 线偏振光正入射一个表面与光轴平行的波晶片，它引起的 o 光相对 e 光的相差为 π，求该波晶片的最小厚度？已知 $\lambda=434.0$ nm, $n_o=1.5540$, $n_e=1.5634$. (2) 由此波晶片出射的光偏振态如何？

5.10　利用微动螺旋可以调节如图 5.2.7 所示索累补偿器的有效厚度. 试问对于氢蓝光($\lambda=434.0$ nm, $n_o=1.5540$, $n_e=1.5634$)，补偿器作为 $\lambda/4$ 片变为 $\lambda/2$ 片. 再变为 λ 片时，有效厚度变化的最小值各为多少？

5.11　一束线偏振光正入射以角速度 ω_0 绕光线的传播方向旋转的 $\lambda/2$ 片，证明透射光仍为线偏振光，其振动面以 $2\omega_0$ 的角速度旋转.

5.12　一束线偏振的钠黄光($\lambda=589.3$ nm)正入射通过一块厚度为 1.618×10^{-2} mm 的石英晶片. 已知 $n_o=1.54424$, $n_e=1.55335$，光轴沿 x 轴方向，入射光振动面与 x 轴正向夹角为 $\alpha(|\alpha|\leqslant\pi/2$，如题图所示). 确定以下三种情况下出射光的偏振态：

(1) $\alpha=45°$；(2) $\alpha=-45°$；(3) $\alpha=30°$.



题 5.12 图

5.13 在两个正交偏振片之间插入一块 $\lambda/2$ 片，让强度为 I_0 的单色自然光正入射并通过这一系统，如果将该波片绕光的传播方向旋转一周，

(1) 问将看到几个光强极大和极小，求各极值数值及波片的相应方位；

(2) 将 $\lambda/2$ 片分别换成 λ 片和 $\lambda/4$ 片，结果又如何？

5.14 一强度为 I_0 的右旋圆偏振光垂直通过一方解石 $\lambda/4$ 片，然后再通过一块主截面相对 $\lambda/4$ 片的光轴右旋 15°角的尼科耳棱镜，求最后出射光的强度(忽略反射、吸收等损失).

5.15 一束左旋圆偏振光通过快轴在水平方向的 $\lambda/8$ 片，求出射光的偏振态.

5.16 左旋椭圆偏振光垂直通过方解石 $\lambda/4$ 片. 设 θ 为晶片的光轴与椭圆长轴的夹角，试确定当 $\theta=0°,45°,90°$ 时出射光的偏振态.

5.17 平行单色自然光照射在杨氏双缝上，在屏幕上得到一组干涉条纹. 现在双缝后放置一偏振片 P，干涉条纹有何变化？若在一个缝的偏振片后再添置一个 $\lambda/2$ 片，使其光轴与偏振片透振方向成 45°角，则屏幕上条纹如何变化？若将 $\lambda/2$ 片绕光线传播方向旋转一周，屏幕上干涉条纹发生什么变化？

5.18 平行于光轴切割的一块方解石晶片被放置在一对主截面夹角为 30°的尼科耳棱镜之间，晶片的光轴方向与两个棱镜的主截面各成 15°角. 设正入射自然光的强度为 $I_0=A^2$，不计反射、吸收等损失. 试求：(1) 通过晶片时分解出来的 o 光和 e 光的振幅和强度；(2) 投影于第二个尼科耳棱镜上的 o 光和 e 光的振幅和强度.

5.19 两尼科耳棱镜 N_1、N_2 之间插入一石英 $\lambda/4$ 片 C，N_1 的主截面、C 的光轴及 N_2 的主截面依次右旋 30°角. 设入射自然光的强度为 I_0，不计反射、吸收等损失. 试问：(1) 通过 $\lambda/4$ 片后光的偏振态；(2) 通过第二个尼科耳棱镜的光强.

5.20 强度为 I_0 的单色平行自然光通过一对正交尼科耳棱镜. 在两棱镜之间插入一方解石 $\lambda/4$ 片，其光轴与第一个尼科耳棱镜的主截面成 60°角，忽略反射、吸收等损失. (1) 问通过 $\lambda/4$ 片后光的偏振态；(2) 求通过第二个尼科耳棱镜的光强.

5.21 两尼科耳棱镜的主截面互相平行，中间插入一石英 $\lambda/4$ 片，其光轴与两尼科耳棱镜主截面成 30°角. 光强为 I_0 的单色平行自然光正入射，忽略反射、吸收等损失. (1) 问通过 $\lambda/4$ 片后光的偏振态如何？(2) 求通过第二个尼科耳棱镜后的光强.

5.22 一块厚度为 0.01 mm 的方解石晶片，其光轴平行于表面，放在两平行尼科耳棱镜之间. 问在可见光范围内哪些波长的光不能通过该系统？假设对各波长光方解石的 n_o，n_e 均为 1.658、1.486.

5.23 一块厚度为 0.04 mm 的方解石晶片，其光轴平行于表面，放在两垂直尼科耳棱镜之间，且使晶片光轴与第一个尼科耳棱镜主截面成 $\theta(\theta\neq0°,90°)$ 角. 问在可见光范围内哪些波长的光不能通过该系统？假设对各波长光方解石的 n_o、n_e 均为 1.658、1.486.

5.24 将一石英尖劈置于两正交尼科耳棱镜之间. 尖劈顶角 $\alpha=0.5°$，光轴与棱边平行且与两棱镜的主截面均成 45°角. 以汞灯的 404.7 nm 紫色平行光正入射. (1) 在第二个尼科耳棱镜后方的屏幕上干涉图样如何？(2) 求条纹间距；(3) 将第二个尼科耳棱镜主截面转 90°角，干涉图样有何变化？(4) 维持两尼科耳正交，但把尖劈的光轴转 45°角使之与第二个尼科耳棱镜主截面重合，干涉图样又有何变化？($n_o=1.55716$，$n_e=1.56671$)

5.25 将一克尔盒放在正交的两偏振片之间，已知克尔盒的厚度 $d=5$ cm，两极板之间的

距离 $h=1$ mm，其中所盛的液体为硝基苯，克尔常数 $K=-2.13\times10^{-10}$ cm/V^2，求该装置的半波电压. 若以频率为 10^7 Hz，峰值为 6000 V 的高频电压加在克尔盒的两极板上，试计算 $\lambda=546.0$ nm 的线偏振光通过克尔盒时每秒钟遮断次数.

5.26 已知石英对钠黄光($\lambda=589.3$ nm)的旋光率 $\alpha=21.7°$/mm. (1) 若将一石英晶体垂直于其光轴切割并放在两平行放置的偏振片之间，当石英为多长时没有光通过检偏片？晶体的最小厚度为多少？(2) 求石英对该波长的 $\Delta n=n_L-n_R$.

5.27 在两尼科耳棱镜之间插入一块石英旋光晶片，以消除对人眼最敏感的黄绿光. 设对此波长石英的旋光率 $\alpha=24°$/mm，求下列情形中晶片的厚度：(1) 两尼科耳棱镜正交；(2) 两尼科耳棱镜平行.

5.28 一块石英旋光晶片恰好抵消 10 cm 长、重量浓度为 20%的麦芽糖溶液对钠黄光振动面所引起的旋转. 对此波长石英的旋光率 $\alpha=21.7°$/mm，麦芽糖的旋光率$[\alpha]=144°/[\mathrm{dm}\cdot(\mathrm{g/ml})]$，试求此石英晶片的厚度.

5.29 将 50 g 含杂质的糖溶解于纯水中制成 100 ml 的糖溶液，然后将此溶液装入长 10 cm 的玻璃管中. 单色线偏振光垂直于管端面并沿管中心轴线射过，从检偏片测得光的振动面旋转了 25°4′. 已知这种纯糖的旋光率为 54.5°/[dm·(g/ml)]，试计算这种糖的纯度.

*5.30 确定以下各琼斯矢量所表示的偏振态：

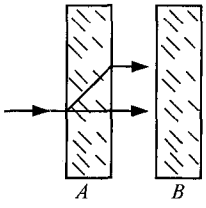
(1) $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}3\mathrm{i}\\\mathrm{i}\end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix}4\mathrm{i}\\5\end{pmatrix}$; (5) $\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$; (6) $\begin{pmatrix}2\\2\mathrm{i}\end{pmatrix}$; (7) $\begin{pmatrix}2\\6+8\mathrm{i}\end{pmatrix}$.

*5.31 利用矩阵方法证明，左(右)旋圆偏振光经过半波片后变成右(左)旋圆偏振光.

观察思考及讨论题

5.1 在单轴晶体折射中，若用 n_e 作为其折射率，e 光是否在任何条件下都不遵守折射定律？若答案是否定的，说明在何种情况下 e 光也遵从通常的折射定律.

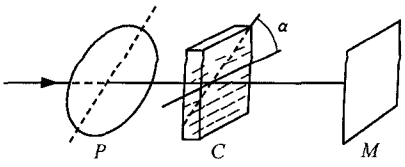
5.2 自然光正入射晶片 A(虚线表示光轴方向)，有两束光出射，标出这两束光的振动方向，并判断晶片的正负. 以入射光线方向为轴旋轴晶片 A 时，两出射光束有何种变化？若在 A 后放置一相同的晶片 B，通过 B 片有几束出射光？



讨论题 5.2 图

5.3 如何利用一单色自然光源及一个平面反射镜鉴别偏振片，$\lambda/4$ 片和 $\lambda/2$ 片？

5.4 利用两个偏振片，如何将 $\lambda/4$ 片调整到正入射的椭圆偏振光的长轴或短轴的方位上？若只有一个偏振片呢？



讨论题 5.5 图

5.5 自然光依次通过偏振片 P，方解石 $\lambda/4$ 片 C 到达反射镜 M. 晶片光轴(虚线)平行于入射表面且与 P 透振方向成角 α.

(1) 过 C 后光为何种偏振光？经 M 反射后呢？α 多大时 M 的反射光不能透过 P？

(2) 将上述装置安放于激光器的输出端，可避免器件反射光重新返回激光腔，该器件可称为“光隔离

器”，说明其作用.

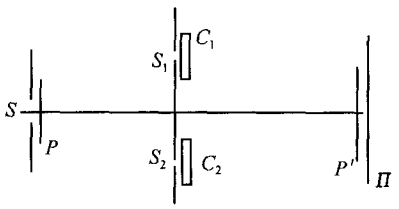
5.6　通过一偏振片观察偏振态未知的光. 当偏振片透振方向为铅直方向时得到最大光强 I_0，偏振片转过 90°后得到最小光强 $2I_0/3$. 若让该光束通过光轴沿铅直方向的 $\lambda/4$ 片后再通过偏振片，则发现当偏振片透振方向从铅直方向右旋 30°时出射光光强最大. (1) 求入射光的偏振结构及偏振度；(2) 若该光束通过透振方向从铅直方向右旋 α 角的偏振片，出射光强为多大？

5.7　干涉实验中一般要有三类器件：(a) 分束器件，它把一束(或一种)光分成两束(或两种)光；(b) 相位延迟器件，它使得该两束(或两种)光产生不同的相位延迟；(c) 合成及观察器件，它使得该两束(或两种)光能相干叠加形成干涉.

(1) 在杨氏实验、薄膜干涉及平行偏振光干涉中各是依何种方法实现分光的？从以上三类器件的角度比较这三种干涉的异同.

(2) 平行偏振光干涉中有三个关键元件：P_1，C 和 P_2. 分别说明其作用. 为什么一定要用 P_2？

(3) 平行偏振光干涉的结果与杨氏或薄膜干涉有何不同？在晶片厚度均匀、不均匀或白光入射时平行偏振光干涉会分别得到什么结果？在没有条纹产生时如何能判定它是干涉现象？



讨论题 5.8 图

5.8　杨氏实验中，S 为自然光单色点光源，P，P' 为理想偏振片，C_1，C_2 为相同的波晶片(光轴平行于入射表面). S_1 和 S_2 间距及观察区域都满足傍轴条件，问下列情况下屏 Π 上光强分布如何，若有条纹其衬比度为多大？(1) P，P' 的透振方向与 C_1，C_2 的光轴平行；(2) 同(1)，但除去 C_2；(3) 同(1)，但 C_2 转过 90°；(4) C_1，C_2 为 $\lambda/2$ 片，其光轴方向与 P 的透振方向的夹角分别为 ±45°，无 P'；(5) 同(4)，但 C_1，C_2 换成 $\lambda/4$ 片；(6) C_1，C_2 为 $\lambda/4$ 片，光轴方向均与 P 透振方向成 45°角，无 P'.

5.9　斯托克斯(Stokes)参量

除琼斯矢量之外，斯托克斯参量(或斯托克斯矢量)是描述光的偏振态的另一种方式. 与琼斯矢量不同，斯托克斯参量中各元素均为可测量(强度)，而且这种描述对偏振光、自然光和部分偏振光都通用，所以它更具有普遍性. 斯托克斯参量是一个有四个元素的列向量，它分别对应于四种测量操作：

(1) 直接测量入射光强，记为 I；

(2) 让入射光通过一个透振方向在水平(x)方向的线偏振器，测得透射光强 I_1；

(3) 让入射光通过一个透振方向在 xy 平面上一、三象限、与 x 轴成 45°的线偏振器，测得透射光强 I_2；

(4) 让入射光通过一个右旋圆偏振器(它可以使右旋圆偏振光完全通过而将左旋圆偏振光完全吸收)，测得透射光强 I_3.

由以上四个光强测量值 I，I_1，I_2 和 I_3 可以构建**斯托克斯参量**

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}S_0\\S_1\\S_2\\S_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I\\2I_1-I\\2I_2-I\\2I_3-I\end{pmatrix}.$$

若将各分量的矢量除以入射光强 I，则可以得到归一化的斯托克斯矢量.

(1) 利用以上方法，写出下列各种光的斯托克斯矢量：

①x 方向线偏振光；②y 方向线偏振光；③$+45°$线偏振光；④$-45°$线偏振光；⑤右旋圆偏振光；⑥左旋圆偏振光；⑦x，y 半轴长度分别为 1 和 2 的右旋正椭圆偏振光；⑧自然光；⑨单位强度的自然光和单位强度的水平方向线偏振光混合而成的部分(线)偏振光.

(2) 验证对于偏振光有

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2;$$

对于部分偏振光，则有

$$S_0^2 > S_1^2 + S_2^2 + S_3^2,$$

且偏振度

$$p = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0}.$$

第 6 章　光的吸收　色散和散射

前面几章从不同角度讨论了光的传播的规律，本章将介绍光与物质相互作用的一些现象，即光在各向同性介质中传播时的吸收、色散和散射，包括其数学描述、实验规律及其理论解释.

6.1　光的吸收

光在介质中传播时，光的强度随传播距离（穿透深度）的增加而衰减的现象称为**光的吸收**. 光波通过介质时其能量总会被介质或多或少吸收一部分，完全没有吸收的绝对透明的介质是不存在的.

6.1.1　光的线性吸收规律与复折射率

1. 光的线性吸收规律

有两种形式的吸收定律.

1）布格-朗伯定律

1729 年布格（P. Bouguer）从实验中得出吸收定律；1760 年朗伯用一个简单的假设推导出相同的结果. 该定律可以用图 6.1.1 来说明. 一束光强为 I_0 的单色平行光束沿 z 方向照射均匀介质并在其内传播，经过厚度为 $\mathrm{d}z$ 的薄层后，光强从 I 减少到 $I+\mathrm{d}I$（注意此处 $\mathrm{d}I<0$）. 朗伯假设，光强的减弱 $\mathrm{d}I$ 正比于 I 和 $\mathrm{d}z$ 的乘积，即

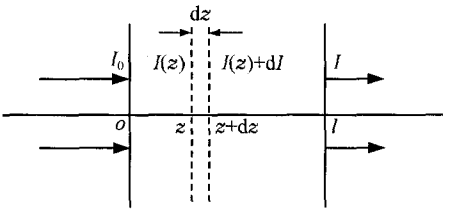


图 6.1.1　光的吸收

$$\mathrm{d}I = \alpha I \mathrm{d}z. \tag{6.1.1}$$

对上式积分并代入初始条件：$z=0$ 时 $I=I_0$，可得介质内光强

$$I(z) = I_0 \mathrm{e}^{-\alpha z}, \tag{6.1.2}$$

而出射光强则为

$$I = I_0 \mathrm{e}^{-\alpha l}, \tag{6.1.3}$$

式中 I_0 表示入射光强，l 表示光束垂直通过介质层的厚度，α 为一正常数，称为介

质对该单色光的**吸收系数**,其值可由实验测定.(6.1.3)式称为**布格-朗伯定律**.

介质的吸收系数 α 的量纲是长度的倒数,单位是 cm^{-1}. α^{-1} 的物理意义是因介质的吸收使得光强衰减到原来的 $1/e\approx 36.8\%$ 时,光所通过的介质厚度.各种介质的吸收系数值差异甚大,例如对于可见光波段,在标准大气压下空气的 $\alpha\approx 10^{-5}cm^{-1}$,玻璃的 $\alpha\approx 10^{-2}cm^{-1}$,金属的 $\alpha\approx 10^{4}cm^{-1}$.一般地说,介质的吸收性能与波长有关,即 α 是波长的函数.除真空外,没有任何一种介质对任何波长的电磁波均完全透明,故吸收是物质的普遍性质.从能量的角度来看,吸收是光能转变为介质内能的过程.

在 α 为常数的情况下,(6.1.1)式是简单的线性方程,所以由该式及该式导出的(6.1.3)式所表示的吸收规律称为是线性吸收.对大多数介质和通常光强,α 可看作与光强无关的常数,这时光的吸收可看作是线性的,相应介质也可以看作是线性介质.但是,在强光作用下某些物质的吸收系数 α 变成与光强有关,这时吸收成为非线性的,(6.1.3)式不再成立,光与物质的非线性相互作用过程显现出来.

2) 比尔定律

1852 年比尔(A. Beer)用实验证明,对于气体或溶解于不吸收的溶剂中的物质,吸收系数 α 正比于单位体积中的吸收分子数,即正比于吸收物质的浓度 C,

$$\alpha = AC, \tag{6.1.4}$$

因而吸收定律可以写成如下形式:

$$I = I_0 e^{-ACl}, \tag{6.1.5}$$

式中 A 是与浓度无关的常数,上式称为**比尔定律**.

由于布格-朗伯定律只对线性介质才成立,由它导出的比尔定律也只是在溶液可以看作是线性介质,即分子的吸收与分子间的相互作用无关时才成立.但在许多情形下分子的吸收性能是与浓度有关的,因为随着浓度的增大会使得分子间的相互作用不可忽略.对于实际气体以及许多溶液,例如弱电解质溶液、染料的水溶液等,都存在偏离比尔定律的情况.在比尔定律成立的范围内可由该定律分析溶液的浓度.

仔细研究光的强度随穿透介质深度而衰减的现象表明,这里还应区分**真吸收**和**散射**两种情况,前者是光能真正被介质吸收后转化为热能,后者则是光被介质散射到其他方向.以上讨论皆对真吸收而言,若考虑到散射,则(6.1.3)式应改写为

$$I = I_0 \exp[-(\alpha+\alpha')l]. \tag{6.1.6}$$

其中常数 α' 称为**散射系数**.上式称为普遍的**消光定律**.在很多情况下,α 和 α' 二者中,一个往往比另一个小得多,因而可以忽略不计;但在有些情况下,两种作用是同样重要的.实验测得的 $(\alpha+\alpha')$ 称为**表观吸收系数**.

以下讨论中所谓吸收皆指真吸收.

2. 复折射率

通常意义下的介质折射率 n 是一个正实数，即真空中光速 c 与介质中光速 v 的比值 c/v. 设有一列平面光波在折射率为 n 的介质中沿 z 方向传播，其电场强度可用复波函数

$$\tilde{E}(z,t) = E_0\exp[\mathrm{i}(kz-\omega t)] = E_0\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{nz}{c}-t\right)\right] \tag{6.1.7}$$

描述，该式中的常量振幅体现了在传播过程中的能量守恒，其实质是介质对电磁波无吸收.

如果考虑到介质对光能的吸收，则振幅不应再是一个与 z 无关的常量，它将随着波的传播过程逐渐减小. 为反映这一事实，可以形式地把介质折射率视为一个复数，并定义它为介质的**复折射率**

$$\tilde{n} = n(1+\mathrm{i}\kappa), \tag{6.1.8}$$

式中 κ 为正实数. 这时(6.1.7)式变为如下形式：

$$\begin{aligned}\tilde{E}(z,t) &= E_0\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{\tilde{n}z}{c}-t\right)\right]\\ &= E_0\exp\left(-\frac{\omega n\kappa z}{c}\right)\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{nz}{c}-t\right)\right].\end{aligned} \tag{6.1.9}$$

此式表明这是一列振幅随传播距离 z 按指数规律衰减的平面电磁波，通常称 κ 为**振幅衰减系数**. 此时光强则为

$$I \propto \tilde{E}\tilde{E}^* = E_0^2\exp(-2\omega n\kappa z/c). \tag{6.1.10}$$

将上式与(6.1.2)式比较，即可看出实验测定的吸收系数 α 与振幅衰减系数 κ 的关系是

$$\alpha = \frac{2\omega n\kappa}{c} = \frac{4\pi n\kappa}{\lambda}, \tag{6.1.11}$$

式中 λ 是真空中波长.

由上述讨论可见，介质的吸收可纳入到介质复折射率 $\tilde{n}$ 的概念中去，$\tilde{n}$ 的实部 n 即通常的介质折射率，它的虚部 $n\kappa$ 反映了由于电磁波被介质吸收所产生的振幅衰减，它与介质的吸收系数 α 之间的关系则由(6.1.11)式表示.

6.1.2 吸收与波长的关系

1. 一般吸收与选择吸收

前面讲过，介质的吸收系数 α 一般是波长的函数. 如果某种介质对某一波段的光具有几乎相同的吸收程度，即在该波段内该介质的吸收系数与光波长可视为无关，这种吸收称为**一般吸收**. 如果介质对某些特定波长的光具有强烈的吸收，这种

吸收称为**选择吸收**.

从广阔的电磁波谱的角度考察,一般吸收的介质是不存在的.一些在可见光范围产生一般吸收的介质,如空气、纯水、无色玻璃等,它们在红外或紫外区则产生选择吸收.因此,*选择吸收是电磁波与物质相互作用的普遍规律,而一般吸收只具有相对的意义*.例如地球大气对可见光和波长超过 300 nm 的近紫外光可以认为是透明的,对红外光则只在某些波段才是透明的.电磁波对大气透明度高的波段称为"大气窗口",图 6.1.2 中示出了波长从 1～15 μm 范围内大气透明度与波长的关系.充分研究大气条件与窗口的关系,有助于红外遥感、红外跟踪、红外导航等工作.由于物质的选择吸收,任何光学材料在紫外和红外端都有一定的**透光极限**(参见表 6.1.1),波长在透光极限以外的电磁波将被材料强烈吸收.紫外光谱仪中的透光元件需用石英制作,红外光谱仪中则常用岩盐、萤石或氟化锂等晶体制作.

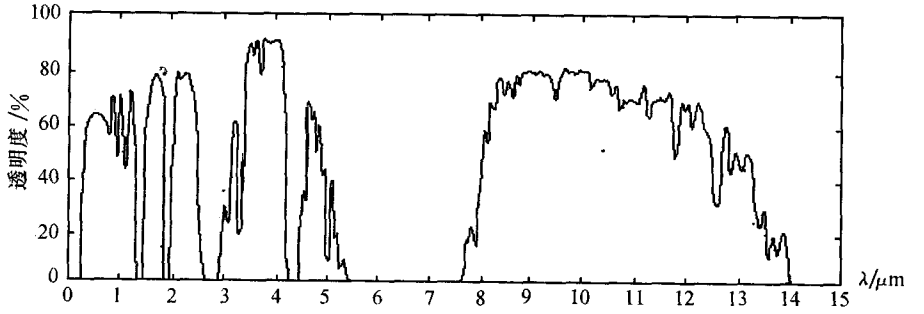


图 6.1.2 "大气窗口"

表 6.1.1 常用光学材料的透光极限

光学材料	透光极限波长/nm	
	紫 外	红 外
冕牌玻璃	350	2000
火石玻璃	380	2500
石英(SiO_2)	180	4000
萤石(CaF_2)	125	9500
岩盐(NaCl)	175	14500
氯化钾(KCl)	180	23000
氟化锂(LiF)	110	7000

2. 吸收光谱

让具有连续谱的光通过吸收物质后再经光谱仪展成光谱时,就得该物质的**吸收光谱**.它的表观形式是在入射光的连续光谱背景上出现了一些暗线和暗带.前者称为**线状谱**,后者称为**带状谱**.稀薄的原子气体的吸收可以产生线状谱,分子气体、液体和固体则多呈现带状谱.一种物质在较低温度下吸收光谱中的暗线和它在较

高温度下**发射光谱**中的亮线位置相对应，这说明若某物质在较低温度下吸收某一波长的光，则在较高温度下也辐射同一波长的光.

从经典观点，可对吸收光谱及其与发射光谱的对应关系作下述初步解释. 构成物质的原子和分子可以看做是一种电振子，它有一定的固有频率，故可发出一定波长的电磁波，在发射光谱中形成亮线. 在吸收过程中此电振子在外来电磁场的驱动下作受迫振动. 如果外来驱动场的频率等于该振子的固有频率，则振子振动振幅达到最大，即它从外来电磁场中所吸收的能量最多，故透过此物质的该波长电磁波很弱，在吸收光谱中形成暗线. 由此亦看出，物质的辐射与吸收实际上是同时存在的，不过在不同条件下其相对强弱可有所不同.

从微观上说，物质吸收何种波长的光取决于组成该物质的粒子(原子、分子)的能级结构. 当某种频率的电磁波恰能使粒子从某一较低能级跃向某一较高能级时，则该频率的入射光被此物质强烈吸收. 与此相反，若粒子从该较高能级回落到该较低能级时，则释放出同样频率的光辐射. 因此，对同一对能级，吸收波长和发射波长是相同的. 每一种原子都有自己独有的能级结构，相应地也具有自己特有的吸收谱线，它可以称为该元素的**特征谱线**或**标识谱线**，它犹如人的指纹一样各不相同，利用这些特征谱线可以根据物质的光谱来检测它含有何种元素，这种方法称为**光谱分析**. 当物质的分子结构较为复杂，或者组成物质的微观粒子的相互作用较强时，其能级可以展宽，甚至在某一段区域是连续的，这时其光谱即变成带状谱或某一波段的连续谱. 因此，光谱分析是研究物质结构的一个重要手段.

太阳发射连续光谱，但在其连续光谱的背景上呈现出许多暗线，这些暗线是原子气体的线状吸收光谱. 19 世纪，夫琅禾费、基尔霍夫和本生(R. W. E. Bunsen)等人先后研究了这一现象并分析了这些吸收谱线，发现太阳的吸收谱线是其周围温度较低的太阳大气中的原子对更加炽热的内核发射的连续光谱进行选择吸收的结果. 表 6.1.2 中列出了太阳光谱的一些较强的吸收谱线，表中字母是夫琅禾费首先标出的. 现代人们在标明某介质折射率对应的波长时，一般也采用这些字母来表示，例如 n_C 表示介质对波长为 656.28 nm 的光的折射率，n_{D1} 表示介质对波长为 589.6 nm 的钠光的折射率等等.

表 6.1.2 太阳吸收光谱中较强的夫琅禾费线

符 号	波长/nm	吸收元素	符 号	波长/nm	吸收元素
A	759.4～762.1	O	b_1	518.362	Mg
B	686.7～688.4	O	F	486.133	H
C	656.282	H	G	430.791	Fe
D_1	589.592	Na	G	430.774	Ca
D_2	588.995	Na	g	422.673	Ca
D_3	587.562	He	h	410.174	H
E_2	526.954	Fe	H	396.847	Ca

最后附带说明，我们之所以能看到五彩缤纷的世界，主要应归因于不同材料的选择吸收性能. 例如，水具有淡蓝绿色是由于吸收红光. 水分子在红外区有很宽的共振带，此共振带并扩展到可见光区. 绿色的玻璃也是由于它对红光吸收率高，所以透射光呈现绿色. 染料所呈现的彩色是它所吸收掉的频率成分的补色，因此可以预料它所吸收的频带在可见光区中是相当宽的，否则它将反射白光中大部分的光而近于白色.

6.2 光的色散

6.2.1 色散概念及其规律

1. 色散的概念

介质折射率随光的频率或波长而变化的现象称为**色散**. 1666 年牛顿首先利用三棱镜形成阳光的彩色光带光谱，可认为是研究色散现象的开始.

实验表明，介质折射率 n 一般是波长 λ 的函数

$$n = n(\lambda). \tag{6.2.1}$$

反映上述函数关系的曲线称为介质的**色散曲线**. 利用三棱镜测出不同波长的入射光的最小偏向角，再利用最小偏向角 $\delta_{\min}$ 与材料折射率 n 的关系

$$n = \frac{\sin\dfrac{\alpha+\delta_{\min}}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}, \tag{6.2.2}$$

式中 α 是三棱镜的顶角，便可得到棱镜材料的色散曲线. 介质折射率 n 在波长 λ 附近随波长的变化率 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda$ 称为介质的**色散率**，它在数值上等于介质对于 λ 附近单位波长差的两色光的折射率之差.

2. 正常色散

图 6.2.1 是几种常用的光学材料在可见光波段附近的色散曲线，由该图可见，这些介质的色散曲线有如下特点：

(1) 折射率 n 随波长增大而单调下降，即色散率 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda<0$；色散率的绝对值 $|\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda|$ 亦随波长增大而单调下降.

(2) 大致说来，在波长 λ 一定时，折射率 n 愈大的介质，其色散率的绝对值 $|\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda|$ 也愈大.

(3) 在可见光波段，折射率 n 变化缓慢；在紫外区，n 变化剧烈.

(4) 各曲线之间没有简单的几何相似关系.

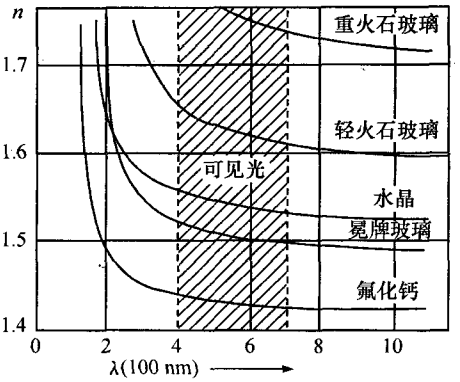


图 6.2.1　常用光学材料的色散曲线

凡具有上述特点(1)的色散称为**正常色散**. 表示介质的正常色散的经验公式最早由柯西(A. L. Cauchy)于 1836 年给出,写为

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}, \tag{6.2.3}$$

式中常量 A,B,C 是由介质性质所决定的常数,它们可以由实验测定,λ 是真空中波长. (6.2.3)式称为**柯西公式**. 对在可见光波段无色透明的材料,柯西公式有相当高的准确度. 粗略些,可以只取(6.2.3)式右端前两项,即

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}, \tag{6.2.4}$$

并由此可得介质的色散率

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3}. \tag{6.2.5}$$

牛顿曾用**正交棱镜法**研究过色散现象. 实验装置如图 6.2.2 所示,三棱镜 P_1 和 P_2 的折射棱相互垂直,白光经狭缝 S 和透镜 L_1 后成平行光束,若不放置 P_2,则在屏幕 Π 上得到垂直于 P_1 折射棱的水平连续光谱 ab;若置入 P_2,各色光束将要向下偏折,但偏折程度随波长而异,于是在 Π 上得到倾斜彩带 $a'b'$. 如果 P_1,P_2 的材料相同,则光谱 $a'b'$ 是直的,与 ab 成一倾角;如果 P_1,P_2 的材料不同,则 $a'b'$ 呈弯曲状,而且光谱弯曲的形状粗略地反映了棱镜 P_2 的折射率 $n_2(\lambda)$ 的图形.

3. 反常色散

1862 年勒鲁(F. P. Leroux)在充满碘蒸气的三棱镜中观察折射现象时,发现红光比蓝光的偏折更大,他把这一现象命名为反常色散. 以后在充满染料品红溶液的棱镜实验中也观察到这一现象. 现在把折射率随波长的增大而增大、即色散率 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda>0$ 的色散现象称为**反常色散**.

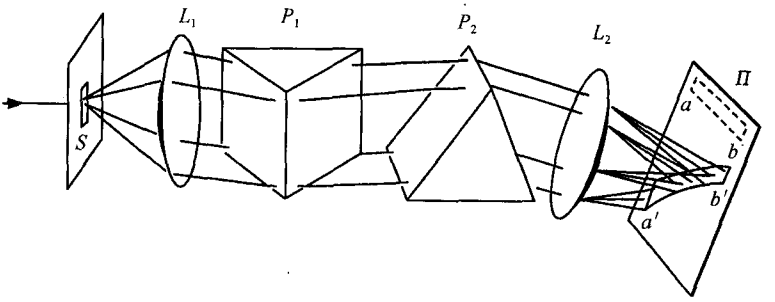


图 6.2.2 牛顿正交棱镜色散实验

图 6.2.3 所示的是伍德(R. W. Wood)于 1904 年观察钠蒸气反常色散的实验装置示意图. V 为一钢管,两边装有附有水冷装置的玻璃窗,沿管底放置了一些金属钠,管子被抽成真空. 当钠被管底部的煤气灯 H 加热时,钠蒸气向顶部扩散,其密度自下到上逐渐减小,这相当于一个等效三棱镜,如图中虚线所示,折射棱在上,底面在下,且折射棱位于与管轴垂直的水平方向. 不难看出,整个装置与牛顿正交棱镜装置的原理相同. 当 V 未加热时,其内只有均匀气体,通过 S_1 的白光经 S_2 进入棱镜光谱仪(由 S_2,L_3,P 和 L_4 构成)后,在谱仪焦面 Π 上形成一水平光谱带;当 V 被加热后,由于管内钠蒸气棱镜的色散作用,使不同波长的光被不同程度地偏折,并在某一位置被严重扭曲和割断,如图 6.2.3 所示.

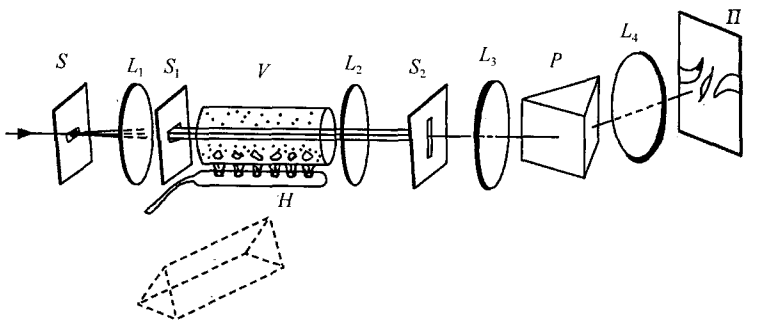


图 6.2.3 观察钠蒸气反常色散实验装置

孔脱(A. Kundt)对反常色散现象的研究证明:*一种物质在某一波长区域内有反常色散时,则在该区域内也有强烈的吸收*. 图 6.2.3 所示光谱中所出现的严重扭曲和割断正是发生在钠的吸收线附近.

"反常色散"的名称是历史上沿用下来的. 理论研究表明[①]:*在物质的吸收带范*

① 参见 6.2.2 节中的讨论.

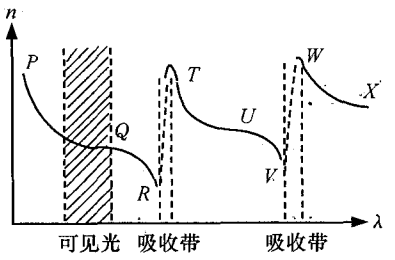


图 6.2.4 石英的色散曲线

围内存在反常色散，而在吸收带以外或两个吸收带之间则存在正常色散. 在广阔的电磁波谱范围内，每一种物质都具有正常色散和反常色散的性质，只是表现于不同的波长区域内. 人们测得的在更广阔的电磁波段内的石英色散曲线如图 6.2.4 所示，图中在各吸收带之间的色散属于正常色散，其中 PQ，TU，WX 部分满足柯西公式（但各区域中常数 A，B，C 并不相同），而在吸收带附近的 QR 和 UV 部分，则偏离柯西公式甚大；在吸收带内（虚线 RT 和 VW）则属反常色散. 应当指出，由于吸收带内光的吸收很强，介质折射率的准确测量是相当困难的.

1871 年塞耳迈耶尔（W. Sellmeier）在弹性以太理论基础上得到一个色散公式

$$n^2 = 1 + \frac{A\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_0^2}, \tag{6.2.6}$$

式中 A 与 λ_0 为两个常量，λ_0 表示对应于物质中微粒的固有振动频率的真空中波长，也就是物质的吸收线或吸收带中心波长位置. (6.2.6)式称为**塞耳迈耶尔公式**. 这个公式可以较好地描述靠近吸收线区域的 n 与 λ 关系，但存在一个困难，即当 $\lambda=\lambda_0$ 时，(6.2.6)式无意义. 在 $\lambda \gg \lambda_0$ 时把(6.2.6)式展开便可得柯西公式.

考虑到物质可以有多个固有频率，则(6.2.6)式应改写成如下形式

$$n^2 = 1 + \sum_j \frac{A_j\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_j^2}. \tag{6.2.7}$$

常用的透明材料的吸收带多位于紫外波段和红外、远红外波段，可见光波段恰好在吸收带之间，故色散为正常色散者居多.

*6.2.2 吸收和色散的经典电子理论

吸收和色散的经典电子理论主要是洛仑兹（H. A. Lorentz）提出的. 他把物质看做是由分子（原子）构成的体系，把分子（原子）视为振子，其中电子受到一个准弹性力（束缚力），被维系在其平衡位置附近，以一定的固有频率振动（电子振动的固有频率在紫外和可见光波段；分子中的原子也可以振动，其固有频率在红外波段；我们在这里只考虑电子）. 此外电子还受到一个阻尼力，且认为它与电子的速度成正比. 在外来光场对电子的周期性驱动力的作用下，电子按入射光频率作受迫振动，从光波中吸收能量，并发出与入射光同频率的辐射（相干散射）.

设电子的质量和电荷分别为 m 和 e（e 为负值），振动中电子离开其平衡位置的位移为 x，弹性恢复力（束缚力）为 $-kx$，阻尼力为 $-g\dot{x}$，外来波光场为 $E=E_0\exp(-\mathrm{i}\omega t)$，则电子的运动方程为

$$m\ddot{x} + g\dot{x} + kx = eE = eE_0\exp(-\mathrm{i}\omega t). \tag{6.2.8}$$

令 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ 表示电子振动的固有角频率，$\gamma = g/m$ 为阻尼常数，则(6.2.8)式化为

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=\frac{eE_0}{m}\exp(-\mathrm{i}\omega t). \tag{6.2.9}$$

上式的特解为

$$x=\frac{eE_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\gamma\omega}\exp(-\mathrm{i}\omega t)=x_0\exp(-\mathrm{i}\omega t), \tag{6.2.10}$$

式中振幅

$$x_0=\frac{eE_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\gamma\omega} \tag{6.2.11}$$

是光波角频率 ω 的函数. x_0 为一复数,表明受迫振动与入射光扰动有一定的相差.

下面我们将把电子位移 x 和介质折射率 n 联系起来,以便解释吸收和色散现象. 电子的位移将引起介质的极化. 设介质单位体积中有 N 个分子,每个分子中的振子数为 f_0,则单位体积中共有 Nf_0 个固有角频率为 ω_0 的振子. 因每个位移为 x 的电子产生电(偶极)矩 $\bar{e}x$,故介质的极化强度为

$$P=Nf_0 ex. \tag{6.2.12}$$

利用极化率 $\chi_e=P/\varepsilon_0 E$(ε_0 为真空电容率),相对电容率 $\varepsilon_r=1+\chi_e$,以及(6.2.10)式和(6.2.12)式,可得

$$\varepsilon_r=1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\gamma\omega}.$$

又因 $n=\sqrt{\varepsilon_r}$(在光波波段,一般物质的相对磁导率 $\mu_r=1$),故有

$$n^2=1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\gamma\omega}. \tag{6.2.13}$$

上式适用于足够稀薄的气体. 对稠密物质如液体、固体的分子,则尚需考虑到周围介质极化的影响. 分析表明,这时上式形式上依然成立,不过其中之 ω_0 需修正为另一值 ω_0'.

(6.2.13)式表明 n 为复数,可用 $\tilde{n}$ 表示,并写成 $\tilde{n}=n(1+\mathrm{i}\kappa)$,称为介质的复折射率,其中 n,κ 皆为实数. 这样(6.2.13)式化为

$$[n(1+\mathrm{i}\kappa)]^2=1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\gamma\omega}, \tag{6.2.14}$$

将上式左右端的实部和虚部分离,可得到

$$n^2(1-\kappa^2)=1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{f_0(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}, \tag{6.2.15}$$

$$2n^2\kappa=\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{f_0\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}. \tag{6.2.16}$$

上面两式称为**亥姆霍兹方程**.

当 ω 远离固有角频率 ω_0,即 $\gamma^2\omega^2\ll(\omega_0^2-\omega^2)^2$ 时,可不计吸收,即可令 $\kappa=0$,这时由(6.2.15)式可得

$$n^2=1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2}, \tag{6.2.17}$$

上式表明折射率随 ω 增大而增大,这就是正常色散. 容易看出,此式与塞耳迈耶尔公式(6.2.6)一致.

当 ω 接近 ω_0,即电子的振动接近共振时,吸收急剧增大. 若考虑稀薄气体,n 与 $\tilde{n}$ 均极接近

于 1，则由(6.2.14)式近似可得

$$\tilde{n}=n(1+\mathrm{i}\kappa)=1+\frac{1}{2}\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{f_0}{\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\gamma\omega}. \tag{6.2.18}$$

从而

$$n=1+\frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m}\frac{f_0(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2},$$

$$n\kappa=\frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m}\frac{f_0\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}.$$

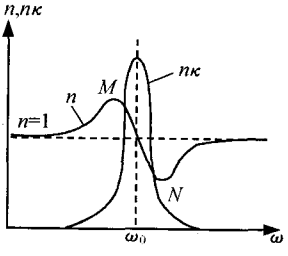


图 6.2.5 固有频率 ω_0 附近的 n 和 $n\kappa$ 曲线

当 γ 很小时，在 ω 接近 ω_0 的范围内 n 和 $n\kappa$ 的曲线如图 6.2.5 所示. 在更一般的情况下，这两个曲线也与图 6.2.5 有相似的形状. 曲线表明，在反常色散区 MN 内出现折射率随频率的增大而减小的现象，这就是反常色散.

在上面的讨论中，我们把问题简单化了，即假设物质中的电子只有一个固有振动频率，更确切的模型应是认为每个分子中有多种振子. 设它们的固有角频率和相应的阻尼常数分别为 ω_1，ω_2，…和 γ_1，γ_2，…它们的数目分别为 f_1，f_2，…这时(6.2.14)式应推广为如下形式

$$\tilde{n}^2=1+\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\sum_j\frac{f_j}{\omega_j^2-\omega^2-\mathrm{i}\gamma_j\omega}, \tag{6.2.19}$$

这里下标 j 是振子类型的标号，$\sum_j$ 是对一个分子中所有振子类型求和，显然应有

$$\sum_j f_j=f_0.$$

令 $\gamma_j=0$(不考虑吸收)，则由(6.2.19)式可得出(6.2.7)式.

用量子理论讨论色散现象得出的结果与上述经典理论结果基本一致. 例如对于稀薄气体，不计衰减效应时可得色散公式

$$n^2=1+\frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m}\sum_j\frac{f_j}{\omega_j^2-\omega^2}, \tag{6.2.20}$$

与由(6.2.19)式所得结果一致；但对式中 ω_j 和 f_j 应有与经典理论不同的理解：这里 ω_j 表示在原子中电子由能级 E_0(通常为基态能级)向高能级 E_j 跃迁所对应的角频率 $\omega_j=2\pi(E_j-E_0)/h$ (h 为普朗克常量)，f_j 与这种跃迁几率成正比. 因为可把能级间跃迁看做等效的经典振子，所以 f_j 称为振子强度. (6.2.20)式中相加的各项对应于各种可能的跃迁. 用量子理论可以根据原子的数目及波函数算出 f_j 的值，一般 $f_j<1$.

6.2.3 光的相速和群速

1. 问题的提出

在科学史上，人们在测定某些介质折射率时曾发现，采用不同方法获得的结果有时差异甚大. 一种方法称为折射法：通过测定光线方向的改变并应用折射定律，

计算介质的相对折射率，若第一种介质为真空，则可求得第二种介质的(绝对)折射率 n. 例如：水的折射率 $n=1.33$. 另一种方法称为速度法：在实验室中直接测定光速. 1860～1862 年间，傅科利用旋转镜法测量光在真空和水中的光速，发现二者之比约为 4/3，此结果既支持了光的波动说，又与折射法测得的水的折射率相吻合. 但是 1885 年迈克耳孙在较高精度上重复傅科实验时，测得光在真空中和在二硫化碳(CS_2)中的速度之比为 1.758，与折射法的结果 $n=1.64$ 差异甚大，他并肯定这一差异并非是因实验误差所致. 瑞利找到了产生这种差异的原因，对光速概念的复杂性进行了说明，提出了光的相速和群速的概念.

2. 相速和群速的概念

对各向同性介质中的理想单色波，有

$$v=\lambda\nu=\frac{\lambda}{T}=\frac{\omega}{k}. \tag{6.2.21}$$

这里光速 v 同时表示波扰动、光能量和等相面的传播速度，瑞利称它为**相速**，记作 v_p.

非单色波可以依傅里叶展开视为众多频率的单色波的叠加. 在真空中，各单色波均以相同的相速 c 传播，因此非单色波在真空中的相速就等于各单色波的相速. 瑞利指出，当非单色波在介质中传播时，各单色波将以不同的相速传播，相速的大小由介质的性质和各单色波的频率决定，在这种情况下，非单色波的波速概念就变得比较复杂了.

为简单计，可设非单色波仅包含两个频率分立的单色波成分，并设二者均沿 z 方向传播，振幅均为 E_0，频率 ω_1 和 ω_2 相近. 由 2.3.6 节中分析，可知其叠加场中的合振动可表示为

$$E=2E_0\cos\left(\frac{\Delta k}{2}z-\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\delta_0}{2}\right)\cos\left(\bar{k}z-\bar{\omega}t+\frac{\delta_0}{2}\right), \tag{6.2.22}$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta k&=k_1-k_2, \qquad \Delta\omega=\omega_1-\omega_2,\\ \bar{k}&=\frac{k_1+k_2}{2}, \qquad \bar{\omega}=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}.\end{aligned} \tag{6.2.23}$$

对准单色波有

$$|\Delta\omega|\ll\bar{\omega}, \quad |\Delta k|\ll\bar{k}. \tag{6.2.24}$$

(6.2.22)式中第一项和第二项余弦因子分别是缓变项和迅变项，从而可以把第二项看成是高频载波，而把第一项的绝对值看做是振幅调制项. 此合成波的瞬时图像如图 6.2.6 所示，虚线表示合成波振幅受到低频调制的包络线，实线表示合成波(高频波)的瞬时空间波形.

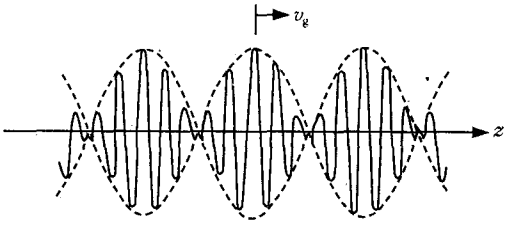


图 6.2.6 两列频率相近的简谐波的合成及其群速

一般把高频载波的等相面在空间的推移速度称为**相速度**，记作 v_p；把等幅面即低频包络在空间的推移速度称为**群速度**，记为 v_g. 由等相面方程

$$\bar{k}z-\bar{\omega}t+\frac{\delta_0}{2}=\text{常数},$$

可以得到

$$v_p=\frac{dz}{dt}=\frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}; \tag{6.2.25}$$

由等幅面方程

$$\frac{\Delta k}{2}z-\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\delta_0}{2}=\text{常数},$$

可以得到

$$v_g=\frac{dz}{dt}=\frac{\Delta\omega}{\Delta k}. \tag{6.2.26}$$

实际准单色波可看做由无限多频率在 $\omega-\Delta\omega/2$ 和 $\omega+\Delta\omega/2$ 之间、波矢量数值在 $k-\Delta k/2$ 和 $k+\Delta k/2$ 之间连续分布的单色波所组成，由 2.5.1 节和 2.5.2 节中的分析可知其合成波(有显著值的区域)在时域和空域中均有一有限宽度，而且时域中宽度和空域中宽度分别与 $\Delta\omega$ 和 Δk 成反比. 这种形式的合成波称为**波包**，其瞬时图像大致如图 6.2.7 所示，其中实线表示高频波的瞬时空间图形，虚线表示

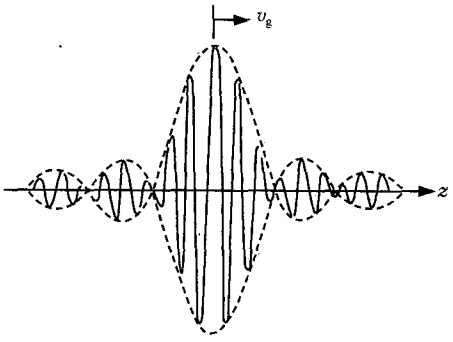


图 6.2.7 准单色波包及其群速

其振幅受到的调制包络线. 我们称波包中振幅最大的位置为波包中心，其传播速度称为波包的**群速**. 计算结果表明，准单色波包的相速与群速分别为

$$v_p = \frac{\omega}{k}, \tag{6.2.27}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}. \tag{6.2.28}$$

实际上，以上二式亦可看成是(6.2.25)式和(6.2.26)式中当 $\Delta\omega$ 和 Δk 均趋于零时的极限情况.

3. *群速和相速的关系*[①]

因为 $\omega = kv_p$，由(6.2.28)式有

$$v_g = v_p + k\frac{dv_p}{dk} = v_p - \lambda\frac{dv_p}{d\lambda}. \tag{6.2.29}$$

最后一步运算用到了 $k = 2\pi/\lambda$ 和 $dk = -(2\pi/\lambda^2)d\lambda$. (6.2.29)式称为**瑞利群速公式**.

为了用介质的色散率表示群速、相速的关系，常将上式稍加变形. 利用 $v_p = c/n$，$dv_p/d\lambda = -v_p(1/n)(dn/d\lambda)$，可得

$$v_g = v_p\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right). \tag{6.2.30}$$

以上各式中 λ 均指介质中波长. 为用真空中波长 λ_0 表示色散关系，需要导出 $dn/d\lambda$ 和 $dn/d\lambda_0$ 的关系，即

$$\frac{dn}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda_0}\frac{d\lambda_0}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda_0}\frac{d(n\lambda)}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda_0}\left(n + \lambda\frac{dn}{d\lambda}\right),$$

$$\frac{dn}{d\lambda} = \frac{n\dfrac{dn}{d\lambda_0}}{1 - \dfrac{\lambda_0}{n}\dfrac{dn}{d\lambda_0}} \approx n\frac{dn}{d\lambda_0},$$

运算中用到了 $n = \lambda_0/\lambda$，并设介质为弱色散介质($|dn/d\lambda_0| \ll n/\lambda_0$). 这样，(6.2.30)式可写成

$$v_g \approx v_p\left(1 + \frac{\lambda_0}{n}\frac{dn}{d\lambda_0}\right) = \frac{c}{n}\left(1 + \frac{\lambda_0}{n}\frac{dn}{d\lambda_0}\right). \tag{6.2.31}$$

上式便是一个具有实用价值的瑞利群速公式，它与(6.2.30)式在形式上完全一致，只是将 λ 换成了 λ_0. 该式表明，当介质无色散时，$dn/d\lambda_0 = 0$，$v_g = v_p$，群速与相速没有区别；当介质有色散时，$v_g \neq v_p$. 在正常色散区，$dn/d\lambda_0 < 0$，$v_g < v_p$；在反常色散区，$dn/d\lambda_0 > 0$，$v_g > v_p$.

① 在本段及下段中，为避免混淆，我们用 λ 和 λ_0 分别表示光在介质和真空中的波长.

4. 群速折射率和(相速)折射率

我们可以定义真空中光速与介质中群速之比为介质的**群速折射率**,记作 n_g,即

$$n_g = \frac{c}{v_g}. \tag{6.2.32}$$

通常意义下的介质折射率实际上是

$$n = \frac{c}{v_p}, \tag{6.2.33}$$

不妨称它为相速折射率. 容易导出两者关系(习题 6.10)

$$n_g \approx n - \lambda_0 \frac{dn}{d\lambda_0}. \tag{6.2.34}$$

用钠黄光($\lambda_0 = 589.3$ nm)对 CS_2 的折射率作精确的测量表明:速度法给出 $n_g = 1.722$,折射法给出,$n = 1.624$,色散率的测量给出 $\lambda_0 dn/d\lambda_0 = -0.102$,于是 $n - \lambda_0 dn/d\lambda_0 = 1.624 + 0.102 = 1.726$. 这些实验数据与(6.2.34)式符合甚好,这是对群速理论的一个有力支持,同时也表明,1885 年迈克耳孙利用速度法测得的是二硫化碳的群速折射率.

5. 几点讨论

1) 介质色散与波包形状

因为非单色波可以看做是由许多单色波叠加而成的波包,在无色散介质(真空)中,各单色波传播的速度相同,故合成波形状不变,并以同样速度在空间推移. 在色散介质中则不同,这时各单色波的传播速度不同,在运动中各单色波形会发生彼此的位置错动,而且错动量将随着传播距离的增加而加大,因此合成波形状在传播过程中将逐渐变形,其空间分布范围逐渐加宽. 换言之,波包在传播过程中将逐渐"弥散".

2) 群速度的意义及适用范围

由上述分析可以看到,只有在弱色散介质内,对准单色波,一个波包才能传播较长距离而不发生显著的形状变化. 这时,也只有这时,才可以认为群速 v_g 是波包作为整体的传播速度,它可代表波包作为光脉动所携带的能量及其包络所携带的光信号的传播速度. 若介质色散较强,特别是在反常色散区,波包弥散很快,特定振幅的点已不复存在,甚至波包本身也转瞬即逝,这时群速已失去了意义.

3) 群速和相速的大小

依相对论要求,为满足因果律,任何信号速度不能大于真空中光速 c. 因此,在群速有意义的范围内,它总小于 c. 相速则不同,它与理想单色波相联系,而这种在时空中无限连续的理想单色波不携带任何信号,所以 v_p 有时可以大于 c,这与相对论并不矛盾.

6.3 光的散射

光束通过光学性质不均匀的介质时，从侧向可观察到光，这种现象称为**光的散射**. 散射光的产生原因可以从次波叠加观点加以解释. 在入射光作用下，介质分子（原子）或其中的杂质微粒可看做次波源而辐射次波. 对完全纯净均匀的介质，各次波相干叠加的结果使得只在原入射光方向发生干涉相长，其他方向均干涉相消，故光线按几何光学所确定的方向传播. 在介质不均匀时，各次波的相位无规性使得最终的叠加结果呈非相干性，即除原入射光方向之外，其他方向亦有光强分布，散射现象也就出现了. 光学性质的不均匀性可以是由于均匀介质中散布着折射率与它不同的其他物质的大量微粒，也可以是由于介质本身的不均匀结构（如密度涨落）所造成.

光散射的基本过程是光与介质中分子（原子）作用而改变其光强的空间分布、偏振态或频率的过程. 依散射光频率与入射光相比是否改变，可以把散射分成两大类. 下面首先讨论频率不变的这类散射.

6.3.1 瑞利散射 米氏散射及大粒子散射

依散射光强依空间方位与波长的依赖关系，可以将频率不变的这类散射分为瑞利散射、米氏散射及大粒子散射.

1. 瑞利散射

1871 年瑞利在散射粒子线度远小于光波长的假定下，导出了散射现象的规律，这种散射称为**瑞利散射**，它具备以下四个特征：

(1) 波长不变，即散射光波长与入射光波长相同.

(2) 散射光强度与波长四次方成反比，即

$$I \propto \frac{1}{\lambda^4}, \tag{6.3.1}$$

上式称为**瑞利散射定律**.

(3) 散射光强依空间方位呈哑铃形角分布. 设入射光是自然光，则在与入射光方向成 γ 角（习惯上称为**散射角**）的方向上，散射光强为

$$I(\gamma) = I_{\pi/2}(1+\cos^2\gamma), \tag{6.3.2}$$

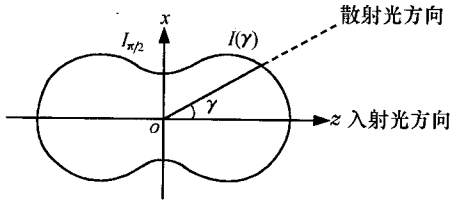


图 6.3.1 自然光瑞利散射光强的角分布

其中 $I_{\pi/2}$ 表示垂直于入射光即 $\gamma=\pi/2$ 的方向的散射光强，散射光强的角分布如图 6.3.1 所示.

(4) 当自然光入射时，各方向的散射光一般为部分偏振光；但在垂直入射光方向上的散射光是线偏振光；沿入射光方向或其逆方向的散射光仍是自然光.

下面分析几种产生瑞利散射的机制.

1) 分子(原子)产生的瑞利散射

根据经典电磁理论，光散射的基本过程是这样的：当分子(原子)的线度比入射光波长小许多时，在入射光波的电矢量 $\boldsymbol{E}$ 的作用下，分子(原子)中的电子以入射光频率作受迫振动并从入射光波取得能量，同时发出辐射. 这种辐射就是散射光，其频率或波长与入射光相同. 这种散射有两种处理方法，现分述如下：

(1) 设入射光是沿 z 轴正方向传播、电矢量 $\boldsymbol{E}$ 沿 x 方向的线偏振光，如图 6.3.2(a)所示，$\boldsymbol{E}$ 矢量使分子(原子)中的电子以光频 ω 作受迫振动，于是分子(原子)可视为电(偶极)矩为 $p=ex_0\cos\omega t$ 的谐振子，其中 e 为电子电量，x_0 为其振幅. 由电磁学这个谐振子向空间发射辐射(即散射光)的强度分布公式是

$$I=\frac{e^2x_0^2\omega^4}{32\pi^2\varepsilon_0c^3R^2}\sin^2\alpha, \tag{6.3.3}$$

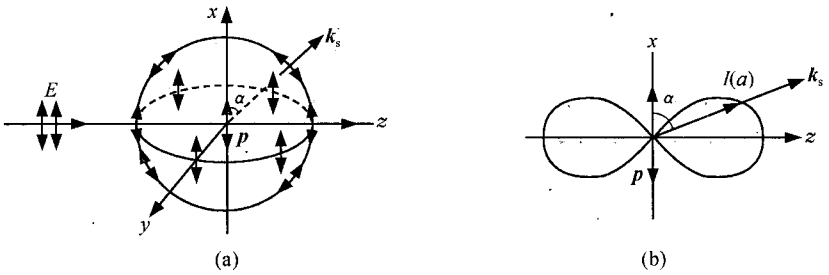


图 6.3.2　线偏振光产生的散射及散射光强分布

式中 R 为观察点到分子(原子)的距离，ε_0 为真空电容率，c 为真空中光速；α 为观察方向矢量 $\boldsymbol{k}_s$ 与 x 轴的夹角. 图 6.3.2(b)为散射光强角分布的示意图，其三维分布可将该图绕 x 轴旋转一周而得到. 由图(a)和(b)不难看出，各方向的散射光都是线偏振光，但在入射光电矢量振动的方向上，散射光强为零.

(2) 仍设入射光是沿 z 轴正向传播、电矢量 $\boldsymbol{E}$ 沿 x 方向的线偏振光，它使分子极化，极化强度 $P=\varepsilon_0\chi_eE=\varepsilon_0\chi_eE_0\cos\omega t$，其中 χ_e 是极化率，E_0 是入射光电矢量 $\boldsymbol{E}$ 的振幅，振动的极化分子发射的辐射就是散射光. 散射光强分布公式是

$$I=\frac{\chi_e^2\varepsilon_0\omega^4E_0^2}{32\pi^2c^3R^2}\sin^2\alpha, \tag{6.3.4}$$

式中有关量如前所述.

如果沿 z 轴正向入射的是自然光，按照自然光的正交模型，$\boldsymbol{E}$ 矢量可分解为 $\boldsymbol{E}_x$，$\boldsymbol{E}_y$，如图 6.3.3(a)所示. 这时应将(6.3.3)或(6.3.4)式分别应用于 $\boldsymbol{E}_x$，$\boldsymbol{E}_y$，然后将其产生的散射强度相加. 若从后式出发，因 $E_{0x}^2=E_{0y}^2=E_0^2/2$，故自然光产生的散射光强是

$$I(\gamma)=I_x+I_y=\frac{\chi_e^2\varepsilon_0\omega^4E_0^2/2}{32\pi^2c^3R^2}(\sin^2\alpha+\sin^2\beta),$$

即

$$I(\gamma)=\frac{\chi_e^2\varepsilon_0\omega^4E_0^2}{64\pi^2c^3R^2}(1+\cos^2\gamma), \tag{6.3.5}$$

式中 α,β,γ 是散射方向(即观察方向)与 x,y,z 轴正向的夹角. 散射光强的三维角分布可由图 6.3.3(b)实线所示图形绕 x 轴旋转而得到.

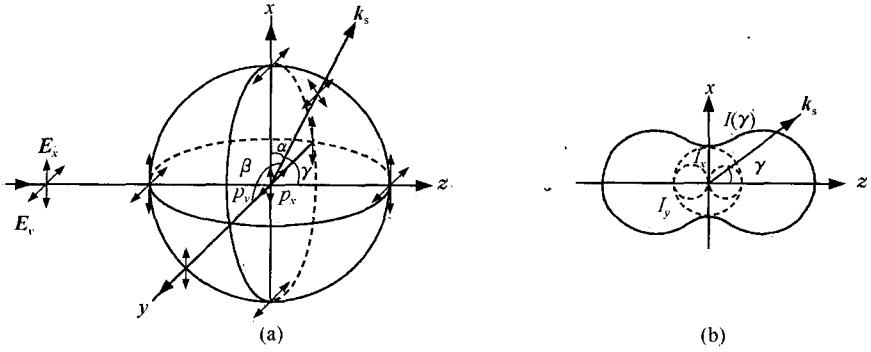


图 6.3.3 自然光产生的散射及散射光强分布

(6.3.3)～(6.3.5)式均表明 $I\propto\omega^4$，这正是瑞利散射定律的结论. 散射光的偏振态亦可由 $\boldsymbol{E}_x$、$\boldsymbol{E}_y$ 的贡献叠加而得到，可见在垂直于入射方向的 xy 平面内(即 $\gamma=\pi/2$)，散射光都是振动方向在该平面内的线偏振光；沿 z 轴的散射光仍是自然光；在其他方向上的散射光为部分偏振光，如图 6.3.3(a)所示.

以上各式虽然是对于单个分子(原子)得到的，但是由于分子热运动使得各分子之间无确定的位置关系，各分子散射次波的相位关系也是混乱无规，其叠加结果呈非相干性，即多个分子的散射光强简单地等于每个分子散射光强之和. 因此，以上各结论对介质总体散射仍然适用.

2) 细粒产生的瑞利散射

如果介质中存在着许多线度很小(<0.1λ)、位置随机分布的杂质微粒(如细微的悬浮物、细微气泡等)，这些细粒将成为散射中心. 由前文分析它们的散射光也是

非相干的，各散射光束的光强直接相加，这时即可观察到瑞利散射.

3) 密度涨落产生的瑞利散射

实验表明，完全均匀纯净的介质(例如低温纯净晶体)不会产生散射. 但是，通常情况下，由于分子热运动的存在，即使在纯净介质中仍存在着密度涨落及其引起的折射率不均匀性，这种空间不均匀性的特征线度一般远小于光的波长，它使得纯净介质(例如清彻的大气)亦会产生瑞利散射. 这种由密度涨落导致的散射亦称为**分子散射**.

此外，分子各向异性引起的分子取向涨落以及纯净溶液中浓度涨落均可以造成介质的光学不均匀性，从而产生瑞利散射.

2. 米氏散射及大粒子散射

如果粒子的线度接近或大于光波长，瑞利散射定律不再适用. 1908 年米(G. Mie)利用电磁场方程对平面波照射球形粒子时的散射过程进行了分析，计算结果指出：

(1) 当散射粒子线度 a 与入射光波长 λ 之比 a/λ 很小(数量级显著小于 0.1)时，散射光强与波长关系同瑞利散射定律一致.

(2) 当粒子线度与光波长可以比拟(a/λ 数量级为 0.1～10)时，随着粒子线度的增大，散射光强与波长的依赖关系逐渐减弱，而且散射光强随波长的变化出现起伏，这种起伏的幅度也随着比值 a/λ 的增大而逐渐减少. 这种散射称为**米氏散射**.

(3) 对于足够大的粒子($a/\lambda>10$)，散射光强基本上与波长无关，这种粒子的散射称为**大粒子散射**，它可以作为米氏散射的大粒子极限.

图 6.3.4 示出了对小水滴所得到的一个结果. 计算结果还表明，随着粒子线度增大，向入射光前方的散射光强亦增大(这种现象称为米氏效应)，而且在空间不同方向上出现一些极大与极小.

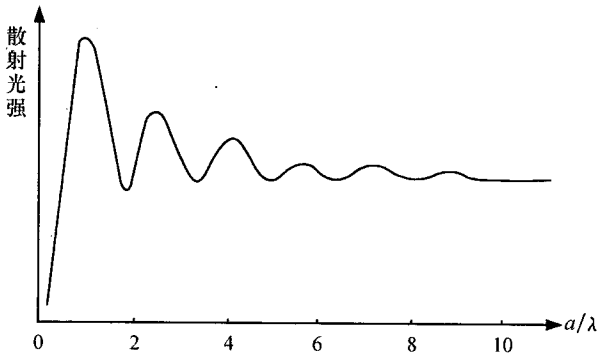
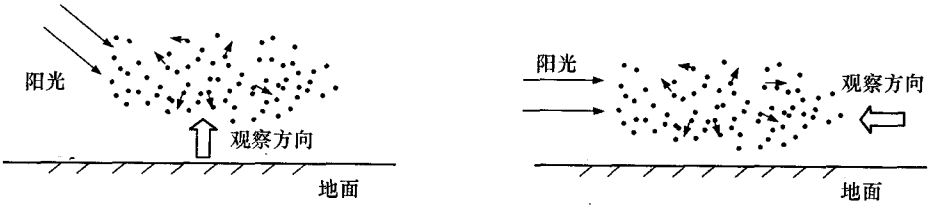


图 6.3.4　小水滴($n=1.33$)的散射强度与比值 a/λ 的关系

3. 自然界的散射现象

许多自然现象均与光的散射有关. 地球外围大气层对阳光的散射使天空呈现一定的亮度. 如果没有大气层,则天空中除了日月星辰等(自身或反射)发光体外,其他背景区域是完全黑暗的. 宇航员在星际旅行中的观察已证实了这一点.

纯净大气层的散射属于瑞利散射,其散射光强与 $1/\lambda^4$ 成正比,当人们观察晴日的天空时,进入人眼的是阳光经过地球大气层的侧向散射光. 依瑞利散射定律,短波波段的散射光强要远大于长波波段的光强,所以天空呈蔚蓝色. 而日出或日落时,直观太阳所看到的是地球大气层中经过较长路程的散射后透射的阳光,剩余的长波成分较强,所以旭日或夕阳呈红色. 如图 6.3.5 所示



(a) 晴日天空呈蓝色　　(b) 旭日或夕阳呈红色

图 6.3.5　散射引起的天色和日色

烟、霭、云、雾的散射性质因其中粒子的大小不同而不同. 细微的烟霭粒子散射光因具有较强的波长依赖性而呈淡蓝色,而含有较大水滴的云雾的散射光则因大粒子的非选择性散射而呈白色.

6.3.2　拉曼散射

当光通过介质时,散射光频率中除有原入射光频率之外,又出现在入射光频率两侧对称分布的新的频率的现象,称为**拉曼散射**或**联合散射**.

1923 年斯梅卡尔(A. G. S. Smekal)从理论上预言了频率发生改变的散射. 1928 年印度物理学家拉曼(C. V. Raman)首先在苯、甲苯、水及其他多种液体、一些气体与蒸汽以及洁净的冰中观察到这种现象,同年苏联物理学家兰茨别尔格(Г. С. Ландсберг)和曼杰利斯塔姆(Л. И. Мандельштам)也独立地在石英晶体中发现了同种效应.

1. 拉曼散射的特征

典型的拉曼光谱具有如下三个特征:

(1) 在频率为 ν_0 的原始入射谱线(称为**瑞利谱线**)两侧还有频率为 $\nu_0 \pm \nu_1$, $\nu_0 \pm \nu_2$, …(ν_1, ν_2, …称为**拉曼频率**)等散射谱线(称为**拉曼谱线**);在长波一侧的(频率为 $\nu_0 - \nu_j$)称为**红伴线**或**斯托克斯线**①,在短波一侧的(频率为 $\nu_0 + \nu_j$)称为**紫伴线**或**反斯托克斯线**.

(2) 瑞利谱线和拉曼谱线总是同时出现,相应的散射光强前者比后者大约高三个数量级.

(3) 拉曼频率 ν_j ($j=1,2,\cdots$)与入射光频率 ν_0 无关;它等于分子固有振动的频率,一般在红外波段.

2. 拉曼散射的经典电磁理论解释

在经典电磁理论的框架内,可以认为拉曼散射是分子中的原子振动对感生电(偶极)矩周期性变化所产生的调制的结果. 设入射光电场 $E=E_0\cos 2\pi\nu_0 t$,则分子因此电场作用获得的感生电(偶极)矩为

$$P = \chi_e \varepsilon_0 E, \tag{6.3.6}$$

式中 χ_e 为极化率. 若 χ_e 为不随时间变化的常数,则 P 以入射光频率 ν_0 作周期性变化,由此得到的散射光频率也为 ν_0,这就是瑞利散射. 如果分子以固有频率 ν_j 振动,而且此振动影响着极化率 χ_e,使它也以 ν_j 作周期性变化,即

$$\chi_e = \chi_0 + \chi_j \cos 2\pi\nu_j t, \tag{6.3.7}$$

将上式代入(6.3.6)式,则有

$$\begin{aligned} P &= \chi_0\varepsilon_0 E_0 \cos 2\pi\nu_0 t + \chi_j\varepsilon_0 E_0 \cos 2\pi\nu_0 t \cdot \cos 2\pi\nu_j t \\ &= \chi_0\varepsilon_0 E_0 \cos 2\pi\nu_0 t + \frac{1}{2}\chi_j\varepsilon_0 E_0[\cos 2\pi(\nu_0+\nu_j)t + \cos 2\pi(\nu_0-\nu_j)t]. \end{aligned} \tag{6.3.8}$$

此式表明感应电偶极矩的变化频率有 ν_0 和 $\nu_0 \pm \nu_j$ 三种,ν_0 对应拉曼光谱中的瑞利谱线;$\nu_0 \pm \nu_j$ 对应拉曼谱线. 当分子固有频率不止一个时,则得到不止一对拉曼谱线.

实验表明,反斯托克斯线出现较少而且强度很弱,这是经典电磁理论无法解释的,它表明拉曼散射的经典理论尚有不完善之处.

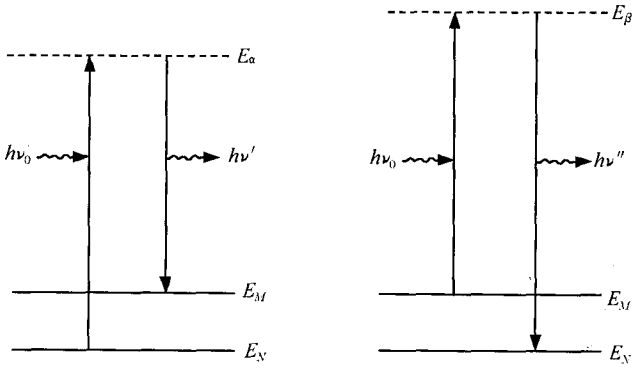
*3. 拉曼散射的量子理论解释

量子理论把散射过程解释为光子与分子作用中入射光子更换为散射光子的过程. 当频率为 ν_0 的入射光子通过介质时,将与分子发生碰撞. 如果碰撞是弹性的,则光子的能量和动量维持不变,因而散射光的频率仍是 ν_0,这就是瑞利散射. 当碰撞是"非弹性"的,分子可能失去或获得能量,达到另一个状态. 为了说明这种过程中的能量关系,可引用**虚能级**概念,即认为分子在散射

① 此名称源于荧光(光致发光)效应中的斯托克斯定则:发射的荧光波长较入射光的波长要长些.

过程中可经历一种中间能态(称为虚能态),以完成光子的更换. 可用图 6.3.6 所示的能级跃迁图来表示拉曼散射过程. 图中用 E_N,E_M 来表示分子的两个振动能级,当入射光子 $h\nu_0$ 和处于低能级 E_N 的分子作用时,可以使分子向上跃迁到虚能级 E_α,再向下跃迁到高能级 E_M,发出散射光子 $h\nu'$. 这时有

$$\nu' = \nu_0 - \frac{E_M - E_N}{h}, \tag{6.3.9}$$



(a) 斯托克斯线　　(b) 反斯托克斯线

图 6.3.6　拉曼散射

这就是拉曼散射的斯托克斯线,如图(a)所示. 如果入射光子 $h\nu_0$ 和处于高能级 E_M 的分子作用,使之向上跃迁到虚能级 E_β,再向下跃过到低能级 E_N,发出散射光子 $h\nu''$,则有

$$\nu'' = \nu_0 + \frac{E_M - E_N}{h}, \tag{6.3.10}$$

这就是拉曼散射的反斯托克斯线,如图(b)所示. 一般处于高能级的分子数较低能级的少,所以反斯托克斯线总是较斯托克斯线为弱. 随着温度的升高,反斯托克斯线将会增强.

光的散射现象在各个科学技术部门中有广泛应用. 通过散射光的测量可以了解散射粒子的浓度、大小、形状和取向等. 散射光谱又可用于确定物质分子和原子的特征. 拉曼光谱学对于纯定性到高度定量的化学分析和测定分子结构都有很大的价值. 近年来利用强激光可获得**受激拉曼散射**,更便于进行上述各种研究与应用.

习　题

6.1　试证若介质厚度 $l=1$ cm,且吸收系数 α 很小、满足 $\alpha l \ll 1$ 时,则吸收率 $G=(I_0-I)/I_0$ 在数值上就等于吸收系数 α.

6.2　光线通过 1 cm 厚的液层时,强度减弱 5%. 若光线通过 20 cm 厚的液层,强度将变为入射光强的百分之几?

6.3　海水对 570 nm 的黄绿光的吸收系数为 2.2×10^{-3} cm^{-1},该黄绿光在海水中传播多长距离光强减弱为原来的 80%? 若要减弱到 10%呢?

6.4 实验测得一介质的表观吸收系数为 0.20 cm^{-1}，已知这种表观吸收(光强减弱)实际上有 1/4 是由散射引起的. 如果消除了散射效应，光在这种介质中经过 3 cm 时，光强将减弱到入射光强的百分之几?

6.5 一长为 35.0 cm 的玻璃管，由于管内烟粒的散射作用，透过管的光强只是入射光强的 65%；待烟粒沉淀后，透过光强增为入射光强的 88%. 试求此管对光的散射系数和真吸收系数.

6.6 一块光学玻璃对汞灯蓝、绿谱线 $\lambda=435.8$ nm，$\lambda=546.1$ nm 的折射率分别为 1.6525，1.6245. 试求：(1) 柯西公式 $n=A+B/\lambda^2$ 中的常数 A 和 B；(2) 玻璃对钠黄光($\lambda=589.3$ nm)的折射率；(3) 玻璃对钠黄光的色散率 $dn/d\lambda$.

6.7 一棱镜顶角 $\alpha=50°$，设它的玻璃材料色散性质可用二常数柯西公式来描写，二常数分别为 $A=1.53974$，$B=4.6528\times10^3$ nm^2. 求此棱镜对波长 $\lambda=550$ nm 光波在最小偏向角条件下的角色散本领.

6.8 计算下列各种情况下的群速：

(1) $v_p=K$(常数)，无色散介质，如空气中的声波；

(2) $v_p=K\sqrt{\lambda}$，重力在水面上所引起的波；

(3) $v_p=K/\sqrt{\lambda}$，水面上的表面张力波；

(4) $v_p=K/\lambda$，弹性薄片在弯曲时所产生的波.

6.9 已知冕牌玻璃对 $\lambda_0=398.8$ nm 的光折射率 $n=1.52546$，色散率 $dn/d\lambda_0=-1.26\times10^{-4}$/nm，求其相速和群速. λ_0 为真空中波长.

6.10 证明介质群速折射率 $n_g=c/v_g$ 与(相速)折射率 $n=c/v_p$ 两者关系如下：

$$n_g=n-\lambda_0\frac{dn}{d\lambda_0},$$

式中 λ_0 为真空中波长.

6.11 若入射白光中波长为 $\lambda_1=600$ nm 的橙黄光和 $\lambda_2=450$ nm 的蓝光强度相等，试求瑞利散射光中二者强度之比为多少?

6.12 太阳光束由小孔射入暗室，室内的人沿着与光束垂直及与之成 45°角的方向所测得的瑞利散射光强度之比等于多少?

6.13 一束光通过液体，用偏振片正对这束光观察. 当偏振片透振方向在竖直方向时，光强达最大值；当偏振片透振方向在水平方向时，光强为零. 再从侧面观察散射光，在偏振片分别置于上述两个方位时，光强之比为 20∶1. 试计算散射光的退偏振度. (提示：退偏振度 $\Delta=1-p$，p 为偏振度).

6.14 苯(C_6H_6)的拉曼散射中较强的谱线与入射光的波数差为 607，992，1178，1586，3047，3062 cm^{-1}. 今以氩离子激光($\lambda=488.0$ nm)入射，计算各斯托克斯和反斯托克斯谱线的波长.

观察思考及讨论题

6.1 在 3.5.1 节推导平行平板多光束干涉强度公式时，忽略了玻璃板对光的吸收. 若考虑到实际材料总有一定的吸收，并设吸收系数为 α，重新推导正入射时透射干涉强度的公式. 该式在入射角不太大时也近似适用.

6.2 观察散射现象

(1) 雨后的天空显得特别蓝，为什么？比较洁净和有灰尘污染的天空的颜色，说明其原因.

(2) 一支点燃的香烟头上冒出的缕缕轻烟一般呈淡蓝色，而从抽烟者口中吐出的烟则变成白色，为什么？

(3) 照相机镜头可配置一种偏振镜片，它可压低水面反光，也可使得蓝天中的白云显得更加鲜明. 说明其原因及在这两种情况下如何调整偏振片的方位.

(4) 让白光穿过一盛有奶或豆浆的水溶液的长玻璃器皿，观察其直透光和侧面的散射光.

(5) 设想宇航员在太空中所见“天空”是什么颜色？为什么？

6.3 有些光学器件中利用到介质的色散，色散也会对某些光学器件的功能带来不利影响. 分别举例说明.

6.4 如何理解群速度和相速度？二者是否能超过光速？若相速度超过光速是否违背物理规律？

第 7 章　光的量子性　激光

前面几章已经比较系统地介绍了光的波动性. 本章将介绍光的本性的另一侧面——粒子性. 首先从黑体辐射分析引入量子概念，然后介绍光的粒子性的实验基础以及光的波粒二象性，最后讨论激光等内容.

7.1　黑体辐射

7.1.1　两种不同形式的辐射

物体(辐射源)向外辐射能量的同时必将减少自身的能量. 为了维持辐射不断地进行，辐射源需要不断地从外界汲取能量. 根据对辐射源补充能量的方式，以及在辐射过程中辐射源原子或分子的内部运动状态是否发生变化，可将辐射分为两大类：发光和热辐射.

1. 发光

辐射源的原子或分子从外界吸收能量后，其内部运动能量可以发生改变，过渡到能量较高的激发状态，简称激发态；然后，激发态原子或分子的内部运动能量又转化为向外发射的辐射能. 这种与原子或分子内部运动状态发生变化相联系的辐射形式称为**发光**. 发光具有多种形式，简介如下：

(1) **电致发光**：电能直接转化为光能的发光过程称为电致发光. 过去取其在电场作用下发光之意，曾称为场致发光. 气体中的电致发光现象早为人们所熟悉，闪电、霓虹灯发出的光就是电流通过气体时的发光现象.

(2) **光致发光**：用光激发发光体所引起的发光现象称为光致发光. 它大致经过光吸收、能量转化及光发射三个主要阶段，光吸收及光发射都发生于能级之间的跃迁. 光致荧光、磷光均属光致发光，其区别在于后者被辐照之后，可以在一段时间内持续发光. 光致发光最普遍的应用为日光灯，它是灯管内气体放电产生紫外线激发管壁上的发光粉而发出可见光的，所以它是与电致发光的综合效应，其效率约为白炽灯的 5 倍. 此外，“黑光灯”及其他单色灯的光致发光广泛地用于印刷、复制、医疗、植物生长、诱虫及装饰等技术中.

(3) **化学发光**：由于化学反应而发光的过程称为化学发光. 如氧和乙炔反应发

出明亮的光，氨基苯二酰一肼与过氧化氢反应呈现出蓝绿色的光；此外，甲醛、乙醛、丙烯醛、葡萄糖和胆甾醇在乙醇碱溶液中被氧化，以及某些硫的化合物氧化反应后都能产生化学发光. 还有一种发生在生物体中的特殊的化学发光，称之为生物化学发光，例如萤火虫体内的荧光素在荧光素酶的作用下与空气发生氧化反应而发光.

(4) **阴极射线致发光**：即由电子束激发的发光. 最常见的阴极射线致发光是电视、雷达、示波器、计算机的荧光屏的发光. 这是重要的传统显示手段.

(5) **热致发光**：物体加热到一定温度也会发光，食盐在火焰中发出钠黄光就是一例.

2. 热辐射

物体由于其内部原子、分子具有热运动而以电磁波形式向外界辐射能量的过程称为**热辐射**，此过程中辐射源原子或分子的内部运动状态并不改变. 辐射源与周围物体之间存在**辐射场**，二者通过辐射场交换能量. 经典电磁理论认为，辐射场中存在着包含各种频率及向各方向传播的电磁波.

热辐射是辐射源与周围物体之间热量传递的一种方式. 在此过程中，辐射源既向外界辐射热量(此能量由其内部原子、分子的热运动能量转化而来)，又从周围物体吸收热量. 当物体温度高于环境温度时，辐射大于吸收；反之则辐射小于吸收. 当物体与周围环境达到热平衡时，物体辐射与吸收的热量相等，温度不发生变化，此时的热辐射称为**平衡热辐射**.

加热的方法既能产生热辐射，也能对某些物质引起热致发光，两者的区别有三个：第一，任何温度的辐射源，即使温度 T 极低，只要 $T>0\mathrm{K}$，不论其周围环境如何，都进行热辐射；而热致发光则必须达到一定温度以后才会产生. 第二，热辐射的辐射谱是连续谱，而热致发光的光谱主要是线状谱或带状谱. 第三，热辐射在固体、液体和气体之中均可发生，而热致发光则主要发生在稀薄气体中.

7.1.2 基尔霍夫热辐射定律

基尔霍夫定律是有关热辐射的基本定律之一，在热辐射的理论和应用中都占有重要地位. 为理解该定律，我们先介绍几个与辐射有关的物理量.

1. 与辐射有关的几个物理量

辐射场中单位体积内(各种频率)的总辐射能称为辐射场的**能量密度**，用 U 来表示，单位为 $\mathrm{J/m^3}$. 对非单色辐射，人们常关注能量密度随频率(或波长)的变化. 用 $u(\nu)$ 表示辐射场中单位体积内在频率 ν 附近单位频率间隔中的辐射能，它称为

辐射场**能量密度的谱密度**或**光谱能量密度**，单位为 $J \cdot m^{-3} \cdot Hz^{-1}$. 显然有

$$U = \int_0^\infty u(\nu) d\nu. \tag{7.1.1}$$

单位时间内通过辐射场中某一截面的辐射能，也即通过该截面的辐射功率，称为**辐射通量**，用 Φ 表示，单位为瓦(W)，其相应的谱密度 $\varphi(\nu)$ 称为**光谱辐射通量**，单位为 W/Hz.

辐射源单位表面积所发出的辐射通量称为辐射源的**辐射出射度**(简称**辐出度**)，用 R 表示，单位为 W/m^2，类似可定义其谱密度，即**光谱辐出度** $r(\nu)$.

照射到辐射场中一物体单位表面积上的辐射通量称为该处的**辐照度**，用 E 表示，单位为 W/m^2. 其相应的谱密度记作 $e(\nu)$，称为**光谱辐照度**.

显然，Φ 与 $\varphi(\nu)$，R 与 $r(\nu)$ 以及 E 与 $e(\nu)$ 均满足与(7.1.1)式类似的积分关系，即某一物理量是其相应谱密度在整个辐射频带的积分.

辐射场中一物体所吸收的辐射通量与照射到该物体上的辐射通量之比称为该物体的**吸收率**，记为 A，它是一个无量纲的数. 相应的**光谱吸收率**记为 $a(\nu)$，显然，A 与 $a(\nu)$ 均在区间[0,1].

2. 基尔霍夫热辐射定律

为了研究物体的辐出度和吸收率之间的关系，基尔霍夫于 1859 年曾设计了一个理想实验，如图 7.1.1 所示. 图中绝热腔中放置多个不同材料的物体，当整个系统达到热平衡后，腔内温度 T 到处均匀，且不随时间而变化. 这时在单位时间内从每一物体单位表面积所发出的辐射能应等于该面积所接收的辐射能. 若用光谱量即与单位频率间隔相应的物理量表示，此平衡关系即

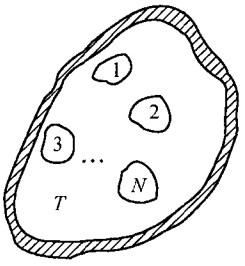


图 7.1.1 基尔霍夫定律的推导

$$r_1(\nu, T) = a_1(\nu, T) e_1(\nu, T),$$
$$r_2(\nu, T) = a_2(\nu, T) e_2(\nu, T),$$
$$\cdots\cdots$$

其中 $e_1(\nu, T)$，$e_2(\nu, T)$，…为各物体所受的光谱辐照度. 容易想到，在平衡态下，腔内辐射场应是均匀、稳定且各向同性的，即

$$e_1(\nu, T) = e_2(\nu, T) = \cdots = e(\nu, T),$$

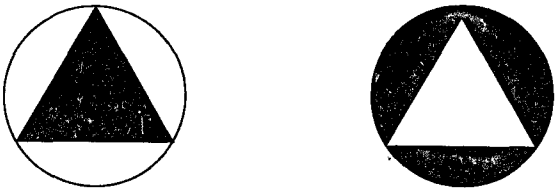
故有

$$\frac{r_1(\nu, T)}{a_1(\nu, T)} = \frac{r_2(\nu, T)}{a_2(\nu, T)} = \cdots = e(\nu, T), \tag{7.1.2}$$

其中 $e(\nu, T)$ 即平衡热辐射时辐射场中的光谱辐照度，它在数值上等于辐射场中的物体单位表面积在单位时间中所接收的在频率 ν 附近单位频率间隔中的辐射能量.

上式表明，处于平衡热辐射中的任何物体，它的光谱辐出度与光谱吸收率之比是一个频率与温度的普适函数，与物体的性质无关. 此结论称为**基尔霍夫热辐射定律**. 不难看出，此结论对于某一频率范围的总辐射亦是适用的，这时物体总的辐出度 $R(T)$ 与吸收率 $A(T)$ 之比是 T 的普适函数，与物体的性质无关.

既然 $e(\nu,T)$ 是一个普适函数，则上式表明，如果一个物体的吸收率大，其辐出度也大；如果物体对某波长的吸收较强，则对该波长辐射也较强. 这一点是不难用实验来验证的. 把一个在室温条件下显示白底和黑三角的瓷盘，加热到较高的温度（$T>1000$ K），可以看到原来白底处变暗了，而原来黑三角处变亮了，如图 7.1.2 所示. 这是由于白底处吸收率小，反射率高；黑三角处吸收率大，反射率低. 在常温下，$e(\nu,T)$ 较小，在可见光波段光谱辐出度很低，我们看到的主要是反射光，这时白底较亮. 在高温下，$e(\nu,T)$ 明显增大，且其光谱分布中可见光的成分逐渐加大，这时辐射占主导地位；而黑三角处因吸收率大，其辐出度也大，所以显得比白底更亮.



(a) 常温　　(b) 高温

图 7.1.2　瓷盘实验对基尔霍夫定律的定性验证

7.1.3　黑体辐射的实验规律

1. 绝对黑体

如果一个物体在任何温度下都能将照射于其上的任何频率的辐射能全部吸收，即其光谱吸收率

$$a_0(\nu,T)\equiv 1, \tag{7.1.3}$$

则该物体称为**绝对黑体**，简称**黑体**. 从绝对黑体我们可又一次看到反射和辐射的本质区别. 绝对黑体不反射能量，但可以辐射能量，而且由(7.1.2)式可知，在同样的 ν,T 条件下，它的辐出度最大.

由(7.1.2)式亦可看出，基尔霍夫定律中的普适函数就是黑体的光谱辐出度，即

$$e(\nu,T)=r_0(\nu,T). \tag{7.1.4}$$

因此对普适函数 $e(\nu,T)$ 的研究，可以转化成对黑体的实验研究和理论探讨.

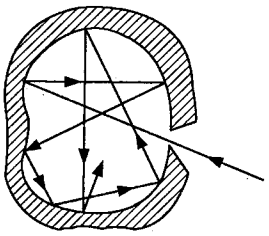


图 7.1.3　绝热等温空腔的吸收

绝对黑体显然是一种理想模型，它的一个良好近似是开有一个小孔的绝热等温空腔，如图 7.1.3 所示. 当光线从小孔射进空腔后，经腔壁多次反射和吸收，出射光能近似等于零. 由于任何材料都有一定的吸收，故用任何材料做的空腔，其小孔处都相当于一个黑体.

2. 黑体辐射谱的测定及实验规律

黑体的光谱辐出度 $r_0(\nu,T)$ 随 ν 而变化的曲线称为**黑体辐射谱**. 在光谱学中习惯于用真空中波长 λ 而不是用频率 ν，这时所测量的黑体辐射谱为 $r_0(\lambda,T)$ 随 λ 而变化的曲线，其中 $r_0(\lambda,T)$ 表示温度为 T 的黑体在波长 λ 附近单位波长间隔中的辐出度.

利用图 7.1.4 所示的装置可以测出黑体辐射谱. 图中空腔辐射器 A 是用耐火材料做成的，可用电炉加热到所需温度. 由小孔发出的辐射经分光仪(光栅)后按波长分开，再利用涂黑的热电偶 C 探测不同波长处的辐射强度并记录下来. 图 7.1.5

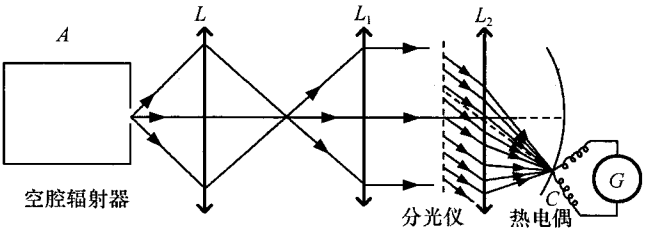


图 7.1.4　黑体辐射谱的实验测定

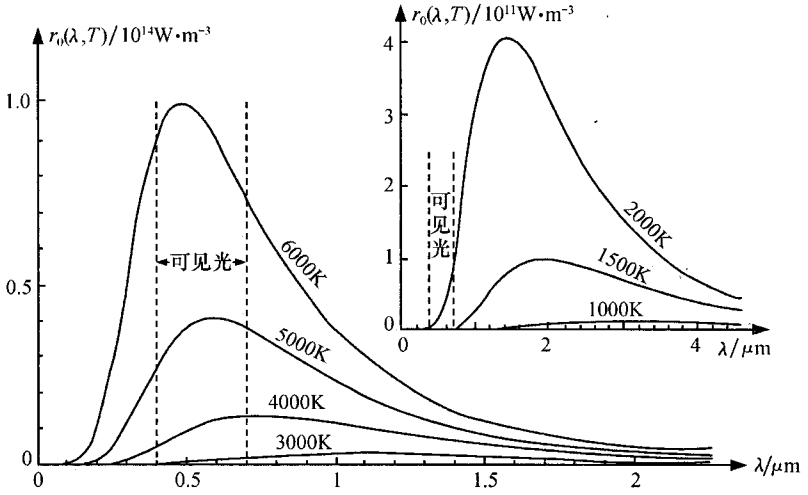


图 7.1.5　黑体辐射谱

是在几种温度下实测的黑体辐射谱. 对实验曲线进行综合分析，可以看到黑体辐射谱有如下几个规律：

1) 曲线的整体形状及其与温度的关系

$r_0(\lambda, T)$ 在整体上呈中间凸起的曲线形，在短波极限($\lambda \to 0$)及长波极限($\lambda \to \infty$)均趋于零. 温度升高时曲线 $r_0(\lambda, T)$ 整体上升，而且极大值所对应的波长向短波方向移动.

2) 斯特藩-玻尔兹曼定律

曲线 $r_0(\lambda, T)$ 下的总面积代表温度为 T 的黑体在所有波段的总辐出度，将它记为 R_T，即

$$R_T = \int_0^\infty r_0(\lambda, T)\mathrm{d}\lambda.$$

实验发现，R_T 与绝对温度 T 的四次方式正比，即

$$R_T = \sigma T^4, \tag{7.1.5}$$

其中比例常数 $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$. 由于该定律首先由斯特藩(J. Stefan)于 1879 年从实验得到，玻尔兹曼(L. Boltzmann)于 1884 年根据热力学理论导出，故(7.1.5)式称为**斯特藩-玻尔兹曼定律**，而常量 σ 称为**斯特藩-玻尔兹曼常量**.

3) 维恩位移定律

曲线 $r_0(\lambda, T)$ 在任何温度下都有一极大值，其对应的波长称为**峰值波长**，将它记为 λ_M. 实验发现，λ_M 与绝对温度 T 的乘积为一与 T 无关的常数，即

$$\lambda_M T = b, \tag{7.1.6}$$

其中常数 $b = 2.898 \times 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}$. 由于该定律首先由维恩(W. Wien)1893 年根据热力学研究黑体辐射理论时所导出，故(7.1.6)式称为**维恩移位定律**，b 称为**维恩常量**. 表 7.1.1 给出不同温度下的峰值波长值. 由该表及图 7.1.5 可以看出：当 $T < 4000$ K 时，λ_M 均在红外波段；在室温下，直到 $T < 3000$ K 时，绝大部分辐射能集中于红外区.

表 7.1.1 黑体在不同温度下的 λ_M 值

T/K	500	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000
λ_M/μm	5.796	2.898	1.449	0.966	0.724	0.580	0.483	0.414	0.362

例 7.1.1 设太阳和地球均可以看做绝对黑体，地球吸收阳光的辐射能并以热辐射形式释放出能量，从而达到热平衡. 已知太阳对地球的视角约为 0.01 rad，试估算太阳表面温度.

解 设日、地半径分别为 r_1, r_2，温度分别为 T_1, T_2，日地距离为 D.

由斯特藩-玻尔兹曼定律，太阳和地球每秒钟辐射的总能量分别为

$$E_1 = 4\pi r_1^2 \sigma T_1^4, \qquad E_2 = 4\pi r_2^2 \sigma T_2^4.$$

由几何关系，知地球每秒钟从太阳所吸收的辐射能量为

$$\Phi = E_1 \frac{\pi r_2^2}{4\pi D^2}.$$

热平衡时，应有 $\Phi = E_2$，由此得到

$$T_1 = T_2 \sqrt{\frac{2D}{r_1}}.$$

由题意 $2r_1/D = 0.01$，即 $D = 200r_1$，代入上式得

$$T_1 = 20T_2.$$

近似地取地表温度 $T_2 = 300$ K，则得太阳表面温度 T_1 约为 6000 K.

7.1.4　黑体辐射的经典理论及其与实验的矛盾

为了从理论上解释黑体辐射谱 $r_0(\lambda, T)-\lambda$ 实验曲线，历史上曾有许多物理学家作过分析和探讨，以下仅介绍两个公式.

1. 维恩公式

1896 年维恩对辐射机制作出假设：黑体辐射是许多可视为谐振子的分子辐射的总和，频率为 ν 的辐射只与速率为 v 的分子有关，频率 ν 正比于分子的动能，即

$$\frac{1}{2}mv^2 = \alpha\nu,$$

式中 α 是比例系数. 因此 $r_0(\nu, T)$ 按频率的分布应和分子能量按麦克斯韦速率分布形式相似，即有

$$r_0(\nu, T) = \frac{a_1\nu^3}{c^2}\exp(-a_2\nu/T), \tag{7.1.7}$$

或

$$r_0(\lambda, T) = \frac{a_1c^2}{\lambda^5}\exp(-a_2c/\lambda T), \tag{7.1.7}'$$

式中 a_1, a_2 为两个常数，c 为真空中光速. 以上两式称为黑体辐射的**维恩公式**. 现在看来，维恩假设并没有严格的物理根据，而且维恩公式只是在短波区与实验曲线符合甚好，在长波区则偏离实验曲线较大(图 7.1.6).

2. 瑞利-金斯公式

瑞利(1900 年)和金斯(J. Jeans)(1905 年)采用另外一种模型研究黑体辐射①.

① 为概念清晰及推导简便，本段瑞利-金斯公式的推导及下节普朗克公式的推导过程并未完全沿用历史上首次使用的方法，而突出了其中包含的物理思想.

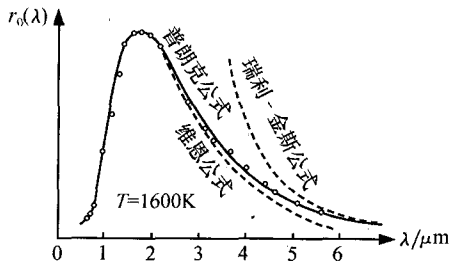


图 7.1.6 各黑体辐射公式与黑体辐射谱的比较

如果辐射和腔壁处于热平衡，可以把空腔的辐射场视为稳定的电磁驻波场，即是一个有不同频率和不同传播方向的驻波系统. 在腔壁上，电场形成驻波波节，磁场则形成驻波波腹. 每一个驻波代表一种可能的振动方式，称为电磁驻波场的一个**本征模式**或**模**. 假定热平衡时，每一模式都按照经典的能量均分定律分配到 kT 的平均能量(k 是玻尔兹曼常量). 这和经典谐振子的平均能量为 kT 的考虑相类似，在那里，它是由 $kT/2$ 的平均动能和 $kT/2$ 的平均势能相加得到的；在驻波电磁场的情形下，平均能量 kT 则可以看成是电场和磁场的平均能量各为 $kT/2$ 相加而得到. 在这种意义上热平衡辐射场可看做大量谐振子所组成的体系. 但这里所谓谐振子并非一定是具体的真实物体，例如分子、原子等；它亦可是一种抽象的模型，只要其遵从的物理规律与现实物体等同.

由上述驻波模型，可以算出(见后文)腔内辐射场单位体积在频率 ν 附近单位频率间隔内的本征模数 g_ν 为

$$g_\nu = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2. \tag{7.1.8}$$

因此，若记热平衡时腔中辐射场的光谱能量密度为 u_T，则有

$$u_T = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 kT. \tag{7.1.9}$$

由辐射度学的计算(见后文)可得到下述关系

$$r_0(\nu, T) = \frac{c}{4}u_T. \tag{7.1.10}$$

将(7.1.9)式代入(7.1.10)式，则可得到黑体辐射的光谱辐出度

$$r_0(\nu, T) = \frac{2\pi}{c^2}\nu^2 kT. \tag{7.1.11}$$

利用 $\nu=\frac{c}{\lambda}$ 和 $\mathrm{d}\nu=-\frac{c}{\lambda^2}\mathrm{d}\lambda$ 两关系式，并考虑到在数值上应有

$$r_0(\nu, T)\mathrm{d}\nu = r_0(\lambda, T)\mathrm{d}\lambda,$$

可以把 $r_0(\nu, T)$ 换算成 $r_0(\lambda, T)$，即有

$$r_0(\lambda,T)=\frac{2\pi c}{\lambda^4}kT. \qquad (7.1.11)'$$

(7.1.11)式和(7.1.11)′式称为黑体辐射的**瑞利-金斯公式.**

瑞利-金斯公式与黑体辐射谱的长波区实验曲线吻合甚好,但是,该公式有一令人困惑不解的结果. 当 $\lambda\to 0$ 时,$r_0(\lambda,T)\to\infty$(图 7.1.6),亦即波长极短(光谱的紫外部分)的辐射能量趋于无限大,显然这是不合理的. 历史上有人把这种矛盾称为"紫外灾难". 与维恩公式不同,瑞利-金斯公式的导出有着严格的经典物理学(经典电磁学和经典统计力学)依据,故该公式与实验的矛盾说明经典物理学无法解释黑体辐射问题,从而预示着物理学面临着一场革命性的变革.

* 以下给出(7.1.8)式及(7.1.10)式的推导.

1) (7.1.8)式的推导

取边长为 1 个单位的正立方体封闭空腔,由驻波条件,可知在 x,y,z 方向所形成的驻波波长值应满足(参见图 7.1.7)

$$\lambda_{x,y,z}=2\times 1,\quad 2\times\frac{1}{2},\quad 2\times\frac{1}{3},\quad 2\times\frac{1}{4},\quad \cdots$$

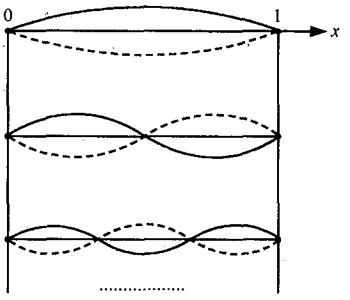


图 7.1.7 一维驻波的可能模式

相应频率数值为

$$\nu_{x,y,z}=\frac{c}{\lambda_{x,y,z}}=\frac{1}{2}c,\quad \frac{2}{2}c,\quad \frac{3}{2}c,\quad \frac{4}{2}c,\quad \cdots$$

式中 c 为真空中光速. 另一方面,由(2.2.13)式可知

$$\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda_x^2}+\frac{1}{\lambda_y^2}+\frac{1}{\lambda_z^2},$$

两边同乘以 c^2,即得

$$\nu^2=\nu_x^2+\nu_y^2+\nu_z^2.$$

这样,可以以 ν_x,ν_y,ν_z 为轴组成正交坐标系(ν 空间),每一组可能的(ν_x,ν_y,ν_z)数值也即每一种可能的振动态,可用该空间中的一个点表示(图 7.1.8,图中只画出了 $\nu_x\nu_y$ 平面上的点).

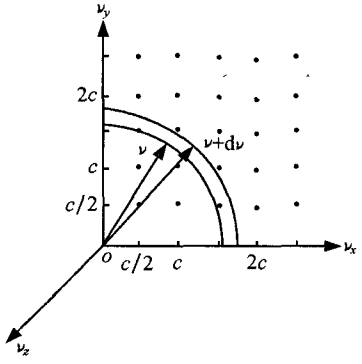


图 7.1.8 ν 空间中振动模式的分布

为求出 ν 到 $\nu+d\nu$ 区间的状态数,可在 ν 空间中第一卦限作半径从 ν 到 $\nu+d\nu$ 的球壳层,其体积为 $4\pi\nu^2 d\nu/8$. 因每一状态点在 ν 空间所占据的体积为 $c^3/8$,该球壳层所包含的点子数即状态数为 $4\pi\nu^2 d\nu/c^3$.

考虑到光是横波,每一确定的传播方向尚可有两种互相独立的本征振动(两个正交的偏振态),故上式乘 2 再除以 $d\nu$ 即得到频率 ν 附近单位频率间隔中振动模式数目的表达式(7.1.8).

以上推导虽然是对单位边长正方体腔的特例作出的,但其结论是带有普遍性的.

2) (7.1.10)式的推导

考虑一个空腔上单位面积的小孔,其法线方向为 z(图 7.1.9). 在辐射场中辐射能以光速

c 向各个方向传播，而整个空间有 4π 立体角，故在单位时间中穿过单位垂直截面向单位立体角传播的单位频率间隔中的能量数值为 $u_T(\nu)c/4\pi$，而小孔向与 z 轴成 θ 角的方向单位立体角中传播的能量则为 $u_T c\cos\theta/4\pi$. 取球坐标(r,θ,φ)对小孔右半空间 2π 立体角的区域积分(θ 从 0 到 $\pi/2$，φ 从 0 到 2π)，并利用 $\mathrm{d}\Omega=\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$，可得到

$$r_0(\nu,T)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{u_T c}{4\pi}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\frac{c}{4}u_T.$$

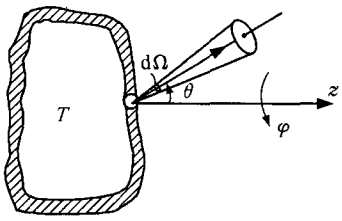


图 7.1.9 单位面积小孔的辐射

7.1.5 能量子假设与普朗克公式

1. 普朗克的能量子假设

1900 年普朗克对当时已有的经典物理学黑体辐射公式，特别是瑞利-金斯公式进行了分析，发现它们与实验不符的根本原因在于坚持了“谐振子能量连续变化”这一经典概念. 由此，他大胆提出了一个新的假设：频率为 ν 的谐振子的能量取值 ε 只能是基本单元 $\varepsilon_0=h\nu$ 的整数倍，即

$$\varepsilon=n\varepsilon_0=nh\nu.\quad(n=0,1,2,\cdots)\tag{7.1.12}$$

因此谐振子发射与吸收光能时也只能采取一份一份的形式，每份能量为 ε_0. 这里常数 $h=6.626\times10^{-34}\mathrm{J\cdot s}$ 称为**普朗克常量**，ε_0 称为**能量子**，以上假设也被称为**普朗克能量子假设**.

2. 普朗克公式

在瑞利-金斯公式的推导过程中，曾取谐振子的平均能量 $\bar{\varepsilon}=kT$，它是经典物理学中能量连续分布的必然结果. 因为依据玻尔兹曼分布律，在热平衡态下，振子具有能量 ε 的概率正比于 $\exp(-\varepsilon/kT)$. 若设 ε 从 0 到∞连续分布，则有

$$\bar{\varepsilon}=\frac{\int_0^{\infty}\varepsilon\exp(-\varepsilon/kT)\mathrm{d}\varepsilon}{\int_0^{\infty}\exp(-\varepsilon/kT)\mathrm{d}\varepsilon}=kT.\tag{7.1.13}$$

而根据普朗克能量子假设，振子能量只能取(7.1.12)式中的离散值，故(7.1.13)式应改为

$$\bar{\varepsilon}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}n\varepsilon_0\exp(-n\varepsilon_0/kT)}{\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-n\varepsilon_0/kT)}.\tag{7.1.14}$$

令 $\beta=1/kT$,并利用

$$\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-n\varepsilon_0\beta)=\frac{1}{1-\exp(-\varepsilon_0\beta)},$$

可求得

$$\bar{\varepsilon}=-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-n\varepsilon_0\beta)\Big]=\frac{\partial}{\partial\beta}\ln[1-\exp(-\varepsilon_0\beta)],$$

即

$$\bar{\varepsilon}=\frac{\varepsilon_0}{\exp(\varepsilon_0\beta)-1}=\frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT)-1}. \tag{7.1.15}$$

以上式代替瑞利-金斯公式推导过程中(7.1.11)和(7.1.11)′式中之 kT,可得到

$$r_0(\nu,T)=\frac{2\pi h}{c^2}\frac{\nu^3}{\exp(h\nu/kT)-1} \tag{7.1.16}$$

和

$$r_0(\lambda,T)=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp(hc/k\lambda T)-1}. \tag{7.1.16}'$$

以上两式称为黑体辐射的**普朗克公式**.

普朗克公式在全部波段中与实验曲线完全吻合(图 7.1.6),而且在经典理论所导出公式的有效范围内,这些公式以及黑体辐射的其他实验定律都可作为普朗克公式的推论而得到. 以下分别说明之.

1) 短波近似可以得到维恩公式

若 $h\nu\gg kT$,$\exp(h\nu/kT)\gg1$,(7.1.16)式化为维恩公式(7.1.7).

2) 长波近似可以得到瑞利-金斯公式

若 $h\nu\ll kT$,$\exp(h\nu/kT)\ll1$,将 $\exp(h\nu/kT)$ 展开并略去高次项得 $\exp(h\nu/kT)\approx1+h\nu/kT$,(7.1.16)式化为瑞利-金斯公式(7.1.11).

3) 求曲线下总面积可以得到斯特藩-玻尔兹曼定律

将(7.1.16)式对 ν 积分,并令 $x=h\nu/kT$,可得到

$$R_T=\int_0^{\infty}r_0(\nu,T)\mathrm{d}\nu=\frac{2\pi h}{c^2}\Big(\frac{kT}{h}\Big)^4\int_0^{\infty}\frac{x^3}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x,$$

上式中定积分之值为 $\pi^4/15$,故有

$$R_T=\frac{2\pi^5k^4}{15c^2h^3}T^4.$$

将上式与(7.1.5)式相比较,可知

$$\sigma=\frac{2\pi^5k^4}{15c^2h^3}. \tag{7.1.17}$$

4) 求峰值波长可以得到维恩位移定律

将 $x=hc/k\lambda T$ 代入(7.1.16)′式,得

$$r_0(\lambda,T)=2\pi hc^2\left(\frac{kTx}{hc}\right)^5\frac{1}{e^x-1}.$$

极值条件$\frac{\partial}{\partial\lambda}r_0(\lambda,T)=0$等价于上式右端之函数对$x$的导数为0,即

$$\frac{5x^4(e^x-1)-x^5e^x}{(e^x-1)^2}=0.$$

由上式得到

$$5-x=5e^{-x}$$

这是一个超越方程.作直线$y_1=5-x$和曲线$y_2=5e^{-x}$,它们的交点$x_M=4.9651$,即$hc/(k\lambda_MT)=4.9651$,故有

$$\lambda_MT=\frac{1}{4.9651}\frac{hc}{k}.$$

将上式与(7.1.6)式相比较,可知

$$b=\frac{1}{4.9651}\frac{hc}{k}. \tag{7.1.18}$$

这样,普朗克公式不仅包容了当时已知的关于黑体辐射的所有实验规律,而且从理论上导出了常量σ和b的表达式.将k、c、h各常数代入(7.1.17)式和(7.1.18)式所得到的σ及b值与前文实验结果完全相符.

回顾瑞利-金斯公式和普朗克公式的推导过程,可以看出前者导致"紫外灾难"的原因.有限体积的辐射场中有无限多个振动模式,即相当于有无限多个自由度,若每个模式的平均能量$\bar{\varepsilon}=kT$,则场中所有自由度的总辐射能必然趋于无限大,引入普朗克能量子假设后,$\bar{\varepsilon}$与ν有关,且当$\nu\to\infty$时$\bar{\varepsilon}\to0$,这就消除了短波极限辐射能发散的矛盾.

能量子假设的提出及其对黑体辐射的成功解释是一个重大的突破,能量不连续的概念第一次进入了物理学,它标志着近代物理学的开端.另一方面,不难发现,在普朗克公式的推导过程中仍然利用了经典的玻尔兹曼分布律,以后玻色(S. Bose)和爱因斯坦应用量子统计十分简明地导出了普朗克公式,才完全消除了残留的那些经典痕迹①.

*7.1.6 光测高温法

利用黑体辐射定律测定温度较高的物体温度的方法称为**光测高温法**.对2000 K以上的高温测量此法几乎是惟一的方法.

---

① 依量子力学,谐振子的最小能量并非零,而是$h\nu/2$,但其相邻能级能量之差仍为$h\nu$,这对后文的光子能量并无影响.

1) 色温法

对于黑体，只要测得其辐射谱，定出峰值波长 λ_M，便可利用维恩位移定律，由 $T=2898/\lambda_M$（λ 的单位为 μm，T 的单位为 K）求出黑体的温度.

对于非黑体，不能直接利用维恩位移定律. 但是，如果被测物体（非黑体）的光谱辐出度曲线与某一温度为 T_c 的黑体辐射谱曲线相似，就可认为它们的峰值波长相同，该物体发出的光的颜色与温度为 T_c 的黑体发出的光的颜色相近，故温度 T_c 称为被测物体的**色温度**. T_c 最接近物体的实际温度.

2) 亮温法

亮温法采用的仪器是消（隐）丝高温计，如图 7.1.10 所示，它类似一个望远镜，标准温度灯 L 的特制灯丝 W 与待测光源 S 经物镜 O 所成的像共面，目镜 E 与 L 之间置一滤光片 F 以滤出所需波长间隔. 调节电阻 R 以改变灯丝亮度，当它与待测光源 S 的像的亮度相等时，灯丝便在光源像上消失. 取黑体作标准光源，测定其在不同温度（亮度）下灯丝消失时的电流强度，并将电流表 G 按此温度刻度. 显然，对于黑体，消丝高温计测出的温度即是黑体的实际温度. 对于非黑体，G 上读出的是在所选波长下与待测物体亮度相同的黑体温度 T_b，称为待测物体的**亮温度**. 通常 T_b 低于物体的实际温度. 当我们说某一非黑体在 $\lambda=650$ nm 处具有 2000 K 的亮温度时，即是指它在这个波长附近具有与 2000 K 的黑体相同的亮度.

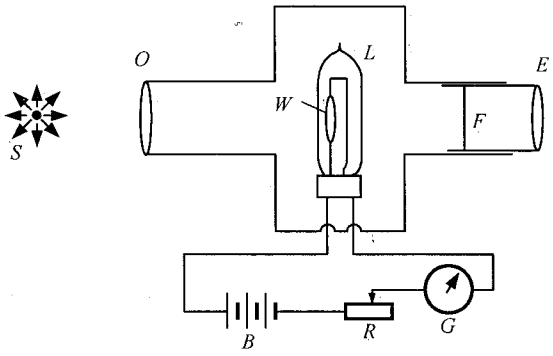


图 7.1.10 消（隐）丝高温计

3) 辐射温度法

对于黑体，只要测得其辐射谱，并求出其总辐出度 R_T，便可利用斯特藩-玻尔兹曼定律，由 $T=\sqrt[4]{R_T/\sigma}$ 求得黑体的温度.

对于非黑体，不能直接利用斯特藩-玻尔兹曼定律. 利用预先已知温度的黑体将辐射高温计（参见图 7.1.4）校好刻度，即可用它来测量非黑体的温度，不过这样测得的温度不是实际温度，而是**辐射温度** T_r，它相当于总辐出度等于被测物体的总辐出度的黑体温度.

7.2 光的粒子性及其实验基础

普朗克假说的精髓是能量的不连续性，或称能量的量子化. 不过，在普朗克本

人最初提出这一假说时是相当谨慎的，他只假定与辐射场处于热平衡的线性振子在发射和吸收能量时取一系列离散值. 进一步的研究则说明，辐射场本身也是量子化的. 普朗克假说中的能量基本单元 $h\nu$ 不仅仅是一种数学模型，而且具有实在的物质载体——光子，由此产生了现代的光的粒子说. 本节介绍几种可以用光的粒子说加以成功解释的实验现象.

7.2.1 光电效应

物体在光照下其电性质发生变化的现象称为**光电现象**，它包括光电效应、康普顿效应、光电离现象、光电导现象和光生伏打效应等，其中**光电效应**是指金属及其化合物在光照下发射电子的现象.

1. 光电效应的实验装置和实验规律

观察光电效应的实验装置如图 7.2.1 所示，在一个抽成高度真空的石英管内，装有金属阴极 K 和阳极 A. 在适当光照条件下，金属板 K 可以释放电子(在光电效应中人们常称为**光电子**)，逸出的光电子受到电场的加速时向阳极 A 运动并在回路中形成**光电流**，其大小由电流计 G 指示. 电路中的转向开关 T 既可以使光电子受到电场的加速，也可以使光电子受到电场的减速，视需要而定.

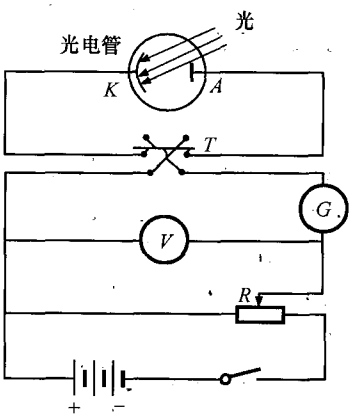


图 7.2.1 光电效应的实验装置

光电效应的实验规律可以归纳为以下四点：

1) 红限的存在

对于每一种金属，只有当入射光频率等于或大于一定值 ν_0，或波长等于或小于一定值 λ_0 时，光电效应才可发生. 频率 ν_0 或波长 λ_0 是光电阴极金属的属性，称为光电效应的**红限**. 表 7.2.1 中列出几种金属的红限. 有时，人们也称 ν_0 为频率的红限，λ_0 为波长的红限，两者关系为 $\nu_0\lambda_0=c$(c 为真空中光速).

表 7.2.1 几种金属的红限

金 属	钾	钠	镁	镉	铅	汞	银	镍	铂
λ_0/nm	554	544	337	305	300	273	262	248	196
$\nu_0/10^{14}$Hz	5.42	5.51	8.90	9.84	10.0	11.0	11.4	12.1	15.4

注：不同文献中数据不尽相同，这里主要依据饭田修一. 物理学常用数表. 第二版. 曲长芝译. 北京：科学出版社，1987. 同时取多数文献较一致者.

2）饱和电流与入射光强度成正比

光电效应中的伏安特性曲线如图 7.2.2 所示. 在给定频率和一定强度的光的照射下，光电流 I 随加速电压 V 的增大而增大，当 V 达到一定值时，光电流达最大值 I_M，称为**饱和电流**. 实验曲线表明，饱和电流 I_M 与入射光强度成正比，它意味着在单位时间内从阴极被击出的光电子数目与入射光强度成正比. 图 7.2.2 中曲线 b 比曲线 a 对应的入射光强度大些.

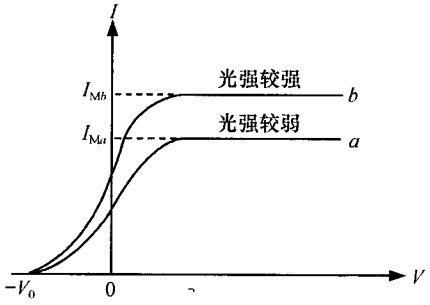


图 7.2.2　光电效应中的伏安特性曲线

3）遏止电压与入射光强度无关，随入射光频率增高而线性增大

减小加速电压 V 的值，光电流 I 随之减小；当 $V=0$ 时，光电流并不为零，直到反向电压增大到某个数值 V_0 时，光电流才为零（见图 7.2.2），这个反向电压 V_0 值称为**遏止电压**. 这一实验过程表明：从阴极发射的光电子的初速度或初动能有一定的分布，光电子的最大初动能与遏止电压有如下关系

$$\frac{1}{2}mv_M^2 = eV_0, \tag{7.2.1}$$

其中 m 是电子的质量，$e>0$ 是电子电荷的绝对值，v_M 为光电子的最大初速度.

从图 7.2.2 不难看出，在相同频率、不同强度的光照射下，遏止电压 V_0 是相同的，从而表明遏止电压与入射光强度无关.

当改变入射光频率 ν 时，遏止电压 V_0 随之改变. 实验表明，V_0 与 ν 成线性关系（图 7.2.3），入射光频率愈高，遏止电压愈大，这表明光电子的最大初动能亦愈大.

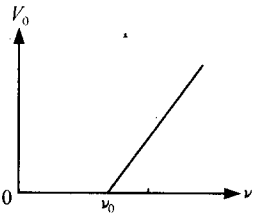


图 7.2.3　遏止电压与频率的关系

4）无延迟时间

若事件 A 与事件 B 有因果关系，则两件事相继发生的时间间隔可称为**延迟时间**. 在光电效应中，只要 $\nu \geqslant \nu_0$，无论光照如何微弱，光电子几乎是即时产生的，其延迟时间即使存在，也是极短以至于无法探测的.

2. 经典电磁理论与光电效应实验规律的矛盾

在经典电磁理论中，光是能量连续分布的电磁波，金属中的电子在电磁波的交变电场作用下作受迫振动，它在单位时间内所吸收的能量与光强成正比. 当电

子从持续而来的波面中吸收的能量超过其脱离金属所需能量时，电子即从金属中逸出.

以上理论与光电效应的实验规律有着尖锐的矛盾. 依照经典理论，首先，不论光频率如何，只要光强足够大，电子总能在一段时间内吸收足够的能量而逸出，从而无法解释频率红限的存在. 其次，电子从波场中吸收能量是一个连续累积过程，由此计算出的延迟时间远大于可以探测的时间(习题 7.8). 最后，光强越大，电子吸收的能量越多，其逸出时的最大初动能也就越大，故 V_0 应与光强成正比而与频率无关. 这些均与实验事实不符.

3. 爱因斯坦的光量子假设和光电效应方程

1905 年，爱因斯坦将普朗克于 1900 年提出的量子概念推广到光在空间中的传播. 他假设，频率为 ν 的光束是由称为**光量子**(现称**光子**)的粒子所组成，每一光子的能量 $E=h\nu$，它仍保持着频率(及波长)的概念. 利用这一假设，爱因斯坦成功地解释了光电效应的实验规律.

光电效应可看做电子对光子的吸收过程. 频率为 ν 即能量为 $h\nu$ 的光子打在金属上，金属中的电子要么完全吸收一个光子($\nu\geqslant\nu_0$)，获得能量 $h\nu$；要么完全不吸收. 在电子吸收光子的过程中应满足能量守恒关系.

记电子从金属内部某一位置运动到表面需要克服内部引力所做的功为 Φ，从金属表面逸出需作功 Φ_0，Φ_0 称为金属的**脱出功**或**功函数**. 由于电子的平均热运动动能远小于 Φ_0[①]，不妨把电子的初态看做是静止的. 这时对内层电子而言其能量守恒关系为(参见图 7.2.4)

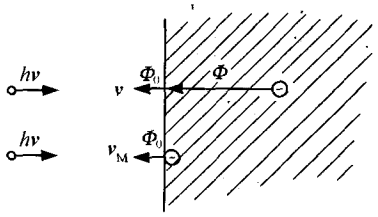


图 7.2.4 内层及表层电子对光子的吸收及逸出过程

$$h\nu=\frac{1}{2}mv^2+\Phi+\Phi_0, \qquad (7.2.2)$$

式中 v 为电子逸出金属时的速度. 不同深度的电子运动到表层需作的功 Φ 不同，故在同样的入射光频率下逸出电子的初速度 v 有一定分布.

对表层电子，$\Phi=0$，电子所吸收的光子能量只需克服脱出功 Φ_0，其余部分转化为光电子的初动能. 由上式不难看出对给定 ν 值 v 达到最大，记为 v_M，则有

$$h\nu=\frac{1}{2}mv_M^2+\Phi_0, \qquad (7.2.3)$$

上式称为描述光电效应的**爱因斯坦方程**.

---

① Φ_0 的数量级为电子伏，电子平均热运动动能的数量级为 10^{-2} 电子伏.

根据爱因斯坦的光量子假设以及光电效应方程，可以圆满地解释光电效应的实验规律，并从理论上得出某些实验值的表达式.

1) 红限

只有光子能量 $h\nu \geqslant \Phi_0$，光电效应才能发生. 由(7.2.3)式可得频率的红限为

$$\nu_0 = \frac{\Phi_0}{h}. \tag{7.2.4}$$

2) 饱和电流

入射光强度愈大，单位时间内射向金属表面的光子数愈多，金属发射的光电子数亦愈多，所以饱和电流与入射光强度成正比.

3) 遏止电压

由(7.2.1)式和(7.2.3)式不难得到

$$h\nu = eV_0 + \Phi_0,$$

故遏止电压

$$V_0 = \frac{h\nu - \Phi_0}{e}. \tag{7.2.5}$$

它与入射光强度无关，与频率成线性关系.

4) 延迟时间

光子与电子的作用过程是瞬时完成的，只要入射光频率大于红限，电子即可一次全部吸收光子能量，无需能量的长时间积累，故光电效应无需延迟时间.

4. 密立根实验

(7.2.5)式说明，V_0 与 ν 成线性关系，其系数 h/e 与材料无关. 密立根(R. A. Millikan)花费了将近十年的功夫，对铯、铍、钛、镍等金属测定 V_0-ν 曲线，证实了这一规律.

显然，由(7.2.5)式，V_0-ν 曲线的斜率及其在纵轴上的截距应分别等于 h/e 和 $-\Phi_0/e$. 由实验测得的斜率和截距，根据电子电量 e，可分别求得普朗克常量 h 和功函数 Φ_0. 对不同金属用此方法测出的 h 值相同，且与黑体辐射方法确定的 h 值相同；此方法所确定的 Φ_0 亦与用其他方法的测定值一致. 因此，密立根实验完全证实了爱因斯坦方程的正确性.

7.2.2 康普顿效应

X 射线被物质散射后，散射光中除有原入射光波长成分外，还有波长变长的成分，这种现象称为**康普顿**(A. H. Compton，1923)**效应**或**康普顿散射**.

1. 实验装置

如图 7.2.5 所示，A 是一个加有 5 万伏高压的 X 射线管，它的阴极由钼制成（钼靶），发射 K_α 辐射（X 射线，波长 $\lambda_0=0.0712605$ nm，光子能量约为 2 万电子伏特）. 入射的 X 射线打在石墨散射体 C 上，散射角为 θ 的散射线经准直光阑 B_1，B_2 射在晶体 D 上，利用晶体衍射方法测定散射线的波长，α_0 为掠射角. 最后利用探测器 E（康普顿当时用的是电离室）测定并记录散射线的强度. 整个装置即 B_1，B_2，D 与 E 可绕散射物质旋转，以便测量各种散射角下的散射线的波长与强度.

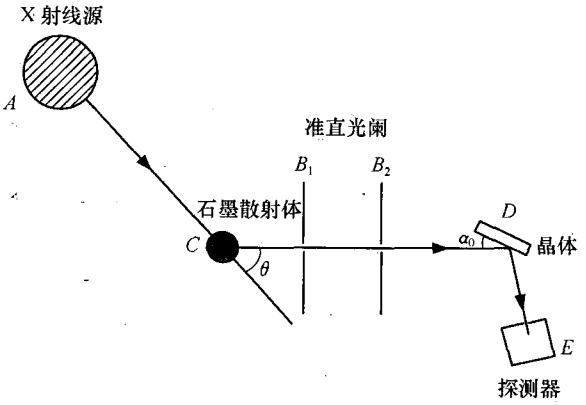


图 7.2.5 康普顿效应实验装置

2. 实验规律

同一散射物质不同散射角和不同物质同一散射角的实验曲线分别如图 7.2.6 和图 7.2.7 所示，图中横坐标为波长，纵坐标为散射强度.

实验曲线的特点如下：

(1) 对各种物质及不同散射角（$\theta=0$ 除外），散射线中均有波长不变成分（λ_0）及波长变长成分（λ）.

(2) 对同一散射物质，波长改变量 $\Delta\lambda=\lambda-\lambda_0$ 随 θ 的增大而增大（图 7.2.6）；对同一散射角，$\Delta\lambda$ 与散射物质无关（图 7.2.7）.

(3) 对同一散射物质，λ_0 谱线的强度随 θ 的增大而减小，λ 谱线的强度随 θ 增大而增大（图 7.2.6）；对不同散射物质，在同一散射角下，λ_0 谱线强度随散射物质的原子序数的增大而增大，λ 谱线强度随原子序数的增大而减小（图 7.2.7）.

康普顿从实验中得到波长改变量 $\Delta\lambda$ 与散射角 θ 的关系为

$$\Delta\lambda = 2\lambda_C \sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{7.2.6}$$

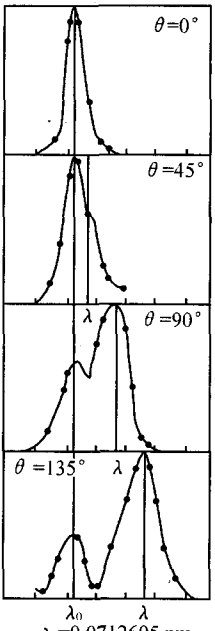


图 7.2.6　康普顿效应与散射角的关系

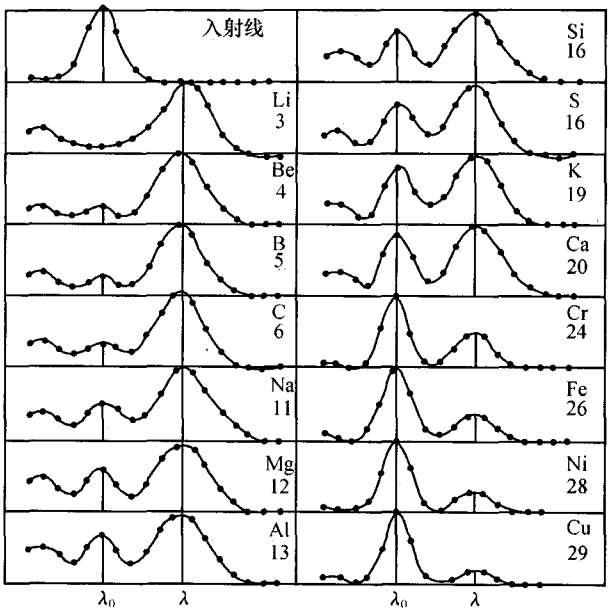


图 7.2.7　同一散射角下不同物质的康普顿散射谱

式中 $\lambda_C=2.41\times10^{-3}$ nm 是一个由实验测出的常数，它等于 $\theta=90°$ 时散射线波长改变的值.

3. 康普顿效应的量子解释

从量子理论出发，可以把康普顿散射视为 X 射线中的光子与散射物质中的电子的弹性碰撞过程，此过程中的光子与电子的总能量及总动量均是守恒的. 考虑到电子速度较大的一般情况，应当利用相对论的结论写出光子与电子的能量及动量表达式. 依相对论，质量为 m 的粒子具有的能量为

$$E=mc^2, \tag{7.2.7}$$

而以速度 v 运动的粒子的质量 m 与其静质量 m_0 有如下关系

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \tag{7.2.8}$$

(7.2.7)式和(7.2.8)式分别称为**质能关系**和**质速关系**.

对于光子，其能量 $E=h\nu$，故其质量 $m=h\nu/c^2$（光子无静质量），其动量 $p=$

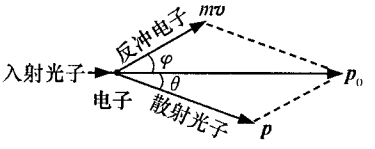


图 7.2.8 康普顿效应中动量守恒

$mc=h\nu/c$. 设碰撞前入射光子频率为 ν_0，电子处于静止状态；碰撞后光子向 θ 方向散射，频率变为 ν，而电子则以速度 v 向 φ 方向飞去(图 7.2.8). 碰撞前后光子、电子的能量和动量在表 7.2.2 中分别列出.

表 7.2.2 碰撞前后光子和电子的能量和动量

		能 量	动 量
光 子	碰撞前	$h\nu_0$	$h\nu_0/c$
	碰撞后	$h\nu$	$h\nu/c$
电 子	碰撞前	m_0c^2	0
	碰撞后	mc^2	mv

由碰撞过程中能量守恒和动量守恒，可得

$$h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + mc^2, \tag{7.2.9}$$

$$\frac{h\nu_0}{c} = mv\cos\varphi + \frac{h\nu}{c}\cos\theta. \tag{7.2.10}$$

动量守恒关系亦可利用余弦定理写为

$$(mv)^2 = \left(\frac{h\nu_0}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - 2\frac{h\nu_0}{c}\frac{h\nu}{c}\cos\theta. \tag{7.2.11}$$

联立(7.2.8)式、(7.2.9)式及(7.2.11)式，记 $\lambda-\lambda_0=\Delta\lambda$，可以得到

$$\Delta\lambda = 2\frac{h}{m_0c}\sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{7.2.12}$$

将上式与(7.2.6)式相比较，可以看到

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0c}. \tag{7.2.13}$$

代入 h，m_0 和 c 的值，求得 $\lambda_c=0.002426$ nm，与观测值 0.00241 nm 相符甚好. 通常将 λ_c 称为**电子康普顿波长**，它是一个与散射物质无关的常量.

以上模型可以成功地解释康普顿散射的实验结果. 由(7.2.12)式可知 $\Delta\lambda>0$ 即 $\lambda>\lambda_0$，这是由于碰撞光子把部分能量交给了电子，自身的能量减少，故频率降低. $\Delta\lambda$ 与物质无关，这是因为康普顿散射是光子与电子的相互作用，而任何物质中的电子都是全同的. 另外从(7.2.12)式亦可看出，θ 增大时 $\Delta\lambda$ 亦随之增大.

若依图 7.2.8，将动量守恒定律写成另一分量形式：

$$\frac{h\nu}{c}\sin\theta = mv\sin\varphi, \tag{7.2.14}$$

则由上式及(7.2.10)、(7.2.12)式可以解得电子反冲的方向与入射 X 射线的方向的夹角 φ 满足

$$\tan\varphi=\frac{\nu\sin\theta}{\nu_0-\nu\cos\theta}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\frac{\nu_0}{\nu}-\cos\theta}$$

$$=\left[\left(1+\frac{\lambda_c}{\lambda_0}\right)\tan\frac{\theta}{2}\right]^{-1}. \tag{7.2.15}$$

此式也得到了实验证实.

应该指出,在上述推导过程中,康普顿对散射物质中的电子作了两个近似处理,首先,将电子看成是自由电子,除光子外不受其他粒子的作用,这对于在原子中被束缚得不太紧的外层电子近似成立.但对于原子中的内层电子,它被束缚得十分牢固,光子与这些电子的碰撞应视为光子与质量甚大的整个原子碰撞,故(7.2.12)式中的 m_0 应用原子质量 M_0 替代,相应的波长改变量 $\Delta\lambda$ 几乎为零,散射线中存在波长不变成分的原因就在于此.散射物质的原子量越大,内层电子越多,散射光中原波长 λ_0 成分越强;依能量守恒,λ 成分越弱.其次,将电子初态看成是静止的,由此得到的(7.2.12)式指出,对于一定散射角波长改变量为一定值;而实验观察到的波长改变是有一定分布的(图 7.2.6 和图 7.2.7),只是强度峰值满足该式.这是因为电子实际上是运动着的(例如热运动),这种运动造成了散射谱线的展宽.

另外,从前文各式不难得到

$$\nu=\frac{\nu_0}{1+\frac{h\nu_0}{m_0c^2}(1-\cos\theta)}. \tag{7.2.16}$$

当 $h\nu_0\ll m_0c^2$(对电子散射而言,$m_0c^2\approx0.51\text{MeV}$),例如小两个数量级,这时 ν 可认为等于 ν_0,故当入射光子频率较低时,实验上观察不到康普顿效应.人们通常只讲波长极短的射线,例如 X 射线、γ 射线的康普顿效应,其理由就在于此.

最后应该说明,在电子速度 $v\ll c$ 的情况下,由近似式

$$\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-1/2}\approx1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2},$$

可得到

$$mc^2-m_0c^2=\frac{1}{2}m_0v^2,$$

即电子的相对论动能量与静能量之差恰为其经典动能.这时对电子可利用经典动能 $m_0v^2/2$ 和经典动量 m_0v(m_0 为电子的非相对论质量),按照与前文相同的方法,仍能得到(7.1.12)式及有关公式.

*7.2.3 光压

照射在物体表面的光对该表面产生的压强称为**光压**.图 7.2.9 为观察光压的示意图,其中

一细丝悬挂 A,B 两个圆片,镜面 M 固定于细丝上,以测量其旋转角,整个装置置于真空容器中. 实验发现,用同样强度的光照射亮面 A 时镜面的转角比照射黑面 B 时要大;当 A,B 面的光强反射率分别接近 1 和 0 时,前者转角约为后者的两倍.

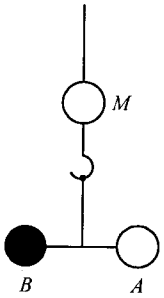


图 7.2.9 观测光压实验装置

虽然用电磁理论亦可解释光压现象,但用光子概念说明更为简明直观. 从光子观点,光压在数值上等于单位时间内在单位面积的被照面光子传递给物体的动量. 在单色平行光正入射时,入射光子动量为 $h\nu/c$,若表面吸收该光子,则物体获得动量 $h\nu/c$;若光子被表面反射,其动量变为 $-h\nu/c$,则物体获得动量 $2h\nu/c$. 设单位时间内物体单位表面积的入射光子数为 M,表面光强反射率为 R,在这 M 个入射光子中,有 RM 个被反射,$(1-R)M$ 个被吸收,故光压为

$$P=2\frac{h\nu}{c}RM+\frac{h\nu}{c}(1-R)M=M(1+R)\frac{h\nu}{c}=(1+R)\frac{S}{c}. \tag{7.2.17}$$

其中 $S=Mh\nu$ 为单位时间内射到单位表面积的光能,即光的能流密度或辐照度. 由上式可知,若表面为完全反射面,$R=1$,则 $P=2S/c$;若表面为完全吸收面,$R=0$,则 $P=S/c$. 以上结论与电磁理论及实验结果一致.

在日常生活中光压的作用微小到无法觉察,但它在解释某些天体现象中有一定作用. 例如,在一定条件下,小颗粒所受的光压可以与所受万有引力同数量级. 当彗星在太阳旁通过时,它的尘粒与气体分子受到光压的作用而背离太阳形成彗尾. 恒星保持体形稳定则是靠内部的光压及分子压强与万有引力平衡而实现的. 有人甚至设想可用光压作为未来星际航行的动力.

7.3 光的波粒二象性

7.3.1 光的粒子性

直到 19 世纪末叶,人们一直把光看做是一种经典电磁波动,但在 20 世纪初,黑体辐射及光电效应等实验事实迫使人们重新认识光的本性,而这种认识是有一发展过程的. 在普朗克能量子假设中,只假定谐振子辐射光能是一份一份的,而被发射的光能仍以电磁波的形式连续分布于整个空间. 在爱因斯坦对光电效应的解释中,则进一步认为,光就是由称为光子的粒子所组成,故光能并非在空间连续分布,而是以离散的形式集中存在于其载体光子之上.

但光子与实物粒子并不完全等同,这里只指出两点区别:①实物粒子具有静质量,而光子没有静质量;②实物粒子的速度可以取小于光速 c 的任意值,而光子的速度只能为 c.

为比较起见,我们可以把用光子说所表示的光的有关物理量综合列于下方:

光子的能量 $E=h\nu$,

光子的质量 $m=E/c^2=h\nu/c^2$,

光子的动量　$p=mc=h\nu/c=h/\lambda$,

光的能量密度　$w=NE=Nh\nu$,

光的能流密度　$S=wc=Nh\nu c$.

以上各式中 ν 和 λ 分别为光的频率和波长，N 为光场中的光子数密度，其数值等于单位体积中的光子数①.

7.3.2　光的波粒二象性* 及其概率解释

我们已经看到，光既具有波动性，又具有粒子性，这种性质称为**光的波粒二象性**. 上节中的 E 和 p 的表达式已明显地揭示了这种二象性及其定量联系，式中左端物理量 E 和 p 是粒子参量，而右端 ν 和 λ 是波参量. 注意，动量 p 的表达式与实物粒子的德布罗意波长公式是完全一致的，故实物粒子的波粒二象性可以认为是光的波粒二象性的一种推广.

可是，光子毕竟不同于实物粒子，特别是不同于宏观实物. 除前面提到的两点区别之外，光子及其他微观粒子与宏观实物的最大区别是后者的运动可以用确定的轨道来描述，而前者则不能. 这一点在光的衍射现象中可以明显看出.

现将单缝夫琅禾费衍射的示意图重绘于图 7.3.1. 设波长为 λ 的单色平行光正入射，缝宽为 a，则衍射主极强半角宽度为 $\Delta\theta=\lambda/a$. 实验表明，不管入射光强如何，即使弱到每次只有一个光子通过该缝，经过充分长时间的曝光后屏 Π 上仍会得到相同的衍射图样. 这说明波性并非是大量光子的集合才产生的性质，而是单个光子具有的根本属性②. 这种波性使得光子失去确定轨道的概念. 当一个光子经过单缝后，我们无法确切地知道它究竟落在屏 Π 上何处，只知道它落在

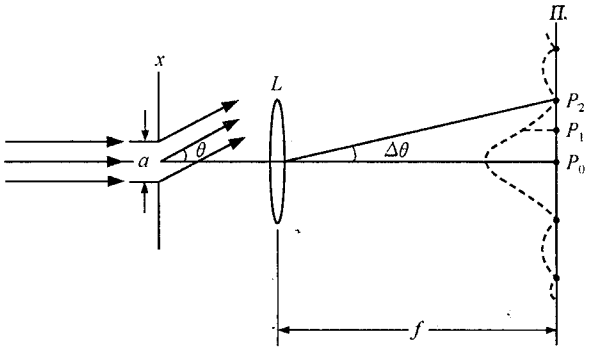


图 7.3.1　单缝夫琅禾费衍射

① 容易看出，7.2.3 节中的 $M=Nc$.

② 本部分叙述基于 20 世纪为大多数物理学家所认可的观点. 例如量子力学的创立者之一狄拉克就曾指出，“每一个光子只与它自己发生干涉”. 但近年来部分研究者对此提出质疑，所以此问题仍在进一步探索之中.

Π 上某处的可能性的相对大小，即概率. 例如，落在几何像点 P_0 处的概率最大；P_1 点次之；在主极强的零点位置 P_2 处，则概率为零. 这样，大量光子入射的总效果使得 Π 上有确定的衍射光强分布，它与波动光学所预言的相同.

进一步的分析说明，对光子(或其他微观粒子)的时空行为可引入复波函数 $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ 来描述，而 $P=|\Psi(\boldsymbol{r},t)|^2$ 可表示在 t 时刻在空间 $\boldsymbol{r}$ 处找到该粒子的概率. $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ 具有波性，它亦有振幅和相位，其相位以与经典波函数类似的形式随时(t)空($\boldsymbol{r}$)变化而呈周期性变化. $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ 可称为**概率波函数**或**概率幅**，其形式由量子力学所决定.

一个正确的新理论应在原理论有效的范围内给出与原理论结论相同的结果，那么由这种带有波性的粒子理论应如何解释波动光学已成功地解释过的现象呢？以下以双缝干涉为例作一简单分析.

图 7.3.2 重绘了双缝干涉的原理图. 从 S 发出的光子既可通过缝 S_1，也可通过缝 S_2 到达屏 Π，我们无法确定这个光子究竟通过了哪一条缝而不使双缝干涉过程受到干扰. 例如，若关闭 S_2，当然光子只能通过 S_1，但这时的物理过程已从双缝干涉变成单缝衍射了. 可以确定的仍然仅仅是概率. 量子力学认为：如果一个事件可以通过几条可资挑选的路径发生，则每一条可能的路径都对总概率波有贡献，而各概率波是相干叠加的. 对双缝实验，设缝 S_1 和 S_2 对总概率波的贡献分别为 Ψ_1 和 Ψ_2. 只开 S_1 时，屏 Π 上光强分布正比于 $|\Psi_1|^2$；只开 S_2 时，屏 Π 上光强分布正比于 $|\Psi_2|^2$. 双缝同时开放时，总概率波为 $\Psi_1+\Psi_2$，而屏上光强分布则正比于

$$P=|\Psi_1+\Psi_2|^2.$$

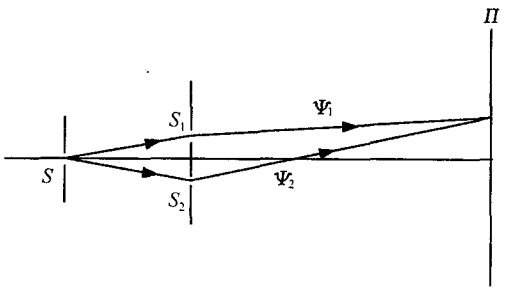


图 7.3.2 双缝干涉

在双缝相同时，$|\Psi_1|=|\Psi_2|$，而 Ψ_1，Ψ_2 的相位依赖于沿每条路径走过的路程长度. 故在 Ψ_1 与 Ψ_2 的相差 $\delta=0,\pm2\pi,\pm4\pi\cdots$ 时，Ψ_1，Ψ_2 同相，$\Psi_1=\Psi_2$，有

$$P=|2\Psi_1|^2=4|\Psi_1|^2,$$

这时发生相长干涉；在 Ψ_1 和 Ψ_2 的相差 $\delta=\pm\pi,\pm3\pi,\pm5\pi\cdots$ 时，Ψ_1，Ψ_2 反相，$\Psi_2=-\Psi_1$，有

$$P=|\Psi_1+(-\Psi_1)|^2=0,$$

这时发生相消干涉. 由于屏上不同位置对应于 Ψ_1，Ψ_2 不同的相位差 δ，故干涉光强产生条纹分布. 以上分析方法显然可以推广到多缝或缝的连续分布即衍射的情况.

简言之，我们对光子(或其他微观粒子)的行为可建立下述图像：

(1) 单个粒子在单次实验中的行为(例如光子在单缝衍射中究竟落在何处，或在双缝实验中走何种路径)是不确定的，而大量粒子的统计平均分布(大量粒子同

时实验或相继单粒子长时间连续实验)是有规律的,它与经典波动理论结果一致.

(2) 粒子的行为可用概率波函数 $\Psi(r,t)$ 描述,$\Psi(r,t)$ 具有波性,其相位是时空的周期函数,$|\Psi|^2$ 则代表在 r 处 t 时刻发现粒子的概率.

(3) 当粒子可能处于不同的状态时(例如双缝实验中既可通过 S_1,又可通过 S_2),总的波函数 Ψ 是各态波函数 $\Psi_1,\Psi_2,\cdots$ 的线性叠加,即概率波可以相干叠加,最终的分布 $|\Psi|^2$ 与经典波动理论相符.

(4) 实验中只能探测到整个粒子(从来没有探测到半个电子或半个光子),而在该处探测到粒子的概率由 $|\Psi|^2$ 所决定.

在本书从各个侧面介绍了光的波动性及粒子性之后,如果要问:光到底是什么?也许只能这样回答:光既是粒子,也是波;但它既非经典意义的粒子(有静质量和确定轨道),也非经典意义下的波(能量在空间连续分布),而是一种全新意义下的粒子和波.其粒子性表现于它在探测时以整个粒子形式出现,而且这种粒子有确定的能量和动量;其波性表现于粒子无确定轨道,其行为可用随时空振荡的波函数描述,且波函数遵守叠加原理.

可见波粒二象性既不同于牛顿-惠更斯时代光的经典微粒说,也不同于经典的波动说,它对于二者都是一个本质的飞跃,已经越出了经典物理的范畴.光的经典微粒说—经典波动说—波粒二象性的发展过程类似于一个否定之否定或"正—反—合"的认识过程,它大大扩充了人们对物质概念及其存在和运动形式的理解,并成为人的认识的辩证发展规律的一个生动例证.

7.4 激 光

基于受激发射放大原理而产生的一种相干光辐射称为**激光**①.本节将就产生激光的基本原理、激光器的组成及工作过程、激光的主要特点和应用等内容分别加以介绍.

7.4.1 产生激光的基本原理

1. 受激吸收、自发辐射和受激辐射

组成物质的微观粒子(原子、分子、离子等)可分别处于具有不同能量的状态(定态)中,相应的能量值称为**能级**.一般情况下,粒子的能级分布是不连续的.当粒子所处的能量状态发生变化,或者说当粒子从一个能级向另一个能级发生跃迁时,

① 激光一词英文为"laser",它是"Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation"词组中各词第一个字母的缩写,直译为"辐射的受激发射的光放大".

必然伴随着该粒子与其他客体发生能量交换的过程. 这里只考虑粒子与外部光场即光子的相互作用与能量交换过程. 依光子理论和能量守恒定律，当粒子在一对能级 E_1（较低能级）和 E_2（较高能级）之间发生跃迁时，可吸收或发射一个特定的光子，其能量满足

$$h\nu = E_2 - E_1, \tag{7.4.1}$$

或其频率满足

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h}, \tag{7.4.2}$$

上式常称为**玻尔**（N. Bohr）**频率条件**.

1916 年爱因斯坦首先提出关于光的吸收和发射的三种基本过程.

（1）受激吸收：处于较低能级上的粒子吸收一个光子，从而跃迁到较高能级的过程称为**受激吸收**过程或简称**吸收**，如图 7.4.1(a)所示.

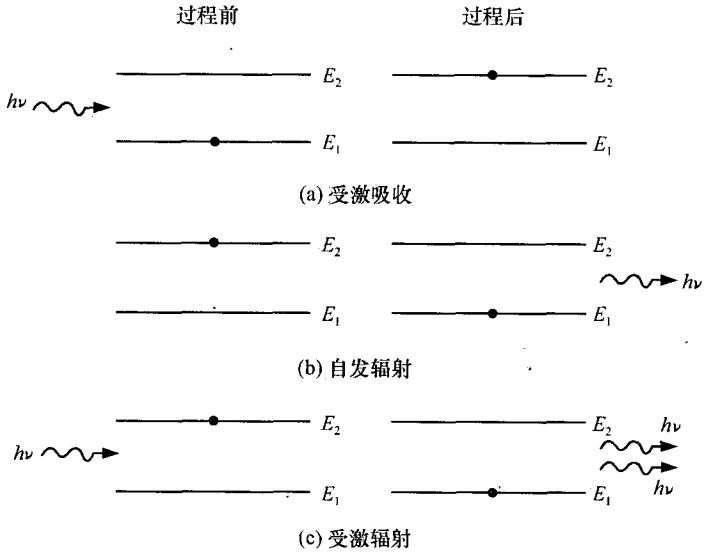


图 7.4.1　受激吸收、自发辐射和受激辐射

（2）自发辐射：处于较高能级的粒子，不论外部光场是否存在，自发地发射一个光子，从而跃迁到较低能级的过程称为**自发辐射**过程，如图 7.4.1(b)所示.

（3）受激辐射：处于较高能级的粒子在一定频率的光子的激励下跃迁到较低能级，并发射一个同频率光子的过程称为**受激辐射**过程，如图 7.4.1(c)所示.

以上三种过程中粒子所吸收或发射的光子能量及频率均满足(7.4.1)式及(7.4.2)式.

自发辐射和受激辐射两种情况所发射的光子的性质有所区别：前者发射的光

子，其传播方向、相位、偏振态等特性均具有随机性质，所辐射的光波是非相干的；后者发射的光子，其频率、传播方向、相位、偏振态等特性则保持与入射光子全同，故所辐射的光波是相干的.

2. 爱因斯坦系数

在受激吸收过程中，单位时间内从低能级 E_1 跃迁到高能级 E_2 的粒子总数 $\mathrm{d}N_{12}/\mathrm{d}t$ 应与始态 E_1 上的粒子数 N_1 及频率满足(7.4.2)式的外界光场光子数密度，或者该频率的光谱辐射能量密度 $u(\nu)$ 成正比，比例常数用 B_{12} 表示，即

$$\left(\frac{\mathrm{d}N_{12}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{吸收}} = B_{12}u(\nu)N_1. \tag{7.4.3}$$

在自发辐射过程中，单位时间内从高能级 E_2 跃迁到低能级 E_1 的粒子总数 $\mathrm{d}N_{21}/\mathrm{d}t$ 应与始态 E_2 上的粒子数 N_2 成正比，与外界光场无关，比例常数用 A_{21} 表示，即

$$\left(\frac{\mathrm{d}N_{21}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{自发}} = A_{21}N_2. \tag{7.4.4}$$

在受激辐射过程中，单位时间内从高能级 E_2 跃迁到低能级 E_1 的粒子总数 $\mathrm{d}N_{21}/\mathrm{d}t$ 应与始态 E_2 上的粒子数 N_2 及频率满足(7.4.2)式的外界光场光子数密度或者相应的光谱辐射能量密度 $u(\nu)$ 成正比，比例系数用 B_{21} 表示，即

$$\left(\frac{\mathrm{d}N_{21}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{受激}} = B_{21}u(\nu)N_2. \tag{7.4.5}$$

以上三式中的比例系数 B_{12}、A_{21}、B_{21} 分别称为受激吸收系数、自发辐射系数、受激辐射系数，并统称为**爱因斯坦系数**. 若将上面三式改写成如下形式：

$$\left(\frac{\mathrm{d}N_{12}/\mathrm{d}t}{N_1}\right)_{\text{吸收}} = B_{12}u(\nu),$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}N_{21}/\mathrm{d}t}{N_2}\right)_{\text{自发}} = A_{21},$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}N_{21}/\mathrm{d}t}{N_2}\right)_{\text{受激}} = B_{21}u(\nu),$$

不难看到，诸等式左侧表示发生相应跃迁的概率，故分别称 $B_{12}u(\nu)$、A_{21}、$B_{21}u(\nu)$ 为受激吸收跃迁概率、自发辐射跃迁概率、受激辐射跃迁概率.

理论计算表明，爱因斯坦系数之间有如下关系：①

$$B_{12} = B_{21}, \tag{7.4.6}$$

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}. \tag{7.4.7}$$

① 为分析简便，这里未考虑能级的简并问题.

虽然上面两式是在热平衡条件下导出的，但由于 B_{12}，A_{21} 和 B_{12} 与分布状态无关，所以这两式适用于普遍情况. (7.4.6)式表明：对于任一能级对，上迁和下迁的概率相等，即难以上迁的也难以下迁，反之亦然. 对于热平衡状态下的粒子，由(7.4.7)，(7.1.10)，(7.1.16)等式可导出自发辐射的强度 $I_{自发}$ 与受激辐射的强度 $I_{受激}$ 的关系：

$$\frac{I_{自发}}{I_{受激}}=\frac{N_2A_{21}h\nu}{N_2B_{21}u(\nu)h\nu}=\exp(h\nu/kT)-1. \tag{7.4.8}$$

例如：一个普通光源，$T\approx1000$ K，在可见光区 $\nu\approx5\times10^{14}$ Hz，$I_{自发}/I_{受激}\approx e^{24}\approx10^{10}$. 显然自发辐射占绝对优势，所发光是非相干光. 由此可以预见，在热平衡条件下，受激辐射几乎完全可以被忽略；欲使受激辐射的可见光变得具有应用价值，则只有打破热平衡方能实现.

3. 粒子数布居反转和抽运过程

1) 玻尔兹曼正则分布律

设粒子体系处于热平衡状态，温度为 T，则在能级 E_n 上的粒子数

$$N_n\propto\exp(-E_n/kT), \tag{7.4.9}$$

式中 k 为玻尔兹曼常量，这个统计规律称为**玻尔兹曼正则分布律**，它表明，随着能量 E_n 的增高，粒子数 N_n 按指数律递减，如图 7.4.2 所示.

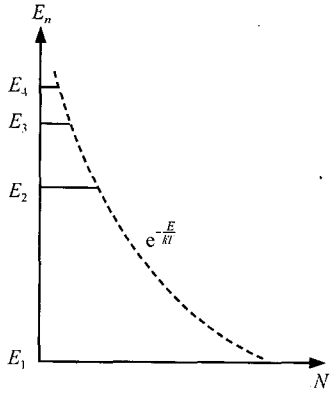


图 7.4.2　玻尔兹曼正则分布律

设 E_1 和 E_2 为任意两个能级($E_2>E_1$)，按(7.4.9)式，两能级上粒子数之比为

$$\frac{N_2}{N_1}=\exp\left(-\frac{E_2-E_1}{kT}\right)<1. \tag{7.4.10}$$

这表明，在热平衡态中高能级上的粒子数 N_2 总是低于低能级上的粒子数 N_1，两者之比由能级差 E_2-E_1 和粒子体系的温度决定. 在给定温度下，差值 E_2-E_1 愈大，N_2 比 N_1 相对愈小. 例如氢原子的第一激发态 $E_2=-3.40$ eV，基态 $E_1=-13.60$ eV，在常温 $T=300$ K($kT\approx0.026$ eV)，$N_2/N_1\approx e^{-400}\approx10^{-170}$. 可见在常温热平衡下，几乎全部原子都处于基态.

2) 粒子数布居反转

当一束频率为 ν 的光通过具有能级 E_2 和 E_1($E_2-E_1=h\nu$)的粒子体系时，受激吸收与受激辐射将同时发生. 若在时间 dt 内，单位体积中被粒子吸收的光子数为 dN_{12}，受激辐射的光子数为 dN_{21}，则由(7.4.3)式和(7.4.5)式得

$$(dN_{12})_{吸收}=B_{12}u(\nu)N_1dt,$$

$$(\mathrm{d}N_{21})_{受激}=B_{21}u(\nu)N_2\mathrm{d}t,$$

于是

$$\frac{(\mathrm{d}N_{21})_{受激}}{(\mathrm{d}N_{12})_{吸收}}=\frac{B_{21}u(\nu)N_2\mathrm{d}t}{B_{12}u(\nu)N_1\mathrm{d}t}=\frac{N_2}{N_1}.$$

(1) 当热平衡时，$N_2<N_1$，故$(\mathrm{d}N_{12})_{吸收}>(\mathrm{d}N_{21})_{受激}$，即光经过粒子体系过程中，受激吸收的光子数大于受激辐射的光子数，宏观效果表现为光的吸收或光损耗.

(2) $N_2>N_1$ 的情况被称为**粒子数布居反转**(简称**粒子数反转**或**布居反转**). 此时有$(\mathrm{d}N_{21})_{受激}>(\mathrm{d}N_{12})_{吸收}$，即光经过粒子体系过程中，受激辐射的光子数大于受激吸收的光子数，宏观效果表现为光的放大或光增益，同时，所增加的这些光子的状态(频率、传播方向和偏振态等)与入射光子的状态完全相同. 因此，粒子数反转体系可以产生受激辐射放大作用或称光的相干放大作用.

3) 抽运过程

为了实现粒子数布居反转，粒子体系不能处于热平衡态. 粒子体系如果受到某种形式的激励作用(如光辐射、放电、粒子束的轰击、化学反应等)，就有可能在某些个别的高低能级间实现粒子数布居反转. 这个将低能级粒子“抽运”到高能级的过程，称为**抽运过程**；所需能量则需由外界的激励能源提供.

由上讨论不难看到，造成粒子数布居反转是产生激光的首要条件；而抽运过程则是实现粒子数布居反转的必要手段.

4. 能级的寿命

粒子在某个能级上停留的平均时间，称为粒子在该能极上的**平均寿命**，简称**寿命**. 平常说得更简单些，常将它直接称为能级的平均寿命或寿命.

对双能级系统，设能级 E_2 上的粒子数为 N_2，因自发辐射在时间 $\mathrm{d}t$ 内 N_2 的改变量为 $\mathrm{d}N_2$，则

$$\mathrm{d}N_2=-\mathrm{d}N_{21}=-A_{21}N_2\mathrm{d}t,$$

式中负号表示因自发辐射 N_2 随时间而减少. 对上式积分后可得

$$N_2=N_{20}\exp(-A_{21}t), \tag{7.4.11}$$

式中 N_{20} 为 $t=0$ 时 E_2 上的粒子数. 上式表明，N_2 减少的快慢与自发辐射跃迁概率 A_{21} 的大小有关. A_{21} 愈大，则自发辐射过程愈快，经相同时间 t 后，留在 E_2 上的粒子数愈少.

将 A_{21} 的倒数记为

$$\tau=\frac{1}{A_{21}}, \tag{7.4.12}$$

τ 具有时间的量纲，它在数值上等于 N_2 减少到初态的 $1/\mathrm{e}$ 时所经历的时间. 从数

量级上，它可以反映粒子平均在能级 E_2 上停留时间的长短，故称为能级 E_2 的寿命. (7.4.11)式可改写成

$$N_2 = N_{20}e^{-t/\tau}. \tag{7.4.13}$$

各种粒子的各个能级的寿命 τ 与粒子结构有关. 对于原子而言，一般激发态能级的寿命数量级为 10^{-8}s. 也有一些激发态的能级寿命特别长，可达 10^{-3}s 甚至 1s，这种长寿命的激发态称为**亚稳态**. 在下节里将看到，亚稳态的存在对于激光的产生有着十分重要的意义.

最后应当指出，(7.4.12)式只适用于双能级粒子体系. 如果 E_2 下面存在多个能级 $E_1, E_1', E_1'', \cdots$ 令 $A_{21}, A_{21}', A_{21}'', \cdots$ 分别代表从 E_2 自发跃迁到这些能级的跃迁概率，则能级 E_2 的寿命应为

$$\tau = \frac{1}{A_{21} + A_{21}' + A_{22}'' + \cdots}. \tag{7.4.13}'$$

其次，以上讲的只是与自发跃迁过程对应的寿命，因此确切地应称为能级的**自然寿命**. 实际上由于粒子间的碰撞或其他外界的干扰，能级的**实际寿命**通常要比能级的自然寿命 10^{-8}s 小几个数量级.

7.4.2 激光器的组成及工作过程

产生激光发射的器件或装置称为**激光器**，可分为**激光振荡器**和**激光放大器**两大类：其中振荡器的特点是具有光学共振腔，激光在腔内多次往返形成持续振荡；而放大器的特点是不具有光学共振腔，入射激光信号通过增益介质获得单次或有限次数行波式放大. 通常所说的激光器，一般都是指激光振荡器；在某些情况下，则是指由激光振荡器和放大器组成的组合系统.

一般激光器都是由三部分组成：激光工作物质、激励系统以及光学共振腔，如图 7.4.3 所示. 以下分别讨论之.

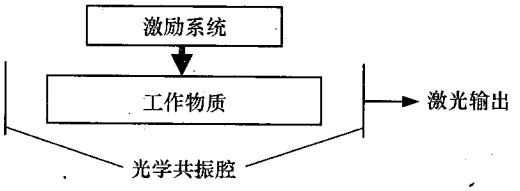


图 7.4.3　激光器结构示意图

1. 激励系统

激励系统的作用是供给激光工作物质能量，使其中处于基态的粒子获得能量

后，可以被抽运到较高能量的激发态上，为实现粒子数布居反转创造条件.

2. 激光工作物质(增益介质)

激光**工作物质**是指用来实现粒子数布居反转并产生光的受激辐射放大作用的物质体系，它是激光器的核心. 激光工作物质可以是固体(如晶体、玻璃)、气体(原子气体、离子气体、分子气体)、半导体和液体等介质. 对激光工作物质的主要要求，是尽可能在其工作粒子的特定能级间实现较大程度的粒子数布居反转，并使这种反转在整个激光发射过程中尽可能有效地保持下去. 为此，要求工作物质具有合适的能级结构和跃迁特性.

1) 工作物质的工作模式

通常人们利用所谓的**三能级图**或**四能级图**介绍激光工作物质如何实现粒子数布居反转的原理. 应当注意，这里讲的三能级图或四能级图并不一定是某种工作物质的真实能级图，只是对实现粒子数布居反转的一种原理性描述.

(1) 三能级图.

如图 7.4.4 所示，E_1 为基态，E_3 和 E_2 为激发态，其中 E_2 为亚稳态. 粒子在 E_2 上的寿命比粒子在 E_3 上的寿命长得多. 在外界激励系统的作用下，基态 E_1 上的粒子被迅速抽运到激发态 E_3 上，因而 E_1 上的粒子数 N_1 迅速减少. 由于 E_3 态的寿命极短，粒子将通过碰撞交出部分能量以无辐射跃迁形式转移到亚稳态 E_2 上. 由于 E_2 的寿命较长，即粒子在 E_2 上停留的时间较长，故在基态 E_1 上粒子数 N_1 迅速减少的同时，在亚稳态 E_2 上粒子数 N_2 随之迅速增多. 一旦达到 $N_2>N_1$ 时，就实现了亚稳态 E_2 和基态 E_1 间的粒子数布居反转. 当有满足玻尔频率条件的外来光输入时，便发生受激辐射(外激式)；当没有外来光输入时，工作物质自身产生的最初几个自发辐射光子，也可起到外来光子的作用，造成受激辐射压倒受激吸收的宏观效果(自激式).

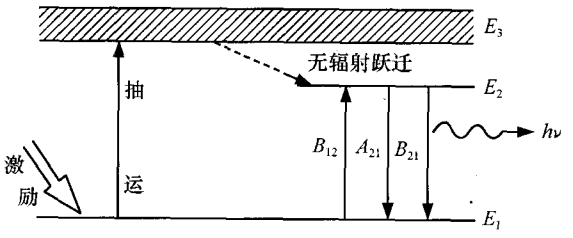


图 7.4.4 三能级图

梅曼(T. H. Maiman)于 1960 年制成的第一台红宝石激光器，就是一个三能级系统激光器.

三能级激光器的效率不高，原因在于抽运前粒子几乎全部处于基态 E_1 上，只有激励能源很强而且抽运很快时，才可使 $N_2>N_1$，实现粒子数布居反转.

(2) 四能级图.

如图 7.4.5 所示，E_0 为基态，E_3，E_2，E_1 为激发态，其中 E_2 是亚稳态. 它们当中实现粒子数布居反转的两个特定能级是亚稳态 E_2 和激发态 E_1，而不是和基态 E_0. 激发态 E_1 上粒子数本来就很少，所以只要亚稳态 E_2 上粒子稍有积累，就容易达到 $N_2>N_1$，实现粒子数布居反转，在能级 E_2 和 E_1 之间产生激光. E_3 上粒子向 E_2 上无辐射跃迁得愈快，以及 E_1 上的粒子向 E_0 上过渡得愈快，则四能级系统的工作效率愈高.

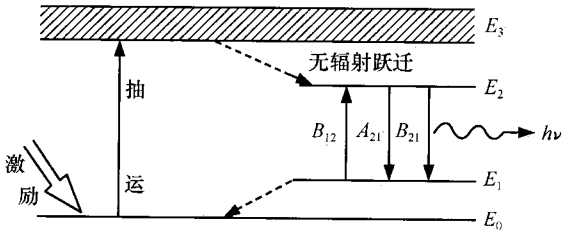


图 7.4.5　四能级图

1961 年 2 月，Ali Javan 等人报道了 1152.3 nm 的连续波氦-氖(He-Ne)气体激光器成功运转. He-Ne 激光器就是一个四能级系统激光器.

激光工作物质的实际能级图往往比较复杂，可能同时存在几对工作能级，这时所发射的激光可以有多种波长. 如常用的 He-Ne 激光器可以发射 632.8 nm，1152.3 nm 波长的激光；氩离子(Ar^+)激光器的辐射波长仅在可见光范围内就多达七八种，其中最强的是 488.0 nm 的青光和 514.5 nm 的绿光.

综上所述，欲实现粒子数布居反转，工作物质必须内有亚稳态，外有激励源供给能量，粒子输运的全过程必定是一个循环往复的非平衡过程.

2) 工作物质的增益系数

通常人们利用**增益系数**(简称**增益**)G 描述激光工作物质对光的放大作用，故激光工作物质也称为激光**增益介质**. G 在数值上等于激光在增益介质中传输单位距离时光强增加的百分比. 类似光的吸收的布格-朗伯定律的导出，不难得到光在增益介质中传播一段距离(从 0 到 z)后，出射光强 $I(z)$ 与入射光强 I_0 的关系如下：

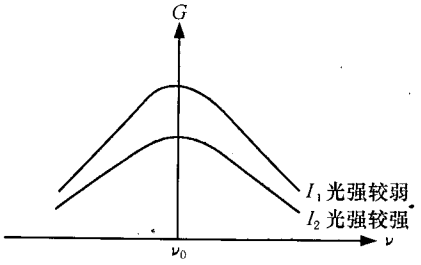


图 7.4.6　增益曲线

$$I(z) = I_0 e^{Gz}, \tag{7.4.14}$$

上式表明，$I(z)$随 z 按指数增长.

增益 G 的大小与光频率 ν 和光强 I 都有关系. 典型的增益曲线的大致轮廓如图 7.4.6 所示，它随光强的增大而下降. 这一点可解释如下：在同样的抽运条件下，光强 I 越强，意味着单位时间内从亚稳态向下跃迁的粒子数越多，从而导致布居反转程度减弱，因此增益也随之下降.

3. 光学共振腔

激光器的**光学共振腔**(简称**共振腔**)一般是由一对相距为 L 的反射镜(平面或球面)组成，中间放置工作物质(增益介质). 在这里我们仅讨论平面共振腔，平面反射镜中一个为全反射镜 M_1，光强反射率 R_1 接近 100%，另一个为部分反射镜 M_2，其 $R_2 \approx 80\%$，这种结构相当于一个法布里-珀罗标准具.

1) 共振腔对光束方向的选择

如图 7.4.7 所示，在实现了粒子数布居反转的工作物质工作过程的初始阶段，自发辐射的光子是向各方向发射的，它引起的受激辐射的方向也是随机的. 所有这些受激辐射中，只有那些沿着轴向传播的光才能在共振腔的两个反射镜之间来回多次反射从而不断增强，最后形成稳定的激光，并有一部分激光穿透部分反射镜 M_2 而输出. 共振腔对激光束方向的选择作用，保证了激光器输出的激光具有极好的方向性.

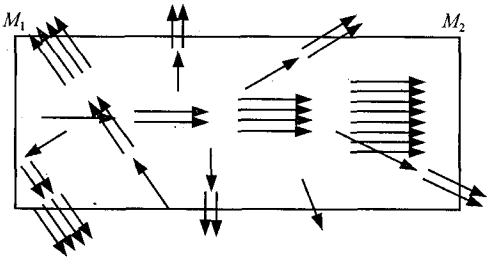


图 7.4.7 共振腔对光束方向的选择作用

2) 共振腔的阈值条件

光在共振腔及其内工作物质中来回反射的过程中，影响光强变化的有两个相互对立、相互竞争的因素：一个是工作物质中光的增益，它使光强变大；另一个是光在端面上的损耗(它包括光在端面上的吸收、透射以及衍射等)，它使光强变小. 显然欲获得激光输出，必须使增益大于损耗. 下面定量地说明这个问题.

如图 7.4.8 所示，设工作物质的长度即平面共振腔的长度为 L，工作物质的增益系数为 G，左右两端面的两个反射镜 M_1，M_2 的光强反射率分别为 R_1，R_2，光强透射率分别为 T_1 和 T_2. 若令 M_1 处的光强为 I_1，经工作物质到达 M_2 时，光强增加为

$$I_2 = I_1 e^{GL},$$

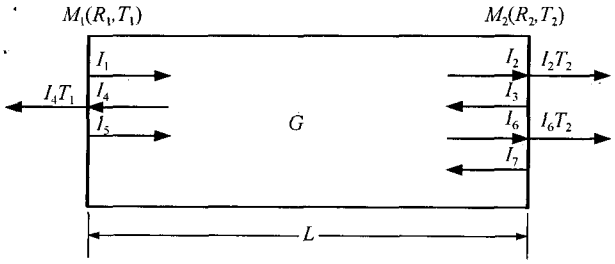


图 7.4.8　共振腔内光的增益与损耗

经 M_2 反射以后，光强减少为

$$I_3 = R_2 I_2 = R_2 I_1 \mathrm{e}^{GL},$$

再经工作物质到达 M_1 时，光强又增加为

$$I_4 = I_3 \mathrm{e}^{GL} = R_2 I_1 \mathrm{e}^{2GL},$$

再经 M_1 反射，光强则减少为

$$I_5 = R_1 I_4 = R_1 R_2 I_1 \mathrm{e}^{2GL}.$$

这时，光在工作物质中往返一周，完成一个循环. 欲使光在此过程中的增益足以补偿或大于光的损耗，则必须要求

$$I_5 \geqslant I_1,$$

即至少有

$$R_1 R_2 \mathrm{e}^{2GL} = 1. \tag{7.4.15}$$

此时，光在共振腔内来回传播的过程中强度维持稳定. (7.4.15)式称为**共振腔的阈值条件**，满足(7.4.15)式的工作物质的增益称为**共振腔的阈值增益**，记作 G_m. 显然，阈值增益应为

$$G_\mathrm{m} = \frac{1}{2L}\ln\frac{1}{R_1 R_2} = -\frac{1}{2L}\ln(R_1 R_2). \tag{7.4.16}$$

由以上讨论可知：只有当工作物质的实际增益 G 大于 G_m 时，光在共振腔内来回传播的过程中才能不断增强. 当然，光强也不会无限制地增大，其原因如前文指出，工作物质的实际增益 G 随光强 I 的增大而下降，当 G 下降到 G_m 时，共振腔内光强就维持稳定了.

综上所述，激光器产生激光的必要条件有两个：一个是工作物质的粒子数布居反转，另一个是共振腔满足阈值条件.

3) 工作物质的辐射线宽

(7.4.1)式 $\nu=(E_2-E_1)/h$ 只表示在工作物质的一对能级 E_1 与 E_2 之间所产生的光辐射的**中心频率** ν_0. 由于各种因素的影响，该谱线具有一定的频率宽度 $\Delta\nu$ (一般取半强度宽度，如图 7.4.9(a)所示)，称为**辐射线宽**.

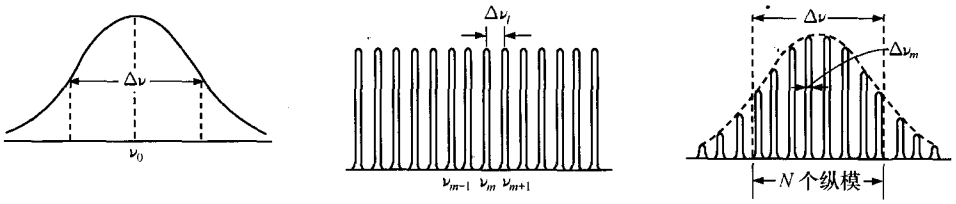


图 7.4.9　激光的纵模分布

(1) 自然线宽.

能级 E_2 的寿命 τ 相当于粒子发射波列的持续时间. 由 2.5.2 节中的分析,在时域中持续时间为 τ 的波列在频域中的展宽为

$$\Delta\nu = \frac{1}{\tau}, \tag{7.4.17}$$

此种展宽称为**自然线宽**. 一般激发态能级的寿命数量级为 10^{-8} s. 在激光器中,E_2 一般为亚稳态,其寿命可大大延长,可达 10^{-3} s 甚至更长,故 $\Delta\nu$ 可在千赫兹(kHz)数量级,甚至更小.

(2) 碰撞展宽.

粒子之间的碰撞可加速激发态的粒子向低能级的跃迁,从而缩短能级的寿命,使得辐射谱线进一步加宽,这种展宽称为**碰撞展宽**. 对于气体工作物质,压强较大时粒子碰撞的频率随之增大,碰撞展宽也增大.

(3) 多普勒展宽.

因粒子参与热运动,在实验室坐标系中所观测到的辐射是运动粒子的辐射. 由于多普勒(J. C. Doppler)效应,当粒子向探测器运动时,观测到的辐射频率将比静止粒子的辐射频率增大,反之则减小. 这种由多普勒频移效应所引起的谱线展宽称为**多普勒展宽**. 粒子的速率分布服从麦克斯韦速率分布,故这种展宽的线型也与麦克斯韦分布函数曲线相似,呈高斯型分布.

工作物质的辐射线宽 $\Delta\nu$ 由以上几种展宽综合构成. 对于不同的工作物质和工作条件,各种展宽的地位是不同的. 例如 He-Ne 激光器的 632.8 nm 谱线,在室温和约 200Pa(1～2 mmHg)压强下,碰撞展宽远大于自然线宽,多普勒展宽又比碰撞展宽还大一个数量级,这时多普勒展宽起主要作用.

4) 共振腔的选频作用及激光的模式

以上仅考虑了工作物质本身产生的线宽. 实际上由于共振腔相当于一个法布里-珀罗标准具,由 3.5.2 节中的分析,它将对输出光起到选频作用,使得只有满足

$$\nu_m = \frac{mc}{2nL} \tag{7.4.18}$$

的**中心频率**才能得到相干加强而输出激光(从驻波条件亦可很容易地得到上式),

上式中 n 为工作物质的折射率，L 为腔长，m 为正整数. 以上每一频率 ν_m 称为激光的一个**纵模**，如图 7.4.9(b)所示. 各纵模具有相同的频率间隔

$$\Delta\nu_l = \nu_{m+1} - \nu_m = \frac{c}{2nL}, \tag{7.4.19}$$

称为**纵模间隔**. 而每一纵模的频宽 $\Delta\nu_m$ 则由(3.5.35)式所决定，即

$$\Delta\nu_m = \frac{c(1-R)}{2\pi nL\sqrt{R}}, \tag{7.4.20}$$

称为**单模线宽**.

一般地，纵模间隔小于工作物质的辐射线宽，即 $\Delta\nu_l < \Delta\nu$，激光的纵模分布如图 7.4.9(c)所示. 可见激光器共振腔的选频作用就是将工作物质的宽谱线变成了许多等间隔离散的窄谱线. 显然，输出激光的频谱中所包含的**纵模个数**由下式确定

$$N = \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_l}. \tag{7.4.21}$$

上式说明，工作物质的辐射线宽 $\Delta\nu$ 愈小，纵模间隔 $\Delta\nu_l$ 愈大，则输出激光的纵模个数愈少. 例如：He-Ne 激光器中，中心频率 $\nu_0 = 4.74\times^{14}\text{Hz}$($\lambda_0 = 632.8$ nm)的辐射频宽 $\Delta\nu \approx 1.5\times10^9$ Hz，$n \approx 1.0$，若腔长 $L = 30$ cm，则由(7.4.19)式可求得纵模间隔 $\Delta\nu_l = 5.0\times10^8$ Hz，所以该激光器输出的纵模个数 $N = 3$，这种激光器称为多纵模(或多频)激光器. 若腔长 $L = 10$ cm，则 $\Delta\nu_l = 1.5\times10^9$ Hz，相应有 $N = 1$，这种激光器为单纵模(或单频)激光器.

共振腔内与轴向垂直的横截面内的稳定光场分布称为激光的**横模**，它是指光在共振腔内经过一个来回后能再现其自身的一种场分布. 激光器输出光束在屏上形成的光斑形状直观地显示了横模形式，图 7.4.10 中画出了几种横模图形.

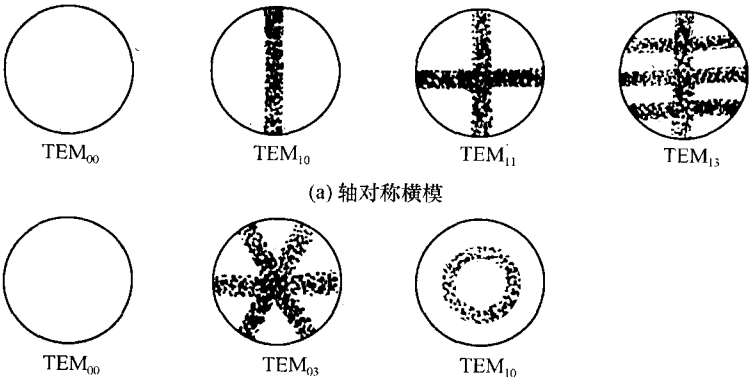


图 7.4.10　激光的横模

激光的模式一般用 TEM_{pqm} 表示，其中 TEM 是“横电磁”的英文字头缩写，m 为纵模序数，通常略去不写. 在轴对称横模(图 7.4.10 上部，其中阴影区表示暗区，下同)中，p 和 q 分别表示光束横截面内在水平方向(x 方向)和竖直方向(y 方向)出现的暗区数，如 TEM_{13} 模在 x 方向有一个暗区，在 y 方向有三个暗区. 在旋转对称横模(图 7.4.10 下部)中，p 表示沿半径方向出现的暗环数，q 表示图中出现的暗直径条数，如 TEM_{03} 模中无暗环，有三条暗直径. 一般皆利用最低阶模 TEM_{00}，这时光束具有最好的空间相干性.

总之，激光的纵模和横模，实际上就是共振腔所允许的光场的各种纵向和横向的稳定分布.

7.4.3 激光的主要特点和应用

1. 激光的主要特点

激光器的工作原理是基于特定能级间粒子数布居反转体系的受激辐射过程，因此就决定了它所发射的激光辐射具有一系列与普通光辐射不同的鲜明特点.

1) 高单色性

工作物质有限的辐射线宽加上共振腔的选频作用，使得输出激光的谱线很窄，即具有高度的单色性，特别是在单纵模运行时. 设激光器输出的中心频率为 ν_0，线宽为 $\Delta\nu$，则在较好的情况下，单色性的表征量 $\nu_0/\Delta\nu$ 可高达 $10^{10}\sim10^{13}$ 的数量级；而作为对比，一般较好的普通单色光源的单色性量值只有 10^6 数量级左右.

2) 高定向性

由于共振腔对光束方向的选择作用(回顾 7.4.2 节 3 及图 7.4.7)，使得激光器的输出光束有高度的方向性，光束沿空间极小的立体角范围(一般为 $10^{-5}\sim10^{-8}$ 球面度)向前传输.

3) 高相干性

激光良好的单色性使它具有高度的时间相干性；单横模运行时其波前各点具有固定的相差，使它具有高度的空间相干性. 在单纵模及 TEM_{00} 横模运行时，激光的相干性、单色性及方向性均最好，这时光束腰部截面上各点相位相同，除各点振幅并非常数外[①]，激光辐射近似于一个理想平面波.

4) 高强度

高度的方向性意味着激光光束的能量可以在空间高度集中，从而带来了高亮度以及被照射物体表面的高照度. 自然界中最强的光源要属太阳，它的亮度值约为

① 通常激光束振幅的横向分布呈高斯分布，这种光束称为**高斯光束**.

10^3 瓦/厘米^2·球面度，而目前大功率激光器输出亮度可达 10^{10}～10^{17} 瓦/厘米^2·球面度.

以上各种性质是互相联系的，实质上它们均可归结于激光高度的时空相干性，只是在实用中往往根据不同目的强调其不同侧面及利用其不同的表观特性.

2. 激光的应用

激光在国民经济的各个部门及军事、科研等方面有广泛的应用，以下大致分为两类分别作一简要介绍.

1) 利用激光的高强度

利用激光可获得的高强度是任何自然光源和其他普通光源所无法比拟的. 由于激光具有良好的方向性，可以聚焦在很小的区域(线度为几十个微米)，一台实验室用小型的 10 mW 的 He-Ne 激光器焦点处光强即可达到 10^7 W/m^2，它比太阳在地球表面产生的光强(约 10^3 W/m^2)大一万倍. 现在大型激光器的输出功率可达数十千瓦(kW)(连续)或数百太瓦(TW)(脉冲，1TW=10^{12} W)，在后一情况下，焦点处光强可达 10^{22} W/m^2. 即使一台普通的红宝石激光器，其亮度也比太阳表面高数百亿倍. 因此，可以利用这种高强度激光进行打孔、焊接、切割，它广泛应用于工业加工和医学(如激光手术刀). 在强光下介质可呈现出非线性效应，故可用激光进行非线性光学的研究. 更高强度的激光可以作为激光武器. 当光强超过 10^{18} W/m^2 时，可以引发激光核聚变，即使轻原子核(氢、氘、氚核等)聚合为较重的原子核，同时释放出大量的能量.

2) 利用激光的高相干性

激光的高相干性(高单色性和高定向性)使得我们可以以更高的精度及在更大的范围进行长度等物理量的测量. 在前一方面，可用单色性及频率稳定性极高的激光系统建立起长度、时间和频率的标准；在后一方面，可测量天文尺度的长距离，例如用高定向性强激光束测量平均值将近 40 万公里的地月距离误差可不超过数米.

激光的另一重要用途是激光通信. 激光是一种光频波段的相干电磁波辐射，因此自然可利用激光作为光频电磁载波来传递各种信息. 激光通讯的优点主要是：传递信息容量大、通信距离远、保密性高以及抗干扰性强. 在较好的地面条件下，可以实现几十公里至上百公里间的定点激光通信. 在地球大气层外的宇宙空间，激光束基本上不受任何衰减和干扰影响，因此可实现极远距离间的定向通信联系. 用光波导(光缆)作为传输器件的光通信技术近年来已得到迅速发展及广泛应用.

激光的其他应用尚可举出激光化学、激光医学、激光生物学、激光全息术、激光雷达等. 随着时代的发展，激光这一高技术必将在各方面发挥越来越大的作用.

最后，为便于参考和应用，我们在表 7.4.1 中列出了一些常见的激光器的主要工作波长和工作方式.

表 7.4.1 常见激光器的主要工作波长和工作方式

类 型	型 式	波长/μm	工作方式
气体激光器	He-Ne	0.6328	连续
	He-Cd	0.3250, 0.4416	连续
	Ar^+	0.4880, 0.5145	连续
	CO_2	10.6	连续/脉冲
固体激光器	红宝石	0.6943	脉冲
	Nd:YAG	1.06	连续/脉冲
	Nd-玻璃	1.06	脉冲
半导体	GaAs	0.78～0.90	连续/脉冲

*7.5 非线性光学简介

在 2.3.1 节中曾根据波场 $\boldsymbol{E}$ 是否遵从叠加原理来区别介质的线性和非线性. 一般说来，凡是波的叠加原理能够成立，即介质响应与光的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 成线性关系的现象属于线性光学范畴；而波的叠加原理不再成立，即介质响应与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的二次或更高次幂有显著关系的现象，则属于**非线性光学**范畴. 以前已讲过的通常强度的光束在介质中的传播、反射、折射、叠加(干涉与衍射)以及线性吸收与线性散射等都属于前一范畴. 非线性光学现象在通常光强下一般不易觉察，在高强度光照下才变得显著，所以其研究和应用只能在激光出现之后才迅速发展起来. 但在近期人们发现某些材料(例如光折变材料)在普通光强下也能出现非线性. 这些研究更促进了非线性光学的发展及应用. 非线性光学包括光学整流、倍频、混频、自聚焦、受激拉曼散射、受激布里渊散射等现象，以下只能简要介绍几种.

1. 光学整流、倍频和混频

对线性各向同性介质，其极化强度矢量 $\boldsymbol{P}$ 恒与外加电场 $\boldsymbol{E}$ 方向一致，而且二者的大小成正比，即有

$$P = \varepsilon_0 \chi_e E, \tag{7.5.1}$$

其中 χ_e 为无量纲常数，称为介质的极化率. 上式表示 P 将随 E 的增大作线性增长. 但是，实际介质中 P 不可能无限增大，当 E 很大时，P 将趋于饱和. 故可以预料，上述线性关系只在有限的 E 值范围内成立. 严格说来，P 和 E 的关系式中应反映出 E 增大时逐渐明显的非线性因素，它可以写成级数形式

$$P = \varepsilon_0 (\chi_e E + \chi_2 E^2 + \chi_3 E^3 + \cdots), \tag{7.5.2}$$

式中每后一项与相邻前项的比值(绝对值)约为 E/E_a，E_a 为原子中的内电场，其量级约为 $10^{11}\,\mathrm{V/m}$，与它相应的光强量级为 $10^{19}\,\mathrm{W/m^2}$. 这是一个很大的数值，故在通常光强下(7.5.2)式中 E 的二次项以及更高次项均可忽略，只有在强光下才需要考虑它们的影响.

设入射光波为角频率为 ω 的单色波，即

$$E = E_0 \cos \omega t. \tag{7.5.3}$$

若式(7.5.1)成立，则 P 亦作同频率简谐振荡，它所产生的输出波也是同频率的单色波，这是线

性光学现象的特点.

非线性光学现象则不然,这时由(7.5.2)式可得到

$$P=\varepsilon_0\chi_e E_0\cos\omega t+\varepsilon_0\chi_2 E_0^2\cos^2\omega t+\varepsilon_0\chi_3 E_0^3\cos^3\omega t+\cdots$$

$$=\varepsilon_0\chi_e E_0\cos\omega t+\left(\frac{\varepsilon_0\chi_2}{2}\right)E_0^2(1+\cos2\omega t)+\left(\frac{\varepsilon_0\chi_3}{4}\right)E_0^3(3\cos\omega t+\cos3\omega t)+\cdots. \quad (7.5.4)$$

显然,上式右端除原频率简谐振动项 $\cos\omega t$ 外,还出现了直流项$(\varepsilon_0\chi_2/2)E_0^2$ 及高次项 $\cos2\omega t$, $\cos3\omega t$ 等. 依不同需要可以以不同项为基础达到所需目的.

1) 光学整流

上式中之直流项意味着介质在交变的输入电场的作用下,会出现取向恒定的偏置极化强度,其大小与入射光强成正比. 这类似于交流电转化为直流电,因此称为**光学整流**.

2) 倍频

利用二次谐波项可以从角频率 ω 的输入光中得到角频率为 2ω 的二**倍频**输出光. 例如红宝石激光器发出的 $\lambda=0.694\ \mu m$ 的光聚焦后通过石英晶体,输出光中除原波长之外,还产生了微弱的 $\lambda=0.347\ \mu m$ 的倍频光.

3) 混频

设输入光含有两种不同频率的成分,即

$$E=E_{10}\cos\omega_1 t+E_{20}\cos\omega_2 t,$$

(7.5.2)式中只保留到二次项,则有

$$P=\varepsilon_0\chi_e(E_{10}\cos\omega_1 t+E_{20}\cos\omega_2 t)+\varepsilon_0\chi_2(E_{10}\cos\omega_1 t+E_{20}\cos\omega_2 t)^2$$

$$=\varepsilon_0\chi_e(E_{10}\cos\omega_1 t+E_{20}\cos\omega_2 t)+\frac{\varepsilon_0\chi_2}{2}E_{10}^2(1+\cos2\omega_1 t)+\frac{\varepsilon_0\chi_2}{2}E_{20}^2(1+\cos2\omega_2 t)$$

$$+\varepsilon_0\chi_2 E_{10}E_{20}[\cos(\omega_1+\omega_2)t+\cos(\omega_1-\omega_2)t]. \quad (7.5.5)$$

可见输出光束中除了直流成分和原频率 ω_1, ω_2 的成分之外,还出现了和频项 $\cos(\omega_1+\omega_2)t$ 和差频项 $\cos(\omega_1-\omega_2)t$,此即**混频**作用.

倍频与混频在激光技术中有着重要的运用. 常用工作物质多为晶体,例如 KDP, ADP 等,它们是各向异性的,故 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{E}$ 的关系呈比较复杂的张量形式,这里不予讨论,但其基本原理与上述分析是相通的.

2. 自聚焦

在强光作用下,介质折射率将随光强的增大而增大. 由于激光束截面上强度呈高斯分布,轴线上光强最大,故从轴线向外折射率逐渐减小. 由 1.1.2 节中梯度折射率光学的分析,可知此种折射率分布将使入射光束向轴线会聚. 这种现象称为**自聚焦**. 实际上,光束在传播中还存在衍射引起的散焦作用,光束最终是会聚还是发散取决于两种因素的相对强弱. 只有在光束具有足够高的强度时,才能引起折射率足够大的变化而使自聚焦成为可能.

3. 受激拉曼散射

在 6.3.2 节所讲的拉曼散射中,P 与 E 的关系虽然形式上仍满足(7.5.1)式,但此时χ_e已非

常数，而是被外来光场的周期振荡所调制（见(6.3.7)式）. 这种参量振荡在某种意义下也可以看做是一种非线性效应. 在光强较弱时，散射光强的增加正比于入射光强，它是不相干的，称为**自发拉曼散射**. 当入射光是强相干光束（激光）时，散射光可对其自身产生激励，即散射光强的增加与入射光强度及散射光强的乘积成正比，这时散射光强相当于受到放大作用而迅速增加，且散射光具有高度相干性，这种散射称为**受激拉曼散射**.

习 题

7.1 利用辐射高温计测得某炉壁小孔的总辐出度为 22.8 W/cm^2. 试计算该炉炉内温度.

7.2 测量星球表面温度的方法之一是：将星球视为黑体，通过测量星球辐射谱，确定峰值波长 λ_M，从而估算星球表面温度. 现测得太阳的 $\lambda_M=510$ nm，北极星的 $\lambda_M=350$ nm，试求它们的表面温度.

7.3 若一黑体的总辐出度为 5.70 W/cm^2，试求与最大光谱辐出度相对应的波长.

7.4 设空腔处于某温度时，$\lambda_M=650$ nm，如果其温度增加，以致总辐出度加倍时，λ_M 变为多少？

7.5 在加热黑体过程中，其峰值波长由 0.69 μm 变化到 0.50 μm，求总辐出度增加到原来的多少倍.

7.6 在光滑平面上，质量为 0.3 kg 的物体及一个倔强系数为 $k=3.0$ N/m 的弹簧构成一个弹簧振子，该系统以振幅 $A=0.1$ m 开始振动. 若此系统的能量是满足普朗克量子化条件的，问初态量子数 n 有多大？若 n 改变 1 个单位，则能量改变的百分比有多大？

7.7 热核爆炸中火球的瞬时温度达 10^7 K，试求：(1) 辐射最强的波长；(2) 这种波长的能量子 $h\nu$ 是多少电子伏？

7.8 设一钾箔片与功率 1 W 的点光源的距离为 3 m，假定钾箔片表面的电子可以在一个半径约为原子半径（$r=0.5\times10^{-10}$ m）的圆区域中吸收能量，已知钾的功函数约为 1.8 eV.

(1) 按照经典电磁理论，计算电子从照射到逸出需要多少时间？(2) 如果光源发出波长为 488.0 nm 的单色光，根据光子理论，求每秒钟打到钾片上的光子数密度相当于每平方米多少个光子？

7.9 以紫外光（$\lambda=300$ nm）射到功函数为 2.0 eV 的金属表面，求光电子的最大初速率.

7.10 波长为 350 nm 的光照射某种金属的表面，在一定的反向电压下光电流截止. 当光的波长改变 50 nm 时，为使光电流再次截止，遏止电压必须增加 0.59 V. 若已知普朗克常量和光速，试求电子电荷.

7.11 波长为 200 nm 的光照射到铝表面，铝的功函数为 4.2 eV. 试求：

(1) 光电子的最大初动能；(2) 遏止电压；(3) 铝的红限波长；

(4) 如果入射光强为 2.0 W/m^2，单位时间打到单位面积上的平均光子数为多少？

7.12 已知某金属表面受波长 λ 和 2λ 的单色光分别照射时，释放出光电子的最大初动能分别为 30 eV 和 10 eV，试求能使此金属表面释放光电子的单色光的最大波长是 λ 的多少倍？

7.13 波长为 0.02 nm 的 X 射线经某固体后沿与原入射方向成 90° 的方向散射，试求：(1) 康普顿效应产生的波长改变量；(2) 散射后 X 射线的新波长；(3) 康普顿效应产生的频率改变量.

7.14　已知X射线的光子能量为0.60 MeV，在康普顿散射之后波长变化了20%，求反冲电子的能量.

7.15　在康普顿散射中，入射光子的波长为3×10^{-3} nm，反冲电子的速率为真空中光速的60%，试求散射光子的波长和散射角.

7.16　试导出康普顿散射实验中电子的反冲角φ与光子散射角θ的关系(7.2.15)式.

7.17　试证明在康普顿效应中，反冲电子的动能K与入射光子的能量E_0之间满足下述关系：

$$\frac{K}{E_0}=\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0+\Delta\lambda}=\frac{2\lambda_c\sin^2(\theta/2)}{\lambda_0+2\lambda_c\sin^2(\theta/2)},$$

式中λ_0为入射光波长，λ_c为康普顿电子波长，$\Delta\lambda=\lambda-\lambda_0$为波长改变量，$\theta$为光子散射角.

7.18　在黑暗环境中人眼在最灵敏的波长范围内其视觉阈值约为4×10^{-17} J/s. 试问这一阈值相当于每秒钟接收到多少个$\lambda=0.55$ μm的光子?

7.19　一红宝石激光器可以发射波长为$\lambda=693.6$ nm的巨脉冲，假定每个脉冲都可以看做是一个具有能量为$W=0.3$ J、持续时间为$\tau=0.1$ ms、等振幅、线偏振平面波列，光束截面为直径5 mm的圆面，脉冲在折射率为1.0的空气中传播. 试计算：(1) 一个脉冲所含的总光子数$N_{总}$；(2) 一个脉冲的体积能量密度w及单位体积中的光子数N(估算波列所占体积时，忽略衍射所致的光束扩大)；*(3) 下列三种情况下脉冲垂直地施加于屏幕平面上的光压：(a) 屏是完全吸收的；(b) 屏是完全不吸收的；(c) 屏的光强反射率$R=0.9$.

7.20　设一束电子初速度为零，通过100 V的电位差来使其加速，加速后其德布罗意波长为多少? 若让它通过一条0.1 mm宽的狭缝作夫琅禾费衍射，求中央主极强的角宽度.

7.21　(1) 利用$E=mgH=h\nu$的简单模型，证明一个光子在地球重力场中向上运动一段距离ΔH时，其频率将会减低，且有$\Delta\nu=-g\nu\Delta H/c^2$，其中$g$为地表重力加速度，$c$为光速. (2) 计算$\Delta H=20$ m时$\Delta\nu/\nu$之值.

7.22　设某谱线的波长$\lambda=600$ nm，自发辐射跃迁几率$A_{21}=10^6$ s^{-1}，(1) 计算受激辐射系数B_{21}；(2) 欲使受激辐射的强度超过自发辐射的强度，问该频率的光谱辐射能量密度$u(\nu)$应是多少? (3) 对$\lambda=60$ nm，$\lambda=0.06$ nm重复以上计算，并将计算结果加以比较.

7.23　计算在温度$T=1500$ K的热平衡空腔中，波长为$\lambda=500$ nm的可见光的受激辐射与自发辐射的强度比.

7.24　已知氢原子的第一激发态$E_2=-3.4$ eV，基态$E_1=-13.6$ eV，(1) 设温度$T=2700$ K的火焰中含有10^{20}个氢原子，如果氢原子数按玻尔兹曼正则律分布，试求在能级E_2上的氢原子数N_2；(2) 设火焰中每秒发射的光子数为10^8N_2，求其辐射功率.

7.25　一个原子激发态的平均寿命是10^{-8} s，若与此态跃迁相应的辐射波长是500 nm，试求谱线的自然线宽是多少? $\Delta\nu/\nu$等于多少?

7.26　有一台工作波长为632.8 nm，输出线宽为10^3 Hz，输出功率为1 mW的小型氦氖激光器.

(1) 该激光器每秒钟所发射的光子数是多少?

(2) 如果输出光束的直径为1 mm，设想一个黑体，要求它在与该光束截面相同的面积上，在同样的波长和频率间隔内发出同样的功率，该黑体的温度需要多高? (计算中可近似认为激光器在其线宽范围内辐射功率是均匀的.)

7.27　设氩离子激光器输出的基模 488.0 nm 的频率范围 $\Delta\nu=4\times10^3$ MHz，求腔长 $L=1$ m 时，光束中包含几个纵模？两相邻纵模波长间隔 $\Delta\lambda_l$ 是多少？

观察思考及讨论题

7.1　关于热辐射

(1) 基尔霍夫定律说明物体的吸收本领越大，则其辐射本领越大，为什么通常看到的黑色物体没有白色物体亮？

(2) 某些内衣厂家宣称他们的产品能发射 10 μm 的红外线，你对这种宣传有何评论？

(3) 如何根据恒星的颜色大致判断其表面温度？

7.2　综合各章内容，可以对物体的颜色有一个总体认识. 颜色可能产生于下述各种原因：原子跃迁发光、热辐射、对波长的选择吸收、色散、散射、干涉和衍射等，对每种情况举出一些实例.

7.3　设想普朗克常量 h 发生微小改变，我们周围的世界会有什么变化？

7.4　为什么观察康普顿效应时使用 X 射线而不是可见光？

7.5　从经典的粒子说到波动说再到波粒二象性，你如何从认识论的角度理解关于光的本性的学说的发展？二象性中的“波”和“粒子”与经典的波和粒子有什么区别？你对二象性关于光的本性的解释满意吗？为什么？

参考文献

一、参考书目

1 Born M, Wolf E. Principles of Optics. 7th Ed. Cambridge University Press, 1999
中译本：马科斯·玻恩，埃米尔·沃耳夫. 光学原理. 上册. 杨葭荪等译. 北京：电子工业出版社，2005
玻恩 M，沃耳夫 E. 光学原理. 下册. 黄乐天等译. 北京：科学出版社，1981

2 Hecht E, Zajac A. Optics. Reading. Massachusetts: Addison-Wesley, 1974
中译本：赫克特 E，赞斯 A. 光学. 上册. 秦克诚等译. 北京：人民教育出版社，1979
赫克特 E，赞斯 A. 光学. 下册. 詹达三等译. 北京：人民教育出版社，1980

3 Jenkins F A, White H E. Fundamentals of Optics. New York: McGraw-Hill, 1976
中译本：Jenkins F A, White H E. 光学基础. 杨光熊，郭永康译. 北京：高等教育出版社，1994

4 Klein M V. Optics. New York: Wiley, 1970

5 Lipson S G, Lipson H. Optical Physics. London: Cambridge University Press, 1969

6 Ditchburn R W. Light. 3th Ed. London: Academic Press, 1976
中译本：狄区本 R W. 光学. Ⅰ. 李增佩等译. 北京：高等教育出版社，1980
狄区本 R W. 光学. Ⅱ. 程路译. 北京：高等教育出版社，1980

7 Pedrotti F L, Pedrotti L S. Introduction to Optics. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1987

8 Ghatak A. Optics. New Delhi: McGraw-Hill, 1977
中译本：加塔克 A. 光学. 梁铨廷，胡宏章译. 北京：机械工业出版社，1984

9 Fowles G R. Introduction to Modern Optics. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1975
中译本：福尔斯 G R. 现代光学导论. 陈时胜，林礼煌译. 上海：上海科学技术出版社，1980

10 Meyer-Arendt J R. Introduction to Classical and Modern Optics. 2nd Ed. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1984

11 Sears F W. Optics. Reading. Massachusetts: Addison-Wesley, 1949

12 Goodman J W. Introduction to Fourier Optics. New York: McGraw-Hill, 1968
中译本：顾得门 J W. 傅里叶光学导论. 詹达三等译. 北京：科学出版社，1976

13 Gerrard A, Burch J M. Introduction to Matrix Methods in Optics. New York: Wiley, 1975

14 久保田广. 波动光学. 刘瑞祥译. 北京：科学出版社，1983

15 赵凯华. 新概念物理教程(光学). 北京：高等教育出版社，2004

16 梁铨廷. 物理光学. 修订版. 北京：机械工业出版社，1987

17 母国光，战元龄. 光学. 北京：人民教育出版社，1979

18 赵达尊，张怀玉. 波动光学. 北京：宇航出版社，1988
19 蔡履中，王成彦. 光学. 济南：山东大学出版社，1992
20 蔡履中，王成彦，周玉芳. 光学. 修订版. 济南：山东大学出版社，2002

二、作者部分教学研究论文目录

1 蔡履中. 非共面多光束干涉及其在制作周期性微结构中的应用(Ⅰ)：一般分析及二维周期结构. 大学物理，2006，25(2)：1～5
2 蔡履中. 非共面多光束干涉及其在制作周期性微结构中的应用(Ⅱ)：三维周期结构. 大学物理，2006，25(3)：1～6
3 蔡履中. 偏振器的物理意义及圆偏振器的 Jones 矩阵——评“关于圆偏振器”一文. 大学物理，2005，24(1)：15～17
4 蔡履中. 在基础光学教学中贯彻以人为本的素质教育思想的探讨与实践. 大学物理，2004，23(4)：47～51
5 蔡履中. 两圆偏振光以及线偏振光和圆偏振光干涉图样的衬比度. 大学物理，2004，23(1)：16～18
6 蔡履中. 菲涅耳衍射与夫琅禾费衍射公式对自由传播问题的自洽性. 大学物理，2002，21(10)：3～6
7 蔡履中等. 菲涅耳衍射在标度-距离变换下的相似性. 山东大学学报(自然科学版)，2001，36(1)：56～61
8 蔡履中等. 单轴晶体中光折射的图解计算及会聚偏振光干涉的定量分析. 大学物理，2001，20(1)：6～11
9 蔡履中. 夫琅禾费衍射场的相位弯曲及其对光传输和成像的影响. 大学物理，2001，20(7)：7～10
10 蔡履中等. 用实际偏振片检测光的偏振态. 物理实验，2000，8：10～12
11 蔡履中等. 光学三维显示技术. 现代显示，1996，1：39～54
12 蔡履中. Goos-Hänchen 位移的直观解释与简单推导. 大学物理，1994，4：6～8
13 蔡履中等. 细光束斜入射时一维及正交光栅的衍射图样. 物理实验，1993，3：100～102
14 蔡履中. 圆对称孔径函数菲涅耳衍射场的轴向分布及成像特性. 山东大学学报(自然科学版)，1992，3：320～330
15 蔡履中. 镜面散射光干涉条纹的观察与分析. 大学物理，1992，9：15～17
16 蔡履中等. 椭圆偏振光矢量的旋转速度与等面积定理. 物理通报，1990，7：5～6
17 蔡履中. 波动光学中位相规定的自洽性. 大学物理，1990，5：12～14
18 蔡履中. 平面全息图成像的几何特性. 山东大学学报(自然科学版)，1990，1：52～59
19 蔡履中. 光源宽度对光栅分辨本领的影响. 大学物理，1985，10：21～23
20 蔡履中. 全息图成像的观察与讨论. 山东大学学报(自然科学版)，1984，3：112～115
21 蔡履中. 全反射时波场与能流的时空特性. 大学物理，1984，11：7～12
22 蔡履中. 一般平面光栅多重成象性质的分析和应用. 山东大学学报(自然科学版)，1983，4：

65～73

23 蔡履中. 物理教师的“教书”与“教人”——试论物理教学中的世界观教育. 教学通讯(理科版),(连载)1983,9:31～33;10:29～32

24 蔡履中等. 全息透镜的成像特性. 光学学报,1983,6:529～534

25 蔡履中等. 彩虹全息图成像的傅里叶分析. 物理学报,1982,8:1020～1029

附　录

附录Ⅰ　常用物理常数表

量	符　号	数　值	单　位
真空中光速	c	2.99792458×10^{8}	$m\cdot s^{-1}$
真空磁导率	μ_0	$4\pi\times10^{-7}=1.2566370614\times10^{-6}$	$N\cdot A^{2}$
真空电容率(介电常量)	ε_0	$8.854187817\times10^{-12}$	$F\cdot m^{-1}$
普朗克常量	h	6.6260693×10^{-34}	$J\cdot s$
玻尔兹曼常量	k	1.3806505×10^{-23}	$J\cdot K^{-1}$
元电荷(电子电量)	e	1.60217653×10^{-19}	C
电子静止质量	m_e	9.1093826×10^{-31}	kg
斯特藩-玻尔兹曼常量	σ	5.670400×10^{-8}	$W\cdot m^{-2}\cdot K^{4}$
维恩常数	b	2.8977685×10^{-3}	$m\cdot K$
电子伏	eV	1.60217653×10^{-19}	J

资料来源:国际科技数据委员会(Committee on Data for Science and Technology,CODATA)2002年正式发表的推荐值.

附录Ⅱ　一些光学介质的折射率

(在常温和常压下,$\lambda=589.3$ nm)

介　质	折射率	介　质	折射率
真空	1	食盐	1.544
氦	1.000036	火石玻璃(纯)	1.60～1.62
空气(标准条件下)	1.0002926	冕牌玻璃(掺杂)	1.485～1.755
二氧化碳	1.00045	溴	1.661
冰	1.31	火石玻璃(掺杂)	1.523～1.925
水(20°)	1.333	金刚石	2.419
冰晶石	1.338	硫化汞	3.02
酒精	1.36	磷化镓	3.5
甘油	1.4729	砷化镓	3.927
冕牌玻璃(纯)	1.50～1.54	硅	4.01

资料来源:www.reference.com 2006年数据.

附录Ⅲ　一些典型谱线的波长

元　素	波长/nm	元　素	波长/nm
钠(Na)	589.0, 589.6	氢(H)	H_α 656.3
氦 (He)	447.1, 471.3		H_β 486.1
	492.2, 501.6		H_γ 434.0
	587.6, 667.8		H_δ 410.2
镉(Cd)	467.8, 480.0	氦氖激光器	632.8
	508.5, 643.8		1152
汞(Hg)	404.7, 407.8	氩离子激光器	488.0
	435.8, 546.1		514.5
	577.0, 579.1		

汉英名词索引

（按汉语拼音字母顺序排列，数字代表该词所在章节段）

A

阿贝，E. Abbe，4.7.3

　阿贝成像理论，Abbe's image theory，4.7.3

阿喇果，D. F. J. Arago，4.2.2

艾里，G. B. Airy，3.5.1，4.3.3

　艾里斑，Airy disk，4.3.3

　艾里函数，Airy function，3.5.1

爱因斯坦，A. Einstein，绪论，7.2.1，7.4

　爱因斯坦光电方程，Einstein's photoelectric equation，7.2.1

　爱因斯坦系数，Einstein's coefficients，7.4

B

巴俾涅，A. Babinet

　巴俾涅原理，Babinet's principle，4.1.2

半波电压，half-wave voltage，5.4.2，5.4.3

半波损失，half-wave loss，2.6.3，3.2.2，3.4，3.5

半宽度，half width，2.5.2

　角半宽度，half-angle breadth，4.3

　线半宽度，half-linear width，4.3

傍轴近似，paraxial approximation，1.2，3.2.1，4.1.3

倍频，frequency doubling，7.5

贝塞尔函数，Bessel function，4.3.3

比耶对切透镜，Billet split lens，3.2.2

标准具，etalon，3.5.2

波，wave

　波的叠加原理，superposition principle of waves，2.3.1

　波的干涉，interference of waves，2.3，2.4，3.1～3.5

　波的衍射，diffraction of waves，4.1，4.2，4.3，4.5

　波包，wave packet，6.2.3

波带片，zone plate，4.2.3
波法面，normal surface of wave，5.1.4
波前，wavefront，2.2.2
波矢量，wave vector，2.2.1
波数，wavenumber，2.2.1
谐波，harmonic wave，2.1
平面波，plane wave，2.2.1
球面波，spherical wave，2.2.1
柱面波，cylindrical wave，2.2.1
发散波，divergent wave，2.2.1
会聚波，convergent wave，2.2.1
波动方程，wave equation，2.1.2
波动光学，wave optics，绪论，2，3，4，5，6
波动说，wave theory，绪论，7.3
波粒二象性，wave-particle duality，绪论，7.3
波函数，wave function，2.2
实波函数，real wave function，2.2.1
复波函数，complex wave function，2.2.2
复振幅，complex amplitude，2.2.2
波片，wave plate，5.2.2
半波片，half-wave plate，5.2.2
四分之一波片，quarter-wave plate，5.2.2
波谱，spectra of waves，绪论
玻尔，N. Bohr，7.4
玻尔频率条件，Bohr frequency condition，7.4
玻意耳，R. Boyle，绪论
薄透镜，thin-lens，1.2.3
薄膜光学，thin film optics，3.5.3
布拉格，W. L. Bragg，4.6.2
布拉格条件，Bragg condition，4.6.2
布儒斯特，D. Brewster，2.6.1
布儒斯特角，Brewster's angle，2.6.1

C

参考光，reference beam，4.8
参量振荡，parametric oscillation，7.5
衬比度，contrast (visibility)，3.1.2
成像公式，imaging formulae，1.2，1.3

出射光瞳，exit pupil，1.4.1
穿透深度，penetration depth，2.6.5
磁光效应，mangneto-optic effect，5.5.2

D

单轴晶体，uniaxial crystal，5.1，5.2
单色光，monochromatic light，1.4.2，2.1，2.5.2，3.3.2
导波光学，waveguide optics，绪论
德布罗意，L. de Broglie，绪论
　德布罗意波长，de Broglie wavelength，7.3
笛卡儿，R. Descartes，绪论
狄拉克，P. A. M. Dirac，绪论，7.3
电磁波，electromagnetic wave，绪论，2.1.2
　电磁波谱，electromagnetic-photon spectrum，绪论
电光效应，electro-optic effect，5.4.2，5.4.3
　克尔效应，Kerr effect，5.4.2
　泡克耳斯效应，Pockles effect，5.4.3
定域，localization，3.4
　定域条纹，localized fringes，3.4
　非定域条纹，non-localized fringes，3.4
多层膜系，multilayer film system，3.5.3
多普勒，C. Doppler
　多普勒效应，Doppler effect，7.4.2
　多普勒展宽，Doppler broadening，7.4.2

E

二次谐波产生，second harmonic generation，7.5
二向色性，dichroism，5.2.1

F

F数，F number，4.4
法布里-珀罗干涉仪，Fabry-Perot interferometer，3.5.2
法拉第磁光效应，Faraday magneto-optic effect，5.5.2
反射，reflection
　反射定律，law of reflection，1.1.1
　反射率，reflectance（reflectivity），2.6
　球面反射，reflection at spherical surface，1.2.2
范西特-泽尼克定理，van Cittert-Zernike theorem，3.3.3

方解石，calcite，5.1
放大率，magnification，1.2，1.3
角放大率，angular magnification，1.2.2，1.2.5
横向放大率，lateral（transverse）magnification，1.2.2，1.2.5
非均匀波，inhomogeneous wave，2.6.5
非偏振光，unpolarized light，2.4
非线性光学，nonlinear optics，绪论，7.5
非寻常光，extraordinary light，5.1.1
费马，P. de Fermat，绪论
费马原理，Fermat's principle，1.1.2
菲涅耳 A. J. Fresnel，绪论
菲涅耳波带，Fresnel zones，4.2.1
菲涅耳波带片，Fresnel zone plate，4.2.1
菲涅耳公式，Fresnel formulae，2.6.1
菲涅耳近似，Fresnel approximation，4.1.3
菲涅耳双面镜，Fresnel double mirror，3.2.2
菲涅耳双棱镜，Fresnel bi-prism，3.2.2
菲涅耳衍射，Fresnel diffraction，4.1.3，4.2
分辨本领，resolving power，4.4
分辨率，resolution，4.4
分辨极限，limit of resolution，4.4
分波前干涉，wavefront splitting interference，3.1.3，3.2
分振幅干涉，amplitude splitting interference，3.1.3，3.4，3.5
佛光，spectra of Brocken，讨论题 4.12
符号规则，sign convention，1.2.2
辐射，radiation
辐射出射度，exitance，7.1
辐射通量，radiant flux，7.1
偶极子辐射，dipole radiation，6.3.1
热辐射，thermal radiation，7.1
自发辐射，spontaneous emission，7.4
受激辐射，stimulated emission，7.4
辐照度，irradiance，7.1
傅科，L. Focault，绪论，6.2.3
傅里叶，J. B. J. Fourier
傅里叶变换，Fourier transform，2.5.1，4.7.2
傅里叶变换光谱仪，Fourier transform spectrometer，3.4.5
傅里叶光学，Fourier optics，绪论，4.7

夫琅禾费，J. Fraunhofer
　夫琅禾费近似，Fraunhofer approximation，4.1.3
　夫琅禾费衍射，Fraunhofer diffraction，4.1.3，4.3，4.5
复折射率，complex refractive index，6.1.1，6.2.2
复振幅，complex amplitude，2.2.2
复相干度，complex degree of coherence，3.3.3

G

伽泊，D. Garbor，4.8
伽马射线，γ-ray，绪论，7.2.2
概率，probability
　概率幅，probability amplitude，7.3
干涉，interference，2.3.2，3.1～3.5
　干涉图样，interference pattern，3.2，3.4，3.5
　干涉级，order of interference，3.2，3.4，3.5
　干涉滤光片，interference filter，3.5.1
　双光束干涉，two-beam interference，3.2，3.4
　多光束干涉，multiple-beam interference，3.5
　偏振光的干涉，interference of polarized light，5.3
干涉条纹，interference fringes，3.2，3.4，3.5
　等厚条纹，fringes of equal thickness，3.4.3
　等倾条纹，fringes of equal inclination，3.4.2
干涉仪，interferometer
　法布里-珀罗（F-P）干涉仪，Fabry-Perot interferometer，3.5.2
　迈克耳孙干涉仪，Michelson interferometer，3.4.5
　迈克耳孙测星干涉仪，Michelson stellar interferometer，习题 3.18
　泰曼-格林干涉仪，Twyman-Green interferometer，习题 3.44
高反（射）膜，high-reflectance film，3.5.3
高斯公式，Gauss'formula，1.2.3
格里马耳迪，F. M. Grimaldi，绪论
各向同性介质，isotropic medium，5
各向异性介质，anisotropic medium，5
共轭，conjugate
　共轭波，conjugate wave，2.2.2
　共轭点（线，面），conjugate point (line，plane)，1.2.1
　共轭像，conjugate image，4.8
共振腔，resonance，7.4.2
功函数，work function，7.2.1

共轴球面系统，centered system of spherical surfaces，1.2.2
光波导，optical waveguide，2.6.5
光测弹性，photoelasticity，5.4.1
光程，optical path length，1.1.2
　光程差，optical path difference，3.2～3.5
光导纤维，optical fiber，绪论，1.1.1
光电效应，photoelectric effect，7.2.1
光隔离器，optical isolator，5.5.2
光计算机，optical computer，绪论
光焦度，(focal) power，1.2.4，1.2.5
光阑，stop
　孔径光阑，aperture stop，1.4.1
　视场光阑，field stop，1.4.1
光路可逆性原理，principle of reversibility of light ray，1.1.1，1.1.2
光谱，spectrum of light，绪论，3.5.2，4.6，6.1，6.2，6.3
　光谱分析，spectral analysis，3.4.5，6.1.2
　光谱仪（分光仪），spectroscope，3.4.5，3.5.2，4.6
光强，intensity of light，2.1.2，2.3，2.4，2.6，3.1～3.5，4.1～4.6，5.3，6.1，6.3
光栅，grating
　光栅方程，grating equation，4.6.1
　阶梯光栅，echelon，4.6.2
　朗奇光栅，Ronchi grating，4.5，4.6
　闪耀光栅，blazed grating，4.6.2
　三维光栅，three-dimensional grating，4.6.2
　正弦光栅，sine grating，4.7.1
光速，light velocity，绪论，2.1.2，6.2.3
　射线速度，ray velocity，5.1.4
　相速度，phase velocity，5.1.4，6.2.3
　群速度，group velocity，6.2.3
光通讯，optical communication，绪论，7.4.3
光瞳，pupil，1.4.1
　出射光瞳，exit pupil，1.4.1
　入射光瞳，entrance pupil，1.4.1
光纤光学，fiber optics，绪论，1.1.1
光线传输矩阵，ray transfer matrices，1.2.6
　平移矩阵，translation matrix，1.2.6
　球面折射矩阵，refraction matrix of a spherical surface，1.2.6
　球面反射矩阵，reflection matrix of a spherical surface，1.2.6

光学拍，optical beats，2.3.6
光学信息处理，optical information processing，绪论，4.7
光学镀膜，optical coating，3.4.5，3.5.2，3.5.3
光学整流，optical rectification，7.5
光折变材料，photorefractive materials，2.3.1，7.5
光轴，optical axis，1.2，5.1.1
光子，photon，7.1～7.3
　光子能量，energy of a photon，7.1～7.3
　光子动量，momentum of a photon，7.2，7.3
光子晶体，photonic crystals，讨论题 3.11
光压，the pressure of light，7.2.3

H

黑体，blackbody，7.1.3
　黑体辐射，blackbody radiation，7.1.3，7.1.4，7.1.5
横向电偏振波，transverse electric（TE）wave，2.6.1
横向磁偏振波，transverse magnetic（TM）wave，2.6.1
横向相干宽度，transverse（lateral）coherent width，3.3.1
红外线，infrared（ray），绪论，6.1
虹霓，rainbow and the second rainbow，讨论题，1.7
胡克，R. Hooke，绪论
互强度，mutual intensity，3.3.3
互相干，mutual coherence，3.3.3
互相干函数，mutual coherence function，3.3.3
惠更斯，C. Huygens，绪论
　惠更斯原理，Huygens' principle，4.1.2，5.1.2
　惠更斯-菲涅耳原理，Huygens-Fresnel principle，4.1.2
　惠更斯作图法，Huygens' construction，5.1.3

J

基尔霍夫，G. R. Kirchhoff
　基尔霍夫边界条件，Kirchhoff's boundary conditions，4.1.2
　基尔霍夫衍射理论，Kirchhoff's diffraction theory，4.1.2
　基尔霍夫热辐射定律，Kirchhoff's radiation law，7.1.2
基点（面），cardinal point（plane），1.2.5
激光（受激辐射光放大），light amplification by stimulated emission of radiation，7.4
激光器，laser，7.4
　氦氖激光器，He-Ne laser，7.4.2

红宝石激光器，Ruby laser，7.4.2
氩离子激光器，Ar^+ laser，7.4.2
半导体激光器，semiconductor lasers，7.4.3
固体激光器，solid-state laser，7.4.3
集成光学，integrated optics，绪论
几何光学，geometric optics，1.1～1.4
假彩色编码，pseudocolor encoding，讨论题 4.13
焦点，focus，1.2，1.3
焦距，focal length，1.2，1.3
焦面，focal plane，1.2，1.3
角频率，angular frequency，2.1.2，2.2
节点（面），nodal point（plane），1.2.5
晶体，crystals，5.1～5.4
正晶体，positive crystal，5.1～5.3
负晶体，negative crystal，5.1～5.3
精细度，finesse，3.5
精细度系数，coefficient of finesse，3.5
矩阵方法，matrix method
折射矩阵，refraction matrix，1.2.6
平移（传输）矩阵，translation matrix，1.2.6
系统矩阵，system matrix，1.2.6
琼斯矩阵，Jones matrix，5.6

K

开普勒望远镜，Kepler telescope，1.3.4
开尔文，W. T. Kelvin，绪论
康普顿，A. H. Compton
康普顿效应，Compton effect，7.2.2
克尔效应，Kerr effect，5.4.2
可见光，visible light，绪论
空间，space
空间滤波，spatial filtering，4.7.3
空间频率，spatial frequency，2.2.1
空间周期，spatial period，2.2.1
孔径，aperture，1.4.1，4.3，4.4，4.5，4.7

L

拉曼，C. V. Raman

拉曼散射，Raman scattering，6.3.2
受激拉曼散射，stimulated Raman scattering，7.5
拉格朗日-亥姆霍兹定理，Lagrange-Helmholtz theorem，1.2.2
劳埃德镜，Lloyd mirror，3.2.2
棱镜，prism
棱镜最小偏向角，minimum deviation angle of a prism，1.1.1
粒子说，corpuscular theory，绪论，7.3
粒子数反转，population inversion，7.4.1
量子，quantum，7.1.5
量子光学，quantum optics，7

M

马吕斯定律，Malus' law，2.4.4
迈克耳孙干涉仪，Michelson interferometer，3.4.5
麦克斯韦，J. W. Maxwell，绪论
麦克斯韦方程组，Maxwell equations，2.1.2
漫射，diffusion，1.1.1
梅斯林实验，Meslin's experiment，3.2.2
密立根实验，Millikan's experiment，7.2.1
米氏散射，Mie scattering，6.3.1
莫阿条纹（云纹），moire fringes，2.3.6，讨论题 2.3
模，模式，mode
本征模，intrinsic mode，7.1.4
横模，transverse mode，7.4.2
纵模，longitudinal mode，7.4.2
目镜，eyepiece，1.3.2，1.3.3，1.3.4

N

内反射，internal reflection，1.1.1，2.6
牛顿，I. Newton，绪论
牛顿公式，Newton's formula，1.2.3
牛顿环，Newton's rings，3.4.3

O

欧几里得，Euclid，绪论
偶极子，dipole，
偶极子辐射，dipole radiation，6.3.1

P

拍，beats
光学拍，optical beats，2.3.6
拍频，beat frequency，2.3.6
偏振，polarization，2.4，2.6.4，5.1～5.6
线偏振，linear polarization，2.4.1
圆偏振，circular polarization，2.4.1
椭圆偏振，elliptical polarization，2.4.1
偏振度，degree of polarization，2.4.3
偏振态，state of polarization，2.4
偏振光，polarized light
部分偏振光，partially polarized light，2.4.3
非偏振光，unpolarized light，2.4.2
椭圆偏振光，elliptically polarized (elliptical) light，2.4.1
线偏振光，linearly polarized (linear) light，2.4.1
圆偏振光，circularly polarized (circular) light，2.4.1
左旋圆偏振光，left-handed circularly polarized (left-circular) light，2.4.1
右旋圆偏振光，right-handed circularly polarized (right-circular) light，2.4.1
偏振棱镜，polarizing prism，5.2.1
格兰棱镜，Glan prism，5.2.1
洛匈棱镜，Rochon prism，5.2.1
尼科尔棱镜，Nicol prism，5.2.1
渥拉斯顿棱镜，Wollaston prism，5.2.1
偏振器，polarizer
线偏振器，linear polarizer，2.4.4，5.2.1
圆偏振器，circular polarizer，5.2.3，5.6
线栅偏振器，wire-grid polarizer，2.4.4
坡印亭矢量，Poynting vector，2.1.1，5.1.4
泊松亮点，Possion's spot，4.2.2
泡克耳斯效应，Pockels effect，5.4.3
谱，spectrum
光谱分析，spectrum analysis，6.1.2
谱密度，spectral density，7.1.2
普朗克，M. Planck，绪论，7
普朗克常量，Plank's constant，7.1.5
普朗克量子假设，Planck's quantum hypothesis，7.1.5
普朗克公式，Planck's formula，7.1.5

Q

倾斜因子，inclination factor，4.1.2，4.2
琼斯，R. C. Jones
　琼斯矩阵，Jones matrix，5.6
　琼斯矢量，Jones vector，5.6
屈光度，dioptric power（diopter），1.2.3
全（内）反射，total internal reflection，1.1.1，2.6
　临界角，critical angle，1.1.1，2.6
　受抑全内反射，frustrated total internal reflection，2.6.5
全息图，hologram，4.8
　菲涅耳全息图，Fresnel hologram，4.8
　同轴全息图，on-axis hologram，4.8
　离轴全息图，off-axis hologram，4.8
全息学，holography，4.8
缺级，missing order，4.5.1
群速度，group velocity，6.2.3

R

热辐射，thermal radiation，7.1.1
人眼，eye，1.3.1，4.4
瑞利，J. W. Rayleigh
　瑞利判据，Rayleigh's criterion，4.4
　瑞利散射，Rayleigh scattering，6.3.1
　瑞利-金斯公式，Rayleigh-Jeans formula，7.1.4

S

散斑，speckle，4.5.2
散射，scattering
　瑞利散射，Rayleigh scattering，6.3.1
　米氏散射，Mie scattering，6.3.1
　拉曼散射，Raman scattering，6.3.2
散射光的干涉，interference of scattered light，讨论题 3.9
色差，chromatic aberration，1.4.2
色散，dispersion，1.4.2，3.5.2，4.6.1，5.5.1，6.2.1，6.2.2
　角色散，angular dispersion，3.5.2，4.6.1
　线色散，linear dispersion，3.5.2，4.6.1
　正常色散，normal dispersion，6.2.1

反常色散，anomalous dispersion，6.2.1
旋光色散，rotatory dispersion，5.5.1
色分辨本领，chromatic resolving power，3.5.2，4.6.1
射线面，ray surface，5.1.4
蜃景，mirage，1.1.2
矢量图解法，graphic method of vector（phasor）addition，2.2.3，4.2.1，4.2.2，4.3.1，4.5.1
石英，quartz，5.1，5.2，5.5
视场，field
视场角，field angle，1.4.1
视场光阑，field stop，1.4.1
受激，stimulated
受激辐射，stimulated emission，7.4.1
受激吸收，stimulated absorption，7.4.1
受激拉曼散射，stimulated Raman scattering，7.5
数值孔径，numerical aperture（N. A.），4.4
双面镜，bi-mirror（double mirror），3.2.2
双棱镜，bi-prism（double prism），3.2.2
双折射，birefringence（double refraction），5.1～5.4
应力双折射，stress birefringence，5.4.1
双轴晶体，biaxial crystal，5.1.1，5.4.3
斯涅耳，W. Snell，绪论
斯涅耳（反射）定律，Snell's law，1.1.1
斯特藩-玻尔兹曼定律，Stefan-Boltzmann law，7.1.3
斯托克斯，G. G. Stokes
斯托克斯线，Stokes line，6.3.2
反斯托克斯线，anti-Stokes line，6.3.2
斯托克斯（倒逆）关系，Stokes（reciprocal）relations，3.5.1
斯托克斯参量，Stokes parameters，讨论题 5.9
索累补偿器，Soleil compensator，5.2.2

T

泰勒判据，Taylor criterion，3.5.2
透镜，lens
薄透镜，thin lens，1.2.3
透镜制造者公式，lens-maker's formula，1.2.3
透镜组，lens combination，1.2.5
梯度折射率光学，gradient index（GRIN）optics，1.1.2，讨论题 1.8
调制，modulation，2.3.6

透射率，transmittance，2.6，4.7

W

外反射，external reflection，1.1.1，2.3.4，2.6，3.2.2，3.4
望远镜，telescope
　开普勒望远镜，Kepler telescope，1.3.3
　伽利略望远镜，Galilean telescope，1.3.3
微波，microwave，绪论
维恩位移定律，Wien's displacement law，7.1.3
物光，object wave，4.8
物镜，objective，1.3.3，1.3.4
物理光学，physical optics，绪论，2～7

X

X射线，X-rays，4.6.2，7.2.2
吸收，absorption
　吸收带，absorption band，6.1.1
　吸收系数，coefficient of absorption，6.1.1
　选择吸收，selective（preferential）absorption，6.1.2
显微镜，microscope，1.3.3
线性介质，linear medium，2.3.1
线宽，linewidth，7.4.1，7.4.2
　自然线宽，natural linewidth，7.4.1
　碰撞展宽，collision broadening，7.4.2
　多普勒展宽，Doppler broadening，7.4.2
线性介质，linear medium，2.3.1
线性吸收，linear absorption，6.1.1
相对孔径，relative aperture，4.4
相对论，relativity，7.2.2
相幅矢量，phasor，2.2.3
相干的，coherent，3.1.1
相干，相干性，coherence，3.1～3.5，4.1～4.8，5.3，7.4
　部分相干性，partial coherence，3.3.3
　空间相干性，spatial coherence，3.3.1
　时间相干性，temporal coherence，3.3.2
　相干长度，coherence length，3.3.2
　相干时间，coherence time，3.3.2
　相干面积，area of coherence，3.3.1

相干度，degree of coherence，3.3.3
相干叠加，coherent superposition，2.3，3.1～3.5，4.1～4.3，4.5，5.3
相干条件，coherence conditions，3.1.1
互相干函数，mutual coherence function，3.3.3
自相干函数，self-coherence function，3.3.3
复相干度，complex degree of coherence，3.3.3
相关，correlation，3.3.3
相位，phase，2.1.2，2.2，5.3.3
相差，phase difference，2.3.2，2.3.5，3.1.1，3.2，3.4，3.5，5.3
相速，phase velocity，6.2.3
相移，phase shift，2.3.4，2.6.3
相位光栅，phase grating，4.6
相位延迟，phase delay，5.2.2
相位延迟器（片），phase retarder，5.2.2
像，image
实像，real image，1.2.1
虚像，virtual image，1.2.1
像差，aberration，1.4.2
单色像差，monochromatic aberration，1.4.2
球差，spherical aberration，1.4.2
慧差，coma，1.4.2
场曲，field curvature，1.4.2
畸变，distortion，1.4.2
像散，astigmatism，1.4.2
色差，chromatic aberration，1.4.2
横向色差，lateral chromatic aberration，1.4.2
轴向色差，axial chromatic aberration，1.4.2
消光，extinction，5.2.5，5.3.1，5.5
谐振腔，resonator，7.4
旋光性，optical activity，5.5
旋光色散，rotatory dispersion，5.5.1
旋光率，specific rotatory power，5.5.1
磁致旋光，Faraday effect，5.5.2
寻常光，ordinary light，5.1.1

Y

亚稳态，metastable state，7.4
赝视像，pseudoscopic image，4.8

衍射，diffraction，4
菲涅耳衍射，Fresnel diffraction，4.2
圆孔，circular aperture，4.2.2
圆屏，circular obstacle，4.2.2
夫琅禾费衍射，Fraunhofer diffraction，4.3，4.5
单缝，single slit，4.3.1
矩孔，rectangular aperture，4.3.2
圆孔，circular aperture，4.3.3
多缝，many slits（multiple slits，multislits），4.5.1
杨，T. Young，绪论，3.2，3.3
杨氏实验，Young's experiment，3.2.1，3.3，7.3.2
隐失波，evanescent wave，2.6.5
液晶，liquid crystal，5.1.1
原始像，primary image，4.8
跃迁，transition，6.3.2，7.4
跃迁概率，transition probability，7.4

Z

增益，gain，7.4.2
增反膜，high-reflectance film，3.5.3
增透膜，antireflection film，3.5.3
折射，refraction，1.1.1，1.2，2.6
折射定律，law of refraction，1.1.1
折射率，refractive index（index of refraction），1.1.1，2.1.2，5.1.4，6.1.1
折射率椭球，index ellipsoid，5.1.4
折射矩阵，refraction matrix，1.2.6
球面折射，refraction at spherical surface，1.2.2
正交偏振，orthogonal polarization，5.6
正弦光栅，sine grating，4.7.1
正弦条件，sine condition，1.4.2
质能关系，relation between mass and energy，7.2.2
质速关系，relation between mass and velocity，7.2.2
周期，period
空间周期，spatial period，2.2.1
时间周期，temporal period，2.2.1
主点，principal point，1.2.5
主光线，principal ray，1.2
主极大，principal maximum，4.5.1

主截面，principal section，5.1.1
主轴，principal axis，1.2
主折射率，principle index of refraction，5.1.2
驻波，standing wave，2.3.4，7.1.4
准单色光，quasi-monochromatic light，2.1.2
紫外线，ultraviolet ray，绪论
紫外灾难，ultraviolet catastrophe，7.1.4
自然光，natural light，2.4.2
自由光谱范围，free spectral range，3.5.2，4.6.1
自发辐射，spontaneous emission，7.4.1
自聚焦，self-focusing，7.5，讨论题 1.9
自相干函数，self-coherence function，3.3.3

部分习题答案

第1章　几何光学

1.1　$\beta=\arcsin\dfrac{d}{R}\sqrt{n^2-\sin^2 i}$.

1.3　$\dfrac{R}{d}\geqslant 2$.

1.4　(1) $i_{1\max}=\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{n_1^2-n_2^2}}{n_0}\right)$;(2) $n_0\sin i_{1\max}=\sqrt{n_1^2-n_2^2}$;(3) $n_0\sin i_1=0.1735$, $i_1=9.99°$.

1.6　(1) $n=1.670$;(2) $\delta_{\min}=11°4'$.

1.8　$s_2'=-33.3$ cm.

1.9　38.5 mm.

1.10　$s_2'=9.60$ cm.

1.12　(1) $f=f'=8$ cm;(2) $s'=40$ cm, $y'=-8$ cm.

1.13　(1) $s_1'=-20$ cm, $s_2'=60$ cm, $\beta=-1$;(2) $s_1'=72$ cm, $s_2'=70$ cm, $\beta=2$.

1.14　(1) $f=f'=-25$ cm;(2) $s'=-11.1$ cm;(3) $\beta=0.555$.

1.15　(1) $s=30$ cm, $s=10$ cm;(2) $\beta=\dfrac{1}{4}$时, $r=0.53$ m; $\beta=-\dfrac{1}{4}$时, $r=-0.53$ m.

1.16　23.5 cm/s,向凹面镜顶点靠近.

1.17　$\dfrac{8}{3}v$.

1.18　$s_3'=8$ cm; $\beta=-\dfrac{1}{5}$.

1.19　$\dfrac{f'_{\text{二硫化碳}}}{f_{\text{空气}}}=-8.64$.

1.20　$s_2'=30$ cm, $\beta=-3$.

1.21　$r=-13.85$ cm, $\Phi=19.2$ D.

1.22　$n=1.35$.

1.23　$v=\dfrac{(a-2f')a}{(a-f')^2}u$.

1.24　(1) $\dfrac{\text{像长}}{\text{物长}}=\dfrac{2}{3}$;(2) A 端.

1.26　$s_1=5.81$ cm, $s_2=9.19$ cm.

1.27　$s_3'=\dfrac{2}{3}f'$, $\beta=-\dfrac{1}{3}$.

1.28 $s_3'=2$ cm，$y'=-\frac{4}{3}$ cm.

1.29 $s_3'=15$ cm，$\beta=-\frac{5}{2}$.

1.30 $s_5'=-10$ cm，$y'=-\frac{1}{2}$ cm.

1.31 $s'=10.34$ cm，$y'=0.17$ cm.

1.32 $s_2'=10$ cm，$\beta=-2.0$.

1.38 $f=38.5$ cm，$f'=38.5$ cm，$x_H=-27$ cm，$x_{H'}=-27$cm，
$\overline{FN}=38.5$ cm，$\overline{F'N'}=38.5$ cm.

1.39 最终像位于透镜右球面右方 18.8 cm 处，$\beta=-0.235$.

1.42 需配发散透镜，−40 度；需配会聚透镜，300 度.

1.43 $M=5$，$\Delta x=0.83$ cm；$s=4.17$ cm，$\beta=6$.

1.44 $M=-133$；$s=1.06$ cm，$\beta=-152.5$.

1.45 $M=-800$；$\Delta x_e\approx 0.6$ mm，$\Delta x_o\approx 0.0004$ mm.

1.46 $f_e=-4$ cm，$f_o'=16$ cm.

1.47 $s=\frac{Md}{(M-1)b}\left(\frac{Md}{M-1}+b\right)$.

1.50 圆孔光阑；$s=-7.5$ cm，出瞳孔径 5 cm.

1.51 圆孔光阑为孔阑，入瞳位于 L_1 之右 4.5 cm 处，孔径为 3 cm；出瞳位于 L_2 之左 6 cm 处，孔径为 6 cm.

1.52 (1) 物镜 L_o 为孔阑兼入瞳，出瞳位于 L_e 之右 24 cm 处，孔径为 1 cm；
(2) 圆孔光阑为场阑，入窗与出窗位于无限远处；(3) $\omega_o=27'$，$\omega_e'=2°17'$.

第 2 章　波动光学通论

2.2 $E_0\approx 1.0\times 10^3$ V/m.

2.3 5.45×10^{13}；5.45×10^5.

2.4 (1) $\nu=10^{14}$ Hz，$\lambda=3$ μm，$E_{0y}=3$V/m，$\varphi_0=\frac{\pi}{3}$；

(2) 沿 z 轴正向传播，电矢量振动沿 y 轴方向；

(3) $H_x=-7.95\times 10^{-3}\cos\left[2\pi\times 10^{14}\left(\frac{z}{c}-t\right)+\frac{\pi}{3}\right]$(安/米)，$H_y=H_z=0$.

2.5 $\nu=5\times 10^{14}$ Hz，$\lambda=390$ nm，$n=1.54$.

2.6 (1) $k=|\boldsymbol{k}|=5\sqrt{2}$ m^{-1}，$\cos\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{10}$，$\cos\beta=\frac{2\sqrt{2}}{5}$，$\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

(2) $\lambda=\frac{\sqrt{2}\pi}{5}$ m；(3) $\nu=\frac{15\sqrt{2}\times 10^8}{2\pi}$ Hz；

(4) $v=3\times 10^8$ m/s；(5) $f_x=\frac{3}{2\pi}$ m^{-1}，$f_y=\frac{2}{\pi}$ m^{-1}，$f_z=\frac{5}{2\pi}$ m^{-1}.

2.7 $E(\boldsymbol{r},t)=E_0\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}z-3\times10^8t\right)\right]$;

$f_x=\frac{\sqrt{3}}{2\lambda}, f_y=0, f_z=-\frac{1}{2\lambda}; d_x=\frac{2\sqrt{3}}{3}\lambda, d_y=\infty, d_z=2\lambda.$

2.8 (1) $\tilde{E}(\boldsymbol{r},t)=A\exp[\mathrm{i}(2x-3y+4z-5t)], \tilde{E}(\boldsymbol{r})=A\exp[\mathrm{i}(2x-3y+4z)]$;

(2) $f_x=\frac{1}{\pi}\ \mathrm{cm}^{-1}, f_y=-\frac{3}{2\pi}\ \mathrm{cm}^{-1}, f_z=\frac{2}{\pi}\ \mathrm{cm}^{-1}; d_x=\pi\ \mathrm{cm}, d_y=-\frac{2\pi}{3}\ \mathrm{cm},$

$d_z=\frac{\pi}{2}\ \mathrm{cm}, f=\frac{\sqrt{29}}{2\pi}\ \mathrm{cm}^{-1}, \lambda=\frac{2\pi}{\sqrt{29}}\ \mathrm{cm}.$

2.9 沿 OA 方向：$E(\boldsymbol{r},t)=E_0\cos\left[\frac{\sqrt{2}}{2}k(x+y)-\omega t+\varphi_0\right]$;

$\tilde{E}(r)=E_0\exp\left\{\mathrm{i}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}k(x+y)+\varphi_0\right]\right\}$;

$f_x=\frac{\sqrt{2}k}{4\pi}, f_y=\frac{\sqrt{2}k}{4\pi}, f_z=0; d_x=\frac{2\sqrt{2}\pi}{k}, d_y=\frac{2\sqrt{2}\pi}{k}, d_z=\infty.$

沿 OB 方向：$E(\boldsymbol{r},t)=E_0\cos\left[\frac{\sqrt{2}}{2}k(x+z)-\omega t+\varphi_0\right]$;

$\tilde{E}(r)=E_0\exp\left\{\mathrm{i}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}k(x+z)+\varphi_0\right]\right\}$;

$f_x=\frac{\sqrt{2}k}{4\pi}, f_y=0, f_z=\frac{\sqrt{2}k}{4\pi}; d_x=\frac{2\sqrt{2}\pi}{k}, d_y=\infty, d_z=\frac{2\sqrt{2}\pi}{k}.$

沿 OC 方向：$E(\boldsymbol{r},t)=E_0\cos\left[\frac{\sqrt{3}}{3}k(x+y+z)-\omega t+\varphi_0\right]$;

$\tilde{E}(r)=E_0\exp\left\{\mathrm{i}\left[\frac{\sqrt{3}}{3}k(x+y+z)+\varphi_0\right]\right\}$;

$f_x=f_y=f_z=\frac{\sqrt{3}k}{6\pi}; d_x=d_y=d_z=\frac{2\sqrt{3}\pi}{k}.$

2.16 $E_0=10\ \mathrm{V/m}, \tan\delta=\frac{4}{3}, E=10\cos\left[\arctan\frac{4}{3}-2\pi\times10^{15}t\right](\mathrm{V/m}).$

2.17 (1) $\tilde{E}_1(z)=A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}, \tilde{E}_2(z)=-A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}$;

(2) $\tilde{E}(z)=-2\mathrm{i}A\sin kz, E(z,t)=-2A\sin kz\sin\omega t, I=4A^2\sin^2kz.$

2.18 干涉条纹为一组垂直于 x 轴平行于 y 轴的平行等距直线，$\Delta x=\frac{\lambda}{2\sin\theta}$;

3.63 μm，0.633 μm，0.365 μm；$\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，0.316 μm.

2.19 (1) 间距：$d'_x=\frac{\lambda f}{a}, d'_y=\infty.$

2.21 $I=A_1^2+A_2^2+A_3^2+2A_1A_2\cos(kx\sin\theta_1)+2A_1A_3\cos[kx(\sin\theta_1+\sin\theta_2)]$
$+2A_2A_3\cos(kx\sin\theta_2)$;
$I=4I_1[1+\cos(kx\sin\theta)]^2.$

2.22 $I(P)=A^2\{3+2\cos(2\varphi_0)+4\cos[k(r-z)]\cos\varphi_0\}, r-z=\frac{\lambda}{2}.$

2.23 $\lambda=0.5\ \mu m$.

2.27 0.579 mm.

2.28 $p=0.3$.

2.29 $\theta=45°,60°,69.3°$.

2.31 (1) $\frac{I_L}{I_n}=1$;(2) $p=\frac{1}{2}$;(3) $\frac{I_m}{I_M}=\frac{1}{3}$;(4) $\frac{I_{透射}}{I_M}=\frac{5}{6}$.

2.32 $\frac{I_L}{I_n}=2$.

2.39 $\Delta\lambda=5.24\times10^{-4}$ nm;$\Delta\nu=4.3\times10^{8}$ Hz.

2.41 $i_b=\arctan\sqrt{2}=54.7°$.

2.42 $T=0.92$.

2.44 (1) $p=0.393$;(2) $p=0.08$;(3) $p=0.159$.

2.45 $\mathscr{R}_s=0.148,\mathscr{R}_p=0;\mathscr{T}_s=0.852,\mathscr{T}_p=1$.

2.47 $-80.2°;84.2°$.

2.50 $z_0=285$ nm.

第3章 光的干涉

3.1 (1) $1,\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{\sqrt{5}}{3}$;(2) $\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{15}}{6},\frac{\sqrt{15}}{6}$.

3.2 2.86 mm,3.93 mm,5 mm.

3.3 587 nm.

3.4 0.45 mm;条纹整体上移;$n=1.52$.

3.5 509 nm.

3.6 (1) 一组亮暗相间的平行等距直条纹,垂直于 S_1S_2 连线方向,$e=0.25$ mm;(2) 条纹形状,取向,间距不变,但条纹总数减少;(3) $e=0.26$ mm.

3.7 $V=\frac{2\cos\alpha\cos\beta}{\cos^2\alpha+\cos^2\beta}\cos(\alpha+\beta)$.

3.9 (1) 1.0 mm;(2) 3.

3.10 (1) 8.84×10^{-3} rad$=0.506°$;(2)10.6 mm.

3.11 (1) 0.1875 mm;(2) 2.30 mm;(3) 12 条.

3.12 0.813 mm,6 条.

3.13 $a=0.6$ mm.

3.14 屏距透镜 49.5 m,24.75 m,59 条.

3.16 $b_M=0.3164$ mm,$b_p=0.079$ mm.

3.17 1.2 mm;2.4 mm.

3.18 1.86×10^{-7} rad$=0.038''$.

3.19 3.9×10^{-3} mm^2.

3.20 $b_M=\frac{\lambda z}{2(n-1)\theta(z-l)}$；$b_p=\frac{1}{4}b_M$.

3.21 (2) 0.324 mm.

3.22 $\Delta\lambda=1.38\times10^{-9}$ mm；$\Delta\nu=10^9$ Hz；$\Delta t=10^{-9}$ s.

3.23 $\Delta\lambda=5$ nm.

3.26 (1) 亮斑；(2) 13.4 mm；(3) 0.671 mm.

3.27 6.

3.28 104 nm.

3.29 606 nm.

3.30 膜正面反射最强：677.4 nm，406.4 nm；膜透射最强：508.1 nm.

3.31 3.88×10^{-5} rad$\approx8''$.

3.32 (1) 膜左薄右厚，凸起，反之，凹陷；(2) 100 nm.

3.33 0.35 mm.

3.34 (1)0.684 m；(2)1 mm.

3.35 54.3 cm.

3.36 0.999 m，697 nm.

3.37 $r_m=\sqrt{\frac{m\lambda R_1R_2}{R_1+R_2}}$ $(m=1,2,\cdots)$.

3.38 $r_m=\sqrt{\frac{m\lambda R_1R_2}{R_2-R_1}}$ $(m=1,2,\cdots)$.

3.40 628.9 nm.

3.41 10.9 μm.

3.42 589.6 nm，589.0 nm.

3.43 15.95 cm；2.476×10^5.

3.44 (1) 相当于牛顿环图样；(2) 4.05 mm.

3.46 (1) $F=80$；(2) 0.447；(3)14.05；(4)0.976.

3.47 3.16×10^{-2} rad.

3.48 1.064 mm.

3.49 (1) 9.48×10^5；(2) 0.96 mm.

3.50 (1) 2×10^5；(2) 2.5×10^{-3} nm；(3) 3.11×10^7，1.61×10^{-5} nm.

第4章 光的衍射

4.1 $z\geqslant20$ m.

4.2 $F(\theta_1,\theta)=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)$；11.5°，25.8°.

4.4 (1) $\rho_1=0.548$ mm；(2) 333.3；(3) 0.9999.

4.5 4.09 m，1.36 m，0.818 m；2.05 m，1.02 m，0.682 m.

4.6 4.50 m，1.41 m，0.834 m；2.14 m，1.05 m，0.693 m.

4.7 1.88 mm,3.26 mm;2.66 mm,3.76 mm.

4.8 2;减小.

4.9 $\frac{1}{4}$.

4.10 $\frac{5}{4}$;5;$\frac{1}{8}$.

4.11 $\frac{3}{2}A$;$\frac{9}{4}I$.

4.12 6.16 mm.

4.13 (1) $\frac{1}{100}$;(2) 503.1 mm.

4.14 (1) 1.56 m,0.521 m,0.312 m;(2)4.43 m.

4.15 0.171.

4.16 0.0162,0.00827.

4.17 6.93 mm.

4.18 (2) 0.5 mm.

4.19 37×37 mm^2.

4.20 12.2 μm.

4.21 290 km;292 m;121 m.

4.23 12.3 km.

4.24 1.34 μm.

4.25 1.34×10^{-5} rad;10 倍.

4.26 不能分辨.

4.27 (1) $\frac{1}{2}$;(2) 203 nm;(3)130 nm.

4.29 $(2n-1)$条;2.1 mm.

4.30 (2) 取 $n=4$ 时,0.8106;0.4053;0.0901.

4.31 $I_\theta=I_{10}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2[3+2(\cos2\alpha+\cos5\alpha+\cos7\alpha)]$,式中 I_{10} 为单缝衍射主极强中心强度,$\alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$.

4.33 $I_\theta=I_{10}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2[3+2(\cos2\beta+\cos4\beta+\cos6\beta)]$,$\alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$,$\beta=\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$.

4.34 $I_\theta=I_{10}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2(1-2\cos2\gamma)^2$,$\alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$,$\gamma=\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$;$\theta=0$ 时,$I_\theta=I_{10}$.

4.35 $I_\theta=4I_{10}\frac{\sin^4\alpha}{\alpha^2}$,式中 I_{10} 为宽度为 $\frac{a}{2}$ 的单缝衍射主极强中心强度,$\alpha=\frac{\pi a\sin\theta}{2\lambda}$;当 $\theta=0$ 时,$I_0=0$.

4.38 (1) 3,7;(2) 5,7;(3) 5,6.

4.39 (1) $d=3$ μm;(2) 9 条;(3) 缺级±3;(4) 2.22×10^{-5} rad,1.67×10^4.

4.40 12.5°.

4.41 294 mm.

4.42 (1) $a=2.5\ \mu m$;(2) $\Delta\theta_2=5\times10^{-6}$ rad;(3) $\delta\lambda=0.025$ nm.

4.43 $d=2.4\ \mu m$, $N=6\times10^4$, $a=0.8\ \mu m$, $b=1.6\ \mu m$, $L=14.4$ cm.

4.45 0.6 μm, 0.4 μm; 0.52 μm.

4.46 11.5°, 11.8°.

4.47 (1) 5×10^3; (2) 5×10^{-3} rad/nm, 2×10^5.

4.48 0.174 nm.

第5章 光在晶体中的传播

5.2 0.355; 0.126.

5.3 4.16°, 1.05 mm.

5.4 39°22′, 35°22′, 4°.

5.5 $\angle S'MS=14.06°$.

5.6 5.28°.

5.7 0.86 μm(方解石), 16.2 μm(石英).

5.8 16.2 μm; 26.6°或 63.4°.

5.9 (1)23 μm.

5.10 11.5 μm, 23 μm.

5.12 (1) 右旋圆偏振光;(2) 左旋圆偏振光;(3) 右旋正椭圆偏振光.

5.14 $\frac{1}{4}I_0$.

5.18 (1) $0.183A$ 和 $0.0335I_0$, $0.683A$ 和 $0.467I_0$;
(2) $0.0474A$ 和 $0.00224I_0$, $0.660A$ 和 $0.435I_0$.

5.19 (1) 右旋正椭圆偏振光;(2) $\frac{5}{16}I_0$.

5.20 (1) 左旋正椭圆偏振光;(2) $\frac{3}{16}I_0$.

5.21 (2) $\frac{5}{16}I_0$.

5.22 688 nm(红光), 491 nm(青光).

5.23 688 nm, 625 nm, 573 nm, 529 nm, 491 nm, 459 nm, 430 nm, 405 nm.

5.24 (1) 一组平行于光楔棱边的等距直条纹;(2) 4.86 mm;(3) 亮暗位置互换;(4) 消光.

5.25 2170 V; 4×10^7.

5.26 (1) $8.29\left(k+\frac{1}{2}\right)$ mm, ($k=0,1,2,\cdots$);最小厚度为 4.15 mm;(2) 7.1×10^{-5}.

5.27 (1) 7.5 mm 的整数倍;(2) 3.75 mm 的奇数倍.

5.28 1.33 mm.

5.29 92%.

第 6 章　光的吸收　色散和散射

6.2　35.8%.

6.3　1.01 m;10.5 m.

6.4　61.9%.

6.5　8.66×10^{-3} cm^{-1};3.65×10^{-3} cm^{-1}.

6.6　(1) $A=1.575$, $B=1.464\times10^{4}$ nm^{2};(2) 1.618;(3) $\frac{dn}{d\lambda}=-1.431\times10^{-4}$ nm^{-1}.

6.7　-6.298×10^{-5} rad/nm.

6.8　(1) v_p;(2) $\frac{1}{2}v_p$;(3) $\frac{3}{2}v_p$;(4) $2v_p$.

6.9　1.96526×10^{8} m/s;1.9005×10^{8} m/s.

6.11　0.316.

6.12　$\frac{2}{3}$.

6.14　斯托克斯谱线:502.9 nm,512.8 nm,517.8 nm,528.9 nm,573.2 nm,573.7 nm;
反斯托克斯谱线:473.9 nm,465.5 nm,461.5 nm,452.9 nm,424.8 nm,424.6 nm.

第 7 章　光的量子性　激光

7.1　1.42×10^{3} K.

7.2　5.68×10^{3} K,8.28×10^{3} K.

7.3　2.895 μm.

7.4　546.6 nm.

7.5　3.63.

7.6　$n=4.5\times10^{31}$, 2.2×10^{-32}.

7.7　(1) 0.2898 nm;(2) $h\nu=4288$ eV.

7.8　(1) 69.1 分;(2) 2.17×10^{16} $m^{-2}\cdot s^{-1}$.

7.9　2.74×10^{4} $m\cdot s^{-1}$.

7.10　1.6×10^{-19} 库仑.

7.11　(1) 2.0 eV;(2)2 V;(3) 296 nm;(4) 2.0×10^{18} $m^{-2}\cdot s^{-1}$.

7.12　4.

7.13　(1) 2.41×10^{-3} nm;(2) 2.241×10^{-2} nm;(3) 1.61×10^{18} Hz.

7.14　0.10 MeV.

7.15　4.34×10^{-3} nm,39.05°.

7.18　约 110 个.

7.19　(1) 1.05×10^{18};(2) 0.509 $J\cdot m^{-3}$, 1.78×10^{18} m^{-3};
(3) 0.510 N/m^{2}, 1.02 N/m^{2}, 0.969 N/m^{2}.

7.20 0.123 nm, 2.45×10^{-6} rad.

7.21 (2) 2.18×10^{-15}.

7.22 (1) $B_{21}=1.3\times10^{19}\ \mathrm{m^3/J\cdot s^2}$; (2) $u(\nu)\geqslant7.7\times10^{-14}\ \mathrm{J\cdot s/m^3}$;

(3) 对于 $\lambda=60\mathrm{nm}$: $B_{21}=1.3\times10^{16}\ \mathrm{m^3/J\cdot s^2}$, $u(\nu)\geqslant7.7\times10^{-11}\ \mathrm{J\cdot s/m^3}$;

对于 $\lambda=6\times10^{-2}\ \mathrm{nm}$: $B_{21}=1.3\times10^{7}\ \mathrm{m^3/J\cdot s^2}$, $u(\nu)\geqslant7.7\times10^{-2}\ \mathrm{J\cdot s/m^3}$.

7.23 4.59×10^{-9}.

7.24 (1) $N_2\approx10$; (2) 1.63×10^{-9} W.

7.25 8×10^{-5} nm; $\frac{\Delta\nu}{\nu}\approx1.67\times10^{-7}$.

7.26 (1) 3.2×10^{15}; (2) 5.9×10^{9} K.

7.27 26; 1.2×10^{-4} nm.

封面
书名
版权
前言
目录
绪论
第1章　几何光学
1.1　光线传播的基本规律
1.1.1　光线传播的实验规律
1.1.2　费马原理——光线传播的普遍规律
1.2　成像的基本原理
1.2.1　成像的基本概念
1.2.2　单球面及共轴球面系统傍轴成像（逐次成像）
1.2.3　薄透镜傍轴成像
1.2.4　光焦度　高斯公式和牛顿公式　作图法
1.2.5　共轴球面系统傍轴成像（基面成像）
1.2.6　傍轴光学的矩阵方法
1.3　成像仪器
1.3.1　眼睛
1.3.2　放大镜和目镜
1.3.3　显微镜
1.3.4　望远镜
1.4　光阑与像差
1.4.1　光阑
1.4.2　像差
习题
观察思考及讨论题
第2章　波动光学通论
2.1　波的概念与光的电磁理论基础
2.1.1　波的基本概念
2.1.2　光的电磁理论基础
2.2　波的数学描述
2.2.1　波的实数表示与时空周期性
2.2.2　波的复数表示与复振幅
2.2.3　波的矢量表示
2.3　波的叠加
2.3.1　波的叠加原理
2.3.2　同频率简谐波叠加的一般分析及干涉概念

2.3.3　两列同频率、同向振动的平面波的叠加
2.3.4　两列同频率、同向振动、反向传播的平面波的叠加——光驻波
2.3.5　两列同频率、振动方向互相垂直、同向传播的平面波的叠加——椭圆偏振光的形成及特征
2.3.6　两列频率相近、同向振动、同向传播的平面波的叠加——光学拍
2.4　光的偏振态
2.4.1　完全偏振光——线偏振光，圆偏振光，椭圆偏振光
2.4.2　非偏振光——自然光
2.4.3　部分偏振光及偏振度
2.4.4　偏振片及其光强响应
2.5　波的傅里叶分析及时空域中的反比关系
2.5.1　波的傅里叶分析
2.5.2　波在空域和时域中的反比关系
2.6　光在两种各向同性介质界面的反射与折射
2.6.1　反射与折射时光的振幅比　菲涅耳公式
2.6.2　反射与折射时光的光强比与能流比
2.6.3　反射光与折射光的相位变化
2.6.4　反射光与折射光的偏振态
2.6.5　全反射与隐失波
习题
观察思考及讨论题
第3章　光的干涉
3.1　光的相干条件
3.1.1　光的相干条件
3.1.2　干涉条纹的衬比度
3.1.3　相干光束的产生方法
3.2　分波前干涉
3.2.1　杨氏实验
3.2.2　其他分波前装置
3.3　光场的相干性
3.3.1　光源空间展宽的影响　光场的空间相干性
3.3.2　光源光谱展宽的影响　光场的时间相干性
3.3.3　部分相干性理论基础
3.4　分振幅干涉（一）：薄板的双光束干涉
3.4.1　点光源的干涉及干涉条纹的定域概念
3.4.2　等倾干涉
3.4.3　等厚干涉
3.4.4　薄膜干涉定域及光源临界宽度的进一步讨论

3.4.5　迈克耳孙干涉仪
3.5　分振幅干涉（二）：平行平板的多光束干涉
3.5.1　平行平板多光束干涉的分析
3.5.2　法布里-珀罗干涉仪
3.5.3　光学薄膜简介
习题
观察思考及讨论题
第4章　光的衍射
4.1　衍射的基本原理及分类
4.1.1　衍射现象概述
4.1.2　惠更斯-菲涅耳原理及平面屏衍射理论
4.1.3　衍射问题的近似处理及分类
4.2　菲涅耳衍射
4.2.1　菲涅耳衍射的分析方法
4.2.2　圆孔、圆屏及某些环扇形孔径的衍射
4.2.3　菲涅耳波带片
4.3　夫琅禾费衍射（一）：连通孔径
4 3.1　单缝衍射
4.3.2　矩孔衍射
4.3.3　圆孔衍射
4.4　光学成像系统的分辨本领
4.5　夫琅禾费衍射（二）：非连通孔径
4.5.1　多缝衍射
4.5.2　夫琅禾费衍射的一般性质及其他孔径的衍射
4.6　光栅
4.6.1　光栅的主要性能
4.6.2　闪耀光栅、阶梯光栅及三维光栅
4.6.3　棱镜光谱仪及其与光栅、法-珀干涉仪分光性能的比较
4.7　相干光成像系统的频谱分析
4.7.1　复振幅透过率及其空间频率谱的物理意义
4.7.2　透镜的傅里叶变换作用
4.7.3　阿贝成像理论及空间滤波
4.8　全息照相的原理与特点
习题
观察思考及讨论题
第5章　光在晶体中的传播
5.1　晶体双折射
5.1.1　双折射现象　基本定义与规律

5.1.2　单轴晶体中的波面——惠更斯假设
5.1.3　平面波在单轴晶体内的传播——惠更斯作图法
5.1.4　单轴晶体双折射的进一步讨论
5.2　晶体光学器件　偏振光的检验
5.2.1　线偏振器
5.2.2　相位延迟器——波晶片和补偿器
5.2.3　圆起偏器和圆检偏器
5.2.4　光通过波晶片后偏振态的变化
5.2.5　偏振光的检验
5.3　偏振光的干涉
5.3.1　平行偏振光的干涉
5.3.2　会聚偏振光的干涉
5.3.3　波动光学中相位规定的自洽性
5.4　人工双折射及其应用
5.4.1　应力双折射
5.4.2　克尔效应
5.4.3　泡克耳斯效应
5.5　旋光
5.5.1　旋光
5.5.2　磁致旋光
5.6　偏振态及其变换的矩阵描述
习题
观察思考及讨论题
第6章　光的吸收　色散和散射
6.1　光的吸收
6.1.1　光的线性吸收规律与复折射率
6.1.2　吸收与波长的关系
6.2　光的色散
6.2.1　色散概念及其规律
6.2.2　吸收和色散的经典电子理论
6.2.3　光的相速和群速
6.3　光的散射
6.3.1　瑞利散射　米氏散射及大粒子散射
6.3.2　拉曼散射
习题
观察思考及讨论题
第7章　光的量子性　激光
7.1　黑体辐射

7.1.1　两种不同形式的辐射
7.1.2　基尔霍夫热辐射定律
7.1.3　黑体辐射的实验规律
7.1.4　黑体辐射的经典理论及其与实验的矛盾
7.1.5　能量子假设与普朗克公式
7.1.6　光测高温法
7.2　光的粒子性及其实验基础
7.2.1　光电效应
7.2.2　康普顿效应
7.2.3　光压
7.3　光的波粒二象性
7.3.1　光的粒子性
7.3.2　光的波粒二象性及其概率解释
7.4　激光
7.4.1　产生激光的基本原理
7.4.2　激光器的组成及工作过程
7.4.3　激光的主要特点和应用
7.5　非线性光学简介
习题
观察思考及讨论题
参考文献
一、参考书目
二、作者部分教学研究论文目录
附录
附录Ⅰ　常用物理常数表
附录Ⅱ　一些光学介质的折射率
附录Ⅲ　一些典型谱线的波长
汉英名词索引
部分习题答案